



# TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Lehrstuhl für Massivbau | TUM School of Engineering and Design  
Univ.-Prof. Dr.-Ing. Dipl.-Wirt. Ing. Oliver Fischer

## Masterthesis im Studiengang Bauingenieurwesen

Entwicklung einer Heuristik zur numerischen Bestimmung des  
Tragverhaltens von Stahlfaser-Betonbauteilen mittels inverser Analyse

Nils-Christian Rokoß B. Sc.

München 2023



# **Masterthesis im Studiengang Bauingenieurwesen**

## Thema:

Entwicklung einer Heuristik zur numerischen Bestimmung des Tragverhaltens von  
Stahlfaser-Betonbauteilen mittels inverser Analyse

Eingereicht an der Technischen Universität München

Am Lehrstuhl für Massivbau  
TUM School of Engineering and Design

Verfasser: Nils-Christian Rokoß B. Sc.

Matrikelnummer: 03750226

Referent: Univ.-Prof. Dr.-Ing. Dipl.-Wirt. Ing. Oliver Fischer

Betreuer: Sören Faustmann M. Sc.

Begonnen am: München, 01.02.2023

Eingereicht am: München, 22.05.2023



---

## **Kurzfassung**

Faserbeton besitzt ein ausgeprägtes Nachrissverhalten. Soll seine plastische Zugarbeitslinie über Biegezugversuche bestimmt werden, kann dies nur indirekt über inverse Analysen geschehen. Dabei ist die gemessene Kraft-Rissöffnungs-Beziehung in eine Spannungs-Rissöffnungs-Beziehung zu übersetzen. Über die numerische Darstellung des Versuches mit plastischen Materialmodellen lässt sich die plastische Zugarbeitslinie extrahieren und Berechnungsergebnisse mit experimentellen Daten vergleichen. Aufgrund des inversen Problems folgt der Vergleich der numerischen mit den experimentellen Ergebnissen dem Prinzip des „trial and error“. In dieser Arbeit wird daher eine Heuristik entwickelt, die den Prozess der inversen Analyse automatisiert und das Identifikationsproblem mittels Schwarmoptimierung approximiert. B-Spline-Kurven stellen den Optimierungsgegenstand dar und dienen der nicht-linearen, parametrischen Arbeitslinienmodellierung. Durch den direkten Einbezug des numerischen Modells am Berechnungsprozess werden numerische Abhängigkeiten in der Analyse berücksichtigt. Etwaige Sensitivitäten der Arbeitslinie werden exemplarisch untersucht. Die abschließende numerische Berechnung eines Querkraftbalkens soll die Anwendung der Heuristik demonstrieren.

## **Abstract**

Fiber-reinforced concrete has a distinctive post-cracking behavior. Flexural tensile tests enable the opportunity to determine the plastic tensile behavior but just in an indirect way via inverse analyses. The measured force-crack mouth opening displacement (CMOD) relationship has to be translated into a stress-crack mouth opening displacement relationship. The stress-CMOD relationship can be extracted by using plastic material models in a numerical approach and validated by comparing numerical with experimental results. Due to the inverse problem, the comparison follows the principle of “trial and error”. In order to automate the process of inverse analysis and approximate the identification problem, a heuristic has been developed using swarm optimization. Subject of the optimization is a B-Spline-curve, which represents the non-linear tensile behavior in a parametric mathematical way. Meanwhile, numerical dependencies are considered by including the numerical simulation in the optimization process. Possible sensitivities are investigated exemplarily. A numerical calculation of a shear beam will conclude the paper and illustrate the application of the heuristic.

---

## **Selbstständigkeitserklärung**

### Erklärung

Ich versichere hiermit, dass ich die von mir eingereichte Abschlussarbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

München, 22.05.2023

# Inhaltsverzeichnis

<b>Kurzfassung</b>	<b>I</b>
<b>Abstract</b>	<b>I</b>
<b>Selbstständigkeitserklärung</b>	<b>II</b>
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>VIII</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>IX</b>
<b>Abkürzungen</b>	<b>X</b>
<b>Symbole</b>	<b>XI</b>
<b>1. Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1. Problemstellung . . . . .	1
1.2. Zielsetzung . . . . .	2
1.3. Vorgehensweise . . . . .	2
<b>2. Theoretische Grundlagen</b>	<b>4</b>
2.1. Werkstoffcharakteristik von Stahlfaserbeton . . . . .	4
2.1.1. Grundlegende Festbetoneigenschaften . . . . .	4
2.1.2. Zentrisches Druckverhalten im ungerissenen Zustand . . . . .	5
2.1.3. Zentrisches Druckverhalten im gerissenen Zustand . . . . .	6
2.1.4. Zentrisches Zug- und Biegezugverhalten im ungerissenen Zustand . . . . .	7
2.1.5. Zentrisches Zug- und Biegezugverhalten im gerissenen Zustand . . . . .	9
2.1.6. Mehraxiales Tragverhalten . . . . .	10
2.1.7. Querkraft- und Torsionstragverhalten . . . . .	12
2.2. Einflussgrößen der Stahlfasern auf die mechanischen Eigenschaften von Beton	12
2.2.1. Stahlfasertypen . . . . .	12
2.2.2. Fasergehalt . . . . .	14
2.2.3. Faserorientierung . . . . .	14
2.2.4. Faser-Matrix-Interaktion . . . . .	15
2.3. Modelle zur Beschreibung des Materialverhaltens von Stahlfaserbeton . . . . .	16
2.3.1. Elastizitätstheorie . . . . .	16
2.3.2. Plastizitätstheorie . . . . .	17
2.3.3. Schädigungstheorie . . . . .	22
2.3.4. Concrete Damaged Plasticity Modell . . . . .	23
2.3.5. Eingangsparameter des Damaged Plasticity Modells . . . . .	26
2.4. Inverse Probleme . . . . .	28
2.4.1. Charakterisierung . . . . .	28
2.4.2. Diskretisierung inverser Probleme . . . . .	28
2.4.3. Approximation mittels Splinefunktionen . . . . .	29

2.5.	Kurvenmodellierung mittels Splines . . . . .	29
2.5.1.	Lineare Splines . . . . .	29
2.5.2.	Der de-Casteljau-Algorithmus . . . . .	30
2.5.3.	Beschreibung von Bézierkurven mittels Bernsteinpolynomen . . . . .	32
2.5.4.	Splinekurven in Bézierform . . . . .	33
2.5.5.	Splinekurven in B-Spline-Form . . . . .	34
2.6.	Die Metaheuristik als Optimierungsmethode . . . . .	35
2.6.1.	Optimierungsprobleme . . . . .	35
2.6.2.	Abgrenzung der Heuristik vom Algorithmus . . . . .	36
2.6.3.	Metaheuristiken . . . . .	37
2.6.4.	Einzellösungsverfahren . . . . .	37
2.6.5.	Populations-basierte Verfahren . . . . .	38
2.7.	Particle Swarm Optimization (PSO) als Teil der Metaheuristik . . . . .	38
2.7.1.	Schwarmoptimierer . . . . .	38
2.7.2.	Grundlegende Funktion und Struktur eines PSOs . . . . .	38
2.7.3.	Initiales Aufsetzen der Partikel im Populationsraum . . . . .	40
2.7.4.	Partikel Interaktion . . . . .	41
2.7.5.	Beschränkung der Partikelbewegung . . . . .	41
2.7.6.	Abbruchkriterium und Konvergenz . . . . .	42
<b>3.</b>	<b>Entwicklung der Heuristik zur inversen Analyse des Nachrissverhaltens von unbewehrtem Faserbeton</b>	<b>43</b>
3.1.	Motivation der inversen Analyse . . . . .	43
3.1.1.	Ansatzpunkt des inversen Problems . . . . .	43
3.1.2.	Biegezugversuch nach DIN EN 14651 . . . . .	44
3.2.	Entwicklung des numerischen Modells . . . . .	45
3.2.1.	Modellbildung des Biegebalkens . . . . .	45
3.2.2.	Anwendung des Concrete Damaged Plasticity Modells . . . . .	47
3.2.3.	Annahme einer initialen Zugarbeitslinie . . . . .	48
3.2.4.	Erste Berechnung und Auswertung des Ergebnisses . . . . .	49
3.3.	Heuristik zur Automatisierung des Berechnungs- und Interpretationsprozesses .	50
3.3.1.	Definition des inversen Optimierungsziels . . . . .	50
3.3.2.	Beschreibung der Zugarbeitslinie mittels B-Splines . . . . .	52
3.3.3.	Auswahl der Particle Swarm Optimization als Optimierungsmethode .	53
3.3.4.	Implementierung der Schwarmoptimierung . . . . .	54
3.3.5.	Prinzipielle Anwendung der Heuristik . . . . .	59
3.4.	Erweiterung der Heuristik um die Ermittlung der plastischen Druckarbeitslinie .	60
3.4.1.	Zentrischer Druckversuch zur Ermittlung der Druckarbeitslinie . . . . .	60
3.4.2.	Anpassung und Erweiterung der Heuristik . . . . .	61
3.5.	Potenzial der entwickelten Heuristik . . . . .	62



---

<b>4. Sensitivitätsanalyse einer numerischen Abhängigkeit der plastischen Zugarbeitslinien</b>	<b>64</b>
4.1. Variation der Netzfeinheit . . . . .	64
4.2. Variation der Zugschädigung . . . . .	69
4.3. Variation des Dilatanzwinkels . . . . .	73
<b>5. Anwendung der Heuristik anhand numerischer Berechnungen des Querkraftversagens eines bewehrten Faserbeton-Balkens</b>	<b>77</b>
5.1. Hintergrund der Berechnung . . . . .	77
5.2. Angaben zur Modellierung . . . . .	77
5.3. Numerische Modellierung . . . . .	79
5.3.1. Modellierung des Betonkörpers . . . . .	79
5.3.2. Modellierung der Betonstahl-Bewehrung . . . . .	80
5.4. Anwendung der Heuristik zur Bestimmung der plastischen Zugarbeitslinie . . .	80
5.5. Auswertung der numerischen Berechnung des Faserbeton-Balkens . . . . .	80
<b>6. Zusammenfassung</b>	<b>84</b>
<b>7. Ausblick</b>	<b>86</b>
<b>Literatur</b>	<b>87</b>
<b>Technische Regelwerke</b>	<b>93</b>
<b>A. Standard Eingabeparameter der numerischen Modelle in Abhängigkeit des Fasergehaltes</b>	<b>A-1</b>
<b>B. Detaillierte Auswertung des Querkraftbalkens (Kapitel 5)</b>	<b>B-1</b>

## Abbildungsverzeichnis

1.1. Aufbau der Arbeit . . . . .	3
2.1. Schematische Darstellung der rissüberbrückenden Stahlfasern im Betonbauteil .	4
2.2. Gegenüberstellung des Spannungs-Verformungsverhaltens von Nicht-Faserbeton und Stahl-Faserbeton . . . . .	5
2.3. Modell des Tragverhaltens von Normalbeton bzw. Faserbeton auf Druckbeanspruchung . . . . .	6
2.4. Spannungs-Stauchungsdiagramme für Betone mit unterschiedlichem Fasergehalt $V_f$ (Stahlfaser mit Endhaken, $l_f = 35$ mm, $l_f/d_f = 65$ ) . . . . .	6
2.5. Modell des Tragverhaltens von Normalbeton bzw. Faserbeton auf Druckbeanspruchung . . . . .	7
2.6. Modell des Tragverhaltens von Normalbeton bzw. Faserbeton auf zentrischer Zug- und Druckbeanspruchung . . . . .	8
2.7. Schematisch Darstellung des Zugtragverhaltens von Normal- und Faserbeton in Abhängigkeit der Fasereffektivität . . . . .	9
2.8. Fasereinfluss auf die Druckfestigkeit unter biaxialer Druckbeanspruchung . . .	11
2.9. Schematische Darstellung des Fasereinflusses auf das biaxiale Festigkeitsverhalten . . . . .	11
2.10. Übersicht üblicher Stahlfasertypen . . . . .	13
2.11. Einfluss unterschiedlicher Fasergeometrien auf das Tragverhalten (Biegebalken)	13
2.12. Faserorientierung an Grenzflächen . . . . .	14
2.13. Typisches Faserauszugsverhalten für Fasern mit und ohne Formverbund . . . .	15
2.14. Gegenüberstellung des linear-elastischen und elasto-plastischen Materialverhaltens . . . . .	18
2.15. Schematische Darstellung isotroper Verfestigung im Hauptspannungsraum mit $\sigma_3 = 0$ . . . . .	21
2.16. Schematische Darstellung kinematischer Verfestigung im Hauptspannungsraum mit $\sigma_3 = 0$ . . . . .	21
2.17. Schematische Darstellung gemischter Verfestigung im Hauptspannungsraum mit $\sigma_3 = 0$ . . . . .	22
2.18. Schematische Darstellung der Schädigungstheorie . . . . .	23
2.19. Schematische Darstellung der vorgestellten Material-Theorien . . . . .	23
2.20. Optimierte Modellierung der Materialantwort für Beton auf Druck . . . . .	24
2.21. Links: Fließfläche in der Deviatorebene des negativen Hauptspannungsraums in Abhängigkeit des Formfaktors $K_c$ ; Rechts: Charakteristische Fließfläche für Beton in der biaxialen Spannungsebene . . . . .	25
2.22. Hyperbolische Potentialfunktion vom Typ Drucker-Prager in der $\bar{p}$ - $\bar{q}$ . . . . .	25
2.23. Eingabeparameter des (Concrete) Damaged Plasticity Modells . . . . .	27
2.24. Anwendung eines linearen Splines auf drei Stützstellen . . . . .	30
2.25. Parabelkonstruktion durch wiederholte lineare Interpolation . . . . .	31
2.26. Bernsteinpolynome 1. bis 3.Grades . . . . .	32
2.27. Beispiel Splinekurve mit Knotenvektor 2.56, $n=5$ , $k=4$ . . . . .	35

2.28. Resultierende Partikelbewegung eines zwei-dimensionalen PSO-Problems für ein Partikel $\mathbf{x}_i(t_{PSO} + 1)$ . . . . .	40
2.29. Mögliche soziale Netzwerke eines PSOs   Links: Stern-Typologie; Mitte: Ring-Typologie; Rechts: Rad-Typologie . . . . .	41
3.1. Entwicklung der Methode zur inversen Analyse der plastischen Zug-Arbeitslinie	44
3.2. Aufbau des Biegeversuches nach DIN EN 14651 mit Klemmlehre zur Bestimmung der Kraft-CMOD-Kurve (Maße in mm) . . . . .	45
3.3. Dimensionierung des BZV-Volumenkörpers in Abaqus mit einer Elementgröße von 25 mm . . . . .	46
3.4. Setzen der Randbedingungen und Vernetzung der BZV-Modellierung in Abaqus	47
3.5. Darstellung der Abaqus-Ausgaben zur Ermittlung der Kraft-CMOD-Beziehung	49
3.6. Beispielhafte Gegenüberstellung der Kraft-CMOD-Kurven einer ersten numerischen Berechnung mit experimentellen Daten . . . . .	50
3.7. Grundlegender Ablauf der Optimierung zur Lösung des Identifikationsproblems	51
3.8. Exemplarische Zugarbeitslinie ausgedrückt über eine B-Spline-Kurve . . . . .	52
3.9. Hierarchie der PSO-Funktionen in Python . . . . .	55
3.10. Ablauf der Heuristik mit 12 Partikeln . . . . .	57
3.11. Ablauf der Heuristik mit 12 Partikeln (Fortsetzung) . . . . .	58
3.12. Nennmaße des Zylinder-Prüfkörpers nach DIN EN 12390-1 . . . . .	61
3.13. Numerisches Modell (Geometrie) eines Zylinderdruckversuches mit den benötigten Ausgabestellen und Randbedingungen . . . . .	62
3.14. Exemplarische Kraft-Weg-Beziehung eines Zylinder-Druckversuches mit Durchmesser 150 mm und Höhe 300 mm . . . . .	63
4.1. Variation der Netzfeinheit für $V_f = 20 \text{ kg/m}^3$   Zugarbeitslinien . . . . .	66
4.2. Variation der Netzfeinheit für $V_f = 20 \text{ kg/m}^3$   Kraft-CMOD-Beziehungen . . . . .	66
4.3. Variation der Netzfeinheit für $V_f = 40 \text{ kg/m}^3$   Zugarbeitslinien . . . . .	67
4.4. Variation der Netzfeinheit für $V_f = 40 \text{ kg/m}^3$   Kraft-CMOD-Beziehungen . . . . .	67
4.5. Variation der Netzfeinheit für $V_f = 80 \text{ kg/m}^3$   Zugarbeitslinien . . . . .	68
4.6. Variation der Netzfeinheit für $V_f = 80 \text{ kg/m}^3$   Kraft-CMOD-Beziehungen . . . . .	68
4.7. Variation der Zugschädigung für $V_f = 20 \text{ kg/m}^3$   Zugarbeitslinien . . . . .	70
4.8. Variation der Zugschädigung für $V_f = 20 \text{ kg/m}^3$   Kraft-CMOD-Beziehungen . . . . .	70
4.9. Variation der Zugschädigung für $V_f = 40 \text{ kg/m}^3$   Zugarbeitslinien . . . . .	71
4.10. Variation der Zugschädigung für $V_f = 40 \text{ kg/m}^3$   Kraft-CMOD-Beziehungen . . . . .	71
4.11. Variation der Zugschädigung für $V_f = 80 \text{ kg/m}^3$   Zugarbeitslinien . . . . .	72
4.12. Variation der Zugschädigung für $V_f = 80 \text{ kg/m}^3$   Kraft-CMOD-Beziehungen . . . . .	72
4.13. Variation des Dilatanzwinkels für $V_f = 20 \text{ kg/m}^3$   Zugarbeitslinien . . . . .	74
4.14. Variation des Dilatanzwinkels für $V_f = 20 \text{ kg/m}^3$   Kraft-CMOD-Beziehungen . . . . .	74
4.15. Variation des Dilatanzwinkels für $V_f = 40 \text{ kg/m}^3$   Zugarbeitslinien . . . . .	75
4.16. Variation des Dilatanzwinkels für $V_f = 40 \text{ kg/m}^3$   Kraft-CMOD-Beziehungen . . . . .	75
4.17. Variation des Dilatanzwinkels für $V_f = 80 \text{ kg/m}^3$   Zugarbeitslinien . . . . .	76
4.18. Variation des Dilatanzwinkels für $V_f = 80 \text{ kg/m}^3$   Kraft-CMOD-Beziehungen . . . . .	76

5.1. Dimensionen und Bewehrung des Stahlfaserbetonbalkens als Großprüfkörper (alle Maße in mm) . . . . .	78
5.2. Definition der Randbedingungen im numerischem Modell des T-Profiles (fib) . .	79
5.3. Definition der Ausgabeknoten zur Ermittlung der Dehnung und Durchbiegung (fib T-Profil) . . . . .	81
5.4. Rissbild des numerischen T-Profil-Modells bei 95 % und 100 % $F_{max}$ . . . . .	82
5.5. Gegenüberstellung der Durchbiegung (fib) . . . . .	83
5.6. Gegenüberstellung der Dehnung (fib) . . . . .	83
5.7. Gegenüberstellung ermittelter Arbeitslinien (fib) . . . . .	83
5.8. Gegenüberstellung ermittelter Kraft-CMOD-Beziehungen (fib) . . . . .	83

**Tabellenverzeichnis**

5.1. Zur Verfügung gestellte Materialparameter (fib) . . . . .	78
5.2. Druckarbeitslinie des numerischen Modells (fib   T-Profil) . . . . .	79
5.3. Quantitative Bewertung der Modellansätze (fib) . . . . .	82

---

## **Abkürzungen**

**AL** Arbeitslinie

**BZV** Biegezugversuch

**CAD** Computer-aided design

**CDP** Concrete Damaged Plasticity Modell

**CMOD** Crack mouth opening displacement

**DafStb** Deutscher Ausschuss für Stahlbeton e. V.

**DIN** Deutsches Institut für Normung e. V.

**EN** Europäische Norm

**FEM** Finite-Elemente-Methode

**fib** Fédération internationale du béton

**lvdt** Linear variable differential transformer

**PEMAG** Plastic strain magnitude (Abaqus)

**PSO** Particle Swarm Optimization

## Symbole

Die am häufigsten verwendeten Symbole sind nachfolgend zusammengestellt. Anderweitige Zeichen werden im Text am Ort ihrer ersten Verwendung erläutert. Vektoren und Matrizen sind als fettgedruckte Symbole gekennzeichnet.

Lateinische Großbuchstaben			Lateinische Kleinbuchstaben		
Symbol	Beschreibung	Einheit	Symbol	Beschreibung	Einheit
$A$	Allg. mathematisches Modell		$\mathbf{b}^n$	Bézierkurve	
$A_c$	Betonquerschnitt		$\mathbf{b}_i^r$	Vektor einer Stützstelle	
$B$	Bernsteinpolynom		$c$	Gewichtungsfaktor (PSO)	
$C$	Kontrollpunkt (B-Spline-Kurve)		$d$	Probedurchmesser	[mm]
$C_{ijkl}$	Steifigkeitstensor		$\mathbf{d}$	Punkt zur Stetigkeitskontrolle	
$C^n$	n-te Stetigkeit		$d_c$	Schädigungsvariable (Druck)	[-]
$D$	Allg. Schädigungsvariable	[-]	$d_f$	Faserdurchmesser	[mm]
$Err$	Fehler	[-]	$d_t$	Schädigungsvariable (Zug)	[-]
$E$	Elastizitätsmodul	[N/mm <sup>2</sup> ]	$f_c$	Betondruckfestigkeit	[N/mm <sup>2</sup> ]
$E_{ijkl}$	Elastizitätstensor		$f_{ct}$	Betonzugfestigkeit	[N/mm <sup>2</sup> ]
$F$	Kraft	[N]	$f_t$	Stahlzugfestigkeit	[N/mm <sup>2</sup> ]
$F_{max}$	Höchstlast	[N]	$f_y$	Streckgrenze	[N/mm <sup>2</sup> ]
$G$	Plas. Potential		$\mathbf{gbest}$	Global bestes Partikel (PSO)	
$H_i$	Verfestigungsmodul	[-]	$k$	Verfestigungsparameter	[-]
$K_c$	Formfaktor	[-]	$l_f$	Faserlänge	[mm]
$L$	Spline-Funktion		$\bar{p}$	Hydrostat. Druck	[N/mm <sup>2</sup> ]
$N$	Basis-Spline	[-]	$\mathbf{pbest}$	Persönlich bestes Partikel (PSO)	
$M$	Zulässige Menge an Optionen		$\bar{q}$	Vergleichsspannung (Von Mises)	[N/mm <sup>2</sup> ]
$P$	Definierter Punkt		$\mathbf{r}$	stochastische Gewichtung (PSO)	
$P_{Op}$	Optimierungsproblem		$t$	Lokaler Parameter (Spline/Bézierkurve)	[-]
$Q$	Quadratsumme der Abweichungen		$t_{PSO}$	Generation (PSO)	
$S$	Spline				
$\mathbf{T}$	Knotenvektor				
$V_{crit}$	Kritischer Fasergehalt	[kg/m <sup>2</sup> ]			
$V_f$	Fasergehalt	[kg/m <sup>2</sup> ]			
$V_{max}$	Maximale Partikelgeschwindigkeit (PSO)				

---

**Lateinische Großbuchstaben**

<b>Symbol</b>	<b>Beschreibung</b>	<b>Einheit</b>
<i>X</i>	Allg. mathematische Menge	
<i>Y</i>	Allg. mathematische Wirkung	

---

**Lateinische Kleinbuchstaben**

<b>Symbol</b>	<b>Beschreibung</b>	<b>Einheit</b>
<i>u</i>	Globaler Parameter (Spline)	[-]
<i>v</i>	Partikelgeschwindigkeit	
<i>w</i>	Rissweite	[mm]
<i>x</i>	Stützstelle (Spline)	
<i>x</i>	Alternative (Optimierung)	

---



---

**Griechische Großbuchstaben**

Symbol	Beschreibung	Einheit
$\Delta$	Abweichung	

---

**Griechische Kleinbuchstaben**

Symbol	Beschreibung	Einheit
$\alpha^{DP}$	Materialkonstante (CDP-Modell)	[-]
$\beta$	Verfestigungs- parameter	[-]
$\beta^{DP}$	Materialkonstante (CDP-Modell)	[-]
$\gamma^{DP}$	Materialkonstante (CDP-Modell)	[-]
$\delta$	Verschiebung	[mm]
$\delta_{ij}$	Kronecker-Delta	[mm]
$\varepsilon$	Dehnung	[-]
$\varepsilon^{DP}$	Exzentrizitäts- parameter (CDP)	[-]
$\varepsilon^{el}$	Elastische Dehnung	[-]
$\varepsilon^{pl}$	Plastische Dehnung	[-]
$\varepsilon^{ij}$	Verzerrungstensor	
$\kappa$	Elastizitätskonstante	[N/mm <sup>2</sup> ]
$\lambda$	Lamé-Konstante	[N/mm <sup>2</sup> ]
$\lambda_{pl}$	Skalarer Faktor	[-]
$\mu$	Lamé-Konstante	[N/mm <sup>2</sup> ]
$\mu^{DP}$	Viskositäts- parameter (CDP)	[s]
$\nu$	Querdehnzahl	[-]
$\omega$	Trägheits- gewichtung (PSO)	
$\rho_{ij}$	Verfestigungstensor	
$\sigma$	Spannung	[N/mm <sup>2</sup> ]
$\sigma_b$	Biax. Druckfestigk.	[N/mm <sup>2</sup> ]
$\hat{\sigma}_{max}$	Hauptvergleichs- spannung	[N/mm <sup>2</sup> ]
$\bar{\sigma}_c$	Druckvergleichs- spannung	[N/mm <sup>2</sup> ]
$\bar{\sigma}_t$	Zugvergleichs- spannung	[N/mm <sup>2</sup> ]
$\sigma_{ij}$	Spannungstensor	
$\psi$	Dilatanzwinkel	[°]

---



---

# 1. Einleitung

## 1.1. Problemstellung

Werden konventionellem Beton Stahlfasern beigefügt, sind deutliche Verbesserungen seiner mechanischen Eigenschaften festzustellen. Hervorzuheben sind Steigerungen des Duktilitätsverhaltens sowie der Nachrisszugfestigkeit [1, S.539]. Die Fasern ermöglichen eine diskrete Kraftübertragung in Form von Zugspannungen über die Rissufer hinweg.

Wo der etablierte Stabstahl zur Übertragung von Zugkräften in Beton nicht oder nur teilweise verbaut werden kann, können Stahlfasern die übliche Bewehrung ergänzen oder ersetzen. Ferner begünstigen einfache Herstellungsprozesse und eine Robustheit gegenüber Ausführungsfehler den Einbau von Faserbeton [2, S.383]. Typische Anwendungsfelder stellen heutzutage Kellerwände, Fundamente, Fundamentplatten, Industrieböden und der Tunnelbau dar [1, S.539] [3, S.43]. Durch die bauaufsichtliche Einführung der Richtlinie „Stahlfaserbeton“ [TR1] des Deutschen Ausschusses für Stahlbeton e. V. im Jahr 2010 wurde die Verwendung von Faserbeton für tragende Bauteile erleichtert. Gleichzeitig zeigt die noch junge Einführung die Aktualität und das steigende Interesse am effizienten Einsatz von Faserbeton.

Die numerische Simulation des Tragverhaltens von (Faser-)Beton mit nicht-linearen Finite-Element-Methoden (FEM) gewinnt im konstruktiven Ingenieurbau an Bedeutung, um geometrisch komplexe Tragstrukturen, neue Materialverbünde und Verbundtragwerke wirtschaftlich zu bemessen [4, S.1]. Weiterhin können nicht-lineare Methoden attraktive Lastreserven in Bestandsbauten identifizieren [4, S.1]. Durch die Möglichkeit der Analyse von Vorgängen im Bauteilinneren und zur Reduktion von kostenintensiven Versuchen [5] bestehen auch in der Forschung große Ambitionen, dieses Gebiet zu untersuchen.

Zur numerischen Simulation des Betonverhaltens sind plastische Materialmodelle notwendig, die in der Regel Kenntnisse über das Tragverhalten unter einaxialer Druck- und Zugbeanspruchung voraussetzen. Während das einaxiale Druckverhalten von Faserbeton über einfache Druckversuche mittels Druckprüfmaschinen ermittelt werden kann, stellt die experimentelle Ermittlung des Zugverhaltens eine Herausforderung dar. Soll die Materialantwort von Faserbeton auf Zug über einen direkten Zugversuch bestimmt werden, beeinflussen Lagerungsbedingungen des Prüfkörper sowie die Steifigkeit der komplexen Prüfmaschine die Ergebnisse [6, S.24]. Weiterhin ist die Realisierung der Lasteinleitung etwa durch mechanische Klemmung oder Klebung der Probe aufgrund von Fehlversagen oder Spannungsspitzen als problematisch zu bewerten [6, S.24]. Ferner sind durch das große Streuverhalten von Faserbeton auf Zugbelastung viele Versuche notwendig, die eine komplexe Durchführung von Zugversuchen unattraktiv machen [6, S.25] [7].

Eine Alternative sind Biegezugversuche (hier abgekürzt BZV), die in ihrer Durchführung eine wesentlich geringere Komplexität aufweisen. Die Versuche erfordern jedoch eine indirekte Bestimmung des Zugverhaltens in Form einer Arbeitslinie (hier abgekürzt AL), in der Spannungen den Dehnungen oder der Rissöffnung gegenübergestellt sind. Der Grund für die indirekte

Ermittlung stellt die kontinuierliche Spannungsumverteilung in der Rissprozesszone dar. Der sich während der Belastungsgeschichte ändernde Querschnitt im Riss bei gleichzeitiger Beteiligung der rissüberbrückenden Fasern macht die Arbeitslinienbestimmung über eine inverse Analyse notwendig.

### **1.2. Zielsetzung**

Die inverse Analyse des Biegezugversuches umfasst die Rückrechnung der experimentell bestimmten Kraft-Rissöffnungs-Beziehung in die gesuchte Spannungs-Rissöffnungs-Beziehung. Die Arbeitslinie kann dabei nicht systematisch sondern mehr nach dem Prinzip des zeitaufwendigen „trial and error“ ermittelt werden [6, S.102].

Ziel der Arbeit ist es, den Prozess des „trial and error“ der inversen Analyse über eine Heuristik effizient zu automatisieren und den menschlichen Arbeitsaufwand auf ein Minimum zu reduzieren. Die nicht-lineare Berechnung zur Ermittlung des Tragverhaltens soll hierbei in den Prozess integriert werden. Dies ermöglicht, numerische und geometrische Abhängigkeiten der Arbeitslinie in der Berechnung direkt zu berücksichtigen. Durch Vergleich der numerischen mit den experimentellen Ergebnissen soll die Heuristik eigenständig bewerten, inwiefern die Arbeitslinie anzupassen ist.

Es besteht der Anspruch eine möglichst realistische Arbeitslinie zu entwickeln. Lineare bzw. multilineare Ansätze einer Kurvenmodellierung sollen vermieden und der Fokus auf stetige, kontinuierliche Arbeitslinien gesetzt werden. Ferner wird großen Wert auf die einfache Anwendbarkeit der Heuristik gelegt, bei der die Eingabeparameter möglichst individuell durch den Benutzer zu wählen sind.

### **1.3. Vorgehensweise**

Die Abb. 1.1 stellt den generellen Aufbau der Arbeit dar. Um ein Verständnis über die Charakteristik der plastischen Zugarbeitslinie zu bekommen, sollen im ersten Schritt die Materialeigenschaften von Faserbeton und ihre Modellierung dargestellt werden. Das Concrete Damaged Plasticity Modell wird als Ansatz zur Materialbeschreibung gewählt. Die Notwendigkeit einer inversen Analyse wurde bereits im vorherigen Kapitel vorgestellt. Das Wesen der Analyse wird in den Grundlagen näher hinterleuchtet und das Optimierungsproblem definiert. Als Optimierungsgegenstand werden stetige Splinekurven als Kurvenmodellierung der Arbeitslinien angesetzt. Anschließend werden Metaheuristiken als Optimierungsmethoden vorgestellt und auf die Schwarmoptimierung tiefgründiger eingegangen.

Mit Hilfe des Wissens aus den vermittelten Grundlagen soll die Heuristik erarbeitet werden. Die Entwicklung umfasst die numerische Modellbildung und Automatisierung des Berechnungs- und Interpretationsprozesses zur inversen Analyse. Die übergeordnete Struktur der Heuristik stellt dabei eine Particle Swarm Optimization (PSO) dar. Aufgrund der Anwendung einer Metaheuristik ist die Optimierung nicht problemspezifisch, sodass das Programmierungsskript um die inverse Analyse der Druckarbeitslinie erweitert wird.

Mit dem Ziel der Entwicklung eines Automatisierungsprozesses und dem Einbezug von numerischen Abhängigkeiten, folgt der Entwicklung eine Sensitivitätsanalyse. Es werden die Einflüsse der Netzfeinheit, der Zugschädigung und die Wahl des Dilatanzwinkels untersucht.

Die Arbeit wird mit einer Beispielanwendung der Heuristik an einer numerischen Analyse des Querkraftversagens eines Faserbetonbalkens geschlossen.

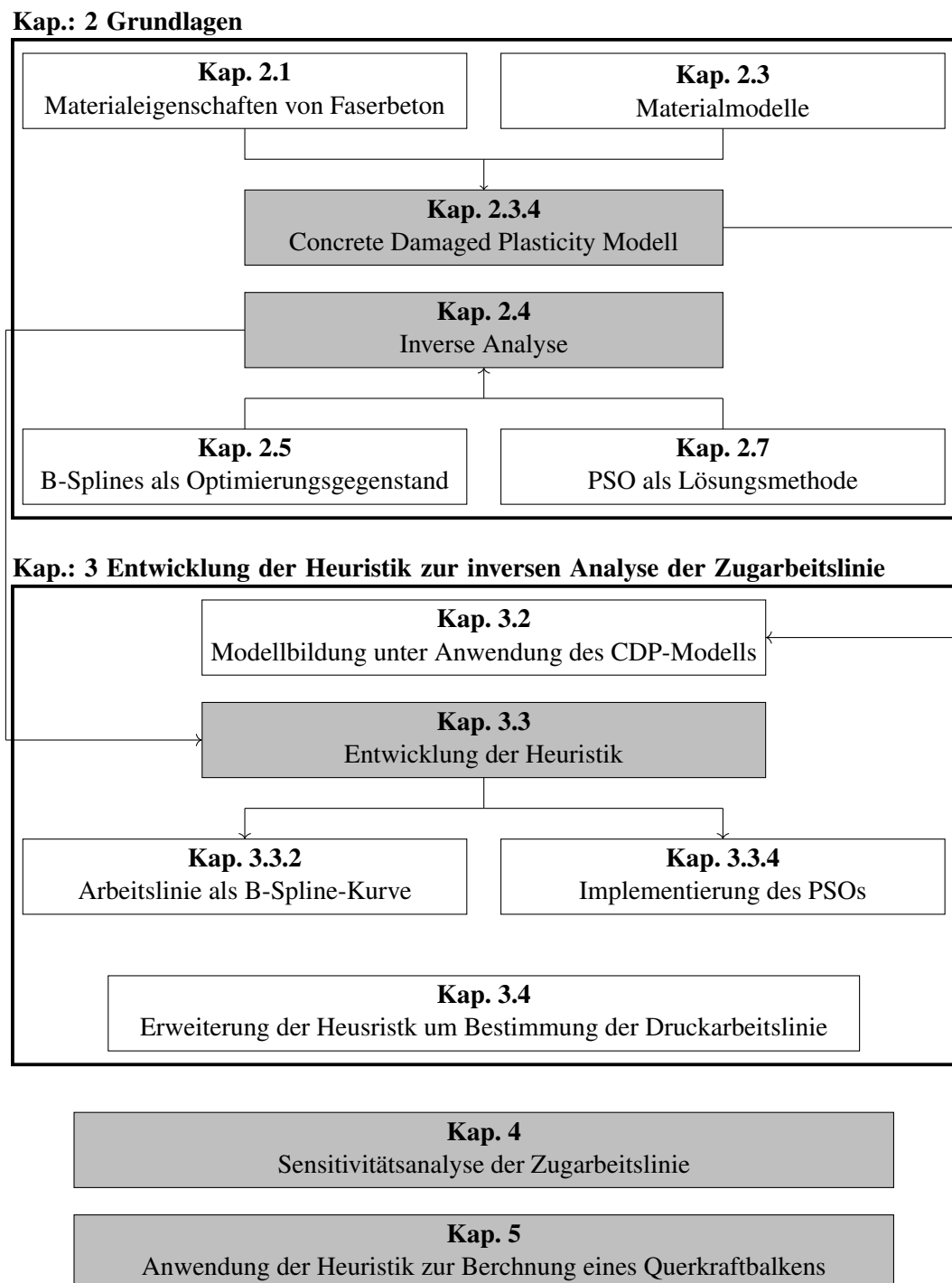


Abb. 1.1: Aufbau der Arbeit

---

## 2. Theoretische Grundlagen

### 2.1. Werkstoffcharakteristik von Stahlfaserbeton

#### 2.1.1. Grundlegende Festbetoneigenschaften

Werden Betonen Fasern beigelegt, sind die Fasern als Zusatzstoff zu kategorisieren. In der Bau- praxis relevant sind Stahl-, alkaliresistente Glasfasern sowie Polymer- und Kohlenstofffasern [2, S.387]. Im Rahmen dieser Arbeit wird sich auf die Stahlfaser als Faserwerkstoff beschränkt. In Faserbeton genutzte Stahlfasern unterliegen in Deutschland nach DIN EN 206-1 [TR2] in Verbindung mit der DIN 1045-2 [TR3] einer CE-Kennzeichnung und einer Qualitätskontrolle nach DIN EN 14889-1 [TR4] [2, S.385].

Die Festbetoneigenschaften des Stahlfaserbetons lassen sich aus den einzelnen Materialeigen- schaften des Betons und der Stahlfasern ableiten. Beton ist bezogen auf seine Druckfestig- keit ein sehr effizienter Werkstoff, wobei seine Zugfestigkeit lediglich 5 % bis maximal 15 % der einaxialen Drucktragfähigkeit erreicht [8, S.68]. Weiterhin äußert sich das Betonversagen spröde nahe der Elastizitätsgrenze. Im Verbund mit Stahl, der eine wesentlich höhere Duktili- tät aufweist, erhält der Beton eine global betrachtete Zähigkeit, bei der die Stahlfasern eine rissüberbrückende Funktion übernehmen. Die Abb. 2.1 stellt die prinzipielle Übertragung von Zugspannungen im Riss durch Faserzugabe dar [3, S.43].

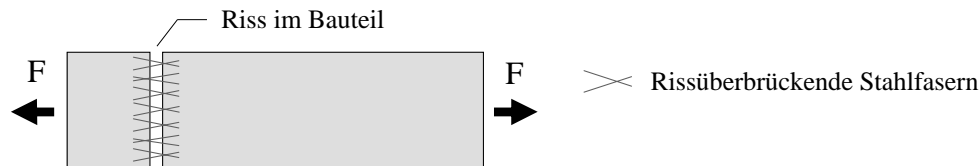


Abb. 2.1: Schematische Darstellung der rissüberbrückenden Stahlfasern im Betonbauteil

Der Beton erhält über die Stahlfasern ein ausgeprägtes Nachrissverhalten. Die Abb. 2.2 zeigt die prinzipielle Spannungs-Verformungs-Beziehung eines zentrischen Zugversuches für Nicht- Faserbeton - im Folgenden nur noch Normalbeton genannt - sowie für Faserbeton mit steigen- dem Fasergehalt. Zu erkennen ist das spröde Verformungsverhaltens des Normalbetons und die Veränderung zu quasi-spröden bis hin zu einem duktilen Verhalten bei Zugabe von Stahl- fasern (siehe dazu auch: überkritischer Fasergehalt; Kap. 2.2.2). Der Einsatz von Fasern erhöht demnach die Tragfähigkeit bei gleichzeitiger Verminderung der Verformungen und kann bei konventionell bewehrten Beton die benötigte Bewehrung reduzieren oder ggf. sogar ersetzen [9, S.4]. Die Rissbreiten werden durch die Aktivierung der Fasern vermindert und der Bruchwi- derstand gegenüber lokalen Beanspruchungen erhöht [3, S.43]. Weiterhin steigt die Resistenz gegen Verschleiß und dynamische Stoßbelastungen [6, S.11].

Folglich ist es zur Beschreibung des Trag- und Verformungsverhaltens von Stahlfaserbeton nicht ausreichend, ausschließlich das Verhalten des Betons bis zum Erreichen der Zugfestig- keit bzw. bis zur Erstrissbildung zu beschreiben. Aufgrund der Faseraktivierung nach Erreichen

der Zugfestigkeit bedarf es daher einer genaueren Betrachtung des Tragverhaltens im gerissen und ungerissenen Zustand bzw. vor und nach Erreichen der Druck- bzw. Zugfestigkeit, was in den nächsten Kapiteln mit jener Unterscheidung getan werden soll.

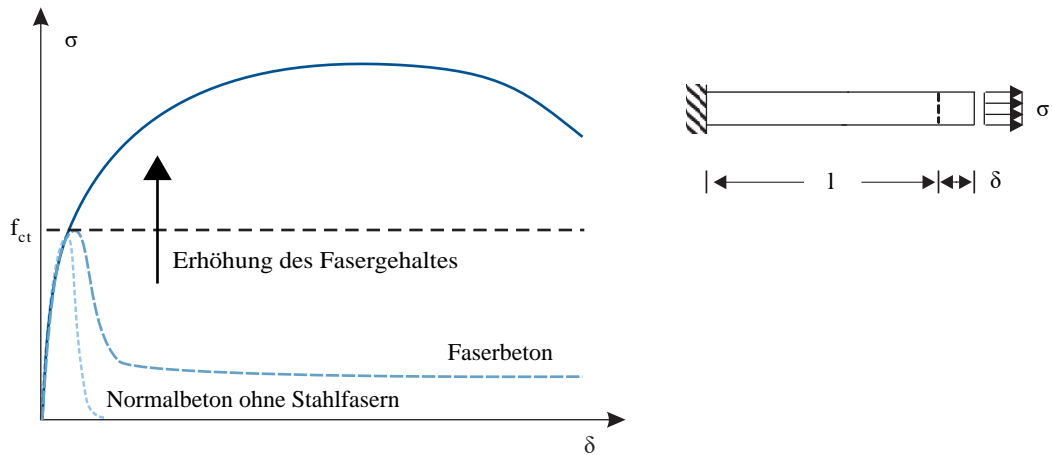


Abb. 2.2: Gegenüberstellung des Spannungs-Verformungsverhaltens von Nicht-Faserbeton und Stahl-Faserbeton [6, S.16]

### 2.1.2. Zentrisches Druckverhalten im ungerissenen Zustand

Erfährt Beton lediglich eine Druckbelastung, gilt dieser als gerissen, wenn seine Druckfestigkeit erreicht ist. Als künstlich hergestelltes Konglomerat besitzt das Gemenge Inhomogenitäten sowie Fehlstellen, die sich durch eine Ausbildung von Poren- und Rissräumen äußern und die Festigkeitseigenschaften maßgeblich bestimmen. Für Normalbetone führt dies zu Steifigkeitsunterschieden zwischen Zementstein und Gesteinskörnung. Das Gesteinskorn weist dabei eine deutlich höhere Steifigkeit auf, wodurch gleichmäßig aufgebrachte Druckspannungen nicht gleichförmig im Bauteil verlaufen, sondern über die Gesteinskörnung abgetragen werden [8, S.60]. Die ungleichförmige Spannungsverteilung im Beton ruft lokale Zugspannungen hervor, die den lokalen Druckspannungen zum Erreichen des inneren Spannungsgleichgewichtes entgegenwirken. Der Abb. 2.3 kann eine schematische Darstellung der Druckspannungen, die sich in Belastungsrichtung ausbreiten und die dazu korrespondierenden Querzugspannungen entnommen werden.

Die Spannungs-Dehnungs-Beziehung von zentrisch druckbelastetem Beton in Abb. 2.3 ist auf Normal- sowie Stahlfaserbeton zu übertragen. Sie äußert sich anfangs durch ein linear-elastisches Verhalten bis ca. 40 % der Druckfestigkeit [8, S.61] [10, S.51], gefolgt von einer sich langsam entwickelnden Entfestigung. Die Querzugspannungen überschreiten an dieser Stelle lokale Zugfestigkeiten des Zementsteins, was die Bildung von weiteren Mikrorissen und damit eine Schädigung im Gefüge herbeiführt. Die Risse bilden sich vornehmlich senkrecht zu den Querzugspannungen und demzufolge parallel zur Belastungsrichtung aus.

Aufgrund der rissüberbrückenden Wirkung der Stahlfasern und ihres günstigen Einflusses auf

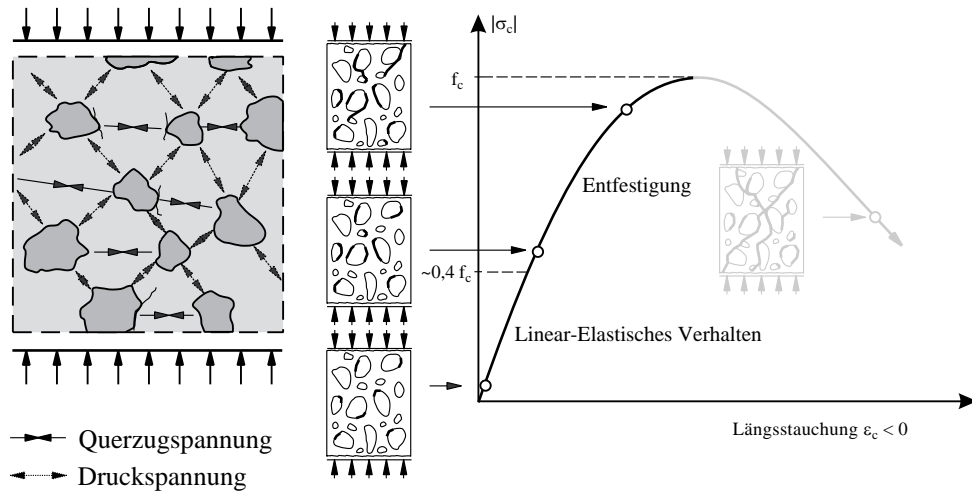


Abb. 2.3: Modell des Tragverhaltens von Normalbeton bzw. Faserbeton auf Druckbeanspruchung [8, S.60]

die Mikrorisse ist eine Verminderung der Entfestigung anzunehmen. Eine große Anzahl experimenteller Versuche zum Einfluss von Stahlfasern vor dem Erreichen der Druckfestigkeit von Beton (etwa durch [11, S.48]) konnten dabei zwar teilweise eine positive Wirkung der Stahlfasern belegen, diese äußert sich jedoch nur durch eine marginale Erhöhung der Steifigkeit [2, S.419]. Darüber hinaus bewirken steigende Fasergehalte geringe Erhöhungen der Druckfestigkeit von ca. 10% [2, S.419 f.]. Der Abb. 2.4 ist der Einfluss von Stahlfasern auf die Druckspannung-Stauchungs-Beziehung in Abhängigkeit des Fasergehaltes zu entnehmen. Auch hier sind leichte Anstiege der Drucksteifigkeit und -festigkeit zu erkennen (Fasergehalt  $V_f = 30 \text{ kg/m}^3$ ). Bei zu hohen Gehalten ( $V_f = 60 \text{ kg/m}^3$ ) können die Einflüsse der Fasern jedoch negative Wirkung haben. Dies ist auf eine Faserbedingte schlechtere Verarbeitbarkeit aufgrund Konsistenzänderungen des Frischbetons zurückzuführen [2, S.419].

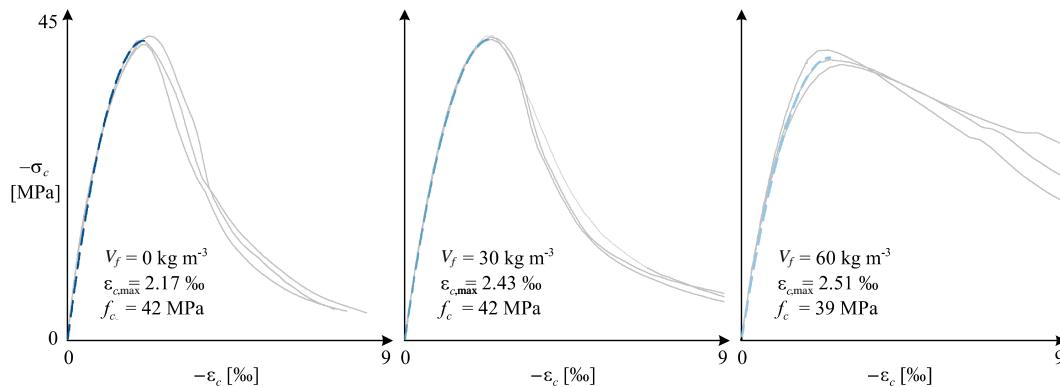


Abb. 2.4: Spannungs-Stauchungsdiagramme für Betone mit unterschiedlichem Fasergehalt  $V_f$  aus [11, S.48] (Stahlfaser mit Endhaken,  $l_f = 35 \text{ mm}$ ,  $l_f/d_f = 65$ )

### 2.1.3. Zentrisches Druckverhalten im gerissenen Zustand

Beim Erreichen der Druckfestigkeit vereinigen sich die Mikrorisse zu sichtbaren Makrorissen. Im Gegensatz zu den Mikrorissen weisen die Risse Längen auf, die den Korndurchmesser der



Gesteinskörnung überschreiten. Gesteinskörner, die im ungerissenen Zustand noch als „Rissbrücken“ [12, S.29] zwischen den Mikrorissen fungierten und Spannungen übertragen konnten, fallen aus. Daraus resultieren lokale Schädigungen im Bauteil, die einen Steifigkeitsverlust und einen abfallenden Kurvenverlauf der Spannungs-Stauchungs-Beziehung hervorrufen (siehe Abb. 2.5).

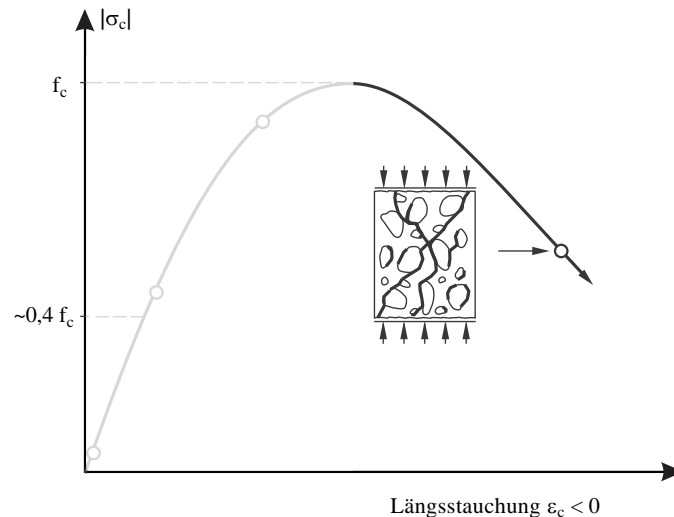


Abb. 2.5: Modell des Tragverhaltens von Normalbeton bzw. Faserbeton auf Druckbeanspruchung [8, S.60]

Das Nachbruchverhalten wird hauptsächlich durch die Rissbildung im Beton bestimmt. Bei Zugabe von rissüberbrückenden Stahlfasern können die zu den Druckspannungen korrespondierenden Zugspannungen weiterhin aufgenommen werden. Der Steifigkeitsverlust, ersichtlich durch den abfallenden Kurvenverlauf der Spannungs-Dehnungs-Beziehung, wird vermindert. Je höher dabei der Fasergehalt gewählt wird, desto flacher verläuft die Arbeitslinie (siehe dazu auch Abb. 2.4). Das Faserbeton-Bauteil wirkt im Nachbruchbereich wesentlich duktiler [10, S.52]. Das Resultat sind Druckspannungen, die beträchtlich größeren Dehnungen gegenüberstehen [2, S.395].

An dieser Stelle sei bereits vermerkt, dass im Nachbruchbereich des druckbeanspruchten Betons Einflüsse der Faserzugabe zu verzeichnen sind; die positive Auswirkung der Fasern auf Zugzonen überwiegen jedoch. Im Vergleich zu den Fasereinflüssen in Zugzonen können Einflüsse auf Druckzonen als marginal bewertet werden [2, S.419] [13, S.23].

#### 2.1.4. Zentrisches Zug- und Biegezugverhalten im ungerissenen Zustand

Das Zugverhalten von Faserbeton zeigt besonders im ungerissenen Zustand Analogien zum Druckverhalten auf. Die initiale Belastungsphase bis ca. 60-90 % der Betonzugfestigkeit kann ebenfalls als annähernd linear-elastisch betrachtet werden [2, S.420] [6, S.17]. Die Abb. 2.6 veranschaulicht das linear-elastische Materialverhalten bei Zug- und Druckbeanspruchung. Dabei weisen die Steigungen des linear-elastischen Bereiches der zentrischen Zug- und Druckbeanspruchungen gleiche Gradienten, ausgedrückt durch den Elastizitätsmodul, auf [8, S.68]. Le-

diglich die Grenzspannungen des linearen Verhaltens unterscheiden sich in ihrer Größe. Die genannten Beziehungen lassen sich von Normalbeton auf Faserbeton übertragen. Ferner konnte festgestellt werden, dass nur marginale Unterschiede im linear-elastischen Materialverhalten zwischen Normalbeton und Faserbeton auftreten, wenn Faserbetone das Gewichtsverhältnis von grober zu feiner Gesteinskörnung (coarse to fine aggregate ratio  $C/F$  [14, S.556])  $< 1,0$  einhalten [15, S.239].

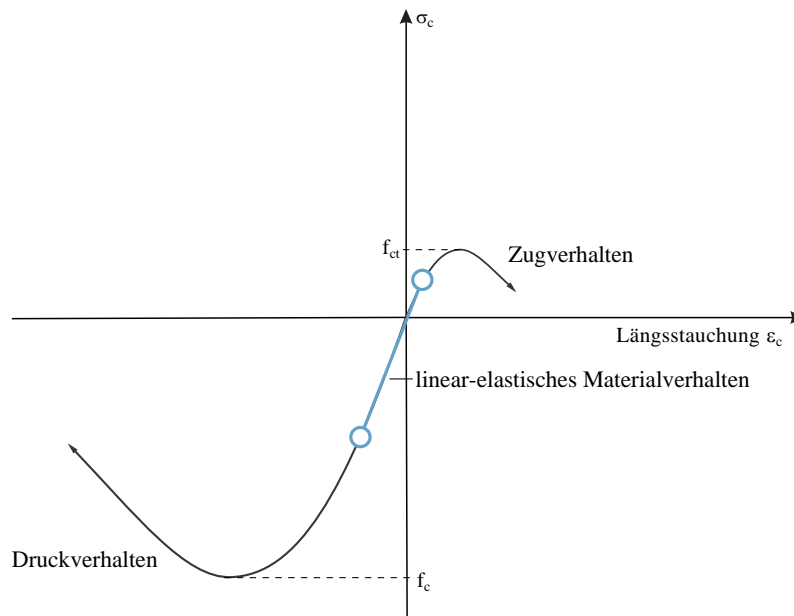


Abb. 2.6: Modell des Tragverhaltens von Normalbeton bzw. Faserbeton auf zentrischer Zug- und Druckbeanspruchung

Eine auf das linear-elastische Verhalten folgende Entfestigung ist auch im zentrischen Zug auf die Mikrorissbildung bis hin zu einer Makrorissbildung zurückzuführen. Da die Einwirkung eine Zugbelastung darstellt, bilden sich die Mikrorisse senkrecht zur Belastungsrichtung aus [8, S.68]. Die Stahlfasern können auch hier (siehe Druckverhalten ungerissener Zustand) geringe Steifigkeitserhöhungen aufgrund der Mikrorissüberbrückungen herbeiführen. In Abhängigkeit der Literatur wird von Erhöhungen der Zugfestigkeit um bis zu 40 % gesprochen [11, S.47]. Dies sei nach [11] jedoch nicht konsequent zu belegen. Ein Grund dafür sieht [11, S.49] in den Unterschieden zwischen Biegezug- und einaxialen Zugfestigkeiten. Die Auswirkung des Fasergehaltes findet in Kapitel 2.2.2 eine gesonderte Betrachtung.

Soll das Zugverhalten von Stahlfaserbeton indirekt über einen Biegezugversuch bestimmt werden, müssen Rückschlüsse von der vertikalen Durchbiegung oder Rissöffnung auf die einaxiale Spannungs-Dehnungs-Beziehung bzw. Spannungs-Rissöffnungs-Beziehung gezogen werden. Ein Übersetzen des Biegezugverhaltens im Bereich der Risszone in eine einaxiale Spannungs-Dehnungsbeziehungen unter Annahmen der Bernoulli-Hypothese und des Hookeschen Gesetzes ist aufgrund von stetigen Lastumverteilungen nicht möglich [2, S.421 f.]. Ein Beitrag der Fasern am Lastabtrag erschwert diesen Sachverhalt zusätzlich. Dementsprechend kann es zu Fehleinschätzungen der einaxialen Zugfestigkeit auf Grundlage eines Biegezugversuches kommen.

### 2.1.5. Zentrisches Zug- und Biegezugverhalten im gerissenen Zustand

Beim Erreichen der Zugfestigkeit des Stahlfaserbetons vereinigen sich die Mikrorisse zu Makrorissen. Wo zuvor noch Gesteinskörner „Rissbrücken“ [12, S.29] zwischen den Mikrorissen darstellten und Zugspannungen übertragen konnten, fallen diese Brücken bei Rissbreiten ca.  $> 1,5 \text{ mm}$  aus [16, S.114]. Durch die Anwesenheit der Stahlfasern wird eine Übertragung von Zugspannungen über den Makroriss hinweg gewährleistet. Im Gegensatz zum Rissbild auf Druckbeanspruchung sind die Risszonen (Rissprozesszonen [17, S.362] [18, S.19]) jedoch diskreter und örtlich begrenzt [18, S.19].

Die Stahlfasern erhöhen den Grad des duktilen Nachrissverhaltens deutlich. Je nach Fasergehalt kann der Beton als quasi-spröde bis duktil eingestuft werden. Dabei verhält sich der Beton umso duktiler desto höher der Fasergehalt ist. Weitere Einflussfaktoren stellen der Fasertyp, die Faserschlankeheit und die Faserorientierung dar. Die Einflussfaktoren sollen in Kapitel 2.2 genauere Betrachtung finden. Das Nachrissverhalten des Faserbetons in Abhängigkeit der Fasereffektivität soll in Abb. 2.7 veranschaulicht werden. Je nach Zusammenwirken der Einflussfaktoren besitzen die Fasern im Beton eine Fasereffektivität, die das Nachrisszugverhalten bestimmt [2, S.400 ff.]. Bei hoher Fasereffektivität können die Risschnittgrößen im vollen Umfang durch die Fasern übertragen werden. Daraus folgt eine rissverteilende Wirkung der Fasern, die ein verfestigendes Tragverhalten nach der Erstrissbildung hervorruft [18, S.19]. Folglich ist eine Spannungssteigerung in der Spannungs-Rissöffnungs-Beziehung zu verzeichnen. Weisen die Fasern dagegen nur eine geringe Fasereffektivität auf, besteht lediglich eine risshemmende Wirkung. Die Risschnittgrößen können durch die Fasern nicht in vollem Umfang übertragen werden. Ein entfestigendes Verhalten ist die Folge. Der Abbildung ist ferner zu entnehmen, dass nach dem Riss Restzugspannungen aufgenommen werden, die sich schließlich auf einem annähernd konstanten Niveau befinden und eine Spannungsübertragung bei Rissweiten von mehreren Millimetern ermöglichen [6, S.17].

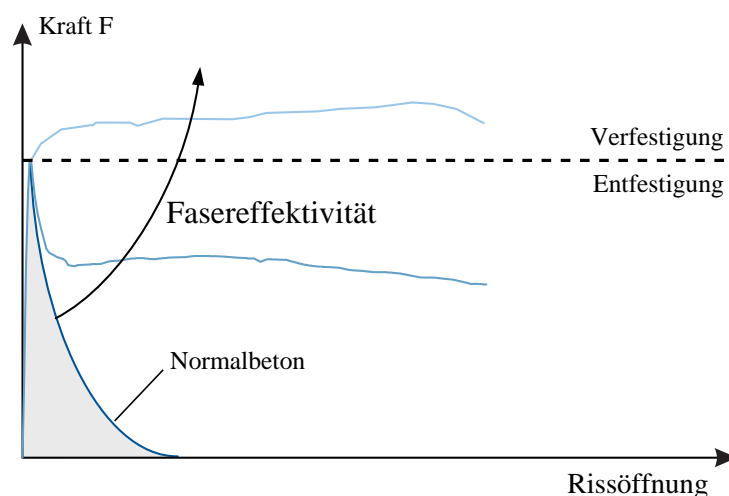


Abb. 2.7: Schematisch Darstellung des Zugtragverhaltens von Normal- und Faserbeton in Abhängigkeit der Fasereffektivität

Die Rissentwicklung bei einer Zug- und Biegebeanspruchung bedarf einer differenzierten Betrachtung. Während sich bei einer uniaxialen Zugbeanspruchung die Rissprozesszone sofort über den gesamten Querschnitt ausbildet, wächst der Riss bei einer Biegebeanspruchung vom Bauteilrand in Richtung der korrespondierenden Druckspannung ins Bauteilinnere. Bei der Rissentwicklung infolge einer Biegelaststeigerung kommt es zu einer stetigen Spannungsverteilung auf Querschnittsebene, bei der Zug- und Druckspannung im Gleichgewicht stehen. Aufgrund der wesentlich größeren Druckfestigkeit des Betons im Vergleich zur Zugfestigkeit schnürt sich die Druckzone immer weiter in ihrer Höhe ein [10, S.24]. Folglich verschiebt sich die Spannungsnulllinie in Richtung der Druckzone [10, S.24]. Das nicht-lineare Verfestigungsverhalten der Zugzone lässt dabei Laststeigerungen zu [18, S.19]. Die maximal erreichbare Laststeigerung wird als Biegezugfestigkeit bezeichnet [19, S.14], die jedoch nicht als Materialkennwert zu deuten ist, da aufgrund des zuvor beschriebenen Sachverhaltes eine Abhängigkeit zur Bauteilhöhe besteht [10, S.24]. Durch die erwähnte Spannungsverteilung ist es nicht möglich, eine Spannungs-Rissöffnungs-Beziehung auf direktem Weg mit Hilfe des Biegezugversuches zu bestimmen. Ein indirektes Verfahren ist von Nöten, dessen Entwicklung und Anwendung Gegenstand dieser Arbeit sein soll.

### 2.1.6. Mehraxiales Tragverhalten

In den vorherigen Kapiteln wurde das Materialverhalten von Faserbeton unter uniaxialen Spannungszuständen beschrieben. Wird das Betonbauteil als Kontinuum betrachtet, ist die Berücksichtigung des Tragverhaltens unter multiaxialen Spannungs- und Verformungseinflüssen notwendig.

Durch multiaxiale Beanspruchungen wirken auf einen Spannungsraum Behinderungen und Forcierungen in Form von Querkzug oder Querkdruck [18, S.21]. Die Querspannungen beeinflussen die Rissbildung in der Form, dass die Relativbewegung der Rissufer verhindert oder begünstigt wird. Unter Druckbeanspruchung in zwei Hauptrichtungen (biaxialer Druck) wird die Festigkeit von Beton deutlich erhöht [16, S.61]. Dagegen sind unter biaxialer Zugbeanspruchung keine Unterschiede zur uniaxialen Zugfestigkeit festzustellen [16, S.61]. Werden dem Beton Stahlfasern hinzugefügt, lassen sich je nach Fasereffektivität weitere Steigerungen der bi- und triaxialen Druckfestigkeit aufgrund einer zusätzlich risshemmenden Wirkung erzielen [18, S.22]. Die Auswirkung des Fasergehaltes auf die biaxiale Druckfestigkeit wurde beispielsweise von [20], [21] und [22] empirisch untersucht und deren begünstigende Wirkung festgestellt. Die Ergebnisse können der Abb. 2.8 entnommen werden. Bei biaxialer Zugbeanspruchung fallen diese Feststellungen aus. Hier sind, wie beim Normalbeton auch, nur geringe Änderungen zur uniaxialen Festigkeit festzustellen [18, S.22]. An dieser Stelle sei betont, dass es bis dato nur wenige experimentelle Untersuchungen zum multiaxialen Tragverhalten von Faserbeton und ferner keine zu triaxialen Zugbeanspruchungen von Normalbeton gibt [18, S.21]. Erkenntnisse zu diesen Themenbereichen müssen daher mit Vorsicht behandelt werden. Zusammenfassend kann der Abb. 2.9 eine schematische Darstellung des Fasereinflusses auf das biaxiale Festigkeitsverhalten entnommen werden.

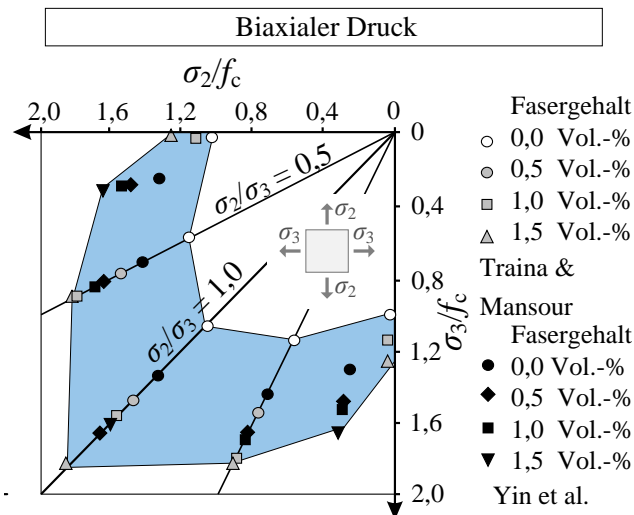


Abb. 2.8: Fasereinfluss auf die Druckfestigkeit unter biaxialer Druckbeanspruchung nach [20], [21] und [22] aus [19, S.12]

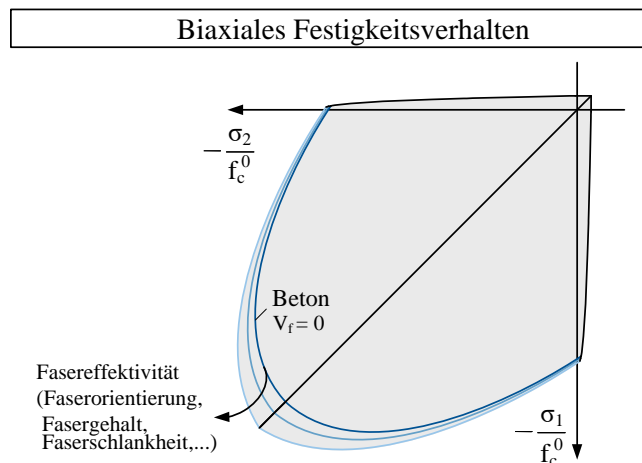


Abb. 2.9: Schematische Darstellung des Fasereinflusses auf das biaxiale Festigkeitsverhalten [18, S.22]

Die Feststellungen zum biaxialen Verhalten lassen sich auf den drei-dimensionalen Raum übertragen. Der erwähnte Einfluss der Querspannungen auf die Mikrorisse kann auf alle Hauptrichtungen bezogen werden [18, S.21]. Weil es für die triaxiale Beanspruchung von Faserbeton keine Versuchsdaten gibt, wird hier ebenfalls von keiner Veränderung der Festigkeitsentwicklung aufgrund einer dritten Spannungsdimesion ausgegangen [18, S.21].

Da die Fähigkeit der Querdehnung von Materialien eine besondere Rolle im mehrdimensionalem Raum spielt, wurden hierzu von [21] Untersuchungen durchgeführt. Er stellte fest, dass nur geringe Abweichungen der Querdehnfähigkeit von Faserbeton mit Fasergehalten bis zu 1 % im Vergleich zu Normalbeton bestehen [18, S.22].

### 2.1.7. Querkraft- und Torsionstragverhalten

Stahlfasern in Beton verursachen auch bei Querkraft- und Torsionsbeanspruchungen ein duktileres Bauteilverhalten und erhöhen dessen Tragfähigkeit [2, S.427] [23, S.886]. Die Fasern wirken als Zugbewehrung im Querriss, der für ein Querkraftversagen charakteristisch ist. Erläuterungen zur Querrissentstehung sind beispielsweise [13] zu entnehmen.

Der Querkraftabtrag wird über folgende Mechanismen im Bauteil ermöglicht [13, S.127]:

- Kraftabtrag über ungerissene Betonzonen vorzugsweise in Druckzonen
- Gerissene Betonzonen mit Rissweiten  $< 0.5$  mm; hier stellen grobe Gesteinskörner Scherbehinderungen aufgrund ihrer Verzahnung dar
- Schwerwiderstand der Längsbewehrung
- Gewölbewirkung im Bauteil, wenn hinreichende Bauteilabmessungen gegeben sind
- Querkraftbewehrung und Stahlfasern als Rissüberbrückung

Die rissüberbrückende Wirkung der Stahlfasern wurde in den vorherigen Kapiteln vielfach behandelt. Ein Querkraftversagen äußert sich schlagartig durch eine abrupte Rissbildung. Die Fasern verlangsamen das Risswachstum und ermöglichen ein Vordringen des Schrägrisses in Richtung der Druckzone [2, S.427]. Das Versagen erscheint duktiler bei einer gleichzeitig erhöhten Versagenslast. Aufgrund der Stahlfaserwirkung als Querkraftbewehrung ist es unter Umständen möglich, auf die konventionelle Bügelbewehrung zu verzichten. Die Widerstandswirkung der Stahlfasern auf Torsion darf nach DAfStb-Richtlinie „Stahlfaserbeton“ [TR3] jedoch nicht angesetzt werden.

## 2.2. Einflussgrößen der Stahlfasern auf die mechanischen Eigenschaften von Beton

### 2.2.1. Stahlfasertypen

Die verschiedenen Faserarten lassen sich vom Werkstoff, der Formgebung und der Herstellungsart unterscheiden. Diese Arbeit konzentriert sich auf die Stahlfaser. Als Ausgangsstoff dient hierbei kaltgezogener Walzdraht [2, S.387]. Edelstahl draht ist ebenfalls als Faserwerkstoff geeignet [2, S.387]. Damit eine Faser die gewünschten Materialeigenschaften des Betons begünstigt, sind folgende Merkmale einzuhalten [24, S.242]:

- Die Zugfestigkeit sollte mindestens die zwei- bis dreifache Größe der Betonzugfestigkeit aufweisen
- Die Verbundfestigkeit sollte mindestens die gleiche Größe der Betonzugfestigkeit besitzen.
- Der E-Modul der Fasern auf Zug sollte signifikant höher sein als der des Betons.
- Die Querdehnzahl sollte der Querdehnung des Betons angepasst sein.

- Der Temperaturkoeffizient sollte dem Koeffizienten des Betons entsprechen.

Übliche Stahlfasern weisen einen runden Querschnitt mit einem Durchmesser zwischen 0,4 und 0,8 mm und eine Länge von 25 bis 60 mm auf [24, S.242]. Ein Kennwert für die Beurteilung der Faserwirkung in Beton ist die Faserschlankheit. Sie stellt die Länge der Fasern in das Verhältnis zum Faserdurchmesser und liegt in der Regel unterhalb von 100 [24, S.242].

Für eine Kraftübertragung zwischen Faser und Betonmatrix muss stets ein Verbund zwischen den beiden Medien bestehen. Dieser äußert sich durch einen Haft- bzw. Adhäsionsverbund und dem formschlüssigen Verbund zwischen den Materialien [3, S.44]. Daher spielt zum einen die Oberflächenbeschaffenheit und zum anderen die Geometrie der Faser eine wichtige Rolle, um die Verbundeigenschaften zu beeinflussen. Die Abb. 2.10 stellt übliche Fasertypen dar, die sich in der Praxis etabliert haben.

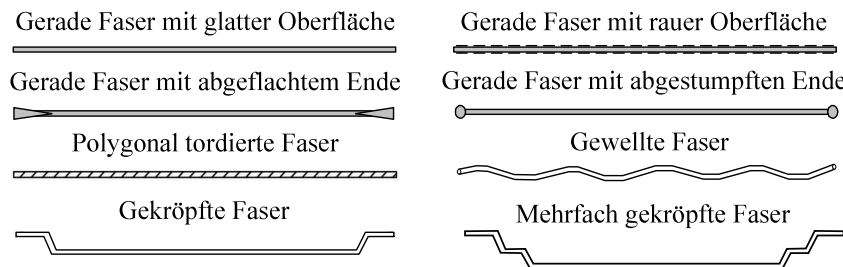


Abb. 2.10: Übersicht üblicher Stahlfasertypen [24, S.241]

Die Abb. 2.11 verdeutlicht den Einfluss unterschiedlicher Fasergeometrien auf das Tragverhalten von Betonbauteilen und den begünstigenden Formverbund durch Geometrien, die von der geraden Faser abweichen. Die Oberfläche der Fasern kann beispielsweise durch bestimmte Walzprozesse, durch Verzinken oder Verkupfern zusätzlich bearbeitet werden [2, S.387].

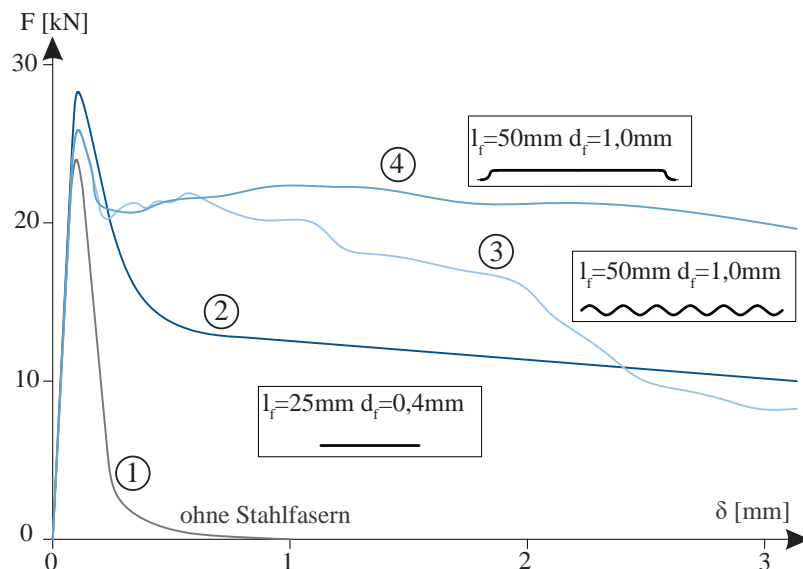


Abb. 2.11: Einfluss unterschiedlicher Fasergeometrien auf das Tragverhalten (Biegebalken) nach [10] aus [25, S.11]

### 2.2.2. Fasergehalt

Der Fasergehalt  $V_f$  in Beton wird entweder als Gewichtsangabe in  $\text{kg/m}^3$  oder in Volumenprozent ausgedrückt. Aus Kostengründen und vor allem aus Gründen der Verarbeitbarkeit wird der Fasergehalt auf maximal 1 Vol.-% beschränkt [2, S.395], was einem Gewicht von ca.  $80 \text{ kg/m}^3$  entspricht [24, S.242]. Wie im Kapitel 2.1 vorgestellt, beeinflussen die Fasern das Nachrissverhalten des Betons erheblich, wobei der Fasergehalt eine maßgebliche Rolle spielt. So weist der gerissene Beton ein verfestigendes Verhalten auf, wenn die vorhandenen Fasern, die Zugspannungen, die nicht mehr von der Betonmatrix übertragen werden können, im vollen Umfang aufnehmen und den Riss überbrücken. Der geringste Fasergehalt, der diese Eigenschaft aufweist, wird als kritischer Fasergehalt  $V_{crit}$  bezeichnet. Alle Fasermengen unterhalb des kritischen Gehaltes weisen demnach ein entfestigendes Verhalten auf. Was dies für das Tragverhalten des Betons bedeutet, kann den Abbildungen 2.4 und 2.7 entnommen werden. An dieser Stelle sei nochmals auf die große Streuung des Tragverhaltens von Faserbeton hingewiesen [7, S.5 ff.]. Da die Fasereffektivität nicht nur vom Fasergehalt, sondern auch beispielsweise von der Faserorientierung (siehe Kapitel 2.2.3) abhängt, können Faserwirksamkeiten von Bauteilen trotz gleichem Fasergehalt voneinander abweichen [2, S.406].

### 2.2.3. Faserorientierung

Die Stahlfaser überträgt Zugspannungen im Riss optimal, wenn diese senkrecht zum Rissufer ausgerichtet ist und parallel zur Zugspannung verläuft [3, S.52]. Generell sind die Fasern im Beton willkürlich verteilt, sodass im Mittel eine gewisse Anzahl an Fasern den Riss in einem Winkel flankieren, der die Übertragung von Zugspannungen ermöglicht. Aufgrund von Herstellungsprozessen und geometrischen Beschränkungen der Betonschalung, verteilen sich die Fasern nicht homogen im Betonkörper [6, S.10], was in Abb. 2.12 verdeutlicht werden soll. An Bauteilrändern ist daher eher eine zweidimensionale als eine dreidimensionale Ausrichtung der Fasern festzustellen, was zu einem anisotropen Materialverhalten in Bereichen der Bauteilränder führen kann [2, S.395].

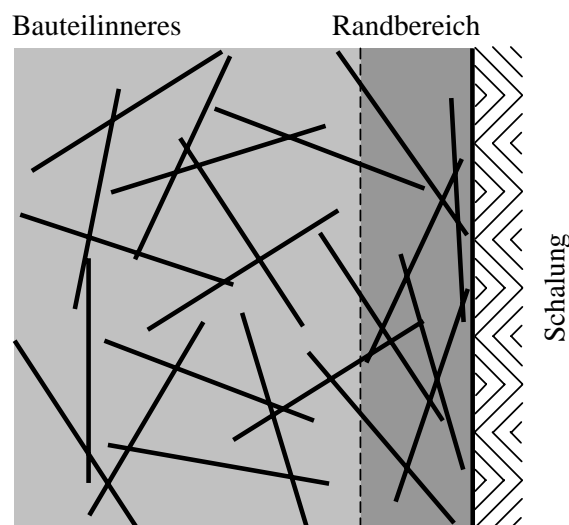


Abb. 2.12: Faserorientierung an Grenzflächen [26, S.20]



Während des Mischprozesses kann es außerdem zu einer Igelbildung kommen. Diese Anhäufung von Fasern verursacht eine ungleichmäßige Verteilung im Festbeton [25, S.15]. Verdichtungsprozesse und die Betonierrichtung beeinflussen ebenfalls eine inhomogene Ausrichtung der Fasern [25, S.16 f.].

Zu beachten ist daher bei der Analyse des Materialverhaltens die mögliche Inhomogenität und partielle Anisotropie und ferner beim Herstellungsprozess eine möglichst wirksame Ausrichtung der Fasern.

#### 2.2.4. Faser-Matrix-Interaktion

Aus den vorgestellten Einflussfaktoren Fasertyp, Fasergehalt und Faserorientierung resultiert ein Verbundverhalten zwischen Beton und Faser, das die Übertragung von Zugkräften zwischen den Materialien aktiviert. Als Verbundmechanismus wirkt zum einen ein physisch-chemischer (Adhäsion) und zum anderen ein Reib- und Formverbund (siehe dazu auch Kap. 2.2.1) [2, S.400 f.] [27, S.2]. Wird eine Faser im Beton über Zugspannungen aktiviert, herrscht zunächst ein reiner Adhäsionsverbund [28, S.58]. Bei steigender Zugspannung löst sich die Faser örtlich vom Beton und der Reibverbund greift. Die Reibung wird dabei durch die Rauigkeit der Bruchfläche einer Kontaktzone zwischen Faser und Matrix verursacht [28, S.58]. Die Zone ist gleichzusetzen mit der Kontaktzone zwischen Zementstein und Gesteinskorn und weist eine Dicke von ca. 30 und 70  $\mu\text{m}$  auf [28, S.59]. Die Verankerung der Fasern kann erheblich durch einen Formverbund, etwa durch gekröpfte Enden, gesteigert werden. Der Formverbund wird entweder gleichzeitig oder verzögert zum Reibverbund aktiviert. Die Abb. 2.13 verdeutlicht schematisch die Wirksamkeitssteigerung, wenn ein Formverbund zusätzlich zum Adhäsions- und Reibverbund greift. Das Verbundverhalten jeglicher Konfigurationen der Einflussfaktoren kann über sogenannte Auszugsversuche untersucht und Verbundspannungs-Schlupfbeziehungen festgestellt werden [6, S.9]. Auszugsversuche dieser Art sind beispielsweise [3] zu entnehmen.

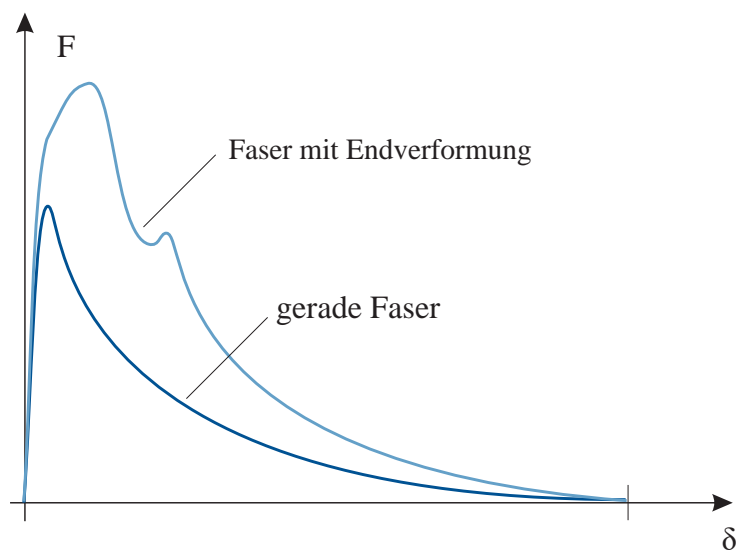


Abb. 2.13: Typisches Faserauszugsverhalten für Fasern mit und ohne Formverbund aus [6, S.9]

## 2.3. Modelle zur Beschreibung des Materialverhaltens von Stahlfaserbeton

### 2.3.1. Elastizitätstheorie

Im Kapitel 2.1 wurde unter anderem das charakteristische linear-elastische Materialverhalten von Faserbeton während der initialen Belastung dargestellt. Über die *Elastizitätstheorie* lassen sich materialspezifische Gleichungen begründen, mit der linear- aber auch nicht-linear-elastisches Materialverhalten formuliert werden kann [29, S.208].

Die Elastizität gehört zu den zeitunabhängigen Materialmodellen. Verzerrungen, die dem Material durch eine äußere Einwirkung zugezogen wurden, müssen bei Wiederherstellung des spannungslosen Ausgangszustandes in ihrer Gänze verschwinden [29, S.254]. Jegliche Verformungsarbeit wird als Verzerrungsenergie im Bauteil gespeichert und ist reversibel. Im uniaxialen Spannungszustand müssen Be- und Entlastungen stets den gleichen Weg der Spannungs-Dehnungs-Beziehung folgen [29, S.253]. Weiterhin beeinflusst die Belastungsgeschwindigkeit den Verformungszustand nicht [29, S.254]. Diese Bedingungen gewährleisten Verzerrungen, die einem eindeutigen Spannungszustand zuzuordnen sind. Im eindimensionalen Fall und unter linear-elastischem Materialverhalten wird dieser Sachverhalt durch das Hookesche Gesetz ausgedrückt [30, S.103]:

$$\sigma = E\varepsilon^{el} \quad (2.1)$$

Die Spannung  $\sigma$  [N/mm<sup>2</sup>] ist über die elastische Dehnung  $\varepsilon^{el}$  [-] mit Hilfe der Proportionalitätskonstante  $E$  [N/mm<sup>2</sup>] zu berechnen. Die Proportionalitätskonstante  $E$  stellt dabei den Elastizitätsmodul als Tangentenmodul dar, der im eindimensionalen Raum den einzigen Materialparameter für diese Theorie darstellt. Für den dreidimensionalen Raum gilt analog in Indexnotations-Schreibweise [30, S.103]:

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl}\varepsilon_{kl}^{el} \quad (2.2)$$

Dabei stellt  $\sigma_{ij}$  einen Spannungstensor und  $\varepsilon_{kl}^{el}$  einen Verzerrungstensor mit jeweils neun Komponenten dar. Nach der Summationskonvention folgt, dass der Elastizitätstensor  $E_{ijkl}$  ein Tensor vierter Stufe mit 81 Komponenten ist [29, S.255]. Seine Komponenten werden Elastizitätskonstanten genannt, wobei die Indizes i,j bzw. k,l aufgrund der Symmetrie des Spannungs- und Verzerrungstensors vertauscht werden dürfen. In Folge dessen besteht der Tensor aus 36 voneinander unabhängigen Komponenten [30, S.104].

Wird im simpelsten Fall von einem isotropen Material ausgegangen, bleiben die Komponenten des Elastizitätstensors bei einer Drehung des Koordinatensystems unverändert. Folgende Eigenschaft muss der Tensor daher aufweisen [30, S.104]:

$$E_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \kappa(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (2.3)$$

Die drei Konstanten  $\lambda$  [N/mm<sup>2</sup>],  $\mu$  [N/mm<sup>2</sup>] und  $\kappa$  [N/mm<sup>2</sup>] können aufgrund der Vertauschbarkeit der Indizes um  $\kappa$  reduziert werden, sodass nur  $\lambda$ ,  $\mu$  und das Kronecker-Delta bestehen

bleiben [30, S.104]:

$$E_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (2.4)$$

Wird Gleichung 2.4 in Gleichung 2.2 eingesetzt, gilt [30, S.105]:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} \varepsilon_{kl}^{el} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} \varepsilon_{kl}^{el} + \delta_{il} \delta_{jk} \varepsilon_{kl}^{el}) \quad (2.5)$$

$$= \lambda \varepsilon_{kk}^{el} \delta_{ij} + \mu (\varepsilon_{ij}^{el} + \varepsilon_{ji}^{el}) \quad (2.6)$$

$$= \lambda \varepsilon_{kk}^{el} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}^{el} \quad (2.7)$$

Der Spannungstensor ist unter isotroper Annahme im dreidimensionalen Raum nunmehr abhängig vom Verzerrungstensor und den zwei Elastizitätskonstanten  $\lambda$  und  $\mu$ , die nach Gabriel Lamé als *Lamésche Konstanten* benannt sind. Die bekanntere Bezeichnung für die Konstante  $\mu$  ist der Schubmodul [30, S.104].

Im letzten Schritt lässt sich der bekannte Elastizitätsmodul  $E$  und die Querdehnzahl  $\nu$  wie folgt durch die Lamésche Konstanten ausdrücken [31, S.16]:

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad (2.8) \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (2.9)$$

Die Gleichung 2.7 umgestellt zum Verzerrungstensor  $\varepsilon_{ij}$  und Gleichung 2.8 sowie 2.9 eingesetzt, resultiert nach der Elastizitätstheorie für isotropes Materialverhalten im dreidimensionalen Raum folgende Beziehung [30, S.105]:

$$\varepsilon_{ij}^{el} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (2.10)$$

### 2.3.2. Plastizitätstheorie

Da Beanspruchungsvorgänge eines zeit- bzw. geschwindigkeitsunabhängigen Materialverhaltens nicht immer nur reversibel sind, wird die Elastizitätstheorie um die *Plastizitätstheorie* ergänzt. Mögliche elasto-plastische Materialantworten sind über Spannungs-Dehnungs-Beziehungen in der Abb. 2.14 dargestellt. Im Gegensatz zur Elastizitätstheorie tritt Dissipation auf. Die plastische Beanspruchung ist keine Zustandsgröße mehr, sondern abhängig vom Belastungsweg bzw. der Belastungsgeschichte [29, S.266 f.]. Bei der Annahme kleiner Verzerrungen lassen sich die elastischen  $\varepsilon^{el}$  und die plastischen Verzerrungen  $\varepsilon^{pl}$  trennen und die Gesamtverzerrung  $\varepsilon$  durch ihre additive Zusammensetzung ausdrücken [32, S.421]:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{el} + \varepsilon_{ij}^{pl} \quad (2.11)$$

Da der Verzerrungszustand von der Belastungsgeschichte abhängig ist, besteht in der Plastizitätstheorie kein eindeutiger Zusammenhang zwischen Spannungen und Verzerrungen. Somit werden die Verzerrungen über inkrementelle Beziehungen ausgedrückt, die über die gesamte Belastungsgeschichte integriert werden. Demzufolge muss Gleichung 2.11 bei zeitfreier Plastizität wie folgt formuliert werden [33, S.276]:

$$d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^{el} + d\epsilon_{ij}^{pl} \quad (2.12)$$

Verhält sich ein Material elasto-ideal-plastisch, werden den linear-elastischen Verzerrungen plastische Verzerrungen nachgeschaltet. Dabei treten beim Erreichen eines Spannungsgrenzwertes, der sogenannten Fließgrenze  $\sigma_F$ , plastische Verzerrungen auf, die keine weiteren Spannungssteigerungen hervorrufen. Wirken ver- oder entfestigende Einflüsse während der Belastung, kann den plastischen Verzerrungen eine Zu- oder Abnahme der Spannung gegenüberstehen (siehe Abb. 2.14).

Unter elastischer-ideal-plastischer Annahme lassen sich die Spannungen im Sinne der Gleichung 2.10 aus Kapitel 2.3.1 wie folgt berechnen [32, S.421]. Dabei ist an dieser Stelle nicht mehr die Rede von einem Elastizitätstensor (vgl. Kap. 2.3.1), sondern von einem Steifigkeitstensor  $C$ :

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl}d\epsilon_{kl}^{el} = C_{ijkl}(d\epsilon_{kl}^{el} - d\epsilon_{kl}^{pl}) \quad (2.13)$$

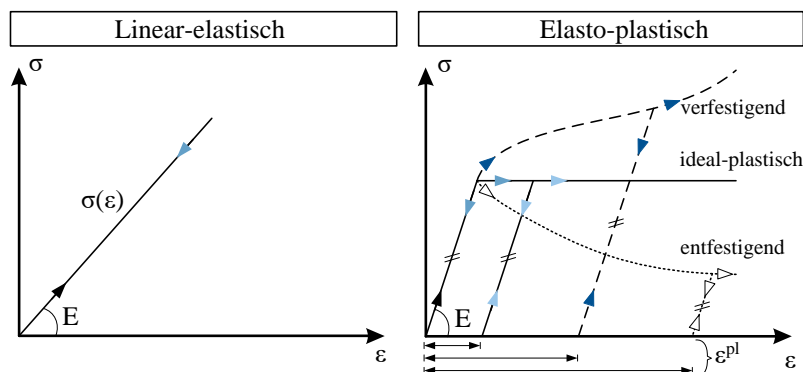


Abb. 2.14: Gegenüberstellung des linear-elastischen und elasto-plastischen Materialverhaltens [18, S.78]

### Fließbedingung

Ein Material erfährt plastische Verzerrungen, wenn dieses im Spannungsraum die Fließgrenze  $\sigma_F$  erreicht. Im Falle einer einaxialen Beanspruchung kann die zur Fließgrenze gehörende Spannung experimentell bestimmt werden [29, S.270]. Ist die Fließgrenze für einen zwei- oder dreidimensionalen Raum zu finden, würde eine experimentelle Bestimmung unzählige Versuche für verschiedenste Beanspruchungskombinationen erforderlich machen [29, S.270]. Stattdessen bedient man sich dem ingenieurmäßigen Konzept der Äquivalenz von einaxialen und mehraxialen Spannungszuständen [29, S.270]. Hier wird von eindimensionalen Fließgrenzen auf mehrdimensionale Grenzen über Äquivalenzhypothesen geschlossen. Über diese Hypothesen werden sogenannte *Fließbedingungen* in Form von Spannungszuständen formuliert, ab denen das Material plastiziert (auch „Fließen“ genannt). Die Fließbedingung wird mathematisch über eine Fließfunktion  $F(\boldsymbol{\sigma})$  ausgedrückt [32, S.422]. Es gilt [32, S.422]:

$$F(\boldsymbol{\sigma}) < 0 \rightarrow \text{(linear) elastisches Materialverhalten} \quad (2.14)$$

$$F(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \rightarrow \text{plastisches Materialverhalten} \quad (2.15)$$

### Fließregel

Betrachtet man die inkrementelle Verzerrung über die Belastungsgeschichte, kann über die *Fließregel* die Evolution der plastischen Inkremente  $d\boldsymbol{\varepsilon}_{kl}^{pl}$  beschrieben werden [33, S.278]. Dabei ist zwischen assoziierenden und nicht-assoziierenden Fließregeln zu unterscheiden. Folgende Fließregel kann nach [34] abgeleitet werden [34, S.491]:

$$d\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{pl} = d\lambda_{pl} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.16)$$

Dieser Ausdruck kann ebenfalls in Vektorform formuliert werden. Dabei würde der Spannungsgradient  $\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$  (als Vektor  $\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$ ) die Richtung und  $d\lambda_{pl}$  den Betrag als skalaren Faktor (Konsistenzparameter) ausdrücken [32, S.424]. Gilt  $d\lambda_{pl} > 0$ , werden plastische Verzerrungen zugelassen [32, S.424]. Ist  $d\lambda_{pl} = 0$ , sind die plastischen Verzerrungen demzufolge null. Die assoziierte Fließregel wird Normalenregel genannt, da die Verzerrungsinkremente durch die Richtungssteuerung mittels  $\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}$  stets normal zur Fließfläche gerichtet sind [31, S.26]. Diese Beziehung stellt eine Einschränkung im Ausdruck des plastischen Verhaltens dar und kann durch nicht-assoziierende Fließregeln umgangen werden. Hierbei wird der Spannungsgradient durch eine andere Funktion ersetzt, die als plastisches Potential  $G(\boldsymbol{\sigma})$  bezeichnet wird [32, S.425]. Die Gleichung 2.16 lässt sich wie folgt zur nicht-assoziierten Fließregel modifizieren [32, S.425]:

$$d\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{pl} = d\lambda_{pl} \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.17)$$

### Darstellung des Spannungstensors im Hauptspannungsraum

Die mathematische Formulierung der Plastizitätstheorie setzt voraus, dass plastische Verzerrungen nur durch eine Gestaltänderung, nicht jedoch durch eine Volumenänderung zustande kommen [35, S.479]. Zur Identifizierung der Spannungsanteile, die entweder für eine Volumen- oder Gestaltänderung verantwortlich sind, wird der Spannungstensor im Hauptspannungsraum in seine *hydrostatischen- und deviatorischen Anteile* zerlegt. Der hydrostatische Anteil entspricht der mittleren Normalspannung [35, S.479]. Die inneren Beanspruchungen sind hierbei in alle Richtungen gleich groß (vgl. z.B. Gasdruck) [35, S.479]. Die verbleibenden Spannungsanteile verursachen keine Volumenänderung sondern verantworten lediglich Gestaltänderungen und stellen die gesuchte Komponente der Fließbedingung dar. Diese Anteile werden zusammenfassend als deviatorischer Anteil bezeichnet [35, S.479].

Im Hauptspannungsraum liegt der hydrostatische Spannungszustand auf der hydrostatischen Achse, die die Raumdiagonale im Koordinatensystem darstellt [35, S.484]. Spannungsanteile, die sich nicht auf dieser Achse befinden, liegen in der Deviatorebene [35, S.484]. Diese Ebene wird durch den Fließkörper geschnitten und damit begrenzt.

### Verfestigungsgesetze

Mit der ideal-plastischen Theorie ist nach Erreichen der Fließgrenze kein weiterer Spannungszuwachs zu verzeichnen. Plastischen Verzerrungen sind keine Spannungserhöhungen (Verfestigung) oder Spannungsreduzierungen (Entfestigung) zugeordnet (siehe Abb. 2.14). Ein ideal-plastisches Materialverhalten stellt eine Modellannahme dar und ist in der Wirklichkeit nicht vorzufinden. Damit Ver- oder Entfestigungen in der Theorie berücksichtigt werden können und somit ein realistischeres Materialverhalten erreicht wird, ist die Fließfunktion um das sogenannte Verfestigungsgesetz zu ergänzen.

Durch das Verfestigungsgesetz ist es möglich, die Gestalt der Fließfläche, die den Fließkörper umspannt, zu verändern. Hierdurch kann der Spannungsraum für das folgende Dehnungsincrement vergrößert (Verfestigung) oder verkleinert (Entfestigung) werden. Die Modifizierung des Spannungsraumes lässt sich durch die isotrope, kinematische oder gemischte Verfestigung beschreiben.

### Isotropes Verfestigungsgesetz

Die *isotrope Verfestigung* zeichnet sich durch ein gleichförmiges Vergrößern bzw. Schrumpfen der Fließfläche aus [32, S.426], was in Abb. 2.15 dargestellt ist. Die Lage ihres Schwerpunktes ändert sich dabei nicht. Die Manipulation der Fließbedingung wird mathematisch durch die Fließspannung  $f_y(k)$ , die abhängig ist vom Verfestigungsparameter  $k$  [-], erfasst [33, S.277]:

$$F = F(\sigma, k) \quad (2.18)$$

Innerhalb der inkrementellen Beziehung der Fließspannung gilt [32, S.426]:

$$df_y(k) = H_i(k)dk \quad (2.19)$$

Der Verfestigungsmodul  $H_i$  [-] kann vom Verfestigungsparameter abhängen oder auch als Konstante vorliegen [32, S.426]. Die inkrementelle Relation des Verfestigungsparameters ist dabei [32, S.427]:

$$dk = \sqrt{\frac{2}{3} d\epsilon_{kl}^{pl} d\epsilon_{kl}^{pl}} \quad (2.20)$$

### Kinematisches Verfestigungsgesetz

Beim *kinematischen Verfestigungsgesetz* wird die Fließfläche durch eine Translation im Hauptspannungsraum verschoben [32, S.428]. Die Größe der Fläche ändert sich nicht. Dies hat zur Folge, dass der anfängliche Referenzpunkt der Fläche verschoben und die Fließfunktion anisotrop wird. Die Bezeichnung der Hauptspannungsachsen darf daher nicht mehr vertauscht werden [32, S.428]. Die Translation der Fläche bzw. des Referenzpunktes wird durch den Verfestigungstensor  $\mathbf{p}$  ausgedrückt. Eine Schematische Darstellung kinematischer Verfestigung ist der Abb. 2.16 zu entnehmen. Dabei gilt [32, S.428]:

$$d\rho_{ij} = H_k(k)d\varepsilon_{ij}^{pl} \quad (2.21)$$

### Gemischtes Verfestigungsgesetz

Es ist möglich, die isotrope und kinematische Verfestigung zu kombinieren. Das Prinzip der *gemischten Verfestigung* ist in Abb. 2.17 dargestellt. Es wird ein allgemeines Verfestigungsmodul  $H(k)$  definiert und der Parameter  $\beta$  [-] eingeführt, der den Anteil der isotropen Verfestigung bestimmt und sich demnach zwischen null und eins bewegt. Die Verfestigungsgesetze lassen sich dann wie folgt formulieren [32, S.429]:

$$df_y(k) = \beta H(k)dk \quad (2.22)$$

$$d\rho_{ij} = (1 - \beta)H(k)d\varepsilon_{ij}^{pl} \quad (2.23)$$

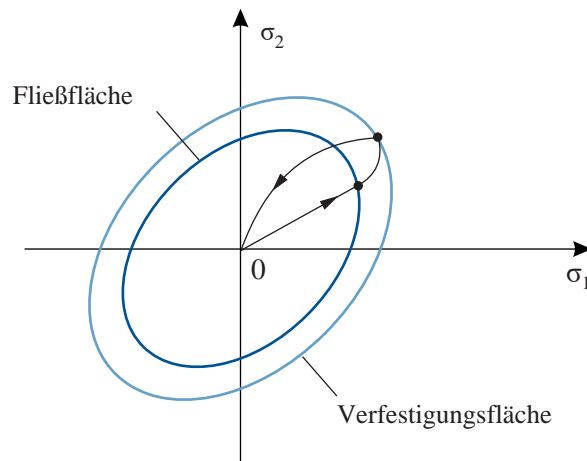


Abb. 2.15: Schematische Darstellung isotroper Verfestigung im Hauptspannungsraum mit  $\sigma_3 = 0$  [6, S.48]

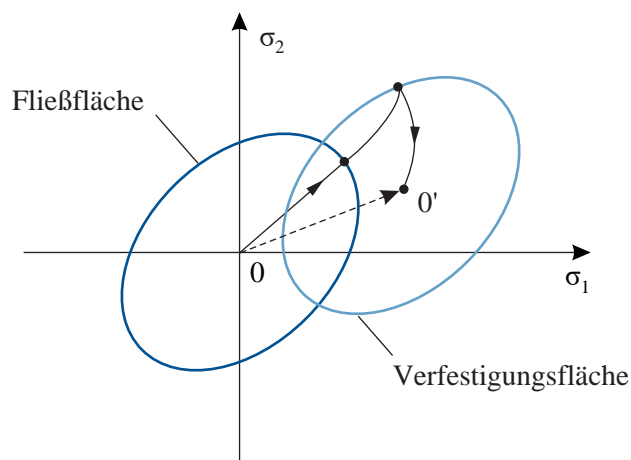


Abb. 2.16: Schematische Darstellung kinematischer Verfestigung im Hauptspannungsraum mit  $\sigma_3 = 0$  [6, S.48]

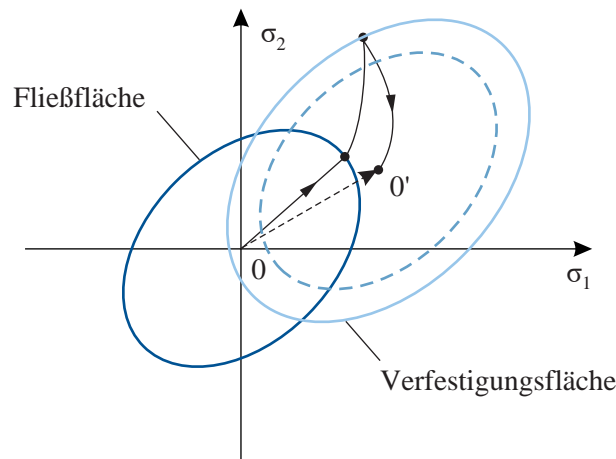


Abb. 2.17: Schematische Darstellung gemischter Verfestigung im Hauptspannungsraum mit  $\sigma_3 = 0$  [6, S.48]

### 2.3.3. Schädigungstheorie

Das Kapitel 2.1 verdeutlicht die Gefügeveränderung von Faserbeton im Verlauf der Belastungsgeschichte und die daraus resultierende Materialantwort. Das entfestigende Materialverhalten wird maßgeblich durch die Mikro- und Makrorissbildung bestimmt. Somit leuchtet ein, dass mit der Rissbildung eine Steifigkeitsminderung einher geht. Die Materialtheorien der vorherigen Kapitel 2.3.1 und 2.3.2 berücksichtigten jedoch keine Degradation der Steifigkeit etwa durch Änderung des Elastizitätsmoduls oder des Steifigkeitstensors. Mit dieser Degradation beschäftigt sich jedoch die *Schädigungstheorie* [36, S.2835 ff.].

Die Grundidee der Theorie geht auf [37] zurück, der einen skalaren Parameter zur Beschreibung der Degradation einführt. Daraus entwickelte sich die Schädigungsvariable  $D$ , die sich stets im Bereich  $0 \leq D \leq 1$  befindet [38, S.16]. Die Schädigungstheorie lässt sich sowohl auf isotropes, als auch auf anisotropes Materialverhalten beziehen. Bei einem anisotropen Verhalten würde die Schädigungsvariable  $D$  eine tensorwertige Variable darstellen [38, S.16]. An dieser Stelle wird nur auf die isotrope Schädigung als einwertiger skalarer Wert eingegangen. Diese setzt voraus, dass die Querdehnzahl von der Schädigung nicht betroffen ist [38, S.16]. Dadurch kann die Gleichung 2.2 der Elastizitätstheorie für isotropes Materialverhalten um den Schädigungsparameter ergänzt werden. Der Parameter ist als „ $D$ “ oder „ $(1-D)$ “ -Typ anzuwenden [36, S.2836 f.]. Die Gleichung lautet dann [39, S.53]:

$$\sigma_{ij} = (1 - D)E_{ijkl}\epsilon_{kl}^{el} \quad (2.24)$$

Schematisch ist der Ansatz der Schädigungstheorie in Abb. 2.18 dargestellt. Die Entlastung folgt dabei nicht mehr dem Weg der Belastung sondern wird durch die Degradation der Steifigkeit definiert. Alle Verzerrungen sind in der Theorie reversibel.



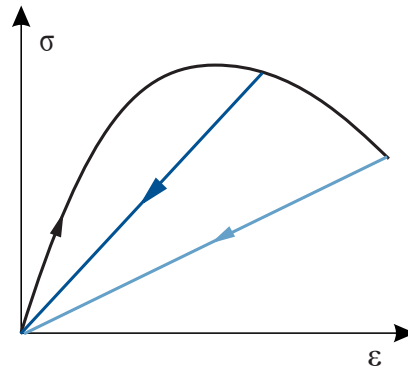


Abb. 2.18: Schematische Darstellung der Schädigungstheorie [6, S.45]

#### 2.3.4. Concrete Damaged Plasticity Modell

Über die vorgestellten Materialtheorien kann das Tragverhalten eines Materials mathematisch beschrieben werden. Bei den Theorien handelt es sich jedoch um Modelle, die über Vereinfachungen einen Sachverhalt hinreichend genau beschreiben sollen. Die Abb. 2.19 veranschaulicht zusammenfassend mögliche Materialantworten abhängig von der angesetzten Theorie.

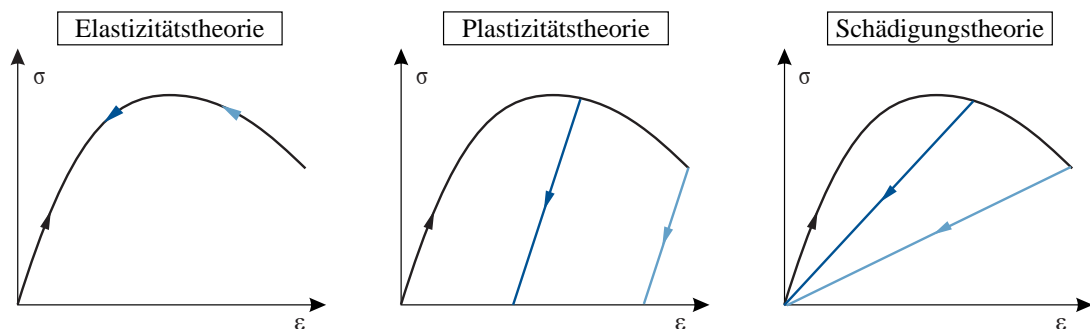


Abb. 2.19: Schematische Darstellung der vorgestellten Material-Theorien [6, S.45]

Mit den Kenntnissen über das charakteristische Materialverhalten von (Faser)-Beton kann keines der vorgestellten Modelle alleine dieses Materialverhalten zufriedenstellend abbilden. Die Elastizitäts- und Schädigungstheorie berücksichtigen beispielsweise keine irreversiblen Verzerrungen, die aufgrund der Rissbildung des Betons das Verformungsverhalten maßgeblich beeinflussen. Die Plastizitätstheorie berücksichtigt hingegen keine Degradation der Materialsteifigkeit. Bei sich wiederholenden Belastungen, Lastumlagerungen oder bei Ver- und Entfestigungen würde stets der anfängliche Elastizitätsmodul in die Rechnung einfließen [4, S.2]. Die Schädigung des Materials ist an dieser Stelle vernachlässigt. Eine bessere Modellierung der Materialantwort von Beton auf Druck (analog auf Zug übertragbar) stellt die Abb. 2.20 schematisch dar. Das Materialverhalten enthält elastische sowie plastische Anteile der Verzerrung. Eine Entlastung folgt nicht mehr der anfänglichen Steifigkeit, sondern einer Degradation dieser. Demnach wird eine Theorie benötigt, die die vorgestellten Modelle kombiniert.

Ein Modell, das an dieser Stelle Abhilfe schafft und dieses gemischte Materialverhalten abbil-

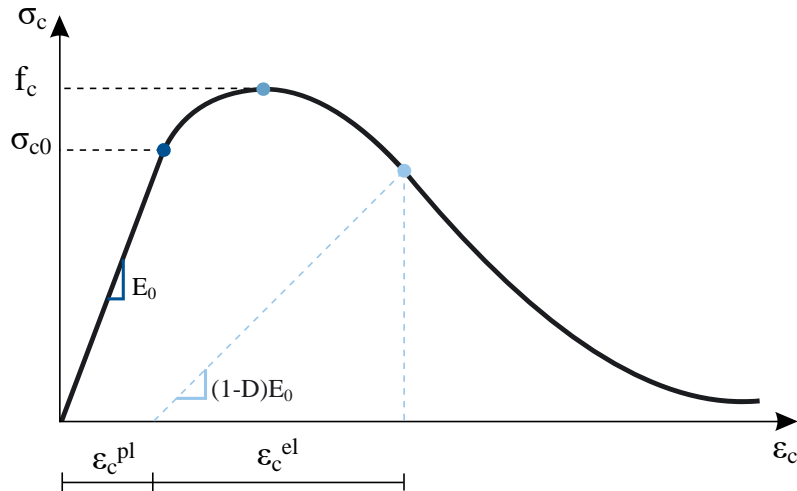


Abb. 2.20: Optimierte Modellierung der Materialantwort für Beton auf Druck [4, S.3]

det, ist das *Plastic-Damage Modell*. Es wurde anfänglich von [40] formuliert und von [41] um eine Konkretisierung der Schädigung ergänzt. Die Grundlage des Plastic-Damage Modells ist die Plastizitätstheorie mit der Annahme eines isotropen Materialverhaltens [41, S.2], die zur Formulierung eine Fließbedingung (Fließfunktion), eine Fließregel und ein Verfestigungsgesetz benötigt. Es sei nochmals betont, dass das Verfestigungsgesetz eine Verfestigung sowie eine Entfestigung ausdrücken kann [40, S.300].

Die Fließfunktion ist in dem Modell wie folgt definiert [42, 23.6.3]:

$$F = \frac{1}{1 - \alpha^{DP}} [\bar{q} - 3\alpha^{DP} \bar{p} + \beta^{DP} (\tilde{\epsilon}^{pl}) \langle \hat{\sigma}_{max} \rangle - \gamma^{DP} \langle \hat{\sigma}_{max} \rangle] - \bar{\sigma}_c(\tilde{\epsilon}_c^{pl}) \quad (2.25)$$

mit:

$$\alpha^{DP} = \frac{(\sigma_{b0}/\sigma_{c0}) - 1}{2(\sigma_{b0}/\sigma_{c0}) - 1}; 0 \leq \alpha \leq 0.5$$

$$\beta^{DP} = \frac{\bar{\sigma}_c(\tilde{\epsilon}_c^{pl})}{\bar{\sigma}_t(\tilde{\epsilon}_t^{pl})} (1 - \alpha) - (1 + \alpha)$$

$$\gamma^{DP} = \frac{3(1 - K_c)}{2K_c - 1}$$

In die Funktion fließen das Maximum der Hauptvergleichsspannung  $\hat{\sigma}_{max}$  [N/mm<sup>2</sup>], der hydrostatische Druck  $\bar{p}$  [N/mm<sup>2</sup>], die Von Mises Vergleichsspannung  $\bar{q}$  [N/mm<sup>2</sup>], das Verhältnis der zwei axialen zur einaxialen Druckfestigkeit  $\sigma_{b0}/\sigma_{c0}$  [-], die Druck-  $\bar{\sigma}_c(\tilde{\epsilon}_c^{pl})$  sowie Zugvergleichsspannung  $\bar{\sigma}_t(\tilde{\epsilon}_t^{pl})$  [N/mm<sup>2</sup>] in Abhängigkeit der plastischen Dehnungen ein. Der Abb. 2.21 (rechts) ist die Beziehung zwischen einaxialer und zwei axialer Zug- und Druckspannung und die sich einstellende Festigkeit zu entnehmen.

Der Einfluss des Formfaktors  $K_c$  [-] wird in der Fließfläche auf Deviator Ebene ersichtlich, was in Abb. 2.21 (links) dargestellt ist. Wird  $K_c$  zu 1.0 angenommen, formt sich die Fließfläche als Kreis in der Deviator Ebene im negativen Hauptspannungsraum aus. Nach [40, S.307] wird ein Wert von  $\frac{2}{3}$  für Normalbeton empfohlen, der ein Dreieck mit ausgebauchten Schenkeln in der Deviator Ebene ergibt [4, S.2].

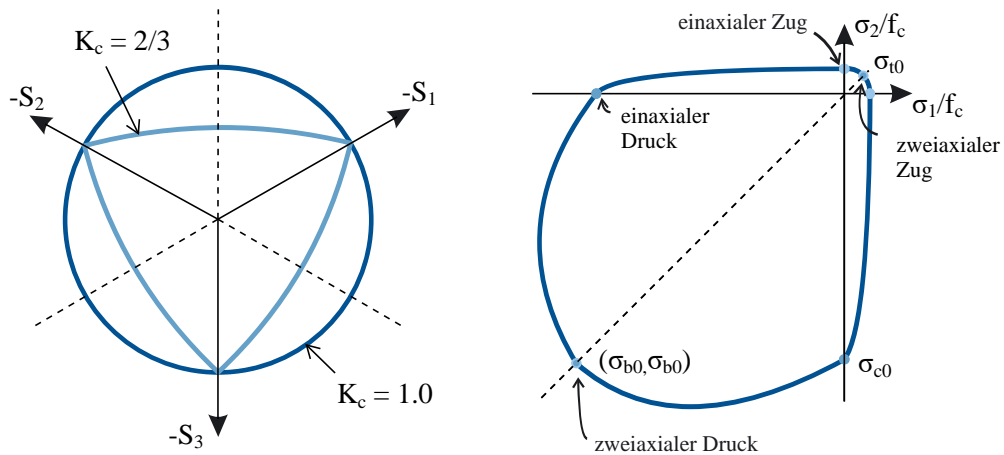


Abb. 2.21: Links: Fließfläche in der Deviator Ebene des negativen Hauptspannungsraums in Abhängigkeit des Formfaktors  $K_c$ ; Rechts: Charakteristische Fließfläche für Beton in der biaxialen Spannungsebene [4, S.3]

Da assoziierende Fließregeln bei der Materialmodellierung von granularer Materie, wie Betonen, die Dilatanz nicht wirklichkeitsnah abbilden können, wurde bei diesem Modell eine nicht-assoziierende Potentialfunktion des Typs Drucker-Prager gewählt [41, S.5]. Die Funktion kann dabei linear, hyperbolisch oder auch als Exponentialfunktion in Erscheinung treten [4, S.3]. Der Einfluss auf die Fließfläche für den linearen und hyperbolischen Fall ist in der Abb. 2.22 auf Meridianebene des Hauptspannungsraumes dargestellt.

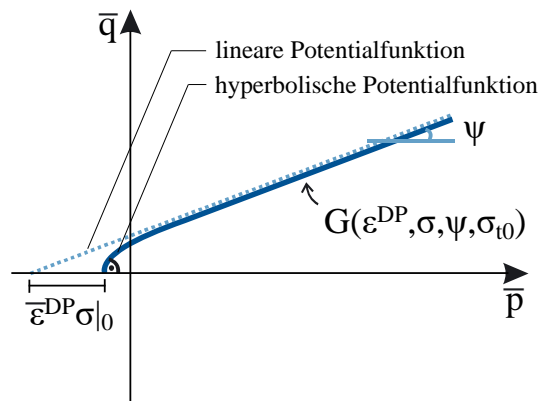


Abb. 2.22: Hyperbolische Potentialfunktion vom Typ Drucker-Prager in der  $\bar{p}$ - $\bar{q}$ -Ebene [4, S.2]

Der Abbildung ist weiterhin die Funktion des Dilatanzwinkels  $\psi$  [°] zu entnehmen. Zum einen ist er die Steigung der linearen Potentialfunktion und weiterhin der Winkel, unter dem sich

die hyperbolische Potentialfunktion ihrer Asymptote nähert. Er ist definiert als das Verhältnis von Volumenverzerrung zur Scherverzerrung. Ferner kann die hyperbolische Funktion durch einen Exzentrizitätsparameter  $\varepsilon^{DP}$  näher beschrieben werden. Dieser stellt die Rate der Annäherung der hyperbolischen Funktion an die Asymptote dar. Mit der noch fehlenden einaxialen Zugfestigkeit  $\sigma_{t0}$  [N/mm<sup>2</sup>] kann die hyperbolische Fließregel wie folgt formuliert werden [42, 23.6.3]:

$$G = \sqrt{(\varepsilon^{DP} \sigma_{t0} \tan(\psi))^2 + \bar{q}^2} - \bar{p} \tan(\psi) \quad (2.26)$$

Um nun die Schädigung in das Plastizitätsmodell zu integrieren, ist das Verfestigungsgesetz abhängig von den Schädigungsparametern  $d_t$  für die Zug- und  $d_c$  für die Druckseite. Die Parameter können wiederum in Abhängigkeit der Dehnung oder Stauchung bzw. Rissöffnung angegeben werden [4, S.3]. Gleiches gilt für die inelastischen Verzerrungen  $\tilde{\varepsilon}_c^{in}$  auf Druck und  $\tilde{\varepsilon}_t^{ck}$  auf Zug. Die Parameter fließen in die Berechnung der plastischen Verzerrung  $\tilde{\varepsilon}_c^{pl}$  und  $\tilde{\varepsilon}_t^{pl}$  ein, von denen wiederum die Druck- und Zug-Vergleichsspannungen in der Fließfunktion abhängig sind. Weiterhin gehen in die Gleichungen die einaxialen Zug- und Druckspannungen sowie der anfängliche Elastizitätsmodul  $E_0$  ein. Für die plastischen Dehnungen gilt [42, 23.6.3]:

$$\tilde{\varepsilon}_c^{pl} = \tilde{\varepsilon}_c^{in} - \frac{d_c}{(1-d_c)} \frac{\sigma_c}{E_0} \quad (2.27)$$

$$\tilde{\varepsilon}_t^{pl} = \tilde{\varepsilon}_t^{ck} - \frac{d_t}{(1-d_t)} \frac{\sigma_t}{E_0} \quad (2.28)$$

Im Modell ist die Schädigung als isotrop berücksichtigt [4, S.2]. Da sich ein Riss im Beton senkrecht zur Zugbeanspruchung orientiert, scheint eine Richtungsabhängigkeit der Schädigung jedoch sinnvoll. Dennoch kann auf eine isotrope Schädigung zurückgegriffen werden, wenn zum Beispiel eine ausreichend feine Diskretisierung in der numerischen Bauteilmotivierung berücksichtigt wird [4, S.2].

### 2.3.5. Eingangsparmeter des Damaged Plasticity Modells

Zur Anwendung des Damaged Plasticity Modells werden Eingangsparmeter benötigt, die das Materialverhalten einer einaxialen Belastung beschreiben. Über das Modell werden die Materialantworten auf die mehraxialen Spannungszustände übersetzt. Die erforderlichen Parameter werden in Abb. 2.23 dargestellt und beziehen sich vorgehend auf das Concrete Damaged Plasticity Modell der FE-Software *Abaqus*. Die einzelnen Modell-Ansätze sind dem Kapitel 3.2.2 zu entnehmen.

Die Anwendung des Damaged Plasticity Modells setzt voraus, dass all diese Variablen bekannt und als hinreichend genaue Modellierung deklariert sind. Im Kapitel 2.1.5 wurde bereits die Schwierigkeit genannt, eine plastische Zugarbeitslinie für Faserbetone aus Biegezugversuchen zu ermitteln. Die Ermittlung einer Spannungs-Rissöffnungs-Beziehung nach dem fictitious-crack-Konzept von Hillerborg [43] kann nur indirekt aus den Kraft-Verformungsdaten des untersuchten Biegebalkens ermittelt werden [44, S.423]. Zentrische Zugversuche bieten zwar die Möglichkeit einer direkten Berechnung, weisen jedoch Schwächen in der Versuchsdurchführung auf [6, S.95]. Die indirekte Berechnung der Arbeitslinie erfordert eine inverse Analyse

bei der von einer experimentell ermittelten Last-Rissöffnungs-Beziehung oder auch Last-Crack mouth opening displacement (CMOD)-Beziehung auf die Spannungs-Rissöffnungs-Beziehung rückgeschlossen wird [44, S.423].

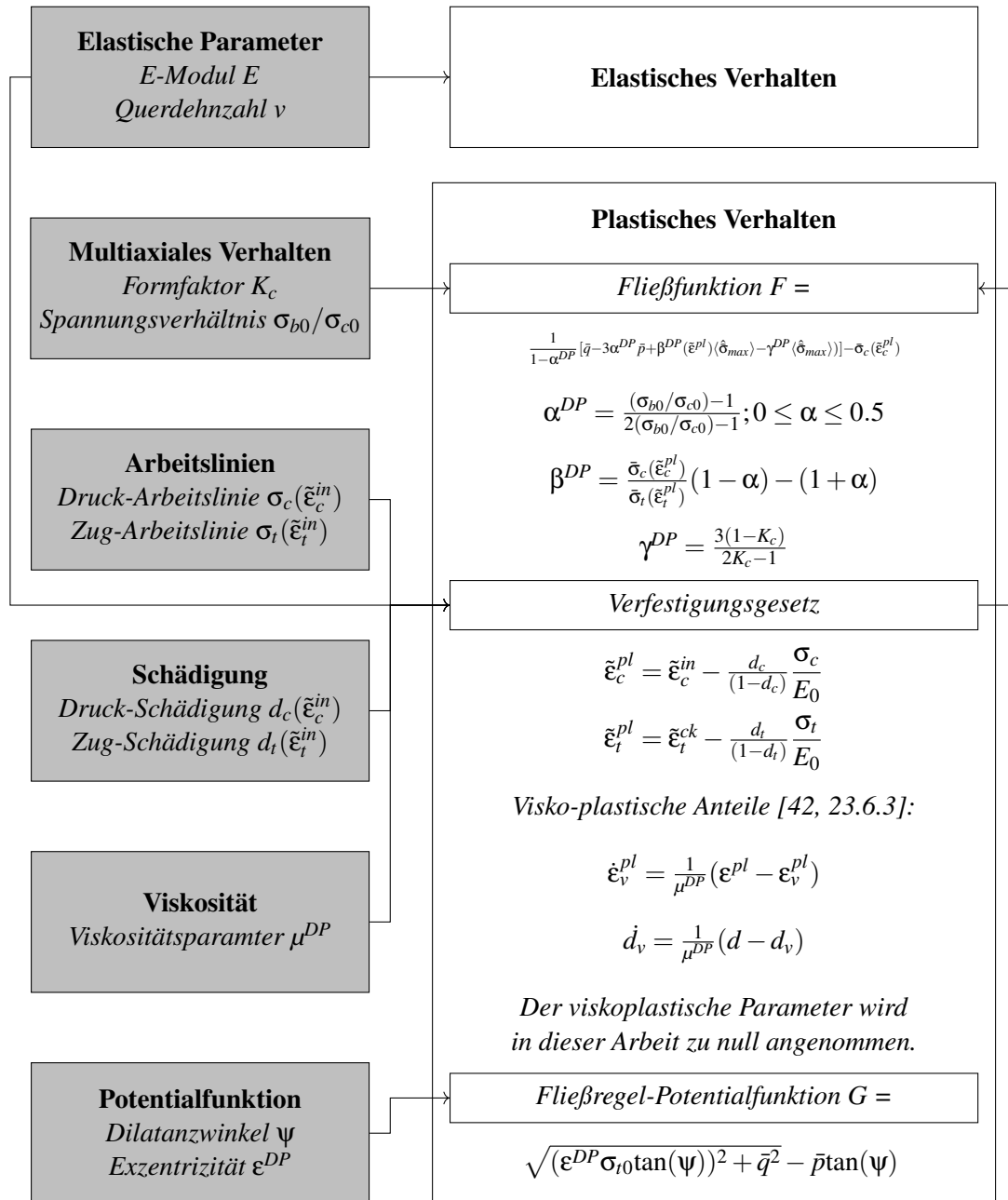


Abb. 2.23: Eingabeparameter des (Concrete) Damaged Plasticity Modells

## 2.4. Inverse Probleme

### 2.4.1. Charakterisierung

Ein *inverses Problem* liegt vor, wenn von einer bekannten Wirkung  $y \in Y$  auf die unbekannte Ursache  $x \in X$  geschlossen werden soll [45, S.14]. Sind direkte Messungen der Eigenschaft eines Objektes nicht möglich, kann von indirekten Beobachtungen auf die gesuchte Eigenschaft invers geschlossen werden [46, S.7]. Ein inverses Problem kann auch als Identifizierungsproblem verstanden werden.

Sei ein mathematisches Modell  $A$  die Abbildung der Menge der Ursachen (Parameter)  $X$  in die Menge der Wirkungen (Daten)  $Y$  [45, S.14]. Ist das Problem direkt und nicht invers zu lösen, könnte das Modell  $A$  präzise mathematisch ausgedrückt werden, um die Datenmenge  $Y$  zu berechnen. Das Problem lässt sich wie folgt ausdrücken [47, S.19]:

$$A : X \rightarrow Y \quad (2.29)$$

Gegenstand der inversen Analyse ist die Interpretation der Daten  $y \in Y$ , um das Urbild zu rekonstruieren [46, S.8]. Es gilt das Schema [45, S.15]:

$$A^{-1} : Y \rightarrow X \quad (2.30)$$

### 2.4.2. Diskretisierung inverser Probleme

Nach [48] heißen inverse Probleme gut gestellt, wenn folgende Kriterien eingehalten sind; andernfalls ist das Problem als schlecht gestellt zu bewerten [46, S.8]:

- Für die Gleichung  $Ax = y$  muss für jedes  $y \in Y$  eine Lösung bestehen
- Die Lösung muss eindeutig sein
- die Lösung muss stetig von den Daten abhängen

Sind diese Kriterien eingehalten, kann eine genaue Lösung des Problems ermittelt werden. Auf Grund des letzten Punktes ist das Problem jedoch häufig schlecht gestellt, da die Daten nicht exakt sondern durch Messung gewonnen werden [45, S.15]. Die Messdaten liegen dabei lediglich in endlicher Form und nicht als Funktion vor [47, S.33]. Ferner sind Messfehler nicht als stetig differenzierbar mit einem Startwert von 0 zu bewerten [46, S.9]. Die Lösung kann bei einem schlecht gestellten Problem lediglich über eine Diskretisierung, also approximativ in endlicher Dimension beschrieben werden [47, S.33]. Eine direkte mathematische Definition inverser Probleme gibt es nicht [47, S.V]. Damit geht einher, dass es keine generelle Methode gibt, ein Identifizierungsproblem zu lösen. Die Wahl der Methode hängt viel mehr vom Gegenstand der Untersuchung ab, wobei stets ein Optimierungsproblem vorliegt, das innerhalb der Analyse zu lösen ist [49, S.686].

### 2.4.3. Approximation mittels Splinefunktionen

Soll das mathematische Modell  $A$  eine Funktion sein, die über eine inverse Analyse approximiert wird, kann diese beispielsweise über Polynome, Fourier-Summen oder Wavelets ausgedrückt werden [47, S.34]. Die Möglichkeiten zur Approximation sind breit gefächert und in Abhängigkeit des vorliegenden Problems zu wählen. Entscheidungsfaktoren können dabei sein [47, S.34]:

- Definition der Funktionsräume  $X$  und  $Y$
- Informationsgehalt der zu approximierenden Funktion (Funktions-, Ableitungs-, Integralwerte)
- Detaillierungsgrad der Funktion
- Begrenzung des Berechnungsaufwandes

Im ersten Schritt sollen in dieser Arbeit die plastischen Zugarbeitslinien für Faserbeton aus Biegezugversuchen mittels inverser Analyse gefunden werden. Aufgrund der Validierung an experimentellen Messdaten liegt ein schlecht gestelltes Problem vor. Gegenstand der Analyse ist die Optimierung einer Kurve, welche die Zugarbeitslinie für den Anwendungszweck hinreichend genau modelliert. Lineare Ansätze zur Beschreibung von Arbeitslinien stellen Vereinfachungen dar, welche von der Realität abweichen. Je nach Anwendungsfall können diese Vereinfachungen hinreichend genau sein. Diese Arbeit konzentriert sich auf die realistische Abbildung der Zugarbeitslinien, was eine gewisse Kontinuität der zu modellierenden Kurve mit sich zieht. Ferner ist ein Approximant anzuwenden, der über die Optimierungsmethode effizient anzusteuern ist.

Als Approximant wird die Klasse der Spline-Kurven gewählt. Diese sind abschnittsweise durch Polynomstücke definiert, was eine Einfachheit ihres Aufbaus bewirkt [47, S.34]. Durch die Spline-Kurve wird eine simple Differenzier- und Integrierbarkeit sowie Verwertung mittels Computern gewährleistet [47, S.34]. Des Weiteren sind sie vorteilhaft gegenüber der Approximation von Elementen großer Menge von Funktionen mit stetigen oder auch nur quadratintegrierbaren Ableitungen [47, S.34]. Durch das Wesen der Spline-Kurve als parametrische Funktion, werden die Kurven über sogenannte Stützstellen oder Kontrollpunkte definiert. Diese Kontrollpunkte sollen die Ausgangslage der Kurvenmodellierung über einen Optimierer darstellen. Die folgenden Kapitel vertiefen die Spline-Kurven und die anzuwendende Optimierungsmethode.

## 2.5. Kurvenmodellierung mittels Splines

### 2.5.1. Lineare Splines

Gegeben sei eine vorgegebene Menge an Stützstellen (Punkte),

$$x_0 < x_1 < \dots < x_N \tag{2.31}$$

die durch Funktionen  $L \in C^0[x_0, x_N]$  stetig zu verbinden sind. Der hochgestellte Index 0 in  $C^0$  verdeutlicht dabei den Grad der Stetigkeit. Besitzt eine Funktion eine  $C^n$ -Kontinuität, weist sie noch in der n-ten Ableitung Stetigkeit auf. Besteht nur die Bedingung einer globalen  $C^0$ -Kontinuität, können die Stützstellen mit Polynomen ersten Grades interpoliert werden. Es entsteht ein Vektorraum  $S_1^0$  linearer Splines mit dem Index 1, um den Grad der angewendeten Polynome zu verdeutlichen [50, S.176]:

$$S_1^0 := \{L \in C^0[x_0, x_N] \mid L|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_1, i = 0, \dots, N-1\} \quad (2.32)$$

Splines selbst sind demnach keine Polynome; lediglich jedes Teilintervall stellt ein Polynom (hier ersten Grades) dar. Im Gegensatz zur Polynominterpolation steigt der Grad der Funktion nicht automatisch mit steigender Anzahl der Stützstellen. Zusammenfassend wird die lineare Spline-Funktion  $L(x) \in S_1^0$  wie folgt definiert, wenn  $L(x_i) = y_i, i = 0, \dots, N$  gilt [50, S.178]:

$$L(x) = \begin{cases} a_0 + b_0(x - x_0) & \text{für } x \in [x_0, x_1] \\ a_1 + b_1(x - x_1) & \text{für } x \in [x_1, x_2] \\ \vdots & \vdots \\ a_{N-1} + b_{N-1}(x - x_{N-1}) & \text{für } x \in [x_{N-1}, x_N] \end{cases} \quad | a_i = y_i, i = 0, \dots, N-1 \quad (2.33)$$

Die für die Funktionsformulierung benötigten Variablen  $a_i$  und  $b_i$  können daher sofort aus den Stützstellen ermittelt werden. Der lineare Ansatz bietet demnach genau eine Lösung des Problems. Ein Anwendungsbeispiel mit drei vorgegebenen Stützstellen ist mit folgender Abb. 2.24 visualisiert.

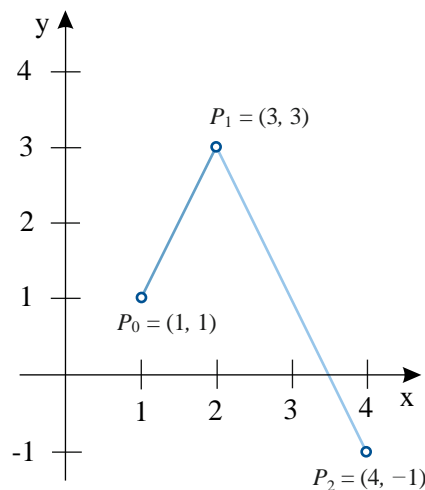


Abb. 2.24: Anwendung eines linearen Splines auf drei Stützstellen

### 2.5.2. Der de-Casteljau-Algorithmus

An dieser Stelle soll das visualisierte Beispiel aus Abb. 2.24 aufgegriffen werden. Im vorherigen Kapitel konnte zwischen den drei gegebenen Punkten unter Anwendung linearer Splines



linear interpoliert werden. Nach Kapitel 2.4.3 ist jedoch ein Kurvenmodellierungs-Ansatz zu finden, der sich von der linearen Darstellung abhebt. Gesucht sind Funktionen bzw. Polynome höheren Grades als Eins. Daher soll nun die Gestalt der Kurve im Vordergrund stehen und eine Approximation der gegebenen Menge an Stützstellen genügen. Somit erhalten die Stützstellen lediglich die Eigenschaft der Manipulation der Kurvengestalt.

Im nächsten Ansatz sind die drei Punkte  $P_0$ ,  $P_1$  und  $P_2$  aufzugreifen und als Vektor  $\mathbf{b}_0$ ,  $\mathbf{b}_1$  und  $\mathbf{b}_2$  zu erfassen. Der Parameter  $t$  interpoliert nun linear zwischen den Punkten  $P_0$ ,  $P_1$  und  $P_1$ ,  $P_2$  mit folgender Beziehung [51, S.37], was ferner in Abb. 2.25 dargestellt ist:

$$\mathbf{b}_0^1(t) = (1-t)\mathbf{b}_0 + t\mathbf{b}_1 \quad (2.34)$$

$$\mathbf{b}_1^1(t) = (1-t)\mathbf{b}_1 + t\mathbf{b}_2 \quad (2.35)$$

Werden Gleichung 2.34 und 2.35 verknüpft und dabei wiederholend interpoliert ergibt dies [51, S.37]:

$$\mathbf{b}_0^2(t) = (1-t)\mathbf{b}_0^1(t) + t\mathbf{b}_1^1(t) \quad (2.36)$$

Gleichung 2.34 und 2.35 in Gleichung 2.36 eingesetzt [51, S.37]:

$$\mathbf{b}_0^2(t) = (1-t)^2\mathbf{b}_0 + 2t(1-t)\mathbf{b}_1 + t^2\mathbf{b}_2 \quad (2.37)$$

Der hochgestellte Index zeigt den Grad der Funktion an. Der tiefgestellte Index gibt Auskunft über den Punkt, ab dem der Parameter von 0 bis 1 zählt. Durch Verknüpfung und wiederholte Interpolation resultiert in 2.36 bzw. 2.37 ein Polynom zweiten Grades. Geometrisch gesehen besteht die Kurve aus einem Parabelstück, ausgedrückt durch 2.37, das sich innerhalb des gebildeten Dreiecks von  $\mathbf{b}_0$ ,  $\mathbf{b}_1$  befindet [51, S.37].

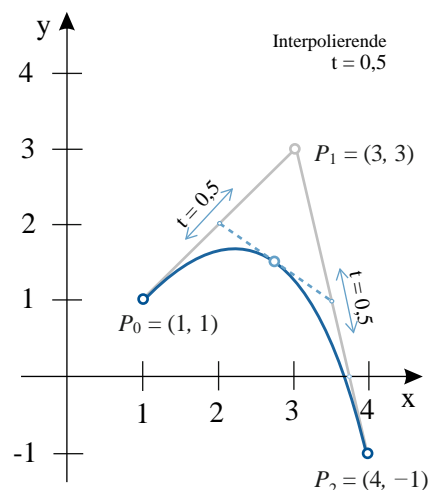


Abb. 2.25: Parabelkonstruktion durch wiederholte lineare Interpolation

Das Beispiel der Kurvenkonstruktion lässt sich auf Kurven mit beliebigen polynomischen Grad  $n$  im zwei- oder dreidimensionalen Raum übertragen. Dabei gilt  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n \in \mathbb{E}^3$  und  $t \in \mathbb{R}$  [51, S.25]:

$$\mathbf{b}_i^r(t) = (1-t)\mathbf{b}_i^{r-1}(t) + t\mathbf{b}_{i+1}^{r-1}(t) \quad \begin{cases} r = 1, \dots, n \\ i = 0, \dots, n-r \end{cases} \quad (2.38)$$

Dieser Ausdruck wird als *de-Casteljau-Algorithmus* bezeichnet [51, S.25]. Ist  $\mathbf{b}_i^0(t) = \mathbf{b}_i$ , dann ist  $\mathbf{b}_0^n(t)$  der Punkt auf der *Bézierkurve*  $\mathbf{b}^n$  in Abhängigkeit des Parameters  $t$ .

### 2.5.3. Beschreibung von Bézierkurven mittels Bernsteinpolynomen

Der de-Casteljau-Algorithmus lässt sich auch als explizite Darstellung einer Bézierkurve in Form der *Bernsteinpolynome* ausdrücken, die wie folgt definiert sind [51, S.34]:

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \quad (2.39)$$

Für den Binomialkoeffizienten gilt [51, S.34]:

$$\binom{n}{i} = \begin{cases} n!/i!(n-i)! & \text{falls } 0 \leq i \leq n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.40)$$

Damit konstruieren die Polynome eine Rekursionsformel nach [51, S.34]:

$$B_i^n(t) = (1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t) \quad (2.41)$$

mit

$$B_0^0(t) \equiv 1 \quad (2.42) \quad B_j^n(t) \equiv 0 \text{ für } j \notin \{0, \dots, n\} \quad (2.43)$$

Weiterhin bilden die Polynome eine Teilung der Eins [51, S.35]:

$$\sum_{j=0}^n B_j^n(t) \equiv 1 \quad (2.44)$$

Die Abbildung 2.26 visualisiert die Bernsteinpolynome  $B_i^n$  bis zum Grad  $n = 3$ . Jeder Punkt einer Bézierkurve lässt sich darstellen, wenn die Bernsteinpolynome  $B_j^n$  vom Grad  $n$  mit den gegebenen Stützstellen  $\mathbf{b}_j$  verknüpft werden [52, S.19]:

$$\mathbf{b}^n(t) = \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_j B_j^n(t) \quad (2.45)$$

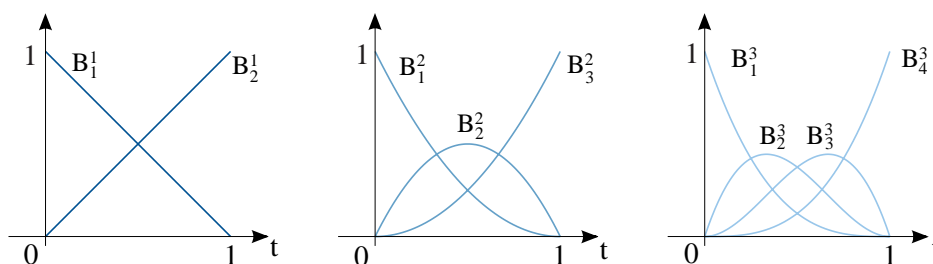


Abb. 2.26: Bernsteinpolynome 1. bis 3. Grades

### 2.5.4. Splinekurven in Bézierform

Im Kapitel 2.5.1 wurde die Eigenschaft von Splines beschrieben, aus mehreren polygonalen Kurvensegmenten zu bestehen, die sich über eine Menge an Stützstellen  $[x_{N-1}, x_N]$  erstrecken. Diese Stützstellen werden nun als Parameterwert  $[u_0, \dots, u_L]$  angegeben. Je mehr Stützstellen gegeben sind und je komplexer die Kurve wird, desto ineffizienter wäre es, diese Datenmenge durch eine einzige Bézierkurve zu beschreiben. Übersteigt eine Bézierkurve den Grad 10, wird sie in der Praxis als nicht mehr vertretbar angesehen [51, S.35]. In diesem Fall ist es hilfreich, die Kurve als Spline zu formulieren und lediglich Segmente in einer Bézierform niedrigen Grades zu beschreiben. Ein *Bézier-Spline* wird demnach konstruiert.

Die Splinekurve  $S$  enthält Kurvensegmente, die sich über das Intervall  $[u_i, u_{i+1}]$  erstrecken. Dabei liegt jeder Parameter  $u$  auf der Kurve. Für jedes Intervall  $[u_i, u_{i+1}]$  kann der lokale Parameter  $0 \leq t \leq 1$  wie folgt bestimmt werden [51, S.80]:

$$t = \frac{u - u_i}{u_{i+1} - u_i} \quad (2.46)$$

Nun kann die Kurve  $S$  in Abhängigkeit des globalen Parameters  $u$  oder in Abhängigkeit des lokalen Parameters des  $i$ -ten Segments ausgedrückt werden [51, S.80]:

$$S(u) = S_i(t) \quad (2.47)$$

Deren Ableitung steht in folgender Beziehung [51, S.80]:

$$\frac{dS(u)}{du} = \frac{dS_i(t)}{dt} \frac{dt}{du} \quad (2.48)$$

Jedes Segment ist eine eigene Bézierkurve für sich, jedoch teilen sich benachbarte Segmente stets einen gemeinsamen Knotenpunkt, an dem  $s_i(0) = s_{i-1}(1)$  gilt.

Eine  $C^1$ -Stetigkeit am Knotenpunkt wird erreicht, wenn der Knotenpunkt und seine benachbarten Bézierpunkte kollinear sind [51, S.83]. Weiterhin muss folgendes Verhältnis gelten, wenn die Bézierkurven im Intervall  $u_0 \leq u_1 \leq u_2$  definiert sind [51, S.83]:

$$\frac{u_1 - u_0}{u_2 - u_1} = \frac{\Delta_0}{\Delta_1} \quad (2.49)$$

Um die  $C^2$ -Stetigkeit zu erreichen, muss zunächst die Bedingung zur  $C^1$ -Stetigkeit erfüllt sein und darüber hinaus folgendes gelten, wenn von quadratischen Polynomen ausgegangen und der gemeinsame Knotenpunkt als  $\mathbf{b}_n$  bezeichnet wird [51, S.84]:

$$\mathbf{b}_{n-1} = (1 - t_1)\mathbf{b}_{n-2} + t_1\mathbf{d} \quad (2.50)$$

$$\mathbf{b}_{n+1} = (1 - t_1)\mathbf{d} + t_1\mathbf{b}_{n+2} \quad (2.51)$$

mit

$$t_1 = \frac{\Delta_0}{u_2 - u_0} \quad (2.52)$$

Die Gleichungen 2.50 und 2.51 sind abhängig vom Punkt  $\mathbf{d}$  und gehen nur auf, wenn der Punkt  $\mathbf{d}$  formuliert werden kann.

Ziel des Kapitels 2.5 ist es, eine Methode zur effizienten Modellierung von stetigen Kurven darzustellen. Grundlegend lässt sich festhalten, dass Bézier-Splines unter bestimmten Bedingungen stetig formuliert werden können; es besteht jedoch durch das Einhalten der  $C^2$ -Bedingung eine Diskrepanz zwischen Stetigkeit und *lokaler Kontrolle* des Splines. Durch die Verknüpfung der Bézierpunkte über die Stetigkeitsbedingungen bewirkt die Änderung eines Kontrollpunktes eine Modifikation des gesamten Splines. Für Optimierungsprobleme ist dies jedoch negativ zu bewerten. Wurden lokale Bereiche einer Kurve bereits optimiert, sollen diese Bereiche festgesetzt werden können. Globale Einflüsse durch Knotenänderung sind daher zu vermeiden. Ein Spline, der diese lokale Kontrolle ermöglicht und eine Verallgemeinerung der Bézierpolynome darstellt [53, S.130], wird im Folgenden vorgestellt und soll das Kapitel schließen.

### 2.5.5. Splinekurven in B-Spline-Form

Die Eigenschaft der sogenannten Basis-Splines (kurz *B-Splines*) ist es, dass sie nur in einem Teil des Parameterbereiches  $\neq 0$  sind und dadurch die globale Splinekurve nur lokal beeinflussen. Ein B-Spline  $k$ -ten Grades besteht aus  $n + 1$  Stützstellen und  $n - k + 1$  Bézierkurven, für das folgende rekursive Form besteht [54, S.594]:

$$N_{i,0}(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } t_i \leq t \leq t_{i+1} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.53)$$

$$N_{i,k}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+k} - t_i} N_{i,k-1}(t) + \frac{t_{i+k+1} - t}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} N_{i+1,k-1}(t) \quad (2.54)$$

Die reellen Zahlen  $t_i \in \mathbb{R}$  stellen *Knoten* dar und werden als Folge  $t_0, \dots, t_k$  im Knotenvektor  $\mathbf{T}$  zusammengefasst. Die Knoten spannen stets ein halboffenes Intervall  $[t_i, t_{i+1})$  auf. Der Formel 2.54 ist zu entnehmen, dass die Basisfunktion eine Linearkombination von zwei B-Splines des Grades  $k - 1$  ist. In jedem Knotenintervall sind dabei höchstens die  $k + 1$  Basisfunktionen  $N_{i-k,k}(t), \dots, N_{i,k}(t)$  von null verschieden [55, S.50 f.]. Weiterhin gilt, dass [56, S.101]:

$$\sum_{i=0}^n N_{i,k}(t) \equiv 1 \quad (2.55)$$

An Knotenpunkten  $t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+k}$  sind die Basisfunktionen  $N_{i,k}(t)$   $(k-2)$ -fach differenzierbar. Innerhalb des Intervalls gibt es keine Einschränkungen der Differenzierbarkeit.

Dem Kapitel 3.3.2 vorgreifend, wird auf den Knotenvektor in folgender Form eingegangen:

$$\mathbf{T} = \begin{matrix} [0, 0, \dots, & 1, 1, \dots] \\ k - \text{mal} & k - \text{mal} \end{matrix} \quad (2.56)$$

Dieser Knotenvektor stellt einen Spezialfall dar und ist als Basis nicht-periodischer B-Splinefunktionen

degeneriert und erfasst nur Anfangs- und Endpunkte mit der Mehrfachheit  $k$ . Die B-Splinefunktionen entsprechen hier den Bernsteinpolynomen [53, S.133].

Der globale Spline wird über die Basisfunktionen wie folgt berechnet, wobei jeder Kontrollpunkt  $C_i$  lokal steuernden Charakter besitzt [54, S.594]:

$$S(t) = \sum_{i=0}^n N_{i,k}(t) C_i \quad (2.57)$$

Die Abb. 2.27 stellt eine B-Spline-Kurve mit dem Knotenvektor folgendem Schemas dar [56, S.106]:

$$t_0 = t_1 = \dots = t_{k-1}, t_k, \dots, t_n, t_{n+1} = t_{n+2} = \dots = t_{n+k} \quad (2.58)$$

Der Start- und Endpunkt des Splines entspricht dem Kontrollpunkt  $C_0$  bzw.  $C_n$ . Die genannte Struktur wird durch den Knotenvektor 2.56 eingehalten.

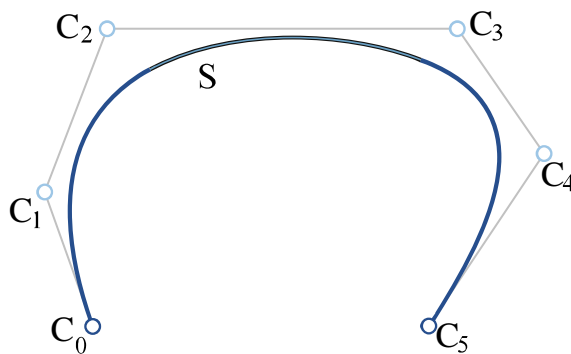


Abb. 2.27: Beispiel Splinekurve mit Knotenvektor 2.56,  $n=5$ ,  $k=4$

Da für die Basisfunktionen eine  $C^{k-2}$ -Stetigkeit besteht, gilt dies auch für die globale Splinekurve. Folglich ist eine Splinekurve ab  $k \geq 3$  differenzierbar [56, S.103] und weist ab  $k \geq 4$  eine  $C^{\geq 2}$ -Stetigkeit auf. Dementsprechend besitzt eine B-Spline-Kurve unter dieser Bedingung die gewünschten Stetigkeitseigenschaften bei gleichzeitiger lokaler Kontrolle.

## 2.6. Die Metaheuristik als Optimierungsmethode

### 2.6.1. Optimierungsprobleme

Gegeben sei ein Problem, das eine endliche Anzahl kontinuierlicher Entscheidungsvariablen enthält, deren Qualität über eine Zielfunktion erfasst werden kann. Die Maximierung bzw. Minimierung der Zielfunktion ist die Aufgabe einer *endlich dimensionalen kontinuierlichen Optimierung* [57, S.1]. Es besteht demnach eine Menge von Optionen, die als *zulässige Menge*  $M$  bezeichnet wird. Charakteristisch für Optimierungsprobleme sind Systeme mit vielen Unbekannten, deren einzelne Kombinationen als Alternative in Form eines Vektors  $\mathbf{x}$  ausgedrückt werden kann [58, S.2]. Jeder Alternative ist über die Zielfunktion eine Zahl zuzuordnen, wobei folgender Zusammenhang vorliegt [57, S.2]:

$$f: M \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}) \quad (2.59)$$

Dabei besteht folgendes Optimierungsproblem  $P_{Op}$ , die Zielfunktion zu minimieren (2.60) oder zu maximieren (2.61) [57, S.2].

$$P_{Op}: \min f(\mathbf{x}), \quad s.t. \quad \mathbf{x} \in M \quad (2.60)$$

$$P_{Op}: \max f(\mathbf{x}), \quad s.t. \quad \mathbf{x} \in M \quad (2.61)$$

Mit dem Kürzel *s.t.* (*subject to*) wird auf die folgende Beschreibung der zulässigen Menge hingewiesen [57, S.2].

Eine Alternative  $\bar{\mathbf{x}} \in M$  nennt sich dann *optimal* für  $P_{Op}$ , wenn die Gleichung 2.62 für ein Minimierungs- und die Gleichung 2.63 für ein Maximierungsproblem aufgeht [57, S.2]:

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\bar{\mathbf{x}}) \quad (2.62)$$

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\bar{\mathbf{x}}) \quad (2.63)$$

### 2.6.2. Abgrenzung der Heuristik vom Algorithmus

Im Allgemeinen können Optimierungsmethoden in *Algorithmen* und *Heuristiken* eingeteilt werden [59, S.50].

Mit einem Algorithmus wird die Identifikation der optimalen Alternative in einer finiten Zeit garantiert. Er ist damit exakt und kann im Rückschluss einen Beweis liefern, dass die exakte Lösung gefunden wurde [60, S.108]. Hierfür wird häufig gradienten-basiert ein lokales Minimum/Maximum um einen Startpunkt gefunden, das als optimal deklariert ist [61, S.1]. Weiterhin zeichnen sich Algorithmen durch ihre schnelle Konvergenz aus und erzielen ein akkurates Ergebnis, wenn auch nur in Form einer lokalen optimalen Alternative [61, S.1]. Eine gradienten-basierte Optimierung ist beispielsweise bei hohen Kombinationen aus Variablen und bei non-convexen Zielfunktionen nicht darzustellen [61, S.1]. Weiterhin kann auch eine optimale Wahl des Startpunktes der Optimierung nicht immer gewährleistet werden.

Bei der Heuristik sind die Ansprüche an die Akkuratheit des Ergebnisses geringer. Demzufolge ist auch ein mathematischer Beweis der optimalen Lösung nicht erforderlich [60, S.108]. Da an dieser Stelle nur eine Lösung gesucht wird, die näherungsweise das optimale Ergebnis darstellt, können die Heuristiken den Zeit- und Rechenaufwand der Optimierung gegenüber dem Algorithmus erheblich reduzieren [59, S.50]. Die Heuristik wird oft als iterative Methode bezeichnet, bei der jede Iteration bis zu einem Abbruchkriterium die Aufgabe hat, eine bessere Lösung als die vorherige zu finden [61, S.2]. Dabei besteht die Heuristik aus einer Suche der optimalen Alternative, die einen wesentlich globaleren Charakter hat, als die lokale Suche des Algorithmus [61, S.2]. Die Methode innerhalb der Heuristik, das Optimum zu identifizieren, ist vielfältig und hängt von der Anwendung und des Probleminhaltes ab.

### 2.6.3. Metaheuristiken

Der Begriff *Metaheuristik* impliziert eine Verwandtschaft zu Heuristiken, die eigentliche Definition ist in der Literatur jedoch nicht einheitlich [62, S.64]. In dieser Arbeit wird die Definition der Metaheuristik nach der Arbeit von [63] verstanden. Die Metaheuristik erfasst die Strategie, einen Suchprozess zu führen, dabei jedoch nicht deterministisch und vor allem nicht problemspezifisch zu sein [63, S.271]. Wie bereits für Heuristiken beschrieben, reicht hier ein annähernd optimales Ergebnis und kein mathematisch nachweisbares Optimum aus. Durch domänenspezifisches Wissen, das durch untergeordnete Heuristiken generiert wird, ziehen Metaheuristiken Rückschlüsse auf den weiteren Optimierungsprozess [63, S.271].

Als Herausforderung gilt, eine ausgewogene lokale (*Fokussierung*) und globale (*Exploration*) Suche zu ermöglichen, so dass sich die Optimierung nicht auf ein lokales Minimum beschränkt [63, S.271], jedoch die Fähigkeit hat, bereits für gut befundene Lösungen zu spezifizieren. Aufgrund des Lernprozesses, den eine Metaheuristik durchlaufen soll, wird sie in den Bereich der künstlichen Intelligenz eingestuft [64, S.11].

Abhängig von der Herkunft der grundlegenden Funktionsweise einer Metaheuristik lässt sie sich in folgende Kategorien einordnen [61, S.2]:

*Evolutions-basiert:* Nachahmung des Konzeptes der Evolution in der Natur.

*Schwarm-basiert:* Orientierung an Techniken der Dezentralisierung und Selbstbestimmtheit, welche künstlicher oder natürlicher Natur sein können.

*Physikalisch-basiert:* Orientierung an physikalischen Gesetzen

Das Kapitel 2.7 soll die in dieser Arbeit angewendete Schwarmoptimierung weiter erläutern.

### 2.6.4. Einzellösungsverfahren

In der Metaheuristik sind *Einzellösungsverfahren* Strategien, die zu jeder Berechnungsepoche eine Lösung berechnen [64, S.31]. Dazu muss zunächst die Initiallösung geschaffen werden, auf die neue Lösungen mithilfe von Nachbarschaftsoperatoren generiert werden und die beste Alternative ausgewählt wird. Bezogen auf den Speicheraufwand sind die Verfahren als effizient zu bewerten, da nur die aktuelle Lösung im Speicher zu halten ist [64, S.31]. Da lediglich die nächste Lösung berechnet wird und sie sich stets in Nachbarschaft zur letztbesten Lösung befindet, besteht die Gefahr, dass ein lokales Minimum nicht übersprungen werden kann und sich der Optimierer in seiner Fokussierung verliert. Durch Manipulationen der Zielfunktion während des Berechnungsprozesses kann dieses nachteilige Verhalten reduziert werden [64, S.32].

### 2.6.5. Populations-basierte Verfahren

Im Gegensatz zum Einzellösungsverfahren wird bei dem *Populations-basierten Verfahren* eine vorgegebene *Menge* an Lösungen (Population) in einer Epoche berechnet. Dies erfordert einen höheren Speicheraufwand pro Berechnungsschritt [64, S.32]. Jede Population eines vorgegangenen Berechnungsschrittes beeinflusst den nächsten Schritt, indem zur Definition der aktuellen Population Wissen aus den vorherigen Schritten (Generationen) extrahiert wird. Jede Generation gewährleistet eine Exploration des Suchraumes, da das Aufsetzen der Population eine gewisse Streuung der Lösungen zur Folge hat. Diese Streuung gilt es, während der Berechnung zu reduzieren und das Optimum zu konkretisieren. Evolutions-basierte Metaheuristiken stellen die bekanntesten Populations-Verfahren dar [64, S.32].

## 2.7. Particle Swarm Optimization (PSO) als Teil der Metaheuristik

### 2.7.1. Schwarmoptimierer

Die Schwarmintelligenz ist eine klassische Methode der Metaheuristiken, im vorgegebenen Suchraum eine näherungsweise optimale Alternative effizient zu identifizieren. Die Optimierer orientieren sich an der kollektiven Intelligenz von Schwärmen in der Natur und machen sich die Interaktion zwischen den Individuen mit sich selbst und ihrer Umwelt zu Nutze [59, S.74]. Ein solches Schwarmverhalten ist unter anderem bei Bienen, Ameisen, Grashüpfern oder Fischen zu finden [65, S.3].

Beispielsweise legen Ameisen auf Futtersuche eine Pheromonspur. Ameisen, die eine Futterquelle gefunden haben, kehren zum Nest mit einer Pheromonspur höherer Konzentration zurück. Wenn die Insekten das Nest verlassen, orientiert sie sich an den Pheromonspuren mit hoher Konzentration um einen schnellen Weg zur Futterquelle zu finden. Weiterhin explorieren einzelne Ameisen neue Wege durch Abzweigungen auf der kürzesten Route, um noch kürzere Wege zu identifizieren. Die Insekten sind dadurch im Stande, durch indirekte Interaktion ihre Futterstrecke zu optimieren [64, S.34].

Schwärme erzeugen keine neuen Lösungen, sondern ändern nur die bestehenden auf Grundlage der guten Lösungen [64, S.34]. Dabei ist die Exploration des Suchraumes stark geprägt von der Initialisierung und Parametrisierung der Metaheuristik [64, S.35]. Die erste und bekannteste Schwarmoptimierung ist die *Particle Swarm Optimization (PSO)* von [66].

### 2.7.2. Grundlegende Funktion und Struktur eines PSOs

Bei der Particle Swarm Optimization (PSO) handelt es sich um ein stochastisches Populations-basiertes Verfahren für nicht-lineare Zielfunktionen [59, S.75]. Dabei wird eine bestimmte Anzahl an Individuen (Partikel) im Suchraum verteilt [66, S.1947]. Die Menge der Partikel nennt sich Population [66, S.1946]. In jeder Berechnungsphase (Generation) kann sich jedes Partikel im Suchraum weiterbewegen und eine nächst bessere Lösung finden. Die PSO besitzt drei Grundprinzipien, die ihre Funktionsweise und Partikelbewegung begründen.



Der erste Punkt ist die Evaluation. Hierbei ist jeder Alternative ein quantitativer Wert mit Hilfe der Zielfunktion zugeordnet, über den die Qualität der Lösungen bewertet wird [64, S.39]. Der Vergleich der Werte stellt das zweite Prinzip dar, wodurch sich bestehende Lösungen an der besten Alternative orientieren können. Der letzte Punkt ist die Imitation der besten Lösung durch die anderen Alternativen, indem die beste Lösung in ihre Berechnungsphase integriert wird [64, S.39]. Jedes Partikel besitzt während der Optimierung eine persönliche und eine soziale Komponente, die die Bewegung im Suchraum beeinflussen. Dadurch orientiert sich jedes Partikel nicht nur an der global besten Lösung (soziale Komponente), sondern auch an der besten Lösung des Partikels selbst (persönliche Komponente). Eine erhöhte Exploration des Suchraumes ist die Folge.

Ein Partikel  $\mathbf{x}_i$  drückt eine n-dimensionale Alternative aus. Die Bewegung eines jeden Partikels wird durch die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_i$  beschrieben, wobei die Geschwindigkeit als Vektor mit einer individuellen Richtung und Länge/Betrag zu verstehen ist. Der Berechnungsschritt ist als ganzzahlige Generation  $t_{PSO}$  definiert. Das für die Generation  $t_{PSO} + 1$  zu ändernde Partikel kann wie folgt ausgedrückt werden [67, S.87]:

$$\mathbf{x}_i(t_{PSO} + 1) = \mathbf{x}_i(t_{PSO}) + \mathbf{v}_i(t_{PSO} + 1) \quad (2.64)$$

Die Veränderung des Partikels und Anpassung an die Berechnungsgeschichte zur Optimierung des Problems wird folgendermaßen berechnet [67, S.87]:

$$\mathbf{v}_i(t_{PSO} + 1) = \omega \mathbf{v}_i(t_{PSO}) + c_1 \mathbf{r}_1(t_{PSO}) [\mathbf{pbest}_i(t_{PSO}) - \mathbf{x}_i(t_{PSO})] + c_2 \mathbf{r}_2(t_{PSO}) [\mathbf{gbest}(t) - \mathbf{x}_i(t_{PSO})] \quad (2.65)$$

Dabei ist  $\omega$  [-] eine Trägheitsgewichtung, die bestimmt, wie stark die vorherig berechnete Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_i(t_{PSO})$  Einfluss auf die neue Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_i(t_{PSO} + 1)$  hat. Der zweite Teil des Terms integriert die persönliche Komponente. Durch die Subtraktion des gegenwärtigen Partikels mit seiner jemals besten Alternative  $\mathbf{pbest}_i(t_{PSO})$  wird deren vektorieller Abstand bestimmt. Durch Multiplikation mit dem skalaren Wert  $c_1$  und der vektoriellen Gewichtung  $\mathbf{r}_1$  wird der Betrag und die endgültige Richtung des Vektors der persönlichen Komponente ermittelt. Dabei ist  $c_1$  ein allgemeiner Faktor, der die Gewichtung der persönlichen Komponente definiert. Der Vektor  $\mathbf{r}_1$  ist n-dimensional und besteht aus Einträgen zwischen 0 und 1, welche zufällig gewählt werden. Die Bewegung des Partikels bekommt hierdurch seinen stochastischen Charakter. Außerdem muss sich die Komponente dadurch nicht auf direkten Weg zur persönlich besten Lösung bewegen, sondern hat eine (sehr wahrscheinliche) Möglichkeit der Abzweigung. Der letzte Term der Formel berücksichtigt die soziale Komponente, wobei der vektorielle Abstand des Partikels zum global besten Partikel  $\mathbf{gbest}(t_{PSO})$  ermittelt wird. Durch die Gewichtungen  $c_2$  und  $\mathbf{r}_2$  wird der Vektor analog zur persönlichen Komponente beeinflusst. Am Ende resultiert aus den drei Teilen des Terms die endgültige Geschwindigkeit in Form des n-dimensionalen Vektors  $\mathbf{v}_i(t_{PSO} + 1)$ . Zusammenfassend ist eine Ermittlung der resultierenden Position  $\mathbf{x}_i(t_{PSO} + 1)$  eines zwei-dimensionalen PSO-Problems in Abb. 2.28 dargestellt.

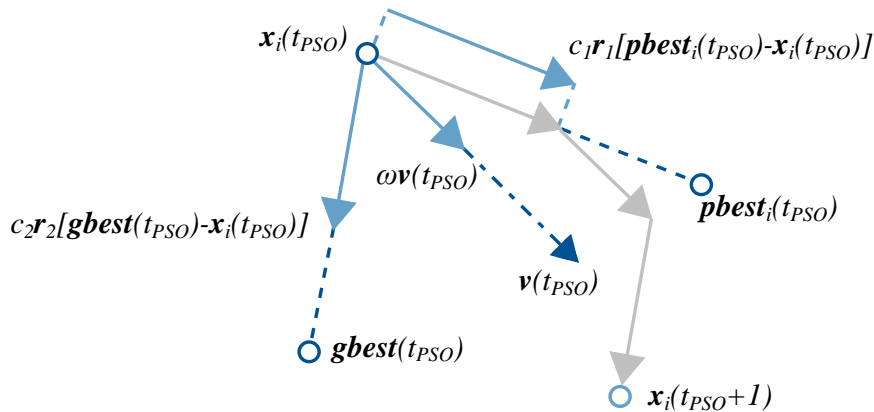


Abb. 2.28: Resultierende Partikelbewegung eines zwei-dimensionalen PSO-Problems für ein Partikel  $x_i(t_{PSO} + 1)$

### 2.7.3. Initiales Aufsetzen der Partikel im Populationsraum

Liegt ein Optimierungsproblem vor und soll dieses mit einer PSO gelöst werden, sind vor dem Start Parameter festzulegen, die dem Problem anzupassen sind.

Grundlegend muss vor der Optimierung die Anzahl der Partikel festgelegt werden. Ein großer Schwarm bewirkt vor allem in den ersten Generationen eine hohe Vielfalt an Alternativen und eine schnelles Absuchen des n-dimensionalen Raumes. Die hohe Exploration steht jedoch in negativer Korrelation zum Rechenaufwand, da mehr Partikel auch mehr Berechnungen pro Generation bedeuten [59, S.85]. Empirische Untersuchungen ergaben, dass eine optimale Schwarmgröße aus 10 bis 30 Partikeln besteht, wobei eine individuelle Anpassung auf das jeweilige Problem berücksichtigt werden sollte [68, S.312].

Weiterhin sind die Kontroll- und Gewichtungparameter  $\omega$  und  $c$  zu wählen. Die  $c_1$  und  $c_2$  Konstanten bezeichnet [68, S.312 f.] als Trust-Parameter. Sie steuern, wie viel Vertrauen der Optimierer in die persönlich und sozial beste Alternative hat. Je geringer die Parameter sind, desto unabhängiger bewegt sich ein Partikel von der Berechnungsgeschichte. Haben die Parameter eine unterschiedliche Gewichtung, orientiert sich das Partikel folglich mehr an der Lösung mit höherem Gewicht. Erhält die persönliche Komponente eine höhere Gewichtung, neigt das Partikel zu exzessivem Wandern, da sich das Partikel weniger am Schwarm und mehr an sich selbst orientiert [68, S.313]. Hat der Parameter  $c_2$  eine hohe Gewichtung, besteht die Gefahr, dass die Partikel zu früh zum vermeintlich global besten Ergebnis eilen und die Exploration vernachlässigt wird. Nach [68, S.313] bewirkt ein gleichmäßiges Verhältnis  $c_1 \approx c_2$  eine effiziente Kooperation zwischen persönlicher und sozialer Komponente. Ferner müssen die Parameter keine Konstanten sein und können während einer Optimierung angepasst werden [68, S.313].

Größere Gewichtungen von  $\omega$  verursachen eine höhere Exploration, wobei ein geringeres Gewicht den Fokus auf eine lokalere Suche des Partikels schiebt [59, S.85]. Außerdem hat die Gewichtung großen Einfluss auf die Konvergenz der Optimierung. In [68, S.314] wird unter

anderem folgendes Kriterium genannt, um eine Gewichtung zu wählen, die den sensiblen Einfluss von  $\omega$  auf das Konvergenzverhalten berücksichtigt:

$$1 > \omega > \frac{1}{2}(c_1 + c_2) - 1 \geq 0 \quad (2.66)$$

#### 2.7.4. Partikel Interaktion

Die Interaktion der Partikel erfasst, in welchem Umfang die Alternativen voneinander lernen [59, S.82]. Mögliche Interaktionsstrukturen werden in Abb. 2.29 veranschaulicht [68, S.302]. Die Stern-Typologie stellt die klassische Struktur eines PSOs dar, welche im Kapitel 2.7.2 vorgestellt wurde. Da jedes Partikel die Information über das global beste Ergebnis erhält, neigen die Partikel dazu, diese Lösung anzusteuern. Eine schnelle Konvergenz ist die Folge, jedoch mit der Gefahr, dass lediglich ein lokales Minimum identifiziert wird [59, S.84]. Demgegenüber steht die Ring-Typologie. Hier orientieren sich die Partikel nur an ihren nahen Nachbarn. Dadurch wird die Konvergenz erheblich verlangsamt, jedoch die Exploration ausgeweitet [59, S.84]. Eine weitere Struktur ist die Rad-Typologie, bei der die Partikel generell für sich agieren. Es besteht lediglich ein Fokal, das die Information der Partikel in der Nachbarschaft sammelt und zum lokal besten Ergebnis wandert. Durch diese Struktur wird der Informationsaustausch und die globale Optimierung deutlich verlangsamt [68, S.301]. Die Strukturen wurden an dieser Stelle nur beispielhaft erwähnt. In der Arbeit liegt der Fokus auf dem klassischen PSO mit Stern-Typologie als soziale Struktur.

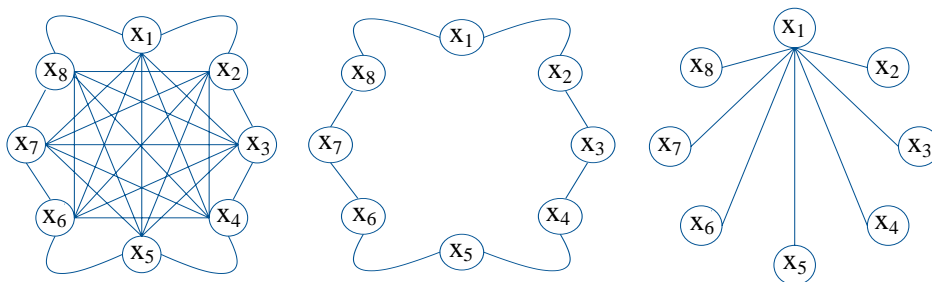


Abb. 2.29: Mögliche soziale Netzwerke eines PSOs | Links: Stern-Typologie; Mitte: Ring-Typologie; Rechts: Rad-Typologie [68, S.302]

#### 2.7.5. Beschränkung der Partikelbewegung

Die Grundzüge der Partikelbewegung und -interaktion wurden in den vorherigen Kapiteln dargestellt.

Dem Optimierer kann zusätzlich eine maximale Geschwindigkeit  $V_{max}$  vorgegeben werden, um große Sprünge und Schwankungen in der Partikelbewegung zu vermeiden und eine gleichmäßige Exploration im Suchraum zu gewährleisten [59, S.84]. Nach folgendem Schema würde eine Kontrolle der Bewegung durchgeführt werden [68, S.304]:

- If  $v_{i,n}(t_{PSO}) > V_{max,n}$ , then  $v_{i,n}(t_{PSO}) = V_{max,n}$
- Else If  $v_{i,n}(t_{PSO}) < -V_{max,n}$ , then  $v_{i,n}(t_{PSO}) = -V_{max,n}$

### **2.7.6. Abbruchkriterium und Konvergenz**

Eine effiziente Optimierung sollte Konvergenzeigenschaften besitzen, um anzuzeigen, ob und wann eine optimale Alternative gefunden wurde. Durch ein Abbruchkriterium kann der Optimierer das Ende seiner Berechnung verdeutlichen. Beispielsweise kann eine maximale Anzahl an Generationen ein Kriterium darstellen, um den Optimierungszeitraum zu begrenzen. Bei zu frühem Abbruch besteht jedoch die Möglichkeit, dass noch keine Konvergenz erreicht wurde. Besser ist die Definition des Abbruchkriteriums in Abhängigkeit der Zielfunktion. Unterschreitet eine bestimmte Anzahl an Partikeln einen vorgegebenen Wert der Zielfunktion, darf im Minimierungsfall die Berechnung gestoppt werden, da die gewünschte Approximation demnach erreicht wurde [59, S.85].

---

### 3. Entwicklung der Heuristik zur inversen Analyse des Nachrissverhaltens von unbewehrtem Faserbeton

#### 3.1. Motivation der inversen Analyse

##### 3.1.1. Ansatzpunkt des inversen Problems

Normal- und Faserbetone zeigen bereits ab Beginn der Mikrorissbildung ein nicht-lineares Materialverhalten auf. Die Berechnung und realistische Simulation des Tragverhaltens von Betonbauteilen bedarf daher einer nicht-linearen numerischen Berechnung. In der Strukturmechanik ist die Finite-Elemente-Methode (FEM) ein verbreitetes und etabliertes Verfahren zur numerischen Simulation [69, S.3], das in dieser Arbeit angewendet werden soll. Als Simulationsumgebung dient das Softwarepaket *Abaqus*. Dieses enthält das *Concrete Damaged Plasticity* Modell, welches auf dem allgemeinen Damaged Plasticity Modell basiert und in Abaqus zur Berechnung von Betonstrukturen vorgesehen ist. Standardmäßig werden in dem Softwarepaket nicht-lineare Berechnungen nach der Newton-Raphson-Methode ausgeführt [42, 2.2.1]. In dieser Arbeit wird stets das Bogenlängenverfahren zur Pfadverfolgung gewählt.

Zur Berechnung des Tragverhaltens von (Faser)-Betonbauteilen unter Anwendung des Concrete Damaged Plasticity Modells in Abaqus werden Eingangsparameter benötigt, die in Kapitel 2.3.5 dargestellt sind. Grundannahme dieser Arbeit ist, dass die gewählten Parameter für den Zweck der Berechnung hinreichend genau sind; lediglich die Zugarbeitslinie des inelastischen Materialverhaltens ist unbekannt. Dies beruht auf der Gegebenheit, dass jegliche Eingangsparameter durch empirische Methoden mit einer hinreichenden Genauigkeit *direkt* bestimmt bzw. belegt werden können. Hierzu liegen dem Lehrstuhl für Massivbau der Technischen Universität eigens ermittelte Daten vor. In den vorangegangenen Kapiteln wurde bereits die Schwierigkeit verdeutlicht, plastische Zugarbeitslinien für Faserbeton direkt, etwa durch zentrische Zugversuche, zu bestimmen. Grund dafür ist das ausgeprägte Nachrissverhalten und die Fehleranfälligkeiten des zentrischen Zugversuches. Demnach soll eine Methode zur indirekten experimentellen Ermittlung des plastischen Zugverhaltens mit Hilfe des Biegezugversuches erarbeitet werden. Als Grundlage dient der Biegezugversuch nach DIN EN 14651 [TR5], auf dem im folgenden Kapitel näher eingegangen werden soll. Der Versuch liefert die Beziehung zwischen aufgebrachter Kraft und der korrespondierenden Rissentwicklung, die nun indirekt in eine Spannungs-Rissöffnungs-Beziehung zu übersetzen ist. In den Kapiteln 2.1.4 und 2.1.5 wurde die Diskrepanz zwischen einaxialen Zug- und Biegezugantworten von Faserbeton verdeutlicht. Mechanische Annahmen wie z.B. die Bernoulli-Hypothese und das Hooke'sche Gesetz können zur Berechnung der Arbeitslinie nicht angesetzt werden. Vielmehr scheint eine Berechnung am Kontinuum mit differenzierter Betrachtung der elastischen, plastischen und schädigenden Einflüsse sinnvoll.

Sind also alle Eingangsparameter des Concrete Damaged Plasticity Modells bis auf die Zugarbeitslinie bekannt und wird ein Biegezugversuch modelliert, dessen Tragverhalten in Form einer Kraft-Rissöffnungs-Beziehung als Wirkung vorliegt, lässt sich das Schema des inversen

Problems aus Kap. 2.4.1 auf den Sachverhalt wie folgt übersetzen:

$A^{-1}$	:	$Y$	→	$X$
[Abaqus   Damaged Plasticity Modell] <sup>-1</sup> : Kraft-Rissöff.-Bez. → Zug-Arbeitslinie				

Die Arbeitslinie stellt als unbekannt, zweidimensionale Kurve das invers zu lösende Problem dar. Die Kurve ist aus den Versuchsdaten schlecht gestellt zu ermitteln (vgl. Kap. 2.4.2). Als Approximant der Optimierung wird eine B-Spline-Kurve gewählt, die durch ihre lokale Kontrolle und Einfachheit im Aufbau überzeugt. Das Problem soll über eine Heuristik mit metaheuristischem Ansatz approximativ gelöst werden. Als Optimierungsmethode dient der PSO-Optimierer. Er bietet den Vorteil der großen Exploration im Suchraum bei gleichzeitig steuerbarer Konvergenzgeschwindigkeit. Die Abb. 3.1 soll die Vorgehensweise der Entwicklung der Methode und den Aufbau des Kapitels 3.2 darstellen.

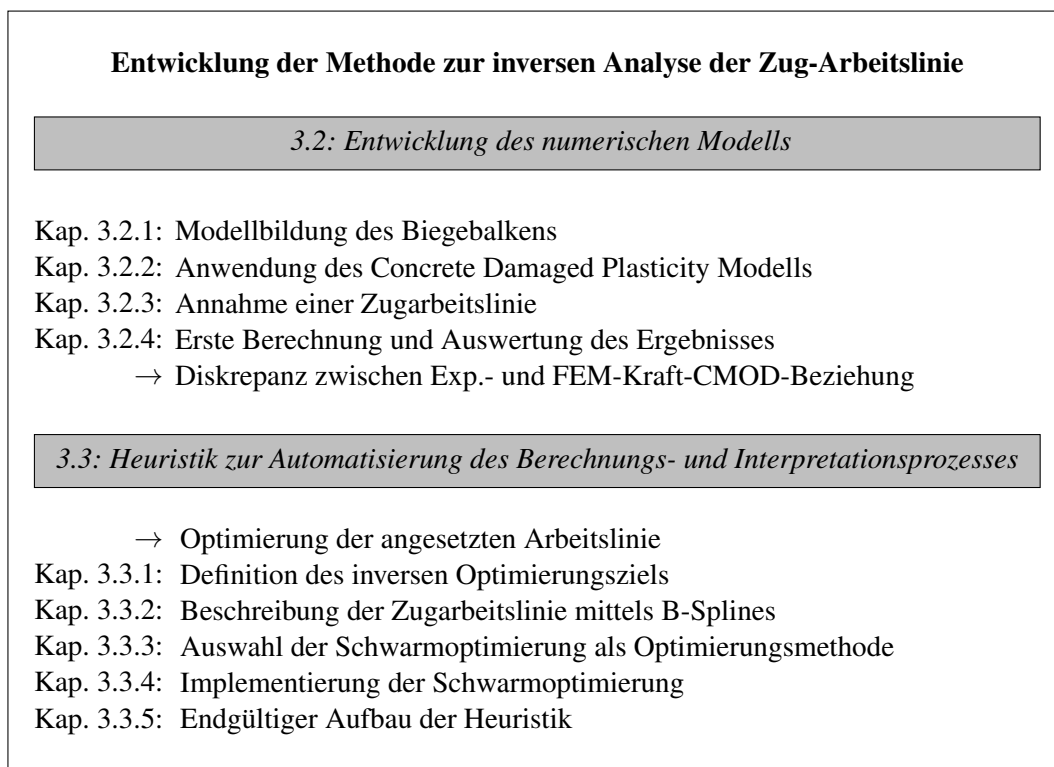


Abb. 3.1: Entwicklung der Methode zur inversen Analyse der plastischen Zug-Arbeitslinie

#### 3.1.2. Biegezugversuch nach DIN EN 14651

Die Norm DIN EN 14651 [TR5] beschreibt das Verfahren eines Drei-Punkt-Biegezugversuches zur Bestimmung der Biegezugfestigkeit von Beton mit metallischen Fasern. Dabei werden aus Last-CMOD-Kurven oder Last-Durchbiegungskurven Werte der residuellen Biegezugfestigkeit bestimmt. Als Probekörper dient ein Betonprisma mit mittiger Einkerbung, das einer mittigen Last ausgesetzt wird. Die Einkerbung soll eine gezielte Rissentwicklung in der Mitte des

Prismas gewährleisten. Die folgende Beschreibung des Versuches stellt lediglich die wichtigen Punkte zur numerischen Modellierung dar; die genaue Durchführung ist der Norm [TR5] zu entnehmen. Die Erläuterung beschränkt sich auf die Messung der Rissöffnung zur Ermittlung der Last-CMOD-Kurve.

Die Abbildung 3.2 stellt den Aufbau des Biegezugversuches dar. Die Nennmaße des Probekörpers betragen in der Breite sowie Tiefe 150 mm und in der Länge zwischen 550 mm und 700 mm. Die Breite der Einkerbung darf höchstens 5 mm betragen. Der Abstand von der Oberkante des Prismas zur Einkerbung von  $125 \text{ mm} \pm 1 \text{ mm}$  muss eingehalten sein. Das Prisma ist auf Stahlrollen mit einem Durchmesser von  $30 \text{ mm} \pm 1 \text{ mm}$  in einem Abstand von  $500 \text{ mm} \pm 2,0 \text{ mm}$  zu lagern. Weiterhin ist die Last mittels Lastaufbringrolle weggesteuert in der Mitte der Stützweite über der Einkerbung unter quasi-statischen Bedingungen einzuleiten. Die Lastaufbringrolle sowie ein Lager sind in ihrer Längsachse frei drehbar und müssen in der zur Längsachse des Prismas senkrechten Ebene kippbar sein. Bei direkter Ermittlung der Last-CMOD-Kurve ist die Verschiebung an der Spitze der Einkerbung zu messen. Der Verschiebungswegaufnehmer ist entlang der Längsachse, mittig der Breite des Prismas zu befestigen. Der Versuch ist bis zu einer messenden Rissweite von mindestens 4 mm durchzuführen.

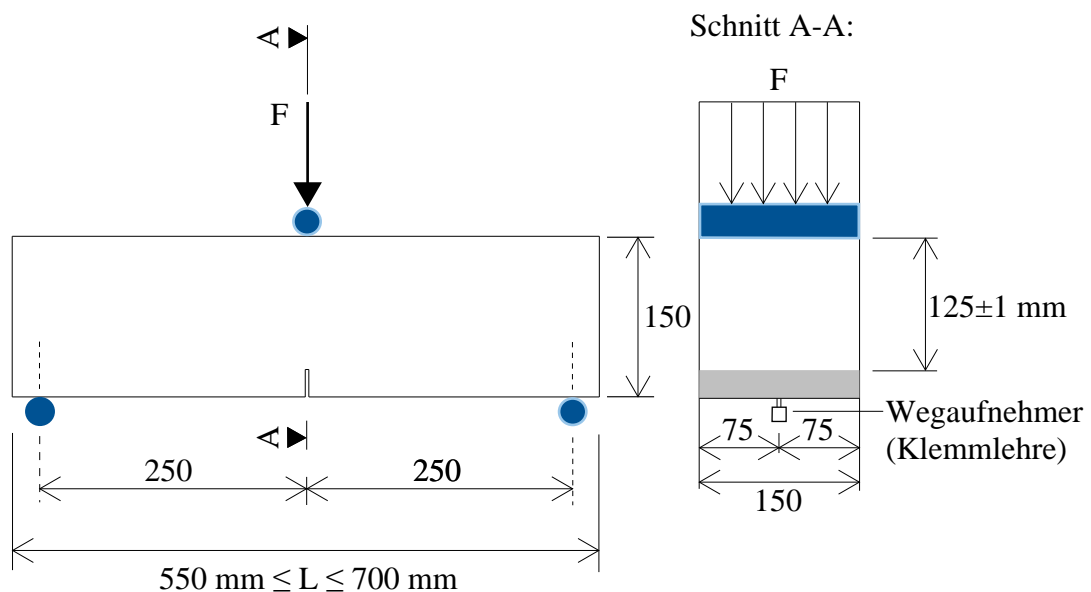


Abb. 3.2: Aufbau des Biegeversuches nach DIN EN 14651 [TR5] mit Klemmlehre zur Bestimmung der Kraft-CMOD-Kurve (Maße in mm)

## 3.2. Entwicklung des numerischen Modells

### 3.2.1. Modellbildung des Biegebalkens

Wird der Biegezugversuch nach DIN EN 14651 als numerisches Modell abgebildet, können die numerischen Ergebnisse den experimentellen Daten gegenübergestellt und die Qualität des Materialmodells beurteilt werden. Durch Berücksichtigung der Norm wird die Reproduzierbarkeit eines anerkannten Versuches gewährleistet. Weiterhin erhält die Heuristik durch Beachtung

von Standardisierungen einen allgemeingültigeren Charakter und begünstigt die Anwendung durch Dritte. Demnach gilt es, die Dimensionen und Randbedingungen des Versuches möglichst genau als numerisches Modell abzubilden.

Im Rahmen dieser Arbeit wird als Probekörper ein Volumenkörper mit den Maßen  $l/b/h = 700/150/150$  mm in Abaqus erstellt. Die Abb. 3.3 veranschaulicht einen möglichen Volumenkörper für eine Elementgröße von 25 mm. Die Länge der Geometrie orientiert sich an den Prüfkörpern, die zur experimentellen Ermittlung der Kraft-CMOD-Kurve Verwendung fanden. Die Einkerbung in der Feldmitte ist stets zu modellieren. Um eine optimale Vernetzung des FE-Modells mit Kontinuumelementen zu gewährleisten, wird von der genormten Breite der Kerbe abgewichen und der gewünschten Elementgröße angepasst. Die Höhe der Kerbe soll dem Maß des reellen Prüfkörpers entsprechen, um geometrische Einflüsse des Körpers auf die Spannungsentwicklung zu berücksichtigen. Die Abb. 3.4 (links) stellt die nötigen Randbedingungen dar. Die Rollenlager sind als Linienlager im Modell zu berücksichtigen. Die Stützweite muss der Norm bzw. dem Versuch entsprechen. Ein Linienlager ist horizontal in Längsrichtung des Körpers sowie vertikal festzuhalten. Dem anderen Lager ist lediglich eine vertikale Festhaltung zuzuordnen. Weiterhin ist der Balken in Querrichtung zu halten. Dies kann über flächige Lager oder über eine Linienlagerung wahlweise in der Symmetrieachse des Balkens geschehen (siehe Abb. 3.4 links). Die Lasteinleitung ist so zu modellieren, dass keine Verformungsbehinderungen auf der Balkenoberseite zustande kommen. Dies wird beispielsweise durch Aufbringen einer mittigen Flächenlast in Breite des gewählten Elementes oder durch eine vorgegebene Verformung entlang der Elementkanten gewährleistet.

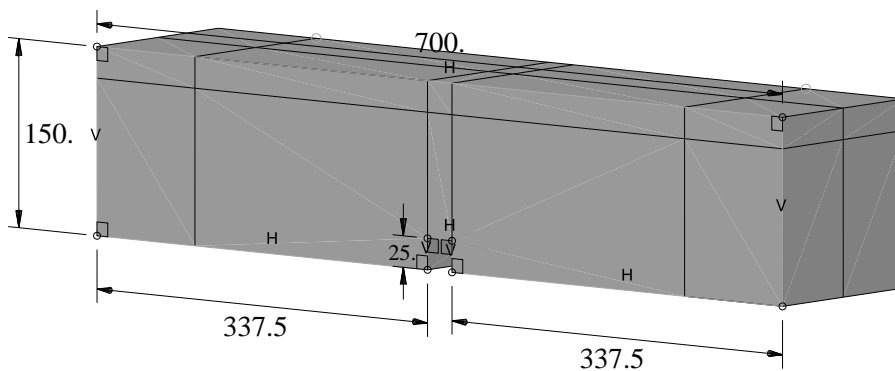


Abb. 3.3: Dimensionierung des BZV-Volumenkörpers in Abaqus mit einer Elementgröße von 25 mm

Um eine höhere numerische Stabilität zu gewährleisten, ist über die Länge des Volumenkörpers zwischen zwei Material-Sektionen zu unterscheiden. Hierbei wird lediglich der Elementreihe über der Kerbe ein nicht-lineares Materialmodell mit Hilfe des Concrete Damaged Plasticity Modells zugewiesen; die restliche Geometrie erhält ein rein linear-elastisches Verhalten. Da durch die Einkerbung die Rissentwicklung auch in Realität auf die Bauteilmitte beschränkt, ist diese Annahme als sinnvoll zu bewerten. Die genaue Definition der Materialeigenschaften ist den folgenden Kapiteln zu entnehmen. Ferner ist bei der Diskretisierung der Druckzone eine



Netzfeinheit in dem Maße zu wählen, dass eine hinreichende Einschnürung dieser ermöglicht und Steifigkeits-Locking-Effekte vermieden werden [70, S.267 ff.]. Eine mögliche Vernetzung ist der Abb. 3.4 (rechts) zu entnehmen.

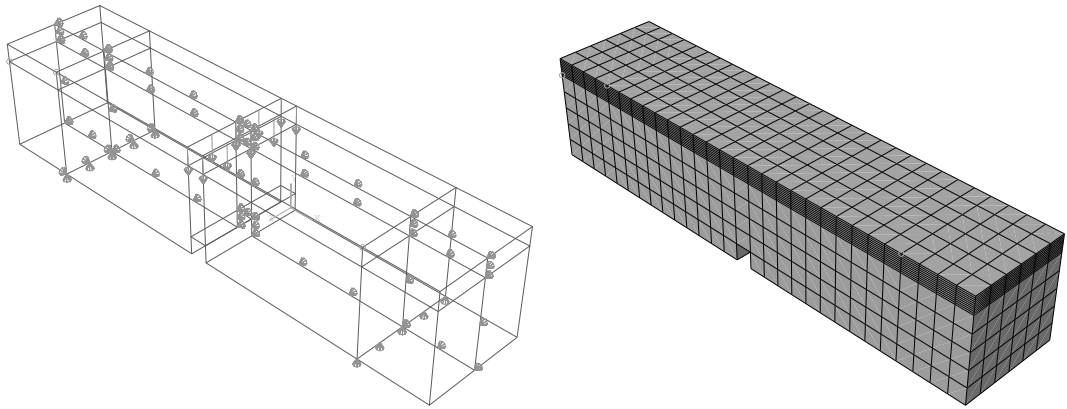


Abb. 3.4: Setzen der Randbedingungen (links) und Vernetzung der BZV-Modellierung (rechts) in Abaqus

### 3.2.2. Anwendung des Concrete Damaged Plasticity Modells

Neben der Geometrie und den Randbedingungen des FE-Modells sind die Materialparameter des Kontinuums über das Concrete Damaged Plasticity Modell (CDP) zu definieren. Die nötigen Eingabewerte sind dem Kapitel 2.3.5 zu entnehmen. Nachfolgend werden die in dieser Arbeit gewählten Modellansätze vorgestellt. Es sei betont, dass die Ansätze keinen festgesetzten Charakter aufweisen und zur Anwendung der Heuristik auch anderweitige Ansätze gewählt werden können.

#### Elastizitätsmodul

Der mittlere Elastizitätsmodul  $E_{cm}$  [N/mm<sup>2</sup>] kann direkt nach Norm DIN EN 12390-13 [TR6] als Sekantenmodul, indirekt durch Ableitung experimentell ermittelter Druckfestigkeit  $f_{cm}$  [N/mm<sup>2</sup>] oder mittels Tabellenwerte festgelegt werden. Die indirekte Bestimmung ist nach [71, S.39] wie folgt möglich:

$$E_{cm} = 2,15 \cdot 10^4 \sqrt[3]{\frac{f_{cm}}{10}} \quad (3.1)$$

#### Querdehnzahl

Die Querdehnzahl für Beton liegt nach [71, S.40] zwischen 0,1 und 0,2 [-]. Wie bereits in Kapitel 2.1.6 erwähnt, bestehen nur geringe Abweichungen der Querdehnfähigkeit von Faserbeton mit Fasergehalten bis zu 1 % zum Normalbeton [18, S.22]. In dieser Arbeit wird die Querdehnzahl stets zu 0,2 abgeschätzt.

#### Multiaxiales Verhalten

Zur Beschreibung des multiaxialen Tragverhaltens von Faserbeton werden der Formbeiwert  $K_c$

und das Verhältnis der biaxialen zur einaxialen Druckfestigkeit von Beton  $\sigma_{b0}/\sigma_{c0}$  benötigt. Die Funktion des Formbeiwertes  $K_c$  wurde bereits in Kapitel 2.3.4 vorgestellt und zu 0,667 nach [18, S.201] analog zum Normalbeton festgelegt. Auch das Spannungsverhältnis  $\sigma_{b0}/\sigma_{c0}$  von Faserbeton wurde von [18, S.195 ff.] unter Zusammenfassung experimenteller Versuche untersucht. Für Normalbeton kann ein Verhältnis zwischen 1,10 und 1,16 angenommen werden [4, S.2]. Faserbetone weisen eine Erhöhung des Verhältnisses auf, was [18] durch experimentelle Ergebnisse belegt und einen analytischen Ansatz zur Bestimmung des Spannungsverhältnisses vorstellt. In den folgenden Berechnungen wird der Wert des Normalbetons zu 1,16 [-] angenommen, der eine konservative Abschätzung darstellt [18]. Da in den folgenden Berechnungen mehraxiale Spannungszustände von geringerer Bedeutung sind, gilt die Annahme an dieser Stelle als hinreichend genau.

### **Fließregel**

Für die Fließregel des Typ Drucker-Prager wird zum einem der Dilatanzwinkel  $\psi$  [°] benötigt. Dieser wird in der Arbeit generell zu  $42^\circ$  auf Grundlage vorangegangener Parameterstudien am Lehrstuhl für Massivbau der Technischen Universität München angenommen. Eine Sensitivitätsanalyse zur Untersuchung des Dilatanzwinkleinflusses ist dem Kapitel nachgeschaltet. Nach [18, S.207] kann ferner für Faserbeton ein Winkel in gleicher Größe wie Normalbeton berücksichtigt werden. Der Exzentrizitätsparameter  $\epsilon^{DP}$  wird stets zu 0,1 angenommen. Nach [42, 23.6.3] können Minderungen des Wertes zu Konvergenzproblemen während der numerischen Berechnung führen. Eine Erhöhung des Parameters führt zu einer stärkeren Krümmung des Fließpotenzials, wohingegen bei einer Wahl von  $\epsilon^{DP} = 0,1$  der Dilatanzwinkel konstant entlang eines großen Bereiches des hydrostatischen Drucks ausfällt [42, 23.6.3].

### **Plastische Druckarbeitslinie, Druckschädigung, Zugschädigung**

Im Rahmen experimenteller Untersuchungen von [72] und Aufbereitung der Daten durch [73] wurden Kennlinien der plastische Druckarbeitslinie sowie zur Druck- und Zugschädigung am Lehrstuhl für Massivbau der Technischen Universität München entwickelt. In dieser Arbeit werden den numerischen Modellen Kennlinien für die Fasergehalte  $20 \text{ kg/m}^3$ ,  $40 \text{ kg/m}^3$  und  $80 \text{ kg/m}^3$  aus [72] zugrunde gelegt und im Anhang A dargestellt.

#### **3.2.3. Annahme einer initialen Zugarbeitslinie**

Die Ermittlung der plastischen Zugarbeitslinie des Faserbetons ist Gegenstand dieser Arbeit und demnach unbekannt. Die Lösung des inversen Problems unter Anwendung eines numerischen Modells bedarf jedoch für jede Berechnung die Eingabe einer Zugarbeitslinie, die im Nachgang durch den Vergleich von numerischem und experimentellen Ergebnis zu validieren ist. Durch die Approximation des Identifizierungsproblems mittels Optimierung ist jede Arbeitslinie zu bewerten und anschließend anzupassen. Im ersten Schritt ist es nicht von Bedeutung, wie hoch die Qualität der initialen Zugarbeitslinie ist, es muss lediglich die Stabilität der numerischen Berechnung gewährleistet sein.

Für eine erste Berechnung und Definition des Optimierungsziels reicht demnach eine „grob“

gewählte Arbeitslinie aus. Als Eingangsarbeitslinie kann beispielsweise eine Kurve aus zentrischen Zugversuchen oder eine bereits bekannte indirekt ermittelte Arbeitslinie dienen.

### 3.2.4. Erste Berechnung und Auswertung des Ergebnisses

Ist eine initiale plastische Zugarbeitslinie gewählt und wurden ferner alle weiteren Eingaben zur Modellierung des Biegezugversuches getroffen, ist das numerische Modell zu berechnen und auszuwerten. Die nicht-lineare Berechnung wird in Abaqus standardmäßig nach der Newton-Raphson-Methode ausgeführt. Als Pfadverfolgung wird in dieser Arbeit das Bogenlängenverfahren gewählt. Dem Anhang A sind die Berechnungseinstellungen der inversen Analyse zu entnehmen.

Da die numerische Berechnung mittels experimentellen Kraft-CMOD-Kurven validiert wird, ist im Modell eine Ausgabe zu definieren, die diese Beziehung als Ergebnis-Plot darstellt. Die einwirkende Kraft  $F$  [kN] ist gleichzusetzen mit der Reaktionskomponente der Linienlager, die entgegen der weggesteuerten Belastung wirkt. Demnach entspricht die Summe der Auflagerkräfte in Belastungsrichtung der Kraft  $F$ . Die Auflager bzw. Knotenpunkte zur Kraftermittlung sind in Abb. 3.5 (links) dargestellt.

Wie auch im realen Biegezugversuch muss sich die Rissbildung auf die Elementreihe über der modellierten Einkerbung beschränken. Im Abaqus-Modell unterliegt die Rissbildung keinem diskreten bruchmechanischen Modell. Sie wird als plastische Dehnung interpretiert und über dem betroffenen Element integral berücksichtigt. Im Gegensatz zu einem diskreten Ansatz der Rissmodellierung müssen keine Knotenverbindungen während der Berechnung gelöst und das FE-Netz neu konstruiert werden. Eine stabilere Rechnung sowie geringere Netzabhängigkeiten sind die Folge [74, S.584 ff.]. Die Rissentwicklung im numerischen Modell kann demnach über die Relativverschiebung benachbarter Knoten in Balkenlängsrichtung der betroffenen Elementreihe erfasst werden. Die Abb. 3.5 (rechts) visualisiert ein mögliches Knotenpaar zur Rissbestimmung. Dieses sollte sich stets an der Unterseite des Balkens und damit auf Höhe der Klemmlehre im realen Versuch befinden.

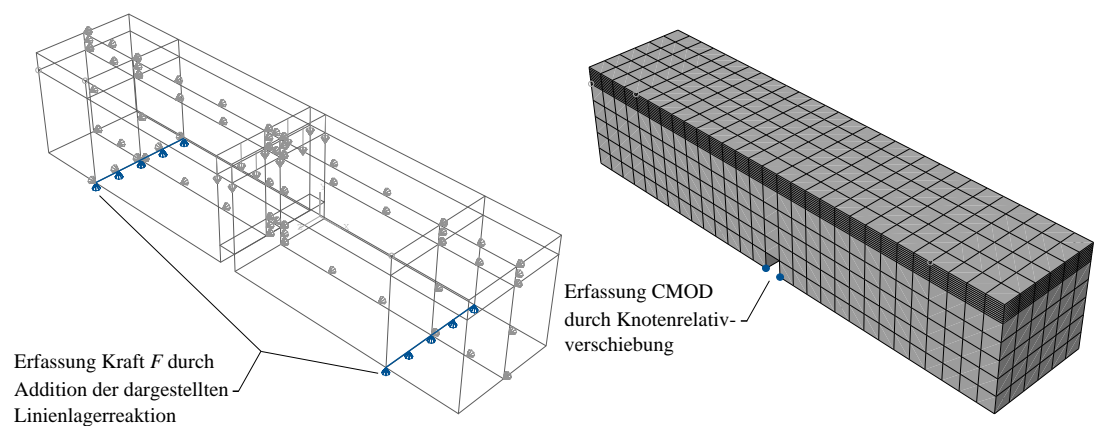


Abb. 3.5: Darstellung der Abaqus-Ausgaben zur Ermittlung der Kraft-CMOD-Beziehung

Der Abb. 3.6 ist eine beispielhafte Gegenüberstellung der Kraft-CMOD-Kurven einer ersten numerischen Berechnung mit experimentellen Daten zu entnehmen. Grundlage der Berechnung war ein Biegezugversuch mit einem Faserbeton ( $V_f = 40 \text{ kg/m}^2$ ). Eine Zugarbeitslinie, die aus einem zentrischen Zugversuch ermittelt wurde, diente als initiale Berechnungsgrundlage. Über die visuelle Gegenüberstellung ist eine Diskrepanz zwischen experimentellen Daten und FE-Ergebnis erkennbar. Mit dem Ziel einer Anpassung des FE-Ergebnisses an die Realität ist die Zugarbeitslinie zu modifizieren, wenn alle weiteren Eingabeparamter festgesetzt sind. Ein manuelles Anpassen der Arbeitslinie ist mit hohem Arbeitsaufwand verbunden. Daher soll im nächsten Kapitel eine Methode zur Automatisierung des Berechnungs- und Anpassungsprozesses entwickelt werden.

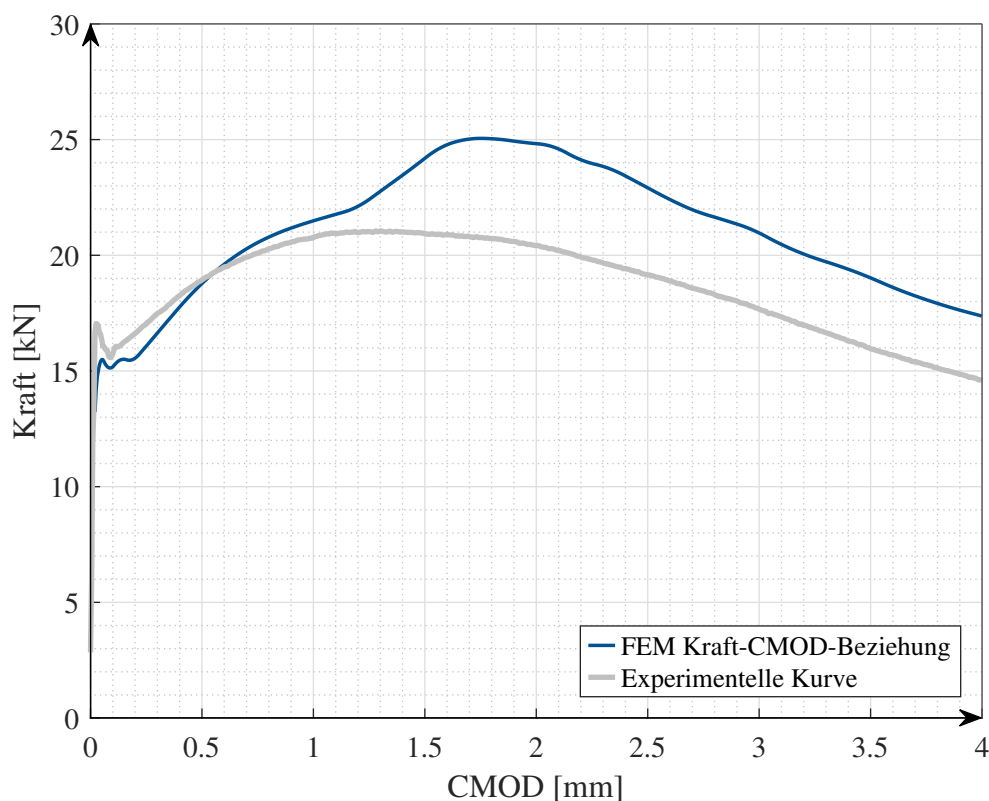


Abb. 3.6: Beispielhafte Gegenüberstellung der Kraft-CMOD-Kurven einer ersten numerischen Berechnung mit experimentellen Daten

### 3.3. Heuristik zur Automatisierung des Berechnungs- und Interpretationsprozesses

#### 3.3.1. Definition des inversen Optimierungsziels

Mit dem schlecht gestellten inversen Problem geht eine Optimierung einher, für die im ersten Schritt eine Zielfunktion zu bestimmen ist (vgl. Kap. 2.6.1). Die Abb. 3.7 veranschaulicht den grundlegenden Ablauf der Optimierung zur Lösung des Identifikationsproblems. Nach jeder Berechnung muss das zugehörige Ergebnis bewertet werden. Wurde keine zufriedenstellende Lösung erreicht, ist die Optimierung fortzusetzen.

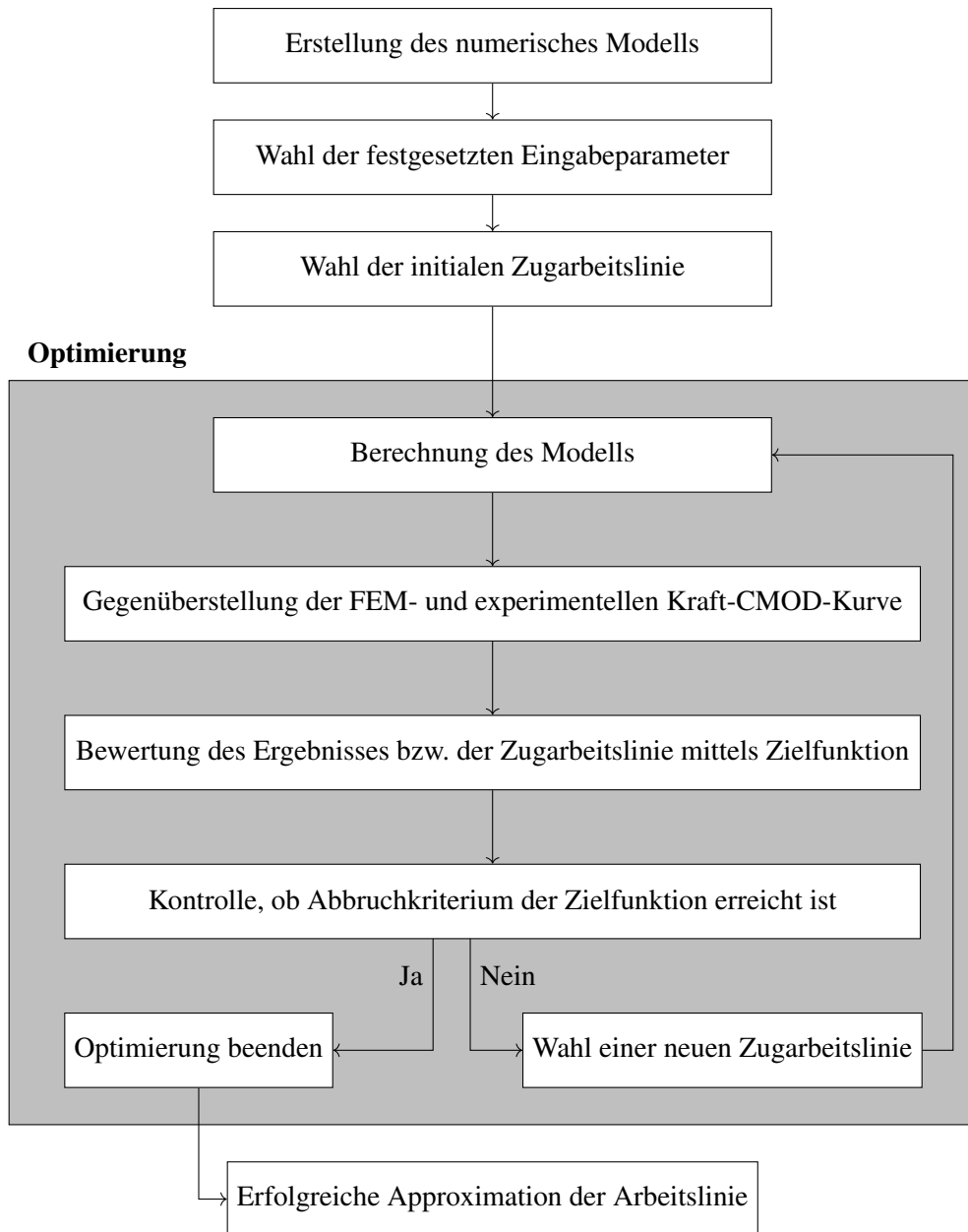


Abb. 3.7: Grundlegender Ablauf der Optimierung zur Lösung des Identifikationsproblems

Die Qualität der pro Berechnung angesetzten Arbeitslinie soll über die Gegenüberstellung der FEM-Kraft-CMOD-Beziehung mit der experimentellen Kraft-CMOD-Beziehung beurteilt werden. Je mehr sich die FEM-Kurve der Versuchskurve annähert desto besser ist die Arbeitslinie zu bewerten. Die Beurteilung lässt sich durch die Summe  $Q$  der quadrierten vertikalen Abweichungen der Ergebniskurven ( $F_{i,FEM} - F_{i,epx}$ ) an  $n_{op}$  diskreten Stellen quantifizieren:

$$Q = \sum_{i=1}^{n_{op}} (F_{i,FEM} - F_{i,epx})^2 \quad (3.2)$$

Je geringer die Summe  $Q$ , desto höher ist die Übereinstimmung der Kraft-CMOD-Beziehungen und umso zutreffender ist die zugehörige Zugarbeitslinie. Hierbei ist auf eine ausreichende Anzahl an diskreten Stellen  $n_{op}$  zu achten, um eine möglichst kontinuierliche Abweichung

der Ergebniskurve zu überprüfen. Die Gleichung 3.2 stellt in dieser Arbeit die nicht-lineare Zielfunktion des Optimierungsproblems dar, die es zu minimieren gilt.

### 3.3.2. Beschreibung der Zugarbeitslinie mittels B-Splines

Gegenstand des inversen Problems ist die Optimierung der initialen Zugarbeitslinie in dem Maß, dass die Ansprüche der Zielfunktionsminimierung erfüllt werden. Demnach ist eine parametrische Manipulation der Zugarbeitslinie zu finden, die durch einen Optimierer effizient angesprochen werden kann. Wie bereits in den theoretischen Grundlagen vermittelt, bieten B-Splines die Möglichkeit der Kurvenmodellierung mit Hilfe von Kontrollpunkten, die lediglich eine lokale Beeinflussung der Kurve verursachen. Die Anzahl der Kontrollpunkte ist dabei abhängig vom Grad der Kurve bzw. der Kurvenkomplexität.

Als initiale Arbeitslinie soll daher eine zwei-dimensionale B-Spline-Kurve dienen, deren Kontrollpunkte durch einen Optimierer anzusprechen sind. Eine B-Splinekurve mit  $n_{cp}$  Kontrollpunkten bildet damit ein  $2n_{cp}$ -dimensionales Optimierungsproblem ab. Der Abb. 3.8 ist eine exemplarische Zugarbeitslinie zu entnehmen, die als B-Spline-Kurve ausgedrückt wird. Die Spline-Kurve kann beispielsweise durch Rekonstruktion einer Zugarbeitslinie mit Hilfe einer CAD-Software definiert werden.

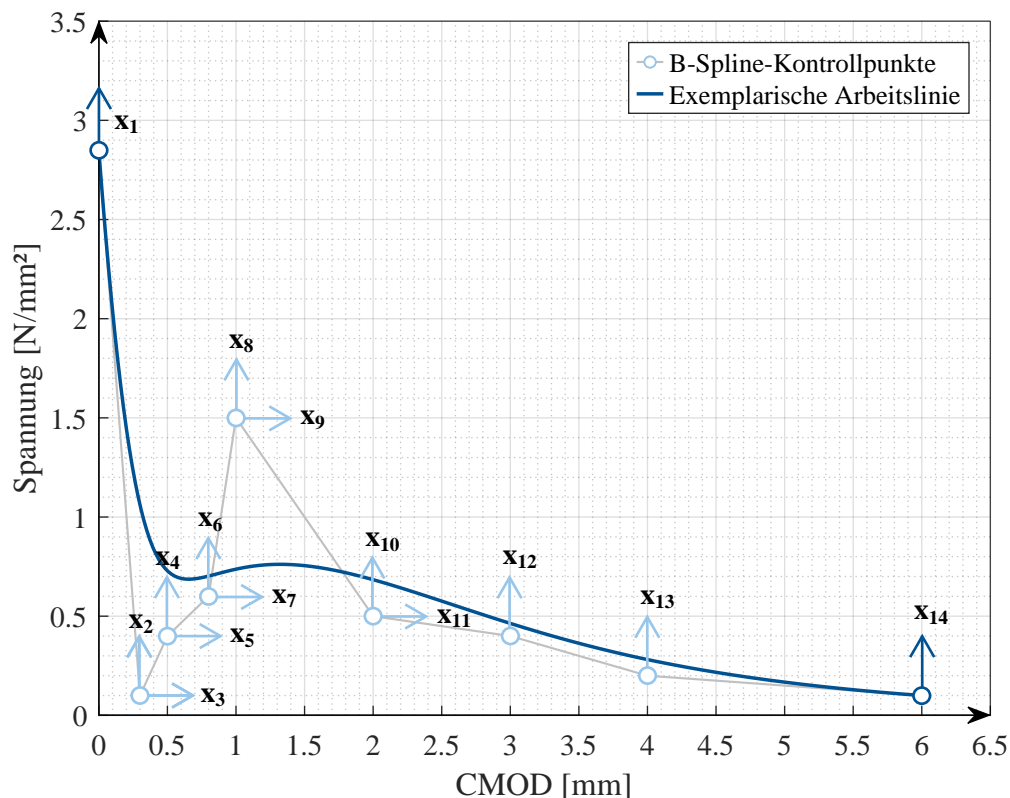


Abb. 3.8: Exemplarische Zugarbeitslinie ausgedrückt über eine B-Spline-Kurve

Zur Modellierung der B-Spline-Kurve werden in dieser Arbeit Knotenvektoren nach dem Schema

$$\mathbf{T} = \begin{matrix} [0, 0, \dots, & 1, 1, \dots] \\ k - \text{mal} & k - \text{mal} \end{matrix} \quad (3.3)$$

angewendet (siehe dazu Kap. 2.5.5). Start- und Endkontrollpunkt der Kurve liegen demnach auf dem Spline. Die plastische Arbeitslinie startet stets bei der Rissweite  $w=0$  und muss mindestens bis zu einer Rissweite von 4 mm reichen, um den Mindestansprüchen des genormten Biegezugversuches zu genügen. Diese Randbedingungen sollen in der Heuristik Berücksichtigung finden. Der Startkontrollpunkt liegt somit an der Stelle  $w=0$  und der Endkontrollpunkt bei  $w=6$  mm. Diese zwei Bedingungen reduzieren das  $2n_{cp}$ -dimensionale Optimierungsproblem auf ein Problem mit  $2n_{cp} - 2$  Unbekannten. Die Unbekannten stellen somit die zulässigen Verschiebungen der Kontrollpunkte dar, wobei jedem Kontrollpunkt bis auf Start- und Endpunkt ein Unbekanntepaar  $[x_i, x_{i+1}]$  zuzuordnen ist. Ferner können Kontrollpunkte bei Rissweiten  $w > \text{ca. } 3$  mm in ihrer horizontalen Verschiebung festgesetzt werden, wenn die Kurve in diesen lokalen Bereichen eine geringe Komplexität aufweist. Die partielle Reduzierung der unbekanntenen Verschiebung  $x_i$  kann der Abb. 3.8 ebenfalls entnommen werden. Dadurch besitzt die dargestellte B-Spline-Kurve neun Kontrollpunkte, die durch ein 14-dimensionales Optimierungsproblem angesteuert werden kann.

Während der Entwicklung der Heuristik hat sich gezeigt, dass die Arbeitslinien mit 12 Kontrollpunkten in guter Näherung beschrieben werden können. Dabei ist der horizontale Freiheitsgrad des Startpunktes ( $w_1 = 0$ ) und der letzten drei Kontrollpunkte ( $w_{10} = 3,0$  mm;  $w_{11} = 4,0$  mm;  $w_{12} = 6,0$  mm) festgesetzt. Ferner werden die vertikalen Verschiebungen der letzten beiden Kontrollpunkte an den Stellen  $w_{11} = 4,0$  mm und  $w_{12} = 6,0$  mm gleichgesetzt. Der letzte Kontrollpunkt besitzt lediglich die Funktion, die Arbeitslinie in Rissbreiten auslaufen zu lassen, die nicht mehr relevant für den Biegezugversuch sind. Das Gleichsetzen der Verschiebungen hat daher keine Auswirkungen auf die Nachrechnung des Versuches; das Optimierungsproblem wird jedoch um eine Dimension reduziert und die Komplexität des Problems herabgesetzt. In der folgenden Heuristik sollen demnach B-Splines mit 12 Kontrollpunkten und 19 Freiheitsgraden modelliert werden.

### 3.3.3. Auswahl der Particle Swarm Optimization als Optimierungsmethode

Aufgrund des mehrdimensionalen, nicht-linearen Optimierungsproblems, das einer schlecht gestellten inversen Analyse gegenüber steht, soll eine Optimierungsmethode der Metaheuristik die Entscheidungsvariablen  $x_i$  der B-Spline-Kurve anpassen. In dieser Arbeit wird die klassische PSO als Optimierungsmethode gewählt. Sie bietet den Vorteil der großen stochastischen Exploration im Suchraum bei gleichzeitig steuerbarer Konvergenzgeschwindigkeit. Beim klassischen PSO liegt die Stern-Typologie als soziale Struktur vor. Demnach orientieren sich alle Partikel am global besten Ergebnis, was zu einer zügigen Konvergenz führt. Da für jede Optimierungsalternative eine numerische Berechnung des Modells benötigt wird, ist der Zeitaufwand pro Optimierungsgeneration hoch. Die Wahl einer hohen Konvergenzgeschwindigkeit

soll den Zeitaufwand daher nicht weiter anheben. Durch eine hohe initiale Anzahl an Partikeln und der ohnehin schon weiten initialen Streuung der Partikel im Populationsraum wird der Gefahr einer lokalen Optimierung aufgrund hoher Konvergenzgeschwindigkeiten entgegengewirkt. Auf eine kritische Beurteilung des Endergebnisses der Optimierung aufgrund geringerer Exploration (im Vergleich zu anderen Typologien) ist zu achten.

Wie im vorangegangenen Kapitel erläutert, entspricht die Dimension der Partikel den Freiheitsgraden der Kontrollpunkte. Dem Kapitel 2.7.3 kann eine empfohlene Partikelanzahl zwischen 10 und 30 entnommen werden. Die Partikelanzahl soll in der Heuristik vom Benutzer frei zu definieren sein. Inverse Analysen werden in dieser Arbeit mit 12 19-dimensionalen Partikeln durchgeführt. Weitere festzulegende PSO-Parameter sind nach Kapitel 2.7.3:

*Gewichtungsparameter  $\omega$* : Abweichend vom Kapitel 2.7.3 wird der Parameter nicht festgesetzt sondern soll für jedes Partikel in jeder Generation zwischen 0 und 1,2 zufällig gewählt werden.

*Trust-Parameter  $c$* : Die Parameter werden zu 1,2 festgesetzt. Die persönliche und soziale Komponente der Partikel besitzen damit eine gleiche Gewichtung. Ferner erhalten sie im Mittel eine höhere Bedeutung als der Gewichtungparameter  $\omega$ .

*Vektorielle Gewichtung  $\mathbf{r}$* : Das stochastische Verhalten wird maßgeblich durch die vektorielle Gewichtung  $\mathbf{r}$  bestimmt, die für jedes Partikel in jeder Generation neu ermittelt wird. Die zufälligen Einträge des Vektors bewegen sich stets zwischen 0 und 1,0.

Durch den variablen Gewichtungparameter  $\omega$  soll die Geschwindigkeit der Partikel zum einen weiter variiert, zum anderen das Konvergenzverhalten partiell verlangsamt werden. Die Wahl der Trust-Parameter-Werte  $c$  beruht auf einem iterativen Prozess während der Entwicklung des Optimierers. Die Festsetzung der Parameter auf 1,2 erzielen gute Konvergenzgeschwindigkeiten. Demnach wird von der Formel 2.66 zur möglichen Ermittlung der PSO-Parameter abgewichen.

#### 3.3.4. Implementierung der Schwarmoptimierung

Die inverse Lösung soll durch die Schwarmoptimierung gesteuert und approximiert werden. In diesem Zuge ist eine Heuristik zu entwickeln, bei der ein PSO die Grundstruktur darstellt, innerhalb dieser das numerische Modell mittels Abaqus berechnet wird. Abaqus/CAE bietet eine integrierte Schnittstelle, Python-Skripte auszuführen. Dadurch kann die Heuristik direkt in der Abaqus Umgebung aufgerufen werden und die Berechnungen durch Vorgabe der Zugarbeitslinien beeinflussen. Im Folgenden wird die Implementierung des PSOs als Grundstruktur vorgestellt.

Die angewendete Optimierung lässt sich in vier Elemente aufteilen, die über ein übergeordne-



tes Element ausgeführt wird. In Python werden diese Strukturierungselemente „Funktionen“ genannt. Die Abb. 3.9 stellt die Hierarchie der Funktionen und ihre Bezeichnung dar.

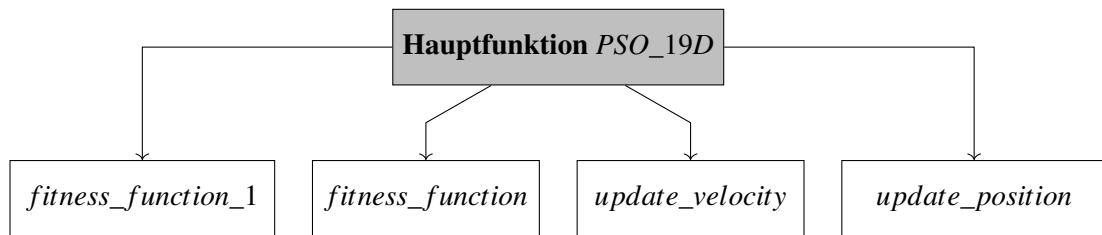


Abb. 3.9: Hierarchie der PSO-Funktionen in Python

Die Hauptfunktion *PSO\_19D* setzt die initiale Optimierungsgeneration auf, bewertet die berechneten Ergebnisse jeder Generation und entscheidet über den Verlauf der nächsten Generation. Innerhalb dieses Prozesses werden die untergeordneten Funktionen durch die *PSO\_19D* aufgerufen. Der Ablauf der Hauptfunktion ist in Abbildung 3.10 und 3.11 dargestellt.

Im ersten Schritt wird die initiale Arbeitslinie berechnet, die durch den Benutzer definiert wird. Es besteht die Möglichkeit, eine individuelle Arbeitslinie vorzugeben oder durch die Angabe des Fasergehaltes und der Zugfestigkeit der Probe zwischen vordefinierten Arbeitslinien zu wählen. Hierbei ist zu beachten, dass lediglich drei Zugarbeitslinien in der Heuristik implementiert sind. Weicht die initiale Arbeitslinie zu stark vom realistischen Nachrissverhalten ab, kann dies zu instabilen Berechnungen führen. Daher ist zu benutzerdefinierten, initialen Arbeitslinien zu raten, die möglichst den Eigenschaften des Probematerials entsprechen.

Der initialen Arbeitslinie wird eine 19-dimensionale Alternative zugeordnet, die lediglich die Verschiebungen „0“ als Einträge besitzt. Somit werden in der ersten Berechnung die Kontrollpunkte der initialen B-Spline-Arbeitslinie nicht verändert. Zur ersten Berechnung wird die *fitness\_function\_1* gestartet. Hier wird die vor- oder benutzerdefinierte Arbeitslinie ausgewählt und die Kontrollpunkte in Abhängigkeit der Alternative (hier Verschiebungsvektor genannt) versetzt. Da die erste Alternative einen Nullvektor darstellt, bleiben die Kontrollpunkte in ihrer Ausgangsposition. Die Arbeitslinie wird als Materialeigenschaft in Abaqus übergeben und die Berechnung gestartet.

Wurde die Berechnung ausgeführt, sind die benötigten Ergebnisse (Lagerreaktion und Verschiebung der Knoten am Rissufer) in die Heuristik über Ausgabe-Reports zu überführen. Hierbei ermittelt die Heuristik zuerst die Knotennummern, die für die Reports angesprochen werden müssen. Innerhalb der Heuristik wird die FEM-Kraft-CMOD-Beziehung in Matrix-Form erstellt, abgespeichert und die Abweichungen zur experimentellen Kraft-CMOD-Beziehung in gleichmäßigen Abständen von 0,005 mm ausgewertet. Die Abweichungen werden quadriert und addiert. Die Quadratsumme stellt den Wert der Zielfunktion zur initialen Arbeitslinie dar und dient als Bewertungsmaßstab dieser. Die *fitness\_function\_1* übergibt die Quadratsumme und die ermittelten Ergebnis-Knotenpunkte an die *PSO\_19D*.

Im nächsten Schritt werden 23 Alternativen durch die Hauptfunktion erstellt. Durch den Benutzer ist vor dem Start der Funktion ein Wertebereich festzulegen, innerhalb dessen die Heuristik für jeden Eintrag im Vektor eine zufällige Zahl ermittelt. Wird beispielsweise ein Wertebereich von 0,6 vorgegeben, wählt die Heuristik eine Zahl zwischen  $\pm 0,3$ . Dies ermöglicht eine Knotenverschiebung in jede beliebige Richtung des zwei-dimensionalen Raumes. Die Alternativen (Partikel) werden nacheinander durch die Funktion *fitness\_function* berechnet und die zugehörige Quadratsumme ermittelt. Die Funktion unterscheidet sich von *fitness\_function\_1* in dem Maß, dass die Knotenpunkte für die Report-Ausgabe bereits bekannt sind und nicht erneut ermittelt werden.

Sind alle Quadratsummen der Partikel berechnet, werden die 23 Partikel einschließlich des Partikels (Nullvektor) der initialen Arbeitslinie anhand ihrer Quadratsummen bewertet. Das Partikel mit der geringsten Summe wird als global bestes Ergebnis deklariert. Ferner werden die 12 schlechtesten Partikel aussortiert und die Berechnung mit den 12 verbleibenden Partikeln fortgeführt. Dies verkürzt die Berechnungszeit der Generationen um die Hälfte. Ferner können dadurch Berechnungen, die Fehler in der ersten Generation aufwiesen und demnach als schlecht zu bewerten sind, vernachlässigt werden. Fehlerhafte Berechnungen erhalten in der Heuristik systematisch eine hohe Quadratsumme, um ihre Bedeutung in der Optimierung auf ein Minimum zu setzen. Die 12 verbleibenden Partikel werden nun nicht mehr gelöscht, sondern in jeder Generation verändert und ihrem persönlichen und global besten Ergebnis angepasst. Dies geschieht über die Partikelgeschwindigkeit nach Formel 2.65 mit Hilfe der Funktion *update\_velocity* und Festlegung der neuen Partikelposition nach 2.64 über das *update\_position*-Element.

Die Quadratsumme der neuen Partikel wird wieder über die *fitness\_function* berechnet und durch die Hauptfunktion ausgewertet. Anschließend wird überprüft, ob ein neues global oder persönlich bestes Ergebnis gefunden wurde. Falls der Durchschnitt aller Quadratsummen der letzten Generation nicht dem Abbruchkriterium entspricht, wird eine neue Partikelgeschwindigkeit berechnet und die Optimierung weitergeführt. Als Kriterium dient die Vorgabe einer minimalen Quadratsumme. Ferner kann der Benutzer eine maximale Anzahl an Generationen vorgeben. Falls dieses Abbruchkriterium erreicht wird, stoppt die Berechnung auch vor dem Erreichen des Optimierungsziels.

Dieses Kapitel stellt die grundlegende Struktur der Heuristik dar. Für die genaue Vorgehensweise wird auf das kommentierte Python-Skript im digitalen Anhang verwiesen.

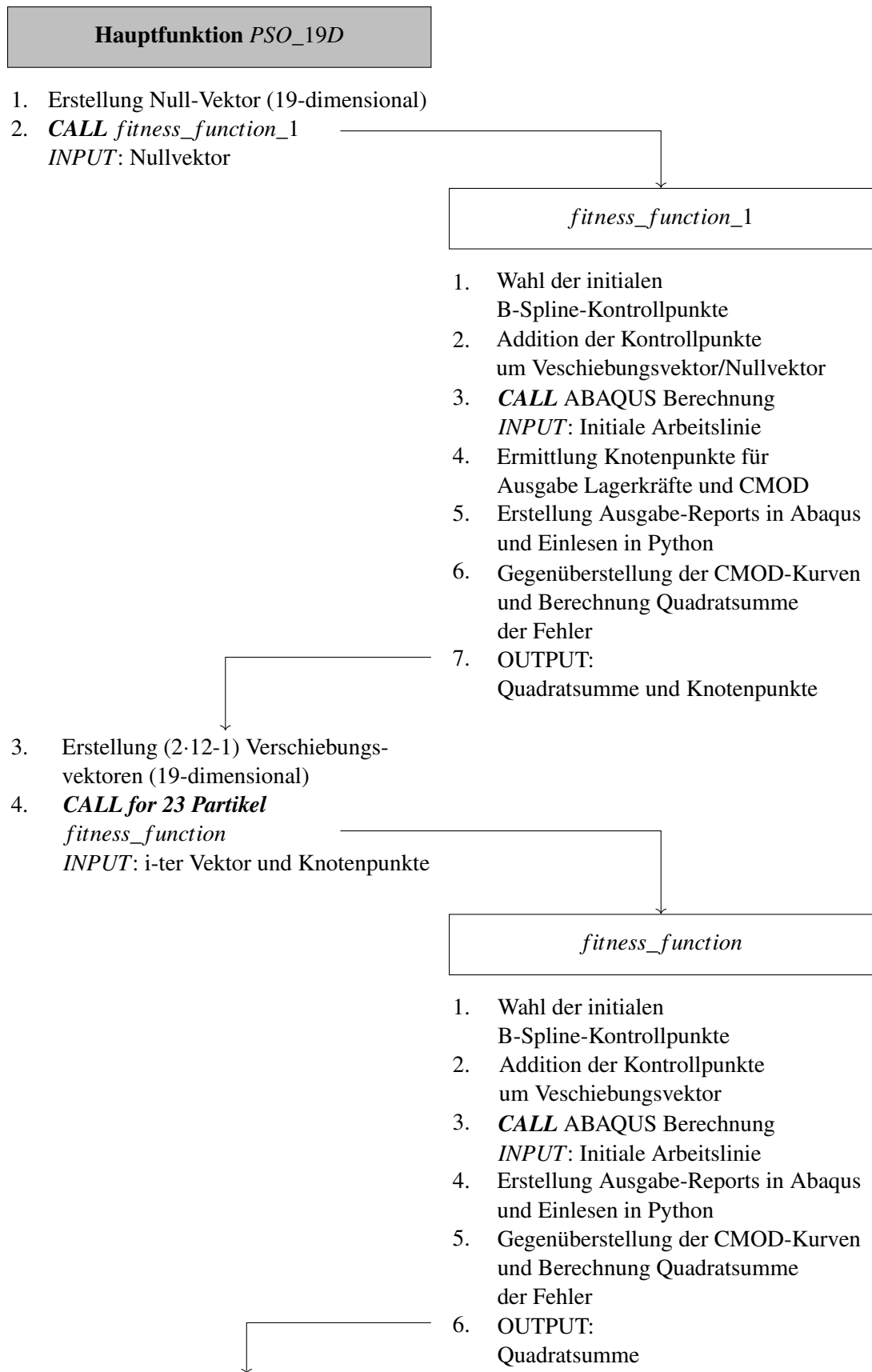


Abb. 3.10: Ablauf der Heuristik mit 12 Partikeln

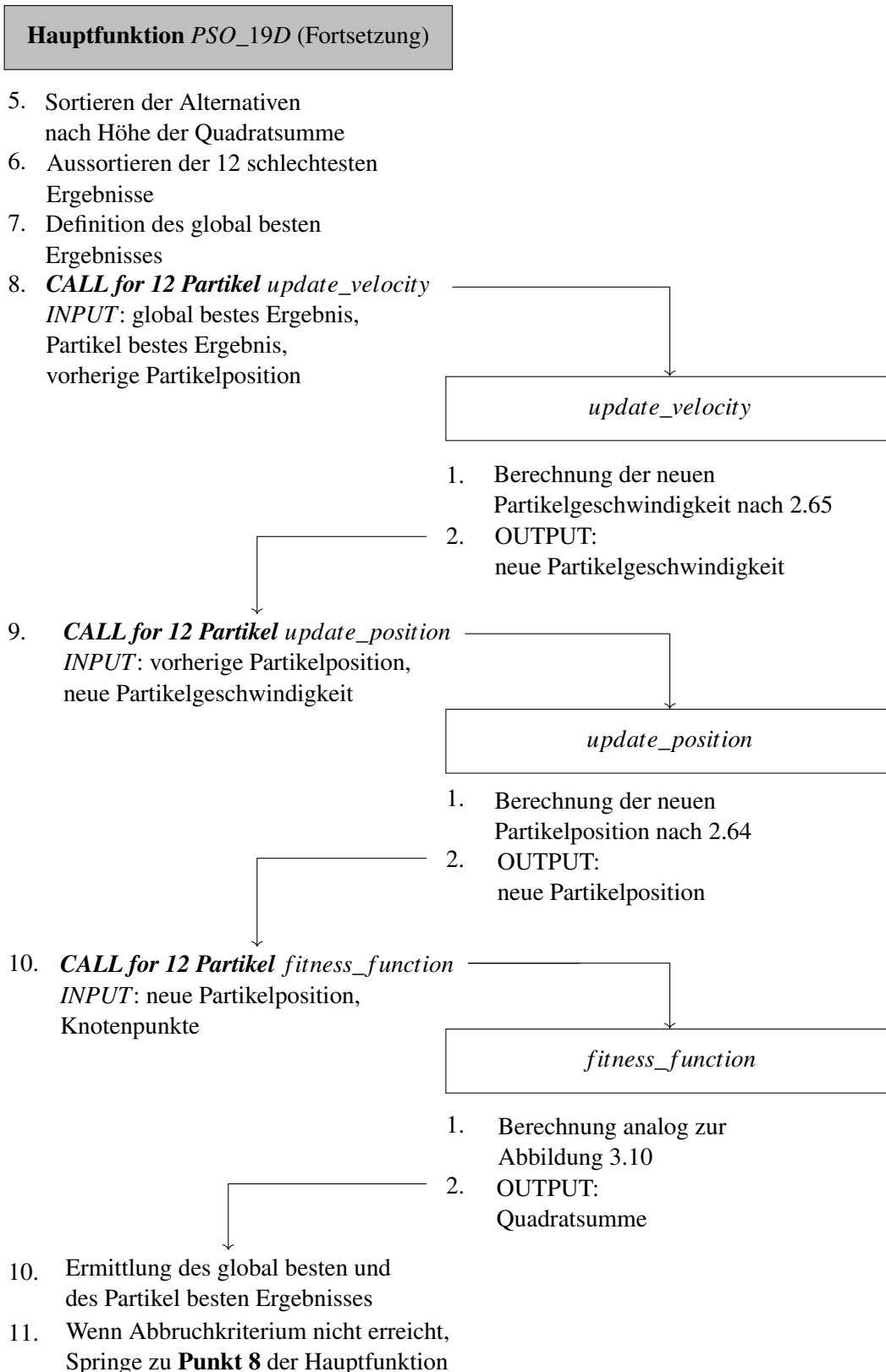


Abb. 3.11: Ablauf der Heuristik mit 12 Partikeln (Fortsetzung)

### **3.3.5. Prinzipielle Anwendung der Heuristik**

Soll die Heuristik in Abaqus/CAE zur Ermittlung der plastischen Zugarbeitslinie angewendet werden, sind die folgenden Punkte zu berücksichtigen.

#### **Modellbildung**

Das FEM-Modell ist eigenständig durch den Benutzer zu erstellen. Jegliche Modell- und Berechnungsparameter können individuell festgelegt werden, da lediglich die plastische Zugarbeitslinie durch die Heuristik in Abaqus beeinflusst wird. Es ist ein History-Output zu erstellen, der die benötigten Lagerkräfte zur Erstellung der Kraft-CMOD-Beziehung und ein History-Output, der die benötigte Verformung von zwei Knoten zur CMOD-Ermittlung ausgibt. Siehe hierzu das Kapitel 3.2.4. Der History-Output für die Lagerkräfte ist dabei als „Support“ und der Verformungs-Output als „Deformation“ zu benennen. Außerdem ist das Model als „Model-1“, der Name des Materials, das das Concrete Damaged Plasticity Modell enthält als „Concrete (NLIN)“ und der Berechnungsstep als „Step-1“ zu bezeichnen. Die korrekte Bezeichnung ist für das Ausführen der Heuristik zwingend notwendig.

#### **Start der Heuristik**

Ist das Modell erstellt, wird die Heuristik direkt über Abaqus/CAE als Skript ausgeführt. Die „Work Directory“ kann frei gewählt werden. Unter diesem Pfad soll jedoch die experimentelle Kraft-CMOD-Beziehung als .csv-Datei abgelegt sein. Die Rissweite muss in der ersten Spalte, die Kraft in der zweiten Spalte stehen. Die Einträge sind in der ersten Zeile der .csv zu beginnen.

#### **Definition der Abbruchkriterien**

Nach dem Start des Skripts wird der Benutzer unter anderem nach den Abbruchkriterien gefragt. Hier ist die maximale Anzahl der Generationen und das Optimierungsziel in Form einer zu erreichenden Quadratsumme zu definieren.

#### **Definition des Verschiebungsbereiches der initialen Partikel**

Beim ersten Aufsetzen der Partikel werden durch die Heuristik Verschiebungsvektoren erstellt, deren Einträge eine zufällige Zahl innerhalb eines vorgegebenen Wertebereiches darstellen. Wird der Wert beispielsweise zu 0,6 gesetzt, wählt die Heuristik eine Zahl zwischen  $\pm 0,3$ .

#### **Definition der Partikelanzahl**

Im vorangegangenen Kapitel wurde der Ablauf einer Heuristik mit 12 Partikeln vorgestellt. Die Anzahl der Partikel ist jedoch nicht festgesetzt und kann frei gewählt werden.

#### **Erhalt des Optimierungsergebnisses**

Die Heuristik erstellt selbstständig Ordner in der „Work Directory“, in der jede Arbeitslinie und ihre zugehörige Kraft-CMOD-Beziehung abgespeichert wird. Jede Arbeitslinie ist durch eine aufsteigende Nummerierung zu identifizieren. Ferner wird eine Report-Datei der Heuristik erstellt, die jeder Zeit geöffnet und der Status der Berechnung eingesehen werden kann. In

der zweiten Zeile der Report-Datei ist das aktuell global beste Ergebnis dargestellt. Der Zeile ist die Quadratsumme und die Nummer der Arbeitslinie zu entnehmen. Ferner enthält die Datei die Arbeitslinien chronologisch in B-Spline-Format. Die Auflistung wird am Ende der Generation mittels Nummer der besten Arbeitslinie dieser Generation und ihrer Quadratsumme unterbrochen. Hier ist zu beachten, dass die Endziffer der Arbeitslinie nicht fortlaufend ist, sondern sich auf die Nummer in der jeweiligen Generation bezieht. Dabei beginnt die Zählung bei „0“ und nicht bei „1“.

Soll die B-Spline-Form der global besten Arbeitslinie aufgerufen werden, kann über die erste Ziffer der Arbeitsliniennummer die Generation in der Report-Datei gesucht und anschließend die beste Linie der Generation ausgewählt werden.

### **3.4. Erweiterung der Heuristik um die Ermittlung der plastischen Druckarbeitslinie**

#### **3.4.1. Zentrischer Druckversuch zur Ermittlung der Druckarbeitslinie**

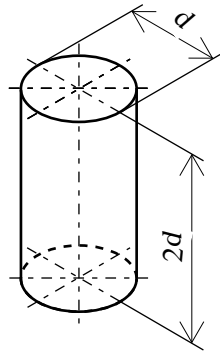
Bis zu diesem Kapitel wurde der Fokus auf die inverse Analyse der plastischen Zugarbeitslinie von Faserbeton gelegt. Das Druckverhalten von (Faser-)Beton lässt sich direkt über Druckprüfmaschinen z.B. nach DIN EN 12390-4 [TR7] bestimmen. Die Versuchsanordnung ist dabei simpel und weist keine große Komplexität im Kontrast zum zentrischen Zugversuch auf. Demnach ist eine inverse Analyse zur Bestimmung der Druckarbeitslinie nicht notwendig. Aufgrund der Stärke einer Meta-Heuristik, auf verschiedene Problemstellungen übertragbar zu sein, kann das entwickelte Skript durch geringe Anpassungen die plastische Druckarbeitslinie approximieren. Hierzu soll in diesem Kapitel ein Druckversuch vorgestellt und die Heuristik im folgenden Kapitel angepasst werden.

Nach DIN EN 12390-3 [TR7] werden Betonprobekörper über eine Druckprüfmaschine bis zum Bruch belastet und die aufgezeichnete Höchstlast in die Druckfestigkeit des Betons  $f_c$  [N/mm<sup>2</sup>] mit folgender Formel umgerechnet:

$$f_c = \frac{F_{max}}{A_c} \quad (3.4)$$

Dabei entspricht  $F_{max}$  [N] der Höchstkraft beim Bruch und  $A_c$  [mm<sup>2</sup>] der Fläche des Probequerschnitts, auf den die Druckbeanspruchung wirkt. Die Probekörper stellen Würfel, Zylinder oder Bohrkerne dar und müssen genormten Anforderungen entsprechen. Im Folgenden wird auf den Zylinder nach DIN EN 12390-1 [TR9] eingegangen. Der Abb. 3.12 sind die zulässigen Nennmaße des Zylinders zu entnehmen. Dabei dürfen die tatsächlichen Maße um  $\pm 10\%$  vom Nennmaß abweichen. Für die weiteren Angaben zum Prüfkörper wird auf die Norm verwiesen. In der Prüfmaschine werden die Prüfkörper einaxial belastet. Bei Zylindern und Bohrkernen erfolgt die Belastung auf den Grundflächen.

Zur Bestimmung der vollen Druckarbeitslinie gibt es keine normierten Vorgaben. Die Art der uniaxialen Belastung über Druck- oder Universalprüfmaschinen ist jedoch stets dieselbe. So



d,mm	100	113 <sup>a</sup>	150	200	250	300
<sup>a</sup> Dies ergibt eine Lasteintragungsfläche von 10 000 mm <sup>2</sup> .						

Abb. 3.12: Nennmaße des Zylinder-Prüfkörpers nach DIN EN 12390-1

wurden Druckversuche in [72] über eine Universalprüfmaschine durchgeführt, bei denen die Stauchung über zwei bzw. drei Draht-Dehnmessstreifen und zusätzlichen Wegaufnehmern ermittelt wurde. Zur genauen Durchführung wird auf [72] und [73] verwiesen. Anschließend kann die Druckarbeitslinie über Umrechnung der Kraft in eine Querschnittsspannung nach 3.4 erstellt werden. Die Dehnung wird über die ermittelte Verschiebung und die bekannte Referenzlänge berechnet. Im Gegensatz zum genormten Druckversuch ist über die Formel 3.4 nicht nur die Druckfestigkeit bei  $F_{max}$ , sondern der zum Kraftverlauf korrespondierende Spannungsverlauf zu bestimmen.

### 3.4.2. Anpassung und Erweiterung der Heuristik

Die plastische Druckarbeitslinie soll mit Hilfe von Druckversuchen - wenn auch nicht genormt - ermittelt werden. Dafür ist die bestehende Heuristik anzupassen. Der eigentliche Optimierungsprozess ist derselbe.

Für die inverse Analyse wird ein numerisches Modell benötigt, das den einaxialen Druckversuch abbildet. Der Benutzer liefert experimentelle Daten in Form eines Kraft-Weg-Diagramms. Die Kraft wird in dem numerischen Modell als Summe aller Auflagerkräfte in Belastungsrichtung ermittelt. Zur Analyse des Stauchungsweges reicht es, die Verschiebung in Belastungsrichtung eines Knotens zu erfassen. Der Knoten muss dabei in der Ebene der Einwirkung liegen. Abb. 3.13 stellt das numerische Modell eines Zylinderdruckversuches mit den benötigten Ausgabestellen dar. Die History-Outputs sind vom Benutzer zu definieren und anschließend richtig zu benennen (siehe 3.3.5). Im Gegensatz zur Ermittlung der numerischen Rissweitenentwicklung des Zugversuches, wird die Deformation lediglich durch einen Knoten erfasst. In diesem Zuge wurde die Knotenvermittlung zur Report-Erstellung angepasst. Die Heuristik zählt nun eigenständig durch, wie viele Knoten im History-Output enthalten sind. Je nach Anzahl, werden Reports für einen Biegezug- oder Druckversuch erstellt.

Auch die plastische Druckarbeitslinie ist über B-Splines zu beschreiben. Die Heuristik lie-

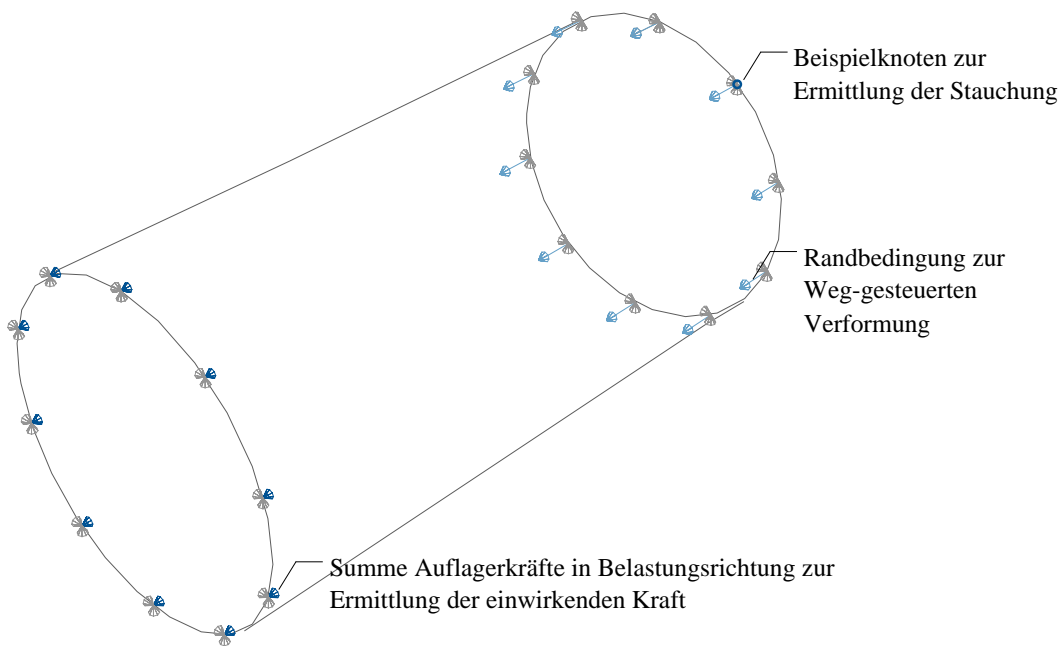


Abb. 3.13: Numerisches Modell (Geometrie) eines Zylinderdruckversuches mit den benötigten Ausgabestellen und Randbedingungen

fert zum einen vordefinierte B-Splines, zum anderen können auch für die Druckarbeitslinie benutzerdefinierte Arbeitslinien verwendet werden. Es ist zu beachten, dass die horizontalen Freiheitsgrade des ersten und der drei letzten B-Splines-Kontrollpunkte festgesetzt sind.

Der Abb. 3.14 ist eine exemplarische Kraft-Stauchungs-Beziehung eines Zylinder-Druckversuches mit Durchmesser 150 mm und Höhe 300 mm zu entnehmen. Im Gegensatz zur Kraft-CMOD-Beziehung stehen wesentlich größere Kräfte wesentlich kleineren Verschiebungen gegenüber. Die numerischen Ergebnisse reagieren daher sensibel auf kleine Änderungen der Druckarbeitslinie. Somit findet in der Heuristik eine interne Skalierung der Kontrollpunkt-Verschiebungen statt. Der Benutzer kann daher weiterhin Verschiebungsbereiche zwischen ca. 0,1 und 1,0 festlegen.

### 3.5. Potenzial der entwickelten Heuristik

Mit Hilfe der entwickelten Heuristik ist es möglich, plastische Zug- und Druckarbeitslinien über das Abaqus Concrete Damaged Plasticity Modell invers zu ermitteln. Das numerische Modell kann durch den Benutzer individuell erstellt werden. Lediglich der Einsatz des Concrete Damaged Plasticity Modells ist vorgeschrieben. Jegliche Einstellungen können über die Oberfläche des Abaqus/CAE getroffen und das Skript ausgeführt werden. Auf die richtige Deklaration des Modells, der History-Outputs und des Berechnungs-Steps ist zu achten. Mit Erweiterung der Heuristik um die Ermittlung der Druckarbeitslinie wurde gezeigt, dass die Optimierung durch wenige Anpassungen auf weitere Problemstellungen übertragbar ist. Eine Erweiterung um die inverse Analyse der Druck- und Zugschädigung ist daher auch denkbar.

Durch die beliebige Definition des Berechnungsmodells können Materialparameter invers er-



mittelt werden, die auf das Modell mit seinen individuellen numerischen Einstellungen zugeschnitten sind. Netzabhängigkeiten werden somit in der Ermittlung der Arbeitslinie berücksichtigt. Ob dies eine positive Eigenschaft darstellt, ist je nach Anwendungsfall zu bewerten. Diesem Kapitel ist eine Sensitivitätsanalyse der Abhängigkeit von Zugarbeitslinien gegenüber der Netzfeinheit, dem Dilatanzwinkel und der Zugschädigung nachgeschaltet.

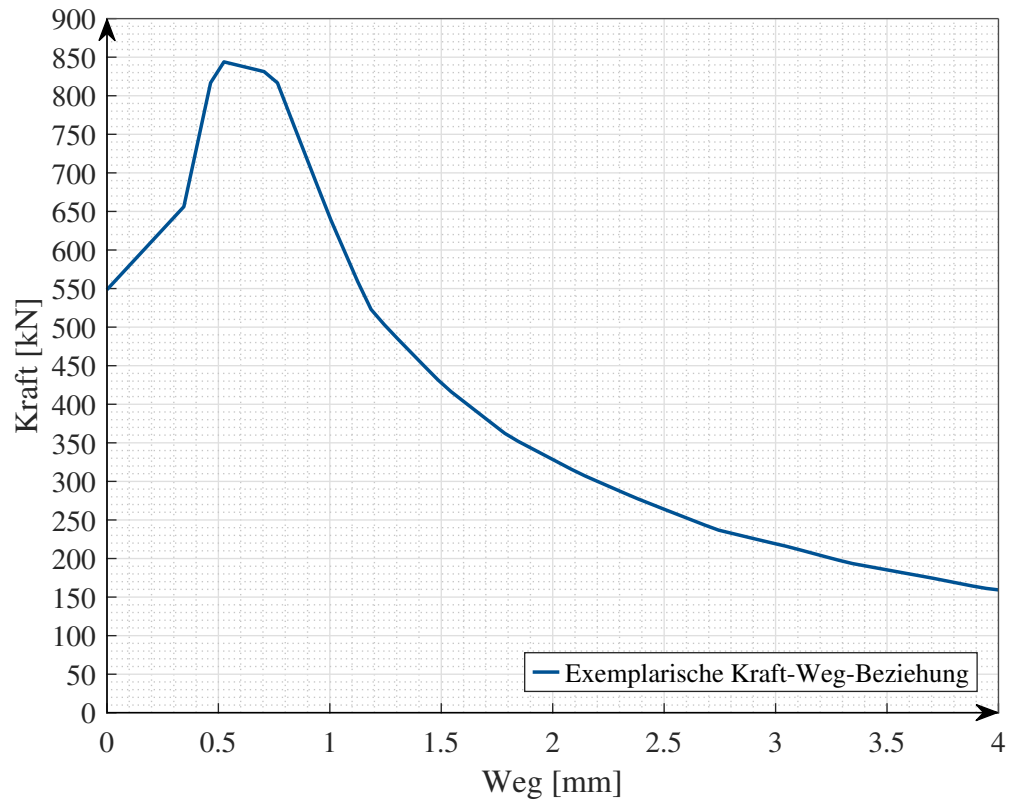


Abb. 3.14: Exemplarische Kraft-Weg-Beziehung eines Zylinder-Druckversuches mit Durchmesser 150 mm und Höhe 300 mm

---

## 4. Sensitivitätsanalyse einer numerischen Abhängigkeit der plastischen Zugarbeitslinien

### 4.1. Variation der Netzfeinheit

Im Rahmen der Arbeit von [72] wurden Biegezugversuche nach DIN EN 14651 durchgeführt. Mit Hilfe der Heuristik und der numerischen Modellierung des Versuches (vgl. Kap. 3.2) werden für experimentelle Kraft-CMOD-Beziehungen aus [72] Zugarbeitslinien in Abhängigkeit der Netzfeinheit des FE-Modells ermittelt. Anschließend wird die Sensitivität der Arbeitslinie auf die Variation der Netzgröße analysiert. Die numerischen Untersuchungen finden an je einer Kraft-CMOD-Beziehung der Fasergehalte  $20 \text{ kg/m}^3$ ,  $40 \text{ kg/m}^3$  und  $80 \text{ kg/m}^3$  statt. Die Eingaben des numerischen Modells sind dem Anhang A zu entnehmen.

Die folgenden drei Seiten stellen die Ergebnisse der inversen Analysen getrennt für die genannten Fasergehalte dar. Die Abb. 4.1, 4.3 und 4.5 visualisieren die ermittelten Arbeitslinien in Abhängigkeit der Elementgröße von 1,0 cm, 2,0 cm, 2,5 cm, 3,0 cm und 4,0 cm. Die resultierenden numerischen Kraft-CMOD-Beziehungen sind der experimentellen Kurve in Abb. 4.2, 4.4 bzw. 4.6 gegenübergestellt. Hierüber ist zu bewerten, ob die Arbeitslinien eine approximier- te Lösung darstellen. An dieser Stelle sei bereits darauf hingewiesen, dass die Arbeitslinien für den Fasergehalt von  $80 \text{ kg/m}^3$  kritisch zu betrachten sind. Besonders bei geringen Rissweiten weicht ihr Verlauf von typischen Arbeitslinien ab. Da sich die Gestalt der Arbeitslinien für den Fasergehalt von  $80 \text{ kg/m}^3$  ähnelt und lediglich ihre Differenzen für die Sensitivitätsanalyse von Interesse sind, werden die Linien in die Analyse einbezogen.

Für den Fasergehalt von  $20 \text{ kg/m}^3$  sind die Arbeitslinien in Abb. 4.1 dargestellt. Die anfängliche Spannung bei  $w=0 \text{ mm}$ , welche der Zugfestigkeit  $f_{ct}$  entspricht, zeigt eine Starke Varianz auf. Absolute Differenzen von ca.  $1,5 \text{ N/mm}^2$  können dem Diagramm entnommen werden. Zwischen Rissweiten von  $w=0,5 \text{ mm}$  bis  $w=2,5 \text{ mm}$  liegen die Abweichungen nur noch zwischen  $0,2 \text{ N/mm}^2$ . Hierbei werden den Linien der größeren Elementen eine geringere Spannung zugeordnet. Das gleiche Phänomen ist ab Rissweiten  $>2,5 \text{ mm}$  zu erkennen, jedoch weichen die Kurven hier noch weiter voneinander ab.

Der gleiche Sachverhalt ist den Arbeitslinien mit  $V_f = 40 \text{ kg/m}^3$  zu entnehmen. Lediglich die Differenz zwischen den Zugfestigkeiten fällt geringer aus ( $0,6 \text{ N/mm}^2$ ). Gleiches gilt für den Gehalt  $V_f = 80 \text{ kg/m}^3$ . Hier beträgt die anfängliche Differenz ca.  $0,2 \text{ N/mm}^2$ , die bis zu einer Rissweite von  $w=2,5 \text{ mm}$  konstant bleibt und sich dann auf ca.  $0,4 \text{ N/mm}^2$  bei  $w=4 \text{ mm}$  aufweitet.

Aufgrund von Unregelmäßigkeiten in den Zugfestigkeiten sollen an dieser Stelle keine Annahmen diesbezüglich getroffen werden. Deutliche Tendenzen zeigen sich aber im globalen Verlauf der Linien auf. So ist festzustellen, dass mit steigender Elementgröße die Spannungen der Arbeitslinie sinken. Das uniaxiale Zugverhalten wirkt demnach weicher, je größer das Element ist. Diese Differenz in der numerischen Materialantwort wird bei Rissweiten  $>2,5 \text{ mm}$

deutlich verstärkt.

Fasergehalt  $V_f = 20 \text{ kg/m}^3$

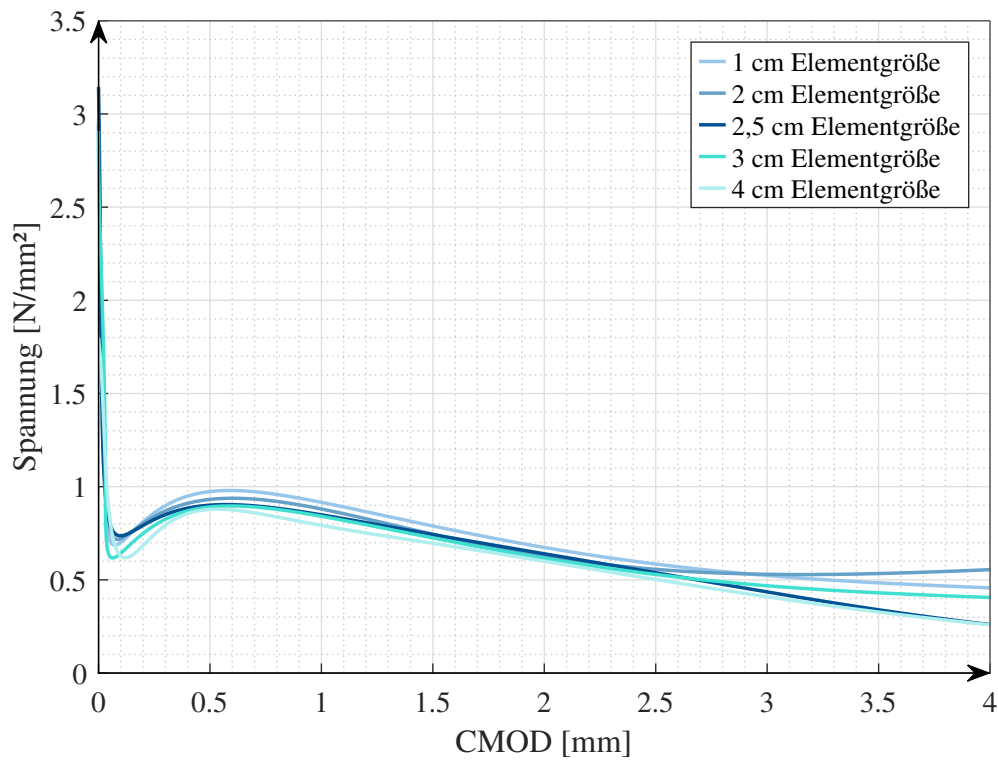


Abb. 4.1: Variation der Netzfeinheit für  $V_f = 20 \text{ kg/m}^3$  | Zugarbeitslinien

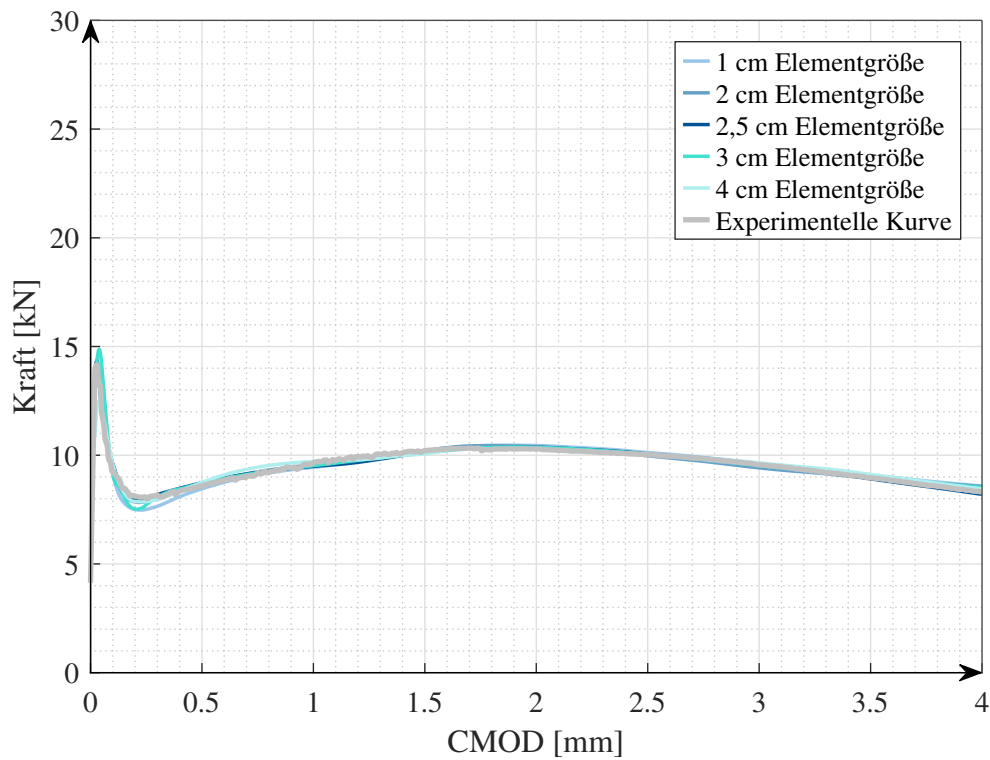


Abb. 4.2: Variation der Netzfeinheit für  $V_f = 20 \text{ kg/m}^3$  | Kraft-CMOD-Beziehungen

Fasergehalt  $V_f = 40 \text{ kg/m}^3$

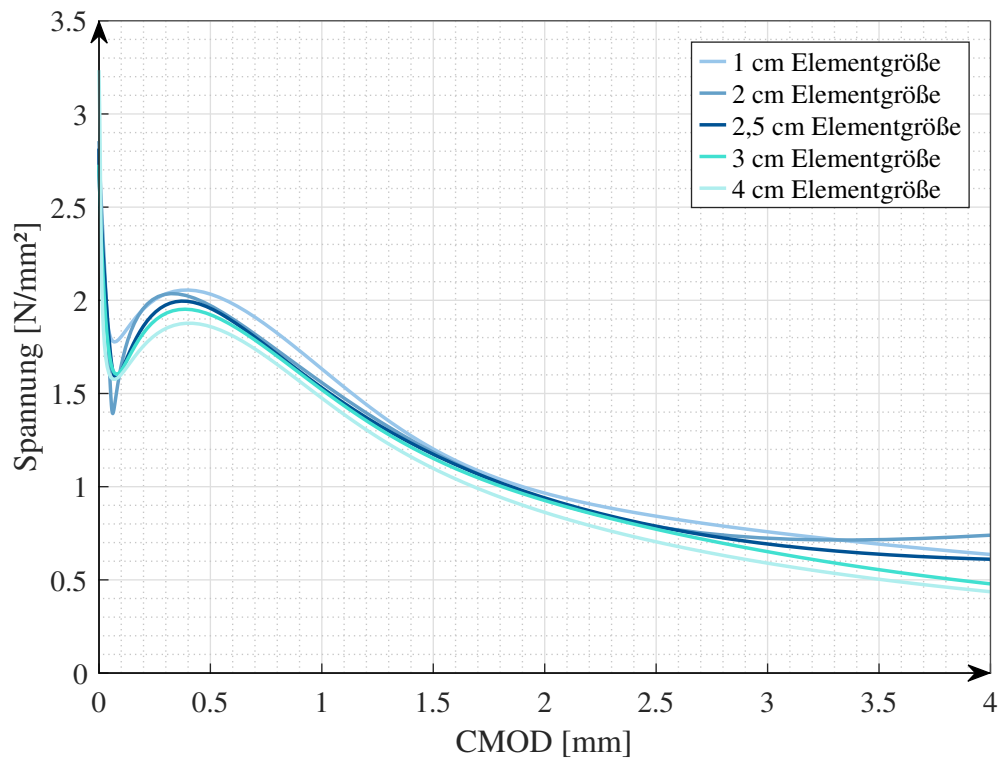


Abb. 4.3: Variation der Netzfeinheit für  $V_f = 40 \text{ kg/m}^3$  | Zugarbeitslinien

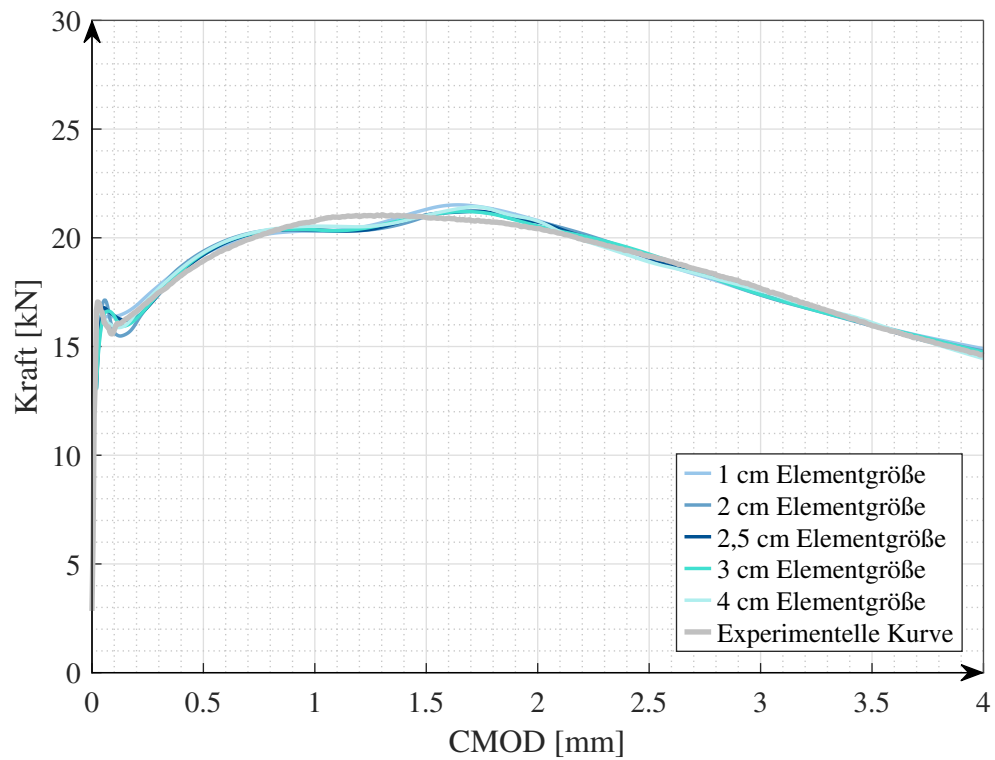


Abb. 4.4: Variation der Netzfeinheit für  $V_f = 40 \text{ kg/m}^3$  | Kraft-CMOD-Beziehungen

Fasergehalt  $V_f = 80 \text{ kg/m}^3$

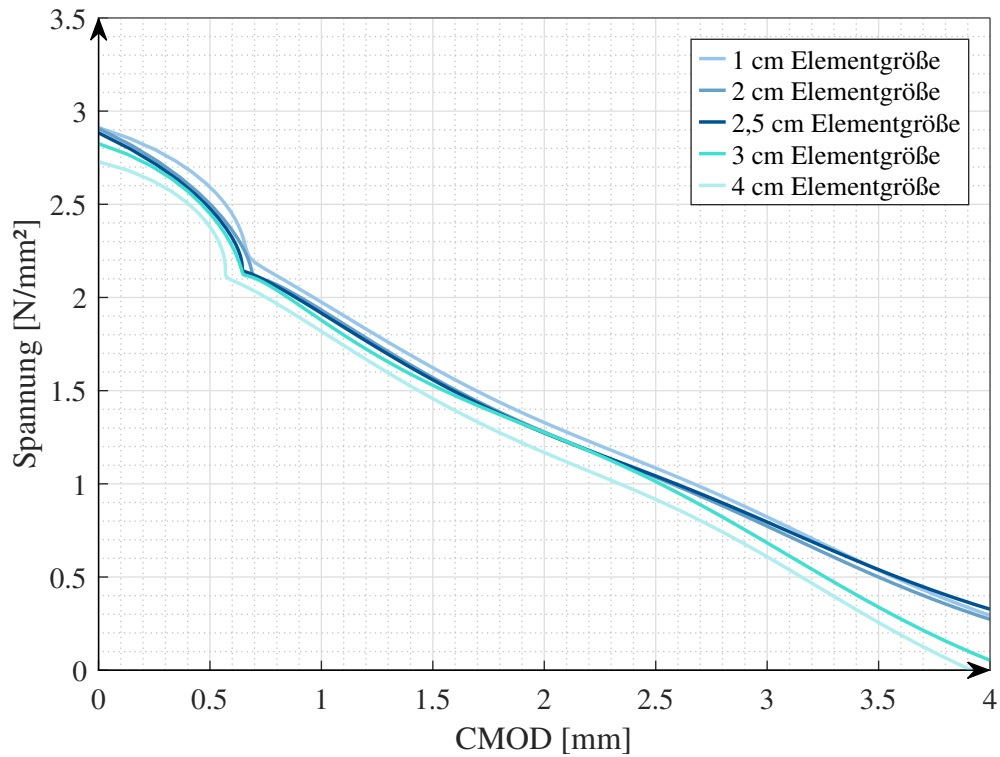


Abb. 4.5: Variation der Netzfeinheit für  $V_f = 80 \text{ kg/m}^3$  | Zugarbeitslinien

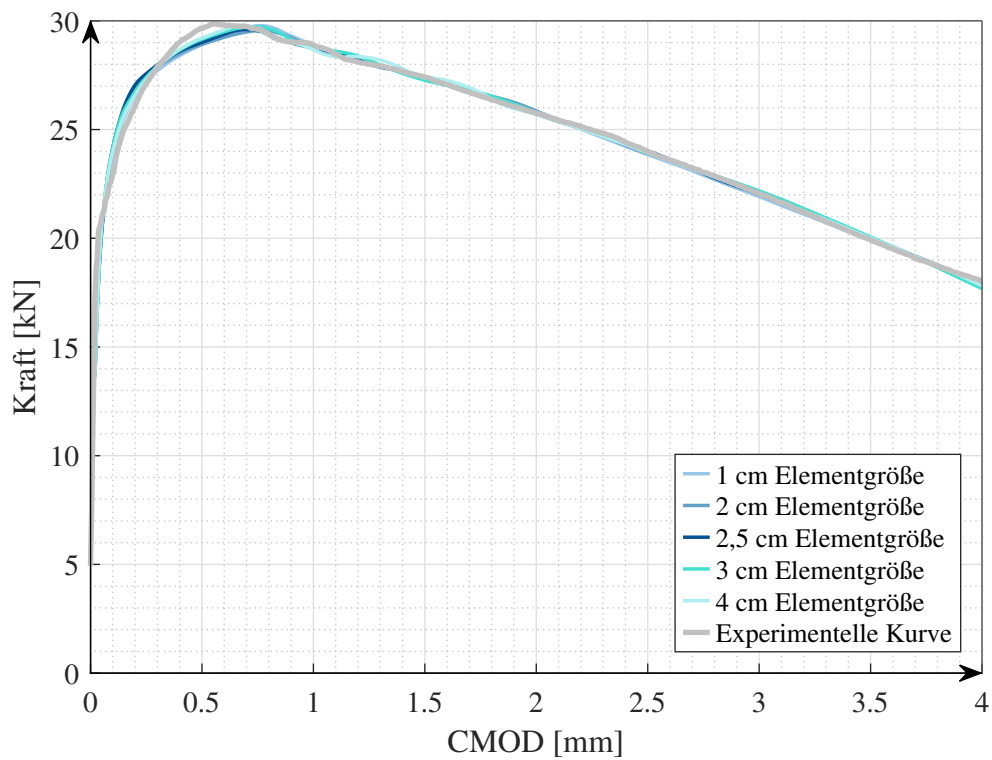


Abb. 4.6: Variation der Netzfeinheit für  $V_f = 80 \text{ kg/m}^3$  | Kraft-CMOD-Beziehungen

## 4.2. Variation der Zugschädigung

Im nächsten Schritt wird die gleiche experimentelle Kraft-CMOD-Beziehung aus Kap. 4.1 von [72] für eine inverse Analyse angesetzt und die Zugschädigung variiert. Dieser Arbeit liegt je eine Zugschädigung für  $V_f = 40 \text{ kg/m}^3$  und  $V_f = 80 \text{ kg/m}^3$  vor. Die Eingaben des numerischen Modells des Biegezugversuches sind dem Anhang A zu entnehmen. Lediglich die Zugschädigung wurde für jeden Fasergehalt variiert.

Die Abb. 4.7, 4.9 und 4.11 stellen die resultierenden Arbeitslinien bei Variation der Schädigung und angesetzter Kraft-CMOD-Beziehung dar. Die ergänzenden Abb. 4.8, 4.10 bzw. 4.12 verdeutlichen die Qualität der Arbeitslinie durch Gegenüberstellung der numerischen und experimentellen Kraft-CMOD-Beziehung.

Eine Sensitivitätsanalyse mit nur zwei unterschiedlichen Zugschädigungen beschränkt sich stark in ihrer Aussagekraft. Daher werden die Arbeitslinien nicht im Detail untersucht, sondern stellen lediglich grobe Tendenzen dar. So sind besonders für die Fasergehalte  $V_f = 40 \text{ kg/m}^3$  und  $V_f = 80 \text{ kg/m}^3$  große Unterschiede zwischen den Arbeitslinien zu verzeichnen, bei dem der globale Kurvenverlauf stark voneinander abweicht. Während der inversen Analyse fiel auf, dass für den Fasergehalt  $V_f = 40 \text{ kg/m}^3$  unterschiedliche initiale Arbeitslinien gewählt werden mussten. Ein Start der inversen Analyse für die Kraft-CMOD-Beziehung ( $V_f = 40 \text{ kg/m}^3$ ) mit einer  $80 \text{ kg/m}^3$  Zugschädigung war folglich nicht mit der resultierenden Arbeitslinie für eine  $40 \text{ kg/m}^3$  Zugschädigung als initiale Linie möglich. Abaqus/CAE bricht die erste Berechnung mit einem Fehler ab und die Heuristik beendet die Analyse. Folglich müssen sich die Arbeitslinien stark voneinander unterscheiden, was durch Abb. 4.9 bekräftigt wird. Für den Fasergehalt  $V_f = 80 \text{ kg/m}^3$  konnte zwar die gleiche initiale Arbeitslinie gewählt werden, jedoch wurde die Arbeitslinie für die  $40 \text{ kg/m}^3$  deutlich abgeändert.

Aus den resultierenden Arbeitslinien und dem Prozess der inversen Analyse lässt sich schlussfolgern, dass der Verlauf der Arbeitslinie besonders durch die implementierte Zugschädigung beeinflusst wird. Zum eigentlichen Verlauf der Arbeitslinie in Abhängigkeit der Zugschädigung werden an dieser Stelle keine Aussagen getroffen.

Fasergehalt  $V_f = 20 \text{ kg/m}^3$

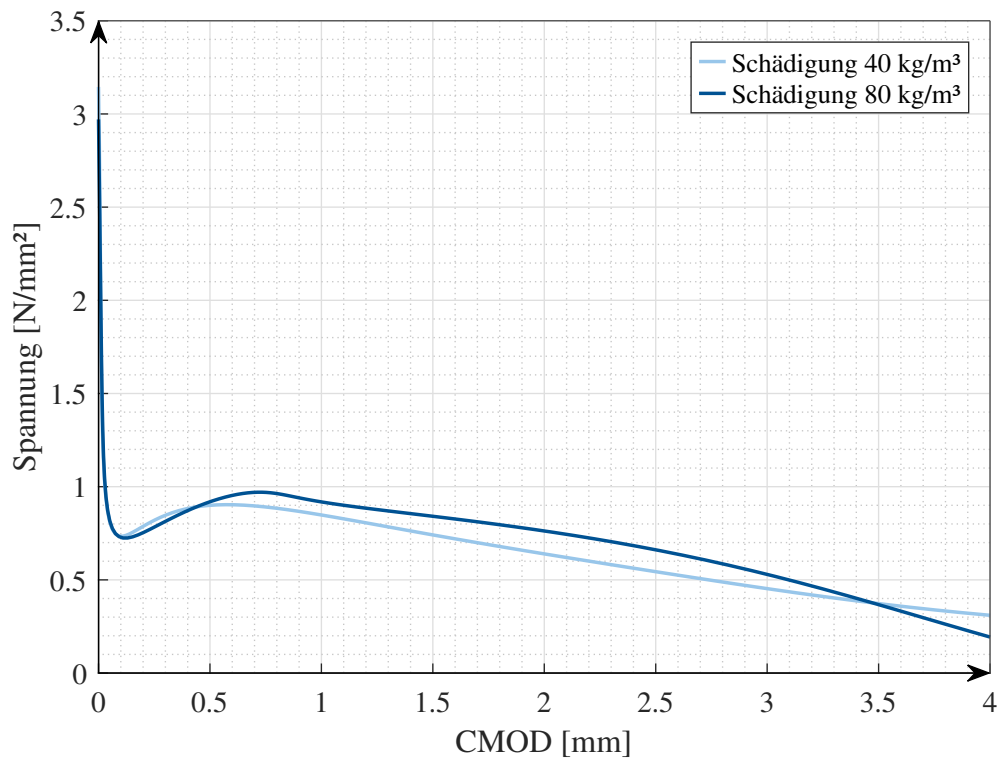


Abb. 4.7: Variation der Zugschädigung für  $V_f = 20 \text{ kg/m}^3$  | Zugarbeitslinien

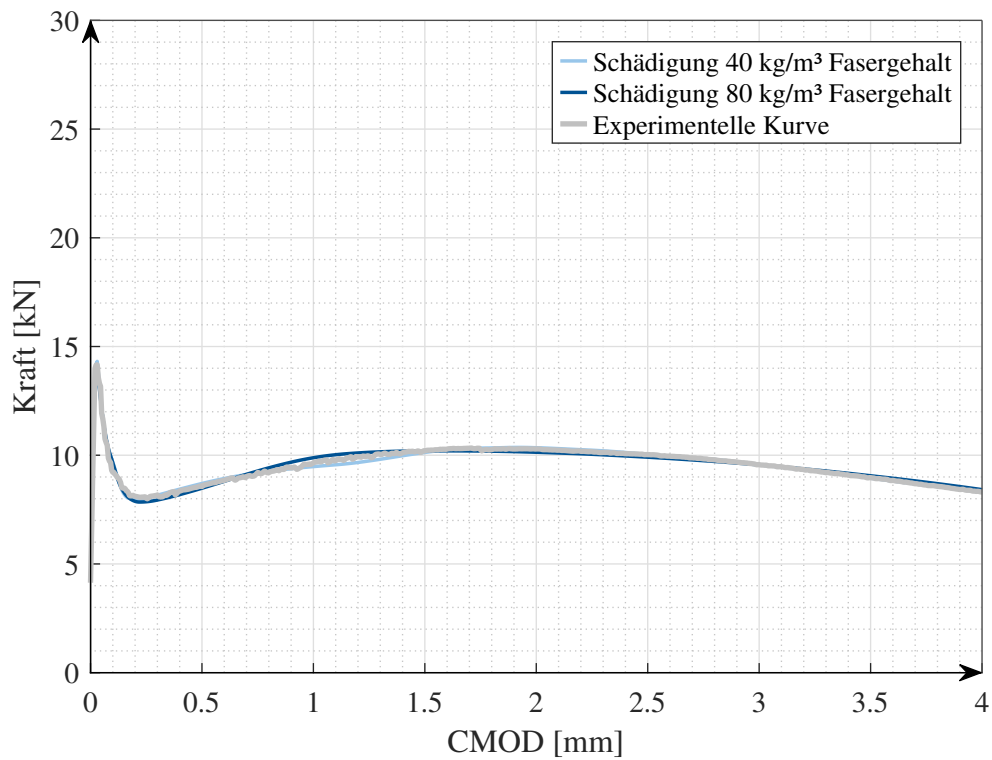


Abb. 4.8: Variation der Zugschädigung für  $V_f = 20 \text{ kg/m}^3$  | Kraft-CMOD-Beziehungen



Fasergehalt  $V_f = 40 \text{ kg/m}^3$

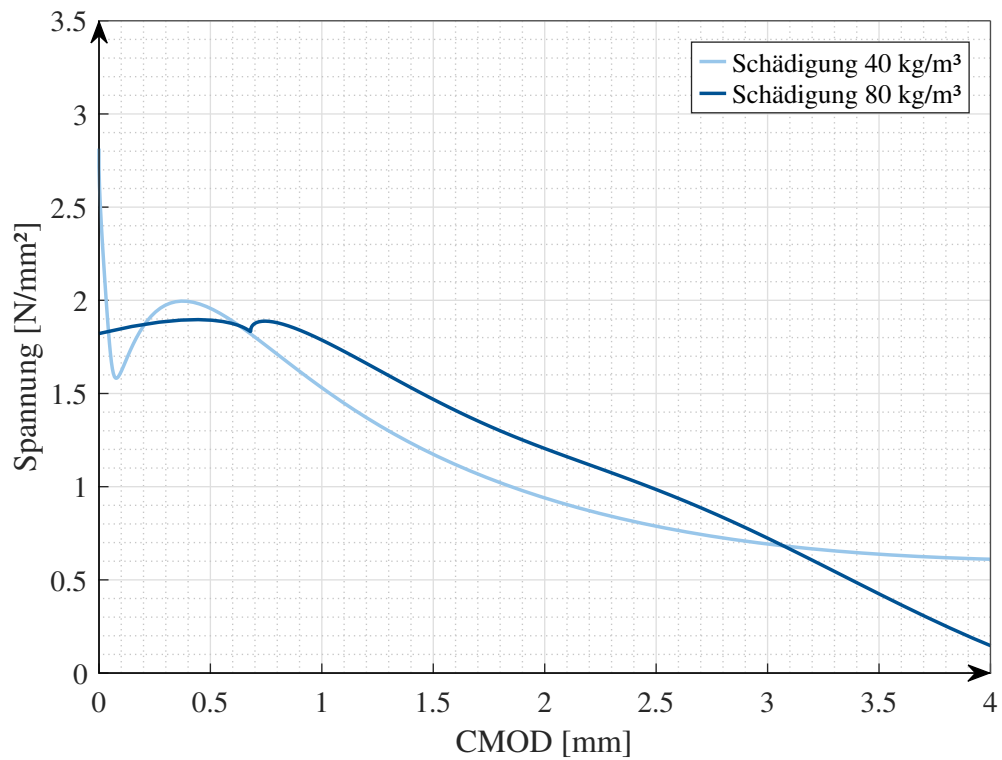


Abb. 4.9: Variation der Zugschädigung für  $V_f = 40 \text{ kg/m}^3$  | Zugarbeitslinien

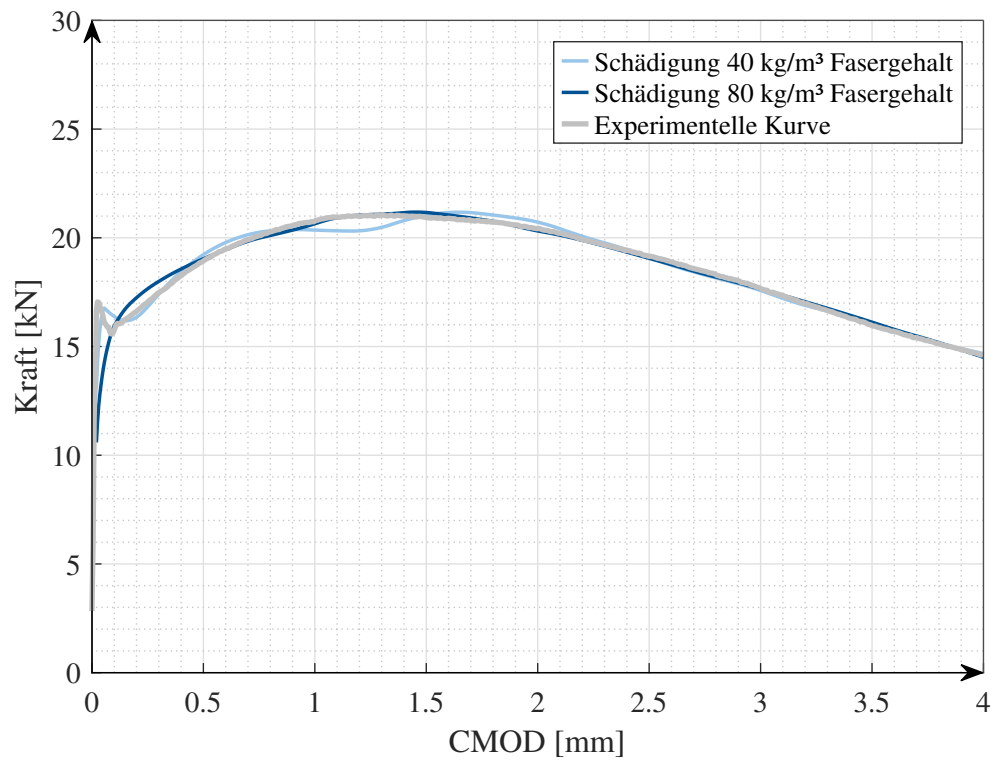


Abb. 4.10: Variation der Zugschädigung für  $V_f = 40 \text{ kg/m}^3$  | Kraft-CMOD-Beziehungen

Fasergehalt  $V_f = 80 \text{ kg/m}^3$

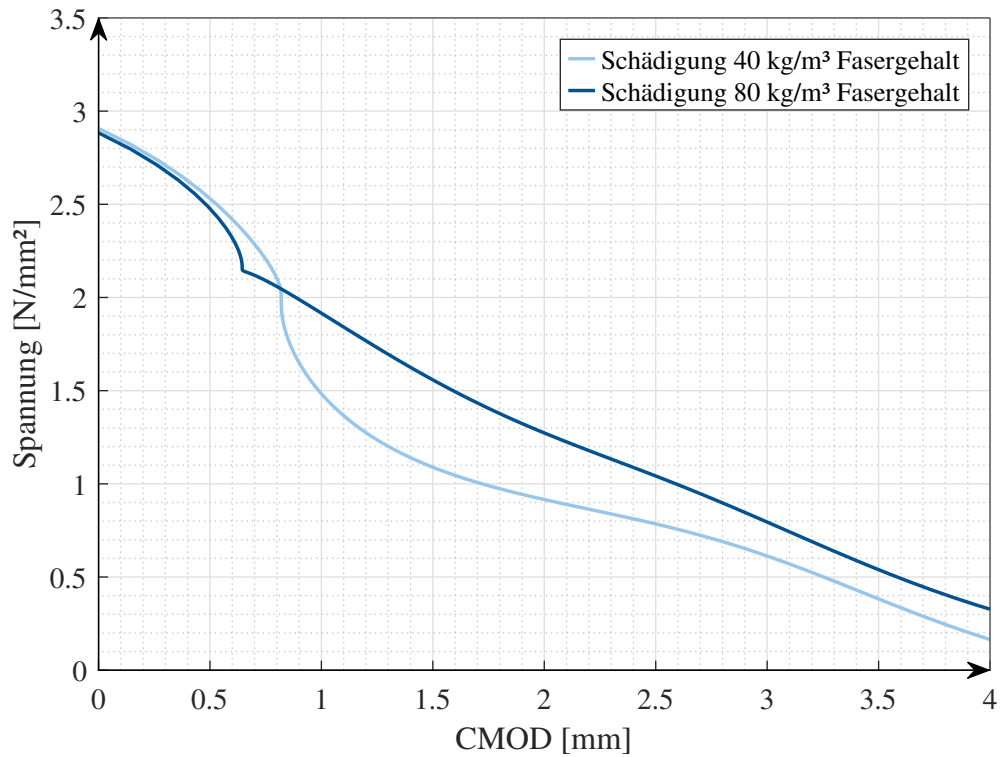


Abb. 4.11: Variation der Zugschädigung für  $V_f = 80 \text{ kg/m}^3$  | Zugarbeitslinien

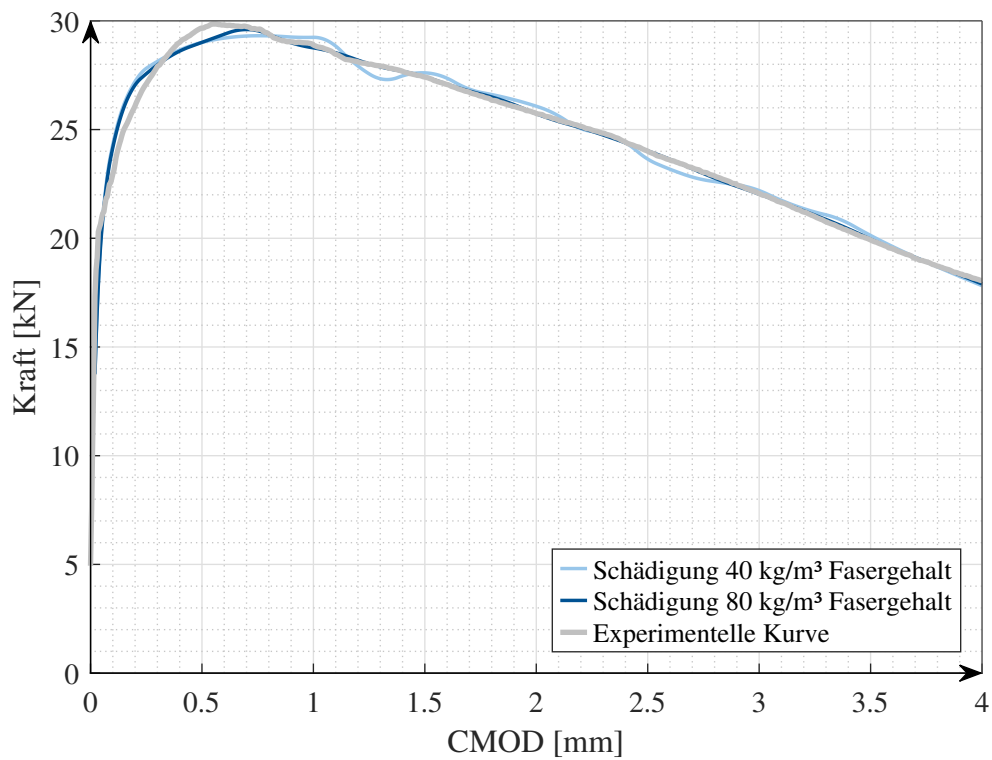


Abb. 4.12: Variation der Zugschädigung für  $V_f = 80 \text{ kg/m}^3$  | Kraft-CMOD-Beziehungen

### 4.3. Variation des Dilatanzwinkels

Abschließend soll der Einfluss des Dilatanzwinkels auf die Zugarbeitslinie untersucht werden. Hierzu werden wieder die experimentellen Kraft-CMOD-Beziehungen aus Kap. 4.1 von [72] aufgegriffen. Die Eingabeparameter des Anhangs A werden für das numerische Modell verwendet und nur der Dilatanzwinkel variiert.

Die Abb. 4.13, 4.15 und 4.17 stellen die resultierenden Arbeitslinien bei Variation des Dilatanzwinkels ( $30^\circ$ ,  $35^\circ$ ,  $42^\circ$ ,  $45^\circ$  und  $50^\circ$ ) und angesetzter Kraft-CMOD-Beziehung dar. Die ergänzenden Abb. 4.14, 4.16 bzw. 4.18 verdeutlichen die Qualität der Arbeitslinie durch Gegenüberstellung der numerischen und experimentellen Kraft-CMOD-Beziehung und zeigen, dass die Arbeitslinien die jeweilige Kraft-CMOD-Beziehung annähernd gleich beschreiben. Ein Vergleich der Arbeitslinien ist damit möglich.

Die Sensitivitätsanalyse aller Fasergehalte zeigen keine nennenswerten Unterschiede der Zugarbeitslinien bei Änderung des Dilatanzwinkels. Differenzen sind an dieser Stelle eher auf den approximierenden Charakter der Heuristik zurückzuführen. Demnach hat die Variation des Dilatanzwinkels bei der inversen Analyse des numerischen Biegezugversuches keine bis nur marginale Auswirkungen auf die plastische Zugarbeitslinie.

Fasergehalt  $V_f = 20 \text{ kg/m}^3$

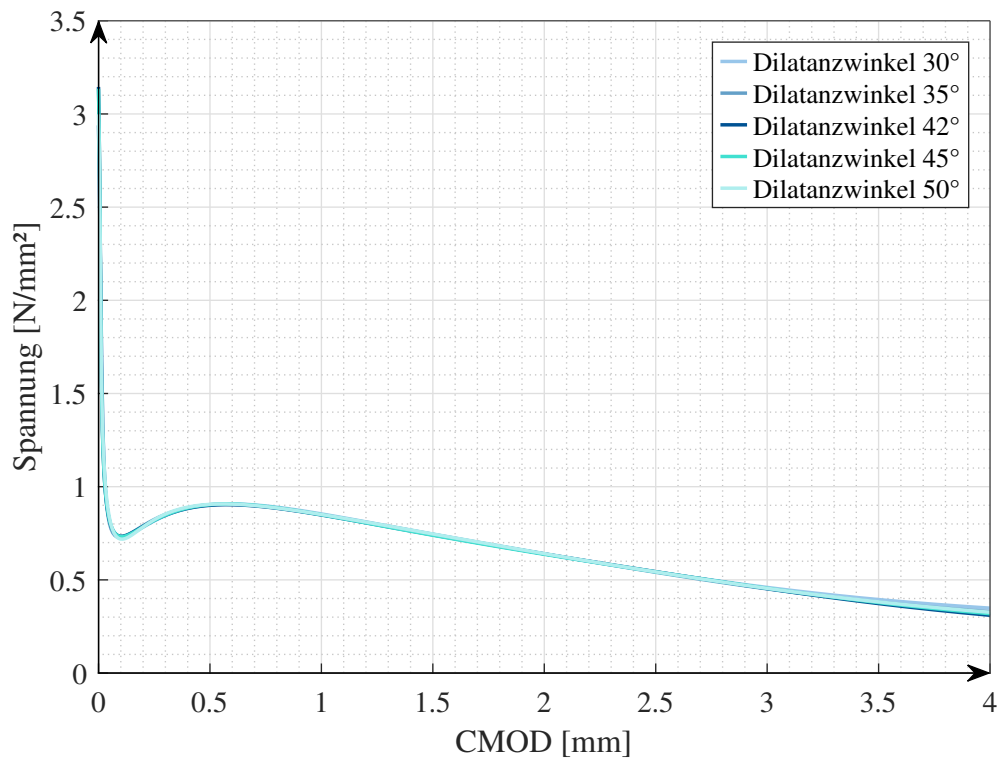


Abb. 4.13: Variation des Dilatanzwinkels für  $V_f = 20 \text{ kg/m}^3$  | Zugarbeitslinien

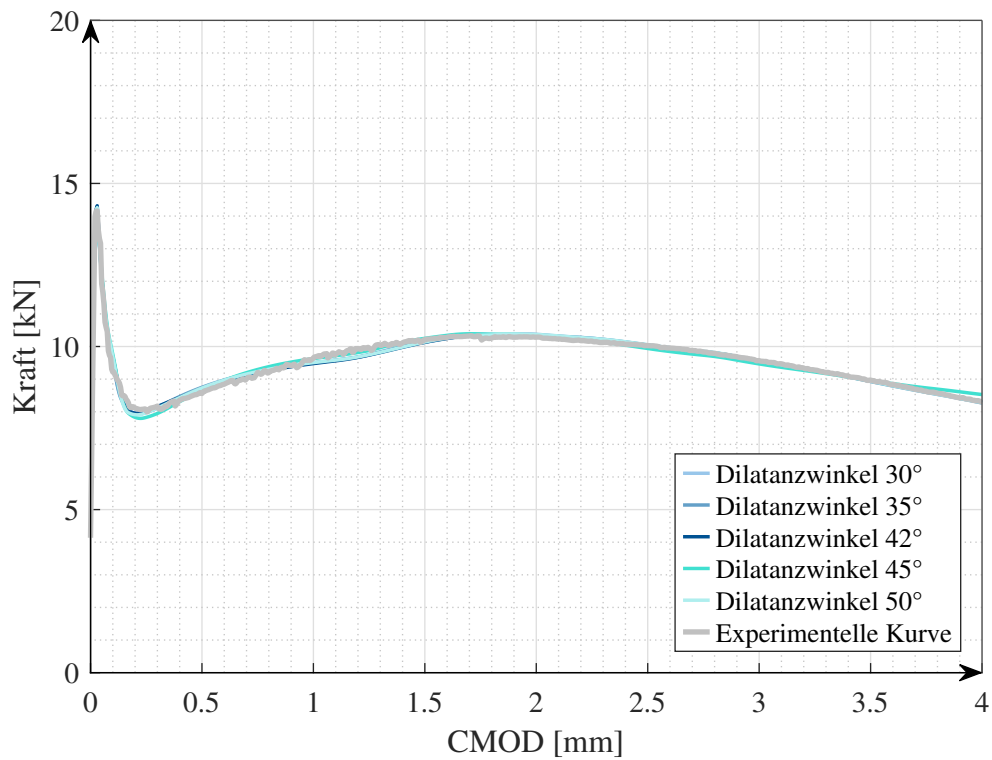


Abb. 4.14: Variation des Dilatanzwinkels für  $V_f = 20 \text{ kg/m}^3$  | Kraft-CMOD-Beziehungen

Fasergehalt  $V_f = 40 \text{ kg/m}^3$

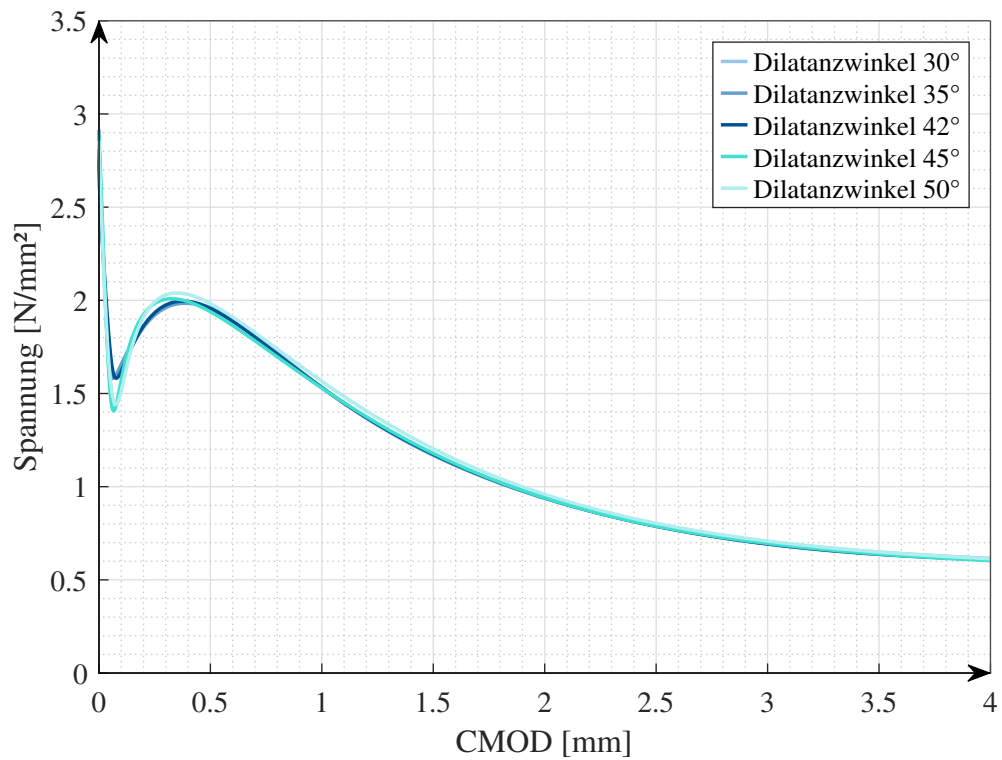


Abb. 4.15: Variation des Dilatanzwinkels für  $V_f = 40 \text{ kg/m}^3$  | Zugarbeitslinien

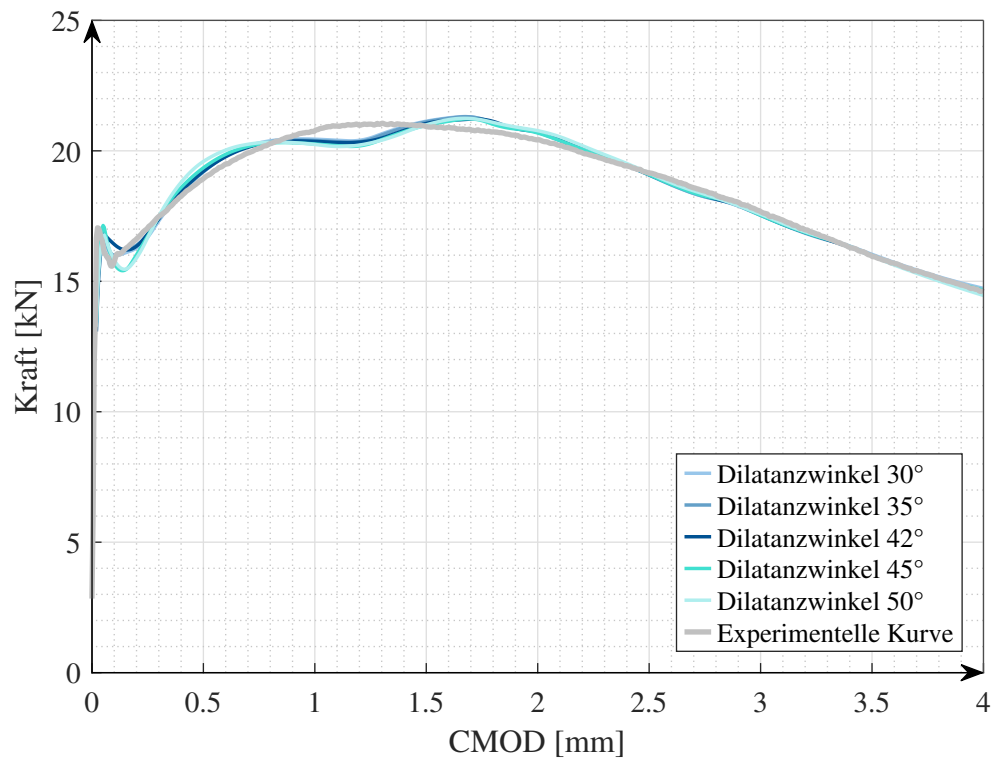


Abb. 4.16: Variation des Dilatanzwinkels für  $V_f = 40 \text{ kg/m}^3$  | Kraft-CMOD-Beziehungen

Fasergehalt  $V_f = 80 \text{ kg/m}^3$

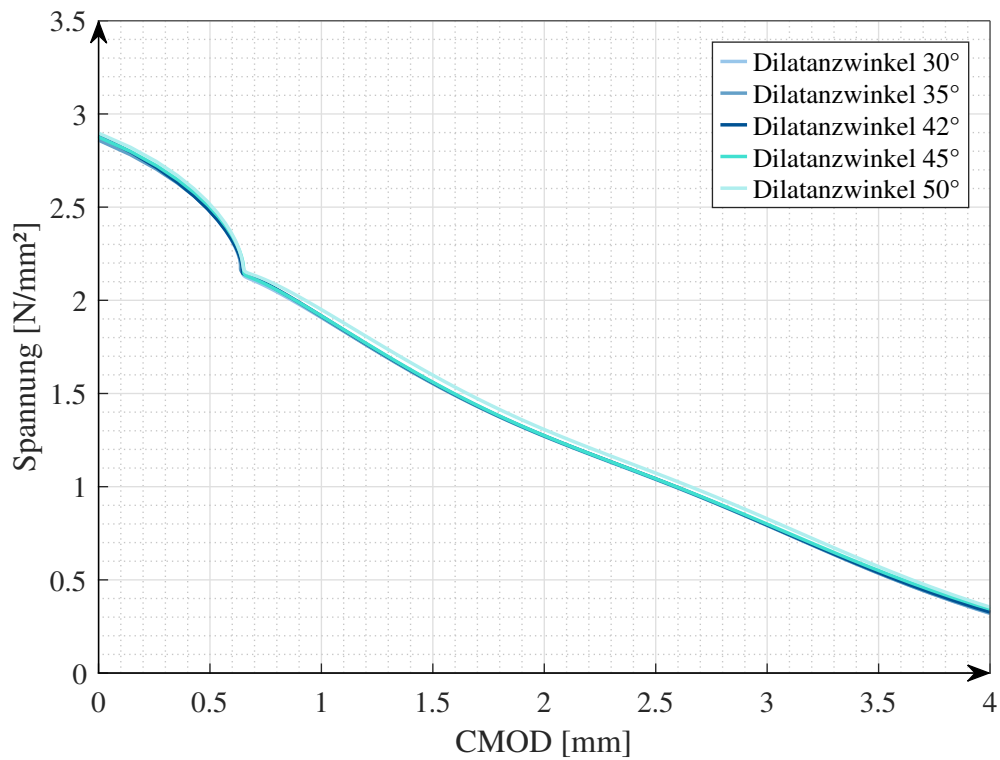


Abb. 4.17: Variation des Dilatanzwinkels für  $V_f = 80 \text{ kg/m}^3$  | Zugarbeitslinien

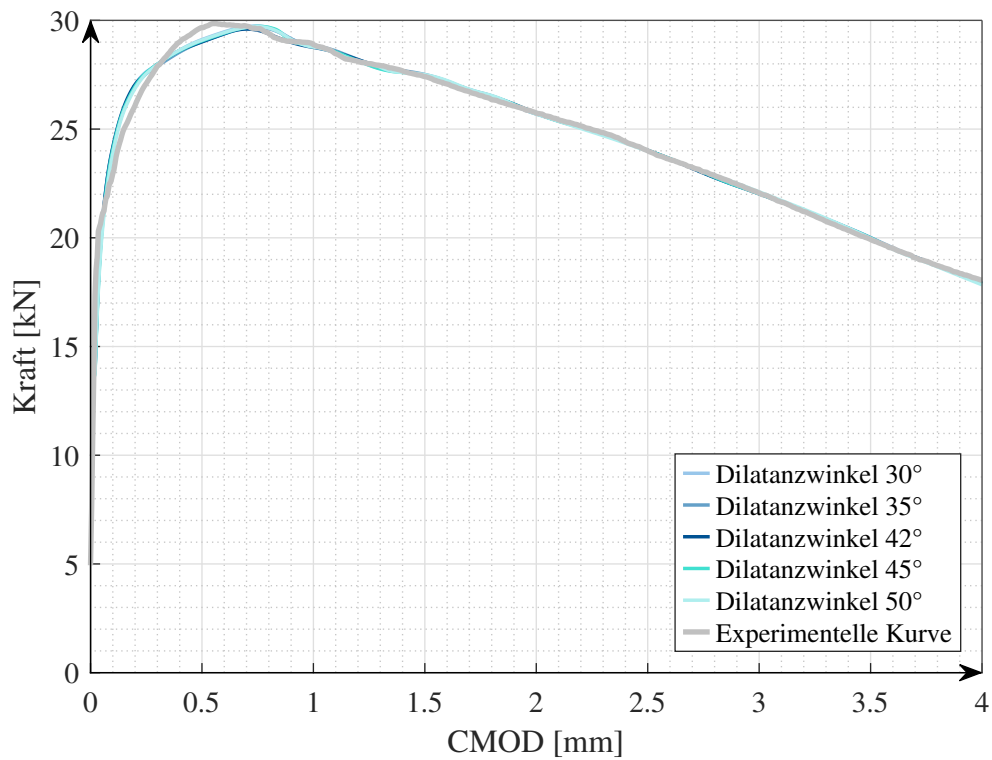


Abb. 4.18: Variation des Dilatanzwinkels für  $V_f = 80 \text{ kg/m}^3$  | Kraft-CMOD-Beziehungen

---

## 5. Anwendung der Heuristik anhand numerischer Berechnungen des Querkraftversagens eines bewehrten Faserbeton-Balkens

### 5.1. Hintergrund der Berechnung

Im Winter 2019 veröffentlichte die Arbeitsgruppe *WG 2.4.1-Modeling of FRC structures* der *Fédération internationale du béton (fib)* eine *blind simulation competition* [75] an dem Unternehmen und Universitäten, teilweise in Kooperation, in Form von 36 Teilnehmern beteiligt waren. Ziel des Wettbewerbs war es, die Ergebnisse verschiedener Ansätze zur Vorhersage des Tragverhaltens von Stahlfaserbetonbauteilen zu vergleichen [75, S.4]. Der Fokus des Wettbewerbs lag auf der FEM-Modellierung eines Großkörperbauteils mit anschließender Bewertung der Ergebnisse mittels experimentell bestimmten Verformungsantworten, Rissmustern sowie Dehnungs- und Spannungsfeldern in den Werkstoffen der Komponenten [75, S.6].

Grundlegende Parameter und Werkstoffeigenschaften wurden von der fib zur Verfügung gestellt, die Materialantworten des Großkörpers unter Belastung jedoch nicht. Aufgrund dessen lag der Sinn der *blind simulation competition* in der Vorhersage des Tragverhaltens ohne nachträgliche Anpassung der Modelle. Hierüber sollen Stärken und Schwächen der Ansätze identifiziert werden. Der Wettbewerb sollte besonders im Hinblick einer Reduzierung der inversen Berechnung einen Teil zur Verbesserung der FE-Vorhersage des Tragverhaltens von Stahlfaserbauteilen beitragen. Ferner wurde eine Untersuchung des Prüfkörpers unter Scherversagen gewählt, da besonders diese Versagensart begleitende Experimente zur Berechnung der Faserbauteile benötigt [75, S.4]. Die von der fib zur Verfügung gestellten Daten zur Modellierung des Prüfkörpers werden im folgenden Kapitel vorgestellt.

Der Lehrstuhl für Massivbau der Technischen Universität München hat am besagten Wettbewerb teilgenommen und konnte bereits gute Ergebnisse durch eigene FE-Modellierungen vorweisen. In diesem Kapitel soll der Versuch nochmals mittels neuen Materialdaten durch [72] und der entwickelten Heuristik zur Bestimmung der Zugarbeitslinie berechnet werden. Durch Vergleich der Berechnung mit den fib-Versuchsergebnissen, die nach dem Wettbewerb veröffentlicht wurden, soll das Modell bewertet werden.

### 5.2. Angaben zur Modellierung

Als Prüfkörper dient ein einfach gelagertes T-Profil aus Stahlfaserbeton mit zusätzlicher Stahlbewehrung. Die Maße und Bewehrung des Balkens sind der Abb. 5.1 zu entnehmen. Die Querkraftbewehrung im kritischen Querkraftbereich entfällt. Die Betondeckung von 30 mm ist zu berücksichtigen. Eine außermittige Einzellast stellt die Einwirkung dar, die bis zum Versagen des Bauteils Weg-gesteuert erhöht wird. Während des Versuches wird die Durchbiegung an der Stelle der Einzellast über IvdT-Wegaufnehmer mittels japanischem Jochsystems gemessen. Weiterhin wird die Dehnung des Balkens entlang und auf Höhe der unteren Längsbewehrung mittels IvdT-Wegaufnehmern ermittelt. Der Versuch wurde an zwei Prüfkörpern durch die Arbeitsgruppe der fib durchgeführt und die Ergebnisse der Teilnehmer bewertet. Für die Modellierung der Materialien haben die Teilnehmer Informationen zum Faserbeton und der

## 5.2 Angaben zur Modellierung

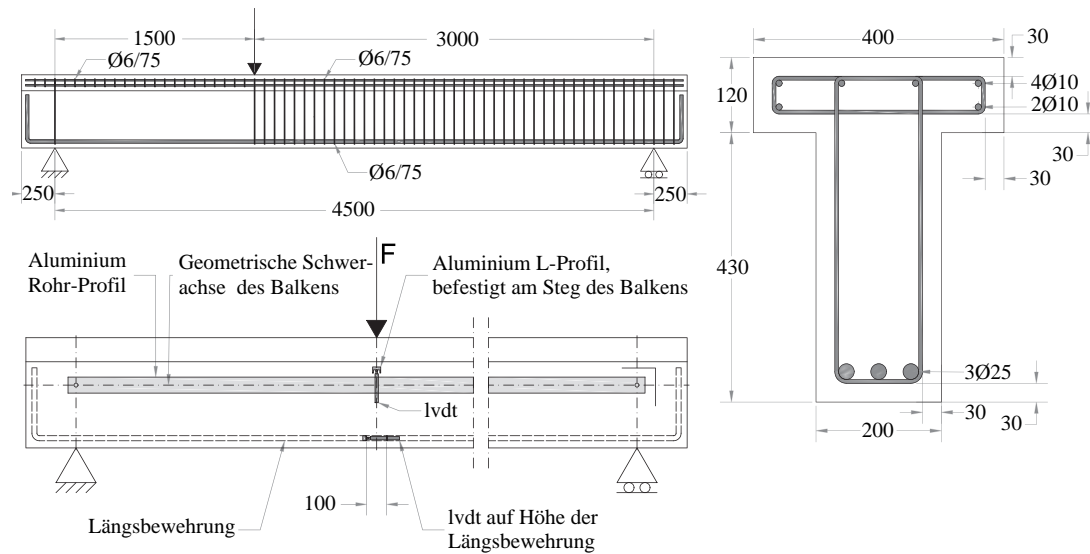


Abb. 5.1: Dimensionen und Bewehrung des Stahlfaserbetonbalkens als Großprüfkörper (alle Maße in mm) [75, S.3]

Stahlbewehrung erhalten, die zum Teil in Tabelle 5.1 dargestellt sind. Neben Betonrezeptur, verwendetem Fasertyp, Druckfestigkeit und Dichte sowie dem experimentell ermitteltem E-Modul des Faserbetons, wurden Kraft-CMOD-Beziehungen aus drei-Punkt-Biegezugversuche analog zur Norm DIN EN 14651 mit 10 Probekörpern zur Verfügung gestellt. Sechs Probekörper wurden dabei nach 7 Tagen und vier Körper nach 14 Tagen der Herstellung getestet [75, S.9]. Ferner erhielten die Teilnehmer Streckgrenzen und Festigkeiten der Stahlbewehrung.

Tab. 5.1: Zur Verfügung gestellte Materialparameter (fib)

<b>Beton</b>	C50/60 XD3 (P) CL 0.20 D <sub>max</sub> 12.5 S5			
<b>Zement</b>	CEM II/A-L 42.5R			
<b>Druckfestigkeit (7   14Tage)</b>	f <sub>cm</sub> [MPa]	f <sub>cm</sub> [MPa]		
	56.9	64.2		
<b>Faserart (Typ   Ø   Länge   Zugfestigkeit)</b>		d <sub>f</sub> [mm]	l <sub>f</sub> [mm]	f <sub>t,f</sub> [MPa]
	gekröpft	0.55	33	>1100
<b>Dichte (7   14Tage)</b>	ρ [kg/m <sup>3</sup> ]	ρ [kg/m <sup>3</sup> ]		
	2376	2400		
<b>Elastizitätsmodul (7   14Tage)</b>	E <sub>m</sub> [MPa]	E <sub>m</sub> [MPa]		
	30.3	32.9		
<b>Zugeigenschaften (7   14Tage)</b>	[MPa]	[MPa]		
f <sub>f,L</sub>	5.63	5.56		
f <sub>R,1</sub>	4.75	4.79		
f <sub>R,2</sub>	4.66	4.21		
f <sub>Rj3</sub>	3.48	3.15		
f <sub>Rj4</sub>	2.8	2.48		
<b>Stahlbewehrung (Fließgrenze   Zugfestigkeit)</b>	f <sub>ym</sub> [MPa]	f <sub>tm</sub> [MPa]		
Ø6	527.38	700.33		
Ø10	537.78	695.95		
Ø25	557.24	678.14		



## 5.3. Numerische Modellierung

### 5.3.1. Modellierung des Betonkörpers

Die Geometrie des zu modellierenden T-Profiles entspricht der Abb. 5.1. Der Balken ist als Einfeldträger gelenkig zu lagern. Im Modell stellen Linienlager bzw. Flächenlager die Halterungen des Trägers dar. Die definierten Randbedingungen sind Abb. 5.2 zu entnehmen. Die Weg-gesteuerte Verformung wird als Vorverformung in den Balken eingeleitet.

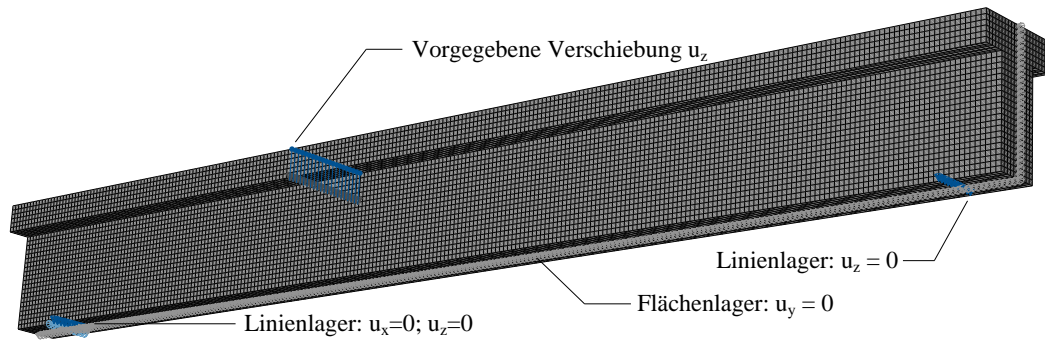


Abb. 5.2: Definition der Randbedingungen im numerischem Modell des T-Profiles (fib)

Die weiteren Eingabeparameter können dem Anhang A (Fasergehalt  $80 \text{ kg/m}^3$ ) entnommen werden. Abweichend von den Angaben im Anhang wurde jedoch eine Elementgröße von  $20 \text{ mm}$  gewählt. Dies ermöglicht eine bessere Definition von Randbedingungen und History-Outputs aufgrund einer besseren Position der generierten Knotenpunkte. Ferner wurde zwischen Elementgrößen in Zug- und Druckzone nicht unterschieden. Die maximale Anzahl an Inkrementen wurde auf  $350$  erhöht und die Werte der Tab. 5.2 als Druckarbeitslinie implementiert.

Tab. 5.2: Druckarbeitslinie des numerischen Modells (fib | T-Profil)

Druckarbeitslinie	
$\epsilon_c^{\text{in}}$ [-]	$\sigma_c$ [N/mm <sup>2</sup> ]
0	55.5642
0.0002511	57.3094
0.0003099	58.8319
0.0003747	60.1375
0.000445	61.2336
0.0005208	62.1295
0.0006017	62.8358
0.0009703	64
0.0012845	63.4732
0.0015643	62.3714
0.0018558	60.8348
0.0024607	56.9529
0.003079	52.5786
0.0036986	48.1518
0.0049203	39.948
0.0061077	33.0153
0.0072617	27.3157
0.008388	22.6433
0.0094922	18.7883
0.010579	15.5764
0.0116521	12.8718
0.0127143	10.5705
0.1	1

### 5.3.2. Modellierung der Betonstahl-Bewehrung

Die Längs- und Querkraftbewehrung wird in Abaqus als *T3D2*-Fachwerkelemente modelliert. Die Stäbe sind als *Embedded Region* mit dem Beton-Volumenkörper gekoppelt, sodass ein starrer Verbund zwischen Beton und Stahl herrscht. Zur Definition der Materialeigenschaften der Stäbe wird eine eindimensionale bilineare Spannungs-Dehnungsbeziehung angenommen. Als Eingabeparameter dienen der E-Modul ( $E_m = 210000 \text{ N/mm}^2$ ), die Querdehnzahl ( $\nu = 0,3$ ) und die Streckgrenze sowie die Zugfestigkeit, die der Tabelle 5.1 zu entnehmen sind, sodass jedem Stabdurchmesser ein eigenes Material im FE-Modell zugewiesen ist.

### 5.4. Anwendung der Heuristik zur Bestimmung der plastischen Zugarbeitslinie

Die plastische Zugarbeitslinie soll über die entwickelte Heuristik invers ermittelt werden. Als experimentelle Daten, die den Alternativen der Optimierung gegenübergestellt werden, dienen die veröffentlichten Kraft-CMOD-Beziehungen. Diese wurden in einem Biegezugversuch analog zu DIN EN 14651 bestimmt. Der Versuch ist daher als numerisches Modell zu erstellen und dient als Grundlage der numerischen Berechnung. Die Eingabeparameter des Modells sind dem Anhang A zu entnehmen, wobei abweichend eine Elementgröße in der Zugzone von 20,0 mm gewählt wurde. Es musste auf die Daten des Fasergehalts  $V_f = 80 \text{ kg/m}^3$  zurückgegriffen werden, da dem Lehrstuhl keine Ergebnisse für einen Fasergehalt  $V_f = 60 \text{ kg/m}^3$  vorliegen.

Die Kraft-CMOD-Beziehungen zu den 10 fib-Biegezugversuchen sind im Anhang B dargestellt. Für jeden Versuch/Balken wurde die inverse Analyse durchgeführt. Ferner diente eine Durchschnittskurve aller Kraft-CMOD-Beziehungen als weitere Berechnungsgrundlage. In einem folgenden Schritt wurde eine Mittellungskurve aus allen berechneten Arbeitslinien der einzelnen Versuche gezogen. Demzufolge liegen 12 Arbeitslinien vor, mit denen das Tragverhalten des T-Profiles berechnet werden kann. Die Arbeitslinien sind ebenfalls im Anhang B dargestellt.

### 5.5. Auswertung der numerischen Berechnung des Faserbeton-Balkens

Die Abb. 5.1 verdeutlicht, wie die Durchbiegung und Dehnung mit Hilfe von Wegaufnehmern während der realen Belastung ermittelt wurde. Die Dehnung entspricht dem Verhältnis der aufgezeichneten Verschiebung zur Referenzlänge von 100 mm [75, S.10]. Die Abb. 5.3 veranschaulicht die Ausgabeknoten zur Verformungsermittlung des FE-Modells. Da die Referenzlänge des realen Wegaufnehmers nicht mit den Knotenpunkten des FE-Modells korrespondiert, wird die Verformung in Längsrichtung von zwei Knoten je Seite ausgegeben und deren Mittelwert bestimmt. Die resultierenden Durchbiegungen und Dehnungen der Mittelwertkurven und beispielhaft des Balkens 9 sind in Abb. 5.5 und 5.6 dargestellt und den experimentellen Ergebnissen gegenübergestellt.

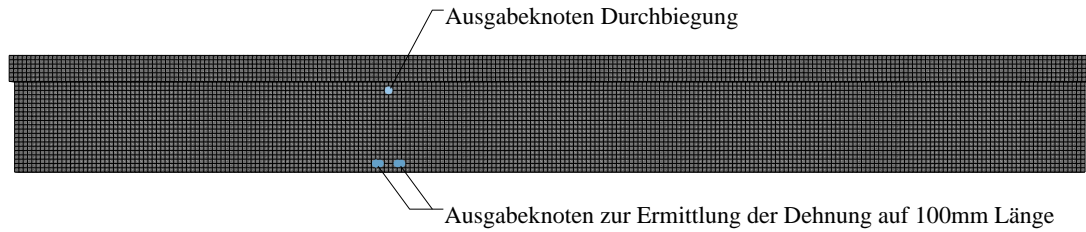


Abb. 5.3: Definition der Ausgabeknoten zur Ermittlung der Dehnung und Durchbiegung (fib T-Profil)

Um die Leistungsfähigkeit des angesetzten Modells zu quantifizieren, wurde im Wettbewerb der Fehler  $Err_F$  [-] zwischen FEM- und experimentellen Daten wie folgt berechnet [75, S.11]:

$$Err_F = \frac{1}{n_{Err}} \sum_k \left( \frac{|F_{exp}^k - F_{num}^k|}{F_{exp}^k} \right) \quad (5.1)$$

Dabei ist  $k$  die  $kte$  Datenaufzeichnung des Experiments,  $F_{exp}^k$  und  $F_{num}^k$  die korrespondierenden experimentellen und numerischen Ergebnisse und  $n_{Err}$  die Gesamtzahl der Datenaufzeichnungen. Die aufgeführte Fehlerberechnung bezieht sich auf den Fehler zwischen Versuchs- und numerischer Kraft in Abhängigkeit der Durchbiegung und wird analog für den Dehnungsfehler angewendet.

Darüber hinaus wird der Fehler der maximalen Kraftaufnahme, der Durchbiegung und Dehnung bei Erreichen der numerischen Maximalkraft nach folgendem Schema ermittelt [75, S.11]:

$$\Delta F / F = \frac{|F_{exp}^{max} - F_{num}^{max}|}{F_{exp}^{max}} \quad (5.2)$$

Abschließend werden die Ergebnisse als Bewertungszahl (*Score*) zusammengefasst [75, S.11]:

$$Score = 0,35 \cdot \Delta F / F + 0,15 \cdot Err_F + 0,25 \cdot \Delta \epsilon / \epsilon + 0,1 \cdot Err_\epsilon + 0,15 \cdot \Delta u / u \quad (5.3)$$

Im Folgenden soll die Bewertungszahl für die Variante der invers ermittelten Arbeitslinie aus dem Durchschnitt aller Kraft-CMOD-Beziehungen ermittelt werden. Die einzelnen Fehler sind der Tab. 5.3 zu entnehmen. Ferner ist in der Tabelle die Auswertung der TUM Ergebnisse bei Teilnahme am Wettbewerb dargestellt. Auffällig ist, dass der eigentliche Verlauf des Tragverhaltens während der Belastung durch das Wettbewerbsmodell besser beschrieben wurde. Das Modell mit der Heuristik als Mittel zur inversen Analyse stellt lediglich die Dehnung bei Höchstlast besser dar. Zum Zeitpunkt des Wettbewerbs wurde das Modell ebenfalls in Abaqus unter Anwendung des Concrete Damaged Plasticity Modells erstellt, wobei keine differenzierte Schädigung Berücksichtigung fand. Zur inversen Analyse der plastischen Arbeitslinie diente damals der Ansatz nach [76].

Die Abb. 5.5 und 5.6 zeigen eine Diskrepanz zwischen FEM- und experimentellen Ergebnissen. Die Maximallast und die maximale Durchbiegung werden im FEM-Modell unterschätzt. Die Dehnung auf Höhe der unteren Längsbewehrung wird hingegen überschätzt. Global gesehen,

wirkt der FE-Balken steifer und spröder. Die hohe Längsdehnung impliziert eine Dehnung in der Längsbewehrung, die ggf. einer zu hohen Stahlspannung gegenübersteht. Eine Anpassung der steifen Kopplung zwischen Volumenkörper und Fachwerkstäben kann womöglich Abhilfe schaffen und die globale Steifigkeit des Balkens reduzieren. Ferner zeigt die Gegenüberstellung der verschiedenen Ergebnislinien (siehe hierzu auch Abb. 5.7 und 5.8), dass die inverse Analyse einer Mittellinie aller Kraft-CMOD-Beziehungen gleichwertige Ergebnisse zu einer Mittelung aller invers berechneten Arbeitslinien liefert. Demnach wäre die Berechnung einer Arbeitslinie ausreichend, was den Aufwand der Analyse mindert.

Tab. 5.3: Quantitative Bewertung der Modellansätze (fib) nach [75, S.11]

	$\Delta F/F$ [%]	$Err_F$ [%]	$\Delta \epsilon/\epsilon$ [%]	$Err_\epsilon$ [%]	$\Delta u/u$ [%]	Score [%]
TUM fib	13,48	42,25	43,63	57,98	24,84	31,49
Heuristik	13,55	67,93	7,60	77,93	30,04	30,34

Der Abb. 5.4 können die Rissbilder, dargestellt als plastische Dehnungen (PEMAG - Plastic strain magnitude), bei Erreichen von 95 % und 100 % der Maximallast entnommen werden. Als Zugarbeitslinie diente hier das Mittel der Kraft-CMOD-Beziehungen. Positiv zu verzeichnen ist der markante Querriss im Bereich der Lasteinleitung, der ein Querkraftversagen veranschaulicht, das es zu modellieren galt.

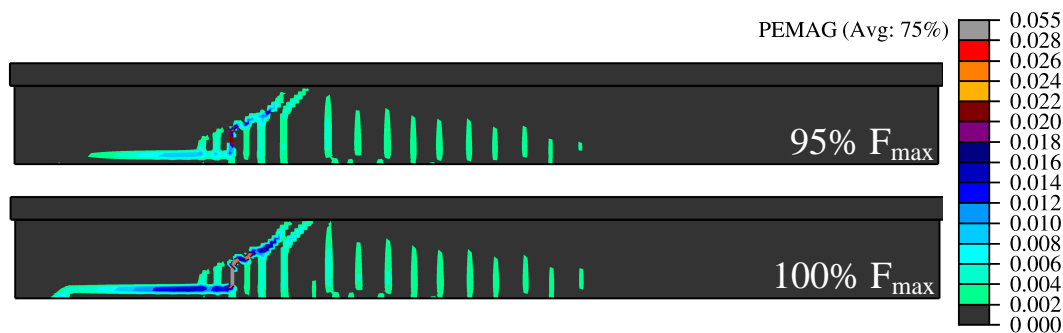


Abb. 5.4: Rissbild des numerischen T-Profil-Modells bei 95 % und 100 % Maximallast  $F_{max}$

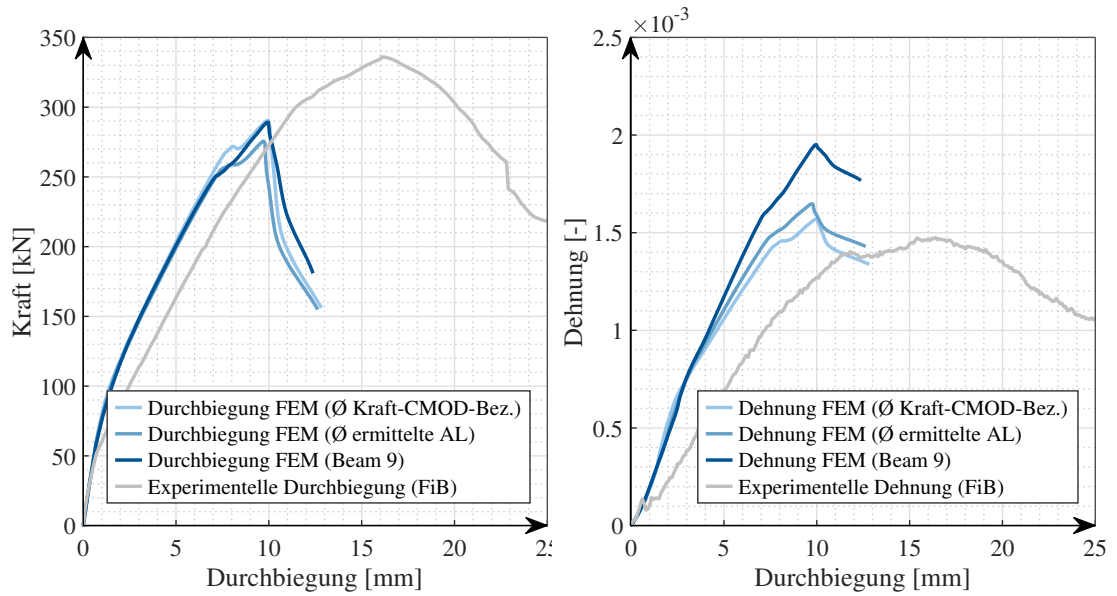


Abb. 5.5: Gegenüberstellung der Durchbiegung (fib)

Abb. 5.6: Gegenüberstellung der Dehnung (fib)

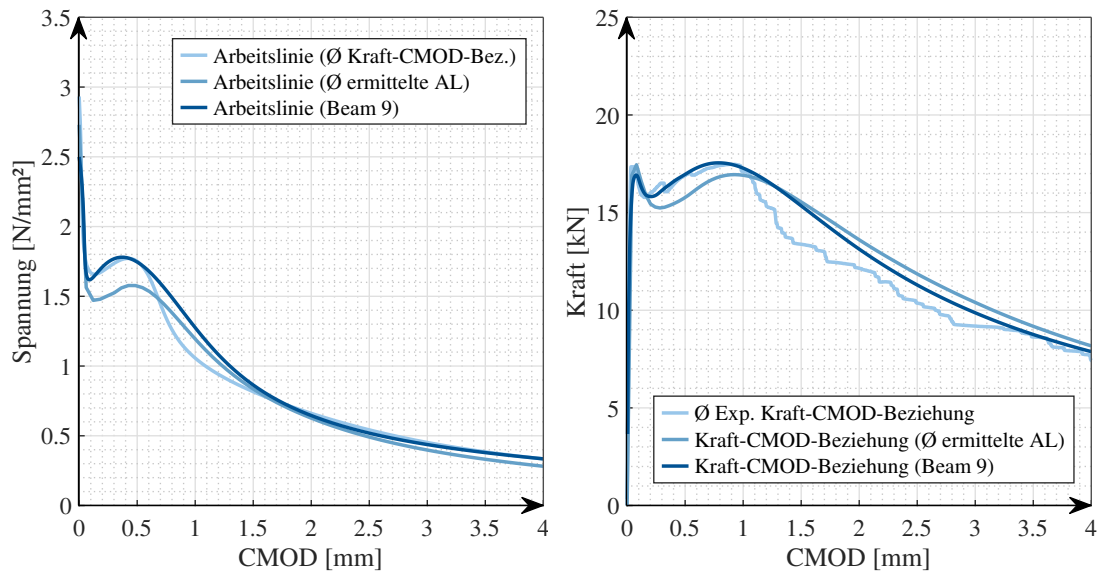


Abb. 5.7: Gegenüberstellung ermittelter Arbeitslinien (fib)

Abb. 5.8: Gegenüberstellung ermittelter Kraft-CMOD-Beziehungen (fib)

---

## 6. Zusammenfassung

Stahlfaserbeton besitzt ein ausgeprägtes Nachrissverhalten, das über Modellansätze wie dem Damaged Plasticity Modell abgebildet werden kann. Hierbei setzen die plastischen Modelle Kenntnisse zum uniaxialen Materialverhalten auf Druck und Zug voraus. Während für Faserbeton die uniaxiale Materialantwort auf Druck mit Hilfe einfacher Druckversuche bestimmt werden kann, stellen zentrische Zugversuche eine hohe Komplexität dar. Eine praktikablere Herangehensweise ist die Bestimmung der Zugarbeitslinie über Biegezugversuche. Diese Versuche machen jedoch eine indirekte Bestimmung des uniaxialen Zugverhaltens notwendig. Hierbei wird aus der experimentellen Kraft-Rissöffnungs-Beziehung die Spannungs-Rissöffnungs-Beziehung invers ermittelt.

In dieser Arbeit stellt eine numerische Simulation des Biegezugversuches unter Anwendung des Concrete Damaged Plasticity Modells (Abaqus) die Grundlage der Analyse dar. Werden alle Eingabeparameter bis auf die plastische Zugarbeitslinie festgesetzt, gilt es, die Arbeitslinie so lange zu variieren, bis das numerische Ergebnisse den experimentellen Ergebnissen entsprechen. Dieser Prozess ermöglicht die indirekte Bestimmung der Arbeitslinie unter Einbezug von numerischen Abhängigkeiten nach dem Prinzip des „trial and error“, welche jedoch mit einem hohem Zeitaufwand verbunden ist. In dieser Arbeit sollte daher eine Methode entwickelt werden, diesen Prozess zu automatisieren und den Analyseaufwand zu reduzieren.

Im ersten Schritt werden über die Kapitel 2.1 und 2.2 die Werkstoffcharakteristik von Faserbeton und seine Einflussgrößen vermittelt. Mit dem Ziel einer numerischen Modellierung erfasst das Kapitel 2.3 Theorien und Modelle zur Beschreibung des Materialverhaltens. Dabei kristallisiert sich das Damaged Plasticity Modell als geeignete Materialmodellierung heraus. Das vorliegende inverse Problem wird in diesem Zuge verdeutlicht und das Wesen der inverse Analysen in Kapitel 2.4 erläutert. Mit Kenntnis des charakteristischen Kurvenverlaufs der plastischen Arbeitslinie aus den Kapiteln 2.1 und 2.2 scheint eine Modellierung als B-Spline-Kurve mit dem Hintergrund der Approximation des Problems mit Hilfe einer Optimierung sinnvoll. Auf die Kurvenmodellierung wird daher in Kapitel 2.5 gefolgt von theoretischen Grundlagen zu Optimierungsmethoden in Kapitel 2.6 und 2.7 eingegangen.

Die eigentliche Entwicklung der Heuristik ist in Kapitel 3 dargestellt. Das Identifikationsproblem wird hierbei anhand eines Schwarmoptimierers (PSO) approximiert. Gegenstand der Optimierung stellt eine B-Spline-Kurve dar, die der Kurvenmodellierung der Arbeitslinie dient. Durch die Verknüpfung der Heuristik mit der Abaqus/CAE-Umgebung kann das numerische Modell individuell unter Anwendung des Concrete Damaged Plasticity Modells angepasst werden. Der Schwarmoptimierer ermöglicht als Metaheuristik eine allgemeingültige Lösung des inversen Problems. In diesem Zuge konnte die Methode um die indirekte Bestimmung der Druckarbeitslinie erweitert werden.

Mit der inversen Analyse am numerischen Modell können Modellparameter die Approximation der Arbeitslinie beeinflussen. Daher umfasst das Kapitel 4 eine Sensitivitätsanalyse der plasti-

---

schen Zugarbeitslinie auf die Variation der Elementgröße (FEM), der Zugschädigung und des Dilatanzwinkels. Es konnte festgestellt werden, dass mit steigender Elementgröße die Spannungen der Arbeitslinie sinken. Das uniaxiale Zugverhalten wirkt demnach weicher, je größer das Element ist. Dieses Phänomen wird bei Rissweiten  $>2,5$  mm deutlich verstärkt. Des Weiteren hat die gewählte Zugschädigung einen großen Einfluss auf den globalen Verlauf der Arbeitslinie. Die Variation des Dilatanzwinkels hat dagegen keinen bzw. nur marginalen Einfluss auf die uniaxiale Zugarbeitslinie im Biegezugversuch.

Die Arbeit wird durch eine Beispielanwendung der Heuristik in Kapitel 5 geschlossen. Hierbei war ein Balken unter Querkraftversagen zu modellieren. Eine Validierung mit experimentellen Daten zeigten gute Ergebnisse jedoch wurde die maximale Tragfähigkeit noch stark unterschätzt. Die Überschätzung der Dehnungen auf Höhe der unteren Längsbewehrung kann ein Anzeichen für eine unzureichende Modellierung des Verbundes zwischen Beton und Stabstahl sein.

---

## 7. Ausblick

Mit Hilfe der Automatisierung des Berechnungs- und Interpretationsprozesses der inversen Analyse können plastische Zugarbeitslinien für Faserbeton mit geringem menschlichen Aufwand effizient bestimmt werden. Berechnungszeiten der Heuristik zwischen 24 bis 48 Stunden sind jedoch keine Seltenheit. Eine nähere Untersuchung des Konvergenzverhaltens und des Einflusses der initialen Arbeitslinie kann die Optimierung womöglich beschleunigen.

Trotzdem ist es durch die Heuristik bereits möglich, viele Arbeitslinien in überschaubarer Zeit zu berechnen. So sind beispielsweise Sensitivitätsanalysen (siehe Kap. 4) möglich, um die Kenntnisse über FE-Abhängigkeiten und zum Streuverhalten von Faserbeton zu fördern. Weiterhin sollte das übergeordnete Ziel sein, analytische Berechnungsansätze zur Bestimmung des Tragverhaltens von Faserbeton zu untersuchen und zu entwickeln. Hierbei kann die Heuristik ein gutes Hilfsmittel sein, sich diesem Ziel zu nähern.



## Literatur

- [1] Teutsch, Manfred, Udo Wiens und Christoph Alfes: *Stahlfaserbeton nach DAfStb-Richtlinie "Stahlfaserbeton"*. Beton- und Stahlbetonbau, 105(8):539–551, 2010, ISSN 00059900.
- [2] Bergmeister, Konrad, Frank Fingerloos und Johann Dietrich Wörner (Herausgeber): *Beton-Kalender 2017: Spannbeton, Spezialbetone*, Band 106. Jahrgang der Reihe *Beton-Kalender*. Ernst & Sohn a Wiley brand, Berlin, 2017.
- [3] Breitenbücher, Rolf und Fanbing Song: *Experimentelle Untersuchungen zum Auszugsverhalten von Stahlfasern in höherfesten Betonen*. Beton- und Stahlbetonbau, 109(1):43–52, 2014, ISSN 00059900.
- [4] Kueres, Dominik, Alexander Stark, Martin Herbrand und Martin Classen: *Numerische Abbildung von Beton mit einem plastischen Schädigungsmodell – Grundlegende Untersuchungen zu Normalbeton und UHPC/Finite element simulation of concrete with a plastic damage model – Basic studies on normal strength concrete and UHPC*. Bauingenieur, 90(06):252–264, 2015, ISSN 0005-6650.
- [5] Hegger, Josef, Rüdiger Buetel, Alexander Karakas und Frank Häusler: *Ersatz oder Teilersatz von Querkraftversuchen durch Finite-Elemente-Berechnungen: Abschlussbericht*, Band 3144 der Reihe *Bauforschung T*. Fraunhofer IRB Verlag, Stuttgart, 2007.
- [6] Thomée, Bernhard: *Physikalisch nichtlineare Berechnung von Stahlfaserbetonkonstruktionen*, Band 3 der Reihe *Schriftenreihe des Lehrstuhls für Statik TU München*. München, 2005.
- [7] Hadl, Philipp: *Streuung im Zugtragverhalten von Stahlfaserbeton*. Dissertation, Verlag der Technischen Universität Graz, 2017.
- [8] Zilch, Konrad und Gerhard Zehetmaier: *Bemessung im konstruktiven Betonbau*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2010.
- [9] Hartwich, Kurt: *Zum Riß- und Verformungsverhalten von stahlfaserverstärkten Stahlbetonstäben unter Längszug*. Dissertation, Institut für Baustoffe, Massivbau und Brandschutz (IBMB), Braunschweig, 1986.
- [10] Strack, Mathias: *Modellbildung zum rissbreitenabhängigen Tragverhalten von Stahlfaserbeton unter Biegebeanspruchung: Zugl.: Bochum, Univ., Diss., 2007*, Band 2007,5 der Reihe *Schriftenreihe des Instituts für Konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum*. Shaker, Aachen, 2007.
- [11] Pfyf, Thomas: *Tragverhalten von Stahlfaserbeton*. Dissertation, Technische Wissenschaften ETH Zürich, Zürich, 2003.
- [12] Häussler-Combe, Ulrich: *Computational methods for reinforced concrete structures*. Wiley, Hoboken, 1. Auflage, 2015.

- [13] Singh, Harvinder: *Steel Fiber Reinforced Concrete: Behavior, Modelling and Design*. Springer eBook Collection Engineering. Springer, Singapore, 2017.
- [14] Hashemi, Mohammad, Payam Shafigh, Mohamed Rehan Bin Karim und Cengiz Duran Atis: *The effect of coarse to fine aggregate ratio on the fresh and hardened properties of roller-compacted concrete pavement*. *Construction and Building Materials*, 169:553–566, 2018, ISSN 09500618.
- [15] Suksawang, Nakin, Salam Wtaife und Ahmed Alsabbagh: *Evaluation of Elastic Modulus of Fiber-Reinforced Concrete*. *ACI Materials Journal*, 115(2), 2018, ISSN 0889-325X.
- [16] Bergmeister, Konrad, Frank Fingerloos und Johann Dietrich Wörner: *Beton–Kalender 2009*. Wiley, 2008.
- [17] Shah, Surendra P. und Stuart E. Swartz (Herausgeber): *Fracture of Concrete and Rock*. Springer New York, New York, NY, 1989.
- [18] Gödde, Lars: *Numerische Simulation und Bemessung von Flächentragwerken aus Stahlfaserbeton sowie stahlfaserverstärktem Stahl- und Spannbeton: Zugl.: Bochum, Univ., Diss., 2013*, Band 2013,2 der Reihe *Schriftenreihe des Instituts für Konstruktiven Ingenieurbau*. Shaker, Aachen, 2013.
- [19] Heek, Peter: *Modellbildung und numerische Analysen zur Ermüdung von Stahlfaserbeton*, Band Heft 2017-03 der Reihe *Schriftenreihe des Instituts für Konstruktiven Ingenieurbau*. Shaker Verlag, Aachen, 2018.
- [20] Fanella, David Anthony und Antoine E. Naaman: *Stress-Strain Properties of Fiber Reinforced Mortar in Compression*. *ACI Journal Proceedings*, 82(4), 1985, ISSN 0002-8061.
- [21] Traina, Leonard und Sh. A. Mansour: *Biaxial Strength and Deformational Behavior of Plain and Steel Fiber Concrete*. *ACI Materials Journal*, 88(4), 1991, ISSN 0889-325X.
- [22] Yin, W., E. Su, M. Mansour und T. Hsu: *Biaxial Tests of Plain and Fiber Concrete*. *ACI Materials Journal*, 86(3), 1989, ISSN 0889-325X.
- [23] Bui, T. T., W. S. A. Nana, B. Doucet-Ferru, A. Bennani, H. Lequay und A. Limam: *Shear Performance of Steel Fiber Reinforced Concrete Beams Without Stirrups: Experimental Investigation*. *International Journal of Civil Engineering*, 18(8):865–881, 2020, ISSN 1735-0522.
- [24] Naaman, Antoine E.: *Engineered Steel Fibers with Optimal Properties for Reinforcement of Cement Composites*. *Journal of Advanced Concrete Technology*, 1(3):241–252, 2003, ISSN 1346-8014.
- [25] Schuler, Frank: *Richtungsanalyse von Fasern in Beton und Charakterisierung von rissquerenden Fasern mittels Computer-Tomografie*. Dissertation, Technische Universität Kaiserslautern, 2021.

- [26] Jungwirth, Jörg: *Zum Tragverhalten von zugbeanspruchten Bauteilen aus Ultra-Hochleistungs-Faserbeton*. EPFL, Lausanne, 2006.
- [27] Abdallah, Sadoon, Mizi Fan und K. A. Cashell: *Bond-slip behaviour of steel fibres in concrete after exposure to elevated temperatures*. Construction and Building Materials, 140:542–551, 2017, ISSN 09500618.
- [28] Leutbecher, Torsten: *Rissbildung und Zugtragverhalten von mit Stabstahl und Fasern bewehrtem ultrahochfesten Beton (UHPC): Zugl.: Kassel, Univ., Diss., 2007*, Band H. 9 der Reihe *Schriftenreihe Baustoffe und Massivbau*. Kassel Univ. Press, Kassel, 2008.
- [29] Altenbach, Holm: *Kontinuumsmechanik: Einführung in die materialunabhängigen und materialabhängigen Gleichungen*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 3. Auflage, 2015.
- [30] Gross, Dietmar, Werner Hauger und Peter Wriggers: *Technische Mechanik 4: Hydromechanik, Elemente der Höheren Mechanik, Numerische Methoden*. Springer-Lehrbuch. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 7. Auflage, 2009.
- [31] Gross, Dietmar und Thomas Seelig: *Bruchmechanik: Mit einer Einführung in die Mikro-mechanik*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 6. Auflage, 2016.
- [32] Mang, Herbert A. und Günter Hofstetter: *Festigkeitslehre*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 4., aktual. Auflage, 2013.
- [33] Merkel, Markus und Andreas Öchsner: *Eindimensionale Finite Elemente: Ein Einstieg in die Methode*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 3., neu bearb. u. erg. Auflage, 2020.
- [34] Drucker, Daniel Charles (Herausgeber): *A more fundamental approach to plastic stress-strain relations*. Technical report (Brown University. Division of Applied Mathematics). Brown University., Michigan, 1951.
- [35] Häfele, Peter, Lothar Issler und Hans Ruoß: *Festigkeitslehre - Grundlagen*. Springer-Lehrbuch. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2. Auflage, 2003.
- [36] Carol, Ignacio, Egidio Rizzi und Kaspar Willam: *A unified theory of elastic degradation and damage based on a loading surface*. International Journal of Solids and Structures, 31(20):2835–2865, 1994, ISSN 00207683.
- [37] Kachanov, Lazar M.: *Rupture Time Under Creep Conditions*. International Journal of Fracture, 97(1/4):11–18, 1999 (Original 1958), ISSN 03769429.
- [38] Leukart, Michael: *Kombinierte anisotrope Schädigung und Plastizität bei kohäsiven Reibungsmaterialien: Zugl.: Stuttgart, Univ., Diss., 2005*, Band 45 der Reihe *Bericht / Institut für Baustatik der Universität Stuttgart*. Inst. f. Baustatik Univ, Stuttgart, 2005.
- [39] Häußler-Combe, Ulrich und Patrick Pröchtel: *Ein dreiaxiales Stoffgesetz für Betone mit normaler und hoher Festigkeit*. Beton- und Stahlbetonbau, 100(1):52–62, 2005, ISSN 00059900.

- [40] Lubliner, J., J. Oliver, S. Oller und E. Oñate: *A plastic-damage model for concrete*. International Journal of Solids and Structures, 25(3):299–326, 1989, ISSN 00207683.
- [41] Lee, Jeeho und Gregory L. Fenves: *Plastic-Damage Model for Cyclic Loading of Concrete Structures*. Journal of Engineering Mechanics, 124(8):892–900, 1998, ISSN 0733-9399.
- [42] Dassault Systèmes Simulia Corp: *ABAQUS/Standard User's Manual, Version 6.14*. Dassault Systèmes Simulia Corp, United States, 2014.
- [43] Hillerborg, Arne: *Application of the fictitious crack model to different types of materials*. International Journal of Fracture, 51(2):95–102, 1991, ISSN 03769429.
- [44] Löfgren, Ingemar, Henrik Stang und John Forbes Olesen: *Fracture Properties of FRC Determined through Inverse Analysis of Wedge Splitting and Three-Point Bending Tests*. Journal of Advanced Concrete Technology, 3(3):423–434, 2005, ISSN 1346-8014.
- [45] Rieder, Andreas: *Keine Probleme mit Inversen Problemen: Eine Einführung in ihre stabile Lösung*. Springer eBook Collection Computer Science and Engineering. Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden, 2003.
- [46] Louis, Alfred Karl: *Inverse und schlecht gestellte Probleme*. Mathematische Methoden in der Technik. Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden, 1989.
- [47] Richter, Mathias: *Inverse Probleme: Grundlagen, Theorie und Anwendungsbeispiele*. Mathematik im Fokus. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2015.
- [48] Hadamard, Jacques: *Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations*. New Haven Yale University Press, Gerstein, Toronto, 1923.
- [49] Stavroulakis, G. E., G. Bolzon, Z. Waszczyszyn und L. Ziemianski: *Inverse Analysis*. In: *Comprehensive Structural Integrity*, Seiten 685–718. Elsevier, 2003.
- [50] Herrmann, Norbert: *Mathematik für Naturwissenschaftler*. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 2012.
- [51] Farin, Gerald: *Kurven und Flächen im Computer Aided Geometric Design: Eine praktische Einführung*. Springer eBook Collection Computer Science and Engineering. Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden and s.l., 2. Auflage, 1994.
- [52] Höllig, Klaus und Jörg Hörner: *Approximation and modeling with B-splines*, Band 132 der Reihe *Other titles in applied mathematics*. SIAM Soc. for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pa., 2013.
- [53] Meier, Andreas: *Methoden der grafischen und geometrischen Datenverarbeitung*. Leitfäden der angewandten Informatik. Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden, 1986.
- [54] Ershov, S. N.: *B-Splines and Bernstein Basis Polynomials*. Physics of Particles and Nuclei Letters, 16(6):593–601, 2019, ISSN 1547-4771.

- [55] Piegel, Les und Wayne Tiller: *The NURBS Book*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1995.
- [56] Mario, Hirz, Wilhelm Dietrich, Anton Gfrerrer und Johann Lang: *Integrated Computer-Aided Design in Automotive Development*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2013.
- [57] Stein, Oliver: *Grundzüge der Globalen Optimierung*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2. Auflage, 2021.
- [58] Stein, Oliver: *Grundzüge der Nichtlinearen Optimierung*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2. Auflage, 2021.
- [59] Mercangöz, Burcu Adıgüzel: *Applying Particle Swarm Optimization: New Solutions and Cases for Optimized Portfolios*, Band v.306 der Reihe *International Series in Operations Research and Management Science Ser.* Springer International Publishing AG, Cham, 2021.
- [60] Hußmann, Stephan und Brigitte Lutz-Westphal (Herausgeber): *Kombinatorische Optimierung erleben: In Studium und Unterricht*. Mathematik erleben. Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2007.
- [61] Kaveh, Ali: *Meta-Heuristic Algorithms for Optimal Design of Real-Size Structures*. Springer International Publishing AG, Cham, 2018.
- [62] Dittes, Frank Michael: *Optimierung: Wie man aus allem das Beste macht*. Technik im Fokus. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2015.
- [63] Blum, Christian und Andrea Roli: *Metaheuristics in combinatorial optimization*. ACM Computing Surveys, 35(3):268–308, 2003, ISSN 0360-0300.
- [64] Bogon, Tjorben: *Agentenbasierte Schwarmintelligenz*. Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, Wiesbaden, 1. Auflage, 2013.
- [65] Okwu, Modestus O. und Lagouge K. Tartibu: *Metaheuristic optimization: nature-inspired algorithms swarm and computational intelligence, theory and applications*, Band 927 der Reihe *Studies in computational intelligence*. Springer, Cham, 2021.
- [66] Kennedy, J. und R. Eberhart: *Particle swarm optimization*. In: *Proceedings of ICNN'95 - International Conference on Neural Networks*, Seiten 1942–1948. IEEE, 27 Nov.-1 Dec. 1995, ISBN 0-7803-2768-3.
- [67] Dorigo, Marco: *Swarm Intelligence: 9th International Conference, ANTS 2014, Brussels, Belgium, September 10-12, 2014. Proceedings*, Band 8667 der Reihe *Lecture Notes in Computer Science Ser.* Springer International Publishing AG, Cham, 2014.
- [68] Engelbrecht, Andries P.: *Computational Intelligence*. John Wiley & Sons, Ltd, Chichester, UK, 2007.

- [69] Steinke, Peter: *Finite-Elemente-Methode: Rechnergestützte Einführung*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 5., neu bearb. u. erg. Auflage, 2015.
- [70] Braess, Dietrich: *Finite Elemente*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1997.
- [71] Fédération internationale du béton: *CEB-FIP model code 1990: Design code*, Band 213/214 der Reihe *Bulletin d'information / Comité Euro-International du Béton*. Telford, London, 1993.
- [72] Faustmann, Sören: *Zur Interaktion von Stahlfaser- und Durchstanzbewehrung an Stützen-Decken-Knoten*. Dissertation in Vorbereitung, Technische Universität München, 2024.
- [73] Wolf, Andreas: *Versuchstechnische Bestimmung mechanischer Materialkenngrößen von Stahlfaserbeton bei niederzyklischer Belastung*. Masterarbeit, Technische Universität München, 2023.
- [74] Borst, René de, Joris J. C. Remmers, Alan Needleman und Marie Angèle Abellan: *Discrete smeared crack models for concrete fracture: bridging the gap*. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 28(78):583–607, 2004, ISSN 0363-9061.
- [75] Barros, Joaquim, Beatriz Sanz, Petr Kabele, Rena C. Yu, Günther Meschke, Jaime Planas, Vitor Cunha, Antonio Caggiano, Nilüfer Ozyurt, Ventura Gouveia, Ab Bos, Elisa Poveda, Erez Gal, Jan Cervenka, Gerrit E. Neu, Pierre Rossi, Daniel Dias-da Costa, Peter K. Juhasz, David Cendon, Gonzalo Ruiz und Tiago Valente: *Blind competition on the numerical simulation of steel–fiber–reinforced concrete beams failing in shear*. Structural Concrete, 22(2):939–967, 2021, ISSN 1464-4177.
- [76] Auer, Daniel, Josef Landler und Oliver Fischer: *Bestimmung der zentrischen Nachrisszugfestigkeit von Stahlfaserbetonen aus Biegezugversuchen unter Anwendung von B-Splines*. Bauingenieur, 94(11):451–460, 2019, ISSN 0005-6650.

---

## Technische Regelwerke

- [TR1] DAfStb-Richtlinie: *Stahlfaserbeton*. Deutscher Ausschuss für Stahlbeton e. V. – DAfStb, November 2012.
- [TR2] DIN EN 206:2021-06: *Beton - Festlegung, Eigenschaften, Herstellung und Konformität*. Beuth Verlag, Juni 2021
- [TR3] DIN 1045-2:2008-08: *Tragwerke aus Beton, Stahlbeton und Spannbeton - Teil 2: Beton - Festlegung, Eigenschaften, Herstellung und Konformität - Anwendungsregeln zu DIN EN 206-1*. Beuth Verlag, August 2008.
- [TR4] DIN EN 14889-1:2006-11: *Fasern für Beton - Teil 1: Stahlfasern - Begriffe, Festlegungen und Konformität*. Beuth Verlag, November 2006.
- [TR5] DIN EN 14651:2007-12: *Prüfverfahren für Beton mit metallischen Fasern - Bestimmung der Biegezugfestigkeit (Proportionalitätsgrenze, residuelle Biegezugfestigkeit)*. Beuth Verlag, Dezember 2007.
- [TR6] DIN EN 12390-13:2021-09: *Prüfung von Festbeton - Teil 13: Bestimmung des Elastizitätsmoduls unter Druckbelastung (Sekantenmodul)*. Beuth Verlag, September 2021.
- [TR7] DIN EN 12390-4:2020-04: *Prüfung von Festbeton - Teil 4: Bestimmung der Druckfestigkeit - Anforderungen an Prüfmaschinen*. Beuth Verlag, April 2020.
- [TR8] DIN EN 12390-3:2019-10: *Prüfung von Festbeton – Teil 3: Druckfestigkeit von Probekörpern*. Beuth Verlag, Oktober 2019.
- [TR9] DIN EN 12390-1:2021-09: *Prüfung von Festbeton - Teil 1: Form, Maße und andere Anforderungen für Probekörper und Formen*. Beuth Verlag, September 2021.

---

**A. Standard Eingabeparameter der numerischen Modelle in  
Abhängigkeit des Fasergehaltes**



**Standard Eingabeparameter des numerischen Modells  
Fasergehalt 20 kg/m<sup>3</sup>**

				Druckarbeitslinie	
				$\epsilon_c^{in}$ [-]	$\sigma_c$ [N/mm <sup>2</sup> ]
<b>Static, Riks</b>		<b>Finite Elemente</b>		0	27.49284772
Nlgeom	On	Elementtyp	C3D8	0.00015062	33.01013287
max. Inkremente	200	Elementgröße	25 mm	0.000248364	36.56559405
initial Arc	0,001	(Zugzone)		0.000346108	40.12105524
min Arc	1.00E-50	Elementgröße	5 mm	0.000483536	42.29668881
max Arc	0.025	(Druckzone)		0.000736189	40.46593214
				0.000991187	38.5536646
				0.001246184	36.64139706
				0.001501181	34.72912952
				0.001765129	32.50564812
				0.002028692	30.29556573
				0.002290432	28.14883382
				0.002542774	26.32889014
				0.002788768	24.72968481
				0.003032559	23.20704687
				0.003271834	21.84147323
				0.003508483	20.56716477
				0.003737893	19.54456117
				0.003965524	18.58384039
				0.00419215	17.65805355
				0.004417589	16.77353644
				0.004641274	15.94999782
				0.004864959	15.1264592
				0.005086139	14.39004153
				0.00530278	13.81142176
				0.005519421	13.23280199
				0.005735165	12.68538585
				0.005950627	12.14775726
				0.006165266	11.63875477
				0.00637796	11.19738431
				0.006590599	10.75794664
				0.006802708	10.3369167
				0.007013432	9.964013259
				0.007223059	9.629279452
				0.007431779	9.326112996
				0.00764021	9.032937638
				0.007848642	8.73976228
				0.008056425	8.469136299
				0.008263632	8.218547182
				0.008470773	7.970262389
				0.008677576	7.733728995
				0.008884379	7.4971956
				0.009091174	7.260920283
				0.009296748	7.067123075
				0.009502313	6.873612112
				0.009707275	6.701075302
				0.009912038	6.535471424
				0.044856199	5
				0.099942479	2

Druckschädigung		Zugschädigung ( $V_f = 40 \text{ kg/m}^3$ )	
$\epsilon_c^{in}$ [-]	$d_c$ [-]	$u_t$ [mm]	$d_t$ [-]
0	0	0	0
0.0001506	0.0227445	0.5	0.454169617
0.0009912	0.267039	1	0.865325507
0.0020287	0.53335	1.18	0.907015135
0.0035085	0.683005	2	0.928485918
0.0046413	0.744318	3	0.939470143
0.0057352	0.785652	3.92	0.947428868
0.0065906	0.808677	5	0.96
0.0076402	0.830262		
0.0084708	0.844086		
0.0090912	0.853557		
0.009912	0.861205		
0.0448562	0.85		
0.0999425	0.87		

Druckarbeitslinie, Zug- und Druckschädigung sind [72] entnommen.

**Standard Eingabeparameter des numerischen Modells**  
**Fasergehalt 40 kg/m<sup>3</sup>**

				Druckarbeitslinie	
				$\epsilon_c^{in}$ [-]	$\sigma_c$ [N/mm <sup>2</sup> ]
				0	31.04114451
<b>Static, Riks</b>				0.000124496	37.12934241
<b>Finite Elemente</b>				0.000198958	41.67458044
Nlgeom	On	Elementtyp	C3D8	0.000273419	46.21981847
max. Inkremente	200	Elementgröße	25 mm	0.000431001	47.75560693
initial Arc	0,001	(Zugzone)		0.000637575	47.51758854
min Arc	1.00E-50	Elementgröße	5 mm	0.000844149	47.27957016
max Arc	0.025	(Druckzone)		0.001050723	47.04155177
<b>CDP-Modell</b>				0.001273526	46.2159579
<b>Elastische Parameter</b>				0.001543826	43.6706775
$\psi$	42°	E-Modul	34000 N/mm <sup>2</sup>	0.001813409	41.15136746
$\epsilon^{DP}$	0.1	Querdehnzahl	0.2	0.002082991	38.63205741
$K_c$	0.667			0.002351661	36.14581449
$\sigma_{b0}/\sigma_{c0}$	1.16			0.002613925	33.89147713
$\mu$	0			0.002876189	31.63713976
<b>Druckschädigung</b>				0.003132576	29.59561524
<b>Zugschädigung</b>				0.003363827	28.46414379
$\epsilon_c^{in}$ [-]	$d_c$ [-]	$u_t$ [mm]	$d_t$ [-]	0.003592431	27.42849726
0	0	0	0	0.003820216	26.42250311
0.000844149	0.214435388	0.5	0.454169617	0.004048002	25.41650896
0.001813409	0.429372347	1	0.865325507	0.0042711157	24.42711157
0.002613925	0.539536078	1.18	0.907015135	0.004499642	23.54681082
0.003363827	0.618659511	2	0.928485918	0.004720701	22.78435071
0.005162819	0.70556874	3	0.939470143	0.00494176	22.0218906
0.007517014	0.763692305	3.92	0.947428868	0.005162819	21.25943048
0.010019326	0.796618224	5	0.96	0.005383757	20.50134772
0.012487946	0.819733457			0.005599918	19.91624546
0.013914408	0.828398773			0.005814151	19.40091853
0.044861901	0.85			0.006028384	18.8855916
0.09994476	0.87			0.006242617	18.37026467
				0.006456851	17.85493773
				0.00667001	17.37848253
				0.006881909	16.94767983
				0.007093707	16.52051876
				0.007305505	16.09335769
				0.007517014	15.67666299
				0.007727709	15.28943328
				0.007938438	14.90097646
				0.008148989	14.51899528
				0.008359539	14.13701411
				0.008570083	13.75524995
				0.008779969	13.39731651
				0.008986525	13.15995457
				0.009193046	12.92384275
				0.009399568	12.68773092
				0.009606006	12.4546451
				0.00981226	12.22817994
				0.010019326	11.97236907
				0.010226628	11.7080038
				0.010433929	11.44363853
				0.010641057	11.18556864
				0.010847614	10.94817155
				0.011052572	10.76866839
				0.01125753	10.58916523
				0.011462488	10.40966207
				0.011667426	10.23084655
				0.011872282	10.05504207
				0.012077273	9.874341206
				0.012282609	9.681129359
				0.012487946	9.487917512
				0.012693282	9.294705665
				0.01289798	9.124624388
				0.013101251	9.006207743
				0.013304521	8.887791098
				0.013507792	8.769374454
				0.013711063	8.650957809
				0.013914408	8.529828178
				0.044861901	5

Druckarbeitslinie, Zug- und Druckschädigung sind [72] entnommen.

**Standard Eingabeparameter des numerischen Modells**  
**Fasergehalt 80 kg/m<sup>3</sup>**

				Druckarbeitslinie	
				$\epsilon_c^{in}$ [-]	$\sigma_c$ [N/mm <sup>2</sup> ]
<b>Static, Riks</b>		<b>Finite Elemente</b>		0	21.47844209
Nlgeom	On	Elementtyp	C3D8	0.000234319	26.12092228
max. Inkremente	200	Elementgröße	25 mm	0.00036365	28.38398371
initial Arc	0,001	(Zugzone)		0.000495874	30.55440803
min Arc	1.00E-50	Elementgröße	5 mm	0.000643117	32.2438776
max Arc	0.025	(Druckzone)		0.000823233	32.8806442
				0.001018139	33.04375706
				0.00122591	32.79489839
				0.001444355	32.20424326
<b>CDP-Modell</b>		<b>Elastische Parameter</b>		0.001665607	31.52366805
$\psi$	42°	E-Modul	34000 N/mm <sup>2</sup>	0.001889378	30.76245623
$\epsilon_{DP}$	0.1	Querdehnzahl	0.2	0.002115075	29.93952809
$K_c$	0.667			0.002339188	29.16736799
$\sigma_{b0}/\sigma_{c0}$	1.16			0.002561397	28.45612886
$\mu$	0			0.002783533	27.74726505
				0.003004853	27.06453941
				0.003219983	26.58000879
				0.003433034	26.16207238
				0.003645454	25.76436292
				0.003857716	25.37167496
				0.004068534	25.02523669
				0.004279366	24.6783805
				0.004489436	24.35589666
				0.004699365	24.03792952
				0.004908711	23.73863789
				0.005118028	23.44027779
				0.005326778	23.16008736
				0.005535306	22.88697126
				0.005743888	22.61214102
				0.00595201	22.35205149
				0.006159872	22.10028933
				0.006367579	21.85349321
				0.006575051	21.61420342
				0.006782173	21.38614637
				0.006989209	21.16082621
				0.007196002	20.94329047
				0.00740272	20.72814875
				0.00760968	20.50525487
				0.007816889	20.27441577
				0.008024207	20.04004258
				0.008231568	19.80431917
				0.008438906	19.56935354
				0.008645777	19.34931462
				0.008851967	19.1510825
				0.009057925	18.96028685
				0.009263584	18.77905696
				0.009469584	18.58691769
				0.009675674	18.39189892
				0.009881713	18.19852715
				0.010087781	18.00420036
				0.010294119	17.80124594
				0.010499996	17.6130193
				0.010705797	17.42727169
				0.01091114	17.25616694
				0.011116842	17.07354845
				0.011322459	16.8936873
				0.01152804	16.71496567
				0.011733679	16.53437478
				0.011939243	16.35619308
				0.012144571	16.1856007
				0.012349837	16.01695447
				0.012555066	15.84950185
				0.012760282	15.68245864
				0.012965523	15.5146369
				0.01317035	15.36005447
				0.013375024	15.21038289
				0.013579892	15.05447328
				0.01378482	14.89667189
				0.044843864	5

Druckarbeitslinie, Zug- und Druckschädigung sind [72] entnommen.

---

## **B. Detaillierte Auswertung des Querkraftbalkens (Kapitel 5)**

## Beam 1

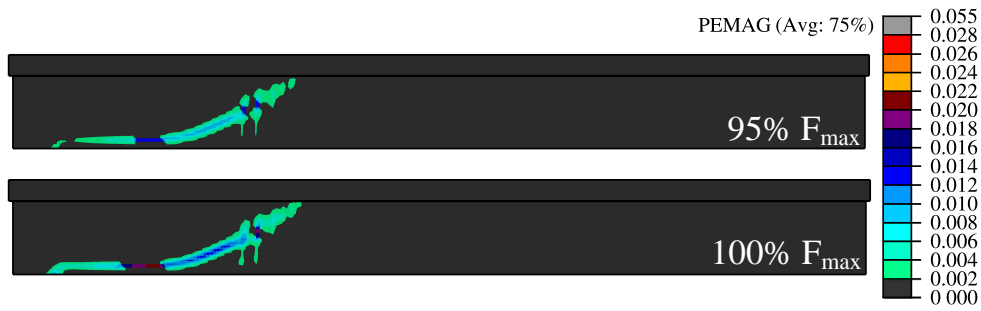


Abb. B.1: Rissbild des numerischen T-Profil-Modells bei 95 % und 100 %  $F_{max}$

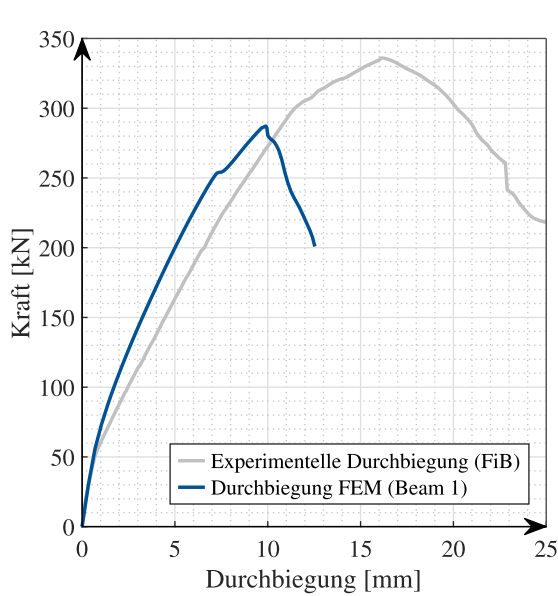


Abb. B.2: Gegenüberstellung Durchbiegung

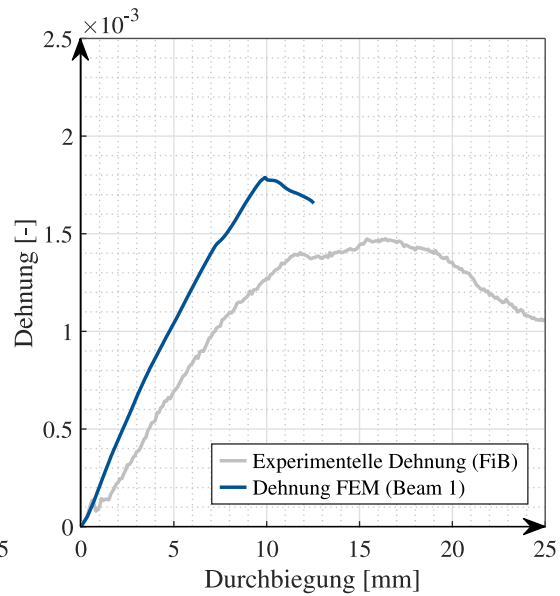


Abb. B.3: Gegenüberstellung der Dehnung

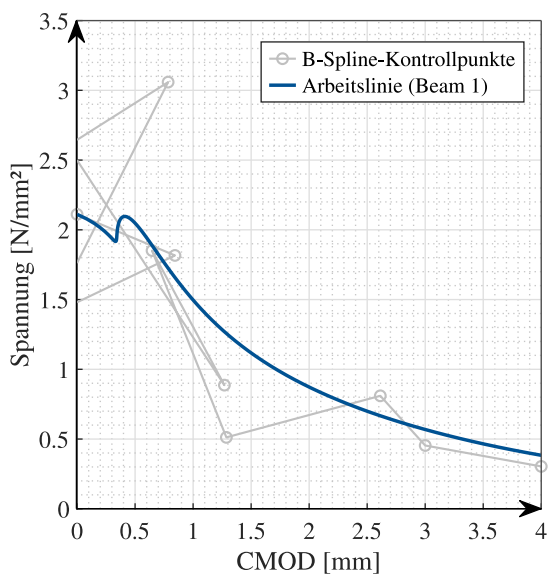


Abb. B.4: Ermittelte Arbeitslinie

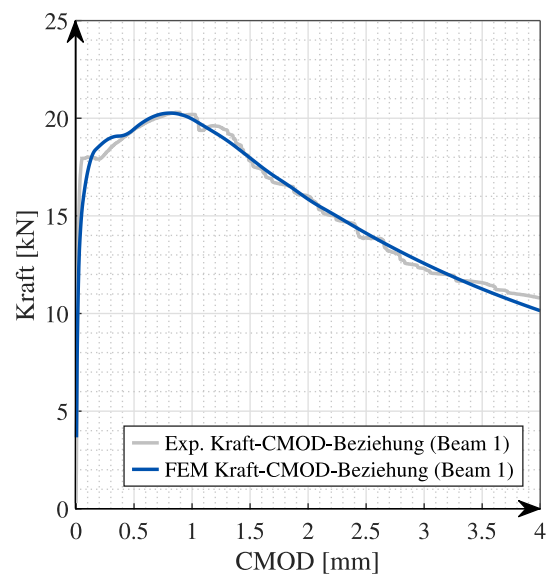


Abb. B.5: Kraft-CMOD-Beziehungen

## Beam 2

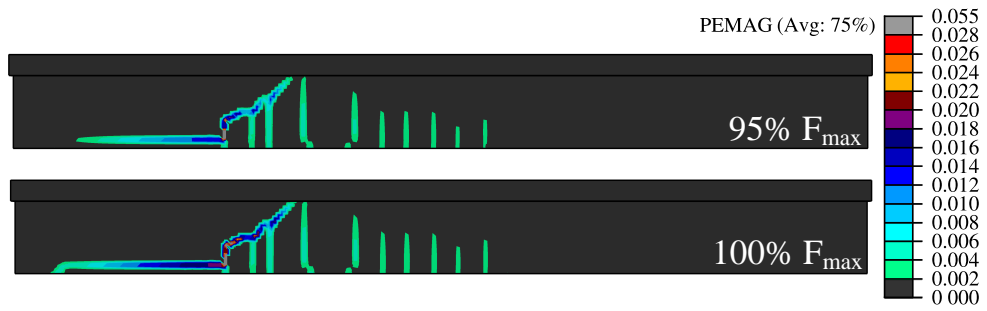


Abb. B.6: Rissbild des numerischen T-Profil-Modells bei 95 % und 100 %  $F_{max}$

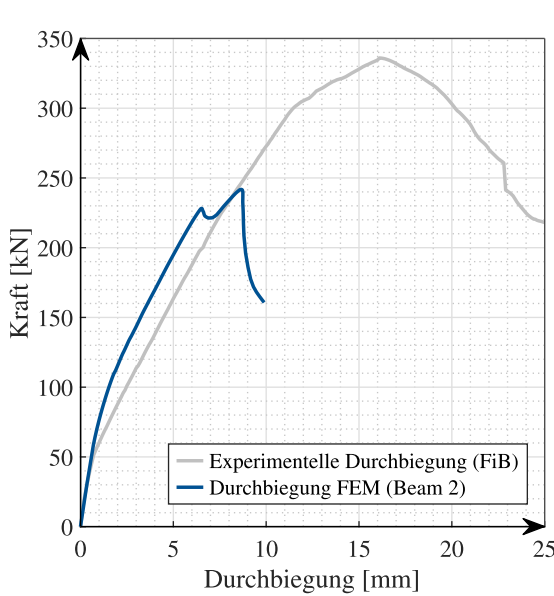


Abb. B.7: Gegenüberstellung Durchbiegung

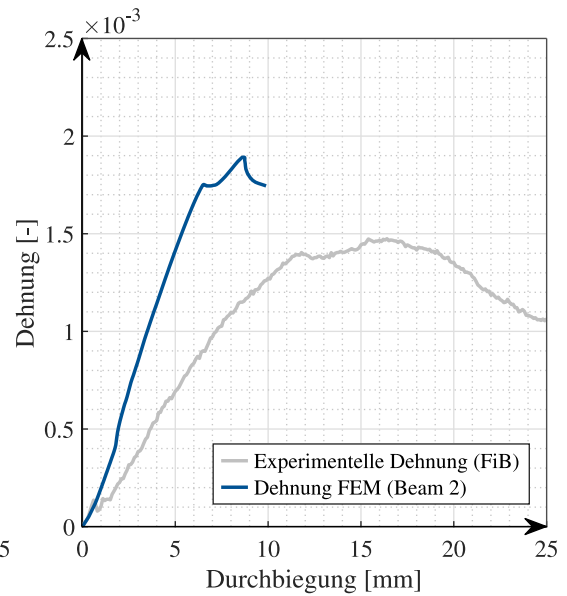


Abb. B.8: Gegenüberstellung der Dehnung

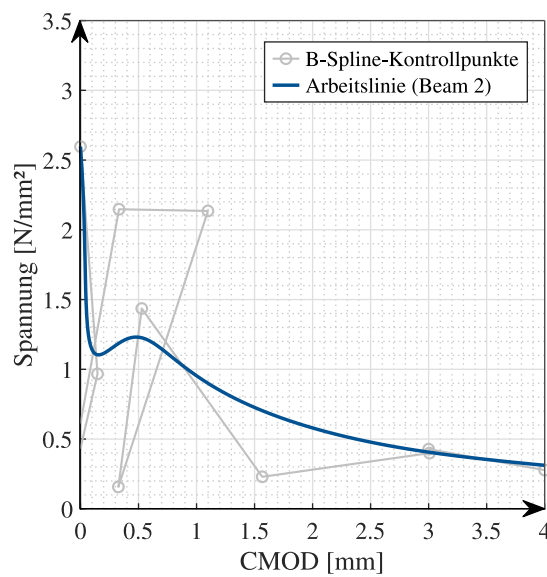


Abb. B.9: Ermittelte Arbeitslinie

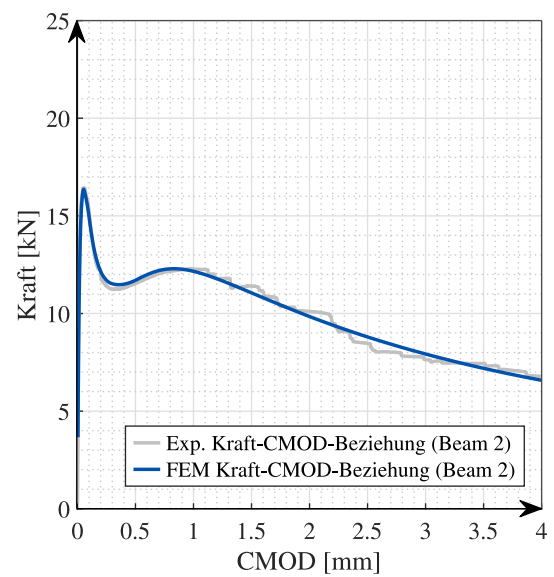


Abb. B.10: Kraft-CMOD-Beziehungen

### Beam 3

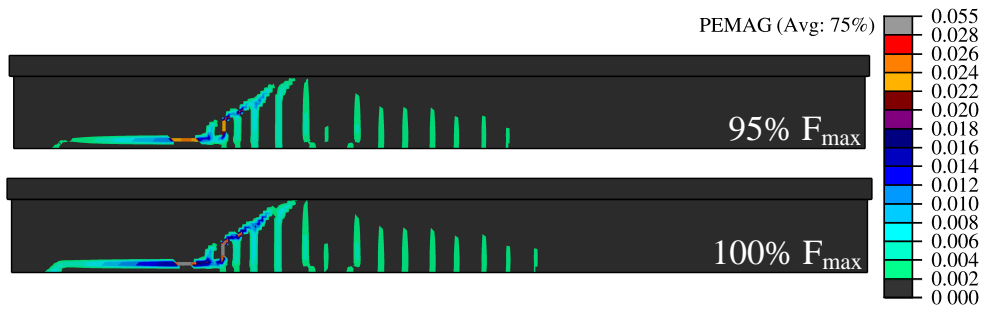


Abb. B.11: Rissbild des numerischen T-Profil-Modells bei 95 % und 100 %  $F_{max}$

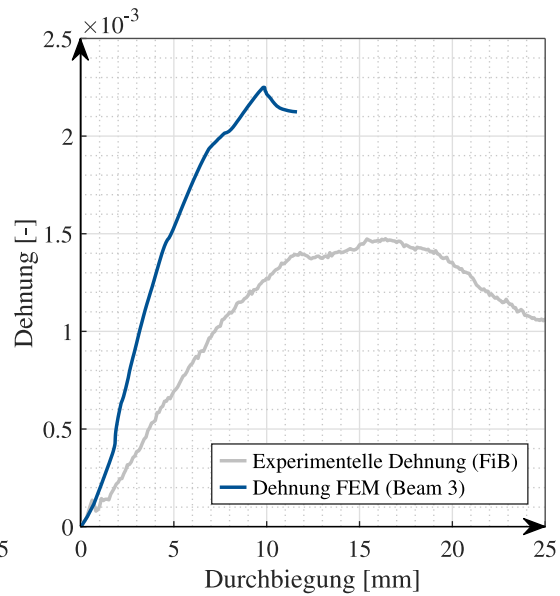
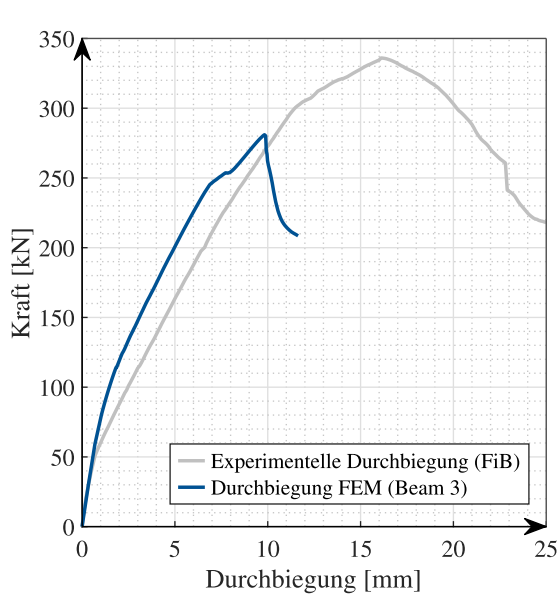


Abb. B.12: Gegenüberstellung Durchbiegung

Abb. B.13: Gegenüberstellung der Dehnung

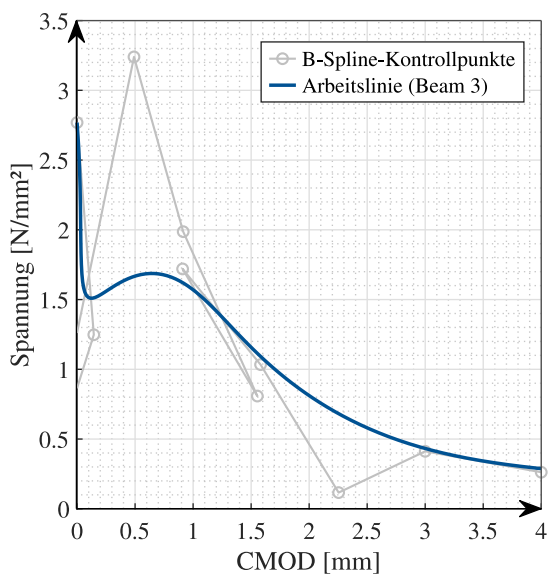


Abb. B.14: Ermittelte Arbeitslinie

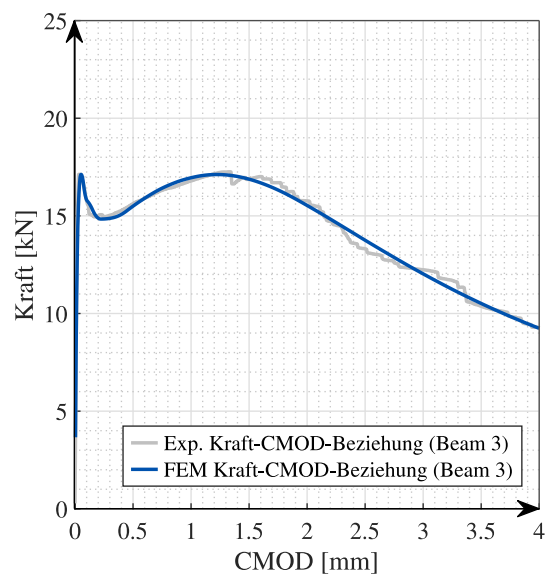


Abb. B.15: Kraft-CMOD-Beziehungen

## Beam 4

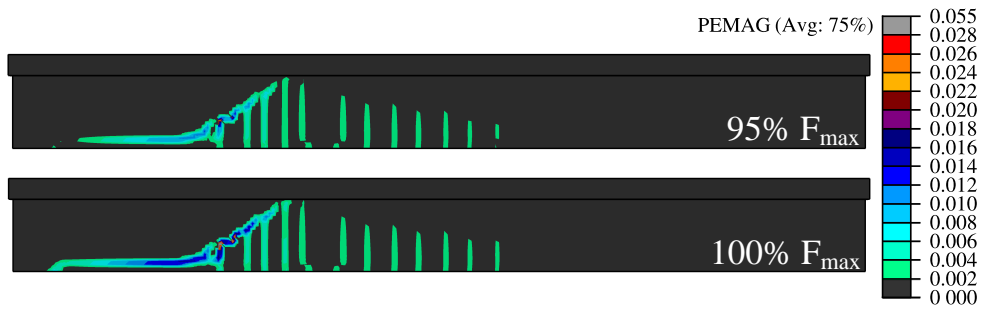


Abb. B.16: Rissbild des numerischen T-Profil-Modells bei 95 % und 100 %  $F_{max}$

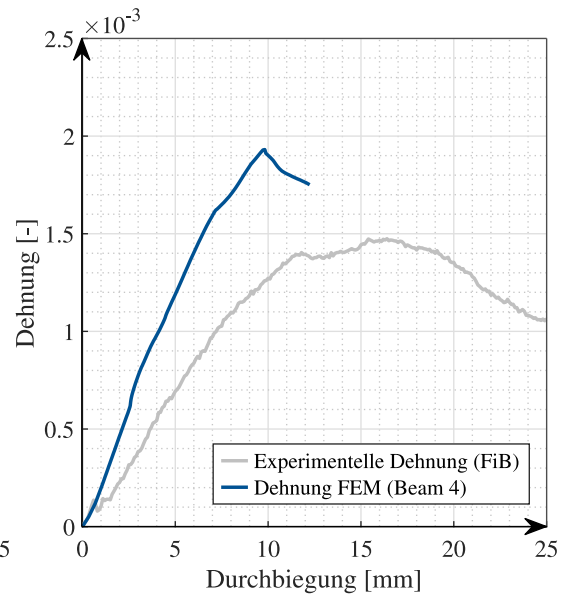
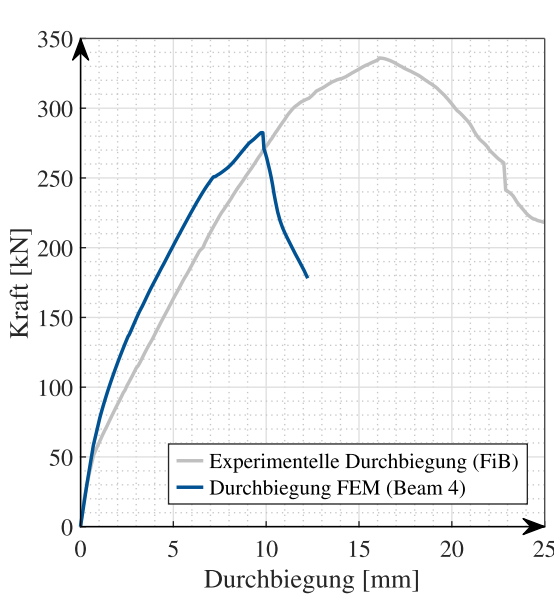


Abb. B.17: Gegenüberstellung Durchbiegung

Abb. B.18: Gegenüberstellung der Dehnung

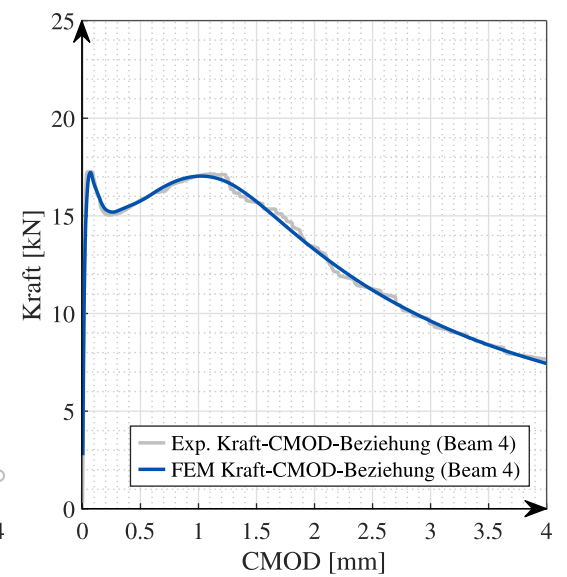
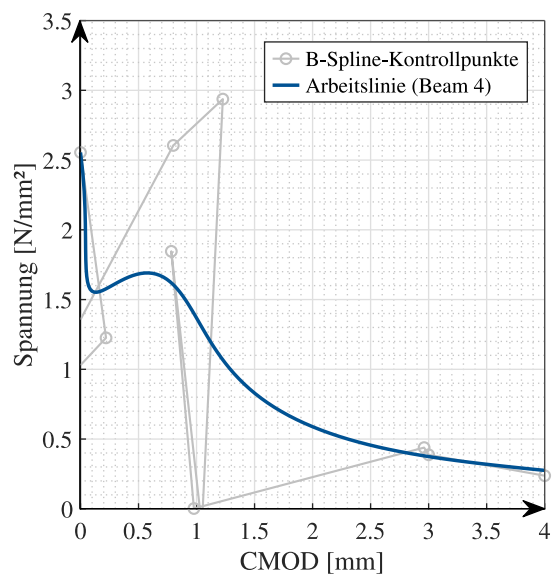


Abb. B.19: Ermittelte Arbeitslinie

Abb. B.20: Kraft-CMOD-Beziehungen



## Beam 5

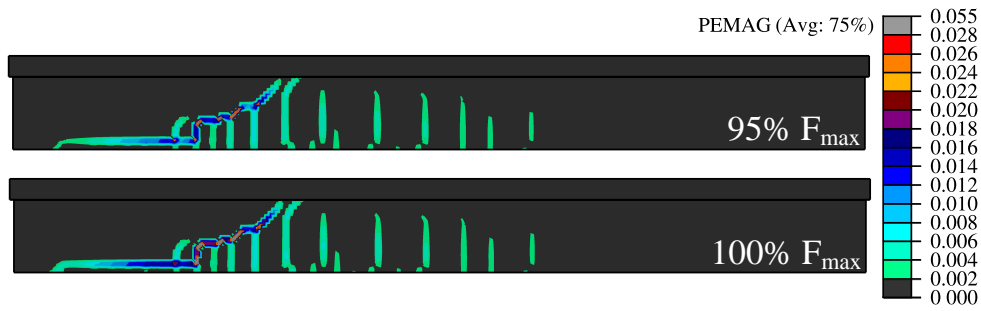


Abb. B.21: Rissbild des numerischen T-Profil-Modells bei 95 % und 100 %  $F_{max}$

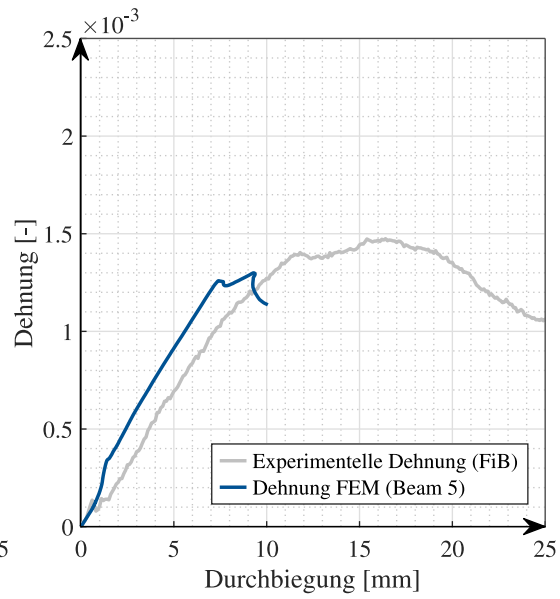
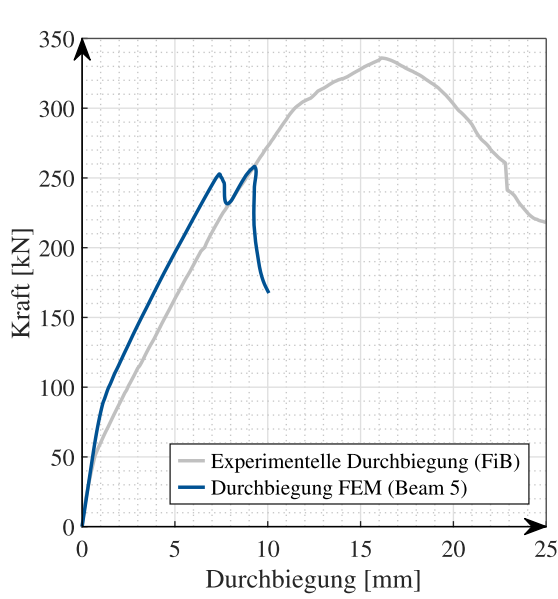


Abb. B.22: Gegenüberstellung Durchbiegung    Abb. B.23: Gegenüberstellung der Dehnung

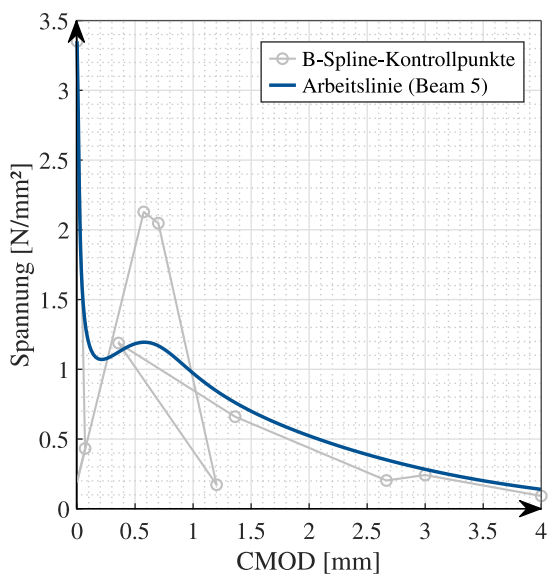


Abb. B.24: Ermittelte Arbeitslinie

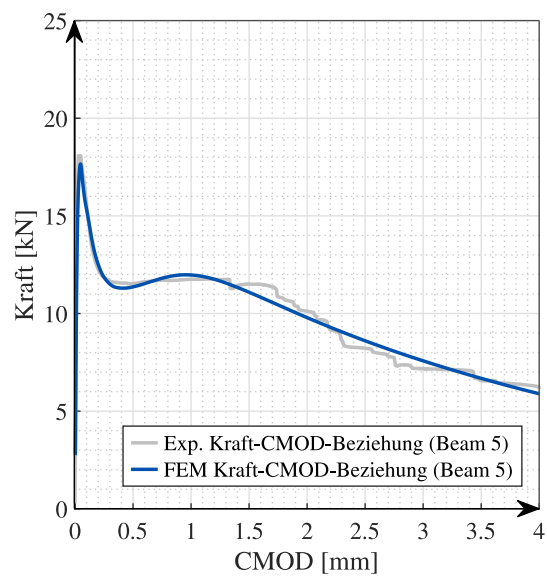


Abb. B.25: Kraft-CMOD-Beziehungen

## Beam 6

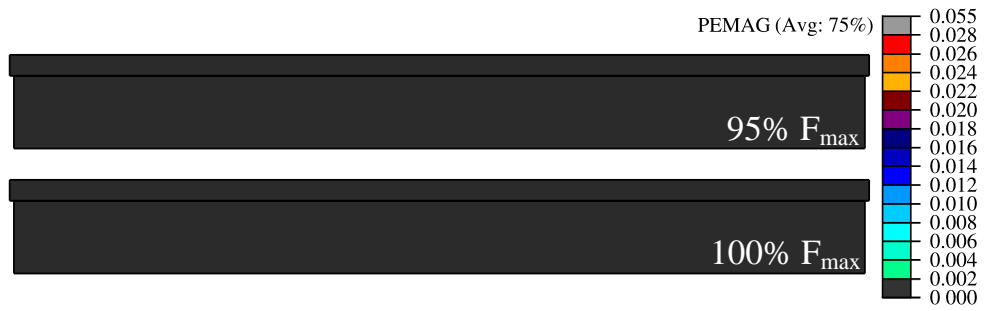


Abb. B.26: Rissbild des numerischen T-Profil-Modells bei 95 % und 100 %  $F_{max}$

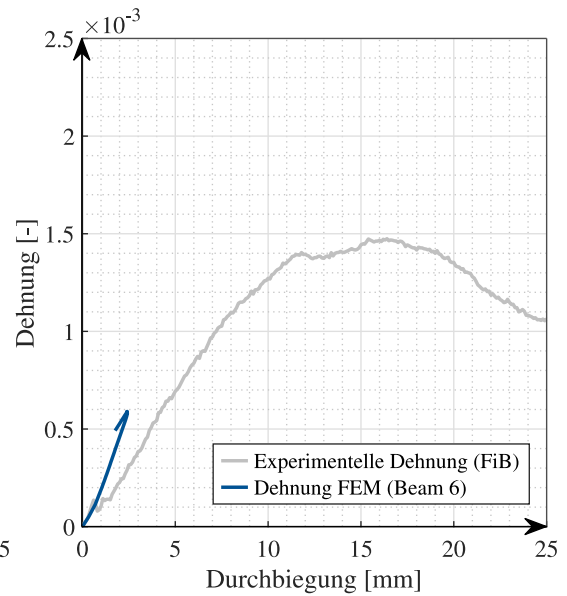
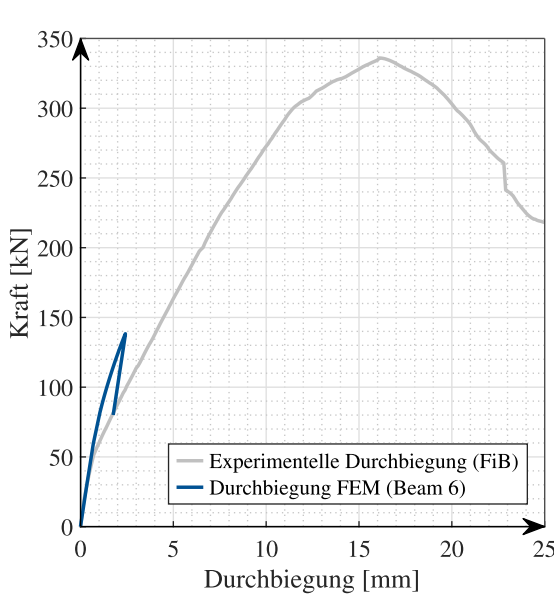


Abb. B.27: Gegenüberstellung Durchbiegung

Abb. B.28: Gegenüberstellung der Dehnung

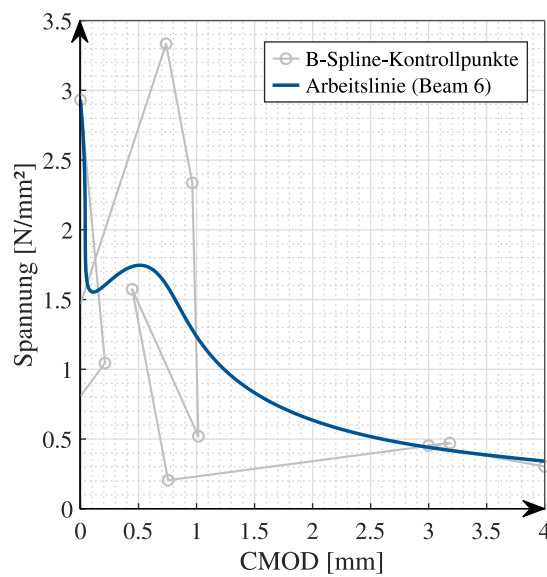


Abb. B.29: Ermittelte Arbeitslinie

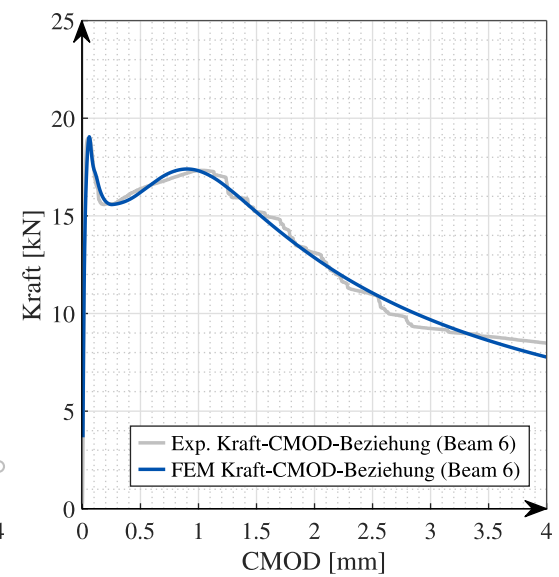


Abb. B.30: Kraft-CMOD-Beziehungen

## Beam 7

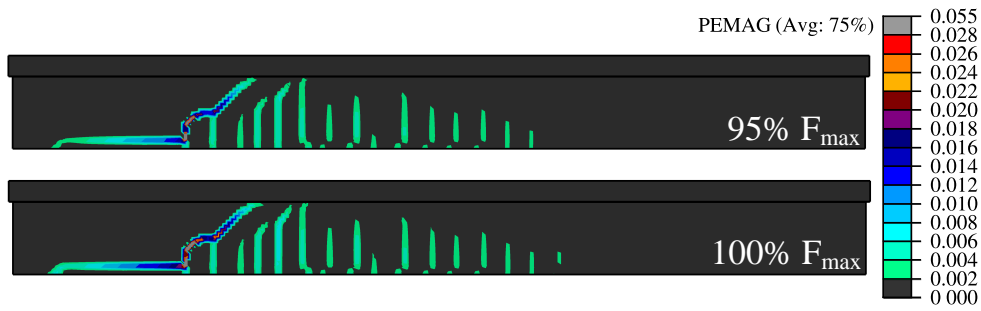


Abb. B.31: Rissbild des numerischen T-Profil-Modells bei 95 % und 100 %  $F_{max}$

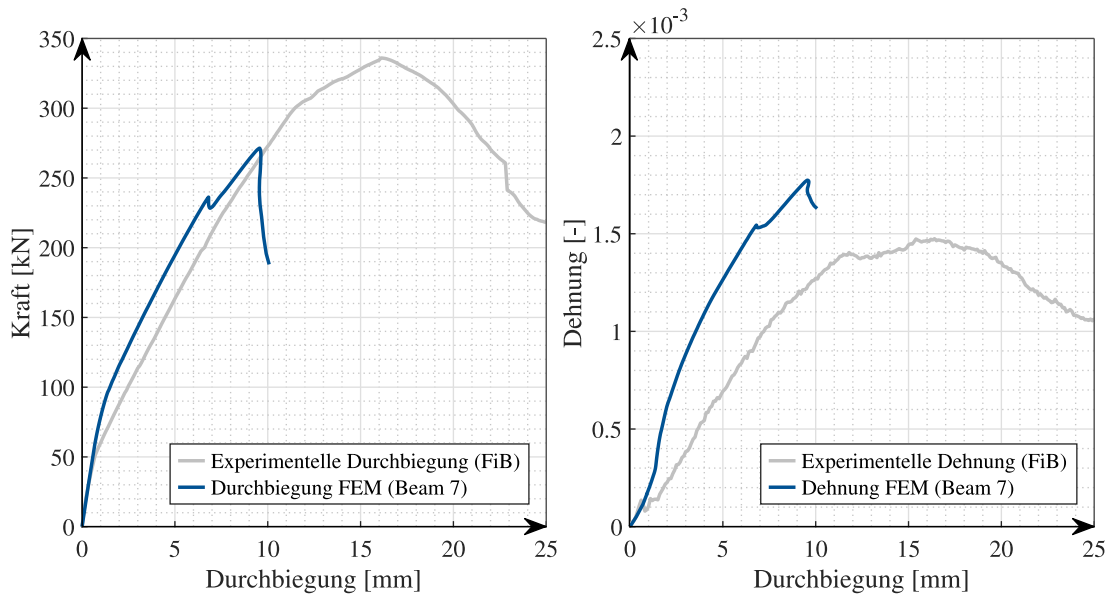


Abb. B.32: Gegenüberstellung Durchbiegung    Abb. B.33: Gegenüberstellung der Dehnung

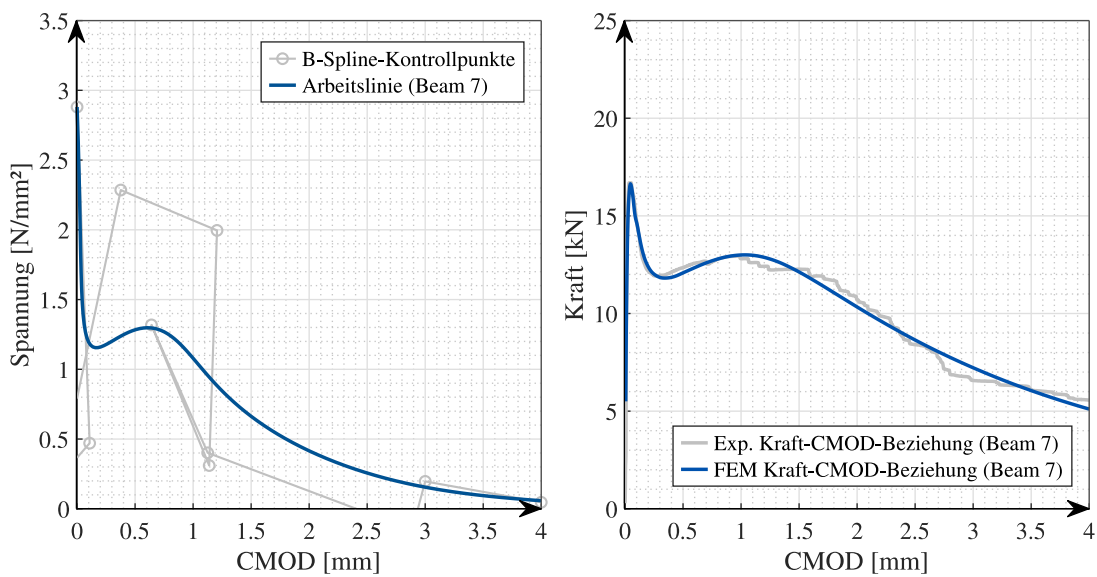


Abb. B.34: Ermittelte Arbeitslinie

Abb. B.35: Kraft-CMOD-Beziehungen

## Beam 8

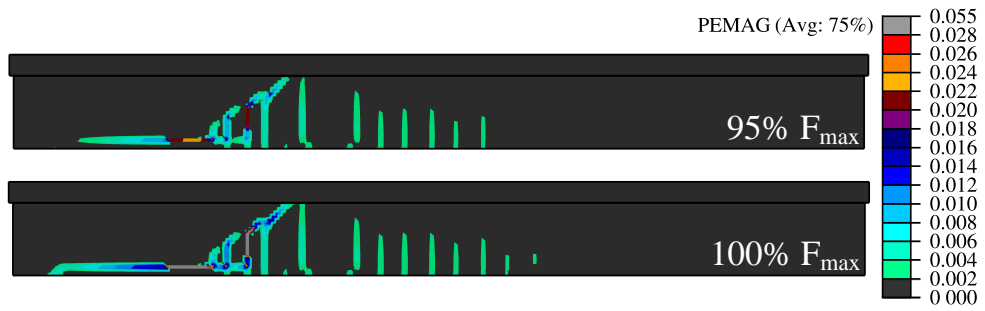


Abb. B.36: Rissbild des numerischen T-Profil-Modells bei 95 % und 100 %  $F_{max}$

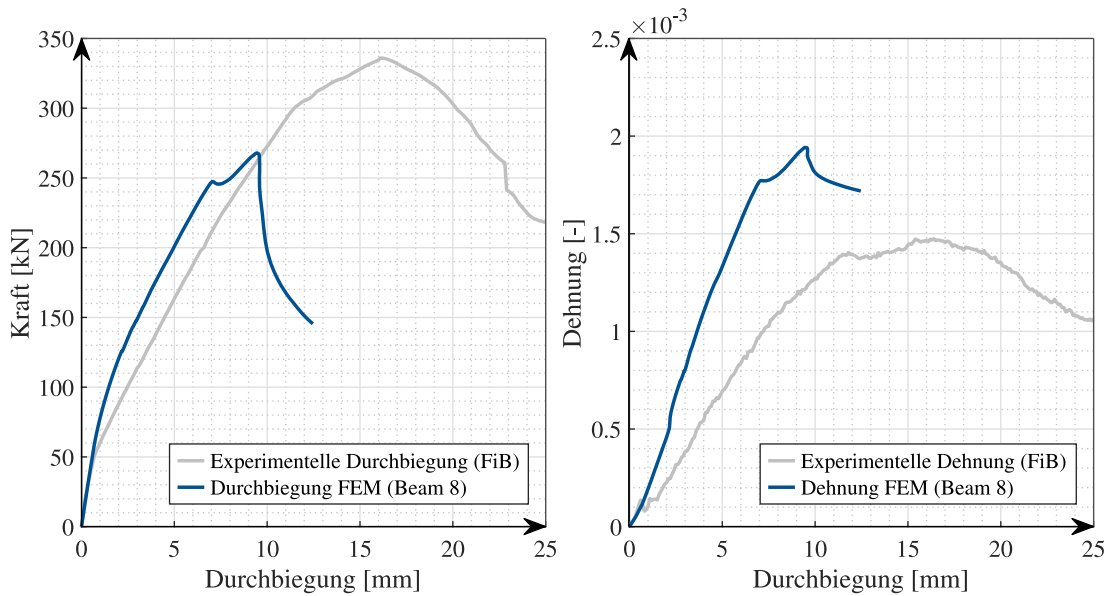


Abb. B.37: Gegenüberstellung Durchbiegung    Abb. B.38: Gegenüberstellung der Dehnung

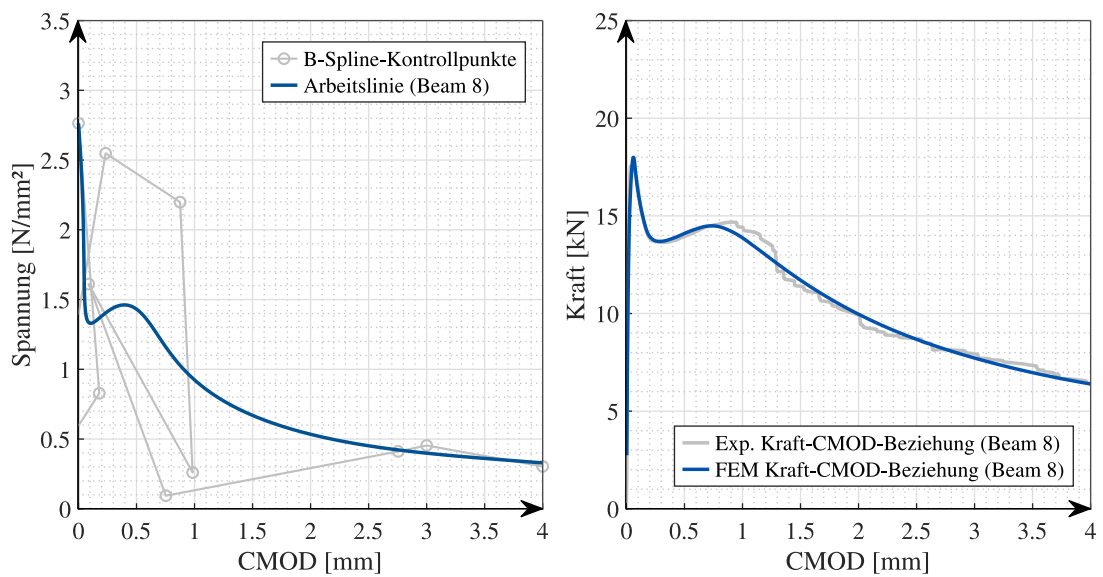


Abb. B.39: Ermittelte Arbeitslinie

Abb. B.40: Kraft-CMOD-Beziehungen

## Beam 9

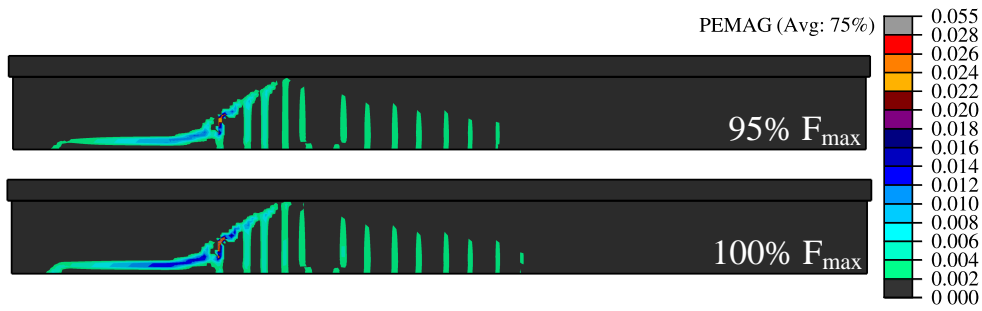


Abb. B.41: Rissbild des numerischen T-Profil-Modells bei 95 % und 100 %  $F_{max}$

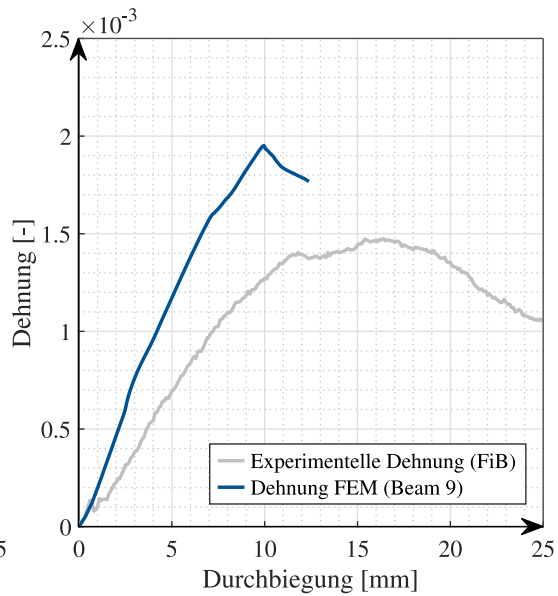
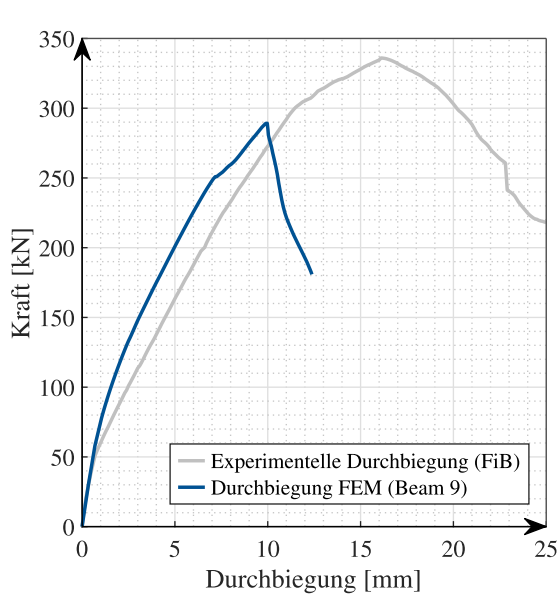


Abb. B.42: Gegenüberstellung Durchbiegung

Abb. B.43: Gegenüberstellung der Dehnung

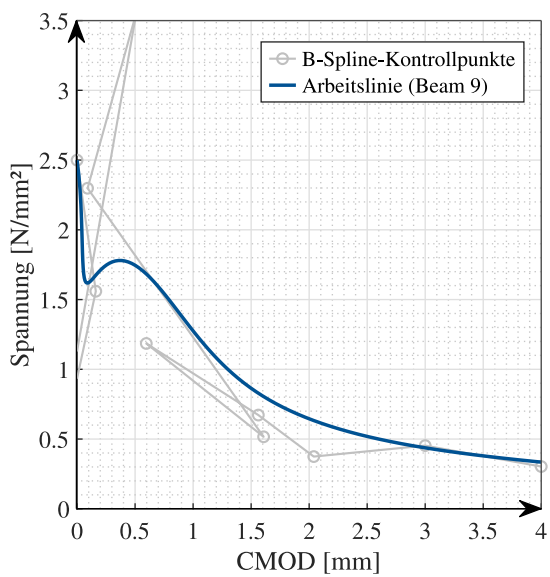


Abb. B.44: Ermittelte Arbeitslinie

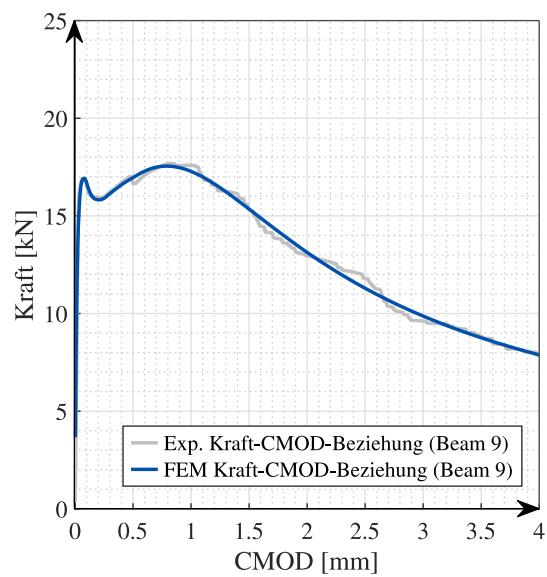


Abb. B.45: Kraft-CMOD-Beziehungen

## Beam 10

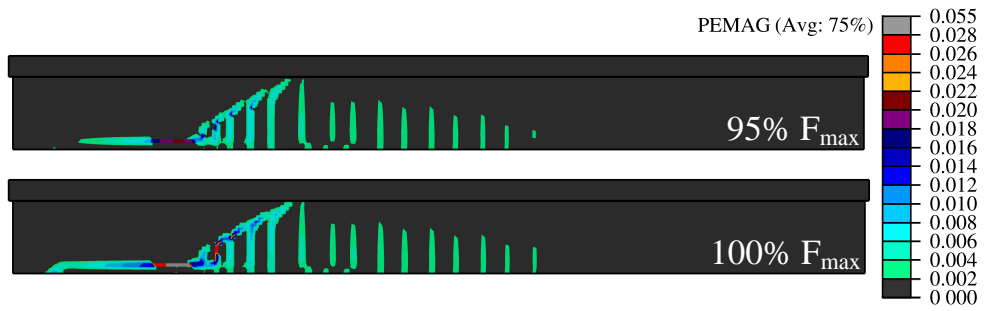


Abb. B.46: Rissbild des numerischen T-Profil-Modells bei 95 % und 100 %  $F_{max}$

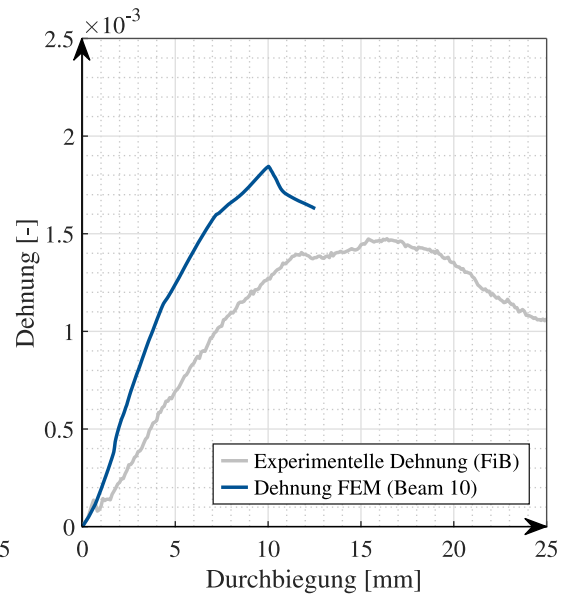
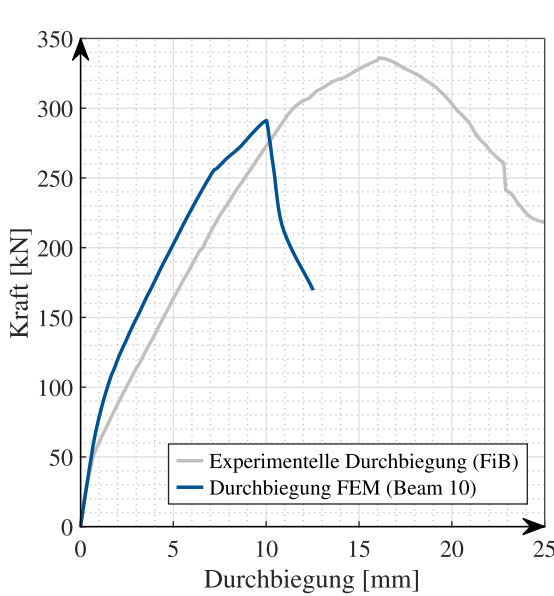


Abb. B.47: Gegenüberstellung Durchbiegung

Abb. B.48: Gegenüberstellung der Dehnung

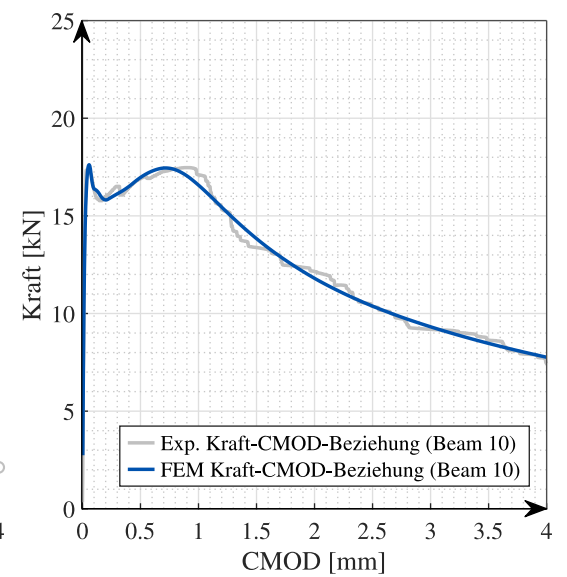
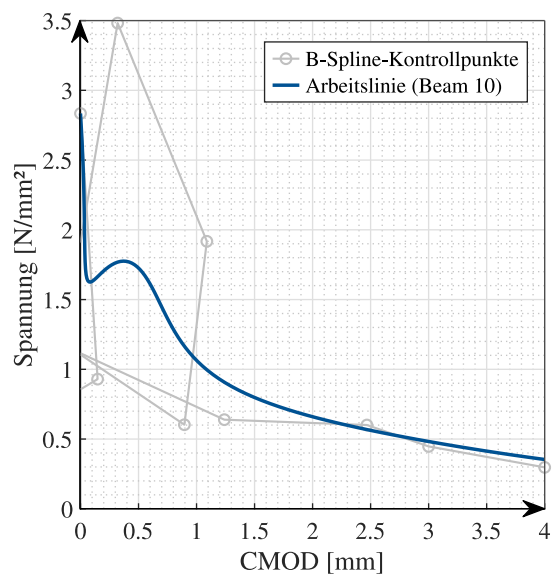


Abb. B.49: Ermittelte Arbeitslinie

Abb. B.50: Kraft-CMOD-Beziehungen

**Resultierende Arbeitslinie aus dem Durchschnitt aller inversen Arbeitslinien**

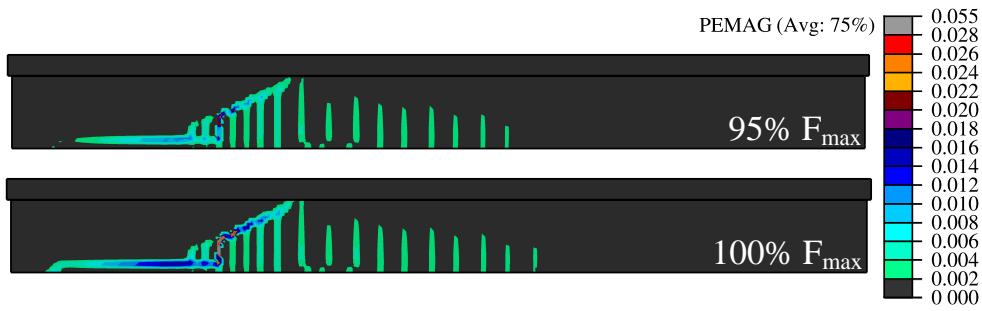


Abb. B.51: Rissbild des numerischen T-Profil-Modells bei 95 % und 100 %  $F_{max}$

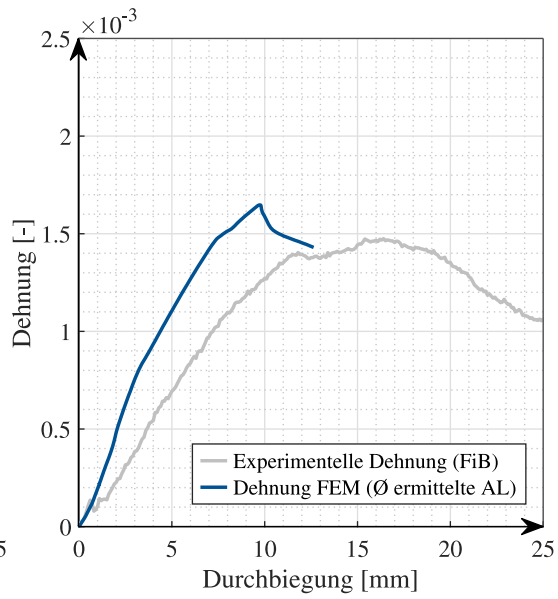
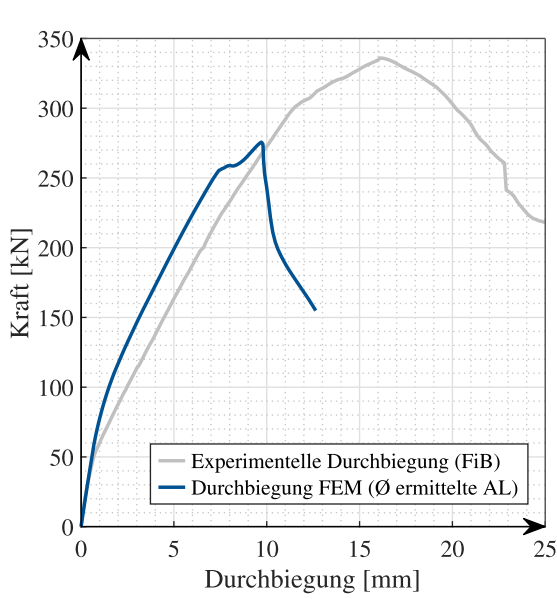


Abb. B.52: Gegenüberstellung Durchbiegung

Abb. B.53: Gegenüberstellung der Dehnung

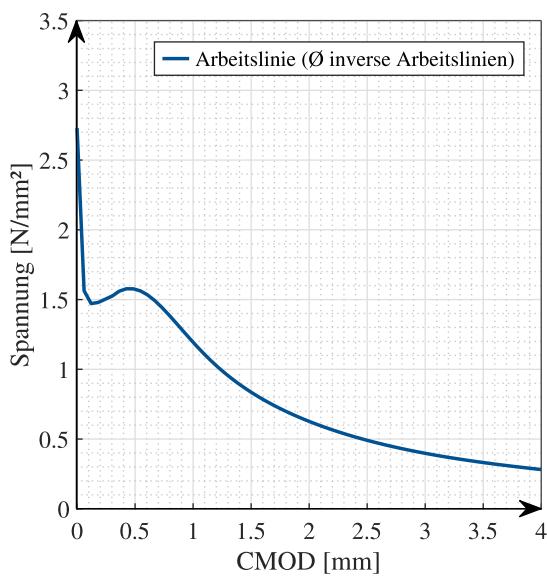


Abb. B.54: Ermittelte Arbeitslinie

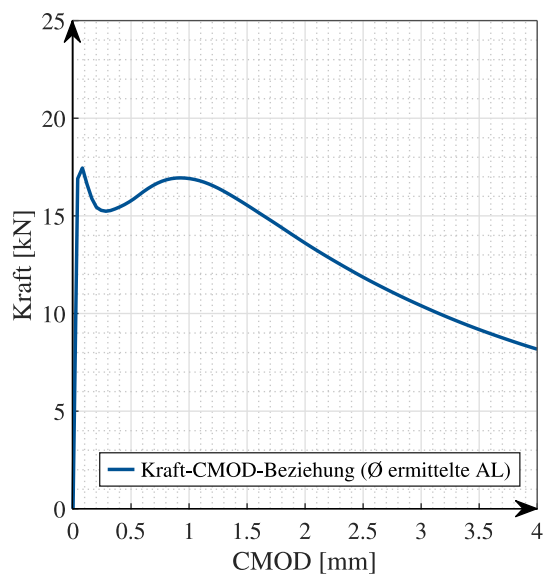


Abb. B.55: Kraft-CMOD-Beziehungen

**Resultierende Arbeitslinie aus dem Durchschnitt aller exp. Kraft-CMOD-Beziehungen**

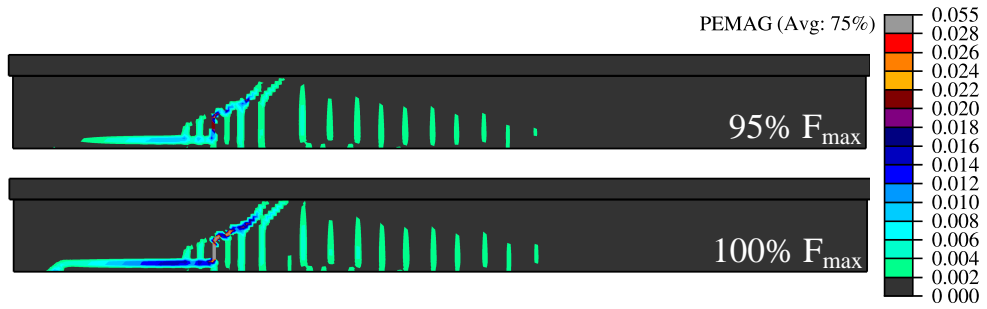


Abb. B.56: Rissbild des numerischen T-Profil-Modells bei 95 % und 100 %  $F_{max}$

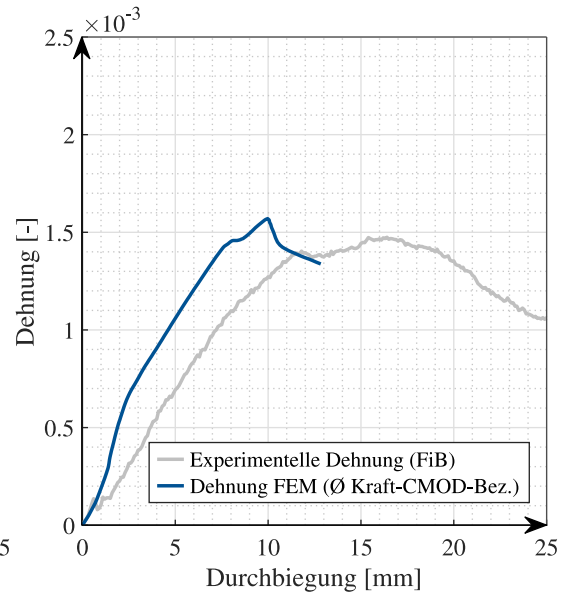
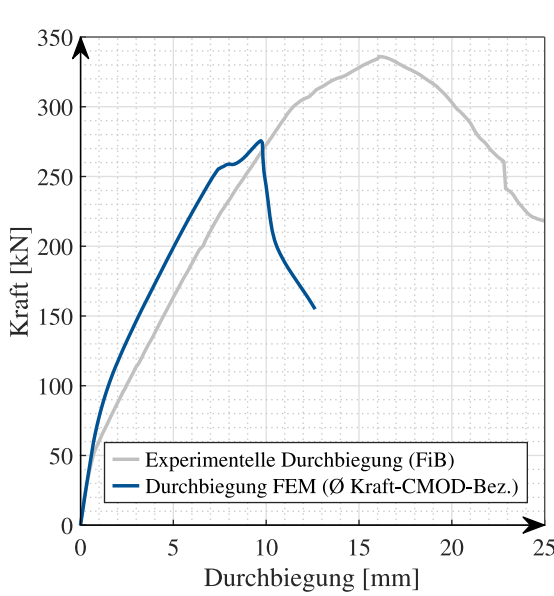


Abb. B.57: Gegenüberstellung Durchbiegung

Abb. B.58: Gegenüberstellung der Dehnung

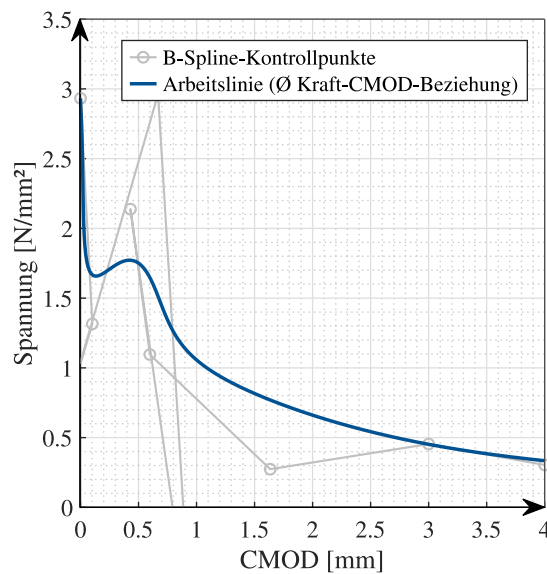


Abb. B.59: Ermittelte Arbeitslinie

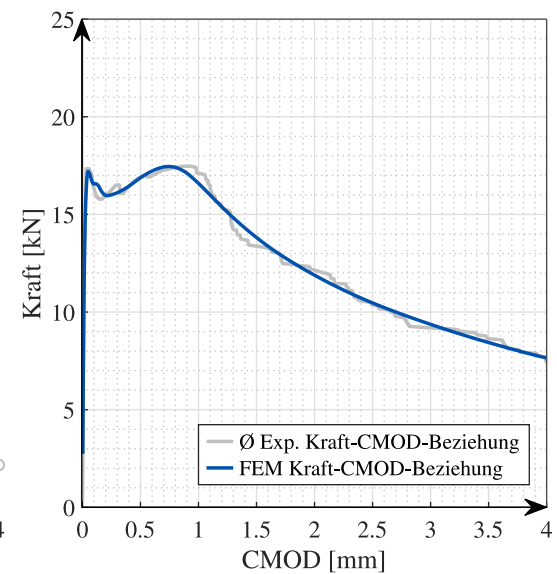


Abb. B.60: Kraft-CMOD-Beziehungen



