Konvexe Analysis und Evolutionsprobleme *

Martin Brokate **

Inhaltsverzeichnis

---

*Vorlesungsskript, SS 2014

**Zentrum Mathematik, TU München

1 Konvexe Mengen

Definition 1.1 (Konvexe Menge)
*Sei V Vektorraum, $K \subset V$. K heißt **konvex**, wenn*

$$\lambda u + (1-\lambda)v \in K \tag{1.1}$$

für alle $u, v \in K$ und alle $\lambda \in [0,1]$. Wir schreiben

$$[u,v] = \{\lambda u + (1-\lambda)v : \lambda \in [0,1]\} \tag{1.2}$$

für die Verbindungsstrecke von u nach v, sowie auch $(u,v]$, $[u,v)$, (u,v) für die Strecke ohne die entsprechenden Endpunkte. Wir setzen $[v,v) = \{v\}$. □

Eine konvexe Menge enthält also zu je zwei Punkten deren Verbindungsstrecke.

Eine endliche Summe der Form

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \,, \qquad v_i \in V\,,\ \lambda_i \geq 0 \text{ mit } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\,, \tag{1.3}$$

heißt **Konvexkombination** der Vektoren $v_1, \dots, v_n$.

Satz 1.2 *Sei V Vektorraum. Eine Teilmenge $K \subset V$ ist konvex genau dann, wenn*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \in K \tag{1.4}$$

gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle Konvexkombinationen von Elementen $v_1, \dots, v_n \in K$.

Beweis: Für "$\Leftarrow$" ist nichts zu zeigen. "$\Rightarrow$": wird mit Induktion über n bewiesen. $n = 2$ entspricht der Definition der Konvexität. Induktionsschritt $n-1 \to n$: Sei

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \,, \quad v_i \in K\,,\ 1 \leq i \leq n\,, \tag{1.5}$$

eine Konvexkombination. Wähle λ_j mit $\lambda_j < 1$, dann gilt

$$v = \lambda_j v_j + (1-\lambda_j) w\,, \quad w = \sum_{i \neq j} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_j} v_i\,, \quad \sum_{i \neq j} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_j} = 1\,, \tag{1.6}$$

also $w \in K$ nach Induktionsvoraussetzung und damit $v \in K$. □

Beliebige Durchschnitte

$$\bigcap_{i \in I} K_i \tag{1.7}$$

von konvexen Mengen $K_i \subset V$ sind offensichtlich ebenfalls konvex.

Satz 1.3 *Sei V Vektorraum, $K \subset V$ konvex. Dann gilt*

$$(\lambda + \mu)K = \lambda K + \mu K \tag{1.8}$$

für alle $\lambda, \mu \geq 0$.

Beweis: "$\subset$": klar.
"$\supset$": Trivial falls $\lambda = \mu = 0$. Andernfalls gilt nach Definition der Konvexität

$$\frac{\lambda}{\lambda + \mu} K + \frac{\mu}{\lambda + \mu} K \subset K\,, \tag{1.9}$$

woraus nach Multiplikation mit $\lambda + \mu$ die Behauptung folgt. □

Definition 1.4 (Konvexe Hülle)
Sei V Vektorraum, $S \subset V$. Dann heißt

$$\mathrm{co}\,(S) = \{v : v \in V,\ v \textit{ ist Konvexkombination von Elementen in } S\} \tag{1.10}$$

die konvexe Hülle von S in V. □

Satz 1.5 *Sei V Vektorraum, $S \subset V$. Dann gilt*

$$\mathrm{co}\,(S) = \bigcap_{\substack{S \subset K \subset V \\ K \text{ konvex}}} K\,. \tag{1.11}$$

Beweis: "$\subset$": Ist $K \supset S$ konvex, so gilt $K \supset \mathrm{co}\,(S)$ nach Satz 1.2.
"$\supset$": Da $S \subset \mathrm{co}\,(S)$, genügt es zu zeigen, daß $\mathrm{co}\,(S)$ konvex ist. Seien also $u, v \in \mathrm{co}\,(S)$,

$$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i\,, \quad v = \sum_{j=1}^{m} \mu_j v_j\,, \tag{1.12}$$

dann gilt für $\nu \in [0, 1]$

$$\nu u + (1 - \nu) v = \sum_{i=1}^{n} \nu \lambda_i u_i + \sum_{j=1}^{m} (1 - \nu) \mu_j v_j \in \mathrm{co}\,(S)\,, \tag{1.13}$$

da die Koeffizienten die an eine Konvexkombination gestellten Bedingungen erfüllen. □

Eine Menge $\{v_0, \ldots, v_n\}$ von $n+1$ Vektoren eines Vektorraums V heißt **affin unabhängig**, falls die Menge $\{v_1 - v_0, \ldots, v_n - v_0\}$ linear unabhängig in V ist.

Definition 1.6 (Simplex)
Sei $\{v_0, \ldots, v_n\} \subset V$ affin unabhängig. Dann heißt

$$\mathrm{co}\,(\{v_0, \ldots, v_n\}) \tag{1.14}$$

ein (n-dimensionales) ***Simplex****, die v_i heißen die Ecken des Simplex.* □

Jeder Punkt v eines Simplex $\mathrm{co}(\{v_0, \dots, v_n\})$ läßt sich eindeutig als Konvexkombination

$$v = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i v_i \tag{1.15}$$

seiner Ecken schreiben, die $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ heißen die **baryzentrischen Koordinaten** von v.

Definition 1.7 (Kegel) *Sei V Vektorraum, $K \subset V$. K heißt **Kegel**, falls $\lambda v \in K$ für alle $v \in K$ und alle $\lambda > 0$ gilt. Ein Kegel K heißt **spitz**, falls $K \cap (-K) \subset \{0\}$.*

Lemma 1.8 *Sei V Vektorraum, $K \subset V$ Kegel. K ist konvex genau dann, wenn $u+v \in K$ für alle $u, v \in K$.*

Beweis: "$\Leftarrow$": Sind $u, v \in K$, so auch λu und $(1-\lambda)v$ für jedes $\lambda > 0$, also auch $\lambda u + (1-\lambda)v$.
"$\Rightarrow$": Sind $u, v \in K$, so ist

$$u + v = 2\left(\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v\right) \in K\,. \tag{1.16}$$

□

Beispiel 1.9

(i) $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ und $\mathbb{R}_- = (-\infty, 0]$ sind konvexe Kegel in $\mathbb{R}$, ebenso $(0, \infty)$ und $(-\infty, 0)$.

(ii) $\mathbb{R}^n_+ = \{(v_1, \dots, v_n) : v_i \geq 0 \text{ für alle } i\}$ ist konvexer Kegel im $\mathbb{R}^n$.

(iii) Sei V Menge, W Vektorraum und L konvexer Kegel in W,

$$K = \{f | f : V \to Y,\ f(v) \in L \text{ für alle } v \in V\}\,. \tag{1.17}$$

K ist konvexer Kegel in $\mathrm{Abb}(V, W)$. Im Spezialfall $W = \mathbb{R}$, $L = \mathbb{R}_+$ erhalten wir den konvexen Kegel $\{f : f \geq 0\}$ der nichtnegativen Funktionen in $\mathrm{Abb}(V, \mathbb{R})$. Entsprechendes gilt auch für Unterräume von $\mathrm{Abb}(V, \mathbb{R})$ wie etwa $C(V, \mathbb{R})$.

Definition 1.10 (Dualraum)
Sei V normierter Raum. Die Menge

$$V^* = \{v^* |\ v^* : V \to \mathbb{R} \text{ linear und stetig}\} \tag{1.18}$$

*heißt der **Dualraum** von V. Jede Teilmenge H von V der Form*

$$H = \{v : v^*(v) = \alpha\} \tag{1.19}$$

*für ein festes $v^* \in V^*$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ heißt **Hyperebene** in V.* □

Satz 1.11 (Trennungssatz)
Sei V normierter Raum, seien $K_1, K_2 \subset V$ konvex und nichtleer, es gelte $\operatorname{int}(K_1) \cap K_2 = \emptyset$ *und* $\operatorname{int}(K_1) \neq \emptyset$. *Dann gibt es ein $v^* \in V^*$ mit $v^* \neq 0$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit*

$$v^*(K_1) \le \alpha \le v^*(K_2)\,, \quad v^*(\operatorname{int} K_1) < \alpha\,. \tag{1.20}$$

Beweis: Siehe Funktionalanalysis. □

Satz 1.12 (Strikte Trennung) *Sei V normierter Raum, sei $K \subset V$ konvex, nichtleer und abgeschlossen, sei $u \notin K$. Dann gibt es ein $v^* \in V^*$ mit $v^* \neq 0$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit*

$$v^*(v) \le \alpha < v^*(u)\,, \quad \textit{für alle } v \in K. \tag{1.21}$$

Beweis: Da $V \setminus K$ offen ist, gibt es eine offene Kugel B um 0 mit mit $K \cap (u + B) = \emptyset$. Nach Satz 1.11 gibt es ein $v^* \in V^*$ und ein α mit $v^*(K) \le \alpha < v^*(u + B)$. □

2 Konvexe Funktionen

Wir schreiben $(-\infty, \infty]$ für $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ und entsprechend $[-\infty, \infty]$, $[0, \infty]$ etc.

Das Addieren und Multiplizieren von Funktionen, deren Werte $-\infty$ oder $+\infty$ annehmen können, erfordert Rechenregeln wie etwa

$$x + \infty = \infty + x = \infty\,, \quad x - \infty = -\infty + x = -\infty\,, \quad 0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0\,,$$

für $x \in \mathbb{R}$; sie entstehen durch Grenzübergang, etwa aus

$$\lim_{r \to \infty} x + r = \infty\,.$$

Wir definieren $\infty + \infty = \infty$. Nicht definiert und nicht zugelassen ist

$$\infty - \infty\,.$$

Definition 2.1 (Epigraph)
Sei V Vektorraum, $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$. Die durch

$$\operatorname{epi} \varphi = \{(v, \mu) : v \in V,\, \mu \in \mathbb{R},\, \mu \geq \varphi(v)\} \tag{2.1}$$

*definierte Teilmenge von $V \times \mathbb{R}$ heißt der **Epigraph** von φ, die durch*

$$D(\varphi) = \{v : v \in V,\, \varphi(v) < +\infty\} \tag{2.2}$$

*definierte Teilmenge von V der **effektive Definitionsbereich** von φ.*

Bezeichnet $p_V : V \times \mathbb{R} \to V$ die Projektion auf die erste Komponente, so ist

$$D(\varphi) = p_V(\operatorname{epi} \varphi)\,.$$

Es gilt $\operatorname{epi} \varphi = \emptyset$ genau dann, wenn $\varphi(v) = +\infty$ für alle $v \in V$. Man nennt φ **eigentlich**, wenn dieser Ausartungsfall nicht vorliegt.

Definition 2.2 (Konvexe Funktion)
*Sei V Vektorraum. Eine Funktion $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$ heißt **konvex**, falls ihr Epigraph $\operatorname{epi} \varphi$ konvex ist. Ist $-\varphi$ konvex, so heißt φ konkav.*

Satz 2.3 *Sei V Vektorraum, $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$. Dann ist φ konvex genau dann, wenn*

$$\varphi(\lambda v + (1 - \lambda) w) \leq \lambda \varphi(v) + (1 - \lambda) \varphi(w) \tag{2.3}$$

für alle $v, w \in V$ und alle $\lambda \in [0, 1]$.

Beweis: Folgt direkt aus den Definitionen. □

Definition 2.4 *Sei V Vektorraum, $K \subset V$. Eine Funktion $\varphi : K \to (-\infty, \infty]$ heißt konvex, wenn die durch*

$$\tilde{\varphi}(v) = \begin{cases} \varphi(v)\,, & \text{falls } v \in K\,, \\ +\infty\,, & \text{sonst}\,, \end{cases} \tag{2.4}$$

definierte Funktion $\tilde{\varphi} : V \to (-\infty, \infty]$ konvex ist.

Man sieht unmittelbar, daß eine Funktion $\varphi : K \to \mathbb{R}$ konvex ist im Sinne der vorangehenden Definition genau dann, wenn K konvex ist und (2.3) gilt für alle $v, w \in K$.

Für $K \subset V$ heißt die durch

$$I_K(v) = \begin{cases} 0\,, & v \in K \\ +\infty\,, & \text{sonst} \end{cases} \tag{2.5}$$

definierte Funktion $I_K : V \to [0, \infty]$ die **Indikatorfunktion** von K. Wegen $\operatorname{epi} I_K = K \times \mathbb{R}_+$ ist I_K genau dann konvex, wenn K konvex ist.

Lemma 2.5 *Sei V Vektorraum, $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$ konvex. Dann sind die* ***Subniveaumengen*** *$\{v : v \in V,\, \varphi(v) \le \alpha\}$ und $\{v : v \in V,\, \varphi(v) < \alpha\}$ konvex für alle $\alpha \in (-\infty, \infty]$.*

Beweis: Direkt aus den Definitionen. □

Ist $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$ konvex, so gilt

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(v_i)$$

für beliebige Konvexkombinationen $v = \sum_i \lambda_i v_i$.

Definition 2.6
Sei V Vektorraum. Eine Funktion $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$ heißt ***positiv homogen****, falls*

$$\varphi(\lambda v) = \lambda \varphi(v) \tag{2.6}$$

gilt für alle $v \in V$ und alle $\lambda > 0$. □

Mit $v = 0$ folgt, dass entweder $\varphi(0) = 0$ (der Normalfall) oder $\varphi(0) = \infty$ gilt.

Lemma 2.7 *Sei V Vektorraum, $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$. Die Funktion φ ist positiv homogen genau dann, wenn $\operatorname{epi} \varphi$ ein Kegel ist. In diesem Fall ist $D(\varphi)$ ebenfalls ein Kegel.*

Beweis: "$\Rightarrow$": Seien $(v, \mu) \in \operatorname{epi} \varphi$ und $\lambda > 0$, dann ist $\varphi(\lambda v) = \lambda \varphi(v) \le \lambda \mu$, also $(\lambda v, \lambda \mu) \in \operatorname{epi} \varphi$.
"$\Leftarrow$": Da $(v, \mu) \in \operatorname{epi} \varphi \Leftrightarrow (\lambda v, \lambda \mu) \in \operatorname{epi} \varphi$ für alle $\lambda > 0$, folgt

$$\varphi(v) = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(\lambda v) = +\infty \quad \text{für alle } \lambda > 0.$$

Ist $\varphi(v) < +\infty$, und $\lambda > 0$, so ist $(v, \varphi(v)) \in \operatorname{epi} \varphi$, also auch $(\lambda v, \lambda \varphi(v)) \in \operatorname{epi} \varphi$ und daher $\varphi(\lambda v) \le \lambda \varphi(v)$. Anwendung auf $1/\lambda$ ergibt

$$\varphi(v) = \varphi(\frac{1}{\lambda} \lambda v) \le \frac{1}{\lambda} \varphi(\lambda v)$$

und damit $\lambda \varphi(v) \le \varphi(\lambda v)$. □

Satz 2.8 *Sei V Vektorraum, seien $f : V \to (-\infty, \infty]$ und $\varphi : \mathbb{R} \to (-\infty, \infty]$ konvex, sei φ monoton wachsend, das heißt, $s \le t \Rightarrow \varphi(s) \le \varphi(t)$. Dann ist auch $\varphi \circ f$ konvex. (Dabei wird $\varphi(\infty) = \infty$ gesetzt.)*

Beweis: Für alle $u, v \in V$ und $\lambda \in [0,1]$ gilt

$$f(\lambda u + (1-\lambda)v) \le \lambda f(u) + (1-\lambda) f(v) \,,$$

also

$$(\varphi \circ f)(\lambda u + (1-\lambda)v) \le \varphi(\lambda f(u) + (1-\lambda) f(v)) \le \lambda \varphi(f(u)) + (1-\lambda)\varphi(f(v)) \,.$$

□

Definition 2.9 (Unterhalbstetigkeit)
Sei V normierter Raum. Eine Funktion $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$ heißt ***(schwach) unterhalbstetig****, wenn die Subniveaumengen*

$$M_\alpha = \{v : v \in V, \, \varphi(v) \le \alpha\} \tag{2.7}$$

(schwach) abgeschlossen sind für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.

Satz 2.10 *Sei V normierter Raum, $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$. Dann ist φ (schwach) unterhalbstetig genau dann, wenn* epi φ *(schwach) abgeschlossen ist in $V \times \mathbb{R}$.*

Beweis: "$\Leftarrow$": Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$F_\alpha = \{(v, \alpha) : v \in V, \, \varphi(v) \le \alpha\} = \operatorname{epi} \varphi \cap (V \times \{\alpha\}) \tag{2.8}$$

(schwach) abgeschlossen in $V \times \mathbb{R}$, also auch die Subniveaumenge $M_\alpha = j_\alpha^{-1}(F_\alpha)$, wobei $j_\alpha : V \to V \times \mathbb{R}$ die Einbettung $j_\alpha(v) = (v, \alpha)$ bezeichnet.
"$\Rightarrow$": Wir zeigen, daß das Komplement von epi φ (schwach) offen ist. Sei $(v, \alpha) \notin \operatorname{epi} \varphi$, also $\varphi(v) > \alpha$. Wähle $\varepsilon > 0$ mit $\varphi(v) > \alpha + \varepsilon$. Nach Voraussetzung ist $U = \{w : \varphi(w) > \alpha + \varepsilon\}$ (schwach) offen in V und $W = U \times (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ eine (schwach) offene Umgebung von (v, α) mit $W \cap \operatorname{epi} \varphi = \emptyset$, da $\varphi(w) > \alpha + \varepsilon > \beta$ für alle $(w, \beta) \in W$. □

Folgerung 2.11 *Sei V normierter Raum, $K \subset V$. Dann ist K abgeschlossen genau dann, wenn I_K unterhalbstetig ist.*

Beweis: "$\Rightarrow$": $\operatorname{epi} I_K = K \times [0, \infty)$.
"$\Leftarrow$": $K = \{v : I_K(v) \le 0\}$. □

Folgerung 2.12 *Sei V Banachraum, $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$ konvex. Dann ist φ genau dann unterhalbstetig, wenn φ schwach unterhalbstetig ist.*

Beweis: Im Banachraum ist eine konvexe Menge genau dann abgeschlossen, wenn sie schwach abgeschlossen ist. □

Lemma 2.13 *Sei V normierter Raum. Sind $\varphi_i : V \to (-\infty, \infty]$ konvex und unterhalbstetig für alle $i \in I$, so ist auch $\sup_{i\in I} \varphi_i$ konvex und unterhalbstetig.*

Beweis:

$$\operatorname{epi}(\sup_{i\in I} \varphi_i) = \bigcap_{i\in I} \operatorname{epi} \varphi_i \,.$$

□

Lemma 2.14 *Sei V Banachraum, sei $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$ konvex und unterhalbstetig. Dann gilt*

$$\varphi(v) \le \liminf_{n\to\infty} \varphi(v_n) \tag{2.9}$$

für alle Folgen $v_n \rightharpoonup v$.

Beweis: Wir nehmen an, $v_n \rightharpoonup v$ aber $\varphi(v) > \liminf \varphi(v_n)$. Dann gibt es eine Teilfolge $\{v_{n_k}\}$ und ein $\varepsilon > 0$ mit $\varphi(v_{n_k}) \le \varphi(v) - \varepsilon =: \alpha$. Da φ nach Folgerung 2.12 auch schwach unterhalbstetig ist, ist die Subniveaumenge M_α schwach abgeschlossen, also $\varphi(v) \le \alpha$, ein Widerspruch. □

Satz 2.15 *Sei V reflexiver Banachraum, $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$ konvex, unterhalbstetig, eigentlich und nach unten beschränkt, und es gelte*

$$\lim_{\|v\|\to\infty} \varphi(v) = \infty \,. \tag{2.10}$$

Dann gibt es ein $u \in V$ mit

$$\varphi(u) = \min_{v\in V} \varphi(v) \,. \tag{2.11}$$

Beweis: Sei $\{u_n\}$ eine Minimalfolge für φ in V, das heißt, $\varphi(u_n) \downarrow \inf_{v\in V} \varphi(v)$. Nach Voraussetzung ist das Infimum endlich. Wegen (2.10) ist $\{u_n\}$ beschränkt in V. Da V reflexiv ist, gibt es eine Teilfolge mit $u_{n_k} \rightharpoonup u$ für ein $u \in V$. Aus Lemma 2.14 folgt

$$\varphi(u) \le \liminf_{k\to\infty} \varphi(u_{n_k}) = \inf_{v\in V} \varphi(v) \,.$$

□

Satz 2.16 *Sei V normierter Raum, $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$ konvex, unterhalbstetig und eigentlich. Dann gilt*

$$\varphi = \sup\{g \mid g : V \to \mathbb{R} \text{ affin und stetig, } g \le \varphi\} \,. \tag{2.12}$$

Beweis: "$\ge$": klar.
"$\le$": Es genügt zu zeigen: Ist $(v, a) \in V \times \mathbb{R}$ mit $a < \varphi(v)$, so gibt es eine affine stetige Funktion $g : V \to \mathbb{R}$ mit $a \le g(v)$ und $g \le \varphi$. Sei also $a < \varphi(v)$, dann ist $(v, a) \notin \operatorname{epi} \varphi$, und $\operatorname{epi} \varphi$ ist konvex, abgeschlossen und nichtleer. Aus dem Trennungssatz folgt, daß ein $z^* \in (V \times \mathbb{R})^*$ existiert mit

$$z^*(v, a) < \inf_{(w,\alpha)\in \operatorname{epi} \varphi} z^*(w, \alpha) \,. \tag{2.13}$$

Wir setzen $\lambda = z^*(0,1)$ und definieren $v^* \in V^*$ durch $v^*(w) = z^*(w,0)$, dann gilt

$$z^*(w,\alpha) = v^*(w) + \lambda\alpha\,, \quad \forall\, w \in V\,,\ \alpha \in \mathbb{R}\,. \tag{2.14}$$

Aus (2.13) erhalten wir also

$$v^*(v) + \lambda a = z^*(v,a) < v^*(w) + \lambda\mu\,, \quad \forall\,(w,\mu) \in \operatorname{epi}\varphi\,. \tag{2.15}$$

Hieraus folgt $\lambda \geq 0$, da μ beliebig groß gewählt werden kann.
Fall 1: $\lambda > 0$. Wir definieren

$$g(w) = \frac{1}{\lambda}(z^*(v,a) - v^*(w))\,. \tag{2.16}$$

Aus (2.15) folgt $g(v) = a$ und $g(w) < \mu$ für $(w,\mu) \in \operatorname{epi}\varphi$, also $g(w) < \varphi(w)$ für $w \in D(\varphi)$ und damit $g \leq \varphi$.
Fall 2: $\lambda = 0$. Dann ist $w = v$ in (2.15) nicht möglich, also $v \notin D(\varphi)$ und $\varphi(v) = \infty$. Sei $\tilde{g} : V \to \mathbb{R}$ affin und stetig mit $\tilde{g} \leq \varphi$; so ein $\tilde{g}$ existiert, da $D(\varphi)$ nichtleer ist und zu jedem Punkt $\tilde{v} \in D(\varphi)$ wie gezeigt ein unterhalb von $\operatorname{epi}\varphi$ liegendes $\tilde{g}$ konstruiert werden kann. Wir wählen nun ein $\beta \in \mathbb{R}$ mit

$$v^*(v) = z^*(v,a) < \beta < z^*(\operatorname{epi}\varphi) = v^*(D(\varphi))\,, \tag{2.17}$$

und setzen

$$g(w) = \tilde{g}(w) + \delta(\beta - v^*(w))\,, \quad \delta > 0\,. \tag{2.18}$$

Aus (2.17) folgt $g(w) \leq \tilde{g}(w) \leq \varphi(w)$ für $w \in D(\varphi)$ und

$$g(v) = \tilde{g}(v) + \delta(\beta - v^*(v)) \geq a\,, \tag{2.19}$$

falls $\delta > 0$ hinreichend groß gewählt wird. □

Satz 2.17 *Sei V normierter Raum, $\varphi : V \to (-\infty,\infty]$ konvex, $u \in D(\varphi)$. Dann gilt: φ ist stetig in u genau dann, wenn es eine Kugel B um u gibt, auf der φ nach oben beschränkt ist, d.h. es gibt ein $c \in \mathbb{R}$ mit*

$$\varphi(v) \leq c\,, \quad \text{für alle } v \in B. \tag{2.20}$$

Beweis: “$\Rightarrow$”: Folgt direkt aus der Definition der Stetigkeit; wähle eine Kugel B um u mit $\varphi(B) \subset (\varphi(u) - 1, \varphi(u) + 1)$.
“$\Leftarrow$”: Sei o.B.d.A. $u = 0$, $\varphi(0) = 0$, sei $c > 0$ und B Kugel um 0 mit $\varphi(B) \leq c$. Es genügt zu zeigen, dass $\varphi(\varepsilon B) \subset [-\varepsilon c, \varepsilon c]$ gilt für jedes $\varepsilon \in (0,1)$. Sei $v \in \varepsilon B$ beliebig. Dann gilt

$$v = (1-\varepsilon)\cdot 0 + \varepsilon\frac{v}{\varepsilon}\,, \quad \varphi(v) \leq \varepsilon\varphi\left(\frac{v}{\varepsilon}\right) \leq \varepsilon c\,,$$

und weiter

$$0 = \frac{1}{1+\varepsilon}v + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\left(-\frac{v}{\varepsilon}\right)\,,$$
$$0 \leq \frac{1}{1+\varepsilon}\varphi(v) + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\varphi\left(-\frac{v}{\varepsilon}\right) \leq \frac{1}{1+\varepsilon}(\varphi(v) + \varepsilon c)\,,$$

also $\varphi(v) \geq -\varepsilon c$ und insgesamt

$$|\varphi(v)| \leq \varepsilon c\,.$$

□

Satz 2.18 *Sei $\varphi : \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$ konvex. Dann ist φ stetig auf* $\operatorname{int}(D(\varphi))$.

Beweis: Ist $v = \sum_{i=0}^n \lambda_i v_i$ eine beliebige Konvexkombination, so gilt

$$\varphi(v) \le \sum_{i=0}^n \lambda_i \varphi(v_i) \le \left(\sum_{i=0}^n \lambda_i \right) \max_{0 \le i \le n} \varphi(v_i) = \max_{0 \le i \le n} \varphi(v_i) \,. \tag{2.21}$$

Sei nun $v \in \operatorname{int}(D(\varphi))$. Wir wählen ein n-dimensionales Simplex $S = \operatorname{co}\{v_0, \dots, v_n\}$ mit $v \in \operatorname{int}(S) \subset \operatorname{int}(D(\varphi))$, dann ist

$$\varphi(S) \le \max_{0 \le i \le n} \varphi(v_i) < \infty \,,$$

also ist φ stetig nach Lemma 2.17. □

Definition 2.19 *Sei V Vektorraum, $K \subset V$. K heißt kreisförmig, falls $tK \subset K$ für alle $|t| \le 1$. K heißt absorbierend, falls zu jedem $u \in V$ ein $t \ge 0$ existiert mit $u \in tK$. K heißt* ***Tonne****, falls K abgeschlossen, konvex, kreisförmig und absorbierend ist.* □

In der Funktionalanalysis zeigt man den folgenden Satz, als Konsequenz des Baireschen Kategoriensatzes.

Satz 2.20 *Sei V Banachraum, sei $K \subset V$ eine Tonne. Dann ist* $0 \in \operatorname{int}(K)$. □

Satz 2.21 *Sei V Banachraum, $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$ konvex und unterhalbstetig. Dann ist φ stetig auf* $\operatorname{int}(D(\varphi))$.

Beweis: Sei $0 \in \operatorname{int}(D(\varphi))$, sei $\varphi(0) < c$. Wir definieren

$$U = \{v : v \in V, \, \varphi(v) \le c\} \,, \quad K = U \cap (-U) \,. \tag{2.22}$$

Da φ konvex und unterhalbstetig ist, ist U konvex und abgeschlossen, und da außerdem $0 \in U$ gilt, ist K konvex, kreisförmig und abgeschlossen. Um zu zeigen, daß K absorbierend ist, wählen wir $u \in V$ beliebig und definieren $g : \mathbb{R} \to (-\infty, \infty]$ durch $g(t) = \varphi(tu)$. Nach Satz 2.18 ist g stetig in 0, also gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $[-\varepsilon u, \varepsilon u] \subset U$, also auch $[-\varepsilon u, \varepsilon u] \subset K$ und damit $u \in (1/\varepsilon)K$, also ist K absorbierend. Nach Satz 2.20 ist $0 \in \operatorname{int}(K)$, nach Satz 2.17 ist φ stetig in 0. Für beliebiges $w \in \operatorname{int}(D(\varphi))$ betrachten wir $\tilde{\varphi}(v) = \varphi(v + w)$. □

Lemma 2.22 *Sei $\varphi : \mathbb{R} \to (-\infty, \infty]$ konvex, $u \in D(\varphi)$. Dann wird durch*

$$d(t) = \frac{\varphi(u+t) - \varphi(u)}{t} \tag{2.23}$$

eine monoton wachsende Funktion $d : (0, \infty) \to (-\infty, \infty]$ definiert. Ferner gilt $d(-t) \le d(t)$ für $t > 0$.

Beweis: Für $0 < s < t$ ist

$$u + s = \frac{t-s}{t} u + \frac{s}{t}(u + t) \,,$$

also

$$\varphi(u+s) \le \frac{t-s}{t}\varphi(u) + \frac{s}{t}\varphi(u+t)\,.$$

Subtraktion von $\varphi(u)$ und Division durch s liefert

$$d(s) = \frac{\varphi(u+s)-\varphi(u)}{s} \le \frac{\varphi(u+t)-\varphi(u)}{t} = d(t)\,.$$

Es gilt weiter für $t > 0$

$$\varphi(u) \le \frac{1}{2}\varphi(u-t) + \frac{1}{2}\varphi(u+t)\,,$$

also $\varphi(u) - \varphi(u-t) \le \varphi(u+t) - \varphi(u)$ und damit

$$\frac{\varphi(u-t)-\varphi(u)}{-t} \le \frac{\varphi(u+t)-\varphi(u)}{t}\,.$$

□

Definition 2.23 (Strikt konvexe Funktion)
Sei V Vektorraum, $K \subset V$ konvex. Eine Funktion $\varphi : K \to \mathbb{R}$ heißt strikt konvex auf K, falls

$$\varphi(\lambda u + (1-\lambda)v) < \lambda\varphi(u) + (1-\lambda)\varphi(v) \tag{2.24}$$

gilt für alle $u, v \in K$ mit $u \neq v$ und alle $\lambda \in (0,1)$.

Lemma 2.24 *Sei $K \subset \mathbb{R}$ konvex, $\varphi : K \to \mathbb{R}$ strikt konvex, $u \in K$. Dann ist*

$$d(t) = \frac{\varphi(u+t)-\varphi(u)}{t} \tag{2.25}$$

streng monoton wachsend in $(0,\infty) \cap D(d)$.

Beweis: Wie der Beweis von Lemma 2.22, aber mit der strikten Ungleichung. □

Definition 2.25 (Richtungsableitung)
Sei V Vektorraum, $\varphi : V \to (-\infty,\infty]$, $u \in D(\varphi)$ und $h \in V$. Falls der Grenzwert

$$\varphi'(u;h) = \lim_{t\downarrow 0} \frac{\varphi(u+th)-\varphi(u)}{t}\,. \tag{2.26}$$

in $(-\infty,\infty]$ existiert, so heißt er die Richtungsableitung von φ in u in Richtung h.

Unmittelbar aus der Definition folgt, dass die Richtungsableitung positiv homogen ist,

$$\varphi'(u;th) = t\varphi'(u;h)\,, \quad u,h \in V\,,\ t > 0\,. \tag{2.27}$$

Satz 2.26 *Sei V Vektorraum, $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$ konvex, $u \in D(\varphi)$. Dann existiert $\varphi'(u; h)$ für jedes $h \in V$, und es gilt*

$$\varphi'(u;h) = \inf_{t>0} \frac{\varphi(u+th) - \varphi(u)}{t} \,. \tag{2.28}$$

Ferner gelten

$$\varphi'(u;h) \le \varphi(u+h) - \varphi(u) \,, \tag{2.29}$$

sowie

$$-\varphi'(u;-h) \le \varphi'(u;h) \,. \tag{2.30}$$

Beweis: Nach Lemma 2.22, angewendet auf $g(t) = \varphi(u+th)$, ist der Differenzenquotient

$$d_h(t) = \frac{\varphi(u+th) - \varphi(u)}{t}$$

monoton wachsend auf $(0, \infty)$, also existiert $\lim_{t\downarrow 0} d_h(t)$ und ist gleich $\inf_{t>0} d_h(t)$. Wegen $d_h(1) = \varphi(u+h) - \varphi(u)$ gilt (2.29), und (2.30) folgt aus

$$-\frac{\varphi(u-th) - \varphi(u)}{t} = d_h(-t) \le d_h(t) \,,$$

durch Grenzübergang $t \downarrow 0$. □

Der Begriff der Richtungsableitung ist für beliebige vektorwertige Funktionen sinnvoll. Sind V, W Vektorräume und ist W normiert, so ist die Richtungsableitung einer Funktion $F : V \to W$ im Punkt $u \in V$ in Richtung $h \in V$ definiert durch

$$F'(u;h) = \lim_{t\downarrow 0} \frac{F(u+th) - F(u)}{t} \,, \tag{2.31}$$

falls der Grenzwert existiert.

Definition 2.27 (Hadamard-Ableitung)
Seien V, W normierte Räume. Eine Abbildung $F : V \to W$ heißt ***Hadamard-differenzierbar*** *in $u \in V$, falls*

$$F'(u;h) = \lim_{t\downarrow 0} \frac{F(u+th+r(t)) - F(u)}{t} \tag{2.32}$$

gilt für jedes $h \in V$ und jede Funktion $r : (0, \infty) \to V$ mit $r(t) = o(t)$, das heißt,

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{r(t)}{t} = 0 \,.$$

Satz 2.28 *Seien V, W normierte Räume, sei $F : V \to W$ und $u \in V$, es existiere $F'(u;h)$ für jedes $h \in V$. Ist F außerdem lokal lipschitzstetig in u, so ist F Hadamard-differenzierbar in u, und die Abbildung*

$$h \mapsto F'(u;h) \tag{2.33}$$

ist lipschitzstetig mit derselben Lipschitzkonstante wie F.

Beweis: Sei L eine Lipschitzkonstante für F nahe u. Sei $h \in V$ beliebig und r wie in Definition 2.27. Es gilt

$$\begin{aligned}
&\frac{F(u+th+r(t))-F(u)}{t} - F'(u;h) \\
&\qquad = \frac{F(u+th+r(t))-F(u+th)}{t} + \underbrace{\left[\frac{F(u+th)-F(u)}{t} - F'(u;h)\right]}_{\to 0 \text{ für } t \downarrow 0}
\end{aligned}$$

und

$$\left\|\frac{F(u+th+r(t))-F(u+th)}{t}\right\| \le \frac{L\|r(t)\|}{t} \to 0 \quad \text{für } t \downarrow 0.$$

Daraus folgt die erste Behauptung. Sind nun $h, k \in V$ beliebig, so gilt für hinreichend kleine t

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{F(u+th)-F(u)}{t} - \frac{F(u+tk)-F(u)}{t}\right\| &= \frac{\|F(u+th)-F(u+tk)\|}{t} \\
&\le \frac{L\|th-tk\|}{t} = L\|h-k\| \,.
\end{aligned}$$

Grenzübergang $t \downarrow 0$ ergibt

$$\|F'(u;h) - F'(u;k)\| \le L\|h-k\| \,.$$

□

Für Richtungsableitungen gilt die Kettenregel im allgemeinen nicht. Für Hadamard-Ableitungen schon.

Satz 2.29 *Seien V, W, X normierte Räume, $F : V \to W$, $G : W \to X$. Ist F Hadamard-differenzierbar in $u \in V$ und G Hadamard-differenzierbar in $F(u)$, so ist $G \circ F$ Hadamard-differenzierbar in u, und es gilt*

$$(G \circ F)'(u;h) = G'(F(u);F'(u;h)) \,. \tag{2.34}$$

Beweis: Übung. □

3 Konjugierte Funktionen

Definition 3.1 (Konjugierte Funktion)
Sei V normierter Raum, $\varphi : V \to [-\infty, \infty]$. Die durch

$$\varphi^*(v^*) = \sup_{v \in V}(\langle v^*, v\rangle - \varphi(v)) \tag{3.1}$$

*definierte Funktion $\varphi^* : V^* \to [-\infty, \infty]$ heißt die zu φ **konjugierte Funktion**. (Statt $v^*(v)$ schreiben wir auch $\langle v^*, v\rangle$.)*

Beispiel 3.2 (i) Sei $K \subset V$, $\varphi = I_K$. Dann ist

$$\varphi^*(v^*) = \sup_{v \in V}(\langle v^*, v\rangle - I_K(v)) = \sup_{v \in K} \langle v^*, v\rangle \,. \tag{3.2}$$

Diese Funktion heißt **Stützfunktion** der Menge K, siehe auch das folgende Kapitel. Im Spezialfall $K = B =$ Einheitskugel gilt

$$I_B^*(v^*) = \|v^*\|_{V^*} \,. \tag{3.3}$$

(ii) Sei $\varphi(v) = \|v\|$ für $v \in V$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\varphi^*(v^*) &= \sup_{v \in V}(\langle v^*, v\rangle - \|v\|) = \sup_{\lambda \geq 0} \lambda \sup_{\|v\|=1} (\langle v^*, v\rangle - \|v\|) \\
&= \sup_{\lambda \geq 0} \lambda(\|v^*\|_{V^*} - 1) \\
&= \begin{cases} 0\,, & \|v^*\| \leq 1\,, \\ +\infty\,, & \|v^*\| > 1\,, \end{cases}
\end{aligned}$$

also

$$\varphi^* = I_{B^*} \,, \tag{3.4}$$

wobei B^* die Einheitskugel in V^* ist.

(iii) Sei $V = \mathbb{R}$,

$$\varphi(v) = \frac{1}{p}|v|^p \,, \quad 1 < p < \infty \,.$$

Es ist $V^* = \mathbb{R}$ und

$$\varphi^*(v^*) = \sup_{v \in V}(v^* v - \frac{1}{p}|v|^p) \,.$$

Für $g(v) = v^* v - (1/p)|v|^p$ gilt

$$0 = g'(v) = v^* - |v|^{p-2} v \quad \Leftrightarrow \quad v^* = |v|^{p-2} v \,.$$

Ist q der zu p konjugierte Exponent, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, so ist der Maximierer v von g mit v^* verknüpft durch

$$|v^*|^q = |v|^{(p-1)q} = |v|^p \,,$$

also

$$v^* v - \frac{1}{p}|v|^p = |v|^p - \frac{1}{p}|v|^p = \frac{1}{q}|v^*|^q \,.$$

Damit ergibt sich

$$\varphi^*(v^*) = \frac{1}{q}|v^*|^q \,. \tag{3.5}$$

(iv) Sei V normierter Raum, $\varphi : V \to \mathbb{R}$ nach oben beschränkt, etwa $\varphi(u) \le c$ für alle $v \in V$. Dann ist

$$\varphi^*(v^*) = \sup_{v \in V}(\langle v^*, v\rangle - \varphi(v)) \ge \sup_{v \in V} \langle v^*, v\rangle - c\,,$$

also

$$\varphi^*(v^*) = \begin{cases} -\inf_{v \in V} \varphi(v)\,, & v^* = 0\,, \\ \infty\,, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{3.6}$$

Ist φ außerdem nach unten unbeschränkt, etwa $\varphi(v) = -\|v\|$, so ist $\varphi^* \equiv +\infty$ und damit $D(\varphi^*) = \emptyset$.

Die Konjugation hat folgende elementare Eigenschaften (Beweis klar bzw. Übung)

$$\begin{gathered} \varphi^*(0) = \sup_{v \in V} -\varphi(v) = -\inf_{v \in V} \varphi(v)\,, \\ \varphi \le \psi \quad \Rightarrow \quad \varphi^* \ge \psi^*\,, \\ (\lambda\varphi)^*(v^*) = \lambda\varphi^*\left(\frac{v^*}{\lambda}\right)\,, \quad \lambda > 0\,, \\ (\varphi + c)^* = \varphi^* - c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,, \\ \left(\inf_{i \in I} \varphi_i\right)^* = \sup_{i \in I} \varphi_i^*\,. \end{gathered}$$

Lemma 3.3 *Sei V normierter Raum, $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$ mit $D(\varphi) \ne \emptyset$. Dann gilt $\varphi^* : V^* \to (-\infty, \infty]$ und*

$$\langle v^*, v\rangle \le \varphi(v) + \varphi^*(v^*)\,, \quad \textit{für alle } v \in V,\ v^* \in V^*\,. \tag{3.7}$$

Beweis: Folgt direkt aus der Definition von φ^*. □

Das Beispiel der (nichtkonvexen) Funktion $\varphi(v) = -\|v\|^2$ zeigt, dass es möglich ist, dass $\varphi^* \equiv +\infty$ und damit $D(\varphi^*) = \emptyset$, es ist dann (siehe unten) außerdem $\varphi^{**} \equiv -\infty$.

Lemma 3.4 *Sei V normierter Raum, $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$ mit $D(\varphi) \ne \emptyset$. Dann gilt $D(\varphi^*) \ne \emptyset$ genau dann, wenn es eine affine stetige Funktion $g : V \to \mathbb{R}$ gibt mit $g \le \varphi$.*

Beweis: Ist $\varphi^*(v^*) < \infty$, so gilt $\varphi(v) \ge \langle v^*, v\rangle - \varphi^*(v^*) =: g(v)$ für alle $v \in V$. Ist umgekehrt $g \le \varphi$ mit $g(v) = \langle v^*, v\rangle - \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, so ist $\langle v^*, v\rangle - \varphi(v) \le \alpha$ für alle $v \in V$ und damit $\varphi^*(v^*) \le \alpha$. □

Definition 3.5 (Bikonjugierte Funktion)
Sei V normierter Raum, $\varphi : V \to [-\infty, \infty]$. Die durch

$$\varphi^{**}(v) = \sup_{v^* \in V^*} (\langle v^*, v\rangle - \varphi^*(v^*)) \tag{3.8}$$

*definierte Funktion $\varphi^{**} : V \to [-\infty, \infty]$ heißt die zu φ **bikonjugierte Funktion**.*

Für $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$ können wir statt (3.1) auch schreiben

$$\varphi^*(v^*) = \sup_{v \in D(\varphi)} (\langle v^*, v\rangle - \varphi(v)) \tag{3.9}$$

Lemma 3.6 *Sei V normierter Raum, $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$. Ist $D(\varphi) \neq \emptyset$, so ist $\varphi^* : V^* \to (-\infty, \infty]$ konvex und unterhalbstetig. Ist außerdem $D(\varphi^*) \neq \emptyset$, so ist $\varphi^{**} : V \to (-\infty, \infty]$ konvex und unterhalbstetig.*

Beweis: Wegen

$$\varphi^*(v^*) = \sup_{v \in D(\varphi)} g_v(v^*)\,, \quad g_v(v^*) = \langle v^*, v\rangle - \varphi(v)\,,$$

ist φ^* als Supremum einer Familie affiner stetiger Funktionen darstellbar und damit konvex und unterhalbstetig. Die Aussage für φ^{**} wird auf dieselbe Weise bewiesen. □

Satz 3.7 *Sei V normierter Raum, $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$ mit $D(\varphi) \neq \emptyset$ und $D(\varphi^*) \neq \emptyset$. Dann gilt*

$$\varphi^{**} = \sup\{g |\ g : V \to \mathbb{R} \textit{ affin und stetig, } g \leq \varphi\}\,, \tag{3.10}$$

sowie $\varphi^{**} \leq \varphi$.

Beweis: Aus Lemma 3.3 folgt $\varphi(v) \geq \langle v^*, v\rangle - \varphi^*(v^*)$ für alle v, v^*, also auch

$$\varphi(v) \geq \sup_{v^* \in V^*} (\langle v^*, v\rangle - \varphi^*(v^*)) = \varphi^{**}(v)\,.$$

Also ist φ^{**} eigentlich und nach Lemma 3.6 konvex und unterhalbstetig. Aus Satz 2.16 folgt

$$\varphi^{**} = \sup\{g |\ g : V \to \mathbb{R} \text{ affin und stetig, } g \leq \varphi^{**}\}\,.$$

Wir wollen zeigen, dass wir rechts in der Klammer "φ^{**}" durch "φ" ersetzen können. Sei $g : V \to \mathbb{R}$ affin und stetig mit $g \leq \varphi$,

$$g(v) = \langle v^*, v\rangle - \alpha\,, \quad \text{für alle } v \in V,$$

mit geeignetem $v^* \in V^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Es folgt $\alpha \geq \langle v^*, v\rangle - \varphi(v)$ für alle $v \in V$, also $\alpha \geq \varphi^*(v^*)$, und weiter

$$g(v) = \langle v^*, v\rangle - \alpha \leq \langle v^*, v\rangle - \varphi^*(v^*) \leq \varphi^{**}(v)\,.$$

Wir haben also gezeigt

$$g \leq \varphi \quad \Leftrightarrow \quad g \leq \varphi^{**}\,.$$

Hieraus folgt die Behauptung. □

Folgerung 3.8 *Sei V normierter Raum, $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$ mit $D(\varphi) \neq \emptyset$ und $D(\varphi^*) \neq \emptyset$. Dann gilt*

$$\varphi^{**} = \sup\{g |\ g : V \to (-\infty, \infty] \textit{ konvex und unterhalbstetig, } g \leq \varphi\}\,. \tag{3.11}$$

Beweis: "$\leq$": Folgt direkt aus Satz 3.7. "$\geq$": Ist $g : V \to (-\infty, \infty]$ konvex und unterhalbstetig mit $g \leq \varphi$, so folgt aus Satz 2.16

$$g = \sup\{h| \ h : V \to \mathbb{R} \text{ affin und stetig}, h \leq g\}, \tag{3.12}$$

also $g \leq \varphi^{**}$. □

Folgerung 3.9 *Sei V normierter Raum, $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$ konvex, unterhalbstetig und eigentlich. Dann ist $\varphi^{**} = \varphi$.*

Beweis: Folgt direkt aus Folgerung 3.8, da $\varphi^{**} \leq \varphi$ nach Satz 3.7. □

Folgerung 3.10 *Sei V normierter Raum, $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$ konvex, unterhalbstetig und eigentlich. Dann ist $\varphi^* : V \to (-\infty, \infty]$ ebenfalls konvex, unterhalbstetig und eigentlich.*

Beweis: Wegen Lemma 3.6 bleibt nur zu zeigen, dass $D(\varphi^*) \neq \emptyset$. Im Falle $D(\varphi^*) = \emptyset$ wäre aber $\varphi^{**} \equiv -\infty$, im Widerspruch zu Folgerung 3.9. □

Ist H ein reeller Hilbertraum, so liefert uns der Satz von Riesz aus der Funktionananalysis zu jedem $v^* \in H^*$ ein $w \in H$ mit

$$v^*(v) = \langle w, v \rangle_H \,, \quad \text{für alle } v \in H,$$

wobei auf der rechten Seite das Skalarprodukt in H steht. Die Abbildung $w \to v^*$ ist bijektiv, linear und isometrisch, das heißt, $\|w\|_H = \|v^*\|_{H^*}$. Vermittels dieser Isometrie können wir die zu $\varphi : H \to [-\infty, \infty]$ konjugierte Funktion auch definieren als

$$\varphi^*(w) = \sup_{v \in H}(\langle w, v \rangle_H - \varphi(v)) \,, \quad \varphi^* : H \to [-\infty, \infty] \,. \tag{3.13}$$

4 Das Subdifferential

Definition 4.1
Sei V normierter Raum, $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$. Ein $u^* \in V^*$ heißt ***Subgradient*** *für φ in u, falls $u \in D(\varphi)$ und*

$$\varphi(v) \geq \varphi(u) + \langle u^*, v-u \rangle \ , \quad \textit{für alle } v \in V . \tag{4.1}$$

Die Menge

$$\partial\varphi(u) = \{u^* : u^* \in V^*, \, u^* \textit{ Subgradient für } \varphi \textit{ in } u\} \tag{4.2}$$

heißt ***Subdifferential*** *von φ in u. Falls $\varphi(u) = +\infty$, so setzen wir $\partial\varphi(u) = \emptyset$.* □

Aus der Definition folgt unmittelbar, dass $\partial\varphi(u)$ abgeschlossen und konvex ist.

Beispiel 4.2
(i) Für $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(v) = |v|$, gilt $\partial\varphi(u) = \{1\}$ falls $u > 0$, $\partial\varphi(u) = \{-1\}$ falls $u < 0$, sowie $\partial\varphi(0) = [-1, 1]$.
(ii) Für $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(v) = \begin{cases} 1\,, & v > 0\,, \\ 0\,, & v \leq 0\,, \end{cases}$$

gilt $\partial\varphi(0) = \{0\}$. Definieren wir aber

$$\varphi(v) = \begin{cases} 1\,, & v \geq 0\,, \\ 0\,, & v < 0\,, \end{cases}$$

so gilt $\partial\varphi(0) = \emptyset$.

Definition 4.3
Sei V normierter Raum, $K \subset V$, $u \in K$. Ein $u^* \in V^*$ heißt ***Stützfunktional*** *für K in u, falls*

$$\langle u^*, v-u \rangle \leq 0\,, \qquad \textit{für alle } v \in K . \tag{4.3}$$

Die Menge

$$N_K(u) = \{v^* : v^* \in V^*, \, v^* \textit{ ist Stützfunktional für } K \textit{ in } u\} \tag{4.4}$$

heißt der ***Normalenkegel*** *an K in u.*

Lemma 4.4 *Sei V normierter Raum, $K \subset V$. Dann gilt*

$$\partial I_K(u) = N_K(u)\,, \quad \textit{falls } u \in K, \tag{4.5}$$

und $\partial I_K(u) = \emptyset$ andernfalls.

Beweis: Direkt aus der Definition. □

Definition 4.5
Sei V normierter Raum, $K \subset V$ nichtleer. Die Funktion

$$\sigma_K(v^*) = \sup_{v \in K} \langle v^*, v \rangle \ , \quad \sigma_K : V^* \to (-\infty, \infty] \, , \tag{4.6}$$

heißt ***Stützfunktion*** *von K. Analog heißt für $Z \subset V^*$, Z nichtleer, die Funktion*

$$\sigma_Z(v) = \sup_{v^* \in Z} \langle v^*, v \rangle \ , \quad \sigma_Z : V \to (-\infty, \infty] \, , \tag{4.7}$$

die Stützfunktion von Z.

Vorsicht: "Stützfunktion" und "Stützfunktional" sind zwei verschiedene Begriffe!

Satz 4.6 *Sei V normierter Raum, $\varphi : V \to [0, \infty]$ konvex, unterhalbstetig, eigentlich und positiv homogen mit $0 \in D(\varphi)$. Dann gilt*

$$\partial\varphi(0) = \{v^* : \langle v^*, v \rangle \le \varphi(v) \text{ für alle } v \in V\} \, . \tag{4.8}$$

Es gilt weiter mit $Z := \partial\varphi(0)$

$$\varphi^* = I_Z \tag{4.9}$$

sowie

$$\varphi = \sigma_Z \, , \tag{4.10}$$

das heißt,

$$\varphi(v) = \sup_{v^* \in Z} \langle v^*, v \rangle \ , \quad \text{für alle } v \in V \, .$$

Beweis: Wegen $\varphi(0) = 0$ ist (4.8) gerade die Definition von $\partial\varphi(0)$. Wegen $\varphi \ge 0$ ist $0 \in \partial\varphi(0)$, und es gilt weiter

$$v^* \in \partial\varphi(0) \quad \Leftrightarrow \quad \sup_{v \in V} \big(\langle v^*, v \rangle - \varphi(v) \big) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi^*(v^*) = 0 \, ,$$

sowie

$$v^* \notin \partial\varphi(0) \quad \Leftrightarrow \quad \sup_{v \in V} \big(\langle v^*, v \rangle - \varphi(v) \big) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi^*(v^*) = \infty \, ,$$

letzteres, da φ positiv homogen ist und daher

$$\langle v^*, tv \rangle - \varphi(tv) = t\big(\langle v^*, v \rangle - \varphi(v) \big) \, , \quad \text{für alle } t > 0.$$

Damit ist (4.9) gezeigt. Zum Beweis von (4.10) stellen wir fest, dass $\varphi^{**} = \varphi$ gilt nach Folgerung 3.9. Es folgt mit (4.9)

$$\varphi(v) = \varphi^{**}(v) = I_Z^*(v) = \sup_{v^* \in V^*} \big(\langle v^*, v \rangle - I_Z(v^*) \big) = \sup_{v^* \in Z} \langle v^*, v \rangle = \sigma_Z(v) \, .$$

$\square$

Beispiel 4.7
Wir betrachten $\varphi : V \to \mathbb{R}$, $\varphi(v) = r\|v\|$ mit $r > 0$. Es gilt

$$r\|v\| = \varphi(v) \geq \langle v^*, v\rangle \quad \forall\, v \in V \qquad \Leftrightarrow \qquad \|v^*\| \leq r$$

als Folgerung des Satzes von Hahn-Banach. Damit erhalten wir mit der Einheitskugel B^* in V^*

$$\partial\varphi(0) = rB^*\,, \quad \varphi^*(v^*) = \begin{cases} 0\,, & \|v^*\| \leq r\,, \\ +\infty\,, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Lemma 4.8 *Sei V normierter Raum, $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$ positiv homogen, $u \in D(\varphi)$. Dann gilt*

$$\partial\varphi(\lambda u) = \partial\varphi(u)\,, \quad \textit{für alle } \lambda > 0. \tag{4.11}$$

Beweis: Sei $\lambda > 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} u^* \in \partial\varphi(\lambda u) \quad &\Leftrightarrow \quad \varphi(v) - \varphi(\lambda u) \geq \langle u^*, v - \lambda u\rangle && \text{für alle } v \in V \\ &\Leftrightarrow \quad \varphi(\lambda v) - \varphi(\lambda u) \geq \langle u^*, \lambda(v - u)\rangle && \text{für alle } v \in V \\ &\Leftrightarrow \quad \lambda(\varphi(v) - \varphi(u)) \geq \langle u^*, \lambda(v - u)\rangle && \text{für alle } v \in V \\ &\Leftrightarrow \quad \varphi(v) - \varphi(u) \geq \langle u^*, v - u\rangle && \text{für alle } v \in V \\ &\Leftrightarrow \quad u^* \in \partial\varphi(u)\,. \end{aligned}$$

Bei der dritten Äquivalenz wurde verwendet, dass φ positiv homogen ist. □

Satz 4.9 *Sei V normierter Raum, $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$, $u \in D(\varphi)$. Dann gilt*

$$\varphi(u) = \min_{v\in V} \varphi(v) \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 \in \partial\varphi(u)\,. \tag{4.12}$$

Beweis: Direkt aus der Definition. □

Ist V normierter Raum, $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$ und $u \in \operatorname{int}(D(\varphi))$, so heißt φ differenzierbar in u, falls es ein $u^* \in V^*$ gibt mit

$$\varphi'(u; h) = \langle u^*, h\rangle\,, \quad \text{für alle } h \in V.$$

Wir schreiben $\varphi'(u)$ für u^*, $\varphi'(u)$ heißt die Ableitung von φ in u.

Satz 4.10 *Sei V normierter Raum, $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$ konvex, sei φ differenzierbar in einem Punkt $u \in \operatorname{int}(D(\varphi))$. Dann ist $\partial\varphi(u) = \{\varphi'(u)\}$.*

Beweis: Es ist

$$\langle\varphi'(u), v - u\rangle = \varphi'(u; v - u) \leq \varphi(v) - \varphi(u)$$

wegen Satz 2.26, also $\varphi'(u) \in \partial\varphi(u)$. Ist $u^* \in \partial\varphi(u)$, so gilt

$$\varphi(u + th) - \varphi(u) \geq t\,\langle u^*, h\rangle$$

für alle $h \in V$ und alle $t > 0$. Division durch t und Grenzübergang $t \downarrow 0$ ergibt

$$\langle\varphi'(u), h\rangle = \varphi'(u; h) \geq \langle u^*, h\rangle\,, \quad \text{für alle } h \in V,$$

also $\varphi'(u) = u^*$. □

Lemma 4.11 *Sei V normierter Raum, $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$, $u \in V$. Dann gilt*

$$u^* \in \partial\varphi(u) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(u) + \varphi^*(u^*) = \langle u^*, u\rangle \ , \tag{4.13}$$
$$u \in \partial\varphi^*(u^*) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi^{**}(u) + \varphi^*(u^*) = \langle u^*, u\rangle \ . \tag{4.14}$$

Auf der linken Seite von (4.14) wird u als Element des Bidualraums V^{**} aufgefaßt.

Beweis: Wir zeigen (4.13), der Beweis von (4.14) verläuft analog. Es gilt

$$\begin{aligned} u^* \in \partial\varphi(u) &\Leftrightarrow u \in D(\varphi) \text{ und } \varphi(v) \geq \varphi(u) + \langle u^*, v-u\rangle \quad \forall\, v \in V \\ &\Leftrightarrow u \in D(\varphi) \text{ und } \langle u^*, u\rangle - \varphi(u) \geq \langle u^*, v\rangle - \varphi(v) \quad \forall\, v \in V \\ &\Leftrightarrow u \in D(\varphi) \text{ und } \langle u^*, u\rangle - \varphi(u) \geq \varphi^*(u^*) \\ &\Leftrightarrow \langle u^*, u\rangle \geq \varphi(u) + \varphi^*(u^*)\,. \end{aligned}$$

Die andere Ungleichung gilt immer, nach Lemma 3.3. □

Lemma 4.12 *Sei V normierter Raum, $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$, $u \in V$ mit $\partial\varphi(u) \neq \emptyset$. Dann gilt $\varphi^{**}(u) = \varphi(u)$ und*

$$u^* \in \partial\varphi(u) \quad \Rightarrow \quad u \in \partial\varphi^*(u^*)\,. \tag{4.15}$$

Beweis: Sei $u^* \in \partial\varphi(u)$. Aus $\varphi^{**}(u) \geq \langle u^*, u\rangle - \varphi^*(u^*)$ folgt nach (4.13)

$$\langle u^*, u\rangle \leq \varphi^{**}(u) + \varphi^*(u^*) \leq \varphi(u) + \varphi^*(u^*) = \langle u^*, u\rangle \ , \tag{4.16}$$

also gilt überall die Gleichheit und aus Lemma 4.11 folgt, dass $u \in \partial\varphi^*(u^*)$. □

Es ergibt sich der folgende wesentliche Zusammenhang von Subdifferential und Konjugation.

Satz 4.13 *Sei V normierter Raum, $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$ konvex, unterhalbstetig und eigentlich. Dann gilt*

$$u^* \in \partial\varphi(u) \quad \Leftrightarrow \quad u \in \partial\varphi^*(u^*)\,. \tag{4.17}$$

Beweis: Nach Folgerung 3.9 ist $\varphi^{**} = \varphi$. Die Behauptung folgt dann aus Lemma 4.11. □

Erinnerung aus der Funktionalanalysis: Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, so ist der Dualraum von $L^p(\Omega)$ für $1 \leq p < \infty$ isometrisch isomorph zu $L^q(\Omega)$ mit $1/p + 1/q = 1$ vermittels $v^* \leftrightarrow w$,

$$v^*(v) = \int_\Omega w(x)v(x)\,dx\,.$$

In dieser Situation gilt der folgende Satz.

Satz 4.14 *Sei $\varphi : \mathbb{R} \to (-\infty, \infty]$ konvex, unterhalbstetig und eigentlich. Dann gilt dasselbe für $\Phi : L^p(\Omega) \to (-\infty, \infty]$,*

$$\Phi(v) = \int_\Omega \varphi(v(x))\,dx\,, \quad \textit{falls } \varphi \circ v \in L^1(\Omega), \tag{4.18}$$

und $\Phi(v) = +\infty$ andernfalls. Weiterhin gilt für $w \in L^q(\Omega)$

$$w \in \partial\Phi(u) \quad \Leftrightarrow \quad w(x) \in \partial\varphi(u(x))\,, \quad \textit{a.e. in } \Omega. \tag{4.19}$$

Beweis: Seien c, α so gewählt (siehe Satz 2.16), dass

$$\varphi(y) \geq cy - \alpha\,, \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}. \tag{4.20}$$

Φ ist eigentlich: Ist $y \in D(\varphi)$, so ist $v \in D(\Phi)$ für $v \equiv y$.
Φ ist konvex: Sind $u, v \in D(\Phi)$ und $\lambda \in (0,1)$, so gilt für fast alle $x \in \Omega$

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda u(x) + (1-\lambda)v(x)) &\geq c(\lambda u(x) + (1-\lambda)v(x)) - \alpha\,, \\ \varphi(\lambda u(x) + (1-\lambda)v(x)) &\leq \lambda\varphi(u(x)) + (1-\lambda)\varphi(v(x))\,, \end{aligned} \tag{4.21}$$

und da $L^p(\Omega) \subset L^1(\Omega)$, folgt $\varphi \circ (\lambda u + (1-\lambda)v)) \in L^1(\Omega)$, also $\lambda u + (1-\lambda)v \in D(\Phi)$, und Φ ist konvex wegen (4.21).
Φ ist unterhalbstetig: Seien $(v_n, r_n) \in \operatorname{epi}\Phi$ mit $v_n \to v$ in $L^p(\Omega)$ und $r_n \to r$, zu zeigen ist $(v, r) \in \operatorname{epi}\Phi$. Nach einem Satz der Integrationstheorie gibt es eine Teilfolge (v_{n_k}) mit $v_{n_k} \to v$ punktweise a.e.. Aus dem Lemma von Fatou folgt, da alle Integranden nichtnegativ sind wegen (4.20),

$$\begin{aligned} \int_\Omega \varphi(v(x)) - (cv(x) - \alpha)\,dx &\leq \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega \varphi(v_{n_k}(x)) - (cv_{n_k}(x) - \alpha)\,dx \\ &= \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega \varphi(v_{n_k}(x))\,dx - \int_\Omega cv(x) - \alpha\,dx \end{aligned}$$

sowie

$$\liminf_{k\to\infty} \int_\Omega \varphi(v_{n_k}(x))\,dx = \liminf_{k\to\infty} \Phi(v_{n_k}) \leq \lim_{k\to\infty} r_{n_k} = r\,,$$

also insgesamt $\Phi(v) \leq r$ und damit $(v, r) \in \operatorname{epi}\Phi$.
Das Subdifferential: Die Implikation "$\Leftarrow$" folgt aus der Rechnung

$$\Phi(v) - \Phi(u) = \int_\Omega \varphi(v(x)) - \varphi(u(x))\,dx \geq \int_\Omega w(x)(v(x) - u(x)\,dx = \langle w, v - u\rangle\ .$$

Sei umgekehrt $w \in \partial\Phi(u)$. Die Definition des Subdifferentials ergibt

$$\int_\Omega \varphi(v(x)) - \varphi(u(x))\,dx \geq \int_\Omega w(x)(v(x) - u(x))\,dx\,, \quad \text{für alle } v \in L^p(\Omega).$$

Sei $y \in \mathbb{R}$, sei A eine beliebige messbare Teilmenge von Ω. Setzen wir $v(x) = y$ für $x \in A$ und $v(x) = u(x)$ andernfalls, so folgt

$$\int_A \varphi(y) - \varphi(u(x))\,dx \geq \int_A w(x)(y - u(x))\,dx\,.$$

Da A beliebig war, folgt

$$\varphi(y) - \varphi(u(x)) \geq w(x)(y - u(x))\,, \quad \text{a.e. in } \Omega.$$

Da y beliebig war, folgt $w(x) \in \partial\varphi(u(x))$ a.e. in Ω. □

Satz 4.15 *Sei V normierter Raum, $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$ konvex, $u \in V$. Ist φ stetig in u, so gilt $\partial\varphi(u) \neq \emptyset$.*

Beweis: Aus der Stetigkeit von φ in u folgt, dass $\operatorname{int}(\operatorname{epi}\varphi)$ nichtleer ist (siehe Übung). Es ist $(u, \varphi(u)) \notin \operatorname{int}(\operatorname{epi}\varphi)$, da $(u, \varphi(u) - \delta) \notin \operatorname{epi}\varphi$ für alle $\delta > 0$. Aus dem Trennungssatz folgt, dass es ein $z^* \in (V \times \mathbb{R})^*$ gibt mit

$$z^*(u, \varphi(u)) \leq z^*(\operatorname{epi}\varphi)\,, \quad z^* \neq 0\,. \tag{4.22}$$

Wir zerlegen z^* in

$$z^*(v, \alpha) = u^*(v) + \lambda\alpha\,, \quad u^* \in V^*\,,\, \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

Die Ungleichung (4.22) hat $\lambda \geq 0$ zur Folge. Wäre $\lambda = 0$, so wäre

$$u^*(u) \leq u^*(v)\,, \quad \text{für alle } v \in D(\varphi)\,,$$

woraus wegen $u \in \operatorname{int}(D(\varphi))$ folgen würde, dass $u^* = 0$ gilt, im Widerspruch zu $z^* \neq 0$. Also ist $\lambda > 0$. Für alle $v \in D(\varphi)$ gilt

$$u^*(u) + \lambda\varphi(u) \leq u^*(v) + \lambda\varphi(v)\,,$$

also folgt

$$\varphi(v) \geq \varphi(u) + \left\langle -\frac{1}{\lambda}u^*\,,\, v - u\right\rangle$$

für alle $v \in V$ und damit

$$-\frac{1}{\lambda}u^* \in \partial\varphi(u)\,.$$

□

Folgerung 4.16 *Sei V Banachraum, sei $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$ konvex, unterhalbstetig und eigentlich. Dann gilt $\operatorname{int}(D(\varphi)) \subset D(\partial\varphi)$.*

Beweis: Die Behauptung folgt direkt aus Satz 4.15, da φ auf $\operatorname{int}(D(\varphi))$ stetig ist nach Satz 2.21. □

Direkt aus der Definition des Subdifferentials erhält man, dass

$$\partial(\lambda\varphi)(u) = \lambda\partial\varphi(u)\,, \quad \text{für alle } u \in V,\, \lambda > 0, \tag{4.23}$$

gilt für $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$, V Banachraum.

Ebenso folgt direkt aus der Definition, dass

$$\partial(\varphi_1 + \varphi_2)(x) \supset \partial\varphi_1(x) + \partial\varphi_2(x)\,. \tag{4.24}$$

Die Umkehrung gilt nicht immer, aber beispielsweise im folgenden Fall.

Satz 4.17 *Sei V normierter Raum, seien $\varphi_1, \varphi_2 : V \to (-\infty, \infty]$ konvex. Es gebe einen Punkt $\tilde{u} \in D(\varphi_1) \cap D(\varphi_2)$, in dem φ_1 stetig ist. Dann gilt*

$$\partial(\varphi_1 + \varphi_2)(u) = \partial\varphi_1(u) + \partial\varphi_2(u)\,, \qquad \text{für alle } u \in V. \tag{4.25}$$

Beweis: Für den Beweis von "$\subset$" muss man zeigen, dass sich jedes Funktional in $\partial(\varphi_1 + \varphi_2)(u)$ sich als Summe von Funktionalen aus $\partial\varphi_1(u)$ und $\partial\varphi_2(u)$ schreiben lässt. Die Existenz einer solchen Zerlegung erhält man, indem man den Trennungssatz auf zwei geeignet konstruierte konvexe Mengen anwendet; die Voraussetzung des Satzes garantiert dabei, dass eine dieser beiden Mengen ein nichtleeres Inneres hat. Wir verzichten darauf, diesen Beweis im Einzelnen vorzuführen. $\square$

Wir betrachten nun das Subdifferential einer Komposition $\varphi \circ A$, wobei $A : V \to W$ linear und stetig ist. Wir erinnern an die Definition der zu A adjungierten Abbildung $A^* : W^* \to V^*$,

$$\langle A^* w^*, u \rangle = \langle w^*, Au \rangle \ . \tag{4.26}$$

Satz 4.18 *Seien V, W normierte Räume, $A : V \to W$ linear und stetig, $\varphi : W \to (-\infty, \infty]$ konvex, und es gebe ein $\tilde{u} \in V$, so daß φ stetig in $A\tilde{u}$ ist. Dann gilt*

$$\partial(\varphi \circ A)(u) = (A^* \partial\varphi)(Au) \,, \quad \textit{für alle } u \in V. \tag{4.27}$$

Beweis: Auch dieser Satz wird durch eine Anwendung des Trennungssatzes bewiesen. $\square$

Es kommt durchaus vor, dass das Innere von $D(\varphi)$ leer ist. Ein Beispiel dafür ist

$$V = L^2(\Omega) \,, \quad \varphi(v) = \begin{cases} \int_\Omega ||\nabla v(x)\|^2 \, dx \,, & v \in H_0^1(\Omega) \,, \\ +\infty \,, & \text{sonst.} \end{cases}$$

In jedem Fall gilt, dass $D(\partial\varphi)$ dicht liegt in $D(\varphi)$ für konvexe, unterhalbstetige eigentliche Funktionen φ. Wir beschränken uns auf den Fall eines Hilbertraums.

Satz 4.19 *Sei H Hilbertraum, sei $\varphi : H \to (-\infty, \infty]$ konvex, unterhalbstetig und eigentlich. Dann gibt es zu jedem $u \in D(\varphi)$ eine Folge $u_n \in D(\partial\varphi)$ mit $u_n \to u$ in H und $\varphi(u_n) \to \varphi(u)$. Insbesondere liegt $D(\partial\varphi)$ dicht in $D(\varphi)$.*

Beweis: Sei $u \in D(\varphi)$, sei $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung an φ ist $\operatorname{epi}\varphi$ konvex, abgeschlossen und nichtleer. Wir betrachten den Punkt $z = (u, \varphi(u) - \varepsilon)$ in $H \times \mathbb{R}$. Nach dem Projektionssatz im Hilbertraum $H \times \mathbb{R}$ gibt es in $\operatorname{epi}\varphi$ einen Punkt $z_P = (p, \pi)$ kleinsten Abstands zu z. Dieser erfüllt die Variationsungleichung

$$\langle z - z_P, (v, \mu) - z_P \rangle_{H \times \mathbb{R}} \leq 0 \,, \quad \text{für alle } (v, \mu) \in \operatorname{epi}\varphi.$$

Zerlegt man das Skalarprodukt im Produktraum in die beiden Komponenten, so bedeutet das

$$\langle u - p, v - p \rangle_H + (\varphi(u) - \varepsilon - \pi)(\mu - \pi) \leq 0 \,, \quad \text{für alle } (v, \mu) \in \operatorname{epi}\varphi. \tag{4.28}$$

Da $(p, \pi) \in \operatorname{epi}\varphi$, gilt

$$\varphi(p) \leq \pi \,. \tag{4.29}$$

Wählen wir $\mu > 0$ hinreichend groß in (4.28) so ergibt sich

$$\varphi(u) - \varepsilon - \pi \leq 0 \,. \tag{4.30}$$

Nehmen wir an, dass in (4.30) Gleichheit gilt, so führt (4.28) mit $v = u$ auf $\langle u - p, u - p\rangle \leq 0$, also $p = u$. In diesem Fall ist $(u, \varphi(u))$ die beste Approximation in $\operatorname{epi}\varphi$ von $(u, \varphi(u) - \varepsilon)$, also $\pi = \varphi(u)$ wegen (4.29), ein Widerspruch zur Gleichheit in (4.30). Es gilt also

$$\varphi(u) - \varepsilon - \pi < 0\,. \tag{4.31}$$

Wir setzen $v = p$ und $\mu = \varphi(p)$ in (4.28) ein, es ergibt sich

$$(\varphi(u) - \varepsilon - \pi)(\varphi(p) - \pi) \leq 0\,.$$

Wegen (4.31) folgt $\varphi(p) - \pi \geq 0$, und mit (4.29)

$$\pi = \varphi(p)\,. \tag{4.32}$$

Mit

$$\lambda := \varphi(p) + \varepsilon - \varphi(u) > 0 \tag{4.33}$$

folgt für beliebiges $v \in D(\varphi)$, $\mu = \varphi(v)$, in (4.28)

$$\frac{1}{\lambda}\langle u - p, v - p\rangle \leq \varphi(v) - \varphi(p)\,.$$

Gemäß der Definition des Subdifferentials bedeutet das

$$\frac{1}{\lambda}(u - p) \in \partial\varphi(p)\,, \quad \text{also} \quad p \in D(\partial\varphi)\,. \tag{4.34}$$

Wir setzen nun $v = u$ und $\mu = \varphi(u)$ in (4.28) ein und erhalten mit (4.32) und (4.30)

$$\|u - p\|^2 + (\varphi(u) - \varphi(p))^2 \leq \varepsilon(\varphi(u) - \varphi(p)) \leq \varepsilon^2$$

und also

$$\|u - p\| \leq \varepsilon\,, \quad |\varphi(u) - \varphi(p)| \leq \varepsilon\,. \tag{4.35}$$

Alle Behauptungen folgen nun, indem wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ setzen $\varepsilon = 1/n$, $u_n = p$. $\square$

Wir betrachten nun das Subdifferential der Abbildung

$$\varphi(v) = \frac{1}{2}\|v\|^2\,. \tag{4.36}$$

Für $V = \mathbb{R}$ gilt $\varphi'(u) = u$. Ist V Hilbertraum, so ist

$$\varphi(u + h) - \varphi(u) = \frac{1}{2}\big(\langle u + h, u + h\rangle_H - \langle u, u\rangle_H\big) = \langle u, h\rangle_H - \frac{1}{2}\|h\|^2$$

für alle $u, h \in V$. Es folgt, dass φ differenzierbar ist mit

$$\langle \varphi'(u), h\rangle = \langle u, h\rangle_H\,. \tag{4.37}$$

Sei nun $J : V \to V^*$ die durch den Satz von Riesz vermittelte Isometrie,

$$\langle J(u), v\rangle = \langle u, v\rangle_H\,,$$

so haben wir erhalten

$$\varphi'(u) = J(u)\,. \tag{4.38}$$

Definition 4.20 (Dualitätsabbildung)
Sei V Banachraum. Wir definieren $J : V \to \mathcal{P}(V^*)$ durch

$$J(u) = \{u^* : u^* \in V^*\,,\, \langle u^*, u\rangle = \|u\|^2\,,\, \|u^*\| = \|u\|\}\,. \tag{4.39}$$

Die Abbildung J heißt die Dualitätsabbildung von V. □

Unmittelbar aus der Definition folgt, dass

$$J(tu) = tJ(u)\,, \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}. \tag{4.40}$$

Satz 4.21
Sei V Banachraum. Dann gilt

$$J = \partial\varphi \tag{4.41}$$

mit

$$\varphi(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2\,.$$

Als Konsequenz erhalten wir aus Satz 4.15, dass $J(u) \neq \emptyset$ für alle $u \in V$. (Das kann man auch direkt mit dem Satz von Hahn-Banach beweisen.)

Beweis: Ist $u^* \in J(u)$, so gilt für alle $v \in V$

$$\begin{aligned}\langle u^*, v - u\rangle &= \langle u^*, v\rangle - \|u\|^2 \le \|u^*\|\|v\| - \|u\|^2 = \|u\|\|v\| - \|u\|^2 \\ &\le \frac{1}{2}(\|v\|^2 - \|u\|^2)\,,\end{aligned}$$

also $u^* \in \partial\varphi(u)$. Sei umgekehrt $u^* \in \partial\varphi(u)$. Nach Definition gilt

$$\frac{1}{2}(\|v\|^2 - \|u\|^2) \ge \langle u^*, v - u\rangle\ , \quad \text{für alle } v \in V.$$

Mit $v = tu$, $t > 0$, folgt

$$\frac{1}{2}(t^2 - 1)\|u\|^2 \ge (t - 1)\,\langle u^*, u\rangle\ .$$

Für $t < 1$ folgt

$$\frac{1}{2}(t + 1)\|u\|^2 \le \langle u^*, u\rangle\ ,$$

und mit $t \uparrow 1$ ergibt sich

$$\|u\|^2 \le \langle u^*, u\rangle\ .$$

Für $t > 1$ folgt

$$\frac{1}{2}(t + 1)\|u\|^2 \ge \langle u^*, u\rangle\ ,$$

und mit $t \downarrow 1$ ergibt sich

$$\|u\|^2 \ge \langle u^*, u\rangle\ .$$

Wir haben erhalten

$$\|u\|^2 = \langle u^*, u\rangle \le \|u^*\|\|u\|\,, \quad \|u\| \le \|u^*\|\,. \tag{4.42}$$

Wir setzen nun $v = u + th$, $t > 0$, $h \in V$ beliebig. Es gilt dann

$$\begin{aligned} t\,\langle u^*, h\rangle = \langle u^*, v-u\rangle &\le \frac{1}{2}(\|u+th\|^2 - \|u\|^2) \\ &\le \frac{1}{2}(\|u\|^2 + 2t\|u\|\|h\| + t^2\|h\|^2 - \|u\|^2) = t\|u\|\|h\| + \frac{1}{2}t^2\|h\|^2 \,. \end{aligned}$$

Division durch t und Grenzübergang $t \downarrow 0$ führt auf $\langle u^*, h\rangle \le \|u\|\|h\|$ für alle $h \in V$, also auch

$$\|u^*\| \le \|u\| \,. \tag{4.43}$$

Die Behauptung folgt nun aus (4.42) und (4.43). □

Im allgemeinen enthält $J(u)$ mehr als ein Element, beispielsweise für den $\mathbb{R}^n$ versehen mit der Norm $\|\cdot\|_1$ oder $\|\cdot\|_\infty$.

Definition 4.22
Ein Banachraum V heißt ***strikt konvex****, falls*

$$\|\lambda u + (1-\lambda)v\| < 1$$

gilt für alle $u, v \in V$ mit $\|u\| = \|v\| = 1$, $u \ne v$, $0 < \lambda < 1$. □

$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ ist strikt konvex für $1 < p < \infty$, nicht strikt konvex für $p = 1$ und $p = \infty$. Dasselbe gilt für den $L^p(\Omega)$.

Unmittelbar aus der Definition folgt, dass jeder Hilbertraum strikt konvex ist.

Man kann beweisen, dass gilt

$\|\cdot\|_V$ ist differenzierbar	V^* ist strikt konvex
$\|\cdot\|_{V^*}$ ist differenzierbar	V ist strikt konvex

Satz 4.23
Sei V Banachraum. Ist V^* strikt konvex, so ist $J(u)$ einelementig für jedes $u \in V$.

Beweis: Wegen $J(tu) = tJ(u)$ für $t \in \mathbb{R}$ genügt es, $u \in V$ mit $\|u\| = 1$ zu betrachten. Sind $u_1^*, u_2^* \in J(u)$, so gilt

$$1 = \frac{1}{2}(\|u_1^*\|^2 + \|u_2^*\|^2) = \left\langle \frac{1}{2}(u_1^* + u_2^*), u \right\rangle \le \|\frac{1}{2}(u_1^* + u_2^*)\| \,,$$

also $u_1^* = u_2^*$ nach Definition der strikten Konvexität. □

Für $V = L^p(\Omega)$ gilt (Übung), wenn wir $L^p(\Omega)^*$ mit $L^q(\Omega)$ identifizieren,

$$(Ju)(x) = |u(x)|^{p-2}u(x)\|u\|_p^{2-p} \,, \quad \text{a.e. in } \Omega. \tag{4.44}$$

Satz 4.24 *Sei V strikt konvexer Banachraum mit strikt konvexem Dualraum V^*, sei $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$ konvex, unterhalbstetig und eigentlich, $f \in V$, $c > 0$. Dann hat die Funktion $\psi : V \to (-\infty, \infty]$,*

$$\psi(v) = \frac{c}{2}\|v - f\|^2 + \varphi(v)\,, \tag{4.45}$$

ein eindeutig bestimmtes Minimum $u \in V$, und es gilt

$$cJ(f - u) \in \partial\varphi(u)\,, \tag{4.46}$$

wobei J die Dualitätsabbildung ist.

Beweis: Mit φ ist auch ψ konvex, unterhalbstetig und eigentlich. Nach Satz 2.16 hat ψ eine affine Minorante, es gibt also $v^* \in V^*$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$\varphi(v) \geq \langle v^*, v\rangle - \alpha\,, \quad \text{für alle } v \in V.$$

Es ist dann

$$\psi(v) \geq \|v\|(\frac{c}{2}\|v\| - c\|f\| - \|v^*\|) - \alpha\,, \quad \text{für alle } v \in V,$$

also ist ψ nach unten beschränkt, und $\psi(v) \to \infty$ für $\|v\| \to \infty$. Aus Satz 2.15 folgt, daß ψ ein Minimum $u \in V$ hat; dieses ist eindeutig, da ψ sogar strikt konvex ist. Aus Satz 4.9, Satz 4.17, Satz 4.21 und Satz 4.23 folgt

$$0 \in \partial\psi(u) = cJ(u - f) + \partial\varphi(u)\,,$$

also

$$cJ(f - u) \in \partial\varphi(u)\,,$$

□

Definition 4.25 (Moreau-Regularisierung)
Sei V Banachraum, $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$ konvex, unterhalbstetig und eigentlich, sei $\lambda > 0$. Die Funktion

$$\varphi_\lambda(u) = \min_{v \in V}\left(\frac{1}{2\lambda}\|v - u\|^2 + \varphi(v)\right) \tag{4.47}$$

heißt die Moreau-Regularisierung von φ.

Beispiel 4.26 (i) Sei $V = \mathbb{R}$, $\varphi = I_{\{0\}}$, das heißt, $\varphi(r) = 0$ für $r = 0$ und $\varphi(r) = \infty$ für $r \neq 0$. Die Moreau-Regularisierung ist

$$\varphi_\lambda(r) = \min_{s \in \mathbb{R}}\left(\frac{1}{2\lambda}|s - r|^2 + \varphi(s)\right) = \frac{1}{2\lambda}r^2\,.$$

(ii) Sei $V = \mathbb{R}$, $\varphi(r) = |r|$. Die Moreau-Regularisierung ergibt sich als

$$\varphi_\lambda(r) = \begin{cases} r - \frac{\lambda}{2}\,, & r > \lambda\,, \\ \frac{r^2}{2\lambda}\,, & |r| \leq \lambda\,, \\ -r - \frac{\lambda}{2}\,, & r < -\lambda\,. \end{cases}$$

(iii) Sei K eine abgeschlossene konvexe Teilmenge eines Hilbertraums H, sei $\varphi = I_K$. Für die Moreau-Regularisierung gilt

$$\varphi_\lambda(u) = \min_{v \in H} \left(\frac{1}{2\lambda} \|v - u\|^2 + I_K(v) \right) = \frac{1}{2\lambda} (\operatorname{dist}(u, K))^2 .$$

$\square$

Gradientenfluss, ein Beispiel. Subdifferentiale werden in der Lösungstheorie gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen eingesetzt. Als Beispiel betrachten wir das Anfangswertproblem im $\mathbb{R}$

$$u' + \operatorname{sign}(u) = 0 , \quad u(0) = u_0 , \tag{4.48}$$

wobei $\operatorname{sign} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definiert ist durch $\operatorname{sign}(r) = r/|r|$. Es ist $u' = 1$ in $\{u < 0\}$ und $u' = -1$ in $\{u > 0\}$. Eine Lösung zum Anfangswert $u_0 = 0$ existiert genau dann, wenn wir $\operatorname{sign}(0) = 0$ setzen, dann ist $u = 0$ eine Lösung auf $\mathbb{R}_+$.

Setzen wir die Signumsfunktion auf $\mathbb{R}$ fort, so ist $\operatorname{sign} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monotone Funktion genau dann, wenn $\operatorname{sign}(0) \in [-1, 1]$. Sind nun u_1, u_2 Lösungen von (4.48), so folgt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{1}{2} (u_2 - u_1)^2 = (u_2 - u_1)(u_2' - u_1') = -(u_2 - u_1)(\operatorname{sign}(u_2) - \operatorname{sign}(u_1)) \le 0 , \tag{4.49}$$

das heißt, Lösungen von (4.48) sind eindeutig bestimmt.

Um eine Existenzaussage zu erhalten, bei der man sich nicht über die Wahl von $\operatorname{sign}(0)$ Gedanken machen muss, ist es zweckmäßig, die Signumfunktion als mengenwertige Funktion $\operatorname{sign} : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ fortzusetzen,

$$\operatorname{sign}(r) = \begin{cases} 1 , & r > 0 \\ [-1, 1] , & r = 0 \\ -1 , & r < 0 \end{cases} \tag{4.50}$$

Die Differentialgleichung $u' + \operatorname{sign}(u) = 0$ wird ersetzt durch die **Differentialinklusion**

$$u' + \operatorname{sign}(u) \ni 0 ,$$

das Anfangswertproblem (4.48) erhält die Form

$$u' + \operatorname{sign}(u) \ni 0 , \quad u(0) = u_0 . \tag{4.51}$$

Die Differentialinklusion lässt sich auch schreiben als $-u' \in \operatorname{sign}(u)$, Lösungen sind Funktionen mit $-u'(t) \in \operatorname{sign}(u(t))$. Für $u_0 = 1$ ergibt sich beispielsweise

$$u(t) = \begin{cases} 1 - t , & t \in [0, 1] , \\ 0 , & t \ge 1 . \end{cases}$$

Die Ableitung u' ist unstetig, aber integrierbar, und der Hauptsatz gilt, wie wir im nächsten Kapitel sehen werden. Das Monotonieargument aus (4.49) bleibt gültig unabhängig davon, welche Werte in $[-1, 1]$ die Signumsfunktion an den Nullstellen der Lösungen u_1 und u_2 annimmt.

Wir bemerken außerdem, dass für die mengenwertige Version (4.50) der Signumsfunktion gilt sign $= \partial\varphi$ mit $\varphi(r) = |r|$, so dass (4.51) die Form

$$u' + \partial\varphi(u) \ni 0\,, \quad u(0) = u_0\,, \tag{4.52}$$

annimmt. Die Lösung "$u = u(t, u_0)$" von (4.52) bezeichnet man auch als **Gradientenfluss** (gradient flow).

5 Der Hauptsatz im Sobolevraum $W^{1,1}(a,b)$

Unter $[a,b]$ wird im folgenden immer ein kompaktes Intervall im $\mathbb{R}$ verstanden.

Wir erinnern: Der Raum $W^{1,1}(a,b)$ besteht aus denjenigen Funktionen $u \in L^1(a,b)$, deren schwache Ableitung ebenfalls im $L^1(a,b)$ liegt, das heißt, es gilt

$$\int_a^b f(t)\eta(t)\,dt = -\int_a^b u(t)\eta'(t)\,dt\,, \quad \text{für alle } \eta \in C_0^\infty(a,b). \tag{5.1}$$

Ein solches f ist eindeutig bestimmt und heißt die schwache Ableitung von u, geschrieben u'.

Satz 5.1 *Sei $u \in W^{1,1}(a,b)$ mit $u' = 0$ fast überall. Dann ist u konstant.*

Genauer gesagt: Die Äquivalenzklasse von u enthält eine konstante Funktion.

Beweis: Es gilt

$$\int_a^b u(t)\eta'(t)\,dt = 0\,, \quad \text{für alle } \eta \in C_0^\infty(a,b).$$

Sei $\chi \in C_0^\infty(a,b)$ mit

$$\int_a^b \chi(s)\,ds = 1\,.$$

Wir zerlegen ein beliebiges $\eta \in C_0^\infty(a,b)$ gemäß

$$\eta = \psi' + \int_a^b \eta(s)\,ds \cdot \chi\,, \quad \psi(t) = \int_a^t \Big(\eta(\tau) - \int_a^b \eta(s)\,ds \cdot \chi(\tau)\Big)\,d\tau\,.$$

Nach Konstruktion gilt $\psi \in C_0^\infty(a,b)$. Es folgt

$$\begin{aligned}\int_a^b u(t)\eta(t)\,dt &= \int_a^b u(t)\psi'(t)\,dt + \int_a^b u(t)\int_a^b \eta(s)\,ds \cdot \chi(t)\,dt \\ &= \int_a^b \eta(s)\,ds \cdot \int_a^b u(t)\chi(t)\,dt = \int_a^b \eta(s)\int_a^b u(t)\chi(t)\,dt\,ds\,.\end{aligned}$$

Da η beliebig war, folgt

$$u = c \quad \text{a.e.}\,, \quad c = \int_a^b u(t)\chi(t)\,dt\,.$$

□

Im vorangehenden Beweis spielt es keine Rolle, dass u skalarwertig ist. Er bleibt gültig, falls $u \in W^{1,1}(a,b:\mathbb{R}^n)$, und auch, wie wir im nächsten Kapitel sehen werden, falls $\mathbb{R}$ durch einen normierten Raum V ersetzt wird.

Satz 5.2 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)
Sei $u \in L^1(a,b)$. Dann sind äquivalent:
(i) $u \in W^{1,1}(a,b)$ und $u' = f \in L^1(a,b)$,
(ii) es gibt ein $f \in L^1(a,b)$ und eine stetige Funktion $\tilde{u} : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $\tilde{u} = u$ a.e. und

$$\tilde{u}(t) = \tilde{u}(a) + \int_a^t f(s)\,ds\,, \quad \textit{für alle } t \in [a,b]. \tag{5.2}$$

Beweis:
"(ii)⇒(i)": Für beliebiges $\eta \in C_0^\infty(a,b)$ gilt

$$\begin{aligned}\int_a^b u(t)\eta'(t)\,dt &= \int_a^b \eta'(t)\Big(\tilde u(a) + \int_a^t f(s)\,ds\Big)\,dt \\ &= (\eta(b)-\eta(a))\tilde u(a) + \int_a^b f(s)\int_s^b \eta'(t)\,dt\,ds \\ &= -\int_a^b f(s)\eta(s)\,ds\,,\end{aligned} \tag{5.3}$$

also $u \in W^{1,1}(a,b)$ und $u' = f$.
"(i)⇒(ii)": Wir setzen

$$v(t) = \int_a^t f(s)\,ds\,.$$

Es gilt $v \in C[a,b]$, da wegen $f \in L^1(a,b)$

$$|v(t) - v(\tau)| \le \int_\tau^t |f(s)|\,ds \ \to 0 \quad \text{für } \tau \to t.$$

Mit $\tilde u = v$ in (5.2) sehen wir, dass $v \in W^{1,1}(a,b)$ mit $v' = f$ fast überall. Es folgt $(u-v)' = u' - v' = 0$ a.e., also ist $u - v = c$ konstant nach Satz 5.1, und $\tilde u = v + c$ ist die gewünschte Funktion. □

Im skalaren Fall (Raumdimension 1) sind Funktionen im $W^{1,1}$ also stetig. (Wir meinen immer den stetigen Repräsentanten.)

Satz 5.3 (Partielle Integration)
Seien $u, v \in W^{1,1}(a,b)$. Dann gilt

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,dt = uv\Big|_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,dt\,. \tag{5.4}$$

Beweis: Die Integrale und die Auswertung an den Integrationsgrenzen machen Sinn, da u und v stetig sind. Wir erhalten (5.4) als Konsequenz des Satzes von Fubini: Es gilt gemäß Satz 5.2

$$\begin{aligned}\int_a^b u'(t)v(t)\,dt &= \int_a^b u'(t)\Big(v(a) + \int_a^t v'(s)\,ds\Big)\,dt \\ &= v(a)(u(b)-u(a)) + \int_a^b\int_a^t u'(t)v'(s)\,ds\,dt \\ &= v(a)(u(b)-u(a)) + \int_a^b\int_s^b u'(t)v'(s)\,dt\,ds \\ &= v(a)(u(b)-u(a)) + u(b)(v(b)-v(a)) - \int_a^b u(s)v'(s)\,ds\,.\end{aligned}$$

□

6 Das Bochner-Integral

Unter $[a,b]$ wird im folgenden immer ein kompaktes Intervall im $\mathbb{R}$ verstanden. Ist $A \subset [a,b]$, so bezeichnet χ_A die durch

$$\chi_A(t) = \begin{cases} 1\,, & t \in A\,, \\ 0\,, & t \notin A\,, \end{cases} \tag{6.1}$$

definierte charakteristische Funktion von A.

Definition 6.1 (Einfache Funktion) *Sei V Banachraum. Eine Funktion $u : [a,b] \to V$ heißt einfach, wenn sie die Form*

$$u(t) = \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i}(t) v_i \tag{6.2}$$

hat, wobei $n \in \mathbb{N}$, $A_i \subset [a,b]$ messbar und $v_i \in V$ für $1 \le i \le n$.

Lemma 6.2 *Sei V Banachraum, $u : [a,b] \to V$ einfach. Dann gibt es genau eine Darstellung der Form (6.2) mit*

$$\bigcup_i A_i = [a,b]\,, \quad A_i \cap A_j = \emptyset \text{ und } v_i \neq v_j \text{ für } i \neq j\,. \tag{6.3}$$

Diese Darstellung heißt kanonische Darstellung.

Beweis: Übung. □

Definition 6.3 (Bochner-Messbarkeit)
Sei V Banachraum. Eine Funktion $u : [a,b] \to V$ heißt Bochner-messbar, falls es eine Folge von einfachen Funktionen $u_n : [a,b] \to V$ gibt mit

$$\lim_{n\to\infty} u_n(t) = u(t) \tag{6.4}$$

für fast alle $t \in [a,b]$.

Definition 6.4 *Sei V Banachraum, $u : [a,b] \to V$ einfache Funktion mit der Darstellung*

$$u(t) = \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i}(t) v_i\,. \tag{6.5}$$

Wir definieren das Bochner-Integral von u als

$$\int_a^b u(t)\,dt = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{meas}(A_i) v_i\,. \tag{6.6}$$

Ist $A \subset [a,b]$ messbar, so definieren wir

$$\int_A u(t)\,dt = \int_a^b \chi_A(t) u(t)\,dt\,. \tag{6.7}$$

Die Definition 6.4 ist sinnvoll, da der Wert der rechten Seite von (6.6) nicht von der gewählten Darstellung abhängt. Weiterhin folgt direkt aus der Definition, dass für einfache Funktionen $u, v : [a, b] \to V$ und Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_a^b \alpha u(t) + \beta v(t)\, dt = \alpha \int_a^b u(t)\, dt + \beta \int_a^b v(t)\, dt\,, \tag{6.8}$$

sowie

$$\left\| \int_a^b u(t)\, dt \right\| \leq \int_a^b \|u(t)\|\, dt\,. \tag{6.9}$$

Lemma 6.5 *Sei V Banachraum, $u_n : [a, b] \to V$ eine Folge von einfachen Funktionen mit $u_n \to u$ fast überall. Dann ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ die durch*

$$f(t) = \|u_n(t) - u(t)\| \tag{6.10}$$

definierte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ (Lebesgue-)messbar.

Beweis: Es ist

$$f(t) = \lim_{m\to\infty} f_m(t)\,, \quad f_m(t) := \|u_n(t) - u_m(t)\|\,, \tag{6.11}$$

und f_m ist eine einfache Funktion für alle $m \in \mathbb{N}$. □

Sei nun $u_n : [a, b] \to V$ eine Folge von einfachen Funktionen mit $u_n \to u$ punktweise fast überall und

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \|u_n(t) - u(t)\|\, dt = 0\,. \tag{6.12}$$

(Nach Lemma 6.5 ist der Integrand messbar.) Wegen

$$\begin{aligned} \left\| \int_a^b u_n(t)\, dt - \int_a^b u_m(t)\, dt \right\| &\leq \int_a^b \|u_n(t) - u_m(t)\|\, dt \\ &\leq \int_a^b \|u_n(t) - u(t)\|\, dt + \int_a^b \|u_m(t) - u(t)\|\, dt \end{aligned} \tag{6.13}$$

wird durch

$$y_n = \int_a^b u_n(t)\, dt \tag{6.14}$$

eine Cauchyfolge in V definiert. Ist $v_n : [a, b] \to V$ eine weitere Folge mit denselben Eigenschaften wie u_n, so gilt

$$\begin{aligned} \left\| \int_a^b v_n(t)\, dt - \int_a^b u_n(t)\, dt \right\| &\leq \int_a^b \|v_n(t) - u_n(t)\|\, dt \\ &\leq \int_a^b \|v_n(t) - u(t)\|\, dt + \int_a^b \|u_n(t) - u(t)\|\, dt\,, \end{aligned} \tag{6.15}$$

also hängt der Grenzwert von (y_n) nicht von der speziellen Wahl der Folge (u_n) ab.

Definition 6.6 (Bochner-Integral) *Sei $u : [a,b] \to V$. Falls es eine Folge von einfachen Funktionen $u_n : [a,b] \to V$ gibt mit $u_n \to u$ punktweise fast überall und*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \|u_n(t) - u(t)\| \, dt = 0 \,, \tag{6.16}$$

so heißt u Bochner-integrierbar, und wir definieren das Bochner-Integral von u als

$$\int_a^b u(t)\, dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b u_n(t)\, dt \,. \tag{6.17}$$

Lemma 6.7 *Sei V Banachraum, seien $u, v : [a,b] \to V$ Bochner-integrierbar und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann ist auch $\alpha u + \beta v$ Bochner-integrierbar, und es gilt*

$$\int_a^b \alpha u(t) + \beta v(t)\, dt = \alpha \int_a^b u(t)\, dt + \beta \int_a^b v(t)\, dt \,. \tag{6.18}$$

Beweis: Direkt aus den Definitionen. □

Satz 6.8 *Sei V Banachraum. Ein $u : [a,b] \to V$ ist Bochner-integrierbar genau dann, wenn u Bochner-messbar und die Funktion $t \mapsto \|u(t)\|$ integrierbar ist. Es gilt außerdem*

$$\left\| \int_a^b u(t)\, dt \right\| \le \int_a^b \|u(t)\|\, dt \,. \tag{6.19}$$

Beweis: "$\Rightarrow$": Sei (u_n) Folge einfacher Funktionen mit $u_n \to u$ punktweise fast überall und

$$\int_a^b \|u(t) - u_n(t)\|\, dt = 0 \,. \tag{6.20}$$

Da $\|u_n(t)\| \to \|u(t)\|$ für fast alle $t \in [a,b]$ gilt, ist die Funktion $t \mapsto \|u(t)\|$ messbar. Es gilt dann

$$\int_a^b \|u(t)\|\, dt \le \int_a^b \|u(t) - u_n(t)\|\, dt + \int_a^b \|u_n(t)\|\, dt < \infty \,. \tag{6.21}$$

"$\Leftarrow$": Sei (u_n) Folge einfacher Funktionen mit $u_n \to u$ punktweise fast überall. Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ definieren wir $v_n : [a,b] \to V$ durch

$$v_n(t) = \begin{cases} u_n(t)\,, & \text{falls } \|u_n(t)\| \le (1+\varepsilon)\|u(t)\|\,, \\ 0\,, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{6.22}$$

v_n ist eine einfache Funktion, da $\{t : \|u_n(t)\| \le (1+\varepsilon)\|u(t)\|\}$ messbar ist. Für

$$f_n(t) = \|v_n(t) - u(t)\| \tag{6.23}$$

gilt $f_n \to 0$ punktweise fast überall und

$$0 \le f_n(t) \le (2+\varepsilon)\|u(t)\| \,. \tag{6.24}$$

Aus dem Satz von Lebesgue folgt

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \|v_n(t) - u(t)\| \, dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t) \, dt = 0 \,, \tag{6.25}$$

also ist u Bochner-integrierbar. Mit (6.9) folgt

$$\left\| \int_a^b v_n(t) \, dt \right\| \le \int_a^b \|v_n(t)\| \, dt \le (1+\varepsilon) \int_a^b \|u(t)\| \, dt \tag{6.26}$$

und damit auch

$$\left\| \int_a^b u(t) \, dt \right\| = \left\| \lim_{n\to\infty} \int_a^b v_n(t) \, dt \right\| \le (1+\varepsilon) \int_a^b \|u(t)\| \, dt \,. \tag{6.27}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt (6.19). □

In Analogie zum Fall $V = \mathbb{R}$ betrachten wir nun Funktionen $u : [a,b] \to V$, für die gilt

$$\int_a^b \|u(t)\|^p \, dt < \infty \,. \tag{6.28}$$

Definition 6.9 *Sei V Banachraum, $1 \le p < \infty$. Wir definieren*

$$L^p(a,b;V) = \{[u] \,|\, u : [a,b] \to V \textit{ ist Bochner-messbar und (6.28) gilt}\} \,, \tag{6.29}$$

wobei $[u]$ die Äquivalenzklasse von u unter der Äquivalenzrelation

$$u \sim v \quad \Leftrightarrow \quad u = v \textit{ fast überall} \tag{6.30}$$

bezeichnet.

Nach Satz 6.8 ist $L^1(a,b;V)$ gerade der Vektorraum aller Bochner-integrierbaren Funktionen.

Satz 6.10 *Sei V Banachraum, $1 \le p < \infty$. Dann ist $L^p(a,b;V)$ ein Banachraum mit der Norm*

$$\|u\|_{L^p(a,b;V)} = \left(\int_a^b \|u(t)\|_V^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \,. \tag{6.31}$$

Ist V Hilbertraum, so ist $L^2(a,b;V)$ ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle = \int_a^b \langle u(t), v(t) \rangle_V \, dt \,. \tag{6.32}$$

Beweis: Weggelassen. Geht genauso wie im Fall $V = \mathbb{R}$. Zum Beweis der Bochner-Messbarkeit der als Limes einer Cauchyfolge konstruierten Grenzfunktion wird zusätzlich der Messbarkeitssatz von Pettis benötigt. □

Definition 6.11 *Für $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ definieren wir*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[a,b]} u(t) = \inf\{M : M \in \mathbb{R},\ u(t) \le M \text{ für fast alle } t \in [a,b]\}\,. \tag{6.33}$$

Wir betrachten nun banachraumwertige Funktionen $u : [a,b] \to V$, für die gilt

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[a,b]} \|u(t)\|_V < \infty\,. \tag{6.34}$$

Definition 6.12 *Sei V Banachraum. Wir definieren*

$$L^\infty(a,b;V) = \{[u] \,|\, u : [a,b] \to V \text{ ist Bochner-messbar und (6.34) gilt}\}\,. \tag{6.35}$$

Satz 6.13 *Sei V Banachraum. Dann ist $L^\infty(a,b;V)$ ein Banachraum.*

Beweis: Verläuft ebenfalls wie im Fall $V = \mathbb{R}$. □

Lemma 6.14 *Sei V Banachraum. Dann gilt für alle $1 \le p \le q \le \infty$*

$$L^q(a,b;V) \subset L^p(a,b;V)\,. \tag{6.36}$$

Beweis: Wie im Fall $V = \mathbb{R}$. □

Definition 6.15 *Sei V Banachraum. Wir definieren*

$$C([a,b];V) = \{u \,|\, u : [a,b] \to V \text{ stetig}\}\,. \tag{6.37}$$

Definition 6.16 (Oszillation) *Sei V Banachraum, $u : [a,b] \to V$. Wir definieren die Oszillation von u durch*

$$\operatorname*{osc}_{[a,b]}(u;\delta) = \sup\{\|u(t) - u(s)\| : s,t \in [a,b],\ |t-s| \le \delta\}\,. \tag{6.38}$$

Lemma 6.17 *Sei V Banachraum, $u : [a,b] \to V$ stetig. Dann gilt*

$$\lim_{\delta\to 0} \operatorname*{osc}_{[a,b]}(u;\delta) = 0\,. \tag{6.39}$$

Beweis: Die Aussage (6.39) ist gleichbedeutend mit der gleichmäßigen Stetigkeit von u. □

Für eine stetige Funktion $u : [a,b] \to V$ gilt

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[a,b]} \|u(t)\| = \max_{t\in[a,b]} \|u(t)\|\,, \tag{6.40}$$

da aus der Stetigkeit folgt, dass $\|u(t)\| \le \operatorname{ess\,sup}_{s\in[a,b]} \|u(s)\|$ gilt für alle t.

Satz 6.18 *Sei V Banachraum. Dann ist $C([a,b];V)$ ein Banachraum mit der Norm*

$$\|u\|_{C([a,b];V)} = \max_{t\in[a,b]} \|u(t)\| \,, \tag{6.41}$$

und $C([a,b];V)$ kann mit einem abgeschlossenen Teilraum von $L^\infty(a,b;V)$ identifiziert werden.

Beweis: Ist $u : [a,b] \to V$ stetig, so ist u auch Bochner-messbar: Wir definieren eine Folge von einfachen Funktionen $u_n : [a,b] \to V$ durch $u_n(t) = u(ih)$, falls $t \in [ih,(i+1)h)$, $h = (b-a)/n$ ist. Dann gilt

$$\|u_n(t) - u(t)\| \le \operatorname*{osc}_{[a,b]}(u;h) \,, \quad h = \frac{b-a}{n} \,, \tag{6.42}$$

also $u_n \to u$ gleichmäßig (punktweise würde schon genügen). Weiter: Sei (u_n) Folge in C mit $[u_n] \to [u]$ in L^∞. Wir wählen eine Nullmenge N in $[a,b]$ mit $u_n \to u$ gleichmäßig in $M = [a,b] \setminus N$, dann ist u stetig auf M. Ist $t \in N$, so wählen wir eine Folge $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in M mit $t_k \to t$, dann ist

$$\|u_n(t) - u_m(t)\| \le \|u_n(t) - u_n(t_k)\| + \|u_n - u_m\|_{L^\infty(a,b;V)} + \|u_m(t_k) - u_m(t)\| \,,$$

also ist $(u_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge auch für $t \in N$. Definieren wir $\tilde{u}(t)$ als den Limes dieser Cauchyfolge für $t \in N$ und setzen wir $\tilde{u}(t) = u(t)$ für $t \in M$, so ist $\tilde{u} : [a,b] \to V$ stetig und $[\tilde{u}] = [u]$. □

Satz 6.19 *Sei V reflexiver und separabler Banachraum, $1 < p < \infty$. Dann ist der Dualraum von $L^p(a,b;V)$ isometrisch isomorph zu $L^q(a,b;V^*)$, wobei $1/p + 1/q = 1$. Die Isometrie $I : L^q(a,b;V^*) \to (L^p(a,b;V))^*$ ist gegeben durch*

$$\langle Iu, v\rangle = \int_a^b \langle u(t), v(t)\rangle \, dt \tag{6.43}$$

für $u \in L^q(a,b;V^*)$ und $v \in L^p(a,b;V)$.

Beweis: Weggelassen. □

Wir betrachten nun schwache Ableitungen im $L^1(a,b;V)$.

Definition 6.20 (Schwache Ableitung)
Sei $u \in L^1(a,b;V)$. Ein $f \in L^1(a,b;V)$ heißt schwache Ableitung von u, wenn gilt

$$\int_a^b f(t)\eta(t)\, dt = -\int_a^b u(t)\eta'(t)\, dt \,, \tag{6.44}$$

für alle $\eta \in C_0^\infty(a,b)$. □

Wir wollen Gleichungen in V auf Gleichungen in $\mathbb{R}$ zurückspielen. Dazu brauchen wir die Rechenregel

$$\left\langle v^* \,, \int_a^b u(t)\, dt \right\rangle = \int_a^b \langle v^*, u(t)\rangle \, dt \,, \quad v^* \in V^* \,, \, u \in L^1(a,b;V) \,. \tag{6.45}$$

Satz 6.21 *Sei V Banachraum. Ist $v^* \in V^*$ und $u \in L^1(a,b;V)$, so ist $t \mapsto \langle v^*, u(t)\rangle$ integrierbar, und (6.45) gilt.*

Beweis: Sei

$$u = \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i} v_i \tag{6.46}$$

eine einfache Funktion mit Werten $v_i \in V$. Dann ist auch $t \mapsto \langle v^*, u(t)\rangle$ eine einfache Funktion, und es gilt

$$\begin{aligned} \left\langle v^*, \int_a^b u(t)\, dt \right\rangle &= \left\langle v^*, \sum_{i=1}^{n} \operatorname{meas}(A_i) v_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{meas}(A_i) \langle v^*, v_i\rangle \\ &= \int_a^b \langle v^*, u(t)\rangle_V \, dt\,, \quad v^* \in V^*\,. \end{aligned} \tag{6.47}$$

Sei nun $u \in L^1(a,b;V)$ beliebig. Für $v^* \in V^*$ ist $\langle v^*, u(t)\rangle = (v^* \circ u)(t)$, und $v^* \circ u$ ist messbar, da v^* stetig und u Bochner-messbar ist. Weiter gilt

$$\int_a^b |\langle v^*, u(t)\rangle|\, dt \le \int_a^b \|v^*\|_{V^*} \|u(t)\|_V \, dt \le \|v^*\|_{V^*} \|u\|_{L^1(a,b;V)}\,. \tag{6.48}$$

Analog gilt

$$\left| \left\langle v^*, \int_a^b u(t)\, dt \right\rangle \right| \le \|v^*\|_{V^*} \left\| \int_a^b u(t)\, dt \right\|_V \le \|v^*\|_{V^*} \|u\|_{L^1(a,b;V)}\,. \tag{6.49}$$

Die linke und die rechte Seite von (6.45) definieren also, für festes v^*, lineare stetige Funktionale auf $L^1(a,b;V)$, welche auf dem dichten Unterraum der einfachen Funktionen übereinstimmen und daher gleich sind. $\square$

Satz 6.22 *Seien $u, f \in L^1(a,b;V)$. Dann sind äquivalent:*
(i) f ist schwache Ableitung von u.
(ii) Für jedes $v^* \in V^*$ ist die Funktion $t \mapsto \langle v^*, f(t)\rangle$ schwache Ableitung der Funktion $t \mapsto \langle v^*, u(t)\rangle$ im $L^1(a,b)$.

Beweis: Wir wenden Satz 6.21 an. Sei $\eta \in C_0^\infty(a,b)$ beliebig. Es gilt

$$\begin{aligned} & \int_a^b f(t)\eta(t)\, dt = -\int_a^b u(t)\eta'(t)\, dt \\ \Leftrightarrow \quad & \left\langle v^*, \int_a^b f(t)\eta(t)\, dt \right\rangle = -\left\langle v^*, \int_a^b u(t)\eta'(t)\, dt \right\rangle, \qquad \text{für alle } v^* \in V^*, \\ \Leftrightarrow \quad & \int_a^b \langle v^*, f(t)\rangle\, \eta(t)\, dt = -\int_a^b \langle v^*, u(t)\rangle\, \eta'(t)\, dt\,, \qquad \text{für alle } v^* \in V^*. \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung. $\square$

Lemma 6.23 *Sei V Banachraum mit separablem Dualraum V^*, sei $f \in L^1(0,T;V)$. Gilt*

$$\int_a^b \eta(t) f(t)\, dt = 0\,, \qquad \textit{für alle } \eta \in C_0^\infty(a,b)\,, \tag{6.50}$$

so gilt $f = 0$ fast überall.

Beweis: Wir setzen für den Spezialfall $V = \mathbb{R}$ die Aussage als bekannt voraus, siehe z.B. meine Vorlesung PDE 1, Kapitel 2. Sei nun V wie angegeben. Für $v^* \in V^*$ und $\eta \in C_0^\infty(a,b)$ gilt

$$0 = \left\langle v^*, \int_a^b \eta(t) f(t)\, dt \right\rangle = \int_a^b \eta(t) \left\langle v^*, f(t) \right\rangle \, dt\,. \tag{6.51}$$

Aus der Gültigkeit der Aussage für $V = \mathbb{R}$ folgt: Für jedes $v^* \in V^*$ gibt es eine Nullmenge $N(v^*)$ mit

$$\langle v^*, f(t)\rangle = 0\,, \qquad \text{für alle } t \in (a,b) \setminus N(v^*)\,.$$

Sei D eine abzählbare dichte Teilmenge von V^*, setze

$$N = \bigcup_{v^* \in D} N(v^*)\,.$$

Dann ist N Nullmenge, und

$$\langle v^*, f(t)\rangle = 0\,, \qquad \text{für alle } t \in (a,b) \setminus N\,,\ v^* \in D\,,$$

also

$$\langle v^*, f(t)\rangle = 0\,, \qquad \text{für alle } t \in (a,b) \setminus N\,,\ v^* \in V^*\,,$$

also $f(t) = 0$ für alle $t \notin N$. □

Satz 6.24 *Sei V Banachraum mit separablem Dualraum, sei $u \in L^1(a,b;V)$. Dann gibt es höchstens eine schwache Ableitung $f \in L^1(a,b;V)$ von u. Falls sie existiert, bezeichnen wir sie mit u'.*

Beweis: Sind $f_1, f_2 \in L^1(a,b;V)$ schwache Ableitungen von u, so folgt für $f = f_1 - f_2$ aus der Definition der schwachen Ableitung

$$\int_a^b f(t)\eta(t)\, dt = 0$$

für alle $\eta \in C_0^\infty(a,b)$. Aus Lemma 6.23 folgt $w = 0$. □

Wir bemerken: Die Aussagen von Lemma 6.23 und Satz 6.24 gelten für beliebige Banachräume V und beliebiges $f \in L^1(0,T;V)$. Wir werden im Folgenden auf die Einschränkung "V^* separabel" verzichten.

Definition 6.25 (Sobolevraum von vektorwertigen Funktionen)
Sei V Banachraum. Wir definieren

$$W^{1,1}(a,b;V) = \{v : v, v' \in L^1(a,b;V)\}\,. \tag{6.52}$$

□

Die Aussagen im Zusammenhang mit dem Hauptsatz für skalarwertige Funktionen lassen sich auf vektorwertige Funktionen übertragen.

Satz 6.26 *Sei V Banachraum, $u \in W^{1,1}(a,b;V)$ mit $u' = 0$ fast überall. Dann ist u konstant.*

Beweis: Der Beweis des entsprechenden Satzes 5.1 für skalarwertige Funktionen bleibt wörtlich gültig. Lediglich die Integrale, in denen u vorkommt, sind als Bochner-Integrale zu interpretieren. □

Satz 6.27 (Hauptsatz)
Sei V Banachraum, $u \in L^1(a,b;V)$. Dann sind äquivalent:
(i) $u \in W^{1,1}(a,b;V)$ und $u' = f \in L^1(a,b;V)$,
(ii) es gibt ein $f \in L^1(a,b;V)$ und eine stetige Funktion $\tilde{u} : [a,b] \to V$ mit $\tilde{u} = u$ a.e. und

$$\tilde{u}(t) = \tilde{u}(a) + \int_a^t f(s)\,ds\,, \quad \textit{für alle } t \in [a,b]. \tag{6.53}$$

Beweis:
"(ii)⇒(i)": Sei $v^* \in V^*$. Für

$$w(t) = \langle v^*, u(t)\rangle\ , \quad \tilde{w}(t) = \langle v^*, \tilde{u}(t)\rangle\ , \quad g(t) = \langle v^*, f(t)\rangle\ ,$$

gilt $w = \tilde{w}$ a.e. und

$$\tilde{w}(t) = \tilde{w}(a) + \int_a^t g(s)\,ds\,.$$

Aus Satz 5.2 folgt $w \in W^{1,1}(a,b)$ mit $w' = g$ a.e. Für beliebiges $\eta \in C_0^\infty(a,b)$ gilt nun

$$\left\langle v^*, \int_a^b f(t)\eta(t)\,dt \right\rangle = \int_a^b g(t)\eta(t)\,dt = -\int_a^b w(t)\eta'(t)\,dt = -\left\langle v^*, \int_a^b u(t)\eta'(t)\,dt \right\rangle\,.$$

Da v^* beliebig war, folgt

$$\int_a^b f(t)\eta(t)\,dt = -\int_a^b u(t)\eta'(t)\,dt\,, \quad \text{für alle } \eta \in C_0^\infty(a,b),$$

also $u \in W^{1,1}(a,b;V)$ und $u' = f$ a.e.
"(i)⇒(ii)": Analog zum Beweis von Satz 5.2. Wir setzen

$$v(t) = \int_a^t f(s)\,ds\,.$$

Es gilt $v \in C([a,b];V)$, da wegen $f \in L^1(a,b)$

$$\|v(t) - v(\tau)\|_V \le \int_\tau^t \|f(s)\|_V\,ds \ \to 0 \quad \text{für } \tau \to t.$$

Mit $\tilde{u} = v$ in (6.53) sehen wir, dass $v \in W^{1,1}(a,b;V)$ mit $v' = f$. Es folgt $(u-v)' = u' - v' = 0$, also ist $u - v = c$ konstant nach Satz 6.26, und $\tilde{u} = v + c$ ist die gewünschte Funktion. □

Analog zum vorigen Kapitel erhält man Regeln für partielle Integration, je nachdem, welche Produkte man betrachtet. So gilt etwa für $u \in W^{1,1}(a,b)$, $v \in W^{1,1}(a,b;V)$

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,dt = uv\Big|_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,dt\,. \tag{6.54}$$

Oder, falls $u \in W^{1,1}(a,b;V^*)$ und $v \in W^{1,1}(a,b;V)$,

$$\int_a^b \langle u'(t), v(t)\rangle\ dt = \langle u, v\rangle\Big|_a^b - \int_a^b \langle u(t), v'(t)\rangle\ dt\,. \tag{6.55}$$

Die Beweise verlaufen analog wie der von Satz 5.3.

Definition 6.28 (Gleichgradige Integrierbarkeit)
Sei V Banachraum. Eine Teilmenge $\mathcal{F}$ von $L^1(a,b;V)$ heißt gleichgradig integrierbar, wenn gilt

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} \int_E \|f(t)\|\,dt \to 0 \quad \textit{falls}\ \mathrm{meas}\,(E) \to 0, \tag{6.56}$$

oder äquivalent

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \ \exists\,\delta > 0\ \ \forall\,f \in \mathcal{F}: \quad \mathrm{meas}\,(E) < \delta \quad \Rightarrow \quad \int_E \|f(t)\|\,dt < \varepsilon\,. \tag{6.57}$$

Es folgt der Satz von Dunford-Pettis. Dieser charakterisiert schwache Kompaktheit im L^1.

Satz 6.29 (Schwache Kompaktheit im L^1)
Sei V ein reflexiver Banachraum, sei $\mathcal{F} \subset L^1(a,b;V)$. Dann sind äquivalent:
(i) $\mathcal{F}$ is relativ schwach folgenkompakt.
(ii) $\mathcal{F}$ ist beschränkt und gleichgradig integrierbar.

Diesen Satz werden wir nicht beweisen.

Satz 6.30 *Sei V reflexiver Banachraum, sei $u \in C([a,b];V)$, es gebe ein $g \in L^1(a,b)$ mit*

$$\|u(t) - u(s)\| \le \int_s^t g(\tau)\,d\tau \tag{6.58}$$

für alle $s,t \in [a,b]$. Dann gilt $u \in W^{1,1}(a,b)$.

Setzen wir außerhalb von $[a,b]$ die Funktion u konstant fort und g auf Null, so gilt (6.58) für alle $s,t \in \mathbb{R}$.

Beweis: Wir setzen

$$u_\varepsilon(t) = \frac{u(t+\varepsilon) - u(t)}{\varepsilon}\,, \quad t \in [a,b]\,,$$

Für beliebiges $\eta \in C_0^\infty(a,b)$ gilt, falls ε hinreichend klein ist,

$$\begin{aligned}\int_a^b u_\varepsilon(t)\eta(t)\,dt &= \int_a^b \frac{u(t+\varepsilon) - u(t)}{\varepsilon}\eta(t)\,dt = \int_a^b \frac{\eta(t-\varepsilon) - \eta(t)}{\varepsilon}u(t)\,dt \\ &\to -\int_a^b u(t)\eta'(t)\,dt \quad \text{für } \varepsilon \to 0.\end{aligned} \tag{6.59}$$

Ist nun $\mathcal{F} = \{u_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ relativ schwach folgenkompakt in $L^1(a,b;V)$, so gilt $u_{\varepsilon_k} \to f \in L^1(a,b;V)$ für eine geeignete Folge, und aus (6.59) folgt

$$\int_a^b f(t)\eta(t)\,dt = -\int_a^b u(t)\eta'(t)\,dt\,, \quad \text{für alle } \eta \in C_0^\infty(a,b).$$

Es gilt nach Voraussetzung

$$\|u_\varepsilon(t)\| = \Big\|\frac{u(t+\varepsilon)-u(t)}{\varepsilon}\Big\| \le \frac{1}{\varepsilon}\int_t^{t+\varepsilon} g(\tau)\,d\tau =: d_\varepsilon(t)\,,$$

also

$$\int_E \|u_\varepsilon(t)\|\,dt \le \int_E d_\varepsilon(t)\,dt\,, \quad \text{für alle messbaren } E \subset [a,b].$$

Gemäß Satz 6.29 genügt es zu zeigen, dass $\{d_\varepsilon\}$ in $L^1(a,b)$ beschränkt und gleichgradig integrierbar ist, dann gilt dasselbe für $\mathcal{F} = \{u_\varepsilon\}$. Es gilt für messbares $E \subset [a,b]$

$$\int_E d_\varepsilon(t)\,dt = \frac{1}{\varepsilon}\int_E \int_0^\varepsilon g(t+\tau)\,d\tau\,dt = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon \int_{E+\tau} g(t)\,dt\,d\tau \le \sup_{\tau\le\varepsilon}\int_{E+\tau} g(t)\,dt \le \|g\|_1\,.$$

Hieraus folgt, dass $\{d_\varepsilon\}$ beschränkt ist, und dass mit $|E| = \operatorname{meas}(E)$

$$\sup_\varepsilon \int_E d_\varepsilon(t)\,dt \le \sup_{|F|=|E|}\int_F g(t)\,dt \to 0 \quad \text{für } |F| \to 0\,,$$

da g integrierbar ist. $\square$

7 Ratenunabhängige Evolutionen

Als einführendes Beispiel betrachten wir den Schalter, welcher die beiden Werte 1 und -1 annehmen kann und zwei Schwellwerte $a < b$ besitzt. Seine Position wird durch eine Funktion

$$w : [0,T] \to \mathbb{R}\,, \quad w(t) \in \{-1, 1\}\,,$$

beschrieben. Gegeben ist ein Anfangswert $w_0 \in \{-1, 1\}$. Der Umschaltvorgang wird gesteuert durch eine Inputfunktion $u : [0,T] \to \mathbb{R}$; w springt auf 1, wenn u den Wert b erreicht, und auf -1, wenn u den Wert a erreicht. Wir setzen

$$w(0) = \begin{cases} -1\,, & u(0) \le a\,, \\ w_0\,, & a < u(0) < b\,, \\ 1\,, & u(0) \ge b\,. \end{cases} \tag{7.1}$$

Ist u stetig, so kann man den Umschaltvorgang folgendermaßen formalisieren. Wir definieren

$$A_t = \{\tau : 0 \le \tau \le t\,,\, u(\tau) = a \text{ oder } u(\tau) = b\}\,, \quad 0 < t < T\,.$$

und setzen

$$w(t) = \begin{cases} w(0)\,, & A_t = \emptyset\,, \\ -1\,, & u(\max A_t) = a\,, \\ 1\,, & u(\max A_t) = b\,. \end{cases} \tag{7.2}$$

Auf diese Weise erhalten wir einen Operator

$$w = \mathcal{R}_{a,b}[u; w_0]\,. \tag{7.3}$$

Der Wert $w(t)$ hängt nicht nur vom aktuellen Wert $u(t)$ ab, sondern auch von der Vorgeschichte $u|[0,t)$. Die Funktion w ist unstetig, falls mindestens einmal umgeschaltet wird.

Ein $t \in (0,T]$ heißt **Umschaltzeitpunkt**, falls $w(t-) \ne w(t)$ gilt.

Lemma 7.1 *Seien $u \in C[0,T]$ und $w_0 \in \{-1, 1\}$ sowie $a < b$. Dann hat $w = \mathcal{R}_{a,b}[u; w_0]$ höchstens endlich viele Umschaltzeitpunkte, und $w \in BV[0,T]$.*

Beweis: Für beliebige Umschaltzeitpunkte $t_1 \ne t_2$ gilt $|t_1 - t_2| > \delta$, falls

$$\underset{[0,T]}{\operatorname{osc}}(u, \delta) < b - a\,,$$

also gibt es höchstens endlich viele Umschaltzeitpunkte. Da $|w(t-) - w(t)| = 2$ am Umschaltzeitpunkt, ist die Variation von w gleich der doppelten Anzahl der Umschaltzeitpunkte. □

Im allgemeinen Fall werden Inputfunktionen $u : [0,T] \to X$ und Outputfunktionen $w : [0,T] \to Y$ betrachtet, wobei X und Y beliebige Mengen sind. Ein Operator $\mathcal{W}$, welcher Inputfunktionen auf Outputfunktionen abbildet, heißt **ratenunabhängig**, falls

$$\mathcal{W}[u \circ \varphi] = \mathcal{W}[u] \circ \varphi \tag{7.4}$$

gilt für "alle Inputfunktionen" und alle Zeittransformationen, das sind Abbildungen $\varphi : [0,T] \to [0,T]$, die surjektiv und monoton wachsend sind, das heißt,

$$s \le t \quad \Rightarrow \quad \varphi(s) \le \varphi(t)\,.$$

(Die Abhängigkeit von einem Anfangswert ist in (7.4) weggelassen worden.) Der in (7.1) – (7.3) definierte Schalter $\mathcal{R}_{a,b}$ ist ratenunabhängig.

Der Schalter sowie alle weiteren im Folgenden betrachteten ratenunabhängigen Operatoren sind **Volterra-**Operatoren, das heißt, es gilt

$$u = v \text{ auf } [0,t] \quad \Rightarrow \quad \mathcal{W}[u] = \mathcal{W}[v] \text{ auf } [0,t]\,, \quad \text{für alle } t \in [0,T]. \tag{7.5}$$

Ratenunabhängige Volterra-Operatoren heißen auch **Hystereseoperatoren**, da sie Hystereseschleifen in der u-w-Ebene modellieren, welche von $t \mapsto (u(t), w(t))$ durchlaufen werden, unabhängig von der zeitlichen Skalierung.

Ein weiteres Beispiel eines ratenunabhängigen Operators ist das **mechanische Spiel**, oder kurz **Spiel**. Es entsteht, indem man die Winkelhalbierende $w = u$ in der Ebene, welche den Identitätsoperator $w = Iu$ repräsentiert, in zwei parallele Geraden $w = u - r$ und $w = u + r$ aufspaltet, wobei $r \ge 0$ gegeben ist. Die rechte Gerade $w = u - r$ soll nur in aufsteigender Richtung durchlaufen werden, die linke nur in absteigender Richtung, im Bereich dazwischen soll w konstant sein. Ist der Input u stetig und monoton, so wird dieses Verhalten durch

$$w(t) = f_r(u(t), w(0))$$

beschrieben, wobei

$$f_r(u,w) = \max\{u - r, \min\{u + r, w\}\}\,. \tag{7.6}$$

Ist $u : [0,T] \to \mathbb{R}$ stetig und stückweise monoton mit zugehöriger endlicher Zerlegung $\{t_i\}$ von $[0,T]$ (das heißt, auf jedem Teilintervall $[t_i, t_{i+1}]$ ist u monoton), so setzen wir

$$w(t) = f_r(u(t), w(t_i))\,, \quad t_i < t \le t_{i+1}\,, \tag{7.7}$$

sowie

$$w(0) = f_r(u(0), w_0) \tag{7.8}$$

mit dem Anfangswert $w_0 \in \mathbb{R}$. Auf diese Weise erhalten wir einen Operator

$$w = \mathcal{F}_r[u; w_0]\,, \quad \mathcal{F}_r : C_{pm}[0,T] \times \mathbb{R} \to C_{pm}[0,T]\,. \tag{7.9}$$

Hier bezeichnet $C_{pm}[0,T]$ den Raum der stetigen und stückweise monotonen Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}$.

Für $r = 0$ ergibt sich die Identität, $\mathcal{F}_0 = I$, da $f_0(u,w) = u$.

Lemma 7.2 *Für die durch (7.6) definierte Funktion $f_r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gilt*

$$|f_{r_1}(u_1,w_1) - f_{r_2}(u_2,w_2)| \le \max\{|u_1 - u_2| + |r_1 - r_2|\,,\, |w_1 - w_2|\} \tag{7.10}$$

für alle $r_j \ge 0$, $u_j, w_j \in \mathbb{R}$.

Beweis: Für beliebige $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gilt

$$|\max\{a,b\} - \max\{c,d\}| \le \max\{|a-c|, |b-d|\}\,,$$
$$|\min\{a,b\} - \min\{c,d\}| \le \max\{|a-c|, |b-d|\}\,.$$

Es folgt

$$|f_{r_1}(u_1,w_1) - f_{r_2}(u_2,w_2)| \le \max\{|(u_1-r_1)-(u_2-r_2)|\,,\, |(u_1+r_1)-(u_2+r_2)|\,,\, |w_1-w_2|\}\,,$$

woraus die Behauptung folgt. □

Satz 7.3 *Der Operator $\mathcal{F}_r$ aus (7.9) kann eindeutig zu einem lipschitzstetigen Operator $\mathcal{F}_r : C[0,T] \times \mathbb{R} \to C[0,T]$ fortgesetzt werden, und es gilt*

$$\|\mathcal{F}_{r_1}[u_1; w_{0,1}] - \mathcal{F}_{r_2}[u_2; w_{0,2}]\|_\infty \le \max\{\|u_1 - u_2\|_\infty + |r_1 - r_2|\,,\, |w_{0,1} - w_{0,2}|\} \qquad (7.11)$$

für alle $u_1, u_2 \in C[0,T]$ und alle $w_{0,1}, w_{0,2} \in \mathbb{R}$.

Beweis: Da $C_{pm}[0,T]$ dicht ist in $C[0,T]$, genügt es zu zeigen, dass (7.11) für alle $u_1, u_2 \in C_{pm}[0,T]$ und alle $w_{0,1}, w_{0,2} \in \mathbb{R}$ gilt. Sei $\{t_i\}$ eine Zerlegung von $[0,T]$, so dass die Funktionen u_1 und u_2 auf allen Teilintervallen $[t_i, t_{i+1}]$ monoton sind. Nach Lemma 7.2 gilt auf jedem solchen Teilintervall mit $w_j(t) = \mathcal{F}_{r_j}[u_j; w_{0,j}](t)$

$$|w_1(t) - w_2(t)| \le \max\{\max_{s\in[0,t]} |u_1(s) - u_2(s)| + |r_1 - r_2|\,,\, |w_1(t_i) - w_2(t_i)|\}$$

für alle $t \in [t_i, t_{i+1}]$, also

$$|w_1(t_{i+1}) - w_2(t_{i+1})| \le \max\{\|u_1 - u_2\|_\infty + |r_1 - r_2|\,,\, |w_1(t_i) - w_2(t_i)|\}\,.$$

Die Behauptung folgt nun mit Induktion über i. □

Ein weiteres Beispiel ist der **Stop-Operator** $\mathcal{S}_r$. Für $u \in C_{pm}[0,T]$ und $z_0 \in [-r, r]$ ist er definiert durch

$$\mathcal{S}_r[u; z_0] = u - \mathcal{F}_r[u; w_0]\,, \quad w_0 = u(0) - z_0\,. \qquad (7.12)$$

Dadurch wird erreicht, dass die Outputfunktionen

$$z = \mathcal{S}_r[u; z_0]\,, \quad w = \mathcal{F}_r[u; w_0]\,, \qquad (7.13)$$

die Gleichung

$$u(t) = w(t) + z(t)\,, \quad t \in [0,T]\,, \qquad (7.14)$$

erfüllen.

Komplexere Gedächtnisstrukturen entstehen, wenn wir die beschriebenen elementaren Operatoren zusammensetzen. Der **Preisach-Operator** wird definiert durch

$$w(t) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \omega(r,s) \mathcal{R}_{s-r,s+r}[u; w_0(r,s)](t)\, ds\, dr \qquad (7.15)$$

mit einer Dichtefunktion ω (die auch durch ein allgemeineres Maß ersetzt werden kann) und mit geeigneten Anfangswerten für die Schalter. Wie wir noch sehen werden, ermöglicht das Modell (7.15) ineinander geschachtelte Hystereseschleifen.

Da die Werte aller Schalter in $\{-1,1\}$ liegen, ist $w(t)$ in (7.15) eindeutig festgelegt durch die beiden Teilmengen

$$A_\pm(t) = \{(r,s) : w_{r,s}(t) = \pm 1\}\,, \quad w_{r,s} := \mathcal{R}_{s-r,s+r}[u; w_0(r,s)]\,,$$

der rechten Halbebene $\{(r,s) : r \geq 0, s \in \mathbb{R}\}$. Diese verändern sich gemäß der Umschaltregeln, das heißt, falls $u \in C_{pm}[0,T]$ in einem Zeitintervall I wächst, schalten zu einem Zeitpunkt $t \in I$ diejenigen Schalter von -1 nach 1 um, für die $s+r = u(t)$ gilt; falls $u \in C_{pm}[0,T]$ in I fällt, schalten zum Zeitpunkt t diejenigen Schalter von 1 nach -1 um, für die $s - r = u(t)$ gilt. Die mit t parametrisierten Geraden (als Funktionen von r)

$$g^\pm(t,r) = u(t) \pm r\,, \quad r \geq 0\,,$$

bestimmen daher die Evolution des gemeinsamen Randes $\partial A_+(t) \cap \partial A_-(t)$. Ist beispielsweise $w_0(r,s) = \operatorname{sign}(s)$, so wird der gemeinsame Rand beschrieben durch eine Funktion

$$\psi : [0,T] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}\,, \quad \psi(0,r) = 0\,.$$

Macht man sich diese Evolution am Bild klar, so erkennt man, dass ψ unmittelbar mit der Familie $\{\mathcal{F}_r\}$ der Spieloperatoren zusammenhängt vermittels

$$\psi(t,r) = \mathcal{F}_r[u; w_r(0)](t) =: w_r(t)\,, \tag{7.16}$$

wobei $w_r(0) = \psi(0,r)$ die Anfangsposition des gemeinsamen Randes ist; wir setzen voraus, dass $A_-(0)$ oberhalb und $A_+(0)$ unterhalb des Graphen von $r \mapsto \psi(0,r)$ liegen. Aus (7.15) ergibt sich

$$w(t) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^{w_r(t)} \omega(r,s)\,ds\,dr - \int_0^\infty \int_{w_r(t)}^\infty \omega(r,s)\,ds\,dr\,.$$

Daher lässt sich der Preisach-Operator auch schreiben als eine nichtlineare Superposition von Spieloperatoren,

$$w(t) = \int_0^\infty q(r, w_r(t))\,dr + c_0\,, \quad q(r,s) = 2\int_0^s \omega(r,\sigma)\,d\sigma\,, \tag{7.17}$$

mit einer nur von ω abhängigen Konstanten c_0.

Ist $\omega \geq 0$, so wächst bzw. fällt w auf Zeitintervallen I, auf denen u wächst bzw. fällt.

Das Preisach-Modell erlaubt es, ineinander geschachtelte Hystereseschleifen in der u-w-Ebene zu beschreiben.

Wir nehmen $\omega \geq 0$ an und betrachten eine δ-periodische Inputfunktion $u : [0,T] \to \mathbb{R}$ mit $u(\delta) = u(0) =: u_m$, u ist monoton wachsend auf $[0,\delta/2]$ mit $u(\delta/2) =: u_M$ und monoton fallend auf $[\delta/2,\delta]$. Nach einer transienten Phase in $[0,\delta]$ durchläuft die Kurve immer wieder dieselbe Hystereseschleife, der Output w ist ebenfalls δ-periodisch. Die Form dieser Schleife hängt nicht von der Vorgeschichte auf $[0,\delta]$ ab, ihr Anfangspunkt $(u(\delta), w(\delta)$ schon. Diese Eigenschaft heißt die **vertikale Kongruenz** des Preisach-Modells. Die Amplitude der Hystereseschleife ist gleich

$$a(u_m, u_M) = 2\int_{\Delta(u_m,u_M)} \omega(r,s)\,ds\,dr\,, \tag{7.18}$$

wobei $\Delta(u_m, u_M)$ ein Dreieck in der u-w-Ebene ist, gegeben durch die Eckpunkte

$$(0, u_m)\,,\ (0, u_M)\,,\ \big(\frac{u_M - u_m}{2}, \frac{u_M + u_m}{2}\big)\,,$$

unabhängig von der Vorgeschichte auf $[0, \delta]$. Eine solche Hystereseschleife kann in einer anderen Hystereseschleife liegen; durch geeignete Wahl von u kann man erreichen, dass beliebig (endlich) viele Schleifen ineinander geschachtelt sind.

Wir betrachten nun den Spieloperator $\mathcal{F}_r$ auf dem Raum $W^{1,1}(0, T)$. Seien $u_1, u_2 \in C_{pl}[0, T]$, das heißt, sie sind stetig und stückweise linear, wir setzen

$$w_j = \mathcal{F}_r[u_j; w_{0,j}]\,, \quad z_j = \mathcal{S}_r[u_j; z_{0,j}]\,, \quad j = 1, 2\,,$$

die Anfangswerte seien so gewählt, dass

$$w_j(0) + z_j(0) = u_j(0)\,.$$

Lemma 7.4 *Seien $u_1, u_2 \in C_{pl}[0, T]$. Dann gilt*

$$(\dot{w}_1(t) - \dot{w}_2(t))(z_1(t) - z_2(t)) \geq 0 \tag{7.19}$$

für alle bis auf endlich viele $t \in (0, T)$.

Beweis: Die Funktionen w_j und z_j sind ebenfalls stetig und stückweise linear nach Konstruktion; das Intervall $[0, T]$ zerfällt in endlich viele Intervalle, auf denen deren Ableitungen konstant sind. Sei t ein beliebiger Punkt im Innern eines solchen Intervalls, sei o.B.d.A. $z_1(t) > z_2(t)$. Dann

$$z_1(t) > -r\,, \quad z_2(t) < r\,.$$

Wir unterscheiden die Fälle

$$z_1(t) < r \quad \Rightarrow \quad \dot{w}_1(t) = 0\,, \quad z_1(t) = r \quad \Rightarrow \quad \dot{w}_1(t) \geq 0\,.$$

In beiden Fällen gilt

$$\dot{w}_1(t)(z_1(t) - z_2(t)) \geq 0\,.$$

Analog erhalten wir, dass aus $z_2(t) < r$ folgt, dass

$$\dot{w}_2(t)(z_1(t) - z_2(t)) \leq 0\,.$$

□

Lemma 7.5 *Seien $u_1, u_2 \in C_{pl}[0, T]$. Dann gilt*

$$|\dot{w}_1(t) - \dot{w}_2(t)| + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}|z_1(t) - z_2(t)| \leq |\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)|\,. \tag{7.20}$$

für alle bis auf endlich viele $t \in (0, T)$.

Beweis: Auf Intervallen mit $z_1 = z_2$ gilt

$$w_1 - w_2 = u_1 - z_1 + z_2 - u_2 = u_1 - u_2\,,$$

daher gilt (7.20) mit Gleichheit. Auf Intervallen mit $z_1 \neq z_2$ erhalten wir aus (7.19)

$$|\dot w_1(t) - \dot w_2(t)| = (\dot w_1(t) - \dot w_2(t))\mathrm{sign}\,(z_1(t) - z_2(t))\,.$$

Es gilt immer

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}|z_1(t) - z_2(t)| = (\dot z_1(t) - \dot z_2(t))\mathrm{sign}\,(z_1(t) - z_2(t))\,. \tag{7.21}$$

(Die Kettenregel gilt, wenn die äußere Funktion der Betrag ist und die innere Funktion im $W^{1,1}$ liegt.) Die Behauptung ergibt sich, indem wir die beiden vorangehenden Gleichungen addieren. □

Auf $W^{1,1}(0,T)$ definieren wir die Norm

$$\|u\|_{BV} = |u(0)| + \ \mathrm{Var}\,(u) = |u(0)| + \int_0^T |\dot u(t)|\,dt\,. \tag{7.22}$$

Sie ist äquivalent zur Sobolev-Norm

$$\|u\|_{W^{1,1}} = \int_0^T |u(t)|\,dt + \int_0^T |\dot u(t)|\,dt\,.$$

Satz 7.6 *Seien $u_1, u_2 \in W^{1,1}(0,T)$, $w_{0,1}, w_{0,2} \in \mathbb{R}$. Dann gilt für die Outputfunktionen $w_j = \mathcal{F}_r[u_j; w_{0,j}]$*

$$\mathrm{Var}\,(w_2 - w_1) \leq \ \mathrm{Var}\,(u_2 - u_1) + |u_2(0) - u_1(0)| + |w_2(0) - w_1(0)|\,, \tag{7.23}$$

und

$$\mathcal{F}_r : W^{1,1}(0,T) \times \mathbb{R} \to W^{1,1}(0,T)$$

ist lipschitzstetig. Dasselbe gilt für $\mathcal{S}_r$.

Beweis: Seien zunächst u_1, u_2 stückweise linear. Wir setzen $z_j = \mathcal{S}_r[u_j; u_j(0) - w_j(0)]$. Mit (7.20) erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_0^T |\dot w_2(t) - \dot w_1(t)|\,dt &\leq \int_0^T |\dot u_2(t) - \dot u_1(t)|\,dt - |z_2 - z_1|\Big|_0^T \\ &\leq \int_0^T |\dot u_2(t) - \dot u_1(t)|\,dt + |z_2(0) - z_1(0)|\,,\end{aligned}$$

also gilt (7.23). Daraus und aus der Abschätzung

$$|w_2(0) - w_1(0)| \leq \max\{|u_2(0) - u_1(0)|, |w_{0,2} - w_{0,1}|\}$$

folgt die Lipschitzstetigkeit für stückweise lineare Inputfunktionen. Da diese dicht sind in $W^{1,1}(0,T)$ gelten alle Behauptungen auch für allgemeine u_1, u_2. □

Wir stellen nun die Verbindung zur Konvexen Analysis her. Wir setzen

$$\varphi(x) = r|x| \,. \tag{7.24}$$

Es ist

$$\partial\varphi(x) = \begin{cases} r\,, & x > 0\,, \\ [-r, r]\,, & x = 0\,, \\ -r\,, & x < 0\,. \end{cases} \tag{7.25}$$

Wir betrachten die Differentialinklusion

$$\partial\varphi(\dot{w}) + w \ni u \tag{7.26}$$

und die Variationsungleichung

$$\begin{gathered} \dot{w}(u - w - v) \geq 0\,, \quad \text{für alle } v \in [-r, r], \\ u - w \in [-r, r]\,. \end{gathered} \tag{7.27}$$

Wir setzen

$$C_{pl}[0, T] = \{v | v : [0, T] \to \mathbb{R}, v \text{ stetig und stückweise linear}\}\,. \tag{7.28}$$

Lemma 7.7 *Sei $u \in C_{pl}[0, T]$ und $w_0 \in \mathbb{R}$. Dann ist auch $w = \mathcal{F}_r[u, w_0] \in C_{pl}[0, T]$, und (u, w) löst (7.26) und (7.27) a.e. in $[0, T]$.*

Beweis: Aus der Form von f_r in (7.6) folgt, dass mit u auch w stückweise linear ist. Sei $\{t_i\}$ eine Zerlegung von $[0, T]$, so dass auf jedem einzelnen Teilintervall (t_i, t_{i+1}) das Paar (u, w) ganz im Innern $\{|u - w| < r\}$ oder einem der beiden Ränder $\{u - w = r\}$ bzw. $\{u - w = -r\}$ verläuft. Es gilt

$$\begin{aligned} \dot{w} &= 0\,, \quad |u - w| < r \quad \text{im Innern,} \\ \dot{w} &\geq 0\,, \quad u - w = r \quad \text{auf dem rechten Rand,} \\ \dot{w} &\leq 0\,, \quad u - w = -r \quad \text{auf dem linken Rand.} \end{aligned}$$

In allen drei Fällen sind (7.26) und (7.27) erfüllt, also auf jedem Teilintervall (t_i, t_{i+1}). □

8 Der vektorwertige Stop-Operator

Im vorigen Abschnitt hatten wir für eine stückweise lineare Funktion $u : [0, T] \to \mathbb{R}$ und $w = \mathcal{F}_r[u; w_0]$, $z = \mathcal{S}_r[u; z_0]$ die Variationsungleichung (7.27) erhalten. Ersetzen wir $u - w$ durch z, so lautet sie

$$\begin{aligned} \dot{w}(t)(z(t) - v) \geq 0\,, &\quad \text{für alle } v \in [-r, r], \text{ a.e. in } [0, T], \\ z(t) \in [-r, r] &\quad \text{für alle } t \in [0, T], \end{aligned} \tag{8.1}$$

erhalten. Wir betrachten nun vektorwertige Funktionen.

Sei H ein Hilbertraum. Das Intervall $[-r, r]$ in (8.1) wird ersetzt durch eine abgeschlossene konvexe Teilmenge Z von H. Zu gegebenem $u \in W^{1,1}(0, T; H)$ und $z_0 \in Z$ suchen wir $w, z \in W^{1,1}(0, T; H)$ als Lösungen von

$$u(t) = w(t) + z(t)\,, \quad \text{für alle } t \in [0, T], \tag{8.2}$$

und

$$\begin{aligned} \langle \dot{w}(t), z(t) - v \rangle \geq 0\,, &\quad \text{für alle } v \in Z, \text{ a.e. in } [0, T], \\ z(0) = z_0 \in Z\,, &\quad z(t) \in Z \quad \text{für alle } t \in [0, T]. \end{aligned} \tag{8.3}$$

Wir erläutern die geometrische Bedeutung von (8.2) und (8.3). Die Variationsungleichung bedeutet, dass

$$\dot{w}(t) \in N_Z(z(t))$$

gilt, wenn wir H mit seinem Dualraum identifizieren. Da für $z \in W^{1,1}(0, T; H)$

$$z(t + h) - z(t) = \int_t^{t+h} \dot{z}(s)\, ds\,, \quad \text{falls } t, t + h \in [0, T],$$

mit $\dot{z} \in L^1(0, T)$ gilt, folgt (siehe Übung)

$$\dot{z}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{z(t + h) - z(t)}{h}\,, \quad \text{a.e. in } (0, T),$$

und daher

$$\dot{z}(t) \in T_Z(z(t)) := \overline{\text{cone}\,(Z - z(t))}\,,$$

dem Tangentialkegel an Z im Punkt $z(t)$. Wir haben also vermittels

$$\dot{u}(t) = \dot{w}(t) + \dot{z}(t)$$

den Vektor $\dot{u}(t)$ in seine Normal- und Tangentialkomponente zerlegt. (Liegt $z(t)$ im Innern von Z, so ist $\dot{w}(t) = 0$ und $\dot{z}(t) = \dot{u}(t)$.)

Wir behandeln nun die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung von (8.2) und (8.3).

Satz 8.1 *Seien $u_1, u_2 \in W^{1,1}(0, T; H)$ und $z_{0,1}, z_{0,2} \in Z$, seien w_1, w_2, z_1, z_2 Lösungen von (8.2) und (8.3). Dann gilt ($|\cdot|$ bezeichnet die Norm in H)*

$$|z_1(t) - z_2(t)| \leq |z_{0,1} - z_{0,2}| + \int_0^t |\dot{u}_1(\tau) - \dot{u}_2(\tau)|\, d\tau \tag{8.4}$$

für alle $t \in [0, T]$. Insbesondere ist die Lösung (w, z) von (8.2) und (8.3) eindeutig bestimmt.

Beweis: Es gilt für alle t

$$
\begin{aligned}
|z_1(t) - z_2(t)| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} |z_1(t) - z_2(t)| &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \frac{1}{2} |z_1(t) - z_2(t)|^2 = \langle \dot{z}_1(t) - \dot{z}_2(t), z_1(t) - z_2(t) \rangle \\
&= \langle \dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t), z_1(t) - z_2(t) \rangle - \langle \dot{w}_1(t) - \dot{w}_2(t), z_1(t) - z_2(t) \rangle \\
&\le \langle \dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t), z_1(t) - z_2(t) \rangle \le |\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)| \, |z_1(t) - z_2(t)|
\end{aligned}
$$

gemäß der Variationsungleichung. Es folgt

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} |z_1(t) - z_2(t)| \le |\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)|
$$

für alle t, und hieraus die Behauptung mit Integration über $[0, t]$. □

Der Existenzbeweis ist aufwendiger.

Satz 8.2 *Sei H Hilbertraum, $Z \subset H$ abgeschlossen und konvex, $u \in W^{1,1}(0, T; H)$ und $z_0 \in Z$. Dann gibt es Funktionen $w, z \in W^{1,1}(0, T; H)$, welche (8.2) und (8.3) lösen.*

Der Beweis wird durch Zeitdiskretisierung geführt. Wir setzen für $N \in \mathbb{N}$

$$
h_N = 2^{-N} T \,, \quad u_i = u(ih_N) \,, \quad i = 0, 1, \dots \,,
$$

sowie

$$
u_0 = u(0) \,, \quad w_0 = u_0 - z_0 \,.
$$

Wir definieren diskrete Näherungen (P_Z bezeichnet die Projektion auf Z)

$$
\begin{aligned}
z_{i+1} &= P_Z(z_i + \Delta_i u) \,, \quad \Delta_i u = u_{i+1} - u_i \,, \\
w_{i+1} &= u_{i+1} - z_{i+1} \,.
\end{aligned}
\tag{8.5}
$$

Es ist $z_i \in Z$ für alle i.

Lemma 8.3 *Es gilt für alle i*

$$
\langle w_{i+1} - w_i, z_{i+1} - v \rangle \ge 0 \,, \quad \textit{für alle } v \in Z, \tag{8.6}
$$

also insbesondere

$$
\langle w_{i+1} - w_i, z_{i+1} - z_i \rangle \ge 0 \,. \tag{8.7}
$$

Weiterhin gilt für alle i

$$
|z_{i+1} - z_i| \le |u_{i+1} - u_i| \tag{8.8}
$$

sowie

$$
|w_{i+1} - w_i| \le |u_{i+1} - u_i| \,. \tag{8.9}
$$

Beweis: Es ist

$$
w_{i+1} - w_i = z_i + \Delta_i u - z_{i+1} \,,
$$

also folgt (8.6) aus der Definition von z_{i+1} und der Projektionseigenschaft von P_Z. Weiter gilt

$$
|z_{i+1} - z_i| = |P_Z(z_i + \Delta_i u) - P_Z(z_i)| \le |\Delta_i u| \,,
$$

also (8.8). Aus (8.7) folgt

$$\begin{aligned}|w_{i+1}-w_i|^2 &= \langle w_{i+1}-w_i,(u_{i+1}-u_i)-(z_{i+1}-z_i)\rangle \le \langle w_{i+1}-w_i,u_{i+1}-u_i\rangle \\ &\le |w_{i+1}-w_i||u_{i+1}-u_i|\end{aligned}$$

und damit (8.9). □

Wir betrachten die stückweise lineare Interpolierende $u^N:[0,T]\to H$ von u zu den Daten $(t_i,u(t_i))$ mit $t_i=ih$, also

$$u^N(\tau)=u_{i+1}+\big(i+1-\frac{\tau}{h_N}\big)(u_i-u_{i+1})\,,\quad \tau\in[t_i,t_{i+1}]\,. \tag{8.10}$$

Analog definieren wir $w^N,z^N:[0,T]\to H$.

Lemma 8.4 *Für Unterteilungspunkte s,t zur Feinheit N gilt*

$$\int_s^t |\dot w^N(\tau)|\,d\tau \le \int_s^t |\dot u(\tau)|\,d\tau\,. \tag{8.11}$$

Insbesondere gilt

$$\mathrm{Var}\,(w^N)\le\ \mathrm{Var}\,(u)\,,\quad \textit{für alle } N. \tag{8.12}$$

Beweis: Es ist (Summe über die Teilintervalle zwischen s und t)

$$\begin{aligned}\int_s^t |\dot w^N(\tau)|\,d\tau &= \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\dot w^N(\tau)|\,d\tau = \sum_i |w_{i+1}-w_i| \le \sum_i |u_{i+1}-u_i| \\ &\le \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\dot u(\tau)|\,d\tau = \int_s^t |\dot u(\tau)|\,d\tau\,.\end{aligned}$$

Lemma 8.5 *Sei $0\le s\le t\le T$. Dann gilt*

$$\int_s^t \big\langle \dot w^N(\tau), z^N(\tau)-v(\tau)\big\rangle\,d\tau \ge -\int_{\tilde s}^{\tilde t} |\dot u(\tau)|\,d\tau\cdot \underset{[0,T]}{\mathrm{osc}}(u;h_N) \tag{8.13}$$

für jede beschränkte Bochner-messbare Funktion $v:[s,t]\to Z$, wobei $\tilde s,\tilde t$ Unterteilungspunkte sind zur Feinheit N mit $[s,t]\subset[\tilde s,\tilde t]$.

Beweis: Sei zunächst $v\in Z$ beliebig. Es gilt für beliebiges $\tau\in(t_i,t_{i+1})$ nach Lemma 8.3

$$\begin{aligned}h_N\,\big\langle \dot w^N(\tau), z^N(\tau)-v\big\rangle &= \Big\langle w_{i+1}-w_i, z_{i+1}-v+\big(i+1-\frac{\tau}{h_N}\big)(z_i-z_{i+1})\Big\rangle \\ &\ge -\big(i+1-\frac{\tau}{h_N}\big)\,\langle w_{i+1}-w_i, z_{i+1}-z_i\rangle \\ &\ge -|w_{i+1}-w_i||z_{i+1}-z_i| \ge -|u_{i+1}-u_i|^2 \\ &\ge -\int_{t_i}^{t_{i+1}} |\dot u(r)|\,dr\cdot \underset{[t_i,t_{i+1}]}{\mathrm{osc}}(u;h_N)\,.\end{aligned}$$

Sei nun $v : [s,t] \to Z$ beliebig. Es folgt

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\langle \dot{w}^N(\tau), z^N(\tau) - v \right\rangle \, d\tau \geq - \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\dot{u}(r)| \, dr \cdot \underset{[t_i,t_{i+1}]}{\operatorname{osc}}(u; h_N) \, .$$

Ist D eine beliebige messbare Teilmenge von $[t_i, t_{i+1}]$, so gilt

$$\begin{aligned} \int_D \left\langle \dot{w}^N(\tau), z^N(\tau) - v \right\rangle \, d\tau &\geq -\frac{|D|}{h_N} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\dot{u}(r)| \, dr \cdot \underset{[t_i,t_{i+1}]}{\operatorname{osc}}(u; h_N) \\ &\leq - \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\dot{u}(r)| \, dr \cdot \underset{[t_i,t_{i+1}]}{\operatorname{osc}}(u; h_N) \, . \end{aligned}$$

Bilden wir die Summe über alle Teilintervalle von $[\tilde{s}, \tilde{t}]$, so folgt

$$\begin{aligned} \int_s^t \left\langle \dot{w}^N(\tau), z^N(\tau) - v \right\rangle \, d\tau &\geq - \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\dot{u}(\tau)| \, d\tau \cdot \underset{[0,T]}{\operatorname{osc}}(u; h_N) \\ &= - \int_{\tilde{s}}^{\tilde{t}} |\dot{u}(\tau)| \, d\tau \cdot \underset{[0,T]}{\operatorname{osc}}(u; h_N) \end{aligned}$$

□

Lemma 8.6 *Es gilt $w^N \to w$ gleichmäßig für eine Funktion $w \in C([0,T]; H)$.*

Beweis: Seien $N, M \in \mathbb{N}$. Wir setzen $v = z^M$ in die Ungleichung (8.13) für N und $v = z^N$ in die Ungleichung für M und addieren. Es ergibt sich für beliebiges $t \in [0,T]$

$$\int_0^t \left\langle \dot{w}^N(\tau) - \dot{w}^M(\tau), z^N(\tau) - z^M(\tau) \right\rangle \, d\tau \geq - \int_0^T |\dot{u}(\tau)| \, d\tau \cdot (\underset{[0,T]}{\operatorname{osc}}(u; h_N) + \underset{[0,T]}{\operatorname{osc}}(u; h_M)) \, .$$

Es folgt mit Lemma 8.4

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}|w^N(t) - w^M(t)|^2 = \int_0^t \left\langle \dot{w}^N(\tau) - \dot{w}^M(\tau), w^N(\tau) - w^M(\tau) \right\rangle \, d\tau \\ &= \int_0^t \left\langle \dot{w}^N(\tau) - \dot{w}^M(\tau), u^N(\tau) - u^M(\tau) \right\rangle \, d\tau - \int_0^t \left\langle \dot{w}^N(\tau) - \dot{w}^M(\tau), z^N(\tau) - z^M(\tau) \right\rangle \, d\tau \\ &\leq 2 \int_0^T |\dot{u}(\tau)| \, d\tau \cdot \|u^N - u^M\|_\infty + \int_0^T |\dot{u}(\tau)| \, d\tau \cdot (\underset{[0,T]}{\operatorname{osc}}(u; h_N) + \underset{[0,T]}{\operatorname{osc}}(u; h_M)) \, . \end{aligned}$$

Die rechte Seite konvergiert gegen 0 für $N, M \to \infty$, also ist $\{w^N\}$ Cauchyfolge in $C([0,T]; H)$ und daher konvergent. □

Lemma 8.7 *Die Grenzfunktion w aus Lemma 8.6 liegt in $W^{1,1}(0,T; H)$.*

Beweis: Es gilt für $0 \leq s \leq t \leq T$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}|w^N(t) - w^N(s)|^2 &= \int_s^t \left\langle w^N(\tau) - w^N(s), \dot{w}^N(\tau) \right\rangle \, d\tau \\ &= \int_s^t \left\langle u^N(\tau) - u^N(s), \dot{w}^N(\tau) \right\rangle \, d\tau - \int_s^t \left\langle z^N(\tau) - z^N(s), \dot{w}^N(\tau) \right\rangle \, d\tau \, . \end{aligned}$$

Das erste Integral lässt sich abschätzen als

$$\begin{aligned}\int_s^t \left\langle u^N(\tau) - u^N(s), \dot{w}^N(\tau)\right\rangle \, d\tau &= \int_s^t \left\langle \dot{u}^N(\tau), w^N(t) - w^N(\tau)\right\rangle \, d\tau \\ &\leq \int_s^T |\dot{u}^N(\tau)| \, d\tau \cdot \max_{\tau\in[s,t]} |w^N(t) - w^N(\tau)| \,.\end{aligned}$$

Das zweite Integral lässt sich abschätzen als (siehe Lemma 8.5)

$$-\int_s^t \left\langle z^N(\tau) - z^N(s), \dot{w}^N(\tau)\right\rangle \, d\tau \leq \int_{\tilde{s}}^{\tilde{t}} |\dot{u}(\tau)| \, d\tau \cdot \operatorname*{osc}_{[0,T]}(u; h_N) \,.$$

Insgesamt gilt also

$$\frac{1}{2}|w^N(t) - w^N(s)|^2 \leq \int_{\tilde{s}}^{\tilde{t}} |\dot{u}(\tau)| \, d\tau \cdot \big(\max_{\tau\in[s,t]} |w^N(t) - w^N(\tau)| + \operatorname*{osc}_{[0,T]}(u; h_N)\big) \,.$$

Grenzübergang $N \to \infty$ führt wegen $w^N \to w$ auf

$$\frac{1}{2}|w(t) - w(s)|^2 \leq \int_s^t |\dot{u}(\tau)| \, d\tau \cdot \max_{\tau\in[s,t]} |w(t) - w(\tau)| \,.$$

Diese Ungleichung bleibt gültig, wenn wir auf der linken Seite Seite $w(s)$ durch $w(\tau)$ für ein beliebiges $\tau \in [s,t]$ ersetzen. Damit folgt

$$|w(t) - w(s)| \leq 2\int_s^t |\dot{u}(\tau)| \, d\tau$$

für alle s, t. Die Behauptung folgt nun aus Satz 6.30. □

Um den Grenzübergang in der Variationsungleichung durchführen zu können, brauchen wir noch ein weiteres Hilfsmittel.

Satz 8.8 *Sei* (w_n) *eine Folge in* $W^{1,1}(0,T;H)$ *und* (y_n) *eine Folge in* $C[0,T;H]$ *mit* $w_n \to w \in W^{1,1}(0,T;H)$ *gleichmäßig und* $y_n \to y \in C[0,T;H]$ *gleichmäßig. Es gelte außerdem* $\operatorname{Var}(w_n) \leq c$. *Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \langle \dot{w}_n(t), y_n(t)\rangle \, dt = \int_0^T \langle \dot{w}(t), y(t)\rangle \, dt \,. \tag{8.14}$$

Beweis: Sei $\hat{y} \in W^{1,1}(0,T;H)$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned}&\Big|\int_0^T \langle \dot{w}_n, y_n\rangle \, dt - \int_0^T \langle \dot{w}, y\rangle \, dt\Big| \\ &\quad \leq \Big|\int_0^T \langle \dot{w}_n, y_n - y\rangle \, dt\Big| + \Big|\int_0^T \langle \dot{w}_n - \dot{w}, y - \hat{y}\rangle \, dt\Big| + \Big|\int_0^T \langle \dot{w}_n - \dot{w}, \hat{y}\rangle \, dt\Big| \,.\end{aligned}$$

Wir schätzen den ersten Term ab durch

$$\Big|\int_0^T \langle \dot{w}_n, y_n - y\rangle \, dt\Big| \leq \int_0^T |\dot{w}_n| \, dt \cdot \|y_n - y\|_\infty \leq c\|y_n - y\|_\infty \,,$$

und analog den zweiten Term

$$\left| \int_0^T \langle \dot{w}_n - \dot{w}, y - \hat{y} \rangle \, dt \right| \le 2c \|y - \hat{y}\|_\infty \, .$$

Für den dritten Term verwenden wir partielle Integration

$$\int_0^T \langle \dot{w}_n - \dot{w}, \hat{y} \rangle \, dt = \langle w_n - w, \hat{y} \rangle \Big|_0^T - \int_0^T \left\langle w_n - w, \dot{\hat{y}} \right\rangle \, dt \, ,$$

woraus

$$\left| \int_0^T \langle \dot{w}_n - \dot{w}, \hat{y} \rangle \, dt \right| \le \|w_n - w\|_\infty \cdot \Big(2\|\hat{y}\|_\infty + \int_0^T |\dot{\hat{y}}| \, dt \Big)$$

folgt. Da $w_n \to w$ und $y_n \to y$ gleichmäßig, erhalten wir

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \int_0^T \langle \dot{w}_n, y_n \rangle \, dt - \int_0^T \langle \dot{w}, y \rangle \, dt \right| \le 2c \|y - \hat{y}\|_\infty \, . \tag{8.15}$$

Da wir zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\hat{y} \in W^{1,1}(0,T;H)$ finden können mit $\|y - \hat{y}\|_\infty \le \varepsilon$, zum Beispiel stückweise lineare Interpolierende, können wir die rechte Seite in (8.15) durch Null ersetzen. Damit ist der Beweis vollständig. □

Rest des Beweises von Satz 8.2. Für die Interpolierenden u^N gilt $u^N \to u$ gleichmäßig. Da auch $w^N \to w$ gleichmäßig nach Lemma 8.6, folgt

$$z^N \to z := u - w \in W^{1,1}(0,T;H)$$

gleichmäßig. Weiterhin gilt $z(t) \in Z$, da $z^N(t) \in Z$ und Z abgeschlossen ist. Aus Satz 8.8 folgt nun

$$\int_s^t \left\langle \dot{w}^N(\tau), z^N(\tau) - v(\tau) \right\rangle \, d\tau \quad \to \quad \int_s^t \langle \dot{w}(\tau), z(\tau) - v(\tau) \rangle \, d\tau$$

für alle s, t und alle $v \in L^\infty(0,T;H)$. Aus Lemma 8.5 folgt weiter

$$\int_s^t \langle \dot{w}(\tau), z(\tau) - v(\tau) \rangle \, d\tau \ge 0$$

für alle $v \in L^\infty(0,T;H)$. Übergang zur punktweisen Form ergibt

$$\langle \dot{w}(t), z(t) - v \rangle \ge 0 \qquad \text{für alle } v \in Z, \text{ a.e. in } t.$$

□

Der vektorielle Stop-Operator und Spieloperator sind definiert als die gemäß Satz 8.1 und Satz 8.2 eindeutigen Lösungen w, z der Variationsungleichung (8.2) und (8.3). Analog zum skalarwertigen Fall schreiben wir

$$z = \mathcal{S}_Z[u; z_0] \, , \quad w = \mathcal{F}_r[u; w_0] \, , \tag{8.16}$$

wobei z_0 und w_0 durch $u(0) = w_0 + z_0$ verknüpft sind. Es hat sich ergeben

$$\mathcal{S}_Z : W^{1,1}(0,T;H) \times Z \to W^{1,1}(0,T;H) \, . \tag{8.17}$$

Um $\mathcal{F}_r$ für beliebige Anfangswerte $w_0 \in H$ zu definieren, ist wie im skalaren Fall ein Projektionsschritt erforderlich,

$$z_0 = P_Z(u(0) - w_0)\,, \quad w(0) = u(0) - z_0 = u(0) - P_Z(u(0) - w_0)\,.$$

Es ergibt sich dann

$$\mathcal{F}_Z : W^{1,1}(0,T;H) \times H \to W^{1,1}(0,T;H)\,. \tag{8.18}$$

Die Relation zwischen den Anfangswerten soll analog zum skalaren Fall garantieren, dass

$$u = \mathcal{F}_Z[u;w_0] + \mathcal{S}_Z[u;z_0]\,, \quad \text{für alle } u \in W^{1,1}(0,T;H). \tag{8.19}$$

Je nach Wahl des Hilbertraums H und der konvexen Menge Z werden durch (8.16) – (8.19) unterschiedliche ratenunabhängige Evolutionen beschrieben.

Ein allgemeinerer, aus der Kontinuumsmechanik motivierter Ansatz für ratenunabhängige Evolutionen ist der folgende. Er beruht auf dem Zusammenspiel eines Energiefunktionals und eines Dissipationsfunktionals; er geht auf Alexander Mielke und andere zurück.

Sei Y ein reeller reflexiver Banachraum mit Dualraum Y^*. Wir betrachten ein **Energiefunktional**

$$E : Y \times Y^* \to \mathbb{R}\,. \tag{8.20}$$

Wir nehmen an, dass E stetig differenzierbar und bezüglich der ersten Variablen konvex ist. Zu einer gegebenen Funktion $u : [0,T] \to Y^*$ betrachten wir

$$E_u(y,t) = E(y,u(t))\,, \quad E_u : Y \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,. \tag{8.21}$$

In Anwendungen in der Mechanik ist u eine äußere Kraft. Die weiter unten definierte Evolution des Systems führt auf Lösungen

$$y : [0,T] \to Y\,, \quad z : [0,T] \to Y^*\,,$$

die zueinander und zum Input u in Beziehung stehen vermittels

$$z(t) = -\nabla_y E(y(t),u(t))\,. \tag{8.22}$$

In der Mechanik ist z eine Kraft, nämlich der Gradient der gesamten potentiellen Energie, die sich aus der inneren Energie und der äußeren Kraft zusammensetzt. Das wird besonders deutlich in der folgenden speziellen Situation

$$E(y,u) = \frac{1}{2}\langle Ay,y\rangle - \langle u,y\rangle\,, \quad A : Y \to Y^*\,. \tag{8.23}$$

Wir nehmen an, dass $A : Y \to Y^*$ ein symmetrischer und positiv definiter Banachraum-Isomorphismus ist,

$$\langle Ay,v\rangle = \langle Av,y\rangle\,, \quad \langle Ay,y\rangle \ge \alpha|y|_Y^2\,, \quad \forall\, y,v \in Y\,. \tag{8.24}$$

In diesem Fall wird (8.22) zu

$$z(t) = u(t) - Ay(t)\,. \tag{8.25}$$

Diese Situation liegt insbesondere vor, wenn Y ein Hilbertraum und A der Isomorphismus aus dem Satz von Riesz ist. Nach Identifikation von Y^* und Y haben die oben betrachteten Funktionen ihre Werte in Y,

$$u, y, z : [0, T] \to Y \,, \quad z(t) = u(t) - y(t) \,. \tag{8.26}$$

Wir betrachten weiterhin ein **Dissipationsfunktional**

$$\Psi : Y \to [0, \infty] \,. \tag{8.27}$$

Wir setzen voraus, dass Ψ konvex, unterhalbstetig, eigentlich und positiv homogen ist mit $\Psi(0) = 0$,

$$\Psi(\lambda v) = \lambda \Psi(v) \,, \quad \forall\, v \in Y \,, \, \lambda \geq 0 \,. \tag{8.28}$$

Wir hatten in Satz 4.6 gesehen, dass durch

$$Z = \partial \Psi(0) = \{y^* : \langle y^*, v \rangle \leq \Psi(v) \text{ for all } v \in Y\} \,. \tag{8.29}$$

eine abgeschlossene konvexe Menge definiert wird, und dass gilt

$$\Psi^* = I_Z \,, \quad \Psi(v) = \sup_{y^* \in Z} \langle y^*, v \rangle \,, \quad \forall\, v \in Y \,. \tag{8.30}$$

Im Beispiel $\Psi(v) = r|v|$ hatte sich ergeben

$$Z = \partial \Psi(0) = r B^* \,, \tag{8.31}$$

wobei B^* die Einheitskugel in Y^* ist.

Mit gegebenem Energie- und Dissipationsfunktional können wir auf unterschiedliche Weise eine ratenunabhängige Evolution beschreiben. Die **subdifferentielle Formulierung** lautet

$$0 \in \partial \Psi(\dot{y}(t)) + \nabla_y E(y(t), u(t)) \subset Y^* \,, \quad t \in (0, T) \,. \tag{8.32}$$

Die Funktion $u : [0, T] \to Y^*$ ist die Inputfunktion. Außerdem gibt es noch einen Anfangswert $y(0) = y_0$, den lassen wir außen vor.

Falls E in y nicht quadratisch ist, so ist $\nabla_y E$ in y nicht linear, und (8.32) wird als **doppelt nichtlineare Gleichung** (oder Inklusion) bezeichnet. Gemäß der Definition des Subdifferentials ist (8.32) äquivalent zu

$$\Psi(v) - \Psi(\dot{y}(t)) + \langle \nabla_y E(y(t), u(t)), v - \dot{y}(t) \rangle \geq 0 \,, \quad \text{für alle } v \in Y, \quad t \in (0, T) \,. \tag{8.33}$$

Man nennt sie eine **Variationsungleichung in primaler Form**.

Wegen (8.22) ist (8.32) äquivalent zu

$$z(t) \in \partial \Psi(\dot{y}(t)) \,, \quad t \in (0, T) \,. \tag{8.34}$$

Dieses wiederum ist gemäß Satz 4.13 äquivalent zu

$$\dot{y}(t) \in \partial \Psi^*(z(t)) \,, \quad t \in (0, T) \,. \tag{8.35}$$

Da $\partial\Psi^* = \partial I_Z$ gilt, siehe (8.30), ist das Subdifferential $\partial\Psi^*(v^*)$ nichtleer genau dann, wenn $v^* \in Z$, und in diesem Fall gilt

$$\partial\Psi^*(v^*) = \partial I_Z(v^*) = N_Z(v^*) = \{\eta \in Y : \langle \zeta - v^*, \eta\rangle \le 0 \text{ für alle } \zeta \in Z\}\,.$$

Damit wird (8.35) zu

$$\dot y(t) \in N_Z(z(t)) \subset Y\,, \quad z(t) \in Z\,, \quad t \in (0,T)\,, \tag{8.36}$$

oder äquivalent

$$\begin{aligned} \langle \zeta - z(t), \dot y(t)\rangle &\le 0 \qquad \text{für alle } \zeta \in Z\,, \\ z(t) &\in Z\,. \end{aligned} \tag{8.37}$$

Gemäß (8.22) ist $z(t)$ eine Funktion von $y(t)$. Falls wir (8.22) invertieren können, können wir $\dot y(t)$ in (8.37) eliminieren. Dies ist beispielsweise möglich im Spezialfall (8.23), da dann $z(t) = u(t) - Ay(t)$, also $y(t) = A^{-1}(u(t) - z(t))$. In diesem Fall wird (8.37) zu

$$\begin{aligned} \left\langle \zeta - z(t), A^{-1}(\dot u(t) - \dot z(t))\right\rangle &\le 0 \qquad \text{für alle } \zeta \in Z\,, \\ z(t) &\in Z\,. \end{aligned} \tag{8.38}$$

Man nennt (8.38) die **Variationsformulierung in dualer Form**. Ist Y insbesondere Hilbertraum und A die Riesz-Dualität, so wird (8.38) zu

$$\begin{aligned} \langle \zeta - z(t), \dot u(t) - \dot z(t)\rangle &\le 0 \qquad \text{für alle } \zeta \in Z\,, \\ z(t) &\in Z\,. \end{aligned} \tag{8.39}$$

Das ist gerade der vektorielle Stop-Operator. Da $z = u - y$ im Fall $A = I$, ist die Funktion $y : [0,T] \to Y$ gerade das Spiel von u.

Eine Variante dieser dualen Form führt auf den sogenannten **sweeping process**, der von Moreau ab 1975 untersucht worden ist. Für die Gleichung $z = u - Ay$ führen wir die Variable

$$p(t) = -Ay(t)\,, \quad \text{also} \quad z = u + p\,,$$

ein und erhalten

$$-\dot p = A\dot y \in AN_Z(z) = AN_Z(u+p)\,.$$

Wir definieren die "sich bewegende konvexe Menge"

$$Z(t) = Z - u(t)\,, \quad Z = u(t) + Z(t)\,, \tag{8.40}$$

es ergibt sich

$$-\,\dot p(t) \in AN_{Z(t)}(p(t))\,. \tag{8.41}$$

Man erhält den allgemeinen sweeping process, indem man die spezielle Form (8.40) durch eine allgemeine Funktion $Z : [0,T] \to \mathcal{P}(Y)$ ersetzt, deren Bilder $Z(t)$ nichtleere konvexe abgeschlossene Teilmengen von Y sind.

Die **energetische Formulierung** von Mielke et al. geht aus von der primalen Variationsungleichung

$$\langle \nabla_y E(y(t), u(t)), v - \dot y(t)\rangle + \Psi(v) - \Psi(\dot y(t)) \ge 0\,, \quad \text{für alle } v \in Y\,, \quad t \in (0,T)\,. \tag{8.42}$$

Für beliebiges $\lambda > 0$ ersetzen wir v durch λv und dividieren (8.42) durch λ. Wir erhalten

$$\left\langle \nabla_y E(y(t), u(t)), v - \frac{1}{\lambda}\dot{y}(t) \right\rangle + \Psi(v) - \frac{1}{\lambda}\Psi(\dot{y}(t)) \geq 0\,, \qquad \text{für alle } v \in Y, \quad t \in (0, T)\,.$$

Grenzübergang $\lambda \to \infty$ führt auf

$$\langle \nabla_y E(y(t), u(t)), v \rangle + \Psi(v) \geq 0\,, \qquad \text{für alle } v \in Y, \quad t \in (0, T)\,. \tag{8.43}$$

Indem wir $v = 0$ bzw. $v = 2\dot{y}(t)$ in (8.42) setzen, erhalten wir

$$\langle \nabla_y E(y(t), u(t)), \dot{y}(t) \rangle + \Psi(\dot{y}(t)) = 0\,, \quad t \in (0, T)\,. \tag{8.44}$$

Falls wir (8.44) von (8.43) subtrahieren, kommen wir zurück auf (8.42). Daher sind(8.43) plus (8.44) äquivalent zu (8.42).

Die Bedingung (8.43) ist hinsichtlich E eine lokale Bedingung. Aufgrund der Annahmen an E and Ψ können wir sie wie folgt in eine globale Bedingung umformen. Wir betrachten die konvexe Funktion g, welche definiert ist durch

$$g(v) = E(y(t) + v, u(t)) + \Psi(v)\,.$$

Aus der Summenregel für Subdifferentiale und aus (8.30) folgt

$$\begin{aligned} 0 \in \partial g(0) \Leftrightarrow \quad & -\nabla_y E(y(t), u(t)) \in \partial\Psi(0) \\ \Leftrightarrow \quad & \Psi(v) \geq -\langle \nabla_y E(y(t), u(t)), v \rangle\,, \qquad \text{für alle } v \in Y\,. \end{aligned}$$

Da $0 \in \partial g(0)$ genau dann gilt, wenn 0 ein globaler Minimierer von g ist, ist (8.43) äquivalent zu

$$E(y(t), u(t)) \leq E(v, u(t)) + \Psi(v - y(t))\,, \qquad \text{für alle } v \in Y, \quad t \in (0, T)\,. \tag{8.45}$$

Die Bedingung(8.45) heißt **globale Stabilitätsbedingung**.

Wir formen auch (8.44) um. Mit dem Hauptsatz und der Kettenregel erhalten wir

$$E(y(t), u(t)) - E(y(0), u(0)) = \int_0^t \langle \nabla_y E(y(s), u(s)), \dot{y}(s) \rangle + \langle \nabla_u E(y(s), u(s)), \dot{u}(s) \rangle \; ds\,. \tag{8.46}$$

Gemäß der Definition $E_u(y, t) = E(y, u(t))$ erkennen wir, dass

$$\partial_t E_u(y, t) = \langle \nabla_u E(y, u(t)), \dot{u}(t) \rangle\,.$$

Aus den beiden vorangehenden Gleichungen erkennen wir, dass (8.44) äquivalent ist zu

$$E(y(t), u(t)) + \int_0^t \Psi(\dot{y}(s))\, ds = E(y(0), u(0)) + \int_0^t \partial_t E_u(y(s), s)\, ds\,. \tag{8.47}$$

(8.47) stellt die **globale Energiebilanz** dar. Im quadratischen Fall

$$E_u(y, t) = \frac{1}{2}\langle Ay, y \rangle - \langle u(t), y \rangle$$

gilt

$$\int_0^t \partial_t E_u(y(s), s)\, ds = -\int_0^t \langle \dot u(s), y(s)\rangle \; ds\,.$$

Die globale Stabilitätsbedingung und die globale Energiebilanz zusammengenommen werden als die **energetische Formulierung** einer ratenunabhängigen Evolution bezeichnet. Sie ist der Ausgangspunkt für die Behandlung allgemeinerer ratenunabhängiger Evolutionen, etwa solcher mit nichtkonvexer Energie E.

Elastoplastizität. Als Anwendung des oben besprochenen Modells für vektorwertige ratenunabhängige Evolutionen behandeln wir ein Randwertproblem, welches die elastoplastische Verformung eines Festkörpers beschreibt. Zu diesem Zweck stellen wir einige Sachverhalte zusammen, die in der Mechanik elastischer Körper genauer behandelt werden.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ eine offene Menge mit glattem Rand $\Gamma = \partial\Omega$. Jedem Punkt $x \in \Omega$ entspricht ein materieller Punkt im Festkörper, Ω heißt Referenzkonfiguration des Körpers. Er wird verformt durch die Einwirkung einer Kraft (in der Mechanik als Last oder Belastung bezeichnet) ℓ, die sich im allgemeinen aus einer in Ω wirkenden Volumenkraft (etwa die Schwerkraft) und einer auf einem Teil Γ_N von $\partial\Omega$ wirkenden Flächenkraft (etwa eine Druckkraft). Die Last ℓ entspricht der Variablen u in den vorangehenden Abschnitten. Der verformte Zustand des Körpers wird beschrieben durch ein Verschiebungsfeld (oder einfach: eine **Verschiebung**) $u : \Omega \to \mathbb{R}^3$. Der Punkt $x \in \Omega$ aus dem unverformten Zustand entspricht dem Punkt $x + u(x)$ im verformten Zustand. Ist etwa v konstant, so handelt es sich einfach um eine Translation, in der sich der innere Zustand des Festkörpers nicht ändert; dasselbe gilt, wenn $x \mapsto x + u(x)$ einer Drehung entspricht. In allen anderen Fällen liegt eine "echte" Verformung vor, die den inneren Zustand des Festkörpers verändert. Sie wird in der Mechanik beschrieben durch den **Verzerrungstensor** (strain tensor). Linearisiert man ihn um $u = 0$, so hat er die Form

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{2}(Du + (Du)^T)(x)\,, \quad \varepsilon : \Omega \to \mathbb{R}^{3,3}_{sym}\,, \tag{8.48}$$

er ist also gleich der Symmetrisierung der Jacobi-Matrix von u. Anstelle von ε schreibt man auch $\varepsilon(u)$, wenn man die Abhängigkeit vom Verschiebungsfeld benennen will.

Die in einem Punkt $x \in \Omega$ (der sich im verformten Zustand im Punkt $x + u(x)$ befindet) wirkenden Kräfte werden in der Mechanik beschrieben durch den **Spannungstensor** (stress tensor)

$$\sigma : \Omega \to \mathbb{R}^{3,3}_{sym}\,. \tag{8.49}$$

Wie der Verzerrungstensor wird er durch eine symmetrische Matrix dargestellt. Sei nun $f : \Omega \to \mathbb{R}^3$ die volumenbezogene Dichte einer Volumenkraft, das heißt, die auf ein Testvolumen $A \subset \Omega$ wirkende Kraft ist gegeben durch

$$\int_A f(x)\, dx\,.$$

Das Kräftegleichgewicht wird ausgedrückt durch

$$\operatorname{div} \sigma + f = 0 \qquad \text{in } \Omega. \tag{8.50}$$

Bei (8.50) handelt es sich um ein System aus drei partiellen Differentialgleichungen, die Divergenz von σ ist zeilenweise zu nehmen.

Wir betrachten die variationelle Formulierung von (8.50). Sie entsteht durch Skalarmultiplikation mit einer Testfunktion $v : \Omega \to \mathbb{R}^3$ und Integration über Ω. Es ist (Summen laufen von 1 bis 3, n bezeichnet den Normalenvektor)

$$\begin{aligned} \int_\Omega \langle \operatorname{div} \sigma, v \rangle \, dx &= \sum_i \int_\Omega v_i \operatorname{div} \sigma_i \, dx = \sum_{i,j} \int_\Omega v_i \partial_j \sigma_{ij} \, dx \\ &= -\sum_{i,j} \int_\Omega (\partial_j v_i) \, \sigma_{ij} \, dx + \sum_{i,j} \int_{\partial\Omega} v_i \sigma_{ij} n_j \, dS(x) \\ &= -\int_\Omega \sigma : Dv \, dx + \int_{\partial\Omega} \langle \sigma n, v \rangle \, dS(x) \,. \end{aligned} \tag{8.51}$$

Hierbei steht der Doppelpunkt für das elementweise Produkt

$$A : B = \sum_{ij} a_{ij} b_{ij}$$

zweier Matrizen (auch Frobenius-Produkt genannt). Aus der Symmetrie des Spannungstensors σ folgt

$$\sigma : Dv = \sigma^T : (Dv)^T = \sigma : (Dv)^T \,,$$

also

$$\sigma : Dv = \sigma : \frac{Dv + (Dv)^T}{2} = \sigma : \varepsilon(v) \,.$$

Die variationelle Formulierung des Kräftegleichgewichts (8.50) lautet somit

$$\int_\Omega \sigma : \varepsilon(v) \, dx = \int_\Omega \langle f, v \rangle \, dx + \int_{\partial\Omega} \langle \sigma n, v \rangle \, dS(x) \,, \tag{8.52}$$

für “alle Testfunktionen” v.

Nun kommen Randbedingungen ins Spiel. Wir nehmen an, dass $\Gamma = \partial\Omega$ in zwei disjunkte Teilmengen Γ_D und Γ_N zerfällt, und verlangen

$$u = 0 \quad \text{auf } \Gamma_D \qquad \text{und} \qquad \sigma n = g \quad \text{auf } \Gamma_N. \tag{8.53}$$

Dem entspricht, dass der Festkörper entlang Γ_D fixiert ist, und dass entlang Γ_N eine Flächenkraft mit der flächenbezogenen Dichte $g : \Gamma_N \to \mathbb{R}^3$ wirkt. Die Variationsformulierung (8.52) wird nun zu

$$\int_\Omega \sigma : \varepsilon(v) \, dx = \int_\Omega \langle f, v \rangle \, dx + \int_{\Gamma_N} \langle g, v \rangle \, dS(x) \,. \tag{8.54}$$

Sie soll gelten für alle Testfunktionen $v : \Omega \to \mathbb{R}^3$ mit $v = 0$ auf Γ_D.

Es fehlt nun noch die Beziehung zwischen den inneren Kräften σ und den Verzerrungen ε des Festkörpers. Diese hängt von der Struktur des Festkörpers auf Meso- und Mikroskalen ab und wird als **Materialgesetz** bezeichnet. Das **Hookesche Gesetz** hat die Form

$$\sigma = C\varepsilon \tag{8.55}$$

mit

$$C\varepsilon = 2\mu\varepsilon + \lambda(\operatorname{spur}\varepsilon)I \tag{8.56}$$

mit den beiden Konstanten λ und μ. Setzt man das Hookesche Gesetz in die Variationsformulierung (8.54) ein, so erhält man ein System aus 3 Gleichungen für die 3 Komponenten des unbekannten Verschiebungsvektor und zusammen mit den Randbedingungen ein lineares elliptisches Randwertproblem. Dieses kann man lösen mit dem Satz von Lax-Milgram, die Hauptschwierigkeit liegt im Nachweis der Elliptizität (oder positiven Definitheit) der zugehörigen Bilinearform. Dafür wird die **Kornsche Ungleichung** herangezogen.

Die Lösung des beschriebenen elliptischen Randwertproblems beschreibt die statische Situation, in der Kräftegleichgewicht vorliegt und alle beteiligten Funktionen nicht von der Zeit abhängen. Andernfalls wird das Kräftegleichgewicht "Summe aller Kräfte ist gleich Null" zum Gesetz der Impulserhaltung, oder nach Newton "(Summen-)Kraft ist gleich Masse mal Beschleunigung". Aus (8.50) wird dann

$$\operatorname{div}\sigma + f = \rho u_{tt}\,.$$

Alle beteiligten Funktionen hängen nun außerdem von der Zeit ab, also $u = u(t,x)$, $\sigma = \sigma(t,x)$ und so weiter. In der quasistatischen Approximation vernachlässigt man den Inertialterm ρu_{tt} wieder, betrachtet aber nach wie vor zeitabhängige Vorgänge, die durch eine zeitabhängige Belastung $f = f(t,x)$ und $g = g(t,x)$ entstehen.

Im Falle des elastischen Materialgesetzes führt die quasistatische Approximation auf dasselbe Problem wie im statischen Fall, da zu jedem Zeitpunkt t die Lösung nur von den Momentanwerten $x \mapsto f(t,x)$ und $x \mapsto g(t,x)$ der Kraftdichten abhängt. Komplexere Situationen entstehen, wenn man viskoses oder plastisches Verhalten einbezieht. Letzteres führt auf eine ratenunabhängige Evolution.

Wir behandeln das Modell der linearen kinematischen Verfestigung, welches auf Melan und Prager zurückgeht. Die Verzerrung ε wird additiv zerlegt gemäß

$$\varepsilon = e + p \tag{8.57}$$

in einen elastischen Anteil e und einen plastischen Anteil p. Die Spannung σ wird additiv zerlegt gemäß

$$\sigma = \sigma^b + \sigma^p \tag{8.58}$$

in die Rückspannung σ^b und die plastische Spannung σ^p. Die Gesamtspannung hängt linear vom elastischen Anteil der Verzerrung ab,

$$\sigma = Ce\,, \tag{8.59}$$

Die Rückspannung hängt linear von der plastischen Verzerrung ab gemäß

$$\sigma^b = Hp\,. \tag{8.60}$$

C und H werden als symmetrisch und positiv definit vorausgesetzt, C kann etwa durch das Hookesche Gesetz (8.56) gegeben sein. Die Rate der plastischen Verzerrung und die plastische Spannung genügen dem **Prinzip der maximalen Dissipation**, das heißt, der Variationsungleichung

$$\sigma^p \in K\,, \quad \dot p : (\tau - \sigma^p) \le 0\,, \quad \text{für alle } \tau \in K. \tag{8.61}$$

Die Menge K beschreibt die Menge der zulässigen plastischen Spannungen, ihr Rand ∂K heißt **Fließfläche**. Die häufigste Wahl ist der von-Mises-Zylinder

$$K = \{\sigma \in \mathbb{R}^{3,3}_{sym} : \|\operatorname{dev}\sigma\| \le \sigma^y\} .$$

Hier bezeichnet $\|A\| = \sqrt{A : A}$ die Frobeniusnorm, und der Deviator $\operatorname{dev}\sigma$ von σ ist definiert als

$$\operatorname{dev}\sigma = \sigma - \frac{1}{3}(\operatorname{spur}\sigma)I .$$

Die so definierte Abbildung “dev” ist nichts anderes als die Orthogonalprojektion von $\mathbb{R}^{3,3}_{sym}$ auf den Unterraum X_D der Matrizen mit Spur 0, dieser heißt Deviatorraum. Die Menge K ist eine konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^{3,3}_{sym}$ mit nichtleerem Inneren (z.B. $0 \in \operatorname{int} K$), ihre Projektion $\operatorname{dev}(K)$ ist die Kugel um 0 mit Radius σ^y im Deviatorraum X_D.

Dieses Modell lässt sich als Spezialfall einer ratenunabhängigen Evolution im Hilbertraum mit quadratischer Energie E auffassen. Wir setzen

$$y = (u, p) , \quad Y = H^1_D(\Omega) \times Q , \tag{8.62}$$

hierbei ist

$$H^1_D(\Omega) = \{v : v \in H^1(\Omega)^3 : v = 0 \text{ on } \Gamma_D.\}$$

und

$$Q = \{q |\ q : \Omega \to X_D , \ q_{ij} \in L^2(\Omega)\} .$$

Die Last $\ell : [0, T] \to Y^*$ ist gegeben durch

$$\langle \ell(t), (v, q)\rangle = \int_\Omega \langle f(t), v\rangle \, dx + \int_{\Gamma_N} \langle g(t), v\rangle \, dS(x) . \tag{8.63}$$

Der Operator $A : Y \to Y^*$ entsteht aus der Bilinearform

$$a((u, p), (v, q)) = \int_\Omega C(\varepsilon(u) - p) : (\varepsilon(v) - q)\, dx + \int_\Omega Hp : q\, dx \tag{8.64}$$

vermittels

$$\langle A(u, p), (v, q)\rangle = a((u, p), (v, q)) . \tag{8.65}$$

Dass A symmetrisch und positiv definit ist, folgt aus den entsprechenden Eigenschaften von C und H und aus der Kornschen Ungleichung. Partielle Integration in (8.64) führt auf

$$\langle A(u, p), (v, q)\rangle = -\int_\Omega \langle \operatorname{div}(C(\varepsilon(u) - p)), v\rangle \, dx + \int_\Omega -\big(C(\varepsilon(u) - p) + Hp\big) : q\, dx .$$

Wir definieren

$$\sigma = C(\varepsilon(u) - p) , \quad \sigma^b = Hp , \quad \sigma^p = \sigma - \sigma^b . \tag{8.66}$$

Die in (8.62) – (8.66) definierten Funktionen entsprechen den mechanischen Größen im Modell (8.57) – (8.60). Wir schreiben A um zu

$$\langle A(u, p), (v, q)\rangle = -\int_\Omega \langle \operatorname{div}\sigma, v\rangle \, dx - \int_\Omega (\sigma - \sigma^b) : q\, dx ,$$

also

$$A(u,p) = (-\operatorname{div}\sigma, -\sigma^p)\,. \tag{8.67}$$

Das Dissipationsfunktional wird definiert als

$$\Psi((u,p)) = \tilde{\Psi}(p) = \int_\Omega \sigma^y \|p\|\,dx\,. \tag{8.68}$$

Es gilt

$$Z = \partial\Psi(0) = \{0\} \times \partial\tilde{\Psi}(0)\,. \tag{8.69}$$

Indem wir Q^* mit Q identifizieren, stellen wir fest, dass

$$\begin{aligned} q^* \in \partial\tilde{\Psi}(0) \qquad &\Leftrightarrow \qquad \int_\Omega q^* : q\,dx = \langle q^*, q\rangle \le \tilde{\Psi}(q) = \int_\Omega \sigma^y \|q\|\,dx \qquad \forall\, q \in Q \\ &\Leftrightarrow \qquad \|q^*\| \le \sigma^y\,. \end{aligned} \tag{8.70}$$

Wir erinnern an die Variationsungleichungsformulierung (8.37),

$$\begin{aligned} \langle \zeta - z(t), \dot{y}(t)\rangle \le 0 \qquad &\text{für alle } \zeta \in Z\,, \\ z(t) \in Z\,. \end{aligned}$$

Die Bedingung $z(t) \in Z$ bedeutet

$$z(t) = \ell(t) - Ay(t) = \ell(t) + (\operatorname{div}\sigma(t), \sigma^p(t)) \in (0, \partial\tilde{\Psi}(0))\,.$$

Die erste Komponente dieser Inklusion ist eine Gleichung, und zwar, wenn man sie in der schwachen Formulierung hinschreibt, gerade die schwache Formulierung des Kräftegleichgewichts

$$\int_\Omega \sigma : \varepsilon(v)\,dx = \int_\Omega \langle f, v\rangle\; dx + \int_{\Gamma_N} \langle g, v\rangle\; dS(x)\,, \quad \text{für alle } v \in H^1_D(\Omega).$$

Die Variationsungleichung liefert etwas für die zweite Komponente der Lösung, und zwar

$$\|\sigma^p\| \le \sigma^y\,, \quad (\tau - \sigma^p) : \dot{p} \le 0 \quad \text{für alle } \|\tau\| \le \sigma^y.$$

Das ist gerade das Prinzip der maximalen Dissipation (8.61).

Die beschriebene quasistatische elastoplastische Evolution ist somit in das allgemeine Schema eingeordnet. Der Existenz-, Eindeutigkeits- und Stabilitätssatz für den Stop-Operator aus dem vorangehenden Kapitel kann nun auf die duale Formulierung in (8.38) angewandt werden. Man erhält daraus, dass das beschriebene Randwertproblem für den Fall der linearen kinematischen Verfestigung wohlgestellt ist.

9 Monotone Operatoren

Seien V, W Mengen, $R \subset V \times W$ eine Relation. Eine Relation kann als mengenwertige Abbildung

$$A : V \to \mathcal{P}(W)\,, \tag{9.1}$$

geschrieben auch

$$A : V \rightrightarrows W\,, \tag{9.2}$$

aufgefaßt werden, indem wir setzen

$$Av = \{w : w \in W,\ (v, w) \in R\}\,. \tag{9.3}$$

Wir bezeichnen

$$D(A) = \{v : v \in V,\ Av \neq \emptyset\} \tag{9.4}$$

als Definitionsbereich von A, und

$$\mathrm{im}\,(A) = \bigcup_{v \in V} Av \tag{9.5}$$

als Bildbereich von A. Sind $A, B : V \rightrightarrows W$ mengenwertige Abbildungen, die aus den Relationen R und S entstanden sind, so heißt B Erweiterung von A, falls $R \subset S$ (und echte Erweiterung von A, falls außerdem $R \neq S$).

Ist $A : V \rightrightarrows W$, so ist die Inverse $A^{-1} : W \rightrightarrows V$ definiert durch

$$A^{-1}w = \{v : v \in V,\ w \in Av\}\,. \tag{9.6}$$

Es gilt offensichtlich $D(A^{-1}) = \mathrm{im}\,(A)$ wegen

$$w \in Av \qquad \Leftrightarrow \qquad v \in A^{-1}w \tag{9.7}$$

für alle $v \in V$, $w \in W$.

Definition 9.1 (Maximal monotoner Operator)
Sei V Banachraum, $K \subset V$. Ein Operator $A : K \rightrightarrows V^*$ heißt monoton, falls

$$\langle u^* - v^*, u - v\rangle \geq 0\,, \quad \text{für alle } u, v \in K,\ u^* \in Au,\ v^* \in Av. \tag{9.8}$$

Ein monotones A heißt maximal monoton, falls es keine echte Erweiterung von A in $K \times V^*$ gibt, die monoton ist. Ein monotones A heißt streng monoton, falls $\langle u^* - v^*, u - v\rangle > 0$ gilt in (9.8) für $u \neq v$.

Der Standardfall ist $K = V$. Jedes monotone $A : K \rightrightarrows V^*$ können wir vermittels $\tilde{A}v = \emptyset$ für $v \notin K$ kanonisch zu einem monotonen $\tilde{A} : V \rightrightarrows V^*$ fortsetzen

Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend, wird durch

$$\tilde{f}(r) = [f(r-), f(r+)]\,, \quad f(r-) := \sup_{t<r} f(t)\,, \quad f(r+) := \inf_{t>r} f(t)\,, \tag{9.9}$$

ein maximal monotoner Operator $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ definiert, er ist die einzige maximal monotone Fortsetzung von f.

Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monoton wachsend, so ist die eindeutige maximal monotone Fortsetzung $\tilde{f} : [a, b] \rightrightarrows \mathbb{R}$ von f gegeben durch (9.9) für $a < r < b$ und

$$\tilde{f}(a) = (-\infty, f(a)] \,, \quad \tilde{f}(b) = [f(b), +\infty) \,. \tag{9.10}$$

Fasst man hingegen dasselbe f als mengenwertige Abbildung $f : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ auf mit $f(r) = \emptyset$ für $r \notin [a, b]$, so gibt es viele maximal monotone Fortsetzungen $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ von f.

Ist H ein Hilbertraum, so können wir vermittels der Riesz-Dualität statt $A : H \rightrightarrows H^*$ auch $A : H \rightrightarrows H$ betrachten. Monotonie von A bedeutet dann definitionsgemäß, dass

$$\langle w - z, u - v \rangle \geq 0 \,, \quad \text{für alle } u, v \in H,\ w \in Au,\ z \in Av. \tag{9.11}$$

Als direkte Anwendung des Zornschen Lemmas kann man zeigen, dass jeder monotone Operator eine maximal monotone Erweiterung besitzt.

Unmittelbar aus der Definition des Subdifferentials folgt, dass $\partial\varphi$ monoton ist für jede Funktion $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$.

Für $A, B : V \rightrightarrows V^*$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ setzen wir

$$\begin{aligned}
\lambda A &= \{(v, \lambda w) : v \in V \,,\ w \in Av\} \,, \\
A + B &= \{(v, w + z) : v \in V \,,\ w \in Av \,,\ z \in Bv\} \,, \\
\mathrm{cl}\,(\mathrm{co}\, A) &= \{(v, w) : v \in V \,,\ w \in \mathrm{cl}\,(\mathrm{co}\, Av)\} \,.
\end{aligned}$$

Für die Addition gilt $D(A + B) = D(A) \cap D(B)$.

Lemma 9.2 *Sei V Banachraum, seien $A, B : V \rightrightarrows V^*$ monoton, $\lambda \geq 0$. Dann sind λA, $A + B$ und $\mathrm{cl}\,(\mathrm{co}\, A)$ monoton.*

Beweis: Direkt aus den Definitionen. Für $\mathrm{cl}\,(\mathrm{co}\, A)$: Übung. □

Im Hilbertraumfall ist mit A auch A^{-1} monoton, da in der Bedingung

$$\langle w - z, u - v \rangle \geq 0 \,, \quad \text{für alle } u, v \in H,\ w \in Au,\ z \in Av.$$

genau dann $w \in Au$ und $z \in Av$ gelten wenn $u \in A^{-1}w$ und $z \in A^{-1}v$.

Lemma 9.3 *Sei V Banachraum, $A : V \rightrightarrows V^*$ monoton. Dann gilt:*

(i) A ist maximal monoton genau dann, wenn für alle $u \in V$, $u^* \in V^*$ die Bedingung

$$\langle u^* - v^*, u - v \rangle \geq 0 \,, \quad \textit{für alle } v \in V,\ v^* \in Av, \tag{9.12}$$

impliziert, daß $u^* \in Au$.

(ii) Sei A maximal monoton. Dann ist λA maximal monoton für alle $\lambda > 0$. Weiterhin ist Av konvex und abgeschlossen in V^* für alle $v \in V$. Im Hilbertraumfall ist auch A^{-1} maximal monoton.

Beweis: Für feste $u \in V$, $u^* \in Au$ besagt (9.12) gerade, dass der zu

$$\tilde{A}u = Au \cup \{u^*\}\,, \quad \tilde{A}v = Av \quad \text{für } v \neq u, \tag{9.13}$$

erweiterte Operator $\tilde{A}$ monoton ist. Ist $\langle u^* - v^*, u - v\rangle \geq 0$ für alle $v \in V$, $v^* \in Av$, so gilt (9.12) mit $\lambda^{-1}u^*$ an der Stelle von u^*, also ist $u^* \in \lambda Au$ und damit λA maximal monoton. Aus Lemma 9.2 folgt, dass $\mathrm{cl}\,(\mathrm{co}\,A) = A$. Da im Hilbertraumfall jede monotone Erweiterung von A auch eine von A^{-1} und umgekehrt liefert, ist mit A auch A^{-1} maximal monoton. □

Wir betrachten die Inklusion

$$Au + Bu \ni f\,. \tag{9.14}$$

Lemma 9.4 *Sei V Banachraum, $A : V \rightrightarrows V^*$ maximal monoton, $B : V \to V^*$ beliebige Abbildung, $f \in V^*$. Dann gilt für $u \in D(A)$*

$$Au + Bu \ni f \tag{9.15}$$

genau dann, wenn

$$\langle f - Bu - v^*, u - v\rangle \geq 0\,, \quad \textit{für alle } v \in V,\ v^* \in Av. \tag{9.16}$$

Ist zusätzlich B monoton, und außerdem A oder B streng monoton, so gibt es höchstens ein solches u.

Beweis: Es gilt $Au + Bu \ni f$ genau dann, wenn $Au \ni f - Bu$. Wir setzen $u^* = f - Bu$. Aus (9.15) folgt (9.16), da A monoton ist. Umgekehrt folgt (9.15) aus (9.16) nach Lemma 9.3 (i). Sind $u_1, u_2 \in V$ Lösungen, so gilt, falls B monoton ist,

$$0 \leq \langle (f - Bu_1) - (f - Bu_2), u_1 - u_2\rangle = \langle Bu_2 - Bu_1, u_1 - u_2\rangle \leq 0\,,$$

also steht überall das Gleichheitszeichen. Ist A streng monoton, so liefert der erste Term $u_1 = u_2$; ist B streng monoton, liefert es der zweite. □

Wir betrachten die Variationsungleichung (9.16) zunächst im Endlichdimensionalen.

Satz 9.5 (Fixpunktsatz von Brouwer)
Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ konvex, kompakt und nichtleer, sei $F : K \to K$ stetig. Dann hat F einen Fixpunkt u, also $u = F(u)$. □

Der folgende Satz ist die endlichdimensionale Variante eines Satzes von Debrunner und Flor.

Satz 9.6 *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ konvex, kompakt und nichtleer, $A : K \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ monoton mit $D(A) \neq \emptyset$, $B : K \to \mathbb{R}^n$ stetig, $f \in \mathbb{R}^n$. Dann hat die Variationsungleichung*

$$\langle f - Bu - v^*, u - v\rangle \geq 0\,, \quad \textit{für alle } v \in K,\ v^* \in Av, \tag{9.17}$$

eine Lösung $u \in K$.

Beweis: Für $Tu = f - Bu$, $T : K \to \mathbb{R}^n$, erhält (9.17) die Form

$$\langle Tu - v^*, u - v\rangle \geq 0\,, \quad \text{für alle } v \in K,\, v^* \in Av. \tag{9.18}$$

Wir nehmen an, es gebe keine Lösung $u \in K$ von (9.18). Wir definieren für $v \in K$, $v^* \in Av$,

$$U(v, v^*) = \{u : u \in K\,,\, \langle Tu - v^*, u - v\rangle < 0\}\,.$$

Nach Annahme gehört jedes $u \in K$ zu mindestens eine solchen Menge, diese bilden daher eine offene Überdeckung von K. Da K kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung

$$\{U(v_i, v_i^*) : 1 \leq i \leq N\}$$

von K. Sei $\{\beta_i\}_{1\leq i\leq N}$ eine zugehörige stetige Zerlegung der Eins, also $\beta_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig,

$$\operatorname{supp}\beta_i \subset U(v_i, v_i^*)\,, \quad 0 \leq \beta_i \leq 1\,, \quad \sum_{i=1}^N \beta_i(u) = 1 \quad \text{für alle } u \in K.$$

Wir setzen

$$S = \operatorname{co}\{v_1, \ldots, v_N\}$$

und definieren

$$p(u) = \sum_{i=1}^N \beta_i(u) v_i\,, \quad q(u) = \sum_{i=1}^N \beta_i(u) v_i^*\,.$$

Die Abbildung $p : S \to \mathbb{R}^n$ ist stetig und $p(S) \subset S$, gemäß den Eigenschaften der β_i. Nach dem Brouwerschen Fixpunktsatz, Satz 9.5, hat p einen Fixpunkt

$$u = p(u)\,, \quad u \in S\,, \quad S \subset K\,.$$

Zu diesem Fixpunkt definieren wir die Zahlen

$$d_{ij} = \langle Tu - v_i^*, u - v_j\rangle\,.$$

Es gilt

$$d_{ij} + d_{ji} = d_{ii} + d_{jj} + \left\langle v_i^* - v_j^*, v_j - v_i\right\rangle\,.$$

Da A monoton ist, gilt $\left\langle v_i^* - v_j^*, v_j - v_i\right\rangle \leq 0$, also

$$d_{ij} + d_{ji} \leq d_{ii} + d_{jj}\,, \quad \text{für alle } i, j.$$

Wir erhalten weiter

$$\begin{aligned} 0 = \langle Tu - q(u), u - p(u)\rangle &= \left\langle Tu - \sum_{i=1}^N \beta_i(u) v_i^*, u - \sum_{j=1}^N \beta_j(u) v_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \beta_i(u)\beta_j(u) d_{ij} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \beta_i(u)\beta_j(u) \frac{d_{ij} + d_{ji}}{2}\,, \end{aligned}$$

also

$$0 \leq \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \beta_i(u)\beta_j(u) \frac{d_{ii} + d_{jj}}{2}\,. \tag{9.19}$$

Für jedes Paar (i,j) mit $\beta_i(u)\beta_j(u) > 0$ gilt $u \in \operatorname{supp}(\beta_i) \cap \operatorname{supp}(\beta_j) \subset U(v_i, v_i^*) \cap U(v_j, v_j^*)$, also $d_{ii} < 0$ und $d_{jj} < 0$. Wegen (9.19) kann es solche (i,j) nicht geben, also folgt $\beta_i(u) = 0$ für alle i. Es folgt $u \notin K$, ein Widerspruch. □

Satz 9.6 gilt auch, wenn wir den $\mathbb{R}^n$ durch einen beliebigen Banachraum V ersetzen, mit demselben Beweis. Wegen der Voraussetzung "K kompakt" spielt er aber erst dann eine Rolle, wenn wir ihn auch auf V versehen mit der schwachen bzw. schwach-$*$-Topologie anwenden können. Der gegebene Beweis lässt sich auch auf diese Situation verallgemeinern.

Ist K unbeschränkt, so können wir die Beschränktheit der Lösungsmenge der Variationsungleichung (9.17) dadurch erreichen, dass wir voraussetzen, dass B koerziv ist.

Definition 9.7
*Sei V normierter Raum, $A : V \rightrightarrows V^*$. Eine Abbildung $B : V \to V^*$ heißt **koerziv zu $u_0 \in D(A)$**, falls*

$$\lim_{\|u\|\to\infty} \frac{\langle Bu, u-u_0\rangle}{\|u\|} = \infty\,. \tag{9.20}$$

□

Ist $u \in V$ Lösung der Variationsungleichung

$$\langle f - Bu - v^*, u - v\rangle \geq 0\,, \quad \text{für alle } v \in V,\ v^* \in Av, \tag{9.21}$$

so gilt für $u_0 \in D(A)$ und $v^* \in Au_0^*$

$$\langle Bu, u-u_0\rangle \leq \langle f - v^*, u - u_0\rangle\ ,$$

also

$$\frac{\langle Bu, u-u_0\rangle}{\|u\|} \leq \|f - v^*\| \frac{\|u-u_0\|}{\|u\|}\,.$$

Für gegebenes f, u_0, v^* ist die rechte Seite beschränkt für $\|u\| \to \infty$. Ist nun B außerdem koerziv zu u_0, so folgt aus (9.20), dass es ein $r > 0$ gibt mit

$$\|u\| \leq r\,, \tag{9.22}$$

wobei r nur von f, B, u_0 und Au_0 abhängt.

Mit (9.22) haben wir eine a-priori-Abschätzung für die Lösungsmenge von (9.21) erhalten.

In Satz 9.6 wird die Stetigkeit von B in der Metrik des $\mathbb{R}^n$ benötigt. Stetigkeit und schwache Stetigkeit im Sinne der Funktionalanalysis sind im $\mathbb{R}^n$ gleichbedeutend.

Definition 9.8
*Sei V normierter Raum. Eine Abbildung $A : V \to V^*$ heißt **demistetig**, falls aus $u_n \to u$ in der Norm von V folgt, dass $Au_n \to Au$ schwach in V^*. (Wir schreiben $Au_n \rightharpoonup Au$.)* □

Lemma 9.9
Sei V normierter Raum, sei $A : V \rightrightarrows V^*$ monoton, sei $B : V \to V^*$ demistetig und

koerziv zu $u_0 \in D(A)$, sei $f \in V^*$. Dann gibt es ein $r > 0$, so dass gilt: Für jeden endlichdimensionalen Unterraum Y von V mit $u_0 \in Y$ hat die Variationsungleichung

$$\langle f - Bu - v^*, u - v\rangle \geq 0\,, \quad \textit{für alle } v \in Y,\ v^* \in Av, \tag{9.23}$$

eine Lösung $u_Y \in Y$, und für alle solche Lösungen gilt

$$\|u_Y\| \leq r\,. \tag{9.24}$$

Beweis: Sei Y ein solcher Unterraum, sei $R \geq \|u_0\|$. Wir setzen

$$K_{Y,R} = Y \cap \{v : \|v\| \leq R\}\,.$$

$K_{Y,R}$ ist konvex, kompakt und nichtleer wegen $R \geq \|u_0\|$. Die Vorschrift

$$u \mapsto (f - Bu - v^*)|Y \qquad \text{(Einschränkung auf } Y)$$

definiert für jedes $v^* \in V^*$ eine Abbildung von Y nach Y^* mit $\dim(Y) = \dim(Y^*) < \infty$. Die Abbildung $u \mapsto Bu|Y$ ist stetig, da B demistetig und Y^* endlichdimensional ist. Die Variationsungleichung

$$\langle (f - Bu - v^*)|Y, u - v\rangle \geq 0\,, \quad \text{für alle } v \in K_{Y,R},\ v^* \in Av, \tag{9.25}$$

hat nach Satz 9.6 eine Lösung $u_{Y,R} \in K_{Y,R}$. Die Menge $S_{Y,R}$ aller Lösungen in $K_{Y,R}$ ist abgeschlossen gemäß (9.25) wegen Stetigkeit, und aus der Koerzivität von B folgt gemäß der zu (9.22) führenden Rechnung, dass

$$\|u_{Y,R}\| \leq r \tag{9.26}$$

gilt für alle Lösungen mit einem geeigneten, von Y und R unabhängigen $r > 0$. Die Mengen $S_{Y,R}$ sind daher kompakt. Sei nun $R \geq R_0 := \max\{\|u_0\|, r\}$. Es gilt wegen (9.26)

$$R_0 \leq R \leq \tilde{R} \quad \Rightarrow \quad K_{Y,R} \subset K_{Y,\tilde{R}} \quad \Rightarrow \quad S_{Y,R} \supset S_{Y,\tilde{R}} \neq \emptyset\,.$$

Aus der Kompaktheit der Mengen $S_{Y,R}$ folgt nun

$$\bigcap_{R \geq R_0} S_{Y,R} \neq \emptyset\,.$$

Jedes

$$u_Y \in \bigcap_{R \geq R_0} S_{Y,R}$$

erfüllt (9.24) und ist Lösung von (9.23), da

$$Y = \bigcup_{R \geq R_0} K_{Y,R}\,.$$

□

Definition 9.10
*Sei V normierter Raum. Ein $A : V \rightrightarrows V^*$ heißt **beschränkt**, falls $A(M)$ beschränkt ist in V^* für jede beschränkte Teilmenge M von V.* □

Lemma 9.11
Sei V reflexiver Banachraum, es gelten die Voraussetzungen von Lemma 9.9, sei außerdem B beschränkt. Dann gibt es ein $u \in V$ und ein $u^* \in V^*$ mit der Eigenschaft: Zu jedem Unterraum Y von V mit $\dim(Y) < \infty$ und $u_0 \in Y$ gibt es eine Folge (u_n) in V mit $u_n \rightharpoonup u$, $Bu_n \rightharpoonup u^*$ und

$$\langle f - Bu_n - v^*, u_n - v \rangle \geq 0 \,, \quad \textit{für alle } v \in Y,\, v^* \in Av. \tag{9.27}$$

Beweis: Sei

$$\mathcal{L} = \{Y : Y \text{ Unterraum von } V,\, \dim(Y) < \infty,\, u_0 \in Y, \} \,.$$

Nach Lemma 9.9 gibt es zu jedem $Y \in \mathcal{L}$ ein $u_Y \in Y$ mit

$$\langle f - Bu_Y - v^*, u_Y - v \rangle \geq 0 \,, \quad \text{für alle } v \in Y,\, v^* \in Av \,. \tag{9.28}$$

Für $Z \in \mathcal{L}$ definieren wir

$$M_Z = \{(u_Y, Bu_Y) : Y \in \mathcal{L}, Z \subset Y, (u_Y, Bu_Y) \in Y \times V^*, Z \subset Y \in \mathcal{L},\ u_Y \text{ löst (9.28).}\}$$

Wir betrachten

$$\bigcap_{Z \in \mathcal{L}} \overline{M_Z}^w \,. \qquad \text{(schwacher Abschluss)} \tag{9.29}$$

Nach Definition gilt $M_{\tilde{Z}} \subset M_Z$ für $Z \subset \tilde{Z}$. Sind $Z_1, \ldots, Z_n \in \mathcal{L}$, so folgt für $Z = \operatorname{span} Z_1 \cup \cdots \cup Z_n$

$$\bigcap_{i=1}^n M_{Z_i} \supset M_Z \neq \emptyset \,, \quad \bigcap_{i=1}^n \overline{M_{Z_i}}^w \supset \overline{M_Z}^w \neq \emptyset \,.$$

Da $\|u_Y\| \leq r$ gemäß Lemma 9.9 gilt für alle betrachteten Lösungen, und da B beschränkt ist, sind alle Mengen $\overline{M_Z}^w$ beschränkt und damit schwach kompakt nach einem Satz der Funktionalanalysis. Der Durchschnitt (9.29) ist also ebenfalls nichtleer, es gibt ein

$$(u, u^*) \in \bigcap_{Z \in \mathcal{L}} \overline{M_Z}^w \,.$$

Sei nun $Y \in \mathcal{L}$ fest gewählt. Da $(u, u^*) \in \overline{M_Y}^w$, gibt es nach einem weiteren Satz der Funktionalanalysis eine Folge (u_n, Bu_n) in M_Y mit $u_n \rightharpoonup u$ und $Bu_n \rightharpoonup u^*$. Nach Definition von M_Y gibt es $Y_n \in \mathcal{L}$ mit $Y \subset Y_n$, so dass

$$\langle f - Bu_n - v^*, u_n - v \rangle \geq 0 \,, \quad \text{für alle } v \in Y_n,\, v^* \in Av,$$

also folgt (9.27) wegen $Y \subset Y_n$. $\square$

Wir wollen nun in der Variationsungleichung (9.27) den Grenzübergang $n \to \infty$ vollziehen. Das Problem dabei ist der Term $\langle Bu_n, u_n \rangle$, da beide Argumente nur schwach konvergieren. Schon im Hilbertraum ist die schwache Grenzwertbildung mit dem Skalarprodukt im allgemeinen nicht vertauschbar. Betrachtet man etwa die Folge der Einheitsvektoren e_n im Folgenraum ℓ^2, so gilt $e_n \rightharpoonup 0$, aber $\langle e_n, e_n \rangle = 1$. Hilfreich ist, wenn B in einem geeigneten Sinn monoton ist.

Definition 9.12
Sei V reflexiver Banachraum. Ein Operator $A : V \to V^*$ heißt ***pseudomonoton****, falls er folgende Eigenschaft hat: Ist (u_n) eine Folge in V mit*

$$u_n \rightharpoonup u \,, \quad \limsup_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - u\rangle \le 0 \,, \tag{9.30}$$

so gilt

$$\langle Au, u - v\rangle \le \liminf_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - v\rangle \ , \quad \textit{für alle } v \in V. \tag{9.31}$$

$\square$

Lemma 9.13
Sei V reflexiver Banachraum, es gelten die Voraussetzungen von Lemma 9.11, sei außerdem B pseudomonoton und A maximal monoton. Dann löst das in Lemma 9.11 erhaltene $u \in V$ die Variationsungleichung

$$\langle f - Bu - v^*, u - v\rangle \ge 0 \,, \quad \textit{für alle } v \in V,\ v^* \in Av. \tag{9.32}$$

Beweis: Sei (u, u^*) das in Lemma 9.11 erhaltene Paar. Wir zeigen zunächst: Es gibt ein $v_0 \in V$ und ein $v_0^* \in Av$ mit

$$\langle f - u^* - v_0^*, u - v_0\rangle \le 0 \,. \tag{9.33}$$

Andernfalls wäre

$$\langle f - u^* - v^*, u - v\rangle > 0 \,, \quad \text{für alle } v \in V,\ v^* \in Av, \tag{9.34}$$

und damit $f - u^* \in Au$, da A maximal monoton ist. Einsetzen von $v = u$, $v^* = f - u^*$ in (9.34) ergibt einen Widerspruch. Sei nun Y ein Unterraum von V mit $u_0, v_0 \in Y$ und $\dim(Y) < \infty$. Sei (u_n) die in Lemma 9.11 erhaltene Folge, dann gilt

$$\langle f - Bu_n - v^*, u_n - v\rangle \ge 0 \,, \quad \text{für alle } v \in Y,\ v^* \in Av.$$

Für beliebiges $w \in V$ folgt

$$\begin{aligned} \langle Bu_n, u_n - w\rangle &= \langle Bu_n, u_n - v\rangle + \langle Bu_n, v - w\rangle \\ &\le \langle f - v^*, u_n - v\rangle + \langle Bu_n, v - w\rangle \ , \quad \text{für alle } v \in Y,\ v^* \in Av. \end{aligned}$$

Setzen wir $w = v$, so folgt

$$\langle Bu_n, u_n - v\rangle \le \langle f - v^*, u_n - v\rangle \ , \quad \text{für alle } v \in Y,\ v^* \in Av. \tag{9.35}$$

Setzen wir $w = u$, $v = v_0$, $v^* = v_0^*$, so folgt

$$\langle Bu_n, u_n - u\rangle \le \langle f - v_0^*, u_n - v_0\rangle + \langle Bu_n, v_0 - u\rangle \ ,$$

und weiter, da $u_n \rightharpoonup u$ und $Bu_n \rightharpoonup u^*$,

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} \langle Bu_n, u_n - u\rangle &\le \langle f - v_0^*, u - v_0\rangle + \langle u^*, v_0 - u\rangle \\ &= \langle f - v_0^* - u^*, u - v_0\rangle \le 0 \end{aligned}$$

nach (9.33). Da B pseudomonoton ist, folgt

$$\langle Bu, u - v\rangle \le \liminf_{n\to\infty} \langle Bu_n, u_n - v\rangle \ , \quad \text{für alle } v \in Y .$$

Aus (9.35) folgt nun

$$\langle Bu, u - v\rangle \le \langle f - v^*, u - v\rangle \ , \quad \text{für alle } v \in Y,\ v^* \in Av.$$

Sei nun $v \in V$ beliebig gegeben, so setzen wir $Y = \operatorname{span}\{v, u_0, v_0\}$. Damit ist (9.32) bewiesen. □

Wir fassen zusammen.

Satz 9.14 (Existenzsatz für monotone Inklusionen)
Sei V reflexiver Banachraum, $A : V \rightrightarrows V^*$ maximal monoton, $B : V \to V^*$ demistetig, beschränkt, pseudomonoton und koerziv zu $u_0 \in D(A)$. Dann gibt es zu jedem $f \in V^*$ eine Lösung $u \in V$ von

$$Au + Bu \ni f \,, \tag{9.36}$$

oder äquivalent

$$\langle f - Bu - v^*, u - v\rangle \ge 0 \,, \quad \textit{für alle } v \in V,\ v^* \in Av. \tag{9.37}$$

□

Wir befassen uns mit dem Zusammenhang der verschiedenen Monotoniebegriffe.

Satz 9.15 *Sei V Banachraum, $A : V \to V^*$ monoton. Dann ist A lokal beschränkt, d.h. zu jedem $u \in V$ gibt es eine Umgebung U von u, so daß $A(U)$ beschränkt ist in V^*.*

Beweis: Ist A nicht lokal beschränkt, so gibt es ein $u \in V$ und eine Folge (u_n) in V mit

$$u_n \to u \,, \quad \|Au_n\| \to \infty \,. \tag{9.38}$$

Wir definieren

$$c_n = 1 + \|Au_n\|\,\|u_n - u\| \,. \tag{9.39}$$

Wir wollen zeigen, daß die Folge $c_n^{-1}Au_n$ beschränkt ist in V^*. Sei dazu $v \in V$ beliebig gewählt. Es gilt

$$0 \le \langle A(u+v) - A(u_n), u + v - u_n\rangle \ , \tag{9.40}$$

also

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_n}\langle A(u_n), v\rangle &\le \frac{1}{c_n}\left(\langle A(u_n), u_n - u\rangle + \langle A(u+v), u+v-u_n\rangle\right) \\ &\le 1 + \frac{1}{c_n}\|A(u+v)\|\,\|u+v-u_n\| \le M(v) \end{aligned} \tag{9.41}$$

mit einer von n unabhängigen Konstante $M(v)$. Mit $-v$ an der Stelle von v erhalten wir

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left|\frac{1}{c_n}\langle Au_n, v\rangle\right| \le \max\{M(v), M(-v)\} < \infty \,. \tag{9.42}$$

Aus dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit (Satz von Banach-Steinhaus, siehe Funktionalanalysis) folgt

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{c_n}\|Au_n\| =: C < \infty\,, \tag{9.43}$$

also

$$\|Au_n\| \le Cc_n = C(1 + \|Au_n\|\,\|u - u_n\|)\,, \quad n \in \mathbb{N}\,, \tag{9.44}$$

also

$$(1 - C\|u - u_n\|)\|Au_n\| \le C\,, \quad n \in \mathbb{N}\,, \tag{9.45}$$

also $\|Au_n\| \le 2C$, falls $\|u - u_n\| \le 1/(2C)$, was ein Widerspruch zu (9.38) ist. □

Folgerung 9.16 *Sei V Banachraum, $A : V \to V^*$ monoton, (u_n) eine normkonvergente Folge. Dann ist die Folge (Au_n) beschränkt in V^*.*

Beweis: Folgt direkt aus Satz 9.15. □

Folgerung 9.17 *Sei V Banachraum, $A : V \to V^*$ monoton und linear. Dann ist A stetig.*

Beweis: Nach Satz 9.15 ist A beschränkt auf einer hinreichend kleinen ε-Kugel K_ε um 0. Es folgt

$$\|A\| = \sup_{v\in K_\varepsilon} \varepsilon^{-1}\|Av\| < \infty\,.$$

□

Definition 9.18
Sei V normierter Raum. Ein Operator $A : V \to V^*$ heißt ***hemistetig****, wenn für alle $u, v, w \in V$ die Abbildung*

$$t \mapsto \langle A(u + t(v - u)), w\rangle \tag{9.46}$$

stetig ist auf $[0, 1]$.

Satz 9.19 *Sei V reflexiver Banachraum, $A : V \to V^*$ monoton. Dann sind äquivalent:*
(i) A ist hemistetig.
(ii) A ist maximal monoton.
(iii) A ist pseudomonoton.
(iv) A ist demistetig.

Beweis: "(i)⇒(ii)": Seien $u \in V$, $u^* \in V^*$ mit

$$\langle u^* - Av, u - v\rangle \ge 0\,, \quad \text{für alle } v \in V\,.$$

Mit $v = u - tw$ folgt dann

$$\langle u^* - A(u - tw), tw\rangle \ge 0\,, \quad \forall\, w \in V\,,\, t > 0\,,$$

also

$$\langle u^* - A(u - tw), w\rangle \ge 0\,, \quad \forall\, w \in V\,,\, t > 0\,.$$

Grenzübergang $t \downarrow 0$ ergibt wegen der Hemistetigkeit von A

$$\langle u^* - Au, w \rangle \geq 0 \,, \quad \forall\, w \in V \,. \tag{9.47}$$

Da w beliebig war, folgt $u^* = Au$.
"(ii)⇒(iv)": Sei $u_n \to u$. Nach Folgerung 9.16 ist (Au_n) beschränkt in V^*. Da V reflexiv ist, gibt es eine schwach konvergente Teilfolge, sei $Au_{n_k} \rightharpoonup u^*$. Aus

$$\langle Au_{n_k} - Av, u_{n_k} - v \rangle \geq 0 \,, \quad \text{für alle } v \in V,$$

folgt mit Grenzübergang $k \to \infty$, dass

$$\langle u^* - Av, u - v \rangle \geq 0 \,, \quad \text{für alle } v \in V,$$

und damit $u^* = Au$, da A maximal monoton ist. Da also alle schwach konvergenten Teilfolgen den gleichen Grenzwert Au haben, gilt $Au_n \rightharpoonup Au$ für die gesamte Folge ("Konvergenzprinzip"). Also ist A demistetig.
"(iii)⇒(iv)": Sei $u_n \to u$. Wie eben folgt daraus $Au_{n_k} \rightharpoonup u^*$ für eine Teilfolge, und weiter

$$\langle Au_{n_k}, u_{n_k} - u \rangle \to 0 \,. \tag{9.48}$$

Da A pseudomonoton ist, folgt für alle $v \in V$

$$\langle Au, u - v \rangle \leq \liminf_{k\to\infty} \langle Au_{n_k}, u_{n_k} - v \rangle = \langle u^*, u - v \rangle \ .$$

Es folgt $u^* = Au$, da v beliebig ist. Aus dem Konvergenzprinzip folgt $Au_n \rightharpoonup Au$ für die gesamte Folge.
"(iv)⇒(i)": Seien $u, v, w \in V$, $t_n \to t$ in $[0,1]$. Dann gilt $u + t_n v \to u + tv$ in V, also $A(u + t_n v) \rightharpoonup A(u + tv)$ in V^* nach Voraussetzung (iv), also

$$\lim_{n\to\infty} \langle A(u + t_n v), w \rangle = \langle A(u + tv), w \rangle \ .$$

Damit ist A hemistetig.
"(i)⇒(iii)": Sei

$$u_n \rightharpoonup u \,, \quad \limsup_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - u \rangle \leq 0 \,.$$

Da A monoton ist, gilt $\langle Au_n, u_n - u \rangle \geq \langle Au, u_n - u \rangle$, also

$$\liminf_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - u \rangle \geq \liminf_{n\to\infty} \langle Au, u_n - u \rangle = 0 \,,$$

also

$$\lim_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - u \rangle = 0 \,. \tag{9.49}$$

Wir setzen $v_t = u + t(v - u)$ für beliebiges $v \in V$, $t \in [0,1]$. Es gilt wegen Monotonie

$$0 \leq \langle Au_n - Av_t, u_n - v_t \rangle = \langle Au_n - Av_t, u_n - u \rangle + \langle Au_n - Av_t, t(u - v) \rangle \ .$$

Grenzübergang $n \to \infty$ führt wegen (9.49) auf

$$0 \leq t\big(- \langle Av_t, u - v \rangle + \liminf_{n\to\infty} \langle Au_n, u - v \rangle \big) \,.$$

Division durch $t > 0$ und Grenzübergang $t \downarrow 0$ ergibt, da A hemistetig ist,

$$\langle Au, u - v \rangle \leq \liminf_{n\to\infty} \langle Au_n, u - v \rangle = \liminf_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - v \rangle \ ,$$

letzteres wiederum wegen (9.49). Da v beliebig war, ist A pseudomonoton. □

Satz 9.20
Sei V reflexiver Banachraum, seien V und V^* strikt konvex. Dann ist die Dualitätsabbildung $J : V \to V^*$ streng monoton und demistetig, also auch maximal monoton und pseudomonoton nach Satz 9.19. Außerdem ist J beschränkt sowie koerziv zu jedem $u_0 \in V$.

Bemerkung: Man kann zeigen, dass es zu jedem reflexiven Banachraum V eine äquivalente Norm gibt, in der V und V^* strikt konvex sind.

Beweis: Wir erinnern daran (Satz 4.23), dass unter den gegebenen Voraussetzungen Ju das eindeutig bestimmte Element von V^* ist mit

$$\langle Ju, u\rangle = \|u\|^2 = \|Ju\|^2 .$$

J ist beschränkt wegen $\|Ju\| = \|u\|$ und koerziv wegen

$$\frac{\langle Ju, u-u_0\rangle}{\|u\|} = \frac{\langle Ju, u\rangle - \langle Ju, u_0\rangle}{\|u\|} \geq \|u\| - \frac{\|Ju\|\|u_0\|}{\|u\|} = \|u\| - \|u_0\| \to \infty$$

für $\|u\| \to \infty$. J ist demistetig: Sei $u_n \to u$ in V. Es gilt $\|Ju_n\| = \|u_n\| \to \|u\|$, also ist (Ju_n) beschränkt. Es gelte $Ju_{n_k} \rightharpoonup u^*$ für eine geeignete Teilfolge. Da die Norm schwach unterhalbstetig ist, folgt

$$\|u^*\| \leq \liminf_{k\to\infty} \|Ju_{n_k}\| = \|u\| .$$

Weiter gilt

$$\|u^*\|\|u\| \geq \langle u^*, u\rangle = \lim_{k\to\infty} \langle Ju_{n_k}, u_{n_k}\rangle = \lim_{k\to\infty} \|u_{n_k}\|^2 = \|u\|^2 ,$$

also insgesamt $\|u\| = \|u^*\|$ und damit $u^* = Ju$. Es folgt $u_n \rightharpoonup Ju$ für die gesamte Folge nach Konvergenzprinzip.
J ist monoton: Für beliebige $u, v \in V$ gilt

$$\langle Ju - Jv, u - v\rangle \geq \|u\|^2 + \|v\|^2 - \|Ju\|\|v\| - \|Jv\|\|u\| = (\|u\| - \|v\|)^2 \geq 0 . \tag{9.50}$$

Es bleibt zu zeigen, dass J streng monoton ist. Für beliebige $u, v \in V$ mit $u \neq v$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\langle Ju - Jv, u - v\rangle &= \left\langle Ju - J\big(\frac{u+v}{2}\big), \frac{u-v}{2}\right\rangle + \left\langle J\big(\frac{u+v}{2}\big) - Jv, \frac{u-v}{2}\right\rangle \\ &\geq \Big(\|u\| - \|\frac{u+v}{2}\|\Big)^2 + \Big(\|\frac{u+v}{2}\| - \|v\|\Big)^2 > 0 \end{aligned}$$

wegen der strikten Konvexität von V, also ist J streng monoton. □

Satz 9.21 (Charakterisierung maximal monotoner Operatoren)
Sei V reflexiver Banachraum, seien V und V^* strikt konvex, sei $A : V \rightrightarrows V^*$ monoton. Dann sind äquivalent:
(i) A ist maximal monoton.
(ii) $\mathrm{Im}\,(A + \lambda J) = V^*$ *für jedes* $\lambda > 0$.
(iii) $\mathrm{Im}\,(A + \lambda J) = V^*$ *für ein* $\lambda > 0$.

Hierbei ist $J : V \to V^*$ die Dualitätsabbildung.

Beweis: "(i)$\Rightarrow$(ii)": Die Dualitätsabbildung J ist demistetig, beschränkt, pseudomonoton und A-koerziv nach Satz 9.20, dasselbe gilt für λJ mit $\lambda > 0$. Nach Satz 9.14 hat die Inklusion

$$Au + \lambda Ju \ni f$$

eine Lösung $u \in V$ für jedes $f \in V^*$. Also gilt (ii).
"(ii)$\Rightarrow$(iii)": Klar.
"(iii)$\Rightarrow$(i)": Es gelte (iii), wir nehmen an, A sei nicht maximal monoton. Dann gibt es ein $u \in V$, $u^* \notin Au$ mit

$$\langle u^* - v^*, u - v\rangle \geq 0\,, \quad \text{für alle } v \in V,\, v^* \in Av\,. \tag{9.51}$$

Zu $u^* + \lambda Ju \in V^*$ gibt es nach (iii) ein $w \in V$, $w^* \in Aw$ mit

$$w^* + \lambda Jw = u^* + \lambda Ju\,. \tag{9.52}$$

Einsetzen von (w, w^*) in (9.51) ergibt

$$0 \leq \langle u^* - w^*, u - w\rangle = \langle \lambda Jw - \lambda Ju, u - w\rangle\ ,$$

also $\langle Jw - Ju, w - u\rangle \leq 0$. Da J streng monoton ist nach Satz 9.20, folgt $u = w$ und weiter $Ju = Jw$, somit auch $u^* = w^*$ wegen (9.52) im Widerspruch zu $u^* \notin Au$. □

Im Hilbertraumfall $A : H \rightrightarrows H$ besagt Satz 9.21, dass A genau dann maximal monoton ist, wenn

$$Au + \lambda u \ni f$$

für jedes $f \in H$ und jedes $\lambda > 0$ eine Lösung $u \in H$ hat.

Satz 9.22 (Maximale Monotonie des Subdifferentials)
Sei V reflexiver Banachraum, seien V und V^* strikt konvex. Sei $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$ konvex, unterhalbstetig und eigentlich. Dann ist $\partial\varphi : V \rightrightarrows V^*$ maximal monoton.

Beweis: Zu gegebenem $f \in V^*$ betrachten wir die Funktion $\psi : V \to (-\infty, \infty]$,

$$\psi(v) = \frac{1}{2}\|v\|^2 - \langle f, v\rangle + \varphi(v)\,.$$

Wie im Beweis von Satz 4.24 zeigt man, dass ψ ein Minimum $u \in V$ hat. Für dieses gilt nach der Summenregel für Subdifferentiale

$$0 \in \partial\psi(u) = Ju - f + \partial\varphi(u)\,,$$

also

$$\partial\varphi(u) + Ju \ni f\,.$$

Da f beliebig war, folgt nun aus Satz 9.21, dass $\partial\varphi$ maximal monoton ist. □

Beispiel 9.23 Auf dem Hilbertraum $H = L^2(\Omega)$ definieren wir

$$Av = -\Delta v\,, \quad D(A) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\,. \tag{9.53}$$

$A : D(A) \to H$ ist linear und weiterhin monoton wegen

$$\langle Av, v \rangle = \int_\Omega -v(x) \cdot \Delta v(x)\, dx = \int_\Omega \|\nabla v(x)\|^2\, dx \geq 0\,, \quad \text{für alle } v \in D(A).$$

A ist maximal monoton nach Satz 9.21 genau dann, wenn das Randwertproblem

$$-\Delta u + u = f \quad \text{in } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

für jedes $f \in L^2(\Omega)$ eine Lösung $u \in D(A)$ hat. Das ist gleichbedeutend damit, dass die eindeutige schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ des Randwertproblems die Regularität $u \in H^2(\Omega)$ hat. Das ist der Fall, wenn Ω beschränkt ist und hinreichend glatten Rand hat, siehe z.B. das Buch von Evans. □

Beispiel 9.24 Sei $H = L^2(\Omega)$. Wir definieren $\varphi : H \to (-\infty, \infty]$ durch

$$\varphi(v) = \frac{1}{2} \int_\Omega \|\nabla v(x)\|^2\, dx\,, \quad v \in D(\varphi) = H_0^1(\Omega)\,. \tag{9.54}$$

Es ist also $\varphi(v) = +\infty$, falls $v \notin H_0^1(\Omega)$. Wir wollen zeigen, dass $\partial\varphi = A$, wobei $Au = -\Delta u$ mit $D(A) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ der in Beispiel 9.23 betrachtete Operator ist.

(i) φ ist konvex und eigentlich.
(ii) φ ist unterhalbstetig: Sei (v_n, r_n) Folge in $\operatorname{epi}(\varphi)$ mit $v_n \to v$ in $L^2(\Omega)$ und $r_n \to r$. Zu zeigen ist $(v, r) \in \operatorname{epi}(\varphi)$. Wegen $\varphi(v_n) \leq r_n$ ist $\{\varphi(v_n)\}$ beschränkt, also $\{\nabla v_n\}$ beschränkt im $L^2(\Omega)$ und somit, ggf. nach Übergang zu einer Teilfolge, $\nabla v_n \rightharpoonup w$ sowie gemäß Voraussetzung $v_n \to v$ in $L^2(\Omega)$. Grenzübergang $n \to \infty$ in

$$\int_\Omega \eta \nabla v_n\, dx = -\int_\Omega v_n \nabla \eta\, dx\,, \quad \eta \in C_0^\infty(\Omega)\,,$$

ergibt

$$\int_\Omega \eta w\, dx = -\int_\Omega v \nabla \eta\, dx\,, \quad \eta \in C_0^\infty(\Omega)\,,$$

also hat v die schwache Ableitung $\nabla v = w \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$ und damit $v \in H_0^1(\Omega)$. Da die Norm (und damit auch das Quadrat der Norm) ein schwach unterhalbstetiges Funktional ist, folgt

$$\varphi(v) = \frac{1}{2} \int_\Omega \|\nabla v(x)\|^2\, dx \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{2} \int_\Omega \|\nabla v_n(x)\|^2\, dx = \liminf_{n\to\infty} \varphi(v_n) \leq \lim_{n\to\infty} r_n = r$$

und damit $(v, r) \in \operatorname{epi}(\varphi)$. Also ist $\operatorname{epi}(\varphi)$ abgeschlossen und φ unterhalbstetig.
(iii) Wir zeigen, dass $A \subset \partial\varphi$ gilt. Sei $u \in D(A)$. Für beliebiges $v \in D(\varphi)$ gilt

$$\begin{aligned}
\langle Au, v - u \rangle_H &= \int_\Omega -\Delta u \cdot (v - u)\, dx = \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v - \nabla u \rangle\, dx \\
&= \langle \nabla u, \nabla v - \nabla u \rangle_H \leq \frac{1}{2}\|\nabla u\|_H^2 + \frac{1}{2}\|\nabla v\|_H^2 - \|\nabla u\|_H^2 \\
&= \varphi(v) - \varphi(u)\,.
\end{aligned}$$

(iv) Da A nach Beispiel 9.23 maximal monoton und $\partial\varphi$ monoton ist, folgt $A = \partial\varphi$. □

Wir betrachten das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}\,(a(x,\nabla u)) + a_0(x,u) &= f\,, \quad \text{in } \Omega, \\ u(x) &= 0\,, \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{9.55}$$

wobei $a : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und $a_0 : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegebene Funktionen sind. Für $a(x,\xi) = |\xi|^{p-2}\xi$, $p > 1$, erhalten wir den sogenannten p-Laplace-Operator, $p = 2$ ergibt den Laplace-Operator. Die variationelle Formulierung ist

$$\int_\Omega \langle a(x,\nabla u(x)), \nabla v(x)\rangle \, dx + \int_\Omega a_0(x,u(x))v(x)\,dx = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx\,, \quad \text{für alle } v \in V, \tag{9.56}$$

wobei V noch festzulegen ist. Die durch a und a_0 definierten Nichtlinearitäten entstehen aus einem **Nemytskii-Operator** oder **Superpositionsoperator**, dieser hat die Form

$$(Fu)(x) = f(x,u(x))\,.$$

Satz 9.25
*Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$. Die Funktion f erfülle die **Carathéodory-Bedingungen***

$$\begin{aligned} &x \mapsto f(x,\xi) \text{ ist messbar für alle } \xi \in \mathbb{R}^m, \\ &\xi \mapsto f(x,\xi) \text{ ist stetig für alle } x \in \Omega, \end{aligned} \tag{9.57}$$

*sowie die **Wachstumsbedingung***

$$|f(x,\xi)| \le c|\xi|^{p/q} + g(x)\,, \quad \text{für fast alle } x \in \Omega \text{ und alle } \xi \in \mathbb{R}^m, \tag{9.58}$$

wobei $1 \le p,q < \infty$, $g \in L^q(\Omega)$ und $c > 0$. Dann wird durch

$$(Fu)(x) = f(x,u(x)) \tag{9.59}$$

ein stetiger und beschränkter Operator $F : L^p(\Omega;\mathbb{R}^m) \to L^q(\Omega;\mathbb{R}^l)$ definiert.

Beweis: Die Messbarkeit von $Fu : \Omega \to \mathbb{R}^l$ ergibt sich aus den Carathéodory-Bedingungen: Sei $u \in L^p(\Omega;\mathbb{R}^m)$. Sei u_n eine Folge von Elementarfunktionen, d.h. von Linearkombinationen der Form

$$u_n = \sum_j c_{j,n}\chi_{j,n}$$

mit charakteristischen Funktionen $\chi_{j,n}$, so dass $u_n \to u$ punktweise a.e., dann sind die Funktionen

$$(Fu_n)(x) = \sum_j f(x,c_{j,n})\chi_{j,n}(x)$$

messbar mit $Fu_n \to Fu$ punktweise a.e., also ist Fu messbar. Aus der Wachstumsbedingung erhalten wir mit der Dreiecksungleichung

$$\|Fu\|_q \le c\||u|^{p/q}\|_q + \|g\|_q = \|u\|_p^{p/q} + \|g\|_q\,,$$

also $F : L^p \to L^q$ und F ist beschränkt.
F ist stetig: Sei $u_n \to u$ im L^p. Dann gibt es eine Teilfolge (u_{n_k}) mit $u_{n_k} \to u$ punktweise a.e. und $|u_{n_k}| \le \beta$ mit einer von k unabhängigen Funktion $\beta \in L^p$. (Eine solche Teilfolge wird konstruiert, wenn man beweist, dass L^p vollständig ist.) Es gilt dann $Fu_{n_k} \to Fu$ punktweise a.e. und

$$|(Fu_{n_k})(x)| \le c|u_{n_k}(x)|^{p/q} + g(x) \le c|\beta(x)|^{p/q} + g(x)\,.$$

Die rechte Seite liegt im L^q. Aus dem Konvergenzsatz von Lebesgue folgt daher $Fu_{n_k} \to Fu$ im L^q. Da der Grenzwert Fu unabhängig ist von der Wahl dieser Teilfolge, folgt aus dem Konvergenzprinzip, dass die gesamte Folge konvergiert, also $Fu_n \to Fu$. $\square$

Wir wollen einen Operator A definieren durch

$$\langle Au, v\rangle = \int_\Omega \langle a(x, \nabla u(x)), \nabla v(x)\rangle\; dx \tag{9.60}$$

Satz 9.26 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, die Funktion $a : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ erfülle die Carathéodory-Bedingung (9.57) sowie die Wachstumsbedingung*

$$|a(x,\xi)| \le c(1 + |\xi|^{p-1}) \tag{9.61}$$

mit einem $p \in (1,\infty)$ und einem $c > 0$, es gelte weiterhin

$$\langle a(x,\xi) - a(x,\eta), \xi - \eta\rangle \ge 0\,, \tag{9.62}$$

$$\langle a(x,\xi), \xi\rangle \ge c_1|\xi|^p\,, \tag{9.63}$$

für alle $x \in \Omega$, $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$, mit geeignetem $c_1 > 0$. Dann wird durch (9.60) mit $V = W_0^{1,p}(\Omega)$ ein monotoner Operator $A : V \to V^*$ definiert, welcher stetig, beschränkt, pseudomonoton und koerziv ist.

Beweis: Sei $1/p + 1/q = 1$, also $p - 1 = p/q$. Die Abbildung $u \mapsto \nabla u$ ist linear und stetig von $W_0^{1,p}(\Omega)$ nach $L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)$. Gemäß Satz 9.25 wird durch

$$(\tilde{F}u)(x) = a(x, \nabla u(x))$$

ein stetiger und beschränkter Operator $\tilde{F} : W_0^{1,p}(\Omega) \to L^q(\Omega;\mathbb{R}^n)$ definiert, und es folgt

$$\int_\Omega \langle a(x,\nabla u(x)), \nabla v(x)\rangle\; dx \le \|\tilde{F}u\|_q \|\nabla v\|_p\,, \quad \text{für alle } v \in V,$$

nach der Hölderschen Ungleichung. Somit ist $A : V \to V^*$ wohldefiniert und beschränkt, und wegen

$$\|Au_n - Au\|_{V^*} = \sup_{\|v\|_V = 1} \langle Au_n - Au, v\rangle \le \|\tilde{F}u_n - \tilde{F}u\|_q$$

auch stetig. Wegen (9.62) ist A monoton und damit auch pseudomonoton nach Satz 9.19. Die Koerzivität von A folgt aus (9.63), da

$$\langle Au, u\rangle = \int_\Omega \langle a(x,\nabla u(x)), \nabla u(x)\rangle\; dx \ge c_1 \int_\Omega |\nabla u(x)|^p\, dx = c_1\|\nabla u\|_p^p$$

und damit
$$\frac{\langle Au, u\rangle}{\|u\|_V} \ge c_1\|u\|_V^{p-1} \to \infty \quad \text{falls } \|u\|_V \to \infty.$$
□

Wir behandeln nun den durch a_0 erzeugten Superpositionsoperator.

Definition 9.27 *Sei V Banachraum. Ein Operator $A : V \to V^*$ heißt* ***vollstetig****, wenn aus $u_n \rightharpoonup u$ in V folgt, dass $Au_n \to Au$ in V^*.* □

Lemma 9.28 *Jeder vollstetige Operator ist pseudomonoton.*

Beweis: Gilt $u_n \rightharpoonup u$, so folgt $Au_n \to Au$ und daher
$$\langle Au, u - v\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - v\rangle \,, \quad \text{für alle } v \in V.$$
□

Satz 9.29 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, die Funktion $a_0 : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfülle die Carathéodory-Bedingung (9.57) sowie die Wachstumsbedingung*
$$|a_0(x, r)| \le c_0(1 + |r|^{p-1}) \tag{9.64}$$
mit $p \in (1, \infty)$ und einem $c_0 > 0$, es gelte weiterhin
$$a_0(x, r)r \ge -\gamma_0(1 + |r|)\,. \tag{9.65}$$
Dann wird durch
$$\langle A_0u, v\rangle = \int_\Omega a_0(x, u(x))v(x)\, dx \tag{9.66}$$
für $V = W_0^{1,p}(\Omega)$ ein vollstetiger Operator $A_0 : V \to V^*$ definiert mit
$$\langle A_0u, u\rangle \ge -\gamma_1(1 + \|u\|_1) \tag{9.67}$$
für eine geeignete Konstante $\gamma_1 > 0$.

Beweis: Wie in Satz 9.26 ergibt sich aus (9.64), dass $u \mapsto a_0(\cdot, u(\cdot))$ einen stetigen Superpositionsoperator von L^p nach L^q definiert für $1/p+1/q = 1$. Die Einbettung von $W_0^{1,p}$ in L^p ist vollstetig nach einem Satz der Funktionalanalysis, also ist $A_0 : V \to V^*$ ebenfalls vollstetig. Die Ungleichung (9.67) folgt direkt aus (9.65) und (9.66). □

Lemma 9.30 *Sei $A_1 : V \to V^*$ pseudomonoton und $A_2 : V \to V^*$ vollstetig. Dann ist $A_1 + A_2$ pseudomonoton.*

Bemerkung: Man kann auf ähnliche Weise zeigen, dass es genügt, wenn A_2 pseudomonoton ist, das heißt, die Summe zweier pseudomonotoner Operatoren ist ebenfalls pseudomonoton.

Beweis: Ist $u_n \rightharpoonup u$ und $\limsup_n \langle (A_1 + A_2)u_n, u_n - u\rangle \le 0$, so folgt $\langle A_2u_n, u_n - u\rangle \to 0$ und daher
$$\limsup_{n\to\infty} \langle A_1u_n, u_n - u\rangle \le 0\,,$$

und weiter

$$\begin{aligned}\langle (A_1+A_2)u, u-v\rangle &\le \liminf_{n\to\infty} \langle A_1 u_n, u_n - v\rangle + \lim_{n\to\infty} \langle A_2 u_n, u_n - v\rangle \\ &= \liminf_{n\to\infty} \langle (A_1+A_2)u_n, u_n - v\rangle \ .\end{aligned}$$

□

Wir kommen zurück auf das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}\,(a(x,\nabla u)) + a_0(x,u) = f\,, &\quad \text{in } \Omega, \\ u(x) = 0\,, &\quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \tag{9.68}$$

und dessen Formulierung

$$\langle (A+A_0)u, v\rangle = \langle f, v\rangle \ , \quad \text{für alle } v \in V, \tag{9.69}$$

als nichtlineare Variationsgleichung.

Satz 9.31 *Es seien für die Funktionen a und a_0 die Voraussetzungen aus den Sätzen 9.26 und 9.29 erfüllt. Dann hat das Randwertproblem (9.68) eine Lösung $u \in W_0^{1,p}(\Omega) =: V$ für jedes $f \in V^*$.*

Beweis: Wir setzen $B = A + A_0$, $B : V \to V^*$. Nach den vorangegangenen Sätzen ist B beschränkt, demistetig und pseudomonoton. B ist außerdem koerziv zu $u_0 = 0$, da

$$\begin{aligned}\frac{\langle Bu, u\rangle}{\|u\|_V} &= \frac{\langle Au, u\rangle}{\|u\|_V} + \frac{\langle A_0 u, u\rangle}{\|u\|_V} \\ &\ge \frac{\langle Au, u\rangle}{\|u\|_V} - \gamma_1 \frac{1 + \|u\|_1}{\|u\|_V} \quad \to \infty \text{ für } \|u\|_V \to \infty,\end{aligned}$$

da der rechtsstehende Term (ohne das Minuszeichen) für $\|u\|_V \to \infty$ nach oben beschränkt ist. Wir wenden nun Satz 9.14 an (dort $A = 0$) und erhalten zu gegebenem $f \in V^*$ ein u mit $Bu = f$. □

Aus dem allgemeinen Existenzsatz erhalten wir auch einen Existenzsatz für die nichtlineare Variationsungleichung

$$\begin{aligned}\langle (A+A_0)u, v-u\rangle \ge \langle f, v-u\rangle \ , &\quad \text{für alle } v \in K, \\ u \in K\,, &\end{aligned} \tag{9.70}$$

wobei K eine abgeschlossene konvexe Teilmenge von V ist.

Satz 9.32 *Seien die Voraussetzungen von Satz 9.31 erfüllt, sei K eine nichtleere abgeschlossene konvexe Teilmenge von $V = W_0^{1,p}(\Omega)$. Dann hat die Variationsungleichung (9.70) für jedes $f \in V^*$ eine Lösung $u \in K$.*

Beweis: Wir betrachten für $B = A + A_0$ die Inklusion

$$\partial I_K(u) + Bu \ni f\,,$$

wobei I_K die Indikatorfunktion von K ist. Nach Satz 9.22 ist $\partial I_K : V \rightrightarrows V^*$ maximal monoton. Wir können daher Satz 9.14 anwenden (dort $A = \partial I_K$) und erhalten ein $u \in V$ mit $f - Bu \in \partial I_K(u)$. Es ist $u \in K$ (andernfalls wäre $I_K(u) = +\infty$), und gemäß Lemma 4.4 ist $f - Bu$ ein Stützfunktional für K in u, das heißt,

$$\langle f - Bu, v - u\rangle \le 0\,, \quad \text{für alle } v \in K.$$

□

10 Parabolische Gleichungen

Wir erläutern, wie eine parabolische Gleichung aus der allgemeinen Bilanzgleichung für eine zeitabhängige auf die Masse bezogene Dichte $\psi(x,t)$ einer Größe ψ entsteht (siehe auch meine Vorlesung PDE 1, Kapitel 5). Wir gehen aus von der differentiellen Form der Bilanzgleichung

$$\partial_t(\rho\psi) + \operatorname{div}(\rho\psi v + \Phi) = \rho z\,. \tag{10.1}$$

Hierbei ist ρ die Dichte der Masse, v die Geschwindigkeit, Φ der nichtkonvektive Fluß und z die Zufuhr. Ist ρ konstant, so wird (10.1) zu

$$\partial_t\psi + \frac{1}{\rho}\operatorname{div}\Phi + \langle v, \nabla\psi\rangle + (\operatorname{div} v)\psi = z\,. \tag{10.2}$$

Der Ansatz (für Wärmeleitung: Gesetz von Fourier, für die Diffusion von Substanzen: Gesetz von Fick)

$$\frac{1}{\rho}\Phi = -D\nabla\psi\,, \quad D \text{ Matrix}, \tag{10.3}$$

beschreibt Diffusionsvorgänge, der isotrope Fall entspricht $D = \lambda I$, $\lambda > 0$. Insgesamt ergibt sich die sogenannte **Konvektions-Diffusions-Gleichung**

$$\partial_t\psi - \operatorname{div}(D\nabla\psi) + \langle v, \nabla\psi\rangle + (\operatorname{div} v)\psi = z\,. \tag{10.4}$$

Sind D, v und z gegebene Funktionen von x und t, so erhalten wir eine lineare parabolische Gleichung (wir schreiben wieder u für die unbekannte Funktion)

$$\partial_t u + Lu = f\,, \tag{10.5}$$

wobei L ein elliptischer Operator der Form (man nennt sie Divergenzform)

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_j(a_{ij}(t,x)\partial_i u) + \sum_{i=1}^{n} b_i(t,x)\partial_i u + c(t,x)u \tag{10.6}$$

ist.

Der Prototyp dieser Gleichung ist die Diffusionsgleichung (oder Wärmeleitungsgleichung)

$$\partial_t u - \lambda\Delta u = f\,, \quad \lambda > 0\,. \tag{10.7}$$

Als Beispiel geben wir die Lösung "$u = u(t,x)$" des Anfangswertproblems

$$\partial_t u - \lambda\Delta u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \tag{10.8}$$

$$u(0,x) = u_0(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^n. \tag{10.9}$$

an. Man kann beweisen, dass die Funktion

$$u(t,x) = (4\pi\lambda t)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4\lambda t}} u_0(y)\,dy\,, \tag{10.10}$$

eine Lösung ist von (10.9) mit der Eigenschaft

$$\lim_{(t,\xi)\to(0,x)} u(t,\xi) = u_0(x)\,, \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n, \tag{10.11}$$

wenn wir voraussetzen, dass $u_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt ist. Die Formel (10.10) illustriert typische Eigenschaften von Lösungen parabolischer Gleichungen.

- Anfangswerte in einem Punkt (bzw. in einem kleinen Bereich um diesen Punkt) beeinflussen instantan (für beliebig kleine $t > 0$) die Lösung $u(t, \cdot)$ im ganzen $\mathbb{R}^n$. Man spricht von einer "unendlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit".

- Unabhängig von der Glattheit von f ist $x \mapsto u(t, x)$ eine C^∞-Funktion für jedes $t > 0$, das heißt, Diffusion glättet.

- Für $t \to \infty$ konvergiert die Lösung gegen eine Funktion $u_\infty = u_\infty(x)$, hier die Nullfunktion, welche eine stationäre Lösung ist, das heißt, eine Lösung von $-\Delta u = 0$.

Im Folgenden betrachten wir den quasilinearen elliptischen Operator

$$Lu = -\operatorname{div} a(t, x, \nabla u) + a_0(t, x, u) \tag{10.12}$$

und das zugehörige parabolische Anfangsrandwertproblem

$$\partial_t u + Lu = f \quad \text{in } \Omega_T = \Omega \times (0, T], \tag{10.13}$$

$$u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \times (0, T), \tag{10.14}$$

$$u(0, x) = u_0(x) \quad \text{für } x \in \Omega. \tag{10.15}$$

Wir gehen über zu einer variationellen Formulierung hinsichtlich der Ortsvariablen x. Sei $v \in C_0^\infty(\Omega)$ eine Testfunktion. Wir multiplizieren beide Seiten von (10.13) mit v, integrieren über Ω und führen partielle Integration im Divergenzterm durch. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_\Omega \partial_t u(t, x) v(x)\, dx + \int_\Omega \langle a(t, x, \nabla u(x)), \nabla v(x) \rangle \, dx + \int_\Omega a_0(t, x, u(t, x)) v(x)\, dx \\ = \int_\Omega f(t, x) v(x)\, dx\,. \end{aligned} \tag{10.16}$$

Wir wollen die unbekannte Funktion u auffassen als Funktion $u : [0, T] \to V$, wobei V ein geeigneter Banachraum von Funktionen auf Ω ist, also

$$u(t) : \Omega \to \mathbb{R}\,, \quad \text{für alle } t \in [0, T]. \tag{10.17}$$

Der Wert $(u(t))(x)$ entspricht dann $u(t, x)$ in (10.13). Wir formulieren das Anfangsrandwertproblem nunmehr als

$$\begin{gathered} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} (u(t), v)_H + \langle A(t, u(t)), v \rangle = \langle F(t), v \rangle_V\,, \quad \text{für alle } v \in V, \\ u(0) = u_0\,. \end{gathered} \tag{10.18}$$

Hierbei ist

$$\begin{aligned} H = L^2(\Omega)\,, \quad (w, v)_H &= \int_\Omega w(x) v(x)\, dx\,, \\ V = H_0^1(\Omega)\,, \quad F &: [0, T] \to V^*\,, \end{aligned} \tag{10.19}$$

$\langle F(t), v \rangle_V$ bedeutet die Anwendung von $F(t)$ auf v, und

$$\langle A(t, w), v \rangle_V = \int_\Omega \langle a(t, x, \nabla w(x)), \nabla v(x) \rangle \, dx + \int_\Omega a_0(t, x, w(x)) v(x)\, dx\,. \tag{10.20}$$

In welchem Raum liegt $u'(t)$? Da in (10.18)

$$v \mapsto \langle A(t,u(t)), v\rangle_V$$

ein Element von V^* (und nicht von H^*) definiert, kann man zunächst auch nur dasselbe von

$$v \mapsto \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(u(t),v)_H$$

erwarten. Dem entspricht, dass für eine schwache Lösung

$$u(t,\cdot) \in H_0^1(\Omega)\,, \quad t \in (0,T)$$

die Zeitableitung $\partial_t u(t,\cdot)$ in (10.13) die Regularität von $(Lu)(t,\cdot)$ hat, das heißt, zweite distributionelle Ableitung einer Funktion in $H_0^1(\Omega)$ ist, also erste distributionelle Ableitung einer Funktion in $L^2(\Omega)$.

Es stellt sich heraus, dass der Begriff des **Evolutionstripels** den geeigneten abstrakten Rahmen für die vorliegende Situation liefert.

Ist $v^* \in V^*$ und $v \in V$, so verwenden wir die Notation

$$\langle v^*, v\rangle_V := v^*(v)\,. \tag{10.21}$$

Satz 10.1 *Sei H ein Hilbertraum und V ein reflexiver Banachraum über $\mathbb{R}$, sei $j : V \to H$ linear, stetig und injektiv, sei $j(V)$ dicht in H. Dann wird durch*

$$\langle j^*(h), v\rangle_V = (h, j(v))_H \tag{10.22}$$

eine lineare, stetige und injektive Abbildung $j^* : H \to V^*$ mit $\|j^*\| \le \|j\|$ definiert, und $j^*(H)$ ist dicht in V^*.

Bemerkung: Nur der Fall $j(V) \ne H$ ist interessant, im Fall $j(V) = H$ ist j ein Banachraumisomorphismus.

Beweis: Sei $h \in H$. Dann definiert die rechte Seite von (10.22) wegen

$$|(h,j(v))_H| \le \|h\|_H \, \|j(v)\|_H \le \|h\|_H \, \|j\| \, \|v\|_V \tag{10.23}$$

ein Element $j^*(h) \in V^*$ mit

$$\|j^*(h)\|_{V^*} \le \|j\| \, \|h\|_H\,. \tag{10.24}$$

j^* ist offensichtlich linear und wegen (10.24) auch stetig mit $\|j^*\| \le \|j\|$. Ist $j^*(h) = 0$, so ist

$$(h, j(v))_H = 0\,, \qquad \text{für alle } v \in V\,. \tag{10.25}$$

Da $j(V)$ dicht ist in H, folgt $(h,w)_H = 0$ für alle $w \in H$ und damit $h = 0$. Also ist j^* injektiv. Es bleibt zu zeigen, dass $j^*(H)$ dicht ist in V^*. Sei $v^{**} \in V^{**}$ beliebig mit $v^{**}(j^*(H)) = 0$. Es genügt zu zeigen, dass dann $v^{**} = 0$ sein muss. (Ist $W = \mathrm{cl}\,(j^*(H))$ echt in V^* enthalten, so gibt es nach dem Satz von Hahn-Banach ein $v^{**} \in V^{**}$ mit $v^{**}(W) = 0$, aber $v^{**} \ne 0$). Da V reflexiv ist, finden wir ein $v \in V$ mit

$$\langle v^*, v\rangle_V = v^{**}(v^*)\,, \qquad \text{für alle } v^* \in V^*\,. \tag{10.26}$$

Es gilt dann für alle $h \in H$

$$0 = v^{**}(j^*(h)) = \langle j^*(h), v \rangle_V = (h, j(v))_H \,, \tag{10.27}$$

also ist $j(v) = 0$ und wegen der Injektivität von j auch $v = 0$, also auch $v^{**} = 0$. □

Folgerung 10.2 *In der Situation von Satz 10.1 gilt außerdem: Die Abbildung $i : V \to V^*$, $i = j^* \circ j$, ist linear, stetig und injektiv, $i(V)$ ist dicht in V^*, und*

$$\langle i(v), w \rangle_V = (j(v), j(w))_H = \langle i(w), v \rangle_V \ , \qquad \text{für alle } v, w \in V \, . \tag{10.28}$$

Beweis: Folgt unmittelbar aus Satz 10.1 und den Definitionen. □

Es ergibt sich also

$$V \xrightarrow{j} H \xrightarrow{j^*} V^* \tag{10.29}$$

mit stetigen und dichten Einbettungen.

Definition 10.3 (Evolutionstripel, Gelfand-Dreier)
Unter den Voraussetzungen von Satz 10.1 heißt (10.29) ein Evolutionstripel oder ein Gelfand-Dreier.

Für das parabolische Problem (10.13) – (10.15) setzen wir wie bereits erläutert

$$V = H_0^1(\Omega) \, , \quad H = L^2(\Omega) \, , \tag{10.30}$$

und

$$j : H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega) \, , \tag{10.31}$$

die durch $j(v)(x) = v(x)$ definierte kanonische Einbettung. Die Abbildung j^* läßt sich wie folgt interpretieren. Es ist für $h \in H = L^2(\Omega)$ und $v \in V$

$$\langle j^*(h), v \rangle_V = (h, j(v))_H = \int_\Omega h(x) v(x) \, dx \, . \tag{10.32}$$

Ordnen wir dem Element $j^*(h) \in V^*$ vermittels des Rieszschen Darstellungssatzes ein Element $w \in V$ zu, so gilt

$$\langle j^*(h), v \rangle_V = \int_\Omega \langle \nabla w(x), \nabla v(x) \rangle \, dx \, , \tag{10.33}$$

falls wir als Skalarprodukt im $H_0^1(\Omega)$ das L^2-Skalarprodukt der Gradienten verwenden (welches äquivalent ist zur Restriktion des Standardskalarprodukts in $H^1(\Omega)$, nach dem Satz von Poincaré). Aus (10.32) und (10.33) folgt, dass w gerade die schwache Lösung des elliptischen Randwertproblems

$$\begin{aligned} -\Delta w &= h \quad \text{in } \Omega, \\ w &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \tag{10.34}$$

ist.

Die Einbettungen j und j^* eines Evolutionstripels induzieren vermittels

$$u \mapsto j \circ u \mapsto j^* \circ j \circ u \tag{10.35}$$

Einbettungen der zugehörigen L^p-Räume

$$L^p(0,T;V) \to L^p(0,T;H) \to L^p(0,T;V^*)\,. \tag{10.36}$$

Im weiteren Verlauf dieses Kapitels werden wir j und j^* oft weglassen, das heißt, wenn wir schreiben "$h = v$" oder "$v = w$" mit $v \in V$, $h \in H$ und $w \in V^*$ meinen wir "$h = j(v)$" bzw. "$w = i(v) = j^*(j(v))$".

Wie in Kapitel 6 betrachten wir schwache Zeitableitungen, die vermittels des Bochner-Integrals definiert werden. Die folgende Definition ist angepasst auf die Situation des Evolutionstripels und somit etwas anders als in Kapitel 6.

Definition 10.4 (Schwache Zeitableitung)
Sei $u \in L^1(0,T;V)$. Ein $f \in L^1(0,T;V^*)$ heißt schwache Ableitung von u, wenn gilt

$$\int_0^T f(t)\eta(t)\,dt = -\int_0^T u(t)\eta'(t)\,dt\,, \tag{10.37}$$

für alle $\eta \in C_0^\infty(0,T)$. □

Die Integrale in (10.37) sind Bochner-Integrale, und gemäß unserer Sprachregelung ist "$u(t)$" auf der rechten Seite als "$i(u(t))$" zu lesen.

Es gelten die Rechenregeln

$$\left\langle v^*\,,\int_0^T u(t)\,dt\right\rangle_V = \int_0^T \langle v^*, u(t)\rangle_V\,dt\,,\quad v^* \in V^*\,,\, u \in L^1(0,T;V)\,, \tag{10.38}$$

und

$$\left\langle \int_0^T u(t)\,dt\,,\, v\right\rangle_V = \int_0^T \langle u(t), v\rangle_V\,dt\,,\quad v \in V\,,\, u \in L^1(0,T;V^*)\,. \tag{10.39}$$

Satz 10.5 *Sei V Banachraum. Ist $v^* \in V^*$ und $u \in L^1(0,T;V)$, so ist $t \mapsto \langle v^*, u(t)\rangle_V$ integrierbar, und (10.38) gilt. Ist $v \in V$ und $u \in L^1(0,T;V^*)$, so ist $t \mapsto \langle u(t), v\rangle_V$ integrierbar, und (10.39) gilt.*

Beweis: Völlig analog zum Beweis von Satz 6.21. □

Lemma 10.6 *Sei $V \xrightarrow{j} H \xrightarrow{j^*} V^*$ Evolutionstripel, $u \in L^1(0,T;V)$, $f \in L^1(0,T;V^*)$. Dann ist f genau dann schwache Ableitung von u, wenn gilt*

$$\int_0^T (u(t),v)_H\eta'(t)\,dt = -\int_0^T \langle f(t), v\rangle_V\,\eta(t)\,dt\,,\quad \forall\, v \in V,\, \eta \in C_0^\infty(0,T)\,. \tag{10.40}$$

Beweis: Wegen (10.39) gilt für alle $v \in V$ und alle $\eta \in C_0^\infty(0,T)$

$$\begin{aligned} \int_0^T (j(u(t)), j(v))_H \eta'(t)\,dt &= \int_0^T \langle \eta'(t) i(u(t)), v\rangle_V \; dt \\ &= \left\langle \int_0^T i(u(t))\eta'(t)\,dt\,,\, v \right\rangle_V \,, \end{aligned} \tag{10.41}$$

und

$$-\int_0^T \langle f(t), v\rangle_V \,\eta(t)\,dt = \left\langle \int_0^T -f(t)\eta(t)\,dt\,,\, v \right\rangle_V \,. \tag{10.42}$$

Also ist (10.40) wegen $\langle i(u(t), v\rangle_V = (j(u(t)), j(v))_H$ äquivalent zu

$$\int_0^T u(t)\eta'(t)\,dt = -\int_0^T f(t)\eta(t)\,dt\,, \qquad \text{für alle } \eta \in C_0^\infty(0,T)\,. \tag{10.43}$$

□

Folgerung 10.7 *Ist $f \in L^1(0,T;V^*)$ schwache Ableitung von $u \in L^1(0,T;V)$, so ist für jedes $v \in V$ die Funktion $t \mapsto \langle f(t), v\rangle_V$ schwache Ableitung der Funktion $t \mapsto (u(t), v)_H$ im $L^1(0,T)$.*

Lemma 10.8 *Sei V separabler Banachraum, $f \in L^1(0,T;V^*)$. Gilt*

$$\int_0^T \eta(t) f(t)\,dt = 0\,, \qquad \textit{für alle } \eta \in C_0^\infty(0,T)\,, \tag{10.44}$$

so gilt $f = 0$ fast überall.

Beweis: Völlig analog zum Beweis von Lemma 6.23. □

Satz 10.9 *Sei V separabler Banachraum, $u \in L^1(0,T;V)$. Dann gibt es höchstens eine schwache Ableitung $f \in L^1(0,T;V^*)$ von u. Falls sie existiert, bezeichnen wir sie mit u'.*

Beweis: Völlig analog zum Beweis von Satz 6.24. □

Wir formulieren nun noch einmal das parabolische Anfangsrandwertproblem als "abstraktes" Anfangswertproblem (die Null-Randwerte sollen im Raum V stecken)

$$\langle u'(t), v\rangle_V + \langle A(t, u(t)), v\rangle_V = \langle F(t), v\rangle_V \,, \quad \text{für alle } v \in V, \tag{10.45}$$

$$u(0) = u_0\,. \tag{10.46}$$

Wir suchen eine Lösung u im Raum

$$W = \{u : u \in L^p(0,T;V),\ u' \in L^q(0,T;V^*)\}\,, \tag{10.47}$$

für welche (10.45) für fast alle $t \in (0,T)$ gilt. Hierbei ist $1 < p < \infty$ fest und $1/p + 1/q = 1$, und p wird passend zur Nichtlinearität A gewählt. Außerdem soll (10.46) gelten. Dass (10.46) überhaupt Sinn macht (die Elemente $u \in W$ sind zunächst nur fast überall definiert), werden wir gleich in Satz 10.12 feststellen.

Lemma 10.10 *Der Raum W ist ein Banachraum, versehen mit der Norm*

$$\|u\|_W = \|u\|_{L^p(0,T;V)} + \|u'\|_{L^q(0,T;V^*)} \,.$$

Beweis: Weggelassen. $\square$

Im Folgenden wird generell vorausgesetzt, dass $V \xrightarrow{j} H \xrightarrow{j^*} V^*$ ein gegebenes Evolutionstripel ist, und dass V separabel ist.

Lemma 10.11 *Der Unterraum $W \cap C^1([0,T];V)$ ist dicht in W.*

Beweis: Wird wie auch sonst bei Sobolevräumen durch Approximation mit Funktionen $u_\varepsilon = u * \rho_\varepsilon$, ρ_ε Glättungskern, bewiesen. $\square$

Satz 10.12 *Es gilt $W \subset C([0,T];H)$, und die kanonische Einbettung ist stetig.*

Bemerkung: Mit "$W \subset C([0,T];H)$" ist gemeint, dass jede Äquivalenzklasse in W eine stetige Funktion von $[0,T]$ nach H enthält.

Beweis: Es genügt zu zeigen, dass die kanonische Einbettung I von $W \cap C^1([0,T];V)$ nach $C([0,T];H)$ beschränkt ist bezüglich der Normen von W und $C([0,T];H)$. Wegen Lemma 10.11 lässt sich I dann eindeutig zu einer linearen stetigen Abbildung von W nach $C([0,T];H)$ fortsetzen. Zur Beschränktheit von I: Sei $u \in W \cap C^1([0,T];V)$. Für alle $t, s \in [0,T]$ gilt

$$\|u(t)\|_H^2 = \|u(s)\|_H^2 + 2\int_s^t (u'(\tau), u(\tau))_H \, d\tau \,. \tag{10.48}$$

Nach Lemma 10.2 gilt

$$\|u(s)\|_H^2 = \langle u(s), u(s)\rangle_V \le \|u(s)\|_{V^*}\|u(s)\|_V \le \|u(s)\|_V \max_{\tau\in[0,T]} \|u(\tau)\|_{V^*} \,,$$

sowie mit der Hölderschen Ungleichung

$$\begin{aligned}\int_s^t |(u(\tau), u'(\tau))_H| \, d\tau &= \int_s^t |\langle u(\tau), u'(\tau)\rangle_V| \, d\tau \le \int_s^t \|u(\tau)\|_V \|u'(\tau)\|_{V^*} \, d\tau \\ &\le \|u\|_{L^p(V)}\|u'\|_{L^q(V^*)} \,,\end{aligned}$$

mit den Abkürzungen $L^p(V)$ für $L^p(0,T;V)$ usw. Integration über $[0,T]$ bezüglich s in (10.48) führt auf

$$\begin{aligned} T\|u(t)\|_H^2 &\le \|u\|_{L^1(V)} \max_{\tau\in[0,T]} \|u(\tau)\|_{V^*} + 2T\|u\|_{L^p(V)}\|u'\|_{L^q(V^*)} \\ &\le C(\|u\|_W \max_{\tau\in[0,T]} \|u(\tau)\|_{V^*} + \|u\|_W^2) \,, \qquad \text{für alle } t \in [0,T]. \end{aligned} \tag{10.49}$$

Weiter gilt für alle $\tau, s \in [0,T]$

$$u(\tau) = u(s) + \int_s^\tau u'(r) \, dr \,,$$

also
$$\|u(\tau)\|_{V^*} \le \|u(s)\|_{V^*} + \int_0^T \|u'(r)\|_{V^*}\, dr = \|u(s)\|_{V^*} + \|u'\|_{L^1(V^*)}\,,$$
und Integration über $[0,T]$ bezüglich s ergibt
$$T\|u(\tau)\|_{V^*} \le \|u\|_{L^1(V^*)} + T\|u'\|_{L^1(V^*)} \le C(\|u\|_{L^1(V)} + T\|u'\|_{L^q(V^*)})\,,$$
also
$$\max_{\tau\in[0,T} \|u(\tau)\|_{V^*} \le C\|u\|_W\,. \tag{10.50}$$
Aus (10.49) und (10.50) folgt nun
$$\max_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_H^2 \le C\|u\|_W^2 \tag{10.51}$$
und damit die behauptete Beschränktheit. □

Satz 10.13 *Es gilt die Regel der partiellen Integration*
$$(u(t),v(t))_H - (u(s),v(s))_H = \int_s^t \langle u'(\tau),v(\tau)\rangle_V + \langle v'(\tau),u(\tau)\rangle_V \; d\tau \tag{10.52}$$
für alle $u,v\in W$ und alle $s,t\in[0,T]$.

Beweis: Für $u,v \in W\cap C^1([0,T];V)$ gilt
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(u(t),v(t))_H = (u'(t),v(t))_H + (v'(t),u(t))_H = \langle u'(t),v(t)\rangle_V + \langle v'(t),u(t)\rangle_V\,.$$
Integration ergibt (10.52). Sind $u,v\in W$ beliebig, so wählen wir Folgen (u_n), (v_n) in $W\cap C^1([0,T];V)$ mit $u_n\to u$ und $v_n\to v$ in W gemäß Lemma 10.11 und führen in der Formel (10.52) für u_n und v_n den Grenzübergang $n\to\infty$ durch; dies ist auf der linken Seite möglich wegen der stetigen Einbettung in $C([0,T];H)$ gemäß Satz 10.12. □

Wir betrachten nun die Zeitableitung als Operator
$$\mathcal{D}u = u' \tag{10.53}$$
auf den beiden Definitionsbereichen
$$D_1(\mathcal{D}) = \{u : u\in W\,,\ u(0)=0\}\,, \tag{10.54}$$
$$D_2(\mathcal{D}) = \{u : u\in W\,,\ u(T)=u(0)\}\,. \tag{10.55}$$

Satz 10.14 *Durch (10.53), (10.54) und (10.53), (10.55) werden maximal monotone Operatoren $\mathcal{D}: L^p(0,T;V) \rightrightarrows L^q(0,T;V^*)$ definiert.*

Beweis: $\mathcal{D}$ ist linear, und für $u \in D_i(\mathcal{D})$ gilt nach Satz 10.13

$$\langle \mathcal{D}u, u\rangle = \int_0^T \langle u'(t), u(t)\rangle_V \, dt = \frac{1}{2}(\|u(T)\|_H^2 - \|u(0)\|_H^2) \geq 0\,, \tag{10.56}$$

also ist $\mathcal{D}$ monoton. Zum Beweis der maximalen Monotonie betrachten wir (jeweils für die beiden Fälle $i = 1, 2$) beliebige $v \in L^p(0, T; V)$ und $w \in L^q(0, T; V^*)$ mit der Eigenschaft

$$\langle w - \mathcal{D}u, v - u\rangle \geq 0\,, \quad \text{für alle } u \in D_i(\mathcal{D}), \tag{10.57}$$

und zeigen, dass dann $v \in D_i(\mathcal{D})$ sowie $w = \mathcal{D}v = v'$ gelten. Seien $z \in V$ und $\eta \in C_0^\infty(0, T)$ beliebig. Die durch

$$u(t) = \eta(t)z$$

definierte Funktion liegt sowohl in $D_1(\mathcal{D})$ als auch in $D_2(\mathcal{D})$ und erfüllt $\langle \mathcal{D}u, u\rangle = 0$ wegen (10.56). Daher wird (10.57) zu

$$0 \leq \langle w, v\rangle - \int_0^T \langle \eta'(t)v(t) + \eta(t)w(t), z\rangle_V \, dt\,.$$

Da z beliebig war, folgt

$$\int_0^T \eta'(t)v(t) + \eta(t)w(t)\, dt = 0\,. \tag{10.58}$$

Da auch η beliebig war, ist $w = v'$ (schwache Ableitung) und damit $v \in W$. Einsetzen in (10.57) ergibt für alle $u \in D_i(\mathcal{D})$ mit $i = 1$ bzw. $i = 2$ wegen Satz 10.13

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle v' - u', v - u\rangle &= \int_0^T \langle v'(t) - u'(t), v(t) - u(t)\rangle_V \, dt \\ &= \frac{1}{2}(\|v(T) - u(T)\|_H^2 - \|v(0) - u(0)\|_H^2)\,. \end{aligned} \tag{10.59}$$

Sei (v_n) eine Folge in V mit $v_n \to v(T) \in H$. Im Fall $i = 1$ setzen wir $u_n(t) = tv_n/T$. Es ist $u_n(0) = 0$, also $u_n \in D_1(\mathcal{D})$ und gemäß (10.59)

$$\|v(0)\|_H^2 \leq \|v(T) - v_n\|_H^2\,.$$

Mit $n \to \infty$ folgt $v(0) = 0$ und damit $v \in D_1(\mathcal{D})$. Im Fall $i = 2$ setzen wir $u_n(t) = v_n$. Es ist $u_n(0) = v_n = u_n(T)$, also $u_n \in D_2(\mathcal{D})$ und gemäß (10.59)

$$\|v(0) - v_n\|_H^2 \leq \|v(T) - v_n\|_H^2\,.$$

Grenzübergang $n \to \infty$ ergibt $\|v(0) - v(T)\| = 0$ und damit $v \in D_2(\mathcal{D})$. □

Wir betrachten nun das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}u)(t) + (\mathcal{A}u)(t) &= f(t)\,, \quad t \in (0, T)\,, \\ u(0) &= u_0\,. \end{aligned} \tag{10.60}$$

Hierbei ist $\mathcal{D}u = u'$.

Satz 10.15
Sei $\mathcal{A} : L^p(0,T;V) \to L^q(0,T;V^*)$ pseudomonoton, beschränkt, demistetig und bezüglich u_0 koerziv, seien $f \in L^q(0,T;V^*)$ und $u_0 \in V$. Dann hat das Anfangswertproblem (10.60) eine Lösung $u \in W$. Ist $\mathcal{A}$ außerdem streng monoton, so ist die Lösung eindeutig.

Beweis: Wir wollen Satz 9.14 anwenden. Im Falle $u_0 = 0$ genügt es festzustellen, dass $\mathcal{D}$ nach Satz 10.14 maximal monoton ist mit

$$D(\mathcal{D}) = \{u : u \in W\,,\ u(0) = 0\}\,.$$

Andernfalls betrachten wir das transformierte Problem

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}z)(t) + (\tilde{\mathcal{A}}z)(t) &= f(t)\,, \quad t \in (0,T)\,, \\ z(0) &= 0\,, \end{aligned} \tag{10.61}$$

mit

$$\tilde{\mathcal{A}}(z) = \mathcal{A}(z + u_0)\,, \quad \tilde{\mathcal{A}} : L^p(0,T;V) \to L^q(0,T;V^*)\,. \tag{10.62}$$

Hierbei ist $u_0 : [0,T] \to V$ als die in t konstante Fortsetzung des Anfangswerts u_0 zu interpretieren. Der Operator $\tilde{\mathcal{A}}$ ist ebenfalls pseudomonoton, beschränkt und demistetig sowie bezüglich 0 koerziv. Nach Satz 9.14 existiert eine Lösung $z \in W$ von (10.62), nach Lemma 9.4 ist diese eindeutig falls $\mathcal{A}$ und damit auch $\tilde{\mathcal{A}}$ streng monoton ist. Wir setzen

$$u(t) = z(t) + u_0\,.$$

Dann ist $u(0) = u_0$ und

$$(\mathcal{D}u)(t) = (\mathcal{D}z)(t) = -(\tilde{\mathcal{A}}z)(t) + f(t) = -(\mathcal{A}(z + u_0))(t) + f(t) = -(\mathcal{A}u)(t) + f(t)\,,$$

also löst u das Anfangswertproblem (10.60). Da jede Lösung u vermittels $z = u - u_0$ auch eine Lösung von (10.61) liefert, überträgt sich die Eindeutigkeit auch auf (10.60). □

Ein parabolisches Anfangsrandwertproblem erhalten wir, wenn der Operator $\mathcal{A}$ aus einem elliptischen Operator entsteht. Wir setzen

$$(\mathcal{A}u)(t) = A(t, u(t))\,, \tag{10.63}$$

wobei $A : (0,T) \times V \to V^*$ mit $V = W_0^{1,p}(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$ definiert ist durch

$$\langle A(t,w), v\rangle_V = \int_\Omega \langle a(t,x,\nabla w(x)), \nabla v(x)\rangle\, dx + \int_\Omega a_0(t,x,w(x))v(x)\, dx\,. \tag{10.64}$$

Die Funktionen a und a_0 sollen die Bedingungen aus dem vorigen Kapitel gleichmäßig in t erfüllen, das heißt, für geeignete Konstante sollen gelten die Wachstumsbedingungen

$$\begin{aligned} |a(t,x,\xi)| &\le c(1 + |\xi|^{p-1})\,, \\ \langle a(t,x,\xi), \xi\rangle &\ge c_1|\xi|^p\,, \end{aligned} \tag{10.65}$$

sowie

$$\begin{aligned} |a_0(t,x,r)| &\le c(1 + |r|^{p-1})\,, \\ a_0(t,x,r)r &\ge -\gamma_0(1 + |r|)\,, \end{aligned} \tag{10.66}$$

sowie die Monotoniebedingung

$$\langle a(t,x,\xi) - a(t,x,\eta), \xi - \eta \rangle \geq 0 \,. \tag{10.67}$$

Aus den Sätzen (9.26) und (9.29) folgt, dass der Operator $w \mapsto A(t,w)$ für jedes $t \in (0,T)$ beschränkt, demistetig, pseudomonoton und koerziv ist. Man kann weiter zeigen (was wir hier nicht tun), dass durch

$$t \mapsto A(t, u(t)) \tag{10.68}$$

eine Bochner-messbare Abbildung von $(0,T)$ nach V^* definiert wird für jedes $u \in L^p(0,T;V)$, und dass der durch (10.64) definierte Operator $\mathcal{A}$ die Voraussetzungen von Satz 10.15 erfüllt. Damit erhalten wir einen Existenz- und Eindeutigkeitssatz für das zugehörige parabolische Anfangsrandwertproblem.