# Analysis 1 für LG

**Vorlesungsskript**
**Wintersemester 2021/22**

Michael Prähofer

# Inhaltsverzeichnis

KAPITEL 1

# Logik und Mengenlehre

(V1)

Die Mathematik macht Aussagen über mathematische Objekte, wie Zahlen, Mengen, Vektoren, oder Funktionen. Wir folgen der klassischen Aufteilung in die Objekte, die wir studieren wollen, also die **mathematischen Objekte**, die allgemein durch sogenannte **Terme** (Konstanten, Variablen, zusammengesetzte Ausdrücke) symbolisiert werden und die **Aussagen** über Eigenschaften dieser Objekte und ihrer Beziehungen zueinander, die durch sogenannte **Formeln** beschrieben werden. Beispielsweise ist $x+5$ ein Term, $x > 5$ eine Formel.

Aussagen über mathematische Objekte können wahr oder falsch sein. Um dies entscheiden zu können, müssen die auftretenden Objekte und deren Beziehungen ausreichend präzise definiert sein (durch **Axiome** und **Definitionen**, also vorgegebene Aussagen, die als wahr vorausgesetzt werden).

## 1.1. Aussagenlogik

In der Aussagenlogik werden Aussagen als nicht weiter zerlegbare Einheiten angesehen. In diesem Abschnitt benutzen wir Symbole $A, B, C, \dots$ als Abkürzungen für beliebige Aussagen.

$A$ könnte zum Beispiel für “5 ist eine Primzahl” stehen, und $B$ für “$2+2 = 4$”. Genauso gut könnte $A$ aber auch für “4 ist eine Primzahl” oder $B$ für “$2 + 2 = 5$” stehen, also Aussagen, die, wie gewohnt interpretiert, offensichtlich falsch sind. Im Folgenden steht ’w’ für eine uneingeschränkt **wahre** Aussage, z.B. “$0 = 0$”, und ’f’ für eine unbedingt **falsche** Aussage, z.B., “$1 = 0$”. Aussagen können mit logischen Operationen zu komplizierteren Aussagen zusammengesetzt werden. Dabei wird ihr Wahrheitsgehalt über Wahrheitstafeln entsprechend sprachlicher Konventionen festgelegt.
Die grundlegenden logischen Operationen sind gegeben durch

| $A$ | $\neg A$ |
|---|---|
| f | w |
| w | f |

| $A$ | $B$ | $A \vee B$ | $A \wedge B$ | $A \Rightarrow B$ | $A \Leftrightarrow B$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f | f | f | f | w | w |
| f | w | w | f | w | f |
| w | f | w | f | f | f |
| w | w | w | w | w | w |

$\neg$ steht für **nicht**, die Negation,
$\vee$ steht für **oder**, das nichtexklusive Oder, Adjunktion
$\wedge$ steht für **und**, die Konjunktion,
$\Rightarrow$ steht für **wenn ..., dann ...**, die Folgerung oder Implikation, und
$\Leftrightarrow$ steht für **...genau dann, wenn ...**, die logische Äquivalenz.

BEMERKUNGEN.

- $\vee$ ist "nichtexklusiv" wie in "mit Milch oder Zucker?"
- $B \Leftarrow A$ ist nur eine andere Schreibweise für $A \Rightarrow B$.
- Umgangsprachlich wird $A \Rightarrow B$ durch "wenn $A$, dann $B$", "aus $A$ folgt $B$", "$A$ ist hinreichend für $B$", "$A$ setzt voraus, dass $B$" ausgedrückt, oder aber durch "**nur** wenn $B$, dann $A$", "$B$ ist notwendig für $A$". Beispiele für $A \Rightarrow B$:

  $$\text{„Wenn } \underbrace{\text{es regnet}}_{A}\text{, dann } \underbrace{\text{ist die Straße nass}}_{B}\text{.“}$$

  $$\text{„} \underbrace{\text{Wer wagt}}_{B}\text{, } \underbrace{\text{gewinnt}}_{A}\text{.“}$$

  $$\text{„Nur wenn } \underbrace{\text{du teilnimmst}}_{B}\text{, dann } \underbrace{\text{kannst du gewinnen}}_{A}\text{.“}$$

  $$\text{„Wenn } \underbrace{\text{du gewinnst}}_{A}\text{, dann } \underbrace{\text{musst du auch teilgenommen haben}}_{B}\text{.“}$$

  $$\text{„Wenn } \underbrace{\text{du gut englisch kannst}}_{A}\text{, dann } \underbrace{\text{weißt du, was cat bedeutet}}_{B}\text{.“}$$

  Man vermeide die Fehlschlüsse: „Wer nicht gut englisch kann, weiß nicht, was cat bedeutet“, bzw., „Wer weiß, was cat bedeutet, kann gut englisch.“
- Klammerersparnisregeln: $\neg$ bindet stärker als $\vee$, $\wedge$, welche wiederum stärker binden als $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$. Außerdem sind $\vee$ und $\wedge$ assoziativ, so dass man z.B. für $A \vee (B \vee (C \vee D))$ einfach $A \vee B \vee C \vee D$ schreibt. Z.B. steht

  $$\neg(A \wedge B \wedge C) \vee D \Rightarrow E \quad \text{für} \quad (((\neg(A \wedge (B \wedge C))) \vee D) \Rightarrow E).$$

- Eine Formel, die für jeden Wahrheitswert ihrer elementaren Bestandteile immer wahr ist, heißt **Tautologie**. Beispiel:

  "Wenn der Hahn kräht auf dem Mist, dann ändert sich das Wetter, oder es bleibt wie es ist."

- Haben zwei zusammengesetzte Formeln $F_1$ und $F_2$ für beliebige Wahrheitswerte ihrer elementaren Bestandteile denselben Wahrheitswert, so heißen sie **logisch äquivalent**, d.h. $F_1$ und $F_2$ sind genau dann logisch äquivalent, wenn $F_1 \Leftrightarrow F_2$ eine Tautologie ist.

SATZ 1.1. $A \Rightarrow B$ ist logisch äquivalent zu $\neg A \vee B$.

*Beweis* (durch Wahrheitstafel).

| $A$ | $B$ | $\neg A$ | $\neg A \vee B$ | $A \Rightarrow B$ | $(\neg A \vee B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f | f | w | w | w | w |
| f | w | w | w | w | w |
| w | f | f | f | f | w |
| w | w | f | w | w | w |

Die beiden vorletzten Spalten sind identisch, über der letzten Spalte steht also eine Tautologie. □

SATZ 1.2 (**Einfache logische Äquivalenzen**).
Die folgenden Formeln sind alles Tautologien:

$$
\begin{aligned}
A \vee B &\Leftrightarrow B \vee A, && \text{(kommutativ)}\\
(A \vee B) \vee C &\Leftrightarrow A \vee (B \vee C), && \text{(assoziativ)}\\
(A \vee B) \wedge C &\Leftrightarrow (A \wedge C) \vee (B \wedge C), && \text{(distributiv)}\\
A \wedge B &\Leftrightarrow B \wedge A, && \text{(kommutativ)}\\
(A \wedge B) \wedge C &\Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C), && \text{(assoziativ)}\\
(A \wedge B) \vee C &\Leftrightarrow (A \vee C) \wedge (B \vee C), && \text{(distributiv)}\\
\neg(A \vee B) &\Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B, && \text{(de Morgansches Gesetz)}\\
\neg(A \wedge B) &\Leftrightarrow \neg A \vee \neg B, && \text{(de Morgansches Gesetz)}\\
\neg(\neg A) &\Leftrightarrow A. && \text{(doppelte Verneinung)}
\end{aligned}
$$

*Beweis.* z.B. durch Wahrheitstafeln. □

SATZ 1.3 (**Wichtige Schlussweisen**).
Die folgenden Formeln sind Tautologien:

$$
\begin{aligned}
A \wedge (A \Rightarrow B) &\Rightarrow B, && \text{(Modus Ponens)}\\
(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) &\Rightarrow (A \Rightarrow C), && \text{(Beweiskette)}\\
(A \Leftrightarrow B) \wedge (B \Leftrightarrow C) &\Rightarrow (A \Leftrightarrow C), && \text{(Äquivalenzkette)}
\end{aligned}
$$

*Beweis.* z.B. durch Wahrheitstafeln. □

Diese Techniken können iteriert werden. Wie man leicht sieht, sind z.B. auch die folgenden Formeln Tautologien:

$$
\begin{gathered}
A \wedge (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow C,\\
(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \wedge (C \Rightarrow D) \Rightarrow (A \Rightarrow D).
\end{gathered}
$$

SATZ 1.4 (**Wichtige Beweismethoden**).
Die folgenden Formeln sind Tautologien:

$$(A \wedge B \Rightarrow C) \Leftrightarrow (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)), \quad \text{(Voraussetzungsabspaltung)}$$
$$(A \Rightarrow B \wedge C) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C), \quad \text{(Behauptungszerlegung)}$$
$$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A), \quad \text{(Äquivalenzbeweis)}$$
$$B \Leftrightarrow (A \Rightarrow B) \wedge (\neg A \Rightarrow B), \quad \text{(Fallunterscheidung)}$$
$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A), \quad \text{(Indirekter Beweis)}$$
$$A \Leftrightarrow (\neg A \Rightarrow B \wedge \neg B), \quad \text{(Widerspruchsbeweis)}$$

*Beweis.* durch Wahrheitstafeln. □

(V2)

## 1.2. Prädikatenlogik

**1.2.1. Mathematische Objekte.** Gegenstand mathematischer Betrachtungen sind mathematische Objekte. Ihre grundlegenden Eigenschaften und Beziehungen zueinander werden durch **Axiome**, also als wahr akzeptierte Aussagen über diese mathematischen Objekte, festgelegt. Ziel der Mathematik ist es, mit den Mitteln der Logik daraus weitere wahre Aussagen über die betrachteten mathematischen Objekte zu gewinnen, eine solche wahre Aussage heißt **Satz** (auch **Theorem**, **Lemma**, **Proposition**, **Korollar**) und muss mittels eines Beweises aus Axiomen und schon bewiesenen Sätzen hergeleitet werden.

Grundlegende mathematische Objekte sind die Zahlen, wie sie zum Teil schon aus der Schule bekannt sind:

- Die **natürlichen Zahlen**, $\mathbb{N}_0$,
$$0, 1, 2, 3, \dots$$
einschließlich der Null. Die natürlichen Zahlen ohne 0 werden wir mit $\mathbb{N}^*$ bezeichnen. Schreibt man nur $\mathbb{N}$, so muss aus dem Kontext klar sein, ob $\mathbb{N}_0$ oder $\mathbb{N}^*$ gemeint ist. Wir meinen dann meistens $\mathbb{N}^*$.
- Die **ganzen Zahlen**, $\mathbb{Z}$,
$$\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$$
- Die **rationalen Zahlen**, $\mathbb{Q}$,
$$\begin{array}{c} \dots, -\frac{3}{1}, -\frac{2}{1}, -\frac{1}{1}, \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \dots, \\ \dots, -\frac{3}{2}, -\frac{2}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{0}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \dots, \\ \dots, -\frac{3}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{0}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \dots, \\ \vdots \end{array}$$

Man beachte, dass $\frac{6}{4}$ dasselbe mathematische Objekt bezeichnet wie $\frac{3}{2}$. Ein gegebener Bruch ist also ein Bezeichner für ein Zahl, ein Name für ein mathematisches Objekt. Jedes mathematische Objekt kann natürlich viele Namen haben.

- Die **reellen Zahlen** $\mathbb{R}$ und die **komplexen Zahlen**, $\mathbb{C}$, die wir im nächsten Kapitel ausführlich behandeln werden.

Im nächsten Abschnitt über die **Mengenlehre** lernen wir kennen, wie man aus gegebenen mathematischen Objekten durch Zusammenfassung oder Auswahl oder Ersetzung neue mathematische Objekte erhält. Dadurch werden wir z.B. die Gesamtheit der natürlichen Zahlen, $\mathbb{N}_0$, oder auch $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ selbst, als mathematische Objekte auffassen.

**1.2.2. Terme.** Terme sind Zeichenketten, die mathematische Objekte symbolisieren. Atomare Terme sind Konstanten (0, 1, i, $\pi$, e, $\mathbb{Z}$, sin, ...), die jeweils für festgelegte mathematische Objekte stehen, oder Variablen ($x$, $y$, $\alpha$, $f$, ...), die für beliebige mathematische Objekte stehen können.

BEMERKUNG. Bei lateinischen Buchstaben verwendet man für mathematischen Konstanten üblicherweise immer Normalschrift, Variablen dagegen werden kursiv dargestellt.

Mehrere Terme könne mittels **Operationen** zu neuen Termen zusammengesetzt werden. Es gibt **einstellige** Operationen (wie z.B., das Negative einer Zahl: Ist $t$ ein Term, der für eine Zahl steht, so ist $(-t)$ ein Term, der auch für eine Zahl steht), **zweistellige** Operationen (wie die Addition zweier Zahlen: Sind $s, t$ Terme, die für Zahlen stehen, so ist z.B. $(s + t)$ wieder ein Term, der für eine Zahl steht).

BEMERKUNG (ZUR NOTATION).
Im Laufe der Zeiten wurden unüberschaubar viele Schreibweisen für Operationen erfunden, denen gemeinsam ist, dass sie die Beziehung zwischen Operation und Operanden durch eine zweidimensionale (auf Papier darstellbare) Anordnung symbolisieren. Ein paar Beispiele:
Einstellig: $-x$, $n!$, $x^2$, $\overline{z}$, $\sqrt{x}$, $|x|$ (Präfix, Postfix, Superfix, Circumfix)
Zweistellig: $x + y$, $\frac{a}{b}$, $\binom{n}{k}$, $a^b$, $\sqrt[k]{n}$, $\mathrm{ggT}(m, n)$, (Infix, Circumfix, Präfix, etc.)
Zum Beispiel für die Eingabe von Termen mit Computertastatur einigt man sich häufig auf eine einheitliche Präfixschreibweise mit geeigneter Klammerung, also z.B.

$$\begin{aligned} \mathrm{sqrt}(x) &\text{ für } \sqrt{x}, \\ +(a, b) &\text{ für } a + b, \\ \mathrm{pow}(a, b) &\text{ für } a^b, etc. \end{aligned}$$

**1.2.3. Prädikate.** Die Symbole $A, B, \ldots$ aus dem vorigen Abschnitt wurden als Platzhalter für Aussagen betrachtet. Wie in der Alltagssprache gibt es in der Mathematik **Prädikate**.
**Einstellige** Prädikate kann man auch als Zustände oder Eigenschaften ansehen (Prädikat "wertvoll" für Filme oder Weine). Im mathematischen Kontext kann dies zum Beispiel

"_ ist eine Primzahl",
"_ ist eine Quadratzahl",
"_ ist eine rationale Zahl"

sein. **Zweistellige** Prädikate beschreiben Beziehungen zwischen zwei mathematischen Objekten. Dies sind zum Beispiel

"_ ist gleich _",
"_ ist kleiner als _".
"_ ist Teiler von _".

Ein grundlegendes zweistelliges Prädikat ist die Gleichheit, "=". Sind $s$ und $t$ zwei Terme, so ist die Formel $s = t$ genau dann wahr, wenn $s$ und $t$ **dasselbe** mathematische Objekt bezeichnen. Hieraus ergeben sich die grundlegenden Eigenschaften der Gleichheit: sind $r, s, t$ beliebige Terme, so sind die Formeln

$$t = t, \quad s{=}t \Rightarrow t{=}s, \quad r{=}s \wedge s{=}t \Rightarrow r{=}t.$$

immer wahr. Außerdem vereinbaren wir die Abkürzung:

$$s \neq t \quad \text{bedeutet} \quad \neg(s = t).$$

Wie bei Operationen gibt es bei Prädikaten die unterschiedlichsten Schreibweisen. Für zweistellige Prädikate verwendet man aber am häufigsten die Infixschreibweise.

**1.2.4. Formeln.** In der Alltagssprache erfordern Prädikate normalerweise ein Subjekt und möglicherweise mehrere Objekte, z.B., "a betrachtet b.", "a gibt b ein c". Ein $k$-stelliges Prädikat zusammen mit $k$ Termen geeignet notiert, bildet eine **Formel**. Formeln, die Variablen enthalten, kann im Allgemeinen kein eindeutiger Wahrheitswert zugeordnet werden (ist $x > 5$ wahr oder falsch?). Solche nicht spezifizierten Variablen innerhalb einer Formel nennt man **freie Variablen**. Formeln die keine freien Variablen enthalten sind Aussagen. Formeln die freie Variablen enthalten heißen **Aussageformen**. Die Formel $\mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2 = \mathrm{c}^2$ ist also eine Aussage, die zum Beispiel dann wahr ist, wenn die Konstanten a, b und c als 3, 4 und 5 festgelegt sind. Die Formel $a^2 + b^2 = c^2$ ist dagegen eine Aussageform mit den freien Variablen $a, b, c$.
Formeln können mit logischen Operationen zu komplizierteren Formeln zusammengesetzt werden.

**1.2.5. Quantoren.** Mit Hilfe von Quantoren kann man Formeln die freie Variable enthalten zu Aussagen machen, man sagt die Variablen werden gebunden. Die wichtigsten Quantoren sind der **Allquantor** $\forall$ und der **Existenzquantor** $\exists$.
Sei $F$ eine beliebige Formel die als einzige freie Variable $x$ enthält und sei $M$ eine festgelegter Bereich mathematischer Objekte. Dann bedeutet

$$\forall x{\in}M \,:\, F,$$

dass für jedes beliebige mathematische Objekt x aus $M$, das man an Stelle der Variablen $x$ in $F$ einsetzt, die so entstehende Aussage wahr ist. Die Formel

$$\exists x{\in}M \,:\, F$$

bedeutet, dass es mindestens ein mathematisches Objekt x aus $M$ gibt, das man an Stelle der Variablen $x$ in $F$ einsetzten kann, so dass die dadurch entstehende Aussage wahr ist. Wenn es keine Einschränkung für die Objekte gibt oder klar ist, aus welchem Bereich $M$ die Objekte stammen sollen, schreibt man zur Abkürzung auch

$$\forall x \,:\, F, \quad \exists x \,:\, F.$$

Im Kontext der reellen Zahlen sind zum Beispiel die folgenden Formeln alle wahr,

$$\neg(\forall x{\in}\mathbb{R} \,:\, x > 5), \quad \exists x{\in}\mathbb{R} \,:\, x > 5,$$
$$\forall x{\in}\mathbb{R} \,:\, x^2 \geq 0, \quad \neg(\exists x{\in}\mathbb{R} \,:\, x^2 < 0).$$

Enthält die Formel $F$ neben $x$ weitere freie Variablen, so sind die Formeln $\forall x \,:\, F$ und $\exists x \,:\, F$ Aussageformen, die $x$ *nicht* mehr als freie Variable enthalten. Man sagt, $x$ ist in beiden Formeln eine **gebundene** (oder lokale) Variable. Man kann den Bezeichner einer gebundenen Variablen in einer Formel jederzeit abändern, ohne die Bedeutung der Formel zu verändern, solange der neue Bezeichner nicht schon in der ursprünglichen Formel vorkommt.

Für die Negation von Formeln mit Quantoren gelten die folgenden Regeln:[1]

$$\neg(\forall x{\in}M \,:\, F) \Leftrightarrow (\exists x{\in}M \,:\, \neg F),$$
$$\neg(\exists x{\in}M \,:\, F) \Leftrightarrow (\forall x{\in}M \,:\, \neg F).$$

[1]Wenn eine Formel $F$ nicht für alle $x$ aus $M$ gilt, dann gibt es ein $x$ aus $M$ für das $F$ nicht gilt. Und umgekehrt: Gibt es kein $x$ aus $M$ für das die Formel $F$ gilt, dann ist für alle $x$ aus $M$ die Formel falsch. Sind in $M$ nur endlich viele Objekte enthalten, dann sind diese Regeln nur eine Manifestation der de Morganschen Gesetze:
Enthält $M$ beispielsweise nur die Objekte 1,2 und 3, so gilt für das einstellige Prädikat $P$:

$$(\forall x{\in}M \,:\, P(x)) \quad\Longleftrightarrow\quad P(1) \wedge P(2) \wedge P(3),$$
$$(\exists x{\in}M \,:\, P(x)) \quad\Longleftrightarrow\quad P(1) \vee P(2) \vee P(3).$$

Prädikatenlogik mit nur endlich vielen verschiedenen Mathematischen Objekten kann so auf Aussagenlogik zurückgeführt werden.

Für Formeln mit mehreren Quantoren gelten die folgenden Vertauschungsregeln

$$(\forall x{\in}M : (\forall y{\in}N : F)) \Leftrightarrow (\forall y{\in}N : (\forall x{\in}M : F)),$$
$$(\exists x{\in}M : (\exists y{\in}N : F)) \Leftrightarrow (\exists y{\in}N : (\exists x{\in}M : F)).$$

Wir vereinbaren, dass Quantoren stärker binden als jede logische Operation, wodurch häufig Klammern eingespart werden können. Auch die Doppelpunkte zwischen Quantoren dürfen entfallen. Häufig wird weiter abgekürzt, so steht z.B.

$$\forall x, y, z{\in}\mathbb{R} : x^2 + y^2 + z^2 \geq 0$$

für

$$\forall x{\in}\mathbb{R}\ \forall y{\in}\mathbb{R}\ \forall z{\in}\mathbb{R} : x^2 + y^2 + z^2 \geq 0.$$

Verschiedene Quantoren dürfen im Allgemeinen nicht vertauscht werden. Man betrachte z.B. die wahre Aussage

$$\forall x{\in}\mathbb{R}\ \exists y{\in}\mathbb{R} : x + y = 0$$

und die falsche Aussage

$$\exists y{\in}\mathbb{R}\ \forall x{\in}\mathbb{R} : x + y = 0.$$

(V3)

## 1.3. Beweismethoden

In diesem Abschnitt illustrieren wir einige elementare Beweismethoden anhand von Beispielen aus der Arithmetik:

Alle auftauchenden Variablen $k, l, m, n$ seien im Folgenden aus $\mathbb{N}_0$, also natürliche Zahlen inklusive der Null. Als Abkürzung definiert man

$$m \leq n :\Longleftrightarrow \exists k : m + k = n$$
$$m < n :\Longleftrightarrow m \leq n \wedge \neg(m = n)$$
$$m \mid n :\Longleftrightarrow \exists k : m \cdot k = n$$

Als aus der Schule bekannt setzen wir die **Division mit Rest** voraus:

$$\forall m, n : (m{>}0 \wedge \neg(m|n) \Longleftrightarrow \exists k, l : (0{<}l \wedge l{<}m \wedge n{=}km{+}l)),$$

in Worten: $m > 0$ ist genau dann kein Teiler von $n$, wenn sich bei der Division von $n$ durch $m$ der Wert $k$ ergibt mit einem von 0 verschiedenen Rest $l$. Weiter wird mit $\mathrm{ggT}(m, n)$ der **größte gemeinsame Teiler** von $m$ und $n$ bezeichnet (kgV ist das **kleinste gemeinsame Vielfache**) und zwei Zahlen $m, n$ heißen **teilerfremd**, wenn $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$ ist.
Wir illustrieren die häufigsten Beweismethoden anhand einfacher Beispiele.

**Direkter Beweis.**
Um $A \Rightarrow B$ zu zeigen, entwickelt man eine direkte Beweiskette.

LEMMA 1.5. $\forall n : (2 \mid n \Rightarrow 2 \mid n^2)$.

*Beweis.* Sei $n$ eine beliebige natürliche Zahl.
Es gelte $\underbrace{2 \mid n}_{A}$. $\underbrace{\text{Dann gibt es ein } k \text{ mit } n = 2k}_{B}$.
$\underbrace{\text{Es gibt also ein } k \text{ (nämlich dasselbe) mit } n^2 = (2k)^2 = 2(2k^2)}_{C}$.
$\underbrace{\text{Daher gibt es ein } l \text{ (nämlich } l = 2k^2 \text{ von oben) mit } n^2 = 2l}_{D}$.
Somit gilt $\underbrace{2 \mid n^2}_{E}$. □

**Warnung:** Diese Art der Beweisführung entspricht **nicht** etwa der Formel "$A \Rightarrow B \Rightarrow C \Rightarrow D \Rightarrow E$", sondern ist eine abkürzende Schreibweise für $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \wedge (C \Rightarrow D) \wedge (D \Rightarrow E)$. Iteriert man das Prinzip der Beweiskette, so ist also auch $A \Rightarrow E$ bewiesen.

**Indirekter Beweis.**
An Stelle von $A \Rightarrow B$ zeigt man $\neg B \Rightarrow \neg A$.

LEMMA 1.6. $\forall n : (2 \mid n^2 \Rightarrow 2 \mid n)$.

*Beweis.* Sei $n$ eine beliebige natürliche Zahl.
Gelte $\neg 2 \mid n$. Dann gibt es ein $k$ mit $n = 2k + 1$.
Es gibt also ein $k$ mit $n^2 = (2k + 1)^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$.
Daher gibt es ein $l$ mit $n^2 = 2l + 1$. Somit gilt $\neg 2 \mid n^2$. □

**Äquivalenzbeweis.**
Um $A \Leftrightarrow B$ zu zeigen, zeigt man zunächst $A \Rightarrow B$ und dann $A \Leftarrow B$.

LEMMA 1.7. $\forall n : (2 \mid n \Leftrightarrow 2 \mid n^2)$.

*Beweis.* Sei wieder $n$ aus $\mathbb{N}_0$.
Oben wurde $2 \mid n \Rightarrow 2 \mid n^2$ und $2 \mid n^2 \Rightarrow 2|n$ gezeigt. □

**Beweis durch Fallunterscheidung.**
Um $B$ zu zeigen, zeigt man zunächst $A \Rightarrow B$ und dann $\neg A \Rightarrow B$.

LEMMA 1.8. $\forall n : 2 \mid (n^2 + n)$

*Beweis.* Sei $n$ aus $\mathbb{N}_0$. Es gilt $n^2 + n = n(n + 1)$.
1. Fall. $2 \mid n$: Es gibt also ein $k$ mit $n = 2k$. Für ein solches $k$ gilt auch $n(n + 1) = 2k(n + 1)$. Also ist $n(n + 1)$ gerade.
2. Fall. $\neg 2 \mid n$: Division mit Rest ergibt: Es gibt ein $k$, so dass $n = 2k+1$.

Dann ist $n+1 = 2k+2 = 2(k+1)$, also gerade. Wie oben ist also auch $n(n+1)$ gerade. □

**Widerspruchsbeweis.**
Um $A$ zu zeigen, zeigt man einmal $\neg A \Rightarrow B$ und dann $\neg A \Rightarrow \neg B$, und damit $\neg A \Rightarrow (B \wedge \neg B)$ (siehe Satz 1.4, zweite und letzte Formel).

LEMMA 1.9. $\underbrace{\forall m, n \in \mathbb{N}^* : n^2 \neq 2m^2}_{A}$.

*Beweis.* Annahme: $\underbrace{\exists m, n \in \mathbb{N}^* : n^2 = 2m^2}_{\neg A}$.

Seien $m, n \in \mathbb{N}^*$, so dass $n^2 = 2m^2$ gilt.
Setze $\tilde{m} = \frac{m}{\mathrm{ggT}(m,n)} \in \mathbb{N}^*, \tilde{n} = \frac{n}{\mathrm{ggT}(m,n)} \in \mathbb{N}^*$ ($\frac{\tilde{n}}{\tilde{m}}$ ist die vollständig gekürzte Form von $\frac{n}{m}$).
Dann gilt weiterhin $\tilde{n}^2 = 2\tilde{m}^2$ und $\underbrace{\tilde{m}, \tilde{n} \text{ sind teilerfremd}}_{B}$.

Weiter ist $\tilde{n}^2$ und damit $\tilde{n}$ offensichtlich gerade. Sei also $\tilde{n} = 2k$. Dann gilt aber $4k^2 = 2\tilde{m}^2$ bzw. $2k^2 = \tilde{m}^2$. Somit ist $\tilde{m}^2$ und damit auch $\tilde{m}$ gerade.
$\underbrace{\tilde{m}, \tilde{n} \text{ sind also nicht teilerfremd}}_{\neg B}$. Das ist ein Widerspruch. Somit gilt für alle $m, n$ ungleich Null die Ungleichung $n^2 \neq 2m^2$. □

BEMERKUNG.
Dies zeigt, dass kein Bruch quadriert 2 ergeben kann und damit $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Alle bisherigen Beweismethoden sind direkte Anwendungen der aussagenlogischen Ergebnisse von Abschnitt 1.1. Dies gilt nicht für den

**Induktionsbeweis.**
Gegeben seien unendlich viele Aussagen $A(0), A(1), A(2), \ldots$. Dann ist $A(n)$ eine Aussageform mit der Variablen $n \in \mathbb{N}_0$. Manchmal ist es schwierig die Aussage

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : A(n)$$

direkt zu zeigen. Wenn es gelingt die Aussage

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : A(n) \Rightarrow A(n+1)$$

zu zeigen und zusätzlich noch $A(0)$, so hat man für jede natürliche Zahl $n$ die Beweiskette

$$A(0) \;\wedge\; (A(0) \Rightarrow A(1)) \;\wedge\; \cdots \;\wedge\; (A(n-1) \Rightarrow A(n))$$

und somit $A(n)$ gezeigt. Ohne die Auslassungspünktchen kommt man in dieser informellen Argumentation nicht aus. Das **Prinzip der vollständigen**

**Induktion** besagt, dass die folgende Aussage für jede Aussagenform $A(n)$ wahr ist:

$$\Big(\underbrace{A(0)}_{\text{I.A.}} \wedge \forall n{\in}\mathbb{N}_0 : \underbrace{\big(\underbrace{A(n)}_{\text{I.V.}} \Rightarrow \underbrace{A(n{+}1)}_{\text{I.B.}}\big)}_{\text{I.S.}}\Big) \Longrightarrow \underbrace{\forall n{\in}\mathbb{N}_0 : A(n)}_{\text{I.Sl.}}$$

Die Bestandteile des Induktionsbeweises werden häufig folgendermaßen bezeichnet: Induktionsanfang (I.A.), Induktionsvoraussetzung (I.V.), Induktionsbehauptung (I.B.), Induktionsschritt (I.S.) und Induktionsschluss (I.Sl.). Im Rahmen der Arithmetik muss das Prinzip der vollständigen Induktion als Axiom postuliert werden. Innerhalb der axiomatischen Mengenlehre kann es als Theorem bewiesen werden.
Als Beispiel betrachten wir:

LEMMA 1.10. $\forall n{\in}\mathbb{N}_0 : 5 \mid (6^n - 1)$.

*Beweis.* (durch vollständige Induktion)
I.A.: $6^0 - 1 = 0$, also ist $5 \mid 6^0 - 1$ wahr.
I.S.: Sei $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig. Dann ist $6^{n+1} - 1 = 6 \cdot 6^n - 6 + 5 = 6(6^n - 1) + 5$. Gilt nun $5 \mid (6^n - 1)$ (I.V.), also es gibt ein $k$ mit $6^n - 1 = 5k$, so folgt sofort, dass $6^{n+1} - 1 = 6 \cdot 5k + 5 = 5(6k + 1)$ ist. Also folgt $5 \mid (6^{n+1} - 1)$ (I.B.).
Der Induktionsschluss ergibt die Behauptung. □

ÜBUNG. Man zeige mit vollständiger Induktion: $\forall n{\in}\mathbb{N}_0 : 6 \mid (n^3 + 5n)$.

*Lösung.* Beweis durch vollständige Induktion:
I.A.: $0^3 + 5 \cdot 0 = 0$, also ist $6 \mid 0^3 + 5 \cdot 0$ wahr.
I.S.: Sei $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig. Dann ist $(n+1)^3 + 5(n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 5n + 5 = (n^3 + 5n) + 3(n^2 + n) + 6$. Nach I.V. ist $n^3 + 5n$ durch 6 teilbar. Nach Lemma 1.8 ist $n^2 + n = n(n + 1)$ immer gerade. Somit ist $(n+1)^3 + 5(n+1)$ als Summe dreier durch 6 teilbarer Terme selbst durch 6 teilbar. Dies ist die Induktionsbehauptung. Aus dem Induktionsschluss folgt die Behauptung des Lemmas. □

BEMERKUNG. Der Induktionsanfang muss natürlich nicht unbedingt bei 0 starten.

ÜBUNG. Man zeige $\forall n \geq 4 : n^2 \leq 2^n$.

*Lösung.* I.A. ($n = 4$): $4^2 = 16 = 2^4$.
Sei nun $n \geq 4$ und gelte $n^2 \leq 2^n$ (I.V.). Dann ist

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \overset{n\geq 1}{\leq} n^2 + 2n + n \overset{n\geq 3}{\leq} n^2 + n \cdot n = 2n^2 \overset{\text{I.V.}}{\leq} 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}.$$

Es wurde also der Induktionsschritt $\forall n{\geq}4 : n^2 \leq 2^n \Longrightarrow (n{+}1)^2 \leq 2^{n+1}$ gezeigt. □

Für weitere Anwendungen der vollständigen Induktion führen wir an dieser Stelle Summen- und Produktzeichen, $\sum$ bzw. $\prod$, ein. Sei $t_k$ für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ ein Term, der für eine (natürliche) Zahl steht. Dann ist für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{k=m}^{n} t_k := \begin{cases} 0, & \text{falls } n < m, \\ \left(\sum_{k=m}^{n-1} t_k\right) + t_n, & \text{falls } n \geq m, \end{cases}$$

$$\prod_{k=m}^{n} t_k := \begin{cases} 1, & \text{falls } n < m, \\ \left(\prod_{k=0}^{n-1} t_k\right) \cdot t_n, & \text{falls } n \geq m. \end{cases}$$

Informell schreibt man auch $t_m + t_{m+1} + \cdots + t_n$ oder $t_m + \cdots + t_n$ für $\sum_{k=m}^{n} t_k$, bzw. $t_m t_{m+1} \cdots t_n$ oder $t_m \cdots t_n$ für $\prod_{k=m}^{n} t_k$, wenn klar ist, wie die durch die Pünktchen angedeuteten Terme lauten sollen.

BEISPIELE.

- Für die $n$-te **Dreieckszahl** $\sum_{k=1}^{n} k$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}_0$.

*Beweis.*
Die Aussageform $A(n) :\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ ist für $n \in \mathbb{N}_0$ zu zeigen.
I.A. ($n = 0$): $\sum_{k=1}^{0} k = 0 = \frac{0\cdot(0+1)}{2}$. Das ist $A(0)$.
I.S. $\big(\forall n{>}0 : A(n-1) \Rightarrow A(n)\big)$: Sei $n > 0$, dann gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k \overset{\text{def}}{=} \left(\sum_{k=1}^{n-1} k\right) + n \overset{\text{I.V.}}{=} \frac{(n-1)n}{2} + n = \frac{(n-1)n + 2n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Als I.V. wurde $A(n-1)$ verwendet und daraus $A(n)$ hergeleitet für alle $n > 0$. Der Induktionsschluss ergibt somit die Behauptung. $\square$

- Für einen Term $t$ und $n \in \mathbb{N}_0$ definiert man die ***n*-te Potenz** von $t$ als

$$t^n := \prod_{k=1}^{n} t.$$

- Für $n \in \mathbb{N}_0$ definiert man die ***n*-te Fakultät** als

$$n! := \prod_{k=1}^{n} k.$$

ÜBUNG. Man zeige: $\forall n{\in}\mathbb{N}_0 : n! \leq n^n$.

*Lösung.*
I.A.: $0! = 1 = 0^0$.
I.S.: Sei $n \in \mathbb{N}_0$.

$$(n+1)! \stackrel{\text{def}}{=} n!(n+1) \stackrel{\text{I.V.}}{\leq} n^n(n+1) \stackrel{(*)}{\leq} (n+1)^n(n+1) \stackrel{\text{def}}{=} (n+1)^{n+1}.$$

$(*)$ verwendet die (mittels vollständiger Induktion zu zeigende) Aussageform $m < n \Rightarrow \forall k{\in}\mathbb{N}_0 : m^k \leq n^k$.

## 1.4. Mengenlehre

(V4)

Das abstrakte Konzept einer Menge als Zusammenfassung wohldefinierter Objekte kann zum Aufbau der gesamten Mathematik benutzt werden. Man kann sich sogar auf den Standpunkt stellen, dass alle mathematischen Objekte Mengen sind, also auch Zahlen, Vektoren und Funktionen. Wie diese Objekte allein aus Mengen aufgebaut werden können, werden wir im Folgenden sehen.

HINWEIS. Jedes auftretende Objekt ist im Folgenden selbst eine Menge. Wir verwenden für Mengenvariablen Kleinbuchstaben $a, b, \dots, x, \dots$, wenn wir betonen wollen, dass sie mathematische Objekte sind, Großbuchstaben $A, B, \dots, M, \dots$, um zu betonen, dass es sich um Mengen handelt, deren Elemente mathematische Objekte sind und $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}, \dots$, um zu betonen dass es sich um Mengen von Mengen handelt.

Grundlegend für die Eigenschaften von Mengen ist die **Elementbeziehung**, Die Formel

$$a \in B$$

wird interpretiert als “$a$ **ist ein Element von** $B$” (“$a$ ist enthalten in $B$”, “$a$ gehört zu $B$”, “$a$ ist Mitglied bei $B$”). Wie üblich steht $a \notin B$ für $\neg(a \in B)$. Bezeichnen $a_1, \dots, a_n$ jeweils (nicht notwendigerweise verschiedene) mathematische Objekte, dann ist die Aufzählung

$$\{a_1, \dots, a_n\}$$

diejenige Menge, die genau die Elemente $a_1, \dots, a_n$ enthält.
Zwei Mengen $A$ und $B$ sind gleich, wenn sie dieselben Elemente enthalten,

$$A = B :\Longleftrightarrow \forall x : (x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$

Mit dieser Definition der Mengengleichheit erkennt man, dass eine veränderte Reihenfolge und Dopplungen in der Aufzählung immer noch dieselbe Menge bezeichnen, z.B. gilt

$$\{a_1, a_2\} = \{a_2, a_1\} = \{a_1, a_1, a_2\}, \quad a_1 = a_2 \Longleftrightarrow \{a_1, a_2\} = \{a_1\}.$$

Bezeichnen $a_1, a_2, \dots, a_n$ jeweils $n$ unterschiedliche Objekte, dann enthält $\{a_1, \dots, a_n\}$ genau $n$ Elemente. Man schreibt in diesem Fall

$$|\{a_1, \dots, a_n\}| = n.$$

Eine solche Menge nennen wir **endlich**. Mengen können natürlich auch selbst wieder Mengen als Elemente enthalten. Z.B. gilt, wenn a und b zwei unterschiedliche mathematische Objekte bezeichnen:

$$a \in \{a, \{b\}\}, \quad \{a\} \notin \{a, \{b\}\} \quad \{b\} \in \{a, \{b\}\}, \quad b \notin \{a, \{b\}\}.$$

Die Menge, die kein Element enthält heißt **leere Menge** und wird mit $\{\}$ oder $\emptyset$ bezeichnet. Es gilt

$$|\emptyset| = 0.$$

Die **Teilmengenbeziehung** ist definiert als

$$A \subseteq B \overset{\text{def}}{\iff} \forall x : (x \in A \Rightarrow x \in B),$$

man sagt, $A$ **ist Teilmenge von** $B$. Gleichheit von Mengen kann somit auch durch wechselseitige Teilmengenbeziehung überprüft werden:

$$A = B \iff A \subseteq B \wedge B \subseteq A.$$

Zwei Mengen $A$ und $B$ heißen **disjunkt**, wenn sie keine gemeinsamen Elemente enthalten,

$$A \text{ disjunkt zu } B \overset{\text{def}}{\iff} \forall x{\in}A : x \notin B.$$

Eine Menge von Mengen, $\mathscr{A}$ heißt **paarweise disjunkt**, wenn je zwei unterschiedliche Elemente von $\mathscr{A}$ zueinander disjunkt sind,

$$\mathscr{A} \text{ paarweise disjunkt} \overset{\text{def}}{\iff} \forall A, B{\in}\mathscr{A} : (A \neq B \Rightarrow A \text{ disjunkt zu } B).$$

Sind $A$, $B$ zwei Mengen, so ist jedem die **Vereinigungsmenge** $A \cup B$ ein Begriff, also diejenige Menge, die genau die Gesamtheit der Elemente von $A$ und $B$ enthält. Sei $\mathscr{A}$ nun eine Menge von Mengen, dann ist die Vereinigung der Elemente von $\mathscr{A}$, die als $\bigcup \mathscr{A}$ bezeichnet wird, wieder eine Menge. Sie ist durch die folgende Eigenschaft definiert

$$a \in \bigcup \mathscr{A} \overset{\text{def}}{\iff} \exists A \in \mathscr{A} : a \in A.$$

Damit kann die Vereinigung der Mengen $A_1, \dots, A_n$ geschrieben werden als

$$A_1 \cup \dots \cup A_n := \bigcup \{A_1, \dots, A_n\}.$$

In diesem Zusammenhang führen wir noch einige Begriffe ein, die immer wieder gebraucht werden:
$\mathscr{A}$ heißt **Überdeckung** von $B$, wenn es zu jedem $x \in B$ ein $A \in \mathscr{A}$ gibt mit $x \in A$ (also kurz $B \subseteq \bigcup \mathscr{A}$).
Eine Überdeckung $\mathscr{A}$ von $B$ heißt **Zerlegung** von $B$, wenn $B = \bigcup \mathscr{A}$ gilt, $\mathscr{A}$ paarweise disjunkt ist und $\emptyset \notin \mathscr{A}$.
Eine Menge von Mengen $\mathscr{A}$ heißt **Schachtelung** in $C$, wenn $\bigcup \mathscr{A} \subseteq C$ und

$$\forall A, B \in \mathscr{A} : (A \subseteq B \vee B \subseteq A)$$

gilt. Eine Schachtelung $\mathscr{A}$ in $C$, die zugleich eine Überdeckung von $C$ ist, heißt **Ausschöpfung von $C$**.

Ist $A$ eine beleibige Menge, so ist die Gesamtheit aller Teilmengen von $A$ wieder eine Menge, die als **Potenzmenge von** $A$, $\mathcal{P}(A)$, bezeichnet wird. Es gilt

$$B \in \mathcal{P}(A) \iff B \subseteq A.$$

Beispiele:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\emptyset) &= \{\emptyset\}, \\ \mathcal{P}(\{\mathrm{a}\}) &= \{\emptyset, \{\mathrm{a}\}\}, \\ \mathcal{P}(\{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}) &= \{\emptyset, \{\mathrm{a}\}, \{\mathrm{b}\}, \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}\}, \end{aligned}$$

Eine Menge kann verkleinert werden, in dem man nur Elemente mit einer bestimmten Eigenschaft aussondert und zu einer neuen Menge zusammenfasst. Ist $A$ eine Menge und $P$ ein einstelliges Prädikat, so ist

$$\{x \in A \mid P(x)\}$$

eine neue Menge, die durch **Aussonderung** aller Elemente von $A$ mit der Eigenschaft $P$ entsteht. Somit gilt:

$$a \in \{x \in A \mid P(x)\} \Longrightarrow a \in A \wedge P(a).$$

Z.B. ist $Q := \{n \in \mathbb{N}_0 \mid \exists k \in \mathbb{N}_0 : k^2 = n\}$ die Menge der Quadratzahlen. Wir verwenden die Aussonderung auch um die **Schnittmenge** einer Menge von Mengen $\mathscr{A}$ zu definieren:

$$\bigcap \mathscr{A} := \{x \in \bigcup \mathscr{A} \mid \forall A \in \mathscr{A} : x \in A\}.$$

Die Schnittmenge der Mengen $A_1, \dots, A_n$,

$$A_1 \cap \dots \cap A_n := \bigcap \{A_1, \dots, A_n\},$$

enthält also genau die Elemente, die in jeder der Mengen $A_1, \dots, A_n$ enthalten sind. Die **Differenzmenge** zweier Mengen $A$ und $B$, auch Mengenkomplement genannt, wird definiert als

$$A \setminus B := \{x \in A \mid x \notin B\}.$$

BEMERKUNGEN.

- Auch die naheliegende Schreibweise $A - B$ ist für die Mengendifferenz ist gebräuchlich.
- Ist eine Menge M fixiert, so schreibt man für alle $A \in \mathcal{P}(\mathrm{M})$ auch kurz
$$A^{\complement} := \mathrm{M} \setminus A.$$
- Für endliche Mengen $A, B$ gelten, wie man sich leicht überzeugt, die folgenden Beziehungen:
$$\begin{aligned} |A \cup B| &= |A| + |B| - |A \cap B|, \\ |A \setminus B| &= |A| - |A \cap B| = |A \cup B| - |B|. \end{aligned}$$

Sind $a$ und $b$ zwei (nicht notwendigerweise verschiedene) mathematische Objekte, dann gilt $\{a, b\} = \{b, a\}$. Für beliebige Objekte $a, b$ bezeichnen wir nach Kuratowski

$$(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

als **geordnetes Paar**. Ist $a \neq b$, so gilt offenbar $(a, b) \neq (b, a)$. Ist $a = b$ dann gilt $(a, b) = (a, a) = \{\{a\}\}$. Somit ist $\bigcup(a, b) = \{a, b\}$, $\bigcap(a, b) = \{a\}$ und

$$\bigcup(a, b) \setminus \bigcap(a, b) = \begin{cases} \{b\} & \text{für } a \neq b, \\ \emptyset & \text{für } a = b, \end{cases}$$

Es gilt sogar

SATZ 1.11. Für beliebige $a, b, c, d$ ist

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \ \wedge \ b = d.$$

*Beweis.* "$\Leftarrow$": Offensichtlich.
"$\Rightarrow$": Aus $\{a\} = \bigcap(a, b) = \bigcap(c, d) = \{c\}$ folgt schon mal $a = c$.
1. Fall. $a = b$: Dann ist $(a, b) = \{\{a\}\}$. also $|(a, b)| = 1$. Aus $|(c, d)| = 1$ folgt aber $\{c\} = \{c, d\}$, mithin $c = d$, also $b = a = c = d$.
2. Fall. $a \neq b$: Dann ist $\{b\} = \bigcup(a, b) \setminus \bigcap(a, b) = \bigcup(c, d) \setminus \bigcap(c, d) = \{c, d\} \setminus \{c\}$. Es muss also $d \neq c$ und damit $\{b\} = \{d\}$ bzw $b = d$ gelten. □

Ist $p$ ein geordnetes Paar, dann gibt es also eindeutige Objekte $a$ und $b$, so dass $p = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ ist. Man bezeichnet $a$ mit $\mathrm{pr}_1(p)$ und $b$ mit $\mathrm{pr}_2(p)$.

ÜBUNG. Seien $A, B$ beliebige Mengen und $p = (A, B)$. Bestimmen Sie

$$\bigcup\bigcup p, \quad \bigcap\bigcup p, \quad \bigcup\bigcap p, \quad \bigcap\bigcap p$$

und schließlich

$$\Big(\bigcup\big(\bigcup p \setminus \bigcap p\big)\Big) \cup \big(\bigcap\bigcup p\big).$$

Hängt das Ergebnis davon ab, ob $A = B$ ist?

*Lösung.*

$$\begin{aligned} \bigcup\bigcup p &= \bigcup\{A, B\} = A \cup B, \\ \bigcap\bigcup p &= \bigcap\{A, B\} = A \cap B, \\ \bigcup\bigcap p &= \bigcup\{A\} = A, \\ \bigcap\bigcap p &= \bigcap\{A\} = A. \end{aligned}$$

Für $A = B$ ist

$$\bigcup\big(\bigcup p \setminus \bigcap p\big) \cup \bigcap\bigcup p = \bigcup\emptyset \cup (A \cap B) = B,$$

und für $A \neq B$ erhält man

$$\bigcup\big(\bigcup p \setminus \bigcap p\big) \cup \bigcap\bigcup p = \bigcup\{B\} \cup (A \cap B) = B$$

Ist $p$ ein geordnetes Paar, so gilt also immer

$$\begin{aligned} \mathrm{pr}_1(p) &= \bigcup \bigcap p, \\ \mathrm{pr}_2(p) &= \bigcup \big( \bigcup p \setminus \bigcap p \big) \cup \bigcap \bigcup p. \end{aligned}$$

Man nennt $(a, (b, c))$ ein **Tripel** oder 3-**Tupel** und schreibt dafür kurz $(a, b, c)$. Entsprechend kann man für $k \geq 2$ jeweils $k$-**Tupel** definieren. Bisweilen verwendet man auch das 0-Tupel $()$, und 1-Tupel $(a)$ für beliebige Objekte $a$. Man beachte, dass $(a, b, c) \neq ((a, b), c)$ gilt.

Das **kartesische Produkt** zweier Mengen $M$ und $N$, $M \times N$, ist definiert als

$$M \times N := \{(a, b) : a \in M \ \wedge \ b \in N\}.$$

ÜBUNG. Man veranschauliche sich das kartesische Produkt einer dreielementigen Menge $M = \{1, 2, 3\}$ mit einer vierelementigen Menge $N = \{1, 2, 3, 4\}$ anhand einer Tabelle.

*Lösung.*

$$\begin{array}{r|rrrrrrrrr} & N = \{ & & 1, & & 2, & & 3, & & 4\} \\ M = \{1, & M \times N = \{ & (1, & 1), (1, & & 2), (1, & & 3), (1, & & 4), \\ 2, & & (2, & 1), (2, & & 2), (2, & & 3), (2, & & 4), \\ 3\} & & (3, & 1), (3, & & 2), (3, & & 3), (3, & & 4)\} \end{array}$$

ÜBUNG. Anhand der Kuratowski-Darstellung eines geordneten Paars mache man sich klar, dass $A \times B \subseteq \mathcal{P}\big(\mathcal{P}(A \cup B)\big)$ gilt.

*Lösung.* Ist $(a, b)$ ein geordnetes Paar in $A \times B$, dann gilt

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\} \subseteq \mathcal{P}(A \cup B),$$

also $(a, b) \in \mathcal{P}\big(\mathcal{P}(A \cup B)\big)$.

BEMERKUNGEN.

- Für endliche Mengen $M, N$ gilt

$$|M \times N| = |M| \cdot |N|.$$

- Wie bei den Tupeln schreibt man, um Klammern zu sparen,

$$L \times M \times N := L \times (M \times N).$$

- Mit der Definition von $k$-Tupeln gilt somit für ein $k$-faches kartesisches Produkt:

$$M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_k = \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) : x_1 \in M_1, \ldots, x_k \in M_k\}.$$

- Für das $k$-fache kartesische Produkt einer Menge $M$ mit sich selbst schreibt man auch kurz

$$M^k = \underbrace{M \times \cdots \times M}_{k \text{ mal}}.$$

Eine Teilmenge $R \subseteq M \times N$ heißt **Relation zwischen $M$ und $N$**. Man sagt "$a$ steht in Relation $R$ zu $b$", kurz $a\,R\,b$, wenn $(a,b) \in R$ gilt. Jede beliebige Menge von geordneten Paaren $R$ kann als Relation aufgefasst werden. Man definiert

$$\begin{aligned} \operatorname{def}(R) &:= \{a : (\exists b : (a,b) \in R)\}, \\ \operatorname{bild}(R) &:= \{b : (\exists a : (a,b) \in R)\}, \end{aligned}$$

den sogenannten **Definitionsbereich** bzw. **Bildbereich** der Relation $R$.

## 1.5. Zuordnungen und Funktionen

Eine Relation $f$ heißt **Zuordnung**, wenn gilt

$$\forall a, b, c : (a,b) \in f \wedge (a,c) \in f \Rightarrow b = c$$

Diese Bedingung kann gleichwertig geschrieben werden als

$$\forall a \in \operatorname{def}(f)\, \exists_1 b : (a,b) \in f.$$

Jedem Element $a$ des Definitionsbereichs einer Zuordnung wird also genau ein Element ihres Wertebereichs zugeordnet, das man mit

$$f(a)$$

bezeichnet. Im Zusammenhang mit Zuordnungen schreibt man für ein geordnetes Paar $(a,b)$ auch

$$a \mapsto b.$$

Somit sind z.B.

$$\{1 \mapsto 2, 2 \mapsto 3, 3 \mapsto 1\} \quad \text{und} \quad \{1 \mapsto 4, 2 \mapsto 4\}$$

jeweils Zuordnungen, Die Relation $\{1 \mapsto 1, 1 \mapsto 2\}$ ist dagegen keine Zuordnung.

Eine **Funktion** ist ein Tripel $(f, M, N)$ wobei $f$ eine Zuordnung ist, für die $\operatorname{def}(f) = M$ und $\operatorname{bild}(f) \subseteq N$ gilt. Man sagt auch $f$ ist eine **Abbildung von $M$ nach $N$**. In diesem Fall schreibt man für das Tripel $(f, M, N)$ auch

$$f : M \to N.$$

$M$ heißt **Definitionsbereich der Funktion** und stimmt mit dem Definitionsbereich der Zuordnung $f$ überein. $N$ heißt der **Wertebereich der Funktion** und enthält den Bildbereich von $f$. Die Zuordnung $f$ selbst wird auch **Funktionsvorschrift** genannt. Die Menge aller Zuordnungen mit Definitionsbereich $M$ und einem Bildbereich, der in $N$ enthalten ist, wird mit $N^M$ bezeichnet,

$$N^M = \{f \subseteq M \times N \mid f \text{ ist Zuordnung}\}.$$

Die Menge aller Funktionen von $M$ nach $N$ wird manchmal mit $\mathscr{F}(M, N)$ bezeichnet,

$$\mathscr{F}(M, N) = \{f : M \to N\}.$$

BEMERKUNG. Sind $M, N$ endliche Mengen, so gibt es für jedes der Elemente in $M$ genau $|N|$ mögliche Zuordnungen. Da sich die Möglichkeiten multiplizieren, gilt

$$|N^M| = |N|^{|M|}.$$

Sind $f : L \to M$ und $g : M \to N$ Funktionen, dann ist die **Komposition von** $g$ **mit** $f$ die Funktion

$$g \circ f : L \to N, \qquad (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Die Komposition ist assoziativ, für Funktionen $f : K \to L$, $g : L \to M$, $h : M \to N$ gilt also

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

als Abbildungen von $L$ to $N$.
Eine Zuordnung $f$ heißt **injektiv**, wenn es zu jedem $z \in \text{bild}(f)$ genau ein $x \in \text{def}(f)$ gibt mit $f(x) = z$. Anders gesagt,

$$f \text{ ist injektiv} \overset{\text{def}}{\iff} \big((x, z) \in f \wedge (y, z) \in f \Rightarrow x = y\big).$$

Sei nun $f : A \to B$ eine Funktion. Dann heißt $f : A \to B$ **injektiv**, wenn $f$ injektiv ist, bzw., wenn gilt:

$$\forall x, y \in A : f(x) = f(y) \Rightarrow x = y,$$

$f : A \to B$ heißt **surjektiv**, wenn gilt:

$$\forall z \in B\ \exists x \in A : z = f(x).$$

Die Funktion $f : A \to B$ heißt **bijektiv**, wenn sie zugleich injektiv und surjektiv ist.
Ist $f : A \to B$ eine bijektive Funktion, so heißt

$$f^{-1} : B \to A$$

die **Umkehrfunktion** von $f : A \to B$, wobei für die Zuordnung $f^{-1}$ gilt:

$$f^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in f\}.$$

Somit gilt für beliebige $x \in A$, $y \in B$, die Gleichung $f^{-1}(y) = x$ genau dann, wenn $y = f(x)$ ist.

BEISPIEL. Für eine beliebige Menge $A$ ist die **Identitätsabbildung**

$$\mathrm{id}_A : A \to A, \quad x \mapsto x,$$

eine bijektive Funktion mit $\mathrm{id}_A^{-1} = \mathrm{id}_A$.

SATZ 1.12. Sei $f : A \to B$ eine beliebige Funktion. Wenn es eine Funktion $g : B \to A$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_A$ und $f \circ g = \mathrm{id}_B$ gibt, dann ist $f : A \to B$ bijektiv und $f^{-1} = g$.

*Beweis.* Seien $x, y \in A$ mit $f(x) = f(y)$. Dann ist $f$ injektiv, denn

$$x = \mathrm{id}_A(x) = g \circ f(x) = g(f(x)) = g(f(y)) = g \circ f(y) = \mathrm{id}_A(y) = y.$$

Sei $z \in B$. Dann ist $x := g(z) \in A$ mit $f(x) = f(g(z)) = z$. $f : A \to B$ ist also surjektiv.
Seien $x \in A$, $z \in B$ beliebig. Dann gilt der Ringschluss:

$$g(z) = x \Rightarrow z = f(g(z)) = f(x), \quad z = f(x) \Rightarrow g(z) = g(f(x)) = x.$$

D.h. $g(z) = x \Leftrightarrow z = f(x)$ und damit $g(z) = f^{-1}(z)$ für alle $z \in B$. □

BEMERKUNG. Für jede Relation $R \subseteq M \times N$ ist die inverse Relation $R^{-1} \subseteq N \times M$ definiert als $R^{-1} = \{(b, a) \in N \times M \mid (a, b) \in R\}$. Somit ist auch für jede Zuordnung $f$ die inverse Relation $f^{-1}$ definiert, aber nur wenn $f$ eine injektive Zuordnung ist, ist auch $f^{-1}$ wieder ein Zuordnung. Somit gilt: Ist $f$ eine injektive Zuordnung, dann ist

$$f : \mathrm{def}(f) \to \mathrm{bild}(f)$$

eine bijektive Funktion mit der Umkehrfunktion

$$f^{-1} : \mathrm{bild}(f) \to \mathrm{def}(f).$$

Für eine Funktion $f : M \to N$ und eine Menge $A \subseteq M$ ist die **Einschränkung von $f$ auf $A$** definiert als die Funktion

$$f|_A : A \to N, \qquad f|_A(x) = f(x).$$

Ist $f : M \to N$ eine Funktion und $A \subseteq M$, dann bezeichnet

$$f_{\{\}}(A) = \{y \in N \,|\, \exists x{\in}A : f(x) = y\} =: \{f(x) : x \in A\}$$

das **Bild der Menge $A$ unter $f$** und für die Menge $B \subseteq N$ ist

$$f_{\{\}}^{-1}(B) := \{x \in M \mid f(x) \in B\}\}$$

das **Urbild der Menge $B$ unter $f$**. Dies definiert zum einen die **Bildfunktion von $f$**,

$$f_{\{\}} : \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(N), \qquad A \mapsto f_{\{\}}(A)$$

und zum anderen die **Urbildfunktion von $f$**,

$$f_{\{\}}^{-1} : \mathcal{P}(N) \to \mathcal{P}(M), \qquad B \mapsto f_{\{\}}^{-1}(B).$$

BEMERKUNG. Fast immer wird der Index $\{\}$ bei der Bild- und Urbildfunktion weggelassen, obwohl dadurch machmal Verwechslungen, z.B. mit einer möglichen Umkehrfunktion von $f$, drohen.

BEISPIELE.

- $f = \{1 \mapsto 2, 2 \mapsto 3\}$ ist eine injektive Zuordnung. Die Funktion
$$f : \{1,2\} \to \{1,2,3\}$$
ist injektiv aber nicht surjektiv, die Funktion
$$f : \{1,2\} \to \{2,3\}$$
dagegen ist injektiv und surjektiv, also auch bijektiv. In jedem Fall ist
$$f^{-1} = \{2 \mapsto 1, 3 \mapsto 2\}$$
wieder eine Zuordnung und $f^{-1} : \{2,3\} \to \{1,2\}$ ist die Umkehrfunktion von $f : \{1,2\} \to \{2,3\}$.
- $g = \{1 \mapsto 1, 2 \mapsto 1, 3 \mapsto 2\}$ ist eine Zuordnung, die nicht injektiv ist. Die Funktion
$$g : \{1,2,3\} \to \{1,2\}$$
ist surjektiv, aber nicht surjektiv, die Funktion
$$g : \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$$
dagegen ist weder injektiv noch surjektiv.
- Sei $f = \{x \mapsto x^2 : x \in \mathbb{R}\}$. $f$ ist eine Zuordnung die nicht injektiv ist. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist weder injektiv noch surjektiv, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ ist surjektiv, wobei $\mathbb{R}_0^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$.
$f|_{\mathbb{R}_0^+}$ ist eine injektive Zuordnung. Die Funktion $f|_{\mathbb{R}_0^+} : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ ist injektiv, aber nicht surjektiv. Schließlich ist $f|_{\mathbb{R}_0^+} : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ bijektiv.

ÜBUNG. Seien $A = \{1,2,3\}$, $B = \{3,4\}$. Man gebe die folgenden Mengen an:
$$A \cup B,\ A \cap B,\ A \setminus B,\ B \setminus A,\ A \times B,\ B \times A,\ A^B,\ B^A.$$

## 1.6. Äquivalenz- und Ordnungsrelationen

(V5)

DEFINITION 1.1 (**Äquivalenzrelation**).
$R \subseteq M \times M$ heißt **Äquivalenzrelation auf $M$**, wenn folgende drei Eigenschaften erfüllt sind:

(i) $\forall x \in M : xRx$, (reflexiv)
(ii) $\forall x, y \in M : xRy \Rightarrow yRx$, (symmetrisch)
(iii) $\forall x, y, z \in M : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$. (transitiv)

Für $x \in M$ heißt $[x]_R := \{y \in M \mid yRx\}$ die **Äquivalenzklasse** von $x$. Die Menge

$$M/R := \{[x]_R : x \in M\}$$

heißt **Quotientenmenge von $M$ bezüglich $R$**

BEMERKUNG. Der Begriff der Quotientenmenge ist einer der mächtigsten Mittel um konstruktiv neue mathematische Objkete mit erwünschten Eigenschaften zu konstruieren. Das Konzept der Zahlen (insbesondere der reelle Zahlen) kann mithilfe von Äquivalenzrelationen konsistent aus den natürlichen Zehlen entwickelt werden.

SATZ 1.13. Ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $M$, so ist die Quotientenmenge $M/\sim$ eine Zerlegung von $M$.

*Beweis.*
ERINNERUNG: Zu zeigen ist, dass (i) $M/\sim$ eine Überdeckung von $M$ ist mit (ii) $\bigcup(M/\sim) = M$, die (iii) die leere Menge nicht enhält und (iv) paarweise disjunkt ist.

(i) Sei $x \in M$. Dann ist $x \in [x]_\sim$ wegen der Reflexivität von $\sim$. Wegen $[x]_\sim \in M/\sim$ ist $x \in \bigcup(M/\sim)$. Also ist $M/\sim$ eine Überdeckung von $M$.
(ii) Sei $x \in \bigcup(M/\sim)$. Dann gibt es ein $y \in M$ mit $x \in [y]_\sim$. Also ist $x \in M$. Dies zeigt $\bigcup(M/\sim) \subseteq M$.
(iii) Ist $B \in M/\sim$, dann gibt es ein $x \in M$ mit $B = [x]_\sim$. Somit ist $x \in B$, was $B \neq \emptyset$ zeigt.
(iv) Seien $B, C \in M/\sim$ mit $B \cap C \neq \emptyset$. Zu zeigen ist $B = C$.
Sei $x \in B \cap C$. Wegen $B, C \in M/\sim$ gibt es $b, c \in M$, so dass $B = [b]_\sim$ und $C = [c]_\sim$. Sei nun $y \in B$ beliebig. Es gilt also $y \sim b$. Wegen $x \sim b$ und $x \sim c$ folgt durch Symmetrie und Transitivität von $\sim$ auch $y \sim c$ und damit $y \in [c]_\sim = C$. Dies zeigt $B \subseteq C$. Genauso zeigt man $C \subseteq B$. $\square$

BEISPIELE.

- Ist $M$ eine Menge, so ist $\mathrm{id}_M = \{(x, x) : x \in M\}$ eine Äquivalenzrelation auf $M$. Die Äquivalenzklassen enthalten jeweils genau ein Element und $M/\mathrm{id}_M = \{\{a\} \mid a \in M\}$.
- Ist $M$ eine Menge, so ist $M \times M$ eine Äquivalenzrelation auf $M$. Die einzige Äquivalenzklasse von $M \times M$ ist $M$ selbst. Es gilt $M/(M \times M) = \{M\}$.
- Für $\mathbb{Z}$ ist die Relation $m \sim n :\Leftrightarrow 3 \mid (n - m)$ eine Äquivalenzrelation mit drei Äquivalenzklassen

$$[0]_\sim = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\},$$
$$[1]_\sim = \{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\},$$
$$[2]_\sim = \{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, \dots\},$$

Die Menge $\mathbb{Z}/\sim = \{[0]_\sim, [1]_\sim, [2]_\sim\}$ ist also eine Zerlegung von $\mathbb{Z}$ in drei Mengen.

- Ist $f$ eine beliebige Zuordnung, dann ist $a \sim b :\Leftrightarrow f(a) = f(b)$ eine Äquivalenzrelation auf $\operatorname{def}(f)$. Man sagt $\operatorname{bild}(f)$ klassifiziert $\operatorname{def}(f)$, es gilt
$$\operatorname{def}(f)/\sim = \left\{ f^{-1}_{\{\}}(\{b\}) : b \in \operatorname{bild}(f) \right\}.$$

BEMERKUNG. Ist $M$ eine endliche Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation bei der in jeder Äquivalenzklasse genau $n$ Elemente enthalten sind, dann gilt für die Quotientenmenge
$$|M/\sim| = \frac{|M|}{n}.$$

DEFINITION 1.2 (**Ordnungsrelation**).
$R \subseteq M \times M$ heißt **Ordnungsrelation auf** $M$, wenn folgende drei Eigenschaften erfüllt sind:

(i) $\forall x \in M : \neg xRx$, (antireflexiv)
(ii) $\forall x, y \in M : x \neq y \Rightarrow (xRy \Leftrightarrow \neg yRx)$, (antisymmetrisch)
(iii) $\forall x, y, z \in M : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$. (transitiv)

BEMERKUNG. Ein Vorteil der Infixnotation ist, dass man
$$aRbRcRd$$
für
$$(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \wedge (c,d) \in R$$
schreiben kann und dabei die sich durch Transitivität ergebenden Beziehungen $(a,c), (a,d), (b,d) \in R$ intuitiv miterfasst.

SATZ 1.14 (**Trichotomie**).
Ist $<$ eine Ordnungsrelation auf $M$, dann bilden für jedes $a \in M$ die drei Mengen
$$\{x \in M \mid x < a\}, \quad \{a\}, \quad \{x \in M \mid x > a\}$$
eine disjunkte Überdeckung von $M$.

*Beweis.* Sei $x \in M$. Dann liegt $x$ genau in einer der drei obigen Mengen:
1. Fall: $x < a$: nach (i) folgt $x \neq a$, nach (ii) folgt $\neg a < x$.
2. Fall: $x = a$: nach (i) gilt weder $x < a$ noch $a < x$.
3. Fall: $a < x$: Wie im 1. Fall folgt, dass weder $x = a$ noch $x < a$. □

BEMERKUNGEN.

- Wegen der Trichotomie bezeichnet man eine Ordnungsrelation auf einer Menge $M$ auch als **lineare Anordnung von** $M$.

- Ordnungsrelationen werden häufig einfach durch $<$ bezeichnet. Dann definiert man

$$\begin{aligned} a \leq b &:\Longleftrightarrow a < b \lor a = b, \\ a > b &:\Longleftrightarrow b < a, \\ a \geq b &:\Longleftrightarrow b \geq a. \end{aligned}$$

SATZ 1.15. Ist $<$ eine Ordnungsrelation auf $M$, dann ist die Menge

$$\mathcal{M}_\leq := \{\{x \in M \mid x \leq a\} : a \in M\}$$

eine Ausschöpfung von $M$.

*Beweis.* Zunächst zeigen wir, dass $\mathcal{M}_\leq$ eine Schachtelung ist.
Seien $B, C \in \mathcal{M}_\leq$ beliebig. Dann gibt es $b, c \in M$, so dass $B = \{x \in M \mid x \leq b\}$ und $C = \{x \in M \mid x \leq c\}$. Gelte nun $\neg B \subseteq C$, d.h. es gibt ein $d \in B$ mit $d \notin C$. Dann ist $c < d$ und $d \leq b$. Wegen der Transitivität ist also $c < b$ und damit $C \subseteq B$, denn aus $x \in C$ folgt $x \leq c$, also $x < b$, d.h. $x \in B$. Schließlich ist $M = \bigcup \mathcal{M}_\leq$, denn zu $a \in M$ ist $a \in \{x \in M \mid x \leq a\} \in \mathcal{M}_\leq$, also $a \in \bigcup \mathcal{M}_\leq$.
Umgekehrt folgt aus $a \in \bigcup \mathcal{M}_\leq$, dass $a \in \{x \in M \mid x \leq b\}$ für ein $b \in M$. Wegen $\{x \in M \mid x \leq b\} \subseteq M$ folgt $a \in M$. □

BEISPIELE.

- Für eine Schachtelung $\mathcal{M}$ von Mengen ist $A{<}B \;:\Leftrightarrow\; A{\subseteq}B \land A{\neq}B$ für $A, B \in \mathcal{M}$ eine Ordnungsrelation.
- Ist $<$ eine Ordnungsrelation auf $M$, dann ist auch $>$ eine Ordnungsrelation auf $M$, die **invertierte Ordnung**.
- Auf $\mathbb{Z}$ ergibt $m <_\mathbb{Z} n :\Leftrightarrow \exists k{\in}\mathbb{N}^* : m + k = n$ die gewohnte Ordnungsrelation auf $\mathbb{Z}$.
- (V6) Für $r, s \in \mathbb{Q}$ gibt es ein kleinstmögliches $k \in \mathbb{N}^*$ (den kgV der Nenner, falls gekürzt), so dass $rk \in \mathbb{Z}$ und $sk \in \mathbb{Z}$. Dann ist $r <_\mathbb{Q} s :\Leftrightarrow rk <_\mathbb{Z} sk$ die gewohnte Ordnungsrelation auf $\mathbb{Q}$.

Ist $<$ eine Ordnungsrelation auf $M$, so definiert man für $X \subseteq M$ und $a \in M$ die Begriffe

- $a$ ist eine **obere Schranke von** $X$, $X \leq a$, wenn $\forall x \in X : x \leq a$.
- $a$ ist eine **untere Schranke von** $X$, $X \geq a$, wenn $\forall x \in X : x \geq a$.
- $X$ heißt **nach oben beschränkt**, wenn es eine obere Schranke von $X$ gibt.
- $X$ heißt **nach unten beschränkt**, wenn $X$ eine untere Schranke hat.
- $X$ heißt **beschränkt**, wenn $X$ nach oben und nach unten beschränkt ist.
- $a$ ist **Maximum von** $X$, wenn $X \leq a$ und $a \in X$.
- $a$ ist **Minimum von** $X$, wenn $X \geq a$ und $a \in X$.
- $a$ ist **kleinste obere Schranke von** $X$ (**Supremum**), wenn jede weitere obere Schranke von $X$ größer als $a$ ist.
- $a$ ist **größte untere Schranke von** $X$ (**Infimum**), wenn jede weitere untere Schranke von $X$ kleiner als $a$ ist.

BEMERKUNGEN.

- Maximum, Minimum, Supremum und Infimum einer Menge $X$ sind, wenn sie existieren, immer eindeutig bestimmt und werden dann entsprechend geschrieben als
$$\max X, \quad \min X, \quad \sup X, \quad \inf X.$$
- Endliche Teilmengen einer geordneten Menge besitzen immer sowohl ein Maximum als auch ein Minimum.
- Das Maximum einer Menge ist immer auch ihr Supremum (aber nicht umgekehrt)
- Besitzt die Menge der oberen Schranken von $X$ ein Minimum, so ist dieses das Supremum von $X$.

BEISPIELE.

- In $(\mathbb{N}_0, <)$ hat *jede* Teilmenge von $\mathbb{N}_0$ ein Infimum, das zugleich Minimum ist (**Wohlordnung**). Nur die endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}_0$ besitzen auch ein Supremum, das zugleich Maximum ist.
- In $(\mathbb{Q}, <)$ hat die Menge $\{x \in \mathbb{Q} \mid -1 \leq x < 1\}$ das Minimum $-1$, das somit auch das Infimum ist. Die Menge besitzt kein Maximum, aber ihr Supremum ist 1.
- In $(\mathbb{Q}, <)$ hat die Menge $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ weder Infimum noch Supremum, also auch kein Minimum und kein Maximum, obwohl $\pm 2$ untere, bzw. obere Schranken sind.

DEFINITION 1.3. Für eine Ordnungsrelation $<$ auf $M$ gilt das **Supremumsprinzip**, wenn jede nichtleere nach oben beschränkte Menge ein Supremum besitzt.

SATZ 1.16. Gilt für die Ordnungsrelation $<$ auf $M$ das Supremumsprinzip, dann besitzt jede nichtleere nach unten beschränkte Menge ein Infimum.

*Beweis.* Sei $A \subseteq M$ nichtleer und nach unten beschränkt. Dann ist die Menge der unteren Schranken $U$ von $A$ nach oben beschränkt (durch jedes Element von $A$), besitzt also ein Supremum, $c \in M$. Dieses $c$ ist das gesuchte Infimum von $A$. Denn, sei $O$ die Menge der oberen Schranken von $U$, dann gilt $A \subseteq O$. $c$ ist das Minimum von $O$, also gilt $c \leq A$. Sei $d$ eine weitere untere Schranke von $A$. Dann ist $d \in U$ und damit folgt $d \leq c$. Somit ist $c = \inf A$ bewiesen. □

BEMERKUNG. Der Satz besagt, dass aus dem Supremumsprinzip das analoge Infimumsprinzip folgt und umgekehrt.

KAPITEL 2

# Die Reellen Zahlen

**Zusammenfassung**

- Rechnen mit Zahlen, die **Grundrechenarten**
- Die lineare Anordnung der Reellen Zahlen, **Ungleichungen**
- Intervallschachtelung, die **Vollständigkeit** der Reellen Zahlen

## 2.1. Die Körperaxiome

Die Reellen Zahlen $\mathbb{R}$ bilden den wichtigsten Typen von mathematischen Objekten. Es gibt die Konstanten $0_{\mathbb{R}}, 1_{\mathbb{R}} \in \mathbb{R}$, hier und in Zukunft, falls aus dem Kontext heraus klar, nur mit 0 und 1 bezeichnet, die Funktionen $+ : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\cdot : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für die Addition und die Multiplikation und die Funktionen $- : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\cdot^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ für das Negative und das Inverse. Es gilt für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$:

| | | |
|---|---|---|
| $x + y = y + x,$ | $x \cdot y = y \cdot x,$ | **(Kommutativität)** |
| $x+(y+z) = (x+y)+z,$ | $x\cdot(y\cdot z) = (x\cdot y)\cdot z,$ | **(Assoziativität)** |
| $x\cdot(y+z) = x\cdot y+x\cdot z,$ | $0 \neq 1,$ | **(Distributivität, Diversität)** |
| $x + 0 = x,$ | $1 \cdot x = x,$ | **(Neutralität)** |
| $x + (-x) = 0,$ | $x \neq 0 \Rightarrow x\cdot x^{-1} = 1.$ | **(Negier–, Invertierbarkeit)** |

Dies sind die Körperaxiome, aus denen sich die Regeln der vier Grundrechenarten herleiten lassen. Dazu ist es am einfachsten wenn man zunächst die eindeutige Lösbarkeit zweier Gleichungstypen beweist:

SATZ 2.1 (**Eindeutige Lösbarkeit**). Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\exists_1 x : a + x = b, \qquad a \neq 0 \Rightarrow \exists_1 x : a \cdot x = b.$$

*Beweis.* $(-a) + b$ ist eine Lösung von $a + x = b$, denn

$$a + ((-a) + b) \overset{\text{assoz}}{=} (a + (-a)) + b \overset{\text{neg}}{=} 0 + b \overset{\text{komm}}{=} b + 0 \overset{\text{neut}}{=} b.$$

Ist $x'$ eine weitere Lösung von $a + x = b$, dann gilt

$$x' \overset{\text{neut}}{=} x'+0 \overset{\text{komm}}{=} 0+x' \overset{\substack{\text{neut,}\\ \text{komm}}}{=} ((-a)+a)+x' \overset{\text{assoz}}{=} (-a)+(a+x') \overset{\text{Lsg}}{=} (-a)+b.$$

Die Gleichung $a+x = b$ hat also genau eine Lösung, nämlich $x = (-a)+b$. Genauso zeigt man unter der Bedingung $a \neq 0$, dass die Gleichung $a \cdot x = b$ genau eine Lösung hat, nämlich $x = (a^{-1}) \cdot b$. $\square$

BEMERKUNGEN.

- Wegen der Kommutativität gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$0 + x = x + 0 = x, \qquad x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$$
$$(-x) + x = x + (-x) = 0, \qquad x \neq 0 \Rightarrow x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1.$$

- Es gilt $-0 = 0$, $1^{-1} = 1$, (wegen der Eindeutigkeit der Lösungen von $0 + x = 0$ und $1 \cdot x = 1$).
- Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$-(-a) = a, \quad 0 \cdot a = 0, \qquad (-1) \cdot a = -a, \qquad (-a) \cdot (-b) = a \cdot b,$$
$$a \neq 0 \quad \Rightarrow \quad (a^{-1})^{-1} = a \quad \wedge \quad (-a)^{-1} = -(a^{-1}),$$

als Lösungen von $-a + x = 0$, $0 \cdot a + x = 0 \cdot a$, $1 \cdot a + x = 0$, Rechnen und als Lösungen von $a^{-1} \cdot x = 1$ und $(-a) \cdot x = 1$.
- **Nullteilerfreiheit**. Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$x \cdot y = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0 \vee y = 0.$$

*Beweis:* 1. Fall $x = 0$. 2. Fall $x \neq 0$. Dann ist aber $y = x^{-1} \cdot 0 = 0$. $\square$
- Wegen der Assoziativität der Addition gilt zum Beispiel $(((w + x) + y) + z) = ((w + (x + y)) + z) = (w + ((x + y) + z)) = (w + (x + (y + z))) = ((w + x) + (y + z))$. Dies rechtfertigt die Schreibweise $w + x + y + z$ für diesen Term. Die Anzahl der möglichen Klammerungen einer $n + 1$-fachen Summe heißt übrigens $n$–te **Catalan-Zahl**, $\mathrm{C}_n$, wobei z.B. $\mathrm{C}_1 = 1$, $\mathrm{C}_2 = 2$, $\mathrm{C}_3 = 5$.
- Mit den üblichen Klammerersparnisregeln setzt man

$$(x - y) := (x + (-y)) \quad \text{und} \quad \tfrac{x}{y} := x \cdot y^{-1}.$$

- Es gelten die **Bruchrechenregeln**: Für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $b, d \neq 0$ ist
  (i) $\dfrac{a}{b} = \dfrac{ad}{bd}$ (Kürzen/Erweitern)
  (ii) $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \iff ad = bc$ (Vergleichen)
  (iii) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{b} = \dfrac{a+c}{b}, \quad \dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad+bc}{bd}$ (Addieren)
  (iv) $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$ (Multiplizieren)
  (v) $c \neq 0 \Longrightarrow \dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{ad}{bc}$ (Doppelbruch)

*Beweis:* (i) $x = \frac{ad}{bd}$ ist offensichtlich (die einzige) Lösung der Gleichung $bd \cdot x = ad$, Wegen $bd \cdot \frac{a}{b} = ad$ ist auch $\frac{a}{b}$ Lösung und es folgt $\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}$.
(ii) "$\Rightarrow$": $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = \frac{ad}{1} = \frac{adb}{b} = \frac{cdb}{d} = cd$. "$\Leftarrow$": $\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd} \overset{\text{Vor.}}{=} \frac{bc}{bd} = \frac{c}{d}$.

Rechte und linke Seite ist jeweils eindeutige Lösung von
(iii) $b\cdot x = a+c$ bzw. $bd\cdot x = ad+bc$, (iv) $bd\cdot x = ac$ und (v) $\frac{c}{d}\cdot x = \frac{a}{b}$. □

- Für $n \in \mathbb{Z}$ und Körperelement $x$ definiert man

$$\operatorname{pow}(x,n) := \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 0, \\ \operatorname{pow}(x, n-1)\cdot x, & \text{falls } n > 0, \\ \operatorname{pow}(\frac{1}{x}, -n), & \text{falls } n < 0 \text{ und } x \neq 0. \end{cases}$$

Man schreibt auch kurz $x^n := \operatorname{pow}(x,n)$. Es gelten die Potenzgesetze $x^n x^m = x^{n+m}$, $(x^n)^m = x^{nm}$, $x^n y^n = (xy)^n$, wenn beide Seiten definiert sind.

SATZ 2.2 (**Geometrische Summenformel**).
Für $m, n \in \mathbb{N}_0$, $m \leq n$, und $q \in \mathbb{R}$ gilt

$$(q-1)\sum_{k=0}^{n} q^k = q^{n+1} - 1, \qquad q \neq 1 \Rightarrow \sum_{k=m}^{n} q^k = \frac{q^{n+1} - q^m}{q-1}.$$

*Beweis.* Übung. □

Wir definieren die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \mathbb{Z}$ als

$$\binom{n}{k} := \prod_{l=1}^{k} \frac{n+1-l}{l} = \frac{n(n-1)\cdots(n+1-k)}{1\cdot 2\cdots k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!}, & \text{falls } 0 \leq k \leq n, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$, $k \in \mathbb{Z}$:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \qquad \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

SATZ 2.3 (**Binomische Formeln**). Für alle $x, a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k, \qquad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

(V7)

*Beweis.* Durch Induktion nach $n$. I.A.: $(1+x)^0 = 1 = \binom{0}{0}x^0$. I.S.:

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)(1+x)^n \overset{\text{I.V.}}{=} (1+x)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n}{k}x^k + \sum_{k=-1}^{n}\binom{n}{k}x^{k+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n}{k}x^k + \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n}{k-1}x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n+1}\left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right)x^k = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^k.\end{aligned}$$

Die zweite Formel ist für $b = 0$ per definitionem erfüllt. Für $b \neq 0$ gilt
$$(a+b)^n = b^n\left(1+\tfrac{a}{b}\right)^n = b^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\left(\tfrac{a}{b}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}. \qquad \square$$

- Eine Lösung schon der Gleichung $x+x = 1$ kann allein mit den bisherigen Rechenregeln nicht gefunden werden. In der Tat erfüllt $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ mit $1 + 1 = 0$ alle bisherigen Rechenregeln (dazu muss noch zwangsweise $0 + 0 = 0$, $1 + 0 = 0 + 1 = 1$ und $0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$, $1 \cdot 1 = 1$ festgelegt werden, womit $\mathbb{Z}_2$ ein Körper wird). Offenbar ist dann weder 0 noch 1 eine Lösung der Gleichung $x + x = 1$.

## 2.2. Die Anordnungsaxiome

Tief in unserer Intuition verankert ist die Vergleichbarkeit der aus der Schule bekannten Zahlen. $x < y$ wird interpretiert als “$x$ ist kleiner als $y$”. Die Vergleichbarkeit zweier beliebiger Zahlen führt zu einer linearen Anordnung, die Grundlage unserer Vorstellung einer Zahlengerade. Auf den Reellen Zahlen $\mathbb{R}$ gibt es eine Ordnungsrelation $<$, die verträglich mit der Addition und der Multiplikation ist. Das bedeutet: für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
&\neg(x < x) \;\wedge\; \big(x \neq y \Rightarrow \big(x < y \Leftrightarrow \neg(y < x)\big)\big) && \textbf{(Trichotomie)}\\
&x < y \;\wedge\; y < z \Rightarrow x < z, && \textbf{(Transitivität)}\\
&x < y \Rightarrow x + z < y + z, && \textbf{(Translationsinvarianz)}\\
&0 < z \wedge x < y \Rightarrow xz < yz. && \textbf{(Skalierbarkeit)}
\end{aligned}$$

Daraus folgen sofort wichtige Rechenregeln für Ungleichungen:

SATZ 2.4. Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt

(i) $x < y \Rightarrow -y < -x$, **(Spiegelung)**
(ii) $0 < x \wedge 0 < y \Rightarrow 0 < x+y \wedge 0 < xy$, **(Persistenz)**
(iii) $0 < 1$, **(Positivität der Eins)**
(iv) $0 < x < y \Rightarrow 0 < y^{-1} < x^{-1}$, **(Inversion)**
(v) $x \neq 0 \Rightarrow 0 < x^2$, **(Positivität des Quadrats)**

*Beweis.*

(i) folgt aus der Translationsinvarianz mit $z = -x - y$.

(ii) Persistenz für die Summe folgt direkt aus der Translationsinvarianz $0 < y \Rightarrow 0 + x < y + x$ und $0 < x$ wegen Transitivität.
Setzt man bei der Skalierbarkeit $x = 0$ erhält man die Persistenz für das Produkt.

(iii) Aus der Persistenz folgt sofort $0 < 1$, denn andernfalls wäre $0 < -1$ und damit doch wieder $0 < (-1)\cdot(-1) = 1$, ein Widerspruch zur Trichotomie.

(iv) Wegen $0 < x$ führt die Annahme $x^{-1} < 0$ auf $0 < -x^{-1}$, also zu dem Widerspruch $0 < -x^{-1} \cdot x = -1$. Also ist $0 < x^{-1}$. Genauso folgt $0 < y^{-1}$ und damit $0 < x^{-1}y^{-1}$. Skalierbarkeit mit $z = x^{-1}y^{-1}$ ergibt aus $x < y$ sofort $y^{-1} < x^{-1}$.

(v) Ist $0 < x$, so folgt sofort $0 < x^2$ (wegen Persistenz). Ist $x < 0$, also $0 < -x$, dann gilt wieder $0 < (-x) \cdot (-x) = x^2$. □

Mit Persistenz erhält man $0 < 1 < 1+1 < 1+1+1 < \cdots$. Mit der üblichen Bezeichnung

$$n := \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n\text{-mal}}$$

erhält man $\mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{R}$. Da mit $n \in \mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{R}$ auch $-n \in \mathbb{R}$ gilt, folgt $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ und da mit $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}^* \subseteq \mathbb{R}$ auch $\frac{m}{n} \in \mathbb{R}$ liegt, folgt $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.

SATZ 2.5 (**Bernoulli-Ungleichung**). Für $x \geq -1$ und $n \in \mathbb{N}^*$ gilt

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

*Beweis.* Für $n = 1$ ist nichts zu zeigen. Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \overset{\text{I.V.}}{\geq} (1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2 \\ &\geq (1+(n+1)x,\end{aligned}$$

da $1+x \geq 0$ bei Anwendung der Induktionsvoraussetzung und im letzten Schritt wegen $n > 0$, $x^2 \geq 0$ auch $nx^2 \geq 0$. □

Wir definieren die **Betragsfunktion** $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und die **Signumfunktion** $\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0, \\ -x, & \text{falls } x < 0, \end{cases} \qquad \operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} \frac{x}{|x|}, & \text{für } x \neq 0, \\ 0, & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

LEMMA 2.6. Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $|-x| = |x|$ und $-|x| \leq \pm x \leq |x|$.

*Beweis.* Man überprüft jeweils die 3 Fälle $x = 0$, $x > 0$ und $x < 0$. □

BEMERKUNG. $-|x| \leq \pm x \leq |x|$ ist hier eine Abkürzung für

$$(-|x| \leq +x \leq |x|) \wedge (-|x| \leq -x \leq |x|).$$

LEMMA 2.7. Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|x| < y \quad \Longleftrightarrow \quad -y < x < y.$$

*Beweis.* Die rechte Seite ist äquivalent zu $x < y \wedge -x < y$.
"$\Rightarrow$": folgt aus $\pm x \leq |x| < y$.
"$\Leftarrow$": Für $x \geq 0$ gilt $|x| = x < y$, für $x < 0$ gilt $|x| = -x < y$. □

LEMMA 2.8. Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

(i) $|x| \geq 0$, $\quad |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

(ii) $|xy| = |x| \cdot |y|$,
(iii) $|x + y| \leq |x| + |y|$, $\qquad |x - y| \geq |x| - |y|$.

*Beweis.*
(i) 1. Fall. $x \geq 0$. Dann ist $|x| = x$, also gilt (i).
2. Fall. $x < 0$. Dann ist $|x| = -x > 0$ und wieder gilt (i).
(ii) Fallunterscheidung. Für $x \geq 0$, $y < 0$ gilt z.B.: $|xy| = -(xy) = x \cdot (-y) = |x| \cdot |y|$. Die anderen drei Fälle überprüft man analog.
(iii) Für die erste Ungleichung summiert man $x \leq |x|$ und $y \leq |y|$ zu $x+y \leq |x|+|y|$ und $-x \leq |x|$ und $-y \leq |y|$ zu $-(x+y) \leq |x|+|y|$. Lemma 2.7 ergibt dann die Behauptung.
Die Zweite Ungleichung ergibt sich dann aus der ersten durch Umformung von $|x| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y|$. □

BEMERKUNGEN.
- Das Lemma zeigt, dass die Betragsfunktion auf $\mathbb{R}$ eine Norm definiert. (iii) ist die sogenannte **Dreiecksungleichung**, links in ihrer Standardform und rechts in umgekehrter Form.
- Der Abstand zweier reeller Zahlen $x, y$ auf der Zahlengeraden wird durch $|y - x|$ beschrieben.

## 2.3. Die Vollständigkeit der Reellen Zahlen

Die Anordnung der Reellen Zahlen garantiert, dass $0 < 1 < 2$ gilt und damit z.B. die Gleichung $x + x = 1$ genau eine Lösung hat, nämlich $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$. Eine Lösung der Gleichung $x \cdot x = 2$ kann so immer noch nicht garantiert werden. Als letztes postulieren wir für die lineare Ordnung auf $\mathbb{R}$ das Supremumsprinzip:

Jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt eine kleinste obere Schranke in $\mathbb{R}$. **(Supremumsprinzip)**

Dieses wird auch als das **Vollständigkeitsaxiom** der Reellen Zahlen bezeichnet.

Als erstes beweisen wir die Archimedische Eigenschaft der Reellen Zahlen:

SATZ 2.9 (**Archimedische Anordnung der Reellen Zahlen**). Die Menge $\mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{R}$ ist unbeschränkt in $\mathbb{R}$.

*Beweis.* $\mathbb{N}_0$ ist nichtleer. Wäre $\mathbb{N}_0$ nach oben unbeschränkt, dann wäre $\sup \mathbb{N}_0 =: c \in \mathbb{R}$. Jedes $d < c$ wäre also keine obere Schranke von $\mathbb{N}_0$. Aus $\forall n \in \mathbb{N}_0 : n \leq c$ folgt aber auch $\forall n \in \mathbb{N}^* : n + 1 \leq c$, bzw., $\forall n \in \mathbb{N}^* : n \leq c - 1$. Somit wäre auch $c - 1$ eine obere Schranke von $\mathbb{N}^*$ und damit auch von $N_0$. Widerspruch. □

BEMERKUNGEN.

- Die Archimedische Eigenschaft besagt, dass es keine unendlich großen und auch keine unendlich kleinen reellen Zahlen gibt, in folgendem Sinne:
$$\forall C{\in}\mathbb{R}\ \exists n{\in}\mathbb{N}_0 : c < n, \qquad \forall \epsilon{>}0\ \exists n{\in}\mathbb{N}^* : \tfrac{1}{n} < \epsilon.$$
- Das Supremumsprinzip ist hinreichend aber nicht notwendig für die Archimedische Eigenschaft eines angeordneten Körpers (sie gilt z.B. in $\mathbb{Q}$).
- Es gibt angeordnete Körper, die die Archimedische Eigenschaft nicht besitzen, in denen es "unendlich große" und damit auch "unendlich kleine" Zahlen gibt (z.B. den Körper der reellen gebrochen rationalen Funktionen, oder den Körper der *hyperreellen Zahlen*).

(V8)

Im Folgenden zeigen wir, dass wir hiermit das **Prinzip der Intervallschachtelung** für die Reellen Zahlen beweisen können.

DEFINITION 2.1. Eine Menge $I \subseteq \mathbb{R}$ heißt **Intervall**, wenn gilt
$$\forall a, c \in I : \forall b \in \mathbb{R} : a < b < c \Rightarrow b \in I.$$

BEMERKUNGEN. Für $a, b \in \mathbb{R}$
- sind die beschränkten Mengen
$$\begin{aligned} [a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}, \\ (a,b) &:= \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}, \\ [a,b) &:= \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}, \\ (a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\} \end{aligned}$$
jeweils Intervalle, die man abgeschlossen, offen, bzw., halboffen nennt.
- Dagegen sind
$$\begin{aligned} (-\infty, b] &:= \{x \in \mathbb{R} | x \leq b\}, \\ (-\infty, b) &:= \{x \in \mathbb{R} | x < b\}, \\ [a, +\infty) &:= \{x \in \mathbb{R} | x \geq a\}, \\ (a, +\infty) &:= \{x \in \mathbb{R} | x > a\}, \\ (-\infty, +\infty) &:= \mathbb{R} \end{aligned}$$
unbeschränkte Intervalle.
- Anstelle der runden Klammern kann man bei Verwechslungsgefahr mit Paaren auch umgedrehte eckige Klammern verwenden, z.B. $]a, b[$ für das Intervall $(a, b)$.
- Demnach ist die leere Menge $\emptyset = ]0, 0[ = [0, -1]$ sowohl ein offenes, als auch ein abgeschlossenes Intervall.
- Manchmal verwendet man die Abkürzungen
$$\mathbb{R}^+ := (0, \infty), \quad \mathbb{R}_0^+ := [0, \infty), \quad \mathbb{R}^- := (-\infty, 0), \quad \mathbb{R}_0^- := (-\infty, 0].$$
- Die **Länge** eines beschränkten Intervalls $I$ ist definiert als
$$|I| := \sup I - \inf I,$$
welche auf Grund des Supremumsprinzips immer wohldefiniert ist.

DEFINITION 2.2. Eine **Intervallschachtelung** in $\mathbb{R}$ ist eine Schachtelung $\mathcal{I}$ von nichtleeren beschränkten abgeschlossenen Intervallen in $\mathbb{R}$, deren länge beliebig klein wird, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $I \in \mathcal{I}$ mit $|I| < \frac{1}{n}$.

SATZ 2.10 (**Prinzip der Intervallschachtelung**). Für jede Intervallschachtelung $\mathcal{I}$ in $\mathbb{R}$ gilt:

$$\exists_1 c \in \mathbb{R} : \bigcap \mathcal{I} = \{c\}.$$

*Beweis.* Eindeutigkeit: Seien $c, d \in \bigcap \mathcal{I}$. Ohne Einschränkung sei $d \geq c$. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $I \in \mathcal{I}$ mit $|I| < \frac{1}{n}$ und damit auch $0 \leq d - c < \frac{1}{n}$. Wegen der archimedischen Eigenschaft der Reellen Zahlen folgt damit schon $c = d$.
Existenz: Die Menge $S := \{\max I : I \in \mathcal{I}\}$ ist nichtleer und nach unten beschränkt durch jedes Element von $R := \{\min I : I \in \mathcal{I}\}$.
Für jedes $I \in \mathcal{I}$ muss gelten: $\min I \leq \sup R \leq \inf S \leq \max I$. Somit folgt $\sup R, \inf S \in \bigcap \mathcal{I}$, wegen der Eindeutigkeit sogar mit $\sup R = \inf S$. □

BEMERKUNG. Dies zeigt sofort die Existenz einer reellen Zahl, deren Quadrat gleich 2 ist: Betrachte $\mathcal{I} := \{[a, \frac{2}{a}] \mid a{>}0 \wedge a^2{\leq}2\}$. Dies ist eine Intervallschachtelung, da es zu jedem $n \in \mathbb{N}^*$ ein $k \in \mathbb{N}^*$ gibt, so dass $(\frac{k}{n})^2 < 2$ aber $(\frac{k+1}{n})^2 > 2$ ist und somit gilt

$$\left|\left[\tfrac{k}{n}, \tfrac{2}{k/n}\right]\right| = \tfrac{n}{k}\left(2 - \tfrac{k^2}{n^2}\right) < \tfrac{n}{k}\left(\tfrac{(k+1)^2}{n^2} - \tfrac{k^2}{n^2}\right) = \tfrac{n}{k}\tfrac{2k+1}{n^2} = \tfrac{2+\frac{1}{k}}{n} \leq \tfrac{3}{n}.$$

Sei nun $c \in \mathbb{R}$, so dass $\bigcap \mathcal{I} = \{c\}$ ist. Wegen $[1, 2] \in \mathcal{I}$ gilt $c \geq 1$.
Da für alle $I \in \mathcal{I}$ gilt: $a \in I \Rightarrow \frac{2}{a} \in I$, folgt aus $c \in \bigcap \mathcal{I}$ auch $\frac{2}{c} \in \bigcap \mathcal{I}$.
Das heißt aber $c = \frac{2}{c}$, bzw., $c^2 = 2$.

SATZ 2.11 (Existenz und Eindeutigkeit der $k$-ten Wurzeln). Für $k \in \mathbb{N}^*$ und $y > 0$ gibt es genau ein $x > 0$ für dass $x^k = y$ ist.

*Beweis.* Wir wählen wieder $x \in \mathbb{R}$, so dass $\{x\} = \bigcap \mathcal{I}$ mit der Intervallschachtelung $\mathcal{I} = \{[a, \frac{y}{a^{k-1}}] \mid a{>}0 \wedge a^k{\leq}y\}$. Wie oben zeigt man $x > 0$ und $x^k = y$. □

KOROLLAR 2.12. Für $k \in \mathbb{N}^*$ ist die Funktion $\mathbb{R}_0^+ \ni x \mapsto x^k \in \mathbb{R}_0^+$ bijektiv.

*Beweis.* Die Funktion ist streng monoton steigend, denn aus $x < y$ folgt $x^k < y^k$, und damit injektiv. Nach dem vorhergehenden Satz ist die Funktion auch surjektiv. □

BEMERKUNGEN.

- Die Umkehrfunktion von $\mathbb{R}_0^+ \ni x \mapsto x^k \in \mathbb{R}_0^+$ wird mit $\sqrt[k]{\cdot} : x \mapsto \sqrt[k]{x}$ bezeichnet.
- Für $\sqrt[2]{x}$ schreibt man normalerweise einfach $\sqrt{x}$.
- Die **lineare Gleichung** $ax + b = 0$ kann in jedem Körper eindeutig gelöst werden, wenn $a \neq 0$ ist.
- Die **quadratische Gleichung** kann in $\mathbb{R}$ gelöst werden, wenn es Lösungen gibt:
$$a \neq 0 \ \wedge \ b^2 - 4ac \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \left( ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \tfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \right)$$
für die Nullstellen, oder als Faktorisierung geschrieben in vereinfachter Form,
$$p^2 - 4q \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2),$$
wobei $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$.
- Die reduzierte kubische Gleichung $x^3 = 3\mathrm{p}x + 2\mathrm{q}$, auf die jede beliebige **kubische Gleichung** $\mathrm{a}x^3 + \mathrm{b}x^2 + \mathrm{c}x + \mathrm{d} = 0$ leicht zurückgeführt werden kann, hat in dem Fall $\mathrm{q}^2 > \mathrm{p}^3$, in dem es nur eine reelle Lösung gibt, explizit die Lösung $x = \sqrt[3]{\mathrm{q} + \sqrt{\mathrm{q}^2 - \mathrm{p}^3}} + \sqrt[3]{\mathrm{q} - \sqrt{\mathrm{q}^2 - \mathrm{p}^3}}$, wobei $\sqrt[3]{\cdot} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hier als Umkehrfunktion von $x \mapsto x^3$ genommen wird. Man beachte, dass die interessanten Fälle mit drei reellen Nullstellen dem **casus irreducibilis**, $\mathrm{q}^2 < \mathrm{p}^3$, entsprechen, der nur über den Umweg der komplexen Zahlen behandelt werden kann.
- Auch für **quartische Gleichungen** (also jede Gleichung der Form $\mathrm{a}x^4 + \mathrm{b}x^3 + \mathrm{c}x^2 + \mathrm{d}x + \mathrm{e} = 0$ ) kann man durch geeignete lineare Substitution und Lösen der assozierten kubischen Resolvente explizit die reellen Lösungen angeben, wobei man allerdings im Allgemeinen um die zwischenzeitliche Verwendung komplexer Zahlen nicht herumkommt.
- Diese Resultate für Gleichungen bis zur vierten Ordnung sind schon seit fast 500 Jahren bekannt (veröffentlicht von Cardano 1545). Erst seit ca. 200 Jahren ist erwiesen, dass Gleichungen fünften oder höheren Grades im Allgemeinen nicht durch Wurzelausdrücke explizit lösbar sind (Satz von Abel-Ruffini, 1824). In der modernen Sprache der Gruppentheorie liegt das daran, dass die dem Polynom fünften Grades zugeordnete Galoisgruppe die Ikosaedergruppe $A_5$ als Normalteiler enthält und daher nicht auflösbar ist.
- Für Polynome beliebiger Ordnung gilt die **Abspaltbarkeit von Nullstellen als Linearfaktoren**.
Ist $\mathrm{x}_0$ eine **Nullstelle des Polynoms** n–ten Grades,
$$\mathrm{a_n} x^{\mathrm{n}} + \mathrm{a_{n-1}} x^{\mathrm{n}-1} + \cdots + \mathrm{a_1} x + \mathrm{a_0}, \quad \mathrm{a_n} \neq 0,$$
also **Lösung der Polynomgleichung** $\mathrm{a_n} x^{\mathrm{n}} + \cdots + \mathrm{a_0} = 0$, dann gibt es ein Polynom vom Grad $\mathrm{n} - 1$, also von der Form $\mathrm{b_{n-1}} x^{\mathrm{n}-1} + \cdots + \mathrm{b_0}$ mit

$\mathrm{b}_{\mathrm{n}-1} \neq 0$, so dass gilt:

$$\mathrm{a}_{\mathrm{n}} x^{\mathrm{n}} + \cdots + \mathrm{a}_0 = (x - \mathrm{x}_0)(\mathrm{b}_{\mathrm{n}-1} x^{\mathrm{n}-1} + \cdots + \mathrm{b}_0).$$

(Die Koeffizienten $\mathrm{b}_0, \dots, \mathrm{b}_{\mathrm{n}-1}$ kann man aus den den Koeffizienten $\mathrm{a}_0, \dots, \mathrm{a}_{\mathrm{n}}$ natürlich leicht durch Polynomdivision erhalten. In vielen Anwendungen ist dies allerdings gar nicht explizit notwendig.)

- Steht $P(x)$ für ein Polynom vom Grad n mit Nullstelle $\mathrm{x}_0$ und gibt es ein Polynom $Q(x)$ vom Grad $m < \mathrm{n}$, für dass $\mathrm{x}_0$ keine Nullstelle ist, so dass $P(x) = (x - \mathrm{x}_0)^{\mathrm{k}} Q(x)$ gilt, dann heißt $\mathrm{x}_0$ eine k**-fache Nullstelle** von $P(x)$ .

KAPITEL 3

# Die Komplexen Zahlen

**Zusammenfassung**
- Rechnen mit komplexen Zahlen, Konjugation, Betrag
- Geometrie der komplexen Zahlenebene,
- Fundamentalsatz der Algebra.

## 3.1. Die Körperaxiome

Die Komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ bilden einen Körper, der die Reellen Zahlen als echten Unterkörper enthält. Es gilt also $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, $\mathbb{R} \neq \mathbb{C}$. Für die Funktionen $+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $- : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $\cdot^{-1} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ gilt also für alle $x, y, z \in \mathbb{C}$:

| | | |
|---|---|---|
| $x + y = y + x,$ | $x \cdot y = y \cdot x,$ | **(Kommutativität)** |
| $x+(y+z) = (x+y)+z,$ | $x\cdot(y\cdot z) = (x\cdot y)\cdot z,$ | **(Assoziativität)** |
| $x\cdot(y+z) = x\cdot y+x\cdot z,$ | $0 \neq 1,$ | **(Distributivität, Diversität)** |
| $x + 0 = x,$ | $1 \cdot x = x,$ | **(Neutralität)** |
| $x + (-x) = 0,$ | $x \neq 0 \Rightarrow x\cdot x^{-1} = 1.$ | **(Negier–, Invertierbarkeit)** |

Bezeichnen wir die Körperoperationen auf $\mathbb{R}$ hier mit $+_{\mathbb{R}}, \cdot_{\mathbb{R}}, -_{\mathbb{R}}, \cdot^{-1_{\mathbb{R}}}$, so ergeben sich diese als geeignete Einschränkungen,

$$+_{\mathbb{R}} = +|_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}, \quad \cdot_{\mathbb{R}} = \cdot|_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}, \quad -_{\mathbb{R}} = -|_{\mathbb{R}}, \quad \cdot^{-1_{\mathbb{R}}} = \cdot^{-1}|_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}.$$

Alle Rechenregeln aus Abschnitt 2.1, insbesondere die Sätze 2.1, 2.2, 2.3 gelten somit auch für die komplexen Zahlen. Obwohl die reellen Zahlen entlang des Zahlenstrahls vollständig sind, so dass zum Beispiel jede positive Zahl eine $k$-te Wurzel besitzt, $k \in \mathbb{N}^*$, besitzt die einfache Gleichung $x^2 = -1$ wegen der Positivität des Quadrats in $\mathbb{R}$ *keine Lösung*. In $\mathbb{C}$ dagegen schon: Für die **imaginäre Einheit** $\mathrm{i} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ gilt

$$\mathrm{i} \cdot \mathrm{i} = -1.$$

(V9) Auf Grund der Körperaxiome und wegen $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ folgt sofort, dass für alle $a, b \in \mathbb{R}$ auch

$$a + \mathrm{i} \cdot b \in \mathbb{C}$$

ist. Weiter ergibt sich, dass für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$b \neq 0 \iff a + \mathrm{i}b \notin \mathbb{R},$$

denn es gilt, wie in jedem Körper, $0 \cdot \mathrm{i} = \mathrm{i} \cdot 0 = 0$. Aus $a + \mathrm{i}b \in \mathbb{R}$ folgt $b\mathrm{i} = (a + b\mathrm{i}) + (-a) \in \mathbb{R}$ Wir untersuchen weiter die Eigenschaften der neuen Zahl i: das Negative von i bezeichnen wir mit $-\mathrm{i}$. Es gilt $-\mathrm{i} \neq \mathrm{i}$, denn aus $x = -x$ folgt $x = 0$, aber $\mathrm{i} \neq 0$.
Das Inverse von i ist auch $-\mathrm{i}$, denn $\mathrm{i} \cdot (-\mathrm{i}) = -\mathrm{i}^2 = -(-1) = 1$. Allgemeiner gilt für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
(a + \mathrm{i}b) + (c + \mathrm{i}d) &= (a + c) + \mathrm{i}(b + d),\\
(a + \mathrm{i}b)(c + \mathrm{i}d) &= (ac - bd) + \mathrm{i}(ad + bc),\\
-(a + \mathrm{i}b) &= (-a) + \mathrm{i}(-b),\\
\frac{1}{a + \mathrm{i}b} &= \frac{a - \mathrm{i}b}{a^2 + b^2}.
\end{aligned}$$

BEISPIELE. $(1 + \mathrm{i})(1 + \mathrm{i}) = 2\mathrm{i}$, $\frac{1}{\mathrm{i}} = \frac{-\mathrm{i}}{1} = -\mathrm{i}$, $\frac{1}{3+4\mathrm{i}} = \frac{3-4\mathrm{i}}{9+16} = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}\mathrm{i}$.

Neben den bisher kennengelernten gibt es keine weiteren komplexen Zahlen. Es gilt die Aussage:

Die Menge der komplexen Zahlen ist gegeben durch

$$\mathbb{C} = \{a + \mathrm{i}b \,:\, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}.$$

BEMERKUNGEN.

- Die Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{C}$,
$$\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$$
ist eine Bijektion, sie ist sogar ein Vektorraumisomorphismus zwischen den beiden zweidimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorräumen $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{C}$. Daher wird $\mathbb{C}$ auch als die **Komplexe Zahlenebene** bezeichnet, die mittels obiger Bijektion alle geometrischen Eigenschaften der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ vererbt. Die Bilder der beiden Koordinatenachsen des $\mathbb{R}^2$ werden in $\mathbb{C}$ als die **reelle Achse** $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ und die **imaginäre Achse** $\mathrm{i}\mathbb{R} := \{\mathrm{i}y \,:\, y \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{C}$ bezeichnet.
- Für jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ gibt es also reelle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$, so dass
$$z = x + \mathrm{i}y$$
gilt. Man nennt diese eindeutige Darstellung von $z$ die **kartesische Darstellung** oder **Normalform** von $z \in \mathbb{C}$.
- Es gibt keine Ordnungsrelation auf $\mathbb{C}$ (Trichotomie und Transitivität), die alle in Abschnitt 2.2 geforderten Eigenschaften (Translationsinvarianz und Skalierbarkeit) erfüllt, denn für eine solche Ordnung würde die Positivität des Quadrats gelten, was zu dem Widerspruch $-1 < 0$ und $-1 = \mathrm{i} \cdot \mathrm{i} > 0$ führen würde.

## 3.2. Absolutbetrag und Argument

Definition 3.1. Die Umkehrfunktion der bijektiven Abbildung $\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$, wird als

$$\mathbb{C} \ni z \mapsto (\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z) \in \mathbb{R}^2$$

geschrieben. Dies definiert die beiden surjektiven Funktionen,

$$\operatorname{Re} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}, z \mapsto \operatorname{Re} z, \qquad \operatorname{Im} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}, z \mapsto \operatorname{Im} z,$$

die als **Realteil** und **Imaginärteil** einer komplexen Zahl bezeichnet werden. Die **komplexe Konjugation** einer Zahl wird mit $\overline{z}$ bezeichnet und ist definiert als

$$\overline{z} := \operatorname{Re} z - \mathrm{i} \operatorname{Im} z$$

Die Abbildung $z \mapsto \overline{z}$ von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$ entspricht einer Spiegelung der komplexen Zahlenebene an der reellen Achse. Ist $z = x + \mathrm{i}y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, so gilt offensichtlich

$$\operatorname{Re} z = x, \qquad \operatorname{Im} z = y.$$

Man kann Real- und Imaginärteil auch durch die komplexe Konjugation ausdrücken, wie man sofort sieht,

$$\operatorname{Re} z = \tfrac{1}{2}(z + \overline{z}), \qquad \operatorname{Im} z = \tfrac{1}{2\mathrm{i}}(z - \overline{z}).$$

Lemma 3.1. Für alle $w, z \in \mathbb{C}$ gilt

(i) $\overline{\overline{z}} = z$,

(ii) $\overline{w + z} = \overline{w} + \overline{z}$,

(iii) $\overline{w \cdot z} = \overline{w} \cdot \overline{z}$,

(iv) $z\overline{z} \geq 0$ und $z\overline{z} = 0$ genau dann, wenn $z = 0$.

*Beweis.* Sei $z = x + \mathrm{i}y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ und $w = u + \mathrm{i}v$ mit $u, v \in \mathbb{R}$. (i) und (ii) sind offensichtlich, für (iii) ergibt sich explizit

$$\begin{aligned}(u - \mathrm{i}v)(x - \mathrm{i}y) = ux - vy - \mathrm{i}uy - \mathrm{i}vx &= \overline{(ux - vy) + \mathrm{i}(uy + vx)} \\ &= \overline{(u + \mathrm{i}v)(x + \mathrm{i}y)}\end{aligned}$$

Schließlich gilt

$$z\overline{z} = (x + \mathrm{i}y)(x - \mathrm{i}y) = x^2 - \mathrm{i}^2y^2 + \mathrm{i}yx - \mathrm{i}xy = x^2 + y^2 \geq 0,$$

wobei aus $0 = z\overline{z} = x^2 + y^2$ sofort $x = 0 \wedge y = 0$ bzw. $z = 0$ folgt. □

Definition 3.2 (**Betrag**). Für $z \in \mathbb{C}$ ist

$$|z| := \sqrt{z\overline{z}} \in [0, \infty)$$

der **Betrag** von $z$.

Man beachte, dass diese Definition die in Satz 2.11 gezeigte Existenz der Quadratwurzel voraussetzt. Für reelle Zahlen stimmt der Betrag mit der Definition aus Abschnitt 2.2 überein.

Für eine beliebige komplexe Zahl $z$ ist der Betrag der Abstand von $z$ in der komplexen Zahlenebene zum Ursprung,

$$|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}.$$

BEISPIELE. $|1| = |\mathrm{i}| = |-1| = |-\mathrm{i}| = 1$. $|1+\mathrm{i}| = \sqrt{2}$, $|4+3\mathrm{i}| = 5$.

SATZ 3.2 (**Eigenschaften des Betrags**). Für $w, z \in \mathbb{C}$ gilt

(i) $|z| \geq 0, \quad |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$,
(ii) $|\bar{z}| = |z|, \quad |wz| = |w| \cdot |z|$,
(iii) $|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z| \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$,
(iv) $|w+z| \leq |w| + |z|, \qquad |w-z| \geq |w| - |z|$.

*Beweis.* (i) folgt aus Lemma 3.1.(iv) wegen der Bijektivität der Wurzel $\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$. Deswegen gilt auch $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$ für $x, y \geq 0$, woraus (ii) folgt.
zu (iii). Die Wurzelfunktion ist streng monoton steigend, daher gilt für $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$, dass $|\operatorname{Re} z| = |x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} = |z|^2$. Genauso für $|\operatorname{Im} z| \leq |z|^2$. Schließlich gilt $(|x|+|y|)^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2|x|\,|y| \geq |x|^2 + |y|^2 = |z|^2$.
Für die Dreiecksungleichung betrachten wir

$$\begin{aligned} |w+z|^2 &= w\bar{w} + (w\bar{z} + z\bar{w}) + z\bar{z} = |w|^2 + |z|^2 + 2\operatorname{Re}(w\bar{z}) \\ &\overset{\text{(iii)}}{\leq} |w|^2 + |z|^2 + 2|w\bar{z}| = |w|^2 + |z|^2 + 2|w|\,|z| \\ &= (|w| + |z|)^2, \end{aligned}$$

woraus die direkte Dreiecksungleichung wegen der Monotonie der Quadratwurzelfunktion folgt. Ihre Anwendung auf $|w| = |(w-z)+z| \leq |w-z|+|z|$ ergibt durch Subtraktion von $|z|$ wie bei den reellen Zahlen die invertierte Dreiecksungleichung $|w-z| \geq |w| - |z|$. □

An dieser Stelle führen wir auch schon die Polardarstellung komplexer Zahlen unter Verwendung von Schulwissen über Sinus und Cosinus ein. Sei $\varphi \in (-\pi, \pi]$ ein Winkel gemessen in Bogenmaß und $r \geq 0$. Dann hat die komplexe Zahl

$$z := r\cos\varphi + \mathrm{i}r\sin\varphi$$

den Betrag

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi} = r$$

und der Zeiger vom Ursprung zu $z$ bildet mit der positiven reellen Achse einen Winkel $\varphi$, der zwischen $-180°$ und (einschließlich) $+180°$ liegt. Wir definieren die **Argumentfunktion**

$$\arg : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to (-\pi, \pi]$$

als diejenige Funktion, die jeder komplexen Zahl $z \neq 0$ diesen Winkel relativ zur positiven $x$-Achse zuordnet.

BEISPIELE. Es gilt $\arg(1) = 0$, $\arg(100) = 0$, $\arg(-1) = \pi$, $\arg(\mathrm{i}) = \frac{\pi}{2}$, $\arg(-\mathrm{i}) = -\frac{\pi}{2}$, $\arg(1+\mathrm{i}) = \frac{\pi}{4}$.

(V10) Wir definieren (an dieser Stelle nur) im Sinne einer Abkürzung für beliebige $\varphi \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} := \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi.$$

Die Einführung der komplexen Exponentialfunktion und der allgemeinen Potenz wird diese Schreibweise demnächst rechtfertigen. Damit kann jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ in *eine* **Polarform** gebracht werden,

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi},$$

mit $r \in \mathbb{R}$ und $\varphi \in \mathbb{R}$, wobei $r = |z|$ und, falls $z \neq 0$, $\varphi = \arg(z)$ gewählt werden kann. Diese Darstellung ist nicht eindeutig, denn wegen der Periodizität von sin und cos gilt z.B. $1 = (-1)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi} = \mathrm{e}^0 = 1\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}} = 1\mathrm{e}^{-4\pi\mathrm{i}}$. Für $z \neq 0$ bezeichnen wir

$$|z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg(z)}$$

als *die* **Polardarstellung** von $z$, welche eindeutig ist.

BEMERKUNGEN.

- Man beachte: **Eine** Polarform von $z$,
$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$$
ist genau dann **die** Polardarstellung von $z$, wenn $r > 0$ und $-\pi < \varphi \leq \pi$ gilt.
- Es gilt $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}} = 1$ und damit auch $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}k} = 1$ genau dann, wenn $k \in \mathbb{Z}$. Man überprüft sofort die berühmte Formel
$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} + 1 = 0.$$
- Für die Multiplikation zweier komplexer Zahlen $w = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, $z = s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}$ in *Polarform* gilt
$$\begin{aligned} wz = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi} &= rs(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)(\cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi) \\ &= rs(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi) + \mathrm{i}(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi) \\ &\overset{(*)}{=} rs(\cos(\varphi+\psi) + \mathrm{i}\sin(\varphi+\psi)) \\ &= rs\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi+\psi)}, \end{aligned}$$
wobei in $(*)$ die Additionstheoreme für sin und cos angewendet wurden. Dies bedeutet geometrisch, dass die Multiplikation zweier komplexer Zahlen eine komplexe Zahl ergibt, deren Betrag das Produkt der Beträge und deren Winkel durch die Summe der Winkel der beiden Faktoren gegeben ist.

DEFINITION 3.3 (**Komplexe Wurzelfunktion**). Die Komplexe $k$-te Wurzelfunktion $\sqrt[k]{\cdot} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ wird definiert als

$$\sqrt{z} := \begin{cases} 0, & \text{falls } z = 0, \\ \sqrt{|z|} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\arg(z)}{k}}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

BEMERKUNGEN.

- Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $\sqrt[k]{z}^k = z$. Für die Quadratwurzel schreibt man kurz $\sqrt{z} := \sqrt[2]{z}$.
- Es ist $\sqrt{\cdot} : \mathbb{C} \to H$ ist die Umkehrfunktion von $\cdot^2 : H \to \mathbb{C}$, wobei
$$H = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \geq 0 \wedge (\operatorname{Re} z = 0 \Rightarrow \operatorname{Im} z \geq 0\}.$$
- In $\mathbb{C}$ kann beispielsweise jedes quadratische Polynom faktorisiert werden. Für $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, gilt
$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2), \qquad z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Die Existenz von Nullstellen ist aber nicht nur für quadratische Polynome gesichert. Es gilt der

SATZ 3.3 (**Fundamentalsatz der Algebra**). Jedes nichtkonstante komplexe Polynom besitzt eine Nullstelle.
Sei $n \in \mathbb{N}^*$, $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$. Dann gibt es ein $z \in \mathbb{C}$ mit

$$p(z) := a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0 = 0.$$

*Beweisidee.* Man betrachtet die Funktion $\mathbb{C} \ni z \mapsto |p(z)| \geq 0$ und zeigt, dass sie an einem Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ ihren minimalen Wert annimmt. Die Annahme, dass $p(z_0) \neq 0$ ist, führt zu einem Widerspruch, da es dann beliebig nahe bei $z_0$ Punkte $z \in \mathbb{C}$ geben müsste mit $|p(z)| < |p(z_0)|$.

Der Beweis benötigt Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$, die in Analysis 2 behandelt wird. Ein alternativer Beweis wird im Rahmen der Funktionentheorie mit Hilfe des Satzes von Liouville durchgeführt.

Eine direkte Folge des Fundamentalsatzes ist die Faktorisierbarkeit von komplexen Polynomen.

KOROLLAR 3.4. Sei $p(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$. $n \in \mathbb{N}^*$, $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$, ein Polynom vom Grad $n$. Dann gibt es $n$ komplexe Zahlen $z_1, \dots, z_n$ (die nicht paarweise verschieden sein müssen), so dass für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$p(z) = a_n(z - z_1) \cdots (z - z_n).$$

*Beweis.* Für $n = 1$, den Induktionsanfang gilt $p(z) = a_1(z - z_1)$ mit $z_0 = -\frac{a_0}{a_1}$.

Ist $p(z)$ ein Polynom vom Grad $n+1$, so besitzt $p$ eine Nullstelle $z_{n+1} \in \mathbb{C}$. Polynomdivision ergibt ein Polynom vom Grad $n$, $q(z) = b_n z^n + \cdots + b_0$, für dass $p(z) = (z - z_{n+1})q(z)$ gilt (nämlich mit $b_n = a_{n+1}$, $b_{k-1} = a_k - b_k z_0$ für $k = n, n-1, \dots, 1$). Für dieses gilt nach Induktionsvoraussetzung, dass es $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ gibt, so dass $q(z) = b_n(z - z_n) \cdots (z - z_1)$ ist. Dies zeigt wegen $a_{n+1} = b_n$ die Induktionsbehauptung,

$$p(z) = a_{n+1}(z - z_{n+1})(z - z_n) \cdots (z - z_1).$$

□

BEMERKUNGEN.

- Ein Polynom $p$ vom Grad $n$ mit komplexen Koeffizienten hat also genau $k$ Nullstellen, $z_1, \dots, z_k \in \mathbb{C}$, $1 \leq k \leq n$, und es gibt ein $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und Zahlen $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}^*$ mit $n_1 + \cdots + n_k = n$, so dass gilt

  $$p(z) = c(z - z_1)^{n_1} \cdots (z - z_k)^{n_k}.$$

  Man nennt $n_j$ die **Vielfachheit der Nullstelle** $z_j$ von $p$, $j = 1, \dots, k$.
- Für ein Polynom $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$ mit reellen Koeffizienten $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ gilt $p(\overline{z}) = \overline{p(z)}$, insbesondere ist für jede Nullstelle $z_0 \in \mathbb{C}$ von $p$ auch $\overline{z_0}$ eine Nullstelle. Dies bedeutet, dass nichtreelle Nullstellen auch in ihrer Vielfachheit immer als konjugiert komplexe Paare auftreten.

SATZ 3.5 (**Einheitswurzeln**). Sei $n \in \mathbb{N}^*$. Die Gleichung $z^n = 1$ hat genau $n$ komplexe Lösungen $z_0, \dots, z_{n-1}$, der Form

$$z_k = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \frac{k}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

*Beweis.* Alle $z_k$ sind Nullstellen des Polynoms $z^n - 1$, denn

$$z_k^n = \left(\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \frac{k}{n}}\right)^n = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} k} = 1.$$

Erfüllt $z$ die Gleichung $z^n = 1$, so gibt es eine eindeutige Polardarstellung

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$$

mit $r > 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$. Es gilt $1 = |z^n| = |z|^n = r^n$, also $r = 1$. Somit ist $1 = z^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}$. Es gibt also ein $k \in \mathbb{Z}$, so dass $n\varphi = 2\pi k$ ist, bzw. $\varphi = 2\pi \frac{k}{n}$. Wegen $\varphi \in [0, 2\pi)$ folgt $k \in \{0, \dots, n-1\}$. □

### 3.3. Topologie der Komplexen Zahlenebene

DEFINITION 3.4. Zu gegebenem Mittelpunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und Radius $r > 0$ definiert man die **(offene) Kreisscheibe** (auch **offene Kugel**)

$$\mathrm{B}_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}.$$

BEMERKUNG. Kreisscheiben sind die wichtigsten elementaren Teilmengen von $\mathbb{C}$. Mit ihrer Hilfe definiert man die folgenden Bewgriffe:

DEFINITION 3.5. Eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{C}$ heißt

- **beschränkt**, falls es ein $R > 0$ gibt, so dass $X \subseteq \mathrm{B}_R(0)$ ist.
- **offen (in $\mathbb{C}$)**, falls es zu jedem $z \in X$ ein $\varepsilon{>}0$ gibt, so dass $\mathrm{B}_\varepsilon(z) \subseteq X$,
- **abgeschlossen**, falls $\mathbb{C} \setminus X$ offen ist,
- **kompakt**, wenn $X$ beschränkt und abgeschlossen ist.

Weiter definiert man das **Innere von** $X$ als

$$\mathring{X} := \operatorname{Int} X := \{z \in \mathbb{C} \mid \exists \varepsilon > 0 : \mathrm{B}_\varepsilon(z) \subseteq X\},$$

das **Äußere von** $X$ als das Innere des Komplements

$$\operatorname{Ext} X := \operatorname{Int}(\mathbb{C} \setminus X),$$

den **Abschluss von** $X$ als das Komplement des Äußeren,

$$\overline{X} = \mathbb{C} \setminus \operatorname{Ext}(X),$$

und den **Rand von** $X$ als das Komplement von Innerem und Äußerem von $X$,

$$\partial X := \mathbb{C} \setminus (\operatorname{Int} X \cup \operatorname{Ext} X).$$

BEMERKUNGEN.

- Für $X \subseteq \mathbb{C}$ ist das Innere und das Äußere von $X$ immer offen. Der Abschluss und der Rand von $X$ dagegen ist immer abgeschlossen.

BEISPIELE.

- Die offenen Kreisscheiben in $\mathbb{C}$ sind offene beschränkte Mengen
- Der Abschluss einer Kreisscheibe,

  $$\overline{\mathrm{B}_r(z_0)} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \le r\}$$

  ist abgeschlossen und beschränkt, also kompakt, aber nicht offen.
- Der Rand der Kreisscheibe,

  $$\partial \mathrm{B}_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = r\}$$

  ist auch abgeschlossen und beschränkt, also kompakt, aber nicht offen.
- $\mathbb{C}$ und $\emptyset$ sind nach Definition beide offene Mengen, also jeweils auch abgeschlossen. In $\mathbb{C}$ sind dies die einzigen beiden Mengen, die zugleich offen und abgeschlossen sind.
- $\mathbb{R}$, $\mathrm{i}\mathbb{R}$ sind abgeschlossen in $\mathbb{C}$. Sie sind unbeschränkt, also nicht kompakt, außerdem sind sie nicht offen.

KAPITEL 4

# Konvergenz von Folgen und Reihen

(V11)

## 4.1. Definition von Konvergenz und verwandten Begriffen

Eine beliebige Zuordnung $f$ mit $\operatorname{def}(f) = \mathbb{N}_0$ oder $\mathbb{N}^*$ nennt man eine **Folge**. An Stelle von $f(n)$ schreibt man meistens $f_n$. Aus historischen Gründen wird die Folge selbst normalerweise nicht mit $f$ bezeichnet sondern mit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ oder informell $(f_0, f_1, f_2, \dots)$ oder $(f_n)$. Für eine Folge $(f_n)$ mit Werten in der Menge $M$ schreibt man

$$(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subseteq M.$$

Die formal korrekten Schreibweisen $\operatorname{bild}(f) \subseteq M$ oder $f_{\{\}}(\mathbb{N}_0) \subseteq M$ sind unüblich, denn häufig soll das Symbol $f$ alleine nicht die Folge selbst, sondern ein weiteres Element aus $M$ (z.B. den Grenzwert) bezeichnen.
Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subseteq \mathbb{C}$ heißt **(komplexe) Zahlenfolge**. Gilt $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$, so ist $(a_n)$ eine **reelle Zahlenfolge**.

DEFINITION 4.1. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ und $a \in \mathbb{C}$. Dann bedeutet

- $(a_n)$ ist **beschränkt** $:\iff \exists C > 0\ \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| < C$.
- 0 ist **Häufungswert von** $(a_n)$ $:\iff \forall \epsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n \geq N : |a_n| < \epsilon$.
- $(a_n)$ ist **Nullfolge** $:\iff \forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N : |a_n| < \epsilon$.
- $a$ ist **Häufungswert von** $(a_n)$ $:\iff$ 0 ist Häufungswert von $(a_n - a)$.
- $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a :\iff a$ ist **Grenzwert von** $(a_n)$ $:\iff (a_n - a)$ ist Nullfolge.
- $(a_n)$ ist **konvergent** $:\iff \exists a \in \mathbb{C} : a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$.
- $(a_n)$ ist **divergent**, wenn sie nicht konvergent ist.

Ist $(a_n)$ eine reelle Zahlenfolge, so definieren wir zusätzlich

- $(a_n)$ ist **monoton steigend** $:\iff \forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}$.
- $(a_n)$ ist **streng monoton steigend** $:\iff \forall n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n+1}$.
- $(a_n)$ ist **nach oben beschränkt** $:\iff \exists C > 0\ \forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq C$.
- $(a_n)$ ist **nach oben unbeschränkt** $:\iff \forall C > 0\ \exists n \in \mathbb{N} : a_n > C$.
- $(a_n)$ ist **monoton fallend** $:\iff \forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1}$.
- $(a_n)$ ist **streng monoton fallend** $:\iff \forall n \in \mathbb{N} : a_n > a_{n+1}$.
- $(a_n)$ ist **nach unten beschränkt** $:\iff \exists C > 0\ \forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq -C$.
- $(a_n)$ ist **nach unten unbeschränkt** $:\iff \forall C > 0\ \exists n \in \mathbb{N} : a_n < -C$.
- $a_n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty :\iff (a_n)$ **strebt gegen** $+\infty$
  $:\iff \forall C > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N : a_n \geq C$.
- $a_n \xrightarrow{n\to\infty} -\infty :\iff (a_n)$ **strebt gegen** $-\infty$ $:\iff -a_n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$.

BEISPIELE.

- Die konstante Folge $(1, 1, \dots)$ hat den Grenzwert 1.
- Die Folge $n \mapsto \mathrm{i}^n$ ist beschränkt mit Häufungswerten $\pm 1, \pm \mathrm{i}$.
- Die Folge $(0, 1, 2, 3, \dots)$ strebt gegen $+\infty$.
- Die Folge $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge.
- Es gilt $\frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n} \to 1$.
- Die Folge $(n - (-1)^n n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ hat als einzigen Häufungswert 0 ist aber dennoch unbeschränkt und daher nicht konvergent.
- Die **arithmetische Folge** $(an + b)_{n \in \mathbb{N}_0}$, $a, b \in \mathbb{R}$, strebt gegen $+\infty$ falls $a > 0$, gegen $-\infty$ falls $a < 0$ ist und gegen $b$ falls $a = 0$.

SATZ 4.1.

(i) Jede konvergente Zahlenfolge ist beschränkt.
(ii) Eine konvergente Folge $(a_n)$ hat genau einen Grenzwert.
(iii) Der Grenzwert einer Zahlenfolge ist ihr einziger Häufungswert.
(iv) Jede durch ein Nullfolge dominierte Nullfolge ist selbst Nullfolge.
(v) Die Summe zweier Nullfolgen ist wieder Nullfolge.
(vi) Das Produkt einer beschränkten und einer Nullfolge bleibt Nullfolge.

*Beweis.*

(i) Sei $a$ ein Grenzwert von $(a_n)$. Wähle $N \in \mathbb{N}$, so dass $\forall n \geq N : |a_n - a| < 1$ ist. Wähle $C := 1 + \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N-1}|\} \cup \{|a| + 1\}$. Dann gilt $\forall n \in \mathbb{N} : |a_n| < C$.

(ii) Seien $a$ und $b$ Grenzwerte von $(a_n)$. Wir zeigen $\forall \epsilon > 0 : |a - b| < \epsilon$, woraus $|a - b| = 0$ bzw. $a = b$ folgt:
Sei $\epsilon > 0$. Wähle $N \in \mathbb{N}$, so dass $\forall n \geq N : |a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$ und $\forall n \geq N : |a_n - b| < \frac{\epsilon}{2}$. Dann gilt $|a - b| \leq |a - a_n| + |a_n - b| < \epsilon$.

(iii) Folgt wie in (ii): ist $a$ Grenzwert und $b$ Häufungswert von $(a_n)$ dann gibt es zu $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_N - b| < \frac{\epsilon}{2}$ und $\forall n \geq N : |a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$. Dann gilt wieder $|a - b| \leq |a - a_N| + |a_N - b| < \epsilon$.

(iv) Gilt $a_n \to 0$ und $|b_n| \leq |a_n|$, so folgt $b_n \to 0$, denn zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}_0$, so dass für alle $n \geq n$ gilt: $|a_n| < \varepsilon$ und damit auch $|b_n| \leq |a_n| < \varepsilon$.

(v) Seien $(a_n)$ und $(b_n)$ Nullfolgen. Sei $\epsilon > 0$. Wähle $N \in \mathbb{N}$, so dass $\forall n \geq N : |a_n| < \frac{\epsilon}{2}$ und $\forall n \geq N : |b_n| < \frac{\epsilon}{2}$. Dann folgt für $n \geq N$, dass $|a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n| < \epsilon$.

(vi) Sei $(a_n)$ eine Nullfolge und $(b_n)$ beschränkt durch $C > 0$. Zu $\epsilon > 0$ wähle $N \in \mathbb{N}$ so, dass $\forall n \geq N : |a_n| < \frac{\epsilon}{C}$. Dann gilt für $n \geq N$, dass $|a_n b_n| \leq |a_n||b_n| < \frac{\epsilon}{C} C = \epsilon$. □

SATZ 4.2. Für reelle Zahlenfolgen gilt insbesondere

(i) Eine gegen $+\infty$ strebende Folge ist nach unten beschränkt und nach oben unbeschränkt.

(ii) Der Kehrwert einer gegen $\pm\infty$ strebenden Folge ist eine Nullfolge.
(iii) Der Kehrwert einer positiven Nullfolge strebt gegen $+\infty$.

*Beweis.*

(i) Zu $C > 0$ wähle $N \in \mathbb{N}$ so, dass $a_n > C$ für alle $n \geq N$. Dann ist $a_N > C$, was die Unbeschränktheit nach oben zeigt. Außerdem ist $\min\{C, a_1, \dots, a_{N-1}\}$ eine untere Schranke von $(a_n)$.
(ii) Gelte $a_n \to +\infty$. Sei $\epsilon > 0$. Wähle $N \in \mathbb{N}$, so dass $\forall n \geq N$ : $a_n > \frac{1}{\epsilon}$. Dann ist für alle $n \geq N$ auch $0 < \frac{1}{a_n} < \epsilon$. Analog für $a_n \to -\infty$.
(iii) Sei $C > 0$. Es gibt $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ gilt $0 < a_n < \frac{1}{C}$, gleichbedeutend mit $\frac{1}{a_n} > C$. □

(V12)

BEISPIEL. Die **geometrische Folge** $(z^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist eine Nullfolge, falls $|z| < 1$ und divergent, falls $|z| \geq 1$ und $z \neq 1$.

*Beweis.* 1. Fall. Für $|z| > 1$ setze $\varepsilon := |z| - 1 > 0$. Dann gilt aber die Abschätzung $|z|^n = (1+\varepsilon)^n \geq 1 + n\epsilon \to +\infty$ wegen der Bernoulli-Ungleichung. Somit ist $(z^n)$ eine unbeschränkte Folge, kann also nicht konvergent sein.
2. Fall. Für $|z| < 1$ gilt $|\frac{1}{z}| > 1$. Im ersten Fall haben wir gesehen, dass $|\frac{1}{z^n}| \to +\infty$, somit folgt $|z^n| \to 0$ und damit auch $z^n \to 0$.
3. Fall. Für $z = 1$ ist $z^n \to 1$ offensichtlich. Ist $|z| = 1$, $z \neq 1$, so nehmen wir an, es gilt $z^n \to c \in \mathbb{C}$. Da $\frac{|z-1|}{2} > 0$, gibt es $N \in \mathbb{N}_0$, so dass $|z^n - c| < \frac{|z-1|}{2}$ für alle $n \geq N$. Für ein solches $n$ gilt dann aber auch

$$\begin{aligned} |z-1| = |z-1||z|^n &= |z^{n+1} - z^n| \leq |z^{n+1} - c| + |z^n - c| \\ &< \tfrac{|z-1|}{2} + \tfrac{|z-1|}{2} = |z-1|, \end{aligned}$$

ein Widerspruch. □

BEMERKUNGEN.

- Für eine konvergente Zahlenfolge mit $a_n \to a$ definiert man
$$\lim_{n\to\infty} a_n := a.$$
- Gilt für eine reelle Zahlenfolge $a_n \to \pm\infty$ oder $a_n \to a$, so nennt man $(a_n)$ uneigentlich konvergent und definiert den **uneigentlichen Limes**
$$\operatorname{ulim}_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} +\infty, & \text{falls } a_n \to +\infty, \\ -\infty, & \text{falls } a_n \to -\infty, \\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n, & \text{falls } (a_n) \text{ konvergent ist,} \end{cases}$$

wobei $+\infty$ und $-\infty$ zwei unterschiedliche mathematische Objekte bezeichnet, für die $\pm\infty \notin \mathbb{C}$ gilt. Ist aus dem Kontext klar, dass der uneigentliche Limes gemeint ist, schreibt man üblicherweise auch lim an Stelle von ulim.

## 4.2. Konvergenzkriterien

SATZ 4.3 (**Grenzwertkalkül**). Seien $(a_n), (b_n) \subseteq \mathbb{C}$ und $a, b \in \mathbb{C}$. Gelte $a_n \to a$ und $b_n \to b$. Dann folgt:

(i) $a_n + b_n \to a + b$,
(ii) $a_n b_n \to ab$,
(iii) $b \neq 0 \Longrightarrow \frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$,
(iv) $|a_n| \to |a|$.

Sind $(a_n), (b_n)$ reelle Zahlenfolgen so gilt:

(v) Ist $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann folgt $a \leq b$.
(vi) Gelte $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq c_n \leq b_n$ und $a = b$. Dann ist $(c_n)$ konvergent mit $c_n \to a$. **(Einschnürungskriterium)**

*Beweis.*

(i) $(a_n + b_n) - (a + b) = (a_n - a) + (b_n - b)$ ist Nullfolge wegen Satz 4.1 (iv),
(ii) $a_n b_n - ab = a_n b_n - a_n b + a_n b - ab = a_n(b_n - b) - (a_n - a)b$ ist Nullfolge wegen Satz 4.1 (iv) und (v), da $a_n$ als konvergente Folge beschränkt ist.
(iii) Wir zeigen nur, dass $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$ gilt. Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|b_n - b| < \frac{|b|}{2}$ bzw. $|b_n| = |b - (b - b_n)| \geq |b| - |b - b_n| > \frac{|b|}{2}$ für alle $n \geq N$ gilt. Somit gilt für diese $n$ auch $|\frac{1}{b_n}| \leq \frac{2}{|b|}$, Die Folge $(\frac{1}{b_n})_{n \geq N}$, ist also beschränkt. Somit gilt
$$|\tfrac{1}{b_n} - \tfrac{1}{b}| = \frac{1}{b_n b}|b - b_n| \to 0,$$
als Produkt einer beschränkten und einer Nullfolge
(iv) Die invertierte Dreiecksungleichung lautet $|b - a| \geq |b| - |a|$ und genauso $|a - b| \geq |a| - |b|$, zusammen also
$$|b - a| \geq \Big||b| - |a|\Big|.$$
Somit gilt $\Big||a_n| - |a|\Big| \leq |a_n - a| \to 0$.
(v) Folgt daraus, dass eine nichtnegative konvergente Zahlenfolge keinen negativen Grenzwert haben kann, angewendet auf $(b_n - a_n)$
(vi) Zu $\epsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ sowohl $|a_n - a| < \epsilon$ und $|b_n - a| < \epsilon$. Insbesondere gilt $-\epsilon < a_n - a \leq c_n - a$ und $c_n - a \leq b_n - a < \epsilon$, also auch $|c_n - a| < \epsilon$. Dies zeigt $c_n \to a$. □

BEISPIELE.

- Für reelle Polynome $p(n) = a_k n^k + \cdots + a_0, q(n) = b_l n^l + \cdots + b_0$ mit $a_k, b_l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt
$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{q(n)} = \begin{cases} 0 & \text{wenn } k < l, \\ \frac{a_k}{b_k} & \text{wenn } k = l, \\ \pm\infty & \text{wenn } k > l, \text{ je nach Vorzeichen von } \frac{a_k}{b_l}. \end{cases}$$
- Für $k \in \mathbb{N}_0$, $|q| < 1$ gilt $n^k q^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$,
- Für $a > 0$ gilt $\sqrt[n]{a} \to 1$,

*Beweis.*

- Ausklammern der höchsten Potenz in Zähler und Nenner ergibt
$$\frac{p(n)}{q(n)} = n^{k-l} \frac{a_k + a_{k-1}\frac{1}{n} + \cdots}{b_l + b_{l-1}\frac{1}{n} + \cdots}.$$
Der zweite Faktor konvergiert gegen $\frac{a_k}{b_l}$ der erste Faktor konvergiert gegen 0, bzw., 1 (für $k < l$, bzw., $k = l$) bzw., strebt gegen $\infty$ für $k > l$.
- Mit $x := \frac{1}{|q|} - 1 > 0$ gilt $|n^k q^n| = \frac{n^k}{(1+x)^n} \le \frac{n^k}{\binom{n}{k+1}x^{k+1}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, da der Nennergrad von $n$ um eins größer als der Zahlergrad ist.
- 1. Fall $a \ge 1$. Sei $\epsilon > 0$. Wähle $N := \lfloor \frac{a-1}{\epsilon} \rfloor + 1$[1]. Sei $n \ge N$. Dann gilt $(1+\epsilon)^n \ge 1 + n\epsilon \ge 1 + N\epsilon > a$, also $0 \le \sqrt[n]{a} - 1 < \epsilon$.
2. Fall $a = 1$ klar.
3. Fall $0 < a < 1$. $\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} \to 1$, da $\sqrt[n]{\frac{1}{a}} \to 1$ wegen $\frac{1}{a} > 1$.

SATZ 4.4 (**Konvergenzkriterien für relle Zahlenfolgen**).

- **Monotoniekriterium:** Ist $(a_n)$ monoton und beschränkt, dann ist $(a_n)$ konvergent.
- **Intervallschachtelung:** Gilt $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \le b_n \le c_n$ wobei $(a_n)$ monoton wächst und $(c_n)$ monoton fällt, und ist $(c_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, dann ist $(b_n)$ konvergent.

*Beweis.*

- Sei $(a_n)$ ohne Beschränkung der Allgemeinheit (o.B.d.A.) monoton steigend und beschränkt, so gilt $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a := \sup\{a_k \mid k \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$,

[1] $\lfloor\cdot\rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ ist die **Floor-Funktion**, die zur nächstliegenden kleineren ganzen Zahl abrundet: $\lfloor x \rfloor := \mathrm{floor}(x) := \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \le x\}$.

denn zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a_N \in (a-\epsilon, a]$ und damit gilt auch für alle $n \geq N$, dass $a_n \in (a-\epsilon, a]$.

- $a_n \to a$, $c_n \to c$, da beide beschränkte monotone Folgen sind, mit $c - a = \lim_{n\to\infty}(c_n - a_n) = 0$. Somit konvergiert $(b_n)$ auch gegen $a$, da $|b_n - a| \leq |b_n - a_n| + |a_n - a| \leq |c_n - a_n| + |a_n - a| \xrightarrow{n\to\infty} 0$ gilt. □

BEISPIELE.

- Für $k \in \mathbb{N}$ gilt $\frac{1}{\sqrt[k]{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$,
- $\sqrt[n]{n} \to 1$,
- $(1+\frac{1}{n})^n$ ist konvergent. $(1+\frac{1}{n})^n \to \mathrm{e}$ definiert $\mathrm{e} = 2.71828\dots$.

*Beweis.* (V13)

- die Folge $(\frac{1}{\sqrt[k]{n}})_n$ ist monoton fallend und durch 0 nach unten beschränkt, also existiert der Grenzwert $c := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{n}}$. Das Grenzwertkalkül ergibt $c^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, somit folgt $c = 0$.
- $1 < \sqrt[n]{n} \leq 1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$ folgt aus $(1+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}})^n \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2}(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}})^2 = n$.
- $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ ist monoton wachsend, $c_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$ ist monoton fallend und $c_n - a_n = \frac{1}{n}a_n \to 0$, denn

$$\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}} = \left(\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}\right)^n \frac{n}{n-1} = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n \frac{n}{n-1} \overset{(*)}{\geq} (1+\frac{n}{n^2})\frac{n}{n-1} = 1,$$

$$\frac{(1+\frac{1}{n-1})^n}{(1+\frac{1}{n})^{n+1}} = \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n+1} \frac{n-1}{n} = \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1} \frac{n-1}{n}$$

$$\overset{(*)}{\geq} (1+\frac{n+1}{n^2-1})\frac{n-1}{n} = 1.$$

(∗) Bernoulli-Ungleichung □

BEISPIEL (**Quadratwurzel von** 2).

Wir betrachten die Funktion $f(x) = 2 - x^2$. Bekannt ist, dass ihre positive Nullstelle nicht rational ist. Wir setzen $x_0 = 2$. Ist $x_n$ definiert, dann definieren wir $x_{n+1}$ als die Nullstelle der Tangente an den Graphen von $f$ im Punkt $\big(x_n, f(x_n)\big)$, d.h. wir lösen die Gleichung

$$0 = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) = 2 - x_n^2 - 2x_n(x - x_n)$$

nach $x$ auf. Die Lösung ist $x_{n+1} := \frac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n})$. Elementar zeigt man, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ positiv und monoton fallend ist, und $x_n^2 \geq 2$ gilt: Aus $0 < x_n$ und $2 < x_n^2$ folgt $0 < \frac{2}{x_n} < x_n$ und damit $0 < x_{n+1} < x_n$. Außerdem gilt $x_{n+1}^2 = \frac{1}{4}(x_n + \frac{2}{x_n})^2 - 2 = \frac{1}{4}(x_n - \frac{2}{x_n})^2 \geq 0$. Per Induktion folgt also für alle $n \in \mathbb{N}_0$, dass $0 < x_{n+1} < x_n$ und $2 < x_n^2$ gilt. Daher existiert ein $x_* \geq 0$ mit $x_n \to x_*$. Wegen ${x_*}^2 \geq 2$ ist $x_* > 0$ und wegen $x_{n+1} \to x_*$ und $\frac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n}) \to \frac{1}{2}(x_* + \frac{2}{x_*})$ folgt $x_* = \frac{1}{2}(x_* + \frac{2}{x_*})$, bzw., ${x_*}^2 = 2$. Da wir wissen, dass $x_* \geq 0$ gilt, folgt $x_* = \sqrt{2}$.

Übung. Bestimmen Sie zeichnerisch (i) einmal anhand des Graphen von $x \mapsto f(x) = 2 - x^2$ und seiner Tangenten, und (ii) anhand der Graphen von $x \mapsto x$ und $x \mapsto \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$ in einem Koordinatensystem die oben definierte Folge $(x_n)$.

Übung. Untersuchen Sie die Anzahl der gültigen Stellen von $\sqrt{2}$ der oben definierten Folge $(x_n)$.

Übung. Finden Sie, ausgehend von der Funktion $f(x) = a - x^2$, $a > 0$, eine Rekursionsformel zur Approximation von $\sqrt{a}$ (**Heron-Verfahren**).

Übung. Finden Sie eine Rekursionsformel zur Approximation von $\sqrt[7]{53}$.

Definition 4.2 (**Cauchy-Folgen**).
Eine komplexe Zahlenfolge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ heißt **Cauchy-Folge**, wenn gilt

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}_0 \ \forall m, n \geq N \ : \ |a_n - a_m| < \epsilon.$$

Lemma 4.5. Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.

*Beweis.* Gelte $a_n \to a \in \mathbb{C}$. Zu $\epsilon > 0$ wähle $N \in \mathbb{N}_0$, so dass für alle $n \geq N$ gilt $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$. Dann gilt für beliebige $m, n \geq N$, dass

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

also ist $(a_n)$ auch Cauchy-Folge. □

Die Umkehrung dieser Aussage ist eine Folge der Vollständigkeit der Reellen Zahlen und wird erst im nächsten Abschnitt bewiesen.

Beispiel. Eine Folge $(a_n)$ für die es ein $q < 1$ mit $|a_{n+1} - a_n| \leq q|a_n - a_{n-1}|$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt, ist eine Cauchy-Folge.

*Beweis.* Zu $\epsilon > 0$ wähle $N \in \mathbb{N}$, so dass $q^N < \epsilon \frac{1-q}{|a_1 - a_0|}$ ist. Dann gilt für alle $m, n \geq N$, $m \leq n$, dass

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &\leq \sum_{k=m}^{n-1} |a_{k+1} - a_k| \leq \sum_{k=m}^{n-1} |a_1 - a_0| q^k \\ &\leq |a_1 - a_0| \frac{q^m - q^n}{1 - q} \leq |a_1 - a_0| \frac{q^N}{1 - q} < \epsilon. \end{aligned}$$

□

## 4.3. Häufungswerte und Teilfolgen

BEMERKUNGEN. Zur Erinnerung:

- $a_n \to a \iff \forall \epsilon > 0 : \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \in \mathrm{B}_\epsilon(a)\}$ ist co-endlich in $\mathbb{N}$, wobei $A$ **ist co-endlich in** $\mathbb{N}$ bedeutet, dass $A \subseteq \mathbb{N}$ und $\mathbb{N} \setminus A$ endlich ist. Man sagt auch, **fast alle Elemente von** $\mathbb{N}$ **liegen in** $A$, bzw., $A$ enthält fast alle Elemente von $\mathbb{N}$.
- $a$ ist Häufungswert von $(a_n) \iff \forall \epsilon{>}0 : \{n \in \mathbb{N} \mid a_n{\in}\mathrm{B}_\epsilon(a)\}$ ist unendlich.

DEFINITION 4.3. $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **Teilfolge von** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn es eine streng monoton steigende Folge $(\tilde{n}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit Werten in $\mathbb{N}$ gibt, so dass gilt:

$$\forall k \in \mathbb{N} : b_k = a_{\tilde{n}_k}.$$

BEMERKUNGEN.

- Die streng monoton steigenden Folgen $(\tilde{n}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit Werten in $\mathbb{N}$ sind genau die Teilfolgen von $(n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Für jede Teilfolge $(\tilde{n}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von $\mathrm{id} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ enthält $\tilde{n}(\mathbb{N})$ unendlich viele Elemente. Umgekehrt gibt es zu jeder unendlichen Teilmenge $A$ von $\mathbb{N}$ genau eine Teilfolge $(\tilde{n}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von id mit $\tilde{n}(\mathbb{N}) = A$.
- Alle Definitionen und Aussagen gelten sinngemäß auch für $\mathbb{N}_0$ als Indexmenge.

BEISPIELE. $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$, $(a_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$, $(a_{k^2})_{k\in\mathbb{N}}$ sind Teilfolgen von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

ÜBUNG. Sind $(a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}_0}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_{n-1})_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_{2^n})_{n\in\mathbb{N}_0}$, $(a_{n!})_{n\in\mathbb{N}_0}$, $(a_{n^n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ Teilfolgen von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$?

SATZ 4.6.

(i) $a_n \to a \implies \forall (b_k) : \big((b_k) \text{ ist TF von } (a_n) \Rightarrow b_k \to a\big)$.

(ii) $a$ ist HW von $(a_n) \iff \exists (b_k) : \big((b_k) \text{ ist TF von } (a_n) \wedge b_k \to a\big)$. (V14)

*Beweis.*

(i) Sei $\epsilon > 0$. Dann ist die Menge $\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \in \mathrm{B}_\epsilon(a)\}$ endlich. Ist $b_k = a_{\tilde{n}_k}$. so ist auch $|\{k \in \mathbb{N} \mid b_k \in \mathrm{B}_\epsilon(a)\}| = |\{\tilde{n}_k \in \mathbb{N} \mid a_{\tilde{n}_k} \in \mathrm{B}_\epsilon(a)\}| \le |\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \in \mathrm{B}_\epsilon(a)\}| < \infty$.

(ii) "$\Longleftarrow$": Gelte $a_{n_k} \to a$. Sei $\epsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}_0$ beliebig. Es gibt ein $K \in \mathbb{N}$, so dass für alle $k \ge K$ gilt $|a_{n_k} - a| < \epsilon$. Wegen $n_k \ge k$ wähle $k \ge N$. Dann ist $n := n_k \ge N$ und $|a_n - a| = |a_{n_k} - a| < \epsilon$. $a$ ist also Häufungswert von $(a_n)$.
"$\Longrightarrow$": Wähle $\tilde{n}_0 = 0$. Für $k \in \mathbb{N}_0$ sei $\tilde{n}_k$ schon gewählt. Da $a$ Häufungswert von $(a_n)$ ist gibt es zu $\tilde{n}_k{+}1$ ein $n > \tilde{n}_k$ mit $|a_n{-}a| < \frac{1}{k}$. Man setzt nun $\tilde{n}_{k+1} := n$. Damit gilt $(\tilde{n}_k)_{k\in\mathbb{N}_0} \subseteq \mathbb{N}_0$ ist streng monoton wachsend und $|a_{\tilde{n}_k} - a| < \frac{1}{k}$, d.h. $a_{\tilde{n}_k} \to a$. □

BEISPIELE.

1. $a_n = (-1)^n$. Häufungswerte sind $\pm 1$. Weitere Häufungswerte gibt es nicht, da es zu jedem $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass sich in $\mathrm{B}_\epsilon(x)$ keine Folgenglieder befinden.
2. Ist $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Aufzählung von $\mathbb{Q}$, dann sind alle reellen Zahlen Häufungswerte, denn in jeder $\epsilon$-Umgebung $\mathrm{B}_\epsilon(a)$, $a \in \mathbb{R}$, liegen unendlich viele rationale Zahlen.

ÜBUNG. Zeigen Sie: Gibt es zu jeder Teilfolge von $(a_n)$ eine Teilfolge, die gegen $a$ konvergiert, so konvergiert $(a_n)$ selbst schon gegen $a$.

LEMMA 4.7. Jede reelle Folge besitzt eine monotone Teilfolge.

*Beweis.* zu $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ setzen wir

$$M = \{n \in \mathbb{N} \,|\, \text{für alle } m \geq n \text{ gilt } a_m \leq a_n\}.$$

1. Fall $M$ hat unendlich viele Elemente. Wähle $\tilde{n}_0 \in M$ beliebig. Sei $\tilde{n}_k$ schon definiert. Dann gibt es ein $n \in M$ mit $n \geq \tilde{n}_k$. Setze $\tilde{n}_{k+1} := n$. Es gilt $a_{\tilde{n}_{k+1}} \leq a_{\tilde{n}_k}$ nach Definition von $M$. Somit ist $(a_{\tilde{n}_k})_{k \in \mathbb{N}}$ monoton fallend.
2. Fall Hat $M$ endlich viele Elemente, so setzt man $\tilde{n}_0 = \max M + 1$ (bzw. $\tilde{n} = 0$ falls $M = \emptyset$. Sei nun $\tilde{n}_k$ definiert mit $\tilde{n}_k > \max M$. Da $\tilde{n}_k \notin M$ gibt es einen Index $\tilde{n}_{k+1} > \tilde{n}_k$ mit $a_{\tilde{n}_{k+1}} > a_{\tilde{n}_k}$. Die so definerte Folge $(a_{\tilde{n}_k})$ ist also (sogar streng) monoton wachsend. □

SATZ 4.8 (**Satz von Bolzano-Weierstraß**). Jede beschränkte Folge besitzt mindestens einen Häufungswert.

*Beweis.* Wir betrachten zunächst eine reelle Folge $(a_n)$. Nach dem vorhergehenden Lemma besitzt $(a_n)$ eine monotone (fallend oder steigend) Teilfolge $(a_{n_k})$, die wie $(a_n)$ beschränkt ist. Somit ist $(a_{n_k})$ konvergent und der Grenzwert ist ein Häufungswert von $(a_n)$.
Ist $(a_n)$ eine beschränkte komplexe Folge, so betrachten wir zunächst die Folge der Realteile, $x_n := \mathrm{Re}(a_n)$, die als beschränkte reelle Folge, wie gerade gezeigt, eine (gegen ein $x \in \mathbb{R}$) konvergente Teilfolge $(x_{\tilde{n}_k})$ enthält. Auch die Teilfolge der Imaginärteile $y_k := \mathrm{Im}(a_{\tilde{n}_k})$ besitzt als beschränkte Folge eine (gegen $y \in \mathbb{R}$) konvergente Teilfolge $(y_{\tilde{k}_l})$. Insgesamt ist die Teilteilfolge $(a_{\tilde{n}_{\tilde{k}_l}})$ konvergent gegen $x + \mathrm{i}y$. □

SATZ 4.9. Jede Cauchy-Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \subseteq \mathbb{C}$ ist konvergent.

*Beweis.* Zunächst ist jede Cauchy-Folge beschränkt: Denn zu $\epsilon = 1$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}_0$, so dass $|a_n - a_m| < 1$ für alle $m, n \geq N$. Insbesondere ist $|a_n - a_N| < 1$ für alle $n \geq N$. Somit ist $(a_n)$ auf jeden Fall beschränkt durch $\max\{|a_0|, \dots, |a_{N-1}|, |a_N| + 1\}$.
Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß besitzt jede beschränkte komplexe Folge eine konvergente Teilfolge, $a_{\tilde{n}_k} \to a \in \mathbb{C}$.

Es bleibt $a_n \to a$ zu zeigen.
Zu $\epsilon > 0$ gibt es, da $(a_n)$ eine Cauchy-Folge ist, ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a_m| < \frac{\epsilon}{2}$ ist, für alle $m, n \geq N$. Außerdem gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, so dass $m := \tilde{n}_k > N$ ist und $|a_m - a| < \frac{\epsilon}{2}$. Insgesamt folgt für alle $n \geq N$:

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_m| + |a_m - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Also konvergiert $(a_n)$ gegen dieses $a$. □

BEMERKUNG. Es folgt sofort die Aussage:

Jede reelle Cauchy-Folge besitzt einen Grenzwert in $\mathbb{R}$.

Man nennt diese Eigenschaft die **Vollständigkeit bezüglich Cauchy-Folgen**. Hier beruhte der Beweis letzlich auf dem Supremumsprinzip. Man kann zeigen, dass das Supremumsprinzip, das Prinzip der Intervallschachtelung und die Cauchy-Vollständigkeit jeweils zu einander äquivalente Bedingungen für die Vollständigkeit der reellen Zahlen sind.

## 4.4. Limes Superior und Limes Inferior

BEMERKUNGEN.

- Ist die Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ nach oben unbeschränkt, so setzt man $\sup A = +\infty$. Außerdem setzt man $\sup \emptyset = -\infty$.
- Ist die Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ nach unten unbeschränkt, so setzt man $\inf A = -\infty$. Außerdem setzt man $\inf \emptyset = +\infty$.
- Auf $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, dem Wertebereich von ulim, definiert man eine Ordnung, die die Ordnung auf $\mathbb{R}$ erweitert durch $-\infty < a < b < +\infty$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.
- Sei $(a_n)$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Dann ist die durch

  $$\overline{a}_n := \sup\{a_k : k \geq n\} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

  definierte Folge monoton fallend und die durch

  $$\underline{a}_n := \inf\{a_k : k \geq n\} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

  definierte Folge monoton steigend. Außerdem gilt $\underline{a}_n \leq a_n \leq \overline{a}_n$.

DEFINITION 4.4. Für eine beliebige Folge $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ definiert man

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \operatorname*{ulim}_{n\to\infty} \sup\{a_k : k \geq n\},$$
$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \operatorname*{ulim}_{n\to\infty} \inf\{a_k : k \geq n\},$$

als **Limes Superior** und **Limes Inferior** der Folge $(a_n)$.

(V15) BEISPIELE.

- Für $a_n = -n$, $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\overline{a}_n = \sup\{a_k : k \geq n\} = -n,$$
$$\underline{a}_n = \inf\{a_k : k \geq n\} = -\infty$$

  also gilt $\limsup_{n\to\infty} a_n = -\infty$, $\liminf_{n\to\infty} a_n = -\infty$.
- Für die Folge mit $a_n = (-1)^n(1+\frac{1}{n})$, $n \in \mathbb{N}^*$, gilt:

$$\overline{a}_n = \sup\{a_k : k \geq n\} = \begin{cases} 1+\frac{1}{n}, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ 1+\frac{1}{n+1}, & \text{falls } n \text{ ungerade,} \end{cases}$$
$$\underline{a}_n = \inf\{a_k : k \geq n\} = \begin{cases} -(1+\frac{1}{n}), & \text{falls } n \text{ ungerade,} \\ -(1+\frac{1}{n+1}), & \text{falls } n \text{ gerade,} \end{cases}$$

  also gilt $\limsup_{n\to\infty} a_n = 1$, $\liminf_{n\to\infty} a_n = -1$.

BEMERKUNGEN.

- Ist $(a_n)$ nach oben unbeschränkt, so ist $\limsup_{n\to\infty} a_n = +\infty$ (da die Menge $\{a_k : k \geq n\}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ unbeschränkt ist, d.h. $\sup\{a_k : k \geq n\} = +\infty$).
- Konvergiert $(a_n)$ uneigentlich nach $-\infty$, so ist $\limsup_{n\to\infty} a_n = -\infty$ (da die Folge der oberen Schranken $\overline{a}_n$ nach unten unbeschränkt ist).

SATZ 4.10. Ist $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt, so ist $\limsup_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$ der größte Häufungswert von $(a_n)$ und $\liminf_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$ der kleinste.

*Beweis.* Sei $(a_n)$ beschränkt. Dann ist $a := \limsup_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$ ein Häufungswert der Folge, denn zu beliebigem $\epsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ gibt es wegen $a = \lim_{n\to\infty} \overline{a}_n$ ein $n \geq N$, so dass $0 \leq \overline{a}_n - a < \epsilon$ ist. Hierzu gibt es ein $k \geq n$ mit $\overline{a}_n - \epsilon < a_k \leq \overline{a}_n$ auf Grund der Definition von $\overline{a}_n$. Für dieses $k \geq N$ gilt also $|a_k - a| < \epsilon$.
Sei $b \in \mathbb{R}$ ein beliebiger Häufungswert von $(a_n)$. Wir zeigen $b \leq a$.
Zu beliebigem $\epsilon > 0$ gilt: Zu jedem $N \in \mathbb{N}$ gibt es ein $n \geq N$ mit $a_n > b - \epsilon$. Also ist auch $\overline{a}_n \geq b - \epsilon$. Gäbe es ein $N$ mit $\overline{a}_N < b - \epsilon$ wäre das ein Widerspruch wegen der Monotonie von $(\overline{a}_n)$. Somit gilt auch $a = \lim_{n\to\infty} \overline{a}_n \geq b - \epsilon$. Dies gilt für alle $\epsilon > 0$, also folgt $a \geq b$.
Entsprechend gilt die Aussage für lim inf. □

## 4.5. Reihen

Zu einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ wird die Folge ihrer Teilsummen

$$a_0+a_1+a_2+\cdots := \sum_{n=0}^{\infty} a_n := \Big(\sum_{k=0}^{n} a_k\Big)_{n\in\mathbb{N}_0} = (a_0, a_0+a_1, a_0+a_1+a_2, \dots)$$

als **Reihe** bezeichnet. Ist diese, auch **Partialsummenfolge** genannte, Reihe konvergent, so wird auch der Grenzwert der Folge mit $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ bezeichnet.

BEISPIELE.

- Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ steht für die Folge $(\frac{1}{1\cdot 2}, \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}, \dots)$. Wir bestimmen ihren Grenzwert durch Auswerten der Partialsummen:
$$\begin{aligned} s_n &:= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} \\ &= (1+\tfrac{1}{2}+\cdots+\tfrac{1}{n}) \\ &\quad -(\tfrac{1}{2}+\cdots+\tfrac{1}{n}+\tfrac{1}{n+1}) = 1-\frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$
  Somit gilt für den Grenzwert
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1.$$
- Sei $q \in \mathbb{C}$. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ heißt **geometrische Reihe**. Sie ist genau dann konvergent, wenn $|q| < 1$ ist. In diesem Fall gilt
$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

  *Beweis.* Für die Folge der Partialsummen $(s_n)$ gilt im Fall $q \neq 1$ die geometrische Summenformel,
$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$
  Da die geometrische Folge $(q^n)$ für $q \neq 1$ genau dann konvergent ist (gegen 0), wenn $|q| < 1$, folgt in diesem Fall $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-q}$. Andernfalls ist $(s_n)$ nicht konvergent. Im Fall $q = 1$ gilt $s_n = n + 1$, also auch keine Konvergenz. □

- Die **harmonische Reihe** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ strebt gegen $+\infty$.

*Beweis.* Die Folge der Partialsummen ist offensichtlich monoton wachsend. Wir zeigen, dass sie auch unbeschränkt ist. Sei $C > 0$. Setze $m := \lfloor 2C \rfloor + 1 > 2C$ und $n = 2^m$. Dann ist die $n$-te Partialsumme

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \tfrac{1}{2} + \underbrace{(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4})}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{(\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8})}_{\geq \frac{1}{2}} + \cdots + \underbrace{(\tfrac{1}{2^{m-1}+1} + \cdots + \tfrac{1}{2^m})}_{\geq \frac{1}{2}}$$
$$\geq 1 + m \cdot \tfrac{1}{2} > C.$$

SATZ 4.11. Für konvergente Reihen $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$, $n_0 \in \mathbb{N}_0$, $\lambda \in \mathbb{C}$ gelten die Rechenregeln

(i) $\sum_{n=n_0}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n + \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$

(ii) $\sum_{n=n_0}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$

*Beweis.* Folgt direkt aus dem Grenzwertkalkül der zugehörigen Partialsummenfolgen. □

SATZ 4.12 (**Leibniz-Kriterium**). Ist $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ eine **alternierende Folge** (d.h. $c_n c_{n+1} < 0$ für alle $n$), so dass $(|c_n|)$ eine *monotone* Nullfolge ist, dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n =: s \in \mathbb{R}$ und es gilt

$$\Big| \sum_{n=1}^{N} c_n - s \Big| \leq |c_{N+1}|.$$

*Beweis.* Ohne Einschränkung sei $c_n = (-1)^{n+1} a_n$ mit der monoton fallenden Nullfolge $(a_n)$. Dann gilt für die Partialsummenfolge

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k,$$

Mit $\overline{s}_n = \sup\{s_k : k \geq n\}$ (monoton fallend) und $\underline{s}_n = \inf\{s_k : k \geq n\}$ (monoton wachsend) gilt $\underline{s}_n \leq s_n \leq \overline{s}_n$. Genauer,

$$\text{für } n \text{ gerade:} \quad \overline{s}_n = \overline{s}_{n+1} = s_{n+1} = \underline{s}_n + a_{n+1},$$
$$\text{für } n \text{ ungerade:} \quad \underline{s}_n = \underline{s}_{n+1} = s_{n+1} = \overline{s}_n - a_{n+1}.$$

In jedem Fall gilt $\overline{s}_n - \underline{s}_n = a_{n+1} \to 0$. Die Intervalle $[\underline{s}_n, \overline{s}_n]$ bilden also eine Intervallschachtelung, was auch die Abschätzung beweist. □

BEISPIEL. Die **alternierende harmonische Reihe**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \cdots$$

ist nach dem Leibniz-Kriterium konvergent. Ihren Grenzwert (es ist $\ln 2$) werden wir später identifizieren.

SATZ 4.13. Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent, so ist $(a_n)$ eine Nullfolge.

*Beweis.* Sei also die Folge der Teilsummen, $s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$ konvergent. Nach dem Cauchy-Kriterium gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{R}$, so dass insbesondere (mit $n = m + 1$) für alle $m \geq N$ gilt:

$$|a_{m+1}| = |s_{m+1} - s_m| < \epsilon$$

Somit ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Nullfolge. □

BEMERKUNG. Die Divergenz der harmonischen Reihe zeigt, dass der umgekehrte Schluss im allgemeinen nicht richtig ist.

DEFINITION 4.5 (**Absolute Konvergenz**).

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ ist } \textbf{absolut konvergent} :\Longleftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \text{ ist konvergent.}$$

LEMMA 4.14. Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent.

*Beweis.* Nach dem Cauchy-Kriterium für die Partialsummenfolge $\sum_{k=0}^{n} |a_k|$ gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m, n \geq N$ gilt

$$\sum_{k=m+1}^{n} |a_k| < \epsilon.$$

Daher gilt auch mit $s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$ für alle $m, n \geq N$

$$|s_n - s_m| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| < \epsilon.$$

$(s_n)$ ist also auch Cauchy-Folge und daher konvergent. □

SATZ 4.15 (**Majorantenkriterium**).
Sei $(a_n)_{\mathbb{N}_0}$ eine komplexe Folge mit $|a_n| \leq b_n \in \mathbb{R}$ für alle $n \geq n_0$, $n_0 \in \mathbb{N}_0$, und ist $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergent, dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

*Beweis.* Zu $\epsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, ohne Einschränkung $N \geq n_0$, so dass für alle $m, n \geq N$ gilt

$$0 \leq \sum_{k=m+1}^{n} b_k < \epsilon.$$

Dann ist auch $\sum\limits_{k=m+1}^{n} |a_k| \leq \sum\limits_{k=m+1}^{n} b_k < \epsilon$, was die Konvergenz von $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$, d.h. die absolute Konvergenz von $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$ beweist. □

(V16)

SATZ 4.16 (**Quotientenkriterium**). Sei $(a_n) \subseteq \mathbb{C}$ und $a_n \neq 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Existiert der Limes $q := \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| n \in \mathbb{N}$, dann gilt

(i) Ist $q < 1$, dann ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

(ii) Ist $q > 1$, dann ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent.

*Beweis.* zu (i): Zu $q < 1$ definiere $p := \frac{1+q}{2} < 1$. Wegen $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to q$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < p$ für alle $n \geq N$, oder $|a_{n+1}| < p|a_n|$. Per Induktion folgt $|a_{N+l}| < p^l |a_N|$. Mit $b_n := p^{n-N}|a_N|$ gilt nach Konstruktion $|a_n| \leq b_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}_0$. Da $\sum\limits_{n=N}^{\infty} b_n = |a_N| \sum\limits_{l=0}^{\infty} p^l = \frac{|a_N|}{1-p} \in \mathbb{R}$, folgt die Behauptung aus dem Majorantenkriterium.

zu (ii): Aus $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to q > 1$ folgt, dass es ein $N \in \mathbb{N}_0$ gibt, so dass für alle $n \geq N$ auch $|a_{n+1}| > |a_n|$ gilt. Somit kann $(|a_n|)$ und damit $(a_n)$ keine Nullfolge sein, d.h. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ ist divergent. □

BEMERKUNG. Der Satz kann für beliebige Folgen verschärft werden zu:

- $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent, wenn $\limsup\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ ist.
- $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ ist divergent, wenn $\liminf\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ ist.

Hierbei ersetzt man die Folgenglieder, die eine Division durch 0 enthalten durch $+\infty$.

BEISPIELE. • $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ konvergieren nach dem Quotientenkriterium absolut.

SATZ 4.17 (**Wurzelkriterium**).
Zur Folge $(a_n) \subseteq \mathbb{C}$ sei $q := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in [0, +\infty]$. Dann gilt:

(i) Ist $q < 1$, dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

(ii) Ist $q > 1$, dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent.

*Beweis.* Ist $q < 1$, so setzt man wieder $p := \frac{1+q}{2}$. Da $q$ größter Häufungswert von $(\sqrt[n]{|a_n|})$ ist, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\sqrt[m]{|a_m|} < p$ für alle $m \geq N$, bzw, $|a_m| < p^m$. Somit gilt für alle $n \geq N$

$$\sum_{k=N}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=N}^{n} p^k \leq p^N \sum_{k=0}^{\infty} p^k = \frac{p^N}{1-p} < \infty.$$

Nach dem Majorantenkriterium folgt absolute Konvergenz der Reihe.
Ist $q > 1$, so gibt es, da $q$ Häufungswert von $(\sqrt[n]{|a_n|})$ ist, unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt[n]{|a_n|} > 1$, i.e. $|a_n| > 1$. Also ist $(a_n)$ keine Nullfolge. $\square$

BEISPIEL. • $\sum_{n=1}^{\infty} n^k z^n$ ist für alle $k \in \mathbb{Z}$ absolut konvergent, falls $|z| < 1$ und divergent, falls $|z| > 1$, denn $\sqrt[n]{n^k |z|^n} = \sqrt[n]{n}^k |z| \xrightarrow{n\to\infty} |z|$.

BEMERKUNGEN.

- Quotienten- und Wurzelkriterium beruhen beide auf dem Vergleich mit der geometrischen Reihe. Das Quotientenkriterium ist, falls anwendbar, häufig einfacher als das Wurzelkriterium, welches dafür allgemeiner ist, wie das Beispiel der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3+(-1)^n)^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4^4} + \cdots$$

zeigt, den mit $a_n = \frac{1}{(3+(-1)^n)^n}$ ist $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ unbeschränkt, hat aber gleichzeitig 0 als Häufungswert, das Quotientenkriterium kann also keine Aussage treffen. Dagegen besitzt $\sqrt[n]{|a_n|}$ die beiden Häufungswerte $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{2}$.
- Im Fall $q = 1$ ist sowohl absolute Konvergenz, als auch Divergenz möglich, wie die divergente harmonische Reihe und die absolut konvergente Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 + 1 < \infty$$

zeigen.

SATZ 4.18. Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe und $k : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ eine Bijektion, so gilt für die Umordnung der Summanden $a'_n := a_{k_n}$, $\sum_{n=0}^{\infty} a'_n$ ist ebenfalls konvergent mit dem gleichen Grenzwert.

*Beweis.* Seien $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ und $s'_n = \sum_{k=0}^{n} a'_k$ die Partialsummen der Reihe und ihrer Umordnung. Wegen der Absoluten Konvergenz der Reihe gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}_0$, so dass für $n \geq m \geq N$ immer

$$\sum_{k=m+1}^{n} |a_k| < \frac{\epsilon}{2}$$

gilt. Man wähle nun $p \in \mathbb{N}_0$ so groß, dass die Zahlen $0, 1, \ldots, N$ in $\{k_0, k_1, \ldots, k_p\}$ enthalten sind (z.B. $p = \max\{k^{-1}(n) : n = 0, \ldots, N\}$). Für alle $n \geq p$ heben sich mindestens die Zahlen $a_0, \ldots, a_N$ in der Differenz $s_n - s'_n$ gegenseitig auf. Somit gilt $|s'_n - s_n| < \epsilon$. Da $(s_n)$ konvergiert, muss auch $(s'_n)$ gegen den gleichen Grenzwert konvergieren. □

BEMERKUNGEN.

- Für eine konvergente Reihe, die nicht absolut konvergent ist, gilt diese Umordnungsinvarianz nicht: Für die alternierende harmonische Reihe
$$s := 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} \pm \cdots$$
gilt $s < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$. Für die Umordnung
$$s' := \underbrace{1 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2}}_{=\frac{5}{6}} + \underbrace{\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{4}}_{\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}>0} + \underbrace{\tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{11} - \tfrac{1}{6}}_{\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{12}-\frac{1}{12}>0} + \cdots,$$
also $s' > \frac{5}{6}$. (Man kann $s = \ln 2$ und $s' = \frac{3}{2}\ln 2$ zeigen.)
- Der **Riemannsche Umordnungssatz** besagt, dass eine beliebige konvergente aber nicht absolut konvergente Reihe durch geeignete Umordnung jeden beliebigen (auch uneigentlichen) Grenzwert annehmen kann. Dies liegt daran, dass in diesem Fall sowohl die Reihe der positiven Summanden, als auch die Reihe der negativen Summanden, jeweils für sich betrachtet unbeschränkt sind.

KAPITEL 5

# Potenzreihen und elementare Funktionen

## 5.1. Potenzreihen

DEFINITION 5.1. Zu $(a_n) \subseteq \mathbb{C}$ und $z_0 \in \mathbb{C}$ heißt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

die **Potenzreihe** mit Koeffizienten $(a_n)$ und Entwicklungspunkt $z_0$.

$$R := \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \in [0, +\infty]$$

heißt der **Konvergenzradius** der Potenzreihe.

BEMERKUNGEN.

- Ist $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$, so soll obige Definition $R = 0$ bedeuten. Gilt $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, so setzt man $R = \infty$.
- Wenn die Folge $\sqrt[n]{|a_n|}$ (uneigentlich) konvergiert, so gilt natürlich schon $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \mathrm{ulim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.
- Der Konvergenzradius ist unabhängig vom Entwicklungspunkt definiert. wird er nicht explizit erwähnt, wird immer der Entwicklungspunkt $z_0 = 0$ betrachtet.

BEISPIELE.

- Jedes komplexe Polynom $\sum\limits_{n=0}^{N} a_n z^n$, $N \in \mathbb{N}_0$, ist eine Potenzreihe mit Ent- (V17) wicklungspunkt 0 und besitzt Konvergenzradius $R = \infty$ (für $n > N$ setzt man $a_n := 0$, somit ist $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$).
- Die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^n z^n$ hat Konvergenzradius 0, den $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^n} = +\infty$.

SATZ 5.1. Die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ mit dem Konvergenzradius $R$ konvergiert für jedes $z \in \mathrm{B}_R(z_0)$ absolut und divergiert für $|z - z_0| > R$.

*Beweis.* Nach dem Wurzelkriterium folgt wegen

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(z-z_0)^n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}|z-z_0| = \frac{|z-z_0|}{R},$$

die Behauptung, wenn man (da nur nichtnegative Zahlen auftauchen) beim letzten Gleichheitszeichen $\frac{1}{\infty} = 0$ bzw. $\frac{1}{0} = \infty$ zulässt. □

BEMERKUNGEN.

- Findet man ein ein $z \in \mathbb{C}$, für dass $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ absolut konvergiert, so gilt für den Konvergenzradius der Potenzreihe $R \geq |z|$. Besteht Konvergenz, aber keine absolute Konvergenz, so ist $R = |z|$. Bei Divergenz folgt $R \leq |z|$.
- Die Formel für den Konvergenzradius

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

nennt man auch **Cauchy-Hadamard-Formel**.

BEISPIELE.

- Die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ hat den Konvergenzradius $R = 1$. Für $|z| < 1$ gilt bekannterweise $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.
- Die **Exponentialreihe** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ hat Konvergenzradius $R = \infty$, denn nach dem Quotientenkriterium gilt für beliebiges $z \in \mathbb{C}$

$$\left|\frac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{z^n}{n!}}\right| = \frac{|z|}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0 < 1$$

- Wir definieren für $\alpha \in \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{N}_0$ den **verallgemeinerten Binomialkoeffizienten**

$$\binom{\alpha}{k} := \prod_{j=1}^{k} \frac{\alpha-(j-1)}{j} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}.$$

Somit ist $\alpha \mapsto \binom{\alpha}{k}$ ein Polynom vom Grad $k$ mit Nullstellen $0, 1, \ldots, k-1$. Die **Binomialreihe**

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k$$

ist für $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}_0$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius 1, denn

$$\left|\frac{\binom{\alpha}{k+1} z^{k+1}}{\binom{\alpha}{k} z^k}\right| = \left|\frac{\alpha-k}{k+1} z\right| = \frac{|1-\frac{\alpha}{k}|}{1+\frac{1}{k}}|z| \xrightarrow{k\to\infty} |z|,$$

woraus nach dem Quotientenkriterium absolute Konvergenz für $|z| < 1$ und Divergenz für $|z| > 1$ folgt.

SATZ 5.2 (**Summen von Potenzreihen**). Sind die Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ für ein $z \in \mathbb{C}$ konvergent, so gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n.$$

*Beweis.* Folgt sofort aus den Rechenregeln für Reihen, Satz 4.11. □

KOROLLAR 5.3.
Sei $R_a$ der Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $R_b$ der Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, dann gilt für den Konvergenzradius $R$ von $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n$:

$$R \geq \min\{R_a, R_b\}.$$

*Beweis.* Für $|z| < \min\{R_a, R_b\}$ sind beide Potenzreihen absolut konvergent und damit auch ihre Summe. □

SATZ 5.4 (**Cauchy-Produkt für Reihen**).
Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergente Reihen. Definiert man

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0,$$

so ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut konvergent und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \cdot \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n \right).$$

*Beweis.* Wir schreiben suggestiv

$$c_n = \sum_{k,l \in \mathbb{N}_0, k+l=n} a_k b_l.$$

Dann gilt für die Partialsumme

$$C_N := \sum_{n=0}^{N} c_n = \sum_{(k,l) \in \Delta_N} a_k b_l$$

mit dem Dreieck $\Delta_N = \{(k,l) \in \mathbb{N}_0^2 \mid k+l \leq N\}$. Das Produkt der Partialsummen

$$A_N := \sum_{n=0}^{N} a_n, \qquad B_N := \sum_{n=0}^{N} b_n$$

ergibt

$$A_N B_N = \sum_{(k,l)\in Q_N} a_k b_l$$

mit dem Quadrat $Q_N = \{(k,l) \in \mathbb{N}_0^2 \mid k,l \leq N\}$. Somit ist also $A_N B_N - C_N = \sum_{(k,l)\in Q_N \setminus \Delta_N} a_k b_l$. Für die Partialsummen der Beträge,

$$\tilde{A}_N := \sum_{n=0}^{N} |a_n|, \qquad \tilde{B}_N := \sum_{n=0}^{N} |b_n|,$$

erhält man entsprechend

$$\tilde{A}_N \tilde{B}_N = \sum_{(k,l)\in Q_N} |a_k|\,|b_l|$$

Wegen $Q_{\lfloor N/2 \rfloor} \subseteq \Delta_N$ gilt $Q_N \setminus \Delta_N \subseteq Q_N \setminus Q_{\lfloor N/2 \rfloor}$ und damit

$$|A_N B_N - C_N| \leq \sum_{(k,l)\in Q_N \setminus Q_{\lfloor N/2 \rfloor}} |a_k|\,|b_l| = \tilde{A}_N \tilde{B}_N - \tilde{A}_{\lfloor N/2 \rfloor} \tilde{B}_{\lfloor N/2 \rfloor} \xrightarrow{N\to\infty} 0,$$

da $(\tilde{A}_n \tilde{B}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ als Produkt zweier konvergenter Folgen selbst konvergiert. Dies zeigt $\lim_{n\to\infty} C_n = (\lim_{n\to\infty} A_n)\cdot(\lim_{n\to\infty} B_n)$. Die absolute Konvergenz, d.h., die Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$, folgt aus der Abschätzung

$$|c_n| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k|\,|b_{n-k}|$$

und der Anwendung des bisherigen Beweises auf die beiden Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ und $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|$. □

SATZ 5.5 (**Produkte von Potenzreihen**). Sind die Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ für ein $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergent, so gilt

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n.$$

*Beweis.* Für das Cauchy-Produkt der beiden Reihen gilt mit

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} (a_k z^k)(b_{n-k} z^{n-k}) = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} z^n$$

nach dem vorhergehenden Satz, dass auch $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut konvergent ist.

□

BEMERKUNG. Der Konvergenzradius des Cauchy-Produkts zweier Potenzreihen ist also wieder mindestens so groß, wie das Minimum der Konvergenzradien der beiden Faktoren.

BEISPIEL. Der Konvergenzradius des Produkts kann auch echt größer als die Konvergenzradien beider Faktoren sein, wie das folgende Beispiel zeigt:

$$\frac{2-z}{1-z} = 1 + \frac{1}{1-z} \overset{|z|<1}{=} 1 + \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 2 + z + z^2 + z^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

$$\frac{1-z}{2-z} = 1 - \frac{1}{2-z} = 1 - \tfrac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{z}{2}} \overset{|z|<2}{=} 1 - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{z}{4} - \frac{z^2}{8} - \frac{z^3}{16} - \cdots =: \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n.$$

Das Produkt dieser beiden Potenzreihen mit Konvergenzradius 1 bzw. 2 ergibt die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ mit

$$\begin{aligned} c_0 &= 1, \\ c_1 &= 2 \cdot (-\tfrac{1}{4}) + 1 \cdot \tfrac{1}{2} = 0, \\ c_2 &= 2 \cdot (-\tfrac{1}{8}) + 1 \cdot (-\tfrac{1}{4}) + 1 \cdot \tfrac{1}{2} = 0, \\ c_3 &= 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

die Konvergenzradius $\infty$ besitzt und für alle $z \in \mathbb{C}$ den Wert 1 hat.

## 5.2. Die komplexe Exponentialfunktion

(V18)

DEFINITION 5.2. Die **Exponentialfunktion** $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist definiert als der Wert der **Exponentialreihe**, die Konvergenzradius $\infty$ hat,

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

SATZ 5.6 (**Funktionalgleichung der Exponentialfunktion**).
Für beliebige $w, z \in \mathbb{C}$ gilt die Gleichung

$$\exp(w+z) = \exp(w)\exp(z).$$

*Beweis.* Wegen des unendlichen Konvergenzradius konvergieren die Potenzreihen für $\exp(w)$ und $\exp(z)$ für beliebige $w, z \in \mathbb{C}$ absolut. Somit ergibt die Cauchy-Produktformel

$$\begin{aligned}
\exp(w)\exp(z) &= \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{w^m}{m!}\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{w^k}{k!} \frac{z^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} w^k z^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(w+z)^n \\
&= \exp(w+z).
\end{aligned}$$

□

BEMERKUNGEN.

- Es gilt
$$\exp(0) = 1$$
und daher folgt für jedes $z \in \mathbb{C}$ aus $1 = \exp(z-z) = \exp(z)\exp(-z)$, dass
$$\frac{1}{\exp(z)} = \exp(-z)$$
gilt. Insbesondere ist $\exp(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
- Es gilt
$$\exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}.$$
*Begründung:* Es gilt
$$\begin{aligned}
\mathrm{e} &= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n} \cdot \frac{1}{k!} \\
&\overset{(*)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n}\right) \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \exp(1)
\end{aligned}$$
Das scheinbar harmlose Vertauschen von Grenzwert und Reihengrenzwert wird im folgenden Satz gerechtfertigt. Keinen weiteren Beweis benötigt für jedes feste $K \in \mathbb{N}_0$ die Aussage
$$\sum_{k=0}^{K} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \xrightarrow{n\to\infty} \sum_{k=0}^{K} \frac{1}{k!}.$$

- Es gilt sogar $\exp(n) = \mathrm{e}^n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$, wie man durch Induktion für $n \in \mathbb{N}_0$ und Inversenbildung sofort sieht, da für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\exp(n+1) = \exp(n)\exp(1) = \mathrm{e}^n \mathrm{e} = \mathrm{e}^{n+1},$$
$$\exp(-n) = \frac{1}{\exp(n)} = \frac{1}{\mathrm{e}^n} = \mathrm{e}^{-n}.$$

Wir definieren hier beliebige komplexe Potenzen von e durch

$$\mathrm{e}^z := \exp(z).$$

Satz 5.7 (Majorisierte Konvergenz).

Sei $\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Reihen, deren Koeffizienten für festes $k$ konvergieren, also $\forall k \in \mathbb{N}_0 : a_k^{(n)} \xrightarrow{n\to\infty} a_k$, und die beschränkt sind durch Koeffizienten $b_k$, welche eine absolut konvergente Reihe bilden, d.h., $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall k \in \mathbb{N}_0 : |a_k^{(n)}| \le b_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k < \infty$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k, \qquad \text{bzw.,} \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{n\to\infty} a_k^{(n)}.$$

*Beweis.* Nach Majorantenkriterium konvergieren wegen $|a_k| \le b_k$ die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(n)}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut.

Sei nun $\epsilon > 0$. Dazu gibt es ein $K \in \mathbb{N}_0$, so dass $\sum_{k=K+1}^{\infty} b_k < \frac{\epsilon}{3}$. Für dieses feste $K$ gilt $\sum_{k=0}^{K} a_k^{(n)} \xrightarrow{n\to\infty} \sum_{k=0}^{K} a_k$, somit gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \ge N$ gilt: $\left|\sum_{k=0}^{K}(a_k^{(n)} - a_k)\right| < \frac{\epsilon}{3}$. Somit ist für $n \ge N$

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(n)} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k\right| &\le \left|\sum_{k=0}^{K} a_k^{(n)} - \sum_{k=0}^{K} a_k\right| + \left|\sum_{k=K+1}^{\infty} a_k^{(n)} - \sum_{k=K+1}^{\infty} a_k\right| \\ &\le \left|\sum_{k=0}^{K}(a_k^{(n)} - a_k)\right| + \sum_{k=K+1}^{\infty} |a_k^{(n)}| + \sum_{k=K+1}^{\infty} |a_k| \\ &\le \frac{\epsilon}{3} + 2\sum_{k=K+1}^{\infty} b_k < \epsilon.\end{aligned}$$

□

Korollar 5.8. Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \exp(z).$$

*Beweis.* Wie oben gesehen gilt für jedes feste $k \in \mathbb{N}_0$ die Konvergenz

$$a_k^{(n)} := \binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{k!}$$

und zwar monoton wachsend. Daher ist für alle $k, n \in \mathbb{N}_0$ und festes $z \in \mathbb{C}$

$$\left|\binom{n}{k}\frac{z^k}{n^k}\right| \leq \frac{|z|^k}{k!} =: b_k.$$

Die $b_k$ sind summierbar, denn

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!} = \exp(|z|) \in \mathbb{R}.$$

Somit gilt mit majorisierter Konvergenz

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}\frac{z^k}{n^k} = \sum_{k=0}^{\infty}\lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}\frac{z^k}{n^k} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!} = \exp(z).$$

□

BEISPIEL.

- Die Vertauschbarkeit der beiden Limites ist nicht selbstverständlich. Setzt man

$$a_k^{(n)} = \begin{cases} 1 & \text{für } k = n, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

so gilt offenbar $\lim_{n\to\infty} a_k^{(n)} = 0$. Weiter ist $|a_k^{(n)}| \leq 1$. Trotzdem haben wir wegen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(n)} = 1$

$$1 = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(n)} \neq \sum_{k=0}^{\infty}\lim_{n\to\infty} a_k^{(n)} = 0.$$

Dieses Ergebnis kann man wie folgt illustrieren:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
1 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & \cdots & = & 1 \\
0 & + & 1 & + & 0 & + & 0 & + & \cdots & = & 1 \\
0 & + & 0 & + & 1 & + & 0 & + & \cdots & = & 1 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & & & & & \vdots \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \cdots & & ? \\
0 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & \cdots & = & 0
\end{array}$$

LEMMA 5.9. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\exp(x) \geq 1 + x$.

*Beweis.* Für $x \geq 0$ gilt die Abschätzung

$$1 + x \leq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots = \exp(x)$$

und damit auch $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} > 0$. Für $0 \leq x < 1$ gilt

$$\exp(x) = 1 + x + \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{6} + \cdots \leq 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x},$$

also $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \geq 1 - x$. Da für $x \geq 1$ auch $\exp(-x) > 0 \geq 1 - x$ gilt, folgt die Behauptung. □

LEMMA 5.10. Auf der reellen Achse ist die Exponentialfunktion positiv und streng monoton steigend.

*Beweis.* Die Positivität wurde schon im vorhergehenden Lemma gezeigt. Seien $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$. Dann gilt

$$\exp(y) = \exp(x)\exp(y-x) = \exp(x)(1 + (y-x)) > \exp(x). \qquad \square$$

## 5.3. Trigonometrische und hyperbolische Funktionen

DEFINITION 5.3 (**Cosinus und Sinus**). Die Funktionen $\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sind definiert durch

$$\cos(z) = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right), \qquad \sin(z) = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right).$$

SATZ 5.11. Für alle $w, z \in \mathbb{C}$ gelten

$$e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z) \qquad \textbf{(Eulersche Formel)}$$

$$\cos(z)^2 + \sin(z)^2 = 1 \qquad \textbf{(trigonometrischer Pythagoras)}$$

$$\sin(-z) = -\sin(z)$$

$$\cos(-z) = \cos(z) \qquad \textbf{(Parität)}$$

$$\sin(w+z) = \sin(w)\cos(z) + \cos(w)\sin(z)$$

$$\cos(w+z) = \cos(w)\cos(z) - \sin(w)\sin(z)$$

**(Additionstheoreme)**

*Beweis.* Die Eulersche Formel, der Trigonometrische Pythagoras und die Paritäten ergeben sich direkt durch Einsetzen der Definition von sin und cos und Ausrechnen. Die Additionstheoreme erhält man schneller durch Verwendung der eulerschen Formel und der Paritäten aus den beiden Identitäten

$$\begin{aligned}
\cos(w+z) + i\sin(w+z) &= e^{i(w+z)} = e^{iw}e^{iz} \\
&= (\cos(w) + i\sin(w))(\cos(z) + i\sin(z)), \\
\cos(w+z) - i\sin(w+z) &= e^{-i(w+z)} = e^{-iw}e^{-iz} \\
&= (\cos(w) - i\sin(w))(\cos(z) - i\sin(z)),
\end{aligned}$$

Addition und Subtraktion dieser beiden Gleichungen ergibt jeweils das Additionstheorem für cos bzw. sin. □

(V19)

SATZ 5.12. Sinus und Cosinus lassen sich durch folgende Potenzreihen mit jeweils unendlichem Konvergenzradius darstellen:

$$\sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \mp \cdots,$$
$$\cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} \mp \cdots.$$

*Beweis.* Bei Subtraktion und Addition der beiden Potenzreihen für $e^{iz}$ und $e^{-iz}$,

$$e^{iz} = 1 + iz - \frac{z^2}{2!} - i\frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + i\frac{z^5}{5!} + \cdots,$$
$$e^{-iz} = 1 - iz - \frac{z^2}{2!} + i\frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} - i\frac{z^5}{5!} + \cdots,$$

fallen jeweils die geraden bzw. ungeraden Potenzen von $z$ weg und es ergibt sich $2i\sin(z)$ bzw. $2\cos(z)$. □

SATZ 5.13. Für $x \in \mathbb{R}$ ist $(\cos(x), \sin(x)) \in \mathbb{R}^2$ auf dem Einheitskreis und es gilt

$$\cos(x) = \mathrm{Re}(e^{ix}), \qquad \sin(x) = \mathrm{Im}(e^{ix}).$$

*Beweis.* Für $x \in \mathbb{R}$ erhält man durch vergleich der Potenzreihen von $e^{ix}$ und $e^{-ix}$ sofort die Identität

$$\overline{e^{ix}} = e^{-ix}.$$

Somit ergibt sich zum einen $\cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + \overline{e^{ix}}\right) = \mathrm{Re}(e^{ix})$ und zum anderen $\sin(x) = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - \overline{e^{ix}}\right) = \mathrm{Im}(e^{ix})$. □

LEMMA 5.14. Auf dem Intervall $[0, 2]$ ist der Sinus nichtnegativ und der Cosinus streng monoton fallend mit $\cos(0) > 0$ und $\cos(2) < 0$.

*Beweis.* Für $0 \le x \le 2$ sind die Beträge der Reihenglieder des Sinus monoton fallend,

$$\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1} \frac{2^{3k+1}}{(2k+1)!}.$$

Nach dem Leibniz-Kriterium gilt also für $x \in [0, 2]$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \cdots \in [x - \tfrac{x^3}{6}, x]$$

Insbesondere gilt wegen $\sqrt{6} > 2$ für $0 < x \le 2$

$$\sin(x) \ge \tfrac{x}{6}(6 - x^2) > 0.$$

Für den Cosinus gilt dann, falls $0 < y < x \leq 2$ ist, wegen der Additionstheoreme

$$\begin{aligned}\cos(x) - \cos(y) &= \cos\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}\right) - \cos\left(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}\right)\\ &= -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) < 0.\end{aligned}$$

Der Cosinus ist also auf $(0, 2]$ streng monoton fallend. Für $x \in [0, 2]$ ist auch die alternierende Cosinus-Reihe betragsmäßig monoton fallend. daher folgt

$$\begin{aligned}\cos(x) &\leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24},\\ \cos(2) &\leq -\frac{1}{3} < 0.\end{aligned}$$

Zusammen mit $\cos(0) = 1$ ergibt sich streng monotones Fallen auf $[0, 2]$ und damit die Behauptung. □

Definition 5.4 (**Kreiszahl $\pi$**). Man definiert die Kreiszahl $\pi$ durch

$$\pi := 2\sup\{x \in [0, 2] \mid \cos(x) > 0\}.$$

Bemerkungen.

- Wegen $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ für $x \in [0, 2]$ folgt wegen der Nullstellen dieser Polynome
$$\begin{aligned}2\sqrt{2} \leq \pi &\leq 2\sqrt{2\big(3 - \sqrt{3}\big)},\\ 2.8284 \leq \pi &\leq 3.1850.\end{aligned}$$
- Wir können jetzt noch nicht zeigen, dass $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ gilt (so hat z.B. die monoton fallende Funktion $\mathbb{R} \ni x \mapsto \frac{1}{2} - \operatorname{sgn}(x)$ keine Nullstelle). Dazu benötigen wir erst den Begriff der Stetigkeit von Funktionen, die die Existenz von Zwischenwerten sich ändernder Funktionen garantiert.

Definition 5.5 (**Cosinus hyperbolicus und Sinus hyperbolicus**). Die Funktionen $\cosh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $\sinh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sind definiert durch

$$\cosh(z) = \frac{1}{2}\big(e^z + e^{-z}\big), \qquad \sinh(z) = \frac{1}{2}\big(e^z - e^{-z}\big).$$

Satz 5.15. Für alle $w, z \in \mathbb{C}$ gelten

$$\cosh(z)^2 - \sinh(z)^2 = 1 \qquad \textbf{(hyperbolischer Pythagoras)}$$

$$\sinh(-z) = -\sinh(z)$$

$$\cosh(-z) = \cosh(z) \qquad \textbf{(Parität)}$$

$$\sinh(w + z) = \sinh(w)\cosh(z) + \cosh(w)\sinh(z)$$

$$\cosh(w + z) = \cosh(w)\cosh(z) - \sinh(w)\sinh(z)$$

**(Additionstheoreme)**

*Beweis.* Analog zum Beweis für die entsprechenden Eigenschaften von sin und cos. □

SATZ 5.16. Sinus und Cosinus hyperbolicus lassen sich durch folgende Potenzreihen mit jeweils unendlichem Konvergenzradius darstellen:

$$\sinh(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} z^{2k+1} = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots ,$$

$$\cosh(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} z^{2k} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots .$$

*Beweis.* Analog zum Beweis für die entsprechenden Eigenschaften von sin und cos. □

KAPITEL 6

# Stetige Funktionen

## 6.1. Stetigkeit für reelle Funktionen

DEFINITION 6.1 (**Stetigkeit**). Seien $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in D$. Dann heißt $f$ **stetig am Punkt** $x_0$, wenn gilt:

$$\forall \epsilon{>}0\ \exists \delta{>}0\ \forall x{\in}D : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

$f$ heißt **stetig**, falls $f$ an jedem Punkt $x_0 \in D$ stetig ist.

BEISPIELE.

- Die konstante Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = c \in \mathbb{R}$, ist stetig. (Zu $\epsilon > 0$ wähle $\delta = 1$.)
- Die Identität $\mathrm{id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}(x) = x$, ist stetig. (Zu $\epsilon > 0$ wähle $\delta = \epsilon$.)
- Die Signum-Funktion $\mathrm{sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathrm{sgn}(x) = \frac{x}{|x|}$ für $x \neq 0$, $\mathrm{sgn}(0) = 0$, ist im Ursprung nicht stetig. (Zu $\epsilon = \frac{1}{2}$ gibt es kein solches $\delta$.)
- $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{sgn}(x)$, ist stetig. (Zu $\epsilon > 0$ wähle $\delta = 1$.)

SATZ 6.1 (**Folgenstetigkeit**). Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist stetig bei $a \in D$ genau dann, wenn für jede gegen $a$ konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D$ auch $\big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(a)$ konvergiert.

*Beweis.* "$\Longrightarrow$" Sei $f$ stetig bei $a$ und $(x_n) \subseteq D$ mit $x_n \to a$. Sei $\epsilon > 0$. Dazu existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in D$ gilt:

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Sei nun $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ gilt: $|x_n - a| < \delta$. Dann gilt für alle $n \geq N$ eben auch $|f(x_n) - f(a)| < \epsilon$. Dies zeigt $f(x_n) \to f(a)$.
"$\Longleftarrow$" Sei $f$ nicht stetig in $a$. Es gibt also ein $\epsilon > 0$, so dass as für jedes $\delta > 0$ jeweils ein $x \in D$ gibt mit $|x - a| < \delta$, aber $|f(x) - f(a)| \geq \epsilon$. Zu $\delta = \frac{1}{n}$ gibt es also jeweils ein solches $x_n$, $n \in \mathbb{N}$. Somit gilt einerseits $|x_n - a| < \frac{1}{n}$, also $x_n \to a$, andererseits aber $|f(x_n) - f(a)| \geq \epsilon$ und damit $f(x_n) \not\to f(a)$. $\square$ (V20)

BEMERKUNGEN.

- Bei Stetigkeit vertauscht der Limes mit der Funktionsanwendung
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n),$$
falls $f$ an der Stelle $\lim_{n\to\infty} x_n$ stetig ist.

- Die Existenz von Unstetigkeitsstellen lässt sich so durch Angabe geeigneter Folgen leicht belegen.
- Für $A \subseteq \mathbb{R}$ definiert man die **charakteristische Funktion (oder Indikatorfunktion) von** $A$, $\chi_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in A, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

BEISPIELE.

- Die charakteristische Funktion von $]a, b]$ mit $a < b$, $\chi_{]a,b]} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist unstetig bei $a$ und $b$, wie man an den Folgen $a \pm \frac{1}{n}$ und $b \pm \frac{1}{n}$ erkennt.
- Die **Dirichlet-Funktion**.
  Die charakteristische Funktion von $\mathbb{Q}$, $\chi_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist nirgends stetig. (Übung)
- Die **Thomaesche Funktion**.
  Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{q}$, wenn $x = \frac{p}{q}$ mit $p, q$ teilerfremd und 0 sonst, ist stetig bei $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und unstetig bei $x \in \mathbb{Q}$. (Übung)

ÜBUNG. Geben Sie jeweils eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, die nur im Ursprung unstetig, bzw., stetig ist.

*Lösung.* sgn $: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfüllt die erste, $x \mapsto x\chi_{\mathbb{Q}}(x)$ erfüllt die zweite Bedingung.

BEMERKUNG. Es gibt keine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die genau in den rationalen Zahlen stetig ist.

*Beweisidee.* Eine solche Funktion kann es nicht geben, denn die Menge der Stetigkeitspunkte von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist eine sogenannte $G_\delta$-Menge, sie kann als Durchschnitt abzählbar vieler offener Mengen $A_n$, $n \in \mathbb{N}$, dargestellt werden, wobei man

$$A_n := \{x \in \mathbb{R} \mid \exists \delta{>}0 \ \forall y, z{\in}\mathrm{B}_\delta(x) : |f(y) - f(z)| < \tfrac{1}{n}\}$$

setzen kann. Es ist $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \bigcap_{q \in \mathbb{Q}} (\mathbb{R} \setminus \{q\})$, also eine (dichte) $G_\delta$-Menge. Da der Durchschnitt zweier (sogar abzählbar vieler) dichter $G_\delta$-Mengen wieder dicht ist (Bairescher Kategoriensatz) und $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap \mathbb{Q}$ sicher nicht dicht ist, kann $\mathbb{Q}$ keine $G_\delta$-Menge sein.

BEMERKUNG. Für $f, g : D \to \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, sind die Funktionen

$$f + g, \quad \lambda f, \quad fg : D \to \mathbb{R}, \quad \frac{f}{g} : D \setminus g^{-1}(\{0\}) \to \mathbb{R},$$

definiert durch

$$(f{+}g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (\lambda f)(x) = \lambda f(x),$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x), \qquad \left(\tfrac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{falls } g(x) \neq 0.$$

SATZ 6.2 (**Kombination stetiger Funktionen**). Sind $f, g : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, stetig bei $a \in D$, $\lambda \in \mathbb{R}$, dann sind auch $f+g$, $\lambda f$, $fg$, $\frac{f}{g}$ stetig bei $a$. Letztere nur falls $g(a) \neq 0$ ist. Ist weiterhin $h : E \to \mathbb{R}$ stetig bei $f(a)$, mit $f(D) \subseteq E \subseteq \mathbb{R}$, dann ist auch $h \circ f : D \to \mathbb{R}$ stetig bei $a$.

*Beweis.* Sei $(x_n) \subseteq D$ mit $x_n \to a$. Somit gilt auch $f(x_n) \to f(a)$ und $g(x_n) \to g(a)$. Mit dem Grenzwertkalkül folgt z.B.

$$(f+g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n) \to f(a) + g(a) = (f+g)(a),$$

und damit die Stetigkeit von $f+g$ bei $a$ und analog für $\lambda f$, $fg$, $\frac{f}{g}$. Schließlich gilt $f(x_n) \in E$ und wir erhalten wegen der Stetigkeit von $h$ bei $f(a)$

$$(h \circ f)(x_n) = h(f(x_n)) \to h(f(a)) = (h \circ f)(a),$$

also ist auch $h \circ f$ stetig bei $a$. □

BEISPIELE.

- Polynomfunktionen $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ mit $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$ sind stetig.
- Ist $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine weitere Polynomfunktion, dann ist die **gebrochen rationale Funktion** $\frac{p}{q} : \mathbb{R} \setminus q^{-1}(\{0\}) \to \mathbb{R}$ stetig.
- Die reelle Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig.

  *Beweis.* Für eine Nullfolge $(x_n)$ folgt aus $1 + x \leq \exp(x) \leq \frac{1}{1-x}$ für $|x| < 1$ durch Einschnürung $\exp(x_n) \to 1 = \exp(0)$ .
  Für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ folgt aus $x_n \to x$ daher

  $$\exp(x_n) = \exp(x)\exp(x_n - x) \to \exp(x).$$

- $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind stetig.

  *Beweis.* Für $0 \leq x \leq 2$ haben wir gesehen, dass $0 \leq \sin(x) \leq x$ gilt. Wegen der Punktsymmetrie also $|\sin(x)| \leq |x|$ für $|x| \leq 2$, woraus wieder durch Einschnürung die Stetigkeit des Sinus im Ursprung folgt. Genauso erhält man die Stetigkeit des Cosinus im Ursprung wegen $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1$ für $|x| \leq 2$.
  Sei nun $x \in \mathbb{R}$ beliebig und gelte $x_n \to x$. Dann ist mit den Additionstheoremen

  $$\cos(x_n) = \cos(x)\underbrace{\cos(x_n - x)}_{\to 1} - \sin(x)\underbrace{\sin(x_n - x)}_{\to 0} \to \cos(x),$$
  $$\sin(x_n) = \sin(x)\cos(x_n - x) - \cos(x)\sin(x_n - x) \to \sin(x).$$

- $\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind stetig.

*Beweis.* Mit $m(x) = -x$ sind cosh und sinh Kombinationen stetiger Funktionen, $\cosh = \frac{1}{2}(\exp + \exp \circ m)$, $\sinh = \frac{1}{2}(\exp - \exp \circ m)$.

SATZ 6.3 (**Stetigkeit der Umkehrfunktion**). Ist $I$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ streng monoton, dann ist $f^{-1} : f(I) \to I$ stetig.

*Beweis.* Eine streng monotone Funktion ist injektiv. Somit exisitiert die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(I) \to I$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $f$ als streng monoton steigend voraussetzen. Sei $y_0 \in f(I)$ beliebig und $\epsilon > 0$. Setze $x_0 := f^{-1}(y_0) \in I$.
1. Fall. $x_0$ ist kein Randpunkt von $I$. Dann gibt es $\rho > 0$, so dass $[x_0 - \rho, x_0 + \rho] \subseteq I$ ist. Setze $\tilde{\epsilon} := \min\{\epsilon, \rho\}$ und wähle

$$\delta := \min\{|f(x_0 - \tilde{\epsilon}) - f(x_0)|, |f(x_0 + \tilde{\epsilon}) - f(x_0)|\}.$$

Dann gilt für alle $y \in [y_0, y_0 + \delta) \cap f(I)$ wegen $y_0 \le y < y_0 + \delta \le y_0 + f(x_0 + \tilde{\epsilon}) - f(x_0) = f(x_0 + \tilde{\epsilon})$ auch

$$x_0 \le f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0 + \delta) < x_0 + \tilde{\epsilon} \le x_0 + \epsilon,$$

also $f^{-1}(y) \in [x_0, x_0 + \epsilon)$. Aus $y \in (y_0 - \delta, y_0] \cap f(I)$ folgt genauso $f^{-1}(y) \in (x_0 - \epsilon, x_0]$. Insgesamt gilt für alle $y \in f(I)$ mit $|y - y_0| < \delta$, dass $|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \epsilon$ ist.
2. Fall. $x_0$ ist unterer Randpunkt von $I$. Für $I = \{x_0\}$ ist nichts zu zeigen. Andernfalls gibt es wieder ein $\rho > 0$, so dass $[x_0, x_0 + \rho) \subseteq I$ ist. Wähle $\delta := f(x_0 + \min\{\rho, \epsilon\}) - f(x_0)$. Wie oben zeigt man, dass aus $y \in [y_0, y_0 + \delta) \cap f(I)$ schon $f^{-1}(y) \in [x_0, x_0 + \epsilon)$ folgt. Wegen $(y_0 - \delta, y_0 + \delta) \cap f(I) = [y_0, y_0 + \delta) \cap f(I)$ folgt die Stetigkeit in $y_0$.
3. Fall. $x_0$ ist oberer Randpunkt von $I$. Analog zum 2. Fall. □

BEMERKUNG. Überraschenderweise muss $f$ selbst nicht stetig sein. Sprungstellen von $f$ übersetzen sich in Lücken im Definitionsbereich von $f^{-1}$. Die Stetigkeit von $f^{-1}$ ist erst dann nicht mehr gewährleistet, wenn man Lücken im Definitionsbereich von $f$ zulässt.

## 6.2. Gleichmäßige Stetigkeit und Lipschitz-Stetigkeit

DEFINITION 6.2. $f : D \to \mathbb{R}$ heißt **gleichmäßig stetig**, wenn gilt:

$$\forall \epsilon{>}0\ \exists \delta{>}0\ \forall x{\in}D\ \forall x'{\in}D : |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \epsilon.$$

BEMERKUNGEN.

- Jede gleichmäßig stetige Funktion ist stetig, denn $f : D \to \mathbb{R}$ stetig bedeutet

$$\forall x{\in}D\ \forall \epsilon{>}0\ \exists \delta{>}0\ \forall x'{\in}D : |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \epsilon.$$

- Jede Einschränkung einer gleichmäßigen Funktion ist gleichmäßig stetig.

SATZ 6.4. Jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist schon gleichmäßig stetig.

(V21)

*Beweis.* Annahme: $f$ ist nicht gleichmäßig stetig. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ derart, dass für jedes $\delta > 0$ es $x, y \in [a, b]$ gibt, mit $|x - y| < \delta$, aber $|f(x) - f(y)| \geq \epsilon$. Insbesondere gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ zwei Punkte $x_n, y_n \in [a, b]$ mit $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ und $|f(x) - f(y)| \geq \epsilon$. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstrass gibt es eine konvergente Teilfolge $x_{n_k} \to x_* \in [a, b]$. Dann gilt wegen $|y_{n_k} - x_*| \leq |y_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x_*| \to 0$ auch $y_{n_k} \to x_*$. Nun steht $|f(y_{n_k}) - f(x_{n_k})| \geq \epsilon$ im Widerspruch zur Stetigkeit von $f$, aus der $f(y_{n_k}) - f(x_{n_k}) \to f(x_*) - f(x_*) = 0$ folgt. □

DEFINITION 6.3. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt **(global) Lipschitz-stetig mit (Lipschitz-)Konstante** $L$, wenn gilt

$$\forall x, x' \in D : |f(x) - f(x')| \leq L|x - x'|.$$

$f$ heißt **(global) Lipschitz-stetig**, wenn es ein $L > 0$ gibt, so dass $f$ global Lipschitz-stetig mit Konstante $L$ ist.
$f$ heißt **lokal Lipschitz-stetig**, wenn es zu jedem $x \in D$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass $f|_{D\cap(x-\delta,x+\delta)}$ global Lipschitz-stetig ist.

SATZ 6.5. Eine global Lipschitz-stetige Funktion ist lokal Lipschitz-stetig und gleichmäßig stetig.

*Beweis.* Jede Einschränkung einer global Lischitz-stetigen Funktion $f$ bleibt Lipschitz-stetig. Somit ist $f$ auch lokal Lischitz-stetig.
Sei $\epsilon > 0$. Ist $f : D \to \mathbb{R}$ global Lipschitz-stetig mit Konstante $L$, so wähle man $\delta = \frac{1}{L}\epsilon$. Sei nun $x, y \in D$ mit $|x - y| < \delta$. Dann gilt $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| < L\delta = \epsilon$, was die gleichmäßige Stetigkeit zeigt. □

BEISPIELE.

- $x \mapsto |x|$ ist Lipschitz-stetig (mit Lipschitz-Konstante 1), wegen der inversen Dreiecksungleichung $||y| - |x|| \leq |y - x|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.
- $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist Lipschitz-stetig (mit Lipschitz-Konstante 1). Denn, wegen $|\sin(x)| \leq |x|$ für $|x| \leq 2$ und $|\sin(x)| \leq 1$ folgt $|\sin(x)| \leq |x|$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Aus
$$\begin{aligned}\sin(y) - \sin(x) &= \sin\left(\tfrac{y+x}{2} + \tfrac{y-x}{2}\right) - \sin\left(\tfrac{y+x}{2} - \tfrac{y-x}{2}\right)\\ &= 2\cos\left(\tfrac{y+x}{2}\right)\sin\left(\tfrac{y-x}{2}\right)\end{aligned}$$
erhält man
$$|\sin(y) - \sin(x)| \leq 2\left|\cos\left(\tfrac{y+x}{2}\right)\right| \cdot \left|\sin\left(\tfrac{y-x}{2}\right)\right| \leq 2\left|\tfrac{y-x}{2}\right| = |y - x|$$
für beliebige $x, y \in \mathbb{R}$.
- $x \mapsto x^2$ ist auf $\mathbb{R}$ lokal Lipschitz-stetig, aber nicht gleichmäßig stetig (also auch nicht global Lipschitz-stetig).

Denn, zu $\epsilon = 1$ und $\delta > 0$ wähle $x = \frac{1}{\delta}$ und $y = x + \frac{\delta}{2}$. Dann ist $y - x = \frac{\delta}{2}$ aber $y^2 - x^2 = (y + x)(y - x) = (\frac{2}{\delta} + \frac{\delta}{2})\frac{\delta}{2} = 1 + \frac{\delta^2}{4} > \epsilon$.

- $[0, 1] \ni x \mapsto \sqrt{x}$ ist gleichmäßig stetig (wegen Satz 6.4), aber nicht lokal Lipschitz-stetig. (Denn im Ursprung gibt es zu jedem $L > 0$ ein $x$, so dass $\sqrt{x} - \sqrt{0} \geq L(x - 0)$ ist, z.B. $x = \frac{1}{2L^2}$.)
- $(0, 1] \ni x \mapsto \sqrt{x}$ ist immer noch gleichmäßig stetig, lokal Lipschitz-stetig, aber nicht global Lipschitz-stetig.

### 6.3. Grenzwerte von Funktionen

DEFINITION 6.4. Für eine Menge $X \subseteq \mathbb{R}$ heißt $x_* \in \mathbb{R}$ **Häufungspunkt von** $X$, falls es eine gegen $x_*$ konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X \setminus \{x_*\}$ gibt. Ein $x_* \in X$, das kein Häufungspunkt von $X$ ist, heißt **isolierter Punkt von** $X$.

BEMERKUNGEN.

- $x_*$ ist ein Häufungspunkt von $X \subseteq \mathbb{R}$ genau dann, wenn es zu jedem $\delta > 0$ ein $x \in X \setminus \{x_*\}$ mit $|x - x_*| < \delta$ gibt.

  *Beweis.* "$\Longrightarrow$" ist offensichtlich. "$\Longleftarrow$": Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ erhält man mit $\delta = \frac{1}{n}$ ein geeignetes $x_n$.

- $x_*$ ist genau dann ein isolierter Punkt von $X \subseteq \mathbb{R}$, wenn es ein $\delta > 0$ gibt, so dass $X \cap (x_* - \delta, x_* + \delta) = \{x_*\}$ ist.

  *Beweis.* "$\Longrightarrow$" erhält man durch Kontraposition wie obige Rückrichtung. "$\Longleftarrow$": Gibt es so ein $\delta > 0$, so ist einmal $x_* \in X$, aber für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X \setminus \{x_*\}$ gilt $|x_n - x_*| \geq \delta$, also keine Konvergenz.

DEFINITION 6.5. Sei $f : X \to \mathbb{R}$, $x_*$ ein Häufungspunkt von $X \subseteq \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$. Gilt für jede gegen $x_*$ konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X \setminus \{x_*\}$, dass $f(x_n) \to c$ für $n \to \infty$, dann schreibt man

$$f(x) \xrightarrow{x \to x_*} c.$$

In diesem Fall heißt $c$ der **Grenzwert von** $f$ **bei** $x_*$ und man definiert

$$\lim_{x \to x_*} f(x) := c.$$

SATZ 6.6. Für $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, $x_* \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(x) \xrightarrow{x \to x_*} c$$

genau dann, wenn

(i) $\forall \delta{>}0\ \exists x{\in}X \setminus \{x_*\} : |x - x_*| < \delta$,

(ii) $\forall \epsilon{>}0\ \exists \delta{>}0\ \forall x{\in} X \setminus \{x_*\} : |x - x_*| < \delta \Rightarrow |f(x) - c| < \epsilon.$

*Beweis.* (i) bedeutet, dass $x_*$ ein Häufungspunkt von $X$ ist. Der Rest des Beweises ist analog zum Beweis von Satz 6.1. □

Damit können wir die Stetigkeit in einem Punkt durch den Grenzwert charakterisieren:

SATZ 6.7. Die Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ ist stetig bei $x_* \in X \subseteq \mathbb{R}$ genau dann, wenn $x_*$ ein isolierter Punkt von $X$ ist, oder $f(x) \xrightarrow{x \to x_*} f(x_*)$ gilt.

*Beweis.* "$\Longrightarrow$": Ist der Stetigkeitspunkt $x_* \in X$ kein isolierter Punkt von $X$, so gilt wegen der Stetigkeit insbesondere für jede Folge $(x_n) \subseteq X \setminus \{x_*\}$ mit $x_n \to x_*$, dass $f(x_n) \to f(x_*)$.
"$\Longleftarrow$": 1. Fall: $x_*$ ist isolierter Punkt von $X$. Es gibt also $\delta > 0$ so, dass für $x \in X$ aus $|x - x_*| < \delta$ schon $x = x_*$ folgt. Zu $\epsilon > 0$ wähle immer dieses $\delta$, um Stetigkeit in $x_*$ zu zeigen.
2. Fall. Es gelte $f(x) \xrightarrow{x \to x_*} f(x_*)$. Die Stetigkeit folgt aus der $\epsilon$-$\delta$-Eigenschaft des Grenzwertes, (ii) von Satz 6.6. □

SATZ 6.8 (**Grenzwertarithmetik**). Seien $f, g : X \to \mathbb{R}$ Funktionen, $x_*$ ein Häufungspunkt von $X \subseteq \mathbb{R}$ und existieren die Grenzwerte von $f$ und $g$ bei $x_*$. Dann gilt

$$\lim_{x \to x_*} (f+g)(x) = \lim_{x \to x_*} f(x) + \lim_{x \to x_*} g(x),$$

$$\lim_{x \to x_*} (fg)(x) = \Big(\lim_{x \to x_*} f(x)\Big)\Big(\lim_{x \to x_*} g(x)\Big),$$

$$\lim_{x \to x_*} \Big(\frac{f}{g}\Big)(x) = \frac{\lim_{x \to x_*} f(x)}{\lim_{x \to x_*} g(x)}, \qquad (\text{wenn } \lim_{x \to x_*} g(x) \neq 0).$$

*Beweis.* Grenzwertkalkül für Folgen. □

BEMERKUNGEN.

- $f(x) \xrightarrow{x \to +\infty} c$ bedeutet: Für $f : X \to \mathbb{R}$ mit $X \subseteq \mathbb{R}$ nach oben unbeschränkt gilt für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ mit $x_n \xrightarrow{n \to \infty} +\infty$, dass $f(x_n) \xrightarrow{n \to \infty} c$. In diesem Fall setzt man $\lim_{x \to +\infty} f(x) := c$. (Analog für $-\infty$.)
- $f(x) \xrightarrow{x \to x_*} +\infty$ bedeutet: Für $f : X \to \mathbb{R}$ mit $x_*$ Häufungspunkt von $X \subseteq \mathbb{R}$ gilt für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X \setminus \{x_*\}$ mit $x_n \xrightarrow{n \to \infty} x_*$, dass $f(x_n) \xrightarrow{n \to \infty} +\infty$. In diesem Fall schreibt man $\lim_{x \to x_*} f(x) := +\infty$. (Analog für $-\infty$.)
- **Rechtsseitiger Grenzwert:**
$f(x) \xrightarrow{x \downarrow x_*} c$ bedeutet $\tilde{f}(x) \xrightarrow{x \to x_*} c$ mit $f = \tilde{f}|_{(x_*, +\infty)}$. In diesem Fall setzt

man
$$\lim_{x\downarrow x_*} f(x) := c.$$
(Analog für den **linksseitigen Grenzwert**, $\lim_{x\uparrow x_*} f(x) := c$.)

- Manchmal benutzt man auch die Schreibweisen
$$f(x+) := \lim_{y\downarrow x} f(y), \qquad f(x-) := \lim_{y\uparrow x} f(y).$$

ergänzt

SATZ 6.9 (**Monotoniekriterium**). Eine beschränkte monotone Funktion $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ besitzt in $b$ einen linksseitigen Grenzwert $f(b-) \in \mathbb{R}$

*Beweis.* Sei $f$ ohne Einschränkung monoton wachsend. Wir Zeigen $f(b-) = \sup f([a,b[) =: c \in \mathbb{R}$ und benutzen die $\epsilon$-$\delta$-Charakterisierung des Grenzwertes. Sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es ein $x \in [a,b)$ mit $f(x) \in (c-\epsilon, c]$. Zu $\delta := b - x$ gilt also für alle $y \in (b-\delta, b)$, dass $c - \epsilon < f(b-\delta) \leq f(y) \leq c$ ist, bzw., $|f(y) - c)| < \epsilon$. ☐

SATZ 6.10. Es gilt
$$f(x) \xrightarrow{x\downarrow x_*} c \ \wedge\ f(x) \xrightarrow{x\uparrow x_*} c \implies f(x) \xrightarrow{x\to x_*} c.$$

*Beweis.* Übung. ☐

BEISPIELE.

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}$.
- $\lim_{x\downarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$. $\lim_{x\uparrow 0} \frac{1}{x} = -\infty$.
- $\lim_{x\to 1} \exp(x) = \exp(1) = \mathrm{e}$ (da exp stetig bei 1).
- $\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$ (da $\exp(x) \geq 1 + x$).
- $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$ (da $0 < \exp(-t) = \frac{1}{\exp(t)} \leq \frac{1}{1+t}$ für $t > -1$).
- $\lim_{x\to 0} \cos(x) = 1$ (wegen Stetigkeit des cos).
- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (wegen $x - \frac{x^3}{6} < \sin(x) < x$ für $0 < x < 2$ und damit $1 - \frac{x^2}{6} < \frac{\sin x}{x} < 1$ für $0 < |x| \leq 2$).

(V22)

DEFINITION 6.6 (**Stetige Fortsetzung**). Sei $X \subseteq \mathbb{R}$ und $x_* \notin X$ ein Häufungspunkt von $X$. Dann heißt
$$\tilde{f} : X \cup \{x_*\} \to \mathbb{R}$$
**stetige Fortsetzung von $f$ bei** $x_*$, wenn $\tilde{f}|_X = f$ gilt und $\tilde{f}$ stetig ist in $x_*$.

BEMERKUNGEN.

- Besitzt $f$ eine stetige Fortsetzung in $x_*$, so ist diese eindeutig.
- Existiert für $f : X \to \mathbb{R}$ der Grenzwert $c = \lim_{x\to x_*} f(x)$, so kann $f|_{X\setminus\{x_*\}}$ bei $x_*$ durch den Wert $c$ stetig fortgesetzt werden.

BEISPIEL. Die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ besitzt die stetige Fortsetzung

$$\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{für } x \neq 0, \\ 0, & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

## 6.4. Globale Eigenschaften stetiger Funktionen

DEFINITION 6.7 (**Topologie der Zahlengerade** $\mathbb{R}$).

- Für $x \in \mathbb{R}$ und $\epsilon > 0$ ist $\mathrm{B}_\epsilon(x) := (x - \epsilon, x + \epsilon)$ ein offenes Intervall.
- $X \subseteq \mathbb{R}$ heißt **offen (in** $\mathbb{R}$**)**, wenn es zu jedem $x \in X$ ein $\epsilon > 0$ gibt mit $\mathrm{B}_\epsilon(x) \subseteq X$.
- $X \subseteq \mathbb{R}$ heißt **abgeschlossen (in** $\mathbb{R}$**)**, wenn $\mathbb{R} \setminus X$ offen in $\mathbb{R}$ ist.
- $X \subseteq \mathbb{R}$ heißt **kompakt**, wenn $X$ beschränkt (in $\mathbb{C}$ und damit in $\mathbb{R}$) und abgeschlossen ist.
- $X \subseteq \mathbb{R}$ heißt **unzusammenhängend**, wenn es ein $x \in \mathbb{R} \setminus X$ gibt, so dass $X \cap (-\infty, x) \neq \emptyset$ und $X \cap (x, +\infty) \neq \emptyset$ ist.
- $X \subseteq \mathbb{R}$ heißt **zusammenhängend**, wenn $X$ nicht unzusammenhängend ist, d.h., wenn für jedes $x \in \mathbb{R} \setminus X$ gilt, dass $X \subseteq (-\infty, x)$ oder $X \subseteq (x, \infty)$ ist.

BEMERKUNGEN.

- $X \subseteq \mathbb{R}$ ist offen in $\mathbb{R}$ genau dann, wenn es eine in $\mathbb{C}$ offene Menge $Z$ gibt mit $X = Z \cap \mathbb{R}$.
- $X \subseteq \mathbb{R}$ ist abgeschlossen in $\mathbb{R}$ genau dann, wenn $X$ abgeschlossen in $\mathbb{C}$ ist.
- $X \subseteq \mathbb{R}$ ist kompakt als Teilmenge von $\mathbb{R}$ genau dann, wenn $X$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$ kompakt ist.

SATZ 6.11 (**Abgeschlossenheit bezüglich Grenzwertbildung**). $X \subseteq \mathbb{R}$ ist genau dann abgeschlossen, wenn für jede Folge $(x_n) \subseteq X$ aus $x_n \to x \in \mathbb{R}$ schon $x \in X$ folgt.

*Beweis.* "$\Longrightarrow$": Sei $X$ abgeschlossen, also $\mathbb{R} \setminus X$ offen und $(x_n) \subseteq X$ mit $x_n \to x \in \mathbb{R}$. Annahme $x \notin X$. Dann gibt es $\epsilon > 0$ mit $(x - \epsilon, x + \epsilon) \in \mathbb{R} \setminus X$ im Widerspruch zu $x_n \to x$.
"$\Longleftarrow$": Ist $X$ nicht abgeschlossen, also $\mathbb{R} \setminus X$ nicht offen, dann gibt es ein $x_* \in \mathbb{R} \setminus X$, so dass zu jedem $\epsilon > 0$ das Intervall $\mathrm{B}_\epsilon(x_*)$ nicht in $\mathbb{R} \setminus X$ enthalten ist. Zu $\epsilon = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ findet man also ein $x_n \in X$ mit $|x_n - x_*| < \frac{1}{n}$. Es gilt also $X \ni x_n \to x_* \notin X$. □

Satz 6.12 (**Folgenkompaktheit**). $X \subseteq \mathbb{R}$ ist genau dann kompakt, wenn jede Folge $(x_n) \subseteq X$ eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in $X$ enthält.

*Beweis.* "$\Longrightarrow$": Jede Folge in $X$ ist beschränkt, besitzt nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß (Satz 4.8) also eine konvergente Teilfolge. Da $X$ abgeschlossen ist liegt Ihr Grenzwert wieder in $X$.
"$\Longleftarrow$": Sei $X$ nicht kompakt. Ist $X$ nicht abgeschlossen, so gibt es eine konvergente Folge $X \ni x_n \to x \notin X$, $(x_n)$ besitzt also auch keine in $X$ konvergente Teilfolge. Ist $X$ unbeschränkt, so gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in X$ mit $|x_n| \geq n$. Für jede Teilfolge gilt $|x_{n_k}| \geq n_k \to \infty$, also besitzt $(x_n)$ keine konvergente Teilfolge. □

Satz 6.13 (**Zusammenhang von Intervallen**). $X \subseteq \mathbb{R}$ ist genau dann zusammenhängend, wenn $X$ ein Intervall ist.

*Beweis.* Erinnerung: $X \subseteq \mathbb{R}$ ist Intervall, wenn für alle $a, b \in X$ und alle $x \in \mathbb{R}$ mit $a < x < b$ schon $x \in X$ folgt.
"$\Longrightarrow$": Ist $X$ kein Intervall, so gibt es $a < x < b$ mit $a, b \in X$ aber $x \notin X$. Somit ist $a \in X \cap (-\infty, x)$ und $b \in (x, +\infty)$. $X$ ist also unzusammenhängend.
"$\Longleftarrow$": Ist $X$ nicht zusammenhängend, dann gibt es ein $x \in \mathbb{R} \setminus X$, ein $a < x$ mit $a \in X$ und ein $b > x$ mit $b \in X$. $X$ ist also auch kein Intervall.

Satz 6.14 (**Zwischenwertsatz**).
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, $f(a) < f(b)$. Dann gibt es zu jedem $c \in \big(f(a), f(b)\big)$ ein $x_* \in (a, b)$ mit $f(x_*) = c$.

*Beweis.* Setze $x_* := \sup\{x \in [a, b] \mid f(x) < c\}$. Zu zeigen bleibt $f(x_*) = c$. Zu $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $x_n \in (x_* - \frac{1}{n}, x_*]$, so dass $f(x_n) < c$. Wegen $x_n \to x_*$ und der Stetigkeit von $f$ gilt

$$f(x_*) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \leq c.$$

Ist $n \in \mathbb{N}$ groß genug, so folgt aus $f(x_* + \frac{1}{n}) > c$ sofort $f(x_*) = \lim_{n\to\infty} f(x_* + \frac{1}{n}) \geq c$. □

Korollar 6.15. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt $f$ alle Werte zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an, d.h., gilt $y \in [f(a), f(b)]$ oder $y \in [f(b), f(a)]$, so hat die Gleichung $f(x) = y$ mindestens eine Lösung $x \in [a, b]$.

Satz 6.16. Ist $f : D \to \mathbb{R}$ stetig und $I \subseteq D$ ein Intervall, dann ist auch $f(I)$ ein Intervall.

*Beweis.* Sei $a, b \in f(I)$, ohne Einschränkung $a \leq b$. Dazu gibt es $\alpha, \beta \in I$ mit $a = f(\alpha)$ und $b = f(\beta)$. Sei $y \in \mathbb{R}$ mit $a < y < b$. nach dem voprhergehenden Korollar gibt es ein $x \in [\alpha, \beta]$ oder $x \in [\beta, \alpha]$ mit $f(x) = y$ In jedem Fall ist $x \in I$. □

KOROLLAR 6.17 (**Stetige Bilder zusammenhängender Mengen sind zusammenhängend**). Sei $f : D \to \mathbb{R}$ stetig, $D \subseteq \mathbb{R}$. Ist $X \subseteq D$ zusammenhängend, dann auch $f(X)$.

SATZ 6.18 (**Stetigkeit der Umkehrfunktion II**). Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ injektiv und stetig. Dann ist $f^{-1} : f(I) \to I$ entweder streng monoton wachsend oder fallend, in jedem Falle aber stetig.

*Beweis.* Nach dem vorherigen Korollar ist $f(I)$ ein Intervall. Annahme: $f$ ist nicht streng monoton. Dann gibt es $x_1, x_x, x_1', x_2' \in I$ mit $x_1 < x_2$, $x_1' < x_2'$ und $f(x_1) \leq f(x_2)$, $f(x_1') \geq f(x_2')$. Ordnet man die vier Punkte streng nach der Größe, so können die Funktionswerte nicht auch streng nach der Größe geordnet sein. Daher muss einer der mittleren beiden Punkte, nennen wir ihn $x_\mathrm{m}$, maximal oder minimal sein. Nennen wir den linken Punkt $x_\mathrm{l}$ und den rechten $x_\mathrm{r}$, dann ist $x_\mathrm{l} < x_\mathrm{m} < x_\mathrm{r}$ und ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir wegen der Injektivität z.B. annehmen, dass $f(x_\mathrm{l}) < f(x_\mathrm{r}) < f(x_\mathrm{m})$ gilt. Wegen des Zwischenwertsatzes gibt es aber ein $x \in (x_\mathrm{l}, x_\mathrm{m})$ mit $f(x) = f(x_\mathrm{r})$ im Widerspruch zur Injektivität.
Also ist $f$ und damit auch $f^{-1}$ streng monoton fallend oder wachsend. Nach Satz 6.3, da $f$ auf einem Intervall definiert und streng monoton ist, ist $f^{-1}$ auch stetig. □

BEMERKUNGEN.

- Die Funktion $f : (-1, 1) \setminus \{0\}$, $f(x) = \operatorname{sgn}(x)(1 - |x|)$ zeigt, dass die Voraussetzung, dass der Definitionsbereich im vorhergehenden Satz ein Intervall ist, nicht weggelassen werden darf.
- Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ so besitzt $f$ mindestens eine Nullstelle.
- Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und besitzt keine Nullstelle, dann folgt aus $f(a) > 0$ schon $f(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$.
- Die reelle Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist positiv und streng monoton steigend auf dem Intervall $\mathbb{R}$ (Lemma 5.10) und stetig, $\exp(\mathbb{R})$ ist also wieder ein Intervall. Wegen den schon bekannten Limites $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$ gilt also $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$. Damit ist die Umkehrabbildung, der **natürliche Logarithmus** $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, durch (V23)

$$\ln := (\exp|_{\mathbb{R}})^{-1}$$

wohl definiert, stetig und streng monoton wachsend. Daher folgt sofort

$$\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty.$$

- In Lemma 5.14 hatten wir festgestellt, dass $\cos(0) = 1 > 0$ und $\cos(2) < 0$ ist. Da der Cosinus stetig ist, besitzt er auf $[0, 2]$ mindestens eine Nullstelle. In dem Lemma wurde auch Monotonie gezeigt. Somit ist die Nullstelle eindeutig und kann mit $\frac{\pi}{2}$ identifiziert werden. Wir erhalten also

  $$\cos(\tfrac{\pi}{2}) = 0, \qquad \sin(\tfrac{\pi}{2}) = 1,$$

  da $\sin^2(\frac{\pi}{2}) = 1 - \cos^2(\frac{\pi}{2})$ und $\sin(x) > 0$ für $x \in [0, 2]$.

LEMMA 6.19. Für $\sin, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt jeweils für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin(x+\tfrac{\pi}{2}) = \cos(x), \qquad \sin(x+\pi) = -\sin(x), \qquad \sin(x+2\pi) = \sin(x)$$
$$\cos(x+\tfrac{\pi}{2}) = -\sin(x), \qquad \cos(x+\pi) = -\cos(x), \qquad \cos(x+2\pi) = \cos(x),$$

*Beweis.* Additionstheoreme und Werte bei $\frac{\pi}{2}$. □

BEMERKUNG (**Arcussinus und Arcuscosinus**). Reelle Sinus und Cosinus-Funktion sind also $2\pi$-periodisch. Mit den bisherigen Eigenschaften kann man feststellen, dass $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ streng monoton fallend und surjektiv ist, genauso ist $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ streng monoton fallend. Die zugehörigen Umkehrfunktionen

$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi], \qquad \arcsin : [-1, 1] \to [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}],$$

definiert durch $\arccos := (\cos|_{[0,\pi]})^{-1}$ und $\arcsin := (\sin|_{[-\pi/2,\pi/2]})^{-1}$ sind also ebenfalls streng monoton und stetig.

SATZ 6.20 (**Stetige Bilder kompakter Mengen sind kompakt**). Sei $f : D \to \mathbb{R}$ stetig, $D \subseteq \mathbb{R}$. Ist $X \subseteq D$ kompakt, dann auch $f(X)$.

*Beweis.* Sei $(y_n) \subseteq f(X)$ beliebig. Es gibt also $(x_n) \subseteq X$ mit $f(x_n) = y_n$. Da $X$ kompakt ist, besitzt $(x_n)$ eine in $X$ konvergente Teilfolge $x_{n_k} \to x_* \in X$. Wegen der Stetigkeit folgt

$$y_{n_k} = f(x_{n_k}) \xrightarrow{k\to\infty} f(x_*) \in f(X).$$

Wir haben also eine in $f(X)$ konvergente Teilfolge von $(y_n)$ gefunden. □

SATZ 6.21. Ist $f : D \to \mathbb{R}$ stetig und $[a, b] \subset D$, dann gibt es $c, d \in \mathbb{R}$, so dass $f([a, b]) = [c, d]$ ist.

*Beweis.* $[a, b]$ ist als beschränktes abgeschlossenes Intervall kompakt und zusammenhängend, also ist auch $f([a, b])$ kompakt und zusammenhängend, mithin ein beschränktes abgeschlossenes Intervall. □

KOROLLAR 6.22 (**Satz vom Maximum**). Ist die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, dann nimmt sie ihr Maximum auf $[a, b]$ an.

## 6.5. Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen

DEFINITION 6.8. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und für $n \in \mathbb{N}_0$ eine Funktion $f_n : D \to \mathbb{R}$ gegeben. Dann heißt $(f_n)_{n\in\mathbb{R}}$ eine **reelle Funktionenfolge auf** $D$.

- Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **konvergiert punktweise**, falls gilt
$$\forall x{\in}D\ \exists y \in \mathbb{R} : f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} y.$$
In diesem Fall heißt $f_* : D \to \mathbb{R}$ mit $f_*(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ der **punktweise Limes** von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Man schreibt dann $f_n \xrightarrow{\text{ptw}} f_*$.
- Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **konvergiert gleichmäßig gegen eine Funktion** $f_* : D \to \mathbb{R}$, falls gilt
$$\forall \epsilon{>}0\ \exists N{\in}\mathbb{N}\ \forall n{\geq}N\ \forall x{\in}D : |f_n(x) - f_*(x)| < \epsilon.$$
In diesem Fall schreibt man $f_n \xrightarrow{\text{glm}} f_*$.

BEMERKUNGEN.

- Die punktweise Konvergenz $f_n \xrightarrow{\text{ptw}} f_*$ auf $D \subseteq \mathbb{R}$ bedeutet
$$\forall x{\in}D\ \forall \epsilon{>}0\ \exists N{\in}\mathbb{N}\ \forall n{\geq}N : |f_n(x) - f_*(x)| < \epsilon.$$
Daher folgt aus der gleichmäßigen Konvergenz $f_n \xrightarrow{\text{glm}} f_*$ sofort die punktweise Konvergenz $f_n \xrightarrow{\text{ptw}} f_*$ gegen die selbe Funktion.
- Anders gesagt: *Nur* wenn eine Funktionenfolge einen punktweisen Limes hat, kann sie gegen diese Grenzfunktion möglicherweise auch gleichmäßig konvergieren.

BEISPIEL. Die Funktionenfolge $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$ konvergiert punktweise, aber nicht gleichmäßig gegen $f_* : [0,1] \to \mathbb{R}$,
$$f_*(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x \in [0,1), \\ 1, & \text{für } x = 1. \end{cases}$$

*Beweis.* Für $x \in [0,1)$ gilt $x^n \to 0$ und für $x = 1$ folgt $x^n = 1$. Somit ist $f_n \xrightarrow{\text{ptw}} f_*$ gezeigt.
Die Konvergenz ist nicht gleichmäßig: Denn zu $\epsilon := \frac{1}{2}$ und beliebigem $N \in \mathbb{N}$ gilt an der Stelle $x_N := 1 - \frac{1}{2N}$:
$$f_n(x_N) - f_*(x_N) = x_N^n - 0 = \left(1 - \tfrac{1}{2N}\right)^n \geq 1 - \tfrac{n}{2N} \overset{n=N}{=} \tfrac{1}{2} = \epsilon.$$

LEMMA 6.23. $f_n \xrightarrow{\text{glm}} f_*$ auf $D \subset \mathbb{R}$ gilt genau dann, wenn
$$\sup\{|f_n(x) - f_*(x)| : x \in D\}$$
eine Nullfolge ist.

*Beweis.* "$\Longrightarrow$": Sei $\epsilon > 0$. Wegen gleichmäßiger Konvergenz gibt es dazu ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ und alle $x \in D$ gilt: $|f_n(x) - f_*(x)| < \frac{\epsilon}{2}$. Somit ist $\sup\{|f_n(x) - f_*(x)| : x \in D\} \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$.
"$\Longleftarrow$": Sei $\epsilon > 0$. Der maximale Abstand bildet eine Nullfolge. Es gibt also $N \in \mathbb{N}$, so dass für $n \geq N$ gilt $\sup\{|f_n(x) - f_*(x)| : x \in D\} < \epsilon$. Es gilt also auch $\forall x \in D : |f_n(x) - f_*(x)| < \epsilon$, was die gleichmäßige Konvergenz zeigt. □

SATZ 6.24 (**Gleichmäßiger Limes erhält Stetigkeit**). Seien die $f_n : D \to \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$ stetig und gelte $f_n \xrightarrow{\text{glm}} f$. Dann ist auch $f : D \to \mathbb{R}$ stetig.

*Beweis.* Sei $x_0 \in D$ und $\epsilon > 0$ beliebig. Wähle $n \in \mathbb{N}$, so dass $\forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}$ gilt. Unter Ausnutzung der Stetigkeit von $f_n$ wähle nun $\delta > 0$, so dass $\forall x \in D : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}$ gilt. Somit gilt für jedes $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$, dass

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < \epsilon$$

ist, was die Stetigkeit von $f$ in $x_0$ beweist. □

BEISPIELE.

- $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$, konvergiert punktweise gegen die unstetige Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ für $x < 1$, $f(1) = 1$. Daher kann die Konvergenz nicht gleichmäßig sein.
- Auch $f_n : [0, 1) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$, konvergiert **nicht** gleichmäßig gegen die Nullfunktion, da $\sup_{x\in[0,1)} x^n = 1$ ist.
- Für $0 < \rho < 1$ gilt aber $f_n : [0, \rho] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$, konvergiert gleichmäßig gegen die Nullfunktion, denn $\sup_{x\in[0,\rho]} |f_n(x) - 0| = \sup_{x\in[0,\rho]} x^n = \rho^n \to 0$.

SATZ 6.25 (**Weierstraßsches Majorantenkriterium**). Gilt für die Funktionen $f_n : D \to \mathbb{R}$, dass $|f_n(x)| \leq C_n$ für alle $x \in D$ und $n \in \mathbb{N}_0$ und ist $\sum_{n=0}^{\infty} C_n < \infty$, dann konvergiert die Funktionenreihe $\big(\sum\limits_{k=0}^{n} f_k(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ absolut und gleichmäßig auf $D$ gegen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$.

*Beweis.* Für jedes feste $x \in D$ hat die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ die Majorante $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n$, ist also absolut konvergent. Somit existiert $F : D \to \mathbb{R}$, $F(x) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ und $\sum\limits_{k=0}^{n} f_k \xrightarrow{\text{ptw}} F$. Für die gleichmäßige Konvergenz betrachten wir mit $x \in D$ beliebig

$$\left|\sum_{k=0}^{n} f_k(x) - F(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} C_k \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Da die rechte Seite nicht mehr von $x$ abhängt, können wir links das Supremum über $x \in D$ betrachten und erhalten

$$\sup_{x\in D}\left|\sum_{k=0}^{n} f_k(x) - F(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} C_k \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

wodurch $\sum_{k=0}^{n} f_k \xrightarrow{\text{glm}} F$ auf $D$ gezeigt ist. □

KOROLLAR 6.26 (**Stetigkeit von Potenzreihen**). Eine reelle Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subseteq \mathbb{R}$, mit Konvergenzradius $R > 0$ definiert eine stetige Funktion auf $(-R, R)$.

*Beweis.* Wir setzen $F(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ für $x \in (-R, R)$. Wähle nun ein $r \in (0, R)$. Wir betrachten die Funktionen $f_n : [-r, r] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_n(x) = a_n x^n$. Es gilt

$$\sum_{k=0}^{n} f_k \xrightarrow{\text{ptw}} F|_{[-r,r]},$$

wobei die Konvergenz sogar punktweise absolut ist. Mit $C_n := |a_n| r^n$ gilt $|f_n(x)| \leq C_n$ für alle $x \in [-r, r]$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$. Außerdem ist $\sum_{n=0}^{\infty} C_n = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n < \infty$, da $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ absolut konvergent ist. Nach dem Weierstraßschen Majorantenkriterium ist somit $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \xrightarrow{\text{glm}} F|_{[-r,r]}$ gezeigt. Die Funktionenreihe besteht aus Polynomen, die stetig sind. Nach Satz 6.24 ist also $F|_{[-r,r]}$ stetig. Da $r < R$ beliebig war, folgt, dass $F : (-R, R) \to \mathbb{R}$ überall stetig ist. □

KAPITEL 7

# Differentialrechnung

(V24)

## 7.1. Definition und Beispiele

DEFINITION 7.1. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ und gelte $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \xrightarrow{x \to x_0} c \in \mathbb{R}$. Dann heißt $f$ **differenzierbar bei** $x_0$ und

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

heißt die **Ableitung von** $f$ **bei** $x_0$. Ist $f$ bei jedem $x \in D$ differenzierbar, dann heißt $f$ **differenzierbar**. Ist die Funktion $f' : D \to \mathbb{R}$sogar stetig, dann heißt $f$ **stetig differenzierbar**.

BEISPIEL. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, ist differenzierbar bei $x_0 \in \mathbb{R}$, mit $f'(x_0) = 2x_0$, denn $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{x^2-x_0^2}{x-x_0} \overset{x \neq x_0}{=} x + x_0 \xrightarrow{x \to x_0} 2x_0$.

BEMERKUNGEN.

- $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ heißt, wo definiert, **Differenzenquotient** (von $f$ zwischen $x$ und $x_0$). Er entspricht der **Sekantensteigung** am Graph von $f$ zwischen den Punkten $(x_0, f(x_0))$ und $(x, f(x))$.
$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) := f'(x_0)$$
heißt auch **Differentialquotient** (als Limes des Differenzenquotienten) und entspricht der Steigung der Tangente an den Graphen von $f$ im Punkt $(x_0, f(x_0))$.
- Ist $f|_{[a,+\infty)} \to \mathbb{R}$ in $a$ differenzierbar mit Ableitung $c \in \mathbb{R}$, so heißt $f'(a+) := c$ **rechtsseitige Ableitung** von $f$ bei $a$. Analog wird die **linksseitige Ableitung** definiert.

BEISPIELE.

- Für $f(x) = |x|$ auf $\mathbb{R}$ gilt sowohl $f'(0+) = 1$ und $f'(0-) = -1$. $f'(0)$ ist dagegen nicht definiert, da $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{|x|}{x} \overset{x \neq 0}{=} \operatorname{sgn}(x)$ für $x \to 0$ keinen Grenzwert hat.
- Für die konstante Funktion $f(x) = c \in \mathbb{R}$ gilt $f'(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- Für die Identität, $\mathrm{id}(x) = x$ gilt $\mathrm{id}'(x) = 1$ für $x \in \mathbb{R}$.
- Für die reelle Exponentialfunktion gilt $\exp' = \exp$.

*Beweis.* Für $t < 1$ gilt $1+t \leq \exp(t) \leq \frac{1}{1-t}$ und damit für $t \in (0,1)$:

$$\frac{t}{t} \leq \frac{\exp(t)-\exp(0)}{t} \leq \frac{1}{t}\left(\frac{1}{1-t} - 1\right),$$

bzw. $1 < \frac{\exp(t)-1}{t} < \frac{1}{1-t}$. Analog erhält man für $t \in (-1,0)$ die Ungleichung $\frac{1}{1-t} < \frac{\exp(t)-1}{t} < 1$. Daraus folgt per Einschnürung

$$\lim_{t\to 0} \frac{\exp(t)-1}{t} = 1$$

und damit für alle $x_* \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\exp'(x_*) &= \lim_{x\to x_*} \frac{\exp(x)-\exp(x_*)}{x-x_*} = \lim_{t\to 0} \frac{\exp(x_*+t)-\exp(x_*)}{t} \\ &= \exp(x_*) \lim_{t\to 0} \frac{\exp(t)-1}{t} = \exp(x_*).\end{aligned}$$

Satz 7.1 (**Lineare Approximation**). $f : D \to \mathbb{R}$ ist genau dann bei $X_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$ differenzierbar, wenn es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für die durch

$$f(x) = f(x_0) + c(x-x_0) + R_1(x-x_0)$$

definierte Funktion $R_1$ gilt: $\lim_{h\to 0} \frac{R_1(h)}{h} = 0$.

*Beweis.* "$\Longleftarrow$": $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{c(x-x_0)+R_1(x-x_0)}{x-x_0} = c+0$.
"$\Longrightarrow$": Setze $c := f'(x_0)$. Dann ist

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{R_1(h)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-ch}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - c = f'(x_0) - c = 0.\end{aligned}$$

□

Korollar 7.2. Ist $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar bei $x_0 \in D$, dann ist $f$ dort auch stetig.

*Beweis.* Aus $\frac{R_1(h)}{h} \to 0$ für $h \to 0$ folgt $R_1(h) = \frac{R_1(h)}{h} \cdot h \to 0$. somit gilt

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \big(f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + R_1(x-x_0)\big) = f(x_0).$$

□

Korollar 7.3 (**Geometrische Interpretation**). $f : D \to \mathbb{R}$ ist genau dann in $x_0 \in D$ differenzierbar mit Ableitung $c \in \mathbb{R}$, wenn für jedes $\epsilon >$ ein $\delta > 0$ exisitiert, so dass der Graph von $f_{(x_0-\delta, x_0+\delta)}$ zwischen den Graphen von $x \mapsto f(x_0)+(c-\epsilon)(x-x_0)$ und $x \mapsto f(x_0)+(c+\epsilon)(x-x_0)$ liegt.

*Beweis.* $\epsilon$-$\delta$-Charakterisierung des Grenzwertes $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \xrightarrow{x\to x_0} c$. □

## 7.2. Ableitungsregeln

SATZ 7.4. Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar bei $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$. Dann gilt für $\lambda \in \mathbb{R}$

$$(f + \lambda g)'(x_0) = f'(x_0) + \lambda g'(x_0) \qquad \textbf{(Linearität)}$$

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \qquad \textbf{(Produktregel)}$$

$$g(x_0) \neq 0 : \qquad \left(\tfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2} \qquad \textbf{(Quotientenregel)}$$

*Beweis.* Die Linearität folgt direkt aus dem Grenzwertkalkül.
Für die Produktregel schreiben wir

$$f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0) = (f(x) - f(x_0))g(x) + f(x_0)(g(x) - g(x_0)).$$

Somit ist

$$\begin{aligned}(fg)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + \lim_{x\to x_0} f(x_0)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).\end{aligned}$$

Für die Quotientenregel verwendet man in gleicher Weise

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)} &= \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)} \\ &= \frac{(f(x) - f(x_0))g(x_0) - f(x_0)(g(x) - g(x_0))}{g(x)g(x_0)}\end{aligned}$$

für den Zähler des Differenzenquotienten. □

BEMERKUNG. Zur Berechnung der Ableitung zusammengesetzter Funktionen verwendet man auch die Schreibweisen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)\Big|_{x=x_0} := \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} f(x_0) := f'(x_0).$$

Achtung: Statt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f(y)|_{y=x}$ schreibt man auch $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$

BEISPIELE.

- Sei für $n \in \mathbb{N}^*$ die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = x^n$. Dann ist $f'(x) = nx^{n-1}$.

  *Beweis.* " $n = 1$": $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x = 1 = 1 \cdot x^0$.
  "$n \mapsto n + 1$":

  $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^{n+1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(x^n \cdot x\big) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(x^n\big)x + x^n \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x \overset{\text{I.V.}}{=} nx^{n-1} \cdot x + x^n = (n+1)x^n$$

wegen der Produktregel.

- Für $n \in \mathbb{N}^*$ sei $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{-n}$. Dann ist
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^{-n} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{1}{x^n} = \frac{0 \cdot x^n - 1 \cdot nx^{n-1}}{x^{2n}} = -\frac{n}{x^{n+1}} = (-n)x^{(-n)-1}$$
wegen der Quotientenregel.

D.h. für beliebige $n \in \mathbb{Z}$ gilt, wo definiert, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^n = nx^{n-1}$.

Mit $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0$ zeigt man $\sin'(x) = \cos(x)$ und $\cos'(x) = -\sin(x)$.

Die **Tangensfunktion** $\tan : \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$,
$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)},$$
hat als Ableitung nach der Quotientenregel
$$\begin{aligned}\tan'(x) = \left(\frac{\sin}{\cos}\right)'(x) &= \frac{\sin'(x)\cos(x) - \sin(x)\cos'(x)}{\cos(x)^2} \\ &= \frac{\cos(x)^2 + \sin(x)^2}{\cos(x)^2} = 1 + \tan(x)^2 = \frac{1}{\cos(x)^2}\end{aligned}$$

(V25)

SATZ 7.5 (**Kettenregel**). Ist $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar bei $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$ und $g : f(D) \to \mathbb{R}$ differenzierbar bei $f(x_0)$, dann ist $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar bei $x_0$ und
$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)f'(x_0).$$

*Beweis.* Wir setzen $y_0 = f(x_0)$. Es gilt
$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R_{1,f}(x - x_0), \qquad (*)$$
$$g(y) = g(y_0) + g'(y_0)(y - y_0) + R_{1,g}(y - y_0), \qquad (**)$$
mit $\frac{R_{1,f}(h)}{h} \xrightarrow{h \to 0} 0$, $\frac{R_{1,g}(h)}{h} \xrightarrow{h \to 0} 0$. Damit erhält man
$$\begin{aligned} g \circ f(x) = g(f(x)) &\overset{(**)}{=} g(y_0) + g'(y_0)(f(x) - y_0) + R_{1,g}(f(x) - y_0) \\ &\overset{(*)}{=} g(y_0) + g'(y_0)\big(f'(x_0)(x - x_0) + R_{1,f}(x - x_0)\big) \\ &\quad + R_{1,g}\big(f'(x_0)(x - x_0) + R_{1,f}(x - x_0)\big) \\ &= \underbrace{g(f(x_0))}_{= g \circ f(x_0)} + \underbrace{g'(f(x_0))f'(x_0)}_{=(g \circ f)'(x_0)}(x - x_0) \\ &\quad \underbrace{+ g'(y_0)R_{1,f}(x-x_0) + R_{1,g}\big(f'(x_0)(x-x_0) + R_{1,f}(x-x_0)\big)}_{= R_{1,g \circ f}(x-x_0)}, \end{aligned}$$

wobei

$$\frac{R_{1,g\circ f}(h)}{h} = g'(y_0)\underbrace{\frac{R_{1,f}(h)}{h}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{R_{1,g}(f'(x_0)h+R_{1,f}(h))}{f'(x_0)h+R_{1,f}(h)}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{f'(x_0)h+R_{1,f}(h)}{h}}_{\to f'(x)}$$

$$\xrightarrow{h\to 0} 0.$$

□

BEISPIELE.

- Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar, dann ist $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{f(x)} = f'(x)\mathrm{e}^{f(x)}$. Denn sei $h(x) = \mathrm{e}^{f(x)} = \exp \circ f(x)$. Dann ist

$$h'(x) = (\exp \circ f)'(x) = \exp'(f(x))f'(x) = f'(x)\mathrm{e}^{f(x)}.$$

- Konkret $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\mathrm{e}^{y}|_{y=x^2} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^2 = \mathrm{e}^{y}|_{y=x^2} \cdot 2x = 2x\mathrm{e}^{x^2}$.
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

SATZ 7.6 (**Ableitung der Umkehrfunktion**). Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ streng monoton und $f$ bei $x_* \in I$ differenzierbar mit $f'(x_*) \neq 0$. Dann ist $f^{-1} : f(I) \to I$ bei $y_* = f(x_*)$ differenzierbar mit

$$\left(f^{-1}\right)'(y_*) = \frac{1}{f'(x_*)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y_*)\right)}.$$

*Beweis.* Wegen der Monotonie exisitiert die Umkehrfunktion $f^{-1}$ und ist stetig. Gelte nun für eine beliebige Folge $(y_n) \subseteq f(I) \setminus \{y_*\}$, dass $y_n \to y_*$. Wegen der Stetigkeit von $f^{-1}$ gilt $x_n : +f^{-1}(y_n) \to f^{-1}(y_*) = x_*$, wobei $x_n \neq x_*$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit ist

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f^{-1}(y_n)-f^{-1}(y_*)}{y_n-y_*} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_*}{f(x_n)-f(x_*)} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(x_*)}{x_n-x_*}}$$
$$= \frac{1}{f'(x_*)}.$$

□

BEISPIELE.

- $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ ist die Umkehrfunktion von $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$. Setze $y_0 = \exp(x_0)$ für $x_0 \in \mathbb{R}$. Also ist $x_0 = \ln(y_0)$. Somit gilt

$$\ln'(y_0) = \frac{1}{\exp'(x_0)} = \frac{1}{\exp(\ln(y_0))} = \frac{1}{y_0}.$$

- $\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Für $y \in (-1,1)$ gilt

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\big(\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\big)'(\arcsin y)} = \frac{1}{\cos(\arcsin(y))}$$
$$\overset{(*)}{=} \frac{1}{\sqrt{1-\sin(\arcsin y)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$(*)$ $\cos(x) > 0$ für $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Analog erhält man als Ableitung von $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$ für $y \in (-1,1)$:

$$\arccos'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

- $\sqrt[k]{\cdot} : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ ist Umkehrfunktion von $x \mapsto x^k$ auf $\mathbb{R}_0^+$. Es gilt

$$\sqrt[k]{\cdot}'(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\sqrt[k]{y} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^k)}\Big|_{x=\sqrt[k]{y}} = \frac{1}{kx^{k-1}}\Big|_{x=\sqrt[k]{y}} = \frac{\sqrt[k]{y}}{ky}.$$

- Allgemeiner: Für $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ mit $x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$ folgt aus der Kettenregel:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^{\frac{p}{q}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt[q]{x^p} = \frac{\sqrt[q]{x^p}}{qx^p}px^{p-1} = \frac{p}{q}\frac{x^{\frac{p}{q}}}{x} = \frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}.$$

Zusammengefasst gilt für $x > 0$ und $r \in \mathbb{Q}$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^r = rx^{r-1}.$$

## 7.3. Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung

DEFINITION 7.2. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion mit $D \subseteq \mathbb{R}$. $x \in D$ heißt **(globale oder absolute) Maximalstelle von** $f$, wenn $f(x) \geq f(y)$ für alle $y \in D$ (kurz $f(x) \geq f(D)$). $x \in D$ heißt **(globale oder absolute) Minimalstelle von** $f$, wenn $f(x) \leq f(D)$.

$x \in D$ heißt **Extremstelle von** $f$, wenn $x$ Minimal- oder Maximalstelle von $f$ ist. $x \in D$ heißt **lokale Extremalstelle von** $f$, wenn es ein $\delta > 0$ gibt, so dass $f|_{D\cap \mathrm{B}_\delta(x)}$ in $x$ eine globale Extremstelle hat (analog für **lokale Maximal- bzw. Minimalstelle**).

BEMERKUNG. Ist $x$ eine Maximalstelle von $f : D \to \mathbb{R}$, dann heißt $f(x)$ **Maximalwert von** $f$. Dies wird ausfgedrückt durch: “$f$ besitzt ein Maximum bei $x$”, “$f$ nimmt in $x$ sein Maximum an”, oder ähnlich. Salopp spricht man von “dem oder einem Maximum von $f$” und meint damit je nach Kontext Maximalstelle, Maximalwert oder beides.

SATZ 7.7. Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar an einer lokalen Extremstelle $x_* \in (a,b)$ von $f$, dann gilt $f'(x_*) = 0$.

*Beweis.* Sei $x_* \in (a,b)$ eine lokale Maximalstelle von $f$. Sei $(x_n) \subseteq (x_*, b)$ mit $x_n \to x_*$. Wegen $f(x_n) \leq f(x_*)$ für $n$ groß genug und der-Differenzierbarkeit von $f$ bei $x_*$ gilt

$$f'(x_*) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(x_*)}{x_n - x_*} \leq 0.$$

Für eine Folge $(x_n) \subseteq (a, x_*)$ mit $x_n \to x_*$ folgt analog $f'(x_*) \geq 0$. Somit gilt $f'(x_*) = 0$. Für ein lokales Minimum argumentiert man genauso. □

KOROLLAR 7.8. Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar bei $x \in (a,b)$ mit $f'(x) \neq 0$, dann ist $x$ *keine* Extremstelle von $f$.

*Beweis.* Kontraposition von Satz 7.7

SATZ 7.9 (**Satz von Rolle**). Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $a < b$, $f(a) = f(b) = 0$ und $f|_{(a,b)}$ differenzierbar, dann gibt es ein $x \in (a,b)$ mit $f'(x) = 0$.

*Beweis.* Ist $f(x) = 0$ für alle $x \in [a,b]$, so ist nichts zu zeigen. Andernfalls nimmt $f$ einen Extremwert $\neq 0$ auf $(a,b)$ an. Sei ohne Einschränkung $x \in (a,b)$ Maximalstelle von $f$. Dann folgt nach Satz 7.7 schon $f'(x) = 0$. □

SATZ 7.10 (**Mittelwertsatz der Differentialrechnung, MWS**). Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $a < b$ und $f|_{(a,b)}$ differenzierbar, dann gibt es ein $x \in (a,b)$ mit $f'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

*Beweis.* Wende den Satz von Rolle auf $x \mapsto g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ an. Aus $g'(x_*) = 0$ folgt dann $f'(x_*) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. □

(V26) SATZ 7.11 (**Monotoniekriterium**). Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gilt:

$$\begin{array}{lcl}
f'(I) > 0 & \Longrightarrow & f \text{ ist streng monoton steigend} \\
f'(I) \geq 0 & \Longleftrightarrow & f \text{ ist monoton steigend} \\
f'(I) = \{0\} & \Longleftrightarrow & f \text{ ist konstant} \\
f'(I) \leq 0 & \Longleftrightarrow & f \text{ ist monoton fallend} \\
f'(I) < 0 & \Longrightarrow & f \text{ ist streng monoton fallend}
\end{array}$$

*Beweis.* Sei $f'(I) > 0$, d.h. $f'(x) > 0$ für alle $x \in I$. Annahme: Es gibt $a, b \in I$, $a < b$ mit $f(a) \geq f(b)$. Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein $x \in (a,b)$ mit $f'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq 0$, ein Widerspruch zu $f'(x) > 0$.
Genauso zeigt man alle anderen Implikationen "$\Longrightarrow$".
Die "$\Longleftarrow$" Implikationen folgen sofort aus den Vorzeichen der Differenzenquotienten und deren Limes. □

BEMERKUNG. Das Beispiel $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^3$ zeigt, dass aus strenger Monotonie im Allgemeinen nicht folgt, dass die Steigung überall positiv oder negativ ist.

SATZ 7.12 (**Verallgemeinerter Mittelwertsatz der Differentialrechnung**). Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, $a < b$, und differenzierbar auf $(a, b)$. Dann gibt es ein $t \in (a, b)$ mit

$$f'(t)(g(b) - g(a)) = g'(t)(f(b) - f(a)).$$

*Beweis.* Ohne Einschränkung sei $f(a) = g(a) = 0$. Dann gibt es nach dem Satz von Rolle für $h(t) = f(b)g(t) - f(t)g(b)$ ein $t \in (a, b)$ mit $0 = h'(t) = f(b)g'(t) - f'(t)g(b)$. □

SATZ 7.13 (**l'Hospitalsche Regel für "$\frac{0}{0}$"**).
Seien $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $g'(x) \neq 0$ für $x \in (a, b)$ und gelte $f(x) \xrightarrow{x \to a} 0$, $g(x) \xrightarrow{x \to a} 0$. Existiert der Grenzwert $\frac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow{x \to a} c \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

*Beweis.* Seien $f$ und $g$ bei $x = a$ stetig durch 0 fortgesetzt. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq (a, b)$ mit $x_n \to a$, beliebig. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es nach dem verallgemeinerten Mittelwertsatz ein $y_n \in (a, x_n)$ mit

$$f'(y_n)(g(x_n) - g(a)) = g'(y_n)(f(x_n) - f(a)).$$

Wegen $x_n \to a$ und $a < y_n < x_n$ gilt $y_n \to a$. Außerdem ist $g'(y_n) \neq 0$ und $g(x_n) \neq g(a)$ (sonst gäbe es auch ein $z_n \in (a, x_n)$ mit $g'(z_n) = \frac{g(x_n) - g(a)}{x_n - a} = 0$, was ausgeschlossen ist). Es gilt also für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{f'(y_n)}{g'(y_n)} = \frac{f(x_n) - f(a)}{g(x_n) - g(a)}.$$

Im Limes $n \to \infty$ also $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{f'(y_n)}{g'(y_n)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Da $(x_n)$ beliebig war folgt $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. □

SATZ 7.14 (**l'Hospitalsche Regel für "$\frac{\infty}{\infty}$"**).
Seien $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $g'(x) \neq 0$ für $x \in (a, b)$ und gelte $f(x) \xrightarrow{x \to a} \infty$, $g(x) \xrightarrow{x \to a} \infty$. Existiert der Grenzwert $\frac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow{x \to a} c \in \mathbb{R}$, dann ist

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

*Beweis.* Sei $(x_n) \subseteq (a, b)$ eine beliebige Folge mit $x_n \to a$.
Wähle $\epsilon > 0$ beliebig. Es gibt ein $y_0 \in (a, b)$, so dass für alle $y \in (a, x_0)$

gilt

$$\left|\frac{f'(y)}{g'(y)} - c\right| < \epsilon.$$

Für ein solches $y \in (a, x_0)$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ gilt: $x_n \in (a, y)$. Nach dem verallgemeinerten Mittelwertsatz gibt es für $n \geq N$ jeweils ein $z_n \in (x_n, y)$, so dass

$$\frac{f(y) - f(x_n)}{g(y) - g(x_n)} = \frac{f'(z_n)}{g'(z_n)},$$

denn $g(y) = g(x_n)$ ist unmöglich, sonst gäbe es ein $\xi \in (x_n, y)$ mit $g'(\xi) = 0$. Somit ist

$$\epsilon > \left|\frac{f(y) - f(x_n)}{g(y) - g(x_n)} - c\right| = \left|\frac{\frac{f(x_n)}{g(x_n)} - \frac{f(y)}{g(x_n)}}{1 - \frac{g(y)}{g(x_n)}} - c\right|.$$

Da $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(y)}{g(x_n)} = 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{g(y)}{g(x_n)} = 0$ ist, folgt

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{f(x_n)}{g(x_n)} - c\right| \leq \epsilon.$$

Da $\epsilon$ beliebig war, folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = c$. □

BEMERKUNG. Die Regeln von l'Hospital gelten entsprechend genauso für $x \to b$. Es ist auch $a = -\infty$ oder $b = +\infty$ zulässig.

BEISPIELE.

- $\lim\limits_{x\downarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \overset{\text{l'H}}{=} \lim\limits_{x\downarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2} \lim\limits_{x\downarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2}$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} \overset{\text{l'H}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$.
- $\lim\limits_{x\downarrow 0} x \ln x = \lim\limits_{x\downarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\text{l'H}}{=} \lim\limits_{x\downarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\downarrow 0}(-x) = 0$.

(V27)

## 7.4. Kurvendiskussion

DEFINITION 7.3. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ und $f : D \to \mathbb{R}$ beliebig.

- Gilt $f(x_0) > f(D \setminus \{x_0\})$, so heißt $x_0$ **die eindeutige Maximalstelle von** $f$. In diesem Fall setzt man

$$\operatorname*{argmax}_{x\in D} f(x) := \operatorname*{argmax}_{D} f := x_0.$$

- Gibt es ein $\delta > 0$, so dass $x_0$ eindeutige Maximalstelle von $f|_{D\cap \mathrm{B}_\delta(x_0)}$ ist, dann heißt $x_0$ **isolierte lokale Maximalstelle von** $f$.

Analog für **Minimalstellen** und argmin.

BEMERKUNGEN.

- Ist $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ beliebig und gibt es ein $x_0 \in D$, so dass $f|_{D\cap(-\infty,x_0]}$ streng monoton steigend ist und $f|_{D\cap[x_0,+\infty)}$ streng monoton fallend, dann ist offensichtlich $x_0$ das eindeutige Maximum von $f$.
- Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in I$ und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Ist zusätzlich $f$ differenzierbar auf $I \setminus \{x_0\}$ mit $f'(x) > 0$ für alle $x < x_0$ und $f'(x) < 0$ für alle $x > x_0$, dann ist $x_0$ die eindeutige Maximalstelle von $f$.
- **Standardproblem der Extremwertbestimmung:** Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f|_{(a,b)}$ differenzierbar. Wie lautet $\max f([a,b])$?
  Da jede Maximalstelle auch eine lokale Maximalstelle ist, und $x \in (a,b)$ mit $f'(x) \neq 0$ sicher keine solche ist, gilt
  $$\max\{f(x) : x \in [a,b]\} = \max\{a,b\} \cup \{x \in (a,b) | f'(x) = 0\}.$$
  Ein Punkt bei dem die Ableitung von $f$ verschwindet, nennt man **kritischer Punkt** von $f$. Ist die Menge der kritischen Punkte $(f')^{-1}(\{0\})$ endlich, so kann obiges Maximum leicht bestimmt werden.

SATZ 7.15. Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar,$x_0 \in I$ mit $f'(x_0) = 0$ und $f'$ bei $x_0$ differenzierbar, dann gilt:

(i) $f''(x_0) > 0 \Longrightarrow f$ hat ein isoliertes lokales Minimum bei $x_0$.
(ii) $f''(x_0) < 0 \Longrightarrow f$ hat ein isoliertes lokales Maximum bei $x_0$.

*Beweis.* Wir zeigen nur (i): Die geometrische Interpretation der Differenzierbarkeit von $f'$ bei $x_0$ impliziert für $\epsilon := \frac{f''(x_0)}{2}$, dass für $x$ in geeigneter $\delta$-Umgebung von $x_0$ gilt: Ist $x > x_0$, so folgt
$$f'(x) > f'(x_0) + (f''(x_0) - \epsilon)(x - x_0) = \tfrac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0) > 0,$$
genauso folgt für $x < x_0$
$$f'(x) < f'(x_0) + (f''(x_0) - \epsilon)(x - x_0) = \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0) < 0.$$
Nach der vorhergehenden Bemerkung ist $x_0$ somit das eindeutige Minimum von $f|_{B_\delta(x_0)}$ und damit isoliertes lokales Minimum von $f$. □

BEMERKUNGEN.

- $f$ muss an einer isolierten Maximalstelle nicht differenzierbar sein (z.B. $x \mapsto -|x|$), nicht einmal rechts- und linksseitige Ableitungen müssen existieren ($x \mapsto -\sqrt{|x|}$). Existiert die Ableitung beim isolierten lokalen Maximum, so muss sie dort gleich Null sein. Existiert dort auch die zweite Ableitung, so kann sie nicht positiv sein, kann aber sehr wohl den Wert 0 annehmen ($x \mapsto -x^4$).

DEFINITION 7.4. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, mit einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ heißt **konvex**, wenn gilt
$$\forall x, y \in I \; \forall \lambda \in [0,1] : f\big((1-\lambda)x + \lambda y\big) \leq (1-\lambda) f(x) + \lambda f(y).$$

Gilt für alle $x, y \in I$ mit $x \neq y$ und für $0 < \lambda < 1$ sogar

$$f\big((1-\lambda)x + \lambda y\big) < (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y),$$

dann heißt $f$ **strikt konvex**.
$f$ heißt **(strikt) konkav**, wenn $-f$ (strikt) konvex ist.
Trennt $x_0 \in I$ einen strikt konkaven von einem strikt konvexen Bereich, so heißt $x_0$ **Wendepunkt** von $f$.

BEMERKUNGEN.

- **Geometrische Interpretation:** Für $a, b \in I$, $a < b$ heißt
$$x \mapsto f(a) + (x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$
die **Sekante** an $f$ zwischen $a$ und $b$. Der Graph der Sekante ist die Menge
$$\{\big((1-\lambda)a + \lambda b, (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b)\big) \,:\, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$
Schränkt man $\lambda$ auf $[0,1]$ ein, so erhält man die **Verbindungsstrecke** oder **Sehne** zwischen den beiden Punkten $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ des Graphen von $f$. Strikt konvex bedeutet, der Graph liegt überall echt unterhalb jeder Sehne an den Graphen von $f$ (ohne Endpunkte). Strikt konkav bedeutet, der Graph liegt überall echt oberhalb jeder seiner Sehnen.

- Die affinen Abbildungen $x \mapsto cx + d$, $c, d \in \mathbb{R}$, sind sowohl konvex als auch konkav.
- **Merke:** Die Normalparabel $x \mapsto x^2$ ist strikt konvex.

SATZ 7.16. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar, d.h. $f' : I \to \mathbb{R}$ existiert und ist wiederum differenzierbar. Dann gilt:

$$f \text{ konvex} \quad \Longleftrightarrow \quad f'' \geq 0.$$

Gilt darüber hinaus $f''(x) > 0$, dann ist $f$ sogar strikt konvex.

*Beweis.* "$\Longrightarrow$": Wir zeigen die Kontraposition. Sei also $x_0 \in I$ mit $f''(x_0) < 0$. Dann besitzt die Funktion $x \mapsto g(x) := f(x) - f'(x_0)(x - x_0)$ wegen $g'(x_0) = 0$ und $g''(x_0) = f''(x_0) < 0$ ein isoliertes lokales Maximum. Es gibt also ein $h > 0$ klein genug, so dass $g(x_0 - h) < g(x_0)$ und $g(x_0 + h) < g(x_0)$ Mit $a = x_0 - h$, $b = x_0 + h$ und $\lambda = \frac{1}{2}$ gilt nun

$$\begin{aligned} f\big((1-\lambda)a + \lambda b\big) &= f(x_0) = g(x_0) > \tfrac{1}{2}\big(g(x_0 - h) + g(x_0 + h)\big) \\ &= \tfrac{1}{2}\big(f(x_0 - h) + f(x_0 + h)\big) = (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b). \end{aligned}$$

$f$ ist also nicht konvex.
"$\Longleftarrow$": Sei $f''(x) \geq 0$ für $x \in I$. Dann ist $f' : I \to \mathbb{R}$ monoton wachsend. Seien nun $a, b \in I$ beliebig und $\lambda \in (0,1)$. Ohne Einschränkung können wir $a < b$ annehmen. Dann ist $x = (1-\lambda)a + \lambda b \in (a, b)$. Nach

dem Mittelwertsatz gibt es $z_1 \in (a, x)$ und $z_2 \in (x, b)$, so dass

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(z_1) \leq f'(z_2) = \frac{f(b) - f(x)}{b - x}$$

gilt, bzw. wegen $x - a = \lambda(b - a)$ und $b - x = \lambda(b - a)$ ist

$$\frac{f(x) - f(a)}{\lambda} \leq \frac{f(b) - f(x)}{1 - \lambda},$$

und somit $f(x) \leq (1 - \lambda)f(a) + \lambda f(b)$. Dies zeigt, dass $f$ konvex ist. $f'' > 0$ ergibt strenge Monotonie von $f'$. Wie im Beweis von "$\Longleftarrow$" erhält man so strikte Konvexität. $\square$

BEMERKUNG. $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto x^4$ ist strikt konvex mit $f''(0) = 0$ und zeigt, dass bei strikter Konvexität keine Äquivalenz besteht.

BEISPIELE.

- Wegen $\exp''(x) = \exp(x) > 0$ ist $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strikt konvex.
- Wegen $\ln''(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2} < 0$ ist $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ strikt konkav.
- Für $a \in \mathbb{R}$ ist die **allgemeine Potenz** $\mathbb{R}^+ \ni x \mapsto x^a := \exp(a \ln(x))$ gilt

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^a &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\exp(a\ln(x))\big) = \exp(a\ln x)\frac{a}{x} = a\exp(a\ln x)\frac{1}{\exp(\ln(x))}\\ &= a\exp((a-1)\ln(x)) = ax^{a-1}.\end{aligned}$$

  Für $a > 1$ oder $a < 0$ ist $x \mapsto x^a$ strikt konvex und für $a \in (0, 1)$ strikt konkav, denn $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}x^a = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(ax^{a-1}\big) = a(a-1)x^{a-2}$ und $a^{a-2} > 0$ für alle $x > 0$.

## 7.5. Höhere Ableitungen und Taylor-Approximation

(V28)

DEFINITION 7.5. Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, so heißt eine beliebige Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ 0-mal differenzierbar, die nullte Ableitung ist $f^{(0)}(x) = f(x)$. Für $k \in \mathbb{N}^*$ heißt $f$ **$k$-mal differenzierbar**, wenn $f$ $(k-1)$-mal differenzierbar ist und die $(k-1)$-te Ableitung wieder differenzierbar ist. Dann ist die $k$-te Ableitung gegeben durch

$$f^{(k)}(x) = \big(f^{(k-1)}\big)'(x).$$

Ist die $k$-te Ableitung selbst wieder stetig, so nennt man $f$ **$k$-mal stetig differenzierbar**.
Für $k \in \mathbb{N}_0$ setzt man

$$C^k(I) := \{f : I \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist } k\text{-mal stetig differenzierbar}\},$$

und

$$C^\infty(I) := \bigcap_{k\in\mathbb{N}_0} C^k(I).$$

BEMERKUNG. Die Mengen $\mathcal{C}^k(I)$, $k \in \mathbb{N}_0$, und $\mathcal{C}^\infty(I)$ sind mit der punktweisaen Addition und skalaren Multiplikation Untervektorräume von $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, dem Raum aller Funktionen von $I$ nach $\mathbb{R}$.

BEISPIELE.

- $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist in $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.
  Wegen $\exp' = \exp$ gilt $\exp^{(k)}(x) = \exp(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}_0$. Insbesondere ist $\exp^{(k)}(0) = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.
- Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $p(x) = x^n$. Damit ist $p \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ und $p'(x) = nx^{n-1}$, $p''(x) = n(n-1)x^{n-2}, \ldots$, also
  $$p^{(k)}(x) = \left(\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^k x^n = \tfrac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} x^n = \begin{cases} n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k}, & \text{für } k < n, \\ k!, & \text{für } k = n, \\ 0, & \text{für } k > n. \end{cases}$$
  und
  $$p^{(k)}(0) = \tfrac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} x^n \Big|_{x=0} = \begin{cases} 0, & \text{für } k \neq n, \\ k!, & \text{für } k = n. \end{cases}$$
- Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und
  $$p(x) = \begin{cases} x^n, & \text{für } x \geq 0, \\ 0, & \text{für } x < 0. \end{cases}$$
  Dann ist $p \in \mathcal{C}^{n-1}(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{C}^n(\mathbb{R})$.
- Sei schließlich $p$ ein beliebiges reelles Polynom,
  $$p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$$
  mit $a_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, \ldots, n$. Dann ist
  $$p^{(k)}(0) = \begin{cases} k! a_k, & \text{für } 0 \leq k \leq n, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

DEFINITION 7.6 (**Taylorpolynom**).
Ist $f \in \mathcal{C}^k(I)$ und $a \in I \subseteq \mathbb{R}$, $i$ ein Intervall, dann heißt
$$\mathrm{T}_k f(x; a) := \sum_{j=0}^{k} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j$$
das **Taylorpolynom vom Grad** $k$ **von** $f$ **im Entwicklungspunkt** $a$.
$$\mathrm{R}_k f(x; a) := f(x) - \mathrm{T}_k f(x; a)$$
heißt das $k$**-te Restglied von** $f$ **im Entwicklungspunkt** $a$.

SATZ 7.17 (**Taylorapproximation**).
Sei $f \in C^k(I)$, $a \in I \subseteq \mathbb{R}$, $I$ Intervall. Dann gilt für alle $l \in \{0, \ldots, k\}$:

$$f^{(l)}(a) = \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l} \mathrm{T}_k f(x;a)\Big|_{x=a}$$

und für das Restglied

$$\lim_{x \to a} \frac{\mathrm{R}_k(x;a)}{(x-a)^k} = 0.$$

*Beweis.* Wir zeigen

$$\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l} \mathrm{T}_k f(x;a) = \sum_{j=l}^{k} \frac{f^{(j)}(a)}{(j-l)!}(x-a)^{j-l}$$

für $l \in \mathbb{N}_0$ und damit $\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l} \mathrm{T}_k f(x;a)\Big|_{x=a} = \frac{f^{(l)}(a)}{0!} 0^0 = f^{(l)}(a)$ für $l \leq k$ durch Induktion nach $l \in \mathbb{N}_0$.
“$l = 0$”: Gilt nach Definition des Taylorpolynoms.
“$l \mapsto l+1$”:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^{l+1}}{\mathrm{d}x^{l+1}} \mathrm{T}_k f(x;a) &\overset{\text{I.V.}}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{j=l}^{k} \frac{f^{(j)}(a)}{(j-l)!}(x-a)^{j-l} \\
&= \sum_{j=l}^{k} \frac{f^{(j)}(a)}{(j-l)!}(j-l)(x-a)^{j-l-1} \\
&= \sum_{j=l+1}^{k} \frac{f^{(j)}(a)}{(j-(l+1))!}(j-l)(x-a)^{j-(l+1)}.
\end{aligned}$$

Abschätzung des Restglieds

- Für $k = 0$: $\mathrm{R}_0 f(x;a) = f(x) - f(a) \xrightarrow{x \to a} 0$, da $f$ stetig.
- Für $k = 1$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} \frac{\mathrm{R}_1 f(x;a)}{x-a} &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - \big(f(a) + (x-a)f'(a)\big)}{x-a} \\
&\overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x \to a} \frac{f'(x) - f'(a)}{1} = 0,
\end{aligned}$$

  da $f'$ stetig.

- Für $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} \frac{\mathrm{R}_k f(x;a)}{(x-a)^k} &= \lim_{x\to a} \frac{f(x) - \mathrm{T}_k f(x;a)}{(x-a)^k} \\ &\overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to a} \frac{f'(x) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{T}_k f(x;a)}{k(x-a)^{k-1}} = \cdots \\ &\overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to a} \frac{f^{(l)}(x) - \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}\mathrm{T}_k f(x;a)}{k(k-1)\cdots(k-l+1)(x-a)^{k-l}} = \cdots \\ &\overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to a} \frac{f^{(k)}(x) - \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\mathrm{T}_k f(x;a)}{k!} = 0,\end{aligned}$$

da $f^{(l)}(x) \xrightarrow{x\to a} f^{(l)}(a)$ für alle $l \in \{0, \dots, k\}$. □

BEMERKUNGEN.

- Das Taylorpolynom der Ordnung 1,
$$x \mapsto \mathrm{T}_1 f(x;a) = f(a) + f'(a)(x-a)$$
beschreibt die Tangente an (den Graphen von) $f$ im Punkt $a$.
- Das Taylorpolynom zweiter Ordnung,
$$x \mapsto \mathrm{T}_2 f(x;a) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$$
beschreibt die **Schmiegeparabel** an $f$ in $a$.
- Für $f \in C^\infty(I)$, $a \in I$, zeigt die Taylorapproximation, dass
$$\frac{f(x) - \mathrm{T}_k f(x;a)}{(x-a)^l} \xrightarrow{x\to a} 0$$
für festes $k \in \mathbb{N}_0$ und $l = 0, \dots, k$. Uns wird interessieren, unter welchen Bedingungen
$$f(x) - \mathrm{T}_k f(x;a) \xrightarrow{k\to\infty} 0$$
für festes $x \in I$ gilt.

(V02, 22S)

## 7.6. Stammfunktionen

DEFINITION 7.7. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. $F : I \to \mathbb{R}$ heißt **Stammfunktion von** $f$, wenn $F$ differenzierbar ist und
$$F'(x) = f(x) \qquad \text{für } x \in I$$
gilt.

BEISPIELE.

- $x \mapsto \frac{1}{2}x^2$ ist Stammfunktion von $x \mapsto x$ auf $\mathbb{R}$.
- $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ ist Stammfunktion von $x \mapsto -2x\mathrm{e}^{-x^2}$ auf $\mathbb{R}$.

- $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ ist Stammfunktion von $x \mapsto \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ auf $(-1,1)$.
- $x \mapsto |x|$ ist (in diesem Sinne) keine Stammfunktion von $x \mapsto \operatorname{sgn}(x)$ auf $\mathbb{R}$, aber zum Beispiel auf $\mathbb{R}^-$ bzw. auf $\mathbb{R}^+$.

BEMERKUNG. Der Begriff der Stammfunktion kann auf stetige Funktionen, die bis auf abzählbar viele Punkte differenzierbar sind verallgemeinert werden (vgl. z.B. Königsberger, Bd 1). In diesem verallgemeinerten Sinne ist $x \mapsto |x|$ sehr wohl auf ganz $\mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $x \mapsto \operatorname{sgn}(x)$.

SATZ 7.18. Ist $F : I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $f$ und $G : I \to \mathbb{R}$. Die Funktion $G$ ist genau dann eine Stammfunktion von $f$, wenn $G - F$ konstant ist.

*Beweis.*
"$\Longleftarrow$": Sei $G = F + c$ mit $c \in \mathbb{R}$. Dann ist $G' = (F+c)' = F' = f$.
"$\Longrightarrow$": Wegen $(G-F)' = G' - F' = f - f = 0$ ist $G - F$ zugleich monoton wachsend und fallend, also konstant. □

BEMERKUNGEN.

- $\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ ist keine Stammfunktion der Nullfunktion, obwohl $\operatorname{sgn}'(x) = 0$ für alle $x$ aus dem Definitionsbereich, da $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ *kein* Intervall ist.
- Genauso ist $x \mapsto \ln(|x|)$ *keine* Stammfunktion von $x \mapsto \frac{1}{x}$ auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, sondern nur jeweils auf $\mathbb{R}^+$ bzw. $\mathbb{R}^-$.
- Jede differenzierbare Funktion $F : I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, ist trivialerweise Stammfunktion ihrer Ableitung. So erhält man leicht Listen von Stammfunktionen.
- Für viele (auch einfache) Funktionen findet man keine expliziten Ausdrücke mit einfachen Funktionen für ihre Stammfunktionen, z.B. für

$$x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2} \qquad \text{oder} \qquad x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 1 & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

  jeweils auf $\mathbb{R}$.

| | $f(x)$ | Stammfunktion | Intervall |
|---|---|---|---|
| $n \in \mathbb{N}_0$ | $x^n$ | $\frac{x^n}{n+1}$ | $\mathbb{R}$ |
| $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ | $x^a$ | $\frac{x^a}{a+1}$ | $\mathbb{R}^+$ |
| | $\frac{1}{x}$ | $\ln\lvert x\rvert$ | $\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^-$ |
| $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ | $e^{\mu x}$ | $\frac{e^{\mu x}}{\mu}$ | $\mathbb{R}$ |
| | $\sin x$ | $\cos x$ | $\mathbb{R}$ |
| | $\cos x$ | $-\sin x$ | $\mathbb{R}$ |
| | $\sinh x$ | $\cosh x$ | $\mathbb{R}$ |
| | $\cosh x$ | $\sinh x$ | $\mathbb{R}$ |
| | $\frac{1}{1+x^2}$ | $\arctan x$ | $\mathbb{R}$ |
| | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\begin{cases} \arcsin x \\ -\arccos x \end{cases}$ | $(-1,1)$ |

BEMERKUNG. Sind $F, G : I \to \mathbb{R}$ Stammfunktionen von $f$ bzw. $g$, so ist $F+G$ Stammfunktion von $f+g$. Für $f \cdot g$ gibt es keine allgemeine Formel. Zwei Spezialfälle sind Partielle Integration und Substitutionsregel.

SATZ 7.19 (**Partielle Integration**). Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$, $f$ differenzierbar und $G$ STammfunktion von $g$. Ist weiter $H$ eine Stammfunktion von $f'G$, so ist $fG - H$ eine Stammfunktion von $f \cdot g$.

*Beweis.* $(fG-H)' = f'G + fG' - H' = f'G + fg - f'G = f \cdot g$. □

BEISPIEL. Gesucht: Stammfunktion von $x \mapsto xe^x$.
$f(x) = x$, $g(x) = e^x$, $f'(x) = 1$, $G(x) = e^x$, $H(x) = e^x$. Somit ist $x \mapsto f(x)G(x) - H(x) = xe^x - e^x = (x-1)e^x$ eine Stammfunktion von $x \mapsto xe^x$.

BEMERKUNG. Die Schreibweise $\int f(x)dx$ für *eine beliebige* Stammfunktion von $f : I \to \mathbb{R}$ ist formal problematisch, aber leicht zu merken:

$$\int f(x)g(x)dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)dx,$$

wobei $G' = g$.

SATZ 7.20 (**Substitutionsregel**). Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$, $G$ eine Stammfunktion von $g$ und gelte $f(x) = h(G(x))$ für eine Funktion $h : J \to \mathbb{R}$ mit Stammfunktion $H$, dann ist $x \mapsto H(G(x))$ eine Stammfunktion von $x \mapsto f(x)g(x) = h(G(x))G'(x)$.

*Beweis.* $\frac{d}{dx}H(G(x)) = H'(G(x))G'(x) = h(G(x))g(x) = f(x)g(x)$. □

BEISPIELE.

- $\int e^{x^2} \cdot 2x \, dx = e^{x^2} \Big( + C \Big)$ auf $\mathbb{R}$ mit $C \in \mathbb{R}$,
  denn $f(x) = e^{x^2} = h(G(x))$ mit $h(y) = e^y$, $G(x) = x^2$, $g(x) = 2x = G'(x)$, also $H(y) = e^y$. Stammfunktion ist somit $x \mapsto H(G(x)) = e^{x^2}$.
- $\int \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \sin(x)^2 \Big( + C \Big)$ auf $\mathbb{R}$ mit $C \in \mathbb{R}$,
  denn $f(x) = \sin x = h(G(x))$, wobei $h(y) = y$ und $G(x) = \sin x$ gewählt werden kann, so dass $g(x) = \cos x = G'(x)$, und $H(y) = \frac{1}{2} y^2$. Stammfunktion ist somit $x \mapsto H(G(x)) = \frac{1}{2} \sin(x)^2$.

**Anwendung:** Lösungen für einfache Differentialgleichungen

- **exponentielles Wachstum.** Sei $a \in \mathbb{R}$. Welche Funktionen erfüllen die Differentialgleichung
  $$\dot{x}(t) = ax(t)$$
  für alle $t \in \mathbb{R}$ mit Anfangswert $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$?
  Offenbar ist $\tilde{x}(t) = x_0 e^{at}$ für $t \in \mathbb{R}$ eine solche Funktion. Sei $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine weitere Lösung dieses Anfangswertproblems. Dann gilt
  $$\frac{d}{dt} \frac{x(t)}{e^{at}} = \frac{\dot{x}(t)e^{at} - x(t)ae^{at}}{e^{2at}} = \frac{(\dot{x}(t) - ax(t))e^{at}}{e^{2at}} = 0.$$
  Das bedeutet, dass die Funktion $t \mapsto \frac{x(t)}{e^{at}}$ konstant ist. Mit dem Wert $x_0$ bei $t = 0$ ergibt sich $x(t) = x_0 e^{at} = \tilde{x}(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Die Lösung der Differentialgleichung ist also eindeutig auf $\mathbb{R}$.
- **Trennung der Variablen**
  Seien $f : I \to \mathbb{R}^+$ und $F : I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $\frac{1}{f}$, weiter $g : J \to \mathbb{R}$ mit Stammfunktion $G : J \to \mathbb{R}$. Dann hat die Differentialgleichung
  $$\dot{x}(t) = f(x(t))g(t), \qquad ((\text{kurz } \dot{x} = f(x)g(t))$$
  als eine Lösung
  $$x(t) = F^{-1}(G(t)) \quad \text{für alle } t \in K,$$
  auf jedem Intervall $K \subseteq J$, falls dort definiert.

  *Beweis.*
  $$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt} F^{-1}(G(t)) = \frac{1}{F'(F^{-1}(G(t)))} G'(t) = f(F^{-1}(G(t)))g(t)$$
  $$= f(x(t))g(t).$$
  □

BEMERKUNG. Wegen $f(x) > 0$ ist $F$ streng monoton steigend und daher invertierbar. Ganz analog kann auch $f(x) < 0$ für $x \in I$ gefordert werden.

BEISPIEL. $\dot{x} = -tx$. $f(x) = x$, $F(x) = \ln x$ (betrachte nur $x > 0$), $g(t) = t$, $G(t) = -\frac{1}{2}t^2$. Somit ist

$$x(t) = F^{-1}(G(t)) = \mathrm{e}^{G(t)} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}, \quad \text{für } t \in \mathbb{R}$$

eine Lösung der Differentialgleichung. Diese Herleitung einer Lösung kann man sich mnemotechisch leichter so merken:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -tx \quad \text{wird zu } \text{“}\tfrac{\mathrm{d}x}{x} = -t\,\mathrm{d}t\text{”, bzw. } \int \tfrac{\mathrm{d}x}{x} = -\int t\,\mathrm{d}t$$

$$\ln x = -\tfrac{1}{2}t^2 \quad \text{aufgelöst nach } x \text{ ergibt } x = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}.$$