

# Ein approximatives Modell zur Bestimmung der frequenzabhängigen Admittanz rechteckiger Massivbauplatten

Masterthesis im Studienfach Bauingenieurwesen  
Technische Universität München (TUM)  
TUM School of Engineering and Design  
Department of Civil and Environmental Engineering  
Lehrstuhl für Bauphysik  
Prof. Dr.-Ing. Dipl.-Phys. Klaus Peter Sedlbauer

Korbinian Schwab

Betreuende:

Dr. Yohko Aoki, Fraunhofer Institut für Bauphysik (IBP)  
Dipl.-Ing. (FH) Sven Öhler, M. BP., Fraunhofer Institut für Bauphysik (IBP)  
Mai-Khanh Talke, M. Sc., Lehrstuhl für Bauphysik, TUM

München, den 17. Mai 2023

---

## Zusammenfassung

Lärm ist in Deutschland ein nahezu flächendeckendes Umweltproblem (Weinandy & Myck, 2013) und gehört zu den am stärksten wahrgenommenen Störungen der Gesellschaft (Thißen & Niemann, 2016). 45 % der TeilnehmerInnen einer Studie von Niemann et al. (2014) fühlen sich durch Lärm belästigt, während 30 % der Betroffenen den Nachbarschaftslärm als Hauptursache nennen. Da Nachbarschaftslärm in den meisten Fällen stoffliche Grenzen durchdringt, spielt die Körperschallübertragung trennender Bauteile eine entscheidende Rolle. Neben Luft- und Trittschallübertragungen stellen Haustechnikanlagen eine häufige Lärmquelle dar. Insbesondere Installationsgeräusche aus Sanitäranlagen weisen hohes Störpotential auf. (Weber et al., 2019)

Die rechnerische Prognose der Schalldruckpegel von Installationsgeräuschen gilt als aufwändig und komplex. Der aktuelle Normenentwurf der E DIN EN 12354-5:2022-02 erörtert dazu planerische Methoden. Vor diesem thematischen Hintergrund entwickelt das Fraunhofer IBP Methoden zur approximativen Berechnung des Schalldruckpegels durch Installationen in angrenzenden Räumen. In den Berechnungsablauf geht unter anderem die Admittanz der Empfängerstruktur ein. Im Kontext von Installationen bilden Bodenplatten und Wände häufige Empfänger. Da die Admittanz aufwändig numerisch berechnet werden muss, geht in das innovative Prognosemodell eine approximierte Variante der Admittanz ein. Der Normenentwurf schlägt für Plattenbauteile in Massivbauweise einen konstanten Mittelwert als Vereinfachung vor. Dieser Mittelwert überschätzt jedoch den tatsächlichen Wert der Plattenadmittanz bei tiefen Frequenzen und an auflagernahen Positionen. Diese Diskrepanz bildet die Wissenslücke der vorliegenden Untersuchung und formuliert die Forschungsfrage: „Stellt ein hybrides frequenz- und ortsabhängiges Admittanzmodell eine geeignete Ergänzung für das statische Modell von E DIN EN 12354-5:2022-02 Annex F dar?“ In diesem Zusammenhang stellt sich zur Forschungsfrage die Hypothese, dass der Verlauf des Gradienten der Admittanz von rechteckigen Platten unterhalb der ersten Eigenfrequenz bzw. im tieffrequenten Spektrum ohne detaillierte Modellierung für jede Position und Auflagerbedingung bestimmbar ist.

Als zentrale Methode generieren Parameterstudien im Rahmen explorativer Forschung die Eingangsdaten für Simulationen. Neben einer Vielzahl an Zusammenhängen bezüglich der Admittanz und der zugrundeliegenden Parameter, resultieren aus diesen Studien zwei approximative Admittanzmodelle mit unterschiedlichen Prioritäten. Während Ansatz I eine maximale Vereinfachung umsetzt, verfolgt Ansatz II das Ziel einer möglichst hohen Prognosequalität. Durch beispielhafte Anwendungen, begleitet durch Messergebnisse, werden abschließend die Modelle validiert.

Beide Ansätze und das resultierende hybride Modell, als Konzept der Umsetzung, stellen die Admittanz in Abhängigkeit der Plattenparameter und der Auflagersituation besser dar, als die konstante Admittanzvereinfachung aus E DIN EN 12354-5:2022-02. Die Berechnungen nach Ansatz II prognostizieren dabei die Admittanz mit höherer Genauigkeit als nach Ansatz I. Mit Verweis auf die Limitationen der Arbeit kann die Forschungsfrage positiv beantwortet werden. Die These kann vorerst nicht bestätigt werden, da eine stringente Berücksichtigung der Auflagersituation im hybriden Modell, basierend auf den Limitationen, noch nicht möglich ist.

---

## Abstract

Noise is a nationwide environmental problem (Weinandy & Myck, 2013) and is one of the most strongly perceived disturbances in society (Thißen & Niemann, 2016). 45 % of the study participants of Niemann et al. (2014) are bothered by noise, while 30 % of those affected consider neighbourhood noise to be the main cause. Since neighbourhood noise in most cases diffuses through material boundaries, the transmission of structure-borne sound plays a decisive role. In addition to airborne and impact sound transmission, building services equipment is a frequent source of noise. In particular, installation noises from sanitary systems have a high potential for disturbance. (Weber et al., 2019)

The computational prediction of sound pressure levels of installation noise is considered to be complex and time-consuming. For this, the current draft of standard E DIN EN 12354-5:2022-02 discusses planning methods. Against this thematic background, Fraunhofer IBP is developing methods for approximate calculation of sound pressure levels due to installations in adjacent rooms. In the calculation process the mobility of the receiver structure is included. In the context of installations, the receivers are for example floor plates and walls. Since the mobility has to be calculated numerically, an approximated variant of the mobility is used in the innovative forecast model. The draft of the standard suggests a constant mean value as a simplification for plate-like building components in solid construction. However, this mean value overestimates the actual value of the plate mobility at low frequencies and at positions close to the support. This circumstance forms the knowledge gap of the present study and formulates the research question: "Does a hybrid frequency- and location-dependent mobility model represent a suitable extension for the static model of E DIN EN 12354-5:2022-02 Annex F?" In connection with this research question, the hypothesis arises that the gradient of the platemobility below the first natural frequency respectively in the low-frequency spectrum can be determined without detailed modelling for each position and support condition.

As a central method, parameter studies within the framework of explorative research generate the input data for simulations. In addition to a large number of correlations regarding mobility and the underlying parameters, these studies result in two approximate mobility models with different priorities. While approach I implements a maximum simplification, Approach II pursues the goal of the highest possible forecast quality. By means of exemplary applications accompanied by measurement results, the models are finally validated.

Both approaches and the resulting hybrid model as the concept of implementation represent the mobility depending on the plate parameters and the support situation better than the constant simplification from E DIN EN 12354-5:2022-02. The calculations according to approach II predict the mobility with higher accuracy than according to approach I. With reference to the limitations of the thesis the research question can be answered positively. The hypothesis cannot be confirmed for the time being, since a stringent consideration of the support situation in the hybrid model is not yet possible.

# Inhaltsverzeichnis

<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>I</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>VI</b>
<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>VII</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Thematischer Hintergrund . . . . .	1
1.2 Problemstellung, Forschungsfrage und Hypothese . . . . .	2
1.3 Stand des Wissens . . . . .	5
1.4 Methodik und Aufbau der Arbeit . . . . .	9
<b>2 Theorie der Dynamik von Balken und Platten</b>	<b>12</b>
2.1 Theorie . . . . .	12
2.2 Linearisierte Admittanz und logarithmische Darstellung . . . . .	25
<b>3 Messung und Simulation</b>	<b>26</b>
3.1 Messung in Prüfstand P9 . . . . .	26
3.1.1 Messgegenstand - Prüfstand für Estriche und Beläge P9/P10 . . . . .	26
3.1.2 Messaufbau – P9 . . . . .	27
3.1.3 Datenverarbeitung und Ergebnisse – P9 . . . . .	28
3.2 Messung in Prüfstand P12 . . . . .	35
3.2.1 Messgegenstand - Installationsprüfstand P12 . . . . .	35
3.2.2 Messaufbau – P12 . . . . .	36
3.2.3 Datenverarbeitung und Ergebnisse – P12 . . . . .	39
3.3 Simulation . . . . .	39
3.3.1 Simulationstool . . . . .	40
3.3.2 Simulationspositionen auf Platte P9 . . . . .	41
3.4 Experimentelle Kalibrierung der numerischen Simulationen . . . . .	45
3.4.1 Methode und Ergebnisse . . . . .	45
3.4.2 Diskussion der Ergebnisse von Kalibrierung und Validierung . . . . .	47
3.5 Sensitivitätsanalyse der Modellparameter bezüglich Admittanz und Gradient . . . . .	51
3.5.1 Methode und Ergebnisse . . . . .	51
3.5.2 Diskussion der Ergebnisse der Sensitivitätsanalyse . . . . .	56
<b>4 Vorarbeiten zur Entwicklung approximativer Gradientenmodelle</b>	<b>57</b>
4.1 Dimensionslose Steifigkeiten . . . . .	57
4.2 Gradient der Admittanz - Ergebnisse, Gegenüberstellungen und Diskussion . . . . .	59
4.2.1 Definition verwendeter Gradientenbezeichnungen . . . . .	59
4.2.2 Gradientenverläufe entlang radialer Achsen . . . . .	60

---

4.2.3	Ideal-mechanische Auflagersituationen . . . . .	63
4.2.4	Positionelle Abhängigkeiten zwischen radialen Achsen . . . . .	64
4.2.5	Verhalten der Gradienten bei variierenden Rotationssteifigkeiten der Auflager . . . . .	67
4.3	Gemeinsame theoretische Grundlagen für Ansatz I und Ansatz II . . . . .	72
4.4	Relevanter Betrachtungsbereich entwickelter Modelle . . . . .	74
4.5	Zusammenfassung der Vorarbeiten . . . . .	76
<b>5</b>	<b>Entwicklung approximativer Gradientenmodelle</b>	<b>77</b>
5.1	Methodik der Entwicklung approximativer Gradientenmodelle . . . . .	77
5.2	Vereinfachter Gradient in Plattenmitte – Ansatz I . . . . .	78
5.2.1	Herleitung des vereinfachten Gradienten in Plattenmitte – <i>gradSimp</i> . . . . .	78
5.2.2	Umsetzung eines approximierten Gradienten ( <i>gradApproxI</i> ) . . . . .	79
5.2.3	Ergebnisse des approximierten Gradienten nach Ansatz I . . . . .	80
5.3	Vereinfachter Gradient an beliebigen Auswertungspositionen – Ansatz II . . . . .	85
5.3.1	Herleitung des vereinfachten Gradienten an beliebiger Position ( <i>gradAna1</i> ) . . . . .	85
5.3.2	Umsetzung eines approximierten Gradienten ( <i>gradApproxII</i> ) . . . . .	86
5.3.3	Ergebnisse des approximierten Gradienten nach Ansatz II . . . . .	88
<b>6</b>	<b>Exemplarische Anwendung der Ansätze sowie grundlegende Validierung</b>	<b>99</b>
6.1	Umsetzung der Ansätze als hybrides Modell . . . . .	99
6.2	Ergebnisse des hybriden Modells – Installationswand (P12) . . . . .	101
6.3	Ergebnisse des hybriden Modells – Duschwanne auf Bodenplatte (P12) . . . . .	107
<b>7</b>	<b>Diskussion und Limitationen</b>	<b>110</b>
7.1	Diskussion . . . . .	110
7.1.1	Methodik . . . . .	110
7.1.2	Modellentwicklung . . . . .	110
7.1.3	Exemplarische Anwendung . . . . .	113
7.2	Limitationen . . . . .	115
<b>8</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>117</b>
8.1	Zusammenfassung . . . . .	117
8.2	Ausblick . . . . .	119
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>120</b>
	<b>Anhang</b>	<b>126</b>
A	Weiterführendes . . . . .	126
B	MATLAB Skripte und Speicherstruktur der archivierten Daten . . . . .	131
C	Datenblätter verwendeter Messgeräte . . . . .	135
D	Weitere Tabellen . . . . .	139
E	Weitere Abbildungen . . . . .	144
F	Pläne . . . . .	167

---

## Abbildungsverzeichnis

Abb. 1:	Skizze einer exemplarischen Situation – Duschkabine in Raumecke . . . . .	2
Abb. 2:	Messergebnisse und Prognose des normierten Installationsschalldruckpegels auf Grundlage der charakteristischen Admittanz (IBP interne Daten, eigene Darstellung)	4
Abb. 3:	Exemplarische Punktdmittanz nahe der Plattenmitte sowie nahe der Plattenecke (eigene Darstellung) . . . . .	5
Abb. 4:	Flussdiagramm der Methodik vorliegender Untersuchungen . . . . .	10
Abb. 5:	Definition der Koordinatensysteme . . . . .	12
Abb. 6:	Skizzierte Verläufe der Admittanz der dynamischen Standardsysteme Feder, Dämpfer und Masse (eigene Darstellung nach Fahy (2006, S. 81)) . . . . .	18
Abb. 7:	Standardmodell Einmassenschwinger (sdof) . . . . .	19
Abb. 8:	Admittanz des Einmassenschwingers nach Gleichung 29 (eigene Darstellung) . . .	20
Abb. 9:	Gelenkig gelagerter Balken (eigene Darstellung nach Fahy (2006, S. 96)) . . . . .	21
Abb. 10:	Moden 1, 2 und 3 eines gelenkig gelagerten Balkens (eigene Darstellung) . . . . .	23
Abb. 11:	Punktdmittanz eines Balkens (Auswertung an $x = 0,4 \cdot l$ , eigene Darstellung) . . .	23
Abb. 12:	Planausschnitt der trennenden Bodenplatte in P9 inklusive der Messpositionen . . .	28
Abb. 13:	Beschleunigungssensoren, Kraftsensor sowie Shaker für die Admittanzbestimmung der Bodenplatte in Prüfstand P9 . . . . .	29
Abb. 14:	Messsetup für die Admittanzbestimmung der Bodenplatte in P9 . . . . .	30
Abb. 15:	Position 1w - Platte P9 - Messergebnisse: Admittanzpegel, Phase und Kohärenz der Kanäle CH2 und CH3 sowie deren Mittelwert . . . . .	31
Abb. 16:	Position 4d - Platte P9 - Messergebnisse: Admittanzpegel, Phase und Kohärenz der Kanäle CH2 und CH3 sowie deren Mittelwert . . . . .	32
Abb. 17:	Position 4d - Platte P9 - Messergebnisse: Admittanzpegel, Imaginärteil und Realteil	33
Abb. 18:	Position 1w - Platte P9: anhand von Messdaten berechnete Gradienten mithilfe polyfit Funktion und linearer Regression . . . . .	34
Abb. 19:	Planausschnitt der Installationswand von P12 inklusive der Messpositionen . . . . .	37
Abb. 20:	Beschleunigungssensor sowie Impulshammer zur Admittanzbestimmung der Installationswand in Prüfstand P12 . . . . .	38
Abb. 21:	Messsetup zur Admittanzbestimmung der Installationswand in Prüfstand P12 . . . .	38
Abb. 22:	Position F6 - Installationswand P12 - Messergebnisse: Admittanzpegel, Phase und Kohärenz . . . . .	39
Abb. 23:	Simulationspositionen auf Platte P9 . . . . .	42
Abb. 24:	Symmetrieeigenschaften bezüglich Admittanz und Gradient für Platten . . . . .	43
Abb. 25:	Position 4d: Messung sowie Simulation mit kalibrierten Bedingungen (Kalibrierung) .	47
Abb. 26:	Position 0: Messung sowie Simulation mit kalibrierten Bedingungen (Validierung) . .	48
Abb. 27:	Position 1w: Messung sowie Simulation mit kalibrierten Bedingungen (Validierung) .	49
Abb. 28:	Position 0: simulierte sowie aus Messung ermittelte Gradienten (Validierung) . . . .	49

Abb. 29:	Position 1w: simulierte sowie aus Messung ermittelte Gradienten (Validierung) . . .	50
Abb. 30:	Factor Screening: variierende Auflagersteifigkeiten an Position 4d . . . . .	52
Abb. 31:	Factor Screening: variierender Elastizitätsmodul an Position 4d . . . . .	52
Abb. 32:	Factor Screening: variierende Rohdichte an Position 4d . . . . .	54
Abb. 33:	Factor Screening: variierende Plattendicke an Position 4d . . . . .	55
Abb. 34:	Gradienten entlang der Achse I für gelenkige, eingespannte und kalibrierte Lagerung	61
Abb. 35:	Gradienten entlang der Achsen I bis VI für gelenkige Lagerung . . . . .	62
Abb. 36:	Gradienten entlang der Achsen I bis VI für eingespannte Lagerung . . . . .	62
Abb. 37:	Gradienten entlang der Achse I für gelenkige, eingespannte und kalibrierte Lagerung	63
Abb. 38:	Gradienten entlang der Achse B für kalibrierte Lagerung . . . . .	65
Abb. 39:	Grundriss der Platte P9 mit Linien gleicher Gradienten bei eingespannter Lagerung	66
Abb. 40:	Gradienten in Plattenmitte bei veränderlichen, dimensionslosen Rotationssteifigkeiten der Auflager . . . . .	69
Abb. 41:	Gradienten entlang der Achse I für gelenkige, eingespannte und kalibrierte Lagerung	70
Abb. 42:	Gradienten in Plattenmitte bei veränderlichen, dimensionslosen Rotationssteifigkeiten der Auflager sowie bei variierenden Plattenparametern . . . . .	70
Abb. 43:	Normierte Gradienten in Plattenmitte bei veränderlichen, dimensionslosen Rotationssteifigkeiten der Auflager sowie bei variierenden Plattenparametern . . . . .	71
Abb. 44:	Gradienten entlang der Achse I inklusive Grenzen des hybriden Modells . . . . .	75
Abb. 45:	Grundriss Platte P9 mit Anwendungsbereichen des hybriden Modells sowie des Modells charakteristischer Admittanz . . . . .	76
Abb. 46:	Vereinfachte Gradienten entlang der Achse I sowie Umsetzung des Ansatzes I . . .	82
Abb. 47:	Vereinfachte Gradienten entlang der Achse I sowie Umsetzung des Ansatzes I inklusive Fehlerbetrachtung . . . . .	83
Abb. 48:	Vereinfachte Gradienten entlang der Achse VI sowie Umsetzung des Ansatzes I inklusive Fehlerbetrachtung . . . . .	83
Abb. 49:	Fehlerwerte des Ansatzes I entlang der Achse B für gelenkige Lagerung . . . . .	84
Abb. 50:	Fehlerwerte des Ansatzes I entlang der Achse B für eingespannt Lagerung . . . . .	84
Abb. 51:	Visualisierung des modalen Ansatzes einer Punktadmittanz am gelenkig gelagerten Balken (aus Fahy (2006, S. 99)) . . . . .	87
Abb. 52:	Visualisierung des modalen Ansatzes einer Punktadmittanz am gelenkig gelagerten Balken mit einer Grenzfrequenz von 1 kHz und den Anteilen der residualen Moden (aus Fahy (2006, S. 99)) . . . . .	87
Abb. 53:	Vereinfachte Gradienten entlang der Achse I für gelenkige Lagerung (Ansatz II) . . .	89
Abb. 54:	Vereinfachte Gradienten entlang der Achse I für eingespannte Lagerung (Ansatz II)	90
Abb. 55:	Vereinfachte Gradienten entlang der Achse VI für gelenkige Lagerung (Ansatz II) . .	91
Abb. 56:	Vereinfachte Gradienten entlang der Achse VI für eingespannte Lagerung (Ansatz II)	92
Abb. 57:	Korrekturfaktoren entlang der Achse B für gelenkige Lagerung (Ansatz II) . . . . .	93
Abb. 58:	Korrekturfaktoren entlang der Achse B für eingespannte Lagerung (Ansatz II) . . . .	94
Abb. 59:	Korrekturfaktoren bei variierenden Parametern für gelenkige Lagerung (Ansatz II) . .	94

## Abbildungsverzeichnis

---

Abb. 60:	Korrekturfaktoren bei variierenden Parametern für eingespannte Lagerung (Ansatz II)	95
Abb. 61:	Vereinfachte Gradienten entlang der Achse I sowie Umsetzung des Ansatzes II inklusive Fehlerbetrachtung für P9 - eingespannt	96
Abb. 62:	Simulierte Admittanz inklusive <i>gradNum</i> und <i>gradApproxII</i> für Platte P9 und gelenkige Lagerung	96
Abb. 63:	Vereinfachte Gradienten entlang der Achse I sowie Umsetzung des Ansatzes II inklusive Fehlerbetrachtung für plus100% Dimension - eingespannt	97
Abb. 64:	Simulierte Admittanz inklusive <i>gradNum</i> und <i>gradApproxII</i> für plus100% Dimension und eingespannte Lagerung	97
Abb. 65:	Simulierte Admittanz inklusive <i>gradNum</i> und <i>gradApproxII</i> für Platte P9 und kalibrierte Lagerung an Position 0sy	98
Abb. 66:	Simulierte Admittanz inklusive <i>gradNum</i> und <i>gradApproxII</i> für Platte plus100% Dimensionen und kalibrierte Lagerung an Position 0sy	98
Abb. 67:	Simulierte und gemessene Admittanzen an Position F6 inklusive der ermittelten Eigenfrequenzen	103
Abb. 68:	Simulierte und gemessene Admittanzen sowie simulierte und approximierete Gradienten an Position D1 für die Wand P12 (d = 13 cm)	104
Abb. 69:	Simulierte und gemessene Admittanzen sowie simulierte und approximierete Gradienten an Position W4 für die Wand P12 (d = 13 cm)	105
Abb. 70:	Simulierte Admittanz sowie approximierete und simulierte Gradienten an Position D3 für die Wand P12 (d = 13 cm)	105
Abb. 71:	Simulierte Admittanzen sowie approximierete und simulierte Gradienten an Position S1 für die Wand P12 (d = 13 cm)	106
Abb. 72:	Anwendung des hybriden Modells - Duschwanne auf der Bodenplatte in P12 unter gelenkiger Auflagerbedingung (rot, schwarz ... IBP interne Daten; blau ... eigene Daten in innovativem Modell (IBP) eingesetzt)	109
Abb. 73:	Anwendung des hybriden Modells - Duschwanne auf der Bodenplatte in P12 unter eingespannter Auflagerbedingung (rot, schwarz ... IBP interne Daten; blau ... eigene Daten in innovativem Modell (IBP) eingesetzt)	109
Abb. A.1:	Idealisiertes Auflager einer Platte auf einer Wand	128
Abb. C.1:	Kraftsensor Typ 8200 Sr.Nr.: 1258108; individuelle Daten	136
Abb. C.2:	Kraftsensor Typ 8200; allgemeine Daten	136
Abb. C.3:	Beschleunigungssensor Typ 4371 Sr.Nr.: 1632488; individuelle Daten	136
Abb. C.4:	Beschleunigungssensor Typ 4371 Sr.Nr.: 1632489; individuelle Daten	136
Abb. C.5:	Beschleunigungssensor Typ 4371; allgemeine Daten	137
Abb. C.6:	Impulshammer Typ 8202 Sr.Nr.: 1291219; individuelle Daten	138
Abb. C.7:	Kraftsensor Typ 8200 Sr.Nr.: 1288471; individuelle Daten	138
Abb. C.8:	Kraftsensor Typ 8200; allgemeine Daten	138
Abb. C.9:	Beschleunigungssensor Typ 4371 Sr.Nr.: 1632488; individuelle Daten	138
Abb. C.10:	Beschleunigungssensor Typ 4371; allgemeine Daten	139

Abb. E.1:	Punktadmittanz einer frei gelagerten Platte mit Auswertungsposition am Rand . . .	144
Abb. E.2:	Vertikalschnitt des Prüfstands für Estrich und Beläge P9/P10 (Maße in cm, Bildquelle IBP intern) . . . . .	145
Abb. E.3:	Vertikalschnitt des Installationsprüfstands P12 (Maße in cm, Bildquelle IBP intern) .	145
Abb. E.4:	Position 0 - Platte P9 - Messergebnisse: Admittanzpegel, Phase und Kohärenz der Kanäle CH2 und CH3 sowie deren Mittelwert . . . . .	146
Abb. E.5:	Position 1d - Platte P9 - Messergebnisse: Admittanzpegel, Phase und Kohärenz der Kanäle CH2 und CH3 sowie deren Mittelwert . . . . .	146
Abb. E.6:	Position 2d - Platte P9 - Messergebnisse: Admittanzpegel, Phase und Kohärenz der Kanäle CH2 und CH3 sowie deren Mittelwert . . . . .	147
Abb. E.7:	Position 3d - Platte P9 - Messergebnisse: Admittanzpegel, Phase und Kohärenz der Kanäle CH2 und CH3 sowie deren Mittelwert . . . . .	147
Abb. E.8:	Position 5d - Platte P9 - Messergebnisse: Admittanzpegel, Phase und Kohärenz der Kanäle CH2 und CH3 sowie deren Mittelwert . . . . .	148
Abb. E.9:	Position 2w - Platte P9 - Messergebnisse: Admittanzpegel, Phase und Kohärenz der Kanäle CH2 und CH3 sowie deren Mittelwert . . . . .	148
Abb. E.10:	Position 3w - Platte P9 - Messergebnisse: Admittanzpegel, Phase und Kohärenz der Kanäle CH2 und CH3 sowie deren Mittelwert . . . . .	149
Abb. E.11:	Position 4w - Platte P9 - Messergebnisse: Admittanzpegel, Phase und Kohärenz der Kanäle CH2 und CH3 sowie deren Mittelwert . . . . .	149
Abb. E.12:	Position M1 - Installationswand P12 - Messergebnisse: Admittanzpegel, Phase und Kohärenz . . . . .	150
Abb. E.13:	Position W4 - Installationswand P12 - Messergebnisse: Admittanzpegel, Phase und Kohärenz . . . . .	150
Abb. E.14:	Position D1 - Installationswand P12 - Messergebnisse: Admittanzpegel, Phase und Kohärenz . . . . .	151
Abb. E.15:	Beispielhafte Parametereinstellungen des Simulationstools über „parameter.txt“ (Aoki, 2009) . . . . .	151
Abb. E.16:	Position 3w - Platte P9: Messung sowie Simulation mit kalibrierten Bedingungen (Validierung) . . . . .	152
Abb. E.17:	Position 5d - Platte P9: Messung sowie Simulation mit kalibrierten Bedingungen (Validierung) . . . . .	152
Abb. E.18:	Position 1d - Platte P9: simulierte sowie aus Messung ermittelte Gradienten (Validierung) . . . . .	153
Abb. E.19:	Position 2w - Platte P9: simulierte sowie aus Messung ermittelte Gradienten (Validierung) . . . . .	153
Abb. E.20:	Position 3w - Platte P9: simulierte sowie aus Messung ermittelte Gradienten (Validierung) . . . . .	154
Abb. E.21:	Position 4w - Platte P9: simulierte sowie aus Messung ermittelte Gradienten (Validierung) . . . . .	154
Abb. E.22:	Factor Screening: variierende Auflagersteifigkeiten an Position 2d . . . . .	155
Abb. E.23:	Gradienten entlang der Achse VI für gelenkige, eingespannte und kalibrierte Lagerung	155

Abb. E.24: Gradienten entlang der Achse I bei verschiedenen Auflagerbedingungen . . . . .	156
Abb. E.25: Grundriss der Platte P9 mit Linien gleicher Gradienten bei eingespannter Lagerung	156
Abb. E.26: Grundriss der Platte P9 mit eingezeichneten Achsen I, 025, 050, 075 und VI . . . . .	157
Abb. E.27: Gradienten entlang der Achsen I, 025, 050, 075 und VI für gelenkige Lagerung (Hinweis: die Überschneidungen der Kurven sind vermutlich auf numerische Fehler zurückzuführen) . . . . .	157
Abb. E.28: Gradienten entlang der Achsen I, 025, 050, 075 und VI für eingespannte Lagerung (Hinweis: die Überschneidungen der Kurven ist vermutlich auf numerische Fehler zurückzuführen) . . . . .	158
Abb. E.29: Variierende Verlustfaktoren für Standardplatte P9 – gelenkig gelagert . . . . .	158
Abb. E.30: Vereinfachte Gradienten entlang der Achse II sowie Umsetzung des Ansatzes I inklusive Fehlerbetrachtung . . . . .	159
Abb. E.31: Vereinfachte Gradienten entlang der Achse III für gelenkige Lagerung (Ansatz II) . .	159
Abb. E.32: Vereinfachte Gradienten entlang der Achse III für eingespannte Lagerung (Ansatz II)	160
Abb. E.33: Vereinfachte Gradienten entlang der Achse I sowie Umsetzung des Ansatzes II inklusive Fehlerbetrachtung für P9 - gelenkig . . . . .	160
Abb. E.34: Simulierte Admittanz inklusive <i>gradNum</i> und <i>gradApproxII</i> für Platte P9 und gelenkige Lagerung . . . . .	161
Abb. E.35: Vereinfachte Gradienten entlang der Achse I sowie Umsetzung des Ansatzes II inklusive Fehlerbetrachtung für plus100% Dimension - gelenkig . . . . .	161
Abb. E.36: Simulierte Admittanz inklusive <i>gradNum</i> und <i>gradApproxII</i> für plus100% Dimension und gelenkige Lagerung . . . . .	162
Abb. E.37: Simulierte Admittanz inklusive <i>gradNum</i> und <i>gradApproxII</i> für Platte P9 und gelenkige Lagerung an Position 0sy . . . . .	162
Abb. E.38: Simulierte Admittanz inklusive <i>gradNum</i> und <i>gradApproxII</i> für Platte P9 und eingespannte Lagerung an Position 0sy . . . . .	163
Abb. E.39: Simulierte Admittanz inklusive <i>gradNum</i> und <i>gradApproxII</i> für Platte plus100% Dimensionen und gelenkige Lagerung an Position 0sy . . . . .	163
Abb. E.40: Simulierte Admittanz inklusive <i>gradNum</i> und <i>gradApproxII</i> für Platte plus100% Dimensionen und eingespannte Lagerung an Position 0sy . . . . .	164
Abb. E.41: Simulierte und gemessene Admittanzen an Position M1 (Platten- bzw. Wandmitte) inklusive der ermittelten Eigenfrequenzen . . . . .	164
Abb. E.42: Simulierte und gemessene Admittanzen an Position M1 (Platten- bzw. Wandmitte) inklusive der ermittelten Eigenfrequenzen einer kalibrierten Plattendicke . . . . .	165
Abb. E.43: Anwendung des hybriden Modells – Duschwanne auf der Bodenplatte in P12 unter gelenkiger Auflagerbedingung: Übergang von linear auf konstant . . . . .	165
Abb. E.44: Anwendung des hybriden Modells – Duschwanne auf der Bodenplatte in P12 unter eingespannter Auflagerbedingung: Übergang von linear auf konstant . . . . .	166

## Tabellenverzeichnis

Tab. 1	Fraunhofer IBP interne Materialparameter . . . . .	27
Tab. 2	Materialparameter der untersuchten Bodenplatte in Prüfstand P9 (Materialdaten IBP intern) . . . . .	27
Tab. 3	Auflistung der Messpositionen inklusive der weiterverwendeten Daten . . . . .	31
Tab. 4	Aus Messdaten berechnete Eigenfrequenzen der Stahlbetonplatte in P9 . . . . .	33
Tab. 5	Materialparameter der Bodenplatte und der Installationswand in P12 (Materialdaten IBP intern) . . . . .	36
Tab. 6	Eingabe Parameter für das verwendete MATLAB Tool „Mobility_ matlab.m“ (Aoki, 2009)	44
Tab. 7	Auflagerbedingungen nach erfolgreicher Kalibrierung für Platte P9 . . . . .	46
Tab. 8	Eingangswerte des Factor Screening . . . . .	53
Tab. 9	Ergebnisse des Factor Screening . . . . .	54
Tab. 10	Auflagersteifigkeiten: Konzept der dimensionslosen Steifigkeiten für Platte P9 . . . . .	59
Tab. 11	Gradienten - Abkürzung und Beschreibung . . . . .	60
Tab. 12	Abgelesene Positionen entlang der Achsen I bis VI für Linien gleicher Gradienten . . .	65
Tab. 13	Gradienten bei variierender Rotationssteifigkeit . . . . .	68
Tab. 14	Abgelesene Positionen entlang der Achsen I bis VI für <i>gradTrans</i> bei gelenkiger Lagerung	75
Tab. 15	Abgelesene Positionen entlang der Achsen I bis VI für <i>gradTrans</i> bei eingespannter Lagerung . . . . .	76
Tab. 16	Werte für $k_{nb}l$ nach Gardonio und Brennan (2004, S. 423) . . . . .	79
Tab. 17	Fehlerbetrachtung zwischen <i>gradNum</i> und <i>gradApproxI</i> nach Ansatz I entlang Achse I	82
Tab. 18	Materialparameter für die empirische Datenerhebung des Korrekturfaktors . . . . .	89
Tab. 19	Mittelwerte des Korrekturfaktors entlang der Achse I . . . . .	90
Tab. 20	Fehlerbetrachtung zwischen <i>gradNum</i> und <i>gradApproxII</i> nach Ansatz II entlang Achse I für Platte P9 . . . . .	93
Tab. 21	Fehlerbetrachtung zwischen <i>gradNum</i> und <i>gradApproxII</i> nach Ansatz II entlang Achse I für plus100% Dimension . . . . .	95
Tab. 22	Eigenfrequenz der Wand in P12 - simuliert und gemessen . . . . .	102
Tab. A.1	Plattenparameter nach erfolgreicher Kalibrierung . . . . .	128
Tab. B.1	Speicherstruktur der Simulationsdatensätze für Parametervariationen der Standardplatte P9 . . . . .	134
Tab. C.1	Verwendete Messgeräte (Eigentum des Fraunhofer IBPs, Stuttgart) . . . . .	135
Tab. D.1	Koordinaten aller Mess- und Simulationspositionen . . . . .	140
Tab. D.2	Fehlerbetrachtung zwischen <i>gradNum</i> und <i>gradApproxI</i> nach Ansatz I entlang Achse III	143
Tab. D.3	Fehlerbetrachtung zwischen <i>gradNum</i> und <i>gradApproxI</i> nach Ansatz I entlang Achse VI	143

## Symbolverzeichnis

Variable	Beschreibung	Einheit
$\delta$	Diracfunktion	–
$\eta$	Verlustfaktor	–
$\eta$	Verschiebung in z-Richtung (alternativ $w$ )	m
$\lambda$	Wellenlänge	m
$\nu$	Poissonzahl	–
$\pi$	Kreiszahl	–
$\rho$	Dichte	kg/m <sup>3</sup>
$\phi$	Phasenwinkel	rad bzw. °
$\phi$	Modenformfunktion	–
$\omega$	Kreisfrequenz	rad/s
$\omega_n$	Resonanzkreisfrequenz bzw. natürliche Kreisfrequenz	rad/s
$A$	Querschnittsfläche	m <sup>2</sup>
$a$	Gradient der Admittanz	m/N
$C$	Dämpfungskonstante	Ns/m
$c_{ph}$	Phasengeschwindigkeit	m/s
$c_B$	Phasengeschwindigkeit der Biegewelle	m/s
$c_L$	Schallgeschwindigkeit longitudinal	m/s
$D$	Biegesteifigkeit	Nm
$D_{TF}$	Gebäudeübertragungsfunktion	dB
$E$	Elastizitätsmodul, E-Modul	N/m <sup>2</sup>
$E'$	komplexes Elastizitätsmodul	N/m <sup>2</sup>
$F$	Kraft	N
$f$	Frequenz	Hz

## Symbolverzeichnis

---

$f_n$	Resonanzfrequenz bzw. natürliche Frequenz	Hz
$gradNum$	numerischer Gradient	m/N
$gradSimp$	vereinfachter Gradient: Plattenmitte und erste Mode	m/N
$gradApproxI$	approximierter Gradient: Ansatz I	m/N
$gradAna1$	analytischer Gradient: erste Mode	m/N
$gradApproxII$	approximierter Gradient: Ansatz II	m/N
$gradTrans$	Übergangsgradient	m/N
$h$	Plattendicke	m
$I_B$	Flächenträgheitsmoment (Balken)	m <sup>4</sup>
$I_P$	Flächenträgheitsmoment (Platte)	m <sup>3</sup>
$K$	Federsteifigkeit	N/m
$k$	lineare Federsteifigkeit pro Meter	N/m <sup>2</sup>
$k_\phi$	Rotationssteifigkeit pro Meter	N
$\bar{k}$	dimensionslose lineare Federsteifigkeit pro Meter	–
$\bar{k}_\phi$	dimensionslose Rotationssteifigkeit pro Meter	–
$k$	Wellenzahl	1/m
$k_B$	Biegewellenzahl	1/m
<i>Korrekturfaktor</i>	Korrekturfaktor Ansatz II	–
$L_A$	Luftschalldruckpegel	dB (Bezug: 2 · 10 <sup>-5</sup> Pa)
$L'_{In}$	normalisierter Installationsschalldruckpegel	dB (Bezug: 2 · 10 <sup>-5</sup> Pa)
$L_W$	Leistungspegel	dB (Bezug: 1 · 10 <sup>-12</sup> W)
$L_Y$	Admittanzpegel	dB (Bezug: 1 m/Ns)
$l$	Länge	m
$M, m$	Masse	kg
$M$	Moment	Nm
$M_r$	modale Masse der Mode r	kg
$m'$	längenbezogene Masse	kg/m
$m''$	flächenbezogene Masse	kg/m <sup>2</sup>

## Symbolverzeichnis

---

$N$	Normalkraft	N
$T$	Periode	s
$t$	Zeit	s
$t$	Wanddicke	m
$u$	Verschiebung in x-Richtung	m
$v$	Schnelle	m/s
$w$	Verschiebung in z-Richtung (alternativ $\eta$ )	m
$x, y, z$	kartesische Koordinaten, Koordinatenachsen	m
$Y$	Admittanz	m/Ns
$Y_c$	charakteristische Admittanz	m/Ns
$Y_0$	Bezugsadmittanz	1 m/Ns
$Y_{lin}$	linearisierte Admittanz	m/Ns
$Z$	Impedanz	Ns/m
$j$	imaginäre Einheit	–
$\text{Re}[\ ]$	Realteil einer komplexen Zahl	–
$\text{Im}[\ ]$	Imaginärteil einer komplexen Zahl	–
$\sim$	komplexe Zahl	–
$  $	Betrag einer Zahl	–
$\infty$	mathematisch unendlich	–

# 1 Einleitung

## 1.1 Thematischer Hintergrund

Schall gehört zu den alltäglichsten Eindrücken die wir Menschen erfahren. Dabei werden die Erlebnisse sowohl positiv als auch negativ wahrgenommen. Physikalisch besteht jedoch kein Unterschied zwischen einem wohltuenden Schallereignis und einer störenden Erfahrung. So unterliegt dieser Entscheidungsprozess einer subjektiven und psychischen Komponente, die auch von der persönlichen Haltung zur Quelle geprägt sein kann (Kalivoda, 1998) (DEGA, o.D.). Unabhängig der Definition von Lärm, der nach DIN 1320:2009-12 ein unerwünschtes Hörerlebnis ist, das „zu Störungen, Belästigungen, Beeinträchtigungen oder Schäden führen kann“ (DIN 1320:2009-12), spielen die unmittelbaren Folgen der Schallbelastung eine grundlegende Rolle im Wohlbefinden der Betroffenen. So führt Lärm, neben direkten physischen Belastungen des auditiven Systems wie Hörsturz und Tinnitus, nachweislich zu kardiovaskulären Krankheitsbildern, kognitiven Einschränkungen, Schlafstörungen und Belästigung (World Health Organization, 2018). Studien und Umfragen belegen, dass Lärm als nahezu flächendeckendes Umweltproblem in Deutschland gilt (Weinandy & Myck, 2013, S. 46) und zu den am stärksten wahrgenommenen Störungen der deutschen Gesellschaft zählt (Thißen & Niemann, 2016). 45 % der StudienteilnehmerInnen fühlen sich durch Lärm etwas, mittelmäßig oder stark bzw. äußerst stark belästigt. Während rund 45 % der Lärmbelästigten vorrangig unter Straßenverkehr leiden, nennen etwa 30 % den Nachbarschaftslärm als hauptsächliche Belästigungsursache im Wohnumfeld. (Niemann et al., 2014) Dem Umweltbundesamt zufolge fallen die Zahlen der Betroffenen durch Nachbarschaftslärm mit 57 % signifikanter aus (Umweltbundesamt, 2022).

Da Nachbarschaftslärm meist raumtrennende Bauteile als stoffliche Grenze überwinden muss, ist von Körperschalltransmission auszugehen. Geräuschemissionen der Haustechnik stellen dabei im häuslichen Bereich eine zunehmende Lärmquelle dar (Möhler & Eulitz, 2017). Neben außenliegenden Schallquellen wie beispielsweise Wärmepumpen (Möhler & Eulitz, 2017) bilden Aufzüge, elektrische Motoren von Jalousien oder Rollläden sowie Haushaltsgeräte Quellen potentiell störender Vibrationen und Schallemissionen (Weber et al., 2019). Insbesondere Installationsgeräusche aus Sanitäranlagen und den entsprechenden Rohrleitungen weisen hohes Störpotential auf (Weber et al., 2019). Mindestanforderungen sowie erhöhter Schallschutz vor Installationsgeräuschen sind dabei in DIN 4109-1:2018-01 und VDI 4100:2012-10 definiert. Während die Messungen zum Nachweis der Einhaltung geforderter Kennwerte möglich ist, stellt sich eine planerische Prognose als aufwändig und komplex heraus. (Weber et al., 2019) Die geltende DIN EN 12354-5:2009-10 schlägt hierzu Methoden unter anderem für den Massivbau vor.

Durch das Problem der komplexen Berechnung motiviert, schließen die Untersuchungen der vorliegenden Masterthesis an. Es wird versucht einen Beitrag zur Entwicklung praxistauglicher Prognosemodelle des Installationsschalldruckpegel zu leisten. Der aktueller Entwurf E DIN EN 12354-5:2022-02 und das Forschungsvorhaben ProSa am Fraunhofer Institut für Bauphysik IBP bilden den thematischen Rahmen der getätigten Untersuchungen. So wird für das Forschungsvorhaben ein innovatives Prognosemodell zur Bestimmung von Installationsgeräuschen entwickelt. Der Prämisse folgend, ein

möglichst universelles Modell zu entwickeln, ist es nötig auf aufwändige Verfahren wie beispielsweise FE-Methoden zu verzichten und auf Approximationen der benötigten physikalischen Variablen zurückzugreifen. Eine dieser Variablen ist die sogenannte Admittanz eines dynamischen Systems. Diese Größe beschreibt die Beweglichkeit des betrachteten Systems und wird unter anderem zur Charakterisierung sowie Berechnung der Körperschallübertragung benötigt.

### 1.2 Problemstellung, Forschungsfrage und Hypothese

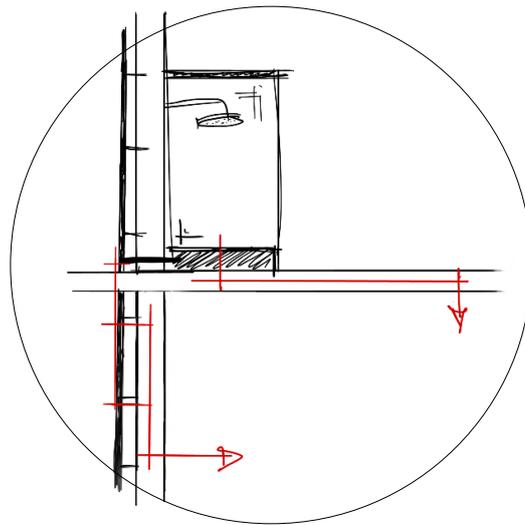


Abb. 1: Skizze einer exemplarischen Situation –  
Duschkabine in Raumecke

Die durchgeführten Untersuchungen vorliegender Masterthesis stehen inhaltlich im Kontext des oben erwähnten Forschungsvorhabens ProSa des Fraunhofer IBP. Dieses Vorhaben untersucht die Schallemission von Installationsanlagen im Wohnkontext und entwickelt eine innovative Methode zur rechnerischen Schätzung des resultierenden Schalldruckpegels in angrenzenden Räumen. Exemplarisch ist in Abbildung 1 eine derartige Ausgangssituation als Duschwanne auf einer Bodenplatte skizziert. Zur Beschreibung der dynamischen Vorgänge können vier Mechanismen identifiziert werden. Von der Quelle geht die kinetische Energie in Luft- und Körperschall über. Die physikalische Beschreibung des eingehenden Körperschalls kann zum Beispiel durch die freie Schnelle, die blockierte Kraft beziehungsweise eine Quelladmittanz geschehen. Normativ werden diese Vorgänge durch die europäischen Normen DIN EN ISO 3740:2019-08, DIN EN 15657:2017-10 sowie den Entwurf E DIN EN 14366-1:2022-02 beschrieben. Der zweite Schritt ist die Einleitung von Körperschall und Vibrationen in die Bausubstanz durch Kontaktpunkte zwischen Quelle und den angrenzenden Bauteilen. Dieser Vorgang wird durch die Eingangsadmittanz der angeregten Bauteile beschrieben. Die Ausbreitung (Schritt 3) ist anschließend durch mechanisch verbundene Bauteile bedingt und führt letztlich zur Abstrahlung in angrenzende Räume mit entsprechendem Installationsschalldruckpegel (Schritt 4). Die letzten drei Schritte der Kör-

perschallübertragung werden normativ durch die aktuelle DIN EN 12354-5:2009-10 und den Entwurf E DIN EN 12354:2022-02 rechnerisch abgebildet. (Fraunhofer IBP interne Projektunterlagen, 2023)

Das innovative Prognoseverfahren des IBPs versucht nun den viergliedrigen dynamischen Ablauf für eine breite Anwendbarkeit in Planung und Industrie zu vereinfachen. Die Schallquelle wird durch den Schallleistungspegel ( $L_W$ ) beschrieben, während die Transmission durch die Bauteile in einer Gebäudeübertragungsfunktion ( $D_{TF}$ ) zusammengefasst werden. Aus dem Verfahren resultiert anschließend ein normalisierter Installationsschalldruckpegel im angrenzenden Raum. Gleichung 1 skizziert das Konzept des Verfahrens. (Öhler & Kaltbeitzel, 2021)(Fraunhofer IBP interne Projektunterlagen, 2023)

$$L_A = L_W - D_{TF} \quad \text{Gl. 1}$$

In die Gebäudeübertragungsfunktion  $D_{TF}$  geht hierbei als Teil der Berechnung die Admittanz der Empfangsstruktur ein. Im baulichen Kontext stellen typischerweise plattenartige Bauteile diese in Form von Decken, Böden und Wänden dar. Um eine weite Anwendbarkeit der Methode zu gewährleisten, muss auf die simulative und damit aufwändige Ermittlung der Admittanz verzichtet werden und ein approximatives Modell vorliegen. Im Falle des Massivbaus und einhergehenden Stahlbeton- und Mauerwerksbauteilen wird zum jetzigen Zeitpunkt die charakteristische Admittanz nach E DIN EN 12354-5:2022-02 im erwähnten innovativen Modell verwendet.

Die Abbildung 2 zeigt das vorgestellte und im Rahmen von ProSa entwickelte Prognosemodell anhand des resultierenden Installationsschalldruckpegels in dB(A) einer Duschwanne am Randbereich einer Stahlbetondecke. Gezeigt ist in schwarz die Referenzkurve einer Messung und in rot die nach dem innovativen Verfahren rechnerisch ermittelten Pegelwerte. Die ausschlaggebende Problematik ist durch die sehr hohen Abweichungen im tieffrequenten Bereich gegeben. Dort überschätzt die Prognose mit der charakteristischen Admittanz aus der Norm die tatsächlich vorliegenden Pegelwerte deutlich. Denn die charakteristische Admittanz ist eine dynamische Größe, die unabhängig von der Auflagersituation, der Auswertungsposition und der Frequenz eine Platte durch einen konstanten Wert beschreibt. Da die Admittanz einer Platte im auflagnahen Bereich jedoch von tiefen Frequenzen beginnend einem ansteigenden Ast mit definierter Steigung bzw. definiertem Gradienten folgt und betragsmäßig deutlich unterhalb der charakteristischen Admittanz liegt, überschätzt letztere die tatsächlich vorliegende Admittanz. Abbildung 3 (S. 5) zeigt die simulierte Punktadmittanz zweier Positionen auf einer Platte. In dunkelblau ist der Verlauf über die Frequenz nahe der Plattenmitte visualisiert. Der Verlauf ist geprägt von resonanzbedingten Hochpunkten und minimalen Werten der Antiresonanzen. In hellblau ist die Admittanz nahe der Plattenecke gezeichnet. Im Gegensatz zur zentralen Auswertungsposition folgt der Verlauf im tieffrequenten Bereich einem nahezu linearen Anstieg. Zusätzlich ist in orange die charakteristische Admittanz eingezeichnet. Letztere kann für zentrale Positionen und im mittel- und hochfrequenten Bereich als Durchschnittswert verstanden werden. Die erläuterte Diskrepanz zwischen charakteristischer und tatsächlicher Admittanz in Ecknähe ist mit etwa 30 dB bei 10 Hz klar erkennbar.

Im Kontext des innovativen Verfahrens zur Bestimmung von Installationsschalldruckpegeln und der eingehenden, vereinfachten Plattenadmittanz stellt sich die Frage nach einem ergänzenden, approximativem Admittanzmodell, das die Auflagersituation sowie die Auswertungsposition bei gleichzeitig einfacher Anwendung berücksichtigt. Resümierend ist die Forschungsfrage vorliegender Masterthesis

wie folgt definiert: „Stellt ein hybrides frequenz- und ortsabhängiges Admittanzmodell eine geeignete Ergänzung für das statische Modell von E DIN EN 12354-5:2022-02 Annex F dar?“ Das statische Modell entspricht dabei der charakteristischen Admittanz, während das hybride Modell eine Kombination aus ansteigendem Gradienten und charakteristischer Admittanz definiert. So soll der Admittanzverlauf durch den Gradienten im tieffrequenten Bereich bis zum Schnittpunkt mit der charakteristischen Admittanz approximiert werden. Aus der Forschungsfrage ergibt sich zusätzlich die Hypothese, dass der Verlauf des Gradienten der Admittanz einer Platte unterhalb der ersten Eigenfrequenz bzw. im tieffrequenten Spektrum ohne detaillierte Modellierung für jede Position und Auflagerbedingung bestimmbar ist.

Der einschränkende Umfang der vorliegenden Untersuchungen und die Fülle an zu erforschenden Zusammenhängen erzwingen initiale Limitation. Daher wurde stets von allseitig identisch gelagerten Platten ausgegangen. Zusätzlich musste die ideal-mechanische Auflagersituation der freien Lagerung exkludiert werden. Somit beschränken sich die Untersuchungen auf die ideal gelenkige und ideal eingespannte Situation. Die vertikale Beweglichkeit der Auflager (parallel zur Plattennormale) ist somit unterbunden (lineare Auflagersteifigkeit gleich  $\infty$ ). Eine Variation der Rotationssteifigkeit (zwischen 0 und  $\infty$ ) und demgemäß eine Berücksichtigung von variierenden Einspannungsgraden konnte stattfinden.

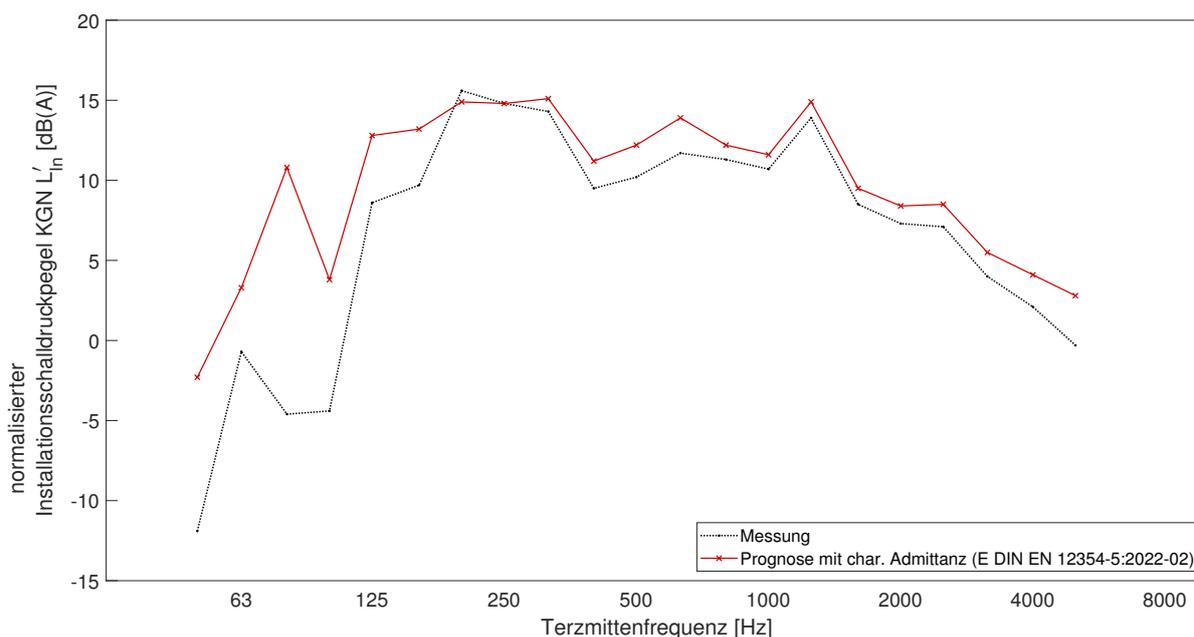


Abb. 2: Messergebnisse und Prognose des normierten Installationsschalldruckpegels auf Grundlage der charakteristischen Admittanz (IBP interne Daten, eigene Darstellung)

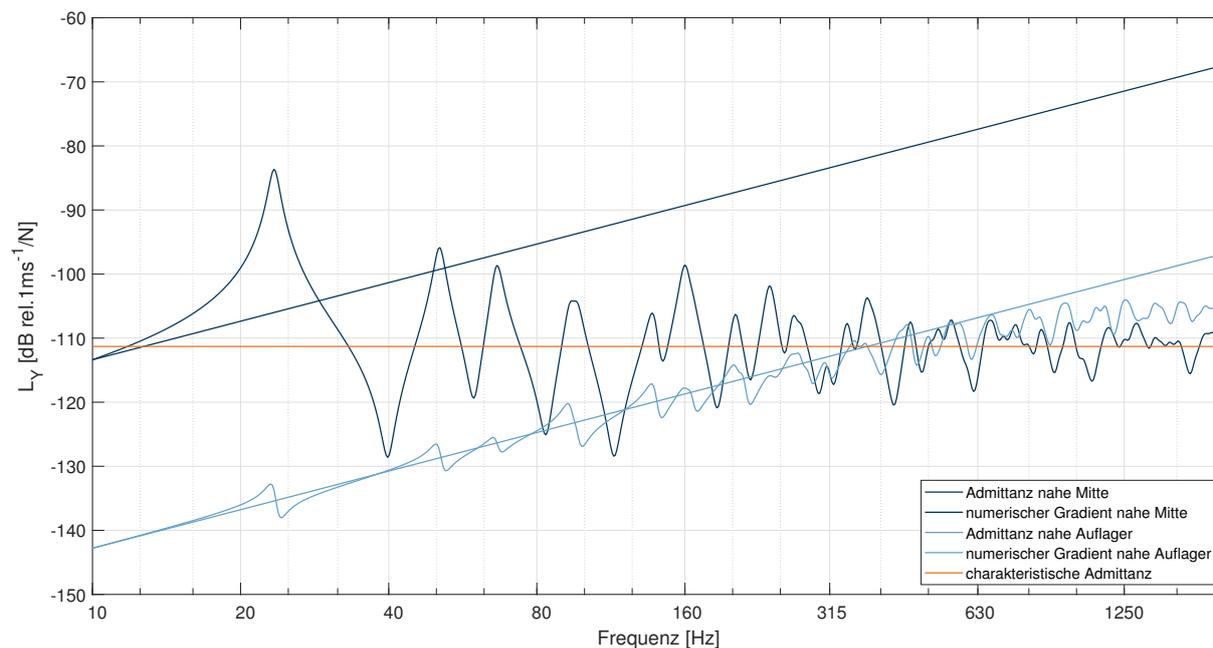


Abb. 3: Exemplarische Punktadmittanz nahe der Plattenmitte sowie nahe der Plattenecke (eigene Darstellung)

### 1.3 Stand des Wissens

Der folgende Stand des Wissens erörtert zum einen die theoretische Ausgangslage des aktuellen Forschungsfelds. Zum anderen versucht der Stand des Wissens die vorhandene Literatur zur Beantwortung der Forschungsfrage zusammenzufassen. Im Rahmen der Frage wurde eine detaillierte Literaturrecherche in einschlägigen Datenbanken und durch Snowball Recherche durchgeführt. Die Ergebnisse dieser sind aufgrund ihres vergleichsweise geringen Umfangs bereits unter diesem Gliederungspunkt aufgeführt. Neben der theoretischen Ausgangssituation wird zusätzlich die thematische und fachliche Abgrenzung der Untersuchungen vorliegender Arbeit erörtert. Konkludierend unterstreicht der Gliederungspunkt des Stands des Wissens die Relevanz der durchgeführten Untersuchungen.

#### Ausgangslage

Die fachliche Basis bilden die projektbezogenen Anforderungen des erwähnten Forschungsvorhabens und die Methoden aus dem Entwurf der DIN EN 12354-5 insbesondere aus Annex F. Wie bereits erörtert, strebt das übergeordnete Forschungsvorhaben eine innovative Methode zur Berechnung von Installationsgeräuschen an. In diese geht eine approximative Admittanz ein, um breite Anwendbarkeit zu gewährleisten. Dem aktuellen Entwicklungsstand zufolge wird, nach E DIN EN 12354-5:2022-02 Annex F, die charakteristische Admittanz von Platten nach Gleichung 2 für schwere Bauweisen (bspw. Platten aus Stahlbeton) verwendet.

$$Y_{char} = \frac{1}{8\sqrt{D m''}} \quad \text{Gl. 2}$$

In die Gleichung 2 geht die flächenbezogene Masse  $m''$  sowie die Biegesteifigkeit  $D$  (nach Norm  $B'$ ) von Platten ein.

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad \text{Gl. 3}$$

Ausschlaggebend für die Biegesteifigkeit ist das Elastizitätsmodul  $E$ , die Poissonzahl  $\nu$  und die Plattendicke  $h$ . Die charakteristische Admittanz wird in vorliegender Arbeit stets wie oben bezeichnet und dargestellt. Detaillierter wird die charakteristische Admittanz im Rahmen der Theorie der Dynamik (Kapitel 2) erörtert. Über die charakteristische Admittanz hinaus führt die zitierte Norm Maximal- und Minimalwerte der Admittanz als Grenzwerte ein. Diese Grenzwerte werden in Moorhouse und Gibbs (1995) hergeleitet und erfahren als Kommentar zur E DIN EN 12354-5 in Gibbs und Villot (2020) eine Erläuterung. Die beiden Grenzwerte ergeben sich nach der Norm zu

$$\begin{aligned} Y_{min} &= Y_{char} \coth\left(\frac{1}{\beta}\right) \text{ und} \\ Y_{max} &= Y_{char} / \coth\left(\frac{1}{\beta}\right) \text{ mit} \\ \beta &= 4/(\omega\eta m Y_{char}) . \end{aligned} \quad \text{Gl. 4}$$

Der dimensionslose Faktor  $\beta$  ist abhängig von der Kreisfrequenz  $\omega$ , dem Verlustfaktor  $\eta$ , der Gesamtmasse  $m$  (nach Gibbs und Villot (2020)) und der charakteristischen Admittanz.

Des Weiteren gibt der zitierte Normenentwurf zwei Gleichungen zur Berechnung der Admittanz für Positionen nahe von Rändern und Ecken an. Die Admittanz kann in einem Abstand von  $a$  zu einer starren Kante nach

$$\text{Re}[Y_i] = \text{Re}[Y_{char}][1 - J_0(2k_B a)] \approx \text{Re}[Y_{char}] [(k_B a)^2 - \frac{1}{4}(k_B a)^4] \quad \text{Gl. 5}$$

angegeben werden. Für die Admittanz in einer starren Ecke im Abstand  $a$  und  $b$  definiert der Standard folgenden Zusammenhang

$$\begin{aligned} \text{Re}[Y_i] &= \text{Re}[Y_{char}][1 - J_0(2k_B a) - J_0(2k_B b) + J_0(2k_B \sqrt{a^2 + b^2})] \\ &\approx \text{Re}[Y_{char}] \frac{(k_B a)^4}{2} \left(\frac{b}{a}\right)^2 . \end{aligned} \quad \text{Gl. 6}$$

Beide Gleichungen 5 und 6 gelten für einen Bereich von  $k_B a \leq 1$ . Die dort vorgestellten Gleichungen werden in Petersson (1993) hergeleitet und erläutert. Die Variable  $k_B$  steht für die Biegewellenzahl,  $\text{Re}$  für den Realteil einer komplexen Zahl und  $J_0$  impliziert die Bessel Funktion.

## Thematische Abgrenzung und Skizze des Forschungsumfelds

Die Literaturrecherche zum aktuellen Stand des Wissens zeigt neben den inhaltlich maßgebenden Referenzen auch fachbezogene sowie grundlegende, aber zur direkten Beantwortung der Forschungsfrage weniger relevante, Literatur. Die Messung der Admittanz ist eine wissenschaftlich und ingenieurtechnisch etablierte Methode und für die Verwendung in der Bautechnik in Messnormen verankert. Besonders mehrteilige Aufbauten im Holzbau oder geometrisch komplexere Konstruktionen im Leichtbau stehen im Fokus der aktuellen Forschung. Die meisten gefundenen Veröffentlichungen konzentrie-

ren sich dabei auf die Messung, die Vereinfachung einer Vielzahl an Messdaten, die Berechnung der Admittanz sowie die Dynamik der Bauteile allgemein. Folgend werden, ohne Anspruch auf die Vollständigkeit eines ausführlichen Reviews, die wichtigsten Konzepte und entwickelten Methoden skizziert.

Die thematischen Grundlagen der Dynamik, Vibroakustik und besonders der Admittanz sind in Publikationen von Warburton (1954), der frühen Editionen (1967) von Cremer et al. (2005), Dickinson (1978) und Leissa (1993) verankert. Diese Wissensgrundlage spielt für die nachfolgend gewonnenen Ergebnisse keine direkte Rolle, jedoch bilden sie die fachlichen Grundlagen für die Plattendynamik, die Eigenfrequenzberechnung und Teile der Simulation. Gardonio und Brennan (2004), Cremer et al. (2005), Fahy (2006) sowie Möser und Kropp (2010) stellen aktuellere Fachliteratur der Beschreibung von Theorie und Grundlagen dar. Skudrzyk (1980) ist eine weitere häufig zitierte Quelle. Auf einigen dieser Referenzen fußt das Kapitel der Theorie.

Die Untersuchung der Fundamente von Generatoren und Motoren von Schiffen führte in den Jahren um 1980 zu einer Reihe von Publikationen mit dem Ziel die Messung und Verarbeitung der Admittanz zu vereinfachen. Außerdem wurden grafische Methoden zur Approximation der Admittanz vorgestellt. Die Untersuchungen finden ihren geistigen Ursprung bei B. A. T. Petersson (damals Chalmers University of Technology in Gothenburg, Schweden) und sind inhaltlich bis in den aktuellen Entwurf der DIN EN 12354-5 relevant. Aufbauend auf der Publikation Petersson und Plunt (1980) veröffentlichten die Autoren die beiden vielzitierten Referenzen Petersson und Plunt (1982a) sowie Petersson und Plunt (1982b). Grundlage der Untersuchungen stellt die Tatsache dar, dass praxisrelevante Vibrationsquellen meist eine Vielzahl von Kontaktpunkten zur Stützstruktur aufweisen. Die entstehenden großen Admittanzmatrizen müssen anschließend zur weiteren Verwendung vereinfacht und neu arrangiert werden. Die Autoren stellen dazu zwei Konzepte zur Bildung einer effektiven Admittanz vor. Zum einen werden die effektiven Admittanzen eines jeden Kontaktpunktes gebildet, zum anderen zeigen die Autoren eine örtlich gemittelte effektive Admittanz über alle Anregungspunkte. Diese erleichtert die anschließende Berechnung der Schalleitung und benötigt darüber hinaus weniger Messungen als Ausgangslage. Die effektive Punktadmittanz ist dabei keine einzigartig beschreibende Größe des betrachteten Systems, sondern ist stets abhängig von den betrachteten und einbezogenen Punkten (Petersson & Plunt, 1982a). Petersson und Plunt (1982b) stellt den zweiten Teil von eben zitiertes Referenz dar und erörtert praktische Anwendungen sowie Approximationen der Admittanz. Diese approximative Methode ist im Anhang von Referenz Petersson und Plunt (1980) detaillierter erörtert und bildet eine grafische Methode zur Bestimmung der Admittanz ab.

Moorhouse und Gibbs (1995) ist eine ebenfalls häufig zitierte Publikation. Diese geht in die bereits erwähnte Norm und somit in den allgemeinen Stand der Technik ein. Die Veröffentlichung schlägt Berechnungen zur Bestimmung der maximalen und mittleren Admittanz vor. Die entwickelten Methoden werden an Mess- und Simulationsergebnissen validiert. Inhaltlich basieren einige Konzepte auf der Arbeit von Skudrzyk (1980).

Ein breit untersuchtes Themengebiet stellt die Messung und anschließende Vereinfachung von Admittanzen im baulichen Kontext dar. Kernaspekt ist hierbei wiederholt die örtliche Mittelung von Admittanzen mehrerer Berührungspunkte einer Quelle mit dem unterstützenden System. Diese äquivalenten Einzelanregungen (eng. single equivalent excitation) und das Konzept der effektiven Admittanz sind, wie bereits beschrieben, aus den 1980 Jahren bekannt und wird beispielsweise in Petersson und Gibbs (2000) sowie Mayr und Gibbs (2012), aber auch der Norm DIN EN 15657:2017-10 erneut aufge-

griffen und erläutert. Besonders eine Anwendung auf strukturell komplexere Tragwerke des Holzbaus wird in genannter Quellen diskutiert. Die Veröffentlichungen untersuchen, unter dynamischen Aspekten, die über Plattenwerkstoffe verschraubten tragenden Balken von typischen Holzbauplatten. Eine Berücksichtigung von Schraubstellen und damit Verbindungen zwischen Balken und Platte wird unter anderem in Mayr und Gibbs (2008), Mayr (2009), Mayr und Gibbs (2009) sowie in Mayr und Gibbs (2011) ausführlich und teils wiederholend erörtert. Zusätzlich zu holzbautypischen Konstruktionen werden in Gibbs und Mayr (2012) rahmenartige Strukturen betrachtet und die Ergebnisse diskutiert. Neben der messtechnischen Bestimmung und der Vereinfachung der multipunktuellen Admittanzen bei Quellen mit mehreren Kontaktstellen, stellt die Publikation approximative Methoden zur Bestimmung der Empfängeradmittanz einer Holzbauplatten vor. Das zugrundeliegenden Konzept ist eine Kombination aus den charakteristischen Admittanzen des Balkens sowie der Platte. Die Untersuchungen belegen mit Messungen und Simulationen, dass unter dort beschriebenen Umständen die Admittanz der betrachteten Holzkonstruktionen sich im tieffrequenten Bereich der charakteristischen Balkenadmittanz annähert und anschließend nahezu linear auf das Niveau der charakteristischen Plattenadmittanz bei höheren Frequenzen wechselt. Eine rechnerische Vorhersage dieser Verhaltensweise wird zusätzlich durch Ausbreitungsfunktionen basierend auf Hankelgleichungen hergeleitet und validiert. Besonders Mayr und Gibbs (2011) und Mayr (2009) geben hierzu ausführliche Informationen. Teile der dort vorgestellten Methoden sind im aktuellen Entwurf der DIN EN 12354-5 im Appendix F integriert.

Randgebiete des Forschungsfeldes stellen Veröffentlichungen wie Höller (2013) sowie Höller und Gibbs (2015) dar. Die dort beschriebenen Methoden behaupten die Quelladmittanzen in-situ bestimmen zu können. Die derartige messtechnische Ermittlung der blockierten Kraft wird zusätzlich numerisch und messtechnisch validiert. Im Gegensatz zu obigen Untersuchungen sind die hier vorgestellten Methoden für Massivbauplatten gültig. Ein gängiges messtechnisches Konzept und Validierungsmethode bildet die sogenannte Empfangsplatte. Diese Prüfstandkonstruktion ist unter anderem in E DIN EN 12354-5:2022-02 integriert. Als inhaltliche Startpunkte könnten hierzu Späh und Gibbs (2009), Gibbs et al. (2008) sowie die DIN EN 15657:2017-10 dienen.

### **Fazit des Stands des Wissens**

Unter Berücksichtigung aller eingesehener Literatur finden sich keine konkreten wissenschaftlichen Vorarbeiten, die die Zusammenhänge der Admittanz und dem resultierenden Gradienten in für hier hilfreiche Weise untersuchten bzw. auf vergleichbaren Konzepten basieren. Dennoch zeigt die Literatur zwei Methoden, die zu vergleichbaren Ergebnissen führen könnten bzw. methodische Ähnlichkeiten aufweisen. Die zitierte Norm E DIN EN 12354-5:2022-02 nennt in Annex F zwei Gleichungen zur Berechnung der Admittanz in Auflagernähe. Die Herleitung dieser basiert auf der Theorie unendlich ausgedehnter und damit infiniten Systeme (Pettersson, 1993), während im Rahmen dieser Masterarbeit vom finiten System ausgehend die Untersuchungen durchgeführt wurden. Zusätzlich sind die vorgestellten Gleichungen nur vereinfacht positionsabhängig und berücksichtigen keine variierenden Auflagerbedingungen. Ein Vergleich der Herangehensweisen wird nicht angestellt und könnte in nachfolgenden Untersuchungen fokussiert werden.

Ein weiteres thematisch relevantes Konzept stellt die grafische Methode nach Pettersson und Plunt (1980) dar. Die dortigen Ergebnisse basieren auf Untersuchungen am Schiffs- und damit Stahlbau. Es

werden Ablaufschemata zur grafischen Findung der Admittanz von Fundamentstrukturen von Schiffsmotoren definiert. Die zugrundeliegenden Gleichungen und Annahmen könnten sich nach Übertragung auf Massivbauplatten als alternative Methoden zur approximativen Bestimmung der Admittanz herausstellen. Auch diese Methoden wurden im Rahmen vorliegender Arbeit nicht weiter untersucht und könnten zu anschließenden Untersuchungen führen.

### **1.4 Methodik und Aufbau der Arbeit**

Durch den nahezu fehlenden Stand des Wissens zur konkreten Forschungsfrage bedingt sich die gewählte Methodik vorliegender Untersuchungen. Diese ist durch die Findung approximativer Modelle geprägt und folgt daher den Prinzipien angewandter Forschung (Wieland et al., 2012). Kernaspekt dieser ist die Entwicklung verallgemeinerbarer Lösungen von praktischen Problemstellungen. Die konzeptionelle Unterstützung aufgestellter Hypothesen durch wissenschaftliche Grundlagen, Machbarkeitsstudien bzw. repräsentative Anwendungen und empirische Untersuchungen sind dabei essentiell (Wieland et al., 2012). Fehlende fundierte Grundlagen aus dem Stand des Wissens machen zudem eine dynamische und flexible Methodik obligatorisch, da nicht abzusehen ist, welche Phänomene maßgebend und welche Einblicke für die Modellentwicklung entscheidend sind. Die folgenden Absätze erläutern sowohl die Methodik als auch den Aufbau der Arbeit. Wichtig zu unterscheiden ist, dass der Methodikablauf nicht dem Aufbau der Arbeit gleichzusetzen ist. Während letzterer in inhaltlich stringenter Weise die Ergebnisse der Untersuchungen schriftlich erörtert, weist die Methodik Iterationen und gleichbedeutende Schritte auf.

Abbildung 4 (S. 10) visualisiert in einem Flussdiagramm die zugrundeliegende Vorgehensweise. Ausschlaggebend ist die Forschungsfrage und das Ziel der Findung geeigneter approximativer Admittanzmodelle. Eine ausführliche Literaturrecherche untersuchte den Stand des Wissen. Dieser generierte keine fachliche Basis für die anwendungsbezogene und spezifische Forschungsfrage. Somit rückt die Simulation als Kernmethode in den Vordergrund. Von der Simulation über Parameterstudien bis zur Modellfindung werden durch explorative sowie experimentelle Forschung Zusammenhänge erschlossen. So belegt oder widerlegt die explorative Forschung Kausalität und Korrelation relevanter Sachverhalte (Stebbins, 2001). Der experimentelle Ansatz prüft unterdessen deduktiv und weist erwartete oder angenommene Aspekte nach (Shadish et al., 2002). Aufgrund fehlenden Wissens über Zusammenhänge der Admittanz und dazugehörigen Gradienten bezüglich der Lagersituation, der Plattenmaterialität und der Dimensionen, ist ein stringenter Ablauf von der Simulation zur Modellfindung nicht suffizient. Daher sind Iterationsschritte zwischen den Stufen notwendig, um fehlendes Wissen und Zusammenhänge durch angepasste Parametervariationen aufzuholen. Als Ergebnisse der Modellfindung zeichnen sich zwei approximative Ansätze mit unterschiedlichen Prioritäten ab. Während Ansatz I versucht eine maximale Vereinfachung umzusetzen, strebt Ansatz II eine höhere Prognosequalität durch vertretbaren Mehraufwand an. Beide Ansätze werden anschließend an zwei beispielhaften Situationen grundlegend validiert.

Aus den gewählten Methoden resultieren abschließend approximative Modellansätze, eine Vielzahl von Zusammenhängen der untersuchten Größen und Ansatzpunkte weiterer Untersuchungen. Dem Forschungsziel entsprechend werden vorrangig grundlegende Konzepte und Ansätze zur Beant-

wortung der Forschungsfrage gesucht. Dieser Umstand bedingt, dass typische Methoden und Auswertungen wie Parameterstudien, Sensitivitätsanalysen und Fehlerbetrachtungen eine Detailtiefe aufweisen, die der Bearbeitung der Fragen dienlich ist. Vertiefte Untersuchungen und Auswertungen wären an dieser Stelle nicht effizient und werden im Ausblick erwähnt. Die ebenfalls im Rahmen vorliegender Masterthesis durchgeführten Messungen bilden methodisch ein Randthema und unterstützen durch Validierung und Kalibrierung die Simulationen sowie die Modellbildung.

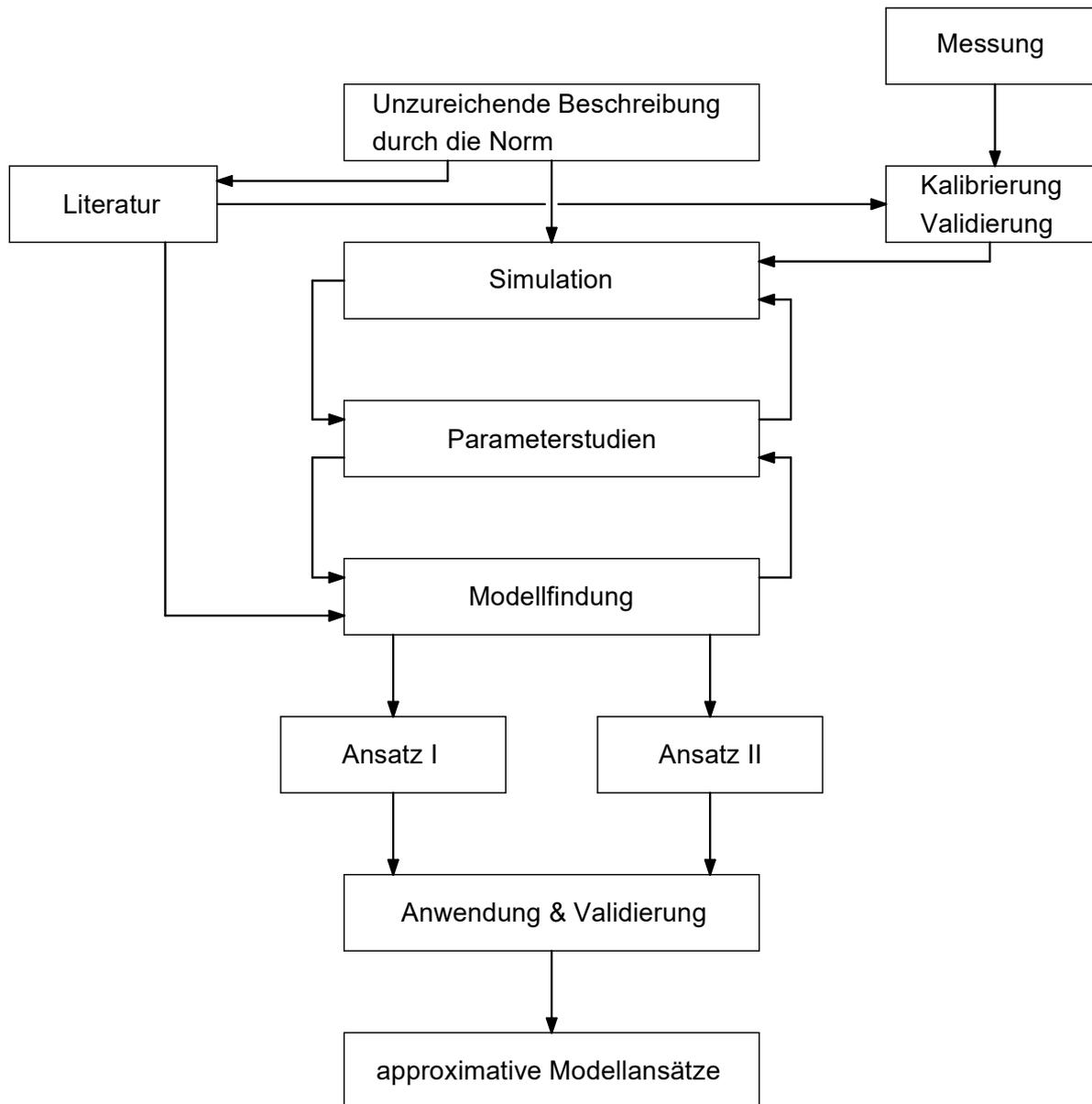


Abb. 4: Flussdiagramm der Methodik vorliegender Untersuchungen

Der Aufbau der Arbeit leitet sich aus der Umsetzung und den resultierenden Ergebnissen der vorgestellten Methodik ab. An die Einleitung anknüpfend stellt das Kapitel der Theorie der Dynamik von Platten und Balken die nötigen physikalischen Grundlagen vor und grenzt sich dabei klar vom Stand des Wissens ab. Während letzterer konkret das Wissen bezüglich der gestellten Forschungsfrage un-

tersucht, erstellt das Kapitel der Theorie einen fachlichen Hintergrund allgemeiner Zusammenhänge der Dynamik, die für das Verständnis und die Erzeugung der angestrebten Ergebnisse nötig sind. Das dritte Kapitel erörtert die Randbedingungen der Simulation sowie Messung. Dabei werden die Messgegenstände, der Messaufbau und die Ergebnisse vorgestellt. Anschließend werden die entscheidende Aspekte der Simulation aufgezeigt. Eine Kalibrierung der Auflagerbedingungen der simulierten Platte anhand der erstellten Messergebnisse sowie eine vereinfachte Sensitivitätsanalyse schließen das Kapitel. Die Sensitivitätsanalyse ist bewusst einfach gehalten und als sogenanntes Factor Screening durchgeführt. Dadurch werden qualitative Abhängigkeiten aufgedeckt, welche sich wiederum in Ansätzen als richtungsweisend für die Parameterstudien erweisen. Auf eine Erwähnung im Flussdiagramm wurde aufgrund der methodischen Nebenrolle verzichtet. Gliederungspunkt 4 führt entscheidende Zusammenhänge der Admittanz sowie die Ergebnisse der iterativen Parameterstudien auf. Die beiden Kapitel 3 und 4 sind jeweils in sich geschlossen und verfügen sowohl über die Ergebnisse als auch deren Interpretation und Diskussion. Dieser Aufbau ist notwendig, da die Interpretation und Einordnung in den Gesamtkontext für die anschließenden Gliederungspunkte als Grundlage dient. Auf Kapitel 4 aufbauend erörtert der Gliederungspunkt der Entwicklung approximativer Admittanzmodelle die Bildung zweier approximativer Konzepte. Eine exemplarische Erstanwendung der Ansätze auf zwei praxisrelevante Beispiele bildet eine erste Validierung der Ansätze und soll die Robustheit sowie Allgemeingültigkeit der Ansätze belegen. Die Diskussion und Limitationen bilden das vorletzte Kapitel. Diskutiert werden hierbei die Methodik, die Entwicklung approximativer Modelle und die exemplarische Anwendung. Die Zusammenfassung und der Ausblick bilden den Schluss der schriftlichen Ausführung. Mit Blick auf weiterführende Untersuchungen schließt ein ausführlicher Anhang die vorliegende Masterarbeit ab. Dieser listet weiterführende Informationen und beinhaltet zusätzliche Abbildungen, Pläne sowie Grafiken.

## 2 Theorie der Dynamik von Balken und Platten

Das folgende Kapitel beschreibt die wichtigsten theoretischen Grundlagen und skizziert die fachliche Basis. Es wird versucht ein möglichst vollständiges Bild der Grundlagen zu zeichnen. Zusätzlich erörtert das Kapitel einige Zusammenhänge, die zum Verständnis sowie zum Nachvollziehen der Methoden und Ergebnisse hilfreich sind.

Alle genannten Grundlagen und Gleichungen des Kapitels 2.1 der Theorie sind aus der Fachliteratur Fahy (2006) übernommen und werden folgend nicht wiederholend zitiert. Sachverhalte aus ergänzender Literatur sind eindeutig als solche gekennzeichnet und folgen strikt dem maßgebenden Zitationsstil. Die Variablenbelegung und der argumentative Aufbau erfolgen ebenfalls in Anlehnung an Fahy (2006).

Für eine einheitliche Ausdrucksweise wird ein durchgängig verwendetes kartesisches Koordinatensystem zur Beschreibung eingeführt. So folgt in der zweidimensionalen Ebene die x-Achse stets der Stabrichtung oder der Wellenausbreitung. Die y-Achse deutet daher in Richtung der Dickenausdehnung. Im dreidimensionalen Raum spannen die Achsen x und y die Ebene auf, während die z-Achse parallel zur Ebenennormale steht und die Dicke angibt. Folgende Zeichnungen skizzieren die eingeführten Definitionen.



Abb. 5: Definition der Koordinatensysteme

### 2.1 Theorie

#### Allgemeines

Die Schwingungen von Teilchen werden als eine harmonische Auslenkung um ihre Ruhelage beschrieben. Dabei gehen die Frequenz und Amplitude als entscheidende Variablen hervor. Die Beschreibung einer solchen harmonischen Schwingung wird durch eine Kosinusfunktion mit der Amplitude  $A$ , der Kreisfrequenz  $\omega$ , der Zeit  $t$  und dem Phasenwinkel  $\phi$  beschrieben.

$$g(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad \text{Gl. 7}$$

Schwingungen bzw. trigonometrische Funktionen (Kosinus und Sinus) können alternativ durch komplexe Schreibweise definiert werden.

$$g(t) = \operatorname{Re} [(\tilde{B} e^{j\omega t})] \quad \text{Gl. 8}$$

$\tilde{B}$  ist dabei eine komplexe Zahl gleich  $a + jb$  und wird ‚komplexe Amplitude‘ genannt. Diese Amplitude kann ebenfalls in exponentieller Weise zu

$$\tilde{B} = A e^{j\phi} \quad \text{Gl. 9}$$

formuliert werden. Eine Schwingung in exponentieller Notation wird in komplexer Darstellung durch einen Phasor bzw. einen komplexen Zeiger visualisiert. Die y-Achse ist dabei dem imaginären Teil ( $b$ ) zugeordnet, während die x-Achse den Realteil ( $a$ ) darstellt. Die Länge des Phasors ist durch die Amplitude  $A$  beschrieben und der Phasenwinkel  $\phi$  fächert den komplexen Zeiger von der positiven x-Achse ausgehend gegen den Uhrzeigersinn auf. In diesem Zusammenhang gelten folgende Ausdrücke.

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad a = A \cos \phi, \quad b = A \sin \phi, \quad \phi = \arctan(b/a) \quad \text{Gl. 10}$$

Entscheidend ist hierbei das Bewusstsein über zwei komplexe Anteile, die gemeinsam  $\tilde{B} e^{j\omega t}$  bilden. Ein zeitvarianter Anteil  $e^{j\omega t}$  mit Einheitslänge und ein zeitinvarianter Teil  $\tilde{B} = A e^{j\phi}$ .

Eine Schwingung in elastischem Medium breitet sich mit der sogenannten Phasengeschwindigkeit  $c_{ph}$  bzw. der Schallgeschwindigkeit aus. Nicht zu verwechseln ist die Phasengeschwindigkeit mit der Schnelle eines angeregten Teilchens. Letztere gibt die Geschwindigkeit mit der ein Teilchen um seine Ruhelage schwingt wieder, während die Phasengeschwindigkeit die Ausbreitung der transportierten Energie in eine Richtung beschreibt. Die Kreisfrequenz  $\omega$  ist durch eine vollständige Periode  $T$  entsprechend der Zeit definiert und auf  $2\pi$  bezogen. Die Wellenzahl  $k$  bildet die Wellenlänge  $\lambda$  mit Bezug auf den Ort ab.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{Gl. 11}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Während die Kreisfrequenz  $\omega$  in der Beschreibung von Schwingungen die bevorzugte Größe ist, werden Messungen meist in der Frequenz  $f$  angegeben. Zur Umrechnung gilt  $\omega = 2\pi \cdot f$  und nimmt somit Rücksicht auf den Bezug zum Einheitskreis.

Im Kontext der hier untersuchten Zusammenhänge spielt die Schallausbreitung in longitudinale Richtung in Fluiden und Feststoffen keine weitere Rolle. Da die Dynamik von Platten den Kernaspekt darstellt, wird im Weiteren nur auf diese eingegangen. Berücksichtigt werden dabei auch die den Platten zugrundeliegenden Gleichungen des Balkens. Neben longitudinalen, transversalen und quasi-transversalen Wellen ist für die Schallübertragung und Abstrahlung von Balken und Platten die Biegewelle der entscheidende Vorgang. Biegewellen zeichnen sich durch eine Verschiebung und gleichzeitige Verdrehung aus. Den Betrachtungen liegt hierbei die reine Biegetheorie mit der Annahme ebenbleibender Querschnitte zugrunde. Die Wellengleichung der freien Schwingung eines Balkens

ergibt sich somit zu

$$EI_B \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} = -m' \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} . \quad \text{Gl. 12}$$

Mathematisch lässt sich obige Gleichung zu

$$EI_B k^4 = \omega^2 m' \quad \text{Gl. 13}$$

vereinfachen. Die Lösung der Wellengleichung ist mit  $m'$  (längenbezogenen Masse des Balkens) folgend definiert.

$$\eta(x,t) = [\tilde{A} e^{-jk_B x} + \tilde{B} e^{jk_B x} + \tilde{C} e^{-k_B x} + \tilde{D} e^{k_B x}] e^{j\omega t} \quad \text{Gl. 14}$$

Hierbei ist die Biegewellenzahl gleich  $k_B = (\omega^2 m' / EI_B)^{1/4}$ . Die Phasengeschwindigkeit der Biegewelle ergibt sich demnach zu  $c_B = \omega / k_B = \omega^{1/2} (EI_B / m')^{1/4}$ . Im Gegensatz zur Schallgeschwindigkeit in Luft, ist die Phasengeschwindigkeit der Biegewelle abhängig von der Frequenz und damit dispersiv. Die beiden zweiten Terme sind imaginär und transportieren folglich keine Energie. Die ersten beiden Terme der obigen Gleichung beschreiben die Wellenausbreitung in positive sowie negative x-Richtung. Für eine Übertragung vom Balken auf die dünne Platte ist anschließend eine Erweiterung um den Beitrag der Querdehnung (Poissonzahl) erforderlich. Sofern die Wellenausbreitung auf eine Richtung beschränkt ist, erweitert sich die bekannte Wellengleichung des Balkens nach Gleichung 12 für die Platte zu

$$\frac{EI_P}{(1 - \nu^2)} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^4} = -m \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} . \quad \text{Gl. 15}$$

Mit Berücksichtigung des Flächenträgheitsmoments der Platte  $I_P = h^3 / 12$  und der Plattendicke  $h$  kann das Biegemoment  $D$  zu

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \quad \text{Gl. 16}$$

definiert werden. Die Biegewellenzahl und Biegewellengeschwindigkeit der Platte ist darüber hinaus durch

$$k_B = (\omega^2 m'' / D)^{1/4} \text{ und} \quad \text{Gl. 17}$$

$$c_B = \omega / k_B = \omega^{1/2} (D / m'')^{1/4} \quad \text{Gl. 18}$$

beschrieben. Die Variable  $m''$  entspricht im Plattenkontext der flächenbezogenen Masse. Die Erweiterung der Plattengleichung auf mehrdimensionale Ausbreitungsrichtungen wird in zitiert Referenz (Fahy, 2006) ausführlich diskutiert. Auf eine Nennung der erweiterten Gleichungen wird hier verzichtet.

Bei der Betrachtung finiter und damit realistischer Systeme treten Systemgrenzen auf, die entscheidend auf das dynamische Verhalten wirken. Während ein unendlicher Balken nach Anregung in jeder Frequenz frei zu schwingen vermag, ist die dynamische Antwort eines finiten Balkens bei freier Schwingung auf die Eigenfrequenzen begrenzt. Das Phänomen der Eigenfrequenzen ist hauptsächlich durch Reflexionen an den Systemgrenzen, den Auflagern oder anderweitigen Strukturänderungen bedingt. Mathematisch bildet sich die Resonanz durch die Bewegungsgleichung und einzuhalten- de Randbedingungen ab. Derartige Randbedingungen wie Lager, finite Enden und Kanten, Material- oder Geometrieänderung führen zu Störungen, trotz derer das Kräftegleichgewicht eingehalten sein muss. Trifft eine sich entlang eines Balkens ausbreitende Biegewelle beispielsweise auf ein gelenkiges

Endauflager, ist eine Verschiebung senkrecht zur Ausbreitungsrichtung durch das Auflager unterbunden. Diese Randbedingung kann physikalisch nur eingehalten werden sofern eine reflektierende Welle mit der Einfallenden wechselwirkt. Die elastischen Eigenschaften der Störung bedingen die Amplitude sowie die Ausprägung der reflektierten Welle und sind mechanisch in der Impedanz der Störung verankert. Die entstehenden Interferenzen aus ursprünglicher und reflektierter Welle bilden stehende Wellen. Die Frequenzen der stehenden Wellen werden charakteristische oder natürliche Frequenzen genannt und sind von Material- sowie Systemparametern abhängig. Die örtliche Verteilung der Amplitude wird durch die Funktionen der natürlichen Moden bzw. charakteristische Funktionen beschrieben. Theoretisch verfügt ein gleichförmiges System über unendlich viele Eigenfrequenzen und somit Moden. Am Beispiel eines beidseitig gelenkig gelagerten Balkens ergibt sich die Verschiebung, formuliert auf Grundlage von Moden, zu

$$\eta(x,t) = \phi_n(x) e^{j\omega t} = \sqrt{2} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) e^{j\omega t} \quad \text{Gl. 19}$$

mit  $n = 1,2,3,\dots$  und der Funktion der natürlichen Moden bzw. Formfunktion  $\phi_n(x)$  (gelenkig gelagerter Balken). Die Funktion ist dabei normalisiert durch den Faktor  $\sqrt{2}$ , um  $\int_0^l [\phi_n(x)]^2 dx = 1$  zu erfüllen. Für weitere Informationen wird auf die zitierte Quelle Fahy (2006, S. 47) verwiesen. Diese Normalisierung ist in Fachkreisen nicht einheitlich. Beispielsweise Warburton (1954) und diesen zitierende Standardwerke wie Leissa (1993, S. 41) nutzen eine alternative Normalisierung und geben daher die Formfunktionen ohne den Faktor  $\sqrt{2}$  an. In Soedel (2004, S. 91) werden detaillierte Einblicke in die Herleitung gegeben. Für die vorliegenden Untersuchungen wurden stets die Formulierungen nach Fahy (2006, S. 47) herangezogen. Diese nehmen insbesondere Einfluss auf die später folgenden approximativen Ansätze.

Im zweidimensionalen Fall einer Platte bilden sich stehende Wellen in Form zweidimensionaler Vibrations- und Amplitudenfelder<sup>1</sup>. Getrennt sind Felder gleicher Phase durch Konturlinien mit der Schwingungsamplitude gleich null. Während die individuellen Zellen in sich die gleiche Phase aufweisen, trennen die Nulllinien Felder mit stets gegensätzlicher Phase. Die vorgestellten Moden sind bei proportionaler Verteilung der Dämpfung zu Masse und Steifigkeit reale Größen. Ist die Dämpfung dagegen lokal konzentriert (z.B. an Verbindungen), dann resultieren komplexe Moden und die Ausbildung klarer Knotenlinien findet nicht statt. Im Falle geringer Dämpfungen gleichen die tatsächlich komplexen Moden nahezu den realen Pendanten.

Die oben beschriebenen Zusammenhänge der Resonanz beschreiben die Dynamik der freien Schwingung nach einer kurzen, transienten Anregung. Werden dagegen finite Systeme durch eine stationäre dynamische Last angeregt, schwingt das System im eingeschwungenen Zustand ausschließlich in den Frequenzen der Anregung. Resonanzfrequenzen bilden sich nur aus, sofern die Anregung diese Frequenz enthält. Ohne Dämpfung interferieren die Amplituden der Eigenfrequenzen ideal konstruktiv und führen theoretisch zu unendlich großen Auslenkungen. Zur mathematischen Beschreibung wird die Gleichung der freien Schwingung eines Balkens wiederholt und umgestellt.

$$EI_B \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} + m' \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0 \quad \text{Gl. 20}$$

<sup>1</sup>Erste Visualisierungen durch die sogenannten Sandfiguren bzw. Klangfiguren von Chladni an freien, quadratischen Platten und mathematisch beschrieben unter anderem durch Iguchi (1953)

Eine Einzelkraft bei  $x = a$  wird durch eine Dirac Funktion  $\delta$  berücksichtigt, die wie folgt definiert ist.

$$f(x) = F_0 \delta(x - a) \quad \text{Gl. 21}$$

Für die Dirac Funktion gilt  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$ . Diese funktioniert wie ein Filter, der örtlich begrenzt den Wert bei  $x = a$  ausgibt. In Zusammenhang mit der Bewegungsgleichung des Balkens resultiert die Bewegungsgleichung bei erzwungener Vibration.

$$EI_B \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \tilde{F}_0 \delta(x - a) e^{j\omega t} \quad \text{Gl. 22}$$

Die Lösung der partiellen Differentialgleichung ist schließlich durch

$$\eta(x,t) = [\tilde{A} e^{-jk_B x} + \tilde{B} e^{jk_B x} + \tilde{C} e^{-k_B x} + \tilde{D} e^{k_B x}] e^{j\omega t} \quad \text{Gl. 23}$$

gegeben und beschreibt eine Welle in positive Ausbreitungsrichtung sowie eine Welle in negative Richtung. Durch finite Begrenzungen eines Balkens überlagern sich auch im eingeschwungenen Zustand die initialen und reflektierten Wellen. Bei beliebiger Phase beider Wellen entstehen somit Vibrationsmuster deren Amplituden durch Interferenz sowohl geringer als auch höher als die der initialen Welle ausfallen können. Bei gleicher Amplitude und gegensätzlicher Phase resultiert perfekte Auslöschung (Antiresonanz). Bei Resonanz findet hingegen die erwähnte konstruktive Interferenz statt.

Die Eigenfrequenz eines finiten Systems, wie eines Balkens, ist abhängig von der Länge, den Materialparametern, dem Querschnitt und den Auflagerbedingungen. Der Ort der Anregung ist dabei unerheblich bezüglich der Resonanzfrequenzen des Systems. Gleichwohl ist der Ort entscheidend bei der Anregung der Resonanzen. So kann beispielsweise die zweite Mode eines gelenkigen Balkens nicht durch eine Anregung in Balkenmitte hervorgerufen werden. Begründet liegt dies an der Knotenposition der zweiten Mode in Balkenmitte (vgl. Abb. 10, S. 23). Dieser Umstand bedingt zusätzlich, dass zur Feststellung der Eigenfrequenzen einer Platte stets eine Messposition nahe der Mitte gewählt wird. In Plattenmitte schneiden sich beispielsweise die beiden Knotenlinien der Mode (2,2). Folglich trägt diese Mode nicht zum Schwingungsgeschehen an ebendieser Stelle bei. Den Messergebnissen in Plattenmitte ist daher die Eigenfrequenz der Mode (2,2) nicht zu entnehmen. Die Berechnung der Eigenfrequenzen von Balken und Platten ist in der Literatur ausführlich dokumentiert. Für die idealmechanischen Auflager (gelenkig, eingespannt, frei) liegen Informationen für allseitig gleich gelagerte sowie Kombinationen derer vor. Die Berechnung der Eigenfrequenzen wird zur Erzeugung einiger hier gezeigter Resultate benötigt und basiert auf den Standardwerken Warburton (1954) und Dickinson (1978).

Da reale Systeme stets über interne Dämpfungen verfügen und somit der theoretische Fall unendlicher Resonanz nicht auftreten kann, wird interne Energiedissipation durch ein komplexes Elastizitätsmodul  $E' = E(1 + j\eta)$  beschrieben. Die Variable  $\eta$  entspricht dabei dem Verlustfaktor.

Ein weiterer zu erwähnender Effekt im Rahmen der erzwungenen Anregung ist die Unterscheidung in Nah- und Fernfeld. Das Nahfeld stellt eine örtlich begrenzte Abweichung der Schwingungsantwort dar und zeigt sich mathematisch in den imaginären Anteilen der Lösung der Wellengleichung (z.B. Gl. 15). Bedingt wird dieses durch Störungen wie beispielsweise die Krafteinleitung. Die örtliche Ausdehnung des Nahfelds ist dabei abhängig von der betrachteten Frequenz und folglich der Wellenzahl.

Zusätzlich nimmt der Effekt des Nahfelds auf die resultierende Größe zu, je näher Betrachtungsort und Anregung zusammen liegen. Sichtbar wird der Einfluss beispielsweise bei gleicher Position von Anregung und Resultat im Bild der Schwingungsantwort. Die Positionen der Antiresonanzen werden durch das Nahfeld bei gleichbleibender Resonanz verschoben. Ausführlich diskutiert und visualisiert diesen Umstand die zitierte Fachliteratur Fahy (2006, S. 62–63).

### Admittanz und Impedanz

Das Konzept der Impedanzen und Admittanzen kommt ursprünglich aus der Elektrotechnik und wurde zur Untersuchung elektrischer Schaltkreise entwickelt. Diese Entwicklung macht es möglich lineare Kreise ohne die Lösung von Differentialgleichungen zu studieren. Anfang 1900 wurden die Konzepte schließlich von Professor Arthur G. Webster auf mechanische Systeme übertragen und bilden seitdem eine gängige Methode die Dynamik von Systemen zu untersuchen. (Gardonio & Brennan, 2004, S. 389) (Gardonio & Brennan, 2002) Die Unterschiede in der Beschreibung elektrischer Impedanz und Admittanz gegenüber den mechanischen Pendanten liest sich ausführlich in Gardonio und Brennan (2004, S. 389) und Gardonio und Brennan (2002).

Die mechanische beziehungsweise dynamische Impedanz und Admittanz stellen sogenannte Frequenzübertragungsfunktion dar. Die Impedanz ist als Widerstand eines Systems gegen eine angreifende Kraft zu verstehen. Die Admittanz bildet dagegen die Beweglichkeit ab. Die vorgestellten Größen definieren sich aus dem Verhältnis zwischen anregender Kraft und resultierender Schnelle. Prinzipiell ist die Bildung der Admittanz auch aus einem Moment und einer Winkelschnelle bzw. Kombinationen aller vier Größen möglich. Folgende Ausarbeitung der Grundlagen beschränkt sich jedoch auf die Admittanz aus Kraft und Schnelle. Somit gehen zwei messtechnisch oder simulativ bestimmbare Parameter in die Variablen ein. Die Impedanz ist durch

$$\tilde{Z}(\omega) = \frac{\tilde{F}(\omega)}{\tilde{v}(\omega)} \quad \text{Gl. 24}$$

beschrieben, während die Admittanz dem Kehrwert der Impedanz entspricht.

$$\tilde{Y}(\omega) = \frac{\tilde{v}(\omega)}{\tilde{F}(\omega)} \quad \text{Gl. 25}$$

Die Verwendung der Konzepte der Admittanz und Impedanz setzt lineare Modelle sowie Newtons Gesetz in den Grenzpunkten zwischen mehreren Subsystemen voraus. So wird davon ausgegangen, dass im Schnittpunkt einer Quelle zur stützenden Struktur actio gleich reactio gilt. Die Impedanz sowie Admittanz sind aufgrund der dynamischen Vorgänge (in exponentieller Schreibweise) stets komplexer Natur. Die Grenzen der Konzepte liegen bei komplizierten, mehrgliedrigen Strukturen. In derartigen Fällen bilden energiebasierte Modelle passendere Lösungen. Für grundlegende Systeme sowie Balken und Platten bilden jedoch Impedanz und Admittanz verbreitete Werkzeuge.

Für die weitere Vorstellung der Grundlagen wird auf die Erwähnung der Impedanz verzichtet, da die vorliegenden Untersuchungen auf die Admittanz beschränkt sind. Die korrespondierenden Zusammenhänge können jedoch detailliert in zitierten Quellen nachvollzogen werden. Für das Verständnis der Admittanz ist das Verhalten der Basissysteme Feder, Dämpfer und Masse entscheidend. Die Ad-

mittanzen dieser drei Grundsysteme sind zu

$$\tilde{Y}_K = \frac{j\omega}{K}, \quad \tilde{Y}_C = \frac{1}{C}, \quad \tilde{Y}_M = \frac{-j}{\omega M} \quad \text{Gl. 26}$$

definiert. Werden die Admittanzen dieser Systeme in doppelt-logarithmischer Darstellung gegen die Frequenz aufgetragen, zeigen sich die in Abbildung 6 visualisierten Verläufe. Die Kernaussage der Admittanzen der Standardsysteme besagt, dass die Feder stets positive rein imaginäre Admittanzen besitzt. Eine Masse zeichnet sich durch eine negative imaginäre Admittanz ab. Zusätzlich wird deutlich, dass die Dämpfung rein real ist und somit der Realteil der Admittanz eines beliebigen Systems allein durch die Dämpfung beeinflusst ist. Da nur der Realteil Energieflüsse abbildet, wird der imaginäre Teil als Summe sogenannter reaktiver Kräfte bezeichnet. Denn Masse und Feder speichern lediglich Energie und dissipieren diese nicht.

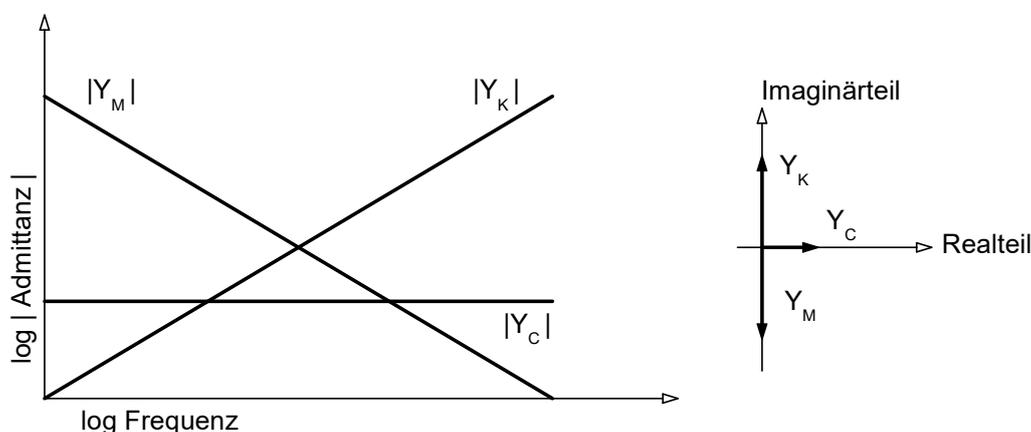


Abb. 6: Skizzierte Verläufe der Admittanz der dynamischen Standardsysteme Feder, Dämpfer und Masse (eigene Darstellung nach Fahy (2006, S. 81))

Mechanische Systeme, die aus mehreren Standardsystemen bestehen, lassen sich durch die elektrotechnische Metapher von Serien- und Parallelschaltung verbinden.

#### Parallel

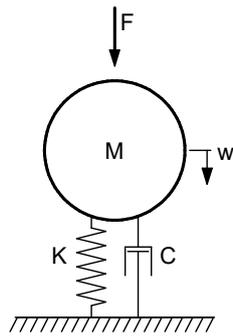
$$\frac{1}{\tilde{Y}_e} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{\tilde{Y}_n} \quad \text{Gl. 27}$$

#### Serie

$$\tilde{Y}_e = \sum_{n=1}^N \tilde{Y}_n \quad \text{Gl. 28}$$

Auf diese Weise kann die Admittanz des elementaren Standardmodells eines Einmassenschwingers (single degree of freedom – sdof, vgl. Abb. 7) hergeleitet werden.

In doppelt-logarithmischer Darstellung visualisiert Abbildung 8 diese Admittanz als sogenanntes Bode-Diagramm (Admittanzpegel und Phasenwinkel). Die Resonanzfrequenz zeichnet sich als Spitzenwert im Verlauf ab. Die beidseitigen Schenkel werden durch die Masse- und Federanteile beschrie-



$$\tilde{Y}_{s dof} = \frac{1}{j\omega M + C - jK/\omega} \quad \text{Gl. 29}$$

Abb. 7: Standardmodell  
Einmassenschwin-  
ger (s dof)

ben. Werden die Admittanzen der Feder und der Masse gleichgesetzt, kann nach der Eigenfrequenz  $\omega_n$  aufgelöst werden ( $\omega_n = \sqrt{K/M}$ ). Da im Resonanzfall  $Y_K = Y_M$  gilt, kürzt sich der imaginäre Teil heraus und das dynamische Verhalten und die Amplitude der Admittanz ist alleinig durch die Dämpfung bzw.  $Y_C$  kontrolliert. Die Dämpfung nimmt dabei zusätzlich Einfluss auf die Lage der Eigenfrequenz, wobei die ungedämpften und gedämpften Eigenfrequenzen bei geringen Dämpfungen nahezu deckungsgleich sind. Beschrieben wird dieser Zusammenhang durch die sogenannte kritische Dämpfung. Für detaillierte Erörterung wird auf Fahy (2006, S. 83) sowie Möser und Kropp (2010, S. 5) verwiesen.

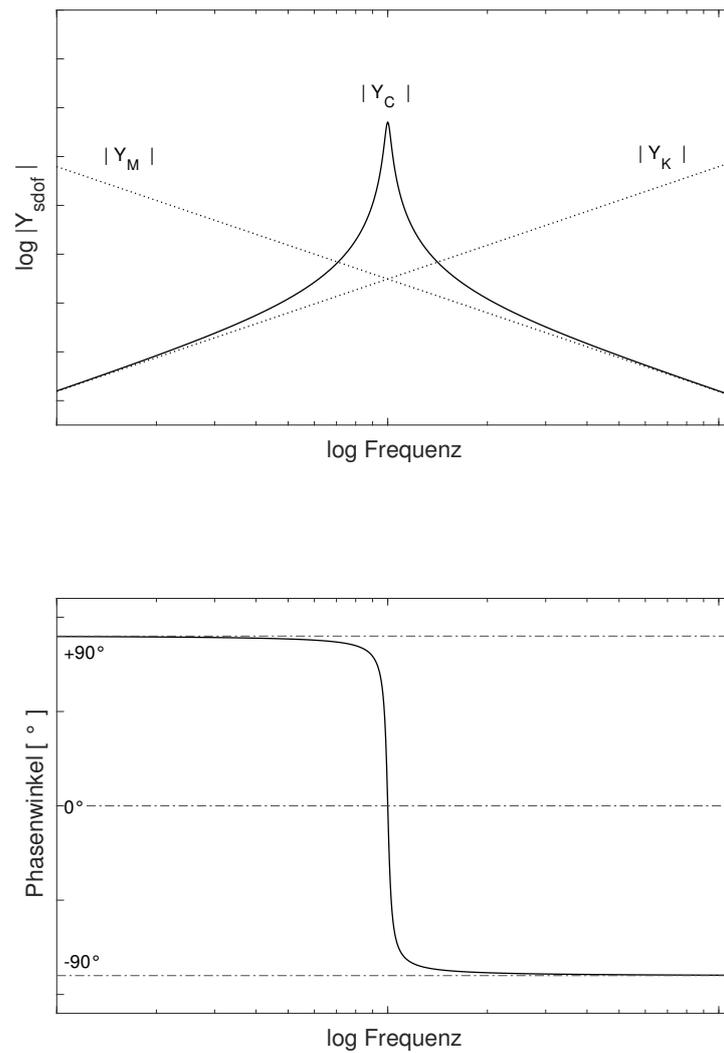


Abb. 8: Admittanz des Einmassenschwingers nach Gleichung 29 (eigene Darstellung)

### Balkenadmittanz

Folgend werden die Admittanzen von Balken erläutert. Im Gegensatz zum archetypischen Einmassenschwinger sind diese Systeme linienförmig. Dadurch muss eine örtliche Unterscheidung der Krafteinwirkung und der Auswertungsposition der resultierenden Schnelle eingeführt werden. Abbildung 9 skizziert den allgemeinen Fall eines beidseitig gelenkig gelagerten Balkens. Die angreifende Kraft  $F$  und die resultierende Schnelle  $v$  sind an den Positionen  $a$  und  $b$  angetragen. Wenn  $a \neq b$  gilt, wird von der Transferadmittanz gesprochen. Werden beide Größen an gleicher Stelle ausgewertet ( $a = b$ ), ergibt sich die sogenannte Punktadmittanz. Letztere bildet die Grundlage der hier durchgeführten Untersuchungen. Wird im Folgenden von Admittanz gesprochen, ist, sofern nicht differenziert, die Punktadmittanz gemeint. Die Verläufe der Transfer- und Punktadmittanz unterscheiden sich unter anderem im Verlauf, der Position der Antiresonanzen sowie der Phase. Auf konkrete Unterschiede wird zu späterem Zeitpunkt erneut eingegangen.

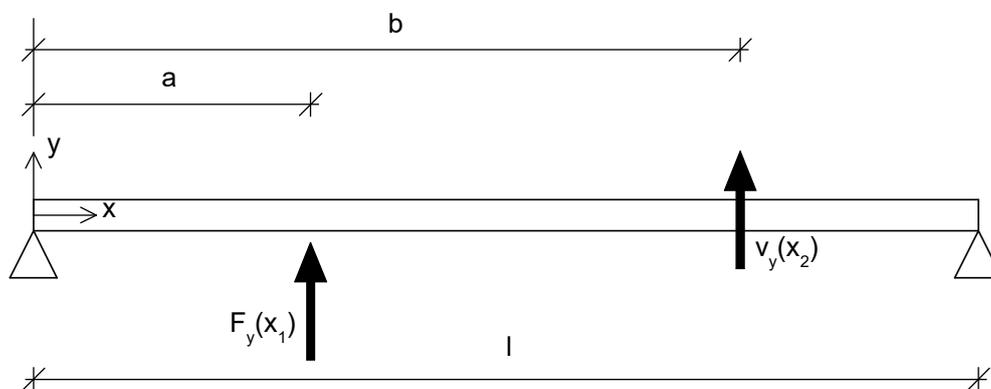


Abb. 9: Gelenkig gelagerter Balken (eigene Darstellung nach Fahy (2006, S. 96))

Im Rahmen der hier vorgestellten Grundlagen und resultierenden Ergebnisse von Platten wird detailliert nur auf finite Balken und Platten eingegangen. Falls für die Vollständigkeit nötig, finden Konzepte der infiniten Betrachtung ebenfalls Eingang. Den entscheidenden Unterschied zwischen finiten und infiniten Systemen bilden die erwähnten Reflexionen an den Systemstörungen sowie das resultierende Schwingungsfeld.

Die mathematische Beschreibung der Admittanz eines finiten Balkens ist für wenige Situationen mathematisch geschlossen berechenbar. Fahy (2006) erörtert auf Seite 90 ff. beispielhaft die geschlossene Berechnung der Punktadmittanz eines gelenkig gelagerten Balkens in Plattenmitte. Die übliche Beschreibung der Admittanz beliebiger Systeme basiert auf dem sogenannten modalen Ansatz bzw. der modalen Summation. Die dynamische Antwort eines Systems wird dazu als Summe aller beteiligten Eigenfrequenzen und den korrespondierenden Moden beschrieben. Wird die Summe von 1 bis  $\infty$  gebildet, ist die berechnete Größe vollständig. Die Admittanzgleichung des Balkens (Bernoulli-Balken

(Gardonio & Brennan, 2004, S. 419)) ist nach modalem Ansatz wie folgt definiert.

$$\tilde{Y}_{v_y F_y}(\omega) = j\omega \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\phi_r(b) \phi_r(a)}{M_r [\omega_r^2 (1 + j\eta) - \omega^2]} \quad \text{Gl. 30}$$

Für die betrachtete Punktdmittanz mit  $a = b$  fasst sich Gleichung 30 zu

$$\tilde{Y}_{v_y F_y}(\omega) = j\omega \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\phi_r^2(a)}{M_r [\omega_r^2 (1 + j\eta) - \omega^2]} \quad \text{Gl. 31}$$

zusammen. Neben der Frequenz, der Eigenfrequenz, dem Verlustfaktor und der modalen Masse spielen die bereits aus Gleichung 19 bekannten Formfunktionen eine entscheidende Rolle. Der Einfluss der modalen Masse soll hier im Rahmen des theoretischen Überblicks nicht weiter fokussiert werden. Bei der Entwicklung approximativer Modelle wird diese jedoch erneut aufgegriffen und vertieft. Während Abbildung 10 die ersten drei Moden eines gelenkigen Balkens visualisiert, zeigt Abbildung 11 die Punktdmittanz eines Balkens. Die Ergebnisse sind als Bode-Diagramme dargestellt (Admittanzpegel inkl. Phasenwinkel). Deutlich zeichnen sich die Resonanzen sowie Antiresonanzen als maximale und minimale Spitzenwerte ab. Die Phase wechselt bei der Punktdmittanz jeweils zwischen  $+90^\circ$  und  $-90^\circ$  mit dem Nulldurchgang bei der Resonanz respektive der Antiresonanz. Im Gegensatz zur Punktdmittanz fällt die Transferadmittanz mit verschobenen Antiresonanzen und einer Phase außerhalb der obigen Grenzen auf. Eine entsprechende Darstellung beider Admittanzen kann in Gardonio und Brennan (2004, S. 96) nachgeschlagen werden. Die Admittanzgleichung ist grundsätzlich universell für beliebige Balken und Auflagersituationen anwendbar. Variierende Auflagerkonditionen nehmen dabei Einfluss auf die Formfunktionen bzw. die Moden. Im Rahmen der Grundlagen wird nicht weiter auf variierende Auflager und die korrespondierenden Modenformen eingegangen, da sich diese Randbedingungen prinzipiell in deren Umsetzung nicht unterscheiden. Für die Entwicklung approximativer Admittanzmodelle in Kapitel 4 Vorarbeiten werden die Parameter eingespannter sowie gelenkiger Lagerung betrachtet. Für weitere Informationen und Kombinationen aus unterschiedlichen Lagerbedingungen bildet Gardonio und Brennan (2004) (Kap. 9) eine ausführliche theoretische Basis.

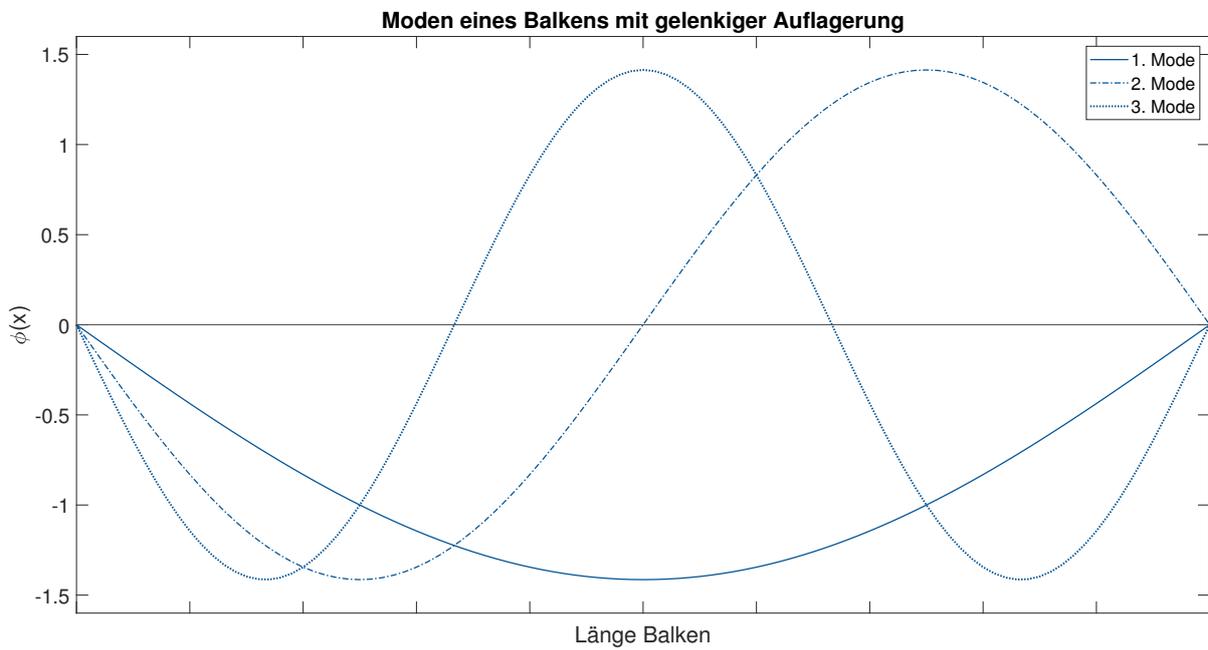


Abb. 10: Moden 1, 2 und 3 eines gelenkig gelagerten Balkens (eigene Darstellung)

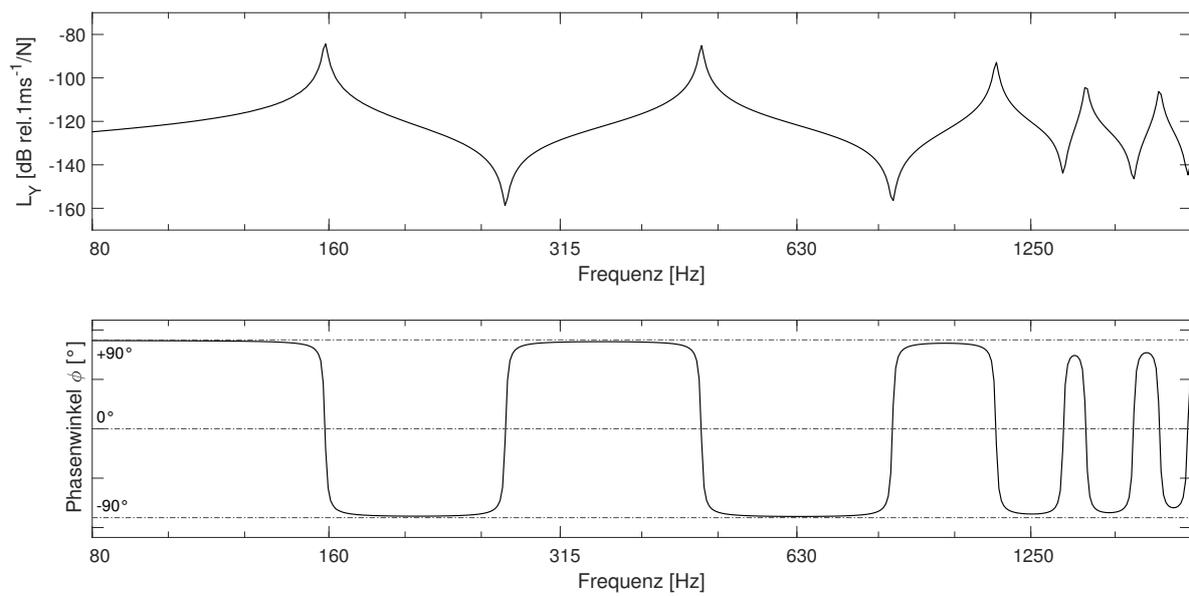


Abb. 11: Punktadmittanz eines Balkens (Auswertung an  $x = 0.4 \cdot l$ , eigene Darstellung)

## Plattenadmittanz

Die am Balken erläuterten Zusammenhänge können anschließend auf Platten erweitert werden. Als Ausgangslage für die durchgeführten Untersuchungen stellt die eingangs bereits vorgestellte charakteristische Plattenadmittanz die Grundlage für Vereinfachungen dar. Die charakteristische Admittanz leitet sich aus der Admittanz unendlicher, dünner, flacher sowie homogener Platten ab. Unter der Voraussetzung, dass die kraftbeanspruchte Fläche klein gegenüber der Wellenlänge ist und gleichzeitig die Krafteinleitung nicht zu Scherverschiebungen führt, kann die charakteristische Admittanz aus der Schnelle und der Kraft gebildet werden (Cremer et al., 2005, S. 254). Während Fahy (2006) lediglich die charakteristische Admittanz nennt, wird diese in Cremer et al. (2005, S. 254) ausführlich diskutiert. Die entscheidenden Schritte zeigen Gleichung 32 und 33 (aus Cremer et al. (2005)).

$$\tilde{F} = 8jD k_B^2 \tilde{\eta} \quad \text{Gl. 32}$$

$$Y_{char} = \frac{\tilde{v}}{\tilde{F}} = \frac{j\omega\tilde{\eta}}{\tilde{F}} = \frac{\omega}{8Dk_B^2} = \frac{1}{8\sqrt{Dm''}} \quad \text{Gl. 33}$$

Die modale Beschreibung der Punktadmittanz finiter Platten steht in engem Zusammenhang mit der Admittanzgleichung des Balkens (Gl. 31). Prinzipiell wird die Balkengleichung um eine weitere Dimension erweitert und erfährt daher eine erneute Multiplikation mit entsprechender Modenform bzw. Formfunktion. In der zitierten Quelle Fahy (2006) wird die Modenform auch für die Platte mit  $\phi$  abgekürzt. Im zweidimensionalen Fall der Platte erhält  $\phi$  ergänzend zwei Abhängigkeiten  $x$  sowie  $y$  und lässt sich als Multiplikation zweier Balkenformfunktionen verstehen.

$$\phi_r(x,y) = 2 \sin\left(\frac{n_1\pi x}{l_x}\right) \sin\left(\frac{n_2\pi y}{l_y}\right) \quad \text{Gl. 34}$$

Die Transferadmittanz einer finiten Platte ist schließlich zu

$$\tilde{Y}(\omega) = j\omega \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\phi_r(x_2,y_2) \phi_r(x_1,y_1)}{M_r [\omega_r^2 (1 + j\eta) - \omega^2]} \quad \text{Gl. 35}$$

definiert. Für die Formulierung der Punktadmittanz fallen Kraft- und Schnellenposition zusammen.

$$\tilde{Y}(\omega) = j\omega \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\phi_r(x,y) \phi_r(x,y)}{M_r [\omega_r^2 (1 + j\eta) - \omega^2]} \quad \text{Gl. 36}$$

Auf eine erneute Darstellung der Plattenadmittanz wird hier verzichtet und auf Abbildung 6 in der Einleitung verwiesen. Auch für die Plattengleichung werden in Gardonio und Brennan (2004, S. 439) Modenformfunktionen für verschiedene Auflagerbedingungen angegeben. Hingewiesen sei auf eine unterschiedliche Variablenbelegung in Fahy (2006) und Gardonio und Brennan (2004). In letzterer werden die Modenfunktionen der Platte durch  $\psi_{m,n}(x,y) = \phi_m(x) \phi_n(y)$  beschrieben. In Fahy (2006) entspricht  $\psi$  der Ableitung von  $\phi$ .

## 2.2 Linearisierte Admittanz und logarithmische Darstellung

Das Kapitel abschließend, wird folgend auf das entscheidende und vereinfachende Konzept der vorliegende Arbeit eingegangen. Da das Konzept im Rahmen der Fragestellung und des übergeordneten Projekts als innovativ gilt und es folglich keine Publikationen zu dieser Umsetzung gibt, finden sich keine zitierten Quellen.

Das Konzept entspricht einer linearisierten Admittanz, die vor allem im Auflagerbereich den ansteigenden Ast der tatsächlichen Admittanz vereinfachen soll (vgl. Abb. 6). Die linearisierte Admittanz setzt sich aus einem Gradienten  $a$  respektive der Steigung der Admittanz bei  $\omega \rightarrow 0 \text{ rad/s}$  und der Frequenz  $f$  zusammen. Folgende Gleichung verdeutlicht diesen Zusammenhang mathematisch.

$$Y_{lin} = a(x, y, D, \rho, h, k_i, \dots) \cdot f^N \quad \text{Gl. 37}$$

Der Gradient  $a$  stellt eine Konstante dar, die unter anderem von der Auswertungsposition  $x, y$ , der Biegesteifigkeit  $D$ , der Rohdichte  $\rho$ , der Plattenhöhe  $h$  und den linearen Auflagersteifigkeiten sowie Rotationssteifigkeiten  $k_i$  abhängt. Die Frequenz verfügt zusätzlich über den Exponenten  $N$ , der zu  $-1 \leq N \leq 1$  definiert ist und über die Neigung der linearisierten Admittanz entscheidet. Für die idealen Auflager des Gelenks und der Einspannung nimmt  $N$  den Wert 1 an. Dies liegt in der vollends unterbundenen vertikalen Beweglichkeit begründet. Die dritte ideale Situation des freien Auflagers verfügt über den Exponenten  $N = -1$ . Abbildung E.1 im Anhang belegt diese inverse Proportionalität des Gradienten der Admittanz. Die Abbildung zeigt die Punktadmittanz einer frei gelagerten Platte mit Auswertungsposition am Plattenrand und visualisiert die negative Steigung der linearisierten Admittanz. Im Rahmen der Untersuchungen wurde, wie eingangs beschrieben, eine vertikale Bewegung unterbunden (ideal gelenkig bzw. eingespannt). Folglich beschränken sich die vorliegenden Untersuchungen auf den korrespondierenden Exponent  $N = 1$ .

Die übliche Darstellung in der Dynamik und der Akustik entspricht einer logarithmischen Betrachtung. Im Rahmen vorliegender Untersuchungen wird sowohl die Frequenz als auch die Admittanz logarithmisch dargestellt. Letztere wird durch folgende Berechnungsvorschrift in einen Pegel [dB] überführt. Von der komplexen Admittanz wird dazu der Betrag gebildet und mit dem Referenzwert  $Y_0 = 1 \text{ m/Ns}$  in Bezug gesetzt (E DIN EN 12354-5:2022-02, S. 13). Da die Admittanz eine akustische Feldgröße ist und somit im Quadrat zur Energie steht, findet eine Multiplikation mit 20 statt (Kollmann, 2000, S. 3–10, 31).

$$L_Y = 20 \cdot \log_{10}(|\tilde{Y}|/Y_0) = 20 \cdot \log_{10}|\tilde{Y}| \quad \text{Gl. 38}$$

Die linearisierte Admittanz mit  $N = 1$  zeigt sich unter der gegebenen doppelt-logarithmischen Randbedingungen als ansteigende Lineare mit +6 dB/Oktave. Eine Formulierung der linearisierten Admittanz in Pegeldimensionen weißt diesen Zusammenhang nach. Der Bezug zu  $Y_0$  wird nachfolgend nicht ausformuliert.

$$L_{Y_{lin}} = 20 \cdot \log_{10}|Y_{lin}| = 20 \cdot \log_{10}|a| + 20 \cdot \log_{10}|f| \quad \text{Gl. 39}$$

Der Gradient  $a$  bzw. die Admittanz nahe 0 rad/s verschiebt die +6 dB/Oktave-Gerade entlang der y-Achse. Obige Gleichung belegt zusätzlich die Tatsache der Steigung um +6 dB/Oktave durch  $20 \cdot \log_{10}|2f| = 20 \cdot \log_{10}2 + 20 \cdot \log_{10}|f| = \sim 6 \text{ dB} + 20 \cdot \log_{10}|f|$ .

## 3 Messung und Simulation

Das Kapitel Messung und Simulation umfasst die Messgegenstände, den Messaufbau, die Datenverarbeitung sowie die Ergebnisse und deren Bewertung. Da die Verarbeitung von dynamischen Messdaten stets eine Bewertung der Plausibilität benötigt, sind im Unterpunkt der Messungen die Ergebnisse strukturell nicht klar von der Bewertung getrennt. Des Weiteren führt das Kapitel Messung und Simulation entscheidende Aspekte des verwendeten Simulationstools auf. Es werden eine Modellkalibrierung und Validierung sowie eine überschlägige Sensitivitätsanalyse diskutiert. Die inhaltlich abgeschlossenen Gliederungspunkten der Modellkalibrierung und der Sensitivitätsanalyse beinhalten jeweils die Methodik, die Ergebnisse sowie Diskussion und Interpretation. Dieser Aufbau wurde gewählt, da die gewonnenen Ergebnisse als inhaltliche Vorarbeiten zur Findung approximativer Modelle dienen.

Im Folgenden werden die Messungen und die generierten Daten erläutert. Die beiden Gliederungspunkte 3.1.1 und 3.2.1 folgen einem identischen Aufbau und erörtern Messgegenstand, Messaufbau, Datenverarbeitung und Ergebnisse der Messungen. Auf die Ergebnisse der Platte P9 wird dabei detaillierter eingegangen, da diese Platte als Standard- und Ausgangsplatte für anschließende Untersuchungen gilt. Die Messungen in Prüfstand P12 werden lediglich soweit erörtert, dass Transparenz und Nachvollziehbarkeit für den Lesenden gegeben ist.

### 3.1 Messung in Prüfstand P9

#### 3.1.1 Messgegenstand - Prüfstand für Estriche und Beläge P9/P10

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurden Admittanzmessungen an einer Stahlbetonplatte eines Prüfstands am Fraunhofer IBP in Stuttgart durchgeführt. Die generierten Daten dienen der Validierung und Kalibrierung der herangezogenen Randbedingungen der Simulation. Verwendet wurde hierzu die trennende Bodenplatte zwischen dem Senderraum P9A und dem Empfangsraum P9B. Plan P01 im Anhang zeigt den Grundriss der untersuchten Platte. Die angegebenen und verwendeten Maße basieren auf eigenen Einmessungen vor Ort. Die herangezogenen Materialdaten wurden durch Rücksprache mit Projektverantwortlichen in Erfahrung gebracht. Abbildung E.2 im Anhang stellt einen Schnitt durch den beschriebenen Prüfstand dar. Eine Informationsbroschüre des Prüfstands ist öffentlich im Internet zugänglich.

Die untersuchte Platte besitzt eine lichte Auflagerweite von 4,96 m (entlang x-Achse definiert) auf 3,96 m (entlang y-Achse definiert). Zu berücksichtigen ist eine Vorsatzschale zur Unterdrückung der akustischen Flankenübertragung. Diese verringert die zugängliche Weite der Platte auf 4,70 m mal 3,70 m. Die Platte selbst weist eine Dicke von 0,14 m auf und ist in Stahlbeton ausgebildet. Gelagert ist diese allseitig auf einer 0,29 m breiten Kalksandsteinmauer mit einer Höhe von 3,07 m.

Als Materialkennwerte bezüglich aller verwendeter Parameter wurden institutsinterne Standardwerte angenommen. Mit Verweis auf gängige, baupraktisch bewährte Referenzen wie Schneider et al. (2016) sollten die internen Materialwerte teilweise als Anhaltspunkte angesehen werden. Beispielsweise fällt der Elastizitätsmodul von Beton mit  $27,5 \text{ GN/m}^2$  gering aus und repräsentiert sehr niederfeste

Betone (Goris, 2016, S. 5.32). Ein weiteres Beispiel stellt Kalksandstein dar. Die Rohdichten umfassen bei derartigen Steinen große Wertebereiche (siehe bspw. Schneider und Graubner (2016, S. 7.3)). Aus Gründen der Konsistenz wurden auch für vorliegende Arbeit die internen Werte verwendet, sofern keine konkreten Daten zur Verfügung stehen. Auf mögliche Diskrepanzen zwischen real vorhandener und angenommener Werte wird daher hingewiesen. Im Verlauf der Arbeit wird wiederholt auf diesen möglichen Fehlerursprung eingegangen. Tabelle 1 listet die IBP internen Standardwerte.

Tab. 1: Fraunhofer IBP interne Materialparameter

Baustoff	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$c_L$ [m/s]	$E$ [E9 N/m <sup>2</sup> ]	$\eta$ [-]	$\nu$ [-]
Beton (Stahlbeton)	2300	3530	27,5	0,005	0,2
Kalksandstein	1800	2500	10,8	0,01	0,2
Mauerziegel	1750	2700	12,2	0,01	0,2

Die untersuchte Stahlbetonplatte aus Prüfstand P9 wird für die Parameterstudien der vorliegenden Untersuchungen als „Standardplatte“ verwendet. Folglich sind Simulationen und Zusammenhänge an der P9 Platte generiert und abgeleitet worden. Tabelle 2 listet alle relevanten Materialparameter von P9, die in Simulationen eingegangen sind. Der Verlustfaktor wurde mit Hilfe der Software „MEscope“ (Firma Vibrant) bestimmt und dem Autor vorliegender Arbeit als Wert übergeben.

Tab. 2: Materialparameter der untersuchten Bodenplatte in Prüfstand P9 (Materialdaten IBP intern)

Kennwert	Eingabewert	Einheit
Kantenlänge (X-Achse)	4,96	[m]
Kantenlänge (Y-Achse)	3,96	[m]
Plattendicke (Z-Achse)	0,14	[m]
Elastizitätsmodul	27,5	[E9 N/m <sup>2</sup> ]
Poissonzahl	0,2	[-]
Dichte	2300	[kg/m <sup>3</sup> ]
Verlustfaktor	0,05	[-]

### 3.1.2 Messaufbau – P9

Die Admittanzmessungen in Prüfstand P9 wurden am 03.11.2022 von MitarbeiterInnen des Fraunhofer IBP durchgeführt und vom Autor vorliegender Arbeit begleitet. Die Punktadmittanz wurde an 10 verschiedenen Positionen bestimmt und in Plan P01 maßstäblich dokumentiert. Abbildung 12 visualisiert den relevanten Platten- bzw. Planausschnitt inklusive der Messpositionen sowie deren Vermaßung. Die Benennung der Messpositionen wurde dabei einmalig festgelegt und stets beibehalten. Abbildung 14 illustriert schematisch das Messsystem. Die Anregung der untersuchten Platte fand mittels Shaker und pseudostochastischem Rauschen statt. Im Kontaktpunkt zwischen Shaker und Platte befand sich ein

Kraftaufnehmer. Die resultierende Beschleunigung nahmen zwei Beschleunigungsaufnehmer in unmittelbarer Umgebung zur Anregung auf. Durch Mittelung zwischen beiden Beschleunigungssensoren wird die Beschleunigung am Anregungsort ermittelt und in die Schnelle umgerechnet. Aus bekannter Kraft und Schnelle errechnet die Software anschließend die Punktadmittanz. Abbildung 13 zeigt die beiden Beschleunigungsaufnehmer, den Kraftsensor sowie den Shaker. Die Sensoren wurden mit Bienenwachs auf die Bodenplatte geklebt. Die Signalverarbeitung der drei Sensoren erfolgte über einen Mikrofonkonditionierer (B & K Nexus) sowie ein 8-Kanal Schall- und Schwingungsmessgerät (Soundbook). Die Darstellung, Vorauswahl und Speicherung der erzeugten Messdaten erfolgte anschließend über eine USB Schnittstelle und ein angeschlossenes Notebook. Die Abbildungen und Tabellen in Kapitel C im Anhang zeigen die vorhandenen Datenblätter sowie Seriennummern der verwendeten Sensoren und Geräte.

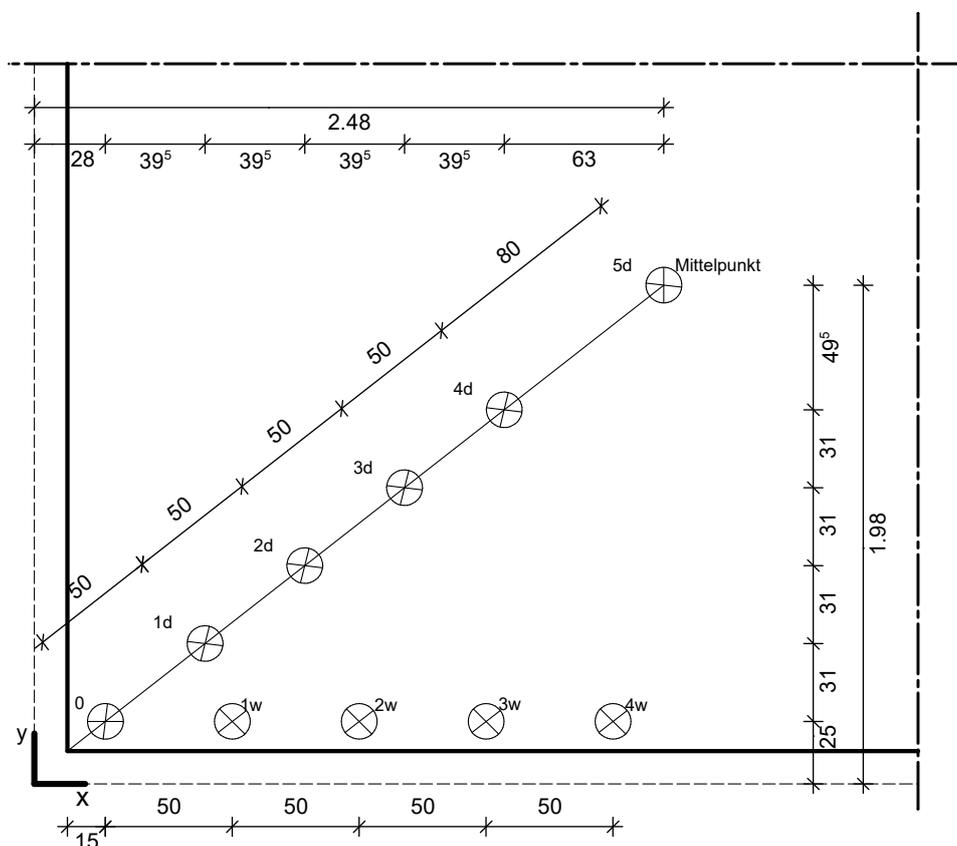


Abb. 12: Planausschnitt der trennenden Bodenplatte in P9 inklusive der Messpositionen

### 3.1.3 Datenverarbeitung und Ergebnisse – P9

Die erzeugten Messdaten werden über die Messsoftware „Samurai“ (Steuerung des Soundbooks) von Messenden auf Plausibilität überprüft und anschließend als xls-Datei (Microsoft Excel) exportiert. Die eigentliche Datenverarbeitung und Darstellung erfolgte anschließend mithilfe eigener MATLAB Skripte. Neben einer Vielzahl gemessener Daten waren im Rahmen vorliegender Arbeit lediglich die Messrei-



Abb. 13: Beschleunigungssensoren, Kraftsensor sowie Shaker für die Admittanzbestimmung der Bodenplatte in Prüfstand P9

hen der Admittanz und der Kohärenz von Interesse. Eine Übersicht der verwendete MATLAB Tools findet sich im Anhang B. Entscheidender Aspekt des Imports und der Verarbeitung der Daten mit MATLAB waren die Mittelung über Position und Zeit sowie der schnellere Aufruf der Messdaten aus einer MATLAB-Data Datei statt wiederholtem Datenimport aus xls-Dateien. Berechnungen der Eigenfrequenzen, der Phase und des Gradienten sowie ausführliche Datenvergleiche mit Simulationen sind weitere Aspekte des Imports in MATLAB. Folgend wird aus Gründen der Nachvollziehbarkeit auf entscheidende Verarbeitungsschritte näher eingegangen.

Relevant sind, wie bereits erwähnt, lediglich die Messreihen der Admittanz und der Kohärenz. Diese wurde von der verwendeten Messsoftware berechnet und entsprechend abgespeichert. Der Messablauf erzeugte pro Messpunkt fünf Messungen mit einem zeitlichen Abstand von 19,2 Sekunden. Über diese Zeitschritte wurde mittels MATLAB Skripts gemittelt. Anschließend berechnet das Skript die Phase zwischen Kraftsensor und Beschleunigungssensors, folglich zwischen Anregung und Systemantwort. Als Berechnungsgrundlage dient Gleichung 10 für die Implementierung. Hingewiesen wird auf die wechselnden Gültigkeitsbereiche des Tangens. Abschließend speichert das MATLAB Skript die importierten Daten in einer einzigen MATLAB-Data Datei und ermöglicht somit die weitere Programminterne Verarbeitung.

Der nächste auf den Import anschließende Auswertungsschritt ist die Beurteilung der Datenqualität. Wie in vorhergegangenem Gliederungspunkt aufgezeigt, wurden zwei Beschleunigungssensoren (Kanäle CH2 und CH3) montiert. Daher gibt es pro Messpunkt zwei ermittelte Punktadmittanzen. Eine

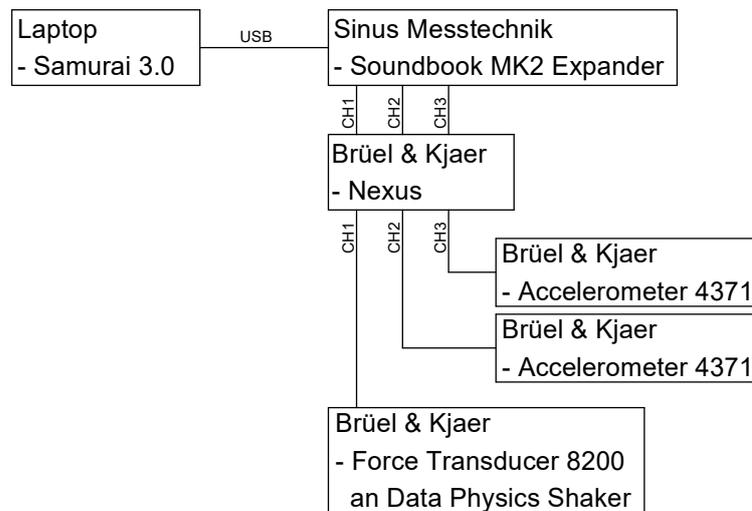


Abb. 14: Messsetup für die Admittanzbestimmung der Bodenplatte in P9

Admittanz zwischen den Sensoren CH2 und CH1 sowie zwischen CH3 und CH1. Um nun die Punktmittanz am Anregungsort zu bestimmen wird über beide Admittanzen gemittelt. Da die Messergebnisse aufgrund von Kontaktproblemen zwischen Sensor und Platte oder anderweitigen Störungen stark verzerrt sein können, erfolgt eine Mittelung erst nach Einsicht und Beurteilung der einzelnen Messdaten, der Phase sowie der Kohärenz. Die Abbildungen 15 und 16 zeigen je einen Messpunkt an welchem der Mittelwert der beiden Kanäle nicht verwendbar (Abb. 15) bzw. verwendbar (Abb. 16) ist. Die Bewertung der Datenqualität erfolgte durch den Autor unter Absprache mit den Betreuenden. Ausschlaggebend sind dabei die Verläufe der Phase und der Kohärenz. Die Phase sollte möglichst dem theoretischen Verlauf ähneln (Wechsel zwischen  $+90^\circ$  und  $-90^\circ$ , vgl. Theorie Kapitel 2 Abb. 11). Erreicht außerdem die Kohärenz einen Wert von 1, ist auf hohe Datenqualität zu schließen (Goldman, 1999, S. 112, 117). In Abbildung 15 sind deutliche Abweichungen zwischen des dritten und des zweiten Kanals erkennbar. In diesem Fall wurde auf eine Mittelung zwischen den Kanälen verzichtet und nur die Ergebnisse von Kanal CH2 für weitere Auswertungen verwendet. Abbildung 16 zeigt dagegen die Messwerte an Position 4d und fällt durch eine deutlich höhere Datenqualität auf. An diesem Messpunkt wurden die Ergebnisse beider Kanäle gemittelt. An Position 4d ist verglichen zu 1w zusätzlich die Gesamtqualität der beiden Kanäle deutlich verbessert. Störungen und daraus resultierende Unterschiede sind bei auflagnahen Messpositionen vermehrt zu beobachten und sind nicht unbedingt mit der Qualität der Messung in Zusammenhang zu bringen. Dennoch könnte eine erneute Messung zu zweifelsfreien Ergebnissen oder zu Bestätigungen führen. Im Rahmen vorliegender Arbeit wurden die vorhandenen Ergebnisse als ausreichend deklariert. Ein weiteres eindeutiges Beispiel für die Mittelwertbildung stellen die Messergebnisse an Position 5d (Abb. E.8) dar. Abbildung E.5 (Pos. 1d) zeichnet sich als deutlicher Fall nicht gemittelter Messkurven ab. Die Abbildungen E.4 bis E.11 im Anhang zeigen die Messergebnisse an den übrigen Positionen. Tabelle 3 listet die jeweilige Entscheidung, ob der Mittelwert oder ein einziger Kanal als weitere Datengrundlage verwendet wird. Als auffallend wird an

dieser Stelle vermerkt, dass Kanal CH3 häufig eine geringere Qualität aufweist. Ein eindeutiger Grund oder kausale Zusammenhänge für derartige Diskrepanzen wurde nicht festgestellt.

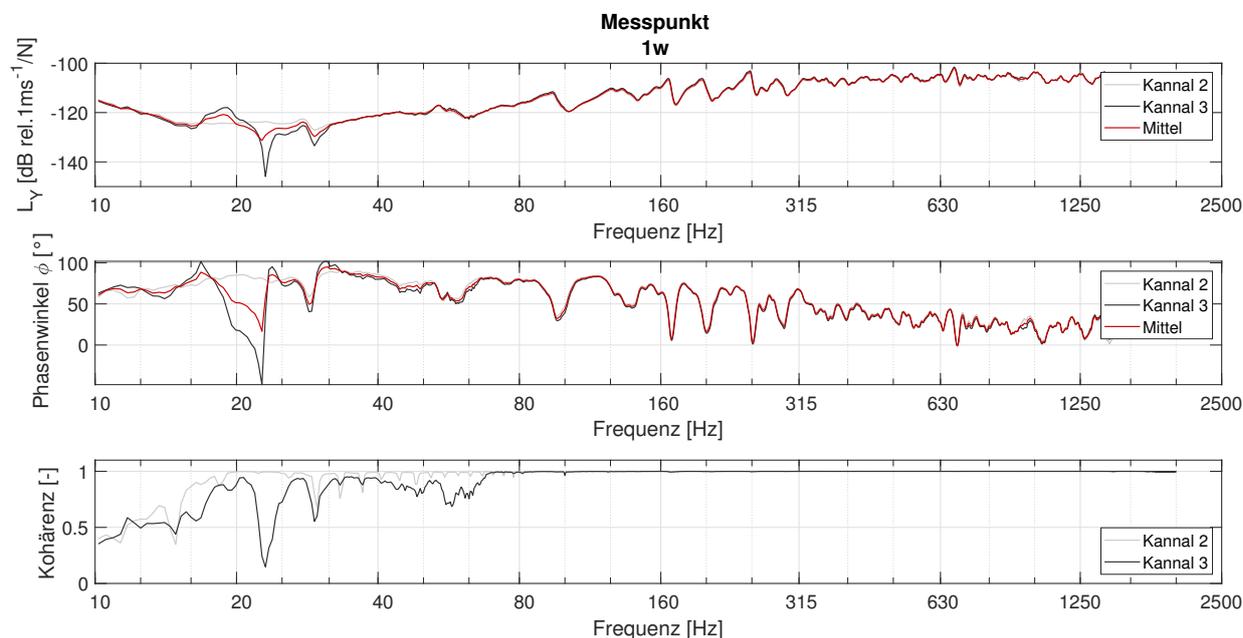


Abb. 15: Position 1w - Platte P9 - Messergebnisse: Admittanzpegel, Phase und Kohärenz der Kanäle CH2 und CH3 sowie deren Mittelwert

Tab. 3: Auflistung der Messpositionen inklusive der weiterverwendeten Daten

Messposition	verwendeter Datensatz
0	CH2
1d	CH2
2d	CH2
3d	CH2
4d	Mittelwert
5d	Mittelwert
1w	CH2
2w	Mittelwert
3w	Mittelwert
4w	CH2

Der nächste Verarbeitungsschritt ist die Bestimmung der Eigenfrequenz. Generiert wird diese aus der gemessenen Admittanz. Zwei Methoden wurden hierzu abgewägt. Die Eigenfrequenzen eines Systems bilden sich zum einen in den Maximalwerten des Realteils zum anderen in den Nulldurchgängen des Imaginärteils ab (nur bei Nulldurchgängen von Resonanz zu Antiresonanz). Abbildung 17 zeigt den Absolutwert, den Realteil sowie den Imaginärteil der Admittanz für Position 4d. Begründet liegen diese Zusammenhänge in der Tatsache, dass im Resonanzfall die Dämpfung und somit der Realteil

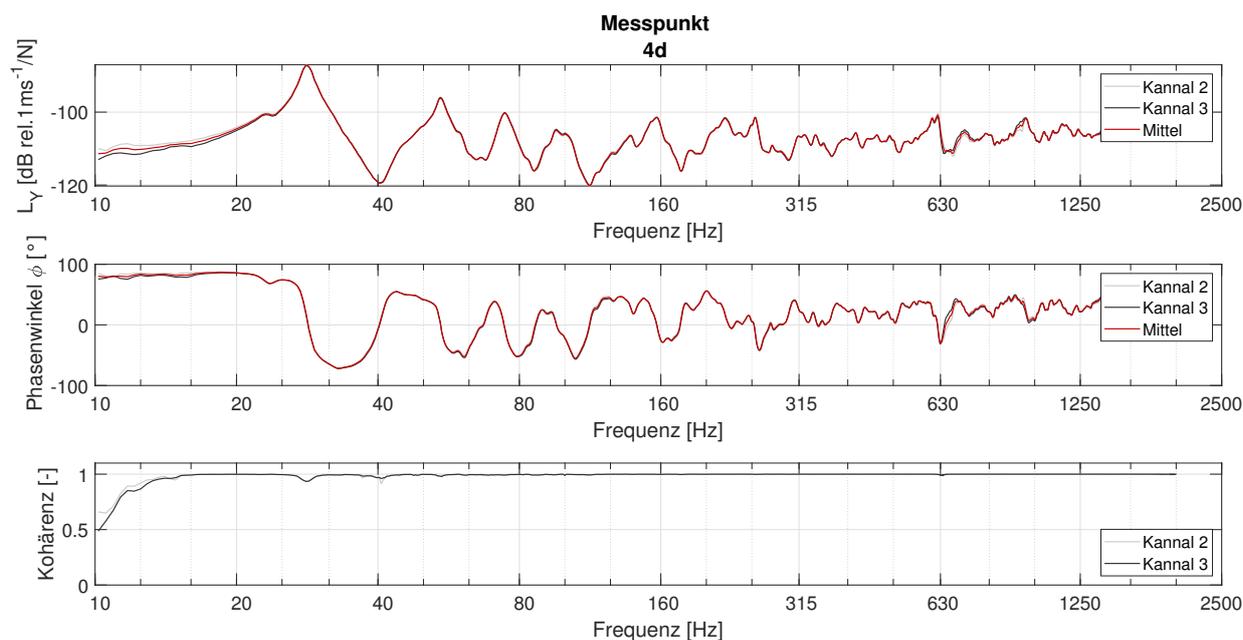


Abb. 16: Position 4d - Platte P9 - Messergebnisse: Admittanzpegel, Phase und Kohärenz der Kanäle CH2 und CH3 sowie deren Mittelwert

der Admittanz die Systemantwort alleinig bestimmt und sich die Anteile der Masse und der Feder neutralisieren. Gleichzeitig ist daher der Imaginärteil gleich 0. Näheren Einblick bietet an dieser Stelle Kapitel 2 der Theorie mit Gleichung 29. Für die in diesem Rahmen getätigten Untersuchungen wurde erstere Methode implementiert und die ersten sechs Maxima ermittelt. Problematisch an der Ermittlung der Eigenfrequenzen nach dieser Methode ist, dass mit Moden höherer Ordnung die entsprechenden Eigenfrequenzen näher zusammenrücken und folglich gemeinsame Maxima bilden. Die Unterscheidung eines Peaks in zwei Eigenfrequenzen ist nicht mehr möglich. Tabelle 4 listet die ersten sieben Eigenfrequenzen der P9 Bodenplatte. Durch das Wissen aus später folgendem Kapitel der Kalibrierung sind die Eigenfrequenzen auch aus der Simulation bekannt. Da die Eigenfrequenzen in der Simulation mathematisch bestimmbar sind, werden deckungsgleiche Eigenfrequenzen identifiziert. Aus den Simulationen ist bekannt, dass Mode (2,2) und (3,1) zusammenfallen. Der aus den Messungen ermittelte Frequenzwert kann deshalb nicht eindeutig zugeordnet werden (mit (!) gekennzeichnet). Dieser Zusammenhang wird in mehrfach zitierter Quelle Fahy (2006) unter dem Gliederungspunkt Modendichte (S. 64ff.) diskutiert. Für die anschließend folgende Kalibrierung sind jedoch nur die ersten drei Eigenfrequenzen nötig und somit die Problematik irrelevant. Die Ergebnisse sind auf ganze Hertz gerundet angegeben.

Der letzte Verarbeitungsschritt umfasst die Berechnung des Gradienten der Admittanz. Dieser Gradient wird ebenfalls im Kapitel der Kalibrierung relevant und dient in erster Linie als weiterer Anhaltspunkt das Simulationsmodell zu validieren. Der Gradient aus Messergebnissen lässt sich verglichen zur Bestimmung aus Simulationsergebnissen nicht ohne weiteres nennen. Während der Berechnung des Gradienten aus Simulationsdaten verschiedene mathematisch hergeleitete Methoden zur Verfügung stehen, ergab sich die Methode zur Bestimmung des Gradienten aus Messergebnissen vorwiegend aus Beobachtungen der simulierten Daten. Bei auflagnernahen Auswertungspositionen scheint

Tab. 4: Aus Messdaten berechnete Eigenfrequenzen der Stahlbetonplatte in P9

Mode	Eigenfrequenz $f_n$
(1,1)	28 Hz
(2,1)	54 Hz
(1,2)	74 Hz
(2,2)	95 Hz (!)
(3,1)	95 Hz (!)
(1,3)	137 Hz
(3,2)	157 Hz

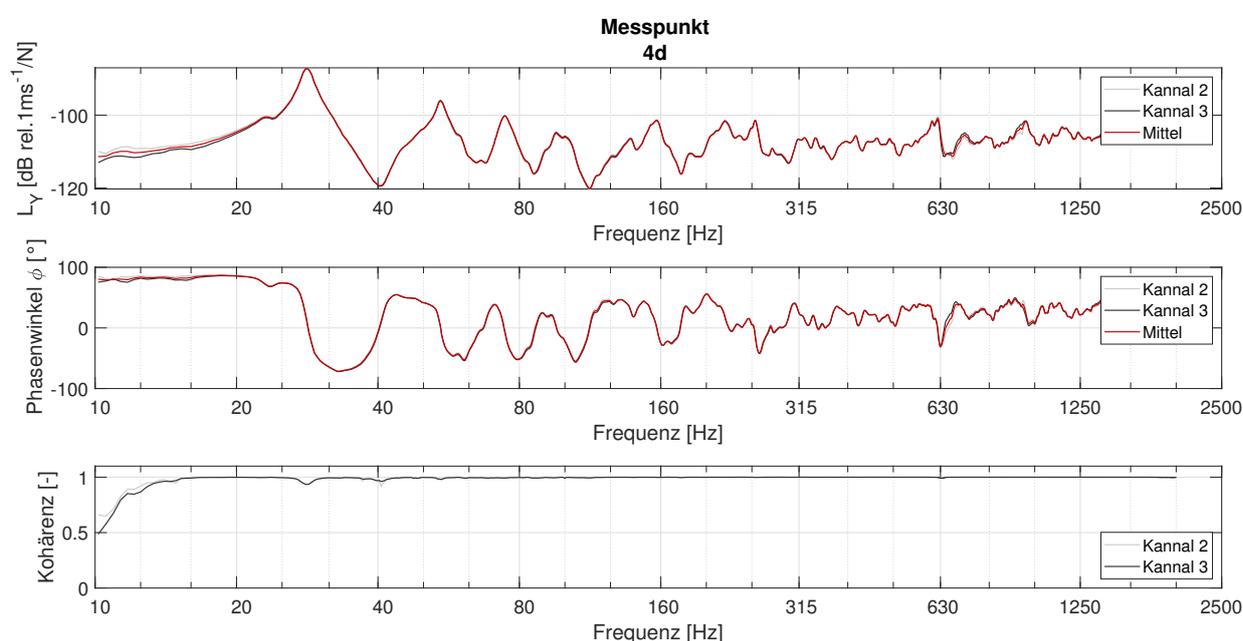


Abb. 17: Position 4d - Platte P9 - Messergebnisse: Admittanzpegel, Imaginärteil und Realteil

der Gradient den Mittelwert der Admittanzpegel darzustellen. Basierend auf dieser Beobachtung wurden verschiedene Varianten der Mittelwertbildung untersucht. Die Implementierung erfolgte in einem separaten MATLAB Skript. Die erste Variante versucht eine Kurve mithilfe der MATLAB-Funktion `polyfit` über die Messdaten zu legen. Mit einem Polynom ersten Grades wird eine Kurve als Mittelwert festgelegt. Besonders in der doppelt-logarithmischen Darstellung der Admittanz ist die Nichtlinearität der Mittelungskurve deutlich erkennbar (vgl. Abb. 18). Auch eine abgewandelte Version von `polyfit` mit Zwang  $y = 0$  zu schneiden, brachte keinerlei Besserung. Erst die Implementation linearer Regression führte zu belastbaren Ergebnissen. Die Implementation folgte dabei einer online verfügbaren Dokumentation der linearen Regression veröffentlicht durch MathWorks (MATLAB) (MathWorks, n. d. a). Für die Messpunkte 0, 1d, 2d, 1w, 2w, 3w und 4w wurden demnach die Gradienten bestimmt. Die Auswahl wurde aufgrund der Nähe zum Auflager, dem damit einhergehenden Admittanzverlauf und der Relevanz bezüglich des hybriden Modells gewählt. Die mittlere Steigung der Admittanz und somit

der Gradient dieser berechnet sich nach linearer Regression zu

$$\beta = x \backslash y, \quad \text{Gl. 40}$$

während der Vektor  $x$  die Frequenzdaten und  $y$  die absoluten Werte der Admittanz enthält. Gleichung 40 verwendet dabei bewusst die Ausdrucksweise in MATLAB Notation. Entscheidend ist die Verwendung des backslash-Operators. Dieser wird bei der Lösung linearer Gleichungssysteme der Form  $A \cdot x = B$  benötigt und ist in diesem Fall einer elementweisen Division gleichzusetzen (MathWorks, n. d. b). Abbildung 18 zeigt exemplarisch für Messpunkt 1w den Verlauf der Admittanz sowie die Gradienten nach Regression und Polyfit.

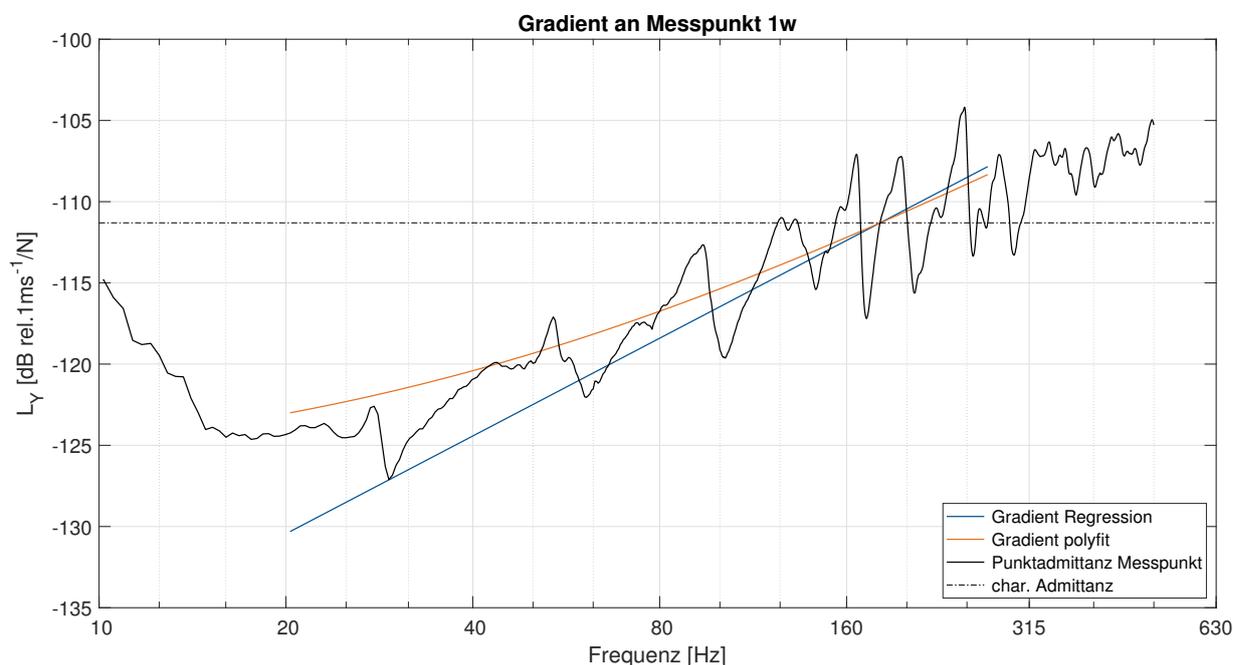


Abb. 18: Position 1w - Platte P9: anhand von Messdaten berechnete Gradienten mithilfe polyfit Funktion und linearer Regression

Entscheidend bei der Berechnung der Gradienten mittels linearer Regression ist der betrachtete Frequenzbereich. Die untere Frequenzgrenze wurde anhand der Datenqualität definiert. Ausschlaggebend sind dabei Phase und Kohärenz. Die obere Frequenzgrenze wurde bestmöglich aus den Daten ausgelesen. Sobald die Admittanz nicht mehr einer erkennbaren Steigung folgt wurde die Grenze festgelegt. Abgesehen von Punkt 0 erfolgte die Berechnung stets von 20 Hz bis 270 Hz. An Punkt 0 ist die Datenqualität im unteren Frequenzbereich geringer, weshalb eine untere Grenze von 80 Hz gewählt wurde. Kapitel 3.4 verwendet den Gradienten der Messungen als Vergleichswert. Die Validität der erzeugten Werte und des berechneten Gradienten ist mit Verweis auf die inhaltlichen Schwächen nur bedingt belastbar. Untersuchungen könnten hier anschließen und eine geeignete Methode zur Findung des Gradienten aus Messdaten entwickeln.

Ein weiteres Messergebnis stellt, wie bereits erwähnt, der Verlustfaktor der untersuchten Konstruktion dar. Die Ermittlung jenes Kennwerts erfolgt in einem separaten Programm („MEscope“ von Firma Vibrant) und wurde von Frau Dr. Aoki berechnet sowie zur Verfügung gestellt. Der ermittelte

Verlustfaktor ist frequenzabhängig und mittelt sich auf Werte zwischen 3 und 5 %. Hingewiesen sei auf die deutlichen Unterschiede zwischen materialbedingten Verlustfaktoren (Stahlbeton: 0,005 in Tab. 1 bzw. Möser und Kropp (2010, S. 183)) und messtechnisch ermittelten Werten. Erstere Werte gelten für das Material an sich. Die gemessenen Werte spiegeln jedoch das gesamte System wieder. Dabei spielen Effekte aus der Lagerung und anschließende Bauteile eine entscheidende Rolle. Für möglichst gute Vergleichbarkeit zwischen Messungen und Simulationen wurde ein Verlustfaktor von 5 % in die Simulation übernommen (vgl. Tab 2).

### 3.2 Messung in Prüfstand P12

Während die Stahlbetonplatte aus P9 zur Kalibrierung des Simulationstools und als Grundlage simulativer Parameterstudien dient, werden Messergebnisse aus dem Installationsprüfstand P12 zur Validierung entwickelter approximativer Ansätze herangezogen. Dazu wurden zum einen Daten einer trennenden Bodenplatte verwendet, zum anderen Messdaten an einer eingezogenen Installationswand erzeugt.

#### 3.2.1 Messgegenstand - Installationsprüfstand P12

Der Prüfstand besteht im Prinzip aus zwei übereinanderliegenden Räumen. Beide werden durch eine Installationswand (0,145 m) an gleicher Position getrennt, die mit Kalksandsteinziegeln (0,115 m) und beidseitigem Putz ausgeführt ist. Die Installationswände sind als trennende Bauteile eingezogen und sind nach bekanntem Wissensstand nicht mit den angrenzenden Außenwänden oder den Decken- bzw. Bodenplatten monolithisch verbunden. Die Installationswände weisen eine Dimension von 4,98 m Breite und 3,05 m Höhe auf (vgl. Plan P04 & P05). Die Kalksandsteine verfügen über eine flächenbezogene Masse von  $220 \text{ kg/m}^2$  und folglich eine Rohdichte von  $\sim 1900 \text{ kg/m}^3$ . Das Elastizitätsmodul wurde nach Tabelle 1 (IBP interne Materialdaten) festgelegt. Die trennende Deckenplatte zwischen den beiden Räumen im EG und UG ist als 0,19 m Massivbauplatte in Stahlbeton ausgeführt. Diese besitzt die lichte Auflagerweite von 8,195 m auf 4,98 m. Die bauliche Durchbildung der Auflager der Deckenplatte ist nicht näher bekannt und wird den Schnitten zufolge als monolithische Verbindung in Stahlbeton angenommen. Auch für diesen Prüfstand sind öffentliche Informationen über die Fraunhofer IBP Website einsehbar. Die Materialien, Abmessungen und Auflager wurden institutsintern mit Berücksichtigung aller zur Verfügung stehenden Informationen festgelegt. Abbildung E.3 im Anhang bildet den Schnitt durch den Prüfstand ab.

Neben der Validierung durch Messungen an der Installationswand, bildet ein Messdatensatz einer Duschwanne auf der Stahlbetonplatte von P12 eine zweite Validierungsgrundlage. Die gemessenen Daten liegen als Schalldruckpegelwerte vor und wurden von den Projektverantwortlichen zur Verwendung an den Autor vorliegender Arbeit übergeben. Die Ergebnisse bedurften keiner weiteren Anpassungen und wurden zur Modellanwendung und Visualisierung lediglich von Microsoft Excel in MATLAB übertragen. Weitere Informationen finden sich in später folgendem Kapitel 6. Tabelle 5 listet die für anschließende Simulationen und approximative Admittanzbestimmungen herangezogenen Material- und Plattenparameter. Für beide Situationen wurde der Verlustfaktor nicht eigens bestimmt und deshalb unter Annahme konstruktiver Ähnlichkeiten von P9 übernommen.

Tab. 5: Materialparameter der Bodenplatte und der Installationswand in P12 (Materialdaten IBP intern)

<b>Installationswand im UG</b>		
Kennwert	Eingabewert	Einheit
Kantenlänge (X-Achse)	4,98	[m]
Kantenlänge (Y-Achse)	3,05	[m]
Plattendicke (Z-Achse)	0,115 (0,145 mit Putz)	[m]
Elastizitätsmodul	10,8	[E9 N/m <sup>2</sup> ]
Poissonzahl	0,2	[-]
Dichte	1900	[kg/m <sup>3</sup> ]
Verlustfaktor	0,05	[-]
<b>Stahlbetonplatte zwischen EG und UG</b>		
Kennwert	Eingabewert	Einheit
Kantenlänge (X-Achse)	8,195	[m]
Kantenlänge (Y-Achse)	4,98	[m]
Plattendicke (Z-Achse)	0,19	[m]
Elastizitätsmodul	27,5	[E9 N/m <sup>2</sup> ]
Poissonzahl	0,2	[-]
Dichte	2300	[kg/m <sup>3</sup> ]
Verlustfaktor	0,05	[-]

### 3.2.2 Messaufbau – P12

Die Messdaten der Beispielsituation der Duschanne auf der trennenden Stahlbetonplatte zwischen EG und UG wurden durch das Fraunhofer IBP zur Verfügung gestellt. Detailliertere Informationen zu Messaufbau und Setup liegen nicht vor. Die Daten werden als valide angenommen und nicht weiter diskutiert.

Die Messungen an der Installationswand wurden am 15.02.2023 durch den Autor vorliegender Arbeit unter Mithilfe der Projektverantwortlichen durchgeführt. Der Plan P04 im Anhang zeigt alle aufgenommenen Messpositionen inklusive entsprechender Maßketten. Abbildung 19 visualisiert den unteren Wandabschnitt mit den Messpositionen als Planausschnitt. Für die Messung der Admittanz der Installationswand wurde im Gegensatz zur Bodenplatte in P9 kein Shaker verwendet, sondern ein Impulshammer zur Anregung gewählt. Die beiden Grafiken 20 und 21 zeigen den verwendeten Impulshammer sowie eine schematische Darstellung des Setups zur Messung der Punktdmittanz. Im Anhang finden sich die zugehörigen verfügbaren Datenblätter der Sensoren.

Der verwendete Impulshammer regt die Platte bzw. Wand mit einem transienten Signal an und zeichnet die Kraft mit einem Kraftsensor im Hammerkopf auf. Zur Messung der Punktdmittanz wurden hierzu fünf Positionen in unmittelbarer Nähe zum Beschleunigungssensor angeregt. Die verwendete Messsoftware mittelt anschließend und bildet die Admittanz. Auch hier nehmen die Beschleunigungssensoren nicht direkt die benötigte Schnelle auf. Letztere wird für die Berechnung der Admittanz durch

die Software ermittelt. Im Gegensatz zur Anregung mit dem Shaker ist die Qualität des Signals hierbei entscheidend vom händisch erzeugten Impuls abhängig. Die Qualität der Impulserzeugung kann dazu am Laptop eingesehen werden und die Messung unter Umständen wiederholt werden.

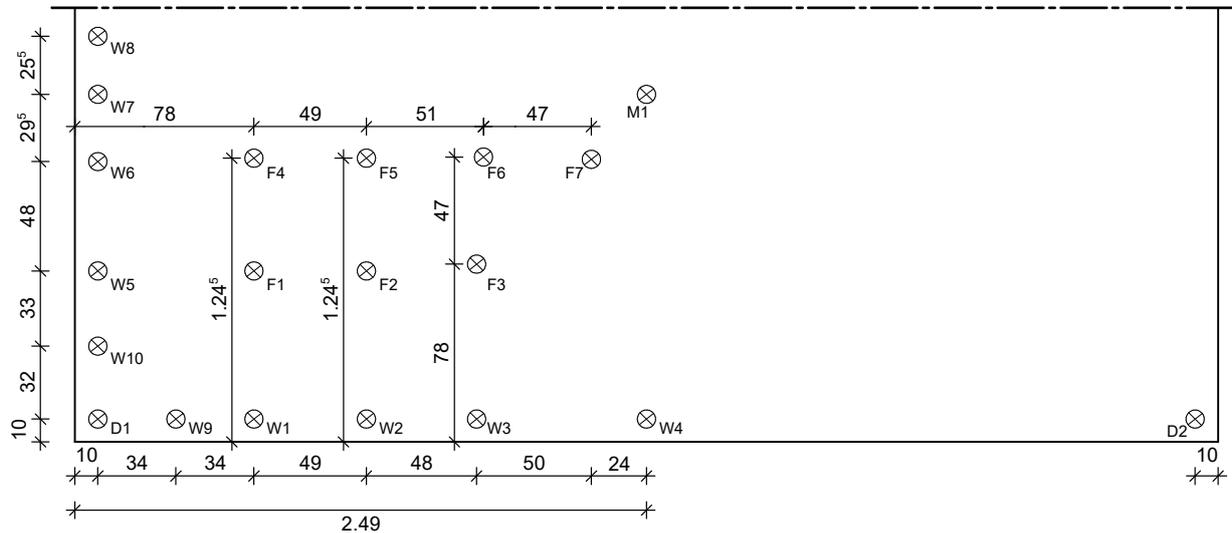


Abb. 19: Planausschnitt der Installationswand von P12 inklusive der Messpositionen



Abb. 20: Beschleunigungssensor sowie Impulshammer zur Admittanzbestimmung der Installationswand in Prüfstand P12

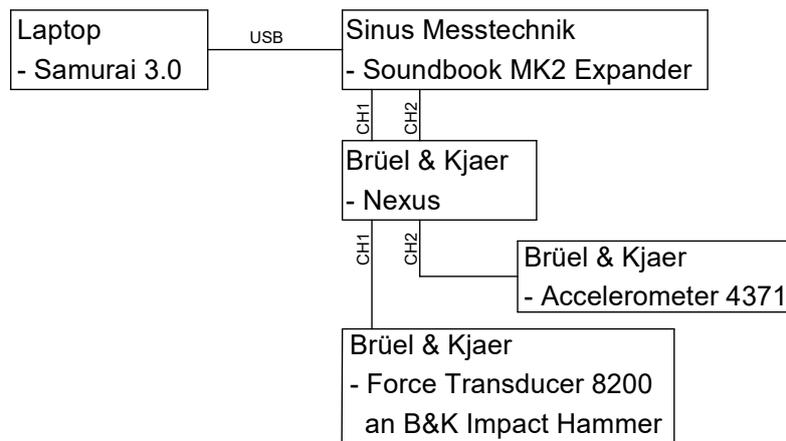


Abb. 21: Messsetup zur Admittanzbestimmung der Installationswand in Prüfstand P12

### 3.2.3 Datenverarbeitung und Ergebnisse – P12

Die Datenauswahl und Verarbeitung erfolgte vergleichbar zu P9 in eigenen MATLAB Skripten. Die Daten wurden eingesehen und auf Plausibilität hin untersucht. Anschließend wurden die gemessenen Eigenfrequenzen bestimmt und zur weiteren Verwendung in MATLAB DATA Dateien (.mat) gespeichert. Aus der Vielzahl an Messpositionen werden für die exemplarische Anwendung der Admittanzmodelle in Kapitel 6 lediglich vier Datensätze benötigt. Die Plattenmitte M1, die Feldposition F6 sowie die Randpositionen D1 und W4. Die Messdaten der übrigen Positionen werden digital vorgehalten und stehen für anknüpfende Untersuchungen zur Verfügung. Exemplarisch zeigt folgende Grafik die gemessenen Admittanzdaten an Position F6 (Abb. 22). Die übrigen Kurven sind im Anhang eingefügt (Abb. E.12 - E.14).

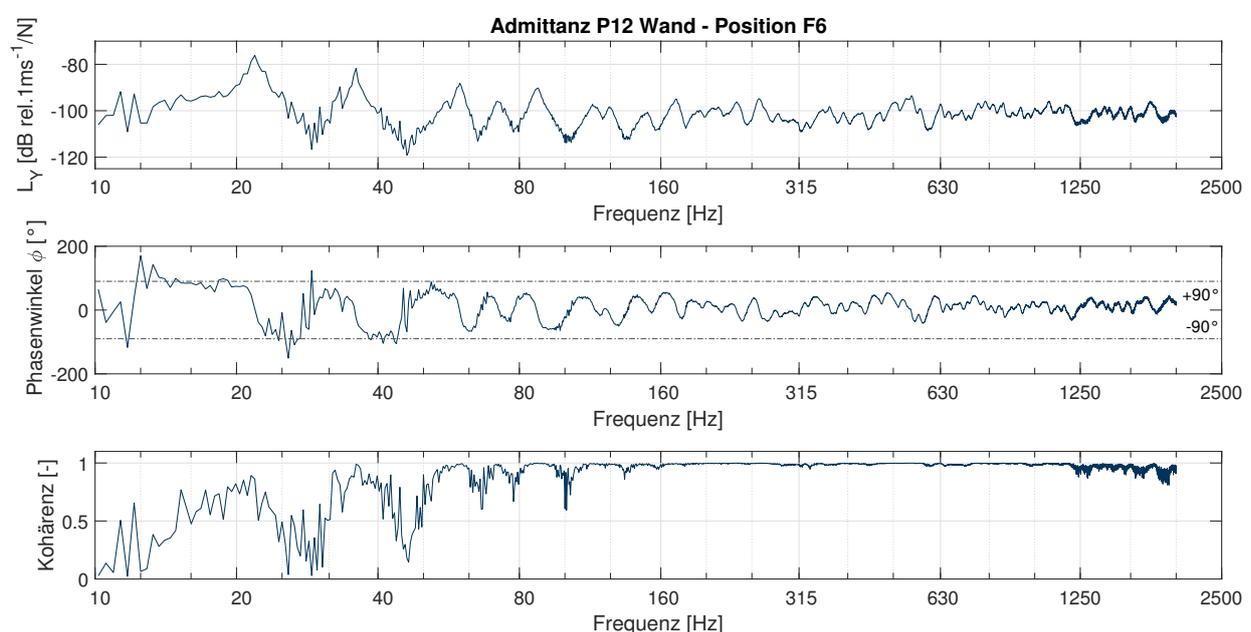


Abb. 22: Position F6 - Installationswand P12 - Messergebnisse: Admittanzpegel, Phase und Kohärenz

Deutlich zu erkennen ist die zu den Messungen in P9 (Shaker Anregung) verglichen geringere Qualität im tieffrequenten Bereich. In diesem überschreitet die Phase den theoretischen Bereich von  $+90^\circ$  und  $-90^\circ$ . Besonders die auflagernahen Positionen D1 und W4 zeigen derartige Abweichungen auf. Bei höheren Frequenzen fällt der Phasenwinkel wieder in den erwarteten Bereich. Die tieffrequenten Problematiken werden durch die Verläufe der Kohärenz zusätzlich unterstrichen. Der Admittanzpegel an Position F6 (Abb. 22) zeigt trotz dieser Messungenauigkeiten einen plattentypischen Verlauf. Die Kurve ist verglichen zur Anregung mit Vibration (Shaker) jedoch weniger glatt.

## 3.3 Simulation

Folgend wird zuerst das verwendete Simulationstool vorgestellt. Anschließend wird auf die Wahl der Simulationspositionen auf der Standardplatte P9 eingegangen.

### 3.3.1 Simulationstool

Zur Erzeugung simulierten Daten wurde das MATLAB Programm „Mobility\_ matlab.m“ verwendet. Dieses wurde von Frau Dr. Aoki (Fraunhofer IBP) entwickelt und implementiert. Das Finite Elemente (FE) Programm erhält die relevanten Eingangsparameter über die txt-Datei „parameter.txt“. Tabelle 6 enthält alle Eingabeparameter sowie entscheidende Kommentare. Exemplarische Parameter findet sich im Anhang unter Abbildung E.15. Die dort eingegebenen Parameter werden anschließend in MATLAB importiert und mit Hilfe einer Vielzahl von Unterprogrammen und Funktionen weiterverarbeitet. Als Ausgabe erzeugt „Mobility\_ matlab.m“ neben einigen voreingestellten Grafiken einen Ordner mit Informationen zur Simulation. Darunter die Input Parameter, Listen der Eigenfrequenz mit und ohne Berücksichtigung der Dämpfung, die Punktadmittanz als Tabelle sowie eine „log.txt“ Datei. Letztere enthält Informationen zu Speicherort, Plattenparametern, Frequenzparametern, Simulationszeit sowie Finite Elemente Netz. Als weitere Ausgabe werden alle berechneten Daten als MATLAB-Data Datei gespeichert. Diese Dateien waren besonders für die Datenverarbeitung im Rahmen vorliegender Arbeit relevant. Das verwendete Programm verfügt nicht über eine grafische Benutzeroberfläche und wird ausschließlich über die MATLAB Oberfläche sowie den MATLAB Editor eingesehen und bedient. Außerdem ist die Anwendungssprache Englisch. Daher werden im weiteren Verlauf direkte Bezüge zu Programmparametern in Englisch bzw. im Originalwortlaut wiedergegeben.

Ohne an dieser Stelle detailliert die internen Berechnungsabläufe aufzuzeigen, bleibt als wichtiger Hinweis zu erwähnen, dass das Programm nicht exakt am gewünschten Auswertungspunkt simuliert. Der Programmablauf legt über die zu untersuchende Platte ein Liniennetz als Grundlage der FE Methode (FEM). Eine Optimierungsschleife findet anschließend den nächstgelegenen FE-Netzknoten und wertet an dieser Stelle aus. Die jeweilige Abweichung kann in der log-Ausgabedatei eingesehen werden. Negativ aufgefallen sind diese Abweichungen lediglich bei Auswertungspunkten nahe der Auflager. Befindet sich der nächste FE-Netzknoten zum Auswertungspunkt auf dem Auflager ( $x$  und/oder  $y$  gleich 0% oder 100%) waren die Ergebnisse unter gegebenen Umständen unbrauchbar. Derartige Fehler sind, falls aufgetreten, als ungültig gekennzeichnet. Genannte Diskrepanzen wurden jedoch während der Laufzeit der vorliegenden Arbeit durch ein Programmupdate (15.02.23) behoben. Seit dem Update werden an der exakten Ausweisungsposition zwei zusätzliche FE-Linien ( $x$  und  $y$ ) eingefügt und der Fehler damit vermieden. Da das Update zu fortgeschrittenem Zeitpunkt durchgeführt wurde, liegen folglich einige Datensätze mit und spätere Daten ohne erwähnten Positionsfehler vor. Von einer systematischen Berücksichtigung der Fehler und Dokumentation der vorhandenen Abweichungen wurde abgesehen.

Das erwähnte Simulationstool wurde funktionstüchtig an den Autor vorliegender schriftlicher Ausführung als Arbeitsgrundlage übergeben. Neben einigen wenig relevanten Änderungen bzw. Erweiterungen wurden im Laufe der Arbeit vor allem der Inhalt der Ausgabedateien auf das Nötigste reduziert, um sowohl die Speichergröße als auch die Verarbeitungszeit zu minimieren. Die internen Berechnungsabläufe wurden indes nicht verändert.

Kernaspekt der durchgeführten Untersuchungen sind die Zusammenhänge zwischen Plattenparametern und resultierender Admittanz bzw. resultierendem Gradienten  $a$ . Als Referenzwert des Gradienten wird hierbei stets ein numerisch ermittelter Gradient herangezogen. Dieser entspricht der Steigung der Admittanz bei  $\omega \rightarrow 0$ . Die Wahl des numerischer Gradient als Zielwert erscheint irreführend,

gilt aber im Rahmen der durchgeführten Untersuchungen als der genaueste Wert. Berechnet wird dieser als Steigung der Admittanz zwischen dem ersten numerischen Auswertungspunkt bei  $\omega = 0$  rad/s und dem zweiten numerischen Auswertungspunkt (numerische Samplingposition) bei  $\omega_{min}$ . Unter der Annahme  $\tilde{Y}(\omega = 0) = 0$  beschreibt Gleichung 41 die Steigung für  $\omega \rightarrow 0$  mathematisch.

$$a = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{d\tilde{Y}(\omega)}{d\omega} \approx \frac{\tilde{Y}(\omega_{min}) - \tilde{Y}(0)}{\omega_{min} - 0} = \frac{\tilde{Y}(\omega_{min})}{\omega_{min}} \quad \text{Gl. 41}$$

Unter der Voraussetzung, dass die erste Eigenfrequenz größer 0 ist ( $\omega_1 > 0$ ) und der Verlustfaktor vernachlässigt wird, ergibt sich die Admittanz zu einer positiven imaginären Zahl. Die Implementierung des numerischen Gradienten (*gradNum*) erfolgte anschließend nach Gleichung 42.

$$gradNum = \text{Im} \left[ \frac{\tilde{Y}(\omega_{min})}{\omega_{min}} \right] = \frac{|\tilde{Y}(\omega_{min})|}{\omega_{min}} \quad \text{Gl. 42}$$

Zusätzlich wird die Reduzierung auf den Imaginärteil unterstrichen durch die Tatsache, dass der reale Anteil respektive die Dämpfung einen konstanten Beitrag zur Admittanz leistet und somit die Steigung nicht beeinflusst (vgl. Kapitel 2 der Theorie).

### 3.3.2 Simulationspositionen auf Platte P9

Grundlage der getätigten Untersuchungen ist eine einheitliche Darstellungsweise. Für die Betrachtung der Gradienten an unterschiedlichen Stellen wurden zu Auswertungszwecken Achsen definiert. Diese spannen jeweils vom Mittelpunkt der Platte zu den bereits bekannten Messpositionen 0, 1w, 2w, 3w und 4w. Zusätzlich wurden weitere Achsen entsprechend den Symmetrieachsen eingeführt. Plan P02 im Anhang und Abbildung 23 zeigen sowohl die definierten Achsen als auch sämtliche Simulationspunkte. Diese definierten Achsen entsprechen bei Grafiken mit positionellem Bezug der x-Achse und decken stets einen Wertebereich von 0 % bis 50 % ab. Dieser Wertebereich entspricht der Länge der jeweils betrachteten Achse vom Auflager bis zur Plattenmitte. Die Schaffung einer derartigen dimensionslosen Länge ermöglicht die Darstellung einer x-y-Position auf nur eine positionelle Variable und erlaubt zusätzlich den Vergleich verschiedener Achsen mit grundsätzlich unterschiedlichen Längen. 0 % entspricht bei dieser Konvention der Plattenkante (Auflager) und 50 % der Plattenmitte.

Die Achse I als Plattendiagonale unterliegt einer geringen Abweichung von der tatsächlichen Diagonalen. Grund ist die Orientierung an den getätigten Messungen und eine gewünschte Überlagerung der Mess- sowie Simulationspositionen. Die Messpositionen wurden über die Diagonale einschließlich der Vorsatzschale eingemessen und nicht auf die tatsächliche Plattendiagonale bezogen. Dies führt zu einem positionellen Versatz zwischen der Plattendiagonale und den Messpositionen.

Abbildung 23 visualisiert mehr Auswertungspositionen als im Rahmen vorliegender schriftlicher Ausführung behandelt werden. Grund ist eine eindeutige Zuordnung aller getätigten Simulationen (Daten liegen digital vor). Tabelle D.1 im Anhang listet die Koordinaten aller gezeigten Simulationspositionen. Zusätzlich zu den radialen Achsen I bis VII sind zur x-Achse parallele Achsen A - F eingeführt. Diese sind allerdings von geringerer Relevanz und unterstützen vorrangig die Kartierung der Auswertungspunkte.

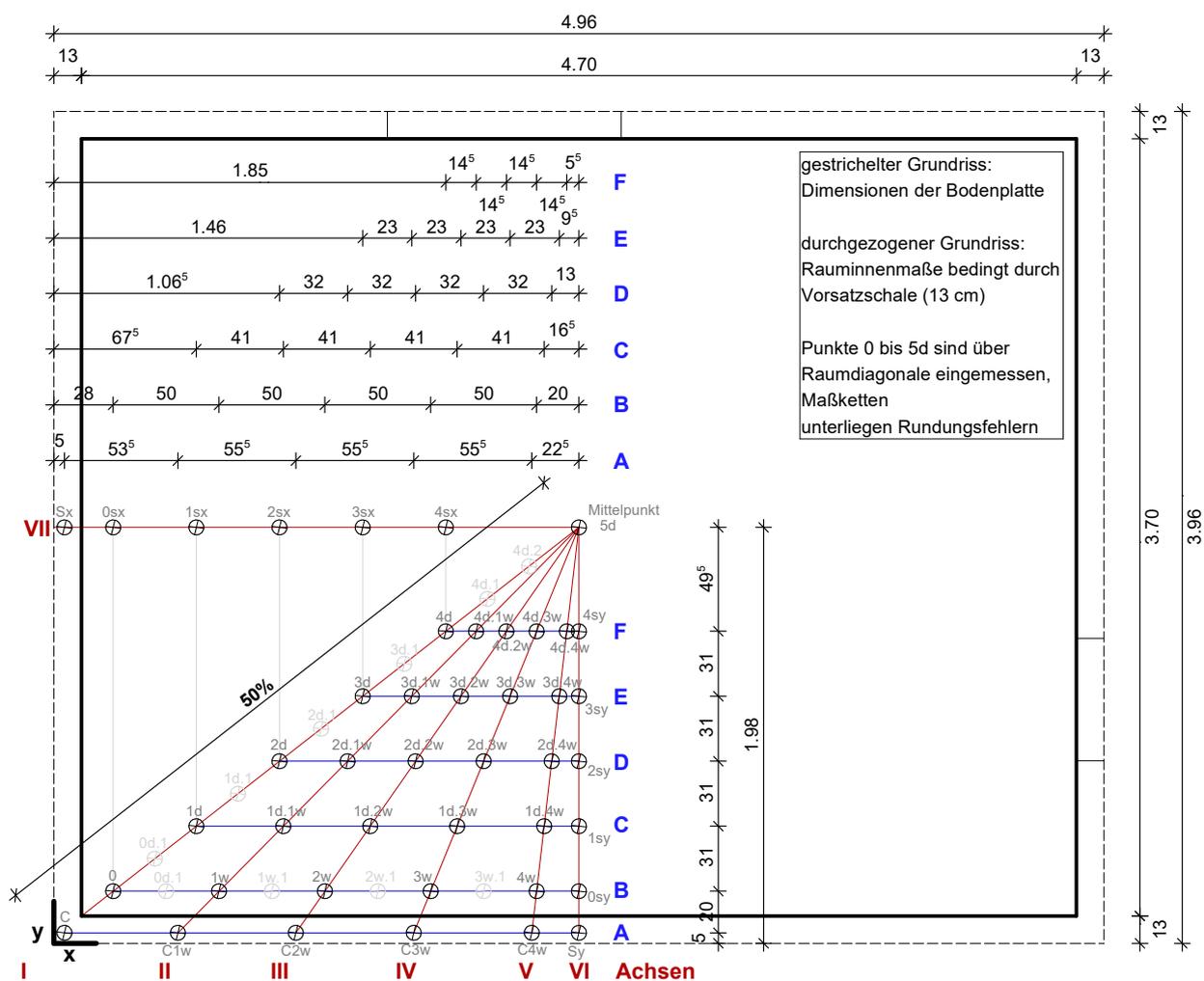


Abb. 23: Simulationspositionen auf Platte P9

Abbildung 24 zeigt den Grundriss einer Platte mit den Kantenlängen  $l_x$  und  $l_y$  sowie allseits gleicher Lagerung. Die grün eingefärbte Fläche entspricht dem untersuchten Bereich. Der blaue Bereich ist, ohne detaillierte Daten zu nennen, identisch zu grünem Bereich. Die grau gefärbte Plattenfläche weist im Sonderfall einer quadratischen Platte ( $l_x = l_y$ ) ebenfalls identische Gradientenverteilungen auf. Für den allgemeinen Fall einer rechteckigen, nicht quadratischen Platte wird mutmaßlich von einem qualitativ gleichen Gradientenverhalten ausgegangen, wenn auch die örtliche Verteilung differiert. Nachweisende Simulationsergebnisse stehen allerdings aus. Die Art der Lagerung ist dabei unerheblich, sofern gleiche Bedingungen allseitig vorliegen. Diese Zusammenhänge und Annahmen begründen die Wahl der Auswertungspositionen und die Beschränkung auf Punkte im grünen Bereich.

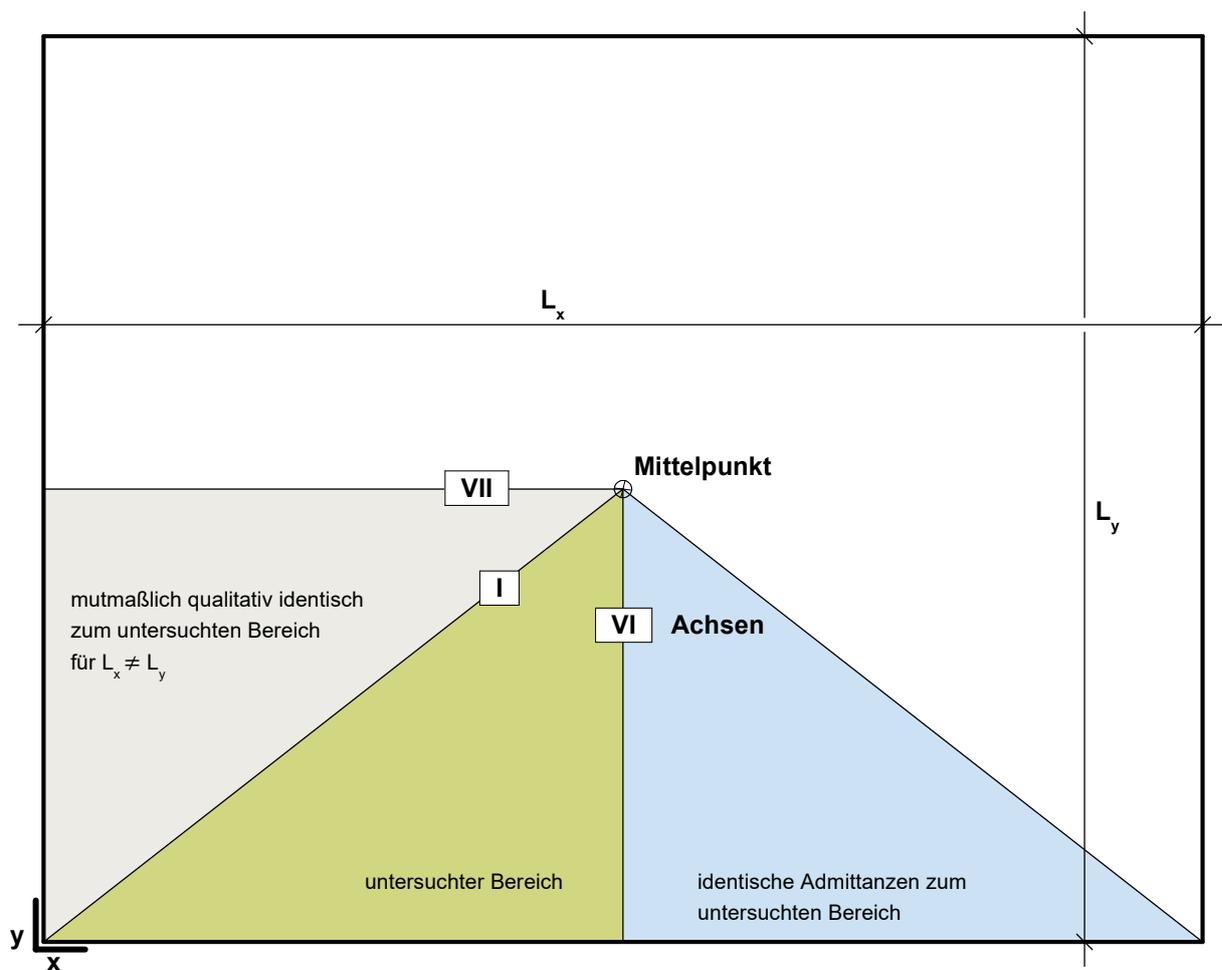


Abb. 24: Symmetrieeigenschaften bezüglich Admittanz und Gradient für Platten

Tab. 6: Eingabe Parameter für das verwendete MATLAB Tool „Mobility\_ matlab.m“ (Aoki, 2009)

Parameter in parameter.txt	Erläuterung
Outputdir	Speicherort der Ausgabedateien angegeben als Pfad
OutputFolder	Name des Ausgabeordners; automatisiert wird zusätzlich ein Zeitstempel angehängt
lx_[m]	Plattendimension in x Richtung
ly_[m]	Plattendimension in y Richtung
lz_[m]	Plattendimension in z Richtung/Dicke der Platte
youngX_[N/m <sup>2</sup> ]	Elastizitätsmodul in N/m <sup>2</sup>
poisson	Poissonzahl
density_[kg/m <sup>3</sup> ]	Dichte des Materials in kg/m <sup>3</sup>
loss	Verlustfaktor
boundary	idealisierte Auflagerbedingung: 1 - FFFF; 2 - SSSS; 3 - CCCC <sup>1</sup>
linearStiffnessX0_[N/m <sup>2</sup> ]	lineare Steifigkeit entlang der x-Achse (y = 0 %)
linearStiffnessX1_[N/m <sup>2</sup> ]	lineare Steifigkeit entlang der x-Achse (y = 100 %)
linearStiffnessY0_[N/m <sup>2</sup> ]	lineare Steifigkeit entlang der y-Achse (x = 0 %)
linearStiffnessY1_[N/m <sup>2</sup> ]	lineare Steifigkeit entlang der y-Achse (x = 100 %)
linearStiffnessDampingX0_[N/m <sup>2</sup> ]	lineare Dämpfung entlang der x-Achse (y = 0 %)
linearStiffnessDampingX1_[N/m <sup>2</sup> ]	...
linearStiffnessDampingY0_[N/m <sup>2</sup> ]	...
linearStiffnessDampingY1_[N/m <sup>2</sup> ]	...
rotateStiffnessX0_[N]	Rotationssteifigkeit entlang der x-Achse (y = 0 %)
rotateStiffnessX1_[N]	...
rotateStiffnessY0_[N]	...
rotateStiffnessY1_[N]	...
rotateStiffnessDampingX0_[N]	Rotationsdämpfung entlang der x-Achse (y = 0 %)
rotateStiffnessDampingX1_[N]	...
rotateStiffnessDampingY0_[N]	...
rotateStiffnessDampingY1_[N]	...
fmin_[Hz]	unterer Frequenzwert der Auswertung (unverändert bei 10 Hz im Rahmen dieser Arbeit)
fmax_[Hz]	oberer Frequenzwert der Auswertung; zusätzlicher Einfluss auf die FE-Netzweite (unverändert bei 2000 Hz im Rahmen dieser Arbeit)
nBand	Anzahl an Auswertungspositionen pro Oktave (unverändert bei 96 im Rahmen dieser Arbeit)
posX_[%]	Auswertungsposition in % (Bezugswert: Kantenlänge lx)
posY_[%]	Auswertungsposition in % (Bezugswert: Kantenlänge ly)
Output_Sound	zusätzliche Auswertung der Schallabstrahlung (keine Verwendung im Rahmen dieser Arbeit)

<sup>1</sup> FFFF ... Platte allseits frei gelagert (eng. free); SSSS ... Platte allseits gelenkig gelagert (eng. simple); CCCC ... Platte allseits eingespannt gelagert (eng. clamped)

### 3.4 Experimentelle Kalibrierung der numerischen Simulationen

Folgende Gliederungspunkte beschreiben die Methode, die Ergebnisse, die Diskussion und die Interpretation einer Kalibrierung sowie Validierung des Simulationstools anhand der vorgestellten Messergebnisse. Somit soll sichergestellt werden, dass das verwendete Modell plausible Ergebnisse liefert und als Arbeitsgrundlage zur Findung approximativer Gradientenmodelle herangezogen werden kann.

#### 3.4.1 Methode und Ergebnisse

In einem ersten Untersuchungsschritt wurde versucht die Eingabeparameter der simulierten Platte derart anzupassen, dass eine suffiziente Übereinstimmung zu den gemessenen Daten entsteht. Diese Anpassung sollte zum einen dazu dienen erste Einblicke in die Zusammenhänge zwischen Eingabeparameter und resultierende Admittanz zu bekommen, zum anderen um das Simulationstool auf Plausibilität hin zu überprüfen. Nach Recherche sowie Einsicht aktueller Literatur und Abwägung der hier benötigten Ergebnisse wurde eine vereinfachte Modellkalibrierung mithilfe MATLAB interner Funktionen gewählt. Für vertiefte nachfolgende Studien könnten beispielsweise Pabst und Hagedorn (1995), Zhu und Huang (1995), Sanayei et al. (1999), Wang (2014), Kaito et al. (2018), Qiao und Rahmatalla (2019) und Huňady et al. (2021) eine fachliche Basis bilden.

Um die simulativ erstellten Ergebnisse an die Messungen anzugleichen, wird mithilfe der MATLAB Funktion `fminsearch` die Differenz zwischen den jeweiligen gemessenen und simulierten Eigenfrequenzen minimiert. Diese Funktion ist abhängig von einem definierten Startwert und der zu minimierenden Fehlerfunktion. Letztere ist durch

$$\text{Fehler} = \sum \left| 1 - \frac{f_{n,\text{Messung}}}{f_{n,\text{Simulation}}} \right| \quad \text{Gl. 43}$$

gegeben. Es wird zwar die Differenz der Eigenfrequenzen minimiert, jedoch werden diese nicht direkt iterativ variiert. Die natürlichen Frequenzen  $f_{n,\text{Simulation}}$  sind von den Auflagerbedingungen der Platte abhängig. Eine vollständige Iteration verändert somit die Auflagerbedingungen, berechnet die Eigenfrequenz und vergleicht diese schließlich mit den Ergebnissen aus der Messung.

Als Eingangswerte fungieren die ersten drei Eigenfrequenzen aus Messung sowie Simulation. Derartige Beschränkung wurde auf Grund von trial-and-error Erfahrungen und den Kenntnissen bezüglich der Eigenfrequenzfindung aus Messdaten festgelegt (vgl. hierzu Gliederungspunkt 3.1.3 und Abb. 17). Die Verwendung verschiedener Eigenfrequenzen sowie variierender Anzahl dieser zeigte großen Einfluss auf die Robustheit der Optimierung. Folglich wurde nur bei Verwendung der ersten drei natürlichen Frequenzen ein plausibles lokales Minimum der Frequenzdifferenz gefunden. Gleiches Phänomen konnte bei variierenden Startwerten der Auflagersteifigkeiten beobachtet werden. Hierbei stellten sich realistische Erfahrungswerte bzw. überschlägige Berechnung (Gliederungspunkt A im Anhang) als am robustesten heraus. Variiert wurde für die Kalibrierung lediglich die lineare Steifigkeit sowie die Rotationssteifigkeit. Den Limitationen vorliegender Arbeit folgend, wurde ebenfalls festgelegt, dass alle Auflager identische Steifigkeitswerte (allseitig gleich gelagerte Platte) aufweisen. Die Optimierung konnte während der Laufzeit über automatische Ausgabeplots verfolgt werden. Es wurde im Rahmen getätigter Untersuchungen auf ein klar definiertes Abbruchkriterium verzichtet, da festgestellt

werden konnte wann sich die Optimierung einpendelt und zusätzlich die Genauigkeit die Steifigkeiten einsichtig war.

Die Dämpfungsparameter der Auflagersituation wurden im Rahmen getätigter Untersuchungen nicht numerisch kalibriert. Grund hierfür war vorrangig der unverhältnismäßige Aufwand einer Implementierung der Kalibrierung für hier gewünschte Einsichten. Die Dämpfung nimmt Einfluss auf den realen Anteil der Admittanz (vgl. Kapitel der Theorie) und ist folglich besonders im Resonanz- und Antiresonanzfall erkennbar. Da die Spitzenwerte der Admittanz aufgrund des Samplings gemessener und simulierter Daten mit großer Wahrscheinlichkeit nicht korrekt in ihrer Amplitude abgebildet sind, sollten deren Werte nicht zur Kalibrierung herangezogen werden. Im Rahmen vorliegender Untersuchungen wurde die Dämpfung nach trial-and-error Prinzip manuell angepasst und auf Plausibilität überprüft (überschlägige Amplitudendeckung). Den initialen Limitationen der Arbeit folgend ist keine vertikale Bewegung der Auflager möglich. Folglich hat auch eine vertikale bzw. lineare Dämpfung keinen Einfluss auf das dynamische Geschehen. Demnach beträgt nur die Dämpfung der Rotation einen Wert größer Null.

Tabelle 7 listet die Auflagersteifigkeiten bei Abbruch der Kalibrierung. Abbildung 25 vergleicht gemessene Admittanzpegel mit simulierten Ergebnissen der kalibrierten Randbedingungen. Die gezeigten Steifigkeiten gelten dabei allseitig. Hinzuweisen ist auf die hohe Genauigkeit der kalibrierten Steifigkeiten. Vor allem mit Verweis auf anschließenden Gliederungspunkt 3.5 suggerieren die kalibrierten Werte eine unrealistische und unverhältnismäßige Genauigkeit. Derart hohe Genauigkeit wird hier lediglich angegeben, da zum Zeitpunkt der Kalibrierung die Sensitivität der Admittanz bezüglich der Randbedingungen keineswegs bekannt war und eine möglichst hohe Genauigkeit zur weiteren Simulation herangezogen werden sollte. Darüber hinaus zeigen die Daten die Genauigkeit beim Zeitpunkt des Schleifenabbruchs bei der durchgeführten Optimierung. Für die weitere Verwendung werden diese Auflagersteifigkeiten in gerundeter Form angegeben. Nach erfolgter Kalibrierung wurden an weiteren Messpositionen Simulationen zur Validierung durchgeführt. Abbildung 26 und 27 zeigen jene Ergebnisse an Messposition 0 sowie 1w. Ergebnisse zu den Positionen 3w und 5d finden sich im Anhang E.

Tab. 7: Auflagerbedingungen nach erfolgreicher Kalibrierung für Platte P9

Parameter	Wert aus Kalibrierung
lineare Steifigkeit	$5818351515,6069 \text{ N/m}^2 \approx 5,82 \text{ GN/m}^2$
lineare Dämpfung	$0 \text{ N/m}^2$
Rotationssteifigkeit	$3802705,828 \text{ N} \approx 3,80 \text{ MN}$
Rotationsdämpfung	$450000 \text{ N}$

Als ein weiteres Werkzeug, Simulationsdaten mit Messungen zu validieren, werden die in Gliederungspunkt 3.1.3 ermittelten Gradienten herangezogen. Die Abbildungen 28 und 29 zeigen für die zuvor herangezogenen Positionen 0 und 1w die mittels Regression ermittelten Gradienten sowie die jeweiligen numerischen Gradienten. Zur grafischen Einordnung sind zusätzlich die gemessenen Admittanzen dargestellt. Abbildungen zu den Positionen 1d, 2w, 3w und 4w finden sich im Anhang (Abb. E.18 bis E.21).

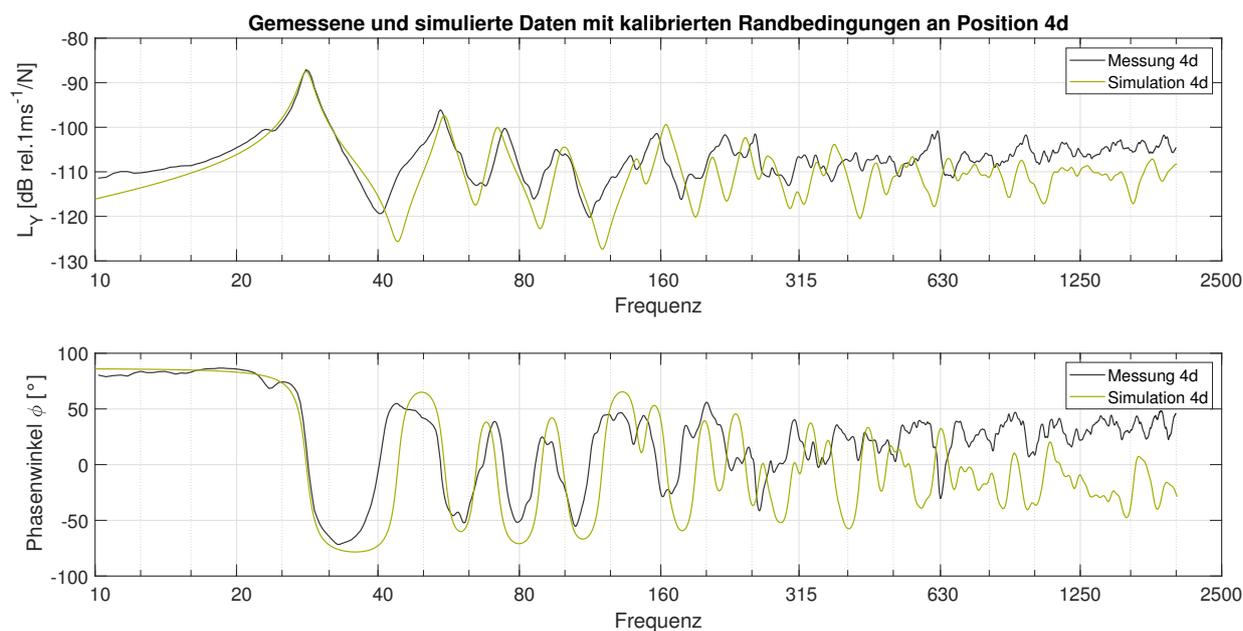


Abb. 25: Position 4d: Messung sowie Simulation mit kalibrierten Bedingungen (Kalibrierung)

### 3.4.2 Diskussion der Ergebnisse von Kalibrierung und Validierung

In Abbildung 25 ist eine deutliche Übereinstimmung der Simulation mit den Messwerten an Position 4d zu erkennen. Besonders an den herangezogenen ersten drei Eigenfrequenzen ist die Deckung hoch. Auch der folgende Verlauf bis etwa 315 Hz lässt Übereinstimmungen erkennen. Bei höheren Frequenzen sind die Resonanzen weniger deutlich separiert und die Amplitudendeckung nimmt geringfügig ab. Gründe für diese Differenzen sind nicht mit Sicherheit feststellbar, werden aber in Einflüssen durch den Shaker vermutet. Auffällig sind die Differenzen der Antiresonanzen sowohl in Bezug auf die Frequenz als auch auf die Amplitude. Die hohen Übereinstimmungen bei Resonanzen und die Verschiebungen bei Antiresonanzen lassen sich zusätzlich im Plot der Phase auswerten. Die Nulldurchgänge von positiv nach negativ (Resonanz) decken sich zwischen Messung und Simulation. Die komplementären Nulldurchgänge von negativ nach positiv (Antiresonanz) zeigen die bereits beschriebenen Diskrepanzen. Mit Verweis auf das Kapitel der Theorie könnten Einflüsse des Nahfelds eine Rolle spielen. Nähere Zusammenhänge sollten bei weiterführenden Untersuchungen fokussiert werden. Mit diesen Ergebnissen und nach Erfahrungsaustausch mit den Betreuenden können die Ergebnisse der Kalibrierung als plausibel und für den getätigten Aufwand als akzeptabel angenommen werden.

Verglichen zu den weiteren Validierungspositionen fällt Position 0 mit der größten Differenz auf (Abb. 26). Im tieffrequenten Bereich unter 30 Hz sind messbedingte Fehler deutlich sichtbar. Mit Hinweis auf die Werte der Kohärenz (vgl. Abb. E.4) und den Messbereich der Messkette sind diese Abweichungen jedoch zu erwarten. Den Verläufen der Admittanz sind prinzipielle Übereinstimmung anzusehen, gleichwohl eine globale Amplitudenverschiebung von rund 5 dB zu erkennen ist. Abbildung 28 belegt diese Differenz. So tritt zwischen den Gradienten aus Messung sowie Simulation eine vergleichbare Diskrepanz auf. Der Grund für derartige Abweichungen ist nicht mit Sicherheit bekannt.

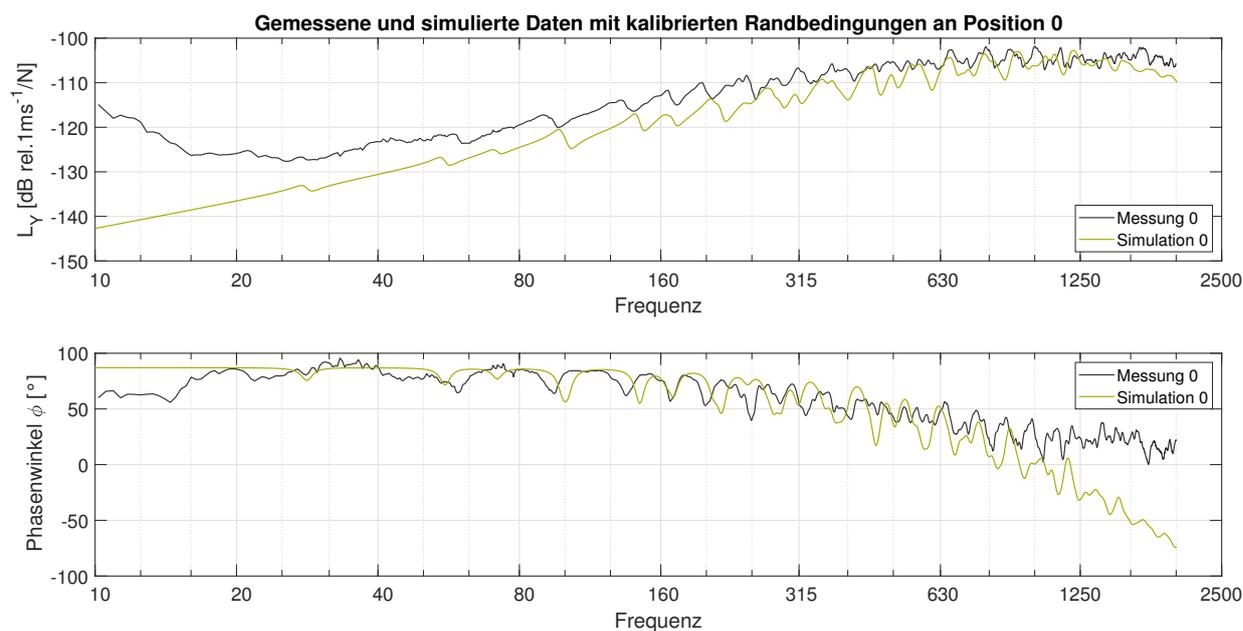


Abb. 26: Position 0: Messung sowie Simulation mit kalibrierten Bedingungen (Validierung)

Zu erwarten sind unterschätzte Einflüsse aus den Lagerbedingungen, deren Einfluss mit geringerem Auflagerabstand zunimmt und in Eckpositionen maximal ist.

Die Ergebnisse an Position 1w werden als Positivbeispiel der Validierung mit vergleichsweise hoher Übereinstimmung vorgestellt. Auch hier ist eine deutliche Ähnlichkeit zwischen beiden Datenkurven feststellbar. Besonders der Vergleich der Gradienten unterstützt die Beobachtung hoher Qualität. Die Berücksichtigung der Ergebnisse an weiteren Positionen (siehe Abb. E.16 - E.21 im Anhang) vervollständigen genannte Beobachtungen.

Abschließend kann mit Blick auf die Ergebnisse festgestellt werden, dass die Simulation im Wesentlichen plausible Ergebnisse bei realistischen Eingangsparametern liefert. Da die Findung eines approximativen Modells an sich unabhängig von spezifischen Plattenparametern ist, genügt als Ergebnis der Kalibrierung und Validierung, dass simulierte Ergebnisse in realistischen Bereichen liegen. Folglich wird davon ausgegangen, dass das Simulationstool geeignet ist, die Zusammenhänge der Admittanz ausreichend korrekt darzustellen.

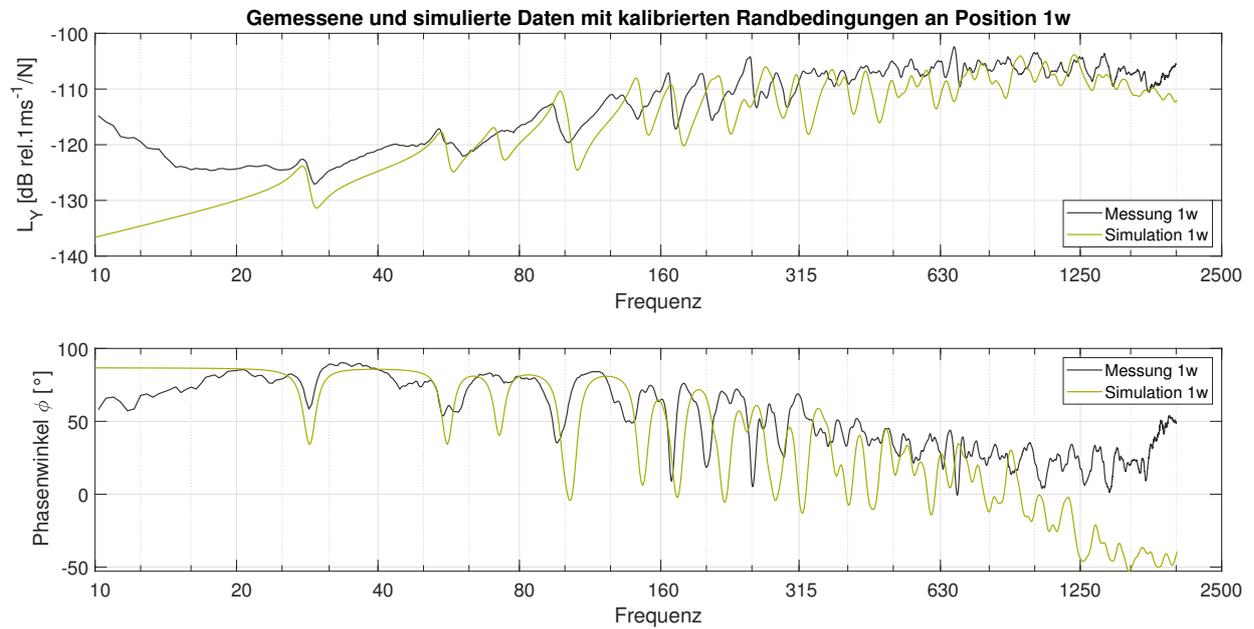


Abb. 27: Position 1w: Messung sowie Simulation mit kalibrierten Bedingungen (Validierung)

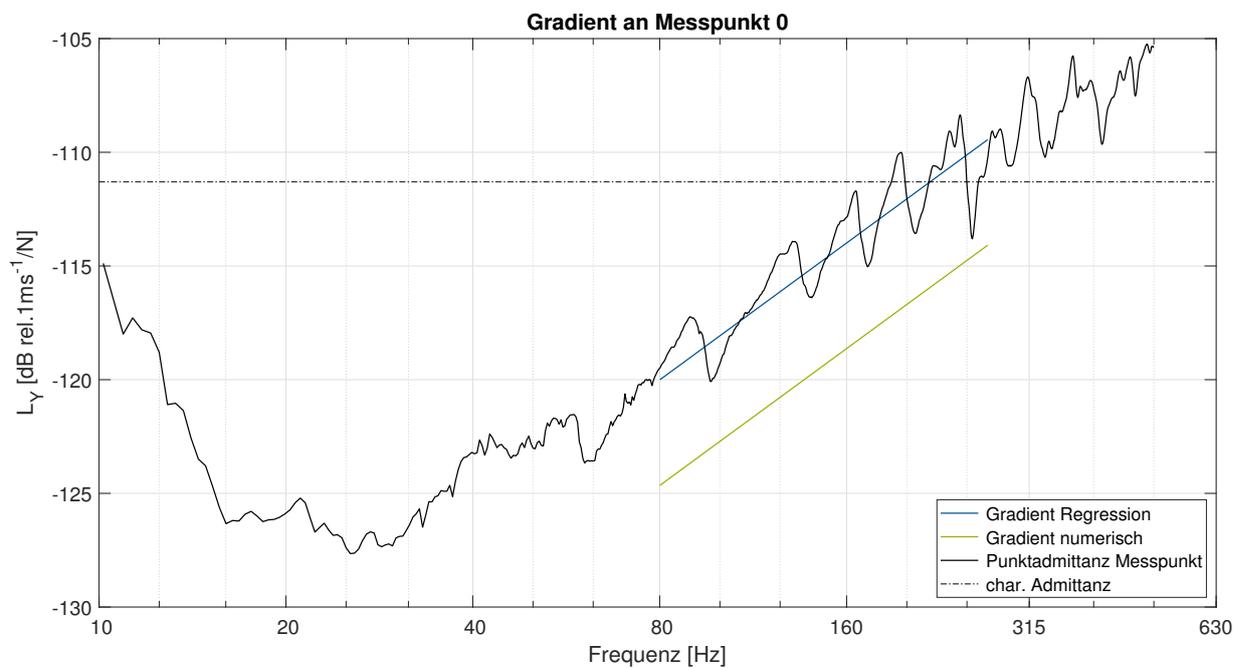


Abb. 28: Position 0: simulierte sowie aus Messung ermittelte Gradienten (Validierung)

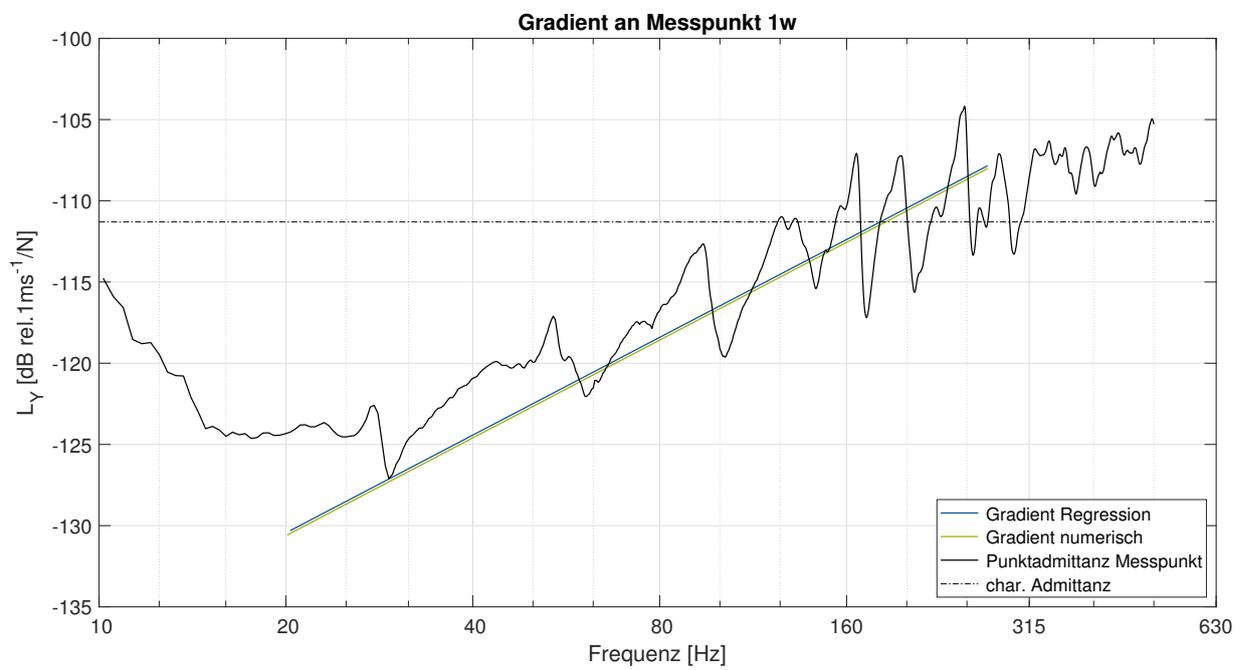


Abb. 29: Position 1w: simulierte sowie aus Messung ermittelte Gradienten (Validierung)

## 3.5 Sensitivitätsanalyse der Modellparameter bezüglich Admittanz und Gradient

### 3.5.1 Methode und Ergebnisse

Auf dem Weg zur Findung robuster und approximativer Modelle der Admittanzgradienten wurden die Einflüsse der Material- und Lagerungsparameter auf die Admittanz untersucht. Dazu wurde zuerst eine verkürzte Sensitivitätsanalyse, ein sogenanntes Factor Screening, durchgeführt. Mittels Factor Screening wird der qualitative Einfluss von Eingangsparametern auf eine Ausgangsvariable erörtert. Im Vordergrund steht hierbei eine überschlägige Findung signifikanter und nicht bzw. weniger signifikanter Einflussgrößen. (Siebertz et al., 2010, S. 274)

Für das Factor Screening wurde die Platte P9 als Standard festgelegt und mit einer variierten Platte verglichen. Alterniert wurde dazu stets nur eine Eingangsvariabel. Tabelle 8 listet hierfür verwendeten Parameter. Die aufgeprägten Parametervariationen wurden so gewählt, dass bautechnisch relevante Bereiche abgedeckt werden. Beispielsweise liegt der gewählte Standardwert der Platte P9 (IBP intern vgl. Tab 2) mit einem Elastizitätsmodul von  $27,5 \text{ GN/m}^2$  im unteren Bereich üblicher praxisrelevanter Normalbetone (Goris, 2016, S. 5.32). Folglich wurden nur höhere Werte für die Sensitivitätsanalyse gewählt. Für die Plattendicke wurde ein baulicher Ausführungsfehler von 1 cm angenommen und von einem zusätzlichen pauschalen Messfehler von ebenfalls einem Zentimeter ausgegangen. Der untersuchte Bereich der Rohdichte wurde nach gleichem Schema definiert. Die linearen Steifigkeiten und Rotationssteifigkeiten wurde zusammengefasst und stets gleichzeitig um einen prozentualen Fehler verändert. Da Auflagersteifigkeiten prinzipiell einen Bereich von 0 (ideal gelenkig) bis  $\infty$  (ideal eingespannt) abdecken, wurde hier die aufgeprägte Variation der Eingangsdaten iterativ erstellt bis eine deutliche Abweichung in den Ergebnissen festzustellen war.

Die Abbildungen 30 bis 33 zeigen die Admittanzen in Bode-Diagrammen an Position 4d ausgewertet. Abbildung E.22 im Anhang zeigt zusätzlich die Ergebnisse an Position 2d. Da auf positionelle Einflüsse im weiteren Verlauf der vorliegenden Arbeit noch detailliert eingegangen wird, werden diese Ergebnisse verkürzt vorgestellt. Die Abweichungen der ersten Eigenfrequenz wurden bei variierenden Eingangsparameter ausgewertet und in Tabelle 9 dargestellt.  $\Delta f_{n,1}$  quantifiziert den betragsmäßigen Abstand in Hz zwischen den ersten Eigenfrequenzen der angegebenen Bezugsgrößen (Spalte „Bezug“). Aus bereits aufgeführten Gründen werden die numerischen Werte der Amplitudenminima und Maxima an Resonanz und Antiresonanz nicht zu Vergleichszwecken herangezogen. Gleichwohl eine überschlägige bzw. qualitative Einschätzung möglich ist.

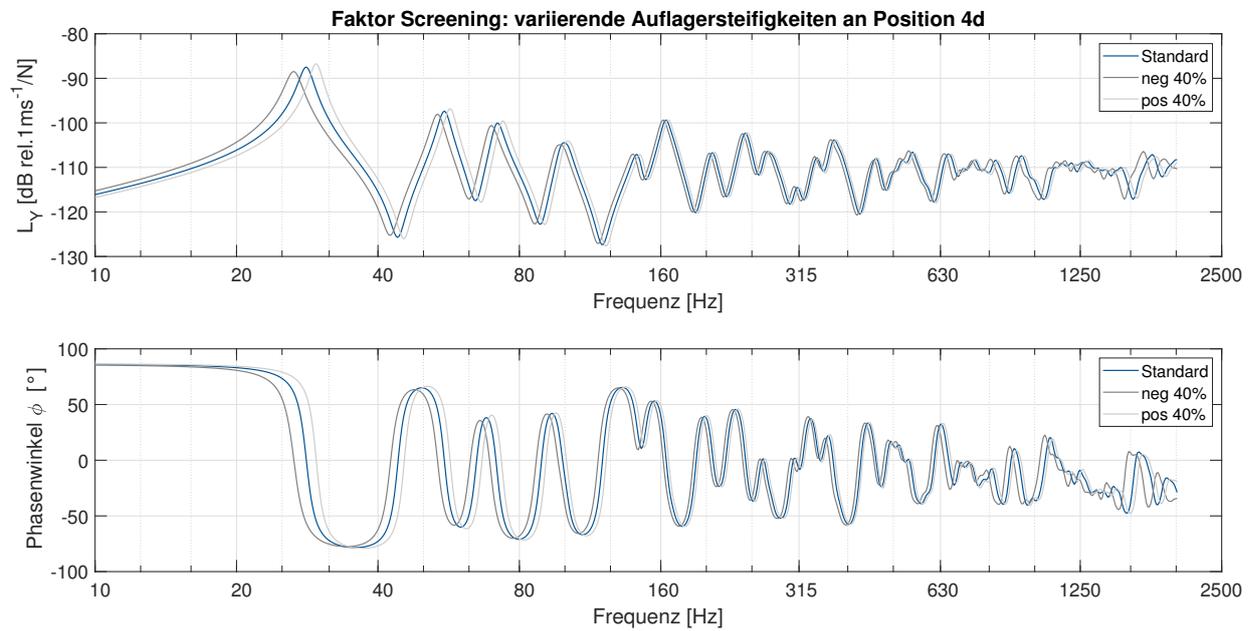


Abb. 30: Factor Screening: variierende Auflagersteifigkeiten an Position 4d

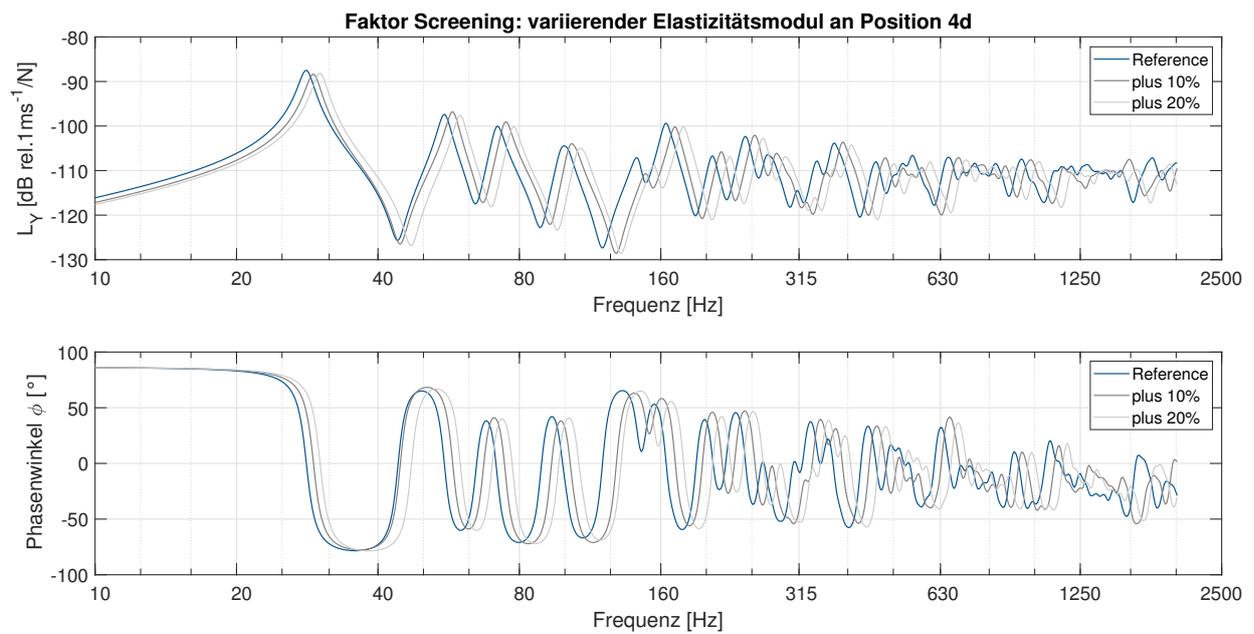


Abb. 31: Factor Screening: variierender Elastizitätsmodul an Position 4d

Tab. 8: Eingangswerte des Factor Screening

Parameter	Standard	variierter Wert 1	Abweichung	variierter Wert 2	Abweichung
lineare Steifigkeit	5,82 GN/m <sup>2</sup>	3,49 GN/m <sup>2</sup>	neg40 %	8,15 GN/m <sup>2</sup>	pos40 %
lineare Dämpfung	0	0	0	0	0
Rotationssteifigkeit	3,80 MN	2,28 MN	neg40 %	5,32 MN	pos40 %
Rotationsdämpfung	450000 N	450000 N	0	450000 N	0
Elastizitätsmodul	27,5 E9 N/m <sup>2</sup>	30,25 E9 N/m <sup>2</sup>	pos10 %	33 E9 N/m <sup>2</sup>	pos20 %
Dichte	2300 kg/m <sup>3</sup>	2070 kg/m <sup>3</sup>	neg10 %	2530 kg/m <sup>3</sup>	pos10 %
Plattendicke	0,14 m	0,12 m	neg2cm (neg14 %)	0,16 m	pos2cm (pos14 %)
Plattenmaße					

Standard ... Parameter der Platte P9 (kalibriert/IBP intern); bspw. neg40 % ... 40 % vom Standard abgezogen etc.

Tab. 9: Ergebnisse des Factor Screening

Parameter	$\Delta f_{n,1}$	Bezug
Auflagersteifigkeiten 4d	3 Hz	von neg40 % zu pos40 %
Auflagersteifigkeiten 4d	2 Hz	von neg40 % zu Standard
Auflagersteifigkeiten 4d	2 Hz	von Standard zu pos40 %
Auflagersteifigkeiten 2d	3 Hz	von neg40 % zu pos40 %
Auflagersteifigkeiten 2d	2 Hz	von neg40 % zu Standard
Auflagersteifigkeiten 2d	1 Hz	von Standard zu pos40 %
Elastizitätsmodul 4d	1 Hz	von Standard zu pos10 %
Elastizitätsmodul 4d	2 Hz	von Standard zu pos20 %
Dichte 4d	3 Hz	von neg10 % zu pos10 %
Dichte 4d	2 Hz	von neg10 % zu Standard
Dichte 4d	1 Hz	von Standard zu pos10 %
Plattendicke 4d	5 Hz	von neg14 % zu pos14 % (von neg2cm zu pos2cm)
Plattendicke 4d	2 Hz	von neg14 % zu Standard
Plattendicke 4d	2 Hz	von Standard zu pos14 %

$\Delta f_{n,1}$  ... Abweichung der ersten Eigenfrequenzen zwischen „Bezug“

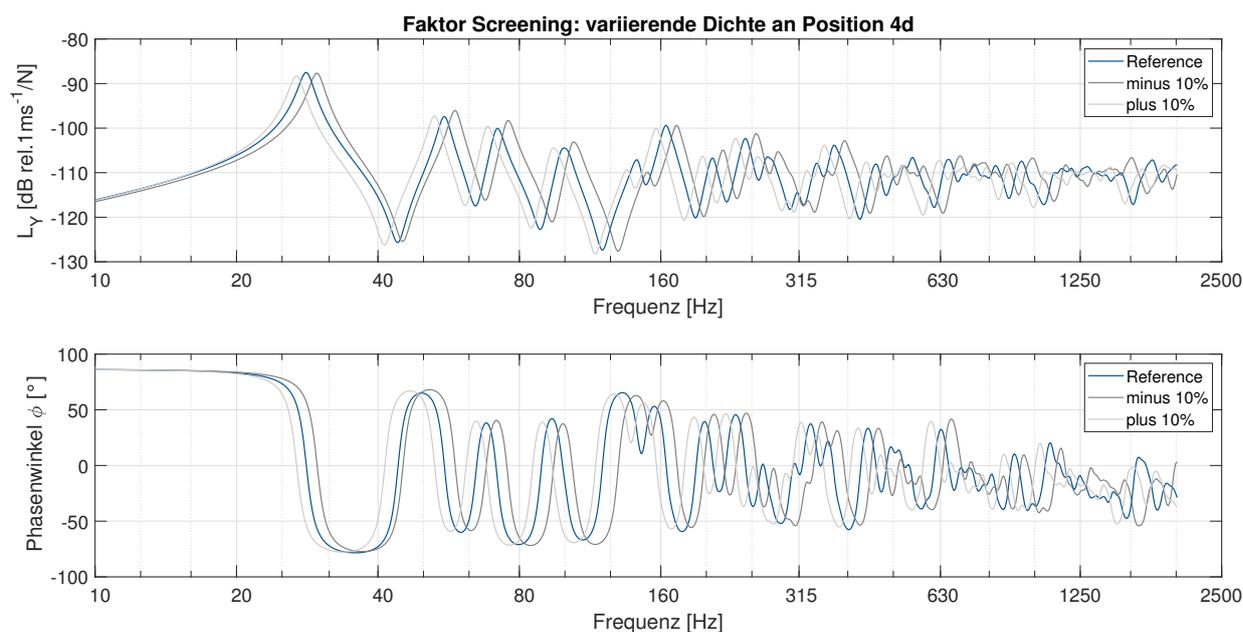


Abb. 32: Factor Screening: variierende Rohdichte an Position 4d

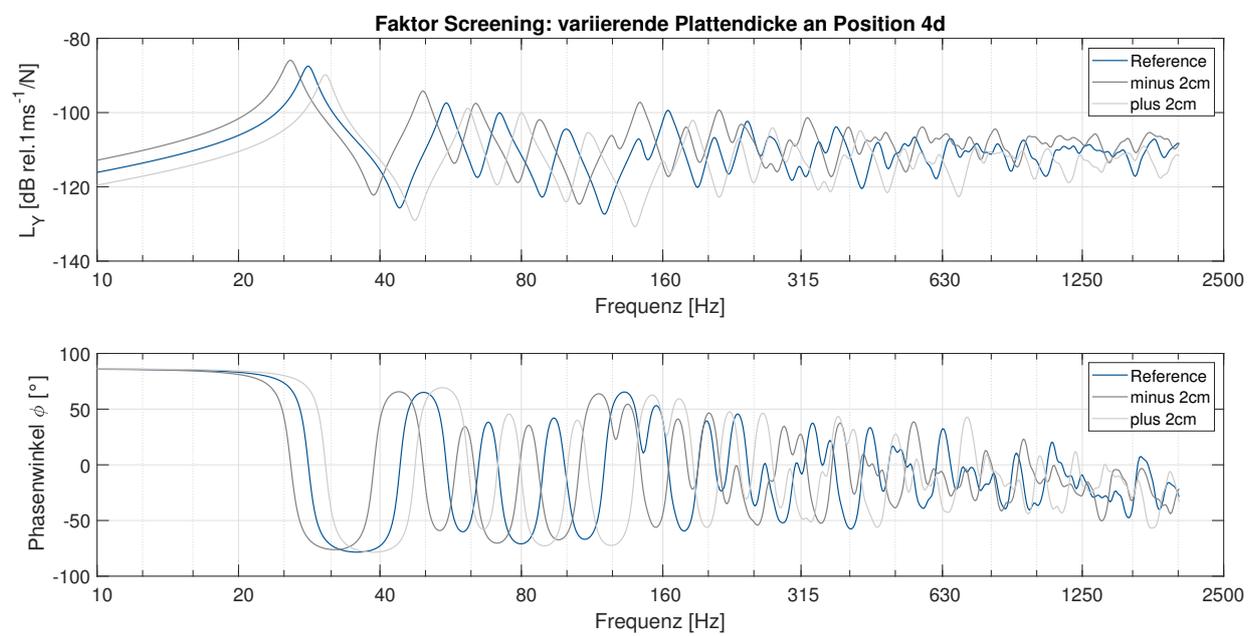


Abb. 33: Factor Screening: variierende Plattendicke an Position 4d

### 3.5.2 Diskussion der Ergebnisse der Sensitivitätsanalyse

Wie bereits erläutert, versucht ein Factor Screening qualitative Zusammenhänge festzustellen. Bei näherer Betrachtung der Bode Diagramme wird deutlich, dass alle aufgeprägten Parametervarianten zu Veränderungen der Admittanz führen. Wobei die tatsächlichen Kurvenverschiebungen nicht einheitlich sind. So zeigt sich zwar ein ubiquitärer Einfluss auf die Lage der Resonanzfrequenzen, doch sind deutliche Unterschiede in der Gesamtamplitude zu beobachten. Besonders ersichtlich ist dies bei sehr niedrigen Frequenzen (ca. 10 Hz). Während beispielsweise die Dichte des Betons die Eigenfrequenzen zwar verschiebt, ändert sich die Amplitude bei 10 Hz kaum. Ein Gegenbeispiel ist die Plattendicke. Der Einfluss einer Änderung wirkt sich nicht nur auf die Eigenfrequenz aus, sondern führt zu einer vertikalen Verschiebung der Kurve. In doppelt-logarithmischer Darstellung hängt eine derartige Verschiebung bei niedrigen Frequenzen direkt mit dem Gradienten zusammen.

Unter Einbezug der Ergebnisse aus Tabelle 9 wird außerdem deutlich, dass ähnlich große prozentuale Fehler zu unterschiedlichen Ausprägungen führen. Auch hier fällt die Plattendicke erneut als vergleichsweise sensitiver Parameter auf.

Relativierend muss jedoch darauf hingewiesen werden, dass der Einfluss der Auflagerbedingungen durch diese Untersuchungsweise unterschätzt wird. Denn der mögliche Wertebereich der Steifigkeiten ist von 0 bis theoretisch  $\infty$  enorm breit. Zusätzlich ist dieser gesamte Bereich von einfach gelagert bis eingespannt baupraktisch relevant. Variationen in Faktor-10 Größenordnung wären hier vermutlich besser geeignet. Der Einfluss der Auflagersteife wird im Laufe vorliegender Untersuchungen detaillierter erörtert.

Wird der Einfluss von Auflagersteifigkeiten an den unterschiedlichen Positionen 2d und 4d (Abb. 30 und Abb. E.22) ausgewertet, zeigt sich zum einen, wie erwartet, kaum Einfluss auf die Position der Eigenfrequenz, zum anderen aber eine Amplitudenverschiebung. Der Admittanzpegel ist in Auflagernähe niedriger als in Plattenmitte. Dieser Zusammenhang ist ebenfalls zu erwarten, da die Beweglichkeit der Platte zu den Auflagern hin bis auf Null abnehmen muss. Deutlich wird dadurch die Abhängigkeit des Gradienten von der Position.

Schließend kann zusammengefasst werden, dass laut des durchgeführten Factor Screenings die Plattendimension (Dicke) und die Auswertungsposition die signifikantesten Einflüsse auf die Admittanz besitzen, während Materialparameter wie Dichte und Elastizitätsmodul innerhalb baupraktischer Grenzen geringeren Einfluss auf die Admittanz und deren Gradient nimmt. Diese Zusammenhänge lassen sich auch mit Blick auf die erläuterten theoretischen Grundlagen bestätigen. In die Admittanz- und Eigenfrequenzgleichungen gehen dimensionale Änderungen in höherer Potenz ein als die Materialparameter. So schlägt sich eine Veränderung der Dimensionen in Masse, Biegemoment und Formfunktion nieder, während beispielsweise der Elastizitätsmodul mit Potenz eins in die Biegesteifigkeit eingeht.

## 4 Vorarbeiten zur Entwicklung approximativer Gradientenmodelle

Das folgende Kapitel untersucht Zusammenhänge zwischen der Admittanz respektive dem Gradienten und den Auflagerbedingungen sowie den Plattenparametern. Die resultierenden Ergebnisse stellen die Wissensbasis zur Entwicklung approximativer Admittanzmodelle dar.

Wie in der Einleitung bereits erwähnt, sind vorliegende Untersuchungen auf massive, rechteckige Massivbauplatten (Stahlbeton) beschränkt. Des Weiteren wird vorausgesetzt, dass die untersuchten Platten allseitig gleich gelagert sind und keine Verschiebungen in vertikaler Richtung (z-Richtung, Lastichtung) möglich sind. Entscheidend ist folglich die Rotationssteifigkeit der untersuchten Plattenlagerungen.

### 4.1 Dimensionslose Steifigkeiten

Die idealen Lagerungsbedingungen der gelenkigen ( $k_\phi = 0$ ) und der eingespannten Lagerung ( $k_\phi = \infty$ ) bilden zwei Steifigkeitsgrenzfälle. Die Auflagerbedingungen realer Platten befinden sich somit zwischen den beiden Grenzwerten. Das Konzept der dimensionslosen Steifigkeiten hilft im Rahmen der vorliegenden Arbeit die tatsächlichen Auflagersteifigkeiten in die Steifigkeitsextreme der idealen Auflager einzuordnen. Das Konzept dieser mathematischen Umformulierung wird in anderem inhaltlichen Kontext in Qiao und Rahmatalla (2019) und Kaito et al. (2018) verwendet. Dimensionslose Steifigkeiten stellen eine Gewichtung der Auflagersteifigkeiten mit der Material- bzw. Plattensteifigkeit dar. Somit sind unterschiedliche Platten auf ein einheitliches Zahlensystem vereinfacht und vergleichbar. Es lassen sich sowohl für die lineare Auflagersteifigkeit als auch für die Rotationssteifigkeit derartige Werte bestimmen.

#### Dimensionslose lineare Steifigkeit

Die dimensionslose lineare Steifigkeit  $\bar{k}$  (Senkfederkonstante) für eine Platte mit linearer Auflagersteife  $k$  und einer Seitenlänge von  $l$  ist in Gleichung 44 definiert.

$$\bar{k} = \frac{k l^3}{D} \quad \text{Gl. 44}$$

Die bekannte Variable  $D$  entspricht der Biegesteifigkeit und wird allgemein nach Gleichung 45 beschrieben.

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})} \quad \text{Gl. 45}$$

Die Formulierung der Biegesteifigkeit für isotrope Platten verkürzt sich folgend zu

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \quad \text{Gl. 46}$$

Qiao und Rahmatalla (2019) vereinfachen  $D$  weiter und verwenden für die dimensionslose Steifigkeit lediglich  $EI_P$  ( $D$  mit  $\nu = 0$ ). Vorliegende Arbeit orientiert sich an Kaito et al. (2018) und berücksichtigt die auftretende Querdehnung von Platten.

### Dimensionslose Rotationssteifigkeit

Die dimensionslose Rotationssteifigkeit folgt dem Konzept der linearen Steifigkeit und ergibt sich nach Kaito et al. (2018) zu

$$\bar{k}_\phi = \frac{k l}{D}. \quad \text{Gl. 47}$$

### Anwendung der dimensionslosen Steifigkeiten auf Platte P9

Folgend wird das Konzept der dimensionslosen Steifigkeiten auf die Platte P9 angewendet. Dazu werden die in Kapitel 3.4 (Kalibrierung) festgestellten Steifigkeiten verwendet. Zusätzlich werden überschlägig bestimmte Auflagersteifigkeiten herangezogen und diskutiert. Die Berechnung folgt grundlegenden mechanischen Zusammenhängen und ist in Anhang unter Gliederungspunkt A beschrieben. Der Wert der Biegesteifigkeit  $D$  berechnet sich mit den Parametern der Platte P9 zu

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{27,5 \text{ E9} \cdot 0,14^3}{12(1-0,2^2)} = 6550347,2 = 6,55 \text{ E6 Nm}. \quad \text{Gl. 48}$$

Die lineare dimensionslose Steifigkeit  $\bar{k}$  nimmt anschließend nach bekannter Formulierung (Gl. 44) und kalibrierten Bedingungen sowie der Plattendimension  $l_y$

$$\bar{k} = \frac{k l^3}{D} = \frac{5,82 \text{ E9} \cdot 3,96^3}{6,55 \text{ E6}} = 55160 \quad \text{Gl. 49}$$

an. Nach Gleichung 47 wird die dimensionslose Rotationssteifigkeit  $\bar{k}_\phi$  äquivalent berechnet.

$$\bar{k}_\phi = \frac{k l}{D} = \frac{3,80 \text{ E6} \cdot 3,96}{6,55 \text{ E6}} = 2,3 \quad \text{Gl. 50}$$

Weitere dimensionslose Steifigkeiten bezogen auf  $l_y$  sowie  $l_x$  und berechnet mit den geschätzten Auflagerbedingungen (aus Anhang A) listet Tabelle 10. Die Ergebnisse der dimensionslosen Steifigkeiten umspannen einen großen Wertebereich. Die Unter- und Überschätzungen auf Grundlage der kalibrierten und geschätzten Steifigkeiten spiegeln auch hier die aus Anhang A gekannten Fehlerproportionalitäten wieder. Dies validiert die Anwendung der dimensionslosen Steifigkeiten. Aufgrund der Verbindung der Plattensteifigkeit mit der Auflagersteifigkeit zu einem Einzahlwert, ist bei der Anwendung der dimensionslosen Steifigkeiten ein Vergleich unterschiedlicher Platten möglich.

Die zitierte Publikation Kaito et al. (2018) verwendet die dimensionslose Steifigkeit in Kombination mit einem Frequenzparameter. Die Werte der dimensionslosen Steifigkeiten umspannen sowohl für die lineare Steifigkeit als auch die Rotationssteifigkeit einen Wertebereich von 0 (gelenkig) bis  $\infty$  (eingespannt). Wie die Autorenschaft der Referenz belegen kann, konvergieren diese jedoch bei steigender dimensionsloser Steifigkeit zu einem konstanten Wert. So benennen Kaito et al. (2018) für die dimensionslose lineare Steifigkeit einen Wert von 1000, ab welchem von einer nahezu unendlichen

Tab. 10: Auflagersteifigkeiten: Konzept der dimensionslosen Steifigkeiten für Platte P9

Parameter	linear	Rotation
kalibrierte Bedingungen	5,82 E9 N/m <sup>2</sup>	3,80 E6 N
geschätzte Bedingungen	1,02 E9 N/m <sup>2</sup>	38,13 E6 N
geschätzte Bedingungen (II)		11,48 E6 N
dimensionslose Steifigkeit $l_x$ , kalibriert	108388	2,9
dimensionslose Steifigkeit $l_y$ , kalibriert	55160	2,3
dimensionslose Steifigkeit $l_x$ , Schätzung	19001	28,9
dimensionslose Steifigkeit $l_y$ , Schätzung	9670	23,1
dimensionslose Steifigkeit $l_x$ , Schätzung II		8,7
dimensionslose Steifigkeit $l_y$ , Schätzung II		6,9

vertikalen Steife ausgegangen werden kann. Für die dimensionslose Rotationssteifigkeit weisen die Autoren einen entsprechenden Wert von 100 nach. Die Ergebnisse aus Tabelle 10 für die lineare Auflagersteifigkeit liegen folglich weit im Bereich der Konvergenz und kann mit unendlich steif angenähert werden. Diese Tatsache unterstützt die initialen Limitationen der vorliegenden Untersuchungen. Zu Beginn wurde festgelegt, dass eine vertikale Beweglichkeit ausgeschlossen wird. Für Platte P9 und somit auch konstruktiv ähnliche Situationen ist eine Vereinfachung auf gelenkig bzw. eingespannt (vertikaler Freiheitsgrad gehalten) suffizient. Eine detaillierte Untersuchung der Rotationssteifigkeit folgt in kommenden Gliederungspunkten.

## 4.2 Gradient der Admittanz - Ergebnisse, Gegenüberstellungen und Diskussion

Folgender Gliederungspunkt untersucht Zusammenhänge des Gradienten der Admittanz bezüglich Auswertungsposition und Auflagerbedingung. Die Grundlage bilden die als korrekt angenommenen Ergebnisse aus erwähntem Simulationstool. Die erarbeiteten Erkenntnisse werden vorgestellt, diskutiert sowie interpretiert. Entscheidend ist an dieser Stelle, dass folgende Absätze stets Ergebnisse sowie eigene Interpretationen enthalten und nicht strukturell separiert sind. Dieser dokumentarische Ansatz wurde gewählt, da gefundene Ergebnisse stets Zwischenschritte zur Findung approximativer Ansätze darstellen und somit eine Diskussion sowie Interpretation die inhaltliche Richtung der Untersuchungen vorgab (vgl. Iteration zwischen Simulation, Parameterstudie und Modellansatz im Gliederungspunkt der Methodik bzw. Abb. 4).

### 4.2.1 Definition verwendeter Gradientenbezeichnungen

Folgend werden wiederholt verschiedene Gradienten beschrieben und herangezogen. Gleichwohl versucht wird die beschriebenen Gradienten eindeutig zu benennen, listet Tabelle 11 alle relevanten Abkürzungen und fügt eine Beschreibung an. Diese Bezeichnungen orientieren sich an den in den

MATLAB Skripten verwendeten Variablennamen der entsprechenden Gradient. Das Layout der Tabelle versucht zusätzlich inhaltliche Zusammengehörigkeiten zu verdeutlichen. Der numerisch generierte Gradient *gradNum* wird als korrekter Referenzwert definiert. Die Gradienten *gradSimp* und *gradApproxI* sind für Ansatz I entscheidend, während *gradAna1* und *gradApproxII* die Parameter des zweiten Ansatzes darstellen. Die Abkürzung *gradTrans* entspricht dem Gradienten, an dem der Übergang von charakteristischer Admittanz zum hybriden Modell stattfindet. Dessen Einführung und Herleitung findet sich unter Gliederungspunkt 4.4.

Tab. 11: Gradienten - Abkürzung und Beschreibung

<b>Abkürzung</b>	<b>Beschreibung</b>
<i>gradNum</i>	numerisch erzeugter Gradient mit beschriebenem FE Tool – Zielwert
<i>gradSimp</i>	vereinfachter Gradient in Plattenmitte für die erste Mode (Ansatz I); Simp ... simplified
<i>gradApproxI</i>	approximierter Gradient an beliebiger Position basierend auf <i>gradSimp</i> (Ansatz I)
<i>gradAna1</i>	analytisch hergeleiteter Gradient für die erste Mode (Ansatz II) Ana1 ... analytisch hergeleitet für Mode (1,1)
<i>gradApproxII</i>	approximierter Gradient an beliebiger Position basierend auf <i>gradAna1</i> (Ansatz II)
<i>gradTrans</i>	Wert des Gradienten an welchem der Übergang der charakteristischen Admittanz zum linearen Gradienten stattfindet

#### 4.2.2 Gradientenverläufe entlang radialer Achsen

Eine erste Betrachtung der Gradienten erfolgt entlang Achse I (Diagonale). Hierzu wurden an den Positionen der Messpunkte Simulationen durchgeführt und die numerischen Gradienten (*gradNum*) erstellt. Aufgetragen nach beschriebenem Schema zeigt sich ein doppelt-gekrümmter Verlauf (S-förmig). Abbildung 34 zeigt in orange diesen Werteverlauf für die herangezogene Platte P9 (mit kalibrierten Lagerbedingungen). Um diesen Verlauf zu bestätigen und detaillierter kenntlich zu machen, wurden zusätzlich zu den bekannten Messpositionen Zwischenschritte eingeführt. Ziel ist es, die Vermutung des sigmoiden Verlaufs zu bestätigen und bei anschließenden Auswertungen auf weniger Simulationspositionen zurückgreifen zu können, ohne entscheidende Informationen zu vernachlässigen. Abbildung 34 zeigt zusätzlich diesen detaillierteren Gradientenverlauf. Eine überwiegend hohe Deckung beider Varianten ist zu erkennen. Nur in den Bereichen großer Krümmung treten sichtbare Abweichungen der geringeren Auswertungsdichte auf. Dennoch bestätigt die Untersuchung eindeutig die Vermutung des S-Verlaufs. Für weitere Untersuchungen wird folglich mit dem Bewusstsein der Abweichungen die geringere Auswertungsdichte verwendet.

Für die grundlegenden Untersuchungen im Rahmen vorliegender Arbeit wurden in erster Linie die Achsen I und VI verwendet. Diese Entscheidung liegt darin begründet, dass die Achsen der Diagonale (Achse I) sowie die Symmetrieachse (Achse VI) als positionelle Grenzwerte der Gradienten anzuerkennen sind. So befinden sich die Gradienten beliebiger, intermediärer Achsen bzw. Auswertungsposi-

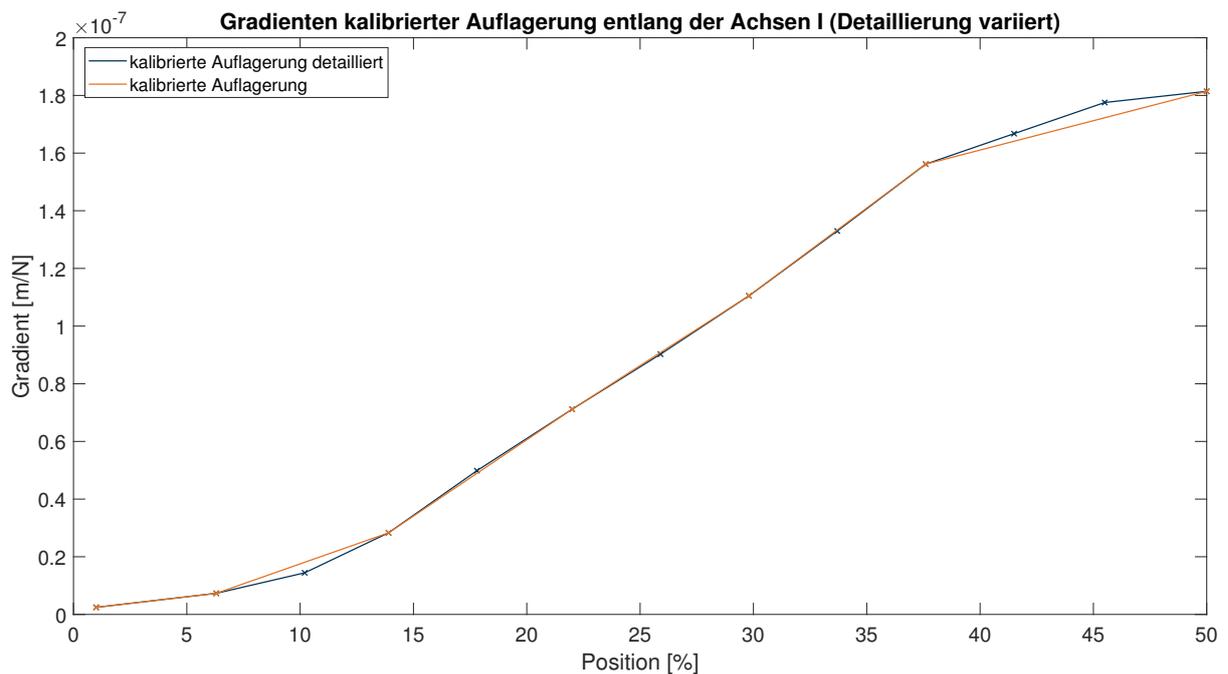


Abb. 34: Gradienten entlang der Achse I für gelenkige, eingespannte und kalibrierte Lagerung

tionen zwischen den Wertebereichen der Gradienten der Achsen I und VI. Die Abbildungen 35 und 36 belegen diesen Zusammenhang. Diese Abbildungen stellen für gelenkige sowie eingespannte Lagerung die Gradientenverläufe der Achsen I bis VI dar. Die punktierte Lineare zwischen 0% und 50% hilft lediglich die Formen der Verläufe zu visualisieren. Für beide Lagerungsbedingungen zeigen die Gradientenverläufe unterschiedlich ausgeprägte S-Verläufe. Eine Kausalität der Position zwischen den Grenzwerten der Achsen I und VI wird aus diesen Grafiken nicht eindeutig ersichtlich, gleichwohl der Anschein nichtlinearer bzw. augenscheinlich logarithmischer Verteilung zwischen den Grenzwerten entsteht.

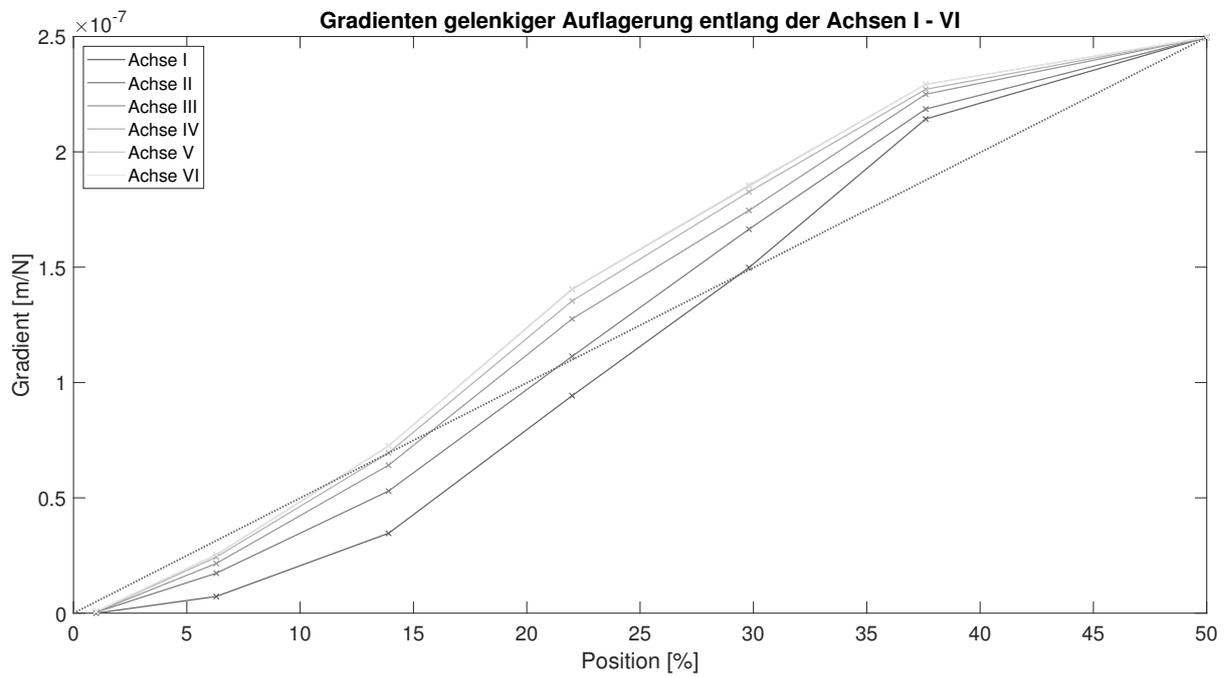


Abb. 35: Gradienten entlang der Achsen I bis VI für gelenkige Lagerung

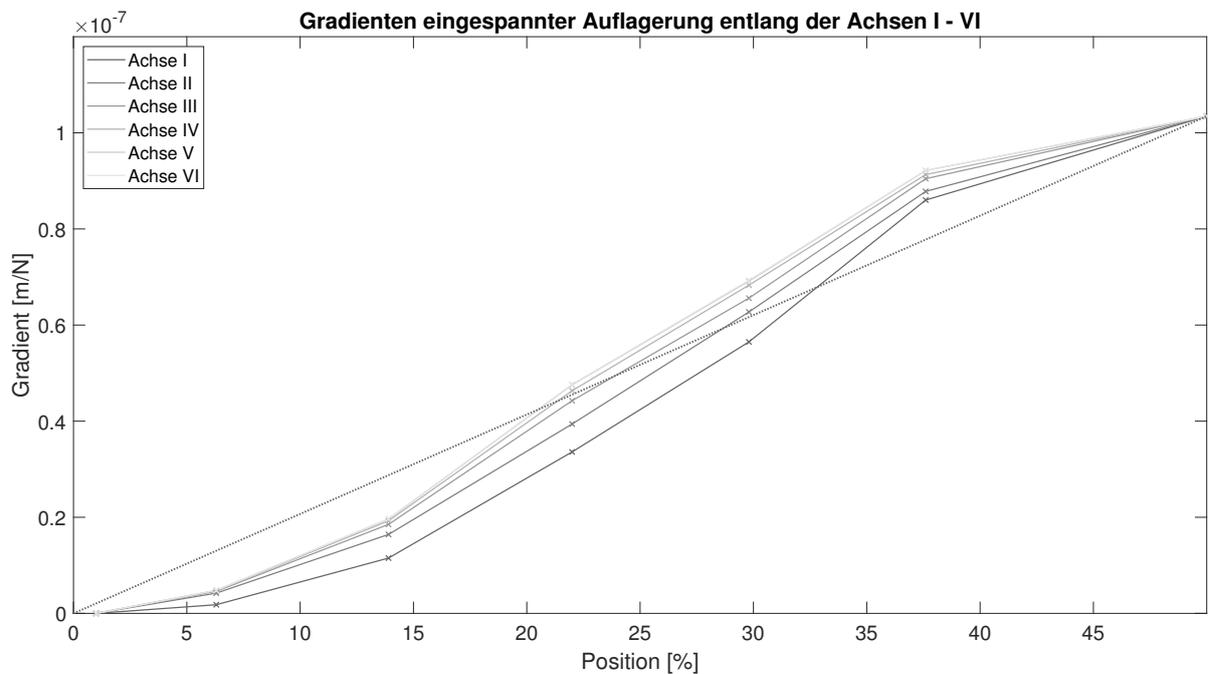


Abb. 36: Gradienten entlang der Achsen I bis VI für eingespannte Lagerung

### 4.2.3 Ideal-mechanische Auflagersituationen

Die Rotationssteifigkeiten von 0 (ideal gelenkig) bis  $\infty$  (ideal eingespannt) bilden die Grenzwerte des Steifigkeitsbereichs der Auflager. Abbildung 37 belegt, dass diese Grenzwertbetrachtung auch auf den Gültigkeitsbereich der Gradienten übertragbar ist. So bilden die Verläufe der idealen Bedingungen die Grenzwerte der möglichen Gradienten. Der Gradientenverlauf der kalibrierten Rotationssteifigkeiten ist in Grafik 37 ebenfalls dargestellt und wird somit zwischen den Verläufen der idealen Bedingungen erwartet. Auffallend ist in genannter Grafik, dass dieser Zusammenhang für Positionen um die Plattenmitte deutlich ausgeprägt ist. Bei auflagernahen bzw. in diesem Fall ecknahen Positionen liegen die Werte aus kalibrierten Randbedingungen nicht zwischen den Werten der idealen Bedingungen. Grund dafür sollte der steigende Einfluss der Auflager bei Randpositionen sein. Den Admittanzen kalibrierter Auflagerbedingungen liegt eine sehr hohe, aber nicht unendliche (vertikale Festhaltung), lineare Steifigkeit zugrunde. In Auflager- oder Ecknähe gewinnt die geringfügige, vertikale Beweglichkeit zunehmenden an Einfluss und wird durch die Kurvenverschiebung deutlich. Diese Vermutung wird durch eine vergleichbare Auswertung entlang Achse VI gestützt. Abbildung E.23 im Anhang zeigt den Gradientenverlauf entlang Achse VI. Der Gradientenverlauf der kalibrierten Bedingungen findet sich hier weitestgehend zwischen den Verläufen der idealen Auflager ein. Da die Kante weniger Einfluss nimmt als die Ecke, ist auch die Ausprägung der Verschiebung geringer. Ein weiteres Mal unterstreicht Abbildung E.24 im Anhang diese Erklärung. In grau ist der Gradientenverlauf der Standardplatte mit gelenkigen Lagern (vertikale Beweglichkeit unterbunden) und kalibrierter Rotationssteifigkeit visualisiert. Die korrespondierende Gradientenkurve liegt nun wie erwartet stets zwischen den Grenzwerten der idealen Auflager.

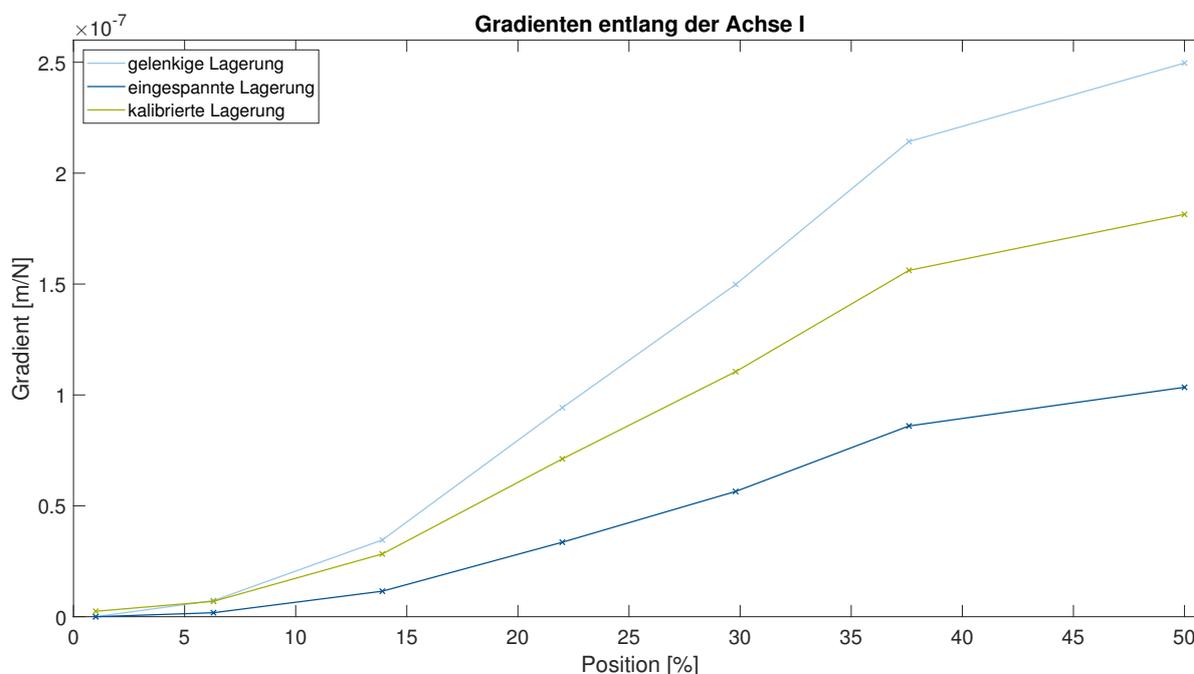


Abb. 37: Gradienten entlang der Achse I für gelenkige, eingespannte und kalibrierte Lagerung

An dieser Stelle soll erneut die Annahme und Limitation der Vernachlässigung der vertikalen Bewegung (lineare Steifigkeit zu  $\infty$ ) bekräftigt werden. Im Gliederungspunkt der dimensionslosen Steifigkeit wird bereits durch die Berechnung der dimensionslosen linearen Steifigkeit und dem Vergleich mit zitierter Literatur eine nahezu ideal steife vertikale Lagerung nachgewiesen. Bestätigend kann in Abbildung E.24 (Anhang) gezeigt werden, dass eine Vereinfachung der linearen Steifigkeit zu einer Unbeweglichkeit suffizient ist. Abbildung E.24 zeigt die Gradienten der gelenkigen und eingespannten Lagerung entlang der Achse I als Grenzwerte. Zusätzlich wurden die Gradienten der kalibrierten Lagerungsbedingungen eingefügt. Eine gleichzeitige Darstellung der Gradienten bei unterdrückter, vertikaler Beweglichkeit und zusätzlicher, kalibrierter Rotationssteifigkeit (gelenkig gelagert plus Rotationssteifigkeit) führt zu weitestgehend identischen Werten. Lediglich im auflagernahen Bereich unterscheiden sich die Gradientenverläufe aufgrund der eben beschriebenen, unmittelbaren Einflüsse der Auflager.

#### 4.2.4 Positionelle Abhängigkeiten zwischen radialen Achsen

Ein weiterer Zusammenhang stellt sich in den Kausalitäten zwischen dem Gradienten und der Position heraus. Abbildung 38 zeigt eine Auswertung der Gradienten kalibrierter Randbedingungen entlang der eingeführten Achse B (parallel zur x-Achse, vgl. Abb. 23). Deutlich erkennbar ist ein nicht-linearer Zusammenhang zwischen den Gradienten und der Position.

Eine Betrachtung der Gradienten entlang der Achsen versucht zu erörtern, ob die Gradienten gleiche Werte an gleicher anteiliger Achsenposition annehmen. Dazu werden die Positionen gleicher Gradienten entlang der jeweiligen Achsen aus den Abbildungen 35 und 36 entnommen und in Tabelle 12 gelistet. Die Positionen wurden händisch abgelesen und auf ganze Prozentschritte gerundet. Die generierten Daten sind daher mit Verweis auf die Unsicherheiten durch die Ablese sowie die lineare Verbindung zwischen den Auswertungspunkten als Annäherung zu verstehen und zeigen lediglich einen Trend. Abbildung 39 visualisiert die gelisteten Daten für die gelenkige Auflagersituation (Abb. E.25 im Anhang für die Einspannung). Exemplarisch ist an Achse I der Gradient mit  $1,0 \text{ E-8 m/N}$  bei 13% der Achslänge angetragen. Sowohl die Daten als auch die Abbildung zeigen, dass die Positionen gleicher Gradienten nicht an der verhältnismäßig gleichen Stelle entlang der Achsen liegen, denn die prozentualen Werte unterscheiden sich zwischen den Achsen. Tabellierte und visualisierte Daten zeigen allerdings auch, dass die Nichtlinearität zu den Ecken deutlich zunimmt. Dies deckt sich mit der Beobachtung aus Abbildung 38.

Die Achsen I bis VI orientieren sich an den Messpunkten. Folglich sind diese nicht gleichmäßig parallel zu x-Achse angeordnet und verfügen somit nicht über gleiche Abstände entlang der horizontalen Achsen (A - F). Um diese Ungenauigkeit auszugleichen wurden drei weitere Achsen definiert, die jeweils die Auflagerkante in x-Richtung zwischen Achse I und VI gleichmäßig in Viertelschritte aufteilen. Die Achsen werden 025, 050 und 075 bezeichnet. Abbildung E.26 im Anhang zeigt diese Achsen im Grundriss der Platte P9. Die Gradientenverläufe wurden zu Untersuchungszwecken nur im auflagernahen Bereich zwischen 6,3% und 22% ausgewertet. Die Abbildungen E.27 und E.28 im Anhang visualisieren die Ergebnisse. Deutlich erkennbar ist auch hier die bereits festgestellte Nichtlinearität. Obwohl nun die Achsen in gleichen Schritten aufgefächert sind, verlaufen die Gradientenkurven nicht parallel zueinander. Somit sind die bereits festgestellten Zusammenhänge bestätigt.

Tab. 12: Abgelesene Positionen entlang der Achsen I bis VI für Linien gleicher Gradienten

<b>gelenkig</b>					
Position der Gradient in [%]	0,5 E-7	1,0 E-7	1,5 E-7	2,0 E-7	Länge der Achse in [m]
Achse I	16	23	30	36	3,17
Achse II	13	20	27	35	2,78
Achse III	11	18	26	34	2,41
Achse IV	10	18	24	33	2,14
Achse V	10	17	23	32	1,99
Achse VI	10	17	23	32	1,98

<b>eingespannt</b>					
Position der Gradient in [%]	1,0 E-8	2,0 E-8	4,0 E-8	6,0 E-8	Länge der Achse in [m]
Achse I	13	17	24	31	3,17
Achse II	10	15	22	29	2,78
Achse III	9	14	21	28	2,41
Achse IV	9	14	20	27	2,14
Achse V	9	14	20	26	1,99
Achse VI	9	14	20	26	1,98

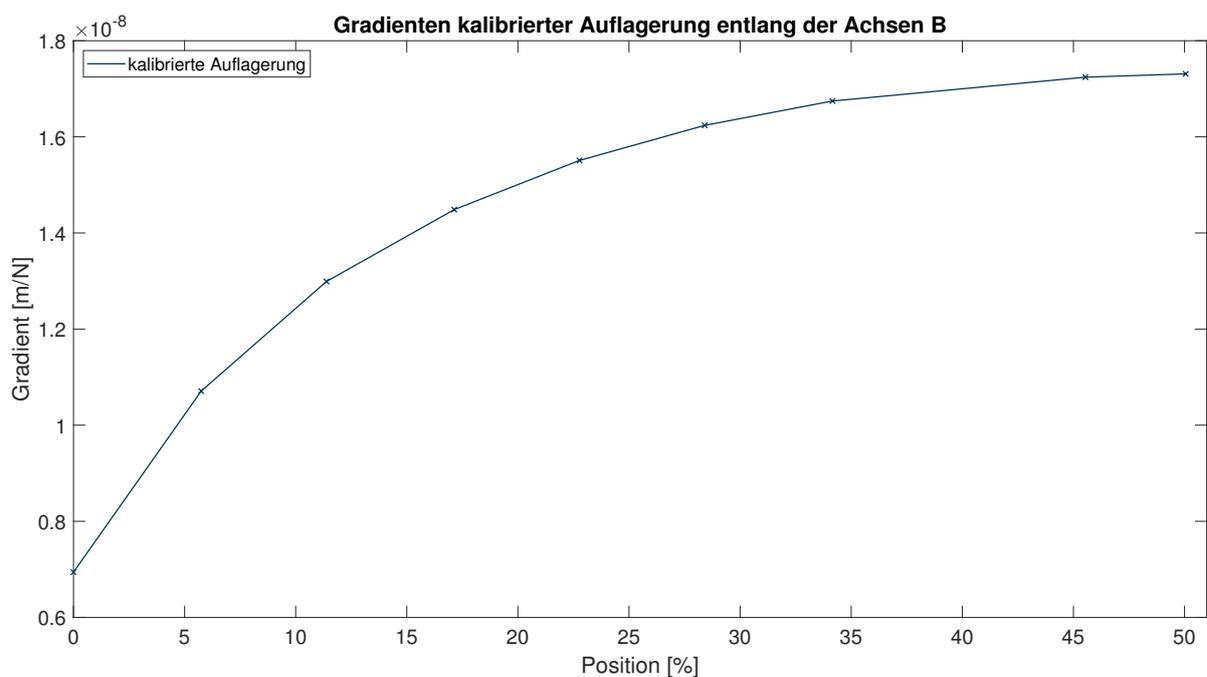


Abb. 38: Gradienten entlang der Achse B für kalibrierte Lagerung

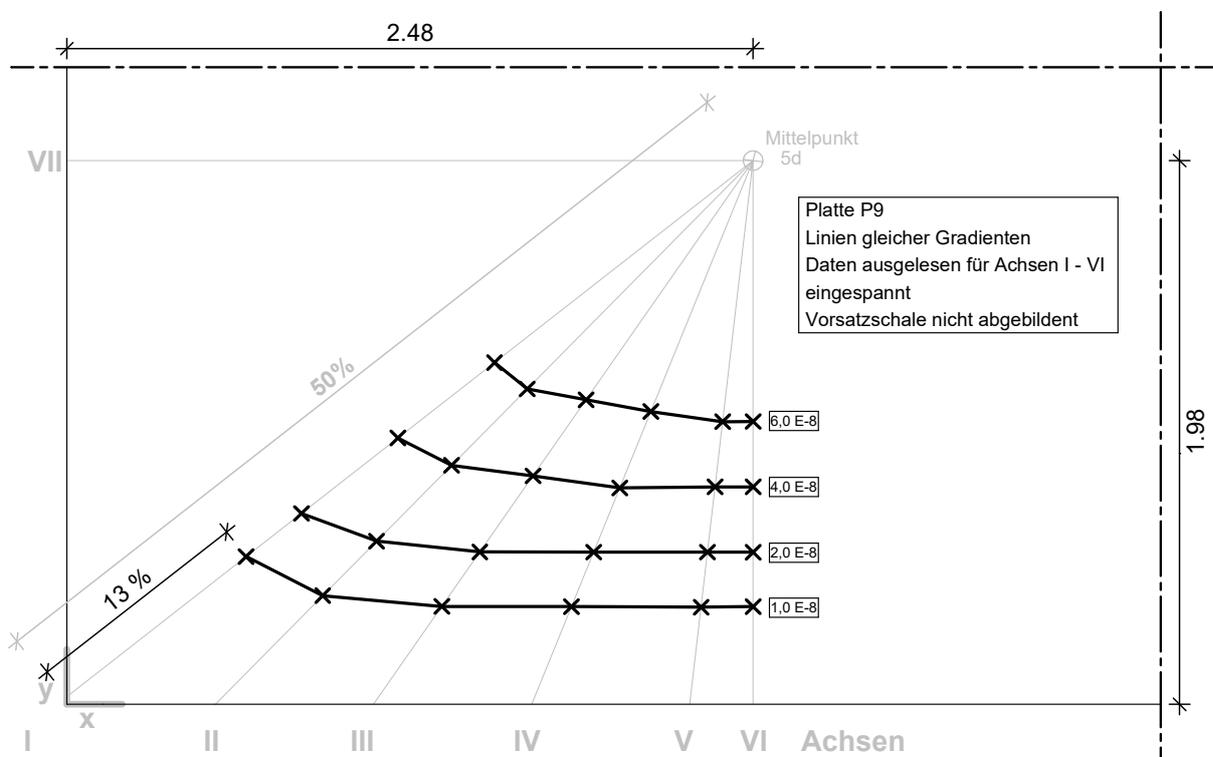


Abb. 39: Grundriss der Platte P9 mit Linien gleicher Gradienten bei eingespannter Lagerung

#### 4.2.5 Verhalten der Gradienten bei variierenden Rotationssteifigkeiten der Auflager

Ein zentraler Untersuchungsaspekt ist der Einfluss der Rotationssteifigkeit der Auflager. Betrachtet werden diese Zusammenhänge mithilfe der eingeführten dimensionslosen Steifigkeiten. Dazu wurden repräsentative Schritte mit logarithmischen Abständen festgelegt. Tabelle 13 listet unter anderem diese Werte. Anschließend wurden die mit diesen dimensionslosen Steifigkeiten korrespondierenden realen Rotationssteifigkeiten für Platte P9 zurückgerechnet und Admittanz sowie Gradienten simulativ bestimmt. Für Abbildung 40 wurden zu Gunsten einer feineren Detaillierung weitere Positionen nach gleichem Schema hinzugefügt. Wie bereits bei der Vorstellung der dimensionslosen Steifigkeiten erörtert, sind diese abhängig von einer Bezugslänge ( $l_x$  oder  $l_y$ ). Die tabellarisierten Werte in Tabelle 13 beziehen sich dabei auf die Kantenlänge  $l_x$ . Für die Plattendimension in y-Richtung wurde derartige Auswertung nicht durchgeführt. Es wird von einem qualitativ gleichen Verlauf ausgegangen mit einem leichten Verschiebung hin zu niedrigeren Gradienten, da die dimensionslosen Steifigkeiten durch  $l_y < l_x$  zu geringfügig höheren Werten tendieren.

In Abbildung 40 wird zusätzlich der entsprechende Gradient bei kalibrierten Randbedingungen visualisiert (rotes o). Mit geringem Unterschied trifft dieser Wert die Verteilung (dunkelblau) beliebiger Rotationssteifigkeiten. Dadurch wird die Simulation in begrenztem Maße validiert. Zusätzlich ordnet sich die tatsächlich vorhandene Rotationssteifigkeit der realen Platte P9 ein.

Durch die Betrachtung der Gradienten in Zusammenhang mit variierenden dimensionslosen Rotationssteifigkeiten ist es zudem möglich die dimensionslosen Grenzwerte aus Kaito et al. (2018) zu belegen. Im Gegensatz zu zitierter Quelle wird als Ergebnisgröße in diesem hier gezeigten Zusammenhang nicht der „Frequenz Parameter“ verwendet, sondern auf den Gradient der Admittanz als y-Achse zurückgegriffen. Verglichen zur Literatur zeichnet sich dennoch ein qualitativ vergleichbarer Verlauf ab. Zusätzlich bestätigt sich der Wert von 100 als ungefähre Grenzwert der vollen Einspannung. Dort nähert der Gradient mit zunehmender Rotationssteifigkeit einen konstanten Wert an.

Abbildung 41 zeigt die bereits bekannte Visualisierung der idealen Auflager inklusive des Gradientenverlaufs bei kalibrierten Randbedingungen entlang der Achse I. Zusätzlich sind in Abbildung 41 als Plussymbole die Gradienten in Plattenmitte zu den dimensionslosen Rotationssteifigkeiten 0,001, 0,01, 0,1, 1, 10, 100, 1000 und 10000 eingetragen. Somit wird erneut die vorliegende Platte P9 steifigkeitsbezogen eingeordnet. Anzumerken ist, dass die Gradienten in Plattenmitte der idealen Bedingungen nicht überzeugend mit den Gradienten bei variierender dimensionsloser Steifigkeit korrespondieren. So sollten die Gradienten der idealen Auflagerbedingungen die Gradienten der variierenden Steifigkeiten als Grenzwerte umfassen. Tatsächlich resultieren beispielsweise niedrigere Gradienten bei hohen dimensionslosen Steifigkeiten als der Gradient der idealen Einspannung. Für den Grenzwert der gelenkigen Lagerung scheint der zu erwartende Zusammenhang augenscheinlich besser getroffen. Über die Gründe der Differenzen kann im Rahmen vorliegender Untersuchungen nur spekuliert werden. Zum einen könnte der Bezug auf  $l_x$  statt auf  $l_y$  zu Ungenauigkeiten beitragen. Gleichwohl die Verwendung von  $l_y$  theoretisch zu noch geringeren Gradienten führen sollte. Zum anderen könnten numerische Fehler eine Erklärung darstellen. Während die Gradienten mit variierenden Rotationssteifigkeiten mittels FE Methode bestimmt wurden, lassen sich die Admittanzen und Gradienten idealer Auflager zum Teil analytisch und damit genauer lösen. Weitere Untersuchungen zu diesen Differenzen sollten anschließen.

Abschließend werden zusätzlich Variationen der betrachteten Platte vorgestellt. Abbildung 42 zeigt die bekannte sigmoide Verteilung inklusive den numerischen Gradienten in Plattenmitte bei variierenden Plattenparametern. Als exemplarische zusätzliche Plattenvariationen wird Platte P9 mit 100% größeren Dimensionen und mit 20% höherem Elastizitätsmodul herangezogen. Ausgewertet sind diese Plattenparameter an drei repräsentativen Steifigkeiten (gelenkig/kalibriert/eingespannt). Tatsächlich würden die Gradienten zu diesen Steifigkeiten die Werte 0 und  $\infty$  annehmen. Aus Gründen der Darstellung sind die korrespondierenden Gradienten bei den dimensionslosen Steifigkeiten 0,001 und 10000 angetragen. Erneut bestätigen sich die bereits aus Abbildung 41 bekannten Ungenauigkeiten. Die jeweils dunkelblauen Marker entsprechen der Standardplatte P9. Folglich sollten diese exakt auf dem dunkelblauen Verlauf liegen. Besonders die eingespannte Lagerung weicht von der erwarteten Position ab. Auf mögliche Gründe wurde bereits eingegangen. Deutlich wird eine Abhängigkeit der Verteilung von der betrachteten Platte. Wie bereits in der Factor Screening Analyse gezeigt, werden die bekannten Sensitivität auch in dieser Darstellung bestätigt. Eine baupraktisch relevante Variation des Elastizitätsmoduls hat folglich einen verhältnismäßig geringen Einfluss auf die Positionierung des Markers.

Eine Normierung auf den Gradienten gelenkiger Lagerung versucht die Darstellung zu vereinheitlichen und die Zusammenhänge intuitiver zu visualisieren. Abbildung 43 zeigt dies für die obigen Daten. Die normierten Gradienten für die gelenkige Lagerung sind folglich gleich eins. Die übrigen Marker ordnen sich entsprechend ein. Deutlich wird, dass die Variation der Rotationssteifigkeit und der Plattenparameter vielfältige Abhängigkeiten des Gradienten aufzeigt. Zukünftige Untersuchungen könnten hier anschließen und möglicherweise ein Konzept dimensionsloser Gradienten entwickeln. Die Normierung der Gradienten beliebiger Parameter und Auflagersituationen auf einen definierten Wertebereich könnte bei der Integration der Rotationssteifigkeit in approximative Modelle hilfreich sein.

Tab. 13: Gradienten bei variierender Rotationssteifigkeit

dimensionslose Rotationssteifigkeit	Rotationssteifigkeit für P9	Gradient in Plattenmitte
0,001	1,320 E3	2,50 E-7
0,01	1,320 E4	2,49 E-7
0,1	1,320 E5	2,46 E-7
1	1,320 E6	2,17 E-7
10	1,320 E7	1,39 E-7
100	1,320 E8	1,03 E-7
1000	1,320 E9	9,73 E-8
10000	1,320 E10	9,68 E-8

mit  $D = 6,55 E6 \text{ Nm}$  und  $I_x = 4,96 \text{ m}$

Als vorgezogener Ausblick zukünftiger Untersuchungen wird vorgeschlagen die Gradienten zu variierenden Rotationssteifigkeiten nicht nur in Plattenmitte auszuwerten. Wie in Abbildung 41 ersichtlich ändert sich die Lage der Kurve kalibrierter Auflager zwischen den beiden Grenzwertlinien der idealen Lagerungen. So verschiebt sich die Kurve der kalibrierten Steifigkeiten bei auflagnäherer Position

hin zur ideal gelenkig gelagerten Platte. Durch eine vergleichbare Erstellung der Gradienten verschiedener Rotationssteifigkeiten an anderen Positionen könnte untersucht werden, ob sich die bekannte Verteilung aus Abb. 40 in Auflagernähe verändert.

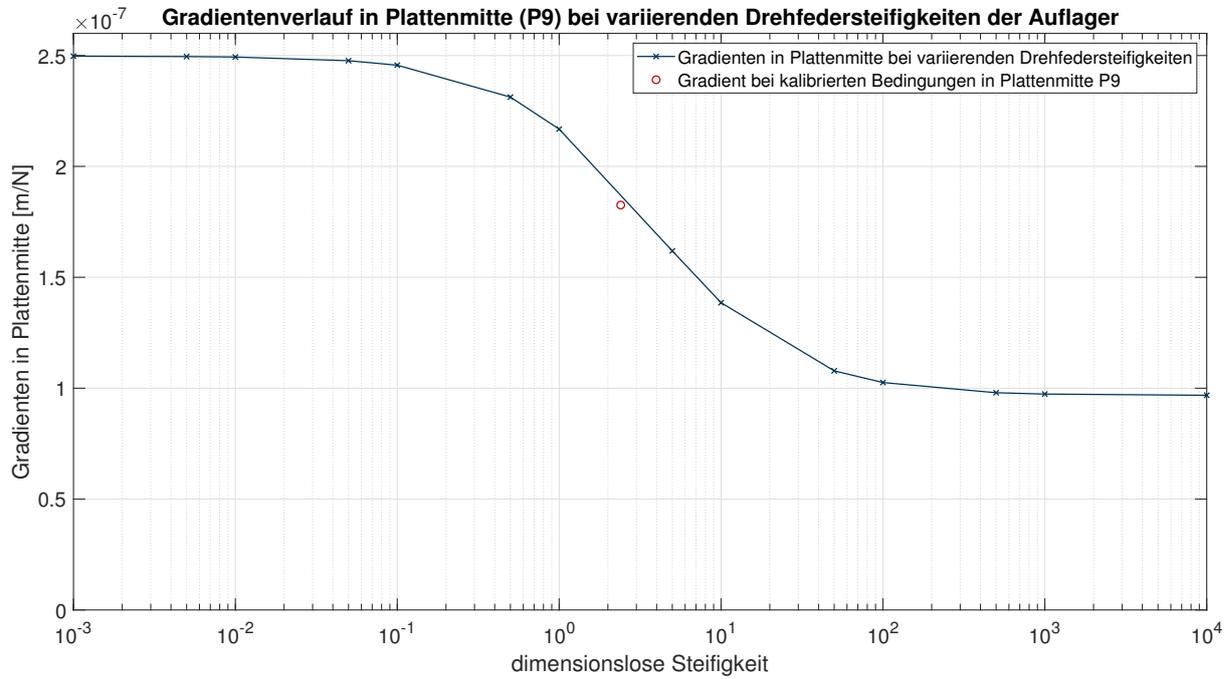


Abb. 40: Gradienten in Plattenmitte bei veränderlichen, dimensionslosen Rotationssteifigkeiten der Auflager

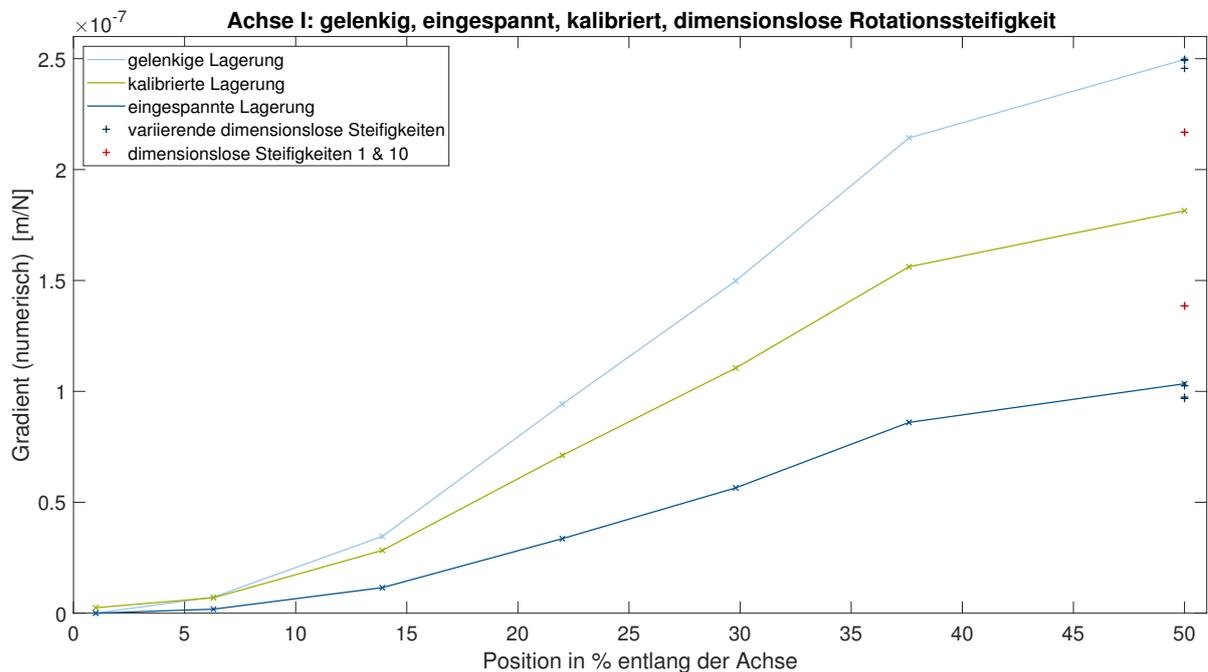


Abb. 41: Gradienten entlang der Achse I für gelenkige, eingespannte und kalibrierte Lagerung

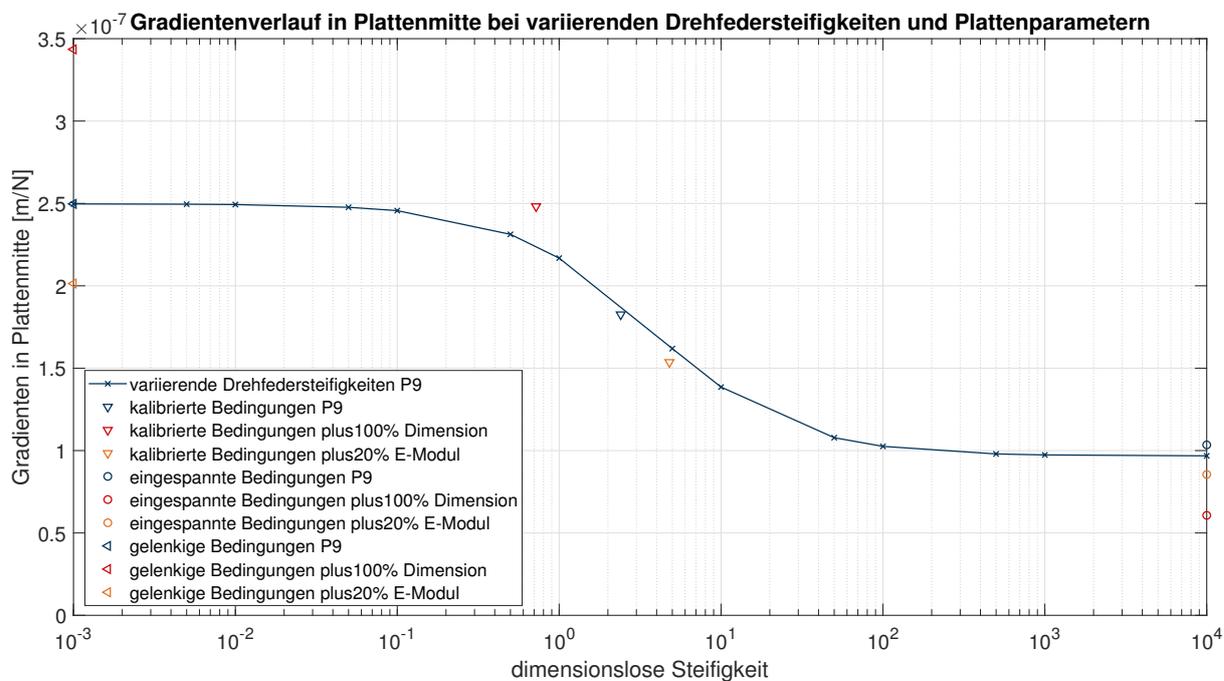


Abb. 42: Gradienten in Plattenmitte bei veränderlichen, dimensionslosen Rotationssteifigkeiten der Auflager sowie bei variierenden Plattenparametern

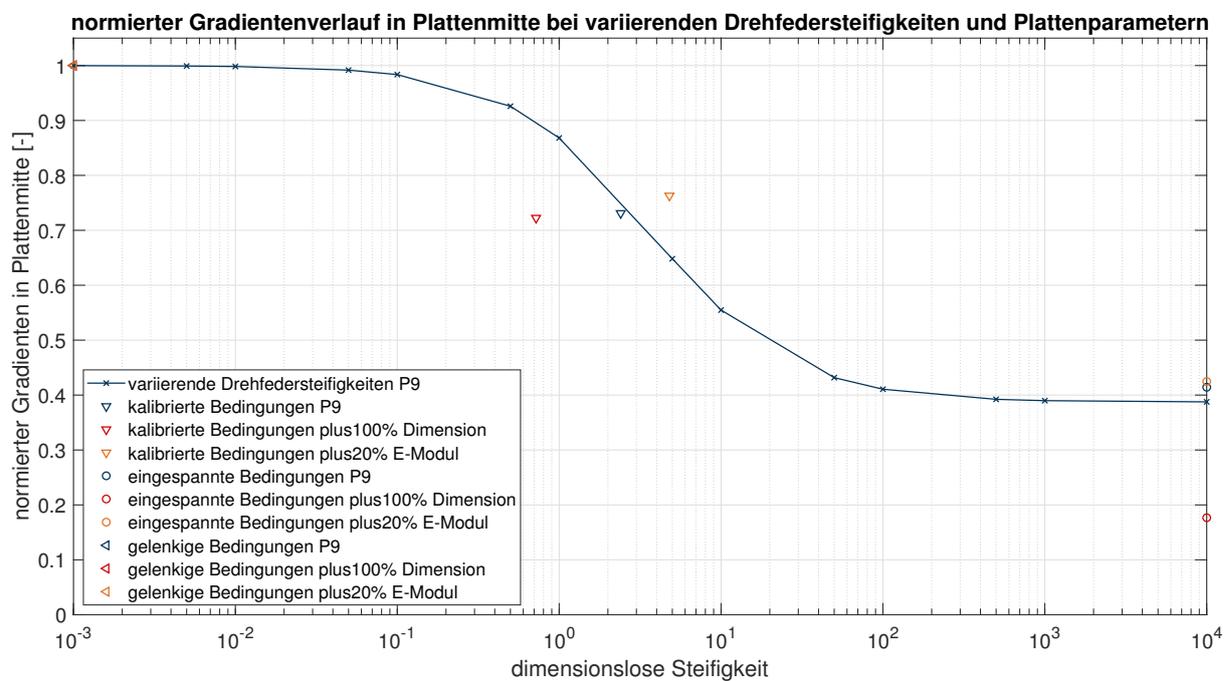


Abb. 43: Normierte Gradienten in Plattenmitte bei veränderlichen, dimensionslosen Rotationssteifigkeiten der Auflager sowie bei variierenden Plattenparametern

### 4.3 Gemeinsame theoretische Grundlagen für Ansatz I und Ansatz II

Folgender Gliederungspunkt beschreibt die gemeinsamen theoretischen Grundlagen beider approximativen Ansätze. Der Gradient der Admittanz einer rechteckigen, dünnen Platte entspricht der Ableitung der zugehörigen Admittanz. Die anschließenden Herleitungen zeigen den vereinfachten Gradient des Biegebalkens. Eine Übertragung auf die Platte ist entsprechend möglich und wird erläutert. Gleichung 51 wiederholt die Punktdmittanz eines Biegebalkens.

$$\tilde{Y}_{v_y, F_y} = j\omega \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\phi_r^2(a)}{M_r [\omega_r^2(1 + j\eta) - \omega^2]} \quad \text{Gl. 51}$$

Die Indizes von  $\tilde{Y}_{v_y, F_y}$  markieren die Admittanz aus Schnelle und Kräfteinwirkung in y-Richtung und werden im weiteren Verlauf vernachlässigt. Im anschließenden Schritt wird die Ableitung der Gleichung 51 unter zusätzlicher Berücksichtigung des Limes zu  $\omega \rightarrow 0$ . Gleichzeitig wird die obere Summengrenze auf einen rechnerisch realen Wert von  $R$  gesetzt.  $R$  entspricht im Rahmen von Simulationen einer oberen Grenzfrequenz und ist zu einer positiven ganzen Zahl definiert. Der Gradient  $a_r$  der Admittanz ergibt sich somit zu

$$a_r = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{d\tilde{Y}}{d\omega} \approx \sum_{r=1}^R \frac{j\phi_r^2(a)}{M_r \omega_r^2(1 + j\eta)}. \quad \text{Gl. 52}$$

Wird nun der Verlustfaktor zu 0 vereinfacht, verkürzt sich der Ausdruck ein weiteres Mal. Die Vernachlässigung des Verlustfaktors respektive der Dämpfung wird im Rahmen der Bildung approximativer Modelle als suffizient angenommen<sup>1</sup>.

$$a_r = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{d\tilde{Y}}{d\omega} \approx \sum_{r=1}^R \frac{j\phi_r^2(a)}{M_r \omega_r^2} \quad \text{Gl. 53}$$

Unter Berücksichtigung des bereits bekannten Zusammenhangs, dass unter vernachlässigtem Verlustfaktor und einer ersten Eigenfrequenz größer 0 ( $\omega_1 > 0$ ) der Gradient eine positive imaginäre Zahl ist, formuliert sich abschließend der Gradient der Punktdmittanz des Balkens zu

$$a_r = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{d|\tilde{Y}|}{d\omega} \approx \sum_{r=1}^R \frac{\phi_r^2(a)}{M_r \omega_r^2}. \quad \text{Gl. 54}$$

Da sich die Admittanzfunktion einer rechteckigen, dünnen Platte aus sich zwei senkrecht kreuzenden Balken ableiten lässt, wird durch erneute Multiplikation der quadrierten Formfunktion  $\phi$  in Gleichung 54 die Übertragung auf die Platte generieren. Die Zweidimensionalität wird hierbei mit den Variablen  $x$  und  $y$  ausgedrückt. Die modale Masse  $M_r$  kann zusätzlich substituiert werden.

$$a_r = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{d|\tilde{Y}|}{d\omega} \approx \sum_{r=1}^R \frac{\phi_r^2(x) \phi_r^2(y)}{M_r \omega_r^2} = \sum_{r=1}^R \frac{\phi_r^2(x) \phi_r^2(y)}{M \omega_r^2} \quad \text{Gl. 55}$$

<sup>1</sup>Die Dämpfung wirkt überwiegend auf die Amplitude im Resonanzfall. Der Gradient bei  $\omega \rightarrow 0$  wird dadurch vernachlässigbar beeinflusst (vgl. Abb. E.29 – unrealistisch hoher Verlustfaktor zur Visualisierung der Auswirkung)

Die Gleichung der modale Masse  $M_r$  eines Balkens ist durch Gleichung 56 definiert (Fahy, 2006, S. 94).

$$M_r = m' \int_0^l \phi_r^2 dx = m'l \quad \text{Gl. 56}$$

Wobei  $m'$  der längenbezogenen Masse entspricht. Belegbar ist dieser Zusammenhang durch die Orthogonalität

$$\int_0^l \phi_r \phi_s dx = 0 \quad (r \neq s) \quad \text{Gl. 57}$$

der Formfunktionen uniformer Balken (Fahy, 2006, S. 92). Für  $r = s$  gilt

$$\int_0^l [\phi_r(x)]^2 dx = l \quad (r = s) . \quad \text{Gl. 58}$$

Gleicher Zusammenhang ist folglich auch auf Platten übertragbar.

$$\int_0^{l_x} \int_0^{l_y} [\phi_r(x)]^2 dx dy = l_x l_y \quad \text{Gl. 59}$$

Die modale Masse eines Balkens oder einer Platte ist somit durch die physische Masse des Bauteils beschrieben. In Gardonio und Brennan (2004, S. 422, 439) ist obige Substitution bereits in gegebenen Admittanzgleichungen für Platten und Balken ausformuliert. In Fahy (2006, S. 93, 107) beschränken die Autoren diese lediglich auf gelenkig gelagerte Platten sowie Balken. Eingespannte Lagerungen sind allerdings nicht explizit ausgeschlossen. Den Veröffentlichungen Howard (2007) und Young (1950) zufolge sind diese Vereinfachungen jedoch auch bei eingespannten Platten- oder Balkenlagerungen zulässig.

Für die Entwicklung approximativer Gradientenmodelle wird im Rahmen der vorliegenden Untersuchungen zusätzlich eine Reduktion der betrachteten Moden eingeführt. Nach Gleichung 55 hätte die Berechnung des Gradienten den gleichen Berechnungsaufwand wie die Admittanz selbst. Eine Vereinfachung wäre somit nicht gegeben. Als Modenreduktion wird daher  $R$  gleich eins gesetzt und somit der Gradient auf die erste Mode beschränkt.

$$a_1 = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{d|\tilde{Y}_1|}{d\omega} \approx \sum_{r=1}^1 \frac{\phi_r^2(x) \phi_r^2(y)}{M_r \omega_r^2} = \frac{\phi_1^2(x) \phi_1^2(y)}{M \omega_1^2} \quad \text{Gl. 60}$$

Eine derartige Limitation der Summe auf einen Summanden unterschätzt den tatsächlichen Wert des Gradienten. Dieser reduzierte Gradient kann mit verhältnismäßig geringem Aufwand berechnet werden und bildet die Grundlage beider approximativer Ansätze. Eine Kompensation der vernachlässigten Summenanteile diskutiert Ansatz II.

Ohne eine eigene Herleitung kann der Gradient auch direkt an der Gleichung der Plattenadmittanz (Gl. 36) hergeleitet werden. Das Ergebnis ist redundant.

## 4.4 Relevanter Betrachtungsbereich entwickelter Modelle

Erklärtes Ziel vorliegender Arbeit ist es ein hybrides Modell bzw. dessen Grundlagen zu entwickeln, um ein Modell mit besserer Prognosequalität vorzuschlagen als die in E DIN EN 12354:2022-02 verwendete charakteristische Admittanz. Dieses hybride Modell sieht vor, je nach Auswertungsposition auf der Platte die charakteristische Admittanz zu verwenden oder ein Konzept aus linearisierter Admittanz ( $Y_{lin} = a \cdot f$ ) kombiniert mit der charakteristischen Admittanz heranzuziehen. Näheres zu einer konkreten Umsetzung folgt in Kapitel 6. Dennoch wird folgend der Übergangsbereich zwischen der alleinigen Anwendung der char. Admittanz und dem entwickelten hybriden Modell definiert, da dieser unabhängig vom entwickelten Ansatz ist. Die Definition dieses Bereichs ist anschließend für die Diskussion und Bewertung der Ergebnisse entscheidend.

Aus praxisrelevanten und projektbezogenen Gründen ist die untere Grenze des betrachteten Frequenzspektrums zu 50 Hz limitiert. Wie bereits erläutert, stellen sich die linearisierte Admittanz ( $Y_{lin} = a \cdot f$ ) in doppelt-logarithmischer Darstellung als parallele Linearen mit gleicher Steigung dar. Die charakteristische Admittanz zeichnet sich dagegen als Konstante ab. Als entscheidender Aspekt gilt nun der Schnittpunkt zwischen der linearisierten und der charakteristischen Admittanz. Liegt dieser Schnittpunkt oberhalb der Frequenzgrenze von 50 Hz ist durch das hybride Modell, inklusive der ansteigenden linearen Admittanz, eine Verbesserung gegenüber der charakteristischen Admittanz zu erwarten. Liegt dieser Schnittpunkt unterhalb der 50 Hz Grenze wird als Vereinfachung der Admittanz auf die charakteristische Admittanz zurückgegriffen. Abbildung 44 zeigt die Admittanzen bei eingespannten Randbedingungen entlang der Achse I für die bekannten Positionen 0, 1d, 2d, 3d, 4d und 5d inklusive des numerischen Gradienten bzw. der linearisierten Admittanz. Zusätzlich ist sowohl die charakteristische Admittanz als auch die 50 Hz Grenze visualisiert. Für alle Positionen deren Lineare die charakteristische Admittanz rechts der 50 Hz Grenze schneidet, wirkt das hybride Modell verbessernd. Für einen links-gelegenen Schnittpunkt ist alleinig die charakteristische Admittanz suffizient.

Der Gradient, der dazu führt, die charakteristische Admittanz ( $Y_c$ ) bei exakt 50 Hz zu schneiden, wird im Rahmen vorliegender Untersuchungen als Übergangsgradient ( $gradTrans$ ) bezeichnet. Die korrespondierende Position an welcher dieser Gradient auftritt, trennt die betrachtete Achse in den Bereich der charakteristischen Admittanz und in den Bereich des hybriden Modells. Berechnen lässt sich dieser Übergangsgradient mit Gleichung 61. Letztere Gleichung wurde im Rahmen vorliegender Arbeit hergeleitet und bedient sich dem zugrundeliegendem Konzept der linearisierten Admittanz  $Y = a \cdot f$ . Wird nun  $Y$  zur charakteristischen Admittanz  $Y_c$  und für die Frequenz  $f$  der Grenzwert 50 Hz gesetzt, kann die Gleichung der linearisierten Admittanz zu

$$gradTrans = Y_c / 50 \text{ Hz} \quad \text{Gl. 61}$$

umgestellt werden. Wird nun die charakteristische Admittanz einer beliebigen Platte in Gleichung 61 eingefügt, lässt sich der Übergangsgradient berechnen.

Mit erneutem Blick auf Abbildung 44 wird der Übergangsgradient  $gradTrans$  deutlich. Grafisch sichtbar ist außerdem die Position von  $gradTrans$  entlang der betrachteten Achse I. In gezeigter Abbildung liegt  $gradTrans$  knapp unterhalb der Auswertungsposition 3d. Übertragen würde dies bedeuten,

dass für eine Auswertung an Position 3d die alleinige Betrachtung der charakteristischen Admittanz als überschlägige Admittanz ausreichend ist.

Der Übergangsgradient kann für verschiedene Achsen bestimmt werden. Für die idealen mechanischen Auflager wurden die Positionen der Schnittpunkt zwischen charakteristischer Admittanz und Gradientenverlauf je Achse abgelesen. Entnommen wurden diese prozentualen Positionen aus den bereits bekannten Abbildungen 35 und 36. Die Ergebnisse sind auf ganze Prozentpunkte gerundet in den Tabellen 14 und 15 gelistet. Abbildung 45 visualisiert diese Ergebnisse aufgetragen auf den Grundriss der Platte P9. Die Positionen unterliegen zum einen Unsicherheiten durch die manuelle Ablesung. Zum anderen werden die Auswertungspunkte entlang einer betrachteten Achse linear verbunden. Die abgelesenen Gradientenwerte zwischen den Auswertungspositionen und die korrespondierenden Grenzen unterliegen somit Abweichungen.

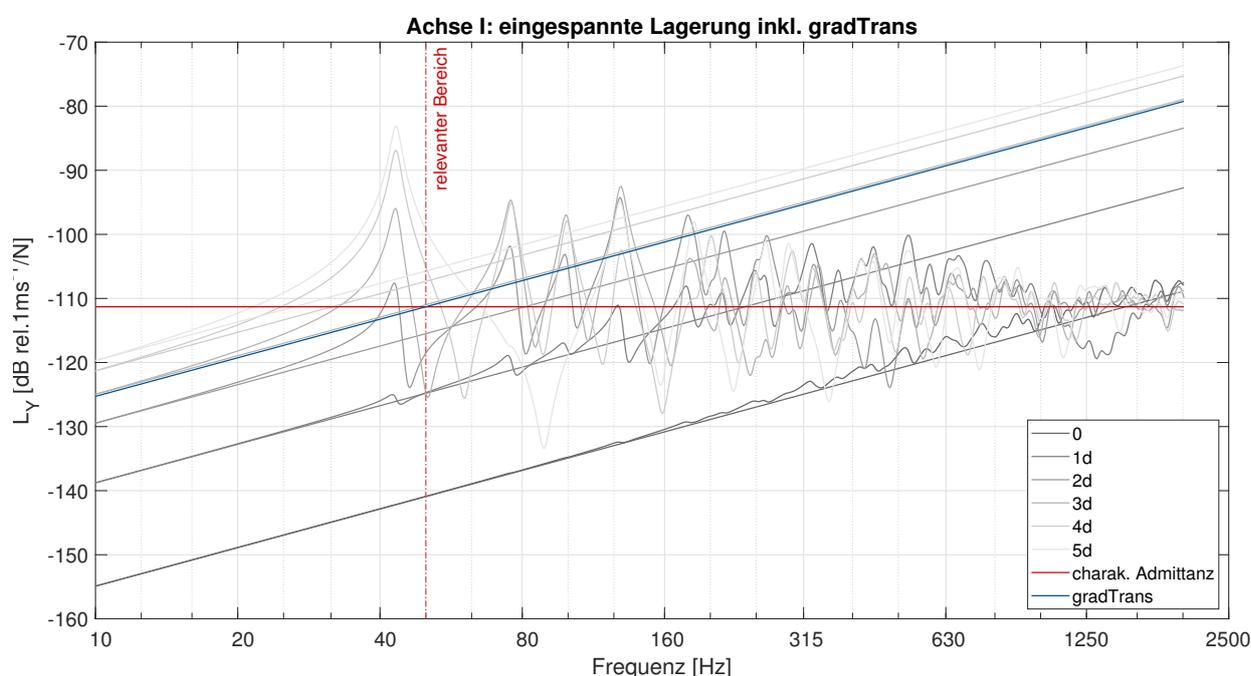


Abb. 44: Gradienten entlang der Achse I inklusive Grenzen des hybriden Modells

Tab. 14: Abgelesene Positionen entlang der Achsen I bis VI für *gradTrans* bei gelenkiger Lagerung

Achse	Position entlang Achse in [%]	Länge der Achse [50 %]	Abstand <i>gradTrans</i>
Achse I	16,5	3,173	1,05
Achse II	14	2,775	0,78
Achse III	12	2,409	0,58
Achse IV	11,5	2,136	0,49
Achse V	11	1,993	0,44
Achse VI	11	1,98	0,44

Tab. 15: Abgelesene Positionen entlang der Achsen I bis VI für *gradTrans* bei eingespannter Lagerung

Achse	Position entlang Achse in [%]	Länge der Achse [50 %]	Abstand <i>gradTrans</i>
Achse I	29	3,173	1,84
Achse II	27	2,775	1,5
Achse III	25,5	2,409	1,23
Achse IV	25	2,136	1,07
Achse V	24,5	1,993	0,98
Achse VI	24,5	1,98	0,97

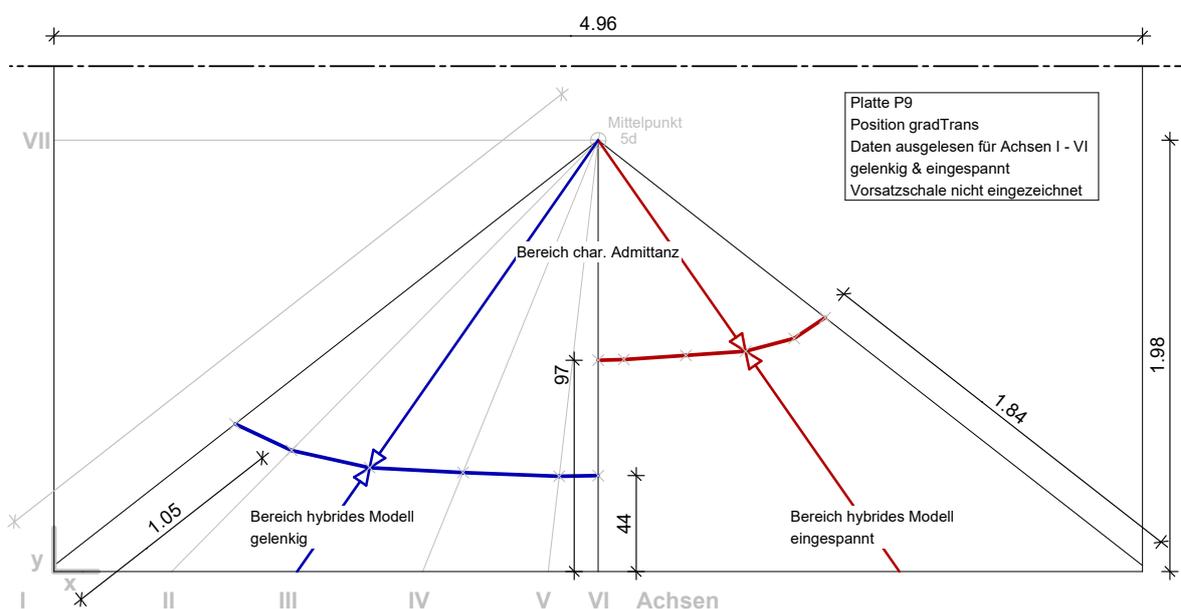


Abb. 45: Grundriss Platte P9 mit Anwendungsbereichen des hybriden Modells sowie des Modells charakteristischer Admittanz

## 4.5 Zusammenfassung der Vorarbeiten

Das abgeschlossene Kapitel der Vorarbeiten zur Entwicklung approximativer Modelle stellte die Ergebnisse der iterativen Untersuchungen zwischen den Parameterstudien und den Simulationen dar. Vorrangig erörterte das Kapitel Phänomene aus variierender Position und Rotationssteifigkeit. Zusammenfassend fallen alle Abhängigkeiten der Gradienten als ausgeprägt nicht-linear auf. Zusätzlich wurden Konzepte eingeführt, die für beide Ansätze gültig sind. So bilden die dimensionslosen Steifigkeiten, die theoretischen Grundlagen und der relevante Betrachtungsbereich die Basis für approximative Ansätze.

## 5 Entwicklung approximativer Gradientenmodelle

Nach dem Prinzip der linearisierten Admittanz bildet der Gradient die Grundlage dieser vereinfachten Admittanz. Das folgende Kapitel umfasst die Entwicklung approximativer Gradienten und schafft somit die Basis eines hybriden Modells.

Zuerst wird die Methodik zur Entwicklung des hybriden Modells vorgestellt. Im Anschluss folgt je eine Gliederungspunkt für Ansatz I und Ansatz II. Vorgestellt werden die Herleitung der mathematischen Grundlagen der Konzepte, die entsprechende Umsetzung approximativer Gradienten und erste Ergebnisse.

### 5.1 Methodik der Entwicklung approximativer Gradientenmodelle

Die beiden anschließenden Ansätze unterscheiden sich vorrangig im Grad der angestrebten Abstraktion und Vereinfachung. Während Ansatz I versucht einen möglichst hohen Vereinfachungsgrad zu erzielen, strebt Ansatz II eine maximierte Prognosequalität bei vertretbarem Berechnungsaufwand an. Beide Ansätze werden zuerst anhand der ideal mechanischen Auflagerbedingungen entwickelt. Wie aus dem Kapitel der Vorarbeiten bekannt, bilden die gelenkige und eingespannte Lagerung Grenzwerte der möglichen Gradienten. Somit stellt die Bestimmung der vereinfachten Gradienten bei ideal mechanischen Randbedingungen die Ausgangslage dar und markiert Grenzwerte. Mithilfe der Erkenntnisse der dimensionslosen Steifigkeiten sollen zukünftig die Gradienten realer Auflagerbedingungen durch eine Gewichtung zwischen der Rotationssteife und den idealen Grenzwerten ermittelt werden. Im Rahmen der vorliegenden Masterarbeit ist noch keine vollständige Integration der Rotationssteifigkeit entwickelt. Mit Verweis auf die Limitationen und den Ausblick, werden vorerst nur approximative Modelle der idealen Lagerbedingungen vorgestellt. Da diese Grenzwerte der idealen Bedingungen als Fixpunkte für die Gewichtung durch die Rotationssteifigkeit dienen, wird erhöhte Aufmerksamkeit auf die Prognose dieser Grenzwerte gelegt.

Beide Modelle nützen die Materialparameter und Dimensionen der bekannten Platte P9 als Ausgangslage. Ergebnisse werden stets anhand dieser Platte erzeugt und mithilfe der Simulationen sowie des numerischen Gradienten (*gradNum*) validiert.

Begonnen wird mit dem stark vereinfachten Ansatz I. Als Grundlage für den approximativen Gradienten des Ansatzes I (*gradApproxI*) wird der vereinfachte Gradient *gradSimp* hergeleitet. Die Umsetzung des entworfenen Konzepts und erste Ergebnisse anhand Platte P9 vervollständigen inhaltlich. Ansatz II verwendet verglichen zu Ansatz I eine aufwändigere Umsetzung und gewinnt dabei an Prognosequalität. Der strukturelle Aufbau des Gliederungspunktes zum zweiten Ansatz unterscheiden sich dabei nicht von ersterem Ansatz. Zuerst werden die grundlegenden Gradientenkonzepte definiert. Als konzeptionelle Basis des approximierten Gradienten nach Ansatz II (*gradApproxII*) dient der für die Plattenmode (1,1) analytisch bestimmte Gradient *gradAna1*. In einem zweiten Schritt wird Ansatz II als Modell umgesetzt. Im Gegensatz zu ersterem Ansatz wird Ansatz II um einen empirischen Korrektur erweitert. Der letzte Inhaltspunkt stellt erste Ergebnisse an Platte P9 vor.

## 5.2 Vereinfachter Gradient in Plattenmitte – Ansatz I

Folgend wird die Herleitung eines vereinfachten Gradienten für Ansatz I vorgestellt. Die Erörterung der Umsetzung als approximativer Gradient sowie vergleichende Ergebnisse schließen an.

### 5.2.1 Herleitung des vereinfachten Gradienten in Plattenmitte – *gradSimp*

#### Gelenkige Auflagersituation – *gradSimp*

Ziel ist es die Admittanzgleichung für Balken bzw. Platten weitestgehend zu vereinfachen. Entscheidenden Einfluss nehmen die Auflagerbedingungen in der Formfunktion bzw. charakteristische Balkenfunktion der jeweiligen Moden. Für die ideale gelenkige Lagerung definiert Gleichung 62 diese Funktion in Abhängigkeit der Modennummer  $n$ , der betrachteten Position, der Wellenzahl  $k_{nb}$  und der Balkenlänge (Gardonio & Brennan, 2004, S. 423).

$$\phi_n(x) = \sqrt{2} \sin(k_{nb} x) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad \text{Gl. 62}$$

mit  $k_{nb}l = n\pi$

Um die Abhängigkeiten nach  $x$  und  $\omega$  zu eliminieren, berechnet Ansatz I den Gradienten nach Gleichung 54 in Balkenmitte ( $x = 0,5l$ ) und beschränkt die Auswertung auf die Mode (1,1) zur Kürzung der Frequenzabhängigkeit.

$$a_1 = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{d|\tilde{Y}_1|}{d\omega} \approx \frac{(\sqrt{2} \sin(\frac{\pi x}{l}))^2}{M_1 \omega_1^2} = \frac{2 \sin^2(\frac{\pi 0,5l}{l})}{M \omega_1^2} = \frac{2}{M \omega_1^2} \quad \text{Gl. 63}$$

Zur Erweiterung auf die zweidimensional spannende Platte potenziert sich die beschriebene Formfunktion des Balkens zu  $\phi^2$ .

$$\text{gradSimp}_{\text{gelenkig}} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{d|\tilde{Y}_1|}{d\omega} \approx \frac{4}{M \omega_1^2} \quad \text{Gl. 64}$$

Gleichung 64 stellt somit die vereinfachte Formulierung zur Berechnung des Gradienten (*gradSimp*) in Plattenmitte für die Mode (1,1) respektive der ersten Eigenfrequenz bei ideal gelenkig gelagerten Bedingungen dar.

#### Eingespannte Auflagersituation – *gradSimp*

Auch für die mechanisch ideale Einspannung liegt nach bereits zitierten Quellen eine charakteristische Balkenfunktion vor (Gardonio & Brennan, 2004, S. 423). Gleichung 65 nennt diese zu

$$\phi_n(x) = (\cosh(k_{nb}x) - \cos(k_{nb}x)) - \sigma_n (\sinh(k_{nb}x) - \sin(k_{nb}x)) \quad \text{Gl. 65}$$

mit  $\sigma_n$  gleich

$$\sigma_n = \frac{\cosh(k_{nb}l) - \cos(k_{nb}l)}{\sinh(k_{nb}l) - \sin(k_{nb}l)} \quad \text{Gl. 66}$$

Die Werte des Ausdrucks  $k_{nbl}$  sind in Gardonio und Brennan (2004, S. 423) gelistet und in Tabelle 16 aufgeführt.

Tab. 16: Werte für  $k_{nbl}$  nach Gardonio und Brennan (2004, S. 423)

n	$k_{nbl}$
1	4,73004
2	7,85320
3	10,9956
4	14,1372
5	17,2788
6, 7, ...	$(2n+1)\pi/2$

Durch die erneute Vereinfachung bezüglich der Position ( $x = 0,5l$ ) und der Limitierung auf die erste Mode verkürzen sich  $\sigma_n$  und  $\phi_n$  zu Konstanten.

$$\begin{aligned} \phi_1(0,5l) &= (\cosh(4,73004 \cdot 0,5) - \cos(4,73004 \cdot 0,5)) \\ &\quad - \sigma_n(\sinh(4,73004 \cdot 0,5) - \sin(4,73004 \cdot 0,5)) = 1,5881 \end{aligned} \quad \text{Gl. 67}$$

mit  $\sigma_1$

$$\sigma_1 = \frac{\cosh(4,73004) - \cos(4,73004)}{\sinh(4,73004) - \sin(4,73004)} = 0,9825 \quad \text{Gl. 68}$$

Die bekannte Gradientengleichung (Gl. 54) des Balkens formuliert unter gleichzeitiger Substitution der Masse sich somit zu

$$a_1 = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{d|\tilde{Y}_1|}{d\omega} \approx \frac{\phi_1^2(x) \phi_1^2(y)}{M\omega_1^2} = \frac{1,5881^2}{M_1\omega_1^2} = \frac{1,5881^2}{M\omega_1^2} = \frac{2,522}{M\omega_1^2}. \quad \text{Gl. 69}$$

Durch die Übertragung von der Balkengleichung auf die Plattengleichung wird auch hier der Zähler quadriert.

$$gradSimp_{eingespannt} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{d|\tilde{Y}_1|}{d\omega} \approx \frac{1,5881^4}{M\omega_1^2} = \frac{6,361}{M\omega_1^2} \quad \text{Gl. 70}$$

Gleichung 70 stellt somit die Formulierung zur Berechnung des vereinfachten Gradienten (*gradSimp*) in Plattenmitte für die Mode (1,1) respektive der ersten Eigenfrequenz bei ideal eingespannten Randbedingungen dar.

## 5.2.2 Umsetzung eines approximierten Gradienten (*gradApproxl*)

Die Umsetzung eines approximierten Gradienten erfolgt auf Grundlage der vorgestellten Gleichungen 64 und 70. In beide Gleichungen werden die entsprechenden Plattenparameter eingesetzt und die vereinfachten Gradienten (*gradSimp*) berechnet. Unter der getroffenen Konvention, dass das Auflager in vertikaler Richtung (z-Achse) unverschieblich ist, hat der Gradient bzw. die Admittanz am Auflager (0%) einen Wert von 0. Ansatz I verbindet nun den vereinfachten Gradienten (*gradSimp*) in

Plattenmitte linear mit dem Gradienten (= 0) an Position 0%. Der approximierte Gradient (*gradApproxl*) entspricht dem Wert der linearen Verbindung an gesuchter Position entlang der betrachteten Achse.

### 5.2.3 Ergebnisse des approximierten Gradienten nach Ansatz I

Folgend werden Ergebnisse für Ansatz I in Zusammenhang mit dem vereinfachten Gradienten (*gradSimp*) und dem approximierten Gradienten (*gradApproxl*) vorgestellt. Auf Basis der Gleichungen der vereinfachten Gradienten in Plattenmitte (Gl. 64 und 70) werden diese für die Parameter der untersuchten Platte P9 berechnet. Die Masse der Platte P9 ergibt sich aus den Dimensionen und der Dichte zu 6325 kg. Die Eigenfrequenzen der ersten Mode für die gelenkige Auflagersituation beträgt 23 Hz, während die erste Eigenfrequenz der eingespannten Lagerung eine Frequenz von 43 Hz besitzt. Alle Berechnungen sind in MATLAB Skript „hybridModell.m“ implementiert. Die Berechnungen der Eigenfrequenzen folgen dabei der im Rahmen vorliegender Arbeit zitierten Fachliteratur (siehe Kapitel 2). Eingesetzt in erwähnte Gleichungen ergeben sich die vereinfachten Gradienten zu

$$gradSimp_{gelenkig} = \frac{4}{M\omega_1^2} = \frac{2\pi \cdot 4}{6325 \cdot (2\pi \cdot 23)^2} = 1,84 \text{ E-}7 \quad \text{Gl. 71}$$

und

$$gradSimp_{eingespannt} = \frac{1,5881^4}{M\omega_1^2} = \frac{2\pi \cdot 1,5881^4}{6325 \cdot (2\pi \cdot 43)^2} = 8,51 \text{ E-}8 \quad \text{Gl. 72}$$

Die eingesetzten Werte unterliegen bei gezeigten Dokumentationen gewissen Rundungsfehlern. Für die genaue Berechnung und Nennung der Werte wird auf das MATLAB Skript „hybridModell.m“ verwiesen. Aus Gründen der Kompatibilität der Umrechnungen zwischen Kreisfrequenz und Frequenz sind stets die nötigen Multiplikationen mit  $2\pi$  integriert.

Abbildung 46 visualisiert beide vereinfachten Gradienten zusammen mit den Zielwerten des numerisch berechneten Gradienten *gradNum* entlang der Achse I. Der approximative Gradient nach Ansatz I (*gradApproxl*) ist in gezeigter Grafik bereits als lineare Verbindung eingezogen. Zusätzlich ist der bereits vorgestellte Übergangsgradient *gradTrans* dargestellt. In Abbildung 46 ist eine deutliche Unterschätzung des vereinfachten Gradienten in Plattenmitte gegenüber des numerischen zu entnehmen. Diese Unterschätzung ist zu erwarten, da der korrekte Gradient einer Summation aller Eigenfrequenzen respektive Moden entspricht. Unter alleiniger Betrachtung der Mode (1,1) muss der geschätzte Gradient somit geringer ausfallen. Bei einer potentiellen Betrachtung weiterer Moden, wäre zu beachten, dass in Plattenmitte nicht alle Eigenfrequenzen und damit Moden eingehen. Nur Moden, die keine Knotenlinie durch den Plattenmittelpunkt aufweisen, können berücksichtigt werden.

Aufgrund des sigmoiden Verlaufs des Gradienten *gradNum* überschätzt der approximative Gradient (Lineare) in weiten Teilen des relevanten Bereichs (unter *gradTrans*) den Referenzwert (*gradNum*). Mit dieser Kenntnis wird deutlich warum die Hinzunahme weiterer Moden und damit eine Verbesserung von *gradSimp* nicht unbedingt zielführend für Ansatz I wäre. Damit würde sich die Differenz im relevanten Bereich zusätzlich erhöhen.

Für die objektive Bewertung der Prognosequalität werden im Rahmen vorliegender Untersuchungen zwei Fehlerdarstellungen eingeführt. Zum einen der relative Fehler (nach DIN 1319-1:1995-01)

zwischen  $gradApproxI$  und  $gradNum$  nach Gleichung 73.

$$\text{relativer Fehler} = \frac{\text{absoluter Fehler}}{\text{wahrer Wert}} = \left| \frac{gradNum - gradApproxI}{gradNum} \right| \quad \text{Gl. 73}$$

Zum anderen werden Diskrepanzen zwischen Zielwert ( $gradNum$ ) und Prognose ( $gradApproxI$ ) logarithmisch in dB berechnet ( $\Delta_{dB}$ ). Gleichung 74 beschreibt die Unterschiede mathematisch. Diese Darstellung ermöglicht einen praxisnahen Bezug der Modellqualität und hilft bei der Diskussion.

$$\Delta_{dB} = |20 \cdot \log(gradApprox) - 20 \cdot \log(gradNum)| \quad \text{Gl. 74}$$

Abbildung 47 visualisiert diese Fehlerbetrachtungen. Berechnet werden diese Fehlerwerte an den bekannten Auswertungspositionen. Zwischen diesen Auswertungspunkten findet lineare Interpolation statt. Tabelle 17 listet die vorliegenden Fehler auf ganze Prozentpunkte gerundet für die Auswertungspunkte im relevanten Bereich (0, 1d, 2d). Die Fehlerberechnung wird hierbei nicht für den Auswertungspunkt C (unmittelbare Auflagernähe) durchgeführt. Ergebnisse des numerischen Gradienten in nächster Auflagerumgebung werden nicht berücksichtigt, da die Vorarbeiten in Kapitel 4 Unsicherheiten in diesen Bereichen aufzeigten. Die Validität der Simulationen in unmittelbarer Auflagernähe könnten unter Berücksichtigung der Praxisrelevanz als fortführende Untersuchungen folgen.

Mit einem maximalen Fehler bei eingespannten Lagerung von rund 500 % ist dieser höher als der relative Fehler der gelenkigen Auflagerbedingung (220 %). In beiden Fällen nehmen die Fehlerbeträge zum Auflager hin zu. Besonders im relevanten Bereich für die Implementierung eines hybriden Modells finden sich somit verhältnismäßig hohe Fehlerbeträge. Die Differenz zwischen approximativen und numerischen Gradienten betragen an Position 0 16 dB respektive 10 dB.

Nach vergleichbarem Vorgehen wurden die Achsen III und VI untersucht. Abbildung 48 visualisiert die Ergebnisse für Achse VI. Abbildung E.30 im Anhang stellt die Ergebnisse entlang Achse III dar. Für die relevanten Auswertungspositionen 0, 1d und 2d finden sich ebenfalls gelistete Werte im Anhang (Tab. D.2 und D.3). Werden die Fehlerwerte parallel zur x-Achse untersucht fallen die deutlich höheren Werte der Achse I auf. Zu näheren Untersuchung zeigen die Abbildungen 49 und 50 die Fehlerwerte entlang Achse B. Deutlich erkennbar sind auch hier die verhältnismäßig hohen Fehlerwerte im Eckbereich (0 %) und die geringeren Schwankungen der übrigen Achsen.

Tab. 17: Fehlerbetrachtung zwischen *gradNum* und *gradApproxI* nach Ansatz I entlang Achse I

<b>gelenkig</b>		
Auswertungspunkt	relativer Fehler [%]	Differenz [dB]
0	220	10
1d	48	3
2d	14	1

<b>eingespannt</b>		
Auswertungspunkt	relativer Fehler [%]	Differenz [dB]
0	496	16
1d	105	6
2d	11	1

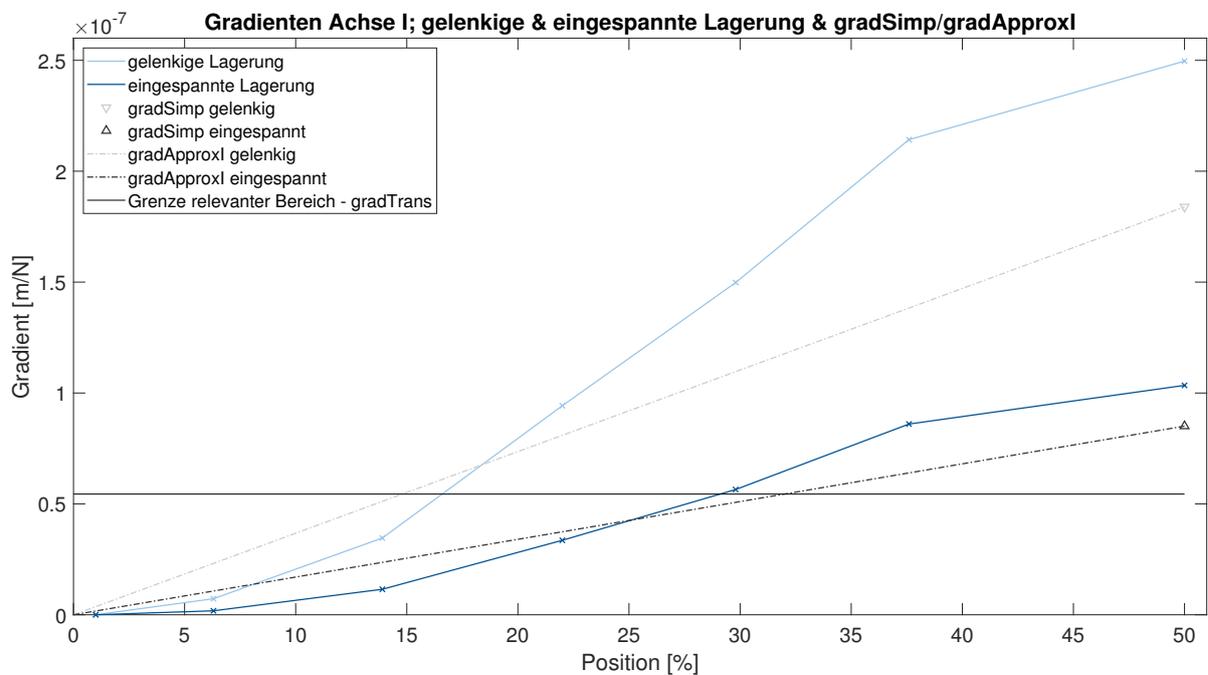


Abb. 46: Vereinfachte Gradienten entlang der Achse I sowie Umsetzung des Ansatzes I

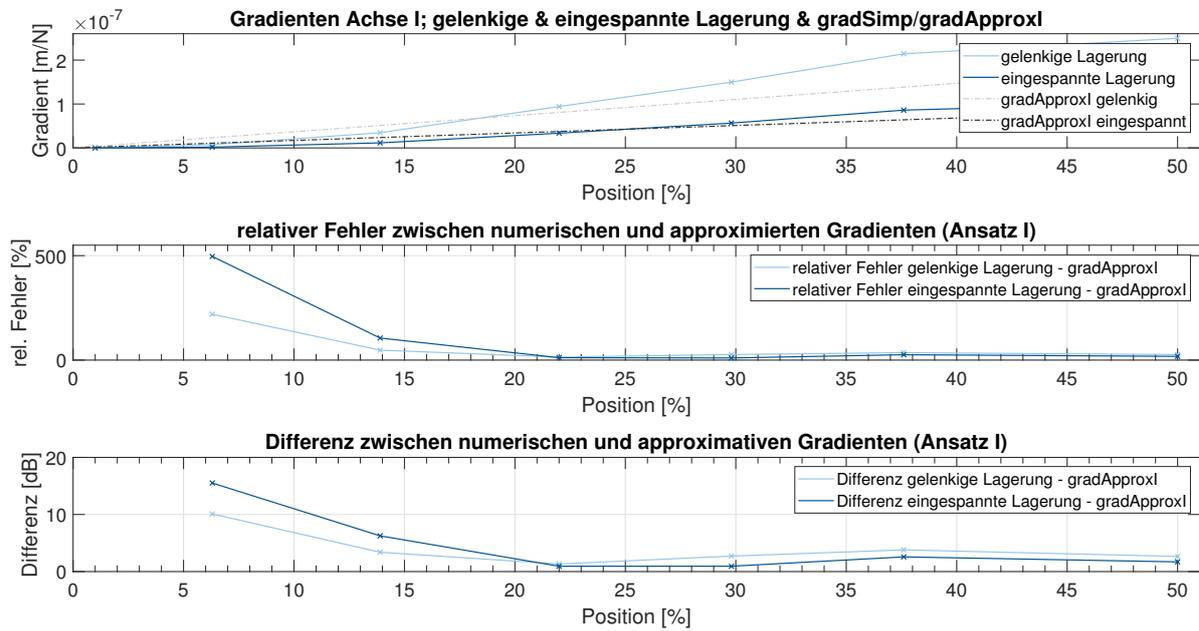


Abb. 47: Vereinfachte Gradienten entlang der Achse I sowie Umsetzung des Ansatzes I inklusive Fehlerbetrachtung

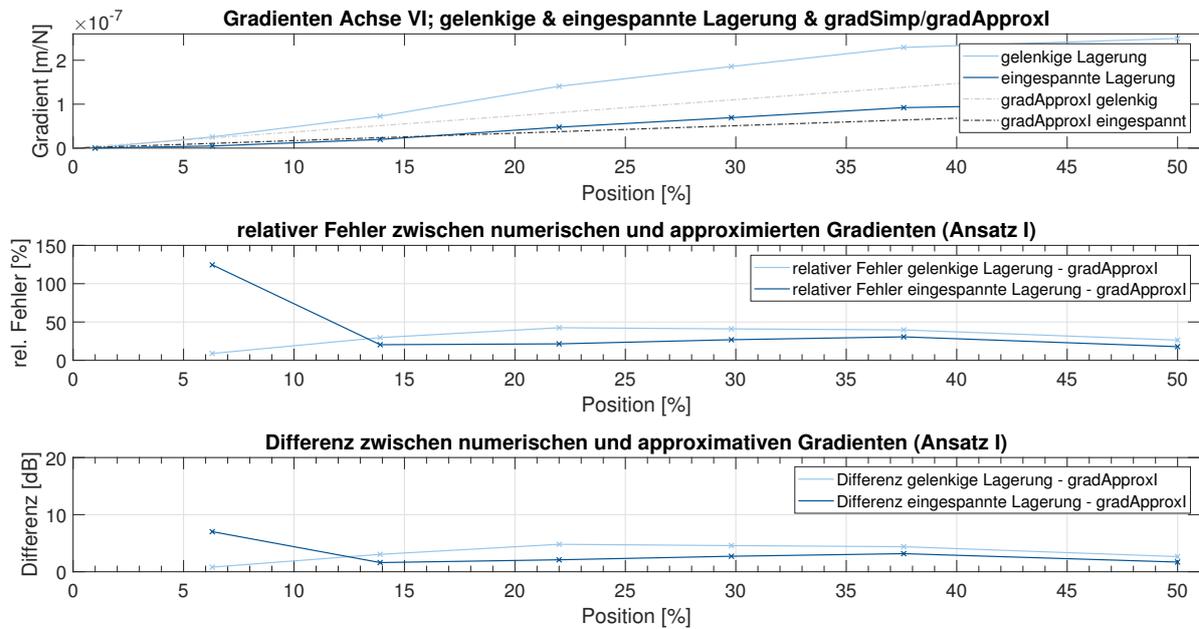


Abb. 48: Vereinfachte Gradienten entlang der Achse VI sowie Umsetzung des Ansatzes I inklusive Fehlerbetrachtung

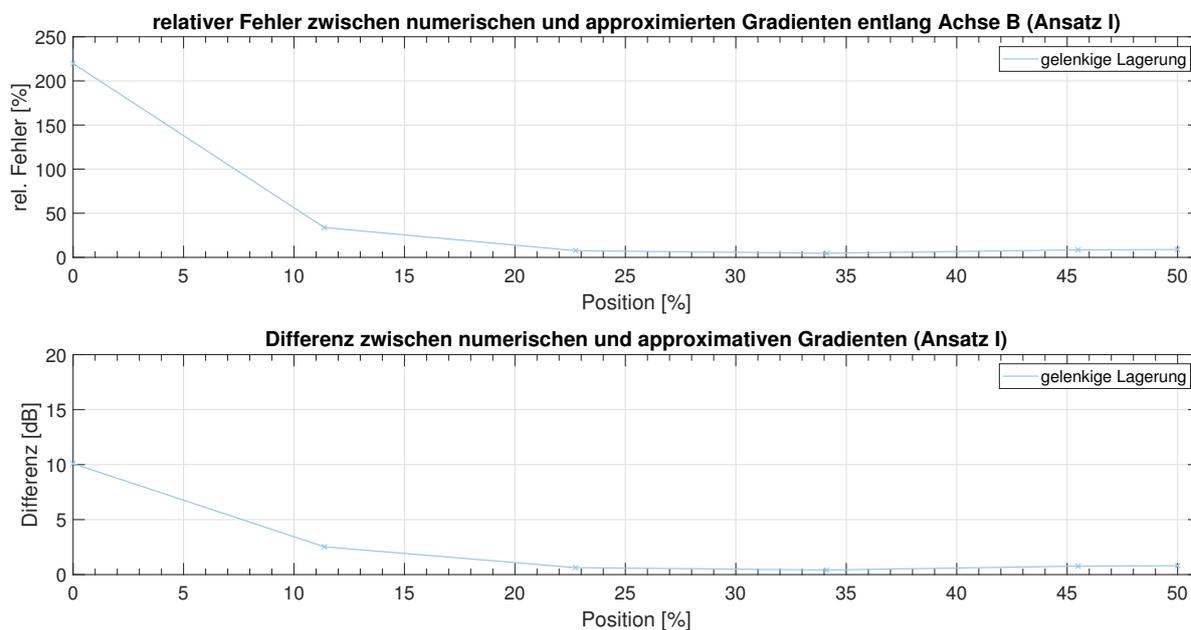


Abb. 49: Fehlerwerte des Ansatzes I entlang der Achse B für gelenkige Lagerung

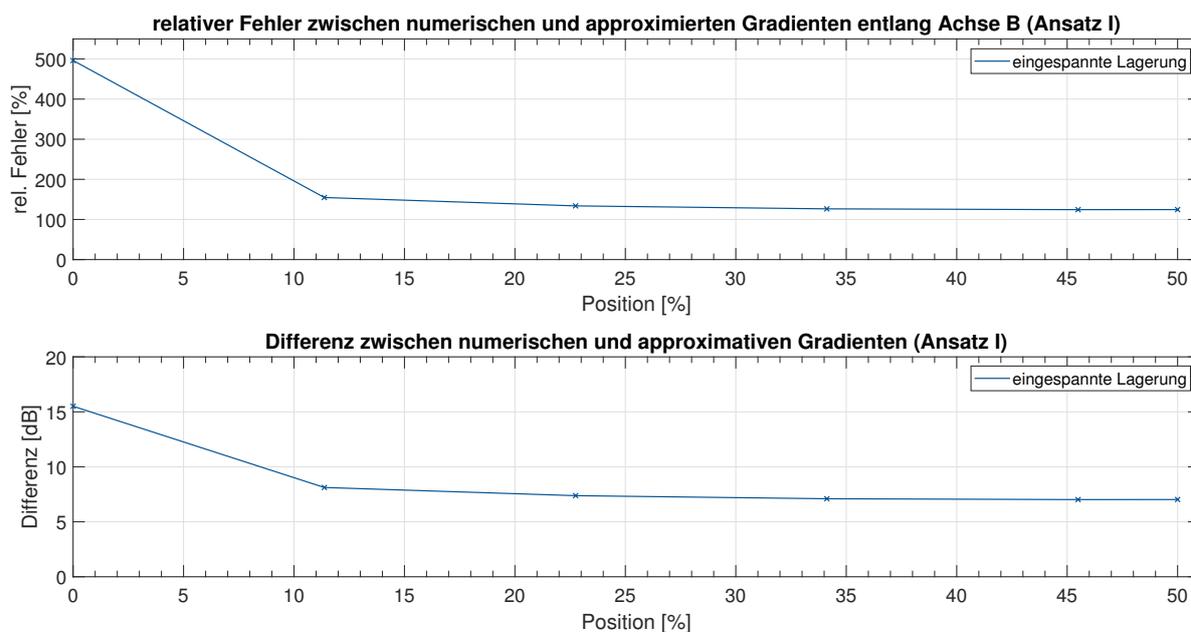


Abb. 50: Fehlerwerte des Ansatzes I entlang der Achse B für eingespannt Lagerung

### 5.3 Vereinfachter Gradient an beliebigen Auswertungspositionen – Ansatz II

Folgend wird die Herleitung eines vereinfachten Gradienten für Ansatz II vorgestellt. Die Erörterung der Umsetzung als approximativer Gradient sowie vergleichende Ergebnisse schließen an.

#### 5.3.1 Herleitung des vereinfachten Gradienten an beliebiger Position (*gradAna1*)

Als konzeptionelle Grundlage wird für Ansatz II der Gradient der Mode (1,1) analytisch definiert. Im Gegensatz zu *gradSimp* verzichtet dieser Ansatz auf eine positionelle Beschränkung (Plattenmitte). Dadurch werden die zugrundeliegenden Gleichungen weniger stark vereinfacht und die Fehlerausprägung nimmt ab.

#### Gelenkige Auflagersituation – *gradAna1*

Im Gliederungspunkt der gemeinsamen theoretischen Grundlagen wurde bereits die für Ansatz II nötige Gleichung definiert (vgl. Gleichung 60). Folgend erneut gezeigt, bildet Gleichung 75 den analytischen Gradienten der ersten Mode.

$$gradAna1 = a_1 = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{d|\tilde{Y}_1|}{d\omega} \approx \frac{\phi_1^2(x) \phi_1^2(y)}{M\omega_1^2} \quad \text{Gl. 75}$$

Für die ideal mechanische Auflagerung gelenkig wird die bekannte Formfunktion wiederholt verwendet.

$$\phi_n(x) = \sqrt{2} \sin(k_{nb}x) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad \text{Gl. 76}$$

mit  $k_{nb}l = n\pi$

Im Gegensatz zu Ansatz I vereinfacht sich die Formfunktion nicht weiter. Gleichung 77 definiert anschließend den analytischen Gradienten der Mode (1,1) ( $n = 1$ ) für allseits gelenkige Auflager mit eingesetzter Formfunktion.

$$gradAna1_{gelenkig} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{d|\tilde{Y}_1|}{d\omega} \approx \frac{\sqrt{2} \sin\left(\frac{1\pi x}{l_x}\right) \sqrt{2} \sin\left(\frac{1\pi y}{l_y}\right)}{M\omega_1^2} \quad \text{Gl. 77}$$

$$= \frac{2 \sin\left(\frac{1\pi x}{l_x}\right) \sin\left(\frac{1\pi y}{l_y}\right)}{M\omega_1^2}$$

#### Eingespannte Auflagersituation – *gradAna1*

Für das eingespannte Auflager spielt ebenfalls die Formfunktion eine entscheidende Rolle. Auch hier wird die Abhängigkeit von der Auswertungsposition durch die Koordinaten x und y deutlich. Für Mode (1,1) ergibt sich die Gradientengleichung für den analytischen Gradienten der ersten Mode zu bekannter Gleichung

$$gradAna1 = a_1 = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{d|\tilde{Y}_1|}{d\omega} \approx \frac{\phi_1^2(x) \phi_1^2(y)}{M\omega_1^2} \quad \text{Gl. 78}$$

Die Formfunktion der eingespannten Lagerung geht folgend mit

$$\begin{aligned} \phi_1(u) = & (\cosh(4,73004 l u) - \cos(4,73004 l u)) \\ & - \sigma_n(\sinh(4,73004 l u) - \sin(4,73004 l u)) \quad (u = x \text{ oder } y) \end{aligned} \quad \text{Gl. 79}$$

und  $\sigma_1$

$$\sigma_1 = \frac{\cosh(4,73004) - \cos(4,73004)}{\sinh(4,73004) - \sin(4,73004)} = 0,9825 \quad \text{Gl. 80}$$

in die Gradientengleichung ein. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird auf eine zusammengesetzte Schreibweise der Formfunktion und der Gradientengleichung verzichtet.

### 5.3.2 Umsetzung eines approximierten Gradienten (*gradApproxII*)

Ziel ist es die Prognosequalität des zugrundeliegenden *gradAna1* zu verbessern. Wie bereits mehrfach erwähnt wird der tatsächliche Gradient durch die eingeführten Vereinfachung stets unterschätzt. Dem modalen Ansatz der Admittanz zufolge setzt sich die Admittanz eines beliebigen Systems und in diesem Fall einer Platte aus der Summation einzelner gekoppelter Einmassenschwinger (sdof) Admittanzen zusammen (Fahy, 2006, S. 90). Jede Eigenfrequenz trägt mit einer korrespondierenden sdof-Admittanz bei. Diesen Zusammenhang visualisiert Abbildung 51 aus Fahy (2006, S. 99). Wird für die Admittanzbetrachtung eine bestimmte obere Grenzfrequenz definiert, werden bei der Summe des modalen Ansatzes folglich Moden mit höherer Eigenfrequenz außer Acht gelassen. Die einzelnen Modenadmittanzen oberhalb des betrachteten Frequenzbereichs nehmen allerdings als sogenannte residuale Moden Einfluss auf die Berechnung (Fahy, 2006, S. 98). Im Falle der hier betrachteten Punktadmittanz enthalten diese residualen Moden ausschließlich den Federanteil dieser Moden (linker „Arm“ der sdof-Admittanz, vgl. Abb. 8) (Fahy, 2006, S. 98). Abbildung 52 aus Fahy (2006, S. 99) visualisiert diese residualen Moden eines gelenkig gelagerten Balkens für eine betrachtete Frequenzgrenze von 1000 Hz. Gleichung 81 aus Fahy (2006, S. 98) definiert diesen Zusammenhang mathematisch.

$$\tilde{Y}(\omega) \approx j\omega \sum_{r=1}^R \frac{\phi_r(x) \phi_r(y)}{M_r [\omega_r^2 (1 + j\eta) - \omega^2]} + j\omega \sum_{r=R+1}^{\infty} \frac{\phi_r(x) \phi_r(y)}{M_r \omega_r^2} \quad \text{Gl. 81}$$

Im Fall der Vereinfachungen vorliegender Untersuchung und der Beschränkung auf Mode (1,1) sind folglich alle übrigen Moden Teil des Residuenters. Ansatz II versucht nun durch einen empirischen Korrekturfaktor den Fehleranteil der residualen Moden auszugleichen. Der bereits eingeführte relative Fehler könnte zwar genau diese Unterschätzung ausdrücken, mit Blick auf dessen Gleichung wird jedoch ersichtlich, dass dieser im Nenner von *gradNum* abhängig ist. Da einem approximativen Modell diese Zielgröße nicht vorliegt, wird dieser Bezug geändert und statt *gradNum* der bekannte *gradAna1* eingesetzt. Der resultierende Wert wird folgend Korrekturfaktor genannt.

$$\text{Korrekturfaktor} = \frac{\text{gradNum} - \text{gradAna1}}{\text{gradAna1}} \quad \text{Gl. 82}$$

Eine Umstellung der Gleichung 82 zu

$$\text{Korrekturfaktor} \cdot \text{gradAna1} = \text{gradNum} - \text{gradAna1} \quad \text{Gl. 83}$$

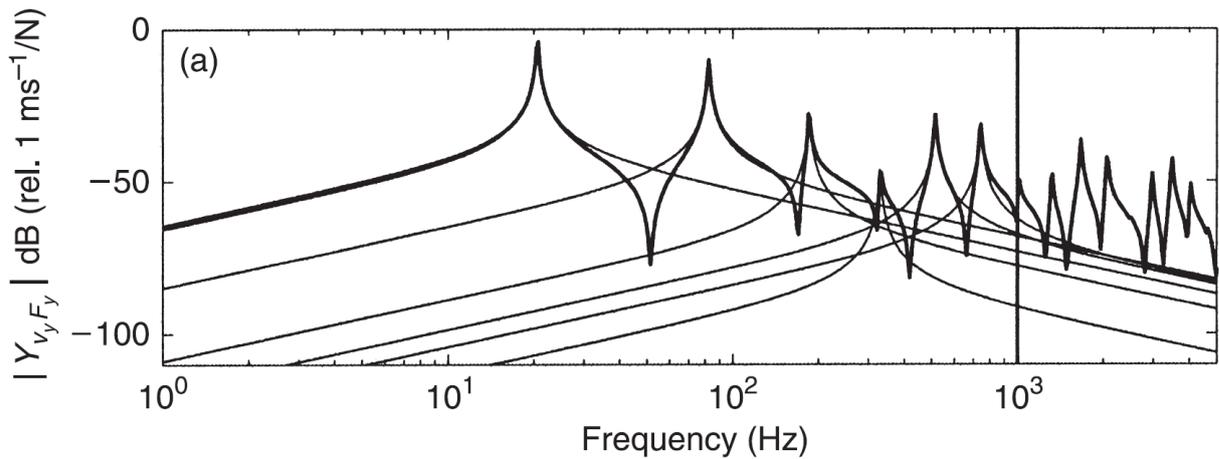


Abb. 51: Visualisierung des modalen Ansatzes einer Punktdmittanz am gelenkig gelagerten Balken (aus Fahy (2006, S. 99))

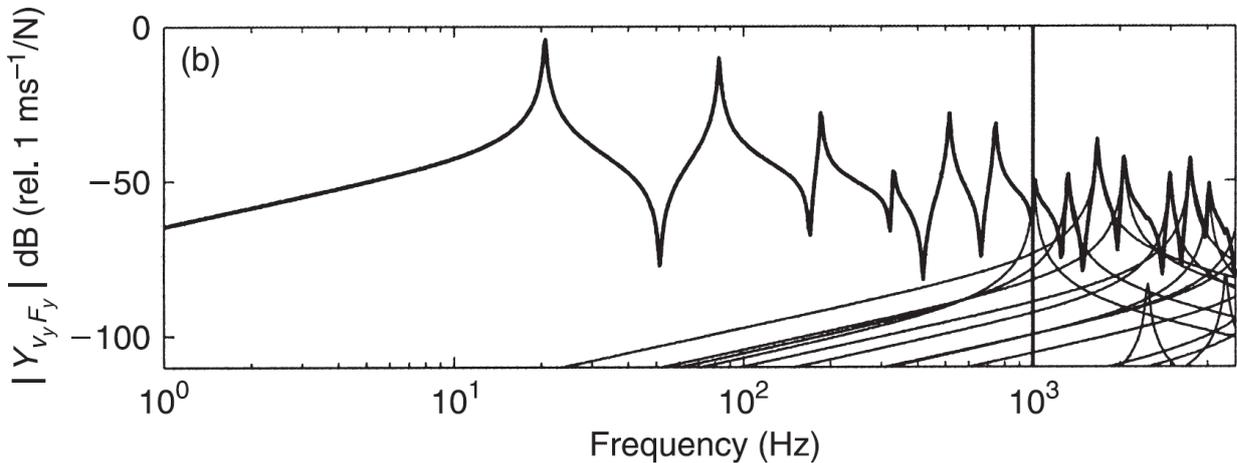


Abb. 52: Visualisierung des modalen Ansatzes einer Punktdmittanz am gelenkig gelagerten Balken mit einer Grenzfrequenz von 1 kHz und den Anteilen der residualen Moden (aus Fahy (2006, S. 99))

mit

$$\Delta = \text{gradNum} - \text{gradAna1} \quad \text{Gl. 84}$$

berechnet den Abstand  $\Delta$  zwischen  $\text{gradAna1}$  und dem Zielwert  $\text{gradNum}$ . Der approximative Gradient  $\text{gradApproxII}$  ist letztlich zu

$$\begin{aligned} \text{gradApproxII} &= \text{gradAna1} + \text{gradAna1} \cdot \text{Korrekturfaktor} \\ &= \text{gradAna1} \cdot (1 + \text{Korrekturfaktor}) \end{aligned} \quad \text{Gl. 85}$$

definiert. Physikalisch entspricht der Ausdruck  $\text{Korrekturfaktor} \cdot \text{gradAna1}$  dem Beitrag der residualen Moden. Der Korrekturfaktor wird im Rahmen des Ansatzes II als empirische Mittelung aus Korrekturfaktoren variierender Platten generiert. Im Weiteren wird die Bezeichnung  $\text{Korrekturfaktor}$  beibehalten. Für mögliche anschließende Untersuchungen könnte eine Umbenennung in beispiels-

weise „residualer Koeffizient“ oder „Residuenfaktor“ Verwechslungen vorbeugen und eindeutige Zuordnung gewährleisten.

### 5.3.3 Ergebnisse des approximierten Gradienten nach Ansatz II

Folgend werden zuerst die Ergebnisse der empirischen Ermittlung des Korrekturfaktors vorgestellt sowie der entwickelte *gradApproxII*. Abbildung 53 zeigt im oberen Plot den Verlauf des numerischen Gradienten sowie den des *gradAna1* entlang der Achse I und für gelenkige Lagerung. Im unteren Plot ist der in Gleichung 82 definierte Korrekturfaktor aufgezeichnet. Abbildung 54 visualisiert gleiche Inhalte für die eingespannte Auflagersituation. Sowohl für die gelenkige als auch die eingespannte Auflagersituation folgt die Kurve des analytischen Gradienten der Mode (1,1) annähernd der Doppelkrümmung des numerischen Gradienten. Wie im vorhergehenden Gliederungspunkt erläutert unterschätzt der vereinfachte Gradient stets den Zielwert. Diese Unterschätzung wird durch den Verlauf des Korrekturfaktors sichtbar. Für beide Auflagersituationen zeigt sich ein qualitativ vergleichbarer Verlauf dieses Faktors mit starker Wertezunahme im auflagernahen Bereich.

Wie bereits begründet werden die Achsen I und VI als Grenzwerte verstanden. So wird davon ausgegangen, dass vergleichbar mit dem Verhalten der Gradienten auch die Korrekturfaktoren zwischen den Achsen streng monoton fallen bzw. steigen. Die Abbildungen 55 und 56 zeigen die bereits bekannten Zusammenhänge für die Achse VI. Mit Verweis auf den verschobenen Wertebereich des Korrekturfaktors (y-Achse), sind die deutlich niedrigeren Werte des Faktors und somit eine höhere Übereinstimmung zwischen *gradAna1* und *gradNum* erkennbar.

Es wird mutmaßlich unterstellt, dass die Korrekturfaktoren streng monoton von Achse I zu Achse VI fallen. Um diese Annahme in Ansätzen zu belegen, bilden die Plots E.31 und E.32 im Anhang die Achse III ab. Die Abbildungen 57 und 58 weisen diesen Zusammenhang für die zur x-Achse parallele Achse B nach. Durch rote Kreise sind die Werte der gezeigten Achsen I, III und VI hervorgehoben. Unterstellt wird im Rahmen vorliegender Arbeit, dass letzteres Verhalten nicht nur für Achse B gilt, sondern für alle Positionen im relevanten Bereich.

Wie bereits erläutert versucht Ansatz II den Anteil der residualen Moden beziehungsweise den diskutierten Ausdruck aus Gleichung 82 durch empirische Datenerhebung zu bestimmen und anschließend als Mittelwert festzulegen. Dazu wurde die Platte P9 als Standard festgelegt und Parametervariationen aufgeprägt. Teilweise wurden dazu die bereits aus dem Factor Screening bekannten Datensätze verwendet. Als Variationen wurden Plattenparameter gewählt, die in praxisbezogene Rahmenbedingungen passen. Tabelle 18 fasst die verwendeten Datensätze zusammen. Die Abbildungen 59 und 60 zeigen die korrespondierenden Verläufe der Korrekturfaktoren entlang Achse I. Aufgrund der Datendichte sind nur Grenzwerte und der Mittelwert farbig ausgegeben. Passend zu den bereits bekannten Ergebnissen aus Gliederungspunkt 3.5 (Factor Screening) zeigen sich Änderungen in der geometrischen Dimension als ausschlaggebend, während Änderungen der Materialparameter in praxisrelevanten Bereichen deutlich weniger Variation erwirken. Tabelle 19 zeigt die Werte der Mittelwerte tabellarisch. Bei niedrigen Korrekturwerten muss dabei die Genauigkeit höher angegeben werden, um korrekte Ergebnisse wiederzugeben (Änderung der gültigen Ziffern). Dennoch werden auf Rundungen hingewiesen. Für fortführende Berechnungen wurden stets MATLAB-intern die Ergebnisse weitergegeben.

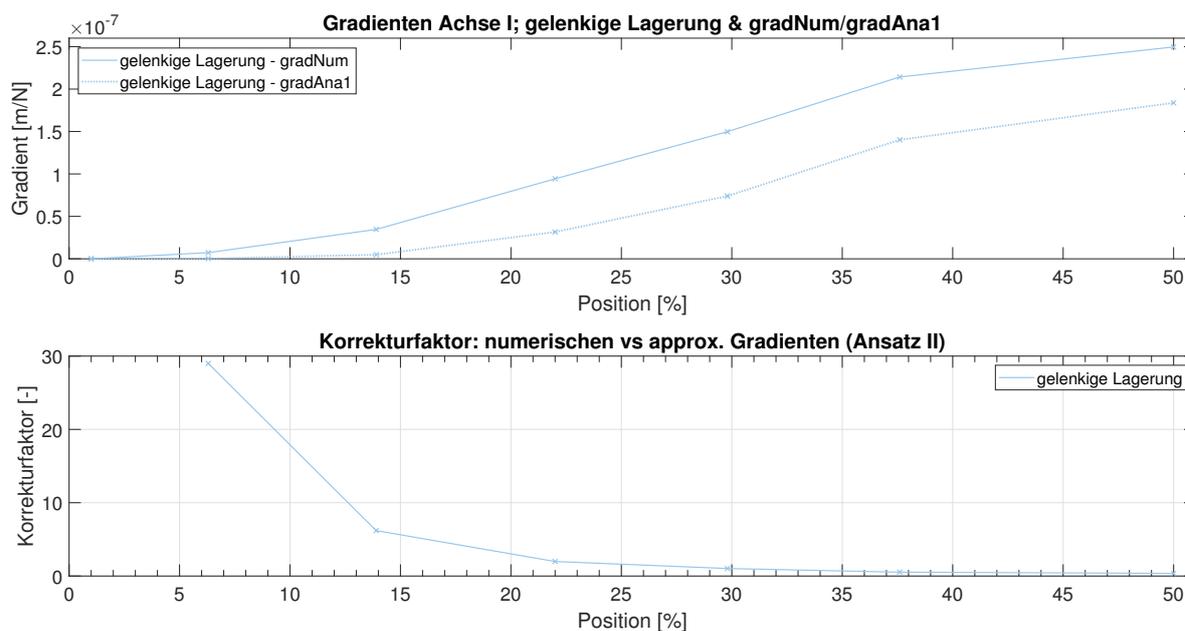


Abb. 53: Vereinfachte Gradienten entlang der Achse I für gelenkige Lagerung (Ansatz II)

Tab. 18: Materialparameter für die empirische Datenerhebung des Korrekturfaktors

Benennung	variierter Parameter	Wert
P9	Standard	
plus100% Dimension	$l_x, l_y, l_z$	100 % vergrößert
minus50% Dimension	$l_x, l_y, l_z$	50 % verkleinert
plus50% Dimension	$l_x, l_y, l_z$	50 % vergrößert
plus20% Elastizitätsmodul	Elastizitätsmodul	33 E9 N/m <sup>2</sup>
plus10% Elastizitätsmodul	Elastizitätsmodul	30,25 E9 N/m <sup>2</sup>
plus10% Dichte	Dichte	2530 kg/m <sup>3</sup>
Verlustfaktor 0,01		
plus100% $l_y$		

Der nächste Schritt des Ansatzes II ist die Entwicklung des *gradApproxII* und die Vorstellung erster Ergebnisse sowie Fehlerbetrachtungen. Für erste Ergebnisse wird die Umsetzbarkeit empirischer Fehlerkurven überprüft. Dazu werden an bekannten Stellen der approximierte Gradient mit gemitteltem Korrekturfaktor gebildet und mit simulierten Daten verglichen. Gezeigt werden die Daten zum Standard (P9) sowie die Extremwerte der Variationen bei 100 % größeren Dimensionen als repräsentative Variationen. Zum einen werden die bekannten zwei Fehlerdarstellung aus relativen Fehler und Differenz in dB abgebildet. Zum anderen werden die approximierten Gradienten zusammen mit den entsprechenden simulierten Admittanzen dargestellt. Als Auswertungspositionen wird Achse I mit positioneller Begrenzung auf den relevanten Bereich (0, 1d, 2d, 3d) herangezogen. Die gezeigten Admittanzen werden an Position 0 visualisiert.

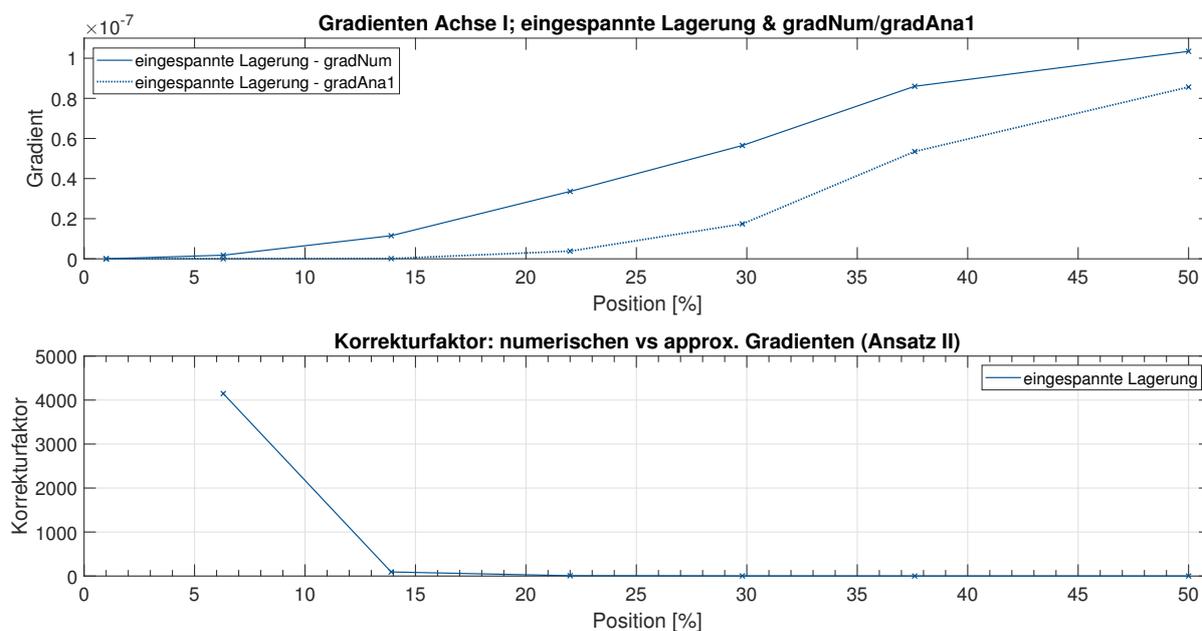


Abb. 54: Vereinfachte Gradienten entlang der Achse I für eingespannte Lagerung (Ansatz II)

Tab. 19: Mittelwerte des Korrekturfaktors entlang der Achse I

**gelenkig**

Auswertungsposition	Korrekturfaktor
0	31,3
1d	6,3
2d	2,57
3d	1,48
4d	1,01
5d	0,81

**eingespannt**

Auswertungsposition	Korrekturfaktor
0	4708
1d	77,8
2d	8,69
3d	2,25
4d	1,01
5d	0,26

Die Daten der Platte P9 zeigen für die Einspannung geringere Fehlerwerte als für die gelenkige Lagerung. Dies trifft auch für die Variante plus100% Dimension zu. Die Tabellen 20 listet die Fehlerwerte für die Positionen 0, 1d und 2d. Die Abbildungen 61, 62, 63 und 64 zeigen die zwei Beispielsituationen mit

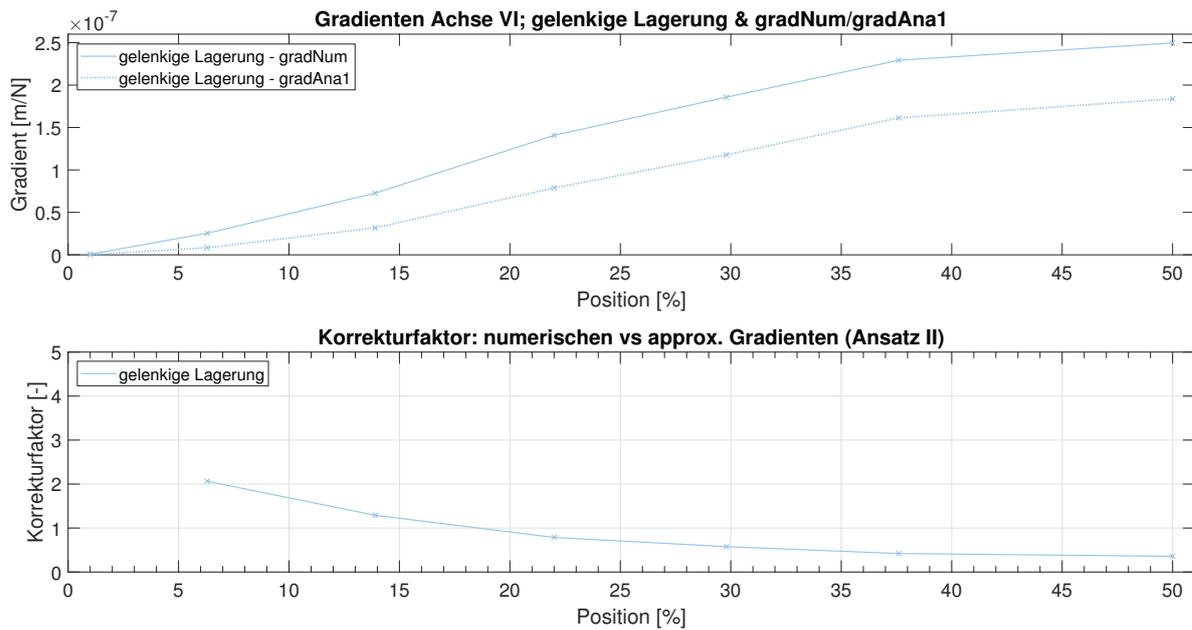


Abb. 55: Vereinfachte Gradienten entlang der Achse VI für gelenkige Lagerung (Ansatz II)

der höchsten und niedrigsten Übereinstimmung aus betrachteten Daten. Die entsprechenden übrigen Situationen finden sich im Anhang.

Zusätzlich wird Ansatz II auf Achse VI verwendet. Wie Abbildungen 57 und 58 (Faktoren entlang Achse B) zeigen, können die Korrekturwerte nicht auf eine beliebige Position übertragen werden. Im Rahmen vorliegender Untersuchungen werden dazu die Mittelwerte der Korrekturfaktoren der Achse I durch die Verläufe der beiden letzteren erwähnten Grafiken gewichtet. Dazu wird das Verhältnis zwischen den Korrekturwerten entlang Achse B für Position 0 und 0<sub>sy</sub> gebildet und mit dem gemittelten Korrekturwert an Position 0 verrechnet. Für die gelenkige Lagerung ergibt sich ein Verhältnis von  $28,9984/2,06343 = 0,07116$  und für die eingespannte Lagerung von  $4148,51/15,2463 = 3,675 \text{ E-}3$ . Werden diese Werte anschließend mit den gemittelten Werten verrechnet, wird auf die gemittelten Korrekturwerte an Position S<sub>y</sub> geschlossen. Diese Berechnungsweise gilt für getätigte Untersuchungen als plausible Annahme, sollte allerdings durch weiterführende Untersuchungen belegt werden. Der gemittelten Korrekturwert an Position 0<sub>sy</sub> für die gelenkige Lagerung entspricht damit 2,22 und ist für die eingespannte Lagerung gleich 17,3. Die Abbildungen E.37 und E.38 geben diese Ergebnisse grafisch wieder. Als weitere Annahme wird vorausgesetzt, dass diese Verhältnisse auch für die Achsen C und D (relevanter Bereich) gelten. Mit Verweis auf bereits vorgestellte Ergebnisse unter Gliederungspunkt 4.2 ist dies jedoch eine vereinfachte Annahme und sollte in zukünftigen Überlegungen untersucht werden.

Weiter wird Ansatz II in vereinfachter Form auf Platte P9 mit kalibrierten Lagerungsbedingungen angewandt. Daher muss die vorliegende Rotationssteifigkeit berücksichtigt werden. Wie einige bereits bekannte Ergebnisse zeigen, liegt der Gradient der kalibrierten Bedingungen in Plattenmitte ungefähr mittig zwischen den Gradienten der idealen mechanischen Bedingungen. Mit dieser groben Vereinfachung wird der approximative Gradient an Position 0<sub>sy</sub> (Achse VI) bestimmt. Dazu werden die approximativen Gradienten für die idealen Auflager berechnet und der Mittelwert gebildet. Die Ergebnisse

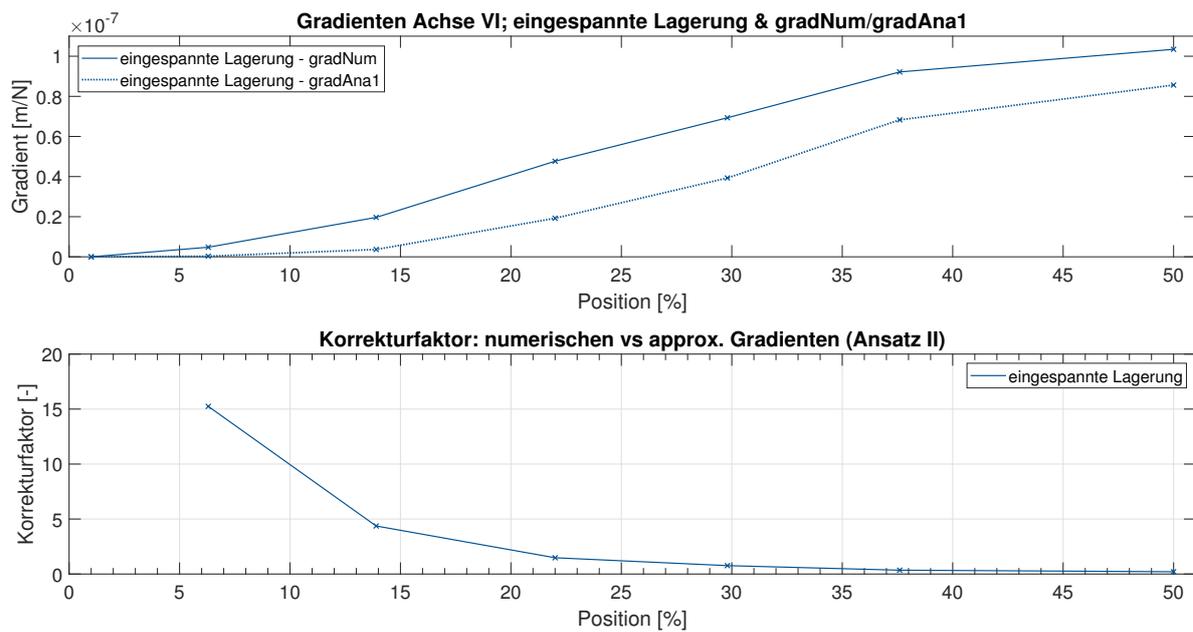


Abb. 56: Vereinfachte Gradienten entlang der Achse VI für eingespannte Lagerung (Ansatz II)

werden in Abbildung 65 visualisiert und zeigen eine Differenz von 1 dB. Die Ergebnisse für die idealen Lagerbedingungen finden sich im Anhang (Abb E.37 und E.38).

Bei vorgestellten Ergebnissen muss angemerkt werden, dass der verwendete Mittelwert des Korrekturfaktors verhältnismäßig nah zu den Korrekturwerten der Standardplatte P9 ist (vgl. Abb 59 und 60). Geringe Differenzen zwischen *gradNum* und *gradApproxII* sind daher zu erwarten. Als abschließende Ergebnisse werden deshalb Daten der Platte mit 100 % größeren Dimensionen an Stelle 0sy (Achse VI) vorgestellt. Die Abbildung 66 zeigt für die kalibrierten Plattenbedingungen und die bereits gezeigten Vereinfachungen die simulierte Admittanz sowie *gradNum* und *gradApproxII*. Die Differenz beträgt 8 dB. Die Abbildungen E.39 und E.40 im Anhang zeigen die entsprechenden Ergebnisse für die idealen Auflagerbedingungen. Mit 1 dB und 5 dB sind die Differenzen wie zu erwarten geringer.

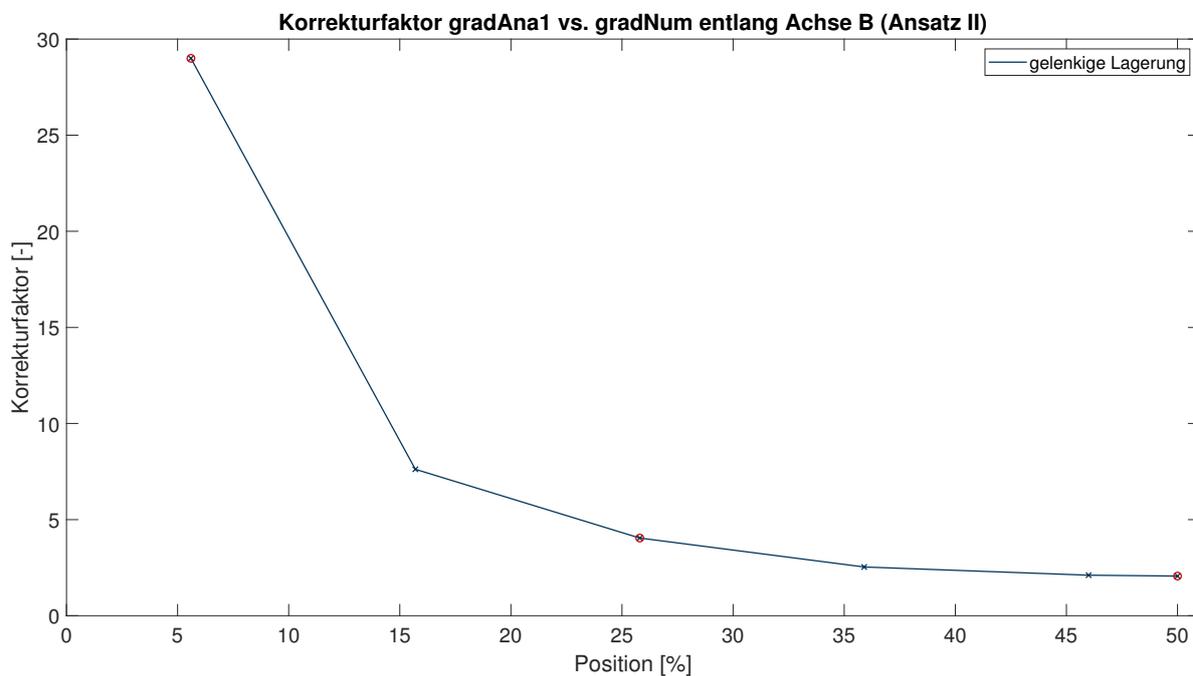


Abb. 57: Korrekturfaktoren entlang der Achse B für gelenkige Lagerung (Ansatz II)

Tab. 20: Fehlerbetrachtung zwischen *gradNum* und *gradApproxII* nach Ansatz II entlang Achse I für Platte P9

**gelenkig**

Auswertungsposition	relativer Fehler [%]	Differenz [dB]
0	5	0
1d	1	0
2d	14	1

**eingespannt**

Auswertungsposition	relativer Fehler [%]	Differenz [dB]
0	8	1
1d	17	2
2d	8	1

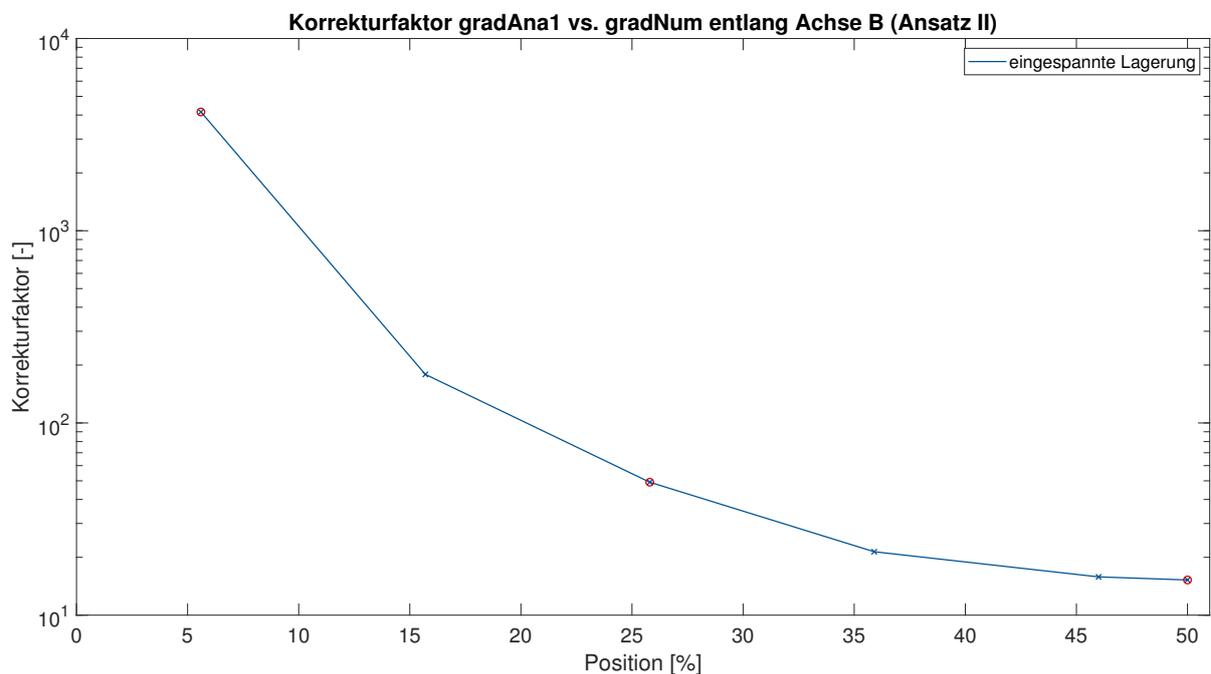


Abb. 58: Korrekturfaktoren entlang der Achse B für eingespannte Lagerung (Ansatz II)

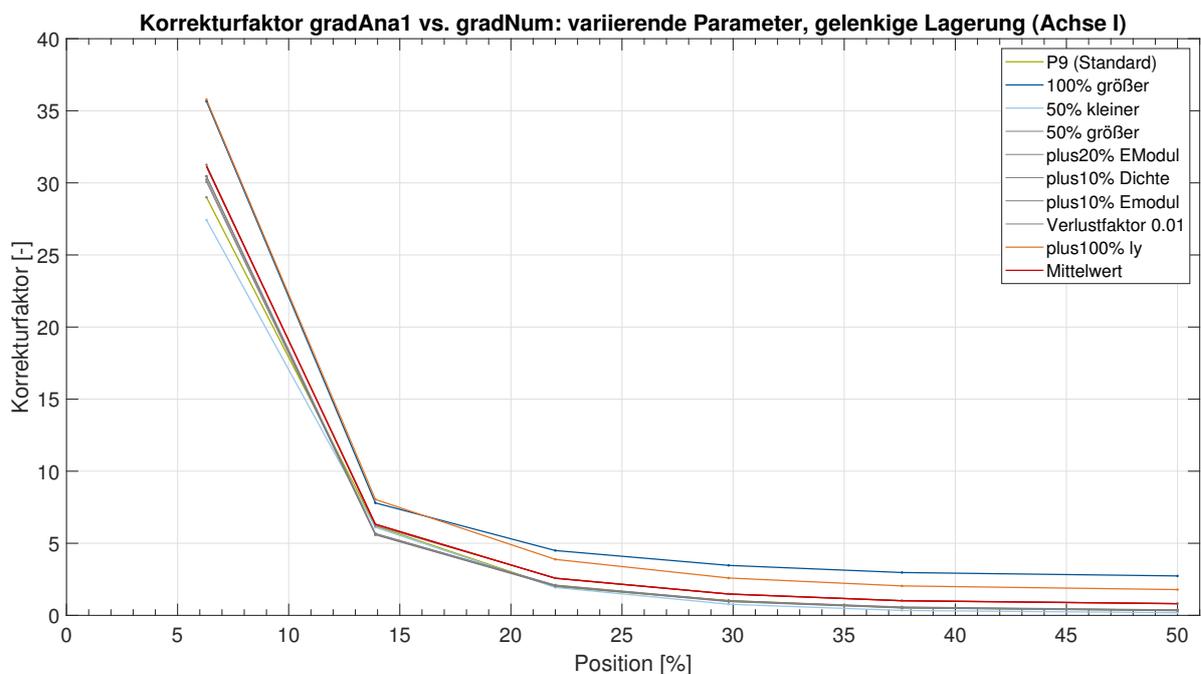


Abb. 59: Korrekturfaktoren bei variierenden Parametern für gelenkige Lagerung (Ansatz II)

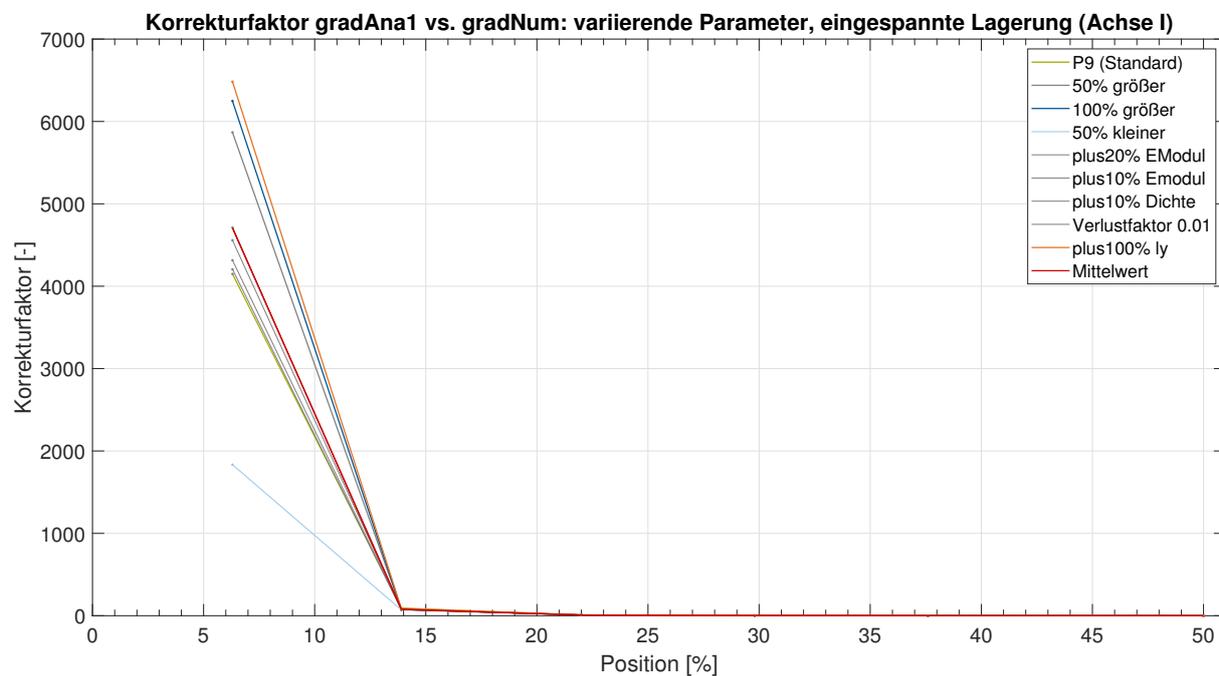


Abb. 60: Korrekturfaktoren bei variierenden Parametern für eingespannte Lagerung (Ansatz II)

Tab. 21: Fehlerbetrachtung zwischen *gradNum* und *gradApproxII* nach Ansatz II entlang Achse I für plus100% Dimension

**gelenkig**

Auswertungsposition	relativer Fehler [%]	Differenz [dB]
0	14	1
1d	19	2
2d	38	4

**eingespannt**

Auswertungsposition	relativer Fehler [%]	Differenz [dB]
0	28	3
1d	0	0
2d	5	0

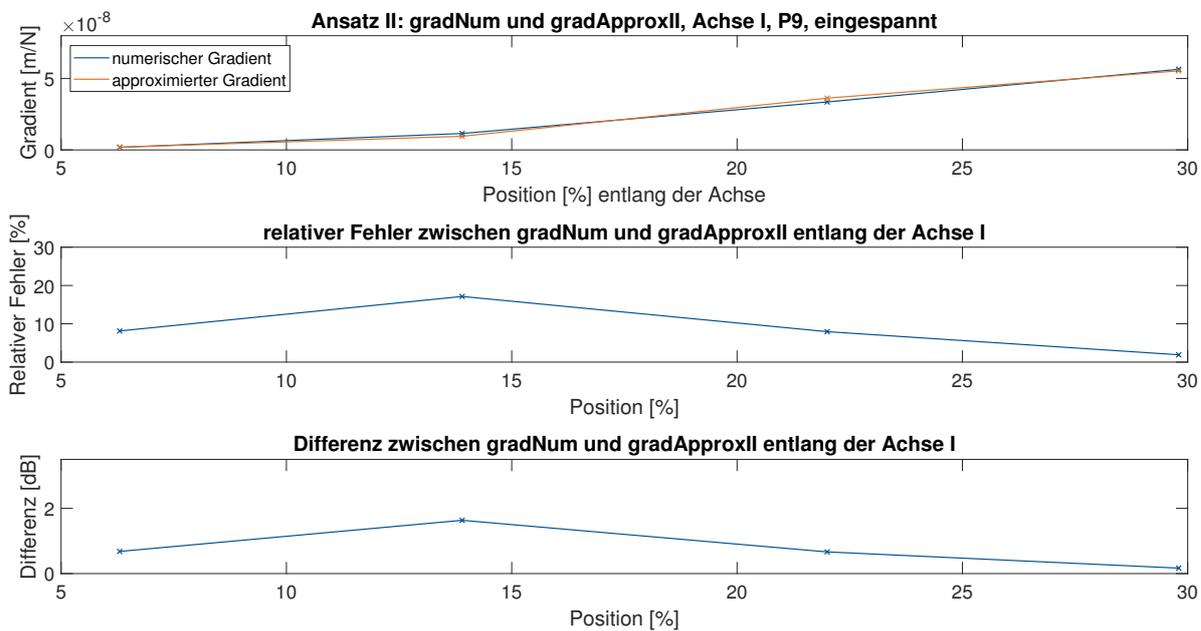


Abb. 61: Vereinfachte Gradienten entlang der Achse I sowie Umsetzung des Ansatzes II inklusive Fehlerbetrachtung für P9 - eingespannt

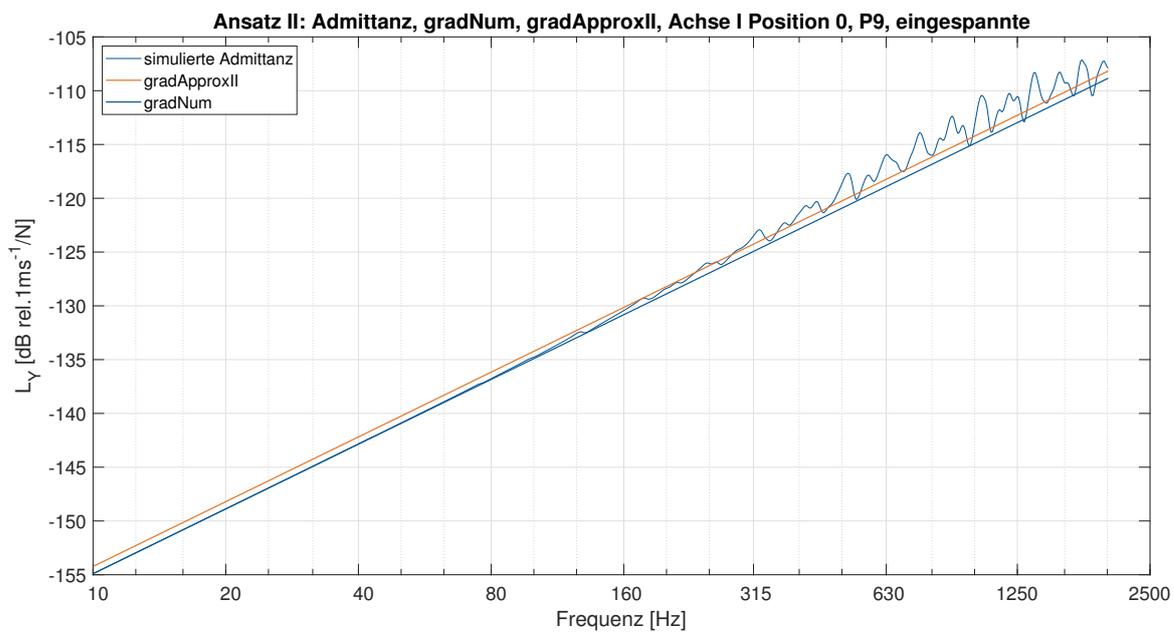


Abb. 62: Simulierte Admittanz inklusive *gradNum* und *gradApproxII* für Platte P9 und gelenkige Lagerung

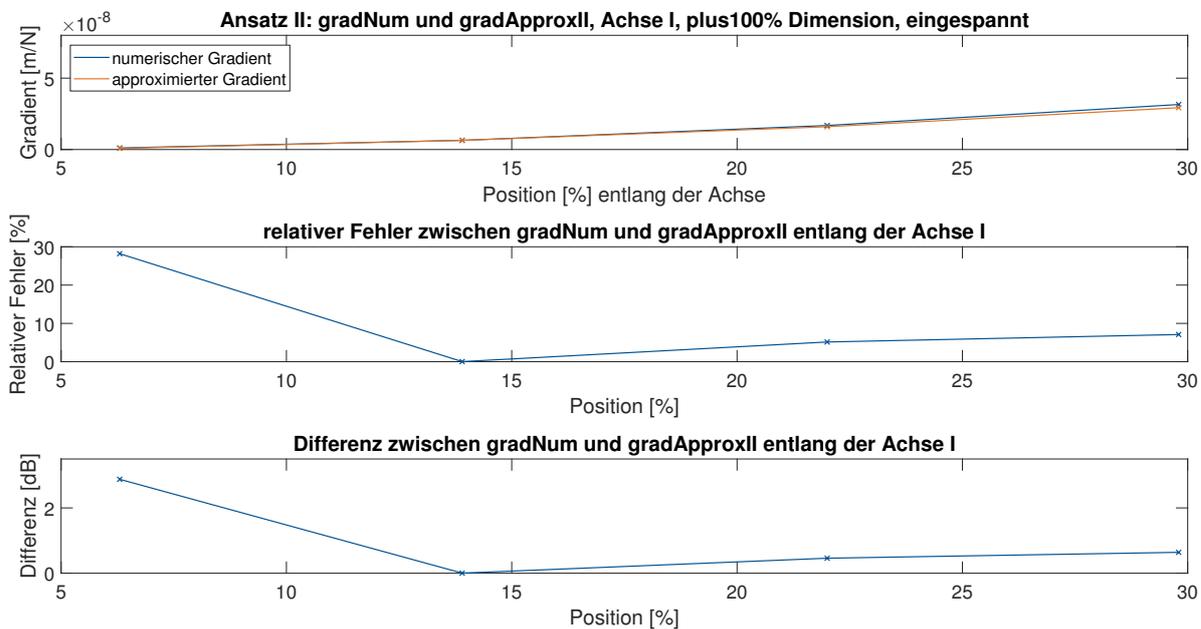


Abb. 63: Vereinfachte Gradienten entlang der Achse I sowie Umsetzung des Ansatzes II inklusive Fehlerbetrachtung für plus100% Dimension - eingespannt

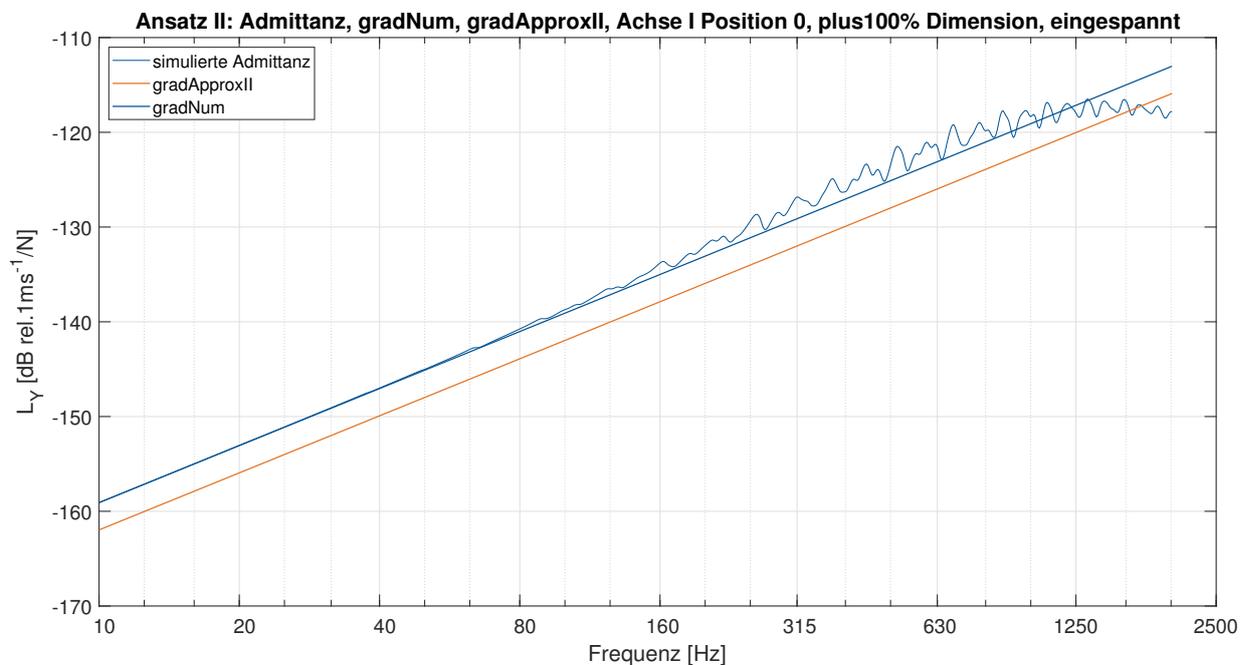


Abb. 64: Simulierte Admittanz inklusive *gradNum* und *gradApproxII* für plus100% Dimension und eingespannte Lagerung

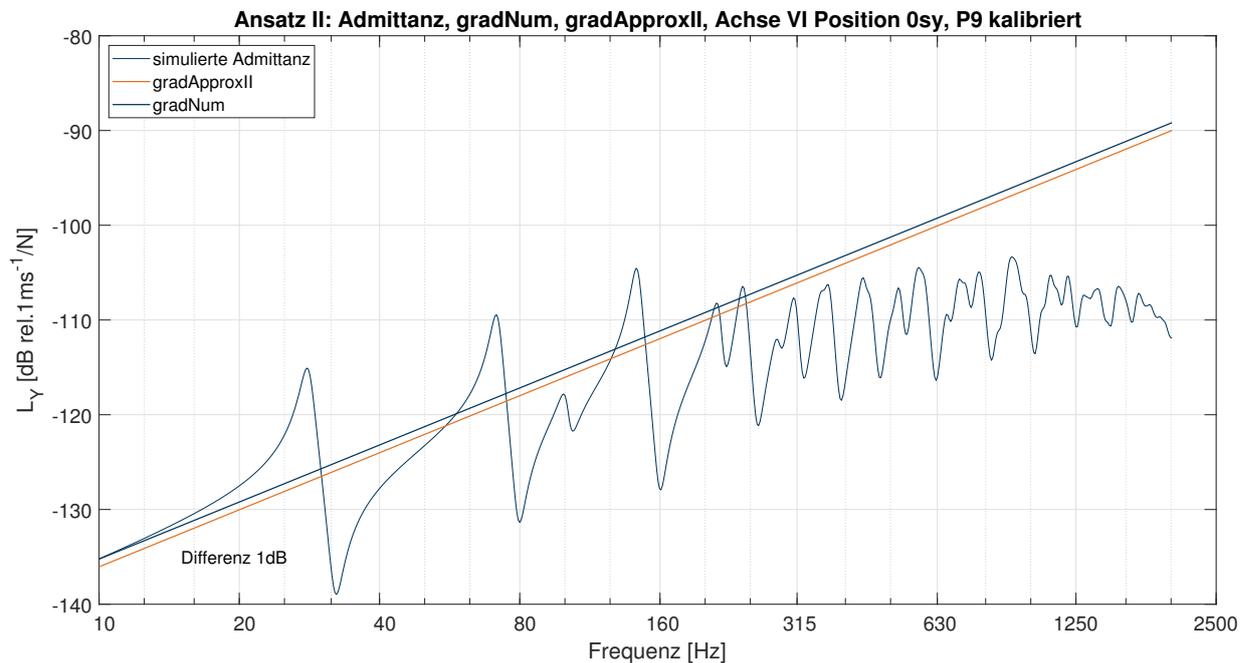


Abb. 65: Simulierte Admittanz inklusive *gradNum* und *gradApproxII* für Platte P9 und kalibrierte Lagerung an Position 0sy

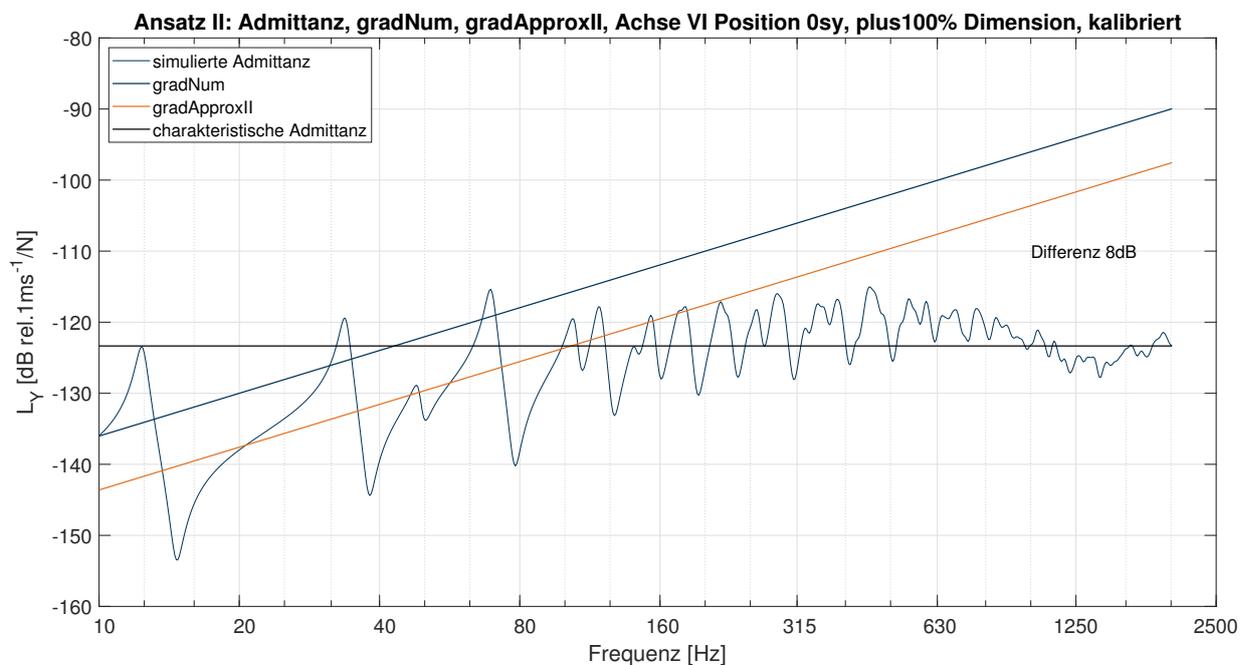


Abb. 66: Simulierte Admittanz inklusive *gradNum* und *gradApproxII* für Platte plus100% Dimensionen und kalibrierte Lagerung an Position 0sy

## 6 Exemplarische Anwendung der Ansätze sowie grundlegende Validierung

In folgendem Kapitel werden die vorgestellten approximativen Admittanzmodelle durch eine exemplarische Anwendung validiert. Da zum jetzigen Zeitpunkt der Untersuchungen lediglich konzeptionellen Grundlagen der Ansätze vorhanden sind, ist diese Erstanwendung vielmehr als Trendanalyse zu begreifen. Deutlich soll das Potential der Ansätze werden und Grundlagen für weiterführende Untersuchungen schaffen. Als exemplarische Anwendung dient der bereits vorgestellte Installationsprüfstand P12 des Fraunhofer IBP. Zum einen liegen Messergebnisse der Admittanz für die raumtrennende Installationswand vor, zum anderen werden die Ansätze auf eine weiterführende Berechnung des Luftschalldruckpegels durch eine Duschwanne angewendet.

Zunächst stellt Kapitel 6 die Umsetzung der Ansätze in das hybride Modell vor. Diese Aufzählung soll der Nachvollziehbarkeit der Anwendung dienen und nachfolgende Untersuchungen erleichtern. Alle gezeigten Konzepte sind mehr oder minder in den entwickelten MATLAB Skripten implementiert („hybridModel.m“/„showerTrayP12.m“). Auf die Umsetzung der Ansätze als hybrides Modell folgen die Ergebnisse an zwei beispielhaften Situationen in Prüfstand P12. Es werden die Admittanzen der Installationswand auf Grundlage der Simulation, der Messung und des hybriden Modells vorgestellt und verglichen. Für die Situation einer Duschwanne ermittelt das hybride Modell überschlägige Admittanzen, die anschließend in die Berechnung eines Luftschalldruckpegels übergehen.

### 6.1 Umsetzung der Ansätze als hybrides Modell

#### Übergang Charakteristische Admittanz zu hybridem Modell - *gradTrans*

In Gliederungspunkt 4.4 wird das Konzept des Übergangsgradienten *gradTrans* vorgestellt. Dieser Gradient markiert den Übergang zwischen der reinen charakteristischen Admittanz und dem entwickelten hybriden Modell als Vereinfachungen. Grundsätzlich sind Auswertungspositionen in Umgebung der Plattenmitte durch die charakteristische Admittanz vereinfacht, während auflagernahe Positionen durch das entwickelte hybride Modell abgebildet werden. Abbildung 45 in Gliederungspunkt 4.4 stellt die Übergangsgradienten für die Platte P9 grafisch dar.

Bei der exemplarischen Anwendung der Ansätze ist entscheidend, ob an betrachteter Auswertungsposition überhaupt das hybride Modell relevant ist. Dazu wurde die Berechnung des Übergangsgradienten und ein Vergleich implementiert. Es wird verglichen, ob der berechnete approximative Gradient (*gradApproxI* oder *gradApproxII*) betragsmäßig kleiner ist als der Übergangsgradient. Ist dies der Fall wird das hybride Modell zur weiteren Admittanzvereinfachung herangezogen. Ist dies nicht der Fall erfolgt die Vereinfachung durch die charakteristische Admittanz allein.

Im Rahmen vorliegender Untersuchungen wurde darüber hinaus versucht eine vereinfachte Berechnung der Übergangsposition zu konzipieren. Dazu soll die bekannte Gleichung des Gradienten zu *gradTrans* gleichgesetzt werden und nach der Position umgestellt werden. Eine Konzeptidee ist im Anhang unter Gliederungspunkt A skizziert.

## **Schnittpunkt der linearen Admittanz und der charakteristischen Admittanz**

Das hybride Modell sieht ungeachtet des umgesetzten Ansatzes vor, die tatsächliche Admittanz durch einen linear ansteigenden Ast und den konstanten Wert der charakteristischen Admittanz zu vereinfachen. Der Übergang zwischen dem ansteigendem Ast und der Konstanten ist als Schnittpunktbeziehung implementiert. Für die Verwendung im Kontext von Schalldruckpegeln wird als Übergang die nächstgelegene Terzmittenfrequenz herangezogen.

## **Lineare Interpolation und Extrapolation zwischen Auswertungspunkten**

Für Ansatz I wird der approximierte Gradient *gradApprox1* durch eine Lineare zwischen dem vereinfachten Gradienten in Plattenmitte *gradSimp* und dem Koordinatenursprung (0,0) respektive dem Auflager gebildet. Der Wert von *gradApprox1* wird folglich durch Trigonometrie an der Auswertungsposition entlang der korrespondierenden radialen Achse bestimmt. Die Berechnung von *gradApprox1* erfolgt für die exemplarischen Anwendung mithilfe des MATLAB Skripts „hybridModel.m“.

Ansatz II benötigt zur Berechnung zum einen den zugrundeliegenden analytischen Gradienten der ersten Mode (*gradAna1*). Zum anderen den empirischen Korrekturfaktor. Der Gradient *gradAna1* wird nach vorgestellten Gleichungen für die betrachtete Auswertungsposition ermittelt. Für den Korrekturfaktor wird die gemittelte Kurve der Platte P9 entlang der Achse I verwendet. Da diese Korrekturkurve über einzelne Datenpunkte verfügt, wird zwischen diesen Punkten linear interpoliert. Falls ein Auswertungspunkt zwischen Auflager (0 %) und dem ersten Datenpunkt (6,3 %) liegt, wird linear extrapoliert. Es wird darauf hingewiesen, dass eine lineare Extrapolation nicht suffizient ist und die tatsächlichen Korrekturfaktoren vermutlich unterschätzt. Auf eine detaillierte Untersuchung wurde im Rahmen vorliegender Untersuchungen verzichtet.

Der approximative Gradient nach Ansatz I kann vergleichsweise einfach für jede beliebige Position bestimmt werden, da es sich lediglich um eine lineare Verbindung zwischen dem Gradienten in Plattenmitte und dem Koordinatenursprung handelt. Für Ansatz II wird die bereits vorgestellte Gewichtungsmethode verwendet. Da die gemittelten Korrekturfaktoren nur entlang Achse I ausgewertet wurden, lassen sich die Faktoren überschlüssig in Auflagernähe durch eine Gewichtung nach den Ergebnissen entlang Achse B bestimmen. Gliederungspunkt 5.3.3 erörtert das gewählte Vorgehen.

## **Überschlägige Berücksichtigung der Rotationssteifigkeit**

Im Rahmen vorliegender Untersuchungen zeigt Gliederungspunkt 4 zwar grundlegende Zusammenhänge variierender Rotationssteifigkeit der Auflager, dennoch werden für die exemplarische Anwendung vorerst nur die ideal-mechanischen Auflagerbedingungen herangezogen. Darüber hinaus wird die Rotationssteifigkeit vereinfacht als Mittelwert aus den approximierten Gradienten der idealen Bedingungen berücksichtigt. Somit stehen zu Auswertungszwecken drei Varianten zur Verfügung. Eine Gewichtung dieser könnte in Zukunft durch die dimensionslose Steifigkeit umgesetzt werden und somit eine Einordnung zwischen die beiden idealen Grenzwerte der gelenkigen und eingespannten Lagersituation erfolgen.

## 6.2 Ergebnisse des hybriden Modells – Installationswand (P12)

Für eine erste Anwendung des entwickelten hybriden Modells wird die Installationswand des Prüfstands P12 verwendet. Die Ansätze werden sowohl durch Messergebnisse als auch durch Simulationsergebnisse validiert. Da wie bereits erwähnt die untersuchte Wand lediglich eingezogen ist und nicht monolithisch mit den angrenzenden Bauteilen verbunden ist, stellt sich die Frage der Anwendbarkeit des hybriden Modells auf diese Wand. Vor allem dem Deckenanschluss könnte eine fehlende Kraftübertragung unterstellt werden. Folglich würden die eingangs getroffenen Limitationen der allseits gleichen Lagerbedingungen nicht eingehalten werden. Zusätzlich würde ein fehlender Kraftschluss in einem freien Auflager resultieren. Zur überschlägigen Klärung der Problematik werden die Eigenfrequenzen der Messdaten sowie der Simulation verglichen. Die Simulation wurde mit den bereits vorgestellten Materialdaten und allseits gelenkiger Lagerung durchgeführt. Für die Definition von Grenzwerten wird der beidseitige Putz überschlägig zu einem komplett vernachlässigt (untere Steifigkeitsgrenze). Der Grenzwert höchster Steifigkeit sieht zum anderen einen Putz mit gleicher Steifigkeit wie die Porenbetonwand vor (Wanddicke auf tatsächliche Dicke erweitert). Der Mischquerschnitt aus meist deutlich weicherem Putz (Künzel, 1983) ist somit als unbekannter Wert zwischen den beiden Grenzwerten berücksichtigt. Die Auswertung der Ergebnisse bedient sich des Zusammenhangs, dass von ideal eingespannt über gelenkig (abnehmende Rotationssteifigkeit) bis hin zum freien Auflager (abnehmende lineare Steifigkeit) die Eigenfrequenzen stets sinken. Sind nun die Eigenfrequenzen der Messung niedriger als die der Simulation, ist davon auszugehen, dass die Auflager eine niedrigere lineare Steifigkeit besitzen als gelenkige Auflager. Somit läge die Wand nicht innerhalb der Limitationen der vorliegenden Arbeit.

Der Plan P04 (Anhang) zeigt die Verteilung der untersuchten Positionen. Abbildung 67 stellt die Ergebnisse an Position F6 (nahe der Mitte) für die Messergebnisse sowie Simulationen bei variierender Wandstärke vor. Die Tabelle 22 listet indes die ersten Eigenfrequenzen tabellarisch für die Positionen F6 sowie die Plattenmitte M1. Zu beachten gilt, dass aufgrund der geometrischen Gegebenheiten die beiden Moden (1,2) und (3,1) gerundet die gleiche Eigenfrequenz aufweisen. Für die Frequenzbestimmung aus den Messergebnissen ist daher nicht eindeutig trennbar welche Frequenzen die jeweiligen Moden an Position F6 annehmen. Daher erhalten beide Moden den gleichen Wert (mit (!) gekennzeichnet). In Plattenmitte sind die Moden (2,1), (1,2) und (2,2) nicht ablesbar, da deren Knotenlinien den Symmetrieachsen durch den Mittelpunkt folgen. Abbildung E.41 im Anhang zeigt die Admittanzen inklusive den ermittelten Eigenfrequenzen für die Auswertungsposition der Plattenmitte M1.

Es bestätigt sich die Erwartung, dass die tatsächlich vorliegenden Daten aufgrund des mehrschichtigen Querschnitts zwischen den beiden Variationen der unterschiedlichen Wanddicken liegen. Zusätzlich wird allerdings ersichtlich, dass die ersten Eigenfrequenzen der Messung die Daten der Simulation bei gelenkiger Lagerung unter gegebenen Umständen unterschreiten. Die untersuchte Installationswand neigt somit zu freien Auflagern beziehungsweise die linearen Steifigkeiten sind geringer als  $\infty$  (gelenkig oder eingespannt). Eine Variation der Rohdichte der verbauten Steine und des Schichtaufbaus der Wand bewirken teils eine Zuordnung der Plattenauflager zu gelenkigen Auflagern und teils zu freieren Auflagern. Aufgrund der Praxisnähe einer solchen Wand und den vorliegenden Unsicherheiten der Materialkennwerten wird die Installationswand des Prüfstands P12 als annähernd gelenkig angenommen und somit für eine Validierung des hybriden Modells herangezogen.

Tab. 22: Eigenfrequenz der Wand in P12 - simuliert und gemessen

<b>Wand P12</b>		<b>Position F6</b>		
Eigenfrequenz	Mode	Messung	Wandstärke 11,5 cm	Wandstärke 14,5 cm
1	(1,1)	22 Hz	19 Hz	24 Hz
2	(2,1)	36 Hz	34 Hz	43 Hz
3	(1,2)	57 Hz (!)	60 Hz	75 Hz
4	(3,1)	57 Hz (!)	60 Hz	75 Hz
5	(2,2)	72 Hz	75 Hz	95 Hz

<b>Wand P12</b>		<b>Position M1</b>		
Eigenfrequenz	Mode	Messung	Wandstärke 11,5 cm	Wandstärke 14,5 cm
1	(1,1)	22 Hz	19 Hz	24 Hz
2	(2,1)	–	–	–
3	(1,2)	–	–	–
4	(3,1)	57 Hz	60 Hz	75 Hz
5	(2,2)	–	–	–

(!) ... Moden sind in Messergebnissen nicht trennbar

Um eine überschlägige Validierung durch die erhobenen Messdaten zu ermöglichen, wurde eine vereinfachte, manuelle Kalibrierung anhand der ersten Eigenfrequenz vorgenommen. Da sowohl die Maße als auch die Dichte der Kalksandsteinmauer bekannt sind und eine gelenkige Lagerung angenommen wird, kann die Plattendicke derart variiert werden, dass die erste Eigenfrequenz auf ganze dB gerundet gleiche Werte zur Messung ergibt. Diese Variation der Wandstärke soll den Anteil des Putzes am gemeinsamen Elastizitätsmodul abdecken. Eine Wandstärke von 13 cm aus Kalksandstein erfüllt diese überschlägigen Anforderungen. Abbildung E.42 im Anhang zeigt die Admittanzen nach erfolgter Kalibrierung. Als Auswertungspositionen wird eine Position im Eckbereich und eine in Kantenmitte am Auflagerrand ( $l_x/2$ ) gewählt. Diese Positionen entsprechen übertragen Punkten entlang der Achse I und VI. Um einen Vergleich mit den Messdaten zu gewährleisten, werden die Punkte D1 und W4 für die überschlägige Validierung herangezogen. Plan P04 zeigt die Positionen in grafischer Form. Zusätzlich wurde das hybride Modell an zwei weiteren Positionen entlang der Diagonalen und der Symmetrieachse angewendet. Grund hierfür ist die Untersuchung der Prognosequalität in größerer Entfernung zu den Auflagern. Gewählt wurden die Positionen D3 mit x und y Position gleich 15 % (Diagonale) und die Position S1 bei x gleich 50 % und y gleich 15 %. Für letztere beiden Positionen liegen keine Messungen vor und Vergleiche können nur mit Simulationsergebnissen durchgeführt werden.

Die Ergebnisse für die Position D1 im nahen Eckbereich zeigen mit 23 dB für Ansatz I und 9 dB für Ansatz II die größten Abweichungen. Gleichzeitig unterscheiden sich die gemessenen Daten der Admittanz deutlich von der Simulation. Abbildung 68 zeigt diese Ergebnisse. Neben den Admittanzen und den entsprechenden Gradienten sind die Limits 50 Hz und die charakteristische Admittanz markiert. Der korrespondierende Übergangsgradient ist zusätzlich visualisiert. Sowohl die Messergebnisse als

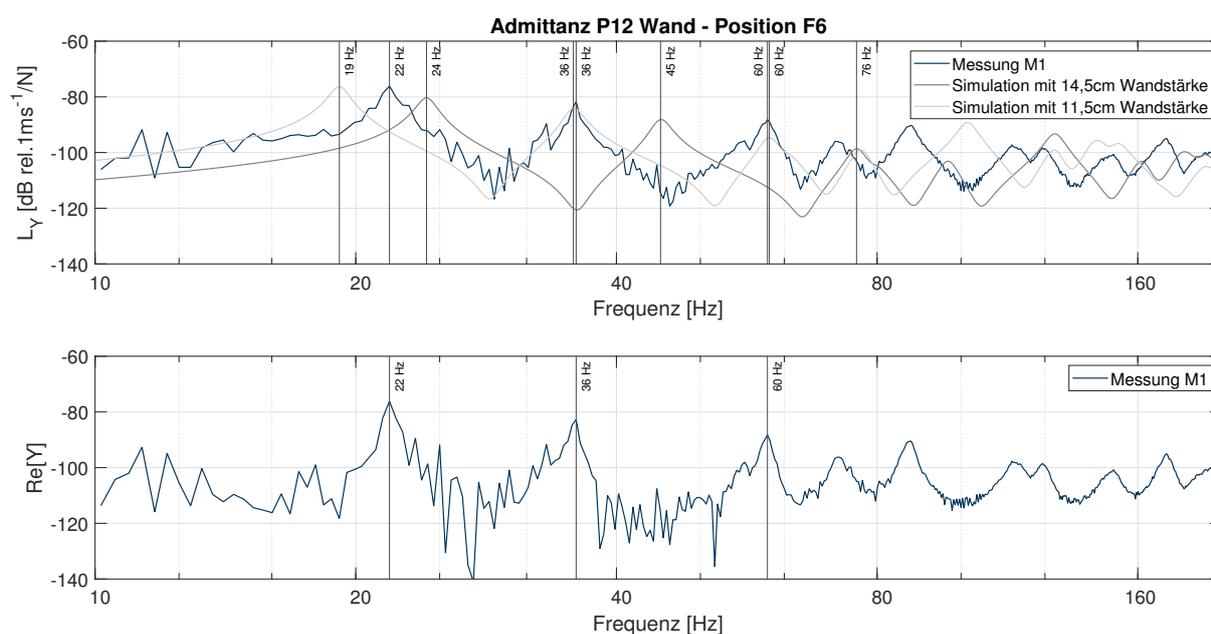


Abb. 67: Simulierte und gemessene Admittanzen an Position F6 inklusive der ermittelten Eigenfrequenzen

auch die simulierte Ergebnisse weisen geringere Werte als *gradTrans* auf. Folglich ist eine Vereinfachung durch das hybride Modell durchführbar. Abbildung 69 stellt die Auswertung nahe des Auflagers in Kantenmitte dar. Die Differenzen nehmen für Ansatz I einen Wert von 5 dB und für Ansatz II von 1 dB an. Gleichzeitig wird eine zu Position D1 höhere Übereinstimmung der simulierten Daten mit den Ergebnissen der Messung deutlich. Auch diese Position befindet sich im Anwendungsbereich des hybriden Modells.

Um detailliertere Einblick in die Prognosequalität der Ansätze zu erlangen, wurden zusätzlich zwei weitere Positionen entlang der begrenzenden Achsen der Diagonale und der Symmetrie ausgewertet. Verglichen zu ersteren Positionen liegen allerdings keine Messdaten an den betrachteten Positionen vor und eine Validierung ist nur mit simulativ erzeugten Daten möglich. Diese Positionen wurden ausgewählt, um Daten an auflagerfernen Positionen zu generieren. Denn praxisrelevante Installationen überspannen weite Bereiche einer Wand oder Platte. Die Ergebnisse an Position D3 werden in Abbildung 70 dargestellt. Die Prognosen der Ansätze zeigen mit 0 dB und 1 dB hohe Übereinstimmung, gleichwohl die untersuchte Position nahezu der Übergangsposition des hybriden Modells entspricht. Die korrespondierenden Gradienten stimmen daher fast mit dem Übergangsgradienten *gradTrans* überein. An Position S1 entlang der Symmetrieachse zeigt sich eine Übereinstimmung von beidmalig 4 dB. Zusätzlich wird ersichtlich, dass der vorliegende simulierte Gradient *gradNum* den Übergangsgradienten überschreitet. Somit befindet sich die betrachtete Position nicht im Anwendungsbereich des hybriden Modells. Eine Verwendung der charakteristischen Admittanz wäre zur Approximation folglich adäquater.

Zur Bestätigung der Relevanz vorliegender Untersuchungen zeigen die folgenden Abbildungen neben den Differenzen zwischen den Ansätzen und *gradNum* auch die Differenz des numerischen Gradienten und der charakteristischen Admittanz bei 50 Hz. Dieser Vergleich wird herangezogen, da

zum jetzigen Stand der Technik die zugrundeliegende Norm E DIN EN 12354-5:2022-02 die charakteristische Norm als Approximation der Admittanz vorschlägt. Mit Abweichungen von 18 dB und 36 dB (bei 50 Hz) an den auflagernahen Positionen stellen beide entwickelten Ansätze eine Verbesserung dar. An den beiden weiteren Positionen ist die Differenz sehr gering, da hier der Übergang von hybriden Modell auf charakteristische Admittanz stattfindet.

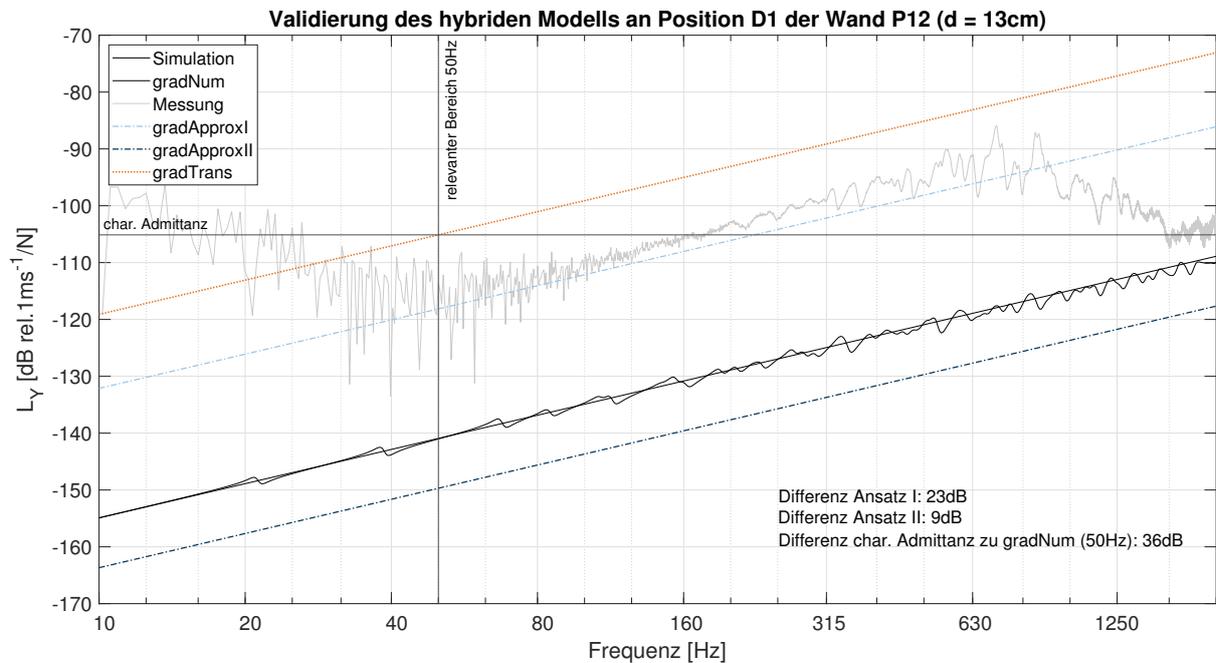


Abb. 68: Simulierte und gemessene Admittanzen sowie simulierte und approximierte Gradienten an Position D1 für die Wand P12 ( $d = 13 \text{ cm}$ )

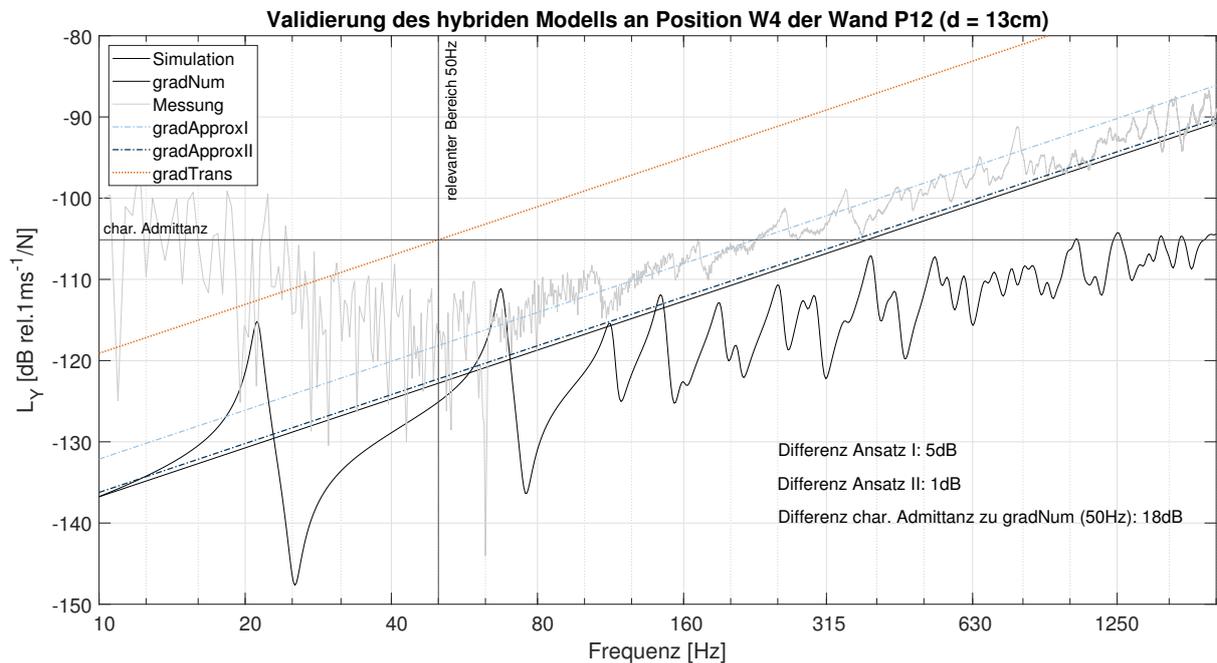


Abb. 69: Simulierte und gemessene Admittanzen sowie simulierte und approximierte Gradienten an Position W4 für die Wand P12 (d = 13 cm)

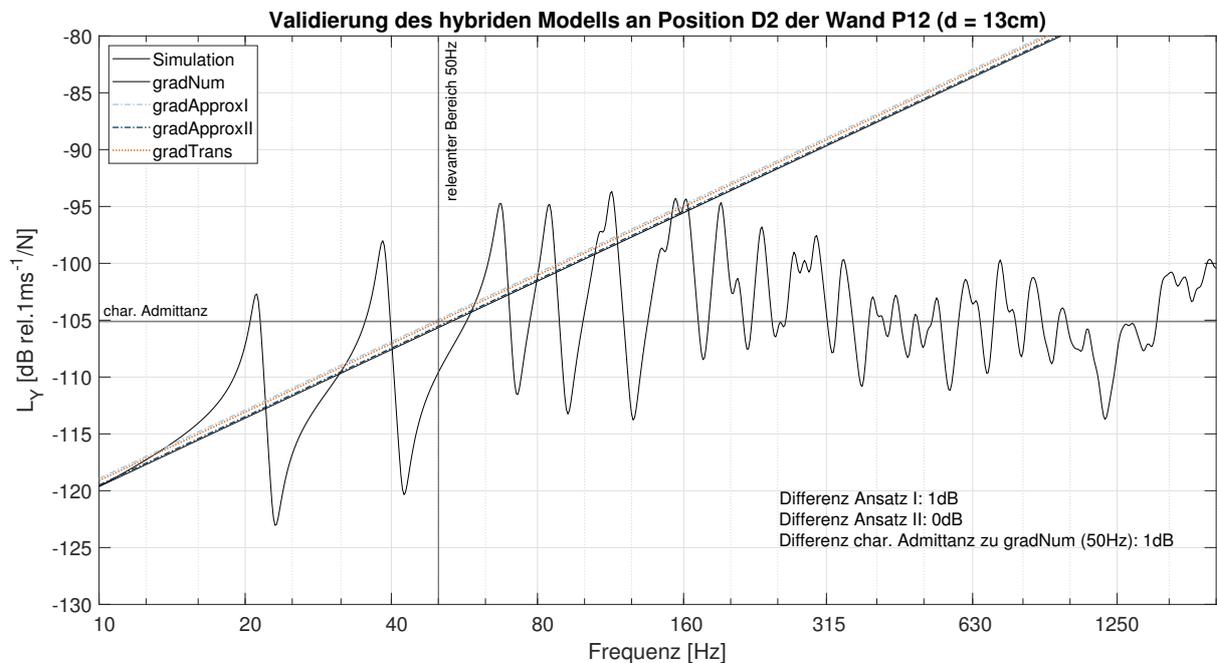


Abb. 70: Simulierte Admittanz sowie approximierte und simulierte Gradienten an Position D3 für die Wand P12 (d = 13 cm)

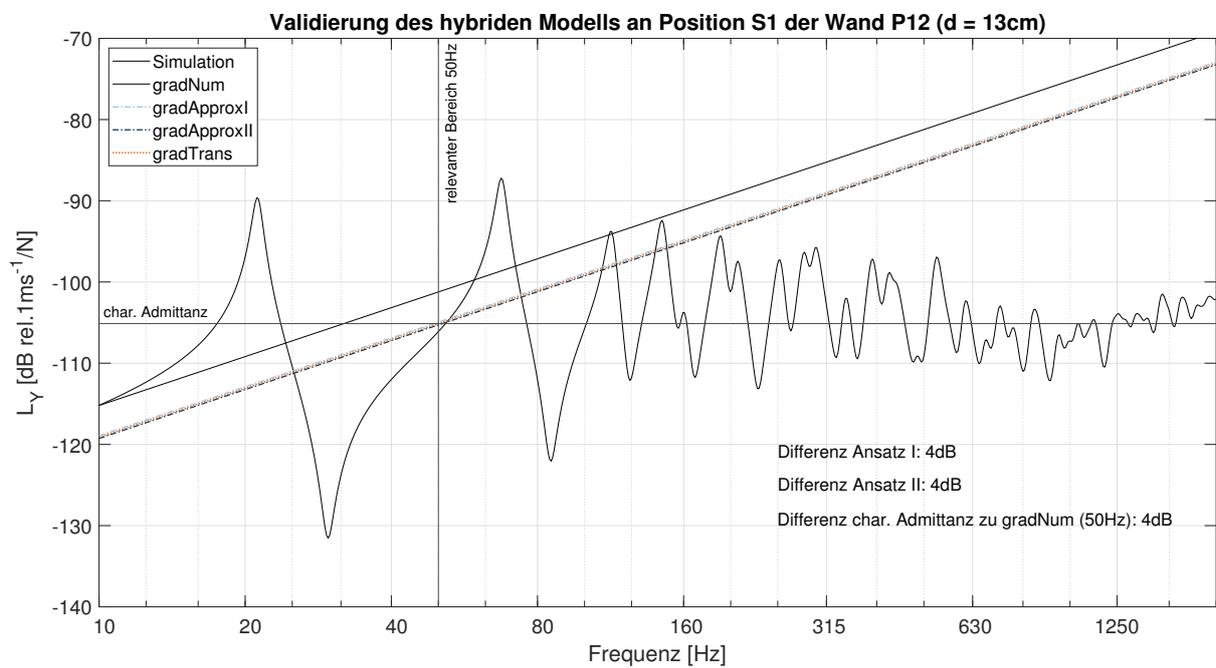


Abb. 71: Simulierte Admittanzen sowie approximierte und simulierte Gradienten an Position S1 für die Wand P12 (d = 13 cm)

### 6.3 Ergebnisse des hybriden Modells – Duschwanne auf Bodenplatte (P12)

Als weitere exemplarische Anwendung wird das hybride Modell auf Daten des eingangs vorgestellten Forschungsvorhabens ProSa angewendet. Das innovative Prognosemodell von Installationsgeräuschen sieht vor, den Schalldruckpegel ( $L_A$ ) innerhalb eines Raumes zu bestimmen. Ausgelöst wird dieser Pegel durch eine Installation als Schallquelle in einem angrenzenden Raum ( $L_W$ ). Die Körperschallübertragung beschreibt indes eine Gebäudeübertragungsfunktion ( $D_{TF}$ ). In die Gebäudeübertragungsfunktion geht die approximierte Admittanz ein. Folgende Gleichung wiederholt diese Zusammenhänge in vereinfachter Form.

$$L_A = L_W - D_{TF} \quad \text{Gl. 86}$$

Für die Erstanwendung lagen dem Verfasser vorliegender Untersuchungen Berechnungsschemata in Form eines Excel-Sheets vor. An geeigneter Stelle mussten lediglich die Daten der Admittanz aus dem hybriden Modell an den Terzmittenfrequenzen eingefügt werden. Aus Gründen der Verarbeitung mit den approximativen Admittanzdaten und der Visualisierung wurden die Daten und Berechnungsschritte in ein eigenes MATLAB Skript überführt und ausgewertet.

Die untersuchte Situation besteht aus einer quadratischen Duschwanne mit einer Kantenlänge von 90 cm. Die Wanne ist in der Raumecke nahe der Installationswand auf der Bodenplatte des Prüfstands P12 im Erdgeschoss installiert. Nach bekanntem Wissen durch Rücksprache mit beteiligten Projektbetreuenden ist die raumtrennende Installationswand aus Kalksandstein nicht monolithisch bzw. kraftschlüssig mit der Bodenplatte oder den Seitenwänden verbunden. Die Bodenplatte im Erdgeschoss geht somit unter der Installationswand hindurch. Diese Wand wird daher für weitere Untersuchungen vernachlässigt. Zum einen ist von einem Masseeintrag auszugehen. Zum anderen könnte die Wand zu einer Steifigkeitserhöhung der Platte beitragen. Der vernachlässigte Einfluss ist nicht weiter abschätzbar. Die Duschwanne befindet sich zwar in einer Raumecke allerdings nicht in einer Plattenecke. Plan P05 zeigt die Position der Duschwanne im Grundriss. Dargestellt ist die gesamte Bodenplatte im EG des Prüfstands P12. Die Auflagersituation ist ebenfalls nicht eindeutig bekannt. Den offiziellen Schnitten des Prüfstands (Anhang Abb E.3) zufolge, ist von einer monolithischen Bauweise in Stahlbeton der Wände und der Decke auszugehen. Folglich wären die Auflager als konstruktive Einspannungen anzusehen, wenngleich eine solche Situation nicht mit einer idealen Einspannung gleichzusetzen ist. Es ist darauf hinzuweisen, dass derartige Rückschlüsse der Meinung und der baupraktischen Erfahrung des Autors entsprechen und nicht weiter belegt werden. Für eine objektive und valide Beurteilung werden deshalb die Daten für sowohl ideal gelenkige als auch ideal eingespannte Lagerungen generiert und vorgestellt.

Die Ergebnisse der exemplarischen Anwendung sind nun als normalisierter Schalldruckpegel in dB(A) angegeben und nicht mehr wie zuvor als Admittanzpegel. Darüber hinaus sind diese statt in Schmalband auf Terzbänder vereinfacht. Die Abbildungen 72 und 73 zeigen die Ergebnisse für die gelenkige und die eingespannte Lagerung. Dargestellt ist der normalisierte Schalldruckpegel  $L'_{In}$  in dB(A) über die Frequenz. Der hochgestellte Strich verdeutlicht die Normalisierung, während KGN die Anregungsart (KGN - Körperschallgeräusch nominal) spezifiziert (IBP interne Bezeichnung). Die

schwarze Referenzkurve zeigt Ergebnisse aus Messungen. Letztere entsprechen einer Mittelung von Messdaten auf den Mittelpunkt (rote Markierung im Plan P05) der Duschwanne. Der rote Datensatz zeigt den prognostizierte Schalldruckpegel nach der innovativen Prognosemethode des Forschungsvorhabens. In die Gebäudeübertragungsfunktion geht an dieser Stelle alleine die charakteristische Admittanz ein. Neben einer vergleichsweise hohen Übereinstimmung im mittel- und hochfrequenten bauakustisch relevanten Bereich, überschätzt die Prognose im tieffrequenten Bereich die Messung deutlich. Die beiden Blautöne stellen die Prognoseergebnisse mit den Admittanzen aus Ansatz I sowie II dar. Die Kurven umspannen dabei nicht den gesamten Frequenzbereich, sondern lediglich bis zum Kreuzungspunkt zwischen linear ansteigendem Admittanzast und dem konstanten Teil der charakteristischen Admittanz. Als Übergangsfrequenz wird die Terzmittenfrequenz verwendet, die dem tatsächlichen Schnittpunkt am nächsten ist. Dieser Zusammenhang ist in entsprechendem MATLAB Skript implementiert und in den Grafiken E.43 und E.44 im Anhang abgebildet. Bei höheren Frequenzen als dieser Übergangsfrequenz wird die Prognose, dem Konzept des hybriden Modells zufolge, durch die Verwendung der charakteristischen Admittanz erzeugt.

Die Ergebnisse der beiden Ansätze sind für die gelenkige Auflagersituation nahezu identisch und überlagern sich daher in der Darstellung (Abb. 72). Der Frequenzbereich, in dem die Approximation durch die beiden Ansätze bei gelenkiger Lagerung relevant ist, spannt von 50 Hz bis 63 Hz. Dieser Bereich ist durch die Übergangsfrequenz bedingt und wird in Abbildung E.43 deutlich. Die blauen Kurven liegen unterhalb der roten Daten und verbessern, wenn auch sehr geringfügig, die Prognose.

Die Prognosewerte nach Ansatz I und II für die eingespannte Situation belegen einen Frequenzbereich von 50 Hz bis maximal 315 Hz. Die Abbildung E.44 visualisiert die Übergänge. Die Verläufe auf Grundlage der approximativen Ansätze finden sich überwiegend zwischen der Messung und der Prognose nach der charakteristischen Admittanz ein.

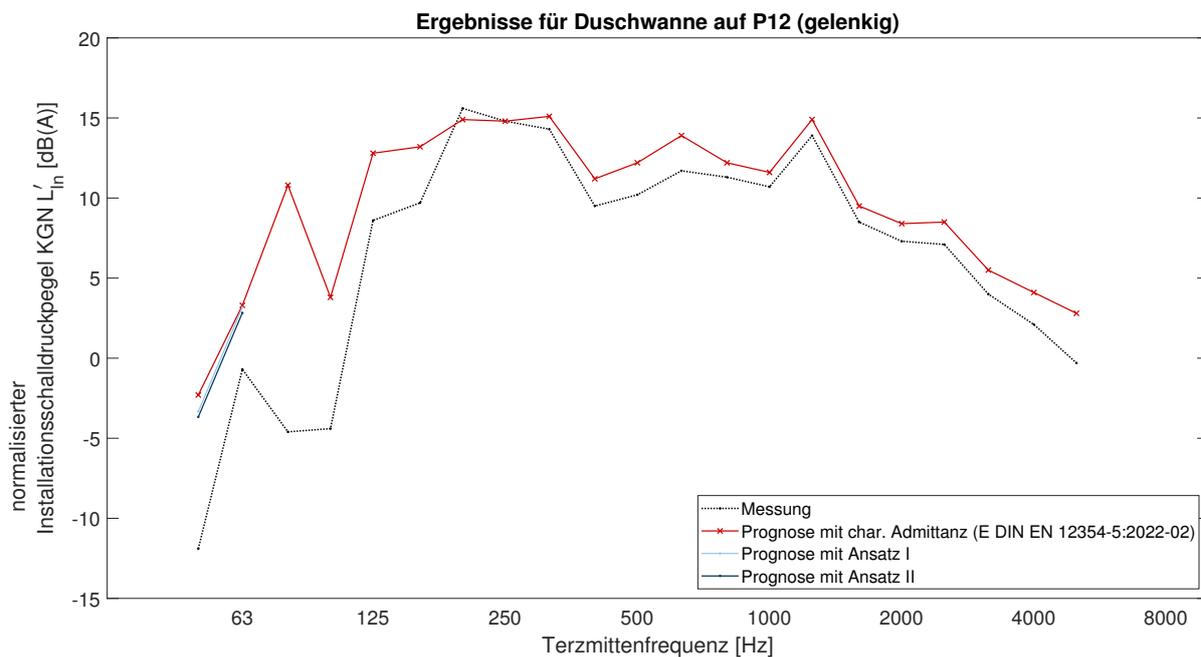


Abb. 72: Anwendung des hybriden Modells - Duschwanne auf der Bodenplatte in P12 unter gelenkiger Auflagerbedingung (rot, schwarz ... IBP interne Daten; blau ... eigene Daten in innovativem Modell (IBP) eingesetzt)

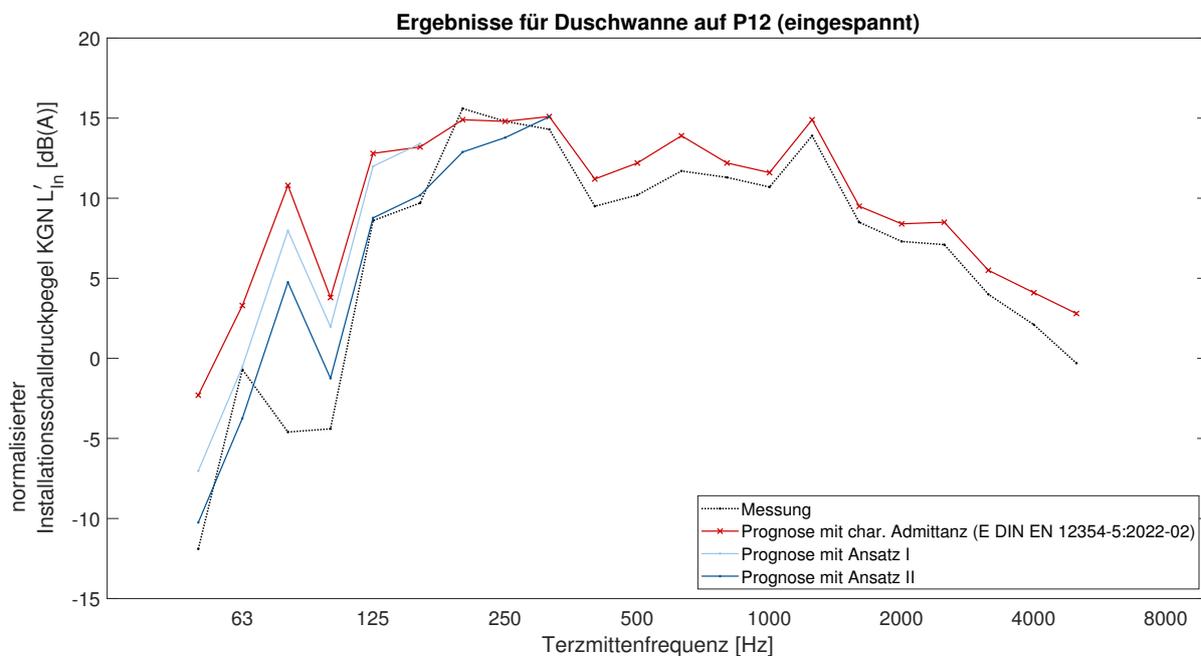


Abb. 73: Anwendung des hybriden Modells - Duschwanne auf der Bodenplatte in P12 unter eingespannter Auflagerbedingung (rot, schwarz ... IBP interne Daten; blau ... eigene Daten in innovativem Modell (IBP) eingesetzt)

## 7 Diskussion und Limitationen

Das anschließende Kapitel beinhaltet die Diskussion der Ergebnisse sowie die Limitationen der vorliegenden Masterthesis.

### 7.1 Diskussion

Im Gliederungspunkt 7.1 werden die Methodik der vorliegenden Untersuchungen sowie die Ergebnisse der Modellentwicklung und der exemplarischen Anwendung eingehend diskutiert. Die Ergebnisse der Messung und Simulation sowie die Ergebnisse der Vorarbeiten werden, wie in der Einleitung bereits erörtert, in den jeweiligen Gliederungspunkten interpretiert und diskutiert. Auf eine detaillierte Wiederholung wird im Rahmen anschließender Ausarbeitung verzichtet, während zentrale Aspekte erörtert werden.

#### 7.1.1 Methodik

Der Kernaspekt der Methodik ist geprägt durch die Iteration zwischen Parameterstudie und Simulation, um Konzepte der Modellbildung zu entwickeln. Der fehlende Stand des Wissens zur konkreten Forschungsfrage begründet diese flexible Arbeitsweise. Da keine Zusammenhänge des Gradienten in Abhängigkeit der Position und der Auflagerbedingungen bekannt waren und somit nicht klar war welche Zusammenhänge bestehen und welche Vereinfachungen zur Findung approximativer Modelle nötig sind, hat sich dieses Konzept als gewinnbringend erwiesen. Die Iterationen konnten gewährleisten, stets zurückzugreifen und variierende Parameterstudien durchzuführen, um fehlendes Wissen aufzuholen. Durch die gefundenen Zusammenhänge konnten zwei Ansätze entworfen werden, die zur Beantwortung der Forschungsfrage führen. Die zur Verfügung gestellten Messergebnisse sowie die eigens durchgeführten Messungen vervollständigen die Methodik durch grundlegende Validierung und Kalibrierung des Simulationstools und der Ansätze.

#### 7.1.2 Modellentwicklung

##### Dimensionslose Steifigkeiten

Das Konzept der dimensionslosen Steifigkeiten erweist sich im Kontext der Untersuchung als hilfreich. Durch die Schaffung einer dimensionslosen Steifigkeit ist es möglich verschiedene Platten und Ergebnisse variierender Parameter miteinander zu vergleichen. Zusätzlich wird das Konzept auf die untersuchte Platte P9 angewendet. Hervorzuheben gilt es im Rahmen dieser Diskussion, dass für die Berechnung die Wahl der Bezugslänge entscheidend ist. Besonders bei sehr ungleichen Kantenlängen wird dies durch differierende Werte deutlich. Die Angabe der Bezugslänge sowie die Berücksichtigung der Unterschiede ist deshalb entscheidend. Die abschließend vorgestellten Ergebnisse der normierten Gradienten sollen Zusammenhänge vereinfachen und mögliche Grundlagen weiterführender Untersu-

chungen bilden. Klar ersichtlich werden die vielfältigen Abhängigkeiten des Gradienten gegenüber der ausgewerteten Platte.

### **Gradientenverhalten**

Da die gefundenen Ergebnisse im Gliederungspunkt der Vorarbeiten stets neben der Beschreibung auch eine Interpretation und Diskussion beinhalten, wird hier auf eine Wiederholung verzichtet. Als entscheidende Kernaspekte kann die durchwegs ausgeprägte Nichtlinearität festgehalten werden. Mit Betracht der dimensionslosen Steifigkeiten ist diese Nichtlinearität sowohl in Bezug auf die Position als auch auf die Rotationssteifigkeit festzustellen.

### **Gemeinsame theoretische Grundlagen**

Die gemeinsamen theoretischen Grundlagen der Ansätze I und II schließen an die Theorie der Dynamik von Platten und Balken an und leiten entscheidende Vereinfachungen her. Der Gradient der Admittanz für Ansatz I wird dazu sowohl von der Abhängigkeit der Position als auch der Frequenz befreit. Folglich gilt der berechnete Gradient nur in Plattenmitte und nur für die erste Eigenfrequenz. Der vereinfachte Gradient nach Ansatz II behält dabei die Abhängigkeit bezüglich der Position und ist somit für jede Position auf der Platte bestimmbar.

### **Relevanter Betrachtungsbereich für entwickelte Modelle**

Als letzter Gliederungspunkt des Kapitels der Vorarbeiten wird der Übergangsgradient *gradTrans* sowie der Betrachtungsbereich entwickelter hybrider Modelle hergeleitet und visualisiert. Der Übergangsgradient ist von der charakteristischen Admittanz und der projektbezogenen unteren Frequenzgrenze (50 Hz) abhängig. Der korrespondierende relevante Anwendungsbereich des hybriden Modells nimmt folglich bei steiferer Auflagerbedingung zu. So resultiert aus idealer Einspannung der größte Anwendungsbereich des hybriden Modells. Anzumerken bleibt, dass die Bereichsgrenzen für gezeigte Admittanzen bzw. Gradienten abgelesen wurden und somit einer gewissen Unsicherheit unterliegen. Die flächenmäßigen Anteile und bemaßten Stecken sind dabei nicht einfach auf beliebige Platten übertragbar. So schrumpft der flächenmäßige Anteil des Anwendungsgebiets des hybriden Modells mit weicherer Lagerung und größeren Plattendimensionen. Diese Parameter beeinflussen zwar nicht den Übergangsgradienten, dennoch nehmen sie Einfluss auf die Admittanz bzw. den Gradienten und die positionelle Verteilung der Werte entlang radialer Achsen. Je steifer die Bedingungen desto weiter reicht der Einfluss der Auflager und folglich niedrige Admittanz- und Gradientenwerte in die Platte hinein. Die Materialparameter weisen vergleichbare Einflüsse auf. Zusätzlich beeinflussen diese den Wert des Übergangsgradienten durch Variation der charakteristischen Admittanz.

### **Ansatz I**

Nach Ansatz I wird der approximative Gradient durch eine lineare Verbindung zwischen dem Koordinatenursprung und dem vereinfachten Gradienten in Plattenmitte gebildet und bestimmt. In Auflagernähe entstehen die ausgeprägtesten Fehler. Dort überschätzt der approximative Ansatz den tatsächlich vorliegenden Wert zumeist. Zusätzlich steigt die Diskrepanz an ecknahen Positionen deutlich, da zur

Diagonale hin die Ausprägung der sigmoiden Gradientenverteilung ausgeprägter ist. Durch Auswertung entlang Achse B wird dieser Zusammenhang unterstützt und eine deutliche Nichtlinearität wird erkennbar. Mit Blick auf die gesamten Ergebnisse des Ansatz I, kann trotz der teils hohen Fehlerwerte festgehalten werden, dass der approximative Gradient in unmittelbarer Auflagernähe bessere Prognosen der Admittanz zulässt als die alleinige Verwendung der charakteristischen Admittanz.

### **Ansatz II**

Die theoretische Herleitung des analytischen Gradienten der ersten Moden ist in Umsetzung und Gleichung aufwändiger als der vereinfachte Gradient des ersten Ansatzes. Durch die Berücksichtigung der positionellen Abhängigkeit verkürzt sich die Gleichung des Gradienten weniger. Die Anforderungen aus der Forschungsfrage und der Brauchbarkeit im Kontext des Forschungsvorhabens werden dennoch als erfüllt angesehen. Die einzelnen Berechnungsschritte sind nach wie vor für die idealen Auflagersituationen ohne komplexe numerische Hilfsmittel lösbar. Um den residualen Moden Rechnung zu tragen, integriert die Umsetzung als approximativer Gradient einen empirisch ermittelten Korrekturfaktor. Der Korrekturfaktor zeigt vergleichbare Abhängigkeiten bezüglich der Auflagerbedingungen, der Materialität, der Position und der Plattendimension wie der Gradient der Admittanz. Im Eckbereich nimmt dieser Faktor deutlich höhere Werte an als in Kantenmitte. Der Einfluss der ersten Mode auf das Schwingungsverhalten scheint folglich im Eckbereich geringer zu sein als an anderen Positionen entlang der Kanten. Zum jetzigen Zeitpunkt liegen dazu keine Ergebnisse vor, dennoch können Gründe dafür mutmaßlich genannt werden.

Plausibel wäre eine Unterschätzung der auftretenden Eckeinspannung durch die verwendeten Admittanzgleichungen. Eine ideal gelenkige Auflagerung verfügt zwar einerseits über eine Rotationssteifigkeit von 0, andererseits bedingen zwei Lagerachsen in beliebigem Winkel zueinander (senkrecht bei betrachteter Platte) eine Eckeinspannung. Diese zusätzliche Steifigkeit wird in verwendeten Admittanzmodellen nicht berücksichtigt und führt möglicherweise zu Fehlerpotential. Diese Eckeinspannung könnte erklären warum entlang Achse I vielfach höhere Korrekturfaktoren nötig sind als entlang Achse VI. Neben positionellen Einflüssen nimmt auch die Auflagersituation Einfluss. Die Korrekturfaktoren für die ideale Einspannung sind mehrfach höher als die der gelenkigen Lagerung. Die Gründe hierfür können ebenfalls nur vermutet werden. Zum einen könnte der Einfluss der ersten Mode der eingespannten Lagerung geringeren Anteil am Gesamtgradienten einnehmen als im Falle der gelenkigen Lagerung. Zum anderen könnte eine unzureichende Beschreibung der Modenform durch die Formfunktion zu Fehlern führen. Detailliertere Untersuchungen könnten hierbei anschließen.

Im Rahmen der Entwicklung des Ansatzes II wurde der entstehende Fehler durch die Mittelung der empirischen Korrekturfaktoren an der Standardplatte P9 und am worst-case Szenario (100 % größere Dimensionen) der berücksichtigten Datenmenge ausgewertet. Die Übereinstimmung des approximierten Gradienten mit dem numerischen Gradienten ist für die Standardplatte verhältnismäßig hoch. Dies ist zu erwarten, da der Korrekturfaktor für die Platte P9 nur leicht vom verwendeten Durchschnitt abweicht. Eine Anwendung des Mittelwerts auf den berücksichtigten worst-case und damit eine maximale Abweichung des mittleren Korrekturfaktors zeigt deutlich erhöhte Fehlerwerte. Zusammen mit der Tatsache, dass Variationen der Materialparameter in baupraktisch relevanten Bereichen verhältnismäßig geringe Abweichungen zur Standardplatte generieren, werden aus den Ergebnissen Konzepte für

zukünftige Umsetzungen erkennbar. So könnte eine Differenzierung in verschiedene Dimensionsbereiche die Fehlerhaftigkeit der Prognose verbessern. Es könnten für unterschiedliche baupraktisch relevante Plattengrößen eigene Korrekturkurven vorliegen. Ein Beispiel könnten zwei Kurven darstellen. Eine für Plattendimensionen kleiner fünf Meter und eine für fünf bis zehn Meter. Zusätzlich könnten je Material eine Korrekturkurve ermittelt werden (bspw. Beton und Ziegel). Eine detailliertere Differenzierung in beispielsweise unterschiedliche Betone wäre nicht nötig, da der Einfluss derartiger Unterschiede einen geringen Einfluss auf den Gradienten nimmt. Entsprechende Datensätze zur Ermittlung der empirischen Korrekturwerte sollten daher definiert werden. Eine höhere Dichte der Auswertungspunkte entlang der betrachteten Achse sollte zusätzlich zur besseren Beschreibung der Korrekturfaktoren beitragen.

### 7.1.3 Exemplarische Anwendung

#### Umsetzung der Ansätze als hybride Modelle

Bei der Umsetzung der Ansätze als hybride Modelle mussten aus Gründen noch fehlender Daten besonders bei Ansatz II einige überschlägige Vereinfachungen getroffen werden, um ein funktionierendes Modell zu entwickeln. Besonders die Datendetaillierung der Korrekturfaktoren entlang radialer Achsen und der dadurch nötigen linearen Inter- und Extrapolation zwischen den Auswertungspunkten wird vermutlich zu Fehlerbeitrag führen. Ob zur Deckung aller Plattenpositionen nun die gemittelten Korrekturfaktoren entlang mehrerer radialer Achsen generiert werden sollten oder ein Ausbau der hier verwendeten Gewichtungsmethode (vgl. 5.3.3) gewinnbringender wäre, kann nicht abschließend festgestellt werden. Möglicherweise genügt eine detaillierte Berechnung der Korrekturfaktoren entlang einer Achse und anschließender Gewichtung entlang der Achsen A, B, C, etc. nach den bereits gefundenen Verläufen für die Achsen I bis VI. Dies würde einen enormen Daten und Simulationsaufwand erübrigen.

#### Installationswand in P12

Die vorgestellten vier Auswertungspositionen zeigen prognostizierte Gradienten mit einer Abweichung von der Simulation (*gradNum*) von maximal 23 dB (Ansatz I an D1) bis minimal 0 dB (Ansatz II an D3). Ansatz II erzeugt stets gleichwertige oder bessere Prognosen als Ansatz I. Dennoch werden Abweichungen von 9 dB in der Plattenecke (D1) deutlich. Diese Abweichung ist erklärbar durch fehlende empirische Werte der Korrekturfaktoren derart nah im Eckbereich ( $D1 = x = y = 10\%$ ). Der auflagnächste Auswertungspunkt in der Erstellung der Korrekturfaktoren liegt bei 6.3%. Die Implementierung des hybriden Modells in MATLAB extrapoliert für nähere Positionen den Korrekturfaktor linear. Der Korrekturfaktorkurve folgend ist augenscheinlich von exponentiellem Verlauf auszugehen. Die Extrapolation unterschätzt daher die tatsächlichen Korrekturfaktoren. Das empirische Äquivalent des residualen Modenterms fällt somit geringer aus und der approximierter Gradient nach Ansatz II unterschätzt den simulierten Gradienten.

Der lineare Verlauf des approximierten Gradienten nach Ansatz I überschätzt den erwarteten Gradienten. Dieser Zusammenhang ist mit Blick auf die bereits gezeigten doppelt-gekrümmten Verläufe zu erwarten (vgl. Abb 46). Die dabei auftretenden hohen Fehlerwerte zeigen sich auch bei der An-

wendung an der Installationswand in P12. Aufgrund der vergleichsweise einfachen Umsetzung des Ansatzes I und der Übertragbarkeit auf beliebige Positionen werden im folgenden nur noch die Ergebnisse des *gradApproxII* diskutiert. Neben einer Validierung durch Simulationsergebnisse werden Messergebnisse herangezogen. Wie bereits aus Gliederungspunkt 3.4 bekannt, unterscheiden sich Messdaten und die Ergebnisse der Simulation im Eckbereich unabhängig von der betrachteten Platte deutlich voneinander. Über die Gründe kann zum jetzigen Untersuchungszeitpunkt lediglich spekuliert werden. Im Fall der Wand P12 ist die gemessene Admittanz deutlich höher als die der Simulation. Dieser Zusammenhang lässt auf falsche Annahmen bezüglich der Auflager schließen. So werden der untersuchten Wand gelenkige Auflager unterstellt. Werden sowohl die Daten der Admittanz zwischen Simulation und Messung, als auch die Daten aus dem Eigenfrequenzvergleich herangezogen, liegt die Schlussfolgerung nahe, dass die tatsächlich vorliegenden Auflagerbedingungen weicher sind als eine gelenkige Lagerung.

Die Abweichungen an Position W4 sind verglichen zu Position D1 deutlich geringer. Mit Blick auf den Verlauf der Korrekturfaktoren entlang der Symmetrieachse wird dies deutlich (bspw. Abb. 55 und 57). Der Zuwachs der Faktoren verläuft zum Auflager hin deutlich flacher und somit erwirkt die lineare Extrapolation bei der Position W4 eine höhere Genauigkeit. Warum in diesem Fall der *gradApproxII* jedoch über *gradNum* liegt, müsste eingehend untersucht werden. Die Gewichtung des gemittelten Korrekturfaktors von Achse I (Diagonale) zu Achse VI (Symmetrieachse) könnte eine Ursache darstellen. Für die Position W4 stellt sich außerdem eine höhere Übereinstimmung zwischen der simulierten und der gemessenen Admittanz ein. Auch dieser Zusammenhang ist bereits von Platte P9 bekannt. Alle ermittelten Gradienten beider auflagernahen Positionen D1 und W4 ordnen sich unterhalb des Übergangsgradienten *gradTrans* ein. Folglich ist das entwickelte hybride Modell für diese Positionen anwendbar und approximiert die Admittanz korrekter als die alleinige charakteristische Admittanz.

Die zusätzlich angegebene Differenz zwischen dem numerischen Gradienten und der charakteristischen Admittanz bei 50 Hz verdeutlicht die Relevanz der getätigten Untersuchungen. Besonders im auflagernahen Bereich und bei tiefen Frequenzen schneiden die entwickelten Ansätze deutlich besser ab als die von der Norm vorgeschlagene Approximation.

### **Bodenplatte mit Duschwanne in P12**

Die Verwendung der entwickelten Ansätze im Kontext der Berechnung des Schalldruckpegels durch Installationsgeräusche in einem angrenzenden Raum verdeutlicht die Praxistauglichkeit der Konzepte. Die Prognose des Schalldruckpegels unter Verwendung der charakteristischen Admittanz zeigt eine hohe Übereinstimmung der prognostizierten Werte bei mittleren und hohen Frequenzen. Bei tiefen Frequenzen unterscheiden sich die gemessenen Referenzdaten jedoch deutlich vom Prognosewert basierend auf der charakteristischen Admittanz. Die angenäherten Pegel mithilfe des hybriden Modells und den beiden Ansätzen liefern über weite Bereiche des tieffrequenten Spektrums höhere Übereinstimmungen als die Verwendung der charakteristischen Admittanz. Besonders Ansatz II kann Abweichungen von weniger als einem Dezibel aufweisen.

Die frequenzbezogene Verschiebung des Spitzenwertes bei 63 Hz und 80 Hz ist nicht auf die Prognosequalität der Ansätze zurückzuführen. Die Ursache der Verschiebung ist nicht mit Sicherheit be-

legbar. Eine von der Realität abweichende Darstellung der Platte im Prognosemodell zur Berechnung des Schalldruckpegels könnte hierbei ausschlaggebend sein. Auch unzureichendes Wissen über die tatsächlichen Parameter der betrachteten Platte sind mögliche Fehlerfaktoren. So ist die Auflagersituation nicht eindeutig geklärt und sowohl die eingezogene sowie vernachlässigte Installationswand als auch ein inhomogener Plattenquerschnitt tragen zu Unsicherheiten bei.

Bei der gelenkigen Lagerung ist die Anwendbarkeit des hybriden Modells auf wenige Terzen eingeschränkt. Die Tatsache, dass die gemessene Admittanz an betrachteter Position geringer ist als die Prognosewerte bei gelenkiger Auflagerung, unterstützt die Vermutung einer eingespannten Lagerung.

Die Messdaten liegen im tieffrequenten Spektrum unterhalb der Prognosedaten bei eingespannter Lagerung. Dies ist wiederum nicht plausibel, da die Admittanz bei eingespannter Auflagerung und gleichbleibenden Materialparametern minimale Werte annehmen müsste (ideale Einspannung als unterer Grenzwert). Folglich ist von einer fehlerhaften Beschreibung des mechanischen Systems auszugehen. Die unmittelbare Nähe zur Installationswand könnte ein Grund dafür sein. Diese Wand wird bei der Prognose vernachlässigt, wenngleich mit einem Masse- und Steifigkeitseintrag zu rechnen ist. Beide Einflüsse würden eine Senkung der Admittanz an untersuchter Stelle nach sich ziehen.

Die Prognosedaten des Ansatzes I überschätzen unabhängig von der betrachteten Situation tendenziell die realen Werte. Dies liegt an der Tatsache der gekrümmten Verteilung der tatsächlichen Gradienten entlang einer beliebigen Achse (vgl. bspw. Abb 46). Die lineare Verbindung des Ansatzes I zur Bestimmung des approximativen Gradienten führt dazu, dass dieser betragsmäßig stets höher ist als der tatsächlich vorliegende Gradient. Entlang der Symmetrieachse beziehungsweise in naher Umgebung ist dieser Zusammenhang im Rahmen vorliegender Untersuchungen nicht nachweisbar. Dort verschwindet der sonst deutlich erkennbare untere Krümmungsbauch (vgl. Abb 48). Eine derartige Trendbeschreibung bezüglich einer Unter- oder Überschätzung der Realität ist bei Ansatz II nicht möglich. Ausschlaggebend sind hierbei die Werte des Korrekturfaktors. Dieser entspricht zum jetzigen Zeitpunkt dem Mittelwert einer Vielzahl von Variationen der Platte P9. Da die betrachtete Platte unterhalb der Duschwanne größere Dimensionen aufweist als die zum Mittelwert des Korrekturfaktors korrespondierende Platte, wäre von einer Unterschätzung der Admittanz durch Ansatz II auszugehen. Da dennoch die Prognose die Messung überschätzt, ist erneut eine unzureichende Beschreibung des mechanischen Systems plausibel.

## 7.2 Limitationen

Der folgende Gliederungspunkt nennt die Limitationen der durchgeführten Untersuchungen und den resultierenden Ergebnissen. Da bereits des Öfteren im Rahmen der Diskussionen und Interpretationen auf konkrete Unstimmigkeiten und damit Limitationen eingegangen wurde, sind hier lediglich gesamtgesellschaftliche Einschränkungen gelistet.

Die initialen Limitationen der vorliegenden Masterthesis wurden im Kapitel der Einführung vorgestellt und stellen eine Einschränkung der Untersuchungen und der entwickelten Ansätze dar. Die untersuchten Aspekte sind demnach nur für rechteckige Massivbauplatten gültig. Neben der materialistischen Limitationen musste zusätzlich zu Beginn die dritte, ideal mechanische Auflagerung des freien Rands aus Gründen des Umfangs exkludiert werden. Das Verhalten am freien Plattenrand ist als

gänzlich verschieden einzuschätzen. Vergleiche und die Übernahme einiger Konzept könnten jedoch möglich sein. Darüber hinaus sind die getätigten Untersuchungen auf allseitig gleiche Lagerungsbedingungen beschränkt. Eine Erweiterung bedinge die Berücksichtigung entsprechender Formfunktionen und Berechnungen der Eigenfrequenz. Hierzu wird auf Leissa (1993), Warburton (1954) und Dickinson (1978) als initiale Referenzen verwiesen.

Eine weitere Einschränkung stellt die Vereinfachung realer Platten zu mechanischen Systemen dar. Die getätigten Untersuchungen nutzen stets die lichte innere Auflagerweite als Plattendimensionen. Platten und monolithisch verbundene Wände reichen jedoch über die lichten Kantenlängen in die Auflagerbauten hinein. Platte P9 liegt beispielsweise auf Kalksandsteinwänden. Der Einfluss dieser Plattenbereiche auf den Lagerwänden konnte nicht berücksichtigt werden. Für eine vollständigere Betrachtung könnten übliche Annahmen aus dem konstruktiven Massivbau als Startwerte herangezogen werden (Position der Rotationsachse).

Zur Untersuchung der Zusammenhänge der Admittanz und der korrespondierenden Gradienten ist die Genauigkeit der verwendeten Materialparameter irrelevant. Für die Validierung und Kalibrierung durch Messergebnisse sind jedoch möglichst genaue Materialkennwerte entscheidend. Die Verfügbarkeit dieser ist im Kontext der getätigten Vergleiche nicht durchwegs gegeben. So lassen sich diese nicht mit Sicherheit für die Messobjekte benennen. Für zukünftige Untersuchungen könnte die getätigte Sensitivitätsanalyse Anhaltspunkte bieten und Prioritäten bei der Genauigkeit der verwendeten Parameter aufzeigen.

Die Empirik des Ansatzes II definiert eine weitere Limitation für die Genauigkeit der Prognose. So prägt die Mittelung der Korrekturfaktoren Fehler in die Methode ein. Durch die bereits angesprochene Einführung von Gültigkeitsbereichen und verschiedenen Korrekturkurven könnten Fehlerfortpflanzungen eingeschränkt werden. Zusätzlich ist die Beschreibung der residualen Moden durch empirische Ermittlung limitierend. Der theoretische Nachweis durch eine mathematische Vereinfachung der residualen Terme könnte anschließen. Anhaltspunkte bieten beispielsweise die Publikationen S. Rubin (1975) sowie Roy und Girard (2005).

Die fehlende vollständige Integration der Rotationssteifigkeit in die bestehenden Ansätze stellt eine weitere Limitation dar. Trotz detaillierter Einblicke in die Zusammenhänge ist eine Berücksichtigung beliebiger Steifigkeiten zum jetzigen Untersuchungsstand noch nicht möglich. Eine möglichst hohe Prognosequalität der Schätzung der Auflagersteifigkeiten ist außerdem von Nöten. Eine Studie und Sammlung realer Auflagersteifigkeiten könnte dazu beitragen, übliche Steifigkeiten zu beziffern. Möglicherweise lassen sich typische Bauteile durch ideale Auflagerbedingungen ausreichend beschreiben (vgl. Installationswand). Eine linearisierte Variante der dimensionslosen Steifigkeitsverteilung könnte zur praktischen Anwendbarkeit beitragen.

## 8 Zusammenfassung und Ausblick

### 8.1 Zusammenfassung

Die Arbeiten zur vorliegenden Masterthesis untersuchten die Admittanz und deren Gradient unterhalb der ersten Eigenfrequenz bzw. im tieffrequenten Spektrum bezüglich der Auswertungsposition, der Materialparameter und der Auflagersituation. Zu Beginn zeigt das Kapitel der Einleitung die Motivation sowie Relevanz der Betrachtungen und formuliert die zentrale Forschungsfrage sowie Hypothese. Der Stand des Wissens skizziert die Wissenslücke und bildet den inhaltlichen Startpunkt der Untersuchungen. Darauf aufbauend wird die Methodik zur Beantwortung der Forschungsfrage entworfen und der Aufbau der Arbeit zur Strukturierung der Ergebnisse vorgestellt. Gefolgt von der zugrundeliegenden Theorie der Plattendynamik wird die fachliche Basis definiert. Als Teil der Untersuchungen wurden Messungen zur Kalibrierung sowie Validierung durchgeführt und die Ergebnisse diskutiert. Eine überschlägige Sensitivitätsanalyse zeigt erste Zusammenhänge zwischen Eingabeparametern und resultierenden Admittanzen. So stellten sich sensitive und damit entscheidende Parameter heraus. Besonders Änderungen der Plattendimensionen führen zu vergleichsweise großer Variabilität in Admittanz und Gradient. Im Kapitel der Vorarbeiten werden gefundene Zusammenhänge zwischen variierenden Ausgangssituationen und korrespondierendem Gradienten dargestellt und auf die Relevanz im Kontext approximativer Modelle hin untersucht. Detailliert betrachtet wurden neben der Materialität vor allem die Auswertungsposition und die Auflagersituation. Die gefundenen Zusammenhänge bilden die Wissensbasis für Kapitel fünf, welches die thematischen Kernaspekte der Entwicklung und Umsetzung zweier Ansätze für approximative Gradienten erörtert. Die Ansätze setzen unterschiedliche Prioritäten um. So ist Ansatz I definiert durch maximale Vereinfachung. Ansatz II hingegen basiert auf einer Vereinfachung des modalen Ansatzes der Admittanz und ist durch eine empirische Korrektur zur Berücksichtigung der residualen Moden erweitert. Erste Fehlerbetrachtungen rechtfertigen den Mehraufwand des zweiten Ansatzes durch hochwertigere Prognosen. Besonders im auflagernahen Bereich, führt der entwickelte Korrekturfaktor zu Verbesserungen des approximierten Gradienten. Gleichzeitig erweist sich die Einführung eines empirischen Korrekturfaktors im Rahmen der grundlegenden Untersuchungen als robust. Als besonders einflussreiche Parameter stellen sich erneut die aus der Sensitivitätsanalyse bekannten Variablen heraus. So nimmt auch hier die Plattendimension verhältnismäßig großen Einfluss. Eine exemplarische Anwendung der Ansätze zeigt eine erst Übertragung der Konzepte auf reale Situationen und wird durch Messergebnisse validiert. Ansatz II führt auch in praxisrelevanter Anwendung zu höheren Übereinstimmungen mit den Referenzwerten. Gleichzeitig nähern beide Ansätze die Referenzwerte besser an, als die Prognosen unter Verwendung der charakteristischen Admittanz. Die Diskussion der Ergebnisse sowie die relevanten Limitationen der vorliegenden Untersuchungen schließen den Hauptteil der schriftlichen Ausarbeitung.

Im Rahmen der Zusammenfassung wird erneut die Forschungsfrage aufgegriffen und die Beantwortung erörtert. „Stellt ein hybrides frequenz- und ortsabhängiges Admittanz-Modell eine geeignete Ergänzung für das statische Modell von E DIN EN 12354-5:2022-02 Annex F dar?“ Nach getätigten Untersuchungen und unter Berücksichtigung der genannten Limitationen kann die gestellte Forschungs-

frage positiv beantwortet werden. Die Untersuchungen zeigen geeignete und im Ansatz funktionierende Konzepte zur approximativen Beschreibung der Admittanz durch ein hybrides Modell. Mit Verweis auf die Limitationen und den Ausblick sollten zur praxisrelevanten Anwendbarkeit jedoch weitere Untersuchungen folgen. In Zusammenhang mit genannter Forschungsfrage ergibt sich die ebenfalls in der Einleitung definierte Hypothese, dass der Verlauf des Gradienten der Admittanz von Platten unterhalb der ersten Eigenfrequenz bzw. im tieffrequenten Spektrum ohne detaillierte Modellierung für jede Position und Auflagerbedingung hinreichend genau bestimmbar ist. Diese Unterstellung kann mit Abschluss der vorliegenden Untersuchungen vorerst noch nicht positiv beantwortet werden. Wie bereits mehrfach verdeutlicht, fehlt hierzu eine stringente Integration der Rotationssteifigkeit der Auflager in entwickelte Ansätze. Die zusätzlich geltenden Limitationen bezüglich der freien Auflagerung führen ebenfalls zu einer vorerst geltenden Verneinung der Hypothese. Ob eine Bestimmung des Gradienten in Abhängigkeit der Position, Materialität und Auflagersituation möglich ist, bleibt somit offen.

Alle getätigten Untersuchungen, die Messungen und die Generierung von verwendeten Daten wurden zur Sicherstellung wissenschaftlich geforderter Transparenz und Reproduzierbarkeit gewissenhaft und vollständig dokumentiert. Die verwendete Software galt als Arbeitsgrundlage und ist im Rahmen des Forschungsvorhabens des Fraunhofer IBP etabliert. Gleiches gilt für durchgeführte Messungen und zur Verfügung gestellte Daten. Dadurch wird die Reliabilität der Untersuchungen und der resultierenden Ergebnisse als gegeben angesehen. Die verwendete Methodik versucht nach bestem Wissen die geforderte Stichhaltigkeit der Arbeit umzusetzen. In Kombination mit den zugänglichen digitalen Daten und dem Anhang sind die Ergebnisse der Arbeit sowohl extern als auch intern valide. Durch den Kontext des erwähnten Forschungsvorhabens ProSa des Fraunhofer IBP wird abschließend die nötige wissenschaftliche Relevanz von vorliegender Arbeit unterstellt.

## 8.2 Ausblick

Durch die überwiegend grundlegenden Untersuchungen sind entsprechend viele Ergebnisse als Startpunkte weiterführender Vorhaben geeignet. Detaillierte und konkrete Fragestellungen sind bereits an jeweiligen Stellen im Text angemerkt und verweisen auf Wissenslücken. Als zentrale Fortsetzung sollte die fehlende Berücksichtigung der Rotationssteifigkeit bearbeitet werden. Eine Ausweitung der Ansätze auf weitere baupraktische Situationen, wie die freie Plattenlagerung, würde die entwickelten Konzepte allgemeingültiger und praxisrelevanter gestalten. Eine höhere Auswertungsdichte und einhergehende Datengenerierung zum Ausbau der empirischen Werte bietet sich zur Erhöhung der Prognosequalität an. Auch eine Vertiefung der Modellkalibrierung durch Messdaten könnte weiter forciert werden. Folglich könnte eine Parameterkalibrierung hinsichtlich optimaler Übereinstimmung zwischen Modell und Messung Unsicherheiten der Simulation eingrenzen. In diesem Kontext könnten die bereits mehrfach erwähnten Unstimmigkeiten zwischen Messung und Simulation in unmittelbarer Eckposition untersucht werden. Eine Klärung der Zusammenhänge könnte sich auch positiv auf die Prognosequalität der approximativen Ansätze auswirken. An den Stand des Wissens und die thematische Abgrenzung aus der Einleitung anknüpfend, könnten als vergleichende und kalibrierende Verfahren die thematisch verwandten Methoden aus den dort zitierten Quellen auf die Fragestellung übertragen und ausgewertet werden. Nach ausreichender Entwicklung und praxistauglicher Umsetzung sollte abschließend eine ausführliche Sensitivitätsanalyse, eine Validierung durch Messungen und eine Fehlerbetrachtung die Qualität des approximativen hybriden Admittanzmodells quantifizieren.

## Literaturverzeichnis

Aoki, Y. (2009). *Mobility\_matlab.m*: ATMOS.

Arbeitsring Lärm der DEGA. (n. d.). *Lärmlerikon* (Deutsche Gesellschaft für Akustik e.V., Hrsg.). Verfügbar 17. April 2020 unter <https://www.ald-laerm.de/publikationen/laermlexikon/>

Cremer, L., Heckl, M., & Petersson, B. (2005). *Structure-Borne Sound: Structural Vibrations and Sound Radiation at Audio Frequencies* (3rd edition). Springer Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/b137728>

Dickinson, S. M. (1978). The buckling and frequency of flexural vibration of rectangular isotropic and orthotropic plates using Rayleigh's method. *Journal of Sound and Vibration*, 61(1), 1–8. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(78\)90036-6](https://doi.org/10.1016/0022-460X(78)90036-6)

DIN Deutsches Institut für Normung e.V. (1995-01). *DIN 1319-1: Grundlagen der Meßtechnik - Teil 1: Grundbegriffe (DIN 1319-1:1985-06)*.

DIN Deutsches Institut für Normung e.V. (2009-12). *DIN 1320: Akustik - Begriffe (DIN 1320:1997-06)*.

DIN Deutsches Institut für Normung e.V. (2018-01). *DIN 4109-1: Schallschutz im Hochbau - Teil 1: Mindestanforderungen (DIN 4109-1:2016-07)*.

DIN Deutsches Institut für Normung e.V. (2009-10). *DIN EN 12354-5: Bauakustik - Berechnung der akustischen Eigenschaften von Gebäuden aus den Bauteileigenschaften - Teil 5: Installationsgeräusche*.

DIN Deutsches Institut für Normung e.V. (2017-10). *DIN EN 15657: Akustische Eigenschaften von Bauteilen und von Gebäuden - Messung des Körperschalls von haustechnischen Anlagen im Prüfstand für alle Installationsbedingungen (DIN EN 15657-1:2009-10)*.

DIN Deutsches Institut für Normung e.V. (2019-08). *DIN EN ISO 3740: Akustik - Bestimmung der Schalleistungspegel von Geräuschquellen - Leitlinien zur Anwendung der Grundnormen (ISO 3740:2019)*.

DIN Deutsches Institut für Normung e.V. (2022-02a). *E DIN EN 12354-5: Bauakustik - Berechnung der akustischen Eigenschaften von Gebäuden aus den Bauteileigenschaften - Teil 5: Installationsgeräusche (DIN EN 12354-5:2009-10)*.

DIN Deutsches Institut für Normung e.V. (2022-02b). *E DIN EN 14366-1: Bauakustik - Messung von Luftschall und Körperschall von gebäudetechnischen Anlagen im Prüfstand - Teil 1: Anwendungsregeln für Abwasserinstallationen*.

- Fahy, F. (2006). *Sound and Structural Vibration: Radiation, Transmission and Response* (2nd ed.). Elsevier Science & Technology. <https://ebookcentral.proquest.com/lib/kxp/detail.action?docID=287926>
- Gardonio, P., & Brennan, M. J. (2002). On the Origins and Development of Mobility and Impedance Methods in Structural Dynamics. *Journal of Sound and Vibration*, 249(3), 557–573. <https://doi.org/10.1006/jsvi.2001.3879>
- Gardonio, P., & Brennan, M. J. (2004). Mobility and impedance methods in structural dynamics. In F. Fahy & J. Walker (Hrsg.), *Advanced Applications in Acoustics, Noise and Vibration* (S. 389–447). CRC Press.
- Gibbs, B. M., Cookson, R., & Qi, N. (2008). Vibration activity and mobility of structure-borne sound sources by a reception plate method. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 123(6), 4199–4209. <https://doi.org/10.1121/1.2904469>
- Gibbs, B. M., & Mayr, A. R. (2012). Estimates of mobility for prediction of structure-borne sound transmission in buildings. *19th International Congress on Sound and Vibration*.
- Gibbs, B. M., & Villot, M. (2020). Structure-borne sound in buildings: Advances in measurement and prediction methods. *Noise Control Engineering Journal*, 68(1), 1–20. <https://doi.org/10.3397/1/37681>
- Goldman, S. (1999). *Vibration spectrum analysis: A practical approach* (2. ed.). Industrial Press.
- Goris, A. (2016). Stahlbeton- und Spannbetonbau nach Eurocode 2. In K.-J. Schneider, A. Goris & A. Albert (Hrsg.), *Bautabellen für Ingenieure* (S. 5.25–5.173). Bundesanzeiger Verlag.
- Höller, C. (2013). *Indirect methods of obtaining activity and mobility of structure-borne sound sources* [Dissertation]. University of Liverpool.
- Höller, C., & Gibbs, B. M. (2015). Indirect determination of the mobility of structure-borne sound sources. *Journal of Sound and Vibration*, 344, 38–58. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2015.01.011>
- Howard, C. Q. (2007). Modal mass of clamped beams and clamped plates. *Journal of Sound and Vibration*, 301(1-2), 410–414. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2006.09.019>
- Huňady, R., Lengvarský, P., Pavelka, P., Kaľavský, A., & Mlotek, J. (2021). Stiffness Estimation and Equivalence of Boundary Conditions in FEM Models. *Applied Sciences*, 11(4), 1482. <https://doi.org/10.3390/app11041482>
- Iguchi, S. (1953). Die Eigenschwingungen und Klangfiguren der vierseitig freien rechteckigen Platte. *Ingenieur-Archiv*, 21(5-6), 303–322. <https://doi.org/10.1007/BF00535853>

- Kaito, Y., Honda, S., & Narita, Y. (2018). Identification of elastic edge condition for modeling vibration response of glass touch panel. *Journal of Vibration and Control*, 24(18), 4081–4095. <https://doi.org/10.1177/1077546317719193>
- Kalivoda, M. T. (1998). Akustische Grundlagen. In M. T. Kalivoda & J. W. Steiner (Hrsg.), *Taschenbuch der Angewandten Psychoakustik* (S. 102–124). Springer.
- Kollmann, F. G. (2000). *Maschinenakustik: Grundlagen, Meßtechnik, Berechnung, Beeinflussung* (2., Neubearb. Aufl.). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-57229-6>
- Künzel, H. (1983). Beurteilung der thermo-mechanischen Eigenschaften von Außenputzen (Fraunhofer IRB Verlag, Hrsg.).
- Leissa, A. W. (1993). *Vibration of plates*. Acoustical Society of America. <https://permalink.obvsg.at/AC15368499>
- MathWorks. (n. d. a). Lineare Regression: MATLAB. Verfügbar 11. Mai 2023 unter [https://de.mathworks.com/help/matlab/data\\_analysis/linear-regression.html](https://de.mathworks.com/help/matlab/data_analysis/linear-regression.html)
- MathWorks. (n. d. b). mldivide: MATLAB. Verfügbar 11. Mai 2023 unter <https://de.mathworks.com/help/matlab/ref/mldivide.html>
- Mayr, A. R. (2009). *Vibro-acoustic sources in lightweight buildings* [Dissertation]. University of Liverpool.
- Mayr, A. R., & Gibbs, B. M. (2009). On the use of single equivalent excitation to estimate the structure-borne sound power from machines on timber joist floors. [https://www.researchgate.net/publication/273950961\\_On\\_the\\_use\\_of\\_single\\_equivalent\\_excitation\\_to\\_estimate\\_the\\_structure-borne\\_sound\\_power\\_from\\_machines\\_on\\_timber\\_joist\\_floors#citations](https://www.researchgate.net/publication/273950961_On_the_use_of_single_equivalent_excitation_to_estimate_the_structure-borne_sound_power_from_machines_on_timber_joist_floors#citations)
- Mayr, A. R., & Gibbs, B. M. (2011). Point and transfer mobility of point-connected ribbed plates. *Journal of Sound and Vibration*, 330(20), 4798–4812. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2011.04.017>
- Mayr, A. R., & Gibbs, B. M. (2012). Single Equivalent Approximation for Multiple Contact Structure-Borne Sound Sources in Buildings. *Acta Acustica united with Acustica*, 98(3), 402–410. <https://doi.org/10.3813/AAA.918525>
- Mayr, A. R., & Gibbs, B. M. (2008). Approximation of single equivalent mobilities of timber joist floors. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 123(5), 3357. <https://doi.org/10.1121/1.2933936>
- Möhler, U., & Eulitz, C. (2017). Tieffrequente Geräusche im Wohnumfeld: Ein Leitfaden für die Praxis (Umweltbundesamt, Hrsg.). <https://www.umweltbundesamt.de/publikationen/tieffrequente-geraeusche-im-wohnumfeld>

- Moorhouse, A. T., & Gibbs, B. M. (1995). Calculation of the mean and maximum mobility for concrete floors. *Applied Acoustics*, 45(3), 227–245. [https://doi.org/10.1016/0003-682X\(94\)00047-Y](https://doi.org/10.1016/0003-682X(94)00047-Y)
- Möser, M., & Kropp, W. (2010). *Körperschall: Physikalische Grundlagen und technische Anwendungen* (3. aktualisierte Auflage 2010). Springer Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-49048-7>
- Niemann, H., Hoebel, J., Hammersen, F., & Laußmann, D. (2014). Lärmbelästigung - Ergebnisse der GEDA-Studie 2012. In Robert Koch-Institut (Hrsg.), *GBE kompakt*.
- Öhler, S., & Kaltbeitzel, B. (2021). Latest results on the characterization of waste water pipes according to the draft EN 14366 (session “Characterisation of structure-borne sound sources”) “Euronoise 2021”. <http://www.sea-acustica.es/fileadmin/Madeira21/ID89.pdf>
- Pabst, U., & Hagedorn, P. (1995). Identification of boundary conditions as a part of model correction. *Journal of Sound and Vibration*, 182(4), 565–575. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1995.0217>
- Petersson, B., & Plunt, J. (1980). Structure-borne Sound Transmission from Machinery to Foundations: Final Report. <https://books.google.de/books?id=W71NMQAACAAJ>
- Petersson, B., & Plunt, J. (1982a). On effective mobilities in the prediction of structure-borne sound transmission between a source structure and a receiving structure, part I: Theoretical background and basic experimental studies. *Journal of Sound and Vibration*, 82(4), 517–529. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(82\)90405-9](https://doi.org/10.1016/0022-460X(82)90405-9)
- Petersson, B., & Plunt, J. (1982b). On effective mobilities in the prediction of structure-borne sound transmission between a source structure and a receiving structure, part II: Procedures for the estimation of mobilities. *Journal of Sound and Vibration*, 82(4), 531–540. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(82\)90406-0](https://doi.org/10.1016/0022-460X(82)90406-0)
- Petersson, B. (1993). Structural Acoustic Power Transmission By Point Moment And Force Excitation, Part II: Plate-like Structures. *Journal of Sound and Vibration*, 160(1), 67–91. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1993.1005>
- Petersson, B., & Gibbs, B. M. (2000). Towards a structure-borne sound source characterization. *Applied Acoustics*, 61(3), 325–343. [https://doi.org/10.1016/S0003-682X\(00\)00037-2](https://doi.org/10.1016/S0003-682X(00)00037-2)
- Qiao, G., & Rahmatalla, S. (2019). Identification of the viscoelastic boundary conditions of Euler–Bernoulli beams using transmissibility. *Engineering Reports*, 1(5). <https://doi.org/10.1002/eng2.12074>
- Roy, N., & Girard, A. (2005). Impact of residual modes in structural dynamics. *European Conference on Spacecraft Structures*. [https://www.researchgate.net/publication/234293219\\_Impact\\_of\\_residual\\_modes\\_in\\_structural\\_dynamics](https://www.researchgate.net/publication/234293219_Impact_of_residual_modes_in_structural_dynamics)

- Rubin, H., & Schneider, K.-J. (2016). Baustatik. In K.-J. Schneider, A. Goris & A. Albert (Hrsg.), *Bautabellen für Ingenieure* (S. 4.1–4.70). Bundesanzeiger Verlag.
- Rubin, S. (1975). Improved Component-Mode Representation for Structural Dynamic Analysis. *AIAA Journal*, 13(8), 995–1006. <https://doi.org/10.2514/3.60497>
- Sanayei, M., McClain, J. A. S., Wadia-Fascetti, S., & Santini, E. M. (1999). Parameter Estimation Incorporating Modal Data and Boundary Conditions. *Journal of Structural Engineering*, 125(9), 1048–1055. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(1999\)125:9\(1048\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(1999)125:9(1048))
- Schneider, K.-J., Goris, A., & Albert, A. (Hrsg.). (2016). *Bautabellen für Ingenieure: Mit Berechnungshinweisen und Beispielen* (22. Auflage). Bundesanzeiger Verlag.
- Schneider, K.-J., & Graubner, C.-A. (2016). Mauerwerksbau (DIN EN 1996). In K.-J. Schneider, A. Goris & A. Albert (Hrsg.), *Bautabellen für Ingenieure* (S. 7.1–7.30). Bundesanzeiger Verlag.
- Shadish, W. R., Cook, T. D., & Campbell, D. T. (2002). *Experimental and quasi-experimental designs for generalized causal inference*. Houghton, Mifflin and Company.
- Siebertz, K., van Bebber, D., & Hochkirchen, T. (2010). *Statistische Versuchsplanung: Design of Experiments (DoE)*. Springer.
- Skudrzyk, E. (1980). The mean-value method of predicting the dynamic response of complex vibrators. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 67(4), 1105–1135. <https://doi.org/10.1121/1.384169>
- Soedel, W. (2004). *Vibrations of shells and plates* (3rd ed., Bd. Volume 177). Marcel Dekker. <https://permalink.obvsg.at/>
- Späh, M. M., & Gibbs, B. M. (2009). Reception plate method for characterisation of structure-borne sound sources in buildings: Assumptions and application. *Applied Acoustics*, 70(2), 361–368. <https://doi.org/10.1016/j.apacoust.2008.03.001>
- Stebbins, R. A. (2001). *Exploratory research in the social sciences* (Bd. 48). Sage Publ. <https://doi.org/12753>
- Thißen, M., & Niemann, H. (2016). Wohnen und Umwelt - Ergebnisse aus dem bundesweiten Gesundheitsmonitoringsystem des Robert Koch-Instituts. *UMID: Umwelt und Mensch - Informationsdienst*, (2), 18–29. [https://www.umweltbundesamt.de/sites/default/files/medien/360/publikationen/umid\\_02\\_2016\\_wohnen\\_rki.pdf](https://www.umweltbundesamt.de/sites/default/files/medien/360/publikationen/umid_02_2016_wohnen_rki.pdf)
- Umweltbundesamt. (2022). Nachbarschaftslärm und Lärm von Anlagen. Verfügbar 11. Mai 2023 unter <https://www.umweltbundesamt.de/themen/verkehr-laerm/nachbarschaftslaerm-laerm-von-anlagen>

- Verein Deutscher Ingenieure e.V. (2012-10). *VDI 4100: Schallschutz im Hochbau Wohnungen Beurteilung und Vorschläge für erhöhten Schallschutz*. VDI Verlag.
- Wang, S. (2014). Model updating and parameters estimation incorporating flexible joints and boundary conditions. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 22(5), 727–745. <https://doi.org/10.1080/17415977.2013.823413>
- Warburton, G. B. (1954). The Vibration of Rectangular Plates. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, 168(1), 371–384. <https://doi.org/10.1243/PIMEPROC195416804002>
- Weber, L., Troll, A., & Öhler, S. (2019). *Geräuschübertragung durch technische Installationen im Leichtbau*. Fraunhofer IRB Verlag. [https://www.zukunftbau.de/fileadmin/user\\_upload/01\\_Forschungsf%C3%B6rderung/Abschlussberichte/16.16\\_Forschungsbericht\\_19089006891.pdf](https://www.zukunftbau.de/fileadmin/user_upload/01_Forschungsf%C3%B6rderung/Abschlussberichte/16.16_Forschungsbericht_19089006891.pdf)
- Weinandy, R., & Myck, T. (2013). Lärm. In Umweltbundesamt (Hrsg.), *Schwerpunkte 2013* (S. 44–65).
- Wieland, B., Katharina, K., Maximilian, K., Stefan, L., Christopher, M., & Martina, W. (2012). *Forschungsmethodik in den Ingenieurwissenschaften* [Skript]. Technische Universität München. Lehrstuhl für Produktentwicklung.
- World Health Organization. (2018). *Environmental noise guidelines for European Region*. WHO Regional Office for Europe. <https://www.who.int/europe/publications/i/item/9789289053563>
- Young, D. (1950). Vibration of Rectangular Plates by the Ritz Method. *Journal of Applied Mechanics*, 17(4), 448–453. <https://doi.org/10.1115/1.4010175>
- Zhu, J., & Huang, L. (1995). Estimation of boundary parameters of plate structures. *Journal of Sound and Vibration*, 179(3), 455–461. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1995.0029>

## Anhang

### A Weiterführendes

#### A.1 Überschlägige Schätzung der Auflagersituation

Um für beliebige Platten innerhalb der gesetzten Limitationen approximierten Gradienten bestimmen zu können, ist es entscheidend die Auflagerbedingungen möglichst korrekt abschätzen zu können. Folgend werden sowohl für die lineare Steifigkeit, als auch für die Rotationssteifigkeit einfache mechanische Gleichungen zur Schätzung der Steifigkeiten vorgestellt und diskutiert.

Unter der Annahme, dass die betrachtete Platte in P9 gleichseitig und entlang der gesamten Kantenlänge gelagert ist, werden als reale Auflager Wandscheiben der Länge  $l_x$  sowie  $l_y$  (gleich zu Plattenmaße) definiert. Die Wände weisen eine Höhe  $h$  und eine Dicke  $t$  auf. Es wird im Rahmen folgender Herleitungen von allseits gleichen Material- und Geometrieparametern ausgegangen. Zusätzlich wird die Annahme getroffen, dass sich alle betrachteten elastischen Vorgänge im Gültigkeitsbereich des Hooke'schen Gesetzes abspielen.

#### Lineare Steifigkeit

Gesucht wird die Ersatzfedersteifigkeit der Wandaullager. Diese lässt sich über das Prinzip der virtuellen Kräfte (PvK) bestimmen (vgl. H. Rubin und Schneider (2016, S. 4.35)). Ein Stab mit der Länge  $l$ , dem Elastizitätsmodul  $E$  und der Querschnittsfläche  $A$  wird in Stabrichtung mit der Kraft  $F$  belastet (resultierende Normalkraft  $N$ ). Das PvK berechnet die aus  $F$  resultierende Verschiebung  $u$  in Stabrichtung. Dazu wird die virtuelle Kraft  $\bar{1}$  in Richtung der gesuchten Verschiebung aufgebracht, welche die virtuelle Normalkraft  $\bar{N}$  hervorruft. Folgend werden die Gleichgewichtsbedingungen zu

$$\bar{1} \cdot u = \int_0^l \bar{N} \frac{N}{EA} dx = \bar{N} \frac{Nl}{EA} \quad \text{Gl. 87}$$

aufgestellt. Dem Prinzip nach kürzen sich die virtuellen Kräfte und die Verschiebung  $u$  ist definiert zu

$$u = \frac{Nl}{EA}. \quad \text{Gl. 88}$$

Durch den mechanischen Zusammenhang der Federkraft  $F_k = k u$  kann letztere ermittelte Verschiebung substituiert werden.

$$F_k = k \frac{Nl}{EA} \quad \text{Gl. 89}$$

Wird Gleichung 89 nach  $k$  umgestellt, resultiert die Ersatzfedersteifigkeit des Druckstabs (mit  $F = N$ ).

$$k = \frac{EA F}{Fl} = \frac{EA}{l} \quad \text{Gl. 90}$$

Unter Annahme eines 1 m Wandstreifens ist die Übertragung auf eine Wand möglich.

$$k = \frac{E t [1 \text{ m}]}{l} \quad \text{Gl. 91}$$

Die Einheit der Ersatzfedersteifigkeit der Wand ergibt sich somit zu bekannten  $[\text{N/m}^2]$ .

### Rotationssteifigkeit

Als Rotationssteifigkeit wird im Rahmen vorliegender Untersuchungen die Steifigkeit berücksichtigt, welche sich aus der linearen Steifigkeit der Wände und einem Hebelarm zwischen Auflagerfläche und Rotationsachse der Platte ergibt. Abbildung A.1 zeigt einen idealisierten mechanischen Aufbau der Auflagersituation. Für eine erste Herleitung wird von einer Rotationsachse entlang der äußeren Plattenkanten ausgegangen. Der Herleitung liegt die im Bauwesen übliche Kleinwinkelannäherung sowie eine linear-elastische Verformung der Wand zugrunde. Es wird vorerst vereinfacht davon ausgegangen, dass die volle Federsteifigkeit der Wand bei  $t' = 2/3t$  (Resultierende aus Dreiecksverteilung) wirkt. Die Federkraft der Wand ergibt sich bekanntlich zu

$$F_k = k u . \quad \text{Gl. 92}$$

Das äquivalente Federmoment  $M_\phi$  ist zu  $M_\phi = k_\phi \phi$  definiert. Wird nun vorausgesetzt, dass die resultierende Federkraft gleich einem Einspannmoment ist, kann der Zusammenhang

$$M_\phi = k_\phi \phi = F_k t' \quad \text{Gl. 93}$$

festgestellt werden. Mit dem geltenden Kontext zwischen Verdrehung und Durchsenkung (Kleinwinkelannäherung) von  $dw = \phi t'$ , ergibt sich

$$k_\phi \frac{u}{t'} = F_k t' . \quad \text{Gl. 94}$$

Nach  $k_\phi$  umgestellt, resultiert eine überschlägige Schätzung der Rotationssteifigkeit aufgrund des Auflagers.

$$k_\phi = k t'^2 \quad \text{Gl. 95}$$

Auf eine laufende Wand übertragen, folgt auch hier die bekannte Einheit  $[\text{N}]$ . Einschränkend muss allerdings darauf hingewiesen werden, dass die Annahme der Lage der Rotationsachse entlang der Plattenkante nicht haltbar ist. Die Rotationsachse wird vermutlich weiter innen liegen.

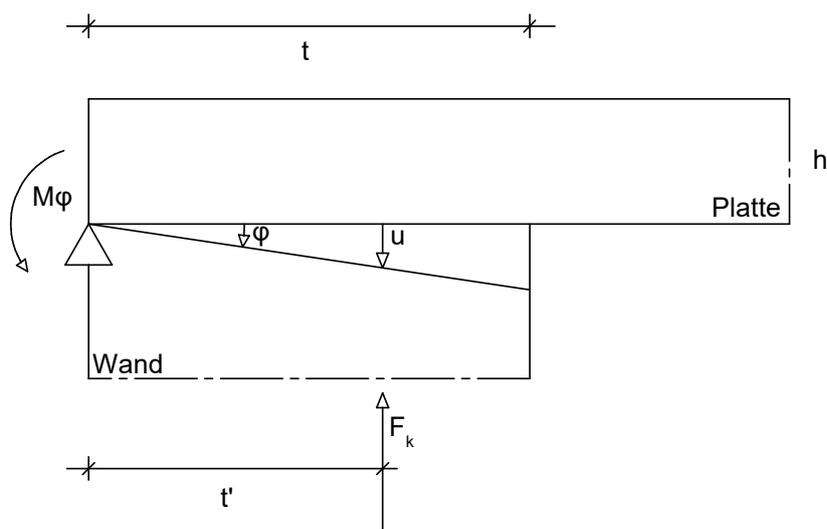


Abb. A.1: Idealisiertes Auflager einer Platte auf einer Wand

### Validierung der überschlägigen Steifigkeiten durch Messergebnisse sowie Interpretation

Folgend werden die oben vorgestellten Konzepte durch eine Anwendung auf Platte P9 validiert. Als Materialparameter werden die bereits vorgestellten IBP internen Kennwerte aus Tabelle 2 und Tabelle 1 verwendet. Die geschätzte lineare Steifigkeit der Auflagerwand ergibt sich zu

$$k = \frac{E t [1 \text{ m}]}{l} = \frac{10,8 \text{ E}9 \text{ 0,29}}{3,07} = 1,02 \text{ E}9 \text{ N/m}^2 . \quad \text{Gl. 96}$$

Die überschlägige Rotationssteifigkeit berechnet sich nach Gleichung 97.

$$k_{\phi} = k t'^2 = 1,02 \text{ E}9 (2/3 \text{ 0,29})^2 = 38,13 \text{ E}6 \text{ N} \quad \text{Gl. 97}$$

Tabelle A.1 stellt die kalibrierten Steifigkeiten aus der Simulation den eben geschätzten Werten gegenüber.

Tab. A.1: Plattenparameter nach erfolgreicher Kalibrierung

Parameter	Wert aus Kalibrierung	Wert aus Schätzung
lineare Auflagersteifigkeit	5,82 E9 N/m <sup>2</sup>	1,02 E9 N/m <sup>2</sup>
Rotationssteifigkeit der Auflager	3,80 E6 N	38,13 E6 N

Während die lineare Steifigkeit unterschätzt wird, liegt die approximierte Rotationssteifigkeit weit über der Referenzsteifigkeit aus getätigter Kalibrierung. Als Grund derartiger Abweichungen können verschiedenste mögliche Fehlerquellen in Betracht gezogen werden. Eine Fehleinschätzung der tatsächlichen Steifigkeiten durch die getätigte Kalibrierung könnte in Frage kommen. Darüber hinaus sind zum einen die tatsächlich verbauten Materialien nicht mit Sicherheit bekannt, zum anderen sind, wie bereits

erwähnt, die IBP internen Materialdaten nicht durchwegs repräsentativ. So haben die jeweiligen Elastizitätsmodule einen großen Einfluss auf die geschätzten Werte. Zusätzlich muss davon ausgegangen werden, dass vor allem bei der Rotationssteifigkeit die approximativen Gleichungen nicht ausreichend genau sind. Außerdem wird in obigen Betrachtungen die vorhandene Vorsatzschale vernachlässigt. Gleichwohl davon auszugehen ist, dass diese durchaus einen Einfluss auf die Situation haben kann. Ebenfalls vernachlässigt und gleichzeitig schwer abzuschätzen sind Effekte aus den begrenzenden Wänden, die auf der Platte oben aufliegen. Einflüsse auf lineare Steifigkeiten sowie auf Rotationssteifigkeiten sind vermutlich nicht zu vernachlässigen. Zusätzlich ist die bereits angesprochene Lage der Rotationsachse und damit die Länge  $t'$  maßgebend für die resultierenden Werte. Auch eine Zusammenfassung der Wandsteifigkeit zu einer Ersatzfeder bei  $t'$  ist vereinfacht. Wäre daher von geringerem  $t'$  und geringerer linearer Steifigkeit auszugehen, fiel die Rotationssteifigkeit deutlich niedriger aus.

Der Analogie aus Abbildung A.1 folgend könnte eine realitätsnähere Anpassung eine Verteilung der Steifigkeit darstellen.

$$k' = \frac{1}{2} \frac{kt}{t} = \frac{1}{2} k \quad \text{Gl. 98}$$

Obiger Ausdruck formuliert die Federsteifigkeit  $k'$  als Resultierende aus einer dickenbezogenen Steifigkeit gewichtet mit der dynamisch beanspruchten Fläche des Dreiecks (1/2). In Kombination mit einer verschobenen Rotationsachse bei  $0,5h$  (Goris, 2016, S. 5.44) (nach EC2-1-1/Massivbau) ergibt sich die überschlägige Rotationssteifigkeit zu

$$k_{\phi} = 0,5 k t'^2 = 0,5 \cdot 1,02 \text{ E9 } 0,15^2 = 11,48 \text{ E6 N} \quad \text{Gl. 99}$$

mit

$$t'' = 2/3 (t - h/2) = 2/3(0,29 - 0,14/2) = 0,15 \text{ m} . \quad \text{Gl. 100}$$

Durch diese detailliertere Beschreibung ist die Rotationssteifigkeit deutlich verringert und der kalibrierten Steifigkeit angenähert. Einschränkend muss jedoch darauf hingewiesen werden, dass die lineare Steifigkeit unterschätzt wird und somit die Rotationssteifigkeit ebenfalls unterschätzt ist. Jedoch ist der Fehlerfaktor zwischen letzterer geschätzter Rotationssteifigkeit geringer als der Fehlerfaktor der linearen Steifigkeiten. Daher wäre eine erneute Verbesserung der linearen Schätzung angebracht bei gleichzeitiger Akzeptanz zusätzlicher Fehler bei der Rotationssteifigkeit. Eine Berücksichtigung der bis jetzt vernachlässigten Vorsatzschale könnte diese Differenz verringern. Weitere Untersuchungen sollten an dieser Stelle angestellt werden, um mögliche Fehler auszuschließen und robuste Schätzungen zu entwickeln.

## A.2 Berechnung der Position von *gradTrans* entlang der Symmetrieachsen

Ziel folgender Überlegungen ist es, den Übergang zwischen den beiden approximativen Admittanzberechnungen der charakteristischen Admittanz und dem hybriden Modell zu finden. Aus in Gliederungspunkt 6 erläuterten Gründen wurde zunächst eine möglichst einfache Umsetzung gewählt. Erneut wurde eine Beschränkung auf Mode (1,1) festgelegt. Da eine Umformung des Gradienten nach der Position zwei Unbekannte  $x$  und  $y$  ergibt, wird nur die Symmetrieachsen betrachtet. Mit Verweis auf das Konzept des Ansatz I verkürzen sich so bei  $l_x/2$  oder  $l_y/2$  eine der beiden Formfunktionen  $\phi$  zum

Wert 2. Folgende Aufstellung zeigt diese Herleitung mathematisch.

$$a_1 = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{d|\tilde{Y}_1|}{d\omega} \approx \frac{\phi_1^2(x) \phi_1^2(y)}{M\omega_1^2} \quad \text{Gl. 101}$$

Gleichung 101 wird mit  $a_1$  gleich  $gradTrans$  zu

$$gradTrans = \frac{\phi_1^2(x) \phi_1^2(y)}{M\omega_1^2} . \quad \text{Gl. 102}$$

Durch  $x = l_x/2$  und die Beschränkung auf Mode (1,1) ergibt sich die Formfunktion zu

$$\phi_x^2 = \left( \sqrt{2} \sin\left(\frac{n\pi x}{l_x}\right) \right)^2 = 2 \sin^2\left(\frac{1 \pi 0,5 l_x}{l_x}\right) = 2 \cdot 1 . \quad \text{Gl. 103}$$

Eingesetzt in Gleichung 102 folgt

$$gradTrans = \frac{2 \phi_1^2(y)}{M\omega_1^2} = \frac{2 (\sqrt{2} \sin(\frac{n\pi y}{l_y}))^2}{M\omega_1^2} . \quad \text{Gl. 104}$$

Durch anschließende Umstellung nach  $y$  ergibt sich eine von  $gradTrans$  abhängige überschlägige Gleichung zur Berechnung der Position entlang der Symmetrieachse.  $gradTrans$  ist durch Gleichung 61 (S. 74) definiert.

$$y = \arcsin\left(\sqrt{\frac{gradTrans M \omega_1^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}}\right) l_y \frac{1}{\pi} \quad \text{Gl. 105}$$

Äquivalent gestaltet sich die Formel der  $x$ -Position.

$$x = \arcsin\left(\sqrt{\frac{gradTrans M \omega_1^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}}\right) l_x \frac{1}{\pi} \quad \text{Gl. 106}$$

Die obigen beiden Gleichungen für  $x$  und  $y$  entsprechen somit überschlägigen Abständen von der Auflagerkante entlang der Symmetrieachsen. An diesen Positionen befindet sich mit Berücksichtigung der getroffenen Vereinfachungen der Übergang zwischen der reinen charakteristischen Admittanz und dem hybriden Modell als Approximation der Admittanz.

Die beiden Gleichung wurde in „hybridModel.m“ implementiert. Beachtet werden muss an dieser Stelle lediglich die Umrechnung von der Kreisfrequenz zur Frequenz durch die Multiplikation von  $2\pi$ . Eine weitere Untersuchung der Ergebnisse erfolgte im Rahmen vorliegender Untersuchungen nicht.

## **B MATLAB Skripte und Speicherstruktur der archivierten Daten**

Zur Erstellung von gezeigten Grafiken aus Messungen und Simulationen wurden einige Skripte in MATLAB implementiert. Diese werden in folgendem Kapitel vorgestellt und zusammengefasst. Die Auflistung dient in erster Linie der Vollständigkeit und vernachlässigen eine detaillierte Darstellung der Umsetzung in MATLAB. Die Ausführungen wiederholen sich teils mit Passagen des Hauptteils. Dennoch wird im Rahmen des Anhangs versucht ein vollständiges Bild des Skripte zu zeichnen. Alle genannten MATLAB Skripte sind in der Archiv-Datei der vorliegenden Masterthesis enthalten.

### **Mobility\_matlab.m**

Das MATLAB-Programm „Mobility\_matlab.m“ ist von Frau Dr. Aoki implementiert und wurde an den Autor vorliegender Arbeit übergeben. In den internen Berechnungsabläufen wurden keine Änderungen vorgenommen. Lediglich im Hauptskript der Anwendung wurden einige Zeilen eingefügt. Neben Datenimporten und plot-Funktionen musste vorrangig die Kalibrierung der Auflagersteifigkeiten in den Ablauf integriert werden. Diese Kalibrierung und die einhergehende Minimierung der Eigenfrequenzabstände ruft zugehörige Funktionen auf. Unter anderem eine separate Funktion mit der erwähnten `fminsearch` Minimierung sowie eine Funktion zur Bestimmung der Eigenfrequenz aus Messergebnissen. Die abgespeicherten Datensätze des Programms wurden im Laufe der Arbeit auf ein nötiges Minimum reduziert, um Speicherplatz und Berechnungszeit zu minimieren.

### **importExcel.m**

Das MATLAB Skript „importExcel.m“ dient der Verarbeitung der ursprünglichen Messdaten. Diese werden aus der Messsoftware als xls-Dateien exportiert und enthalten eine Vielzahl an gemessenen Datenreihen. Für die Weiterverarbeitung liest das Skript die Reihen der Admittanz sowie der Kohärenz aus, mittelt über die mehrfachen Messzeitpunkte, berechnet die Phase und speichert abschließend alle Daten in einer mat-DATA Datei. Vorrangig ist der Datenimport nötig für die weitere Datenverarbeitung sowie die Beschleunigung der Laufzeiten. „importExcel.m“ ist dabei nach aktuellem Stand für den Import der Daten aus P9 ausgelegt. Ein Umbau für die Daten aus P12 ist prinzipiell möglich.

### **GradientMeasurement.m**

Das MATLAB Skript „GradientMeasurement.m“ dient zur Berechnung der Gradienten aus Messergebnissen sowie der Ausgabe dieser in Kombination mit Gradienten aus Simulationen. Entsprechende Datensätze zu sowohl simulierten als auch gemessenen Positionen sind zu Beginn des Skripts auszuwählen. Durch die Eingabe von 1 oder 0 werden gemessene und simulierte Daten integriert. Durch die Eingabe einer 1 wird der entsprechende Datensatz geladen. Eine 0 unterdrückt diese. Weitere wichtige Eingabewerte sind die unteren und oberen Frequenzen der Berechnungsgrenzen der Gradienten aus Messergebnisse. Die Variablen „lowLimit“ und „upLimit“ stellen die beiden Grenzwerte dar. Die Wahl dieser ist ausführlich im entsprechenden Gliederungspunkt des Hauptteils erörtert. Die Berechnung der Gradienten auf Grundlage der Messergebnisse folgt im weiteren Schritt. Eine graphische Ausgabe der geladenen und berechneten Werte bildet das Ergebnis des Skripts.

## **Compare.m**

Das im Rahmen vorliegender Arbeit erstellte MATLAB Skript „Compare.m“, verarbeitete die meisten der erzeugten Simulationen und generierte den Großteil gezeigter Grafiken. Ebenfalls werden zu untersuchende Datensätze per 1 oder 0 in den Arbeitsbereich geladen. Zur Verfügung stehen dabei nicht nur Daten aus Simulationen, sondern auch die Messergebnisse. Die einzelnen Verarbeitungen sind in Sektionen (doppel%) sortiert und eindeutig benannt. Die einzelnen Sektionen können über „Schalter“ (if-Schleifen in der Sektion) zu- oder abgeschaltet werden. Die Ergebnisse sind Grafiken die wiederum über das MATLAB Grafikfenster bearbeitet und exportiert werden. Die mit „THESIS“ gekennzeichneten Abschnitte dienen zur Erzeugung in vorliegender Arbeit vorgestellter Grafiken. Die übrigen Abschnitte sind als Zwischenschritte zu verstehen.

## **parameterCompare.m**

Das MATLAB Skript „parameterCompare.m“ bildet die Basis der Parameterstudien. Daten und Abschnitte werden nach bekannten Schemata zugeschaltet bzw. unterdrückt. Die Ergebnisse sind grafische Darstellungen sowie berechnete Daten bezüglich des Factor Screenings.

## **P12\_Wall.m**

Das MATLAB Skript „P12\_Wall.m“ dient der Verarbeitung und Darstellung erzeugter Ergebnisse bezüglich der Installationswand in P12. Es werden sowohl Messdaten als auch Simulationsdatensätze in den Arbeitsbereich importiert. Integriert ist zusätzlich die Extraktion der ersten Eigenfrequenzen sowie die Phasenberechnung der Admittanz aus Messergebnissen. Die Ergebnisse des Skripts stellen Vergleichsdarstellungen zwischen Messung und Simulation sowie Visualisierungen der einzelnen Mess- bzw. Auswertungspositionen dar.

## **showerTrayP12.m**

Für die Validierung der Ansätze hybrider Modelle werden Prognosedaten zum Installationsschalldruckpegel einer Duschwanne auf der Bodenplatte in P12 herangezogen. Wie bereits erläutert wurden die Daten an den Autor vorliegender Arbeit in Form eines Exceltools übergeben. Aus Kompatibilitätsgründen mit eigenen Daten, mussten die Prognosewerte aus Excel in MATLAB überführt werden. Als input-Daten werden neben Materialdaten die approximativen Gradienten aus „hybridModel.m“ benötigt. Da die Schalldruckpegel auf Terzmittenfrequenzen gemittelt sind, mussten die approximativen Admittanzen des hybriden Modells ebenfalls von Schmalband auf Terzband gemittelt werden. Die Berechnung übernimmt eine zur Verfügung gestellte (IBP) MATLAB Funktion. Diese wird Skript-intern aufgerufen und muss als Datei vorliegen. Die Ergebnisse des Skripts „showerTrayP12.m“ sind Grafiken mit gemessenen und prognostizierten Pegeln installationsbedingter Geräuschmissionen.

## **hybridModel.m**

Das MATLAB Skript „hybridModel.m“ stellt prinzipiell die Umsetzung des hybriden Modells nach Ansatz I und II dar. Als Eingangsparameter sind die Materialwerte und Dimensionen der betrachteten

Platte, sowie die Auswertungsposition nötig. Die Auswertungsposition kann dabei sowohl nach kartesischen Koordinaten als auch nach prozentualer Position eingegeben werden. Zusätzlich besteht die Möglichkeit Mess- bzw. Simulationsdatensätze zur Validierung zu integrieren. Der Input einer geeigneten Simulationsdatei erfolgt immer, da zur visuellen Ausgabe die Frequenzaufteilung der Simulation verwendet wird.

Die Berechnung aller eingeführten approximativer Gradienten erfolgt in „hybridModel.m“ und wird im Arbeitsbereich („Workspace“) der MATLAB Oberfläche im Datencontainer (struct) output gespeichert. Neben den Gradienten enthält output auch die charakteristische Admittanz, den Übergangsgradienten sowie nach Gliederungspunkt A berechnete überschlägige Wechselpositionen.

Der Datencontainer plate (struct) enthält alle Parameter der betrachteten Platte sowie berechnete Eigenfrequenzen für gelenkige und eingespannte Lagerung. Der Container position (struct) beinhaltet alle Variablen bezüglich der Auswertungsposition. In support (struct) befinden sich Parameter der Auflager sowie berechnete dimensionslose Steifigkeiten. Der struct simulation fasst alle Informationen aus der importierten Simulationsdatei. Unter anderem die Admittanz, die Frequenzaufteilung und den numerischen Gradienten *gradNum*.

Das Skript enthält neben der Gradientenberechnung auch die lineare Extra- und Interpolation der Korrekturfaktoren im auflagernahen Bereich, die Berechnung dimensionsloser Steifigkeiten auf Grundlage der geschätzten Auflagersteifigkeiten sowie die im Hauptteil erläuterte Gewichtung der mittleren Korrekturwerte zwischen Achse I und einer beliebigen Position entlang der Achse B. Einige weitere Gleichungen und Konzepte sind zusätzlich enthalten, wenn auch nicht alle in Gänze funktionstüchtig implementiert sind. Es finden sich zusätzlich im Rahmen der schriftlichen Ausführung vernachlässigte Konzepte. So sind beispielsweise die Admittanzgrenzen  $Y_{min}$  und  $Y_{max}$  sowie die Admittanzberechnungen am Plattenrand nach E DIN EN 12354-5:2022-02 Annex F implementiert. Auch eine Betrachtung der Modendichte der Platte ist enthalten, wenngleich in einem unvollständigen Zustand.

### Speicherstruktur der Simulationsdateien

Die durchgeführten Parameterstudien erzeugten eine Vielzahl an Daten, die teils in der schriftlichen Ausführung Verwendung finden und teils lediglich im Archiv enthalten sind. Während der Erstellung wurde eine Speicherstruktur festgelegt, um eindeutige Zuordnung zu gewährleisten. Die Namensgebung ist darüber hinaus entscheidend für den Datenimport der MATLAB Skripte.

Eine für die Parameterstudien erzeugte Simulationsdatei verfügt stets über das Präfix „Mobility\_matlab\_“ gefolgt von einer Nummerierung, die nach Themengebieten trennt. Die Untergliederung zählt von 1 bis 11 und erhält durch einen Punkt getrennt Untergruppierungen. Diese Gruppierung nach Zahlen ist vorrangig gewählt, um bei einer alphabetischen Datensortierung nach Dateiname alle zusammengehörigen Datensätze zu bündeln. Tabelle B.1 benennt die Hauptgruppen dieser Gruppierung. Der Nummerierung folgt durch Bindestriche getrennt eine weitere Spezifizierung des Datensatzes. Alle Datensätze ohne eindeutige Plattenspezifizierung fußen auf Grundlage der Standardplatte P9 und sind vorrangig den Parameterstudien zuzuordnen. Folgender Dateiname zeigt exemplarisch das System:

Mobility\_matlab\_S11.4-3d-I-clamp-plus10%rho

Der beispielhafte Dateiname gliedert sich somit der Strukturebene S11.4 an. Der Datensatz ist an Position 3d auf Achse I mit eingespannten Lagerungsbedingungen generiert und verfügt über eine Materialvariation von plus 10% höherer Rohdichte als die Standardplatte P9. Einige Datensätze verfügen abschließend über ein Suffix v1 für Version eins. Diese Endung wurde allerdings ausgesetzt, nachdem sich die Dokumentation des Versionsverlauf der Datensätze als unnötig herausgestellt hat.

Tab. B.1: Speicherstruktur der Simulationsdatensätze für Parametervariationen der Standardplatte P9

<b>Hauptstrukturebene</b>	<b>Themengebiet</b>
S1.x	Datensätze zur Visualisierung von Messungen und simulierten Daten
S2.x	Datensätze für die Kalibrierung
S3.x	Datensätze der Parametervariationen (Factor Screening)
S4.x	Datensätze erster Gradientenuntersuchungen
S5.x	Datensätze zur Untersuchung des Gradienten bei variierenden Auflagerbedingungen
S6.x	Datensätze zur Untersuchungen an $Y_{min}$ , $Y_{max}$ (nicht in schriftlicher Ausführung der Masterarbeit enthalten)
S7.x	Datensätze für die Untersuchung vereinfachter Gradienten
S8.x	Datensätze zu Untersuchung der Admittanz entlang aller Achsen
S9.x	Datensätze zur Vervollständigung der Paramterstudien
S10.x	Datensätze zur Untersuchung des Einflusses der Rotationssteifigkeit
S11.x	Datensätze zur Entwicklung des Ansatz II

[–] ... Informationen sind nicht bekannt

Simulationsdatensätze zu anderen Platten (bspw. P12) sind ebenfalls eindeutig benannt, wenngleich nicht strikt nach obigem Schema.

## C Datenblätter verwendeter Messgeräte

Folgende Tabelle listet alle verwendeten Messgeräte mit den jeweiligen individuellen Merkmalen, sofern diese bekannt sind. Die Tabelle ist als Ergänzung zu den Abbildungen 14 und 21 (Messsetup) zu verstehen. Im Anschluss zeigen die Abbildung die verfügbaren Datenblätter, der verwendeten Messtechnik.

Tab. C.1: Verwendete Messgeräte (Eigentum des Fraunhofer IBPs, Stuttgart)

### Prüfstand P9

Gerät	Seriennummer
Samurai 3.0 - Messsoftware	–
Sinus Messtechnik - Soundbook MK2 Expander	–
Brüel & Kjaer - NEXUS Conditioning Amplifier	IBP intern: Nr. 1
Brüel & Kjaer - Accelerometer 4371	1632488
Brüel & Kjaer - Accelerometer 4371	1632489
Brüel & Kjaer - Force Transducer 8200	1258108
Data Physics Shaker	–

### Prüfstand P12

Gerät	Seriennummer
Samurai 3.0 - Messsoftware	–
Sinus Messtechnik - Soundbook MK2 Expander	# 09218
Brüel & Kjaer - NEXUS Conditioning Amplifier	IBP intern: Nr. 1
Brüel & Kjaer - Accelerometer 4371	1632488
Brüel & Kjaer - Impact Hammer 8202	1291219
Brüel & Kjaer - Force Transducer 8200	1288471

– ... Informationen sind nicht bekannt

### Prüfstand – P9

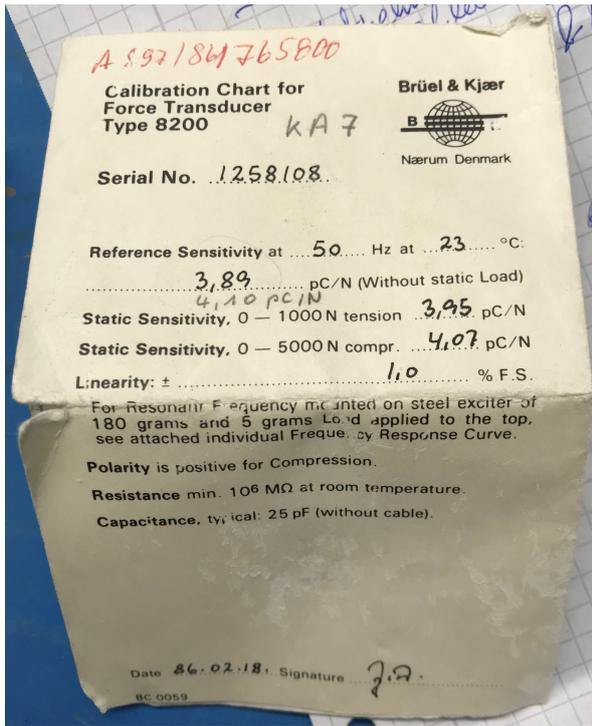


Abb. C.1: Kraftsensor Typ 8200 Sr.Nr.: 1258108; individuelle Daten

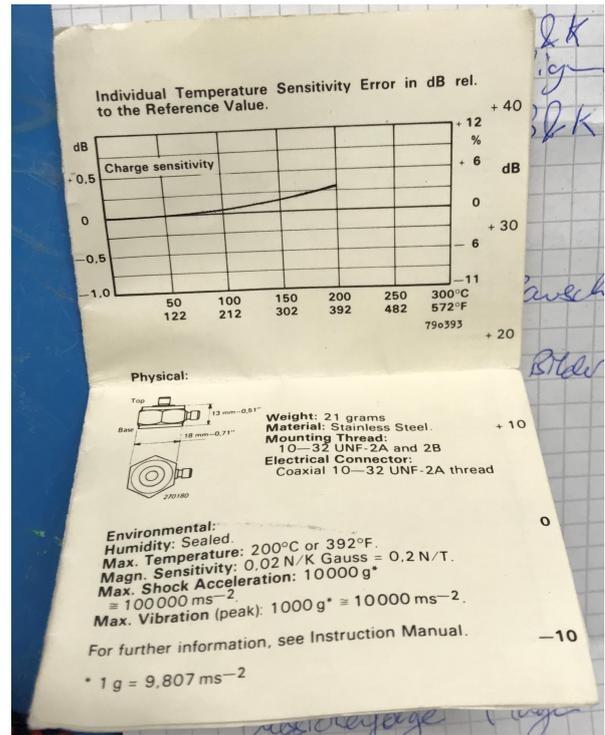


Abb. C.2: Kraftsensor Typ 8200; allgemeine Daten

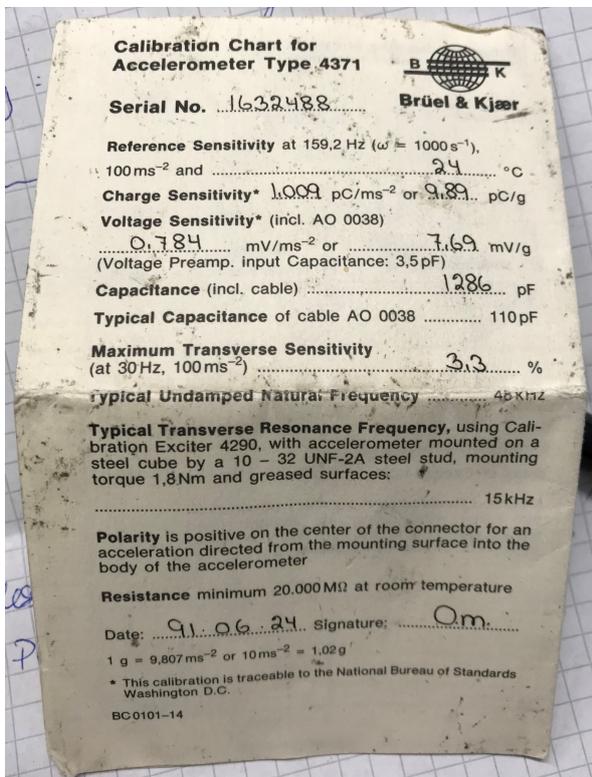


Abb. C.3: Beschleunigungssensor Typ 4371 Sr.Nr.: 1632488; individuelle Daten

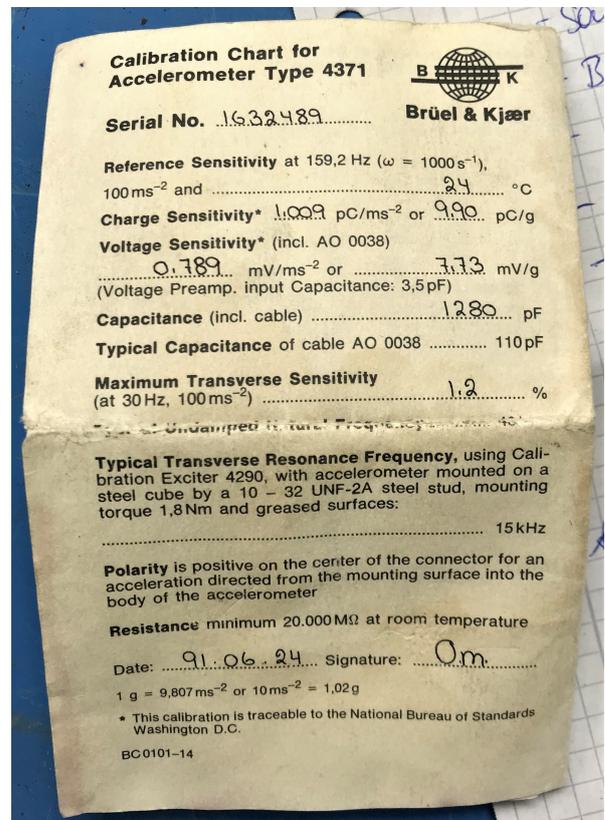


Abb. C.4: Beschleunigungssensor Typ 4371 Sr.Nr.: 1632489; individuelle Daten

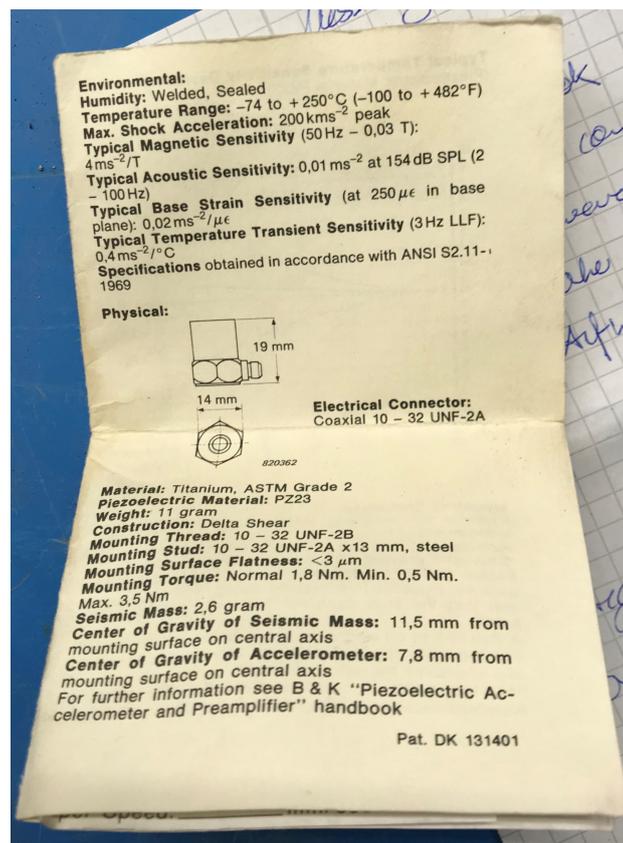


Abb. C.5: Beschleunigungssensor Typ 4371; allgemeine Daten

**Prüfstand – P12**

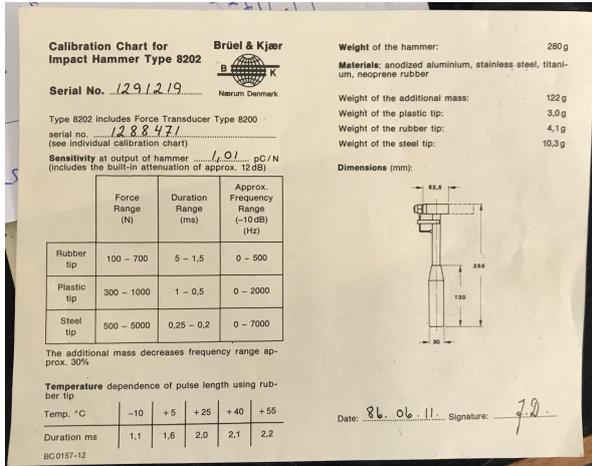


Abb. C.6: Impulshammer Typ 8202 Sr.Nr.: 1291219; individuelle Daten

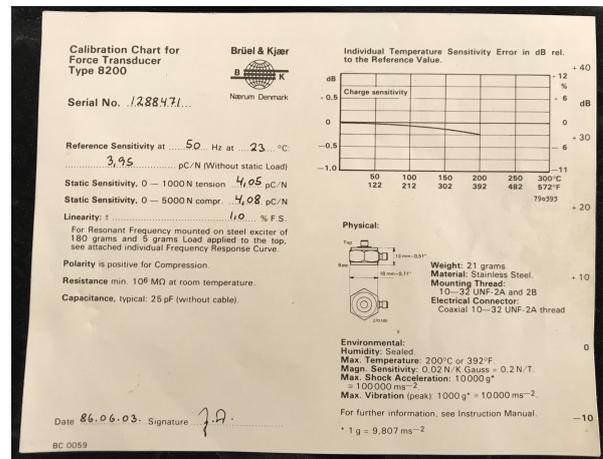


Abb. C.7: Kraftsensor Typ 8200 Sr.Nr.: 1288471; individuelle Daten

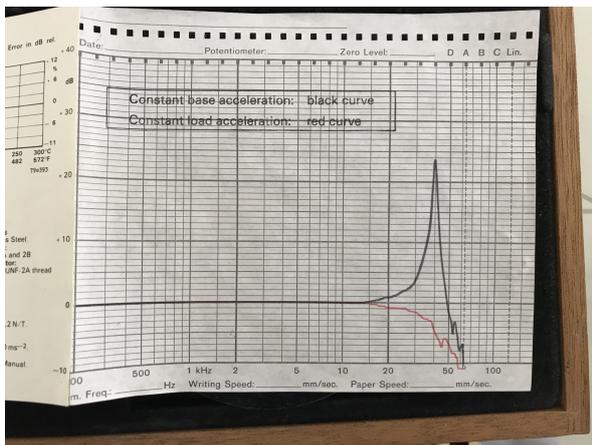


Abb. C.8: Kraftsensor Typ 8200; allgemeine Daten

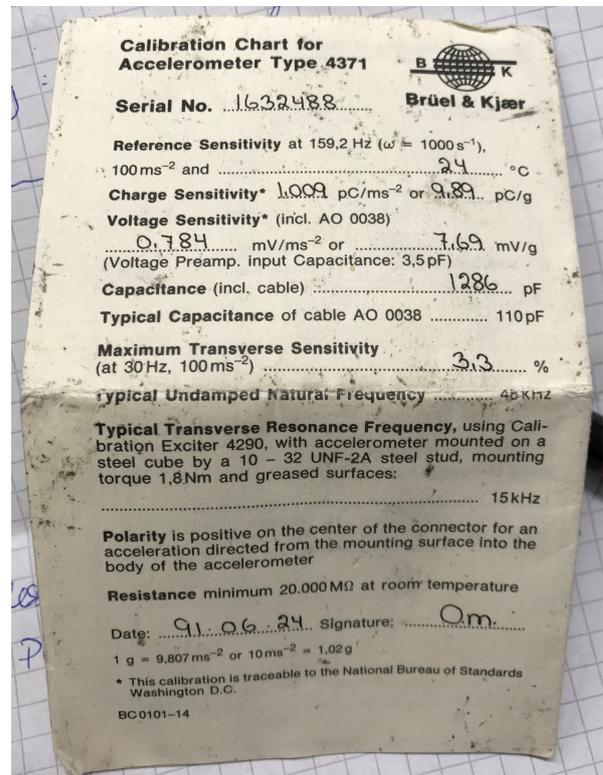


Abb. C.9: Beschleunigungssensor Typ 4371 Sr.Nr.: 1632488; individuelle Daten

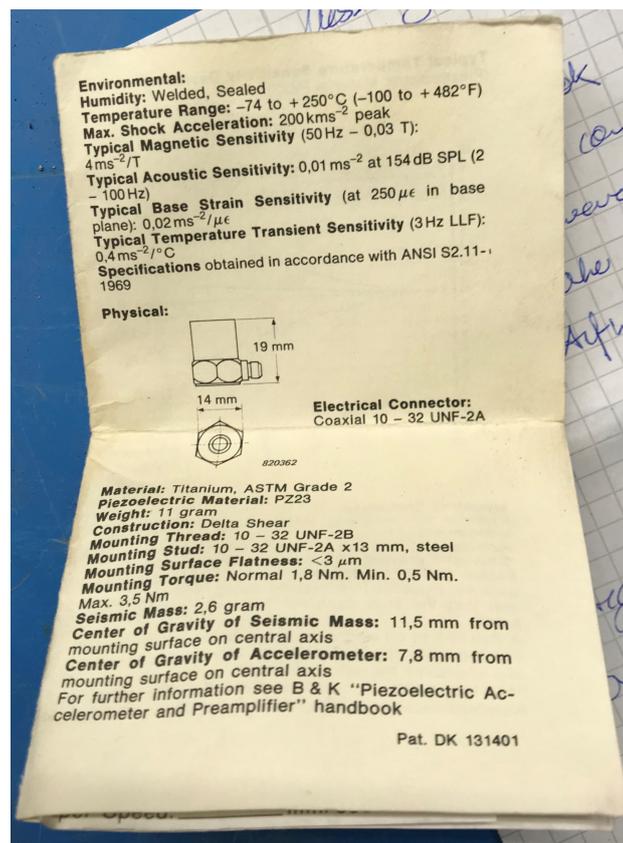


Abb. C.10: Beschleunigungssensor Typ 4371; allgemeine Daten

## D Weitere Tabellen

Tab. D.1: Koordinaten aller Mess- und Simulationspositionen

Positionsbezeichnung	Position X [%]	Position Y [%]	Position X [m]	Position Y [m]
<b>Achse I</b>				
C	1,0	1,0	0,05	0,04
0	5,6	6,3	0,28	0,25
1d	13,6	13,9	0,675	0,55
2d	21,6	22,0	1,07	0,87
3d	29,5	29,8	1,465	1,18
4d	37,5	37,6	1,86	1,49
5d	50	50	2,49	1,985
<b>Achse II</b>				
C1w	11,8	1,0	0,585	0,04
1w	15,7	6,3	0,78	0,25
1d.1w	21,9	13,9	1,085	0,55
2d.1w	27,9	22,0	1,385	0,87
3d.1w	34,1	29,8	1,69	1,18
4d.1w	40,2	37,6	1,995	1,49
5d	s.o.	s.o.	s.o.	s.o.
<b>Achse III</b>				
C2w	23,0	1,0	0,585	0,04
2w	25,8	6,3	1,28	0,25
1d.2w	30,1	13,9	1,495	0,55
2d.2w	34,4	22,0	1,705	0,87
3d.2w	38,7	29,8	1,92	1,18
4d.2w	43,1	37,6	2,14	1,49
5d	s.o.	s.o.	s.o.	s.o.

Fortsetzung Tab. D.1 - Koordinaten aller Mess- und Simulationspositionen

Positionsbezeichnung	Position X [%]	Position Y [%]	Position X [m]	Position Y [m]
<b>Achse IV</b>				
C3w	34,2	1,0	1,695	0,04
3w	35,9	6,3	1,78	0,25
1d.3w	38,4	13,9	1,905	0,55
2d.3w	40,8	22,0	2,025	0,87
3d.3w	43,3	29,8	2,15	1,18
4d.3w	46,1	37,6	2,285	1,49
5d	s.o.	s.o.	s.o.	s.o.
<b>Achse V</b>				
C4w	45,8	1,0	2,27	0,04
4w	46,0	6,3	2,28	0,25
1d.4w	46,7	13,9	2,315	0,55
2d.4w	47,3	22,0	2,345	0,87
3d.4w	48,0	29,8	2,38	1,18
4d.4w	49,0	37,6	2,43	1,49
5d	s.o.	s.o.	s.o.	s.o.
<b>Achse VI</b>				
Sy	50,0	1,0	2,49	0,04
0sy	50,0	6,3	2,49	0,25
1sy	50,0	13,9	2,49	0,55
2sy	50,0	22,0	2,49	0,87
3sy	50,0	29,8	2,49	1,18
4sy	50,0	37,6	2,49	1,49
5d	s.o.	s.o.	s.o.	s.o.
<b>Achse VII</b>				
Sx	1,0	50,0	0,05	1,98
0sx	5,6	50,0	0,28	1,98
1sx	13,6	50,0	0,675	1,98
2sx	21,6	50,0	1,07	1,98
3sx	29,5	50,0	1,465	1,98
4sx	37,5	50,0	1,86	1,98
5d	s.o.	s.o.	s.o.	s.o.

Fortsetzung Tab. D.1 - Koordinaten aller Mess- und Simulationspositionen

<b>Positionsbezeichnung</b>	<b>Position X [%]</b>	<b>Position Y [%]</b>	<b>Position X [m]</b>	<b>Position Y [m]</b>
<b>Achse 025</b>				
025	17,2	6,3	0,855	0,25
1d.025	23,1	13,9	1,145	0,55
2d.025	28,9	22,0	1,435	0,87
<b>Achse 050</b>				
050	28,1	6,3	0,855	0,25
1d.050	32,1	14,1	1,59	0,56
2d.050	36,0	22,0	1,435	0,87
<b>Achse 075</b>				
075	39,0	6,3	1,395	0,25
1d.075	41,0	14,1	2,035	0,56
2d.075	43,0	22,0	2,135	0,87
<b>detaillierte Achse I</b>				
0d.1	9,6	10,2	0,48	0,41
1d.1	17,6	17,8	0,87	0,71
2d.1	25,6	25,9	1,27	1,03
3d.1	33,5	33,7	1,66	1,34
4d.1	41,5	41,5	2,06	1,65
4d.2	45,5	45,5	2,26	1,80
0w.1	10,7	6,3	0,53	0,25
1w.1	20,8	6,3	1,03	0,25
2w.1	30,8	6,3	1,53	0,25
3w.1	40,9	6,3	2,03	0,25
4w.1	50,0	6,3	2,48	0,25

Tab. D.2: Fehlerbetrachtung zwischen *gradNum* und *gradApproxI* nach Ansatz I entlang Achse III

<b>gelenkig</b>		
Auswertungsposition	relativer Fehler [%]	Differenz [dB]
0	8	1
1d	20	2
2d	37	4

---

<b>eingespannt</b>		
Auswertungsposition	relativer Fehler [%]	Differenz [dB]
0	134	7
1d	28	2
2d	15	1

Tab. D.3: Fehlerbetrachtung zwischen *gradNum* und *gradApproxI* nach Ansatz I entlang Achse VI

<b>gelenkig</b>		
Auswertungsposition	relativer Fehler [%]	Differenz [dB]
0	9	1
1d	30	3
2d	43	5

---

<b>eingespannt</b>		
Auswertungsposition	relativer Fehler [%]	Differenz [dB]
0	125	7
1d	20	2
2d	21	2

## E Weitere Abbildungen

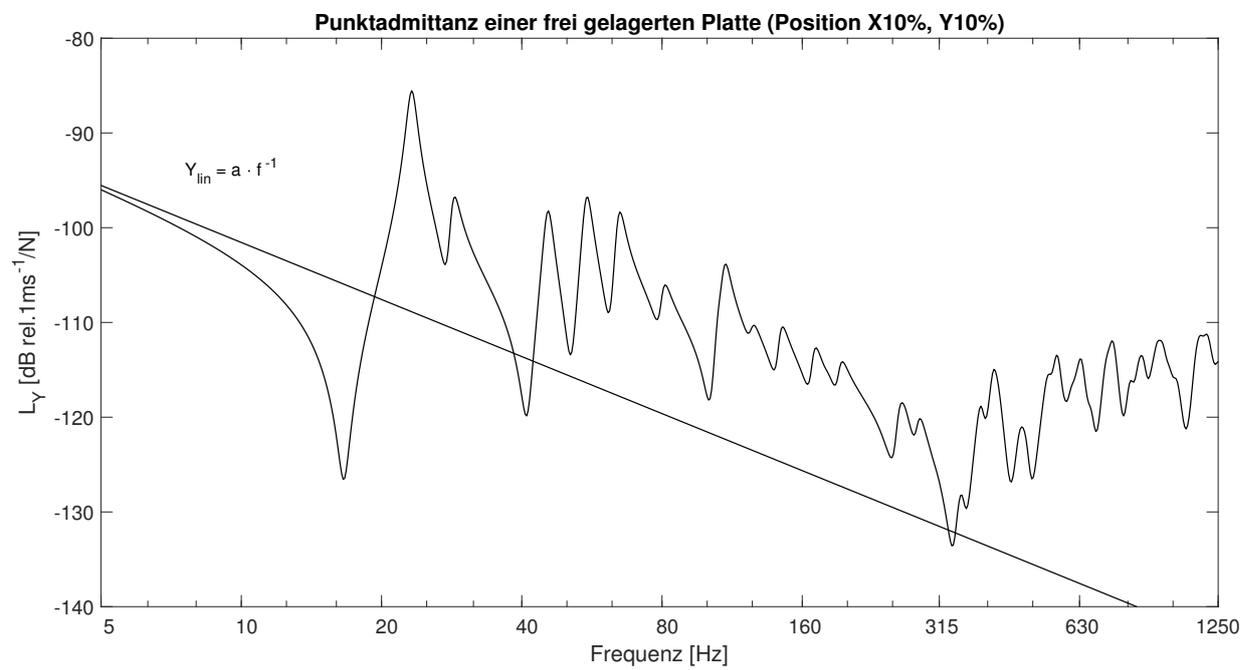


Abb. E.1: Punktadmittanz einer frei gelagerten Platte mit Auswertungsposition am Rand

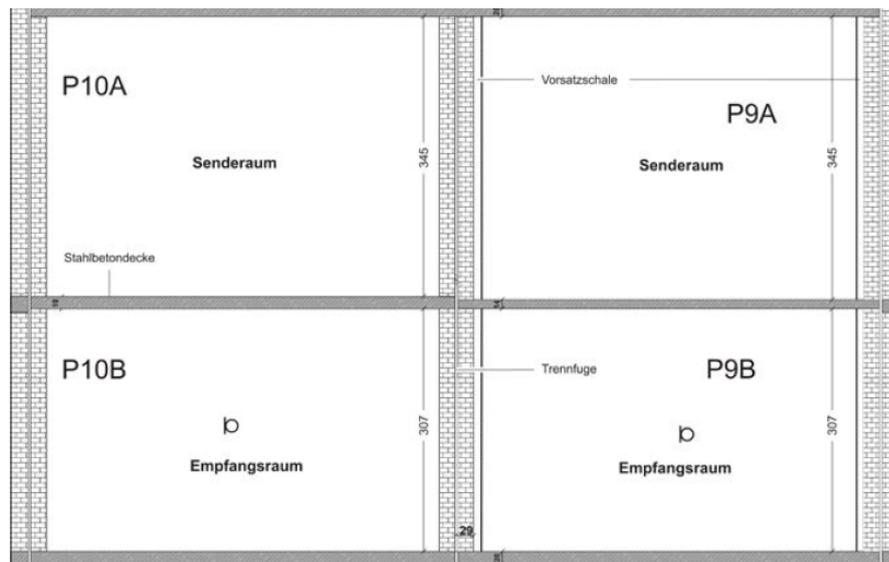


Abb. E.2: Vertikalschnitt des Prüfstands für Estrich und Beläge P9/P10 (Maße in cm, Bildquelle IBP intern)

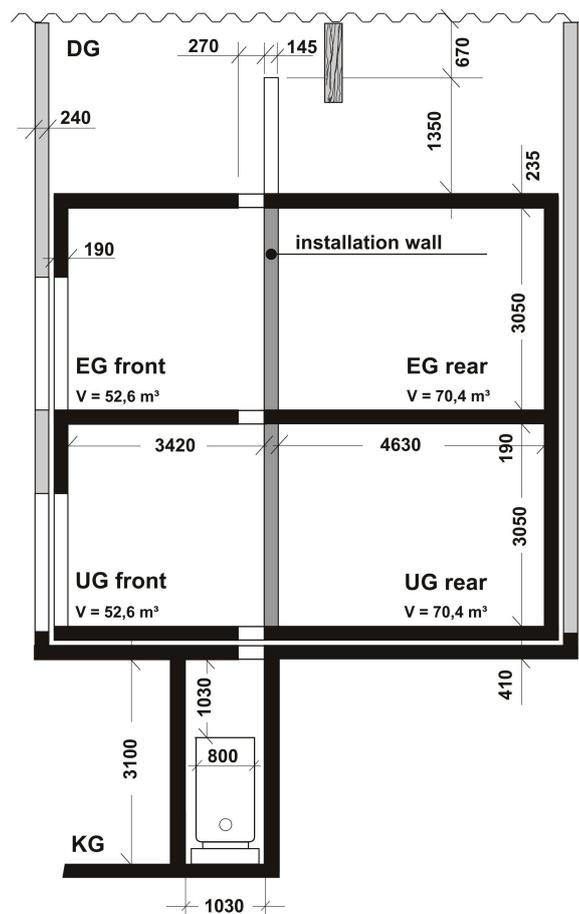


Abb. E.3: Vertikalschnitt des Installationsprüfstands P12 (Maße in cm, Bildquelle IBP intern)

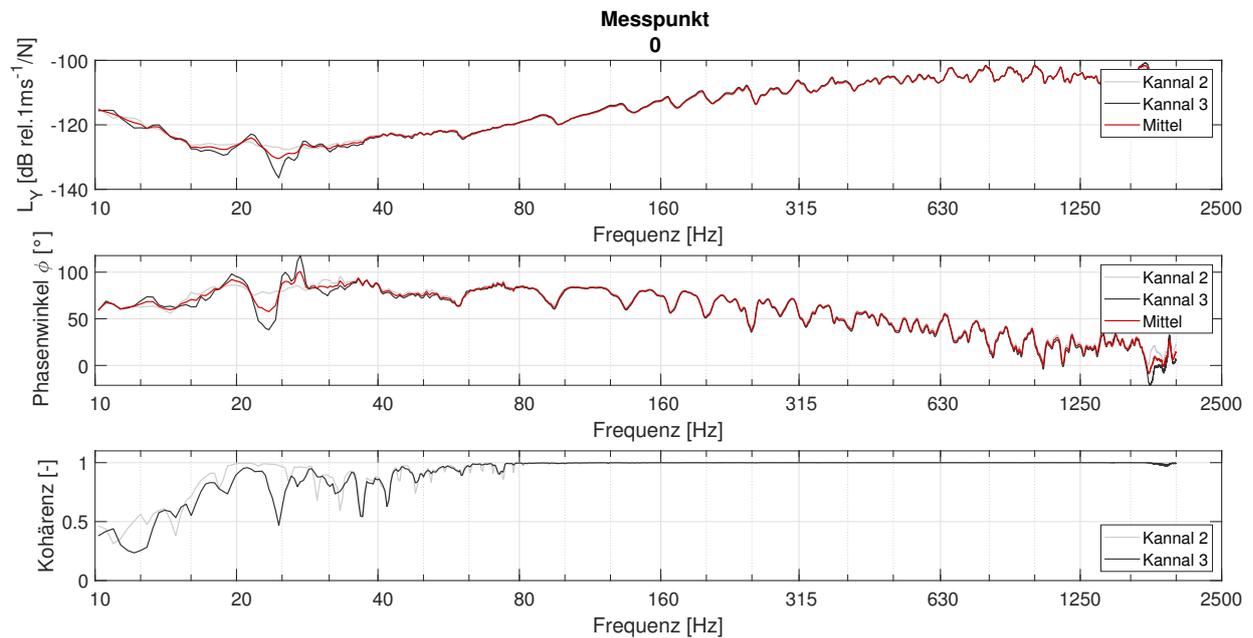


Abb. E.4: Position 0 - Platte P9 - Messergebnisse: Admittanzpegel, Phase und Kohärenz der Kanäle CH2 und CH3 sowie deren Mittelwert

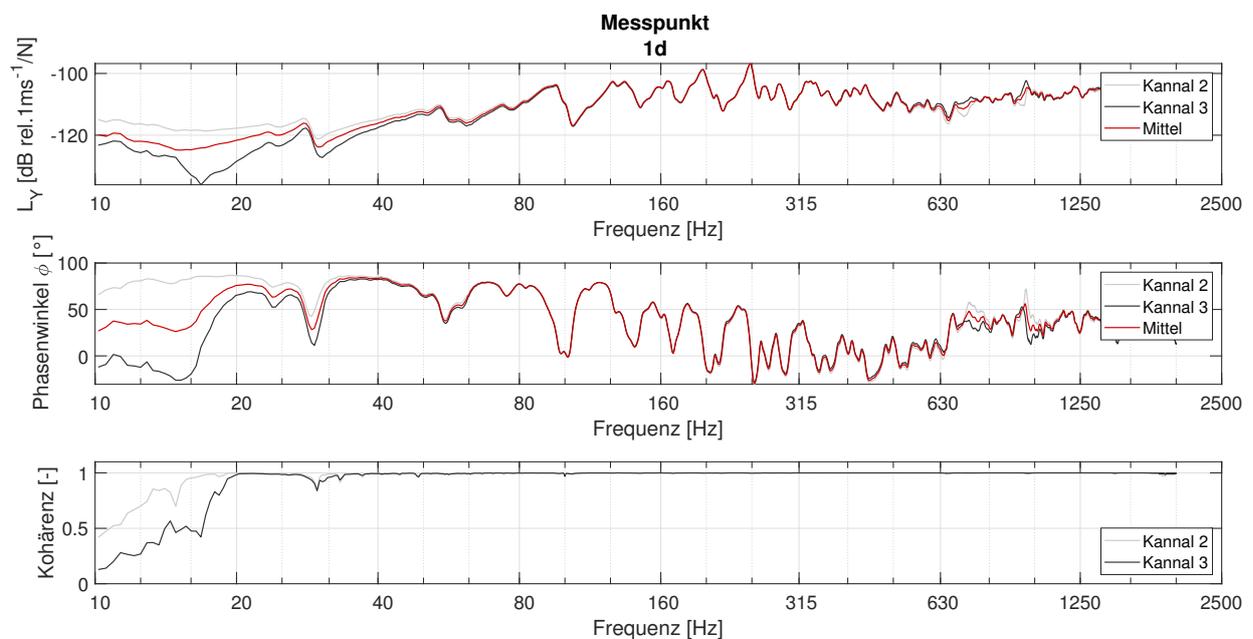


Abb. E.5: Position 1d - Platte P9 - Messergebnisse: Admittanzpegel, Phase und Kohärenz der Kanäle CH2 und CH3 sowie deren Mittelwert

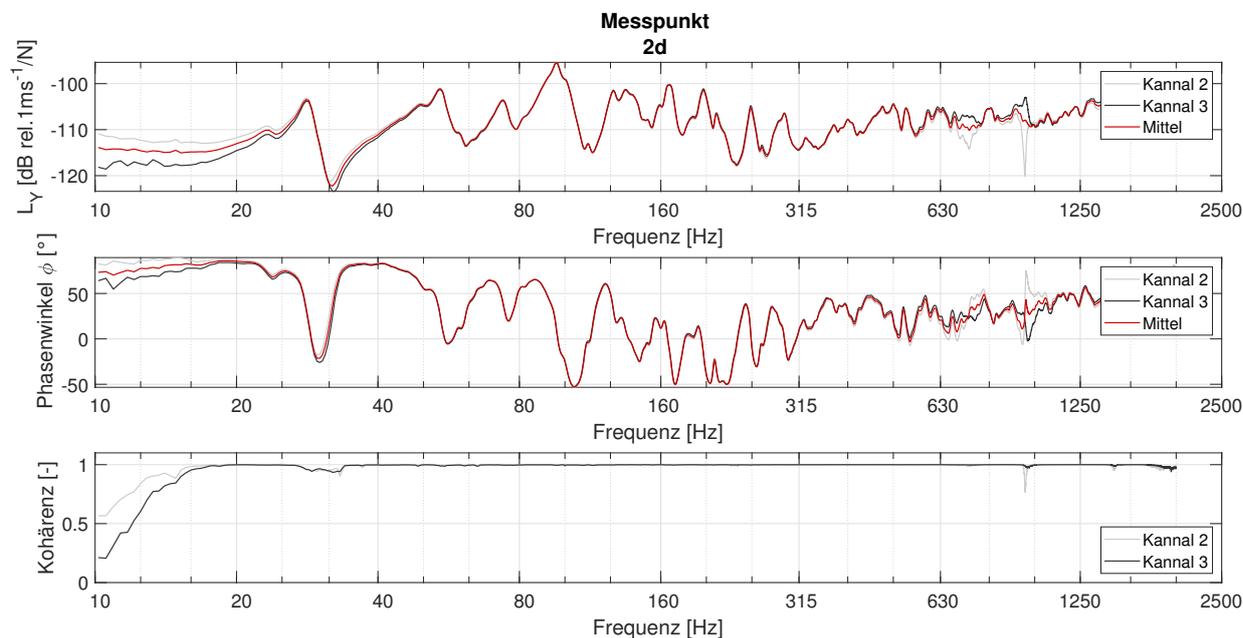


Abb. E.6: Position 2d - Platte P9 - Messergebnisse: Admittanzpegel, Phase und Kohärenz der Kanäle CH2 und CH3 sowie deren Mittelwert

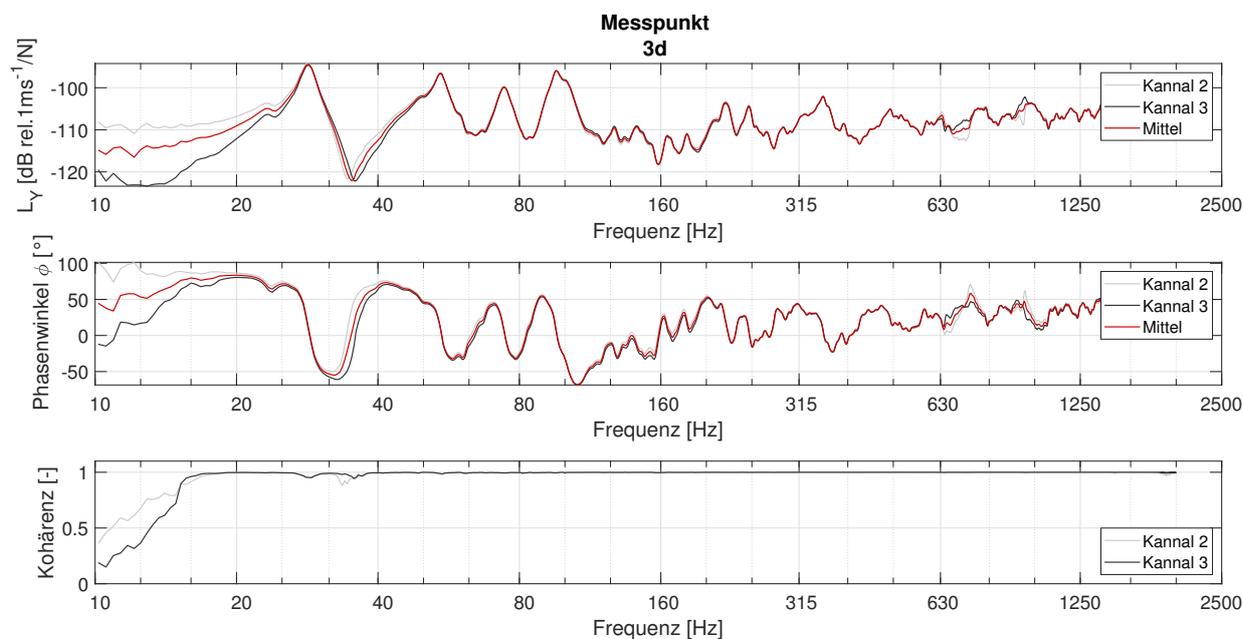


Abb. E.7: Position 3d - Platte P9 - Messergebnisse: Admittanzpegel, Phase und Kohärenz der Kanäle CH2 und CH3 sowie deren Mittelwert

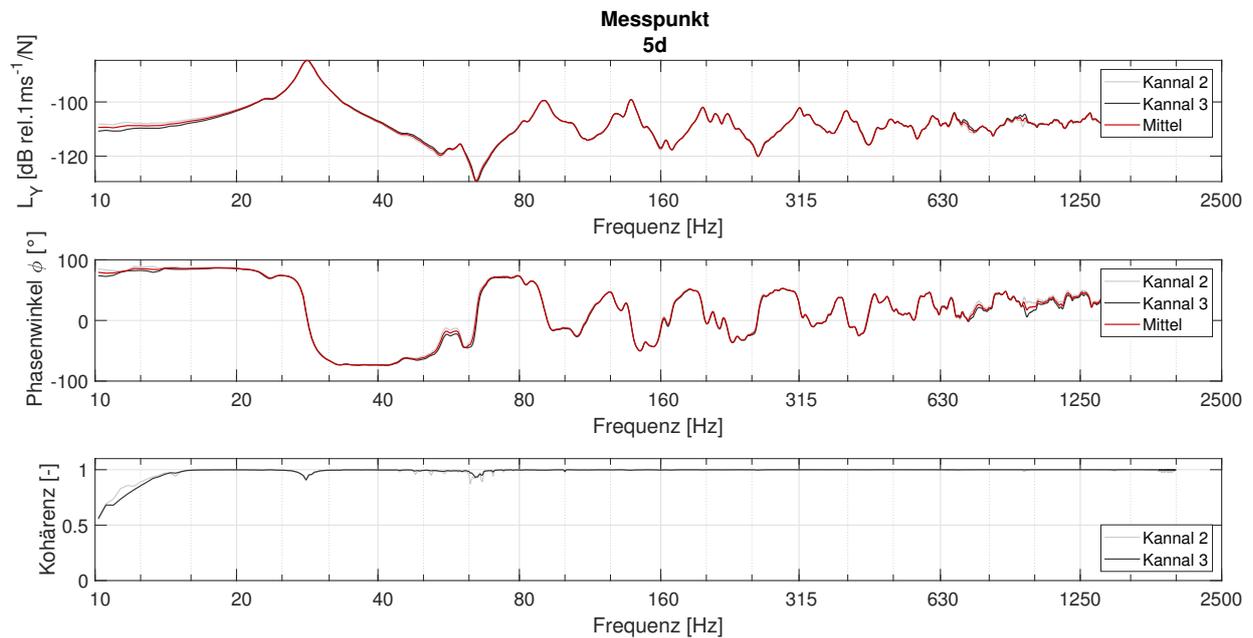


Abb. E.8: Position 5d - Platte P9 - Messergebnisse: Admittanzpegel, Phase und Kohärenz der Kanäle CH2 und CH3 sowie deren Mittelwert

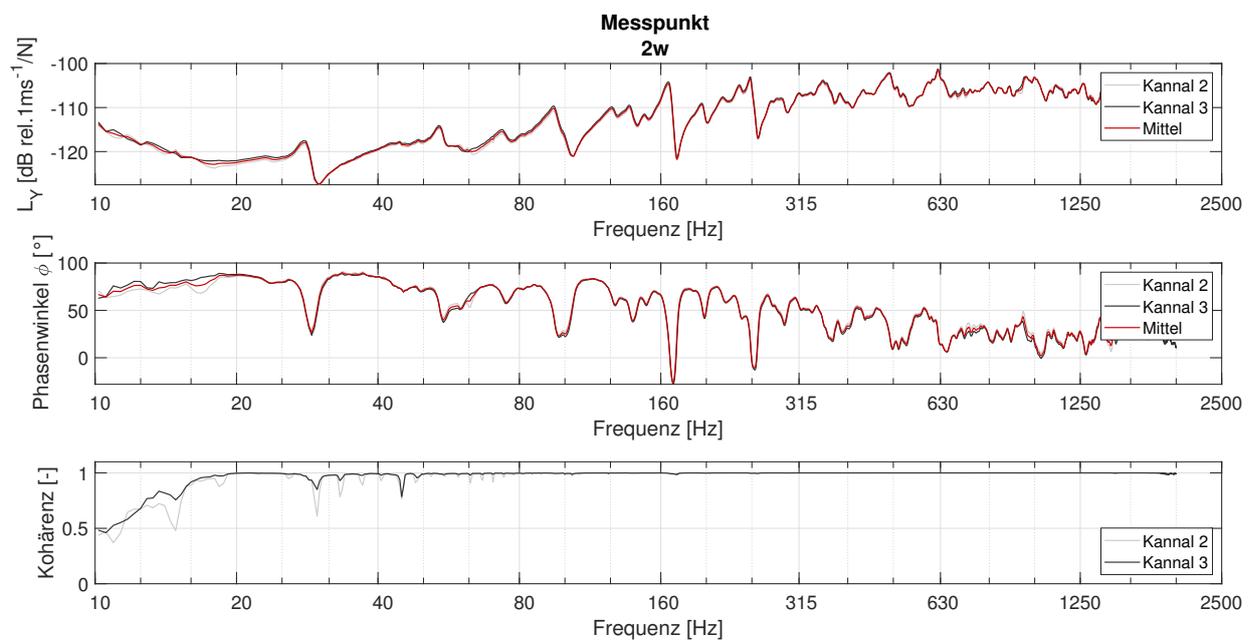


Abb. E.9: Position 2w - Platte P9 - Messergebnisse: Admittanzpegel, Phase und Kohärenz der Kanäle CH2 und CH3 sowie deren Mittelwert

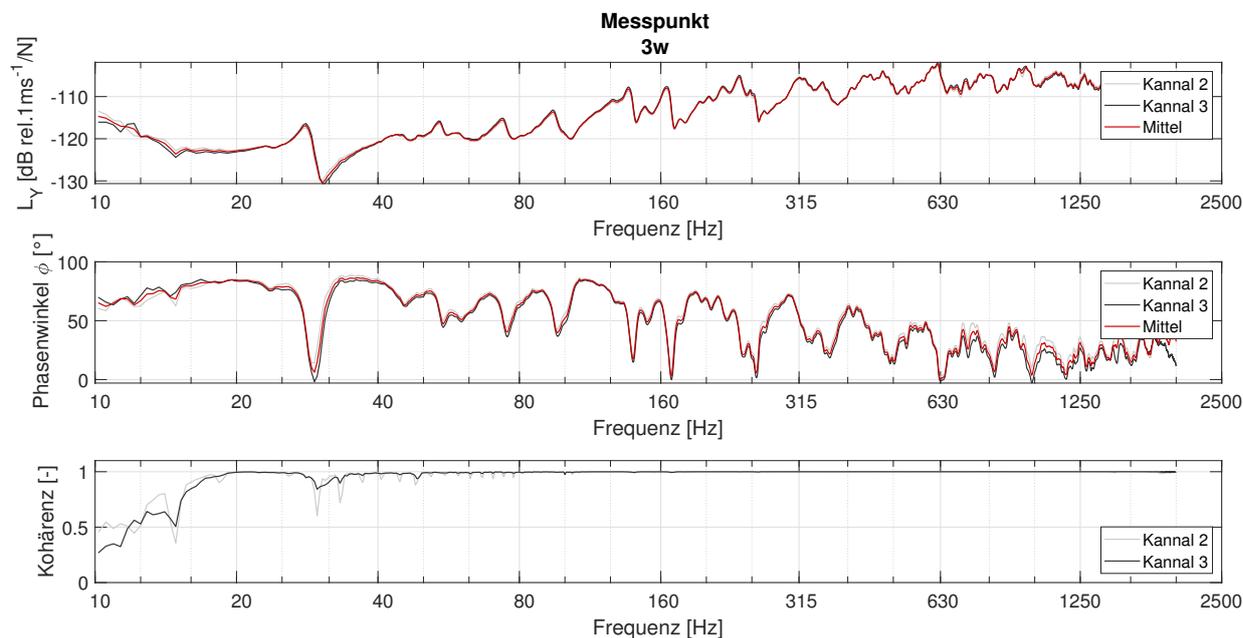


Abb. E.10: Position 3w - Platte P9 - Messergebnisse: Admittanzpegel, Phase und Kohärenz der Kanäle CH2 und CH3 sowie deren Mittelwert

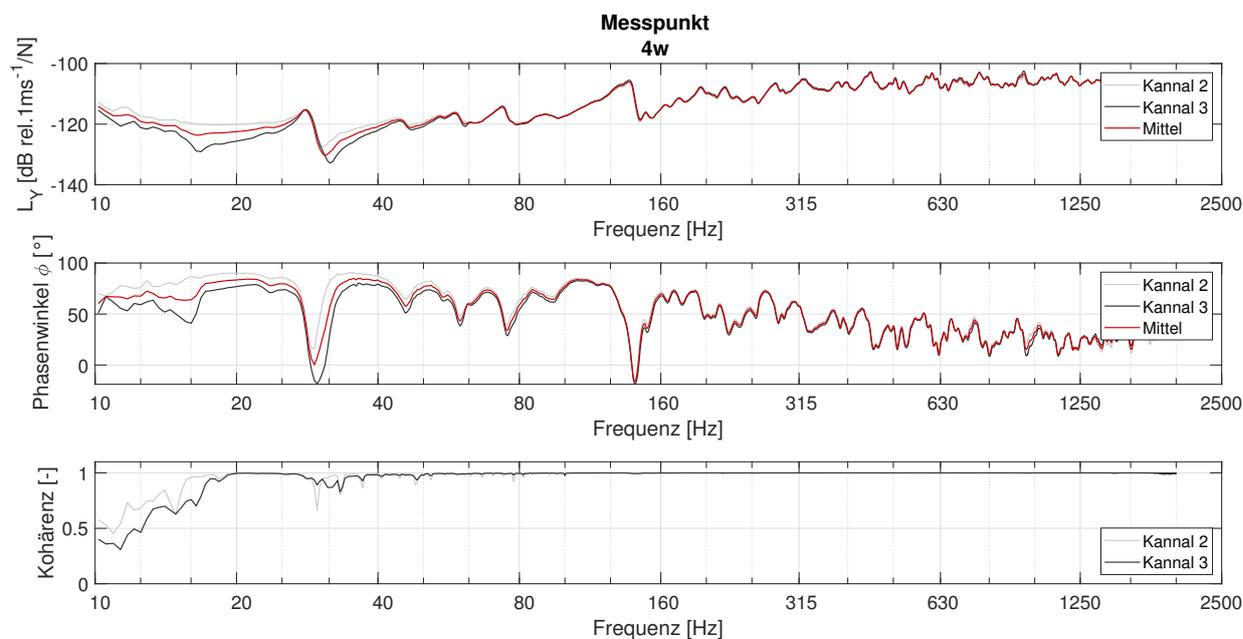


Abb. E.11: Position 4w - Platte P9 - Messergebnisse: Admittanzpegel, Phase und Kohärenz der Kanäle CH2 und CH3 sowie deren Mittelwert

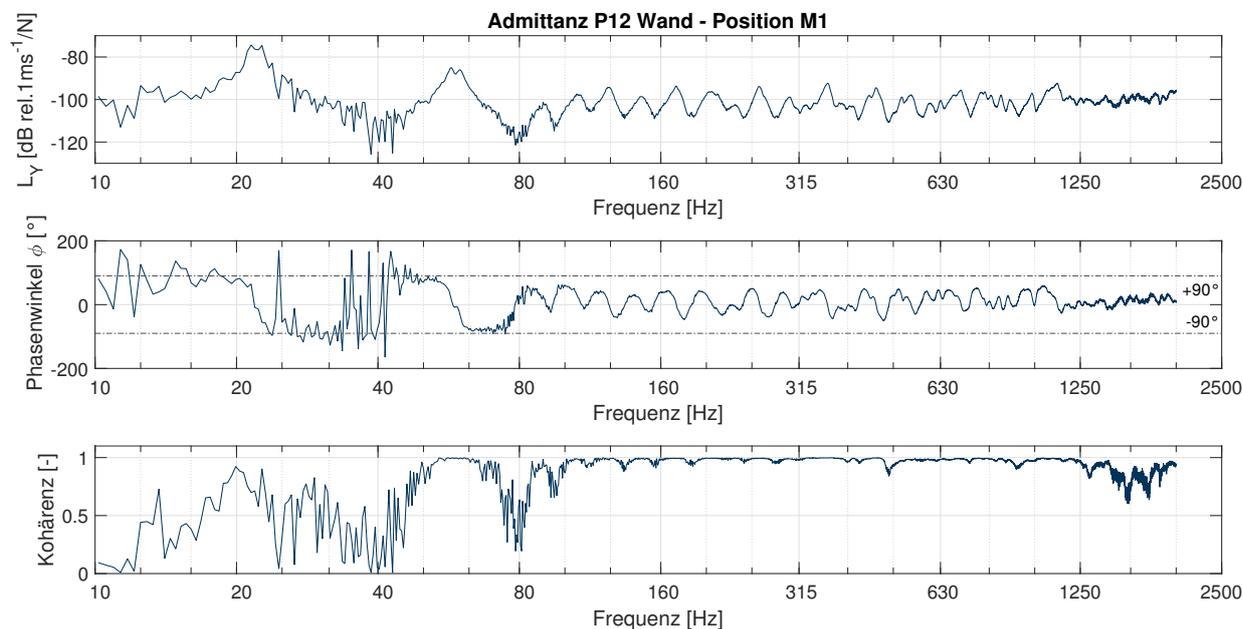


Abb. E.12: Position M1 - Installationswand P12 - Messergebnisse: Admittanzpegel, Phase und Kohärenz

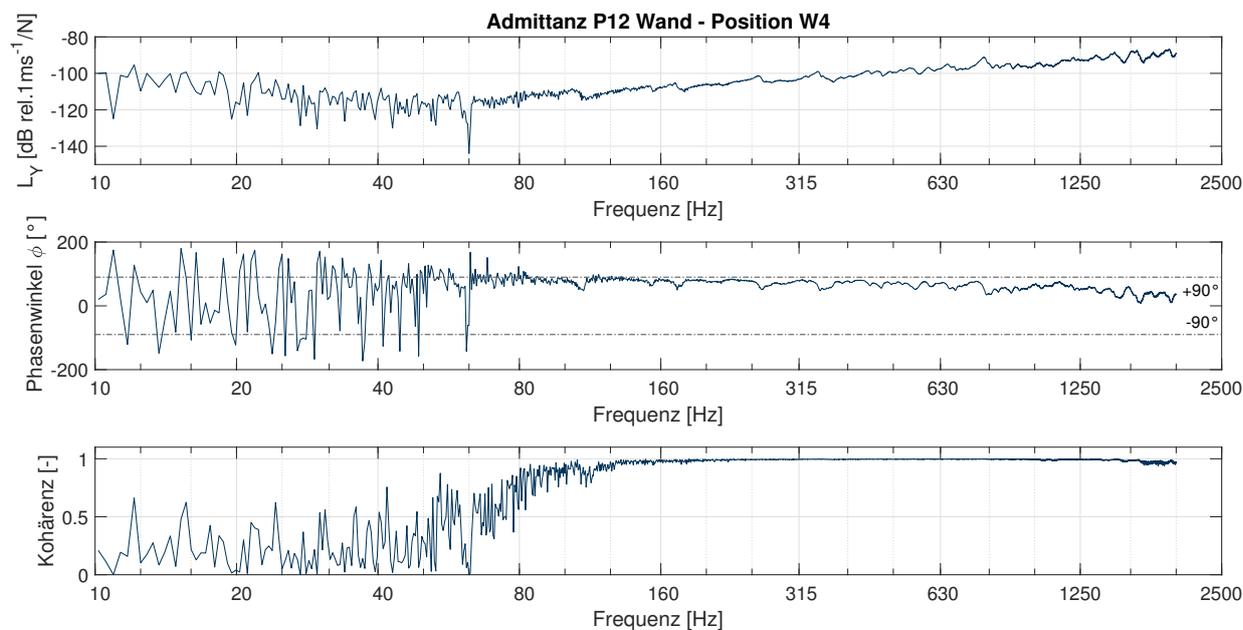


Abb. E.13: Position W4 - Installationswand P12 - Messergebnisse: Admittanzpegel, Phase und Kohärenz

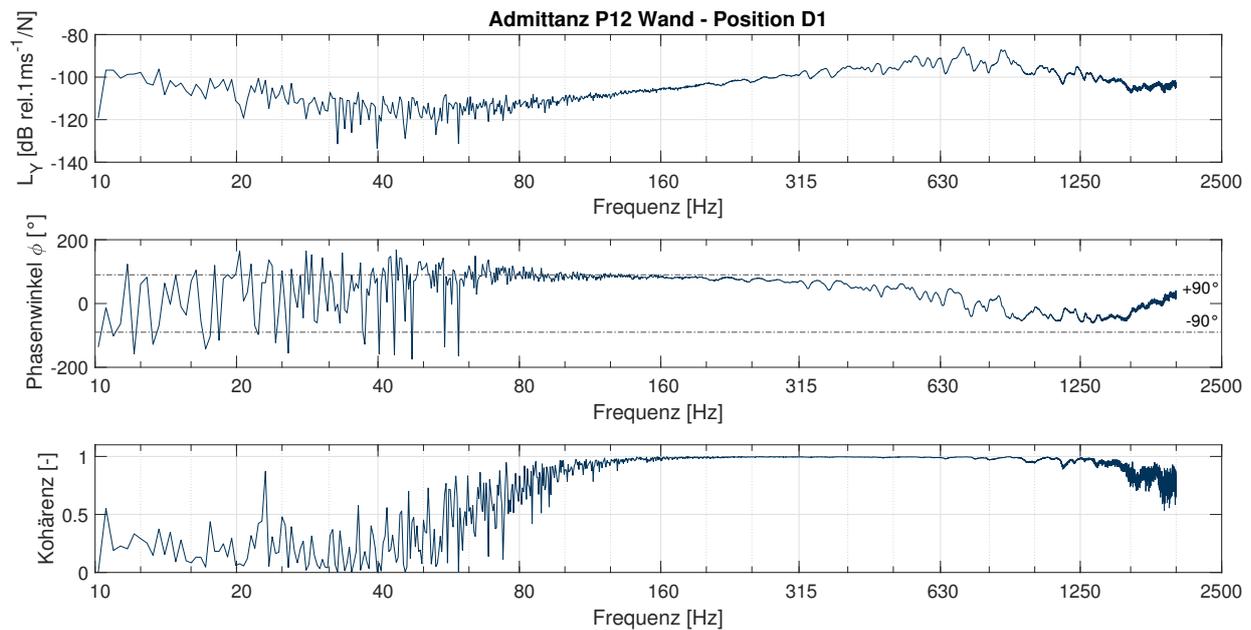


Abb. E.14: Position D1 - Installationswand P12 - Messergebnisse: Admittanzpegel, Phase und Kohärenz

```

Outputdir C:\Users\korbi\OneDrive\Desktop\Universität\Master
OutputFolder P9_free_kL400M_kR6M_x15py15p
// Rectangular Thin Plate Size and Mesh-----
lx_[m] 4.96
ly_[m] 3.96
lz_[m] 0.14
// Material properties -----
youngX_[N/m^2] 27.5e9
poisson 0.2
density_[kg/m^3] 2300
loss 0.05
// Boundary -----
boundary 3
linearStiffnessX0_[N/m^2] 0
linearStiffnessX1_[N/m^2] 0
linearStiffnessY0_[N/m^2] 0
linearStiffnessY1_[N/m^2] 0
linearStiffnessDampingX0_[N/m^2] 0
linearStiffnessDampingX1_[N/m^2] 0
linearStiffnessDampingY0_[N/m^2] 0
linearStiffnessDampingY1_[N/m^2] 0
rotateStiffnessX0_[N] 0
rotateStiffnessX1_[N] 0
rotateStiffnessY0_[N] 0
rotateStiffnessY1_[N] 0
rotateStiffnessDampingX0_[N] 0
rotateStiffnessDampingX1_[N] 0
rotateStiffnessDampingY0_[N] 0
rotateStiffnessDampingY1_[N] 0
// Frequency -----
fmin_[Hz] 10
fmax_[Hz] 2000
nBand 96
// Excitation -----
posX_[%] 0.5
posY_[%] 0.5
// Optional: Sound Radiation -----
Output_Sound 0

```

Abb. E.15: Beispielhafte Parametereinstellungen des Simulationstools über „parameter.txt“ (Aoki, 2009)

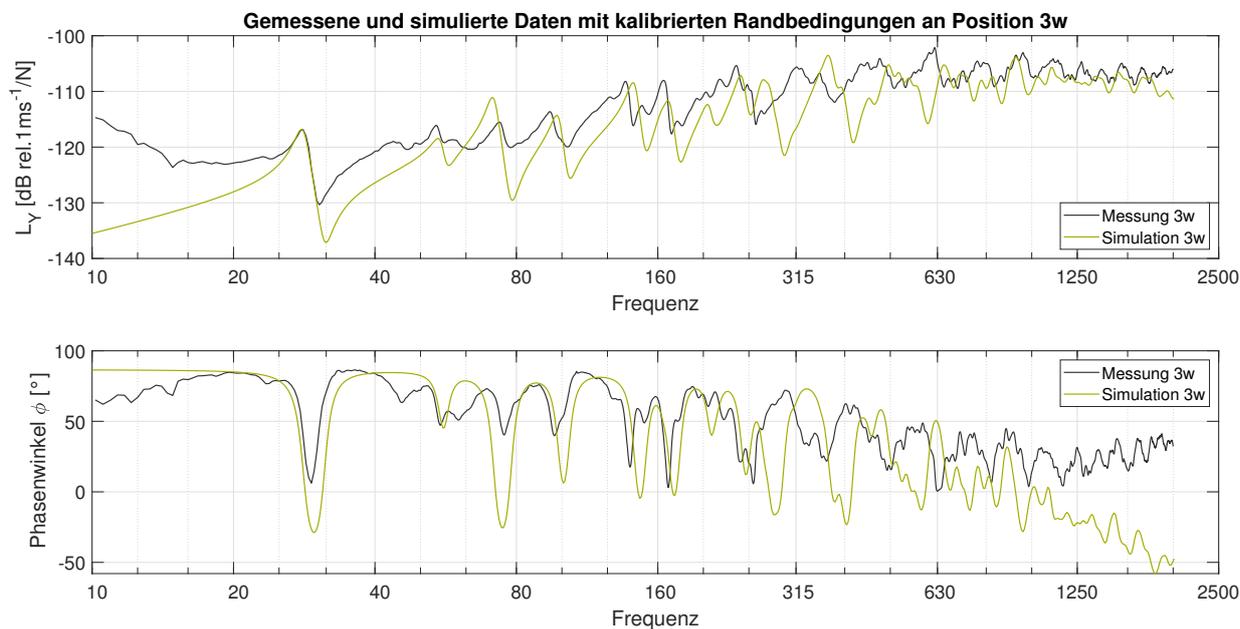


Abb. E.16: Position 3w - Platte P9: Messung sowie Simulation mit kalibrierten Bedingungen (Validierung)

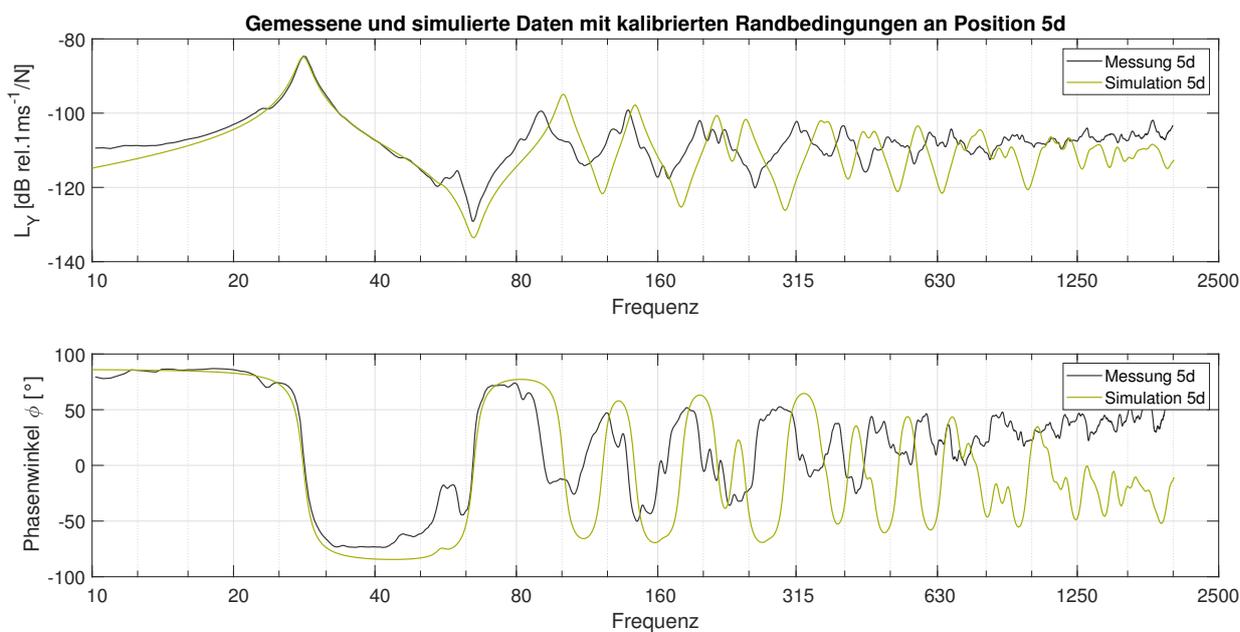


Abb. E.17: Position 5d - Platte P9: Messung sowie Simulation mit kalibrierten Bedingungen (Validierung)

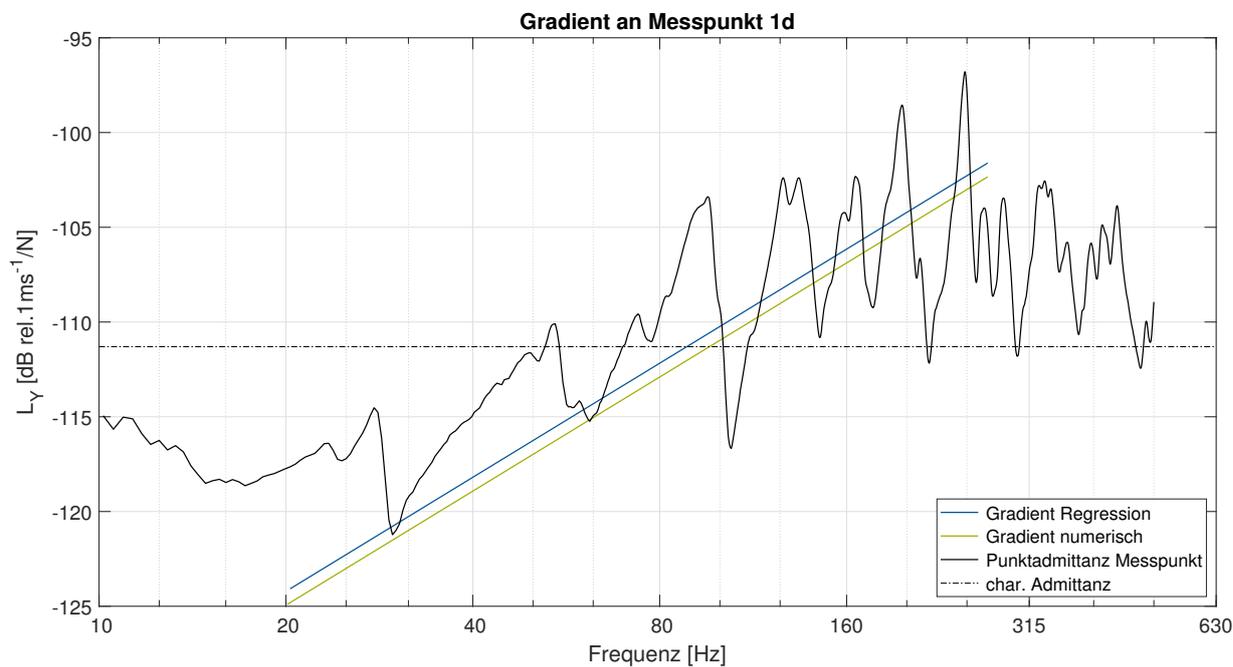


Abb. E.18: Position 1d - Platte P9: simulierte sowie aus Messung ermittelte Gradienten (Validierung)

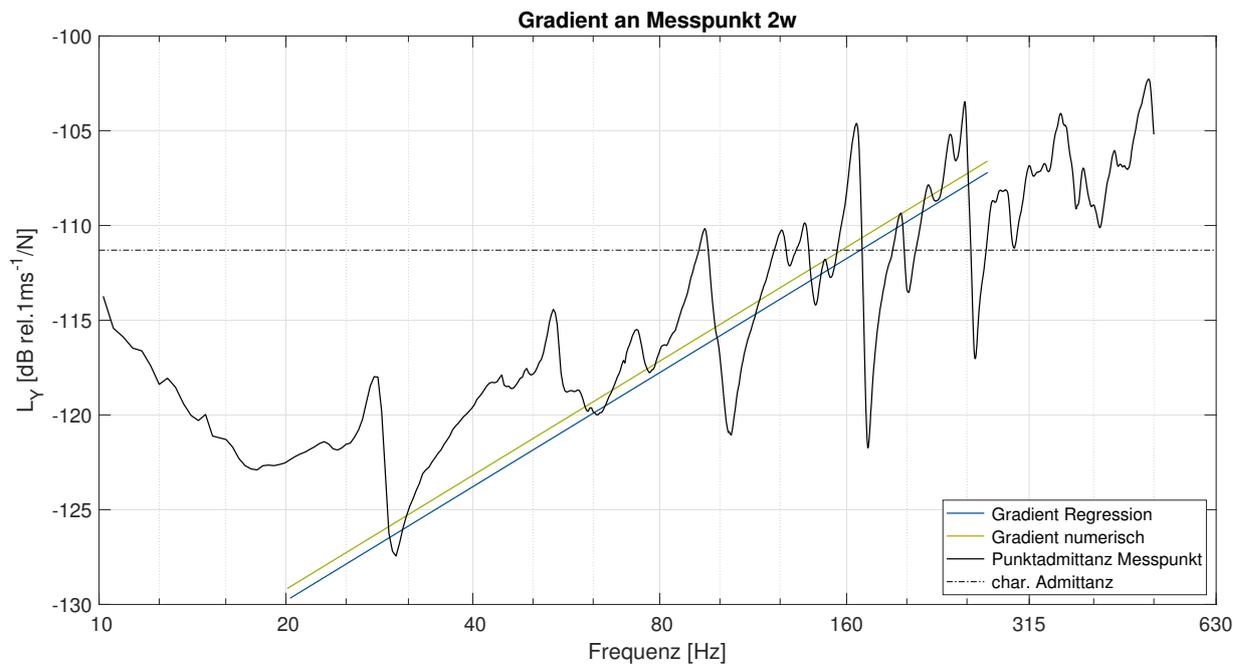


Abb. E.19: Position 2w - Platte P9: simulierte sowie aus Messung ermittelte Gradienten (Validierung)

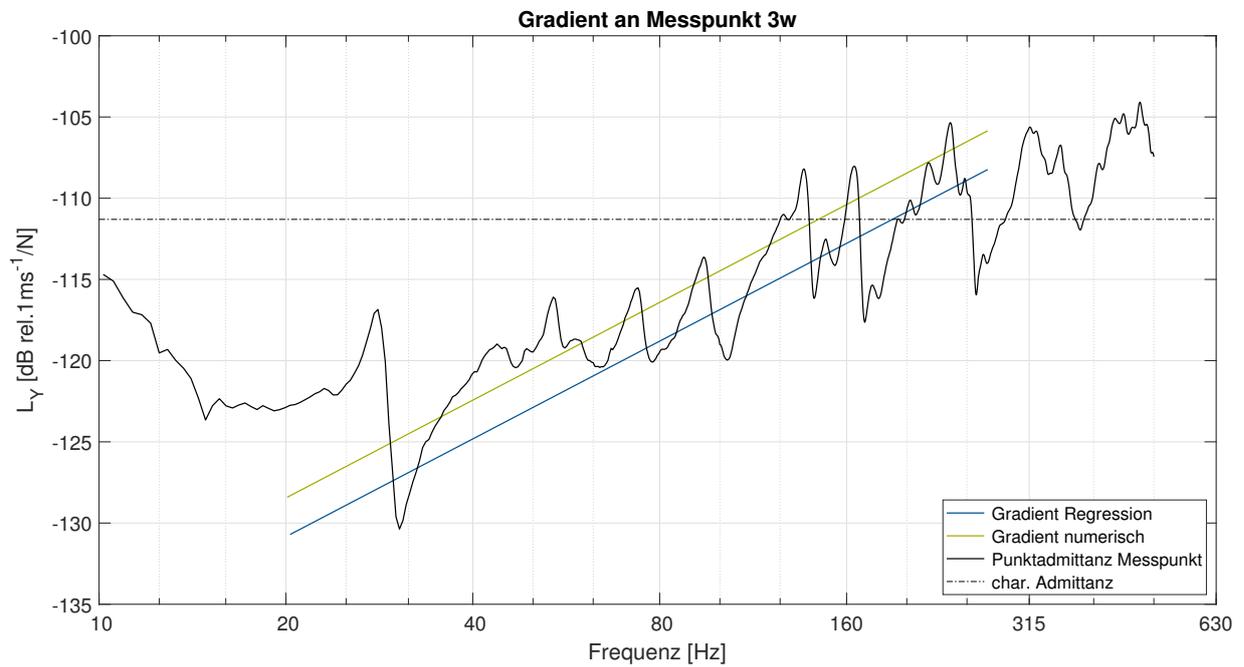


Abb. E.20: Position 3w - Platte P9: simulierte sowie aus Messung ermittelte Gradienten (Validierung)

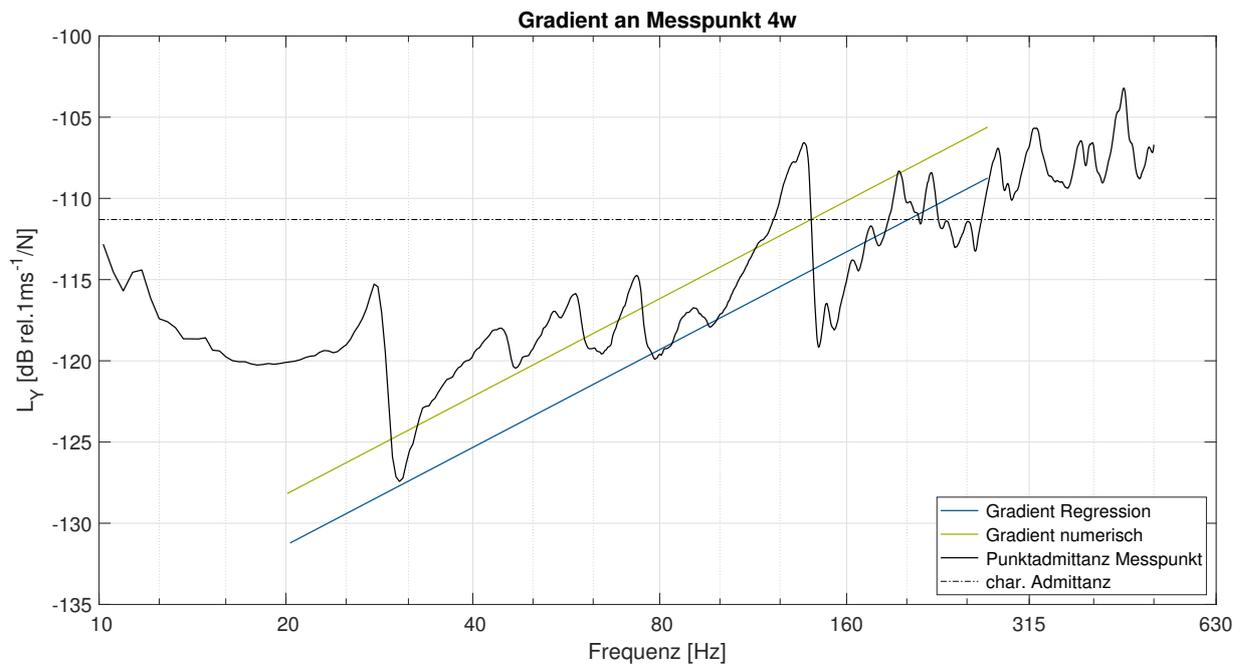


Abb. E.21: Position 4w - Platte P9: simulierte sowie aus Messung ermittelte Gradienten (Validierung)

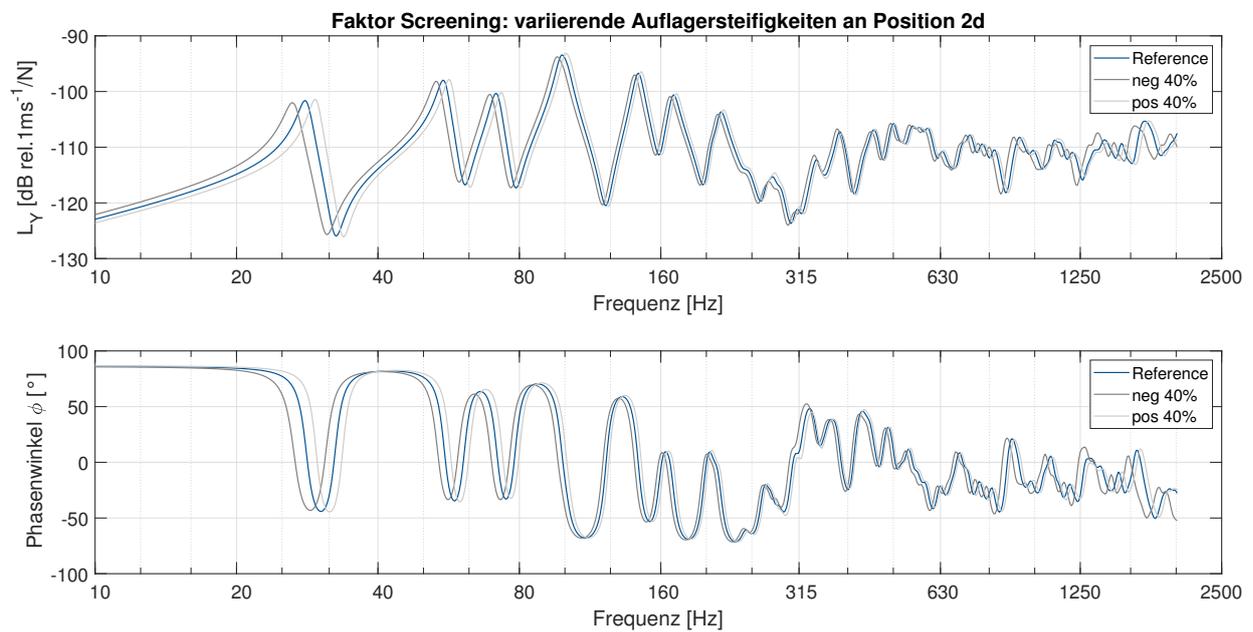


Abb. E.22: Factor Screening: variierende Auflagersteifigkeiten an Position 2d

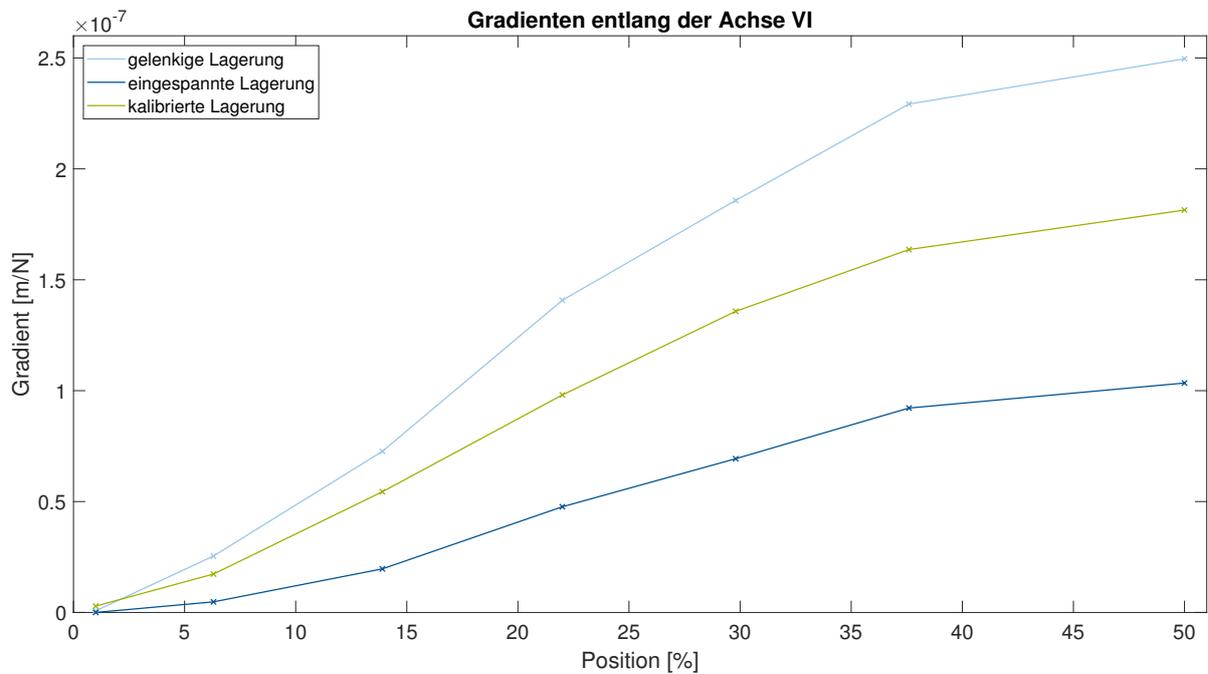


Abb. E.23: Gradienten entlang der Achse VI für gelenkige, eingespannte und kalibrierte Lagerung

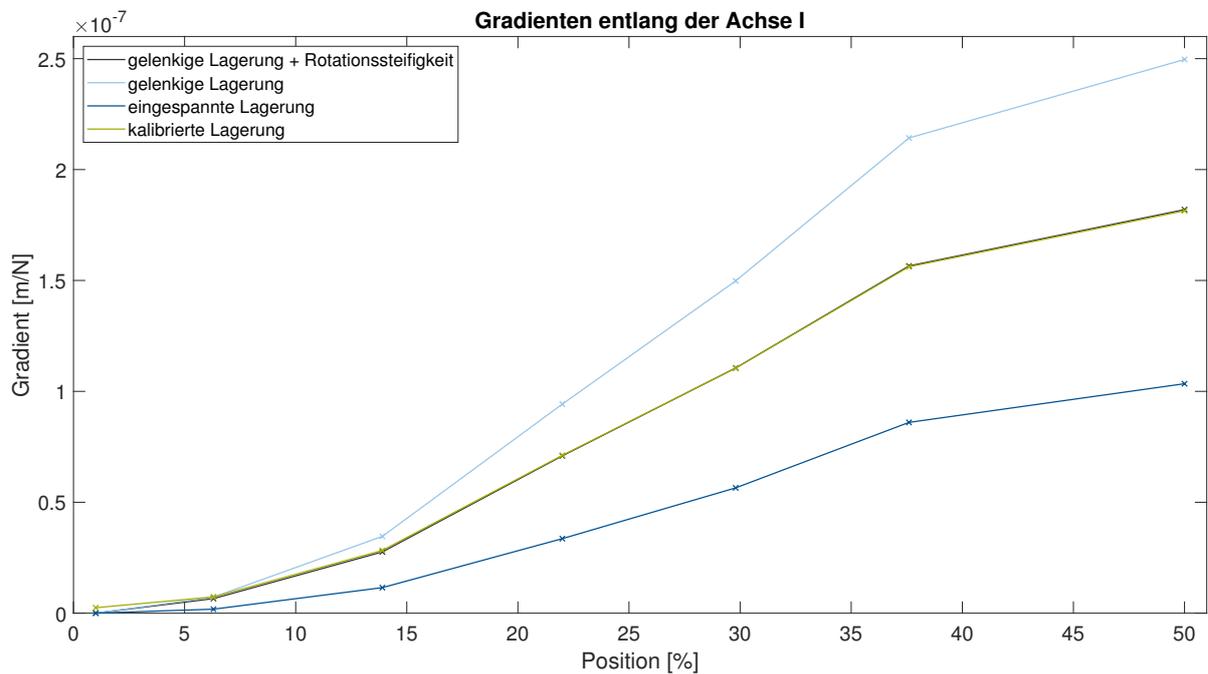


Abb. E.24: Gradienten entlang der Achse I bei verschiedenen Auflagerbedingungen

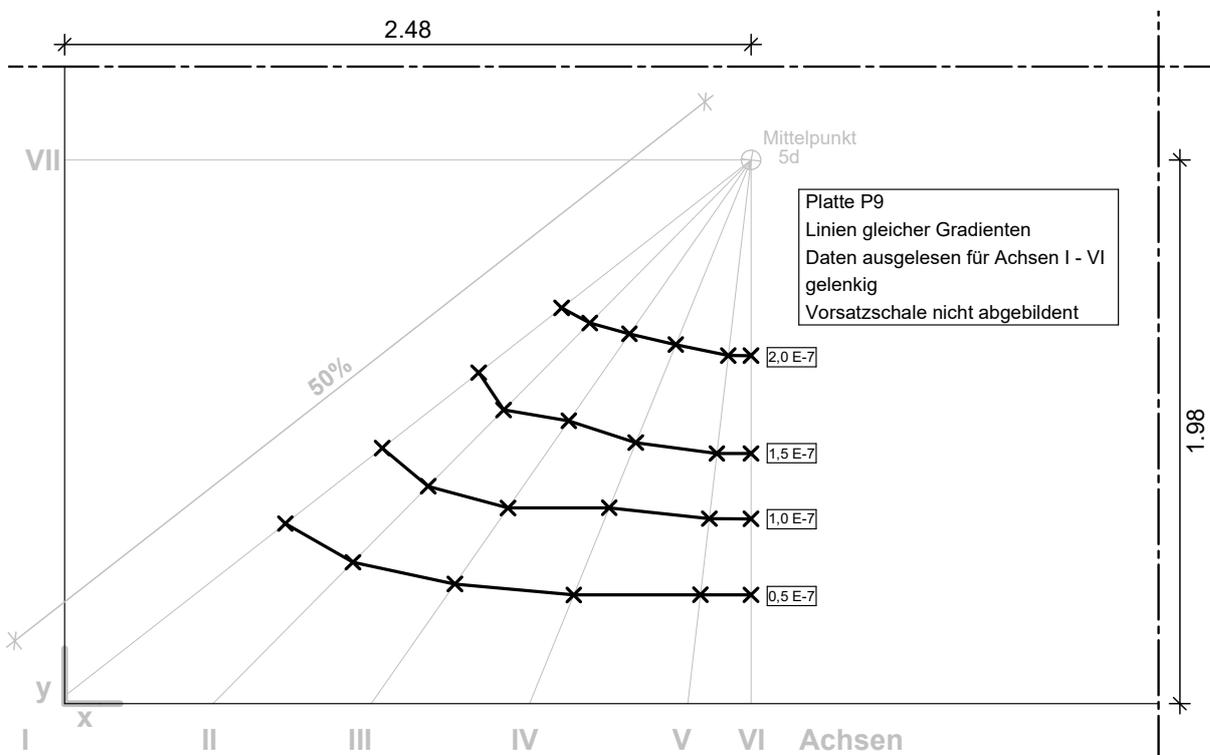


Abb. E.25: Grundriss der Platte P9 mit Linien gleicher Gradienten bei eingespannter Lagerung

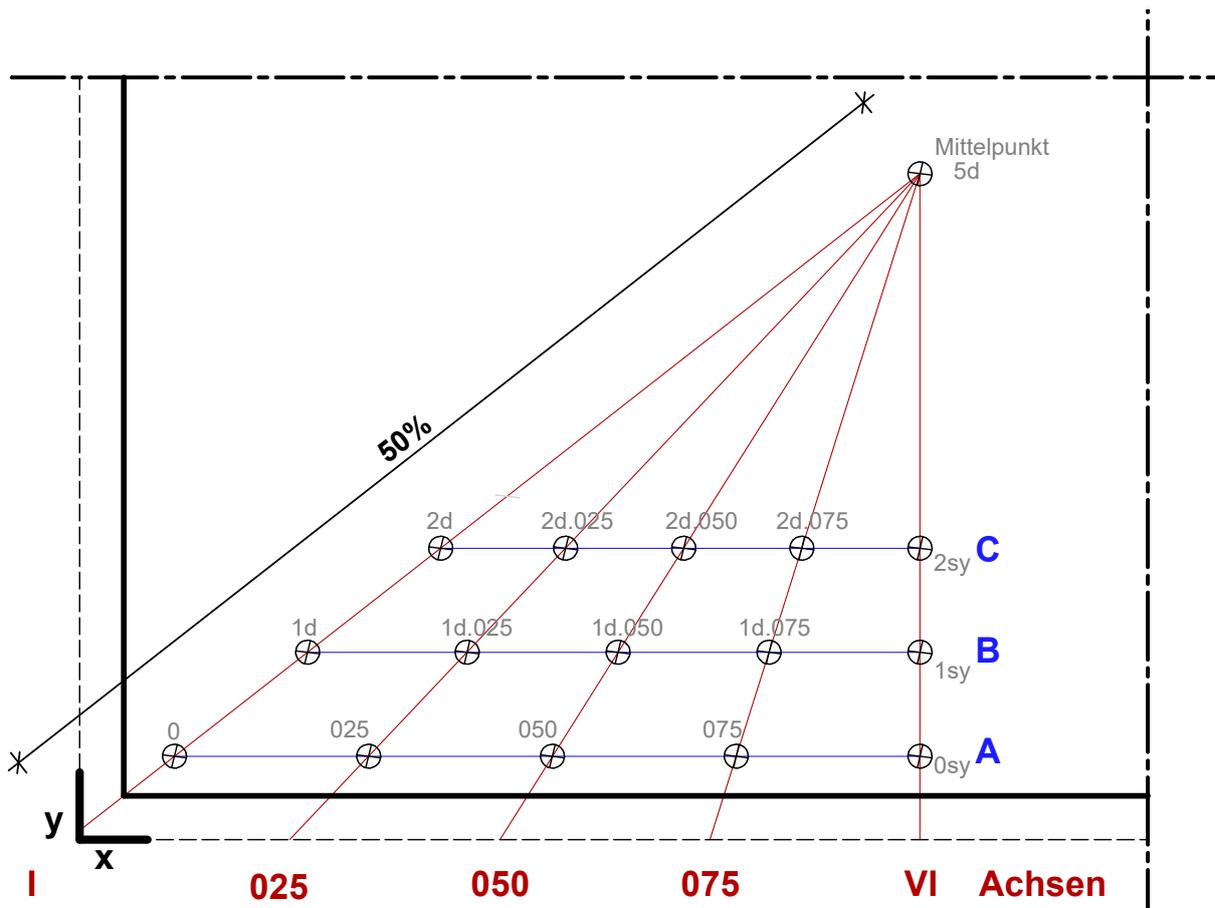


Abb. E.26: Grundriss der Platte P9 mit eingezeichneten Achsen I, 025, 050, 075 und VI

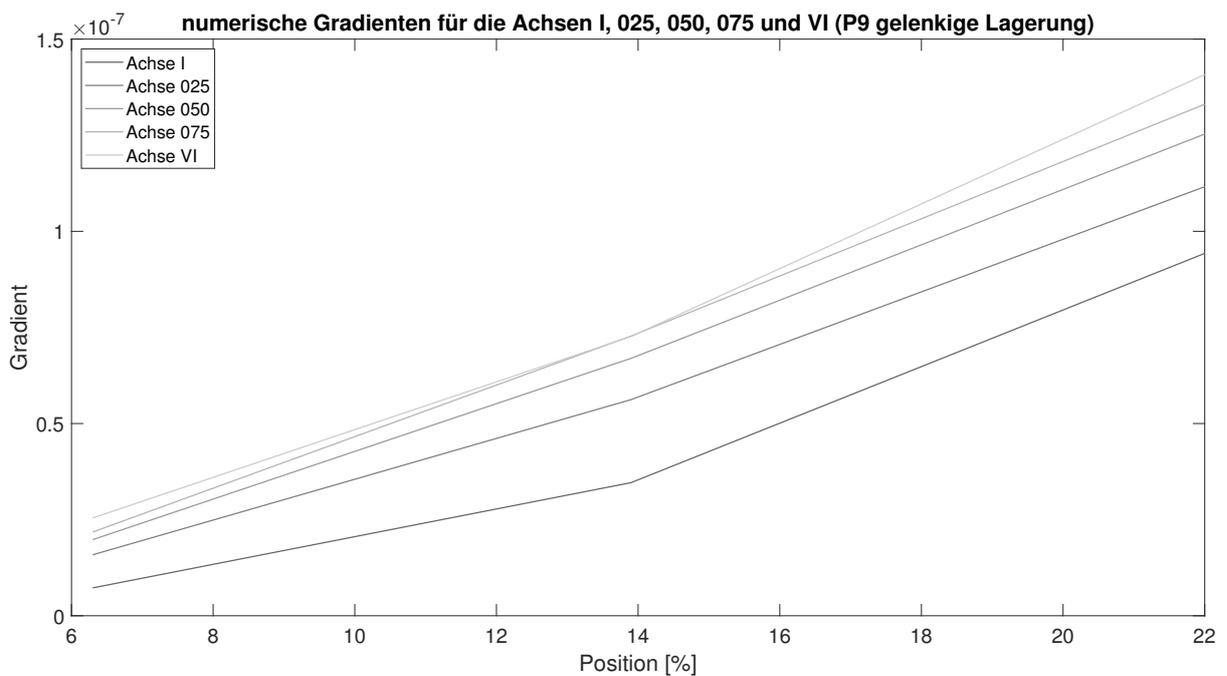


Abb. E.27: Gradienten entlang der Achsen I, 025, 050, 075 und VI für gelenkige Lagerung (Hinweis: die Überschneidungen der Kurven sind vermutlich auf numerische Fehler zurückzuführen)

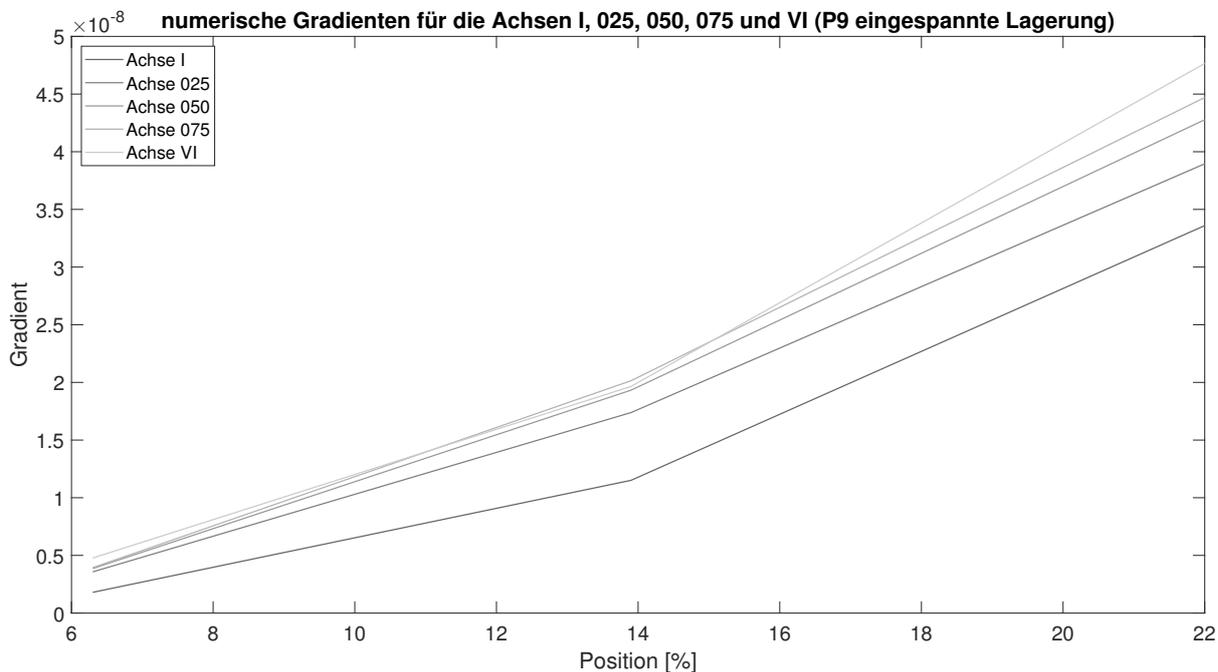


Abb. E.28: Gradienten entlang der Achsen I, 025, 050, 075 und VI für eingespannte Lagerung (Hinweis: die Überschneidungen der Kurven ist vermutlich auf numerische Fehler zurückzuführen)

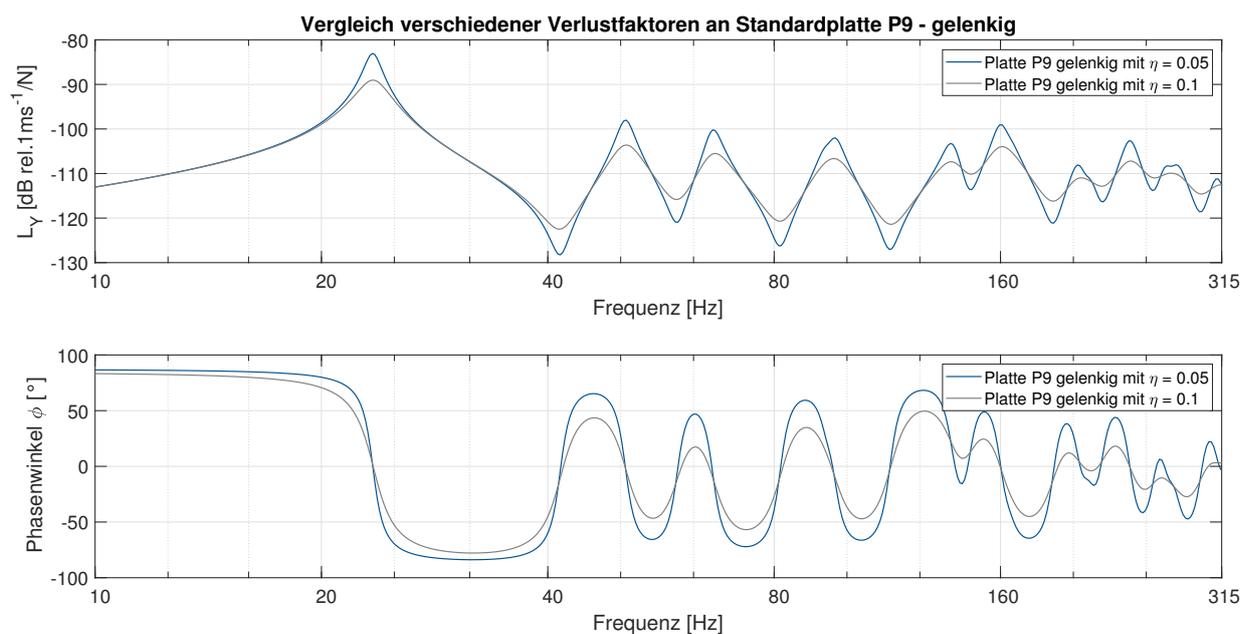


Abb. E.29: Variierende Verlustfaktoren für Standardplatte P9 – gelenkig gelagert

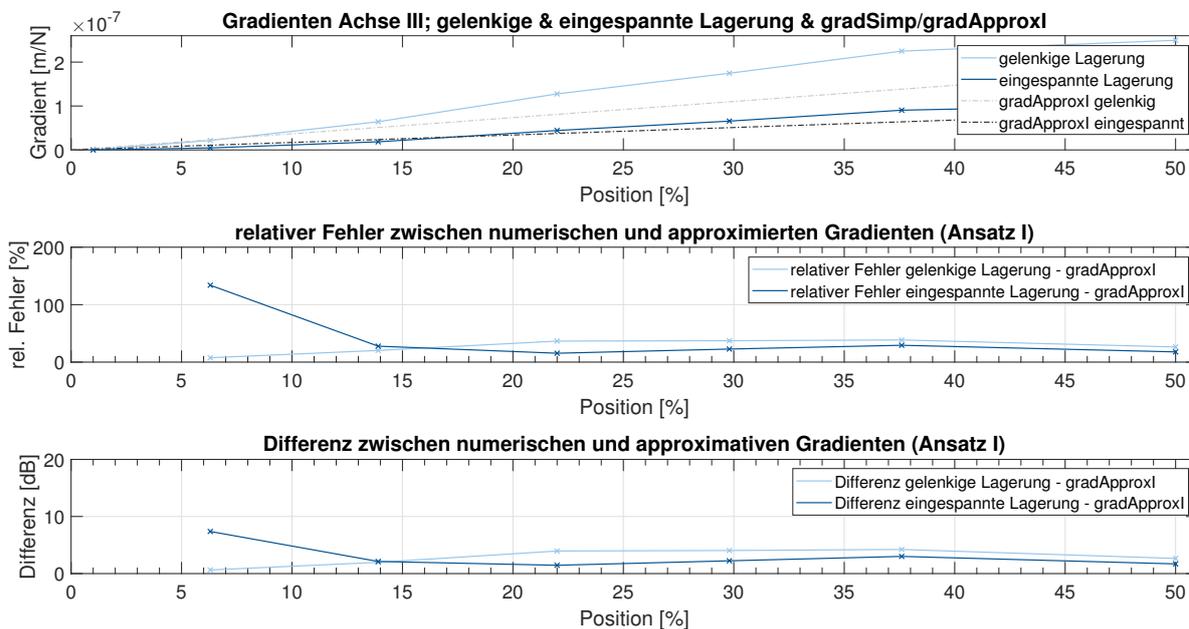


Abb. E.30: Vereinfachte Gradienten entlang der Achse II sowie Umsetzung des Ansatzes I inklusive Fehlerbetrachtung

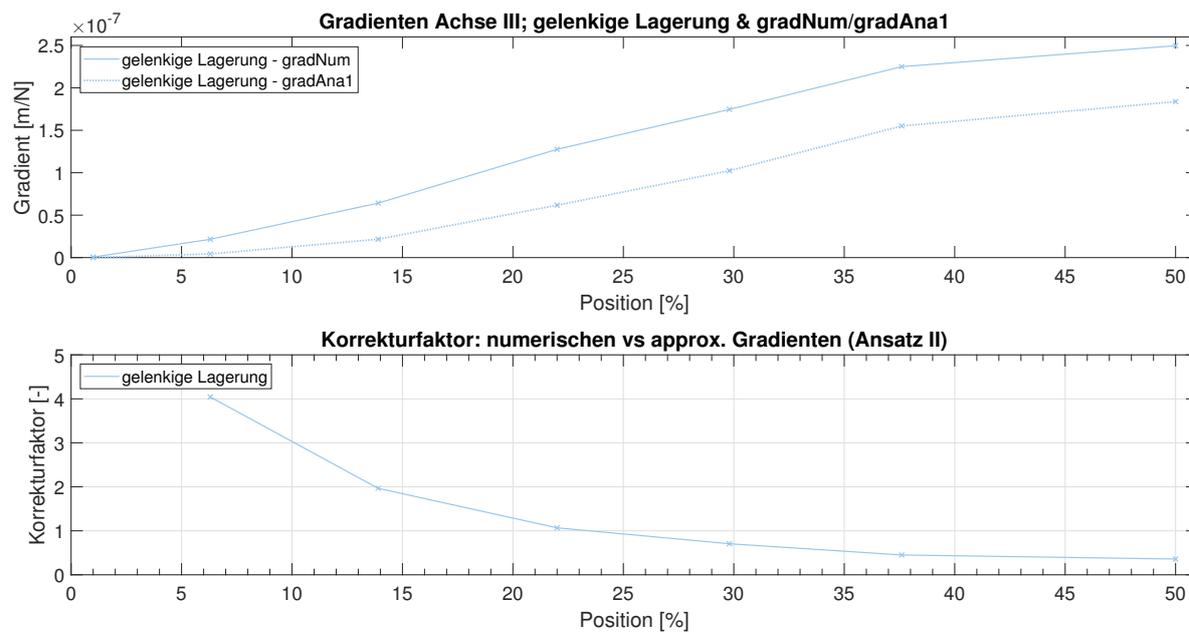


Abb. E.31: Vereinfachte Gradienten entlang der Achse III für gelenkige Lagerung (Ansatz II)

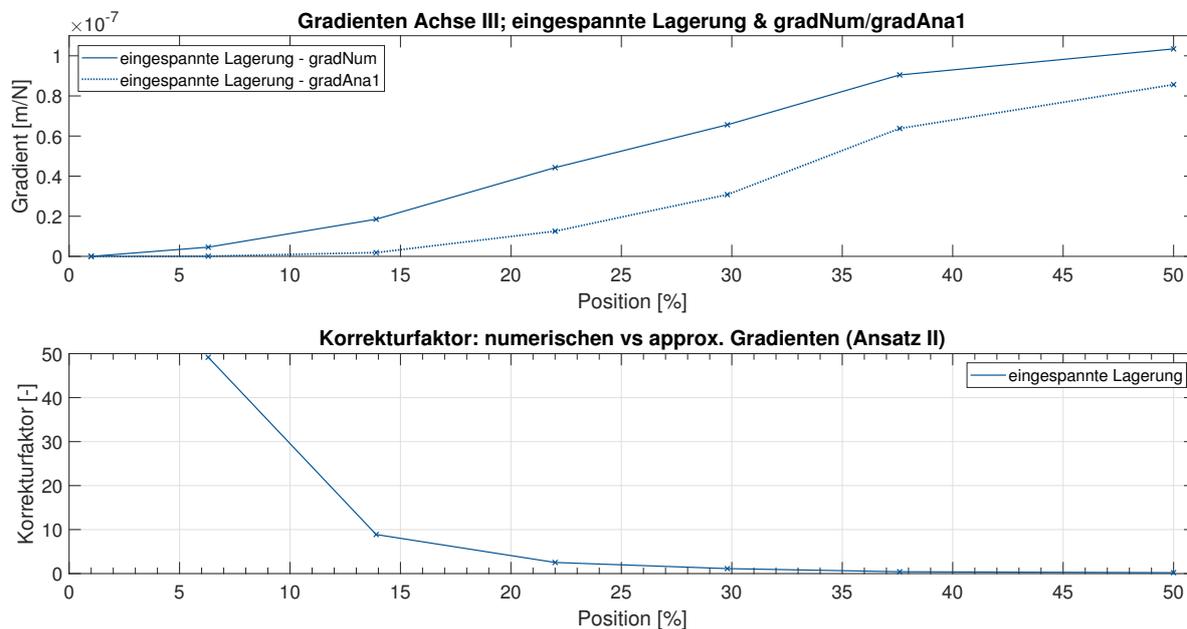


Abb. E.32: Vereinfachte Gradienten entlang der Achse III für eingespannte Lagerung (Ansatz II)

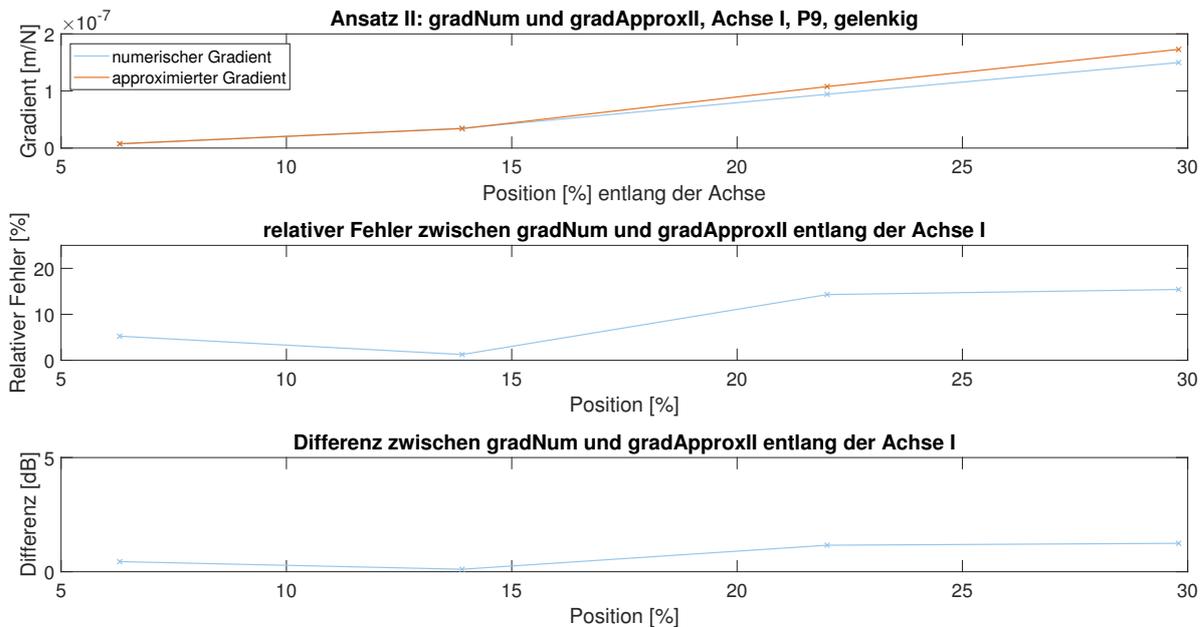


Abb. E.33: Vereinfachte Gradienten entlang der Achse I sowie Umsetzung des Ansatzes II inklusive Fehlerbetrachtung für P9 - gelenkig

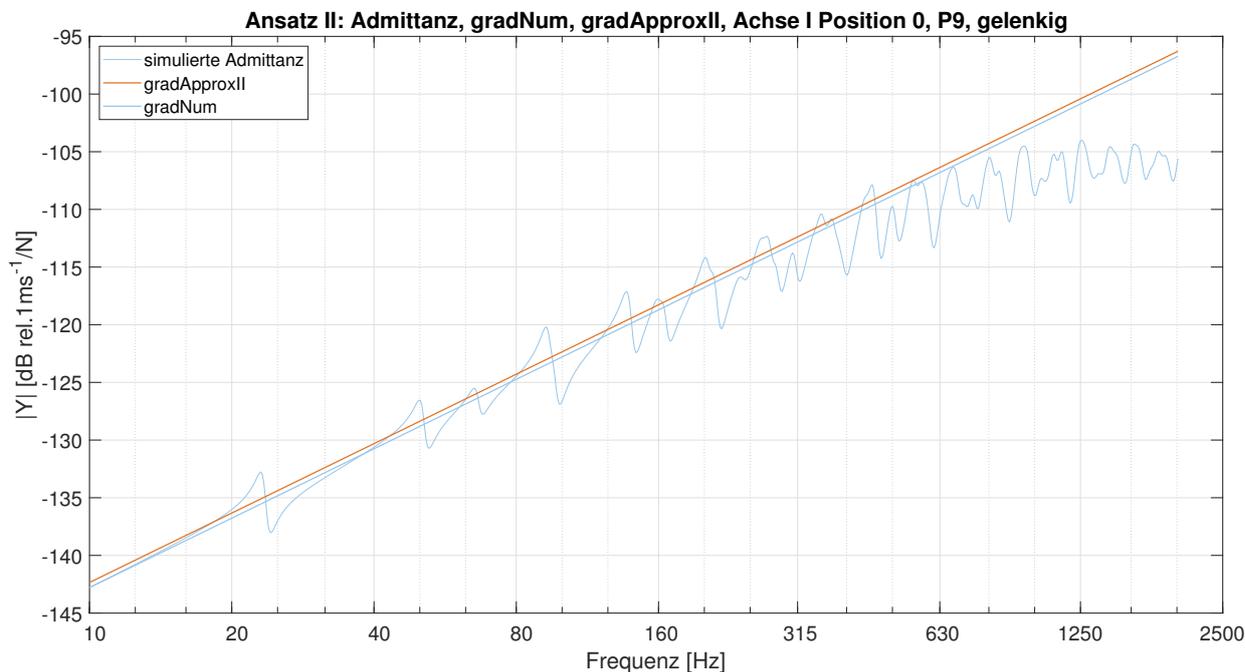


Abb. E.34: Simulierte Admittanz inklusive *gradNum* und *gradApproxII* für Platte P9 und gelenkige Lagerung

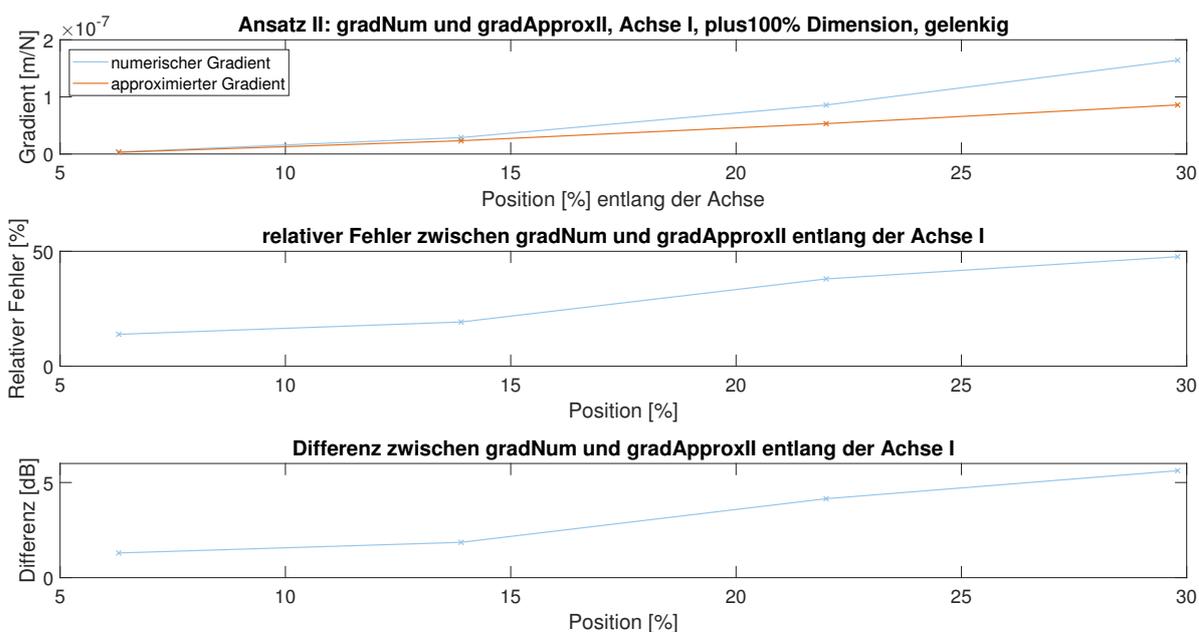


Abb. E.35: Vereinfachte Gradienten entlang der Achse I sowie Umsetzung des Ansatzes II inklusive Fehlerbetrachtung für plus100% Dimension - gelenkig

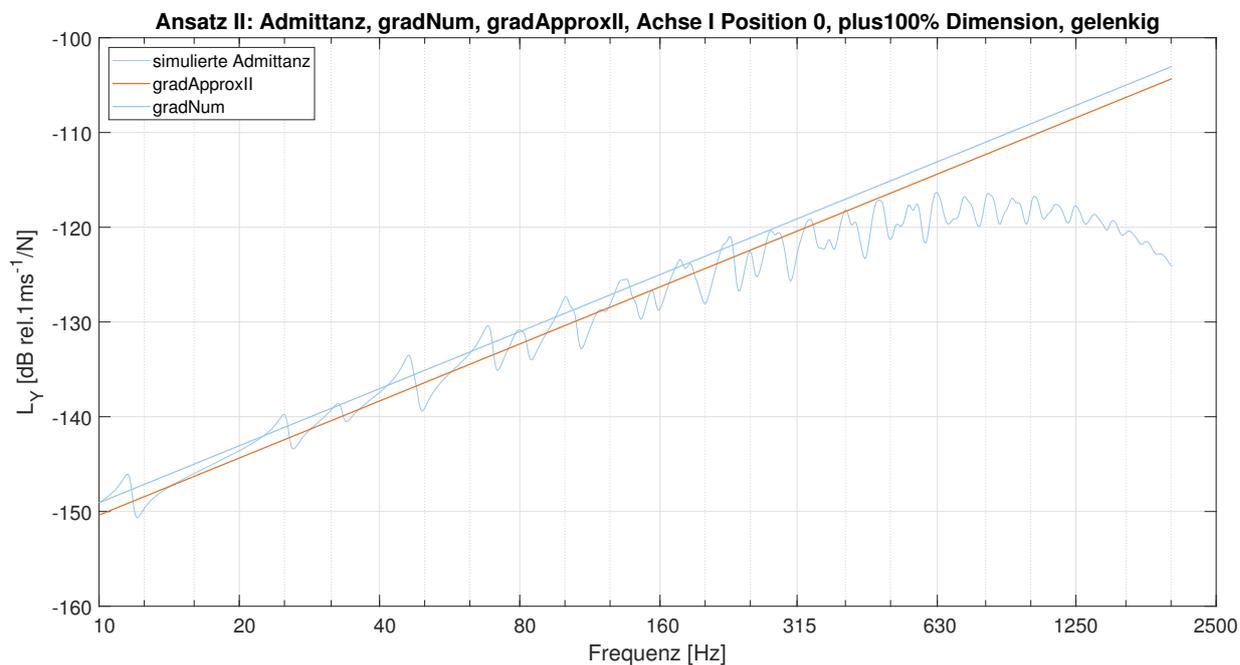


Abb. E.36: Simulierte Admittanz inklusive *gradNum* und *gradApproxII* für plus100% Dimension und gelenkige Lagerung

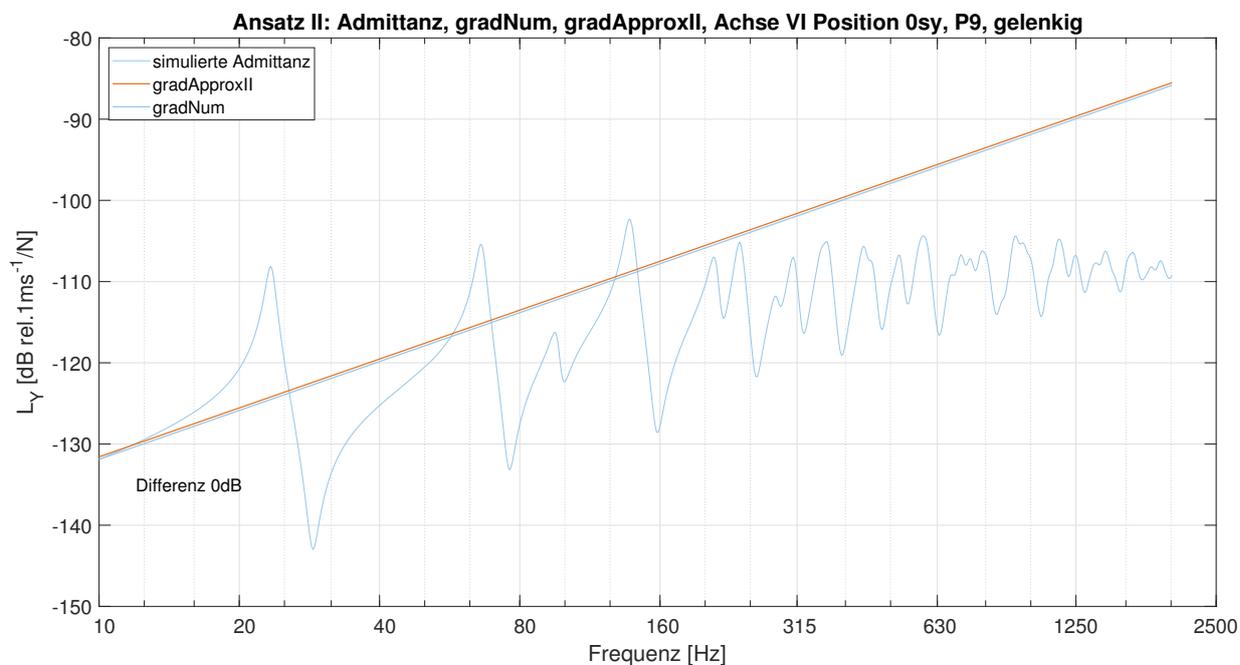


Abb. E.37: Simulierte Admittanz inklusive *gradNum* und *gradApproxII* für Platte P9 und gelenkige Lagerung an Position 0sy

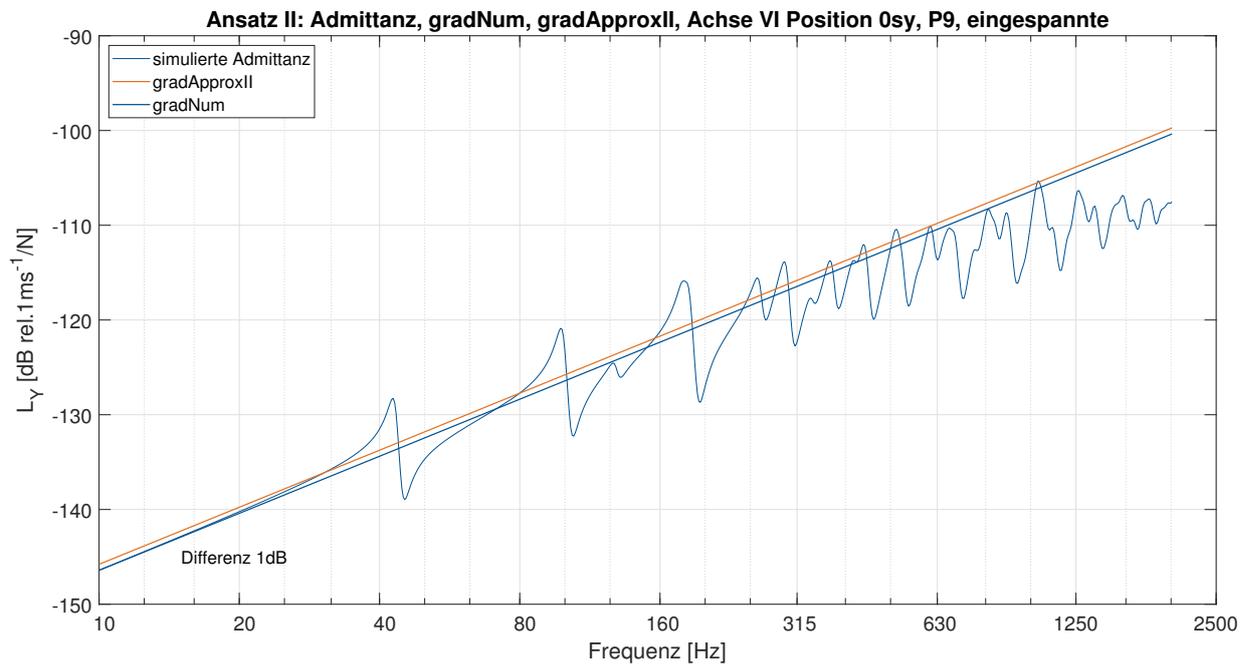


Abb. E.38: Simulierte Admittanz inklusive *gradNum* und *gradApproxII* für Platte P9 und eingespannte Lagerung an Position 0sy

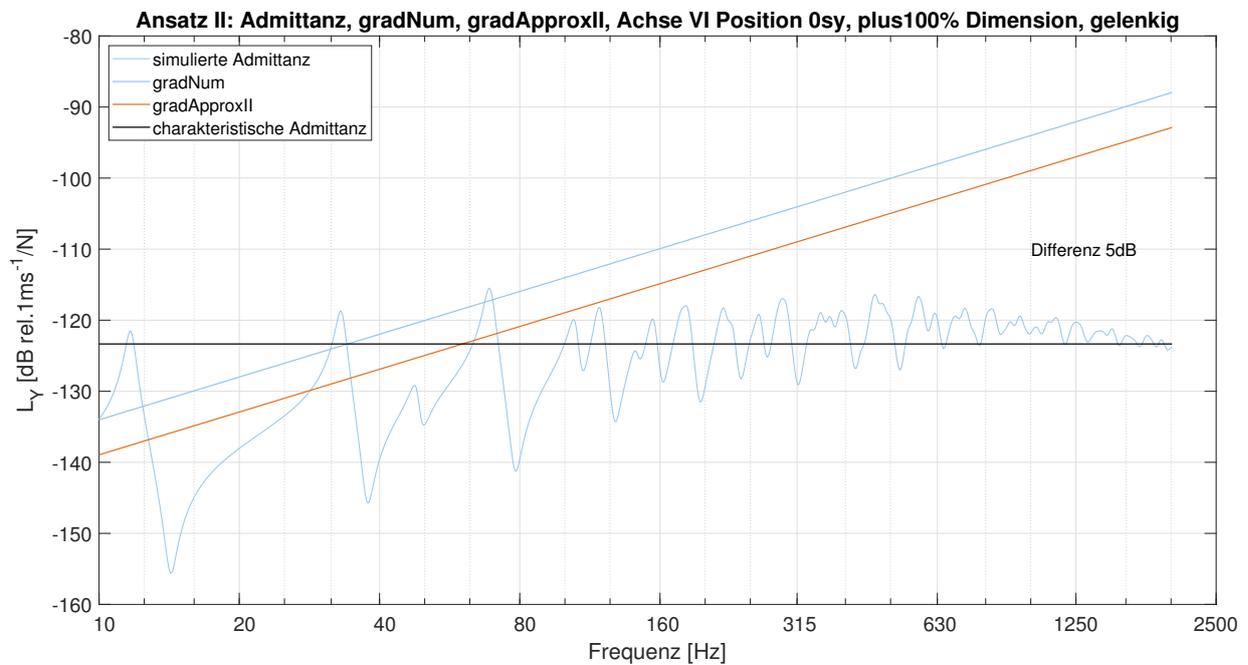


Abb. E.39: Simulierte Admittanz inklusive *gradNum* und *gradApproxII* für Platte plus100% Dimensionen und gelenkige Lagerung an Position 0sy

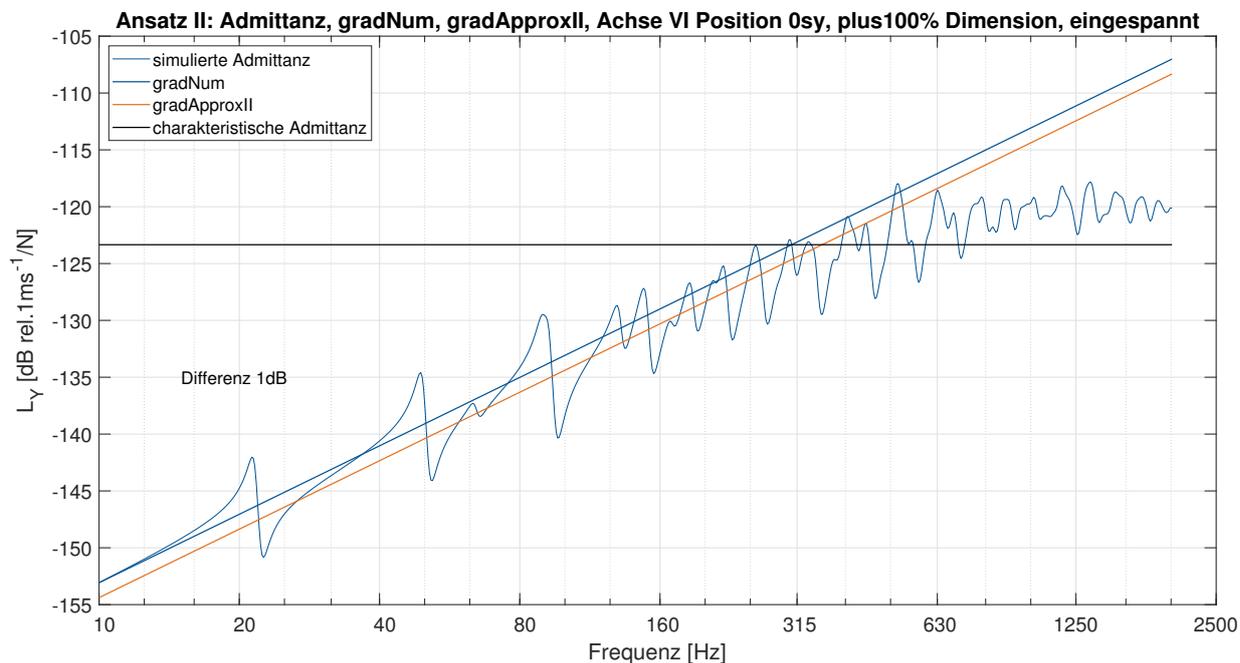


Abb. E.40: Simulierte Admittanz inklusive *gradNum* und *gradApproxII* für Platte plus100% Dimensionen und eingespannte Lagerung an Position 0sy

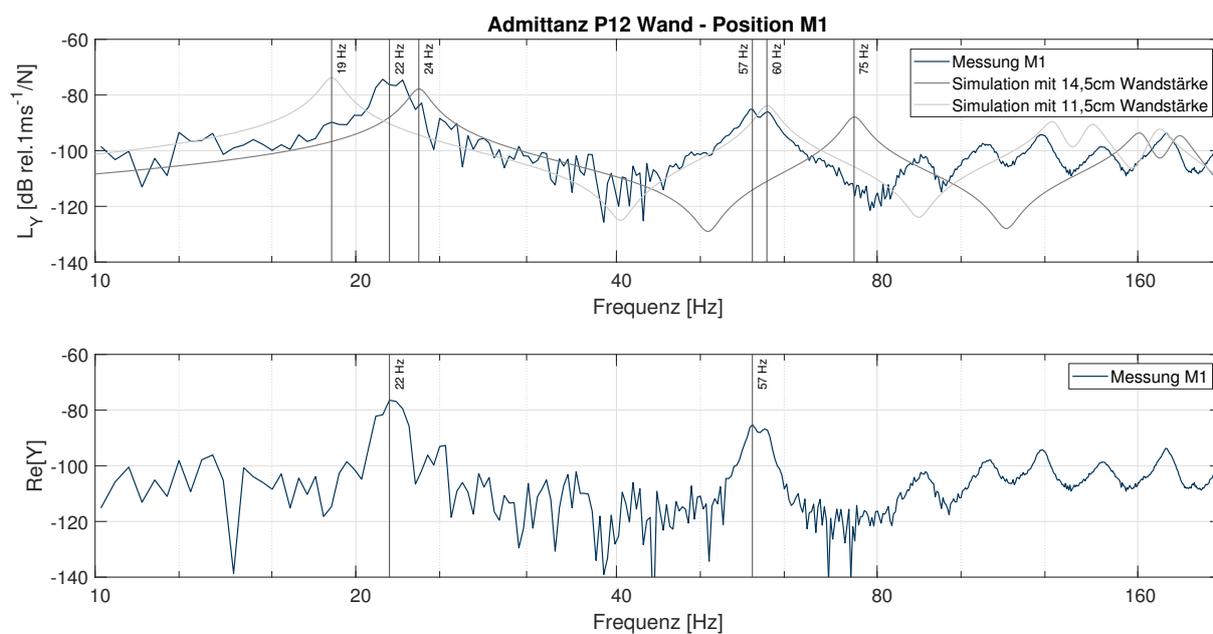


Abb. E.41: Simulierte und gemessene Admittanzen an Position M1 (Platten- bzw. Wandmitte) inklusive der ermittelten Eigenfrequenzen

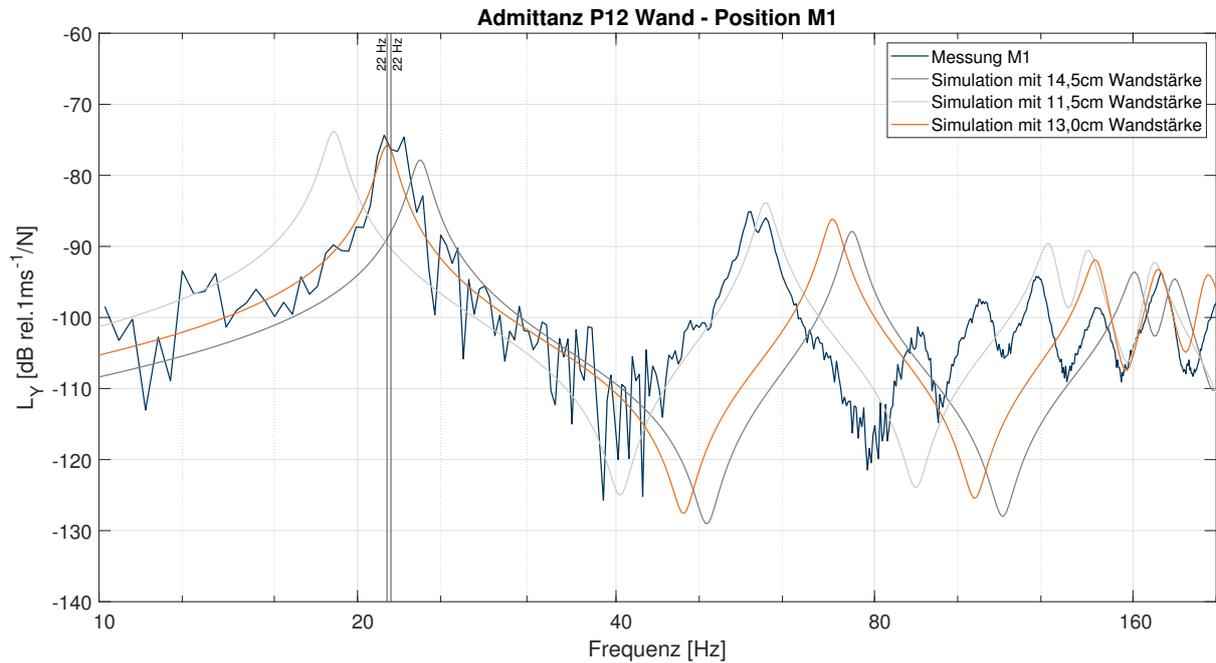


Abb. E.42: Simulierte und gemessene Admittanzen an Position M1 (Platten- bzw. Wandmitte) inklusive der ermittelten Eigenfrequenzen einer kalibrierten Plattendicke

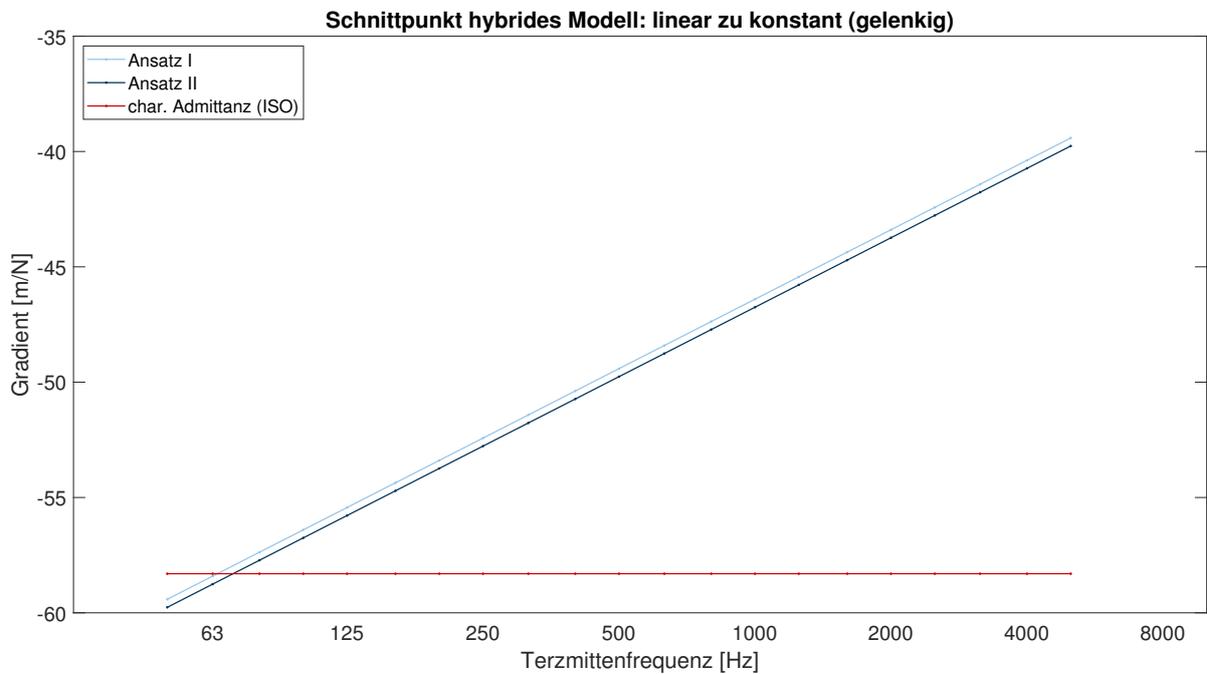


Abb. E.43: Anwendung des hybriden Modells – Duschwanne auf der Bodenplatte in P12 unter gelenkiger Auflagerbedingung: Übergang von linear auf konstant

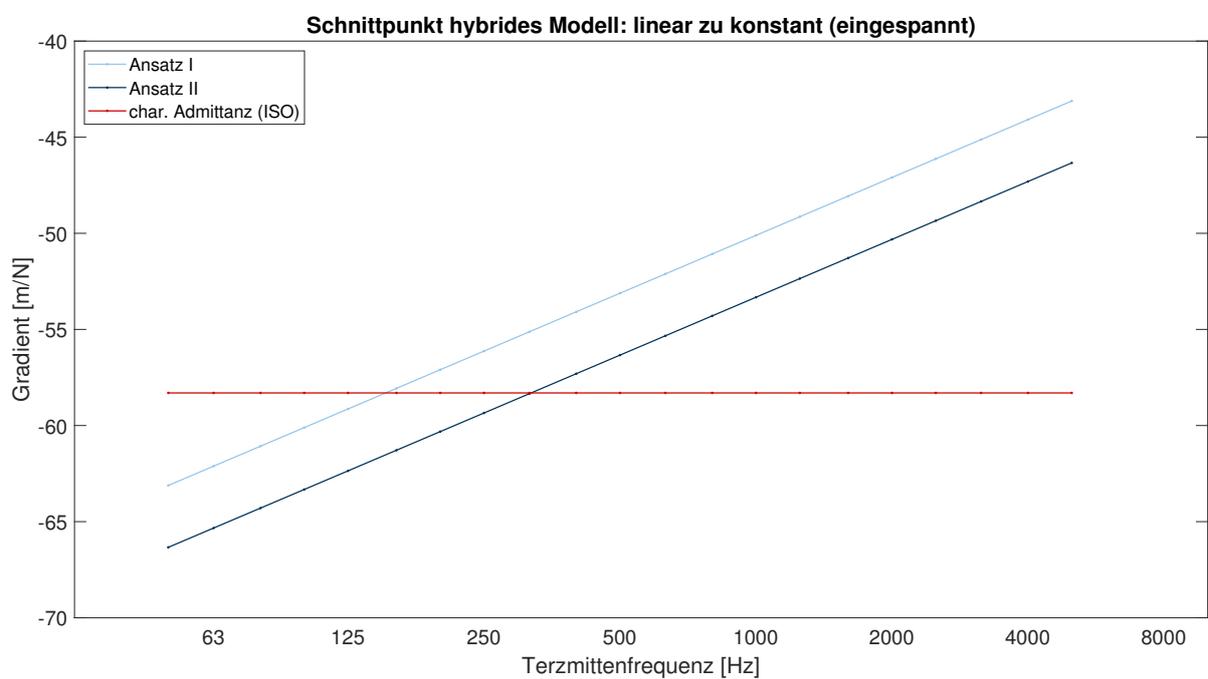
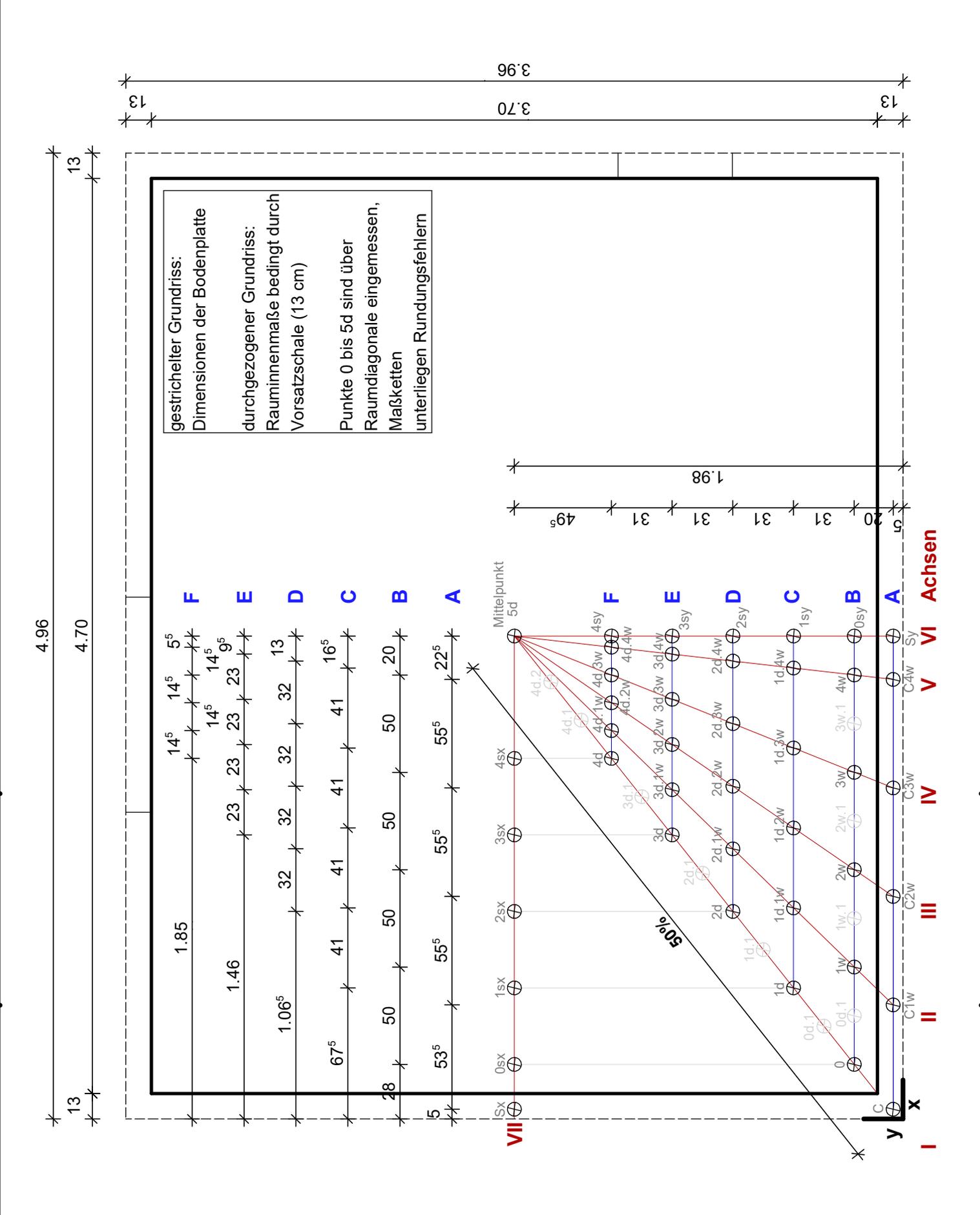


Abb. E.44: Anwendung des hybriden Modells – Duschwanne auf der Bodenplatte in P12 unter eingespannter Auflagerbedingung: Übergang von linear auf konstant

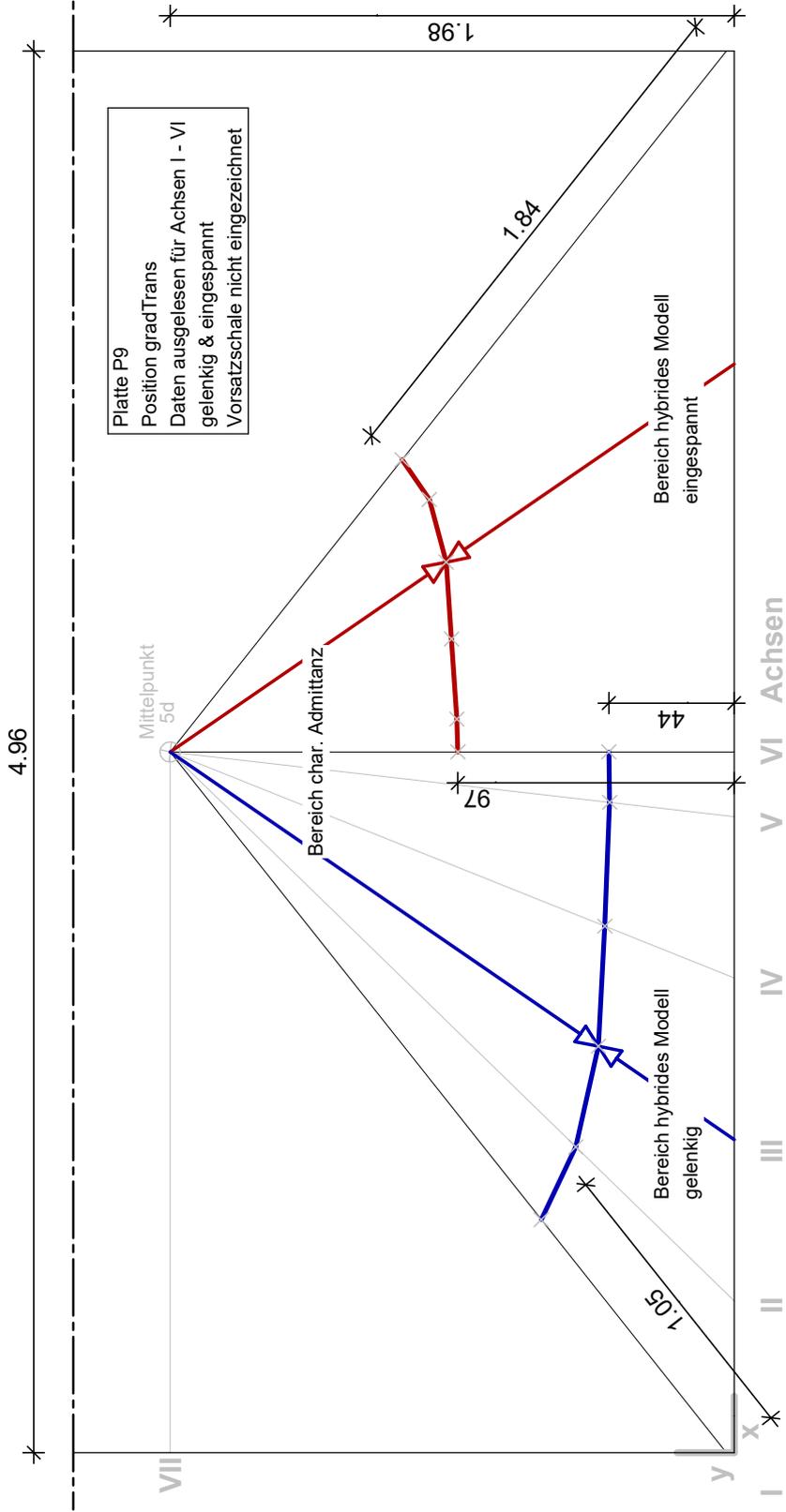
## F Pläne



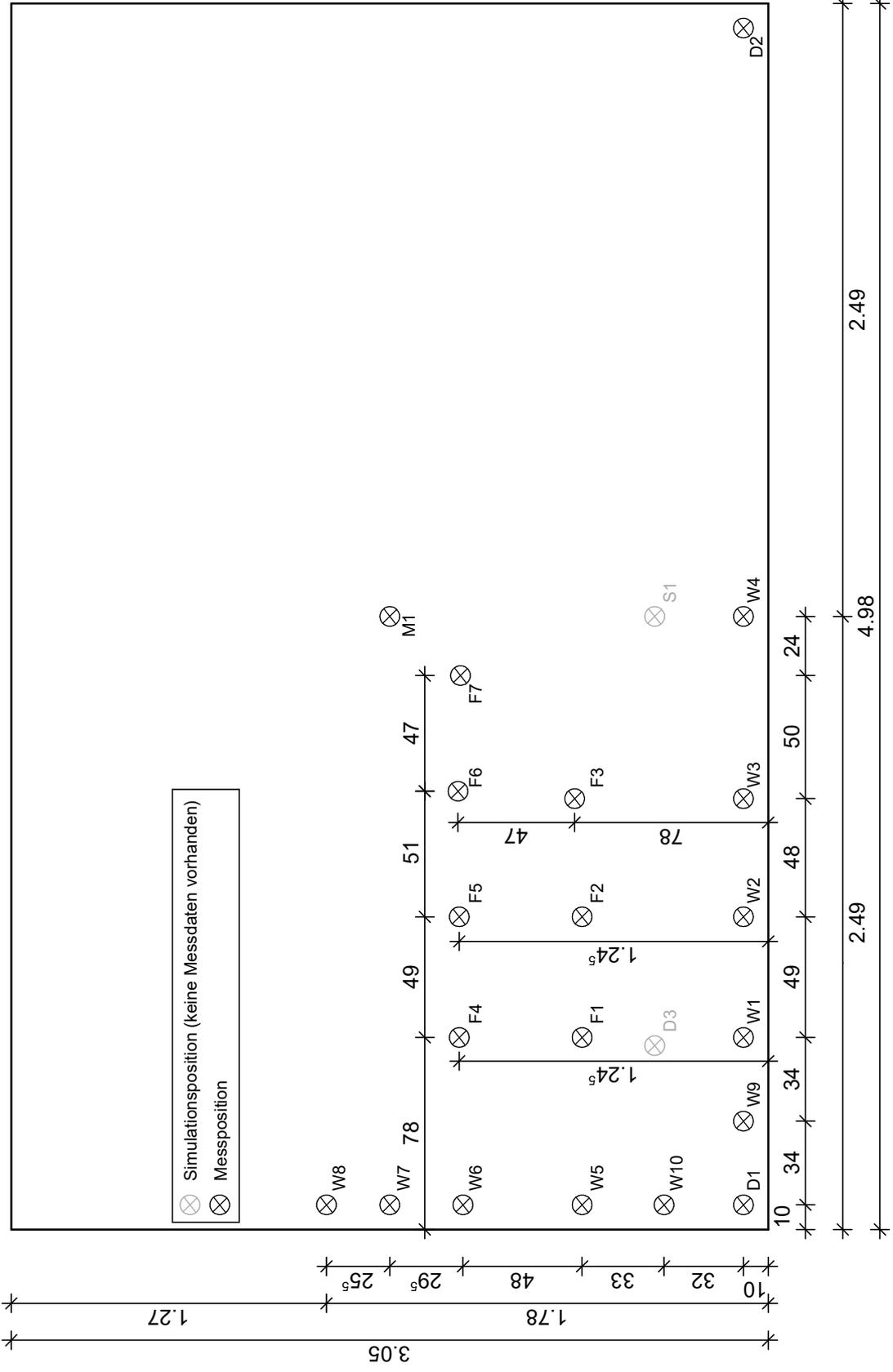
Prüfstand Admittanz, P02	Simulation, PlanNr.	Simulationssubjekt Bodenplatte	Raum ---	Inhalt Vermessung Simulationen	Zeichner, Version Schwab, v2
Estrichprüfstand P9				Simulationstool Mobility_matab	Datum, Maßstab 15.03.2023, 1:25



Prüfstand Estrichprüfstand P9	Raum EG	Inhalt hybrides Modell	Zeichner, Version Schwab, v2
Simulation, PlanNr. Anwendungsbereich, P03	Simulationenobjekt Bodenplatte	Simulationstool Mobility_matab.m	Datum, Maßstab 12.04.2023, 1:25



<b>Messkonzept, PlanNr.</b> Admittanzmessung, P04	<b>Messobjekt</b> Installationswand	<b>Messdatum</b> 15.02.2023	<b>Zeichner, Version</b> Schwab, v2
<b>Prüfstand</b> Installationsprüfstand P12	<b>Raum</b> Empfangsraum UG	<b>Messtechniker</b> Aoki, Schwab	



Messkonzept, PlanNr. Schalldruckpegel, P05	Messobjekt Bodenplatte	Messstandort EG
Prüfstand Installationsprüfstand P12	Raum EG	Messtechniker Kaltbeitzel
Datum, Maßstab 12.04.2023, 1:50	Messdatum --	Zeichner, Version Schwab, v1

