Unilaterale Probleme *

Martin Brokate †

Inhaltsverzeichnis

*Vorlesungsskript, SS 2005

†Zentrum Mathematik, TU München

1 Variationsungleichungen, Konvexe Optimierung

Variationsungleichungen stehen in engem Zusammenhang mit der Minimierung von Funktionen auf konvexen Mengen.

Problem 1.1
Sei V Vektorraum. Wir betrachten

$$\min_{v \in K} J(v) \,, \tag{1.1}$$

wobei $J : V \to \mathbb{R}$ eine Abbildung und $K \subset V$ eine konvexe Menge ist. Ein $u \in K$ heißt Lösung von (1.1), falls $J(u) \leq J(v)$ gilt für alle $v \in K$. □

Definition 1.2 (Richtungsableitung)
Sei V Vektorraum, $J : V \to \mathbb{R}$, $u \in V$ und $h \in V$. Falls der Grenzwert

$$J'(u; h) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{J(u + th) - J(u)}{t} \tag{1.2}$$

existiert, so heißt er die Richtungsableitung von J in u in Richtung h. J heißt richtungsdifferenzierbar in u, falls $J'(u; h)$ existiert für alle $h \in V$.

Unmittelbar aus der Definition folgt, daß die Richtungsableitung positiv homogen ist,

$$J'(u; \lambda h) = \lambda J'(u; h) \,, \quad u, h \in V \,,\ \lambda \geq 0 \,. \tag{1.3}$$

Definition 1.3 (Zulässige Richtung)
Sei V Vektorraum, $K \subset V$, $u \in K$. Ein $h \in V$ heißt zulässige Richtung in u (bezüglich K), falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $[u, u + \varepsilon h] \subset K$. □

Wir erinnern an die Notation

$$[u, v] = \{tv + (1 - t)u : t \in [0, 1]\}$$

für die Verbindungsstrecke zwischen u und v.

Ist h zulässige Richtung in u, so ist auch th zulässige Richtung in u, für jedes $t \geq 0$. Ist $K \subset V$ konvex, so ist h eine zulässige Richtung in u genau dann, wenn $h = t(v - u)$ für ein $v \in K$ und ein $t \geq 0$.

Satz 1.4 *Sei V Vektorraum, $K \subset V$, $J : V \to \mathbb{R}$, $u \in V$, J richtungsdifferenzierbar in u. Ist u ein Minimum für J bezüglich K, so gilt*

$$J'(u; h) \geq 0 \tag{1.4}$$

für alle zulässigen Richtungen h.

Beweis: Ist h zulässige Richtung, so ist $J(u + th) - J(u) \geq 0$ für hinreichend kleines $t > 0$.
□

Eine Aussage der Form "$J'(u;h) \geq 0$ für alle zulässigen Richtungen h" ist ein typisches Beispiel für eine **Variationsungleichung**.

Ein wichtiger Spezialfall von Problem 1.1 liegt vor, wenn die Funktion J ebenfalls konvex ist. Man spricht dann von einem **konvexen Optimierungsproblem**.

Erinnerung: $J : K \to \mathbb{R}$ heißt **konvex** auf der konvexen Menge $K \subset V$, falls

$$J(\lambda v + (1-\lambda)u) \leq \lambda J(v) + (1-\lambda)J(u)$$

gilt für alle $u, v \in K$ und alle $\lambda \in [0,1]$. J heißt **strikt konvex** auf K, falls

$$J(\lambda v + (1-\lambda)u) < \lambda J(v) + (1-\lambda)J(u)$$

gilt für alle $u, v \in K$ und alle $\lambda \in (0,1)$.

Wir zeigen nun, dass konvexe Funktionen richtungsdifferenzierbar sind (siehe unten, Satz 1.7).

Lemma 1.5 *Sei $K \subset \mathbb{R}$ konvex, $\varphi : K \to \mathbb{R}$ konvex, $x \in K$. Dann wird durch*

$$d(t) = \frac{\varphi(x+t) - \varphi(x)}{t} \tag{1.5}$$

eine monoton wachsende Funktion $d : (0,\infty) \cap \operatorname{dom} d \to \mathbb{R}$ definiert, wobei $\operatorname{dom} d = \{t : t \in \mathbb{R},\, x + t \in K\}$. Ferner gilt $d(-t) \leq d(t)$ für jedes $t > 0$ mit $t, -t \in \operatorname{dom} d$.

Beweis: Für $0 < s < t$ ist

$$x + s = \frac{t-s}{t}x + \frac{s}{t}(x+t)\,, \tag{1.6}$$

also

$$\varphi(x+s) \leq \frac{t-s}{t}\varphi(x) + \frac{s}{t}\varphi(x+t)\,. \tag{1.7}$$

Subtraktion von $\varphi(x)$ und Division durch s liefert

$$d(s) = \frac{\varphi(x+s) - \varphi(x)}{s} \leq \frac{\varphi(x+t) - \varphi(x)}{t} = d(t)\,. \tag{1.8}$$

Es gilt weiter für $t > 0$

$$\varphi(x) \leq \frac{1}{2}\varphi(x-t) + \frac{1}{2}\varphi(x+t)\,, \tag{1.9}$$

also $\varphi(x) - \varphi(x-t) \leq \varphi(x+t) - \varphi(x)$ und damit

$$\frac{\varphi(x-t) - \varphi(x)}{-t} \leq \frac{\varphi(x+t) - \varphi(x)}{t}\,. \tag{1.10}$$

□

Lemma 1.6 *Sei $K \subset \mathbb{R}$ konvex, $\varphi : K \to \mathbb{R}$ strikt konvex, $x \in K$. Dann ist*

$$d(t) = \frac{\varphi(x+t) - \varphi(x)}{t} \tag{1.11}$$

streng monoton wachsend in $(0,\infty) \cap \operatorname{dom} d$.

Beweis: Wie der Beweis von Lemma 1.5, aber mit der strikten Ungleichung. □

Satz 1.7 *Sei V Vektorraum, $J : V \to \mathbb{R}$ konvex, $u \in V$. Dann existiert $J'(u;h)$ für jedes $h \in V$, und es gilt*

$$J'(u;h) = \inf_{t>0} \frac{J(u+th) - J(u)}{t}\,. \tag{1.12}$$

Ferner gelten

$$J'(u;h) \le J(u+h) - J(u)\,, \tag{1.13}$$

sowie

$$-J'(u;-h) \le J'(u;h)\,. \tag{1.14}$$

Beweis: Nach Lemma 1.5, angewendet auf $\varphi(t) = J(u+th)$, ist der Differenzenquotient

$$d_h(t) = \frac{J(u+th) - J(u)}{t} \tag{1.15}$$

monoton wachsend auf $(0, \infty)$ und dort nach unten beschränkt (z.B. durch $d(-t)$ für ein beliebiges $t > 0$), also existiert $\lim_{t\downarrow 0} d_h(t)$ und ist gleich $\inf_{t>0} d_h(t)$. Wegen $d_h(1) = J(u+h) - J(u)$ gilt (1.13), und (1.14) folgt aus

$$-\frac{J(u-th) - J(u)}{t} = d_h(-t) \le d_h(t)\,, \tag{1.16}$$

durch Grenzübergang $t \downarrow 0$. □

Satz 1.8 *Sei V Vektorraum, $K \subset V$ konvex, $J : K \to \mathbb{R}$ konvex. Dann ist die Menge aller Lösungen von Problem 1.1 konvex. Ist J strikt konvex, so gibt es höchstens eine Lösung. Ein $u \in K$ ist genau dann Lösung, wenn*

$$J'(u; v-u) \ge 0\,, \quad \textit{für alle } v \in K. \tag{1.17}$$

Beweis: Die Menge aller Lösungen ist gegeben durch die Menge

$$S = \{u : u \in K,\ J(u) \le \inf_{v\in K} J(v)\}\,, \tag{1.18}$$

welche konvex ist, da J und K konvex sind. Ist J strikt konvex, so ist

$$J\left(\frac{u+v}{2}\right) < \frac{1}{2}J(u) + \frac{1}{2}J(v)\,, \tag{1.19}$$

falls $u, v \in K$ und $u \ne v$, also ist S höchstens einelementig. Ist nun u Lösung und $v \in K$ beliebig, so ist $v - u$ zulässige Richtung in u und daher $J'(u; v-u) \ge 0$ nach Satz 1.4. Gilt umgekehrt (1.17) und ist $v \in K$, so ist $J(v) - J(u) \ge 0$ wegen (1.13). □

Satz 1.8 zeigt, dass Lösungen konvexer Optimierungsprobleme charakterisiert werden durch Variationsungleichungen. Ob überhaupt eine Lösung existiert, ist eine andere Frage. Falls V endlichdimensional ist, genügt es, dass K abgeschlossen und beschränkt ist, da daraus die Kompaktheit folgt und außerdem im Endlichdimensionalen jede konvexe Funktion stetig ist. Falls V unendlichdimensional ist, geht es nicht so einfach.

Problem 1.9 (Quadratisches Minimierungsproblem)
Sei V Vektorraum, sei $K \subset V$ konvex, sei $a : V \times V \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform, sei $F : V \to \mathbb{R}$ Linearform. Wir betrachten das Problem

$$\min_{v \in K} J(v) \,, \quad J(v) = \frac{1}{2} a(v,v) - F(v) \,. \tag{1.20}$$

□

Lemma 1.10 *In der Situation von Problem 1.9 gilt: Ist die Bilinearform a außerdem positiv semidefinit, das heißt, $a(v,v) \geq 0$ für alle $v \in V$, so ist J konvex. Ist a positiv definit, das heißt, $a(v,v) > 0$ für alle $v \in V$ mit $v \neq 0$, so ist J strikt konvex. In jedem Fall gilt*

$$J'(u;h) = a(u,h) - F(h) \,, \quad \text{für alle } h \in V \,. \tag{1.21}$$

Beweis: Seien $u, h \in V$ beliebig mit $h \neq 0$, wir definieren

$$J_{u,h} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,, \quad J_{u,h}(t) = J(u + th) \,.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} J_{u,h}(t) &= J(u) + \frac{1}{2}(a(u,th) + a(th,u) + a(th,th)) - F(th) \\ &= J(u) + t(a(u,h) - F(h)) + \frac{t^2}{2} a(h,h) \,. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Ist $a(h,h) \geq 0$, so ist die quadratische Funktion $J_{u,h}$ konvex. Da h beliebig ist, ist auch J konvex. Analog ergibt sich, dass J strikt konvex ist, falls $a(h,h) > 0$ gilt für alle $h \neq 0$. Aus (1.22) folgt weiter

$$J'(u;h) = J'_{u,h}(0) = a(u,h) - F(h) \,.$$

□

Satz 1.11 *Es liege die Situation von Problem 1.9 vor, sei die Bilinearform a außerdem positiv definit. Für $u \in K$ gilt dann*

$$J(u) = \min_{v \in K} J(v) \qquad \Leftrightarrow \qquad a(u, v-u) \geq F(v-u) \quad \forall v \in K \,. \tag{1.23}$$

Es gibt höchstens ein u mit dieser Eigenschaft.

Beweis: Folgt aus Satz 1.8 und Lemma 1.10. □

Folgerung 1.12 *In der Situation von Satz 1.11 gelte $K = z + W$, wobei $z \in V$ und W ein Unterraum von V ist. Dann gilt*

$$J(u) = \min_{v \in K} J(v) \qquad \Leftrightarrow \qquad a(u,h) = F(h) \quad \forall h \in W \,. \tag{1.24}$$

Beweis: Da $h \in W$ genau dann gilt, wenn $u + h \in K$, ist die rechte Seite in (1.23) äquivalent zu

$$a(u,h) \geq F(h) \quad \forall h \in W \,.$$

Da aus $h \in W$ auch $-h \in W$ folgt, können wir "$\geq$" durch "$=$" ersetzen. □

Insbesondere wird im Falle $K = V$ (Minimierung einer quadratischen Funktion ohne Nebenbedingungen) die Variationsungleichung zur Variationsgleichung

$$a(u,v) = F(v)\,, \quad \text{für alle } v \in V. \tag{1.25}$$

Die Voraussetzung "a symmetrisch" ist keine Einschränkung in Problem 1.9. Ist nämlich a eine beliebige Bilinearform, so wird durch

$$a_{\mathrm{sym}}(u,v) = \frac{1}{2}(a(u,v) + a(v,u))$$

eine symmetrische Bilinearform definiert mit der Eigenschaft

$$a(v,v) = a_{\mathrm{sym}}(v,v)\,, \quad \text{für alle } v \in V.$$

Problem 1.13 (Hindernisproblem: Modellsituation)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, seien $f : \Omega \to \mathbb{R}$ und $\psi : \Omega \to \mathbb{R}$ gegeben mit $\psi < 0$ auf $\partial\Omega$. Wir suchen eine Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $u = 0$ auf $\partial\Omega$, welche das Funktional

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v(x)|^2 \, dx - \int_\Omega f(x)v(x)\, dx \tag{1.26}$$

minimiert unter der Nebenbedingung

$$v(x) \geq \psi(x)\,, \quad \textit{für alle } x \in \Omega\,. \tag{1.27}$$

□

Problem 1.13 ergibt sich aus Problem 1.9, wenn wir setzen

$$a(u,v) = \int_\Omega \langle \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle \, dx\,, \quad F(v) = \int_\Omega f(x)v(x)\, dx\,, \quad K = \{v : v \geq \psi\}\,. \tag{1.28}$$

Die richtige Wahl des zugrundeliegenden Vektorraums V ist nicht offensichtlich; sie wird im Zusammenhang mit der Lösbarkeit des Problems noch besprochen werden. Die Variationsungleichung in Satz 1.11 wird zu

$$\int_\Omega \langle \nabla u(x), \nabla (v-u)(x) \rangle \, dx \geq \int_\Omega f(x)(v-u)(x)\, dx\,, \quad \text{für alle } v \in K. \tag{1.29}$$

Für den Fall ohne Hindernis $K = V$ erhalten wir gemäß (1.24) die Variationsgleichung

$$\int_\Omega \langle \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle \, dx = \int_\Omega f(x)v(x)\, dx\,, \quad \text{für alle } v \in V. \tag{1.30}$$

Partielle Integration ergibt (falls erlaubt), wenn wir $u = v = 0$ auf $\partial\Omega$ voraussetzen,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \langle \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle \, dx &= \sum_{i=1}^n \int_\Omega \partial_i u(x) \partial_i v(x) \, dx = \sum_{i=1}^n - \int_\Omega \partial_i^2 u(x) v(x) \, dx \\ &= - \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n \partial_i^2 u(x) \right) v(x) \, dx = - \int_\Omega \Delta u(x) v(x) \, dx \,. \end{aligned} \tag{1.31}$$

Die Variationsgleichung (1.30) wird also zu

$$\int_\Omega -\Delta u(x) v(x) \, dx = \int_\Omega f(x) v(x) \, dx \,, \quad \text{für alle } v \in V. \tag{1.32}$$

Umfasst V hinreichend viele "Testfunktionen" v, so lässt sich aus (1.32) schließen, dass

$$-\Delta u(x) = f(x) \,, \quad x \in \Omega \,, \tag{1.33}$$

die Randbedingung

$$u = 0 \,, \quad \text{auf } \partial\Omega, \tag{1.34}$$

setzen wir ohnehin voraus. Umgekehrt erhalten wir (1.30) aus (1.33), (1.34) durch Multiplikation mit v und Integration über Ω. Wir erkennen also, dass die Lösung des Randwertproblems (1.33), (1.34) in einem geeigneten (formal zu präzisierenden) Sinn äquivalent ist zur Minimierung des quadratischen Funktionals (1.26) auf V. Diese Äquivalenz heißt das **Dirichlet-Prinzip**.

Wir betrachten nun den Fall mit Hindernis $K = \{v : v \geq \psi\}$ und nehmen einmal an, dass es eine Lösung $u : \Omega \to \mathbb{R}$ der Variationsungleichung (1.29) gibt. Der Bereich Ω zerfällt in zwei Teile,

$$G = \{x : x \in \Omega \,, \, u(x) > \psi(x)\} \,, \quad I = \{x : x \in \Omega \,, \, u(x) = \psi(x)\} \,. \tag{1.35}$$

Auf der Koinzidenzmenge I fällt die Lösung mit dem Hindernis zusammen. Wir betrachten das Verhalten der Lösung auf G. Sei $x_0 \in G$, es gebe $\varepsilon, \eta > 0$ so dass $u(x) \geq \psi(x) + \varepsilon$ für alle x mit $|x - x_0| < \eta$. Sei nun $h \in C_0^\infty(B(x_0; \eta))$ beliebig. Dann gilt

$$v = u + th \in K \,,$$

falls $t > 0$ hinreichend klein ist, und es folgt aus (1.29)

$$\int_\Omega \langle \nabla u(x), \nabla (th)(x) \rangle \, dx \geq \int_\Omega f(x) th(x) \, dx \,.$$

Da h beliebig war, folgt

$$\int_{B(x_0;\eta)} \langle \nabla u(x), \nabla h(x) \rangle \, dx = \int_{B(x_0;\eta)} f(x) h(x) \, dx \,, \quad \text{für alle } h \in C_0^\infty(B(x_0; \eta)). \tag{1.36}$$

Da $h = 0$ auf $\partial B(x_0; \eta)$, ergibt sich wie im Gleichungsfall durch partielle Integration

$$\int_{B(x_0;\eta)} -\Delta u(x) h(x) \, dx = \int_{B(x_0;\eta)} f(x) h(x) \, dx \,, \quad \text{für alle } h \in C_0^\infty(B(x_0; \eta)), \tag{1.37}$$

und hieraus

$$-\Delta u(x) = f(x)\,, \quad \text{in } B(x_0;\eta).$$

Wir erwarten daher als Ergebnis

$$-\Delta u(x) = f(x)\,, \quad x \in G\,. \tag{1.38}$$

Die Bereiche G und I haben einen gemeinsamen Rand

$$\partial G \cap \partial I\,. \tag{1.39}$$

Er wird als **freier Rand** bezeichnet und ist zunächst wie auch G und I unbekannt. Sein Verlauf ist ein wesentliches Merkmal der Lösung, solche Probleme werden daher auch **Freie Randwertprobleme** genannt.

Man wird erwarten, dass in den Ableitungen der Lösung u gewisse Unstetigkeiten auftreten. Ist

$$-\Delta u = f \quad \text{in } G, \quad -\Delta u = -\Delta\psi \quad \text{in } I,$$

so wird Δu entlang des freien Randes unstetig sein, außer wenn dort $-\Delta\psi(x) = f(x)$ gilt (wozu es aber normalerweise keinen Grund gibt).

2 Variationsungleichungen: Existenz und Eindeutigkeit

Wir untersuchen als erstes die Frage der Eindeutigkeit.

Ist V ein Vektorraum, so bezeichnen wir mit

$$V^{\#} = \{F |\; F : V \to \mathbb{R} \text{ linear}\} \tag{2.1}$$

den **algebraischen** Dualraum von V.

Problem 2.1
Sei V Vektorraum, $K \subset V$, $A : V \to V^{\#}$, $F \in V^{\#}$. Gesucht ist ein u mit

$$u \in K\,, \tag{2.2}$$
$$(Au)(v-u) \geq F(v-u)\,, \quad \textit{für alle } v \in K. \tag{2.3}$$

□

Im Fall $K = V$ ist (2.3) äquivalent zur Gleichung

$$Au = F\,. \tag{2.4}$$

Ist $V = \mathbb{R}^n$ und identifizieren wir $V^{\#}$ mit $\mathbb{R}^n$, so stellt (2.4) ein Gleichungssystem von n Gleichungen mit n Unbekannten dar.

Definition 2.2 (Monotoner Operator)
Sei V Vektorraum. Eine Abbildung (Operator) $A : V \to V^{\#}$ heißt monoton, falls

$$(Av - Aw)(v-w) \geq 0\,, \quad \textit{für alle } v, w \in V. \tag{2.5}$$

A heißt strikt monoton, falls

$$(Av - Aw)(v-w) > 0\,, \quad \textit{für alle } v, w \in V \textit{ mit } v \neq w. \tag{2.6}$$

□

Falls A linear ist, sind (2.5), (2.6) äquivalent zu

$$(Av)(v) \geq 0 \quad \text{für alle } v \in V; \quad (Av)(v) > 0 \quad \text{für alle } v \in V \text{ mit } v \neq 0. \tag{2.7}$$

Strikte Monotonie impliziert Eindeutigkeit.

Satz 2.3 *Sei V Vektorraum. Ist $A : V \to V^{\#}$ strikt monoton, so hat Problem 2.1 höchstens eine Lösung.*

Beweis: Seien u_1, u_2 Lösungen von Problem 2.1. Dann gilt

$$(Au_1)(u_2 - u_1) \geq F(u_2 - u_1)\,,$$
$$(Au_2)(u_1 - u_2) \geq F(u_1 - u_2)\,.$$

Addition führt auf

$$(Au_1 - Au_2)(u_2 - u_1) \geq 0\,.$$

Wäre $u_1 \neq u_2$, so wäre $(Au_1 - Au_2)(u_2 - u_1) < 0$. Also folgt $u_1 = u_2$. □

Wir untersuchen nun die Abhängigkeit der Lösung von der rechten Seite F. Ist $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, so bezeichnen wir mit

$$V^* = \{F|\ F : V \to \mathbb{R} \text{ linear und stetig}\} \tag{2.8}$$

den **Dualraum** von V im Sinne der Funktionalanalysis.

Problem 2.4
Sei V normierter Raum, $K \subset V$, $A : V \to V^*$, $F \in V^*$. Gesucht ist ein u mit

$$u \in K\,, \tag{2.9}$$

$$(Au)(v - u) \geq F(v - u)\,, \quad \textit{für alle } v \in K. \tag{2.10}$$

□

Satz 2.5 *Sei V normierter Raum, es gebe ein $c_a > 0$ mit*

$$(Av - Aw)(v - w) \geq c_a \|v - w\|^2\,, \quad \textit{für alle } v, w \in V. \tag{2.11}$$

Sind u_1, u_2 Lösungen von Problem 2.4 zu den rechten Seiten F_1, F_2, so gilt

$$\|u_1 - u_2\| \leq \frac{1}{c_a}\|F_1 - F_2\|\,. \tag{2.12}$$

Beweis: Wie im Beweis von Satz 2.3 führt

$$\begin{aligned} (Au_1)(u_2 - u_1) &\geq F_1(u_2 - u_1)\,,\\ (Au_2)(u_1 - u_2) &\geq F_2(u_1 - u_2)\,. \end{aligned}$$

durch Addition auf

$$(Au_1 - Au_2)(u_2 - u_1) \geq (F_1 - F_2)(u_2 - u_1)\,.$$

Aus (2.11) folgt weiter

$$\begin{aligned} 0 &\leq c_a\|u_1 - u_2\|_V^2 \leq (Au_1 - Au_2)(u_1 - u_2) \leq (F_1 - F_2)(u_1 - u_2)\\ &\leq \|F_1 - F_2\|_{V^*}\|u_1 - u_2\|_V\,, \end{aligned}$$

und hieraus die Behauptung. □

Problem 2.6
Sei V normierter Raum, $K \subset V$, $a : V \times V \to \mathbb{R}$ Bilinearform, $F \in V^*$. Gesucht ist ein u mit

$$u \in K\,, \tag{2.13}$$

$$a(u, v - u) \geq F(v - u)\,, \quad \textit{für alle } v \in K. \tag{2.14}$$

□

Definition 2.7 (V-Elliptizität, Stetigkeit)
Sei V normierter Raum. Eine Bilinearform $a : V \times V \to \mathbb{R}$ heißt V-elliptisch, falls es ein $c_a > 0$ gibt mit

$$a(v, v) \geq c_a \|v\|^2 \,, \quad \text{für alle } v \in V. \tag{2.15}$$

Die Bilinearform a heißt stetig, falls es ein $C_a > 0$ gibt mit

$$|a(v, w)| \leq C_a \|v\| \, \|w\| \,, \quad \text{für alle } v, w \in V. \tag{2.16}$$

□

Lemma 2.8 *Sei V normierter Raum, $a : V \times V \to \mathbb{R}$ Bilinearform. Ist a stetig, so wird durch*

$$(Av)(w) = a(v, w) \tag{2.17}$$

eine lineare stetige Abbildung $A : V \to V^*$ mit $\|A\| \leq C_a$ definiert.

Beweis: Für $v \in V$ wird durch $w \mapsto a(v, w)$ eine lineare Abbildung definiert, welche wegen (2.16) stetig ist mit

$$\|Av\|_{V^*} \leq C_a \|v\|_V \,. \tag{2.18}$$

Die Abbildung $A : V \to V^*$ ist linear und wegen (2.18) stetig mit $\|A\| \leq C_a$. □

Satz 2.9 *Sei V normierter Raum, $a : V \times V \to \mathbb{R}$ Bilinearform. Ist a stetig und V-elliptisch, so hat Problem 2.6 höchstens eine Lösung. Sind u_1, u_2 Lösungen von Problem 2.6 zu den rechten Seiten F_1, F_2, so gilt*

$$\|u_1 - u_2\| \leq \frac{1}{c_a} \|F_1 - F_2\| \,. \tag{2.19}$$

Beweis: Folgt unmittelbar aus Lemma 2.8 und Satz 2.5, da $(Av - Aw)(v - w) = a(v - w, v - w)$ für alle $v, w \in V$. □

Wir beschäftigen uns nun mit der Existenz.

Problem 2.10
Sei V Hilbertraum, $K \subset V$ konvex, abgeschlossen und nichtleer, $a : V \times V \to \mathbb{R}$ Bilinearform, $F \in V^*$. Gesucht ist ein u mit

$$u \in K \,, \tag{2.20}$$

$$a(u, v - u) \geq F(v - u) \,, \quad \text{für alle } v \in K. \tag{2.21}$$

□

Es wird sich herausstellen, dass Stetigkeit und V-Elliptizität der Bilinearform a hinreichend sind für die Existenz einer Lösung.

Für abgeschlossene konvexe Mengen im Hilbertraum gilt der Projektionssatz.

Satz 2.11 (Projektionssatz im Hilbertraum)
Sei V Hilbertraum, $K \subset V$ abgeschlossen und konvex, $K \neq \emptyset$. Dann gibt es zu jedem $f \in V$ genau ein $u \in K$, so dass

$$\|f - u\| = \min_{v \in K} \|f - v\| , \tag{2.22}$$

und es gilt

$$\langle f - u, v - u \rangle \leq 0 \, , \quad \textit{für alle } v \in K. \tag{2.23}$$

Wir schreiben

$$u = p_K(f) \, . \tag{2.24}$$

Beweis: Siehe Funktionalanalysis. □

Die Situation des Projektionssatzes stellt einen Spezialfall von Problem 2.10 dar. Wir wählen als Bilinearform a das Skalarprodukt von V,

$$a(v, w) = \langle v, w \rangle \ . \tag{2.25}$$

Sei außerdem $R : V \to V^*$ die Riesz-Abbildung, definiert durch

$$(Rf)(v) = \langle f, v \rangle \ , \quad f, v \in V \, . \tag{2.26}$$

Der Satz von Riesz besagt, dass $R : V \to V^*$ bijektiv ist. Da $\|Rf\|_{V^*} = \|f\|_V$, sind R und R^{-1} stetig mit $\|R\| = \|R^{-1}\| = 1$.

Für $F = Rf$ ist $u = p_K(f)$ wegen (2.23) nichts anderes als die Lösung von

$$u \in K \, , \tag{2.27}$$

$$\langle u, v - u \rangle \geq F(v - u) \, , \quad \text{für alle } v \in K. \tag{2.28}$$

Die zugehörige quadratische Funktion ist

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - F(v) = \frac{1}{2}\|v\|^2 - \langle f, v \rangle = \frac{1}{2}\|v - f\|^2 + \frac{1}{2}\|f\|^2 \, .$$

Die Minimierung von J ist äquivalent zur Minimierung in (2.22).

Für die Bilinearform a gilt $c_a = C_a = 1$ wegen (2.25), also folgt aus Satz 2.9

$$\|p_K(f_1) - p_K(f_2)\| \leq \|Rf_1 - Rf_2\| = \|f_1 - f_2\| \, , \tag{2.29}$$

das heißt, die Projektion p_K ist Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante 1.

Den Fall einer beliebigen Bilinearform können wir wie folgt auf den Spezialfall (Projektion im Hilbertraum) zurückführen. Sei $u \in K$. Die Ungleichung

$$a(u, v - u) \geq F(v - u) \, , \quad \text{für alle } v \in K, \tag{2.30}$$

ist wie in Lemma 2.8 beschrieben äquivalent zu

$$(Au - F)(v - u) \geq 0 \, , \quad \text{für alle } v \in K, \tag{2.31}$$

also mit der Riesz-Dualität auch äquivalent zu

$$\left\langle R^{-1}(Au - F), v - u \right\rangle \geq 0 \,, \quad \text{für alle } v \in K, \tag{2.32}$$

und schließlich, für beliebiges $\theta > 0$, äquivalent zu

$$\left\langle [u - \theta R^{-1}(Au - F)] - u, v - u \right\rangle \geq 0 \,, \quad \text{für alle } v \in K. \tag{2.33}$$

Die Variationsungleichung (2.33) bedeutet aber nichts anderes als

$$u = p_K(u - \theta R^{-1}(Au - F)) \,. \tag{2.34}$$

Bei (2.34) handelt es sich um eine Fixpunktgleichung.

Satz 2.12 (Existenz und Eindeutigkeit)
Sei V Hilbertraum, $a : V \times V \to \mathbb{R}$ Bilinearform. Ist a stetig und V-elliptisch, so hat Problem 2.10 genau eine Lösung. Sind u_1, u_2 Lösungen von Problem 2.10 zu den rechten Seiten F_1, F_2, so gilt

$$\|u_1 - u_2\| \leq \frac{1}{c_a} \|F_1 - F_2\| \,. \tag{2.35}$$

Beweis: Wir wenden den Banachschen Fixpunktsatz auf (2.34) an. Für $\theta > 0$ definieren wir $T_\theta : V \to V$ durch

$$T_\theta(v) = p_K(v - \theta R^{-1}(Av - F)) \,.$$

Für beliebiges $v, w \in V$ gilt (mit den Konstanten c_a und C_A aus Definition 2.7)

$$\begin{aligned}
\|T_\theta(v) - T_\theta(w)\|^2 &\leq \|(v - w) - \theta R^{-1}(Av - Aw)\|^2 \\
&= \|v - w\|^2 - 2\theta \left\langle R^{-1}(Av - Aw), v - w \right\rangle + \theta^2 \|R^{-1}(Av - Aw)\|^2 \\
&= \|v - w\|^2 - 2\theta (Av - Aw)(v - w) + \theta^2 \|Av - Aw\|^2 \\
&\leq \|v - w\|^2 - 2\theta c_a \|v - w\|^2 + \theta^2 C_A^2 \|v - w\|^2 \\
&= (1 - 2c_a\theta + C_A^2\theta^2) \|v - w\|^2 \,,
\end{aligned}$$

also ist T_θ eine Kontraktion, falls $\theta > 0$ hinreichend klein ist. Die Gleichung (2.34) hat also eine eindeutige Lösung $u \in V$, welche in K liegt, da $p_K(V) = K$. □

Hervorzuheben ist, dass in Problem 2.10 und Satz 2.12 auch **nicht symmetrische** Bilinearformen a erfasst werden, also auch Fälle, in denen die Variationsungleichung nicht aus einem Optimierungsproblem gewonnen wird.

Im symmetrischen Fall lässt sich ein Existenzsatz für die Variationsungleichung auch aus einem Existenzsatz für das entsprechende Minimierungsproblem herleiten.

Problem 2.13
Sei V Hilbertraum, $K \subset V$ konvex und abgeschlossen, $K \neq \emptyset$, sei $J : V \to \mathbb{R}$ konvex. Gesucht ist ein $u \in K$ mit

$$J(u) = \min_{v \in K} J(v) \,. \tag{2.36}$$

□

In der Funktionalanalysis lässt sich der folgende Satz beweisen.

Satz 2.14 *Sei V Hilbertraum, $J : V \to \mathbb{R}$ konvex und stetig. sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in V. Dann gilt:*

$$u_n \rightharpoonup u \qquad \Rightarrow \qquad J(u) \le \liminf_{n\to\infty} J(u_n)\,. \tag{2.37}$$

□

In (2.37) bezeichnet $u_n \rightharpoonup u$ die **schwache Konvergenz** in V, welche im Hilbertraum äquivalent ist zu

$$\langle f, u_n \rangle \to \langle f, u \rangle\ , \quad \text{für alle } f \in V. \tag{2.38}$$

Eine Funktion J mit der Eigenschaft (2.37) heißt **schwach von unten folgenhalbstetig**.

Satz 2.15 *Sei V Hilbertraum, $J : V \to \mathbb{R}$ konvex, stetig und koerziv, das heißt,*

$$\lim_{\|v\|\to\infty} J(v) = \infty\,. \tag{2.39}$$

Dann hat Problem 2.13 eine Lösung $u \in K$.

Beweis: Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Minimalfolge für Problem 2.13, das heißt, $u_n \in K$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $J(u_n)$ ist monoton fallend und

$$J(u_n) \to \inf_{v\in K} J(v) =: \alpha\,, \quad \alpha \in [-\infty, \infty)\,. \tag{2.40}$$

Aus der Koerzivität (2.39) folgt, dass $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist. Da im Hilbertraum jede beschränkte Folge eine schwach konvergente Teilfolge hat, gibt es ein $u \in V$ und eine Teilfolge $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$u_{n_k} \rightharpoonup u\,, \quad \text{für } k \to \infty. \tag{2.41}$$

Da im Hilbertraum jede abgeschlossene Menge K auch schwach abgeschlossen ist, folgt $u \in K$. Aus Satz 2.14 folgt weiter

$$J(u) \le \liminf_{k\to\infty} J(u_{n_k}) = \alpha = \inf_{v\in K} J(v)\,, \tag{2.42}$$

also ist $\alpha > -\infty$ und $J(u) = \alpha$. □

Ist nun a eine symmetrische, V-elliptische und stetige Bilinearform auf V, so können wir die Existenz einer Lösung von Problem 2.10 auch erhalten, indem wir Satz 2.15 auf die quadratische Funktion

$$J(u) = \frac{1}{2}a(u,u) - F(u) \tag{2.43}$$

anwenden. (Aus der V-Elliptizität von a folgt, dass J koerziv ist.)

3 Das Hindernisproblem: Eindeutige Lösbarkeit

Wir behandeln das Hindernisproblem aus Kapitel 1 in einer geringfügig allgemeineren Version. Statt $-\Delta u = f$ betrachten wir $Lu = f$ mit einem Operator L der Form

$$Lu = -\mathrm{div}\,(A(x)\nabla u) = -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_i(a_{ij}(x)\partial_j u)\,, \tag{3.1}$$

wobei $A : \Omega \to \mathbb{R}^{(n,n)}$ eine ortsabhängige Matrix von Koeffizienten darstellt. Die zugehörige Bilinearform ist

$$a(u,v) = \int_\Omega \langle A(x)\nabla u(x), \nabla v(x)\rangle \; dx\,. \tag{3.2}$$

Voraussetzung 3.1 *Sei $A \in L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^{(n,n)})$, es gebe ein $c_a > 0$ mit*

$$\xi^T A(x)\xi = \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i a_{ij}(x)\xi_j \geq c_a|\xi|^2\,, \quad \textit{für alle } \xi \in \mathbb{R}^n,\ x \in \Omega. \tag{3.3}$$

□

Hat der Differentialoperator L die Eigenschaft (3.3), so heißt er **gleichmäßig elliptisch**. Es gilt dann

$$\begin{aligned} a(v,v) &= \int_\Omega \langle A(x)\nabla v(x), \nabla v(x)\rangle \; dx = \int_\Omega \nabla v(x)^T A(x)\nabla v(x)\,dx \\ &\geq \int_\Omega c_a|\nabla v(x)|^2\,dx = c_a\|\nabla v\|_2^2\,, \end{aligned} \tag{3.4}$$

falls $\nabla v \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^n)$ ist. Aus der Beschränktheit von A folgt analog, dass

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla v(x)^T A(x)\nabla u(x)\,dx \leq \int_\Omega M|\nabla u(x)|\,|\nabla v(x)|\,dx \leq M\|\nabla u\|_2\,\|\nabla v\|_2\,, \tag{3.5}$$

mit einer von u und v unabhängigen Konstanten M. (In der letzten Abschätzung wurde die Höldersche Ungleichung verwendet.) Die Bilinearform a wird also V-elliptisch und stetig, wenn wir

$$\|v\| = \|\nabla v\|_2 = \int_\Omega |\nabla v(x)|^2\,dx \tag{3.6}$$

als Norm wählen. Der zugehörige Hilbertraum von Funktionen auf Ω ist der Sobolevraum

$$V = H_0^1(\Omega)\,. \tag{3.7}$$

Wir stellen die Definition und einige grundlegende Eigenschaften zusammen. Dafür wird der Begriff der **schwachen Ableitung** benötigt. Sei zunächst $v \in C^1(\Omega)$, dann gilt mit partieller Integration

$$\int_\Omega \partial_i v(x)\varphi(x)\,dx = -\int_\Omega v(x)\partial_i\varphi(x)\,dx\,, \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),\ 1 \leq i \leq n, \tag{3.8}$$

wobei

$$\mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega) \tag{3.9}$$

die übliche Bezeichnung für Raum der hier als **Testfunktionen** verwendeten unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger ist.

Definition 3.2 (Schwache Ableitung)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Ein $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ heißt schwache i-te partielle Ableitung von f in Ω, falls

$$\int_\Omega g(x)\varphi(x)\,dx = -\int_\Omega f(x)\partial_i\varphi(x)\,dx\,, \quad \textit{für alle } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{3.10}$$

Wir schreiben wie bisher

$$g = \partial_i f\,. \tag{3.11}$$

□

Falls eine schwache partielle Ableitung existiert, so ist sie eindeutig bestimmt (siehe unten, Folgerung 3.11).

Ist $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ ein Multiindex, so heißt g die schwache α-te Ableitung von f, wenn

$$\int_\Omega gx)\varphi(x)\,dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega f(x)\partial^\alpha\varphi(x)\,dx\,, \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{3.12}$$

Definition 3.3 (Sobolev-Raum)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Für $k \in \mathbb{N}$, $1 \le p \le \infty$ definieren wir

$$W^{k,p}(\Omega) = \{v : v \in L^p(\Omega),\, \partial^\alpha v \in L^p(\Omega) \textit{ für alle } |\alpha| \le k\}\,. \tag{3.13}$$

□

Für $k = 0$ bedeutet (3.13)

$$W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)\,.$$

Ist $n > 1$ und $u \in W^{1,p}(\Omega)$, so ist es möglich, dass u weder stetig noch beschränkt ist, beispielsweise (Ω = Einheitskugel)

$$u(x) = |x|^{-\beta}\,, \quad \beta < \frac{n}{p} - 1\,.$$

Satz 3.4 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $1 \le p \le \infty$, dann ist $W^{k,p}(\Omega)$ ein Banachraum mit der Norm*

$$\|v\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\le k}\|\partial^\alpha v\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{|\alpha|\le k}\int_\Omega |\partial^\alpha v(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \le p < \infty\,, \tag{3.14}$$

$$\|v\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\le k}\|\partial^\alpha v\|_\infty\,, \quad p = \infty\,. \tag{3.15}$$

□

Funktionen in Sobolevräumen lassen sich durch C^∞-Funktionen approximieren. Dadurch ist es möglich, Aussagen und Formeln für Funktionen in Sobolevräumen durch Grenzübergang in den entsprechenden Aussagen für C^∞-Funktionen zu erhalten. Das geht umso besser, je "besser" die Norm ist, in der eine solche Approximation möglich ist.

Man erhält approximierende glatte Funktionen durch Faltung mit geeigneten Glättungsfunktionen. Wir definieren

$$\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad \psi(t) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{t}\right)\,, & t > 0\,, \\ 0\,, & t \le 0\,, \end{cases} \tag{3.16}$$

$$\tilde{\psi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad \tilde{\psi}(r) = \psi(1 - r^2)\,, \tag{3.17}$$

$$\eta_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\,, \quad \eta_1(x) = \alpha\tilde{\psi}(|x|)\,, \tag{3.18}$$

wobei $\alpha > 0$ so gewählt ist, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta_1(x)\, dx = 1\,. \tag{3.19}$$

Wir definieren nun für $\varepsilon > 0$ die "Standardglättungsfunktion"

$$\eta_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\,, \quad \eta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\eta_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\,. \tag{3.20}$$

Die Funktionen η_ε sind offensichtlich radialsymmetrisch (d.h. sie hängen nur von $|x|$ ab), und es gilt (siehe Analysis 3)

$$\eta_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)\,, \quad \mathrm{supp}\,(\eta_\varepsilon) = K(0;\varepsilon)\,, \quad \eta_\varepsilon \ge 0\,, \quad \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x)\, dx = 1\,. \tag{3.21}$$

Dort haben wir auch gezeigt: Ist $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ und setzen wir $f^\varepsilon = f * \eta_\varepsilon$, so gilt

$$f^\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\,, \quad f^\varepsilon \to f \quad \text{gleichmäßig für } \varepsilon \to 0. \tag{3.22}$$

Wir wollen Faltungen mit der Glättungsfunktion auch für solche Funktionen betrachten, die nicht auf ganz $\mathbb{R}^n$ definiert sind. Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, so setzen wir

$$U_\varepsilon = \{x : x \in \mathbb{R}^n,\, \mathrm{dist}\,(x, U) < \varepsilon\}\,. \tag{3.23}$$

Für $f \in L^1(U_\varepsilon)$ setzen wir $f = 0$ außerhalb von U_ε, dann gilt

$$f^\varepsilon(y) = (f*\eta_\varepsilon)(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\eta_\varepsilon(y-x)\, dx = \int_{U_\varepsilon} f(x)\eta_\varepsilon(y-x)\, dx\,, \quad \text{für alle } y \in U. \tag{3.24}$$

Definition 3.5
Seien $\Omega, U \subset \mathbb{R}^n$ offen. U heißt kompakt in Ω enthalten, falls $\overline{U}$ kompakt ist und $\overline{U} \subset \Omega$ gilt. Wir schreiben

$$U \subset\subset \Omega\,. \tag{3.25}$$

□

Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $U \subset\subset \Omega$, so ist

$$\mathrm{dist}\,(U, \partial\Omega) = \inf_{x \in U, y \in \partial\Omega} |x - y| > 0\,. \tag{3.26}$$

(Für $\Omega = \mathbb{R}^n$ setzen wir $\mathrm{dist}\,(U, \partial\Omega) = \infty$.)

Lemma 3.6 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, $U \subset\subset \Omega$, $\varepsilon < \operatorname{dist}(U, \partial\Omega)$, sei $f^\varepsilon = f * \eta_\varepsilon$. Dann gilt*

$$f^\varepsilon \in C^\infty(U) \,, \quad \|f^\varepsilon\|_{L^p(U)} \le \|f\|_{L^p(\Omega)} \,, \quad 1 \le p \le \infty \,. \tag{3.27}$$

Ist außerdem $\operatorname{supp}(f) \subset \Omega$, *so gilt*

$$f^\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega) \,, \quad \textit{falls } \varepsilon < \operatorname{dist}(\operatorname{supp} f, \partial\Omega). \tag{3.28}$$

Beweis: Es ist $U_\varepsilon \subset\subset \Omega$, $f \in L^1(U_\varepsilon)$ und

$$f^\varepsilon(y) = \int_{U_\varepsilon} f(x)\eta_\varepsilon(y-x)\, dx \,, \quad \text{für alle } y \in U. \tag{3.29}$$

Für alle Multiindizes α sind die Funktionen $x \mapsto f(x)\partial^\alpha \eta_\varepsilon(y-x)$ auf U_ε gleichmäßig in y durch die integrierbaren Funktionen $\|\partial^\alpha \eta_\varepsilon\|_\infty |f|$ beschränkt, also existieren alle $\partial^\alpha f^\varepsilon$ in U, also ist $f^\varepsilon \in C^\infty(U)$. Sei nun $f \in L^p(\Omega)$. Für $1 < p < \infty$, $y \in U$ gilt mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und der Hölderschen Ungleichung

$$|f^\varepsilon(y)| = \left| \int_{U_\varepsilon} f(x)\eta_\varepsilon(y-x)\, dx \right| \le \int_{U_\varepsilon} |f(x)| (\eta_\varepsilon(y-x))^{\frac{1}{p}} (\eta_\varepsilon(y-x))^{\frac{1}{q}}\, dx \tag{3.30}$$

$$\le \left(\int_{U_\varepsilon} |f(x)|^p \eta_\varepsilon(y-x)\, dx \right)^{\frac{1}{p}} \underbrace{\left(\int_{U_\varepsilon} \eta_\varepsilon(y-x)\, dx \right)^{\frac{1}{q}}}_{=1} . \tag{3.31}$$

Es folgt für $1 \le p < \infty$

$$\int_U |f^\varepsilon(y)|^p \, dy \le \int_U \int_{U_\varepsilon} |f(x)|^p \eta_\varepsilon(y-x)\, dx\, dy = \int_{U_\varepsilon} |f(x)|^p \int_U \eta_\varepsilon(y-x)\, dy\, dx \tag{3.32}$$

$$\le \int_{U_\varepsilon} |f(x)|^p \, dx \,. \tag{3.33}$$

Für $p = \infty$ folgt (3.27) direkt aus (3.29). Die Behauptung (3.28) folgt ebenfalls aus (3.29), da $\eta_\varepsilon(y-x) = 0$ falls $|y-x| \ge \varepsilon$. □

Lemma 3.7 *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, sei $f \in L^p(U)$, $1 \le p < \infty$. Dann gilt $f^\varepsilon \to f$ in $L^p(U)$ für $\varepsilon \to 0$.*

Beweis: Sei $\delta > 0$. Wir wählen $g \in C_0(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\|f - g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le \delta \,,$$

siehe Satz 13.9, Analysis 4. Es folgt

$$\|f - f^\varepsilon\|_{L^p(U)} \le \|f - g\|_{L^p(U)} + \|g - g^\varepsilon\|_{L^p(U)} + \|g^\varepsilon - f^\varepsilon\|_{L^p(U)} \tag{3.34}$$

$$\le 2\delta + \|g - g^\varepsilon\|_{L^p(U)} \,, \tag{3.35}$$

da

$$g^\varepsilon - f^\varepsilon = g * \eta_\varepsilon - f * \eta_\varepsilon = (g - f)^\varepsilon$$

und nach Lemma 3.6

$$\|(g-f)^\varepsilon\|_{L^p(U)} \le \|g-f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le \delta\,.$$

Wegen $g \in C_0(\mathbb{R}^n)$ gilt $g^\varepsilon \to g$ gleichmäßig, also

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \|f - f^\varepsilon\|_{L^p(U)} \le 2\delta\,.$$

Da $\delta > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung. $\square$

Lemma 3.8 *Seien $\Omega, U \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $U \subset\subset \Omega$, sei $v \in W^{k,p}(\Omega)$, $p < \infty$. Dann gilt für alle ε mit $0 < \varepsilon < \operatorname{dist}(U, \partial\Omega)$, dass $v^\varepsilon \in C^\infty(U) \cap W^{k,p}(U)$, und $v^\varepsilon \to v$ in $W^{k,p}(U)$ für $\varepsilon \to 0$.*

Beweis: Sei $\varepsilon < \operatorname{dist}(U, \partial\Omega)$. Nach Lemma 3.6 gilt $v^\varepsilon \in C^\infty(U)$. Weiterhin gilt für alle $y \in U$

$$\begin{aligned}\partial^\alpha v^\varepsilon(y) &= \int_\Omega \partial_y^\alpha \eta_\varepsilon(y-x)v(x)\,dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega \partial_x^\alpha \eta_\varepsilon(y-x)v(x)\,dx\\ &= \int_\Omega \eta_\varepsilon(y-x)\partial^\alpha v(x)\,dx = (\eta_\varepsilon * \partial^\alpha v)(y)\,.\end{aligned}$$

Da $\partial^\alpha v \in L^p(\Omega)$, folgt $\partial^\alpha v^\varepsilon \in L^p(U)$ aus Lemma 3.6, und $\partial^\alpha v^\varepsilon \to \partial^\alpha v$ in $L^p(U)$ aus Lemma 3.7. $\square$

Satz 3.9 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, sei $v \in W^{k,p}(\Omega)$, $1 \le p < \infty$. Dann gibt es eine Folge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ mit $v_n \to v$ in $W^{k,p}(\Omega)$.*

Beweis: Weggelassen. $\square$

Satz 3.10 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, es gelte*

$$\int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx = 0\,, \quad \textit{für alle } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{3.36}$$

Dann gilt $f = 0$ fast überall.

Beweis: Sei zunächst $f \in C(\Omega)$. Wäre $f(y) \neq 0$ für ein $y \in \Omega$, so wäre

$$\int_\Omega f(x)\eta_\varepsilon(y-x)\,dx \neq 0\,,$$

falls $\varepsilon > 0$ hinreichend klein ist, im Widerspruch zu (3.36). Sei nun $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $U \subset\subset \Omega$, sei $\varepsilon > 0$ so dass $U \subset\subset U_\varepsilon \subset\subset \Omega$. Sei $\varphi \in C_0^\infty(U)$ beliebig. Es ist dann $\varphi^\varepsilon = \varphi * \eta_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$, also

$$0 = \int_\Omega f(x)\varphi^\varepsilon(x)\,dx = \int_{U_\varepsilon} f(x)\int_U \varphi(y)\eta_\varepsilon(x-y)\,dy\,dx = \tag{3.37}$$

$$= \int_U \varphi(y)\int_{U_\varepsilon} f(x)\eta_\varepsilon(y-x)\,dx\,dy = \int_U \varphi(y)f^\varepsilon(y)\,dy\,. \tag{3.38}$$

Aus dem bereits Bewiesenen folgt $f^\varepsilon|U = 0$. Da $f^\varepsilon \to f$ in $L^1(U)$ nach Lemma 3.7, folgt $f = 0$ fast überall auf U. Da U beliebig war, folgt $f = 0$ fast überall auf Ω. $\square$

Folgerung 3.11 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Ist $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. so sind die schwachen Ableitungen eindeutig bestimmt.*

Beweis: Sind $g_1, g_2 \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ zwei Funktionen, die die Definition der schwachen Ableitung erfüllen, so ist (3.36) erfüllt mit $g_1 - g_2$ an der Stelle von f. □

Definition 3.12 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $1 \le p < \infty$, $k \in \mathbb{N}$. Wir definieren $W_0^{k,p}(\Omega) \subset W^{k,p}(\Omega)$ durch*

$$W_0^{k,p}(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}\,, \tag{3.39}$$

wobei der Abschluss in der Norm von $W^{k,p}(\Omega)$ gebildet wird. □

$W_0^{k,p}(\Omega)$ ist ein abgeschlossener Unterraum von $W^{k,p}(\Omega)$ und damit ebenfalls ein Banachraum (mit der Norm von $W^{k,p}(\Omega)$). $W_0^{k,p}(\Omega)$ stellt einen Funktionenraum dar, dessen Elemente auf $\partial\Omega$ in einem "schwachen" Sinn verschwinden. Es ist nämlich zunächst nicht klar, ob für ein allgemeines $v \in W^{k,p}(\Omega)$ die Aussage "$v = 0$ auf $\partial\Omega$" Sinn macht, da v nur bis auf eine Nullmenge im $\mathbb{R}^n$ definiert ist, aber $\partial\Omega$ normalerweise eine Nullmenge ist.

Definition 3.13 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Für $k \in \mathbb{N}$ definieren wir*

$$H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)\,, \quad H_0^k(\Omega) = W_0^{k,2}(\Omega)\,. \tag{3.40}$$

□

Satz 3.14 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $k \in \mathbb{N}$. Dann sind $H^k(\Omega)$ und $H_0^k(\Omega)$ Hilberträume mit dem Skalarprodukt*

$$\langle u, v\rangle_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\le k} \langle \partial^\alpha u, \partial^\alpha v\rangle_{L^2(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\le k} \int_\Omega \langle \partial^\alpha u(x), \partial^\alpha v(x)\rangle \, dx\,, \tag{3.41}$$

und es gilt

$$\|v\|_{W^{k,2}(\Omega)} = \sqrt{\langle v, v\rangle_{H^k(\Omega)}}\,, \quad v \in H^k(\Omega)\,. \tag{3.42}$$

Beweis: Die Eigenschaften des Skalarprodukts folgen unmittelbar aus den entsprechenden Eigenschaften des Skalarprodukts im $L^2(\Omega)$. Offensichtlich gilt (3.42), und nach Satz 3.4 ist $H^k(\Omega)$ vollständig. □

Satz 3.15 (Ungleichung von Poincaré und Friedrichs)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\Omega \subset [-R, R]^n$. Dann gilt für jedes $v \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_\Omega |v(x)|^2 \, dx \le 4R^2 \int_\Omega |\partial_j v(x)|^2 \, dx\,, \quad 1 \le j \le n\,, \tag{3.43}$$

also auch

$$\int_\Omega |v(x)|^2 \, dx \le 4R^2 \int_\Omega |\nabla v(x)|^2 \, dx\,. \tag{3.44}$$

Beweis: Sei zunächst $v \in C_0^\infty(\Omega)$. Wir setzen v auf $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ durch 0 fort, dann ist $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Sei $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$. Dann gilt

$$v(x) = \underbrace{v(-R, x_2, \dots, x_n)}_{=0} + \int_{-R}^{x_1} \partial_1 v(t, x_2, \dots, x_n)\, dt\,,$$

also (Schwarzsche Ungleichung)

$$\begin{aligned} |v(x)|^2 &= \left(\int_{-R}^{x_1} 1 \cdot \partial_1 v(t, x_2, \dots, x_n)\, dt \right)^2 \le \int_{-R}^{x_1} 1^2\, dt \cdot \int_{-R}^{x_1} (\partial_1 v(t, x_2, \dots, x_n))^2\, dt \\ &\le 2R \int_{-R}^{R} (\partial_1 v(t, x_2, \dots, x_n))^2\, dt\,, \end{aligned}$$

also, da die rechte Seite nicht von x_1 abhängt,

$$\int_{-R}^{R} |v(x)|^2\, dx_1 \le 4R^2 \int_{-R}^{R} (\partial_1 v(t, x_2, \dots, x_n))^2\, dt\,. \tag{3.45}$$

Integration über die anderen Koordinaten $x_2, \dots, x_n$ ergibt

$$\int_\Omega |v(x)|^2\, dx \le 4R^2 \int_\Omega (\partial_1 v(x))^2\, dx\,,$$

Vertauschen der Koordinaten liefert (3.43) für beliebiges j. Sei nun $v \in H_0^1(\Omega)$ beliebig. Wir wählen eine Folge $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $C_0^\infty(\Omega)$ mit $v_k \to v$ in $H_0^1(\Omega)$, dann gilt (3.43) für v_k und nach Grenzübergang $k \to \infty$ auch für v. □

Durch

$$|v|_{H^k(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|=k} \int_\Omega |\partial^\alpha v(x)|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.46}$$

wird eine Halbnorm auf $H^k(\Omega)$ definiert mit

$$|v|_{H^k(\Omega)} \le \|v\|_{H^k(\Omega)}\,. \tag{3.47}$$

Satz 3.16 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Dann gibt es ein $C > 0$ mit*

$$\|v\|_{H^k(\Omega)} \le C |v|_{H^k(\Omega)}\,, \quad \textit{für alle } v \in H_0^k(\Omega). \tag{3.48}$$

Beweis: Sei $v \in H_0^k(\Omega)$, sei α Multiindex mit $|\alpha| = j - 1$, $1 \le j \le k$. Dann folgt aus Satz 3.15

$$\|\partial^\alpha v\|_2^2 \le 4R^2 \|\partial_1 \partial^\alpha v\|_2^2\,,$$

also

$$\sum_{|\alpha|=j-1} \|\partial^\alpha v\|_2^2 \le 4R^2 \sum_{|\alpha|=j-1} \|\partial_1 \partial^\alpha v\|_2^2 \le 4R^2 \sum_{|\alpha|=j} \|\partial^\alpha v\|_2^2\,,$$

also

$$|v|_{H^{j-1}(\Omega)}^2 \le 4R^2 |v|_{H^j(\Omega)}^2\,,$$

also

$$\|v\|_{H^k(\Omega)}^2 = \sum_{j=0}^{k} |v|_{H^j(\Omega)}^2 \le \sum_{j=0}^{k} (4R^2)^{k-j} |v|_{H^k(\Omega)}^2\,.$$

□

Folgerung 3.17 *Auf dem Banachraum $H_0^k(\Omega)$ definiert $|\cdot|_{H^k(\Omega)}$ eine zu $\|\cdot\|_{H^k(\Omega)}$ äquivalente Norm.* □

Folgerung 3.18 *Für $A : \Omega \to \mathbb{R}^{(n,n)}$ gelte Voraussetzung 3.1. Dann wird durch*

$$a(u,v) = \int_\Omega \langle A(x)\nabla u(x), \nabla v(x)\rangle \, dx \tag{3.49}$$

für $V = H_0^1(\Omega)$ eine stetige und V-elliptische Bilinearform $a : V \times V \to \mathbb{R}$ definiert.

Beweis: Nach Folgerung 3.17 wird durch $|v|_{H^1(\Omega)} = \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$ eine zu $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ äquivalente Norm definiert. Die Behauptung folgt nun aus (3.4) und (3.5). □

Problem 3.19 (Hindernisproblem im Sobolevraum)
Sei $V = H_0^1(\Omega)$, $\psi \in H^1(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$, sei $K \subset V$ definiert durch

$$K = \{v : \ v \in H_0^1(\Omega),\ v \geq \psi \text{ fast überall auf } \Omega\}\,, \tag{3.50}$$

Gesucht ist $u \in V$ mit

$$u \in K\,, \quad a(u, v-u) \geq F(v-u)\,, \quad \text{für alle } v \in K, \tag{3.51}$$

wobei $a : V \times V \to \mathbb{R}$ definiert ist durch (3.49) und $F : V \to \mathbb{R}$ definiert ist durch

$$F(v) = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx\,. \tag{3.52}$$

□

Satz 3.20 (Hindernisproblem, eindeutige Lösbarkeit)
Wir betrachten Problem 3.19. Es gelte Voraussetzung 3.1, sei $K \neq \emptyset$. Dann hat (3.51) eine eindeutige Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$.

Beweis: Wir zeigen, dass Problem 3.19 ein Spezialfall von Problem 2.10 ist und dass die Voraussetzungen von Satz 2.12 erfüllt sind. Nach Folgerung 3.18 ist a stetig und V-elliptisch auf $H_0^1(\Omega)$. Die Menge K ist offensichtlich konvex. Wir zeigen, dass K abgeschlossen ist in $H_0^1(\Omega)$. Sei $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in K mit $v_n \to v$ in $H_0^1(\Omega)$. Dann gilt auch $v_n \to v$ in $L^2(\Omega)$, also gibt es eine Teilfolge mit $v_{n_k} \to v$ punktweise fast überall, also $v \in K$. Nach Satz 2.12 hat Problem 3.19 eine eindeutige Lösung $u \in K$. □

Ist ψ stetig auf $\overline{\Omega}$ und $\psi < 0$ auf $\partial\Omega$, so ist $K \neq \emptyset$, beispielsweise liegt die Funktion

$$v = \eta_\varepsilon * (\max\{\psi + \alpha, 0\})$$

in K, falls $\alpha > 0$ und $\varepsilon > 0$ geeignet gewählt werden.

Aus der Variationsungleichung erhalten wir eine erste Regularitätsaussage. Wir stellen zunächst fest, dass für $w \in V$, $w \geq 0$ aus (3.51) folgt

$$a(u,w) - F(w) \geq 0\,, \tag{3.53}$$

da $u + w \geq u \geq \psi$, also $u + w \in K$. Wir betrachten nun das durch

$$w \mapsto a(u,w) - F(w)$$

definierte lineare Funktional auf V. Wir wollen zeigen, dass es durch ein Integral darstellbar ist.

Lemma 3.21 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $A \subset \Omega$ kompakt. Dann gibt es ein $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $\chi = 1$ auf A und $0 \le \chi \le 1$.*

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ so, dass $A_{2\varepsilon} \subset\subset \Omega$, wobei wieder $A_\varepsilon = \{x : \operatorname{dist}(x, A) < \varepsilon\}$. Wir setzen

$$\chi = 1_{A_\varepsilon} * \eta_\varepsilon \,,$$

dann ist

$$\chi(y) = \int_\Omega 1_{A_\varepsilon}(x)\eta_\varepsilon(y-x)\,dx = \int_{A_\varepsilon} \eta_\varepsilon(y-x)\,dx \,.$$

Aus den Eigenschaften von η_ε in (3.21) folgen $0 \le \chi \le 1$, $\operatorname{supp}(\chi) \subset \overline{A_{2\varepsilon}}$ und $\chi(y) = 1$ falls $y \in A$. □

Lemma 3.22 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $G : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ linear und nichtnegativ, das heißt,*

$$G(v) \ge 0 \,, \quad \textit{für alle } v \in \mathcal{D}(\Omega),\ v \ge 0. \tag{3.54}$$

Dann gibt es zu jedem kompakten $A \subset \Omega$ ein γ_A mit

$$|G(\varphi)| \le \gamma_A \|\varphi\|_\infty \,, \quad \textit{für alle } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \textit{ mit } \operatorname{supp}(\varphi) \subset A. \tag{3.55}$$

Beweis: Sei $A \subset \Omega$ kompakt, sei χ gemäß Lemma 3.21 gewählt. Sei nun $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ beliebig mit $\operatorname{supp}(\varphi) \subset A$, dann gilt

$$|\varphi| \le \|\varphi\|_\infty \chi \,.$$

Es folgt

$$\|\varphi\|_\infty \chi \pm \varphi \ge 0 \,,$$

also

$$0 \le G(\|\varphi\|_\infty \chi \pm \varphi) = \|\varphi\|_\infty G(\chi) \pm G(\varphi) \,,$$

also

$$|G(\varphi)| \le G(\chi)\|\varphi\|_\infty \,,$$

das heißt, (3.55) gilt mit $\gamma_A = G(\chi)$. □

Lemma 3.23 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $G : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ linear, es gebe zu jedem kompakten $A \subset \Omega$ ein γ_A mit*

$$|G(\varphi)| \le \gamma_A \|\varphi\|_\infty \,, \quad \textit{für alle } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \textit{ mit } \operatorname{supp}(\varphi) \subset A. \tag{3.56}$$

Dann gibt es genau eine lineare Fortsetzung $\tilde{G} : C_0(\Omega) \to \mathbb{R}$ von G mit

$$|\tilde{G}(\varphi)| \le \gamma_A \|\varphi\|_\infty \,, \quad \textit{für alle } \varphi \in C_0(\Omega) \textit{ mit } \operatorname{supp}(\varphi) \subset A. \tag{3.57}$$

Ist G nichtnegativ, so ist auch $\tilde{G}$ nichtnegativ.

Beweis: Sei $\varphi \in C_0(\Omega)$. Wir setzen

$$\varphi_n = \varphi * \eta_{\frac{1}{n}} \,, \quad n \ge N \,,$$

wobei N so groß gewählt wird, dass $A := \mathrm{supp}\,(\varphi_N) \subset \Omega$. Dann gilt $\varphi_n \to \varphi$ gleichmäßig und

$$|G(\varphi_n) - G(\varphi_m)| = |G(\varphi_n - \varphi_m)| \le \gamma_A \|\varphi_n - \varphi_m\|_\infty \,,$$

also ist $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge. Wir setzen

$$\tilde{G}\varphi = \lim_{n\to\infty} G(\varphi_n)\,.$$

Wegen $(\varphi+\psi)_n = \varphi_n + \psi_n$ und $(\lambda\varphi)_n = \lambda\varphi_n$ ist $\tilde{G}$ linear. Durch Vergleich mit $G(\varphi_n)$ sieht man unmittelbar, dass $\tilde{G}|\mathcal{D}(\Omega) = G$ und dass $\tilde{G}$ eindeutig bestimmt ist. □

Satz 3.24 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $G : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ linear und nichtnegativ. Dann gibt es ein reguläres Maß μ auf Ω (das heißt, auf der Borel-Algebra von Ω) mit*

$$G(v) = \int_\Omega v\, d\mu\,, \quad \text{für alle } v \in C_0(\Omega). \tag{3.58}$$

Beweis: Aus Lemma 3.21 – Lemma 3.23 folgt, dass G sich zu einer nichtnegativen Linearform auf $C_0(\Omega)$ fortsetzen läst. Die Behauptung folgt nun mit dem Darstellungssatz von Riesz aus der Maßtheorie (siehe das Buch von Bauer, oder das Buch von Elstrodt). □

Wir wenden Satz 3.24 auf die durch

$$G(w) = a(u, w) - F(w) \tag{3.59}$$

definierte Linearform an, wobei $u \in H_0^1(\Omega)$ die Lösung des Hindernisproblems 3.19 ist. Es gibt also ein reguläres Maß μ auf Ω mit

$$\int_\Omega \langle A(x)\nabla u(x), \nabla v(x)\rangle\; dx - \int_\Omega f(x)v(x)\, dx = \int_\Omega v(x)\, d\mu(x) \tag{3.60}$$

für alle $v \in H_0^1(\Omega) \cap C_0(\Omega)$. Ist auf der linken Seite partielle Integration möglich, so folgt für alle v

$$\int_\Omega [-\mathrm{div}\,(A(x)\nabla u(x)) - f(x)]\, v(x)\, dx = \int_\Omega v(x)\, d\mu(x)\,, \tag{3.61}$$

das heißt, das Maß μ hat die Dichte

$$-\mathrm{div}\,(A(x)\nabla u(x)) - f(x)\,.$$

Man schreibt auch

$$-\mathrm{div}\,(A\nabla u) = f + \mu\,. \tag{3.62}$$

Wir untersuchen nun den Träger des Maßes μ. Sei wie in Kapitel 1

$$G = \{x : x \in \Omega\,,\, u(x) > \psi(x)\}\,, \quad I = \{x : x \in \Omega\,,\, u(x) = \psi(x)\}\,. \tag{3.63}$$

Wir setzen für die unmittelbar folgende Diskussion voraus, dass u und ψ stetig auf Ω sind. Dann ist G offen und I abgeschlossen relativ zu Ω. Wir betrachten ein beliebiges $x \in G$ und wählen $\delta > 0$ so, dass $B(x;\delta) \subset G$. Für alle $w \in C_0^\infty(B(x;\delta))$ gilt $u + tw \in K$, falls $|t|$ hinreichend klein ist, also folgt

$$a(u, tw) \ge F(tw)$$

für alle solchen t und damit

$$a(u,w) = F(w)\,, \quad \text{für alle } w \in C_0^\infty(B(x;\delta)). \tag{3.64}$$

Aus (3.61) wird nun

$$\int_\Omega w(x)\,d\mu(x) + 0\,, \quad \text{für alle } w \in C_0^\infty(B(x;\delta)), \tag{3.65}$$

und damit $\mu|B(x;\delta) = 0$. Da $x \in G$ beliebig gewählt werden kann, folgt

$$\mu|G = 0\,, \quad \operatorname{supp}(\mu) \subset I\,. \tag{3.66}$$

Lemma 3.25 (Kettenregel bei schwachen Ableitungen)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $v \in L^1_{loc}(\Omega)$, es existiere die schwache Ableitung $\partial_i v \in L^1_{loc}(\Omega)$, sei $f \in C^1(\mathbb{R})$, sei f' beschränkt auf $\mathbb{R}$. Dann ist auch $f \circ v \in L^1_{loc}(\Omega)$, $f \circ v$ hat eine schwache Ableitung $\partial_i(f \circ v) \in L^1_{loc}(\Omega)$, und

$$\partial_i(f \circ v) = (f' \circ v) \cdot \partial_i v\,. \tag{3.67}$$

Beweis: Wir setzen

$$v_n = v * \eta_{\frac{1}{n}}\,, \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

mit der Standardglättungsfunktion η_ε. Sei $U \subset\subset \Omega$ offen. Dann gilt nach Lemma 3.8, dass

$$v_n \to v\,, \quad \partial_i v_n \to \partial_i v\,, \quad \text{in } L^1(U). \tag{3.68}$$

Hieraus folgt

$$\int_U |f(v_n(x)) - f(v(x))|\,dx \le \|f'\|_\infty \int_U |v_n(x) - v(x)|\,dx \to 0\,, \tag{3.69}$$

und weiter

$$\int_U |f'(v_n(x))\partial_i v_n(x) - f'(v(x))\partial_i v(x)|\,dx \;\le$$

$$\le \|f'\|_\infty \underbrace{\int_U |\partial_i v_n(x) - \partial_i v(x)|\,dx}_{\to 0} + \int_U |f'(v_n(x)) - f'(v(x))|\,|\partial_i v(x)|\,dx\,. \tag{3.70}$$

Da $v_n \to v$ in $L^1(U)$, folgt $v_{n_k} \to v$ punktweise fast überall für eine geeignete Teilfolge, also wegen der Stetigkeit von f' auch $f' \circ v_{n_k} \to f' \circ v$ punktweise f.ü. Aus dem Satz von Lebesgue folgt nun

$$\int_U |f'(v_n(x)) - f'(v(x))|\,|\partial_i v(x)|\,dx \to 0\,, \tag{3.71}$$

da $2\|f'\|_\infty \partial_i v$ eine integrierbare Majorante ist. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt mit partieller Integration, da v_n glatt ist,

$$\int_\Omega f'(v_n(x))\partial_i v_n(x)\varphi(x)\,dx = -\int_\Omega f(v_n(x))\partial_i\varphi(x)\,dx\,, \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{3.72}$$

Grenzübergang $n \to \infty$ ergibt, wenn wir (3.69) – (3.71) mit $U = \operatorname{supp}(\varphi)$ anwenden,

$$\int_\Omega f'(v(x))\partial_i v(x)\varphi(x)\,dx = -\int_\Omega f(v(x))\partial_i\varphi(x)\,dx\,, \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{3.73}$$

□

Lemma 3.26 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $v \in L^1_{loc}(\Omega)$, es existiere die schwache Ableitung $\partial_i v \in L^1_{loc}(\Omega)$. Dann haben auch $v^+ = \max\{v, 0\}$, $v^- = \max\{-v, 0\}$ und $|v|$ schwache Ableitungen im $L^1_{loc}(\Omega)$, und es gilt für fast alle $x \in \Omega$*

$$\partial_i v^+(x) = \begin{cases} \partial_i v(x)\,, & v(x) > 0\,, \\ 0\,, & v(x) \le 0\,, \end{cases} \tag{3.74}$$

$$\partial_i v^-(x) = \begin{cases} 0\,, & v(x) \ge 0\,, \\ -\partial_i v(x)\,, & v(x) < 0\,, \end{cases} \tag{3.75}$$

$$\partial_i |v|(x) = \begin{cases} \partial_i v(x)\,, & v(x) > 0\,, \\ 0\,, & v(x) = 0\,, \\ -\partial_i v(x)\,, & v(x) < 0\,. \end{cases} \tag{3.76}$$

Beweis: Wir definieren

$$g_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad g_\varepsilon(t) = \begin{cases} \sqrt{t^2 + \varepsilon^2} - \varepsilon\,, & t > 0\,, \\ 0\,, & t \le 0\,. \end{cases} \tag{3.77}$$

Dann gilt $g_\varepsilon \in C^1(\mathbb{R})$, $g_\varepsilon(t) \to \max\{t, 0\}$ für $\varepsilon \to 0$ punktweise in t,

$$g'_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{t}{\sqrt{t^2+\varepsilon^2}}\,, & t > 0\,, \\ 0\,, & t \le 0\,, \end{cases} \qquad \|g'_\varepsilon\|_\infty = 1\,,$$

und weiter für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\int_\Omega g_\varepsilon(v(x))\partial_i \varphi(x)\,dx = -\int_{\{v>0\}} \frac{v(x)}{\sqrt{v(x)^2 + \varepsilon^2}} \partial_i v(x) \varphi(x)\,dx\,.$$

Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ liefert

$$\int_\Omega v^+(x)\partial_i \varphi(x)\,dx = -\int_{\{v>0\}} \partial_i v(x)\varphi(x)\,dx\,,$$

woraus (3.74) folgt. Aus den Formeln $u^- = (-u)^+$ und $|u| = u^+ + u^-$ und der Linearität der schwachen Ableitung folgen (3.75) und (3.76). □

Folgerung 3.27 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $v \in L^1_{loc}(\Omega)$, seien $\partial_i v \in L^1_{loc}(\Omega)$ für alle i, $1 \le i \le n$. Dann gilt für jede Niveaumenge $N_c(v) = \{x : x \in \Omega,\ v(x) = c\}$, $c \in \mathbb{R}$, dass*

$$\nabla v(x) = 0\,, \quad \textit{für fast alle } x \in N_c(v). \tag{3.78}$$

Beweis: Folgt aus Lemma 3.26, da $\nabla v = \nabla(v^+) - \nabla(v^-)$. □

Folgerung 3.28 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, seien $v, w \in H^1(\Omega)$. Dann liegen auch v^+, v^-, $|v|$, $\max\{v, w\}$ in $H^1(\Omega)$. Entsprechendes gilt, wenn wir $H^1(\Omega)$ durch $H^1_0(\Omega)$ ersetzen.*

4 Das Hindernisproblem: Regularität

Ziel dieses Abschnittes ist es zu beweisen, dass die Lösung u des Hindernisproblems in H^2 liegt, falls die rechte Seite f und die zweite Ableitung $\Delta\psi$ der das Hindernis definierenden Funktion ψ im L^2 liegen. Zu diesem Zweck untersuchen wir zunächst die Situation ohne Hindernis.

Zu einer Funktion $v : \Omega \to \mathbb{R}$ und gegebenem $h \neq 0$ betrachten wir den Differenzenquotienten

$$(D_j^h v)(x) = \frac{v(x + he_j) - v(x)}{h}, \quad 1 \leq j \leq n, \tag{4.1}$$

wobei e_j der j-te Einheitsvektor ist, und wir setzen

$$D^h v = (D_1^h v, \ldots, D_n^h v). \tag{4.2}$$

Lemma 4.1 *Seien $\Omega, U \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $U \subset\subset \Omega$, sei $p \in [1, \infty)$. Dann gilt*

$$\|D_j^h v\|_{L^p(U)} \leq \|\partial_j v\|_{L^p(\Omega)}, \quad 1 \leq j \leq n, \tag{4.3}$$

für alle $v \in W^{1,p}(\Omega)$ und alle $h \neq 0$ mit $|h| < \operatorname{dist}(U, \partial\Omega)$.

Beweis: Sei zunächst $v \in C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$. Für alle $x \in U$ und $|h| < \operatorname{dist}(U, \partial\Omega)$ gilt

$$|v(x + he_j) - v(x)| = \left| \int_0^1 \partial_j v(x + the_j) h \, dt \right| \leq h \int_0^1 |\partial_j v(x + the_j)| \, dt,$$

also

$$\begin{aligned} \int_U |D_j^h v(x)|^p \, dx &\leq \int_U \left(\int_0^1 |\partial_j v(x + the_j)| \, dt \right)^p dx \leq \int_U \int_0^1 |\partial_j v(x + the_j)|^p \, dt \, dx \\ &= \int_0^1 \int_U |\partial_j v(x + the_j)|^p \, dt \, dx \leq \int_0^1 \|\partial_j v\|_{L^p(\Omega)}^p \, dt = \|\partial_j v\|_{L^p(\Omega)}^p. \end{aligned}$$

Sei nun $v \in W^{1,p}(\Omega)$ beliebig. Wir wählen nach Satz 3.9 eine Folge $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ mit $v_k \to v$ in $W^{1,p}(\Omega)$. Für festes $h \neq 0$ gilt (4.3) für alle v_k, und wegen $D_j^h v_k \to D_j^h v$ in $W^{1,p}(U)$ und $\partial_j v_k \to \partial_j v$ in $L^p(\Omega)$ folgt (4.3) für v durch Grenzübergang $k \to \infty$. □

Satz 4.2 *Seien $\Omega, U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $U \subset\subset \Omega$, $1 < p < \infty$, $v \in L^p(\Omega)$, $j \in \{1, \ldots, n\}$. Es gebe ein $C > 0$ und ein $h_0 > 0$, $h_0 \leq \operatorname{dist}(U, \partial\Omega)$ mit*

$$\|D_j^h v\|_{L^p(U)} \leq C \tag{4.4}$$

für alle $h \neq 0$, $|h| < h_0$. Dann ist $\partial_j v \in L^p(U)$, und

$$\|\partial_j v\|_{L^p(U)} \leq C. \tag{4.5}$$

Beweis: Sei $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ beliebig. Für $|h| < h_0$ gilt

$$\begin{aligned}\int_\Omega v(x) D_j^h \varphi(x)\,dx &= \int_\Omega v(x)\frac{\varphi(x+he_j)-\varphi(x)}{h}\,dx = -\int_\Omega \frac{v(x)-v(x-he_j)}{h}\varphi(x)\,dx \\ &= -\int_\Omega v(x)(D_j^{-h}v)(x)\varphi(x)\,dx\,. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Da die Differenzenquotienten $\{D_j^h v\}_{|h|<h_0}$ nach Voraussetzung (4.4) beschränkt sind und im reflexiven Banachraum $L^p(\Omega)$ jede beschränkte Menge eine schwach konvergente Folge enthält, gibt es eine Folge $(h_m)_{m\in\mathbb{N}}$ mit $h_m \to 0$, $h_m \neq 0$, und ein $w \in L^p(\Omega)$ mit

$$D_j^{-h_m} v \rightharpoonup w\,. \tag{4.7}$$

Da $D_j^{h_m}\varphi \to \partial_j\varphi$ gleichmäßig in Ω, folgt, falls h hinreichend klein ist,

$$\begin{aligned}\int_U v(x)\partial_j\varphi(x)\,dx &= \int_\Omega v(x)\partial_j\varphi(x)\,dx = \lim_{m\to\infty}\int_\Omega v(x)(D_j^{h_m}\varphi)(x)\,dx \\ &= \lim_{m\to\infty} -\int_\Omega v(x)(D_j^{-h_m}\varphi)(x)\,dx = -\int_\Omega w(x)\varphi(x)\,dx\,,\end{aligned}$$

also $w = \partial_j v$. Indem wir Satz 2.14 auf die Norm anwenden, erhalten wir

$$\|w\|_{L^p(U)} \le \liminf_{m\to\infty} \|D_j^{-h_m} v\|_{L^p(U)} \le C\,.$$

□

Wir untersuchen nun die Regularität der Lösung eines elliptischen Randwertproblems.

Als Vorüberlegung betrachten wir das Randwertproblem

$$-\Delta u = f\,, \quad \text{in } \Omega, \tag{4.8}$$

$$u = 0\,, \quad \text{auf } \partial\Omega, \tag{4.9}$$

und nehmen an, dass u eine Lösung ist, für die die folgende Rechnung zutrifft. Wir schließen aus (4.8) und (4.9), dass

$$\|\Delta u\|_2^2 = \int_\Omega \Delta u(x)^2\,dx = -\int_\Omega f(x)\Delta u(x)\,dx \le \|f\|_2\,\|\Delta u\|_2\,, \tag{4.10}$$

also

$$\|\Delta u\|_2 \le \|f\|_2\,. \tag{4.11}$$

Andererseits gilt mit partieller Integration (wenn wir annehmen, dass alle Randwerte Null sind)

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Delta u(x)^2\,dx &= \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n \partial_i^2 u(x)\cdot\partial_j^2 u(x)\,dx = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n \partial_j\partial_i u(x)\cdot\partial_i\partial_j u(x)\,dx \\ &= \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n (\partial_i\partial_j u(x))^2\,dx\,.\end{aligned}$$

Mit (4.11) folgt nun

$$|u|^2_{H^2(\Omega)} \le \|f\|_2^2 \,. \tag{4.12}$$

Wir können also hoffen, dass Lösungen u von (4.8), (4.9) in $H^2(\Omega)$ liegen, falls die rechte Seite f in $L^2(\Omega)$ liegt. Für einen Beweis dieser Vermutung müssen wir aber von der schwachen Formulierung des Randwertproblems ausgehen, und können auch nicht wie in (4.10) einfach mit $-\Delta u$ multiplizieren. Stattdessen ersetzen wir $-\Delta u$ durch eine Differenzenapproximation und leiten die Existenz der zweiten (schwachen) Ableitungen mit Satz 4.2, also aus der schwachen Kompaktheit her.

Wir betrachten die elliptische Gleichung

$$Lu = f \,, \quad \text{in } \Omega, \tag{4.13}$$

mit $Lu = -\mathrm{div}\,(A(x)\nabla u)$ und der zugehörigen Bilinearform

$$a(u,v) = \int_\Omega \langle A(x)\nabla u(x), \nabla v(x)\rangle \, dx \,. \tag{4.14}$$

Satz 4.3 (Innere Regularität)
Seien Ω, U offen, $U \subset\subset \Omega$, sei $f \in L^2(\Omega)$. Es gelte Voraussetzung 3.1, seien außerdem $a_{ij} \in C^1(\Omega)$ für $1 \le i,j \le n$. Sei $u \in H^1(\Omega)$ eine schwache Lösung von $Lu = f$, das heißt, es gelte

$$a(u,v) = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx \,, \quad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega), \tag{4.15}$$

für die Bilinearform a aus (4.14). Dann gilt $u \in H^2(U)$, und es gilt

$$\|u\|_{H^2(U)} \le C(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}) \,, \tag{4.16}$$

wobei C nur von Ω, U und den Koeffizienten von L abhängt.

Beweis: Wir wählen $W, Y \subset \mathbb{R}^n$ offen mit

$$U \subset\subset W \subset\subset Y \subset\subset \Omega \,. \tag{4.17}$$

Sei $\zeta \in \mathcal{D}(\Omega)$ mit

$$0 \le \zeta \le 1 \,, \quad \zeta | U = 1 \,, \quad \zeta|(\Omega \setminus W) = 0 \,. \tag{4.18}$$

Es gilt für jedes $v \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_\Omega \langle A(x)\nabla u(x), \nabla v(x)\rangle \, dx = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx \,. \tag{4.19}$$

Sei $h \ne 0$, $|h|$ hinreichend klein, sei $k \in \{1,\dots,n\}$. Wir wählen als Testfunktion

$$v = -D_k^{-h}(\zeta^2 D_k^h u) \,, \tag{4.20}$$

wobei wie in (4.1)

$$(D_k^h u)(x) = \frac{1}{h}(u(x + he_k) - u(x)) \tag{4.21}$$

den $\partial_k u$ approximierenden Differenzenquotienten bezeichnet. Wir behandeln zunächst die linke Seite von (4.19). Es ist

$$\begin{aligned}\int_\Omega \langle A(x)\nabla u(x), \nabla v(x)\rangle \, dx &= -\sum_{i,j=1}^n \int_\Omega a_{ij}(x)\partial_j u(x)\partial_i \left[D_k^{-h}(\zeta^2 D_k^h u)(x)\right] \, dx \\ &= \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \left(D_k^h(a_{ij}\partial_j u)\right)(x) \cdot (\partial_i(\zeta^2 D_k^h u))(x) \, dx \\ &= A_1 + A_2 \,,\end{aligned} \tag{4.22}$$

wobei wir setzen

$$A_1 = \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega a_{ij}(x+he_k)(D_k^h(\partial_j u))(x) \cdot \zeta^2(x)(D_k^h(\partial_i u))(x) \, dx \,, \tag{4.23}$$

und

$$\begin{aligned}A_2 = &\sum_{i,j=1}^n \int_\Omega a_{ij}(x+he_k)(D_k^h(\partial_j u))(x) \cdot (D_k^h u)(x) \cdot 2\zeta(x)\partial_i\zeta(x) \, dx \\ &+ \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \partial_j u \cdot D_k^h a_{ij} \cdot [\zeta^2 D_k^h(\partial_i u) + 2\zeta(\partial_i\zeta)(D_k^h u)] \, dx \,.\end{aligned} \tag{4.24}$$

Da L gleichmäßig elliptisch ist, gilt (siehe 3.1)

$$A_1 = \int_\Omega \left\langle (A(x+he_k)\zeta(x)D_k^h\nabla u)(x), \zeta(x)(D_k^h\nabla u)(x) \right\rangle \, dx \geq c_a \int_\Omega |(D_k^h\nabla u)(x)|^2\zeta^2(x) \, dx \,. \tag{4.25}$$

Wir wollen A_2 nach oben abschätzen. Da $a_{ij} \in C^1(\Omega)$, ist $a_{ij} \in C^1(\overline{U})$ und

$$|D_k^h a_{ij}(x)| \leq \|\partial_k a_{ij}\|_\infty \,. \tag{4.26}$$

Die im Folgenden auftretenden Konstanten C_i hängen ab von U, W, Y, Ω, a_{ij}, ζ, aber weder von f, u und h ab. Für A_2 gilt, da $\zeta = 0$ außerhalb von W,

$$|A_2| \leq C_1 \int_W \zeta(x) \left[|D_k^h\nabla u(x)| \, |D_k^h u(x)| + |D_k^h\nabla u(x)| \, |\nabla u(x)| + |D_k^h u(x)| \, |\nabla u(x)|\right] \, dx \,. \tag{4.27}$$

Also gilt für jedes $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}|A_2| \leq &\varepsilon\frac{C_1}{2} \int_\Omega \zeta^2(x)|D_k^h\nabla u(x)|^2 \, dx + \frac{C_1}{2\varepsilon} \int_W |D_k^h u(x)|^2 + |\nabla u(x)|^2 \, dx \\ &+ C_1 \int_W |D_k^h u(x)|^2 + |\nabla u(x)|^2 \, dx \,.\end{aligned}$$

Wir setzen $\varepsilon = c_a/C_1$, dann folgt

$$|A_2| \leq \frac{c_a}{2} \int_\Omega \zeta^2(x)|D_k^h\nabla u(x)|^2 \, dx + C_2 \int_W |D_k^h u(x)|^2 + |\nabla u(x)|^2 \, dx \,. \tag{4.28}$$

Nach Lemma 4.1 gilt
$$\int_W |D_k^h u(x)|^2 \, dx \le \int_Y |\nabla u(x)|^2 \, dx \,. \tag{4.29}$$
Insgesamt ergibt sich für die linke Seite von (4.19)
$$\int_\Omega \langle A(x)\nabla u(x), \nabla v(x)\rangle \; dx \ge \frac{c_a}{2}\int_\Omega \zeta^2(x)|D_k^h \nabla u(x)|^2 \, dx - C_3 \int_Y |\nabla u(x)|^2 \, dx \,. \tag{4.30}$$
Wir betrachten nun die rechte Seite von (4.19) und bezeichnen sie mit B. Es gilt $v = 0$ außerhalb von Y, falls $|h|$ hinreichend klein ist, und weiter
$$|B| \le \int_Y |f||v| \, dx \,, \tag{4.31}$$
und wiederum aus Lemma 4.1 folgt, da $\zeta = 0$ außerhalb von W,
$$\begin{aligned}
\int_Y |v|^2 \, dx &= \int_Y |D_k^{-h}(\zeta^2 D_k^h u)|^2 \, dx \le \int_\Omega |\nabla(\zeta^2 D_k^h u)|^2 \, dx \\
&= \int_W \zeta^4 |D_k^h \nabla u|^2 + 2\zeta^2 |\nabla\zeta|^2 |D_k^h u|^2 \, dx \\
&\le \int_W \zeta^2 |D_k^h \nabla u|^2 \, dx + C_5 \int_Y |\nabla u|^2 \, dx \,.
\end{aligned}$$
Es folgt weiter
$$|B| \le \varepsilon \int_\Omega \zeta^2 |D_k^h \nabla u|^2 \, dx + \frac{C_6}{\varepsilon}\int_Y f^2 \, dx + C_5 \int_Y |\nabla u|^2 \, dx \,, \tag{4.32}$$
und mit $\varepsilon = c_a/4$
$$|B| \le \frac{c_a}{4}\int_\Omega \zeta^2 |D_k^h \nabla u|^2 \, dx + C_7 \int_Y f^2 + |\nabla u|^2 \, dx \,. \tag{4.33}$$
Insgesamt ergibt sich also aus (4.19) die Abschätzung
$$\frac{c_a}{4}\int_U |D_k^h \nabla u|^2 \, dx \le \frac{c_a}{4}\int_\Omega \zeta^2 |D_k^h \nabla u|^2 \, dx \le C_8 \int_Y f^2 + |\nabla u|^2 \, dx \,. \tag{4.34}$$
Aus Satz 4.2 folgt nun, da C_8 von h unabhängig ist
$$\partial_k \nabla u \in L^2(U) \,, \quad \|\partial_k \nabla u\|^2_{L^2(U)} \le C_9 \int_Y f^2 + |\nabla u|^2 \, dx \,, \tag{4.35}$$
und damit $u \in H^2(U)$, da k beliebig war. Wir wollen nun noch
$$\int_Y |\nabla u|^2 \, dx$$
nach oben abschätzen. Sei dazu $\zeta \in \mathcal{D}(\Omega)$ mit $\zeta|Y = 1$. Wir testen die Variationsgleichung mit $v = \zeta^2 u$. Es ergibt sich wie oben (nur einfacher)
$$\begin{aligned}
c_a \int_\Omega \zeta^2 |\nabla u|^2 \, dx &\le \int_\Omega \left\langle A\nabla u, \zeta^2 \nabla u\right\rangle \, dx = \int_\Omega \langle A\nabla u, \nabla v\rangle \; dx - \int_\Omega \langle A\nabla u, 2u\zeta\nabla\zeta\rangle \; dx \\
&\le C_{10} \int_\Omega (|f| + |\nabla u| + |u|)|u|\zeta \, dx \\
&\le \frac{c_a}{2}\int_\Omega \zeta^2 |\nabla u|^2 \, dx + C_{11} \int_\Omega f^2 + u^2 \, dx \,,
\end{aligned}$$

also

$$\int_Y |\nabla u|^2 \, dx \le C_{12} \int_\Omega f^2 + u^2 \, dx \,. \tag{4.36}$$

Kombinieren wir (4.35) mit (4.36), so erhalten wir

$$|u|^2_{H^2(U)} \le C_{13}(\|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{L^2(\Omega)})$$

und nun, wiederum wegen (4.36), die Behauptung. □

Satz 4.3 zeigt, dass im Falle $f \in L^2(\Omega)$ die Lösung u zwei Differenzierbarkeitsordnungen mehr als die rechte Seite f besitzt. Diese Aussage bleibt auch im allgemeineren Fall $f \in H^k(\Omega)$ richtig.

Satz 4.4 *Es liege die Situation von Satz 4.3 vor, es gelte für ein $k \in \mathbb{N}$ außerdem $a_{ij} \in C^{k+1}(\Omega)$ sowie $f \in H^k(\Omega)$. Dann gilt $u \in H^{k+2}(U)$ und*

$$\|u\|_{H^{k+2}(U)} \le C(\|f\|_{H^k(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}) \,, \tag{4.37}$$

wobei C nur von k, Ω, U und den Koeffizienten von L abhängt.

Beweis: Der Beweis wird mit Induktion über k geführt, wobei Satz 4.3 sowohl den Induktionsanfang $k = 0$ liefert als auch das wesentliche Werkzeug im Induktionsschritt darstellt. Einzelheiten finden sich z.B. im Buch von L. Evans (Partial Differential Equations), Abschnitt 6.3. □

Satz 4.5 (Regularität bis zum Rand)
Sei Ω offen, Ω habe einen C^2-Rand, sei $f \in L^2(\Omega)$. Es gelte Voraussetzung 3.1, seien außerdem $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$ für $1 \le i, j \le n$. Sei $u \in H^1(\Omega)$ eine schwache Lösung von $Lu = f$ (siehe Satz 4.3). Dann gilt $u \in H^2(U)$, und es gilt

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \le C(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}) \,, \tag{4.38}$$

wobei C nur von Ω und den Koeffizienten von L abhängt.

Beweis: Siehe das Buch von Evans, Theorem 4 in Abschnitt 6.3. □

Wir wenden uns wieder dem Hindernisproblem 3.19 zu. Wir betrachten ein approximierendes Problem. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben, wir suchen u_ε als Lösung des nichtlinearen elliptischen Randwertproblems

$$-\Delta u_\varepsilon = \max\{-\Delta\psi - f, 0\}\theta_\varepsilon(u_\varepsilon - \psi) + f \,, \quad \text{in } \Omega, \tag{4.39}$$

$$u_\varepsilon = 0 \,, \quad \text{auf } \partial\Omega, \tag{4.40}$$

wobei $\theta_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert ist durch

$$\theta_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 \,, & t \ge \varepsilon \,, \\ 1 - \frac{t}{\varepsilon} \,, & 0 < t < \varepsilon \,, \\ 1 \,, & t \le 0 \,. \end{cases} \tag{4.41}$$

Die Lösbarkeit dieses Problems ergibt sich ebenfalls im Kontext der in Kapitel 2 bereits betrachteten monotonen Operatoren.

Definition 4.6 *Sei V Hilbertraum. Eine Abbildung $A : V \to V^*$ heißt hemistetig, falls für alle $u, v, w \in V$ die durch*

$$g(t) = (A(u + tw))(v) \tag{4.42}$$

definierte Abbildung $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist. A heißt stetig auf endlichdimensionalen Teilräumen, falls $A|W : W \to V^*$ stetig ist für alle endlichdimensionalen Teilräume W von V. A heißt koerziv, falls

$$\lim_{v\to\infty} \frac{(Av)(v)}{\|v\|} = \infty\,. \tag{4.43}$$

□

Ist A auf endlichdimensionalen Teilräumen stetig, so ist A auch hemistetig (das ergibt sich direkt aus der Definition).

Lemma 4.7 (Minty)
Sei V Hilbertraum, $K \subset V$ konvex, $A : V \to V^*$ monoton und hemistetig, sei $u \in K$. Dann gilt

$$(Au)(v - u) \geq 0\,, \quad \text{für alle } v \in K, \tag{4.44}$$

genau dann, wenn

$$(Av)(v - u) \geq 0\,, \quad \text{für alle } v \in K. \tag{4.45}$$

Beweis: Aus (4.44) folgt (4.45), da für alle $v \in V$ gilt

$$0 \leq (Av - Au)(v - u) = (Av)(v - u) - (Au)(v - u)\,.$$

Umgekehrt gelte (4.45). Sei $v \in K$, sei $w = u + t(v - u)$ mit $t \in (0, 1]$ beliebig. Es gilt dann $w \in K$ und daher

$$0 \leq (Aw)(w - u) = (A(u + t(v - u))(t(v - u))\,.$$

Division durch t und Grenzübergang $t \downarrow 0$ liefert (4.44) wegen der Hemistetigkeit von A.
□

Satz 4.8 *Sei V Hilbertraum, $K \subset V$ abgeschlossen und konvex, sei $A : V \to V^*$ monoton, koerziv und stetig auf endlichdimensionalen Teilräumen. Dann gibt es ein $u \in K$ mit*

$$(Au)(v - u) \geq 0\,, \quad \text{für alle } v \in K. \tag{4.46}$$

Beweis: Siehe unten. □

Satz 4.9 *Es seien die Voraussetzungen von Satz 3.20 erfüllt, sei außerdem $\Delta\psi \in L^2(\Omega)$ und $\psi < 0$ in einer Umgebung von $\partial\Omega$. Sei $u \in H_0^1(\Omega)$ die eindeutige Lösung des Hindernisproblems 3.19. Dann gilt*

$$u \in H^2(\Omega)\,. \tag{4.47}$$

Beweis: Wir setzen $V = H_0^1(\Omega)$. Für $\varepsilon > 0$ definieren wir $A_\varepsilon : V \to V^*$ durch

$$(A_\varepsilon w)(v) = \int_\Omega \langle \nabla w, \nabla v \rangle \, dx - \int_\Omega [\max\{-\Delta\psi - f, 0\}\theta_\varepsilon(w - \psi) + f] v \, dx \,. \tag{4.48}$$

Aus (4.48) ergibt sich

$$\begin{aligned}(A_\varepsilon w_1 - A_\varepsilon w_2)(w_1 - w_2) &\geq \int_\Omega \langle \nabla w_1, w_1 - w_2 \rangle \, dx - \int_\Omega \langle \nabla w_2, w_1 - w_2 \rangle \, dx \\ &= \|\nabla(w_1 - w_2)\|_{L^2(\Omega)} \,,\end{aligned}$$

also ist A_ε monoton und koerziv auf V. An (4.48) erkennt man weiterhin, dass A_ε stetig ist auf endlichdimensionalen Teilräumen von V. Nach Satz 4.8 hat die Variationsgleichung

$$(Au_\varepsilon)(v) = 0 \,, \quad \text{für alle } v \in V, \tag{4.49}$$

eine Lösung $u_\varepsilon \in V = H_0^1(\Omega)$. Wir können u_ε auch interpretieren als Lösung von

$$(\tilde{A}u_\varepsilon)(v) = F_\varepsilon(v) \,, \quad \text{für alle } v \in V, \tag{4.50}$$

wobei

$$(\tilde{A}w)(v) = \int_\Omega \langle \nabla w, \nabla v \rangle \, dx \,, \quad F_\varepsilon(v) = \int_\Omega f_\varepsilon v \, dx \,, \tag{4.51}$$

mit

$$f_\varepsilon = \max\{-\Delta\psi - f, 0\}\theta_\varepsilon(u_\varepsilon - \psi) + f \,. \tag{4.52}$$

Aus Satz 4.5 folgt

$$\|u_\varepsilon\|_{H^2(\Omega)} \leq C(\|f_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} + \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}) \,, \tag{4.53}$$

wobei C nicht von ε abhängt. Da

$$|f_\varepsilon| \leq |\Delta\psi| + |f| \,, \tag{4.54}$$

und

$$\|u_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} = \|f_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \,, \quad \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|u_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \,,$$

folgt schließlich die a-priori-Abschätzung

$$\|u_\varepsilon\|_{H^2(\Omega)} \leq C(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\Delta\psi\|_{L^2(\Omega)}) \,. \tag{4.55}$$

Wir wollen nun zeigen, dass

$$u_\varepsilon \in K \,. \tag{4.56}$$

Wir setzen

$$v = u_\varepsilon - \max\{u_\varepsilon, \psi\} \,, \tag{4.57}$$

dann ist $v \leq 0$ und es genügt zu zeigen, dass $v = 0$. Zunächst gilt

$$-\int_\Omega \langle \nabla\psi, \nabla v \rangle \, dx = \int_\Omega v \Delta\psi \, dx \,, \tag{4.58}$$

da $v = 0$ in der Nähe von $\partial\Omega$, und $v \in H_0^1(\Omega)$ nach Folgerung 3.28. Es ist

$$0 = (A_\varepsilon u_\varepsilon)(v) = \int_\Omega \langle \nabla u_\varepsilon, \nabla v \rangle \, dx - \int_\Omega [\max\{-\Delta\psi - f, 0\}\theta_\varepsilon(u_\varepsilon - \psi) + \Delta\psi + f] v \, dx \,. \tag{4.59}$$

Da

$$\nabla v(x) = \begin{cases} \nabla(u_\varepsilon - \psi)(x)\,, & v(x) < 0\,, \\ 0\,, & v = 0\,, \end{cases}$$

folgt

$$\int_\Omega |\nabla v|^2\, dx = \int_{\{v<0\}} [\max\{-\Delta\psi - f, 0\}\, \underbrace{\theta_\varepsilon(u_\varepsilon - \psi)}_{=1} + \Delta\psi + f] v\, dx \le 0\,, \tag{4.60}$$

also $\nabla v = 0$ und damit $v = 0$ wegen $v \in H_0^1(\Omega)$. Damit ist gezeigt, dass $u_\varepsilon \in K$. Aus (4.55) folgt nun weiter, dass es eine Folge $\varepsilon_n \to 0$ und ein $\tilde{u} \in H^2(\Omega)$ gibt mit

$$u_{\varepsilon_n} \rightharpoonup \tilde{u}\,, \quad \text{in } H^2(\Omega), \tag{4.61}$$

und dass $\tilde{u} \in K$. Aus (4.59) und dem Lemma von Minty folgt

$$(A_{\varepsilon_n} v)(v - u_{\varepsilon_n}) \ge 0\,, \quad \text{für alle } v \in K,\, n \in \mathbb{N}. \tag{4.62}$$

Sei $\delta > 0$ beliebig, sei $v \in K$ mit $v \ge \psi + \delta$ beliebig. Für hinreichend großes n gilt dann $\theta_{\varepsilon_n}(v - \psi) = 0$, also

$$0 \le (A_{\varepsilon_n} v)(v - u_{\varepsilon_n}) = \int_\Omega \langle \nabla v, \nabla(v - u_{\varepsilon_n})\rangle\, dx - \int_\Omega f(v - u_{\varepsilon_n})\, dx\,. \tag{4.63}$$

Grenzübergang $n \to \infty$ ergibt

$$\int_\Omega \langle \nabla v, \nabla(v - \tilde{u})\rangle\, dx \ge \int_\Omega f(v - \tilde{u})\, dx\,, \quad \text{für alle } v \in K,\, v \ge \psi + \delta, \tag{4.64}$$

Grenzübergang $\delta \downarrow 0$ ergibt

$$\int_\Omega \langle \nabla v, \nabla(v - \tilde{u})\rangle\, dx \ge \int_\Omega f(v - \tilde{u})\, dx\,, \quad \text{für alle } v \in K, \tag{4.65}$$

und wiederum mit dem Lemma von Minty erhalten wir

$$\int_\Omega \langle \nabla \tilde{u}, \nabla(v - \tilde{u})\rangle\, dx \ge \int_\Omega f(v - \tilde{u})\, dx\,, \quad \text{für alle } v \in K. \tag{4.66}$$

Also ist $\tilde{u}$ ebenfalls eine Lösung des Hindernisproblems, und aus deren Eindeutigkeit folgt $u = \tilde{u}$, also $u \in H^2(\Omega)$. □

Wir beschäftigen uns nun noch mit dem Beweis von Satz 4.8.

Satz 4.10 (Fixpunktsatz von Brouwer)
Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ konvex, kompakt und nichtleer, sei $T : K \to K$ stetig. Dann hat T einen Fixpunkt $u \in K$, $u = Tu$.

Beweis: Siehe Bücher über (nichtlineare) Funktionalanalysis. □

Satz 4.11 *Sei $V = \mathbb{R}^n$, sei $K \subset V$ konvex, kompakt und nichtleer, sei $A : V \to V^*$ stetig. Dann gibt es ein $u \in K$ mit*

$$(Au)(v - u) \ge 0\,, \quad \textit{für alle } v \in K. \tag{4.67}$$

Beweis: Es gilt (siehe (2.31) – (2.34)

$$(Au)(v-u) \geq 0\,, \quad \text{für alle } v \in K,$$

genau dann, wenn

$$u = p_K(u - R^{-1}Au)\,,$$

also genau dann, wenn u ein Fixpunkt ist von

$$p_K \circ (I - R^{-1}A) : K \to K\,.$$

Diese Abbildung hat aber nach Satz 4.10 einen Fixpunkt, da sie stetig ist. □

Satz 4.12 *Sei V Hilbertraum, $K \subset V$ konvex, abgeschlossen, beschränkt und nichtleer, sei $A : V \to V^*$ monoton und stetig auf endlichdimensionalen Teilräumen. Dann gibt es ein $u \in K$ mit*

$$(Au)(v-u) \geq 0\,, \quad \textit{für alle } v \in K. \tag{4.68}$$

Beweis: Wir nehmen an, dass $0 \in K$. (Der allgemeine Fall wird durch Translation darauf zurückgeführt.) Sei zunächst W ein beliebiger endlichdimensionaler Unterraum von V. Sei $j_W : W \to V$ die kanonische Einbettung,

$$j_W^* : V^* \to W^*\,, \quad (j_W^* v^*)(w) = v^*(j_W w) = v^*(w) \tag{4.69}$$

die zugehörige transponierte Abbildung. Wir setzen

$$A_W = j_W^* \circ A \circ j_W\,, \quad K_W = K \cap W\,,$$

dann ist $A_W : W \to W^*$ stetig und $K_W \subset W$ konvex, kompakt und nichtleer. Nach Satz 4.11 gibt es eine Lösung $u_W \in K_W$ von

$$(Au_W)(v - u_W) \geq 0\,, \quad \text{für alle } v \in K_W. \tag{4.70}$$

Aus dem Lemma von Minty folgt

$$(Av)(v - u_W) \geq 0\,, \quad \text{für alle } v \in K_W. \tag{4.71}$$

Für beliebiges $v \in V$ definieren wir nun

$$S(v) = \{u : u \in K,\, (Av)(v-u) \geq 0\}\,. \tag{4.72}$$

Die Menge $S(v)$ ist schwach abgeschlossen und beschränkt (da K beschränkt ist), also schwach kompakt. Wir wollen zeigen, dass

$$\bigcap_{v \in K} S(v) \neq \emptyset\,. \tag{4.73}$$

Seien $v_1, \ldots, v_m \in K$, $m \in \mathbb{N}$, beliebig. Wir setzen $W = \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_m\}$. Ist $u_W \in K_W$ eine Lösung auf W, so gilt (4.71), also

$$u_W \in \bigcap_{i=1}^{m} S(v_i)\,. \tag{4.74}$$

Aus der endlichen Durchschnittseigenschaft kompakter Mengen folgt nun (4.73). Sei nun

$$u \in \bigcap_{v \in K} S(v)\,, \tag{4.75}$$

dann gilt

$$(Av)(v-u) \geq 0\,, \quad \text{für alle } v \in K,$$

also folgt (4.68) aus dem Lemma von Minty. □

Beweis von Satz 4.8. Sei

$$B_R = \{v : v \in V,\ \|v\| \leq R\}\,.$$

Nach Satz 4.12 gibt es ein $u_R \in K_R = K \cap B_R$ mit

$$(Au_R)(v-u_R) \geq 0\,, \quad \text{für alle } v \in K_R. \tag{4.76}$$

Wir wollen zeigen, dass

$$u_R \in \operatorname{int}(B_R)\,, \tag{4.77}$$

falls R hinreichend groß ist. Da A koerziv ist, können wir ein $v_0 \in K$ sowie $R > \|v_0\|$ und $M > \|Av_0\|$ finden mit

$$(Av - Av_0)(v-v_0) \geq M\|v-v_0\|\,, \tag{4.78}$$

für alle $v \in V$ mit $\|v\| \geq R$. Ist nun $\|v\| = R$, so gilt

$$\begin{aligned}(Av)(v-v_0) &\geq M\|v-v_0\| + (Av_0)(v-v_0) \geq M\|v-v_0\| - \|Av_0\| \cdot \|v-v_0\| \\ &\geq (M - \|Av_0\|)(\|v\| - \|v_0\|) \\ &> 0\,.\end{aligned}$$

Da für eine Lösung $u_R \in K_R$ von (4.76) aber gilt, dass

$$(Au_R)(u_R - v_0) = -(Au_R)(v_0 - u_R) \leq 0\,,$$

folgt $\|u_R\| < R$ und damit (4.77). Wir zeigen nun, dass u_R eine Lösung ist von

$$(Au_R)(v-u_R) \geq 0\,, \quad \text{für alle } v \in K. \tag{4.79}$$

Sei $v \in V$ beliebig. Wir setzen

$$v_R = u_R + t(v-u_R)\,, \quad 0 < t < 1\,,$$

und wählen t so klein, dass $\|v_R\| \leq R$, also $v_R \in K_R$ gilt (das ist möglich wegen (4.77)). Es folgt

$$(Au_R)(v-u_R) = (Au_R)(\frac{1}{t}(v_R - u_R)) \geq 0\,.$$

□