Nonlinear Problems
(Partielle Differentialgleichungen 2) *

Martin Brokate †

Inhaltsverzeichnis

1	**Das Hindernisproblem**	**1**
2	**Sobolevräume und Ordnung**	**5**
3	**Regularität im Hindernisproblem**	**14**
4	**Monotone Probleme**	**16**
5	**Das Maximumprinzip**	**26**
6	**Das Bochner-Integral**	**37**
7	**Lineare parabolische Gleichungen**	**43**
8	**Konvexe Funktionen und das Subdifferential**	**57**
9	**Maximal monotone Operatoren**	**63**
10	**Evolutionsgleichungen mit monotonen Operatoren**	**80**

---

*Vorlesungsskript, SS 2012

†Fakultät für Mathematik, TU München

1 Das Hindernisproblem

Sei V ein Hilbertraum, $a : V \times V \to \mathbb{R}$ eine stetige Bilinearform, $F \in V^*$ und K eine konvexe abgeschlossene Teilmenge von V. Wir betrachten die Variationsungleichung

$$a(u, v-u) \geq \langle F, v-u \rangle \,, \quad \text{für alle } v \in K, \tag{1.1}$$

$$u \in K \,. \tag{1.2}$$

Wir schreiben $\langle F, v \rangle$ für die Anwendung von F auf v. In Teil 1, Satz 6.7, haben wir gesehen, dass (1.1), (1.2) eine eindeutige Lösung u hat mit

$$\|u\|_V \leq \frac{1}{c_a} \|F\|_{V^*} \,, \tag{1.3}$$

falls a V-elliptisch ist,

$$a(v, v) \geq c_a \|v\|_V^2 \,, \quad \text{für alle } v \in V. \tag{1.4}$$

Wir haben außerdem gesehen, dass diese Lösung $u \in K$ das eindeutig bestimmte Minimum von

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - \langle F, v \rangle \tag{1.5}$$

auf K liefert, falls die Bilinearform a symmetrisch ist.

In Teil 1 wurde der Fall $K = V$ untersucht, welcher auf die Variationsgleichung

$$a(u, v) = \langle F, v \rangle \,, \quad \text{für alle } v \in V, \tag{1.6}$$

führt. Wir betrachten als Modellproblem

$$a(u, v) = \int_\Omega \langle \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle \, dx \,, \quad V = H_0^1(\Omega) \,, \tag{1.7}$$

welches im Falle $K = V$ und

$$\langle F, v \rangle = \int_\Omega f(x) v(x) \, dx \,, \quad f \in L^2(\Omega) \,, \tag{1.8}$$

dem Randwertproblem $-\Delta u = f$ in Ω, $u = 0$ auf $\partial\Omega$ entspricht.

Definition 1.1 *Für $V = H_0^1(\Omega)$ bezeichnen wir V^* mit $H^{-1}(\Omega)$.* □

Im **Hindernisproblem** setzen wir

$$K = \{v : v \in V \,,\, v \geq \psi\} \,. \tag{1.9}$$

Hier ist $\psi : \Omega \to \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion.

Voraussetzung 1.2 *Sei $\psi \in C(\overline{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$, es gelte $\psi < 0$ auf $\partial\Omega$.* □

Durch

$$\langle Au, v\rangle = a(u,v)\,, \quad u,v \in H_0^1(\Omega)\,, \tag{1.10}$$

wird ein linearer stetiger Operator

$$A : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega) \tag{1.11}$$

definiert. Fassen wir $u \in H_0^1(\Omega)$ und $Au \in H^{-1}(\Omega)$ als Distributionen auf, so gilt

$$Au = -\Delta u\,,$$

wenn wir die Ableitung als distributionelle Ableitung verstehen. Wir fassen zusammen:

Satz 1.3 (Eindeutige Lösbarkeit)
Mit $V = H_0^1(\Omega)$ hat das Hindernisproblem

$$a(u, v-u) \geq \langle F, v-u\rangle\ , \quad \textit{für alle } v \in K, \tag{1.12}$$

$$u \in K\,, \quad K = \{v : v \in V\,,\, v \geq \psi\}\,, \tag{1.13}$$

für jedes $F \in H^{-1}(\Omega)$ eine eindeutige Lösung $u \in V$. □

Im Folgenden setzen wir immer $V = H_0^1(\Omega)$, wenn nichts anderes gesagt ist.

Satz 1.4 (Komplementarität)
Sei $u \in V$, es gelte Voraussetzung 1.2. Es gelte $Au \in L^2(\Omega)$ und

$$\langle F, v\rangle = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx\,, \quad f \in L^2(\Omega)\,.$$

Dann ist u genau dann eine Lösung des Hindernisproblems (1.12), (1.13), wenn gilt

$$u \geq \psi\,, \quad Au \geq f\,, \quad (Au - f)(u - \psi) = 0\,. \tag{1.14}$$

Die Bedingungen (1.14) heißen Komplementaritätsbedingungen. Sie besagen insbesondere, dass $Au(x) = -\Delta u(x) = f(x)$ gilt in Punkten x mit $u(x) > \psi(x)$, also außerhalb der Koinzidenzmenge $\{u = \psi\}$.

Beweis: "⇒": Sei u Lösung des Hindernisproblems. Da $u + w \in K$ gilt für alle $w \geq 0$, gilt

$$\langle Au, w\rangle \geq \langle F, w\rangle\ , \quad \text{für alle } w \geq 0,$$

also

$$\int_\Omega (Au - f)(x)w(x)\,dx \geq 0\,, \quad \text{für alle } w \geq 0,$$

und daher $Au \geq f$ in $L^2(\Omega)$. Sei $U \subset \Omega$ messbar, es gelte $\operatorname{dist}(U, \partial\Omega) > 0$. Wir definieren

$$\chi^\varepsilon = \chi_U * \eta_\varepsilon$$

mit der Standardglättungsfunktion η_ε, und wählen eine Folge $\varepsilon_n \to 0$, so dass für $\chi_n = \chi^{\varepsilon_n}$ gilt

$$\chi_n \to \chi_U\,, \quad \text{sowohl in } L^2(\Omega) \text{ als auch punktweise f.ü.}$$

Es gilt $0 \le \chi_n \le 1$. Setzen wir

$$v_n = (1-\chi_n)u + \chi_n\psi = u + \chi_n \cdot (\psi - u)\,,$$

dann gilt $v_n \in K$ für hinreichend großes n, also

$$0 \le \langle Au - F, v_n - u\rangle = \int_\Omega (Au - f)(\psi - u)\chi_n\,dx\,.$$

Grenzübergang $n \to \infty$ ergibt

$$0 \le \int_U (Au - f)(\psi - u)\,dx\,.$$

Da U beliebig war, folgt $(Au - f)(\psi - u) \ge 0$ und damit auch

$$(Au - f)(u - \psi) = 0\,.$$

"$\Leftarrow$": Sei $v \in K$. Es ist

$$\begin{aligned}\langle Au - F, v - u\rangle &= \int_\Omega (Au - f)(v - u)\,dx \\ &= \int_{\{u>\psi\}} (Au - f)(v - u)\,dx + \int_{\{u=\psi\}} (Au - f)(v - u)\,dx\,.\end{aligned} \tag{1.15}$$

Aus (1.14) folgt, dass

$$\begin{aligned} v - u = v - \psi \ge 0\,, &\quad \text{auf } \{u = \psi\}, \\ Au - f = 0\,, &\quad \text{auf } \{u > \psi\}. \end{aligned}$$

Es ergibt sich in (1.15)

$$\langle Au - F, v - u\rangle \ge 0\,.$$

Da $v \in K$ beliebig war, ist u Lösung des Hindernisproblems. □

Es erhebt sich die Frage, ob $Au = -\Delta u \in L^2(\Omega)$ gilt für die Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ des Hindernisproblems. Diese ist Teil der allgemeinen Frage nach der **Regularität** der Lösung u.

Beispiel 1.5 Sei $\Omega = (-1, 1) \subset \mathbb{R}$, $F = 0$,

$$\psi(x) = \frac{1}{2} - |x|\,. \tag{1.16}$$

Wir zeigen, dass

$$u(x) = \frac{1}{2}(1 - |x|) \tag{1.17}$$

die eindeutige Lösung des Hindernisproblems ist. Für beliebiges $v \in H_0^1(\Omega)$ gilt $v(1) = v(-1) = 0$, also

$$\begin{aligned}\langle Au, v - u\rangle = a(u, v - u) &= \int_{-1}^1 u'(x)(v'(x) - u'(x))\,dx \\ &= \int_{-1}^0 \frac{1}{2}(v'(x) - \frac{1}{2})\,dx + \int_0^1 -\frac{1}{2}(v'(x) + \frac{1}{2})\,dx \\ &= \frac{1}{2}(v(0) - v(-1) - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}(v(1) - v(0) + \frac{1}{2})\,.\end{aligned}$$

Da $v(0) \geq \psi(0) = \frac{1}{2}$ für $v \in K$, folgt

$$\langle Au, v - u \rangle \geq 0\,, \quad \text{für alle } v \in K.$$

Da $u \geq \psi$, ist u die Lösung. Sie ist Lipschitz-stetig, aber es gilt

$$Au = -u'' = \delta\,,$$

also $Au \notin L^2(\Omega)$. In der Tat, $Au \in L^2(\Omega)$ kann nur gelten, wenn $A\psi$, eingeschränkt auf die Koinzidenzmenge $\{u = \psi\}$, eine L^2-Funktion ist. Ohne das Hindernis wäre $u = 0$ die Lösung, also beliebig glatt. □

Wir betrachten nun ein Beispiel, in dem das Hindernis glatt ist.

Beispiel 1.6 Wie oben sei $\Omega = (-1, 1) \subset \mathbb{R}$, $F = 0$. Sei nun

$$\psi(x) = 1 - 4x^2\,. \tag{1.18}$$

Wir definieren $\xi \in (-1, 0)$ als denjenigen Punkt, für den die Tangente an die Funktion ψ im Punkt $(\xi, \psi(\xi))$ durch den Punkt $(-1, 0)$ verläuft, also

$$\psi(\xi) = \psi'(\xi)(\xi + 1)\,. \tag{1.19}$$

Für $\eta = -\xi \in (0, 1)$ gilt dann

$$\psi(\eta) = -\psi'(\eta)(1 - \eta)\,. \tag{1.20}$$

Wir zeigen, dass

$$u(x) = \begin{cases} \psi(\xi) + \psi'(\xi)(x - \xi)\,, & x \leq \xi\,, \\ \psi(x)\,, & \xi \leq x \leq \eta\,, \\ \psi(\eta) + \psi'(\eta)(x - \eta)\,, & \eta \leq x\,, \end{cases} \tag{1.21}$$

die Lösung des Hindernisproblems ist. Für $v \in H_0^1(\Omega)$ gilt

$$\begin{aligned} \langle Au, v - u \rangle = a(u, v - u) &= \int_{-1}^{\xi} \psi'(\xi)(v'(x) - \psi'(\xi))\,dx \\ &+ \int_{\xi}^{\eta} \psi'(x)(v'(x) - \psi'(x))\,dx + \int_{\eta}^{1} \psi'(\eta)(v'(x) - \psi'(\eta))\,dx \\ &= \psi'(\xi)[v(\xi) - \psi'(\xi)(\xi + 1)] + \Big[\psi'(x)(v(x) - \psi(x))\Big]_{x=\xi}^{x=\eta} \\ &- \int_{\xi}^{\eta} \psi''(x)(v(x) - \psi(x))\,dx + \psi'(\eta)[-v(\eta) - \psi'(\eta)(1 - \eta)]\,. \end{aligned}$$

Mit (1.19), (1.20) folgt nun

$$\langle Au, v - u \rangle = -\int_{\xi}^{\eta} \psi''(x)(v(x) - \psi(x))\,dx = 8\int_{\xi}^{\eta} v(x) - \psi(x)\,dx \geq 0$$

für alle $v \in K$, also ist u die Lösung. Es gilt

$$u'(x) = \begin{cases} \psi'(\xi)\,, & x \leq \xi\,, \\ \psi'(x)\,, & \xi \leq x \leq \eta\,, \\ \psi'(\eta)\,, & \eta \leq x\,, \end{cases} \qquad u''(x) = \begin{cases} 0\,, & x < \xi\,, \\ \psi''(x)\,, & \xi < x < \eta\,, \\ 0\,, & \eta < x\,, \end{cases}$$

das heißt, u' ist Lipschitz-stetig, $Au = -u''$ ist beschränkt, aber unstetig. In diesem Fall ist die Voraussetzung $Au \in L^2(\Omega)$ von Satz 1.4 erfüllt.

2 Sobolevräume und Ordnung

Definition 2.1 (Kegel)
Sei V Vektorraum, $K \subset V$. K heißt Kegel, falls $\lambda v \in K$ gilt für alle $v \in K$ und alle $\lambda \geq 0$. Ein Kegel heißt spitz, falls $K \cap (-K) = \{0\}$. $\square$

Lemma 2.2 *Sei V Vektorraum, $K \subset V$ Kegel. K ist konvex genau dann, wenn $v+w \in K$ gilt für alle $v, w \in K$.*

Beweis: "$\Leftarrow$": Direkt aus der Definition. "$\Rightarrow$": Folgt aus der Identität

$$v + w = 2\left(\frac{1}{2}v + \frac{1}{2}w\right) .$$

$\square$

Ein konvexer Kegel K enthält alle nichtnegativen Linearkombinationen

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \,, \quad \lambda_i \geq 0 \,,$$

von Elementen $v_1, \ldots, v_n \in K$.

Wir erinnern daran, dass eine Relation auf einer Menge als Ordnungsrelation bezeichnet wird, wenn sie reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist.

Satz 2.3 (Geordneter Vektorraum)
Sei V Vektorraum, $K \subset V$ ein spitzer konvexer Kegel. Dann wird durch

$$v \leq w \qquad \Leftrightarrow \qquad w - v \in K \tag{2.1}$$

eine Ordnungsrelation auf V definiert mit den Eigenschaften

$$v \leq w \qquad \Rightarrow \qquad v + z \leq w + z \,, \quad \lambda v \leq \lambda w \,, \quad -w \leq -v \,, \tag{2.2}$$

für alle $v, w, z \in V$ und alle $\lambda \geq 0$.

Beweis: Folgt unmittelbar aus der Definition und Lemma 2.2. $\square$

Sei Ω eine beliebige Menge. Der Vektorraum $\mathrm{Abb}\,(\Omega; \mathbb{R})$ aller Abbildungen $f : \Omega \to \mathbb{R}$ wird durch den Kegel

$$K^+ = \{f : f \in \mathrm{Abb}\,(\Omega; \mathbb{R})\,,\ f(x) \geq 0 \text{ für alle } x \in \Omega\} \tag{2.3}$$

zu einem geordneten Vektorraum. Diese Ordnung nennen wir **punktweise Ordnung**. Dasselbe gilt für $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ mit

$$K^+ = \{f : f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)\,,\ f(x) \geq 0 \text{ für fast alle } x \in \Omega\}\,. \tag{2.4}$$

Erzeugt ein Kegel K eine Ordnung auf einem Vektorraum V, und ist U ein Unterraum von V, so erzeugt $K \cap U$ gerade die Restriktion dieser Ordnung auf U.

Definition 2.4 (Schranken, Supremum, Infimum)
Sei V geordneter Vektorraum, M eine Teilmenge von V. Ein $z \in V$ heißt obere Schranke von M, falls $v \leq z$ für alle $v \in M$ gilt. Eine obere Schranke z von M heißt Supremum von M, falls $z \leq w$ gilt für alle oberen Schranken w von M. Analog werden die Begriffe "untere Schranke" und "Infimum" von M definiert. □

Definition 2.5 (Vektorverband)
Ein geordneter Vektorraum V heißt Vektorverband, falls je zwei Elemente $v, w \in V$ Supremum und Infimum besitzen. Wir schreiben $v \vee w$ für das Supremum und $v \wedge w$ für das Infimum. □

Ist U Unterraum eines Vektorverbands V und gelten $v \vee w \in U$, $v \wedge w \in U$ für alle $v, w \in U$, so ist U ebenfalls ein Vektorverband.

Lemma 2.6 *Sei V geordneter Vektorraum. Falls*

$$v^+ = v \vee 0 \tag{2.5}$$

existiert für jedes $v \in V$, so ist V ein Vektorverband, und

$$v \vee w = (v - w)^+ + w\,, \tag{2.6}$$

$$v \wedge w = -((-v) \vee (-w))\,, \tag{2.7}$$

$$(v + w)^+ \leq v^+ + w^+\,, \tag{2.8}$$

gelten für alle $v, w \in V$.

Beweis: Sind $v, w \in V$, so ist $(v - w)^+ + w$ obere Schranke von v und w, und $z \in V$ ist obere Schranke von v und w genau dann, wenn $z - w$ obere Schranke von $v - w$ und 0 ist, woraus (2.6) folgt. Analog zeigt man (2.7) und (2.8). □

Ebenfalls erhält man unmittelbar aus den Eigenschaften 2.2 die Rechenregeln

$$\begin{aligned} (v \vee w) + z &= (v + z) \vee (w + z)\,, \quad \lambda(v \vee z) = \lambda v \vee \lambda z\,, \\ (v \wedge w) + z &= (v + z) \wedge (w + z)\,, \quad \lambda(v \wedge z) = \lambda v \wedge \lambda z\,, \end{aligned} \tag{2.9}$$

für alle $v, w, z \in V$ und alle $\lambda \geq 0$, sowie

$$(v \vee w) + (v \wedge w) = v + w\,, \tag{2.10}$$

für alle $v, w, z \in V$. Weiterhin gelten die Distributivgesetze

$$\begin{aligned} (v \vee w) \wedge z &= (v \wedge z) \vee (w \wedge z)\,, \\ (v \wedge w) \vee z &= (v \vee z) \wedge (w \vee z)\,. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Wir setzen

$$v^- = (-v)^+ = -(v \wedge 0)\,, \quad |v| = v^+ + v^-\,, \tag{2.12}$$

dann gilt

$$v = v^+ - v^-\,. \tag{2.13}$$

Ein Kegel K kann also nur dann einen Vektorverband erzeugen, wenn

$$V = K - K \tag{2.14}$$

gilt.

Definition 2.7 (Banachverband)
Sei V Banachraum und Vektorverband. V heißt Banachverband, falls die durch $p(v) = v^+$ definierte Abbildung $p : V \to V$ stetig ist. □

Lemma 2.8 *Ist V ein Banachverband, so sind die Supremumsbildung $(v, w) \mapsto v \vee w$ und die Infimumsbildung $(v, w) \mapsto v \wedge w$ stetige Abbildungen von $V \times V \to V$.*

Beweis: Folgt aus den Formeln (2.6) und (2.7). □

Ist $v : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Abbildung, so gilt für die punktweise Ordnung

$$v^+(x) = \max\{v(x), 0\} = (v(x))^+ \,.$$

Ist $w : \Omega \to \mathbb{R}$ eine weitere Abbildung, so folgt

$$|v^+(x) - w^+(x)| \leq |v(x) - w(x)| \,, \quad \text{für alle } x \in \Omega. \tag{2.15}$$

Hieraus folgt weiter

$$\|v^+ - w^+\|_p \leq \|v - w\|_p \,, \tag{2.16}$$

falls $v, w \in L^p(\Omega)$ mit $p \in [1, \infty]$.

Lemma 2.9 *Die Funktionenräume $L^p(\Omega)$ und $C(\overline{\Omega})$ sind Banachverbände mit der durch $K = \{f \geq 0$ fast überall$\}$ erzeugten punktweisen Ordnung.* □

Lemma 2.10 *Sei V Banachverband, dessen Ordnung durch den Kegel K erzeugt wird. Dann ist K abgeschlossen.*

Beweis: Ist $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in K mit $v_n \to v \in V$, so folgt

$$v^+ = \lim_{n\to\infty} v_n^+ = \lim_{n\to\infty} v_n = v \,.$$

□

Wir wollen nun zeigen, dass $H^1(\Omega)$ ein Banachverband ist.

Lemma 2.11 (Kettenregel bei schwachen Ableitungen)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $v \in L^1_{loc}(\Omega)$, es existiere die schwache Ableitung $\partial_i v \in L^1_{loc}(\Omega)$, sei $f \in C^1(\mathbb{R})$, sei f' beschränkt auf $\mathbb{R}$. Dann ist auch $f \circ v \in L^1_{loc}(\Omega)$, $f \circ v$ hat eine schwache Ableitung $\partial_i(f \circ v) \in L^1_{loc}(\Omega)$, und

$$\partial_i(f \circ v) = (f' \circ v) \cdot \partial_i v \,. \tag{2.17}$$

Beweis: Wir setzen

$$v_n = v * \eta_{\frac{1}{n}} \,, \quad n \in \mathbb{N} \,,$$

mit der Standardglättungsfunktion η_ε. Sei $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, sei $U \subset\subset \Omega$ offen mit $\operatorname{supp}(\varphi) \subset U$. Für jedes hinreichend große $n \in \mathbb{N}$ gilt mit partieller Integration, da v_n glatt ist,

$$\int_\Omega f'(v_n(x))\partial_i v_n(x)\varphi(x)\, dx = -\int_\Omega f(v_n(x))\partial_i\varphi(x)\, dx \,. \tag{2.18}$$

Mit Lemma 7.3 aus Teil 1 folgt, dass

$$v_n \to v\,, \quad \partial_i v_n \to \partial_i v\,, \quad \text{in } L^1(U). \tag{2.19}$$

Hieraus folgt

$$\int_U |f(v_n(x)) - f(v(x))|\,dx \le \|f'\|_\infty \int_U |v_n(x) - v(x)|\,dx \to 0\,, \tag{2.20}$$

und weiter

$$\begin{aligned}\int_U |f'(v_n(x))\partial_i v_n(x) - f'(v(x))\partial_i v(x)|\,dx \ \le \\ \le \|f'\|_\infty \underbrace{\int_U |\partial_i v_n(x) - \partial_i v(x)|\,dx}_{\to 0} + \int_U |f'(v_n(x)) - f'(v(x))|\,|\partial_i v(x)|\,dx\,.\end{aligned} \tag{2.21}$$

Da $v_n \to v$ in $L^1(U)$, folgt $v_{n_k} \to v$ punktweise fast überall für eine geeignete Teilfolge, also wegen der Stetigkeit von f' auch $f' \circ v_{n_k} \to f' \circ v$ punktweise f.ü. Aus dem Satz von Lebesgue folgt nun

$$\int_U |f'(v_{n_k}(x)) - f'(v(x))|\,|\partial_i v(x)|\,dx \to 0\,, \tag{2.22}$$

da $2\|f'\|_\infty \partial_i v$ eine integrierbare Majorante ist. Mit (2.20) – (2.22) können wir in (2.18) den Grenzübergang $n_k \to \infty$ durchführen und erhalten

$$\int_\Omega f'(v(x))\partial_i v(x)\varphi(x)\,dx = -\int_\Omega f(v(x))\partial_i \varphi(x)\,dx\,, \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{2.23}$$

□

Lemma 2.12 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $v \in L^1_{loc}(\Omega)$, es existiere die schwache Ableitung $\partial_i v \in L^1_{loc}(\Omega)$. Dann haben auch v^+, v^- und $|v|$ schwache Ableitungen im $L^1_{loc}(\Omega)$, und es gilt für fast alle $x \in \Omega$*

$$\partial_i v^+(x) = \begin{cases} \partial_i v(x)\,, & v(x) > 0\,, \\ 0\,, & v(x) \le 0\,, \end{cases} \tag{2.24}$$

$$\partial_i v^-(x) = \begin{cases} 0\,, & v(x) \ge 0\,, \\ -\partial_i v(x)\,, & v(x) < 0\,, \end{cases} \tag{2.25}$$

$$\partial_i |v|(x) = \begin{cases} \partial_i v(x)\,, & v(x) > 0\,, \\ 0\,, & v(x) = 0\,, \\ -\partial_i v(x)\,, & v(x) < 0\,. \end{cases} \tag{2.26}$$

Beweis: Wir definieren

$$g_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad g_\varepsilon(t) = \begin{cases} \sqrt{t^2 + \varepsilon^2} - \varepsilon\,, & t > 0\,, \\ 0\,, & t \le 0\,. \end{cases} \tag{2.27}$$

Dann gilt $g_\varepsilon \in C^1(\mathbb{R})$, $g_\varepsilon(t) \to \max\{t, 0\}$ für $\varepsilon \to 0$ punktweise in t,

$$g'_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{t}{\sqrt{t^2+\varepsilon^2}}\,, & t > 0\,, \\ 0\,, & t \le 0\,, \end{cases} \qquad \|g'_\varepsilon\|_\infty = 1\,,$$

und weiter für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\int_\Omega g_\varepsilon(v(x))\partial_i\varphi(x)\,dx = -\int_{\{v>0\}} \frac{v(x)}{\sqrt{v(x)^2+\varepsilon^2}}\partial_i v(x)\varphi(x)\,dx\,.$$

Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ mit dem Satz von Lebesgue liefert

$$\int_\Omega v^+(x)\partial_i\varphi(x)\,dx = -\int_{\{v>0\}} \partial_i v(x)\varphi(x)\,dx\,,$$

woraus (2.24) folgt. Aus den Formeln $v^- = (-v)^+$ und $|v| = v^+ + v^-$ und der Linearität der schwachen Ableitung folgen (2.25) und (2.26). □

Folgerung 2.13 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $v \in L^1_{loc}(\Omega)$, seien $\partial_i v \in L^1_{loc}(\Omega)$ für alle i, $1 \le i \le n$. Dann gilt für jede Niveaumenge $N_c(v) = \{x : x \in \Omega,\ v(x) = c\}$, $c \in \mathbb{R}$, dass*

$$\nabla v(x) = 0\,, \quad \textit{für fast alle } x \in N_c(v). \tag{2.28}$$

Beweis: Aus Lemma 2.12 folgt

$$\nabla(v-c) = \nabla((v-c)^+) - \nabla((v-c)^-)\,,$$

sowie

$$\nabla((v-c)^+) = \nabla((v-c)^-) = 0$$

fast überall auf $N_0(v-c) = N_c(v)$. □

Aus Lemma 2.12 folgt ebenfalls für $v \in H^1(\Omega)$

$$\left\langle \nabla v^+(x), \nabla v^-(x) \right\rangle = 0\,, \quad \text{für fast alle } x \in \Omega. \tag{2.29}$$

Folgerung 2.14 *Für die Bilinearform*

$$a(u,v) = \int_\Omega \langle \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle \,dx$$

gilt für alle $v \in H^1(\Omega)$

$$a(v^+, v^-) = 0\,, \quad a(v, v^+) = a(v^+, v^+) \ge 0\,, \quad a(v, v^-) = -a(v^-, v^-) \le 0\,. \tag{2.30}$$

□

Lemma 2.15 *Die durch $p(v) = v^+$ definierte Abbildung $p : H^1(\Omega) \to H^1(\Omega)$ ist stetig.*

Beweis: Sei $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $H^1(\Omega)$ mit $v_n \to v$ in $H^1(\Omega)$. Wir setzen

$$\Omega_+ = \{v > 0\}\,, \quad \Omega_- = \{v < 0\}\,, \quad \Omega_0 = \{v = 0\}\,, \quad \Omega_+^n = \{v_n > 0\}\,,$$

sowie

$$\chi^+ = \chi_{\Omega_+}\,, \quad \chi_n^+ = \chi_{\Omega_+^n}\,.$$

Es gilt $v_n \to v$ in $L^2(\Omega)$, also auch $v_n^+ \to v^+$ in $L^2(\Omega)$ nach Lemma 2.9. Sei $(v_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge mit $v_{n_k} \to v$ punktweise fast überall, wir bezeichnen sie wieder mit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Es gilt dann

$$\begin{aligned} \chi_n^+ &\to 1 = \chi^+\,, \quad \text{fast überall in } \Omega_+, \\ \chi_n^+ &\to 0 = \chi^+\,, \quad \text{fast überall in } \Omega_-, \end{aligned} \tag{2.31}$$

Aus Lemma 2.12 folgt nun

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla(v_n^+ - v^+)|^2\,dx &= \int_\Omega |\chi_n^+\nabla v_n - \chi^+\nabla v)|^2\,dx \\ &\le 2\int_\Omega \chi_n^+|\nabla v_n - \nabla v)|^2\,dx + @\int_\Omega |\nabla v|^2|\chi_n^+ - \chi^+|\,dx \\ \le 2\int_\Omega |\nabla v_n - \nabla v)|^2\,dx &+ 2\int_{\Omega_+\cup\Omega_-} |\nabla v|^2|\chi_n^+ - \chi^+|\,dx + 22\int_{\Omega_0} |\nabla v|^2|\chi_n^+ - \chi^+|\,dx\,. \end{aligned}$$

Alle drei Integrale konvergieren gegen 0; das erste wegen $v_n \to v$ in $H^1(\Omega)$; das zweite wegen (2.31) nach dem Satz von Lebesgue, da $|\nabla v|^2$ eine integrierbare Majorante ist; das dritte, da $\nabla v = 0$ fast überall auf Ω_0 nach Lemma 2.13. Damit ist gezeigt: Gilt $v_n \to v$ in $H^1(\Omega)$, so gibt es eine Teilfolge mit $v_{n_k}^+ \to v^+$ in $H^1(\Omega)$. Hieraus folgt aber, dass für die ganze Folge gilt $v_n^+ \to v^+$ in $H^1(\Omega)$. (Konvergenzprinzip – andernfalls gäbe es eine Teilfolge von $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, welche keine gegen v konvergente Teilfolge besitzt, im Widerspruch zum eben Bewiesenen.) □

Satz 2.16 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann sind $H^1(\Omega)$ und $H_0^1(\Omega)$ Banachverbände.*

Beweis: Wegen Lemma 2.6, Lemma 2.12 und Lemma 2.15 ist $H^1(\Omega)$ Banachverband. Für $H_0^1(\Omega)$ genügt es zu zeigen, dass $v^+ \in H_0^1(\Omega)$ gilt, falls $v \in H_0^1(\Omega)$. Sei $v \in H_0^1(\Omega)$, sei $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $C_0^\infty(\Omega)$ mit $v_n \to v$ in $H^1(\Omega)$. Dann gilt $v_n^+ \in H_0^1(\Omega)$, da $\operatorname{supp}(v_n^+) \subset \operatorname{supp}(v_n) \subset\subset \Omega$. Es folgt $v^+ \in H_0^1(\Omega)$, da $H_0^1(\Omega)$ abgeschlossener Teilraum von $H^1(\Omega)$ ist und da $v_n^+ \to v^+$ in $H^1(\Omega)$ nach Lemma 2.15. □

Sei V ein geordneter Vektorraum, dessen Ordnung durch einen Kegel K erzeugt wird. Ist $V = K - K$, so können wir auf dem **algebraischen Dualraum**

$$V^\# = \{v^\# | v^\# : V \to \mathbb{R} \text{ linear}\} \tag{2.32}$$

eine Ordnung definieren durch

$$K^\# = \{v^\# | v^\# \in V^\#,\ v^\#(v) \ge 0 \text{ für alle } v \in K\}\,. \tag{2.33}$$

Offensichtlich ist $K^\#$ ein konvexer Kegel. $K^\#$ ist spitz, da für $v^\# \in K^\# \cap (-K^\#)$ gilt, dass $v^\#(v) = 0$ für alle $v \in K$, also $v^\# = 0$ wegen $V = K - K$. Ist V normiert, so gilt dasselbe für den **stetigen Dualraum** $V^* \subset V^\#$ mit dem Kegel

$$K^* = \{v^* | v^* \in V^*,\ v^*(v) \ge 0 \text{ für alle } v \in K\}\,. \tag{2.34}$$

Die Funktionale in $K^\#$ bzw. K^* heißen **nichtnegativ**.

Lemma 2.17 *Sei V Banachverband. Dann wird V^* vermittels K^* zu einem geordneten Vektorraum.* □

Wir beschäftigen uns nicht mit der Frage, unter welchen Zusatzvoraussetzungen an einen Banachverband V dessen Dualraum V^* ebenfalls ein Banachverband ist.

Lemma 2.18 *Für $V = H^k(\Omega)$ gilt $V^* \subset \mathcal{D}'(\Omega)$.*

Beweis: Sei $T \in V^*$. Für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ gilt

$$|T(\varphi)|^2 \le \|T\|^2 \|\varphi\|^2_{H^k(\Omega)} = \|T\|^2 \sum_{|\alpha|\le k} \|\partial^\alpha \varphi\|^2_{L^2(\Omega)} \le \|T\|^2 |\mathrm{supp}\,(\varphi)|^2 \sum_{|\alpha|\le k} \|\partial^\alpha \varphi\|^2_\infty\,,$$

also $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ nach Teil 1, Lemma 2.2. □

Für $k \ge 2$ ist $H^k(\Omega)$ kein Banachverband, wie das Beispiel $\Omega = (-1,1)$, $v(x) = x$ zeigt, es ist $(v^+)'' = \delta$.

Wir erinnern daran, dass wir den Dualraum von $V = H_0^1(\Omega)$ mit $H^{-1}(\Omega)$ bezeichnen.

Wir beschäftigen uns mit der Regularität nichtnegativer linearer Funktionale.

Lemma 2.19 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ Distribution mit $T \ge 0$. Dann gibt es zu jedem $A \subset\subset \Omega$ ein $C_A > 0$, so dass*

$$|T(\varphi)| \le C_A \|\varphi\|_\infty\,, \tag{2.35}$$

für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$ mit $\mathrm{supp}\,(\varphi) \subset A$.

Beweis: Wir wählen $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ mit $0 \le \psi \le 1$ und $\psi|A = 1$. Dann gilt

$$\|\varphi\|_\infty \psi + \varphi \ge 0\,, \quad \|\varphi\|_\infty \psi - \varphi \ge 0\,,$$

für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ mit $\mathrm{supp}\,(\varphi) \subset A$. Es folgt

$$T(\|\varphi\|_\infty \psi + \varphi) \ge 0\,, \quad T(\|\varphi\|_\infty \psi - \varphi) \ge 0\,,$$

und hieraus

$$|T(\varphi)| \le \|\varphi\|_\infty T(\psi)\,.$$

□

Satz 2.20 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ Distribution mit $T \ge 0$. Dann gibt es ein reguläres, auf kompakten Teilmengen A von Ω endliches Borelmaß μ, so dass*

$$T(v) = \int_\Omega v\, d\mu \tag{2.36}$$

gilt für jedes $v \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Beweis: Folgt mit Lemma 2.19 aus einem Satz der Maßtheorie. □

Satz 2.21 *Sei V ein Banachverband mit $\|v^+\| \le \|v\|$ und $\|v^-\| \le \|v\|$ für alle $v \in V$, sei $T : V \to \mathbb{R}$ linear und nichtnegativ. Dann ist T stetig.*

Beweis: Wegen

$$|T(v)| = |T(v^+) - T(v^-)| \le |T(v^+)| + |T(v^-)|\,, \quad \|v^+\| \le \|v\|\,, \|v^-\| \le \|v\|\,,$$

genügt es zu zeigen, dass es ein $M > 0$ gibt mit

$$|T(w)| \le M\,, \quad \text{für alle } w \ge 0 \text{ mit } \|w\| \le 1. \tag{2.37}$$

(Es folgt dann $|T(v)| \le 2M\|v\|$ für alle $v \in V$.) Wir nehmen an, dass es ein solches M nicht gibt. Sei $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in V mit

$$v_n \ge 0\,, \quad \|v_n\| \le 1\,, \quad T(v_n) \ge n^2\,.$$

Wir setzen

$$w_m = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} v_n\,.$$

Dann gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\|v_n\| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty\,,$$

also ist (w_m) konvergent, sei $w_m \to w \in V$. Aus $w_m \le w_k$ für alle $k \ge m$ folgt $w_m \le w$, also auch $T(w_m) \le T(w)$, aber andererseits gilt

$$T(w_m) = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} T(v_n) \ge m > T(w)\,,$$

falls m hinreichend groß, ein Widerspruch. □

Satz 2.22 *Sei $T : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ linear, sei $g \in L^2(\Omega)$ mit $g \ge 0$, es gelte*

$$0 \le T(v) \le \int_\Omega g(x)v(x)\,dx\,, \quad \textit{für alle } v \in H^1(\Omega) \textit{ mit } v \ge 0. \tag{2.38}$$

Dann gibt es ein $f \in L^2(\Omega)$ mit $0 \le f \le g$ und

$$T(v) = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx\,, \quad \textit{für alle } v \in H^1(\Omega). \tag{2.39}$$

Beweis: Für alle $v \in H^1(\Omega)$ gilt

$$\begin{aligned} |T(v)| &= |T(v^+) - T(v^-)| \le T(v^+) + T(v^-) \\ &\le \int_\Omega g(x)v^+(x)\,dx + \int_\Omega g(x)v^-(x)\,dx \le \|g\|_2\|v^+\|_2 + \|g\|_2\|v^-\|_2 \\ &\le 2\|g\|_2\|v\|_2\,. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Da $H^1(\Omega)$ dicht ist in $L^2(\Omega)$, lässt T sich eindeutig zu einem $\tilde{T} \in (L^2(\Omega))^*$ fortsetzen. Nach dem Darstellungssatz von Riesz für den Dualraum eines Hilbertraums existiert ein $f \in L^2(\Omega)$, so dass (2.39) gilt. Es folgt

$$0 \leq \int_\Omega f(x)v(x)\,dx \leq \int_\Omega g(x)v(x)\,dx \tag{2.41}$$

für alle $v \in H^1(\Omega)$, $v \geq 0$. Da es zu jedem $v \in L^2(\Omega)$ mit $v \geq 0$ eine Folge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $H^1(\Omega)$ mit $v_n \geq 0$ und $v_n \to v$ in $L^2(\Omega)$ gibt, gilt (2.41) auch für alle $v \in L^2(\Omega)$ mit $v \geq 0$, also folgt $0 \leq f \leq g$. □

Satz 2.23 *Sei V ein Banachverband mit $\|v^+\| \leq \|v\|$ und $\|v^-\| \leq \|v\|$ für alle $v \in V$, seien $v^*, w^* \in V^*$, sei $\{v^*, w^*\}$ nach oben beschränkt. Dann haben v^* und w^* ein Supremum $v^* \vee w^*$ in V^*.*

Beweis: Skizze. Es genügt, den Fall $w^* = 0$ zu betrachten. Man zeigt, dass durch

$$z^*(v) = \sup_{0\leq w\leq v} v^*(w)\,, \quad v \geq 0\,,$$
$$z^*(v) = z^*(v^+) - z^*(v^-)\,, \quad v \in V\,,$$

eine lineare Abbildung $z^* : V \to \mathbb{R}$ definiert wird, welche nach Satz 2.21 auch stetig ist, und dass $z^* = v^* \vee 0$ gilt. □

Wir können nun schließen, dass für lineare stetige Funktionale auf $L^2(\Omega)$ die Supremumsbildung in $L^2(\Omega)$ und $H^{-1}(\Omega)$ zum gleichen Ergebnis führt. (Dieses Ergebnis werden wir im Folgenden nicht benötigen.)

Folgerung 2.24 *Sei $V = H^1(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$, sei $F \in V^*$ definiert durch*

$$F(v) = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx\,, \quad v \in V\,. \tag{2.42}$$

Dann existiert $F^+ = F \vee 0$ in V^*, und es gilt

$$F^+(v) = \int_\Omega f^+(x)v(x)\,dx\,, \quad f^+(x) = \max\{f(x), 0\}\,, \tag{2.43}$$

für alle $v \in V$.

Beweis: Wir setzen

$$G(v) = \int_\Omega g(x)v(x)\,dx\,, \quad g(x) = \max\{f(x), 0\}\,,$$

dann ist $G \in V^*$ eine obere Schranke von F und 0. Nach Satz 2.23 existiert $F^+ = F \vee 0$ in V^*. Nach Satz 2.22 gibt es ein $h \in L^2(\Omega)$ mit $0 \leq h \leq g$ und

$$F^+(v) = \int_\Omega h(x)v(x)\,dx\,, \quad \text{für alle } v \in V.$$

Da $F \leq F^+$ in V^*, folgt $f \leq h$, also auch $g \leq h$ und damit $g = h$, $G = F^+$. □

3 Regularität im Hindernisproblem

Für die Lösung des Hindernisproblems

$$\begin{aligned} a(u, v-u) &\geq \langle F, v-u \rangle \ , \quad &&\text{für alle } v \in K, \\ u &\in K \ , &&K = \{v : v \in V \ , \ v \geq \psi\} \ , \end{aligned} \tag{3.1}$$

gilt $Au \geq F$ in $H^{-1}(\Omega)$, da $v = u + w \in K$ für alle $w \geq 0$. Wir suchen nun nach einer oberen Schranke für Au. Zu diesem Zweck betrachten wir das Hilfsproblem: Gegeben ist $G \in H^{-1}(\Omega)$, gesucht ist $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$, so dass

$$\begin{aligned} \langle A\tilde{u}, v-\tilde{u} \rangle &\geq \langle G, v-\tilde{u} \rangle \ , \quad &&\text{für alle } v \in \tilde{K}, \\ \tilde{u} &\in \tilde{K} \ , &&\tilde{K} = \{v : v \in V \ , \ v \leq \tilde{\psi}\} \ . \end{aligned} \tag{3.2}$$

Definition 3.1 (Unterlösung)
Ein $z \in H_0^1(\Omega)$ heißt Unterlösung von (3.2), falls $z \in \tilde{K}$ und $Az \leq G$ in $H^{-1}(\Omega)$ gelten.
□

Eine Lösung $\tilde{u}$ des Hilfsproblems ist auch Unterlösung, da $v = \tilde{u} - w \in \tilde{K}$ gilt für jedes $w \geq 0$, also $A\tilde{u} \leq G$.

Satz 3.2 *Jede Lösung $\tilde{u}$ des Hilfsproblems (3.2) ist maximale Unterlösung, das heißt, es gilt $\tilde{u} \geq z$ für jede Unterlösung z des Hilfsproblems.*

Beweis: Sei z eine Unterlösung, wir setzen $v = z \vee \tilde{u}$ in $H_0^1(\Omega)$. Es gilt $v \leq \tilde{\psi}$, also $v \in \tilde{K}$, also

$$\langle A\tilde{u}, v-\tilde{u} \rangle \geq \langle G, v-\tilde{u} \rangle \ . \tag{3.3}$$

Es ist

$$v - \tilde{u} = z \vee \tilde{u} - \tilde{u} = (z-\tilde{u})^+ \geq 0 \, .$$

Da z Unterlösung ist, folgt

$$\langle Az, v-\tilde{u} \rangle \leq \langle G, v-\tilde{u} \rangle \ . \tag{3.4}$$

Wir subtrahieren (3.3) von (3.4) und erhalten

$$0 \geq \left\langle Az - A\tilde{u}, (z-\tilde{u})^+ \right\rangle = a(z-\tilde{u}, (z-\tilde{u})^+) = a((z-\tilde{u})^+, (z-\tilde{u})^+) \, ,$$

also

$$(z-\tilde{u})^+ = 0 \, , \quad z \leq \tilde{u} \, .$$

□

Dem Hindernis $\psi \in H^1(\Omega)$ können wir das Funktional $A\psi \in H^{-1}(\Omega)$ zuordnen, da wir durch

$$\langle Au, v \rangle = a(u, v) \, , \quad u \in H^1(\Omega) \, , \, v \in H_0^1(\Omega) \, , \tag{3.5}$$

den in (1.11) definierten Operator zu einem Operator

$$A : H^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega) \tag{3.6}$$

fortsetzen können.

Satz 3.3 (Lewy-Stampacchia-Ungleichung)
Es gelte Voraussetzung 1.2, sei $F \in H^{-1}(\Omega)$, es gebe eine obere Schranke für F und $A\psi$ in $H^{-1}(\Omega)$. Dann gilt für die Lösung u des Hindernisproblems aus Satz 1.3

$$F \leq Au \leq F \vee A\psi \tag{3.7}$$

in $H^{-1}(\Omega)$.

Beweis: Nach Satz 2.23 existiert $F \vee A\psi$ in $H^{-1}(\Omega)$. Wir betrachten das Hilfsproblem (3.2) mit

$$G = F \vee A\psi\,, \quad \tilde{\psi} = u\,.$$

Es gilt $\tilde{K} \neq \emptyset$, da $u \in \tilde{K}$. Das Hilfsproblem hat also eine eindeutige Lösung $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$. Da $\psi \leq u$ und $A\psi \leq F \vee A\psi$, ist ψ Unterlösung des Hilfsproblems. Nach Satz 3.2 folgt $\psi \leq \tilde{u}$, also $\tilde{u} \in K$. Setzen wir $v = u$ in der Variationsungleichung des Hilfsproblems (3.2), so erhalten wir

$$a(\tilde{u}, u - \tilde{u}) \geq \langle F \vee A\psi, u - \tilde{u}\rangle\ . \tag{3.8}$$

Setzen wir $v = \tilde{u}$ in der Variationsungleichung des Hindernisproblems (3.1), so erhalten wir, da $u \geq \tilde{u}$,

$$a(u, \tilde{u} - u) \geq \langle F, \tilde{u} - u\rangle \geq \langle F \vee A\psi, \tilde{u} - u\rangle\ . \tag{3.9}$$

Addition von (3.8) und (3.9) ergibt

$$a(u - \tilde{u}, \tilde{u} - u) \geq 0\,,$$

also $u = \tilde{u}$ und daher auch $Au = A\tilde{u} \leq G = F \vee A\psi$. □

Satz 3.4 (Regularität im Hindernisproblem)
Es gelte Voraussetzung 1.2, sei $f \in L^2(\Omega)$ und $F \in H^{-1}(\Omega)$ definiert durch

$$\langle F, v\rangle = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx\,. \tag{3.10}$$

Sei außerdem $A\psi = -\Delta\psi \in L^2(\Omega)$. Dann hat das Hindernisproblem (3.1) genau eine Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$, und für diese gelten die Komplementaritätsbedingungen

$$u \geq \psi\,, \quad Au \geq f\,, \quad (Au - f)(u - \psi) = 0\,. \tag{3.11}$$

Es gilt $Au = -\Delta u \in L^2(\Omega)$ sowie $u \in H^2(U)$ für jedes offene $U \subset\subset \Omega$.

Beweis: Durch

$$\langle G, v\rangle = \int_\Omega \max\{f(x), -\Delta\psi(x)\}v(x)\,dx\,, \quad v \in H_0^1(\Omega)\,,$$

wird eine obere Schranke von F und $A\psi = -\Delta\psi$ in $H^{-1}(\Omega)$ definiert. Nach Satz 3.3 folgt $F \leq Au \leq F \vee A\psi$ in $H^{-1}(\Omega)$. Aus Satz 2.23 folgt nun $Au \in L^2(\Omega)$, also gilt (3.11) nach Satz 1.4. Die Regularitätsaussage folgt aus Satz 8.7 in Teil 1. □

4 Monotone Probleme

Wir betrachten das elliptische Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}\,(a(\nabla u)) &= f\,, \quad \text{in } \Omega, \\ u(x) &= 0\,, \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Hierbei ist $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine gegebene Funktion. Ist a linear, so handelt es sich um ein lineares elliptisches Problem, wie wir es in Teil I betrachtet haben, im Fall der Identität $a(y) = y$ ergibt sich $-\Delta u = f$. Ist a nichtlinear, so handelt es sich um ein **quasilineares** Problem; Ausdifferenzieren von $\mathrm{div}\,(a(\nabla u(x)))$ nach x ergibt einen Ausdruck, der hinsichtlich der höchsten (in diesem Falle zweiten) Ableitung linear, aber hinsichtlich der niedrigeren Ableitungen nichtlinear ist.

Die variationelle Formulierung von (4.1) lautet

$$\int_\Omega \langle a(\nabla u(x)), \nabla v(x)\rangle \; dx = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx\,, \quad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega), \tag{4.2}$$

sie ergibt sich wie im linearen Fall durch Testen mit v und partielle Integration mit dem Satz von Gauß.

Wir können (4.2) in eine Operatorgleichung

$$Au = F \tag{4.3}$$

umschreiben. Hier ist $A : V \to V^*$ mit $V = H_0^1(\Omega)$ und $V^* = H^{-1}(\Omega)$,

$$\langle Au, v\rangle = \int_\Omega \langle a(\nabla u(x)), \nabla v(x)\rangle \; dx\,, \tag{4.4}$$

und $F \in V^*$ wie gehabt mit

$$\langle F, v\rangle = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx\,.$$

Für nichtlineares a ist der Operator A nichtlinear, bei (4.3) handelt sich also um eine nichtlineare Operatorgleichung.

Wir betrachten in diesem Abschnitt die Situation, in der a die Bedingung

$$\langle a(y) - a(z), y - z\rangle \geq 0\,, \quad \text{für alle } y, z \in \mathbb{R}^n, \tag{4.5}$$

erfüllt. Falls a linear ist, bedeutet (4.5), dass die zugehörige Matrix $M \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ positiv semidefinit ist. Dieser Fall tritt beispielweise dann auf, wenn a die Ableitung einer konvexen quadratischen Funktion $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist, dann ist $M = D^2 J$ (Hessematrix).

Definition 4.1 (Monotoner Operator)
Sei V normierter Raum. Ein Operator $A : V \to V^*$ heißt monoton, falls

$$\langle Au - Av, u - v\rangle \geq 0\,, \quad \textit{für alle } u, v \in V\,, \tag{4.6}$$

und streng monoton, falls für alle $u \neq v$ in (4.6) die strikte Ungleichung gilt.

Definition 4.2 *Sei V normierter Raum. Ein Operator $A : V \to V^*$ heißt koerziv, falls*

$$\lim_{\|v\|\to+\infty} \frac{\langle Av, v\rangle}{\|v\|} = +\infty\,. \tag{4.7}$$

Wir betrachten die Gleichung $Au = F$ zunächst im Endlichdimensionalen.

Satz 4.3 (Fixpunktsatz von Brouwer)
Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und konvex, $f : K \to K$ stetig, $K \neq \emptyset$. Dann hat f einen Fixpunkt $u \in K$.

Beweis: Nicht hier. Das ist ein grundlegender Satz aus der nichtlinearen Funktionalanalysis. $\square$

Folgerung 4.4 *Sei $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig, es gebe ein $R > 0$ mit*

$$\langle Av, v\rangle \geq 0\,, \quad \text{für alle } v \text{ mit } |v| = R. \tag{4.8}$$

Dann hat A eine Nullstelle u mit $|u| \leq R$.

Beweis: Wir nehmen an, es gebe keine solche Nullstelle. Dann wird durch

$$f(v) = -R\frac{Av}{|Av|}$$

eine stetige Abbildung $f : B_R \to B_R$ definiert (B_R = abgeschlossene Kugel um 0 mit Radius R). Gemäß Fixpunktsatz von Brouwer gibt es ein $u \in B_R$ mit $f(u) = u$. Nach Definition von f ist $|u| = |f(u)| = R$. Wegen (4.8) folgt

$$0 \leq \langle Au, u\rangle = \langle Au, f(u)\rangle = -R|Au|\,,$$

also $Au = 0$. Widerspruch. $\square$

Satz 4.5 *Sei $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig und koerziv. Dann hat die Gleichung $Au = F$ eine Lösung $u \in \mathbb{R}^n$ für jedes $F \in \mathbb{R}^n$.*

Beweis: Sei zunächst $F = 0$. Wir wenden Korollar 4.4 an. Da A koerziv ist, gibt es $R > 0$, so dass (4.8) gilt. Also hat $Au = 0$ eine Lösung $u \in \mathbb{R}^n$. Für beliebiges $F \in \mathbb{R}^n$ betrachten wir $A_F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $A_F v = Av - F$. A_F ist stetig und auch koerziv: Es ist

$$\langle A_F v, v\rangle = \langle Av, v\rangle - \langle F, v\rangle \geq \langle Av, v\rangle - \|F\|\|v\|\,,$$

also

$$\frac{\langle A_F v, v\rangle}{\|v\|} \geq \frac{\langle Av, v\rangle}{\|v\|} - \|F\|\,,$$

und die Koerzivität von A_F folgt aus der Koerzivität von A. $\square$

Wir besprechen nun den unendlichdimensionalen Fall. Dieser wird durch Approximation auf den endlichdimensionalen Fall zurückgeführt. Für die Anwendung auf partielle Differentialgleichungen möchte man außerdem die Stetigkeitsanforderungen an A möglichst gering halten.

Definition 4.6 (Hemistetig) *Sei V normierter Raum. Ein Operator $A : V \to V^*$ heißt hemistetig, wenn für alle $u, v, w \in V$ die Abbildung*

$$t \mapsto \langle A(u + tv), w \rangle \tag{4.9}$$

stetig ist auf $[0, 1]$.

Lemma 4.7 *Sei V Banachraum, $A : V \to V^*$. Dann ist A monoton genau dann, wenn für alle $u, v \in V$ die Abbildung*

$$t \mapsto \langle A(u + tv), v \rangle \tag{4.10}$$

monoton wachsend ist auf $[0, 1]$.

Beweis: Übung.

Satz 4.8 *Sei V Banachraum, $A : V \to V^*$ monoton. Dann ist A lokal beschränkt, d.h. zu jedem $u \in V$ gibt es eine Umgebung U von u, so daß $A(U)$ beschränkt ist in V^*.*

Beweis: Ist A nicht lokal beschränkt, so gibt es ein $u \in V$ und eine Folge (u_n) in V mit

$$u_n \to u\,, \quad \|Au_n\| \to \infty\,. \tag{4.11}$$

Wir definieren

$$c_n = 1 + \|Au_n\|\,\|u_n - u\|\,. \tag{4.12}$$

Wir wollen zeigen, daß die Folge $c_n^{-1} Au_n$ beschränkt ist in V^*. Sei dazu $v \in V$ beliebig gewählt. Es gilt

$$0 \le \langle A(u + v) - A(u_n), u + v - u_n \rangle\,, \tag{4.13}$$

also

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_n} \langle A(u_n), v \rangle &\le \frac{1}{c_n} \left(\langle A(u_n), u_n - u \rangle + \langle A(u + v), u + v - u_n \rangle \right) \\ &\le 1 + \frac{1}{c_n} \|A(u + v)\|\,\|u + v - u_n\| \le M(v) \end{aligned} \tag{4.14}$$

mit einer von n unabhängigen Konstante $M(v)$. Führen wir dasselbe Argument mit $-v$ an der Stelle von v aus, so erhalten wir

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{1}{c_n} \langle Au_n, v \rangle \right| \le \max\{M(v), M(-v)\} < \infty\,. \tag{4.15}$$

Aus dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit (Satz von Banach-Steinhaus, siehe Funktionalanalysis) folgt

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{c_n} \|Au_n\| =: C < \infty\,, \tag{4.16}$$

also

$$\|Au_n\| \le Cc_n = C(1 + \|Au_n\|\,\|u - u_n\|)\,, \quad n \in \mathbb{N}\,, \tag{4.17}$$

also

$$(1 - C\|u - u_n\|)\|Au_n\| \le C\,, \quad n \in \mathbb{N}\,, \tag{4.18}$$

also $\|Au_n\| \le 2C$, falls $\|u - u_n\| \le 1/2C$, was ein Widerspruch zu (4.11) ist. □

Folgerung 4.9 *Sei V Banachraum, $A : V \to V^*$ monoton, (u_n) eine normkonvergente Folge. Dann ist die Folge (Au_n) beschränkt in V^*.*

Beweis: Folgt direkt aus Satz 4.8. $\square$

Folgerung 4.10 *Sei V Banachraum, $A : V \to V^*$ monoton, $K \subset V$ beschränkt, es gebe ein $C > 0$ mit*

$$\langle Au, u \rangle \le C \,, \quad \textit{für alle } u \in K. \tag{4.19}$$

Dann ist $A(K)$ beschränkt in V^*.

Beweis: Für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ gilt nach Satz 4.8, angewendet mit $u = 0$,

$$\sup_{\|v\| \le \varepsilon} \|Av\| =: c < \infty \,. \tag{4.20}$$

Für beliebiges $u \in K$ gilt dann wegen $0 \le \langle Au - Av, u - v \rangle$

$$\begin{aligned} \|Au\| &= \sup_{\|v\| \le 1} \langle Au, v \rangle = \sup_{\|v\| \le \varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} \langle Au, v \rangle \\ &\le \sup_{\|v\| \le \varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} \big(\langle Au, u \rangle + \langle Av, v \rangle - \langle Av, u \rangle \big) \\ &\le \frac{1}{\varepsilon} (C + c\varepsilon + cC_K) \,, \quad C_K := \sup_{u \in K} \|u\| \,. \end{aligned} \tag{4.21}$$

$\square$

Satz 4.11 *Sei V reflexiver Banachraum, $A : V \to V^*$ monoton. Dann sind äquivalent:*

(i) *A ist hemistetig.*

(ii) *Für alle $u \in V$ und $b \in V^*$ gilt: Aus*

$$\langle b - Av, u - v \rangle \ge 0 \,, \quad \textit{für alle } v \in V \tag{4.22}$$

folgt $Au = b$.

(iii) *Für alle $u \in V$ und $b \in V^*$ gilt: Ist (u_n) Folge in V mit*

$$u_n \rightharpoonup u \,, \quad Au_n \rightharpoonup b \,, \quad \limsup_{n \to \infty} \langle Au_n, u_n \rangle \le \langle b, u \rangle \,, \tag{4.23}$$

so folgt $Au = b$.

(iv) *A ist demistetig, d.h. für alle $u \in V$ gilt: Ist (u_n) Folge in V mit $u_n \to u$, so folgt $Au_n \rightharpoonup Au$.*

Die Aussage "(i)⇒(iii)" (oder eine Variante davon) wird als "Minty-Trick" bezeichnet.

Beweis: "(i)⇒(ii)": Seien $u \in V$, $b \in V^*$ so, daß (4.22) gilt. Mit $v = u - tw$ folgt dann

$$\langle b - A(u - tw), tw \rangle \ge 0 \,, \quad \forall\, w \in V \,,\, t > 0 \,, \tag{4.24}$$

also

$$\langle b - A(u - tw), w\rangle \geq 0\,, \quad \forall\, w \in V\,,\, t > 0\,. \tag{4.25}$$

Grenzübergang $t \downarrow 0$ ergibt wegen der Hemistetigkeit von A

$$\langle b - A(u), w\rangle \geq 0\,, \quad \forall\, w \in V\,. \tag{4.26}$$

Da w beliebig war, folgt $Au = b$.
"(ii)⇒(iii)": Sei (u_n) Folge, für die (4.23) gilt, sei $v \in V$ beliebig. Es ist dann

$$0 \leq \langle Au_n - Av, u_n - v\rangle = \langle Au_n, u_n\rangle - \langle Au_n, v\rangle - \langle Av, u_n - v\rangle\ , \tag{4.27}$$

also

$$\begin{aligned} 0 &\leq \limsup_{n\to\infty}(\langle Au_n, u_n\rangle - \langle Au_n, v\rangle - \langle Av, u_n - v\rangle) \\ &= \limsup_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n\rangle - \lim_{n\to\infty} \langle Au_n, v\rangle - \lim_{n\to\infty} \langle Av, u_n - v\rangle \\ &\leq \langle b, u\rangle - \langle b, v\rangle - \langle Av, u - v\rangle \\ &= \langle b - Av, u - v\rangle\ . \end{aligned} \tag{4.28}$$

Da v beliebig war, folgt $b = Au$ nach Voraussetzung (ii).
"(iii)⇒(iv)": Sei (u_n) Folge in V mit $u_n \to u$. Nach Folgerung 4.9 ist (Au_n) beschränkt in V^*. Sei (u_{n_k}) eine Teilfolge, so daß (Au_{n_k}) schwach in V^* konvergiert, eine solche existiert da beschränkte Mengen im reflexiven Raum schwach kompakt sind. Es gelte $Au_{n_k} \rightharpoonup b$. Da (u_{n_k}) in der Norm von V konvergiert, folgt

$$\lim_{k\to\infty} \langle Au_{n_k}, u_{n_k}\rangle = \langle b, u\rangle\ , \tag{4.29}$$

also $b = Au$ nach Voraussetzung (iii). Da also der Limes für jede solche schwach konvergente Teilfolge (Au_{n_k}) derselbe ist, nämlich Au, folgt $Au_n \rightharpoonup Au$ für die ganze Folge.
"(iv)⇒(i)": Seien $u, v, w \in V$, $t_n \to t$ in $[0, 1]$. Dann gilt $u + t_n v \to u + tv$ in V, also $A(u + t_n v) \rightharpoonup A(u + tv)$ in V^* nach Voraussetzung (iv), also

$$\lim_{n\to\infty} \langle A(u + t_n v), w\rangle = \langle A(u + tv), w\rangle\ . \tag{4.30}$$

Damit ist A hemistetig. □

Um eine Lösung von $Au = F$ im Unendlichdimensionalen zu erhalten, betrachten wir endlichdimensionale Approximationen.

Ein metrischer Raum X heißt separabel, wenn es eine abzählbare dichte Teilmenge M von X gibt. (Dicht heißt, dass $\overline{M} = X$.)

Satz 4.12 *Sei V ein separabler Banachraum mit* $\dim(V) = \infty$. *Dann gibt es eine Folge* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in V, so daß*

$$\dim(V_n) = n\,, \quad V_n := \operatorname{span}\{w_1, \ldots, w_n\}\,, \tag{4.31}$$

und

$$V = \operatorname{cl}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} V_k\right)\,. \tag{4.32}$$

Beweis: Sei $M = \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ Folge mit $\mathrm{cl}\,(M) = V$. Wir konstruieren daraus die Folge (w_n) in M, indem wir alle u_n weglassen, für die $u_n \in \mathrm{span}\,\{u_1, \dots, u_{n-1}\}$ gilt. Bei diesem Vorgehen bleiben unendlich viele Elemente w_n übrig; andernfalls wäre $\mathrm{span}\,(M)$ endlichdimensional und damit abgeschlossen, im Widerspruch zu $\overline{M} = V$. □

Wir betrachten nun die Gleichung

$$Au = F \tag{4.33}$$

in einem separablen Banachraum V mit $A : V \to V^*$ und $\in V^*$. Ein $u \in V$ löst (4.33) offenbar genau dann, wenn u Lösung der zugehörigen variationellen Formulierung

$$\langle Au, v\rangle = \langle F, v\rangle \ , \quad \text{für alle } v \in V, \tag{4.34}$$

ist. Wir betrachten eine endlichdimensionale Approximation von (4.34),

$$\langle Au_n, v\rangle = \langle F, v\rangle \ , \quad \text{für alle } v \in V_n, \tag{4.35}$$

wobei V_n ein Unterraum von V ist mit $\dim(V_n) = n$, und $u_n \in V_n$ gesucht wird. Ist weiterhin $\{w_1, \dots, w_n\}$ eine Basis von V_n, so ist $u_n \in V_n$ Lösung von (4.35) genau dann, wenn u_n Lösung ist von

$$\langle Au_n, w_k\rangle = \langle F, w_k\rangle \ , \quad 1 \le k \le n\,. \tag{4.36}$$

Die Gleichungen (4.36) heißen **Galerkin-Gleichungen**, das Verfahren, u_n als Näherung für die Lösung u von (4.33) zu wählen, heißt **Galerkin-Verfahren**.

Theorem 4.13 (Monotone Operatoren, Hauptsatz, Browder und Minty)
Sei V reflexiver separabler Banachraum, sei $A : V \to V^*$ monoton, hemistetig und koerziv. Dann hat die Gleichung

$$Au = F \tag{4.37}$$

für jedes $F \in V^*$ eine Lösung $u \in V$.

Beweis: Es genügt, den Fall $F = 0$ zu betrachten; andernfalls ersetzen wir A durch A_F mit $A_F u = Au - F$; mit A ist auch A_F monoton, hemistetig und koerziv (die Koerzivität von A_F folgt wie im Beweis von Satz 4.5). Sei gemäß Satz 4.12 eine Folge (w_n) in V gewählt mit

$$\dim(V_n) = n\,, \quad V_n := \mathrm{span}\,\{w_1, \dots, w_n\}\,, \quad V = \mathrm{cl}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} V_k\right)\,. \tag{4.38}$$

Wir wollen als erstes zeigen, daß für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Galerkin-Gleichungen

$$\langle Au_n, w_k\rangle = 0\,, \quad 1 \le k \le n\,, \tag{4.39}$$

eine Lösung $u_n \in V_n$ besitzen. Sei $j_n : \mathbb{R}^n \to V_n$ der durch

$$j_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k w_k \tag{4.40}$$

definierte lineare Isomorphismus, sei $A_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$(A_n x)_k = \langle A j_n(x), w_k \rangle \ , \quad 1 \le k \le n \, . \tag{4.41}$$

Da A nach Satz 4.11(iv) demistetig ist, sind alle $(A_n)_k$ und damit auch A_n stetig. Für $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\langle A_n x, x \rangle = \sum_{k=1}^n (A_n x)_k x_k = \sum_{k=1}^n \langle A j_n(x), w_k \rangle \, x_k = \langle A j_n(x), j_n(x) \rangle \ ,$$

und da $\|j_n(x)\| \to \infty$ falls $|x| \to \infty$, ist mit A auch A_n koerziv. Nach Satz 4.5 hat die Gleichung $A_n x = 0$ eine Lösung $x \in \mathbb{R}^n$, das heißt, $u_n = j(x) \in V_n$ ist eine Lösung der Galerkin-Gleichungen (4.39), oder äquivalent

$$\langle A u_n, v \rangle = 0 \, , \quad \text{für alle } v \in V_n. \tag{4.42}$$

Wegen $u_n \in V_n$ gilt

$$\langle A u_n, u_n \rangle = 0 \, . \tag{4.43}$$

Da A koerziv ist, ist die Folge (u_n) beschränkt in V. Folgerung 4.10 impliziert, daß $(A u_n)$ beschränkt ist in V^*. Aus (4.42) folgt

$$\lim_{n \to \infty} \langle A u_n, v \rangle = 0 \, , \quad \text{für alle } v \in \bigcup_{k=1}^\infty V_k \, . \tag{4.44}$$

Aus der Beschränktheit von $(A u_n)$ und aus (4.44) folgt $A u_n \rightharpoonup 0$ in V^* (siehe Übungsaufgabe). Sei nun (u_{n_k}) eine schwach konvergente Teilfolge von (u_n) mit $u_{n_k} \rightharpoonup u \in V$. Wir wenden Satz 4.11(iii) auf die Teilfolge (u_{n_k}) mit $b = 0$ an und erhalten $Au = 0$. □

Man kann zeigen, dass die Lösungsmenge von $Au = F$ konvex, abgeschlossen und beschränkt in V ist, also auch schwach kompakt (da V reflexiv ist).

Satz 4.14 *Seien die Voraussetzungen von Theorem 4.13 erfüllt, sei zusätzlich A streng monoton. Dann ist die Lösung $u \in V$ von $Au = F$ für jedes $F \in V^*$ eindeutig bestimmt, $A : V \to V^*$ ist bijektiv. Der inverse Operator $A^{-1} : V^* \to V$ ist ebenfalls streng monoton und hemistetig, und A^{-1} bildet beschränkte Mengen auf beschränkte Mengen ab.*

Beweis: Ist $Au = F = Av$, so ist $\langle Au - Av, u - v \rangle = 0$, also $u = v$ wegen der strengen Monotonie von A. Seien $F_1, F_2 \in V^*$, wir setzen $u_i = A^{-1} F_i$. Dann gilt $u_1 \neq u_2$ genau dann, wenn $F_1 \neq F_2$, und in diesem Fall ist

$$\left\langle F_1 - F_2, A^{-1} F_1 - A^{-1} F_2 \right\rangle = \langle A u_1 - A u_2, u_1 - u_2 \rangle > 0$$

wegen der strengen Monotonie von A. Zum Beweis der Hemistetigkeit von A^{-1} genügt es nach Satz 4.11 zu zeigen, daß für alle $F \in V^*$ und alle $u \in V$ gilt: Aus

$$\left\langle u - A^{-1} G, F - G \right\rangle \ge 0 \, , \quad \text{für alle } G \in V^*, \tag{4.45}$$

folgt $A^{-1} F = u$. Sei also (4.45) erfüllt, sei $G \in V^*$, dann gilt mit $v = A^{-1} G$

$$\langle u - v, F - Av \rangle \ge 0 \, . \tag{4.46}$$

Da A hemistetig und $A^{-1}(V^*) = V$, folgt $F = Au$, indem wir Satz 4.11 auf A anwenden. Es bleibt die Beschränktheit von A^{-1} zu zeigen. Sei $F \in V^*$ mit

$$\|F\| \le C\,, \quad u = A^{-1}F\,. \tag{4.47}$$

Es folgt

$$\frac{\langle Au, u\rangle}{\|u\|} = \frac{\langle F, u\rangle}{\|u\|} \le \|F\| \le C\,. \tag{4.48}$$

Wäre $\{u : \|Au\| \le C\}$ nicht beschränkt, so gäbe es eine Folge (u_n) in V mit $\|u_n\| \to \infty$, aber

$$\frac{\langle Au_n, u_n\rangle}{\|u_n\|} \le C$$

im Widerspruch zur Koerzivität von A. $\square$

Wir diskutieren nun die Konvergenz des Galerkin-Verfahrens. Sei V_n wie im Beweis von Theorem 4.13 eine aufsteigende Folge von Unterräumen von V mit

$$V_n = \operatorname{span}\{w_1, \dots, w_n\}\,, \quad \dim(V_n) = n\,, \quad \operatorname{cl}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} V_k\right) = V\,. \tag{4.49}$$

Wir betrachten nochmals das Problem: Gegeben $F \in V^*$, gesucht $u_n \in V_n$ mit

$$\langle Au_n, v\rangle = \langle F, v\rangle\;, \quad \text{für alle } v \in V_n. \tag{4.50}$$

Satz 4.15 *Seien die Voraussetzungen von Theorem 4.13 erfüllt, sei zusätzlich A streng monoton, sei $F \in V^*$. Dann gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ genau eine Lösung u_n von (4.50), und es gilt $u_n \rightharpoonup u$ in V, wobei u die eindeutige Lösung von $Au = F$ ist. Ist A darüber hinaus gleichmäßig monoton, d.h. es gibt eine Konstante c mit*

$$\langle Av - Aw, v - w\rangle \ge c\|v - w\|^2\,, \quad \textit{für alle } v, w \in V, \tag{4.51}$$

so gilt $u_n \to u$ in V.

Beweis: Die Existenz von u_n folgt aus Theorem 4.13. Sind $u_n, v_n \in V_n$ zwei Lösungen von (4.50), so gilt

$$\langle Au_n, v\rangle = \langle F, v\rangle = \langle Av_n, v\rangle\;, \quad \text{für alle } v \in V_n, \tag{4.52}$$

und mit $v = u_n - v_n$ folgt $\langle Au_n - Av_n, u_n - v_n\rangle = 0$, also $u_n = v_n$. Im Beweis von Theorem 4.13 wurde außerdem gezeigt, daß jeder Grenzwert $\tilde{u}$ einer schwach konvergenten Teilfolge (u_{n_k}) von (u_n) das Ausgangsproblem löst, also $A\tilde{u} = F$. Aus dem Eindeutigkeitssatz 4.14 folgt, daß $\tilde{u} = u$. Aus dem "Konvergenzprinzip" folgt also $u_n \rightharpoonup u$. Sei nun (4.51) erfüllt. Da $u_n \rightharpoonup u$, ist (u_n) beschränkt in V. Es gilt weiter

$$\langle Au_n, u_n\rangle = \langle F, u_n\rangle \le \|F\| \sup_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|\,, \tag{4.53}$$

also ist nach Folgerung 4.10 auch (Au_n) beschränkt in V^*. Es gilt

$$\langle Au_n - Au, v\rangle = 0\,, \quad \text{für alle } v \in V_n. \tag{4.54}$$

Wähle eine Folge $v_n \in V_n$ mit $v_n \to u$ in V. Dann gilt

$$\begin{aligned} 0 \le c\|u_n - u\|^2 &\le \langle Au_n - Au, u_n - u\rangle = \langle Au_n - Au, v_n - u\rangle \\ &\le (\|Au_n\| + \|Au\|)\,\|v_n - u\| \le C\|v_n - u\| \end{aligned} \tag{4.55}$$

mit einer von n unabhängigen Konstanten C, also folgt $u_n \to u$ aus $v_n \to u$. $\square$

Bemerkung: Die gleichmäßige Monotonie (4.51) impliziert die Koerzivität.

Wir betrachten das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}\,(a(x, \nabla u)) + a_0(x, u) = f\,, &\quad \text{in } \Omega, \\ u(x) = 0\,, &\quad \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{4.56}$$

eine leichte Verallgemeinerung von Problem (4.1). Ein Beispiel dafür ist der p-Laplace-Operator $a(x, \xi) = |\xi|^{p-2}\xi$ mit $p \ge 2$. ($p = 2$ ergibt den Laplace-Operator.) Die variationelle Formulierung ist

$$\int_\Omega \langle a(x, \nabla u(x)), \nabla v(x)\rangle\; dx + \int_\Omega a_0(x, u(x))v(x)\, dx = \int_\Omega f(x)v(x)\, dx\,, \quad \text{für alle } v \in V, \tag{4.57}$$

wobei V noch festzulegen ist. Wir nehmen an, dass a die Wachstumsbedingung

$$|a(x, \xi)| \le c_0(1 + |\xi|^{p-1}) \tag{4.58}$$

mit einem $p \in (1, \infty)$ und die Carathéodory-Bedingung

$$\begin{aligned} x \mapsto a(x, \xi) &\quad \text{ist messbar für alle } \xi \in \mathbb{R}^n \\ \xi \mapsto a(x, \xi) &\quad \text{ist stetig für fast alle } x \in \Omega \end{aligned} \tag{4.59}$$

erfüllt, dasselbe soll für a_0 an der Stelle von a gelten. Die Carathéodory-Bedingung impliziert, dass die Funktion $x \mapsto a(x, \nabla u(x))$ messbar ist, falls ∇u messbar ist. Aus der Wachstumsbedingung (4.58) folgt, dass

$$\begin{aligned} \int_\Omega \langle a(x, \nabla u(x)), \nabla v(x)\rangle\; dx &\le c_0 \int_\Omega (1 + |\nabla u(x)|^{p-1})|\nabla v(x)|\, dx \\ &\le c_0(|\Omega|^{1/q} + \|\,|\nabla u|^{p-1}\|_q)\|\nabla v\|_p \end{aligned} \tag{4.60}$$

gilt mit $1/p + 1/q = 1$, nach der Hölderschen Ungleichung. Wegen $q(p-1) = p$ gilt

$$\|\,|\nabla u|^{p-1}\|_q = (\|\nabla u\|_p)^{q/p}\,.$$

Es folgt, dass der reflexive und separable Banachraum

$$V = W_0^{1,p}(\Omega)$$

der geeignete Raum für die variationelle Formulierung (4.57) ist. Durch

$$\langle Au, v\rangle = \int_\Omega \langle a(x, \nabla u(x)), \nabla v(x)\rangle\; dx + \int_\Omega a_0(x, u(x))v(x)\, dx \tag{4.61}$$

wird nämlich nach obigen Überlegungen (und analogen für a_0) ein Operator $A : V \to V^*$ definiert. Dieser Operator ist stetig (siehe Übung). Er ist außerdem monoton, falls wir verlangen, dass

$$\langle a(x,w) - a(x,z), w - z\rangle \geq 0\,, \quad \text{für alle } w, z \in \mathbb{R}^n,\ x \in \Omega \tag{4.62}$$

gilt, und dasselbe für a_0 anstelle von a. Gilt zusätzlich

$$\langle a(x,w) - a(x,z), w - z\rangle \geq c|w - z|^2\,, \quad \text{für alle } w, z \in \mathbb{R}^n,\ x \in \Omega \tag{4.63}$$

für ein $c > 0$, so ist A gleichmäßig monoton im Sinne von (4.51). (Für a_0 brauchen wir (4.63) nicht zu verlangen, das folgt aus der Poincaré-Ungleichung in V.) Aus Satz 4.15 folgt nun:

Satz 4.16 *Seien (4.58), (4.59) und (4.62) erfüllt. Dann hat das quasilineare Randwertproblem (4.56) eine eindeutige variationelle Lösung in $V = W_0^{1,p}(\Omega)$ für jede rechte Seite $F \in V^*$, und die Galerkin-Näherungen u_n konvergieren gegen u in der Norm von V.* $\square$

5 Das Maximumprinzip

Wir wissen bereits: Ist $u : \Omega \to \mathbb{R}$ eine auf einem beschränkten Gebiet Ω definierte subharmonische Funktion, also

$$-\Delta u \le 0 \quad \text{in } \Omega, \tag{5.1}$$

so ist entweder u konstant, oder es gilt

$$u(x) < \max_{y \in \partial\Omega} u(y) \,, \quad \text{für alle } x \in \Omega. \tag{5.2}$$

Dieser Sachverhalt bleibt richtig, wenn man den Laplace-Operator in (5.1) durch einen allgemeinen elliptischen Operator 2. Ordnung ersetzt, und er läßt sich auch auf zugehörige parabolische Gleichungen, etwa

$$\partial_t u - \Delta u = 0 \tag{5.3}$$

übertragen. Wir betrachten einen Operator L der Form

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_j\partial_i u + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\partial_i u + c(x)u \,, \tag{5.4}$$

der im Kontrast zu Kapitel 8, Teil 1 nun nicht in Divergenzform geschrieben ist. Schreibt man (5.4) in Divergenzform um, so erhält man

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_j(a_{ij}(x)\partial_i u) + \sum_{i=1}^{n} \left(b_i(x) + \sum_{j=1}^{n} \partial_j a_{ij}(x) \right) \partial_i u + c(x)u \,.$$

Voraussetzung 5.1 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, seien $a_{ij}, b_i, c \in C(\overline{\Omega})$ für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$.* □

Erinnerung: Der Differentialoperator L aus (5.4) heißt **gleichmäßig elliptisch**, wenn es ein $a_* > 0$ gibt mit

$$\xi^T A(x)\xi = \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i a_{ij}(x)\xi_j \ge a_*|\xi|^2 \,, \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^n,\ x \in \Omega. \tag{5.5}$$

Eine etwas schwächere Forderung, die vor allem zur Behandlung der parabolischen Gleichung benötigt wird, ist

$$\xi^T A(x)\xi \ge 0 \,, \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^n,\ x \in \Omega, \tag{5.6}$$

$$\text{es gibt ein } \xi \in \mathbb{R}^n \text{ mit } \xi^T A(x)\xi > 0 \text{ für alle } x \in \overline{\Omega}. \tag{5.7}$$

Hat $u \in C^2(\Omega)$ in $x \in \Omega$ ein Maximum, so gilt

$$\nabla u(x) = 0 \,, \quad D^2 u(x) \le 0 \,, \tag{5.8}$$

das heißt, die Hesse-Matrix $D^2 u(x)$ ist negativ semidefinit. Hieraus folgt sofort

$$-\Delta u(x) \ge 0 \,, \tag{5.9}$$

und man kann also schließen: Gilt $-\Delta u < 0$ in Ω, so kann u kein Maximum in Ω haben.

Lemma 5.2 *Seien $B, C \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ positiv semidefinit, sei C symmetrisch. Dann gilt*

$$\mathrm{spur}\,(BC) \geq 0\,. \tag{5.10}$$

Beweis: Man betrachtet zuerst den Fall, dass C eine Diagonalmatrix ist, und führt den allgemeinen Fall darauf zurück. Details siehe Übung. □

Satz 5.3 (Schwaches Maximumprinzip, elliptischer Operator)
Es gelte Voraussetzung (5.1) sowie (5.6), (5.7). Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ mit

$$Lu \leq 0 \quad \textit{in } \Omega, \tag{5.11}$$

das heißt, $(Lu)(x) \leq 0$ für alle $x \in \Omega$. Es gelte außerdem $c = 0$. Dann gilt

$$\max_{y \in \overline{\Omega}} u(y) = \max_{y \in \partial\Omega} u(y)\,. \tag{5.12}$$

Beweis: Wir betrachten zunächst den Fall, dass $Lu < 0$ in Ω gilt. Wäre $x \in \Omega$ Maximalstelle von u, so wäre $\nabla u(x) = 0$ und

$$(Lu)(x) = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_j\partial_i u(x) = -\mathrm{spur}\,(A(x)D^2u(x)) \geq 0\,,$$

nach Lemma 5.2, da $-D^2u(x)$ positiv semidefinit und symmetrisch ist. Es folgt (5.12) im Falle $Lu < 0$. Sei nun $Lu \leq 0$ in Ω. Für $\varepsilon > 0$ definieren wir

$$u_\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon e^{\gamma\langle x,\xi\rangle}\,, \tag{5.13}$$

wobei ξ gemäß (5.7) gewählt und $\gamma > 0$ später festgelegt wird. Differenzieren liefert

$$\begin{aligned}\partial_i u_\varepsilon(x) &= \partial_i u(x) + \varepsilon\gamma\xi_i e^{\gamma\langle x,\xi\rangle}\,,\\ \partial_j\partial_i u_\varepsilon(x) &= \partial_j\partial_i u(x) + \varepsilon\gamma^2\xi_i\xi_j e^{\gamma\langle x,\xi\rangle}\,.\end{aligned}$$

Es folgt (beachte $c = 0$)

$$(Lu_\varepsilon)(x) = (Lu)(x) - \varepsilon\gamma e^{\gamma\langle x,\xi\rangle}\left[\gamma\xi^T A(x)\xi - \langle\xi, b(x)\rangle\right]. \tag{5.14}$$

Wir wählen γ so groß, dass die eckige Klammer einen Wert > 0 hat für alle $x \in \Omega$; dies ist möglich nach (5.7), da $\overline{\Omega}$ kompakt und A und b stetig sind. Man beachte außerdem, dass γ nicht von ε abhängt. Es folgt

$$Lu_\varepsilon < 0 \quad \text{in } \Omega, \text{ für alle } \varepsilon > 0,$$

also nach dem ersten Teil des Beweises

$$\max_{y \in \overline{\Omega}} u_\varepsilon(y) = \max_{y \in \partial\Omega} u_\varepsilon(y)\,.$$

Da u_ε gleichmäßig gegen u konvergiert, erhalten wir (5.12). □

Ersetzt man in Satz 5.3 die Voraussetzung (5.11) durch

$$Lu \geq 0 \quad \text{in } \Omega, \tag{5.15}$$

so können wir den Satz auf $-u$ anwenden und erhalten

$$\min_{y \in \overline{\Omega}} u(y) = \min_{y \in \partial\Omega} u(y)\,. \tag{5.16}$$

Ist also u eine klassische Lösung der elliptischen Gleichung

$$Lu = 0 \tag{5.17}$$

in Ω, so nimmt sie im Falle $c = 0$ das Maximum und das Minimum auf dem Rand von Ω an.

Eine Konsequenz des Maximumprinzips ist beispielsweise: Ist u eine Lösung von $Lu = 0$ in Ω und wissen wir, dass $u \geq 0$ auf $\partial\Omega$, so folgt auch $u \geq 0$ in Ω.

Im Falle $c \neq 0$ gilt das Maximumprinzip im allgemeinen nicht. Beispiel: $\Omega = (-1, 1) \times (-1, 1) \subset \mathbb{R}^2$,

$$u(x_1, x_2) = \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2) \tag{5.18}$$

erfüllt

$$-\Delta u - 2\pi^2 u = 0$$

in Ω, aber $u = 0$ auf $\partial\Omega$. Ist aber der Vorfaktor von u nichtnegativ, so ergibt sich das Maximumprinzip in einer etwas schwächeren Form. Wir schreiben

$$u^+ = \max\{u, 0\}\,. \tag{5.19}$$

Satz 5.4 *Es gelte Voraussetzung 5.1 sowie (5.6), (5.7). Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ mit*

$$Lu \leq 0 \quad \text{in } \Omega. \tag{5.20}$$

Es gelte außerdem $c \geq 0$. Dann gilt

$$\max_{y \in \overline{\Omega}} u(y) \leq \max_{y \in \partial\Omega} u^+(y)\,. \tag{5.21}$$

Gilt statt (5.20)

$$Lu = 0 \quad \text{in } \Omega, \tag{5.22}$$

so folgt

$$\max_{y \in \overline{\Omega}} |u(y)| = \max_{y \in \partial\Omega} |u(y)|\,. \tag{5.23}$$

Beweis: Wir definieren

$$\Omega^+ = \Omega \cap \{x : u(x) > 0\}\,.$$

Ist $u \leq 0$ in Ω, so gilt (5.21) offensichtlich, sei also $\Omega^+ \neq \emptyset$. Es gilt

$$Lu - c(x)u \leq Lu \leq 0 \quad \text{in } \Omega^+.$$

Wir wenden Satz 5.3 an auf $L - c$ und erhalten

$$0 < \max_{y \in \overline{\Omega^+}} u(y) = \max_{y \in \partial\Omega^+} u(y) \,. \tag{5.24}$$

Da $u = 0$ auf $\partial\Omega^+ \cap \Omega$, folgt $\emptyset \neq \partial\Omega^+ \setminus (\partial\Omega^+ \cap \partial\Omega) = \partial\Omega^+ \cap \partial\Omega$, und

$$\max_{y \in \partial\Omega^+} u(y) = \max_{y \in \partial\Omega \cap \partial\Omega^+} u(y) \leq \max_{y \in \partial\Omega} u(y) \,.$$

Gilt (5.22), so folgt durch Anwendung auf $-u$ mit $u^- = (-u)^+ = -\min\{u, 0\}$

$$\min_{y \in \overline{\Omega}} u(y) \geq -\max_{y \in \partial\Omega} u^-(y) \,, \tag{5.25}$$

und daraus (5.23). □

Satz 5.4 besagt: Hat u ein positives Maximum, so wird dieses auch auf dem Rand angenommen. Ist das Maximum negativ, so muss das nicht der Fall sein. Beispiel: $\Omega = (-2, 2) \times (-2, 2)$,

$$u(x_1, x_2) = -\left(e^{x_1} + e^{-x_1} + e^{x_2} + e^{-x_2}\right) \,. \tag{5.26}$$

Das Maximum liegt in $(0, 0)$, $u(0, 0) = -4$, aber auf $\partial\Omega$ gilt $u \leq -e^2$. Das Betragsmaximum von u wird in den vier Ecken von Ω angenommen.

Wir betrachten das Randwertproblem

$$Lu = f \,, \quad \text{in } \Omega, \tag{5.27}$$

$$u = g \,, \quad \text{auf } \partial\Omega, \tag{5.28}$$

wobei wir f und g als stetig voraussetzen.

Folgerung 5.5 *Es gelte Voraussetzung (5.1) sowie (5.6), (5.7), sei $c \geq 0$. Seien $u_i \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ Lösungen von (5.27), (5.28) mit $f = f_i$, $g = g_i$, $i = 1, 2$. Gilt*

$$f_1 \leq f_2 \quad \text{in } \Omega, \quad g_1 \leq g_2 \quad \text{in } \partial\Omega, \tag{5.29}$$

so folgt

$$u_1 \leq u_2 \quad \text{in } \Omega. \tag{5.30}$$

Beweis: Wir wenden Satz 5.4 an auf $u = u_1 - u_2$. □

Hieraus folgt insbesondere die Eindeutigkeit der klassischen Lösung des Randwertproblems (5.27), (5.28) für einen gleichmäßig elliptischen Operator L in einer beliebigen offenen und beschränkten Menge Ω.

Wir behandeln nun das starke Maximumprinzip. Wesentliches Hilfsmittel zu dessen Beweis ist das Lemma von Hopf, welches sich mit der folgenden Situation befasst. Sei x_0 eine strikte Maximalstelle am Rand,

$$x_0 \in \partial\Omega \,, \quad u(x_0) > u(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega, \tag{5.31}$$

der Rand sei nahe x_0 in folgendem Sinne regulär,

$$\text{es gibt ein } R > 0 \text{ und ein } y \in \Omega \text{ mit } B(y; R) \subset \Omega,\ x_0 \in \partial B(y; R). \tag{5.32}$$

Die äußere Normale in x_0 ist dann gegeben (bzw. definiert) durch

$$\nu(x_0) = \frac{x_0 - y}{|x_0 - y|}\,. \tag{5.33}$$

Ist $u \in C^1(\overline{\Omega})$, so folgt aus (5.31) unmittelbar, dass

$$\partial_\nu u(x_0) \geq 0\,.$$

Das Lemma von Hopf besagt nun, dass hier sogar die strikte Ungleichung gelten muss.

Lemma 5.6 (Hopf)
Seien Voraussetzung 5.1 und (5.6) erfüllt, es gelte (5.7) mit $\xi = \nu(x_0)$ sowie (5.32). Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ mit (5.31) und

$$Lu \leq 0 \quad in\ \Omega. \tag{5.34}$$

Es liege einer der folgenden drei Fälle vor:

1. $c = 0$,
2. $c \geq 0$, $u(x_0) \geq 0$,
3. $u(x_0) = 0$.

Dann gilt

$$\partial_\nu u(x_0) > 0\,. \tag{5.35}$$

Beweis: Wir definieren

$$v(x) = e^{-\gamma|x-y|^2} - e^{-\gamma R^2}\,. \tag{5.36}$$

Es ist

$$v \geq 0 \quad \text{in } B(y;R), \quad v = 0 \quad \text{auf } \partial B(y;R), \tag{5.37}$$

$$\partial_i v(x) = -2\gamma(x_i - y_i)e^{-\gamma|x-y|^2}\,. \tag{5.38}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}(Lv)(x) = &- \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\big[4\gamma^2(x_i-y_i)(x_j-y_j) - 2\gamma\delta_{ij}\big]e^{-\gamma|x-y|^2} \\ &+ \sum_{i=1}^n b_i(x)(-2)\gamma(x_i-y_i)e^{-\gamma|x-y|^2} + c(x)v(x) \\ = &-e^{-\gamma|x-y|^2}\big[4\gamma^2(x-y)^T A(x)(x-y) - 2\gamma\,\mathrm{spur}\,(A(x)) + 2\gamma\,\langle b(x), x-y\rangle - c(x)\big] \\ &- c(x)e^{-\gamma R^2}\,.\end{aligned}$$

Wir betrachten nun eine Kugel $B(x_0;\rho)$ um x_0 und wählen $\rho > 0$ so klein, dass

$$(x-y)^T A(x)(x-y) > 0\,, \quad \text{für alle } x \in K(x_0;\rho), \tag{5.39}$$

das ist möglich wegen (5.33), da $\nu(x_0)^T A(x)\nu(x_0) > 0$. Wir definieren

$$U = B(x_0; \rho) \cap B(y; R) \tag{5.40}$$

und wählen $\gamma > 0$ so groß, dass

$$Lv \leq 0 \quad \text{in } U. \tag{5.41}$$

Wir setzen

$$u_\varepsilon(x) = u(x) - u(x_0) + \varepsilon v(x)\,, \quad \varepsilon > 0\,. \tag{5.42}$$

Es gilt dann für alle $x \in U$

$$(Lu_\varepsilon)(x) = (Lu)(x) - c(x)u(x_0) + \varepsilon(Lv)(x) \leq -c(x)u(x_0) \leq 0\,. \tag{5.43}$$

Es gilt weiter

$$u_\varepsilon \leq 0 \quad \text{auf } \partial U \cap \partial B(y; R), \text{ da dort } v = 0. \tag{5.44}$$

Wir wählen $\varepsilon > 0$ so klein, dass

$$u_\varepsilon \leq 0 \quad \text{auf } \partial U \cap \partial B(x_0; \rho), \tag{5.45}$$

das ist möglich, da $\partial U \cap \partial B(x_0; \rho)$ kompakt ist und dort $u < u(x_0)$ gilt.

Sei nun $c \geq 0$ (Fälle 1 und 2 der Behauptung). Wir wenden das schwache Maximumprinzip (Satz 5.4) auf u_ε in U an und erhalten

$$u_\varepsilon \leq 0 \quad \text{in } U. \tag{5.46}$$

Da $u_\varepsilon(x_0) = 0$, folgt

$$0 \leq \partial_\nu u_\varepsilon(x_0) = \partial_\nu u(x_0) + \varepsilon \partial_\nu v(x_0)\,.$$

Nun ist

$$\partial_\nu v(x_0) = -2\gamma \langle x_0 - y, \nu(x_0)\rangle\, e^{-\gamma|x_0-y|^2} = -2\gamma R e^{-\gamma R^2} < 0\,,$$

also

$$\partial_\nu u(x_0) \geq -\varepsilon \partial_\nu v(x_0) > 0\,.$$

Schließlich betrachten wir den Fall $u(x_0) = 0$. Es ist dann $u < 0$ in Ω. Wir setzen $d(x) = \min\{c(x), 0\}$, dann ist $d(x) \leq 0$,

$$(L - d)u = Lu - d(x)u \leq Lu \leq 0\,,$$

sowie $c - d = c^+ \geq 0$,

$$(L - d)u = -\mathrm{spur}\,(AD^2u) + \langle b, \nabla u\rangle + c^+ u\,.$$

Wir können also den bereits bewiesenen Fall 2 anwenden und erhalten die Behauptung. □

Satz 5.7 *Sei Voraussetzung 5.1 erfüllt, sei L gleichmäßig elliptisch, sei Ω außerdem zusammenhängend. Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, es gelte*

$$Lu \leq 0 \quad \text{in } \Omega. \tag{5.47}$$

Sei u nicht konstant. Ist $c = 0$, so kann u kein Maximum in Ω haben. Ist $c \geq 0$, so kann u kein nichtnegatives Maximum in Ω haben.

Beweis: Wir nehmen an, es gebe ein $x \in \Omega$ mit

$$u(x) = \max_{y \in \Omega} u(y) =: M\,, \tag{5.48}$$

und sei $M \geq 0$ falls $c \neq 0$. Da u nicht konstant ist, ist

$$\Omega^- = \Omega \cap \{u < M\} \neq \emptyset\,.$$

Wir setzen

$$\Omega^M = \Omega \cap \{u = M\} = \Omega \setminus \Omega^-\,.$$

Ω^- ist offen. Ω^M ist nicht offen in Ω, da andernfalls Ω disjunkte Vereinigung zweier offener Mengen und also nicht zusammenhängend wäre. Sei $\tilde{x} \in \Omega^M \cap \partial\Omega^-$, dann gibt es (in der Nähe von $\tilde{x}$) ein $y \in \Omega^-$ mit

$$\operatorname{dist}(y, \Omega^M) < \operatorname{dist}(y, \partial\Omega)\,.$$

Sei $r > 0$ die größte Zahl mit $B(y,r) \subset \Omega^-$, dann gibt es ein $x_0 \in \partial B(y,r)$ mit $u(x_0) = M$ und also auch $\nabla u(x_0) = 0$. Aus dem Lemma von Hopf, angewandt in $B(y,r)$, folgt aber in beiden Fällen ($c = 0$ oder $c \geq 0$, $M \geq 0$), dass $\nabla u(x_0) \neq 0$ gilt, ein Widerspruch. $\square$

Folgerung 5.8 (Starkes Maximumprinzip, elliptischer Operator)
Unter den Voraussetzungen von Satz 5.7 gilt

$$u(x) < \max_{y \in \partial\Omega} u(y)\,, \quad \text{für alle } x \in \Omega, \tag{5.49}$$

falls $c = 0$ gilt, oder falls $c \geq 0$ gilt und das Maximum auf der rechten Seite von (5.49) nichtnegativ ist.

Beweis: Folgt aus dem schwachen Maximumprinzip (Satz 5.3) und aus Satz 5.7. $\square$

Wir bemerken, dass Satz 5.7 auch gilt, wenn Ω unbeschränkt ist (die Beschränktheit wurde im Beweis nicht verwendet). Allerdings gilt dann i.a. das schwache Maximumprinzip nicht, so dass eine Abschätzung der Werte von u in Ω gegen die Randwerte nicht möglich ist.

Wir betrachten nun einen Operator der Form

$$\partial_t + L\,,$$

angewendet auf Funktionen "$u = u(x,t)$", mit

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)\partial_j\partial_i u + \sum_{i=1}^n b_i(x,t)\partial_i u + c(x,t)u\,, \tag{5.50}$$

Voraussetzung 5.9 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, sei $T > 0$. Wir setzen*

$$\Omega_T = \Omega \times (0,T]\,, \tag{5.51}$$

und nennen

$$\Sigma = (\partial\Omega \times [0,T]) \cup (\Omega \times \{0\}) \tag{5.52}$$

den parabolischen Rand von Ω_T. Wir nehmen an, dass $a_{ij}, b_i, c \in C(\overline{\Omega_T})$ für alle $i,j \in \{1,\ldots,n\}$. $\square$

Definition 5.10 (Gleichmäßig parabolischer Operator)
Der Operator $\partial_t + L$ mit L aus (5.50) heißt gleichmäßig parabolisch in Ω_T, wenn es ein $a_* > 0$ gibt mit

$$\xi^T A(x,t)\xi = \sum_{i,j=1}^n \xi_i a_{ij}(x,t)\xi_j \geq a_*|\xi|^2\,, \quad \textit{für alle } \xi \in \mathbb{R}^n,\ (x,t) \in \Omega_T. \tag{5.53}$$

□

Satz 5.11 (Schwaches Maximumprinzip, parabolischer Operator)
Es gelte Voraussetzung 5.9, sei $\partial_t + L$ gleichmäßig parabolisch in Ω_T. Sei $u \in C^2(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega_T})$, sei

$$\partial_t u + Lu \leq 0 \quad \textit{in } \Omega_T. \tag{5.54}$$

Im Fall $c = 0$ gilt dann

$$\max_{(x,t)\in\overline{\Omega_T}} u(x,t) = \max_{(x,t)\in\Sigma} u(x,t)\,, \tag{5.55}$$

im Fall $c \geq 0$ gilt

$$\max_{(x,t)\in\overline{\Omega_T}} u(x,t) \leq \max_{(x,t)\in\Sigma} u^+(x,t)\,. \tag{5.56}$$

Beweis: Sei

$$M = \max_{(x,t)\in\overline{\Omega_T}} u(x,t)\,.$$

Wir wenden das schwache Maximumprinzip 5.3 bzw. 5.4 auf $\partial_t + L$ in $\Omega \times (0,T)$ an und erhalten

$$M = \max_{(x,t)\in\partial\Omega_T} u(x,t) \quad \text{bzw.} \quad M \leq \max_{(x,t)\in\partial\Omega_T} u^+(x,t)\,. \tag{5.57}$$

Wir nehmen nun an, es gebe ein $x \in \Omega$ mit

$$u(x,T) = M\,. \tag{5.58}$$

Dann gilt

$$\partial_t u(x,T) \geq 0\,, \quad \nabla_x u(x,T) = 0\,, \quad D_x^2 u(x,T) \leq 0\,,$$

sowie nach Lemma 5.2

$$-\text{spur}\,(A(x,T)D_x^2 u(x,T)) \geq 0\,.$$

Insgesamt ergibt sich, falls $c = 0$, oder falls $c \geq 0$ und $M \geq 0$,

$$\partial_t u(x,T) + Lu(x,T) \geq 0\,. \tag{5.59}$$

Im Spezialfall

$$\partial_t u + Lu < 0 \quad \text{in } \Omega_T, \tag{5.60}$$

von (5.54) kann es also ein $x \in \Omega$ mit $u(x,T) = M$ nicht geben, und es folgen (5.55) bzw. (5.56). Den allgemeinen Fall führen wir auf (5.60) zurück, indem wir setzen

$$u_\varepsilon(x,t) = u(x,t) - \varepsilon t\,, \quad \varepsilon > 0\,.$$

Es gilt

$$((\partial_t + L)u_\varepsilon)(x,t) \leq -\varepsilon - \varepsilon t c(x,t) < 0 \quad \text{in } \Omega_t,$$

also folgen (5.55) bzw. (5.56) für u_ε statt u, und für u durch Grenzübergang $\varepsilon \to 0$. □

Satz 5.12 (Starkes Maximumprinzip, parabolischer Operator)
Es gelte Voraussetzung 5.9, sei Ω zusammenhängend, sei $\partial_t + L$ gleichmäßig parabolisch in Ω_T. Sei $u \in C^2(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega_T})$, sei

$$\partial_t u + Lu \leq 0 \quad \text{in } \Omega_T. \tag{5.61}$$

Es gebe ein $(x_0, t_0) \in \Omega_T$ mit

$$u(x_0, t_0) = \max_{(x,t)\in\Omega_T} u(x,t) =: M\,. \tag{5.62}$$

Es liege einer der folgenden drei Fälle vor:

1. $c = 0$,
2. $c \geq 0$, $u(x_0, t_0) \geq 0$,
3. $u(x_0, t_0) = 0$.

Dann ist u konstant in $\overline{\Omega_{t_0}}$.

Wir zerlegen den Beweis in mehrere Lemmata.

Lemma 5.13 *Es gelten die Voraussetzungen von Satz 5.12. Sei $B_0 = B((x,t);r)$ eine offene Kugel in Ω_T, es gelte $u < M$ in B_0. Dann gilt auch $u < M$ auf ∂B_0 außer möglicherweise in $(x, t+r)$ und $(x, t-r)$.*

Beweis: In allen anderen Randpunkten (ξ, τ) von B_0 hat die äußere Normale die Form

$$\nu(\xi, \tau) = (\nu_x, \nu_t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}\,, \quad \nu_x \neq 0\,.$$

Wir nehmen an, dass $u(\xi, \tau) = M$. Wir wenden das Lemma von Hopf (Lemma 5.6) auf den Operator $\partial_t + L$ in B_0 an. Da L gleichmäßig elliptisch ist, sind in (ξ, τ) die Voraussetzungen von 5.6 erfüllt, also $\partial_\nu u(\xi, \tau) \neq 0$ im Widerspruch zur Maximaleigenschaft von (ξ, τ). □

Lemma 5.14 *Es gelten die Voraussetzungen von Satz 5.12. Sei $t \in (0, T)$, es gebe ein $\tilde{x} \in \Omega$ mit $u(\tilde{x}, t) < M$. Dann gilt $u(x,t) < M$ für alle $x \in \Omega$.*

Beweis: Wir nehmen an $u(x_1, t) = M$ für ein $x_1 \in \Omega$. Da Ω zusammenhängend ist, können wir x_1 und einen weiteren Punkt $x_2 \in \Omega$ mit $u(x_2, t) < M$ so wählen, dass $u(x,t) < M$ für alle Punkte x (bis auf x_1) auf der Verbindungsstrecke L von x_1 nach x_2 gilt, und dass $B(L; \delta) \subset \Omega$ für ein $\delta > 0$. Sei

$$x(\varepsilon) = x_1 + \varepsilon \frac{x_2 - x_1}{|x_2 - x_1|}\,, \quad d(\varepsilon) = \operatorname{dist}(x(\varepsilon), \{u = M\})\,.$$

Für $\varepsilon < \delta$ wählen wir $r(\varepsilon)$ so, dass $u < M$ in $B_\varepsilon = B((x(\varepsilon), t); r(\varepsilon))$ und u auf ∂B_ε den Wert M annimmt. Nach Lemma 5.13 kann der Wert M nur in den Punkten $(x(\varepsilon), t \pm d(\varepsilon))$ angenommen werden. Für $0 < \varepsilon, \varepsilon' < \delta$ folgt dann (Pythagoras)

$$\begin{aligned} d(\varepsilon')^2 &\leq (\varepsilon - \varepsilon')^2 + d(\varepsilon)^2 \\ d(\varepsilon)^2 &\leq (\varepsilon - \varepsilon')^2 + d(\varepsilon')^2\,. \end{aligned}$$

Hieraus folgt
$$|d(\varepsilon')^2 - d(\varepsilon)^2| \le (\varepsilon' - \varepsilon)^2 \,,$$
also
$$\frac{|d(\varepsilon') - d(\varepsilon)|}{\varepsilon' - \varepsilon} \le \frac{(\varepsilon' - \varepsilon)}{d(\varepsilon') + d(\varepsilon)} \,.$$
Grenzübergang $\varepsilon' \to \varepsilon$ liefert $d'(\varepsilon) = 0$ für alle $\varepsilon \in (0, \delta)$, aber andererseits gilt $d > 0$ und $d(\varepsilon) \to 0$ für $\varepsilon \to 0$, ein Widerspruch. □

Lemma 5.15 *Es gelten die Voraussetzungen von Satz 5.12. Sei $0 \le t_2 < t_1 \le T$, es gelte $u < M$ in $\Omega \times (t_2, t_1)$. Dann gilt $u < M$ in $\Omega \times \{t_1\}$.*

Beweis: Wir nehmen an, $u(x_1, t_1) = M$ für ein $x_1 \in \Omega$. Wir definieren
$$v(x,t) = e^{-|x-x_1|^2 - \alpha(t-t_1)} - 1 \,. \tag{5.63}$$
Es gilt
$$\begin{aligned}(\partial_t + L)(v) = e^{-|x-x_1|^2-\alpha(t-t_1)}\big[-\alpha - 4(x-x_1)^T A(x,t)(x-x_1) \\ + 2\,\mathrm{spur}\,(A(x,t)) - 2\,\langle b(x,t), x - x_1\rangle + c(x,t)\big] - c(x,t) \,.\end{aligned} \tag{5.64}$$
Wir wählen $\alpha > 0$ so groß, dass
$$(\partial_t + L)v < 0 \quad \text{in } V = B((x_1,t_1);\rho) \cap \{t \le t_1\} \tag{5.65}$$
für hinreichend kleines $\rho > 0$. Wir betrachten das Paraboloid
$$P = \big\{(x,t) : |x - x_1|^2 \le \alpha(t_1 - t)\big\} \,. \tag{5.66}$$
Wir definieren
$$u_\varepsilon(x,t) = u(x,t) - M + \varepsilon v(x,t) \tag{5.67}$$
und
$$U = V \cap P \,.$$
Für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ gilt $u_\varepsilon \le 0$ auf ∂U, da $v = 0$ auf ∂P und $u < M$ auf $\partial U \setminus \partial P$. Im Falle $c \ge 0$ (Fälle 1 und 2 der Behauptung) folgt aus dem schwachen Maximumprinzip (Satz 5.4), dass
$$u_\varepsilon \le 0 \quad \text{in } U, \tag{5.68}$$
und weiter, da $u_\varepsilon(x_1, t_1) = 0$,
$$0 \le \partial_t u_\varepsilon(x_1,t_1) = \partial_t u(x_1,t_1) + \varepsilon \partial_t v(x_1,t_1) = \partial_t u(x_1,t_1) - \varepsilon\alpha \,, \tag{5.69}$$
also
$$0 < \partial_t u(x_1, t_1) \,. \tag{5.70}$$
Andererseits gilt im Punkt (x_1, t_1) auch
$$0 \ge (\partial_t + L)u = \partial_t u - \mathrm{spur}\,(AD_x^2 u) + \langle b, \nabla_x u\rangle + cu \ge \partial_t u + cu \ge \partial_t u \,,$$
ein Widerspruch zu (5.70). Der Fall 3 wird auf diesen Fall zurückgeführt, und zwar auf analoge Weise wie im Beweis von Lemma 5.6. □

Beweis von Satz 5.12. Wegen Lemma 5.14 gilt für jedes $t > 0$ entweder

$$u(x,t) < M\,, \quad \text{für alle } x \in \Omega,$$

oder

$$u(x,t) = M\,, \quad \text{für alle } x \in \Omega.$$

Die Menge

$$I = \{t : t \in (0,t_0),\, u(x,t) < M\}$$

ist offen. Ist sie nichtleer, so lässt sie sich darstellen als disjunkte Vereinigung von abzählbar vielen offenen Intervallen $I_k = (a_k, b_k)$. Da $b_k \notin I$, muss $u(x, b_k) = M$ gelten im Widerspruch zu Lemma 5.15. Also ist I leer und damit $u \equiv M$ auf $\overline{\Omega_{t_0}}$. □

Aus dem Maximumprinzip folgt die Eindeutigkeit einer klassischen Lösung der parabolischen Anfangsrandwertaufgabe

$$\partial_t u + Lu = f \quad \text{in } \Omega_T, \tag{5.71}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{für } x \in \Omega, \tag{5.72}$$

$$u(x,t) = g(x,t) \quad \text{für } x \in \partial\Omega,\, t \in (0,T), \tag{5.73}$$

indem man das Maximumprinzip auf die Differenzen $u_1 - u_2$ und $u_2 - u_1$ zweier Lösungen von (5.71) – (5.73) anwendet.

6 Das Bochner-Integral

Unter $[a, b]$ wird im folgenden immer ein kompaktes Intervall im $\mathbb{R}$ verstanden. Ist $A \subset [a, b]$, so bezeichnet χ_A die durch

$$\chi_A(t) = \begin{cases} 1\,, & t \in A\,, \\ 0\,, & t \notin A\,, \end{cases} \tag{6.1}$$

definierte charakteristische Funktion von A.

Definition 6.1 (Einfache Funktion) *Sei X Banachraum. Eine Funktion $u : [a, b] \to X$ heißt einfach, wenn sie die Form*

$$u(t) = \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i}(t) x_i \tag{6.2}$$

hat, wobei $n \in \mathbb{N}$, $A_i \subset [a, b]$ messbar und $x_i \in X$ für $1 \le i \le n$.

Lemma 6.2 *Sei X Banachraum, $u : [a, b] \to X$ einfach. Dann gibt es genau eine Darstellung der Form (6.2) mit*

$$\bigcup_i A_i = [a, b]\,, \quad A_i \cap A_j = \emptyset \text{ und } x_i \ne x_j \text{ für } i \ne j\,. \tag{6.3}$$

Diese Darstellung heißt kanonische Darstellung.

Beweis: Übung. □

Definition 6.3 (Bochner-Messbarkeit)
Sei X Banachraum. Eine Funktion $u : [a, b] \to X$ heißt Bochner-messbar, falls es eine Folge von einfachen Funktionen $u_n : [a, b] \to X$ gibt mit

$$\lim_{n \to \infty} u_n(t) = u(t) \tag{6.4}$$

für fast alle $t \in [a, b]$.

Definition 6.4 *Sei X Banachraum, $u : [a, b] \to X$ einfache Funktion mit der Darstellung*

$$u(t) = \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i}(t) x_i\,. \tag{6.5}$$

Wir definieren das Bochner-Integral von u als

$$\int_a^b u(t)\, dt = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{meas}(A_i) x_i\,. \tag{6.6}$$

Ist $A \subset [a, b]$ messbar, so definieren wir

$$\int_A u(t)\, dt = \int_a^b \chi_A(t) u(t)\, dt\,. \tag{6.7}$$

Die Definition 6.4 ist sinnvoll, da der Wert der rechten Seite von (6.6) nicht von der gewählten Darstellung abhängt. Direkt aus der Definition folgt, daß für einfache Funktionen $u, v : [a, b] \to X$ und Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_a^b \alpha u(t) + \beta v(t)\, dt = \alpha \int_a^b u(t)\, dt + \beta \int_a^b v(t)\, dt\,, \tag{6.8}$$

sowie

$$\left\| \int_a^b u(t)\, dt \right\| \leq \int_a^b \|u(t)\|\, dt\,. \tag{6.9}$$

Lemma 6.5 *Sei X Banachraum, $u_n : [a, b] \to X$ eine Folge von einfachen Funktionen mit $u_n \to u$ fast überall. Dann ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ die durch*

$$f(t) = \|u_n(t) - u(t)\| \tag{6.10}$$

definierte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ (Lebesgue-)messbar.

Beweis: Es ist

$$f(t) = \lim_{m\to\infty} f_m(t)\,, \quad f_m(t) := \|u_n(t) - u_m(t)\|\,, \tag{6.11}$$

und f_m ist eine einfache Funktion für alle $m \in \mathbb{N}$. □

Sei nun $u_n : [a, b] \to X$ eine Folge von einfachen Funktionen mit $u_n \to u$ punktweise fast überall und

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \|u_n(t) - u(t)\|\, dt = 0\,. \tag{6.12}$$

(Nach Lemma 6.5 ist der Integrand messbar.) Wegen

$$\begin{aligned} \left\| \int_a^b u_n(t)\, dt - \int_a^b u_m(t)\, dt \right\| &\leq \int_a^b \|u_n(t) - u_m(t)\|\, dt \\ &\leq \int_a^b \|u_n(t) - u(t)\|\, dt + \int_a^b \|u_m(t) - u(t)\|\, dt \end{aligned} \tag{6.13}$$

wird durch

$$y_n = \int_a^b u_n(t)\, dt \tag{6.14}$$

eine Cauchyfolge in X definiert. Ist $v_n : [a, b] \to X$ eine weitere Folge mit denselben Eigenschaften wie u_n, so gilt

$$\begin{aligned} \left\| \int_a^b v_n(t)\, dt - \int_a^b u_n(t)\, dt \right\| &\leq \int_a^b \|v_n(t) - u_n(t)\|\, dt \\ &\leq \int_a^b \|v_n(t) - u(t)\|\, dt + \int_a^b \|u_n(t) - u(t)\|\, dt\,, \end{aligned} \tag{6.15}$$

also hängt der Grenzwert von (y_n) nicht von der speziellen Wahl der Folge (u_n) ab.

Definition 6.6 (Bochner-Integral) *Sei $u : [a,b] \to X$. Falls es eine Folge von einfachen Funktionen $u_n : [a,b] \to X$ gibt mit $u_n \to u$ punktweise fast überall und*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \|u_n(t) - u(t)\| \, dt = 0 \,, \tag{6.16}$$

so heißt u Bochner-integrierbar, und wir definieren das Bochner-Integral von u als

$$\int_a^b u(t) \, dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b u_n(t) \, dt \,. \tag{6.17}$$

Lemma 6.7 *Sei X Banachraum, seien $u, v : [a,b] \to X$ Bochner-integrierbar und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann ist auch $\alpha u + \beta v$ Bochner-integrierbar, und es gilt*

$$\int_a^b \alpha u(t) + \beta v(t) \, dt = \alpha \int_a^b u(t) \, dt + \beta \int_a^b v(t) \, dt \,. \tag{6.18}$$

Beweis: Direkt aus den Definitionen. $\square$

Satz 6.8 *Sei X Banachraum. Ein $u : [a,b] \to X$ ist Bochner-integrierbar genau dann, wenn u Bochner-messbar und die Funktion $t \mapsto \|u(t)\|$ integrierbar ist. Es gilt außerdem*

$$\left\| \int_a^b u(t) \, dt \right\| \le \int_a^b \|u(t)\| \, dt \,. \tag{6.19}$$

Beweis: "$\Rightarrow$": Sei (u_n) Folge einfacher Funktionen mit $u_n \to u$ punktweise fast überall und

$$\int_a^b \|u(t) - u_n(t)\| \, dt = 0 \,. \tag{6.20}$$

Da $\|u_n(t)\| \to \|u(t)\|$ für fast alle $t \in [a,b]$ gilt, ist die Funktion $t \mapsto \|u(t)\|$ messbar. Es gilt dann

$$\int_a^b \|u(t)\| \, dt \le \int_a^b \|u(t) - u_n(t)\| \, dt + \int_a^b \|u_n(t)\| \, dt < \infty \,. \tag{6.21}$$

"$\Leftarrow$": Sei (u_n) Folge einfacher Funktionen mit $u_n \to u$ punktweise fast überall. Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ definieren wir $v_n : [a,b] \to X$ durch

$$v_n(t) = \begin{cases} u_n(t) \,, & \text{falls } \|u_n(t)\| \le (1+\varepsilon)\|u(t)\| \,, \\ 0 \,, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{6.22}$$

v_n ist eine einfache Funktion, da $\{t : \|u_n(t)\| \le (1+\varepsilon)\|u(t)\|\}$ messbar ist. Für

$$f_n(t) = \|v_n(t) - u(t)\| \tag{6.23}$$

gilt $f_n \to 0$ punktweise fast überall und

$$0 \le f_n(t) \le (2+\varepsilon)\|u(t)\| \,. \tag{6.24}$$

Aus dem Satz von Lebesgue folgt

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \|v_n(t) - u(t)\| \, dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t) \, dt = 0 \,, \tag{6.25}$$

also ist u Bochner-integrierbar. Mit (6.9) folgt

$$\left\| \int_a^b v_n(t) \, dt \right\| \le \int_a^b \|v_n(t)\| \, dt \le (1+\varepsilon) \int_a^b \|u(t)\| \, dt \tag{6.26}$$

und damit auch

$$\left\| \int_a^b u(t) \, dt \right\| = \left\| \lim_{n\to\infty} \int_a^b v_n(t) \, dt \right\| \le (1+\varepsilon) \int_a^b \|u(t)\| \, dt \,. \tag{6.27}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt (6.19). $\square$

In Analogie zum Fall $X = \mathbb{R}$ betrachten wir nun Funktionen $u : [a,b] \to X$, für die gilt

$$\int_a^b \|u(t)\|^p \, dt < \infty \,. \tag{6.28}$$

Definition 6.9 *Sei X Banachraum, $1 \le p < \infty$. Wir definieren*

$$L^p(a,b;X) = \{[u] \mid u : [a,b] \to X \textit{ ist Bochner-messbar und (6.28) gilt}\} \,, \tag{6.29}$$

wobei $[u]$ die Äquivalenzklasse von u unter der Äquivalenzrelation

$$u \sim v \quad \Leftrightarrow \quad u = v \textit{ fast überall} \tag{6.30}$$

bezeichnet.

Nach Satz 6.8 ist $L^1(a,b;X)$ gerade der Vektorraum aller Bochner-integrierbaren Funktionen.

Satz 6.10 *Sei X Banachraum, $1 \le p < \infty$. Dann ist $L^p(a,b;X)$ ein Banachraum mit der Norm*

$$\|u\|_{L^p(a,b;X)} = \left(\int_a^b \|u(t)\|_X^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \,. \tag{6.31}$$

Ist X Hilbertraum, so ist $L^2(a,b;X)$ ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle = \int_a^b \langle u(t), v(t) \rangle_X \, dt \,. \tag{6.32}$$

Beweis: Weggelassen. Geht genauso wie im Fall $X = \mathbb{R}$. Zum Beweis der Bochner-Messbarkeit der als Limes einer Cauchyfolge konstruierten Grenzfunktion wird zusätzlich der Messbarkeitssatz von Pettis benötigt. $\square$

Definition 6.11 *Für $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ definieren wir*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[a,b]} u(t) = \inf\{M : M \in \mathbb{R},\ u(t) \le M \textit{ für fast alle } t \in [a,b]\} \,. \tag{6.33}$$

Wir betrachten nun banachraumwertige Funktionen $u : [a, b] \to X$, für die gilt

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[a,b]} \|u(t)\|_X < \infty\,. \tag{6.34}$$

Definition 6.12 *Sei X Banachraum. Wir definieren*

$$L^\infty(a, b; X) = \{[u] \mid u : [a, b] \to X \text{ ist Bochner-messbar und (6.34) gilt}\}\,. \tag{6.35}$$

Lemma 6.13 *Sei X Banachraum. Dann gilt für alle* $p \in [1, \infty)$

$$L^\infty(a, b; X) \subset L^p(a, b; X) \tag{6.36}$$

Beweis: Für $u \in L^\infty(a, b; X)$ gilt

$$\|u\|^p_{L^p(a,b;X)} = \int_a^b \|u(t)\|^p\, dx \le (b - a)\|u\|^p_{L^\infty(a,b;X)}\,. \tag{6.37}$$

□

Satz 6.14 *Sei X Banachraum. Dann ist* $L^\infty(a, b; X)$ *ein Banachraum.*

Beweis: Verläuft ebenfalls wie im Fall $X = \mathbb{R}$. □

Definition 6.15 *Sei X Banachraum. Wir definieren*

$$C([a, b]; X) = \{u \mid u : [a, b] \to X \text{ stetig}\}\,. \tag{6.38}$$

Definition 6.16 (Oszillation) *Sei X Banachraum,* $u : [a, b] \to X$. *Wir definieren die Oszillation von u durch*

$$\operatorname*{osc}_{[a,b]}(u; \delta) = \sup\{\|u(t) - u(s)\| : s, t \in [a, b],\ |t - s| \le \delta\}\,. \tag{6.39}$$

Lemma 6.17 *Sei X Banachraum,* $u : [a, b] \to X$ *stetig. Dann gilt*

$$\lim_{\delta\to 0} \operatorname*{osc}_{[a,b]}(u; \delta) = 0\,. \tag{6.40}$$

Beweis: Die Aussage (6.40) ist gleichbedeutend mit der gleichmäßigen Stetigkeit von u. □

Für eine stetige Funktion $u : [a, b] \to X$ gilt

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[a,b]} \|u(t)\| = \max_{t\in[a,b]} \|u(t)\|\,, \tag{6.41}$$

da aus der Stetigkeit folgt, daß $\|u(t)\| \le \operatorname{ess\,sup}_{s\in[a,b]} \|u(s)\|$ gilt für alle t.

Satz 6.18 *Sei X Banachraum. Dann ist $C([a,b];X)$ ein Banachraum mit der Norm*

$$\|u\|_{C([a,b];X)} = \max_{t\in[a,b]} \|u(t)\| \,, \tag{6.42}$$

und $C([a,b];X)$ kann mit einem abgeschlossenen Teilraum von $L^\infty(a,b;X)$ identifiziert werden.

Beweis: Ist $u : [a,b] \to X$ stetig, so ist u auch Bochner-messbar: Wir definieren eine Folge von einfachen Funktionen $u_n : [a,b] \to X$ durch $u_n(t) = u(ih)$, falls $t \in [ih,(i+1)h)$, $h = (b-a)/n$ ist. Dann gilt

$$\|u_n(t) - u(t)\| \le \operatorname*{osc}_{[a,b]}(u;h) \,, \quad h = \frac{b-a}{n} \,, \tag{6.43}$$

also $u_n \to u$ gleichmäßig (punktweise würde schon genügen). Weiter: Sei (u_n) Folge in C mit $[u_n] \to [u]$ in L^∞. Wir wählen eine Nullmenge N in $[a,b]$ mit $u_n \to u$ gleichmäßig in $M = [a,b] \setminus N$, dann ist u stetig auf M. Ist $t \in N$, so wählen wir eine Folge $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in M mit $t_k \to t$, dann ist

$$\|u_n(t) - u_m(t)\| \le \|u_n(t) - u_n(t_k)\| + \|u_n - u_m\|_{L^\infty(a,b;X)} + \|u_m(t_k) - u_m(t)\| \,,$$

also ist $(u_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge auch für $t \in N$. Definieren wir $\tilde{u}(t)$ als den Limes dieser Cauchyfolge für $t \in N$ und setzen wir $\tilde{u}(t) = u(t)$ für $t \in M$, so ist $\tilde{u} : [a,b] \to X$ stetig und $[\tilde{u}] = [u]$. $\square$

7 Lineare parabolische Gleichungen

Wir erläutern, wie eine parabolische Gleichung aus der allgemeinen Bilanzgleichung für eine zeitabhängige auf die Masse bezogene Dichte $\psi(x,t)$ einer Größe ψ entsteht (siehe Teil 1, Kapitel 5). Wir gehen aus von der differentiellen Form der Bilanzgleichung

$$\partial_t(\rho\psi) + \operatorname{div}(\rho\psi v + \Phi) = \rho z\,. \tag{7.1}$$

Hierbei ist ρ die Dichte der Masse, v die Geschwindigkeit, Φ der nichtkonvektive Fluß und z die Zufuhr. Ist ρ konstant, so wird (7.1) zu

$$\partial_t\psi + \frac{1}{\rho}\operatorname{div}\Phi + \langle v, \nabla\psi\rangle + (\operatorname{div} v)\psi = z\,. \tag{7.2}$$

Der lineare Ansatz

$$\frac{1}{\rho}\Phi = -A\nabla\psi\,, \quad A \text{ Matrix}, \tag{7.3}$$

beschreibt Diffusionsvorgänge, der isotrope Fall entspricht $A = \lambda I$, $\lambda > 0$. Insgesamt ergibt sich die sogenannte **Konvektions-Diffusions-Gleichung**

$$\partial_t\psi - \operatorname{div}(A\nabla\psi) + \langle v, \nabla\psi\rangle + (\operatorname{div} v)\psi = z\,. \tag{7.4}$$

Sind A, v und z gegebene Funktionen von x und t, so erhalten wir eine lineare parabolische Gleichung (wir schreiben wieder u für die unbekannte Funktion)

$$\partial_t u + Lu = f\,, \tag{7.5}$$

wobei L in Divergenzform gegeben ist durch

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^n \partial_j(a_{ij}(x,t)\partial_i u) + \sum_{i=1}^n b_i(x,t)\partial_i u + c(x,t)u\,. \tag{7.6}$$

Wir betrachten das zugehörige Anfangsrandwertproblem

$$\partial_t u + Lu = f \quad \text{in } \Omega_T = \Omega \times (0,T], \tag{7.7}$$

$$u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \times (0,T), \tag{7.8}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{für } x \in \Omega. \tag{7.9}$$

Wir gehen über zu einer variationellen Formulierung hinsichtlich der Ortsvariablen x. Sei $v \in C_0^\infty(\Omega)$ eine Testfunktion. Wir multiplizieren beide Seiten von (7.7) mit v, integrieren über Ω und führen partielle Integration im Divergenzterm durch. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_\Omega \partial_t u(x,t)v(x)\,dx &+ \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)\partial_i u(x,t)\partial_j v(x)\,dx \\ &+ \int_\Omega \sum_{i=1}^n b_i(x,t)\partial_i u(x,t)v(x)\,dx + \int_\Omega c(x,t)u(x,t)v(x)\,dx \\ = \int_\Omega f(x,t)v(x)\,dx\,.&\end{aligned} \tag{7.10}$$

Voraussetzung 7.1 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, seien a_{ij}, b_i, c messbar und beschränkt für alle i, j, sei $\partial_t + L$ gleichmäßig parabolisch, seien $u_0 \in L^2(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega_T)$.* □

Wir wollen die unbekannte Funktion u auffassen als Funktion $u : [0, T] \to V$, wobei V ein geeigneter Banachraum von Funktionen auf Ω ist, also

$$u(t) : \Omega \to \mathbb{R}\,, \quad \text{für alle } t \in [0, T]. \tag{7.11}$$

Der Wert $(u(t))(x)$ entspricht dann $u(x, t)$ in (7.7). Wir formulieren das Anfangsrandwertproblem nunmehr als

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(u(t), v)_H + a(u(t), v; t) = \langle F(t), v\rangle_V\ , \quad \text{für alle } v \in V, \tag{7.12}$$

$$u(0) = u_0\,. \tag{7.13}$$

Hierbei ist

$$H = L^2(\Omega)\,, \quad (w, v)_H = \int_\Omega w(x)v(x)\,dx\,, \tag{7.14}$$

$$V = H_0^1(\Omega)\,, \quad F : [0, T] \to V^*\,, \tag{7.15}$$

$\langle F(t), v\rangle_V$ bedeutet die Anwendung von $F(t)$ auf v, und

$$a(w, v; t) = \int_\Omega (\nabla w(x))^T A(x, t)\nabla v(x)\,dx + \int_\Omega b(x, t)^T \nabla w(x)v(x)\,dx \tag{7.16}$$

$$+ \int_\Omega c(x, t)w(x)v(x)\,dx\,. \tag{7.17}$$

Da in (7.12)

$$v \mapsto a(u(t), v; t)$$

ein Element von V^* definiert, kann man zunächst auch nur dasselbe von

$$v \mapsto \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(u(t), v)_H$$

erwarten. Dem entspricht, dass für eine schwache Lösung

$$u(\cdot, t) \in H_0^1(\Omega)\,, \quad t \in (0, T)$$

die Zeitableitung $\partial_t u(\cdot, t)$ in (7.7) die Regularität von $(Lu)(\cdot, t)$ hat, das heißt, zweite distributionelle Ableitung einer Funktion in $H_0^1(\Omega)$ ist, also erste distributionelle Ableitung einer Funktion in $L^2(\Omega)$. Diesen Raum kann man wieder mit dem Dualraum $H^{-1}(\Omega)$ von $V = H_0^1(\Omega)$ identifizieren (siehe Übung). Es stellt sich heraus, dass der Begriff des **Evolutionstripels** den geeigneten abstrakten Rahmen für die vorliegende Situation liefert.

Ist $v^* \in V^*$ und $v \in V$, so verwenden wir wie oben die Notation

$$\langle v^*, v\rangle_V := v^*(v)\,. \tag{7.18}$$

Satz 7.2 *Sei H ein Hilbertraum und V ein reflexiver Banachraum über $\mathbb{R}$, sei $j : V \to H$ linear, stetig und injektiv, sei $j(V)$ dicht in H. Dann wird durch*

$$\langle j^*(h), v\rangle_V = (h, j(v))_H \tag{7.19}$$

eine lineare, stetige und injektive Abbildung $j^* : H \to V^*$ mit $\|j^*\| \le \|j\|$ definiert, und $j^*(H)$ ist dicht in V^*.

Beweis: Sei $h \in H$. Dann definiert die rechte Seite von (7.19) wegen

$$|(h, j(v))_H| \le \|h\|_H \|j(v)\|_H \le \|h\|_H \|j\| \|v\|_V \tag{7.20}$$

ein Element $j^*(h) \in V^*$ mit

$$\|j^*(h)\|_{V^*} \le \|j\| \|h\|_H . \tag{7.21}$$

j^* ist offensichtlich linear und wegen (7.21) auch stetig mit $\|j^*\| \le \|j\|$. Ist $j^*(h) = 0$, so ist

$$(h, j(v))_H = 0 , \qquad \text{für alle } v \in V . \tag{7.22}$$

Sei (v_n) Folge in V mit $j(v_n) \to h$ in H, dann folgt

$$(h, h)_H = (h, \lim_{n\to\infty} j(v_n))_H = \lim_{n\to\infty} (h, j(v_n))_H = 0 , \tag{7.23}$$

also ist $h = 0$ und damit j^* injektiv. Es bleibt zu zeigen, daß $j^*(H)$ dicht ist in V^*. Sei $v^{**} \in V^{**}$ beliebig mit $v^{**}(j^*(H)) = 0$. Es genügt zu zeigen, daß dann $v^{**} = 0$ sein muß. (Ist $W = \mathrm{cl}\,(j^*(H))$ echt in V^* enthalten, so gibt es nach dem Satz von Hahn-Banach ein $v^{**} \in V^{**}$ mit $v^{**}(W) = 0$, aber $v^{**} \ne 0$). Da V reflexiv ist, finden wir ein $v \in V$ mit

$$\langle v^*, v\rangle_V = v^{**}(v^*) , \qquad \text{für alle } v^* \in V^* . \tag{7.24}$$

Es gilt dann für alle $h \in H$

$$0 = v^{**}(j^*(h)) = \langle j^*(h), v\rangle_V = (h, j(v))_H , \tag{7.25}$$

also ist $j(v) = 0$ und wegen der Injektivität von j auch $v = 0$, also auch $v^{**} = 0$. □

Folgerung 7.3 *In der Situation von Satz 7.2 gilt außerdem: Die Abbildung $J : V \to V^*$, $J = j^* \circ j$, ist linear, stetig und injektiv, $J(V)$ ist dicht in V^*, und*

$$\langle Jv, w\rangle_V = \langle Jw, v\rangle_V , \qquad \textit{für alle } v, w \in V . \tag{7.26}$$

Beweis: Folgt unmittelbar aus Satz 7.2 und der Identität

$$\langle Jv, w\rangle_V = (j(v), j(w))_H = (j(w), j(v))_H = \langle Jw, v\rangle_V . \tag{7.27}$$

□

Es ergibt sich also

$$V \xrightarrow{j} H \xrightarrow{j^*} V^* \tag{7.28}$$

mit stetigen und dichten Einbettungen.

Definition 7.4 (Evolutionstripel, Gelfand-Dreier)
Unter den Voraussetzungen von Satz 7.2 heißt (7.28) ein Evolutionstripel oder ein Gelfand-Dreier.

Für das parabolische Problem (7.7) – (7.9) setzen wir wie bereits erläutert

$$V = H_0^1(\Omega)\,, \quad H = L^2(\Omega)\,, \tag{7.29}$$

und

$$j : H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega) \tag{7.30}$$

die durch $j(v)(x) = v(x)$ definierte kanonische Einbettung. Die Abbildung j^* läßt sich wie folgt interpretieren. Es ist für $h \in H = L^2(\Omega)$

$$\langle j^*(h), v \rangle_V = (h, j(v))_H = \int_\Omega h(x)v(x)\,dx\,. \tag{7.31}$$

Ordnen wir dem Element $j^*(h) \in V^*$ vermittels des Rieszschen Darstellungssatzes ein Element $w \in V$ zu, so gilt

$$\langle j^*(h), v \rangle_V = \int_\Omega \langle \nabla w(x), \nabla v(x) \rangle \,dx\,, \tag{7.32}$$

wenn wir als Skalarprodukt im $H_0^1(\Omega)$ das L^2-Skalarprodukt der Gradienten verwenden (welches äquivalent ist zur Restriktion des Standardskalarprodukts in $H^1(\Omega)$, nach dem Satz von Poincaré). Aus (7.31) und (7.32) folgt, dass w gerade die schwache Lösung des elliptischen Randwertproblems

$$\begin{aligned} -\Delta w &= h \quad \text{in } \Omega, \\ w &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \tag{7.33}$$

ist.

Die Einbettungen j und j^* eines Evolutionstripels induzieren vermittels

$$u \mapsto j \circ u \mapsto j^* \circ j \circ u \tag{7.34}$$

Einbettungen der zugehörigen L^p-Räume

$$L^p(0,T;V) \to L^p(0,T;H) \to L^p(0,T;V^*)\,. \tag{7.35}$$

Im weiteren Verlauf dieses Kapitels werden wir j und j^* nicht mehr schreiben, das heißt, wenn wir schreiben "$h = v$" oder "$v = w$" mit $v \in V$, $h \in H$ und $w \in V^*$ meinen wir "$h = j(v)$" bzw. "$j^*(j(v)) = w$".

Definition 7.5 (Schwache Zeitableitung)
Sei $u \in L^1(0,T;V)$. Ein $w \in L^1(0,T;V^*)$ heißt schwache Ableitung von u, wenn gilt

$$\int_0^T w(t)\varphi(t)\,dt = -\int_0^T u(t)\varphi'(t)\,dt\,, \tag{7.36}$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(0,T)$. □

Die Integrale in (7.36) sind Bochner-Integrale.

Wir wollen Gleichungen in V und V^* auf Gleichungen in $\mathbb{R}$ zurückspielen. Dazu brauchen wir die Rechenregeln

$$\left\langle v^*\,,\int_0^T u(t)\,dt\right\rangle_V = \int_0^T \langle v^*, u(t)\rangle_V\;dt\,,\quad v^*\in V^*\,,\; u\in L^1(0,T;V)\,,\tag{7.37}$$

und

$$\left\langle \int_0^T u(t)\,dt\,,\,v\right\rangle_V = \int_0^T \langle u(t), v\rangle_V\;dt\,,\quad v\in V\,,\; u\in L^1(0,T;V^*)\,.\tag{7.38}$$

Satz 7.6 *Sei V Banachraum. Ist $v^*\in V^*$ und $u\in L^1(0,T;V)$, so ist $t\mapsto\langle v^*,u(t)\rangle_V$ integrierbar, und (7.37) gilt. Ist $v\in V$ und $u\in L^1(0,T;V^*)$, so ist $t\mapsto\langle u(t),v\rangle_V$ integrierbar, und (7.38) gilt.*

Beweis: Wir betrachten (7.37). Ist

$$u=\sum_{i=1}^n \chi_{A_i} v_i \tag{7.39}$$

eine einfache Funktion mit Werten $v_i\in V$, so ist auch $t\mapsto\langle v^*,u(t)\rangle_V$ eine einfache Funktion, und es gilt

$$\begin{aligned}\left\langle v^*\,,\int_0^T u(t)\,dt\right\rangle_V &= \left\langle v^*\,,\sum_{i=1}^n \operatorname{meas}(A_i)v_i\right\rangle_V = \sum_{i=1}^n \operatorname{meas}(A_i)\,\langle v^*,v_i\rangle_V\\ &= \int_0^T \langle v^*,u(t)\rangle_V\;dt\,,\quad v^*\in V^*\,.\end{aligned}\tag{7.40}$$

Sei nun $u\in L^1(0,T;V)$ beliebig. Für $v^*\in V^*$ ist $\langle v^*,u(t)\rangle_V=(v^*\circ u)(t)$, und $v^*\circ u$ ist messbar, da v^* stetig und u Bochner-messbar ist. Weiter gilt

$$\int_0^T |\,\langle v^*,u(t)\rangle_V\,|\,dt \le \int_0^T \|v^*\|_{V^*}\|u(t)\|_V\,dt \le \|v^*\|_{V^*}\|u\|_{L^1(0,T;V)}\,.\tag{7.41}$$

Analog gilt

$$\left|\left\langle v^*\,,\int_0^T u(t)\,dt\right\rangle_V\right| \le \|v^*\|_{V^*}\left\|\int_0^T u(t)\,dt\right\|_V \le \|v^*\|_{V^*}\|u\|_{L^1(0,T;V)}\,.\tag{7.42}$$

Die linke und die rechte Seite von (7.37) definieren also lineare stetige Funktionale auf $L^1(0,T;V)$, welche auf dem dichten Unterraum der einfachen Funktionen übereinstimmen und daher gleich sind. Der Beweis von (7.38) verläuft analog. □

Die folgenden beiden Sätze beschäftigen sich mit der Charakterisierung und Eindeutigkeit der schwachen Ableitung.

Lemma 7.7 *Sei $V\xrightarrow{j}H\xrightarrow{j^*}V^*$ Evolutionstripel, $u\in L^2(0,T;V)$, $w\in L^2(0,T;V^*)$. Dann ist w genau dann schwache Ableitung von u, wenn gilt*

$$\int_0^T (u(t),v)_H\varphi'(t)\,dt = -\int_0^T \langle w(t),v\rangle_V\,\varphi(t)\,dt\,,\quad \forall\, v\in V,\ \varphi\in C_0^\infty(0,T)\,.\tag{7.43}$$

Beweis: Wegen (7.38) gilt für alle $v \in V$ und alle $\varphi \in C_0^\infty(0,T)$

$$\begin{aligned}\int_0^T (j(u(t)), j(v))_H \varphi'(t)\,dt &= \int_0^T \langle \varphi'(t) J(u(t)), v\rangle_V \, dt \\ &= \left\langle \int_0^T J(u(t))\varphi'(t)\,dt\,,\, v \right\rangle_V ,\end{aligned} \tag{7.44}$$

und

$$-\int_0^T \langle w(t), v\rangle_V \, \varphi(t)\,dt = \left\langle \int_0^T -w(t)\varphi(t)\,dt\,,\, v\right\rangle_V . \tag{7.45}$$

Also ist (7.43) wegen $\langle j^*(j(u(t)), v\rangle_V = (j(u(t)), j(v))_H$ äquivalent zu

$$\int_0^T u(t)\varphi'(t)\,dt = -\int_0^T w(t)\varphi(t)\,dt\,, \qquad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(0,T)\,. \tag{7.46}$$

□

Folgerung 7.8 *Ist $w \in L^2(0,T;V^*)$ schwache Ableitung von $u \in L^2(0,T;V)$, so ist für jedes $v \in V$ die Funktion $t \mapsto \langle w(t), v\rangle_V$ schwache Ableitung der Funktion $t \mapsto (u(t), v)_H$ im $L^2(0,T)$.*

Lemma 7.9 *Sei V separabler Banachraum, $w \in L^2(0,T;V^*)$. Gilt*

$$\int_0^T \varphi(t) w(t)\,dt = 0\,, \qquad \textit{für alle } \varphi \in C_0^\infty(0,T)\,, \tag{7.47}$$

so gilt $w = 0$ fast überall.

Beweis: Im Spezialfall $V = \mathbb{R}$ kennen wir die Aussage bereits aus Teil 1, Kapitel 2. Sei nun V wie angegeben. Für $v \in V$ und $\varphi \in C_0^\infty(0,T)$ gilt

$$0 = \left\langle \int_0^T \varphi(t) w(t)\,dt\,,\, v\right\rangle_V = \int_0^T \varphi(t)\,\langle w(t), v\rangle_V \, dt\,. \tag{7.48}$$

Aus der Gültigkeit der Aussage für $V = \mathbb{R}$ folgt: Für jedes $v \in V$ gibt es eine Nullmenge $N(v)$ mit

$$\langle w(t), v\rangle = 0\,, \qquad \text{für alle } t \in (0,T) \setminus N(v)\,. \tag{7.49}$$

Sei D eine abzählbare dichte Teilmenge von V, setze

$$N = \bigcup_{v \in D} N(v)\,. \tag{7.50}$$

Dann ist N Nullmenge, und

$$\langle w(t), v\rangle = 0\,, \qquad \text{für alle } t \in (0,T) \setminus N\,,\, v \in D\,, \tag{7.51}$$

also

$$\langle w(t), v\rangle = 0\,, \qquad \text{für alle } t \in (0,T) \setminus N\,,\, v \in V\,, \tag{7.52}$$

also $w(t) = 0$ für alle $t \notin N$. □

Satz 7.10 *Sei V separabler Banachraum, $u \in L^2(0,T;V)$. Dann gibt es höchstens eine schwache Ableitung $w \in L^2(0,T;V^*)$ von u. Falls sie existiert, bezeichnen wir sie mit u'.*

Beweis: Sind $w_1, w_2 \in L^2(0,T;V^*)$ schwache Ableitungen von u, so folgt für $w = w_1 - w_2$ aus der Definition der schwachen Ableitung

$$\int_0^T w(t)\varphi(t)\,dt = 0 \tag{7.53}$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(0,T)$. Aus Lemma 7.9 folgt $w = 0$. □

Die Aussagen von Lemma 7.9 und Satz 7.10 gelten für beliebige Banachräume X und $w \in L^1(0,T;X)$.

Wir formulieren nun noch einmal das parabolische Anfangsrandwertproblem als "abstraktes" Anfangswertproblem (die Null-Randwerte stecken im Raum V)

$$\langle u'(t), v\rangle_V + a(u(t), v; t) = \langle F(t), v\rangle_V\ , \quad \text{für alle } v \in V, \tag{7.54}$$

$$u(0) = u_0\,. \tag{7.55}$$

Wir suchen eine Lösung u im Raum

$$W = \{u : u \in L^2(0,T;V),\ u' \in L^2(0,T;V^*)\}\,, \tag{7.56}$$

für welche (7.54) für fast alle $t \in (0,T)$ gilt.

Satz 7.11 *Sei $V \xrightarrow{j} H \xrightarrow{j^*} V^*$ Evolutionstripel. Dann gilt*

$$W \subset C([0,T];H)\,. \tag{7.57}$$

Ferner gilt die Regel der partiellen Integration

$$(u(t), v(t))_H - (u(s), v(s))_H = \int_s^t \langle u'(\tau), v(\tau)\rangle_V + \langle v'(\tau), u(\tau)\rangle_V\ d\tau \tag{7.58}$$

für alle $u, v \in W$ und alle $s, t \in [0,T]$.

Beweis: Siehe z.B. Kapitel IV im Buch von Gajewski, Gröger und Zacharias, oder Theorem 5.9.3 im Buch von Evans. □

Die Inklusion (7.57) ist so zu interpretieren: Ist $u \in W$, so enthält die Äquivalenzklasse $[j \circ u] \in L^2(0,T;H)$ von $j \circ u$ eine stetige Funktion (diese ist eindeutig bestimmt). In diesem Sinne ist auch die linke Seite von (7.58) zu interpretieren. Wegen (7.57) macht die Anfangsbedingung (7.55) Sinn für Funktionen in W. (Für beliebige Funktionen in $L^2(0,T;V)$ ist (7.55) nicht definiert.)

Voraussetzung 7.12

(i) $V \xrightarrow{j} H \xrightarrow{j^*} V^*$ *ist ein Evolutionstripel, V ist ein separabler Banachraum mit $\dim(V) = +\infty$.*

(ii) *$a : V \times V \times (0,T] \to \mathbb{R}$ ist für jedes $t \in (0,T]$ eine Bilinearform, und es gibt $c_a, c_h, C_a > 0$ mit*

$$a(v,v;t) \geq c_a \|v\|_V^2 - c_h \|j(v)\|_H^2 \,, \quad \textit{für alle } v \in V,\ t \in (0,T], \tag{7.59}$$

$$|a(v,w;t)| \leq C_a \|v\|\,\|w\| \,, \quad \textit{für alle } v,w \in V,\ t \in (0,T]. \tag{7.60}$$

Die Abbildungen $t \mapsto a(v,w;t)$ sind messbar für alle $v,w \in V$.

(iii) *$u_0 \in H$, $F \in L^2(0,T;V^*)$.*

□

Theorem 7.13 *Unter den Voraussetzungen 7.12 hat das Anfangswertproblem (7.54), (7.55) eine Lösung $u \in W$.*

Der Beweis besteht aus einer Folge von Lemmata, bei denen wir jedesmal annehmen, daß Voraussetzung 7.12 erfüllt ist.

Wie in Kapitel 4 verwenden wir Galerkin-Approximation. Die Idee ist, das Anfangswertproblem zunächst auf endlichdimensionalen Teilräumen V_n von V zu lösen und die Lösung auf V durch Grenzübergang zu erhalten. Die Existenz des Grenzwerts ergibt sich durch einen Kompaktheitsschluss. Die hierfür notwendige Beschränktheit der approximierenden Folge ergibt sich aus den Eigenschaften der Bilinearform in Voraussetzung 7.12, welche wiederum dadurch garantiert werden, dass $\partial_t + L$ gleichmäßig parabolisch ist.

Die Galerkin-Approximation ergibt sich wie gehabt aus einer Folge $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in V mit

$$\dim(V_n) = n \,, \quad V_n := \operatorname{span}\{w_1, \dots, w_n\} \,, \quad V = \operatorname{cl}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n\right) . \tag{7.61}$$

Weiterhin wählen wir eine Folge (u_{0n}) mit $u_{0n} \in V_n$ und $j(u_{0n}) \to u_0$ in H. Wir suchen Funktionen $u_n : [0,T] \to V_n$, dargestellt als

$$u_n(t) = \sum_{k=1}^{n} c_{nk}(t) w_k \,, \quad c_{nk} : [0,T] \to \mathbb{R} \,, \tag{7.62}$$

so dass für fast alle $t \in (0,T]$ gilt

$$(u_n'(t), v)_H + a(u_n(t), v; t) = \langle F(t), v \rangle_V \;, \qquad \text{für alle } v \in V_n \,, \tag{7.63}$$

sowie

$$u_n(0) = u_{0n} \,, \quad j(u_{0n}) = p(u_0, j(V_n)) \,, \tag{7.64}$$

wobei $p(u_0, X)$ die Orthogonalprojektion von u_0 auf X in H bezeichnet. Sei

$$u_{0n} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{nk} w_k \in V_n \,. \tag{7.65}$$

Zu (7.63), (7.64) sind äquivalent

$$\sum_{k=1}^{n} c_{nk}'(t)(w_k, w_i)_H + \sum_{k=1}^{n} c_{nk}(t) a(w_k, w_i; t) = \langle F(t), w_i \rangle_V \;, \quad 1 \leq i \leq n \,, \tag{7.66}$$

$$c_{nk}(0) = \alpha_{nk} \,, \quad 1 \leq k \leq n \,. \tag{7.67}$$

Lemma 7.14 *Die Galerkin-Gleichungen (7.63), (7.64) haben eine eindeutige Lösung* $u_n : [0,T] \to V_n$ *mit* $u_n' \in L^2(0,T;V_n)$ *und*

$$u_n(t) = u_{0n} + \int_0^t u_n'(s)\, ds\,. \tag{7.68}$$

Beweis: Die Vektoren $w_1, \ldots, w_n$ sind linear unabhängig in V, also auch $j(w_1), \ldots, j(w_n)$ in H, da j injektiv ist. Die Matrix

$$B = (b_{ik})\,, \quad b_{ik} = (w_k, w_i)_H\,, \tag{7.69}$$

ist invertierbar (Übung), und wir können (7.66), (7.67) schreiben als

$$c_n'(t) + B^{-1}\tilde{A}(t)c_n(t) = B^{-1}\tilde{F}(t)\,, \quad c_n(0) = \alpha_n\,, \tag{7.70}$$

mit

$$\tilde{A}(t) = (\tilde{a}_{ik}(t))\,, \quad \tilde{a}_{ik}(t) = a(w_k, w_i; t)\,, \quad \tilde{F}_i(t) = \langle F(t), w_i\rangle_V\,. \tag{7.71}$$

Nach Voraussetzung ist $\tilde{A} \in L^\infty(0,T;\mathbb{R}^{(n,n)})$, und wegen

$$|\tilde{F}_i(t)| = |\langle F(t), w_i\rangle_V| \le \|F(t)\|_{V^*}\|w_i\|_V$$

ist $\tilde{F} \in L^2(0,T;\mathbb{R}^n)$. Die Anfangswertaufgabe (7.70) hat nach dem Satz von Picard-Lindelöf (in der Version für messbare rechte Seiten, siehe z.B. das Buch von Walter) eine eindeutige Lösung $c_n : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ mit

$$c_n(t) = c_n(0) + \int_0^t c_n'(s)\, ds\,, \quad c_n' \in L^2(0,T;\mathbb{R}^n)\,. \tag{7.72}$$

□

Lemma 7.15 *Es gibt eine von* n *unabhängige Konstante* $C > 0$ *mit*

$$\max_{t\in[0,T]} \|u_n(t)\|_H + \|u_n\|_{L^2(0,T;V)} + \|u_n'\|_{L^2(0,T;V^*)} \le C(\|u_0\|_H + \|F\|_{L^2(0,T;V^*)})\,. \tag{7.73}$$

Beweis: Sei $n \in \mathbb{N}$ fest gewählt. Wir setzen $v = u_n(t)$ in (7.63) und erhalten

$$(u_n'(t), u_n(t))_H + a(u_n(t), u_n(t); t) = \langle F(t), u_n(t)\rangle_V\,. \tag{7.74}$$

Es gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{1}{2}(u_n(t), u_n(t))_H = (u_n'(t), u_n(t))_H \tag{7.75}$$

nach der Produktregel für Bilinearformen (hier angewandt auf dem endlichdimensionalen Teilraum V_n). Nach Voraussetzung gilt

$$a(u_n(t), u_n(t); t) \ge c_a\|u_n(t)\|_V^2 - c_h\|u_n(t)\|_H^2\,. \tag{7.76}$$

Wir integrieren (7.74) über $[0,t]$ und erhalten mit (7.75) und (7.76)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|u_n(t)\|_H^2 - \frac{1}{2}\|u_n(0)\|_H^2 + c_a\int_0^t \|u_n(s)\|_V^2\, ds \\ \le c_h\int_0^t \|u_n(s)\|_H^2\, ds + \int_0^t \langle F(s), u_n(s)\rangle_V\, ds \end{aligned} \tag{7.77}$$

Nach Definition von u_{0n} gilt

$$\|u_{0n}\|_H \leq \|u_0\|_H \,. \tag{7.78}$$

Aus der Youngschen Ungleichung folgt

$$\int_0^t \langle F(s), u_n(s)\rangle_V \; ds \leq \frac{c_a}{2}\int_0^t \|u_n(s)\|_V^2 \, ds + \frac{1}{2c_a}\int_0^t \|F(s)\|_{V^*}^2 \, ds \,. \tag{7.79}$$

Setzen wir (7.78) und (7.79) in (7.77) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} &\|u_n(t)\|_H^2 + c_a \int_0^t \|u_n(s)\|_V^2 \, ds \\ &\qquad \leq \|u_0\|_H^2 + 2c_h \int_0^t \|u_n(s)\|_H^2 \, ds + \frac{1}{c_a}\int_0^t \|F(s)\|_{V^*}^2 \, ds \,. \end{aligned} \tag{7.80}$$

Für

$$\eta(t) = \|u_n(t)\|_H^2 \tag{7.81}$$

gilt

$$\eta(t) \leq d_0 + 2c_h \int_0^t \eta(s) \, ds \,, \quad d_0 = \|u_0\|_H^2 + \frac{1}{c_a}\int_0^T \|F(s)\|_{V^*}^2 \, ds \,, \quad t \in [0,T] \,. \tag{7.82}$$

Aus dem Lemma von Gronwall folgt

$$\eta(t) \leq d_0 e^{2c_h t} \,, \quad \text{für alle } t \in [0,T]. \tag{7.83}$$

Hieraus ergibt sich für geeignetes C

$$\|u_n(t)\|_H^2 \leq C(\|u_0\|_H^2 + \|F\|_{L^2(0,T;V^*)}^2) \,, \quad \text{für alle } t \in [0,T]. \tag{7.84}$$

Aus (7.80) folgt weiter (mit geeignet vergrößertem C)

$$\|u_n\|_{L^2(0,T;V)}^2 \leq C(\|u_0\|_H^2 + \|F\|_{L^2(0,T;V^*)}^2) \,. \tag{7.85}$$

Zur Abschätzung von u_n' in der Norm von V^* betrachten wir noch einmal die Variationsgleichung

$$\langle u_n'(t), v\rangle_V + a(u_n(t), v; t) = \langle F(t), v\rangle_V \;, \quad \text{für alle } v \in V. \tag{7.86}$$

Es folgt

$$|\,\langle u_n'(t), v\rangle_V \,| \leq C_a \|u_n(t)\|_V \|v\|_V + \|F(t)\|_{V^*} \|v\|_V \,, \tag{7.87}$$

also

$$\|u_n'(t)\|_{V^*} \leq C_a \|u_n(t)\|_V + \|F(t)\|_{V^*} \,, \tag{7.88}$$

und hieraus

$$\begin{aligned} \|u_n'\|_{L^2(0,T;V^*)}^2 &\leq \int_0^T (C_a \|u_n(t)\|_V + \|F(t)\|_{V^*})^2 \, dt \\ &\leq 2C_a^2 \|u_n\|_{L^2(0,T;V)}^2 + 2\|F\|_{L^2(0,T;V^*)}^2 \,. \end{aligned}$$

Aus (7.85) folgt die Behauptung. □

Lemma 7.16 *Es gibt eine Teilfolge $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ und ein $u \in L^2(0,T;V)$, so dass u_{n_k} schwach in $L^2(0,T;V)$ gegen u konvergiert. Für u gilt*

$$\begin{aligned} -(u_0,v)_H\,\varphi(0) - \int_0^T \langle u(t),v\rangle_V\,\varphi'(t)\,dt + \int_0^T a(u(t),v;t)\varphi(t)\,dt \\ = \int_0^T \langle F(t),v\rangle_V\,\varphi(t)\,dt\,, \end{aligned} \tag{7.89}$$

für alle $v \in V$ und alle $\varphi \in C^1[0,T]$ mit $\varphi(T) = 0$.

Beweis: Nach Lemma 7.15 ist (u_n) beschränkt im Hilbertraum $L^2(0,T;V)$. Es gibt also eine Teilfolge (u_{n_k}), welche schwach gegen ein $u \in L^2(0,T;V)$ konvergiert. Sei zunächst $i \in \mathbb{N}$, $v \in V_i$, $\varphi \in C^1[0,T]$ mit $\varphi(T) = 0$. Für $n \geq i$ gilt wegen (7.63)

$$\int_0^T (u_n'(t),v)_H\varphi(t)\,dt + \int_0^T a(u_n(t),v;t)\varphi(t)\,dt = \int_0^T \langle F(t),v\rangle_V\,\varphi(t)\,dt\,. \tag{7.90}$$

Partielle Integration ergibt

$$\begin{aligned} -(u_n(0),v)_H\varphi(0) - \int_0^T \langle u_n(t),v\rangle_V\,\varphi'(t)\,dt + \int_0^T a(u_n(t),v;t)\varphi(t)\,dt \\ = \int_0^T \langle F(t),v\rangle_V\,\varphi(t)\,dt\,. \end{aligned} \tag{7.91}$$

Da $u_n(0) = u_{0n} \to u_0$ in H, gilt

$$\lim_{k\to\infty} -(u_{n_k}(0),v)_H = -(u_0,v)_H\,. \tag{7.92}$$

Wir untersuchen den Grenzübergang für die beiden Integrale auf der linken Seite von (7.91). Durch

$$z \mapsto \int_0^T \langle z(t),v\rangle_V\,\varphi'(t)\,dt \tag{7.93}$$

wird ein lineares stetiges Funktional auf $L^2(0,T;V)$ definiert wegen

$$\begin{aligned} \left|\int_0^T \langle J(z(t)),v\rangle_V\,\varphi'(t)\,dt\right| &\leq \int_0^T \|J(z(t))\|_{V^*}\|v\|_V|\varphi'(t)|\,dt \\ &\leq \|j^*\circ j\|\,\|v\|_V\|\varphi'\|_\infty \int_0^T \|z(t)\|_V\,dt \\ &\leq \|j^*\circ j\|\,\|v\|_V\|\varphi'\|_\infty\sqrt{T}\|z\|_{L^2(0,T;V)}\,. \end{aligned} \tag{7.94}$$

Aus der schwachen Konvergenz $u_{n_k} \rightharpoonup u$ folgt also

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^T \langle u_{n_k}(t),v\rangle_V\,\varphi'(t)\,dt = \int_0^T \langle u(t),v\rangle_V\,\varphi'(t)\,dt\,. \tag{7.95}$$

Analog folgt aus

$$\int_0^T a(z(t),v;t)\varphi(t)\,dt \leq C_a\|v\|_V\|\varphi\|_\infty\sqrt{T}\|z\|_{L^2(0,T;V)} \tag{7.96}$$

für alle $z \in L^2(0,T;V)$ auch

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^T a(u_{n_k}(t), v; t)\varphi(t)\, dt = \int_0^T a(u(t), v; t)\varphi(t)\, dt\,. \tag{7.97}$$

Damit ist (7.89) bewiesen für $v \in V_i$. Da i beliebig war und $\cup_i V_i$ dicht ist in V, folgt die Behauptung. □

Lemma 7.17 *Durch*

$$\langle \tilde{\alpha}(t), v\rangle_V = a(u(t), v; t)\,, \quad v \in V\,, \quad t \in (0,T)\,, \tag{7.98}$$

wird eine Funktion $\tilde{\alpha} \in L^2(0,T;V^*)$ definiert mit

$$\|\tilde{\alpha}\|_{L^2(0,T;V^*)} \le C_a \|u\|_{L^2(0,T;V)}\,. \tag{7.99}$$

Beweis: Es gilt

$$|a(u(t), v; t)| \le C_a \|u(t)\|_V \|v\|_V\,, \quad v \in V\,,$$

für fast alle $t \in (0,T)$, also ist

$$\tilde{\alpha}(t) \in V^*\,, \quad \|\tilde{\alpha}(t)\|_{V^*} \le C_a \|u(t)\|_V$$

für fast alle $t \in (0,T)$, und (7.99) folgt aus

$$\int_0^T \|\tilde{\alpha}(t)\|_{V^*}^2\, dt \le C_a^2 \int_0^T \|u(t)\|_V^2\, dt\,.$$

□

Beweis von Theorem 7.13. Nach Lemma 7.16 und 7.17 gilt für alle $\varphi \in C_0^\infty(0,T)$ und alle $v \in V$

$$-\int_0^T (u(t), v)_H \varphi'(t)\, dt = -\int_0^T \langle \tilde{\alpha}(t), v\rangle_V\, \varphi(t)\, dt + \int_0^T \langle F(t), v\rangle_V\, \varphi(t)\, dt\,. \tag{7.100}$$

Also hat u nach Lemma 7.7 eine schwache Ableitung

$$u' \in L^2(0,T;V^*)\,, \quad u'(t) = -\tilde{\alpha}(t) + F(t)\,, \tag{7.101}$$

also

$$\langle u'(t), v\rangle_V + a(u(t), v; t) = \langle F(t), v\rangle_V\,, \quad v \in V\,,$$

wie behauptet, und $u \in W$. Aus Satz 7.11 folgt $u \in C([0,T];H)$. Wir ersetzen nun in (7.89) die beiden letzten Integrale gemäß (7.101) und erhalten

$$-(u_0, v)_H \varphi(0) - \int_0^T \langle u(t), v\rangle_V\, \varphi'(t)\, dt = \int_0^T \langle u'(t), v\rangle_V\, \varphi(t)\, dt \tag{7.102}$$

für alle $v \in V$ und alle $\varphi \in C^1[0,T]$ mit $\varphi(T) = 0$. Da andererseits die Funktion $t \mapsto \varphi(t)v$ ebenfalls in W liegt, erhalten wir nach Satz 7.11 für solche Funktionen φ

$$-(u(0), v)_H \varphi(0) = \int_0^T \langle u'(t), \varphi(t)v\rangle_V + \langle \varphi'(t)v, u(t)\rangle_V\, dt\,. \tag{7.103}$$

Wird nun speziell ein φ mit $\varphi(0) = 1$ gewählt, so folgt aus (7.102) und (7.103)

$$(u(0) - u_0, v)_H = 0 \tag{7.104}$$

für alle $v \in V$. Da $j(V)$ dicht ist in H, folgt $u(0) = u_0$. Damit ist Theorem 7.13 vollständig bewiesen. □

Theorem 7.18 *Unter den Voraussetzungen 7.12 hat das Anfangswertproblem (7.54), (7.55) genau eine Lösung $u \in W$, und es gibt eine von u_0 und F unabhängige Konstante $C > 0$ mit*

$$\max_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_H + \|u\|_{L^2(0,T;V)} + \|u'\|_{L^2(0,T;V^*)} \le C(\|u_0\|_H + \|F\|_{L^2(0,T;V^*)})\,. \tag{7.105}$$

Beweis: Die Existenz folgt aus Satz 7.13. Für jede Lösung $u \in W$ folgt aus Satz 7.11 für jedes $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(u(t), u(t))_H - \frac{1}{2}(u_0, u_0)_H &= \int_0^t \langle u'(s), u(s)\rangle_V \; ds \\ &= -\int_0^t a(u(s), u(s); s)\, ds + \int_0^t \langle F(s), u(s)\rangle_V \; ds\,,\end{aligned}$$

also

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|_H^2 + \int_0^t a(u(s), u(s); s)\, ds = \frac{1}{2}\|u_0\|_H^2 + \int_0^t \langle F(s), u(s)\rangle_V \; ds\,. \tag{7.106}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\|u(t)\|_H^2 + c_a \int_0^t \|u(s)\|_V^2\, ds - c_h \int_0^t \|u(s)\|_H^2\, ds \\ &\quad\le \frac{1}{2}\|u_0\|_H^2 + \frac{c_a}{2}\int_0^t \|u(s)\|_V^2\, ds + \frac{1}{2c_a}\int_0^t \|F(s)\|_{V^*}^2\, ds\,.\end{aligned} \tag{7.107}$$

Aus dem Lemma von Gronwall erhält man in analoger Weise wie im Beweis von Lemma 7.15

$$\max_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_H \le C(\|u_0\|_H + \|F\|_{L^2(0,T;V^*)})\,. \tag{7.108}$$

Einsetzen von (7.108) in (7.107) ergibt nun

$$\|u\|_{L^2(0,T;V)} \le C(\|u_0\|_H + \|F\|_{L^2(0,T;V^*)})\,. \tag{7.109}$$

Aus (7.101) und Lemma 7.17 folgt

$$\|u'\|_{L^2(0,T;V^*)} \le C_a\|u\|_{L^2(0,T;V)} + \|F\|_{L^2(0,T;V^*)}\,. \tag{7.110}$$

Aus (7.107) und (7.110) ergibt sich nun (7.105) und auch die Eindeutigkeit, da für die Differenz zweier Lösungen (7.105) mit $F = 0$, $u_0 = 0$ gilt. □

Wir kehren zurück zum Anfangsrandwertproblem

$$\partial_t u + Lu = f \quad \text{in } \Omega_T = \Omega \times (0, T], \tag{7.111}$$

$$u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \times (0, T), \tag{7.112}$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{für } x \in \Omega. \tag{7.113}$$

Unter einer schwachen Lösung von (7.111) – (7.113) verstehen wir eine Lösung des (wie oben beschrieben) zugeordneten Anfangswertproblems (7.54), (7.55). Dabei sind

$$a(w,v;t) = \int_\Omega (\nabla w(x))^T A(x,t) \nabla v(x)\, dx + \int_\Omega b(x,t)^T \nabla w(x) v(x)\, dx \tag{7.114}$$

$$+ \int_\Omega c(x,t) w(x) v(x)\, dx\,, \tag{7.115}$$

und

$$(F(t))(v) = \int_\Omega f(x,t) v(x)\, dx\,. \tag{7.116}$$

Theorem 7.19 (Eindeutige Lösbarkeit des Anfangsrandwertproblems)
Es seien die Voraussetzungen 7.1 erfüllt. Dann hat Problem (7.111) – (7.113) genau eine schwache Lösung $u \in W$.

Beweis: Die Aussage ergibt sich aus Satz 7.18, wir müssen nachprüfen, dass die Voraussetzungen in 7.12 erfüllt sind. Als Evolutionstripel wählen wir

$$V = H_0^1(\Omega)\,, \quad H = L^2(\Omega)\,, \quad (j(v))(x) = v(x)\,.$$

Da $\partial_t + L$ gleichmäßig parabolisch ist, gilt nach Lemma 8.5, Teil 1,

$$a(v,v;t) \geq c_a \|v\|_V^2 - c_h \|v\|_H^2\,, \quad \text{für alle } v \in V,\ t \in (0,T],$$

mit geeigneten Konstanten c_a, c_h. Da die Koefffizienten A, b und c beschränkt sind, folgt

$$|a(v,w;t)| \leq C_a \|v\|_V \, \|w\|_V\,, \quad \text{für alle } v,w \in V,\ t \in (0,T],$$

mit einer geeigneten Konstante C_a. Weiter gilt

$$\begin{aligned} |(F(t))(v)|^2 &\leq \int_\Omega |f(x,t)v(x)|^2\, dx \leq \int_\Omega |f(x,t)|^2\, dx \cdot \int_\Omega |v(x)|^2\, dx \\ &\leq C_\Omega \int_\Omega |f(x,t)|^2\, dx \cdot \|v\|_V^2\,, \end{aligned}$$

wobei wir die Ungleichung von Poincaré verwendet haben. Es folgt

$$\|F\|^2_{L^2(0,T;V^*)} = \int_0^T \|F(t)\|^2_{V^*}\, dt \leq C_\Omega \int_0^T \int_\Omega |f(x,t)|^2\, dx\, dt \leq C_\Omega \|f\|^2_{L^2(\Omega_T)}\,,$$

also ist $F \in L^2(0,T;V^*)$. □

Die vorgestellte Methode (Zurückführung der Anfangsrandwertaufgabe auf eine Anfangswertaufgabe im Kontext eines Evolutionstripels) lässt sich auch auf andere partielle Differentialgleichungen anwenden. So kann man etwa hyperbolische Gleichungen wie die Wellengleichung in eine zu (7.54) analoge Gleichung zweiter Ordnung (also mit $u''(t)$) umformulieren und einen entsprechenden Existenz- und Eindeutigkeitssatz beweisen.

Die Methode der Galerkin-Approximation lässt sich auch zur numerischen Lösung der parabolischen Anfangsrandwertaufgabe verwenden. Man wählt V_n, eine Basis $\{w_1, \ldots, w_n\}$ und löst dann das System von n gewöhnlichen Differentialgleichungen für die unbekannnten Funktionen c_{n_k}, $1 \leq k \leq n$,

$$\sum_{k=1}^n c'_{nk}(t)(j(w_k), j(w_i))_H + \sum_{k=1}^n c_{nk}(t) a(w_k, w_i; t) = \langle F(t), w_i \rangle_V\,, \quad 1 \leq i \leq n\,, \tag{7.117}$$

durch ein geeignetes numerisches Verfahren.

8 Konvexe Funktionen und das Subdifferential

Definition 8.1 (Epigraph)
Sei V Vektorraum, $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$. Die durch

$$\operatorname{epi}\varphi = \{(v, \mu) : v \in V,\, \mu \in \mathbb{R},\, \mu \geq \varphi(v)\} \tag{8.1}$$

definierte Teilmenge von $V \times \mathbb{R}$ heißt der ***Epigraph*** *von φ, die durch*

$$D(\varphi) = \{v : v \in V,\, \varphi(v) < +\infty\} \tag{8.2}$$

definierte Teilmenge von V der ***effektive Definitionsbereich*** *von φ.*

Bezeichnet $p_V : V \times \mathbb{R} \to V$ die Projektion auf die erste Komponente, so ist

$$D(\varphi) = p_V(\operatorname{epi}\varphi)\,. \tag{8.3}$$

Es gilt $\operatorname{epi}\varphi = \emptyset$ genau dann, wenn $\varphi(v) = +\infty$ für alle $v \in V$. Man nennt φ **eigentlich**, wenn dieser Ausartungsfall nicht vorliegt.

Definition 8.2 (Konvexe Funktion)
Sei V Vektorraum. Eine Funktion $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$ heißt ***konvex****, falls ihr Epigraph $\operatorname{epi}\varphi$ konvex ist. Ist $-\varphi$ konvex, so heißt φ konkav.*

Satz 8.3 *Sei V Vektorraum, $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$. Dann ist φ konvex genau dann, wenn*

$$\varphi(\lambda v + (1-\lambda)w) \leq \lambda\varphi(v) + (1-\lambda)\varphi(w) \tag{8.4}$$

für alle $v, w \in V$ und alle $\lambda \in [0, 1]$.

Beweis: Folgt direkt aus den Definitionen. □

Definition 8.4 *Sei V Vektorraum, $K \subset V$. Eine Funktion $\varphi : K \to (-\infty, \infty]$ heißt konvex, wenn die durch*

$$\tilde{\varphi}(v) = \begin{cases} \varphi(v)\,, & \text{falls } v \in K\,, \\ +\infty\,, & \text{sonst}\,, \end{cases} \tag{8.5}$$

definierte Funktion $\tilde{\varphi} : V \to (-\infty, \infty]$ konvex ist.

Man sieht unmittelbar, daß eine Funktion $\varphi : K \to (-\infty, \infty]$, welche (8.4) auf einer konvexen Menge $K \subset V$ erfüllt, konvex ist im Sinne von Definition 8.4. Für $K \subset V$ heißt die durch

$$I_K(v) = \begin{cases} 0\,, & v \in K \\ +\infty\,, & \text{sonst} \end{cases} \tag{8.6}$$

definierte Funktion $I_K : V \to [0, \infty)$ die **Indikatorfunktion** von K. Wegen $\operatorname{epi} I_K = K \times \mathbb{R}_+$ ist I_K genau dann konvex, wenn K konvex ist.

Lemma 8.5 *Sei V Vektorraum, $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$ konvex. Dann sind die* ***Subniveaumengen*** *$\{v : v \in V,\, \varphi(v) \le \alpha\}$ und $\{v : v \in V,\, \varphi(v) < \alpha\}$ konvex für alle $\alpha \in (-\infty, \infty]$.*

Beweis: Direkt aus den Definitionen. □

Definition 8.6 (Unterhalbstetigkeit)
Sei V Banachraum. Eine Funktion $\varphi : X \to (-\infty, \infty]$ heißt ***(schwach) unterhalbstetig****, wenn die Subniveaumengen*

$$M_\alpha = \{v : v \in V,\, \varphi(v) \le \alpha\} \tag{8.7}$$

(schwach) abgeschlossen sind für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.

Satz 8.7 *Sei V Banachraum, $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$. Dann ist φ (schwach) unterhalbstetig genau dann, wenn $\operatorname{epi}\varphi$ (schwach) abgeschlossen ist in $V \times \mathbb{R}$.*

Beweis: "$\Leftarrow$": Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$F_\alpha = \{(v, \alpha) : v \in V,\, \varphi(v) \le \alpha\} = \operatorname{epi}\varphi \cap (V \times \{\alpha\}) \tag{8.8}$$

(schwach) abgeschlossen in $V \times \mathbb{R}$, also auch die Subniveaumenge $M_\alpha = j_\alpha^{-1}(F_\alpha)$, wobei $j_\alpha : V \to V \times \mathbb{R}$ die Einbettung $j_\alpha(v) = (v, \alpha)$ bezeichnet.
"$\Rightarrow$": Wir zeigen, daß das Komplement von $\operatorname{epi}\varphi$ offen ist. Sei $(v, \alpha) \notin \operatorname{epi} f$, also $\varphi(v) > \alpha$. Wähle $\varepsilon > 0$ mit $\varphi(v) > \alpha + \varepsilon$. Nach Voraussetzung ist $U = \{v : \varphi(v) > \alpha + \varepsilon\}$ offen in V und $W = U \times (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ eine offene Umgebung von (v, α) mit $W \cap \operatorname{epi}\varphi = \emptyset$, da $\varphi(w) > \alpha + \varepsilon > \beta$ für alle $(w, \beta) \in W$. □

Folgerung 8.8 *Sei V Banachraum, $K \subset V$. Dann ist K abgeschlossen genau dann, wenn I_K unterhalbstetig ist.*

Beweis: "$\Rightarrow$": $\operatorname{epi} I_K = K \times [0, \infty)$.
"$\Leftarrow$": $K = \{v : I_K(v) \le 0\}$. □

Folgerung 8.9 *Sei V Banachraum, $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$ konvex. Dann ist φ genau dann unterhalbstetig, wenn φ schwach unterhalbstetig ist.*

Beweis: Im Banachraum ist eine konvexe Menge genau dann abgeschlossen, wenn sie schwach abgeschlossen ist. □

Lemma 8.10 *Sei V Banachraum, sei $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$ konvex und unterhalbstetig. Dann gilt*

$$\varphi(v) \le \liminf_{n\to\infty} \varphi(v_n) \tag{8.9}$$

für alle Folgen $v_n \rightharpoonup v$.

Beweis: Wir nehmen an, $v_n \rightharpoonup v$ aber $\varphi(v) > \liminf \varphi(v_n)$. Dann gibt es eine Teilfolge $\{v_{n_k}\}$ und ein $\varepsilon > 0$ mit $\varphi(v_{n_k}) \le \varphi(v) - \varepsilon =: \alpha$. Da φ schwach unterhalbstetig ist, ist die Subniveaumenge M_α schwach abgeschlossen, also $\varphi(v) \le \alpha$, ein Widerspruch. □

Satz 8.11 *Sei V reflexiver Banachraum, $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$ konvex, unterhalbstetig, eigentlich und nach unten beschränkt, und es gelte*

$$\lim_{\|v\| \to \infty} \varphi(v) = \infty \,. \tag{8.10}$$

Dann gibt es ein $u \in V$ mit

$$\varphi(u) = \min_{v \in V} \varphi(v) \,. \tag{8.11}$$

Beweis: Sei $\{u_n\}$ eine Minimalfolge für φ in V, das heißt, $\varphi(u_n) \downarrow \inf_{v \in V} \varphi(v)$. Nach Voraussetzung ist das Infimum endlich. Wegen (8.10) ist $\{u_n\}$ beschränkt in V. Da V reflexiv ist, gibt es eine Teilfolge mit $u_{n_k} \rightharpoonup u$ für ein $u \in V$. Aus Lemma 8.10 folgt

$$\varphi(u) \le \liminf_{k \to \infty} \varphi(u_{n_k}) = \inf_{v \in V} \varphi(v) \,.$$

□

Lemma 8.12 *Sei V Banachraum. Sind $\varphi_i : V \to (-\infty, \infty]$ konvex und unterhalbstetig für alle $i \in I$, so ist auch $\sup_{i \in I} \varphi_i$ konvex und unterhalbstetig.*

Beweis:

$$\operatorname{epi}\,(\sup_{i \in I} \varphi_i) = \bigcap_{i \in I} \operatorname{epi} \varphi_i \,.$$

□

Satz 8.13 *Sei V Banachraum, $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$ konvex, unterhalbstetig und eigentlich. Dann gilt*

$$\varphi = \sup\{g |\; g : V \to \mathbb{R} \text{ affin und stetig, } g \le \varphi\} \,. \tag{8.12}$$

Beweis: "$\ge$": klar.
"$\le$": Es genügt zu zeigen: Ist $(v, a) \in V \times \mathbb{R}$ mit $a < \varphi(v)$, so gibt es eine affine stetige Funktion $g : V \to \mathbb{R}$ mit $a \le g(v)$ und $g \le f$. Der Beweis dieser Aussage beruht auf dem Trennungssatz, angewendet auf einen solchen Punkt $(\varphi(v), a)$ und die konvexe abgeschlossene Menge $\operatorname{epi} \varphi$ im Raum $V \times \mathbb{R}$. Wir führen ihn hier nicht aus. □

Definition 8.14 (Subdifferential)
Sei H Hilbertraum, $\varphi : H \to (-\infty, \infty]$. Ein $w \in H$ heißt Subgradient für φ in $u \in H$, wenn $\varphi(u) < \infty$ und

$$\varphi(v) \ge \varphi(u) + \langle w, v - u \rangle \;, \quad \textit{für alle } v \in H. \tag{8.13}$$

Die Menge

$$\partial \varphi(u) = \{w : w \in H, \, w \textit{ ist Subgradient für } \varphi \textit{ in } u\} \tag{8.14}$$

heißt ***Subdifferential*** *von φ in u.*

Gemäß Definition 8.14 ist $\partial \varphi(u) = \emptyset$ falls $\varphi(u) = \infty$.

Beispiel 8.15

(i) Für $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(v) = |v|$, gilt $\partial\varphi(u) = \{1\}$ falls $u > 0$, $\partial\varphi(u) = \{-1\}$ falls $u < 0$, sowie $\partial\varphi(0) = [-1, 1]$.

(ii) Für $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(v) = \begin{cases} 1\,, & v > 0\,, \\ 0\,, & v \le 0\,, \end{cases}$$

gilt $\partial\varphi(0) = \{0\}$. Definieren wir aber

$$\varphi(v) = \begin{cases} 1\,, & v \ge 0\,, \\ 0\,, & v < 0\,, \end{cases}$$

so gilt $\partial\varphi(0) = \emptyset$.

Definition 8.16 (Normalenkegel)
Sei H Hilbertraum, $K \subset H$ konvex, $u \in K$. Ein $w \in H$ heißt Stützfunktional für K in u, falls

$$\langle w, u - v\rangle \ge 0\,, \qquad \textit{für alle } v \in K. \tag{8.15}$$

Die Menge

$$N_K(u) = \{w : w \in H,\ w \textit{ ist Stützfunktional für } K \textit{ in } u\} \tag{8.16}$$

heißt der ***Normalenkegel*** *an K in u.*

Lemma 8.17 *Sei H Hilbertraum, $K \subset H$ konvex. Dann gilt*

$$\partial I_K(u) = N_K(u)\,, \quad \textit{falls } u \in K, \tag{8.17}$$

und $\partial I_K(u) = \emptyset$ andernfalls.

Beweis: Direkt aus der Definition. □

Satz 8.18 *Sei H Hilbertraum, $\varphi : H \to (-\infty, \infty]$, $u \in H$ mit $\varphi(u) < \infty$. Dann gilt*

$$\varphi(u) = \min_{v \in V} \varphi(v) \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 \in \partial\varphi(u)\,. \tag{8.18}$$

Beweis: Direkt aus der Definition. □

Lemma 8.19 *Sei $\varphi : \mathbb{R} \to (-\infty, \infty]$ konvex, $u \in D(\varphi)$. Dann wird durch*

$$d(t) = \frac{\varphi(u+t) - \varphi(u)}{t} \tag{8.19}$$

eine monoton wachsende Funktion $d : (0, \infty) \to (-\infty, \infty]$ definiert. Ferner gilt $d(-t) \le d(t)$ für $t > 0$.

Beweis: Für $0 < s < t$ ist

$$u + s = \frac{t-s}{t}u + \frac{s}{t}(u+t)\,,$$

also

$$\varphi(u+s) \le \frac{t-s}{t}\varphi(u) + \frac{s}{t}\varphi(u+t)\,.$$

Subtraktion von $\varphi(u)$ und Division durch s liefert

$$d(s) = \frac{\varphi(u+s) - \varphi(u)}{s} \le \frac{\varphi(u+t) - \varphi(u)}{t} = d(t)\,.$$

Es gilt weiter für $t > 0$

$$\varphi(u) \le \frac{1}{2}\varphi(u-t) + \frac{1}{2}\varphi(u+t)\,,$$

also $\varphi(u) - \varphi(u-t) \le \varphi(u+t) - \varphi(u)$ und damit

$$\frac{\varphi(u-t) - \varphi(u)}{-t} \le \frac{\varphi(u+t) - \varphi(u)}{t}\,.$$

□

Satz 8.20 *Sei H Hilbertraum, $\varphi : H \to (-\infty, \infty]$ konvex, unterhalbstetig und eigentlich, $f \in H$. Dann hat die Funktion $J : H \to (-\infty, \infty]$,*

$$J(v) = \frac{c}{2}\|v - f\|^2 + \varphi(v)\,, \tag{8.20}$$

ein eindeutig bestimmtes Minimum $u \in H$, und es gilt

$$c(f - u) \in \partial\varphi(u)\,. \tag{8.21}$$

Beweis: Mit φ ist auch J konvex, unterhalbstetig und eigentlich. Nach Satz 8.13 hat J eine affine Minorante, es gibt also $w \in H$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$\varphi(v) \ge \langle w, v\rangle - \alpha\,, \quad \text{für alle } v \in H. \tag{8.22}$$

Es ist dann

$$J(v) \ge \|v\|(\frac{c}{2}\|v\| - c\|f\| - \|w\|) - \alpha\,, \quad \text{für alle } v \in H,$$

also ist J nach unten beschränkt, und $J(v) \to \infty$ für $\|v\| \to \infty$. Aus Satz 8.11 folgt, daß J ein Minimum $u \in H$ hat; dieses ist eindeutig, da J sogar strikt konvex ist. Sei nun $v \in H$ beliebig. Wir setzen

$$v_t = u + t(v - u)\,, \quad t \in [0, 1]\,.$$

Es gilt für alle $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} 0 \le J(v_t) - J(u) &= \frac{c}{2}\|(u-f) + t(v-u)\|^2 - \frac{c}{2}\|u - f\|^2 + \varphi(v_t) - \varphi(u) \\ &= ct\,\langle u - f, v - u\rangle + \frac{ct^2}{2}\|v - u\|^2 + \varphi(v_t) - \varphi(u)\,. \end{aligned}$$

Division durch t führt auf

$$\begin{aligned}0 &\leq c\,\langle u-f, v-u\rangle + \frac{ct}{2}\|v-u\|^2 + \frac{\varphi(v_t)-\varphi(u)}{t}\\ &\leq c\,\langle u-f, v-u\rangle + \frac{ct}{2}\|v-u\|^2 + \varphi(v)-\varphi(u)\,,\end{aligned}$$

letzteres wegen der Monotonie des Differenzenquotienten nach Lemma 8.19. Grenzübergang $t \downarrow 0$ ergibt

$$0 \leq c\,\langle u-f, v-u\rangle + \varphi(v)-\varphi(u)\,.$$

Da $v \in H$ beliebig war, folgt $c(f-u) \in \partial\varphi(u)$. □

9 Maximal monotone Operatoren

Wir betrachten das Anfangswertproblem im $\mathbb{R}$

$$u' + \operatorname{sign}(u) = 0\,, \quad u(0) = u_0\,, \tag{9.1}$$

wobei $\operatorname{sign} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definiert ist durch $\operatorname{sign}(r) = r/|r|$. Es ist $u' = 1$ in $\{u < 0\}$ und $u' = -1$ in $\{u > 0\}$. Eine Lösung zum Anfangswert $u_0 = 0$ existiert genau dann, wenn wir $\operatorname{sign}(0) = 0$ setzen, dann ist $u = 0$ eine Lösung auf $\mathbb{R}_+$.

Setzen wir die Signumsfunktion auf $\mathbb{R}$ fort, so ist $\operatorname{sign} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton genau dann, wenn $\operatorname{sign}(0) \in [-1, 1]$. Sind u_1, u_2 Lösungen, so folgt aus der Monotonie

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{1}{2}(u_2 - u_1)^2 = (u_2 - u_1)(u_2' - u_1') = -(u_2 - u_1)(\operatorname{sign}(u_2) - \operatorname{sign}(u_1)) \le 0\,, \tag{9.2}$$

das heißt, Lösungen von (9.1) sind eindeutig bestimmt.

Es hat sich als zweckmäßig herausgestellt, die Signumfunktion als mengenwertige Funktion $\operatorname{sign} : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ fortzusetzen,

$$\operatorname{sign}(r) = \begin{cases} 1\,, & r > 0 \\ [-1, 1]\,, & r = 0 \\ -1\,, & r < 0 \end{cases} \tag{9.3}$$

Die Differentialgleichung $u' + \operatorname{sign}(u) = 0$ wird ersetzt durch die **Differentialinklusion**

$$u' + \operatorname{sign}(u) \ni 0\,,$$

das Anfangswertproblem (9.1) erhält die Form

$$u' + \operatorname{sign}(u) \ni 0\,, \quad u(0) = u_0\,. \tag{9.4}$$

Die Differentialinklusion lässt sich auch schreiben als $-u' \in \operatorname{sign}(u)$, Lösungen sind Funktionen mit $-u'(t) \in \operatorname{sign}(u(t))$. Für $u_0 = 1$ ergibt sich beispielsweise

$$u(t) = \begin{cases} 1 - t\,, & t \in [0, 1]\,, \\ 0\,, & t \ge 1\,. \end{cases} \tag{9.5}$$

Die Ableitung u' ist unstetig, aber integrierbar, und der Hauptsatz gilt. Das Monotonieargument aus (9.2) bleibt gültig unabhängig davon, welche Werte in $[-1, 1]$ die Signumsfunktion an den Nullstellen der Lösungen u_1 und u_2 annimmt.

Die mengenwertige Formulierung führt zu allgemeinen Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen für Differentialgleichungen mit rechten Seiten, die bei einwertiger Formulierung unstetig sind. Beispielsweise können parabolische Differentialinklusionen der Form

$$\partial_t u - \Delta u + \beta(u) \ni f \tag{9.6}$$

oder elliptische Differentialinklusionen der Form

$$-\Delta u + \beta(u) \ni f \tag{9.7}$$

auf diese Weise behandelt werden. Mehr dazu später.

Seien V, W Mengen, $R \subset V \times W$ eine Relation. Eine Relation kann als mengenwertige Abbildung

$$A : V \to \mathcal{P}(W)\,, \tag{9.8}$$

geschrieben auch

$$A : V \rightrightarrows W\,, \tag{9.9}$$

aufgefaßt werden, indem wir setzen

$$Av = \{w : w \in W,\ (v, w) \in R\}\,. \tag{9.10}$$

Wir bezeichnen

$$D(A) = \{v : v \in V,\ Av \neq \emptyset\} \tag{9.11}$$

als Definitionsbereich von A, und

$$\mathrm{im}\,(A) = \bigcup_{v \in V} Av \tag{9.12}$$

als Bildbereich von A. Sind $A, B : V \rightrightarrows W$ mengenwertige Abbildungen, die aus den Relationen R und S entstanden sind, so heißt B Erweiterung von A, falls $R \subset S$ (und echte Erweiterung von A, falls außerdem $R \neq S$).

Ist $A : V \rightrightarrows W$, so ist die Inverse $A^{-1} : W \rightrightarrows V$ definiert durch

$$A^{-1}w = \{v : v \in V,\ w \in Av\}\,. \tag{9.13}$$

Es gilt offensichtlich $D(A^{-1}) = \mathrm{im}\,(A)$ wegen

$$w \in Av \qquad \Leftrightarrow \qquad v \in A^{-1}w \tag{9.14}$$

für alle $v \in V$, $w \in W$.

Definition 9.1 (Maximal monotoner Operator)
Sei H Hilbertraum. Ein Operator $A : H \rightrightarrows H$ heißt monoton, falls

$$\langle w_2 - w_1, v_2 - v_1 \rangle \geq 0\,, \quad \textit{für alle } v_1, v_2 \in H,\ w_1 \in Av_1,\ w_2 \in Av_2. \tag{9.15}$$

A heißt maximal monoton, falls es keine echte Erweiterung von A gibt, die monoton ist.

Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend, wird durch

$$\tilde{f}(r) = [f(r-), f(r+)]\,, \quad f(r-) := \sup_{t<r} f(t)\,, \quad f(r+) := \inf_{t>r} f(t)\,, \tag{9.16}$$

ein maximal monotoner Operator $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ definiert.

Im reellen Hilbertraum vermittelt die Riesz-Dualität $u^* \leftrightarrow u$,

$$\langle u^*, v \rangle = \langle u, v \rangle\ , \quad u, v \in H\,, \quad u^* \in H^*\,,$$

einen Isomorphismus zwischen H^* und H (links steht die Anwendung von u^* auf v, rechts das Skalarprodukt von u und v). Wir können A also auch als Operator $A : H \rightrightarrows H^*$

auffassen und erhalten für den Hilbertraumfall die mengenwertige Variante des Monotoniebegriffs aus Kapitel 4.

Als direkte Anwendung des Zornschen Lemmas kann man zeigen, dass jeder monotone Operator eine maximal monotone Erweiterung besitzt.

Unmittelbar aus der Definition des Subdifferentials folgt, dass $\partial\varphi$ monoton ist für jede Funktion $\varphi : H \to (-\infty, \infty]$.

Für $A, B : H \rightrightarrows H$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ setzen wir

$$\begin{aligned} \lambda A &= \{(v, \lambda w) : v \in H\,,\; w \in Av\}\,, \\ A + B &= \{(v, w + z) : v \in H\,,\; w \in Av\,,\; z \in Bv\}\,, \\ \mathrm{cl}\,(\mathrm{conv}\, A) &= \{(v, w) : v \in H\,,\; w \in \mathrm{cl}\,(\mathrm{conv}\, Av)\}\,. \end{aligned}$$

Für die Addition gilt $D(A + B) = D(A) \cap D(B)$.

Lemma 9.2 *Sei H Hilbertraum, seien $A, B : H \rightrightarrows H$ monoton, $\lambda \geq 0$. Dann sind A^{-1}, λA, $A + B$ und $\mathrm{cl}\,(\mathrm{conv}\, A)$ monoton.*

Beweis: Direkt aus den Definitionen. Für $\mathrm{cl}\,(\mathrm{conv}\, A)$: Übung. □

Definition 9.3 (Nichtexpansiver Operator)
Sei H Hilbertraum. Ein mengenwertiger Operator $A : H \rightrightarrows H$ heißt nichtexpansiv, falls

$$\|w_2 - w_1\| \leq \|v_2 - v_1\| \tag{9.17}$$

für alle $v_1, v_2 \in H$, $w_1 \in Av_1$, $w_2 \in Av_2$.

Indem wir $v_2 = v_1$ setzen in (9.17), erkennen wir, dass Av leer oder einelementig ist für alle $v \in H$. Nichtexpansive Operatoren A sind also Abbildungen $A : D(A) \to H$ im üblichen Sinne.

Lemma 9.4 *Sei H Hilbertraum, $A : H \rightrightarrows H$. Dann sind äquivalent:*

(i) A ist monoton.

(ii) Es gilt
$$\|v_2 - v_1\| \leq \|(v_2 + \lambda w_2) - (v_1 + \lambda w_1)\| \tag{9.18}$$
für alle $v_1, v_2 \in H$, $w_1 \in Av_1$, $w_2 \in Av_2$ und alle $\lambda \geq 0$. Anders ausgedrückt: $(I + \lambda A)^{-1}$ ist nichtexpansiv für alle $\lambda \geq 0$.

Beweis: Für alle $v_1, v_2, w_1, w_2 \in H$ und alle $\lambda > 0$ gilt

$$\|(v_2 + \lambda w_2) - (v_1 + \lambda w_1)\|^2 = \|v_2 - v_1\|^2 + 2\lambda \langle w_2 - w_1, v_2 - v_1 \rangle + \lambda^2 \|w_2 - w_1\|^2\,,$$

also

$$\frac{1}{\lambda}(\|(v_2 + \lambda w_2) - (v_1 + \lambda w_1)\|^2 - \|v_2 - v_1\|^2) = 2\,\langle w_2 - w_1, v_2 - v_1 \rangle + \lambda \|w_2 - w_1\|^2\,.$$

Hieraus folgt, dass A monoton ist genau dann, wenn

$$\|v_2 - v_1\| \leq \|(v_2 - v_1) + \lambda(w_2 - w_1)\| \,, \tag{9.19}$$

für alle $v_1, v_2 \in H$, $w_1 \in Av_1$, $w_2 \in Av_2$, $\lambda > 0$. was gleichbedeutend ist mit (9.18). $\square$

In Teil (ii) des Lemmas kommt nur die Norm, aber nicht das Skalarprodukt vor. Ist H lediglich ein normierter Raum, so heißt $A : H \rightrightarrows H$ **akkretiv**, falls (ii) gilt.

Ist A monoton, so hat gemäß Teil (ii) die Gleichung

$$u + \lambda Au \ni f \,, \quad f \in H \text{ gegeben,} \tag{9.20}$$

für jedes $\lambda > 0$ höchstens eine Lösung $u_\lambda \in H$.

Lemma 9.5 *Sei H Hilbertraum, $A : H \rightrightarrows H$ monoton. Dann gilt:*

(i) A ist maximal monoton genau dann, wenn für alle $v, w \in H$ die Bedingung

$$\langle w - \tilde{w}, v - \tilde{v}\rangle \geq 0 \,, \quad \textit{für alle } \tilde{v} \in H,\ \tilde{w} \in A\tilde{v}, \tag{9.21}$$

impliziert, daß $w \in Av$.

(ii) Sei A maximal monoton. Dann sind auch A^{-1} sowie λA maximal monoton für alle $\lambda > 0$. Weiterhin ist Av konvex und abgeschlossen in H für alle $v \in H$.

Beweis: Für feste $v, w \in H$ besagt (9.21) gerade, dass der zu

$$\tilde{A}v = Av \cup \{w\} \,, \quad \tilde{A}z = Az \quad \text{für } z \neq v, \tag{9.22}$$

erweiterte Operator $\tilde{A}$ monoton ist. Da jede monotone Erweiterung von A auch eine von A^{-1} und umgekehrt liefert, ist mit A auch A^{-1} maximal monoton. Ist $\langle w - \tilde{w}, v - \tilde{v}\rangle \geq 0$ für alle $\tilde{v} \in H$, $\tilde{w} \in \lambda Av$, so gilt (9.21) mit $\lambda^{-1}w$ an der Stelle von w, also ist $w \in \lambda Au$ und damit λA maximal monoton. Schließlich folgt aus Lemma 9.2, dass $\mathrm{cl}\,(\mathrm{conv}\, A) = A$. $\square$

Folgerung 9.6 *Sei $A : H \to H$ monoton und hemistetig. Dann ist A maximal monoton.*

Beweis: Nach Satz 4.11 erfüllt A die in Lemma 9.5(i) verlangte Bedingung. $\square$

Wir formulieren den **Minty-Trick** für maximal monotone Operatoren.

Lemma 9.7 *Sei $A : H \rightrightarrows H$ maximal monoton, es gelte $w_n \in Av_n$, $v_n \rightharpoonup v$ und $w_n \rightharpoonup w$ in H sowie $\limsup_{n\to\infty} \langle w_n, v_n\rangle \leq \langle w, v\rangle$. Dann gilt $w \in Av$ und $\langle w_n, v_n\rangle \to \langle w, v\rangle$.*

Die Bedingung an den Limes superior ist erfüllt, wenn eine der beiden Folgen sogar in der Norm von H konvergiert, da dann $\langle w_n, v_n\rangle \to \langle w, v\rangle$.

Beweis: Sei $\tilde{w} \in A\tilde{v}$ beliebig. Da A monoton ist, folgt

$$0 \leq \langle w_n - \tilde{w}, v_n - \tilde{v}\rangle = \langle w_n, v_n\rangle - \langle w_n, \tilde{v}\rangle - \langle \tilde{w}, v_n\rangle + \langle \tilde{w}, \tilde{v}\rangle \ .$$

Übergang zum Limes superior für $n \to \infty$ ergibt

$$0 \leq \limsup_{n\to\infty} \langle w_n, v_n \rangle - \langle w, \tilde{v} \rangle - \langle \tilde{w}, v \rangle + \langle \tilde{w}, \tilde{v} \rangle \leq \langle w - \tilde{w}, v - \tilde{v} \rangle \ .$$

Da A maximal monoton ist, folgt $w \in Av$ nach Lemma 9.5. Weiter gilt

$$0 \leq \langle w_n - w, v_n - v \rangle = \langle w_n, v_n \rangle - \langle w_n, v \rangle - \langle w, v_n \rangle + \langle w, v \rangle \ .$$

Übergang zum Limes inferior für $n \to \infty$ ergibt

$$\langle w, v \rangle \leq \liminf_{n\to\infty} \langle w_n, v_n \rangle$$

und damit $\langle w_n, v_n \rangle \to \langle w, v \rangle$. □

Satz 9.8 (Charakterisierung maximal monotoner Operatoren)
Sei H Hilbertraum, $A : H \rightrightarrows H$. Dann sind äquivalent:

(i) *A ist maximal monoton.*

(ii) *A ist monoton und* $\mathrm{im}\,(I + A) = H$.

(iii) *Für alle $\lambda > 0$ ist $(I + \lambda A)^{-1}$ nichtexpansiv und $D((I + \lambda A)^{-1}) = \mathrm{im}\,(I + \lambda A) = H$.*

Beweis: "(i)⇒(ii)": Diesen Beweis führen wir hier nicht. Er beruht auf dem Existenzsatz für Sattelpunkte (Minimaxsatz) und damit auf dem Brouwerschen Fixpunktsatz. Siehe das Buch von Brézis über maximal monotone Operatoren.
"(ii)⇒(i)": Sei B eine monotone Erweiterung von A, sei $w \in Bv$. Wähle ein $u \in D(A)$ mit $w + v \in u + Au$, dann ist

$$w + v \in u + Bu\,, \quad w + v \in v + Bv\,, \tag{9.23}$$

also $u, v \in (I + B)^{-1}(w + v)$. Aus Lemma 9.4 folgt $u = v$ und damit $w + v \in v + Av$, also auch $w \in Av$ und damit $A = B$.
"(i),(ii)⇒(iii)": Sei $\lambda > 0$. Dann ist nach Lemma 9.5 auch λA maximal monoton, also $\mathrm{im}\,(I + \lambda A) = H$, und (iii) folgt aus Lemma 9.4.
"(iii)⇒(ii)": Ist ebenfalls eine direkte Folge von Lemma 9.4. □

Beispiel 9.9 Auf $H = L^2(\Omega)$ definieren wir

$$Av = -\Delta v\,, \quad D(A) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\,. \tag{9.24}$$

$A : D(A) \to H$ ist linear und weiterhin monoton wegen

$$\langle Av, v \rangle = \int_\Omega -v(x) \cdot \Delta v(x)\, dx = \int_\Omega \|\nabla v(x)\|^2\, dx \geq 0\,, \quad \text{für alle } v \in D(A).$$

A ist maximal monoton nach Satz 9.8(ii) genau dann, wenn das Randwertproblem

$$-\Delta u + u = f$$

für jedes $f \in L^2(\Omega)$ eine Lösung $u \in D(A)$ hat. Nach Teil I der Vorlesung ist das gleichbedeutend damit, dass die eindeutige schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ des Randwertproblems die Regularität $u \in H^2(\Omega)$ hat. Das ist der Fall, wenn Ω beschränkt ist und hinreichend glatten Rand hat, siehe z.B. Evans. (Wir hatten – ohne weitere Voraussetzung an Ω – lediglich gezeigt, dass $u \in H^2(U)$ ist für jedes offene $U \subset\subset \Omega$.) □

Gemäß (iii) in obigem Satz hat die Inklusion

$$u + \lambda A u \ni f$$

für jedes $f \in H$ eine Lösung $u \in H$, falls A maximal monoton und $\lambda > 0$. Wir interessieren uns nun für die Lösbarkeit der Inklusion

$$Au \ni f\,.$$

Definition 9.10 *Ein monotoner Operator $A : H \rightrightarrows H$ auf einem Hilbertraum H heißt koerziv, falls es ein $v_0 \in H$ gibt mit*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\langle w_n, v_n - v_0\rangle}{\|v_n\|} = \infty \tag{9.25}$$

für alle $v_n, w_n \in H$ mit $\|v_n\| \to \infty$ und $w_n \in Av_n$. □

Satz 9.11 *Sei H Hilbertraum, $A : H \rightrightarrows H$ maximal monoton und koerziv. Dann gilt* $\mathrm{im}\,(A) = H$.

Beweis: Sei $f \in H$. Für jedes $\lambda > 0$ hat wegen

$$\lambda I + A = \lambda\Big(I + \frac{1}{\lambda}A\Big)$$

die Inklusion

$$\lambda u_\lambda + Au_\lambda \ni f \tag{9.26}$$

nach Satz 9.8 eine Lösung $u_\lambda \in H$. Wir nehmen nun an, $\{u_\lambda\}$ sei unbeschränkt für $\lambda \to 0$. Sei $v_0 \in H$ gemäß Definition 9.10 gewählt. Skalarmultiplikation von (9.26) mit $u_\lambda - v_0$ führt auf

$$\lambda \langle u_\lambda, u_\lambda - v_0\rangle + \langle w_\lambda, u_\lambda - v_0\rangle = \langle f, u_\lambda - v_0\rangle \tag{9.27}$$

mit einem geeigneten $w_\lambda \in Au_\lambda$. Sei $u_n = u_{\lambda_n}$ eine Teilfolge mit $\|u_n\| \to \infty$ und $\lambda_n \to 0$. Division durch $\|u_n\|$ in (9.27) ergibt

$$\lambda_n\|u_n\| + \frac{\langle w_n, u_n - v_0\rangle}{\|u_n\|} = \left\langle f, \frac{u_n - v_0}{\|u_n\|}\right\rangle + \lambda_n \left\langle \frac{u_n}{\|u_n\|}, v_0\right\rangle\,.$$

Für $n \to \infty$ ist die rechte Seite beschränkt, die linke aber unbeschränkt wegen der Koerzivität von A, ein Widerspruch. Also ist $\{u_\lambda\}$ beschränkt in H. Es gibt also eine schwach konvergente Teilfolge $\{u_k\} = \{u_{\lambda_k}\}$, sei $u_k \rightharpoonup u \in H$ und $w_k \in Au_k$ mit

$$\lambda_k u_k + w_k = f\,.$$

Es gilt $\lambda_k u_k \to 0$ und damit $w_k \to f$ in H. Aus Lemma 9.7 folgt $f \in Au$ und damit die Behauptung, da f beliebig war. □

Satz 9.12 *Sei H Hilbertraum, $\varphi : H \to (-\infty, \infty]$ konvex, unterhalbstetig und eigentlich. Dann ist $\partial\varphi : H \rightrightarrows H$ maximal monoton.*

Beweis: Es genügt wegen Satz 9.8 zu zeigen, daß

$$\operatorname{im}(I + \partial\varphi) = H\,. \tag{9.28}$$

Sei $f \in H$ beliebig. Wir definieren $J : H \to (-\infty, \infty]$ durch

$$J(v) = \frac{1}{2}\|v - f\|^2 + \varphi(v)\,. \tag{9.29}$$

Nach Satz 8.20 hat J ein eindeutiges Minimum $u \in H$, und es gilt $f - u \in \partial\varphi(u)$, was gleichbedeutend ist mit $u + \partial\varphi(u) \ni f$. □

Beispiel 9.13 Sei $H = L^2(\Omega)$. Wir definieren $\varphi : H \to (-\infty, \infty]$ durch

$$\varphi(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega \|\nabla v(x)\|^2\,dx\,, \quad v \in D(\varphi) = H_0^1(\Omega)\,. \tag{9.30}$$

Es ist also $\varphi(v) = +\infty$, falls $v \notin H_0^1(\Omega)$. Wir wollen zeigen, dass $\partial\varphi = A$, wobei $Au = -\Delta u$ mit $D(A) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ der in Beispiel 9.9 betrachtete Operator ist.

(i) φ ist konvex und eigentlich.
(ii) φ ist unterhalbstetig: Sei (v_n, r_n) Folge in $\operatorname{epi}(\varphi)$ mit $v_n \to v$ in $L^2(\Omega)$ und $r_n \to r$. Zu zeigen ist $(v, r) \in \operatorname{epi}(\varphi)$. Wegen $\varphi(v_n) \le r_n$ ist $\{\varphi(v_n)\}$ beschränkt, also $\{\nabla v_n\}$ beschränkt im $L^2(\Omega)$ und somit, ggf. nach Übergang zu einer Teilfolge, $\nabla v_n \rightharpoonup w$ und $v_n \rightharpoonup v$ (sogar $v_n \to v$) in $L^2(\Omega)$. Da andererseits $\nabla v_n \to \nabla v$ im Distributionensinn, folgt $\nabla v = w \in L^2(\Omega)$. Da die Norm im Hilbertraum ein schwach unterhalbstetiges Funktional ist, folgt

$$\varphi(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega \|\nabla v(x)\|^2\,dx \le \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{2}\int_\Omega \|\nabla v_n(x)\|^2\,dx = \liminf_{n\to\infty} \varphi(v_n) \le \lim_{n\to\infty} r_n = r$$

und damit $(v, r) \in \operatorname{epi}(\varphi)$. Also ist $\operatorname{epi}(\varphi)$ abgeschlossen und φ unterhalbstetig.
(iii) Wir zeigen, dass $A \subset \partial\varphi$ gilt. Sei $u \in D(A)$. Für beliebiges $v \in D(\varphi)$ gilt

$$\begin{aligned}\langle Au, v - u\rangle_H &= \int_\Omega -\Delta u \cdot (v - u)\,dx = \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v - \nabla u\rangle\,dx \\ &= \langle \nabla u, \nabla v - \nabla u\rangle_H \le \frac{1}{2}\|\nabla u\|_H^2 + \frac{1}{2}\|\nabla v\|_H^2 - \|\nabla u\|_2^2 \\ &= \varphi(v) - \varphi(u)\,.\end{aligned}$$

(iv) Da A nach Beispiel 9.9 maximal monoton und $\partial\varphi$ monoton ist, folgt $A = \partial\varphi$. □

Ist $A : H \rightrightarrows H$ maximal monoton, so ist nach Satz 9.8

$$J_\lambda := (I + \lambda A)^{-1}$$

ein nichtexpansiver Operator auf H für jedes $\lambda > 0$.

Definition 9.14 (Yosida-Regularisierung) *Sei $A : H \rightrightarrows H$ maximal monoton, $\lambda > 0$. Der Operator $A_\lambda : H \to H$ definiert durch*

$$A_\lambda = \frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda) \tag{9.31}$$

heißt die Yosida-Regularisierung von A.

Ist $\varphi : H \to (-\infty, \infty]$ konvex, unterhalbstetig und eigentlich, so hat

$$v \mapsto \frac{1}{2\lambda}\|v-u\|^2 + \varphi(v)\,.$$

ein eindeutig bestimmtes Minimum in H, wie wir in Satz 8.20 gesehen haben.

Definition 9.15 (Moreau-Regularisierung)
Sei $\varphi : H \to (-\infty, \infty]$ konvex, unterhalbstetig und eigentlich, sei $\lambda > 0$. Die Funktion

$$\varphi_\lambda(u) = \min_{v\in H}\left(\frac{1}{2\lambda}\|v-u\|^2 + \varphi(v)\right) \tag{9.32}$$

heißt die Moreau-Regularisierung von φ.

Beispiel 9.16 (i) Sei $H = \mathbb{R}$, $\varphi = I_{\{0\}}$, das heißt, $\varphi(r) = 0$ für $r = 0$ und $\varphi(r) = \infty$ für $r \neq 0$. Die Moreau-Regularisierung ist

$$\varphi_\lambda(r) = \min_{s\in\mathbb{R}}\left(\frac{1}{2\lambda}|s-r|^2 + \varphi(s)\right) = \frac{1}{2\lambda}r^2\,.$$

Das Subdifferential $\beta = \partial\varphi : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ ist

$$\beta(r) = \begin{cases} \mathbb{R}\,, & r = 0\,,\\ \emptyset\,, & r \neq 0\,. \end{cases}$$

Es ist $r \in (I + \lambda\beta)(s)$ genau dann, wenn $s = 0$ und $r \in \mathbb{R}$, also $(I + \lambda\beta)^{-1} = 0$. Die Yosida-Regularisierung von β ist also

$$\beta_\lambda(r) = \frac{r}{\lambda}\,.$$

(ii) Sei $H = \mathbb{R}$, $\varphi(r) = |r|$. Die Moreau-Regularisierung ergibt sich als

$$\varphi_\lambda(r) = \begin{cases} r - \frac{\lambda}{2}\,, & r > \lambda\,,\\ \frac{r^2}{2\lambda}\,, & |r| \le \lambda\,,\\ -r - \frac{\lambda}{2}\,, & r < -\lambda\,. \end{cases}$$

Das Subdifferential $\beta = \partial\varphi$ ist das Signum,

$$\beta(r) = \begin{cases} 1\,, & r > 0\,,\\ [-1,1]\,, & r = 0\,,\\ -1\,, & r < 0\,. \end{cases}$$

Es gilt $r \in (I + \lambda\beta)(s)$ genau dann, wenn $r = s + \lambda$ (falls $s > 0$) bzw. $r = s - \lambda$ (falls $s < 0$) bzw. $r \in s + [-\lambda, \lambda] = [-\lambda, \lambda]$ (falls $s = 0$). Es folgt

$$J_\lambda(r) = \begin{cases} r - \lambda\,, & r > \lambda\,,\\ 0\,, & r \in [-\lambda, \lambda]\,,\\ r + \lambda\,, & r < -\lambda\,. \end{cases}$$

Die Yosida-Regularisierung des Signums ist also

$$\beta_\lambda(r) = \frac{r - J_\lambda(r)}{\lambda} = \begin{cases} 1\,, & r > \lambda\,, \\ \frac{r}{\lambda}\,, & r \in [-\lambda, \lambda]\,, \\ -1\,, & r < -\lambda\,. \end{cases}$$

(iii) Sei K eine abgeschlossene konvexe Teilmenge eines Hilbertraums H, sei $\varphi = I_K$. Für die Moreau-Regularisierung gilt

$$\varphi_\lambda(u) = \min_{v \in H} \left(\frac{1}{2\lambda} \|v - u\|^2 + I_K(v) \right) = \frac{1}{2\lambda} (\operatorname{dist}(u, K))^2\,.$$

Wir wissen bereits, dass $\partial I_K(u) = N_K(u)$, der Normalenkegel. Es folgt

$$\begin{aligned} v = J_\lambda(u) \quad &\Leftrightarrow \quad u \in (I + \lambda N_K)(v) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\lambda}(u - v) \in N_K(v) \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\lambda} \langle u - v, v - z \rangle \geq 0 \quad \text{für alle } z \in K \\ &\Leftrightarrow \quad v = P_K(u)\,. \end{aligned}$$

Die Yosida-Regularisierung des Normalenkegels ist also

$$(N_K)_\lambda(u) = \frac{1}{\lambda}(u - P_K(u))\,.$$

□

Satz 9.17 *Sei $A : H \rightrightarrows H$ maximal monoton. Dann ist $\overline{D(A)}$ konvex, und es gilt*

$$\lim_{\lambda \to 0} J_\lambda(v) = P_{\overline{D(A)}}(v)\,, \quad \text{für alle } v \in H, \tag{9.33}$$

wobei $P_{\overline{D(A)}}$ die Projektion auf $\overline{D(A)}$ ist.

Beweis: Sei $K = \overline{\operatorname{conv} D(A)}$. Sei $v \in H$ beliebig. Nach Definition von J_λ ist

$$\frac{1}{\lambda}(v - J_\lambda v) \in A J_\lambda v\,,$$

also gilt $J_\lambda v \in D(A)$ sowie für alle $\tilde{v} \in D(A)$ und $\tilde{w} \in A\tilde{v}$ wegen Monotonie

$$\left\langle \frac{1}{\lambda}(v - J_\lambda v) - \tilde{w}, J_\lambda v - \tilde{v} \right\rangle \geq 0\,.$$

Wir multiplizieren mit λ und sortieren um,

$$\|J_\lambda v\|^2 \leq \langle v - \lambda \tilde{w}, J_\lambda v - \tilde{v} \rangle + \langle J_\lambda v, \tilde{v} \rangle\,. \tag{9.34}$$

Also ist $\{J_\lambda v : \lambda > 0\}$ beschränkt in H. Für eine Teilfolge $\lambda_n \to 0$ gilt $J_{\lambda_n} v \rightharpoonup y$, und es ist $y \in K$ wegen $J_\lambda v \in D(A)$. Da die Norm schwach unterhalbstetig ist, folgt

$$\|y\|^2 \leq \liminf_{n \to \infty} \|J_{\lambda_n} v\|^2 \leq \langle v, y - \tilde{v} \rangle + \langle y, \tilde{v} \rangle\,, \quad \text{für alle } \tilde{v} \in D(A), \tag{9.35}$$

also

$$\langle v - y, y - \tilde{v} \rangle \geq 0 \tag{9.36}$$

für alle $\tilde{v} \in D(A)$ und damit auch für alle $\tilde{v} \in K$. Wegen $y \in K$ folgt $y = P_K v$. Der Grenzwert y hängt also nicht von der Teilfolge ab, und es folgt $J_\lambda v \rightharpoonup P_K v$ für $\lambda \to 0$. Weiterhin folgt aus (9.34)

$$\limsup_{\lambda \to 0} \|J_\lambda v\|^2 \leq \langle v, y - \tilde{v} \rangle + \langle y, \tilde{v} \rangle$$

für alle $\tilde{v} \in D(A)$ und damit auch für alle $\tilde{v} \in K$. Mit $\tilde{v} = y$ ergibt sich $\limsup \|J_\lambda v\|^2 \leq \|y\|^2$ und zusammen mit (9.35) folgt $\|J_\lambda v\| \to \|y\|$ für $\lambda \to 0$. Da $J_\lambda v \rightharpoonup y$, folgt insgesamt $J_\lambda v \to y = P_K v$ in H und insbesondere $J_\lambda v \to v$ für alle $v \in K$. Da $J_\lambda v \in D(A)$, folgt $K = \overline{D(A)}$. Damit ist alles bewiesen. □

Wir wissen aus Lemma 9.5, dass die Mengen Av konvex und abgeschlossen sind, wenn A maximal monoton ist. Wir definieren $A^0 : D(A) \to H$ durch

$$A^0 v = P_{Av}(0)\,, \tag{9.37}$$

das heißt, $A^0 v$ ist das (im Hilbertraum eindeutig bestimmte) Element kleinster Norm in Av.

Satz 9.18 *Die Yosida-Regularisierung $A_\lambda : H \to H$ eines maximal monotonen Operators $A : H \rightrightarrows H$ ist maximal monoton. Es gelten*

$$A_\lambda v \in A J_\lambda v\,, \quad \textit{für alle } v \in H, \tag{9.38}$$

$$\|A_\lambda u - A_\lambda v\| \leq \frac{1}{\lambda}\|u - v\|\,, \quad \textit{für alle } u, v \in H, \tag{9.39}$$

$$(A_\lambda)_\mu = A_{\lambda+\mu}\,, \quad \textit{für alle } \lambda, \mu > 0. \tag{9.40}$$

Für alle $v \in D(A)$ gilt

$$\|A_\lambda v\| \uparrow \|A^0 v\|\,, \quad A_\lambda v \to A^0 v\,, \quad \textit{für } \lambda \downarrow 0, \tag{9.41}$$

sowie

$$\|A_\lambda v - A^0 v\|^2 \leq \|A^0 v\|^2 - \|A_\lambda v\|^2\,. \tag{9.42}$$

Für alle $v \notin D(A)$ gilt

$$\|A_\lambda v\| \uparrow +\infty\,. \tag{9.43}$$

Beweis: Für $J_\lambda v = (I + \lambda A)^{-1} v$ gilt

$$v \in (I + \lambda A)(J_\lambda v) = J_\lambda v + \lambda A(J_\lambda v)\,,$$

woraus (9.38) folgt nach Definition von A_λ. Die Monotonie von A_λ und (9.39) folgen aus den für alle $u, v \in H$ gültigen Ungleichungen

$$\begin{aligned} \|A_\lambda v - A_\lambda u\|\|v - u\| &\geq \langle A_\lambda v - A_\lambda u, v - u \rangle \\ &= \langle A_\lambda v - A_\lambda u, \lambda A_\lambda v - \lambda A_\lambda u \rangle + \langle A_\lambda v - A_\lambda u, J_\lambda v - J_\lambda u \rangle \\ &\geq \lambda \|A_\lambda v - A_\lambda u\|^2\,, \end{aligned}$$

wobei in der letzten Zeile (9.38) verwendet wurde. Nach Folgerung 9.6 ist A_λ maximal monoton. Zum Beweis von (9.40) stellen wir zunächst fest, dass gilt

$$\begin{aligned} w = A_\lambda v \quad &\Leftrightarrow \quad v - \lambda w = J_\lambda v = (I + \lambda A)^{-1})v \\ &\Leftrightarrow \quad v \in (I + \lambda A)(v - \lambda w) \\ &\Leftrightarrow \quad v \in v - \lambda w + \lambda A(v - \lambda w) \\ &\Leftrightarrow \quad w \in A(v - \lambda w)\,. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} w = A_{\mu+\lambda} v \quad &\Leftrightarrow \quad w \in A(v - \mu w - \lambda w) \quad \Leftrightarrow \quad w = A_\lambda(v - \mu w) \\ &\Leftrightarrow \quad w = (A_\lambda)_\mu v\,. \end{aligned}$$

Für $v \in D(A)$ gilt, da $A^0 v \in Av$ und $A_\lambda v \in A J_\lambda v$,

$$0 \le \left\langle A^0 v - A_\lambda v, v - J_\lambda v \right\rangle = \lambda \left\langle A^0 v - A_\lambda v, A_\lambda v \right\rangle\,,$$

also

$$\|A_\lambda v\|^2 \le \left\langle A^0 v, A_\lambda v \right\rangle\,, \quad \|A_\lambda v\| \le \|A^0 v\|\,. \tag{9.44}$$

Analog ergibt sich $0 \le \mu \left\langle A_\lambda v - (A_\lambda)_\mu v, (A_\lambda)_\mu v \right\rangle$ und damit

$$\|(A_\lambda)_\mu v\|^2 \le \langle A_\lambda v, (A_\lambda)_\mu v \rangle\,, \quad \|(A_\lambda)_\mu v\| \le \|A_\lambda v\|\,. \tag{9.45}$$

Aus (9.44) und (9.45) folgt, dass $\{A_\lambda v\}$ beschränkt ist in H mit $\|A_\lambda v\| \uparrow \gamma$ für ein $\gamma > 0$. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} \|A_{\lambda+\mu} v - A_\lambda v\|^2 &= \|A_{\lambda+\mu} v\|^2 + \|A_\lambda v\|^2 - 2 \langle A_{\lambda+\mu} v, A_\lambda v \rangle\,, \\ &\le \|A_{\lambda+\mu} v\|^2 + \|A_\lambda v\|^2 - 2\|A_{\lambda+\mu} v\|^2 \\ &= \|A_\lambda v\|^2 - \|A_{\lambda+\mu} v\|^2 \end{aligned} \tag{9.46}$$

Da H vollständig ist, folgt $A_\lambda v \to w$ für ein $w \in H$. Wegen $v - J_\lambda v = \lambda A_\lambda v$ (bzw. nach Satz 9.17) folgt $J_\lambda v \to v$. Nach Lemma 9.7 ist $w \in Av$. Da $\|w\| \le \|A^0 v\|$ und $A^0 v$ das normminimale Element in Av ist, folgt $w = A^0 v$ und $\|A_\lambda v\| \uparrow \|A^0 v\|$. Damit ist (9.41) gezeigt, und (9.42) folgt durch Grenzübergang $\lambda \to 0$ in (9.46). Sei nun $v \notin D(A)$. Für $\lambda \to 0$ ist $\|A_\lambda v\|$ monoton wachsend, da das zu (9.45) führende Argument gültig bleibt. Wäre $\|A_\lambda v\|$ beschränkt, so würde wie gezeigt folgen $A_\lambda v \to w \in Av$ für ein $w \in H$, ein Widerspruch. □

Lemma 9.19 *Sei $\varphi : H \to (-\infty, \infty]$ konvex, unterhalbstetig und eigentlich. Für die Moreau-Regularisierung*

$$\varphi_\lambda(u) = \min_{v \in H} \left(\frac{1}{2\lambda} \|v - u\|^2 + \varphi(v) \right) \tag{9.47}$$

gilt

$$\varphi_\lambda(u) = \frac{\lambda}{2} \|A_\lambda u\|^2 + \varphi(J_\lambda u)\,, \tag{9.48}$$

wobei

$$J_\lambda = (I + \lambda \partial\varphi)^{-1}\,, \quad A_\lambda = (\partial\varphi)_\lambda = \frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda)\,.$$

Beweis: Nach Satz 8.20 wird das Minimum auf der rechten Seite in $v_* \in H$ angenommen mit

$$\frac{1}{\lambda}(u - v_*) \in \partial\varphi(v_*)\,,$$

das heißt, in

$$v_* = J_\lambda u = (I + \lambda\partial\varphi)^{-1}(u)\,.$$

$\square$

Satz 9.20 *Sei $\varphi : H \to (-\infty, \infty]$ konvex, unterhalbstetig und eigentlich. Die Moreau-Regularisierung $\varphi_\lambda : H \to \mathbb{R}$ erfüllt*

$$\varphi(J_\lambda u) \le \varphi_\lambda(u) \le \varphi(u)\,, \quad \textit{für alle } u \in H, \tag{9.49}$$

und ist Fréchet-differenzierbar mit

$$\nabla\varphi_\lambda = (\partial\varphi)_\lambda\,. \tag{9.50}$$

Weiterhin ist φ_λ konvex, und es gilt

$$\lim_{\lambda\to 0} \varphi_\lambda(u) = \varphi(u)\,, \quad \textit{für alle } u \in H. \tag{9.51}$$

Es gilt

$$D(\partial\varphi) \subset D(\varphi) \subset \overline{D(\varphi)} = \overline{D(\partial\varphi)}\,. \tag{9.52}$$

Beweis: Die Ungleichungen in (9.49) folgen direkt aus Lemma 9.19. Für alle $u, v \in H$ folgt, da $A_\lambda u \in AJ_\lambda u$ für $A = \partial\varphi$, dass

$$\varphi(J_\lambda v) - \varphi(J_\lambda u) \ge \langle A_\lambda u, J_\lambda v - J_\lambda u\rangle\ ,$$

und weiter

$$\begin{aligned}\varphi_\lambda(v) - \varphi_\lambda(u) &= \frac{\lambda}{2}\Big(\|A_\lambda v\|^2 - \|A_\lambda u\|^2\Big) + \varphi(J_\lambda v) - \varphi(J_\lambda u)\\ &\ge \frac{\lambda}{2}\Big(\|A_\lambda v\|^2 - \|A_\lambda u\|^2\Big) + \langle A_\lambda u, J_\lambda v - J_\lambda u\rangle\ .\end{aligned} \tag{9.53}$$

Es ist

$$\begin{aligned}\langle A_\lambda u, J_\lambda v - J_\lambda u\rangle &= \langle A_\lambda u, J_\lambda v - v\rangle + \langle A_\lambda u, v - u\rangle + \langle A_\lambda u, u - J_\lambda u\rangle\\ &= \lambda\big(\,\langle A_\lambda u, -A_\lambda v\rangle + \langle A_\lambda u, A_\lambda u\rangle\,\big) + \langle A_\lambda u, v - u\rangle\end{aligned}$$

Einsetzen in (9.53) ergibt

$$\varphi_\lambda(v) - \varphi_\lambda(u) \ge \frac{\lambda}{2}\Big(\|A_\lambda v - A_\lambda u\|^2\Big) + \langle A_\lambda u, v - u\rangle\ .$$

das heißt,

$$\varphi_\lambda(v) - \varphi_\lambda(u) - \langle A_\lambda u, v - u\rangle \ge \frac{\lambda}{2}\Big(\|A_\lambda v - A_\lambda u\|^2\Big) \ge 0\,. \tag{9.54}$$

Vertauschen der Rollen von u und v ergibt

$$\varphi_\lambda(u) - \varphi_\lambda(v) - \langle A_\lambda v, u - v\rangle \ge 0\,.$$

Subtraktion von $\langle A_\lambda u, v-u\rangle$ und Umstellen führt auf

$$\varphi_\lambda(v) - \varphi_\lambda(u) - \langle A_\lambda u, v-u\rangle \le \langle A_\lambda v - A_\lambda u, v-u\rangle \ ,$$

und zusammen mit (9.54) ergibt sich mit der Lipschitzstetigkeit von A_λ nach Satz 9.18

$$|\varphi_\lambda(v) - \varphi_\lambda(u) - \langle A_\lambda u, v-u\rangle\,| \le \langle A_\lambda v - A_\lambda u, v-u\rangle \le \frac{1}{\lambda}\|v-u\|^2 \,.$$

Also ist φ_λ differenzierbar und

$$\nabla\varphi_\lambda = A_\lambda = (\partial\varphi)_\lambda \,.$$

Insbesondere ist $v \mapsto \nabla\varphi_\lambda(v)$ monoton und daher φ_λ konvex. Für $u \in \overline{D(\partial\varphi)}$ gilt $J_\lambda u \to u$ nach Satz 9.17 und damit wegen (9.49)

$$\varphi(u) \le \liminf_{\lambda\to 0} \varphi(J_\lambda u) \le \liminf_{\lambda\to 0} \varphi_\lambda(u) \le \limsup_{\lambda\to 0} \varphi_\lambda(u) \le \varphi(u)$$

und damit (9.51). Sei nun $u \notin \overline{D(\partial\varphi)}$. Es ist nach Lemma 9.19

$$\varphi_\lambda(u) = \frac{1}{2\lambda}\|J_\lambda u - u\|^2 + \varphi(J_\lambda u) \,.$$

Nach Satz 9.17 ist $\|J_\lambda u - u\| \to \operatorname{dist}(u, \overline{D(A)}) > 0$ und außerdem $\{\varphi(J_\lambda u)\}$ nach unten beschränkt für $\lambda \to 0$. Es folgt $\varphi_\lambda(u) \to +\infty$, also auch $\varphi(u) = +\infty$ und $u \notin D(\varphi)$ nach (9.49). Es ist also $D(\varphi) \subset \overline{D(\partial\varphi)}$, woraus (9.52) folgt. $\Box$

Lemma 9.21 *Sei $A : H \rightrightarrows H$ maximal monoton, $B : H \to H$ monoton und lipschitzstetig mit $D(B) = H$. Dann ist $A + B$ maximal monoton.*

Beweis: Sei $\lambda > 0$ so klein, dass $\lambda B : H \to H$ eine Kontraktion ist. Für jedes $f \in H$ gilt

$$u + \lambda A u + \lambda B u \ni f \quad \Leftrightarrow \quad u = T_f u := (I + \lambda A)^{-1}(f - \lambda B u)$$

Da $(I+\lambda A)^{-1}$ nichtexpansiv ist, ist $T_f : H \to H$ eine Kontraktion, also $f \in \operatorname{im}(I+\lambda(A+B))$. Aus Satz 9.8 folgt, dass $\lambda(A+B)$ und damit auch $A+B$ maximal monoton ist. $\Box$

Lemma 9.22 *Sei $A : H \rightrightarrows H$ maximal monoton, $\varphi : H \to (-\infty,\infty]$ konvex, unterhalbstetig und eigentlich, es gelte $D(A) \cap D(\partial\varphi) \neq \emptyset$ sowie*

$$\varphi((I+\lambda A)^{-1}v) \le \varphi(v) + C\lambda\,, \quad \text{für alle } v \in H,\ \lambda > 0, \tag{9.55}$$

mit einer Konstanten C. Dann ist $A + \partial\varphi$ maximal monoton.

Beweis: Sei $f \in H$ beliebig. Nach Satz 9.8 genügt es zu zeigen, dass es ein $u \in H$ gibt mit

$$u + Au + \partial\varphi(u) \ni f \,. \tag{9.56}$$

Nach Satz 9.18 ist die Yosida-Regularisierung A_λ von A maximal monoton und lipschitzstetig, nach Lemma 9.21 ist $A_\lambda + \partial\varphi$ maximal monoton. Es gibt also zu jedem $\lambda > 0$ ein $u_\lambda \in H$ mit

$$u_\lambda + A_\lambda u_\lambda + \partial\varphi(u_\lambda) \ni f \,. \tag{9.57}$$

Wir wollen zeigen, dass u_λ gegen eine Lösung u von (9.56) konvergiert.
(i) $\{u_\lambda\}$ ist beschränkt in H: Sei $v_0 \in D(A) \cap D(\partial\varphi)$, $w_0 \in \partial\varphi(v_0)$. Aus der Definition des Subdifferentials und der Monotonie von A_λ folgt

$$\begin{aligned}\langle w_0, v_0 - u_\lambda\rangle &\geq \varphi(v_0) - \varphi(u_\lambda) \geq \langle f - u_\lambda - A_\lambda u_\lambda, v_0 - u_\lambda\rangle \\ &\geq \langle f - u_\lambda - A_\lambda v_0, v_0 - u_\lambda\rangle \\ &= \|u_\lambda\|^2 + \langle f - A_\lambda v_0, v_0 - u_\lambda\rangle - \langle u_\lambda, v_0\rangle \ .\end{aligned}$$

Es ist $\{A_\lambda v_0\}$ nach Lemma 9.18 beschränkt, da $v_0 \in D(A)$. Es folgt

$$\|u_\lambda\|^2 \leq C_0(\|u_\lambda\| + 1)$$

mit einer von λ unabhängigen Konstante C_0. Also ist $\{u_\lambda\}$ beschränkt.
(ii) $\{A_\lambda u_\lambda\}$ ist beschränkt in H: Wir wenden (9.55) an mit $v = u_\lambda$,

$$(I + \lambda A)^{-1} u_\lambda = u_\lambda - \lambda A_\lambda u_\lambda \,,$$

und erhalten, da $f - u_\lambda - A_\lambda u_\lambda \in \partial\varphi(u_\lambda)$,

$$C\lambda \geq \varphi(u_\lambda - \lambda A_\lambda u_\lambda) - \varphi(u_\lambda) \geq \langle f - u_\lambda - A_\lambda u_\lambda, -\lambda A_\lambda u_\lambda\rangle \ .$$

Division durch λ führt auf

$$\|A_\lambda u_\lambda\|^2 \leq \langle f - u_\lambda, A_\lambda u_\lambda\rangle + C \leq \|f - u_\lambda\| \|A_\lambda u_\lambda\| + C \,.$$

Da $\{u_\lambda\}$ beschränkt ist, gilt dasselbe für $\{A_\lambda u_\lambda\}$.
(iii) $\{u_\lambda\}$ ist Cauchy in H: Seien

$$w_\lambda = f - u_\lambda - A_\lambda u_\lambda \in \partial\varphi(u_\lambda) \,.$$

Dann gilt

$$0 \leq \langle w_\lambda - w_\mu, u_\lambda - u_\mu\rangle = -\|u_\lambda - u_\mu\|^2 - \langle A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - u_\mu\rangle \ . \tag{9.58}$$

Wegen

$$u_\lambda - u_\mu = (\lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu) + (J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu)$$

und da $A_\lambda u_\lambda \in A J_\lambda u_\lambda$, folgt aus (9.58), dass

$$\begin{aligned}\|u_\lambda - u_\mu\|^2 &\leq -\langle A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - u_\mu\rangle \leq -\langle A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu\rangle \\ &\leq \|A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu\| \|\lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu\| \leq C_1(\lambda + \mu) \,,\end{aligned}$$

da $\{A_\lambda u_\lambda\}$ beschränkt ist.
(iv) Wegen (i) – (iii) gelten $u_\lambda \to u$, $w_\lambda \rightharpoonup w$ und $A_\lambda u_\lambda \rightharpoonup y$ für geeignete $u, w, y \in H$, falls $\lambda \to 0$ entlang einer geeigneten Teilfolge. Da $w_\lambda \in \partial\varphi(u_\lambda)$ und $\partial\varphi$ maximal monoton ist, folgt $w \in \partial\varphi(u)$. Da

$$J_\lambda u_\lambda - u_\lambda = \lambda A_\lambda u_\lambda \to 0 \,, \quad \text{für } \lambda \to 0,$$

gilt auch $J_\lambda u_\lambda \to u$ und wegen $A_\lambda u_\lambda \in A J_\lambda u_\lambda$ folgt $y \in Au$. Da $u + y + w = f$, folgt (9.56). □

Wir betrachten nun das elliptische Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u + \partial\varphi(u) &\ni f\,, \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0\,, \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{9.59}$$

In Beispiel 9.9 haben wir bereits gesehen, dass durch

$$Av = -\Delta v\,, \quad D(A) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\,, \tag{9.60}$$

ein maximal monotoner Operator $A : L^2(\Omega) \rightrightarrows L^2(\Omega)$ definiert wird, falls Ω beschränkt ist und $\partial\Omega$ hinreichend glatt ist.

Lemma 9.23 *Sei $\varphi : \mathbb{R} \to (-\infty, \infty]$ konvex, unterhalbstetig und eigentlich. Dann gilt dasselbe für $\Phi : L^2(\Omega) \to (-\infty, \infty]$,*

$$\Phi(v) = \int_\Omega \varphi(v(x))\,dx\,, \quad \textit{falls } \varphi \circ v \in L^1(\Omega), \tag{9.61}$$

und $\Phi(v) = +\infty$ andernfalls. Weiterhin gilt für $w \in L^2(\Omega)$

$$w \in \partial\Phi(v) \quad \Leftrightarrow \quad w(x) \in \partial\varphi(v(x))\,, \quad \textit{a.e. in } \Omega. \tag{9.62}$$

Die Yosida-Approximation $(\partial\Phi)_\mu : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ von $\partial\Phi$ hat die Darstellung

$$((\partial\Phi)_\mu v)(x) = (\partial\varphi)_\mu(v(x)) = (\varphi_\mu)'(v(x)) \quad \textit{a.e. in } \Omega. \tag{9.63}$$

Die Moreau-Approximation $\Phi_\mu : L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$ von Φ hat die Darstellung

$$\Phi_\mu(v) = \int_\Omega \varphi_\mu(v(x))\,dx\,. \tag{9.64}$$

Beweis: Übung. □

Wir betrachten nun auf $H = L^2(\Omega)$ die Summe $A + \partial\Phi$ für

$$\begin{aligned} \Phi(v) &= \int_\Omega \varphi(v(x))\,dx\,, \qquad && \text{falls } \varphi \circ v \in L^1(\Omega), \\ Av &= -\Delta v\,, && \text{falls } v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega). \end{aligned} \tag{9.65}$$

Hierbei ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit hinreichend glattem Rand, und $\varphi : \mathbb{R} \to (-\infty, \infty]$ konvex, unterhalbstetig und eigentlich. Wir nehmen außerdem an, dass $0 \in D(\partial\varphi)$ gilt.

Satz 9.24 *Der Operator $A + \partial\Phi : L^2(\Omega) \rightrightarrows L^2(\Omega)$ ist maximal monoton.*

Beweis: A ist maximal monoton gemäß Beispiel 9.9, $\partial\Phi$ ist maximal monoton und $0 \in D(\partial\Phi)$, da Φ konvex, unterhalbstetig und eigentlich ist nach Lemma 9.23, und wegen (9.62). Wir können annehmen, dass $0 \in \partial\Phi(0)$, andernfalls ersetzen wir $\partial\Phi$ durch $B = \partial\Phi - w_0$ mit $w_0 \in \partial\Phi(0)$. Gemäß Lemma 9.22 ist es wegen $0 \in D(A)$ hinreichend zu zeigen, dass

$$\Phi((I + \lambda A)^{-1}v) \le \Phi(v)\,, \quad \text{für alle } v \in L^2(\Omega),\ \lambda > 0. \tag{9.66}$$

Da $\Phi_\mu(v) \to \Phi(v)$ für $\mu \to 0$ gilt für alle $v \in L^2(\Omega)$ nach Satz 9.20, genügt es zu zeigen, dass

$$\Phi_\mu((I+\lambda A)^{-1}v) \le \Phi_\mu(v)\,, \quad \text{für alle } v \in L^2(\Omega),\ \lambda, \mu > 0. \tag{9.67}$$

Nach Definition von A ist $z = (I+\lambda A)^{-1}v$ die eindeutige Lösung $z \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ des Randwertproblems

$$\begin{aligned} z - \lambda \Delta z &= v\,, \quad \text{in } \Omega, \\ z &= 0\,, \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{9.68}$$

Mit den Formeln aus Lemma 9.23 folgt

$$\begin{aligned} \Phi_\mu(v) - \Phi_\mu(z) &= \int_\Omega \varphi_\mu(v(x)) - \varphi_\mu(z(x))\,dx \ge \int_\Omega \varphi_\mu'(z(x))(v(x)-z(x))\,dx \\ &= -\lambda \int_\Omega \Delta z(x) \varphi_\mu'(z(x))\,dx = \lambda \int_\Omega \langle \nabla z(x), \nabla z(x)\rangle\, \varphi_\mu''(z(x))\,dx \\ &\ge 0\,, \end{aligned}$$

also (9.67), da $\varphi_\mu'' \ge 0$ gilt wegen der Konvexität von φ_μ. Dabei wurde bei der letzten Gleichheit die Kettenregel für die Funktion $x \mapsto \varphi_\mu'(z(x))$ verwendet. Gemäß Lemma 2.11 ist das möglich, wenn φ_μ' stetig differenzierbar ist. Im allgemeinen Fall (φ_μ konvex und lipschitzstetig, also φ_μ' monoton und beschränkt) wird die fragliche Gleichheit bewiesen, indem $h := \varphi_\mu'$ durch glatte monotone beschränkte Funktionen h_ε im L^2-Sinn approximiert wird und zur Grenze $\varepsilon \to 0$ übergegangen wird. □

Lemma 9.25 *Der Operator $Av = -\Delta v$ aus (9.65) ist koerziv auf $H = L^2(\Omega)$.*

Beweis: Ist $w_n = -\Delta v_n$, $v_n \in D(A)$, so ist

$$\langle w_n, v_n\rangle = -\int_\Omega v_n(x) \Delta v_n(x)\,dx = \int_\Omega \|\nabla v_n(x)\|^2\,dx\,.$$

Die Poincaré-Ungleichung besagt $\|v_n\|_2 \le C\|\nabla v_n\|_2$ für eine Konstante C, also

$$\frac{\langle w_n, v_n\rangle}{\|v_n\|_2} \ge \frac{1}{C^2}\|v_n\|_2 \to \infty$$

falls $\|v_n\|_2 \to \infty$. □

Wir betrachten nun das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u + \partial\varphi(u) &\ni f\,, \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0\,, \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{9.69}$$

Satz 9.26 *Sei $\varphi : \mathbb{R} \to (-\infty, \infty]$ konvex, unterhalbstetig und eigentlich, es gelte $0 \in D(\partial\varphi)$. Dann hat das Randwertproblem (9.69) für jedes $f \in L^2(\Omega)$ eine eindeutige Lösung $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.*

Beweis: Folgt aus den vorangegangenen Sätzen, da mit A auch $A + \partial\Phi$ koerziv ist. □

Beispiel 9.27 (Hindernisproblem)
Sei $\varphi = I_{[\psi_c,\infty)}$ mit $\psi_c < 0$, also $\varphi(r) = 0$ falls $r \geq \psi_c$ und $\varphi(r) = +\infty$ andernfalls. Mit $K = \{v : v(x) \geq \psi_c \text{a.e.}\}$ gilt

$$\Phi(v) = \int_\Omega \varphi(v(x))\, dx = I_K(v)\,, \quad \partial\Phi(u) = N_K(u) = \{w : \langle w, v-u\rangle \leq 0 \text{ für alle } v \in K\}\,.$$

Es gilt weiter

$$\begin{aligned} -\Delta u + \partial\Phi(u) \ni f \quad &\Leftrightarrow \quad u \in K\,, \quad f + \Delta u \in N_K(u) \\ &\Leftrightarrow \quad u \in K\,, \quad \langle -\Delta u, v-u\rangle \geq \langle f, v-u\rangle \text{ für alle } v \in K\,. \end{aligned}$$

Das Randwertproblem (9.69) entspricht also gerade dem Hindernisproblem mit dem Hindernis $\psi(x) = \psi_c$. Will man ein allgemeines Hindernis betrachten, so setzt man

$$\Phi(v) = \int_\Omega \varphi(x, v(x))\, dx\,, \quad \varphi(x,r) = I_{[\psi(x),\infty)}(r)\,.$$

Man muss dann nur noch Lemma 9.23 und Satz 9.24 auf diese Situation verallgemeinern.
□

Beispiel 9.28
Sei $\varphi : \mathbb{R} \to (-\infty, \infty]$ konvex, unterhalbstetig und eigentlich, es gelte $\varphi(r)/|r| \to +\infty$ für $|r| \to +\infty$. Sei

$$\Phi(v) = \int_\Omega \varphi(v(x))\, dx\,, \quad D(\Phi) = \{v : v \in L^1(\Omega)\,, \varphi \circ v \in L^1(\Omega)\}\,. \tag{9.70}$$

Diesmal setzen wir $H = H^{-1}(\Omega)$. Man kann beweisen, dass Φ konvex, unterhalbstetig und eigentlich ist, und dass $\partial\Phi(u)$ diejenigen $w \in H^{-1}(\Omega)$ enthält, für die ein $\eta \in H_0^1(\Omega)$ existiert mit

$$\begin{aligned} -\Delta\eta &= w && \text{a.e. in } \Omega, \\ \eta(x) &\in \partial\varphi(u(x)) && \text{a.e. in } \Omega. \end{aligned}$$

Die wegen maximaler Monotonie lösbare Inklusion

$$u + \partial\Phi(u) \ni f$$

entspricht dann der Inklusion

$$u - \Delta\beta(u) \ni f\,, \quad \beta = \partial\varphi\,.$$

10 Evolutionsgleichungen mit monotonen Operatoren

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$u' + Au = 0\,, \quad u(0) = u_0\,, \tag{10.1}$$

sowie die zugehörige Integralgleichung

$$u(t) = u_0 + \int_0^t Au(s)\,ds\,. \tag{10.2}$$

wobei $A : H \to H$ ein monotoner Operator ist.

Satz 10.1 *Sei $A : H \to H$ monoton und lipschitzstetig. Dann hat (10.2) für jedes $u_0 \in H$ eine eindeutige Lösung $u \in C([0,\infty); H)$, welche außerdem stetig differenzierbar ist. Sind $u, \hat{u}$ Lösungen zu Anfangswerten $u_0, \hat{u}_0$, so ist die Funktion $t \mapsto \|u(t) - \hat{u}(t)\|$ monoton fallend, insbesondere gilt*

$$\|u(t) - \hat{u}(t)\| \le \|u_0 - \hat{u}_0\|\,. \tag{10.3}$$

Die Funktion $t \mapsto \|u'(t)\|$ ist ebenfalls monoton fallend.

Beweis: Eindeutige Lösbarkeit und Regularität folgen aus dem Banachschen Fixpunktsatz. Weiter gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{1}{2}\|u(t) - \hat{u}(t)\|^2 = \langle u'(t) - \hat{u}'(t), u(t) - \hat{u}(t)\rangle = -\langle Au(t) - A\hat{u}(t), u(t) - \hat{u}(t)\rangle \le 0\,.$$

Setzen wir $\hat{u}(t) = u(t+h)$ für ein festes $h > 0$, so folgt, dass auch die Funktion $t \mapsto \|u(t+h) - u(t)\|$ monoton fallend ist. Division durch h und Grenzübergang $h \to 0$ ergibt, dass $t \mapsto \|u'(t)\|$ monoton fallend ist. □

Lemma 10.2 *Sei H Hilbertraum, $A : H \rightrightarrows H$ (maximal) monoton. Dann wird durch*

$$w \in \tilde{A}v \qquad \Leftrightarrow \qquad w(t) \in A(v(t)) \quad \textit{a.e. in } [0,T] \tag{10.4}$$

ein (maximal) monotoner Operator $\tilde{A} : L^2(0,T;H) \rightrightarrows L^2(0,T;H)$ definiert.

Beweis: Ist A monoton, so auch $\tilde{A}$, da

$$\langle w_2 - w_1, v_2 - v_1\rangle_{L^2(0,T;H)} = \int_0^T \langle w_2(t) - w_1(t), v_2(t) - v_1(t)\rangle_H \, dt \ge 0$$

gilt für alle $w_2 \in \tilde{A}v_2$, $w_1 \in \tilde{A}v_1$. Sei nun A maximal monoton, sei $f \in L^2(0,T;H)$. Gemäß Satz 9.8 ist $(I + A)^{-1} : H \to H$ nichtexpansiv, wir setzen

$$u(t) = (I + A)^{-1}(f(t))\,.$$

Mit f ist auch u Bochner-messbar, und mit $v_0 = (I + A)^{-1}(0)$ gilt

$$\|u(t) - v_0\|_H \le \|f(t) - 0\|_H = \|f(t)\|_H \quad \text{a.e. in } [0,T],$$

also ist $u \in L^2(0,T;H)$ und $u + \tilde{A}u \ni f$. Nach Satz 9.8 ist $\tilde{A}$ maximal monoton. $\square$

Wir formulieren nun den Existenz- und Eindeutigkeitssatz für

$$u' + Au \ni 0\,, \quad u(0) = u_0\,, \tag{10.5}$$

mit einem maximal monotonen Operator A. Wir erinnern daran, dass $A^0 v$ das normminimale Element in Av bezeichnet.

Satz 10.3 *Sei $A : H \rightrightarrows H$ maximal monoton, sei $u_0 \in D(A)$. Dann gibt es genau eine lipschitzstetige Lösung $u : [0,\infty) \to H$ von (10.5), es gilt $u(t) \in D(A)$ für alle $t > 0$. Es existiert die schwache Ableitung $u' \in L^\infty(0,\infty;H)$, sie erfüllt*

$$u'(t) + Au(t) \ni 0 \quad \textit{a.e. in } (0,\infty), \quad u(0) = u_0\,, \tag{10.6}$$

$$\|u'\|_{L^\infty((0,\infty);H)} \le \|A^0 u_0\|\,. \tag{10.7}$$

Beweis: Zum Beweis der Existenz betrachten wir das Hilfsproblem

$$u' + A_\lambda u = 0\,, \quad u(0) = u_0\,, \tag{10.8}$$

in dem A durch seine Yosida-Regularisierung A_λ ersetzt ist. Nach Satz 10.1 hat (10.8) eine stetig differenzierbare Lösung $u_\lambda : [0,\infty) \to H$, für die weiterhin gilt

$$\|A_\lambda u_\lambda(t)\| = \|u_\lambda'(t)\| \le \|u_\lambda'(0)\| = \|A_\lambda u_\lambda(0)\| = \|A_\lambda u_0\| \le \|A^0 u_0\|\,, \tag{10.9}$$

die letzte Ungleichung folgt aus Satz 9.18. Wir wollen zeigen, dass $\{u_\lambda\}_\lambda$ die Cauchy-Eigenschaft im Raum $C([0,T];H)$ hat für jedes $T > 0$, das heißt,

$$\lim_{\lambda,\mu\to 0} \max_{t\in[0,T]} \|u_\lambda(t) - u_\mu(t)\| = 0\,. \tag{10.10}$$

Es gilt in $[0,T]$ (Argument t weggelassen) für $\lambda, \mu > 0$

$$u_\lambda' - u_\mu' + A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu = 0\,.$$

Multiplikation mit $u_\lambda - u_\mu$ führt auf

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{1}{2}\|u_\lambda - u_\mu\|^2 + \langle A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - u_\mu\rangle = 0\,. \tag{10.11}$$

Wir zerlegen

$$u_\lambda - u_\mu = \lambda A_\lambda u_\lambda + J_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu - J_\mu u_\mu\,. \tag{10.12}$$

Nach Satz 9.18 gilt $A_\lambda v \in AJ_\lambda v$ für alle $v \in H$. Aus (10.12) ergibt sich mit Monotonie

$$\langle A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - u_\mu\rangle \ge \langle A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_m u\rangle$$

und weiter

$$\begin{aligned}
&\ge \lambda\|A_\lambda u_\lambda\|^2 + \mu\|A_\mu u_\mu\|^2 - (\lambda+\mu)\|A_\lambda u_\lambda\|\|A_\mu u_\mu\| \\
&\ge -(\lambda+\mu)\|A_\lambda u_\lambda\|\|A_\mu u_\mu\| \ge -2(\lambda+\mu)\|A^0 u_0\|^2\,.
\end{aligned}$$

Aus (10.11) folgt nun

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{1}{2}\|u_\lambda - u_\mu\|^2 \le 2(\lambda+\mu)\|A^0 u_0\|^2 .$$

Integrieren über $[0,t]$ und Wurzelziehen ergibt

$$\|u_\lambda(t) - u_\mu(t)\| \le 2\sqrt{(\lambda+\mu)t}\|A^0 u_0\| .$$

Hieraus folgt (10.10). Wegen Vollständigkeit gibt es ein $u \in C([0,T];H)$ mit $u_\lambda \to u$ und

$$\|u_\lambda(t) - u(t)\| \le 2\sqrt{\lambda t}\|A^0 u_0\| . \tag{10.13}$$

Ebenso gilt $J_\lambda u_\lambda \to u$ in $C([0,T];H)$ für $\lambda \to 0$ wegen

$$\|J_\lambda u_\lambda(t) - u_\lambda(t)\| = \lambda\|A_\lambda u_\lambda(t)\| \le \lambda\|A^0 u_0\| .$$

Sei nun $t > 0$ beliebig. Da $\{A_\lambda u_\lambda(t)\}_\lambda$ wegen (10.9) beschränkt ist für jedes $t > 0$, gibt es eine schwach konvergente Teilfolge $\{A_{\lambda_k} u_{\lambda_k}(t)\}_k \rightharpoonup z \in H$, und aus Lemma 9.7 folgt, dass $z \in Au(t)$. Also ist $u(t) \in D(A)$, und

$$\|A^0 u(t)\| \le \|z\| \le \|A^0 u_0\| . \tag{10.14}$$

Wegen

$$\|u_\lambda'(t)\| = \|A_\lambda u_\lambda(t)\| \le \|A^0 u_0\| \tag{10.15}$$

ist $\{u_\lambda'\}$ beschränkt in $L^\infty((0,T);H)$, also auch in $L^2(0,T;H)$, es gibt also eine Teilfolge und ein $w \in L^2(0,T;H)$ mit

$$u_{\lambda_k}' \rightharpoonup w \text{ in } L^2(0,T;H), \quad u_{\lambda_k} \to u \text{ in } C([0,T];H).$$

Grenzübergang $k \to \infty$ in

$$\int_0^T u_{\lambda_k}(t)\varphi'(t)\,dt = -\int_0^T u_{\lambda_k}'(t)\varphi(t)\,dt\,, \quad \varphi \in C_0^\infty(0,T)\,,$$

zeigt, dass w die schwache Ableitung von u ist, also $w = u'$. Da die schwache Ableitung eindeutig bestimmt ist, gilt $u_{\lambda_k}' \rightharpoonup u'$ für jede Teilfolge. Weiterhin folgt aus der schwachen Konvergenz $u_\lambda' \rightharpoonup u'$ in $L^2(\Omega)$, dass für $E = \{t : \|u'(t)\| > \|A^0 u_0\|\}$ gilt

$$\int_E \|u'(t)\|\,dt \le \liminf_{\lambda\to 0}\int_E \|u_\lambda'(t)\|\,dt = 0\,,$$

also gilt (10.7). Sei nun $\tilde{A} : L^2(0,T;H) \to L^2(0,T;H)$ die in Lemma 10.2 betrachtete Abbildung. Da $A_\lambda(u_\lambda(t)) \in AJ_\lambda(u_\lambda(t))$ für alle $t > 0$, gilt

$$A_\lambda \circ u_\lambda \in \tilde{A}(J_\lambda \circ u_\lambda)\,.$$

Da $\tilde{A}$ maximal monoton ist und $A_\lambda \circ u_\lambda \rightharpoonup -u'$ sowie $J_\lambda \circ u_\lambda \to u$ in $L^2(0,T;H)$ gelten, folgt $-u' \in \tilde{A}u$ aus Lemma 9.7 und damit (10.6). Die Eindeutigkeit ist eine Konsequenz des gleich folgenden Lemmas 10.4. $\square$

Wir betrachten den Funktionenraum $W^{1,1}(0,T;H)$ der Bochner-integrierbaren Funktionen $u : [0,T] \to H$, deren schwache Ableitung $u' : [0,T \to H$ ebenfalls Bochner-integrierbar ist, wobei

$$\int_0^T u'(t)\varphi(t)\,dt = -\int_0^T u(t)\varphi'(t)\,dt\,, \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(0,T).$$

Durch Approximation mit dem Standardglättungskern kann man zeigen, dass für $u \in W^{1,1}(0,T;H)$ der Hauptsatz gilt,

$$u(t) = u(s) + \int_s^t u'(\tau)\,d\tau\,, \quad \text{falls } 0 \le s < t \le T. \tag{10.16}$$

Ist $u : [0,T] \to H$ lipschitzstetig, so ist $u \in W^{1,1}(0,T;H)$.

Lemma 10.4 *Sei $A : H \rightrightarrows H$ monoton, seien $f, \hat{f} \in L^1(0,T;H)$, seien $u, \hat{u} \in W^{1,1}(0,T)$ Lösungen von*

$$u' + Au \ni f\,, \quad \hat{u}' + A\hat{u} \ni \hat{f}\,, \tag{10.17}$$

auf einem Intervall $[s,t]$. Dann gilt

$$\|u(t) - \hat{u}(t)\| \le \|u(s) - \hat{u}(s)\| + \int_s^t \|f(\tau) - \hat{f}(\tau)\|\,d\tau\,. \tag{10.18}$$

Beweis: Es gilt a.e. in $[s,t]$ wegen der Monotonie von A

$$\begin{aligned}\|u(\tau) - \hat{u}(\tau)\|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\|u(\tau) - \hat{u}(\tau)\| &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{1}{2}\|u(\tau) - \hat{u}(\tau)\|^2 = \langle u(\tau) - \hat{u}(\tau), u'(\tau) - \hat{u}'(\tau)\rangle \\ &\le \left\langle u(\tau) - \hat{u}(\tau), f(\tau) - \hat{f}(\tau)\right\rangle \le \|u(\tau) - \hat{u}(\tau)\|\|f(\tau) - \hat{f}(\tau)\|\,,\end{aligned}$$

also

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\|u(\tau) - \hat{u}(\tau)\| \le \|f(\tau) - \hat{f}(\tau)\|$$

a.e. in $[s,t]$. Wir integrieren über $[s,t]$ und erhalten (10.18). $\square$

Folgerung 10.5 *Seien $u, \hat{u} : [0,+\infty) \to H$ die eindeutigen Lösung von $u' + Au \ni 0$ mit $u(0) = u_0$ und $\hat{u}(0) = \hat{u}_0$ gemäß Satz 10.3 und Lemma 10.4. Dann ist die Funktion $t \mapsto \|u(t) - \hat{u}(t)\|$ monoton fallend, und durch $S(t)u_0 = u(t)$ wird eine nichtexpansive Abbildung $S(t) : D(A) \to D(A)$ definiert. Diese lässt sich eindeutig zu einer nichtexpansiven Abbildung $S(t) : \overline{D(A)} \to \overline{D(A)}$ fortsetzen und erfüllt*

$$S(0) = \mathrm{id}\,, \quad S(t+\tau) = S(t)S(\tau)\,, \quad \textit{für alle } t, \tau \ge 0, \tag{10.19}$$

$$\lim_{t \downarrow 0} S(t)u_0 = u_0\,, \quad \textit{für alle } u_0 \in \overline{D(A)}, \tag{10.20}$$

$$\|S(t)u_0 - S(t)\hat{u}_0\| \le \|u_0 - \hat{u}_0\|\,, \quad \textit{für alle } u_0, \hat{u}_0 \in \overline{D(A)}\,,\ t \ge 0. \tag{10.21}$$

Die eben definierte Familie $\{S(t)\}_{t \ge 0}$ wird als die von $-A$ erzeugte **Kontraktionshalbgruppe** bezeichnet.

Wir stellen weitere Eigenschaften der Lösung von $u' + Au \ni 0$ zusammen.

Satz 10.6 *In der Situation von Satz 10.3 gilt weiterhin: Die Lösung u hat in jedem Punkt $t \geq 0$ eine rechtsseitige Ableitung $u'_+(t)$ mit*

$$u'_+(t) + A^0 u(t) = 0\,, \tag{10.22}$$

die Funktion $t \mapsto A^0 u(t)$ ist rechtsseitig stetig, die Funktion $t \mapsto \|A^0 u(t)\|$ ist monoton fallend.

Beweis: Sei $t_0 \geq 0$. Wir wenden Satz 10.3 an auf die Lösung $t \mapsto u(t+t_0)$ zum Anfangswert $u(t_0)$. In (10.14) wurde gezeigt, dass

$$\|A^0 u(t + t_0)\| \leq \|A^0 u(t_0)\|\,.$$

Wir zeigen, dass $t \mapsto A^0 u(t)$ rechtsseitig stetig in 0 ist. Sei $t_n \downarrow 0$ mit $A^0 u(t_n) \rightharpoonup \xi$. Da $u(t_n) \to u_0$, folgt $\xi \in Au_0$. Weiter ist $\|\xi\| \leq \|A^0 u_0\|$, also $\xi = A^0 u_0$. Da ξ also von der Wahl der Folge unabhängig ist, folgt $A^0 u(t) \rightharpoonup A^0 u_0$ für $t \downarrow 0$. Da außerdem $\|A^0 u(t)\| \leq \|A^0 u_0\|$, folgt $A^0 u(t) \to A^0 u_0$. Es folgt die behauptete rechtsseitige Stetigkeit. Für die Differenzierbarkeit genügt es ebenfalls, $t = 0$ zu betrachten. Sei

$$E = \{t : t \geq 0,\ u'(t) \text{ existiert und } u'(t) + Au(t) \ni 0\}\,.$$

Für alle $t_0, h \geq 0$ gilt nach Satz 10.3

$$\|u(t_0 + h) - u(t_0)\| \leq h \|A^0 u(t_0)\|\,.$$

Für $t_0 \in E$ folgt

$$\|u'_+(t_0)\| \leq \|A^0 u(t_0)\|\,, \quad -u'_+(t_0) \in Au(t_0)\,,$$

also gilt (10.22) für $t = t_0$. Da das Komplement von E eine Nullmenge ist, folgt nach Integration über $[0, t]$

$$\frac{u(t) - u(0)}{t} + \frac{1}{t} \int_0^t A^0 u(s)\, ds = 0\,.$$

Grenzübergang $t \downarrow 0$ ergibt $u'_+(0) + A^0 u_0 = 0$. $\square$