

Technische Universität München

Max-Planck-Institut für Physik  
(Werner-Heisenberg-Institut)

# Zwei-Schleifen-Beiträge im supersymmetrischen Higgs-Sektor

Heidi A. Rzehak

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Physik  
der Technischen Universität München  
zur Erlangung des akademischen Grades eines  
**Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)**  
genehmigten Dissertation.

Vorsitzender : Univ.-Prof. Dr. L. Oberauer

Prüfer der Dissertation : 1. Univ.-Prof. Dr. A. J. Buras  
2. Univ.-Prof. Dr. M. Lindner

Die Dissertation wurde am 27. 06. 2005  
bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät  
für Physik am 21. 07. 2005 angenommen.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2. Das minimale supersymmetrische Standardmodell</b>	<b>5</b>
2.1. Das Standardmodell und Gründe für Erweiterungen . . . . .	5
2.2. Die Lagrangedichte des minimalen supersymmetrischen Standardmodells .	7
<b>3. Regularisierung und Renormierung</b>	<b>13</b>
3.1. Regularisierung . . . . .	14
3.2. Renormierung . . . . .	14
3.3. Renormierungsschemata . . . . .	15
<b>4. Der Higgs-Sektor im reellen MSSM</b>	<b>17</b>
4.1. Der Higgs-Sektor auf Born-Niveau . . . . .	19
4.2. Der Higgs-Sektor in höheren Ordnungen . . . . .	22
4.2.1. Renormierte Selbstenergien im Higgs-Sektor . . . . .	22
4.2.2. Higgs-Massenmatrizen unter Berücksichtigung höherer Ordnungen .	24
4.3. Renormierte Selbstenergien der CP-geraden neutralen Higgs-Bosonen . . .	28
4.3.1. Ein-Schleifen-Ordnung $\mathcal{O}(\alpha)$ . . . . .	29
4.3.2. Zwei-Schleifen-Ordnung $\mathcal{O}(\alpha_t\alpha_s)$ , $\mathcal{O}(\alpha_b\alpha_s)$ . . . . .	31
4.3.3. Zusammenfassung . . . . .	35
<b>5. Der Quark-Squark-Sektor im reellen MSSM</b>	<b>37</b>
5.1. Der Quark-Squark-Sektor auf Born- und Ein-Schleifen-Niveau . . . . .	38
5.1.1. Der Quark-Squark-Sektor auf Born-Niveau . . . . .	38
5.1.2. Quark- und Squark-Selbstenergien auf Ein-Schleifen-Niveau . . . . .	40
5.2. Renormierung im Top-Stop-Sektor . . . . .	42
5.2.1. On-Shell-Renormierung . . . . .	43
5.3. Renormierung im Bottom-Sbottom-Sektor . . . . .	45
5.3.1. On-Shell-Renormierung analog zum Top-Stop-Sektor . . . . .	47
5.3.2. Bottom-Masse im $\overline{\text{DR}}$ -Schema . . . . .	49
5.3.3. $\overline{\text{DR}}$ -Renormierung des A-Parameters und des Mischungswinkels . .	50
5.3.4. On-Shell-Renormierung des A-Parameters und des Mischungswinkels	51
5.4. Die Bottom-Quark-Masse . . . . .	54

<b>6. Higgs-Massen mit <math>\mathcal{O}(\alpha_t\alpha_s)</math>-Beiträgen im reellen MSSM</b>	<b>59</b>
6.1. Berechnung der Massen der neutralen, CP-geraden Higgs-Bosonen . . . . .	59
6.1.1. Input-Parameter . . . . .	60
6.1.2. Schema-Abhängigkeit . . . . .	61
6.2. Vergleich unterschiedlicher Renormierungsschemata . . . . .	63
6.3. Numerische Analyse der Renormierungsskalenabhängigkeit . . . . .	70
6.4. Vergleich mit Ergebnissen existierender Rechnungen . . . . .	72
<b>7. Der Higgs-Sektor im komplexen MSSM</b>	<b>75</b>
7.1. Der Higgs-Sektor auf Born-Niveau . . . . .	76
7.2. Der Higgs-Sektor in höheren Ordnungen . . . . .	79
7.2.1. Renormierte Selbstenergien im Higgs-Sektor . . . . .	79
7.2.2. Higgs-Massenmatrizen . . . . .	81
7.3. Renormierte Selbstenergien der neutralen Higgs-Bosonen . . . . .	83
7.3.1. Ein-Schleifen-Ordnung $\mathcal{O}(\alpha)$ . . . . .	83
7.3.2. Zwei-Schleifen-Ordnung $\mathcal{O}(\alpha_t\alpha_s)$ . . . . .	85
7.3.3. Zusammenstellung wichtiger Ausdrücke . . . . .	87
<b>8. Der Quark-Squark-Sektor im komplexen MSSM</b>	<b>89</b>
8.1. Renormierung im Top-Stop-Sektor . . . . .	90
8.2. Renormierung im Bottom-Sbottom-Sektor . . . . .	94
<b>9. Der Gluino-Sektor im komplexen MSSM</b>	<b>99</b>
9.1. Massenterme der Gluinos . . . . .	99
9.2. Quark-Squark-Gluino-Vertex . . . . .	100
<b>10. Higgs-Massen mit <math>\mathcal{O}(\alpha_t\alpha_s)</math>-Beiträgen im komplexen MSSM</b>	<b>101</b>
10.1. Berechnung der Higgs-Massen der neutralen Higgs-Bosonen . . . . .	101
10.1.1. Input-Parameter . . . . .	102
10.2. Schema-Abhängigkeit . . . . .	104
10.2.1. Vergleich der Schema-Abhängigkeit für reelle Parameter . . . . .	107
10.2.2. Untersuchung der $\mu^{\overline{\text{DR}}}$ -Abhängigkeit für reelle Parameter . . . . .	112
10.3. Untersuchung der Phasen-Abhängigkeit . . . . .	114
<b>11. Zusammenfassung</b>	<b>125</b>
<b>A. Supersymmetrie: Grundlagen, Konventionen und Parameter</b>	<b>129</b>
A.1. Super-Poincaré-Algebra . . . . .	129
A.2. Spinoren . . . . .	130
A.2.1. Weyl-Spinoren . . . . .	130
A.2.2. Dirac- und Majorana-Spinoren . . . . .	132
A.3. Superfelder und Komponentenfelder . . . . .	133
A.3.1. Grassmann-Variable . . . . .	133
A.3.2. Superfelder . . . . .	134

A.3.3. Terme einer allgemeinen supersymmetrischen Lagrangedichte . . . . .	136
A.4. Parameter . . . . .	138
<b>B. Selbstenergien</b>	<b>141</b>
B.1. Renormierte Selbstenergien . . . . .	141
B.2. Z-Faktoren der Higgs-Felder in $\mathcal{O}(\alpha_{\{t,b\}}\alpha_s)$ . . . . .	144
B.3. Counterterme zur Massenmatrix der neutralen Higgs-Bosonen im komplexen MSSM . . . . .	146
B.3.1. Ein-Schleifen-Ordnung $\mathcal{O}(\alpha)$ . . . . .	146
B.3.2. Zwei-Schleifen-Ordnung $\mathcal{O}(\alpha_t\alpha_s)$ . . . . .	148
<b>C. Schleifen-Integrale</b>	<b>151</b>
C.1. Ein-Schleifen-Integrale . . . . .	151
C.2. Zwei-Schleifen-Integrale . . . . .	153
<b>D. Feynman-Diagramme</b>	<b>157</b>



# 1. Einleitung

Gegenstand der Forschung in der Teilchenphysik sind die elementaren Bausteine und die zwischen ihnen herrschenden fundamentalen Wechselwirkungen in der Natur. Die zugrundeliegende Theorie ist das Standardmodell der Elementarteilchenphysik [1–4], das die experimentell beobachteten Phänomene der Teilchenphysik sehr gut beschreibt [5, 6], jedoch keine Antwort auf einige fundamentale Fragen liefern kann, die für das Verständnis der Natur von zentraler Bedeutung sind. So bleibt unerklärt, woraus die dunkle Materie besteht und warum im Universum mehr Materie als Antimaterie vorhanden ist. Außerdem kann das Standardmodell nicht beschreiben, was bei extrem hohen Energien passiert, wenn die Stärke der Gravitationswechselwirkung die Stärke der anderen Wechselwirkungen erreicht. Um diese Fragen zu beantworten, ist eine neue umfassendere Theorie, die über das Standardmodell hinausgeht, erforderlich. Supersymmetrische Erweiterungen des Standardmodells sind Versuche, diese Probleme anzugehen. Innerhalb eines supersymmetrischen Modells wird eine Symmetrie zwischen Fermionen und Bosonen postuliert, die Supersymmetrie (SUSY) (siehe z.B. [7]). Dazu müssen in solch einem Modell fermionische bzw. bosonische Superpartner zu den Bosonen bzw. Fermionen des Standardmodells angenommen werden. Der experimentelle Nachweis eines dieser Superpartner und damit eine direkte Bestätigung der Supersymmetrie steht noch aus.

In einer exakten Eichsymmetrie müssen die Eichbosonen masselos sein. Dies allerdings widerspricht experimentellen Beobachtungen. Daher wird im Standardmodell zur Erklärung der Masse der Eichbosonen ein Higgs-Dublett mit nichtverschwindendem Vakuumerwartungswert eingeführt (Higgs-Mechanismus [8]). Dadurch wird die Eichsymmetrie spontan gebrochen und die Eichbosonen und Fermionen, die an das Higgs-Feld koppeln, erhalten eine Masse. Drei der vier Freiheitsgrade des komplexen Higgs-Dubletts liefern unphysikalische Goldstone-Bosonen, der vierte verbleibt als physikalisches Higgs-Boson. Die Suche nach diesem bislang experimentell nicht nachgewiesenen Teilchen ist die vordringlichste Aufgabe, der am neuen LHC (Large Hadron Collider) nachgegangen werden wird [9]; aktuell werden Experimente zum Nachweis des Higgs-Bosons am Tevatron durchgeführt. Mit Experimenten am zukünftigen ILC (International Linear Collider) könnten die Eigenschaften des Higgs-Bosons dann hochpräzise untersucht werden: Die Meßgenauigkeit für die Masse des Higgs-Bosons beträgt am ILC etwa 0.05 GeV [10–12], rund einen Faktor vier besser als die  $\approx 0.2$  GeV [9], die am LHC zu erreichen sind.

Wie im Standardmodell werden auch im minimalen supersymmetrischen Standard-

## 1. Einleitung

modell (MSSM) [13], das die minimale supersymmetrische Erweiterung des Standardmodells darstellt, die Massen der Eichbosonen und der standardmodell-artigen Fermionen durch spontane Symmetriebrechung erzeugt. Dazu sind jedoch zwei Higgs-Dubletts nötig, einerseits um sowohl für die up- als auch für die down-artigen Quarks supersymmetrische Yukawa-Terme aufstellen zu können, andererseits um die Theorie anomaliefrei zu halten. Letzteres erfordert, daß die Summe der Hyperladung der Fermionen verschwindet. Aus den zwei Higgs-Dubletts erhält man fünf Higgs-Bosonen und wiederum drei unphysikalische Goldstone-Bosonen. Im Gegensatz zum Standardmodell sind aber nicht alle Massen der Higgs-Bosonen freie Parameter. Insbesondere läßt sich die Masse des leichtesten Higgs-Bosons als Funktion anderer Parameter des Modells ausdrücken (siehe z.B. [14]).

Die Masse des leichtesten Higgs-Bosons hat eine theoretische obere Schranke, die auf Born-Niveau bei der Masse des Z-Bosons liegt. Durch Strahlungskorrekturen verschiebt sich diese obere Schranke zu höheren Massenwerten von etwa 140 GeV [15, 16] und liegt damit jenseits der derzeitigen experimentellen Ausschlußgrenze von ungefähr 93 GeV [17].

Aufgrund der starken Abhängigkeit von anderen Parametern des Modells stellt die Masse des leichtesten Higgs-Bosons im MSSM eine interessante Präzisionsobservable dar. Präzise Messungen und genaue Vorhersagen der Masse des leichtesten Higgs-Bosons können dazu verwendet werden, den Parameterraum des MSSM gezielt zu testen und signifikant einzugrenzen. Schon vor der Entdeckung des Higgs-Bosons können mit Hilfe der experimentellen unteren Schranke und der theoretischen Vorhersage der Masse des Higgs-Bosons Einschränkungen an den Parameterraum abgeleitet werden.

Bei einer präzisen Berechnung der Masse des leichtesten Higgs-Bosons müssen Quantenkorrekturen höherer Ordnungen berücksichtigt werden. Für die Qualität der Vorhersage ist außerdem eine Abschätzung der verbleibenden theoretischen Unsicherheit wichtig. Diese Unsicherheit wird einerseits durch den experimentellen Fehler der Eingabeparameter verursacht (parametrischer Fehler), andererseits rührt sie daher, daß die Störungsrechnung nur bis zu einer bestimmten Ordnung durchgeführt wird. Fehlende Beiträge aus höheren Ordnungen tragen zur theoretischen Unsicherheit bei (intrinsischer Fehler).

Auf Ein-Schleifen-Niveau sind die Korrekturen zur Higgs-Masse vollständig bekannt [18–28]. Die dominanten Beiträge der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_t)$  ( $\alpha_t = \lambda_t^2/(4\pi)$  mit der Top-Yukawa-Kopplung  $\lambda_t$ ) werden dabei durch virtuelle Top-Quarks und -Squarks in den Schleifen verursacht. Für große Werte des Verhältnisses der Vakuumerwartungswerte der beiden Higgs-Dubletts,  $\tan\beta = v_2/v_1$ , können auch die Korrekturen der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_b)$  ( $\alpha_b = \lambda_b^2/(4\pi)$  mit der Bottom-Yukawa-Kopplung  $\lambda_b$ ), die von in den Schleifen umlaufenden Bottom-Quarks und -Squarks stammen, relevant werden.

Auf Zwei-Schleifen-Niveau sind sowohl die Beiträge der starken Wechselwirkung  $\mathcal{O}(\alpha_t\alpha_s)$  [29–37] als auch die Yukawa-Korrekturen  $\mathcal{O}(\alpha_t^2)$  [29, 30, 38, 39] zu den Ein-Schleifen-Beiträgen des Top-Stop-Sektors im MSSM mit reellen Parametern bekannt. Weiter wurden die Beiträge der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_b\alpha_s)$  [40] im Limes  $\tan\beta \rightarrow \infty$  bestimmt. Für alle diese Zwei-Schleifen-Korrekturen wurde die Näherung verschwindender äußerer Impulse verwendet.



In dieser Näherung wurden zudem die Beiträge der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_b \alpha_t)$  und  $\mathcal{O}(\alpha_b^2)$  [41] berechnet. Eine Berechnung der Korrekturen zur Masse des leichtesten Higgs-Bosons über die Bestimmung des effektiven Potentials auf Zwei-Schleifen-Niveau [42] und eine Auswertung der führenden impulsabhängigen Zwei-Schleifen-Effekte [43] sind jüngst durchgeführt worden. Durch eine Aufsummation der  $\tan\beta$ -verstärkten Terme bis zu allen Ordnungen können alle Korrekturen der Ordnungen  $\mathcal{O}(\alpha_b(\alpha_s \tan\beta)^n)$  [44–46] berücksichtigt werden. Im Fall komplexer Parameter sind bislang Korrekturen, die über Ein-Schleifen-Niveau hinausgehen, durch Renormierungsgruppen-verbesserte Ein-Schleifen-Rechnungen innerhalb der Methode des effektiven Potentials [47, 48] berücksichtigt worden.

In der vorliegenden Arbeit werden zwei Aspekte untersucht. Im ersten Teil der Arbeit (Kapitel 4 – 6) liegt der Schwerpunkt auf der Berechnung und Analyse der Korrekturen der starken Wechselwirkung zu den Bottom-Yukawa-Termen der Ein-Schleifen-Ordnung, d.h. der Korrekturen der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_b \alpha_s)$ , für den allgemeinen Fall beliebiger  $\tan\beta$ -Werte im MSSM mit reellen Parametern. Innerhalb dieser Rechnung müssen die Parameter des Bottom-Sbottom-Sektors auf Ein-Schleifen-Niveau definiert werden. Unterschiedliche Definitionen, die innerhalb eines Renormierungsschemas festgelegt werden, können zu verschiedenen Ergebnissen führen. Eine ungünstige Wahl des Renormierungsschemas kann große Korrekturen verursachen, so daß das daraus resultierende Ergebnis für die Masse des leichtesten Higgs-Bosons ohne Berücksichtigung weiterer höherer Ordnungen keine Aussagekraft hat. Durch eine geschickte Wahl des Renormierungsschemas werden dominante Beiträge in das Ein-Schleifen-Ergebnis absorbiert, so daß die Korrekturen höherer Ordnung klein bleiben. Vergleicht man Ergebnisse für die Masse des leichtesten Higgs-Bosons, die unter Verwendung unterschiedlicher „guter“ Renormierungsschemata gewonnen werden, so kann man damit die theoretische Unsicherheit aufgrund fehlender Beiträge höherer Ordnung abschätzen. Teilergebnisse der Untersuchung wurden bereits in [49] veröffentlicht.

Im zweiten Teil der Arbeit (Kapitel 7 – 10) wird die Masse des leichtesten Higgs-Bosons unter Berücksichtigung der Korrekturen  $\mathcal{O}(\alpha_t \alpha_s)$  im MSSM mit komplexen Parametern untersucht. Für reelle Parameter ist das MSSM CP-invariant, die Lagrangedichte also invariant unter der Kombination der Transformationen Ladungskonjugation C und Paritätstransformation P. Da jedoch CP-verletzende Prozesse experimentell beobachtet werden, kann die CP-Symmetrie keine fundamentale Symmetrie der Natur sein. Folglich ist es notwendig, auch im MSSM mögliche Quellen für CP-Verletzung, also komplexe Parameter, zu berücksichtigen und deren Auswirkungen auf Präzisionsobservable wie die Masse des leichtesten Higgs-Bosons zu untersuchen.

## 1. *Einleitung*

## 2. Das minimale supersymmetrische Standardmodell

### 2.1. Das Standardmodell und Gründe für Erweiterungen

Die bislang experimentell beobachteten Phänomene der Teilchenphysik werden sehr gut durch das Standardmodell der Elementarteilchenphysik [1–4] beschrieben [5,6]. Das Standardmodell ist eine spontan gebrochene Eichtheorie, die auf der nichtabelschen Eichgruppe aus dem direkten Produkt  $SU(3)_C \times SU(2)_W \times U(1)_Y$  beruht. Mit Hilfe der Eichgruppe  $SU(3)_C$  kann die starke Wechselwirkung beschrieben werden. Die dazugehörigen Eichbosonen, die Gluonen, sorgen für den Austausch der starken Wechselwirkung zwischen Teilchen mit Farbladung. Das Produkt der Eichgruppen  $SU(2)_W \times U(1)_Y$  liegt der Beschreibung der elektroschwachen Wechselwirkung zugrunde; die elektroschwache Wechselwirkung faßt die elektromagnetische und die schwache Kraft zusammen.  $Y$  bezeichnet die Hyperladung. Das Photon ist für die Übertragung der elektromagnetischen Wechselwirkung zwischen den geladenen Teilchen zuständig. Die W- und Z-Bosonen vermitteln die schwache Wechselwirkung zwischen den Fermionen. Fermionen sind Teilchen mit der Spinquantenzahl  $\frac{1}{2}$  und bilden die fundamentalen Bausteine der Materie; Bosonen dagegen besitzen eine ganzzahlige Spinquantenzahl. Die Fermionen lassen sich aufteilen in die farbgeladenen Quarks und die farbneutralen Leptonen. Die Quarks bzw. die Leptonen können weiter in drei gleichartige Familien unterteilt werden, die jeweils ein linkshändiges Dublett und zwei bzw. ein rechtshändiges Singlett enthalten.

In einer Theorie mit exakter Eichsymmetrie sind alle Eichbosonen masselos. Da experimentell jedoch nachgewiesen wurde, daß W- und Z-Bosonen eine endliche Masse besitzen, kann eine solche Theorie die Realität nicht beschreiben. Im Standardmodell werden mit Hilfe des Higgs-Mechanismus [8] Massenterme in eichinvarianter Form eingeführt. Dazu wird ein skalares Higgs-Feld mit nichtverschwindendem Vakuumerwartungswert postuliert. Dadurch wird die  $SU(2)_W \times U(1)_Y$ -Symmetrie spontan gebrochen, und alle Teilchen, die an das Higgs-Feld koppeln, erhalten eine Masse.

Das Standardmodell beschreibt also alle drei für die Teilchenphysik relevanten elementaren Wechselwirkungen. Bis auf das Higgs-Boson wurden alle Teilchen dieses Modells experimentell nachgewiesen [50].

## 2. Das minimale supersymmetrische Standardmodell

Trotz der guten Übereinstimmung der theoretischen Vorhersagen des Standardmodells mit den experimentellen Ergebnissen [5, 6] bleiben offene Fragen, zu deren Lösung das Standardmodell erweitert werden muß.

- Bei hohen Energien von der Größenordnung der Planck-Masse  $M_{\text{Planck}} \sim 10^{19}$  GeV werden die Effekte der Gravitation auch für die Teilchenphysik relevant. Damit stellt sich einmal die Frage nach einer Quantentheorie der Gravitation; bislang ist noch keine bekannt. Andererseits muß die Gültigkeit des Standardmodells diskutiert werden, da es die Gravitation als vierte Wechselwirkung nicht berücksichtigt. Das Standardmodell kann so als eine Niederenergie-Approximation einer bislang unbekannteren grundlegenden Theorie angesehen werden.
- Ginge das Standardmodell aus einer grundlegenden Theorie durch Symmetriebrechung hervor, sollten die Kopplungskonstanten der elektromagnetischen, der schwachen und der starken Wechselwirkung bei Energien der Brechungsskala  $M_{\text{GUT}}$  zusammenlaufen. Die Annahme, die drei Eichgruppen des Standardmodells seien Untergruppen einer minimalen spontan gebrochenen  $SU(5)$ -Eichtheorie [51], muß verworfen werden, da die innerhalb dieser Theorie vorhergesagte Lebensdauer des Protons kleiner ist als die experimentell bestimmte untere Schranke. Im minimalen supersymmetrischen Standardmodell (MSSM) hingegen erhalten die Kopplungskonstanten bei  $M_{\text{GUT}} \sim 10^{16}$  GeV den gleichen Wert unter der Bedingung, daß die Superpartner der Standardmodell-Teilchen eine Masse der Größenordnung  $M_{\text{SUSY}} \sim 1$  TeV annehmen [52]. Die zu diesem Szenario gehörende GUT-Erweiterung (Grand Unified Theories: GUT) des MSSM sagt eine Lebensdauer des Protons vorher, die größer ist als die experimentelle untere Schranke.
- Strahlungskorrekturen zur Higgs-Selbstenergie im Standardmodell sind quadratisch divergent. Diese Divergenzen kann man mit Hilfe eines Cutoff-Parameters regularisieren (siehe Abschnitt 3.1), wobei der Cutoff-Parameter  $\Lambda$  häufig durch die Energieskala festgelegt wird, bis zu der die Theorie gültig ist. Nimmt man also an, das Standardmodell sei gültig bis zur Planckskala und  $\Lambda = M_{\text{Planck}}$ , so ist die vom Cutoff-Parameter abhängige „nackte“ Higgs-Masse um etwa 30 Größenordnungen größer als die physikalische Higgs-Masse  $M_H \lesssim 1$  TeV (Hierarchie-Problem [53]). Die Kompensation der Strahlungskorrekturen zur nackten Higgs-Masse, die zur physikalischen Higgs-Masse führt, erscheint unnatürlich („fine tuning“). Im Rahmen supersymmetrischer Modelle werden die quadratischen Beiträge zur Higgs-Selbstenergie durch Beiträge der Superpartner kompensiert.
- Nach Ergebnissen kosmologischer Messungen besteht die Materie im Universum zum großen Teil aus dunkler Materie [54]. Das Standardmodell liefert als möglichen Träger dieser Materie nur die Neutrinos, die jedoch nur einen Beitrag zur heißen dunklen Materie liefern. In supersymmetrischen Modellen sind die Neutralinos ein möglicher Kandidat zur Erklärung der kalten dunklen Materie.

## 2.2. Die Lagrangedichte des minimalen supersymmetrischen Standardmodells

Zur Lösung oben genannter Fragen werden unterschiedliche Erweiterungen des Standardmodells diskutiert. Supersymmetrische Modelle sind dabei aussichtsreiche Kandidaten.

Supersymmetrische Modelle besitzen eine zusätzliche Symmetrie, die Supersymmetrie. Sie setzt bosonische Freiheitsgrade mit den fermionischen in Beziehung. Der Supersymmetriegenerator  $Q$  führt einen bosonischen Freiheitsgrad in einen fermionischen über und umgekehrt:

$$Q|\text{Boson}\rangle = |\text{Fermion}\rangle, \quad Q|\text{Fermion}\rangle = |\text{Boson}\rangle. \quad (2.1)$$

Die Supersymmetrie stellt nach [55] die einzige nichttriviale Möglichkeit dar, eine innere Symmetrie mit einer Poincaré-Symmetrie zu verknüpfen.

In Anhang A sind einige Begriffe und Notationen aufgeführt, die im Zusammenhang mit Supersymmetrie und dem MSSM wichtig sind. Ausführlichere Darstellungen dazu findet man zum Beispiel in [7, 13, 56–59].

## 2.2. Die Lagrangedichte des minimalen supersymmetrischen Standardmodells

Die Lagrangedichte des minimalen supersymmetrischen Standardmodells ist, wie die des Standardmodells, eichinvariant unter  $SU(3)_C \times SU(2)_W \times U(1)_Y$ -Transformationen. Zusätzlich wird eine  $N = 1$ -Supersymmetrie mit höchstens sanfter Brechung gefordert. Diese Symmetrie führt zu skalaren Partnern der Fermionen, den Sfermionen, und zu fermionischen Partnern der Bosonen, den Gluinos, Neutralinos und Charginos. Weiter wird R-Parität gefordert. Dabei bekommt jedes Teilchen eine weitere Quantenzahl mit dem Wert  $+1$  für alle Standardmodell-Teilchen und die beiden Higgs-Dubletts und  $-1$  für alle anderen Teilchen. Damit ist das leichteste Teilchen des MSSM stabil, und es gilt Lepton- und Baryonzahlerhaltung.

In einem Modell mit exakter Supersymmetrie haben Teilchen und die dazugehörigen Superpartner die gleiche Masse. Da noch keine Superpartner nachgewiesen wurden, beschreibt ein Modell mit exakter Supersymmetrie die Realität nicht. Modelle mit spontaner Supersymmetriebrechung [60] führen nicht zum empirisch bekannten Teilchenspektrum; damit bleibt als einzige Möglichkeit explizite sanfte Symmetriebrechung [61]. Die Lagrangedichte des MSSM kann man also in einen supersymmetrischen Anteil und einen sanften Brechungsanteil aufspalten:

$$\mathcal{L}_{\text{MSSM}} = \mathcal{L}_{\text{SUSY}} + \mathcal{L}_{\text{soft}}. \quad (2.2)$$

Zur Konstruktion einer supersymmetrischen Lagrangedichte, die neben Erweiterungen des Teilcheninhalts den Teilcheninhalt des Standardmodells vollständig beschreibt, werden die Felder des Standardmodells durch Superfelder ersetzt:

## 2. Das minimale supersymmetrische Standardmodell

Superfeld	2HDM-Teilchen	Superpartner	$(SU(3)_C, SU(2)_W, U(1)_Y)$	Bezeichnung
$\hat{Q}$	$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \tilde{u}_L \\ \tilde{d}_L \end{pmatrix}$	$(3, 2, \frac{1}{3})$	Quarks, Squarks
$\hat{U}$	$u_R^C$	$\tilde{u}_R^+$	$(3^*, 1, -\frac{4}{3})$	Up-artige Quarks, Squarks
$\hat{D}$	$d_R^C$	$\tilde{d}_R^+$	$(3^*, 1, \frac{2}{3})$	Down-artige Quarks, Squarks
$\hat{L}$	$\begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \tilde{\nu}_L \\ \tilde{e}_L \end{pmatrix}$	$(1, 2, -1)$	Leptonen, Sleptonen
$\hat{E}$	$e_R^C$	$\tilde{e}_R^+$	$(1, 1, 2)$	elektron-artige Leptonen, Sleptonen
$\hat{H}_1$	$\begin{pmatrix} H_1^1 \\ H_1^2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \tilde{H}_1^1 \\ \tilde{H}_1^2 \end{pmatrix}$	$(1, 2, -1)$	Higgsbosonen, Higgsinos
$\hat{H}_2$	$\begin{pmatrix} H_2^1 \\ H_2^2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \tilde{H}_2^1 \\ \tilde{H}_2^2 \end{pmatrix}$	$(1, 2, 1)$	Higgsbosonen, Higgsinos
$v'$	$B_\mu$	$\lambda_B$	$(1, 1, 0)$	$B_\mu$ -Boson, Bino
$V^a$	$W_\mu^a$	$\lambda_W^a$	$(1, 3, 0)$	$W_\mu^a$ -Bosonen, Winos
$V_s^a$	$G_\mu^a$	$\lambda_s^a$	$(8, 1, 0)$	Gluonen, Gluinos

**Tabelle 2.1.:** Übersicht über Superfelder und Teilcheninhalt des MSSM. Mit 2HDM-Teilchen werden die Teilchen des um ein Higgs-Dublett erweiterten Standardmodells bezeichnet.

- Die linkshändigen Fermiondubletts werden durch Dubletts aus chiralen Superfeldern (siehe A.3.2) ersetzt. Anstelle der rechtshändigen Fermionfelder des Standardmodells werden die rechtshändigen Antifermionfelder zu chiralen Supermultipletts mit ladungskonjugierten rechtshändigen Fermionen und deren Superpartnern verallgemeinert, so daß die skalaren Partner der links- und rechtshändigen Fermionen die gleiche Ladung haben.
- Zur Beschreibung der Eichfelder werden Vektorsuperfelder (siehe A.3.2) verwendet. Die Eichfelder der  $SU(3)_C$ -Symmetrie werden durch ein Oktett von Vektorsuperfeldern  $V_s^a$ , die der  $SU(2)_W$ -Symmetrie durch ein Tripletts von Vektorsuperfeldern  $V^a$  und die der  $U(1)_Y$ -Symmetrie durch ein Vektorsuperfeld  $v'$  beschrieben.
- Das Higgs-Dublett des Standardmodells muß durch zwei Higgs-Dubletts mit chira-

## 2.2. Die Lagrangedichte des minimalen supersymmetrischen Standardmodells

len Superfeldern ersetzt werden. Dafür gibt es mehrere Gründe. Einerseits erfordert die Erzeugung der Massen der down-artigen Quarks und elektron-artigen Leptonen Superpotentialterme der Art  $\epsilon^{ij} \hat{H}_1^i \hat{L}^j \hat{E}$  und  $\epsilon^{ij} \hat{H}_1^i \hat{Q}^j \hat{D}$ , wobei  $\hat{H}_1$  ein Higgs-Supermultiplett mit chiralen Feldern und Hyperladung  $Y = -1$  bezeichnet. Damit die up-artigen Quarks Masse erhalten, könnte man versuchen, ad hoc analog zum Standardmodell einen Term der Art  $\epsilon^{ij} \hat{H}_1^i \hat{Q}^j \hat{U}$  einzuführen, wobei das chirale Feld  $\hat{H}_1$  durch das dazugehörige antichirale Feld  $\hat{\bar{H}}_1$  ersetzt würde. Das ist allerdings nicht möglich, da im Superpotential nur chirale Felder vorkommen können; andernfalls wäre das Superpotential nicht mehr invariant unter Supersymmetrietransformationen. Deswegen ist ein zweites Higgs-Supermultiplett  $\hat{H}_2$  mit Hyperladung  $Y = 1$  erforderlich. Andererseits erfordert die Bedingung der Anomaliefreiheit zwei Higgs-Dubletts. Man spricht von einer Anomalie, falls durch den Übergang von der klassischen Theorie zur Quantenfeldtheorie Symmetrien zerstört werden. Wenn die Summe der Hyperladung aller Fermionen verschwindet, verschwinden auch die Anomaliebeiträge der einzelnen Fermionen, und die Theorie ist anomaliefrei. Im Standardmodell ist das der Fall. Bei der Erweiterung eines Higgs-Dubletts zu einem Higgs-Supermultiplett wird ein weiteres Fermion mit nicht verschwindender Hyperladung eingeführt. Aus diesem Grund muß ein zweites Higgs-Dublett mit entgegengesetzter Hyperladung eingeführt werden.

Der supersymmetrische Anteil der Lagrangedichte für das MSSM beinhaltet Massenterme, kinetische Terme und Wechselwirkungsterme für die Fermionen, Higgs- und Eichbosonen und läßt sich aufteilen

- (i) in einen chiralen Anteil, das Superpotential,

$$\mathcal{L}_{\text{chiral}} = (\epsilon^{ij} [\lambda_d \hat{H}_1^i \hat{Q}^j \hat{D} - \lambda_u \hat{H}_2^i \hat{Q}^j \hat{U} + \lambda_e \hat{H}_1^i \hat{L}^j \hat{E} - \mu \hat{H}_1^i \hat{H}_2^j] \Big|_{\theta\theta} + h.c.) \quad (2.3)$$

mit den Yukawakopplungen der Higgsbosonen an die Materiefelder  $\lambda_u$ ,  $\lambda_d$  und  $\lambda_e$ ,

- (ii) in einen Vektoranteil. Dieser enthält die kinetischen Terme der Fermionen sowie Wechselwirkungsterme zwischen Skalar-, Spinor- und Vektorfeldern:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Vektor, 1}} = & \left[ \hat{L} e^{2g'V' + 2gV} \hat{L} + \hat{E} e^{2g'V'} \hat{E} \right. \\ & + \hat{Q} e^{2g'V' + 2gV + 2g_s V_s} \hat{Q} + \hat{U} e^{2g'V' - 2g_s V_s^T} \hat{U} + \hat{D} e^{2g'V' - 2g_s V_s^T} \hat{D} \\ & \left. + \hat{\bar{H}}_1 e^{2g'V' + 2gV} \hat{H}_1 + \hat{\bar{H}}_2 e^{2g'V' + 2gV} \hat{H}_2 \right] \Big|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} . \end{aligned} \quad (2.4)$$

Hierbei wurde die abkürzende Schreibweise verwendet:

$$V_s = T_s^a V_s^a, \quad V = T^a V^a, \quad V' = \frac{Y}{2} v'. \quad (2.5)$$

Mit  $T_s^a$  werden die Generatoren der  $SU(3)_C$ , mit  $T^a$  die Generatoren der  $SU(2)_W$  und mit  $Y$  der Generator der  $U(1)_Y$  bezeichnet.

## 2. Das minimale supersymmetrische Standardmodell

Außerdem beinhaltet der Vektoranteil die kinetischen Terme der Eichfelder,

$$\mathcal{L}_{\text{Vektor}, 2} = \left( \left[ \frac{1}{16g^2} W^{a\alpha} W_\alpha^a + \frac{1}{16g'^2} W'^{\alpha} W'_\alpha{}^a + \frac{1}{16g_s^2} W_s^{a\alpha} W_{s\alpha}^a \right] \Big|_{\theta\theta} + h.c. \right), \quad (2.6)$$

wobei  $W_{s\alpha}^a$ ,  $W_\alpha^a$  und  $W'_\alpha$  die zu den Vektorsuperfeldern gehörigen Feldstärken

$$W_{s\alpha}^a = -\frac{1}{4} \bar{D} \bar{D} (e^{-2g_s V_s} D_\alpha e^{2g_s V_s}), \quad (2.7)$$

$$W_\alpha^a = -\frac{1}{4} \bar{D} \bar{D} (e^{-2gV} D_\alpha e^{2gV}), \quad (2.8)$$

$$W'_\alpha = -\frac{1}{4} \bar{D} \bar{D} (e^{-2g'V'} D_\alpha e^{2g'V'}) = -\frac{g'}{4} \bar{D} \bar{D} D_\alpha V' \quad (2.9)$$

sind.

Der supersymmetrische Anteil der Lagrangedichte setzt sich also folgendermaßen zusammen<sup>1</sup>:

$$\mathcal{L}_{\text{SUSY}} = \mathcal{L}_{\text{chiral}} + \mathcal{L}_{\text{Vektor}, 1} + \mathcal{L}_{\text{Vektor}, 2}. \quad (2.10)$$

Die Supersymmetrie im MSSM ist durch sanfte Brechung explizit gebrochen. Durch sanfte Brechung treten bei Schleifenberechnungen höchstens logarithmische Divergenzen auf; die Kopplungskonstanten erhalten dadurch keine Korrekturterme. Sanfte Brechung führt also zu keinen weiteren quadratischen Divergenzen in der Theorie. Berücksichtigt man, welche Terme die obigen Bedingungen nach Giradello und Grisaru [61] erfüllen, dann läßt sich der sanfte Brechungsanteil der Lagrangedichte des MSSM für eine Generation in folgender Form schreiben:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{soft}} = & -M_{L_{\tilde{q}}}^2 (\tilde{u}_L^+ \tilde{u}_L + \tilde{d}_L^+ \tilde{d}_L) - M_{\tilde{u}_R}^2 \tilde{u}_R^+ \tilde{u}_R - M_{\tilde{d}_R}^2 \tilde{d}_R^+ \tilde{d}_R \\ & - M_{L_{\tilde{l}}}^2 (\tilde{\nu}_L^+ \tilde{\nu}_L + \tilde{e}_L^+ \tilde{e}_L) - M_{\tilde{e}_R}^2 \tilde{e}_R^+ \tilde{e}_R \\ & - m_1^2 H_1^+ H_1 - m_2^2 H_2^+ H_2 + (m_3^2 \epsilon^{ij} H_1^i H_2^j + h.c.) \\ & - \epsilon^{ij} (-\lambda_u A_u H_2^i \tilde{Q}^j \tilde{U} + \lambda_d A_d H_1^i \tilde{Q}^j \tilde{D} + \lambda_e A_e H_1^i \tilde{L}^j \tilde{E} + h.c.) \\ & + \frac{1}{2} (M_1 \lambda_B \lambda_B + M_2 \lambda_W^a \lambda_W^a + M_3 \lambda_s^a \lambda_s^a + h.c.). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Im allgemeinsten Fall bei Berücksichtigung der drei Generationen sind  $\lambda_u$ ,  $\lambda_d$ ,  $\lambda_e$ ,  $A_u$ ,  $A_d$  und  $A_e$  komplexe  $3 \times 3$ -Matrizen; die Brechungsparameter  $M_{L_{\tilde{q}}}^2$ ,  $M_{L_{\tilde{l}}}^2$ ,  $M_{\tilde{u}_R}^2$ ,  $M_{\tilde{d}_R}^2$  und  $M_{\tilde{e}_R}^2$  sind hermitesche  $3 \times 3$ -Matrizen. Bei den weiteren Rechnungen bleiben Familienmischungen unberücksichtigt, so daß aus den hermiteschen  $3 \times 3$ -Matrizen reelle und aus den komplexen  $3 \times 3$ -Matrizen komplexe skalare Parameter werden.

<sup>1</sup>Es wurde nur eine Generation berücksichtigt und damit keine Familienmischungen.



## 2.2. Die Lagrangedichte des minimalen supersymmetrischen Standardmodells

Die klassische Lagrangedichte setzt sich aus dem supersymmetrischen Anteil  $\mathcal{L}_{\text{SUSY}}$  und dem sanften Brechungsanteil  $\mathcal{L}_{\text{soft}}$  zusammen. Zur Quantisierung [62, 63] ist es notwendig, die Eichung zu fixieren, da sonst nicht alle Greenfunktionen existieren. In der Praxis wird häufig als Eichfixierungsterm die  $R_\xi$ - oder 't Hooft-Eichung verwendet,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{R_\xi} = & -\frac{1}{2\xi_G}(\partial_\mu G^{a\mu})^2 - \frac{1}{2\xi_A}(\partial_\mu A^\mu)^2 - \frac{1}{2\xi_Z}(\partial_\mu Z^\mu + M_Z \xi_Z G^0)^2 \\ & - \frac{1}{2\xi_W}|\partial_\mu W^{+\mu} + iM_W \xi_W G^+|^2 \end{aligned} \quad (2.12)$$

mit den Feldern des Photons  $A^\mu$ , des Z-Bosons  $Z^\mu$ , des W-Bosons  $W^{+\mu}$  und der Goldstone-Bosonen  $G^0$  und  $G^+$ . Für konkrete Rechnungen ist die 't Hooft-Feynman-Eichung, d.h.  $\xi_G = \xi_A = \xi_Z = \xi_W = 1$ , von Vorteil, da dann die Propagatoren der Vektorbosonen direkt proportional zur Minkowski-Metrik  $g^{\mu\nu}$  sind. Durch den Eichfixierungsterm  $\mathcal{L}_{\text{fix}}$  werden zusätzliche, unphysikalische Polarisationsfreiheitsgrade in die Theorie eingeführt, die man mit Hilfe eines Fadeev-Popov-Geistterms  $\mathcal{L}_{\text{ghost}}$  [62] kompensiert. Damit ist die quantisierte Lagrangedichte bestimmt zu:

$$\mathcal{L}_{\text{MSSM}} = \mathcal{L}_{\text{SUSY}} + \mathcal{L}_{\text{soft}} + \mathcal{L}_{\text{fix}} + \mathcal{L}_{\text{ghost}} . \quad (2.13)$$

Zur Herleitung der Feynmanregeln muß die Lagrangedichte in Komponentenfelder entwickelt werden. Die unphysikalischen  $D$ - und  $F$ -Hilfsfelder werden durch die zu Gleichung (A.55) analogen Ausdrücke ersetzt. Die Weyl-Spinoren werden zu Dirac-Spinoren zusammengefaßt. Explizite Rechnungen zur Entwicklung der Lagrangedichte in Komponentenfeldern sind zum Beispiel in [64] aufgeführt.

## 2. *Das minimale supersymmetrische Standardmodell*

### 3. Regularisierung und Renormierung

Im allgemeinen enthält die Lagrangedichte eines Modells freie Parameter, die nicht durch die Theorie festgelegt sind. Die Werte dieser Parameter müssen experimentell bestimmt werden. Durch Relationen, welche die freien Parameter mit den Observablen in Beziehung setzen, werden die Parameter definiert. Die Definitionen aller Parameter und die dazugehörigen Relationen bilden ein Renormierungsschema, wobei sich die Relationen zwischen Observablen und freien Parametern in der Störungstheorie von einer Ordnung zur nächsten ändern können.

Bei der Berechnung von Quantenkorrekturen muß man nicht nur beachten, daß sich die Relationen zwischen freien Parametern und Observablen gegenüber Born-Niveau verändern können; die auftretenden Schleifenintegrale sind zudem im allgemeinen UV-divergent.

Zur Untersuchung der Divergenzstruktur dieser Schleifenintegrale kann der oberflächliche Divergenzgrad  $\omega$  durch „Powercounting“, d.h. durch Abzählen der Potenzen, mit der die Impulse im betrachteten Integral auftreten, bestimmt werden [65]. Jede Schleife im Feynman-Diagramm geht mit einer Potenz 4 in den oberflächlichen Divergenzgrad ein. Ein Vertex des Typs  $i$  liefert die Potenz  $d_i$ . Jeder Bosonpropagator fällt für große Impulse mit einer Potenz  $-2$  und jeder Fermionpropagator mit einer Potenz  $-1$  ab. Damit erhält man für den oberflächlichen Divergenzgrad  $\omega$ :

$$\omega = \sum_i n_i d_i + 4n_L - 2b - f, \tag{3.1}$$

wobei  $n_i$  die Anzahl der Vertizes des Typs  $i$ ,  $n_L$  die Anzahl der Schleifen,  $b$  die Anzahl der Bosonpropagatoren und  $f$  die Anzahl der Fermionpropagatoren sind. Ist der oberflächliche Divergenzgrad für alle Subdiagramme – einschließlich des vollständigen Diagramms – kleiner als null, so ist das betrachtete Diagramm UV-endlich. Ein verschwindender oberflächlicher Divergenzgrad zeigt logarithmische Divergenzen an. Der divergente Anteil eines Diagramms läßt sich als ein Polynom in den äußeren Impulsen ausdrücken. Dabei enthält ein Graph mit  $\omega = n$ ,  $n > 0$ , einen divergenten Term proportional zu  $p_1^{n_1} \cdot \dots \cdot p_m^{n_m}$  mit  $n = n_1 + \dots + n_m$ , wobei  $p_1, \dots, p_m$  die  $m$  äußeren Impulse sind. Terme proportional zu  $p_1^{n_1} \cdot \dots \cdot p_m^{n_m}$  mit  $n_1 + \dots + n_m > n$  sind endlich.

## 3.1. Regularisierung

Die UV-Divergenzen werden mit Hilfe eines Regularisierungsverfahrens behandelt. Dazu wird ein (evtl. auch mehrere) Regularisierungsparameter  $\Lambda$  in die Theorie eingeführt. Dabei existiert ein  $\Lambda^0$ , so daß für  $\Lambda \rightarrow \Lambda^0$  die Schleifenintegrale in den ursprünglichen Ausdruck ohne Regularisierungsparameter übergehen; für gewisse Parameterbereiche von  $\Lambda$  sind die Schleifenintegrale jedoch endlich.

Es gibt unterschiedliche Regularisierungsverfahren, von denen drei hier kurz beschrieben werden:

- **Pauli-Villar-Regularisierung:**

Eine anschauliche Möglichkeit bietet die Regularisierung durch einen Cutoff-Parameter [66]. Dabei wird die Integration nur bis zu einem Impulsbetrag mit großem, aber endlichem Wert, dem sogenannten Cutoff-Parameter, durchgeführt. Diese Methode ist zwar einfach, zerstört aber im allgemeinen die Eichinvarianz.

- **Dimensionale Regularisierung:**

Für Standardmodell-Rechnungen wird häufig das Verfahren der dimensionalen Regularisierung [67] verwendet. Dazu werden die vier Dimensionen der Raumzeit durch  $D$  Dimensionen mit  $D = 4 - \epsilon$  ersetzt, die Divergenzen also durch Pole in  $\epsilon$  bis zur Ordnung  $n_L$  ausgedrückt. Dimensionale Regularisierung erhält im allgemeinen die Eichsymmetrien, jedoch werden durch dimensionale Regularisierung chirale Eichsymmetrien sowie die Supersymmetrie gebrochen. Da beim Übergang zu  $D$  Dimensionen zusätzliche Freiheitsgrade eingeführt werden, stimmt die Anzahl der bosonischen Freiheitsgrade nicht mehr mit der Anzahl der fermionischen überein; die Supersymmetrie ist folglich gebrochen.

- **Dimensionale Reduktion:**

Um eine explizite Supersymmetrie-Brechung zu vermeiden, wurde das Verfahren der dimensionalen Reduktion [68, 69] entwickelt. Hierbei werden im Gegensatz zum Verfahren der dimensionalen Regularisierung nur die Impulse in  $D$  Dimensionen behandelt, die Felder hingegen bleiben vierdimensional.

## 3.2. Renormierung

Durch die Regularisierung wurden unphysikalische Parameter in die Theorie eingeführt. Mittels Renormierung wird diese Abhängigkeit von unphysikalischen Parametern eliminiert und ein Zusammenhang zwischen Parametern der Theorie und physikalischen Observablen hergestellt.

Bei multiplikativer Renormierung werden die nackten Parameter der Lagrangedichte  $g_0$  durch renormierte Parameter  $g$  mit den Renormierungskonstanten  $Z_g$  ersetzt:

$$g_0 = Z_g g = g + \delta^{(1)} g + \delta^{(2)} g + \dots \quad (3.2)$$

Die renormierten Parameter  $g$  haben einen endlichen Wert. Die dazugehörigen Counterterme  $\delta^{(i)} g$  enthalten die Abhängigkeit von den Regularisierungsparametern in  $i$ -ter Ordnung. Die Parameterrenormierung reicht unter Berücksichtigung der Wellenfunktionsrenormierung der äußeren Teilchen aus, um endliche S-Matrix-Elemente zu erhalten. Damit auch alle Green-Funktionen endlich sind, müssen zusätzlich die Felder renormiert werden; dazu werden die nackten Felder  $\Phi_0$  durch renormierte Felder  $\Phi$  und Feld-Renormierungskonstanten  $Z_\Phi$  ersetzt:

$$\Phi_0 = Z_\Phi^{\frac{1}{2}} \Phi = (1 + \frac{1}{2} \delta^{(1)} Z_\Phi - \frac{1}{8} (\delta^{(1)} Z_\Phi)^2 + \frac{1}{2} \delta^{(2)} Z_\Phi + \dots) \Phi \quad (3.3)$$

mit der Entwicklung der Feld-Renormierungskonstanten

$$Z_\Phi = 1 + \delta^{(1)} Z_\Phi + \delta^{(2)} Z_\Phi + \dots \quad (3.4)$$

Hat man die Parameter und Felder durch ihre renormierten Werte in der Lagrangedichte ersetzt und die Lagrangedichte nach den Countertermen entwickelt, so kann die Lagrangedichte in einen renormierten Anteil und einen Counterterm-Anteil aufgeteilt werden:

$$\mathcal{L}(g_0, \Phi_0) = \mathcal{L}(g, \Phi) + \mathcal{L}_{\text{Counter}}(g, \Phi, Z_g, Z_\Phi) \quad (3.5)$$

Der Counterterm-Anteil kann wieder in Anteile  $\delta^{(i)} \mathcal{L}$  der  $i$ -ten Ordnung aufgespalten werden:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Counter}}(g, \Phi, Z_g, Z_\Phi) &= \delta^{(1)} \mathcal{L}(g, \Phi, \delta^{(1)} g, \delta^{(1)} Z_\Phi \Phi) \\ &+ \delta^{(2)} \mathcal{L}(g, \Phi, \delta^{(1)} g, \delta^{(1)} Z_\Phi \Phi, \delta^{(2)} g, \delta^{(2)} Z_\Phi \Phi) + \dots \end{aligned} \quad (3.6)$$

### 3.3. Renormierungsschemata

Die Definitionen aller unabhängigen Parameter und damit auch die Festlegung der Relationen zwischen Parametern der Theorie und Observablen, bilden ein Renormierungsschema. Das Ergebnis einer exakten Rechnung, bei der alle Ordnungen der Störungstheorie berücksichtigt sind, ist unabhängig vom Renormierungsschema. Natürlich ist dabei zu beachten, daß die Input-Werte gemäß dem verwendeten Renormierungsschema gewählt werden müssen. In der Praxis können jedoch nur Beiträge bis zu einer bestimmten Ordnung der Störungsreihe in einer Rechnung berücksichtigt werden. Die Abhängigkeit des Ergebnisses einer solchen Rechnung vom Renormierungsschema spiegelt die theoretische Unsicherheit wider, die durch den Abbruch der Störungsreihe verursacht wird.

In den folgenden Kapiteln wird zwischen  $\overline{\text{DR}}$ -Renormierung und On-Shell-Renormierung unterschieden:

### 3. Regularisierung und Renormierung

- **$\overline{\text{DR}}$ -Renormierung:**

Der zu einem Parameter gehörende Counterterm absorbiert nur den zu  $\Delta^n$  proportionalen Anteil des nackten Parameters,  $n = 1, 2, \dots$ , wobei  $\Delta$  den divergenten Anteil  $\frac{2}{\epsilon}$  mit den numerischen Konstanten  $\gamma_E$  und  $\ln 4\pi$  darstellt und auf Ein-Schleifen-Niveau folgende Form annimmt:

$$\Delta = \frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi . \quad (3.7)$$

Die Absorption der numerischen Konstanten  $\gamma_E$  und  $\ln 4\pi$  in die Counterterme entspricht einer Redefinition der Renormierungsskala  $\mu$ :

$$\ln(\mu^{\overline{\text{DR}}})^2 := -\gamma_E + \ln 4\pi + \ln \mu^2 . \quad (3.8)$$

Bei der Berechnung von Schleifen-Integralen verwendet man als Regularisierungsverfahren das Verfahren der dimensional Reduktion. Im Gegensatz dazu wird im  $\overline{\text{MS}}$ -Schema [70–72] das Verfahren der dimensional Regularisierung benutzt. Auf Ein-Schleifen-Niveau unterscheiden sich die Counterterme im  $\overline{\text{DR}}$ -Schema nicht von denen im  $\overline{\text{MS}}$ -Schema.

Das endliche Ergebnis einer Rechnung im  $\overline{\text{DR}}$ - bzw.  $\overline{\text{MS}}$ -Schema hängt noch von einer freien Massenskala  $\mu^{\overline{\text{DR}}}$  bzw.  $\mu^{\overline{\text{MS}}}$  ab, die bei der Regularisierung eingeführt wurde, damit sich die Massendimension der Schleifenintegrale nicht ändert. Zur vollständigen Bestimmung des Renormierungsschemas ist die Festlegung von  $\mu^{\overline{\text{DR}}}$  bzw.  $\mu^{\overline{\text{MS}}}$  notwendig.

- **On-Shell-Renormierung:**

On-shell bedeutet im allgemeinen, daß die Renormierungsbedingungen auf der Massenschale gestellt werden. Dabei absorbieren die Parameter-Counterterme außer dem divergenten Anteil auch endliche Terme. Wenn die Masse eines Teilchens on-shell festgelegt ist, so ist der dazugehörige Massenparameter durch den Realteil des Pols des Propagators gegeben und kann als physikalische Masse interpretiert werden. Die Massencounterterme absorbieren dann alle Korrekturen zum Realteil des Pols des Propagators. Werden alle Größen on-shell bestimmt, so hängt das endliche Ergebnis einer Rechnung nicht mehr von der zur Regularisierung eingeführten Massenskala  $\mu^{\overline{\text{DR}}}$  ab. In Kapitel 5.3.4 wird der Begriff „On-Shell-Größe“ in verallgemeinerter Form verwendet; der Counterterm zu dieser „On-Shell-Größe“ absorbiert nicht nur den divergenten, sondern auch den von der Massenskala  $\mu^{\overline{\text{DR}}}$  abhängigen Anteil. Die Renormierungsbedingung ist jedoch nicht auf der Massenschale gestellt.

In [73, 74] wird dieses Renormierungsverfahren für das Standardmodell verwendet.

## 4. Der Higgs-Sektor im reellen MSSM

Wie im Standardmodell erhalten im MSSM die Vektorbosonen, die im Fall exakter Eichsymmetrie masselos sind, ihre Masse durch eine spontane Brechung der  $SU(2) \times U(1)$ -Symmetrie. Diese spontane Symmetriebrechung wird durch einen nichtverschwindenden Vakuumerwartungswert eines oder mehrerer skalarer Felder, Higgs-Felder, verursacht (Higgs-Mechanismus [8]). Die Existenz eines bzw. mehrerer dieser Higgs-Felder ist essentiell sowohl für das Standardmodell als auch für das MSSM. Bislang wurden noch keine Higgs-Bosonen experimentell nachgewiesen, doch ist die Suche nach einem Higgs-Boson eine wesentliche Aufgabe, der am LHC nachgegangen werden soll [9].

Der reine skalare Higgs-Sektor ohne kinetische Terme — Kopplungen an weitere Teilchen werden zunächst nicht betrachtet — ist durch das Higgs-Potential  $V_{\text{Higgs}}$  bestimmt:

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}} = -V_{\text{Higgs}} . \quad (4.1)$$

Das Higgs-Potential setzt sich aus den F-Termen des Superpotentials, den D-Termen des Feldstärkeanteils und den Termen des SUSY-Brechungsanteils zusammen:

$$\begin{aligned} V_{\text{Higgs}} &= -(\mathcal{L}_{\text{Higgs}}^F + \mathcal{L}_{\text{Higgs}}^D + \mathcal{L}_{\text{Higgs}}^{\text{soft}}) \\ &= |\mu|^2 (H_1^+ H_1 + H_2^+ H_2) \\ &\quad + \frac{g^2}{2} (H_1^+ T^a H_1 + H_2^+ T^a H_2)^2 + \frac{g'^2}{2} \left( \frac{Y}{2} H_1^+ H_1 + \frac{Y}{2} H_2^+ H_2 \right)^2 \\ &\quad + (m_1^2 H_1^+ H_1 + m_2^2 H_2^+ H_2 - (\epsilon^{ij} m_3^2 H_1^i H_2^j + h.c.)) . \end{aligned} \quad (4.2)$$

Im Gegensatz zum Standardmodell hängt das Higgs-Potential im MSSM aufgrund der D-Terme des Feldstärkeanteils von den Eichkopplungen  $g$  und  $g'$  ab. Für spezielle Parameterbereiche von  $m_1^2$ ,  $m_2^2$ ,  $m_3^2$  und  $\mu$  mit  $m_3^2 \neq 0$  und  $\mu \neq 0$  [75] hat das Higgs-Potential ein nichttriviales Minimum; das heißt:

$$\frac{\partial V_{\text{Higgs}}}{\partial H_j^i} \Big|_{\text{vac.}} = 0 , \quad i, j = 1, 2 , \quad (4.3)$$

mit

$$\langle H_1 \rangle = \begin{pmatrix} H_1^1|_{\text{vac.}} \\ H_1^2|_{\text{vac.}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \langle H_2 \rangle = \begin{pmatrix} H_2^1|_{\text{vac.}} \\ H_2^2|_{\text{vac.}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix} . \quad (4.4)$$

#### 4. Der Higgs-Sektor im reellen MSSM

Die Bedingung (4.3) entspricht der Forderung, daß die linearen Anteile der Higgs-Felder in der Wirkung verschwinden. Sie muß notwendigerweise im Higgs-Vakuumzustand erfüllt sein.

Die Higgs-Doublets  $H_1$  und  $H_2$  können um den Vakuumzustand mit den Vakuumerwartungswerten  $v_1$  und  $v_2$  in CP-Eigenzuständen entwickelt werden:

$$H_1 = \begin{pmatrix} v_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1^0 - i\zeta_1^0) \\ -\phi_1^- \end{pmatrix}, \quad H_2 = \begin{pmatrix} \phi_2^+ \\ v_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_2^0 + i\zeta_2^0) \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

$\phi_{\{1,2\}}^0$ ,  $\zeta_{\{1,2\}}^0$  sind reelle und  $\phi_{\{1,2\}}^\pm$  komplexe Skalarfelder, aber keine Felder der Masseneigenzustände. Im allgemeinen können die neutralen bzw. die geladenen Felder mischen, da sie jeweils in allen Quantenzahlen übereinstimmen. Im MSSM mit reellen Parametern, das in diesem Teil der Arbeit betrachtet wird, gilt jedoch zusätzlich CP-Invarianz, so daß nicht alle neutralen Felder, sondern nur jeweils die CP-geraden  $\phi^0$ - bzw. die CP-ungeraden  $\zeta^0$ -Felder mischen. Durch unitäre Transformationen kann man die Felder  $\phi_{\{1,2\}}^0$ ,  $\zeta_{\{1,2\}}^0$  und  $\phi_{\{1,2\}}^\pm$  in die Felder der Masseneigenzustände  $h^0$ ,  $H^0$ ,  $A^0$ ,  $G^0$ ,  $H^\pm$  und  $G^\pm$  überführen. Dabei lassen sich die fünf physikalischen Higgs-Bosonen unterteilen in die neutralen, CP-geraden Higgs-Bosonen  $h^0$ ,  $H^0$ , das neutrale, CP-ungerade Higgs-Boson  $A^0$  und die geladenen Higgs-Bosonen  $H^\pm$ . Analog zum Standardmodell treten drei unphysikalische Goldstone-Bosonen  $G^0$ ,  $G^\pm$  auf, die durch geeignete Wahl der Eichung eliminiert werden können.

Aus der Mischung der  $\phi^0$ -Felder geht das leichteste physikalische Higgs-Boson  $h^0$  hervor (siehe Abschnitt 4.1). Auf Born-Niveau hat dieses Higgs-Boson eine obere Massenschranke, die bei der Masse des Z-Bosons  $M_Z$  liegt,  $M_{h^0}^{(0)} \leq M_Z$ . Diese obere Massenschranke verschiebt sich bei Berücksichtigung von Quantenkorrekturen nach oben zu  $M_{h^0} \lesssim 140$  GeV [15, 16] — und liegt damit oberhalb der experimentellen Ausschlußgrenze [17]. In die Berechnung der Quantenkorrekturen gehen die MSSM-Parameter ein. Wenn die Higgs-Masse experimentell bestimmt ist, können indirekt Aussagen über die MSSM-Parameter getroffen werden. Indirekte Aussagen dieser Art sind die einzige Informationsquelle über den SUSY-Anteil des MSSM, solange noch keine SUSY-Teilchen direkt experimentell nachgewiesen wurden. Vor der Entdeckung des Higgs-Bosons  $h^0$  kann mit Hilfe der experimentellen unteren und der theoretischen oberen Massenschranke der MSSM-Parameterraum eingeschränkt werden.

Zur Berechnung der Higgs-Masse  $M_{h^0}$  wird die Zwei-Punkt-Vertex-Funktion  $\Gamma$

$$\Gamma(k^2) = \begin{pmatrix} k^2 - (M_{H^0}^{(0)})^2 + \hat{\Sigma}_{\mathbf{H}^0\mathbf{h}^0}(k^2)|_{11} & \hat{\Sigma}_{\mathbf{H}^0\mathbf{h}^0}(k^2)|_{12} \\ \hat{\Sigma}_{\mathbf{H}^0\mathbf{h}^0}(k^2)|_{21} & k^2 - (M_{h^0}^{(0)})^2 + \hat{\Sigma}_{\mathbf{H}^0\mathbf{h}^0}(k^2)|_{22} \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

bestimmt. Dann werden die Nullstellen der Determinante von  $\Gamma$  gesucht. Hierbei sind  $M_{H^0}^{(0)}$  und  $M_{h^0}^{(0)}$  die Massen der CP-geraden Higgs-Bosonen auf Born-Niveau (siehe Abschnitt 4.1) und  $\hat{\Sigma}_{\mathbf{H}^0\mathbf{h}^0}$  die matrixwertige renormierte Selbstenergie der CP-geraden Higgs-Bosonen:

$$\hat{\Sigma}_{\mathbf{H}^0\mathbf{h}^0} = \begin{pmatrix} \hat{\Sigma}_{\mathbf{H}^0\mathbf{h}^0}|_{11} & \hat{\Sigma}_{\mathbf{H}^0\mathbf{h}^0}|_{12} \\ \hat{\Sigma}_{\mathbf{H}^0\mathbf{h}^0}|_{21} & \hat{\Sigma}_{\mathbf{H}^0\mathbf{h}^0}|_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\Sigma}_{H^0 H^0} & \hat{\Sigma}_{h^0 H^0} \\ \hat{\Sigma}_{h^0 H^0} & \hat{\Sigma}_{h^0 h^0} \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$



#### 4.1. Der Higgs-Sektor auf Born-Niveau

Die renormierten Selbstenergien  $\hat{\Sigma}_{H^0 H^0}$ ,  $\hat{\Sigma}_{h^0 H^0}$  bzw.  $\hat{\Sigma}_{h^0 h^0}$  setzen sich aus allen ein-Teilchen-irreduziblen Feynman-Diagrammen zur entsprechenden Zwei-Punkt-Vertex-Funktion zusammen. Analog zu  $\hat{\Sigma}_{\mathbf{H}^0 \mathbf{h}^0}$  wird die matrixwertige renormierte Selbstenergie  $\hat{\Sigma}_{\mathbf{G}^0 \mathbf{A}^0}$  des neutralen CP-ungeraden Higgs-Bosons  $A^0$  und des neutralen Goldstone-Bosons  $G^0$  definiert:

$$\hat{\Sigma}_{\mathbf{G}^0 \mathbf{A}^0} = \begin{pmatrix} \hat{\Sigma}_{\mathbf{G}^0 \mathbf{A}^0}|_{11} & \hat{\Sigma}_{\mathbf{G}^0 \mathbf{A}^0}|_{12} \\ \hat{\Sigma}_{\mathbf{G}^0 \mathbf{A}^0}|_{21} & \hat{\Sigma}_{\mathbf{G}^0 \mathbf{A}^0}|_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\Sigma}_{G^0 G^0} & \hat{\Sigma}_{A^0 G^0} \\ \hat{\Sigma}_{A^0 G^0} & \hat{\Sigma}_{A^0 A^0} \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

Die renormierten Selbstenergien  $\hat{\Sigma}_{G^0 G^0}$ ,  $\hat{\Sigma}_{A^0 G^0}$  und  $\hat{\Sigma}_{A^0 A^0}$  bestehen aus allen ein-Teilchen-irreduziblen Feynman-Diagrammen zur dazugehörigen Zwei-Punkt-Vertex-Funktion. Die renormierten Selbstenergien  $\hat{\Sigma}$  setzen sich allgemein aus renormierten Selbstenergien  $\hat{\Sigma}^{(i)}$  der  $i$ -ten Ordnung zusammen,

$$\hat{\Sigma}(p^2) = \hat{\Sigma}^{(1)}(p^2) + \hat{\Sigma}^{(2)}(p^2) + \dots \quad (4.9)$$

Die renormierten Selbstenergien  $\hat{\Sigma}^{(i)}$  kann man in einen unrenormierten Anteil  $\Sigma^{(i)}$  und einen Counterterm-Anteil  $\delta\Sigma^{(i)}$  aufspalten. Der Counterterm-Anteil  $\delta\Sigma^{(i)}$  ist dabei durch die Ableitung der Fourier-transformierten Counterterm-Lagrangedichte der  $i$ -ten Ordnung nach den Feldern der ein- bzw. auslaufenden Teilchen gegeben.

Die renormierten matrixwertigen Selbstenergien sind in Abschnitt 4.2 in allgemeiner Form dargestellt. In Abschnitt 4.3 wird der Ausdruck der Selbstenergie, der in der expliziten Berechnung der Higgs-Massen Verwendung findet, hergeleitet. Das Ergebnis wird in Abschnitt 4.3.3 zusammengefasst.

### 4.1. Der Higgs-Sektor auf Born-Niveau

Die in den  $\phi^0$ -,  $\zeta^0$ - und  $\phi^\pm$ -Feldern bilinearen Terme des Higgs-Potentials (4.2) lassen sich unter der Voraussetzung von CP-Invarianz (vgl. auch Kap. 7.1) – d.h. die Parameter des MSSM sind reell – umschreiben:

$$V_{\text{Higgs}}|_{\text{bil.}} = \frac{1}{2} (\phi_1^0, \phi_2^0) \mathcal{M}_{\phi^0} \begin{pmatrix} \phi_1^0 \\ \phi_2^0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} (\zeta_1^0, \zeta_2^0) \mathcal{M}_{\zeta^0} \begin{pmatrix} \zeta_1^0 \\ \zeta_2^0 \end{pmatrix} + (\phi_1^+, \phi_2^+) \mathcal{M}_{\phi^\pm} \begin{pmatrix} \phi_1^- \\ \phi_2^- \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

Dabei ist  $\mathcal{M}_{\phi^0}$  die Massenmatrix der CP-geraden neutralen Higgs-Felder,

$$\mathcal{M}_{\phi^0} = \begin{pmatrix} \tilde{m}_1^2 + \frac{1}{4}(g^2 + g'^2)(3v_1^2 - v_2^2) & -(m_3^2 + \frac{1}{2}(g^2 + g'^2)v_1 v_2) \\ -(m_3^2 + \frac{1}{2}(g^2 + g'^2)v_1 v_2) & \tilde{m}_2^2 - \frac{1}{4}(g^2 + g'^2)(v_1^2 - 3v_2^2) \end{pmatrix}, \quad (4.11)$$

$\mathcal{M}_{\zeta^0}$  die Massenmatrix der CP-ungeraden neutralen Higgs-Felder,

$$\mathcal{M}_{\zeta^0} = \begin{pmatrix} \tilde{m}_1^2 + \frac{1}{4}(g^2 + g'^2)(v_1^2 - v_2^2) & -m_3^2 \\ -m_3^2 & \tilde{m}_2^2 - \frac{1}{4}(g^2 + g'^2)(v_1^2 - v_2^2) \end{pmatrix}, \quad (4.12)$$

#### 4. Der Higgs-Sektor im reellen MSSM

und  $\mathcal{M}_{\phi^\pm}$  die Massenmatrix der geladenen Higgs-Felder,

$$\mathcal{M}_{\phi^\pm} = \begin{pmatrix} \tilde{m}_1^2 + \frac{1}{4}((g^2 + g'^2)v_1^2 + \tilde{g}^2 v_2^2) & -m_3^2 - \frac{1}{2}g^2 v_1 v_2 \\ -m_3^2 - \frac{1}{2}g^2 v_1 v_2 & \tilde{m}_2^2 + \frac{1}{4}(\tilde{g}^2 v_1^2 + (g^2 + g'^2)v_2^2) \end{pmatrix}, \quad (4.13)$$

$\tilde{m}_1^2 = m_1^2 + |\mu|^2$ ,  $\tilde{m}_2^2 = m_2^2 + |\mu|^2$  und  $\tilde{g}^2 = g^2 - g'^2$  wurde als Abkürzung verwendet. In (4.5) sind die Parameter  $v_1$  und  $v_2$  – in diesem Abschnitt bislang nur formale Parameter – als Higgs-Vakuumerwartungswerte eingeführt worden. Das heißt, das Higgs-Potential nimmt für verschwindende  $\phi^0$ -,  $\zeta^0$ - und  $\phi^\pm$ -Felder ein Minimum an. Notwendige Bedingung dafür ist, daß die Terme des Higgs-Potentials, die linear in den Feldern  $\phi_{1,2}^0$ ,  $\zeta_{1,2}^0$  und  $\phi_{1,2}^\pm$  sind,

$$\begin{aligned} V_{\text{Higgs}}|_{\text{lin}} &= (\sqrt{2}(m_1^2 + |\mu|^2)v_1 - \sqrt{2}m_3^2 v_2 + \frac{v_1(g^2 + g'^2)(v_1^2 - v_2^2)}{2\sqrt{2}})\phi_1^0 \\ &\quad + (-\sqrt{2}m_3^2 v_1 + \sqrt{2}(m_2^2 + |\mu|^2)v_2 - \frac{v_2(g^2 + g'^2)(v_1^2 - v_2^2)}{2\sqrt{2}})\phi_2^0, \end{aligned} \quad (4.14)$$

verschwinden. Folglich muß gelten:

$$\sqrt{2}(m_1^2 + |\mu|^2)v_1 - \sqrt{2}m_3^2 v_2 + \frac{v_1(g^2 + g'^2)(v_1^2 - v_2^2)}{2\sqrt{2}} = 0, \quad (4.15)$$

$$-\sqrt{2}m_3^2 v_1 + \sqrt{2}(m_2^2 + |\mu|^2)v_2 - \frac{v_2(g^2 + g'^2)(v_1^2 - v_2^2)}{2\sqrt{2}} = 0. \quad (4.16)$$

Statt  $v_1$  und  $v_2$  über die Beziehungen (4.15) und (4.16) festzulegen, werden üblicherweise die Parameter  $m_1^2$  und  $m_2^2$  aus diesen Gleichungen bestimmt zu

$$m_1^2 = -|\mu|^2 + m_3^2 \frac{v_2}{v_1} - \frac{(g^2 + g'^2)(v_1^2 - v_2^2)}{4}, \quad (4.17)$$

$$m_2^2 = -|\mu|^2 + m_3^2 \frac{v_1}{v_2} + \frac{(g^2 + g'^2)(v_1^2 - v_2^2)}{4} \quad (4.18)$$

und aus der Rechnung eliminiert.

Die Berechnung der Eigenwerte der Massenmatrizen (4.11), (4.12) und (4.13) unter Berücksichtigung von (4.17) und (4.18) liefert die Quadrate der Massen der CP-geraden neutralen Higgs-Felder,

$$\begin{aligned} (M_{H^0, h^0}^{(0)})^2 &= \frac{1}{2} \left( m_3^2 (\tan \beta + \cot \beta) + M_Z^2 \right. \\ &\quad \left. \pm \sqrt{(m_3^2 (\tan \beta - \cot \beta) + M_Z^2 \cos(2\beta))^2 + (2m_3^2 + M_Z^2 \sin(2\beta))^2} \right), \end{aligned} \quad (4.19)$$

der CP-ungeraden neutralen Higgs-Felder,

$$M_{G^0, A^0}^2 = \frac{1}{2} \left( m_3^2 (\tan \beta + \cot \beta) \mp \sqrt{4m_3^4 + (m_3^2 (\tan \beta - \cot \beta))^2} \right)$$

#### 4.1. Der Higgs-Sektor auf Born-Niveau

$$= \{0, m_3^2(\tan \beta + \cot \beta)\} , \quad (4.20)$$

und der geladenen Higgs-Felder,

$$M_{G^\pm, H^\pm}^2 = \{0, m_3^2(\tan \beta + \cot \beta) + M_W^2\} , \quad (4.21)$$

jeweils in niedrigster Ordnung. Hier wurde verwendet, daß

$$\tan \beta = \frac{v_2}{v_1} \quad (4.22)$$

und daß für die Z-Boson-Masse

$$M_Z^2 = \frac{1}{2}(g^2 + g'^2)(v_1^2 + v_2^2) \quad (4.23)$$

und für die W-Boson-Masse

$$M_W^2 = \frac{1}{2}g^2(v_1^2 + v_2^2) \quad (4.24)$$

gilt.

Mit Hilfe der unitären Transformationen

$$\begin{pmatrix} H^0 \\ h^0 \end{pmatrix} = \mathcal{U}_{\phi^0} \begin{pmatrix} \phi_1^0 \\ \phi_2^0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathcal{U}_{\phi^0} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} , \quad (4.25)$$

$$\begin{pmatrix} G^0 \\ A^0 \end{pmatrix} = \mathcal{U}_{\zeta^0} \begin{pmatrix} \zeta_1^0 \\ \zeta_2^0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathcal{U}_{\zeta^0} = \begin{pmatrix} \cos \beta_B & \sin \beta_B \\ -\sin \beta_B & \cos \beta_B \end{pmatrix} , \quad (4.26)$$

$$\begin{pmatrix} G^\pm \\ H^\pm \end{pmatrix} = \mathcal{U}_{\phi^\pm} \begin{pmatrix} \phi_1^\pm \\ \phi_2^\pm \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathcal{U}_{\phi^\pm} = \begin{pmatrix} \cos \beta_B & \sin \beta_B \\ -\sin \beta_B & \cos \beta_B \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

können die Massenmatrizen auf Diagonalgestalt gebracht werden. Der bilineare Anteil des Higgs-Potential kann dann durch die Masseneigenzustände ausgedrückt werden:

$$V_{\text{Higgs}}|_{\text{bil.}} = \frac{1}{2} (H^0, h^0) \mathcal{D}_{\phi^0} \begin{pmatrix} H^0 \\ h^0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} (G^0, A^0) \mathcal{D}_{\zeta^0} \begin{pmatrix} G^0 \\ A^0 \end{pmatrix} + (G^+, H^+) \mathcal{D}_{\phi^\pm} \begin{pmatrix} G^- \\ H^- \end{pmatrix}, \quad (4.28)$$

wobei

$$\mathcal{D}_{\phi^0} = \mathcal{U}_{\phi^0} \mathcal{M}_{\phi^0} \mathcal{U}_{\phi^0}^+ = \text{diag}((M_{H^0}^{(0)})^2, (M_{h^0}^{(0)})^2) , \quad (4.29)$$

$$\mathcal{D}_{\zeta^0} = \mathcal{U}_{\zeta^0} \mathcal{M}_{\zeta^0} \mathcal{U}_{\zeta^0}^+ = \text{diag}(0, M_{A^0}^2) , \quad (4.30)$$

$$\mathcal{D}_{\phi^\pm} = \mathcal{U}_{\phi^\pm} \mathcal{M}_{\phi^\pm} \mathcal{U}_{\phi^\pm}^+ = \text{diag}(0, M_{H^\pm}^2) \quad (4.31)$$

gilt. Der Wert des Mischungswinkels  $\beta_B$  stimmt auf Born-Niveau mit dem Wert von  $\beta$ , welches über das Verhältnis der Higgs-Vakuumerwartungswerte definiert ist ( $\tan \beta = \frac{v_2}{v_1}$ ), überein:

$$\beta_B = \beta_{B(\text{orn})} = \beta . \quad (4.32)$$

Der Mischungswinkel  $\alpha$  wird über folgende Relation bestimmt:

$$\tan 2\alpha = \tan 2\beta \frac{M_{A^0}^2 + M_Z^2}{M_{A^0}^2 - M_Z^2} \quad \text{mit} \quad -\frac{\pi}{2} < \alpha < 0 . \quad (4.33)$$

## 4.2. Der Higgs-Sektor in höheren Ordnungen

In diesem Kapitel werden allgemeine Ausdrücke für die Higgs-Selbstenergien angegeben. Sie vereinfachen sich stark auf Zwei-Schleifen-Niveau, wenn man nur die dominanten Beiträge berücksichtigt (siehe Kapitel 4.3). Die Ausdrücke der Zwei-Schleifen-Selbstenergien, die in der expliziten Berechnung der Higgs-Massen verwendet werden, sind in Abschnitt 4.3.3 zusammengestellt.

### 4.2.1. Renormierte Selbstenergien im Higgs-Sektor

Für die Berechnung der Higgs-Massen in höheren Ordnungen ist die Kenntnis der renormierten Higgs-Selbstenergien notwendig (siehe (4.6)), vor allem werden im Higgs-Sektor im Fall reeller Parameter die Selbstenergien der ungeladenen Higgs-Bosonen benötigt. Die explizite Herleitung der Selbstenergien zweier neutraler Teilchen ist in Anhang B.1 aufgeführt.

Wie in Kapitel 3.2 beschrieben, erfolgt die Parameterrenormierung, indem man nackte Parameter durch renormierte Größen und Counterterme ersetzt. Die Parameter des reinen ungeladenen, CP-geraden bzw. CP-ungeraden Higgs-Sektors sind in der Massenmatrix  $\mathcal{M}_{\phi^0}$  bzw.  $\mathcal{M}_{\zeta^0}$  enthalten. Anstatt alle Parameter einzeln aufzuführen, erhalten hier die Massenmatrizen Counterterme:

$$\mathcal{M}_{\phi^0} \rightarrow \mathcal{M}_{\phi^0} + \delta\mathcal{M}_{\phi^0}^{(1)} + \delta\mathcal{M}_{\phi^0}^{(2)} , \quad (4.34)$$

$$\mathcal{M}_{\zeta^0} \rightarrow \mathcal{M}_{\zeta^0} + \delta\mathcal{M}_{\zeta^0}^{(1)} + \delta\mathcal{M}_{\zeta^0}^{(2)} , \quad (4.35)$$

wobei  $\delta\mathcal{M}_{\phi^0}^{(i)}$  bzw.  $\delta\mathcal{M}_{\zeta^0}^{(i)}$  der Massenmatrix-Counterterm  $i$ -ter Schleifenordnung ist und alle Parameter-Counterterme der  $i$ -ten Ordnung enthält (siehe auch Abschnitt 4.2.2). Zur Feldrenormierung werden die nackten Felder durch renormierte Felder und Z-Faktoren ersetzt und gemäß (3.3) entwickelt:

$$H_1 = \begin{pmatrix} v_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1^0 - i\zeta_1^0) \\ -\phi_1^- \end{pmatrix} \rightarrow \sqrt{Z_{H_1}} H_1 = \left[ \mathbb{1} + \frac{1}{2}(\delta Z_{H_1}^{(1)} + \Delta Z_{H_1}) \right] H_1 , \quad (4.36)$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} \phi_1^+ \\ v_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_2^0 + i\zeta_2^0) \end{pmatrix} \rightarrow \sqrt{Z_{H_2}} H_2 = \left[ \mathbb{1} + \frac{1}{2}(\delta Z_{H_2}^{(1)} + \Delta Z_{H_2}) \right] H_2 . \quad (4.37)$$

Um endliche Ergebnisse zu erhalten, reicht es aufgrund der  $SU(2)$ -Invarianz aus, die Komponenten der Higgs-Dubletts gleich zu behandeln und universelle Z-Faktoren zu verwenden. Die Z-Faktoren  $\delta Z_{H_i}^{(1)}$  sind von Ein-Schleifen-Ordnung, die  $\Delta Z_{H_i}$  von Zwei-Schleifen-Ordnung mit  $i = 1, 2$ . Die Z-Faktoren  $\Delta Z_{H_i}$  enthalten den echten Zwei-Schleifen-Anteil der Entwicklung der Z-Faktoren,  $\delta Z_{H_i}^{(2)}$ , sowie das Quadrat des Ein-Schleifen-Anteils dieser

## 4.2. Der Higgs-Sektor in höheren Ordnungen

Entwicklung,  $(\delta Z_{H_i}^{(1)})^2$ , das formal von Zwei-Schleifen-Ordnung ist:

$$\Delta Z_{H_i} = \delta Z_{H_i}^{(2)} - \frac{1}{4} \left( \delta Z_{H_i}^{(1)} \right)^2. \quad (4.38)$$

Unter Verwendung, daß die unitäre Matrix  $\mathcal{U}_{\phi^0}$  die Massenmatrix  $\mathcal{M}_{\phi^0}$  zu  $\mathcal{D}_{\phi^0}$  diagonalisiert (4.29), erhält man für die renormierten Ein-Schleifen-Higgs-Selbstenergien der CP-geraden ungeladenen Higgs-Felder

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}_{\mathbf{H}^0 \mathbf{h}^0}^{(1)}(k^2) &= \Sigma_{\mathbf{H}^0 \mathbf{h}^0}^{(1)}(k^2) + \frac{1}{2} k^2 (\delta \tilde{\mathcal{Z}}_{\phi^0}^+ + \delta \tilde{\mathcal{Z}}_{\phi^0}) \\ &\quad - \frac{1}{2} (\delta \tilde{\mathcal{Z}}_{\phi^0}^+ \mathcal{D}_{\phi^0} + \mathcal{D}_{\phi^0} \delta \tilde{\mathcal{Z}}_{\phi^0}) - \mathcal{U}_{\phi^0} \delta \mathcal{M}_{\phi^0}^{(1)} \mathcal{U}_{\phi^0}^+ \end{aligned} \quad (4.39)$$

und für die dazugehörigen renormierten Zwei-Schleifen-Higgs-Selbstenergien

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}_{\mathbf{H}^0 \mathbf{h}^0}^{(2)}(k^2) &= \Sigma_{\mathbf{H}^0 \mathbf{h}^0}^{(2)}(k^2) + \frac{1}{2} k^2 (\Delta \tilde{\mathcal{Z}}_{\phi^0}^+ + \Delta \tilde{\mathcal{Z}}_{\phi^0} + \frac{1}{2} \delta \tilde{\mathcal{Z}}_{\phi^0}^+ \delta \tilde{\mathcal{Z}}_{\phi^0}) \\ &\quad - \frac{1}{2} (\Delta \tilde{\mathcal{Z}}_{\phi^0}^+ \mathcal{D}_{\phi^0} + \mathcal{D}_{\phi^0} \Delta \tilde{\mathcal{Z}}_{\phi^0} + \frac{1}{2} \delta \tilde{\mathcal{Z}}_{\phi^0}^+ \mathcal{D}_{\phi^0} \delta \tilde{\mathcal{Z}}_{\phi^0}) \\ &\quad - \mathcal{U}_{\phi^0} \delta \mathcal{M}_{\phi^0}^{(2)} \mathcal{U}_{\phi^0}^+ - \frac{1}{2} (\delta \tilde{\mathcal{Z}}_{\phi^0}^+ \mathcal{U}_{\phi^0} \delta \mathcal{M}_{\phi^0}^{(1)} \mathcal{U}_{\phi^0}^+ + \mathcal{U}_{\phi^0} \delta \mathcal{M}_{\phi^0}^{(1)} \mathcal{U}_{\phi^0}^+ \delta \tilde{\mathcal{Z}}_{\phi^0}). \end{aligned} \quad (4.40)$$

Zur Abkürzung wurde die Schreibweise

$$\delta \tilde{\mathcal{Z}}_{\phi^0} = \mathcal{U}_{\phi^0} \delta \mathcal{Z}_H^{(1)} \mathcal{U}_{\phi^0}^+ \quad \text{mit} \quad \delta \mathcal{Z}_H^{(1)} = \begin{pmatrix} \delta Z_{H_1}^{(1)} & 0 \\ 0 & \delta Z_{H_2}^{(1)} \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

$$\Delta \tilde{\mathcal{Z}}_{\phi^0} = \mathcal{U}_{\phi^0} \Delta \mathcal{Z}_H \mathcal{U}_{\phi^0}^+ \quad \text{mit} \quad \Delta \mathcal{Z}_H = \begin{pmatrix} \Delta Z_{H_1} & 0 \\ 0 & \Delta Z_{H_2} \end{pmatrix} \quad (4.42)$$

verwendet.

Entsprechend erhält man für die renormierten Selbstenergien der ungeladenen, CP-ungeraden Higgs-Felder auf Ein-Schleifen-Niveau folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}_{\mathbf{G}^0 \mathbf{A}^0}^{(1)}(k^2) &= \Sigma_{\mathbf{G}^0 \mathbf{A}^0}^{(1)}(k^2) + \frac{1}{2} k^2 (\delta \tilde{\mathcal{Z}}_{\zeta^0}^+ + \delta \tilde{\mathcal{Z}}_{\zeta^0}) \\ &\quad - \frac{1}{2} (\delta \tilde{\mathcal{Z}}_{\zeta^0}^+ \mathcal{D}_{\zeta^0} + \mathcal{D}_{\zeta^0} \delta \tilde{\mathcal{Z}}_{\zeta^0}) - \mathcal{U}_{\zeta^0} \delta \mathcal{M}_{\zeta^0} \mathcal{U}_{\zeta^0}^+. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Die dazugehörigen renormierten Zwei-Schleifen-Selbstenergien sind:

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}_{\mathbf{G}^0 \mathbf{A}^0}^{(2)}(k^2) &= \Sigma_{\mathbf{G}^0 \mathbf{A}^0}^{(2)}(k^2) + \frac{1}{2} k^2 (\Delta \tilde{\mathcal{Z}}_{\zeta^0}^+ + \Delta \tilde{\mathcal{Z}}_{\zeta^0} + \frac{1}{2} \delta \tilde{\mathcal{Z}}_{\zeta^0}^+ \delta \tilde{\mathcal{Z}}_{\zeta^0}) \\ &\quad - \frac{1}{2} (\Delta \tilde{\mathcal{Z}}_{\zeta^0}^+ \mathcal{D}_{\zeta^0} + \mathcal{D}_{\zeta^0} \Delta \tilde{\mathcal{Z}}_{\zeta^0} + \frac{1}{2} \delta \tilde{\mathcal{Z}}_{\zeta^0}^+ \mathcal{D}_{\zeta^0} \delta \tilde{\mathcal{Z}}_{\zeta^0}) \\ &\quad - \mathcal{U}_{\zeta^0} \delta \mathcal{M}_{\zeta^0}^{(2)} \mathcal{U}_{\zeta^0}^+ + \frac{1}{2} (\delta \tilde{\mathcal{Z}}_{\zeta^0}^+ \mathcal{U}_{\zeta^0} \delta \mathcal{M}_{\zeta^0}^{(1)} \mathcal{U}_{\zeta^0}^+ + \mathcal{U}_{\zeta^0} \delta \mathcal{M}_{\zeta^0}^{(1)} \mathcal{U}_{\zeta^0}^+ \delta \tilde{\mathcal{Z}}_{\zeta^0}). \end{aligned} \quad (4.44)$$

#### 4. Der Higgs-Sektor im reellen MSSM

Dabei wurde verwendet, daß die Massenmatrix der CP-ungeraden Higgs-Felder  $\mathcal{M}_{\zeta^0}$  (4.12) durch die unitäre Matrix  $\mathcal{U}_{\zeta^0}$  (4.26) zu  $\mathcal{D}_{\zeta^0}$  diagonalisiert (4.30) wird. Außerdem wurde die Schreibweise

$$\delta\tilde{\mathcal{Z}}_{\zeta^0} = \mathcal{U}_{\zeta^0} \delta\mathcal{Z}_H^{(1)} \mathcal{U}_{\zeta^0}^+, \quad \Delta\tilde{\mathcal{Z}}_{\zeta^0} = \mathcal{U}_{\zeta^0} \Delta\mathcal{Z}_H \mathcal{U}_{\zeta^0}^+ \quad (4.45)$$

eingeführt mit  $\delta\mathcal{Z}_H^{(1)}$  und  $\Delta\mathcal{Z}_H$ , wie sie in (4.41) und (4.42) angegeben sind.

#### 4.2.2. Higgs-Massenmatrizen unter Berücksichtigung höherer Ordnungen

In Abschnitt 4.2.1 wird die Massenmatrix  $\mathcal{M}_{\phi^0}$ , welche die nackten Parameter enthält, mit Hilfe der renormierten Massenmatrix und den dazugehörigen Countertermen eliminiert (4.34). Zur Bestimmung der expliziten Gestalt dieser Counterterme müssen die nackten Parameter im Higgs-Potential (4.2) durch renormierte Parameter mit den dazugehörigen Countertermen ersetzt und der bilineare Anteil Ordnung für Ordnung berechnet werden.

#### Tadpol-Parameter

Bei Berücksichtigung höherer Ordnungen im Higgs-Potential ändert sich insbesondere neben dem bilinearen Anteil auch der in den Higgs-Feldern lineare Beitrag des Higgs-Potentials. Die notwendige Bedingung für ein Minimum des Higgs-Potentials ist durch (4.3) gegeben. Der lineare Beitrag des Higgs-Potentials spielt also bei der Bestimmung der Higgs-Vakuumpzustände eine entscheidende Rolle.

Lineare Terme höherer Ordnung im Higgs-Potential werden zum einen durch Ein-Punkt-Vertex-Diagramme der Felder  $\phi_1^0$  bzw.  $\phi_2^0$  erzeugt. Diese Tadpol-Beiträge  $i$ -ter Ordnung werden mit  $T_{\phi_1^0}^{(i)}$  und  $T_{\phi_2^0}^{(i)}$  bezeichnet. Zum anderen bilden Counterterme der Parameter des Higgs-Potentials und Z-Faktoren der Higgs-Felder Terme höherer Ordnung.

Anstatt alle ursprünglichen Parameter im linearen Anteil des Higgs-Potentials zu renormieren, ist es sinnvoll, zwei neue Parameter einzuführen, die Tadpol-Parameter  $t_{\phi_1^0}$  und  $t_{\phi_2^0}$ , und diese zu renormieren:

$$t_{\phi_1^0} = - \left( \sqrt{2}(m_1^2 + |\mu|^2)v_1 - \sqrt{2}m_3^2v_2 + \frac{v_1(g^2 + g'^2)(v_1^2 - v_2^2)}{2\sqrt{2}} \right), \quad (4.46)$$

$$t_{\phi_2^0} = - \left( -\sqrt{2}m_3^2v_1 + \sqrt{2}(m_2^2 + |\mu|^2)v_2 - \frac{v_2(g^2 + g'^2)(v_1^2 - v_2^2)}{2\sqrt{2}} \right). \quad (4.47)$$

Durch die Tadpol-Parameter  $t_{\phi_1^0}$  und  $t_{\phi_2^0}$  werden die Parameter  $m_1^2$  und  $m_2^2$  eliminiert. Die Gleichungen (4.46) und (4.47) entsprechen auf Born-Niveau den Gleichungen (4.15) und (4.16), wobei die Tadpol-Parameter auf Born-Niveau verschwinden.

## 4.2. Der Higgs-Sektor in höheren Ordnungen

Führt man die Parameter-Renormierung gemäß Kapitel 3.2 durch,

$$t_{\phi_i^0} \rightarrow t_{\phi_i^0} + \delta t_{\phi_i^0}^{(1)} + \delta t_{\phi_i^0}^{(2)} \quad \text{mit} \quad i = 1, 2, \quad (4.48)$$

und verwendet (4.36) und (4.37) zur Feldrenormierung, so kann man den linearen Anteil des Higgs-Potentials – bis zur Zwei-Schleifen-Ordnung entwickelt – folgendermaßen schreiben:

$$V_{\text{Higgs}}|_{\text{lin}} = \sum_{i=1}^n \left( -\delta t_{\phi_i^0}^{(1)} - T_{\phi_i^0}^{(1)} - \delta t_{\phi_i^0}^{(2)} - \frac{1}{2} \delta t_{\phi_i^0}^{(1)} \delta Z_{H_i}^{(1)} - T_{\phi_i^0}^{(2)} \right) \phi_i^0, \quad (4.49)$$

Hier wurde schon verwendet, daß  $t_{\phi_i^0}$  auf Born-Niveau verschwindet. Damit  $v_1$  und  $v_2$  auch in Ein- und Zwei-Schleifen-Ordnung die Higgs-Vakuumerwartungswerte sind, muß der in den  $\phi^0$ -,  $\zeta^0$ - und  $\phi^\pm$ -Feldern lineare Anteil des Higgs-Potentials verschwinden, so daß Gleichung (4.3) an den Stellen  $v_1$  und  $v_2$  erfüllt ist. Aus dieser Bedingung erhält man mit (4.49) neben den schon von der Betrachtung auf Born-Niveau bekannten Born-Bedingungen  $t_{\phi_i^0} = 0$  die folgenden Forderungen mit  $i = 1, 2$ :

$$T_{\phi_i^0}^{(1)} + \delta t_{\phi_i^0}^{(1)} = 0, \quad (4.50)$$

$$T_{\phi_i^0}^{(2)} + \delta t_{\phi_i^0}^{(2)} + \frac{1}{2} \delta t_{\phi_i^0}^{(1)} \delta Z_{H_i}^{(1)} = 0. \quad (4.51)$$

### Massenmatrizen mit neuem Parameter-Satz

Die Massenmatrix  $\mathcal{M}_{\phi^0}$ , die in (4.11) gegeben ist, kann auch durch Parameter ausgedrückt werden, die als physikalische Massen und Mischungswinkel interpretiert werden können. Dabei wird ein Wechsel vom Satz der fundamentalen Parameter

$$m_1^2, \quad m_2^2, \quad m_3^2, \quad g', \quad g, \quad v_1, \quad v_2 \quad (4.52)$$

zum Parameter-Satz

$$t_{\phi_1^0}, \quad t_{\phi_2^0}, \quad M_{A^0}^2, \quad e, \quad M_W, \quad M_Z, \quad \tan \beta \quad (4.53)$$

durchgeführt.  $t_{\phi_1^0}$ ,  $t_{\phi_2^0}$  sind die in (4.46) und (4.47) eingeführten Tadpol-Parameter.  $M_{A^0}$  ist die Masse des  $A^0$ -Bosons (4.30).  $e$  bezeichnet die Elementarladung,

$$e = \frac{g'g}{\sqrt{g'^2 + g^2}}. \quad (4.54)$$

Anstelle der Masse des Z-Bosons  $M_Z$  in (4.23) oder der des W-Bosons  $M_W$  in (4.24) kann auch der elektroschwache Mischungswinkel durch  $\cos \theta_W$ ,

$$\cos \theta_W = \frac{g}{\sqrt{g'^2 + g^2}} = \frac{M_W}{M_Z}, \quad (4.55)$$

#### 4. Der Higgs-Sektor im reellen MSSM

eingeführt werden. Die Higgs-Vakuumerwartungswerte  $v_1$  und  $v_2$  kann man mit Hilfe von  $\tan \beta$  (4.22) und  $M_Z$  im Ausdruck für die Massenmatrix  $\mathcal{M}_{\phi^0}$  (4.11) eliminieren.

Mit diesen Ersetzungen nimmt die Massenmatrix  $\mathcal{M}_{\phi^0}$  folgende Form an:

$$\mathcal{M}_{\phi^0} = \begin{pmatrix} M_{\phi^0_{11}} & M_{\phi^0_{12}} \\ M_{\phi^0_{21}} & M_{\phi^0_{22}} \end{pmatrix}, \quad (4.56)$$

$$M_{\phi^0_{11}} = M_Z^2 \cos^2 \beta + \frac{M_{A^0}^2}{\cos^2(\beta - \beta_B)} \sin^2 \beta - e \frac{t_{\phi_1^0} \cos \beta_B (\cos \beta \cos \beta_B + 2 \sin \beta \sin \beta_B)}{2M_Z \cos \theta_W \sin \theta_W \cos^2(\beta - \beta_B)} \\ + e \frac{t_{\phi_2^0} \cos^2 \beta_B \sin \beta}{2M_Z \cos \theta_W \sin \theta_W \cos^2(\beta - \beta_B)}, \quad (4.57)$$

$$M_{\phi^0_{12}} = -\left( \frac{M_{A^0}^2}{\cos^2(\beta - \beta_B)} + M_Z^2 \right) \sin \beta \cos \beta - e \frac{t_{\phi_1^0} \sin \beta \sin^2 \beta_B + t_{\phi_2^0} \cos \beta \cos^2 \beta_B}{2M_Z \cos \theta_W \sin \theta_W \cos^2(\beta - \beta_B)}, \quad (4.58)$$

$$M_{\phi^0_{21}} = M_{\phi^0_{12}}, \quad (4.59)$$

$$M_{\phi^0_{22}} = \frac{M_{A^0}^2}{\cos^2(\beta - \beta_B)} \cos^2 \beta + M_Z^2 \sin^2 \beta + e \frac{t_{\phi_1^0} \cos \beta \sin^2 \beta_B}{2M_Z \cos \theta_W \sin \theta_W \cos^2(\beta - \beta_B)} \\ - e \frac{t_{\phi_2^0} (\sin \beta \sin^2 \beta_B + \cos \beta \sin 2\beta_B)}{2M_Z \cos \theta_W \sin \theta_W \cos^2(\beta - \beta_B)}. \quad (4.60)$$

Über die Masse des  $A^0$ -Bosons,  $M_{A^0}^2 = (\mathcal{U}_{\zeta^0} \mathcal{M}_{\zeta^0} \mathcal{U}_{\zeta^0}^\dagger)_{22}$  (vgl. (4.30)), wurde der Mischungswinkel  $\beta_B$  in den Ausdruck für die Massenmatrix  $\mathcal{M}_{\phi^0}$  eingeführt. Auf Born-Niveau nimmt  $\beta_B$  den Wert von  $\beta$  an. Da in dieser Arbeit das Renormierungsschema so gewählt wurde, daß die Mischungsmatrix  $\mathcal{U}_{\zeta^0}$  nicht renormiert wird, erhält  $\beta_B$  im Gegensatz zu  $\beta$  bzw.  $\tan \beta$  keinen Counterterm.

#### Renormierte Massenmatrizen und dazugehörige Countertermmatrizen

Ausgangspunkt zur Herleitung der renormierten Massenmatrix und der dazugehörigen Countertermmatrizen ist die Massenmatrix  $\mathcal{M}_{\phi^0}$  aus Gleichung (4.56). Die zu renormierenden Parameter in dieser Matrix werden durch renormierte Parameter und Counterterme bis zur Zwei-Schleifen-Ordnung ersetzt,

$$M_{A^0}^2 \rightarrow M_{A^0}^2 + \delta M_{A^0}^2{}^{(1)} + \delta M_{A^0}^2{}^{(2)}, \quad (4.61)$$

$$M_Z^2 \rightarrow M_Z^2 + \delta M_Z^2{}^{(1)} + \delta M_Z^2{}^{(2)}, \quad (4.62)$$

$$M_W^2 \rightarrow M_W^2 + \delta M_W^2{}^{(1)} + \delta M_W^2{}^{(2)}, \quad (4.63)$$

$$t_{\phi_1^0} \rightarrow t_{\phi_1^0} + \delta t_{\phi_1^0}{}^{(1)} + \delta t_{\phi_1^0}{}^{(2)}, \quad (4.64)$$



## 4.2. Der Higgs-Sektor in höheren Ordnungen

$$t_{\phi_2^0} \rightarrow t_{\phi_2^0} + \delta t_{\phi_2^0}^{(1)} + \delta t_{\phi_2^0}^{(2)} , \quad (4.65)$$

$$\tan \beta \rightarrow \tan \beta + \delta \tan^{(1)} \beta + \delta \tan^{(2)} \beta , \quad (4.66)$$

$$e \rightarrow (1 + \delta Z_e^{(1)} + \delta Z_e^{(2)})e . \quad (4.67)$$

Der erhaltene Ausdruck wird entwickelt, so daß die Matrix in eine renormierte Matrix  $\mathcal{M}_{\phi^0}$ , eine Countertermmatrix von Ein-Schleifen-Ordnung  $\delta\mathcal{M}_{\phi^0}^{(1)}$  und eine Countertermmatrix von Zwei-Schleifen-Ordnung  $\delta\mathcal{M}_{\phi^0}^{(2)}$  aufgeteilt werden kann:

$$\mathcal{M}_{\phi^0} \rightarrow \mathcal{M}_{\phi^0} + \delta\mathcal{M}_{\phi^0}^{(1)} + \delta\mathcal{M}_{\phi^0}^{(2)} , \quad (4.68)$$

$$\mathcal{M}_{\phi^0} = \begin{pmatrix} M_Z^2 \cos^2 \beta + M_{A^0}^2 \sin^2 \beta & -(M_{A^0}^2 + M_Z^2) \sin \beta \cos \beta \\ -(M_{A^0}^2 + M_Z^2) \sin \beta \cos \beta & M_{A^0}^2 \cos^2 \beta + M_Z^2 \sin^2 \beta \end{pmatrix} , \quad (4.69)$$

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{M}_{\phi^0}^{(1)} &= \begin{pmatrix} \sin^2 \beta & -\sin \beta \cos \beta \\ -\sin \beta \cos \beta & \cos^2 \beta \end{pmatrix} \delta M_{A^0}^2{}^{(1)} + \begin{pmatrix} \cos^2 \beta & -\sin \beta \cos \beta \\ -\sin \beta \cos \beta & \sin^2 \beta \end{pmatrix} \delta M_Z^2{}^{(1)} \\ &+ \begin{pmatrix} 2 \cos^3 \beta \sin \beta (M_{A^0}^2 - M_Z^2) & -\cos^2 \beta \cos(2\beta) (M_{A^0}^2 + M_Z^2) \\ -\cos^2 \beta \cos(2\beta) (M_{A^0}^2 + M_Z^2) & -2 \cos^3 \beta \sin \beta (M_{A^0}^2 - M_Z^2) \end{pmatrix} \delta \tan^{(1)} \beta \\ &+ \frac{e}{2M_Z \cos \theta_W \sin \theta_W} \begin{pmatrix} -\cos \beta (1 + \sin^2 \beta) & -\sin^3 \beta \\ -\sin^3 \beta & \cos \beta \sin^2 \beta \end{pmatrix} \delta t_{\phi_1^0}^{(1)} \\ &+ \frac{e}{2M_Z \cos \theta_W \sin \theta_W} \begin{pmatrix} \cos^2 \beta \sin \beta & -\cos^3 \beta \\ -\cos^3 \beta & -(1 + \cos^2 \beta) \sin \beta \end{pmatrix} \delta t_{\phi_2^0}^{(1)} , \end{aligned} \quad (4.70)$$

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{M}_{\phi^0}^{(2)} &= \begin{pmatrix} \sin^2 \beta & -\sin \beta \cos \beta \\ -\sin \beta \cos \beta & \cos^2 \beta \end{pmatrix} \delta M_{A^0}^2{}^{(2)} + \begin{pmatrix} \cos^2 \beta & -\sin \beta \cos \beta \\ -\sin \beta \cos \beta & \sin^2 \beta \end{pmatrix} \delta M_Z^2{}^{(2)} \\ &+ \begin{pmatrix} 2 \cos^3 \beta \sin \beta (M_{A^0}^2 - M_Z^2) & -\cos^2 \beta \cos(2\beta) (M_{A^0}^2 + M_Z^2) \\ -\cos^2 \beta \cos(2\beta) (M_{A^0}^2 + M_Z^2) & -2 \cos^3 \beta \sin \beta (M_{A^0}^2 - M_Z^2) \end{pmatrix} \delta \tan^{(2)} \beta \\ &+ \frac{e}{2M_Z \cos \theta_W \sin \theta_W} \begin{pmatrix} -\cos \beta (1 + \sin^2 \beta) & -\sin^3 \beta \\ -\sin^3 \beta & \cos \beta \sin^2 \beta \end{pmatrix} \delta t_{\phi_1^0}^{(2)} \\ &+ \frac{e}{2M_Z \cos \theta_W \sin \theta_W} \begin{pmatrix} \cos^2 \beta \sin \beta & -\cos^3 \beta \\ -\cos^3 \beta & -(1 + \cos^2 \beta) \sin \beta \end{pmatrix} \delta t_{\phi_2^0}^{(2)} \\ &+ \begin{pmatrix} 2 \cos^3 \beta \sin \beta & -\cos^2 \beta \cos(2\beta) \\ -\cos^2 \beta \cos(2\beta) & -2 \cos^3 \beta \sin \beta \end{pmatrix} \delta M_{A^0}^2{}^{(1)} \delta \tan^{(1)} \beta \end{aligned}$$

bitte umblättern!

#### 4. Der Higgs-Sektor im reellen MSSM

$$\begin{aligned}
& + \begin{pmatrix} -2 \cos^3 \beta \sin \beta & -\cos^2 \beta \cos(2\beta) \\ -\cos^2 \beta \cos(2\beta) & 2 \cos^3 \beta \sin \beta \end{pmatrix} \delta M_Z^{2(1)} \delta \tan^{(1)} \beta \\
& + \left[ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\cos^4 \beta (1 - 3 \cos(2\beta)) & \cos^3 \beta \sin \beta (1 + 3 \cos(2\beta)) \\ \cos^3 \beta \sin \beta (1 + 3 \cos(2\beta)) & 6 \cos^4 \beta \sin^2 \beta \end{pmatrix} M_{A^0}^2 \right. \\
& + \left. \begin{pmatrix} \cos^4 \beta (1 - 2 \cos(2\beta)) & \cos^3 \beta \sin \beta (1 + 2 \cos(2\beta)) \\ \cos^3 \beta \sin \beta (1 + 2 \cos(2\beta)) & -\cos^4 \beta (1 - 2 \cos(2\beta)) \end{pmatrix} M_Z^2 \right] (\delta \tan^{(1)} \beta)^2 \\
& + \left[ \frac{e}{2M_Z \cos \theta_W \sin \theta_W} \begin{pmatrix} -\cos^4 \beta \sin \beta & -\cos^3 \beta \sin^2 \beta \\ -\cos^3 \beta \sin^2 \beta & -\cos^2 \beta \sin^3 \beta \end{pmatrix} \delta \tan^{(1)} \beta \right. \\
& + \left. \begin{pmatrix} -\cos \beta (1 + \sin^2 \beta) & -\sin^3 \beta \\ -\sin^3 \beta & \cos \beta \sin^2 \beta \end{pmatrix} \left( \frac{e}{2M_Z \cos \theta_W \sin \theta_W} \delta Z_e^{(1)} \right. \right. \\
& - \left. \left. \frac{e \cos \theta_W}{4M_Z^3 \sin^3 \theta_W} \delta M_Z^{2(1)} + \frac{e(\cos^2 \theta_W - \sin^2 \theta_W)}{4M_Z^3 \cos^3 \theta_W \sin^3 \theta_W} \delta M_W^{2(1)} \right) \right] \delta t_{\phi_1}^{(1)} \\
& + \left[ \frac{e}{2M_Z \cos \theta_W \sin \theta_W} \begin{pmatrix} \cos^5 \beta & \cos^4 \beta \sin \beta \\ \cos^4 \beta \sin \beta & \cos^3 \beta \sin^2 \beta \end{pmatrix} \delta \tan^{(1)} \beta \right. \\
& + \left. \begin{pmatrix} \cos^2 \beta \sin \beta & -\cos^3 \beta \\ -\cos^3 \beta & -(1 + \cos^2 \beta) \sin \beta \end{pmatrix} \left( \frac{e}{2M_Z \cos \theta_W \sin \theta_W} \delta Z_e^{(1)} \right. \right. \\
& - \left. \left. \frac{e \cos \theta_W}{4M_Z^3 \sin^3 \theta_W} \delta M_Z^{2(1)} + \frac{e(\cos^2 \theta_W - \sin^2 \theta_W)}{4M_Z^3 \cos^3 \theta_W \sin^3 \theta_W} \delta M_W^{2(1)} \right) \right] \delta t_{\phi_2}^{(1)} , \tag{4.71}
\end{aligned}$$

wobei hier schon  $t_{\phi_{1,2}}^0 = 0$  und  $\tan \beta_B = \tan \beta$  verwendet wurde.

In expliziten Rechnungen werden die Tadpole-Parameter  $t_{\phi_{1,2}}^0$  durch die Tadpole-Parameter  $t_{H^0, h^0}$  ersetzt,

$$t_{\phi_1}^0 = \cos \alpha t_{H^0} - \sin \alpha t_{h^0} , \tag{4.72}$$

$$t_{\phi_2}^0 = \sin \alpha t_{H^0} + \cos \alpha t_{h^0} , \tag{4.73}$$

mit dem Winkel  $\alpha$  aus (4.33).

### 4.3. Renormierte Selbstenergien der CP-geraden neutralen Higgs-Bosonen

Während in Kapitel 4.2 der Higgs-Sektor der ungeladenen Felder, speziell der CP-geraden neutralen Higgs-Felder, allgemein behandelt wurde, wird in diesem Kapitel auf die explizite

### 4.3. Renormierte Selbstenergien der CP-geraden neutralen Higgs-Bosonen

Berechnung der Selbstenergien eingegangen. Dazu gehört insbesondere die Festlegung der Renormierungskonstanten und die Identifizierung der dominanten Zwei-Schleifen-Terme.

#### 4.3.1. Ein-Schleifen-Ordnung $\mathcal{O}(\alpha)$

Die Berechnung der Ein-Schleifen-Selbstenergien (4.39) wird exakt durchgeführt. Zur Berechnung der Selbstenergie (4.39) ist die Festlegung der Counterterme, die in den Abschnitten 4.2.1 und 4.2.2 eingeführt werden, notwendig:

- Der Counterterm zum Quadrat der A-Boson-Masse  $\delta M_{A^0}^2{}^{(1)}$  wird durch die On-Shell-Bedingung,

$$\text{Re}\hat{\Sigma}_{\mathbf{G}^0\mathbf{A}^0}^{(1)}(M_{A^0}^2)|_{22} = 0, \quad (4.74)$$

festgelegt, wobei  $\hat{\Sigma}_{\mathbf{G}^0\mathbf{A}^0}^{(1)}$  durch (4.43) gegeben ist. Der Realteil des inversen Teilchenpropagators des A-Bosons hat dann eine Nullstelle bei  $M_{A^0}^2$ .  $M_{A^0}$  besitzt somit auf Ein-Schleifen-Niveau die Bedeutung der physikalischen A-Boson-Masse<sup>1</sup>. Für den A-Boson-Massen-Counterterm ergibt sich damit:

$$\delta M_{A^0}^2{}^{(1)} = (\mathcal{U}_{\zeta^0}\delta\mathcal{M}_{\zeta^0}^{(1)}\mathcal{U}_{\zeta^0}^+)_{22} = \text{Re}\Sigma_{\mathbf{G}^0\mathbf{A}^0}^{(1)}(M_{A^0}^2)|_{22} = \text{Re}\Sigma_{A^0A^0}^{(1)}(M_{A^0}^2). \quad (4.75)$$

- Der Counterterm zur Z-Boson-Masse wird ebenfalls on-shell festgelegt, d.h. der Realteil des inversen Propagators des Z-Bosons soll eine Nullstelle bei  $M_Z^2$  haben, so daß  $M_Z$  die Bedeutung der physikalischen Masse hat:

$$\text{Re}\hat{\Sigma}_{ZZ}^{(1)}(M_Z^2) = 0. \quad (4.76)$$

Die renormierte Z-Selbstenergie  $\hat{\Sigma}_{ZZ}$  ist dabei gegeben durch:

$$\hat{\Sigma}_{ZZ}^{(1)}(k^2) = \Sigma_{ZZ}^{(1)}(k^2) + (k^2 - M_Z^2)\delta Z_{ZZ}^{(1)} - \delta M_Z^2{}^{(1)}. \quad (4.77)$$

Das Quadrat der Z-Boson-Masse wurde durch das renormierte Massenquadrat mit Counterterm,

$$M_Z^2 \rightarrow M_Z^2 + \delta M_Z^2{}^{(1)}, \quad (4.78)$$

und die nackten Felder der ungeladenen Eichbosonen  $A_\mu$  und  $Z_\mu$  wurden durch die renormierten Felder mit Z-Faktoren,

$$\begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{pmatrix} \rightarrow \left( \mathbb{1} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \delta Z_{\gamma\gamma}^{(1)} & \delta Z_{\gamma Z}^{(1)} \\ \delta Z_{Z\gamma}^{(1)} & \delta Z_{ZZ}^{(1)} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{pmatrix} \quad (4.79)$$

<sup>1</sup>In höheren Ordnungen, die über das Ein-Schleifen-Niveau hinausgehen, liefert diese Bedingung für instabile Teilchen eichabhängige Massen [76]. In diesem Fall kann der Realteil des Pols des Propagators als physikalische Masse interpretiert werden. Der Unterschied in den Massen beider Betrachtungsweisen ist von der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha^2)$ .

#### 4. Der Higgs-Sektor im reellen MSSM

in der Lagrangedichte ersetzt. Damit erhält man für den Counterterm des Quadrats der Z-Boson-Masse folgendes:

$$\delta M_Z^2{}^{(1)} = \text{Re} \Sigma_{ZZ}^{(1)}(M_Z^2) . \quad (4.80)$$

- Die Tadpol-Parameter werden analog zu (4.50) durch die Bedingungen

$$T_{\phi_1^0}^{(1)} + \delta t_{\phi_1^0}^{(1)} = 0 , \quad (4.81)$$

$$T_{\phi_2^0}^{(1)} + \delta t_{\phi_2^0}^{(1)} = 0 \quad (4.82)$$

bestimmt, so daß, wie in Abschnitt 4.2.2 beschrieben, die Parameter  $v_1$  und  $v_2$  auch in Ein-Schleifen-Ordnung die Bedeutung der Higgs-Vakuumerwartungswerte haben.  $T_{\phi_1^0}^{(1)}$  bzw.  $T_{\phi_2^0}^{(1)}$  setzt sich aus allen Ein-Schleifen-Beiträgen der Ein-Punkt-Vertexdiagramme des  $\phi_1^0$ - bzw.  $\phi_2^0$ -Felds zusammen. Die Tadpol-Counterterme sind dann:

$$\delta t_{\phi_1^0}^{(1)} = -T_{\phi_1^0}^{(1)} , \quad (4.83)$$

$$\delta t_{\phi_2^0}^{(1)} = -T_{\phi_2^0}^{(1)} . \quad (4.84)$$

- Die Z-Faktoren  $\delta Z_{H_1}^{(1)}$  und  $\delta Z_{H_2}^{(1)}$  werden im  $\overline{\text{DR}}$ -Schema (siehe Kapitel 3.3) festgelegt:

$$\delta Z_{H_1}^{(1)} = \frac{1}{\cos 2\alpha} \left( \sin^2 \alpha \Delta_{h^0 h^0} - \cos^2 \alpha \Delta_{H^0 H^0} \right) , \quad (4.85)$$

$$\delta Z_{H_2}^{(1)} = \frac{1}{\cos 2\alpha} \left( \sin^2 \alpha \Delta_{H^0 H^0} - \cos^2 \alpha \Delta_{h^0 h^0} \right) \quad (4.86)$$

mit

$$\Delta_{h^0 h^0} = \text{Re} \frac{\partial \Sigma_{h^0 h^0}^{(1)}(k^2)}{\partial k^2} \Big|_{k^2=M_{h^0}^2} \Big|_{\text{div.}} , \quad \Delta_{H^0 H^0} = \text{Re} \frac{\partial \Sigma_{H^0 H^0}^{(1)}(k^2)}{\partial k^2} \Big|_{k^2=M_{H^0}^2} \Big|_{\text{div.}} . \quad (4.87)$$

Dabei wird der divergente Anteil der Ableitung der Selbstenergien herausprojiziert, indem die Zwei-Punkt-Integrale  $A$  und  $B_0$  (siehe (C.10) und (C.11)) durch ihren divergenten Anteil (3.7) ersetzt werden:

$$A(m)|_{\text{div.}} = m^2 \Delta , \quad (4.88)$$

$$B_0(p^2, m_1, m_2)|_{\text{div.}} = \Delta . \quad (4.89)$$

Diese Festlegung führt zu einem stabileren Verhalten in Bereichen von Schwellen und vermeidet damit unphysikalisch große Korrekturen [23, 28].

- Ebenfalls wird im  $\overline{\text{DR}}$ -Schema der Counterterm zu  $\tan \beta$  festgelegt,

$$\delta \tan^{(1)} \beta = \delta^{(1)} \left( \frac{v_2}{v_1} \right) = \tan \beta \left( \frac{1}{2} (\delta Z_{H_2}^{(1)} - \delta Z_{H_1}^{(1)}) + \frac{\delta v_2^{(1)}}{v_2} - \frac{\delta v_1^{(1)}}{v_1} \right) \quad (4.90)$$

### 4.3. Renormierte Selbstenergien der CP-geraden neutralen Higgs-Bosonen

mit

$$v_i \rightarrow \sqrt{Z_{H_i}}(v_i + \delta v_i^{(1)} + \dots) \simeq v_i + \delta v_i^{(1)} + \frac{1}{2}v_i \delta Z_{H_i}^{(1)}, \quad i = 1, 2. \quad (4.91)$$

Die divergenten Anteile von  $\delta v_1^{(1)}/v_1$  und  $\delta v_2^{(1)}/v_2$  sind gleich (siehe auch [20, 21]). Damit ist der Counterterm zu  $\tan\beta$  über die Z-Faktoren  $\delta Z_{H_1}^{(1)}$  und  $\delta Z_{H_2}^{(1)}$  gemäß (4.85) und (4.86) bestimmt. Gegenüber einer On-Shell-Bedingung nach [20, 21] bietet eine  $\overline{\text{DR}}$ -Bedingung für  $\tan\beta$  den Vorteil, daß sich dadurch numerische Instabilitäten vermeiden lassen und daß sie zu einem prozessunabhängigen und auf Ein-Schleifen-Niveau innerhalb der Klasse der  $R_\xi$ -Eichungen eichunabhängigen Counterterm führt [23, 28, 77].

#### 4.3.2. Zwei-Schleifen-Ordnung $\mathcal{O}(\alpha_t\alpha_s)$ , $\mathcal{O}(\alpha_b\alpha_s)$

Die dominanten Beiträge zur Korrektur des Ein-Schleifen-Ergebnisses werden durch die starke Wechselwirkung verursacht. Deswegen werden in folgendem nur Zwei-Schleifen-Korrekturen der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha\alpha_s)$  betrachtet.

Auf Ein-Schleifen-Niveau liefern Terme proportional zum Quadrat der Top-Yukawa-Kopplung  $\lambda_t^2$  die größten Beiträge, da

$$\lambda_t \sim \frac{m_t}{\sin\beta} \quad (4.92)$$

und der Wert der Top-Quark-Masse  $m_t$  groß gegenüber den Werten der Massen der standardmodellartigen Teilchen ist. Für große  $\tan\beta$  können allerdings die Beiträge der Terme proportional zum Quadrat der Bottom-Yukawa-Kopplung  $\lambda_b^2$  von gleicher Größenordnung sein, weil

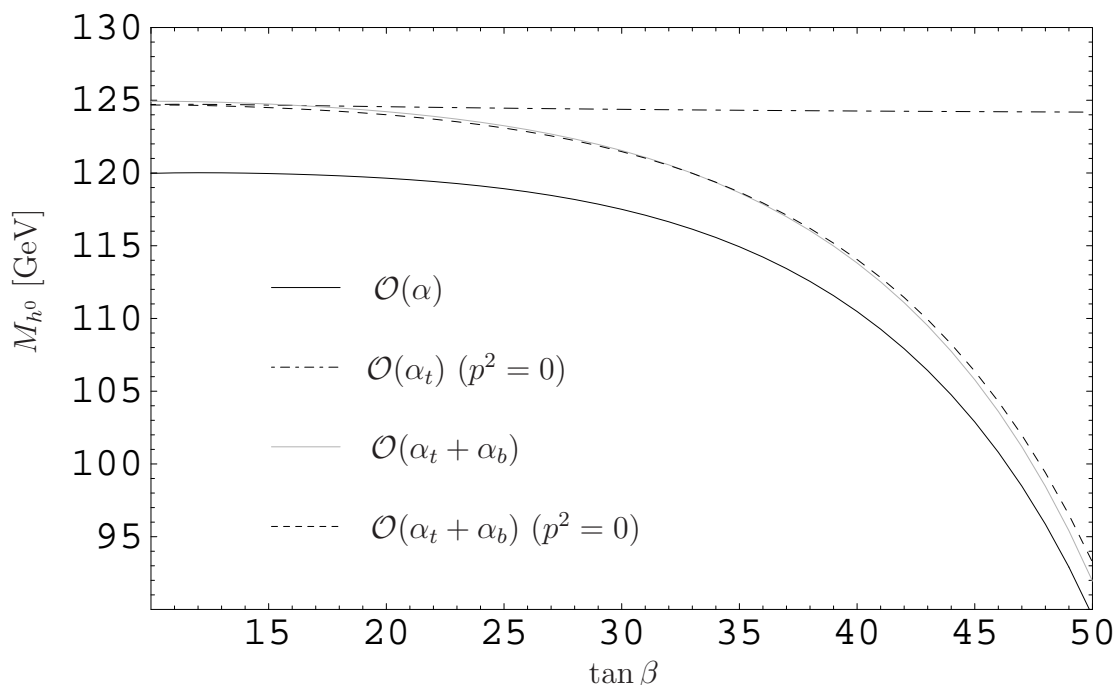
$$\frac{\lambda_b}{\lambda_t} \sim \frac{m_b}{m_t} \tan\beta \quad \text{mit} \quad \lambda_b \sim \frac{m_b}{\cos\beta} \quad (4.93)$$

ist. Im folgenden werden die QCD-Korrekturen zu diesen Termen – also Zwei-Schleifen-Korrekturen der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_t\alpha_s)$  und  $\mathcal{O}(\alpha_b\alpha_s)$  mit  $\alpha_{\{t,b\}} \sim \lambda_{\{t,b\}}^2$  – betrachtet. Des weiteren wird in Zwei-Schleifen-Ordnung im Limes verschwindender Eichkopplungen  $g, g'$  gerechnet. Die in den Zwei-Schleifen-Selbstenergien auftretenden Kopplungen sind dann entweder proportional zu den Yukawa-Kopplungen  $\lambda_{\{t,b\}}$  oder zur Eichkopplung der starken Wechselwirkung  $g_s$ .

Die Korrekturen der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_t\alpha_s)$  und  $\mathcal{O}(\alpha_b\alpha_s)$  werden mit verschwindendem äußeren Impuls berechnet. Diese Näherung wird dadurch gerechtfertigt, daß schon auf Ein-Schleifen-Niveau der impulsabhängige Anteil der Top- und Bottom-Yukawa-Terme klein ist.

#### 4. Der Higgs-Sektor im reellen MSSM

Abb. 4.1 stellt die Abhängigkeit der Masse des leichtesten Higgs-Bosons in Abhängigkeit von  $\tan\beta$  dar. Man erkennt, daß für große  $\tan\beta$  die Berücksichtigung der Bottom-Yukawa-Terme der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_b)$  für eine gute Näherung der Higgs-Masse notwendig ist. Hierbei wurde der Wert der Bottom-Quark-Masse mit  $m_b = 4.7$  GeV angesetzt. Dies ist als Wert einer effektiven Bottom-Quark-Masse anzusehen, bei dem große Korrekturen höherer Ordnung zur Bottom-Quark-Masse berücksichtigt sind. Die Verwendung einer effektiven Bottom-Quark-Masse mit großem Wert im Vergleich zum Wert der  $\overline{\text{MS}}$ -Bottom-Quark-Masse des Standardmodells ist für große  $\tan\beta$  und große  $|\mu|$  gemäß Kapitel 5.4 gerechtfertigt. Außerdem wird aus Abb. 4.1 deutlich, daß die Impulsabhängigkeit der Yukawa-Beiträge gering und die Näherung verschwindender äußerer Impulse gut ist.



**Abb. 4.1.:** Abhängigkeit der Masse des leichtesten Higgs-Bosons  $h^0$  von  $\tan\beta$  in der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha)$ , in der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_t)$  und in der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_t)$  und  $\mathcal{O}(\alpha_b)$ . In der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_t)$  wurden die Selbstenergien bei verschwindendem äußeren Impuls ( $p^2 = 0$ ) berechnet. Dagegen wurden in der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_t)$  und  $\mathcal{O}(\alpha_b)$  die Selbstenergien sowohl in der Näherung eines verschwindenden äußeren Impulses ( $p^2 = 0$ ) als auch ohne diese Näherung berechnet. Die Rechnung wurde mit einem Wert der Bottom-Quark-Masse von  $m_b = 4.7$  GeV durchgeführt. Dieser Wert ist als Wert einer effektiven Bottom-Quark-Masse zu betrachten, wobei effektiv bedeutet, daß Korrekturen höherer Ordnung zur Bottom-Quark-Masse berücksichtigt wurden. Die SUSY-Parameter wurden folgendermaßen gewählt:  $\mu = -1000$  GeV,  $M_{\text{SUSY}} = 600$  GeV,  $A_f = 500$  GeV,  $M_{A^0} = 700$  GeV,  $M_2 = 100$  GeV.  $M_1$  wurde über die GUT-Relation (siehe Tab. 6.1) festgelegt.

### 4.3. Renormierte Selbstenergien der CP-geraden neutralen Higgs-Bosonen

Mit diesen Annahmen und Näherungen vereinfacht sich der Ausdruck (4.40) für die Zwei-Schleifen-Selbstenergie der CP-geraden Higgs-Bosonen erheblich. Terme mit Produkten von Ein-Schleifen-Countertermen sind von Ordnung der  $\mathcal{O}(\alpha^2)$ , d.h. sie tragen nicht zur Korrektur der betrachteten Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_{\{t,b\}}\alpha_s)$  bei. Somit erhält man folgenden Ausdruck:

$$\hat{\Sigma}_{\mathbf{H}^0\mathbf{h}^0}^{(2)}(0) = \Sigma_{\mathbf{H}^0\mathbf{h}^0}^{(2)}(0) - \frac{1}{2}(\Delta\tilde{\mathcal{Z}}_{\phi^0}^+ \mathcal{D}_{\phi^0} + \mathcal{D}_{\phi^0} \Delta\tilde{\mathcal{Z}}_{\phi^0}) - \mathcal{U}_{\phi^0} \delta\mathcal{M}_{\phi^0}^{(2)} \mathcal{U}_{\phi^0}^+. \quad (4.94)$$

Der Ausdruck (4.71) für den Higgs-Massenmatrix-Counterterm  $\delta\mathcal{M}_{\phi^0}^{(2)}$  vereinfacht sich entsprechend zu

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{M}_{\phi^0}^{(2)} &= \begin{pmatrix} \sin^2 \beta & -\sin \beta \cos \beta \\ -\sin \beta \cos \beta & \cos^2 \beta \end{pmatrix} \delta M_{A^0}^2{}^{(2)} + \begin{pmatrix} \cos^2 \beta & -\sin \beta \cos \beta \\ -\sin \beta \cos \beta & \sin^2 \beta \end{pmatrix} \delta M_Z^2{}^{(2)} \\ &+ \begin{pmatrix} 2 \cos^3 \beta \sin \beta (M_{A^0}^2 - M_Z^2) & -\cos^2 \beta \cos(2\beta) (M_{A^0}^2 + M_Z^2) \\ -\cos^2 \beta \cos(2\beta) (M_{A^0}^2 + M_Z^2) & -2 \cos^3 \beta \sin \beta (M_{A^0}^2 - M_Z^2) \end{pmatrix} \delta \tan^{(2)} \beta \\ &+ \frac{e}{2M_Z \cos \theta_W \sin \theta_W} \begin{pmatrix} -\cos \beta (1 + \sin^2 \beta) & -\sin^3 \beta \\ -\sin^3 \beta & \cos \beta \sin^2 \beta \end{pmatrix} \delta t_{\phi_1^0}^{(2)} \\ &+ \frac{e}{2M_Z \cos \theta_W \sin \theta_W} \begin{pmatrix} \cos^2 \beta \sin \beta & -\cos^3 \beta \\ -\cos^3 \beta & -(1 + \cos^2 \beta) \sin \beta \end{pmatrix} \delta t_{\phi_2^0}^{(2)}. \end{aligned} \quad (4.95)$$

Für die explizite Berechnung der Zwei-Schleifen-Selbstenergien müssen noch Renormierungsbedingungen zur Bestimmung der Zwei-Schleifen-Counterterme  $\Delta Z_{H_1}$ ,  $\Delta Z_{H_2}$ ,  $\delta \tan^{(2)} \beta$ ,  $\delta M_{A^0}^2{}^{(2)}$ ,  $\delta M_Z^2{}^{(2)}$  und  $\delta t_{\phi_{\{1,2\}}^0}^{(2)}$  gestellt werden.

- Die Z-Faktoren werden wie auf Ein-Schleifen-Niveau im  $\overline{\text{DR}}$ -Schema festgelegt. In der betrachteten Ordnung besitzen die Z-Faktoren keinen divergenten Anteil, wie in Anhang B.2 gezeigt wird. Es gilt folglich:

$$\Delta Z_{H_1} = \Delta Z_{H_2} = 0. \quad (4.96)$$

- Die A-Boson-Masse wird – wie auch auf Ein-Schleifen-Niveau – über die renormierte A-Boson-Selbstenergie  $\hat{\Sigma}_{\mathbf{G}^0\mathbf{A}^0}^{(2)}|_{22}$  bestimmt. In der hier betrachteten Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_t\alpha_s)$  und  $\mathcal{O}(\alpha_b\alpha_s)$  vereinfacht sich (4.44) unter Berücksichtigung von (4.96) zu:

$$\hat{\Sigma}_{\mathbf{G}^0\mathbf{A}^0}^{(2)}(k^2) = \Sigma_{\mathbf{G}^0\mathbf{A}^0}^{(2)}(k^2) - \mathcal{U}_{\zeta^0} \delta\mathcal{M}_{\zeta^0}^{(2)} \mathcal{U}_{\zeta^0}^+. \quad (4.97)$$

In der Näherung verschwindender äußerer Impulse wird folgende Renormierungsbedingung gestellt:

$$\hat{\Sigma}_{\mathbf{G}^0\mathbf{A}^0}^{(2)}(0)|_{22} = 0. \quad (4.98)$$

#### 4. Der Higgs-Sektor im reellen MSSM

Damit erhält man für den Massencounterterm des A-Bosons in Zwei-Schleifen-Ordnung  $\delta M_{A^0}^2{}^{(2)}$ :

$$\delta M_{A^0}^2{}^{(2)} = (\mathcal{U}_{\zeta^0} \delta \mathcal{M}_{\zeta^0}^{(2)} \mathcal{U}_{\zeta^0}^+) |_{22} = \Sigma_{\mathbf{G}^0 \mathbf{A}^0}^{(2)}(0) |_{22} . \quad (4.99)$$

- Der Massencounterterm des Z-Bosons wird über die Z-Boson-Selbstenergie on-shell festgelegt. Da die Kopplungen an das Z-Boson proportional zu den Eichkopplungen sind, und diese in der betrachteten Näherung zu null gesetzt werden, hat die Z-Boson-Selbstenergie hier keine Beiträge der Ordnungen  $\mathcal{O}(\alpha_t \alpha_s)$  und  $\mathcal{O}(\alpha_b \alpha_s)$ . Somit gilt für den Massencounterterm des Z-Bosons  $\delta M_Z^2{}^{(2)}$ :

$$\delta M_Z^2{}^{(2)} = 0 . \quad (4.100)$$

- Die Tadpol-Parameter werden auf Zwei-Schleifen-Niveau analog zu (4.51) unter Vernachlässigung der  $\mathcal{O}(\alpha^2)$ -Terme durch die Bedingungen

$$T_{\phi_i^0}^{(2)} + \delta t_{\phi_i^0}^{(2)} = 0 \quad \text{mit} \quad i = 1, 2 \quad (4.101)$$

festgelegt. Damit haben in dieser Ordnung die Parameter  $v_1$  und  $v_2$  die Bedeutung der Higgs-Vakuumerwartungswerte, wie in Abschnitt 4.2.2 beschrieben.  $T_{\phi_1^0}^{(2)}$  bzw.  $T_{\phi_2^0}^{(2)}$  setzt sich dabei aus allen Beiträgen der irreduziblen Zwei-Schleifen-Tadpol-Diagramme der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_t \alpha_s)$  und  $\mathcal{O}(\alpha_b \alpha_s)$  des  $\phi_1^0$ - bzw.  $\phi_2^0$ -Felds zusammen. Für die Tadpol-Counterterme gilt also:

$$\delta t_{\phi_i^0}^{(2)} = -T_{\phi_i^0}^{(2)} \quad \text{mit} \quad i = 1, 2 . \quad (4.102)$$

- Wie auf Ein-Schleifen-Niveau wird der Counterterm zu  $\tan \beta$  im  $\overline{\text{DR}}$ -Schema festgelegt. Der Zwei-Schleifen-Counterterm zu  $\tan \beta$  läßt sich als

$$\delta \tan^{(2)} \beta = \tan \beta \left( \frac{1}{2} (\Delta Z_{H_2} - \Delta Z_{H_1}) + \frac{\delta v_2^{(2)}}{v_2} - \frac{\delta v_1^{(2)}}{v_1} \right) \quad (4.103)$$

schreiben; dabei wurde zur Renormierung des Vakuumerwartungswertes folgende Ersetzung verwendet:

$$v_i \rightarrow v_i + \delta v_i^{(1)} + \frac{1}{2} v_i \delta Z_{H_i}^{(1)} + \delta v_i^{(2)} + \frac{1}{2} v_i \Delta Z_{H_i} , \quad i = 1, 2 . \quad (4.104)$$

Außerdem wurde berücksichtigt, daß die Produkte der Ein-Schleifen-Counterterme keinen Beitrag in der betrachteten Ordnung liefern. Die Differenz  $\delta v_2^{(2)} v_2^{-1} - \delta v_1^{(2)} v_1^{-1}$  ist in diesem Fall analog zum Ein-Schleifen-Niveau UV-endlich. Mit (4.96) verschwindet in dieser Ordnung der Zwei-Schleifen-Counterterm zu  $\tan \beta$ :

$$\delta \tan^{(2)} \beta = 0 . \quad (4.105)$$



### 4.3.3. Zusammenfassung

Die renormierte Ein-Schleifen-Higgs-Selbstenergie  $\hat{\Sigma}_{\mathbf{H}^0\mathbf{h}^0}^{(1)}$

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}_{\mathbf{H}^0\mathbf{h}^0}^{(1)}(k^2) &= \Sigma_{\mathbf{H}^0\mathbf{h}^0}^{(1)}(k^2) + \frac{1}{2}k^2(\delta\tilde{\mathcal{Z}}_{\phi^0}^+ + \delta\tilde{\mathcal{Z}}_{\phi^0}) \\ &\quad - \frac{1}{2}(\delta\tilde{\mathcal{Z}}_{\phi^0}^+ \mathcal{D}_{\phi^0} + \mathcal{D}_{\phi^0} \delta\tilde{\mathcal{Z}}_{\phi^0}) - \mathcal{U}_{\phi^0} \delta\mathcal{M}_{\phi^0}^{(1)} \mathcal{U}_{\phi^0}^+ \end{aligned} \quad (4.106)$$

wird exakt und vollständig berechnet. Der Counterterm zur Massenmatrix  $\mathcal{M}_{\phi^0}$  ist dabei gegeben durch

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{M}_{\phi^0}^{(1)} &= \begin{pmatrix} \sin^2 \beta & -\sin \beta \cos \beta \\ -\sin \beta \cos \beta & \cos^2 \beta \end{pmatrix} \delta M_{A^0}^{2(1)} + \begin{pmatrix} \cos^2 \beta & -\sin \beta \cos \beta \\ -\sin \beta \cos \beta & \sin^2 \beta \end{pmatrix} \delta M_Z^{2(1)} \\ &\quad + \begin{pmatrix} 2 \cos^3 \beta \sin \beta (M_{A^0}^2 - M_Z^2) & -\cos^2 \beta \cos(2\beta) (M_{A^0}^2 + M_Z^2) \\ -\cos^2 \beta \cos(2\beta) (M_{A^0}^2 + M_Z^2) & -2 \cos^3 \beta \sin \beta (M_{A^0}^2 - M_Z^2) \end{pmatrix} \delta \tan^{(1)} \beta \\ &\quad + \frac{e}{2M_Z \cos \theta_W \sin \theta_W} \begin{pmatrix} -\cos \beta (1 + \sin^2 \beta) & -\sin^3 \beta \\ -\sin^3 \beta & \cos \beta \sin^2 \beta \end{pmatrix} \delta t_{\phi_1^0}^{(1)} \\ &\quad + \frac{e}{2M_Z \cos \theta_W \sin \theta_W} \begin{pmatrix} \cos^2 \beta \sin \beta & -\cos^3 \beta \\ -\cos^3 \beta & -(1 + \cos^2 \beta) \sin \beta \end{pmatrix} \delta t_{\phi_2^0}^{(1)}. \end{aligned} \quad (4.107)$$

Auf Zwei-Schleifen-Niveau werden nur Terme der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_t \alpha_s)$  und  $\mathcal{O}(\alpha_b \alpha_s)$  in der Näherung verschwindender schwacher Eichkopplungen  $g$ ,  $g'$  und verschwindender äußerer Impulse berücksichtigt, so daß sich die Zwei-Schleifen-Higgs-Selbstenergie  $\hat{\Sigma}_{\mathbf{H}^0\mathbf{h}^0}^{(2)}$  vereinfacht zu

$$\hat{\Sigma}_{\mathbf{H}^0\mathbf{h}^0}^{(2)}(0) = \Sigma_{\mathbf{H}^0\mathbf{h}^0}^{(2)}(0) - \mathcal{U}_{\phi^0} \delta\mathcal{M}_{\phi^0}^{(2)} \mathcal{U}_{\phi^0}^+. \quad (4.108)$$

Hierbei wurde benutzt, daß die Z-Faktoren verschwinden. Für den Zwei-Schleifen-Counterterm zur Massenmatrix  $\mathcal{M}_{\phi^0}$  erhält man in dieser Ordnung, da  $\delta \tan^{(2)} \beta$  und  $\delta M_Z^{2(2)}$  verschwinden, folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{M}_{\phi^0}^{(2)} &= \begin{pmatrix} \sin^2 \beta & -\sin \beta \cos \beta \\ -\sin \beta \cos \beta & \cos^2 \beta \end{pmatrix} \delta M_{A^0}^{2(2)} \\ &\quad + \frac{e}{2M_Z \cos \theta_W \sin \theta_W} \begin{pmatrix} -\cos \beta (1 + \sin^2 \beta) & -\sin^3 \beta \\ -\sin^3 \beta & \cos \beta \sin^2 \beta \end{pmatrix} \delta t_{\phi_1^0}^{(2)} \\ &\quad + \frac{e}{2M_Z \cos \theta_W \sin \theta_W} \begin{pmatrix} \cos^2 \beta \sin \beta & -\cos^3 \beta \\ -\cos^3 \beta & -(1 + \cos^2 \beta) \sin \beta \end{pmatrix} \delta t_{\phi_2^0}^{(2)}. \end{aligned} \quad (4.109)$$

#### 4. *Der Higgs-Sektor im reellen MSSM*

# 5. Der Quark-Squark-Sektor im reellen MSSM

Bei der Berechnung der Higgsmassen bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_{\{t,b\}}\alpha_s)$  spielen die Top/Bottom-Quarks und deren Superpartner, die Squarks, der dritten Generation eine wichtige Rolle. Sie treten schon auf Ein-Schleifen-Niveau als virtuelle Teilchen in den Schleifen auf und liefern Beiträge zur Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_{\{t,b\}}\alpha_s)$  auf Zwei-Schleifen-Niveau. Außer den Quarks und Squarks sind auf Zwei-Schleifen-Niveau in der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_{\{t,b\}}\alpha_s)$  nur Gluonen und Gluinos in den Schleifen als virtuelle Teilchen vertreten. Gluonen und Gluinos treten allerdings erst auf Zwei-Schleifen-Niveau auf.

Die Zwei-Schleifen-Selbstenergien der CP-geraden Higgs-Bosonen setzen sich aus „generischen“ Zwei-Schleifen-Diagrammen (wie z. B. in Abb. D.2) und Ein-Schleifen-Diagrammen mit Ein-Schleifen-Counterterm-Einsetzungen (wie z.B. in Abb. D.3) zusammen. Um die Diagramme mit Counterterm-Einsetzungen auswerten zu können, werden analytische Ausdrücke für die Ein-Schleifen-Counterterme benötigt, die in diese Diagramme eingesetzt werden. Ergebnisse, die man durch die Verwendung unterschiedlicher Renormierungsschemata bei gleichen Input-Parametern erhält, können zur Abschätzung des Fehlers dienen, der durch den Abbruch der Störungsreihe verursacht wird. Dazu werden in Kapitel 5.3 vier unterschiedliche Renormierungsschemata für den Bottom-Sbottom-Sektor vorgestellt, deren Auswirkung in der numerischen Auswertung diskutiert wird. Für den Top-Stop-Sektor hingegen wurde nur ein Renormierungsschema verwendet; die Fehlerdiskussion wurde in diesem Teil der Arbeit auf den Bottom-Sbottom-Sektor beschränkt. Die aus dem Top-Stop-Sektor herrührenden Korrekturen der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_t\alpha_s)$  zu den Higgs-Massen sind für reelle Parameter bekannt [29–37], die Beiträge der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_b\alpha_s)$  aus dem Bottom-Sbottom-Sektor zu den Higgs-Massen wurden noch nicht für beliebige  $\tan\beta$  berechnet.

In den Abschnitten 5.2 und 5.3 werden die im Top-Stop- und Bottom-Sbottom-Sektor verwendeten Renormierungsschemata beschrieben, wobei nur Beiträge der starken Wechselwirkung, also der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_s)$ , zu den Ein-Schleifen-Countertermen berücksichtigt und die durch die elektroschwache Wechselwirkung verursachten Terme der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha)$  vernachlässigt werden. Das ist ausreichend, um die Higgs-Selbstenergien bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_t\alpha_s)$  bzw.  $\mathcal{O}(\alpha_b\alpha_s)$  zu berechnen. Zunächst wird jedoch in Abschnitt 5.1.1 der Quark-Squark-Sektor auf Born-Niveau und in Abschnitt 5.1.2 die Quark- und Squark-Selbstenergien auf Ein-Schleifen-Niveau dargestellt.

## 5.1. Der Quark-Squark-Sektor auf Born- und Ein-Schleifen-Niveau

### 5.1.1. Der Quark-Squark-Sektor auf Born-Niveau

In diesem Abschnitt werden die Born-Relationen zwischen den Massen und den fundamentalen Parametern der Theorie hergeleitet. Während die Quarks ihre endliche Masse nur durch die spontane  $SU(2) \times U(1)$ -Symmetriebrechung erhalten, trägt zur Masse der Squarks noch die explizite Supersymmetriebrechung bei.

#### Quarks

Durch die endlichen Higgs-Vakuumerwartungswerte enthalten die Quark-Yukawaterme im Superpotential,

$$\mathcal{L}_{\text{Superpot., Quarks}} = [\epsilon^{ij}(-\lambda_t \hat{H}_2^i \hat{Q}^j \hat{U} + \lambda_b \hat{H}_1^i \hat{Q}^j \hat{D})] |_{\theta\theta} + h.c. , \quad (5.1)$$

Terme, die bilinear in den Quarkfeldern sind<sup>1</sup>:

$$\mathcal{L}_{\text{Masse}} = \lambda_t v_2 t_L t_R^C + \lambda_b v_1 b_L b_R^C + h.c. . \quad (5.2)$$

Diese Quarkmassenterme lassen sich schreiben als

$$\mathcal{L}_{\text{Masse}} = -m_t \bar{t} t - m_b \bar{b} b \quad (5.3)$$

mit den Quarkmassen  $m_t = \lambda_t v_2$  und  $m_b = \lambda_b v_1$  und den zu 4-Spinoren zusammengefaßten Weyl-Spinoren:

$$t = \begin{pmatrix} t_L \\ \bar{t}_R^C \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_L \\ \bar{b}_R^C \end{pmatrix} . \quad (5.4)$$

Die Yukawa-Kopplungskonstanten  $\lambda$  können mit Hilfe der Quarkmassen  $m_q$ , mit  $\tan \beta$  gemäß (4.22) und der Masse des W-Bosons nach (4.24) durch

$$\lambda_t = \frac{m_t g}{\sqrt{2} M_W \sin \beta} , \quad \lambda_b = \frac{m_b g}{\sqrt{2} M_W \cos \beta} \quad (5.5)$$

ausgedrückt werden.

---

<sup>1</sup>Da im folgenden nur die dritte Generation eine Rolle spielt, werden hier die Spinoren mit  $t$  und  $b$  bezeichnet. Diese Spinoren können bei Vernachlässigung der Familienmischung als generisch angesehen werden, wobei  $t$  für die up- und  $b$  für die down-artigen Quarks steht.

## Squarks

Die Squarkmassenterme in der Lagrangedichte können als bilinearer Ausdruck geschrieben werden:

$$\mathcal{L}_{\text{Sfermionmasse}} = - (\tilde{t}_L^+, \tilde{t}_R^+) \mathcal{M}_{\tilde{t}} \begin{pmatrix} \tilde{t}_L \\ \tilde{t}_R \end{pmatrix} - (\tilde{b}_L^+, \tilde{b}_R^+) \mathcal{M}_{\tilde{b}} \begin{pmatrix} \tilde{b}_L \\ \tilde{b}_R \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$

$\mathcal{M}_{\tilde{t}}$  und  $\mathcal{M}_{\tilde{b}}$  sind die  $2 \times 2$ -Massenmatrizen der up- und down-artigen Squarks, deren Matrixelemente Beiträge erhalten aus:

- dem Softbrechungsanteil der Lagrangedichte,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{soft}} = & -M_{L_{\tilde{q}}}^2 (\tilde{t}_L^+ \tilde{t}_L + \tilde{b}_L^+ \tilde{b}_L) - M_{\tilde{t}_R}^2 \tilde{t}_R^+ \tilde{t}_R - M_{\tilde{b}_R}^2 \tilde{b}_R^+ \tilde{b}_R \\ & - (\lambda_t A_t v_2 \tilde{t}_L \tilde{t}_R^+ + \lambda_b A_b v_1 \tilde{b}_L \tilde{b}_R^+ + h.c.), \end{aligned} \quad (5.7)$$

- den F-Termen der Yukawaterme im Superpotential,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_F = & -(\lambda_t^2 v_2^2 (\tilde{t}_L^+ \tilde{t}_L + \tilde{t}_R^+ \tilde{t}_R) + \lambda_b^2 v_1^2 (\tilde{b}_L^+ \tilde{b}_L + \tilde{b}_R^+ \tilde{b}_R) \\ & + (-\mu^* v_1 \lambda_t \tilde{t}_R^+ \tilde{t}_L - \mu^* v_2 \lambda_b \tilde{b}_R^+ \tilde{b}_L + h.c.)), \end{aligned} \quad (5.8)$$

- dem Feldstärkeanteil,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_D = & -\frac{v_1^2 - v_2^2}{2} [g^2 (\tilde{Q}^+ T^3 \tilde{Q} + \tilde{t}_R^+ T^3 \tilde{t}_R + \tilde{b}_R^+ T^3 \tilde{b}_R) \\ & - g'^2 (\tilde{Q}^+ \frac{Y}{2} \tilde{Q} + \tilde{t}_R^+ \frac{Y}{2} \tilde{t}_R + \tilde{b}_R^+ \frac{Y}{2} \tilde{b}_R)]. \end{aligned} \quad (5.9)$$

In den Gleichungen (5.7), (5.8) und (5.9) werden die Higgsfelder im Grundzustand betrachtet. Aufgrund der gebrochenen  $SU(2)_W \times U(1)_Y$ -Symmetrie treten Mischungsterme trotz unterschiedlicher  $SU(2)_W \times U(1)_Y$ -Quantenzahlen zwischen den rechts- und linkshändigen Squarkfeldern auf, da die anderen Quantenzahlen übereinstimmen. Ersetzt man die Yukawa-Kopplungskonstanten durch die Ausdrücke in (5.5) und die Hyperladung  $Y$  durch die elektrische Ladung  $Q = T^3 + \frac{Y}{2}$  – und beachtet dabei, daß die Ladung der rechtshändigen Antiquarks das Negative der Ladung der linkshändigen Quarks ist – läßt sich folgender Ausdruck für die Squarkmassenmatrix  $\mathcal{M}_{\tilde{q}}$  herleiten:

$$\mathcal{M}_{\tilde{q}} = \begin{pmatrix} M_L^2 + m_q^2 + M_Z^2 c_{2\beta} (T_q^3 - Q_q s_W^2) & m_q (A_q^* - \mu \kappa) \\ m_q (A_q - \mu^* \kappa) & M_{qR}^2 + m_q^2 + M_Z^2 c_{2\beta} Q_q s_W^2 \end{pmatrix}. \quad (5.10)$$

$c_{2\beta} = \cos(2\beta)$  und  $s_W = \sin \theta_W$  wurden als abkürzende Schreibweisen eingeführt. Der Parameter  $\kappa$  ist für up-artige Squarks  $\kappa = \cot \beta$  und für die down-artigen Squarks  $\kappa = \tan \beta$ .  $Q_q$  ist die Quantenzahl der elektrischen Ladung der Squarks. Mit  $T_q^3$  ist der Eigenwert der

## 5. Der Quark-Squark-Sektor im reellen MSSM

dritten Komponente des Isospins der linkshändigen Sfermionen bezeichnet. Da in diesem Teil der Arbeit CP-Invarianz angenommen wird, sind der Softbrechungsparameter  $A_q$  und der Higgsmassenparameter  $\mu$  reell.

Die Massenmatrix (5.10) kann durch eine unitäre Transformation  $U_{\tilde{q}}$  diagonalisiert werden. Sie ist im betrachteten Fall reeller Parameter durch einen Mischungswinkel parametrisierbar,

$$\begin{pmatrix} \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_2 \end{pmatrix} = \mathcal{U}_{\tilde{q}} \begin{pmatrix} \tilde{q}_l \\ \tilde{q}_r \end{pmatrix}, \quad \mathcal{U}_{\tilde{q}} = \begin{pmatrix} U_{\tilde{q}_{11}} & U_{\tilde{q}_{12}} \\ U_{\tilde{q}_{21}} & U_{\tilde{q}_{22}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_{\tilde{q}} & \sin \theta_{\tilde{q}} \\ -\sin \theta_{\tilde{q}} & \cos \theta_{\tilde{q}} \end{pmatrix}, \quad (5.11)$$

so daß die Massenmatrix in der  $(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2)$ -Basis Diagonalgestalt annimmt,

$$\mathcal{D}_{\tilde{q}} = \mathcal{U}_{\tilde{q}} \mathcal{M}_{\tilde{q}} \mathcal{U}_{\tilde{q}}^\dagger = \begin{pmatrix} m_{\tilde{q}_1}^2 & 0 \\ 0 & m_{\tilde{q}_2}^2 \end{pmatrix}, \quad (5.12)$$

mit den Eigenwerten  $m_{\tilde{q}_1}^2$  und  $m_{\tilde{q}_2}^2$ :

$$m_{\tilde{q}_{1,2}}^2 = \frac{1}{2}(M_L^2 + M_{\tilde{q}_R}^2) + m_q^2 + \frac{1}{2}T_q^3 M_Z^2 c_{2\beta} \pm \frac{1}{2} \frac{M_L^2 - M_{\tilde{q}_R}^2 + M_Z^2 c_{2\beta}(T_q^3 - 2Q_q \sin^2 \theta_W)}{|M_L^2 - M_{\tilde{q}_R}^2 + M_Z^2 c_{2\beta}(T_q^3 - 2Q_q \sin^2 \theta_W)|} \\ \times \sqrt{[M_L^2 - M_{\tilde{q}_R}^2 + M_Z^2 c_{2\beta}(T_q^3 - 2Q_q \sin^2 \theta_W)]^2 + 4m_q^2(A_q - \mu\kappa)^2}. \quad (5.13)$$

Die Squarkmassenmatrix kann jetzt auch durch die zwei Masseneigenwerte und den Mischungswinkel folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$\mathcal{M}_{\tilde{q}} = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta_{\tilde{q}} m_{\tilde{q}_1}^2 + \sin^2 \theta_{\tilde{q}} m_{\tilde{q}_2}^2 & \sin \theta_{\tilde{q}} \cos \theta_{\tilde{q}} (m_{\tilde{q}_1}^2 - m_{\tilde{q}_2}^2) \\ \sin \theta_{\tilde{q}} \cos \theta_{\tilde{q}} (m_{\tilde{q}_1}^2 - m_{\tilde{q}_2}^2) & \sin^2 \theta_{\tilde{q}} m_{\tilde{q}_1}^2 + \cos^2 \theta_{\tilde{q}} m_{\tilde{q}_2}^2 \end{pmatrix}. \quad (5.14)$$

### 5.1.2. Quark- und Squark-Selbstenergien auf Ein-Schleifen-Niveau

Zur Bestimmung der Parameter des Quark-Squark-Sektors auf Ein-Schleifen-Niveau, also zur Festlegung der zu den Parametern gehörigen Counterterme (siehe Kap. 5.2 und 5.3), werden Quark- und Squark-Selbstenergien benötigt. Allgemeine Ausdrücke für diese Selbstenergien werden in den nächsten zwei Abschnitten hergeleitet.

#### Quark-Selbstenergie auf Ein-Schleifen-Niveau

Zur Herleitung der Quark-Selbstenergie geht man vom unrenormierten Anteil der Fouriertransformierten Lagrangedichte  $\mathcal{L}_{\text{Quark}}$ , in dem die Quarkfelder bilinear vorkommen, aus:

$$\mathcal{L}_{\text{Quark}} = \bar{\psi}_{L_q} \not{k} \psi_{L_q} + \bar{\psi}_{R_q} \not{k} \psi_{R_q} - m_q \bar{\psi}_{L_q} \psi_{R_q} - m_q \bar{\psi}_{R_q} \psi_{L_q}. \quad (5.15)$$

### 5.1. Der Quark-Squark-Sektor auf Born- und Ein-Schleifen-Niveau

Dabei ist  $\psi_{L_q}$  das linkshändige und  $\psi_{R_q}$  das rechtshändige Quarkfeld. Ersetzt man die unrenormierten Parameter und Felder durch renormierte Größen,

$$\begin{aligned} m_q &\rightarrow m_q + \delta m_q , \\ \psi_{L_q} &\rightarrow Z_{\psi_L}^{\frac{1}{2}} \psi_{L_q} = \left(1 + \frac{1}{2} \delta Z_{\psi_L}\right) \psi_{L_q} , \\ \psi_{R_q} &\rightarrow Z_{\psi_R}^{\frac{1}{2}} \psi_{R_q} = \left(1 + \frac{1}{2} \delta Z_{\psi_R}\right) \psi_{R_q} , \end{aligned} \quad (5.16)$$

so erhält man die Lagrangedichte bestehend aus einem renormierten Anteil und einem Counterterm-Anteil  $\delta\mathcal{L}_{\text{Quark}}$ ,

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}_{\text{Quark}} &= \delta Z_{\psi_L} \bar{\psi}_{L_q} \not{k} \psi_{L_q} + \delta Z_{\psi_R} \bar{\psi}_{R_q} \not{k} \psi_{R_q} \\ &\quad - \left(\frac{1}{2} m_q (\delta Z_{\psi_L} + \delta Z_{\psi_R}) + \delta m_q\right) (\bar{\psi}_{L_q} \psi_{R_q} + \bar{\psi}_{R_q} \psi_{L_q}) . \end{aligned} \quad (5.17)$$

Die renormierte Quarkselbstenergie  $\hat{\Sigma}_q$  setzt sich dann zusammen aus der unrenormierten Selbstenergie und dem Counterterm-Anteil; sie kann in einen linkshändigen, einen rechtshändigen und einen skalaren Anteil aufgespalten werden,

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}_{qL}(k^2) &= \Sigma_{qL}(k^2) + \delta Z_{\psi_L} , \\ \hat{\Sigma}_{qR}(k^2) &= \Sigma_{qR}(k^2) + \delta Z_{\psi_R} , \\ \hat{\Sigma}_{qS}(k^2) &= \Sigma_{qS}(k^2) - \frac{1}{2} (\delta Z_{\psi_L} + \delta Z_{\psi_R}) - \frac{1}{m_q} \delta m_q , \end{aligned} \quad (5.18)$$

analog zur unrenormierten Selbstenergie  $\Sigma_q$ ,

$$\Sigma_q(k) = \not{k} \omega_- \Sigma_{qL}(k^2) + \not{k} \omega_+ \Sigma_{qR}(k^2) + m_q \Sigma_{qS}(k^2) , \quad (5.19)$$

wobei  $\omega_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)$  ist. Die unrenormierte Selbstenergie  $\Sigma_q$  ist durch die entsprechende unrenormierte Zwei-Punkt-Vertex-Funktion  $\Gamma_q$  ohne Born-Anteil bestimmt:

$$\Gamma_q(k) = \not{k} - m_q + \Sigma_q(k) . \quad (5.20)$$

### Squark-Selbstenergie auf Ein-Schleifen-Niveau

Um die renormierte Squark-Selbstenergie herzuleiten, kann man, wie in Kap. B.1 beschrieben, vorgehen. In dieser Arbeit ist es ausreichend, sich auf das Ein-Schleifen-Niveau im Squark-Sektor zu beschränken. Zunächst werden zur Renormierung des Squark-Sektors Counterterme zur Massenmatrix eingeführt,

$$\mathcal{M}_{\tilde{q}} \rightarrow \mathcal{M}_{\tilde{q}} + \delta\mathcal{M}_{\tilde{q}} , \quad (5.21)$$

## 5. Der Quark-Squark-Sektor im reellen MSSM

wobei  $\delta\mathcal{M}_{\tilde{q}}$  alle Counterterme zu den in (5.10) vorkommenden Parametern enthält. Zur Feldrenormierung wird statt der minimalen Ersetzung der Felder durch renormierte Felder und Z-Faktoren,

$$\begin{pmatrix} \tilde{q}_L \\ \tilde{q}_R \end{pmatrix} \rightarrow (\mathbb{1} + \frac{1}{2}\delta\mathcal{Z}_{\tilde{q}}) \begin{pmatrix} \tilde{q}_L \\ \tilde{q}_R \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \delta\mathcal{Z}_{\tilde{q}} = \begin{pmatrix} \delta Z_{\tilde{q}_L} & 0 \\ 0 & \delta Z_{\tilde{q}_R} \end{pmatrix}, \quad (5.22)$$

die zusammen mit den Parameter-Countertermen einen minimalen Satz von Renormierungskonstanten bilden und alle auftretenden Divergenzen absorbieren können, eine Ersetzung analog (B.11) verwendet:

$$\begin{pmatrix} \tilde{q}_L \\ \tilde{q}_R \end{pmatrix} \rightarrow \mathcal{U}_{\tilde{q}}^+ (\mathbb{1} + \frac{1}{2}\delta\tilde{\mathcal{Z}}_{\tilde{q}}) \begin{pmatrix} \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_2 \end{pmatrix}, \quad (5.23)$$

Dabei ist der matrixwertige Z-Faktor  $\delta\tilde{\mathcal{Z}}_{\tilde{q}}$ :

$$\delta\tilde{\mathcal{Z}}_{\tilde{q}} = \mathcal{U}_{\tilde{q}} \delta\mathcal{Z}_{\tilde{q}} \mathcal{U}_{\tilde{q}}^+ - \delta\mathcal{Z}_{U_{\tilde{q}}} = \begin{pmatrix} \delta\tilde{Z}_{\tilde{q}_{11}} & \delta\tilde{Z}_{\tilde{q}_{12}} \\ \delta\tilde{Z}_{\tilde{q}_{21}} & \delta\tilde{Z}_{\tilde{q}_{22}} \end{pmatrix}, \quad (5.24)$$

mit einer UV-endlichen Matrix  $\delta\mathcal{Z}_{U_{\tilde{q}}}$ . Sie beschreibt die Abweichung der Transformation  $\mathcal{R}_{\tilde{q}}$  von der unitären Transformation  $\mathcal{U}_{\tilde{q}}$  (5.11), welche die Felder von der  $(\tilde{q}_L, \tilde{q}_R)$ -Basis in die  $(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2)$ -Basis überführt:

$$\mathcal{R}_{\tilde{q}} = (\mathbb{1} + \frac{1}{2}\delta\mathcal{Z}_{U_{\tilde{q}}}) \mathcal{U}_{\tilde{q}}. \quad (5.25)$$

Mit diesen Ersetzungen erhält man dann für die renormierte matrixwertige Squark-Selbstenergie:

$$\hat{\Sigma}_{\tilde{q}}(k^2) = \Sigma_{\tilde{q}}(k^2) + \frac{1}{2}k^2(\delta\tilde{\mathcal{Z}}_{\tilde{q}}^+ + \delta\tilde{\mathcal{Z}}_{\tilde{q}}) - \frac{1}{2}(\delta\tilde{\mathcal{Z}}_{\tilde{q}}^+ \mathcal{D}_{\tilde{q}} + \mathcal{D}_{\tilde{q}} \delta\tilde{\mathcal{Z}}_{\tilde{q}}) - \mathcal{U}_{\tilde{q}} \delta\mathcal{M}_{\tilde{q}} \mathcal{U}_{\tilde{q}}^+. \quad (5.26)$$

Die renormierten Selbstenergien setzen sich dabei aus allen ein-Teilchen-irreduziblen Feynman-Diagrammen zur entsprechenden renormierten Zwei-Punkt-Vertex-Funktion zusammen.

## 5.2. Renormierung im Top-Stop-Sektor

Das Teilchenspektrum des Top-Stop-Sektors umfaßt das Top-Quark und die dazugehörigen Superpartner, die Top-Squarks. Der Top-Quark-Anteil liefert nur einen fundamentalen Parameter der Theorie, die Top-Yukawa-Kopplung  $\lambda_t$ . Diese kann durch die Top-Quark-Masse  $m_t$  ersetzt werden, da die Top-Quark-Masse und die Top-Yukawa-Kopplung in Beziehung stehen; auf Born-Niveau ist diese Abhängigkeit durch Gleichung (5.5) gegeben. Der Anteil



der Top-Squarks hingegen enthält drei fundamentale Parameter, den linkshändigen<sup>2</sup> Brechungsparameter  $M_L^2$ , den rechtshändigen Brechungsparameter  $M_{\tilde{t}_R}^2$  und den Brechungsparameter  $A_t$ . Die erstgenannten Brechungsparameter  $M_L^2$  und  $M_{\tilde{t}_R}^2$  stehen in direktem Zusammenhang mit den Top-Squarkmassen und können durch diese ersetzt werden. Der A-Parameter  $A_t$  liefert einen Beitrag zur Mischung der beiden Sfermionfelder und damit auch zum Massen-Splitting. Der Mischungswinkel  $\theta_{\tilde{t}}$ , der die Transformation von den ursprünglichen Sfermionfeldern in der Lagrangedichte in die Felder des Masseneigenzustands beschreibt (siehe (5.11)), ist abhängig von dem A-Parameter  $A_t$  und der Top-Quark-Masse  $m_t$ . Die Parameter  $\mu$  und  $\tan\beta$  werden in dieser Arbeit nicht dem Squark-Sektor zugeordnet, sondern dem Gaugino- bzw. Higgs-Sektor. Da die zu  $\mu$  und  $\tan\beta$  gehörenden Ein-Schleifen-Counterterme nur Beiträge der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha)$  liefern, verschwinden sie in der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_s)$ .

Der Top-Stop-Sektor enthält also vier fundamentale Parameter. Die dazugehörigen vier Counterterme müssen durch vier Renormierungsbedingungen festgelegt werden. Counterterme zu weiteren Parametern des Top-Stop-Sektors ergeben sich aus einer Kombination dieser unabhängigen Counterterme. Zur vollständigen Renormierung der Theorie müssen neben den Parametern auch die Felder renormiert werden und die dabei eingeführten Z-Faktoren durch Renormierungsbedingungen bestimmt werden. Die Z-Faktoren der Quarks und Squarks verschwinden jedoch bei der Berechnung der Higgsmassen, da Quarks und Squarks nur als virtuelle Teilchen auftreten. So genügt es, im folgenden nur die Parameter und deren Counterterme zu betrachten.

### 5.2.1. On-Shell-Renormierung

Im Top-Stop-Sektor werden On-Shell-Renormierungsbedingungen gestellt, so daß die Massenparameter  $m_t$  und  $m_{\tilde{t}_{\{1,2\}}}$  die Bedeutung der physikalischen Massen erhalten; das heißt, die dazugehörigen Propagatoren haben eine Polstelle mit Realteil  $m_t$  bzw.  $m_{\tilde{t}_{\{1,2\}}}^2$ <sup>3</sup>. Dieses Renormierungsschema entspricht dem in [78] verwendeten Schema.

(i) Für die Top-Quark-Masse lautet die On-Shell-Renormierungs-Bedingung

$$\text{Re}\hat{\Sigma}_t(k)u(k)\Big|_{k^2=m_t^2}=0, \quad \bar{u}(k)\text{Re}\hat{\Sigma}_t(k)\Big|_{k^2=m_t^2}=0 \quad (5.27)$$

mit  $\hat{\Sigma}_t$  gegeben durch (5.18) und (5.19).  $u$  und  $\bar{u}$  sind die Spinoren der äußeren Teilchen, also der Top-Quarks. Aus diesen Bedingungen erhält man dann für den

<sup>2</sup>Mit links- bzw. rechtshändigem Brechungsparameter wird der Brechungsparameter bezeichnet, der zu dem Sfermionfeld gehört, welches das skalare Partnerfeld zum links- bzw. rechtshändigen Fermionfeld ist.

<sup>3</sup>Für eine vollständige On-Shell-Renormierung der Squarks muß die Mischung der Felder  $\hat{\Sigma}_{\tilde{t}_{12}}$  an den Stellen  $m_{\tilde{t}_{\{1,2\}}}^2$  verschwinden, was durch eine geeignete Wahl der Z-Faktoren  $\delta\tilde{Z}_{12}$  bzw.  $\delta\tilde{Z}_{21}$  erreicht werden kann.

## 5. Der Quark-Squark-Sektor im reellen MSSM

Counterterm  $\delta m_t$ :

$$\delta m_t = \frac{1}{2} m_t (\text{Re}\Sigma_{t_L}(m_t^2) + \text{Re}\Sigma_{t_R}(m_t^2) + 2\text{Re}\Sigma_{t_S}(m_t^2)) . \quad (5.28)$$

- (ii) Für die Top-Squark-Massen erreicht man eine On-Shell-Renormierung durch die Bedingung, daß die Realteile der renormierten Selbstenergien (5.26) an der Stelle  $m_{\tilde{t}_1}^2$  bzw.  $m_{\tilde{t}_2}^2$  verschwinden:

$$\text{Re}\hat{\Sigma}_{\tilde{t}_{11}}(m_{\tilde{t}_1}^2) = 0 , \quad \text{Re}\hat{\Sigma}_{\tilde{t}_{22}}(m_{\tilde{t}_2}^2) = 0 . \quad (5.29)$$

Die Squark-Massen-Counterterme nehmen dann folgende Form an:

$$\delta m_{\tilde{t}_1}^2 = (\mathcal{U}_{\tilde{t}} \delta \mathcal{M}_{\tilde{t}} \mathcal{U}_{\tilde{t}}^+)_{11} = \text{Re}\Sigma_{\tilde{t}_{11}}(m_{\tilde{t}_1}^2) , \quad (5.30)$$

$$\delta m_{\tilde{t}_2}^2 = (\mathcal{U}_{\tilde{t}} \delta \mathcal{M}_{\tilde{t}} \mathcal{U}_{\tilde{t}}^+)_{22} = \text{Re}\Sigma_{\tilde{t}_{22}}(m_{\tilde{t}_2}^2) . \quad (5.31)$$

Die Counterterm-Matrix  $\delta \mathcal{M}_{\tilde{t}}$  kann ausgehend von der Massenmatrix  $\mathcal{M}_{\tilde{t}}$  (5.14) durch die Squark-Massen und dem Mischungswinkel  $\theta_{\tilde{t}}$  und den dazugehörigen Countertermen ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} (\delta \mathcal{M}_{\tilde{t}})_{11} &= \cos^2 \theta_{\tilde{t}} \delta m_{\tilde{t}_1}^2 + \sin^2 \theta_{\tilde{t}} \delta m_{\tilde{t}_2}^2 - 2 \sin \theta_{\tilde{t}} \cos \theta_{\tilde{t}} (m_{\tilde{t}_1}^2 - m_{\tilde{t}_2}^2) \delta \theta_{\tilde{t}} , \\ (\delta \mathcal{M}_{\tilde{t}})_{12} &= \sin \theta_{\tilde{t}} \cos \theta_{\tilde{t}} (\delta m_{\tilde{t}_1}^2 - \delta m_{\tilde{t}_2}^2) + \cos(2\theta_{\tilde{t}}) (m_{\tilde{t}_1}^2 - m_{\tilde{t}_2}^2) \delta \theta_{\tilde{t}} , \\ (\delta \mathcal{M}_{\tilde{t}})_{21} &= (\delta \mathcal{M}_{\tilde{t}})_{12} , \\ (\delta \mathcal{M}_{\tilde{t}})_{22} &= \sin^2 \theta_{\tilde{t}} \delta m_{\tilde{t}_1}^2 + \cos^2 \theta_{\tilde{t}} \delta m_{\tilde{t}_2}^2 + 2 \sin \theta_{\tilde{t}} \cos \theta_{\tilde{t}} (m_{\tilde{t}_1}^2 - m_{\tilde{t}_2}^2) \delta \theta_{\tilde{t}} . \end{aligned} \quad (5.32)$$

- (iii) Der Top-Squark-Mischungswinkel wird so festgelegt, daß die Summe aus der renormierten Sfermionmischung an der Stelle der ersten Top-Squarkmasse und der renormierten Sfermionmischung an der Stelle der zweiten Top-Squarkmasse verschwindet:

$$\text{Re}\hat{\Sigma}_{\tilde{t}_{12}}(m_{\tilde{t}_1}^2) + \text{Re}\hat{\Sigma}_{\tilde{t}_{12}}(m_{\tilde{t}_2}^2) = 0 . \quad (5.33)$$

Aus dieser Bedingung erhält man mit (5.26) und der Forderung<sup>4</sup>  $\delta Z_{\tilde{t}_{12}} = \delta Z_{\tilde{t}_{21}}$  folgende Relation:

$$\delta Y_{\tilde{t}} := (\mathcal{U}_{\tilde{t}} \delta \mathcal{M}_{\tilde{t}} \mathcal{U}_{\tilde{t}}^+)_{12} = \frac{1}{2} (\text{Re}\Sigma_{\tilde{t}_{12}}(m_{\tilde{t}_1}^2) + \text{Re}\Sigma_{\tilde{t}_{12}}(m_{\tilde{t}_2}^2)) . \quad (5.34)$$

Mit der Counterterm-Matrix  $\delta \mathcal{M}_{\tilde{t}}$  (5.32) und der unitären Matrix  $\mathcal{U}_{\tilde{t}}$  (5.11) ergibt sich daraus der Counterterm zum Mischungswinkel als

$$\delta \theta_{\tilde{t}} = \frac{\delta Y_{\tilde{t}}}{m_{\tilde{t}_1}^2 - m_{\tilde{t}_2}^2} = \frac{\text{Re}\Sigma_{\tilde{t}_{12}}(m_{\tilde{t}_1}^2) + \text{Re}\Sigma_{\tilde{t}_{12}}(m_{\tilde{t}_2}^2)}{2(m_{\tilde{t}_1}^2 - m_{\tilde{t}_2}^2)} . \quad (5.35)$$

<sup>4</sup>Bei einer Renormierung mit minimaler Anzahl von Z-Faktoren ist die Bedingung  $\delta Z_{\tilde{t}_{12}} = \delta Z_{\tilde{t}_{21}}$  erfüllt. Aufgrund der Forderung (5.33) kann trotz der Bedingung  $\delta Z_{\tilde{t}_{12}} = \delta Z_{\tilde{t}_{21}}$  eine vollständige Entmischung erreicht werden, wenn eine Renormierung mit einer Z-Faktor-Matrix mit vier unabhängigen Elementen durchgeführt wird.

### 5.3. Renormierung im Bottom-Sbottom-Sektor

Einige Vertizes sind vom A-Parameter abhängig. Der dazugehörige Counterterm  $\delta A_t$  wird über den Zusammenhang zwischen A-Parameter und Mischungswinkel bestimmt:

$$\sin 2\theta_{\bar{t}} = \frac{2m_t(A_t - \mu \cot \beta)}{m_{\bar{t}_1}^2 - m_{\bar{t}_2}^2}. \quad (5.36)$$

Damit erhält man folgenden Ausdruck für den A-Parameter-Counterterm:

$$\begin{aligned} \delta A_t = \frac{1}{m_t} & \left[ \frac{1}{2} \sin 2\theta_{\bar{t}} (\delta m_{\bar{t}_1}^2 - \delta m_{\bar{t}_2}^2) + \cos 2\theta_{\bar{t}} (m_{\bar{t}_1}^2 - m_{\bar{t}_2}^2) \delta \theta_{\bar{t}} \right. \\ & \left. - \delta m_t (A_t - \mu \cot \beta) + \underbrace{m_t \cot \beta \delta \mu - m_t \mu (\cot \beta)^2 \delta \tan \beta}_{\mathcal{O}(\alpha): \text{ wird vernachlässigt}} \right]. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Der Zusammenhang von  $\delta A_t$  und  $\delta \theta_{\bar{t}}$  wurde unter Verwendung der speziellen Parametrisierung der unitären Matrix  $\mathcal{U}_{\bar{t}}$  (5.11) hergeleitet. Allgemeiner läßt sich diese Abhängigkeit über die Relation

$$\begin{aligned} (U_{\bar{t}_{11}} U_{\bar{t}_{22}} + U_{\bar{t}_{12}} U_{\bar{t}_{21}}) \delta Y_t = & - U_{\bar{t}_{11}} U_{\bar{t}_{12}} (\delta m_{\bar{t}_1}^2 - \delta m_{\bar{t}_2}^2) + (A_t - \mu \cot \beta) \delta m_t \\ & + m_t \delta A_t + \mathcal{O}(\alpha) \end{aligned} \quad (5.38)$$

formulieren, wobei  $\delta Y_t := (\mathcal{U}_{\bar{t}} \delta \mathcal{M}_{\bar{t}} \mathcal{U}_{\bar{t}}^+)_{12}$  den Mischungswinkel  $\delta \theta_{\bar{t}}$  implizit enthält und der Zusammenhang zwischen  $\delta Y_t$  und  $\delta \theta_{\bar{t}}$  bei der verwendeten Parametrisierung explizit durch die linke Seite von (5.35) gegeben ist.

## 5.3. Renormierung im Bottom-Sbottom-Sektor

Das Teilchen-Spektrum des Bottom-Sbottom-Sektors besteht aus dem Bottom-Quark und den dazugehörigen Superpartnern, den Bottom-Squarks. Wie im Top-Stop-Sektor enthält der Bottom-Quark-Anteil nur einen Parameter, die Bottom-Yukawa-Kopplung  $\lambda_b$ , die durch die Bottom-Quark-Masse  $m_b$  ersetzt werden kann. Im Bottom-Squark-Anteil gibt es wiederum drei fundamentale Parameter, den linkshändigen Brechungsparameter  $M_L^2$ , den rechtshändigen Brechungsparameter  $M_{b_R}^2$  und den Brechungsparameter  $A_b$ . Aufgrund der SU(2)-Invarianz ist jedoch der linkshändige Brechungsparameter  $M_L^2$  im Top-Stop-Sektor mit dem entsprechendem im Bottom-Sbottom-Sektor identisch, so daß die Stop- und Sbottom-Massen in Beziehung stehen:

$$U_{b_{11}}^2 m_{b_1}^2 + U_{b_{12}}^2 m_{b_2}^2 = U_{\bar{t}_{11}}^2 m_{\bar{t}_1}^2 + U_{\bar{t}_{12}}^2 m_{\bar{t}_2}^2 + m_b^2 - m_t^2 - M_W^2 \cos(2\beta) \quad (5.39)$$

bzw. mit der speziellen Wahl der unitären Matrix  $\mathcal{U}_{\bar{t}}$  (5.11)

$$\cos^2 \theta_{\bar{t}} m_{b_1}^2 + \sin^2 \theta_{\bar{t}} m_{b_2}^2 = \cos^2 \theta_{\bar{t}} m_{\bar{t}_1}^2 + \sin^2 \theta_{\bar{t}} m_{\bar{t}_2}^2 + m_b^2 - m_t^2 - M_W^2 \cos(2\beta). \quad (5.40)$$

## 5. Der Quark-Squark-Sektor im reellen MSSM

Da die Parameter des Topsektor schon durch Renormierungsbedingungen festgelegt sind, also auch  $M_L^2$ , sind im Bottom-Sbottom-Sektor nur noch drei Parameter zu renormieren. Im folgenden wird die Sbottom-Masse  $m_{\tilde{b}_2}$ , die den Brechungsparameter  $M_{\tilde{b}_R}^2$  ersetzt, immer on-shell festgelegt, so daß der Propagator des  $\tilde{b}_2$ -Feldes eine Polstelle mit Realteil  $m_{\tilde{b}_2}^2$  hat:

$$\text{Re}\hat{\Sigma}_{\tilde{t}22}(m_{\tilde{b}_2}^2) = 0 . \quad (5.41)$$

Der dazugehörige Counterterm ist dann:

$$\delta m_{\tilde{b}_2}^2 = \text{Re}\Sigma_{\tilde{b}22}(m_{\tilde{b}_2}^2) . \quad (5.42)$$

Der Counterterm zur Sbottom-Masse  $m_{\tilde{b}_1}$  wird über die Relation (5.40) bestimmt und kann durch  $\delta m_t$ ,  $\delta m_{\tilde{t}_{\{1,2\}}}^2$ ,  $\delta\theta_{\tilde{t}}$ ,  $\delta m_b$ ,  $\delta m_{\tilde{b}_2}^2$  und  $\delta\theta_{\tilde{b}}$  ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} \delta m_{\tilde{b}_1}^2 = & -\tan^2\theta_{\tilde{b}}\delta m_{\tilde{b}_2}^2 + 2\tan\theta_{\tilde{b}}(m_{\tilde{b}_1}^2 - m_{\tilde{b}_2}^2)\delta\theta_{\tilde{b}} + \frac{1}{\cos^2\theta_{\tilde{b}}} [\cos^2\theta_{\tilde{t}}\delta m_{\tilde{t}_1}^2 \\ & + \sin^2\theta_{\tilde{t}}\delta m_{\tilde{t}_2}^2 - \sin 2\theta_{\tilde{t}}(m_{\tilde{t}_1}^2 - m_{\tilde{t}_2}^2)\delta\theta_{\tilde{t}} + 2m_b\delta m_b - 2m_t\delta m_t \\ & - \underbrace{\cos(2\beta)\delta M_W^2 + \frac{4M_W^2 \tan\beta}{(1 + \tan^2\beta)^2}\delta \tan\beta}_{\mathcal{O}(\alpha): \text{ wird vernachlässigt}}] . \end{aligned} \quad (5.43)$$

Im folgenden sind die Counterterme  $\delta m_t$ ,  $\delta m_{\tilde{t}_{\{1,2\}}}^2$ ,  $\delta\theta_{\tilde{t}}$  und  $\delta m_{\tilde{b}_2}^2$  immer unabhängig und  $\delta A_t$  und  $\delta m_{\tilde{b}_1}^2$  abhängig, während  $\delta m_b$ ,  $\delta A_b$  und  $\delta\theta_{\tilde{b}}$  sowohl als unabhängige als auch als abhängige Counterterme auftreten. Ausgehend von Gleichung (5.39) erhält man eine allgemeinere Form des Ausdrucks für den Counterterm  $\delta m_{\tilde{b}_1}^2$  und ist dabei frei von der speziellen Wahl der unitären Matrizen  $\mathcal{U}_{\tilde{t}}$  und  $\mathcal{U}_{\tilde{b}}$ :

$$\begin{aligned} \delta m_{\tilde{b}_1}^2 = & \frac{1}{U_{\tilde{b}11}^2} [-U_{\tilde{b}12}^2 \delta m_{\tilde{b}_2}^2 + 2U_{\tilde{b}12}U_{\tilde{b}22}\delta Y_b + U_{\tilde{t}11}^2 \delta m_{\tilde{t}_1}^2 + U_{\tilde{t}12}^2 \delta m_{\tilde{t}_2}^2 \\ & - 2U_{\tilde{t}12}U_{\tilde{t}22}\delta Y_t + 2m_b\delta m_b - 2m_t\delta m_t] + \mathcal{O}(\alpha) . \end{aligned} \quad (5.44)$$

Hier sind  $\delta Y_t := (\mathcal{U}_{\tilde{t}}\delta\mathcal{M}_{\tilde{t}}\mathcal{U}_{\tilde{t}}^+)_{12}$  – wie in (5.38) – bzw.  $\delta Y_b := (\mathcal{U}_{\tilde{b}}\delta\mathcal{M}_{\tilde{b}}\mathcal{U}_{\tilde{b}}^+)_{12}$  die Counterterme zu den Parametern  $Y_t := (\mathcal{U}_{\tilde{t}}\mathcal{M}_{\tilde{t}}\mathcal{U}_{\tilde{t}}^+)_{12}$  bzw.  $Y_b := (\mathcal{U}_{\tilde{b}}\mathcal{M}_{\tilde{b}}\mathcal{U}_{\tilde{b}}^+)_{12}$ , die auf Born-Niveau verschwinden und deswegen nicht in der Gleichung (5.39) auftreten.

Nachdem die Counterterme zu den Sbottom-Massen bestimmt sind, müssen nur noch Ausdrücke für die Counterterme der Bottom-Quark-Masse  $m_b$ , des Sbottom-Mischungswinkels  $\theta_{\tilde{b}}$  und des A-Parameters  $A_b$  gefunden werden. Die Bottom-Quark-Masse  $m_b$ , der Mischungswinkel  $\theta_{\tilde{b}}$  und der A-Parameter  $A_b$  hängen über die Relation

$$\sin(2\theta_{\tilde{b}}) = \frac{2m_b(A_b - \mu \tan\beta)}{m_{\tilde{b}_1}^2 - m_{\tilde{b}_2}^2} \quad (5.45)$$

### 5.3. Renormierung im Bottom-Sbottom-Sektor

zusammen. Wenn zwei der zu den Parametern  $m_b$ ,  $\theta_{\bar{b}}$  und  $A_b$  gehörenden Counterterme festgelegt sind, kann der dritte über die Beziehung

$$(m_{\bar{b}_1}^2 - m_{\bar{b}_2}^2) \cos(2\theta_{\bar{b}}) \delta\theta_{\bar{b}} = -\frac{1}{2} \sin(2\theta_{\bar{b}}) (\delta m_{\bar{b}_1}^2 - \delta m_{\bar{b}_2}^2) + \delta m_b (A_b - \mu \tan \beta) + m_b \delta A_b - \underbrace{m_b (\mu \delta \tan \beta + \tan \beta \delta \mu)}_{\mathcal{O}(\alpha): \text{wird vernachlässigt}} \quad (5.46)$$

bestimmt werden. Analog zu (5.38) kann man diese Relation auch unabhängig von der Wahl der unitären Matrizen  $\mathcal{U}_{\bar{t}}$  und  $\mathcal{U}_{\bar{b}}$  folgendermaßen ausdrücken:

$$(U_{\bar{b}_{11}} U_{\bar{b}_{22}} + U_{\bar{b}_{12}} U_{\bar{b}_{21}}) \delta Y_b = -U_{\bar{b}_{11}} U_{\bar{b}_{12}} (\delta m_{\bar{b}_1}^2 - \delta m_{\bar{b}_2}^2) + (A_b - \mu \tan \beta) \delta m_b + m_b \delta A_b + \mathcal{O}(\alpha). \quad (5.47)$$

Zur Übersicht sind die unterschiedlichen Renormierungsschemata, die in Kapitel 6.2 untersucht werden, in Tabelle 5.1 zusammengestellt.

#### 5.3.1. On-Shell-Renormierung analog zum Top-Stop-Sektor

Das in diesem Abschnitt beschriebene Renormierungsschema ist analog zu dem im Top-Stop-Sektor verwendeten aufgebaut. Zu berücksichtigen ist, daß die Anzahl der unabhängigen Parameter um eins geringer ist als im Topsektor.

- (i) Wie im Top-Stop-Sektor wird die Bottom-Quark-Masse über eine On-Shell-Bedingung festgelegt, so daß der Bottom-Massen-Parameter  $m_b$  die Bedeutung der physikalischen Masse erhält:

$$\text{Re} \hat{\Sigma}_b(k) u(k) \Big|_{k^2=m_b^2} = 0, \quad \bar{u}(k) \text{Re} \hat{\Sigma}_b(k) \Big|_{k^2=m_b^2} = 0 \quad (5.48)$$

	$m_{\bar{b}_2}^2$	$m_b$	$A_b$	$\theta_{\bar{b}}$
analog Top-Stop-Sektor („ $m_b$ OS“)	on-shell	on-shell		on-shell
$\overline{\text{DR}}$ -Bottomquark-Masse („ $m_b$ $\overline{\text{DR}}$ “)	on-shell	$\overline{\text{DR}}$	$\overline{\text{DR}}$	
$\overline{\text{DR}}$ -Mischungswinkel u. $A_b$ („ $\theta_{\bar{b}}$ , $A_b$ $\overline{\text{DR}}$ “)	on-shell		$\overline{\text{DR}}$	$\overline{\text{DR}}$
on-shell Mischungswinkel u. $A_b$ („ $\theta_{\bar{b}}$ , $A_b$ OS“)	on-shell		on-shell	on-shell

**Tabelle 5.1.:** Zusammenstellung der vier betrachteten Renormierungsschemata für den Bottom-Sbottom-Sektor: Die unausgefüllten Felder kennzeichnen die abhängigen Größen.

## 5. Der Quark-Squark-Sektor im reellen MSSM

wobei  $\hat{\Sigma}_b$  durch (5.18) und (5.19) gegeben ist und  $u$  und  $\bar{u}$  die Spinoren der äußeren Teilchen, also der Bottom-Quarks, sind. Daraus erhält man dann für den Bottom-Massen-Counterterm

$$\delta m_b = \frac{1}{2} m_b (\text{Re} \Sigma_{b_L}(m_b^2) + \text{Re} \Sigma_{b_R}(m_b^2) + 2 \text{Re} \Sigma_{b_S}(m_b^2)) . \quad (5.49)$$

(ii) Der Bottom-Squark-Mischungswinkel wird entsprechend (5.33) festgelegt:

$$\text{Re} \hat{\Sigma}_{\tilde{b}_{12}}(m_{\tilde{b}_1}^2) + \text{Re} \hat{\Sigma}_{\tilde{b}_{12}}(m_{\tilde{b}_2}^2) = 0 . \quad (5.50)$$

Für den Mischungswinkel-Counterterm erhält man dann mit (5.11) und (5.14) und der Forderung  $\delta Z_{\tilde{b}_{12}} = \delta Z_{\tilde{b}_{21}}$  folgenden Ausdruck:

$$\delta \theta_{\tilde{b}} = \frac{\delta Y_b}{m_{\tilde{b}_1}^2 - m_{\tilde{b}_2}^2} = \frac{\text{Re} \Sigma_{\tilde{b}_{12}}(m_{\tilde{b}_1}^2) + \text{Re} \Sigma_{\tilde{b}_{12}}(m_{\tilde{b}_2}^2)}{2(m_{\tilde{b}_1}^2 - m_{\tilde{b}_2}^2)} . \quad (5.51)$$

Damit sind alle unabhängigen Counterterme des Bottom-Sbottom-Sektors festgelegt. Alle anderen Counterterme ergeben sich als Kombination aus den unabhängigen Countertermen, insbesondere die Counterterme des A-Parameters und der weiteren Bottom-Squarkmasse.

Der A-Parameter-Counterterm  $\delta A_b$  wird mit (5.46) bestimmt und ergibt sich als:

$$\begin{aligned} \delta A_b &= \frac{1}{m_b} \left[ \frac{U_{\tilde{b}_{22}}}{U_{\tilde{b}_{11}}} \delta Y_b - \delta m_b (A_b - \mu \tan \beta - 2 \frac{U_{\tilde{b}_{12}}}{U_{\tilde{b}_{11}}} m_b) \right. \\ &\quad + \frac{U_{\tilde{b}_{12}}}{U_{\tilde{b}_{11}}} \left( -\delta m_{\tilde{b}_2}^2 + U_{\tilde{t}_{11}}^2 \delta m_{\tilde{t}_1}^2 + U_{\tilde{t}_{12}}^2 \delta m_{\tilde{t}_2}^2 - 2 U_{\tilde{t}_{12}} U_{\tilde{t}_{22}} \delta Y_t - 2 m_t \delta m_t \right) \\ &\quad \left. + \frac{U_{\tilde{b}_{12}}}{U_{\tilde{b}_{11}}} \left( -\cos(2\beta) \delta M_W^2 + \frac{4 M_W^2 \tan \beta}{(1 + \tan^2 \beta)^2} \delta \tan \beta \right) + m_b \tan \beta \delta \mu + m_b \mu \delta \tan \beta \right] \\ &\quad \underbrace{\hspace{15em}}_{\mathcal{O}(\alpha) : \text{wird vernachlässigt}} \\ &= \frac{1}{m_b} \left[ (m_{\tilde{b}_1}^2 - m_{\tilde{b}_2}^2) \delta \theta_{\tilde{b}} - \delta m_b (A_b - \mu \tan \beta - 2 \tan \theta_{\tilde{b}} m_b) + \tan \theta_{\tilde{b}} \left( -\delta m_{\tilde{b}_2}^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2 m_t \delta m_t + \cos^2 \theta_{\tilde{t}} \delta m_{\tilde{t}_1}^2 + \sin^2 \theta_{\tilde{t}} \delta m_{\tilde{t}_2}^2 - \sin 2\theta_{\tilde{t}} (m_{\tilde{t}_1}^2 - m_{\tilde{t}_2}^2) \delta \theta_{\tilde{t}} \right) + \mathcal{O}(\alpha) \right] . \quad (5.52) \end{aligned}$$

Der Bottom-Squark-Massen-Counterterm  $\delta m_{\tilde{b}_1}$  ist durch (5.43) gegeben.

Obwohl dieses Renormierungsschema formal dem im Top-Stop-Sektor entspricht, gibt es entscheidende Unterschiede. Den Wert der Bottom-Quark-Polmasse aus experimentellen Daten mit der benötigten Präzision zu bestimmen, gestaltet sich aufgrund nicht-perturbativer Effekte als schwierig. Die Genauigkeit des Werts der Top-Quark-Polmasse dagegen ist durch die Experimente begrenzt. Ein weiterer wichtiger Unterschied besteht in dem anderen  $\tan \beta$ -Verhalten der Squark-Massenmatrizen. In die Bottom-Squark-Massenmatrix geht  $\tan \beta$ , in die Top-Squark-Massenmatrix jedoch  $\cot \beta$  ein. Die Auswirkungen dieser Unterschiede werden in Kapitel 6.2 detaillierter diskutiert.

### 5.3.2. Bottom-Masse im $\overline{\text{DR}}$ -Schema

Mögliche Probleme, verursacht durch die Verwendung der Bottom-Quark-Polmasse, können durch die Wahl eines Renormierungsschemas, in das die Bottom-Masse als laufende Größe eingeht, vermieden werden. In folgendem Renormierungsschema werden neben der durch eine On-Shell-Bedingung festgelegten Sbottom-Masse  $m_{\bar{b}_2}^2$  die Bottom-Quark-Masse  $m_b$  und der A-Parameter  $A_b$  als unabhängige Parameter des Bottom-Sbottom-Sektors gewählt und durch eine  $\overline{\text{DR}}$ -Bedingung festgelegt.

- (i) Den Bottom-Massen-Counterterm erhält man aus (5.49), in dem man die Zweipunkt-Integrale  $A$  und  $B_0$  in den Selbstenergien  $\Sigma$  durch den divergenten Anteil  $\Delta$  gemäß (4.88) und (4.89) ersetzt. Damit ist der Bottom-Massen-Counterterm

$$\delta m_b = \frac{1}{2} m_b (\text{Re}\Sigma_{b_L}(m_b^2)|_{\text{div.}} + \text{Re}\Sigma_{b_R}(m_b^2)|_{\text{div.}} + 2\text{Re}\Sigma_{b_S}(m_b^2)|_{\text{div.}}) . \quad (5.53)$$

- (ii) Entsprechendes gilt für den A-Parameter-Counterterm. Werden in (5.52) die Ersetzungen (4.88) und (4.89) durchgeführt, so erhält man für den A-Parameter-Counterterm:

$$\begin{aligned} \delta A_b &= \frac{1}{2} \left( 2 \frac{U_{\bar{b}_{12}}}{U_{\bar{b}_{11}}} m_b - A_b + \mu \tan \beta \right) [\text{Re}\Sigma_{b_L}(m_b^2)|_{\text{div.}} + \text{Re}\Sigma_{b_R}(m_b^2)|_{\text{div.}} + 2\text{Re}\Sigma_{b_S}(m_b^2)|_{\text{div.}}] \\ &+ \frac{1}{m_b} \left[ \frac{U_{\bar{b}_{22}}}{2U_{\bar{b}_{11}}} [\text{Re}\Sigma_{\bar{b}_{12}}(m_{\bar{b}_1}^2)|_{\text{div.}} + \text{Re}\Sigma_{\bar{b}_{12}}(m_{\bar{b}_2}^2)|_{\text{div.}}] + \frac{U_{\bar{b}_{12}}}{U_{\bar{b}_{11}}} \left( -\text{Re}\Sigma_{\bar{b}_{22}}(m_{\bar{b}_2}^2)|_{\text{div.}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - U_{\bar{t}_{12}} U_{\bar{t}_{22}} [\text{Re}\Sigma_{\bar{t}_{12}}(m_{\bar{t}_1}^2)|_{\text{div.}} + \text{Re}\Sigma_{\bar{t}_{12}}(m_{\bar{t}_2}^2)|_{\text{div.}}] + U_{\bar{t}_{11}}^2 \text{Re}\Sigma_{\bar{t}_{11}}(m_{\bar{t}_1}^2)|_{\text{div.}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + U_{\bar{t}_{12}}^2 \text{Re}\Sigma_{\bar{t}_{22}}(m_{\bar{t}_2}^2)|_{\text{div.}} - m_t^2 [\text{Re}\Sigma_{t_L}(m_t^2)|_{\text{div.}} + \text{Re}\Sigma_{t_R}(m_t^2)|_{\text{div.}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2\text{Re}\Sigma_{t_S}(m_t^2)|_{\text{div.}}] \right) \right] + \mathcal{O}(\alpha) \\ &= \frac{1}{2} (2 \tan \theta_{\bar{b}} m_b - A_b + \mu \tan \beta) [\text{Re}\Sigma_{b_L}(m_b^2)|_{\text{div.}} + \text{Re}\Sigma_{b_R}(m_b^2)|_{\text{div.}} + 2\text{Re}\Sigma_{b_S}(m_b^2)|_{\text{div.}}] \\ &+ \frac{1}{m_b} \left[ \frac{1}{2} [\text{Re}\Sigma_{\bar{b}_{12}}(m_{\bar{b}_1}^2)|_{\text{div.}} + \text{Re}\Sigma_{\bar{b}_{12}}(m_{\bar{b}_2}^2)|_{\text{div.}}] + \tan \theta_{\bar{b}} \left( -\text{Re}\Sigma_{\bar{b}_{22}}(m_{\bar{b}_2}^2)|_{\text{div.}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{2} \sin 2\theta_{\bar{t}} [\text{Re}\Sigma_{\bar{t}_{12}}(m_{\bar{t}_1}^2)|_{\text{div.}} + \text{Re}\Sigma_{\bar{t}_{12}}(m_{\bar{t}_2}^2)|_{\text{div.}}] + \cos^2 \theta_{\bar{t}} \text{Re}\Sigma_{\bar{t}_{11}}(m_{\bar{t}_1}^2)|_{\text{div.}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sin^2 \theta_{\bar{t}} \text{Re}\Sigma_{\bar{t}_{22}}(m_{\bar{t}_2}^2)|_{\text{div.}} - m_t^2 [\text{Re}\Sigma_{t_L}(m_t^2)|_{\text{div.}} + \text{Re}\Sigma_{t_R}(m_t^2)|_{\text{div.}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2\text{Re}\Sigma_{t_S}(m_t^2)|_{\text{div.}}] \right) \right] + \mathcal{O}(\alpha) . \quad (5.54) \end{aligned}$$

Damit sind im Bottom-Sbottom-Sektor alle Counterterme festgelegt. Die Counterterme zum Mischungswinkel und zur Sbottom-Masse  $m_{\bar{b}_1}$  erhält man als Kombination der obigen

## 5. Der Quark-Squark-Sektor im reellen MSSM

Counterterme und der des Top-Stop-Sektors. Der Counterterm zum Mischungswinkel,  $\delta\theta_{\bar{b}}$  ergibt sich als:

$$\begin{aligned}
\delta\theta_{\bar{b}} &= \frac{\delta Y_b}{m_{\bar{b}_1}^2 - m_{\bar{b}_2}^2} = \frac{1}{m_{\bar{b}_1}^2 - m_{\bar{b}_2}^2} \left[ \frac{U_{\bar{b}_{11}}}{U_{\bar{b}_{22}}} \left( m_b \delta A_b + \delta m_b (A_b - \mu \tan \beta) - \underbrace{m_b \tan \beta \delta \mu}_{\mathcal{O}(\alpha): \text{ wird vernachlässigt}} \right) \right. \\
&\quad + \frac{U_{\bar{b}_{12}}}{U_{\bar{b}_{22}}} \left( \delta m_{\bar{b}_2}^2 - U_{\bar{t}_{11}}^2 \delta m_{\bar{t}_1}^2 - U_{\bar{t}_{12}}^2 \delta m_{\bar{t}_2}^2 + 2U_{\bar{t}_{12}} U_{\bar{t}_{22}} (m_{\bar{t}_1}^2 - m_{\bar{t}_2}^2) \delta\theta_{\bar{t}} - 2m_b \delta m_b \right. \\
&\quad \left. \left. + 2m_t \delta m_t + \cos(2\beta) \delta M_W^2 - \underbrace{\left( \frac{U_{\bar{b}_{11}}}{U_{\bar{b}_{12}}} m_b \mu + \frac{4M_W^2 \tan \beta}{(1 + \tan^2 \beta)^2} \right) \delta \tan \beta}_{\mathcal{O}(\alpha): \text{ wird vernachlässigt}} \right) \right] \\
&= \frac{1}{m_{\bar{b}_1}^2 - m_{\bar{b}_2}^2} \left[ m_b \delta A_b + \delta m_b (A_b - \mu \tan \beta) + \tan \theta_{\bar{b}} \left( \delta m_{\bar{b}_2}^2 - \cos^2 \theta_{\bar{t}} \delta m_{\bar{t}_1}^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \sin^2 \theta_{\bar{t}} \delta m_{\bar{t}_2}^2 + \sin 2\theta_{\bar{t}} (m_{\bar{t}_1}^2 - m_{\bar{t}_2}^2) \delta\theta_{\bar{t}} - 2m_b \delta m_b + 2m_t \delta m_t \right) + \mathcal{O}(\alpha) \right]. \quad (5.55)
\end{aligned}$$

Der Bottom-Squark-Massen-Counterterm  $\delta m_{\bar{b}_1}^2$  ist wiederum durch (5.43) gegeben.

### 5.3.3. $\overline{\text{DR}}$ -Renormierung des A-Parameters und des Mischungswinkels

Eine weitere Möglichkeit zur Festlegung des Renormierungsschemas besteht in der Wahl des Mischungswinkel und des A-Parameters – neben der on-shell festgelegten Sbottom-Masse  $m_{\bar{b}_2}$  – als unabhängige Parameter, deren Counterterme durch  $\overline{\text{DR}}$ -Bedingungen bestimmt werden. Die Bottom-Quark-Masse ist dann ein abhängiger Parameter, dessen Counterterm durch eine Kombination der Counterterme der unabhängigen Parameter gegeben ist.

- (i) Der Counterterm zum Mischungswinkel wird dadurch bestimmt, daß im Ausdruck für den On-Shell-Mischungswinkel (5.51) die Zwei-Punkt-Integrale, wie in (4.88), (4.89), durch den divergenten Anteil ersetzt werden:

$$\delta\theta_{\bar{b}} = \frac{\delta Y_b}{m_{\bar{b}_1}^2 - m_{\bar{b}_2}^2} = \frac{\text{Re}\Sigma_{\bar{b}_{12}}(m_{\bar{b}_1}^2)|_{\text{div.}} + \text{Re}\Sigma_{\bar{b}_{12}}(m_{\bar{b}_2}^2)|_{\text{div.}}}{2(m_{\bar{b}_1}^2 - m_{\bar{b}_2}^2)}. \quad (5.56)$$

- (ii) Der A-Parameter-Counterterm ist wie in Abschnitt 5.3.2 durch (5.54) gegeben.

Alle Counterterme sind damit bestimmt. Die Counterterme zur Bottom-Quark-Masse,  $\delta m_b$ , und zur Bottom-Squark-Masse,  $\delta m_{\bar{b}_1}^2$ , setzen sich aus den oben berechneten Countertermen



### 5.3. Renormierung im Bottom-Sbottom-Sektor

zusammen. Für den Counterterm der Bottom-Quark-Masse ergibt sich folgender Ausdruck (der sich im Grenzfall  $A_b - \mu \tan \beta \rightarrow 0$  wohlverhält):

$$\begin{aligned}
\delta m_b &= \left[ -m_b \delta A_b + \frac{U_{\tilde{b}22}}{U_{\tilde{b}11}} \delta Y_b + \frac{U_{\tilde{b}12}}{U_{\tilde{b}11}} \left( -\delta m_{\tilde{b}_2}^2 + U_{\tilde{t}11}^2 \delta m_{\tilde{t}_1}^2 + U_{\tilde{t}12}^2 \delta m_{\tilde{t}_2}^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 2U_{\tilde{t}12} U_{\tilde{t}22} \delta Y_t - 2m_t \delta m_t - \underbrace{\cos(2\beta) \delta M_W^2 + \frac{4M_W^2 \tan \beta}{(1 + \tan^2 \beta)^2} \delta \tan \beta}_{\mathcal{O}(\alpha): \text{ wird vernachlässigt}} \right) \right. \\
&\quad \left. + \underbrace{m_b \mu \delta \tan \beta + m_b \tan \beta \delta \mu}_{\mathcal{O}(\alpha): \text{ wird vernachlässigt}} \right] \left[ A_b - \mu \tan \beta - 2m_b \frac{U_{\tilde{b}12}}{U_{\tilde{b}11}} \right]^{-1} \\
&= \left[ -m_b \delta A_b + (m_{\tilde{b}_1}^2 - m_{\tilde{b}_2}^2) \delta \theta_{\tilde{b}} + \tan \theta_{\tilde{b}} \left( \cos^2 \theta_{\tilde{t}} \delta m_{\tilde{t}_1}^2 + \sin^2 \theta_{\tilde{t}} \delta m_{\tilde{t}_2}^2 - 2m_t \delta m_t \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \sin 2\theta_{\tilde{t}} (m_{\tilde{t}_1}^2 - m_{\tilde{t}_2}^2) \delta \theta_{\tilde{t}} - \delta m_{\tilde{b}_2}^2 \right) + \mathcal{O}(\alpha) \right] \left[ A_b - \mu \tan \beta - 2m_b \tan \theta_{\tilde{b}} \right]^{-1}, \quad (5.57)
\end{aligned}$$

und der Bottom-Quark-Massen-Counterterm  $\delta m_{\tilde{b}_1}^2$  ist gegeben durch (5.43).

#### 5.3.4. On-Shell-Renormierung des A-Parameters und des Mischungswinkels

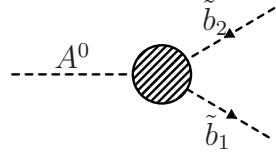
In [40] wurde eine Renormierungsbedingung an den Vertex  $A^0 \tilde{b}_1 \tilde{b}_2$  gestellt, um eine explizite Abhängigkeit von der Renormierungsskala  $\mu^{\overline{\text{DR}}}$  zu vermeiden. In diesem Abschnitt wird ein ähnliches Renormierungsschema beschrieben, wobei hier im Gegensatz zu [40] nicht der Limes  $\tan \beta \rightarrow \infty$  verwendet wird. Die aus den Unterschieden zwischen diesem und dem in [40] angewandten Renormierungsschema resultierenden unterschiedlichen Werte für die Higgsmasse werden in Kapitel 6.4 ausführlicher diskutiert. Analog zu [40] wird dieses Schema als „on-shell“ bezeichnet, obwohl der Vertex  $A^0 \tilde{b}_1 \tilde{b}_2$  off-shell berechnet wird; die renormierte Zwei-Schleifen-Selbstenergie der Higgs-Bosonen der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_b \alpha_s)$  hängt weder bei Verwendung dieses Renormierungsschemas noch bei Anwendung eines Schemas, in dem alle Renormierungsbedingungen on-shell gestellt werden, vom Regularisierungsparameter  $\mu^{\overline{\text{DR}}}$  ab.

Als unabhängige Parameter werden außer der on-shell festgelegten Sbottom-Masse  $m_{\tilde{b}_2}$  der Mischungswinkel  $\theta_{\tilde{b}}$  und der A-Parameter  $A_b$  gewählt.

- (i) Für den Mischungswinkel wird dieselbe Renormierungsbedingung gestellt wie in Abschnitt 5.3.1, und somit ist der zum Mischungswinkel gehörende Counterterm durch (5.51) gegeben.

5. Der Quark-Squark-Sektor im reellen MSSM

(ii) Der Counterterm zum A-Parameter wird über den Vertex  $A^0\tilde{b}_1\tilde{b}_2$

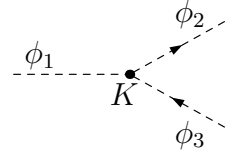


$$\hat{\Lambda}(p_{A^0}^2, p_{\tilde{b}_1}^2, p_{\tilde{b}_2}^2) \quad (5.58)$$

festgelegt, wobei  $\hat{\Lambda}(p_{A^0}^2, p_{\tilde{b}_1}^2, p_{\tilde{b}_2}^2)$  die dazugehörige renormierte Drei-Punkt-Funktion ist:

$$\begin{aligned} \hat{\Lambda}(p_{A^0}^2, p_{\tilde{b}_1}^2, p_{\tilde{b}_2}^2) &= \Lambda(p_{A^0}^2, p_{\tilde{b}_1}^2, p_{\tilde{b}_2}^2) + (U_{\tilde{b}_{11}} U_{\tilde{b}_{22}} - U_{\tilde{b}_{12}} U_{\tilde{b}_{21}}) \left\{ \frac{ie}{2M_W \sin \theta_W} \left[ m_b \tan \beta \delta A_b \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (\mu + \tan \beta A_b) \left( \delta m_b + \frac{1}{2} m_b (\delta Z_{\tilde{b}_1 \tilde{b}_1} + \delta Z_{\tilde{b}_2 \tilde{b}_2} + \underbrace{\delta Z_{A^0 A^0}}_{\mathcal{O}(\alpha): \text{ wird vernachlässigt}}) \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + m_b \underbrace{(\delta \mu + A_b \delta \tan \beta)}_{\mathcal{O}(\alpha): \text{ wird vernachlässigt}} \right] + im_b (\mu + \tan \beta A_b) \underbrace{\delta \left( \frac{e}{2M_W \sin \theta_W} \right)}_{\mathcal{O}(\alpha): \text{ wird vernachlässigt}} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( \underbrace{K(G^0 \tilde{b}_1 \tilde{b}_1)}_{\mathcal{O}(\alpha): \text{ wird vernachlässigt}} \underbrace{\delta Z_{G^0 A^0}}_{\mathcal{O}(\alpha): \text{ wird vernachlässigt}} + \underbrace{K(A^0 \tilde{b}_1 \tilde{b}_1)}_{=0 \text{ für reelle Parameter}} \delta Z_{\tilde{b}_1 \tilde{b}_2} \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{K(A^0 \tilde{b}_2 \tilde{b}_2)}_{=0 \text{ für reelle Parameter}} \delta Z_{\tilde{b}_2 \tilde{b}_1} \right). \end{aligned} \quad (5.59)$$

$K(\phi_1 \phi_2 \phi_3)$  bezeichnet die Born-Kopplung der Teilchen  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  und  $\phi_3$ . Da hier der Fall reeller Parameter, also das CP erhaltende MSSM, betrachtet wird, verschwinden die Kopplungen  $K(A^0 \tilde{b}_1 \tilde{b}_1)$  und  $K(A^0 \tilde{b}_2 \tilde{b}_2)$ , so daß sich  $\hat{\Lambda}(p_{A^0}^2, p_{\tilde{b}_1}^2, p_{\tilde{b}_2}^2)$  vereinfacht zu:



$$\begin{aligned} \hat{\Lambda}(p_{A^0}^2, p_{\tilde{b}_1}^2, p_{\tilde{b}_2}^2) &= \Lambda(p_{A^0}^2, p_{\tilde{b}_1}^2, p_{\tilde{b}_2}^2) + \frac{ie}{2M_W \sin \theta_W} (U_{\tilde{b}_{11}} U_{\tilde{b}_{22}} - U_{\tilde{b}_{12}} U_{\tilde{b}_{21}}) \left[ m_b \tan \beta \delta A_b \right. \\ &\quad \left. + (\mu + \tan \beta A_b) \left( \delta m_b + \frac{1}{2} m_b (\delta Z_{\tilde{b}_1 \tilde{b}_1} + \delta Z_{\tilde{b}_2 \tilde{b}_2}) \right) \right] + \mathcal{O}(\alpha) \\ &= \Lambda(p_{A^0}^2, p_{\tilde{b}_1}^2, p_{\tilde{b}_2}^2) + \frac{ie}{2M_W \sin \theta_W} \left[ m_b \tan \beta \delta A_b \right. \\ &\quad \left. + (\mu + \tan \beta A_b) \left( \delta m_b + \frac{1}{2} m_b (\delta Z_{\tilde{b}_1 \tilde{b}_1} + \delta Z_{\tilde{b}_2 \tilde{b}_2}) \right) \right] + \mathcal{O}(\alpha). \end{aligned} \quad (5.60)$$

Es wird folgende Renormierungsbedingung gestellt:

$$\hat{\Lambda}(0, m_{\tilde{b}_1}^2, m_{\tilde{b}_1}^2) + \hat{\Lambda}(0, m_{\tilde{b}_2}^2, m_{\tilde{b}_2}^2) = 0. \quad (5.61)$$

### 5.3. Renormierung im Bottom-Sbottom-Sektor

Aus dieser Bedingung und unter Verwendung der Beziehung (5.46) zur Elimination von  $\delta m_b$  erhält man folgenden Ausdruck für den A-Parameter-Counterterm:

$$\begin{aligned}
\delta A_b &= i \frac{M_W \sin \theta_W}{e m_b \tan \beta (U_{\tilde{b}_{11}} U_{\tilde{b}_{22}} - U_{\tilde{b}_{12}} U_{\tilde{b}_{21}})} \left( \Lambda(0, m_{\tilde{b}_1}^2, m_{\tilde{b}_1}^2) + \Lambda(0, m_{\tilde{b}_2}^2, m_{\tilde{b}_2}^2) \right) \\
&\quad - \frac{\mu + A_b \tan \beta}{2 \tan \beta} (\delta Z_{\tilde{b}_1 \tilde{b}_1} + \delta Z_{\tilde{b}_2 \tilde{b}_2}) \\
&\quad - \frac{\mu + A_b \tan \beta}{m_b \tan \beta} \left[ i \frac{M_W \sin \theta_W}{e \tan \beta (U_{\tilde{b}_{11}} U_{\tilde{b}_{22}} - U_{\tilde{b}_{12}} U_{\tilde{b}_{21}})} \left( \Lambda(0, m_{\tilde{b}_1}^2, m_{\tilde{b}_1}^2) + \Lambda(0, m_{\tilde{b}_2}^2, m_{\tilde{b}_2}^2) \right) \right. \\
&\quad \quad - \frac{m_b (\mu + A_b \tan \beta)}{2 \tan \beta} (\delta Z_{\tilde{b}_1 \tilde{b}_1} + \delta Z_{\tilde{b}_2 \tilde{b}_2}) - \frac{U_{\tilde{b}_{22}}}{U_{\tilde{b}_{11}}} \delta Y_b - \frac{U_{\tilde{b}_{12}}}{U_{\tilde{b}_{11}}} \left( -\delta m_{\tilde{b}_2}^2 \right. \\
&\quad \quad \left. \left. + U_{\tilde{t}_{11}}^2 \delta m_{\tilde{t}_1}^2 + U_{\tilde{t}_{12}}^2 \delta m_{\tilde{t}_2}^2 - 2 U_{\tilde{t}_{12}} U_{\tilde{t}_{22}} \delta Y_t - 2 m_t \delta m_t \right) \right] \\
&\quad \times \left[ \mu \left( \tan \beta + \frac{1}{\tan \beta} \right) + 2 m_b \frac{U_{\tilde{b}_{12}}}{U_{\tilde{b}_{11}}} \right]^{-1} + \mathcal{O}(\alpha) \\
&= i \frac{M_W \sin \theta_W}{e m_b \tan \beta} \left( \Lambda(0, m_{\tilde{b}_1}^2, m_{\tilde{b}_1}^2) + \Lambda(0, m_{\tilde{b}_2}^2, m_{\tilde{b}_2}^2) \right) - \frac{\mu + A_b \tan \beta}{2 \tan \beta} (\delta Z_{\tilde{b}_1 \tilde{b}_1} + \delta Z_{\tilde{b}_2 \tilde{b}_2}) \\
&\quad - \frac{\mu + A_b \tan \beta}{m_b \tan \beta} \left[ i \frac{M_W \sin \theta_W}{e \tan \beta} \left( \Lambda(0, m_{\tilde{b}_1}^2, m_{\tilde{b}_1}^2) + \Lambda(0, m_{\tilde{b}_2}^2, m_{\tilde{b}_2}^2) \right) \right. \\
&\quad \quad - \frac{m_b (\mu + A_b \tan \beta)}{2 \tan \beta} (\delta Z_{\tilde{b}_1 \tilde{b}_1} + \delta Z_{\tilde{b}_2 \tilde{b}_2}) - (m_{\tilde{b}_1}^2 - m_{\tilde{b}_2}^2) \delta \theta_{\tilde{b}} - \tan \theta_{\tilde{b}} \left( -\delta m_{\tilde{b}_2}^2 \right. \\
&\quad \quad \left. \left. + \cos^2 \theta_{\tilde{t}} \delta m_{\tilde{t}_1}^2 + \sin^2 \theta_{\tilde{t}} \delta m_{\tilde{t}_2}^2 - \sin 2\theta_{\tilde{t}} (m_{\tilde{t}_1}^2 - m_{\tilde{t}_2}^2) \delta \theta_{\tilde{t}} - 2 m_t \delta m_t \right) \right] \\
&\quad \times \left[ \mu \left( \tan \beta + \frac{1}{\tan \beta} \right) + 2 m_b \tan \theta_{\tilde{b}} \right]^{-1} + \mathcal{O}(\alpha) , \tag{5.62}
\end{aligned}$$

der noch unbestimmte Z-Faktoren enthält. Sie werden hier über die Bedingungen

$$\hat{\Sigma}_{\tilde{b}_{ii}}(m_{\tilde{b}_1}^2) - \hat{\Sigma}_{\tilde{b}_{ii}}(m_{\tilde{b}_2}^2) = 0 \quad \text{mit} \quad i = 1, 2 \tag{5.63}$$

festgelegt. Daraus ergibt sich für die Z-Faktoren:

$$\delta Z_{\tilde{b}_i \tilde{b}_i} = - \frac{\Sigma_{\tilde{b}_{ii}}(m_{\tilde{b}_1}^2) - \Sigma_{\tilde{b}_{ii}}(m_{\tilde{b}_2}^2)}{m_{\tilde{b}_1}^2 - m_{\tilde{b}_2}^2} . \tag{5.64}$$

## 5. Der Quark-Squark-Sektor im reellen MSSM

Über die Beziehung (5.46) kann der Bottom-Massen-Counterterm  $\delta m_b$  in Abhängigkeit von den unabhängigen Countertermen bestimmt werden:

$$\begin{aligned}
\delta m_b &= \left[ i \frac{M_W \sin \theta_W}{e \tan \beta (U_{\tilde{b}_{11}} U_{\tilde{b}_{22}} - U_{\tilde{b}_{12}} U_{\tilde{b}_{21}})} \left( \Lambda(0, m_{\tilde{b}_1}^2, m_{\tilde{b}_1}^2) + \Lambda(0, m_{\tilde{b}_2}^2, m_{\tilde{b}_2}^2) \right) \right. \\
&\quad - \frac{m_b (\mu + A_b \tan \beta)}{2 \tan \beta} (\delta Z_{\tilde{b}_1 \tilde{b}_1} + \delta Z_{\tilde{b}_2 \tilde{b}_2}) - \frac{U_{\tilde{b}_{22}}}{U_{\tilde{b}_{11}}} \delta Y_b \\
&\quad - \frac{U_{\tilde{b}_{12}}}{U_{\tilde{b}_{11}}} \left( -\delta m_{\tilde{b}_2}^2 + U_{\tilde{t}_{11}}^2 \delta m_{\tilde{t}_1}^2 + U_{\tilde{t}_{12}}^2 \delta m_{\tilde{t}_2}^2 - 2 U_{\tilde{t}_{12}} U_{\tilde{t}_{22}} \delta Y_t \right. \\
&\quad \left. - 2 m_t \delta m_t \right) \left[ \mu \left( \tan \beta + \frac{1}{\tan \beta} \right) + 2 m_b \frac{U_{\tilde{b}_{12}}}{U_{\tilde{b}_{11}}} \right]^{-1} + \mathcal{O}(\alpha) \\
&= \left[ i \frac{M_W \sin \theta_W}{e \tan \beta} \left( \Lambda(0, m_{\tilde{b}_1}^2, m_{\tilde{b}_1}^2) + \Lambda(0, m_{\tilde{b}_2}^2, m_{\tilde{b}_2}^2) \right) \right. \\
&\quad - \frac{m_b (\mu + A_b \tan \beta)}{2 \tan \beta} (\delta Z_{\tilde{b}_1 \tilde{b}_1} + \delta Z_{\tilde{b}_2 \tilde{b}_2}) - (m_{\tilde{b}_1}^2 - m_{\tilde{b}_2}^2) \delta \theta_{\tilde{b}} \\
&\quad - \tan \theta_{\tilde{b}} \left( -\delta m_{\tilde{b}_2}^2 + \cos^2 \theta_{\tilde{t}} \delta m_{\tilde{t}_1}^2 + \sin^2 \theta_{\tilde{t}} \delta m_{\tilde{t}_2}^2 - \sin 2 \theta_{\tilde{t}} (m_{\tilde{t}_1}^2 - m_{\tilde{t}_2}^2) \delta \theta_{\tilde{t}} \right. \\
&\quad \left. - 2 m_t \delta m_t \right) \left[ \mu \left( \tan \beta + \frac{1}{\tan \beta} \right) + 2 m_b \tan \theta_{\tilde{b}} \right]^{-1} + \mathcal{O}(\alpha) . \tag{5.65}
\end{aligned}$$

Auch hier kann der Sbottom-Massen-Counterterm  $\delta m_{\tilde{b}_1}^2$  durch eine Kombination der anderen Counterterme (5.43) ausgedrückt werden.

## 5.4. Die Bottom-Quark-Masse

Wie schon in Abschnitt 5.3.1 und 5.3.2 erwähnt, ist die Bottom-Quark-Polmasse, im Gegensatz zu der von Teilchen wie dem Elektron, nicht experimentell direkt bestimmbar, da ein Bottom-Quark nur im gebundenen Zustand auftritt. Insofern ist der Parameter „Bottom-Quark-Masse  $m_b$ “ nur ein formaler Parameter der Theorie. Die Größe dieses Parameters wird indirekt, zum Beispiel über die Messung der Zustände von Bottom-Anti-Bottom-Paaren, bestimmt. Genauer gesagt, es wird der Wert des renormierten Parameters  $m_b$  ermittelt, der renormierungsschema- und skalenabhängig ist. Prinzipiell kann man für jedes Renormierungsschema eine dazugehörige Bottom-Quark-Masse bestimmen; allerdings ist nicht jedes Renormierungsschema für störungstheoretische Rechnungen geeignet, da manche Schemata zu großen Korrekturen höherer Ordnung und damit zu größeren theoretischen Unsicherheiten führen.

Im folgenden wird eine Relation zwischen der Propagator-Polmasse  $m_b^{\text{OS}}$  und dem ursprünglichen Bottom-Quark-Massenparameter, der sogenannten nackten Masse,  $m_b^0$ , be-

#### 5.4. Die Bottom-Quark-Masse

stimmt. Diese Masse setzt sich aus der renormierten Bottom-Quark-Masse  $m_b$  und dem dazugehörigen Counterterm  $\delta m_b$  zusammen:

$$m_b^0 = m_b + \delta m_b \quad \text{mit} \quad m_b = \lambda_b v_1 , \quad (5.66)$$

wobei  $\lambda_b$  die Bottom-Yukawa-Kopplung und  $v_1$  der Vakuumerwartungswert des ersten Higgs-Dubletts ist.

Zur Berechnung der Beziehung zwischen Propagator-Polmasse  $m_b^{\text{OS}}$  und der nackten Masse  $m_b^0$  bzw. der renormierten Masse  $m_b$  wird die Nullstelle der renormierten Zwei-Punkt-Funktion der Bottom-Quarks  $\hat{\Gamma}^b$  bestimmt. Die renormierte Zwei-Punkt-Funktion der Bottom-Quarks  $\hat{\Gamma}^b$  setzt sich aus dem inversen Born-Propagator und der renormierten Bottom-Quark-Selbstenergie,  $\hat{\Sigma}_b$ , zusammen:

$$\hat{\Gamma}^b(p) = (\not{p} - m_b) + \hat{\Sigma}_b(p) , \quad (5.67)$$

wobei sich die renormierte Bottom-Quark-Selbstenergie,  $\hat{\Sigma}_b$ , wie in (5.18) und (5.19) in einen linkshändigen,  $\hat{\Sigma}_{b_L}$ , einen rechtshändigen,  $\hat{\Sigma}_{b_R}$ , und einen skalaren Anteil,  $\hat{\Sigma}_{b_S}$ , aufspalten läßt.

Die Propagator-Polmasse  $m_b^{\text{OS}}$  wird also durch folgende Gleichung bestimmt:

$$\hat{\Gamma}^b(p)u(p)|_{p^2=m_b^{\text{OS}^2}} = 0 , \quad (5.68)$$

wobei  $u$  der Spinor des äußeren Teilchens ist. Durch Umformen der Gleichung unter Ausnutzung der Dirac-Gleichung

$$(\not{p} - m_b^{\text{OS}})u(p)|_{p^2=m_b^{\text{OS}^2}} = 0 \quad (5.69)$$

erhält man<sup>5</sup>

$$\left[ (m_b^{\text{OS}} - m_b) + m_b^{\text{OS}} \omega_+ \hat{\Sigma}_{b_L}(m_b^{\text{OS}^2}) + m_b^{\text{OS}} \omega_- \hat{\Sigma}_{b_R}(m_b^{\text{OS}^2}) + m_b \hat{\Sigma}_{b_S}(m_b^{\text{OS}^2}) \right] u(p)|_{p^2=m_b^{\text{OS}^2}} = 0 . \quad (5.70)$$

Diese Gleichung enthält einen skalaren Anteil und einen Anteil proportional zu  $\gamma_5$ , die jeweils für sich genommen verschwinden müssen. Somit ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$m_b^{\text{OS}} - m_b + \frac{1}{2} m_b^{\text{OS}} (\hat{\Sigma}_{b_L}(m_b^{\text{OS}^2}) + \hat{\Sigma}_{b_R}(m_b^{\text{OS}^2})) + m_b \hat{\Sigma}_{b_S}(m_b^{\text{OS}^2}) = 0 , \quad (5.71)$$

$$\hat{\Sigma}_{b_L}(m_b^{\text{OS}^2}) - \hat{\Sigma}_{b_R}(m_b^{\text{OS}^2}) = 0 . \quad (5.72)$$

---

<sup>5</sup>Zur Ausnutzung der Dirac-Gleichung müssen  $\not{p}$  und  $\omega_{\pm}$  vertauscht werden, wobei  $\omega_{\pm}$  zu  $\omega_{\mp}$  wird. Deshalb steht hier vor dem linkshändigen Anteil der rechtshändige Projektor  $\omega_+$  und umgekehrt.

## 5. Der Quark-Squark-Sektor im reellen MSSM

Daraus berechnet sich die On-Shell-Masse zu:

$$m_b^{\text{OS}} = m_b - \frac{1}{2} m_b^{\text{OS}} (\hat{\Sigma}_{b_L}(m_b^{\text{OS}2}) + \hat{\Sigma}_{b_R}(m_b^{\text{OS}2})) - m_b \hat{\Sigma}_{b_S}(m_b^{\text{OS}2}). \quad (5.73)$$

Die zweite Gleichung liefert Bedingungen an die Z-Faktoren der Quark-Felder.

Setzt man die Ein-Schleifen-Ausdrücke (5.18) in das Gleichungssystem (5.71) ein und entwickelt bis zur Ein-Schleifen-Ordnung<sup>6</sup>, so erhält man für die Bottom-Quark-Polmasse  $m_b^{\text{OS}}$  in Abhängigkeit von der renormierten Bottom-Masse  $m_b$  folgenden Ausdruck:

$$m_b^{\text{OS}} = m_b + \delta m_b - \frac{1}{2} m_b (\Sigma_{b_L}(m_b^2) + \Sigma_{b_R}(m_b^2)) - m_b \Sigma_{b_S}(m_b^2). \quad (5.74)$$

Im Gegensatz zum rechts- und linkshändigen Anteil der unrenormierten Bottom-Quark-Selbstenergie enthält der skalare Anteil  $\tan\beta$ -verstärkte Anteile. Für die weiteren Überlegungen ist es sinnvoll, den skalaren Anteil in einen nicht- $\tan\beta$ -verstärkten Anteil  $\Sigma_{b_S}^{\tan\beta\text{non-enh.}}$  und in einen Anteil proportional zu  $\tan\beta$  aufzuspalten:

$$\Sigma_{b_S}(m_b^2) = \Sigma_{b_S}^{\tan\beta\text{non-enh.}}(m_b^2) - \Delta m_b. \quad (5.75)$$

Dabei ist  $\Delta m_b$  gegeben durch

$$\Delta m_b = \frac{2}{3\pi} \alpha_s \mu \tan\beta m_{\tilde{g}} I(m_{\tilde{b}_1}^2, m_{\tilde{b}_2}^2, m_{\tilde{g}}^2) \quad (5.76)$$

mit

$$I(m_{\tilde{b}_1}^2, m_{\tilde{b}_2}^2, m_{\tilde{g}}^2) = - \frac{m_{\tilde{b}_1}^2 m_{\tilde{b}_2}^2 \ln \frac{m_{\tilde{b}_2}^2}{m_{\tilde{b}_1}^2} + m_{\tilde{b}_1}^2 m_{\tilde{g}}^2 \ln \frac{m_{\tilde{b}_1}^2}{m_{\tilde{g}}^2} + m_{\tilde{g}}^2 m_{\tilde{b}_2}^2 \ln \frac{m_{\tilde{g}}^2}{m_{\tilde{b}_2}^2}}{(m_{\tilde{b}_1}^2 - m_{\tilde{g}}^2)(m_{\tilde{g}}^2 - m_{\tilde{b}_2}^2)(m_{\tilde{b}_2}^2 - m_{\tilde{b}_1}^2)}. \quad (5.77)$$

Die Aufspaltung (5.75) eingesetzt in (5.74) ergibt:

$$m_b^{\text{OS}} = m_b + \delta m_b - \frac{1}{2} m_b (\Sigma_{b_L}(m_b^2) + \Sigma_{b_R}(m_b^2)) - m_b \Sigma_{b_S}^{\tan\beta\text{non-enh.}}(m_b^2) + m_b \Delta m_b. \quad (5.78)$$

In dieser Gleichung liefert der Term  $m_b \Delta m_b$  für große  $\tan\beta$  den dominanten Beitrag der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_s \tan\beta)$ . Nach [45] enthalten die generischen Zwei-Schleifen-Diagramme keine Beiträge der Ordnung  $\mathcal{O}((\alpha_s \tan\beta)^2)$ . Die Ein-Schleifen-Anteile der Selbstenergie, die nicht  $\tan\beta$ -verstärkt sind, verursachen durch Countertermanschübe auf Zwei-Schleifen-Niveau höchstens Terme der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_s^2 \tan\beta)$ . Nur der Term  $\delta m_b \Delta m_b$  kann Terme der Ordnung  $\mathcal{O}((\alpha_s \tan\beta)^2)$  enthalten, deren Beiträge für große  $\tan\beta$  von der Größenordnung der nicht verstärkten Ein-Schleifen-Anteile sein können. Deswegen ist es sinnvoll,

<sup>6</sup>Dabei kann in den Selbstenergien die renormierte Bottom-Quark-Masse  $m_b$  anstelle der Bottom-Quark-Polmasse  $m_b^{\text{OS}}$  verwendet werden, da der daraus resultierende Unterschied mindestens von Zwei-Schleifen-Ordnung ist.

diesen Term als führenden Zwei-Schleifen-Term schon bei der Ein-Schleifen-Rechnung zu berücksichtigen:

$$m_b^{\text{OS}} = m_b + \delta m_b - \frac{1}{2} m_b (\Sigma_{b_L}(m_b^2) + \Sigma_{b_R}(m_b^2)) - m_b \Sigma_{b_S}^{\tan \beta \text{non-enh.}}(m_b^2) + m_b \Delta m_b + \delta m_b \Delta m_b. \quad (5.79)$$

Aus dieser Gleichung erhält man dann für den ursprünglichen Massen-Parameter:

$$m_b + \delta m_b = \frac{m_b^{\text{OS}} + \frac{1}{2} m_b (\Sigma_{b_L}(m_b^2) + \Sigma_{b_R}(m_b^2)) + m_b \Sigma_{b_S}^{\tan \beta \text{non-enh.}}(m_b^2)}{1 + \Delta m_b}. \quad (5.80)$$

Auf der rechten Seite von (5.80) stehen die  $\tan \beta$ -verstärkten Terme nur noch in aufsummierter Form. Aus (5.80) ergibt sich so ein störungstheoretisch gutes Verhalten des Werts der Bottom-Masse.

Zur Berechnung dieses Massenparameters ist die Kenntnis der Propagator-Polmasse  $m_b^{\text{OS}}$  notwendig, deren Bestimmung aus experimentellen Daten nur mit großen Unsicherheiten möglich ist [79]. Dagegen treten bei der Bestimmung der Standardmodell- $\overline{\text{MS}}$ -Bottom-Quark-Masse geringere Unsicherheiten auf. Über die Ein-Schleifen-Relation

$$m_b^{\text{OS}} + \delta m_b^{\text{OS}} = m_b^{\overline{\text{MS}},\text{SM}} + \delta m_b^{\overline{\text{MS}},\text{SM}} \quad (5.81)$$

läßt sich die Propagator-Polmasse als

$$m_b^{\text{OS}} = m_b^{\overline{\text{MS}},\text{SM}}(M_Z) \cdot b^{\text{shift}} \quad (5.82)$$

bestimmen mit

$$b^{\text{shift}} \equiv \left[ 1 + \frac{\alpha_s}{\pi} \left( \frac{4}{3} - \ln \frac{(m_b^{\overline{\text{MS}}})^2}{M_Z^2} \right) \right]. \quad (5.83)$$

Da die Propagator-Polmasse im Standardmodell und im MSSM den gleichen Wert hat, kann der so gewonnene Wert in (5.80) als Input verwendet werden. Mit Hilfe von (5.80) und (5.82) wird der Wert der  $\overline{\text{DR}}$ -Bottom-Masse bestimmt:

$$m_b^{\overline{\text{DR}},\text{MSSM}} = \frac{m_b^{\overline{\text{MS}},\text{SM}}(M_Z) b^{\text{shift}} + \frac{1}{2} m_b (\Sigma_{b_L}^{\text{fin}}(m_b^2) + \Sigma_{b_R}^{\text{fin}}(m_b^2)) + m_b \Sigma_{b_S}^{\tan \beta \text{non-enh., fin.}}(m_b^2)}{1 + \Delta m_b}. \quad (5.84)$$

In Kapitel 6 wird in den Selbstenergien der Wert der Propagator-Polmasse (5.82) als Wert für die Bottom-Quark-Masse  $m_b$  verwendet.

Wird die  $\overline{\text{DR}}$ -Bottom-Masse aus (5.84) (oder einer entsprechend dem Renormierungsschema umgerechneten Bottom-Masse) als Input-Parameter bei der Berechnung der renormierten Ein-Schleifen-Selbstenergien der Higgs-Bosonen gewählt, so werden die führenden

## 5. Der Quark-Squark-Sektor im reellen MSSM

$\tan\beta$ -verstärkten Korrekturen der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_b\alpha_s)$  in das Ergebnis der Ein-Schleifen-Selbstenergien absorbiert. Unter Berücksichtigung der so gewonnenen Ein-Schleifen-Selbstenergien können die Higgs-Massen durch Bestimmung der Nullstellen der Determinante der Zwei-Punkt-Vertex-Funktion (4.6) berechnet werden. Der Unterschied zwischen diesem Ergebnis zu dem Resultat, das unter Einschluß der Zwei-Schleifen-Selbstenergie der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_b\alpha_s)$  bestimmt wird, wird in Kapitel 6 als nichtführend bezeichnet.



# 6. Higgs-Massen mit $\mathcal{O}(\alpha_b\alpha_s)$ -Beiträgen im reellen MSSM

## 6.1. Berechnung der Massen der neutralen, CP-geraden Higgs-Bosonen

Bei der Berechnung der Higgs-Massen unter Berücksichtigung von Korrekturen höherer Ordnung wurden die renormierten Higgs-Selbstenergien auf Ein-Schleifen-Niveau vollständig bestimmt, auf Zwei-Schleifen-Niveau dagegen nur die Beiträge der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_t\alpha_s)$  und  $\mathcal{O}(\alpha_b\alpha_s)$  berücksichtigt (siehe Kapitel 4.3). Beiträge der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_t^2)$  [39] führen zu einer Erhöhung des Werts der Masse des leichtesten Higgs-Bosons. Da der Schwerpunkt dieser Arbeit jedoch auf der Untersuchung der nichtführenden Terme der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_b\alpha_s)$  (siehe auch Kapitel 5.4) und deren Verhalten in unterschiedlichen Renormierungsschemata liegt, wurden die Terme  $\mathcal{O}(\alpha_t^2)$  zur Vereinfachung der Rechnung vernachlässigt. Die numerischen Ergebnisse der folgenden Analyse sind also weniger eine exakte Vorhersage der Higgs-Masse, sondern eher eine Veranschaulichung des Verhaltens der Beiträge  $\mathcal{O}(\alpha_b\alpha_s)$ .

Zur Erzeugung der Feynman-Amplituden wurde das Programm `FeynArts` [80] und zur analytischen Auswertung dieser Amplituden die Programme `OneCalc` bzw. `TwoCalc` [81] und `FormCalc` [80] verwendet. Die Schleifen-Funktionen wurden mit Hilfe der in Anhang C aufgeführten analytischen Ausdrücke und des Programms `LoopTools` [82] numerisch ausgewertet.

Die Ergebnisse, die in diesem Kapitel diskutiert werden, sind zum Teil schon in [49] veröffentlicht.

Zur Berechnung der Higgs-Massen müssen die Nullstellen der Determinante der Zwei-Punkt-Vertex-Funktion (4.6) gesucht werden. Aufgrund der Komplexität der zu lösenden Gleichung ist die Angabe einer analytischen Lösung nicht möglich; es müssen numerische Verfahren verwendet werden. Die Gleichung kann iterativ (vgl. Kapitel 10) gelöst werden; eine gute Näherung dieser Lösung erhält man nach [28] durch folgendes effiziente und einfach zu implementierende Verfahren: Es werden die Eigenwerte der Matrix  $\mathcal{M}_{\{H^0, h^0\}}^{(1,2)}$ ,

## 6. Higgs-Massen mit $\mathcal{O}(\alpha_b\alpha_s)$ -Beiträgen im reellen MSSM

$$\mathcal{M}_{\{H^0, h^0\}}^{(1,2)} = \begin{pmatrix} M_{H^0 H^0}^{(1,2)} & M_{h^0 H^0}^{(1,2)} \\ M_{h^0 H^0}^{(1,2)} & M_{h^0 h^0}^{(1,2)} \end{pmatrix}, \quad (6.1)$$

mit den Matrixelementen (unter Verwendung der Notation aus (4.7) und (4.9))

$$M_{H^0 H^0}^{(1,2)} = (M_{H^0}^{(0)})^2 - \text{Re}\hat{\Sigma}_{H^0 H^0}^{(1)} \left( (M_{H^0}^{(0)})^2 \right) - \hat{\Sigma}_{H^0 H^0}^{(2)}(0), \quad (6.2)$$

$$M_{h^0 h^0}^{(1,2)} = (M_{h^0}^{(0)})^2 - \text{Re}\hat{\Sigma}_{h^0 h^0}^{(1)} \left( (M_{h^0}^{(0)})^2 \right) - \hat{\Sigma}_{h^0 h^0}^{(2)}(0), \quad (6.3)$$

$$M_{h^0 H^0}^{(1,2)} = -\text{Re}\hat{\Sigma}_{h^0 H^0}^{(1)} \left( \frac{1}{2} \left( (M_{H^0}^{(0)})^2 + (M_{h^0}^{(0)})^2 \right) \right) - \hat{\Sigma}_{h^0 H^0}^{(2)}(0), \quad (6.4)$$

bestimmt. Die Wurzeln der Eigenwerte liefern die gesuchten Higgs-Massen auf Zwei-Schleifen-Niveau. Dieses Verfahren wurde in diesem Kapitel angewendet.

### 6.1.1. Input-Parameter

Falls nicht anders angegeben, werden die Parameter-Werte aus Tabelle 6.1 und Anhang A.4 verwendet. Um die Bereiche zu untersuchen, in denen die Beiträge des Bottom-Sbottom-Sektors nicht vernachlässigbar sind (siehe auch Abb. 4.1), werden große Werte für  $\tan\beta$  und  $|\mu|$  gewählt.

Im folgenden wird die  $\overline{\text{DR}}$ -Bottom-Masse des MSSM (5.84) als Input-Parameter verwendet. In die Berechnung des Werts dieser Masse aus dem Wert der  $\overline{\text{MS}}$ -Bottom-Masse des Standardmodells gehen die Bottom-Squark-Massen ein, die wiederum von der Bottom-Quark-Masse abhängen. In den Abschnitten 6.1.2 – 6.4 wird zunächst die Propagator-Polmasse  $m_b^{\text{OS}}$ , die gemäß Gleichung (5.82) aus dem Wert der Standardmodell- $\overline{\text{MS}}$ -Bottom-Quark-Masse bestimmt wird (vergleiche Kapitel 5.4), zur Berechnung der Massen und Mischungswinkel der Bottom-Squarks verwendet. Diese Massen und Mischungswinkel sind wiederum zusammen mit der Propagator-Polmasse in dem Ausdruck für die  $\overline{\text{DR}}$ -Bottom-Masse<sup>1</sup> (5.84) enthalten. Nach der Berechnung der  $\overline{\text{DR}}$ -Bottom-Masse werden die Bottom-Squark-Massen in Abhängigkeit von der  $\overline{\text{DR}}$ -Bottom-Masse neu bestimmt:

$$m_b^{\text{OS}}, M_L, M_{\tilde{b}_R} \longrightarrow m_{\tilde{b}_1}, m_{\tilde{b}_2}, \theta_{\tilde{b}} \longrightarrow m_b^{\overline{\text{DR}}, \text{MSSM}}, M_L, M_{\tilde{b}_R} \longrightarrow m_{\tilde{b}_1}^{\text{neu}}, m_{\tilde{b}_2}^{\text{neu}}, \theta_{\tilde{b}}^{\text{neu}}. \quad (6.5)$$

Der Wert der so berechneten  $\tilde{b}_2$ -Squark-Masse,  $m_{\tilde{b}_2}^{\text{neu}}$ , wird als Input-Wert verwendet. Er ist in allen Renormierungsschemata, die in den Abschnitten 6.2 – 6.4 verwendet werden, identisch. Die Bottom-Squark-Masse  $m_{\tilde{b}_1}$  hingegen ist als abhängiger Parameter gewählt und erhält somit in den verschiedenen Renormierungsschemata unterschiedliche Werte in Abhängigkeit von den Werten der Input-Parameter  $M_L$ ,  $A_b$ ,  $m_b$ ,  $m_{\tilde{b}_2}$ ,  $\mu$  und  $\tan\beta$  (siehe auch Abschnitt 6.1.2).

<sup>1</sup>Die Propagator-Polmasse und die mit dieser Bottom-Masse bestimmten Bottom-Squark-Massen und -Mischungswinkel werden ebenfalls zur Bestimmung der Counterterme  $\delta m_b^{\text{RS}}|_{\text{finite}}$  und  $\delta A_b^{\text{RS}}|_{\text{finite}}$  verwendet (siehe Abschnitt 6.1.2).

### 6.1.2. Schema-Abhängigkeit

Um die unterschiedlichen Renormierungsschemata (Tabelle 5.1 in Kapitel 5.3 liefert einen Überblick über die verwendeten Renormierungsschemata) zu vergleichen, müssen die Parameter, die in das Ein-Schleifen-Ergebnis eingehen, den jeweiligen Renormierungsvorschriften entsprechend transformiert werden. Die Eingabewerte werden bei der numerischen Auswertung innerhalb des „ $m_b$   $\overline{\text{DR}}$ “-Schemas festgelegt (siehe Tabelle 5.1 in Kapitel 5.3). Mit Hilfe der folgenden Transformationen können die Parameter ausgehend von diesem Schema in ein anderes Renormierungsschema RS (mit den Countertermen  $\delta x^{\text{RS}}$ ) umgerechnet werden:

$$m_b^{\text{RS}} = m_b^{\overline{\text{DR}}} - \delta m_b^{\text{RS}}|_{\text{finite}}, \quad (6.6)$$

$$A_b^{\text{RS}} = A_b^{\overline{\text{DR}}} - \delta A_b^{\text{RS}}|_{\text{finite}}. \quad (6.7)$$

Analog kann man für die anderen Parameter verfahren. Die  $\overline{\text{DR}}$ -Skala  $\mu^{\overline{\text{DR}}}$  wird, wenn nicht anders angegeben, bei  $\mu^{\overline{\text{DR}}} = m_t$  festgelegt. Zur Illustration werden in Tabelle 6.2 und Tabelle 6.3 die numerischen Werte für die Bottom-Quark-Masse, den A-Parameter und die Bottom-Squark-Massen in unterschiedlichen Schemata für  $\tan \beta = 30$  und  $\tan \beta = 50$  und den Werten aus Tabelle 6.1 aufgeführt.

Die Werte aus Tabelle 6.2 und Tabelle 6.3 zeigen, daß das „ $m_b$  OS“-Schema zu großen Korrekturen von  $A_b$  führt, was die Anwendbarkeit dieses Schemas einschränkt. Andere Schemata bewirken nur kleine Änderungen der Parameter.

Standardmodell-Parameter: $m_t = 174.3 \text{ GeV}$ , $m_b^{\overline{\text{MS}}}(M_Z) = 2.94 \text{ GeV}$ ,	
Parameter des Higgs-Sektors: $M_{A^0} = 120 \text{ GeV}$ $\tan \beta = 50$ $\mu = -1000 \text{ GeV}$	
Brechungsparameter:	
für Gauginos: $M_1 = \frac{5 \sin^2 \theta_W}{3 \cos^2 \theta_W} M_2$ $M_2 = 100 \text{ GeV}$ $M_3 = 1000 \text{ GeV}$	für Sfermionen: $M_L = M_{L_{\{\tilde{q}_i, \tilde{l}_i\}}} = 1000 \text{ GeV}$ mit $i = 1, 2, 3$ $M_{\tilde{f}_R} = 1000 \text{ GeV}$ mit $f = u, c, t, d, s, b, e, \mu, \tau$ $A_{\{u, c, t\}} = A_{\{d, s, b\}} = A_{\{e, \mu, \tau\}} = 2000 \text{ GeV}$

**Tabelle 6.1.:** Werte der Input-Parameter, die in der numerischen Auswertung verwendet werden, wenn es nicht explizit anders angegeben wird.

6. Higgs-Massen mit  $\mathcal{O}(\alpha_b\alpha_s)$ -Beiträgen im reellen MSSM

Schema	$m_b$ [GeV]	$A_b$ [GeV]	$m_{\tilde{b}_1}$ [GeV]
$m_b \overline{\text{DR}}$	3.79	2000.00	1059.95
$A_b, \theta_{\tilde{b}} \overline{\text{DR}}$	3.04	2000.00	1039.50
$A_b, \theta_{\tilde{b}} \text{OS}$	2.99	2332.81	1039.04
$m_b \text{OS}$	3.77	-4284.56	1039.25

**Tabelle 6.2.:** Werte für die Bottom-Quark-Masse, den A-Parameter und  $m_{\tilde{b}_1}$  in unterschiedlichen Schemata bei  $\tan\beta = 30$ . Der Wert für  $m_{\tilde{b}_2}$ , der on-shell festgelegt ist (siehe (5.41) und (5.42)), beträgt in allen vier Schemata  $m_{\tilde{b}_2} = 938.44$  GeV.

Schema	$m_b$ [GeV]	$A_b$ [GeV]	$m_{\tilde{b}_1}$ [GeV]
$m_b \overline{\text{DR}}$	5.82	2000.00	1142.16
$A_b, \theta_{\tilde{b}} \overline{\text{DR}}$	5.26	2000.00	1117.93
$A_b, \theta_{\tilde{b}} \text{OS}$	5.24	2219.40	1118.02
$m_b \text{OS}$	4.93	6508.12	1122.04

**Tabelle 6.3.:** Werte für die Bottom-Quark-Masse, den A-Parameter und  $m_{\tilde{b}_1}$  in unterschiedlichen Schemata bei  $\tan\beta = 50$ . Der Wert für  $m_{\tilde{b}_2}$ , der on-shell festgelegt ist (siehe (5.41) und (5.42)), beträgt in allen vier Schemata  $m_{\tilde{b}_2} = 836.48$  GeV.

Das problematische Verhalten des „ $m_b \text{OS}$ “-Schemas hat folgenden Grund: Im „ $m_b \text{OS}$ “-Schema wird eine Renormierungsbedingung an den Sbottom-Mischungswinkel  $\theta_{\tilde{b}}$  gestellt, also an den Term  $(A_b - \mu \tan\beta)$  (siehe (5.46)). In Parameterbereichen, in denen  $\mu \tan\beta$  sehr viel größer ist als  $A_b$ , erhält der Counterterm  $\delta A_b$ , falls er über  $\delta\theta_{\tilde{b}}$  bestimmt wird, sehr große Korrekturen. Genauer gesagt:  $\delta A_b$ , gegeben durch (5.52), enthält den Beitrag

$$\delta A_b = \frac{1}{m_b} [-\delta m_b (A_b - \mu \tan\beta) + \dots], \quad (6.8)$$

der zu sehr großen Verschiebungen von  $A_b$  führen kann. Dieses Problem läßt sich durch die Verwendung eines der anderen Renormierungsschemata, siehe Tabelle 5.1, vermeiden, da in diesen Schemata eine Renormierungsbedingung direkt an  $A_b$  gestellt wird, statt  $\delta A_b$  aus der Renormierungsbedingung des Mischungswinkels abzuleiten.

## 6.2. Vergleich unterschiedlicher Renormierungsschemata

In diesem Abschnitt werden die Auswirkungen der unterschiedlichen Renormierungsschemata auf die Higgs-Masse numerisch verglichen. Die Verwendung der Bottom-Quark-Masse gemäß (5.80) auch auf Ein-Schleifen-Niveau führt zur Absorption der  $\tan\beta$ -verstärkten Terme in das Ein-Schleifen-Ergebnis.

Die Bedeutung der Kurven in den folgenden Schaubildern ist (siehe auch Tabelle 5.1):

- gestrichelt mit Punkten (schwarz):  $\mathcal{O}(\alpha_t\alpha_s)$  mit  $m_b^{\overline{\text{DR}},\text{MSSM}}$ , Ergebnisse ohne die nichtführenden Zwei-Schleifen-Terme der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_b\alpha_s)$
- strichpunktiert (hellblau): „ $m_b$  OS“ Schema für die nichtführenden Zwei-Schleifen-Terme der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_b\alpha_s)$
- durchgezogen (rot): „ $m_b$   $\overline{\text{DR}}$ “ Schema für die nichtführenden Zwei-Schleifen-Terme der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_b\alpha_s)$
- gepunktet (dunkelblau): „ $A_b, \theta_{\bar{b}}$   $\overline{\text{DR}}$ “ Schema für die nichtführenden Zwei-Schleifen-Terme der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_b\alpha_s)$
- gestrichelt mit Sternchen (grün): „ $A_b, \theta_{\bar{b}}$  OS“ Schema für die nichtführenden Zwei-Schleifen-Terme der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_b\alpha_s)$

Die Analyse der unterschiedlichen Renormierungsschemata beginnt mit einem Vergleich der Ergebnisse für die Massen der CP-geraden Higgs-Bosonen  $M_{h^0}$  und  $M_{H^0}$  als Funktion von  $\tan\beta$  in Abb. 6.1. Die Werte der anderen Parameter sind durch die Werte in Tabelle 6.1 gegeben. Wie nach der Diskussion der Ergebnisse aus Tabelle 6.2 und Tabelle 6.3 zu erwarten war, führt das „ $m_b$  OS“-Schema zu künstlich großen Korrekturen. Das daraus resultierende Ergebnis für die Higgs-Massen weicht für mittlere und große Werte von  $\tan\beta$  stark von den Ergebnissen ab, die man bei der Verwendung der anderen Renormierungsschemata erhält. Dieses Verhalten ist bei den Ergebnissen für  $M_{H^0}$  deutlicher zu erkennen, wie das untere Schaubild von Abb. 6.1 zeigt. Die extrem großen Korrekturen werden durch große Beiträge des Counterterms  $\delta A_b$  (siehe auch (6.8)) verursacht. Die Anteile an der Higgs-Selbstenergie, die durch virtuelle Bottom-Squarks verursacht werden, enthalten einen Term proportional zu  $A_b^2$ . Das bedeutet, daß durch die Verwendung eines Input-Werts für  $A_b$  gemäß (6.7) große Korrekturen eingeführt werden. Diese Terme sind in  $\Sigma_{H^0H^0}$  verstärkt, da sie dort mit  $(\cos\alpha A_b)^2$ , hingegen in  $\Sigma_{h^0h^0}$  mit  $(\sin\alpha A_b)^2$  eingehen und  $|\alpha| \ll 1$  in dieser Auswertung ist. Die großen Beiträge zu  $\delta A_b$  machen das „ $m_b$  OS“-Schema für störungstheoretische Rechnungen unbrauchbar. Deswegen wird dieses Schema im weiteren nicht betrachtet. Die Diskussion konzentriert sich auf die drei anderen Renormierungsschemata, die in Kap. 5.3 definiert wurden.

Die anderen Schemata ergeben alle ähnliche Ergebnisse mit gutem numerischen Verhalten;  $M_{h^0}$  fällt dabei für  $\tan\beta \gtrsim 40$  stark mit  $\tan\beta$  ab. Bei  $\tan\beta \simeq 53$  werden die

6. Higgs-Massen mit  $\mathcal{O}(\alpha_b\alpha_s)$ -Beiträgen im reellen MSSM

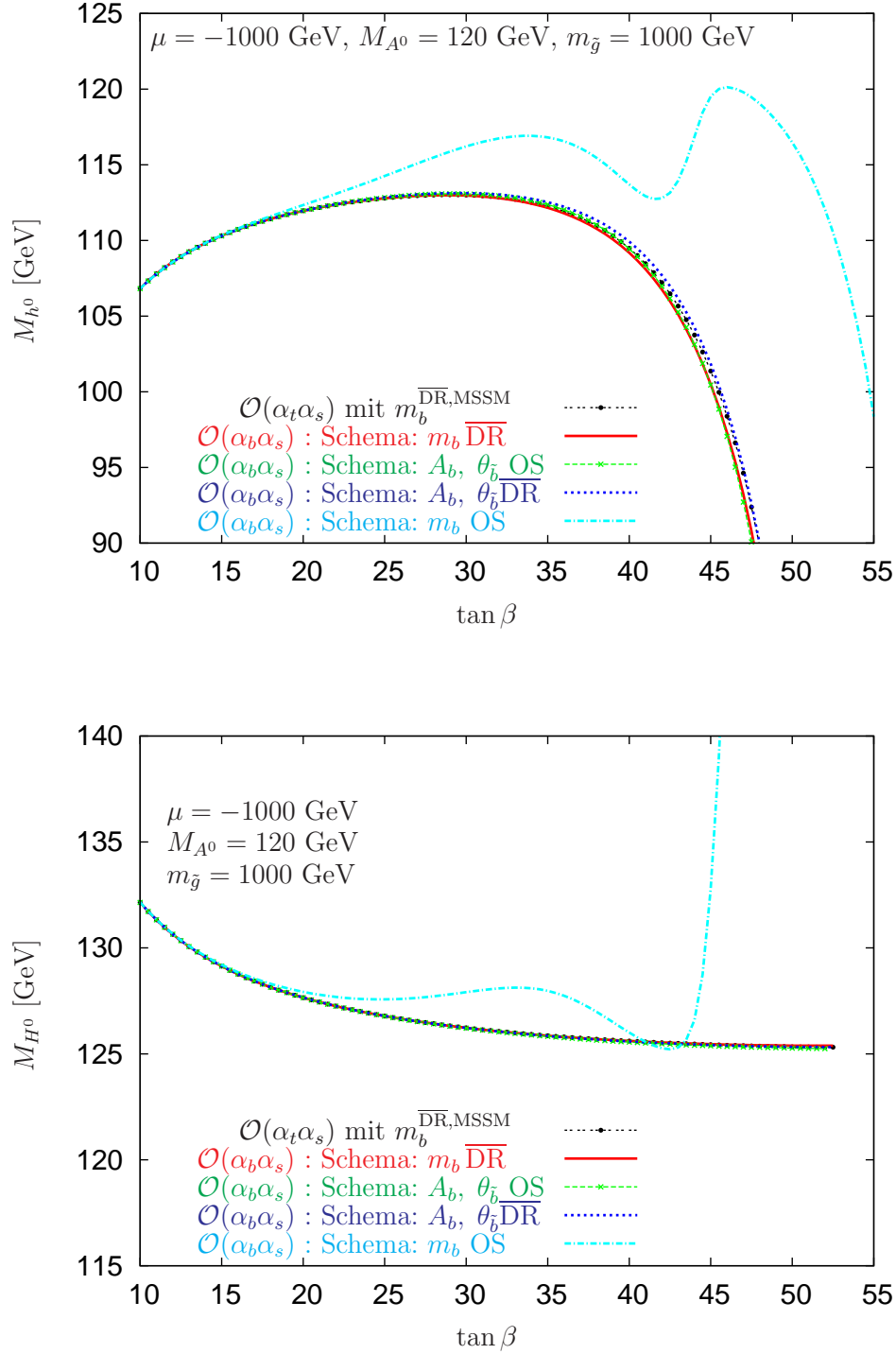


Abb. 6.1.:  $\tan \beta$ -Abhängigkeit von  $M_{h^0}$  und  $M_{H^0}$  für  $M_{A^0} = 120$  GeV und  $\mu$  negativ.

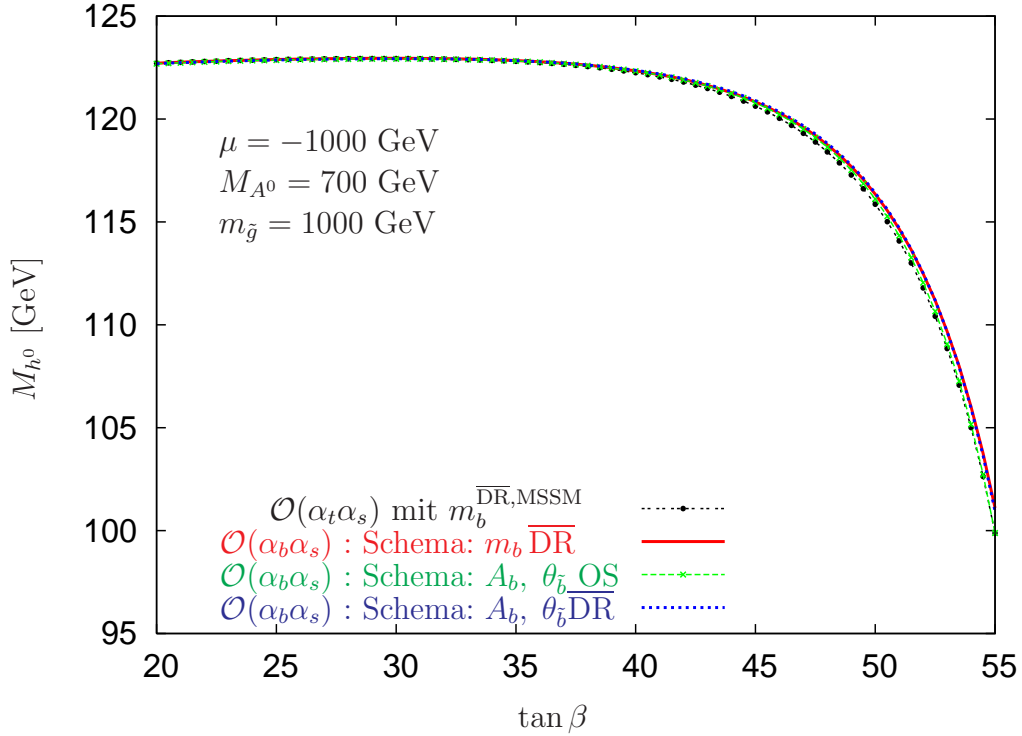


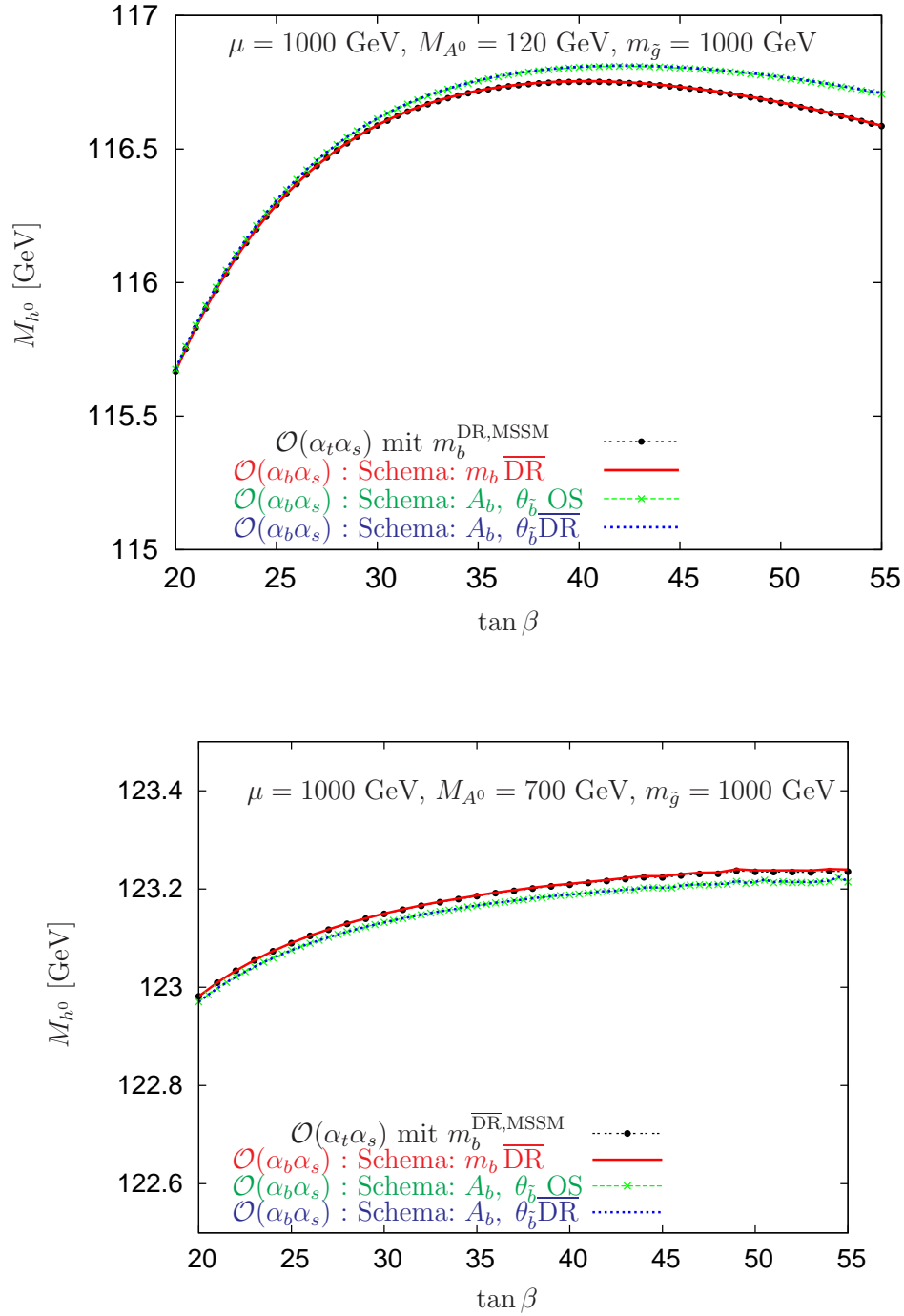
Abb. 6.2.:  $\tan \beta$ -Abhängigkeit von  $M_{h^0}$  für  $M_{A^0} = 700 \text{ GeV}$  und  $\mu$  negativ.

Massenquadrate negativ. Dieses Verhalten wird hauptsächlich von den führenden Beiträgen der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_b \alpha_s)$  durch die Resummation von  $\Delta m_b$  (siehe (5.80)) verursacht, da  $\Delta m_b \sim \mu \tan \beta$  (vgl. (5.76)). Die nichtführenden Korrekturen, die von den echten Zwei-Schleifen-Diagrammen herrühren, sind von  $\mathcal{O}(1 \text{ GeV})$ . Die Unterschiede zwischen den drei Renormierungsschemata haben eine ähnliche Größenordnung. Bei dieser speziellen Parameterwahl wird der Wert der Higgs-Masse  $M_{h^0}$  unter Verwendung des „ $A_b, \theta_b \overline{\text{DR}}$ “-Schemas durch die nichtführenden Terme vergrößert, während die beiden anderen Schemata zu einer Verringerung von  $M_{h^0}$  führen.

In Abb. 6.2 ist, wie in Abb. 6.1,  $M_{h^0}$  in Abhängigkeit von  $\tan \beta$  gezeigt, wobei bis auf  $M_{A^0} = 700 \text{ GeV}$  die Werte der Parameter beibehalten wurden. Der größere Wert von  $M_{A^0}$  führt insgesamt zu größeren Werten von  $M_{h^0}$ , das qualitative Verhalten ändert sich jedoch nicht gegenüber dem für  $M_{A^0} = 120 \text{ GeV}$ ; die Werte für  $M_{h^0}$  fallen für große  $\tan \beta$  stark ab. In allen drei Schemata erhöhen die nichtführenden Terme die Werte von  $M_{h^0}$  um ein paar GeV, abhängig vom Wert für  $\tan \beta$ .

Große Korrekturen aus dem  $b/\tilde{b}$ -Sektor werden nur für negative Werte von  $\mu$  erwartet, da in diesem Fall  $\Delta m_b$  (5.76) negativ ist und zu einer Vergrößerung des Werts von  $m_b^{\overline{\text{DR}}, \text{MSSM}}$  führt. In Abb. 6.3 werden die Ergebnisse für  $M_{h^0}$  als Funktion von  $\tan \beta$  mit positivem  $\mu$  und  $M_{A^0} = 120$  bzw.  $700 \text{ GeV}$  gezeigt. Die anderen Parameter sind in Tabelle 6.1 gege-

6. Higgs-Massen mit  $\mathcal{O}(\alpha_b\alpha_s)$ -Beiträgen im reellen MSSM



**Abb. 6.3.:**  $\tan\beta$ -Abhängigkeit von  $M_{h^0}$  für  $M_{A^0} = 120$  GeV (oberes Schaubild) und  $M_{A^0} = 700$  GeV (unteres Schaubild) für positive  $\mu$ .



## 6.2. Vergleich unterschiedlicher Renormierungsschemata

ben. Wegen des positiven Vorzeichens von  $\mu$  ist  $\Delta m_b$  positiv und  $m_b^{\overline{\text{DR}},\text{MSSM}}$  erhält dadurch einen kleineren Wert. Wie erwartet<sup>2</sup>, ist die Änderung von  $M_{h^0}$  mit  $\tan\beta$  sehr viel kleiner als bei negativem  $\mu$ . Sowohl die führenden Korrekturen, d.h. die  $\tan\beta$ -verstärkten Terme der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_b\alpha_s)$  als auch die nichtführenden Beiträge sind von der Größenordnung  $\mathcal{O}(100 \text{ MeV})$ . Das „ $m_b \overline{\text{DR}}$ “-Schema liefert neben dem resummierten Anteil keine weiteren sichtbaren Korrekturen. Damit sind für positive  $\mu$  die Terme aus dem  $b/\tilde{b}$ -Sektor, die über das Ein-Schleifen-Niveau hinausgehen, gut unter Kontrolle. Weil die zu erwartende experimentelle Genauigkeit von  $M_{h^0}$  [10–12] und die Unsicherheit der theoretischen Vorhersage, verursacht durch die experimentellen Fehler in den Parametern wie der Top-Quark-Masse, beim ILC jeweils ungefähr 100 MeV betragen wird, stellt sich die Aufgabe, die theoretischen Unsicherheiten von unbekanntem Beiträgen höherer Ordnung bis auf das Niveau von 100 MeV zu reduzieren. Das erfordert den Einschluß aller Zwei-Schleifen-Korrekturen (und eines großen Teils der Korrekturen über den Zwei-Schleifen-Anteil hinaus), also auch der Terme der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_b\alpha_s)$  für positive  $\mu$ .

Die weitere numerische Auswertung ist auf Ergebnisse mit negativen Werten von  $\mu$  ausgerichtet.

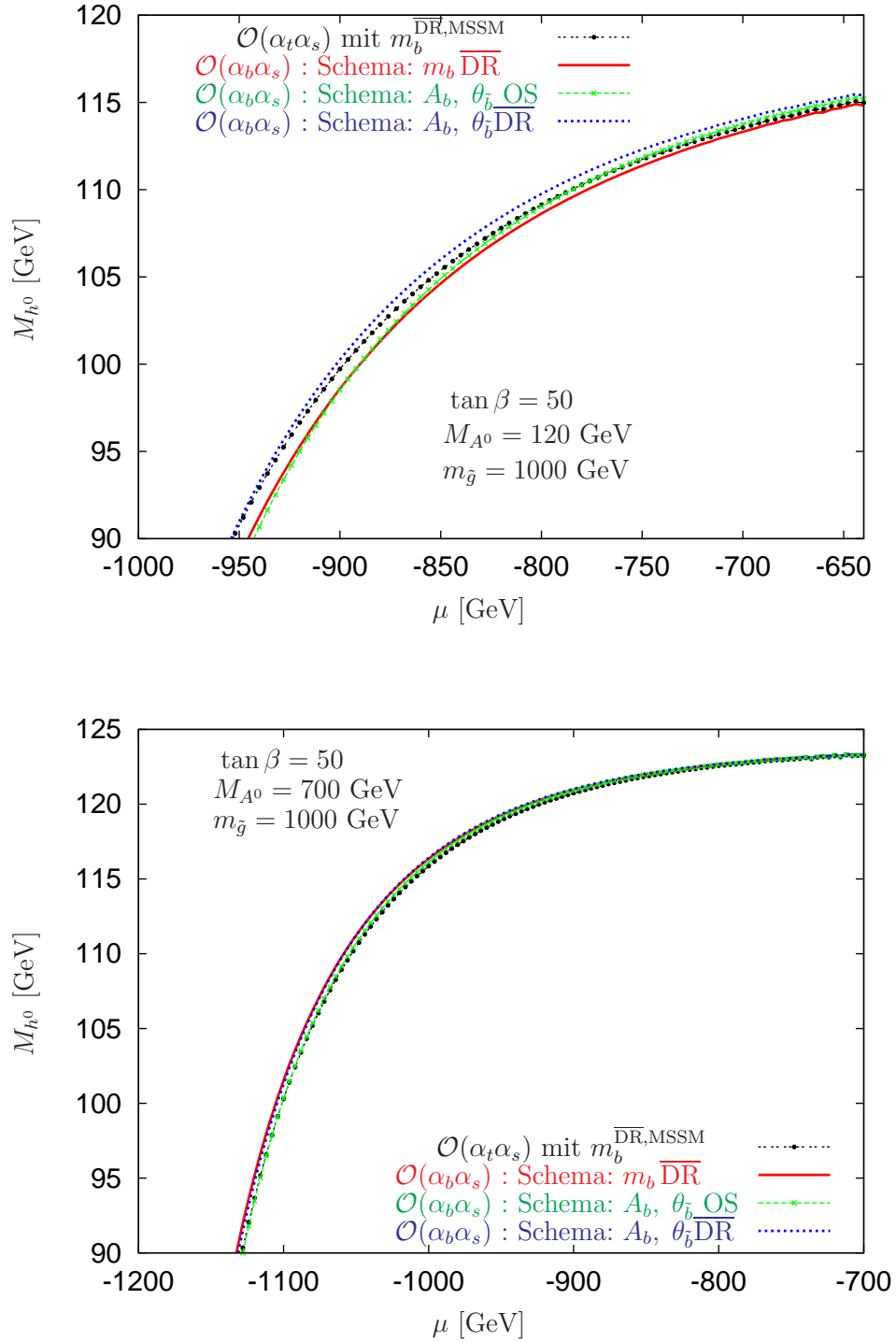
Die Änderung von  $M_{h^0}$  mit  $\mu$  (für  $\mu < 0$ ) bei  $\tan\beta = 50$  wird in Abb. 6.4 dargestellt. Wie Gleichung (5.76) erwarten ließ, steigt die Größe der Korrekturen mit steigendem  $|\mu|$  an. Typischerweise sind die echten Zwei-Schleifen-Beiträge der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_b\alpha_s)$  von der Größenordnung  $\mathcal{O}(1 \text{ GeV})$ . Für große  $M_{A^0}$  und  $|\mu| < 1100 \text{ GeV}$  führen alle Schemata zu einem Anstieg von  $M_{h^0}$ , wohingegen für kleine  $M_{A^0}$  sowohl positive wie negative Korrekturen auftreten können. Unterschiede in der  $M_{h^0}$ -Vorhersage, die durch die unterschiedlichen Renormierungsschemata verursacht werden, liegen in der Größenordnung von  $\mathcal{O}(1 \text{ GeV})$ .

In Abb. 6.5 wird die Abhängigkeit der Higgs-Masse  $M_{h^0}$  von  $M_{A^0}$  für die unterschiedlichen Renormierungsschemata dargestellt; die anderen Parameter sind wieder aus Tabelle 6.1 genommen. Für  $M_{A^0} \gtrsim 200 \text{ GeV}$  vergrößern die nichtführenden Terme in allen drei Schemata  $M_{h^0}$  um  $\mathcal{O}(1 \text{ GeV})$ . Eine Verringerung des Werts der Higgs-Masse tritt nur für kleine Werte von  $M_{A^0}$ , je nach Schema, auf. Die Unterschiede in der  $M_{h^0}$ -Vorhersage, die durch die Verwendung unterschiedlicher Renormierungsschemata verursacht werden, verringern sich für  $M_{A^0} \gtrsim 200 \text{ GeV}$  auf  $\mathcal{O}(0.1 \text{ GeV})$ .

Aus Abb. 6.6 ist ersichtlich, daß das Verhalten der Korrekturen stark von der Wahl der Gluino-Masse  $m_{\tilde{g}}$  abhängt. Die Abbildung zeigt  $M_{h^0}$  als Funktion von  $m_{\tilde{g}}$  für  $\mu = -1000 \text{ GeV}$ ,  $\tan\beta = 50$  und  $M_{A^0} = 700 \text{ GeV}$ . Für  $m_{\tilde{g}} \lesssim 1000 \text{ GeV}$  verursachen die nichtführenden  $\mathcal{O}(\alpha_b\alpha_s)$ -Terme in allen Schemata einen Anstieg von  $M_{h^0}$ . Für  $m_{\tilde{g}} \gtrsim 1500 \text{ GeV}$  dagegen führen alle Schemata zu einer Verringerung von  $M_{h^0}$ . Die relative Größe der Beiträge in den unterschiedlichen Schemata hängt stark von  $m_{\tilde{g}}$  ab. Korrekturen bis zu 3 GeV sind möglich. Der Unterschied zwischen den Ergebnissen der drei Schemata ist von der Ordnung  $\mathcal{O}(2 \text{ GeV})$  für große  $m_{\tilde{g}}$ . Die Effekte der Beiträge höherer Ordnung ent-

<sup>2</sup>Vergleiche auch die Diskussion in [40]; dort wird  $\mu$  allerdings mit einer anderen Vorzeichenkonvention verwendet.

6. Higgs-Massen mit  $\mathcal{O}(\alpha_b\alpha_s)$ -Beiträgen im reellen MSSM



**Abb. 6.4.:**  $\mu$ -Abhängigkeit von  $M_{h^0}$  für  $M_{A^0} = 120$  GeV (obere Abb.) und  $M_{A^0} = 700$  GeV (untere Abb.) für  $\tan\beta = 50$ .

6.2. Vergleich unterschiedlicher Renormierungsschemata

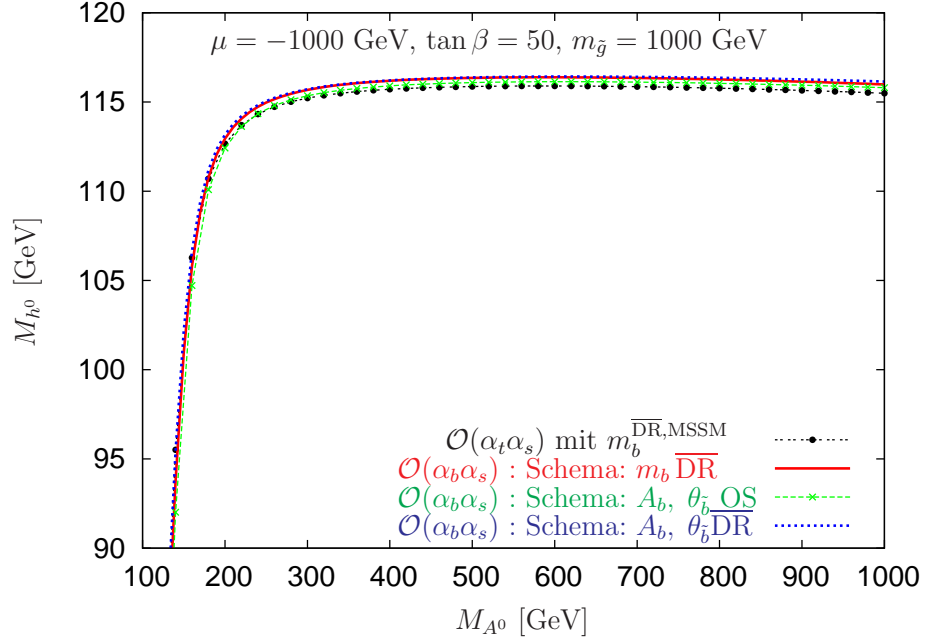


Abb. 6.5.:  $M_{A^0}$ -Abhängigkeit von  $M_{h^0}$  für  $\tan \beta = 50$  und  $\mu$  negativ.

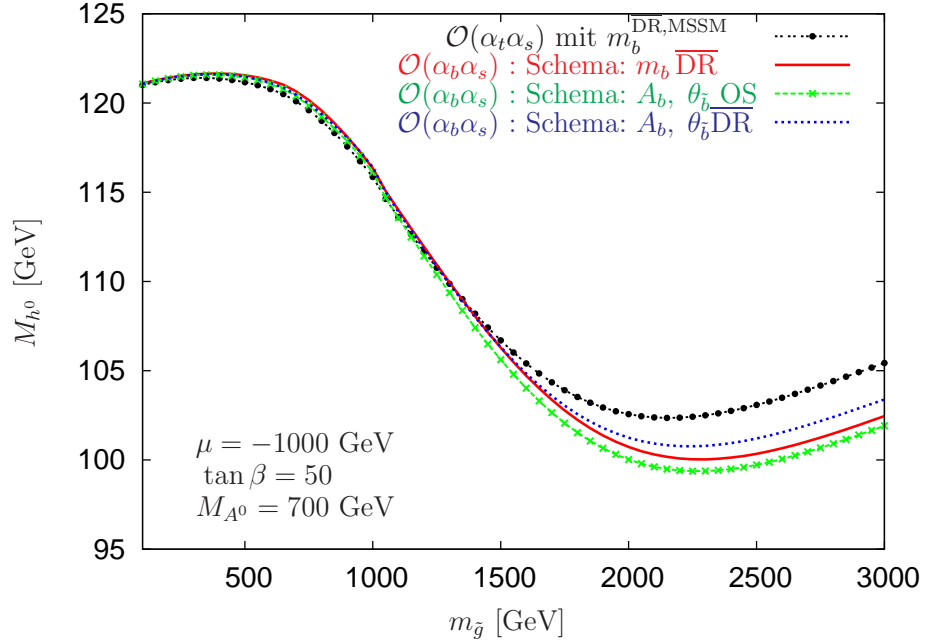


Abb. 6.6.:  $m_{\tilde{g}}$ -Abhängigkeit von  $M_{h^0}$  für  $M_{A^0} = 700 \text{ GeV}$ ,  $\tan \beta = 50$  und  $\mu$  negativ.

## 6. Higgs-Massen mit $\mathcal{O}(\alpha_b\alpha_s)$ -Beiträgen im reellen MSSM

koppeln nicht mit großem  $m_{\tilde{g}}$ . Die Terme der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_t\alpha_s)$  [34] und die der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_b\alpha_s)$  wachsen logarithmisch in den verwendeten Renormierungsschemata an.

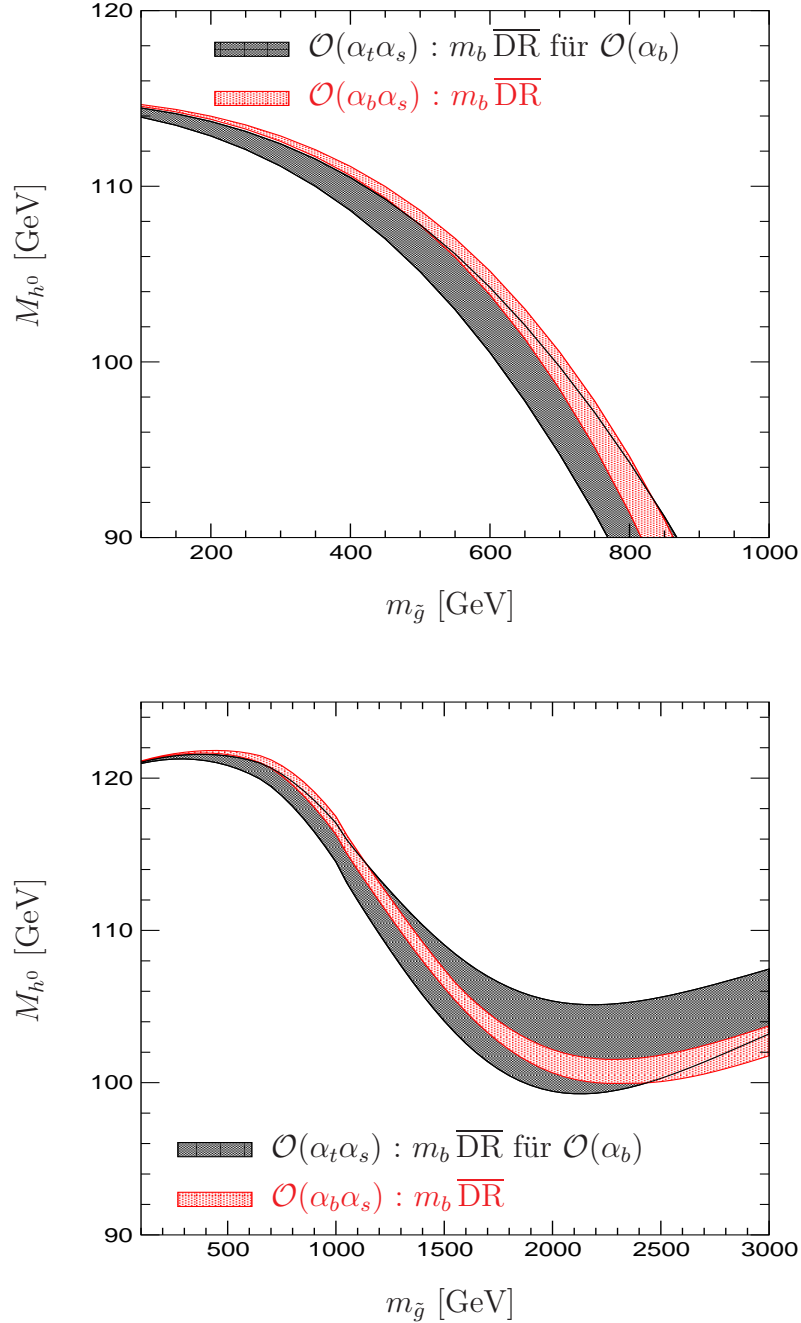
Die obige Auswertung der Ergebnisse, die man unter Verwendung der drei Schemata „ $m_b \overline{\text{DR}}$ “, „ $A_b, \theta_{\tilde{b}} \overline{\text{DR}}$ “ und „ $A_b, \theta_{\tilde{b}} \text{OS}$ “ in unterschiedlichen Parameterbereichen erhält, zeigt, daß die Ergebnisse sich numerisch stabil verhalten und sinnvoll sind. Da keines der Schemata aufgrund physikalischer Aspekte zu bevorzugen ist, kann man den Unterschied in den Ergebnissen, die man bei Verwendung der unterschiedlichen Schemata erhält, als Hinweis auf die mögliche Größe der fehlenden Terme höherer Ordnung interpretieren. Die Größe der jeweiligen Korrekturen sowie der Unterschiede durch unterschiedliche Renormierungsschemata hängen stark von den Input-Werten ab. Typischerweise sind die echten Zwei-Schleifen-Beiträge aus dem  $b/\tilde{b}$ -Sektor zur Higgs-Boson-Masse  $M_{h^0}$  von der Ordnung  $\mathcal{O}(1 \text{ GeV})$ . Die Größe der Unterschiede zwischen den Ergebnissen unter Verwendung der unterschiedlichen Renormierungsschemata sind von der gleichen Größenordnung, je nach Parameterwahl etwas kleiner. In Abb. 6.6 beispielsweise liefern die Zwei-Schleifen-Korrekturen für große Gluino-Massen Beiträge von etwa  $(3 \pm 1) \text{ GeV}$ .

### 6.3. Numerische Analyse der Renormierungsskalenabhängigkeit

Während im vorherigen Abschnitt Ergebnisse bei Verwendung unterschiedlicher Renormierungsschemata verglichen wurden, wird hier speziell das „ $m_b \overline{\text{DR}}$ “-Schema betrachtet und die Auswirkung der Änderung der Renormierungsskala  $\mu^{\overline{\text{DR}}}$  auf das  $\mathcal{O}(\alpha_b\alpha_s)$ -Ergebnis innerhalb dieses Renormierungsschemas untersucht. Die Renormierungsskala wird innerhalb des Intervalls  $m_t/2 \leq \mu^{\overline{\text{DR}}} \leq 2m_t$  variiert. Dies bewirkt eine Änderung der Higgs-Masse, die formal von der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_b\alpha_s^2)$  ist. In den Ein-Schleifen-Selbstenergien wurde nur die Skalenabhängigkeit berücksichtigt, die durch die Verwendung der Bottom-Masse  $m_b^{\overline{\text{DR}},\text{MSSM}}(\mu^{\overline{\text{DR}}})$  als Input-Wert an der jeweiligen Renormierungsskala eingeführt wird. Die explizite Skalenabhängigkeit, die durch die  $\overline{\text{DR}}$ -Renormierung von  $\tan\beta$  und von den Z-Faktoren verursacht wird, wurde unterdrückt durch die Berechnung der Ein-Schleifen-Selbstenergien an der Renormierungsskala  $\mu^{\overline{\text{DR}}} = m_t$ . Die Ergebnisse sind in Abb. 6.7 als Funktion von  $m_{\tilde{g}}$  für  $\tan\beta = 50$  und für  $M_{A^0} = 120 \text{ GeV}$  bzw.  $M_{A^0} = 700 \text{ GeV}$  dargestellt.

Die Änderung der führenden Beiträge, also des  $\mathcal{O}(\alpha_t\alpha_s)$ -Ergebnisses inklusive Resummation, ist in Abhängigkeit von  $\mu^{\overline{\text{DR}}}$  als schwarzes Band dargestellt. Die Ergebnisse, welche die nichtführenden Korrekturen im „ $m_b \overline{\text{DR}}$ “-Schema enthalten, sind als hell schraffiertes (rotes) Band aufgetragen. Man sieht: Die Größe der Änderung der Higgs-Masse mit  $\mu^{\overline{\text{DR}}}$  kann durch die Berücksichtigung der nichtführenden Korrekturen stark reduziert werden. Die Änderung der Higgs-Masse in Abhängigkeit von  $\mu^{\overline{\text{DR}}}$  innerhalb des „ $m_b \overline{\text{DR}}$ “-Schemas ist klein für  $m_{\tilde{g}} \lesssim 500 \text{ GeV}$  und erreicht Werte von  $\pm 1 \text{ GeV}$  für große  $m_{\tilde{g}}$ -Werte. Das heißt,

### 6.3. Numerische Analyse der Renormierungsskalenabhängigkeit



**Abb. 6.7.:**  $\mu^{\overline{\text{DR}}}$ -Abhängigkeit von  $M_{h^0}$  als Funktion von  $m_{\tilde{g}}$  für  $M_{A^0} = 120$  GeV (obere Abb.) und  $M_{A^0} = 700$  GeV (untere Abb.) bei  $\mu = -1000$  GeV,  $\tan \beta = 50$ . Der schwarze Bereich entspricht dem  $\mathcal{O}(\alpha_t \alpha_s)$ -Ergebnis inklusive Resummation, d.h. ohne die nichtführenden Zwei-Schleifen-Terme der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_b \alpha_s)$ .

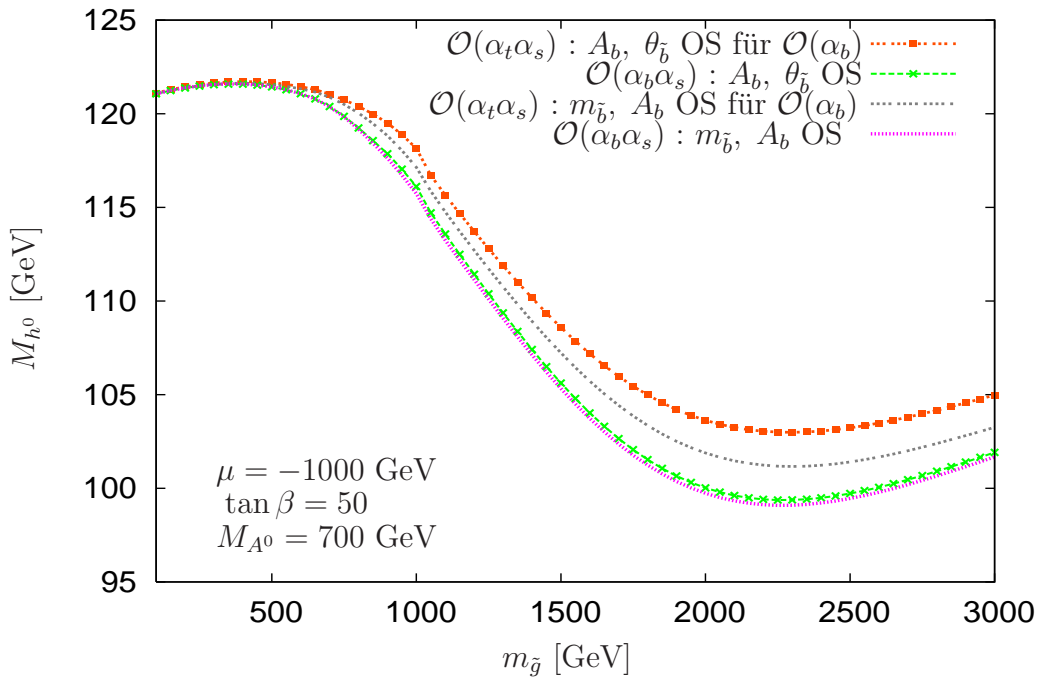
## 6. Higgs-Massen mit $\mathcal{O}(\alpha_b\alpha_s)$ -Beiträgen im reellen MSSM

die Änderung von  $\mu^{\overline{\text{DR}}}$  verursacht ähnlich große Unterschiede im Ergebnis von  $M_{h^0}$  wie die oben diskutierten Vergleiche zwischen den drei Renormierungsschemata.

Die Änderung der Higgs-Masse mit  $\mu^{\overline{\text{DR}}}$  wurde auch im Fall  $\mu > 0$  analysiert. Wie im Fall von negativem  $\mu$  ist die Änderung der Higgs-Masse mit  $\mu^{\overline{\text{DR}}}$  von der gleichen Größenordnung wie die Unterschiede verursacht durch die drei Renormierungsschemata, siehe Abb. 6.3. Deshalb können die Beiträge unbekannter Korrekturen höherer Ordnung des  $b/\tilde{b}$ -Sektor zu  $M_{h^0}$  mit  $\mathcal{O}(100 \text{ MeV})$  abgeschätzt werden.

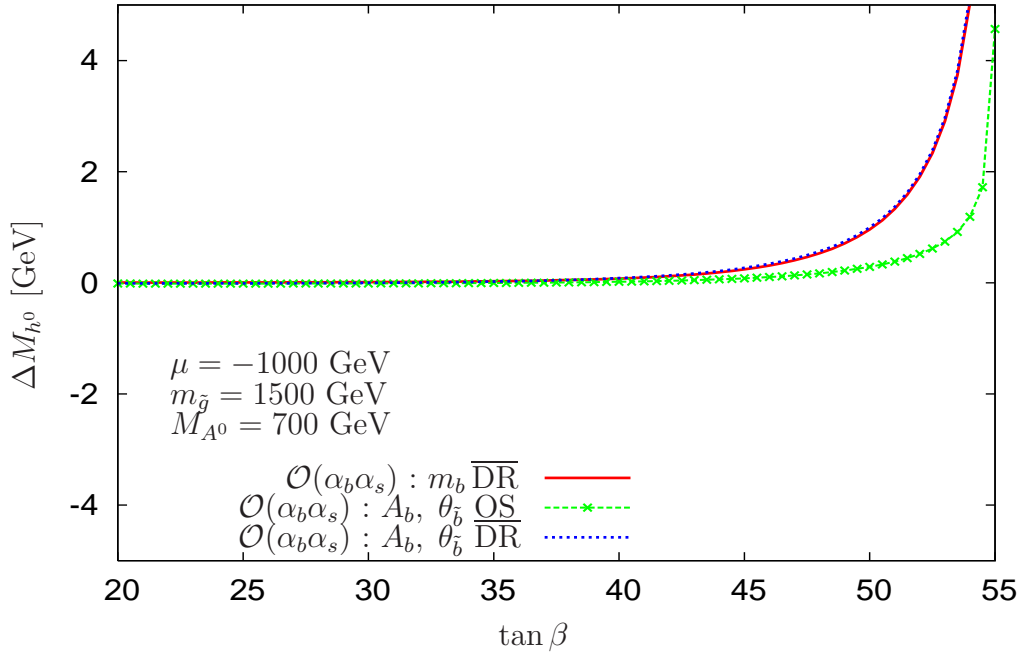
## 6.4. Vergleich mit Ergebnissen existierender Rechnungen

Zum Schluß werden die in den vorherigen Abschnitten diskutierten Ergebnisse mit den Resultaten der Berechnung der Korrekturen der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_b\alpha_s)$  aus [40] verglichen. Das dort verwendete Renormierungsschema besteht aus On-Shell-Renormierungsbedingungen für die zwei Bottom-Squarks und der On-Shell-Bedingung für  $A_b$ , die in Abschnitt 5.3.4 aufgeführt ist. Im folgenden wird dieses Renormierungsschema als „ $m_{\tilde{b}}, A_b$  OS“-Schema bezeichnet. Die Unterschiede zwischen den „ $A_b, \theta_{\tilde{b}}$  OS“- und den „ $m_{\tilde{b}}, A_b$  OS“-Ergebnissen



**Abb. 6.8.:** Vergleich des  $\mathcal{O}(\alpha_b\alpha_s)$ -Ergebnisses für  $M_{h^0}$  unter Verwendung des „ $A_b, \theta_{\tilde{b}}$  OS“-Schemas und des Ergebnisses aus [40] („ $m_{\tilde{b}}, A_b$  OS“-Schema) als Funktion von  $m_{\tilde{g}}$ . Die  $\mathcal{O}(\alpha_t\alpha_s)$ -Ergebnisse in den zwei Schemata (unter Verwendung entsprechend renormierter Parameter) – die nichtführenden  $\mathcal{O}(\alpha_b\alpha_s)$ -Korrekturen sind also unberücksichtigt – sind ebenfalls aufgetragen.

#### 6.4. Vergleich mit Ergebnissen existierender Rechnungen



**Abb. 6.9.:** Vergleich der in Abschnitt 6.2 diskutierten  $\mathcal{O}(\alpha_b \alpha_s)$ -Ergebnisse unter Verwendung von drei unterschiedlichen Renormierungsschemata mit dem Ergebnis aus [40]. Die drei Kurven für  $\Delta M_{h^0}$  stellen den Unterschied zwischen unserem Ergebnis unter Verwendung jeweils eines der drei Schemata und dem Ergebnis aus [40] als Funktion von  $\tan \beta$  dar.

sind also sowohl durch die unterschiedliche Behandlung der Renormierung von  $m_{\tilde{b}_1}$  als auch durch die Behandlung von  $\tan \beta$  bedingt. In den Rechnungen dieser Arbeit wurde  $\tan \beta$  als freier Parameter beibehalten, wogegen in [40] für  $\tan \beta$  der Grenzfall  $\tan \beta \rightarrow \infty$  in den nichtführenden  $\mathcal{O}(\alpha_b \alpha_s)$ -Korrekturen betrachtet wurde. Die Änderung der Sbottom-Massen aufgrund der SU(2)-Invarianz wurde in [40] in der numerischen Berechnung der Sbottom-Masse nach der Vorschrift aus [83] berücksichtigt (siehe auch [84]). Dazu ist der linkshändige Brechungsparameter  $M_L$  in den Sbottom-Massenmatrizen durch einen neuen Brechungsparameter  $M_{L_{\tilde{b}}}$ ,

$$\begin{aligned}
 M_{L_{\tilde{b}}}^2 = & M_L^2 + \cos^2 \theta_{\tilde{t}} \delta m_{\tilde{t}_1}^2 + \sin^2 \theta_{\tilde{t}} \delta m_{\tilde{t}_2}^2 - (m_{\tilde{t}_1}^2 - m_{\tilde{t}_2}^2) \sin(2\theta_{\tilde{t}}) \delta \theta_{\tilde{t}} - 2 m_t \delta m_t \\
 & - \cos^2 \theta_{\tilde{b}} \delta m_{\tilde{b}_1}^2 - \sin^2 \theta_{\tilde{b}} \delta m_{\tilde{b}_2}^2 + (m_{\tilde{b}_1}^2 - m_{\tilde{b}_2}^2) \sin(2\theta_{\tilde{b}}) \delta \theta_{\tilde{b}} , \quad (6.9)
 \end{aligned}$$

zu ersetzen. Da in [40] die Bottom-Masse in den Propagatoren der Bottom-Quarks vernachlässigt wird, erhält (6.9) keinen Term  $2 m_b \delta m_b$ .

Das in Abschnitt 6.2 diskutierte Ergebnis für  $M_{h^0}$  im „ $A_b, \theta_b$  OS“-Schema wird mit dem Ergebnis aus [40] in Abb. 6.8 verglichen. Zur Implementierung des „ $m_{\tilde{b}}, A_b$  OS“-Schemas

## 6. Higgs-Massen mit $\mathcal{O}(\alpha_b\alpha_s)$ -Beiträgen im reellen MSSM

wurde der Fortran-Code von [40] bei der numerischen Berechnung der  $\mathcal{O}(\alpha_s\alpha_b)$ -Korrekturen der Higgs-Boson-Selbstenergien verwendet. Die Input-Werte wurden gemäß (6.6) und (6.7) bestimmt. Unter Verwendung dieser Werte für  $A_b$  und  $m_b$  erhält man die Sbottom-Massen, wobei die Sbottom-Massen-Änderung nach [83] zu berücksichtigen ist.  $M_{h^0}$  wird als Funktion von  $m_{\tilde{g}}$  für  $\mu < 0$ ,  $\tan\beta = 50$  und  $M_{A^0} = 700$  GeV aufgetragen. Das Ergebnis im „ $A_b, \theta_{\tilde{b}}$  OS“-Schema ist als gestrichelte Kurve mit Sternchen (grün) dargestellt, während das Ergebnis [40] („ $m_{\tilde{b}}, A_b$  OS“-Schema) durch eine fein gepunktete (pinke) Kurve gegeben ist. Die führenden Beiträge in den zwei Schemata, d.h. das  $\mathcal{O}(\alpha_t\alpha_s)$ -Ergebnis inklusive Resummation, sind auch aufgetragen: die hell gestrichpunktete (orange) Kurve stellt das  $\mathcal{O}(\alpha_t\alpha_s)$ -Ergebnis unter Verwendung der im „ $A_b, \theta_{\tilde{b}}$  OS“-Schema renormierten Parameter dar; das entsprechende Ergebnis mit den im „ $m_{\tilde{b}}, A_b$  OS“-Schema renormierten Parametern ist als hell gepunktete (graue) Kurve eingezeichnet.

Die Abb. 6.8 zeigt, daß sich die  $\mathcal{O}(\alpha_t\alpha_s)$ -Ergebnisse in den zwei Schemata um bis zu 2 GeV für große  $m_{\tilde{g}}$  unterscheiden. Die Mitnahme der nichtführenden Zwei-Schleifen-Korrekturen verringert den Unterschied deutlich. Das Ergebnis im „ $A_b, \theta_{\tilde{b}}$  OS“-Schema stimmt mit dem aus [40] bis auf weniger als 0.5 GeV überein.

In Abb. 6.9 werden die in Abschnitt 6.2 diskutierten Ergebnisse unter Verwendung jeweils eines der drei unterschiedlichen Renormierungsschemata, also des „ $A_b, \theta_{\tilde{b}}$  OS“--, des „ $m_b \overline{\text{DR}}$ “- und des „ $A_b, \theta_{\tilde{b}} \overline{\text{DR}}$ “-Schemas, mit dem Ergebnis aus [40] verglichen. Der Unterschied  $\Delta M_{h^0}$  zwischen dem in Abschnitt 6.2 diskutierten Ergebnis und dem Ergebnis aus [40] ist jeweils für alle drei Schemata als Funktion von  $\tan\beta$  für  $m_{\tilde{g}} = 1500$  GeV,  $\mu = -1000$  GeV, und  $M_{A^0} = 700$  GeV aufgetragen. Die Unterschiede betragen weniger als 1 GeV für  $\tan\beta \lesssim 50$ . Die Ergebnisse bei Verwendung des „ $A_b, \theta_{\tilde{b}} \overline{\text{DR}}$ “- und des „ $m_b \overline{\text{DR}}$ “-Schemas liefern die größten Abweichungen vom Ergebnis aus [40]. Dagegen fällt, wie erwartet, der Unterschied für das „ $A_b, \theta_{\tilde{b}}$  OS“-Schema am kleinsten aus. Für  $\tan\beta > 50$  treten aufgrund des starken Abfalls von  $M_{h^0}$  in diesem Parameterbereich große Abweichungen auf (siehe z.B. Abb. 6.2).



# 7. Der Higgs-Sektor im komplexen MSSM

In den Kapiteln 4 – 6 wurde ausschließlich das MSSM mit reellen Parametern betrachtet. In diesem Fall ist die Lagrangedichte CP-invariant, also invariant unter der Kombination der Transformationen Ladungskonjugation C und Paritätstransformation P. Experimentell wurden jedoch CP-verletzende Prozesse im Kaonsystem [85] und in B-Systemen [86] beobachtet. CP-Symmetrie kann folglich nicht als fundamentale Symmetrie in der Natur realisiert sein. Deswegen ist es notwendig, mögliche Quellen für CP-Verletzung auch im MSSM zu berücksichtigen und deren Auswirkung auf physikalische Observable wie die Masse des leichtesten Higgs-Bosons zu untersuchen. Außerdem spielt CP-Verletzung eine wichtige Rolle bei der Erklärung der beobachteten Asymmetrie zwischen Materie und Antimaterie im Universum [87]. Das MSSM mit komplexen Parametern besitzt im Vergleich zum Standardmodell zusätzliche Quellen für CP-Verletzung.

Komplexe Parameter im MSSM führen zu CP- bzw. T-Verletzung. Nach dem CPT-Theorem ist die Kombination aus Ladungskonjugation C, Paritätstransformation P und Zeitumkehrtransformation T in einer lokalen lorentzinvarianten Quantenfeldtheorie erhalten [88]. Sobald die CP-Symmetrie verletzt ist, liegt dadurch auch eine T-Verletzung vor. Der T-Operator ist ein antiunitärer Operator und bewirkt angewandt auf die Lagrangedichte eine komplexe Konjugation von komplexen Parametern. Eine Lagrangedichte mit komplexen Parametern ist somit offensichtlich nicht T- und damit auch nicht CP-invariant. Im folgenden Kapitel wird der Higgs-Sektor unter Berücksichtigung komplexer Phasen diskutiert.

Im reinen Higgs-Sektor ohne kinetische Terme, beschrieben durch das Higgspotential  $V_{\text{Higgs}}$ , treten zwei komplexe Parameter,  $\mu$  und  $m_3^2$ , auf,  $\mu$  jedoch nur betragsmäßig:

$$\begin{aligned}
 V_{\text{Higgs}} = & |\mu|^2 (H_1^+ H_1 + H_2^+ H_2) \\
 & + \frac{g^2}{2} (H_1^+ T^a H_1 + H_2^+ T^a H_2)^2 + \frac{g'^2}{2} \left( \frac{Y}{2} H_1^+ H_1 + \frac{Y}{2} H_2^+ H_2 \right)^2 \\
 & + (m_1^2 H_1^+ H_1 + m_2^2 H_2^+ H_2 - (\epsilon^{ij} |m_3^2| e^{i\varphi_{m_3^2}} H_1^i H_2^j + h.c.)). \quad (7.1)
 \end{aligned}$$

$m_3^2$  wurde hier im Gegensatz zu Gleichung (4.2) explizit mit Betrag  $|m_3^2|$  und Phase  $\varphi_{m_3^2}$  ausgedrückt. Für verschwindendes  $m_3^2$  und  $\mu$  besitzt das MSSM eine weitere  $U(1)$ -Symmetrie,

## 7. Der Higgs-Sektor im komplexen MSSM

die Peccei-Quinn-Symmetrie [89]. Gilt  $m_3^2 \neq 0$  und  $\mu \neq 0$ , so ändern sich durch Ausführung einer Peccei-Quinn-Transformation die Terme proportional zu  $m_3^2$  und  $\mu$  um eine Phase  $\varphi_{\text{PQ}}$ . Mit dieser Kenntnis kann man eine der komplexen Phasen von  $m_3^2$  oder  $\mu$  eliminieren [90]. Wendet man die Peccei-Quinn-Transformation mit einem Winkel  $\varphi_{\text{PQ}}$  an und redefiniert die Parameter  $m_3^2$  und  $\mu$ ,

$$(m_3^2)' = |m_3^2| e^{i(\varphi_{m_3^2} - \varphi_{\text{PQ}})}, \quad (7.2)$$

$$(\mu)' = |\mu| e^{i(\varphi_\mu - \varphi_{\text{PQ}})}, \quad (7.3)$$

dann beschreibt die Lagrangedichte mit den neuen Parametern  $(m_3^2)'$  und  $(\mu)'$  und den transformierten Feldern die gleichen physikalischen Prozesse wie die ursprüngliche Lagrangedichte. Wählt man  $\varphi_{\text{PQ}} = \varphi_{m_3^2}$ , wird die Phase von  $m_3^2$  eliminiert.

Im folgenden wird daher ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $m_3^2 = |m_3^2|$  betrachtet.

Die Higgs-Dubletts  $H_1$  und  $H_2$  lassen sich wie in Kapitel 4 um ihren Vakuumerwartungswert entwickeln. Die Vakuumerwartungswerte im CP-verletzenden Fall können sich dabei im Betrag und auch in einer Phase unterscheiden. Dieser Phasenunterschied wird in einer komplexen Phase  $\xi$  des zweiten Higgs-Dubletts berücksichtigt:

$$H_1 = \begin{pmatrix} v_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1^0 - i\zeta_1^0) \\ -\phi_1^- \end{pmatrix}, \quad H_2 = e^{i\xi} \begin{pmatrix} \phi_1^+ \\ v_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_2^0 + i\zeta_2^0) \end{pmatrix}. \quad (7.4)$$

### 7.1. Der Higgs-Sektor auf Born-Niveau

Die verallgemeinerte Darstellung der bilinearen Terme des Higgspotentials aus (4.10) unter Berücksichtigung komplexer Parameter hat folgende Form:

$$\begin{aligned} V_{\text{Higgs}}|_{\text{bil.}} = & \frac{1}{2} (\phi_1^0, \phi_2^0) \mathcal{M}_{\phi^0} \begin{pmatrix} \phi_1^0 \\ \phi_2^0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} (\phi_1^0, \phi_2^0) \mathcal{M}_{\phi^0 \zeta^0} \begin{pmatrix} \zeta_1^0 \\ \zeta_2^0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} (\zeta_1^0, \zeta_2^0) \mathcal{M}_{\phi^0 \zeta^0}^+ \begin{pmatrix} \phi_1^0 \\ \phi_2^0 \end{pmatrix} \\ & + \frac{1}{2} (\zeta_1^0, \zeta_2^0) \mathcal{M}_{\zeta^0} \begin{pmatrix} \zeta_1^0 \\ \zeta_2^0 \end{pmatrix} + (\phi_1^+, \phi_2^+) \mathcal{M}_{\phi^\pm} \begin{pmatrix} \phi_1^- \\ \phi_2^- \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Die Matrix  $\mathcal{M}_{\phi^0 \zeta^0}$  verursacht die Mischung der  $\phi^0$ - und  $\zeta^0$ -Felder:

$$\mathcal{M}_{\phi^0 \zeta^0} = \begin{pmatrix} 0 & m_3^2 \sin(\xi) \\ -m_3^2 \sin(\xi) & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.6)$$

Im Fall reeller Parameter gilt  $\xi = 0$ . Damit gibt es keine Mischung der CP-geraden und -ungeraden Felder, die aufgrund der CP-Invarianz im reellen Fall verboten ist. Die Matrix  $\mathcal{M}_{\phi^0}$ ,

$$\mathcal{M}_{\phi^0} = \begin{pmatrix} \tilde{m}_1^2 + \frac{1}{4}(g^2 + g'^2)(3v_1^2 - v_2^2) & -(m_3^2 \cos(\xi) + \frac{1}{2}(g^2 + g'^2)v_1 v_2) \\ -(m_3^2 \cos(\xi) + \frac{1}{2}(g^2 + g'^2)v_1 v_2) & \tilde{m}_2^2 - \frac{1}{4}(g^2 + g'^2)(v_1^2 - 3v_2^2) \end{pmatrix}, \quad (7.7)$$

geht für  $\xi \rightarrow 0$  in den Ausdruck der Massenmatrix der CP-geraden neutralen Higgsfelder (4.11) über. Entsprechendes gilt für die Matrix  $\mathcal{M}_{\zeta^0}$ ,

$$\mathcal{M}_{\zeta^0} = \begin{pmatrix} \tilde{m}_1^2 + \frac{1}{4}(g^2 + g'^2)(v_1^2 - v_2^2) & -m_3^2 \cos(\xi) \\ -m_3^2 \cos(\xi) & \tilde{m}_2^2 - \frac{1}{4}(g^2 + g'^2)(v_1^2 - v_2^2) \end{pmatrix}. \quad (7.8)$$

Für verschwindende komplexe Phasen stimmt sie mit der Massenmatrix der CP-ungeraden Higgsfelder (4.12) überein. Die Massenmatrix  $\mathcal{M}_{\phi^\pm}$  der geladenen Higgsfelder,

$$\mathcal{M}_{\phi^\pm} = \begin{pmatrix} \tilde{m}_1^2 + \frac{1}{4}((g^2 + g'^2)v_1^2 + \tilde{g}^2 v_2^2) & -m_3^2 e^{-i\xi} - \frac{1}{2}g^2 v_1 v_2 \\ -m_3^2 e^{i\xi} - \frac{1}{2}g^2 v_1 v_2 & \tilde{m}_2^2 + \frac{1}{4}(\tilde{g}^2 v_1^2 + (g^2 + g'^2)v_2^2) \end{pmatrix}, \quad (7.9)$$

geht im Fall  $\xi \rightarrow 0$  in die Massenmatrix (4.13) über. Wie in Kapitel 4.1 wurden hier die Abkürzungen  $\tilde{m}_1^2 = m_1^2 + |\mu|^2$ ,  $\tilde{m}_2^2 = m_2^2 + |\mu|^2$  und  $\tilde{g}^2 = g^2 - g'^2$  verwendet.

Damit im Vakuumzustand, also für

$$\langle H_1 \rangle = \begin{pmatrix} H_1^1|_{\text{vac.}} \\ H_1^2|_{\text{vac.}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \langle H_2 \rangle = \begin{pmatrix} H_2^1|_{\text{vac.}} \\ H_2^2|_{\text{vac.}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{i\xi} v_2 \end{pmatrix}, \quad (7.10)$$

die notwendige Minimumbedingung (4.3) erfüllt ist, müssen die in den  $\phi^0$ -,  $\zeta^0$ - und  $\phi^\pm$ -Feldern linearen Terme des Higgspotentials null werden. Für nicht verschwindende Phasen hat das Higgspotential zunächst nicht nur lineare Terme in den  $\phi^0$ -Feldern, vgl. (4.14), sondern auch in den  $\zeta^0$ -Feldern:

$$\begin{aligned} V_{\text{Higgs}}|_{\text{lin.}} &= (\sqrt{2}(m_1^2 + |\mu|^2)v_1 - \sqrt{2}m_3^2 v_2 \cos(\xi) + \frac{v_1(g^2 + g'^2)(v_1^2 - v_2^2)}{2\sqrt{2}})\phi_1^0 \\ &\quad + (-\sqrt{2}m_3^2 v_1 \cos(\xi) + \sqrt{2}(m_2^2 + |\mu|^2)v_2 - \frac{v_2(g^2 + g'^2)(v_1^2 - v_2^2)}{2\sqrt{2}})\phi_2^0 \\ &\quad - \sqrt{2}m_3^2 v_2 \sin(\xi)\zeta_1^0 + \sqrt{2}m_3^2 v_1 \sin(\xi)\zeta_2^0. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Diese linearen Terme müssen null ergeben, wenn  $v_1$  und  $e^{i\xi}v_2$  Vakuumerwartungswerte sind:

$$t_{\phi_1^0} := -\left(\sqrt{2}(m_1^2 + |\mu|^2)v_1 - \sqrt{2}m_3^2 v_2 \cos(\xi) + \frac{v_1(g^2 + g'^2)(v_1^2 - v_2^2)}{2\sqrt{2}}\right) \stackrel{!}{=} 0, \quad (7.12)$$

$$t_{\phi_2^0} := -\left(-\sqrt{2}m_3^2 v_1 \cos(\xi) + \sqrt{2}(m_2^2 + |\mu|^2)v_2 - \frac{v_2(g^2 + g'^2)(v_1^2 - v_2^2)}{2\sqrt{2}}\right) \stackrel{!}{=} 0, \quad (7.13)$$

$$t_{\zeta_1^0} := -\left(-\sqrt{2}m_3^2 v_2 \sin(\xi)\right) \stackrel{!}{=} 0, \quad (7.14)$$

$$t_{\zeta_2^0} := -\left(+\sqrt{2}m_3^2 v_1 \sin(\xi)\right) \stackrel{!}{=} 0. \quad (7.15)$$

## 7. Der Higgs-Sektor im komplexen MSSM

Hier wurden die Tadpol-Parameter  $t_{\phi_1^0}$ ,  $t_{\phi_2^0}$ ,  $t_{\zeta_1^0}$  und  $t_{\zeta_2^0}$  analog zu (4.46) und (4.47) in Kapitel 4.2.2 eingeführt. Ihre Verwendung ist bei der Betrachtung des Higgs-Sektors in höheren Ordnungen sinnvoll.  $t_{\zeta_1^0}$  und  $t_{\zeta_2^0}$  sind jedoch nicht unabhängig; es gilt:

$$t_{\zeta_2^0} = -\frac{v_1}{v_2} t_{\zeta_1^0} . \quad (7.16)$$

Die Bedingungen (7.12) und (7.13) bestimmen die Beträge der Vakuumerwartungswerte  $v_1$  und  $v_2$ . Statt  $v_1$  und  $v_2$  durch die Parameter des Higgspotentials auszudrücken, werden die Parameter  $m_1^2$  und  $m_2^2$  eliminiert. Die Bedingungen (7.14) und (7.15) legen den Phasenunterschied der beiden Higgs-Vakuumerwartungswerte fest:

$$\xi = z\pi \quad \text{mit} \quad z \in \mathbb{Z} . \quad (7.17)$$

Mit dieser Bedingung verschwindet die Matrix  $\mathcal{M}_{\phi^0\zeta^0}$ , so daß im Higgs-Sektor auf Born-Niveau keine Mischung zwischen CP-geraden und -ungeraden neutralen Higgs-Feldern stattfindet. Ein Minimum liegt jedoch nur vor, wenn  $z$  gerade ist (vgl. [58]<sup>1</sup>). Die Vakuumerwartungswerte der Higgs-Doublets sind dann reell und positiv.

Damit erhält man die Quadrate der Higgsmassen auf Born-Niveau, wie sie in Kapitel 4.1 in Gleichung (4.19) – (4.21) aufgelistet sind. Die Massenmatrix der neutralen Higgs-Bosonen,

$$\mathcal{M}_n = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{\phi^0} & \mathcal{M}_{\phi^0\zeta^0} \\ \mathcal{M}_{\phi^0\zeta^0}^+ & \mathcal{M}_{\zeta^0} \end{pmatrix} , \quad (7.18)$$

kann auf Born-Niveau durch die unitäre Matrix  $\mathcal{U}_n$  diagonalisiert werden:

$$\mathcal{D}_n = \mathcal{U}_n \mathcal{M}_n \mathcal{U}_n^+ = \text{diag}((M_{H^0}^{(0)})^2, (M_{h^0}^{(0)})^2, 0, M_{A^0}^2) . \quad (7.19)$$

Die unitäre Matrix  $\mathcal{U}_n$  ist dabei durch

$$\mathcal{U}_n = \begin{pmatrix} \mathcal{U}_{\phi^0} & 0 \\ 0 & \mathcal{U}_{\zeta^0} \end{pmatrix} \quad (7.20)$$

gegeben mit den unitären Matrizen  $\mathcal{U}_{\phi^0}$  aus (4.25) und  $\mathcal{U}_{\zeta^0}$  aus (4.26).  $\mathcal{U}_n$  führt auf Born-Niveau die  $\phi^0$ - und  $\zeta$ -Felder der Wechselwirkungsbasis in die Felder der Masseneigenzustände über:

$$\begin{pmatrix} H^0 \\ h^0 \\ G^0 \\ A^0 \end{pmatrix} = \mathcal{U}_n \begin{pmatrix} \phi_1^0 \\ \phi_2^0 \\ \zeta_1^0 \\ \zeta_2^0 \end{pmatrix} . \quad (7.21)$$

---

<sup>1</sup>In [58] wurde eine andere Vorzeichenkonvention für  $m_3^2$  verwendet.

## 7.2. Der Higgs-Sektor in höheren Ordnungen

Im Fall reeller Parameter verhindert die vorhandene CP-Symmetrie Mischungen zwischen CP-geraden und -ungeraden Higgs-Feldern auch in höheren Ordnungen. Im Gegensatz dazu treten bei nichtverschwindenden Phasen der komplexen Parameter aufgrund der verletzten CP-Symmetrie in höheren Ordnungen Mischungen der CP-geraden und -ungeraden Felder auf, obwohl eine Entmischung auf Born-Niveau möglich war.

### 7.2.1. Renormierte Selbstenergien im Higgs-Sektor

Die Herleitung der allgemeinen Ausdrücke für die renormierten Selbstenergien erfolgt analog zu Anhang B.1. Zu berücksichtigen ist dabei, daß die Selbstenergien der neutralen Felder in einer  $4 \times 4$ -Matrix  $\hat{\Sigma}_{\mathbf{n}}$  zusammengefaßt werden und nicht, wie im Fall reeller Parameter, in zwei  $2 \times 2$ -Matrizen  $\hat{\Sigma}_{\mathbf{H}^0\mathbf{h}^0}$  und  $\hat{\Sigma}_{\mathbf{G}^0\mathbf{A}^0}$  (siehe (4.7) und (4.8)):

$$\hat{\Sigma}_{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} \hat{\Sigma}_{\mathbf{H}^0\mathbf{h}^0} & \hat{\Sigma}_{\mathbf{H}^0\mathbf{h}^0\mathbf{G}^0\mathbf{A}^0} \\ \hat{\Sigma}_{\mathbf{H}^0\mathbf{h}^0\mathbf{G}^0\mathbf{A}^0}^+ & \hat{\Sigma}_{\mathbf{G}^0\mathbf{A}^0} \end{pmatrix} \quad (7.22)$$

mit

$$\hat{\Sigma}_{\mathbf{H}^0\mathbf{h}^0} = \begin{pmatrix} \hat{\Sigma}_{\mathbf{n}|11} & \hat{\Sigma}_{\mathbf{n}|12} \\ \hat{\Sigma}_{\mathbf{n}|21} & \hat{\Sigma}_{\mathbf{n}|22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\Sigma}_{H^0 H^0} & \hat{\Sigma}_{h^0 H^0} \\ \hat{\Sigma}_{h^0 H^0} & \hat{\Sigma}_{h^0 h^0} \end{pmatrix}, \quad (7.23)$$

$$\hat{\Sigma}_{\mathbf{H}^0\mathbf{h}^0\mathbf{G}^0\mathbf{A}^0} = \begin{pmatrix} \hat{\Sigma}_{\mathbf{n}|13} & \hat{\Sigma}_{\mathbf{n}|14} \\ \hat{\Sigma}_{\mathbf{n}|23} & \hat{\Sigma}_{\mathbf{n}|24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\Sigma}_{G^0 H^0} & \hat{\Sigma}_{A^0 H^0} \\ \hat{\Sigma}_{G^0 h^0} & \hat{\Sigma}_{A^0 h^0} \end{pmatrix}, \quad (7.24)$$

$$\hat{\Sigma}_{\mathbf{G}^0\mathbf{A}^0} = \begin{pmatrix} \hat{\Sigma}_{\mathbf{n}|33} & \hat{\Sigma}_{\mathbf{n}|34} \\ \hat{\Sigma}_{\mathbf{n}|43} & \hat{\Sigma}_{\mathbf{n}|44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\Sigma}_{G^0 G^0} & \hat{\Sigma}_{A^0 G^0} \\ \hat{\Sigma}_{A^0 G^0} & \hat{\Sigma}_{A^0 A^0} \end{pmatrix}. \quad (7.25)$$

Die renormierten Selbstenergien  $\hat{\Sigma}_{G^0 H^0}$ ,  $\hat{\Sigma}_{A^0 H^0}$ ,  $\hat{\Sigma}_{G^0 h^0}$  und  $\hat{\Sigma}_{A^0 h^0}$  setzen sich dabei analog zu den Selbstenergien in (4.7) und (4.8) aus allen ein-Teilchen-irreduziblen Feynman-Diagrammen zur entsprechenden Zwei-Punkt-Vertex-Funktion zusammen.

Zur Renormierung der Parameter werden nicht alle Parameter einzeln aufgeführt, sondern die Massenmatrizen der neutralen Higgs-Bosonen  $\mathcal{M}_n$  (7.18) und der geladenen Higgs-Bosonen  $\mathcal{M}_{\phi^\pm}$  (7.9) durch renormierte Massenmatrizen und dazugehörige Counterterme ersetzt:

$$\mathcal{M}_n \rightarrow \mathcal{M}_n + \delta\mathcal{M}_n^{(1)} + \delta\mathcal{M}_n^{(2)}, \quad (7.26)$$

$$\mathcal{M}_{\phi^\pm} \rightarrow \mathcal{M}_{\phi^\pm} + \delta\mathcal{M}_{\phi^\pm}^{(1)} + \delta\mathcal{M}_{\phi^\pm}^{(2)}. \quad (7.27)$$

## 7. Der Higgs-Sektor im komplexen MSSM

Mit der Feldrenormierung<sup>2</sup> gemäß (4.36) und (4.37) schreibt sich die matrixwertige Selbstenergie der neutralen Higgs-Bosonen auf Ein-Schleifen-Niveau:

$$\hat{\Sigma}_{\mathbf{n}}^{(1)}(k^2) = \Sigma_{\mathbf{n}}^{(1)}(k^2) + \frac{1}{2}k^2(\delta\tilde{\mathcal{Z}}_n^+ + \delta\tilde{\mathcal{Z}}_n) - \frac{1}{2}(\delta\tilde{\mathcal{Z}}_n^+ \mathcal{D}_n + \mathcal{D}_n \delta\tilde{\mathcal{Z}}_n) - \mathcal{U}_n \delta\mathcal{M}_n^{(1)} \mathcal{U}_n^+ . \quad (7.28)$$

Die dazugehörigen renormierten Higgs-Selbstenergien auf Zwei-Schleifen-Niveau haben die Form:

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}_{\mathbf{n}}^{(2)}(k^2) &= \Sigma_{\mathbf{n}}^{(2)}(k^2) + \frac{1}{2}k^2(\Delta\tilde{\mathcal{Z}}_n^+ + \Delta\tilde{\mathcal{Z}}_n + \frac{1}{2}\delta\tilde{\mathcal{Z}}_n^+ \delta\tilde{\mathcal{Z}}_n) \\ &\quad - \frac{1}{2}(\Delta\tilde{\mathcal{Z}}_n^+ \mathcal{D}_n + \mathcal{D}_n \Delta\tilde{\mathcal{Z}}_n + \frac{1}{2}\delta\tilde{\mathcal{Z}}_n^+ \mathcal{D}_n \delta\tilde{\mathcal{Z}}_n) \\ &\quad - \mathcal{U}_n \delta\mathcal{M}_n^{(2)} \mathcal{U}_n^+ - \frac{1}{2}(\delta\tilde{\mathcal{Z}}_n^+ \mathcal{U}_n \delta\mathcal{M}_n^{(1)} \mathcal{U}_n^+ + \mathcal{U}_n \delta\mathcal{M}_n^{(1)} \mathcal{U}_n^+ \delta\tilde{\mathcal{Z}}_n) . \end{aligned} \quad (7.29)$$

Dabei wurde folgende Schreibweise verwendet:

$$\delta\tilde{\mathcal{Z}}_n = \mathcal{U}_n \delta\mathcal{Z}_n^{(1)} \mathcal{U}_n^+ \quad \text{mit} \quad \delta\mathcal{Z}_n^{(1)} = \begin{pmatrix} \delta\mathcal{Z}_H^{(1)} & 0 \\ 0 & \delta\mathcal{Z}_H^{(1)} \end{pmatrix} , \quad (7.30)$$

$$\Delta\tilde{\mathcal{Z}}_n = \mathcal{U}_n \Delta\mathcal{Z}_n \mathcal{U}_n^+ \quad \text{mit} \quad \Delta\mathcal{Z}_n = \begin{pmatrix} \Delta\mathcal{Z}_H & 0 \\ 0 & \Delta\mathcal{Z}_H \end{pmatrix} \quad (7.31)$$

mit  $\delta\mathcal{Z}_H^{(1)}$  und  $\Delta\mathcal{Z}_H$  gegeben in (4.41) und (4.42).

Die renormierten Selbstenergien der geladenen Higgs-Felder sind in der matrixwertigen Selbstenergie  $\hat{\Sigma}_{\mathbf{G}^{\pm}\mathbf{H}^{\pm}}$  zusammengefaßt:

$$\hat{\Sigma}_{\mathbf{G}^{\pm}\mathbf{H}^{\pm}} = \begin{pmatrix} \hat{\Sigma}_{\mathbf{G}^{\pm}\mathbf{H}^{\pm}|11} & \hat{\Sigma}_{\mathbf{G}^{\pm}\mathbf{H}^{\pm}|12} \\ \hat{\Sigma}_{\mathbf{G}^{\pm}\mathbf{H}^{\pm}|21} & \hat{\Sigma}_{\mathbf{G}^{\pm}\mathbf{H}^{\pm}|22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\Sigma}_{G^+G^-} & \hat{\Sigma}_{G^+H^-} \\ \hat{\Sigma}_{H^+G^-} & \hat{\Sigma}_{H^+H^-} \end{pmatrix} . \quad (7.32)$$

Die renormierten Selbstenergien  $\hat{\Sigma}_{G^+G^-}$ ,  $\hat{\Sigma}_{G^+H^-}$ ,  $\hat{\Sigma}_{H^+G^-}$  und  $\hat{\Sigma}_{H^+H^-}$  bestehen aus allen ein-Teilchen-irreduziblen Feynman-Diagrammen zur entsprechenden Zwei-Punkt-Vertex-Funktion.

Auf Ein-Schleifen-Niveau ist die renormierte Selbstenergie  $\hat{\Sigma}_{\mathbf{G}^{\pm}\mathbf{H}^{\pm}}$  gegeben durch:

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}_{\mathbf{G}^{\pm}\mathbf{H}^{\pm}}^{(1)}(k^2) &= \Sigma_{\mathbf{G}^{\pm}\mathbf{H}^{\pm}}^{(1)}(k^2) + \frac{1}{2}k^2(\delta\tilde{\mathcal{Z}}_{\phi^{\pm}}^+ + \delta\tilde{\mathcal{Z}}_{\phi^{\pm}}) \\ &\quad - \frac{1}{2}(\delta\tilde{\mathcal{Z}}_{\phi^{\pm}}^+ \mathcal{D}_{\phi^{\pm}} + \mathcal{D}_{\phi^{\pm}} \delta\tilde{\mathcal{Z}}_{\phi^{\pm}}) - \mathcal{U}_{\phi^{\pm}} \delta\mathcal{M}_{\phi^{\pm}}^{(1)} \mathcal{U}_{\phi^{\pm}}^+ . \end{aligned} \quad (7.33)$$

---

<sup>2</sup>Bei der hier getroffenen Wahl der minimalen Feldrenormierung können die Z-Faktoren als reell angenommen werden.

## 7.2. Der Higgs-Sektor in höheren Ordnungen

Die dazugehörigen renormierten Higgs-Selbstenergien auf Zwei-Schleifen-Niveau können folgendermaßen dargestellt werden:

$$\begin{aligned}
\hat{\Sigma}_{\mathbf{G}^{\pm}\mathbf{H}^{\pm}}^{(2)}(k^2) &= \Sigma_{\mathbf{G}^{\pm}\mathbf{H}^{\pm}}^{(2)}(k^2) + \frac{1}{2}k^2(\Delta\tilde{\mathcal{Z}}_{\phi^{\pm}}^+ + \Delta\tilde{\mathcal{Z}}_{\phi^{\pm}} + \frac{1}{2}\delta\tilde{\mathcal{Z}}_{\phi^{\pm}}^+ \delta\tilde{\mathcal{Z}}_{\phi^{\pm}}) \\
&\quad - \frac{1}{2}(\Delta\tilde{\mathcal{Z}}_{\phi^{\pm}}^+ \mathcal{D}_{\phi^{\pm}} + \mathcal{D}_{\phi^{\pm}} \Delta\tilde{\mathcal{Z}}_{\phi^{\pm}} + \frac{1}{2}\delta\tilde{\mathcal{Z}}_{\phi^{\pm}}^+ \mathcal{D}_{\phi^{\pm}} \delta\tilde{\mathcal{Z}}_{\phi^{\pm}}) - \mathcal{U}_{\phi^{\pm}} \delta\mathcal{M}_{\phi^{\pm}}^{(2)} \mathcal{U}_{\phi^{\pm}}^+ \\
&\quad - \frac{1}{2}(\delta\tilde{\mathcal{Z}}_{\phi^{\pm}}^+ \mathcal{U}_{\phi^{\pm}} \delta\mathcal{M}_{\phi^{\pm}}^{(1)} \mathcal{U}_{\phi^{\pm}}^+ + \mathcal{U}_{\phi^{\pm}} \delta\mathcal{M}_{\phi^{\pm}}^{(1)} \mathcal{U}_{\phi^{\pm}}^+ \delta\tilde{\mathcal{Z}}_{\phi^{\pm}}) .
\end{aligned} \tag{7.34}$$

Die Z-Faktoren  $\delta\tilde{\mathcal{Z}}_{\phi^{\pm}}$  und  $\Delta\tilde{\mathcal{Z}}_{\phi^{\pm}}$  wurden als abkürzende Schreibweise eingeführt:

$$\delta\tilde{\mathcal{Z}}_{\phi^{\pm}} = \mathcal{U}_{\phi^{\pm}} \delta\mathcal{Z}_H^{(1)} \mathcal{U}_{\phi^{\pm}}^+ , \tag{7.35}$$

$$\Delta\tilde{\mathcal{Z}}_{\phi^{\pm}} = \mathcal{U}_{\phi^{\pm}} \Delta\mathcal{Z}_H \mathcal{U}_{\phi^{\pm}}^+ \tag{7.36}$$

mit  $\delta\mathcal{Z}_H^{(1)}$  und  $\Delta\mathcal{Z}_H$  aus (4.41) und (4.42).

### 7.2.2. Higgs-Massenmatrizen

Zur Bestimmung der im vorherigen Abschnitt eingeführten Counterterme der Massenmatrizen ist die Kenntnis der Parameterabhängigkeit der Massenmatrix notwendig. Die Massenmatrix läßt sich durch die ursprünglichen Parameter der Lagrangedichte ausdrücken, aber auch durch Parameter, die als physikalische Massen und Mischungswinkel interpretiert werden können. Im folgenden werden statt der Parameter

$$m_1^2, \quad m_2^2, \quad m_3^2, \quad g', \quad g, \quad v_1, \quad v_2, \quad \xi \tag{7.37}$$

die Parameter

$$t_{\phi_1^0}, \quad t_{\phi_2^0}, \quad M_{H^{\pm}}, \quad e, \quad M_W, \quad M_Z, \quad \tan\beta, \quad t_{A^0} \tag{7.38}$$

verwendet.  $t_{\phi_1^0}$ ,  $t_{\phi_2^0}$ ,  $t_{A^0}$  sind Tadpol-Parameter;  $t_{\phi_1^0}$  und  $t_{\phi_2^0}$  sind in (7.12) und (7.13) gegeben. Folgende Beziehung bestimmt den Tadpolparameter  $t_{A^0}$ :

$$t_{A^0} = -\sin\beta_B t_{\zeta_1^0} + \cos\beta_B t_{\zeta_2^0} = -\frac{\cos(\beta - \beta_B)}{\sin\beta} t_{\zeta_1^0} . \tag{7.39}$$

Dabei wurden die Definitionen (7.14) und (7.15) für  $t_{\zeta_1^0}$  und  $t_{\zeta_2^0}$  und die Beziehung (7.16) verwendet. Die Mischung der Higgs-Felder  $\zeta_1^0$  und  $\zeta_2^0$  wird auf Born-Niveau durch den Mischungswinkel  $\beta_B$  parametrisiert.  $M_{H^{\pm}}$  ist die Masse des geladenen Higgs-Bosons (4.31). Anders als beim MSSM mit reellen Parametern wird in diesem Teil der Arbeit statt der Masse des A-Bosons die Masse des geladenen Higgs-Bosons eingeführt. Da bei CP-Verletzung die neutralen Higgs-Bosonen mischen, ist eine On-Shell-Interpretation der A-Boson-Masse problematisch.  $M_Z$  und  $M_W$  bezeichnen die Massen der Z- und W-Bosonen

## 7. Der Higgs-Sektor im komplexen MSSM

(4.23) und (4.24) und  $e$  ist die Elementarladung (4.54). Die Higgs-Vakuumerwartungswerte  $v_1$  und  $v_2$  werden durch die Parameter  $\tan\beta$  aus (4.22) und  $M_Z$  ersetzt.

Die Matrixelemente der Untermatrizen  $\mathcal{M}_{\phi^0}$ ,  $\mathcal{M}_{\phi^0\zeta^0}$  und  $\mathcal{M}_{\zeta^0}$ ,

$$\mathcal{M}_\phi = \begin{pmatrix} M_{\phi 11} & M_{\phi 12} \\ M_{\phi 21} & M_{\phi 22} \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad \phi = \phi^0, \phi^0\zeta^0, \zeta^0, \quad (7.40)$$

lassen sich durch die Parameter folgendermaßen ausdrücken:

$$\begin{aligned} M_{\phi^0 11} = & \left( \frac{M_{H^\pm}^2}{\cos^2(\beta - \beta_B)} - M_W^2 \right) \sin^2 \beta + M_Z^2 \cos^2 \beta \\ & - e \frac{t_{\phi_1^0} \cos \beta_B (\cos \beta \cos \beta_B + 2 \sin \beta \sin \beta_B) - t_{\phi_2^0} \cos^2 \beta_B \sin \beta}{2M_Z \cos \theta_W \sin \theta_W \cos^2(\beta - \beta_B)}, \end{aligned} \quad (7.41)$$

$$\begin{aligned} M_{\phi^0 12} = M_{\phi^0 21} = & - \left( \frac{M_{H^\pm}^2}{\cos^2(\beta - \beta_B)} - M_W^2 + M_Z^2 \right) \sin \beta \cos \beta \\ & - e \frac{t_{\phi_1^0} \sin \beta \sin^2 \beta_B + t_{\phi_2^0} \cos \beta \cos^2 \beta_B}{2M_Z \cos \theta_W \sin \theta_W \cos^2(\beta - \beta_B)}, \end{aligned} \quad (7.42)$$

$$\begin{aligned} M_{\phi^0 22} = & \left( \frac{M_{H^\pm}^2}{\cos^2(\beta - \beta_B)} - M_W^2 \right) \cos^2 \beta + M_Z^2 \sin^2 \beta \\ & + e \frac{t_{\phi_1^0} \cos \beta \sin^2 \beta_B - t_{\phi_2^0} (\sin \beta \sin^2 \beta_B + \cos \beta \sin 2\beta_B)}{2M_Z \cos \theta_W \sin \theta_W \cos^2(\beta - \beta_B)}, \end{aligned} \quad (7.43)$$

$$M_{\phi^0\zeta^0 11} = M_{\phi^0\zeta^0 22} = 0, \quad (7.44)$$

$$M_{\phi^0\zeta^0 12} = -M_{\phi^0\zeta^0 21} = -e \frac{t_{A^0}}{2M_Z \cos \theta_W \sin \theta_W \cos(\beta - \beta_B)}, \quad (7.45)$$

$$\begin{aligned} M_{\zeta^0 11} = & \left( \frac{M_{H^\pm}^2}{\cos^2(\beta - \beta_B)} - M_W^2 \right) \sin^2 \beta - e \frac{t_{\phi_1^0} \cos \beta_B (\cos \beta \cos \beta_B + 2 \sin \beta \sin \beta_B)}{2M_Z \cos \theta_W \sin \theta_W \cos^2(\beta - \beta_B)} \\ & + e \frac{t_{\phi_2^0} \cos^2 \beta_B \sin \beta}{2M_Z \cos \theta_W \sin \theta_W \cos^2(\beta - \beta_B)}, \end{aligned} \quad (7.46)$$

$$\begin{aligned} M_{\zeta^0 12} = M_{\zeta^0 21} = & - \left( \frac{M_{H^\pm}^2}{\cos^2(\beta - \beta_B)} - M_W^2 \right) \sin \beta \cos \beta \\ & - e \frac{t_{\phi_1^0} \sin \beta \sin^2 \beta_B + t_{\phi_2^0} \cos \beta \cos^2 \beta_B}{2M_Z \cos \theta_W \sin \theta_W \cos^2(\beta - \beta_B)}, \end{aligned} \quad (7.47)$$



### 7.3. Renormierte Selbstenergien der neutralen Higgs-Bosonen

$$\begin{aligned}
M_{\zeta^0 22} = & \left( \frac{M_{H^\pm}^2}{\cos^2(\beta - \beta_B)} - M_W^2 \right) \cos^2 \beta + e \frac{t_{\phi_1^0} \cos \beta \sin^2 \beta_B}{2M_Z \cos \theta_W \sin \theta_W \cos^2(\beta - \beta_B)} \\
& - e \frac{t_{\phi_2^0} (\sin \beta \sin^2 \beta_B + \cos \beta \sin 2\beta_B)}{2M_Z \cos \theta_W \sin \theta_W \cos^2(\beta - \beta_B)} .
\end{aligned} \tag{7.48}$$

$\theta_W$  ist der elektroschwache Mischungswinkel aus (4.55). Die Abhängigkeit vom Mischungswinkel  $\beta_B$  kommt durch die Einführung des Tadpol-Parameters  $t_{A^0}$  und der Masse des geladenen Higgs-Bosons  $M_{H^\pm}$  mit  $M_{H^\pm}^2 = (\mathcal{U}_{\phi^\pm} \mathcal{M}_{\phi^\pm} U_{\phi^\pm}^+) |_{22}$  zustande. Zur Bestimmung der expliziten Form der Massenmatrix-Counterterme wird die Parameterrenormierung durchgeführt. Dazu werden die nackten Parameter durch die renormierten Parameter und die dazugehörigen Counterterme ersetzt:

$$M_{H^\pm}^2 \rightarrow M_{H^\pm}^2 + \delta M_{H^\pm}^2{}^{(1)} + \delta M_{H^\pm}^2{}^{(2)} , \tag{7.49}$$

$$M_Z^2 \rightarrow M_Z^2 + \delta M_Z^2{}^{(1)} + \delta M_Z^2{}^{(2)} , \tag{7.50}$$

$$M_W^2 \rightarrow M_W^2 + \delta M_W^2{}^{(1)} + \delta M_W^2{}^{(2)} , \tag{7.51}$$

$$t_{\phi_1^0} \rightarrow t_{\phi_1^0} + \delta t_{\phi_1^0}^{(1)} + \delta t_{\phi_1^0}^{(2)} , \tag{7.52}$$

$$t_{\phi_2^0} \rightarrow t_{\phi_2^0} + \delta t_{\phi_2^0}^{(1)} + \delta t_{\phi_2^0}^{(2)} , \tag{7.53}$$

$$t_{A^0} \rightarrow t_{A^0} + \delta t_{A^0}^{(1)} + \delta t_{A^0}^{(2)} , \tag{7.54}$$

$$\tan \beta \rightarrow \tan \beta + \delta \tan^{(1)} \beta + \delta \tan^{(2)} \beta , \tag{7.55}$$

$$e \rightarrow (1 + \delta Z_e^{(1)} + \delta Z_e^{(2)}) e . \tag{7.56}$$

Nach diesen Countertermen wird die Massenmatrix entwickelt. In Anhang B.3.1 bzw. B.3.2 sind die Massenmatrix-Counterterme für Ein- bzw. Zwei-Schleifen-Niveau aufgelistet. In den Ausdrücken auf Zwei-Schleifen-Niveau wurden die Näherungen aus Kapitel 7.3.2 verwendet und die im dort gewählten Renormierungsschema verschwindenden Counterterme gleich null gesetzt.

## 7.3. Renormierte Selbstenergien der neutralen Higgs-Bosonen

### 7.3.1. Ein-Schleifen-Ordnung $\mathcal{O}(\alpha)$

Die Berechnung der Ein-Schleifen-Selbstenergien (7.28) wird hier wie in Kapitel 4.3 exakt durchgeführt. Zur Bestimmung der Selbstenergie (7.28) ist die Festlegung der folgenden Counterterme notwendig:

## 7. Der Higgs-Sektor im komplexen MSSM

- Der Counterterm zum Quadrat der Masse des geladenen Higgs-Bosons  $\delta M_{H^\pm}^2{}^{(1)}$  wird on-shell festgelegt:

$$\widetilde{\text{Re}}\hat{\Sigma}_{\mathbf{G}^\pm\mathbf{H}^\pm}^{(1)}(M_{H^\pm}^2)|_{22} = 0 . \quad (7.57)$$

$\hat{\Sigma}_{\mathbf{G}^\pm\mathbf{H}^\pm}^{(1)}$  ist durch (7.33) gegeben.  $\widetilde{\text{Re}}$  projiziert aus den Schleifenfunktionen den Realteil heraus, wirkt aber nicht auf komplexe Parameter. Der Realteil des inversen Teilchenpropagators des geladenen Higgs-Bosons besitzt mit dieser Bedingung eine Nullstelle bei  $M_{H^\pm}^2$ .  $M_{H^\pm}$  hat somit die Bedeutung der physikalischen Masse des geladenen Higgs-Bosons. Damit ergibt sich für den Counterterm des geladenen Higgs-Bosons:

$$\delta M_{H^\pm}^2{}^{(1)} = (\mathcal{U}_{\phi^\pm}\delta\mathcal{M}_{\phi^\pm}^{(1)}\mathcal{U}_{\phi^\pm}^+)_{22} = \widetilde{\text{Re}}\Sigma_{\mathbf{G}^\pm\mathbf{H}^\pm}^{(1)}(M_{H^\pm}^2)|_{22} = \widetilde{\text{Re}}\Sigma_{H^+H^-}^{(1)}(M_{H^\pm}^2) . \quad (7.58)$$

- Die Counterterme zur W- und Z-Boson-Masse werden durch eine On-Shell-Bedingung bestimmt:

$$\widetilde{\text{Re}}\hat{\Sigma}_{VV}^{(1)}(M_V^2) = 0 \quad \text{mit} \quad V = W, Z \quad (7.59)$$

mit der renormierten Z-Boson-Selbstenergie  $\hat{\Sigma}_{ZZ}^{(1)}$  aus (4.77) und der renormierten W-Boson-Selbstenergie:

$$\hat{\Sigma}_{WW}^{(1)}(k^2) = \Sigma_{WW}^{(1)}(k^2) + (k^2 - M_W^2)\delta Z_{WW}^{(1)} - \delta M_W^2{}^{(1)} . \quad (7.60)$$

Bei der Durchführung der Parameter- und der Feldrenormierung wurde dabei das Massenquadrat des W-Bosons durch die dazugehörige renormierte Größe mit Counterterm und die nackten Felder durch renormierte Felder und Z-Faktoren ersetzt:

$$M_W^2 \rightarrow M_W^2 + \delta M_W^2{}^{(1)} , \quad (7.61)$$

$$W_\mu^\pm \rightarrow (\mathbb{1} + \frac{1}{2}\delta Z_{WW}^{(1)})W_\mu^\pm . \quad (7.62)$$

Die Counterterme der Massenquadrate von W- und Z-Boson können mit (7.59) bestimmt werden:

$$\delta M_V^2{}^{(1)} = \widetilde{\text{Re}}\Sigma_{VV}^{(1)}(M_V^2) \quad \text{mit} \quad V = W, Z . \quad (7.63)$$

Aufgrund der Bedingung (7.59) hat der Realteil des inversen Propagators des W- bzw. Z-Bosons eine Nullstelle bei  $M_W^2$  bzw.  $M_Z^2$ . Die Massenparameter der Vektorbosonen  $M_W$  und  $M_Z$  können als physikalische Massen interpretiert werden.

- Die Tadpol-Parameter werden analog zum Fall reeller Parameter durch die Bedingungen

$$T_{\phi_1^0}^{(1)} + \delta t_{\phi_1^0}^{(1)} = 0 , \quad (7.64)$$

### 7.3. Renormierte Selbstenergien der neutralen Higgs-Bosonen

$$T_{\phi_2^0}^{(1)} + \delta t_{\phi_2^0}^{(1)} = 0, \quad (7.65)$$

$$T_{A^0}^{(1)} + \delta t_{A^0}^{(1)} = 0 \quad (7.66)$$

bestimmt. Die Parameter  $v_1$  und  $v_2$  haben damit auch auf Ein-Schleifen-Niveau die Bedeutung der Higgs-Vakuumerwartungswerte.  $T_{\phi_1^0}^{(1)}, T_{\phi_2^0}^{(1)}$  bzw.  $T_{A^0}^{(1)}$  schließen alle Beiträge der irreduziblen Ein-Schleifen-Tadpol-Diagramme des  $\phi_1^0$ -,  $\phi_2^0$ - bzw.  $A^0$ -Felds ein. Die Counterterme zu den Tadpol-Parametern sind also:

$$\delta t_{\phi_1^0}^{(1)} = -T_{\phi_1^0}^{(1)}, \quad (7.67)$$

$$\delta t_{\phi_2^0}^{(1)} = -T_{\phi_2^0}^{(1)}, \quad (7.68)$$

$$\delta t_{A^0}^{(1)} = -T_{A^0}^{(1)}. \quad (7.69)$$

- Die Z-Faktoren  $\delta Z_{H_1^0}^{(1)}$  und  $\delta Z_{H_2^0}^{(1)}$  werden wie in Kapitel 4.3.1 im  $\overline{\text{DR}}$ -Schema festgelegt. Die expliziten Ausdrücke für die Z-Faktoren sind durch (4.85) und (4.86) gegeben. Im Fall komplexer Parameter wird  $\text{Re}$  durch  $\widetilde{\text{Re}}$  ersetzt.
- Der Counterterm zu  $\tan\beta$  wird ebenfalls im  $\overline{\text{DR}}$ -Schema bestimmt und ist gegeben in (4.90).

#### 7.3.2. Zwei-Schleifen-Ordnung $\mathcal{O}(\alpha_t\alpha_s)$

Auf Zwei-Schleifen-Niveau werden nur die dominanten Beiträge der Higgs-Selbstenergien betrachtet. Wie im Fall reeller Parameter (siehe Abschnitt 4.3.2) werden auf Ein-Schleifen-Niveau die größten Beiträge durch Korrekturen der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_t)$  verursacht. Auf Zwei-Schleifen-Niveau liefern die Korrekturen zum Ein-Schleifen-Beitrag der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_t)$ , welche durch die starke Wechselwirkung hervorgerufen werden, den Hauptbeitrag. Zur Berechnung der dominanten Terme auf Zwei-Schleifen-Niveau werden die Eichkopplungen  $g, g'$  in der Lagrangedichte – ausgedrückt in den ursprünglichen Parametern – gleich null gesetzt. Die in den Zwei-Schleifen-Selbstenergien auftretenden Kopplungen sind damit entweder proportional zur Yukawa-Kopplung  $\lambda_t$  oder zur Eichkopplung der starken Wechselwirkung  $g_s$ . Die Selbstenergien auf Zwei-Schleifen-Niveau werden mit verschwindendem äußeren Impuls berechnet.

Durch die Beschränkung auf die dominanten Korrekturen  $\mathcal{O}(\alpha_t\alpha_s)$  vereinfacht sich der Ausdruck für die Selbstenergie auf Zwei-Schleifen-Niveau erheblich. Produkte von Ein-Schleifen-Countertermen liefern keinen Beitrag, da sie von der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha^2)$  sind. Mit der Näherung, daß die äußeren Impulse verschwinden, erhält man folgenden Ausdruck für die matrixwertige Selbstenergie auf Zwei-Schleifen-Niveau:

$$\hat{\Sigma}_{\mathbf{n}}^{(2)}(0) = \Sigma_{\mathbf{n}}^{(2)}(0) - \frac{1}{2}(\Delta\tilde{\mathcal{Z}}_n^+ \mathcal{D}_n + \mathcal{D}_n \Delta\tilde{\mathcal{Z}}_n) - \mathcal{U}_n \delta\mathcal{M}_n^{(2)} \mathcal{U}_n^+. \quad (7.70)$$

## 7. Der Higgs-Sektor im komplexen MSSM

Der Counterterm zur Higgs-Massenmatrix  $\delta\mathcal{M}_n^{(2)}$  hängt dabei von den Parameter-Countertermen  $\delta M_{H^\pm}^{2(2)}$ ,  $\delta M_W^{2(2)}$ ,  $\delta M_Z^{2(2)}$ ,  $\delta \tan^{(2)}\beta$ ,  $\delta t_{\phi_1}^{(2)}$ ,  $\delta t_{\phi_2}^{(2)}$  und  $\delta t_{A^0}^{(2)}$  ab. Für die explizite Berechnung der Zwei-Schleifen-Selbstenergien müssen diese Counterterme sowie  $\Delta Z_{H_1}$  und  $\Delta Z_{H_2}$  durch Renormierungsbedingungen festgelegt werden:

- Die Z-Faktoren werden analog Kapitel 4.3.2 im  $\overline{\text{DR}}$ -Schema bestimmt. Analog zu Anhang B.2 kann auch für den Fall komplexer Parameter gezeigt werden, daß die Z-Faktoren in der betrachteten Ordnung keinen divergenten Anteil besitzen und somit im  $\overline{\text{DR}}$ -Schema verschwinden (4.96).
- Zur Festlegung des Massencounterterms des geladenen Higgs-Bosons wird – analog zum Ein-Schleifen-Niveau – eine Bedingung an die renormierte Selbstenergie der geladenen Higgs-Bosonen  $\hat{\Sigma}_{\mathbf{G}^\pm\mathbf{H}^\pm}^{(2)}|_{22}$  gestellt. Im  $\overline{\text{DR}}$ -Schema in der betrachteten Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_t\alpha_s)$  verschwinden die Z-Faktoren. So vereinfacht sich (7.34) zu

$$\hat{\Sigma}_{\mathbf{G}^\pm\mathbf{H}^\pm}^{(2)}(k^2) = \Sigma_{\mathbf{G}^\pm\mathbf{H}^\pm}^{(2)}(k^2) - \mathcal{U}_{\phi^\pm} \delta\mathcal{M}_{\phi^\pm}^{(2)} \mathcal{U}_{\phi^\pm}^+ . \quad (7.71)$$

Produkte von Ein-Schleifen-Countertermen tragen nicht zu Termen der betrachteten Ordnung bei. In der Näherung verschwindender äußerer Impulse wird folgende Renormierungsbedingung gestellt:

$$\hat{\Sigma}_{\mathbf{G}^\pm\mathbf{H}^\pm}^{(2)}(0)|_{22} = 0 . \quad (7.72)$$

Damit kann der Massencounterterm des geladenen Higgs-Bosons in Zwei-Schleifen-Ordnung  $\delta M_{H^\pm}^{2(2)}$  bestimmt werden:

$$\delta M_{H^\pm}^{2(2)} = (\mathcal{U}_{\phi^\pm} \delta\mathcal{M}_{\phi^\pm}^{(2)} \mathcal{U}_{\phi^\pm}^+)|_{22} = \Sigma_{\mathbf{G}^\pm\mathbf{H}^\pm}^{(2)}(0)|_{22} . \quad (7.73)$$

- Die Massencounterterme des W- und Z-Bosons werden über eine On-Shell-Bedingung festgelegt. In der betrachteten Näherung gibt es keine Beiträge zur W- und Z-Selbstenergie, da die Kopplungen an das W- bzw. Z-Boson proportional zu den Eichkopplungen  $g$ ,  $g'$  sind, und diese in der betrachteten Näherung den Wert null annehmen. Damit verschwindet auch der Massencounterterm des Z-Bosons  $\delta M_Z^{2(2)}$  bzw. des W-Bosons  $\delta M_W^{2(2)}$  in der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_t\alpha_s)$ :

$$\delta M_V^{2(2)} = 0 \quad \text{mit} \quad V = W, Z . \quad (7.74)$$

- Die Tadpol-Parameter werden auf Zwei-Schleifen-Niveau durch die Bedingungen,

$$T_\phi^{(2)} + \delta t_\phi^{(2)} = 0 \quad \text{mit} \quad \phi = \phi_1^0, \phi_2^0, A^0 , \quad (7.75)$$

bestimmt. Dabei wurden Terme der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha^2)$  vernachlässigt (vergleiche (4.51)). Damit können die Parameter  $v_1$  und  $v_2$  auch in dieser Ordnung als Higgs-Vakuumerwartungswerte interpretiert werden, wie in Abschnitt 4.2.2 beschrieben.  $T_{\phi_1}^{(2)}$ ,  $T_{\phi_2}^{(2)}$

### 7.3. Renormierte Selbstenergien der neutralen Higgs-Bosonen

bzw.  $T_{A^0}^{(2)}$  sind aus allen Beiträgen der irreduziblen Zwei-Schleifen-Tadpol-Diagramme der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_t \alpha_s)$  des  $\phi_1^0$ -,  $\phi_2^0$ - bzw.  $A^0$ -Felds zusammengesetzt. Für die Tadpol-Counterterme gilt analog zum Fall reeller Parameter:

$$\delta t_\phi^{(2)} = -T_\phi^{(2)} \quad \text{mit} \quad \phi = \phi_1^0, \phi_2^0, A^0. \quad (7.76)$$

- Der Counterterm zu  $\tan \beta$  wird im  $\overline{\text{DR}}$ -Schema festgelegt. In der betrachteten Ordnung muß dieser Counterterm keine divergenten Anteile absorbieren und verschwindet wie im Fall reeller Parameter (4.105).

#### 7.3.3. Zusammenstellung wichtiger Ausdrücke

Die renormierte Ein-Schleifen-Selbstenergie ist durch

$$\hat{\Sigma}_{\mathbf{n}}^{(1)}(k^2) = \Sigma_{\mathbf{n}}^{(1)}(k^2) + \frac{1}{2}k^2(\delta\tilde{Z}_n^+ + \delta\tilde{Z}_n) - \frac{1}{2}(\delta\tilde{Z}_n^+ \mathcal{D}_n + \mathcal{D}_n \delta\tilde{Z}_n) - \mathcal{U}_n \delta\mathcal{M}_n^{(1)} \mathcal{U}_n^+ \quad (7.77)$$

gegeben. Die Elemente der Matrix  $\mathcal{U}_n \delta\mathcal{M}_n^{(1)} \mathcal{U}_n^+$  sind in Anhang B.3.1 aufgelistet. Auf Zwei-Schleifen-Niveau werden nur Terme der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_t \alpha_s)$  berücksichtigt. Zusätzlich wird in der Näherung verschwindender Eichkopplungen  $g$  und  $g'$  und verschwindender Impulse gerechnet. In dieser Näherung sind die im  $\overline{\text{DR}}$ -Schema renormierten Z-Faktoren  $\Delta Z_{H_1}$  und  $\Delta Z_{H_2}$  null. Damit vereinfacht sich der Ausdruck der matrixwertigen Zwei-Schleifen-Selbstenergie zu:

$$\hat{\Sigma}_{\mathbf{n}}^{(2)}(0) = \Sigma_{\mathbf{n}}^{(2)}(0) - \mathcal{U}_n \delta\mathcal{M}_n^{(2)} \mathcal{U}_n^+. \quad (7.78)$$

Explizite Ausdrücke für die Elemente der Matrix  $\mathcal{U}_n \delta\mathcal{M}_n^{(2)} \mathcal{U}_n^+$  sind in Anhang B.3.2 aufgeführt.

Bei einer exakten Berechnung der Higgs-Massen müßte neben der Mischung des Goldstone-Bosons mit den Higgs-Bosonen die Mischung mit der longitudinalen Komponente des Z-Bosons berücksichtigt werden. Auf Ein-Schleifen-Niveau ist die Mischung des Goldstone-Bosons  $G^0$  mit den Higgs-Bosonen  $H^0$ ,  $h^0$  und  $A^0$  vernachlässigbar klein, siehe auch [28]. Die gemäß Kapitel 7.3.2 bestimmten Mischungs-Selbstenergien zwischen den Higgs-Bosonen und dem Goldstone-Boson verschwinden in der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_t \alpha_s)$ . Deshalb reicht es aus, bei der Berechnung der Higgs-Massen nur die  $3 \times 3$ -Matrix  $\hat{\Sigma}_{\mathbf{H}^0 \mathbf{h}^0 \mathbf{A}^0}^{(i)}$   $i$ -ter Ordnung,

$$\hat{\Sigma}_{\mathbf{H}^0 \mathbf{h}^0 \mathbf{A}^0}^{(i)} = \begin{pmatrix} \hat{\Sigma}_{\mathbf{n}}^{(i)}|_{11} & \hat{\Sigma}_{\mathbf{n}}^{(i)}|_{12} & \hat{\Sigma}_{\mathbf{n}}^{(i)}|_{14} \\ \hat{\Sigma}_{\mathbf{n}}^{(i)}|_{21} & \hat{\Sigma}_{\mathbf{n}}^{(i)}|_{22} & \hat{\Sigma}_{\mathbf{n}}^{(i)}|_{24} \\ \hat{\Sigma}_{\mathbf{n}}^{(i)}|_{41} & \hat{\Sigma}_{\mathbf{n}}^{(i)}|_{42} & \hat{\Sigma}_{\mathbf{n}}^{(i)}|_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\Sigma}_{H^0 H^0}^{(i)} & \hat{\Sigma}_{h^0 H^0}^{(i)} & \hat{\Sigma}_{A^0 H^0}^{(i)} \\ \hat{\Sigma}_{h^0 H^0}^{(i)} & \hat{\Sigma}_{h^0 h^0}^{(i)} & \hat{\Sigma}_{A^0 h^0}^{(i)} \\ \hat{\Sigma}_{A^0 H^0}^{(i)} & \hat{\Sigma}_{A^0 h^0}^{(i)} & \hat{\Sigma}_{A^0 A^0}^{(i)} \end{pmatrix}, \quad (7.79)$$

## 7. Der Higgs-Sektor im komplexen MSSM

zu berücksichtigen. Die Matrix  $\hat{\Sigma}_{\mathbf{H}^0 \mathbf{h}^0 \mathbf{A}^0}^{(i)}$  enthält die Selbstenergien und Mischungen<sup>3</sup> der Higgs-Bosonen  $H^0$ ,  $h^0$  und  $A^0$ .

Auf Born-Niveau sind auch im CP-verletzenden Fall die CP-geraden Higgs-Bosonen  $H^0$  und  $h^0$  und das CP-ungerade Higgs-Boson  $A^0$  Masseneigenzustände. In höheren Ordnungen mischen sie jedoch, so daß die neuen Masseneigenzustände einen CP-geraden und einen CP-ungeraden Anteil besitzen. Die Felder dieser Masseneigenzustände werden mit  $h_1$ ,  $h_2$  und  $h_3$  bezeichnet und sind nach der Größe der Masseneigenwerte geordnet.  $h_1$  ist das leichteste Higgs-Boson. Diese Bezeichnung wird auch in Kapitel 10 verwendet. Der Übergang von den Feldern  $H^0$ ,  $h^0$  und  $A^0$  zu den Feldern der Masseneigenzustände  $h_1$ ,  $h_2$  und  $h_3$  kann durch eine unitäre effektive Mischungsmatrix  $\mathcal{U}_{\text{eff}}$  beschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \mathcal{U}_{\text{eff}} \begin{pmatrix} H^0 \\ h^0 \\ A^0 \end{pmatrix} . \quad (7.80)$$

---

<sup>3</sup>Die Mischung  $\hat{\Sigma}_{h^0 H^0}^{(i)}$  darf nicht mit der matrixwertigen Selbstenergie der CP-geraden neutralen Higgs-Bosonen  $\hat{\Sigma}_{\mathbf{H}^0 \mathbf{h}^0}^{(i)}$  aus Kapitel 4 verwechselt werden.

## 8. Der Quark-Squark-Sektor im komplexen MSSM

Im Quark-Squark-Sektor ist der A-Parameter im allgemeinen komplex. Dagegen sind die weiteren Brechungsparameter  $M_L$ ,  $M_{\tilde{q}R}$  reell. Die Yukawa-Kopplung  $\lambda_f$  wird ebenfalls als reell angenommen. Da Familienmischungen innerhalb dieser Arbeit vernachlässigt werden, können die Phasen der Yukawa-Kopplungen vollständig in die Felder absorbiert werden und sind damit unphysikalisch. Bei Berücksichtigung der Familienmischungen lassen sich die Phasen der  $3 \times 3$ -Matrix der Yukawa-Kopplungen durch Umdefinition der Quarksuperfelder – analog zur Herleitung der CKM-Matrix im Standardmodell [3] – bis auf eine physikalische Phase eliminieren. Wie in Kapitel 5 wird der komplexe Parameter  $\mu$  nicht dem Quark-Squark-Sektor zugeordnet. Die Higgs-Selbstenergien werden auf Zwei-Schleifen-Niveau in der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_t \alpha_s)$  berechnet. Deshalb werden die Ein-Schleifen-Counterterme im Quark-Squark-Sektor nur bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_s)$  benötigt. Der Ein-Schleifen-Counterterm  $\delta\mu$  ist von der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha)$  und spielt somit bei der Berechnung der Higgs-Selbstenergien keine Rolle. Der reine Quark-Sektor auf Born-Niveau ist in Kapitel 5.1.1 dargestellt. Ebenso wird die Massenmatrix  $M_{\tilde{q}}$  der Squarks (5.10) in diesem Kapitel für allgemeine Parameter hergeleitet. Die Mischungsmatrix  $\mathcal{U}_{\tilde{q}}$  ändert sich jedoch im Fall komplexer Parameter gegenüber der Darstellung (5.11) in Kapitel 5.1.1. Sie ist eine unitäre komplexe Matrix, deren Diagonalelemente reell gewählt werden können. Diese Matrix kann mit einem Mischungswinkel  $\theta_{\tilde{q}}$  und einer Phase  $\varphi_{\tilde{q}}$  parametrisiert werden:

$$\mathcal{U}_{\tilde{q}} = \begin{pmatrix} U_{\tilde{q}11} & U_{\tilde{q}12} \\ U_{\tilde{q}21} & U_{\tilde{q}22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_{\tilde{q}} & e^{i\varphi_{\tilde{q}}} \sin \theta_{\tilde{q}} \\ -e^{-i\varphi_{\tilde{q}}} \sin \theta_{\tilde{q}} & \cos \theta_{\tilde{q}} \end{pmatrix}. \quad (8.1)$$

Die Einträge in der Squarkmassenmatrix lassen sich ebenfalls durch den Mischungswinkel  $\theta_{\tilde{q}}$  und die Phase  $\varphi_{\tilde{q}}$  und zusätzlich durch die Masseneigenwerte  $m_{\tilde{q}1}$  und  $m_{\tilde{q}2}$  parametrisieren:

$$\mathcal{M}_{\tilde{q}} = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta_{\tilde{q}} m_{\tilde{q}1}^2 + \sin^2 \theta_{\tilde{q}} m_{\tilde{q}2}^2 & e^{i\varphi_{\tilde{q}}} \sin \theta_{\tilde{q}} \cos \theta_{\tilde{q}} (m_{\tilde{q}1}^2 - m_{\tilde{q}2}^2) \\ e^{-i\varphi_{\tilde{q}}} \sin \theta_{\tilde{q}} \cos \theta_{\tilde{q}} (m_{\tilde{q}1}^2 - m_{\tilde{q}2}^2) & \sin^2 \theta_{\tilde{q}} m_{\tilde{q}1}^2 + \cos^2 \theta_{\tilde{q}} m_{\tilde{q}2}^2 \end{pmatrix} \quad (8.2)$$

mit den Masseneigenwerten

$$\begin{aligned} m_{\tilde{q}1,2} &= \frac{1}{2}(M_L^2 + M_{\tilde{q}R}^2) + m_q^2 + \frac{1}{2}T_q^3 M_Z^2 c_{2\beta} \\ &\mp \frac{1}{2} \sqrt{[M_L^2 - M_{\tilde{q}R}^2 + M_Z^2 c_{2\beta} (T_q^3 - 2Q_q s_W^2)]^2 + 4m_q^2 |A_q - \mu^* \kappa|^2}. \end{aligned} \quad (8.3)$$

## 8. Der Quark-Squark-Sektor im komplexen MSSM

Die unrenormierten Quark-Selbstenergien (5.19) erhalten im Fall komplexer Parameter zusätzlich einen rein imaginären, pseudoskalaren, endlichen Anteil  $\Sigma_{qPS}(k^2)$ :

$$\Sigma_q(k) = \not{k}\omega_- \Sigma_{qL}(k^2) + \not{k}\omega_+ \Sigma_{qR}(k^2) + m_q \Sigma_{qS}(k^2) + m_q \gamma_5 \Sigma_{qPS}(k^2) . \quad (8.4)$$

Die Selbstenergie kann statt durch einen skalaren und pseudoskalaren Anteil durch links- und rechtshändige Größen  $\Sigma_{qS,L}$  und  $\Sigma_{qS,R}$  ausgedrückt werden:

$$\Sigma_q(k) = \not{k}\omega_- \Sigma_{qL}(k^2) + \not{k}\omega_+ \Sigma_{qR}(k^2) + m_q \omega_- \Sigma_{qS,L}(k^2) + m_q \omega_+ \Sigma_{qS,R}(k^2) . \quad (8.5)$$

Dabei gilt:

$$\Sigma_{qS,L}(k^2) = \Sigma_{qS}(k^2) - \Sigma_{qPS}(k^2) , \quad (8.6)$$

$$\Sigma_{qS,R}(k^2) = \Sigma_{qS}(k^2) + \Sigma_{qPS}(k^2) = \Sigma_{qS,L}^*(k^2) . \quad (8.7)$$

Die Renormierung wird gemäß Kapitel 5.1.2 mit den Ersetzungen (5.16) durchgeführt, wobei die Z-Faktoren als komplexwertig angenommen werden. Damit erhält man die folgenden Ausdrücke für die links- und rechtshändigen Anteile der renormierten Quark-Selbstenergie:

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}_{qL}(k^2) &= \Sigma_{qL}(k^2) + \frac{1}{2}(\delta Z_{\psi_L} + \delta Z_{\psi_L}^*) , \\ \hat{\Sigma}_{qR}(k^2) &= \Sigma_{qR}(k^2) + \frac{1}{2}(\delta Z_{\psi_R} + \delta Z_{\psi_R}^*) , \\ \hat{\Sigma}_{qS,L}(k^2) &= \Sigma_{qS,L}(k^2) - \frac{1}{2}(\delta Z_{\psi_L} + \delta Z_{\psi_R}) - \frac{1}{m_q} \delta m_q , \\ \hat{\Sigma}_{qS,R}(k^2) &= \Sigma_{qS,R}(k^2) - \frac{1}{2}(\delta Z_{\psi_L}^* + \delta Z_{\psi_R}^*) - \frac{1}{m_q} \delta m_q . \end{aligned} \quad (8.8)$$

Die Gleichung  $\hat{\Sigma}_{qS,R}(k^2) = \hat{\Sigma}_{qS,L}^*(k^2)$  muß aufgrund der CPT-Invarianz erfüllt sein.

Die Squark-Selbstenergien (5.26) aus Kapitel 5.1.2 gelten auch im Fall komplexer Parameter.

### 8.1. Renormierung im Top-Stop-Sektor

Wie in Kapitel 5.2 enthält der Top-Stop-Sektor als fundamentale Parameter die Yukawa-Kopplung  $\lambda_t$  aus dem Quark-Anteil und die Brechungsparameter  $M_L$ ,  $M_{\tilde{t}_R}$  und  $A_t$  aus dem Squark-Anteil. Da in diesem Teil der Arbeit der A-Parameter als komplexwertig angenommen wird, sind für den A-Parameter  $A_t$  im Gegensatz zum reellen Fall zwei Renormierungsbedingungen zu stellen. Eine der Bedingungen legt den Betrag des A-Parameters  $|A_t|$  fest, die andere die Phase  $\varphi_{A_t}$ . Statt den A-Parameter zu fixieren, können auch Bedingungen an den Mischungswinkel  $\theta_{\tilde{t}}$  und die dazugehörige Phase  $\varphi_{\tilde{t}}$  gestellt werden. Die Top-Yukawa-Kopplung  $\lambda_t$  und die Brechungsparameter  $M_L$ ,  $M_{\tilde{t}_R}$  lassen sich wie in Kapitel 5.2 durch die Top-Quark-Masse  $m_t$  und die Top-Squarkmassen  $m_{\tilde{t}_{1,2}}$  ersetzen.

Folgende Renormierungsbedingungen werden gestellt:



(i) Für die Top-Quark-Masse werden zwei alternative Renormierungsbedingungen angegeben:

(a) Die Top-Quark-Masse wird on-shell bestimmt, so daß der Realteil des inversen Top-Quark-Propagators eine Nullstelle an der Stelle  $m_t$  hat:

$$\widetilde{\text{Re}}\hat{\Sigma}_t(k)u(k)\Big|_{k^2=m_t^2}=0, \quad \bar{u}(k)\widetilde{\text{Re}}\hat{\Sigma}_t(k)\Big|_{k^2=m_t^2}=0. \quad (8.9)$$

$\hat{\Sigma}_t$  ist dabei durch (8.5) und (8.8) gegeben.  $\widetilde{\text{Re}}$  projiziert wieder den Realteil der Schleifenintegrale heraus und wirkt nicht auf weitere komplexe Größen. Der Top-Quark-Massencounterterm ist damit festgelegt:

$$\delta m_t = \frac{1}{2}m_t(\widetilde{\text{Re}}\Sigma_{t_L}(m_t^2) + \widetilde{\text{Re}}\Sigma_{t_R}(m_t^2) + \widetilde{\text{Re}}\Sigma_{t_{S,L}}(m_t^2) + \widetilde{\text{Re}}\Sigma_{t_{S,R}}(m_t^2)). \quad (8.10)$$

Nutzt man die Beziehungen (8.6) und (8.7), so erhält man den On-Shell-Massencounterterm der Top-Quark-Masse in bekannter Form (vgl. (5.28)):

$$\delta m_t = \frac{1}{2}m_t(\widetilde{\text{Re}}\Sigma_{t_L}(m_t^2) + \widetilde{\text{Re}}\Sigma_{t_R}(m_t^2) + 2\widetilde{\text{Re}}\Sigma_{t_S}(m_t^2)). \quad (8.11)$$

(b) Die Top-Quark-Masse wird als  $\overline{\text{DR}}$ -Größe (siehe Kapitel 3.3) definiert. Der dazugehörige Counterterm nimmt dann folgende Form an:

$$\delta m_t = \frac{1}{2}m_t(\widetilde{\text{Re}}\Sigma_{t_L}(m_t^2)|_{\text{div}} + \widetilde{\text{Re}}\Sigma_{t_R}(m_t^2)|_{\text{div}} + 2\widetilde{\text{Re}}\Sigma_{t_S}(m_t^2)|_{\text{div}}). \quad (8.12)$$

$\Sigma|_{\text{div}}$  enthält die divergenten Terme der unrenormierten Selbstenergie  $\Sigma$ , die proportional zu  $\Delta$  (3.7) sind.

(ii) Für die Squarkmassen werden On-Shell-Bedingungen gewählt, so daß der Realteil der inversen Teilchenpropagatoren für die Squarks eine Nullstelle an der Stelle  $m_{\tilde{t}_1}^2$  bzw.  $m_{\tilde{t}_2}^2$  hat:

$$\widetilde{\text{Re}}\hat{\Sigma}_{\tilde{t}_i}(m_{\tilde{t}_i}^2) = 0 \quad \text{mit} \quad i = 1, 2. \quad (8.13)$$

Damit bekommen die dazugehörigen Counterterme folgende Form:

$$\delta m_{\tilde{t}_i}^2 = (\mathcal{U}_{\tilde{t}}\delta\mathcal{M}_{\tilde{t}}\mathcal{U}_{\tilde{t}}^+)_{ii} = \widetilde{\text{Re}}\Sigma_{\tilde{t}_i}(m_{\tilde{t}_i}^2) \quad \text{mit} \quad i = 1, 2. \quad (8.14)$$

Die Counterterm-Matrix  $\delta\mathcal{M}_{\tilde{t}}$  zur Matrix  $\mathcal{M}_{\tilde{t}}$  (8.2) kann durch die physikalischen Parameter, die Squarkmassen  $m_{\tilde{t}_1}$  und  $m_{\tilde{t}_2}$ , den Mischungswinkel  $\theta_{\tilde{t}}$  und die Phase  $\varphi_{\tilde{t}}$  und den dazugehörigen Countertermen ausgedrückt werden:

$$(\delta\mathcal{M}_{\tilde{t}})_{11} = \cos^2\theta_{\tilde{t}}\delta m_{\tilde{t}_1}^2 + \sin^2\theta_{\tilde{t}}\delta m_{\tilde{t}_2}^2 - 2\sin\theta_{\tilde{t}}\cos\theta_{\tilde{t}}(m_{\tilde{t}_1}^2 - m_{\tilde{t}_2}^2)\delta\theta_{\tilde{t}}, \quad (8.15)$$

$$\begin{aligned} (\delta\mathcal{M}_{\tilde{t}})_{12} &= e^{i\varphi_{\tilde{t}}}\sin\theta_{\tilde{t}}\cos\theta_{\tilde{t}}(\delta m_{\tilde{t}_1}^2 - \delta m_{\tilde{t}_2}^2) + e^{i\varphi_{\tilde{t}}}\cos(2\theta_{\tilde{t}})(m_{\tilde{t}_1}^2 - m_{\tilde{t}_2}^2)\delta\theta_{\tilde{t}} \\ &\quad + ie^{i\varphi_{\tilde{t}}}\sin\theta_{\tilde{t}}\cos\theta_{\tilde{t}}(m_{\tilde{t}_1}^2 - m_{\tilde{t}_2}^2)\delta\varphi_{\tilde{t}}, \end{aligned} \quad (8.16)$$

$$(\delta\mathcal{M}_{\tilde{t}})_{21} = (\delta\mathcal{M}_{\tilde{t}}^*)_{12}, \quad (8.17)$$

$$(\delta\mathcal{M}_{\tilde{t}})_{22} = \sin^2\theta_{\tilde{t}}\delta m_{\tilde{t}_1}^2 + \cos^2\theta_{\tilde{t}}\delta m_{\tilde{t}_2}^2 + 2\sin\theta_{\tilde{t}}\cos\theta_{\tilde{t}}(m_{\tilde{t}_1}^2 - m_{\tilde{t}_2}^2)\delta\theta_{\tilde{t}}. \quad (8.18)$$

## 8. Der Quark-Squark-Sektor im komplexen MSSM

- (iii) Zum Schluß müssen noch Bedingungen entweder an den A-Parameter oder an das Matrixelement  $\delta Y_t := (\mathcal{U}_{\bar{t}} \delta \mathcal{M}_{\bar{t}} \mathcal{U}_{\bar{t}}^+)_{12}$ , welches den Counterterm zum Mischungswinkel und den Counterterm zur dazugehörigen Phase enthält, gestellt werden. Unter (a) wird  $\delta Y_t$  und unter (b) der Counterterm zum A-Parameter durch Renormierungsbedingungen bestimmt.

- (a) Es wird analog zu (5.33) gefordert, daß folgende Beziehung gilt:

$$\widetilde{\text{Re}} \hat{\Sigma}_{\bar{t}_{12}}(m_{\bar{t}_1}^2) + \widetilde{\text{Re}} \hat{\Sigma}_{\bar{t}_{12}}(m_{\bar{t}_2}^2) = 0 . \quad (8.19)$$

Da die renormierte Mischung  $\hat{\Sigma}_{\bar{t}_{12}}$  komplexwertig ist, werden durch diese Gleichung zwei reelle bzw. ein komplexer Parameter festgelegt. Mit dem Ausdruck der Squarkselbstenergie aus (5.26) und der zusätzlichen Bedingung, daß für die Z-Faktoren  $\delta Z_{\bar{t}_{12}} = \delta Z_{\bar{t}_{21}}^*$  gilt<sup>1</sup>, erhält man:

$$\delta Y_t = (\mathcal{U}_{\bar{t}} \delta \mathcal{M}_{\bar{t}} \mathcal{U}_{\bar{t}}^+)_{12} = \frac{1}{2} (\widetilde{\text{Re}} \Sigma_{\bar{t}_{12}}(m_{\bar{t}_1}^2) + \widetilde{\text{Re}} \Sigma_{\bar{t}_{12}}(m_{\bar{t}_2}^2)) . \quad (8.20)$$

Verwendet man den expliziten Ausdruck (8.1) für die unitäre Mischungsmatrix  $\mathcal{U}_{\bar{t}}$  und die Matrixelemente (8.15) – (8.18) der Counterterm-Massenmatrix  $\delta M_{\bar{t}}$ , so kann man folgenden Zusammenhang zwischen  $\delta Y_t$  und dem Mischungswinkel-Counterterm  $\delta \theta_{\bar{t}}$  sowie dem Phasencounterterm  $\delta \varphi_{\bar{t}}$  herstellen:

$$\delta Y_t = e^{i\varphi_{\bar{t}}} (m_{\bar{t}_1}^2 - m_{\bar{t}_2}^2) (\delta \theta_{\bar{t}} + i \sin \theta_{\bar{t}} \cos \theta_{\bar{t}} \delta \varphi_{\bar{t}}) . \quad (8.21)$$

Durch Auflösen nach  $\delta \theta_{\bar{t}}$  und  $\delta \varphi_{\bar{t}}$  erhält man einen Ausdruck für den Mischungswinkel- und den Phasencounterterm. Da in der analytischen Auswertung der Higgs-Selbstenergien mit komplexen Parametern nur  $\delta Y_t$ , nicht aber die explizite Form von Mischungswinkel- und Phasencounterterm benutzt wurde, wird hier auf eine explizite Angabe verzichtet.

Zusammen mit den Bedingungen an die Top-Quark-Masse und an die Squark-Massen sind damit alle Parameter festgelegt. Der Counterterm zum A-Parameter ist durch eine Kombination der unabhängigen Counterterme  $\delta m_t$ ,  $\delta m_{\bar{t}_1}^2$ ,  $\delta m_{\bar{t}_2}^2$  und  $\delta Y_t$  bestimmt.

Der A-Parameter kann in Betrag und Phase aufgespalten werden. Sowohl Betrag als auch Phase erhalten dabei einen Counterterm. Für den komplexwertigen A-Parameter-Counterterm ergibt sich dann:

$$\delta A_t = e^{i\varphi_{A_t}} \delta |A_t| + i A_t \delta \varphi_{A_t} . \quad (8.22)$$

<sup>1</sup>Wie im Fall reeller Parameter kann diese Bedingung an die Z-Faktoren immer gestellt werden. Aufgrund der Bedingung (8.19) muß nur noch eine Entmischungsbedingung gestellt werden, beispielsweise  $\widetilde{\text{Re}} \hat{\Sigma}_{\bar{t}_{12}}(m_{\bar{t}_1}^2) = 0$ , um eine vollständige Entmischung zu gewährleisten.

### 8.1. Renormierung im Top-Stop-Sektor

$\delta|A_t|$  bzw.  $\delta\varphi_{A_t}$  ist der zum Betrag bzw. zur Phase des A-Parameters gehörende Counterterm. Das Matrixelement  $(\delta M_{\tilde{t}})_{12}$  kann einerseits durch Counterterme der ursprünglichen Massenmatrix ausgedrückt werden,

$$(\delta M_{\tilde{t}})_{12} = (A_t^* - \mu \cot \beta) \delta m_t + m_t (e^{-i\varphi_{A_t}} \delta|A_t| - i A_t^* \delta\varphi_{A_t}) + \mathcal{O}(\alpha) , \quad (8.23)$$

andererseits ist dieses Matrixelement durch eine Kombination der Squarkmassen  $m_{\tilde{t}_1}^2$ ,  $m_{\tilde{t}_2}^2$ , der Matrixelemente der unitären Mischungsmatrix  $U_{\tilde{t}}$  sowie der Counterterme  $\delta m_{\tilde{t}_1}^2$ ,  $\delta m_{\tilde{t}_2}^2$  und  $\delta Y_t$  gegeben:

$$(\delta M_{\tilde{t}})_{12} = U_{\tilde{t}_{11}}^* U_{\tilde{t}_{12}} (\delta m_{\tilde{t}_1}^2 - \delta m_{\tilde{t}_2}^2) + U_{\tilde{t}_{11}}^* U_{\tilde{t}_{22}} \delta Y_t + U_{\tilde{t}_{12}} U_{\tilde{t}_{21}}^* \delta Y_t^* . \quad (8.24)$$

Setzt man die Ausdrücke (8.23) und (8.24) gleich und löst nach  $\delta|A_t|$  und  $\delta\varphi_{A_t}$  auf, so erhält man für die Counterterme zum Betrag bzw. zur Phase des A-Parameters:

$$\delta|A_t| = \frac{1}{m_t} \text{Re}[e^{i\varphi_{A_t}} K_t] , \quad (8.25)$$

$$\delta\varphi_A = -\frac{1}{m_t |A_t|} \text{Im}[e^{i\varphi_{A_t}} K_t] . \quad (8.26)$$

$K_t$  bezeichnet die folgende Kombination von Countertermen:

$$K_t = -(A_t^* - \mu \cot \beta) \delta m_t + U_{\tilde{t}_{11}}^* U_{\tilde{t}_{12}} (\delta m_{\tilde{t}_1}^2 - \delta m_{\tilde{t}_2}^2) + U_{\tilde{t}_{11}}^* U_{\tilde{t}_{22}} \delta Y_t + U_{\tilde{t}_{12}} U_{\tilde{t}_{21}}^* \delta Y_t^* + \mathcal{O}(\alpha) . \quad (8.27)$$

- (b) Der A-Parameter  $A_t$  wird als  $\overline{\text{DR}}$ -Größe festgelegt. Die Counterterme zum Betrag bzw. zur Phase des A-Parameters gemäß (8.22) sind dann:

$$\delta|A_t| = \frac{1}{m_t} \text{Re}[e^{i\varphi_{A_t}} K_t^{\overline{\text{DR}}}] , \quad (8.28)$$

$$\delta\varphi_A = -\frac{1}{m_t |A_t|} \text{Im}[e^{i\varphi_{A_t}} K_t^{\overline{\text{DR}}}] . \quad (8.29)$$

Dabei ist  $K_t^{\overline{\text{DR}}}$  gegeben durch:

$$\begin{aligned} K_t^{\overline{\text{DR}}} = & -\frac{1}{2} m_t (A_t^* - \mu \cot \beta) (\widetilde{\text{Re}}\Sigma_{t_L}(m_t^2)|_{\text{div}} + \widetilde{\text{Re}}\Sigma_{t_R}(m_t^2)|_{\text{div}} + 2\widetilde{\text{Re}}\Sigma_{t_S}(m_t^2)|_{\text{div}}) \\ & + U_{\tilde{t}_{11}}^* U_{\tilde{t}_{12}} (\widetilde{\text{Re}}\Sigma_{\tilde{t}_{11}}(m_{\tilde{t}_1}^2)|_{\text{div}} - \widetilde{\text{Re}}\Sigma_{\tilde{t}_{22}}(m_{\tilde{t}_2}^2)|_{\text{div}}) \\ & + \frac{1}{2} U_{\tilde{t}_{12}} U_{\tilde{t}_{21}}^* \left( \widetilde{\text{Re}}\Sigma_{\tilde{t}_{12}}(m_{\tilde{t}_1}^2)|_{\text{div}} + \widetilde{\text{Re}}\Sigma_{\tilde{t}_{12}}(m_{\tilde{t}_2}^2)|_{\text{div}} \right)^* \\ & + \frac{1}{2} U_{\tilde{t}_{11}}^* U_{\tilde{t}_{22}} \left( \widetilde{\text{Re}}\Sigma_{\tilde{t}_{12}}(m_{\tilde{t}_1}^2)|_{\text{div}} + \widetilde{\text{Re}}\Sigma_{\tilde{t}_{12}}(m_{\tilde{t}_2}^2)|_{\text{div}} \right) + \mathcal{O}(\alpha) . \end{aligned} \quad (8.30)$$

## 8. Der Quark-Squark-Sektor im komplexen MSSM

	$m_{\tilde{t}_i}^2$ mit $i = 1, 2$	$m_t$	$A_t$	$\theta_{\tilde{t}}, \varphi_{\tilde{t}}$
$\theta_{\tilde{t}}, \varphi_{\tilde{t}}, m_t$ OS	on-shell (ii)	on-shell (i.a)		on-shell (iii.a)
$\theta_{\tilde{t}}, \varphi_{\tilde{t}}, m_t \overline{\text{DR}}$	on-shell (ii)	$\overline{\text{DR}}$ (i.b)		on-shell (iii.a)
$A_t \overline{\text{DR}}, m_t$ OS	on-shell (ii)	on-shell (i.a)	$\overline{\text{DR}}$ (iii.b)	
$A_t, m_t \overline{\text{DR}}$	on-shell (ii)	$\overline{\text{DR}}$ (i.b)	$\overline{\text{DR}}$ (iii.b)	

**Tabelle 8.1.:** Zusammenstellung der betrachteten Renormierungsschemata für den Top-Stop-Sektor: Die unausgefüllten Felder kennzeichnen die abhängigen Größen. Die Nummer in Klammern gibt die Nummer an, unter der die entsprechende Renormierungsbedingung steht.

Mit den Bedingungen aus (i) – (iii) sind alle Parameter im Top-Stop-Sektor festgelegt. Mit Hilfe der Gleichungen (8.23) und (8.24) kann  $\delta Y_t$  in Abhängigkeit von den Countertermen  $\delta m_{\tilde{t}_1}^2$ ,  $\delta m_{\tilde{t}_2}^2$ ,  $\delta m_t$ ,  $\delta |A_t|$  und  $\delta \varphi_{A_t}$  bestimmt werden:

$$\begin{aligned}
\delta Y_t = & \left[ m_t (U_{\tilde{t}_{11}} U_{\tilde{t}_{22}}^* e^{-i\varphi_{A_t}} - U_{\tilde{t}_{12}} U_{\tilde{t}_{21}}^* e^{i\varphi_{A_t}}) \delta |A_t| \right. \\
& - im_t (U_{\tilde{t}_{11}} U_{\tilde{t}_{22}}^* A_t^* + U_{\tilde{t}_{12}} U_{\tilde{t}_{21}}^* A_t) \delta \varphi_{A_t} \\
& + (U_{\tilde{t}_{11}} U_{\tilde{t}_{22}}^* (A_t^* - \mu \cot \beta) - U_{\tilde{t}_{12}} U_{\tilde{t}_{21}}^* (A_t - \mu^* \cot \beta)) \delta m_t \\
& \left. + U_{\tilde{t}_{11}} U_{\tilde{t}_{21}}^* (\delta m_{\tilde{t}_1}^2 - \delta m_{\tilde{t}_2}^2) \right] / \left( |U_{\tilde{t}_{11}}|^2 - |U_{\tilde{t}_{12}}|^2 \right) + \mathcal{O}(\alpha) . \quad (8.31)
\end{aligned}$$

In Tabelle 8.1 sind die Renormierungsschemata, die mit den obigen Festlegungen gebildet werden, zusammengestellt. Mit  $\theta_{\tilde{t}}$  und  $\varphi_{\tilde{t}}$  werden dabei Bedingungen zur Bestimmung von  $\delta Y_t$  – und damit auch zur Definition von  $\theta_{\tilde{t}}$  und  $\varphi_{\tilde{t}}$  – bezeichnet, auch wenn in der konkreten analytischen Rechnung keine spezielle Form der Mischungsmatrix  $\mathcal{U}_{\tilde{t}}$  verwendet wird. Das Schema „ $\theta_{\tilde{t}}, \varphi_{\tilde{t}}, m_t$  OS“ entspricht einer Verallgemeinerung des in Kapitel 5.2.1 definierten Renormierungsschemas. Die Renormierungsschemata aus Tabelle 8.1 werden in Kapitel 10.2 verwendet.

## 8.2. Renormierung im Bottom-Sbottom-Sektor

Im Bottom-Sbottom-Sektor ist, analog zum Top-Stop-Sektor, nur der A-Parameter  $A_b$  komplexwertig. Der rechtshändige Brechungsparameter  $M_{\tilde{b}_R}$  ist reell – der reelle linkshändige Brechungsparameter  $M_L$  wurde im Top-Stop-Sektor festgelegt. Die Bottom-Yukawa-Kopplung  $\lambda_b$  wird als reell angenommen. Ihre Phase kann durch Redefinition der Felder eliminiert werden und ist somit unphysikalisch. Die Bottom-Yukawa-Kopplung wird im weiteren durch die Bottom-Quark-Masse und der rechtshändige Brechungsparameter durch

## 8.2. Renormierung im Bottom-Sbottom-Sektor

die Bottom-Squark-Masse<sup>2</sup>  $m_{\tilde{b}_2}$  ersetzt. An diese Parameter, also an die Bottom-Quark-Masse  $m_b$ , an die Bottom-Squark-Masse  $m_{\tilde{b}_2}$  bzw. an das Quadrat dieser Masse und an den A-Parameter  $A_b$ , werden die folgenden Renormierungsbedingungen gestellt:

(i) Die Bottom-Quark-Masse wird als  $\overline{\text{DR}}$ -Größe bestimmt:

$$\delta m_b = \frac{1}{2} m_b (\widetilde{\text{Re}}\Sigma_{b_L}(m_b^2)|_{\text{div.}} + \widetilde{\text{Re}}\Sigma_{b_R}(m_b^2)|_{\text{div.}} + 2\widetilde{\text{Re}}\Sigma_{b_S}(m_b^2)|_{\text{div.}}) . \quad (8.32)$$

(ii) Die Bottom-Squark-Masse  $m_{\tilde{b}_2}$  wird on-shell festgelegt, so daß der Realteil des inversen Propagators eine Nullstelle bei  $m_{\tilde{b}_2}^2$  hat.  $m_{\tilde{b}_2}$  besitzt so die Bedeutung der physikalischen Masse. Dazu muß folgende Bedingung erfüllt sein:

$$\widetilde{\text{Re}}\hat{\Sigma}_{\tilde{b}_{22}}(m_{\tilde{b}_2}^2) = 0 . \quad (8.33)$$

Man erhält folgenden Ausdruck für den Counterterm des Quadrats der Bottom-Squark-Masse  $m_{\tilde{b}_2}^2$ :

$$\delta m_{\tilde{b}_2}^2 = \widetilde{\text{Re}}\Sigma_{\tilde{b}_{22}}(m_{\tilde{b}_2}^2) . \quad (8.34)$$

(iii) Der A-Parameter  $A_b$  wird ebenfalls als  $\overline{\text{DR}}$ -Größe gewählt mit dem Counterterm:

$$\delta A_b = e^{i\varphi_{A_b}} \delta |A_b| + i A_b \delta \varphi_{A_b} , \quad (8.35)$$

Für  $\delta |A_b|$  und  $\delta \varphi_{A_b}$  gilt dann:

$$\delta |A_b| = \frac{1}{m_b} \text{Re}[e^{i\varphi_{A_b}} K_b^{\overline{\text{DR}}}] , \quad (8.36)$$

$$\delta \varphi_A = -\frac{1}{m_b |A_b|} \text{Im}[e^{i\varphi_{A_b}} K_b^{\overline{\text{DR}}}] \quad (8.37)$$

mit

$$\begin{aligned} K_b^{\overline{\text{DR}}} = & -\frac{1}{2} m_b (A_b^* - \mu \tan \beta) (\widetilde{\text{Re}}\Sigma_{b_L}(m_b^2)|_{\text{div.}} + \widetilde{\text{Re}}\Sigma_{b_R}(m_b^2)|_{\text{div.}} + 2\widetilde{\text{Re}}\Sigma_{b_S}(m_b^2)|_{\text{div.}}) \\ & + U_{\tilde{b}_{11}}^* U_{\tilde{b}_{12}} (\widetilde{\text{Re}}\Sigma_{\tilde{b}_{11}}(m_{\tilde{b}_1}^2)|_{\text{div.}} - \widetilde{\text{Re}}\Sigma_{\tilde{b}_{22}}(m_{\tilde{b}_2}^2)|_{\text{div.}}) \\ & + \frac{1}{2} U_{\tilde{b}_{12}} U_{\tilde{b}_{21}}^* (\widetilde{\text{Re}}\Sigma_{\tilde{b}_{12}}(m_{\tilde{b}_1}^2)|_{\text{div.}} + \widetilde{\text{Re}}\Sigma_{\tilde{b}_{12}}(m_{\tilde{b}_2}^2)|_{\text{div.}})^* \\ & + \frac{1}{2} U_{\tilde{b}_{11}}^* U_{\tilde{b}_{22}} (\widetilde{\text{Re}}\Sigma_{\tilde{b}_{12}}(m_{\tilde{b}_1}^2)|_{\text{div.}} + \widetilde{\text{Re}}\Sigma_{\tilde{b}_{12}}(m_{\tilde{b}_2}^2)|_{\text{div.}}) + \mathcal{O}(\alpha) . \end{aligned} \quad (8.38)$$

<sup>2</sup>Im Grenzfall  $\tilde{b}_2 \rightarrow \tilde{b}_L$  kann der rechtshändige Brechungsparameter nicht mehr durch  $m_{\tilde{b}_2}$ , sondern nur durch  $m_{\tilde{b}_1}$  ersetzt werden. In diesem Fall muß die Renormierungsbedingung an  $m_{\tilde{b}_1}$  gestellt werden.

## 8. Der Quark-Squark-Sektor im komplexen MSSM

Dieses Renormierungsschema entspricht einer Verallgemeinerung des in Kapitel 5.3.2 aufgeführten Renormierungsschemas „Bottom-Masse- $\overline{\text{DR}}$ -Renormierung“ für den Fall komplexer Parameter.

Durch die Bedingungen (i) – (iii) sind alle unabhängigen Parameter und deren Counterterme bestimmt. Der Counterterm des Quadrats der Bottom-Squark-Masse  $\delta m_{\tilde{b}_1}^2$  hängt von den unabhängigen Countertermen des Top-Stop- bzw. Bottom-Sbottom-Sektors ab. Aufgrund der  $SU(2)$ -Invarianz gilt die Relation:

$$\begin{aligned} & |U_{\tilde{b}_{11}}|^2 \delta m_{\tilde{b}_1}^2 + |U_{\tilde{b}_{12}}|^2 \delta m_{\tilde{b}_2}^2 - U_{\tilde{b}_{12}}^* U_{\tilde{b}_{22}} \delta Y_b - U_{\tilde{b}_{12}} U_{\tilde{b}_{22}}^* \delta Y_b^* - 2m_b \delta m_b \\ &= |U_{\tilde{t}_{11}}|^2 \delta m_{\tilde{t}_1}^2 + |U_{\tilde{t}_{12}}|^2 \delta m_{\tilde{t}_2}^2 - U_{\tilde{t}_{12}}^* U_{\tilde{t}_{22}} \delta Y_t - U_{\tilde{t}_{12}} U_{\tilde{t}_{22}}^* \delta Y_t^* - 2m_t \delta m_t + \mathcal{O}(\alpha) . \end{aligned} \quad (8.39)$$

Dabei ist  $\delta Y_b = (\mathcal{U}_{\tilde{b}} \mathcal{M}_{\tilde{b}} U_{\tilde{b}}^+)_{12}$ .  $\delta Y_b$  kann aus der  $SU(2)$ -Relation (8.39) zugunsten des A-Parameter-Counterterms eliminiert werden. Analog zum Top-Stop-Sektor (vgl. (8.23)) kann das Matricelement  $(\delta \mathcal{M}_{\tilde{b}})_{12}$  der Sbottom-Massenmatrix einerseits durch

$$(\delta M_{\tilde{b}})_{12} = (A_b^* - \mu \tan \beta) \delta m_b + m_b (e^{-i\varphi_{A_b}} \delta |A_b| - i A_b^* \delta \varphi_{A_b}) + \mathcal{O}(\alpha) \quad (8.40)$$

ausgedrückt werden, andererseits kann es als Kombination der Counterterme  $\delta m_{\tilde{b}_1}^2$ ,  $\delta m_{\tilde{b}_2}^2$  und  $\delta Y_b$  geschrieben werden:

$$(\delta M_{\tilde{b}})_{12} = U_{\tilde{b}_{11}}^* U_{\tilde{b}_{12}} (\delta m_{\tilde{b}_1}^2 - \delta m_{\tilde{b}_2}^2) + U_{\tilde{b}_{11}}^* U_{\tilde{b}_{22}} \delta Y_b + U_{\tilde{b}_{12}} U_{\tilde{b}_{21}}^* \delta Y_b^* . \quad (8.41)$$

Durch Gleichsetzen von (8.40) und (8.41) und Auflösen nach  $\delta Y_b$  erhält man einen Ausdruck für  $\delta Y_b$ , der noch den Counterterm  $\delta m_{\tilde{b}_1}^2$  enthält:

$$\begin{aligned} \delta Y_b &= \left[ m_b (U_{\tilde{b}_{11}} U_{\tilde{b}_{22}}^* e^{-i\varphi_{A_b}} - U_{\tilde{b}_{12}} U_{\tilde{b}_{21}}^* e^{i\varphi_{A_b}}) \delta |A_b| - i m_b (U_{\tilde{b}_{11}} U_{\tilde{b}_{22}}^* A_b^* + U_{\tilde{b}_{12}} U_{\tilde{b}_{21}}^* A_b) \delta \varphi_{A_b} \right. \\ &\quad + (U_{\tilde{b}_{11}} U_{\tilde{b}_{22}}^* (A_b^* - \mu \tan \beta) - U_{\tilde{b}_{12}} U_{\tilde{b}_{21}}^* (A_b - \mu^* \tan \beta)) \delta m_b \\ &\quad \left. + U_{\tilde{b}_{11}} U_{\tilde{b}_{21}}^* (\delta m_{\tilde{b}_1}^2 - \delta m_{\tilde{b}_2}^2) \right] / \left( |U_{\tilde{b}_{11}}|^2 - |U_{\tilde{b}_{12}}|^2 \right) + \mathcal{O}(\alpha) . \end{aligned} \quad (8.42)$$

Setzt man  $\delta Y_b$  aus (8.42) in die  $SU(2)$ -Relation (8.39) und löst nach  $\delta m_{\tilde{b}_1}^2$  auf, so erhält man für den Counterterm des Massenquadrats  $m_{\tilde{b}_1}^2$  den folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} \delta m_{\tilde{b}_1}^2 &= \frac{1}{|U_{\tilde{b}_{11}}|^2} \left[ |U_{\tilde{b}_{12}}|^2 \delta m_{\tilde{b}_2}^2 + U_{\tilde{b}_{11}} U_{\tilde{b}_{12}}^* \left[ m_b (\delta |A_b| e^{-i\varphi_{A_b}} - i A_b^* \delta \varphi_{A_b}) + \delta m_b (A_b^* - \mu \tan \beta) \right] \right. \\ &\quad + U_{\tilde{b}_{11}}^* U_{\tilde{b}_{12}} \left[ m_b (\delta |A_b| e^{i\varphi_{A_b}} + i A_b \delta \varphi_{A_b}) + \delta m_b (A_b - \mu^* \tan \beta) \right] \\ &\quad + (|U_{\tilde{b}_{11}}|^2 - |U_{\tilde{b}_{12}}|^2) \left[ |U_{\tilde{t}_{11}}|^2 \delta m_{\tilde{t}_1}^2 + |U_{\tilde{t}_{12}}|^2 \delta m_{\tilde{t}_2}^2 - U_{\tilde{t}_{12}}^* U_{\tilde{t}_{22}} \delta Y_t \right. \\ &\quad \left. \left. - U_{\tilde{t}_{12}} U_{\tilde{t}_{22}}^* \delta Y_t^* + 2m_b \delta m_b - 2m_t \delta m_t \right] \right] + \mathcal{O}(\alpha) . \end{aligned} \quad (8.43)$$

## 8.2. Renormierung im Bottom-Sbottom-Sektor

$\delta Y_b$  aus (8.42) läßt sich nach Einsetzen von (8.43) auch durch die unabhängigen Counterterme ausdrücken:

$$\begin{aligned} \delta Y_b = & \frac{U_{\tilde{b}_{11}}}{U_{\tilde{b}_{22}}} \left[ m_b (e^{-i\varphi_{A_b}} \delta |A_b| - i A_b^* \delta \varphi_{A_b}) + (A_b^* - \mu \tan \beta) \delta m_b \right] \\ & - \frac{U_{\tilde{b}_{12}}}{U_{\tilde{b}_{22}}} \left[ -\delta m_{\tilde{b}_2}^2 + |U_{\tilde{t}_{11}}|^2 \delta m_{\tilde{t}_1}^2 + |U_{\tilde{t}_{12}}|^2 \delta m_{\tilde{t}_2}^2 - U_{\tilde{t}_{12}} U_{\tilde{t}_{22}}^* \delta Y_t^* - U_{\tilde{t}_{12}}^* U_{\tilde{t}_{22}} \delta Y_t \right. \\ & \left. + 2m_b \delta m_b - 2m_t \delta m_t \right] + \mathcal{O}(\alpha) . \end{aligned} \quad (8.44)$$

Bei der Berechnung der Higgsmassen in Kapitel 10 bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_t \alpha_s)$  treten die Counterterme des Bottom-Sbottom-Sektors nur in den Zwei-Schleifen-Selbstenergien der geladenen Higgs-Bosonen auf. Zur Bestimmung dieser Selbstenergie wird die Bottom-Quark-Masse auf null gesetzt. Dadurch vereinfacht sich der Counterterm-Anteil. Das  $\tilde{b}_2$ -Squark geht über in das  $\tilde{b}_R$ -Squark und entkoppelt. Übrig bleibt eine Abhängigkeit der Selbstenergie der geladenen Higgs-Bosonen von der Squark-Masse  $m_{\tilde{b}_1}$ ; der dazugehörige Counterterm  $\delta m_{\tilde{b}_1}^2$  setzt sich in der betrachteten Näherung folgendermaßen aus den Countertermen des Top-Stop-Sektors zusammen:

$$\delta m_{\tilde{b}_1}^2 = |U_{\tilde{t}_{11}}|^2 \delta m_{\tilde{t}_1}^2 + |U_{\tilde{t}_{12}}|^2 \delta m_{\tilde{t}_2}^2 - U_{\tilde{t}_{12}}^* U_{\tilde{t}_{22}} \delta Y_t - U_{\tilde{t}_{12}} U_{\tilde{t}_{22}}^* \delta Y_t^* - 2m_t \delta m_t + \mathcal{O}(\alpha) . \quad (8.45)$$

### Anmerkung zu den Z-Faktoren der Squark-Felder:

Obwohl in der folgenden Rechnung die Z-Faktoren der Squarks keine Rolle spielen, da sie nur als virtuelle Teilchen auftreten, werden hier der Vollständigkeit wegen Renormierungsbedingungen zur Festlegung der Z-Faktoren der Squarks angeführt. Die in (5.23) eingeführten Z-Faktoren  $\delta \tilde{Z}_{\tilde{q}}$  sind im allgemeinen komplexwertig. Bei der Berechnung von Prozessen mit äußeren Squarks bietet es sich an, die Z-Faktoren innerhalb eines On-Shell-Schemas festzulegen.

- (i) Die diagonalen Z-Faktoren werden so bestimmt, daß der Realteil der Residuen der Propagatoren den Wert eins annimmt:

$$\widetilde{\text{Re}} \frac{\partial \tilde{\Sigma}_{\tilde{q}ii}(k^2)}{\partial k^2} \Big|_{k^2=m_{\tilde{q}_i}^2} = 0 \quad \text{mit} \quad i = 1, 2 . \quad (8.46)$$

Diese Bedingung legt den Realteil der diagonalen Z-Faktoren fest:

$$\text{Re} \delta \tilde{Z}_{\tilde{q}ii} = -\widetilde{\text{Re}} \frac{\partial \Sigma_{\tilde{q}ii}(k^2)}{\partial k^2} \Big|_{k^2=m_{\tilde{q}_i}^2} \quad \text{mit} \quad i = 1, 2 . \quad (8.47)$$

Die Imaginärteile der diagonalen Z-Faktoren bleiben durch diese Bedingung unbestimmt und werden gleich null gesetzt:

$$\text{Im} \delta \tilde{Z}_{\tilde{q}ii} = 0 \quad \text{mit} \quad i = 1, 2 . \quad (8.48)$$

## 8. Der Quark-Squark-Sektor im komplexen MSSM

Dies ist möglich, da die Imaginärteile der diagonalen Z-Faktoren keine Divergenzen enthalten.

- (ii) Zur Festlegung der Z-Faktoren  $\delta\tilde{Z}_{\tilde{q}_{12}}$  bzw.  $\delta\tilde{Z}_{\tilde{q}_{21}}$  werden Entmischungsbedingungen gestellt, so daß im Fall eines On-Shell-Squarks keine Übergänge zwischen den Squark-Feldern stattfinden:

$$\widetilde{\text{Re}}\hat{\Sigma}_{\tilde{q}_{12}}(m_{\tilde{q}_1}^2) = 0 , \quad (8.49)$$

$$\widetilde{\text{Re}}\hat{\Sigma}_{\tilde{q}_{12}}(m_{\tilde{q}_2}^2) = 0 . \quad (8.50)$$

Für die Z-Faktoren erhält man damit folgenden Ausdruck:

$$\delta\tilde{Z}_{\tilde{q}_{12}} = 2 \frac{\widetilde{\text{Re}}\Sigma_{\tilde{q}_{12}}(m_{\tilde{q}_2}^2) - \delta Y_q}{(m_{\tilde{q}_1}^2 - m_{\tilde{q}_2}^2)} , \quad (8.51)$$

$$\delta\tilde{Z}_{\tilde{q}_{21}} = -2 \frac{\widetilde{\text{Re}}\Sigma_{\tilde{q}_{21}}(m_{\tilde{q}_1}^2) - \delta Y_q^*}{(m_{\tilde{q}_1}^2 - m_{\tilde{q}_2}^2)} . \quad (8.52)$$

Die Entmischungsbedingungen können unabhängig von der Wahl des Renormierungsschemas zur Festlegung der Parameter-Counterterme gestellt werden; der spezielle Ausdruck für die Z-Faktoren  $\delta\tilde{Z}_{\tilde{q}_{12}}$  bzw.  $\delta\tilde{Z}_{\tilde{q}_{21}}$  hängt aber von den Parameter-Countertermen ab.



# 9. Der Gluino-Sektor im komplexen MSSM

Bei der Berechnung der Higgs-Massen treten die Gluinos erst auf Zwei-Schleifen-Niveau als virtuelle Teilchen auf. Deshalb ist die Kenntnis des Gluino-Sektors auf Born-Niveau ausreichend. Der Brechungsparameter  $M_3$ , der als Massenparameter der Gluinos auftritt, ist im allgemeinen ein komplexer Parameter.

## 9.1. Massenterme der Gluinos

Zu den Massentermen der Gluinos trägt nur ein Anteil aus den Softbrechungstermen bei:

$$\mathcal{L}_{\tilde{g}\tilde{g}} = \frac{1}{2} (M_3 \lambda_s^a \lambda_s^a + M_3^* \bar{\lambda}_s^a \bar{\lambda}_s^a) . \quad (9.1)$$

$M_3$  ist ein komplexer Parameter mit Betrag  $|M_3|$  und Phase  $\varphi_{\tilde{g}}$ :

$$M_3 = |M_3| e^{i\varphi_{\tilde{g}}} . \quad (9.2)$$

Die Gluino-Phase  $\varphi_{\tilde{g}}$  kann in die Gluino-Felder absorbiert werden. Dabei werden die ursprünglichen Weyl-Spinoren  $\lambda_s^a, \bar{\lambda}_s^a$  durch die Weyl-Spinoren  $\xi_s^a, \bar{\xi}_s^a$  ersetzt:

$$\xi_s^a = e^{i\frac{\varphi_{\tilde{g}}}{2}} \lambda_s^a , \quad \bar{\xi}_s^a = e^{-i\frac{\varphi_{\tilde{g}}}{2}} \bar{\lambda}_s^a . \quad (9.3)$$

Damit lassen sich die Massenterme folgendermaßen schreiben:

$$\mathcal{L}_{\tilde{g}\tilde{g}} = \frac{1}{2} (|M_3| \xi_s^a \xi_s^a + |M_3| \bar{\xi}_s^a \bar{\xi}_s^a) . \quad (9.4)$$

Die Weyl-Spinoren  $\xi_s^a, \bar{\xi}_s^a$  können durch vierkomponentige Majorana-Spinoren  $\tilde{g}$  ausgedrückt werden:

$$\tilde{g} = \begin{pmatrix} -i\xi_s^a \\ i\bar{\xi}_s^a \end{pmatrix} , \quad \bar{\tilde{g}} = (-i\xi_s^a , i\bar{\xi}_s^a) ; \quad (9.5)$$

## 9. Der Gluino-Sektor im komplexen MSSM

der Massenterm der Gluinos geht dann über in:

$$\mathcal{L}_{\tilde{g}\tilde{g}} = -\frac{1}{2}|M_3|\tilde{g}\tilde{g} \quad (9.6)$$

und die Gluino-Masse  $m_{\tilde{g}}$  ist durch den Betrag des Softbrechungsparameters gegeben:

$$m_{\tilde{g}} = |M_3| . \quad (9.7)$$

## 9.2. Quark-Squark-Gluino-Vertex

Die Wechselwirkung zwischen Quark, Squark und Gluino ist durch den Teil der Lagrangedichte  $\mathcal{L}_{q\tilde{q}\tilde{g}}$  gegeben:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{q\tilde{q}\tilde{g}} = & -\sqrt{2} g_s T_{jk}^a U_{\tilde{q}_{n1}}^* \tilde{q}_L^j (i\bar{\lambda}_s^a) \tilde{q}_n^k - \sqrt{2} g_s T_{jk}^a U_{\tilde{q}_{n1}} \tilde{q}_n^{j*} (-i\lambda_s^a) q_L^k \\ & + \sqrt{2} g_s T_{kj}^a U_{\tilde{q}_{n2}} \tilde{q}_R^{Cj} (i\bar{\lambda}_s^a) \tilde{q}_n^{k*} + \sqrt{2} g_s T_{kj}^a U_{\tilde{q}_{n2}}^* \tilde{q}_n^j (-i\lambda_s^a) q_R^{Ck} . \end{aligned} \quad (9.8)$$

$n$  ist der Sfermionindex mit  $n = 1, 2$ , und  $T^a$  sind die Generatoren der  $SU(3)$ . In (9.8) wurde noch nicht die Ersetzung der Weyl-Spinoren nach (9.3) zur Absorption der Gluino-Phase in die Gluino-Felder durchgeführt. Wird diese Ersetzung durchgeführt und die Weyl-Spinoren in vierkomponentige Spinoren gemäß (5.4) und (9.5) übergeführt, so erhält man folgenden Ausdruck für den Teil der Lagrangedichte  $\mathcal{L}_{q\tilde{q}\tilde{g}}$  [91]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{q\tilde{q}\tilde{g}} = & \bar{g}^a \left( -\sqrt{2} g_s T_{jk}^a U_{\tilde{q}_{n1}} e^{-i\frac{\varphi_{\tilde{g}}}{2}} \omega_- + \sqrt{2} g_s T_{jk}^a U_{\tilde{q}_{n2}} e^{i\frac{\varphi_{\tilde{g}}}{2}} \omega_+ \right) q^k \tilde{q}_n^{j*} \\ & + \bar{q}^k \left( \sqrt{2} g_s T_{kj}^a U_{\tilde{q}_{n2}}^* e^{-i\frac{\varphi_{\tilde{g}}}{2}} \omega_- - \sqrt{2} g_s T_{kj}^a U_{\tilde{q}_{n1}} e^{i\frac{\varphi_{\tilde{g}}}{2}} \omega_+ \right) \tilde{g}^a \tilde{q}_n^j . \end{aligned} \quad (9.9)$$

Durch die Absorption der Gluino-Phase  $\varphi_{\tilde{g}}$  in die Gluino-Felder wird der Quark-Squark-Gluino-Vertex abhängig von der Gluino-Phase. Im Gegensatz dazu ändert sich der Gluon-Gluino-Gluino-Vertex nicht durch die Redefinition der Gluino-Felder, da sich in diesem Vertex die Gluino-Phasen kompensieren.

# 10. Higgs-Massen mit $\mathcal{O}(\alpha_t\alpha_s)$ -Beiträgen im komplexen MSSM

## 10.1. Berechnung der Higgs-Massen der neutralen Higgs-Bosonen

Zur Berechnung der neutralen Higgs-Massen unter Berücksichtigung von Korrekturen bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_t\alpha_s)$  wird — mit der Notation aus (7.79) — die Zwei-Punkt-Vertex-Funktion  $\Gamma$

$$\Gamma(k^2) = k^2 \mathbb{1} - \begin{pmatrix} (M_{H^0}^{(0)})^2 - \hat{\Sigma}_{H^0 H^0}(k^2) & -\hat{\Sigma}_{h^0 H^0}(k^2) & -\hat{\Sigma}_{A^0 H^0}(k^2) \\ -\hat{\Sigma}_{h^0 H^0}(k^2) & (M_{h^0}^{(0)})^2 - \hat{\Sigma}_{h^0 h^0}(k^2) & -\hat{\Sigma}_{A^0 h^0}(k^2) \\ -\hat{\Sigma}_{A^0 H^0}(k^2) & -\hat{\Sigma}_{A^0 h^0}(k^2) & (M_{A^0}^{(0)})^2 - \hat{\Sigma}_{A^0 A^0}(k^2) \end{pmatrix} \quad (10.1)$$

bestimmt; dann werden die Nullstellen der Determinante von  $\Gamma$  gesucht. Die renormierte Selbstenergie  $\hat{\Sigma}_{\phi\phi}(k^2)$  mit  $\phi = H^0, h^0, A^0$  setzt sich aus der Ein-Schleifen-Selbstenergie  $\hat{\Sigma}_{\phi\phi}^{(1)}(k^2)$  und der Zwei-Schleifen-Selbstenergie  $\hat{\Sigma}_{\phi\phi}^{(2)}(0)$ , die unter Berücksichtigung der Näherungen aus Kapitel 7.3.2 bei verschwindenden äußeren Impulsen berechnet wird, zusammen:

$$\hat{\Sigma}_{\phi\phi}(k^2) = \widetilde{\text{Re}}\hat{\Sigma}_{\phi\phi}^{(1)}(k^2) + \hat{\Sigma}_{\phi\phi}^{(2)}(0). \quad (10.2)$$

Bei diesem Vorgehen werden Beiträge der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha^2)$  zur Higgs-Masse, die aus den Imaginärteilen der Schleifenintegrale in den Ein-Schleifen-Selbstenergien herrühren, vernachlässigt. Diese Näherung wurde auch in [28] angewandt. Der Schwerpunkt der in diesem Kapitel dargestellten Analyse liegt bei der Untersuchung der Korrekturen der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_t\alpha_s)$  und stellt weniger eine präzise Vorhersage der Higgs-Masse dar. Die Zwei-Schleifen-Korrekturen der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_t^2)$  [39] sind nur für reelle Parameter bekannt und führen in diesem Fall zu einer Erhöhung der Masse des leichtesten Higgs-Bosons.

In Kapitel 7.3 sind die renormierten Selbstenergien in Abhängigkeit von unrenormierten Selbstenergien und Countertermen für Ein-Schleifen- (7.77) und Zwei-Schleifen-Niveau (7.78) angegeben.

## 10. Higgs-Massen mit $\mathcal{O}(\alpha_t\alpha_s)$ -Beiträgen im komplexen MSSM

In der Zwei-Punkt-Vertex-Funktion (10.1) wurden die Mischungen der Higgs-Bosonen mit den Goldstone-Bosonen vernachlässigt. Diese Beiträge sind bei einer vollständigen Ein-Schleifen-Rechnung vernachlässigbar klein, siehe auch [28]. Die Mischungen der Higgs-Bosonen mit den Goldstone-Bosonen verschwinden in der betrachteten Zwei-Schleifen-Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_t\alpha_s)$ .

Analytische Ausdrücke für die renormierten Selbstenergien wurden mit Hilfe der Programme `FeynArts` [80] und `OneCalc` bzw. `TwoCalc` [81] bestimmt. Zur numerischen Auswertung wurden die in Anhang C aufgeführten Ausdrücke für die Schleifenintegrale und das Programm `LoopTools` [82] verwendet.

Die in Kapitel 6 angewandte Näherung der Nullstellen der Determinante der Zwei-Punkt-Vertex-Funktion ist nur für reelle Parameter gültig. Anstatt diese für komplexe Parameter zu erweitern, werden hier die Nullstellen mit folgendem iterativen, numerisch stabilen Verfahren berechnet [28]. Zuerst werden die Eigenwerte  $\lambda_i$  der Matrix

$$\begin{pmatrix} (M_{H^0}^{(0)})^2 - \hat{\Sigma}_{H^0H^0}(k^2) & -\hat{\Sigma}_{h^0H^0}(k^2) & -\hat{\Sigma}_{A^0H^0}(k^2) \\ -\hat{\Sigma}_{h^0H^0}(k^2) & (M_{h^0}^{(0)})^2 - \hat{\Sigma}_{h^0h^0}(k^2) & -\hat{\Sigma}_{A^0h^0}(k^2) \\ -\hat{\Sigma}_{A^0H^0}(k^2) & -\hat{\Sigma}_{A^0h^0}(k^2) & (M_{A^0}^{(0)})^2 - \hat{\Sigma}_{A^0A^0}(k^2) \end{pmatrix} \quad (10.3)$$

in Abhängigkeit vom Impulsquadrat  $k^2$  bestimmt. Dann wird durch ein iteratives Verfahren die Gleichung

$$k^2 - \lambda_i(k^2) = 0 \quad (10.4)$$

gelöst. Die Nullstellen dieser Gleichung liefern die Quadrate der Higgs-Massen unter Berücksichtigung höherer Ordnungen.

### 10.1.1. Input-Parameter

Zur numerischen Auswertung werden die Parameterwerte aus Tabelle 10.1 und aus Anhang A.4 verwendet, falls nicht explizit andere Angaben gemacht werden.

Für die Top-Quark-Masse  $m_t$  wird der aus der direkten Beobachtung von Top-Quark-Ereignissen experimentell bestimmte Wert nach [50] verwendet. Der neueste veröffentlichte Wert für die Top-Quark-Masse liegt bei  $m_t = 178.0$  GeV [92]. Dies führt zu höheren Werten der Masse des leichtesten Higgs-Bosons (vgl. Abb. 10.1). Der angegebene experimentelle Fehler der Top-Quark-Masse liegt bei 4.3 GeV. Der neueste vorläufige Wert der Top-Quark-Masse, der vom Experiment CDF gemessen wurde, liegt bei  $m_t = 173.5$  GeV [93]. Als Wert für die Bottom-Quark-Masse wird näherungsweise die  $\overline{\text{MS}}$ -Masse des Bottom-Quarks im Standardmodell an der Renormierungsskala der Z-Boson-Masse gewählt [79]. Parameterbereiche (große  $\tan\beta$  und große  $\mu$ ), in denen die Korrekturen der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_b\alpha_s)$  zur Higgs-Masse relevant sind, werden in diesem Kapitel nicht betrachtet.

### 10.1. Berechnung der Higgs-Massen der neutralen Higgs-Bosonen

Die Werte der Top-Squark-Massen, die bei der numerischen Auswertung in die Zwei-Schleifen-Selbstenergien eingehen, werden hier unter Vernachlässigung der D-Terme in der Squark-Massenmatrix berechnet; dies verlangt die konsequente Anwendung der Näherung verschwindender elektroschwacher Eichkopplungen  $g, g'$ . Diese Näherung muß bei Verwendung der Masse des geladenen Higgs-Bosons als Input-Größe und damit als zu renormierende Größe konsequent durchgeführt werden. Durch die Mitnahme der D-Terme in den Squark-Massen werden UV-divergente Terme im Counterterm zur Masse des geladenen Higgs-Bosons induziert, die aber bei einer vollständigen Berechnung der Higgs-Selbstenergien durch Terme des W-Massen-Counterterms absorbiert werden. Terme des W-Massen-Counterterms werden jedoch aufgrund der Näherung verschwindender elektroschwacher Kopplungen vernachlässigt (vgl. Abschnitt 7.3.2). Dieses Problem tritt bei Verwendung der Masse des A-Bosons als Input-Parameter nicht auf. In diesem Fall wird die  $SU(2)$ -Relation zwischen Top- und Bottom-Squarks nicht benötigt; in der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_t\alpha_s)$  treten dann nur die Top-Squarks auf. Das heißt, die Mitnahme der D-Terme bedeutet eine Umdefinition der Brechungsparameter  $M_L$  und  $M_{\tilde{t}_R}$ . Diese Umdefinition verändert nicht das divergente Verhalten. In der Selbstenergie des geladenen Higgs-Bosons sind jedoch sowohl Top- als auch Bottom-Squarks als virtuelle Teilchen in der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_t\alpha_s)$  vorhanden. Eine Umdefinition der Brechungsparameter funktioniert nicht, da der linkshändige Brechungsparameter  $M_L$  für die Top-Squarks einen anderen Wert erhalten würde als für die Bottom-Squarks;  $M_L$  ist jedoch aufgrund der  $SU(2)$ -Invarianz für die Top- und die Bottom-Squarks identisch.

Standardmodell-Parameter:	
$m_t = 174.3 \text{ GeV}$	$m_b = m_b^{\overline{\text{MS}}}(M_Z) = 2.94 \text{ GeV}$
Parameter des Higgs-Sektors:	
$M_{H^\pm} = 500 \text{ GeV}$	$\tan \beta = 10$
	$\mu = 1000 \text{ GeV}$
Brechungsparameter:	
für Gauginos:	für Sfermionen:
$M_1 = \frac{5 \sin^2 \theta_W}{3 \cos^2 \theta_W} M_2$	$M_L = M_{L_{\{\tilde{q}_i, \tilde{l}_i\}}} = 1000 \text{ GeV}$ mit $i = 1, 2, 3$
$M_2 = 500 \text{ GeV}$	$M_{\tilde{f}_R} = 1000 \text{ GeV}$ mit $f = u, c, d, s, b, e, \mu, \tau$
$M_3 = 1000 \text{ GeV}$	$M_{\tilde{t}_R} = M_L + a$ mit $a = 0.1 \text{ GeV}$
	$A_{\{u, c, t\}} = A_{\{d, s, b\}} = A_{\{e, \mu, \tau\}} = 1000 \text{ GeV}$

**Tabelle 10.1.:** Werte der Input-Parameter, die in der numerischen Auswertung verwendet werden, wenn es nicht explizit anders angegeben wird.

## 10. Higgs-Massen mit $\mathcal{O}(\alpha_t\alpha_s)$ -Beiträgen im komplexen MSSM

Der Unterschied zwischen den Werten der Squark-Massen unter Berücksichtigung der D-Terme und denen unter Vernachlässigung dieser Terme ist numerisch gering. Deshalb wurden in Kapitel 6 – dort ist die A-Boson-Masse Input-Parameter – der Einfachheit halber auf Ein- wie auf Zwei-Schleifen-Niveau die jeweils gleichen Werte der Squark-Massen unter Mitnahme der D-Terme verwendet. So wird auch im Programm `FeynHiggs2.1` [94] verfahren.

Die Vernachlässigung der D-Terme bewirkt bei nicht verschwindender Mischung der Top-Squarks, daß die Einträge in der Mischungsmatrix betragsmäßig übereinstimmen, falls der linkshändige und der rechtshändige Brechungsparameter gleich sind:

$$M_L = M_{\tilde{f}_R} . \quad (10.5)$$

Dies führt in den Schemata, in denen der A-Parameter  $A_t$  über eine  $\overline{\text{DR}}$ -Renormierungsbedingung festgelegt wird, zu numerischen Instabilitäten. Die Ursache der Probleme ist die Differenz  $|U_{\tilde{t}_{11}}|^2 - |U_{\tilde{t}_{12}}|^2$ , welche im Ausdruck für  $\delta Y_t$  (8.31) im Nenner steht. Im Gegensatz dazu tritt diese Differenz in den Countertermen nicht im Nenner auf, wenn  $\delta Y_t$  als unabhängiger Counterterm bestimmt wird (vgl. (8.20), (8.25) und (8.26)). Um dieses Problem zu umgehen, wird im Top-Sektor in Kapitel 10.2 für den rechtshändigen Brechungsparameter

$$M_{\tilde{t}_R} = M_L + a \quad (10.6)$$

angenommen mit einer Abweichung  $a$  vom Wert des linkshändigen Brechungsparameters. Die Verwendung von  $a = 0.1$  GeV führt zu einer vernachlässigbar geringen Abweichung des Werts der Masse des leichtesten Higgs-Bosons von dem Wert, den man im Grenzfall  $a \rightarrow 0$  erhält. Sie liegt in der Größenordnung von bis zu  $\mathcal{O}(10$  MeV).

## 10.2. Schema-Abhängigkeit

Vor der Behandlung der Abhängigkeit der Higgs-Massen von komplexen Parametern in Abschnitt 10.3 wird in den Abschnitten 10.2.1 und 10.2.2 das Verhalten der Higgs-Massen für reelle Parameter diskutiert. Diese Untersuchung dient zur Einbettung der Ergebnisse für die Masse des leichtesten Higgs-Bosons unter Einschluß der neu berechneten Korrekturen der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_t\alpha_s)$  in die aus der Literatur für reelle Parameter bekannten Resultate mit Beiträgen dieser Ordnung [29–37]. Die Analyse wird um eine Diskussion der Ergebnisse für die Masse des leichtesten Higgs-Bosons bei Verwendung unterschiedlicher Renormierungsschemata erweitert.

Die Renormierungsschemata aus Tabelle 8.1 werden betrachtet (In Klammern steht die Beschreibung der Kurve, mit der die dazugehörigen Ergebnisse der Higgs-Masse unter Berücksichtigung der Korrekturen bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_t\alpha_s)$  bei Verwendung des jeweiligen Renormierungsschemas in den folgenden Schaubildern dargestellt sind.):

- $A_t, m_t \overline{\text{DR}}$  (kurz gestrichelt, blau): Im Top-Sektor werden der A-Parameter und die Top-Quark-Masse als  $\overline{\text{DR}}$ -Größen bestimmt.
- $A_t \overline{\text{DR}}, m_t \text{OS}$  (dicke Punkte, schwarz): Dieses Schema unterscheidet sich vom Schema „ $A_t, m_t \overline{\text{DR}}$ “ nur darin, daß die Top-Quark-Masse als On-Shell-Größe bestimmt wird.
- $\theta_{\bar{t}}, \varphi_{\bar{t}}, m_t \text{OS}$  (Kreuze, grau): In diesem Schema wird die Top-Quark-Masse on-shell festgelegt. Statt den A-Parameter als  $\overline{\text{DR}}$ -Größe zu wählen, wird der Counterterm  $\delta Y_t$  über eine On-Shell-Bedingung festgelegt. Da  $\delta Y_t$  eine Kombination aus den Countertermen zum Mischungswinkel  $\delta\theta_{\bar{t}}$  und zur dazugehörigen Phase  $\delta\varphi_{\bar{t}}$  (8.21) ist, entspricht diese Bedingung einer On-Shell-Festlegung von  $\theta_{\bar{t}}$  und  $\varphi_{\bar{t}}$ . Der durch dieses Schema festgelegte A-Parameter  $A_t^{\theta_{\bar{t}}, \varphi_{\bar{t}}, m_t \text{OS}}$  wird als Input-Wert verwendet.
- $\theta_{\bar{t}}, \varphi_{\bar{t}} \text{OS}, m_t \overline{\text{DR}}$  (durchgezogen, rot): Innerhalb dieses Schemas wird die Top-Masse durch eine  $\overline{\text{DR}}$ -Bedingung fixiert. Abgesehen davon sind Schema „ $\theta_{\bar{t}}, \varphi_{\bar{t}} \text{OS}, m_t \overline{\text{DR}}$ “ und Schema „ $\theta_{\bar{t}}, \varphi_{\bar{t}}, m_t \text{OS}$ “ identisch.

Bei der Berechnung der Masse des leichtesten Higgs-Bosons wird die Masse des geladenen Higgs-Bosons als Input-Parameter verwendet (siehe auch Kapitel 7.2.2). Der zur Masse des geladenen Higgs-Bosons gehörende Counterterm geht in die Higgs-Selbstenergien ein und wird über eine On-Shell-Bedingung bestimmt.

Beim Vergleich mit `FeynHiggs2.1` [94] und den in Kapitel 6 angewandten Routinen wird folgendermaßen vorgegangen: Auf Ein-Schleifen-Niveau werden die renormierten Selbstenergien aus Kapitel 7.3.1 mit der Masse des geladenen Higgs-Bosons als On-Shell-Größe verwendet; die in `FeynHiggs2.1` eingebauten Ein-Schleifen-Selbstenergien für komplexe Parameter stimmen mit denen aus Kapitel 7.3.1 überein. Die renormierten Zwei-Schleifen-Selbstenergien der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_t\alpha_s)$  werden dagegen gemäß (4.108) und (4.109) mit einem durch eine On-Shell-Bedingung festgelegten Counterterm zur A-Boson-Masse berechnet. Auf diese Art werden in `FeynHiggs2.1` Zwei-Schleifen-Korrekturen der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_t\alpha_s)$  bei der Berechnung der Higgs-Massen mit komplexen Parametern berücksichtigt. Korrekturen, die über den dominanten Zwei-Schleifen-Beitrag der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_t\alpha_s)$  hinausgehen, werden bei diesem Vergleich nicht betrachtet; sie sind nur für reelle Parameter bekannt. In `FeynHiggs2.1` sind Korrekturen der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_b\alpha_s)$  gemäß [40] und der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_t^2)$  gemäß [39] eingebaut. Neuere Versionen von `FeynHiggs` schließen auch Korrekturen der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_t\alpha_b)$  und  $\mathcal{O}(\alpha_b^2)$  nach [41] für reelle Parameter mit ein.

- $\theta_{\bar{t}}, m_t \text{OS}$  (Dreiecke, schwarz): Auf Zwei-Schleifen-Niveau werden die Selbstenergien der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_t\alpha_s)$ , die in Kapitel 6 verwendet wurden, eingesetzt. Der Top-Sektor ist hierbei durch das in Abschnitt 5.2 beschriebene Renormierungsschema festgelegt.
- `FeynHiggs OS` (Quadrate, grün): Zum Vergleich mit `FeynHiggs2.1` wird eine Version von `FeynHiggs2.1` verwendet, in der Zwei-Schleifen-Selbstenergien der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_t\alpha_s)$  eingebaut sind, welche sich nur in einem Punkt von den in Kapitel 6 angewandten Zwei-Schleifen-Selbstenergien unterscheiden: Die Bedingung zur Festlegung

## 10. Higgs-Massen mit $\mathcal{O}(\alpha_t\alpha_s)$ -Beiträgen im komplexen MSSM

des Squark-Mischungswinkels ist anders gewählt, sie ist jedoch auch eine On-Shell-Bedingung an die Squark-Mischung [15]. In neueren Versionen von `FeynHiggs` wird der Mischungswinkel wie in Abschnitt 5.2 fixiert [36].

Bei der Berechnung der Higgs-Massen mit `FeynHiggs2.1` wurde  $M_{\tilde{t}_R} = M_L$  verwendet. Diese Wahl ist möglich, da zum einen in `FeynHiggs2.1` die D-Terme in den Squarkmassen nicht vernachlässigt werden (es wird die Masse des A-Bosons und nicht die Masse des geladenen Higgs-Bosons als Input-Parameter gewählt (siehe Abschnitt 10.1.1)) und zum anderen der Parameter  $A_t$  nicht über eine  $\overline{\text{DR}}$ -Renormierungsbedingung festgelegt ist.

In allen Renormierungsschemata werden die Top-Squark-Massen als On-Shell-Größen gewählt.

Als Input-Parameter werden in Abschnitt 10.2.1 und 10.2.2 die On-Shell-Top-Quark-Masse  $m_t^{\text{OS}}$  und der A-Parameter  $A_t^{\theta_{\tilde{t}}, \varphi_{\tilde{t}}, m_t^{\text{OS}}} =: A_t^{\text{OS}}$  genommen. Die entsprechenden Größen in anderen Renormierungsschemata RS werden gemäß

$$m_t^{\text{RS}} = m_t^{\text{OS}} + \delta m_t^{\text{OS}} - \delta m_t^{\text{RS}} \quad , \quad (10.7)$$

$$A_t^{\text{RS}} = A_t^{\text{OS}} + \delta A_t^{\text{OS}} - \delta A_t^{\text{RS}} \quad (10.8)$$

berechnet. Der Mischungswinkel wird in Abhängigkeit von den Top-Squark-Massen, der Top-Quark-Masse, dem A-Parameter und den Parametern  $\mu$  und  $\tan\beta$  im jeweiligen Schema bestimmt.

Nach [32] ist es sinnvoll, statt der Top-Quark-Masse im On-Shell-Schema  $m_t^{\text{OS}}$  die Top-Quark-Masse des Standardmodells im  $\overline{\text{MS}}$ -Schema  $m_t^{\overline{\text{MS}}}$  als Input-Größe zu verwenden. Damit werden große Gluon-Beiträge berücksichtigt. Im folgenden Abschnitt 10.2.1 wird in ein paar Beispielen der Unterschied in der Higgs-Masse, der aus der Verwendung der Top-Quark-Masse  $m_t^{\overline{\text{MS}}}$  resultiert, dargestellt. Dabei wird die Top-Quark-Masse des Standardmodells im  $\overline{\text{MS}}$ -Schema  $m_t^{\overline{\text{MS}}}$  durch den Zusammenhang

$$m_t^{\overline{\text{MS}}} = m_t^{\text{OS}} + \delta m_t^{\text{OS, gluon}}|_{\text{fin}} = m_t^{\text{OS}} \left[ 1 - \frac{\alpha_s}{\pi} \left( \frac{4}{3} - \ln\left(\frac{m_t^{\text{OS}}}{\mu^{\overline{\text{DR}}}}\right)^2 \right) \right] \quad (10.9)$$

bestimmt.  $\delta m_t^{\text{OS, gluon}}|_{\text{fin}}$  ist der endliche Anteil des Gluon-Beitrags zum Counterterm der Top-Quark-Masse im On-Shell-Schema und  $\mu^{\overline{\text{DR}}}$  die Renormierungsskala. Um den Gluon-Beitrag nicht doppelt zu berücksichtigen, muß auch der Top-Massen-Counterterm um einen endlichen Betrag geändert werden:

$$\delta m_t^{\overline{\text{MS}}} = \delta m_t^{\text{OS}} - \delta m_t^{\text{OS, gluon}}|_{\text{fin}} \quad . \quad (10.10)$$

Im Gegensatz zum Counterterm der Top-Quark-Masse des Standardmodells im  $\overline{\text{MS}}$ -Schema enthält der Counterterm  $\delta m_t^{\overline{\text{MS}}}$  (10.10) auch endliche Beiträge. Im folgenden werden die hier aufgelisteten Bezeichnungen gebraucht:



- $A_t \overline{\text{DR}}, m_t \overline{\text{MS}}$  (Kreise, grün): Als Renormierungsschema wird hier das Schema „ $A_t \overline{\text{DR}}, m_t \text{OS}$ “ verwendet. Statt jedoch den Wert der On-Shell-Top-Masse einzusetzen, wird der Wert der Top-Masse im  $\overline{\text{MS}}$ -Schema gemäß (10.9) und (10.10) benutzt.
- $\theta_{\bar{t}}, \varphi_{\bar{t}} \text{OS}, m_t \overline{\text{MS}}$  (kurz-lang gestrichelt, hellblau): Das zugrunde liegende Renormierungsschema ist „ $\theta_{\bar{t}}, \varphi_{\bar{t}}, m_t \text{OS}$ “. Als Input-Wert für die Top-Quark-Masse wird die  $\overline{\text{MS}}$ -Masse gemäß (10.9) und (10.10) gewählt.

### 10.2.1. Vergleich der Schema-Abhängigkeit für reelle Parameter

Im folgenden wird die Renormierungsschema-Abhängigkeit der Korrekturen der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_t \alpha_s)$  zur Masse des leichtesten Higgs-Bosons für reelle Parameter illustriert.

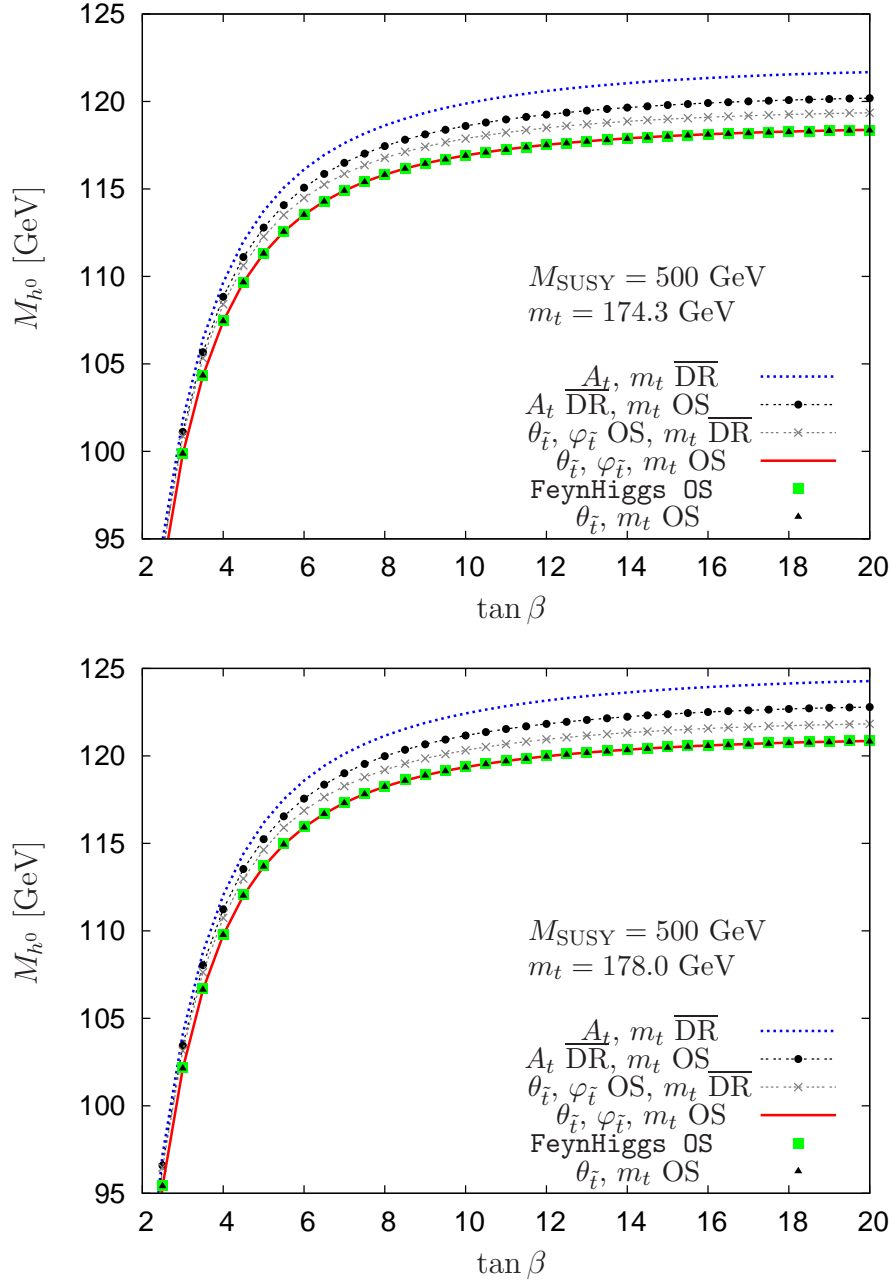
In Abb. 10.1 ist die Masse des leichtesten Higgs-Bosons  $M_{h^0}$  in Abhängigkeit von  $\tan \beta$  dargestellt. Verwendet wurden dabei die Renormierungsschemata „ $A_t, m_t \overline{\text{DR}}$ “, „ $A_t \overline{\text{DR}}, m_t \text{OS}$ “, „ $\theta_{\bar{t}}, \varphi_{\bar{t}}, m_t \text{OS}$ “ und „ $\theta_{\bar{t}}, \varphi_{\bar{t}} \text{OS}, m_t \overline{\text{DR}}$ “. Außerdem wurde  $M_{h^0}$  mit `FeynHiggs` bzw. mit den Routinen, die in Kapitel 6 benutzt worden sind („ $\theta_{\bar{t}}, m_t \text{OS}$ “), berechnet. Das qualitative Verhalten ist für alle Kurven identisch: Der Wert der Higgs-Masse  $M_{h^0}$  fällt zu kleinen Werten von  $\tan \beta$  hin stark ab, für  $\tan \beta \gtrsim 10$  ist die Änderung von  $M_{h^0}$  mit  $\tan \beta$  gering (Für große Werte von  $\tan \beta$  erwartet man wieder einen starken Abfall der Higgs-Masse  $M_{h^0}$ ; in diesem Bereich werden die  $\mathcal{O}(\alpha_b \alpha_s)$ -Korrekturen relevant – vgl. Kapitel 6).

Die Unterschiede im Ergebnis für  $M_{h^0}$ , verursacht durch die Verwendung verschiedener Renormierungsschemata, betragen bis zu etwa 3 GeV für größere  $\tan \beta$ . Die größten Werte für die Higgs-Masse  $M_{h^0}$  liefert die Verwendung des Schemas „ $A_t, m_t \overline{\text{DR}}$ “; die kleinsten Werte werden durch den Gebrauch von Schema „ $\theta_{\bar{t}}, \varphi_{\bar{t}}, m_t \text{OS}$ “ erzeugt. Die Kurven „ $\theta_{\bar{t}}, \varphi_{\bar{t}}, m_t \text{OS}$ “, „`FeynHiggs OS`“ und „ $\theta_{\bar{t}}, m_t \text{OS}$ “ stimmen überein. Das heißt, die Verwendung eines On-Shell-Massencounterterms für die A-Boson-Masse anstelle eines On-Shell-Massencounterterms für die Masse des geladenen Higgs-Bosons in den Zwei-Schleifen-Selbstenergien spielt bei den gewählten Parametern numerisch keine Rolle; für eine konsistente Berechnung der Higgs-Massen sollte jedoch in den Ein- und in den Zwei-Schleifen-Selbstenergien die Masse des geladenen Higgs-Bosons als Input-Parameter sowie die dazugehörigen Counterterme benutzt werden. Die unterschiedliche Renormierung des A-Parameters in den Routinen von `FeynHiggs2.1` und den in Kapitel 6 verwendeten hat hier ebenfalls keinen numerischen Effekt.

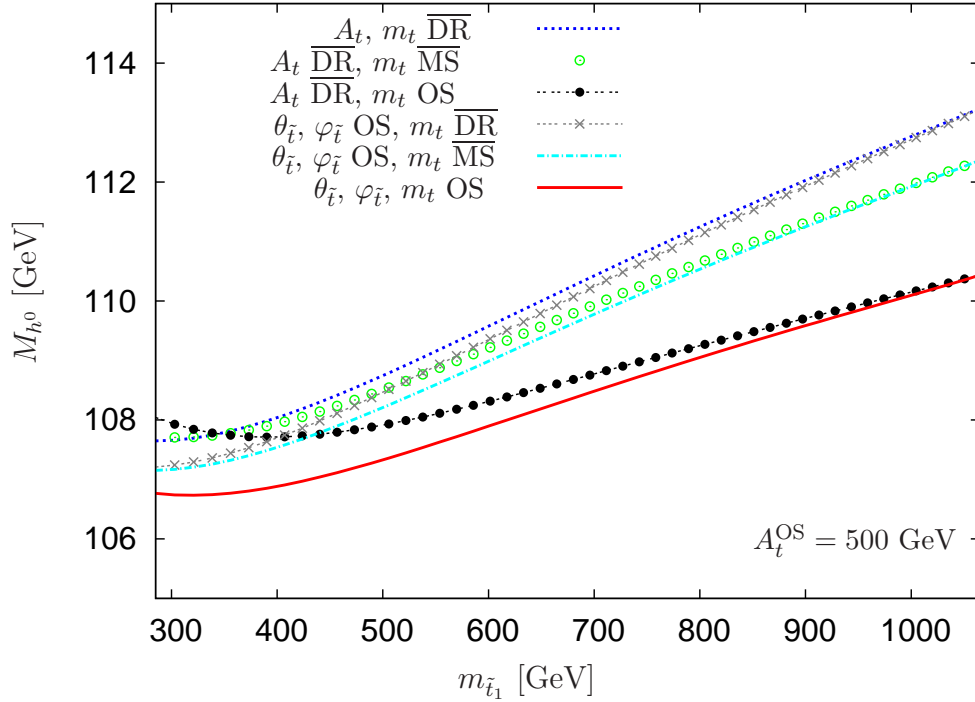
Ein größerer Wert für die Top-Quark-Masse führt in Abb. 10.1 lediglich zu einer Verschiebung zu größeren Werten der Higgs-Masse; der Unterschied beträgt etwa 2 GeV bis 3 GeV. Bei der weiteren Diskussion wird nur der Wert  $m_t = 174.3$  GeV für die Top-Quark-Masse verwendet.

In Abb. 10.2 ist die Abhängigkeit der Higgs-Masse  $M_{h^0}$  von der Masse  $m_{\bar{t}_1}$  gezeigt. Die Änderung der Squark-Masse  $m_{\bar{t}_1}$  wird dabei durch die Variation des Brechungsparameters

10. Higgs-Massen mit  $\mathcal{O}(\alpha_t\alpha_s)$ -Beiträgen im komplexen MSSM



**Abb. 10.1.:** Abhängigkeit der Masse des leichtesten Higgs-Bosons  $M_{h^0}$  von  $\tan\beta$  unter Verwendung unterschiedlicher Renormierungsschemata. Die Kurven im oberen Schaubild wurden mit einem Wert der Top-Quark-Masse  $m_t = 174.3$  GeV, die Kurven im unteren mit einem Wert  $m_t = 178.0$  GeV berechnet. Für die Brechungsparameter wurde  $M_{\text{SUSY}} = M_L = M_{\tilde{f} \neq \tilde{t}_R} = M_{\tilde{t}_R} - a = 500$  GeV gewählt. Die Renormierungsskala ist  $\mu^{\overline{\text{DR}}} = 174.3$  GeV (unabhängig von der Wahl des Werts der Top-Quark-Masse).



**Abb. 10.2.:** Abhängigkeit der Higgs-Masse  $M_{h^0}$  von der Squark-Masse  $m_{\tilde{t}_1}$ . Die Variation von  $m_{\tilde{t}_1}$  ist bedingt durch die Änderung des Brechungsparameters  $M_{\text{SUSY}}$ , wobei  $M_{\text{SUSY}} = M_L = M_{\tilde{f} \neq \tilde{t}_R} = M_{\tilde{t}_R} - a$ . Für  $A_t^{\text{OS}}$  wurde  $A_t^{\text{OS}} = 500$  GeV angenommen.

$M_{\text{SUSY}}$  verursacht.  $M_{\text{SUSY}}$  wird universell gewählt:

$$M_{\text{SUSY}} = M_L = M_{\tilde{f} \neq \tilde{t}_R} = M_{\tilde{t}_R} - a . \quad (10.11)$$

Das heißt, es ändert sich nicht nur die Masse  $m_{\tilde{t}_1}$ , sondern die Masse aller Sfermionen. Da der Ein-Schleifen-Brechungsparameter innerhalb der unterschiedlichen Renormierungsschemata verschiedene Werte erhält, wird  $M_{h^0}$  in Abhängigkeit von  $m_{\tilde{t}_1}$  aufgetragen; die Squark-Masse  $m_{\tilde{t}_1}$  hat in allen Schemata den gleichen Wert. Zur Berechnung der Higgs-Masse  $M_{h^0}$  wurden die Renormierungsschemata „ $A_t, m_t \overline{DR}$ “, „ $A_t \overline{DR}, m_t \text{OS}$ “, „ $\theta_{\tilde{t}}, \varphi_{\tilde{t}}, m_t \text{OS}$ “ und „ $\theta_{\tilde{t}}, \varphi_{\tilde{t}} \text{OS}, m_t \overline{DR}$ “ verwendet. Zusätzlich sind Ergebnisse für  $M_{h^0}$  mit der Top-Quark-Masse im  $\overline{\text{MS}}$ -Schema „ $A_t \overline{DR}, m_t \overline{\text{MS}}$ “ bzw. „ $\theta_{\tilde{t}}, \varphi_{\tilde{t}} \text{OS}, m_t \overline{\text{MS}}$ “ aufgetragen.

Für  $m_{\tilde{t}_1} \gtrsim 500$  GeV steigt  $M_{h^0}$  mit der Squark-Masse  $m_{\tilde{t}_1}$  an; für kleine Squark-Massen  $m_{\tilde{t}_1}$  ist die Änderung der Higgs-Masse  $M_{h^0}$  gering. Die im Renormierungsschema „ $A_t \overline{DR}, m_t \text{OS}$ “ berechneten Werte fallen für kleine Werte von  $m_{\tilde{t}_1}$  mit  $m_{\tilde{t}_1}$  gering ab. Für kleine  $m_{\tilde{t}_1}$  sind die Unterschiede zwischen den mittels der verschiedenen Renormierungsschemata berechneten Ergebnisse in der Größenordnung von  $\mathcal{O}(1 \text{ GeV})$ . Die Größe des Unterschieds steigt bis zu etwa 3 GeV für große  $m_{\tilde{t}_1}$  an. Für große Top-Squark-Massen ist der Unterschied zwischen dem Wert der Higgs-Masse  $M_{h^0}$  mit  $A_t^{\overline{\text{DR}}}$  und dem mit  $A_t^{\text{OS}}$  bei gleicher Top-

## 10. Higgs-Massen mit $\mathcal{O}(\alpha_t\alpha_s)$ -Beiträgen im komplexen MSSM

Massen-Renormierung kleiner als für kleine  $m_{\tilde{t}_1}$  und verschwindet bei  $m_{\tilde{t}_1} \approx 1100$  GeV. Für die Top-Quark-Masse verhält es sich umgekehrt. Die Größe der Differenz  $m_t^{\text{OS}} - m_t^{\overline{\text{DR}}}$  steigt mit  $m_{\tilde{t}_1}$  an; für extrem große Squark-Massen wird diese Differenz durch große Beiträge von Logarithmen der schweren Squarks sehr groß und macht sich in sehr unterschiedlichen Ergebnissen für die Higgs-Masse  $M_{h^0}$  bemerkbar. Dagegen ist die Differenz  $m_t^{\text{OS}} - m_t^{\overline{\text{MS}}}$  von den Squark-Massen unabhängig. Für große  $m_{\tilde{t}_1}$  sind die Ergebnisse für  $M_{h^0}$  quasi nach den Top-Quark-Massen geordnet. Der kleinste Wert der Higgs-Masse  $M_{h^0}$  wird durch die Schemata mit  $m_t^{\overline{\text{OS}}}$  geliefert, die größten Werte durch die Schemata mit  $m_t^{\overline{\text{DR}}}$ .

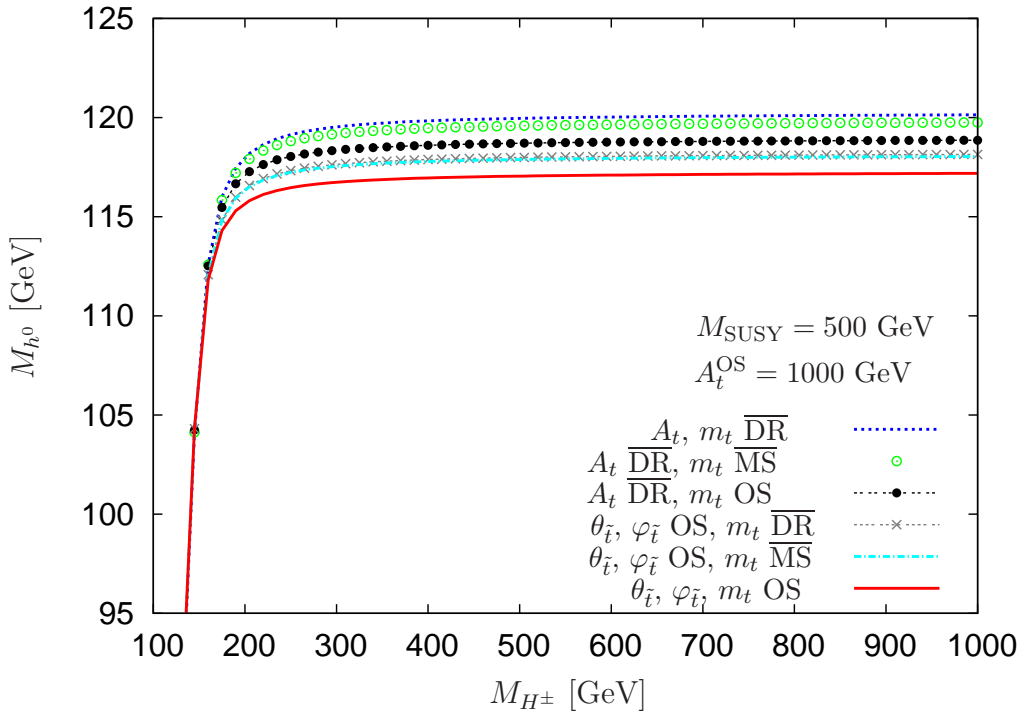
Für Werte von  $m_{\tilde{t}_1} > 1100$  GeV ist keine Umrechnung der Parameter von „ $\theta_{\tilde{t}}, \varphi_{\tilde{t}}, m_t$  OS“ zu „ $A_t \overline{\text{DR}}, m_t$  OS“ möglich, da in diesem Fall gilt:

$$2m_t^{\text{OS}}|(A_t^{\overline{\text{DR}}} - \mu \cot \beta)| > |m_{\tilde{t}_1}^2 - m_{\tilde{t}_2}^2|, \quad (10.12)$$

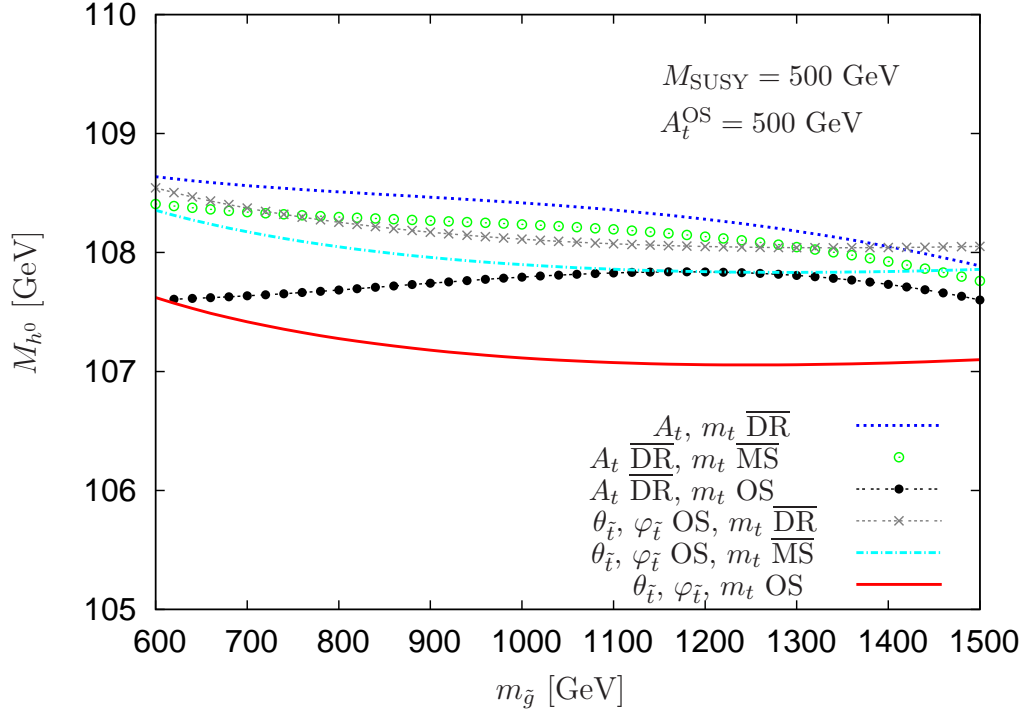
was

$$\sin(2\theta_{\tilde{t}}) > 1 \quad (10.13)$$

bedeuten würde.



**Abb. 10.3.:** Abhängigkeit der Higgs-Masse  $M_{h^0}$  von der Masse des geladenen Higgs-Bosons  $M_{H^\pm}$ . Für die Brechungsparameter wurde  $M_{\text{SUSY}} = M_L = M_{\tilde{f} \neq \tilde{t}_R} = M_{\tilde{t}_R} - a = 500$  GeV angenommen.



**Abb. 10.4.:** Abhängigkeit der Higgs-Masse  $M_{h^0}$  von der Gluino-Masse  $m_{\tilde{g}}$ . Die Brechungsparameter wurden als  $M_{SUSY} = M_L = M_{\tilde{f} \neq \tilde{t}_R} = M_{\tilde{t}_R} - a = 500$  GeV angenommen. Für den A-Parameter im Top-Sektor wurde  $A_t^{OS} = 500$  GeV gewählt.

Abb. 10.3 zeigt die Higgs-Masse  $M_{h^0}$  in Abhängigkeit von der Masse des geladenen Higgs-Bosons  $M_{H^\pm}$ . Wie in Abb. 10.2 wurden bei der Analyse die Renormierungsschemata „ $A_t, m_t \overline{DR}$ “, „ $A_t \overline{DR}, m_t OS$ “, „ $\theta_{\tilde{t}}, \varphi_{\tilde{t}}, m_t OS$ “ und „ $\theta_{\tilde{t}}, \varphi_{\tilde{t}} OS, m_t \overline{DR}$ “ sowie die Top-Quark-Masse im  $\overline{MS}$ -Schema „ $A_t \overline{DR}, m_t \overline{MS}$ “ und „ $\theta_{\tilde{t}}, \varphi_{\tilde{t}} OS, m_t \overline{MS}$ “ verwendet. Alle Kurven zeigen qualitativ das gleiche Verhalten. Für  $M_{H^\pm} > 300$  GeV sind die Werte von  $M_{h^0}$  nahezu konstant, dagegen fallen sie stark ab für  $M_{H^\pm} < 200$  GeV. Die mit einem  $\overline{DR}$ -renormierten A-Parameter berechneten Werte von  $M_{h^0}$  sind größer als bei Verwendung eines abhängigen A-Parameters. Bei gleicher A-Parameter-Renormierung liefert die mit  $m_t^{\overline{DR}}$  durchgeführte Berechnung von  $M_{h^0}$  die größten Werte. Bei Verwendung der Top-Quark-Masse im On-Shell-Schema erhält man die kleinsten Werte. Der durch die Verwendung verschiedener Renormierungsschemata verursachte Unterschied beträgt bis zu 3 GeV für große  $M_{H^\pm}$ .

Die Abhängigkeit der Higgs-Masse  $M_{h^0}$  von der Gluino-Masse  $m_{\tilde{g}}$  ist in Abb. 10.4 dargestellt. Die renormierten Higgs-Selbstenergien wurden unter Verwendung der vier Renormierungsschemata „ $A_t, m_t \overline{DR}$ “, „ $A_t \overline{DR}, m_t OS$ “, „ $\theta_{\tilde{t}}, \varphi_{\tilde{t}}, m_t OS$ “ und „ $\theta_{\tilde{t}}, \varphi_{\tilde{t}} OS, m_t \overline{DR}$ “ berechnet. Außerdem wurden die Renormierungsschemata, in denen die Top-Quark-Masse on-shell renormiert ist, mit einer Reparametrisierung verwendet, so daß die Top-Quark-Masse im  $\overline{MS}$ -Schema als Input-Wert genutzt werden konnte: „ $A_t \overline{DR}, m_t \overline{MS}$ “

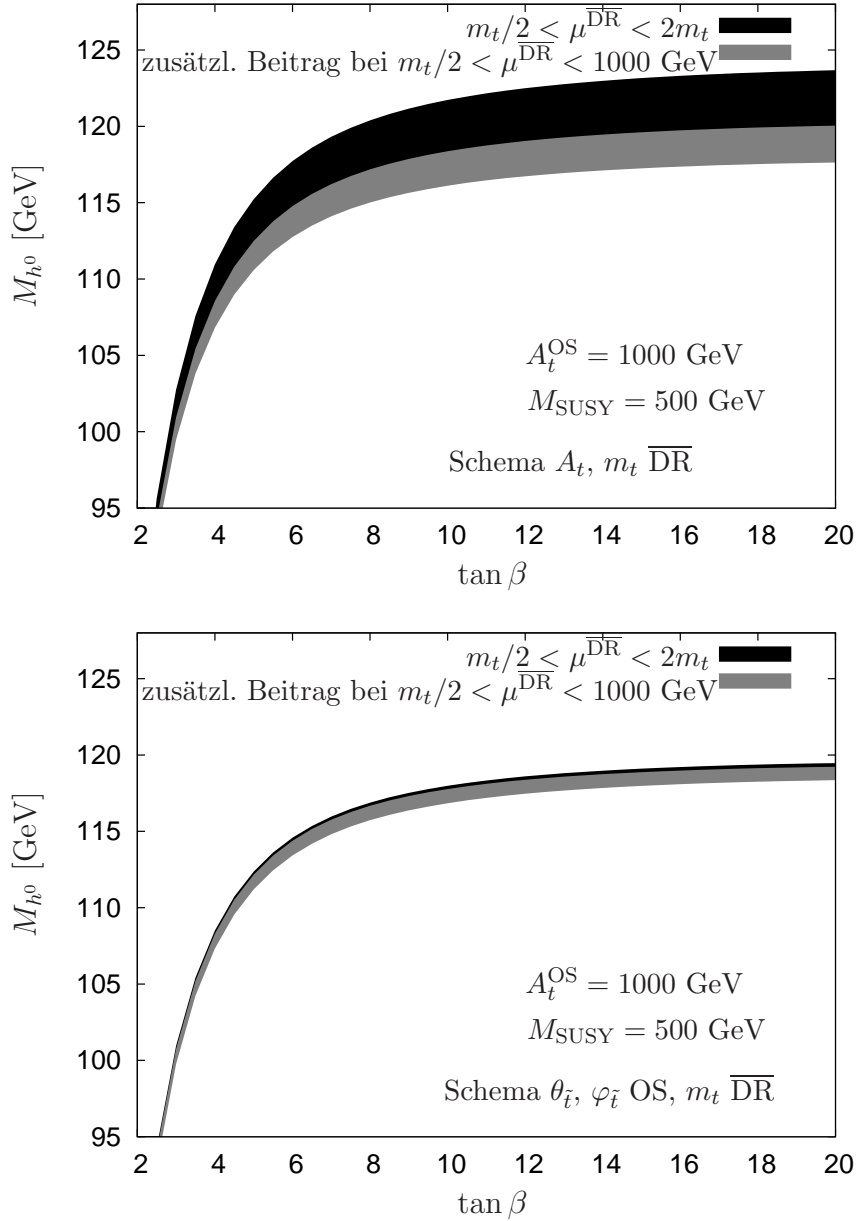
## 10. Higgs-Massen mit $\mathcal{O}(\alpha_t\alpha_s)$ -Beiträgen im komplexen MSSM

und „ $\theta_{\tilde{t}}, \varphi_{\tilde{t}}, m_t \overline{\text{MS}}$ “. Werte für Gluino-Massen  $m_{\tilde{g}} < 600$  GeV werden nicht aufgeführt, da in diesem Parameterbereich eine Umrechnung der Input-Parameter nicht für alle Schemata möglich ist (siehe (10.12) und (10.13)). Im gezeigten Parameterbereich ist die Änderung von  $M_{h^0}$  mit der Gluino-Masse gering; sie beträgt maximal 1 GeV. Von der Größenordnung  $\mathcal{O}(1 \text{ GeV})$  ist auch der Unterschied zwischen den Ergebnissen für  $M_{h^0}$ , die mit unterschiedlichen Renormierungsschemata berechnet worden sind. Die Effekte höherer Ordnung entkoppeln jedoch nicht für große Gluino-Masse. Bei Verwendung der Renormierungsschemata „ $\theta_{\tilde{t}}, \varphi_{\tilde{t}}, m_t \text{ OS}$ “ und „ $\theta_{\tilde{t}}, \varphi_{\tilde{t}}, m_t \overline{\text{DR}}$ “ wachsen die Korrekturen der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_t\alpha_s)$  logarithmisch, bei Verwendung der Schemata „ $A_t, m_t \overline{\text{DR}}$ “ und „ $A_t \overline{\text{DR}}, m_t \text{ OS}$ “ sogar linear mit  $m_{\tilde{g}}$  an.

In Abb. 10.1 bis Abb. 10.4 wurde die Masse des leichtesten Higgs-Bosons unter Berücksichtigung von Korrekturen bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_t\alpha_s)$  in Abhängigkeit von unterschiedlichen Parametern dargestellt. Dabei wurden die Korrekturen für verschiedene Renormierungsschemata des Top-Stop-Sektors ausgewertet. Es ergaben sich Unterschiede in den Werten der Higgs-Masse  $M_{h^0}$  von bis zu maximal 3 GeV. Dieser Unterschied kann als Unsicherheit in der Vorhersage der Higgs-Masse  $M_{h^0}$ , verursacht durch den Abbruch der Störungsreihe, interpretiert werden. Die hier gefundene Größe der Unsicherheit ist in Einklang mit den Ergebnissen der in [16] durchgeführten Abschätzung.

### 10.2.2. Untersuchung der $\mu^{\overline{\text{DR}}}$ -Abhängigkeit für reelle Parameter

In Abb. 10.5 wird die Abhängigkeit der Higgs-Masse  $M_{h^0}$  unter Berücksichtigung von Korrekturen bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_t\alpha_s)$  von  $\tan\beta$  und der Renormierungsskala  $\mu^{\overline{\text{DR}}}$  dargestellt. Der Top-Sektor wurde durch das Renormierungsschema „ $A_t, m_t \overline{\text{DR}}$ “ bzw. durch das Renormierungsschema „ $\theta_{\tilde{t}}, \varphi_{\tilde{t}}, m_t \overline{\text{DR}}$ “ festgelegt. Die Abhängigkeit der Ein-Schleifen-Selbstenergien von der Renormierungsskala  $\mu^{\overline{\text{DR}}}$  aufgrund der Renormierung von  $\tan\beta$  und der Z-Faktoren im  $\overline{\text{DR}}$ -Schema wurde vernachlässigt. Die Ein-Schleifen-Selbstenergien wurden an der Renormierungsskala  $\mu^{\overline{\text{DR}}} = m_t, m_t = 174.3$  GeV, ausgewertet; sie hängen von  $\mu^{\overline{\text{DR}}}$  nur über die Werte von  $m_t^{\overline{\text{DR}}}$  bzw. von  $A_t^{\overline{\text{DR}}}$  ab. Die Renormierungsskala wurde von  $\mu^{\overline{\text{DR}}} = m_t/2$  bis  $\mu^{\overline{\text{DR}}} = 2m_t$  variiert. Die daraus resultierenden Werte für die Higgs-Masse  $M_{h^0}$  sind durch das schwarze Band dargestellt. Die schwarze und die graue Fläche zusammen zeigen den Wertebereich von  $M_{h^0}$  bei einer Änderung der Renormierungsskala von  $\mu^{\overline{\text{DR}}} = m_t/2$  bis  $\mu^{\overline{\text{DR}}} = 1000$  GeV. Die Skalenabhängigkeit von  $M_{h^0}$  steigt mit großem  $\tan\beta$  leicht an. Sie beträgt bei Verwendung des „ $A_t, m_t \overline{\text{DR}}$ “-Schemas bis zu  $\pm 2$  GeV bzw.  $\pm 3$  GeV bei einer Skalenvariation von  $m_t/2 < \mu^{\overline{\text{DR}}} < 2m_t$  bzw.  $m_t/2 < \mu^{\overline{\text{DR}}} < 1000$  GeV für größere  $\tan\beta$ . Die Werte von  $M_{h^0}$ , die unter Berücksichtigung der  $\mathcal{O}(\alpha_t\alpha_s)$ -Korrekturen mit einem im „ $\theta_{\tilde{t}}, \varphi_{\tilde{t}}, m_t \overline{\text{DR}}$ “-Schema renormierten Top-Stop-Sektor berechnet wurden, zeigen eine wesentlich geringere Abhängigkeit von der Renormierungsskala. Man erhält eine Änderung von  $\pm 0.1$  GeV bzw.  $\pm 0.5$  GeV bei einer Variation der Renormierungsskala von  $m_t/2 < \mu^{\overline{\text{DR}}} < 2m_t$  bzw.  $m_t/2 < \mu^{\overline{\text{DR}}} < 1000$  GeV für größere  $\tan\beta$ . Ein Vergleich der  $\mu^{\overline{\text{DR}}}$ -Abhängigkeit in beiden Schemata zeigt, daß in diesem Parameterbereich die  $\mu^{\overline{\text{DR}}}$ -



**Abb. 10.5.:** Abhängigkeit der Higgs-Masse  $M_{h^0}$  von der Renormierungsskala  $\mu^{\overline{\text{DR}}}$  und  $\tan \beta$  für  $M_{\text{SUSY}} = M_L = M_{\tilde{f} \neq \tilde{t}_R} = M_{\tilde{t}_R} - a = 500$  GeV. Zur Berechnung von  $M_{h^0}$  wurde im oberen Schaubild das Renormierungsschema „ $A_t, m_t \overline{\text{DR}}$ “ und im unteren Schaubild das Renormierungsschema „ $\theta_{\tilde{t}}, \varphi_{\tilde{t}} \text{ OS}, m_t \overline{\text{DR}}$ “ verwendet. Die schwarzen Flächen stellen die Werte der Higgs-Masse  $M_{h^0}$  dar, die man bei einer Variation der Renormierungsskala  $m_t/2 < \mu^{\overline{\text{DR}}} < 2m_t$ ,  $m_t = 174.3$  GeV, erhält. Die schwarzen und grauen Flächen zusammen zeigen die Werte von  $M_{h^0}$ , die sich durch Änderung der Renormierungsskala  $m_t/2 < \mu^{\overline{\text{DR}}} < 1000$  GeV ergeben.

## 10. Higgs-Massen mit $\mathcal{O}(\alpha_t\alpha_s)$ -Beiträgen im komplexen MSSM

Abhängigkeit hauptsächlich durch den im  $\overline{\text{DR}}$ -Schema gewählten A-Parameter verursacht wird.

### 10.3. Untersuchung der Phasen-Abhängigkeit

Die Phasen-Abhängigkeit der Higgs-Massen wird in diesem Abschnitt unter Berücksichtigung von Korrekturen höherer Ordnung untersucht. In den Zwei-Schleifen-Selbstenergien der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_t\alpha_s)$  treten die komplexen Parameter  $\mu$ ,  $A_t$  und  $M_3 = m_{\tilde{g}}e^{i\varphi_{\tilde{g}}}$  auf. Die Phase von  $\mu$  muß nach [95] in weiten Parameterbereichen klein sein, um nicht die Einschränkungen durch die experimentellen Werte der elektrischen Dipolmomente von Leptonen, Nukleonen und Atomen zu verletzen. Deshalb wird im folgenden die Phase von  $\mu$  als  $\varphi_\mu = 0$  angenommen und nur der Einfluß der Phasen des A-Parameters  $\varphi_{A_t}$  und des  $M_3$ -Brechungsparameters  $\varphi_{\tilde{g}}$  auf die Higgs-Masse analysiert. Der Top-Sektor wird durch das Renormierungsschema „ $\theta_{\tilde{t}}$ ,  $\varphi_{\tilde{t}}$ ,  $m_t$  OS“ festgelegt. Da in diesem Schema keine numerischen Instabilitäten durch gleiche Wahl von links- und rechtshändigen Parameter auftreten, wird im folgenden  $a = 0$  GeV angenommen. Die anderen SUSY-Parameter werden, wenn nicht explizit anders angegeben, gemäß Tabelle 10.1 gewählt. Weitere Renormierungsschemata werden in diesem Abschnitt nicht berücksichtigt. Im folgenden gilt  $A_t = A_t^{\text{OS}}$ .

In Abb. 10.6 ist die Masse des leichtesten Higgs-Bosons  $M_{h_1}$  in Abhängigkeit von der Phase des A-Parameters  $\varphi_{A_t}$  bzw. von  $\varphi_{X_t}$  dargestellt; da im Fall komplexer Parameter CP-gerade und -ungerade Zustände mischen, ist das leichteste Higgs-Boson nicht mehr das CP-gerade  $h^0$ , sondern der Masseneigenzustand  $h_1$  mit CP-geraden und -ungeraden Anteilen (siehe (7.80)). Für den Wert der Masse des geladenen Higgs-Bosons wurde  $M_{H^\pm} = 150$  GeV gewählt. Der Parameter  $X_t$  ist definiert durch

$$X_t := A_t - \mu^* \cot \beta \quad (10.14)$$

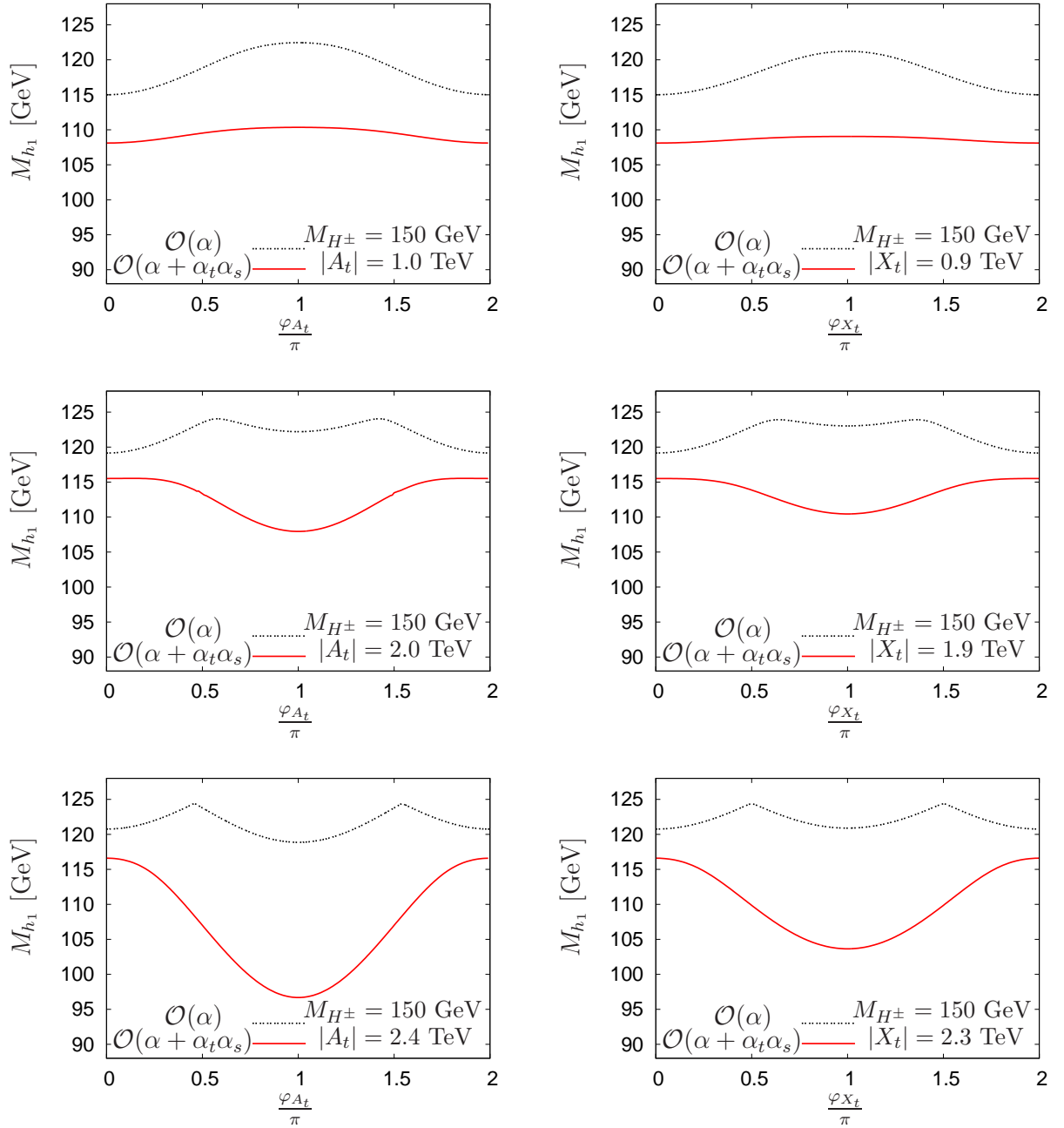
und gibt die Stärke der Mischung der Top-Squarks an. Mit dem Parameter  $X_t$  kann das Nebendiagonalelement der Massen-Matrix der Top-Squarks (5.10) folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$(\mathcal{M}_{\tilde{t}})_{12} = m_t X_t^* . \quad (10.15)$$

Die Variation der Phase des A-Parameters  $\varphi_{A_t}$  hat eine Änderung des Betrags von  $X_t$  zur Folge. Da die Stärke der Mischung der Squarks einen großen Einfluß auf den Wert von  $M_{h_1}$  hat, ist der Vergleich der Werte von  $M_{h_1}$  bei einer Variation von  $\varphi_{A_t}$  mit konstantem  $|A_t|$  bzw. bei einer Änderung von  $\varphi_{X_t}$  mit konstantem  $|X_t|$ , also mit konstanten Top-Squark-Massen, interessant. Aufgrund der verschwindenden Phase von  $\mu$  ändert sich  $|A_t|$  mit  $\varphi_{X_t}$  bei konstantem  $|X_t|$ . In Abb. 10.6 ist in den rechten Schaubildern der Betrag von  $X_t$  so gewählt, daß für verschwindende Phasen die Werte von  $A_t$  in den nebeneinander stehenden Schaubildern übereinstimmen. Innerhalb eines Schaubilds sind jeweils die Werte der Higgs-Masse  $M_{h_1}$  unter Berücksichtigung der Ein-Schleifen-Korrekturen  $\mathcal{O}(\alpha)$  (gestrichelt)



### 10.3. Untersuchung der Phasen-Abhängigkeit



**Abb. 10.6.:** Abhängigkeit der Higgs-Masse  $M_{h_1}$  von der Phase des A-Parameters  $\varphi_{A_t}$  (linke Spalte) bzw. von der Phase  $\varphi_{X_t}$  (rechte Spalte) für unterschiedliche Werte von  $|A_t|$  bzw.  $|X_t|$ .  $X_t$  ist gegeben durch  $X_t := A_t - \mu^* \cot \beta$  und gibt die Stärke der Mischung der Top-Squarks an. Bei der Berechnung von  $M_{h_1}$  wurden Korrekturen bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha)$  bzw.  $\mathcal{O}(\alpha_t \alpha_s)$  berücksichtigt. Für den Wert der Masse des geladenen Higgs-Bosons wird  $M_{H^\pm} = 150$  GeV angenommen. Die weiteren SUSY-Parameter sind, bis auf  $a = 0$  GeV, gemäß Tabelle 10.1 gewählt.

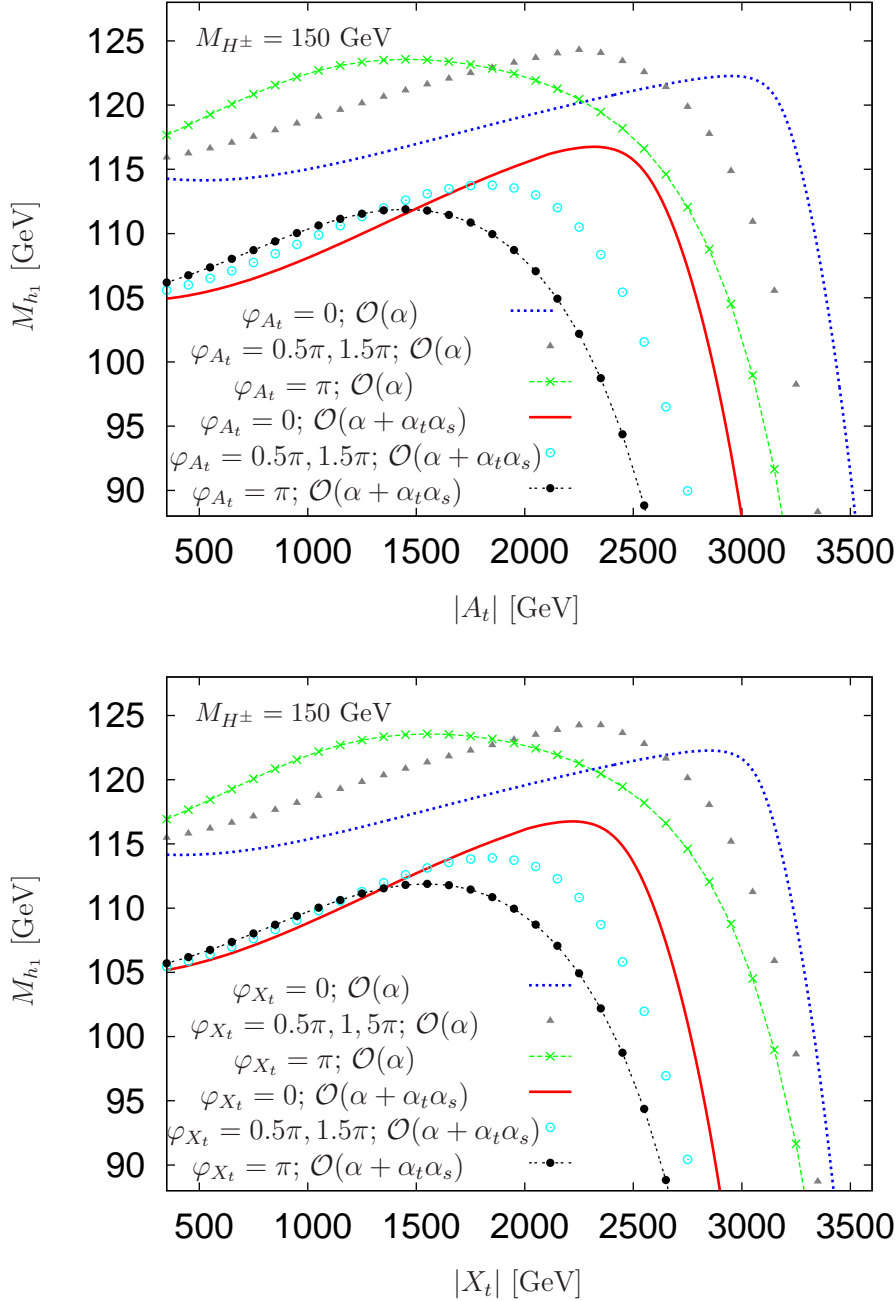
## 10. Higgs-Massen mit $\mathcal{O}(\alpha_t\alpha_s)$ -Beiträgen im komplexen MSSM

bzw. der Ein- und Zwei-Schleifen-Korrekturen bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_t\alpha_s)$  (durchgezogen) aufgetragen.

Qualitativ verhalten sich die Kurven der Schaubilder innerhalb einer Zeile gleich. Für  $|A_t| = 1000$  GeV bzw.  $|X_t| = 900$  GeV steigen die Werte der Higgs-Masse  $M_{h_1}$  sowohl in Ein-Schleifen-Ordnung als auch in Zwei-Schleifen-Ordnung mit der Änderung der Phasen  $\varphi_{A_t}$  bzw.  $\varphi_{X_t}$  von null bis  $\pi$  an. Die Größe der Änderung von  $M_{h_1}$  mit  $\varphi_{X_t}$  bzw.  $\varphi_{A_t}$  beträgt etwa 6 GeV bzw. 7.5 GeV in der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha)$  und ungefähr 1 GeV bzw. 2 GeV in der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_t\alpha_s)$ . Auffällig ist das Verhalten der Kurven in den Schaubildern mit  $|A_t| = 2000$  GeV bzw.  $|X_t| = 1900$  GeV und  $|A_t| = 2400$  GeV bzw.  $|X_t| = 2300$  GeV. Die Kurven der Werte von  $M_{h_1}$  inklusive Zwei-Schleifen-Korrekturen haben ein Minimum bei  $\varphi_{A_t} = \pi$  bzw.  $\varphi_{X_t} = \pi$ . Werden in der Rechnung nur die Korrekturen bis zur Ein-Schleifen-Ordnung mitgenommen, so ist die Phasen-Abhängigkeit etwas anders. Die Kurven der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha)$  weisen neben dem Minimum bei  $\pi$  zwei Maxima bei ungefähr  $\pi/2$  bzw.  $3\pi/2$  auf.

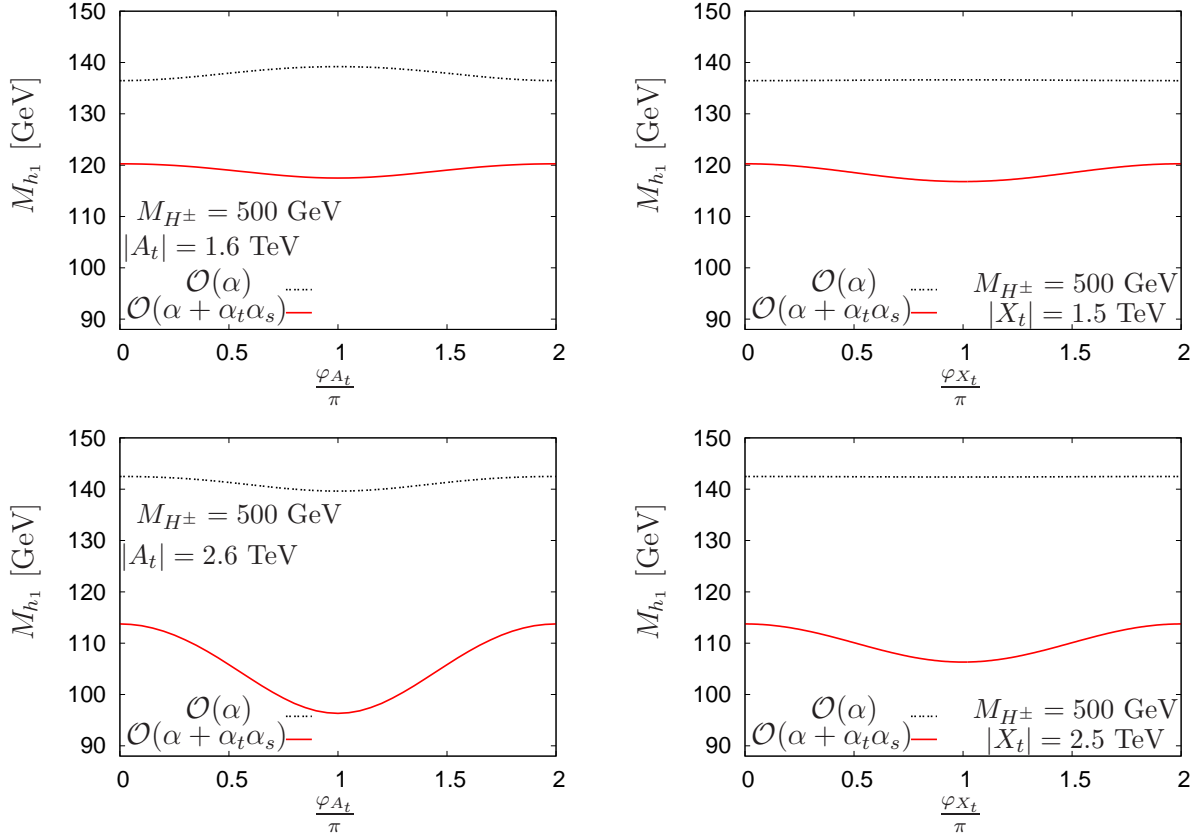
Dieses Verhalten läßt sich anhand der Abb. 10.7 erklären: In den Schaubildern in Abb. 10.7 ist die Higgs-Masse  $M_{h_1}$  in Abhängigkeit vom Betrag des A-Parameters  $|A_t|$  bzw. von  $|X_t|$  für unterschiedliche Werte der dazugehörigen Phasen  $\varphi_{A_t}$  und  $\varphi_{X_t}$  aufgetragen. Für verschiedene Werte der Phasen verschieben sich die Maxima der Kurven; besonders deutlich zeigt sich dieses Verhalten in den Kurven, die zu den Ein-Schleifen-Werten von  $M_{h_1}$  gehören. Durch die Verschiebung der Maxima ändert sich die Reihenfolge der Kurven der Ein-Schleifen- bzw. Zwei-Schleifen-Werte von  $M_{h_1}$ , die zu unterschiedlichen Werten der Phase gehören, mit  $|A_t|$  bzw.  $|X_t|$ . Beispielsweise ist bei  $|A_t| = 2000$  GeV der Ein-Schleifen-Wert für  $\varphi_{A_t} = \pi/2$  bzw.  $\varphi_{A_t} = 3\pi/2$  größer als der entsprechende Wert für  $\varphi_{A_t} = \pi$  und dieser wiederum größer als der Wert für  $\varphi_{A_t} = 0$ . Für  $|A_t| = 2400$  GeV gehört der größte Ein-Schleifen-Wert von  $M_{h_1}$  zur Phase  $\varphi_{A_t} = \pi/2$  bzw.  $\varphi_{A_t} = 3\pi/2$ ; der zur Phase  $\varphi_{A_t} = \pi$  gehörende Ein-Schleifen-Wert ist jedoch kleiner als der entsprechende Wert für  $\varphi_{A_t} = 0$ . In Zwei-Schleifen-Ordnung ist die Größe der Verschiebung der Maxima geringer als auf Ein-Schleifen-Niveau. Außerdem liegen die Maxima bei kleineren Werten von  $|A_t|$  bzw.  $|X_t|$ . Die Größe der Maxima ist in Zwei-Schleifen-Ordnung von der Phase abhängig (in Ein-Schleifen-Ordnung ist die Größe der Maxima von  $M_{h_1}$  für verschiedene Phasen nahezu gleich); die Werte der Higgs-Masse  $M_{h_1}$  an den Stellen der Maxima fallen bei einer Variation von  $\varphi_{A_t}$  bzw.  $\varphi_{X_t}$  von null bis  $\pi$  mit der Phase ab. Weiter ist der starke Abfall der Higgs-Masse  $M_{h_1}$  mit großen  $|A_t|$  bzw.  $|X_t|$  in Zwei-Schleifen-Ordnung zu kleineren  $|A_t|$  und  $|X_t|$  verschoben. Diese Unterschiede wirken sich in Abb. 10.6 in einem unterschiedlichen Phasenverhalten der Higgs-Masse  $M_{h_1}$  in Ein- bzw. Zwei-Schleifen-Ordnung aus.

Der Vergleich der Abhängigkeit der Higgs-Masse  $M_{h_1}$  von  $|A_t|$  und  $|X_t|$  in Abb. 10.7 zeigt, daß die Werte von  $M_{h_1}$  stärker unter der Änderung von  $\varphi_{A_t}$  als unter der von  $\varphi_{X_t}$  variieren. Die Variation von  $\varphi_{X_t}$  bewirkt keine Änderung der Squark-Mischung und der Squark-Massen; der Betrag von  $|A_t|$  wird jedoch verändert, da  $\varphi_\mu = 0$  angenommen wird.  $M_{h_1}$  hängt also stärker von der Squark-Mischung und den Squark-Massen als vom Betrag des A-Parameters  $|A_t|$ , der in den Kopplungen von Squarks an Higgs-Bosonen auftritt,



**Abb. 10.7.:** Abhängigkeit der Higgs-Masse  $M_{h_1}$  von  $|A_t|$  (oberes Schaubild) bzw.  $|X_t|$  (unteres Schaubild) für unterschiedliche Werte der Phasen  $\varphi_{A_t}$  bzw.  $\varphi_{X_t}$ . Die Werte von  $M_{h_1}$  wurden unter Berücksichtigung der Ein-Schleifen-Korrekturen  $\mathcal{O}(\alpha)$  bzw. der Ein- und Zwei-Schleifen-Korrekturen  $\mathcal{O}(\alpha + \alpha_t \alpha_s)$  ausgewertet. Für die Masse des geladenen Higgs-Bosons wurde die Masse  $M_{H^\pm} = 150$  GeV angenommen. Die weiteren SUSY-Parameter sind, bis auf  $a = 0$  GeV, gemäß Tabelle 10.1 gewählt.

10. Higgs-Massen mit  $\mathcal{O}(\alpha_t\alpha_s)$ -Beiträgen im komplexen MSSM



**Abb. 10.8.:** Abhängigkeit der Higgs-Masse  $M_{h_1}$  von der Phase  $\varphi_{A_t}$  (linke Spalte) bzw. von der Phase  $\varphi_{X_t}$  (rechte Spalte) für unterschiedliche Werte von  $|A_t|$  bzw.  $|X_t|$ . Es sind jeweils Werte für die Ein-Schleifen-Masse  $\mathcal{O}(\alpha)$  und die Zwei-Schleifen-Masse  $\mathcal{O}(\alpha + \alpha_t\alpha_s)$  aufgetragen. Der Wert der Masse des geladenen Higgs-Bosons ist  $M_{H^\pm} = 500$  GeV. Die weiteren SUSY-Parameter sind, bis auf  $a = 0$  GeV, gemäß Tabelle 10.1 gewählt.

ab. Insbesondere im Bereich stark abfallender Werte von  $M_{h_1}$  liegen die Kurven bei der Variation von  $|X_t|$  dichter zusammen als bei der Änderung von  $|A_t|$ . Das entspricht einer geringeren Phasen-Abhängigkeit. Dennoch zeigen die Werte von  $M_{h_1}$  in dem Bereich großer  $|X_t|$  aufgrund des Abfalls von  $M_{h_1}$  eine starke Phasen-Abhängigkeit. Für Werte  $|X_t| \lesssim 1500$  GeV dagegen hängt die Higgs-Masse  $M_{h_1}$  nur gering von der Phase  $\varphi_{X_t}$  ab. Mit der Phase ändert sich  $M_{h_1}$  nur um bis zu etwa 1 GeV.

Abb. 10.8 stellt die Phasenabhängigkeit der Higgs-Masse  $M_{h_1}$  analog zu Abb. 10.6 dar. Der Wert der Masse des geladenen Higgs-Bosons liegt jedoch bei  $M_{H^\pm} = 500$  GeV. Die Ein-Schleifen-Masse hat bei der Variation von  $\varphi_{A_t}$  ein Maximum bei  $\varphi_{A_t} = \pi$  für  $|A_t| = 1600$  GeV und an der gleichen Stelle ein Minimum für  $|A_t| = 2600$  GeV. Dagegen ändert sich der Ein-Schleifen-Wert von  $M_{h_1}$  mit  $\varphi_{X_t}$  kaum; die Größe der Änderung ist von der Ordnung  $\mathcal{O}(0.1$  GeV). Die Kurven der Zwei-Schleifen-Massen besitzen alle ein

### 10.3. Untersuchung der Phasen-Abhängigkeit

Minimum bei  $\varphi_{A_t} = \pi$  bzw.  $\varphi_{X_t} = \pi$ . Die Änderung kann bei Variation von  $\varphi_{A_t}$  sowie bei Variation von  $\varphi_{X_t}$  mehrere GeV betragen; für  $|A_t| = 1600$  GeV bzw.  $|X_t| = 1500$  GeV beträgt sie etwa 3 GeV bzw. 3.5 GeV. Für große  $|A_t|$  bzw.  $|X_t|$  ändert sich die Higgs-Masse  $M_{h_1}$  auf Zwei-Schleifen-Niveau mit der Variation der Phasen stärker. In diesem Parameterbereich fällt  $M_{h_1}$  stark mit  $|A_t|$  bzw.  $|X_t|$  ab. Dieses Verhalten ist in Abb. 10.9 veranschaulicht.

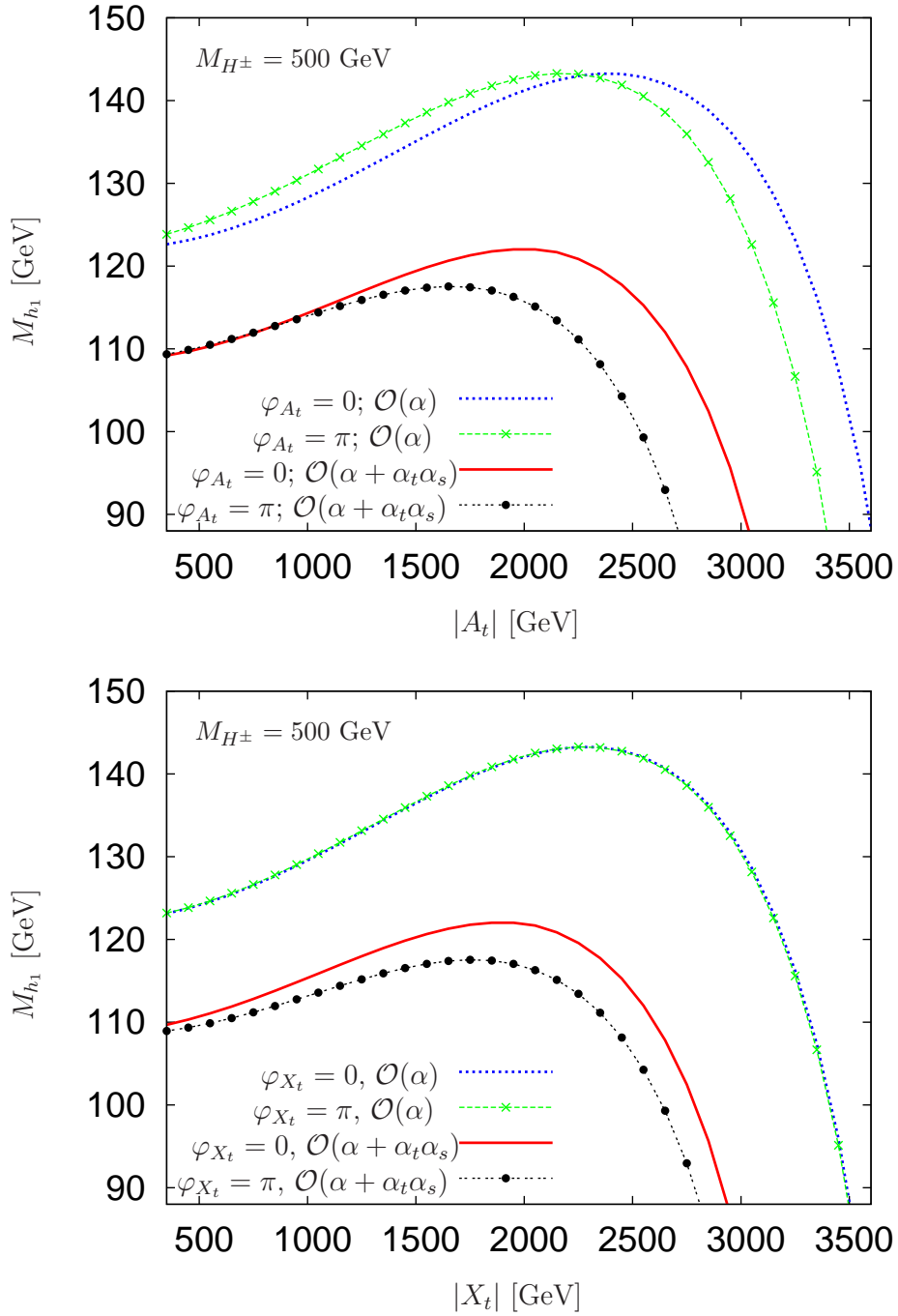
Abb. 10.9 zeigt die Abhängigkeit der Higgs-Masse  $M_{h_1}$  von  $|A_t|$  (oberes Schaubild) bzw.  $|X_t|$  (unteres Schaubild) für unterschiedliche Werte von  $\varphi_{A_t}$  bzw.  $\varphi_{X_t}$  entsprechend der Abb. 10.7, jedoch für einen größeren Wert der Masse des geladenen Higgs-Bosons als in Abb. 10.7. In Abb. 10.9 wird  $M_{H^\pm} = 500$  GeV angenommen. Bei der Variation von  $|X_t|$  stimmen die Ein-Schleifen-Werte von  $M_{h_1}$  für unterschiedliche  $\varphi_{X_t}$  nahezu überein. Das in Abb. 10.8 gefundene Phasen-Verhalten wird also bestätigt. Wird jedoch  $|A_t|$  variiert, so erhält man wieder eine Verschiebung der Maxima der Ein-Schleifen-Werte von  $M_{h_1}$  für unterschiedliche Phasen wie in Abb. 10.7; wenn auch die Größe der Verschiebung geringer ist. Auf Zwei-Schleifen-Niveau sind die Maxima der Werte von  $M_{h_1}$  bei Variation von  $|A_t|$  ebenfalls verschoben. Bei Änderung von  $|X_t|$  ist die Abhängigkeit der Maximumstellen von der Phase wesentlich geringer als bei der Änderung von  $|A_t|$ . Für das in Abb. 10.8 beobachtete Phasenverhalten ist jedoch ausschlaggebend, daß die Größe des Maximums vom Wert der Phase von  $\varphi_{A_t}$  abhängt. Die Größe des Maximums fällt für einen verschwindenden Wert der Phasen deutlich größer aus als für den Wert  $\pi$ . Der Unterschied der Größe der Maxima beträgt im oberen wie im unteren Schaubild etwa 4.5 GeV.

In Abb. 10.10 wird die Abhängigkeit der Masse des leichtesten Higgs-Bosons  $M_{h_1}$  von der Phase  $\varphi_{A_t}$  bzw.  $\varphi_{X_t}$  für unterschiedliche Werte von  $\tan\beta$ , der Masse des geladenen Higgs-Bosons  $M_{H^\pm}$  und des Betrags des A-Parameters  $|A_t|$  bzw. von  $|X_t|$  untersucht. Bei der Berechnung der Higgs-Masse  $M_{h_1}$  sind Korrekturen bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_t\alpha_s)$  eingeschlossen. Der Wert von  $|X_t|$  ist so gewählt, daß für  $\tan\beta = 10$  bei verschwindenden Phasen  $|A_t| = |X_t|$  in den nebeneinander stehenden Schaubildern gilt. Bei anderen Werten von  $\tan\beta$  gilt dies natürlich nicht mehr.

Die Werte von  $M_{h_1}$  nehmen bei konstanter Masse  $M_{H^\pm}$  mit  $\tan\beta$  ab. Größere Werte der geladenen Higgs-Masse liefern größere Werte der Higgs-Masse  $M_{h_1}$  bei festgehaltenem  $\tan\beta$ . Die Kurve mit  $\tan\beta = 10$  und  $M_{H^\pm} = 150$  GeV liegt über der Kurve mit  $\tan\beta = 3$  und  $M_{H^\pm} = 500$  GeV. Die Werte von  $M_{h_1}$  für  $\tan\beta = 3$  und  $M_{H^\pm} = 150$  GeV liegen teilweise im experimentell ausgeschlossenen Wertebereich; die untere experimentelle Schranke der Masse des leichtesten Higgs-Bosons beträgt ungefähr 93 GeV [17].

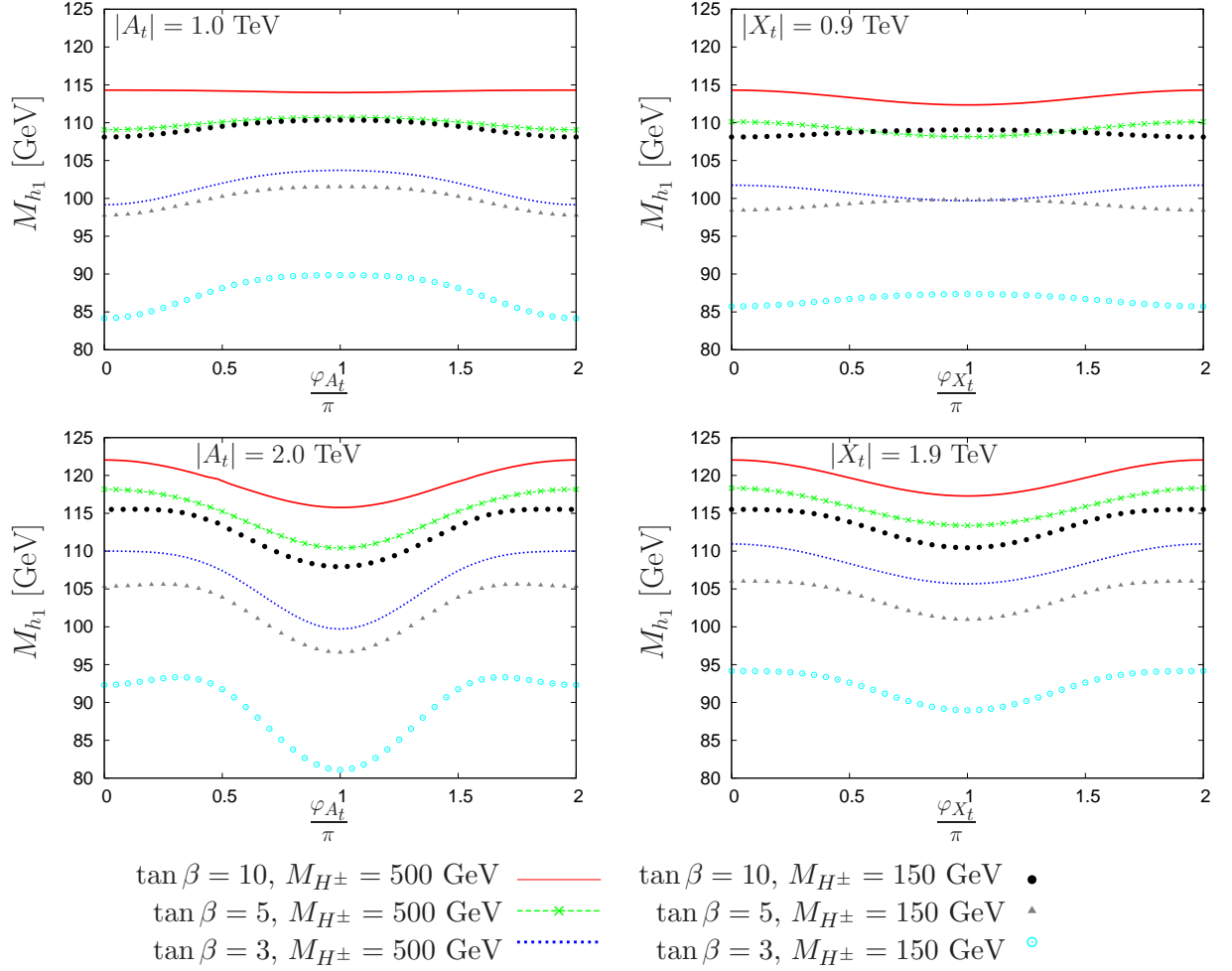
In den unteren Schaubildern für größere  $|A_t|$  bzw.  $|X_t|$  haben alle Kurven ein Minimum an der Stelle  $\varphi_{A_t} = \pi$  bzw.  $\varphi_{X_t} = \pi$ . Die Änderung von  $M_{h_1}$  mit der Phase  $\varphi_{A_t}$  steigt zu kleineren Werten von  $\tan\beta$  hin an und ist für  $\tan\beta = 3$  und  $M_{H^\pm} = 150$  GeV von der Ordnung  $\mathcal{O}(10$  GeV). In dem Bereich kleiner  $\tan\beta$  fällt die Higgs-Masse  $M_{h_1}$  stark mit  $\tan\beta$  ab (vgl. Abb. 10.1). Dieses Verhalten hat auch eine große Phasenabhängigkeit zur Folge. Die Größe der Änderung von  $M_{h_1}$  bei Variation von  $\varphi_{X_t}$  beträgt etwa 5 GeV für alle Kurven bei  $|X_t| = 1900$  GeV.

10. Higgs-Massen mit  $\mathcal{O}(\alpha_t\alpha_s)$ -Beiträgen im komplexen MSSM



**Abb. 10.9.:** Abhängigkeit der Higgs-Masse  $M_{h_1}$  unter Berücksichtigung der Korrekturen der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha)$  bzw. der Ordnungen  $\mathcal{O}(\alpha + \alpha_t\alpha_s)$  in Abhängigkeit von  $|A_t|$  (oberes Schaubild) bzw.  $|X_t|$  (unteres Schaubild) für unterschiedliche Werte der Phasen  $\varphi_{A_t}$  bzw.  $\varphi_{X_t}$ . Die weiteren SUSY-Parameter sind, bis auf  $a = 0$  GeV, gemäß Tabelle 10.1 gewählt.

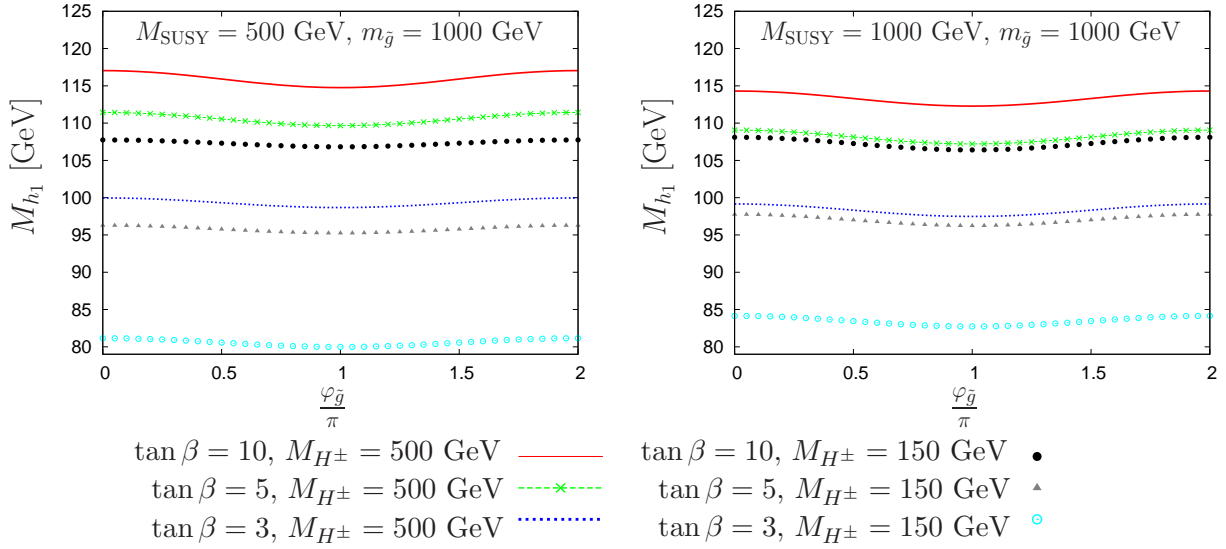
### 10.3. Untersuchung der Phasen-Abhängigkeit



**Abb. 10.10.:** Abhängigkeit der Higgs-Masse  $M_{h_1}$  von den Phasen  $\varphi_{A_t}$  (linke Spalte) bzw.  $\varphi_{X_t}$  (rechte Spalte) für unterschiedliche Werte von  $\tan\beta$ , der geladenen Higgs-Masse  $M_{H^\pm}$  und des Betrags des A-Parameters  $|A_t|$  bzw. von  $|X_t|$ . Bei der Berechnung der Werte der Higgs-Masse  $M_{h_1}$  sind Korrekturen bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_t\alpha_s)$  berücksichtigt. Die weiteren SUSY-Parameter sind, bis auf  $a = 0 \text{ GeV}$ , gemäß Tabelle 10.1 gewählt.

Für  $|A_t| = 1000 \text{ GeV}$  (Abb. 10.10 Schaubild links oben) steigt die Größe der Änderung der Higgs-Masse  $M_{h_1}$  mit der Phase  $\varphi_{A_t}$  zu kleineren Werten von  $\tan\beta$  und  $M_{H^\pm}$  hin an. Bis auf die Kurve für  $\tan\beta = 10$  und  $M_{H^\pm} = 500 \text{ GeV}$  haben alle Kurven ein Maximum bei  $\varphi_{A_t} = \pi$ . Die Higgs-Masse  $M_{h_1}$  ändert sich dabei mit der Phase  $\varphi_{A_t}$  um bis zu 6 GeV. Für  $\tan\beta = 10$  und  $M_{H^\pm} = 500 \text{ GeV}$  ist die Änderung von  $M_{h_1}$  mit  $\varphi_{A_t}$  nur von der Größenordnung  $\mathcal{O}(0.1 \text{ GeV})$ . Die dazugehörige Kurve hat ein Minimum. Der Vergleich mit Abb. 10.9 zeigt, daß man sich für  $|A_t| = 1000 \text{ GeV}$  nahe des Übergangs von einer Kurve mit Maximum zu einer mit Minimum befindet. Bei  $|X_t| = 900 \text{ GeV}$  haben alle Kurven für  $M_{H^\pm} = 150 \text{ GeV}$  ein Maximum und für  $M_{H^\pm} = 500 \text{ GeV}$  ein

10. Higgs-Massen mit  $\mathcal{O}(\alpha_t\alpha_s)$ -Beiträgen im komplexen MSSM



**Abb. 10.11.:** Abhängigkeit der Higgs-Masse  $M_{h_1}$  von der Gluino-Phase  $\varphi_{\tilde{g}}$  für unterschiedliche Werte der Masse des geladenen Higgs-Bosons  $M_{H^\pm}$ , des Brechungsparameter  $M_{\text{SUSY}}$  und von  $\tan\beta$ . Dabei ist  $M_{\text{SUSY}} = M_L = M_{\tilde{f}_R}$ . Bei der Berechnung der Higgs-Masse wurden Korrekturen bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_t\alpha_s)$  einschließlich berücksichtigt. Die weiteren SUSY-Parameter sind, bis auf  $a = 0$  GeV, gemäß Tabelle 10.1 gewählt.

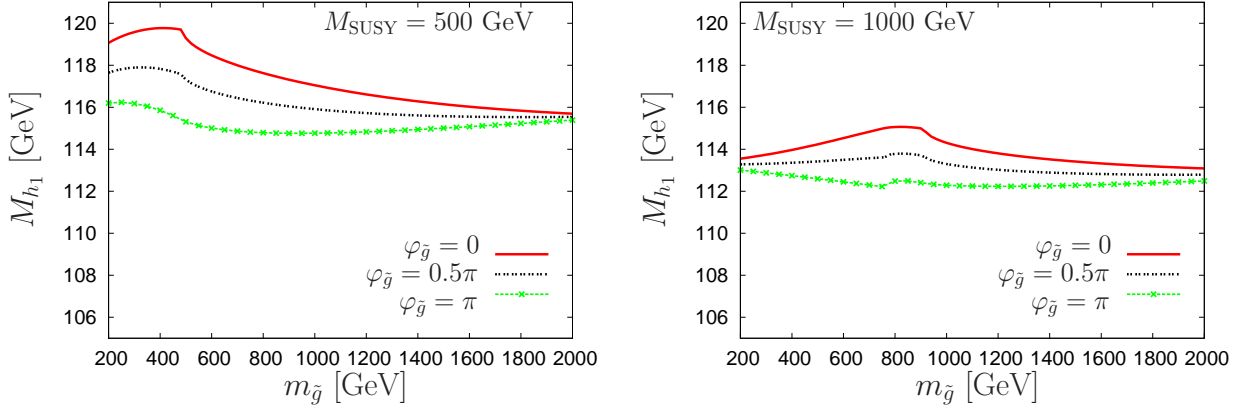
Minimum. Die Größe der Änderung von  $M_{h_1}$  mit der Phase  $\varphi_{X_t}$  beträgt etwa 1 GeV bis 2 GeV. Die Abb. 10.7 bzw. 10.9 stellen die Abhängigkeit der Higgs-Masse  $M_{h_1}$  von  $|X_t|$  für  $M_{H^\pm} = 150$  GeV bzw.  $M_{H^\pm} = 500$  GeV bei unterschiedlichen Phasen dar und zeigen ein ähnliches Phasenverhalten.

Abb. 10.11 veranschaulicht die Abhängigkeit der Higgs-Masse  $M_{h_1}$  von der Gluino-Phase  $\varphi_{\tilde{g}}$ . Dabei wurden unterschiedliche Werte für die Masse des geladenen Higgs-Bosons  $M_{H^\pm}$ , für den universell gewählten Brechungsparameter  $M_{\text{SUSY}}$  und für  $\tan\beta$  angenommen. Die Higgs-Masse  $M_{h_1}$  zeigt insgesamt keine starke Abhängigkeit von der Gluino-Phase  $\varphi_{\tilde{g}}$ . Die Änderung von  $M_{h_1}$  mit der Gluino-Phase  $\varphi_{\tilde{g}}$  beträgt 1 GeV bis 2 GeV. Für eine Masse des geladenen Higgs-Bosons von  $M_{H^\pm} = 500$  GeV ist die Phasen-Abhängigkeit etwas größer als für  $M_{H^\pm} = 150$  GeV. Bei einer Gluino-Phase von  $\varphi_{\tilde{g}} = \pi$  nimmt die Higgs-Masse  $M_{h_1}$  für alle untersuchten Werte ein Minimum an. Die Werte von  $M_{h_1}$  bei  $\tan\beta = 3$  und  $M_{H^\pm} = 150$  GeV liegen im experimentell ausgeschlossenen Bereich ( $M_{h_1}^{\text{exp}} \gtrsim 93$  GeV).

Zum Abschluß wird in Abb. 10.12 die Abhängigkeit der Higgs-Masse  $M_{h_1}$  von der Gluino-Masse  $m_{\tilde{g}}$  für unterschiedliche Werte der Gluino-Phase  $\varphi_{\tilde{g}}$  untersucht. Für den Brechungsparameter  $M_{\text{SUSY}}$  werden die Werte  $M_{\text{SUSY}} = 500$  GeV und  $M_{\text{SUSY}} = 1000$  GeV gewählt. Für beide Werte der Brechungsparameter gilt: Die Phasenabhängigkeit der Higgs-Masse ist im Bereich  $m_{\tilde{g}} = m_{\tilde{t}_1} - m_t$  und  $m_{\tilde{g}} = m_{\tilde{t}_2} - m_t$  aufgrund von Schwellen-Effekten am größten. Für  $M_{\text{SUSY}} = 500$  GeV liegt einer der Schwellenwerte bei etwa  $m_{\tilde{g}} = 177$  GeV, der



### 10.3. Untersuchung der Phasen-Abhängigkeit



**Abb. 10.12.:** Abhängigkeit der Higgs-Masse  $M_{h_1}$  von der Gluino-Masse  $m_{\tilde{g}}$  für  $M_{\text{SUSY}} = 500$  GeV (links) und  $M_{\text{SUSY}} = 1000$  GeV (rechts). Außerdem wurden unterschiedliche Werte für die Gluino-Phase  $\varphi_{\tilde{g}}$  gewählt. Für die Masse des geladenen Higgs-Bosons  $M_{H^\pm}$  wurde  $M_{H^\pm} = 500$  GeV angenommen. Die weiteren SUSY-Parameter sind, bis auf  $a = 0$  GeV, gemäß Tabelle 10.1 gewählt.

experimentell schon ausgeschlossen ist [50] und deswegen nicht im Schaubild gezeigt wird. Der andere Schwellenwert liegt bei  $m_{\tilde{g}} = 487$  GeV. Bei einem Wert des Brechungsparameters von  $M_{\text{SUSY}} = 1000$  GeV sind die Schwellenwerte zu größeren Werten der Gluino-Masse verschoben, da die Squarks schwerer sind. Die Schwellenwerte liegen bei  $m_{\tilde{g}} = 760$  GeV bzw.  $m_{\tilde{g}} = 915$  GeV. Eine Variation der Gluino-Phase  $\varphi_{\tilde{g}}$  kann in diesem Bereich eine Änderung der Higgs-Masse  $M_{h_1}$  von bis zu 4 GeV verursachen. Diese große Abhängigkeit kommt zum Teil daher, daß die  $B_0$ -Funktionen, von denen die Schwelleneffekte mit verursacht werden, in der folgenden Konstellation  $C$  in die Korrekturen eingehen:

$$C = (e^{i\varphi_{\tilde{g}}} K + e^{-i\varphi_{\tilde{g}}} K') B_0(m_{\tilde{t}_i}, m_t, m_{\tilde{g}}) \quad (10.16)$$

$K$  und  $K'$  sind dabei Kombinationen aus Mischungsmatrix-Elementen und Massen. Man sieht also, daß die  $B_0$ -Funktionen mit unterschiedlichem Vorzeichen eingehen für  $\varphi_{\tilde{g}} = 0$  bzw.  $\varphi_{\tilde{g}} = \pi$ . Zum Teil gilt  $K = K'$ . Das erklärt die geringe Abhängigkeit von  $M_{h_1}$  von der Gluino-Masse für  $\varphi_{\tilde{g}} = \frac{\pi}{2}$ . Für Gluino-Massen, die kleiner als die Schwellenwerte sind, nimmt die Phasenabhängigkeit der Higgs-Masse  $M_{h_1}$  zu kleineren Werten der Gluino-Masse hin ab. Ebenso wird die Änderung von  $M_{h_1}$  mit der Gluino-Phase  $\varphi_{\tilde{g}}$  geringer für größere Werte der Gluino-Massen im Wertebereich oberhalb der Schwellenwerte.

#### Schlußbemerkung:

In Abb. 10.6 bis Abb. 10.10 wurde die Abhängigkeit der Higgs-Masse  $M_{h_1}$  von den Phasen  $\varphi_{A_t}$  bzw.  $\varphi_{X_t}$  untersucht. Dabei wurde festgestellt, daß sich das Phasenverhalten von Ein- zu Zwei-Schleifen-Niveau ändern kann. Dies liegt vor allem daran, daß sich die Maxima der

## 10. Higgs-Massen mit $\mathcal{O}(\alpha_t\alpha_s)$ -Beiträgen im komplexen MSSM

Kurven, welche die Abhängigkeit der Higgs-Masse  $M_{h_1}$  von  $|A_t|$  bzw.  $|X_t|$  darstellen, sowohl für unterschiedliche Phasen als auch für unterschiedliche Schleifen-Ordnungen verschieben. In den Parameter-Bereichen, in denen sich die Higgs-Masse mit den Parametern wie  $\tan\beta$  oder der Masse des geladenen Higgs-Boson  $M_{H^\pm}$  stark ändert, ist die Phasenabhängigkeit am größten und kann dort mehrere GeV betragen.

Die Abhängigkeit der Higgs-Masse  $M_{h_1}$  von der Gluino-Phase, die in Abb. 10.11 und Abb. 10.12 untersucht wurde, ist im allgemeinen gering und zeigt nur in Bereichen von Schwelleneffekten eine größere Abhängigkeit von bis zu 4 GeV.

# 11. Zusammenfassung

Eine entscheidende Vorhersage des MSSM ist die Existenz eines leichten Higgs-Bosons. Dessen Masse ist aufgrund ihrer starken Abhängigkeit von anderen Modellparametern eine wichtige Präzisionsobservable. Eine genaue theoretische Vorhersage dieser Masse wird, mindestens auf dem gleichen Präzisionsniveau wie die zukünftigen Messungen, benötigt; durch den Vergleich theoretischer Vorhersagen und präziser Messungen der Masse des leichtesten Higgs-Bosons lassen sich dann starke Einschränkungen an den Parameterraum ableiten. Schon vor der Entdeckung des Higgs-Bosons können mit Hilfe der experimentellen unteren Schranke und der theoretischen Vorhersage seiner Masse Aussagen über die Werte der MSSM-Parameter getroffen werden. Um die Masse des leichtesten Higgs-Bosons präzise vorherzusagen, ist die Berücksichtigung von Quantenkorrekturen höherer Ordnung unabdingbar. Die dominanten Beiträge höherer Ordnung können aufgrund der Stärke der Top-Yukawa-Kopplung  $\lambda_t$  auf den Top-Stop-Sektor zurückgeführt werden. Für große  $\tan\beta$  sind jedoch Beiträge proportional zur Bottom-Yukawa-Kopplung  $\lambda_b$  verstärkt und können nicht gegenüber den Beiträgen des Top-Stop-Sektors vernachlässigt werden.

Korrekturen zu den Ein-Schleifen-Beiträgen der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_b)$  mit  $\alpha_b = \lambda_b^2/(4\pi)$  innerhalb des MSSM mit reellen Parametern stehen im ersten Teil der Arbeit im Mittelpunkt. Die größten Korrekturen werden dabei von der starken Wechselwirkung verursacht. Daher wurde die Masse des leichtesten Higgs-Bosons bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_b\alpha_s)$  für beliebige  $\tan\beta$  mittels der Feynman-diagrammatischen Methode berechnet. Innerhalb dieser Rechnung müssen die Parameter des Bottom-Sbottom-Sektors auf Ein-Schleifen-Niveau definiert werden. Der Vergleich der Ergebnisse für die Masse des leichtesten Higgs-Bosons unter Verwendung unterschiedlicher Renormierungsschemata kann zur Abschätzung der theoretischen Unsicherheit, welche durch den Abbruch der Störungsreihe verursacht wird, genutzt werden. Die verwendeten Renormierungsschemata sollten jedoch so gewählt sein, daß durch das Renormierungsschema keine künstlich großen Korrekturen verursacht und die dominanten Beiträge in das Ein-Schleifen-Ergebnis absorbiert werden. Im Bottom-Sbottom-Sektor wurden vier Renormierungsschemata untersucht. Dabei lieferte die Verwendung des „ $m_b$  OS“-Renormierungsschemas numerisch instabile Werte. In diesem Schema werden die Bottom-Quark-Masse und der Sbottom-Mischungswinkel entsprechend einem häufig im Top-Stop-Sektor angewandten Renormierungsschema im On-Shell-Schema definiert. Als problematisch hat sich hier die Bestimmung der trilinearen Kopplung  $A_b$  auf Ein-Schleifen-Niveau als eine von der Bottom-Quark-Masse und dem Mischungswinkel

## 11. Zusammenfassung

abhängigen Größe erwiesen. Die drei anderen Schemata lieferten numerisch stabile und physikalisch sinnvolle Ergebnisse, welche zur Abschätzung der theoretischen Unsicherheit verwendet wurden.

Mit einer geeignet gewählten Bottom-Yukawa-Kopplung können die führenden  $\tan\beta$ -verstärkten Korrekturen, die aus dem Bottom-Sbottom-Sektor herrühren, schon auf Ein-Schleifen-Niveau berücksichtigt werden. Dazu wurde in der vorliegenden Arbeit die Bottom-Quark-Masse im  $\overline{\text{DR}}$ -Schema mit einer Resummation der  $\tan\beta$ -verstärkten Terme verwendet. Bei der Analyse wurden vor allem die nichtführenden Beiträge, die bei einer vollständigen Berechnung der Korrekturen der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_b\alpha_s)$  über das Ein-Schleifen-Ergebnis mit resummierten  $\tan\beta$ -verstärkten Termen hinausgehen, diskutiert.

Für  $\mu > 0$  ist die Größe der nichtführenden Beiträge der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_b\alpha_s)$  klein, typischerweise  $\mathcal{O}(100 \text{ MeV})$ . Die theoretische Unsicherheit ist von der gleichen Größenordnung. Beiträge von etwa 100 MeV werden jedoch angesichts der erwarteten Meßgenauigkeit am LHC (Large Hadron Collider) und in noch stärkerem Maße am ILC (International Linear Collider) relevant. Für  $\mu < 0$  wird die verwendete effektive Yukawa-Kopplung verstärkt, womit die Beiträge der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_b\alpha_s)$  zur Masse des leichtesten Higgs-Bosons ebenfalls größer werden. Für große  $\tan\beta$ , große Gluino-Massen und große  $|\mu|$  können die nichtführenden Korrekturen der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_b\alpha_s)$  bis zu 3 GeV betragen. Die Korrekturen der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_b\alpha_s)$  sowie die Differenzen zwischen den Ergebnissen unter Verwendung unterschiedlicher Renormierungsschemata hängen stark von den Parametern  $\mu$ ,  $\tan\beta$ ,  $m_{\tilde{g}}$  und  $M_{A^0}$  ab. Die theoretische Unsicherheit kann in diesem Bereich mit etwa 2 GeV abgeschätzt werden. Ein Vergleich mit dem in der Literatur publizierten Ergebnis im Limes  $\tan\beta \rightarrow \infty$  wurde durchgeführt und erbrachte eine gute Übereinstimmung. Die numerischen Unterschiede betragen weniger als 0.5 GeV.

Im zweiten Teil der Arbeit lag der Schwerpunkt auf der Untersuchung der Korrekturen der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_t\alpha_s)$  im MSSM mit komplexen Parametern. Die Lagrangedichte mit komplexen Parametern ist im Gegensatz zum Fall reeller Parameter nicht CP-invariant. Da in der Natur CP-verletzende Prozesse experimentell beobachtet werden, kann CP-Symmetrie nicht als fundamentale Symmetrie in der Natur realisiert sein. Deswegen müssen Quellen für CP-Verletzung, hier in Form von komplexen Parametern in der Lagrangedichte, berücksichtigt werden. Zwar ist der Higgs-Sektor auf Born-Niveau auch im Fall komplexer Parameter CP-invariant, jedoch können Korrekturen höherer Ordnungen Übergänge zwischen den CP-geraden und CP-ungeraden Zuständen erzeugen. Das leichteste Higgs-Boson ist dann kein CP-gerader Zustand mehr, sondern enthält sowohl CP-gerade als auch CP-ungerade Anteile.

Bei der Analyse der Phasenabhängigkeit der Masse des leichtesten Higgs-Bosons zeigte sich, daß sich in bestimmten Parameterbereichen die Abhängigkeit von der Phase der trilinearen Kopplung  $A_t$  bzw. von der Phase des Mischungselements der Top-Squarks  $m_t X_t$  beim Übergang vom Ein-Schleifen-Niveau zum Zwei-Schleifen-Niveau qualitativ verändert. Dies bedeutet, daß auch auf Zwei-Schleifen-Niveau die Phasenabhängigkeit der Korrekturen vollständig zu berücksichtigen ist. Die Größe der Änderung mit der Phase hängt dabei

stark von den betrachteten Parameterbereichen ab und kann mehrere GeV betragen. Die Abhängigkeit der Masse des leichtesten Higgs-Bosons von der Gluino-Phase ist im allgemeinen gering und bewirkt nur in Bereichen von Schwelleneffekten Unterschiede von bis zu 4 GeV.

Aufgrund der zu erwartenden experimentellen Genauigkeit der Messung der Higgs-Masse von 0.2 GeV beim LHC [9] bzw. von 0.05 GeV beim ILC [10–12] ist die Kenntnis der in dieser Arbeit diskutierten Beiträge zur Masse des leichtesten Higgs-Bosons, die mehrere GeV betragen können, notwendig, um bestmögliche Sensitivität auf den Parameterraum des MSSM zu erhalten.

## 11. Zusammenfassung

# A. Supersymmetrie: Grundlagen, Konventionen und Parameter

Im folgenden werden natürliche Einheiten verwendet mit  $\hbar = c = 1$ . Weyl-Spinor-Indizes  $\alpha, \dot{\alpha}, \beta, \dot{\beta}$  nehmen die Werte 1 und 2 an, alle anderen griechischen Indizes laufen von 0 bis 3, lateinische dagegen nur von 1 bis 3. Außerdem gilt die Einsteinsche Summenkonvention, d.h. es wird über wiederholte Indizes summiert.

– **kontravarianter Vierer-Vektor:**  $(x^\mu) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, \vec{x})$

Die Komponenten des Vierer-Vektors bezeichnen einen Punkt im vierdimensionalen affinen Minkowski-Raum.

– **kovarianter Vierer-Vektor:**  $(x_\mu) = (t, -\vec{x})$  mit  $x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu$

– **Minkowski-Metrik:**  $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$

– **kovarianter Vierer-Gradient:**  $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left( \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right)$

– **kontravarianter Vierer-Gradient:**  $\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left( \frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right)$

## A.1. Super-Poincaré-Algebra

**Poincaré-Algebra:**

Folgende Kommutator-Relationen bilden die Lie-Algebra der Poincaré-Gruppe, auch Poincaré-Algebra genannt:

$$[P^\mu, P^\nu] = 0 \tag{A.1}$$

$$[P^\mu, M^{\rho\sigma}] = i (g^{\mu\rho} P^\sigma - g^{\mu\sigma} P^\rho) \tag{A.2}$$

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = -i (g^{\mu\rho} M^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} M^{\nu\rho} - g^{\nu\rho} M^{\mu\sigma} + g^{\nu\sigma} M^{\mu\rho}). \tag{A.3}$$

## A. Supersymmetrie: Grundlagen, Konventionen und Parameter

Die Komponenten des Energie-Impuls-Operators  $P^\mu$  sind die vier Generatoren der Translationsgruppe.  $M^{\mu\nu}$  bezeichnet die sechs Generatoren der Lorentz-Gruppe und bildet den antisymmetrischen Drehimpulsoperator.

### N=1-Super-Algebra:

Die N=1-Super-Algebra ist eine graduierte Lie-Algebra, die neben Kommutator-Relationen auch Antikommutator-Relationen umfaßt:

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = \{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 0 \quad (\text{A.4})$$

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} = 2(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} P_\mu \quad (\text{A.5})$$

$$[Q_\alpha, P^\mu] = [\bar{Q}_{\dot{\beta}}, P^\mu] = 0 \quad (\text{A.6})$$

$$[Q_\alpha, M^{\mu\nu}] = i(\sigma^{\mu\nu})_\alpha^\beta Q_\beta \quad (\text{A.7})$$

Die Supersymmetrie-Generatoren  $Q$  bzw.  $\bar{Q}$  verhalten sich hierbei genau wie links- bzw. rechtshändige zweikomponentige Spinoroperatoren. Im allgemeinen kann die N=1-Super-Algebra noch zwei weitere Vertauschungsrelationen beinhalten:

$$[Q_\alpha, R] = Q_\alpha ; \quad [\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, R] = -\bar{Q}_{\dot{\alpha}} . \quad (\text{A.8})$$

$R$  ist der Generator einer inneren  $U(1)$ -Symmetrie, der sogenannten R-Symmetrie.

Die Vertauschungsrelationen der Poincaré-Algebra und der N=1-Super-Algebra zusammengefaßt bilden die N=1-Super-Poincaré-Algebra.

## A.2. Spinoren

### A.2.1. Weyl-Spinoren

Weyl-Spinoren sind zweikomponentige antikommutierende Objekte, die sich folgendermaßen unter Lorentz-Transformationen  $\Lambda$  verhalten:

$$\psi_\alpha \rightarrow M(\Lambda)_\alpha^\beta \psi_\beta , \quad (\text{A.9})$$

$$\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \rightarrow ((M(\Lambda)^{-1})^+)_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}} \bar{\psi}^{\dot{\beta}} , \quad (\text{A.10})$$

mit den komplexen  $2 \times 2$ -Matrizen  $M(\Lambda)$  bzw.  $(M(\Lambda)^{-1})^+$  gegeben durch

$$M(\Lambda) = \left( e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu} \frac{\sigma^{\mu\nu}}{2}} \right) \quad (\text{A.11})$$

$$(M^{-1})^+(\Lambda) = \left( e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu} \frac{\bar{\sigma}^{\mu\nu}}{2}} \right) , \quad (\text{A.12})$$

$\omega_{\mu\nu}$  ist ein antisymmetrischer Tensor.  $\sigma^{\mu\nu}$  und  $\bar{\sigma}^{\mu\nu}$  sind definiert als

$$(\sigma^{\mu\nu})_\alpha^\beta = \frac{i}{2}(\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu)_\alpha^\beta , \quad (\bar{\sigma}^{\mu\nu})^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} = \frac{i}{2}(\bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu)^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \quad (\text{A.13})$$



mit den Matrizen

$$\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^{\mu} = (\mathbb{1}, \sigma^k)_{\alpha\dot{\beta}} , \quad \bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\beta} = (\mathbb{1}, -\sigma^k)^{\dot{\alpha}\beta} \quad (\text{A.14})$$

zusammengesetzt aus den Paulimatrizen  $\sigma^k$

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \quad (\text{A.15})$$

Mit  $\alpha \vec{n} = (\omega_{23}, \omega_{31}, \omega_{12})$  und  $\phi \vec{n} = (\omega_{01}, \omega_{02}, \omega_{03})$  läßt sich die Darstellung der Lorentz-Transformation  $M(\Lambda)$  schreiben als:

$$M(\Lambda) = \begin{cases} e^{-\frac{i}{2}\alpha \vec{n}\vec{\sigma}} & \text{für Drehungen um Winkel } \alpha \text{ mit Drehachse } \vec{n} \\ e^{-\frac{1}{2}\phi \vec{n}\vec{\sigma}} & \text{für Boosts in Richtung } \vec{n} \text{ mit Geschwindigkeit } |\vec{v}| = \tanh \phi \end{cases} \quad (\text{A.16})$$

Die Weyl-Spinoren  $\psi_{\alpha}$  bzw.  $\bar{\psi}_{\dot{\alpha}}$  kann man in  $\psi^{\alpha}$  bzw.  $\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}$  überführen und umgekehrt,

$$\begin{aligned} \psi_{\alpha} &= \epsilon_{\alpha\beta} \psi^{\beta} & \text{bzw.} & & \psi^{\alpha} &= \epsilon^{\alpha\beta} \psi_{\beta} , \\ \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} &= \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\psi}^{\dot{\beta}} & \text{bzw.} & & \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} &= \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\psi}_{\dot{\beta}} , \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

unter Verwendung der antisymmetrischen Tensoren  $\epsilon$

$$\begin{aligned} (\epsilon^{\alpha\beta}) &:= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} , & (\epsilon_{\alpha\beta}) &:= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \\ (\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}) &:= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} , & (\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}) &:= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Lorentzinvariante Skalarprodukte sind:

$$\begin{aligned} \psi\chi &= \psi^{\alpha}\chi_{\alpha} = -\chi_{\alpha}\psi^{\alpha} = \chi^{\alpha}\psi_{\alpha} = \chi\psi , \\ \bar{\psi}\bar{\chi} &= \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}\bar{\chi}^{\dot{\alpha}} = -\bar{\chi}^{\dot{\alpha}}\bar{\psi}_{\dot{\alpha}} = \bar{\chi}_{\dot{\alpha}}\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} = \bar{\chi}\bar{\psi} , \\ (\phi\psi)^+ &= (\phi^{\alpha}\psi_{\alpha})^+ = \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}\bar{\phi}^{\dot{\alpha}} = \bar{\psi}\bar{\phi} . \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Weitere wichtige Formeln für

- $\sigma$ -Matrizen:

$$\begin{aligned} \epsilon^{\alpha\beta}\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\sigma_{\beta\dot{\beta}}^{\mu} &= \bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha} , \\ (\sigma^{\mu}\bar{\sigma}^{\nu} + \sigma^{\nu}\bar{\sigma}^{\mu})_{\alpha}{}^{\beta} &= 2\delta_{\alpha}{}^{\beta}g^{\mu\nu} , & (\bar{\sigma}^{\mu}\sigma^{\nu} + \bar{\sigma}^{\nu}\sigma^{\mu})^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} &= 2\delta^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}g^{\mu\nu} , \\ \bar{\sigma}^{\mu}\sigma^{\nu}\bar{\sigma}^{\rho} + \bar{\sigma}^{\rho}\sigma^{\nu}\bar{\sigma}^{\mu} &= 2(g^{\mu\nu}\bar{\sigma}^{\rho} - g^{\mu\rho}\bar{\sigma}^{\nu} + g^{\nu\rho}\bar{\sigma}^{\mu}) , \\ \text{Tr}(\sigma^{\mu}\bar{\sigma}^{\nu}) &= 2g^{\mu\nu} , \\ \text{Tr}(\bar{\sigma}^{\mu}\sigma^{\nu}\bar{\sigma}^{\rho}\sigma^{\sigma}) &= \text{Tr}(\sigma^{\mu}\bar{\sigma}^{\nu}\sigma^{\rho}\bar{\sigma}^{\sigma}) = 2(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}) , \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

- $\sigma$ -Matrizen und Weyl-Spinoren:

$$\begin{aligned} (\psi\sigma^{\mu})_{\dot{\alpha}} &= -\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\psi}^{\dot{\beta}}(\bar{\sigma}^{\mu}\psi) , & \alpha(\sigma^{\mu}\bar{\psi}) &= -\epsilon_{\alpha\beta}(\bar{\psi}\bar{\sigma}^{\mu})^{\beta} , & \alpha(\sigma^{\mu}\bar{\sigma}^{\nu}\psi) &= \epsilon_{\alpha\beta}(\psi\sigma^{\nu}\bar{\sigma}^{\mu})^{\beta} , \\ (\phi\sigma^{\mu}\bar{\psi}) &= -(\bar{\psi}\bar{\sigma}^{\mu}\phi) , & (\phi\sigma^{\mu}\bar{\psi})^+ &= -(\bar{\phi}\bar{\sigma}^{\mu}\psi) . \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

## A. Supersymmetrie: Grundlagen, Konventionen und Parameter

### A.2.2. Dirac- und Majorana-Spinoren

Die zweikomponentigen Weyl-Spinoren können zu vierkomponentigen Spinoren

$$\begin{aligned}\Psi &= \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}, & \bar{\Psi} &= (\chi^\alpha \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}) \\ \Psi^C &= \begin{pmatrix} \chi_\alpha \\ \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}, & \bar{\Psi}^C &= (\psi^\alpha \bar{\chi}_{\dot{\alpha}})\end{aligned}\tag{A.22}$$

zusammengefaßt werden.  $\Psi^C$  ist der zu  $\Psi$  ladungskonjugierte Spinor mit

$$\Psi^C = C \bar{\Psi}^T, \quad C = i \begin{pmatrix} -\sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\epsilon_{\alpha\beta}) & 0 \\ 0 & (\bar{\epsilon}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}) \end{pmatrix}\tag{A.23}$$

Falls  $\Psi = \Psi^C$  gilt, wird  $\Psi$  Majorana-Spinor genannt, ansonsten ist  $\Psi$  ein Dirac-Spinor.

Die vierkomponentige Erweiterung der  $\sigma$ -Matrizen sind die  $\gamma$ -Matrizen. Sie erfüllen die Relationen

$$\begin{aligned}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} &= 2g^{\mu\nu}, & \{\gamma^\mu, \gamma^5\} &= 0, & \gamma^5 &= i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -\frac{i}{4!}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma, \\ (\gamma^5)^2 &= \mathbb{1}, & \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] &= \begin{pmatrix} \sigma^{\mu\nu} & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}^{\mu\nu} \end{pmatrix},\end{aligned}\tag{A.24}$$

wobei  $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$  der antisymmetrische Tensor in vier Dimensionen ist:

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1 & \text{falls } (\mu, \nu, \rho, \sigma) \text{ gerade Permutation von } (0, 1, 2, 3), \\ -1 & \text{falls } (\mu, \nu, \rho, \sigma) \text{ ungerade Permutation von } (0, 1, 2, 3), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}\tag{A.25}$$

Eine mögliche Darstellung der  $\gamma$ -Matrizen ist die chirale Darstellung:

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\tag{A.26}$$

Mit Hilfe der Matrix  $\gamma^5$  lassen sich Projektoren definieren,

$$\omega_- = \frac{1 - \gamma^5}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \omega_+ = \frac{1 + \gamma^5}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\tag{A.27}$$

die auf einen Dirac-Spinor angewendet den linkshändigen bzw. rechtshändigen Anteil liefern und den anderen Anteil null setzen:

$$\omega_- \Psi = \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \omega_+ \Psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}.\tag{A.28}$$

### A.3. Superfelder und Komponentenfelder

Da  $\psi_\alpha$  der linkshändige Anteil des Dirac-Spinors ist, wird  $\psi_\alpha$  oft auch als linkshändiger Weyl-Spinor bezeichnet; entsprechend nennt man  $\bar{\chi}^\alpha$  rechtshändigen Weyl-Spinor. Dirac-Spinoren gemäß (A.22) kann man folgendermaßen in Weyl-Spinoren umrechnen:

$$\begin{aligned}
\bar{\Psi}_1 \Psi_2 &= \chi_1 \psi_2 + \bar{\psi}_1 \bar{\chi}_2, \\
\bar{\Psi}_1 \gamma^\mu \Psi_2 &= -\bar{\chi}_2 \bar{\sigma}^\mu \chi_1 + \bar{\psi}_1 \bar{\sigma}^\mu \psi_2, \\
\bar{\Psi}_1 \gamma^5 \Psi_2 &= -\chi_1 \psi_2 + \bar{\psi}_1 \bar{\chi}_2, \\
\bar{\Psi}_1 \gamma^\mu \gamma^5 \Psi_2 &= -\bar{\chi}_2 \bar{\sigma}^\mu \chi_1 - \bar{\psi}_1 \bar{\sigma}^\mu \psi_2, \\
\bar{\Psi}_1 \gamma^\mu \partial_\mu \Psi_2 &= -\partial_\mu (\bar{\chi}_2 \bar{\sigma}^\mu \chi_1) + \bar{\chi}_2 \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi_1 + \bar{\psi}_1 \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_2, \\
\bar{\Psi}_1 \omega_- \Psi_2 &= \bar{\Psi}_2^C \omega_- \Psi_1^C = \chi_1 \psi_2, \\
\bar{\Psi}_1 \omega_+ \Psi_2 &= \bar{\Psi}_2^C \omega_+ \Psi_1^C = \bar{\psi}_1 \bar{\chi}_2, \\
\bar{\Psi}_1 \gamma^\mu \omega_- \Psi_2 &= \bar{\Psi}_2^C (-\gamma^\mu \omega_+) \Psi_1^C = \bar{\psi}_1 \bar{\sigma}^\mu \psi_2 = -\psi_2 \sigma^\mu \bar{\psi}_1.
\end{aligned} \tag{A.29}$$

Außerdem gilt für die Dirac-Spinoren:

$$\begin{aligned}
\bar{\Psi}_1 \{1, \gamma^5, \gamma^\mu, \gamma^\mu \gamma^5\} \Psi_2 &= \bar{\Psi}_2^C \{1, \gamma^5, -\gamma^\mu, \gamma^\mu \gamma^5\} \Psi_1^C, \\
(\bar{\Psi}_1 \omega_- \Psi_2)^+ &= \bar{\Psi}_2 \omega_+ \Psi_1, \\
(\bar{\Psi}_1 \gamma^\mu \omega_- \Psi_2)^+ &= \bar{\Psi}_2 \gamma^\mu \omega_- \Psi_1, \\
(\bar{\Psi}_1 \gamma^\mu \omega_+ \Psi_2)^+ &= \bar{\Psi}_2 \gamma^\mu \omega_+ \Psi_1, \\
(\bar{\Psi}_1 \{1, \gamma^5, \gamma^\mu, \gamma^\mu \gamma^5\} \Psi_2)^+ &= \bar{\Psi}_2 \{1, -\gamma^5, \gamma^\mu, \gamma^\mu \gamma^5\} \Psi_1.
\end{aligned} \tag{A.30}$$

## A.3. Superfelder und Komponentenfelder

### A.3.1. Grassmann-Variable

Grassmann-Variable haben fermionischen Charakter. Sie antvertauschen also mit allen anderen Größen, die fermionischen Charakter haben:

$$\{\theta_\alpha, \theta_\beta\} = \{\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}, \bar{\theta}_{\dot{\beta}}\} = \{\theta_\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\beta}}\} = 0. \tag{A.31}$$

Auf diese Grassmann-Variablen wirkt der antvertauschende Differentialoperator  $\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha}$  bzw.  $\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} = (\partial_\alpha)^*$  wie folgt:

$$\partial_\alpha \theta^\beta = +\delta_\alpha^\beta, \quad \partial^\alpha \theta_\beta = -\delta_\alpha^\beta, \quad \bar{\partial}_{\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{\dot{\beta}} = -\delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}}, \quad \bar{\partial}^{\dot{\alpha}} \bar{\theta}_{\dot{\beta}} = +\delta_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}}. \tag{A.32}$$

Hier sind einige wichtige Umformungen mit zweikomponentigen Grassmann-Variablen  $\theta$  bzw.  $\psi$  aufgeführt:

$$\theta^\alpha \theta_\beta = \frac{1}{2} \delta_\alpha^\beta (\theta\theta), \quad \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{\dot{\beta}} = \frac{1}{2} \delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} (\bar{\theta}\bar{\theta}),$$

### A. Supersymmetrie: Grundlagen, Konventionen und Parameter

$$\begin{aligned}
\partial_\alpha(\theta\theta) &= 2\theta_\alpha, & \bar{\partial}^{\dot{\alpha}}(\bar{\theta}\bar{\theta}) &= 2\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}, \\
(\partial\partial)(\theta\theta) &= -4, & (\bar{\partial}\bar{\partial})(\bar{\theta}\bar{\theta}) &= -4, \\
(\theta\theta)^* &= (\bar{\theta}\bar{\theta}), \\
(\theta\sigma^\mu\bar{\partial})_\alpha(\sigma^\nu\bar{\theta}) &= -\alpha(\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu\theta), \\
(\theta\sigma^\mu\bar{\partial})\theta_\alpha(\bar{\theta}\bar{\psi}) &= -\frac{1}{2}(\theta\theta)\alpha(\sigma^\mu\bar{\psi}), \\
(\theta\sigma^\mu\bar{\partial})(\bar{\theta}\bar{\theta}) &= 2(\theta\sigma^\mu\bar{\theta}), \\
(\theta\sigma^{\mu\nu}\theta) &= 0 = (\bar{\theta}\bar{\sigma}^{\mu\nu}\bar{\theta}), \\
{}^\alpha(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\theta)\alpha(\sigma^\rho\bar{\sigma}^\sigma\theta) &= \frac{1}{2}\theta\theta\text{Tr}(\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu\sigma^\rho\bar{\sigma}^\sigma) = \theta\theta(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} + g^{\nu\sigma}g^{\mu\rho} - g^{\nu\rho}g^{\mu\sigma} + i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}) \quad (\text{A.33})
\end{aligned}$$

mit der Notation  ${}_\alpha(\sigma^\nu\bar{\theta}) = \sigma^\nu_{\alpha\dot{\beta}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}}$ .

Hilfreich sind außerdem die Fierz-Umordnungen, bei denen die Skalarprodukte im Spinorraum aufgespalten und neu geordnet werden:

$$\begin{aligned}
\theta_\alpha(\theta\psi) &= -\frac{1}{2}(\theta\theta)\psi_\alpha, & \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}(\bar{\theta}\bar{\psi}) &= -\frac{1}{2}(\bar{\theta}\bar{\theta})\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}, \\
(\theta\phi)(\theta\psi) &= -\frac{1}{2}(\theta\theta)(\phi\psi), & (\bar{\theta}\bar{\phi})(\bar{\theta}\bar{\psi}) &= -\frac{1}{2}(\bar{\theta}\bar{\theta})(\bar{\phi}\bar{\psi}), \\
(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})(\theta\psi) &= \frac{1}{2}(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\sigma}^\mu\psi), & (\theta\sigma^\mu\bar{\theta})(\bar{\theta}\bar{\psi}) &= -\frac{1}{2}(\bar{\theta}\bar{\theta})(\theta\sigma^\mu\bar{\psi}), \\
(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})\partial_\mu\theta^\alpha\psi_\alpha(x) &= \frac{1}{2}(\theta\theta)\partial_\mu(\bar{\theta}\bar{\sigma}^\mu\psi(x)), & (\bar{\theta}\bar{\sigma}^\mu\bar{\theta})(\bar{\theta}\bar{\psi}) &= \frac{1}{2}(\bar{\theta}\bar{\theta})(\bar{\psi}\sigma^\mu\bar{\psi}), \\
{}_\alpha(\sigma^\mu\bar{\theta})(\bar{\theta}\bar{\psi}) &= -\frac{1}{2}(\bar{\theta}\bar{\theta})\alpha(\sigma^\mu\bar{\psi}), & {}_\alpha(\sigma^\mu\bar{\theta})(\theta\sigma^\nu\bar{\theta}) &= \frac{1}{2}(\bar{\theta}\bar{\theta})\alpha(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\theta), \\
(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})(\theta\sigma^\nu\bar{\theta}) &= \frac{1}{2}(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})g^{\mu\nu}, & (\xi\sigma^\mu\bar{\theta})(\chi\sigma^\nu\bar{\psi}) &= \frac{1}{2}(\xi\chi)(\bar{\psi}\bar{\theta})g^{\mu\nu}, \\
(\theta\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\theta) &= (\theta\theta)g^{\mu\nu}. & & \quad (\text{A.34})
\end{aligned}$$

### A.3.2. Superfelder

Eine **endliche supersymmetrische Transformation** kann durch das Gruppenelement

$$G(x_\mu, \theta^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}) = e^{i(\theta Q + \bar{Q}\bar{\theta} + x_\mu P^\mu)} \quad (\text{A.35})$$

beschrieben werden (analog zur nichtabelschen Eichtransformation  $e^{i\phi_a T^a}$ , wobei  $T^a$  die erzeugenden Generatoren sind). Die Variablen  $x_\mu$ ,  $\theta^\alpha$  und  $\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$  bilden den Superraum  $z = (x_\mu, \theta^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}})$ . Die Multiplikation zweier Gruppenelemente ergibt eine Verschiebung im Parameterraum,

$$G(y, \xi, \bar{\xi})G(x, \theta, \bar{\theta}) = G(x + y - i\theta\sigma\bar{\xi} + i\xi\sigma\bar{\theta}, \theta + \xi, \bar{\theta} + \bar{\xi}). \quad (\text{A.36})$$

Die Superfelder lassen sich in Komponentfelder entwickeln. Aufgrund der Nilpotenz

### A.3. Superfelder und Komponentenfelder

der Grassmann-Variablen bricht diese Entwicklung nach endlich vielen Termen ab:

$$\begin{aligned}\Phi(z) = & A(x) + \theta\chi(x) + \bar{\theta}\bar{\mu}(x) + i\theta\theta M(x) - i\bar{\theta}\bar{\theta}N(x) \\ & + \theta\sigma^\mu\bar{\theta}v_\mu(x) + i\theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\rho(x) + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}D(x).\end{aligned}\quad (\text{A.37})$$

$A$ ,  $M$ ,  $N$  und  $D$  sind skalare Komponentenfelder,  $\chi$ ,  $\mu$ ,  $\lambda$  und  $\rho$  Spinorfelder und  $v_\mu$  ein Vektorfeld. Ein allgemeines Superfeld hat 16 reelle fermionische und 16 reelle bosonische Freiheitsgrade.

**Skalare Superfelder**  $\Phi$  verhalten sich unter Supersymmetrie-Transformationen folgendermaßen:

$$\Phi'(x', \theta', \bar{\theta}') = \Phi(x, \theta, \bar{\theta}). \quad (\text{A.38})$$

**Chirale bzw. antichirale Superfelder**  $\phi$  bzw.  $\bar{\phi}$  sind festgelegt durch die Bedingung:

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}\phi(z) = 0 \quad \text{bzw.} \quad D_\alpha\bar{\phi}(z) = 0, \quad (\text{A.39})$$

wobei  $D_\alpha$  bzw.  $\bar{D}_{\dot{\alpha}}$  die kovarianten Ableitungen bezüglich der Supersymmetrie-Generatoren sind:

$$D_\alpha = \partial_\alpha - i_\alpha(\sigma_\mu\bar{\theta})\partial^\mu \quad \text{bzw.} \quad \bar{D}_{\dot{\alpha}} = \bar{\partial}_{\dot{\alpha}} + i(\theta\sigma_\mu)_{\dot{\alpha}}\partial^\mu. \quad (\text{A.40})$$

Das chirale Superfeld hat als fermionischen Freiheitsgrad einen linkshändigen Spinor  $\psi$ , das antichirale einen rechtshändigen  $\bar{\psi}$ . Ein chirales Superfeld  $\phi$  kann man kurz so schreiben:

$$\phi(z) = e^{-i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu}(A(x) + \theta^\alpha\sqrt{2}\psi_\alpha(x) + \theta\theta F(x)). \quad (\text{A.41})$$

Die Komponentenfelder  $A$  und  $F$  sind skalare Felder. Vollständig in Komponentenfelder entwickelt, hat das chirale Superfeld  $\phi$  folgende Form:

$$\begin{aligned}\phi(z) = & A(x) - i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu A(x) - \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\partial^\mu\partial_\mu A(x) \\ & + \theta^\alpha\sqrt{2}\psi_\alpha(x) - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi(x) + \theta\theta F(x).\end{aligned}\quad (\text{A.42})$$

**Vektorsuperfelder**  $V(z)$  erfüllen die Bedingung

$$V^+(z) = V(z). \quad (\text{A.43})$$

In Komponentenschreibweise sieht das Vektorsuperfeld dann so aus:

$$\begin{aligned}V(z) = & C(x) + \theta\chi(x) + \bar{\theta}\bar{\chi}(x) + i\theta\theta M(x) - i\bar{\theta}\bar{\theta}M^*(x) \\ & + \theta\sigma^\mu\bar{\theta}v_\mu + i\theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\lambda(x) + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}D(x)\end{aligned}\quad (\text{A.44})$$

$$\text{mit } C^*(x) = C(x) \quad v_\mu^+ = v_\mu \quad D^*(x) = D(x).$$

## A. Supersymmetrie: Grundlagen, Konventionen und Parameter

$C$  und  $D$  sind also skalare, reelle Felder,  $M$  ein skalares, komplexes Feld.  $\lambda$  und  $\chi$  sind Spinorfelder und  $v_\mu$  ein reelles Vektorfeld. Mit Hilfe der Wess-Zumino-Eichung [96] kann man zusätzlich die Felder  $C$ ,  $\chi$  und  $M$  eliminieren.

### Produkte und Summen von Superfeldern:

- Das Produkt von chiralen Superfeldern ist wieder ein chirales Superfeld.
- Die Summe von Vektorsuperfeldern ist auch ein Vektorsuperfeld.
- Die Summe von einem linkshändigen chiralen und einem rechtshändigen antichiralen Superfeld  $\phi$  und  $\bar{\phi}$  ergibt ein Vektorsuperfeld  $V$ :  $V(z) = \phi(z) + \bar{\phi}(z)$ .
- Das Produkt von einem linkshändigen chiralen und einem rechtshändigen antichiralen Superfeld  $\phi$  und  $\bar{\phi}$  ist ein Vektorsuperfeld  $V$ :  $V(z) = \phi(z)\bar{\phi}(z)$ .

### Eichtransformationen:

- Eine allgemeine nichtabelsche supersymmetrische Eichtransformation eines Vektorsuperfeldmultipletts kann durch

$$e^{2gV} \rightarrow e^{-i2g\bar{\Lambda}} e^{2gV} e^{i2g\Lambda} \quad (\text{A.45})$$

dargestellt werden. Hierbei sind  $g$  die Eichkopplungen,  $\Lambda$  chirale Superfelder und  $V$  Vektorsuperfelder. Die Generatoren für die nichtabelschen Eichgruppen sind in den obigen Gleichungen durch

$$\Lambda(z) = \Lambda^a(z)T^a \quad \text{und} \quad V(z) = V^a(z)T^a \quad (\text{A.46})$$

enthalten.

- Für chirale und antichirale Superfeldmultipletts  $\phi$  bzw.  $\bar{\phi}$  kann man ebenfalls Eichtransformationen einführen

$$\phi \rightarrow e^{-i2g\Lambda} \phi \quad \text{bzw.} \quad \bar{\phi} \rightarrow \bar{\phi} e^{i2g\bar{\Lambda}}. \quad (\text{A.47})$$

### A.3.3. Terme einer allgemeinen supersymmetrischen Lagrangedichte

Die Lagrangedichte eines supersymmetrischen Modells kann mit Hilfe der  $\theta\theta$ - bzw.  $\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}$ -Komponenten von Kombinationen aus chiralen und Vektorsuperfeldern dargestellt werden, da sich diese Beiträge unter Supersymmetrie-Transformationen verhalten wie eine totale Raumzeitableitung. Hier werden die einzelnen Beiträge für eine allgemeine supersymmetrische Lagrangedichte explizit aufgeführt.

- Beiträge aus dem Superpotential:

$$\begin{aligned}
\phi_i(z)\Big|_{\theta\theta} &= F_i \\
\phi_i(z)\phi_j(z)\Big|_{\theta\theta} &= A_i F_j + A_j F_i - \psi_i \psi_j \\
\phi_i(z)\phi_j(z)\phi_k(z)\Big|_{\theta\theta} &= A_i A_j F_k + A_i F_j A_k + F_i A_j A_k \\
&\quad - A_i (\psi_j \psi_k) - \psi_i A_j \psi_k - (\psi_i \psi_j) A_k,
\end{aligned} \tag{A.48}$$

wobei  $\phi_i$  ein chirales Superfeld ist.

- Kinetische Terme für die Materiefelder:

$$\begin{aligned}
\bar{\phi}_k \phi_k \Big|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} &= \left[ (\partial_\mu A_k^+) (\partial^\mu A_k) + \frac{i}{2} (\bar{\psi}_k \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_k) + \frac{i}{2} (\psi_k \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\psi}_k) + F_k^+ F_k \right] \\
\bar{\phi}_k e^{2g_k V} \phi_k \Big|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} &= (\partial_\mu A_k^+ - i g_k A_k^+ v_\mu) (\partial^\mu A_k + i g_k v^\mu A_k) + i \left[ \bar{\psi}_k \bar{\sigma}^\mu (\partial_\mu + i g_k v_\mu) \psi_k \right] \\
&\quad - \sqrt{2} g_k i (\bar{\psi}_k \bar{\lambda} A_k - A_k^+ \lambda \psi_k) + g_k A_k^+ D A_k + F_k^+ F_k \\
&= (D_\mu A_k)^+ (D^\mu A_k) + i \bar{\psi}_k \bar{\sigma}^\mu D_\mu \psi_k \\
&\quad - \sqrt{2} g_k i (\bar{\psi}_k \bar{\lambda} A_k - A_k^+ \lambda \psi_k) + g_k A_k^+ D A_k + F_k^+ F_k.
\end{aligned} \tag{A.49}$$

Dabei ist  $\phi_k$  wieder ein chirales Superfeld und  $V$  ein Vektorsuperfeld in Wess-Zumino-Eichung. Außerdem wurde hier beim letzten Schritt die eichkovariante Ableitung

$$D_\mu := \partial_\mu + i g_k v_\mu \equiv \partial_\mu + i g_k v_\mu^a T^a \tag{A.50}$$

eingeführt.

- Kinetische Terme für die Eichfelder:

$$\frac{1}{16g^2} ([W^{a\alpha} W_\alpha^a] \Big|_{\theta\theta} + h.c.) = -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^a)^2 + i \bar{\lambda}^a \bar{\sigma}^\mu (D_\mu \lambda)^a + \frac{1}{2} D^a D^a, \tag{A.51}$$

Dabei ist

$$W_\alpha^a = -\frac{1}{4} \bar{D} \bar{D} (e^{-2gV} D_\alpha e^{2gV}) \tag{A.52}$$

die zu dem Vektorsuperfeld  $V$  gehörende Feldstärke und

$$F_{\mu\nu}^a = v_{\mu\nu}^a - ig ((T^{\text{ad}})^b)^{ac} v_\mu^b v_\nu^c = v_{\mu\nu}^a + ig ((T^{\text{ad}})^a)^{bc} v_\mu^b v_\nu^c \tag{A.53}$$

die nichtabelsche Feldstärke mit  $v_{\mu\nu} = \partial_\mu v_\nu - \partial_\nu v_\mu$  und den Generatoren der Eichgruppe  $(T^{\text{ad}})^a$  in der adjungierten Darstellung.

Die Komponentenfelder  $F$  aus den chiralen Superfeldern und  $D$  aus den Vektorsuperfeldern sind nur Hilfsfelder und somit unphysikalisch, da sie keine kinetischen Terme in der Lagrangedichte besitzen. Dadurch haben ihre Bewegungsgleichungen die einfache Form

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_i} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D^a} = 0. \tag{A.54}$$

## A. Supersymmetrie: Grundlagen, Konventionen und Parameter

Löst man nach den  $F$ - bzw.  $D$ -Feldern auf

$$F_i^+ = -\frac{\partial W(A)}{\partial A_i} \quad \text{und} \quad D^a = -A^+ g T^a A, \quad (\text{A.55})$$

so kann man die Hilfsfelder  $F$  und  $D$  in den Beiträgen (A.48), (A.49) und (A.51) zur Lagrangedichte eliminieren.

## A.4. Parameter

Für die Standardmodellparameter werden die hier genannten Werte verwendet. Die Massen der leichten Fermionen sind hier nur der Vollständigkeit halber aufgeführt; bei der Berechnung der Higgs-Masse sind sie vernachlässigbar. Außer den Werten für die Quarkmassen  $m_u$ ,  $m_d$ ,  $m_c$  und  $m_b$  wurden die Werte aus [50] übernommen:

- **Fermionmassen:**

- **Leptonmassen:**

$$m_e = 0.510999 \text{ MeV} \quad m_{\nu_e} = 0 \text{ GeV}$$

$$m_\mu = 105.6584 \text{ MeV} \quad m_{\nu_\mu} = 0 \text{ GeV}$$

$$m_\tau = 1.777 \text{ GeV} \quad m_{\nu_\tau} = 0 \text{ GeV}$$

- **Quarkmassen:**

$$m_u = 53.8 \text{ MeV} \quad m_d = 53.8 \text{ MeV}$$

$$m_c = 1.5 \text{ GeV} \quad m_s = 150 \text{ MeV}$$

$$m_t = 174.3 \text{ GeV} \quad m_b(M_Z) = 2.94 \text{ GeV}$$

Für die leichten Quarkmassen  $m_u$  und  $m_d$  wurden effektive Parameter verwendet, deren Werte so gewählt sind, daß sie die aus einer Dispersionsrelation mit Hilfe von Daten bestimmte Vakuumpolarisation des Photons reproduzieren [97]. Die Werte von  $m_c$  wurden aus [98] übernommen. Der Wert für die Bottom-Quark-Masse ist aus [79] (vgl. Kapitel 5.4).

- **Eichbosonmassen:**  $M_Z = 91.1875 \text{ GeV}$       $M_W = 80.450 \text{ GeV}$

- **Kopplungskonstanten:**

$$- \alpha = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} G_F M_W^2 \sin^2 \theta_W \quad \text{mit } G_F = 1.1663910^{-5} \text{ GeV}^{-2}$$

-  $\alpha_s$ : Der Wert für  $\alpha_s$  wird mittels einer Routine von [99] ausgehend von  $\alpha_s(M_Z) = 0.1172$  berechnet.

Die hier genannte Werte stimmen mit den in [100] verwendeten Werten überein.



Die CKM-Matrix wird in dieser Arbeit näherungsweise als Einheitsmatrix angenommen.

Die Werte der weiteren Parameter des minimalen supersymmetrischen Standardmodells sind in Tabelle 6.1 und Tabelle 10.1 in den Kapiteln zur numerischen Auswertung aufgelistet.

A. *Supersymmetrie: Grundlagen, Konventionen und Parameter*

# B. Selbstenergien

## B.1. Renormierte Selbstenergien

In diesem Anhang wird ein Ausdruck für die renormierten Selbstenergien zweier ungeladener, skalarer Felder  $\phi_i$  mit  $i = 1, 2$  hergeleitet. Für die Felder  $\phi_i$  werden gleiche Quantenzahlen angenommen, so daß sie mischen können. Ausgangspunkt ist der unrenormierte Anteil der Fourier-transformierten Lagrangedichte, der bilinear in den  $\phi$ -Feldern ist:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\phi_1, \phi_2) k^2 \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} (\phi_1, \phi_2) \mathcal{M}_\phi \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.1})$$

$\mathcal{M}_\phi$  ist eine hermitesche  $2 \times 2$ -Matrix, welche die zu den  $\phi$ -Feldern gehörige Massenmatrix beschreibt.

Wie in Kapitel 3.2 beschrieben, werden die Parameter und Felder durch die renormierten Größen und Counterterme ersetzt. Die Massenmatrix  $\mathcal{M}_\phi$  enthält alle zu renormierenden Parameter. Statt alle Parameter einzeln aufzuführen, wird die Massenmatrix durch eine renormierte Matrix und dazugehörige Countertermmatrizen bis zu Zwei-Schleifen-Niveau ersetzt:

$$\mathcal{M}_\phi \rightarrow \mathcal{M}_\phi + \delta\mathcal{M}_\phi^{(1)} + \delta\mathcal{M}_\phi^{(2)}. \quad (\text{B.2})$$

$\delta\mathcal{M}_\phi^{(i)}$  ist der Massenmatrixcounterterm  $i$ -ter Schleifenordnung und enthält alle Parameter-Counterterme der  $i$ -ten Ordnung. Die Feldrenormierung erfolgt mittels Ersetzen der nackten Felder durch renormierte Felder und Z-Faktoren,

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{Z_{\phi_1}} & 0 \\ 0 & \sqrt{Z_{\phi_2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = (\mathbb{1} + \frac{1}{2}\delta\mathcal{Z}_\phi^{(1)} + \frac{1}{2}\Delta\mathcal{Z}_\phi) \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.3})$$

wobei hier die Matrizen  $\delta\mathcal{Z}_\phi^{(1)}$  und  $\Delta\mathcal{Z}_\phi$  als abkürzende Schreibweisen eingeführt worden sind,

$$\delta\mathcal{Z}_\phi^{(1)} = \begin{pmatrix} \delta Z_{\phi_1}^{(1)} & 0 \\ 0 & \delta Z_{\phi_2}^{(1)} \end{pmatrix}, \quad \Delta\mathcal{Z}_\phi = \begin{pmatrix} \delta Z_{\phi_1}^{(2)} - \frac{1}{4}(\delta Z_{\phi_1}^{(1)})^2 & 0 \\ 0 & \delta Z_{\phi_2}^{(2)} - \frac{1}{4}(\delta Z_{\phi_2}^{(1)})^2 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.4})$$

## B. Selbstenergien

Wie bei den Massenmatrixcountertermen gibt die hochgestellte Ziffer in Klammern die Ordnung des Z-Faktors an.  $\Delta\mathcal{Z}_\phi$  ist von Zwei-Schleifen-Ordnung; es enthält den echten Zwei-Schleifen-Anteil der Entwicklung der Z-Faktoren,  $\delta\mathcal{Z}_{\phi_1}^{(2)}$  und  $\delta\mathcal{Z}_{\phi_2}^{(2)}$ , sowie das Quadrat des Ein-Schleifen-Anteils dieser Entwicklung,  $(\delta\mathcal{Z}_{\phi_1}^{(1)})^2$  und  $(\delta\mathcal{Z}_{\phi_2}^{(1)})^2$ , das formal von Zwei-Schleifen-Ordnung ist.

Nach der Ersetzung der nackten Parameter und Felder durch die renormierten Größen kann man die Lagrangedichte in den renormierten und den Countertermanteil aufspalten. Der Countertermanteil zerfällt in zwei Teile: den Countertermanteil in Ein-Schleifen-Ordnung und den in Zwei-Schleifen-Ordnung:

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \delta\mathcal{L}^{(1)} + \delta\mathcal{L}^{(2)} \quad (\text{B.5})$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\phi_1, \phi_2) \left[ k^2 - \mathcal{M}_\phi \right] \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \quad (\text{B.6})$$

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}^{(1)} = \frac{1}{2} (\phi_1, \phi_2) & \left[ \frac{1}{2} k^2 (\delta\mathcal{Z}_\phi^{(1)+} + \delta\mathcal{Z}_\phi^{(1)}) \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} (\delta\mathcal{Z}_\phi^{(1)+} \mathcal{M}_\phi + \mathcal{M}_\phi \delta\mathcal{Z}_\phi^{(1)}) - \delta\mathcal{M}_\phi^{(1)} \right] \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}^{(2)} = \frac{1}{2} (\phi_1, \phi_2) & \left[ \frac{1}{2} k^2 (\Delta\mathcal{Z}_\phi^+ + \Delta\mathcal{Z}_\phi + \frac{1}{2} \delta\mathcal{Z}_\phi^{(1)+} \delta\mathcal{Z}_\phi^{(1)}) \right. \\ & - \frac{1}{2} (\Delta\mathcal{Z}_\phi^+ \mathcal{M}_\phi + \mathcal{M}_\phi \Delta\mathcal{Z}_\phi + \frac{1}{2} \delta\mathcal{Z}_\phi^{(1)+} \mathcal{M}_\phi \delta\mathcal{Z}_\phi^{(1)}) \\ & \left. - \delta\mathcal{M}_\phi^{(2)} - \frac{1}{2} (\delta\mathcal{Z}_\phi^{(1)+} \delta\mathcal{M}_\phi^{(1)} + \delta\mathcal{M}_\phi^{(1)} \delta\mathcal{Z}_\phi^{(1)}) \right] \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Den Übergang von der  $\phi_1$ - $\phi_2$ -Basis der Wechselwirkungs Zustände zur  $H$ - $h$ -Basis der Masseneigenzustände beschreibt die Mischungsmatrix  $\mathcal{R}_\phi$ ,

$$\begin{pmatrix} H \\ h \end{pmatrix} = \mathcal{R}_\phi \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.9})$$

Die  $\phi$ -Felder sind bereits die nach (B.3) renormierten Felder. Die Matrix  $\mathcal{R}_\phi$  ist eine endliche Matrix, die sich als

$$\mathcal{R}_\phi = (\mathbb{1} + \frac{1}{2} \delta\mathcal{Z}_{U_\phi}^{(1)} + \frac{1}{2} \Delta\mathcal{Z}_{U_\phi}) \mathcal{U}_\phi \quad (\text{B.10})$$

schreiben läßt. Die Z-Faktoren  $\delta\mathcal{Z}_{U_\phi}^{(1)}$  von Ein-Schleifen-Ordnung und  $\Delta\mathcal{Z}_{U_\phi}$  von Zwei-Schleifen-Ordnung absorbieren keine Divergenzen und sind in diesem Sinn keine Counterterme. Sie sind endlich und beschreiben – Ordnung für Ordnung – die Abweichung der Matrix  $\mathcal{R}_\phi$  von der unitären Matrix  $\mathcal{U}_\phi$ , welche die Massenmatrix  $\mathcal{M}_\phi$  diagonalisiert.

Betrachtet man noch einmal die Renormierung der Felder (B.3) unter Berücksichtigung der Transformation (B.9) und der Gleichung (B.10),

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} &\rightarrow (\mathbb{1} + \frac{1}{2}\delta\mathcal{Z}_\phi^{(1)} + \frac{1}{2}\Delta\mathcal{Z}_\phi)\mathcal{R}_\phi^{-1} \begin{pmatrix} H \\ h \end{pmatrix} \\ &= \mathcal{U}_\phi^+ \left[ \mathbb{1} + \frac{1}{2}\mathcal{U}_\phi (\delta\mathcal{Z}_\phi^{(1)} \mathcal{U}_\phi^+ + \Delta\mathcal{Z}_\phi \mathcal{U}_\phi^+ - \mathcal{U}_\phi^+ \delta\mathcal{Z}_{U_\phi}^{(1)} \right. \\ &\quad \left. - \mathcal{U}_\phi^+ \Delta\mathcal{Z}_{U_\phi} + \frac{1}{2}\mathcal{U}_\phi^+ \delta\mathcal{Z}_{U_\phi}^{(1)} \delta\mathcal{Z}_{U_\phi}^{(1)} - \frac{1}{2}\delta\mathcal{Z}_\phi^{(1)} \mathcal{U}_\phi^+ \delta\mathcal{Z}_{U_\phi}^{(1)} \right] \begin{pmatrix} H \\ h \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

so stellt man fest, daß die Z-Faktoren in einer bestimmten Kombination auftreten. Statt mit den matrixwertigen Z-Faktoren  $\delta\mathcal{Z}_\phi^{(1)}$ ,  $\Delta\mathcal{Z}_\phi$ ,  $\delta\mathcal{Z}_{U_\phi}^{(1)}$  und  $\Delta\mathcal{Z}_{U_\phi}$  zu rechnen, kann man jeweils die Kombination aus  $\delta\mathcal{Z}_\phi^{(1)}$  und  $\delta\mathcal{Z}_{U_\phi}^{(1)}$  auf Ein-Schleifen-Niveau bzw. aus  $\Delta\mathcal{Z}_\phi$ ,  $\delta\mathcal{Z}_{U_\phi}^{(1)}$  und  $\Delta\mathcal{Z}_{U_\phi}$  auf Zwei-Schleifen-Niveau durch eine neue Z-Faktor-Matrix  $\delta\tilde{\mathcal{Z}}_\phi$  bzw.  $\Delta\tilde{\mathcal{Z}}_\phi$  ersetzen:

$$\delta\tilde{\mathcal{Z}}_\phi = \mathcal{U}_\phi \delta\mathcal{Z}_\phi^{(1)} \mathcal{U}_\phi^+ - \delta\mathcal{Z}_{U_\phi}^{(1)}, \quad (\text{B.12})$$

$$\Delta\tilde{\mathcal{Z}}_\phi = \mathcal{U}_\phi \Delta\mathcal{Z}_\phi \mathcal{U}_\phi^+ - \Delta\mathcal{Z}_{U_\phi} + \frac{1}{2}\delta\mathcal{Z}_{U_\phi}^{(1)} \delta\mathcal{Z}_{U_\phi}^{(1)} - \frac{1}{2}\mathcal{U}_\phi \delta\mathcal{Z}_\phi^{(1)} \mathcal{U}_\phi^+ \delta\mathcal{Z}_{U_\phi}^{(1)} \quad (\text{B.13})$$

mit

$$\delta\tilde{\mathcal{Z}}_\phi = \begin{pmatrix} \delta\tilde{\mathcal{Z}}_{\phi_{11}} & \delta\tilde{\mathcal{Z}}_{\phi_{12}} \\ \delta\tilde{\mathcal{Z}}_{\phi_{21}} & \delta\tilde{\mathcal{Z}}_{\phi_{22}} \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \Delta\tilde{\mathcal{Z}}_\phi = \begin{pmatrix} \Delta\tilde{\mathcal{Z}}_{\phi_{11}} & \Delta\tilde{\mathcal{Z}}_{\phi_{12}} \\ \Delta\tilde{\mathcal{Z}}_{\phi_{21}} & \Delta\tilde{\mathcal{Z}}_{\phi_{22}} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.14})$$

Im Gegensatz zu  $\delta\mathcal{Z}_\phi^{(1)}$  und  $\Delta\mathcal{Z}_\phi$  sind die Matrizen  $\delta\tilde{\mathcal{Z}}_\phi$  und  $\Delta\tilde{\mathcal{Z}}_\phi$  nicht mehr diagonal.

Mit den Ersetzungen (B.2) und (B.11) erhält man eine renormierte Lagrangedichte der Form

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \delta\mathcal{L}^{(1)} + \delta\mathcal{L}^{(2)}, \quad (\text{B.15})$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (H, h) \left[ k^2 - \mathcal{U}_\phi \mathcal{M}_\phi \mathcal{U}_\phi^+ \right] \begin{pmatrix} H \\ h \end{pmatrix}, \quad (\text{B.16})$$

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}^{(1)} &= \frac{1}{2} (H, h) \left[ \frac{1}{2}k^2(\delta\tilde{\mathcal{Z}}_\phi^+ + \delta\tilde{\mathcal{Z}}_\phi) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2}(\delta\tilde{\mathcal{Z}}_\phi^+ \mathcal{U}_\phi \mathcal{M}_\phi \mathcal{U}_\phi^+ + \mathcal{U}_\phi \mathcal{M}_\phi \mathcal{U}_\phi^+ \delta\tilde{\mathcal{Z}}_\phi) - \mathcal{U}_\phi \delta\mathcal{M}_\phi^{(1)} \mathcal{U}_\phi^+ \right] \begin{pmatrix} H \\ h \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}^{(2)} &= \frac{1}{2} (H, h) \left[ \frac{1}{2}k^2(\Delta\tilde{\mathcal{Z}}_\phi^+ + \Delta\tilde{\mathcal{Z}}_\phi + \frac{1}{2}\delta\tilde{\mathcal{Z}}_\phi^+ \delta\tilde{\mathcal{Z}}_\phi) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2}(\Delta\tilde{\mathcal{Z}}_\phi^+ \mathcal{U}_\phi \mathcal{M}_\phi \mathcal{U}_\phi^+ + \mathcal{U}_\phi \mathcal{M}_\phi \mathcal{U}_\phi^+ \Delta\tilde{\mathcal{Z}}_\phi + \frac{1}{2}\delta\tilde{\mathcal{Z}}_\phi^+ \mathcal{U}_\phi \mathcal{M}_\phi \mathcal{U}_\phi^+ \delta\tilde{\mathcal{Z}}_\phi) \right. \\ &\quad \left. - \mathcal{U}_\phi \delta\mathcal{M}_\phi^{(2)} \mathcal{U}_\phi^+ - \frac{1}{2}(\delta\tilde{\mathcal{Z}}_\phi^+ \mathcal{U}_\phi \delta\mathcal{M}_\phi^{(1)} \mathcal{U}_\phi^+ + \mathcal{U}_\phi \delta\mathcal{M}_\phi^{(1)} \mathcal{U}_\phi^+ \delta\tilde{\mathcal{Z}}_\phi) \right] \begin{pmatrix} H \\ h \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

## B. Selbstenergien

Verwendet man, daß die unitäre Matrix  $\mathcal{U}_\phi$  die Massenmatrix  $\mathcal{M}_\phi$  zu  $\mathcal{D}_\phi$  diagonalisiert,

$$\mathcal{D}_\phi = \mathcal{U}_\phi \mathcal{M}_\phi \mathcal{U}_\phi^+ = \text{diag}(m_H, m_h), \quad (\text{B.19})$$

so erhält man die renormierte Ein-Schleifen-Selbstenergie  $\hat{\Sigma}_{\mathbf{Hh}}^{(1)}$ , die eine  $2 \times 2$ -Matrix ist, als

$$\hat{\Sigma}_{\mathbf{Hh}}^{(1)}(k^2) = \Sigma_{\mathbf{Hh}}^{(1)}(k^2) + \frac{1}{2}k^2(\delta\tilde{\mathcal{Z}}_\phi^+ + \delta\tilde{\mathcal{Z}}_\phi) - \frac{1}{2}(\delta\tilde{\mathcal{Z}}_\phi^+ \mathcal{D}_\phi + \mathcal{D}_\phi \delta\tilde{\mathcal{Z}}_\phi) - \mathcal{U}_\phi \delta\mathcal{M}_\phi^{(1)} \mathcal{U}_\phi^+ \quad (\text{B.20})$$

und die entsprechende renormierte Zwei-Schleifen-Selbstenergie  $\hat{\Sigma}_{\mathbf{Hh}}^{(2)}$  als

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}_{\mathbf{Hh}}^{(2)}(k^2) &= \Sigma_{\mathbf{Hh}}^{(2)}(k^2) + \frac{1}{2}k^2(\Delta\tilde{\mathcal{Z}}_\phi^+ + \Delta\tilde{\mathcal{Z}}_\phi + \frac{1}{2}\delta\tilde{\mathcal{Z}}_\phi^+ \delta\tilde{\mathcal{Z}}_\phi) \\ &\quad - \frac{1}{2}(\Delta\tilde{\mathcal{Z}}_\phi^+ \mathcal{D}_\phi + \mathcal{D}_\phi \Delta\tilde{\mathcal{Z}}_\phi + \frac{1}{2}\delta\tilde{\mathcal{Z}}_\phi^+ \mathcal{D}_\phi \delta\tilde{\mathcal{Z}}_\phi) \\ &\quad - \mathcal{U}_\phi \delta\mathcal{M}_\phi^{(2)} \mathcal{U}_\phi^+ - \frac{1}{2}(\delta\tilde{\mathcal{Z}}_\phi^+ \mathcal{U}_\phi \delta\mathcal{M}_\phi^{(1)} \mathcal{U}_\phi^+ + \mathcal{U}_\phi \delta\mathcal{M}_\phi^{(1)} \mathcal{U}_\phi^+ \delta\tilde{\mathcal{Z}}_\phi). \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

Die eingeführten Z-Faktor-Matrizen mit jeweils vier unabhängigen Einträgen gemäß (B.14) gestatten die Verwendung eines vollständigen On-Shell-Renormierungsschemas, in dem die Bedingung der Entmischung auf der Massen-Schale gefordert wird:

$$\widetilde{\text{Re}} \Sigma_{\mathbf{Hh}}^{(i)}(m_H^2)|_{12} = \widetilde{\text{Re}} \Sigma_{\mathbf{Hh}}^{(i)}(m_h^2)|_{12} = 0. \quad (\text{B.22})$$

$\widetilde{\text{Re}}$  wirkt nur auf Schleifenfunktionen und gibt von diesen den Realteil zurück. Ein vollständiges Renormierungsschema vereinfacht die Berechnung von Prozessen mit den äußeren Teilchen  $H$  bzw.  $h$ . Bei der Berechnung von Massen, insbesondere der Higgs-Massen, ist es günstiger, für die Felder  $\overline{\text{DR}}$ -Renormierungsbedingungen zu verwenden [28]. Dies entspricht einer Renormierung der Felder durch eine Z-Faktor-Matrix mit minimaler Anzahl von unabhängigen Einträgen:

$$\delta\tilde{\mathcal{Z}}_\phi = \mathcal{U}_\phi \delta\mathcal{Z}_\phi^{(1)} \mathcal{U}_\phi^+ \quad (\text{B.23})$$

$$\Delta\tilde{\mathcal{Z}}_\phi = \mathcal{U}_\phi \Delta\mathcal{Z}_\phi \mathcal{U}_\phi^+. \quad (\text{B.24})$$

Die Z-Faktor-Matrizen  $\delta\tilde{\mathcal{Z}}_\phi$  und  $\Delta\tilde{\mathcal{Z}}_\phi$  in (B.23) und (B.24) sind abkürzende Schreibweisen und hängen nur von  $\delta Z_{\phi_1}^{(1)}$ ,  $\delta Z_{\phi_2}^{(1)}$ ,  $\delta Z_{\phi_1}^{(2)}$  und  $\delta Z_{\phi_2}^{(2)}$ , also von jeweils zwei unabhängigen Z-Faktoren, ab.

## B.2. Z-Faktoren der Higgs-Felder in $\mathcal{O}(\alpha_{\{t,b\}}\alpha_s)$

In Kapitel 4.3.2 wurde angegeben, daß die Z-Faktoren  $\Delta Z_{H_1}$  und  $\Delta Z_{H_2}$  in der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_{\{t,b\}}\alpha_s)$  im  $\overline{\text{DR}}$ -Schema verschwinden. Im folgenden wird dies begründet.

## B.2. Z-Faktoren der Higgs-Felder in $\mathcal{O}(\alpha_{\{t,b\}}\alpha_s)$

Für die renormierte  $A^0$ -Z-Mischung  $\hat{\Sigma}_{A^0 Z}$  auf Zwei-Schleifen-Niveau, die von den gesuchten Z-Faktoren abhängt, gilt:

$$\hat{\Sigma}_{A^0 Z}^{(2)}(k^2) = \Sigma_{A^0 Z}^{(2)}(k^2) - iM_Z \sin \beta \cos \beta [\Delta Z_{H_1} - \Delta Z_{H_2} + \mathcal{O}(\alpha^2)] . \quad (\text{B.25})$$

Da die unrenormierte  $A^0$ -Z-Mischung in Zwei-Schleifen-Ordnung,  $\Sigma_{A^0 Z}^{(2)}$ , durch die Kopplung an das Z-Boson in der betrachteten Näherung ( $g = g' = 0$ ) verschwindet, müssen die die im  $\overline{\text{DR}}$ -Schema festgelegten Z-Faktoren übereinstimmen:

$$\Delta Z_{H_1} = \Delta Z_{H_2} . \quad (\text{B.26})$$

Das heißt, es genügt im weiteren, die divergenten Anteile für einen der Z-Faktoren zu bestimmen. Sucht man beispielsweise für  $\Delta Z_{H_1}$  die divergenten Anteile, so ist es hilfreich, die renormierte Zwei-Schleifen-Selbstenergie  $\hat{\Sigma}_{\phi_1^0 \phi_1^0}^{(2)}$  des ursprünglichen, noch nicht in den Masseigenzustand transformierten Higgs-Felds  $\phi_1^0$  auf Zwei-Schleifen-Niveau zu betrachten:

$$\hat{\Sigma}_{\phi_1^0 \phi_1^0}^{(2)}(k^2) = \Sigma_{\phi_1^0 \phi_1^0}^{(2)}(k^2) + (k^2 - \mathcal{M}_{\phi_1^0}) \Delta Z_{H_1} - \delta \mathcal{M}_{\phi_1^0}^{(2)} + \mathcal{O}(\alpha^2) .$$

Der Z-Faktor  $\Delta Z_{H_1}$  muß folglich den zu  $k^2$  proportionalen, divergenten Anteil der unrenormierten Zwei-Schleifen-Selbstenergie  $\Sigma_{\phi_1^0 \phi_1^0}^{(2)}$  absorbieren. Zunächst wird nur der Anteil der unrenormierten Selbstenergie  $\Sigma_{\phi_1^0 \phi_1^0}^{(2)}$  der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_t \alpha_s)$  betrachtet. Da das Top-Quark nur an das zweite Higgs-Dublett koppelt, die Top-Squarks hingegen an beide Higgs-Dubletts, tragen nur die generischen Feynman-Diagramme (a) – (h) in Abb. D.2 mit  $\phi = \phi_1^0$  und die dazugehörigen Feynman-Diagramme mit Counterterm-Einsetz zur Selbstenergie  $\Sigma_{\phi_1^0 \phi_1^0}$  bei. Die Auswertung der Feynman-Diagramme (f) – (h) liefert Integrale, die unabhängig vom äußeren Impuls sind und die damit auch keine zu  $k^2$  proportionalen, divergenten Anteile zur Selbstenergie  $\Sigma_{\phi_1^0 \phi_1^0}^{(2)}$  beitragen. Zur Untersuchung der Diagramme (a) – (e) wird der oberflächliche Divergenzgrad  $\omega$  (3.1) betrachtet. Der oberflächliche Divergenzgrad der Diagramme (a) – (e) ist null, d.h. sie sind logarithmisch divergent – wenn keine Subdiagramme mit höherem oberflächlichen Divergenzgrad existieren – und liefern dann keinen Beitrag zum divergenten Anteil der Selbstenergie  $\Sigma_{\phi_1^0 \phi_1^0}^{(2)}$ , der proportional zu  $k^2$  ist. Für die Diagramme (d) und (e) tritt dieser Fall ein, dagegen besitzen die Diagramme (a) – (c) Subdiagramme mit oberflächlichem Divergenzgrad  $\omega = 2$ , also einen zu  $k^2$  proportionalen, divergenten Anteil. Diese Divergenz wird jedoch von dem Counterterm des dazugehörigen Diagramms mit Counterterm-Einsetzung (siehe Abb. D.3 (a)) absorbiert. Das heißt also, die Selbstenergie  $\Sigma_{\phi_1^0 \phi_1^0}^{(2)}$  besitzt in der betrachteten Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_s \alpha_t)$  keinen zu  $k^2$  proportionalen, divergenten Anteil und damit verschwinden die Z-Faktoren in dieser Ordnung (4.96).

Unter Berücksichtigung, daß das Bottom-Quark nur an das erste Higgs-Dublett koppelt, kann man obige Betrachtung analog für die Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_s \alpha_b)$  durchführen. Anstelle der Selbstenergie  $\Sigma_{\phi_1^0 \phi_1^0}^{(2)}$  untersucht man die Selbstenergie  $\Sigma_{\phi_2^0 \phi_2^0}^{(2)}$  und bestimmt damit den Z-Faktor  $\Delta Z_{H_2}$ . Schließlich findet man, daß (4.96) sowohl in der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_s \alpha_t)$  als auch in der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_s \alpha_b)$  gilt.

### B.3. Counterterme zur Massenmatrix der neutralen Higgs-Bosonen im komplexen MSSM

In Kapitel 7.2.2 sind die Matrixelemente der Massenmatrix der neutralen Higgs-Bosonen  $\mathcal{M}_n$  (7.18) in den Gleichungen (7.41) – (7.48) aufgeführt. Die expliziten Ausdrücke der dazugehörigen Counterterm-Matrix sind in diesem Kapitel aufgelistet. Genauer gesagt, es ist die transformierte Form der Counterterm-Matrix  $i$ -ter Ordnung  $(\mathcal{U}_n \delta\mathcal{M}_n^{(i)} \mathcal{U}_n^+)$  aufgeführt. In dieser Kombination treten die Massenmatrix-Counterterme in den Selbstenergien auf. Die Kombinationen der Parameter-Counterterme können als Massen- und Mischungscounterterme der Higgs-Bosonen in der  $i$ -ten Schleifen-Ordnung interpretiert werden:

$$(\mathcal{U}_n \delta\mathcal{M}_n^{(i)} \mathcal{U}_n^+) = \begin{pmatrix} \delta M_{H^0}^{(i)} & \delta M_{h^0 H^0}^{(i)} & \delta M_{G^0 H^0}^{(i)} & \delta M_{A^0 H^0}^{(i)} \\ \delta M_{h^0 H^0}^{(i)} & \delta M_{h^0}^{(i)} & \delta M_{G^0 h^0}^{(i)} & \delta M_{A^0 h^0}^{(i)} \\ \delta M_{G^0 H^0}^{(i)} & \delta M_{G^0 h^0}^{(i)} & \delta M_{G^0}^{(i)} & \delta M_{A^0 G^0}^{(i)} \\ \delta M_{A^0 H^0}^{(i)} & \delta M_{A^0 h^0}^{(i)} & \delta M_{A^0 G^0}^{(i)} & \delta M_{A^0}^{(i)} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.27})$$

In den angegebenen Ausdrücken wurde schon verwendet, daß die Parameter  $t_{\phi_1^0}$ ,  $t_{\phi_2^0}$ ,  $t_{A^0}$  auf Born-Niveau verschwinden und daß auf Born-Niveau  $\beta_B = \beta$  gilt.

#### B.3.1. Ein-Schleifen-Ordnung $\mathcal{O}(\alpha)$

In diesem Abschnitt sind die Matrixelemente der Matrix  $(\mathcal{U}_n \delta\mathcal{M}_n^{(1)} \mathcal{U}_n^+)$  aufgelistet. Die auftretenden Parameter-Counterterme sind von der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha)$ :

$$\begin{aligned} \delta M_{H^0}^{(1)} &= (\mathcal{U}_n \delta\mathcal{M}_n^{(1)} \mathcal{U}_n^+)_{11} \\ &= \sin^2(\alpha - \beta) (\delta M_{H^\pm}^2{}^{(1)} - \delta M_W^2{}^{(1)}) + \cos^2(\alpha + \beta) \delta M_Z^2{}^{(1)} \\ &\quad - \left[ (M_{H^\pm}^2 - M_W^2) \sin(2(\alpha - \beta)) + M_Z^2 \sin(2(\alpha + \beta)) \right] \cos^2 \beta \delta \tan^{(1)} \beta \\ &\quad + \frac{e \cos(\alpha - \beta)}{4M_Z \cos \theta_W \sin \theta_W} \left[ (\cos(\alpha - 2\beta) - 3 \cos \alpha) \delta t_{\phi_1^0}^{(1)} \right. \\ &\quad \left. - (\sin(\alpha - 2\beta) + 3 \sin \alpha) \delta t_{\phi_2^0}^{(1)} \right], \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$



B.3. Counterterme zur Massenmatrix der neutralen Higgs-Bosonen im komplexen MSSM

$$\begin{aligned}
\delta M_{h^0 H^0}^{(1)} &= (\mathcal{U}_n \delta \mathcal{M}_n^{(1)} \mathcal{U}_n^+)_{12} = (\mathcal{U}_n \delta \mathcal{M}_n^{(1)} \mathcal{U}_n^+)_{21} \\
&= \frac{1}{2} \sin(2(\alpha - \beta)) (\delta M_{H^\pm}^2{}^{(1)} - \delta M_W^2{}^{(1)}) - \frac{1}{2} \sin(2(\alpha + \beta)) \delta M_Z^2{}^{(1)} \\
&\quad - \left[ (M_{H^\pm}^2 - M_W^2) \cos(2(\alpha - \beta)) + M_Z^2 \cos(2(\alpha + \beta)) \right] \cos^2 \beta \delta \tan^{(1)} \beta \\
&\quad + \frac{e \cos(\alpha - \beta)}{4M_Z \cos \theta_W \sin \theta_W} \left[ (\sin(2\alpha - \beta) + \cos(2(\alpha - \beta)) \sin \beta) \delta t_{\phi_1^0}^{(1)} \right. \\
&\quad \quad \left. - \frac{1}{2} (\cos(2\alpha - 3\beta) + 3 \cos(2\alpha - \beta)) \delta t_{\phi_2^0}^{(1)} \right], \tag{B.29}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta M_{h^0}^{(1)} &= (\mathcal{U}_n \delta \mathcal{M}_n^{(1)} \mathcal{U}_n^+)_{22} \\
&= \cos^2(\alpha - \beta) (\delta M_{H^\pm}^2{}^{(1)} - \delta M_W^2{}^{(1)}) + \sin^2(\alpha + \beta) \delta M_Z^2{}^{(1)} \\
&\quad + \left[ (M_{H^\pm}^2 - M_W^2) \sin(2(\alpha - \beta)) + M_Z^2 \sin(2(\alpha + \beta)) \right] \cos^2 \beta \delta \tan^{(1)} \beta \\
&\quad + \frac{e \sin(\alpha - \beta)}{4M_Z \cos \theta_W \sin \theta_W} \left[ (\sin(\alpha - 2\beta) - 3 \sin \alpha) \delta t_{\phi_1^0}^{(1)} \right. \\
&\quad \quad \left. + (\cos(\alpha - 2\beta) + 3 \cos \alpha) \delta t_{\phi_2^0}^{(1)} \right], \tag{B.30}
\end{aligned}$$

$$\delta M_{G^0 H^0}^{(1)} = (\mathcal{U}_n \delta \mathcal{M}_n^{(1)} \mathcal{U}_n^+)_{13} = (\mathcal{U}_n \delta \mathcal{M}_n^{(1)} \mathcal{U}_n^+)_{31} = \frac{e \sin(\alpha - \beta)}{2M_Z \cos \theta_W \sin \theta_W} \delta t_{A^0}^{(1)}, \tag{B.31}$$

$$\delta M_{A^0 H^0}^{(1)} = (\mathcal{U}_n \delta \mathcal{M}_n^{(1)} \mathcal{U}_n^+)_{14} = (\mathcal{U}_n \delta \mathcal{M}_n^{(1)} \mathcal{U}_n^+)_{41} = -\frac{e \cos(\alpha - \beta)}{2M_Z \cos \theta_W \sin \theta_W} \delta t_{A^0}^{(1)}, \tag{B.32}$$

$$\delta M_{G^0 h^0}^{(1)} = (\mathcal{U}_n \delta \mathcal{M}_n^{(1)} \mathcal{U}_n^+)_{23} = (\mathcal{U}_n \delta \mathcal{M}_n^{(1)} \mathcal{U}_n^+)_{32} = -(\mathcal{U}_n \delta \mathcal{M}_n^{(1)} \mathcal{U}_n^+)_{14} = -\delta M_{A^0 H^0}^{(1)}, \tag{B.33}$$

$$\delta M_{A^0 h^0}^{(1)} = (\mathcal{U}_n \delta \mathcal{M}_n^{(1)} \mathcal{U}_n^+)_{24} = (\mathcal{U}_n \delta \mathcal{M}_n^{(1)} \mathcal{U}_n^+)_{42} = (\mathcal{U}_n \delta \mathcal{M}_n^{(1)} \mathcal{U}_n^+)_{13} = \delta M_{G^0 H^0}^{(1)}, \tag{B.34}$$

$$\delta M_{G^0}^{(1)} = (\mathcal{U}_n \delta \mathcal{M}_n^{(1)} \mathcal{U}_n^+)_{33} = -\frac{e}{2M_Z \cos \theta_W \sin \theta_W} (\cos \beta \delta t_{\phi_1^0}^{(1)} + \sin \beta \delta t_{\phi_2^0}^{(1)}), \tag{B.35}$$

$$\begin{aligned}
\delta M_{A^0 G^0}^{(1)} &= (\mathcal{U}_n \delta \mathcal{M}_n^{(1)} \mathcal{U}_n^+)_{34} = (\mathcal{U}_n \delta \mathcal{M}_n^{(1)} \mathcal{U}_n^+)_{43} \\
&= -(M_{H^\pm}^2 - M_W^2) \cos^2 \beta \delta \tan^{(1)} \beta \tag{B.36}
\end{aligned}$$

$$+ \frac{e}{2M_Z \cos \theta_W \sin \theta_W} (\sin \beta \delta t_{\phi_1^0}^{(1)} - \cos \beta \delta t_{\phi_2^0}^{(1)}), \tag{B.37}$$

$$\delta M_{A^0}^{(1)} = (\mathcal{U}_n \delta \mathcal{M}_n^{(1)} \mathcal{U}_n^+)_{44} = \delta M_{H^\pm}^2{}^{(1)} - \delta M_W^2{}^{(1)}. \tag{B.38}$$

## B. Selbstenergien

### B.3.2. Zwei-Schleifen-Ordnung $\mathcal{O}(\alpha_t \alpha_s)$

In diesem Unterkapitel werden die Matrixelemente der Matrix  $(\mathcal{U}_n \delta \mathcal{M}_n^{(2)} \mathcal{U}_n^+)$ , die von der Zwei-Schleifen-Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_t \alpha_s)$  sind, aufgeföhrt. Dabei wurden die Näherungen aus Kapitel 7.3.2 angewendet. Die Parameter-Counterterme, die in dem in Kapitel 7.3.2 gewählten Renormierungsschema verschwinden, wurden gleich null gesetzt.

$$\begin{aligned} \delta M_{H^0}^{(2)} &= (\mathcal{U}_n \delta \mathcal{M}_n^{(2)} \mathcal{U}_n^+)_{11} \\ &= \sin^2(\alpha - \beta) \delta M_{H^\pm}^2{}^{(2)} + \frac{e \cos(\alpha - \beta)}{4M_Z \cos \theta_W \sin \theta_W} \left[ (\cos(\alpha - 2\beta) - 3 \cos \alpha) \delta t_{\phi_1^0}^{(2)} \right. \\ &\quad \left. - (\sin(\alpha - 2\beta) + 3 \sin \alpha) \delta t_{\phi_2^0}^{(2)} \right], \end{aligned} \quad (\text{B.39})$$

$$\begin{aligned} \delta M_{h^0 H^0}^{(2)} &= (\mathcal{U}_n \delta \mathcal{M}_n^{(2)} \mathcal{U}_n^+)_{12} = (\mathcal{U}_n \delta \mathcal{M}_n^{(2)} \mathcal{U}_n^+)_{21} \\ &= \frac{1}{2} \sin(2(\alpha - \beta)) \delta M_{H^\pm}^2{}^{(2)} \\ &\quad + \frac{e \cos(\alpha - \beta)}{4M_Z \cos \theta_W \sin \theta_W} \left[ (\sin(2\alpha - \beta) + \cos(2(\alpha - \beta)) \sin \beta) \delta t_{\phi_1^0}^{(2)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} (\cos(2\alpha - 3\beta) + 3 \cos(2\alpha - \beta)) \delta t_{\phi_2^0}^{(2)} \right], \end{aligned} \quad (\text{B.40})$$

$$\begin{aligned} \delta M_{h^0}^{(2)} &= (\mathcal{U}_n \delta \mathcal{M}_n^{(2)} \mathcal{U}_n^+)_{22} \\ &= \cos^2(\alpha - \beta) \delta M_{H^\pm}^2{}^{(2)} + \frac{e \sin(\alpha - \beta)}{4M_Z \cos \theta_W \sin \theta_W} \left[ (\sin(\alpha - 2\beta) - 3 \sin \alpha) \delta t_{\phi_1^0}^{(2)} \right. \\ &\quad \left. + (\cos(\alpha - 2\beta) + 3 \cos \alpha) \delta t_{\phi_2^0}^{(2)} \right], \end{aligned} \quad (\text{B.41})$$

$$\delta M_{G^0 H^0}^{(2)} = (\mathcal{U}_n \delta \mathcal{M}_n^{(2)} \mathcal{U}_n^+)_{13} = (\mathcal{U}_n \delta \mathcal{M}_n^{(2)} \mathcal{U}_n^+)_{31} = \frac{e \sin(\alpha - \beta)}{2M_Z \cos \theta_W \sin \theta_W} \delta t_{A^0}^{(2)}, \quad (\text{B.42})$$

$$\delta M_{A^0 H^0}^{(2)} = (\mathcal{U}_n \delta \mathcal{M}_n^{(2)} \mathcal{U}_n^+)_{14} = (\mathcal{U}_n \delta \mathcal{M}_n^{(2)} \mathcal{U}_n^+)_{41} = -\frac{e \cos(\alpha - \beta)}{2M_Z \cos \theta_W \sin \theta_W} \delta t_{A^0}^{(2)}, \quad (\text{B.43})$$

$$\delta M_{G^0 h^0}^{(2)} = (\mathcal{U}_n \delta \mathcal{M}_n^{(2)} \mathcal{U}_n^+)_{23} = (\mathcal{U}_n \delta \mathcal{M}_n^{(2)} \mathcal{U}_n^+)_{32} = -(\mathcal{U}_n \delta \mathcal{M}_n^{(2)} \mathcal{U}_n^+)_{14} = -\delta M_{A^0 H^0}^{(2)}, \quad (\text{B.44})$$

$$\delta M_{A^0 h^0}^{(2)} = (\mathcal{U}_n \delta \mathcal{M}_n^{(2)} \mathcal{U}_n^+)_{24} = (\mathcal{U}_n \delta \mathcal{M}_n^{(2)} \mathcal{U}_n^+)_{42} = (\mathcal{U}_n \delta \mathcal{M}_n^{(2)} \mathcal{U}_n^+)_{13} = \delta M_{G^0 H^0}^{(2)}, \quad (\text{B.45})$$

$$\delta M_{G^0}^{(2)} = (\mathcal{U}_n \delta \mathcal{M}_n^{(2)} \mathcal{U}_n^+)_{33} = -\frac{e}{2M_Z \cos \theta_W \sin \theta_W} (\cos \beta \delta t_{\phi_1^0}^{(2)} + \sin \beta \delta t_{\phi_2^0}^{(2)}), \quad (\text{B.46})$$

B.3. Counterterme zur Massenmatrix der neutralen Higgs-Bosonen im komplexen MSSM

$$\begin{aligned}
 \delta M_{A^0 G^0}^{(2)} &= (\mathcal{U}_n \delta \mathcal{M}_n^{(2)} \mathcal{U}_n^+)_{34} = (\mathcal{U}_n \delta \mathcal{M}_n^{(2)} \mathcal{U}_n^+)_{43} \\
 &= \frac{e}{2M_Z \cos \theta_W \sin \theta_W} (\sin \beta \delta t_{\phi_1^0}^{(2)} - \cos \beta \delta t_{\phi_2^0}^{(2)}) ,
 \end{aligned} \tag{B.47}$$

$$\delta M_{A^0}^{(2)} = (\mathcal{U}_n \delta \mathcal{M}_n^{(2)} \mathcal{U}_n^+)_{44} = \delta M_{H^\pm}^2{}^{(2)} . \tag{B.48}$$

*B. Selbstenergien*

## C. Schleifen-Integrale

In diesem Kapitel werden die für die Berechnung der Selbstenergien der Higgs-Bosonen benötigten Integrale aufgeführt. Dabei werden folgenden Abkürzungen verwendet:

- Integration über einen Schleifenimpuls  $q$ :

$$\langle \dots \rangle = \mu^{4-D} \frac{16\pi^2}{i} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \dots \quad (\text{C.1})$$

- Integration über zwei Schleifenimpulse,  $q_1$  und  $q_2$ :

$$\langle \langle \dots \rangle \rangle = \left( \mu^{4-D} \frac{16\pi^2}{i} \right)^2 \int \frac{d^D q_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D q_2}{(2\pi)^D} \dots \quad (\text{C.2})$$

In diesen Integralen wurden die vier Dimensionen der Raumzeit durch  $D$  Dimensionen ersetzt und ein Massenparameter  $\mu$  eingeführt, damit die Dimensionen der Kopplungskonstanten in den Selbstenergien unabhängig von  $D$  bleiben.

### C.1. Ein-Schleifen-Integrale

Auf Ein-Schleifen-Niveau werden die folgenden Integrale gebraucht:

- Einpunktintegral:

$$A(m) := \left\langle \frac{1}{q^2 - m^2} \right\rangle \quad (\text{C.3})$$

- Zweipunktintegrale:

$$B_{\{0, \mu, \mu\nu\}}(p^2, m_1, m_2) := \left\langle \frac{\{1, q_\mu, q_\mu q_\nu\}}{[q^2 - m_1^2][(q+p)^2 - m_2^2]} \right\rangle \quad (\text{C.4})$$

### C. Schleifen-Integrale

Die Tensorintegrale erster bzw. zweiter Stufe, also  $B_\mu(p^2, m_1, m_2)$  bzw.  $B_{\mu\nu}(p^2, m_1, m_2)$ , können nach Lorentz-Kovarianten entwickelt werden:

$$B_\mu(p^2, m_1, m_2) = p_\mu B_1(p^2, m_1, m_2) \quad (\text{C.5})$$

$$B_{\mu\nu}(p^2, m_1, m_2) = g_{\mu\nu} B_{00}(p^2, m_1, m_2) + p_\mu p_\nu B_{11}(p^2, m_1, m_2) \quad (\text{C.6})$$

Hier wurde die Konvention von [74] verwendet. Die Koeffizientenfunktionen  $B_1(p^2, m_1, m_2)$ ,  $B_{00}(p^2, m_1, m_2)$  und  $B_{11}(p^2, m_1, m_2)$  können durch die Funktionen  $A(m)$  und  $B_0(p^2, m_1, m_2)$  ausgedrückt werden:

$$B_1(p^2, m_1, m_2) = \frac{1}{2p^2} \left[ A(m_1) - A(m_2) + (m_2^2 - m_1^2 - p^2) B_0(p^2, m_1, m_2) \right] \quad (\text{C.7})$$

$$B_{00}(p^2, m_1, m_2) = \frac{1}{D-1} \left[ \frac{1}{2} A(m_2) + m_1^2 B_0(p^2, m_1, m_2) - \frac{m_2^2 - m_1^2 - p^2}{2} B_1(p^2, m_1, m_2) \right] \quad (\text{C.8})$$

$$B_{11}(p^2, m_1, m_2) = \frac{1}{p^2} \left[ \frac{1}{2} \frac{D-2}{D-1} A(m_2) - \frac{1}{D-1} m_1^2 B_0(p^2, m_1, m_2) + \frac{D}{D-1} \frac{m_2^2 - m_1^2 - p^2}{2} B_1(p^2, m_1, m_2) \right]. \quad (\text{C.9})$$

Die skalare Funktion  $A(m)$  kann analytisch berechnet werden [101] und ist in  $D = 4 - \epsilon$  Dimensionen:

$$A(m) = m^2 \left[ \frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi - \ln \frac{m^2}{\mu^2} + 1 + \frac{1}{4} \left( (-\gamma_E + \ln 4\pi - \ln \frac{m^2}{\mu^2} + 1)^2 + 1 + \frac{\pi^2}{6} \right) \epsilon \right] + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (\text{C.10})$$

$\gamma_E = -\Gamma'(1) = 0.5772156649\dots$  ist die Euler-Mascheroni-Konstante. Der divergente Anteil des Integrals wird durch den Term  $\sim \frac{1}{\epsilon}$  ausgedrückt, der einen Pol für  $\epsilon \rightarrow 0$  darstellt.  $\epsilon \rightarrow 0$  entspricht dem Übergang von  $D$  Dimensionen zu den vier Raumzeitdimensionen  $D \rightarrow 4$ .

Die  $B_0$ -Funktion kann analytisch [101] in folgender Form ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} B_0(p^2, m_1, m_2) &= \frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi - \int_0^1 dx \ln \frac{x^2 p^2 - x(p^2 + m_1^2 - m_2^2) + m_1^2 - i\epsilon}{\mu^2} + \mathcal{O}(\epsilon) \\ &= \frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi + 2 - \ln \frac{m_1 m_2}{\mu^2} + \frac{m_1^2 - m_2^2}{p^2} \ln \frac{m_2}{m_1} \\ &\quad - \frac{m_1 m_2}{p^2} \left( \frac{1}{r} - r \right) \ln r + \mathcal{O}(\epsilon). \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

Der Parameter  $r$  wird dabei durch die Gleichung

$$x^2 + \frac{m_1^2 + m_2^2 - p^2 - i\epsilon}{m_1 m_2} x + 1 = (x + r)\left(x + \frac{1}{r}\right) \quad (\text{C.12})$$

bestimmt. Die Anteile der  $B_0$ -Funktion, die proportional zu  $\epsilon = 4 - D$  sind, kompensieren sich in den Rechnungen dieser Arbeit und werden deswegen nicht benötigt. Ein Ausdruck für diesen Anteil der  $B_0$ -Funktion ist zum Beispiel in [102] explizit angegeben.

Die Ableitung der  $B_0$ -Funktion nach  $p^2$  ist durch eine Kombination von  $B_0$ -Funktionen gegeben:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_0}{\partial p^2} &= \frac{1}{N} \left[ (m_1^2 + m_2^2) B_0(p^2, m_1, m_2) - m_1^2 B_0(0, m_1, m_1) - m_2^2 B_0(0, m_2, m_2) \right. \\ &\quad \left. - p^2 - \frac{(m_1^2 - m_2^2)^2}{p^2} [B_0(p^2, m_1, m_2) - B_0(0, m_1, m_2)] \right] \\ \text{mit } N &= \left[ (p^2 - (m_1 - m_2)^2)(p^2 - (m_1 + m_2)^2) \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

Diese Ableitung divergiert für  $p^2 \rightarrow (m_1 + m_2)^2$ . Dagegen existieren die Grenzwerte an den Stellen  $p^2 = 0$  und  $p^2 = (m_1 - m_2)^2$ .

## C.2. Zwei-Schleifen-Integrale

Die Amplitude einer Zwei-Schleifen-Selbstenergie kann auf einen Ausdruck, der nur skalare Integrale enthält, reduziert werden [81]. Diese skalaren Integrale, die sogenannten T-Integrale, haben folgende Form:

$$T_{i_1 i_2 \dots i_n}(p, m_1, \dots, m_n) = \left\langle \left\langle \frac{1}{(k_{i_1}^2 - m_1^2)(k_{i_2}^2 - m_2^2) \dots (k_{i_n}^2 - m_n^2)} \right\rangle \right\rangle. \quad (\text{C.14})$$

Die Indizes  $i_j$ , mit  $j = 1, \dots, n$ , nehmen die Werte 1 bis 5 an. Die Impulse  $k_{i_j}$  sind aufgrund der Impulserhaltung nicht vollständig unabhängig, sondern setzen sich aus Kombinationen der Integrationsimpulse  $q_1, q_2$  und dem äußeren Impuls  $p$  zusammen:

$$k_1 = q_1, \quad k_2 = q_1 + p, \quad k_3 = q_2 - q_1, \quad k_4 = q_2, \quad k_5 = q_2 + p.$$

Das einzige Integral, daß von fünf Propagatoren mit jeweils unterschiedlichem Impuls abhängt, ist das sogenannte „Master-Integral“:

$$T_{12345}(p, m_1, m_2, m_3, m_4, m_5) = \left\langle \left\langle \frac{1}{(k_1^2 - m_1^2)(k_2^2 - m_2^2)(k_3^2 - m_3^2)(k_4^2 - m_4^2)(k_5^2 - m_5^2)} \right\rangle \right\rangle. \quad (\text{C.15})$$

Die Impulse sind dabei wie in Abb. C.1 angeordnet.

### C. Schleifen-Integrale

In der vorliegenden Arbeit wurde bei der Berechnung der Zwei-Schleifen-Selbstenergien die Näherung verschwindender äußerer Impulse verwendet. Damit können die Amplituden aller Zwei-Schleifen-Selbstenergien durch Produkte von Ein-Schleifen-Integralen  $A$  und durch das Zwei-Schleifen-Integral  $T_{134}$  (vgl. Abb. C.2) ausgedrückt werden. Die Reduktion der Amplitude auf diese Integrale wird mittels Partialbruchzerlegung im Fall von Propagatoren mit gleichen Impulsen aber unterschiedlichen Massen oder mit der Methode der partiellen Integration [103] durchgeführt.

Das  $T_{134}$ -Integral ist durch folgenden analytischen Ausdruck [104] mit den Massen  $m_1$ ,  $m_2$  und  $m_3$ , wobei  $m_3 > m_2 > m_1$  angenommen wird, gegeben:

$$\begin{aligned}
T_{134}(m_1, m_2, m_3) = & \frac{2}{\epsilon^2} (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2) \\
& + \frac{2}{\epsilon} \left[ \frac{3}{2} (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2) - m_1^2 L_{m_1} - m_2^2 L_{m_2} - m_3^2 L_{m_3} \right] \\
& + \left( \frac{7}{2} + \frac{\pi^2}{12} \right) (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2) \\
& + m_1^2 (L_{m_1}^2 - 3L_{m_1}) + m_2^2 (L_{m_2}^2 - 3L_{m_2}) + m_3^2 (L_{m_3}^2 - 3L_{m_3}) \\
& + \frac{1}{4} (m_1^2 - m_2^2 - m_3^2) \ln^2 \left( \frac{m_2^2}{m_3^2} \right) + \frac{1}{4} (-m_1^2 + m_2^2 - m_3^2) \ln^2 \left( \frac{m_1^2}{m_3^2} \right) \\
& + \frac{1}{4} (-m_1^2 - m_2^2 + m_3^2) \ln^2 \left( \frac{m_1^2}{m_2^2} \right) + \frac{1}{2} m_3^2 \lambda^2(x, y) \Phi(x, y) . \quad (\text{C.16})
\end{aligned}$$

$L_{m_i}$  mit  $i = 1, 2, 3$  wird als abkürzende Schreibweise verwendet:

$$L_{m_i} = \gamma_E - \ln(4\pi) + \ln \left( \frac{m_i^2}{\mu^2} \right) . \quad (\text{C.17})$$

Die Funktionen  $\lambda^2(x, y)$  bzw.  $\Phi(x, y)$  können durch

$$\lambda^2(x, y) = (1 - x - y)^2 - 4xy \quad (\text{C.18})$$

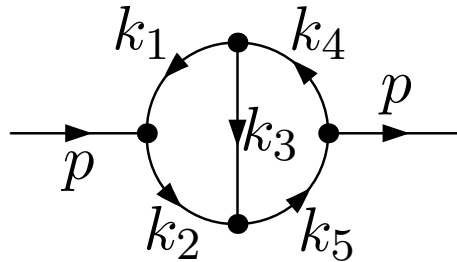


Abb. C.1.: Die Topologie des „Master-Integrals“.



bzw.

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) = \frac{1}{\lambda} & \left[ 2 \ln\left(\frac{1+x-y-\lambda}{2}\right) \ln\left(\frac{1-x+y-\lambda}{2}\right) - \ln x \ln y \right. \\ & \left. - 2\text{Li}_2\left(\frac{1+x-y-\lambda}{2}\right) - 2\text{Li}_2\left(\frac{1-x+y-\lambda}{2}\right) + \frac{\pi^2}{3} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

ausgedrückt werden.  $x$  und  $y$  sind dabei folgende Massenverhältnisse:

$$x = \frac{m_1^2}{m_3^2}, \quad y = \frac{m_2^2}{m_3^2}. \quad (\text{C.20})$$

Falls die Masse  $m_1$  den Wert null annimmt, vereinfacht sich das  $T_{134}$ -Integral zu:

$$\begin{aligned} T_{134}(0, m_2, m_3) = & \frac{2}{\epsilon^2}(m_2^2 + m_3^2) + \frac{2}{\epsilon} \left[ \frac{3}{2}(m_2^2 + m_3^2) - m_2^2 L_{m_2} - m_3^2 L_{m_3} \right] \\ & + \left( \frac{7}{2} + \frac{\pi^2}{12} \right) (m_2^2 + m_3^2) + m_2^2 (L_{m_2}^2 - 3L_{m_2}) + m_3^2 (L_{m_3}^2 - 3L_{m_3}) \\ & + (m_2^2 - m_3^2) \left[ \ln\left(\frac{m_2^2}{m_3^2}\right) \ln\left(1 - \frac{m_2^2}{m_3^2}\right) + \text{Li}_2\left(\frac{m_2^2}{m_3^2}\right) - \frac{\pi^2}{6} \right] \\ & - \frac{1}{2} m_2^2 \ln^2\left(\frac{m_2^2}{m_3^2}\right). \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

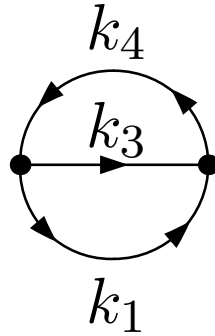


Abb. C.2.: Die Topologie des Vakuumschleifenintegrals  $T_{134}$ .

### C. Schleifen-Integrale

# D. Feynman-Diagramme

In diesem Anhang werden die Feynman-Diagramme aufgeführt, die Ein- und Zwei-Schleifen-Beiträge zu den unrenormierten Higgs-Selbstenergien bzw. Zwei-Schleifen-Beiträge zu den Tadpoles liefern.

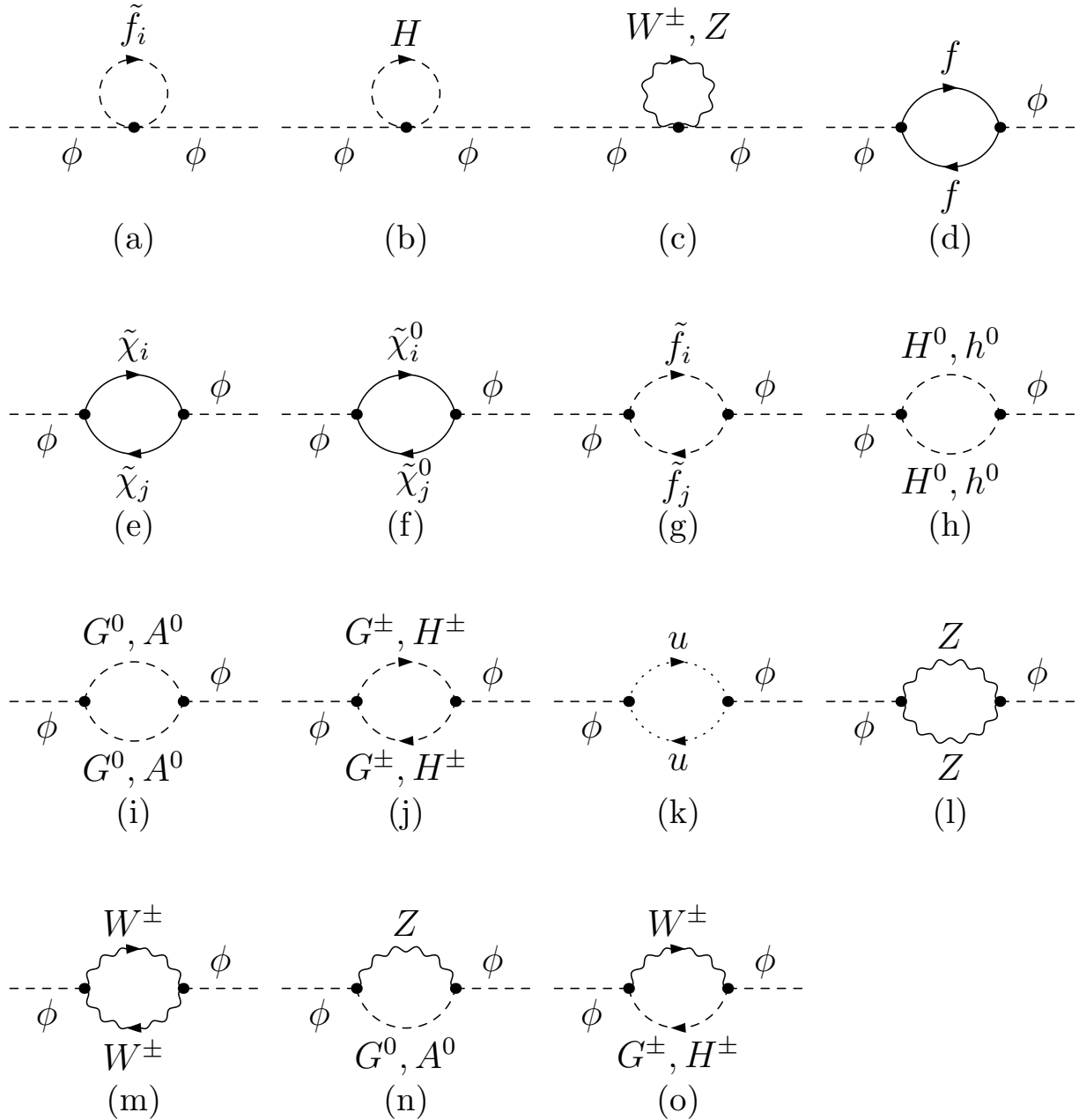
**Die Teilchen werden dabei folgendermaßen bezeichnet:**

Fermionen:	$f = \{e, \mu, \tau, u, d, c, s, t, b\}$	Sfermionen:	$\tilde{f}_s = \{\tilde{\nu}_e, \tilde{\nu}_\mu, \tilde{\nu}_\tau, \tilde{e}_s, \tilde{\mu}_s, \tilde{\tau}_s, \tilde{u}_s, \tilde{d}_s, \tilde{c}_s, \tilde{s}_s, \tilde{t}_s, \tilde{b}_s\}$
Top-Quarks:	$t$	Top-Squarks:	$\tilde{t}_s$
Bottom-Quarks:	$b$	Bottom-Squarks:	$\tilde{b}_s$
Z-Bosonen:	$Z$		
W-Bosonen:	$W^\pm$		
Neutrale Higgs-Bosonen:	$h^0, H^0, A^0$	Neutralinos:	$\tilde{\chi}_n^0$
Geladene Higgs-Bosonen:	$H^\pm$	Charginos:	$\tilde{\chi}_c$
Neutrale Goldstone-Bosonen:	$G^0$		
Geladene Goldstone-Bosonen:	$G^\pm$		
Gluonen:	$g$	Gluinos:	$\tilde{g}$
Geister:	$u = \{u^Z, u^\pm\}$		

**mit den Indizes:**

Sfermionindex: (Numerierung der Sfermionen in 1-2-Basis)	$s = 1 \dots 2$
Neutralinoindex: (Numerierung der Neutralinos)	$n = 1 \dots 4$
Charginoindex: (Numerierung der Charginos)	$c = 1 \dots 2$

D. Feynman-Diagramme



**Abb. D.1.:** Feynman-Diagramme, die zu den unrenormierten Selbstenergien der CP-geraden Higgs-Bosonen beitragen. Dabei ist  $\phi = H^0, h^0$  und  $H = H^0, h^0, A^0, G^0, G^\pm, H^\pm$ . Das Feynman-Diagramm (c) existiert nicht für die Mischung von  $h^0$  und  $H^0$ .

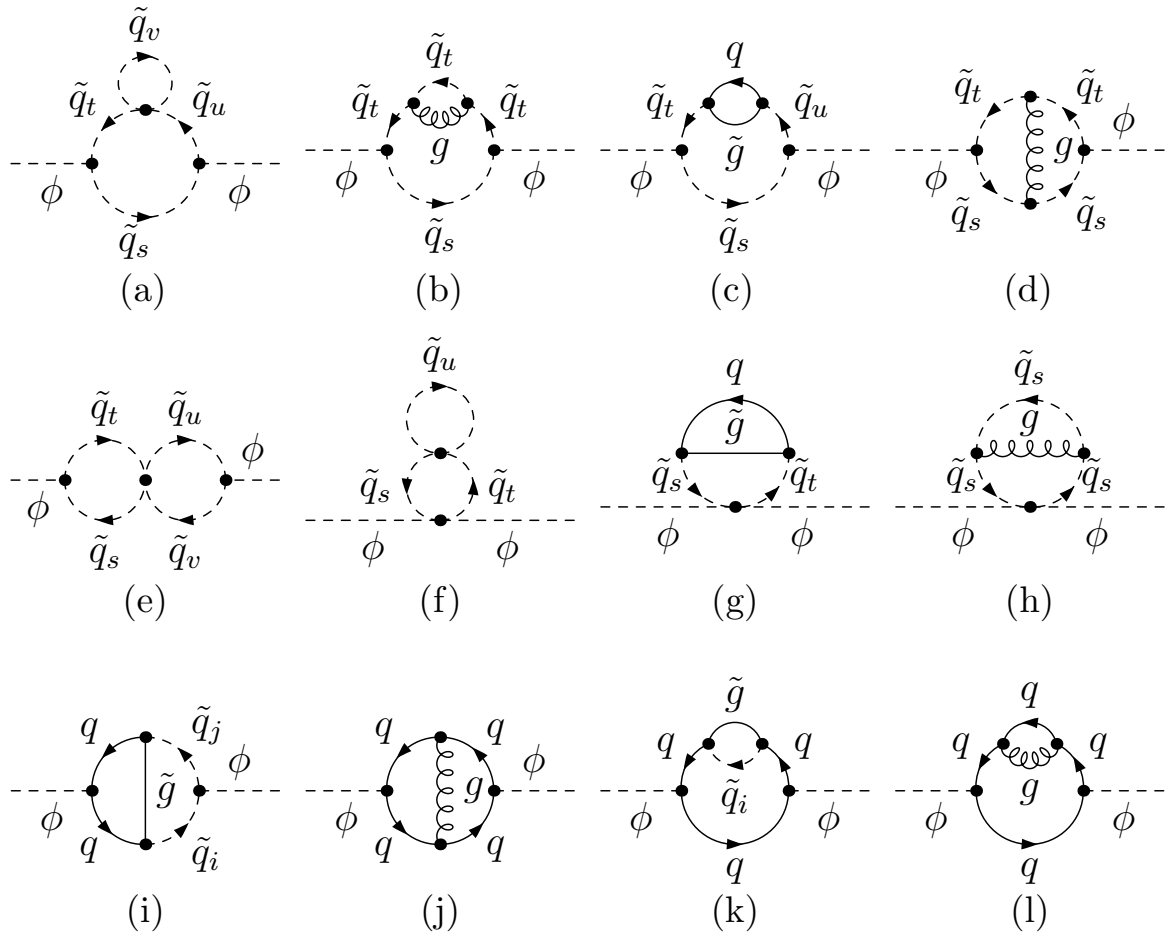


Abb. D.2.: Feynman-Diagramme, die Beiträge der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_q \alpha_s)$  mit  $q = t, b$  zu den Selbstenergien der neutralen Higgs-Bosonen liefern. Dabei ist  $\phi = h^0, H^0, A^0$ .

D. Feynman-Diagramme

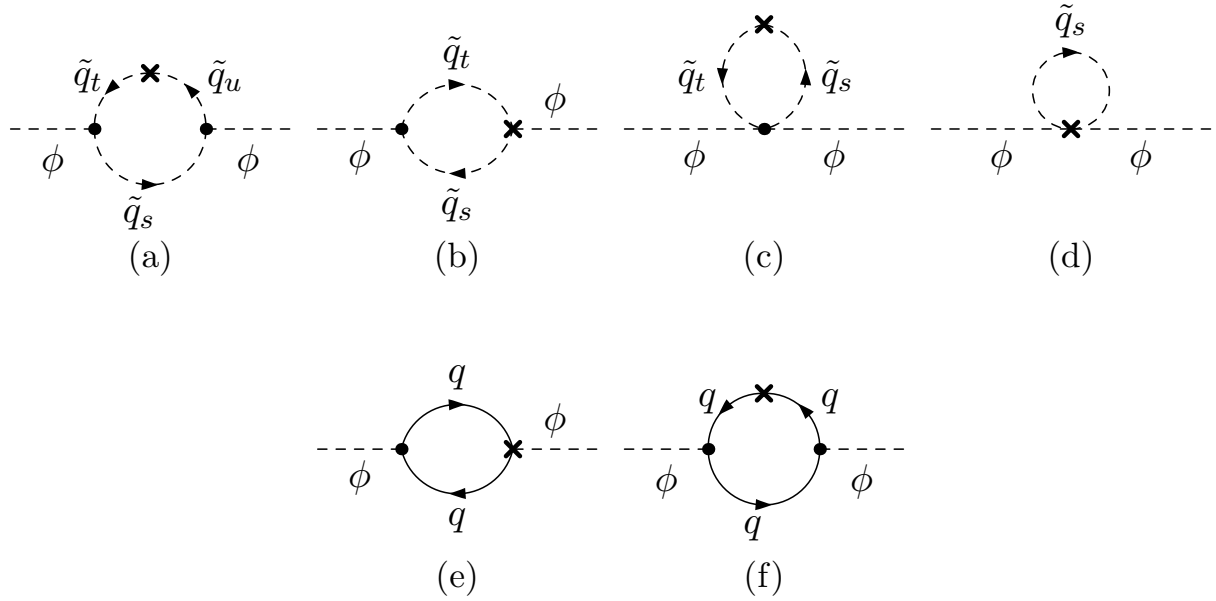


Abb. D.3.: Ein-Schleifen-Diagramme mit Counterterm-Einsetzungen, die Beiträge der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_q\alpha_s)$  mit  $q = t, b$  zu den Selbstenergien der neutralen Higgs-Bosonen mit  $\phi = h^0, H^0, A^0$  liefern.

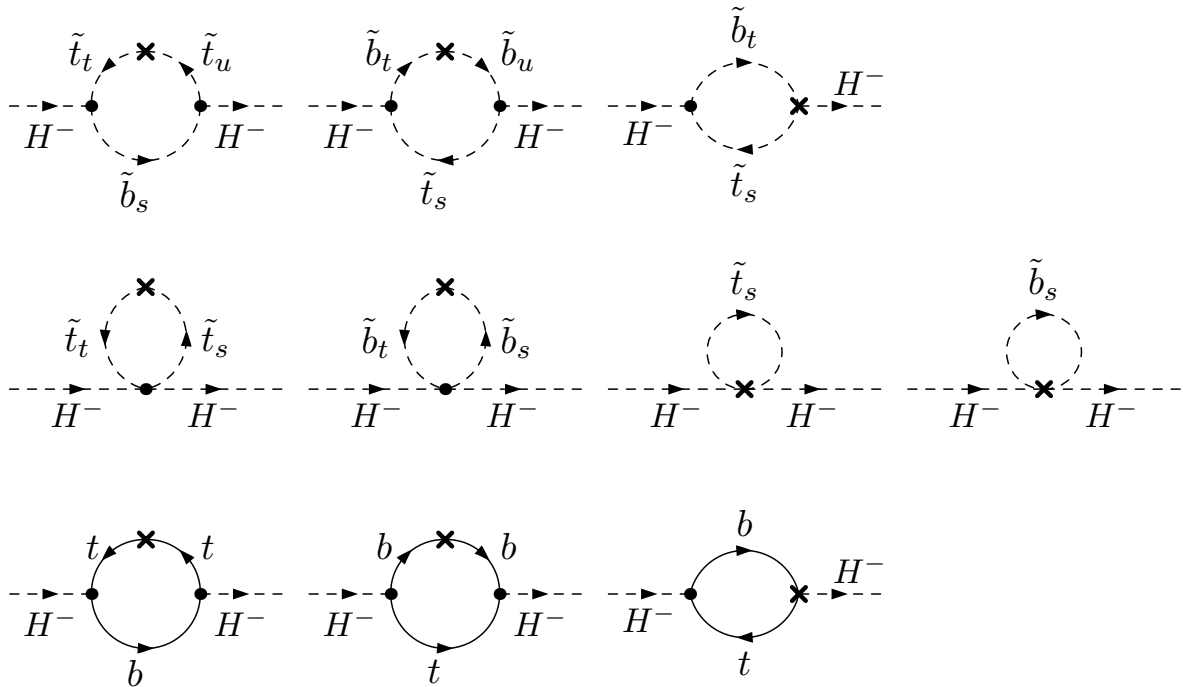


Abb. D.4.: Ein-Schleifen-Diagramme mit Counterterm-Einsetzungen, die Beiträge der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_t\alpha_s)$  zur Selbstenergie der geladenen Higgs-Bosonen liefern.

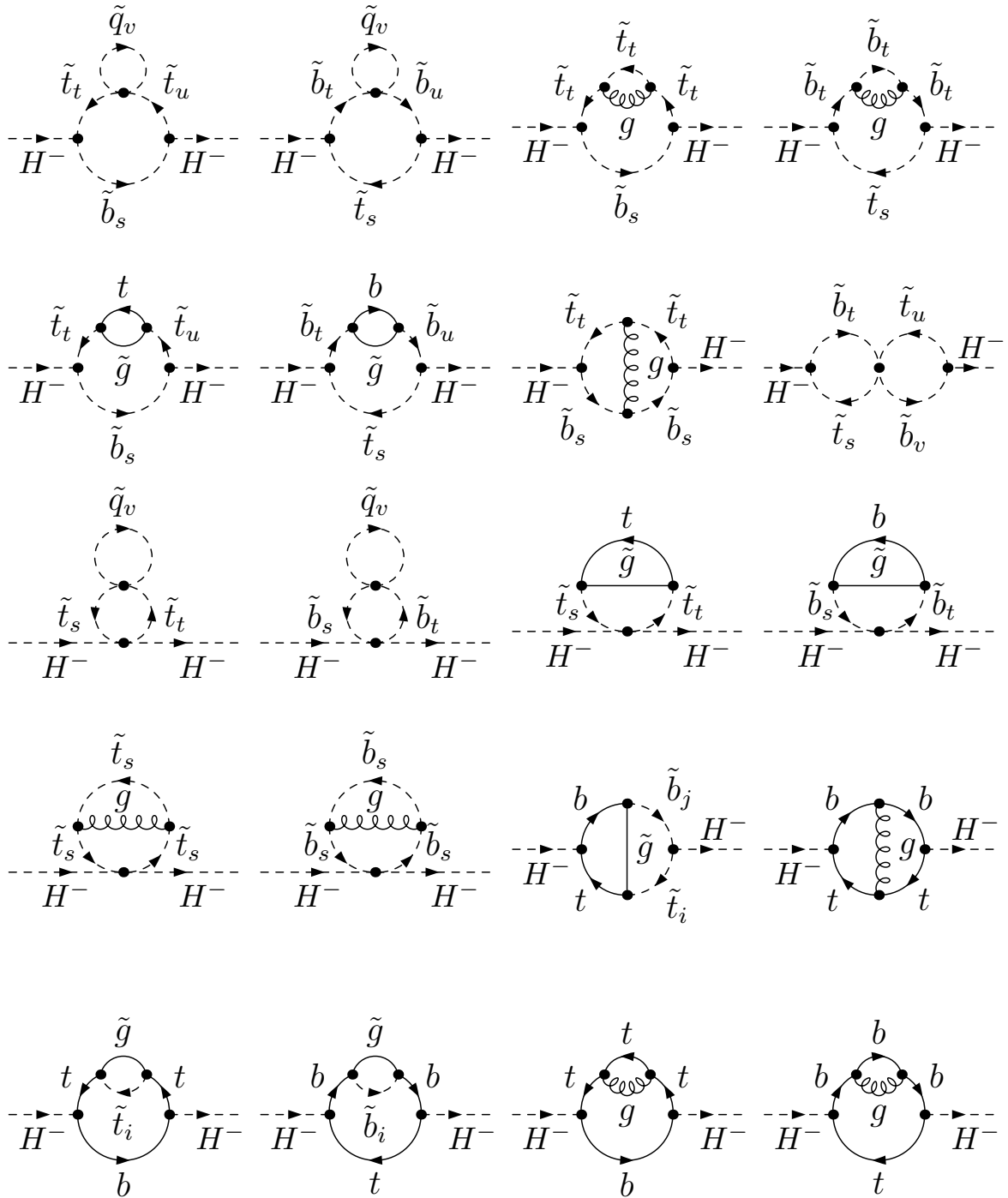
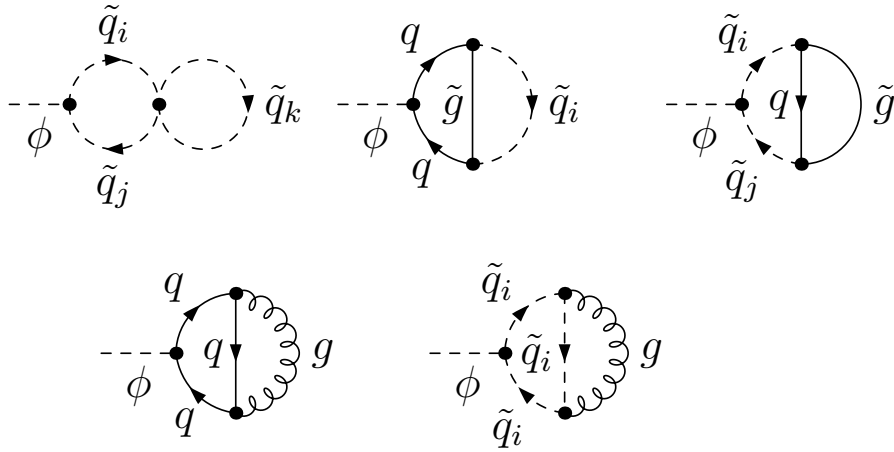
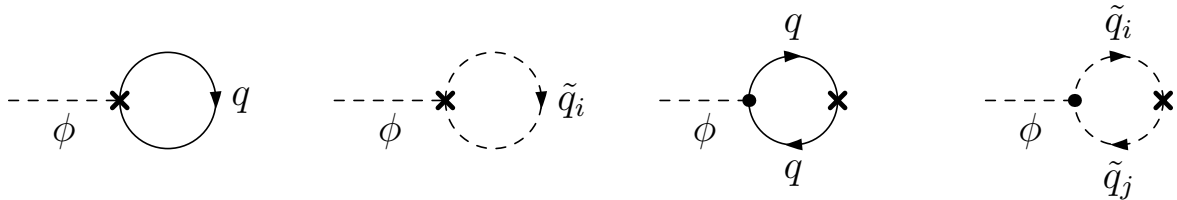


Abb. D.5.: Feynman-Diagramme, die Beiträge der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_t\alpha_s)$  zur Selbstenergie der geladenen Higgs-Bosonen liefern. Dabei ist  $\tilde{q}_v = \tilde{t}_v, \tilde{b}_v$ .

D. Feynman-Diagramme



**Abb. D.6.:** Feynman-Diagramme auf Zwei-Schleifen-Niveau, die Beiträge zu den Tadpoles liefern. Diese Tadpoles gehen in die renormierten Selbstenergien der neutralen Higgs-Bosonen der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_q\alpha_s)$  ein. Dabei ist  $q = t, b$ .



**Abb. D.7.:** Ein-Schleifen-Diagramme mit Counterterm-Einsetzungen, die Beiträge zu den Tadpoles liefern. Diese Tadpoles gehen in die renormierten Selbstenergien der neutralen Higgs-Bosonen der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_q\alpha_s)$  ein, wobei  $q = t, b$  ist.



# Literaturverzeichnis

- [1] S.L. Glashow, *Nucl. Phys.* **B 22** (1961) 579;  
S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **19** (1967) 19;  
A. Salam, in: *Proceedings of the 8th Nobel Symposium*, Editor N. Svartholm, Stockholm, 1968.
- [2] S.L. Glashow, J. Illiopoulos, L. Maiani, *Phys. Rev.* **2** (1970) 1285.
- [3] N. Cabibbo, *Phys. Rev. Lett.* **10** (1963) 531;  
M. Kobayashi, K. Maskawa, *Progr. Theor. Phys.* **49** (1973) 652.
- [4] O.W. Greenberg, *Phys. Rev. Lett.* **13**, (1964) 598;  
M.Y. Han, Y. Nambu, *Phys. Rev.* **139**, (1965) B1006;  
D. J. Gross, F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **30** (1973) 1343; *Phys. Rev.* **D 8** (1973) 3633;  
*Phys. Rev.* **D 9** (1974) 980;  
H. D. Politzer, *Phys. Rev. Lett.* **30** (1973) 1346;  
W.A. Bardeen, H. Fritzsch, M. Gell-Mann in *Scale and Conformal Invariance in Hadron Physics*, ed. R. Gatto (Wiley, New York, 1973).
- [5] F. Teubert, Plenarvortrag „ICHEP04“, Beijing, China, August 2004, (erscheint in den Proceedings), siehe:  
<http://www.ihep.ac.cn/data/ichep04/ppt/plenary/p21-teubert-f.ppt> ;  
D. Abbaneo *et. al* [LEP Collaborations], **hep-ex/0412015**;  
siehe auch: <http://lepewwg.web.cern.ch/LEPEWWG/Welcome.html> .
- [6] S. Bethke, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **135** (2004) 345;  
G. Dissertori, I. Knowles, M. Schelling, *Quantum Chromodynamics, High Energy Experiments and Theory*, Oxford University Press, 2003.
- [7] J. Wess, J. Bagger, *Supersymmetry and Supergravity*, 2.nd Edition, Princeton Series in Physics, 1992.
- [8] P.W. Higgs, *Phys. Lett.* **12** (1964) 132; *Phys. Lett.* **13** (1964) 508; *Phys. Rev.* **145** (1970) 1285;  
R. Brout, F. Englert, *Phys. Rev. Lett.* **13** (1964) 321;  
T.W.B. Kibble, *Phys. Rev.* **155** (1967) 1554.

- [9] [ATLAS Collaboration], *Detector and Physics Performance Technical Design Report*, CERN/LHCC/99-15 (1999), siehe:  
<http://atlasinfo.cern.ch/Atlas/GROUPS/PHYSICS/TDR/access.html> ;  
[CMS Collaboration], siehe:  
<http://cmsinfo.cern.ch/Welcome.html/CMSdocuments/CMSplots/> .
- [10] J. Aguilar-Saavedra et al., TESLA TDR Part 3: “Physics at an  $e^+e^-$  Linear Collider”, siehe: <http://tesla.desy.de/tdr/> .
- [11] T. Abe et al. [American Linear Collider Working Group Collaboration], *Resource book for Snowmass 2001*, **hep-ex/0106056**.
- [12] K. Abe et al. [ACFA Linear Collider Working Group Collaboration], *Particle physics experiments at JLC*, **hep-ph/0109166**.
- [13] H.E. Haber, G.L. Kane, *Phys. Rep.* **117** (1985) 75.
- [14] J. F. Gunion, H. E. Haber, G. L. Kane, S. Dawson, *The Higgs Hunter’s Guide*, Frontiers in Physics Vol. 80, Addison-Wesley, 1990.
- [15] S. Heinemeyer, W. Hollik, G. Weiglein, *Eur. Phys. J. C* **9** (1999) 343.
- [16] G. Degrassi, S. Heinemeyer, W. Hollik, P. Slavich, G. Weiglein, *Eur. Phys. J. C* **28** (2003) 133.
- [17] R. Barate *et al.* , [ALEPH Collaboration], *Phys. Lett. B* **565** (2003) 61;  
[LEP Higgs working group], **hep-ex/0107030**; **hep-ex/0107031**;  
LHWG-Note 2004-01, siehe: <http://lephiggs.web.cern.ch/LEPHIGGS/papers/> .
- [18] J. Ellis, G. Ridolfi, F. Zwirner, *Phys. Lett. B* **257** (1991) 83;  
Y. Okada, M. Yamaguchi, T. Yanagida, *Prog. Theor. Phys.* **85** (1991) 1;  
H. Haber, R. Hempfling, *Phys. Rev. Lett.* **66** (1991) 1815.
- [19] A. Brignole, *Phys. Lett. B* **281** (1992) 284.
- [20] P. Chankowski, S. Pokorski, J. Rosiek, *Phys. Lett. B* **286** (1992) 307; *Nucl. Phys. B* **423** (1994) 437.
- [21] A. Dabelstein, *Nucl. Phys. B* **456** (1995) 25; *Z. Phys. C* **67** (1995) 495.
- [22] D. M. Pierce, J. A. Bagger, K. T. Matchev, R. j. Zhang, *Nucl. Phys. B* **491** (1997) 3.
- [23] M. Frank, S. Heinemeyer, W. Hollik, G. Weiglein,  
*FeynHiggs1.2: Hybrid  $\overline{MS}$  / on-shell renormalization for the CP-even Higgs boson sector in the MSSM*, **hep-ph/0202166**.
- [24] A. Pilaftsis, *Phys. Rev. D* **58** (1998) 096010; *Phys. Lett. B* **435** (1998) 88.

- [25] D. A. Demir, *Phys. Rev. D* **60** (1999) 055006.
- [26] S. Y. Choi, M. Drees, J. S. Lee, *Phys. Lett. B* **481** (2000) 57.
- [27] S. Heinemeyer, *Eur. Phys. J. C* **22** (2001) 521.
- [28] M. Frank, *Strahlungskorrekturen im Higgs-Sektor des Minimalen Supersymmetrischen Standardmodells mit CP-Verletzung*,  
Doktorarbeit, Universität Karlsruhe, Rhombos Verlag, Berlin, 2003.
- [29] R. Hempfling, A. Hoang, *Phys. Lett. B* **331** (1994) 99.
- [30] A. Hoang, *Applications of Two-Loop Calculations in the Standard Model and its Minimal Supersymmetric Extension*,  
Doktorarbeit, Universität Karlsruhe, Shaker Verlag, Aachen 1995.
- [31] M. Carena, J. Espinosa, M. Quirós, C. E. M. Wagner, *Phys. Lett. B* **355** (1995) 209;  
M. Carena, M. Quirós, C. E. M. Wagner, *Nucl. Phys. B* **461** (1996) 407.
- [32] H. Haber, R. Hempfling, A. Hoang, *Z. Phys. C* **75** (1997) 539.
- [33] S. Heinemeyer, W. Hollik, G. Weiglein, *Phys. Rev. D* **58** (1998) 091701; *Phys. Lett. B* **440** (1998) 296.
- [34] S. Heinemeyer, W. Hollik, G. Weiglein, *Eur. Phys. Jour. C* **9** (1999) 343.
- [35] R. Zhang, *Phys. Lett. B* **447** (1999) 89;  
J. Espinosa, R. Zhang, *JHEP* **0003** (2000) 026.
- [36] G. Degrassi, P. Slavich, F. Zwirner, *Nucl. Phys. B* **611** (2001) 403.
- [37] M. Carena, H. Haber, S. Heinemeyer, W. Hollik, C. E. M. Wagner, G. Weiglein, *Nucl. Phys. B* **580** (2000) 29.
- [38] J. Espinosa, R. Zhang, *Nucl. Phys. B* **586** (2000) 3.
- [39] A. Brignole, G. Degrassi, P. Slavich, F. Zwirner, *Nucl. Phys. B* **631** (2002) 195.
- [40] A. Brignole, G. Degrassi, P. Slavich, F. Zwirner, *Nucl. Phys. B* **643** (2002) 79.
- [41] A. Dedes, G. Degrassi, P. Slavich, *Nucl. Phys. B* **672** (2003) 144.
- [42] S. Martin, *Phys. Rev. D* **65** (2002) 116003; *Phys. Rev. D* **66** (2002) 096001; *Phys. Rev. D* **67** (2003) 095012; *Phys. Rev. D* **68** 075002 (2003); *Phys. Rev. D* **70** (2004) 016005.
- [43] S. Martin, *Phys. Rev. D* **71** (2005) 016012.

## Literaturverzeichnis

- [44] T. Banks, *Nucl. Phys.* **B 303** (1988) 172;  
L. Hall, R. Rattazzi, U. Sarid, *Phys. Rev.* **D 50** (1994) 7048;  
R. Hempfling, *Phys. Rev.* **D 49** (1994) 6168;  
M. Carena, M. Olechowski, S. Pokorski, C. E. M. Wagner, *Nucl. Phys.* **B 426** (1994) 269.
- [45] M. Carena, D. Garcia, U. Nierste, C. E. M. Wagner, *Nucl. Phys.* **B 577** (2000) 88.
- [46] H. Eberl, K. Hidaka, S. Kraml, W. Majerotto, Y. Yamada, *Phys. Rev.* **D 62** (2000) 055006.
- [47] A. Pilaftsis, C. E. M. Wagner, *Nucl. Phys.* **B 553** (1999) 3.
- [48] M. Carena, J. R. Ellis, A. Pilaftsis, C. E. M. Wagner, *Nucl. Phys.* **B 586** (2000) 92.
- [49] S. Heinemeyer, W. Hollik, H. Rzehak, G. Weiglein, *Eur. Phys. J.* **C 39** (2005) 465.
- [50] S. Eidelmann *et al.*, *Phys. Lett.* **B 592** (2004) 1, <http://pdg.lbl.gov/> .
- [51] H. Georgi, S.L. Glashow, *Phys. Rev. Lett.* **32** (1974) 4383.
- [52] U. Amaldi, W. de Boer, H. Fürstenau, *Phys. Lett.* **B 260** (1991) 447.
- [53] E. Witten, *Nucl. Phys.* **B 188** (1981) 513.
- [54] E. W. Kolb, M. S. Turner, *The Early Universe*, Addison-Wesley, New York, 1990;  
D. N. Spergel *et al.* [WMAP Collaboration], *Astrophys. J. Suppl.* **148** (2003) 175.
- [55] R. Haag, J.T. Łopuszński, M. Sohnius, *Nucl. Phys.* **B 88** (1975) 257.
- [56] M.F. Sohnius, *Phys. Rep.* **128** (1985) 39.
- [57] H.P. Nilles, *Phys. Rep.* **110** (1984) 1.
- [58] M. Drees, *An Introduction to Supersymmetry*, **hep-ph/9611409**.
- [59] S. Martin, *A Supersymmetry Primer*, **hep-ph/9709356**.
- [60] P. Fayet, J. Iliopoulos, *Phys. Lett.* **B 51** (1974) 461;  
L. O’Raifeartaigh, *Nucl. Phys.* **B 96** (1975) 331.
- [61] L. Girardello, M.T. Grisaru, *Nucl. Phys.* **B 194** (1982) 65.
- [62] L.D. Faddeev, V.N. Popov, *Phys. Lett.* **B 25** (1967) 29.
- [63] C. Becchi, A. Rouet, R. Stora, *Phys. Lett.* **B 52** (1974) 344; *Comm. Math. Phys.* **42** (1975) 127.

- [64] I. Simonsen, *A Review of Minimal Supersymmetric Electro Weak Theory*, **hep-ph/9506369**;  
T. Fritzsche, Diplomarbeit, Karlsruhe 2000.
- [65] F. J. Dyson, *Phys. Rev.* **75** (1949) 1736.
- [66] W. Pauli, F. Villars, *Rev. Mod. Phys.* **21** (1949) 434.
- [67] C. Bollini, J. Giambiagi, *Nuovo Cim.* **B 12** (1972) 20;  
J. Ashmore, *Nuovo Cim. Lett.* **4** (1972) 289;  
G. 't Hooft, M. Veltman, *Nucl. Phys.* **B 44** (1972) 189.
- [68] W. Siegel, *Phys. Lett.* **B 84** (1979) 193.
- [69] D.M. Capper, D.R.T. Jones, P. van Nieuwenhuizen, *Nucl. Phys.* **B 167** (1980) 479.
- [70] G. 't Hooft, *Nucl. Phys.* **B 61** (1973) 455;  
W. A. Bardeen, A. J. Buras, D. W. Duke, T. Muta, *Phys. Rev.* **D 18** (1978) 3998;  
A. J. Buras, *Rev. Mod. Phys.* **52** (1980) 199.
- [71] G. Passarino, M. Veltman, *Phys. Lett.* **C 237** (1990) 537.
- [72] W.J. Marciano, A. Sirlin, *Phys. Rev. Lett.* **46** (1981) 163;  
A. Sirlin, *Phys. Lett.* **B 232** (1989) 123.
- [73] M. Böhm, W. Hollik, H. Spiesberger, *Fortschr. Phys.* **34** (1986) 687.
- [74] A. Denner, *Fortschr. Phys.* **41** (1993) 307.
- [75] H.E. Haber, "Introductory Low-Energy Supersymmetry" in *Proc. of the 1992 Theoretical Advanced Study Institute in Particle Physics*, ed. J. Harvey and J. Polchinski (World Scientific, Singapore, 1993), S. 583.
- [76] A. Sirlin, *Phys. Rev. Lett.* **67** (1991) 2127.
- [77] A. Freitas, D. Stöckinger, *Phys. Rev.* **D 66**(2002) 095014.
- [78] W. Hollik, H. Rzehak, *Eur. Phys. Jour.* **C 32** (2003) 127.
- [79] A. X. El-Khadra, M. Luke, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **52** (2002) 201.
- [80] J. Küblbeck, M. Böhm, A. Denner, *Comput. Phys. Commun.* **60** (1990) 165;  
H. Eck, *Development of a generic Feynman diagram generator*  
Doktorarbeit, Universität Würzburg, 1995, erhältlich unter:  
<http://www.feynarts.de/> ;  
T. Hahn, *Comput. Phys. Commun.* **140** (2001) 418;  
T. Hahn, C. Schappacher, *Comput. Phys. Commun.* **143** (2002) 54.  
T. Hahn, *FeynArts User's Guide* und *FormCalc User's Guide*, erhältlich unter  
<http://www.feynarts.de/> .

Literaturverzeichnis

- [81] G. Weiglein, R. Scharf, M. Böhm, *Nucl. Phys.* **B 416** (1994) 606.
- [82] T. Hahn, M. Perez-Victoria, *Comput. Phys. Commun.* **118** (1999) 153.  
T. Hahn, *LoopTools User's Guide*, erhältlich unter <http://www.feynarts.de/> .
- [83] A. Bartl, H. Eberl, K. Hidaka, T. Kon, W. Majerotto, Y. Yamada, *Phys. Lett.* **B 402** (1997) 303.
- [84] A. Djouadi, P. Gambino, S. Heinemeyer, W. Hollik, C. Jünger, G. Weiglein, *Phys. Rev. Lett.* **78** (1997) 3626; *Phys. Rev.* **D 57** (1998) 4179.
- [85] J. H. Christenson, J. W. Cronin, V. L. Fitch, R. Turlay, *Phys. Rev. Lett.* **13** (1964) 138.
- [86] B. Aubert *et al.* [BABAR Collaboration], *Phys. Rev. Lett.* **87** (2001) 091801.
- [87] A. D. Sakharov, *Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **5** (1967) 32, [*JETP Lett.* **5** (1967) 24];  
E. W. Kolb, M. S. Turner, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **33** (1983), 645.
- [88] W. Pauli, *Nuovo Cimento* **6** (1957) 204;  
R. Jost, *Helv. Phys. Acta* **30** (1957) 409;  
F. J. Dyson, *Phys. Rev.* **110** (1958) 579.
- [89] R. D. Peccei, H. R. Quinn, *Phys. Rev. Lett.* **38** (1977) 1440; *Phys. Rev.* **D 16** (1977) 1791.
- [90] S. Dimopoulos, S. Thomas, *Nucl. Phys.* **B 465** (1996) 23.
- [91] T. F. Feng, *Phys. Rev.* **D 70** (2004) 096012.
- [92] V. M. Abazov *et al.* [D0 Collaboration], *Nature* **429**, 638;  
P. Azzi *et al.* [CDF Collaboration],  
*Combination of CDF and D0 results on the top-quark mass*, **hep-ex/0404010**.
- [93] [CDF Collaboration], <http://www-cdf.fnal.gov/physics/new/top/top.html> .
- [94] T. Hahn, S. Heinemeyer, W. Hollik, G. Weiglein, *Contributed to 3rd Les Houches Workshop: Physics at TeV Colliders, Les Houches, France, 26 May - 6 Jun 2003*.
- [95] M. Pospelov, A. Ritz,  
*Electric dipole moments as probes of new physics*, **hep-ph/0504231**;  
V. D. Barger, T. Falk, T. Han, J. Jiang, T. Li, T. Plehn, *Phys. Rev.* **D 64** (2001) 056007;  
S. Abel, S. Khalil, O. Lebedev, *Nucl. Phys.* **B 606** (2001) 151.
- [96] J. Wess, B. Zumino, *Nucl. Phys.* **B 78** (1974) 1.

- [97] F. Jegerlehner,  
*Hadronic vacuum polarization effects in  $\alpha(em)(M(Z))$* , **hep-ph/0308117**.
- [98] H. Plochow-Besch, *PDFLIB: User's Manual*, CERN-ETT-TT 2000.04.17, erhältlich unter <http://consult.cern.ch/writeups/pdflib/> .
- [99] I. Hinchliffe, Java applet, erhältlich unter <http://www-theory.lbl.gov/~ianh/alpha/alpha.html> ;  
D. E. Groom *et al.* [Particle Data Group], *Eur. Phys. J. C* **15** (2000) 1.
- [100] S. Heinemeyer, W. Hollik, G. Weiglein,  
*Electroweak precision observables in the minimal supersymmetric standard model*,  
**hep-ph/0412214**.
- [101] G. 't Hooft, M. J. G. Veltman, *Nucl. Phys. B* **153** (1979) 365.
- [102] U. Nierste, D. Müller, M. Böhm, *Z. Phys. C* **57** (1993) 605;  
R. Scharf, *Scalar two-loop self-energy integrals in the Standard Model*,  
Doktorarbeit, Universität Würzburg, 1994.
- [103] K. G. Chetyrkin, F. V. Tkachov, *Nucl. Phys. B* **192** (1981) 159;  
A. I. Davydychev, J. B. Tausk, *Nucl. Phys. B* **397** (1993) 123.
- [104] F. A. Berends, J. B. Tausk, *Nucl. Phys. B* **421** (1994) 456.

*Literaturverzeichnis*



# Danksagung

An dieser Stelle möchte ich allen danken, die mich auf unterschiedliche Weise bei der Fertigstellung dieser Arbeit unterstützt haben.

Zuallererst bedanke ich mich bei meinem Doktorvater Herrn Prof. W. Hollik, der mir zunächst an der Universität Karlsruhe und danach am Max-Planck-Institut für Physik in einer fachlich sehr guten und hilfreichen Arbeitsgruppe die Möglichkeit zu dieser Doktorarbeit gegeben hat. Seine Anregungen und Ratschläge waren für den Fortgang der Arbeit sehr förderlich. Dank seiner Unterstützung konnte ich Doktorandenschulen und Konferenzen besuchen.

Desweiteren danke ich Sven Heinemeyer und Georg Weiglein für gute Diskussionen, die wir insbesondere während ihrer Besuche am Max-Planck-Institut geführt haben. Herzlichen Dank gilt Sven Heinemeyer ebenso für Ratschläge zur Gestaltung von Vorträgen und für das Korrekturlesen großer Teile dieser Arbeit.

Pietro Slavich hat mir seinen Programm-Code für Vergleiche zur Verfügung gestellt. Hierfür und für die ausführlichen Diskussionen möchte ich einen herzlichen Dank aussprechen. Ein Dank gilt ebenfalls André Hoang und Ulrich Nierste für Diskussionen über die richtige Behandlung der Bottom-Quark-Masse.

Eine Arbeitsgruppe mit guter Atmosphäre ist sehr viel wert. Allen, die mich bei der Erstellung dieser Arbeit unterstützt haben, danke ich ganz herzlich. Eine vollständige Aufzählung würde den Rahmen dieser Danksagung sprengen, aber beispielhaft möchte ich erwähnen: Mit Thomas Fritzsche zusammen habe ich mich erfolgreich auf Fehlerjagd begeben. Michael Rauch zeigte mir Möglichkeiten zur Überprüfung der numerischen Stabilität meiner Ergebnisse. Thomas Hahn hat mich mit Tips und Tricks programmiertechnischer Art, zum Beispiel zur Umwandlung von Mathematica- in Fortran-Code, versorgt. Oliver Brein hat mir einen Schnellkurs in Fortran-Programmierung gegeben.

Ein herzliches Dankeschön richtet sich auch an Michael Rauch, Ulrich Meier, Markus Roth, Dominik Stöckinger, Georg Weiglein und Michael Altmann, die Teile meiner Arbeit Korrektur gelesen haben, und an Cailin Farrell, die mir bei der Suche nach Synonymen und bei anderen Formulierungsproblemen geholfen hat.

Gerade in den Zeiten, in denen Probleme unlösbar erscheinen, ist es gut, die Sicht auf die Dinge zu ändern und sich der Wirkung physikalischer Gesetze zu erfreuen. Ein Dankeschön richtet sich an alle, die mich die Weisheitspfade berühmter Physiker gelehrt haben und mich zu jeder Jahreszeit mit in die Berge genommen haben.

Schließlich möchte ich meinen Eltern, die ebenfalls Teile der Arbeit Korrektur gelesen haben, und Steffen Straub für Verständnis und Ermutigung danken.