Vektoranalysis *

Martin Brokate †

Inhaltsverzeichnis

*Vorlesungsskript, WS 2008/09

†Zentrum Mathematik, TU München

1 Mannigfaltigkeiten

In diesem Abschnitt betrachten wir Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, die eine "differenzierbare Struktur" haben. Wir gehen aus von der Beschreibung affiner Unterräume. Ist $a \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor und $X \subset \mathbb{R}^n$ ein Unterraum mit $\dim X = k$, so können wir den affinen Unterraum

$$M = a + X = \{a + x : x \in X\} \tag{1.1}$$

auf zwei verschiedene Weisen beschreiben:

- mit einer Parameterdarstellung: Sei $(v_1, \ldots, v_k)$ Basis von X, sei $\Phi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ definiert durch

  $$\Phi(t_1, \ldots, t_k) = a + \sum_{i=1}^{k} t_i v_i \,, \tag{1.2}$$

  dann ist

  $$M = \Phi(\mathbb{R}^k)\,, \quad \Phi : \mathbb{R}^k \to M \quad \text{bijektiv.} \tag{1.3}$$

- als Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems: Sei $(w_1, \ldots, w_{n-k})$ Basis des orthogonalen Komplements

  $$X^\perp = \{w : \, w^T x = 0 \quad \text{für alle } x \in X\}\,, \tag{1.4}$$

  sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$ definiert durch

  $$f_i(x) = w_i^T (x - a)\,, \tag{1.5}$$

  so ist

  $$M = \{x : \, f(x) = 0\}\,. \tag{1.6}$$

Affin lineare Unterräume können also als Urbild der 0 bzw. als Bild eines $\mathbb{R}^k$ vermittels affin linearer Abbildungen dargestellt werden. Verzichten wir auf die Linearität, so können wir allgemeinere Teilmengen darstellen, etwa gekrümmte Flächen. Wir werden verlangen, dass die darstellenden Abbildungen differenzierbar sind.

Nun ist es allerdings so, dass man zur Darstellung einer gekrümmten Fläche im allgemeinen nicht mit einer einzigen darstellenden Abbildung (Φ bzw. f) auskommt, sondern mehrere benötigt, die geeignet zusammengesetzt werden müssen.

Definition 1.1 (Mannigfaltigkeit)
Eine Teilmenge M von $\mathbb{R}^n$ heißt k-dimensionale C^α-Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$ (hierbei ist $0 \le k \le n$, $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$), falls zu jedem $a \in M$ eine offene Umgebung U im $\mathbb{R}^n$ und ein $f \in C^\alpha(U; \mathbb{R}^{n-k})$ existieren mit

$$M \cap U = \{x : \, f(x) = 0\}\,, \quad \operatorname{rang} J_f(a) = n - k\,. \tag{1.7}$$

□

Die Bedingung (1.7) bedeutet, dass $J_f(a)$ maximalen Rang hat. Dazu ist äquivalent, dass die Ableitung (Fréchet-Ableitung, totale Ableitung) $Df(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$ surjektiv ist.

In den folgenden Beispielen genügt eine einzige Abbildung zur Darstellung (also $U = M$).

Beispiel 1.2

1. Affine Unterräume. Wie in (1.4) – (1.6) dargestellt, können wir in Definition 1.1 $U = \mathbb{R}^n$ und für jedes a dasselbe f wählen.

2. Niveaumengen. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^\alpha(U)$, $c \in \mathbb{R}$,
$$N_c(f) = \{x : \, f(x) = c\} \,. \tag{1.8}$$
$N_c(f)$ ist eine $(n-1)$-dimensionale C^α-Mannigfaltigkeit, falls $\operatorname{grad} f(x) \neq 0$ gilt für alle $x \in N_c(f)$. Ein Spezialfall davon ist die Oberfläche der n-dimensionalen Einheitskugel in der euklidischen Norm,
$$S^{n-1} = \{x : \, \|x\|_2 = 1\} \,. \tag{1.9}$$
S^{n-1} ist eine $(n-1)$-dimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit.

3. Orthogonale Matrizen. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ ist orthogonal genau dann, wenn $A^T A = I$, die Menge $O(n)$ der orthogonalen Matrizen im $\mathbb{R}^{(n,n)}$ ist also gegeben durch
$$O(n) = \{X : X \in \mathbb{R}^{(n,n)} \,, \, f(X) = 0\}$$
mit
$$f(X) = X^T X - I \,, \quad f : \mathbb{R}^{(n,n)} \to \mathbb{R}^{(n,n)}_{\text{sym}} \,.$$
Da $\mathbb{R}^{(n,n)}_{\text{sym}}$ die Dimension $n(n+1)/2$ hat, ist hier $k = n^2 - n(n+1)/2 = n(n-1)/2$. Wir wollen zeigen, dass $Df(A)$ eine surjektive lineare Abbildung ist für jedes $A \in O(n)$. Es gilt
$$\frac{1}{t}(f(A+tH) - f(A)) = \frac{1}{t}\left[(A+tH)^T(A+tH) - A^T A\right] = H^T A + A^T H + tH^T H \,,$$
also
$$Df(A)H = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f(A+tH) - f(A)) = H^T A + A^T H \,.$$
Eine Lösung von
$$Df(A)H = B$$
für beliebiges $B \in \mathbb{R}^{(n,n)}_{\text{sym}}$ ist gegeben durch
$$H = \frac{1}{2}(A^T)^{-1} B \,, \quad \text{da} \quad Df(A)H = \frac{1}{2}(B^T + B) = B \,.$$
Also ist $Df(A)$ surjektiv. Die Menge $O(n)$ ist also eine C^∞-Mannigfaltigkeit der Dimension $n(n-1)/2$. Da orthogonale Matrizen die Determinante 1 oder -1 haben, und da die Determinante stetig ist, ist
$$SO(n) = \{X : X \in O(n) \,, \, \det(X) = 1\}$$
ebenfalls eine C^∞-Mannigfaltigkeit der Dimension $n(n-1)/2$.

$\square$

Satz 1.3 (Darstellung von C^α-Mannigfaltigkeiten)
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{N}$. Dann sind äquivalent:

(i) *M ist eine k-dimensionale C^α-Mannigfaltigkeit.*

(ii) *Für alle $a \in M$ gibt es offene Mengen $U, V \subset \mathbb{R}^n$ und einen C^α-Diffeomorphismus $F : U \to V$ mit $a \in U$ und*

$$F(M \cap U) = V \cap E_k\,, \quad E_k = \{(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) : \, x_i \in \mathbb{R},\, 1 \le i \le k\}\,. \tag{1.10}$$

(iii) *Für alle $a \in M$ gibt es eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ mit $a \in U$, eine offene Menge $T \subset \mathbb{R}^k$ und ein $\Phi \in C^\alpha(T; \mathbb{R}^n)$, so dass $\Phi : T \to M \cap U$ bijektiv, $\Phi^{-1} : M \cap U \to T$ stetig ist und*

$$\operatorname{rang} J_\Phi(t) = k\,, \quad \textit{für alle } t \in T. \tag{1.11}$$

Beweis: "(i)⇒(ii)": Sei U' Umgebung von $a \in M$, sei $f \in C^\alpha(U'; \mathbb{R}^{n-k})$ mit

$$M \cap U' = \{x : x \in \mathbb{R}^n,\, f(x) = 0\}\,, \quad \operatorname{rang} J_f(a) = n - k\,.$$

Wir betrachten zunächst den Spezialfall, dass die letzten $n - k$ Spalten von $J_f(a)$ linear unabhängig sind. Wir zerlegen $x \in \mathbb{R}^n$ in

$$x = (\xi, \eta)\,, \quad \xi \in \mathbb{R}^k\,, \quad \eta \in \mathbb{R}^{n-k}\,.$$

Die Matrix $\partial_\eta f(a) \in \mathbb{R}^{(n-k,n-k)}$ ist invertierbar. Also gibt es (Satz über implizite Funktionen) offene Mengen $U_1 \subset \mathbb{R}^k$, $U_2 \subset \mathbb{R}^{n-k}$, mit $(a_1, \dots, a_k) \in U_1$, und ein $g : U_1 \to U_2$, $g \in C^\alpha(U_1; \mathbb{R}^{n-k})$, mit

$$M \cap (U_1 \times U_2) = \{(\xi, g(\xi)) : \, \xi \in U_1\} \subset M \cap U'\,,$$

also $f(\xi, g(\xi)) = 0$. Wir setzen

$$U = U_1 \times U_2\,, \quad V = F(U)\,, \quad F(\xi, \eta) = (\xi, \eta - g(\xi))\,.$$

Dann ist F injektiv, also $F : U \to F(U)$ bijektiv, und

$$(\xi, \eta) \in M \cap U \quad \Leftrightarrow \quad \xi \in U_1\,, \quad \eta = g(\xi) \quad \Leftrightarrow \quad F(\xi, \eta) \in V \cap E_k\,.$$

Weiter ist

$$J_F(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -J_g(\xi) & I \end{pmatrix}\,,$$

also $J_F(\xi, \eta)$ invertierbar und daher (Satz über inverse Funktionen) F ein C^α-Diffeomorphismus. Der allgemeine Fall wird durch Umnumerieren der Koordinatenachsen darauf zurückgeführt. Seien die Spalten $i_1, i_2, \dots, i_{n-k}$ von $J_f(a)$ linear unabhängig. Sei $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung, welche die Einheitsvektoren permutiert, und zwar der Form

$$P(x_1, \dots, x_n) = (\dots, x_{i_1}, \dots, x_{i_{n-k}})\,.$$

Dann ist $P(M)$ eine k-dimensionale C^α-Mannigfaltigkeit mit der lokalen Darstellung (in einer Umgebung von $P(a)$)

$$P(M) \cap P(U') = P(M \cap U') = \{y : \, y \in P(U'),\, (f \circ P^{-1})(y) = 0\}$$

und die letzten $n-k$ Spalten von $J_{f\circ P^{-1}}(Pa)$ sind linear unabhängig. Also existiert F wie behauptet mit

$$V \cap E_k = F(P(M) \cap U) = (F \circ P)(M \cap P^{-1}(U)),$$

das heißt, $F \circ P$ leistet das Verlangte.

"(ii)⇒(iii)": Seien F, U, V wie in (ii) gegeben. Wir setzen

$$T = \{\xi : \xi \in \mathbb{R}^k, (\xi, 0) \in V\}, \quad \Phi(\xi) = F^{-1}(\xi, 0).$$

Dann ist $\Phi : T \to M \cap U$ bijektiv, $\Phi^{-1} = F|(M \cap U)$ stetig, und

$$J_\Phi(\xi) = J_{F^{-1}}(\xi, 0) \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix},$$

das heißt, J_Φ entsteht aus $J_{F^{-1}}$, indem man die Spalten $k+1, \ldots, n$ auf 0 setzt. Da $\operatorname{rang}(J_{F^{-1}}(\xi, 0)) = n$, ist $\operatorname{rang}(J_\Phi(\xi)) = k$.

"(iii)⇒(i)": Sei $a \in M$, seien U, T, Φ wie in (iii) gegeben. Wir setzen $c = \Phi^{-1}(a) \in T$ und betrachten den Spezialfall, dass die ersten k Zeilen von $J_\Phi(c)$ linear unabhängig sind. (Der allgemeine Fall wird wie oben durch eine geeignete Permutation darauf zurückgeführt.) Nach dem Satz über inverse Funktionen gibt es offene Mengen $\hat{T}, \hat{V} \subset \mathbb{R}^k$ mit $c \in \hat{T} \subset T$, so dass

$$\hat{\Phi} = (\Phi_1, \ldots, \Phi_k) : \hat{T} \to \hat{V}$$

ein C^α-Diffeomorphismus ist. Wir definieren

$$G : \hat{T} \times \mathbb{R}^{n-k} \to \hat{V} \times \mathbb{R}^{n-k}, \quad G(\xi, \eta) = \Phi(\xi) + (0, \eta).$$

Es ist

$$J_G(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} J_{\hat{\Phi}}(\xi) & 0 \\ * & I \end{pmatrix}, \quad \xi \in \hat{T}, \quad \eta \in \mathbb{R}^{n-k},$$

also ist J_G invertierbar auf $\hat{T} \times \mathbb{R}^{n-k}$. Wir zeigen, dass G bijektiv ist auf $\hat{T} \times \mathbb{R}^{n-k}$. Es gilt

$$\begin{aligned} G(\xi, \eta) = G(\xi', \eta') \quad &\Rightarrow \quad \Phi(\xi) + (0, \eta) = \Phi(\xi') + (0, \eta') \quad \Rightarrow \quad \hat{\Phi}(\xi) = \hat{\Phi}(\xi') \\ &\Rightarrow \quad \xi = \xi' \quad \Rightarrow \quad \eta = \eta', \end{aligned}$$

also ist G injektiv. Sei nun $(y, z) \in \hat{V} \times \mathbb{R}^{n-k}$. Es ist

$$(y, z) = \Phi(\xi) + (0, \eta),$$

wenn wir $\xi = \hat{\Phi}^{-1}(y)$ setzen und η so definieren, dass die Gleichung erfüllt ist. Also ist G auch surjektiv und damit

$$G : \hat{T} \times \mathbb{R}^{n-k} \to \hat{V} \times \mathbb{R}^{n-k}$$

ein C^α-Diffeomorphismus. Wir setzen

$$\hat{U} = (\hat{V} \times \mathbb{R}^{n-k}) \cap U,$$

und zerlegen

$$G^{-1} = (\hat{f}, f), \quad \hat{f} : \hat{U} \to \hat{T}, \quad f : \hat{U} \to \mathbb{R}^{n-k}.$$

Dann gilt für alle $x \in \hat{U}$

$$x \in M \quad \Leftrightarrow \quad \exists \xi \in \hat{T}, \Phi(\xi) = x \quad \Leftrightarrow \quad \exists \xi \in \hat{T}, G^{-1}(x) = (\xi, 0) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = 0,$$

also ist

$$M \cap \hat{U} = \{x : x \in \hat{U},\ f(x) = 0\}\,.$$

Da $J_{G^{-1}}(x)$ invertierbar ist für alle $x \in \hat{U}$, hat $J_f(x)$ maximalen Rang, also rang $(J_f(x)) = n - k$ für alle $x \in \hat{U}$. □

Definition 1.4 (Karte, Atlas)
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale C^α-Mannigfaltigkeit. Eine Abbildung $\Phi : T \to M \cap U$ mit den in Satz 1.3(iii) genannten Eigenschaften heißt C^α-Karte (oder einfach Karte) von M. Eine Familie $(\Phi_j)_{j\in J}$ von Karten $\Phi_j : T_j \to M \cap U_j$ heißt Atlas von M, falls

$$M \subset \bigcup_{j\in J} (M \cap U_j)\,.$$

□

Aus Satz 1.3 folgt unmittelbar, dass jede Mannigfaltigkeit einen Atlas besitzt. Ist M kompakt, so besitzt M einen endlichen Atlas (d.h. einen Atlas mit einer endlichen Indexmenge J).

Satz 1.5 *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale C^α-Mannigfaltigkeit, seien $\Phi_j : T_j \to M \cap U_j$, $j = 1, 2$, C^α-Karten von M, sei $M \cap U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Dann sind*

$$W_j = \Phi_j^{-1}(M \cap U_1 \cap U_2) \tag{1.12}$$

offene Teilmengen von $\mathbb{R}^k$ mit $W_j \subset T_j$, und

$$\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1 : W_1 \to W_2 \tag{1.13}$$

ist ein C^α-Diffeomorphismus. Die Abbildung $\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1$ heißt Kartenwechsel.

Beweis: Nach Konstruktion gilt $W_j \subset T_j$ für $j = 1, 2$, und $\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1 : W_1 \to W_2$ ist bijektiv. Wir zeigen, dass W_j offen ist. Wir fassen $M \cap U_j$ als metrischen Raum auf (mit der Metrik aus dem $\mathbb{R}^n$). Die Menge $M \cap U_1 \cap U_2$ ist offen relativ zu $M \cap U_j$, $\Phi_j : T_j \to M \cap U_j$ ist stetig, also ist W_j als Urbild einer offenen Menge offen. Wir zeigen nun, dass $\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1$ ein C^α-Diffeomorphismus ist. Es genügt zu zeigen, dass $\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1 \in C^\alpha(W_1; \mathbb{R}^k)$. Sei $c_1 \in W_1$ beliebig. Wir setzen $a = \Phi_1(c_1)$. Gemäß Satz 1.3(ii) wählen wir eine offene Menge $U \subset U_1 \cap U_2$ mit $a \in U$, eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^n$ und eine Abbildung $F : U \to V$ mit $F(M \cap U) = V \cap E_k$. Wir setzen

$$\hat{W}_j = \Phi_j^{-1}(M \cap U)\,.$$

Dass $\hat{W}_j$ offen ist, zeigt man genauso wie oben für W_j. Es ist

$$F \circ \Phi_1 : \hat{W}_1 \to \mathbb{R}^n\,, \quad F \circ \Phi_1 = (g_1, \ldots, g_k, 0, \ldots, 0)\,,$$
$$F \circ \Phi_2 : \hat{W}_2 \to \mathbb{R}^n\,, \quad F \circ \Phi_2 = (h_1, \ldots, h_k, 0, \ldots, 0)\,.$$

Sei $g = (g_1, \ldots, g_k)$, $h = (h_1, \ldots, h_k)$. Es ist

$$\text{rang}\, J_F = n\,, \quad \text{rang}\, J_{\Phi_j} = k\,,$$

also

$$\operatorname{rang} J_{F\circ\Phi_j} = k\,,$$

also

$$\operatorname{rang} J_g = \operatorname{rang} J_h = k\,.$$

Hieraus folgt mit dem Satz über inverse Funktionen, dass es Umgebungen $\tilde{W}_j \subset \hat{W}_j$ von $c_j = \Phi_j^{-1}(a)$ gibt, so dass

$$g : \tilde{W}_1 \to g(\tilde{W}_1)\,, \quad h : \tilde{W}_2 \to h(\tilde{W}_2)\,,$$

C^α-Diffeomorphismen sind, und dass

$$\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1 = h^{-1} \circ g\,, \quad \text{auf } \tilde{W}_1\,.$$

Da $c_1 \in W_1$ beliebig war, folgt $\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1 \in C^\alpha(W_1; \mathbb{R}^k)$. □

Satz 1.5 besagt, dass alle Kartenwechsel C^α-Diffeomorphismen sind. Hieraus läßt sich eine allgemeinere Definition einer Mannigfaltigkeit M gewinnen, die nicht mehr von vorneherein als Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ gegeben ist. Solche *differenzierbaren Mannigfaltigkeiten* werden in der Differentialtopologie untersucht. (Dort wird üblicherweise die Bezeichnung "Karte" für die Inverse Φ^{-1}, nicht für Φ wie in Definition 1.4, verwendet.)

2 Das mehrdimensionale Integral

Wir stellen hier das Riemann-Integral dar mit einigen seiner Eigenschaften, die für die Vektoranalysis unmittelbar relevant sind. Das Lebesgue-Integral wird ausführlich in der Vorlesung über Maß- und Integrationstheorie behandelt.

Das Riemann-Integral auf Quadern. Wir betrachten Quader im $\mathbb{R}^n$ der Form

$$Q = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i] \,. \tag{2.1}$$

Solche Quader heißen auch **achsenparallele Quader**. Sind alle Seitenlängen $b_i - a_i$ gleich, so heißt Q ein **Würfel**. Wir wollen das Riemann-Integral

$$\int_Q f(x)\, dx$$

definieren für gewisse Funktionen $f : Q \to \mathbb{R}$. Mit

$$\lambda(Q) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i) \tag{2.2}$$

bezeichnen wir das n-dimensionale Volumen von Q.

Definition 2.1 (Oszillation, Schwankung)
Sei S Menge, $f : S \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann heißt

$$\operatorname*{osc}_S f = \sup_{x,y \in S} |f(x) - f(y)| \tag{2.3}$$

die Oszillation oder Schwankung von f auf S. □

Es gilt offenbar

$$\operatorname*{osc}_S f \le 2\|f\|_\infty \,, \quad \operatorname*{osc}_S (f+g) \le \operatorname*{osc}_S f + \operatorname*{osc}_S g \,. \tag{2.4}$$

Eine Zerlegung Z des Quaders Q in (2.1) hat die Form

$$a_i = x_i^{(0)} < \cdots < x_i^{(N_i)} = b_i \,, \quad 1 \le i \le n \,. \tag{2.5}$$

Die Zerlegung Z induziert eine Zerlegung von Q in Teilquader der Form

$$P = \prod_{i=1}^{n} [s_i, t_i] \,, \tag{2.6}$$

wobei $s_i = x_i^{(j_i)}$, $t_i = x_i^{(j_i+1)}$ jeweils zwei aufeinanderfolgende Teilpunkte aus (2.5) sind. Wir bezeichnen mit

$$Q_Z = \{P : \ P \text{ Teilquader von } Q \text{ gemäß (2.6)}\} \tag{2.7}$$

die Menge dieser Teilquader, deren Anzahl ist $N_Z = \prod_i N_i$. Es gilt

$$\lambda(Q) = \sum_{P \in Q_Z} \lambda(P) \,. \tag{2.8}$$

Zu jeder Zerlegung Z betrachten wir Mengen von Messpunkten der Form

$$\{\xi_P : P \in Q_Z\}, \quad \text{mit } \xi_P \in P \text{ für alle } P. \tag{2.9}$$

Ein Ausdruck der Form

$$R_Z(f) = \sum_{P \in Q_Z} f(\xi_P)\lambda(P) \tag{2.10}$$

heißt **Riemannsche Summe** für f, wobei ξ_P Messpunkte zu Z sind. Wir definieren die **Schwankungssumme** von f zur Zerlegung Z als

$$D_Z(f) = \sum_{P \in Q_Z} (\operatorname*{osc}_P f) \cdot \lambda(P), \tag{2.11}$$

sie gibt an, wie stark sich zwei Riemannsche Summen zur selben Zerlegung unterscheiden können. Aus (2.4) folgt unmittelbar

$$D_Z(f + g) \leq D_Z(f) + D_Z(g) \tag{2.12}$$

für alle $f, g : Q \to \mathbb{R}$ und alle Zerlegungen Z von Q.

Definition 2.2 (Riemann-Integrierbarkeit auf Quadern)
Sei Q Quader. Eine beschränkte Funktion $f : Q \to \mathbb{R}$ heißt Riemann-integrierbar (über Q), falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung Z gibt mit

$$D_Z(f) < \varepsilon. \tag{2.13}$$

□

Eine Zerlegung $\tilde{Z}$ heißt **Verfeinerung** von Z, falls sie aus Z durch Hinzunahme zusätzlicher Teilpunkte in (2.5) entsteht. Für jeden Teilquader $P \in Q_Z$ gilt

$$\lambda(P) = \sum_{\tilde{P} \in P_{\tilde{Z}}} \lambda(\tilde{P}), \quad P_{\tilde{Z}} := \{\tilde{P} : \tilde{P} \subset P, \tilde{P} \in Q_{\tilde{Z}}\} \tag{2.14}$$

Lemma 2.3 *Ist $\tilde{Z}$ Verfeinerung von Z, so gilt für alle Riemannschen Summen*

$$|R_Z(f) - R_{\tilde{Z}}(f)| \leq D_Z(f). \tag{2.15}$$

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned} R_Z(f) - R_{\tilde{Z}}(f) &= \sum_{P \in Q_Z} f(\xi_P)\lambda(P) - \sum_{\tilde{P} \in Q_{\tilde{Z}}} f(\tilde{\xi}_{\tilde{P}})\lambda(\tilde{P}) \\ &= \sum_{P \in Q_Z} \sum_{\tilde{P} \in P_{\tilde{Z}}} (f(\xi_P) - f(\tilde{\xi}_{\tilde{P}}))\lambda(\tilde{P}), \end{aligned}$$

also

$$|R_Z(f) - R_{\tilde{Z}}(f)| \leq \sum_{P \in Q_Z} (\operatorname*{osc}_P f) \sum_{\tilde{P} \in P_{\tilde{Z}}} \lambda(\tilde{P}) = D_Z(f).$$

□

Lemma 2.4 *Sind Z und Z' Zerlegungen, so gilt für alle Riemannschen Summen*

$$|R_Z(f) - R_{Z'}(f)| \le D_Z(f) + D_{Z'}(f)\,. \tag{2.16}$$

Beweis: Ist $\tilde{Z}$ eine gemeinsame Verfeinerung von Z und Z', so gilt wegen Lemma 2.3

$$|R_Z(f) - R_{Z'}(f)| \le |R_Z(f) - R_{\tilde{Z}}(f)| + |R_{Z'}(f) - R_{\tilde{Z}}(f)| \le D_Z(f) + D_{Z'}(f)\,.$$

□

Satz 2.5 (Riemann-Integral auf Quadern)
Sei $f : Q \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Dann gibt es genau eine Zahl S, so dass

$$|R_Z(f) - S| \le D_Z(f) \tag{2.17}$$

gilt für alle Zerlegungen Z von Q. Sie heißt das Riemann-Integral von f über Q, geschrieben

$$\int_Q f(x)\,dx\,. \tag{2.18}$$

Beweis: Wir wählen eine Folge $\{Z_n\}$ von Zerlegungen mit $D_{Z_n} \le 1/n$ gemäß Definition 2.2. Die Folge $\{R_{Z_n}(f)\}$ ist eine Cauchyfolge, da

$$|R_{Z_n}(f) - R_{Z_m}(f)| \le D_{Z_n}(f) + D_{Z_m}(f) \le \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$$

nach Lemma 2.4. Wir setzen

$$S = \lim_{n\to\infty} R_{Z_n}(f)\,.$$

Ist Z eine beliebige Zerlegung von Q, so gilt

$$\begin{aligned} |R_Z(f) - S| &\le |R_Z(f) - R_{Z_n}(f)| + |R_{Z_n}(f) - S| \\ &\le D_Z(f) + D_{Z_n}(f) + |R_{Z_n}(f) - S| \\ &\to D_Z(f) \end{aligned}$$

für $n \to \infty$, also folgt (2.17). Ist S' eine weitere Zahl mit dieser Eigenschaft, so gilt

$$|S - S'| \le |S - R_Z(f)| + |R_Z(f) - S'| \le 2D_Z(f)$$

für jede Zerlegung Z, also $S = S'$. □

Warnung: Um eine Zahl S als Riemann-Integral einer Funktion f zu entlarven, genügt es nicht, zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Riemann-Summe $R_Z(f)$ mit $|R_Z(f) - S| < \varepsilon$ zu finden. Es muss in jedem Fall die Bedingung aus Definition 2.2 (Kleinheit der Schwankungssumme) erfüllt sein.

Lemma 2.6 *Sei Q Quader im $\mathbb{R}^n$, seien $f, g : Q \to \mathbb{R}$ beschränkt, seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Sind f und g Riemann-integrierbar, so auch $\alpha f + \beta g$, $|f|$ und fg, und es gelten*

$$\int_Q (\alpha f + \beta g)(x)\, dx = \alpha \int_Q f(x)\, dx + \beta \int_Q g(x)\, dx\,,$$

$$f \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \int_Q f(x)\, dx \geq 0\,,$$

$$\left| \int_Q f(x)\, dx \right| \leq \int_Q |f(x)|\, dx\,,$$

$$\int_Q 1\, dx = \lambda(Q) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)\, dx\,.$$

Beweis: Weggelassen. □

Lemma 2.7 *Seien $Q = \prod_j [a_j, b_j]$, $Q' = \prod_j [a'_j, b'_j]$ zwei aneinandergrenzende Quader mit $b_i = a'_i$ für ein i und $a_j = a'_j$, $b_j = b'_j$ für alle $j \neq i$. Dann gilt*

$$\int_{Q \cup Q'} f(x)\, dx = \int_Q f(x)\, dx + \int_{Q'} f(x)\, dx \tag{2.19}$$

für alle Riemann-integrierbaren Funktionen $f : Q \cup Q' \to \mathbb{R}$.

Beweis: Weggelassen. □

Definition 2.8 (Jordan-Nullmenge)
Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt. A heißt Jordan-Nullmenge, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine endliche Menge $\mathcal{W}$ von achsenparallelen Würfeln gibt mit

$$A \subset \bigcup_{W \in \mathcal{W}} W\,, \qquad \sum_{W \in \mathcal{W}} \lambda(W) < \varepsilon\,. \tag{2.20}$$

□

Teilmengen und endliche Vereinigungen von Jordan-Nullmengen sind ebenfalls Nullmengen, was unmittelbar aus der Definition folgt. Abzählbare Vereinigungen von Jordan-Nullmengen sind im allgemeinen keine Jordan-Nullmengen (Beispiel: $\mathbb{Q}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$). Eine zu 2.8 äquivalente Definition erhält man, wenn man "Würfel" durch "Quader" ersetzt (Übung).

Lemma 2.9 *Ist $Q \subset \mathbb{R}^n$ Quader und $A \subset Q$ eine Jordan-Nullmenge, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung Z gemäß (2.5) - (2.7) mit*

$$A \subset B := \bigcup \{P : P \in Q_Z,\, A \cap P \neq \emptyset\}\,, \qquad \sum_{\substack{P \subset B \\ P \in Q_Z}} \lambda(P) < \varepsilon\,. \tag{2.21}$$

Beweis: Zu $\varepsilon > 0$ sei $\mathcal{W}$ eine Würfelüberdeckung von A gemäß Definition 2.8, seien die Elemente von $\mathcal{W}$ gegeben in der Form

$$W = \prod_{i=1}^n [a_i^W, b_i^W]\,.$$

Wir konstruieren Z gemäß (2.5) als Zerlegung von Q, indem wir für jedes i die Menge

$$\{a_i, b_i\} \cup \bigcup_{W \in \mathcal{W}} \{a_i^W, b_i^W\}$$

als Teilpunkte wählen. Es gilt dann nämlich

$$\sum_{\substack{P \subset B \\ P \in Q_Z}} \lambda(P) \leq \sum_{W \in \mathcal{W}} \lambda(W) < \varepsilon\,.$$

□

Wir sagen, dass eine Eigenschaft (P) **J-fast überall** gilt, wenn die Menge

$$\{x : (P) \text{ gilt nicht in } x\}$$

eine Jordan-Nullmenge ist.

Lemma 2.10 *Sei Q Quader im $\mathbb{R}^n$, sei $f : Q \to \mathbb{R}$ beschränkt und J-fast überall gleich Null. Dann ist f Riemann-integrierbar, und*

$$\int_Q f(x)\, dx = 0\,.$$

Beweis: Zu $\varepsilon > 0$ sei Z eine Zerlegung gemäß Lemma 2.9, es gilt dann

$$D_Z(f) \leq \sum_{\substack{P \subset B \\ P \in Q_Z}} (\operatorname{osc} f)\lambda(P) \leq 2\|f\|_\infty \varepsilon\,, \quad |R_Z(f)| \leq \sum_{\substack{P \subset B \\ P \in Q_Z}} |f(\xi_P)|\lambda(P) \leq \|f\|_\infty \varepsilon\,.$$

□

Lemma 2.11 *Sei Q Quader im $\mathbb{R}^n$, sei $f : Q \to \mathbb{R}$ beschränkt und Riemann-integrierbar. Ist $g : Q \to \mathbb{R}$ beschränkt und fast überall gleich f, so ist g ebenfalls Riemann-integrierbar, und*

$$\int_Q f(x)\, dx = \int_Q g(x)\, dx\,. \tag{2.22}$$

Beweis: Anwendung von Lemma 2.10 auf $g - f$. □

Satz 2.12 *Sei Q Quader im $\mathbb{R}^n$, sei $f : Q \to \mathbb{R}$ beschränkt und J-fast überall stetig. Dann ist f Riemann-integrierbar über Q.*

Beweis: Sei $A = \{x : x \in Q, f \text{ ist nicht stetig in } x\}$. Zu $\varepsilon > 0$ wählen wir eine Zerlegung Z gemäß Lemma 2.9. Auf der kompakten Menge $K = \overline{Q \setminus B}$ ist f stetig, also auch gleichmäßig stetig. Wir verfeinern Z zu $\tilde{Z}$ so, dass für die Teilquader $P \in Q_{\tilde{Z}}$ mit $P \subset K$ gilt, dass $\operatorname{osc}_P f < \varepsilon$. Es folgt

$$\begin{aligned} D_{\tilde{Z}}(f) &= \sum_{P \in Q_{\tilde{Z}}} (\operatorname{osc}_P f)\lambda(P) \leq \sum_{P \subset B} 2\|f\|_\infty \lambda(P) + \sum_{P \subset K} \varepsilon\lambda(P) \\ &\leq 2\|f\|_\infty \varepsilon + \varepsilon\lambda(Q)\,. \end{aligned}$$

□

Die abgeschlossene Kugel bezüglich der Supremumsnorm mit Mittelpunkt $x \in \mathbb{R}^n$ und Radius ε ist ein achsenparalleler Würfel,

$$\{y : \|y - x\|_\infty \leq \varepsilon\} = \prod_{i=1}^{n} [x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon] =: K_{\varepsilon,\infty}(x) . \tag{2.23}$$

Lemma 2.13 *Sei $A \subset \mathbb{R}^k$ beschränkt. Dann ist $A \times \{0\}$ eine J-Nullmenge in $\mathbb{R}^n$ für jedes $n > k$.*

Beweis: O.B.d.A. sei $A = [-M, M]^k$ mit $M > 0$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir überdecken $A \times \{0\}$ mit Würfeln $W = K_{\varepsilon,\infty}(x)$, deren Mittelpunkte x in $A \times \{0\}$ liegen. Es genügen dazu

$$N_\varepsilon = \left(\frac{2M + 1}{2\varepsilon}\right)^k$$

solcher Würfel, und deren Volumensumme ist

$$N_\varepsilon \cdot (2\varepsilon)^n = (2M + 1)^k (2\varepsilon)^{n-k} ,$$

welche also beliebig klein gemacht werden kann. □

Lemma 2.14 *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, $g : A \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig,*

$$\|g(y) - g(x)\|_\infty \leq L\|y - x\|_\infty , \quad \textit{für alle } x, y \in A,$$

sei W Würfel mit $A \cap W \neq \emptyset$. Dann gibt es einen Würfel $\tilde{W}$ im $\mathbb{R}^n$ mit

$$g(A \cap W) \subset \tilde{W} , \quad \lambda(\tilde{W}) = (2L)^n \lambda(W) . \tag{2.24}$$

Beweis: Ist $x \in A \cap W$ und hat W den Radius r, so gilt

$$\|g(y) - g(x)\|_\infty \leq L\|y - x\|_\infty \leq 2Lr$$

für alle $y \in A \cap W$, und wir können $\tilde{W} = K_{2Lr,\infty}(g(x))$ setzen. □

Satz 2.15 *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine J-Nullmenge, sei $g : A \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig. Dann ist $g(A)$ eine J-Nullmenge.*

Beweis: Zu jeder Würfelüberdeckung von A mit Volumensumme ε können wir mit Lemma 2.14 eine Würfelüberdeckung von $g(A)$ mit einer Volumensumme $(2L)^n\varepsilon$ konstruieren. □

Satz 2.16 *Sei $T \subset \mathbb{R}^k$ offen, $\Phi \in C^1(T; \mathbb{R}^n)$ mit $n > k$, $K \subset T$ kompakt. Dann ist $\Phi(K)$ eine J-Nullmenge im $\mathbb{R}^n$.*

Beweis: Wir definieren $g : T \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^n$ als Fortsetzung von Φ durch

$$g(x, y) = \Phi(x) , \quad x \in T , \, y \in \mathbb{R}^{n-k} .$$

Es ist Φ Lipschitz-stetig auf K, also auch g Lipschitz-stetig auf $K \times \mathbb{R}^{n-k}$. Die Menge $K \times \{0\}$ ist eine J-Nullmenge im $\mathbb{R}^n$ nach Lemma 2.13, also auch $\Phi(K) = g(K \times \{0\})$ nach Satz 2.15. □

Das Riemann-Integral auf allgemeineren Mengen.

Definition 2.17 (Jordan-Messbarkeit)
Eine beschränkte Teilmenge A von $\mathbb{R}^n$ heißt J-messbar (Jordan-messbar), falls ∂A eine J-Nullmenge ist. □

Für jedes $A \subset \mathbb{R}^n$ gilt

$$\operatorname{int}(A) \subset A \subset \overline{A}\,, \quad \partial A = \overline{A} \setminus \operatorname{int}(A)\,. \tag{2.25}$$

Eine J-messbare Menge unterscheidet sich daher von einer offenen Menge nur um eine J-Nullmenge.

Lemma 2.18 *Seien $A, B \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und J-messbar. Dann sind auch $A \cup B$, $A \cap B$ und $A \setminus B$ J-messbar. Ist A eine J-Nullmenge, so ist A J-messbar.*

Beweis: Übung. □

Aus dem Riemann-Integral über Quadern erhalten wir nun das Riemann-Integral auf J-messbaren Mengen $A \subset \mathbb{R}^n$. Ist $f : A \to \mathbb{R}$ beschränkt und A J-messbar, so wählen wir einen Quader $Q \subset \mathbb{R}^n$ mit $A \subset Q$ und setzen f auf Q fort durch

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x)\,, & x \in A\,, \\ 0\,, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{2.26}$$

Mit der charakteristischen Funktion

$$1_A(x) = \begin{cases} 1\,, & x \in A\,, \\ 0\,, & \text{sonst,} \end{cases}$$

gilt $\tilde{f} = 1_A \tilde{f}$.

Definition 2.19 (Riemann-Integral auf J-messbaren Mengen)
Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und J-messbar. Eine beschränkte Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ heißt Riemann-integrierbar auf A, falls die in (2.26) definierte Funktion $\tilde{f} : Q \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar ist, und wir definieren in diesem Fall das Riemann-Integral von f auf A durch

$$\int_A f(x)\,dx = \int_Q \tilde{f}(x)\,dx\,. \tag{2.27}$$

□

Unter Zuhilfenahme von Lemma 2.7 sieht man, dass der Wert des Riemann-Integrals in (2.27) nicht von der Wahl des Quaders Q abhängt.

Lemma 2.20 *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und J-messbar, seien $f, g : A \to \mathbb{R}$ beschränkt und Riemann-integrierbar auf A, seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann sind auch $\alpha f + \beta g$, $|f|$ und fg Riemann-integrierbar auf A, und es gelten*

$$\int_A (\alpha f + \beta g)(x)\,dx = \alpha \int_A f(x)\,dx + \beta \int_A g(x)\,dx\,,$$
$$f \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \int_A f(x)\,dx \geq 0\,,$$
$$\left| \int_A f(x)\,dx \right| \leq \int_A |f(x)|\,dx\,.$$

Beweis: Folgt unmittelbar aus den Rechenregeln für Quader in Lemma 2.6 und aus (2.27), da $\widetilde{f+g} = \tilde{f} + \tilde{g}$ usw. □

Satz 2.21 *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und J-messbar, sei $f : A \to \mathbb{R}$ beschränkt und J-fast überall stetig auf A. Dann ist f auf A Riemann-integrierbar. Ist A eine J-Nullmenge, so ist*

$$\int_A f(x)\,dx = 0\,. \tag{2.28}$$

Beweis: Ist N die Menge der Unstetigkeitspunkte von f auf A, so kann eine Fortsetzung $\tilde{f}$ von f auf einen Quader Q gemäß (2.26) nur in Punkten der Nullmenge $N \cup \partial A$ unstetig sein. Die Riemann-Integrierbarkeit von f folgt nun aus Satz 2.12, angewandt auf $\tilde{f}$, und (2.28) folgt aus Lemma 2.10. □

Definition 2.22 (Volumen)
Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und J-messbar. Wir definieren das n-dimensionale Volumen von A durch

$$\mathrm{vol}\,(A) = \int_A 1\,dx\,. \tag{2.29}$$

□

Satz 2.23 *Seien $A, B \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und J-messbar, sei $f : A \cup B \to \mathbb{R}$ beschränkt und auf A und B Riemann-integrierbar, sei $A \cap B$ eine J-Nullmenge. Dann ist f auch auf $A \cup B$ Riemann-integrierbar, und es gilt*

$$\int_{A\cup B} f(x)\,dx = \int_A f(x)\,dx + \int_B f(x)\,dx\,. \tag{2.30}$$

Beweis: Sei $\tilde{f}$ eine Fortsetzung von f gemäß (2.26), dann gilt $\tilde{f} = 1_{A\cup B}\tilde{f} = 1_A\tilde{f} + 1_B\tilde{f} - 1_{A\cap B}\tilde{f}$, und die Behauptung folgt aus der Additivität des Integrals. □

Eine unmittelbare Konsequenz des Satzes ist, dass

$$\mathrm{vol}\,(A) \subset \mathrm{vol}\,(B)\,, \quad \text{falls } A \subset B,$$

wobei $A, B \subset \mathbb{R}^n$ beschränkte J-messbare Mengen sind.

Satz 2.24 *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und J-messbar, sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge beschränkter Riemann-integrierbarer Funktionen $f_n : A \to \mathbb{R}$, welche gleichmäßig gegen eine Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist f Riemann-integrierbar, und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)\,dx = \int_A f(x)\,dx\,. \tag{2.31}$$

Beweis: Sei Q ein Quader, welcher A umfasst. Für jede Zerlegung Z von Q gilt wegen (2.12) für Fortsetzungen $\tilde{f}, \tilde{f}_n$

$$D_Z(\tilde{f}) \le D_Z(\tilde{f} - \tilde{f}_n) + D_Z(\tilde{f}_n) \le 2\|\tilde{f} - \tilde{f}_n\|_\infty \mathrm{vol}\,(Q) + D_Z(\tilde{f}_n)\,.$$

Zu $\varepsilon > 0$ wählen wir n mit $2\|\tilde{f} - \tilde{f}_n\|_\infty \mathrm{vol}\,(Q) \leq \varepsilon$ und Z mit $D_Z(\tilde{f}_n) \leq \varepsilon$, dann ist $D_Z(\tilde{f}) \leq 2\varepsilon$. Also ist $\tilde{f}$ Riemann-integrierbar über Q. Weiter gilt

$$\left| \int_A f_n(x)\,dx - \int_A f(x)\,dx \right| \leq \int_A |f_n(x) - f(x)|\,dx \leq \|f_n - f\|_\infty \int_Q 1_A(x)\,dx \to 0$$

für $n \to \infty$. □

Ist f_n punktweise konvergent und gleichmäßig beschränkt, so gilt (2.31) ebenfalls (siehe Übung); es muss dann allerdings zusätzlich vorausgesetzt werden, dass die Grenzfunktion f Riemann-integrierbar ist.

Iterierte Integrale, Satz von Fubini. Mit dem Satz von Fubini wird die Berechnung von mehrdimensionalen Integralen auf die Berechnung eindimensionaler Integrale zurückgeführt. Wir zerlegen den $\mathbb{R}^n$ in zwei Komponenten

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q = \{(x,y) : x \in \mathbb{R}^p\,,\ y \in \mathbb{R}^q\}$$

und betrachten achsenparallele Quader $P \subset \mathbb{R}^p$, $Q \subset \mathbb{R}^q$, die sich zu einem achsenparallelen Quader $P \times Q$ im $\mathbb{R}^n$ zusammensetzen.

Satz 2.25 (Fubini)
Sei $f : P \times Q \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, es existiere das Riemann-Integral

$$\int_Q f(x,y)\,dy \tag{2.32}$$

für alle $x \in P$. Dann ist die Funktion

$$x \mapsto \int_Q f(x,y)\,dy \tag{2.33}$$

Riemann-integrierbar auf P, und es gilt

$$\int_{P\times Q} f(x,y)\,d(x,y) = \int_P \left(\int_Q f(x,y)\,dy \right)\,dx\,. \tag{2.34}$$

Beweis: Siehe Blatter, Analysis 2, Kapitel 13. □

Vertauscht man die Rollen von P und Q, so erhält man (mit entsprechend modifizierten Voraussetzungen)

$$\int_{P\times Q} f(x,y)\,d(x,y) = \int_Q \left(\int_P f(x,y)\,dx \right)\,dy\,, \tag{2.35}$$

und damit die **Vertauschbarkeit der Integrationsreihenfolge**. In der Vorlesung Maß- und Integrationstheorie wird der Satz von Fubini für das Lebesgue-Integral bewiesen.

Zur Notation: Für eindimensionale Integrale schreiben wir wieder

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{statt} \quad \int_{[a,b]} f(x)\,dx\,.$$

Beispiel: $n = 2$, $p = q = 1$, $P = Q = [1, 2]$,

$$\begin{aligned}\int_{P\times Q} \frac{1}{(x+y)^2}\, d(x,y) &= \int_1^2 \int_1^2 \frac{1}{(x+y)^2}\, dy\, dx = \int_1^2 -\frac{1}{x+y}\Big|_{y=1}^{y=2} dx \\ &= \int_1^2 \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\, dx = \Big[\ln(x+1) - \ln(x+2)\Big]_{x=1}^{x=2} \\ &= \ln\frac{9}{8}\,.\end{aligned}$$

Folgerung 2.26 *Sei $Q = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$, $f : Q \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt*

$$\int_Q f(x)\, dx = \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n)\, dx_n \cdots dx_1\,, \tag{2.36}$$

und die Integrationsreihenfolge kann beliebig vertauscht werden.

Beweis: Folgt mit Induktion aus dem Satz von Fubini. □

Hat f eine Produktform, so zerfällt das n-dimensionale Integral in ein Produkt eindimensionaler Integrale. Beispiel: $n = 2$, $P = [1, 2]$, $Q = [1, 3]$,

$$\begin{aligned}\int_{P\times Q} xy^2\, d(x,y) &= \int_1^2 \int_1^3 xy^2\, dy\, dx = \int_1^2 x \int_1^3 y^2\, dy\, dx = \int_1^2 x\, dx \cdot \int_1^3 y^2\, dy = \frac{3}{2}\cdot\frac{26}{3} \\ &= 13\,.\end{aligned}$$

Ein Integral über eine J-messbare Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ kann ebenfalls zerlegt werden. Sei wieder

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q = \{(x,y) : x \in \mathbb{R}^p\,,\ y \in \mathbb{R}^q\}\,.$$

Für $x \in \mathbb{R}^p$ setzen wir

$$A_x = \{y : y \in \mathbb{R}^q\,,\ (x,y) \in A\}\,.$$

Es ist dann $1_A(x,y) = 1_{A_x}(y)$. Sei A im Produkt der achsenparallelen Quader $P \subset \mathbb{R}^p$ und $Q \subset \mathbb{R}^q$ enthalten. Für $f : A \to \mathbb{R}$ gilt nun, falls die Voraussetzungen des Satzes von Fubini erfüllt sind,

$$\begin{aligned}\int_A f(x,y)\, d(x,y) &= \int_{P\times Q} 1_A(x,y)\tilde{f}(x,y)\, dy\, dx = \int_P \int_Q 1_{A_x}(y)\tilde{f}(x,y)\, dy\, dx \\ &= \int_P \int_{A_x} \tilde{f}(x,y)\, dy\, dx\,.\end{aligned} \tag{2.37}$$

Ist etwa $n = 2$, $p = q = 1$, und hat A die Form

$$A = \{(x,y) : a \le x \le b\,,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}\,, \tag{2.38}$$

so ist $P = [a, b]$, $A_x = \{y : \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$ und damit

$$\int_A f(x,y)\, d(x,y) = \int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\, dy\, dx\,. \tag{2.39}$$

Im Falle $f = 1$ wird (2.37) zum **Prinzip von Cavalieri**

$$\operatorname{vol}(A) = \int_P \operatorname{vol}(A_x)\, dx\,. \tag{2.40}$$

Als Beispiel betrachten wir die Fläche (= zweidimensionales Volumen) der oberen Hälfte des Einheitskreises,

$$A = \{(x,y) : -1 \le x \le 1\,,\ 0 \le y \le \sqrt{1-x^2}\}\,.$$

Es ist

$$\operatorname{vol}(A) = \int_A 1\, d(x,y) = \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} 1\, dy\, dx = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}\,.$$

Substitution, Transformationsformel. Im Eindimensionalen haben wir die Substitutionsregel

$$\int_{T(a)}^{T(b)} f(y)\, dy = \int_a^b f(T(x))T'(x)\, dx\,. \tag{2.41}$$

Die sogenannte Transformationsformel verallgemeinert (2.41) ins Mehrdimensionale, sie lautet

$$\int_{T(U)} f(y)\, dy = \int_U f(T(x))|\det DT(x)|\, dx\,. \tag{2.42}$$

Der Betrag taucht in (2.41) nicht auf, weil die linke Seite dort durch die Unterscheidung von unterer und oberer Grenze eine Orientierungsinformation enthält,

$$\int_{T(a)}^{T(b)} f(y)\, dy = -\int_{T(b)}^{T(a)} f(y)\, dy\,.$$

Sei $P = [a-d, a+d]$ ein achsenparalleler Quader mit Mittelpunkt $a \in \mathbb{R}^n$ und Seitenlängen $2d_i$, $d \in \mathbb{R}^n$. Wir wollen das Bild $T(P)$ unter einer differenzierbaren Abbildung T durch das Bild unter der Linearisierung $DT(a)$ approximieren. Für $\varepsilon \in [0,1]$ betrachten wir die Quader

$$\begin{aligned} Y_\varepsilon &= T(a) + (1-\varepsilon)DT(a)(P-a)\,, \\ Y^\varepsilon &= T(a) + (1+\varepsilon)DT(a)(P-a)\,. \end{aligned} \tag{2.43}$$

Satz 2.27 *Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $T : U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus, sei $Q \subset U$ ein achsenparalleler Quader. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass für alle Quader $P = [a-d, a+d] \subset Q$ mit $\|d\| \le \delta$ gilt*

$$Y_\varepsilon \subset T(P) \subset Y^\varepsilon\,. \tag{2.44}$$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Wir definieren das Restglied

$$\begin{aligned} r(x,a) &= T(x) - T(a) - DT(a)(x-a)\,, \\ \rho(x,a) &= DT(a)^{-1} r(x,a)\,, \end{aligned} \qquad x, a \in Q\,. \tag{2.45}$$

Rechte Inklusion: Sei $P = [a-d, a+d]$, es gelte

$$\rho(x,a) \in \varepsilon(P-a)\,, \quad \text{für alle } x \in P. \tag{2.46}$$

Dann gilt für alle $x \in P$

$$T(x) = T(a) + DT(a)[x - a + \rho(x,a)] \in T(a) + DT(a)[(1+\varepsilon)(P-a)]\,,$$

also $T(P) \subset Y^\varepsilon$.
Linke Inklusion: Zu $y \in Y_\varepsilon$ konstruieren wir ein $x \in P$ mit einer geeigneten Fixpunktiteration. Es gilt

$$\begin{aligned} y = T(x) \quad &\Leftrightarrow \quad y = T(a) + DT(a)[x - a + \rho(x,a)] \\ &\Leftrightarrow \quad x = a - \rho(x,a) + DT(a)^{-1}(y - T(a)) =: S(x)\,. \end{aligned}$$

Wir wollen zeigen, dass $S : P \to P$ eine Kontraktion ist. Da $y \in Y_\varepsilon$, gilt für jedes $x \in P$

$$DT(a)^{-1}(y - T(a)) \in (1-\varepsilon)(P-a)\,,$$

also unter Verwendung von (2.46), da $-(P-a) = P-a$,

$$S(x) \in a + \varepsilon(P-a) + (1-\varepsilon)(P-a) \subset P\,.$$

Weiterhin gilt

$$DS(x) = -DT(a)^{-1} \circ \partial_x r(x,a) = -DT(a)^{-1} \circ [DT(x) - DT(a)]\,,$$

also

$$\|DS(x)\| \le \|DT(a)^{-1}\| \cdot \|DT(x) - DT(a)\|\,. \tag{2.47}$$

Aus dem Mittelwertsatz im Mehrdimensionalen folgt, dass S eine Kontraktion ist, falls

$$\|DS(x)\| \le \frac{1}{2}\,, \quad \text{für alle } x \in P. \tag{2.48}$$

Aus der Kompaktheit von Q, der Stetigkeit von DT^{-1} sowie der gleichmäßigen Stetigkeit von DT und r folgt nun, dass es ein $\delta > 0$ gibt, so dass (2.46) und (2.48) gelten für alle P wie verlangt, und damit die Behauptung. □

Satz 2.28 *Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $T : U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus, sei $Q \subset U$ ein achsenparalleler Quader. Dann gilt*

$$\mathrm{vol}\,(T(Q)) = \int_Q |\det DT(x)|\,dx\,. \tag{2.49}$$

Beweis: Die Menge $T(Q)$ ist J-messbar, da $\partial T(Q) = T(\partial Q)$ gilt (T ist in beide Richtungen stetig), ∂Q eine J-Nullmenge, T Lipschitz-stetig auf dem Kompaktum Q, und somit insgesamt $\partial T(Q)$ nach Satz 2.16 eine J-Nullmenge ist. Sei $\varepsilon > 0$, sei Z_ε eine Zerlegung von Q, so dass alle $P \in Q_{Z_\varepsilon}$ die Bedingung

$$Y_\varepsilon \subset T(P) \subset Y^\varepsilon$$

in Satz 2.27 erfüllen. In der Maß- und Integrationstheorie wird gezeigt, dass für das Volumen der Parallelotope Y_ε und Y^ε gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}\,(Y_\varepsilon) &= (1-\varepsilon)^n |\det DT(a_P)| \mathrm{vol}\,(P)\,, \\ \mathrm{vol}\,(Y^\varepsilon) &= (1+\varepsilon)^n |\det DT(a_P)| \mathrm{vol}\,(P)\,, \end{aligned} \tag{2.50}$$

wobei a_P den Mittelpunkt von P bezeichnet. Es folgt

$$(1-\varepsilon)^n |\det DT(a_P)| \mathrm{vol}\,(P) \le \mathrm{vol}\,(T(P)) \le (1+\varepsilon)^n |\det DT(a_P)| \mathrm{vol}\,(P)\,. \tag{2.51}$$

Nun ist

$$R_\varepsilon = \sum_{P \in Q_{Z_\varepsilon}} |\det DT(a_P)| \mathrm{vol}\,(P) \tag{2.52}$$

eine Riemannsche Summe für das Integral in (2.49), und aus (2.51) folgt

$$(1-\varepsilon)^n R_\varepsilon \le \mathrm{vol}\,(T(Q)) = \sum_{P \in Q_{Z_\varepsilon}} \mathrm{vol}\,(T(P)) \le (1+\varepsilon)^n R_\varepsilon\,. \tag{2.53}$$

Da $x \mapsto |\det DT(x)|$ auf dem Kompaktum Q gleichmäßig stetig ist, können wir die zugehörigen Schwankungssummen D_ε beliebig klein machen. Nach Satz 2.5 konvergieren die Riemannschen Summen R_ε für $\varepsilon \to 0$ gegen das Integral, und (2.49) folgt nun aus (2.53). □

Satz 2.29 (Substitutionsregel für Quader)
Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $T : U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus, sei $Q \subset U$ ein achsenparalleler Quader, sei $f : T(Q) \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt

$$\int_{T(Q)} f(y)\,dy = \int_Q f(T(x)) |\det DT(x)|\,dx\,. \tag{2.54}$$

Beweis: Sei Z eine Zerlegung von Q, sei $f_Z : T(Q) \to \mathbb{R}$ eine stückweise konstante Approximation von f,

$$f_Z(y) = \sum_{P \in Q_Z} f(T(\xi_P)) 1_{T(P)}(y)\,,$$

wobei $\xi_P \in P$ fest gewählt sind. Mit Satz 2.28 folgt nun

$$\begin{aligned}
\int_{T(Q)} f_Z(y)\,dy &= \sum_{P \in Q_Z} f(T(\xi_P)) \int_{T(Q)} 1_{T(P)}(y)\,dy = \sum_{P \in Q_Z} f(T(\xi_P)) \mathrm{vol}\,(T(P)) \\
&= \sum_{P \in Q_Z} f(T(\xi_P)) \int_P |\det DT(x)|\,dx = \int_Q \sum_{P \in Q_Z} f(T(\xi_P)) 1_P(x) |\det DT(x)|\,dx \\
&= \int_Q f_Z(T(x)) |\det DT(x)|\,dx\,.
\end{aligned}$$

Da T und f auf Q bzw. $T(Q)$ gleichmäßig stetig sind, gibt es Zerlegungen Z_n, so dass $f_{Z_n} \to f$ gleichmäßig, und die Behauptung folgt aus Satz 2.24. □

Man kann Satz 2.29 erweitern auf einen allgemeineren Integrationsbereich, es ist auch nicht erforderlich, dass T auf dem Rand des Integrationsbereichs bijektiv ist.

Satz 2.30 (Substitutionsregel, Riemann-Integral)
Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $T : U \to V$ stetig differenzierbar, sei $K \subset U$ kompakt und J-messbar, sei $DT(x)$ invertierbar für alle $x \in \mathrm{int}\,(K)$, sei $f : T(K) \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt

$$\int_{T(K)} f(y)\,dy = \int_K f(T(x)) |\det DT(x)|\,dx\,. \tag{2.55}$$

Beweis: Siehe Blatter, Kapitel 13. $\square$

Für das Lebesgue-Integral vereinfacht sich die Situation etwas, man kann die Substitutionsregel für beliebige offene Integrationsbereiche formulieren.

Satz 2.31 (Substitutionsregel, Lebesgue-Integral)
Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $T : U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus, sei $f : T(U) \to [-\infty, \infty]$ Lebesgue-integrierbar. Dann ist die Funktion $x \mapsto f(T(x))|\det DT(x)|$ Lebesgue-integrierbar auf U, und es gilt

$$\int_{T(U)} f(y)\, dy = \int_U f(T(x))|\det DT(x)|\, dx\,. \tag{2.56}$$

Beweis: Siehe die Maß- und Integrationstheorie. $\square$

Die Substitutionsregel wird oft dann angewendet, wenn T die Rolle einer Koordinatentransformation spielt. Wir betrachten **Polarkoordinaten in der Ebene**. Sie sind gegeben durch

$$T(r, \varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,, \quad T : [0, \infty) \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2\,. \tag{2.57}$$

Wir können Satz 2.30 anwenden mit $U = \mathbb{R}^2$, $K = [0, M] \times [0, 2\pi]$, $f : T(K) \to \mathbb{R}$ und erhalten

$$\int_{T(K)} f(x, y)\, d(x, y) = \int_0^M \int_0^{2\pi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\, d\varphi\, dr\,. \tag{2.58}$$

Alternativ können wir Satz 2.31 anwenden mit $U = \operatorname{int}(K)$, K wie eben, $f : T(U) \to \mathbb{R}$, und erhalten

$$\int_{T(U)} f(x, y)\, d(x, y) = \int_0^M \int_0^{2\pi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\, d\varphi\, dr\,. \tag{2.59}$$

Im Falle des Lebesgue-Integrals wird die Situation des "uneigentlichen Integrals" (unbeschränktes Integrationsgebiet bzw. Polstellen von f) gleich miterfasst, etwa $U = (0, \infty) \times (0, 2\pi)$, $T(U) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \geq 0\}$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx\, dy = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\, d\varphi\, dr\,. \tag{2.60}$$

Beispiel 2.32

1. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ rotationssymmetrisch, das heißt,

   $$f(x, y) = g(\sqrt{x^2 + y^2})\,, \quad g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}\,.$$

   Die Formel (2.60) wird zu

   $$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\, dx\, dy = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} g(r) r\, d\varphi\, dr = 2\pi \int_0^{\infty} g(r) r\, dr\,.$$

2. Fläche des Kreises K_M um 0 mit Radius M: Es ist $g = 1_{[0,M]}$,

   $$\operatorname{vol}(K_M) = \int_{K_M} 1\, d(x, y) = 2\pi \int_0^M r\, dr = \pi M^2\,.$$

3. Für
$$f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$$
erhalten wir
$$g(r) = e^{-r^2}\,,$$
also
$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = 2\pi\int_0^{\infty} re^{-r^2}\,dr = -\pi e^{-r^2}\Big|_{r=0}^{r=\infty} = \pi\,.$$
Da andererseits
$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2\,,$$
folgt außerdem
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}\,.$$

Wir betrachten nun **Kugelkoordinaten im Raum**. Sie sind gegeben durch
$$T(r,\theta,\varphi) = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)\,. \tag{2.61}$$
Der Nordpol $(0,0,r)$ entspricht dem Winkel $\theta = 0$, der Südpol $(0,0,-r)$ dem Winkel $\theta = \pi$, der Äquator mit den Vektoren $(r\cos\varphi, r\sin\varphi, 0)$ dem Winkel $\theta = \pi/2$. Falls wir als Definitionsbereich für die Integration
$$T : U = (0,\infty)\times(0,\pi)\times(0,2\pi) \to \mathbb{R}^3\,. \tag{2.62}$$
setzen, so ist
$$\mathbb{R}^3 \setminus T(U) = \{(x,0,z) : x \geq 0,\ z \in \mathbb{R}\}$$
eine (Lebesgue-) Nullmenge im $\mathbb{R}^3$, und es gilt
$$\det DT(r,\theta,\varphi) = r^2\sin\theta\,. \tag{2.63}$$
Die Substitutionsregel, auf dem gesamten $\mathbb{R}^3$ formuliert, wird zu
$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(T(r,\theta,\varphi))r^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,dr\,. \tag{2.64}$$

Beispiel 2.33

1. Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ rotationssymmetrisch, das heißt,
$$f(x,y,z) = g(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,,\quad g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}\,.$$
Dann ist $(f \circ T)(r,\theta,\varphi) = g(r)$, also
$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\,d(x,y,z) &= \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} g(r)r^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,dr = 2\pi\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int_0^{\infty} g(r)r^2\,dr\\ &= 4\pi\int_0^{\infty} g(r)r^2\,dr\,.\end{aligned} \tag{2.65}$$

2. Volumen der Kugel K_R um 0 mit Radius R: Hier ist $g = 1_{[0,R]}$,

$$\mathrm{vol}\,(K_R) = 4\pi \int_0^\infty r^2 1_{[0,R]}(r)\,dr = 4\pi \int_0^R r^2\,dr = \frac{4}{3}\pi R^3\,.$$

3. Gravitationspotential der Kugel K_R mit rotationssymmetrischer Dichte ρ: Das Potential im Punkt $P = (0,0,a)$ oberhalb der Kugel $(a > R)$ ist gegeben durch

$$u(P) = \gamma \int_{K_R} \frac{\rho(\|x\|_2)}{\|x-P\|_2}\,dx\,,$$

wobei γ die Gravitationskonstante ist. Wir substituieren $x = T(r,\theta,\varphi)$ und erhalten

$$\rho(T(r,\theta,\varphi)) = \rho(r)\,,$$

sowie

$$\begin{aligned}\|T(r,\theta,\varphi) - P\|_2^2 &= r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + (a - r\cos\theta)^2 \\ &= r^2\sin^2\theta + a^2 - 2ar\cos\theta + r^2\cos^2\theta \\ &= a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta\,.\end{aligned}$$

Es folgt also

$$\begin{aligned}u(P) = \gamma \int_{K_R} \frac{\rho(\|x\|_2)}{\|x-P\|_2}\,dx &= \gamma \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\rho(r) r^2 \sin\theta}{\sqrt{a^2+r^2-2ar\cos\theta}}\,d\theta\,d\varphi\,dr \\ &= 2\pi\gamma \int_0^R \rho(r) r^2 \int_0^\pi \frac{\sin\theta}{\sqrt{a^2+r^2-2ar\cos\theta}}\,d\theta\,dr\,.\end{aligned}$$

Substitution $t = -\cos\theta$, $dt = \sin\theta\,d\theta$ ergibt

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \frac{\sin\theta}{\sqrt{a^2+r^2-2ar\cos\theta}}\,d\theta = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{a^2+r^2+2art}}\,dt &= \frac{1}{ar}\sqrt{a^2+r^2+2art}\,\Big|_{t=-1}^{t=1} \\ &= \frac{1}{ar}\left(\sqrt{(a+r)^2} - \sqrt{(a-r)^2}\right) = \frac{2}{a}\,,\end{aligned}$$

also

$$u(P) = \frac{4\pi\gamma}{a}\int_0^R \rho(r) r^2\,dr\,.$$

Andererseits gilt für die Gesamtmasse der Kugel

$$M = \int_{K_R} \rho(x)\,dx = 4\pi \int_0^\infty 1_{[0,R]}(r)\rho(r) r^2\,dr = 4\pi \int_0^R \rho(r) r^2\,dr\,,$$

also

$$u(P) = \frac{\gamma M}{a}\,.$$

Als Ergebnis erhalten wir: Das von der Kugel herrührende Gravitationsfeld ist außerhalb der Kugel dasselbe wie das von einer Punktmasse M im Nullpunkt erzeugte Feld.

3 Das Oberflächenintegral

Thema dieses Kapitels ist das Integral

$$\int_M f(\xi)\, dS(\xi)$$

einer Funktion f, die auf einer Mannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ definiert ist. Dabei soll $\dim(M) = k < n$ und das Integral ein k-dimensionales Integral sein. Im Spezialfall $f = 1$ soll sich der k-dimensionale Inhalt

$$\mathrm{vol}_k(M) = \int_M 1\, dS(\xi)$$

von M ergeben. Eine typische Situation ist $M = \partial\Omega$, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen ist, mit $k = n-1$, M ist also die "Oberfläche" von Ω, daher die Bezeichnung "Oberflächenintegral". Im Falle $n = 3$ ist $k = 2$ und $\partial\Omega$ zweidimensional, $\mathrm{vol}_2(M)$ ist dann der Flächeninhalt von M. Andere in Anwendungen häufig auftretende Fälle sind $k = 1$ mit $n = 3$ oder $n = 2$.

Inhalt eines niederdimensionalen Parallelotops. Wir wollen den k-dimensionalen Inhalt eines von k Vektoren aufgespannten Parallelotops im $\mathbb{R}^n$ betrachten. Seien zunächst $k = n$, $w_1, \dots, w_k \in \mathbb{R}^k$. Dann ist das Parallelotop "volldimensional", und es gilt (siehe Maß- und Integrationstheorie), wie wir bereits im vorigen Kapitel verwendet haben,

$$\mathrm{vol}_k\left(P[w_1, \dots, w_k]\right) = |\det B|\,, \tag{3.1}$$

wobei $B \in \mathbb{R}^{(k,k)}$ die Matrix mit den Spalten $w_1, \dots, w_k$ ist. Sei nun $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathbb{R}^{(n,k)}$ die Matrix mit den Spalten $v_1, \dots, v_k$. Wir betrachten zunächst den Spezialfall

$$v_i = \begin{pmatrix} w_i \\ 0 \end{pmatrix}\,, \quad w_i \in \mathbb{R}^k\,. \tag{3.2}$$

Sinnvollerweise soll gelten

$$\mathrm{vol}_k\left(P[v_1, \dots, v_k]\right) = \mathrm{vol}_k\left(P[w_1, \dots, w_k]\right). \tag{3.3}$$

Nun ist $A^T A \in \mathbb{R}^{(k,k)}$ und

$$A = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}\,, \quad A^T A = \begin{pmatrix} B^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} = B^T B\,,$$

und weiter

$$\det(A^T A) = \det(B^T B) = \det(B^T)\det(B) = (\det B)^2\,,$$

also

$$\sqrt{\det(A^T A)} = |\det B| = \mathrm{vol}_k P[w_1, \dots, w_k]\,,$$

so dass die Definition

$$\mathrm{vol}_k\left(P[v_1, \dots, v_k]\right) = \sqrt{\det(A^T A)} \tag{3.4}$$

im betrachteten Spezialfall einen k-dimensionalen Inhalt liefert, welcher (3.3) erfüllt.

Sei nun $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ eine beliebige Menge linear unabhängiger Vektoren. Wir betrachten eine orthogonale Abbildung auf $\mathbb{R}^n$, welche den k-dimensionalen Unterraum $X =$

span $\{v_1, \ldots, v_k\}$ auf $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ abbildet, mit zugehöriger orthogonaler Matrix $U \in \mathbb{R}^{(n,n)}$. Da U alle Längen und Winkel invariant lässt, soll sinnvollerweise gelten

$$\mathrm{vol}_k\left(P[v_1, \ldots, v_k]\right) = \mathrm{vol}_k\left(P[Uv_1, \ldots, Uv_k]\right). \tag{3.5}$$

Aus (3.4) folgt, da $(UA)^T(UA) = A^T U^T U A = A^T A$,

$$\mathrm{vol}_k\left(P[Uv_1, \ldots, Uv_k]\right) = \sqrt{\det((UA)^T(UA))} = \sqrt{\det(A^T A)}\,,$$

so dass (3.5) erfüllt ist, wenn wir (3.4) auch für beliebige linear unabhängige $v_1, \ldots, v_k$ zugrundelegen.

Definition 3.1 (Volumen eines Parallelotops)
Seien $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$. Wir definieren das k-dimensionale Volumen des von ihnen aufgespannten Parallelotops als

$$vol_k\left(P[v_1, \ldots, v_k]\right) = \sqrt{\det(A^T A)}\,, \tag{3.6}$$

wobei $A \in \mathbb{R}^{(n,k)}$ die Matrix mit den Spalten $v_1, \ldots, v_k$ ist. Die Elemente von $A^T A$ erhält man als Skalarprodukte,

$$(A^T A)_{ij} = v_i^T v_j\,. \tag{3.7}$$

□

Falls die Vektoren $v_1, \ldots, v_k$ linear abhängig sind, ergibt sich

$$\mathrm{vol}_k\left(P[v_1, \ldots, v_k]\right) = 0\,,$$

da dann $\mathrm{rang}\,(A^T A) \leq \mathrm{rang}\,(A) < k$ gilt.

Im Spezialfall $k = 2$ ist das Parallelotop ein Parallelogramm, wir betrachten $P[v, w]$ mit $v, w \in \mathbb{R}^n$. Sei φ der Winkel zwischen v und w, also

$$\cos\varphi = \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\| \cdot \|w\|}\,.$$

Es ist dann

$$A^T A = \begin{pmatrix} v^T \\ w^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^T v & v^T w \\ w^T v & w^T w \end{pmatrix}\,,$$

und

$$\begin{aligned} \det(A^T A) &= (v^T v)(w^T w) - (v^T w)(w^T v) = \|v\|^2\,\|w\|^2 - \langle v, w\rangle^2 \\ &= \|v\|^2\,\|w\|^2(1 - \cos^2\varphi) = \|v\|^2\,\|w\|^2 \sin^2\varphi\,, \end{aligned}$$

der Flächeninhalt des Parallelogramms ist also

$$\mathrm{vol}_2\left(P[v, w]\right) = \|v\|\|w\| \sin\varphi\,. \tag{3.8}$$

Zerlegung der Eins.

Definition 3.2 (Träger)
Sei (X,d) metrischer Raum, Y Vektorraum, $f : X \to Y$ eine Abbildung. Die Menge

$$\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x : x \in X \,,\; f(x) \neq 0\}} \tag{3.9}$$

heißt der ***Träger*** *(engl.: support) von f.* □

Definition 3.3 (C^∞-Zerlegung der Eins)
Sei $K \subset \mathbb{R}^n$, sei $\mathcal{U} = (U_j)_{1\le j\le N}$ eine offene Überdeckung von K. Eine Familie $(\alpha_j)_{1\le j\le N}$ von Funktionen $\alpha_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ heißt C^∞-Zerlegung der Eins für K bezüglich $\mathcal{U}$, falls gilt

$$0 \le \alpha_j \le 1 \,, \quad \textit{für alle } j \,, \tag{3.10}$$

$$\operatorname{supp}(\alpha_j) \subset U_j \,, \quad \textit{für alle } j \,, \tag{3.11}$$

$$\sum_{j=1}^{N} \alpha_j(x) = 1 \quad \textit{falls } x \in K \,. \tag{3.12}$$

□

Die Zerlegung der Eins stellt ein Werkzeug zur "Lokalisierung" dar. Mit ihrer Hilfe können wir eine Funktion $f : K \to Y$, Y Vektorraum, zerlegen in eine Summe

$$f = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j f \,, \tag{3.13}$$

deren Summanden $\alpha_j f$ ihren Träger jeweils innerhalb der Mengen U_j haben. Meistens werden die Mengen U_j als beschränkte Mengen gewählt, dann haben alle Funktionen $\alpha_j f$ einen **kompakten Träger**.

Wir zeigen jetzt, dass kompakte Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ immer eine C^∞-Zerlegung der Eins besitzen.

Satz 3.4 *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, sei $(U(x))_{x\in K}$ ein System offener Mengen mit $x \in U(x)$ für alle $x \in K$. Dann gibt es endlich viele $x^j \in K$, $1 \le j \le N$, mit*

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{N} U(x^j) \,,$$

und eine C^∞-Zerlegung der Eins für K bezüglich $(U_j)_{1\le j\le N}$, wobei $U_j = U(x^j)$.

Beweis: Wir definieren $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$\psi(t) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{t}\right) \,, & t > 0 \,, \\ 0 \,, & t \le 0 \,. \end{cases}$$

Da $\psi^{(k)}(0) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$, gilt $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$. Wir setzen

$$\tilde{\psi}(t) = \frac{\psi(4-t)}{\psi(4-t) + \psi(t-1)} \,.$$

Es ist dann $\tilde{\psi} \in C^\infty(\mathbb{R})$, und es gilt $\tilde{\psi}(t) = 1$ für $t \leq 1$, $\tilde{\psi}(t) = 0$ für $t \geq 4$. Zu jedem $x \in K$ wählen wir $\varepsilon_x > 0$ mit $B(x; 3\varepsilon_x) \subset U(x)$. Weiterhin wählen ($K$ ist kompakt) wir endlich viele $x^j \in K$, $1 \leq j \leq N$, so dass

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{N} B(x^j; \varepsilon_j)\,, \quad \varepsilon_j = \varepsilon_{x^j}\,,$$

und definieren für $x \in \mathbb{R}^n$

$$\tilde{\alpha}_j(x) = \tilde{\psi}\left(\frac{\|x - x^j\|_2^2}{\varepsilon_j^2}\right).$$

Dann ist $\tilde{\alpha}_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $0 \leq \tilde{\alpha}_j \leq 1$, $\tilde{\alpha}_j = 1$ in $K(x^j; \varepsilon_j)$ (wobei $K(x; \varepsilon) = \{y : \|y - x\|_2 \leq \varepsilon\}$), und $\tilde{\alpha}_j = 0$ außerhalb von $K(x^j; 2\varepsilon_j)$. Eine Zerlegung der Eins wie verlangt erhalten wir nun durch

$$\alpha_j(x) = \frac{\tilde{\alpha}_j(x)}{p(x) + \sum_{k=1}^{N} \tilde{\alpha}_k(x)}\,, \quad p(x) = \prod_{k=1}^{N}(1 - \tilde{\alpha}_k(x))\,.$$

Der Nenner ist ungleich Null für alle $x \in \mathbb{R}^n$, da $p(x) = 1$ falls $\sum_k \tilde{\alpha}_k(x) = 0$. Weiterhin ist $\operatorname{supp} \alpha_j = \operatorname{supp} \tilde{\alpha}_j \subset U_j$. Da $p(x) = 0$ für alle $x \in K$, folgt $\sum_j \alpha_j = 1$ auf K. □

Folgerung 3.5 (Existenz einer C^∞-Zerlegung der Eins)
Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, sei $\mathcal{U} = (U_j)_{1 \leq j \leq N}$ eine offene Überdeckung von K. Dann gibt es eine C^∞-Zerlegung der Eins für K bezüglich $\mathcal{U}$.

Beweis: Für jedes $x \in K$ wählen wir ein $V \in \mathcal{U}$ mit $x \in V$ und setzen $U(x) = V$. Nach Satz 3.4 gibt es endlich viele $U(x^l)$, $1 \leq l \leq L$, und eine zugehörige Zerlegung der Eins (β_l). Zu $U_j \in \mathcal{U}$ definieren wir $\alpha_j = \sum \beta_l$, wobei über diejenigen l summiert wird, für die $U(x^l) = U_j$ gilt. Dann ist $(\alpha_j)_{1 \leq j \leq N}$ die gesuchte Zerlegung der Eins für $\mathcal{U}$. □

Das Oberflächenintegral. Sei $\Phi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$, $\Phi(t) = At$ mit $A \in \mathbb{R}^{(n,k)}$. Dann ist gemäß Definition 3.1

$$\operatorname{vol}_k(\Phi([0,1]^k)) = \operatorname{vol}_k(Ae_1, \ldots, Ae_k) = \sqrt{\det(A^T A)}\,.$$

Definition 3.6 (Maßtensor, Gramsche Determinante)
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale C^α-Mannigfaltigkeit, sei $\Phi : T \to M \cap U$ eine Karte von M, wobei $U \subset \mathbb{R}^n$ und $T \subset \mathbb{R}^k$ offene Mengen sind. Wir definieren $G : T \to \mathbb{R}^{(k,k)}$ und $g : T \to \mathbb{R}$ durch

$$G(t) = J_\Phi(t)^T J_\Phi(t)\,, \quad g(t) = \det G(t)\,. \tag{3.14}$$

G heißt der Maßtensor, g die Gramsche Determinante. □

Definition 3.7 *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale C^α-Mannigfaltigkeit, Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ heißt integrierbar über M bezüglich der Karte $\Phi : T \to \mathbb{R}^n$, falls die durch*

$$t \mapsto f(\Phi(t))\sqrt{g(t)} \tag{3.15}$$

definierte Funktion über T integrierbar ist. In diesem Fall definieren wir

$$\int_{\Phi(T)} f(\xi)\, dS(\xi) = \int_T f(\Phi(t))\sqrt{g(t)}\, dt\,. \tag{3.16}$$

□

Im Falle des Riemann-Integrals muss T außerdem J-messbar sein (sonst ist das Integral über T nicht definiert), das heißt, ∂T muss eine J-Nullmenge sein. Solche Karten kann man aber immer finden, wir gehen darauf nicht weiter ein.

Das folgende Lemma zeigt, dass das Integral auf der linken Seite von (3.16) nur von der Menge $\Phi(T)$, nicht aber von der Wahl von Φ abhängt, und dass also Definition 3.7 sinnvoll ist.

Lemma 3.8 *Sind $\Phi : T \to \mathbb{R}^n$ und $\hat{\Phi} : \hat{T} \to \mathbb{R}^n$ Karten mit $\Phi(T) = \hat{\Phi}(\hat{T})$, so ist f integrierbar über M bezüglich Φ genau dann, wenn f integrierbar ist über M bezüglich $\hat{\Phi}$, und es gilt*

$$\int_T f(\Phi(t))\sqrt{g(t)}\, dt = \int_{\hat{T}} f(\hat{\Phi}(s))\sqrt{\hat{g}(s)}\, ds\,. \tag{3.17}$$

Beweis: Wir betrachten den durch $\Psi = \Phi^{-1} \circ \hat{\Phi}$ definierten Kartenwechsel $\Psi : \hat{T} \to T$. Nach Satz 1.5 ist Ψ ein C^α-Diffeomorphismus. Sei nun f integrierbar über M bezüglich Φ. Aus der Substitutionsregel (Satz 2.31) folgt, dass die Funktion

$$s \mapsto f(\Phi(\Psi(s)))\sqrt{g(\Psi(s))}|\det J_\Psi(s)|$$

auf $\hat{T}$ integrierbar ist, und dass gilt

$$\int_T f(\Phi(t))\sqrt{g(t)}\, dt = \int_{\hat{T}} f(\Phi(\Psi(s)))\sqrt{g(\Psi(s))}|\det J_\Psi(s)|\, ds\,.$$

Es ist $\hat{\Phi} = \Phi \circ \Psi$, also

$$J_{\hat{\Phi}}(s) = J_\Phi(\Psi(s))J_\Psi(s)\,,$$

also

$$\begin{aligned}
\hat{g}(s) &= \det(J_{\hat{\Phi}}(s)^T J_{\hat{\Phi}}(s)) = \det(J_\Psi(s)^T J_\Phi(\Psi(s))^T J_\Phi(\Psi(s))J_\Psi(s)) \\
&= \det(J_\Psi(s)^T)\det(J_\Phi(\Psi(s))^T J_\Phi(\Psi(s)))\det(J_\Psi(s)) \\
&= g(\Psi(s))(\det J_\Psi(s))^2\,,
\end{aligned}$$

also

$$\int_T f(\Phi(t))\sqrt{g(t)}\, dt = \int_{\hat{T}} f(\hat{\Phi}(s))\sqrt{\hat{g}(s)}\, ds\,.$$

□

Definition 3.9 (Oberflächenintegral)
Sei M eine kompakte k-dimensionale C^α-Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$. Ein $f : M \to \mathbb{R}$ heißt integrierbar über M, falls es einen endlichen Atlas $(\Phi_j)_{1\le j\le N}$, $\Phi_j : T_j \to M \cap U_j$, gibt,

so dass f integrierbar ist über M bezüglich aller Karten Φ_j, $1 \leq j \leq N$. In diesem Fall definieren wir das Oberflächenintegral von f über M als

$$\int_M f(\xi)\, dS(\xi) = \sum_{j=1}^{N} \int_{\Phi_j(T_j)} \alpha_j(\xi) f(\xi)\, dS(\xi)\,, \tag{3.18}$$

wobei $(\alpha_j)_{1\leq j\leq N}$ eine C^∞-Zerlegung der Eins für M bezüglich $(U_j)_{1\leq j\leq N}$ ist. □

Das folgende Lemma zeigt, dass Definition 3.9 sinnvoll ist.

Lemma 3.10 *In der Situation von Definition 3.9 gilt:*

(i) Zu jedem endlichen Atlas $(\Phi_j)_{1\leq j\leq N}$ gibt es eine solche C^∞-Zerlegung der Eins $(\alpha_j)_{1\leq j\leq N}$.

(ii) Für alle i, j gilt: Ist f über M bezüglich Φ_j integrierbar, so auch $\alpha_i f$.

(iii) Der in (3.18) definierte Wert des Oberflächenintegrals hängt weder von der Wahl des Atlas noch von der Wahl der Zerlegung ab.

Beweis: Die Aussage (i) ergibt sich aus Folgerung 3.5. Zum Beweis von (ii) bemerken wir, dass für alle $t \in T_j$ gilt

$$0 \leq \alpha_i(\Phi_j(t))|f(\Phi_j(t))|\sqrt{g_j(t)} \leq |f(\Phi_j(t))|\sqrt{g_j(t)}\,,$$

also definiert der mittlere Ausdruck eine auf T_j integrierbare Funktion. Zum Beweis von (iii) betrachten wir einen weiteren endlichen Atlas

$$(\tilde{\Phi}_k)_{1\leq k\leq \tilde{N}}\,, \quad \tilde{\Phi}_k : \tilde{T}_k \to M \cap \tilde{U}_k\,,$$

für M mit C^∞-Zerlegung der Eins

$$(\tilde{\alpha}_k)_{1\leq k\leq \tilde{N}}\,.$$

Es gilt dann

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{N} \int_{\Phi_j(T_j)} \alpha_j(\xi) f(\xi)\, dS(\xi) &= \sum_{j=1}^{N} \int_{\Phi_j(T_j)} \sum_{k=1}^{\tilde{N}} \tilde{\alpha}_k(\xi)\alpha_j(\xi) f(\xi)\, dS(\xi) \\ &= \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{\tilde{N}} \int_{\Phi_j(T_j)} \tilde{\alpha}_k(\xi)\alpha_j(\xi) f(\xi)\, dS(\xi)\,,\end{aligned}$$

und ebenso

$$\sum_{k=1}^{\tilde{N}} \int_{\tilde{\Phi}_k(\tilde{T}_k)} \tilde{\alpha}_k(\xi) f(\xi)\, dS(\xi) = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{\tilde{N}} \int_{\tilde{\Phi}_k(\tilde{T}_k)} \tilde{\alpha}_k(\xi)\alpha_j(\xi) f(\xi)\, dS(\xi)\,,$$

und für alle j, k gilt

$$\int_{\Phi_j(T_j)} \tilde{\alpha}_k(\xi)\alpha_j(\xi)f(\xi)\,dS(\xi) = \int_{\Phi_j(T_j)\cap\tilde{\Phi}_k(\tilde{T}_k)} \tilde{\alpha}_k(\xi)\alpha_j(\xi)f(\xi)\,dS(\xi)$$
$$= \int_{\tilde{\Phi}_k(\tilde{T}_k)} \tilde{\alpha}_k(\xi)\alpha_j(\xi)f(\xi)\,dS(\xi)\,,$$

da $\tilde{\alpha}_k\alpha_j = 0$ außerhalb von $\Phi_j(T_j) \cap \tilde{\Phi}_k(\tilde{T}_k)$. $\square$

Ist K Teilmenge einer k-dimensionalen C^α-Mannigfaltigkeit M, so definieren wir

$$\int_K f(\xi)\,dS(\xi) = \int_M 1_K(\xi)f(\xi)\,dS(\xi)\,,$$

falls $1_K f$ über M integrierbar ist. Für $f = 1$ erhalten wir den k-dimensionalen Inhalt von K,

$$\mathrm{vol}_k\,(K) = \int_M 1_K(\xi)\,d\xi\,.$$

Ist

$$\mathrm{vol}_k\,(K) = 0\,,$$

so heißt K eine k-dimensionale Nullmenge in M. In diesem Fall gilt

$$\int_{M\setminus K} f(\xi)\,dS(\xi) = \int_M f(\xi)\,dS(\xi)\,,$$

falls f über M integrierbar ist.

Beispiel 3.11

(i) Kurvenlänge: Sei $T = (a, b) \subset \mathbb{R}$, $\Phi : T \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar mit $\Phi'(t) \neq 0$ für alle $t \in (a, b)$, $M = \Phi(T)$. Es ist dann

$$g(t) = G(t) = J_\Phi(t)^T J_\Phi(t) = (\Phi_1'(t), \dots, \Phi_n'(t)) \begin{pmatrix} \Phi_1'(t) \\ \vdots \\ \Phi_n'(t) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \Phi_i'(t)^2\,,$$

$$\int_M 1\,dS(\xi) = \int_T 1\sqrt{g(t)}\,dt = \int_a^b \|\Phi'(t)\|_2\,dt\,.$$

Der 1-dimensionale Inhalt von M ist also gerade die Länge der Kurve Φ.

(ii) Rotationsflächen: Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, sei $f > 0$. Dann ist

$$M = \{(x, y, z) : x \in (a, b),\ y^2 + z^2 = f(x)^2\} \tag{3.19}$$

eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^3$. Die durch

$$\Phi(t, s) = (t, f(t)\cos s, f(t)\sin s) \tag{3.20}$$

definierte Abbildung

$$\Phi : T = (a, b) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3 \tag{3.21}$$

ist eine C^1-Karte von M, da

$$J_\Phi(t,s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f'(t)\cos s & -f(t)\sin s \\ f'(t)\sin s & f(t)\cos s \end{pmatrix} \tag{3.22}$$

den Rang 2 hat. Der Maßtensor von Φ ist

$$G(t,s) = J_\Phi(t,s)^T J_\Phi(t,s) = \begin{pmatrix} 1+f'(t)^2 & 0 \\ 0 & f(t)^2 \end{pmatrix} . \tag{3.23}$$

Die Menge

$$M \setminus \Phi(T) = \{(t, f(t), 0) : \, t \in (a,b)\}$$

ist eine 2-dimensionale Nullmenge in M. Also ist

$$\int_M 1 \, dS(\xi) = \int_{\Phi(T)} 1 \, dS(\xi) = \int_T \sqrt{\det G(t,s)} \, d(t,s) \tag{3.24}$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_a^b f(t)\sqrt{1+f'(t)^2} \, dt \, ds = 2\pi \int_a^b f(t)\sqrt{1+f'(t)^2} \, dt \, . \tag{3.25}$$

(iii) Oberfläche der Einheitskugel im $\mathbb{R}^3$: Das ist ein Spezialfall von (ii) mit $(a,b) = (-1,1)$, $f(t) = \sqrt{1-t^2}$. Es ist

$$f'(t) = -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \, ,$$

also gilt

$$\int_M 1 \, dS(\xi) = 2\pi \int_{-1}^1 f(t)\sqrt{1+f'(t)^2} \, dt = 2\pi \int_{-1}^1 1 \, dt = 4\pi \, .$$

(iv) Inhalt des Graphen einer Funktion: Sei $T \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen, $F : T \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar,

$$M = \{(t, F(t)) : t \in T\} \subset \mathbb{R}^n \, . \tag{3.26}$$

Die Abbildung

$$\Phi : T \to \mathbb{R}^n \, , \quad \Phi(t) = (t, F(t)) \, ,$$

ist C^1-Karte mit $\Phi(T) = M$. Es ist

$$J_\Phi(t) = \begin{pmatrix} I \\ \partial_1 F(t) \cdots \partial_{n-1} F(t) \end{pmatrix}$$

$$G(t) = J_\Phi(t)^T J_\Phi(t) = I + \begin{pmatrix} \partial_1 F(t) \\ \vdots \\ \partial_{n-1} F(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_1 F(t) & \cdots & \partial_{n-1} F(t) \end{pmatrix} ,$$

also (siehe Lemma 3.12 unten)

$$g(t) = \det G(t) = 1 + \|\operatorname{grad} F(t)\|_2^2 \, . \tag{3.27}$$

Der $(n-1)$-dimensionale Inhalt des Graphen von F ist also

$$\int_M 1 \, dS(\xi) = \int_T \sqrt{1 + \|\operatorname{grad} F(t)\|_2^2} \, dt \, . \tag{3.28}$$

□

Lemma 3.12 *Sei $a \in \mathbb{R}^m$, $I \in \mathbb{R}^{(m,m)}$ die Einheitsmatrix. Dann ist*

$$\det(I + aa^T) = 1 + \|a\|_2^2 \,, \quad aa^T = \begin{pmatrix} a_1a_1 & \cdots & a_1a_m \\ \vdots & & \vdots \\ a_ma_1 & \cdots & a_ma_m \end{pmatrix} \tag{3.29}$$

Beweis: Sei $a \neq 0$ (sonst trivial). Wir berechnen die Eigenwerte von $I + aa^T$:

$$(I + aa^T)x = \lambda x \qquad \Leftrightarrow \qquad (a^Tx) \cdot a = (\lambda - 1)x \,.$$

Es ist also a ein Eigenvektor zum Eigenwert $1 + \|a\|_2^2$, und jeder Vektor x mit $x \perp a$ ist Eigenvektor zum Eigenwert 1. Wir erhalten also eine Basis aus Eigenvektoren mit den Eigenwerten

$$\lambda_1 = 1 + \|a\|_2^2 \,, \quad \lambda_2 = \cdots = \lambda_m = 1 \,,$$

also

$$\det(I + aa^T) = \prod_{i=1}^m \lambda_i = 1 + \|a\|_2^2 \,.$$

□

Satz 3.13 *Sei M eine k-dimensionale C^α-Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$, sei $r > 0$. Dann ist*

$$rM = \{rx : \, x \in M\} \tag{3.30}$$

ebenfalls eine k-dimensionale C^α-Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$. Ist $f : rM \to \mathbb{R}$, so gilt

$$f \text{ integrierbar über } rM \quad \Leftrightarrow \quad x \mapsto f(rx) \text{ integrierbar über } M \,, \tag{3.31}$$

und in diesem Fall ist

$$\int_{rM} f(\xi)\, dS(\xi) = r^k \int_M f(r\xi)\, dS(\xi) \,. \tag{3.32}$$

Beweis: Ist $\Phi : T \to U \cap M$ Karte für M, so ist

$$\tilde{\Phi} : T \to rU \cap rM \,, \quad \tilde{\Phi}(t) = r\Phi(t) \,,$$

Karte für rM. Die erste Behauptung folgt nun aus Satz 1.3. Zum Beweis von (3.31) und (3.32) bemerken wir, dass

$$\tilde{g}(t) = \det(J_{\tilde{\Phi}}(t)^T J_{\tilde{\Phi}}(t)) = \det(r^2 J_\Phi(t)^T J_\Phi(t)) = r^{2k} g(t) \,,$$

also gilt für jede Karte

$$\int_T f(\tilde{\Phi}(t)) \sqrt{\tilde{g}(t)}\, dt = \int_T f(r\Phi(t)) r^k \sqrt{g(t)}\, dt \,.$$

Summation über eine Zerlegung der Eins liefert die Behauptung. □

4 Der Integralsatz von Gauß

Wir betrachten offene Mengen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft, dass $\partial\Omega$ eine $(n-1)$-dimensionale C^1-Mannigfaltigkeit ist und Ω lokal nur auf einer Seite von $\partial\Omega$ liegt.

Definition 4.1 (C^1-Rand)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wir sagen, dass Ω einen C^1-Rand hat, falls gilt: Für alle $a \in \partial\Omega$ gibt es eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ und eine Funktion $f \in C^1(U)$ so dass $\nabla f(x) \neq 0$ für alle $x \in U$ gilt und

$$\partial\Omega \cap U = \{x : x \in U, f(x) = 0\}\,, \tag{4.1}$$

$$\Omega \cap U = \{x : x \in U, f(x) < 0\}\,. \tag{4.2}$$

□

Definition 4.2 (Tangentialvektor, Tangentialraum)
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale C^1-Mannigfaltigkeit, sei $a \in M$. Ein $v \in \mathbb{R}^n$ heißt Tangentialvektor an M in a, falls eine stetig differenzierbare Kurve $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ existiert (wobei I ein offenes Intervall im $\mathbb{R}$ mit $0 \in I$ ist) mit

$$\varphi(0) = a\,, \quad \varphi'(0) = v\,, \quad \varphi(I) \subset M\,. \tag{4.3}$$

Die Menge

$$T_a(M) = \{v : v \text{ ist Tangentialvektor an } M \text{ in } a\} \tag{4.4}$$

heißt der Tangentialraum an M in a. □

Satz 4.3 (Charakterisierung des Tangentialraums)
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale C^1-Mannigfaltigkeit, sei $a \in M$, sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $a \in U$. Dann gilt:

(i) $T_a(M)$ ist ein k-dimensionaler Unterraum des $\mathbb{R}^n$.

(ii) Ist $\Phi : T \to M \cap U$ eine Karte von M mit $\Phi(c) = a$, $c \in T$, $T \subset \mathbb{R}^k$ offen, so bilden die k Spalten der Funktionalmatrix $J_\Phi(c)$, das heißt die Vektoren

$$\{\partial_1\Phi(c), \ldots, \partial_k\Phi(c)\}$$

eine Basis von $T_a(M)$.

(iii) Ist

$$M \cap U = \{x : x \in U,\ f(x) = 0\}$$

mit $f \in C^1(U; \mathbb{R}^{n-k})$ und $\operatorname{rang} J_f(a) = n-k$, so ist

$$T_a(M) = \{v : v \in \mathbb{R}^n,\ \langle v, \nabla f_i(a)\rangle = 0 \text{ für alle } i,\ 1 \leq i \leq n-k\}\,. \tag{4.5}$$

Beweis: Sei V_1 der von den Spalten von $J_\Phi(c)$ aufgespannte Unterraum und

$$V_2 = \{v : v \in \mathbb{R}^n,\ \langle v, \nabla f_i(a)\rangle = 0 \text{ für alle } i,\ 1 \le i \le n-k\}\,.$$

Wegen $\dim(V_1) = \dim(V_2) = k$ genügt es zu zeigen, dass

$$V_1 \subset T_a(M) \subset V_2\,. \tag{4.6}$$

Zum Beweis der ersten Inklusion sei

$$v = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \partial_j \Phi(c)$$

ein beliebiges Element von V_1. Wir definieren für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ eine Abbildung $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ durch

$$\varphi(s) = \Phi(c_1 + \lambda_1 s, c_2 + \lambda_2 s, \ldots, c_k + \lambda_k s)\,.$$

Dann ist $\varphi(s) \in M$ für alle s, $\varphi(0) = a$, und aus der Kettenregel folgt

$$\varphi'(0) = J_\Phi(c) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \partial_j \Phi(c) = v\,,$$

also $v \in T_a(M)$. Zum Beweis der zweiten Inklusion sei $v \in T_a(M)$. Wähle $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ gemäß Definition 4.2, dann gilt $f(\varphi(s)) = 0$ für $|s|$ hinreichend klein, also gilt für alle i mit $1 \le i \le n-k$

$$0 = (f_i \circ \varphi)'(0) = \langle \nabla f_i(\varphi(0)), \varphi'(0)\rangle = \langle \nabla f_i(a), v\rangle\ ,$$

also ist $v \in V_2$. $\square$

In Satz 4.3 ergibt sich aus (iii) im Spezialfall $\dim M = n-1$, dass $\dim T_a(M) = n-1$ und dass $\nabla f(a)$ auf $T_a(M)$ senkrecht steht.

Satz 4.4 (Existenz einer stetigen äußeren Normalen)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, Ω habe einen C^1-Rand. Dann gibt es genau ein Vektorfeld $\nu : \partial\Omega \to \mathbb{R}^n$ mit den folgenden Eigenschaften: Für alle $a \in \partial\Omega$ gilt

$$\nu(a) \perp T_a(\partial\Omega)\,, \quad \|\nu(a)\|_2 = 1\,, \tag{4.7}$$

für alle $a \in \partial\Omega$ gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit

$$a + t\nu(a) \notin \Omega\,, \quad \textit{für alle } t \in (0, \varepsilon)\,. \tag{4.8}$$

Das Vektorfeld ν ist stetig auf $\partial\Omega$. Der Vektor $\nu(a)$ heißt der äußere (Einheits-) Normalenvektor an $\partial\Omega$ in a.

Beweis: Nach Satz 4.3 ist ist $\dim T_a(\partial\Omega) = n-1$, und es gilt für $z \in \mathbb{R}^n$

$$z \perp T_a(\partial\Omega)\,, z \neq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad z = \lambda \nabla f(a) \quad \text{für ein } \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0.$$

Für solche z und hinreichend kleines $t > 0$ gilt (mit f wie in Definition 4.1)

$$f(a+tz) = f(a) + t\,\langle z, \nabla f(a)\rangle + o(t) = t\lambda\|\nabla f(a)\|_2^2 + o(t) = t\left(\lambda\|\nabla f(a)\|_2^2 + \frac{o(t)}{t}\right),$$

also folgt für hinreichend kleine t

$$a + tz \notin \Omega \qquad \Leftrightarrow \qquad f(a+tz) > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda > 0\,.$$

Falls außerdem $\|z\|_2 = 1$ gelten soll, ist also

$$\nu(a) = \frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|_2} \tag{4.9}$$

der eindeutig bestimmte Vektor, welcher (4.7) und (4.8) erfüllt. Da f stetig differenzierbar ist, ist ν stetig in a, und da a beliebig war, ist ν stetig auf $\partial\Omega$. □

Wir betrachten als Spezialfall das Normalenfeld an den Graphen einer Funktion. Sei dazu $x \in \mathbb{R}^n$ zerlegt in

$$x = (x', x_n)\,, \quad x' \in \mathbb{R}^{n-1}\,, \quad x_n \in \mathbb{R}\,, \tag{4.10}$$

und wir betrachten folgende Situation: $W \subset \mathbb{R}^{n-1}$ ist offen und beschränkt, $h \in C^1(W)$ mit $h(W) \subset I = (a,b) \subset \mathbb{R}$,

$$M = \operatorname{graph}(h) = \{(x', x_n) : \, x' \in W,\, x_n = h(x')\} \subset W \times I\,, \tag{4.11}$$

$$A = \{(x', x_n) : \, x' \in W\,,\, x_n \in I\,,\, x_n < h(x')\}\,. \tag{4.12}$$

Nach Konstruktion im Beweis von Satz 4.4 (siehe (4.9)) gilt für $x \in M$

$$\nu(x) = \frac{(-\nabla h(x'), 1)}{\|(-\nabla h(x'), 1)\|_2}\,. \tag{4.13}$$

Satz 4.5 (Partielle Integration im $\mathbb{R}^n$)
Es liege die Situation (4.10) – (4.13) vor. Dann gilt für alle $f \in C^1(W \times I)$ mit kompaktem Träger in $W \times I$

$$\int_A \partial_i f(x)\,dx = \int_M f(\xi)\nu_i(\xi)\,dS(\xi)\,, \quad 1 \leq i \leq n\,. \tag{4.14}$$

Beweis: Da f kompakten Träger hat, sind f und $\partial_i f$ stetig und beschränkt, also existieren alle Integrale, die im Folgenden auftreten.
Fall 1: $i = n$. Es ist (Fubini)

$$\begin{aligned}\int_A \partial_n f(x)\,dx &= \int_W \int_a^{h(x')} \partial_n f(x', x_n)\,dx_n\,dx' = \int_W f(x', h(x'))\,dx' \\ &= \int_W f(x', h(x'))\nu_n(x', h(x'))\sqrt{1 + \|\nabla h(x')\|_2^2}\,dx' \\ &= \int_M f(\xi)\nu_n(\xi)\,dS(\xi)\,,\end{aligned}$$

da $g(x') = 1+\|\nabla h(x')\|_2^2$ gilt für die Gramsche Determinante der Funktion $x' \mapsto (x', h(x'))$, siehe (3.27).
Fall 2: Sei $1 \le i \le n-1$. Die durch

$$F(x') = \int_a^{h(x')} f(x', x_n)\, dx_n$$

definierte Funktion $F : W \to \mathbb{R}$ hat kompakten Träger in W, also gilt (Übungsaufgabe)

$$0 = \int_W \partial_i F(x')\, dx' = \int_W \partial_i \left(\int_a^{h(x')} f(x', x_n)\, dx_n \right) dx' \,.$$

Es folgt weiter (unter Verwendung von Fubini und (4.13))

$$\begin{aligned}
0 &= \int_W \left[\int_a^{h(x')} \partial_i f(x', x_n)\, dx_n + f(x', h(x'))\partial_i h(x') \right] dx' \\
&= \int_W \int_a^{h(x')} \partial_i f(x', x_n)\, dx_n\, dx' + \int_W f(x', h(x'))\partial_i h(x')\, dx' \\
&= \int_A \partial_i f(x)\, dx - \int_W f(x', h(x'))\nu_i(x', h(x'))\sqrt{1 + \|\nabla h(x')\|_2^2}\, dx' \\
&= \int_A \partial_i f(x)\, dx - \int_M f(\xi)\nu_i(\xi)\, dS(\xi)\,,
\end{aligned}$$

□

Folgerung 4.6 *Satz 4.5 gilt auch, falls A auf der anderen Seite von M liegt, das heißt, falls*

$$A = \{(x', x_n) : \; x' \in W \,,\; x_n \in I \,,\; x_n > h(x')\}\,, \tag{4.15}$$

gilt. Die äußere Normale ist dann gegeben durch

$$\nu(x) = \frac{(\nabla h(x'), -1)}{\|(\nabla h(x'), -1)\|_2}\,. \tag{4.16}$$

Ebenso gilt Satz 4.5 auch, falls die Darstellung von M nach einer anderen Koordinate aufgelöst ist, also

$$M = \{(x_1, \dots, x_n) : (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in W \,,\; x_i = h(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)\} \tag{4.17}$$

und A, ν entsprechend.

Beweis: Entweder durch Modifikation des Beweises von Satz 4.6 oder durch Transformation auf die Situation des Satzes. □

Satz 4.7 (Gaußscher Integralsatz)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, Ω habe einen C^1-Rand. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $\overline{\Omega} \subset U$, sei $F : U \to \mathbb{R}^n$ ein C^1-Vektorfeld. Dann gilt

$$\int_\Omega \operatorname{div} F(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} \langle F(\xi), \nu(\xi) \rangle \, dS(\xi)\,. \tag{4.18}$$

Beweis: Für jedes $x \in \Omega$ wählen wir eine offene Menge $U(x)$ mit $x \in U(x) \subset \Omega$. Für jedes $x \in \partial\Omega$ betrachten wir zunächst gemäß Definition 4.1 eine lokale Darstellung

$$\partial\Omega \cap U' = \{f = 0\}, \quad \Omega \cap U' = \{f < 0\},$$

mit $f \in C^1(U')$ und $\nabla f \neq 0$ überall. Nach dem Satz über implizite Funktionen gibt es offene Mengen (die wir o.B.d.A. konvex wählen können) $W(x) \subset \mathbb{R}^{n-1}$, $I(x) \subset \mathbb{R}$ und $h_x : W(x) \to I(x)$, $h_x \in C^1(W(x))$ mit

$$\begin{aligned} U(x) \cap \partial\Omega &= \{(x', x_n) : x_n = h_x(x')\}, \\ U(x) \cap \Omega &= \{(x', x_n) : x_n < h_x(x')\}, \\ U(x) &= W(x) \times I(x), \end{aligned}$$

oder mit ">" statt "<" beziehungsweise aufgelöst nach x_i statt x_n. Gemäß Satz 3.4, angewendet auf $K = \Omega \cup \partial\Omega$, wählen wir endlich viele $U(x^j)_{1\leq j\leq N}$ und eine zugeordnete C^∞-Zerlegung der Eins $(\alpha_j)_{1\leq j\leq N}$. Wir numerieren so, dass $x^1, \ldots, x^M \in \partial\Omega$, $x^{M+1}, \ldots, x^N \in \Omega$. Es gilt nun

$$\begin{aligned} \int_\Omega \operatorname{div} F(x)\, dx &= \int_\Omega \sum_{k=1}^n \partial_k \left(\sum_{j=1}^N \alpha_j F_k \right)(x)\, dx \\ &= \int_\Omega \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^n \partial_k(\alpha_j F_k)(x)\, dx \\ &= \sum_{j=1}^N \int_\Omega \operatorname{div}(\alpha_j F)(x)\, dx, \end{aligned}$$

sowie

$$\int_{\partial\Omega} \langle F(\xi), \nu(\xi)\rangle\, dS(\xi) = \sum_{j=1}^N \int_{\partial\Omega} \langle \alpha_j(\xi) F(\xi), \nu(\xi)\rangle\, dS(\xi).$$

Es genügt daher, den Satz für $\alpha_j F$, $1 \leq j \leq N$, zu beweisen.
Fall 1: $j \leq M$. Wir wenden Satz 4.5 an mit

$$f = \alpha_j F_k, \quad A = \Omega \cap U(x^j), \quad M = \partial\Omega \cap U(x^j),$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \int_\Omega \operatorname{div}(\alpha_j F)(x)\, dx &= \sum_{k=1}^n \int_\Omega \partial_k(\alpha_j F_k)(x)\, dx = \sum_{k=1}^n \int_{\partial\Omega} \alpha_j(\xi) F_k(\xi) \nu_k(\xi)\, dS(\xi) \\ &= \int_{\partial\Omega} \langle \alpha_j(\xi) F(\xi), \nu(\xi)\rangle\, dS(\xi). \end{aligned}$$

Fall 2: $M < j \leq N$. Es ist $U(x^j) \subset \Omega$, also $\operatorname{supp}(\alpha_j) \subset \Omega$, also

$$\int_{\partial\Omega} \langle \alpha_j(\xi) F(\xi), \nu(\xi)\rangle\, dS(\xi) = 0,$$

und (Übungsaufgabe)

$$\int_\Omega \operatorname{div}(\alpha_j F)(x)\, dx = \sum_{k=1}^n \int_\Omega \partial_k(\alpha_j F_k)(x)\, dx = 0.$$

□

Satz 4.8 (1. Greensche Formel)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, Ω habe einen C^1-Rand. Seien $f \in C^1(U)$, $g \in C^2(U)$, wobei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen ist mit $\overline{\Omega} \subset U$. Dann gilt

$$\int_\Omega f(x)\Delta g(x)\,dx = -\int_\Omega \langle \nabla f(x), \nabla g(x)\rangle\ dx + \int_{\partial\Omega} f(\xi)\partial_\nu g(\xi)\,dS(\xi)\,, \tag{4.19}$$

wobei

$$\partial_\nu g(\xi) = \langle \nabla g(\xi), \nu(\xi)\rangle$$

die Richtungsableitung in Richtung der äußeren Normalen bezeichnet. ($\partial_\nu g$ heißt auch die Normalenableitung von g.)

Beweis: Sei $F : U \to \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$F(x) = f(x)\nabla g(x)\,,$$

dann ist

$$\langle F(\xi), \nu(\xi)\rangle = f(\xi)\partial_\nu g(\xi)\,,$$

und

$$\operatorname{div} F(x) = \langle \nabla f(x), \nabla g(x)\rangle + f(x)\operatorname{div}(\nabla g(x)) = \langle \nabla f(x), \nabla g(x)\rangle + f(x)\Delta g(x)\,.$$

Die Behauptung folgt nun aus Satz 4.7. □

Folgerung 4.9 (2. Greensche Formel)
Es liege die Situation aus Satz 4.8 vor. Dann gilt (setze $f = 1$)

$$\int_\Omega \Delta g(x)\,dx = \int_{\partial\Omega} \partial_\nu g(\xi)\,dS(\xi)\,. \tag{4.20}$$

Ist außerdem $f \in C^2(U)$, so gilt

$$\int_\Omega (f\Delta g - g\Delta f)(x)\,dx = \int_{\partial\Omega} (f\partial_\nu g - g\partial_\nu f)(\xi)\,dS(\xi)\,. \tag{4.21}$$

□

Wir können den Satz von Gauß heranziehen, um die Divergenz eines Vektorfeldes F zu interpretieren. Sei F in einer Umgebung eines Punktes $x \in \mathbb{R}^n$ stetig, sei $B(x;\varepsilon)$ die offene ε-Kugel um x. Der Ausdruck

$$\int_{\partial B(x;\varepsilon)} \langle F(\xi), \nu(\xi)\rangle\ dS(\xi)$$

gibt den Fluss von F (bzw. irgendeiner durch F beschriebenen Größe) durch den Rand von $B(x;\varepsilon)$ an, der Ausdruck

$$\frac{1}{\operatorname{vol}(B(x;\varepsilon))}\int_{\partial B(x;\varepsilon)} \langle F(\xi), \nu(\xi)\rangle\ dS(\xi) \tag{4.22}$$

denselben Fluss, bezogen auf das Volumen der Kugel.

Satz 4.10 (Divergenz als Quellstärke)
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F : U \to \mathbb{R}^n$ ein C^1-Vektorfeld. Dann gilt für alle $x \in U$

$$\operatorname{div} F(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\operatorname{vol}(B(x;\varepsilon))} \int_{\partial B(x;\varepsilon)} \langle F(\xi), \nu(\xi) \rangle \, dS(\xi) \,. \tag{4.23}$$

Beweis: Für $\varepsilon > 0$ mit $B(x;\varepsilon) \subset U$ gilt mit dem Satz von Gauß

$$\begin{aligned} &\left| \frac{1}{\operatorname{vol}(B(x;\varepsilon))} \int_{\partial B(x;\varepsilon)} \langle F(\xi), \nu(\xi) \rangle \, dS(\xi) - \operatorname{div} F(x) \right| \\ &\quad = \frac{1}{\operatorname{vol}(B(x;\varepsilon))} \left| \int_{B(x;\varepsilon)} \operatorname{div} F(y) - \operatorname{div} F(x) \, dy \right| \quad \leq \sup_{y \in B(x;\varepsilon)} \left| \operatorname{div} F(y) - \operatorname{div} F(x) \right| . \end{aligned}$$

Da $\operatorname{div} F$ stetig ist, folgt die Behauptung. □

5 Der Integralsatz von Stokes

Wir beschäftigen uns zunächst mit einer zweidimensionalen Situation. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen, beschränkt, mit einem C^1-Rand $\partial\Omega$. Wir nehmen an, es gebe eine stetig differenzierbare Parametrisierung $r : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, mit $r(a) = r(b)$, so dass $r : [a,b) \to \partial\Omega$ bijektiv ist und $r'(t) \neq 0$ gilt für alle $t \in [a,b]$.

Sei $\nu : \partial\Omega \to \mathbb{R}^2$ das zugehörige Normalenfeld, siehe Satz 4.4. Für $a \in \partial\Omega$, $a = r(t)$ ist

$$T_a(\partial\Omega) = \operatorname{span}\{r'(t)\} = \{\lambda r'(t) : \lambda \in \mathbb{R}\},$$

also

$$r'(t) \perp \nu(r(t)).$$

Durch die Parametrisierung r wird ein Durchlaufsinn für $\partial\Omega$ festgelegt. Wir sagen, dass $\partial\Omega$ von r im **mathematisch positiven Sinn** durchlaufen wird, falls

$$\det(\nu(r(t)) \mid r'(t)) > 0. \tag{5.1}$$

Das ist dann der Fall, wenn

$$\nu(r(t)) = \frac{1}{\|r'(t)\|_2} \begin{pmatrix} r_2'(t) \\ -r_1'(t) \end{pmatrix}, \quad r'(t) = \|r'(t)\|_2 \begin{pmatrix} -\nu_2(r(t)) \\ \nu_1(r(t)) \end{pmatrix}. \tag{5.2}$$

Anschaulich bedeutet das, dass $\partial\Omega$ entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen wird, und dass Ω immer "links von der Richtung $r'(t)$ liegt".

Satz 5.1 (Satz von Stokes im $\mathbb{R}^2$)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen und beschränkt, Ω habe einen C^1-Rand $\partial\Omega$, welcher von der Parametrisierung r im mathematisch positiven Sinn durchlaufen wird. Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen mit $\overline{\Omega} \subset U$, sei $F : U \to \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt

$$\int_r F(x) \cdot dx = \int_\Omega (\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1)(x)\, dx. \tag{5.3}$$

Beweis: Aus der Definition des Kurvenintegrals und aus (5.2) folgt

$$\begin{aligned}
\int_r F(x) \cdot dx &= \int_a^b \langle F(r(t)), r'(t) \rangle \, dt = \int_a^b \left\langle F(r(t)), \begin{pmatrix} -\nu_2(r(t)) \\ \nu_1(r(t)) \end{pmatrix} \right\rangle \|r'(t)\|_2 \, dt \\
&= \int_a^b \left\langle \begin{pmatrix} F_2(r(t)) \\ -F_1(r(t)) \end{pmatrix}, \nu(r(t)) \right\rangle \|r'(t)\|_2 \, dt = \int_{\partial\Omega} \left\langle \begin{pmatrix} F_2 \\ -F_1 \end{pmatrix}(\xi), \nu(\xi) \right\rangle dS(\xi) \\
&= \int_\Omega (\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1)(x)\, dx,
\end{aligned}$$

letzteres nach dem Satz von Gauß. $\square$

Für $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$F(x) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

gilt also

$$\int_{\partial\Omega} F(x)\cdot dx = \int_\Omega 1\,dx = \lambda^2(\Omega)\,,$$

also etwa für den Einheitskreis $\Omega = B_1(0;1)$, $r(t) = (\cos t, \sin t)$

$$\lambda^2(\Omega) = \int_0^{2\pi} \langle F(r(t)), r'(t)\rangle\; dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin^2(t) + \cos^2(t)\,dt = \pi\,.$$

Wir beschäftigen uns nun mit dem Satz von Stokes im $\mathbb{R}^3$. Dieser involviert die sogenannte **Rotation** eines Vektorfeldes $F: V \to \mathbb{R}^3$, $V \subset \mathbb{R}^3$ offen, definiert durch

$$\operatorname{rot} F : V \to \mathbb{R}^3\,, \tag{5.4}$$

$$(\operatorname{rot} F)(x) = (\partial_2 F_3(x) - \partial_3 F_2(x), \partial_3 F_1(x) - \partial_1 F_3(x), \partial_1 F_2(x) - \partial_2 F_1(x))\,. \tag{5.5}$$

Sei M eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^3$. Wir betrachten nur den Spezialfall, dass M durch eine einzige Karte (siehe Kapitel 1) beschrieben wird,

$$M = \Phi(T)\,, \quad \Phi : T \to \mathbb{R}^3\,, \quad T \subset \mathbb{R}^2 \text{ offen.} \tag{5.6}$$

Sei nun $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen und beschränkt, Ω habe einen C^1-Rand $\partial\Omega$, es gelte

$$\overline{\Omega} \subset T\,.$$

Wir betrachten

$$A = \Phi(\overline{\Omega}) \tag{5.7}$$

und definieren (nur für den Rest dieses Abschnitts)

$$\partial A = \Phi(\partial\Omega)\,. \tag{5.8}$$

Unter ∂A stellen wir uns den eindimensionalen Rand der zweidimensionalen Mannigfaltigkeit $\Phi(\Omega)$ vor. Sei nun $V \subset \mathbb{R}^3$ offen, $M \subset V$, $F : V \to \mathbb{R}^3$. Der **Satz von Stokes** besagt, dass unter geeigneten Voraussetzungen gilt

$$\int_{\partial A} F(x)\cdot dx = \int_A \langle (\operatorname{rot} F)(\xi), \nu(\xi)\rangle\; dS(\xi)\,. \tag{5.9}$$

Hierbei müssen der Umlaufsinn der Randkurve ∂A und die Normalenrichtung $\nu(\xi)$ zueinander passend gewählt werden. Das erreicht man, indem man erstens ∂A parametrisiert durch eine Kurve $\Phi \circ r : [a,b] \to A$, wobei $r : [a,b] \to T$ eine Kurve ist, welche $\partial\Omega$ im mathematisch positiven Sinn durchläuft, und zweitens das Vorzeichen der Normalen in einem Punkt $\xi = \Phi(u)$, $u \in \Omega$, festlegt durch ("$\times$" bezeichnet das Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$)

$$\nu(\Phi(u)) = \frac{1}{\|\partial_1\Phi(u) \times \partial_2\Phi(u)\|_2}\, \partial_1\Phi(u) \times \partial_2\Phi(u)\,. \tag{5.10}$$

Es ergibt sich dann, da $(\Phi \circ r)'(t) = J_\Phi(r(t))r'(t)$,

$$\int_{\partial A} F(x)\cdot dx = \int_{\Phi\circ r} F(x)\cdot dx = \int_a^b \langle F(\Phi(r(t))), J_\Phi(r(t))r'(t)\rangle\; dt \tag{5.11}$$

$$= \int_a^b \left\langle J_\Phi(r(t))^T F(\Phi(r(t))), r'(t)\right\rangle\; dt \tag{5.12}$$

$$= \int_r \tilde{F}(u)\cdot du\,, \tag{5.13}$$

wobei $\tilde{F} : T \to \mathbb{R}^2$ definiert ist durch

$$\tilde{F}(u) = J_\Phi(u)^T F(\Phi(u)) . \tag{5.14}$$

Wir können jetzt Satz 5.1 anwenden und erhalten

$$\int_r \tilde{F}(u) \cdot du = \int_\Omega (\partial_1 \tilde{F}_2 - \partial_2 \tilde{F}_1)(u)\, du . \tag{5.15}$$

Nach (5.14) hat $\tilde{F}$ die komponentenweise Form

$$\tilde{F}_i(u) = \langle \partial_i \Phi(u), F(\Phi(u)) \rangle , \quad i = 1, 2 . \tag{5.16}$$

Aus der Produktregel (für Skalarprodukte) und der Kettenregel folgt

$$\partial_1 \tilde{F}_2(u) = \langle \partial_1 \partial_2 \Phi(u), F(\Phi(u)) \rangle + \langle \partial_2 \Phi(u), J_F(\Phi(u)) \partial_1 \Phi(u) \rangle \tag{5.17}$$

$$\partial_2 \tilde{F}_1(u) = \langle \partial_2 \partial_1 \Phi(u), F(\Phi(u)) \rangle + \langle \partial_1 \Phi(u), J_F(\Phi(u)) \partial_2 \Phi(u) \rangle \tag{5.18}$$

Es folgt, falls Φ zweimal stetig differenzierbar ist,

$$(\partial_1 \tilde{F}_2 - \partial_2 \tilde{F}_1)(u) = \langle \partial_2 \Phi(u), J_F(\Phi(u)) \partial_1 \Phi(u) \rangle - \langle \partial_1 \Phi(u), J_F(\Phi(u)) \partial_2 \Phi(u) \rangle . \tag{5.19}$$

Die rechten Seite von (5.19) hat die Form

$$\langle y, Ax \rangle - \langle x, Ay \rangle , \quad x, y \in \mathbb{R}^3 , \; A \in \mathbb{R}^{3,3} .$$

Es gilt die algebraische Identität

$$\langle y, Ax \rangle - \langle x, Ay \rangle = \sum_{i,j=1}^{3} y_i a_{ij} x_j - \sum_{i,j=1}^{3} x_i a_{ij} y_j = \langle \begin{pmatrix} a_{32} - a_{23} \\ a_{13} - a_{31} \\ a_{21} - a_{12} \end{pmatrix} , x \times y \rangle$$

Anwendung auf (5.19) liefert mit (5.10)

$$(\partial_1 \tilde{F}_2 - \partial_2 \tilde{F}_1)(u) = \langle \begin{pmatrix} \partial_2 F_3 - \partial_3 F_2 \\ \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3 \\ \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 \end{pmatrix} (\Phi(u)) , \partial_1 \Phi(u) \times \partial_2 \Phi(u) \rangle \tag{5.20}$$

$$= \langle (\operatorname{rot} F)(\Phi(u)), \nu(\Phi(u)) \rangle \, \| \partial_1 \Phi(u) \times \partial_2 \Phi(u) \|_2 . \tag{5.21}$$

Es ist also

$$\int_\Omega (\partial_1 \tilde{F}_2 - \partial_2 \tilde{F}_1)(u)\, du = \int_\Omega \langle (\operatorname{rot} F)(\Phi(u)), \nu(\Phi(u)) \rangle \, \| \partial_1 \Phi(u) \times \partial_2 \Phi(u) \|_2 \, du . \tag{5.22}$$

Wir können das Integral auf der rechten Seite dieser Gleichung in ein Oberflächenintegral über M zurückführen. Sei dazu $B = (x \,|\, y) \in \mathbb{R}^{3,2}$ eine Matrix mit den Spalten x und y. Es gilt die algebraische Identität

$$\det(B^T B) = \det \begin{pmatrix} x^T x & x^T y \\ y^T x & y^T y \end{pmatrix} = \|x\|_2^2 \|y\|_2^2 - \langle x, y \rangle^2 = \|x \times y\|_2^2 . \tag{5.23}$$

Mit $x = \partial_1 \Phi(u)$, $y = \partial_2 \Phi(u)$ folgt also, dass für die Gramsche Determinante $g(u)$ der Karte Φ gilt

$$\sqrt{g(u)} = \sqrt{\det(J_\Phi(u)^T J_\Phi(u))} = \| \partial_1 \Phi(u) \times \partial_2 \Phi(u) \|_2 . \tag{5.24}$$

Die Gleichungen (5.11), (5.15), (5.22) und (5.24) zusammengenommen ergeben die Formel (5.9) des Satzes von Stokes. Wir haben also bewiesen:

Satz 5.2 (Satz von Stokes im $\mathbb{R}^3$)
Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit, welche durch eine globale Karte $\Phi : T \to M$ beschrieben wird, sei Φ zweimal stetig differenzierbar. Seien $A \subset M$ und $F : V \to \mathbb{R}^3$ wie in (5.6) – (5.9) beschrieben, sei der Umlaufsinn von ∂A und die Normalenrichtung $\nu(\xi)$ passend gewählt wie beschrieben. Dann gilt

$$\int_{\partial A} F(x) \cdot dx = \int_A \langle (\operatorname{rot} F)(\xi), \nu(\xi) \rangle \, dS(\xi) \,. \tag{5.25}$$

□

Aus dem Satz von Stokes erhalten wir eine Interpretation der Rotation eines Vektorfelds F. Sei F in der Umgebung eines Punktes $x \in \mathbb{R}^3$ stetig, sei $A_\varepsilon \subset \mathbb{R}^3$ eine zweidimensionale Kreisscheibe um x mit Radius ε und Normalenvektor ν, letzterer passend gewählt zum Umlaufsinn des Randes von A_ε. Der Ausdruck

$$\frac{1}{\pi\varepsilon^2} \int_{\partial A_\varepsilon} F(x) \cdot dx$$

beschreibt die Wirbelstärke von F, bezogen auf die Kreisfläche.

Satz 5.3 (Rotation als Wirbelstärke)
Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen und $F : U \to \mathbb{R}^3$ ein C^1-Vektorfeld. Ist A_ε eine Kreisscheibe wie oben beschrieben, so gilt

$$\langle \operatorname{rot} F(x), \nu \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi\varepsilon^2} \int_{\partial A_\varepsilon} F(y) \cdot dy \,. \tag{5.26}$$

Beweis: Es gilt mit dem Satz von Stokes

$$\begin{aligned}\left| \frac{1}{\pi\varepsilon^2} \int_{\partial A_\varepsilon} F(y) \cdot dy - \langle \operatorname{rot} F(x), \nu \rangle \right| &= \frac{1}{\pi\varepsilon^2} \left| \int_{A_\varepsilon} \langle \operatorname{rot} F(\xi) - \operatorname{rot} F(x), \nu \rangle \, dS(\xi) \right| \\ &\le \sup_{\xi \in A_\varepsilon} | \langle \operatorname{rot} F(\xi) - \operatorname{rot} F(x), \nu \rangle | \,.\end{aligned}$$

Da $\operatorname{rot} F$ stetig ist, folgt die Behauptung. □

Die Sätze von Gauß und Stokes stellen eine Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung ins Mehrdimensionale dar. Gemeinsam ist ihnen, dass ein Integral einer Funktion über den Rand einer Mannigfaltigkeit mit einem Integral eines Differentials dieser Funktion über die gesamte Mannigfaltigkeit in Verbindung gebracht wird. Einen einheitlichen allgemeinen begrifflichen Rahmen für diese Sätze liefert die Theorie der **Differentialformen**.

6 Harmonische Funktionen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wir betrachten den Laplace-Operator

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \partial_i^2 \,. \tag{6.1}$$

Wenden wir ihn auf eine Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ an, so ergibt sich

$$\Delta u(x) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i^2 u(x) = \operatorname{div}\left(\nabla u(x)\right), \quad x \in \Omega \,. \tag{6.2}$$

Definition 6.1 (Harmonische Funktion)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Funktion $u \in C^2(\Omega)$ heißt harmonisch auf (oder: in) Ω, falls

$$\Delta u(x) = 0\,, \quad \textit{für alle } x \in \Omega. \tag{6.3}$$

□

Eine wesentliche Eigenschaft einer harmonischen Funktion u ist die Mittelwerteigenschaft. Sie besagt: Ist B eine Kugel im $\mathbb{R}^n$ mit Mittelpunkt x, so ist der Funktionswert $u(x)$ gleich dem Mittelwert von u sowohl über B als auch über ∂B. Dafür brauchen wir einige Vorüberlegungen.

Definition 6.2 (Volumen, Fläche, Mittelwert)
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ messbar, $f : U \to \mathbb{R}$ integrierbar. Dann heißt

$$\frac{1}{\operatorname{vol}(U)} \int_U f(x)\, dx \tag{6.4}$$

der Mittelwert von f auf U. Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Mannigfaltigkeit und f über M integrierbar, so heißt

$$\frac{1}{\mathrm{vol_k(M)}} \int_M f(\xi)\, dS(\xi)\,. \tag{6.5}$$

der Mittelwert von f über M. □

Sei $B(x;r)$ die offene Kugel um x mit Radius r. Wir wollen die folgende Formel erhalten:

$$\int_{B(x;R)} f(y)\, dy = \int_0^R \int_{\partial B(x;r)} f(\xi)\, dS(\xi)\, dr\,. \tag{6.6}$$

Wir kürzen ab $B_r := B(0;r)$. Sei $\Phi : T \to \partial B_1$ eine Karte für ∂B_1, $T \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen. Wir definieren durch

$$\tilde{\Phi}(r,t) = r\Phi(t) = \Phi^r(t) \tag{6.7}$$

Funktionen $\tilde{\Phi} : (0,\infty) \times T \to \mathbb{R}^n$, $\Phi^r : T \to \partial B_r$. Dann ist Φ^r Karte für ∂B_r, und

$$J_{\tilde{\Phi}}(r,t) = \begin{pmatrix} \Phi(t) & rJ_\Phi(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi(t) & J_{\Phi^r}(t) \end{pmatrix}\,. \tag{6.8}$$

Der Tangentialraum im Punkt $\Phi(t) \in \partial B_1$ an ∂B_1 wird gemäß Satz 4.3 aufgespannt von den Spalten von $J_\Phi(t)$. Da der Normalenvektor im Punkt $\Phi(t)$ für die Sphäre ∂B_1 gleich $\Phi(t)$ ist, folgt für alle $r > 0$ und alle $t \in T$

$$\operatorname{rang} J_{\tilde{\Phi}}(r,t) = n\,, \quad J_\Phi(t)^T \Phi(t) = 0\,, \quad \|\Phi(t)\|_2 = 1\,. \tag{6.9}$$

Es folgt weiter

$$J_{\tilde{\Phi}}(r,t)^T J_{\tilde{\Phi}}(r,t) = \begin{pmatrix} \Phi(t)^T\Phi(t) & r\Phi(t)^T J_\Phi(t) \\ rJ_\Phi(t)^T\Phi(t) & r^2 J_\Phi(t)^T J_\Phi(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & J_{\Phi^r}(t)^T J_{\Phi^r}(t) \end{pmatrix}\,, \tag{6.10}$$

und also auch

$$|\det J_{\tilde{\Phi}}(r,t)| = \sqrt{\det(J_{\Phi^r}(t)^T J_{\Phi^r}(t))}\,. \tag{6.11}$$

Satz 6.3 *Sei $x \in \mathbb{R}^n$, $f : K(x;R) \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt*

$$\int_{B(x;R)} f(y)\,dy = \int_0^R \int_{\partial B(x;r)} f(\xi)\,dS(\xi)\,dr\,. \tag{6.12}$$

Bemerkung: Eine geeignete Integrierbarkeitsvoraussetzung an f genügt, wir setzen Stetigkeit der Einfachheit halber voraus.

Beweis: Nach Translation können wir $x = 0$ annehmen. Sei $\{\Phi_1, \Phi_2\}$ Atlas für ∂B_1, seien $\tilde{\Phi}_j$, Φ_j^r analog zu (6.7) definiert, sei $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ zugehörige Zerlegung der Eins auf ∂B_1. Wir setzen α_j fort auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ durch

$$\alpha_j(x) = \alpha_j\left(\frac{x}{\|x\|_2}\right)\,. \tag{6.13}$$

Wegen (6.7) und (6.9) ist $\tilde{\Phi}_j$ ein Diffeomorphismus von $U_j := (0,R) \times T_j$ nach $V_j := \tilde{\Phi}_j(U_j) \subset B_R$. Aus der Substitutionsregel (Satz 2.31) folgt für $j = 1,2$ mit Fubini und (6.11)

$$\begin{aligned}
\int_{B_R} (\alpha_j f)(y)\,dy &= \int_{V_j} (\alpha_j f)(y)\,dy \\
&= \int_{(0,R)\times T_j} (\alpha_j f)(\tilde{\Phi}_j(r,t))|\det J_{\tilde{\Phi}}(r,t)|\,d(r,t) \\
&= \int_0^R \int_{T_j} (\alpha_j f)(\Phi_j^r(t))\sqrt{\det(J_{\Phi_j^r}(t)^T J_{\Phi_j^r}(t))}\,dt\,dr \\
&= \int_0^R \int_{\partial B_r} (\alpha_j f)(\xi)\,dS(\xi)\,dr\,.
\end{aligned}$$

Durch Summation über j erhalten wir (6.12). □

Im Spezialfall $f = 1$ wird (6.12) zu

$$\operatorname{vol}(B(x;R)) = \int_0^R \operatorname{vol}_{n-1} \partial B(x;r)|\,dr\,. \tag{6.14}$$

Wir kürzen im Folgenden ab

$$|B(x;r)| = \mathrm{vol}\,(B(x;r))\,, \quad |\partial B(x;r)| = \mathrm{vol}_{n-1}\,\partial B(x;r)|\,.$$

Die Formel (6.14) können wir auch direkt erhalten aus den Beziehungen

$$|B(x;r)| = r^n|B_1|\,, \quad |\partial B(x;r)| = r^{n-1}|\partial B_1|\,, \tag{6.15}$$

sowie der Formel

$$|\partial B_1| = n|B_1| \qquad \left(= \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\right)\,, \tag{6.16}$$

hier steht Γ für die Gammafunktion.

Lemma 6.4 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $u \in C^2(\Omega)$, seien $x \in \Omega$, $R > 0$ mit $B(x;R) \subset \Omega$. Wir definieren*

$$\varphi(r) = \frac{1}{|\partial B(x;r)|} \int_{\partial B(x;r)} u(\xi)\,dS(\xi)\,, \quad 0 < r < R\,. \tag{6.17}$$

Dann ist φ differenzierbar auf $(0,R)$, und es gilt

$$\varphi'(r) = \frac{1}{|\partial B(x;r)|} \int_{B(x;r)} \Delta u(y)\,dy\,, \tag{6.18}$$

sowie

$$\lim_{r\downarrow 0} \varphi(r) = u(x)\,. \tag{6.19}$$

Beweis: Wir setzen $B_1 = B(0;1)$. Mit Satz (3.13) folgt

$$\int_{\partial B(x;r)} u(\xi)\,dS(\xi) = r^{n-1} \int_{\partial B_1} u(x+rz)\,dS(z)\,, \quad r \in (0,R)\,, \tag{6.20}$$

also wegen (6.15)

$$\varphi(r) = \frac{1}{|\partial B_1|} \int_{\partial B_1} u(x+rz)\,dS(z)\,. \tag{6.21}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\varphi'(r) &= \frac{1}{|\partial B_1|} \int_{\partial B_1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} u(x+rz)\,dS(z) = \frac{1}{|\partial B_1|} \int_{\partial B_1} \langle \nabla u(x+rz), z\rangle\,dS(z) \\ &= \frac{1}{|\partial B(x;r)|} \int_{\partial B(x;r)} \left\langle \nabla u(\xi), \frac{\xi - x}{r} \right\rangle dS(\xi)\,.\end{aligned}$$

Für die äußere Einheitsnormale an die Kugel $B(x;r)$ gilt

$$\nu(\xi) = \frac{\xi - x}{r}\,, \quad \xi \in \partial B(x;r)\,,$$

und aus dem Gaußschen Satz folgt

$$\begin{aligned}\int_{\partial B(x;r)} \left\langle \nabla u(\xi), \frac{\xi - x}{r} \right\rangle \, dS(\xi) &= \int_{\partial B(x;r)} \langle \nabla u(\xi), \nu(\xi) \rangle \, dS(\xi) = \int_{B(x;r)} \operatorname{div}(\nabla u(y)) \, dy \\ &= \int_{B(x;r)} \Delta u(y) \, dy \,.\end{aligned}$$

Damit ist (6.18) bewiesen. Es gilt weiter

$$\varphi(r) - u(x) = \frac{1}{|\partial B(x;r)|} \int_{\partial B(x;r)} u(\xi) - u(x) \, dS(\xi) \,, \tag{6.22}$$

also

$$|\varphi(r) - u(x)| \le \frac{1}{|\partial B(x;r)|} \int_{\partial B(x;r)} |u(\xi) - u(x)| \, dS(\xi) \le \sup_{\xi \in \partial B(x;r)} |u(\xi) - u(x)| \,. \tag{6.23}$$

Da u stetig ist in x, folgt (6.19). □

Definition 6.5 (Subharmonische Funktion, Superharmonische Funktion)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Funktion $u \in C^2(\Omega)$ heißt subharmonisch in Ω, falls gilt

$$-\Delta u(x) \le 0 \,, \quad \textit{für alle } x \in \Omega, \tag{6.24}$$

und superharmonisch in Ω, falls gilt

$$-\Delta u(x) \ge 0 \,, \quad \textit{für alle } x \in \Omega. \tag{6.25}$$

□

Folgerung 6.6 *Es liege die Situation von Lemma 6.4 vor. Ist u außerdem subharmonisch, so gilt*

$$u(x) \le \frac{1}{|\partial B(x;r)|} \int_{\partial B(x;r)} u(\xi) \, dS(\xi) \,, \quad 0 < r < R \,, \tag{6.26}$$

sowie

$$u(x) \le \frac{1}{|B(x;r)|} \int_{B(x;r)} u(y) \, dy \,, \quad 0 < r < R \,. \tag{6.27}$$

Beweis: Da $\varphi' \ge 0$, folgt (6.26) direkt aus (6.17) und (6.19). Aus (6.26) folgt nun

$$u(x)|B(x;r)| = u(x) \int_0^r |\partial B(x;\rho)| \, d\rho \le \int_0^r \int_{\partial B(x;\rho)} u(\xi) \, dS(\xi) \, d\rho = \int_{B(x;r)} u(y) \, dy$$

mit Satz 6.3 und Formel (6.14), also ist (6.27) gezeigt. □

Ist u superharmonisch (statt subharmonisch), so können wir Satz 6.4 und Folgerung 6.6 auf $-u$ anwenden und erhalten die umgekehrten Ungleichungen in (6.26) und (6.27). Daraus ergibt sich nun die Mittelwerteigenschaft.

Satz 6.7 (Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, u harmonisch in Ω. Dann gilt

$$u(x) = \frac{1}{|\partial B(x;r)|} \int_{\partial B(x;r)} u(\xi)\, dS(\xi) = \frac{1}{|B(x;r)|} \int_{B(x;r)} u(y)\, dy \tag{6.28}$$

für alle $x \in \Omega$ und alle $r > 0$ mit $K(x;r) = \overline{B(x;r)} \subset \Omega$. □

Für den Spezialfall $n = 2$ ergibt sich die erste Gleichung in (6.28) direkt aus dem Integralsatz von Cauchy (siehe Vorlesung Funktionentheorie).

Eine Umkehrung gilt ebenfalls.

Satz 6.8 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $u \in C^2(\Omega)$, und es gelte*

$$u(x) = \frac{1}{|\partial B(x;r)|} \int_{\partial B(x;r)} u(\xi)\, dS(\xi) \tag{6.29}$$

für alle $x \in \Omega$ und alle $r > 0$ mit $K(x;r) = \overline{B(x;r)} \subset \Omega$. Dann ist u harmonisch in Ω.

Beweis: Bezeichnen wir die rechte Seite von (6.29) wieder mit $\varphi(r)$, gilt $\varphi'(r) = 0$, da die linke Seite nicht von r abhängt. Wäre u nicht harmonisch, so gäbe es wegen der Stetigkeit von u eine Kugel $K(x;r) \subset \Omega$ mit $\Delta u \neq 0$ in $K(x;r)$. Aus der Formel (6.18) würde nun $\varphi'(r) \neq 0$ folgen, ein Widerspruch. □

Wir erinnern daran: Eine Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heißt Gebiet, wenn sie offen und zusammenhängend ist. Ergänzung: Ein metrischer Raum (X, d) heißt zusammenhängend, wenn $\emptyset$ und X die einzigen Teilmengen von X sind, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind.

Satz 6.9 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, sei $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ subharmonisch in Ω. Dann gilt*

$$\max_{y \in \overline{\Omega}} u(y) = \max_{y \in \partial\Omega} u(y)\,. \tag{6.30}$$

Falls es ein $x \in \Omega$ gibt mit

$$u(x) = \max_{y \in \overline{\Omega}} u(y)\,, \tag{6.31}$$

so ist u in Ω konstant.

Beweis: Da u sowohl auf $\overline{\Omega}$ als auch auf $\partial\Omega$ ein Maximum annimmt, folgt die erste Behauptung aus der zweiten. Es gelte nun (6.31). Wir setzen $M = u(x)$. Sei $r > 0$ so, dass $r < \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$. Dann gilt

$$M = u(x) \le \frac{1}{|B(x;r)|} \int_{B(x;r)} u(y)\, dy \le u(x) = M\,. \tag{6.32}$$

(Die erste Ungleichung folgt aus Satz 6.4, die zweite aus (6.31).) Aus (6.32) folgt nun, dass u in $B(x;r)$ konstant gleich M ist. Es folgt weiter, dass die Menge $A = \{y : y \in \Omega, u(y) = M\}$ offen ist in M; als Urbildmenge einer abgeschlossenen Menge ist A auch abgeschlossen in M. Wegen $x \in A$ ist $A \neq \emptyset$, und da Ω zusammenhängend ist, folgt $A = \Omega$. □

Folgerung 6.10 (Maximumprinzip für harmonische Funktionen)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *ein beschränktes Gebiet, sei* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *harmonisch in* Ω*. Dann gilt: Entweder ist* u *auf* Ω *konstant, oder es gilt*

$$\min_{y \in \partial\Omega} u(y) < u(x) < \max_{y \in \partial\Omega} u(y) \,, \quad \text{für alle } x \in \Omega. \tag{6.33}$$

Beweis: Anwendung von Satz 6.9 auf u und $-u$. □