

Höhere Mathematik II für Bau- und Vermessungswesen *

Martin Brokate †

Inhaltsverzeichnis

1	Lineare Abbildungen	1
2	Eigenwerte	20
3	Skalarfelder, Partielle Ableitungen	29
4	Maxima und Minima im Mehrdimensionalen	38
5	Taylorentwicklung	42
6	Vektorfelder, Ableitungen	47
7	Maxima und Minima bei Nebenbedingungen	53
8	Parameterabhängige Integrale	57
9	Bereichsintegrale, 2.Teil	61
10	Kurvenintegrale, Oberflächenintegrale	71
11	Lineare Differentialgleichungen	85

*Vorlesungsskript, SS 2010

†Zentrum Mathematik, TU München

1 Lineare Abbildungen

In diesem Abschnitt betrachten wir Funktionen, die einen Vektorraum V auf einen Vektorraum W abbilden. Wir bezeichnen sie mit T , also in unserer Schreibweise

$$T : V \rightarrow W. \quad (1.1)$$

Eine solche Funktion T heißt **linear**, wenn gilt

$$T(u + v) = T(u) + T(v), \quad \text{für alle } u, v \in V, \quad (1.2)$$

$$T(\alpha v) = \alpha T(v), \quad \text{für alle } v \in V, \alpha \in \mathbb{R}. \quad (1.3)$$

Statt "Funktion" verwendet man in der Mathematik auch das Wort "Abbildung". Man spricht üblicherweise von "**linearen Abbildungen**" (statt von "linearen Funktionen").

Definition 1.1 (Lineare Abbildung)

Seien V, W Vektorräume. Ein $T : V \rightarrow W$ heißt lineare Abbildung, wenn (1.2) und (1.3) gelten. \square

Jede lineare Abbildung erfüllt

$$T(0) = 0,$$

da $T(0) = T(0 \cdot 0) = 0 \cdot T(0) = 0$ wegen (1.3).

Wir betrachten Beispiele.

1. Die einfachste lineare Abbildung ist die **Nullabbildung** $T : V \rightarrow W$ mit

$$T(v) = 0 \quad (1.4)$$

für alle $v \in V$. Wir bezeichnen sie ebenfalls mit 0.

2. Ist $V = W$, so ist die **Identität**, definiert durch

$$T(v) = v, \quad (1.5)$$

eine lineare Abbildung.

3. Die Projektion auf die i -te Koordinate,

$$p_i(x) = x_i, \quad (1.6)$$

definiert eine lineare Abbildung $p_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

4. Ist $A \in \mathbb{R}^{(m,n)}$ eine Matrix, so definiert

$$T(x) = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.7)$$

eine lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, da

$$T(x+y) = A(x+y) = Ax + Ay = T(x) + T(y), \quad T(\alpha x) = A(\alpha x) = \alpha Ax = \alpha T(x).$$

Wir erinnern an das Lösen linearer Gleichungssysteme

$$Ax = b. \quad (1.8)$$

Die durch (1.7) definierte lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist surjektiv (injektiv, bijektiv) genau dann, wenn (1.8) für jede rechte Seite $b \in \mathbb{R}^m$ mindestens (höchstens, genau) eine Lösung hat.

5. Das Skalarprodukt im \mathbb{R}^n ist “bezüglich jeder Variablen linear”,

$$\begin{aligned}\langle x + z, y \rangle &= \langle x, y \rangle + \langle z, y \rangle, & \langle \alpha x, y \rangle &= \alpha \langle x, y \rangle, \\ \langle x, y + z \rangle &= \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle, & \langle x, \alpha y \rangle &= \alpha \langle x, y \rangle,\end{aligned}$$

das heißt, die durch

$$T_x(y) = \langle x, y \rangle, \quad T^y(x) = \langle x, y \rangle$$

definierten Abbildungen $T_x, T^y : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sind linear. Man nennt das Skalarprodukt daher **bilinear** als Abbildung von $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

6. Die Determinante ist **multilinear**. Hält man alle Spalten einer quadratischen Matrix fest bis auf eine, und betrachtet man die Determinante als Funktion dieser einen Spalte, so ist sie linear. Ebenso für Zeilen.

7. Durch

$$T(f) = \int_a^b f(x) dx \tag{1.9}$$

wird eine lineare Abbildung $T : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert, also eine Abbildung, welche als Argument eine stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und als Wert eine Zahl hat. Die Linearität folgt aus den Rechenregeln für das Integral.

8. Durch

$$T(f) = f', \tag{1.10}$$

wobei f' die Ableitung von f bezeichnet, wird eine lineare Abbildung

$$T : C^1[a, b] \rightarrow C[a, b]$$

definiert. Hierbei bezeichnet $C^1[a, b]$ den Vektorraum aller derjenigen Funktionen, die auf $[a, b]$ differenzierbar sind und deren Ableitung eine stetige Funktion ist. Die Linearität folgt aus den Rechenregeln für die Ableitung. Dieses T ist ein Beispiel für eine Abbildung zwischen Funktionenräumen, welche die Ableitung involviert. Solche Abbildungen heißen auch **Differentialoperatoren**, wie schon in Kapitel 12, HM 1, erwähnt.

Sei $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ linear. Wegen

$$T(x) = T(x \cdot 1) = xT(1)$$

hat sie die Form

$$T(x) = mx, \quad m = T(1). \tag{1.11}$$

Wir erhalten die Geraden durch den Nullpunkt mit Steigung m , also alle Geraden durch den Nullpunkt bis auf die y -Achse.

Eine Gerade, die nicht durch den Nullpunkt verläuft,

$$T(x) = mx + b, \quad b \neq 0,$$

definiert **keine** lineare Abbildung nach Definition 1.1, da $T(0) = b \neq 0$. Nichtsdestrotrotz werden im allgemeinen Sprachgebrauch Geraden häufig als “lineare Funktionen” bezeichnet. Der präzise mathematische Begriff für Abbildungen, die aus einer linearen Abbildung plus einer Konstante bestehen, ist “affin lineare Funktion”.

Sei nun $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$T(t) = tv, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1.12)$$

wobei $v \in \mathbb{R}^n$ ein fester Vektor ist. T ist linear, wir erhalten als Bildmenge $T(\mathbb{R})$ die Gerade durch den Nullpunkt mit dem Richtungsvektor v .

Im Raum \mathbb{R}^3 werden Ebenen E durch den Nullpunkt ebenfalls durch lineare Abbildungen dargestellt, und zwar in der ersten Variante durch

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad T(t, s) = tv + sw, \quad (1.13)$$

als Bild des \mathbb{R}^2 , wobei $v, w \in \mathbb{R}^3$ zwei feste Vektoren sind, die die Ebene aufspannen. In der zweiten Variante (Hessesche Normalform) haben wir

$$T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad T(x) = n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3, \quad (1.14)$$

und wir erhalten die Ebene

$$E = \{x : T(x) = 0\} = T^{-1}(\{0\})$$

als Urbildmenge der Null zur Abbildung T .

Wir haben in (1.7) gesehen, dass Vektoren im \mathbb{R}^n linear auf Vektoren im \mathbb{R}^m abgebildet werden, wenn man sie mit einer festen Matrix $A \in \mathbb{R}^{(m,n)}$ multipliziert. Es stellt sich heraus, dass jede lineare Abbildung zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen auf diese Weise dargestellt werden kann. Sei nämlich

$$T : V \rightarrow W \quad (1.15)$$

eine lineare Abbildung zwischen Vektorräumen V und W , seien

$$\{v_1, \dots, v_n\}, \quad \{w_1, \dots, w_m\}, \quad (1.16)$$

Basen von V bzw. W . Wir können alle Vektoren in W , also insbesondere alle Vektoren $T(v_j)$, auf eindeutige Weise als Linearkombination der Basiselemente in W darstellen, sei

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij}w_i. \quad (1.17)$$

Sei nun $v \in V$ beliebig, wir stellen v ebenfalls dar als Linearkombination der Basis (diesmal in V),

$$v = \sum_{j=1}^n x_jv_j. \quad (1.18)$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} T(v) &= T\left(\sum_{j=1}^n x_jv_j\right) = \sum_{j=1}^n T(x_jv_j) = \sum_{j=1}^n x_jT(v_j) = \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m a_{ij}w_i \\ &= \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right) w_i \end{aligned}$$

Der Koordinatenvektor $y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ der Darstellung von $T(v)$ bezüglich der Basis von W ,

$$T(v) = \sum_{i=1}^m y_i w_i,$$

ergeben sich also aus dem Koordinatenvektor $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ der Darstellung von v bezüglich der Basis von V , wenn wir setzen

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, \quad (1.19)$$

was in Matrix-Vektor-Schreibweise nichts anderes ist als

$$y = Ax. \quad (1.20)$$

Gemäß (1.17) steht in der j -ten Spalte der Matrix A gerade der Koordinatenvektor von $T(v_j)$. Auf diese Weise wird jede lineare Abbildung $T : V \rightarrow W$ **nach Festlegung je einer Basis im Urbild- und Bildraum** durch eine Matrix A dargestellt, sie hängt von der Wahl der Basen ab. Sind $V = \mathbb{R}^n$ und $W = \mathbb{R}^m$, so wählt man oft die aus den Einheitsvektoren bestehende kanonische Basis.

Als Beispiel betrachten wir die **Drehung** im \mathbb{R}^2 , also in der Ebene, um den Nullpunkt im mathematisch positiven Sinn mit Drehwinkel φ . Es handelt sich um eine lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, es ist

$$T(e_1) = T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad T(e_2) = T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (1.21)$$

Die zugehörige Matrix $A \in \mathbb{R}^{(2,2)}$ ist also gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (1.22)$$

Mit der Matrix A können wir berechnen, wohin ein gegebener Punkt durch die Drehung bewegt wird. Die Drehung des Punktes $x = (1, 2) \in \mathbb{R}^2$ um 0 mit dem Drehwinkel φ führt etwa zum Punkt

$$Ax = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi - 2 \sin \varphi \\ \sin \varphi + 2 \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Für $\varphi = 0$ ergibt sich in (1.22) die Einheitsmatrix, für den rechten Winkel $\varphi = \pi/2$ wird

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Eine Drehung im Raum \mathbb{R}^3 stellen wir uns so vor: Wir fixieren eine Drehachse durch den Nullpunkt, also eine Gerade, die durch einen Vektor $a \in \mathbb{R}^3$, $a \neq 0$ erzeugt wird. Zu jedem Punkt $v = ta$, $t \in \mathbb{R}$, auf der Drehachse betrachten wir die dazu senkrechte Ebene. Diese wird um den Punkt v und um den festen Winkel φ gedreht. Für den Fall, dass die Drehachse mit einer Koordinatenachse übereinstimmt, können wir die Darstellung (1.22)

der Drehung im \mathbb{R}^2 direkt übertragen. Ist etwa $a = e_1$, so ergibt sich die Drehung um die x -Achse, sie wird (bezüglich einer ON-Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$) dargestellt durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (1.23)$$

Für den Fall einer allgemeinen Drehachse sind die Formeln erheblich komplizierter, siehe etwa Meyberg/Vachenauer I im Abschnitt 6.4.

Sind umgekehrt eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{(m,n)}$ und Basen in V und W wie oben gegeben, so wird dadurch eine lineare Abbildung $T : V \rightarrow W$ wie folgt festgelegt. Wir definieren T auf den Basisvektoren v_j in V durch die Formel (1.17), also durch

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i, \quad 1 \leq j \leq n. \quad (1.24)$$

Damit T eine lineare Abbildung wird, muss ein beliebiges $v \in V$ der Form

$$v = \sum_{j=1}^n x_j v_j \quad (1.25)$$

abgebildet werden auf

$$T(v) = T\left(\sum_{j=1}^n x_j v_j\right) = \sum_{j=1}^n T(x_j v_j) = \sum_{j=1}^n x_j T(v_j). \quad (1.26)$$

Man kann nachprüfen, dass die so auf ganz V definierte Abbildung T linear ist, und zwar unabhängig davon, ob wir die Bilder $T(v_j) \in W$ der Basisvektoren v_j durch (1.24) oder sonst irgendwie definieren. Wir erkennen daher, dass wir eine lineare Abbildung eindeutig dadurch festlegen können, dass wir ihre Werte auf einer Basis von V vorschreiben (wofür es keine Einschränkung gibt) und dann durch (1.25), (1.26) auf ganz V fortsetzen. Dazu ein Beispiel in der Ebene: Wir setzen fest

$$T(e_1) = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T(e_2) = e_1 + e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Matrix ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Abbildung T bildet das Quadrat mit den Ecken $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ und $(0, 1)$ ab auf das Parallelogramm mit den Ecken $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(2, 1)$ und $(1, 1)$, für alle anderen Vektoren $v \in \mathbb{R}^2$ ergibt sich $T(v)$ aus (1.26) mit $v_j = e_j$ und $n = 2$.

Sind $T : V \rightarrow W$ und $S : W \rightarrow Z$ lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen V, W, Z , so ist die **Komposition** $S \circ T : V \rightarrow Z$ definiert. Sie ist ebenfalls linear, da gilt

$$\begin{aligned} (S \circ T)(u + v) &= S(T(u + v)) = S(T(u) + T(v)) = S(T(u)) + S(T(v)) \\ &= (S \circ T)(u) + (S \circ T)(v), \\ (S \circ T)(\alpha u) &= S(T(\alpha u)) = S(\alpha T(u)) = \alpha S(T(u)) = \alpha (S \circ T)(u). \end{aligned}$$

Haben V, W, Z die Basen $\{v_1, \dots, v_n\}$, $\{w_1, \dots, w_m\}$ und $\{z_1, \dots, z_l\}$, und gehören zu T und S die Matrizen $A \in \mathbb{R}^{(m,n)}$ und $B \in \mathbb{R}^{(l,m)}$ bezüglich dieser Basen, so hat $S \circ T$ bezüglich der Basen in V und Z die Matrixdarstellung

$$C = BA \in \mathbb{R}^{(l,n)}, \quad (1.27)$$

wie man erkennt, wenn man die Überlegungen aus (1.15) – (1.20) zweimal hintereinander anwendet.

Sei nun $T : V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung, sei $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V . Wir fragen uns, wie sich die Matrixdarstellung von T ändert, wenn wir zu einer anderen Basis $\{\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n\}$ übergehen. Zu diesem Zweck betrachten wir zunächst die Identität auf V ,

$$id : V \rightarrow V, \quad id(v) = v, \quad (1.28)$$

und wenden auf sie die Prozedur aus (1.15) – (1.20) an, wobei wir im Urbildraum V die Basis $\{\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n\}$ und im Bildraum (ebenfalls V) die Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$ zugrundelegen. Es ist dann

$$\tilde{v}_j = id(\tilde{v}_j) = \sum_{i=1}^m \varphi_{ij} v_i, \quad 1 \leq j \leq n, \quad (1.29)$$

mit geeigneten Koeffizienten φ_{ij} , die zusammengenommen eine Matrix $\Phi \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ bilden. Nehmen wir nun im Urbildraum die Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$ und im Bildraum die Basis $\{\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n\}$, so ergibt sich analog

$$v_j = id(v_j) = \sum_{i=1}^m \psi_{ij} \tilde{v}_i, \quad 1 \leq j \leq n, \quad (1.30)$$

mit einer weiteren Matrix $\Psi \in \mathbb{R}^{(n,n)}$. Wir wenden nun die Überlegungen zur Komposition zweier linearer Abbildungen an und setzen $\tilde{S} = S = id$, wobei \tilde{S} aber von der Basis $\{\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n\}$ zur Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$ wechselt gemäß (1.29), und S umgekehrt gemäß (1.30). Die Komposition $S \circ \tilde{S}$ ist dann ebenfalls die Identität auf V , diesmal aber zur selben Basis $\{\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n\}$, so dass $S \circ \tilde{S}$ durch die Einheitsmatrix I (siehe Kapitel 12, Teil 1) dargestellt wird. Aus (1.27) folgt nun

$$I = \Psi \Phi. \quad (1.31)$$

Indem wir $\tilde{S} \circ S$ betrachten, erhalten wir analog

$$I = \Phi \Psi. \quad (1.32)$$

Daraus folgt aber, dass Φ invertierbar ist und

$$\Psi = \Phi^{-1} \quad (1.33)$$

gilt. Wir kehren nun zur ursprünglichen Abbildung $T : V \rightarrow V$ zurück, sei $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ ihre Matrixdarstellung zur Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$. Die zusammengesetzte Abbildung

$$S \circ T \circ \tilde{S} : V \rightarrow V \quad (1.34)$$

ist einerseits gleich T , ist aber andererseits auf die geänderte Basis $\{\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n\}$ bezogen. Indem wir (1.27) zweimal anwenden, sehen wir, dass ihre Matrixdarstellung gleich

$$\Psi A \Phi = \Phi^{-1} A \Phi =: \tilde{A} \quad (1.35)$$

ist. Wir fassen das Ergebnis zusammen: Wird eine lineare Abbildung $T : V \rightarrow V$ bezüglich einer Basis durch eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ beschrieben, so ergibt sich beim **Basiswechsel** zu einer anderen Basis eine neue Matrix \tilde{A} der Form

$$\tilde{A} = \Phi^{-1} A \Phi, \quad (1.36)$$

mit einer geeigneten invertierbaren Matrix $\Phi \in \mathbb{R}^{(n,n)}$. Es gilt auch umgekehrt (wir stellen das nicht im einzelnen dar), dass jede invertierbare Matrix $\Phi \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ eine Matrixdarstellung $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ von T zu einer anderen, durch Φ festgelegten Basis von V liefert.

Definition 1.2 (Ähnliche Matrizen)

Zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ heißen *ähnlich*, wenn es eine invertierbare Matrix $\Phi \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ gibt mit

$$B = \Phi^{-1} A \Phi. \quad (1.37)$$

□

Statt (1.37) können wir äquivalent auch schreiben

$$\Phi B = A \Phi. \quad (1.38)$$

Orthogonalität. Wir erinnern an das Skalarprodukt zweier Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\langle x, y \rangle = x^T y = (x_1 \ \cdots \ x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad (1.39)$$

und daran, dass sie orthogonal sind nach Definition, wenn

$$\langle x, y \rangle = 0. \quad (1.40)$$

Sind $x, y \in \mathbb{R}^n$ orthogonal, so schreiben wir auch

$$x \perp y. \quad (1.41)$$

Sei $e \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor der Länge 1. Wir können einen beliebigen Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ zerlegen in eine Summe

$$v = w + z, \quad (1.42)$$

so dass w parallel zu e und z orthogonal zu e ist, indem wir setzen

$$w = \langle v, e \rangle e, \quad z = v - w = v - \langle v, e \rangle e. \quad (1.43)$$

Es gilt nämlich

$$\langle z, e \rangle = \langle v, e \rangle - \langle w, e \rangle = \langle v, e \rangle - \langle \langle v, e \rangle e, e \rangle = \langle v, e \rangle - \langle v, e \rangle \langle e, e \rangle = 0,$$

da $\langle e, e \rangle = \|e\|^2 = 1$. Der Vektor w entspricht der (Orthogonal-)Projektion von v auf die Gerade durch 0 mit Richtung e . Hierzu ein Beispiel: Sei

$$e = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Die Projektion von v auf e ist gegeben durch

$$w = \langle v, e \rangle e = \frac{8}{25} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad z = v - w = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{8}{25} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} -24 \\ 18 \end{pmatrix}.$$

Definition 1.3 (Orthogonalbasis, Orthonormalbasis)

Eine Menge $\{v_1, \dots, v_m\}$ von Vektoren im \mathbb{R}^n heißt *Orthogonalsystem*, falls alle v_i von Null verschieden sind und

$$\langle v_i, v_j \rangle = 0, \quad \text{für alle } i \neq j, \quad (1.44)$$

gilt. Ein Orthogonalsystem heißt *Orthogonalbasis*, falls es eine Basis des \mathbb{R}^n bildet. Ein Orthogonalsystem (Orthogonalbasis) heißt *Orthonormalsystem (Orthonormalbasis)*, falls alle v_i die Länge 1 haben. Statt Orthonormalbasis sagt man auch *ON-Basis*. \square

Für eine Orthonormalbasis $\{v_1, \dots, v_n\}$ im \mathbb{R}^n gilt also

$$\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (1.45)$$

Die aus den Einheitsvektoren e_i bestehende kanonische Basis des \mathbb{R}^n ist eine Orthonormalbasis. Die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

bilden eine Orthogonalbasis des \mathbb{R}^2 , die Vektoren

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis des \mathbb{R}^2 .

Sind $\{v_1, \dots, v_m\}$ linear unabhängige Vektoren im \mathbb{R}^n , welche kein Orthonormalsystem bilden, so können wir mit dem **Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren** daraus wie folgt ein Orthonormalsystem $\{w_1, \dots, w_m\}$ gewinnen. Wir setzen zunächst

$$w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}. \quad (1.46)$$

Wir definieren \tilde{w}_2 als Projektion auf die Richtung w_1 wie in (1.42), (1.43), also

$$\tilde{w}_2 = v_2 - \langle v_2, w_1 \rangle w_1, \quad (1.47)$$

dann ist $\tilde{w}_2 \perp w_1$ wie oben gezeigt, und setzen

$$w_2 = \frac{\tilde{w}_2}{\|\tilde{w}_2\|}. \quad (1.48)$$

Damit ist $\{w_1, w_2\}$ ein Orthonormalsystem. Analog geht man bei der Konstruktion der weiteren w_k vor. Sei $\{w_1, \dots, w_{k-1}\}$ bereits als Orthonormalsystem konstruiert. Wir setzen

$$\tilde{w}_k = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle v_k, w_i \rangle w_i. \quad (1.49)$$

Es gilt $\tilde{w}_k \perp w_j = 0$ für alle $j < k$, da

$$\begin{aligned} \langle \tilde{w}_k, w_j \rangle &= \left\langle v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle v_k, w_i \rangle w_i, w_j \right\rangle = \langle v_k, w_j \rangle - \sum_{i=1}^{k-1} \langle v_k, w_i \rangle \underbrace{\langle w_i, w_j \rangle}_{= 0 \text{ falls } i \neq j} \\ &= \langle v_k, w_j \rangle - \langle v_k, w_j \rangle \underbrace{\langle w_j, w_j \rangle}_{=1} = 0. \end{aligned}$$

Aus der linearen Unabhängigkeit von $\{v_1, \dots, v_k\}$ folgt (was wir hier nicht beweisen wollen), dass $\tilde{w}_k \neq 0$. Wir setzen schließlich

$$w_k = \frac{\tilde{w}_k}{\|\tilde{w}_k\|}. \quad (1.50)$$

Im Spezialfall $n = m$ entsteht auf diese Weise aus der Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Orthonormalbasis $\{w_1, \dots, w_n\}$ im \mathbb{R}^n .

Definition 1.4 (Orthogonale Matrix)

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ heißt **orthogonal**, falls ihre Spalten eine Orthonormalbasis im \mathbb{R}^n bilden. \square

Die Drehmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (1.51)$$

ist orthogonal, wie man unmittelbar nachprüfen kann, ebenso die daraus entstehende Matrix

$$A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (1.52)$$

Die Matrix (1.52) entspricht einer Drehung um den Winkel φ der eine Spiegelung an der x -Achse vorgeschaltet ist, das ist insgesamt gleichbedeutend mit einer Spiegelung an der durch

$$x_1 \sin \frac{\varphi}{2} - x_2 \cos \frac{\varphi}{2} = 0$$

definierten Gerade. Für die Drehmatrix in (1.51) gilt $\det(A) = 1$, die Matrix der Spiegelung in (1.52) hat die Determinante -1 . Andere orthogonale Matrizen im Zweidimensionalen gibt es nicht.

Die Spalten A_i einer orthogonalen Matrix $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ sind gemäß Definition 1.4 linear unabhängig, es ist also $\text{rang}(A) = n$ und A invertierbar, und

$$A_i^T A_j = \langle A_i, A_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (1.53)$$

Schreiben wir (1.53) als Matrixprodukt, so erhalten wir

$$A^T A = I, \quad (1.54)$$

also ist A genau dann orthogonal, wenn

$$A^{-1} = A^T. \quad (1.55)$$

Im Gegensatz zu einer beliebigen invertierbaren Matrix lässt sich also die Inverse einer orthogonalen Matrix ganz einfach berechnen, und damit ein Gleichungssystem

$$Ax = b$$

sofort lösen durch

$$x = A^T b,$$

aber natürlich **nur, wenn A orthogonal ist!** Ist A orthogonal, so ist wegen (1.55) A^T ebenfalls orthogonal, da

$$A^{TT} A^T = AA^T = AA^{-1} = I, \quad (A^T)^{-1} = A^{TT}.$$

Da die Spalten von A^T gerade die Zeilen von A sind, folgt hieraus, dass auch **die Zeilen einer orthogonalen Matrix $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$** eine ON-Basis des \mathbb{R}^n bilden.

Aus (1.54) erhalten wir unmittelbar

$$1 = \det(I) = \det(A^T A) = \det(A^T) \det(A) = (\det(A))^2,$$

für eine orthogonale Matrix gilt also

$$|\det(A)| = 1, \quad \det(A) = \pm 1. \quad (1.56)$$

Wir betrachten nun geometrische Eigenschaften orthogonaler Matrizen. Zunächst stellen wir fest, dass für beliebige quadratische Matrizen $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ gilt

$$\langle x, Ay \rangle = \langle A^T x, y \rangle, \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^n. \quad (1.57)$$

Es ist nämlich

$$\langle x, Ay \rangle = x^T Ay = (x^T Ay)^T = y^T A^T x = \langle y, A^T x \rangle = \langle A^T x, y \rangle$$

Ist nun $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ orthogonal, so gilt

$$\langle x, y \rangle = \langle x, Ay \rangle = \langle x, A^T Ay \rangle = \langle Ax, Ay \rangle, \quad (1.58)$$

das heißt, die Multiplikation mit einer orthogonalen Matrix lässt das Skalarprodukt zweier Vektoren invariant. Daraus folgt

$$\|Ax\| = \sqrt{\langle Ax, Ax \rangle} = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \|x\|, \quad (1.59)$$

man sagt, A ist **längentreu**. Ebenso ist A auch **winkeltreu**, denn es gilt (falls $x, y \neq 0$)

$$\frac{\langle Ax, Ay \rangle}{\|Ax\| \|Ay\|} = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}, \quad (1.60)$$

das heißt, der Kosinus des von Ax und Ay eingeschlossenen Winkels ist gleich dem Kosinus des von x und y eingeschlossenen Winkels, die beiden Winkel sind gleich.

Definition 1.5 (Orthogonale Abbildung)

Eine lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt orthogonal, falls

$$\langle Tv, Tw \rangle = \langle v, w \rangle \quad (1.61)$$

gilt für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$. □

Diese Definition ist “koordinatenfrei” und nimmt nicht auf eine Basis Bezug. Sie lässt sich auch in anderen Vektorräumen (auch unendlichdimensionalen) verwenden, wenn man ein Skalarprodukt hat, z.B. bei der Fourier-Zerlegung von Funktionen.

Ist $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ orthogonale Abbildung und $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine ON-Basis, so ist wegen

$$\langle Tv_i, Tv_j \rangle = \langle v_i, v_j \rangle$$

auch $\{Tv_1, \dots, Tv_n\}$ eine ON-Basis. Insbesondere liefert die Matrixdarstellung von T bezüglich der kanonischen Basis $\{e_1, \dots, e_n\}$ eine orthogonale Matrix $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$, da in den Spalten von A gerade die Bilder Te_j der Basisvektoren stehen. Ist umgekehrt $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ eine orthogonale Matrix und T die zugehörige lineare Abbildung (bezüglich der kanonischen Basis), so ist T eine orthogonale Abbildung, da für beliebige Vektoren

$$v = \sum_{i=1}^n x_i v_i, \quad w = \sum_{j=1}^n y_j v_j,$$

gilt

$$\begin{aligned} \langle Tv, Tw \rangle &= \left\langle T \left(\sum_{i=1}^n x_i v_i \right), T \left(\sum_{j=1}^n y_j v_j \right) \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i T(v_i), \sum_{j=1}^n y_j T(v_j) \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \langle T(v_i), T(v_j) \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \langle v_i, v_j \rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^n x_i v_i, \sum_{j=1}^n y_j v_j \right\rangle = \langle v, w \rangle. \end{aligned}$$

Ist $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ orthogonal, so ist auch T^{-1} orthogonal, wie man unmittelbar aus Definition 1.5 erkennt, oder daran, dass die zugeordnete Matrix A^{-1} orthogonal ist. Die Komposition zweier orthogonaler Abbildungen (und damit auch das Produkt zweier orthogonaler Matrizen) ist ebenfalls orthogonal.

Wir betrachten nun Spiegelungen im \mathbb{R}^3 an einer Ebene

$$E = \{w : \langle e, w \rangle = 0, w \in \mathbb{R}^3\}, \quad (1.62)$$

durch 0, wobei $e \in \mathbb{R}^3$ ein auf E senkrechter Einheitsvektor (= Vektor der Länge 1) ist. Ist $v \in \mathbb{R}^3$ beliebig, so erhalten wir durch

$$w = v - \langle v, e \rangle e$$

wegen $\langle w, e \rangle = 0$, $w \in E$ und $v - w \perp E$ (das heißt, $v - w \perp z$ für alle $z \in E$) gerade die Orthogonalprojektion von w auf E . Der an E gespiegelte Punkt ist nun

$$\tilde{v} = w - \langle v, e \rangle e = v - 2 \langle v, e \rangle e.$$

Die Spiegelung an E wird also beschrieben durch die Abbildung

$$T(v) = v - 2 \langle v, e \rangle e, \quad T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3. \quad (1.63)$$

Diese Abbildung ist offenbar linear, sie ist auch orthogonal, da

$$\langle Tv, Tw \rangle = \langle v - 2 \langle v, e \rangle e, w - 2 \langle w, e \rangle e \rangle = \langle v, w \rangle,$$

wie man durch Ausmultiplizieren erkennt.

Wir haben bereits festgestellt, dass die allgemeine Form einer orthogonalen Matrix im Zweidimensionalen die einer Drehung (falls die Determinante gleich 1 ist) oder einer Geradenspiegelung (falls die Determinante gleich -1 ist) ist. Wir bestimmen nun die **allgemeine Form einer orthogonalen Matrix A im Dreidimensionalen**, zunächst für den Fall $\det(A) = 1$. Wir suchen als erstes eine Drehachse, diese entspricht einem Vektor $x \in \mathbb{R}^3$ mit

$$Ax = x, \quad x \neq 0, \quad (1.64)$$

was gleichbedeutend ist mit

$$(A - I)x = 0, \quad x \neq 0. \quad (1.65)$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \det(A - I) &= \det(A - AA^T) = \det(A(I - A^T)) = \underbrace{\det(A)}_{=1} \det(I - A^T) = \det(I - A) \\ &= (-1)^3 \det(A - I), \end{aligned}$$

also ist $\det(A - I) = 0$, und es muss ein $x \in \mathbb{R}^3$ mit $x \neq 0$ geben, welches (1.65) erfüllt. Wir setzen

$$v_1 = \frac{x}{\|x\|} \quad (1.66)$$

und wählen eine ON-Basis $\{v_2, v_3\}$ für die auf x senkrechte Ebene. Dann ist $\{v_1, v_2, v_3\}$ eine ON-Basis des \mathbb{R}^3 . Die Transformationsmatrix $\Phi \in \mathbb{R}^{(3,3)}$ des Basiswechsels von $\{v_1, v_2, v_3\}$ nach $\{e_1, e_2, e_3\}$ besteht aus den Spalten v_1, v_2, v_3 in den kanonischen Koordinaten und ist daher orthogonal. Die Matrix

$$\tilde{A} = \Phi^{-1}A\Phi$$

repräsentiert dieselbe Abbildung wie A , aber nunmehr bezogen auf die Basis $\{v_1, v_2, v_3\}$. Da Φ und Φ^{-1} orthogonal sind, ist \tilde{A} ebenfalls orthogonal. Es gilt

$$\tilde{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \Phi^{-1}A\Phi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \Phi^{-1}Av_1 = \Phi^{-1}v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

das heißt, \tilde{A} hat die Form

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}.$$

Da auch die Zeilen von \tilde{A} eine ON-Basis bilden, muss die erste Zeile die Länge 1 haben, also gilt

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}.$$

Da die zweite und dritte Spalte von \tilde{A} aufeinander senkrecht stehen und die Länge 1 haben, muss die noch unbekannte 2×2 -Restmatrix ebenfalls orthogonal sein und die Determinante 1 haben, sie muss also die Form einer zweidimensionalen Drehmatrix haben. Insgesamt ergibt sich

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (1.67)$$

Wir fassen zusammen: Ist $A \in \mathbb{R}^{(3,3)}$ orthogonal mit $\det(A) = 1$, so stellt A eine Drehung um eine geeignete Drehachse dar.

Ist $A \in \mathbb{R}^{(3,3)}$ orthogonal mit $\det(A) = -1$, so ist die Matrix

$$B = A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

orthogonal mit $\det(B) = 1$, also eine Drehung, und A setzt sich aus einer Drehung und einer Spiegelung an der von e_1 und e_2 aufgespannten Ebene zusammen.

Als Beispiel betrachten wir die Matrix

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}. \quad (1.68)$$

A ist orthogonal, und $\det(A) = 1$, wie man direkt nachrechnen kann. Es handelt sich daher um eine Drehung. Wir bestimmen die Drehachse als einen Vektor $x \in \mathbb{R}^3$ mit $x \neq 0$ und

$$Ax = x,$$

oder äquivalent

$$0 = 3(A - I)x = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & -1 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Wir bringen die Matrix auf Dreiecksgestalt,

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & -1 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Eine Lösung $x \neq 0$ erhalten wir beispielsweise aus

$$x_3 = 1, \quad 3x_2 = 3x_3, \quad x_1 = x_2 + 2x_3,$$

also

$$x = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Den Drehwinkel φ erhalten wir, indem wir den Winkel zwischen z und Az für irgendeinen auf x senkrecht stehenden Vektor $z \in \mathbb{R}^3$ bestimmen, beispielsweise

$$z = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Es ist dann

$$\cos \varphi = \frac{\langle z, Az \rangle}{\|z\| \|Az\|} = -\frac{1}{2}.$$

Orthogonale Unterräume, Orthogonalprojektion. Ist U ein Unterraum von \mathbb{R}^n , so bezeichnen wir mit

$$U^\perp = \{w : w \in \mathbb{R}^n, \langle w, u \rangle = 0 \text{ für alle } u \in U\} \quad (1.69)$$

die Menge der auf U senkrecht stehenden Vektoren, sie bildet ebenfalls einen Unterraum im \mathbb{R}^n . Im \mathbb{R}^3 gilt etwa: Ist U eine Gerade durch 0, so ist U^\perp diejenige Ebene durch 0, auf der diese Gerade senkrecht steht; ist umgekehrt U eine Ebene durch 0, so ist U^\perp die darauf senkrecht stehende Gerade durch 0.

Es gilt

$$(U^\perp)^\perp = U. \quad (1.70)$$

Sei nun U ein fester Unterraum von \mathbb{R}^n mit einer Basis $\{v_1, \dots, v_m\}$. Zu beliebigem $v \in \mathbb{R}^n$ suchen wir eine Zerlegung der Form

$$v = u + w, \quad \text{wobei } u \in U, w \in U^\perp. \quad (1.71)$$

Eine solche Zerlegung ist eindeutig: Ist nämlich

$$v = \tilde{u} + \tilde{w}$$

eine weitere Zerlegung mit $\tilde{u} \in U, \tilde{w} \in U^\perp$, so ist

$$u - \tilde{u} = \tilde{w} - w, \quad u - \tilde{u} \in U, \tilde{w} - w \in U^\perp,$$

also muss $u = \tilde{u}, w = \tilde{w}$ gelten, da der Nullvektor der einzige Vektor ist, der auf sich selbst senkrecht steht. Wir suchen nun u als Linearkombination

$$u = \sum_{j=1}^m x_j v_j. \quad (1.72)$$

Damit (1.71) erfüllt ist, muss $v - u \in U^\perp$ gelten, also $v - u \perp v_i$ für alle Basisvektoren v_i , also

$$0 = \langle v_i, v - u \rangle = \left\langle v_i, v - \sum_{j=1}^m x_j v_j \right\rangle = \langle v_i, v \rangle - \sum_{j=1}^m x_j \langle v_i, v_j \rangle, \quad (1.73)$$

das heißt, $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ löst das Gleichungssystem

$$Cx = b, \quad \text{wobei } c_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle, d_i = \langle v_i, v \rangle, 1 \leq i, j \leq m. \quad (1.74)$$

Da es wie gezeigt höchstens eine Lösung gibt und $C \in \mathbb{R}^{(m,m)}$ quadratisch ist, hat (1.74) genau eine Lösung.

Satz 1.6 (Projektionssatz)

Ist U Unterraum von \mathbb{R}^n , so gibt es zu jedem $v \in \mathbb{R}^n$ genau ein $u \in U$, $w \in U^\perp$ mit

$$v = u + w. \quad (1.75)$$

Wir bezeichnen u als die **(Orthogonal-)Projektion von v auf den Unterraum U** .

Zu einer vorgegebenen Basis von U kann die Projektion wie in (1.72) – (1.74) dargestellt als Lösung eines linearen Gleichungssystems berechnet werden.

Ist $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine ON-Basis im \mathbb{R}^n , und setzen wir

$$U = \text{span}\{v_1, \dots, v_m\}, \quad (1.76)$$

so ist

$$U^\perp = \text{span}\{v_{m+1}, \dots, v_n\}, \quad (1.77)$$

also insbesondere

$$\dim(U) + \dim(U^\perp) = n, \quad \dim(U^\perp) = n - \dim(U). \quad (1.78)$$

Sind $x, y \in \mathbb{R}^n$ Vektoren mit $x \perp y$, so gilt

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + 2 \underbrace{\langle x, y \rangle}_{=0} + \langle y, y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2,$$

also der **Satz des Pythagoras**

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2. \quad (1.79)$$

Wir betrachten nochmals zu vorgegebenem $v \in \mathbb{R}^n$ die Zerlegung mit der Orthogonalprojektion

$$v = u + w, \quad u \in U, w \in U^\perp. \quad (1.80)$$

Ist $\tilde{u} \in U$ ein beliebiger Vektor, so folgt aus dem Satz des Pythagoras

$$\|v - \tilde{u}\|^2 = \underbrace{\|v - u\|}_{\in U^\perp}^2 + \underbrace{\|u - \tilde{u}\|}_{\in U}^2 = \|v - u\|^2 + \|u - \tilde{u}\|^2, \quad (1.81)$$

also

$$\|v - \tilde{u}\|^2 > \|v - u\|^2, \quad \text{für alle } \tilde{u} \in U \text{ mit } \tilde{u} \neq u. \quad (1.82)$$

Die Projektion u von v auf U ist also dasjenige Element von U , welches **den kleinsten Abstand** von v hat.

Lineare Ausgleichsrechnung. Wir erläutern das Problem zunächst an einem Beispiel. Wir betrachten eine Größe y , die von einer anderen Größe t abhängt. Aus irgendwelchen Gründen sind wir der Ansicht, dass die Abhängigkeit die Form einer Geraden hat,

$$y = f(t) = at + b, \quad (1.83)$$

wir haben uns also auf das **mathematische Modell** (1.83) festgelegt. Wir wissen aber nicht, welche Gerade das ist, das heißt, wir kennen die **Modellparameter** $a, b \in \mathbb{R}$ nicht.

Wir sind aber in der Lage, **Messungen** vorzunehmen, das heißt, zu gewissen Werten von t die zugehörigen Werte von y zu ermitteln. Im Beispiel (1.83) würden “im Prinzip” zwei Messungen ausreichen: Kennen wir y_1 zu t_1 und y_2 zu t_2 , so können wir ansetzen

$$\begin{aligned} y_1 &= at_1 + b \\ y_2 &= at_2 + b \end{aligned} \tag{1.84}$$

und wir können die unbekannt Parameter a und b als Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} t_1 & 1 \\ t_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \tag{1.85}$$

bestimmen. Da der Zweck einer solchen Parameterbestimmung ist, in der Zukunft zu vorgegebenen anderen Werten von t die zugehörigen y -Werte aus (1.83) zu berechnen (und sich damit weitere Messungen zu ersparen), sollte deren Bestimmung möglichst zuverlässig sein. Es ist also naheliegend, mehr als zwei Messungen vorzunehmen, man hat dann Punktepaare

$$(t_1, y_1), \dots, (t_m, y_m), \quad m > 2, \tag{1.86}$$

vorliegen. Oft tritt als zusätzliche Schwierigkeit auf, dass die Bestimmung der Parameter aus den Messungen numerisch kritisch ist, im Beispiel (1.84) etwa dann, wenn t_1 sehr dicht bei t_2 liegt, so dass die Spalten der Matrix in (1.85) “beinahe” linear abhängig sind. (In der einfachen Situation des Beispiels lässt sich dieses Problem leicht beheben, in komplexeren Situationen sind eingehendere mathematische Überlegungen erforderlich.)

Hat man im Beispiel mehr als zwei Messungen vorgenommen, so ist nicht zu erwarten, dass die Punktepaare (1.86) auf einer Geraden liegen, so dass also für keine Wahl der Parameter a und b alle Bedingungen

$$y_i = f(t_i), \quad 1 \leq i \leq m, \tag{1.87}$$

gleichzeitig erfüllt werden können. Man will nun a und b so wählen, dass die Abweichungen (auch **Residuen** genannt)

$$r_i = f(t_i) - y_i \tag{1.88}$$

möglichst klein werden. Da gibt es nun verschiedene Ansätze. Man kann minimieren

$$\sum_{i=1}^m |r_i| = \sum_{i=1}^m |f(t_i) - y_i|, \tag{1.89}$$

oder

$$\sum_{i=1}^m r_i^2 = \sum_{i=1}^m (f(t_i) - y_i)^2, \tag{1.90}$$

oder

$$\max_{1 \leq i \leq m} |r_i| = \max_{1 \leq i \leq m} |f(t_i) - y_i|, \tag{1.91}$$

es gibt auch andere Möglichkeiten. Wir illustrieren die Ergebnisse an zwei unterschiedlichen Datensätzen. Als erstes Beispiel wählen wir die Punktepaare

$$(1, 1), (2, 3), (3, 1), (4, 3), (5, 1). \tag{1.92}$$

Es ergeben sich waagerechte Geraden, und zwar $y = 1$ (“Mehrheitsabstimmung”) für Kriterium (1.89), $y = 2$ (Mittelwert) für Kriterium (1.91), und $y = 1.8$ für Kriterium (1.90). Als zweites Beispiel betrachten wir

$$(1, 1), (2, 1), (3, 99), (4, 1), (5, 1). \quad (1.93)$$

Kriterium (1.89) liefert wieder $y = 1$, Kriterium (1.91) ergibt $y = 50$, und Kriterium (1.90) führt auf $y = 20.6$.

Am weitesten verbreitet ist Kriterium (1.90), man spricht auch von der **Fehlerquadratmethode**. Für die Wahl dieses Kriteriums gibt es eine Begründung aus der mathematischen Statistik, wenn wir die Differenzen $f(t_i) - y_i$ als zufällige Fehler interpretieren und annehmen, dass diese voneinander unabhängig sind. Die durch die Anwendung von Kriterium (1.90) gewonnene Gerade heißt **Regressionsgerade** oder auch **Ausgleichsgerade**.

Wir können die Residuen r_i in einen Vektor $r \in \mathbb{R}^m$ zusammenfassen und in Matrix-Vektor-Notation schreiben

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 & 1 \\ \vdots & \\ t_m & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}, \quad (1.94)$$

oder kürzer

$$r = Ax - y, \quad (1.95)$$

wobei

$$x = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

der Vektor der unbekanntenen Koeffizienten und

$$A = \begin{pmatrix} t_1 & 1 \\ \vdots & \\ t_m & 1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}, \quad (1.96)$$

eine gegebene Matrix im $\mathbb{R}^{(m,2)}$ bzw. ein gegebener Vektor im \mathbb{R}^m sind. Die Fehlerquadratmethode (Kriterium (1.90)) besteht nun darin, die Länge (oder, was auf dasselbe herauskommt, das Quadrat der Länge) des Vektors $r \in \mathbb{R}^m$ zu minimieren.

Sieht man von der speziellen Form der Matrix A in (1.96) ab, wie sie sich bei der Bestimmung der Regressionsgerade ergibt, so lautet das allgemeine **Problem der linearen Ausgleichsrechnung**

Gegeben $A \in \mathbb{R}^{(m,n)}$, $y \in \mathbb{R}^m$ mit $m \geq n$, gesucht $x \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\|Ax - y\|^2 = \min_{\tilde{x} \in \mathbb{R}^n} \|A\tilde{x} - y\|^2. \quad (1.97)$$

Wir wollen also $x \in \mathbb{R}^n$ so bestimmen, dass der Vektor Ax den kleinstmöglichen Abstand zum Vektor y hat.

Es stellt sich heraus, dass wir die Lösung dieses Problems erhalten, indem wir ein geeignetes lineares Gleichungssystem lösen. Dieses Gleichungssystem ergibt sich auf folgende Weise. Die zu minimierende Funktion ist

$$J(x) = \|Ax - y\|^2, \quad J: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}. \quad (1.98)$$

Wir nehmen an, $x \in \mathbb{R}^n$ sei Minimum von J . Wir betrachten J "entlang einer Geraden" im \mathbb{R}^n durch den Punkt x in eine beliebige vorgegebene Richtung h und setzen dazu

$$g(t) = J(x + th), \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}. \quad (1.99)$$

Die Funktion g hat ein Minimum in $t = 0$, da $g(0) = J(x)$. Es muss also gelten

$$g'(0) = 0. \quad (1.100)$$

Nun ist

$$\begin{aligned} g(t) &= J(x + th) = \|A(x + th) - y\|^2 = \langle A(x + th) - y, A(x + th) - y \rangle \\ &= \langle Ax - y, Ax - y \rangle + 2t \langle Ah, Ax - y \rangle + t^2 \langle Ah, Ah \rangle, \end{aligned} \quad (1.101)$$

also

$$\begin{aligned} g'(t) &= 2 \langle Ah, Ax - y \rangle + 2t \langle Ah, Ah \rangle, \\ g''(t) &= 2 \langle Ah, Ah \rangle, \end{aligned} \quad (1.102)$$

also

$$0 = g'(0) = 2 \langle Ah, Ax - y \rangle = 2 \langle h, A^T(Ax - y) \rangle. \quad (1.103)$$

Da (1.103) für jede beliebige Richtung $h \in \mathbb{R}^n$ gelten muss, folgt

$$A^T(Ax - y) = 0, \quad (1.104)$$

oder äquivalent

$$A^T Ax = A^T y. \quad (1.105)$$

Es handelt sich um n Gleichungen für den unbekanntem Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ bei gegebener Matrix $A^T A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ und rechter Seite $A^T y \in \mathbb{R}^n$, sie heißen **Normalgleichungen** des linearen Ausgleichsproblems (1.97).

Wir nehmen nun weiter an, dass A maximalen Rang hat, also (da $n \leq m$)

$$\text{rang}(A) = n. \quad (1.106)$$

Dann ist $\dim(\ker A) = 0$ nach Satz 13.13 (Teil 1 der Vorlesung), also ist 0 die einzige Lösung des homogenen Systems $Ax = 0$. Ist nun $h \in \mathbb{R}^n$ beliebig mit $h \neq 0$, so ist also $Ah \neq 0$ und

$$\langle Ah, Ah \rangle = \|Ah\|^2 > 0. \quad (1.107)$$

Aus (1.101) und (1.102) folgt nun, dass $g''(0) > 0$ und g eine nach oben geöffnete Parabel ist, deren eindeutiges Minimum in $t = 0$ liegt. Da jeder von x verschiedene Punkt $z \in \mathbb{R}^n$ auf einer solchen Geraden liegt (wir setzen $h = z - x$), liefert somit jede Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ der Normalgleichungen (1.105) ein globales Minimum von J . Die Normalgleichungen sind eindeutig lösbar, da $A^T A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ eine quadratische Matrix ist und das zugehörige homogene System

$$A^T Ax = 0 \quad (1.108)$$

wegen $\text{rang}(A) = n$ und

$$x^T A^T Ax = (Ax)^T (Ax) = \|Ax\|^2$$

nur $x = 0$ als Lösung hat. Wir halten das Ergebnis dieser Überlegungen im folgenden Satz fest.

Satz 1.7 (Lineare Ausgleichsrechnung, Lösung)

Sei $A \in \mathbb{R}^{(m,n)}$, $y \in \mathbb{R}^m$ mit $m \geq n$, es gelte $\text{rang}(A) = n$. Dann hat Problem 1.97 genau eine Lösung $x \in \mathbb{R}^n$, welches sich als eindeutige Lösung der Normalgleichungen

$$A^T A x = A^T y \quad (1.109)$$

ergibt. □

Wir bestimmen als Beispiel die Regressionsgerade zu den Daten

$$(-2, 0.5), (-1, 0.8), (0, 2), (1, 3.2), (2, 3.5). \quad (1.110)$$

Hier ist $m = 5$, $n = 2$,

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.8 \\ 2 \\ 3.2 \\ 3.5 \end{pmatrix},$$

also

$$A^T A = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad A^T y = \begin{pmatrix} 8.4 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung von

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8.4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

ist gegeben durch

$$x = \begin{pmatrix} 0.84 \\ 2 \end{pmatrix},$$

die Regressionsgerade zu den Daten (1.110) ist also

$$f(t) = 0.84t + 2. \quad (1.111)$$

2 Eigenwerte

Wir beginnen mit einem Beispiel. Die lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$T(x) = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

ist leicht zu verstehen: Für die Einheitsvektoren e_1, e_2 gilt

$$T(e_1) = Ae_1 = 2e_1, \quad T(e_2) = Ae_2 = 4e_2,$$

das heißt, die beiden Einheitsvektoren werden um den Faktor 2 bzw. 4 gestreckt. Für alle anderen Vektoren $x \in \mathbb{R}^2$ ergibt sich das Bild als Linearkombination,

$$T(x) = A(x_1e_1 + x_2e_2) = x_1Ae_1 + x_2Ae_2 = 2x_1e_1 + 4x_2e_2 = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 4x_2 \end{pmatrix}.$$

Aus dem Einheitskreis wird eine Ellipse, deren Hauptachsenrichtungen gerade die Koordinatenachsen sind.

Im Prinzip genauso einfach, nur nicht auf den ersten Blick zu sehen, liegen die Verhältnisse bei der Abbildung

$$T(x) = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Für die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

gilt nämlich

$$Av_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad Av_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

das heißt, sie werden um den Faktor 2 bzw. 4 gestreckt. Da $\{v_1, v_2\}$ eine Basis ist, lässt sich das Bild jedes beliebigen Vektors im \mathbb{R}^2 als Linearkombination der Bilder Av_1, Av_2 gewinnen. Das Bild des Einheitskreises ist ebenfalls eine Ellipse, deren Hauptachsenrichtungen aber durch die Vektoren v_1 und v_2 gegeben sind.

Definition 2.1 (Eigenwert einer linearen Abbildung)

Sei V Vektorraum, $T : V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung. Eine reelle (oder auch komplexe) Zahl λ heißt Eigenwert von T , falls es einen Vektor $v \in V$, $v \neq 0$, gibt mit

$$T(v) = \lambda v. \quad (2.5)$$

Der Vektor v heißt Eigenvektor zum Eigenwert λ . □

Definition 2.2 (Eigenwert einer Matrix)

Sei $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$. Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt Eigenwert von A , falls es einen Vektor $x \in \mathbb{C}^n$, $x \neq 0$, gibt mit

$$Ax = \lambda x. \quad (2.6)$$

Der Vektor x heißt Eigenvektor zum Eigenwert λ . □

Sei $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ eine Matrix. Für ein beliebiges $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt

$$Ax = \lambda x \quad \Leftrightarrow \quad (A - \lambda I)x = 0. \quad (2.7)$$

Es gibt also ein $x \neq 0$ mit $Ax = \lambda x$ genau dann, wenn

$$\det(A - \lambda I) = 0, \quad (2.8)$$

siehe Teil 1, Kapitel 14.

Satz 2.3 Sei $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$. Dann ist $\lambda \in \mathbb{C}$ genau dann Eigenwert von A , wenn

$$\det(A - \lambda I) = 0. \quad (2.9)$$

□

Es ist

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Die Funktion

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) \quad (2.11)$$

heißt das **charakteristische Polynom** von A . Dass die Funktion χ_A ein Polynom ist, kann man allgemein aus der rekursiven Definition der Determinante ableiten. In der Tat hat χ_A den Grad n , beim Entwickeln der Determinante in (2.10) tritt $(-1)^n \lambda^n$ als Summand auf, und höhere Potenzen von λ kommen nicht vor.

Satz 2.3 besagt, dass **die Eigenwerte von A gerade die Nullstellen des charakteristischen Polynoms von A sind**.

Im Falle $n = 2$ erhalten wir das quadratische Polynom

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{21}a_{12} \\ &= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Es ist also

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2), \quad (2.13)$$

wobei λ_1, λ_2 die beiden Nullstellen von χ_A sind. Wir betrachten die Situation $A \in \mathbb{R}^{(2,2)}$, das heißt, alle Matrixelemente sind reelle Zahlen. Es kommen dann entsprechend der Lösungsformel für quadratische Gleichungen drei Fälle vor.

Fall 1: λ_1 und λ_2 sind beide reell und verschieden. Dann bilden zwei zugehörige Eigenvektoren v_1, v_2 eine Basis des \mathbb{R}^2 . Als Beispiel betrachten wir wieder

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Es ist

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (3 - \lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 8 \quad (2.15)$$

mit den beiden Nullstellen

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 4. \quad (2.16)$$

Einen Eigenvektor v_1 erhalten wir als nichttriviale Lösung des homogenen Gleichungssystems $(A - 2I)x = 0$, also

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

Da der Rang der Matrix in (2.17) gleich 1 ist, ist die Dimension des Lösungsraums gleich $n - 1 = 1$, also ist der Eigenvektor v_1 bis auf ein skalares Vielfaches eindeutig bestimmt, etwa $v_1 = (1, 1)$. Analog erhalten wir $v_2 = (1, -1)$.

Fall 2: $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Bei der Bestimmung der Eigenvektoren treten zwei Fälle auf, die wir jeweils am Beispiel erläutern.

Fall 2a: Für

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

gilt

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - 2)^2, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 2. \quad (2.19)$$

Es ist $A - 2I = 0$, also $\text{rang}(A - 2I) = 0$, der Lösungsraum des homogenen Systems hat Dimension $n - 0 = 2$ und ist gleich dem \mathbb{R}^2 . Alle von Null verschiedenen Vektoren sind Eigenvektoren, wählt man zwei linear unabhängige, so bilden sie eine Basis des \mathbb{R}^2 .

Fall 2b: Für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

gilt

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1. \quad (2.21)$$

Es ist

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.22)$$

also $\text{rang}(A - I) = 1$, der Lösungsraum des homogenen Systems hat die Dimension $n - 1 = 1$ und wird aufgespannt vom Eigenvektor $v_1 = (1, 0)$. Einen von v_1 linear unabhängigen weiteren Eigenvektor gibt es nicht, insbesondere auch keine Basis des \mathbb{R}^2 aus Eigenvektoren.

Fall 3: λ_1 und λ_2 sind nicht reell und konjugiert komplex. Als Beispiel betrachten wir die Drehmatrix (Drehung um 90 Grad)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

Es gilt

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 + 1, \quad \lambda_1 = i, \quad \lambda_2 = -i, \quad (2.24)$$

und es gibt keinen reellen Eigenvektor $v \in \mathbb{R}^2$, wohl aber zwei linear unabhängige komplexe Eigenvektoren, etwa

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

Diese bilden eine Basis des \mathbb{C}^2 .

Wir betrachten nun die Situation $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ (für uns in der Regel $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$) für beliebige Werte von n . Das charakteristische Polynom χ_A hat die Form

$$\chi_A(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_n), \quad (2.26)$$

wobei die Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ nicht verschieden sein müssen. Fassen wir gleiche Nullstellen zusammen, so erhalten wir

$$\chi_A(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{k_r}. \quad (2.27)$$

Die Matrix A hat also r verschieden Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, deren Vielfachheiten k_j werden als **algebraische Vielfachheiten** bezeichnet. Zur Bestimmung der zum Eigenwert λ_j gehörenden Eigenvektoren betrachtet man das homogene Gleichungssystem

$$(A - \lambda_j I)x = 0. \quad (2.28)$$

Der Lösungsraum von (2.28) heißt **Eigenraum** zum Eigenwert λ_j . Seine Dimension heißt die **geometrische Vielfachheit** des Eigenwerts λ_j , sie ist mindestens gleich 1 und höchstens gleich k_j .

Ist A eine Dreiecksmatrix,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad (2.29)$$

so ist

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} - \lambda & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}, \quad (2.30)$$

also

$$\chi_A = \det(A - \lambda I) = \prod_{i=1}^n (a_{ii} - \lambda), \quad (2.31)$$

das heißt, die Eigenwerte einer Dreiecksmatrix (und insbesondere einer Diagonalmatrix) sind gegeben durch die Diagonalelemente.

Die Transponierte A^T hat dasselbe charakteristische Polynom wie A und damit auch dieselben Eigenwerte, da

$$\det(A^T - \lambda I) = \det((A - \lambda I)^T) = \det(A - \lambda I).$$

Eine quadratische Matrix A ist invertierbar genau dann, wenn 0 nicht Eigenwert von A ist, da in diesem Fall

$$(A - 0 \cdot I)x = Ax = 0$$

nur die triviale Lösung $x = 0$ hat.

Ist $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ beliebig und $S \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ invertierbar, so gilt

$$\det(S^{-1}AS - \lambda I) = \det(S^{-1}(A - \lambda I)S) = \det(S^{-1}) \det(A - \lambda I) \det(S) = \det(A - \lambda I),$$

also haben $S^{-1}AS$ und A dasselbe charakteristische Polynom und damit dieselben Eigenwerte. Die Eigenwerte einer linearen Abbildung $T : V \rightarrow V$ eines Vektorraums in sich selbst stimmen mit den Eigenwerten der (bezüglich einer festen Basis) zugeordneten Matrix überein und ändern sich bei einem Basiswechsel nicht.

Die Hauptachsentransformation. Die Hauptachsentransformation dient dazu, eine beliebige symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ auf Diagonalgestalt zu transformieren.

Lemma 2.4 Sei $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ symmetrisch. Dann sind alle Eigenwerte von A reell.

Beweis: Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ Eigenwert von A mit zugehörigem Eigenvektor $x \in \mathbb{C}^n$. Ist $\bar{\lambda}$ die zu λ konjugiert komplexe Zahl, so gilt

$$\bar{\lambda}x = \overline{\lambda x} = \overline{Ax} = \overline{A}x = Ax,$$

also ist $\bar{\lambda}$ ebenfalls Eigenwert von A und x ein zugehöriger Eigenvektor. Es gilt weiterhin

$$\lambda x^T x = (Ax)^T x = x^T A^T x = x^T Ax = x^T \bar{\lambda} x = \bar{\lambda} x^T x,$$

also folgt $\lambda = \bar{\lambda}$, da

$$x^T x = \sum_{i=1}^n x_i \bar{x}_i = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 > 0.$$

□

Lemma 2.5 Sei $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ symmetrisch. Dann sind Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten aufeinander orthogonal.

Beweis: Sei $Ax = \lambda x$ und $Ay = \mu y$. Es folgt

$$\lambda \langle x, y \rangle = \langle \lambda x, y \rangle = \langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle = \langle x, \mu y \rangle = \mu \langle x, y \rangle.$$

Ist also $\lambda \neq \mu$, so muss $\langle x, y \rangle = 0$ gelten.

□

Lemma 2.6 Sei $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ symmetrisch. Dann stimmen für jeden Eigenwert von A dessen algebraische und geometrische Vielfachheit überein.

Beweis: Sei μ Eigenwert von A der geometrischen Vielfachheit l . Sei $\{v_1, \dots, v_l\}$ eine ON-Basis des Eigenraums von μ , wir ergänzen sie zu einer ON-Basis $\{v_1, \dots, v_l, v_{l+1}, \dots, v_n\}$ des \mathbb{R}^n . Sei $\Phi \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ die Matrix mit den Spalten v_i , dann ist Φ orthogonal. Die transformierte Matrix

$$\tilde{A} = \Phi^{-1}A\Phi = \Phi^T A \Phi \tag{2.32}$$

ist ebenfalls symmetrisch und hat die Blockform

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \mu I_l & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, \tag{2.33}$$

wobei I_l die l -dimensionale Einheitsmatrix und B eine $(n-l) \times (n-l)$ -Matrix ist. Für das charakteristische Polynom von A gilt

$$\chi_A(\lambda) = \chi_{\tilde{A}}(\lambda) = \det(\tilde{A} - \lambda I_n) = \det(\mu I_l - \lambda I_l) \det(B - \lambda I_{n-l}) = (\mu - \lambda)^l \chi_B(\lambda), \quad (2.34)$$

also ist die algebraische Vielfachheit von μ mindestens gleich l . Wäre sie größer als l , so wäre μ ein Eigenwert von B , und aus einem zugehörigen Eigenvektor $z \in \mathbb{R}^{n-l}$ entstünde vermittels

$$y = \sum_{i=l+1}^n z_i e_i$$

ein Eigenvektor y von \tilde{A} zum Eigenwert μ und hieraus ein Eigenvektor

$$\Phi y = \sum_{i=l+1}^n z_i v_i$$

von A zum Eigenwert μ , welcher von $\{v_1, \dots, v_l\}$ linear unabhängig wäre, aber andererseits zum Eigenraum von μ gehören würde, ein Widerspruch. \square

Sind also $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ die verschiedenen Eigenwerte einer symmetrischen Matrix A , so können wir zu jedem Eigenraum eine Basis berechnen (durch Lösen des zugehörigen homogenen Gleichungssystems) und diese in eine ON-Basis B_j transformieren (mit dem Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren). Da die Ordnung des charakteristischen Polynoms χ_A gleich

$$n = \sum_{j=1}^r k_j$$

ist, addieren sich die Dimensionen der Eigenräume zu n wegen Lemma 2.6. Durch

$$B = \bigcup_{j=1}^r B_j$$

erhalten wir also eine Basis des \mathbb{R}^n , welche ebenfalls eine ON-Basis ist, da die zu verschiedenen Eigenwerten gehörenden Eigenräume senkrecht aufeinander stehen (Lemma 2.5). Da die Basis B aus Eigenvektoren besteht, wird A auf Diagonalgestalt

$$D = \Phi^T A \Phi$$

transformiert, wobei die Spalten von Φ gerade durch die Basisvektoren von B gebildet werden.

Satz 2.7 (Hauptachsentransformation)

Sei $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ symmetrisch. Dann gibt es eine ON-Basis des \mathbb{R}^n , welche aus Eigenvektoren von A besteht. Die Matrix $\Phi \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ des zugehörigen Basiswechsels ist orthogonal, und

$$\Phi^T A \Phi = D, \quad (2.35)$$

wobei $D \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ eine Diagonalmatrix ist, deren Diagonale die Eigenwerte von A entsprechend ihrer Vielfachheit enthält.

Der **Spannungstensor** spielt eine zentrale Rolle in der Mechanik elastischer Körper. Er hat die Form einer (3×3) -Matrix

$$S = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

Ist P ein Punkt des Körpers, und ist n der Normalenvektor zu einer (gedachten) Fläche durch P , so stellt der Vektor

$$Sn \quad (2.37)$$

gerade den Kraftvektor dar, der in P an dieser Ebene angreift. Der Spannungstensor S ist symmetrisch (das folgt aus dem Gleichgewicht für die Drehmomente). Ist n ein Eigenvektor von S zum Eigenwert λ , so gilt

$$Sn = \lambda n, \quad (2.38)$$

das heißt, die Kraft hat die Form einer **Normalspannung** und entspricht einer Zug- oder Druckkraft, je nach Vorzeichen von λ . Nach Satz 2.7 können wir eine ON-Basis aus Eigenvektoren von S finden, sie heißen die **Hauptspannungsrichtungen** von S , die zugehörigen Eigenwerte heißen die **Hauptspannungen**. Analoge Überlegungen gelten für den **Verzerrungstensor**.

Quadratische Funktionen, quadratische Formen. Die Funktion $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$q(x) = ax^2 + bx + c, \quad (2.39)$$

beschreibt für gegebene Parameterwerte $a, b, c \in \mathbb{R}$ eine Parabel im Reellen, die je nach Vorzeichen von a nach oben oder nach unten geöffnet ist. Die entsprechende Funktion $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

$$q(x) = x^T Ax + b^T x + c \quad (2.40)$$

nennt man **quadratische Funktion**, hierbei sind $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$, $b \in \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}$ gegeben. Im Falle $b = c = 0$, also

$$q(x) = x^T Ax$$

heißt q eine **quadratische Form**. Da für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ gilt

$$x^T Ax = (x^T Ax)^T = x^T A^T x,$$

also auch

$$x^T Ax = x^T \left(\frac{1}{2}(A + A^T) \right) x,$$

können wir A in (2.40) als symmetrisch voraussetzen. Eine Teilmenge von \mathbb{R}^n der Form

$$M = \{x : x \in \mathbb{R}^n, q(x) = 0\} \quad (2.41)$$

bezeichnet man als **Quadrik**. Sind etwa $A = I$, $b = 0$, $c = -1$, so ist

$$M = \{x : x \in \mathbb{R}^n, x^T x = 1\}$$

gerade die **Einheitssphäre** (= Rand der Einheitskugel). Für beliebige symmetrische Matrizen A nimmt M verschiedene geometrische Formen an (Ellipsoid, Paraboloid, Hyperboloid, ...), sie können im wesentlichen anhand der Vorzeichenstruktur der Eigenwerte von A klassifiziert werden. So treten etwa im Anschauungsraum ($n = 3$) 17 verschiedene Fälle auf, siehe Meyberg/Vachenauer I, Abschnitt 6.7.3.

Für die später behandelten Extremwertaufgaben ist der folgende Begriff wichtig.

Definition 2.8 (Definitheit von Matrizen)

Eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ heißt

- *positiv definit*, falls $x^T A x > 0$
- *positiv semidefinit*, falls $x^T A x \geq 0$
- *negativ definit*, falls $x^T A x < 0$
- *negativ semidefinit*, falls $x^T A x \leq 0$

gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x \neq 0$. Falls keiner dieser 4 Fälle zutrifft, heißt A indefinit. \square

Ist $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ symmetrisch und $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine ON-Basis des \mathbb{R}^n aus Eigenvektoren von A , wie wir sie aus der Hauptachsentransformation bekommen, so gilt mit den zugehörigen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

$$v_i^T A v_i = v_i^T \lambda_i v_i = \lambda_i, \tag{2.42}$$

Für einen beliebigen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$,

$$x = \sum_{i=1}^n t_i v_i,$$

folgt

$$x^T A x = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n t_i t_j \lambda_i \lambda_j v_i^T v_j = \sum_{i=1}^n \lambda_i t_i^2. \tag{2.43}$$

Aus (2.42) und (2.43) erkennen wir, dass gilt:

A ist positiv definit genau dann, wenn alle Eigenwerte von A positiv sind.

Analoge Aussagen erhält man für die anderen Begriffe in Definition 2.8:

A ist positiv semidefinit genau dann, wenn alle Eigenwerte von A nichtnegativ sind.

A ist negativ definit genau dann, wenn alle Eigenwerte von A negativ sind.

A ist negativ semidefinit genau dann, wenn alle Eigenwerte von A nichtpositiv sind.

A ist indefinit genau dann, wenn es mindestens einen positiven und mindestens einen negativen Eigenwert gibt.

Bemerkungen zur Berechnung von Eigenwerten. Im Falle $n = 2$ oder auch $n = 3$ kann man die Eigenwerte von Hand ausrechnen, indem man wie beschrieben die Nullstellen des zugehörigen (quadratischen oder kubischen) Polynoms bestimmt. Für größere

Werte von n ist dieses Vorgehen von eher theoretischem Interesse und eignet sich nicht zur Berechnung der Eigenwerte, da die Berechnung der Nullstellen eines Polynoms aus seinen Koeffizienten im allgemeinen numerisch instabil ist. Man verwendet daher andere Verfahren, seit Jahrzehnten durchgesetzt hat sich das sogenannte **QR-Verfahren**.

3 Skalarfelder, Partielle Ableitungen

Funktionen mit Definitionsbereich \mathbb{R}^n oder einer Teilmenge Ω von \mathbb{R}^n nennt man auch **Felder**. Ist \mathbb{R} der Bildbereich, so spricht man von einem **Skalarfeld** oder skalaren Feld. Ein Skalarfeld ist beispielsweise die Funktion, die jedem Punkt im Raum seine Temperatur zuordnet.

Ein weiteres Beispiel ist die Funktion, welche jedem Vektor seine Länge zuordnet,

$$f(x) = \|x\|, \quad f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}.$$

Als Definitionsgebiete von Funktionen im \mathbb{R} haben wir, sofern diese nicht auf ganz \mathbb{R} definiert waren, meistens Intervalle betrachtet, mit oder ohne Endpunkte. Mögliche Definitionsgebiete im \mathbb{R}^n sind vielfältiger. Häufig kommt vor die offene bzw. abgeschlossene Kugel um einen Mittelpunkt x mit Radius r ,

$$B_r(x) = \{y : y \in \mathbb{R}^n, \|y - x\| < r\}, \quad K_r(x) = \{y : y \in \mathbb{R}^n, \|y - x\| \leq r\}, \quad (3.1)$$

sowie ihr Rand, die Sphäre

$$S_r(x) = \{y : y \in \mathbb{R}^n, \|y - x\| = r\}. \quad (3.2)$$

Wir betrachten ein Intervall im \mathbb{R} zwischen a und b , mit oder ohne die Endpunkte. Einen Punkt $x \in (a, b)$ stellt man sich als inneren Punkt vor, er hat die Eigenschaft, dass es ein (möglicherweise sehr kleines) Intervall $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ gibt, welches vollständig zwischen a und b liegt. Die Endpunkte a und b stellt man sich als Randpunkte vor, a hat die Eigenschaft, dass jedes Intervall der Form $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ sowohl Punkte zwischen a und b als auch Punkte außerhalb enthält.

Definition 3.1 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Ein $x \in \Omega$ heißt **innerer Punkt** von Ω , falls es eine offene Kugel mit Mittelpunkt x gibt, welche ganz in Ω liegt. Die Menge aller inneren Punkte von Ω heißt das **Innere** von Ω , geschrieben $\text{int}(\Omega)$. Die Menge Ω heißt **offen**, wenn $\text{int}(\Omega) = \Omega$, das heißt, jeder Punkt von Ω ist innerer Punkt von Ω .

Ein $x \in \mathbb{R}^n$ heißt **Randpunkt** von Ω , falls jede offene Kugel mit Mittelpunkt x sowohl einen Punkt aus Ω als auch einen Punkt enthält, der nicht in Ω liegt. Die Menge aller Randpunkte von Ω heißt der **Rand** von Ω , geschrieben $\partial\Omega$. Die Menge Ω heißt **abgeschlossen**, wenn jeder Randpunkt von Ω auch zu Ω gehört. \square

Es ist etwa

$$\begin{aligned} \text{int}(B_r(x)) &= \text{int}(K_r(x)) = B_r(x), & \partial B_r(x) &= \partial K_r(x) = S_r(x), \\ \text{int}(S_r(x)) &= \emptyset, & \partial S_r(x) &= S_r(x). \end{aligned}$$

$B_r(x)$ ist offen, $K_r(x)$ und $S_r(x)$ sind abgeschlossen. Bei Mengen mit einem "scharfen Rand" ist das auch anschaulich klar, z.B. bei Teilmengen des \mathbb{R}^2 , die von einer "glatten" Kurve begrenzt werden. Betrachten wir aber beispielsweise \mathbb{Q} als Teilmenge von \mathbb{R} , so ist

$$\text{int}(\mathbb{Q}) = \emptyset, \quad \partial\mathbb{Q} = \mathbb{R},$$

da in beliebig kleiner Entfernung von jeder rationalen Zahl sowohl rationale als auch irrationale Zahlen liegen.

Sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Die Argumente von f sind also Vektoren im \mathbb{R}^n , für die Funktionswerte schreiben wir

$$f(x), \quad \text{oder} \quad f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Beispiele sind (hier ist $\Omega = \mathbb{R}^n$)

$$f(x) = a^T x = \langle a, x \rangle = \sum_{i=1}^n a_i x_i, \quad a \in \mathbb{R}^n \text{ gegeben,} \quad (\text{lineare Funktion})$$

$$f(x) = x^T A x + b^T x + c = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_i x_i + c, \quad (\text{quadratische Funktion})$$

$$f(x) = \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Im Falle $n = 2$ oder $n = 3$ schreibt man oft (x, y) bzw. (x, y, z) für die Komponenten des Arguments, also etwa

$$f(x, y) = 3x + 2y - 4, \quad f(x, y, z) = x^2 y - x e^z.$$

Im Falle $n = 2$, also $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, ist es möglich, sich den Graphen von f im Raum zu veranschaulichen, indem man die Menge

$$M = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in \Omega\}$$

darstellt. Ist etwa $\Omega = K_1(0)$ die Einheitskreisschreibe in der Ebene, so liefert

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

als Menge M ein nach oben geöffnetes Paraboloid, welches sich über der Einheitskreisschreibe erhebt.

Eine **Folge** im \mathbb{R}^n ist eine Funktion, die jeder natürlichen Zahl k einen Vektor x^k im \mathbb{R}^n zuordnet, wir schreiben

$$(x^k)_{k \in \mathbb{N}}. \quad (3.3)$$

Jedes Element (oder Glied) x^k der Folge hat die Form

$$x^k = (x_1^k, \dots, x_n^k).$$

Ein Vektor $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ heißt **Grenzwert** der Folge, falls

$$x_i = \lim_{k \rightarrow \infty} x_i^k \quad (3.4)$$

gilt. Äquivalent dazu ist

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k - x\| = 0. \quad (3.5)$$

Ist x Grenzwert von $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$, so schreiben wir ebenfalls

$$x = \lim_{k \rightarrow \infty} x^k, \quad \text{oder auch} \quad x^k \rightarrow x. \quad (3.6)$$

Sowohl in (3.4) als auch in (3.5) wird die Konvergenz einer Folge von Vektoren auf die Konvergenz von Zahlenfolgen zurückgeführt. Beispiel:

$$(2, 1), \left(1, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right), \dots \quad \text{also} \quad x^k = \left(\frac{2}{k}, \frac{1}{k}\right).$$

Es gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = 0, \quad \text{da} \quad \frac{2}{k} \rightarrow 0, \quad \frac{1}{k} \rightarrow 0.$$

Diese Folge nähert sich dem Nullpunkt entlang der Geraden $x_1 = 2x_2$. Konvergente Folgen im Mehrdimensionalen können sich dem Grenzwert aber auch auf weniger "reguläre" Weise nähern; es ist lediglich erforderlich, dass der Abstand zum Grenzwert gegen 0 geht, die Folge muss aber z.B. nicht aus einer bestimmten Richtung kommen.

Eine Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, heißt **stetig im Punkt** $x \in \Omega$, falls

$$f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x^k) \quad (3.7)$$

gilt für alle Folgen $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ in Ω , welche gegen x konvergieren. Sie heißt **stetig auf** Ω , falls sie in jedem Punkt von Ω stetig ist.

Wie im Eindimensionalen gilt, dass die Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und Komposition zweier stetiger Funktionen wieder eine stetige Funktion ergibt, infolgedessen sind viele durch Formeln definierte Funktionen stetig, beispielsweise die quadratische Funktion

$$f(x) = x^T A x + b^T x + c = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_i x_i + c.$$

Eine Teilmenge Ω des \mathbb{R}^n heißt **beschränkt**, falls es eine Zahl $M > 0$ gibt, so dass

$$\|x\| \leq M, \quad \text{für alle } x \in \Omega, \quad (3.8)$$

das heißt, man kann eine Kugel um den Nullpunkt finden, in der Ω vollständig enthalten ist. (M ist der Radius dieser Kugel.)

Satz 3.2 (Maximum und Minimum)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Ist Ω abgeschlossen und beschränkt, sowie f stetig auf Ω , so nimmt f auf Ω Maximum und Minimum an, das heißt, es gibt $p, q \in \Omega$ mit

$$f(p) = \max_{x \in \Omega} f(x), \quad f(q) = \min_{x \in \Omega} f(x). \quad (3.9)$$

□

Dieser Satz verallgemeinert den bereits aus dem Eindimensionalen bekannten Sachverhalt. Dort werden Maxima und Minima von f als Nullstellen der Ableitung f' berechnet. Dieses Vorgehen lässt sich auf den mehrdimensionalen Fall übertragen.

Wir behandeln nun die Frage, wie man Funktionen differenzieren kann, deren Definitionsbereiche im Mehrdimensionalen liegen. Ist beispielsweise $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = x^2 y^4,$$

so können wir y als fest gegebenen Parameter betrachten und die Funktion

$$g(x) = x^2 y^4$$

“ganz normal” differenzieren mit dem Ergebnis

$$g'(x) = 2xy^4.$$

Genaugut könnten wir x festhalten und die Funktion

$$h(y) = x^2 y^4$$

nach ihrem Argument (also y) differenzieren mit dem Ergebnis

$$h'(y) = x^2 \cdot 4y^3.$$

Definition 3.3 (Partielle Ableitung)

Sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, sei x innerer Punkt von Ω . Die **partielle Ableitung von f nach der i -ten Komponente im Punkt x** ist definiert als der Grenzwert (sofern dieser existiert)

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + t, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{t}. \quad (3.10)$$

□

Die partielle Ableitung von f nach x_i an der Stelle x ist also eine Zahl. Für sie sind verschiedene Bezeichnungen üblich, etwa

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x), \quad \partial_i f(x), \quad \partial_{x_i} f(x). \quad (3.11)$$

Verwendet man im Zweidimensionalen die Notation $f(x, y)$, so schreibt man für die partiellen Ableitungen entsprechend

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y), \quad \partial_x f(x, y), \quad \partial_y f(x, y), \quad (3.12)$$

entsprechend im Dreidimensionalen

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z), \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z), \quad \text{usw.}$$

Beispiel wie oben:

$$f(x, y) = x^2 y^4, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4x^2 y^3, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(3, -2) = 4 \cdot 3^2 \cdot (-2)^3 = -288.$$

Der Ausdruck

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

ist **kein Bruch**, sondern **der Grenzwert eines Bruchs**.

Wir können uns die partielle Ableitung folgendermaßen vorstellen. Ist etwa $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, so entspricht die Funktion

$$g(t) = f(x + t, y), \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

gerade dem Verhalten von f in Richtung der x -Koordinate, ausgehend vom Punkt (x, y) . Es ist dann

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = g'(0).$$

Wir kehren zur allgemeinen n -dimensionalen Situation zurück. Sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Falls der Grenzwert (3.10) in jedem Punkt $x \in \Omega$ und für jedes i , $1 \leq i \leq n$, existiert, so heißt f **partiell differenzierbar** in Ω . Die partiellen Ableitungen liefern in diesem Fall Funktionen

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{oder auch} \quad \partial_i f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad (3.13)$$

sie sind also ebenfalls Skalarfelder. Sind alle diese Funktionen stetig in Ω , so heißt f **stetig differenzierbar in Ω** . (In diesem Fall kann man das Wort “partiell” weglassen.)

Da die partielle Ableitung nichts anderes ist als die Ableitung nach einer Koordinatenrichtung (bei festgehaltenen anderen Richtungen), kommen die Rechenregeln aus dem Eindimensionalen auch für die Berechnung von partiellen Ableitungen zum Tragen.

Beispiele: Die lineare Funktion

$$f(x) = \langle a, x \rangle = \sum_{i=1}^n a_i x_i, \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \partial_i f(x) = a_i,$$

In diesem Fall ist die partielle Ableitung an jeder Stelle x dieselbe, als Funktion $\partial_i f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ aufgefasst ist sie konstant.

Für die quadratische Funktion mit symmetrischer Matrix $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$

$$f(x) = x^T A x + b^T x + c = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_i x_i + c$$

gilt (man muss 3 verschiedene Indizes unterscheiden)

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \partial_k f(x) = \sum_{i=1}^n a_{ik} x_i + \sum_{j=1}^n a_{kj} x_j + b_k = 2 \sum_{j=1}^n a_{kj} x_j + b_k = 2 \langle A_{k\cdot}, x \rangle + b_k,$$

wobei A_k die k -te Zeile von A bezeichnet. Die partielle Ableitung $\partial_k f$ ist also eine affin lineare Funktion, im Falle $b_k = 0$ eine lineare Funktion.

Man kann die partiellen Ableitungen zu einem Vektor zusammenfassen, er heißt der **Gradient** von f , geschrieben

$$\nabla f = \text{grad } f = \begin{pmatrix} \partial_1 f \\ \vdots \\ \partial_n f \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Beispiel

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^4, \quad \nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 x_2^4 \\ 4x_1^2 x_2^3 \end{pmatrix}, \quad \nabla f(2, 1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Ist $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, so erhalten wir die partiellen Ableitungen von $g \circ f$,

$$\partial_i(g \circ f)(x) = \frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_i}(x) = g'(f(x)) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \quad (3.15)$$

direkt aus der **Kettenregel** im Eindimensionalen, da wir in diesem Fall f nur als Funktion einer Variablen auffassen. Als Beispiel betrachten wir **radialsymmetrische Funktionen**. Sei zunächst

$$r(x) = \|x\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}, \quad r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}. \quad (3.16)$$

Es ergibt sich

$$\partial_i r(x) = \frac{1}{2\sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}} \cdot 2x_i = \frac{x_i}{r(x)}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (3.17)$$

und damit auch

$$\nabla r(x) = \text{grad } r(x) = \frac{x}{r(x)} = \frac{x}{\|x\|}. \quad (3.18)$$

Nun erhalten wir aus (3.15) die Ableitungen von radialsymmetrischen Funktionen, das sind solche Funktionen $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, welche nur von der Länge des Argumentvektors abhängen, etwa

$$\varphi(x) = g(\|x\|), \quad \text{wobei } g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (3.19)$$

als

$$\partial_i \varphi(x) = g'(\|x\|) \frac{x_i}{\|x\|}, \quad \nabla \varphi(x) = g'(\|x\|) \frac{x}{\|x\|}. \quad (3.20)$$

Beispiel:

$$\varphi(x) = \ln(\|x\|), \quad \partial_1 \varphi(2, 1) = (\ln)'(\|(2, 1)\|) \frac{2}{\|(2, 1)\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{5}.$$

Wir betrachten als nächstes die Veränderung eines Skalarfeldes f entlang einer Kurve k ,

$$g(t) = f(k(t)), \quad k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}. \quad (3.21)$$

Die Ableitung von g wird mit der entsprechenden Variante der **Kettenregel** berechnet,

$$g'(t) = \langle \nabla f(k(t)), k'(t) \rangle = \sum_{i=1}^n \partial_i f(k(t)) \cdot k'_i(t), \quad (3.22)$$

wobei $k'(t) \in \mathbb{R}^n$ der Tangentenvektor an die Kurve k im Punkt $k(t)$ ist, siehe Kapitel 14 aus Teil 1. Dass (3.22) richtig ist, ergibt sich nicht unmittelbar aus der eindimensionalen Situation, sie wird sich später als Spezialfall der allgemeinen mehrdimensionalen Situation herausstellen. Als Beispiel betrachten wir

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^3, \quad k(t) = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

Die Kurve k ist hier die Gerade durch 0 in Richtung der Winkelhalbierenden. Es ist

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 3x_2^2 \end{pmatrix}, \quad k(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}, \quad k'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

also

$$g'(t) = \langle \nabla f(k(t)), k'(t) \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 2t + 3t^2.$$

Dasselbe Ergebnis erhalten wir, wenn wir g formelmäßig darstellen, indem wir k in f einsetzen,

$$g(t) = f(k(t)) = f(t, t) = t^2 + t^3,$$

und dann differenzieren. Wenn f und k durch eher einfache Formeln gegeben sind, ist das der einfachere Weg.

Wir betrachten eine Situation wie im vorangegangenen Beispiel (3.23), aber mit einer allgemeinen Geraden

$$k(t) = x + tv, \quad x, v \in \mathbb{R}^n. \quad (3.24)$$

Die Ableitung der zusammengesetzten Funktion $g(t) = f(k(t))$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, im Punkt $t = 0$ ergibt sich gemäß (3.22) als

$$g'(0) = \langle \nabla f(x), v \rangle = \sum_{i=1}^n \partial_i f(x) \cdot v_i. \quad (3.25)$$

Andererseits ist

$$g'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t}. \quad (3.26)$$

Definition 3.4 (Richtungsableitung)

Sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, sei x innerer Punkt von Ω , sei $v \in \mathbb{R}^n$. Die **Richtungsableitung von f im Punkt x in Richtung v** ist definiert als der Grenzwert (sofern dieser existiert)

$$\partial_v f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t} \quad (3.27)$$

□

Gemäß (3.25) erhalten wir die Richtungsableitung in eine beliebige Richtung $v \in \mathbb{R}^n$ aus den partiellen Ableitungen mit

$$\partial_v f(x) = \langle \nabla f(x), v \rangle. \quad (3.28)$$

Die Richtungsableitungen in Richtung der Koordinatenachsen sind nichts anderes als die partiellen Ableitungen,

$$\partial_{e_i} f(x) = \langle \nabla f(x), e_i \rangle = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x). \quad (3.29)$$

Höhere partielle Ableitungen. Ist beispielsweise

$$f(x, y) = x^2 y^3, \quad f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R},$$

so ist

$$\partial_x f(x, y) = 2xy^3, \quad \partial_x f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R},$$

und nichts hindert uns daran, diese Funktion nochmals partiell abzuleiten, beispielsweise nach y ,

$$\partial_y \partial_x f(x, y) = 6xy^2, \quad \partial_y \partial_x f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}.$$

Statt $\partial_y \partial_x f$ schreibt man auch

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Für eine beliebige Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ geht das in einem Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ natürlich nur, wenn der entsprechende Grenzwert existiert, in diesem Fall also

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial_x f(x, y+t) - \partial_x f(x, y)}{t}.$$

Definition 3.5 (Zweite partielle Ableitungen)

Sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, x innerer Punkt von Ω . Die zweiten partiellen Ableitungen $\partial_j \partial_i f$ von f sind im Punkt x definiert als der Grenzwert

$$\partial_j \partial_i f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial_i f(x + te_j) - \partial_i f(x)}{t}, \quad (3.30)$$

wobei e_j der j -te Einheitsvektor ist. □

Ist Ω offen, und existieren in jedem Punkt alle zweiten partiellen Ableitungen, so erhalten wir Funktionen

$$\partial_j \partial_i f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Sind diese Funktionen alle stetig, so heißt f **zweimal stetig differenzierbar** in Ω .

Die partiellen Ableitungen $\partial_i f$ heißen auch **erste partielle Ableitungen** von f . Entsprechend definiert man die $(k+1)$ -ten (dritten, vierten, ...) partiellen Ableitungen als partielle Ableitungen der k -ten partiellen Ableitungen.

Aus den ersten partiellen Ableitungen kann man wie besprochen einen Vektor bilden, den Gradienten. Aus den zweiten partiellen Ableitungen in einem Punkt x kann man eine $(n \times n)$ -Matrix bilden, sie heißt die **Hesse-Matrix** und ist definiert als

$$H_f(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 \partial_1 f(x) & \cdots & \partial_n \partial_1 f(x) \\ \partial_1 \partial_2 f(x) & \cdots & \partial_n \partial_2 f(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 \partial_n f(x) & \cdots & \partial_n \partial_n f(x) \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

Für

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^3$$

gilt beispielsweise

$$H_f(x) = \begin{pmatrix} 2x_2^3 & 6x_1 x_2^2 \\ 6x_1 x_2^2 & 6x_1^2 x_2 \end{pmatrix}, \quad H_f(2, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 12 \\ 12 & 24 \end{pmatrix}.$$

Dass diese Matrix symmetrisch ist, ist kein Zufall, es gilt nämlich

Satz 3.6 Ist $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, so ist die Hesse-Matrix von f symmetrisch, das heißt, es gilt

$$\partial_j \partial_i f(x) = \partial_i \partial_j f(x), \quad (3.32)$$

für alle x und alle i, j . □

Skalarfelder kann man sich auch durch ihre Niveaumengen

$$N_c(f) = \{x : x \in \Omega, f(x) = c\} \quad (3.33)$$

veranschaulichen, sowohl für $n = 2$ als auch für $n = 3$. So liefert

$$f(x) = \sqrt{(x_1 - 1)^2 + x_2^2}$$

als Niveaumengen $N_c(f)$ gerade die Kreise in der Ebene mit Mittelpunkt $(1, 0)$ und Radius c . In diesem Fall handelt es sich bei den Niveaumengen um Kurven, die sich alternativ darstellen lassen durch

$$k(t) = (1 + c \cos t, c \sin t), \quad k : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

Im Fall $n = 3$ stellen die Niveaumengen einer Funktion im regulären Fall eine gekrümmte Fläche dar, so ist $N_c(f)$ für

$$f(x) = \sqrt{(x_1 - 1)^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

gerade die Sphäre um $(1, 0, 0)$ mit Radius c .

Aus dem Zusammenwirken der beiden Darstellungen der Niveaumenge erhalten wir eine geometrische Interpretation des Gradienten. Ist $k : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine auf einem Intervall I definierte Kurve, die vollständig innerhalb einer Niveaumenge $N_c(f)$ verläuft, so gilt

$$f(k(t)) = c, \quad \text{für alle } t \in I.$$

Differenzieren wir beide Seiten nach t , so erhalten wir aus der Kettenregel (3.22)

$$\langle \nabla f(k(t)), k'(t) \rangle = 0, \quad (3.34)$$

das heißt, im Punkt $k(t)$ steht der Gradient von f senkrecht auf dem Tangentenvektor an die Kurve. Ist nun $x \in N_c(f)$ ein fester Punkt in der Niveaumenge, so gilt (3.34) für jede Kurve durch x . Der Gradient $\nabla f(x)$ steht also senkrecht auf die von allen möglichen Tangentenvektoren solcher Kurven gebildeten tangentialen Hyperebene der Niveaumenge und zeigt in die Richtung des steilsten Anstiegs der Funktion f .

Definition 3.7 (Tangentenvektor an eine Niveaumenge)

Sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $x \in \Omega$ mit $f(x) = c$ und $\nabla f(x) \neq 0$. Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt Tangentialvektor an $N_c(f)$ in x , falls

$$\langle \nabla f(x), v \rangle = 0. \quad (3.35)$$

Die Menge

$$T(x) = \{v : v \text{ ist Tangentialvektor an } N_c(f) \text{ in } x\} \quad (3.36)$$

heißt der Tangentialraum an $N_c(f)$ im Punkt x . □

In der Situation von Definition 3.7 gilt, dass der Tangentialraum $T(x)$ ein $(n - 1)$ -dimensionaler Unterraum des \mathbb{R}^n ist. Der affine Unterraum $x + T(x)$ heißt auch Tangentialebene an $N_c(f)$ im Punkt x .

4 Maxima und Minima im Mehrdimensionalen

Im Eindimensionalen werden Extremwerte einer Funktion, also insbesondere Maxima und Minima, dadurch bestimmt, dass man die erste und die zweite Ableitung untersucht (Kurvendiskussion). Ein entsprechendes Vorgehen funktioniert auch im Mehrdimensionalen.

Wir betrachten die Aufgabe: Gegeben ist eine Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, gesucht ist $x \in \mathbb{R}^n$ mit

$$f(x) = \min_{y \in \Omega} f(y). \quad (4.1)$$

Ein Beispiel ist etwa die Funktion

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2.$$

Es gilt

$$0 = f(0) < f(x), \quad \text{für alle } x = (x_1, x_2) \neq 0,$$

also ist 0 ein (striktes) Minimum von f auf $\Omega = \mathbb{R}^2$.

Wir nehmen nun einmal an, $x \in \Omega$ sei ein Minimum von f auf Ω , Ω sei offen. Zu einem beliebigen Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ definieren wir

$$g(t) = f(x + tv). \quad (4.2)$$

Da Ω offen ist, ist g definiert in einem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $0 \in I$, und 0 ist Minimum von g auf I , da

$$g(0) = f(x) \leq f(x + tv) = g(t), \quad \text{für alle } t \in I.$$

Ist f zweimal stetig differenzierbar, so auch g , und es muss gelten

$$g'(0) = 0, \quad g''(0) \geq 0. \quad (4.3)$$

Aus der Kettenregel (3.22) folgt

$$g'(t) = \langle \nabla f(x + tv), v \rangle,$$

also

$$0 = g'(0) = \langle \nabla f(x), v \rangle. \quad (4.4)$$

Da v ein beliebiger Vektor war, muss (4.4) für alle $v \in \mathbb{R}^n$ gelten. Es folgt

$$\nabla f(x) = 0, \quad \text{also } \partial_i f(x) = 0, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (4.5)$$

Ein solcher Punkt x mit $\nabla f(x) = 0$ heißt **kritischer Punkt** von f .

Wir differenzieren nun

$$g'(t) = \langle \nabla f(x + tv), v \rangle = \sum_{i=1}^n v_i \partial_i f(x + tv),$$

indem wir nochmals die Kettenregel (3.22) auf die einzelnen Summanden anwenden,

$$\begin{aligned} g''(t) &= \sum_{i=1}^n v_i \frac{d}{dt} \partial_i f(x + tv) = \sum_{i=1}^n v_i \left(\sum_{j=1}^n \partial_j \partial_i f(x + tv) v_j \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n v_i \left[\partial_j \partial_i f(x + tv) \right] v_j = v^T H_f(x + tv) v, \end{aligned}$$

also

$$0 \leq g''(0) = v^T H_f(x) v. \quad (4.6)$$

Da v ein beliebiger Vektor war, muss (4.6) für alle $v \in \mathbb{R}^n$ gelten, das bedeutet aber gerade, dass $H_f(x)$, die Hesse-Matrix von f im Punkt x , positiv semidefinit ist. Wir fassen das Ergebnis dieser Überlegungen im folgenden Satz zusammen.

Satz 4.1 Sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Ist x ein lokales Minimum von f in Ω , so gilt

$$\nabla f(x) = 0, \quad (4.7)$$

und die Hesse-Matrix $H_f(x)$ ist positiv semidefinit. \square

Analog erhalten wir für das Maximum einer Funktion f , indem wir Satz 4.1 auf $-f$ anwenden:

Satz 4.2 Sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Ist x ein lokales Maximum von f in Ω , so gilt

$$\nabla f(x) = 0, \quad (4.8)$$

und die Hesse-Matrix $H_f(x)$ ist negativ semidefinit. \square

Im Eindimensionalen folgt umgekehrt aus $f'(x) = 0$ und $f''(x) > 0$, dass x ein striktes lokales Minimum ist. Eine analoger Satz gilt auch im Mehrdimensionalen, wir werden ihn nicht beweisen.

Satz 4.3 Sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x \in \Omega$.

Ist $\nabla f(x) = 0$ und $H_f(x)$ positiv definit, so ist x ein striktes lokales Minimum.

Ist $\nabla f(x) = 0$ und $H_f(x)$ negativ definit, so ist x ein striktes lokales Maximum. \square

Ob die Hessematrix die in den Sätzen 4.1 – 4.3 verlangten Eigenschaften hat, lässt sich an ihren Eigenwerten erkennen, siehe Kapitel 2.

Wir illustrieren die verschiedenen Situationen an möglichst einfachen Beispielen. In allen diesen Beispielen ist 0 der einzige kritische Punkt von f und damit der einzige Kandidat für ein Minimum oder Maximum.

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2, \quad \text{dann ist} \quad \nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 4y \end{pmatrix}, \quad H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Die Hesse-Matrix in $x = y = 0$ (die in diesem Fall nicht von (x, y) abhängt) hat die Eigenwerte 2 und 4, ist also positiv definit. Der Nullpunkt ist also ein striktes lokales Minimum (in diesem Fall sogar ein globales Minimum). Sei nun

$$f(x, y) = x^2 - 2y^2, \quad \text{dann ist} \quad \nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -4y \end{pmatrix}, \quad H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Die Hesse-Matrix in 0 ist indefinit, da sie einen positiven und einen negativen Eigenwert hat. Der Nullpunkt ist also weder ein lokales Maximum noch ein lokales Minimum, er ist vielmehr ein **Sattelpunkt**.

Ein lokales Maximum in 0 erhalten wir für

$$f(x, y) = -x^2 - 2y^2, \quad \text{dann ist} \quad \nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} -2x \\ -4y \end{pmatrix}, \quad H_f(x, y) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix},$$

hier hat die Hesse-Matrix im Nullpunkt die Eigenwerte -2 und -4 , und ist daher negativ definit.

Ist die Hesse-Matrix (positiv oder negativ) semidefinit, aber nicht (positiv oder negativ) definit, so lässt sich durch sie nicht unterscheiden, ob ein Minimum bzw. Maximum vorliegt oder nicht. In jedem der Beispiele

$$f(x, y) = x^2 + y^4, \quad f(x, y) = x^2, \quad f(x, y) = x^2 + y^3, \quad (4.9)$$

gilt

$$\nabla f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.10)$$

im ersten Fall ist 0 ein striktes lokales Minimum, im zweiten Fall ist 0 ein lokales, aber nicht striktes Minimum (da $f(0, y) = 0$ für alle y), im dritten Fall liegt weder ein lokales Minimum noch ein lokales Maximum vor. Durch (4.10) lässt sich lediglich ausschließen, dass 0 ein lokales Maximum ist, denn die Hesse-Matrix hat einen positiven Eigenwert.

Es hat sich also ein zur Kurvendiskussion im Eindimensionalen völlig analoges **Rechen-schema** zur Bestimmung von Maxima und Minima einer Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, ergeben.

1. Bestimmung aller kritischen Punkte von f , also aller Punkte $x \in \Omega$ mit $\nabla f(x) = 0$.
2. Für jeden kritischen Punkt x : Berechnung der Hesse-Matrix $H_f(x)$.
3. Auswertung der Information aus der Hesse-Matrix an einem kritischen Punkt:
 - Sind alle Eigenwerte positiv, so liegt ein striktes lokales Minimum vor.
 - Sind alle Eigenwerte negativ, so liegt ein striktes lokales Maximum vor.
 - Sind alle Eigenwerte gleich Null, so lässt sich der Hesse-Matrix keine Information entnehmen.
 - Gibt es einen positiven Eigenwert (oder mehrere) und einen negativen Eigenwert (oder mehrere), so liegt weder ein Maximum noch ein Minimum vor.
 - Gibt es einen positiven Eigenwert (oder mehrere), aber keinen negativen Eigenwert, so kann ein lokales Minimum vorliegen, aber kein lokales Maximum.

- Gibt es einen negativen Eigenwert (oder mehrere), aber keinen positiven Eigenwert, so kann ein lokales Maximum vorliegen, aber kein lokales Minimum.

Der erste Schritt, die Bestimmung der kritischen Punkte von f , führt im allgemeinen auf ein nichtlineares Gleichungssystem von n Gleichungen für n Unbekannte,

$$\partial_i f(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (4.11)$$

Dafür gibt es numerische Verfahren, etwa das Newton-Verfahren und seine Varianten, welche Folgen (x^k) von Vektoren konstruieren, die gegen eine Lösung von (4.11) konvergieren. Andere Verfahren zur Bestimmung eines Minimums von f konstruieren Folgen (x^k) von Vektoren mit

$$f(x^{k+1}) < f(x^k), \quad (4.12)$$

welche gegen ein Minimum konvergieren. Ein Beispiel für ein solches Verfahren ist das **Gradientenverfahren**, welches sich die Beobachtung zunutze macht, dass der negative Gradient in die Richtung des steilsten Abstiegs von f zeigt. Es hat die Form

$$x^{k+1} = x^k - \lambda_k \nabla f(x^k), \quad (4.13)$$

wobei λ_k eine geeignet zu definierende Schrittweite ist. Die Idee dieses Verfahrens ist einfach zu verstehen, andere Verfahren sind aber besser.

5 Taylorentwicklung

Wir kehren nochmals zur Differentialrechnung im Eindimensionalen zurück, und zwar zu der Frage, wie gut die Werte $f(x)$ einer Funktion f durch ihre Ableitungen im Punkt a approximiert (angenähert) werden, wenn x in der Nähe von a liegt.

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, I ein offenes Intervall, und $a \in I$ gegeben. Die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(a, f(a))$ ist gegeben durch

$$g(x) = f(a) + f'(a)(x - a). \quad (5.1)$$

Wir betrachten die Differenz (das "Restglied")

$$r(x) = f(x) - g(x). \quad (5.2)$$

Es gilt

$$\frac{r(x)}{x - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \rightarrow 0, \quad \text{für } x \rightarrow a, \quad (5.3)$$

das heißt, das Restglied geht für $x \rightarrow a$ schneller gegen 0 als die Funktion $x - a$, eine Eigenschaft, die die Tangente vor allen anderen Geraden durch $(a, f(a))$ auszeichnet.

Mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung lässt sich diese Approximation genauer fassen. Aus ihm und mit partieller Integration erhalten wir

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= \int_a^x f'(t) dt = -(x - t)f'(t) \Big|_{t=a}^{t=x} + \int_a^x (x - t)f''(t) dt \\ &= (x - a)f'(a) + \int_a^x (x - t)f''(t) dt, \end{aligned} \quad (5.4)$$

also (wir bezeichnen das Restglied jetzt mit R_2)

$$R_2(x) = \int_a^x (x - t)f''(t) dt. \quad (5.5)$$

Aus dem Mittelwertsatz der Integralrechnung (Teil 1, Kapitel 11) folgt, dass für ein geeignetes ξ mit $a < \xi < x$ gilt

$$R_2(x) = f''(\xi) \int_a^x (x - t) dt = \frac{(x - a)^2}{2} f''(\xi). \quad (5.6)$$

Falls die zweite Ableitung von f in der Nähe von a beschränkt ist (was der Fall ist, wenn sie stetig ist), etwa durch die Konstante C_2 , so folgt weiter

$$|R_2(x)| \leq C_2 \frac{(x - a)^2}{2}, \quad (5.7)$$

das heißt, das Restglied R_2 verhält sich in der Nähe von a wie eine quadratische Funktion, die in a die Steigung 0 hat.

Dieses quadratische Verhalten von R_2 lässt sich ebenfalls näher spezifizieren. Es ist

$$\begin{aligned} R_2(x) &= \int_a^x (x-t)f''(t) dt = -\frac{(x-t)^2}{2}f''(t) \Big|_{t=a}^{t=x} + \int_a^x \frac{(x-t)^2}{2}f'''(t) dt \\ &= \frac{(x-a)^2}{2}f''(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^2}{2}f'''(t) dt. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Wir setzen

$$R_3(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^2}{2}f'''(t) dt. \quad (5.9)$$

Setzen wir (5.4) – (5.8) zusammen, so erhalten wir

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}f''(a) + R_3(x), \quad (5.10)$$

das heißt, f verhält sich wie die quadratische Funktion

$$q(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}f''(a) \quad (5.11)$$

“bis auf” das Restglied R_3 , für welches wir auf die gleiche Weise wie in (5.6) und (5.7) die Darstellung

$$R_3(x) = \frac{(x-a)^3}{6}f'''(\xi) \quad (5.12)$$

mit einem geeigneten $\xi \in (a, x)$, und die Abschätzung

$$|R_3(x)| \leq C_3 \frac{|x-a|^3}{6} \quad (5.13)$$

erhalten. Dieser Prozess lässt sich fortsetzen, falls f hinreichend oft differenzierbar ist.

Satz 5.1 (Taylorentwicklung)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall, $f \in C^{m+1}(I)$ und $a \in I$. Dann gilt für alle $x \in I$

$$f(x) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + R_{m+1}(x) \quad (5.14)$$

mit

$$R_{m+1}(x) = \frac{1}{m!} \int_a^x (x-t)^m f^{(m+1)}(t) dt. \quad (5.15)$$

□

Weiterhin gilt wie oben

$$R_{m+1}(x) = \frac{(x-a)^{m+1}}{(m+1)!} f^{(m+1)}(\xi), \quad (5.16)$$

$$|R_{m+1}(x)| \leq C_{m+1} \frac{|x-a|^{m+1}}{(m+1)!}, \quad (5.17)$$

wobei ξ zwischen a und x liegt bzw. C_{m+1} nicht von x abhängt.

Satz 5.1 bedeutet, dass wir die Funktion f durch ein Polynom vom Grade m approximieren können, nämlich das **Taylorpolynom**

$$T_m(x) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k, \quad (5.18)$$

so dass der Approximationsfehler R_{m+1} in der Nähe von a "von der Ordnung" $m+1$ ist. Um das Taylorpolynom aufstellen zu können, müssen wir die Ableitungen von f im **Entwicklungspunkt** a kennen.

Als Beispiel betrachten wir die Exponentialfunktion im Entwicklungspunkt $a=0$. Da $(\exp)' = \exp$ und daher $\exp^{(k)} = \exp$ für alle k gilt, ist wegen $\exp(0) = 1$

$$T_m(x) = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} x^k. \quad (5.19)$$

Wollen wir die Exponentialfunktion durch das Polynom (5.19) für ein $x \in (0, 1)$ approximieren, so können wir den Fehler gemäß (5.16) abschätzen durch

$$|R_{m+1}(x)| \leq \frac{x^{m+1}}{(m+1)!} e \leq 3 \frac{x^{m+1}}{(m+1)!}, \quad (5.20)$$

Für $x=0.5$ und $m=3$ ist der Fehler kleiner als 0.008, für $m=8$ bereits kleiner als $2 \cdot 10^{-7}$. Für $x=0.01$ ist schon für $m=3$ der Fehler kleiner als $1.9 \cdot 10^{-9}$. Für größere x wird der Fehler sehr schnell größer, so liefert für $x=10$ die Abschätzung (5.16) bei $m=8$ eine Schranke von $4.5 \cdot 10^{11}$. In der Tat liefert die Taylorentwicklung nur in der Nähe des Entwicklungspunkts brauchbare Näherungen.

Hat die Funktion f eine Potenzreihenentwicklung im Punkt a , also etwa

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k, \quad c_k \in \mathbb{R}, \quad (5.21)$$

so gilt, wie man durch gliedweises Differenzieren der rechten Seite und Einsetzen von $x=a$ erkennt,

$$f^{(j)}(a) = j! c_j, \quad (5.22)$$

also wird (5.21) zu

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k, \quad (5.23)$$

das heißt, das Taylorpolynom vom Grad m wird aus den ersten $m+1$ Termen der Potenzreihe von f im Entwicklungspunkt a gebildet. Das trifft beispielsweise für die Exponentialfunktion zu, die Darstellung im Entwicklungspunkt $a=0$

$$\exp(x) = e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad (5.24)$$

ist für alle $x \in \mathbb{R}$ gültig. In anderen Fällen ist die Gültigkeit der Potenzreihenentwicklung auf ein (mehr oder weniger großes) Konvergenzintervall um den Entwicklungspunkt eingeschränkt.

Umgekehrt können wir durch (5.22) die Koeffizienten der Potenzreihe (5.21) bestimmen, wenn wir die Ableitungen von f kennen; das ist aber nur dann richtig, wenn f auch tatsächlich eine Potenzreihenentwicklung hat, die in einem geeigneten Intervall um a gültig ist. Das muss nicht unbedingt so sein, beispielsweise hat die durch

$$f(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right), \quad x \neq 0,$$

und $f(0) = 0$ definierte Funktion in $a = 0$ keine Potenzreihenentwicklung der Form (5.21). Es sind nämlich alle Ableitungen von f im Nullpunkt gleich Null, und damit auch alle Taylorpolynome in $a = 0$. Die so gebildete Potenzreihe ist also die der Nullfunktion und liefert damit keine Darstellung von f .

Eine andere Schreibweise der Taylorformel erhalten wir, wenn wir $x = a + h$ setzen,

$$f(a + h) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + \tilde{R}_{m+1}(h) \quad (5.25)$$

mit

$$\tilde{R}_{m+1}(h) = \frac{h^{m+1}}{(m+1)!} f^{(m+1)}(\xi), \quad |\tilde{R}_{m+1}(h)| \leq C_{m+1} \frac{|h|^{m+1}}{(m+1)!}. \quad (5.26)$$

Man sagt, dass eine Funktion φ **von der Ordnung** h^m ist, falls

$$|\varphi(h)| \leq C|h|^m \quad (5.27)$$

gilt mit einer (von h unabhängigen, aber sonst nicht eingeschränkten) Konstante C . Man schreibt

$$\varphi(h) = O(h^m). \quad (\text{Gesprochen: "Groß-O von h hoch m"}). \quad (5.28)$$

In diesem Sinne gilt $\tilde{R}_{m+1}(h) = O(h^{m+1})$. Man verwendet auch die Notation

$$\varphi(h) = o(h^m). \quad (\text{Gesprochen: "Klein-O von h hoch m"}). \quad (5.29)$$

Das bedeutet

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(h)}{h^m} \rightarrow 0. \quad (5.30)$$

Für die Differenz

$$\tilde{r}(h) = f(a + h) - (f(a) + f'(a)h)$$

zwischen Funktionswert und Wert der Tangente besagt die Definition der Ableitung gerade, dass

$$\tilde{r}(h) = o(h).$$

Durch die Restgliedbetrachtung in (5.7), welche gültig ist, wenn die Ableitung f' in der Nähe von a stetig ist, haben wir mehr erhalten, nämlich

$$\tilde{r}(h) = O(h^2).$$

Taylorentwicklung für Skalarfelder. Um die Taylorentwicklung für ein Skalarfeld $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, in einem Punkt $a + h$ in der Nähe eines Punktes $a \in \text{int}(\Omega)$ zu erhalten, betrachten wir wieder die (auf einem geeigneten Intervall I definierte) Funktion

$$g(t) = f(a + th), \quad g : I \rightarrow \mathbb{R}. \quad (5.31)$$

Für $f(a+h) = g(1)$ gilt, falls f hinreichend oft differenzierbar ist,

$$g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2}g''(0) + \cdots + \frac{1}{m!}g^{(m)}(0) + \frac{1}{(m+1)!}g^{(m+1)}(t), \quad (5.32)$$

für ein $t \in (0, 1)$. Die Ableitungen von g erhalten wir mit Hilfe der Kettenregel aus den Ableitungen von f , wie im vorigen Kapitel für die erste und zweite Ableitung ausgerechnet. Es ist

$$\begin{aligned} g(0) &= f(a) \\ g'(0) &= \langle \nabla f(a), h \rangle = \sum_{i=1}^n \partial_i f(a) h_i \\ g''(0) &= h^T H_f(a) h = \sum_{i,j=1}^n \partial_i \partial_j f(a) h_i h_j \\ g'''(0) &= \sum_{i,j,k=1}^n \partial_i \partial_j \partial_k f(a) h_i h_j h_k \end{aligned} \quad (5.33)$$

und so weiter. Es ergibt sich also für die Taylorentwicklung erster Ordnung ($m = 1$ in (5.32))

$$f(a+h) = f(a) + h^T \nabla f(a) + O(\|h\|^2), \quad (5.34)$$

und für die Taylorentwicklung zweiter Ordnung ($m = 2$ in (5.32))

$$f(a+h) = f(a) + h^T \nabla f(a) + \frac{1}{2} h^T H_f(a) h + O(\|h\|^3), \quad (5.35)$$

und entsprechend für die höheren Ordnungen.

Als Beispiel betrachten wir

$$f(x_1, x_2) = x_1^3 e^{x_2}.$$

Es ist

$$\partial_1 f(x_1, x_2) = 3x_1^2 e^{x_2}, \quad \partial_2 f(x_1, x_2) = x_1^3 e^{x_2}, \quad (5.36)$$

$$\partial_1 \partial_1 f(x_1, x_2) = 6x_1 e^{x_2}, \quad \partial_1 \partial_2 f(x_1, x_2) = 3x_1^2 e^{x_2}, \quad \partial_2 \partial_2 f(x_1, x_2) = x_1^3 e^{x_2}. \quad (5.37)$$

Im Punkt $a = (1, 0)$ gilt also

$$\nabla f(1, 0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad H_f(1, 0) = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

also hat die Taylorentwicklung zweiter Ordnung die Form

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + h^T \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} h^T \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} h + O(\|h\|^3) \\ &= 1 + 3h_1 + h_2 + 3h_1^2 + 3h_1 h_2 + \frac{1}{2} h_2^2 + O(\|h\|^3). \end{aligned}$$

6 Vektorfelder, Ableitungen

Ein Vektorfeld wird beschrieben durch eine Funktion (oder Abbildung)

$$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n. \quad (6.1)$$

Es besteht aus m Skalarfeldern, den Komponentenfunktionen

$$f_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad 1 \leq i \leq m. \quad (6.2)$$

Ist beispielsweise $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ein Skalarfeld, so ist $\nabla g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld.

Die Deformation eines Festkörpers stellt ein weiteres Beispiel dar. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein Bereich, der von einem kräftefreien Festkörper eingenommen wird. Dieser werde durch Einwirkung von Oberflächen- und Volumenkräften verformt, ein materieller Punkt, der vorher am Raumpunkt $x \in \Omega$ war, befindet sich nachher an einem neuen Raumpunkt $x + u(x)$. Die zugehörige Funktion

$$u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (6.3)$$

heißt **Verschiebungsfeld** oder **Verschiebung**, sie definiert für jeden Raumpunkt $x \in \Omega$ den Verschiebungsvektor $u(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3(x)) \in \mathbb{R}^3$.

Ein Vektorfeld f können wir differenzieren, indem wir seine Komponentenfunktionen f_1, \dots, f_m jeweils für sich genommen differenzieren. An jedem Punkt $x \in \Omega$ (wir setzen Ω als offen voraus) erhalten wir partielle Ableitungen

$$\partial_j f_i(x), \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n. \quad (6.4)$$

Wir können sie zu einer $m \times n$ -Matrix zusammenfassen,

$$J_f(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x) & \cdots & \partial_n f_1(x) \\ \partial_1 f_2(x) & \cdots & \partial_n f_2(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_m(x) & \cdots & \partial_n f_m(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(m,n)}. \quad (6.5)$$

Diese Matrix heißt **Jacobi-Matrix** oder **Funktionalmatrix** des Vektorfeldes f , ihre Zeilen werden von den (transponierten) Gradienten der Komponentenfunktionen f_i gebildet. Ist $m = n$, so ist sie quadratisch. Als Beispiel betrachten wir die Funktionalmatrix des Verschiebungsfeldes $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$J_u(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 u_1(x) & \partial_2 u_1(x) & \partial_3 u_1(x) \\ \partial_1 u_2(x) & \partial_2 u_2(x) & \partial_3 u_2(x) \\ \partial_1 u_3(x) & \partial_2 u_3(x) & \partial_3 u_3(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(3,3)}. \quad (6.6)$$

Ihr symmetrischer Anteil,

$$E(x) = \frac{1}{2}(J_u(x) + J_u(x)^T), \quad \varepsilon_{ij}(x) = \frac{1}{2}(\partial_j u_i(x) + \partial_i u_j(x)), \quad (6.7)$$

heißt der **Verzerrungstensor** im Punkt x .

Wenn wir wollen, können wir die Hesse-Matrix $H_g(x)$ eines Skalarfeldes g als die Funktionalmatrix ihres Gradientenfeldes ∇g auffassen.

Koordinatentransformationen sind ebenfalls Vektorfelder. Wir haben bereits lineare Koordinatentransformationen der Form

$$f(x) = Ax, \quad A \in \mathbb{R}^{(n,n)}, \quad f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (6.8)$$

behandelt. Ein Beispiel für eine nichtlineare Koordinatentransformation sind die **Polarkoordinaten**, beschrieben durch

$$f(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi), \quad f: (0, \infty) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2. \quad (6.9)$$

Die zugehörige Funktionalmatrix ist

$$J_f(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (6.10)$$

Ein weiteres Beispiel sind die **Zylinderkoordinaten**, beschrieben durch

$$f(r, \varphi, z) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z), \quad f: (0, \infty) \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3. \quad (6.11)$$

Die zugehörige Funktionalmatrix ist

$$J_f(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.12)$$

Ebenfalls eine Rolle spielen die **Kugelkoordinaten**, beschrieben durch

$$f(r, \theta, \varphi) = (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta), \quad f: (0, \infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3. \quad (6.13)$$

Die zugehörige Funktionalmatrix ist

$$J_f(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.14)$$

Die Approximationseigenschaften der Ableitung übertragen sich direkt vom skalaren auf den Vektorfall. Für die Komponenten f_i eines Vektorfelds $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ haben wir im vorigen Kapitel erhalten (wir nennen den Entwicklungspunkt x statt a)

$$f_i(x+h) = f_i(x) + \nabla f_i(x)^T h + o(\|h\|), \quad 1 \leq i \leq m. \quad (6.15)$$

In Matrix-Vektor-Notation können wir diese Gleichungen zusammenfassen zu einer Gleichung von Spaltenvektoren

$$f(x+h) = f(x) + J_f(x)h + o(\|h\|). \quad (6.16)$$

Die Differenz $f(x+h) - f(x)$ wird also in der Nähe von x durch die lineare Abbildung

$$T_x: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad T_x(h) = J_f(x)h, \quad (6.17)$$

approximiert. Ein Vektorfeld f , für das (6.16) oder äquivalent

$$f(x+h) = f(x) + T_x(h) + o(\|h\|)$$

gilt, heißt **total differenzierbar** oder **Fréchet-differenzierbar**. Die lineare Abbildung T_x nennt man das **totale Differential** oder die **Fréchet-Ableitung** von f im Punkt x , ihre Matrixdarstellung in den kanonischen Koordinaten ist gemäß (6.17) gerade durch die Funktionalmatrix gegeben.

Die **Kettenregel** für Vektorfelder ist am übersichtlichsten, wenn man sie für das totale Differential hinschreibt. Seien

$$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$$

total differenzierbar, seien

$$T_x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad S_{f(x)} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$$

die totalen Differentiale in den Punkten x bzw. $f(x)$. Dann ist (was wir nicht beweisen wollen) das totale Differential der zusammengesetzten Funktion

$$g \circ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l. \quad (6.18)$$

gegeben durch

$$S_{g \circ f} \circ T_x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l, \quad (6.19)$$

entsprechend erhalten wir die Funktionalmatrix von $g \circ f$ als Produkt der Funktionalmatrizen von f und g ,

$$J_{g \circ f}(x) = J_g(f(x)) \cdot J_f(x). \quad (6.20)$$

In (6.20) sind die Formeln zur Berechnung aller partieller Ableitungen aller Komponentenfunktionen von $g \circ f$ zusammengefasst.

Als Beispiel für die Kettenregel betrachten wir, wie sich partielle Ableitungen transformieren, wenn wir von kartesischen zu Polarkoordinaten übergehen. Sei etwa

$$u(x, y) = x^2 + 2y^3, \quad u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}. \quad (6.21)$$

Wir wollen die Funktion u und ihre Ableitungen “in Polarkoordinaten betrachten”, das heißt, wir haben zu untersuchen die Funktion

$$\tilde{u}(r, \varphi) = u(r \cos \varphi, r \sin \varphi). \quad (6.22)$$

Es ist also

$$\tilde{u} = u \circ f, \quad f(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi). \quad (6.23)$$

Wir wenden die Kettenregel (6.20) an mit $g = u$, $n = m = 2$, $l = 1$, dann ist

$$(\partial_r \tilde{u} \quad \partial_\varphi \tilde{u}) = (\partial_x u \quad \partial_y u) \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (6.24)$$

Hierbei sind die Matrixelemente abkürzend notiert, es sind gemeint die partiellen Ableitungen an den entsprechenden Punkten,

$$\partial_r \tilde{u}(r, \varphi), \quad \partial_x u(r \cos \varphi, r \sin \varphi), \quad (6.25)$$

und Entsprechendes für $\partial_\varphi \tilde{u}$, $\partial_y u$. Für die Beispielfunktion (6.21) gilt

$$\partial_x u(x, y) = 2x, \quad \partial_y u(x, y) = 6y^2.$$

Aus (6.24) ergibt sich also

$$\partial_r \tilde{u}(r, \varphi) = (2r \cos \varphi \quad 6r^2 \sin^2 \varphi) \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix} = 2r \cos^2 \varphi + 6r^2 \sin^3 \varphi, \quad (6.26)$$

und analog

$$\partial_\varphi \tilde{u}(r, \varphi) = -2r^2 \sin \varphi \cos \varphi + 6r^3 \sin^2 \varphi \cos \varphi. \quad (6.27)$$

Dieses Beispiel illustriert das generelle Rechenschema bei der Kettenregel, in diesem einfachen Fall kann man (6.26) und (6.27) direkt erhalten, indem man

$$\tilde{u}(r, \varphi) = r^2 \cos^2 \varphi + 2r^3 \sin^3 \varphi$$

nach r und φ partiell differenziert.

Beim Rechnen unterscheidet man oft nicht zwischen u und \tilde{u} , man schreibt dann $u(r, \varphi) = u(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$, weil man ja "bis auf eine Koordinatentransformation dieselbe Funktion meint". Die Kettenregel (6.24) kann man dann oft aufgeschrieben finden in der Form

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} = \cos \varphi \frac{\partial u}{\partial x} + \sin \varphi \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial \varphi} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -r \sin \varphi \frac{\partial u}{\partial x} + r \cos \varphi \frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned}$$

Man muss dann aber mehr aufpassen, dass man nichts durcheinanderbringt.

Aus der Kettenregel erhalten wir unmittelbar die **Funktionalmatrix der inversen Funktion**. Sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wir nehmen an, dass f invertierbar ist, dann ist

$$f^{-1} : f(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad f^{-1}(f(x)) = x, \quad \text{für alle } x \in \Omega. \quad (6.28)$$

Aus der Kettenregel folgt

$$J_{f^{-1}}(f(x)) \cdot J_f(x) = J_{id}(x) = I, \quad (6.29)$$

also

$$J_{f^{-1}}(f(x)) = (J_f(x))^{-1}. \quad (6.30)$$

Die Funktionalmatrix der inversen Funktion f^{-1} ist also gerade die Inverse der Funktionalmatrix von f , an jeweils korrespondierenden Punkten betrachtet. Als Beispiel betrachten wir die Polarkoordinaten,

$$f(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi), \quad J_f(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (6.31)$$

Es ist gemäß der Formel zur Berechnung der Inversen einer 2×2 -Matrix

$$J_f(r, \varphi)^{-1} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r \cos \varphi & r \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad (6.32)$$

also ist die Funktionalmatrix der Inversen (also der Transformation von kartesischen auf Polarkoordinaten) im Punkt $(x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ gegeben durch

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\frac{1}{r} \sin \varphi & \frac{1}{r} \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (6.33)$$

Der Gradient eines Skalarfeldes $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist ein Vektorfeld $\nabla f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Die **Divergenz** eines Vektorfeldes $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist ein Skalarfeld, sie ist definiert als

$$\operatorname{div} f = \sum_{i=1}^n \partial_i f_i. \quad (6.34)$$

Ist beispielsweise

$$f(x, y) = (y \sin x, xy^2), \quad (6.35)$$

so ist

$$(\operatorname{div} f)(x, y) = \partial_1 f_1(x, y) + \partial_2 f_2(x, y) = y \cos x + 2xy. \quad (6.36)$$

Unmittelbar aus der Definition folgt, dass für ein Skalarfeld $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \sum_{i=1}^n \partial_i \partial_i f = \sum_{i=1}^n \partial_i^2 f.$$

Dieser Operator heißt der **Laplace-Operator**,

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \partial_i^2 f. \quad (6.37)$$

Für die Funktion

$$f(x, y) = x^2 y^3$$

gilt

$$\partial_x f(x, y) = 2xy^3, \quad \partial_x^2 f(x, y) = 2y^3, \quad \partial_y f(x, y) = 3x^2 y^2, \quad \partial_y^2 f(x, y) = 6x^2 y,$$

also

$$\Delta f(x, y) = 2y^3 + 6x^2 y.$$

Die Divergenz taucht in der Mechanik auf bei der Beschreibung des Kräftegleichgewichts in einem elastischen Körper. Bezeichnen wir die Zeilen des Spannungstensors

$$S(x, y, z) = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} (x, y, z) \quad (6.38)$$

mit S_1, S_2, S_3 , so erfüllen sie in inneren Punkten (x, y, z) des Körpers die Gleichungen

$$(\operatorname{div} S_1)(x, y, z) = (\operatorname{div} S_2)(x, y, z) = (\operatorname{div} S_3)(x, y, z) = 0, \quad (6.39)$$

wenn wir die Schwerkraft (eine Volumenkraft) vernachlässigen. Die 3 Gleichungen in (6.39) reichen aber zur Bestimmung der 6 verschiedenen Funktionen (S ist symmetrisch) in (6.38) nicht aus. Ziehen wir noch das Hookesche Gesetz

$$S = \lambda \left(\sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ii} \right) I + 2\mu E \quad (6.40)$$

mit dem Verzerrungstensor $E = (\varepsilon_{ij})$, $1 \leq i, j \leq 3$ und den Materialparametern (Lamé-Konstanten) λ und μ sowie die Relationen

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i) \quad (6.41)$$

heran und setzen (6.41) in (6.40) sowie (6.40) in (6.39) ein, so erhalten wir 3 Gleichungen, welche zweite partielle Ableitungen der 3 unbekanntenen Funktionen u_1 , u_2 und u_3 enthalten, sogenannte **partielle Differentialgleichungen**. Sie heißen in diesem konkreten Fall die **Navier-Gleichungen**. Ihre Lösung liefert eine vollständige Beschreibung der Kräfteverteilung und Deformation des elastischen Körpers im Gleichgewichtszustand, sie erfolgt durch geeignete numerische Verfahren, etwa **Finite-Element-Verfahren**.

7 Maxima und Minima bei Nebenbedingungen

Als einführendes Beispiel betrachten wir die durch

$$y = x^2 - 3 \quad (7.1)$$

definierte Parabel in der (x, y) -Ebene. Wir suchen denjenigen Punkt auf ihr, welcher den kleinsten Abstand zum Nullpunkt hat.

Diese Aufgabe können wir folgendermaßen schreiben.

$$\begin{aligned} \text{Minimiere } & J(x, y) = x^2 + y^2, \\ \text{wobei } & 0 = f(x, y) = y - x^2 + 3. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Wir können (7.2) lösen, indem wir die Nebenbedingung $f(x, y) = 0$ eliminieren. Wir setzen gemäß (7.1)

$$\tilde{J}(x) = J(x, x^2 - 3) = x^2 + (x^2 - 3)^2 = x^4 - 5x^2 + 9,$$

dann ist

$$\tilde{J}'(x) = 4x^3 - 10x = 4x \left(x^2 - \frac{5}{2} \right),$$

mit den Nullstellen

$$x_1 = 0, \quad x_{2,3} = \pm \sqrt{\frac{5}{2}}.$$

Die erste Nullstelle liefert ein Maximum, die beiden anderen ein Minimum, wie man mit Hilfe der zweiten Ableitung nachrechnen kann. Es ergeben sich

$$\text{die beiden Minimalstellen } \left(\pm \sqrt{\frac{5}{2}}, -\frac{1}{2} \right), \quad \text{und die Maximalstelle } (0, -3).$$

Alternativ kann man (7.1) nach x auflösen und die Extremwerte von

$$\bar{J}(y) = J(\pm \sqrt{y+3}, y) = y^2 + y + 3$$

bestimmen, was in diesem Fall zu

$$y = -\frac{1}{2}$$

führt und die beiden Minimalstellen liefert, nicht aber die Maximalstelle. Letztere erhält man nur, wenn man berücksichtigt, dass die Parabel nur y -Werte im Intervall $[-3, \infty)$ hat, und -3 ein lokales Maximum von \bar{J} in diesem Intervall ist, mit $\bar{J}'(-3) < 0$.

Dieses Rechenverfahren versagt aber, wenn wir die Nebenbedingung nicht explizit formelmäßig nach x oder y auflösen können, beispielsweise wenn

$$0 = f(x, y) = (3x + 2y) \sin(xy) - 1.$$

Wir entwickeln nun ein allgemeines Schema zur Lösung der Aufgabe

$$\begin{aligned} \text{Minimiere } & J(x), \\ \text{wobei } & f(x) = 0, \end{aligned} \quad (7.3)$$

für gegebene Funktionen $J : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Ein $x_* \in \Omega$ heißt **Lösung von (7.3)**, falls $f(x_*) = 0$ und

$$J(x_*) \leq J(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega \text{ mit } f(x) = 0. \quad (7.4)$$

Die Funktion J heißt **Zielfunktion**, die Bedingung $f = 0$ **Nebenbedingung**.

Wir können **nicht** erwarten, dass $\nabla J(x_*) = 0$ gilt für eine Lösung von (7.3), so gilt etwa in Beispiel (7.2), dass $\nabla J \neq 0$ außer im Nullpunkt, also auch in den drei Extremstellen.

Wir nehmen einmal an, es gebe eine Funktion g , so dass

$$x_n = g(x_1, \dots, x_{n-1}) \quad \Leftrightarrow \quad f(x_1, \dots, x_n) = 0. \quad (7.5)$$

Das entspricht dem Auflösen nach y im Beispiel (7.2), wir setzen nun aber nicht voraus, dass wir eine explizite Formel für g hinschreiben können. Gilt (7.5), so ist (7.3) äquivalent zur Aufgabe, die Funktion

$$\tilde{J}(x_1, \dots, x_{n-1}) = J(x_1, \dots, x_{n-1}, g(x_1, \dots, x_{n-1})) \quad (7.6)$$

zu minimieren, wobei keine Nebenbedingung auftritt. Sind J und g differenzierbar, so ist auch \tilde{J} differenzierbar, und in einer Minimalstelle x muss gelten

$$\partial_i \tilde{J}(x_*) = 0, \quad 1 \leq i \leq n-1. \quad (7.7)$$

Zur Berechnung von $\partial_i \tilde{J}$ wenden wir die Kettenregel an auf

$$\tilde{J} = J \circ \tilde{g}, \quad \tilde{g}(x_1, \dots, x_{n-1}) = (x_1, \dots, x_{n-1}, g(x_1, \dots, x_{n-1})).$$

Es ergibt sich

$$\partial_i \tilde{J} = \sum_{j=1}^n \partial_j J \cdot \partial_i \tilde{g}_j = \partial_i J + \partial_n J \cdot \partial_i g, \quad (7.8)$$

da

$$\partial_i \tilde{g}_j = \begin{cases} \delta_{ij}, & j < n \\ \partial_i g, & j = n. \end{cases}$$

Im Minimum gilt also

$$\partial_i J(x_*) + \partial_n J(x_*) \cdot \partial_i g(x_{1*}, \dots, x_{n-1,*}) = 0, \quad 1 \leq i < n. \quad (7.9)$$

Analog folgt aus

$$0 = f(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_{n-1}, g(x_1, \dots, x_{n-1})),$$

dass

$$\partial_i f(x_*) + \partial_n f(x_*) \cdot \partial_i g(x_{1*}, \dots, x_{n-1,*}) = 0, \quad 1 \leq i < n. \quad (7.10)$$

Es folgt

$$\partial_i g(x_{1*}, \dots, x_{n-1,*}) = -\frac{\partial_i f(x_*)}{\partial_n f(x_*)}, \quad 1 \leq i < n,$$

Einsetzen in (7.9) ergibt

$$\partial_i J(x_*) - \frac{\partial_n J(x_*)}{\partial_n f(x_*)} \partial_i f(x_*) = 0, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (7.11)$$

Setzen wir nun

$$\lambda = -\frac{\partial_n J(x_*)}{\partial_n f(x_*)}, \quad (7.12)$$

so erhalten wir schließlich

$$\nabla J(x_*) + \lambda \nabla f(x_*) = 0. \quad (7.13)$$

Dieses Ergebnis gilt allgemein. Man kann beweisen (was wir nicht tun wollen), dass man $f = 0$ in der Nähe von x_* nach x_k auflösen kann, falls $\partial_k f(x_*) \neq 0$. Die Argumentation von (7.5) nach (7.13) bleibt gültig, wenn wir x_n mit x_k vertauschen.

Die Zahl λ heißt **Lagrange-Multiplikator**.

Satz 7.1 Seien $J, f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei x_* Lösung von (7.3), es gelte $\nabla f(x_*) \neq 0$. Dann gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\nabla J(x_*) + \lambda \nabla f(x_*) = 0. \quad (7.14)$$

Die Funktion

$$L(x, \lambda) = L(x_1, \dots, x_n, \lambda) = J(x) + \lambda f(x) \quad (7.15)$$

heißt die **Lagrange-Funktion** des Optimierungsproblems (7.3).

Zur Bestimmung eines Minimums oder eines Maximums (= Minimum von $-J$) erhalten wir also ein Gleichungssystem (wir schreiben x statt x_*)

$$\nabla J(x) + \lambda \nabla f(x) = 0 \quad (7.16)$$

$$f(x) = 0 \quad (7.17)$$

von $n + 1$ Gleichungen für $n + 1$ Unbekannte $(x_1, \dots, x_n, \lambda)$.

Wir wenden diese Methode auf das einleitende Beispiel an,

$$J(x, y) = x^2 + y^2, \quad f(x, y) = y - x^2 + 3.$$

Es ist $n = 2$, (7.16) und (7.17) wird zu

$$2x - \lambda \cdot 2x = 0 \quad (7.18)$$

$$2y + \lambda = 0 \quad (7.19)$$

$$y - x^2 + 3 = 0. \quad (7.20)$$

Wir betrachten die erste Gleichung

$$2x(1 - \lambda) = 0.$$

Ist $x = 0$, so erhalten wir $y = -3$ aus (7.20), das führt auf das Maximum in $(0, -3)$; aus (7.19) ergibt sich $\lambda = 6$, das wird aber nicht benötigt. Ist andererseits $1 - \lambda = 0$, so ist

$\lambda = 1$, und aus (7.19) erhalten wir $y = -1/2$, das führt mit (7.20) auf die beiden Minima mit $x = \pm\sqrt{5/2}$.

Die Bedingung (7.14) lässt sich geometrisch interpretieren. Der Vektor $\nabla f(x_*)$ steht senkrecht auf der Tangentialebene (im Beispiel: Tangente) im Punkt x_* an die durch die Nebenbedingung $f = 0$ gegebene gekrümmte Fläche im \mathbb{R}^n . Dasselbe gilt für den Vektor $\nabla J(x_*)$, da (7.14) besagt, dass diese beiden Vektoren parallel sind.

Ob die aus (7.14) berechneten Punkte Minimalstellen oder Maximalstellen sind, lässt sich u.U. mit Hilfe der zweiten Ableitungen von J und f entscheiden, siehe Ansorge/Oberle, Band 2, Abschnitt 18.3.

Wir können das beschriebene Verfahren auch anwenden, wenn mehr als eine Nebenbedingung vorliegt. Wir betrachten das Problem

$$\begin{aligned} \text{Minimiere } & J(x), \\ \text{wobei } & f(x) = 0, \end{aligned} \tag{7.21}$$

für gegebene Funktionen $J : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $m < n$. Die Nebenbedingung $f = 0$ fasst in diesem Fall m einzelne Nebenbedingungen zusammen,

$$f_j(x) = 0, \quad 1 \leq j \leq m. \tag{7.22}$$

In diesem Fall ist die Lagrangefunktion gegeben durch

$$L(x, \lambda) = L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = J(x) + \langle \lambda, f(x) \rangle = J(x) + \sum_{j=1}^m \lambda_j f_j(x). \tag{7.23}$$

Die Bedingung (7.14) wird zu

$$0 = \nabla_x L(x_*, \lambda) = \nabla J(x_*) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \nabla f_j(x_*). \tag{7.24}$$

Man kann beweisen: Ist x_* eine Lösung von (7.21) und hat die Funktionalmatrix $J_f(x_*)$ den Rang m , so muss es einen Vektor $\lambda \in \mathbb{R}^m$ geben, so dass (7.24) gilt,

Oft sind die Nebenbedingungen als **Ungleichungen** statt als Gleichungen gegeben, also etwa

$$f_j(x) \leq 0, \quad \text{statt } f_j(x) = 0, \tag{7.25}$$

für einen oder mehrere j . In diesem Fall kann man (7.23) und (7.24) ebenfalls anwenden, es gilt dann zusätzlich

$$\lambda_j \geq 0, \quad \lambda_j f_j(x) = 0,$$

für alle j , die einer Ungleichungsnebenbedingung (7.25) entsprechen.

8 Parameterabhängige Integrale

Wir betrachten als einführendes Beispiel die Funktion

$$F(x) = \int_0^\pi x \sin y \, dy. \quad (8.1)$$

In diesem Fall führen die Rechnungen

$$\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = F(0) = 0, \quad (8.2)$$

$$F'(x) = \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial x} (x \sin y) \, dy = \int_0^\pi \sin y \, dy = -\cos y \Big|_{y=0}^{y=\pi} = 2, \quad (8.3)$$

zu den richtigen Ergebnissen, wir können das sofort nachprüfen, indem wir

$$F(x) = \int_0^\pi x \sin y \, dy = -x \cos y \Big|_{y=0}^{y=\pi} = 2x$$

ausrechnen. Allgemein stellen sich die beiden folgenden Fragen. Sei

$$F(x) = \int_c^d f(x, y) \, dy, \quad (8.4)$$

wobei $f : I \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben ist, $I \subset \mathbb{R}$ Intervall. Gilt dann, falls $x_n \rightarrow x$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_c^d f(x_n, y) \, dy = \int_c^d \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y) \, dy = \int_c^d f(x, y) \, dy = F(x), \quad (8.5)$$

und gilt, falls f partiell nach x differenzierbar ist,

$$F'(x) = \int_c^d \partial_x f(x, y) \, dy \quad ? \quad (8.6)$$

In beiden Fällen liegt das Problem in der Vertauschbarkeit zweier Grenzprozesse.

Das folgende Beispiel zeigt, dass (8.5) nicht immer gilt. Wir definieren $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \frac{y}{x^2}, & 0 \leq y < x, \\ \frac{2x-y}{x^2}, & x \leq y < 2x, \\ 0, & 2x \leq y. \end{cases} \quad (8.7)$$

Die Funktion f ist stetig bezüglich x , das heißt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y) = f(x, y), \quad \text{falls } x_n \rightarrow x,$$

gilt für alle $y \in [0, 1]$, aber es ist

$$F(x) = \int_0^1 f(x, y) \, dy = 1 \neq 0 = \int_0^1 f(0, y) \, dy = F(0), \quad \text{falls } 0 < x \leq \frac{1}{2},$$

also gilt (8.5) nicht für $x = 0$.

Wir betrachten (8.4), sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Folge im Intervall I mit $x_n \rightarrow x \in I$. Aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung folgt

$$f(x_n, y) - f(x, y) = (x_n - x) \cdot \partial_x f(\xi_n, y),$$

für eine geeignete Zwischenstelle $\xi_n \in (x, x_n)$, die auch noch von y abhängt. Ist $\partial_x f$ beschränkt, etwa

$$|\partial_x f(\xi, y)| \leq M,$$

für alle ξ und alle y , so folgt

$$0 \leq |F(x_n) - F(x)| \leq \left| \int_c^d f(x_n, y) - f(x, y) dy \right| \leq \int_c^d M|x_n - x| dy = (d - c)M|x_n - x|,$$

also $F(x_n) \rightarrow F(x)$. In solchen Fällen gilt also (8.5).

Damit (8.5) gilt, genügt es aber, dass f im Sinne von Kapitel 3 auf seinem zweidimensionalen Definitionsbereich $I \times [c, d]$ stetig ist, das heißt,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = f(x, y) \tag{8.8}$$

gilt für jede Folge (x_n, y_n) , welche gegen (x, y) konvergiert. Die Funktion in (8.7) erfüllt (8.8) nicht, es ist

$$f(x, x) = \frac{1}{x}, \quad \text{aber} \quad f(0, 0) = 0.$$

Satz 8.1 Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $f : I \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann wird durch

$$F(x) = \int_c^d f(x, y) dy \tag{8.9}$$

eine stetige Funktion $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ definiert, das heißt, aus $x_n \rightarrow x$ folgt $F(x_n) \rightarrow F(x)$. \square

Satz 8.2 Die Aussage von Satz 8.1 gilt auch, wenn f die folgende Voraussetzungen erfüllt:

(i) f ist stetig bezüglich x , das heißt, es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y) = f(x, y), \tag{8.10}$$

für alle $x \in I$, $y \in [c, d]$ und alle Folgen $x_n \rightarrow x$.

(ii) Es gibt eine integrierbare Funktion $h : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$, so dass

$$|f(x, y)| \leq h(y) \tag{8.11}$$

gilt für alle $x \in I$, $y \in [c, d]$.

Unter diesen Voraussetzungen gilt die Aussage von Satz 8.1 auch dann, wenn das Integral (8.9) ein uneigentliches Integral ist. \square

Diese beiden Sätze beweisen wir hier nicht.

Als Beispiel betrachten wir die **Laplace-Transformierte**

$$(\mathcal{L}g)(x) = \int_0^{\infty} g(y)e^{-xy} dy \quad (8.12)$$

einer Funktion $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Falls beispielsweise $|g|$ durch eine Konstante C beschränkt ist, so gilt auf jedem Intervall $I = [a, b]$ mit $a > 0$ für $x \in [a, b]$

$$|g(y)e^{-xy}| \leq Ce^{-ay} =: h(y)$$

für alle $y \geq 0$. Da h uneigentlich integrierbar ist auf $[0, \infty)$, ist also die Laplace-Transformierte $\mathcal{L}g$ für solche Funktionen g stetig auf jedem Intervall $[a, b]$ mit $a > 0$, und damit auf $(0, \infty)$.

Ein anderes Beispiel ist die **Gamma-Funktion**

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-y}y^{x-1} dy, \quad (8.13)$$

welche definiert und stetig ist für $x > 0$.

Wir betrachten nun wieder die Ableitung $F'(x)$ von

$$F(x) = \int_c^d f(x, y) dy. \quad (8.14)$$

Satz 8.3 Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, seien $f : I \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ und $\partial_x f : I \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, und

$$F'(x) = \int_c^d \partial_x f(x, y) dy. \quad (8.15)$$

□

Auch in diesem Fall ist die Stetigkeit von $\partial_x f$ nur bezüglich x erforderlich, solange in Analogie zu (8.11) eine Abschätzung

$$|\partial_x f(x, y)| \leq h(y) \quad (8.16)$$

mit einer integrierbaren Funktion h gilt, und der Fall des uneigentlichen Integrals ist damit ebenfalls eingeschlossen. Auf diese Weise erhalten wir beispielsweise die Ableitung der Gammafunktion,

$$\Gamma'(x) = \int_0^{\infty} e^{-y}y^{x-1} \ln(y) dy, \quad (8.17)$$

sowie unter geeigneten Voraussetzungen an g die Ableitung der Laplace-Transformierten

$$(\mathcal{L}g)'(x) = \int_0^{\infty} -yg(y)e^{-xy} dy = -(\mathcal{L}k)(x), \quad \text{wobei } k(y) = yg(y). \quad (8.18)$$

Indem wir Satz 8.3 mit der Kettenregel kombinieren, erhalten wir die Ableitung der Funktion

$$F(x) = \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy, \quad (8.19)$$

falls f, c, d stetig differenzierbare Funktionen sind. Wir setzen

$$\tilde{F}(x, a, b) = \int_a^b f(x, y) dy,$$

dann ist

$$F(x) = \tilde{F}(x, c(x), d(x)).$$

Aus der Kettenregel folgt

$$F' = \partial_x \tilde{F} + \partial_a \tilde{F} \cdot c' + \partial_b \tilde{F} \cdot d',$$

genauer

$$F'(x) = \partial_x \tilde{F}(x, c(x), d(x)) + \partial_a \tilde{F}(x, c(x), d(x)) \cdot c'(x) + \partial_b \tilde{F}(x, c(x), d(x)) \cdot d'(x).$$

Es ist nach (8.15) und dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\partial_x \tilde{F}(x, a, b) = \int_a^b \partial_x f(x, y) dy, \quad \partial_a \tilde{F}(x, a, b) = -f(x, a), \quad \partial_b \tilde{F}(x, a, b) = f(x, b).$$

Insgesamt ergibt sich die **Formel von Leibniz**

$$F'(x) = \int_{c(x)}^{d(x)} \partial_x f(x, y) dy + f(x, d(x))d'(x) - f(x, c(x))c'(x). \quad (8.20)$$

Als Beispiel betrachten wir die Funktion

$$F(x) = \int_{x^2}^{3-x} \sin(xy) dy.$$

Es ist

$$F'(x) = \int_{x^2}^{3-x} y \cos(xy) dy + \sin(x(3-x)) \cdot (-1) - \sin(x^3) \cdot 2x.$$

Als weiteres Beispiel betrachten wir die Funktion

$$F(t) = \frac{1}{k} \int_0^t g(s) \sin(k(t-s)) ds, \quad k > 0.$$

Es ist

$$F'(t) = \frac{1}{k} \int_0^t g(s) k \cos(k(t-s)) ds + g(t) \sin(k(t-t)) = \int_0^t g(s) \cos(k(t-s)) ds,$$

sowie

$$\begin{aligned} F''(t) &= - \int_0^t g(s) k \sin(k(t-s)) ds + g(t) \cos(k(t-t)) \\ &= -k \int_0^t g(s) \sin(k(t-s)) ds + g(t). \end{aligned}$$

Die Funktion F ist also eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$F''(t) + k^2 F(t) = g(t), \quad (8.21)$$

sie erfüllt außerdem die Anfangsbedingungen $F(0) = F'(0) = 0$. Die Gleichung (8.21) beschreibt einen harmonischen Oszillator (etwa eine schwingende Feder mit Federkonstante k), der einer sich in der Zeit ändernden äußeren Anregung g ausgesetzt ist.

9 Bereichsintegrale, 2. Teil

Höherdimensionale Bereichsintegrale auf achsenparallelen Quadern. Für einen Quader

$$\Omega = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$$

im \mathbb{R}^3 definieren wir das Bereichsintegral, in diesem Fall **Volumenintegral** genannt,

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \quad (9.1)$$

analog zum Zweidimensionalen, indem wir die Intervalle $[a_i, b_i]$ durch Zerlegungen Z_1 , Z_2 und Z_3 unterteilen, Ω entsprechend in kleine Quader Q_{ijk} zerlegen, Treppenfunktionen (das heißt, auf den einzelnen Quadern Q_{ijk} konstante Funktionen) betrachten, Unter- und Obersummen definieren und das Integral durch die beschriebene Einschließung im Grenzwert erhalten. Es gilt ebenfalls der Satz von Fubini, so dass die Berechnung von (9.1) auf die Berechnung von drei eindimensionalen Integralen zurückgeführt werden kann, wobei die Reihenfolge der Integrationen beliebig gewählt werden kann,

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz &= \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx \\ &= \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_3}^{b_3} \int_{a_2}^{b_2} f(x, y, z) \, dy \, dz \, dx \\ &\quad \vdots \\ &= \int_{a_3}^{b_3} \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz, \end{aligned} \quad (9.2)$$

das sind 6 verschiedene Möglichkeiten. Als Beispiel betrachten wir

$$\iiint_{\Omega} x^2 y z \, dx \, dy \, dz, \quad \Omega = [0, 1] \times [1, 2] \times [2, 3].$$

Wir rechnen nur eine Variante aus,

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} x^2 y z \, dx \, dy \, dz &= \int_2^3 \int_1^2 \int_0^1 x^2 y z \, dx \, dy \, dz = \int_2^3 \int_1^2 \left(\frac{1}{3} x^3 y z \Big|_{x=0}^{x=1} \right) dy \, dz \\ &= \int_2^3 \int_1^2 \frac{1}{3} y z \, dy \, dz = \int_2^3 \frac{1}{6} y^2 z \Big|_{y=1}^{y=2} dz = \int_2^3 \frac{1}{2} z \, dz = \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

Auch hier ist es aufgrund der Produktform des Integranden möglich, das dreidimensionale Integral direkt in ein Produkt eindimensionaler Integrale zu zerlegen,

$$\iiint_{\Omega} x^2 y z \, dx \, dy \, dz = \int_2^3 z \, dz \cdot \int_1^2 y \, dy \cdot \int_0^1 x^2 \, dx = \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{4}.$$

Die allgemeine Formel für diesen Fall ist

$$\iiint_{\Omega} f_1(x)f_2(y)f_3(z) dx dy dz = \int_{a_1}^{b_1} f_1(x) dx \cdot \int_{a_2}^{b_2} f_2(y) dy \cdot \int_{a_3}^{b_3} f_3(z) dz. \quad (9.3)$$

Bereichsintegrale im \mathbb{R}^n für $n > 3$ für einen achsenparallelen Quader

$$\Omega = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

werden analog definiert, es gilt ebenfalls der Satz von Fubini, also

$$\int_{\Omega} \cdots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_n \cdots dx_1, \quad (9.4)$$

wobei die Reihenfolge der Integrale auf der rechten Seite beliebig abgeändert werden kann.

In der Mathematik hat sich als einheitliche Notation für Bereichsintegrale die Form

$$\int_{\Omega} f(x) dx \quad (9.5)$$

durchgesetzt, also genau wie im Eindimensionalen. Hier bedeutet Ω den Integrationsbereich (bisher haben wir nur achsenparallele Quader behandelt), integriert wird eine skalare Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, das Argument von f ist ein Vektor $x \in \mathbb{R}^n$. Da die Dimension n im Definitionsbereich von f implizit enthalten ist, ist es überflüssig, das Integralzeichen n -mal hinzuschreiben; die Zerlegung in n eindimensionale Integrale ist erst dann relevant, wenn man die Berechnung nach Fubini vornimmt.

Flächeninhalt von Teilmengen der Ebene. Ist $\Omega = [a, b] \times [c, d]$ ein achsenparalleles Rechteck, so ist sein Flächeninhalt gegeben durch

$$F(\Omega) = (b - a)(d - c). \quad (9.6)$$

Wir wollen nun den Flächeninhalt einer beliebigen beschränkten Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ bestimmen. Wir wählen dazu einen Quader der Form $Q = [-M, M] \times [-M, M]$, wobei M so groß ist, dass $\Omega \subset Q$. Wir definieren den Flächeninhalt von Ω als

$$F(\Omega) = \iint_Q 1_{\Omega}(x, y) dx dy, \quad \text{wobei} \quad 1_{\Omega}(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in \Omega, \\ 0, & (x, y) \notin \Omega. \end{cases} \quad (9.7)$$

Der Flächeninhalt ist also definiert, wenn die Funktion 1_{Ω} integrierbar ist. Wenn man den Begriff "integrierbar" etwas allgemeiner fasst als in der Definition aus Teil I, Kapitel 5 (dort wurde "Riemann-integrierbar") definiert, so ist das für alle "normalerweise auftretenden" Mengen der Fall, siehe weiter unten die Bemerkung über Integralbegriffe und Integrationstheorien.

Die Bestimmung des Flächeninhalts wird durch (9.7) auf den durch das Integral definierten Grenzprozess zurückgeführt, man kann sich das wie folgt vorstellen. Sei Z eine Zerlegung von Q in kleine Rechtecke Q_{ij} , wie in der Definition des zweidimensionalen Bereichsintegrals. Die Menge Ω wird angenähert von innen durch

$$\Omega_Z = \bigcup_{\substack{i,j \\ Q_{ij} \subset \Omega}} Q_{ij}, \quad \text{also} \quad \Omega_Z \subset \Omega, \quad (9.8)$$

und von außen durch

$$\Omega^Z = \bigcup_{\substack{i,j \\ Q_{ij} \cap \Omega \neq \emptyset}} Q_{ij}, \quad \text{also } \Omega \subset \Omega^Z. \quad (9.9)$$

Es ist dann $\psi = 1_{\Omega_Z}$ eine Treppenfunktion, und

$$F(\Omega_Z) = \iint_Q \psi(x, y) \, dx \, dy, \quad (9.10)$$

und analog $\phi = 1_{\Omega^Z}$ eine Treppenfunktion mit

$$F(\Omega^Z) = \iint_Q \phi(x, y) \, dx \, dy. \quad (9.11)$$

Die Einschachtelung in der Definition des Integrals

$$\iint_Q \psi(x, y) \, dx \, dy \leq \iint_Q 1_{\Omega}(x, y) \, dx \, dy \leq \iint_Q \phi(x, y) \, dx \, dy$$

entspricht also der Einschachtelung des Flächeninhalts

$$F(\Omega_Z) \leq F(\Omega) \leq F(\Omega^Z).$$

Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ eine Menge, deren Rand aus Kurven besteht, so können wir $F(\Omega)$ mit dem Satz von Fubini berechnen. Sei

$$\Omega = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x)\}. \quad (9.12)$$

Die Fubini-Formel

$$\iint_Q 1_{\Omega}(x, y) \, dx \, dy = \int_{-M}^M \int_{-M}^M 1_{\Omega}(x, y) \, dy \, dx$$

wird zu

$$F(\Omega) = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} 1 \, dy \, dx = \int_a^b d(x) - c(x) \, dx, \quad (9.13)$$

da außerhalb der Integrationsgrenzen die Funktion 1_{Ω} den Wert Null hat. Analog gilt für

$$\Omega = \{(x, y) : c \leq y \leq d, a(y) \leq x \leq b(y)\}, \quad (9.14)$$

dass

$$F(\Omega) = \int_c^d \int_{a(y)}^{b(y)} 1 \, dx \, dy = \int_c^d b(y) - a(y) \, dy. \quad (9.15)$$

Sei nun Ω die disjunkte Vereinigung zweier Mengen,

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2, \quad \Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset. \quad (9.16)$$

Es ist dann

$$1_{\Omega} = 1_{\Omega_1} + 1_{\Omega_2},$$

und aus der Linearität des Integrals folgt

$$F(\Omega) = F(\Omega_1) + F(\Omega_2). \quad (9.17)$$

Ist Ω eine Menge, die sich aus endlich vielen Mengen der Form (9.12) oder (9.14) zusammensetzt, so erhalten wir aus (9.13), (9.15) und (9.17) ihren Flächeninhalt $F(\Omega)$ durch Addition der entsprechenden Formeln.

Aus der Monotonie des Integrals folgt sofort, dass

$$F(\Omega) \leq F(\tilde{\Omega}), \quad \text{falls } \Omega \subset \tilde{\Omega}, \quad (9.18)$$

da in diesem Fall $1_\Omega \leq 1_{\tilde{\Omega}}$.

Es taucht die Frage auf, ob der Flächeninhalt einer Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ davon abhängt, ob der Rand von Ω zu Ω gehört oder nicht. Ist etwa $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ das offene Einheitsquadrat, so besteht $\partial\Omega$ aus den 4 Randseiten einschließlich der Ecken, und

$$\overline{\Omega} = [0, 1] \times [0, 1] = \Omega \cup \partial\Omega.$$

Gemäß (9.16) gilt, da die Vereinigung disjunkt ist,

$$F(\overline{\Omega}) = F(\Omega) + F(\partial\Omega), \quad (9.19)$$

so dass $\overline{\Omega}$ und Ω denselben Flächeninhalt haben, falls $F(\partial\Omega) = 0$. Wir sagen, dass eine Teilmenge N von \mathbb{R}^2 eine **Nullmenge** ist, falls

$$F(N) = 0. \quad (9.20)$$

Man kann zeigen, dass der Graph einer Kurve diese Eigenschaft hat, falls die Kurve eine endliche Länge besitzt. Das hat zur Folge, dass für alle Teilmengen der Ebene, deren Rand aus endlich vielen solcher Kurven besteht, es für die Flächenbestimmung gleichgültig ist, ob wir den Rand (oder Teile davon) mitbetrachten oder nicht.

Bereichsintegrale auf allgemeinen Teilmengen. Wir behandeln zunächst den zweidimensionalen Fall. Ist $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion auf einer beschränkten Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, so betten wir Ω wieder in einen Quader Q ein, setzen f außerhalb von Ω durch 0 fort und definieren

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_Q f(x, y) 1_{\Omega}(x, y) \, dx \, dy, \quad (9.21)$$

falls die Funktion $f 1_{\Omega}$ integrierbar ist. Das ist beispielsweise dann der Fall, wenn f stetig ist und Ω einen Flächeninhalt hat gemäß (9.7). Auch in diesem Fall ist das Integral linear und monoton, und weiterhin analog zu (9.17)

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{\Omega_1} f(x, y) \, dx \, dy + \iint_{\Omega_2} f(x, y) \, dx \, dy, \quad (9.22)$$

falls Ω die disjunkte Vereinigung von Ω_1 und Ω_2 ist. Weiterhin gilt

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy = 0, \quad \text{falls } F(\Omega) = 0, \quad (9.23)$$

das heißt, falls Ω eine Nullmenge ist.

Hat Ω die Form

$$\Omega = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x)\}, \quad (9.24)$$

so ergibt sich wie oben mit Fubini

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy dx. \quad (9.25)$$

Als Beispiel betrachten wir die Menge Ω deren Rand durch die Geraden $y = x$ und $y = 2$ sowie die Kurve $xy = 1$ gegeben ist, und bestimmen

$$\iint_{\Omega} x^2 y dx dy.$$

Wir können Ω darstellen als

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2,$$

mit

$$\Omega_1 = \{(x, y) : \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \frac{1}{x} \leq y \leq 2\}, \quad \Omega_2 = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 2, x \leq y \leq 2\},$$

und es ergibt sich

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} x^2 y dx dy &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_{\frac{1}{x}}^2 x^2 y dy dx + \int_1^2 \int_x^2 x^2 y dy dx \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{1}{2} x^2 y^2 \Big|_{y=\frac{1}{x}}^{y=2} \right) dx + \int_1^2 \left(\frac{1}{2} x^2 y^2 \Big|_{y=x}^{y=2} \right) dx \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(2x^2 - \frac{1}{2} \right) dx + \int_1^2 \left(2x^2 - \frac{1}{2} x^4 \right) dx \\ &= \frac{57}{30}. \end{aligned}$$

Wir können Ω auch darstellen als

$$\Omega = \{(x, y) : 1 \leq y \leq 2, \frac{1}{y} \leq x \leq y\},$$

dann ergibt sich

$$\iint_{\Omega} x^2 y dx dy = \int_1^2 \int_{\frac{1}{y}}^y x^2 y dx dy = \int_1^2 \left(\frac{1}{3} x^3 y \Big|_{x=\frac{1}{y}}^{x=y} \right) dy = \int_1^2 \left(\frac{1}{3} y^4 - \frac{1}{3y^2} \right) dy = \frac{57}{30}.$$

In höheren Dimensionen geht das genauso. Für eine beschränkte Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ definieren wir

$$\int_{\Omega} \cdots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = \int_Q \cdots \int f(x_1, \dots, x_n) 1_{\Omega}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n, \quad (9.26)$$

wobei Q ein Ω enthaltender achsenparalleler Quader ist. Die im Zweidimensionalen geltenden Rechenregeln gelten entsprechend auch in höheren Dimensionen.

Für $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ergibt

$$V(\Omega) = \iiint_{\Omega} 1 \, dx \, dy \, dz \quad (9.27)$$

den **Rauminhalt** oder das **Volumen** von Ω .

Geometrische und mechanische Größen als Bereichsintegrale. Mit Hilfe des Bereichsintegrals erhalten wir gewisse geometrische und mechanische Größen, auch und besonders in den Fällen, in denen der zugrundeliegende Körper inhomogen ist. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ oder $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein Körper, dessen Massendichte durch eine Funktion

$$\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad (9.28)$$

beschrieben wird. Dann liefert

$$M = \iint_{\Omega} \rho(x, y) \, dx \, dy, \quad \text{bzw.} \quad M = \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \quad (9.29)$$

die Gesamtmasse M des Körpers. Ist die Massendichte ρ konstant, so ist die Masse gleich dem Produkt aus Volumen und Massendichte.

Der **Massenschwerpunkt** hat die Koordinaten

$$x_S = \frac{1}{M} \iint_{\Omega} x \rho(x, y) \, dx \, dy, \quad y_S = \frac{1}{M} \iint_{\Omega} y \rho(x, y) \, dx \, dy, \quad (9.30)$$

im Zweidimensionalen. Im Dreidimensionalen gilt

$$\begin{aligned} x_S &= \frac{1}{M} \iiint_{\Omega} x \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz, \\ y_S &= \frac{1}{M} \iiint_{\Omega} y \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz, \\ z_S &= \frac{1}{M} \iiint_{\Omega} z \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz. \end{aligned} \quad (9.31)$$

Setzen wir $\rho = 1$ in (9.30) oder (9.31), so erhalten wir den **geometrischen Schwerpunkt**. Als Beispiel betrachten wir ein $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ der Form

$$\Omega = \{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq d(x)\}.$$

Wir suchen den geometrischen Schwerpunkt, also $\rho = 1$ und $M = F(\Omega)$. Aus (9.30) erhalten wir

$$\begin{aligned} x_S &= \frac{1}{F(\Omega)} \iint_{\Omega} x \, dx \, dy = \frac{1}{F(\Omega)} \int_a^b \int_0^{d(x)} x \, dy \, dx = \frac{1}{F(\Omega)} \int_a^b x d(x) \, dx, \\ y_S &= \frac{1}{F(\Omega)} \iint_{\Omega} y \, dx \, dy = \frac{1}{F(\Omega)} \int_a^b \int_0^{d(x)} y \, dy \, dx = \frac{1}{F(\Omega)} \int_a^b \frac{1}{2} d(x)^2 \, dx. \end{aligned}$$

Das **Trägheitsmoment** I des Körpers $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ mit Massendichte ρ ergibt sich im Zweidimensionalen als

$$I = \iint_{\Omega} \rho(x, y) r(x, y)^2 dx dy, \quad (9.32)$$

wobei $r(x, y)$ der Abstand des Punktes (x, y) von der Drehachse ist. Ist die Drehachse die x -Achse, wird (9.32) zu

$$\iint_{\Omega} y^2 \rho(x, y) dx dy, \quad (9.33)$$

im Falle der y -Achse zu

$$\iint_{\Omega} x^2 \rho(x, y) dx dy, \quad (9.34)$$

im Falle der z -Achse (also Drehachse senkrecht zu Ω durch den Nullpunkt, polares Moment) zu

$$\iint_{\Omega} (x^2 + y^2) \rho(x, y) dx dy. \quad (9.35)$$

Die entsprechende geometrische Größe ($\rho = 1$) heißt **Flächenträgheitsmoment**. Ist Ω ein Körper im Dreidimensionalen, so ist das Trägheitsmoment analog zu (9.32) gegeben durch

$$I = \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) r(x, y, z)^2 dx dy dz, \quad (9.36)$$

wobei $r(x, y, z)$ wieder der Abstand des Punktes (x, y, z) von der Drehachse ist.

Substitution, Koordinatentransformation. Es kann günstig sein, Bereichsintegrale in anderen als den kartesischen Koordinaten zu berechnen. Es erhebt sich die Frage, wie sich Bereichsintegrale transformieren, wenn die Koordinaten transformiert werden, beispielsweise auf Polar- oder Kugelkoordinaten. Wir brauchen dafür eine Integrationsformel, die der Kettenregel beim Differenzieren entspricht. Im Eindimensionalen ist das die **Substitutionsregel**

$$\int_{T(a)}^{T(b)} f(x) dx = \int_a^b f(T(\xi)) T'(\xi) d\xi. \quad (9.37)$$

Hierbei entspricht T einer Koordinatentransformation, und f ist die Funktion, die man integrieren will.

Wir behandeln nun die Verallgemeinerung der Substitutionsregel auf den mehrdimensionalen Fall. Sie heißt dann **Transformationsformel** und lautet in kompakter Notation

$$\int_{T(\Omega)} f(x) dx = \int_{\Omega} f(T(\xi)) |\det(J_T(\xi))| d\xi. \quad (9.38)$$

Hierbei ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $T : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f : T(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, J_T bezeichnet die Funktionalmatrix von T , das Integral ist als n -dimensionales Bereichsintegral aufzufassen. Die Formel (9.38) gilt jedenfalls dann, wenn T auf einer Ω umfassenden offenen Menge Q definiert, stetig differenzierbar und injektiv ist, und $\det(J_T(\xi)) \neq 0$ ist für alle $\xi \in Q$.

Wir behandeln die Transformationsformel in einer Reihe von speziellen Situationen. Sei

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad T(\xi) = A\xi + b, \quad A \in \mathbb{R}^{(2,2)}, \quad b \in \mathbb{R}^2, \quad (9.39)$$

eine **affine Transformation in der Ebene**. Es ist dann

$$J_T(\xi) = A,$$

unabhängig von ξ , und (9.38) wird zu

$$\int_{T(\Omega)} f(x) dx = \int_{\Omega} f(A\xi + b) |\det(A)| d\xi. \quad (9.40)$$

Als Beispiel bestimmen wir die Fläche einer Ellipse mit Mittelpunkt 0 und den Halbachsen a und b . Wir setzen

$$\Omega' = \{(x_1, x_2) : \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} \leq 1\}.$$

Es ist

$$\Omega' = T(\Omega), \quad \Omega = \{\xi : \xi \in \mathbb{R}^2, \|\xi\| \leq 1\}, \quad T(\xi) = A\xi, \quad A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

Aus (9.40) folgt

$$F(\Omega') = \iint_{\Omega'} 1 dx_1 dx_2 = \iint_{\Omega} ab d\xi_1 d\xi_2 = abF(\Omega) = \pi ab,$$

da der Einheitskreis die Fläche π hat.

Als weiteres Beispiel bestimmen wir das Integral

$$\iint_{\Omega'} x_1 x_2 dx_1 dx_2, \quad (9.41)$$

wobei $\Omega' \subset \mathbb{R}^2$ das Parallelogramm mit den Ecken $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$ und $(3, 1)$ ist. Wir führen das Integral über das Parallelogramm auf ein Integral über dem Einheitsquadrat

$$\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$$

zurück, indem wir setzen

$$T(\xi) = A\xi, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mit

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2$$

erhalten wir

$$f(A\xi) = f \begin{pmatrix} 2\xi_1 + \xi_2 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = (2\xi_1 + \xi_2)\xi_2, \quad T(\Omega) = \Omega', \quad |\det(A)| = 2,$$

also

$$\iint_{\Omega'} x_1 x_2 dx_1 dx_2 = \iint_{\Omega} (2\xi_1 + \xi_2)\xi_2 \cdot 2 d\xi_1 d\xi_2 = \int_0^1 \int_0^1 4\xi_1 \xi_2 + 2\xi_2^2 d\xi_1 d\xi_2 = \frac{5}{3}.$$

Wir betrachten die Transformation **von Polarkoordinaten auf kartesische Koordinaten**,

$$T(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi). \quad (9.42)$$

In diesem Fall ist

$$J_T(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad \det J_T(r, \varphi) = r, \quad (9.43)$$

also wird (9.38) zu

$$\iint_{T(\Omega)} f(x, y) dx dy = \iint_{\Omega} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d\varphi dr. \quad (9.44)$$

Als erstes Beispiel berechnen wir nochmals die Fläche der Einheitskreisscheibe. Für

$$\Omega = (0, 1) \times [0, 2\pi)$$

ist $T(\Omega)$ gerade die offene Einheitskreisscheibe (ohne den Nullpunkt, was für die Integration keine Rolle spielt), und

$$F(T(\Omega)) = \iint_{T(\Omega)} 1 dx dy = \iint_{\Omega} r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r dr d\varphi = 2\pi \frac{1}{2} = \pi.$$

Als weiteres Beispiel berechnen wir das Trägheitsmoment der Einheitskreisscheibe mit konstanter Dichte ρ bezüglich der x -Achse. Es ist

$$\begin{aligned} I &= \iint_{T(\Omega)} y^2 \rho dx dy = \iint_{\Omega} \rho r^2 \sin^2(\varphi) r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho r^2 \sin^2(\varphi) r dr d\varphi \\ &= \rho \int_0^1 r^3 dr \cdot \int_0^{2\pi} \sin^2(\varphi) d\varphi = \frac{\pi}{4} \rho. \end{aligned}$$

Für das polare Trägheitsmoment (Drehachse durch den Nullpunkt) ergibt sich

$$I = \iint_{T(\Omega)} (x^2 + y^2) \rho dx dy = \iint_{\Omega} \rho r^2 r dr d\varphi = \rho \int_0^1 r^3 dr \cdot \int_0^{2\pi} 1 d\varphi = \frac{\pi}{2} \rho.$$

Wir betrachten nun den Übergang **von Kugelkoordinaten auf kartesische Koordinaten im Dreidimensionalen**. Die Transformationsvorschrift ist

$$T(r, \theta, \varphi) = (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta), \quad T : (0, \infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3. \quad (9.45)$$

Die zugehörige Funktionalmatrix ist

$$J_T(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix}, \quad (9.46)$$

mit der Determinante

$$\det J_T(r, \theta, \varphi) = r^2 \sin \theta. \quad (9.47)$$

Die Transformationsformel (9.38) nimmt die Form an (man beachte $0 \leq \theta \leq \pi$, so dass $\sin \theta \geq 0$)

$$\begin{aligned} \iiint_{T(\Omega)} f(x, y, z) dx dy dz \\ = \iiint_{\Omega} f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi. \end{aligned} \quad (9.48)$$

Als Beispiel betrachten wir das Volumen und den geometrischen Schwerpunkt des Kugeloktanten

$$\Omega' = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}. \quad (9.49)$$

Es ist

$$\Omega' = T(\Omega), \quad \Omega = (0, 1) \times (0, \frac{\pi}{2}) \times (0, \frac{\pi}{2}).$$

Es folgt

$$\begin{aligned} V(\Omega') &= \iiint_{\Omega'} 1 dx dy dz = \iiint_{\Omega} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \\ &= \int_0^1 r^2 dr \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 d\varphi = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

Für die x -Koordinate des geometrischen Schwerpunkts gilt analog zu (9.31)

$$x_S = \frac{1}{V(\Omega')} \iiint_{\Omega'} x dx dy dz, \quad (9.50)$$

also

$$\begin{aligned} x_S \cdot V(\Omega') &= \iiint_{\Omega'} x dx dy dz = \iiint_{\Omega} r \sin \theta \cos \varphi \cdot r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \\ &= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \sin \theta \cos \varphi \cdot r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = \int_0^1 r^3 dr \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 1 = \frac{\pi}{16}, \end{aligned}$$

also

$$x_S = \frac{3}{8}.$$

Aufgrund der Symmetrie der Konfiguration muss $x_S = y_S = z_S$ gelten.

10 Kurvenintegrale, Oberflächenintegrale

Wir befassen uns mit der Integration von Funktionen, die auf Kurven oder Flächenstücken definiert sind.

Zunächst befassen wir uns mit Kurvenintegralen. Eine Kurve ist eine auf einem Intervall $I = [a, b]$ definierte stetige Funktion k mit Werten im \mathbb{R}^n , siehe Kapitel 15, Teil 1. Wir betrachten als erstes **Skalarfelder** f , welche auf einer Teilmenge des \mathbb{R}^n , mindestens aber auf dem Bildbereich $k(I)$ der Kurve definiert sind.

Definition 10.1 (Kurvenintegral eines Skalarfelds)

Sei $I = [a, b]$ Intervall, $k : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stückweise C^1 -Kurve, sei $f : k(I) \rightarrow \mathbb{R}$. Wir definieren das Kurvenintegral von f durch

$$\int_k f ds = \int_a^b f(k(t)) \|k'(t)\| dt, \quad (10.1)$$

falls das Integral auf der rechten Seite definiert ist. □

Das Integral ist beispielsweise immer dann definiert, wenn das Skalarfeld f stetig ist. Für $f = 1$ erhalten wir die Länge der Kurve, siehe Kapitel 15, Teil 1.

Stellen wir uns unter der Kurve ein eindimensionales Objekt vor, welches mit einer Massendichte ρ belegt ist, so entspricht das Kurvenintegral

$$M = \int_k \rho ds = \int_a^b \rho(k(t)) \|k'(t)\| dt \quad (10.2)$$

gerade der Gesamtmasse des Objekts. Ist beispielsweise

$$k(t) = (\cos t, \sin t, 2t), \quad k : [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

eine Schraubenlinie im \mathbb{R}^3 und $\rho(x, y, z) = x^2 z$, so ist die Gesamtmasse gegeben durch

$$\int_k \rho ds = \int_0^{4\pi} \cos^2 t \cdot 2t \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 4} dt = 2\sqrt{5} \int_0^{4\pi} t \cos^2 t dt.$$

In diesem Beispiel ist $n = 3$, für eine in die Ebene \mathbb{R}^2 eingebettete Kurve setzt man $n = 2$ an.

Dass (10.2) tatsächlich die Gesamtmasse liefert, kann man sich wie folgt klarmachen. Sei k ein Streckenzug, welcher die Punkte

$$k(a) = k(t_0), k(t_1), \dots, k(t_N) = k(b)$$

der Reihe nach durch Strecken verbindet, so dass zwischen zwei solchen Punkten

$$k(t_i) - k(t_{i-1}) = (t_i - t_{i-1})k'_i$$

gilt mit konstanten Tangentenvektoren k'_i . Ist ρ_i die Massendichte auf der Strecke von $k(t_{i-1})$ nach $k(t_i)$, so ist die Gesamtmasse gegeben durch

$$\sum_{i=1}^N \rho_i \|k(t_i) - k(t_{i-1})\| = \sum_{i=1}^N \rho_i \|k'_i\| (t_i - t_{i-1}). \quad (10.3)$$

Ist k eine beliebige Kurve, so liefert Approximation durch einen solchen Streckenzug und Grenzübergang das Integral (10.2).

Das Kurvenintegral ändert sich nicht, wenn wir die Kurve umparametrisieren. Sei $h : [c, d] \rightarrow [a, b]$ eine differenzierbare und monoton wachsende Funktion mit $h(c) = a$ und $h(d) = b$. Wir definieren eine Umparametrisierung $\tilde{k} : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ von k durch

$$\tilde{k} = k \circ h, \quad \tilde{k}(\tau) = k(h(\tau)). \quad (10.4)$$

Es folgt dann aus der Kettenregel und der Substitutionsregel, da $h' \geq 0$,

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{k}} f \, ds &= \int_c^d f(\tilde{k}(\tau)) \|\tilde{k}'(\tau)\| \, d\tau = \int_c^d f(k(h(\tau))) \|k'(h(\tau))h'(\tau)\| \, d\tau \\ &= \int_c^d f(k(h(\tau))) \|k'(h(\tau))\| h'(\tau) \, d\tau = \int_a^b f(k(t)) \|k'(t)\| \, dt = \int_k f \, ds. \end{aligned} \quad (10.5)$$

Wir behandeln nun **Kurvenintegrale von Vektorfeldern**. Eine Variante besteht darin, das Vektorfeld in seine skalaren Komponenten zu zerlegen und auf diese jeweils Definition 10.1 anzuwenden, wir erhalten dann für ein Vektorfeld

$$F : k(I) \rightarrow \mathbb{R}^m \quad (10.6)$$

das vektorwertige Kurvenintegral

$$\int_k F \, ds = \left(\int_k F_1 \, ds, \dots, \int_k F_m \, ds \right) \in \mathbb{R}^m. \quad (10.7)$$

Das ist beispielsweise zur Bestimmung des Massenschwerpunkts angemessen. Ist die Kurve $k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit einer Massendichte ρ belegt, so ist der Massenschwerpunkt gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x_S \\ y_S \\ z_S \end{pmatrix} = \frac{1}{M} \begin{pmatrix} \int_a^b \rho(k(t)) k_1(t) \|k'(t)\| \, dt \\ \int_a^b \rho(k(t)) k_2(t) \|k'(t)\| \, dt \\ \int_a^b \rho(k(t)) k_3(t) \|k'(t)\| \, dt \end{pmatrix}, \quad (10.8)$$

wobei M die Gesamtmasse gemäß (10.2) ist. Dies entspricht dem Vektorfeld

$$F = (F_1, F_2, F_3)$$

mit

$$F_1(x, y, z) = \frac{1}{M} \rho(x, y, z) x, \quad F_2(x, y, z) = \frac{1}{M} \rho(x, y, z) y, \quad F_3(x, y, z) = \frac{1}{M} \rho(x, y, z) z. \quad (10.9)$$

Eine andere Variante des Kurvenintegrals eines Vektorfelds kommt beispielsweise dann zum Tragen, wenn man die mechanische Arbeit berechnen will, die ein Kraftfeld an einer Masse leistet, die entlang einer Kurve bewegt wird. Betrachten wir zunächst ein konstantes Kraftfeld, repräsentiert durch einen Vektor $F \in \mathbb{R}^3$. Entlang der Strecke, welche einen Punkt $x \in \mathbb{R}^3$ mit einem Punkt $\tilde{x} \in \mathbb{R}^3$ verbindet, leistet es die Arbeit

$$W = \langle F, \tilde{x} - x \rangle = \|F\| \cdot \|\tilde{x} - x\| \cos \varphi \quad (10.10)$$

wobei φ der von den Vektoren F und $\tilde{x} - x$ eingeschlossene Winkel ist. Die geleistete Arbeit ist gemäß (10.10) das Produkt aus der Weglänge und der Tangentialkomponente der Kraft in Richtung des Wegs. Sei nun k ein Streckenzug, welcher die Punkte

$$k(a) = k(t_0), k(t_1), \dots, k(t_N) = k(b)$$

der Reihe nach durch Strecken verbindet, entlang der Verbindungsstrecke von $k(t_{i-1})$ nach $k(t_i)$ wirke die Kraft $F_i \in \mathbb{R}^3$. Die insgesamt geleistete Arbeit ist dann

$$\begin{aligned} W &= \sum_{i=1}^N \langle F_i, k(t_i) - k(t_{i-1}) \rangle = \sum_{i=1}^N \left\langle F_i, \frac{k(t_i) - k(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \right\rangle (t_i - t_{i-1}) \\ &= \int_a^b \langle F(k(t)), k'(t) \rangle dt, \end{aligned} \quad (10.11)$$

wenn wir $F(k(t)) = F_i$ setzen für $t \in (t_{i-1}, t_i)$.

Definition 10.2 (Kurvenintegral eines Vektorfelds längs einer Kurve)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, seien $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und $k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ stückweise stetig differenzierbar, sei $k([a, b]) \subset \Omega$. Wir definieren das Kurvenintegral von F längs k durch

$$\int_k F \cdot dx := \int_a^b \langle F(k(t)), k'(t) \rangle dt. \quad (10.12)$$

□

In diesem Fall liefert das Kurvenintegral also einen Skalar als Wert.

Man kann zeigen, dass die Formel (10.12) sich als Grenzwert aus der Formel (10.11) ergibt, wenn wir k durch eine Folge stückweise gerader Streckenzüge und F durch ein auf den Einzelstrecken konstantes Feld – etwa $F(k(t_i))$ auf der Verbindungsstrecke von $k(t_{i-1})$ nach $k(t_i)$ – approximieren.

Wenn man will, kann man diese Variante als Spezialfall von Definition 10.1 auffassen, indem man als Skalarfeld f die Tangentialkomponente

$$\left\langle F, \frac{k'}{\|k'\|} \right\rangle$$

von F längs k wählt.

Als Beispiel betrachten wir das Kurvenintegral von

$$F(x, y) = (x + y, x), \quad F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (10.13)$$

längs des Viertelkreisbogens von $(1, 0)$ nach $(0, 1)$,

$$k(t) = (\cos t, \sin t), \quad k : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^2. \quad (10.14)$$

Es ist

$$\begin{aligned} \int_k F \cdot d(x, y) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \langle F(k(t)), k'(t) \rangle dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\langle \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \right\rangle dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos t \sin t - \sin^2 t + \cos^2 t dt = -\frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (10.15)$$

Das Kurvenintegral ändert sich auch in der Variante 10.2 nicht, wenn wir eine Umparametrisierung wie in (10.4), (10.5) vornehmen. Ist $h : [c, d] \rightarrow [a, b]$ eine Parametertransformation mit $h(c) = a$, $h(d) = b$, so folgt für $\tilde{k} = k \circ h$ wie oben

$$\int_{\tilde{k}} F \cdot dx = \int_c^d \langle F(\tilde{k}(\tau)), \tilde{k}'(\tau) \rangle d\tau = \int_a^b \langle F(k(t)), k'(t) \rangle dt = \int_k F \cdot dx. \quad (10.16)$$

Im Gegensatz zur Variante 1 lassen wir für 10.2 auch Umparametrisierungen zu, die die Durchlaufrichtung der Kurve umkehren. Ist $h : [c, d] \rightarrow [a, b]$ mit $h(c) = b$ und $h(d) = a$, so wird (10.16) zu

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{k}} F \cdot dx &= \int_c^d \langle F(\tilde{k}(\tau)), \tilde{k}'(\tau) \rangle d\tau = \int_b^a \langle F(k(t)), k'(t) \rangle dt = - \int_a^b \langle F(k(t)), k'(t) \rangle dt \\ &= - \int_k F \cdot dx, \end{aligned} \quad (10.17)$$

das heißt, das Kurvenintegral hat denselben Betrag, aber das umgekehrte Vorzeichen. Das entspricht der Tatsache, dass die von einem Kraftfeld an einem bewegten Objekt geleistete Arbeit das Vorzeichen ändert, wenn die Bewegungsrichtung umgekehrt wird.

Wir betrachten nochmals das Vektorfeld

$$F(x, y) = (x + y, x), \quad F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

und berechnen das Kurvenintegral von $(1, 0)$ nach $(0, 1)$, aber diesmal entlang der geraden Verbindung

$$k(t) = (1 - t, t), \quad k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2. \quad (10.18)$$

Das Kurvenintegral ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \int_k F \cdot d(x, y) &= \int_0^1 \langle F(k(t)), k'(t) \rangle dt = \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} 1 - t + t \\ 1 - t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle dt \\ &= \int_0^1 -t dt = -\frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (10.19)$$

also dasselbe Ergebnis wie in (10.15). Das ist kein Zufall. In diesem Beispiel gilt nämlich

$$F(x, y) = \nabla f(x, y), \quad \text{für } f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + xy.$$

Definition 10.3 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Ein Vektorfeld $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **Gradientenfeld**, falls es ein Skalarfeld $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit

$$F(x) = \nabla f(x), \quad \text{für alle } x \in \Omega. \quad (10.20)$$

Das Skalarfeld f nennt man auch **Stammfunktion** oder **Potential** von F auf Ω . \square

Ist F ein Kraftfeld, so entspricht f der potentiellen Energie.

Satz 10.4 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ stückweise stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_k \nabla f \cdot dx = f(k(b)) - f(k(a)). \quad (10.21)$$

Beweis: Es ist

$$\int_k \nabla f \cdot dx = \int_a^b \langle \nabla f(k(t)), k'(t) \rangle dt = \int_a^b (f \circ k)'(t) dt = f(k(b)) - f(k(a))$$

nach Kettenregel und Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. \square

Aus Satz 10.4 folgt: Ist $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Gradientenfeld, so ist das Kurvenintegral zwischen zwei Punkten $P, Q \in \mathbb{R}^n$ unabhängig davon, wie die Kurve von P nach Q verläuft. (Wir können also die verbindende Kurve so legen, dass die Berechnung möglichst einfach ist.) Insbesondere ist dann

$$\int_k F \cdot dx = 0 \quad (10.22)$$

für jede Kurve k mit $k(b) = k(a)$, das heißt, für jede Kurve, deren Anfangs- und Endpunkt übereinstimmen (geschlossene Kurve).

Es erhebt sich die Frage, wie man einem Vektorfeld ansieht, ob es ein Gradientenfeld ist. Falls $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Gradientenfeld ist, also $F = \nabla f$ für ein geeignetes Skalarfeld f , so muss gelten

$$\partial_j F_i = \partial_j \partial_i f = \partial_i \partial_j f = \partial_i F_j, \quad \text{für alle } 1 \leq i, j \leq n. \quad (10.23)$$

Diese Bedingung lässt sich einfach nachprüfen. Umgekehrt stellt sich daher die Frage, ob jedes Vektorfeld, welches diese Bedingung erfüllt, ein Gradientenfeld ist. Die Antwort ist, dass das von der Form des Definitionsgebiets Ω abhängt.

Definition 10.5 Eine Teilmenge Ω des \mathbb{R}^n heißt sternförmig, falls es einen Punkt $z \in \Omega$ gibt, so dass die Verbindungsstrecken zwischen z und allen anderen Punkten von Ω ganz in Ω verlaufen. \square

Satz 10.6 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und sternförmig, sei $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Gilt

$$\partial_i F_j(x) = \partial_j F_i(x) \quad (10.24)$$

für alle $x \in \Omega$ und alle i, j , $1 \leq i, j \leq n$, so ist F ein Gradientenfeld, es gibt also ein $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = \nabla f(x), \quad \text{für alle } x \in \Omega. \quad (10.25)$$

\square

Ist nämlich Ω sternförmig, so können wir eine Stammfunktion f von F erhalten, indem wir $f(x)$ als das Kurvenintegral von F vom Punkt z zum Punkt x definieren, also indem wir setzen

$$k(t) = z + t(x - z), \quad k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

und

$$f(x) = \int_k F \cdot dx = \int_0^1 \langle F(z + t(x - z)), x - z \rangle dt. \quad (10.26)$$

Wir rechnen nach, dass f eine Stammfunktion von F ist. Zu diesem Zweck definieren wir

$$\tilde{f}(x) = \langle F(z + t(x - z)), x - z \rangle.$$

Es gilt

$$\partial_i \tilde{f}(x) = \langle t \partial_i F(z + t(x - z)), x - z \rangle + \langle F(z + t(x - z)), e_i \rangle ,$$

also

$$\partial_i f(x) = \int_0^1 \langle t \partial_i F(z + t(x - z)), x - z \rangle + F_i(z + t(x - z)) dt .$$

Für

$$g_i(t) = t F_i(z + t(x - z))$$

gilt

$$g_i'(t) = \langle t \nabla F_i(z + t(x - z)), x - z \rangle + F_i(z + t(x - z)) ,$$

und mit $y = z + t(x - z)$

$$\begin{aligned} \langle \nabla F_i(y), x - z \rangle &= \sum_{j=1}^n \partial_j F_i(y) \cdot (x_j - z_j) = \sum_{j=1}^n \partial_i F_j(y) \cdot (x_j - z_j) \\ &= \langle \partial_i F(y), x - z \rangle . \end{aligned}$$

Es folgt

$$g_i'(t) = \langle t \partial_i F(z + t(x - z)), x - z \rangle + F_i(z + t(x - z)) ,$$

und damit

$$\partial_i f(x) = \int_0^1 g_i'(t) dt = g_i(1) - g_i(0) = F_i(x) ,$$

also ist f Stammfunktion von F auf Ω .

Falls Ω nicht sternförmig ist, so kann es vorkommen, dass F keine Stammfunktion auf Ω hat, obwohl die Bedingung (10.24) erfüllt ist. Als Beispiel betrachten wir

$$\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} , \quad F : \Omega \rightarrow \mathbb{R} , \quad F(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} , \frac{x}{x^2 + y^2} \right) . \quad (10.27)$$

Es gilt für alle $(x, y) \neq (0, 0)$

$$\partial_1 F_2(x, y) = \partial_2 F_1(x, y) .$$

Für jede sternförmige Teilmenge $\tilde{\Omega}$ von Ω gibt es also nach Satz 10.6 eine Stammfunktion f auf $\tilde{\Omega}$ mit

$$F(x) = \nabla f(x) , \quad \text{für alle } x \in \tilde{\Omega} .$$

Aber andererseits gilt, wenn wir den Einheitskreis als eine geschlossene Kurve auffassen, mit $k : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $k(t) = (\cos t, \sin t)$

$$\int_k F \cdot d(x, y) = \int_0^{2\pi} \langle F(k(t)), k'(t) \rangle dt = \int_0^{2\pi} \sin^2 t + \cos^2 t dt = 2\pi .$$

Wenn es eine Stammfunktion f von F auf Ω gäbe, müsste dieses Integral aber wegen Satz 10.4 gleich Null sein, also kann es eine solche Stammfunktion auf Ω nicht geben.

Oberflächenintegrale. Wir beschäftigen uns mit dem Flächeninhalt von allgemeinen (gekrümmten) Flächen im Raum sowie mit Integralen, die auf solchen Flächen definiert

sind. Zunächst stellt sich die Frage, wie wir eine gekrümmte Fläche S im Raum \mathbb{R}^3 beschreiben. Aus Kapitel 3 kennen wir bereits die Darstellung als Niveaumenge

$$\{x : f(x) = 0, x \in \mathbb{R}^3\}$$

einer Funktion f . Wir benötigen nun eine Darstellung in **Parameterform**,

$$S = \{k(t, s) : a \leq t \leq b, c \leq s \leq d\}, \quad (10.28)$$

wobei

$$k : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (10.29)$$

die Parametrisierung der Fläche ist. Wir betrachten Beispiele. Sind $p, v, w \in \mathbb{R}^3$ gegeben, so definiert

$$k(t, s) = p + tv + sw, \quad k : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (10.30)$$

ein Parallelogramm mit den Ecken

$$p + av + cw, p + bv + cw, p + av + dw, p + bv + dw, \quad (10.31)$$

für $p = 0, a = c = 0, b = d = 1$ ergibt sich das Parallelogramm mit den Ecken

$$0, v, w, v + w.$$

Der Graph einer Funktion $h : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert eine Fläche mit der Parametrisierung

$$k(t, s) = (t, s, h(t, s)), \quad (10.32)$$

so liefert etwa

$$h(t, s) = t^2 + s^2$$

je nach Definitionsbereich von h ein Stück eines nach oben geöffneten Paraboloids mit Scheitelpunkt in 0. Die Parametrisierung

$$k(t, s) = (R \cos s, R \sin s, t), \quad k : [0, H] \times [0, 2\pi], \quad (10.33)$$

liefert die Mantelfläche eines Zylinders mit Radius R und Höhe H . Die Formel der Kugelkoordinaten liefert die Oberfläche der Kugel mit Radius R und Mittelpunkt 0 als

$$k(t, s) = (R \sin t \cos s, R \sin t \sin s, R \cos t), \quad k : [0, \pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3. \quad (10.34)$$

Sowohl (10.33) als auch (10.34) sind Beispiele für Drehflächen, beschrieben durch

$$k(t, s) = (r(t) \cos s, r(t) \sin s, h(t)), \quad k : [a, b] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (10.35)$$

welche entstehen, indem wir eine Kurve in der (x, z) -Ebene der Form $t \mapsto (r(t), 0, h(t))$ um die z -Achse rotieren lassen.

Wir beschäftigen uns nun mit der Berechnung des Flächeninhalts solcher Flächen. Wir gehen analog vor wie bei Kurven. Die Länge einer Kurve $k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist gegeben durch

$$L(k) = \int_a^b \|k'(t)\| dt, \quad (10.36)$$

das Integral haben wir interpretiert als Grenzwert der Längen von Streckenzügen, die durch Verbindung von Kurvenpunkten entstehen. Analog können wir ein gekrümmtes Flächenstück im Raum uns vorstellen als angenähert durch Flächenstücke, welche sich aus einzelnen ebenen Stücken zusammensetzen. Die Rolle einer Strecke, welche zwei Punkte verbindet, wird übernommen von einem Parallelogramm, welches vier Punkte verbindet. Wir betrachten das von den Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^3$ aufgespannte Parallelogramm P mit den Eckpunkten

$$0, v, w, v + w. \quad (10.37)$$

Sein Flächeninhalt ist gegeben durch

$$F(P) = \|v\| \|w\| \sin \varphi = \|v \times w\|, \quad (10.38)$$

wobei φ der von v und w eingeschlossene Winkel ist. Wir können diese Fläche auch folgendermaßen darstellen. Sei

$$A = (v \quad w) \in \mathbb{R}^{(3,2)} \quad (10.39)$$

die Matrix, welche aus den Spalten v und w besteht. Dann gilt

$$A^T A = \begin{pmatrix} v^T v & v^T w \\ w^T v & w^T w \end{pmatrix}, \quad (10.40)$$

und weiter

$$\begin{aligned} \det(A^T A) &= (v^T v)(w^T w) - (v^T w)(w^T v) = \|v\|^2 \|w\|^2 - \langle v, w \rangle^2 \\ &= \|v\|^2 \|w\|^2 (1 - \cos^2 \varphi) = \|v\|^2 \|w\|^2 \sin^2 \varphi \\ &= \|v \times w\|^2, \end{aligned} \quad (10.41)$$

also insgesamt

$$F(P) = \|v \times w\| = \sqrt{\det(A^T A)}. \quad (10.42)$$

Wir betrachten nun das Parallelogramm mit den Ecken $0, bv, dw$ und $bv + dw$ und parametrisieren es durch

$$k(t, s) = tv + sw, \quad k : [0, b] \times [0, d] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (10.43)$$

Es ist dann

$$F(P) = \|(bv) \times (dw)\|. \quad (10.44)$$

Wir können (10.44) als Integral schreiben, da wegen (10.43)

$$v = \partial_t k(t, s), \quad w = \partial_s k(t, s), \quad (10.45)$$

die partiellen Ableitungen von k nicht von t und s abhängen, also

$$F(P) = \|(bv) \times (dw)\| = \int_0^b \int_0^d \|\partial_t k(t, s) \times \partial_s k(t, s)\| ds dt \quad (10.46)$$

gilt. Die folgende Verallgemeinerung dieser Formel liefert auch für beliebige gekrümmte Flächenstücke den exakten Flächeninhalt, wenn die Vektoren $\partial_t k(t, s)$ und $\partial_s k(t, s)$ für keinen Parameterwert (t, s) parallel sind.

Definition 10.7 (Flächeninhalt)

Sei $Q = [a, b] \times [c, d]$, $k : Q \rightarrow \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar, es gelte $\|\partial_t k(t, s) \times \partial_s k(t, s)\| \neq 0$ für alle $(t, s) \in Q$. Wir definieren den Flächeninhalt der Fläche $S = k(Q)$ durch

$$F(S) = \int_a^b \int_c^d \|\partial_t k(t, s) \times \partial_s k(t, s)\| ds dt. \quad (10.47)$$

□

Wir betrachten Beispiele. Der Flächeninhalt eines Graphen

$$k(t, s) = (t, s, h(t, s)), \quad h : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}, \quad (10.48)$$

ergibt sich aus

$$\begin{aligned} \partial_t k(t, s) &= (1, 0, \partial_t h(t, s)), \\ \partial_s k(t, s) &= (0, 1, \partial_s h(t, s)), \\ \|(\partial_t k \times \partial_s k)(t, s)\| &= \sqrt{1 + \partial_t h(t, s)^2 + \partial_s h(t, s)^2}, \end{aligned}$$

als

$$F(S) = \int_a^b \int_c^d \sqrt{1 + \partial_t h(t, s)^2 + \partial_s h(t, s)^2} ds dt. \quad (10.49)$$

Der Flächeninhalt einer Drehfläche

$$k(t, s) = (r(t) \cos s, r(t) \sin s, h(t)), \quad k : [a, b] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (10.50)$$

ergibt sich aus

$$\begin{aligned} \partial_t k(t, s) &= (r'(t) \cos s, r'(t) \sin s, h'(t)), \\ \partial_s k(t, s) &= (-r(t) \sin s, r(t) \cos s, 0), \\ \|(\partial_t k \times \partial_s k)(t, s)\| &= r(t) \sqrt{r'(t)^2 + h'(t)^2}, \end{aligned}$$

als

$$F(S) = \int_a^b \int_0^{2\pi} r(t) \sqrt{r'(t)^2 + h'(t)^2} ds dt = 2\pi \int_a^b r(t) \sqrt{r'(t)^2 + h'(t)^2} dt. \quad (10.51)$$

Für den Zylindermantel ist $r(t) = R$, $h(t) = t$, also

$$r'(t) = 0, \quad h'(t) = 1,$$

und (10.51) wird zu

$$F(S) = 2\pi R(b - a). \quad (10.52)$$

Für die Kugeloberfläche ist $r(t) = R \sin t$, $h(t) = R \cos t$ und $[a, b] = [0, \pi]$, also

$$r'(t) = R \cos t, \quad h'(t) = -R \sin t,$$

und (10.51) wird zu

$$F(S) = 2\pi \int_0^\pi R \sin t \sqrt{R^2 \cos^2 t + R^2 \sin^2 t} dt = 2\pi R^2 \int_0^\pi \sin t dt = 4\pi R^2. \quad (10.53)$$

Wir behandeln nun das Oberflächenintegral eines Skalarfelds.

Definition 10.8 (Oberflächenintegral eines Skalarfelds)

Sei $Q = [a, b] \times [c, d]$, $k : Q \rightarrow \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar, es gelte $\|\partial_t k(t, s) \times \partial_s k(t, s)\| \neq 0$ für alle $(t, s) \in Q$. Für $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ definieren wir das Oberflächenintegral über die Fläche $S = k(Q)$ durch

$$\iint_S f(x, y, z) dO = \int_a^b \int_c^d f(k(t, s)) \|\partial_t k(t, s) \times \partial_s k(t, s)\| ds dt, \quad (10.54)$$

falls das Integral auf der rechten Seite existiert. □

Das Integral existiert beispielsweise dann, wenn die Funktion f auf S stetig oder stückweise stetig ist.

Ist die Fläche S mit einer inhomogenen Massendichte ρ belegt, so erhalten wir die entsprechenden mechanischen Größen als Oberflächenintegrale. Die Gesamtmasse ist gegeben durch

$$M = \iint_S \rho(x, y, z) dO, \quad (10.55)$$

die Koordinaten des Massenschwerpunkts durch

$$x_S = \frac{1}{M} \iint_S x \rho(x, y, z) dO, \quad y_S = \dots, \quad z_S = \dots, \quad (10.56)$$

und das Trägheitsmoment durch

$$I = \iint_S \rho(x, y, z) r(x, y, z)^2 dO, \quad (10.57)$$

wobei $r(x, y, z)$ wieder den Abstand des Punktes (x, y, z) zur Drehachse bezeichnet. Als Beispiel berechnen wir das Trägheitsmoment der Hohlkugel mit Radius R , deren Masse homogen auf ihren Rand S verteilt ist. Ist die Gesamtmasse gleich M , so ist die Massendichte konstant gleich

$$\rho(x, y, z) = \frac{M}{4\pi R^2}.$$

Aus (10.57) ergibt sich (wir nehmen als Drehachse die z -Achse)

$$\begin{aligned} I &= \iint_S \frac{M}{4\pi R^2} (x^2 + y^2) dO \\ &= \frac{M}{4\pi R^2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (R^2 \sin^2(t) \cos^2(s) + R^2 \sin^2(t) \sin^2(s)) \cdot R^2 \sin t ds dt \\ &= \frac{M}{4\pi R^2} \int_0^\pi R^4 \sin^3(t) dt \cdot 2\pi = \frac{M}{4\pi} R^2 \int_0^\pi \sin^3(t) dt \cdot 2\pi \\ &= \frac{2}{3} M R^2. \end{aligned} \quad (10.58)$$

Aufgrund der Symmetrie ergibt sich für jede Drehachse dasselbe Ergebnis.

Wir befassen uns nun mit dem **Oberflächenintegral von Vektorfeldern**. Es tritt auf, wenn man den **Fluss** gewisser Größen beschreiben will. Wir stellen uns zunächst eine ebene Fläche S vor, durch die sich eine räumlich verteilte Masse bewegt, diese habe die konstante Volumendichte ρ und die konstante Geschwindigkeit $v \in \mathbb{R}^3$. Die Gesamtmasse, die sich pro Zeiteinheit durch die Fläche S bewegt, ist dann gleich

$$\rho \langle v, n \rangle \cdot F(S), \quad (10.59)$$

wobei $n \in \mathbb{R}^3$ der Normalenvektor auf S ist. Das Vorzeichen des Ausdrucks (10.59) gibt an, ob die Bewegung in Richtung von n oder in die Gegenrichtung erfolgt.

Falls ρ , v oder n vom Raumpunkt abhängen (letzteres bedeutet, dass die Fläche nicht eben ist), ist der richtige Ausdruck für den Massenfluss in Verallgemeinerung von (10.59)

$$\iint_S \langle \rho v, n \rangle (x, y, z) dO. \quad (10.60)$$

Hier handelt es sich um ein Oberflächenintegral wie in Definition 10.8, wobei das Skalarfeld f aus dem Vektorfeld $F = \rho v$ gemäß

$$f(x, y, z) = \langle F(x, y, z), n(x, y, z) \rangle$$

entsteht.

Als Beispiel betrachten wir den Massenfluss durch die Mantelfläche eines Zylinders für

$$\rho = 1, \quad v(x, y, z) = (2z, x + y, 1).$$

Die Mantelfläche ist gegeben durch die Parametrisierung

$$k(t, s) = (R \cos s, R \sin s, t), \quad k : [a, b] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

und es gilt $\|(\partial_t k \times \partial_s k)(t, s)\| = R$. Die äußere Normale an die Mantelfläche ist

$$n(x, y, z) = \frac{(x, y, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} \iint_S \langle \rho v, n \rangle (x, y, z) dO &= \iint_S \left\langle \begin{pmatrix} 2z \\ x + y \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle dO \\ &= \iint_S \frac{2xz + xy + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} dO \\ &= \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{2Rt \cos s + R^2 \cos s \sin s + R^2 \sin^2 s}{R} \cdot R ds dt \\ &= \int_a^b 2t dt \cdot \int_0^{2\pi} \cos s ds + R^2(b-a) \int_0^{2\pi} \cos s \sin s + \sin^2 s ds \\ &= R^2(b-a)\pi. \end{aligned}$$

Der **Divergenzsatz** stellt einen Zusammenhang zwischen einem solchen Oberflächenintegral und einem dreidimensionalen Bereichsintegral her. Die geometrische Situation ist die folgende: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ eine offene Menge mit Rand $\partial\Omega$, so dass Ω vollständig auf einer Seite von $\partial\Omega$ liegt. Wir verzichten auf eine formale Definition dieses Sachverhalts, typisch sind "geschlossene" Flächen $\partial\Omega$ wie etwa die Kugeloberfläche, so dass Ω von $\partial\Omega$ eingeschlossen ist und der Außenbereich nicht zu Ω gehört. Nicht erlaubt ist beispielsweise die offene Menge, die entsteht, wenn wir aus \mathbb{R}^3 eine Ebene herausnehmen, oder die offene Menge, die aus der offenen Kugel entsteht, wenn wir einen Einschnitt in Form einer Fläche vornehmen.

Für eine solche Menge Ω können wir in jedem Randpunkt x den **äußeren Normalenvektor** $n(x)$ definieren und von dem inneren Normalenvektor $-n(x)$ unterscheiden.

Satz 10.9 (Divergenzsatz)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ offen, sei $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt

$$\iiint_{\Omega} (\operatorname{div} F)(x, y, z) d(x, y, z) = \iint_{\partial\Omega} \langle F(x, y, z), n(x, y, z) \rangle dO. \quad (10.61)$$

□

In Satz 10.9 sind nicht alle Voraussetzungen präzisiert, so muss zum einen $\partial\Omega$ sich zusammensetzen aus Flächenstücken, die sich so parametrisieren lassen, dass das Oberflächenintegral definiert ist, zum anderen muss das Vektorfeld F auch auf $\partial\Omega$ definiert und entsprechende Eigenschaften haben.

Wir erläutern, wie der Divergenzsatz zustandekommt, am Beispiel eines achsenparallelen Quaders

$$\Omega = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times (a_3, b_3) \quad (10.62)$$

In diesem Fall lässt sich der Divergenzsatz ohne weiteres auf den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung zurückführen. Sei etwa S_3^+ die obere Seite von Ω , parallel zur x - y -Ebene, mit äußerer Normalenrichtung $n = e_3$ in z -Richtung,

$$S_3^+ = \{(x, y, b_3) : x \in [a_1, b_1], y \in [a_2, b_2]\}.$$

S_3^+ lässt sich parametrisieren durch

$$k(t, s) = (t, s, b_3), \quad k : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

es ist

$$\partial_t k = e_1, \quad \partial_s k = e_2, \quad \|\partial_t k \times \partial_s k\| = \|e_3\| = 1,$$

unabhängig von t und s . Wir erhalten nun

$$\begin{aligned} \iint_{S_3^+} \langle F, n \rangle dO &= \iint_{S_3^+} \langle F(x, y, z), e_3 \rangle dO = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \langle F(t, s, b_3), e_3 \rangle ds dt \\ &= \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} F_3(t, s, b_3) ds dt. \end{aligned} \quad (10.63)$$

Für die untere Seite

$$S_3^- = \{(x, y, a_3) : x \in [a_1, b_1], y \in [a_2, b_2]\}$$

erhalten wir analog (hier ist $n = -e_3$)

$$\iint_{S_3^-} \langle F, n \rangle dO = - \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} F_3(t, s, a_3) ds dt. \quad (10.64)$$

Addition von (10.63) und (10.64) führt auf

$$\begin{aligned} \iint_{S_3^+} \langle F, n \rangle dO + \iint_{S_3^-} \langle F, n \rangle dO &= \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} F_3(t, s, b_3) - F_3(t, s, a_3) ds dt \\ &= \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_3}^{b_3} \partial_3 F_3(t, s, z) dz ds dt \\ &= \iiint_{\Omega} \partial_3 F_3(x, y, z) d(x, y, z). \end{aligned} \quad (10.65)$$

Eine analoge Rechnung für die beiden anderen Seitenpaare von Ω ergibt

$$\begin{aligned} \iint_{S_2^+} \langle F, n \rangle dO + \iint_{S_2^-} \langle F, n \rangle dO &= \iiint_{\Omega} \partial_2 F_2(x, y, z) d(x, y, z), \\ \iint_{S_1^+} \langle F, n \rangle dO + \iint_{S_1^-} \langle F, n \rangle dO &= \iiint_{\Omega} \partial_1 F_1(x, y, z) d(x, y, z). \end{aligned} \quad (10.66)$$

Da sich $\partial\Omega$ aus den 6 Seitenflächen S_i^\pm , $1 \leq i \leq 3$, zusammensetzt, ergibt eine Addition von (10.65) und (10.66)

$$\iint_{\partial\Omega} \langle F, n \rangle dO = \iiint_{\Omega} (\operatorname{div} F)(x, y, z) d(x, y, z), \quad (10.67)$$

also die Formel des Divergenzsatzes.

Der Divergenzsatz lässt sich anwenden zur Beschreibung des Kräftegleichgewichts eines elastischen Körpers $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Aus dem Prinzip von Euler und Cauchy folgt, dass die in einem Punkt (x, y, z) wirkende Flächenkraft gegeben ist durch

$$S(x, y, z)n(x, y, z) = \begin{pmatrix} \langle S_1(x, y, z), n(x, y, z) \rangle \\ \langle S_2(x, y, z), n(x, y, z) \rangle \\ \langle S_3(x, y, z), n(x, y, z) \rangle \end{pmatrix}, \quad (10.68)$$

wobei $n(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ die Flächennormale und $S(x, y, z) \in \mathbb{R}^{(3,3)}$ der Spannungstensor mit den Zeilen S_1 , S_2 und S_3 ist. Befindet sich der Körper im Gleichgewicht, so muss für jede (gedachte) offene Teilmenge G von Ω , für die das folgende Oberflächenintegral definiert ist, gelten

$$\iint_{\partial G} \langle S_i(x, y, z), n(x, y, z) \rangle dO = 0, \quad 1 \leq i \leq 3. \quad (10.69)$$

Aus dem Divergenzsatz folgt nun

$$\iiint_G \operatorname{div} S_i(x, y, z) d(x, y, z) = 0, \quad 1 \leq i \leq 3, \quad (10.70)$$

für alle solchen Teilmengen G . Man kann nun beweisen, dass daraus folgt

$$\operatorname{div} S_i(x, y, z) = 0, \quad 1 \leq i \leq 3, \quad (10.71)$$

für alle $(x, y, z) \in \Omega$. Wir können uns dieses Argument klarmachen am Beispiel einer stetigen Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, also im Eindimensionalen. Ist nämlich $f(x_0) \neq 0$ an einem bestimmten Punkt $x_0 \in (a, b)$, etwa $f(x_0) > 0$, so muss wegen der Stetigkeit von f gelten, dass

$$f(x) \geq \frac{f(x_0)}{2}, \quad \text{für alle } x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon),$$

wenn wir $\varepsilon > 0$ hinreichend klein wählen. Es folgt dann

$$\int_{x_0 - \varepsilon}^{x_0 + \varepsilon} f(x) dx \geq \int_{x_0 - \varepsilon}^{x_0 + \varepsilon} \frac{f(x_0)}{2} dx = \varepsilon f(x_0) > 0.$$

Hieraus schließen wir, dass f konstant gleich Null sein muss, wenn

$$\int_I f(x) dx = 0$$

gilt für jedes Teilintervall I von (a, b) .

11 Lineare Differentialgleichungen

Im ersten Teil der Vorlesung haben wir bereits lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung betrachtet, etwa die Gleichung

$$my''(t) + ky(t) = 0, \quad (11.1)$$

welche die Bewegung einer Punktmasse am Ende einer schwingenden Feder mit Federkonstante k beschreibt. Diese Gleichung ist ein Spezialfall der homogenen Gleichung der Ordnung m ,

$$a_m y^{(m)}(t) + \dots + a_0 y(t) = 0. \quad (11.2)$$

Auch in diesem Fall führt der Lösungsansatz

$$y(t) = e^{\lambda t}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (11.3)$$

zum Ziel. Einsetzen von (11.3) in (11.2) ergibt

$$0 = a_m \lambda^m e^{\lambda t} + \dots + a_0 e^{\lambda t} = p(\lambda) e^{\lambda t}, \quad (11.4)$$

wobei

$$p(\mu) = \sum_{j=0}^m a_j \mu^j \quad (11.5)$$

das **charakteristische Polynom** von (11.2) ist. Jede Nullstelle λ des charakteristischen Polynoms liefert also gemäß (11.4) eine Lösung der Differentialgleichung (11.2), siehe Teil 1 der Vorlesung für die Betrachtung der verschiedenen Möglichkeiten im Falle $m = 2$.

Die Analyse des zeitabhängigen Verhaltens mechanischer Strukturen, etwa in Reaktion auf zeitlich sich ändernde Lasten, führt in vielen Fällen auf gewöhnliche Differentialgleichungen, welche die oft zahlreichen Zustandsvariablen der Struktur verknüpfen. Wenn man die gegenseitigen Abhängigkeiten als linear ansetzen kann, wird man geführt auf ein **lineares System gewöhnlicher Differentialgleichungen**, welches im expliziten Fall die allgemeine Form

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n, \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n, \end{aligned} \quad (11.6)$$

hat. In Matrix-Vektor-Notation wird (11.6) zu

$$y' = Ay, \quad (11.7)$$

wobei $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ eine gegebene Matrix ist, welche die Koeffizienten aus (11.6) enthält.

Gleichungen höherer Ordnung passen sich in (11.6) ein, so können wir etwa die Gleichung zweiter Ordnung

$$z'' + \frac{k}{m}z = 0$$

umschreiben in ein System zweier Gleichungen erster Ordnung für die Variablen $y_1 = z$, $y_2 = z'$,

$$\begin{aligned}y_1' &= y_2, \\y_2' &= -\frac{k}{m}y_1.\end{aligned}$$

Im Falle $n = 1$ nimmt (11.7) die Form einer einzelnen Gleichung

$$y' = ay, \quad a \in \mathbb{R},$$

an, und das zugehörige Anfangswertproblem, etwa

$$y' = ay, \quad y(0) = y_0,$$

hat für gegebenes $y_0 \in \mathbb{R}$ die eindeutige Lösung

$$y(t) = y_0 e^{at}. \quad (11.8)$$

Es stellt sich heraus, dass auch im Fall des Systems (11.6) bzw. (11.7) das Anfangswertproblem

$$y' = Ay, \quad y(0) = y_0, \quad (11.9)$$

für gegebenes $y_0 \in \mathbb{R}^n$ eine eindeutige Lösung hat, und zwar

$$y(t) = e^{tA}y_0, \quad (11.10)$$

wobei e^{tA} eine $n \times n$ -Matrix ist. Sie ist definiert durch die sogenannte **Matrixexponentialfunktion**

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = I + A + \frac{A^2}{2!} + \dots + \frac{A^n}{n!} + \dots, \quad e^A \in \mathbb{R}^{(n,n)}. \quad (11.11)$$

Hierbei handelt es sich um eine unendliche Reihe (siehe Kapitel 7, Teil 1), deren einzelne Summanden nun allerdings Matrizen sind. Ihren Grenzwert kann man entweder allgemein definieren oder darauf zurückführen, dass wir die sich aus (11.11) für die einzelnen Matrixelemente ergebenden Reihen betrachten. Letzteres ist wenig effizient, da die zugehörigen Formeln komplizierter als (11.11) sind.

Es stellt sich heraus, dass die Rechenregeln für die skalare Exponentialfunktion sich auf den Matrixfall übertragen. Es gilt

$$e^{A+B} = e^A e^B, \quad A, B \in \mathbb{R}^{(n,n)}, \quad (11.12)$$

wenn die Zusatzvoraussetzung $AB = BA$ gilt. (Andernfalls kann es sein, dass (11.12) nicht gilt.) Aus (11.11) erkennt man, dass

$$e^0 = I \quad (11.13)$$

und aus (11.12), angewendet auf $B = -A$ folgt

$$I = e^0 = e^{A-A} = e^A e^{-A}.$$

Die Matrix e^A ist also invertierbar für jedes $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$, und ihre Inverse ist gegeben durch

$$(e^A)^{-1} = e^{-A}. \quad (11.14)$$

Die Matrix e^{tA} ist für $t \in \mathbb{R}$ gemäß (11.11) gegeben durch

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} t^k. \quad (11.15)$$

Für sie gilt

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA} = e^{tA} A. \quad (11.16)$$

Aus den Rechenregeln (11.13) und (11.16) erkennen wir nun, dass die durch

$$y(t) = e^{tA} y_0$$

definierte Funktion tatsächlich eine Lösung des Anfangswertproblems (11.9) ist.

Aus (11.15) ergibt sich unmittelbar, dass die Lösungen von (11.7) das **Superpositionsprinzip** erfüllen. Sind nämlich

$$y(t) = e^{tA} y_0, \quad \tilde{y}(t) = e^{tA} \tilde{y}_0, \quad (11.17)$$

Lösungen von $y' = Ay$ zu den Anfangswerten y_0 und \tilde{y}_0 , so ist

$$\alpha y(t) + \tilde{\alpha} \tilde{y}(t) = \alpha e^{tA} y_0 + \tilde{\alpha} e^{tA} \tilde{y}_0 = e^{tA} (\alpha y_0 + \tilde{\alpha} \tilde{y}_0) \quad (11.18)$$

Lösung von $y' = Ay$ zum Anfangswert $\alpha y_0 + \tilde{\alpha} \tilde{y}_0$.

Aus dem Superpositionsprinzip erhalten wir die Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems (11.9). Sind y und \tilde{y} Lösungen des Anfangswertproblems (11.9), so erfüllt deren Differenz

$$d(t) = y(t) - \tilde{y}(t)$$

die Gleichungen

$$d'(t) = Ad(t), \quad d(0) = 0. \quad (11.19)$$

Für die durch

$$z(t) = e^{-tA} d(t) \quad (11.20)$$

definierte Funktion gilt dann

$$z'(t) = e^{-tA} \cdot (-A) \cdot d(t) + e^{-tA} d'(t) = e^{-tA} \cdot (-A) \cdot d(t) + e^{-tA} Ad(t) = 0,$$

also ist z konstant und wegen

$$z(0) = e^{-0A} d(0) = Id(0) = 0$$

gleich Null. Da umgekehrt

$$d(t) = e^{tA} e^{-tA} d(t) = e^{tA} z(t)$$

gilt, folgt auch $d = 0$ und damit $y = \tilde{y}$, so dass es keine zwei verschiedenen Lösungen des Anfangswertproblems geben kann.

Wir beschäftigen uns nun mit der Frage, wie wir aus der Matrix A die Lösungen

$$y(t) = e^{tA}y_0$$

des Anfangswertproblems erhalten können. Besonders einfach ist die Situation, wenn y_0 reeller Eigenvektor von A ist, also

$$Ay_0 = \lambda y_0 \quad (11.21)$$

gilt mit dem Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$. Es gilt dann

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{tA}y_0 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} t^k \right) y_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k y_0}{k!} t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k y_0}{k!} t^k \\ &= e^{\lambda t} y_0, \end{aligned} \quad (11.22)$$

das heißt, "in Richtung" von y_0 verhält sich die Lösung genau wie die Lösung im skalaren Fall $n = 1$.

Sei nun $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ eine symmetrische Matrix. Aus dem Satz über die Hauptachsentransformation (Kapitel 2) wissen wir, dass es eine ON-Basis für den \mathbb{R}^n gibt, welche aus Eigenvektoren von A besteht, und dass die zugehörigen Eigenwerte reell sind. Ist

$$\{v_1, \dots, v_n\} \quad (11.23)$$

eine solche Basis mit den zugehörigen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, so sind

$$y^j(t) = e^{\lambda_j t} v_j, \quad 1 \leq j \leq n, \quad (11.24)$$

die Lösungen zu den speziellen Anfangswerten $y_0 = v_j$. Ist $y_0 \in \mathbb{R}^n$ ein beliebiger Anfangswert, so berechnen wir seine Basisdarstellung

$$y_0 = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j, \quad (11.25)$$

und die zugehörige Lösung ergibt sich aus dem Superpositionsprinzip aus (11.24) und (11.25) als

$$y(t) = \sum_{j=1}^n \alpha_j e^{\lambda_j t} v_j. \quad (11.26)$$

Aus (11.26) können wir das qualitative Verhalten der Lösungen ablesen. Ist der Eigenwert λ_j

- positiv, so ist die zugehörige Komponente der Lösung exponentiell wachsend,
- negativ, so ist die zugehörige Komponente der Lösung exponentiell fallend,
- gleich Null, so ist die zugehörige Komponente der Lösung konstant.

Als Beispiel betrachten wir

$$y' = Ay, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}. \quad (11.27)$$

Die Matrix A hat die Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 4$ mit den zugehörigen Eigenvektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Wir suchen die Lösung zum Anfangswert

$$y_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}. \quad (11.28)$$

Es ist

$$y_0 = 5v_1 - v_2,$$

also ist die Lösung von (11.27) zum Anfangswert (11.28) gegeben durch

$$y(t) = 5e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5e^{2t} - e^{4t} \\ 5e^{2t} + e^{4t} \end{pmatrix}.$$

Im Fall einer symmetrischen Matrix A ist gemäß (11.26) die Lösung eine Linearkombination aus exponentiell wachsenden oder fallenden Anteilen. Dies trifft auch für eine unsymmetrische Matrix zu, falls diese nur reelle Eigenwerte besitzt und außerdem die zugehörigen Eigenvektoren eine Basis des \mathbb{R}^n bilden. Ist A unsymmetrisch, so ist eine solche Basis nicht orthogonal, die Argumentation zwischen (11.21) und (11.26) bleibt aber gültig. Schwingungsvorgänge können auf diese Weise nicht erfasst werden, bei ihrer Beschreibung treten unsymmetrische Matrizen A auf, deren Eigenwerte nicht alle reell sind.

Wir betrachten den Fall

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad (11.29)$$

wobei $a, b \in \mathbb{R}$ gegebene Zahlen mit $b \neq 0$ sind. Das charakteristische Polynom ist

$$p(\mu) = (a - \mu)^2 + b^2 = \mu^2 - 2a\mu + a^2 + b^2, \quad (11.30)$$

mit den konjugiert komplexen Nullstellen

$$\lambda_{1,2} = a \pm ib. \quad (11.31)$$

Es ist

$$A = aI + B, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}, \quad (11.32)$$

also

$$e^A = e^{aI} e^B = e^a I e^B = e^a e^B. \quad (11.33)$$

Es ist

$$B^2 = \begin{pmatrix} -b^2 & 0 \\ 0 & -b^2 \end{pmatrix},$$

also

$$B^0 = I, \quad B^1 = B, \quad B^{k+2} = -b^2 B^k \quad \text{für } k \geq 0, \quad (11.34)$$

Die Matrix

$$e^B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!}$$

hat also als Diagonalelemente

$$1 - \frac{b^2}{2!} + \frac{b^4}{4!} - \dots = \cos b$$

und die Außerdiagonalelemente

$$\pm \left(-b + \frac{b^3}{3!} - \frac{b^5}{5!} + \dots \right) = \mp \sin b.$$

Es ist also

$$e^B = \begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix}, \quad (11.35)$$

was einer Drehung um den Winkel b entspricht, und nach (11.33)

$$e^{tA} = e^{at} \begin{pmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos bt \end{pmatrix}. \quad (11.36)$$

Als Beispiel betrachten wir

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}. \quad (11.37)$$

Es ist

$$e^{tA} = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos 2t & -\sin 2t \\ \sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix}. \quad (11.38)$$

Die Lösung von $y' = Ay$ zum Anfangswert

$$y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ist

$$y(t) = e^{tA} y_0 = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos 2t & -\sin 2t \\ \sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos(2t) - 3 \sin(2t) \\ \sin(2t) - 3 \cos(2t) \end{pmatrix}. \quad (11.39)$$

Je nach Vorzeichen von a in (11.29) zeigt die Lösung, betrachtet als Kurve in der Ebene \mathbb{R}^2 , das folgende Verhalten:

- Für $a < 0$ ergeben sich Spiralen um den Nullpunkt, die sich zum Nullpunkt zusammenziehen (wie in (11.39)),
- für $a > 0$ ergeben sich Spiralen um den Nullpunkt, die nach außen hin immer größer werden,
- für $a = 0$ ergeben sich konzentrische Kreise um den Nullpunkt, also periodische Lösungen.

Das Vorzeichen von b legt den Drehsinn fest.

Der harmonische Oszillator

$$mz'' + kz = 0 \quad (11.40)$$

liefert ein Beispiel für diesen Fall. Wir schreiben (11.40) als

$$z'' + b^2 z = 0, \quad b = \sqrt{km}. \quad (11.41)$$

Wenn wir die neuen Variablen

$$y_1 = z, \quad y_2 = \frac{1}{b} z', \quad (11.42)$$

eingeführen, wird (11.41) zu

$$\begin{aligned} y_1' &= by_2 \\ y_2' &= -by_1 \end{aligned}, \quad \text{also } y' = Ay, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}. \quad (11.43)$$

Neben (11.29) wird der zweite Baustein der allgemeinen Lösung im unsymmetrischen Fall illustriert durch den Fall

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad (11.44)$$

wobei $a, b \in \mathbb{R}$ gegebene Zahlen mit $b \neq 0$ sind. Das charakteristische Polynom ist

$$p(\mu) = (a - \mu)^2, \quad (11.45)$$

mit der doppelten Nullstelle

$$\lambda_{1,2} = a. \quad (11.46)$$

Es ist

$$A = aI + B, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (11.47)$$

also

$$e^A = e^{aI} e^B = e^a I e^B = e^a e^B. \quad (11.48)$$

Es ist

$$0 = B^2 = B^3 = \dots,$$

also

$$e^A = e^a (I + B) = e^a \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (11.49)$$

und damit

$$e^{tA} = e^{at} \begin{pmatrix} 1 & bt \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (11.50)$$

Als Beispiel betrachten wir

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (11.51)$$

Es ist

$$e^{tA} = e^t \begin{pmatrix} 1 & 2t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (11.52)$$

Die Lösung von $y' = Ay$ zum Anfangswert

$$y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ist dann

$$y(t) = e^{tA} y_0 = e^t \begin{pmatrix} 1 & 2t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 6t + 1 \\ 3 \end{pmatrix}. \quad (11.53)$$

In Abhängigkeit von a hat die Lösung folgende Form:

- Ist $a > 0$, so wächst sie exponentiell,
- ist $a < 0$, so fällt sie exponentiell,
- ist $a = 0$, so wächst sie linear.

Wir betrachten nun den Fall einer beliebigen Matrix $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$. Man kann in der Linearen Algebra beweisen, dass man sie durch einen geeigneten Basiswechsel (siehe Kapitel 2) auf die sogenannte **Jordansche Normalform** D transformieren kann. Diese hat die Blockdiagonalform

$$D = \begin{pmatrix} D_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & D_k \end{pmatrix}, \quad (11.54)$$

wobei

$$D_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \lambda_j & 1 \\ 0 & & & 0 & \lambda_j \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n_j \times n_j}. \quad (11.55)$$

Hierbei sind $\lambda_j \in \mathbb{C}$ die Eigenwerte von A (müssen nicht voneinander verschieden sein), und es gilt

$$\sum_{j=1}^k n_j = n.$$

Wird der Basiswechsel durch die invertierbare Matrix $\Phi \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ beschrieben, so ist

$$D = \Phi^{-1} A \Phi, \quad A = \Phi D \Phi^{-1}. \quad (11.56)$$

Aus der Definition der Matrixexponentialfunktion (11.11) erhält man die Formeln

$$e^{tA} = \Phi e^{tD} \Phi^{-1}, \quad (11.57)$$

sowie

$$e^{tD} = \text{diag}(e^{tD_1}, \dots, e^{tD_k}) = \begin{pmatrix} e^{tD_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{tD_2} & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & e^{tD_k} \end{pmatrix}. \quad (11.58)$$

Durch eine Betrachtung analog zur Analyse von (11.44) ergibt sich

$$e^{tD_j} = e^{\lambda_j t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{n_j-1}}{(n_j-1)!} \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & t & \\ 0 & & & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (11.59)$$

Man kann zeigen (da A eine reelle Matrix ist), dass im Falle nichtreeller Eigenwerte λ_j diese in konjugiert komplexen Paaren auftreten und die jeweils zugehörigen Paare D_j die gleiche Größe haben. Aus ihnen kann man Paare reeller Lösungen gewinnen in Analogie zur Situation der Drehmatrix (11.29). Für das Anfangswertproblem

$$y' = Ay, \quad y(0) = y_0, \quad (11.60)$$

hat das schließlich zur Folge, dass die Lösung eine Linearkombination ist von Funktionen der Form

$$y(t) = t^l e^{\lambda_j t}, \quad 0 \leq l < n_j, \quad (11.61)$$

falls der zum Block D_j gehörende Eigenwert λ_j reell ist, sowie von Funktionen der Form

$$y(t) = t^l e^{a_j t} \cos(b_j t), \quad y(t) = t^l e^{a_j t} \sin(b_j t), \quad 0 \leq l < n_j, \quad (11.62)$$

falls ein Paar konjugiert komplexer Eigenwerte $\lambda_j = a_j \pm ib_j$ vorliegt mit einem zugehörigen Blockpaar D_j . Dadurch ist die allgemeine Lösung des linearen Systems $y' = Ay$ auch im unsymmetrischen Fall vollständig beschrieben.

Ist der Anfangswert in einem beliebigen Punkt $t_0 \in \mathbb{R}$ vorgeschrieben,

$$y' = Ay, \quad y(t_0) = y_0, \quad (11.63)$$

so können wir es durch eine Transformation $t \mapsto t - t_0$ auf den Fall $t_0 = 0$ zurückführen, und die eindeutige Lösung ist gegeben durch

$$y(t) = e^{(t-t_0)A} y_0. \quad (11.64)$$

Wir gehen kurz auf das Anfangswertproblem für die **inhomogene** Gleichung ein,

$$y' = Ay + f(t), \quad y(t_0) = y_0. \quad (11.65)$$

Hierbei ist $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine auf einem geeigneten offenen Intervall I definierte Funktion, es sei $t_0 \in I$. Das Anfangswertproblem (11.65) hat ebenfalls eine eindeutige Lösung, nämlich

$$y(t) = e^{(t-t_0)A} \left(y_0 + \int_{t_0}^t e^{-(s-t_0)A} f(s) ds \right). \quad (11.66)$$

Dass (11.66) eine Lösung ist, erkennt man durch Differenzieren, es gilt

$$\begin{aligned} y'(t) &= Ay(t) + e^{(t-t_0)A} \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t e^{-(s-t_0)A} f(s) ds = Ay(t) + e^{(t-t_0)A} e^{-(t-t_0)A} f(t) \\ &= Ay(t) + f(t). \end{aligned} \quad (11.67)$$

Als Beispiel betrachten wir

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_1 - 2y_2 + 3, & y_1(0) &= 1, \\ y_2' &= 2y_1 - y_2 - 2t, & y_2(0) &= 3. \end{aligned} \quad (11.68)$$

In diesem Fall ist

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2t \end{pmatrix}, \quad t_0 = 0, \quad y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten aus (11.66) mit Hilfe von (11.38) und (11.39)

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{tA} \left(y_0 + \int_0^t e^{-sA} f(s) ds \right) = e^{tA} y_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} f(s) ds \\ &= e^{-t} \begin{pmatrix} \cos(2t) - 3 \sin(2t) \\ \sin(2t) + 3 \cos(2t) \end{pmatrix} + \int_0^t e^{-(t-s)} \begin{pmatrix} \cos 2(t-s) & -\sin 2(t-s) \\ \sin 2(t-s) & \cos 2(t-s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2s \end{pmatrix} ds \\ &= e^{-t} \begin{pmatrix} \cos(2t) - 3 \sin(2t) \\ \sin(2t) + 3 \cos(2t) \end{pmatrix} + \int_0^t e^{-(t-s)} \begin{pmatrix} 3 \cos 2(t-s) + 2s \sin 2(t-s) \\ 3 \sin 2(t-s) - 2s \cos 2(t-s) \end{pmatrix} ds. \end{aligned}$$

Wir betrachten nun das System

$$y' = Ay \tag{11.69}$$

für sich genommen, ohne Festlegung auf einen bestimmten Anfangswert. Wir definieren seinen Lösungsraum als die Menge aller Funktionen $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, welche (11.69) auf ganz \mathbb{R} erfüllen,

$$V = \{y \mid y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, y'(t) = Ay(t) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}\}. \tag{11.70}$$

Da aufgrund des Superpositionsprinzips Summen und skalare Vielfache von Lösungen von (11.69) ebenfalls Lösungen von (11.69) sind, ist V ein Vektorraum.

Definition 11.1 (Fundamentalsystem)

Eine matrixwertige Funktion $Y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{(n,n)}$ heißt Fundamentalsystem von (11.69), falls die Spalten von Y eine Basis des Lösungsraums V sind.

Man beachte, dass sowohl die Elemente des Vektorraums V als auch die Spalten Y_j von Y vektorwertige Funktionen sind; fixiert man einen Wert $t \in \mathbb{R}$, so ist $Y(t)$ eine $n \times n$ -Matrix, und $Y_j(t)$ ein Vektor im \mathbb{R}^n .

Ein Beispiel für ein Fundamentalsystem von (11.69) ist die matrixwertige Funktion Y , definiert durch

$$Y(t) = e^{tA}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{11.71}$$

Die Spalten von Y lassen sich darstellen als

$$Y_j(t) = e^{tA} e_j, \quad 1 \leq j \leq n, \tag{11.72}$$

mit den Einheitsvektoren e_j des \mathbb{R}^n . Gemäß Superpositionsprinzip spannen sie V auf (ist y eine Lösung mit $y_j(0) = \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j$, so ist $y = \sum_{j=1}^n \alpha_j Y_j$) und sind linear unabhängig, da e^{tA} invertierbar ist. Der Lösungsraum von V hat also die Dimension n .

Ist $M \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ eine beliebige (nicht von t abhängige) invertierbare Matrix, so ist

$$Y(t) = e^{tA} M$$

ebenfalls ein Fundamentalsystem von (11.69), also etwa

$$Y(t) = e^{(t-t_0)A} = e^{tA} e^{-t_0A}.$$

Mithilfe eines Fundamentalsystems Y lässt sich die allgemeine Lösung von $y' = Ay$ schreiben in der Form

$$y(t) = Y(t)c, \tag{11.73}$$

wobei $c \in \mathbb{R}^n$ ein beliebiger (nicht von t abhängiger) Vektor ist.

Randwertprobleme. Ein Randwertproblem für das System $y' = Ay$ auf dem Intervall $[a, b]$ hat die Form

$$y' = Ay, \quad (11.74)$$

$$Ry(a) + Sy(b) = r. \quad (11.75)$$

Hierbei sind $A, R, S \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ und $r \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Eine Lösung des Randwertproblems ist eine Funktion $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $y'(t) = Ay(t)$ für alle $t \in (a, b)$, für welche (11.75) gilt. Als Beispiel betrachten wir wieder den harmonischen Oszillator

$$mz'' + kz = 0, \quad (11.76)$$

oder

$$z'' + \omega^2 z = 0, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

mit den Randbedingungen

$$z(a) = z_a, \quad z(b) = z_b,$$

wobei z_a, z_b gegebene Zahlen sind. Umgeschrieben in ein System mit $y_1 = z, y_2 = (1/\omega)z'$ erhalten wir die Form (11.74), (11.75) mit $n = 2, a = 0$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (11.77)$$

und $r_1 = z_a, r_2 = z_b$.

Sei Y ein Fundamentalsystem für $y' = Ay$. Eine Lösung der allgemeinen Form (11.73),

$$y(t) = Y(t)c, \quad c \in \mathbb{R}^n,$$

erfüllt die Randbedingung (11.75) genau dann, wenn gilt

$$r = RY(a)c + SY(b)c = (RY(a) + SY(b))c. \quad (11.78)$$

Wir setzen

$$D = RY(a) + SY(b), \quad (11.79)$$

und erkennen, dass (11.73) genau dann eine Lösung ist, wenn c eine Lösung des linearen Gleichungssystems

$$Dc = r \quad (11.80)$$

ist. Es ergeben sich zwei Fälle

- Fall D regulär, also $\det D \neq 0$: Das Randwertproblem hat zu jedem $r \in \mathbb{R}^n$ eine eindeutige Lösung, und die einzige Lösung zu $r = 0$ ist die triviale Lösung $y = 0$.
- Fall D singular, also $\det D = 0$: Zu $r = 0$ gibt es eine nichttriviale Lösung des Randwertproblems, und es gibt Randwerte $r \in \mathbb{R}^n$, für die das Randwertproblem keine Lösung hat.

Wir betrachten das Beispiel (11.76). Ein Fundamentalsystem ist gegeben durch

$$Y(t) = e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos t\omega & \sin t\omega \\ -\sin t\omega & \cos t\omega \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} D &= RY(0) + SY(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos b\omega & \sin b\omega \\ -\sin b\omega & \cos b\omega \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \cos b\omega & \sin b\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos b\omega & \sin b\omega \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Es gilt

$$D \text{ ist singular} \Leftrightarrow \sin b\omega = 0 \Leftrightarrow \omega = \frac{k\pi}{b}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (11.81)$$

Randwertprobleme spielen eine Rolle bei der Untersuchung von Schwingungen. Wir betrachten als Beispiel eine horizontal ausgerichtete Saite der Länge b , die an beiden Enden fixiert ist und in vertikaler Richtung schwingt. Mit $u(x, t)$ bezeichnen wir die vertikale Auslenkung zum Zeitpunkt t des Punktes $x \in [0, b]$ auf der Saite. Die Fixierung an den Enden führt auf die Randbedingung

$$u(0, t) = 0 = u(b, t), \quad \text{für alle } t. \quad (11.82)$$

Aus der Mechanik ergibt sich, dass die Schwingung der Saite näherungsweise beschrieben wird durch die partielle Differentialgleichung

$$\partial_{tt}u(x, t) - \frac{q\sigma}{\rho}\partial_{xx}u(x, t) = 0, \quad x \in (0, b), \quad t > 0, \quad (11.83)$$

wobei q die Querschnittsfläche der Saite, σ die Spannung im Querschnitt (in der Ruhelage) und ρ die Massendichte (Masse pro Längeneinheit) ist. Als Anfangsbedingung zur Zeit $t = 0$ sind in jedem Punkt $x \in (0, b)$ die Auslenkung und die Geschwindigkeit gegeben,

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \partial_t u(x, 0) = u_1(x). \quad (11.84)$$

Die Gleichung (11.83) heißt die **Wellengleichung**, und (11.82) – (11.84) stellen ein Randwertproblem für die Wellengleichung dar.

Zur Bestimmung von Lösungen machen wir den sogenannten **Separationsansatz** als Produkt

$$u(x, t) = w(t)z(x) \quad (11.85)$$

und versuchen, die Funktionen w und z so zu bestimmen, dass u eine Lösung des Randwertproblems ist. Setzen wir (11.85) in (11.83) ein, so erhalten wir

$$w''(t)z(x) - \frac{q\sigma}{\rho}w(t)z''(x) = 0,$$

also

$$\frac{z''(x)}{z(x)} = \frac{\rho}{q\sigma} \frac{w''(t)}{w(t)}.$$

Da die linke Seite nicht von x und die rechte Seite nicht von t abhängt, müssen sie beide konstant sein, also

$$\frac{z''(x)}{z(x)} = \lambda = \frac{\rho}{q\sigma} \frac{w''(t)}{w(t)}. \quad (11.86)$$

mit einer noch unbestimmten Zahl λ . Die Funktion z muss also eine Lösung der Randwertaufgabe

$$z'' - \lambda z = 0, \quad z(0) = 0 = z(b) \quad (11.87)$$

sein. Gemäß (11.81) mit $\lambda = -\omega^2$ gibt es nichttriviale Lösungen genau dann, wenn λ die Form

$$\lambda_k = -\left(\frac{k\pi}{b}\right)^2, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (11.88)$$

hat. Die zugehörigen Lösungen von (11.87) sind

$$z_k(x) = \sin \frac{k\pi}{b} x. \quad (11.89)$$

Die Gleichung für w (rechte Gleichung in (11.86)) nimmt nun die Form an

$$w''(t) = \frac{q\sigma}{\rho} \lambda_k w(t),$$

also

$$w''(t) + \frac{q\sigma}{\rho} \left(\frac{k\pi}{b}\right)^2 w(t) = 0,$$

also

$$w'' + \omega_k^2 w = 0, \quad \omega_k = \sqrt{\frac{q\sigma}{\rho}} \frac{k\pi}{b}.$$

Deren allgemeine Lösung hat die Form

$$w_k(t) = \alpha_k \sin \omega_k t + \beta_k \cos \omega_k t \quad (11.90)$$

mit noch freien Koeffizienten α_k und β_k .

Insgesamt erhalten wir als Lösungen der Wellengleichung mit den Randbedingungen (11.82) die Funktionen

$$u_k(x, t) = z_k(x) w_k(t) = \left(\sin \frac{k\pi}{b} x\right) \cdot (\alpha_k \sin \omega_k t + \beta_k \cos \omega_k t). \quad (11.91)$$

Sie heißen die k -ten **Eigenschwingungen** der Saite.

Diese Eigenschwingungen u_k erfüllen die Anfangsbedingung

$$u_k(x, 0) = \beta_k \sin \frac{k\pi}{b} x, \quad \partial_t u_k(x, 0) = \alpha_k \omega_k \sin \frac{k\pi}{b} x. \quad (11.92)$$

Um eine Anfangsbedingung der Form

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \partial_t u(x, 0) = u_1(x), \quad (11.93)$$

mit beliebig gegebenen Funktionen u_0 und u_1 zu erfüllen, wenden wir das Superpositionsprinzip an; es genügt aber in der Regel nicht, endlich viele u_k linear zu kombinieren, sondern es ist der Ansatz einer unendlichen Reihe der Form

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k(x, t) \quad (11.94)$$

erforderlich. Es ist dann möglich, die Koeffizienten α_k und β_k mit Hilfe der (hier nicht behandelten) Fourier-Entwicklung zu bestimmen, so dass die Anfangsbedingung (11.93) erfüllt ist.