Funktionalanalysis *

Martin Brokate **

Inhaltsverzeichnis

---

*Vorlesungsskript, WS 2013/14

**Zentrum Mathematik, TU München

1 Normierte Räume

Die Funktionalanalysis beschäftigt sich mit normierten Räumen und mit Operatoren zwischen denselben.

Als einführendes Beispiel betrachten wir das Anfangswertproblem auf $I = [t_0, t_1]$,

$$y' = f(t, y)\,, \quad y(t_0) = y_0\,, \tag{1.1}$$

mit der rechten Seite $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Wir schreiben (1.1) um in die Integralgleichung

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\,ds\,. \tag{1.2}$$

Wir definieren einen Operator

$$T : C(I;\mathbb{R}^n) \to C(I;\mathbb{R}^n)\,, \quad (Ty)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\,ds\,, \tag{1.3}$$

dann ist (1.2) äquivalent zur Gleichung

$$y = Ty\,. \tag{1.4}$$

Wir haben also unser ursprüngliches mathematisches Problem umgeschrieben in eine Gleichung, deren Variable nicht für Zahlen oder Vektoren im $\mathbb{R}^n$, sondern für Funktionen stehen. In dieser Gleichung kommen (neben algebraischen Operationen) Abbildungen zwischen Funktionenräumen vor, die wir auch als Operatoren bezeichnen. Die auftretenden Funktionenräume sind typischerweise unendlichdimensionale Banach- oder Hilberträume.

Im Folgenden steht $\mathbb{K}$ für $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Definition 1.1 (Norm, normierter Raum)
Sei X Vektorraum über $\mathbb{K}$. Eine Abbildung $\|\cdot\| : X \to [0,\infty)$ heißt Norm auf X, falls gilt

$$\|x\| = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 0\,, \tag{1.5}$$

$$\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\| \qquad \text{für alle } \alpha \in \mathbb{K},\ x \in X, \tag{1.6}$$

$$\|x + y\| \le \|x\| + \|y\| \qquad \text{für alle } x, y \in X. \tag{1.7}$$

Ist $\|\cdot\|$ eine Norm auf X, so heißt $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum.

Wir wiederholen kurz einige Grundbegriffe aus der Analysis, siehe zB meine Vorlesung "Analysis 1 und 2" aus dem Jahr 2011.

Sei X ein normierter Raum. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X heißt **konvergent gegen den Grenzwert** $x \in X$,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x\,, \tag{1.8}$$

falls

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0\,. \tag{1.9}$$

Sie heißt **Cauchyfolge**, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$\|x_n - x_m\| \le \varepsilon\,, \quad \text{für alle } n, m \ge N. \tag{1.10}$$

X heißt **vollständig**, falls in X jede Cauchyfolge einen Grenzwert hat. Ist X vollständig, so heißt X **Banachraum**. Ist $x \in X$ und $\varepsilon > 0$, so heißen

$$B(x, \varepsilon) = \{y : y \in X,\ \|y - x\| < \varepsilon\}\,, \tag{1.11}$$
$$K(x, \varepsilon) = \{y : y \in X,\ \|y - x\| \le \varepsilon\}\,, \tag{1.12}$$

offene bzw. **abgeschlossene ε-Kugel um** x. Eine Teilmenge O von X heißt **offen in** X, wenn es zu jedem $x \in O$ ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $B(x, \varepsilon) \subset O$. Eine Teilmenge A von X heißt **abgeschlossen in** X, wenn $X \setminus A$ offen in X ist, oder (äquivalent) wenn für jede in X konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, deren Glieder x_n alle in A liegen, auch der Grenzwert in A liegt. Der **Abschluss** $\overline{Y}$, das **Innere** $\operatorname{int}(Y)$ und der **Rand** ∂Y einer Teilmenge Y von X sind gegeben durch

$$\overline{Y} = \bigcap_{\substack{A \supset Y \\ A \text{ abgeschlossen}}} A\,, \quad \operatorname{int}(Y) = \bigcup_{\substack{O \subset Y \\ O \text{ offen}}} O\,, \quad \partial Y = \overline{Y} \setminus \operatorname{int}(Y)\,. \tag{1.13}$$

Jeder Unterraum U von X ist ebenfalls ein normierter Raum, wenn wir als Norm auf U die Einschränkung der Norm auf X nehmen. Ist U vollständig, so ist U abgeschlossen in X; ist X selbst vollständig, so gilt auch die Umkehrung. Der Abschluss $\overline{U}$ eines Unterraums U ist ebenfalls ein Unterraum.

Aus der Analysis kennen wir bereits einige Banachräume. Zunächst ist $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)$, $1 \le p \le \infty$, ein Banachraum mit

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \le p < \infty\,, \quad \|x\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i|\,. \tag{1.14}$$

Ist D Menge, so ist $(B(D; \mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$,

$$B(D; \mathbb{K}) = \{f \,|\, f : D \to \mathbb{K},\ f \text{ beschränkt}\}\,, \quad \|f\|_\infty = \sup_{x\in D} |f(x)|\,, \tag{1.15}$$

ein Banachraum. Ist D ein kompakter metrischer Raum (beispielsweise eine beschränkte abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$), so ist $(C(D; \mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$,

$$C(D; \mathbb{K}) = \{f \,|\, f : D \to \mathbb{K},\ f \text{ stetig}\}\,, \tag{1.16}$$

ein abgeschlossener Unterraum von $(B(D; \mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$ und damit ebenfalls ein Banachraum. Ist D eine messbare Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ (das trifft beispielsweise zu, wenn D offen oder abgeschlossen ist), so ist für $1 \le p < \infty$ der Raum $L^p(D; \mathbb{K})$ der zur p-ten Potenz Lebesgue-integrierbaren Funktionen, d.h. diejenigen messbaren Funktionen, für die

$$\|f\|_p = \left(\int_D |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty \tag{1.17}$$

gilt, mit dieser Norm $\|\cdot\|_p$ ein Banachraum, wenn wir fast überall gleiche Funktionen in Äquivalenzklassen zusammenfassen (siehe Maß- und Integrationstheorie).

Folgenräume. Für $D = \mathbb{N}$ ist $B(D;\mathbb{K})$ identisch mit dem Raum aller beschränkten Folgen. Wir bezeichnen ihn mit $\ell^\infty(\mathbb{K})$,

$$\ell^\infty(\mathbb{K}) = \{x : x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}},\, x_k \in \mathbb{K},\, \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k| < \infty\}, \quad \|x\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k|. \tag{1.18}$$

Als Spezialfall von (1.15) ist $\ell^\infty(\mathbb{K})$ natürlich ebenfalls ein Banachraum. Wir betrachten die Teilmengen

$$c(\mathbb{K}) = \{x : x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ ist konvergente Folge in } \mathbb{K}\}, \tag{1.19}$$

$$c_0(\mathbb{K}) = \{x : x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ ist Nullfolge in } \mathbb{K}\}. \tag{1.20}$$

Satz 1.2 *Es gilt $c_0(\mathbb{K}) \subset c(\mathbb{K}) \subset \ell^\infty(\mathbb{K})$. Versehen mit der Supremumsnorm sind $c_0(\mathbb{K})$ und $c(\mathbb{K})$ Banachräume.*

Beweis: Übungsaufgabe, es genügt zu zeigen, dass $c(\mathbb{K})$ abgeschlossener Unterraum von $\ell^\infty(\mathbb{K})$ und $c_0(\mathbb{K})$ abgeschlossener Unterraum von $c(\mathbb{K})$ ist. □

Wir betrachten außerdem den Raum $c_e(\mathbb{K})$ aller endlichen Folgen,

$$c_e(\mathbb{K}) = \{x : x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}, \text{ es gibt ein } N \in \mathbb{N} \text{ mit } x_k = 0 \text{ für alle } k \geq N\}. \tag{1.21}$$

Der Raum $c_e(\mathbb{K})$ ist ein Unterraum von $c_0(\mathbb{K})$, er ist aber nicht abgeschlossen, also auch kein Banachraum, vielmehr gilt (Übung)

$$\overline{c_e(\mathbb{K})} = c_0(\mathbb{K}). \tag{1.22}$$

Ist $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folge in $\mathbb{K}$, so definieren wir

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty, \tag{1.23}$$

und den Raum $\ell^p(\mathbb{K})$ der zur p-ten Potenz summierbaren Folgen

$$\ell^p(\mathbb{K}) = \{x : x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}},\, x_k \in \mathbb{K},\, \|x\|_p < \infty\}. \tag{1.24}$$

Satz 1.3 *Der Raum $(\ell^p(\mathbb{K}), \|\cdot\|_p)$ ist ein Banachraum für $1 \leq p < \infty$.*

Beweis: Für $x \in \ell^p(\mathbb{K})$ gilt zunächst

$$\|x\|_p = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^\infty |x_k|^p = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |x_k| = 0 \text{ für alle } k \quad \Leftrightarrow \quad x = 0.$$

Sind $x \in \ell^p(\mathbb{K})$, $\alpha \in \mathbb{K}$, so gilt

$$\|\alpha x\|_p = \left(\sum_{k=1}^\infty |\alpha x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\alpha| \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\alpha| \|x\|_p.$$

Sind $x, y \in \ell^p(\mathbb{K})$, so gilt für alle $N \in \mathbb{N}$

$$\left(\sum_{k=1}^{N} |x_k + y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{N} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{N} |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

das ist gerade die Minkowskische Ungleichung im $\mathbb{K}^N$. Es folgt

$$\sum_{k=1}^{N} |x_k + y_k|^p \leq (\|x\|_p + \|y\|_p)^p, \quad \text{für alle } N \in \mathbb{N}.$$

Grenzübergang $N \to \infty$ liefert

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p \leq (\|x\|_p + \|y\|_p)^p,$$

also

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Also ist $\ell^p(\mathbb{K})$ ein normierter Raum. Sei nun $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\ell^p(\mathbb{K})$. Dann gilt für alle $k, n, m \in \mathbb{N}$

$$|x_k^n - x_k^m|^p \leq \sum_{j=1}^{\infty} |x_j^n - x_j^m|^p = \|x^n - x^m\|_p^p,$$

also ist $(x_k^n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge in $\mathbb{K}$ für alle k, daher existiert

$$x_k^\infty = \lim_{n\to\infty} x_k^n.$$

Für alle k, n, m, N gilt nun (Minkowski)

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{N} |x_k^n - x_k^\infty|^p\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\sum_{k=1}^{N} |x_k^n - x_k^m|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{N} |x_k^m - x_k^\infty|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \|x^n - x^m\|_p + \left(\sum_{k=1}^{N} |x_k^m - x_k^\infty|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (1.25)\end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, wähle M so groß, dass

$$\|x^n - x^m\|_p \leq \varepsilon, \quad \text{für alle } n, m \geq M. \qquad (1.26)$$

Wir wählen nun zu jedem $N \in \mathbb{N}$ ein $m(N) \in \mathbb{N}$ mit $m(N) \geq M$ und

$$\left(\sum_{k=1}^{N} |x_k^{m(N)} - x_k^\infty|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon. \qquad (1.27)$$

Setzen wir $m = m(N)$ in (1.25), so folgt aus (1.25) – (1.27)

$$\left(\sum_{k=1}^{N} |x_k^n - x_k^\infty|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq 2\varepsilon, \quad \text{für alle } n \geq M \text{ und alle } N \in \mathbb{N}.$$

Grenzübergang $N \to \infty$ liefert

$$\|x^n - x^\infty\|_p \le 2\varepsilon\,, \quad \text{für alle } n \ge M.$$

Hieraus folgen $x^\infty = (x^\infty - x^n) + x^n \in \ell^p(\mathbb{K})$ und $x^n \to x^\infty$ in $\ell^p(\mathbb{K})$. □

Lineare stetige Abbildungen. Sind X und Y normierte Räume, so ist eine Abbildung $f : X \to Y$ definitionsgemäß stetig auf X genau dann, wenn

$$f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \tag{1.28}$$

gilt für alle konvergenten Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X. Aus der Analysis wissen wir, dass dazu äquivalent sind die Aussagen

$f^{-1}(O)$ ist offen für jede offene Menge $O \subset Y$,

und

$f^{-1}(A)$ ist abgeschlossen für jede abgeschlossene Menge $A \subset Y$.

f ist stetig in einem Punkt $x \in X$, falls (1.28) gilt für alle gegen x konvergenten Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Satz 1.4 *Seien $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume, sei $T : X \to Y$ linear. Dann sind äquivalent:*

(i) T ist stetig auf X.

(ii) T ist stetig in 0.

(iii) Es gibt ein $C > 0$ mit

$$\|T(x)\|_Y \le C\|x\|_X\,, \quad \textit{für alle } x \in X. \tag{1.29}$$

(iv) T ist lipschitzstetig auf X mit Lipschitzkonstante C.

Beweis: “(iii)⇒(iv)”: Für alle $x, y \in X$ gilt

$$\|T(x) - T(y)\|_Y = \|T(x-y)\|_Y \le C\|x-y\|_X\,.$$

“(iv)⇒(i)⇒(ii)”: klar.
“(ii)⇒(iii)”: Kontraposition. Sei (iii) nicht gültig. Wir wählen eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X mit

$$\|T(x_n)\|_Y > n\|x_n\|_X\,. \tag{1.30}$$

Wir setzen

$$z_n = \frac{1}{n\|x_n\|_X} x_n\,,$$

das ist möglich, da $x_n \ne 0$ wegen (1.30). Es folgt $z_n \to 0$, aber $\|T(z_n)\|_Y > 1$ und daher $T(z_n) \nrightarrow 0$, also gilt (ii) nicht. □

Nicht alle linearen Abbildungen sind stetig. Beispiel: Die Einheitsvektoren $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ bilden eine Basis des $c_e(\mathbb{K})$. Wir definieren eine lineare Abbildung $T : c_e(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ durch $T(e_k) = k$, dann ist $\|e_k\|_\infty = 1$ und $|T(e_k)| = k$, also ist (iii) in Satz 1.4 nicht erfüllt.

Wir werden im Folgenden $\|x\|$ statt $\|x\|_X$ schreiben, wenn klar ist, welche Norm gemeint ist. Und wir werden schreiben Tx statt $T(x)$.

Definition 1.5 (Isomorphismus)
Seien X, Y normierte Räume. Ist $T : X \to Y$ eine bijektive lineare stetige Abbildung, und ist T^{-1} ebenfalls stetig, so heißt T ein Isomorphismus (von X nach Y). Gilt außerdem $\|Tx\| = \|x\|$ für alle $x \in X$, so heißt T isometrisch. X und Y heißen (isometrisch) isomorph, falls es einen (isometrischen) Isomorphismus von X nach Y gibt. In diesem Fall schreiben wir $X \simeq Y$ ($X \cong Y$). Ein isometrischer Isomorphismus heißt auch Isometrie.
□

Offensichtlich gilt (und ebenso für "$\cong$")

$$X \simeq Y\,, \quad Y \simeq Z \qquad \Rightarrow \qquad X \simeq Z\,. \tag{1.31}$$

Ist $T : X \to Y$ ein Isomorphismus, so gibt es nach Satz 1.4 Konstante C_1 und C_2 mit

$$\|Tx\| \le C_1\|x\|\,, \quad \|x\| = \|T^{-1}Tx\| \le C_2\|Tx\|\,, \quad \text{für alle } x \in X. \tag{1.32}$$

Betrachten wir zwei verschiedene Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ auf X, so ist die Identität auf X genau dann ein Isomorphismus, falls es Konstante C_1 und C_2 gibt mit

$$\|x\|_1 \le C_1\|x\|_2\,, \quad \|x\|_2 \le C_2\|x\|_1\,, \quad \text{für alle } x \in X. \tag{1.33}$$

In diesem Fall heißen die Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ **äquivalent**. Aus der Analysis wissen wir bereits, dass auf dem $\mathbb{K}^n$ alle Normen äquivalent sind. Als unmittelbare Verallgemeinerung erhalten wir den folgenden Satz.

Satz 1.6 *Sind X, Y endlichdimensionale normierte Räume mit $\dim(X) = \dim(Y)$, so gilt $X \simeq Y$.*

Beweis: Sei $\dim(X) = n$, $\{v_1, \dots, v_n\}$ Basis von X, seien $e_1, \dots, e_n$ die Einheitsvektoren im $\mathbb{K}^n$. Wir definieren

$$T : \mathbb{K}^n \to X\,, \quad Tx = \sum_{i=1}^n x_i v_i \quad \text{falls} \quad x = \sum_{i=1}^n x_i e_i\,.$$

Wir rechnen unmittelbar nach, dass durch

$$\|x\|_X = \|Tx\|$$

eine Norm auf $\mathbb{K}^n$ definiert wird; T ist dann eine Isometrie. Verfahren wir analog mit Y, so erhalten wir

$$X \cong (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_X) \simeq (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_Y) \cong Y\,.$$

□

Sind X, Y endlichdimensionale Vektorräume mit $Y \subset X$, $Y \neq X$, so ist $\dim(Y) < \dim(X)$, und X und Y sind nicht isomorph, da bijektive lineare Abbildungen die Dimension erhalten. Im Unendlichdimensionalen ist die Situation nicht so einfach. So ist $c_0(\mathbb{K}) \subset c(\mathbb{K})$, $c_0(\mathbb{K}) \neq c(\mathbb{K})$, aber es gilt

$$c_0(\mathbb{K}) \simeq c(\mathbb{K}) . \tag{1.34}$$

Ein Isomorphismus $T : c(\mathbb{K}) \to c_0(\mathbb{K})$ wird definiert durch

$$(Tx)_1 = \lim_{j\to\infty} x_j , \quad (Tx)_k = x_{k-1} - \lim_{j\to\infty} x_j , \, k \geq 2 , \tag{1.35}$$

mit der Umkehrabbildung $S : c_0(\mathbb{K}) \to c(\mathbb{K})$,

$$(Sy)_k = y_{k+1} + y_1 . \tag{1.36}$$

Man rechnet leicht nach, dass $T \circ S$ und $S \circ T$ die Identität auf $c_0(\mathbb{K})$ bzw. $c(\mathbb{K})$ liefern, und dass $\|Tx\|_\infty \leq 2\|x\|_\infty$ und $\|Sy\|_\infty \leq 2\|y\|_\infty$ für alle $x \in c(\mathbb{K})$ und alle $y \in c_0(\mathbb{K})$ gelten.

Satz 1.7 *Seien $(X_1, \|\cdot\|_1), \ldots, (X_m, \|\cdot\|_m)$ normierte Räume. Dann werden auf dem Produktraum*

$$X = \prod_{i=1}^{m} X_i = X_1 \times \cdots \times X_m \tag{1.37}$$

für $x = (x_1, \ldots, x_m) \in X$ durch

$$\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq m} \|x_i\|_i , \quad \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{m} \|x_i\|_i^p \right)^{\frac{1}{p}} , \tag{1.38}$$

Normen $\|\cdot\|_p$ für $1 \leq p \leq \infty$ definiert, die alle äquivalent sind. Eine Folge $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X konvergiert gegen ein $x = (x_1, \ldots, x_m) \in X$ genau dann, wenn alle Komponentenfolgen $(x_i^n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x_i konvergieren. X ist vollständig genau dann, wenn alle X_i vollständig sind.

Beweis: Übung. □

Folgerung 1.8 *Sei X normierter Raum. Dann sind die Addition $+ : X \times X \to X$ und die Skalarmultiplikation $\cdot : \mathbb{K} \times X \to X$ stetig.*

Beweis: Aus $x_n \to x$ und $y_n \to y$ folgt

$$0 \leq \|(x_n + y_n) - (x + y)\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \to 0 ,$$

aus $\alpha_n \to \alpha$ und $x_n \to x$ folgt

$$0 \leq \|\alpha_n x_n - \alpha x\| \leq |\alpha_n| \, \|x_n - x\| + |\alpha_n - \alpha| \, \|x\| \to 0 .$$

□

Definition 1.9 (Operatorenraum, Dualraum)
Seien X, Y normierte Räume. Wir definieren

$$L(X;Y) = \{T \mid T : X \to Y,\, T \text{ ist linear und stetig}\}\,. \tag{1.39}$$

Der Raum $L(X;\mathbb{K})$ heißt der Dualraum von X und wird mit X^* bezeichnet. □

Aus der Linearen Algebra und der Analysis ist bekannt, dass $L(X;Y)$ ein Vektorraum ist.

Satz 1.10 (Operatornorm)
Seien X, Y normierte Räume. Dann wird durch

$$\|T\| = \sup_{x \in X,\, x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \tag{1.40}$$

eine Norm auf $L(X,Y)$ definiert, sie heißt die Operatornorm. Es gilt

$$\|Tx\| \le \|T\|\,\|x\|\,, \quad \text{für alle } x \in X, \tag{1.41}$$

und weiter

$$\|T\| = \sup_{x \in X,\, \|x\| \le 1} \|Tx\| = \sup_{x \in X,\, \|x\| = 1} \|Tx\|\,, \tag{1.42}$$

sowie

$$\|T\| = \inf\{C : C > 0,\, \|Tx\| \le C\|x\| \text{ für alle } x \in X\}\,. \tag{1.43}$$

Ist Y ein Banachraum, so ist auch $L(X,Y)$ ein Banachraum.

Beweis: Sei $T \in L(X;Y)$, sei $C > 0$ mit $\|Tx\| \le C\|x\|$ für alle $x \in X$. Division durch $\|x\|$ zeigt, dass $\|T\| \le C$, also $\|T\| \in \mathbb{R}_+$, und (1.41) und (1.43) gelten. Aus (1.41) folgt

$$\sup_{x \in X,\, \|x\|=1} \|Tx\| \le \sup_{x \in X,\, \|x\| \le 1} \|Tx\| \le \|T\|\,,$$

und wegen

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\|$$

folgt (1.42). Es ist

$$\|T\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \|Tx\| = 0 \text{ für alle } x \in X \;\Leftrightarrow\; Tx = 0 \text{ für alle } x \in X \quad \Leftrightarrow \quad T = 0\,,$$

und weiter für $\alpha \in \mathbb{K}$

$$\|\alpha T\| = \sup_{\|x\|=1} \|\alpha Tx\| = |\alpha| \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = |\alpha|\,\|T\|\,,$$

sowie für $S, T \in L(X;Y)$

$$\|S + T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Sx + Tx\| \le \sup_{\|x\|=1} \|Sx\| + \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \|S\| + \|T\|\,.$$

Die Normeigenschaften sind also erfüllt. Wir zeigen nun die Vollständigkeit. Sei $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchyfolge in $L(X;Y)$. Wegen

$$\|T_n x - T_m x\| = \|(T_n - T_m)(x)\| \le \|T_n - T_m\|\,\|x\|$$

ist auch $(T_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ für jedes $x \in X$ eine Cauchyfolge in Y. Durch (Y ist vollständig)

$$Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x$$

wird daher eine Abbildung $T : X \to Y$ definiert. Seien $x, z \in X$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, dann ist

$$\begin{aligned}\alpha Tx + \beta Tz &= \alpha \lim_{n\to\infty} T_n x + \beta \lim_{n\to\infty} T_n z = \lim_{n\to\infty} (\alpha T_n x + \beta T_n z) \\ &= \lim_{n\to\infty} T_n(\alpha x + \beta z) = T(\alpha x + \beta z)\,,\end{aligned}$$

also ist T linear. Wegen (die Norm ist stetig)

$$\|Tx\| = \|\lim_{n\to\infty} T_n x\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n x\| \le (\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|)\|x\|$$

ist T stetig. Es bleibt zu zeigen, dass $\|T_n - T\| \to 0$. Sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen $N \in \mathbb{N}$ mit $\|T_n - T_m\| \le \varepsilon$ für alle $n, m \ge N$. Für beliebiges $x \in X$ mit $\|x\| = 1$ gilt

$$\|(T_n - T)x\| \le \|(T_n - T_m)x\| + \|(T_m - T)x\| \le \|T_n - T_m\| + \|T_m x - Tx\|\,,$$

also folgt für $n \ge N$, indem wir m hinreichend groß wählen,

$$\|(T_n - T)x\| \le 2\varepsilon\,,$$

und damit $\|T_n - T\| \le 2\varepsilon$ falls $n \ge N$. □

Beispiel 1.11

1. D kompakter metrischer Raum, $X = C(D; \mathbb{K})$ mit Supremumsnorm, $a \in D$, $T_a : X \to \mathbb{K}$, $T_a x = x(a)$. T_a ist linear, und $|T_a x| = |x(a)| \le \|x\|_\infty$ mit Gleichheit, falls x eine konstante Funktion ist. Also ist T_a stetig und $\|T_a\| = 1$. T_a heißt das **Dirac-Funktional** im Punkt a.

2. $X = C([a, b]; \mathbb{R})$ mit Supremumsnorm, $T : X \to \mathbb{R}$,

   $$Tx = \int_a^b x(t)\,dt\,.$$

   T ist linear,

   $$|Tx| = \left|\int_a^b x(t)\,dt\right| \le (b-a)\|x\|_\infty$$

   mit Gleichheit, falls x konstant ist, also ist T stetig und $\|T\| = b - a$.

3. $X = L^1([a, b]; \mathbb{R})$ mit L^1-Norm, T wie eben, dann ist

   $$|Tx| = \left|\int_a^b x(t)\,dt\right| \le \int_a^b |x(t)|\,dt = \|x\|_1$$

   mit Gleichheit, falls x konstant ist, also ist T stetig und $\|T\| = 1$.

4. X wie eben, $f \in C([a,b];\mathbb{R})$, $T : X \to \mathbb{R}$,

$$Tx = \int_a^b f(t)x(t)\,dt\,.$$

T ist linear, und

$$|Tx| \le \int_a^b |f(t)|\,|x(t)|\,dt \le \|f\|_\infty \int_a^b |x(t)|\,dt = \|f\|_\infty \, \|x\|_1\,,$$

also ist T stetig und $\|T\| \le \|f\|_\infty$. Um die Gleichheit nachzuweisen, wählen wir $t_* \in [a,b]$ mit $f(t_*) = \|f\|_\infty$ (falls das Betragsmaximum im Negativen angenommen wird, gehen wir zu $-f$ bzw. $-T$ über). Sei nun $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < \|f\|_\infty$. Wir wählen ein Intervall I mit $t_* \in I \subset [a,b]$, so dass $f(t) \ge \|f\|_\infty - \varepsilon$ für alle $t \in I$ gilt, und setzen ($|I|$ bezeichnet die Länge von I)

$$x = \frac{1}{|I|} 1_I\,, \quad \text{also } x(t) = \begin{cases} \frac{1}{|I|}\,, & t \in I\,, \\ 0\,, & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Dann ist $\|x\|_1 = 1$ und

$$|Tx| = \left| \int_a^b f(t)x(t)\,dt \right| = \int_I f(t)\frac{1}{|I|}\,dt \ge \int_I (\|f\|_\infty - \varepsilon)\frac{1}{|I|}\,dt = \|f\|_\infty - \varepsilon\,.$$

Es folgt $\|T\| \ge \|f\|_\infty - \varepsilon$ und damit $\|T\| = \|f\|_\infty$.

5. Sei $D = (0,1) \times (0,1)$, $k \in L^2(D;\mathbb{R})$. Vermittels k wollen wir auf $X = L^2((0,1);\mathbb{R})$ einen **Integraloperator** $T : X \to X$ definieren durch

$$(Tx)(s) = \int_0^1 k(s,t)x(t)\,dt\,, \quad s \in (0,1)\,.$$

T ist linear. Es gilt (die Wohldefiniertheit der Integrale folgt aus dem Satz von Fubini bzw. Tonelli, die zweite Ungleichung aus der Hölderschen Ungleichung)

$$\begin{aligned} \|Tx\|^2_{L^2((0,1);\mathbb{R})} &= \int_0^1 \left(\int_0^1 k(s,t)x(t)\,dt \right)^2 ds \le \int_0^1 \left(\int_0^1 |k(s,t)|\,|x(t)|\,dt \right)^2 ds \\ &\le \int_0^1 \left(\int_0^1 |k(s,t)|^2\,dt \right) \cdot \left(\int_0^1 |x(t)|^2\,dt \right) ds \\ &= \|x\|^2_{L^2((0,1);\mathbb{R})} \int_0^1 \int_0^1 |k(s,t)|^2\,dt\,ds\,, \end{aligned}$$

also ist T stetig und

$$\|T\| \le \left(\int_0^1 \int_0^1 |k(s,t)|^2\,dt\,ds \right)^{\frac{1}{2}} = \|k\|_{L^2(D;\mathbb{R})}\,.$$

6. Sind X, Y normierte Räume und ist $\dim(X) < \infty$, so ist jede lineare Abbildung $T : X \to Y$ stetig: Sei $\{v_1, \ldots, v_n\}$ Basis von X, dann gilt für
$$x = \sum_{i=1}^n x_i v_i \in X\,, \quad x_i \in \mathbb{K}\,,$$
dass
$$\|Tx\| = \left\| \sum_{i=1}^n x_i T v_i \right\| \le \sum_{i=1}^n |x_i|\, \|Tv_i\| \le \max_{1 \le i \le n} \|Tv_i\| \sum_{i=1}^n |x_i|\,,$$
also
$$\|T\| \le \max_{1\le i\le n} \|Tv_i\|\,, \quad \text{falls etwa} \quad \|x\| = \sum_{i=1}^n |x_i|\,.$$

7. Ist $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear, $T(x) = Ax$ mit einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{(m,n)}$, so läßt sich $L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ mit dem Raum $\mathbb{R}^{(m,n)}$ aller $m \times n$-Matrizen identifizieren, die Operatornorm wird dann zu einer sogenannten Matrixnorm, deren Form von der Wahl der beiden Normen im $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ abhängt. Matrixnormen spielen eine große Rolle bei der Konstruktion und Analyse von Algorithmen in der Numerischen Mathematik.

□

Lemma 1.12 *Seien X, Y, Z normierte Räume, $T : X \to Y$ und $S : Y \to Z$ linear und stetig. Dann ist auch $S \circ T : X \to Z$ linear und stetig, und*
$$\|S \circ T\| \le \|S\|\, \|T\|\,. \tag{1.44}$$

Beweis: Für alle $x \in X$ gilt $\|(S \circ T)x\| \le \|S\|\,\|Tx\| \le \|S\|\,\|T\|\,\|x\|$. Die Behauptung folgt nun aus Satz 1.10. □

Halbnormen und Quotientenräume.

Definition 1.13 (Halbnorm)
Sei X Vektorraum über $\mathbb{K}$. Eine Abbildung $p : X \to [0, \infty)$ heißt Halbnorm auf X, falls gilt
$$p(\alpha x) = |\alpha|\, p(x) \qquad \text{für alle } \alpha \in \mathbb{K},\ x \in X, \tag{1.45}$$
$$p(x+y) \le p(x) + p(y) \qquad \text{für alle } x, y \in X. \tag{1.46}$$
Ist p eine Halbnorm auf X, so heißt (X, p) halbnormierter Raum.

Aus (1.45) folgt natürlich $p(0) = 0$, aber $p(x) = 0$ impliziert nicht $x = 0$. Jede Norm ist eine Halbnorm. Jede lineare Abbildung $T : X \to Y$, (Y, q) halbnormierter Raum, definiert eine Halbnorm auf X durch
$$p(x) = q(Tx)\,. \tag{1.47}$$
Beispiele:
$$X = \mathbb{R}^n\,, \quad p(x) = |x_1|\,, \tag{1.48}$$
$$X = B(D; \mathbb{K})\,, \quad a \in D\,, \quad p(x) = |x(a)|\,, \tag{1.49}$$
$$X = L^1((0,1); \mathbb{R})\,, \quad p(x) = \left| \int_0^1 x(t)\, dt \right|\,, \tag{1.50}$$
$$X = C^1([0,1]; \mathbb{R})\,, \quad p(x) = \|\dot{x}\|_\infty\,. \tag{1.51}$$

Ist X Vektorraum, U Unterraum von X, so wird (siehe Lineare Algebra) durch

$$x \sim_U z \quad \Leftrightarrow \quad x - z \in U \tag{1.52}$$

eine Äquivalenzrelation auf X definiert. Sei

$$[x] = \{z : z \in X,\, x \sim_U z\} \tag{1.53}$$

die Äquivalenzklasse von X. Der Quotientenraum X/U ist definiert durch

$$X/U = \{[x] : x \in X\}\,. \tag{1.54}$$

Mit der durch

$$[x] + [y] = [x + y]\,, \quad \alpha[x] = [\alpha x] \tag{1.55}$$

definierten Addition und Skalarmultiplikation wird X/U zum Vektorraum, und die Abbildung

$$Q : X \to X/U\,, \quad Qx = [x]\,, \tag{1.56}$$

ist linear und surjektiv.

Satz 1.14 (Quotientennorm) *Sei X normierter Raum, U ein Unterraum von X.*

(i) Durch

$$p([x]) = \operatorname{dist}(x, U) = \inf_{z \in U} \|x - z\| \tag{1.57}$$

wird eine Halbnorm auf X/U definiert mit

$$p([x]) \le \|x\|\,, \quad \textit{für alle } x \in X. \tag{1.58}$$

(ii) Ist U abgeschlossen, so ist p eine Norm.

(iii) Ist X Banachraum und U abgeschlossen, so ist $(X/U, p)$ ebenfalls Banachraum.

Beweis: Teil (i) ist Übungsaufgabe. Zu (ii): Ist

$$0 = p([x]) = \inf_{z \in U} \|x - z\|\,,$$

so gibt es eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in U mit $\|x - z_n\| \to 0$, also $z_n \to x$ und damit (wenn U abgeschlossen) $x \in U$, also $[x] = 0$. Zu (iii): Zunächst beweisen wir: Sind $x, y \in X$, so gibt es ein $\tilde{y} \in [y]$ mit

$$\|\tilde{y} - x\| \le 2p([y - x])\,. \tag{1.59}$$

Ein solches $\tilde{y}$ erhalten wir, indem wir zunächst $z \in U$ wählen mit

$$\|y - x - z\| \le 2p([y - x])$$

und dann $\tilde{y} = y - z$ setzen. Sei nun $([x_n])_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in X/U. Nach eventuellem Übergang zu einer Teilfolge können wir annehmen, dass

$$p([x_{n+1}] - [x_n]) \le 2^{-n}\,.$$

Wähle nun gemäß (1.59) $\tilde{x}_1 \in [x_1]$ und für $n > 1$ ein $\tilde{x}_n \in [x_n]$ mit

$$\|\tilde{x}_n - \tilde{x}_{n-1}\| \le 2p([x_n] - [x_{n-1}])\,. \tag{1.60}$$

Dann gilt für alle $n, p \in \mathbb{N}$

$$\|\tilde{x}_{n+p} - \tilde{x}_n\| \le \sum_{j=1}^{p} \|\tilde{x}_{n+j} - \tilde{x}_{n+j-1}\| \le \sum_{j=1}^{p} 2 \cdot 2^{-n-j+1} \le 2^{-n+2}\,,$$

also ist $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in X. Da X vollständig ist, existiert $x = \lim_{n\in\mathbb{N}} \tilde{x}_n$. Aus (1.58) folgt

$$0 \le p([x_n] - [x]) = p([\tilde{x}_n] - [x]) \le \|\tilde{x}_n - x\| \to 0\,,$$

also $[x_n] \to [x]$ in X/U. □

Beispiel: $X = C([0,1])$, $U = \{x : x \in X,\ x(0) = 0\}$. Es ist

$$x \sim_U y \quad \Leftrightarrow \quad x(0) = y(0)\,,$$

und man sieht leicht, dass

$$p([x]) = |x(0)|\,, \quad X/U \cong \mathbb{R}\,.$$

Die Abbildung $T : X/U \to \mathbb{R}$, $T([x]) = x(0)$, ist eine Isometrie.

Dichte Teilmengen. Eine Teilmenge A eines metrischen Raumes (X, d) heißt **dicht** in X, falls

$$\overline{A} = X \tag{1.61}$$

gilt. Offensichtlich gilt: Ist A dicht in (X, d), und ist B dicht in (A, d_A), so ist B dicht in (X, d).

Definition 1.15 (Separabler Raum)
*Ein metrischer Raum (X, d) heißt **separabel**, wenn es eine endliche oder abzählbar unendliche Teilmenge A von X gibt, welche dicht ist in X.* □

Beispiel: $\mathbb{Q}^n$ ist dichte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, also ist $\mathbb{R}^n$ separabel. Analoges gilt für $\mathbb{C}^n$.

Satz 1.16 *Der Raum $(C([a,b];\mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$ ist separabel.*

Beweis: Nach dem Approximationssatz von Weierstraß (siehe Analysis 2) ist die Menge P aller Polynome dicht in $C([a,b];\mathbb{K})$. Die Menge aller Polynome mit rationalen Koeffizienten ist abzählbar und in P dicht, also auch in $C([a,b];\mathbb{K})$. □

Satz 1.17 *Sei X normierter Raum, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in X mit $X = \overline{\operatorname{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$. Dann ist X separabel.*

Beweis: Übung. □

Satz 1.18 *Der Raum $\ell^p(\mathbb{K})$ ist separabel für $1 \le p < \infty$. Der Raum $\ell^\infty(\mathbb{K})$ ist nicht separabel.*

Beweis: Für $p < \infty$ gilt $\ell^p(\mathbb{K}) = \overline{\text{span}\,\{e_n : n \in \mathbb{N}\}}$, also folgt die Behauptung aus Satz 1.17. Sei $p = \infty$. Für $M \subset \mathbb{N}$ definieren wir $x^M \in \ell^\infty(\mathbb{K})$ durch

$$x_k^M = \begin{cases} 1\,, & k \in M\,,\\ 0\,, & k \notin M\,. \end{cases}$$

Sind $M, N \subset \mathbb{N}$ mit $M \neq N$, so ist $\|x^M - x^N\|_\infty = 1$, und

$$\{B(x^M, \frac{1}{2}) : M \subset \mathbb{N}\}$$

ist eine überabzählbare Menge disjunkter offener Kugeln. Ist A eine dichte Teilmenge, so muss sie auch in jeder dieser Kugeln dicht sein, daher kann sie nicht abzählbar sein. □

Analog gilt, dass ($D \subset \mathbb{R}^n$ offen) der Raum $(L^p(D;\mathbb{K}), \|\cdot\|_p)$ separabel ist für $1 \leq p < \infty$, aber nicht separabel für $p = \infty$. Ist $p < \infty$ und D außerdem beschränkt, so folgt dies daraus, dass $C(\overline{D})$ dicht in $(L^p(D), \|\cdot\|_p)$ liegt und (analog zu Satz 1.16) die Polynome mit rationalen Koeffizienten eine dichte Teilmenge von $C(\overline{D})$ bilden. Für unbeschränktes D folgt es aus

$$L^p(D;\mathbb{K}) = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} L^p(D \cap B_n;\mathbb{K})}$$

mit $B_n = \{x : \|x\|_p < n\}$.

Satz 1.19 *Seien X normierter Raum, Y Banachraum, U ein dichter Unterraum von X und $S : U \to Y$ linear und stetig. Dann gibt es genau eine lineare stetige Abbildung $T : X \to Y$ mit $T|U = S$, und es gilt $\|T\| = \|S\|$.*

Beweis: Zu $x \in X$ wählen wir eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in U mit $x_n \to x$ und setzen $Tx = \lim_{n\to\infty} Sx_n$. Dieser Limes existiert, da mit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch $(Sx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge und Y vollständig ist. Die Behauptungen ergeben sich nun direkt aus den Definitionen und elementaren Eigenschaften der Operatornorm und von konvergenten Folgen, die Einzelheiten werden hier nicht ausgeführt. □

Dualräume. Ist X ein normierter Raum, so ist nach Satz 1.10 der Dualraum $X^* = L(X;\mathbb{K})$ ein Banachraum.

Satz 1.20 *Sind $p, q \in (1, \infty)$ mit*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,, \tag{1.62}$$

so gilt

$$(\ell^p(\mathbb{K}))^* \cong \ell^q(\mathbb{K})\,. \tag{1.63}$$

Beweis: Wir wollen eine Isometrie $T : \ell^q(\mathbb{K}) \to (\ell^p(\mathbb{K}))^*$ definieren durch

$$(Tx)(y) = \sum_{k=1}^\infty x_k y_k\,, \quad x \in \ell^q(\mathbb{K})\,, \quad y \in \ell^p(\mathbb{K})\,. \tag{1.64}$$

Es gilt nach der Hölderschen Ungleichung

$$\sum_{k=1}^N |x_k|\,|y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^N |x_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\sum_{k=1}^N |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|x\|_q\,\|y\|_p\,,$$

also ist die Reihe $\sum_k x_k y_k$ absolut konvergent, und

$$|(Tx)(y)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| \leq \|x\|_q \|y\|_p .$$

Daher wird für festes $x \in \ell^q(\mathbb{K})$ durch (1.64) eine lineare stetige Abbildung $Tx : \ell^p(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ definiert mit

$$\|Tx\| \leq \|x\|_q . \tag{1.65}$$

Also ist $T : \ell^q(\mathbb{K}) \to (\ell^p(\mathbb{K}))^*$ wohldefiniert. Aus (1.64) folgt, dass T linear ist, und aus (1.65), dass T stetig ist. T ist injektiv, da $(Tx)(e_k) = x_k$, und also $Tx = 0$ auch $x_k = 0$ für alle k impliziert. Wir zeigen, dass T surjektiv ist. Sei $y^* \in (\ell^p(\mathbb{K}))^*$ beliebig, wir suchen ein $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\ell^q(\mathbb{K})$ mit $Tx = y^*$. Da $(Tx)(e_k) = x_k$ gilt für ein solches x, müssen wir definieren

$$x_k = y^*(e_k) . \tag{1.66}$$

Für ein $y \in c_e(\mathbb{K})$ der Form

$$y = \sum_{k=1}^{N} y_k e_k , \quad y_k \in \mathbb{K} , \quad N \in \mathbb{N} , \tag{1.67}$$

gilt dann

$$y^*(y) = y^* \left(\sum_{k=1}^{N} y_k e_k \right) = \sum_{k=1}^{N} y_k y^*(e_k) = \sum_{k=1}^{N} y_k x_k . \tag{1.68}$$

Wir wählen nun

$$y_k = |x_k|^{q-1} \operatorname{sign}(x_k) , \quad 1 \leq k \leq N . \tag{1.69}$$

Dann gilt

$$|y_k|^p = |x_k|^{p(q-1)} = |x_k|^q = x_k y_k ,$$

und aus (1.68) folgt

$$\sum_{k=1}^{N} |x_k|^q = \sum_{k=1}^{N} x_k y_k = y^*(y) \leq \|y^*\| \|y\|_p = \|y^*\| \left(\sum_{k=1}^{N} |y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|y^*\| \left(\sum_{k=1}^{N} |x_k|^q \right)^{\frac{1}{p}} ,$$

also

$$\left(\sum_{k=1}^{N} |x_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \|y^*\| . \tag{1.70}$$

Grenzübergang $N \to \infty$ liefert $x \in \ell^q(\mathbb{K})$ und

$$\|x\|_q \leq \|y^*\| . \tag{1.71}$$

Aus (1.64) und (1.68) folgt

$$(Tx)(y) = y^*(y) , \quad \text{für alle } y \in c_e(\mathbb{K}).$$

Nun ist $c_e(\mathbb{K})$ dicht in $(\ell^p(\mathbb{K}), \| \cdot \|_p)$, also folgt aus Satz 1.19

$$Tx = y^* , \tag{1.72}$$

also ist T surjektiv, und aus (1.65) und (1.71) folgt $\|Tx\| = \|x\|_q$, also ist T Isometrie. □

Ohne Beweis geben wir einige weitere Ergebnisse zur Darstellung von Dualräumen an. Es gilt

$$c_0(\mathbb{K})^* \cong \ell^1(\mathbb{K})\,, \quad \ell^1(\mathbb{K})^* \cong \ell^\infty(\mathbb{K})\,. \tag{1.73}$$

Analoge Sätze gelten für Funktionenräume. Ist $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, so gilt

$$L^p(D;\mathbb{K})^* \cong L^q(D;\mathbb{K})\,, \quad 1 < p < \infty\,, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,. \tag{1.74}$$

Für $p = 2$ folgt (1.74) aus der Hilbertraumtheorie (später). Für beliebiges $p \in (1,\infty)$ erhalten wir analog zum Fall des Folgenraums $\ell^p(\mathbb{K})$ durch

$$(Tx)(y) = \int_D x(t)y(t)\,dt\,, \quad x \in L^q(D;\mathbb{K}),\ y \in L^p(D;\mathbb{K})\,, \tag{1.75}$$

eine lineare stetige Abbildung $T : L^q(D;\mathbb{K}) \to L^p(D;\mathbb{K})^*$ mit $\|Tx\| = \|x\|_q$. Aus der Hölderschen Ungleichung folgt nämlich

$$|(Tx)(y)| \le \int_D |x(t)|\,|y(t)|\,dt \le \left(\int_D |x(t)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_D |y(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_q\,\|y\|_p\,, \tag{1.76}$$

und für

$$y(t) = \mathrm{sign}\,(x(t))|x(t)|^{q-1}$$

gilt $|y(t)|^p = |x(t)|^q$ und daher

$$\begin{aligned}(Tx)(y) &= \int_D x(t)\mathrm{sign}\,(x(t))|x(t)|^{q-1}\,dt = \int_D |x(t)|^q\,dt \\ &= \left(\int_D |x(t)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_D |x(t)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_q\,\|y\|_p\,.\end{aligned}$$

Zum Beweis der Surjektivität von T konstruiert man zu gegebenem $y^* \in L^p(D;\mathbb{K})^*$ ein $x \in L^q(D;\mathbb{K})$ mit $Tx = y^*$ mit Hilfe des Satzes von Radon-Nikodym aus der Maß- und Integrationstheorie.

Weiter gilt

$$L^1(D;\mathbb{K})^* \cong L^\infty(D;\mathbb{K})\,. \tag{1.77}$$

Der Darstellungssatz von Riesz besagt, dass für kompaktes $D \subset \mathbb{R}^n$ der Raum $C(D;\mathbb{R})^*$ isometrisch isomorph ist zum Raum aller signierten regulären Maße auf der Borel-σ-Algebra auf D, insbesondere gibt es zu jedem $y^* \in C(D;\mathbb{R})^*$ ein solches Maß μ mit

$$y^*(y) = \int_D y\,d\mu\,. \tag{1.78}$$

Definition 1.21 (Reihe im normierten Raum)
Sei X normierter Raum, sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folge in X. Falls die Folge der Partialsummen

$$s_n = \sum_{k=1}^n x_k \tag{1.79}$$

gegen ein $s \in X$ konvergiert, so sagen wir, dass die zugehörige Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ konvergiert, und definieren

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = s\,. \tag{1.80}$$

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ heißt absolut konvergent, falls

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty\,. \tag{1.81}$$

$\square$

Aus der Stetigkeit der Addition und Skalarmultiplikation im normierten Raum folgen die Rechenregeln

$$\sum_{k=1}^{\infty}(x_k + y_k) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k + \sum_{k=0}^{\infty} y_k\,, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \alpha x_k = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} x_k\,, \tag{1.82}$$

$\alpha \in \mathbb{K}$, die jeweils gültig sind, wenn die Grenzwerte auf der rechten Seite existieren.

Satz 1.22 *Sei X Banachraum, sei die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ absolut konvergent. Dann ist sie auch konvergent, und es gilt*

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} x_k \right\| \le \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|\,. \tag{1.83}$$

Jede Umordnung der Reihe konvergiert ebenfalls, und zwar gegen den gleichen Grenzwert.

Beweis: Sei

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|\,,$$

dann gilt für die in (1.79) definierten Partialsummen für $n > m$

$$\|s_n - s_m\| \le \sum_{k=m+1}^{n} \|x_k\| = |\sigma_n - \sigma_m|\,.$$

Da (σ_n) Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ ist, ist (s_n) Cauchyfolge in X, also konvergent. Wegen $\|s_n\| \le |\sigma_n|$ folgt (1.83) aus

$$\|s\| = \lim_{n\to\infty} \|s_n\| \le \lim_{n\to\infty} |\sigma_n| = \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|\,.$$

Sei

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{x}_k\,, \quad \tilde{x}_k = x_{\pi(k)}\,, \quad \pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad \text{bijektiv,}$$

eine Umordnung von $\sum x_k$ mit den Partialsummen

$$\tilde{s}_n = \sum_{k=1}^{n} \tilde{x}_k\,.$$

Sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen M so, dass

$$\sum_{k=M+1}^{\infty} \|x_k\| \leq \varepsilon \,,$$

und N so, dass $N \geq M$ und $\pi(\{1, \ldots, N\}) \supset \{1, \ldots, M\}$. Dann gilt für alle $n > N$

$$\|\tilde{s}_n - s_n\| \leq \sum_{k=M+1}^{\infty} \|x_k\| \leq \varepsilon \,,$$

also folgt $\|\tilde{s}_n - s_n\| \to 0$. $\square$

2 Hilberträume

Definition 2.1 (Skalarprodukt, Prähilbertraum)
Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{K}$ heißt Skalarprodukt auf X, falls gilt

$$\langle x, x\rangle > 0\,, \quad \text{für alle } x \in X \text{ mit } x \neq 0, \tag{2.1}$$

$$\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}\,, \quad \text{für alle } x, y \in X, \tag{2.2}$$

$$\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha \langle x, z\rangle + \beta \langle y, z\rangle\ , \quad \text{für alle } x, y, z \in X \text{ und alle } \alpha, \beta \in \mathbb{K}. \tag{2.3}$$

$(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ heißt dann Prähilbertraum. □

Aus (2.2) und (2.3) folgt unmittelbar

$$\langle x, \alpha y + \beta z\rangle = \overline{\alpha} \langle x, y\rangle + \overline{\beta} \langle x, z\rangle\ , \quad \text{für alle } x, y, z \in X \text{ und alle } \alpha, \beta \in \mathbb{K}. \tag{2.4}$$

Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist ein Skalarprodukt also nichts anderes als eine symmetrische positiv definite Bilinearform.

Satz 2.2 (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung, Hilbertraum)
Sei $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Prähilbertraum. Dann wird durch

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \tag{2.5}$$

eine Norm auf X definiert, für die die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

$$|\langle x, y\rangle| \le \|x\|\,\|y\|\,, \quad \text{für alle } x, y \in X, \tag{2.6}$$

gilt. Ist X vollständig, so heißt X Hilbertraum.

Beweis: Wir zeigen zunächst (2.6). Seien $x, y \in X$ mit $y \neq 0$. Für jedes $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt

$$0 \le \langle x + \alpha y, x + \alpha y\rangle = \langle x, x\rangle + \alpha\overline{\langle x, y\rangle} + \overline{\alpha} \langle x, y\rangle + |\alpha|^2 \langle y, y\rangle\ .$$

Setzen wir speziell

$$\alpha = -\frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}\,,$$

so folgt

$$0 \le \langle x, x\rangle - 2\frac{\langle x, y\rangle\,\overline{\langle x, y\rangle}}{\langle y, y\rangle} + \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\langle y, y\rangle}\,,$$

und weiter

$$0 \le \langle x, x\rangle \langle y, y\rangle - |\langle x, y\rangle|^2\,,$$

also gilt (2.6). Nun die Normeigenschaften. Aus $\|x\| = 0$ folgt $\langle x, x\rangle = 0$ und damit $x = 0$ wegen (2.1). Für $\alpha \in \mathbb{K}$ und $x \in X$ gilt

$$\|\alpha x\|^2 = \langle \alpha x, \alpha x\rangle = \alpha\overline{\alpha} \langle x, x\rangle = |\alpha|^2 \|x\|^2\,.$$

Die Dreiecksungleichung gilt wegen

$$
\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= \|x\|^2 + \langle x,y\rangle + \overline{\langle x,y\rangle} + \|y\|^2 \le \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 \\
&= (\|x\| + \|y\|)^2 \,.
\end{aligned}
$$

□

Aus $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$ folgt Re $\langle x,y\rangle =$ Re $\langle y,x\rangle$, und es gilt

$$
\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\,\langle x,y\rangle + \|y\|^2\,, \quad \text{für alle } x,y\in X. \tag{2.7}
$$

Aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt unmittelbar (siehe Übung), dass das Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle \to \mathbb{K}$ stetig ist.

Beispiele für Hilberträume: Zunächst

$$
X = \mathbb{K}^n\,, \quad \langle x,y\rangle = \sum_{k=1}^n x_k\overline{y_k}\,, \tag{2.8}
$$

und weiter

$$
X = \ell^2(\mathbb{K})\,, \quad \langle x,y\rangle = \sum_{k=1}^\infty x_k\overline{y_k}\,, \tag{2.9}
$$

sowie

$$
X = L^2(D;\mathbb{K})\,, \quad \langle x,y\rangle = \int_D x(t)\overline{y(t)}\,dt\,, \tag{2.10}
$$

für $D\subset\mathbb{R}^n$ offen. In den Fällen (2.9) und (2.10) folgt die Wohldefiniertheit des Skalarprodukts aus der Hölderschen Ungleichung, und die aus (2.5) resultierende Norm ist gerade die uns bereits bekannte.

Satz 2.3 (Parallelogrammgleichung)
Sei X Prähilbertraum. Dann gilt

$$
\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)\,, \quad \textit{für alle } x,y\in X. \tag{2.11}
$$

Beweis: Direktes Ausrechnen mit der Definition (2.5) und den Eigenschaften des Skalarprodukts. □

Ebenso direkt kann man ausrechnen, dass sich in einem Prähilbertraum das Skalarprodukt durch die Norm ausdrücken läßt, und zwar

$$
\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)\,, \quad \mathbb{K}=\mathbb{R}\,, \tag{2.12}
$$

und

$$
\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2)\,, \quad \mathbb{K}=\mathbb{C}\,. \tag{2.13}
$$

Ist X ein normierter Raum, in dem die Parallelogrammgleichung (2.11) nicht gilt, so kann es natürlich kein Skalarprodukt geben, welches diese Norm gemäß (2.5) erzeugt. Auf diese Weise läßt sich zeigen (Übung), dass $(C(D;\mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$, D kompakter metrischer Raum, kein Prähilbertraum ist.

Gilt (2.11) in einem normierten Raum, so läßt sich zeigen, dass durch (2.12) beziehungsweise (2.13) ein Skalarprodukt definiert wird, also X ein Prähilbertraum ist (ohne Beweis, das ist eine etwas längere Rechnung).

Satz 2.4 (Projektionssatz)
Sei X Hilbertraum, sei $K \subset X$ nichtleer, konvex und abgeschlossen. Dann gibt es zu jedem $x \in X$ genau ein $y \in K$ mit

$$\|x - y\| = \inf_{z \in K} \|x - z\| \,. \tag{2.14}$$

Die Zuordnung $x \mapsto y$ definiert also eine Abbildung $P_K : X \to K$, sie heißt Projektion auf K.

Beweis: Sei $x \in X$, sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in K mit

$$\lim_{n\to\infty} \|x - y_n\| = \inf_{z\in K} \|x - z\| =: d \,.$$

Aus der Parallelogrammgleichung folgt

$$2(\|x - y_n\|^2 + \|x - y_m\|^2) = \|2x - (y_n + y_m)\|^2 + \|y_n - y_m\|^2 \,,$$

also

$$\|y_n - y_m\|^2 = 2(\|x - y_n\|^2 + \|x - y_m\|^2) - 4\left\|x - \frac{y_n + y_m}{2}\right\|^2 \,. \tag{2.15}$$

Da K konvex ist, ist

$$\frac{y_n + y_m}{2} \in K \,,$$

also folgt

$$0 \le \|y_n - y_m\|^2 \le 2(\|x - y_n\|^2 + \|x - y_m\|^2) - 4d^2 \,, \tag{2.16}$$

also ist $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in X. Da X vollständig ist, existiert

$$y = \lim_{n\to\infty} y_n \,, \tag{2.17}$$

und da K abgeschlossen ist, gilt $y \in K$. Aus der Stetigkeit der Norm folgt

$$\|x - y\| = \lim_{n\to\infty} \|x - y_n\| = d \,.$$

Damit ist die Existenz von y bewiesen. Ist nun $\tilde{y} \in K$ mit $\|x - \tilde{y}\| = d$, so gilt wie in (2.15)

$$\begin{aligned}\|y - \tilde{y}\|^2 &= 2(\|x - y\|^2 + \|x - \tilde{y}\|^2) - 4\left\|x - \frac{y + \tilde{y}}{2}\right\|^2 = 4d^2 - 4\left\|x - \frac{y + \tilde{y}}{2}\right\|^2 \\ &\le 0 \,, \quad \text{da} \quad \frac{y + \tilde{y}}{2} \in K \,,\end{aligned}$$

also $y = \tilde{y}$. □

Satz 2.5 (Variationsungleichung)
Sei X Hilbertraum, $K \subset X$ nichtleer, konvex und abgeschlossen. Dann gibt es zu jedem $x \in X$ genau ein $y \in K$ mit

$$\operatorname{Re} \langle x - y, z - y\rangle \le 0 \,, \quad \textit{für alle } z \in K, \tag{2.18}$$

und es gilt $y = P_K x$.

Beweis: Eindeutigkeit: Sind $y, \tilde{y} \in K$ Lösungen von (2.18), so gelten

$$\begin{aligned} 0 &\geq \mathrm{Re}\,\langle x - y, \tilde{y} - y\rangle\ , \\ 0 &\geq \mathrm{Re}\,\langle x - \tilde{y}, y - \tilde{y}\rangle\ . \end{aligned}$$

Addition liefert

$$0 \geq \mathrm{Re}\,\langle \tilde{y} - y, \tilde{y} - y\rangle = \|\tilde{y} - y\|^2\,,$$

also $y = \tilde{y}$. Es bleibt zu zeigen, dass $P_K x$ eine Lösung ist. Sei $z \in K$, $t \in [0, 1]$ beliebig, dann gilt $(1-t)P_K x + tz \in K$, also

$$\begin{aligned} \|x - P_K x\|^2 &\leq \|x - (1-t)P_K x - tz\|^2 \\ &= \|x - P_K x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,\langle x - P_K x, t(P_K x - z)\rangle + t^2\|P_K x - z\|^2\,, \end{aligned}$$

also (Division durch t)

$$0 \leq 2\,\mathrm{Re}\,\langle x - P_K x, P_K x - z\rangle + t\|P_K x - z\|^2\,,$$

Grenzübergang $t \to 0$ liefert die Behauptung. □

Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ wird aus (2.18) natürlich

$$\langle x - y, z - y\rangle \leq 0\,, \quad \text{für alle } z \in K. \tag{2.19}$$

Folgerung 2.6 *Sei X Hilbertraum, $K \subset X$ nichtleer, konvex und abgeschlossen. Dann gilt*

$$\|P_K x - P_K \tilde{x}\| \leq \|x - \tilde{x}\|\,, \quad \textit{für alle } x, \tilde{x} \in X. \tag{2.20}$$

Beweis: Übung. □

Folgerung 2.7 *Sei X Hilbertraum, U abgeschlossener Unterraum von X. Dann ist $P_U x$ das eindeutig bestimmte Element $y \in U$, für welches gilt*

$$\langle x - y, z\rangle = 0\,, \quad \textit{für alle } z \in U. \tag{2.21}$$

Beweis: Da mit $z \in U$ auch $z + P_U x \in U$ gilt, folgt aus (2.18)

$$\mathrm{Re}\,\langle x - P_U x, z\rangle \leq 0\,, \quad \text{für alle } z \in U, \tag{2.22}$$

setzen wir $-z$ für z ein, so folgt $\mathrm{Re}\,\langle x - P_U x, z\rangle = 0$, und mit iz statt z folgt auch $\mathrm{Im}\,\langle x - P_U x, z\rangle = 0$, also gilt (2.21) für $y = P_U x$. Umgekehrt ist ein $y \in U$, welches (2.21) erfüllt, Lösung der Variationsungleichung (2.18), da $z - y \in U$ für alle $z \in U$. □

Definition 2.8 (Orthogonalität)
Sei X Prähilbertraum. Gilt für $x, y \in X$

$$\langle x, y\rangle = 0\,, \tag{2.23}$$

so sagen wir, dass x und y orthogonal sind und schreiben $x \perp y$. Ist $Y \subset X$, so definieren wir das orthogonale Komplement $Y^\perp$ durch

$$Y^\perp = \{z : z \in X,\ z \perp y \textit{ für alle } y \in Y\}\,. \tag{2.24}$$

□

Ist $x \perp y$, so gilt

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 . \qquad \text{(Pythagoras)}$$

Lemma 2.9 *Sei X Prähilbertraum, $Y \subset X$. Dann ist $Y^\perp$ ein abgeschlossener Unterraum von X mit $Y^\perp \cap Y = \{0\}$.*

Beweis: Folgt direkt aus der Bilinearität, Stetigkeit und Definitheit des Skalarprodukts.
□

Satz 2.10 *Sei X Hilbertraum, U abgeschlossener Unterraum von X. Dann ist $P_U : X \to U$ linear und stetig, $\ker(P_U) = U^\perp$, und es gilt*

$$P_{U^\perp} = id - P_U . \tag{2.25}$$

Beweis: Nach Folgerung 2.7 gilt

$$\langle x - P_U x, z \rangle = 0 , \quad \text{für alle } x \in X,\ z \in U, \tag{2.26}$$

also ist $x - P_U x \in U^\perp$. Für $x, \tilde{x} \in X$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ gilt

$$\alpha P_U x + \beta P_U \tilde{x} \in U ,$$
$$\langle (\alpha x + \beta \tilde{x}) - (\alpha P_U x + \beta P_U \tilde{x}), z \rangle = 0 , \quad \text{für alle } z \in U,$$

also nach Folgerung 2.7

$$P_U(\alpha x + \beta \tilde{x}) = \alpha P_U x + \beta P_U \tilde{x} .$$

Aus (2.26) folgt

$$x \in U^\perp \quad \Leftrightarrow \quad P_U x \in U^\perp \quad \Leftrightarrow \quad P_U x = 0 .$$

Für $z \in U^\perp$ gilt

$$\langle x - (id - P_U)x, z \rangle = \langle P_U x, z \rangle = 0 ,$$

und wegen $x - P_U x \in U^\perp$ folgt

$$(id - P_U)x = P_{U^\perp} x .$$

□

Aus (2.25) folgt unmittelbar

$$\|x\|^2 = \|x - P_U x\|^2 + \|P_U x\|^2$$

und damit

$$\|P_U\| = 1 , \quad \text{falls } U \neq \{0\}.$$

Die Abbildung $x \mapsto (P_U x, x - P_U x)$ liefert eine Isometrie

$$(X, \|\cdot\|) \cong (U \times U^\perp, \|\cdot\|_2) .$$

Wir können X natürlich auch als direkte Summe

$$X = U \oplus U^\perp$$

im Sinne der Linearen Algebra auffassen.

Lemma 2.11 *Sei X Hilbertraum, $Y \subset X$. Dann gilt*

$$Y^{\perp\perp} = \overline{\operatorname{span} Y}\,. \tag{2.27}$$

Insbesondere gilt $Y^{\perp\perp} = Y$, falls Y ein abgeschlossener Unterraum ist.

Beweis: Übung. □

Satz 2.12 (Darstellungssatz von Riesz)
Sei X Hilbertraum. Dann gibt es zu jedem $x^* \in X^*$ genau ein $x \in X$ mit

$$x^*(z) = \langle z, x \rangle\ , \quad \textit{für alle } z \in X. \tag{2.28}$$

Die durch (2.28) definierte Abbildung $J : X \to X^*$ ist bijektiv, isometrisch und konjugiert linear, das heißt,

$$J(\alpha x + \beta y) = \overline{\alpha} J(x) + \overline{\beta} J(y) \tag{2.29}$$

gilt für alle $x, y \in X$ und alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Beweis: Durch (2.28) wird ein lineares Funktional $x^* : X \to \mathbb{K}$ definiert. Wegen

$$|x^*(z)| \le \|x\|\,\|z\|\,, \quad |x^*(x)| = \|x\|^2$$

ist $x^* \in X^*$, also J wohldefiniert, konjugiert linear und $\|J(x)\| = \|x\|$. Es bleibt die Surjektivität von J zu zeigen. Sei $x^* \in X^*$ mit $x^* \neq 0$. Wir setzen $U = \ker(x^*)$. Wegen $U \neq X$ ist $U^\perp \neq \{0\}$. Wir wählen ein $x \in U^\perp$ mit $x^*(x) = 1$. Für beliebiges $z \in X$ gilt

$$z = z - x^*(z)x + x^*(z)x\,, \quad z - x^*(z)x \in U\,,$$

also

$$\langle z, x \rangle = \underbrace{\langle z - x^*(z)x, x \rangle}_{=0} + \langle x^*(z)x, x \rangle = x^*(z)\,\langle x, x \rangle\ ,$$

also

$$x^* = J\left(\frac{x}{\|x\|^2}\right).$$

□

Für den Hilbertraum $X = L^2(D;\mathbb{K})$ bedeutet Satz 2.12, dass zu jedem Funktional $x^* \in X^*$ genau eine Funktion $x \in L^2(D;\mathbb{K})$ existiert mit

$$x^*(z) = \int_D z(t)\overline{x(t)}\,dt\,, \quad \text{für alle } z \in L^2(D;\mathbb{K}),$$

oder äquivalent (da die Konjugation $x \mapsto \overline{x}$ eine Bijektion auf X ist), dass zu jedem Funktional $x^* \in X^*$ genau eine Funktion $x \in L^2(D;\mathbb{K})$ existiert mit

$$x^*(z) = \int_D z(t)x(t)\,dt\,, \quad \text{für alle } z \in L^2(D;\mathbb{K}),$$

Ist U abgeschlossener Unterraum eines Hilbertraums X mit $U \neq X$, so gibt es ein $x \in X$ mit

$$\operatorname{dist}(x, U) = \inf_{z \in U} \|x - z\| = 1\,, \quad \|x\| = 1\,, \tag{2.30}$$

da jedes $x \in U^\perp$ mit $\|x\| = 1$ diese Eigenschaft hat. In einem Banachraum, der kein Hilbertraum ist, gilt der Projektionssatz im allgemeinen nicht, auch nicht dann, wenn die konvexe Menge K ein Unterraum ist, und ein $x \in X$ mit (2.30) muss nicht existieren. Stattdessen gilt das folgende etwas schwächere Resultat.

Lemma 2.13 *Sei X normierter Raum, U abgeschlossener Unterraum von X mit $U \neq X$. Dann gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X mit*

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{dist}(x_n, U) = 1\,, \quad \|x_n\| = 1 \quad \textit{für alle } n \in \mathbb{N}. \tag{2.31}$$

Beweis: Sei $\tilde{x} \in X \setminus U$, sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in U mit

$$\lim_{n\to\infty} \|\tilde{x} - y_n\| = \operatorname{dist}(\tilde{x}, U)\,.$$

Da U abgeschlossen ist, ist $\operatorname{dist}(\tilde{x}, U) > 0$. Wir definieren

$$x_n = \frac{\tilde{x} - y_n}{\|\tilde{x} - y_n\|}\,. \tag{2.32}$$

Für beliebiges $z \in U$ gilt

$$\|x_n - z\| = \frac{1}{\|\tilde{x} - y_n\|}\|\tilde{x} - \underbrace{(y_n + \|\tilde{x} - y_n\| z)}_{\in U}\| \geq \frac{1}{\|\tilde{x} - y_n\|}\operatorname{dist}(\tilde{x}, U)\,,$$

also

$$1 = \|x_n\| \geq \operatorname{dist}(x_n, U) \geq \frac{1}{\|\tilde{x} - y_n\|}\operatorname{dist}(\tilde{x}, U) \to 1 \quad \text{für } n \to \infty.$$

□

Folgerung 2.14 *Sei X ein normierter Raum mit $\dim(X) = \infty$. Dann ist die abgeschlossene Einheitskugel $K(0;1) = \{x : x \in X,\ \|x\| \leq 1\}$ nicht kompakt.*

Beweis: $K(0;1)$ ist Teilmenge von X und daher in natürlicher Weise ein metrischer Raum. Es genügt daher, eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $K(0;1)$ zu konstruieren, die keine konvergente Teilfolge hat. Sei $x_1 \in K(0;1)$ mit $\|x_1\| = 1$. Seien $x_1, \dots, x_n$ bereits definiert, sei $U_n = \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_n\}$. Wir wählen x_{n+1} gemäß Lemma 2.13 mit $\|x_{n+1}\| = 1$ und

$$\operatorname{dist}(x_{n+1}, U_n) \geq \frac{1}{2}\,.$$

Dann gilt

$$\|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2}\,, \quad n \neq m\,,$$

also hat $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine konvergente Teilfolge. □

Ist X endlichdimensional, $\dim(X) = n$, so ist $X \simeq \mathbb{K}^n$ nach Satz 1.6. Wir haben also insgesamt bewiesen: **In einem normierten Raum ist die Einheitskugel genau dann kompakt, wenn der Raum endlichdimensional ist.**

Definition 2.15 (Orthonormalbasen)
Sei X Hilbertraum. Eine Menge $S \subset X$ heißt Orthonormalsystem (in X) falls gilt $\|e\| = 1$ für alle $e \in S$ und $e \perp f$ für alle $e, f \in S$ mit $e \neq f$. Ein Orthonormalsystem S heißt Orthonormalbasis, falls es kein Orthonormalsystem $\tilde{S}$ gibt mit $S \subset \tilde{S}$ und $S \neq \tilde{S}$. □

Eine Orthonormalbasis wird oft auch "vollständiges Orthonormalsystem" genannt.

In der Linearen Algebra beweist man, dass jeder Vektorraum eine Basis hat. Ganz analog beweist man, dass jeder Hilbertraum eine Orthonormalbasis hat.

Satz 2.16 *Sei X ein Hilbertraum, $X \neq \{0\}$. Dann hat X eine Orthonormalbasis. Zu jedem Orthonormalsystem S_0 gibt es eine Orthonormalbasis S mit $S_0 \subset S$.*

Beweis: Sei $x \in X$, $x \neq 0$, dann ist $S_0 = \{x/\|x\|\}$ ein Orthonormalsystem. Sei nun S_0 ein beliebiges Orthonormalsystem. Wir betrachten die Menge

$$\mathcal{M} = \{S : S \supset S_0, S \text{ ist Orthonormalsystem}\} .$$

$\mathcal{M}$ ist nichtleer, und die Inklusion von Mengen definiert eine Halbordnung "$\leq$" auf $\mathcal{M}$,

$$S_1 \leq S_2 \quad \Leftrightarrow \quad S_1 \subset S_2 .$$

Ist $\mathcal{V}$ eine vollständig geordnete Teilmenge von $\mathcal{M}$ (das heißt, für beliebige $S_1, S_2 \in \mathcal{V}$ gilt $S_1 \leq S_2$ oder $S_2 \leq S_1$), so ist

$$T = \bigcup_{S \in \mathcal{V}} S$$

ebenfalls ein Element von $\mathcal{M}$ (da aus $e, f \in T$ folgt, dass es ein $S \in \mathcal{V}$ gibt mit $e, f \in S$, also $\|e\| = \|f\| = 1$ und $\langle e, f\rangle = 0$ falls $e \neq f$), also ist T eine obere Schranke von $\mathcal{V}$ in $\mathcal{M}$. Also hat jede vollständig geordnete Teilmenge von $\mathcal{M}$ eine obere Schranke. Aus dem Zornschen Lemma folgt nun, dass $\mathcal{M}$ mindestens ein maximales Element S besitzt, das heißt, ein Element, zu dem es kein $\tilde{S} \in \mathcal{M}$ gibt mit $S \subset \tilde{S}$ und $S \neq \tilde{S}$. Also ist S Orthonormalbasis. □

Satz 2.17 *Sei X ein separabler Hilbertraum mit $\dim(X) = \infty$. Dann hat jede Orthonormalbasis S abzählbar unendlich viele Elemente.*

Beweis: Ist S eine überabzählbare Orthonormalbasis, so ist X nicht separabel, da $\|e - f\| = \sqrt{2}$ gilt für Elemente $e, f \in S$ mit $e \neq f$ (Argument wie im Beweis der Nichtseparabilität des $\ell^\infty(\mathbb{K})$). Ist S ein endliches Orthonormalsystem, und ist $x \notin U = \operatorname{span}(S)$, so ist

$$S \cup \left\{ \frac{x - P_U x}{\|x - P_U x\|} \right\}$$

ebenfalls ein Orthonormalsystem, also S keine Orthonormalbasis. □

Lemma 2.18 *Sei X ein Hilbertraum, $S \subset X$ ein Orthonormalsystem. Sind $e_1, \ldots, e_n \in S$, so gilt für $U = \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_n\}$*

$$P_U x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle \, e_k \,, \quad \textit{für alle } x \in X. \tag{2.33}$$

Es gilt außerdem die Besselsche Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 \le \|x\|^2 . \tag{2.34}$$

Beweis: Für

$$y = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle \, e_k$$

gilt $y \in U$ und

$$\langle x - y, e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle \langle e_k, e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle - \langle x, e_j \rangle = 0 ,$$

also auch $\langle x - y, z \rangle = 0$ für alle $z \in U$ und damit $y = P_U x$ nach Folgerung 2.7. Die Besselsche Ungleichung folgt wegen

$$\begin{aligned} \|P_U x\|^2 &= \left\langle \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle \, e_k, \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle \, e_j \right\rangle = \sum_{j,k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle \, \overline{\langle x, e_j \rangle} \, \langle e_k, e_j \rangle \\ &= \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 \end{aligned}$$

aus der Ungleichung $\|P_U x\| \le \|x\|$. □

Folgerung 2.19 *Sei X ein Hilbertraum, $S \subset X$ ein Orthonormalsystem, $x \in X$. Dann ist die Menge*

$$S_x = \{e : e \in S, \, \langle x, e \rangle \neq 0\} \tag{2.35}$$

endlich oder abzählbar unendlich.

Beweis: Wegen (2.34) kann es zu jedem $m \in \mathbb{N}$ nicht mehr als $m\|x\|^2$ verschiedene $e \in S$ geben mit $|\langle x, e \rangle| > 1/m$. □

Ein Orthonormalsystem S in X ist linear unabhängig und daher Vektorraumbasis des erzeugten Unterraums $\mathrm{span}\,(S)$. Die Bedeutung der Orthonormalsysteme und -basen liegt nun darin, dass wir auch Elemente im Abschluss $\overline{\mathrm{span}\,(S)}$ darstellen können, und zwar als Grenzwert einer Reihe in der Form

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle \, e_k , \quad e_k \in S . \tag{2.36}$$

Man kann S gemäß dem Satz aus der Linearen Algebra zu einer Vektorraumbasis für X fortsetzen und damit jedes Element von X durch eine endliche Linearkombination darstellen. Eine solche ist aber überabzählbar (da es keine Banachräume mit abzählbarer Vektorraumbasis gibt, wie wir im nächsten Kapitel sehen werden), und sie lässt sich auch nicht "konstruktiv" angeben. Daher sind Vektorraumbasen für die Analyse von Funktionenräumen ungeeignet.

Satz 2.20 *Sei X ein separabler Hilbertraum mit* $\dim(X) = \infty$, *sei* $S = \{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ *ein Orthonormalsystem. Dann sind äquivalent:*

(i) *S ist Orthonormalbasis.*

(ii) $S^\perp = \{0\}$.

(iii) $X = \overline{\mathrm{span}\,(S)}$.

(iv) *Für alle $x \in X$ gilt*

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle \, e_k \, . \tag{2.37}$$

(v) *Für alle $x \in X$ gilt die* ***Parsevalsche Gleichung***

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\, \langle x, e_k \rangle \,|^2 \, . \tag{2.38}$$

Beweis: (i)⇒(ii): Wir zeigen ¬(ii)⇒ ¬(i). Ist $x \in S^\perp$, $x \neq 0$, so ist

$$S \cup \left\{ \frac{x}{\|x\|} \right\}$$

ein Orthonormalsystem, also S keine Orthonormalbasis.
(ii)⇒(iii): Es gilt nach Lemma 2.11

$$\overline{\mathrm{span}\,(S)} = S^{\perp\perp} = \{0\}^\perp = X \, .$$

(iii)⇒(iv): Sei $U_m = \mathrm{span}\,\{e_1, \ldots, e_m\}$, $P_m = P_{U_m}$. Sei $x \in X$ beliebig, sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $\mathrm{span}\,(S)$ mit $x_n \to x$, sei $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng wachsende Folge in $\mathbb{N}$ mit $x_n \in U_{m_n}$. Dann gilt

$$0 \le \|x - P_{m_n} x\| \le \|x - x_n\| \to 0 \, ,$$

und da $(\|x - P_n x\|)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fällt wegen $\|x - P_n x\| = \mathrm{dist}\,(x, U_n)$, folgt aus Satz 2.18, dass

$$0 \le \|x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle \, e_k\| = \|x - P_n x\| \to 0 \, .$$

(iv)⇒(v): Für die Partialsummen $s_n = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle \, e_k$ gilt

$$\|s_n\|^2 = \langle s_n, s_n \rangle = \sum_{k=1}^{n} |\, \langle x, e_k \rangle \,|^2 \, ,$$

Grenzübergang $n \to \infty$ liefert (2.38), da $s_n \to x$ nach (iv) und damit $\|s_n\| \to \|x\|$.
(v)⇒(i): Wir zeigen ¬(i)⇒ ¬(v). Ist S keine Orthonormalbasis, so gibt es ein $x \in X$ mit $\|x\| = 1$, so dass $S \cup \{x\}$ Orthonormalsystem ist. Für dieses x gilt (2.38) nicht. □

Aus Satz 2.20 folgt sofort, dass im $\ell^2(\mathbb{K})$ die Einheitsvektoren eine Orthonormalbasis bilden, da dann $\mathrm{span}\,(S) = c_e(\mathbb{K})$ gilt und $c_e(\mathbb{K})$ dicht ist in $\ell^2(\mathbb{K})$.

Die Reihe in (2.37) ist im allgemeinen nicht absolut konvergent! Beispiel: Für

$$x_k = \frac{1}{k}$$

gilt $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{K})$, aber $\| \langle x, e_k\rangle e_k\|_2 = \frac{1}{k}$, wenn wir die Einheitsvektoren als Orthonormalbasis wählen. Nichtsdestrotrotz zeigt (2.37), dass in der Situation von Satz 2.20 der Grenzwert x nicht von der Reihenfolge der Basisvektoren abhängt, das jede Umordnung von S ebenfalls Orthonormalbasis ist.

Ist X ein nichtseparabler Hilbertraum, so läßt sich eine analoge Charakterisierung beweisen, da zu jedem $x \in X$ das Skalarprodukt $\langle x, e\rangle$ nur für höchstens abzählbar viele Elemente $e \in S$ von Null verschieden ist (Lemma 2.19).

Satz 2.21 *Sei X ein separabler Hilbertraum mit* $\dim(X) = \infty$*. Dann gilt*

$$X \cong \ell^2(\mathbb{K})\,. \tag{2.39}$$

Beweis: Sei $S = \{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ eine Orthonormalbasis von X. Zu jedem $x \in X$ definieren wir eine Folge Tx durch

$$(Tx)_k = \langle x, e_k\rangle\ , \quad x \in X\,.$$

Aus der Parsevalschen Gleichung folgt, dass $Tx \in \ell^2(\mathbb{K})$ und $\|Tx\|_2 = \|x\|_X$ gelten. T ist offensichtlich linear und injektiv. Wir definieren $R : c_e(\mathbb{K}) \to X$ durch

$$R(y) = \sum_{k=1}^{m} y_k e_k\,, \quad \text{falls } y = (y_1, \ldots, y_m, 0, \ldots).$$

Dann ist R linear und stetig (sogar isometrisch), also läßt sich R nach Satz 1.19 eindeutig zu einer linearen stetigen Abbildung $R : \ell^2(\mathbb{K}) \to X$ fortsetzen. Sei nun $y \in \ell^2(\mathbb{K})$, sei $(y^n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $c_e(\mathbb{K})$ mit $y^n \to y$. Dann gilt $y^n = TRy^n \to TRy$, also $y = TRy$ und damit ist T surjektiv. □

Aus Satz 2.21 folgt, dass alle separablen unendlichdimensionalen Hilberträume isometrisch isomorph sind. Eine zunächst überraschende Konsequenz dieses Resultats ist, dass

$$L^2(D; \mathbb{K}) \cong \ell^2(\mathbb{K})\,,$$

falls etwa D eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist.

Wir betrachten nun im $L^2((-\pi, \pi); \mathbb{C})$ die Funktionen

$$e_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikt}\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,. \tag{2.40}$$

In der Analysis 2 wird gezeigt, dass

$$S = \{e_k : k \in \mathbb{Z}\} \tag{2.41}$$

eine Orthonormalbasis ist. Damit erhalten wir aus Satz 2.20, dass für jedes $x \in L^2((-\pi, \pi); \mathbb{C})$ gilt

$$x = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e_k\,, \quad c_k = \langle x, e_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} x(s) e^{-iks}\, ds\,, \tag{2.42}$$

wobei der Grenzwert im Sinne der L^2-Konvergenz zu verstehen ist. Die Reihe in (2.42) heißt **Fourierreihe** von x.

3 Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit

Auf dem folgenden Satz von Baire beruhen eine ganze Reihe von Sätzen der Funktionalanalysis.

Satz 3.1 (Baire)
Sei (X,d) vollständiger metrischer Raum, sei $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge offener Teilmengen von X, sei U_n dicht in X für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist auch

$$D = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n \tag{3.1}$$

dicht in X.

Beweis: Es genügt zu zeigen: Ist $V \subset X$ nichtleer und offen, so ist $V \cap D \neq \emptyset$. Sei V eine solche Menge. Wir wählen $x_1 \in U_1 \cap V$ (möglich, da U_1 dicht in X) und ein $\varepsilon_1 > 0$ mit

$$x_1 \in K(x_1;\varepsilon_1) \subset U_1 \cap V\,. \tag{3.2}$$

Seien $(x_1,\varepsilon_1),\ldots,(x_{n-1},\varepsilon_{n-1})$ bereits definiert. Wir wählen

$$x_n \in U_n \cap B(x_{n-1};\varepsilon_{n-1}) \qquad \text{(möglich, da } U_n \text{ dicht in } X) \tag{3.3}$$

und $\varepsilon_n > 0$ mit

$$x_n \in K(x_n;\varepsilon_n) \subset U_n \cap B(x_{n-1};\varepsilon_{n-1})\,, \quad \varepsilon_n \le \frac{1}{2}\varepsilon_{n-1}\,. \tag{3.4}$$

Dann ist

$$d(x_{n+1},x_n) \le \varepsilon_n \le 2^{-n+1}\varepsilon_1\,, \quad d(x_m,x_n) \le 2\cdot 2^{-n+1}\varepsilon_1 \quad \text{für alle } m > n,$$

also ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge. Sei $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Da $K(x_n;\varepsilon_n)$ abgeschlossen ist und $K(x_n;\varepsilon_n) \subset K(x_{n-1};\varepsilon_{n-1})$ für alle $n \in \mathbb{N}$, folgt

$$x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K(x_n;\varepsilon_n) \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n \cap V = D \cap V\,.$$

□

Definition 3.2 *Sei (X,d) metrischer Raum, $M \subset X$. M heißt nirgends dicht in X, falls* $\operatorname{int}(\overline{M}) = \emptyset$ *(das heißt, der Abschluss von M hat keine inneren Punkte).* □

Eine abgeschlossene Menge $A \subset X$ ist nirgends dicht genau dann, wenn ihr Komplement $X \setminus A$ offen und dicht ist.

Folgerung 3.3 *Sei (X,d) vollständiger metrischer Raum, sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge abgeschlossener, nirgends dichter Teilmengen von X. Dann ist*

$$X \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \tag{3.5}$$

dicht in X.

Beweis: Wir wenden Satz 3.1 an mit $U_n = X \setminus A_n$. □

Satz 3.1 und Folgerung 3.3 beinhalten insbesondere, dass $D = \cap_n U_n$ beziehungsweise $X \setminus \cup_n A_n$ nichtleer sind. Sie liefern also eine Methode, Existenzbeweise zu führen. Beispielsweise kann man auf diese Weise zeigen (siehe Werner S.139), dass die Menge der stetigen, an keiner Stelle differenzierbaren Funktionen dicht liegt in $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$.

Es folgt eine weitere Existenzaussage.

Folgerung 3.4 *Sei (X,d) vollständiger metrischer Raum, sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge abgeschlossener Teilmengen von X mit*

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \,. \tag{3.6}$$

Dann gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\operatorname{int}(A_k) \neq \emptyset$.

Beweis: Folgt direkt aus Folgerung 3.3. □

Aus Folgerung 3.4 erhält man beispielsweise (Übung), dass es keinen Banachraum (und damit natürlich auch keinen Hilbertraum) geben kann, der eine abzählbar unendliche Vektorraumbasis hat.

Teilmengen von X der Form

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n \,, \quad M_n \text{ nirgends dicht in } X,$$

nennt man auch **von 1. Kategorie** in X. Teilmengen von X, die nicht von 1. Kategorie sind, nennt man **von 2. Kategorie** in X. Nach dieser Terminologie ist ein vollständiger metrischer Raum immer von 2. Kategorie (in sich selbst).

Der folgende Satz beinhaltet das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit.

Satz 3.5 (Banach-Steinhaus)
Sei X Banachraum, Y normierter Raum, sei $\mathcal{T} \subset L(X;Y)$. Es gelte

$$\sup_{T\in\mathcal{T}} \|Tx\| < \infty \,, \quad \textit{für alle } x \in X. \tag{3.7}$$

Dann gilt

$$\sup_{T\in\mathcal{T}} \|T\| < \infty \,. \tag{3.8}$$

Für eine Familie linearer stetiger Operatoren gilt also, dass aus deren punktweisen Beschränktheit auch die gleichmäßige Beschränktheit folgt.
Beweis: Wir definieren für $n \in \mathbb{N}$

$$A_n = \{x : x \in X, \sup_{T\in\mathcal{T}} \|Tx\| \le n\} \,. \tag{3.9}$$

A_n ist abgeschlossen, da für $f_T(x) := \|Tx\|$ gilt

$$A_n = \bigcap_{T\in\mathcal{T}} f_T^{-1}([0,n]) \,.$$

Nach Voraussetzung (3.7) gilt

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \,.$$

Wegen Folgerung 3.4 finden wir ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{int}\,(A_k) \neq \emptyset$. Sei $x_0 \in A_k$, $\varepsilon > 0$ mit $K(x_0; \varepsilon) \subset A_k$. Sei nun $x \in X$ beliebig, $x \neq 0$, dann ist

$$z = x_0 + \varepsilon \frac{x}{\|x\|} \in K(x_0; \varepsilon) \subset A_k \,,$$

Sei nun auch $T \in \mathcal{T}$ beliebig, dann folgt

$$\|Tx\| = \left\| T\left(\frac{\|x\|}{\varepsilon}(z - x_0) \right) \right\| = \frac{\|x\|}{\varepsilon} \|Tz - Tx_0\| \leq \frac{\|x\|}{\varepsilon} 2k \,,$$

also gilt

$$\|T\| \leq \frac{2k}{\varepsilon} \,, \quad \text{für alle } T \in \mathcal{T}.$$

□

Definition 3.6 (Offene Abbildung) *Seien (X, d_X), (Y, d_Y) metrische Räume. Eine Abbildung $T : X \to Y$ heißt offen, wenn $T(U)$ offen ist in Y für jede offene Menge U in X.* □

Ist T eine offene Abbildung, so braucht das Bild abgeschlossener Mengen nicht abgeschlossen zu sein, auch dann nicht, wenn T linear ist (Beispiel: Übung.)

Satz 3.7 (Satz von der offenen Abbildung)
Seien X, Y Banachräume, $T : X \to Y$ linear und stetig. Dann sind äquivalent:

(i) T ist offen.

(ii) Es gibt ein $\delta > 0$ mit $B(0; \delta) \subset T(B(0; 1))$.

(iii) T ist surjektiv.

Beweis: "(i)⇒(ii)": klar.
"(ii)⇒(i)": Sei U offen in X, sei $y \in T(U)$. Wir wählen $x \in X$ mit $Tx = y$ und $\varepsilon > 0$ mit $B(x; \varepsilon) \subset U$, dann ist

$$T(U) \supset T(B(x; \varepsilon)) = Tx + T(B(0; \varepsilon)) \supset y + B(0; \delta\varepsilon) \,,$$

wobei $\delta > 0$ gemäß (ii) gewählt ist. Also ist $y \in \mathrm{int}\,(T(U))$.
"(ii)⇒(iii)": Da T linear ist, folgt aus (ii) sofort $B(0; r\delta) \subset T(B(0; r))$ für alle $r > 0$.
"(iii)⇒(ii)": Es gilt, da T surjektiv ist,

$$Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{T(B(0; n))} \,.$$

Wir finden nach Folgerung 3.4 ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{int}\,(\overline{T(B(0; k))}) \neq \emptyset$. Wir setzen $V = \overline{T(B(0; k))}$. Seien $y \in V$, $\varepsilon > 0$ mit

$$B(y; \varepsilon) \subset V \,.$$

Da V symmetrisch ist (das heißt, $z \in V \Rightarrow -z \in V$), gilt auch $B(-y;\varepsilon) \subset V$, und da V konvex ist, folgt

$$B(0;\varepsilon) \subset V = \overline{T(B(0;k))}\,. \tag{3.10}$$

Es genügt nun zu zeigen, dass

$$B(0;\varepsilon) \subset T(B(0;3k))\,, \tag{3.11}$$

da dann (ii) erfüllt ist mit $\delta = \varepsilon/3k$. Nach (3.10) finden wir zu jedem $y \in B(0;\varepsilon)$ ein $x \in B(0;k)$ mit $\|y - Tx\| \le \varepsilon/2$, also

$$2(y - Tx) \in B(0;\varepsilon)\,. \tag{3.12}$$

Zu vorgegebenem $y \in B(0;\varepsilon)$ konstruieren wir Folgen (x_j) in X, (y_j) in Y durch $y_0 = y$ und

$$y_{j+1} = 2(y_j - Tx_j)\,, \quad x_j \in B(0;k)\,, \quad y_{j+1} \in B(0;\varepsilon)\,, \quad j \in \mathbb{N}\,. \tag{3.13}$$

Es folgt

$$2^{-(j+1)}y_{j+1} = 2^{-j}y_j - T(2^{-j}x_j)\,, \quad j \in \mathbb{N}\,,$$

also

$$T\left(\sum_{j=0}^{m} 2^{-j}x_j\right) = y_0 - 2^{-(m+1)}y_{m+1} \to y_0 = y \tag{3.14}$$

für $m \to \infty$. Wegen

$$\sum_{j=0}^{m} 2^{-j}\|x_j\| \le 2k \tag{3.15}$$

ist $\sum_j 2^{-j}x_j$ absolut konvergent, also auch konvergent (da X Banachraum). Sei

$$x = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j}x_j\,.$$

Aus (3.14) folgt $Tx = y$, und aus (3.15) $\|x\| \le 2k < 3k$, also (3.11). □

Folgerung 3.8 *Seien X, Y Banachräume, $T : X \to Y$ linear, stetig und bijektiv. Dann ist auch $T^{-1} : Y \to X$ linear und stetig.*

Beweis: Dass T^{-1} linear ist, ist ein Resultat der Linearen Algebra. Aus Satz 3.7 folgt, dass T offen ist, also gilt für jedes offene $U \subset X$, dass $(T^{-1})^{-1}(U) = T(U)$ offen ist, also ist T^{-1} stetig. □

Betrachten wir nun die Situation, dass ein Vektorraum X mit zwei verschiedenen Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ versehen wird, so dass

$$\|x\|_1 \le C\|x\|_2\,, \quad \text{für alle } x \in X, \tag{3.16}$$

mit einer von x unabhängigen Konstante C gilt, das heißt, $\|\cdot\|_1$ ist schwächer als $\|\cdot\|_2$ in dem Sinne, dass Konvergenz bezüglich $\|\cdot\|_2$ auch Konvergenz bezüglich $\|\cdot\|_1$ impliziert, aber nicht notwendig umgekehrt. (3.16) bedeutet, dass

$$id : (X, \|\cdot\|_2) \to (X, \|\cdot\|_1)$$

stetig ist. Aus Folgerung 3.8 schließen wir nun, dass auch

$$id : (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2)$$

stetig ist, falls $(X, \|\cdot\|_1)$ und $(X, \|\cdot\|_2)$ Banachräume sind; in diesem Fall sind die beiden Normen äquivalent, und

$$(X, \|\cdot\|_1) \simeq (X, \|\cdot\|_2)\,.$$

Falls (3.16) gilt, die beiden Normen aber nicht äquivalent sind, ist entweder $(X, \|\cdot\|_1)$ oder $(X, \|\cdot\|_2)$ nicht vollständig. Beispiel: $X = C([a,b])$. $C([a,b])$ ist vollständig mit $\|\cdot\|_2 = \|\cdot\|_\infty$, und für die L^1-Norm gilt

$$\|x\|_1 \le (b-a)\|x\|_\infty\,,$$

aber die beiden Normen sind nicht äquivalent (es gibt Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\|x_n\|_1 \to 0$, aber $\|x_n\|_\infty \not\to 0$). Also ist $(C([a,b]); \|\cdot\|_1)$ nicht vollständig.

Folgerung 3.9 *Seien X, Y Banachräume, $T : X \to Y$ linear und stetig, es gelte $\overline{T(X)} = Y$ und $T(X) \neq Y$. Dann gibt es ein $y \in Y$, so dass $\|x_n\| \to \infty$ gilt für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X mit $\lim_{n\to\infty} Tx_n = y$.*

Beweis: Übung. □

In der Situation von Folgerung 3.9 macht es Probleme, die Gleichung $Tx = y$ für gegebenes y "stabil" zu lösen. Sie besagt, dass es eine Folge (y_n) in Y gibt von Näherungen y_n von Y, nämlich mit $y_n \to y$, für die $\|x\|_n \to \infty$ gilt für die exakten Lösungen x_n der Gleichung $Tx = y_n$. Interpretieren wir (x_n) als Folge von Näherungslösungen für $Tx = y$, so sind diese unbrauchbar für großes n.

Der Graph einer Abbildung $T : X \to Y$ ist definiert als

$$\mathrm{graph}\,(T) = \{(x, Tx) : x \in X\}\,. \tag{3.17}$$

Satz 3.10 (Satz vom abgeschlossenen Graphen)
Seien X, Y Banachräume, sei $T : X \to Y$ linear. Dann sind äquivalent:

(i) $\mathrm{graph}\,(T)$ *ist abgeschlossene Teilmenge von $X \times Y$.*

(ii) T ist stetig.

Beweis: "(ii)⇒(i)": Ist (x_n, y_n) Folge in $\mathrm{graph}\,(T)$ mit $(x_n, y_n) \to (x, y) \in X \times Y$, so gilt $y_n = Tx_n$, $x_n \to x$ und $Tx_n \to Tx$, also $y = Tx$.
"(i)⇒(ii)": Da T linear ist, ist $\mathrm{graph}\,(T)$ ein abgeschlossener Unterraum von $X \times Y$, also ein Banachraum. Die Projektion $P_X|\mathrm{graph}\,(T) : \mathrm{graph}\,(T) \to X$ ist linear, stetig und bijektiv, hat also nach Satz 3.8 eine stetige Inverse $Q : X \to \mathrm{graph}\,(T)$. Es folgt, dass $T = P_Y \circ Q$ stetig ist. □

4 Fortsetzung, Reflexivität, Trennung

Fortsetzung von Funktionalen. Bisher wissen wir, dass lineare stetige Operatoren sich von einer dichten Teilmenge normerhaltend auf den ganzen Raum fortsetzen lassen. Das Hauptergebnis dieses Unterabschnitts (Satz von Hahn-Banach) besagt, dass sich lineare stetige Funktionale von einem beliebigen Unterraum auf den ganzen Raum normerhaltend fortsetzen lassen.

Definition 4.1 (Sublineares Funktional)
Sei X Vektorraum. Eine Abbildung $p : X \to \mathbb{R}$ heißt sublinear, falls gilt

$$p(\alpha x) = \alpha p(x)\,, \quad \textit{für alle } x \in X,\ \alpha \geq 0, \tag{4.1}$$

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y)\,, \quad \textit{für alle } x, y \in X. \tag{4.2}$$

□

Jede Halbnorm und jede lineare Abbildung $p : X \to \mathbb{R}$ sind sublinear.

Definition 4.2 (Minkowski-Funktional)
Sei X Vektorraum, sei $A \subset X$. Dann wird durch

$$M_A(x) = \inf\{t : t > 0,\ \frac{1}{t}x \in A\} \tag{4.3}$$

eine Abbildung $M_A : X \to [0, \infty]$ definiert, sie heißt das Minkowski-Funktional von A. Falls $M_A(x) < \infty$ gilt für alle $x \in X$, so heißt A absorbierend. □

Ist X normierter Raum und gilt $0 \in \operatorname{int}(A)$, so ist A absorbierend, da $\frac{1}{t}x \in A$ gilt für hinreichend großes t. Ist A die Einheitskugel in X, so ist $M_A(x) = \|x\|$.

Lemma 4.3 *Sei X Vektorraum, $A \subset X$ konvex und absorbierend. Dann ist das Minkowski-Funktional M_A sublinear.*

Beweis: Die Eigenschaft (4.1) folgt unmittelbar aus (4.3). Seien nun $x, y \in X$, sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen $t, s > 0$ mit

$$t \leq M_A(x) + \varepsilon\,, \quad \frac{1}{t}x \in A\,, \quad s \leq M_A(y) + \varepsilon\,, \quad \frac{1}{s}y \in A\,.$$

Dann ist, da A konvex ist,

$$\frac{1}{t+s}(x+y) = \frac{t}{t+s} \cdot \frac{1}{t}x + \frac{s}{t+s} \cdot \frac{1}{s}y \in A\,,$$

also $M_A(x+y) \leq t+s \leq M_A(x)+M_A(y)+2\varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung.
□

Satz 4.4 *Sei X Vektorraum über $\mathbb{R}$, $p : X \to \mathbb{R}$ sublinear. Sei U ein Unterraum von X und $f : U \to \mathbb{R}$ linear mit $f(x) \leq p(x)$ für alle $x \in U$. Dann gibt es eine lineare Fortsetzung $F : X \to \mathbb{R}$ von f auf X mit $F(x) \leq p(x)$ für alle $x \in X$.*

Beweis: Wir betrachten zunächst den Spezialfall

$$X = \operatorname{span}(U \cup \{y\}), \quad y \in X \setminus U. \tag{4.4}$$

Jedes $x \in X$ läßt sich eindeutig zerlegen in

$$x = z + \alpha y, \quad z \in U, \, \alpha \in \mathbb{R}. \tag{4.5}$$

Wir definieren $F : X \to \mathbb{R}$ durch

$$F(x) = f(z) + \alpha r, \quad \text{falls } x = z + \alpha y, \tag{4.6}$$

wobei $r \in \mathbb{R}$ später festgelegt wird. F ist linear, und $F|U = f$. Die verlangte Ungleichung

$$F(x) = f(z) + \alpha r \le p(z + \alpha y) = p(x), \quad \text{für alle } z \in U, \, \alpha \in \mathbb{R}, \tag{4.7}$$

ist für $\alpha = 0$ nach Voraussetzung erfüllt, für $\alpha > 0$ gleichbedeutend mit

$$r \le \frac{p(z + \alpha y) - f(z)}{\alpha} = p\left(\frac{z}{\alpha} + y\right) - f\left(\frac{z}{\alpha}\right), \tag{4.8}$$

und für $\alpha < 0$ gleichbedeutend mit

$$r \ge \frac{p(z + \alpha y) - f(z)}{\alpha} = -p\left(-\frac{z}{\alpha} - y\right) + f\left(-\frac{z}{\alpha}\right), \tag{4.9}$$

Ein solches r existiert, wenn

$$\sup_{z \in U}(f(z) - p(z - y)) \le \inf_{z \in U}(p(z + y) - f(z)) \tag{4.10}$$

gilt. Nun gilt aber für beliebige $z, \tilde{z} \in U$

$$f(z) + f(\tilde{z}) = f(z + \tilde{z}) \le p(z + \tilde{z}) \le p(z - y) + p(\tilde{z} + y),$$

also auch

$$f(z) - p(z - y) \le p(\tilde{z} + y) - f(\tilde{z}), \quad \text{für alle } z, \tilde{z} \in U,$$

woraus (4.10) folgt. Damit ist der Satz im Spezialfall (4.4) bewiesen. Zum Beweis des allgemeinen Falles verwenden wir das Zornsche Lemma. Wir definieren die Menge

$$\mathcal{M} = \{(V, g) : V \text{ Unterraum}, \, U \subset V \subset X, \, g : V \to \mathbb{R} \text{ linear}, \, g|U = f, \, g \le p \text{ auf } V\}, \tag{4.11}$$

und versehen $\mathcal{M}$ mit der Halbordnung

$$(V_1, g_1) \le (V_2, g_2) \qquad \Leftrightarrow \qquad V_1 \subset V_2, \, g_2|V_1 = g_1.$$

Es ist $(U, f) \in \mathcal{M}$, also $\mathcal{M} \neq \emptyset$. Sei $\mathcal{N}$ eine vollständig geordnete Teilmenge von $\mathcal{M}$. Wir definieren

$$V_* = \bigcup_{(V,g) \in \mathcal{N}} V \tag{4.12}$$

und $g_* : V_* \to \mathbb{R}$ durch

$$g_*(x) = g(x), \quad \text{falls } x \in V, \, (V, g) \in \mathcal{N}. \tag{4.13}$$

Aus der Definition von $\mathcal{N}$ folgt nun, dass $g_*(x)$ nicht von der Wahl von (V,g) abhängt, dass V_* ein Unterraum und g_* linear ist (Details hier nicht ausgeführt). Also ist (V_*, g_*) eine obere Schranke von $\mathcal{N}$ in $\mathcal{M}$. Nach dem Zornschen Lemma hat $\mathcal{M}$ ein maximales Element (V,g). Es muss $V = X$ gelten, da wir andernfalls nach dem schon bewiesenen Spezialfall ein $(\tilde{V}, \tilde{g}) \in \mathcal{M}$ konstruieren könnten mit $\tilde{V} = \operatorname{span}(V \cup \{y\})$, $y \in X \setminus V$, im Widerspruch zur Maximalität von (V,g). □

Satz 4.5 (Hahn-Banach)
Sei X ein normierter Raum über $\mathbb{K}$, sei U ein Unterraum von X, sei $u^* \in U^*$. Dann gibt es ein $x^* \in X^*$ mit $x^*|U = u^*$ und $\|x^*\| = \|u^*\|$.

Beweis: Sei zunächst $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Wir definieren $p : X \to [0, \infty)$ durch

$$p(x) = \|u^*\| \cdot \|x\| \,. \tag{4.14}$$

p ist sublinear, und es gilt $u^*(x) \leq p(x)$ für alle $x \in U$. Nach Satz 4.4 gibt es ein lineares Funktional $x^* : X \to \mathbb{R}$ mit $x^*(x) \leq p(x)$ für alle $x \in X$ und $x^*|U = u^*$. Es gilt dann für alle $x \in X$

$$x^*(x) \leq p(x) = \|u^*\| \cdot \|x\| \,, \quad -x^*(x) = x^*(-x) \leq p(-x) = \|u^*\| \cdot \|x\| \,,$$

also

$$|x^*(x)| \leq \|u^*\| \cdot \|x\| \,,$$

und damit ist x^* stetig, $\|x^*\| \leq \|u^*\|$. Da x^* Fortsetzung von u^* ist, folgt aus der Definition der Operatornorm auch $\|x^*\| \geq \|u^*\|$.
Sei nun $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Wir bezeichnen mit $X_\mathbb{R}$ und $U_\mathbb{R}$ die normierten Räume X und U zum Körper $\mathbb{R}$ (die Norm ist unverändert) und setzen

$$u_R^* = \operatorname{Re} u^* \,.$$

Dann ist $u_R^* \in U_\mathbb{R}^*$, $\|u_R^*\| \leq \|u^*\|$,

$$u^*(x) = \operatorname{Re} u^*(x) + i \operatorname{Im} u^*(x) = u_R^*(x) - i u_R^*(ix) \,,$$

für alle $x \in U$, da $\operatorname{Im} u^*(x) = -\operatorname{Re} u^*(ix)$. Sei nun $x_R^* \in X_\mathbb{R}^*$ eine Fortsetzung von u_R^* mit $\|x_R^*\| = \|u_R^*\|$, wie eben bewiesen. Sie ist $\mathbb{R}$-linear. Wir setzen

$$x^*(x) = x_R^*(x) - i x_R^*(ix) \,, \tag{4.15}$$

dann ist $x^* : X \to \mathbb{C}$ eine $\mathbb{C}$-lineare Fortsetzung von u^*, wie man leicht nachrechnet. Zu $x \in X$ wählen wir nun $c \in \mathbb{C}$, $|c| = 1$, so dass $|x^*(x)| = c x^*(x)$ gilt, dann gilt

$$|x^*(x)| = c x^*(x) = x^*(cx) = x_R^*(cx) \leq \|x_R^*\| \cdot \|x\| \,,$$

also folgt $\|x^*\| \leq \|u^*\|$ und mit demselben Argument wie oben auch $\|x^*\| = \|u^*\|$. □

Folgerung 4.6 *Sei X normierter Raum, $x \in X$ mit $x \neq 0$. Dann gibt es ein $x^* \in X^*$ mit $\|x^*\| = 1$ und $x^*(x) = \|x\|$.*

Beweis: Sei $U = \text{span}(\{x\})$, sei $u^* : U \to \mathbb{K}$ definiert durch $u^*(\alpha x) = \alpha\|x\|$, $\alpha \in \mathbb{K}$, dann ist $|u^*(\alpha x)| = \|\alpha x\|$, also $\|u^*\| = 1$. Wähle $x^* \in X^*$ als Fortsetzung von u^* gemäß Satz 4.5. $\square$

Folgerung 4.7 *Sei X normierter Raum. Dann gilt*

$$\|x\| = \max_{\substack{x^* \in X^* \\ \|x^*\| \leq 1}} |x^*(x)| \,, \quad \textit{für alle } x \in X. \tag{4.16}$$

Beweis: Es ist $|x^*(x)| \leq \|x^*\| \cdot \|x\| \leq \|x\|$, falls $\|x^*\| \leq 1$, also folgt (4.16) aus Folgerung 4.6. $\square$

Folgerung 4.8 *Sei X normierter Raum, $U \subset X$ abgeschlossener Unterraum. Sei $x \in X$ mit $x \notin U$. Dann gibt es ein $x^* \in X^*$ mit $x^*|U = 0$ und $x^*(x) \neq 0$.*

Beweis: Nach Satz 1.14 ist X/U normierter Raum, und es gilt $[x] \neq 0$. Wir wählen gemäß Folgerung 4.6 ein $y^* \in (X/U)^*$ mit $y^*([x]) \neq 0$ und definieren $x^* : X \to \mathbb{K}$ durch

$$x^*(z) = y^*([z]) \,, \quad z \in X \,,$$

dann gilt $x^* \in X^*$, $x^*|U = 0$ und $x^*(x) \neq 0$. $\square$.

Reflexivität. Ist X normierter Raum, so heißt $X^{**} = (X^*)^*$ der **Bidualraum** von X. Durch die Zuordnung $x \mapsto x^{**}$,

$$x^{**}(x^*) = x^*(x) \,, \quad \text{für alle } x^* \in X^*, \tag{4.17}$$

wird wegen

$$|x^{**}(x^*)| \leq \|x\| \cdot \|x^*\| \tag{4.18}$$

eine Einbettung

$$J_X : X \to X^{**} \tag{4.19}$$

definiert. (Eine solche Einbettung nennt man auch "kanonische" Einbettung, da ihre Definition (4.17) sich in natürlicher Weise aus der Definition von X und X^{**} ergibt. Entsprechend bezeichnet man auch für $Y \subset X$ die durch $j(x) = x$ definierte Abbildung $j : Y \to X$ als kanonische Einbettung.)

Lemma 4.9 *Die in (4.17) definierte Abbildung $J_X : X \to X^{**}$ ist linear und isometrisch.*

Beweis: Für alle $x \in X$ gilt nach Folgerung 4.7

$$\|x\|_X = \max_{\substack{x^* \in X^* \\ \|x^*\| \leq 1}} |x^*(x)| = \max_{\substack{x^* \in X^* \\ \|x^*\| \leq 1}} |(J_X x)(x^*)| = \|J_X x\|_{X^{**}} \,.$$

$\square$

Die Bildmenge $J_X(X)$ ist ein Unterraum von X^{**}. Da J_X isometrisch und X^{**} Banachraum ist, gilt

$$X \text{ vollständig} \quad \Leftrightarrow \quad J_X(X) \text{ vollständig} \quad \Leftrightarrow \quad J_X(X) \text{ abgeschlossen in } X^{**}.$$

Ist X nicht vollständig, so können wir den Abschluss $\overline{J_X(X)}$ von $J_X(X)$ in X^{**} als "Vervollständigung" von X ansehen.

Definition 4.10 (Reflexivität)
Ein Banachraum X heißt reflexiv, falls $J_X : X \to X^{**}$ surjektiv ist. □

Nach Lemma 4.9 gilt dann

$$X \cong X^{**} . \tag{4.20}$$

Umgekehrt folgt allerdings aus (4.20) im allgemeinen nicht, dass X reflexiv ist. Es gibt Beispiele mit $X \cong X^{**}$, aber $J_X(X)$ ist ein abgeschlossener echter Unterraum von X^{**}.

Jeder endlichdimensionale Banachraum X ist reflexiv, da

$$\dim(X^{**}) = \dim(X^*) = \dim(X)$$

gilt und daher aus der Injektivität von J_X auch die Surjektivität folgt.

Satz 4.11 *Jeder Hilbertraum X ist reflexiv.*

Beweis: Sei $J : X \to X^*$, $(Jy)(z) = \langle z, y \rangle$, die konjugiert lineare Isometrie aus dem Rieszschen Darstellungssatz 2.12. Sei $x^{**} \in X^{**}$. Wir definieren

$$x^*(y) = \overline{x^{**}(Jy)} , \quad y \in X .$$

Dann gilt $x^* \in X^*$. Wir setzen nun

$$x = J^{-1} x^* .$$

Dann gilt für alle $y \in X$

$$x^{**}(Jy) = \overline{x^*(y)} = \overline{(Jx)(y)} = \overline{\langle y, x \rangle} = \langle x, y \rangle = (Jy)(x) .$$

Da J surjektiv ist, folgt $x^{**} = J_X(x)$. □

Satz 4.12 *Die Räume $\ell^p(\mathbb{K})$ sind reflexiv für $1 < p < \infty$.*

Beweis: Sei $X = \ell^p(\mathbb{K})$, seien

$$T_1 : \ell^q(\mathbb{K}) \to \ell^p(\mathbb{K})^* , \quad T_2 : \ell^p(\mathbb{K}) \to \ell^q(\mathbb{K})^* ,$$

die Isometrien aus Satz 1.20. Sei $x^{**} \in X^{**}$ gegeben, wir setzen

$$x = T_2^{-1}(x^{**} \circ T_1) .$$

Dann gilt für alle $x^* \in X^*$

$$x^{**}(x^*) = (x^{**} \circ T_1)(T_1^{-1} x^*) = (T_2 x)(T_1^{-1} x^*) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k (T_1^{-1} x^*)_k = x^*(x) .$$

□

Analog zeigt man, dass der Raum $L^p(D;\mathbb{K})$ reflexiv ist für $1 < p < \infty$.

Räume mit Supremumsnormen und mit L^1-Normen sind in der Regel nicht reflexiv. Wir behandeln als Beispiel $X = L^1(D;\mathbb{K})$. Wir gehen aus von der Isometrie

$$T : L^\infty(D;\mathbb{K}) \to X^*, \quad (Ty)(x) = \int_D x(t)y(t)\,dt\,.$$

Wäre X reflexiv, so gäbe es zu jedem $x^{**} \in X^{**}$ ein $x \in X$ mit

$$x^{**}(Ty) = (Ty)(x) = \int_D x(t)y(t)\,dt\,, \quad \text{für alle } y \in L^\infty(D;\mathbb{K}).$$

Äquivalent dazu ist, dass es zu jedem $y^* \in L^\infty(D;\mathbb{K})^*$ ein $x \in L^1(D;\mathbb{K})$ gibt mit

$$y^*(y) = \int_D x(t)y(t)\,dt\,. \tag{4.21}$$

Sei nun $D = (0,1)$, $E_k = (1/k, 1)$. Wir setzen

$$U_k = \{y : y \in L^\infty(D;\mathbb{K}),\, y|(D \setminus E_k) = 0\}\,, \quad U = \overline{\bigcup_{k=2}^\infty U_k}\,.$$

Dann ist U ein abgeschlossener Unterraum von $L^\infty(D;\mathbb{K})$, und es gilt $1_D \notin U$, da $d(1_D, U_k) = 1$ für alle $k \ge 2$. Also gibt es nach Folgerung 4.8 ein $y^* \in L^\infty(D;\mathbb{K})$ mit

$$y^*(1_D) \neq 0 \tag{4.22}$$

und $y^*|U = 0$, also insbesondere

$$y^*(1_{E_k}) = 0\,, \quad \text{für alle } k \ge 2. \tag{4.23}$$

Für jedes $x \in L^1(D;\mathbb{K})$ gilt aber nach dem Konvergenzsatz von Lebesgue

$$\lim_{k\to\infty} \int_D x(t)1_{E_k}(t)\,dt = \int_D x(t)1_D(t)\,dt\,. \tag{4.24}$$

Nun können (4.21) – (4.23) aber nicht gleichzeitig gelten.

Die Räume $c_0(\mathbb{K})$, $c(\mathbb{K})$, $\ell^1(\mathbb{K})$, $\ell^\infty(\mathbb{K})$, $C(D;\mathbb{K})$, $L^\infty(D;\mathbb{K})$ sind alle nicht reflexiv.

Satz 4.13 *Sei X Banachraum, U Unterraum von X. Ist X reflexiv und U abgeschlossen, so ist auch U reflexiv.*

Beweis: Sei $u^{**} \in U^{**}$ beliebig. Durch

$$x^{**}(x^*) = u^{**}(x^*|U)$$

wird ein $x^{**} \in X^{**}$ definiert. Sei $x = J_X^{-1}(x^{**})$, dann gilt

$$x^*(x) = x^{**}(x^*) = u^{**}(x^*|U) \tag{4.25}$$

für alle $x^* \in X^*$, und insbesondere $x^*(x) = 0$ für alle x^* mit $x^*|U = 0$. Aus Folgerung 4.8 folgt, dass $x \in U$. Sei nun $u^* \in U^*$ beliebig. Wir wählen gemäß Satz 4.5 ein $x^* \in X^*$ mit $x^*|U = u^*$, dann wird (4.25) zu

$$u^*(x) = x^*(x) = u^{**}(u^*)\,,$$

also gilt $J_U x = u^{**}$. □

Satz 4.14 *Sei X Banachraum. Dann ist X reflexiv genau dann, wenn X^* reflexiv ist.*

Beweis: Sei X reflexiv. Wir wollen zeigen, dass $J_{X^*} : X^* \to X^{***}$ surjektiv ist. Sei $x^{***} \in X^{***}$ beliebig. Wir setzen $x^* = x^{***} \circ J_X$. Sei nun $x^{**} \in X^{**}$ beliebig, sei $x = J_X^{-1} x^{**}$. Es gilt dann

$$x^{***}(x^{**}) = x^{***}(J_X x) = x^*(x) = (J_X x)(x^*) = x^{**}(x^*)\,,$$

also $x^{***} = J_{X^*} x^*$. Sei nun umgekehrt X^* reflexiv. Nach dem eben Bewiesenen ist X^{**} reflexiv, nach Satz 4.13 ist auch der abgeschlossene Unterraum $J_X(X)$ reflexiv und damit auch X. $\square$

Satz 4.15 *Sei X normierter Raum, $M \subset X$. Dann sind äquivalent:*

(i) M ist beschränkt.

(ii) Für alle $x^* \in X^*$ ist $x^*(M)$ beschränkt (in $\mathbb{K}$).

Beweis: Wir wenden Satz 3.5 (Satz von Banach-Steinhaus) an auf die durch

$$\mathcal{T} = J_X(M)$$

definierte Teilmenge $\mathcal{T} \subset L(X^*; \mathbb{K}) = X^{**}$. Da J_X Isometrie ist, ist (i) äquivalent zu

$$\sup_{T \in \mathcal{T}} \|T\| < \infty\,.$$

Andererseits gilt für jedes $x^* \in X^*$

$$x^*(M) = \{x^*(x) : x \in M\} = \{Tx^* : T \in \mathcal{T}\}\,.$$

Die Behauptung folgt nun unmittelbar aus Satz 3.5. $\square$

Trennung konvexer Mengen. Ist $x^* : X \to \mathbb{K}$ ein lineares stetiges Funktional auf einem normierten Raum, so heißt eine Niveaumenge der Form

$$H_\alpha = \{x : x \in X,\, x^*(x) = \alpha\}\,, \quad \alpha \in \mathbb{K}\,, \tag{4.26}$$

Hyperebene. Jede solche Hyperebene trennt X in zwei Halbräume

$$\{x : x \in X,\, x^*(x) < \alpha\} \quad \text{und} \quad \{x : x \in X,\, x^*(x) > \alpha\}\,.$$

Satz 4.16 (Trennungssatz)
Sei X normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum, sei $K \subset X$ offen und konvex, $K \neq \emptyset$, sei $x_0 \in X$ mit $x_0 \notin K$. Dann gibt es ein $x^* \in X^*$ mit

$$x^*(x) < x^*(x_0)\,, \quad \textit{für alle } x \in K\,. \tag{4.27}$$

$\square$

Die Ungleichung (4.27) bedeutet, dass K ganz auf einer Seite der Hyperebene H_α, $\alpha = x^*(x_0)$, liegt.
Beweis: Wir betrachten zunächst den Fall, dass $0 \in K$. Nach Lemma 4.3 ist das Minkowski-Funktional M_K sublinear. Ist $\varepsilon > 0$ mit $K(0;\varepsilon) \subset K$, so ist $\varepsilon x/\|x\| \in K$ und also

$$M_K(x) \le \frac{1}{\varepsilon}\|x\|\,, \quad \text{für alle } x \in X. \tag{4.28}$$

Weiter gilt $x_0/t \notin K$ für alle $t < 1$, also

$$M_K(x_0) \ge 1\,, \tag{4.29}$$

und für alle $x \in K$ gibt es ein $t < 1$ mit $x/t \in K$, also

$$M_K(x) < 1\,, \quad \text{für alle } x \in K. \tag{4.30}$$

Wir definieren $u^* : \operatorname{span}(\{x_0\}) \to \mathbb{R}$ durch

$$u^*(\alpha x_0) = \alpha M_K(x_0)\,, \quad \alpha \in \mathbb{R}\,.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} u^*(\alpha x_0) &= M_K(\alpha x_0) \ge 0\,, \quad \alpha \ge 0\,,\\ u^*(\alpha x_0) &\le 0 \le M_K(\alpha x_0)\,, \quad \alpha < 0\,, \end{aligned}$$

also ist $u^* \le M_K$ auf $\operatorname{span}(\{x_0\})$. Sei nun $x^* : X \to \mathbb{R}$ gemäß Satz 4.4 eine lineare Fortsetzung von u^* mit $x^* \le M_K$ auf X. Aus (4.28) folgt für alle $x \in X$

$$|x^*(x)| = \max\{x^*(x), x^*(-x)\} \le \max\{M_K(x), M_K(-x)\} \le \frac{1}{\varepsilon}\|x\|\,,$$

also ist $x^* \in X^*$. Aus (4.29) und (4.30) folgt nun

$$x^*(x) \le M_K(x) < 1 \le M_K(x_0) = x^*(x_0)\,, \quad \text{für alle } x \in K,$$

damit ist (4.27) gezeigt. Damit ist der Satz im Fall $0 \in K$ bewiesen. Im allgemeinen Fall wählen wir $\tilde{x} \in K$ und setzen $\tilde{K} = K - \tilde{x}$. Dann ist $0 \in \tilde{K}$ und $x_0 - \tilde{x} \notin \tilde{K}$. Sei $x^* \in X^*$ mit $x^*(z) < x^*(x_0 - \tilde{x})$ für alle $z \in \tilde{K}$, dann gilt für alle $x \in K$

$$x^*(x) = x^*(x - \tilde{x}) + x^*(\tilde{x}) < x^*(x_0 - \tilde{x}) + x^*(\tilde{x}) = x^*(x_0)\,.$$

□

Der Trennungssatz läßt sich ins Komplexe übertragen. Aus (4.27) wird dann

$$\operatorname{Re} x^*(x) < \operatorname{Re} x^*(x_0)\,, \quad \text{für alle } x \in K.$$

Wir verzichten auf die genaue Darstellung.

Satz 4.17 (Trennung zweier konvexer Mengen)
Sei X normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum, seien $K_1, K_2 \subset X$ konvex und nichtleer, sei K_1 offen, es gelte $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. Dann gibt es ein $x^* \in X^*$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$x^*(x_1) < \alpha \le x^*(x_2)\,, \quad \textit{für alle } x_1 \in K_1,\ x_2 \in K_2. \tag{4.31}$$

Beweis: Wir setzen

$$K = K_1 - K_2 = \{x_1 - x_2 : x_1 \in K_1,\, x_2 \in K_2\}\,.$$

Dann ist K offen (aus $x \in K$ folgt $x \in K_1 - x_2 \subset K$ für ein $x_2 \in K_2$) und $0 \notin K$. Wir wählen gemäß Satz 4.16 ein $x^* \in X^*$ mit $x^*(x) < x^*(0) = 0$ für alle $x \in K$, also

$$x^*(x_1) - x^*(x_2) = x^*(x_1 - x_2) < 0\,, \quad \text{für alle } x_1 \in K_1,\, x_2 \in K_2,$$

und daher auch

$$x^*(x_1) \le \alpha \le x^*(x_2)\,, \quad \text{für alle } x_1 \in K_1,\, x_2 \in K_2,$$

für jedes $\alpha \in [\sup x^*(K_1), \inf x^*(K_2)]$. Da K_1 offen und $x^* \neq 0$, folgt $x^*(x_1) < \alpha$ für alle $x_1 \in K_1$, denn wäre $x^*(x_1) = \alpha$ für ein $x_1 \in K_1$, so gäbe es ein $\tilde{x}_1 \in K_1$ mit $x^*(\tilde{x}_1) > \alpha$.
□

Satz 4.18 (Strikte Trennung)
Sei X normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum, sei $K \subset X$ abgeschlossen und konvex, $K \neq \emptyset$, sei $x_0 \in X$ mit $x_0 \notin K$. Dann gibt es ein $x^* \in X^*$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$x^*(x) \le \alpha < x^*(x_0)\,, \quad \text{für alle } x \in K. \tag{4.32}$$

□

Beweis: Übung. (Hinweis: Für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ ist $B(x_0;\varepsilon) \cap K = \emptyset$.) □

Wenn wir von x^* zu $-x^*$ übergehen, können wir in den Formeln (4.27), (4.31), (4.32) auch die umgekehrten Ungleichungen erhalten.

5 Kompakte Mengen in C und L^p

Wir wollen feststellen, welche Teilmengen in den Räumen $C(K;\mathbb{K})$ (K kompakt) und $L^p(\Omega;\mathbb{K})$ (Ω offen) kompakt sind. Wir wissen bereits, dass die abgeschlossenen Einheitskugeln in diesen unendlichdimensionalen Räumen nicht kompakt sind.

Wir beginnen, indem wir verschiedene äquivalente Begriffe für Kompaktheit in allgemeinen metrischen Räumen untersuchen.

Satz 5.1 (Äquivalente Kompaktheitsbegriffe)
Sei (X,d) metrischer Raum. Dann sind äquivalent:

(i) X ist folgenkompakt, das heißt, jede Folge in X hat eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in X.

(ii) X ist vollständig und X ist totalbeschränkt, das heißt, zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es endlich viele ε-Kugeln, welche X überdecken, also

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n \in \mathbb{N} \ \exists x_1, \dots, x_n \in X \quad \textit{mit} \quad X = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon) . \tag{5.1}$$

(iii) X ist überdeckungskompakt, das heißt: Ist $(U_i)_{i \in I}$ eine Familie von offenen Mengen in X mit

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i ,$$

so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ und Indizes $i_1, \dots, i_n \in I$ mit

$$X = \bigcup_{k=1}^{n} U_{i_k} .$$

("Jede offene Überdeckung hat eine endliche Teilüberdeckung.")

(iv) ("endliche Durchschnittseigenschaft"): Ist $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie von abgeschlossenen Mengen in X mit der Eigenschaft, dass

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_{i_k} \neq \emptyset$$

gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $i_1, \dots, i_n \in I$, so gilt

$$\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset .$$

*Erfüllt X eine (und damit alle) der genannten Eigenschaften, so heißt X **kompakt**.*

Beweis: "(i)$\Rightarrow$(ii)": Sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ Cauchyfolge in X. Wir wählen eine konvergente Teilfolge mit $x_{k_m} \to x \in X$. Sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen $N \in \mathbb{N}$ mit

$$d(x_l, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} , \quad \text{für alle } l, n \geq N,$$

und $m \in \mathbb{N}$ mit $k_m \geq N$ und

$$d(x_{k_m}, x) < \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

dann gilt für alle $n \geq N$

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{k_m}) + d(x_{k_m}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

Also ist X vollständig. X ist totalbeschränkt: Siehe Übung.
"(ii)⇒(iii)": Wir zeigen, dass aus (ii) und der Negation von (iii) ein Widerspruch folgt. Sei $(U_i)_{i\in I}$ Familie offener Mengen mit

$$\bigcup_{i\in I} U_i = X\,, \quad \text{aber} \quad \bigcup_{k=1}^{n} U_{i_k} \neq X \tag{5.2}$$

für alle n und alle $i_1, \ldots, i_n \in I$. Wir konstruieren zunächst mit vollständiger Induktion Kugeln $B_n = B(x_n, 2^{-n})$ mit $B_n \cap B_{n-1} \neq \emptyset$, welche nicht von endlich vielen U_i überdeckt werden: Für $n = 1$ wähle endlich viele Kugeln mit Radius $1/2$, welche X überdecken. Sei $B_1 = B(x_1, 1/2)$ eine davon, welche nicht von endlich vielen U_i überdeckt werden kann (eine solche muss es geben, sonst gilt (5.2) nicht). Für den Induktionsschritt $n-1 \to n$ gehen wir von B_{n-1} aus und wählen endlich viele Kugeln mit Radius 2^{-n}, welche mit B_{n-1} einen nichtleeren Durchschnitt haben und deren Vereinigung B_{n-1} überdeckt. Sei $B_n = B(x_n, 2^{-n})$ eine davon, welche nicht von endlich vielen U_i überdeckt werden kann (eine solche muss es geben nach Konstruktion von B_{n-1}). Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchyfolge, da

$$d(x_n, x_{n+1}) < 2^{-n} + 2^{-(n+1)} < 2^{-(n-1)}$$

für alle n, also

$$d(x_n, x_{n+p}) < 2^{-(n-2)}$$

für alle n, p mit $p \geq n$. Sei $x = \lim x_n$. Dann gibt es ein $i \in I$ mit $x \in U_i$. Da U_i offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $x \in B(x, \varepsilon) \subset U_i$. Für hinreichend großes n gilt dann

$$B_n = B(x_n, 2^{-n}) \subset B(x, \varepsilon) \subset U_i$$

im Widerspruch zur Konstruktion von B_n.
"(iii)⇒(iv)": Sei $(A_i)_{i\in I}$ Familie abgeschlossener Mengen mit

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_{i_k} \neq \emptyset$$

für je endlich viele Indizes $i_1, \ldots, i_n$. Sei $U_i = X \setminus A_i$. Dann ist

$$\bigcup_{k=1}^{n} U_{i_k} \neq X$$

für je endlich viele Indizes $i_1, \ldots, i_n$. Aus (iii) folgt $\cup_{i\in I} U_i \neq X$, also $\cap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$.
"(iv)⇒(i)": Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folge in X. Wir setzen

$$A_i = \overline{\{x_i, x_{i+1}, \ldots\}} = \overline{\{x_k : k \geq i\}}\,, \quad i \in \mathbb{N}\,.$$

Dann gilt für alle endlichen Indexkombinationen

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_{i_k} = A_j \neq \emptyset\,, \quad \text{wobei } j = \max_{1\le k\le n} i_k.$$

Also gibt es nach Voraussetzung ein

$$x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\,.$$

Wir wollen eine Teilfolge (x_{k_m}) konstruieren mit

$$d(x_{k_m}, x) < \frac{1}{m}\,.$$

Für $m = 1$ wählen wir

$$x_{k_1} \in B(x,1) \cap \{x_i : i \in \mathbb{N}\}$$

(der Schnitt ist nichtleer, da $x \in A_1$). Ist $x_{k_{m-1}}$ konstruiert, so wählen wir

$$x_{k_m} \in B(x, \frac{1}{m}) \cap \{x_i : i > k_{m-1}\}$$

(der Schnitt ist nichtleer, da $x \in A_{k_{m-1}+1}$). Nach Konstruktion gilt $x_{k_m} \to x$. □

Randbemerkung: In allgemeinen topologischen Räumen gilt Satz 5.1 nicht. Die endliche Überdeckungseigenschaft ist dann nicht mehr äquivalent damit, dass jede Folge eine konvergente Teilfolge hat.

Folgerung 5.2 *Sei X normierter Raum, sei F eine kompakte Teilmenge von X. Dann ist F abgeschlossen und beschränkt.*

Beweis: Die Abgeschlossenheit folgt aus (i), die Beschränktheit aus (ii) in Satz 5.1. □

Wir wollen kompakte Mengen im Raum der stetigen Funktionen charakterisieren. Es fragt sich, welche Eigenschaft wir zusätzlich zu Abgeschlossenheit und Beschränktheit benötigen, damit wir Kompaktheit erhalten.

Definition 5.3 (Gleichgradige Stetigkeit)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Eine Teilmenge F von $C(\Omega;\mathbb{K})$ heißt gleichgradig stetig, falls für alle $x \in \Omega$ und alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $y \in \Omega$ gilt

$$\|x-y\| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |f(x)-f(y)| < \varepsilon \quad \textit{für alle } f \in F.$$

("Das δ kann für alle $f \in F$ gemeinsam gewählt werden".) □

Lemma 5.4 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $F \subset C(\Omega;\mathbb{K})$, es gebe ein L mit*

$$|f(x)-f(y)| \le L\|x-y\|\,, \quad \textit{für alle } x,y \in \Omega,\ f \in F. \tag{5.3}$$

Dann ist F gleichgradig stetig.

Beweis: Mit $\delta = \varepsilon/L$ hat F die in Definition 5.3 verlangte Eigenschaft. $\square$

Ist $F \subset C^1(\Omega)$, so folgt aus dem Mittelwertsatz, dass (5.3) gilt, falls es ein $C > 0$ gibt mit

$$|\partial_i f(x)| \leq C\,, \quad \text{für alle } x \in \Omega,\ f \in F,\ i = 1, \ldots, n. \tag{5.4}$$

Dieses Kriterium wird häufig verwendet, um gleichgradige Stetigkeit nachzuweisen.

Satz 5.5 (Arzela-Ascoli)
Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, sei $F \subset (C(K;\mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$. Dann sind äquivalent:

(i) F ist relativ kompakt in $C(K)$, das heißt, $\overline{F}$ ist kompakt.

(ii) F ist beschränkt und gleichgradig stetig.

Beweis: "(i)⇒(ii)": Sei $\overline{F}$ kompakt. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Nach Satz 5.1(ii) gibt es endlich viele $f_1, \ldots, f_n \in C(K)$ mit

$$\overline{F} \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(f_i, \varepsilon)\,.$$

Da eine endliche Vereinigung von Kugeln beschränkt ist, ist auch F beschränkt. Wir zeigen nun, dass F gleichgradig stetig ist. Seien $x \in K$ beliebig. Wir wählen $\delta_i > 0$, so dass für alle $y \in K$ gilt

$$\|y - x\| < \delta_i \qquad \Rightarrow \qquad |f_i(y) - f_i(x)| < \varepsilon\,,$$

das ist möglich, da alle f_i auf der kompakten Menge K gleichmäßig stetig sind. Wir setzen $\delta = \min_i \delta_i$. Sei nun $f \in F$. Wir wählen ein k mit $\|f - f_k\|_\infty < \varepsilon$, dann gilt für alle $y \in K$ mit $\|y - x\| < \delta$

$$|f(y) - f(x)| \leq |f(y) - f_k(y)| + |f_k(y) - f_k(x)| + |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon\,.$$

Damit ist gezeigt, dass F gleichgradig stetig ist.
"(ii)⇒(i)" Zunächst ist $\overline{F}$ vollständig, da $C(K)$ vollständig und $\overline{F}$ abgeschlossen in $C(K)$ ist. Nach Satz 5.1 (ii) genügt es zu zeigen:

$$\begin{array}{l}\text{Für alle } \varepsilon > 0 \text{ lässt sich } \overline{F} \text{ durch endlich viele Teilmengen} \\ \text{von } C(K) \text{ mit Durchmesser} \leq \varepsilon \text{ überdecken.}\end{array} \tag{5.5}$$

Wir beweisen zuerst, dass auch $\overline{F}$ gleichgradig stetig ist. Sei $x \in K$, $\eta > 0$. Wir wählen ein $\delta > 0$ mit

$$\|y - x\| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |f(y) - f(x)| < \eta \quad \text{für alle } f \in F.$$

Sei $g \in \overline{F}$. Wir wählen $f \in F$ mit $\|g - f\|_\infty < \eta$, dann gilt für alle $y \in K$ mit $\|y - x\| < \delta$

$$|g(y) - g(x)| \leq |g(y) - f(y)| + |f(y) - f(x)| + |f(x) - g(x)| < \eta + \eta + \eta = 3\eta\,.$$

Also ist $\overline{F}$ gleichgradig stetig. Wir konstruieren nun die Überdeckungen gemäß (5.5). Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Zu jedem $x \in K$ wählen wir ein $\delta(x) > 0$ mit

$$\|y - x\| < \delta(x) \qquad \Rightarrow \qquad |f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{für alle } f \in \overline{F}.$$

Wir wählen (K ist kompakt) endlich viele $x_i \in K$, $1 \le i \le k$, mit

$$K = \bigcup_{i=1}^{k} B(x_i, \delta(x_i)) \,.$$

Sei $C > 0$ mit $\|f\|_\infty \le C$ für alle $f \in \overline{F}$ (F ist beschränkt). Wir betrachten zunächst den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Sei

$$-C = c_1 < c_2 < \ldots < c_m = C$$

eine Zerlegung des möglichen Wertebereichs von Funktionen in $\overline{F}$ mit $c_{j+1} - c_j < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle j, $1 \le j < m$. Sei

$$\Phi = \{\varphi | \, \varphi : \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, m\}\} \,.$$

Für $\varphi \in \Phi$ definieren wir

$$L_\varphi = \{f : f \in \overline{F}, \, |f(x_i) - c_{\varphi(i)}| < \frac{\varepsilon}{4} \text{ für alle } i\} \,. \tag{5.6}$$

Dann ist

$$\overline{F} = \bigcup_{\varphi \in \Phi} L_\varphi \,. \tag{5.7}$$

Ist nämlich $f \in \overline{F}$, so ist $f \in L_\varphi$, wenn wir φ so wählen, dass

$$|f(x_i) - c_{\varphi(i)}| < \frac{\varepsilon}{4} \,.$$

Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ erreichen wir ebenfalls, dass (5.6) und (5.7) gelten; wir wählen Punkte $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{C}$, so dass jeder Punkt der Kreisscheibe $S = \{z : \; z \in \mathbb{C} \,, |z| \le C\}$ um weniger als $\varepsilon/4$ von einem der c_j entfernt ist.

Da Φ eine endliche Menge ist, genügt es also zu zeigen, dass $\operatorname{diam}(L_\varphi) \le \varepsilon$ für alle φ. Seien $f, g \in L_\varphi$, sei $x \in K$. Wir wählen ein i, $1 \le i \le k$, mit $x \in B(x_i, \delta(x_i))$, dann gilt

$$\begin{aligned} |f(x) - g(x)| &\le |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - c_{\varphi(i)}| + |c_{\varphi(i)} - g(x_i)| + |g(x_i) - g(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon \,, \end{aligned}$$

also ist $\|f - g\|_\infty \le \varepsilon$. Da ε beliebig war, ist (5.5) gezeigt. □

Kompaktheit in L^p. Wir erinnern an die Definition der Faltung zweier Funktionen f und g,

$$(f * g)(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(y - x) \, dx \,, \tag{5.8}$$

Sie ist für $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definiert, liefert Werte $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, und es gilt

$$f * g = g * f \,, \quad \|f * g\|_1 \le \|f\|_1 \cdot \|g\|_1 \,. \tag{5.9}$$

Durch Faltung mit geeigneten Glättungsfunktionen kann man Funktionen durch C^∞-Funktionen approximieren. Wir definieren

$$\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,, \quad \psi(t) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{t}\right) \,, & t > 0 \,, \\ 0 \,, & t \le 0 \,, \end{cases} \tag{5.10}$$

$$\tilde{\psi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,, \quad \tilde{\psi}(r) = \psi(1 - r^2) \,, \tag{5.11}$$

$$\eta_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \,, \quad \eta_1(x) = \alpha \tilde{\psi}(\|x\|) \,, \tag{5.12}$$

wobei $\alpha > 0$ so gewählt ist, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta_1(x)\, dx = 1\,. \tag{5.13}$$

Wir definieren nun für $\varepsilon > 0$ die "Standardglättungsfunktion"

$$\eta_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\,, \quad \eta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\eta_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\,. \tag{5.14}$$

Die Funktionen η_ε sind offensichtlich radialsymmetrisch (d.h. sie hängen nur von $\|x\|$ ab), und es gilt (siehe Integrationstheorie)

$$\eta_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\,, \quad \operatorname{supp}(\eta_\varepsilon) = K(0;\varepsilon)\,, \quad \eta_\varepsilon \geq 0\,, \quad \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x)\, dx = 1\,. \tag{5.15}$$

Wir wollen Faltungen mit der Glättungsfunktion auch für solche Funktionen betrachten, die nicht auf ganz $\mathbb{R}^n$ definiert sind.

Für $f \in L^1(\Omega)$ setzen wir $\tilde{f} = f$ in Ω und $\tilde{f} = 0$ außerhalb von Ω, dann gilt

$$f^\varepsilon(y) = (f * \eta_\varepsilon)(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(x)\eta_\varepsilon(y-x)\, dx = \int_\Omega f(x)\eta_\varepsilon(y-x)\, dx\,, \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}^n. \tag{5.16}$$

Wegen $f^\varepsilon = f * \eta_\varepsilon = \eta_\varepsilon * f$ können wir f^ε auch folgendermaßen darstellen.

$$\begin{aligned} f^\varepsilon(y) &= \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x)\tilde{f}(y-x)\, dx = \varepsilon^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} \eta_1\big(\frac{x}{\varepsilon}\big)\tilde{f}(y-x)\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \eta_1(z)\tilde{f}(y-\varepsilon z)\, dz = \int_{K(0;1)} \eta_1(z)\tilde{f}(y-\varepsilon z)\, dz\,. \end{aligned} \tag{5.17}$$

Lemma 5.6 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $f \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$. Dann gilt für $f^\varepsilon = f * \eta_\varepsilon$.*

$$f^\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)\,, \quad \operatorname{supp}(f^\varepsilon) \subset \overline{\Omega + B(0;\varepsilon)}\,, \quad \|f^\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}\,. \tag{5.18}$$

Beweis: Es gilt $f \in L^1(\Omega)$, da Ω beschränkt ist, und

$$f^\varepsilon(y) = \int_\Omega f(x)\eta_\varepsilon(y-x)\, dx\,, \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}^n. \tag{5.19}$$

Da $\eta_\varepsilon(y-x) = 0$ für $\|y-x\| \geq \varepsilon$, gilt $\operatorname{supp}(f^\varepsilon) \subset \overline{\Omega + B(0;\varepsilon)}$. Für alle Multiindizes α sind die Funktionen $x \mapsto f(x)\partial^\alpha\eta_\varepsilon(y-x)$ gleichmäßig in y durch die integrierbaren Funktionen $\|\partial^\alpha\eta_\varepsilon\|_\infty |f|$ beschränkt. Nach einem Satz der Integrationstheorie existieren alle $\partial^\alpha f^\varepsilon$ in $\mathbb{R}^n$ und sind dort stetig, das heißt, $f^\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Sei nun $y \in \Omega$. Mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ folgt aus der Hölderschen Ungleichung

$$\begin{aligned} |f^\varepsilon(y)| &= \left|\int_\Omega f(x)\eta_\varepsilon(y-x)\, dx\right| \leq \int_\Omega |f(x)|(\eta_\varepsilon(y-x))^{\frac{1}{p}}(\eta_\varepsilon(y-x))^{\frac{1}{q}}\, dx \\ &\leq \Big(\int_\Omega |f(x)|^p\eta_\varepsilon(y-x)\, dx\Big)^{\frac{1}{p}} \underbrace{\Big(\int_\Omega \eta_\varepsilon(y-x)\, dx\Big)^{\frac{1}{q}}}_{\leq 1}\,. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\int_\Omega |f^\varepsilon(y)|^p\,dy \le \int_\Omega \int_\Omega |f(x)|^p \eta_\varepsilon(y-x)\,dx\,dy = \int_\Omega |f(x)|^p \int_\Omega \eta_\varepsilon(y-x)\,dy\,dx$$
$$\le \int_\Omega |f(x)|^p\,dx\,.$$

□

Wir erinnern an die Bezeichnung $C_0(\mathbb{R}^n)$ für den Raum der Funktionen, die auf dem $\mathbb{R}^n$ stetig sind und kompakten Träger haben.

Lemma 5.7 *Sei $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt $f^\varepsilon \to f$ gleichmäßig in $\mathbb{R}^n$ für $\varepsilon \to 0$.*

Beweis: Für alle $y \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$|f^\varepsilon(y) - f(y)| = \Big| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\eta_\varepsilon(y-x)\,dx - f(y) \Big| = \Big| \int_{\mathbb{R}^n} (f(x) - f(y))\eta_\varepsilon(y-x)\,dx \Big|$$
$$\le \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ \|x-y\| \le \varepsilon}} |f(y) - f(x)|\,.$$

Da f kompakten Träger hat und daher gleichmäßig stetig ist auf $\mathbb{R}^n$, folgt die Behauptung.
□

Lemma 5.8 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, sei $f \in L^p(\Omega)$, $1 \le p < \infty$. Dann gilt $f^\varepsilon \to f$ in $L^p(\Omega)$ für $\varepsilon \to 0$.*

Beweis: Sei $\delta > 0$. Wir wählen $g \in C_0(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\|f - g\|_{L^p(\Omega)} \le \delta\,.$$

Das ist möglich, da $C_0(\mathbb{R}^n)$ dicht ist in $L^p(\Omega)$, siehe Übung. Es folgt

$$\begin{aligned} \|f - f^\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} &\le \|f - g\|_{L^p(\Omega)} + \|g - g^\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} + \|g^\varepsilon - f^\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} \\ &\le 2\delta + \|g - g^\varepsilon\|_{L^p(\Omega)}\,, \end{aligned} \tag{5.20}$$

da

$$g^\varepsilon - f^\varepsilon = g * \eta_\varepsilon - f * \eta_\varepsilon = (g - f)^\varepsilon$$

und nach Lemma 5.6

$$\|(g - f)^\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} \le \|g - f\|_{L^p(\Omega)} \le \delta\,.$$

Nach Lemma 5.7 gilt $g^\varepsilon \to g$ gleichmäßig, also

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \|f - f^\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} \le 2\delta\,.$$

Da $\delta > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung. □

Wir untersuchen das Verhalten von

$$\int_\Omega |f(x+h) - f(x)|^p\,dx\,, \quad h \to 0\,.$$

Satz 5.9 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, sei $f \in L^p(\Omega)$ mit $1 \le p < \infty$. Dann gilt*

$$\lim_{h\to 0} \int_\Omega |f(x+h) - f(x)|^p \, dx = 0 \,. \tag{5.21}$$

(Hier wird wieder $f = 0$ gesetzt außerhalb von Ω.)

Beweis: Wir setzen $(\tau_h f)(x) = f(x+h)$. Dann gilt

$$\int_\Omega |f(x+h) - f(x)|^p \, dx = \|\tau_h f - f\|_{L^p(\Omega)} \,.$$

Wir schätzen ab

$$\|\tau_h f - f\|_{L^p(\Omega)} \le \|\tau_h f - \tau_h f^\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} + \|\tau_h f^\varepsilon - f^\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} + \|f^\varepsilon - f\|_{L^p(\Omega)} \,.$$

Sei $\gamma > 0$. Für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ sind der dritte und auch der erste Term auf der rechten Seite kleiner als $\gamma/3$ wegen

$$\|\tau_h f - \tau_h f^\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} = \|\tau_h (f - f^\varepsilon)\|_{L^p(\Omega)} \le \|f^\varepsilon - f\|_{L^p(\Omega + B(0;\varepsilon))} \,.$$

Da f^ε gleichmäßig stetig ist auf $C(\overline{\Omega})$, ist für hinreichend kleine h auch der zweite Term kleiner als $\gamma/3$. Daraus folgt die Behauptung. $\square$

Satz 5.10 (Fréchet-Riesz-Kolmogorov)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $1 \le p < \infty$, sei $F \subset (L^p(\Omega;\mathbb{K}), \|\cdot\|_p)$. Dann sind äquivalent:

(i) F ist relativ kompakt in $L^p(\Omega)$, das heißt, $\overline{F}$ ist kompakt.

(ii) F ist beschränkt, und es gilt

$$\lim_{h\to 0} \sup_{f\in F} \int_\Omega |f(x+h) - f(x)|^p \, dx = 0 \,. \tag{5.22}$$

Die Bedingung (5.22) besagt, dass der Grenzübergang $h \to 0$ gleichmäßig ist bezüglich F.

Beweis: "(i)$\Rightarrow$(ii)": Sei $\overline{F}$ kompakt. Nach Folgerung 5.2 ist F beschränkt. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Nach Satz 5.1(ii) gibt es endlich viele $f_1, \dots, f_n \in L^p(\Omega)$ mit

$$\overline{F} \subset \bigcup_{i=1}^n B(f_i, \varepsilon) \,.$$

Gemäß Satz 5.9 gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $h \in \mathbb{R}^n$ mit $\|h\| < \delta$ gilt

$$\max_{1\le i\le n} \int_\Omega |f_i(x+h) - f(x)|^p \, dx < \varepsilon^p \,.$$

Für beliebiges $f \in F$ folgt nun (wähle i mit $f \in B(f_i, \varepsilon)$)

$$\begin{aligned}\|\tau_h f - f\|_{L^p(\Omega)} &\le \|\tau_h f - \tau_h f_i\|_{L^p(\Omega)} + \|\tau_h f_i - f_i\|_{L^p(\Omega)} + \|f_i - f\|_{L^p(\Omega)} \\ &\le \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon\end{aligned}$$

und damit auch

$$\sup_{f\in F} \|\tau_h f - f\|_{L^p(\Omega)} \le 3\varepsilon\,.$$

"(ii)⇒(i)": Wir wollen zeigen, dass $\overline{F}$ kompakt ist. Da $L^p(\Omega)$ vollständig ist, ist $\overline{F}$ ebenfalls vollständig; gemäß Satz 5.1 genügt es also zu zeigen, dass $\overline{F}$ in $L^p(\Omega)$ totalbeschränkt ist. Zu jedem $\varepsilon > 0$ definieren wir

$$F_\varepsilon = \{f^\varepsilon : f \in F\}\,.$$

Nach Lemma 5.6 ist $F_\varepsilon \subset C(\overline{\Omega})$. Wir wollen den Satz von Arzela-Ascoli anwenden. Nach Voraussetzung ist F in $L^p(\Omega)$ und damit auch in $L^1(\Omega)$ beschränkt, da nach der Hölderschen Ungleichung

$$\|f\|_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega |f(x)|\,dx \le \Big(\int_\Omega |f(x)|^p\,dx\Big)^{1/p} \cdot \Big(\int_\Omega 1^q\,dx\Big)^{1/q} = \|f\|_{L^p(\Omega)} \mathrm{meas}\,(\Omega)^{1/q}\,.$$

Aus

$$|f^\varepsilon(y)| \le \int_\Omega |f(x)|\eta_\varepsilon(y-x)\,dx \le \|\eta_\varepsilon\|_\infty \|f\|_{L^1(\Omega)}\,, \quad \text{für alle } y \in \Omega,$$

folgt nun, dass F_ε in $C(\overline{\Omega})$ beschränkt ist. Analog erhalten wir aus

$$|\partial_i f^\varepsilon(y)| \le \int_\Omega |f(x)|\partial_i\eta_\varepsilon(y-x)\,dx \le \|\partial_i\eta_\varepsilon\|_\infty \|f\|_{L^1(\Omega)}\,, \quad \text{für alle } y \in \Omega,$$

dass auch die Menge $\{\partial_i f^\varepsilon : f \in F\,, 1 \le i \le n\}$ in $C(\overline{\Omega})$ beschränkt ist. Daher ist F_ε gleichgradig stetig gemäß dem Kriterium (5.4). Nach dem Satz von Arzela-Ascoli ist $\overline{F}_\varepsilon$ kompakt in $C(\overline{\Omega})$. Da die Einbettung von $C(\overline{\Omega})$ in $L^p(\Omega)$ stetig ist, ist $\overline{F}_\varepsilon$ auch in $L^p(\Omega)$ kompakt und damit gemäß Satz 5.1 in $L^p(\Omega)$ totalbeschränkt. Für beliebiges $f \in F$, $\varepsilon > 0$ gilt nun, wobei wir (5.17) und die Höldersche Ungleichung verwenden,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |f^\varepsilon(y) - f(y)|^p\,dy &= \int_\Omega \Big| \int_{K(0;1)} \eta_1(z)(f(y-\varepsilon z) - f(y))\,dz\Big|^p\,dy \\
&\le \int_\Omega \int_{K(0;1)} |f(y-\varepsilon z) - f(y)|^p\,dz \cdot \Big(\int_{K(0;1)} \eta_1(z)^q\,dz\Big)^{p/q}\,dy \\
&\le c\int_{K(0;1)} \int_\Omega |f(y-\varepsilon z) - f(y)|^p\,dy\,dz \\
&\le \tilde{c} \sup_{\|z\|\le 1} \int_\Omega |f(y-\varepsilon z) - f(y)|^p\,dy
\end{aligned}$$

wobei $c, \tilde{c}$ von f und ε unabhängig sind. Übergang zum Supremum bezüglich f (erst auf der rechten, dann auf der linken Seite) ergibt für alle $\varepsilon > 0$

$$\sup_{f\in F} \int_\Omega |f^\varepsilon(y) - f(y)|^p\,dy \le \tilde{c} \sup_{\|z\|\le 1} \sup_{f\in F} \int_\Omega |f(y-\varepsilon z) - f(y)|^p\,dy\,. \tag{5.23}$$

Wir stellen fest, dass wegen der Voraussetzung (5.22) die rechte Seite von (5.23) gegen 0 geht, wenn $\varepsilon \to 0$ gegen 0 geht. Daher können wir wie folgt von der Totalbeschränktheit von F_ε auf die von F schließen. Sei $\gamma > 0$ vorgegeben, wir suchen eine Überdeckung von $\overline{F}$ mit endlich vielen Kugeln vom Radius γ. Zunächst finden wir $\varepsilon > 0$ mit

$$\sup_{f\in F} \|f^\varepsilon - f\|_{L^p(\Omega)} < \gamma/3\,. \tag{5.24}$$

Dies ist möglich wegen (5.23), da wie bemerkt die rechte Seite von (5.23) mit $\varepsilon \to 0$ gegen 0 geht. Es gilt dann

$$F \subset F_\varepsilon + B(0, \gamma/3)\,, \quad \text{also} \quad \overline{F} \subset F_\varepsilon + B(0, \gamma/2)\,.$$

Da F_ε totalbeschränkt ist, finden wir endlich viele Kugeln $B(f_i, \gamma/2)$ mit

$$F_\varepsilon \subset \bigcup_{i=1}^n B(f_i, \gamma/2)\,.$$

Zusammen ergibt sich

$$\overline{F} \subset B(0, \gamma/2) + \bigcup_{i=1}^n B(f_i, \gamma/2) \subset \bigcup_{i=1}^n B(f_i, \gamma)\,.$$

Da γ beliebig war, ist $\overline{F}$ totalbeschränkt in $L^p(\Omega)$. $\square$

6 Schwache Konvergenz

In einem normierten Raum X sind beschränkte und abgeschlossene Mengen nur dann notwendigerweise kompakt, wenn X endlichdimensional ist. Ist X unendlichdimensional, so hat nicht jede beschränkte Folge in X eine bezüglich der Norm von X konvergente Teilfolge. Wir wollen nun den Begriff der Konvergenz so weit abschwächen, dass auch im Unendlichdimensionalen jede beschränkte Folge eine (in diesem schwächeren Sinn) konvergente Teilfolge hat.

Definition 6.1 (Schwache Konvergenz, schwach-$*$-Konvergenz)
Sei X normierter Raum. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X heißt schwach konvergent gegen ein $x \in X$, falls

$$\lim_{n\to\infty} x^*(x_n) = x^*(x)\,, \quad \text{für alle } x^* \in X^*, \tag{6.1}$$

wir schreiben auch $x_n \rightharpoonup x$. Eine Folge $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ in X^* heißt schwach-$*$-konvergent gegen ein $x^* \in X^*$, falls

$$\lim_{n\to\infty} x_n^*(x) = x^*(x)\,, \quad \text{für alle } x \in X, \tag{6.2}$$

wir schreiben auch $x_n^* \overset{*}{\rightharpoonup} x^*$. □

Konvergiert eine Folge in einem normierten Raum X gegen ein x im Sinne der Norm, so sagen wir auch, dass sie **stark** gegen x konvergiert.

Ist X reflexiv, so stimmen auf X^* schwache und schwach-$*$-Konvergenz überein. Ist X endlichdimensional, so stimmen beide mit der starken Konvergenz überein.

Offensichtlich ist jede stark konvergente Folge auch schwach beziehungsweise schwach-$*$-konvergent.

Ist $X = \ell^p(\mathbb{K})$, $1 \le p < \infty$, so ist $X^* \cong \ell^q(\mathbb{K})$ mit $q = p/(p-1)$. Eine Folge $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X konvergiert daher schwach gegen ein $x \in X$ genau dann, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} x_k^n y_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k\,, \quad \text{für alle } y \in \ell^q(\mathbb{K}). \tag{6.3}$$

Ist speziell $x^n = e^n$ (n-ter Einheitsvektor), so gilt für $p > 1$ (also $q < \infty$)

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} e_k^n y_k = \lim_{n\to\infty} y_n = 0\,, \quad \text{für alle } y \in \ell^q(\mathbb{K}), \tag{6.4}$$

also $e^n \rightharpoonup 0$ für $p > 1$, aber andererseits $\|e^n\|_p = 1$ und daher konvergiert e^n nicht stark gegen 0.

Für $p = 1$ gilt ebenfalls (6.4) für alle $y \in \ell^q(\mathbb{K})$, $q < \infty$, aber für $y = (-1, 1, -1, \dots) \in \ell^\infty(\mathbb{K})$ und das dazu korrespondierende Funktional $y^* \in X^*$ gilt

$$y^*(e^n) = \sum_{k=1}^{\infty} e_k^n y_k = y_n = (-1)^n\,. \tag{6.5}$$

Also ist $(e^n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht schwach konvergent im $\ell^1(\mathbb{K})$.

Generell gilt (Übung): Ist X Hilbertraum, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in X und $x \in X$, so konvergiert x_n stark gegen x genau dann, wenn x_n schwach gegen x und $\|x_n\|$ gegen $\|x\|$ konvergiert.

Als weiteres Beispiel betrachten wir $X = L^p(D;\mathbb{K})$, $1 \le p < \infty$. Es ist $X^* \cong L^q(D;\mathbb{K})$, $q = p/(p-1)$. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X konvergiert schwach gegen ein $x \in X$ genau dann, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \int_D x_n(t)y(t)\,dt = \int_D x(t)y(t)\,dt\,, \quad \text{für alle } y \in L^q(D;\mathbb{K}).$$

Ist $X = L^\infty(D;\mathbb{K})$, so ist $X \cong L^1(D;\mathbb{K})^*$, und eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X konvergiert schwach-$*$ gegen ein $x \in X$ genau dann, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \int_D x_n(t)y(t)\,dt = \int_D x(t)y(t)\,dt\,, \quad \text{für alle } y \in L^1(D;\mathbb{K}).$$

Lemma 6.2 *Schwache und schwach-$*$-Grenzwerte sind eindeutig bestimmt.*

Beweis: Gelten $x_n^* \overset{*}{\rightharpoonup} x^*$ und $x_n^* \overset{*}{\rightharpoonup} y^*$, so folgt

$$x^*(x) = \lim_{n\to\infty} x_n^*(x) = y^*(x)\,, \quad \text{für alle } x \in X,$$

und also $x^* = y^*$. Falls $x_n \rightharpoonup x$ und $x_n \rightharpoonup y$, so folgt

$$x^*(x) = \lim_{n\to\infty} x^*(x_n) = x^*(y)\,, \quad \text{für alle } x^* \in X^*,$$

und also $x = y$, da andernfalls nach dem Trennungssatz ein $x^* \in X^*$ existiert mit $x^*(x) \neq x^*(y)$. □

Lemma 6.3 *Sei X normierter Raum. Ist $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in X^* mit $x_n^* \overset{*}{\rightharpoonup} x^*$, $x^* \in X^*$, so gilt*

$$\|x^*\| \le \liminf_{n\to\infty} \|x_n^*\|\,. \tag{6.6}$$

Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in X mit $x_n \rightharpoonup x$, $x \in X$, so gilt

$$\|x\| \le \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|\,. \tag{6.7}$$

Beweis: Für alle $x \in X$ gilt

$$|x_n^*(x)| \le \|x_n^*\|\,\|x\|\,.$$

Aus $x_n^* \overset{*}{\rightharpoonup} x^*$ folgt daher

$$|x^*(x)| = \lim_{n\to\infty} |x_n^*(x)| \le \liminf_{n\to\infty}(\|x_n^*\|\,\|x\|) = \left(\liminf_{n\to\infty} \|x_n^*\|\right)\|x\|\,, \quad \text{für alle } x \in X,$$

also gilt (6.6). Beweis von (6.7): Übung. □

Ist etwa $(e^n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der Einheitsvektoren im $\ell^p(\mathbb{K})$, $1 < p < \infty$, so gilt wie oben in (6.4)) gezeigt, dass

$$e^n \rightharpoonup 0\,, \quad 0 < \lim_{n\to\infty} \|e^n\|_p = 1\,.$$

Satz 6.4 *Sei X normierter Raum. Dann ist jede in X schwach konvergente Folge in X beschränkt (bezüglich der Norm von X), und jede in X^* schwach-$*$-konvergente Folge ist in X^* beschränkt (bezüglich der Norm von X^*).*

Beweis: Aus $x_n^* \overset{*}{\rightharpoonup} x^*$ folgt $|x_n^*(x)| \to |x^*(x)|$ für alle $x \in X$, also

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n^*(x)| < \infty\,, \quad \text{für alle } x \in X.$$

Aus dem Satz von Banach-Steinhaus (Satz 3.5) folgt nun

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n^*\| < \infty\,.$$

Aus $x_n \rightharpoonup x$ folgt $|x^*(x_n)| \to |x^*(x)|$ für alle $x^* \in X^*$, also

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |x^*(x_n)| < \infty\,, \quad \text{für alle } x^* \in X^*.$$

Aus Satz 4.15 folgt nun

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| < \infty\,.$$

□

Lemma 6.5 *Sei X normierter Raum, sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in X mit $x_n \to x$ stark in X, sei $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in X^* mit $x_n^* \overset{*}{\rightharpoonup} x^*$. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} x_n^*(x_n) = x^*(x)\,. \tag{6.8}$$

Aus $x_n \rightharpoonup x$ und $x_n^* \to x^*$ stark folgt ebenfalls (6.8).

Beweis: Es gilt

$$|x^*(x) - x_n^*(x_n)| \le |(x^* - x_n^*)(x)| + \|x_n^*\|\,\|x - x_n\|\,.$$

Aus $x_n^* \overset{*}{\rightharpoonup} x^*$ folgt $|(x^* - x_n^*)(x)| \to 0$, und da $\|x_n^*\|$ beschränkt ist nach Satz 6.4, folgt (6.8). Der Beweis der zweiten Aussage verläuft analog. □

Aus $x_n \rightharpoonup x$ und $x_n^* \overset{*}{\rightharpoonup} x^*$ folgt im allgemeinen **nicht**, dass $x_n^*(x_n) \to x^*(x)$. Beispiel: $X = \ell^2(\mathbb{R})$, $X^* \cong \ell^2(\mathbb{R})$, $x_n = e^n$, $x_n^* = e^n$. Es ist $e^n \rightharpoonup 0$, $e^n \overset{*}{\rightharpoonup} 0$, aber $\langle e^n, e^n\rangle = 1$.

Satz 6.6 *Sei X normierter Raum, $K \subset X$ konvex und abgeschlossen. Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in K mit $x_n \rightharpoonup x \in X$, so gilt $x \in K$.*

Man sagt, dass K **schwach folgenabgeschlossen** ist. Konvexe abgeschlossene Mengen sind also schwach folgenabgeschlossen.

Beweis: Wir betrachten den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Ist $x \notin K$, so gibt es nach dem Trennungssatz ein $x^* \in X^*$ mit

$$x^*(x) > \sup_{z\in K} x^*(z) =: c \ge x^*(x_n)\,, \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

ein Widerspruch zu $x^*(x_n) \to x^*(x)$. Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ benötigt man die (in Kapitel 4 nicht behandelte) Variante des Trennungssatzes im Komplexen. □

Definition 6.7 (Schwache Folgenkompaktheit)
Sei X normierter Raum. Eine Teilmenge M von X heißt schwach folgenkompakt, falls jede Folge in M eine schwach konvergente Teilfolge hat, deren Grenzwert ebenfalls in M liegt. Eine Teilmenge M von X^* heißt schwach-$*$-folgenkompakt, falls jede Folge in M eine schwach-$*$-konvergente Teilfolge hat, deren Grenzwert ebenfalls in M liegt. □

Satz 6.8 *Sei X normierter Raum. Ist X separabel, so ist die abgeschlossene Einheitskugel $K(0;1)$ in X^* schwach-$*$-folgenkompakt.*

Beweis: Sei $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $K(0;1)$, also $\|x_n^*\| \le 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $\{x_m : m \in \mathbb{N}\}$ eine dichte Teilmenge von X. Wegen $|x_n^*(x_m)| \le \|x_m\|$ sind die Folgen $(x_n^*(x_m))_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$ beschränkt für alle $m \in \mathbb{N}$. Durch Übergang zu einer Teilfolge (bezüglich n) wollen wir erreichen, dass für alle $m \in \mathbb{N}$ die entsprechenden Teilfolgen von $(x_n^*(x_m))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren. Das gelingt mit einem "Diagonalfolgenargument". Wir wählen zunächst eine Folge $(n_{k1})_{k\in\mathbb{N}}$, so dass $(x_{n_{k1}}^*(x_1))_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Wir wählen weiter eine Teilfolge $(n_{k2})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(n_{k1})_{k\in\mathbb{N}}$, so dass $(x_{n_{k2}}^*(x_2))_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Per Induktion werden entsprechend Teilfolgen $(n_{km})_{k\in\mathbb{N}}$ für jedes $m \in \mathbb{N}$ gewählt. Für die Teilfolge $(n_{kk})_{k\in\mathbb{N}}$ gilt also, dass $(x_{n_{kk}}^*(x_m))_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert für alle $m \in \mathbb{N}$. Wir setzen $z_k^* = x_{n_{kk}}^*$ und suchen einen schwach-$*$-Grenzwert dieser Teilfolge von (x_n^*). Wir setzen $Z = \operatorname{span}\{x_m : m \in \mathbb{N}\}$ und definieren

$$z^* : Z \to \mathbb{K}\,, \quad z^*(z) = \lim_{k\to\infty} z_k^*(z)\,,$$

dieser Grenzwert ist wohldefiniert, da jedes $z \in Z$ Linearkombination der x_m ist. Es gilt außerdem $|z_k^*(z)| \le \|z\|$, also auch $|z^*(z)| \le \|z\|$ für alle $z \in Z$, also ist z^* stetig und $\|z^*\| \le 1$. Nach Satz 1.19 läßt sich z^* fortsetzen zu einem $x^* \in X^*$ mit $\|x^*\| \le 1$. Sei nun $x \in X$ beliebig. Es gilt für alle $z \in Z$

$$|x^*(x) - z_k^*(x)| \le |(x^* - z_k^*)(x - z)| + |x^*(z) - z_k^*(z)| \le 2\|x - z\| + |z^*(z) - z_k^*(z)|\,.$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir wählen ein $z \in Z$ mit $\|x - z\| \le \varepsilon$ (das ist möglich, da Z dicht ist in X) und ein $N > 0$ so dass $|x^*(z) - z_k^*(z)| \le \varepsilon$ für alle $k \ge N$, dann gilt

$$|x^*(x) - z_k^*(x)| \le 3\varepsilon$$

für alle $k \ge N$. Also gilt $z_k^*(x) \to x^*(x)$ für $k \to \infty$. Da x beliebig war, folgt $z_k^* \overset{*}{\rightharpoonup} x^*$. □

Folgerung 6.9 *Ist X ein separabler normierter Raum, so hat jede beschränkte Folge in X^* eine schwach-$*$-konvergente Teilfolge.* □

Für $1 < p \le \infty$ ist $L^p(D)$ isomorph zum Dualraum des separablen Raumes $L^q(D)$, $q = p/(p-1) < \infty$. Ist also $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $L^p(D)$ mit $\|x_n\|_p \le C$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gibt es eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ und ein $x \in L^p(D)$ mit

$$\lim_{k\to\infty} \int_D x_{n_k}(t)y(t)\,dt = \int_D x(t)y(t)\,dt\,, \quad \text{für alle } y \in L^q(D). \tag{6.9}$$

Als weiteres Beispiel betrachten wir $X = C([a,b])$. Sei $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $[a,b]$, dann wird durch

$$x_n^* = \delta_{t_n}\,, \quad \delta_{t_n}(x) = x(t_n)\,,$$

eine Folge $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ in X^* definiert. Ist $(t_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge mit $t_{n_k} \to t \in [a,b]$, so gilt

$$x_{n_k}^*(x) = x(t_{n_k}) \to x(t) = \delta_t(x)\,, \quad \text{für alle } x \in C[a,b],$$

also $x_{n_k}^* \overset{*}{\rightharpoonup} x^* = \delta_t$. Bemerkung: Ist allgemeiner $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $[a,b]$, so folgt aus 6.9, dass es eine Teilfolge $(\mu_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ und ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ gibt, so dass

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b x(t)\, d\mu_{n_k}(t) = \int_a^b x(t)\, d\mu(t)\,, \quad \text{für alle } x \in C[a,b].$$

Ist X nicht separabel, so kann es beschränkte Folgen in X^* geben, die keine schwach-$*$-konvergente Teilfolge haben. Als Beispiel betrachten wir $X = L^\infty(0,1)$. Sei $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge mit

$$\varepsilon_n \in (0,1)\,, \quad \varepsilon_n \to 0\,, \quad \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} \to 0\,. \tag{6.10}$$

Wir betrachten

$$x_n^*(x) = \frac{1}{\varepsilon_n} \int_0^{\varepsilon_n} x(t)\, dt\,, \quad x \in L^\infty(0,1)\,. \tag{6.11}$$

Es gilt $x_n^* \in X^*$, $\|x_n^*\| = 1$. Sei $x \in L^\infty(0,1)$ definiert durch

$$x(t) = (-1)^k\,, \quad \text{falls } \varepsilon_{k+1} < t < \varepsilon_k, \tag{6.12}$$

dann gilt

$$\begin{aligned} x_n^*(x) &= \frac{1}{\varepsilon_n}\left(\int_0^{\varepsilon_{n+1}} x(t)\, dt + (\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1})(-1)^n\right) \\ &= (-1)^n + \frac{1}{\varepsilon_n}\int_0^{\varepsilon_{n+1}} x(t)\, dt - \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n}(-1)^n\,, \end{aligned}$$

also

$$|x_n^*(x) - (-1)^n| \le 2\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} \to 0\,,$$

das heißt, die Folge $(x_n^*(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ist nicht konvergent. Da dasselbe Argument für jede Teilfolge $(x_{n_k}^*)_{n\in\mathbb{N}}$ (mit entsprechend gewählter Funktion x) zutrifft, hat $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ keine schwach-$*$-konvergente Teilfolge. Fassen wir sie aber als Folge in X^*, $X = C([0,1])$, auf, so gilt für alle $x \in X$

$$|x_n^*(x) - x(0)| = \left|\frac{1}{\varepsilon_n}\int_0^{\varepsilon_n} x(t) - x(0)\, dt\right| \le \sup_{0\le s\le t} |x(s) - x(0)| \to 0\,,$$

also $x_n^* \overset{*}{\rightharpoonup} \delta_0$.

Lemma 6.10 *Sei X normierter Raum. Ist X^* separabel, so ist auch X separabel.*

Beweis: Sei $\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\}$ dichte Teilmenge von X^*. Wir wählen nach Definition der Operatornorm zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in X$ mit

$$|x_n^*(x_n)| \ge \frac{1}{2}\|x_n^*\|\,, \quad \|x_n\| = 1\,.$$

Sei $Y = \operatorname{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Sei $x^* \in X^*$ beliebig mit $x^*|Y = 0$. Es folgt

$$\|x^* - x_n^*\| \geq |x^*(x_n) - x_n^*(x_n)| = |x_n^*(x_n)| \geq \frac{1}{2}\|x_n^*\| \geq \frac{1}{2}(\|x^*\| - \|x_n^* - x^*\|)\,. \tag{6.13}$$

Gehen wir auf beiden Seiten zum Infimum bezüglich n über, so folgt $\|x^*\| = 0$, also $x^* = 0$. Aus Folgerung 4.8 ergibt sich $\overline{Y} = X$ (andernfalls gäbe es ein $x^* \neq 0$ mit $x^*|\overline{Y} = 0$). Aus Satz 1.17 folgt nun, dass X separabel ist. □

Satz 6.11 *Sei X Banachraum. Ist X reflexiv, so ist die abgeschlossene Einheitskugel $K(0;1)$ in X schwach folgenkompakt.*

Beweis: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in X mit $\|x_n\| \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir setzen

$$Y = \overline{\operatorname{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}\,.$$

Dann ist Y separabel nach Satz 1.17 und reflexiv nach Satz 4.13. Da $Y^{**} \cong Y$, ist auch Y^{**} separabel. Aus Lemma 6.10 folgt nun, dass Y^* separabel ist. Die Folge $(J_Y x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in Y^{**} ist beschränkt in Y^{**} und hat daher nach Folgerung 6.9 eine schwach-$*$-konvergente Teilfolge $(J_Y x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, sei $J_Y x_{n_k} \overset{*}{\rightharpoonup} y^{**}$. Wir setzen $x = J_Y^{-1} y^{**}$. Für beliebiges $x^* \in X^*$ gilt dann mit $y^* = x^*|Y \in Y^*$

$$x^*(x_{n_k}) = y^*(x_{n_k}) = (J_Y x_{n_k})(y^*) \to y^{**}(y^*) = y^*(x) = x^*(x)\,,$$

also gilt $x_{n_k} \rightharpoonup x$. □

Die Umkehrung von Satz 6.11 gilt ebenfalls, das heißt: Ist X nicht reflexiv, so ist $K(0;1)$ nicht schwach folgenkompakt. (Ohne Beweis.)

Folgerung 6.12 *Sei X ein reflexiver Banachraum. Dann hat jede beschränkte Folge in X eine schwach konvergente Teilfolge.* □

Es erhebt sich die Frage, was man über Schwach-$*$-Kompaktheit in X^* aussagen kann, wenn X weder separabel noch reflexiv ist.

Satz 6.13 (Alaoglu)
Sei X ein normierter Raum. Dann ist die abgeschlossene Einheitskugel $K(0;1)$ in X^* schwach-$*$-kompakt. □

Um das zu verstehen, benötigt man einen allgemeineren Begriff als den des metrischen Raums, da es im allgemeinen keine Metrik auf $K(0;1)$ gibt, deren konvergente Folgen gerade die schwach-$*$-konvergenten Folgen sind. Dieser allgemeinere Begriff ist der des topologischen Raums. Im topologischen Raum wird nicht die Metrik, also der Abstand zweier Punkte, axiomatisiert, sondern das System der offenen Mengen. Kompaktheit bedeutet dann Überdeckungskompaktheit und ist im allgemeinen nicht zur Folgenkompaktheit äquivalent. Damit beschäftigen wir uns aber in dieser Vorlesung nicht.

Wir betrachten noch einmal das Approximationsproblem: Sei X normierter Raum, $K \subset X$, $x \in X$, gesucht ist $y \in K$ mit

$$\|x - y\| = \inf_{z\in K} \|x - z\|\,. \tag{6.14}$$

Satz 6.14 *Sei X reflexiver Banachraum, $K \subset X$ konvex, abgeschlossen und nichtleer. Dann gibt es zu jedem $x \in X$ ein $y \in K$ mit*

$$\|x - y\| = \inf_{z \in K} \|x - z\| . \tag{6.15}$$

Beweis: Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in K mit $\lim_{n\to\infty} \|x - y_n\| = \inf_{z\in K} \|x - z\| =: d$. Wegen $\|y_n\| \leq \|x - y_n\| + \|x\|$ ist $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und besitzt daher nach Folgerung 6.12 eine schwach konvergente Teilfolge, sei $y_{n_k} \rightharpoonup y$, $y \in X$. Nach Satz 6.6 ist K schwach folgenabgeschlossen, also ist $y \in K$. Da auch $x - y_{n_k} \rightharpoonup x - y$, folgt nach Lemma 6.3

$$\|x - y\| \leq \liminf_{k\to\infty} \|x - y_{n_k}\| = d ,$$

also gilt (6.15). □

Definition 6.15 (Strikte Konvexität)
Ein normierter Raum X heißt strikt konvex, falls für alle $x_1, x_2 \in X$ mit $\|x_1\| = \|x_2\| = 1$ und $x_1 \neq x_2$ gilt, dass

$$\left\| \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \right\| < 1 . \tag{6.16}$$

□

Satz 6.16 *Sei X normierter Raum, $K \subset X$ konvex, $x \in X$. Ist X strikt konvex, so gibt es höchstens ein $y \in K$ mit*

$$\|x - y\| = \inf_{z \in K} \|x - z\| . \tag{6.17}$$

Beweis: Seien $y, \tilde{y} \in K$ zwei verschiedene Lösungen von (6.17),

$$\|x - y\| = \|x - \tilde{y}\| = d .$$

Dann ist $d > 0$, da andernfalls $y = \tilde{y} = x$. Wir setzen

$$x_1 = \frac{1}{d}(x - y) , \quad x_2 = \frac{1}{d}(x - \tilde{y}) ,$$

in Definition 6.15, dann folgt

$$\frac{1}{d}\|x - \frac{1}{2}(y + \tilde{y})\| < 1 , \quad \frac{1}{2}(y + \tilde{y}) \in K ,$$

ein Widerspruch zur Minimalität von y und $\tilde{y}$. □

Mit der p-Norm versehene Vektorräume sind typischerweise strikt konvex für $1 < p < \infty$ und nicht strikt konvex für $p = 1$ und $p = \infty$ (Supremumsnorm). Das gilt etwa für $\mathbb{K}^n$, $\ell^p(\mathbb{K})$, $L^p(D; \mathbb{K})$, $C(D; \mathbb{K})$. Da $\mathbb{K}^n$, $\ell^p(\mathbb{K})$ und $L^p(D; \mathbb{K})$ für $1 < p < \infty$ auch reflexiv sind, folgt aus den Sätzen 6.14 und 6.16 die eindeutige Lösbarkeit des Approximationsproblems (6.14) in diesen Räumen für beliebige abgeschlossene konvexe Mengen K.

Umgekehrt gilt (ohne Beweis): Ist das Approximationsproblem eindeutig lösbar für beliebige abgeschlossene konvexe Teilmengen K von X, so ist X strikt konvex und reflexiv.

7 Sobolevräume

Die Sobolevräume ergeben sich, wenn man nach vollständigen Funktionenräumen mit L^p-Normen sucht, die sich nicht nur auf die Funktion selbst, sondern auch auf deren Ableitungen beziehen. Dazu ist es erforderlich, den Begriff der Ableitung zu verallgemeinern.

Sei zunächst $f : C[a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Ist $\varphi \in C_0^\infty(a,b)$, so gilt

$$\int_a^b f'(x)\varphi(x)\,dx = (f\varphi)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)\varphi'(t)\,dx = -\int_a^b f(x)\varphi'(x)\,dx\,. \tag{7.1}$$

Wir nehmen (7.1) als Ausgangspunkt zur Definition der schwachen Ableitung. Sind $f, g \in L^1(a,b)$, so heißt g schwache Ableitung von f auf (a,b), falls

$$\int_a^b g(x)\varphi(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\varphi'(x)\,dx\,, \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(a,b). \tag{7.2}$$

Da g, falls es existiert, durch (7.2) eindeutig bestimmt ist, nennen wir g “die” schwache Ableitung von f und bezeichnen sie mit f'.

Als Beispiel betrachten wir $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$. Es gilt

$$\begin{aligned}
-\int_{-1}^1 f(x)\varphi'(x)\,dx &= \int_{-1}^0 x\varphi'(x)\,dx - \int_0^1 x\varphi'(x)\,dx \\
&= x\varphi(x)\Big|_{x=-1}^{x=0} - \int_{-1}^0 \varphi(x)\,dx - x\varphi(x)\Big|_{x=0}^{x=1} + \int_0^1 \varphi(x)\,dx \\
&= \int_{-1}^1 \operatorname{sign}(x)\varphi(x)\,dx
\end{aligned}$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(a,b)$. Also hat f die schwache Ableitung $f'(x) = \operatorname{sign}(x)$.

Gehen wir einen Schritt weiter und berechnen wir

$$\begin{aligned}
-\int_{-1}^1 \operatorname{sign}(x)\varphi'(x)\,dx &= \int_{-1}^0 \varphi'(x)\,dx - \int_0^1 \varphi'(x)\,dx = (\varphi(0) - \varphi(-1)) - (\varphi(1) - \varphi(0)) \\
&= 2\varphi(0)\,,
\end{aligned} \tag{7.3}$$

so stellen wir fest, dass f' keine schwache Ableitung im Sinn von (7.2) hat, da es keine integrierbare Funktion g gibt mit

$$\int_{-1}^1 g(x)\varphi(x)\,dx = 2\varphi(0)\,, \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(a,b).$$

Um die rechte Seite als Ableitung der Signumfunktion betrachten zu können, ist eine weitere Verallgemeinerung erforderlich, die auf den Begriff der Distribution und der distributionellen Ableitung führt. Das untersuchen wir hier nicht.

Im Mehrdimensionalen betrachtet man analog schwache partielle Ableitungen. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Ist f stetig differenzierbar auf Ω, so besagt die Regel für partielle Integration im Mehrdimensionalen, dass

$$\int_\Omega g(x)\varphi(x)\,dx = -\int_\Omega f(x)\partial_i\varphi(x)\,dx\,, \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \tag{7.4}$$

gilt für $g = \partial_i f$. Entsprechend bezeichnet man g als schwache i-te partielle Ableitung von f in Ω, falls f lediglich integrierbar ist. Für höhere partielle Ableitungen verwenden wir die Notation $\partial^\alpha f$ mit dem Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$.

Definition 7.1 (Schwache Ableitung)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $1 \le p \le \infty$, sei $u \in L^p(\Omega)$ und α ein Multiindex. Ein $w \in L^p(\Omega)$ heißt ***schwache α-te Ableitung*** *von u, falls*

$$\int_\Omega w(x)\varphi(x)\,dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u(x)\partial^\alpha \varphi(x)\,dx\,, \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{7.5}$$

Wir bezeichnen sie mit $\partial^\alpha u$. □

Definition 7.2 (Sobolev-Raum)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Für $k \in \mathbb{N}$, $1 \le p \le \infty$ definieren wir

$$W^{k,p}(\Omega) = \{v : v \in L^p(\Omega),\, \partial^\alpha v \in L^p(\Omega) \text{ für alle } |\alpha| \le k\}\,. \tag{7.6}$$

□

Mit "$\partial^\alpha v \in L^p(\Omega)$" ist gemeint, dass die α-te schwache Ableitung im Sinne von Definition 7.1 existiert.

Für $k = 0$ bedeutet (7.6)

$$W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)\,. \tag{7.7}$$

Satz 7.3 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $1 \le p \le \infty$, dann ist $W^{k,p}(\Omega)$ ein Banachraum mit der Norm*

$$\|v\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\le k} \|\partial^\alpha v\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{|\alpha|\le k} \int_\Omega |\partial^\alpha v(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \le p < \infty\,, \tag{7.8}$$

$$\|v\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\le k} \|\partial^\alpha v\|_\infty\,, \quad p = \infty\,. \tag{7.9}$$

Beweis: Für $p < \infty$ folgt die Gültigkeit der Dreiecksungleichung aus

$$\begin{aligned} \|u+v\|_{W^{k,p}(\Omega)} &= \left(\sum_{|\alpha|\le k} \|\partial^\alpha u + \partial^\alpha v\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{|\alpha|\le k} (\|\partial^\alpha u\|_p + \|\partial^\alpha v\|_p)^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\le \left(\sum_{|\alpha|\le k} \|\partial^\alpha u\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{|\alpha|\le k} \|\partial^\alpha v\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} + \|v\|_{W^{k,p}(\Omega)}\,, \end{aligned}$$

alle anderen Normeigenschaften folgen unmittelbar aus den Definitionen. Sei nun $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $W^{k,p}(\Omega)$, wegen

$$\|\partial^\alpha u_n - \partial^\alpha u_m\|_p \le \|u_n - u_m\|_{W^{k,p}(\Omega)}$$

sind $(\partial^\alpha u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolgen im $L^p(\Omega)$ für alle $|\alpha| \le k$, also gibt es $u \in L^p(\Omega)$, $u_\alpha \in L^p(\Omega)$ mit

$$u_n \to u\,, \quad \partial^\alpha u_n \to u_\alpha \tag{7.10}$$

in $L^p(\Omega)$. Sei $p < \infty$, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ beliebig, dann folgt

$$\begin{aligned}\int_\Omega u(x)\partial^\alpha\varphi(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty}\int_\Omega u_n(x)\partial^\alpha\varphi(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega \partial^\alpha u_n(x)\varphi(x)\,dx \\ &= (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u_\alpha(x)\varphi(x)\,dx\,,\end{aligned}$$

also erfüllt u_α für alle $|\alpha| \le k$ die Bedingung in der Definition der schwachen Ableitung von u, das heißt, $\partial^\alpha u$ existiert und $\partial^\alpha u = u_\alpha$ für alle $|\alpha| \le k$. Also ist $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Der Beweis für $p = \infty$ erfolgt analog. □

Die Norm in $W^{k,p}(\Omega)$ ist so definiert, dass wir $W^{k,p}(\Omega)$ in ein Produkt von L^p-Räumen einbetten können. Wir setzen

$$X = \prod_{|\alpha|\le k} X_\alpha\,, \quad X_\alpha = L^p(\Omega)\,. \tag{7.11}$$

Ein Element $v \in X$ hat also die Form $v = (v_\alpha)_{|\alpha|\le k}$ mit $v_\alpha \in X_\alpha = L^p(\Omega)$.

Wir versehen X mit der p-Norm des Produktes,

$$\|v\|_X^p = \sum_{|\alpha|\le k} \|v_\alpha\|_{L^p(\Omega)}^p\,.$$

Gemäß Satz 1.7 ist X ein Banachraum. Weiterhin ist X für $1 < p < \infty$ reflexiv, da Produkte von reflexiven Banachräumen reflexiv sind, und für $1 \le p < \infty$ separabel, da Produkte von separablen metrischen Räumen separabel sind. Wir definieren

$$T : W^{k,p}(\Omega) \to X\,, \quad (Tv)_\alpha = \partial^\alpha v\,. \tag{7.12}$$

Lemma 7.4 *Es gilt*

$$\|Tv\|_X = \|v\|_{W^{k,p}(\Omega)}\,, \quad \textit{für alle } v \in W^{k,p}(\Omega). \tag{7.13}$$

$T(W^{k,p}(\Omega))$ ist ein abgeschlossener Unterraum von X. Für $1 < p < \infty$ ist $W^{k,p}(\Omega)$ reflexiv und für $1 \le p < \infty$ separabel.

Beweis: Die Gleichung (7.13) folgt unmittelbar aus der Definition der beiden Normen. Da $W^{k,p}(\Omega)$ vollständig ist nach Satz 7.3, ist auch $T(W^{k,p}(\Omega))$ vollständig und daher abgeschlossen in X. Sei nun $p < \infty$. $W^{k,p}(\Omega)$ ist reflexiv, da abgeschlossene Unterräume von reflexiven Räumen ebenfalls reflexiv sind nach Satz 4.13. $W^{k,p}(\Omega)$ ist separabel, da beliebige Teilmengen eines separablen metrischen Raumes ebenfalls separabel sind (Übung). □

Lemma 7.4 eröffnet eine weitere Möglichkeit, die Vollständigkeit von $W^{k,p}(\Omega)$ zu beweisen, indem man direkt zeigt, dass $W^{k,p}(\Omega)$ ein abgeschlossener Teilraum von X (und daher vollständig, da X vollständig) ist. Es genügt dann, von im $L^p(\Omega)$ konvergenten Folgen $u_n \to u$, $\partial^\alpha u_n \to u_\alpha$ auszugehen und wie im letzten Teil des Beweises von Satz 7.3 zu zeigen, dass $u_\alpha = \partial^\alpha u$ gilt.

Wir erinnern an die Standardglättungsfunktion $\eta_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und an die Regularisierung

$$v^\varepsilon = v * \eta_\varepsilon \,, \quad \varepsilon > 0 \,. \tag{7.14}$$

Lemma 7.5 *Seien $\Omega, U \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $U \subset\subset \Omega$, sei $v \in W^{k,p}(\Omega)$, $p < \infty$. Dann gilt für alle ε mit $0 < \varepsilon < \operatorname{dist}(U, \partial\Omega)$, dass $v^\varepsilon \in C^\infty(U) \cap W^{k,p}(U)$, und $v^\varepsilon \to v$ in $W^{k,p}(U)$ für $\varepsilon \to 0$.*

Beweis: Sei $\varepsilon < \operatorname{dist}(U, \partial\Omega)$. Nach Lemma 5.6 gilt $v^\varepsilon \in C^\infty(U)$. Weiterhin gilt für alle $y \in U$

$$\begin{aligned} \partial^\alpha v^\varepsilon(y) &= \int_\Omega \partial_y^\alpha \eta_\varepsilon(y-x) v(x)\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \partial_x^\alpha \eta_\varepsilon(y-x) v(x)\, dx \\ &= \int_\Omega \eta_\varepsilon(y-x) \partial^\alpha v(x)\, dx = (\eta_\varepsilon * \partial^\alpha v)(y) \,. \end{aligned} \tag{7.15}$$

Da $\partial^\alpha v \in L^p(\Omega)$, folgt $\partial^\alpha v^\varepsilon \in L^p(U)$ aus Lemma 5.6, und $\partial^\alpha v^\varepsilon \to \partial^\alpha v$ in $L^p(U)$ aus Lemma 5.8. $\square$

Damit die erste Gleichheit in (7.15) gilt, wird benötigt, dass $\varepsilon < \operatorname{dist}(U, \partial\Omega)$; für $U = \Omega$ gilt die Behauptung des Lemmas i.a. nicht.

Satz 7.6 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $v \in W^{k,p}(\Omega)$, $1 \le p < \infty$. Dann gibt es eine Folge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ mit $v_n \to v$ in $W^{k,p}(\Omega)$.*

Beweis: Wir definieren

$$U_j = \{x : x \in \Omega, \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{j} \text{ und } |x| < j\} \,, \quad V_j = U_{j+3} \setminus \overline{U}_{j+1} \,, \quad j \ge 1 \,, \tag{7.16}$$

sowie $V_0 = U_3$. Es gilt

$$\Omega = \bigcup_{j=0}^\infty V_j \,.$$

Sei $(\beta_j)_{j\ge 0}$ Zerlegung der Eins auf Ω mit

$$0 \le \beta_j \le 1 \,, \quad \beta_j \in C_0^\infty(V_j) \,, \quad \sum_{j=0}^\infty \beta_j = 1 \,. \tag{7.17}$$

Da $v \in W^{k,p}(\Omega)$, gilt auch $\beta_j v \in W^{k,p}(\Omega)$ (siehe Übung) und $\operatorname{supp}(\beta_j v) \subset V_j$. Sei nun $\delta > 0$ beliebig. Wir wählen $\varepsilon_j > 0$ hinreichend klein, so dass für

$$w_j = (\beta_j v) * \eta_{\varepsilon_j}$$

gilt (Lemma 7.5, angewendet auf $\beta_j v$)

$$\|w_j - \beta_j v\|_{W^{k,p}(\Omega)} \le 2^{-(j+1)}\delta\,, \tag{7.18}$$

$$\operatorname{supp}(w_j) \subset W_j := U_{j+4} \setminus \overline{U}_j\,, \quad j \ge 1\,, \quad W_0 := U_4\,. \tag{7.19}$$

Wir setzen

$$w = \sum_{j=0}^{\infty} w_j\,.$$

Nach Konstruktion sind auf jedem W_j nur endlich viele Summanden von 0 verschieden, also ist $w \in C^\infty(\Omega)$, da jedes $w_j \in C^\infty(\Omega)$ nach Lemma 7.5. Es folgt nun

$$\|w - v\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left\| \sum_{j=0}^{\infty} w_j - \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j v \right\|_{W^{k,p}(\Omega)} \le \sum_{j=0}^{\infty} \|w_j - \beta_j v\|_{W^{k,p}(\Omega)} \le \delta \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-(j+1)} = \delta\,.$$

Da $\delta > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung. □

Definition 7.7 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $1 \le p < \infty$, $k \in \mathbb{N}$. Wir definieren $W_0^{k,p}(\Omega) \subset W^{k,p}(\Omega)$ durch*

$$W_0^{k,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}\,, \tag{7.20}$$

wobei der Abschluss in der Norm von $W^{k,p}(\Omega)$ gebildet wird. □

$W_0^{k,p}(\Omega)$ ist ein abgeschlossener Unterraum von $W^{k,p}(\Omega)$ und damit ebenfalls ein Banachraum (mit der Norm von $W^{k,p}(\Omega)$). $W_0^{k,p}(\Omega)$ stellt einen Funktionenraum dar, dessen Elemente auf $\partial\Omega$ in einem "schwachen" Sinn gleich Null sind. (Es ist nämlich zunächst nicht klar, ob für ein allgemeines $v \in W^{k,p}(\Omega)$ die Aussage "$v = 0$ auf $\partial\Omega$" Sinn macht, da v nur bis auf eine Nullmenge im $\mathbb{R}^n$ definiert ist, aber $\partial\Omega$ normalerweise eine Nullmenge im $\mathbb{R}^n$ ist.)

Definition 7.8 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Für $k \in \mathbb{N}$ definieren wir*

$$H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)\,, \quad H_0^k(\Omega) = W_0^{k,2}(\Omega)\,. \tag{7.21}$$

□

Satz 7.9 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $k \in \mathbb{N}$. Dann sind $H^k(\Omega)$ und $H_0^k(\Omega)$ Hilberträume mit dem Skalarprodukt*

$$\langle u, v\rangle_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \le k} \langle \partial^\alpha u, \partial^\alpha v\rangle_{L^2(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \le k} \int_\Omega \partial^\alpha u(x) \cdot \overline{\partial^\alpha v(x)}\, dx\,, \tag{7.22}$$

und es gilt

$$\|v\|_{W^{k,2}(\Omega)} = \sqrt{\langle v, v\rangle_{H^k(\Omega)}}\,, \quad v \in H^k(\Omega)\,. \tag{7.23}$$

Beweis: Die Eigenschaften des Skalarprodukts folgen unmittelbar aus den entsprechenden Eigenschaften des Skalarprodukts im $L^2(\Omega)$. Offensichtlich gilt (7.23), und nach Satz 7.3 ist $H^k(\Omega)$ vollständig. □

Lemma 7.10 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $1 \le p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$. Sei $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Dann gilt für alle $h \in \mathbb{R}^n$*

$$\int_\Omega |u(x+h) - u(x)|^p \, dx \le \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p \|h\|_q^p \,, \tag{7.24}$$

wobei $u = 0$ gesetzt wird außerhalb von Ω.

Beweis: Wir setzen $g(t) = u(x + th)$. Es gilt

$$u(x+h) - u(x) = g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t) \, dt = \int_0^1 \langle \nabla u(x + th, h\rangle \; dt$$

und weiter, mit der Hölderschen Ungleichung im $\mathbb{K}^n$,

$$\begin{aligned} |u(x+h) - u(x)| &\le \int_0^1 |\langle \nabla u(x+th), h\rangle| \, dt \le \int_0^1 \|\nabla u(x+th)\|_p \|h\|_q \, dt \\ &\le \int_0^1 \|\nabla u(x+th)\|_p \, dt \cdot \|h\|_q \,. \end{aligned} \tag{7.25}$$

Im Fall $p = 1$ ergibt sich (7.24) durch Integration über Ω. Im Fall $p > 1$ folgt

$$\begin{aligned} \int_\Omega |u(x+h) - u(x)|^p \, dx &\le \int_\Omega \Big(\int_0^1 \|\nabla u(x+th)\|_p \, dt \cdot \|h\|_q \Big)^p \, dx \\ &\le \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^1 \|\nabla u(x+th)\|_p^p \, dt \cdot \underbrace{\Big(\int_0^1 1^q \, dt \Big)^{p/q}}_{=1} \, dx \cdot \|h\|_q^p \\ &= \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla u(x+th)\|_p^p \, dx \, dt \cdot \|h\|_q^p \\ &= \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p \cdot \|h\|_q^p \,, \end{aligned}$$

da die Norm des Gradienten auf dem $\mathbb{R}^n$ sich bei Translation um th nicht ändert und da $\nabla u = 0$ außerhalb von Ω. □

Satz 7.11 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $1 \le p < \infty$, sei F eine beschränkte Teilmenge von $W_0^{1,p}(\Omega)$. Dann ist F relativ kompakt in $L^p(\Omega)$.*

Beweis: Sei (u_n) eine Folge in F. Gemäß Definition von $W_0^{1,p}(\Omega)$ finden wir eine Folge (v_n) in $C_0^\infty(\Omega)$ mit

$$\|v_n - u_n\|_{W^{1,p}(\Omega)} \le \frac{1}{n} \,. \tag{7.26}$$

Also ist auch (v_n) beschränkt in $W^{1,p}(\Omega)$, und daher sind sowohl (v_n) als auch (∇v_n) beschränkt in $L^p(\Omega)$. Aus Lemma 7.10 folgt

$$\int_\Omega |v_n(x+h) - v_n(x)|^p \, dx \le \|\nabla v_n\|_{L^p(\Omega)}^p \|h\|_q^p \le C\|h\|_q^p$$

für eine von n unabhängige Konstante C. Daraus ergibt sich

$$\lim_{h\to 0} \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega |v_n(x+h) - v_n(x)|^p \, dx = 0 \,.$$

Nach dem Satz von Fréchet-Riesz-Kolmogorov ist (v_n) relativ kompakt in $L^p(\Omega)$. Es gibt also ein $u \in L^p(\Omega)$ und eine Teilfolge (v_{n_k}) mit $v_{n_k} \to u$ in $L^p(\Omega)$. Wegen (7.26) gilt auch $u_{n_k} \to u$. Da (u_n) eine beliebige Folge war, ist F relativ kompakt in $L^p(\Omega)$. □

Der entsprechende Satz für $W^{1,p}(\Omega)$ kann auf Satz 7.11 zurückgeführt werden, erfordert aber zusätzliche Konstruktionen. Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, und ist $\partial\Omega$ hinreichend glatt, so kann man zu einer beliebig vorgegebenen offenen und beschränkten Menge $V \subset \mathbb{R}^n$ mit $\Omega \subset\subset V$ einen linearen und stetigen Fortsetzungsoperator

$$E : W^{1,p}(\Omega) \to W_0^{1,p}(V)$$

konstruieren mit $(Eu)|\Omega = u$ für alle $u \in W^{1,p}(\Omega)$. (Siehe etwa Evans, Partial Differential Equations.) Ist nun F beschränkt in $W^{1,p}(\Omega)$, so ist $E(F)$ beschränkt in $W_0^{1,p}(V)$. Für jede Folge (u_n) in $W^{1,p}(\Omega)$ hat (Eu_n) nach Satz 7.11 eine gegen ein $w \in L^p(V)$ konvergente Teilfolge, insbesondere konvergiert die entsprechende Teilfolge (u_{n_k}) gegen $u = w|\Omega \in L^p(\Omega)$. Mit diesen Argumenten beweist man den folgenden Satz.

Satz 7.12 (Rellich)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, mit hinreichend glattem Rand, sei $1 \leq p < \infty$. Ist F eine beschränkte Teilmenge von $W^{1,p}(\Omega)$, so ist F relativ kompakt in $L^p(\Omega)$. □

8 Kompakte Operatoren

Definition 8.1 (Kompakter Operator)
Seien X, Y Banachräume. Eine lineare Abbildung $T : X \to Y$ heißt kompakt, oder auch kompakter Operator, falls das Bild $T(K(0;1))$ der abgeschlossenen Einheitskugel $K(0;1)$ relativ kompakt ist in Y. □

Da eine lineare Abbildung stetig ist genau dann, wenn das Bild der Einheitskugel beschränkt ist, ist jeder kompakte Operator stetig. Mit

$$K(X;Y) = \{T : T \in L(X;Y),\ T \text{ kompakter Operator}\} \tag{8.1}$$

bezeichnen wir die Menge der kompakten Operatoren von X nach Y, und setzen

$$K(X) = K(X;X)\,. \tag{8.2}$$

Nach dem eben Gesagten gilt $K(X;Y) \subset L(X;Y)$.

Lemma 8.2 *Seien X, Y Banachräume, $T : X \to Y$ linear. Dann sind äquivalent:*

(i) T ist kompakt.

(ii) $T(B)$ ist relativ kompakt in Y für jede beschränkte Teilmenge $B \subset X$.

(iii) Für jede beschränkte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X enthält die Bildfolge $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine in Y konvergente Teilfolge.

Beweis: "(i)⇒(ii)": Ist $T(K(0;1))$ relativ kompakt, so auch $T(K(0;R)) = RT(K(0;1))$ für alle $R > 0$. Ist B beschränkt, so ist $T(B) \subset T(K(0;R))$ für hinreichend großes R, also $\overline{T(B)}$ kompakt als abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge $\overline{T(K0;R)})$.
"(ii)⇒(iii)": Unmittelbar klar. "(iii)⇒(i)": Übung. □

Kompakte Operatoren bilden schwach konvergente Folgen auf stark konvergente Folgen ab.

Satz 8.3 *Seien X, Y Banachräume, sei $T : X \to Y$ kompakter linearer Operator. sei (x_n) eine beschränkte Folge in X. Dann gilt:*
(i) $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat eine in Y stark konvergente Teilfolge.
(ii) Aus $x_n \rightharpoonup x \in X$ folgt $Tx_n \to Tx$.

Beweis: Übungsaufgabe. □

Als Beispiel betrachten wir

$$T : C[0,1] \to C[0,1]\,, \quad (Tx)(t) = \int_0^1 k(s,t)x(s)\,ds\,, \tag{8.3}$$

wobei $k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig ist. In einer Übungsaufgabe ist gezeigt worden, dass das Bild der Einheitskugel in $C[0,1]$ unter T relativ kompakt ist in $C[0,1]$. Also ist T kompakt.

Als zweites Beispiel betrachten wir nochmals den durch

$$(Tx)(t) = \int_0^1 k(s,t)x(s)\,ds \tag{8.4}$$

definierten Integraloperator, diesmal als Operator von $L^2(0,1)$ nach $L^2(0,1)$.

Satz 8.4 *Sei $k \in L^2(\Omega)$ mit $\Omega = (0,1)\times(0,1)$. Dann wird durch (8.4) ein linearer stetiger Operator $T : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ definiert mit $\|T\| \le \|k\|_{L^2(\Omega)}$.*

Beweis: Für $x \in L^2(0,1)$ gilt mit Cauchy-Schwarz im $L^2(0,1)$

$$\begin{aligned}
\|Tx\|_2^2 &= \int_0^1 \Big| \int_0^1 k(s,t)x(s)\,ds\Big|^2 dt \le \int_0^1 \Big(\int_0^1 |k(s,t)|^2\,ds \cdot \int_0^1 |x(s)|^2\,ds\Big)\,dt \\
&= \int_0^1 \int_0^1 |k(s,t)|^2\,ds\,dt \cdot \int_0^1 |x(s)|^2\,ds \\
&= \|k\|_{L^2(\Omega)}^2 \cdot \|x\|_2^2\,,
\end{aligned}$$

also

$$\|Tx\|_2 \le \|k\|_{L^2(\Omega)} \|x\|_2\,, \quad \text{für alle } x \in L^2(\Omega),$$

und damit die Behauptung. Die Wohldefiniertheit der Integrale folgt aus dem Satz von Fubini bzw. dessen Varianten. □

Satz 8.5 *Der in Satz 8.4 betrachtete Operator $T : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ ist kompakt.*

Beweis: Seien $x \in L^2(0,1)$ und $h \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir setzen $k(s,t) = 0$ und entsprechend $(Tx)(t) = 0$ für $t \notin (0,1)$. Es gilt dann analog zum Beweis von Satz 8.4

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |(Tx)(t+h) - (Tx)(t)|^2\,dt &= \int_0^1 \Big| \int_0^1 (k(s,t+h) - k(s,t))x(s)\,ds\Big|^2\,dt \\
&\le \int_0^1 \int_0^1 |k(s,t+h) - k(s,t)|^2\,ds \cdot \int_0^1 |x(s)|^2\,ds\,dt \qquad (8.5)\\
&= \int_0^1 \int_0^1 |k(s,t+h) - k(s,t)|^2\,ds\,dt \cdot \|x\|_2^2\,.
\end{aligned}$$

Aus Satz 5.9, angewendet auf k in $L^2(\Omega)$, folgt

$$\lim_{h\to 0} \int_0^1 \int_0^1 |k(s,t+h) - k(s,t)|^2\,ds\,dt = 0\,.$$

Aus (8.5) folgt nun

$$\lim_{h\to 0} \sup_{\|x\|_2 \le 1} \int_0^1 |(Tx)(t+h) - (Tx)(t)|^2\,dt = \lim_{h\to 0} \int_0^1 \int_0^1 |k(s,t+h) - k(s,t)|^2\,ds\,dt = 0\,.$$

Aus dem Satz von Fréchet-Riesz-Kolmogorov (Satz 5.10) folgt nun, dass das Bild der Einheitskugel, also $\{Tx : \|x\|_2 \le 1\}$, relativ kompakt ist in $L^2(0,1)$. □

Unmittelbar aus Satz 8.3 ergibt sich

Folgerung 8.6 *Sei T der in Satz 8.4 betrachtete Operator. Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $L^2(0,1)$, so hat $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine in $L^2(0,1)$ stark konvergente Teilfolge.* □

Als drittes Beispiel betrachten wir die Einbettung

$$I : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\Omega)\,. \tag{8.6}$$

Sie ist kompakt nach dem Satz von Rellich (Satz 7.12). Wiederum ergibt sich aus Satz 8.3, dass jede in der Norm von $W^{1,p}(\Omega)$ beschränkte Folge eine im $L^p(\Omega)$ stark konvergente Teilfolge hat.

Ist $T \in L(X;Y)$ und

$$\dim(X) < \infty\,, \quad \text{oder} \quad \dim(T(X)) < \infty\,, \tag{8.7}$$

so ist $T(K(0;1))$ als beschränkte Teilmenge eines endlichdimensionalen Raums relativ kompakt, also T kompakt.

Lemma 8.7 *Seien X, Y, Z Banachräume, $T \in L(X;Y)$, $S \in L(Y;Z)$. Ist T kompakt oder S kompakt, so ist auch $S \circ T$ kompakt.*

Beweis: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkte Folge in X. Ist T kompakt, so hat $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(Tx_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, und da S stetig ist, ist auch $(S(Tx_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent. Ist S kompakt, so hat die beschränkte Folge $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (T ist linear und stetig) eine konvergente Teilfolge $(S(Tx_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$. □

Satz 8.8 *Seien X, Y Banachräume. Dann ist $K(X;Y)$ ein abgeschlossener Unterraum von $L(X;Y)$.*

Beweis: Sei $(T_m)_{m\in\mathbb{N}}$ Folge in $K(X;Y)$ mit $T_m \to T$, $T \in L(X;Y)$. Wir wollen zeigen, dass T kompakt ist. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkte Folge in X, sei $\|x_n\| \le C$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir wählen eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, so dass $(T_m x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent ist in Y für alle $m \in \mathbb{N}$. Das erreichen wir mit dem Diagonalisierungsargument, wie es etwa im Beweis von Satz 6.8 ausgeführt wurde. Im zweiten Schritt zeigen wir, dass $(Tx_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist. Sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen $m \in \mathbb{N}$ mit $\|T - T_m\| \le \varepsilon$ und $K > 0$ mit

$$\|T_m x_{n_k} - T_m x_{n_j}\| < \varepsilon\,, \quad \text{für alle } k, j \ge K.$$

Es folgt für alle $j, k \ge K$

$$\begin{aligned} \|Tx_{n_k} - Tx_{n_j}\| &= \|Tx_{n_k} - T_m x_{n_k}\| + \|T_m x_{n_k} - T_m x_{n_j}\| + \|T_m x_{n_j} - Tx_{n_j}\| \\ &\le \|T - T_m\|\,\|x_{n_k}\| + \|T_m x_{n_k} - T_m x_{n_j}\| + \|T_m - T\|\,\|x_{n_j}\| \\ &\le C\varepsilon + \varepsilon + C\varepsilon = (2C+1)\varepsilon\,, \end{aligned}$$

also ist $(Tx_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge und damit konvergent, da Y vollständig ist. □

Folgerung 8.9 *Seien X, Y Banachräume, sei $T : X \to Y$ linear und stetig, es gebe eine Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ linearer stetiger Operatoren $T_n : X \to Y$ mit*

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n - T\| = 0\,, \quad \dim(T_n(X)) < \infty \quad \textit{für alle } n \in \mathbb{N}. \tag{8.8}$$

Dann ist T kompakt.

Beweis: Da jeder lineare stetige Operator mit endlichdimensionalem Bild kompakt ist, folgt die Behauptung unmittelbar aus Satz 8.8. $\square$

Es stellt sich die Frage, ob jeder kompakte Operator $T : X \to Y$ zwischen Banachräumen X und Y sich als Grenzwert einer Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Operatoren $T_n : X \to Y$ mit endlichdimensionalem Bild darstellen lässt. Das ist nicht der Fall, P. Enflo hat 1973 ein Gegenbeispiel publiziert.

9 Adjungierte Operatoren

Seien X, Y normierte Räume, sei $T : X \to Y$ linear und stetig. Ist $y^* \in Y^*$, so wird durch

$$T^* y^* = y^* \circ T \tag{9.1}$$

eine lineare stetige Abbildung $T^* y^* \in X^*$ definiert. Offensichtlich ist $T^* : Y^* \to X^*$ linear.

Lemma 9.1 *T^* ist stetig, und es gilt $\|T^*\| = \|T\|$.*

Beweis: Es gilt

$$\sup_{\|y^*\| \le 1} \|T^* y^*\| = \sup_{\|y^*\| \le 1} \sup_{\|x\| \le 1} |(T^* y^*)(x)| = \sup_{\|x\| \le 1} \sup_{\|y^*\| \le 1} |y^*(Tx)| = \sup_{\|x\| \le 1} \|Tx\| = \|T\| .$$

Die vorletzte Gleichung gilt wegen Folgerung 4.7. □

Definition 9.2 (Adjungierter Operator)
Seien X, Y normierte Räume, sei $T \in L(X; Y)$. Der durch (9.1) definierte Operator $T^* \in L(Y^*; X^*)$ heißt der zu T adjungierte Operator. □

Lemma 9.3 *Die Zuordnung $T \mapsto T^*$ definiert eine isometrische lineare Abbildung von $L(X; Y)$ nach $L(Y^*; X^*)$.*

Beweis: Die Linearität folgt unmittelbar aus der Definition, die Eigenschaft der Isometrie aus Lemma 9.1. □

Im allgemeinen ist die Abbildung $T \mapsto T^*$ nicht surjektiv. (Im Buch von D. Werner findet sich ein Gegenbeispiel.)

Als Beispiel betrachten wir den Integraloperator $T : L^2(0, 1) \to L^2(0, 1)$,

$$(T\xi)(t) = \int_0^1 k(s, t)\xi(s)\, ds , \quad k \in L^2((0, 1) \times (0, 1)) . \tag{9.2}$$

Für den adjungierten Operator $T^* : L^2(0, 1)^* \to L^2(0, 1)^*$ gilt

$$(T^* y^*)(\xi) = y^*(T\xi) . \tag{9.3}$$

Gemäß der Isometrie zwischen $L^2(0, 1)^*$ und $L^2(0, 1)$, siehe Kapitel 1, kann y^* dargestellt werden durch ein $y \in L^2(0, 1)$,

$$y^*(T\xi) = \int_0^1 (T\xi)(t)y(t)\, dt . \tag{9.4}$$

Es folgt dann

$$(T^* y^*)(\xi) = \int_0^1 (T\xi)(t)y(t)\, dt = \int_0^1 \int_0^1 k(s, t)\xi(s)\, ds\, y(t)\, dt \tag{9.5}$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 k(s, t)y(t)\, dt\, \xi(s)\, ds , \tag{9.6}$$

das heißt, $x^* = T^*y^*$ wird dargestellt durch die Funktion

$$x(s) = \int_0^1 k(s,t)y(t)\,dt\,, \quad \text{oder} \qquad x(t) = \int_0^1 k(t,s)y(s)\,ds\,. \tag{9.7}$$

Zusammenfassend sehen wir: Ist T durch die Kernfunktion "$k = k(s,t)$" gegeben, so hat T^* die Kernfunktion "$k = k(t,s)$".

Zweimaliges Anwenden von Definition 9.2 liefert zu gegebenem $T \in L(X;Y)$ den linearen und stetigen Operator

$$T^{**} : X^{**} \to Y^{**}\,.$$

Lemma 9.4 *Seien X, Y normierte Räume, sei $T \in L(X;Y)$. Dann gilt*

$$T^{**} \circ J_X = J_Y \circ T\,. \tag{9.8}$$

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned}[(T^{**} \circ J_X)(x)](y^*) &= [T^{**}(J_X x)](y^*) = [(J_X x) \circ T^*](y^*) = (J_X x)(T^* y^*) \\ &= (T^* y^*)(x) = y^*(Tx) = [J_Y(Tx)](y^*) = [(J_Y \circ T)(x)](y^*)\,.\end{aligned}$$

□

Satz 9.5 *Seien X, Y Banachräume, sei $T : X \to Y$ linear und stetig. Dann gilt: T ist kompakt genau dann, wenn T^* kompakt ist.*

Beweis: Sei T kompakt. Die durch $K = \overline{T(K(0;1))}$ definierte Teilmenge von Y ist dann kompakt. Sei nun $(y_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in Y^*, es gelte etwa

$$\|y_n^*\|_{Y^*} \le M\,. \tag{9.9}$$

Wir betrachten nun die Folge $(y_n^*|K)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C(K)$. Diese Folge ist beschränkt, da

$$\|y_n^*|K\|_\infty = \sup_{y\in K} |y_n^*(y)| \le \|y_n^*\|_{Y^*} \sup_{y\in K} \|y\| \le M \sup_{y\in K} \|y\| < \infty\,. \tag{9.10}$$

Weiter gilt für beliebige $y, \tilde{y} \in K$

$$|y_n^*(y) - y_n^*(\tilde{y})| \le \|y_n^*\|_{Y^*}\, \|y - \tilde{y}\|_Y \le M\|y - \tilde{y}\|_Y\,, \tag{9.11}$$

also ist $(y_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichgradig stetig. Aus dem Satz von Arzela-Ascoli folgt, dass es eine auf K gleichmäßig konvergente Teilfolge $(y_{n_k}^*|K)_{k\in\mathbb{N}}$ gibt. Es folgt

$$\|T^* y_{n_k}^* - T^* y_{n_l}^*\| = \sup_{\|x\|\le 1} |y_{n_k}^*(Tx) - y_{n_l}^*(Tx)| = \sup_{y\in K} |y_{n_k}^*(y) - y_{n_l}^*(y)| = \|(y_{n_k}^* - y_{n_l}^*)|K\|_\infty\,, \tag{9.12}$$

wobei die mittlere Gleichheit gilt, da $T(K(0;1))$ dicht ist in K. Also ist $(T^* y_{n_k}^*)_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge, daher konvergent. Damit ist T^* kompakt. Sei nun umgekehrt T^* kompakt. Nach dem eben Bewiesenen ist T^{**} kompakt, daher nach Lemma 8.7 auch $T^{**} \circ J_X$ und nach Lemma 9.4 auch $J_Y \circ T$. Sei nun $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in X. Dann hat $((J_Y \circ T)x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge, sei $(J_Y \circ T)x_{n_k} \to y^{**} \in Y^{**}$. Da Y Banachraum ist, ist $J_Y(Y)$ abgeschlossen, also gibt es ein $y \in Y$ mit $y^{**} = J_Y y$. Da J_Y isometrisch ist, folgt $Tx_{k_n} \to y$. Wir haben also eine konvergente Teilfolge gefunden; nach Lemma 8.2 ist T kompakt. □

Satz 9.6 *Seien X, Y normierte Räume, sei $T : X \to Y$ linear und stetig. Dann gilt*

$$\overline{T(X)} = (\ker T^*)^o\,, \tag{9.13}$$

wobei

$$(\ker T^*)^o = \{y : y \in Y,\, y^*(y) = 0 \text{ } \textit{für alle } y^* \in \ker T^*\}\,. \tag{9.14}$$

Beweis: "$\subset$": Sei zunächst $y \in T(X)$, also $y = Tx$ für ein $x \in X$. Für beliebiges $y^* \in \ker T^*$ gilt $y^*(y) = y^*(Tx) = (T^*y^*)(x) = 0$. Es folgt $T(X) \subset (\ker T^*)^o$, und da $(\ker T^*)^o$ abgeschlossen ist, wie man leicht sieht, folgt die Behauptung.
"$\supset$": Sei $y \in Y$, $y \notin \overline{T(X)}$. Wir wählen gemäß Folgerung 4.8 ein $y^* \in Y^*$ mit $y^* = 0$ auf $\overline{T(X)}$ und $y^*(y) \neq 0$. Für alle $x \in X$ gilt $0 = y^*(Tx) = (T^*y^*)(x)$, also $T^*y^* = 0$ und damit $y^* \in \ker T^*$. Da $y^*(y) \neq 0$, folgt $y \notin (\ker T^*)^o$. $\square$

10 Komplemente, Faktorisierung

Wir erinnern daran: Ist X normierter Raum, U abgeschlossener Unterraum von X, so definiert

$$\|[x]\| = \inf_{z \in U} \|x - z\| = \inf_{\tilde{x} \in [x]} \|\tilde{x}\| \tag{10.1}$$

eine Norm auf X/U, und die Quotientenabbildung

$$Q : X \to X/U\,, \quad Q(x) = [x]\,, \tag{10.2}$$

ist linear und stetig und hat Norm $\|Q\| = 1$.

Satz 10.1 *Seien X, Y normierte Räume, U abgeschlossener Unterraum von X, sei $T \in L(X;Y)$ mit $T|U = 0$. Dann gibt es genau ein $\tilde{T} \in L(X/U;Y)$ mit $\tilde{T} \circ Q = T$, und es gilt $\|\tilde{T}\| = \|T\|$. Ist $U = \ker T$, so ist $\tilde{T}$ injektiv.*

Beweis: Wir definieren

$$\tilde{T} : X/U \to Y\,, \quad \tilde{T}([x]) = T(x)\,. \tag{10.3}$$

$\tilde{T}$ ist wohldefiniert, da für $\tilde{x} \in [x]$ gilt, dass $\tilde{x} - x \in U$, also

$$T(\tilde{x}) - T(x) = T(\tilde{x} - x) = 0\,.$$

Direktes Nachrechnen zeigt, dass $\tilde{T}$ linear ist. Weiter gilt

$$\|T(x)\| = \|T(\tilde{x})\| \le \|T\|\,\|\tilde{x}\|\,, \quad \text{für alle } \tilde{x} \in [x],$$

also folgt

$$\|\tilde{T}([x])\| \le \inf_{\tilde{x} \in [x]} \|T\|\,\|\tilde{x}\| = \|T\|\,\|[x]\|\,,$$

also gilt $\|\tilde{T}\| \le \|T\|$ und umgekehrt auch

$$\|T\| = \|\tilde{T} \circ Q\| \le \|\tilde{T}\|\,\|Q\| = \|\tilde{T}\|\,.$$

Ist $U = \ker T$, so gilt nach (10.3), dass

$$\tilde{T}([x]) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in U \quad \Leftrightarrow \quad [x] = 0\,,$$

also $\ker \tilde{T} = 0$. □

Folgerung 10.2 *Seien X, Y Banachräume, sei $T : X \to Y$ linear und stetig, sei $T(X)$ abgeschlossen. Dann gilt*

$$X/\ker T \simeq T(X)\,, \tag{10.4}$$

und die durch $\tilde{T} \circ Q = T$ definierte Abbildung $\tilde{T}$ ist ein Isomorphismus zwischen $X/\ker T$ und $T(X)$.

Beweis: Nach Satz 10.1 ist $\tilde{T} : X/\ker T \to T(X)$ bijektiv, linear und stetig. Da Y Banachraum und $T(X)$ abgeschlossener Unterraum von Y ist, ist $T(X)$ ebenfalls Banachraum. Aus Folgerung 3.8 erhalten wir, dass $\tilde{T}^{-1}$ ebenfalls stetig ist. □

Folgerung 10.3 *Seien X, Y Banachräume, sei $T : X \to Y$ linear, stetig und surjektiv. Dann gilt*

$$X/\ker T \simeq Y\,. \tag{10.5}$$

Beweis: Folgt unmittelbar aus Folgerung 10.2. □

Satz 10.4 *Seien X, Y normierte Räume, sei $T : X \to Y$ linear und stetig, sei $T(X)$ abgeschlossen in Y. Dann gilt*

$$(Y/T(X))^* \cong \ker T^*\,. \tag{10.6}$$

Beweis: Sei $z^* \in (Y/T(X))^*$. Wir setzen $y^* = z^* \circ Q$, wobei $Q : Y \to Y/T(X)$ die Quotientenabbildung ist. Es ist dann $y^* \in Y^*$, $y^* = 0$ auf $T(X)$, also $T^* y^* = 0$ und damit $y^* \in \ker T^*$. Wir definieren

$$I : (Y/T(X))^* \to \ker T^*\,, \quad Iz^* = z^* \circ Q\,. \tag{10.7}$$

Offensichtlich ist I linear und stetig, und aus Satz 10.1, angewendet auf $(y^*, z^*, T(X))$ anstelle von $(T, \tilde{T}, U)$, folgt $\|Iz^*\| = \|z^*\|$ für alle z^*, sowie die Surjektivität von I: Ist $y^* \in \ker T^*$, so ist $y^* \circ T = 0$, also $y^*|T(X) = 0$, und es gilt $y^* = z^* \circ Q = Iz^*$ für ein geeignetes $z^* \in (Y/T(X))^*$. □

Definition 10.5 (Komplement)
*Sei X Vektorraum, U Unterraum von X. Ein Unterraum V von X heißt ein **algebraisches Komplement** von U, falls gilt*

$$U \cap V = \{0\}\,, \quad U + V = X\,. \tag{10.8}$$

*Ist X Banachraum und sind U und V abgeschlossen, so heißt V ein **Komplement** von U. Wir sagen, dass X die direkte Summe von U und V ist, geschrieben*

$$X = U \oplus V\,. \tag{10.9}$$

□

In der Linearen Algebra ergibt sich folgender Sachverhalt: Aus dem Basisergänzungssatz folgt, dass jeder Unterraum U eines Vektorraums ein algebraisches Komplement V hat. Ist nämlich $(u_i)_{i\in I}$ Basis von U, so können wir sie durch Hinzunahme weiterer geeigneter Vektoren $(v_j)_{j\in J}$ zu einer Basis von X ergänzen, und

$$V = \operatorname{span}\{v_j : j \in J\}$$

ist dann ein algebraisches Komplement von U. Es ist nicht eindeutig bestimmt, aber für jedes algebraische Komplement V liefert die Quotientenabbildung $Q : X \to X/U$ eine bijektive lineare Abbildung

$$Q|V : V \to X/U\,, \tag{10.10}$$

und umgekehrt ist jeder Unterraum V, für den $Q|V$ bijektiv ist, ein algebraisches Komplement. Hieraus erhalten wir wir bijektive lineare Abbildungen

$$U \times X/U \to U \times V \to X\,, \tag{10.11}$$

letztere ist gegeben durch $(u, v) \mapsto u + v$.

In der Funktionalanalysis interessiert man sich für den zweiten Fall, nämlich für Zerlegungen $X = U \oplus V$, bei denen X, U und V Banachräume sind.

Ist X Hilbertraum, so hat jeder abgeschlossene Unterraum ein Komplement, nämlich $U^\perp$. Ist X lediglich Banachraum, so braucht das nicht zu gelten, beispielsweise hat $C[0, 1]$ kein abgeschlossenes Komplement in $L^\infty(0, 1)$, was wir nicht beweisen wollen.

Satz 10.6 *Sei X Banachraum, U Unterraum von X mit* $\dim(U) < \infty$*. Dann hat U ein Komplement.*

Beweis: Sei $\dim(U) = n$, sei $\{x_1, \ldots, x_n\}$ Basis von U, sei $\{u_1^*, \ldots, u_n^*\}$ die zugehörige duale Basis, das heißt, die durch

$$u_i^*(x_j) = \delta_{ij}$$

definierte Basis von U^*. Wir wählen gemäß Satz 4.5 (Hahn-Banach) Fortsetzungen $x_i^* \in X^*$ von u_i^* und definieren

$$P : X \to U\,, \quad Px = \sum_{i=1}^{n} x_i^*(x) x_i\,. \tag{10.12}$$

P ist linear und stetig, und $V = \ker P$ ist daher abgeschlossener Unterraum von X. Wir zeigen, dass V ein Komplement von U ist. Ist $z \in U \cap V$, so gilt $Pz = 0$, also $0 = x_i^*(z) = u_i^*(z)$ für alle i und damit $z = 0$. Ist nun $x \in X$ beliebig, so gilt

$$x = Px + (x - Px)\,.$$

Da $Px_j = x_j$ für alle j, folgt $P|U = id|U$, also $P \circ P = P$,

$$P(x - Px) = Px - PPx = 0\,,$$

also $x - Px \in V$ und, da x beliebig war, $X = U + V$. □

Definition 10.7 (Kodimension)
Sei X Vektorraum, U Unterraum von X. Dann heißt $\dim(X/U)$ *die Kodimension von U in X, geschrieben* $\operatorname{codim}(U)$. □

Wegen (10.10) gilt offensichtlich

$$\operatorname{codim}(U) = \dim(V) \tag{10.13}$$

für jedes Komplement V von U.

Satz 10.8 *Sei X Banachraum, sei U ein abgeschlossener Unterraum von X mit* $\operatorname{codim}(U) < \infty$*. Dann hat U ein Komplement.*

Beweis: Sei V ein algebraisches Komplement von U in X. Dann ist $\dim(V) = \operatorname{codim}(U) < \infty$ und daher V abgeschlossen. □

Satz 10.9 *Seien X, Y Banachräume, sei $T : X \to Y$ linear und stetig, sei die Kodimension von $T(X)$ in Y endlich. Dann ist $T(X)$ abgeschlossen in Y.*

Beweis: Wir nehmen zunächst an, dass T injektiv ist. Sei $\operatorname{codim}(T(X)) = n$, seien $y_1, \ldots, y_n \in Y$, so dass $\{[y_1], \ldots, [y_n]\}$ Basis ist von $Y/T(X)$. Wir definieren

$$S : \mathbb{K}^n \times X \to Y\,, \quad S(\alpha, x) = Tx + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i\,. \tag{10.14}$$

S ist linear und stetig. S ist injektiv, da aus $S(\alpha, x) = 0$ folgt

$$0 = [S(\alpha, x)] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i [y_i]\,,$$

also $\alpha_i = 0$ für alle i, also $Tx = 0$ und damit $x = 0$. S ist surjektiv: Ist $y \in Y$, so gibt es $\alpha_i \in \mathbb{K}$ mit

$$[y] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i [y_i]\,, \quad \text{also} \quad \left[y - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i \right] = 0\,, \quad \text{also} \quad y - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i \in T(X)\,.$$

Damit ist S bijektiv. Aus Folgerung 3.8 folgt, dass S^{-1} stetig ist. Also ist $T(X) = S(\{0\} \times X)$ abgeschlossen. Sei nun T beliebig. Wir betrachten die durch $\tilde{T} \circ Q = T$ definierte lineare stetige Abbildung $\tilde{T} : X/\ker T \to Y$. $\tilde{T}$ ist injektiv nach Satz 10.1, also ist nach dem eben Bewiesenen $T(X) = \tilde{T}(X/\ker T)$ abgeschlossen. □

Ein paar Bemerkungen zur allgemeinen Situation.

- Lindenstrauss und Tzafriri haben 1971 gezeigt: Ein Banachraum X hat die Eigenschaft, dass jeder abgeschlossene Unterraum ein Komplement hat, genau dann, wenn X isomorph ist zu einem Hilbertraum. (Ist er sogar isometrisch isomorph zu einem Hilbertraum, so gilt die Parallelogrammgleichung, und die Norm stammt selbst von einem Skalarprodukt.)
- Gowers und Maurey haben 1993 ein Beispiel eines reflexiven Banachraums X gefunden mit der Eigenschaft, dass kein abgeschlossener Unterraum U ein Komplement hat (außer denen, die endliche Dimension oder endliche Kodimension haben, Satz 10.6 und Satz 10.9).

11 Fredholm-Operatoren

Definition 11.1 (Fredholm-Operator)
Seien X, Y Banachräume. Ein linearer stetiger Operator $T : X \to Y$ heißt Fredholm-Operator, falls $\dim(\ker T)) < \infty$ *und* $\operatorname{codim}(T(X)) = \dim(Y/T(X)) < \infty$ *gelten. Ist T Fredholm-Operator, so definieren wir den Index von T durch*

$$\operatorname{ind}(T) = \dim(\ker T) - \operatorname{codim}(T(X)) . \tag{11.1}$$

Die Menge aller Fredholm-Operatoren von X nach Y bezeichnen wir mit $F(X;Y)$, falls $X = Y$ schreiben wir auch $F(X)$. □

In diesem Kapitel bezeichnen wir die Identität in $L(X)$ mit I.

Sind X und Y beide endlichdimensional, so ist $F(X;Y) = L(X;Y)$. Andernfalls gilt $0 \notin F(X;Y)$, und $F(X;Y)$ ist kein Unterraum von $L(X;Y)$. Ist $T \in F(X;Y)$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ mit $\alpha \neq 0$, so ist $\alpha T \in F(X;Y)$. Es gilt $I \in F(X)$, $\operatorname{ind}(I = 0$.

Sind X und Y endlichdimensional mit $\dim(X) = n$ und $\dim(Y) = m$, so gilt $n = \dim(\ker T) + \dim(T(X)$, $m = \dim(T(X)) + \operatorname{codim}(T(X))$, also $\operatorname{ind}(T) = n - m$. Der Index liefert also nur im unendlichdimensionalen Fall eine Information über T.

Lemma 11.2 *Seien X, Y Banachräume, $T : X \to Y$ Fredholm-Operator. Dann ist $T(X)$ abgeschlossen.*

Beweis: Folgt direkt aus Satz 10.9. □

Satz 11.3 *Sei X Banachraum, sei $S : X \to X$ kompakter Operator. Dann ist $T = I - S$ ein Fredholm-Operator.*

Beweis: Zunächst gilt, dass $I|\ker T = S|\ker T$, also ist $I|\ker T$ ein kompakter Operator, also ist $\dim(\ker T) < \infty$. Wir zeigen als nächstes, dass $T(X)$ abgeschlossen ist. Gemäß Satz 10.6 wählen wir ein abgeschlossenes Komplement V von $\ker T$ in X und betrachten $T|V : V \to T(X)$. Diese Abbildung ist injektiv, da $V \cap \ker T = \{0\}$, also stetig und bijektiv. Wir nehmen an,

$$(T|V)^{-1} : T(X) \to V \quad \text{ist nicht stetig.} \tag{11.2}$$

Wir wählen eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $T(X)$ mit $\|y_n\| = 1$ und $\|T^{-1}y_n\| \geq n$. Für

$$v_n = \frac{T^{-1}y_n}{\|T^{-1}y_n\|} \tag{11.3}$$

gilt dann

$$v_n \in V,\ \|v_n\| = 1,\ \|Tv_n\| \leq \frac{1}{n} . \tag{11.4}$$

Da S kompakt ist, gibt es eine konvergente Teilfolge $(Sv_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Sei $Sv_{n_k} \to v \in X$, dann gilt

$$v_{n_k} = Sv_{n_k} + Tv_{n_k} \to v ,$$

also $v \in V$, $\|v\| = 1$, $Tv = 0$ im Widerspruch zu $V \cap \ker T = \{0\}$. Also ist (11.2) falsch. Es folgt, dass $T(X)$ und V isomorph sind, also ist mit V auch $T(X)$ vollständig und daher abgeschlossen in X. Aus Satz 10.4 folgt nun

$$(X/T(X))^* \cong \ker T^* = \ker(I - S^*) \,. \tag{11.5}$$

Nach Satz 9.5 ist S^* kompakt, also nach folgt nach dem eben Bewiesenen

$$\infty > \dim(\ker(I - S^*)) = \dim((X/T(X))^*) = \dim(X/T(X)) = \operatorname{codim} T(X) \,.$$

□

Satz 11.4 *Sei X Banachraum, $T \in L(X)$. Ist $\|T\| < 1$, so ist $I - T$ bijektiv, $(I-T)^{-1} \in L(X)$ und*

$$(I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k \,. \tag{11.6}$$

Beweis: Übung. □

Folgerung 11.5 *Seien X, Y Banachräume, $T \in L(X;Y)$, T bijektiv. Ist $\tilde{T} \in L(X;Y)$ mit*

$$\|\tilde{T} - T\| < \frac{1}{\|T^{-1}\|} \,, \tag{11.7}$$

so ist auch $\tilde{T}$ bijektiv und $\tilde{T}^{-1} \in L(Y;X)$.

Beweis: Durch Ausmultiplizieren der rechten Seite erkennt man, dass

$$\tilde{T} = T(I - T^{-1}(T - \tilde{T})) \,, \tag{11.8}$$

und aus (11.7) folgt $\|T^{-1}(T - \tilde{T})\| \le \|T^{-1}\| \, \|T - \tilde{T}\| < 1$, also folgt die Behauptung aus Satz 11.4. □

Satz 11.6 *Seien X, Y Banachräume. Dann ist $F(X;Y)$ eine offene Teilmenge des Banachraums $L(X;Y)$, und die Abbildung* $\operatorname{ind} : F(X;Y) \to \mathbb{Z}$ *ist lokal konstant, das heißt, zu jedem $T \in F(X;Y)$ gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass*

$$\operatorname{ind}(S) = \operatorname{ind}(T) \,, \quad \textit{für alle } S \in F(X;Y) \textit{ mit } \|S - T\| < \varepsilon. \tag{11.9}$$

Beweis: Sei $T : X \to Y$ Fredholm-Operator. Nach Lemma 11.2 ist $T(X)$ abgeschlossen. Gemäß Satz 10.6 und Satz 10.8 wählen wir abgeschlossene Unterräume V von X und W von Y mit

$$\ker T \oplus V = X \,, \quad T(X) \oplus W = Y \,, \tag{11.10}$$

es ist dann

$$\dim(W) = \operatorname{codim}(T(X)) < \infty \,, \quad \operatorname{codim}(V) = \dim(\ker T) < \infty \,. \tag{11.11}$$

Zu beliebigem $S \in L(X;Y)$ definieren wir nun

$$\tilde{S} : V \times W \to Y \,, \quad \tilde{S}(v, w) = Sv + w \,, \tag{11.12}$$

wobei wir $V \times W$ mit der Maximumnorm $\|(v,w)\|_\infty = \max\{\|v\|, \|w\|\}$ versehen. Offensichtlich ist $\tilde{S}$ linear und stetig, es gilt

$$(\tilde{S} - \tilde{T})(v,w) = (S-T)(v)$$

und daher

$$\|\tilde{S} - \tilde{T}\| = \|S - T\| \,. \tag{11.13}$$

Aus (11.10) folgt $T(V) = T(X)$, $T|V$ injektiv, also ist $\tilde{T} : V \times W \to Y$ linear, bijektiv und stetig. Wir wählen gemäß Folgerung 11.5 ein $\varepsilon > 0$ so, dass $\tilde{S} : V \times W \to Y$ bijektiv ist für alle $S \in L(X;Y)$ mit $\|\tilde{S} - \tilde{T}\| < \varepsilon$. Sei nun S ein beliebiger solcher Operator. Aus (11.12) folgt

$$\tilde{S}(V \times \{0\}) = S(V)\,, \quad \tilde{S}(\{0\} \times W) = W\,,$$

also

$$Y = S(V \times W) = S(V) \oplus W \,. \tag{11.14}$$

Da $\tilde{S}$ bijektiv ist, ist $S|V$ injektiv, also

$$\ker S \cap V = \{0\}\,.$$

Sei nun Z ein Komplement von $\ker S \oplus V$ in X,

$$\ker S \oplus V \oplus Z = X\,, \tag{11.15}$$

dann sind sowohl $\ker S \oplus Z$ als auch $\ker T$ ein Komplement von V in X, letzteres wegen (11.10). Sie haben daher dieselbe Dimension,

$$\dim(\ker S) + \dim(Z) = \dim(\ker T) < \infty\,, \quad \dim(Z) < \infty\,. \tag{11.16}$$

Aus (11.15) folgt weiter, dass $S|(V \oplus Z)$ injektiv ist und

$$S(X) = S(V \oplus Z) = S(V) \oplus S(Z)\,. \tag{11.17}$$

Indem wir $S(Z)$ zu einem Komplement von $S(V)$ in Y ergänzen, erhalten wir

$$\operatorname{codim}(S(V)) = \dim(S(Z)) + \operatorname{codim}(S(X))\,, \tag{11.18}$$

und weiter mit (11.11) und (11.14), da $S|Z$ injektiv ist,

$$\operatorname{codim}(T(X)) = \dim(W) = \operatorname{codim}(S(V)) = \dim(Z) + \operatorname{codim}(S(X))\,. \tag{11.19}$$

Aus (11.16) und (11.19) ersehen wir, dass S ein Fredholm-Operator ist, und Addition der beiden Gleichungen ergibt

$$\dim(\ker S) + \operatorname{codim}(T(X)) = \dim(\ker T) + \operatorname{codim}(S(X))\,,$$

also $\operatorname{ind}(S) = \operatorname{ind}(T)$. $\square$

Folgerung 11.7 *Seien X, Y Banachräume, sei $T : [0,1] \to F(X;Y)$ stetig. Dann ist*

$$t \mapsto \operatorname{ind}(T(t)) \tag{11.20}$$

eine Konstante.

Beweis: Nach Satz 11.6 ist die Abbildung $\mathrm{ind} \circ T : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig, und da der Index nur ganzzahlige Werte annimmt, muss sie konstant sein. $\square$

Da jede lokal konstante Abbildung auf einer zusammenhängenden Teilmenge ihres Definitionsgebiets konstant ist, erhält man allgemeiner: Der Index ist konstant auf Zusammenhangskomponenten von $F(X;Y)$.

Folgerung 11.8 *Sei X Banachraum, $S : X \to X$ kompakt. Dann gilt*

$$\mathrm{ind}\,(I - S) = 0\,. \tag{11.21}$$

Beweis: Sei $T(t) = I - tS$, dann ist $T(t)$ ein Fredholmoperator nach Satz 11.3. Es gilt $\mathrm{ind}\,(T(0)) = \mathrm{ind}\,(I) = 0$, also auch $0 = \mathrm{ind}\,(T(1)) = \mathrm{ind}\,(I - S)$ nach Folgerung 11.7. $\square$

Ist $T : X \to X$ Fredholm-Operator mit Index 0, so ist $\dim(\ker T) = 0$ genau dann, wenn $\mathrm{codim}\, T(X) = 0$, also

$$T \text{ injektiv} \quad \Leftrightarrow \quad T \text{ surjektiv.} \tag{11.22}$$

Wir betrachten die Gleichung

$$Tx = y\,, \tag{11.23}$$

wobei $y \in X$ gegeben und $x \in X$ gesucht ist.

Die klassische Formulierung der durch das Vorangegangene beschriebenen Eigenschaften von Fredhom-Operatoren mit Index 0 ist die **Fredholmsche Alternative**:

> **Entweder** hat (11.23) für jedes $y \in X$ eine eindeutige Lösung $x \in X$ (das entspricht (11.22),
>
> **oder** die homogene Gleichung $Tx = 0$ besitzt endlich viele linear unabhängige Lösungen, und für gegebenes $y \in X$ ist (11.23) lösbar genau dann, wenn $y^*(y) = 0$ für alle $y^* \in \ker T^*$. Die maximale Anzahl linear unabhängiger Lösungen von $Tx = 0$ ist gleich der maximalen Anzahl linear unabhängiger Lösungen von $T^* y^* = 0$.

Im zweiten Teil wurden auch die in Satz 9.6 und Satz 10.4 erhaltenen Formeln

$$\overline{T(X)} = (\ker T^*)^o\,, \quad (Y/T(X))^* \cong \ker T^*$$

verwendet.

12 Das Spektrum

Die in der Linearen Algebra entwickelte Strukturtheorie linearer Abbildungen im Endlichdimensionalen basiert wesentlich auf den Begriffen Eigenwert und Eigenvektor. Wir rekapitulieren: Ist $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ linear, und gilt

$$Tx = \lambda x\,, \quad \lambda \in \mathbb{K}\,, \quad x \in \mathbb{K}^n\,, \quad x \neq 0\,, \tag{12.1}$$

so heißt λ Eigenwert von T und x zugehöriger Eigenvektor.

Ein $\lambda \in \mathbb{K}$ ist Eigenwert von $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ genau dann, wenn die Abbildung $\lambda I - T$ nicht bijektiv ist. Statt $\lambda I - T$ schreiben wir im Folgenden abkürzend

$$\lambda - T\,.$$

Für den Raum $L(X;X)$ aller linearen stetigen Abbildungen von X nach X schreiben wir

$$L(X)\,.$$

In diesem Abschnitt setzen wir generell voraus, dass $X \neq \{0\}$ (sonst ist $L(X) = \{0\}$ und $\|I\| = 0$.)

Definition 12.1 (Resolvente)
Sei X Banachraum, $T \in L(X)$. Die Teilmenge

$$\rho(T) = \{\lambda : \lambda \in \mathbb{K},\, \lambda - T \text{ ist bijektiv}\} \tag{12.2}$$

von $\mathbb{K}$ heißt Resolventenmenge von T. Die Abbildung

$$R : \rho(T) \to L(X)\,, \quad R_\lambda = (\lambda - T)^{-1}\,, \tag{12.3}$$

heißt die Resolvente von T. □

Die Definition von R in (12.3) macht Sinn, da $(\lambda - T)^{-1}$ linear und stetig ist, wenn $\lambda - T$ linear, stetig und bijektiv ist, siehe Folgerung 3.8.

Satz 12.2 *Sei X Banachraum, $T \in L(X)$. Dann ist die Resolventenmenge $\rho(T)$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{K}$. Ist $\lambda_0 \in \rho(T)$, so gilt*

$$R_\lambda = (\lambda - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^k [(\lambda_0 - T)^{-1}]^{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^k R_{\lambda_0}^{k+1} \tag{12.4}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ mit

$$|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|R_{\lambda_0}\|}\,. \tag{12.5}$$

Beweis: Analog zur Rechnung in (11.8) erhalten wir durch Ausmultiplizieren

$$(\lambda_0 - T)[1 - (\lambda_0 - T)^{-1}(\lambda_0 - \lambda)] = \lambda - T\,. \tag{12.6}$$

Wegen $\|(\lambda - T) - (\lambda_0 - T)\| = |\lambda - \lambda_0|$ folgt aus (12.5), dass der Ausdruck in eckigen Klammern und damit auch $\lambda - T$ invertierbar ist. Aus (12.6) folgt weiter, dass

$$(\lambda - T)^{-1} = [1 - (\lambda_0 - T)^{-1}(\lambda_0 - \lambda)]^{-1}(\lambda_0 - T)^{-1}$$

Für den Term in eckigen Klammern setzen wir die Reihenentwicklung (11.6) ein, es ergibt sich (12.4). □

Definition 12.3 (Spektrum, Punktspektrum)
Sei X Banachraum, $T \in L(X)$. Die Teilmenge

$$\sigma(T) = \mathbb{K} \setminus \rho(T) = \{\lambda : \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda - T \text{ ist nicht bijektiv}\} \tag{12.7}$$

heißt das Spektrum von T, jedes $\lambda \in \sigma(T)$ heißt Spektralwert von T. Ist $\lambda - T$ nicht injektiv, so heißt λ Eigenwert von T mit dem zugehörigen Eigenraum $\ker(\lambda - T)$, und jedes $x \in X$ mit $\lambda x = Tx$ und $x \neq 0$ heißt Eigenvektor zum Eigenwert λ. Die Menge

$$\sigma_p(T) = \{\lambda : \lambda \text{ ist Eigenwert von } T\} \tag{12.8}$$

heißt das Punktspektrum von T. □

Ist $X = \mathbb{K}^n$, so ist $\lambda - T$ injektiv genau dann, wenn $\lambda - T$ bijektiv ist, es gilt also $\sigma(T) = \sigma_p(T)$. Im Unendlichdimensionalen gilt im allgemeinen $\sigma(T) \neq \sigma_p(T)$.

Definition 12.4 (kontinuierliches Spektrum, Restspektrum)
Sei X Banachraum, $T \in L(X)$. Die Menge

$$\sigma_c(T) = \{\lambda : \lambda \in \sigma(T),\ \lambda - T \text{ ist injektiv, nicht surjektiv, und } \overline{(\lambda - T)(X)} = X\} \tag{12.9}$$

heißt das kontinuierliche Spektrum von T, die Teilmenge

$$\sigma_r(T) = \{\lambda : \lambda \in \sigma(T),\ \lambda - T \text{ ist injektiv, nicht surjektiv, und } \overline{(\lambda - T)(X)} \neq X\} \tag{12.10}$$

heißt das Restspektrum von T. □

Offensichtlich stellt
$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T)$$
eine disjunkte Zerlegung des Spektrums dar.

Als Beispiel betrachten wir den Rechtsshift

$$T : \ell^2(\mathbb{K}) \to \ell^2(\mathbb{K}), \quad (Tx)_k = \begin{cases} 0, & k = 1, \\ x_{k-1}, & k > 1. \end{cases}$$

Hier gilt $0 \in \sigma_r(T)$, da T injektiv und $T(\ell^2(\mathbb{K})) = \{y : y_1 = 0\}$ abgeschlossener echter Unterraum von $\ell^2(\mathbb{K})$ ist. Für

$$T : \ell^2(\mathbb{K}) \to \ell^2(\mathbb{K}), \quad (Tx)_k = \frac{1}{k} x_k,$$

gilt $0 \in \sigma_c(T)$, da T injektiv ist, wegen $(1/k)_{k \in \mathbb{N}} \notin T(\ell^2(\mathbb{K}))$ nicht surjektiv ist, und wegen $c_e(\mathbb{K}) \subset T(\ell^2(\mathbb{K}))$ dichtes Bild hat.

Satz 12.5 *Sei X Banachraum, $T \in L(X)$. Dann ist $\sigma(T)$ kompakt, und es gilt $|\lambda| \leq \|T\|$ für alle $\lambda \in \sigma(T)$. Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ gilt außerdem $\sigma(T) \neq \emptyset$.*

Beweis: Sei $T \neq 0$, der Fall $T = 0$ ist klar. Ist $|\lambda| > \|T\|$, so folgt aus

$$\lambda - T = \lambda \left(1 - \frac{1}{\lambda} T \right) \tag{12.11}$$

und Satz 11.4, dass $\lambda \in \rho(T)$. Also ist $\sigma(T)$ durch $\|T\|$ beschränkt und wegen Satz 12.2 abgeschlossen in $\mathbb{K}$, also kompakt. Sei nun $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Für beliebiges $l^* \in L(X)^*$ betrachten wir die Funktion

$$f : \rho(T) \to \mathbb{C}\,, \quad f(\lambda) = l^*(R_\lambda)\,. \tag{12.12}$$

Sei $\lambda_0 \in \rho(T)$ beliebig. Aus Folgerung 12.2 folgt, dass

$$f(\lambda) = l^*(R_\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^k l^*(R_{\lambda_0}^{k+1})\,, \tag{12.13}$$

falls $\lambda \in B(\lambda_0; 1/\|R_{\lambda_0}\|)$, das heißt, f hat eine in dieser Kreisscheibe konvergente Potenzreihenentwicklung. Also ist f holomorph auf $\rho(T)$. Wir nehmen nun an, dass $\sigma(T) = \emptyset$, dann ist $\rho(T) = \mathbb{C}$. Auf der kompakten Menge $B(0; 2\|T\|)$ ist f beschränkt, für $|\lambda| > 2\|T\|$ folgt aus (12.11)

$$R_\lambda = (\lambda - T)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{T}{\lambda} \right)^k\,, \tag{12.14}$$

und weiter

$$|f(\lambda)| = |l^*(R_\lambda)| = \left| \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{l^*(T^k)}{\lambda^k} \right| \leq \frac{1}{|\lambda|} \|l^*\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|T\|^k}{|\lambda|^k} \leq 2\|l^*\| \frac{1}{|\lambda|}\,. \tag{12.15}$$

Also ist f auf $\mathbb{C}$ beschränkt. Aus dem Satz von Liouville (siehe Funktionentheorie) folgt nun, dass f auf $\mathbb{C}$ konstant ist, und aus (12.15) folgt $f = 0$. Es folgt also $l^*(R_\lambda) = 0$ für alle $l^* \in L(X)^*$ und damit aus dem Satz von Hahn-Banach $R_\lambda = 0$, ein Widerspruch, da R_λ bijektiv ist. □

Satz 12.6 *Sei X Banachraum, $S : X \to X$ kompakt. Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ Spektralwert von S und gilt $\lambda \neq 0$, so ist λ auch Eigenwert von S. Der zugehörige Eigenraum* $\ker(\lambda - S)$ *ist endlichdimensional. Ist* $\dim(X) = \infty$, *so ist 0 Spektralwert von S.*

Beweis: Sei $\lambda \neq 0$. Nach Folgerung 11.8 ist $1 - \lambda^{-1}S$ ein Fredholm-Operator vom Index 0, also auch $\lambda - S$. Ist λ nicht Eigenwert von S, so ist $\lambda - S$ injektiv und nach (11.22) auch bijektiv, also ist λ nicht Spektralwert von S. Da $\lambda - S$ Fredholm-Operator ist, ist $\ker(\lambda - S)$ endlichdimensional.
Ist $0 \in \rho(S)$, so ist S bijektiv, linear und stetig, also auch S^{-1} stetig und daher $1 = S^{-1}S$ kompakt, also $\dim(X) < \infty$. □

Ist etwa S ein Integraloperator,

$$(Sx)(t) = \int_0^1 k(s,t)x(s)\,dx\,, \tag{12.16}$$

so hat die Gleichung $Tx = (\lambda - S)(x) = y$ die Form

$$\lambda x(t) - \int_0^1 k(s,t)x(s)\,ds = y(t)\,, \quad t \in [0,1]\,. \tag{12.17}$$

Wie wir gesehen haben, ist S kompakt auf $L^2(0,T)$, falls $k \in L^2((0,T) \times (0,T))$ gilt. Wir können dann Satz 12.6 anwenden und erhalten, dass (12.17) für $\lambda \neq 0$ zu gegebenem $y \in L^2(0,T)$ genau dann eindeutig lösbar ist, wenn λ nicht Eigenwert von S ist, und dass der Lösungsraum endlichdimensional ist, wenn λ Eigenwert von S ist.

Satz 12.7 *Sei X Banachraum, $S : X \to X$ ein kompakter linearer Operator. Dann ist die Menge*

$$\{\lambda : \lambda \in \sigma(S),\ |\lambda| \geq \varepsilon\} \tag{12.18}$$

endlich für jedes $\varepsilon > 0$. (Sie kann auch leer sein.)

Indem wir $\varepsilon = 1/n$ mit $n \in \mathbb{N}$ betrachten, erkennen wir, dass das Spektrum eines kompakten Operators eine endliche oder abzählbar unendliche Menge ist.

Beweis: Wir nehmen an, es gebe eine Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ paarweise verschiedener Spektralwerte von S mit $|\lambda_n| \geq \varepsilon$. Nach Satz 12.6 sind alle λ_n Eigenwerte von S. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge zugehöriger Eigenvektoren von S. Da die λ_n paarweise verschieden sind, ist nach einem Satz der Linearen Algebra die Menge $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ linear unabhängig. Für

$$X_n = \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_n\}$$

gilt dann $X_n \subset X_{n+1}$, $X_n \neq X_{n+1}$ und $S(X_n) \subset X_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir wählen $y_n \in X_n$ gemäß Lemma 2.13 mit

$$\|y_n\| = 1\,, \quad \operatorname{dist}(y_n, X_{n-1}) \geq \frac{1}{2}\,.$$

Dann gilt $y_n = \alpha x_n + z_{n-1}$ für ein $\alpha \in \mathbb{K}$, $z_{n-1} \in X_{n-1}$, also

$$\lambda_n y_n - S y_n = \lambda_n \alpha x_n + \lambda_n z_{n-1} - \alpha S x_n - S z_{n-1} = \lambda_n z_{n-1} - S z_{n-1} \in X_{n-1}\,,$$

also für alle $m \in \mathbb{N}$ mit $m < n$

$$\|Sy_n - Sy_m\| = \|\lambda_n y_n - (Sy_m + \lambda_n y_n - Sy_n)\| = |\lambda_n| \|y_n - \underbrace{\frac{1}{\lambda_n}(Sy_m + \lambda_n y_n - Sy_n)}_{\in X_{n-1}}\| \geq \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

also hat $(Sy_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine konvergente Teilfolge im Widerspruch zur Kompaktheit von S. □

Definition 12.8 (Spektralradius)
Sei X Banachraum, $T \in L(X)$. dann heißt

$$r(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda| \tag{12.19}$$

der Spektralradius von T. □

Da das Spektrum nach Satz 12.5 kompakt ist, wird in (12.19) das Supremum angenommen,

$$r(T) = \max_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|\,, \tag{12.20}$$

sofern das Spektrum nicht leer ist.

Lemma 12.9 *Sei X Banachraum, $T \in L(X)$. Dann gilt*

$$\lim_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{\|T^n\|} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{\|T^n\|}\,. \tag{12.21}$$

Beweis: Wir setzen $a_n = \|T^n\|$. Es gilt

$$a_{n+m} = \|T^{n+m}\| = \|T^n T^m\| \le \|T^n\|\|T^m\| = a_n a_m \qquad \text{für alle } n, m \in \mathbb{N}. \tag{12.22}$$

Sei $N \in \mathbb{N}$ beliebig gewählt. Zu diesem festen N zerlegen wir $n \in \mathbb{N}$ als

$$n = jN + r\,, \quad j \in \mathbb{N}\,,\, 0 \le r < N\,.$$

Aus (12.22) folgt

$$a_n^{1/n} \le (a_N^j a_r)^{1/n} = (a_N^{1/N})^{jN/n} a_r^{1/n} = (a_N^{1/N})^{1-r/n} a_r^{1/n}\,.$$

Es gilt "$r = r(n)$", aber $0 \le r(n) < N$. Es folgt

$$\frac{r(n)}{n} \to 0\,, \quad a_{r(n)}^{1/n} \to 1 \quad \text{für } n \to \infty$$

und damit

$$\limsup_{n\to\infty} a_n^{1/n} \le a_N^{1/N}\,.$$

Da N beliebig war, folgt

$$\limsup_{n\to\infty} a_n^{1/n} \le \inf_{N\in\mathbb{N}} a_N^{1/N} \le \liminf_{N\in\mathbb{N}} a_N^{1/N}$$

und hieraus die Behauptung. $\square$

Satz 12.10 *Sei X Banachraum, $T \in L(X)$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Dann gilt*

$$\|T\| \ge r(T) = \lim_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{\|T^n\|}\,. \tag{12.23}$$

Beweis: Nach Satz 12.5 gilt $r(T) \le \|T\|$. Wir knüpfen nun an den Beweis dieses Satzes an. Zu beliebigem $\ell^* \in (L(X))^*$ betrachten wir

$$f(\lambda) = \ell^*(R_\lambda)\,, \quad R_\lambda = (\lambda - T)^{-1}\,.$$

Für $|\lambda| > \|T\|$ gelten

$$R_\lambda = (\lambda - T)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^\infty \left(\frac{T}{\lambda}\right)^k\,, \quad f(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^\infty \frac{l^*(T^k)}{\lambda^k}\,. \tag{12.24}$$

Wir haben im Beweis von Satz 12.5 gesehen, dass $f : \rho(T) \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion ist. Insbesondere ist f im Außengebiet $G = \{|\lambda| > r(T)\}$ holomorph. Nach einem Satz der Funktionentheorie ist f auf G eindeutig in eine Laurentreihe entwickelbar. Da (12.24) eine Laurentreihe von f in $\{|\lambda| > \|T\|\}$ liefert, müssen beide übereinstimmen. Es folgt, dass

$$f(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^\infty \frac{l^*(T^k)}{\lambda^k}$$

auf G gilt. Die Glieder dieser Reihe bilden also eine Nullfolge,

$$0 = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\lambda} \frac{l^*(T^k)}{\lambda^k} = \lim_{k\to\infty} \ell^*(\lambda^{-k-1}T^k)\,.$$

Da ℓ^* beliebig war, folgt

$$\ell^*(\lambda^{-k-1}T^k) \rightharpoonup 0 \qquad \text{in } L(X)^*.$$

Die Folge $(\lambda^{-k-1}T^k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist nach Satz 6.4 beschränkt in der Norm von $L(X)$, sei

$$\|\lambda^{-k-1}T^k\| \le M\,.$$

Es folgt

$$\|T^k\|^{1/k} \le |\lambda|(M|\lambda|)^{1/k}\,, \quad \lim_{k\to\infty} \|T^k\|^{1/k} \le |\lambda|\,, \tag{12.25}$$

für alle $\lambda \in \rho(T)$ nach Lemma 12.9. Grenzübergang $|\lambda| \to r(T)$ ergibt

$$\lim_{k\to\infty} \|T^k\|^{1/k} \le r(T)\,. \tag{12.26}$$

Zum Beweis der umgekehrten Ungleichung betrachten wir ein beliebiges $\lambda \in \sigma(T)$. (Ein solches existiert nach Satz 12.5.) Die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k-1}T^k$$

ist nicht konvergent in $L(X)$, andernfalls wäre ihr Grenzwert ein Inverses von $\lambda - T$ im Widerspruch zu $\lambda \notin \rho(T)$. Es folgt, dass

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k\,, \quad a_k = \|\lambda^{-k-1}T^k\|\,,$$

ebenfalls divergent ist. Aus dem Wurzelkriterium folgt

$$1 \le \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = |\lambda|^{-1} \limsup_{k\to\infty} |\lambda|^{-1/k}\|T^k\|^{1/k} = |\lambda|^{-1} \lim_{k\to\infty} \|T^k\|^{1/k}\,.$$

Da $\lambda \in \sigma(T)$ beliebig war, folgt durch Übergang zum Supremum in λ

$$r(T) \le \lim_{k\to\infty} \|T^k\|^{1/k}\,.$$

Damit ist (12.23 gezeigt. □

Wir betrachten nun Operatoren auf Hilberträumen.

Satz 12.11 (Hilbert-Adjungierte)
Seien X, Y Hilberträume und $T \in L(X;Y)$. Dann wird durch

$$\langle x, T^*y\rangle = \langle Tx, y\rangle\,, \quad x \in X\,,\, y \in Y\,, \tag{12.27}$$

ein linearer stetiger Operator $T^* : Y \to X$ definiert, er heißt die ***Hilbert-Adjungierte*** *von T. Es gilt*

$$T^{**} = T\,, \quad \|T^*\| = \|T\|\,. \tag{12.28}$$

Beweis: Sei $y \in Y$. Die Abbildung $x \mapsto \langle Tx, y\rangle$ ist linear und stetig, weil das Skalarprodukt im ersten Argument linear ist und

$$\langle Tx, y\rangle \,| \leq \|T\|\|x\|\|y\| \tag{12.29}$$

gilt für alle $x \in X$. Aus dem Darstellungssatz von Riesz (Satz 2.12) folgt, dass T^*y wohldefiniert ist. Wegen

$$\begin{aligned}\langle x, T^*(\alpha y + \beta z)\rangle &= \langle Tx, \alpha y + \beta z\rangle = \overline{\alpha}\,\langle Tx, y\rangle + \overline{\beta}\,\langle Tx, z\rangle = \overline{\alpha}\,\langle x, T^*y\rangle + \overline{\beta}\,\langle x, T^*z\rangle \\ &= \langle x, \alpha T^*(y) + \beta T^*(z)\rangle\end{aligned}$$

ist T^* linear, und wegen (12.29) auch stetig mit $\|T^*\| \leq \|T\|$. Es gilt $T^{**} = T$ wegen

$$\langle y, T^{**}x\rangle = \langle T^*y, x\rangle = \overline{\langle x, T^*y\rangle} = \overline{\langle Tx, y\rangle} = \langle y, Tx\rangle \ .$$

Schließlich folgt $\|T\| = \|T^{**}\| \leq \|T^*\|$ und damit auch $\|T^*\| = \|T\|$. □

Mit der in Kapitel 9 definierten Adjungierten, wir nennen sie hier "einen Moment lang" $T' : Y^* \to X^*$, ist die Hilbert-Adjungierte T^* verknüpft durch

$$T^* = J_X^{-1} \circ T' \circ J_Y \,,$$

wobei $J_X : X \to X^*$ und $J_Y : Y \to Y^*$ die Dualitätsabbildungen aus dem Satz von Riesz sind.

Unmittelbar aus den Definitionen folgen die Rechenregeln

$$(S + T)^* = S^* + T^* \,, \quad (\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^* \,, \quad (S \circ T)^* = T^* \circ S^* \,. \tag{12.30}$$

Die mittlere Gleichung zeigt, dass im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ der Übergang $T \mapsto T^*$ zur Hilbert-Adjungierten nicht linear, sondern konjugiert linear ist.

Lemma 12.12 *Ist X Hilbertraum und $T \in L(X)$, so gilt*

$$\|T^*T\| = \|T\|^2 \,. \tag{12.31}$$

Beweis: Es ist $\|T^*T\| \leq \|T^*\|\|T\| = \|T\|^2$ gemäß Satz 12.11. Die umgekehrte Ungleichung folgt aus

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle x, T^*Tx\rangle \leq \|x\|^2\|T^*T\|$$

durch Übergang zum Supremum in x auf der Einheitssphäre $\{\|x\| = 1\}$. □

Definition 12.13 *Sei X Hilbertraum. Ein $T \in L(X)$ heißt* ***normal*** *falls $T^*T = TT^*$ und* ***hermitesch*** *oder* ***selbstadjungiert****, falls $T^* = T$.* □

Offenbar ist jeder selbstadjungierte Operator normal.

Satz 12.14 *Sei X Hilbertraum, $T \in L(X)$ normal. Dann ist auch T^n normal mit*

$$\|T^n\| = \|T\|^n \,, \quad \textit{für alle } n \in \mathbb{N}. \tag{12.32}$$

Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ gilt $\|T\| = r(T)$. Ist T außerdem kompakt, so gilt

$$\|T\| = r(T) = \max_{\lambda \in \sigma_p(T)} |\lambda| \,, \tag{12.33}$$

das heißt, es gibt einen Eigenwert λ mit $\|T\| = |\lambda|$.

Beweis: Mit Induktion folgt $(T^n)^* = (T^*)^n$, die Rechnung

$$(T^n)^* = (TT^{n-1})^* = (T^{n-1})^* T^* = (T^*)^{n-1} T^* = (T^*)^n$$

liefert den Induktionsschritt. Hieraus folgt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$(T^n)^* T^n = (T^*)^n T^n = T^n (T^n)^* = T^n (T^n)^* , \tag{12.34}$$

die mittlere Gleichheit folgt durch sukzessives Vertauschen von T und T^*, da T normal ist. Also ist T^n normal für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Behauptung (12.32) folgt für $n = 2$ mit Lemma 12.12 aus der Rechnung

$$\|T^2\|^2 = \|(T^2)^* T^2\| = \|(T^*T)(T^*T)^*\| = \|T^*T\|^2 = \|T\|^4 .$$

Für den Induktionsschritt $n \to n+1$ schätzen wir ab (T^n ist normal)

$$\|T\|^{2n} = (\|T\|^n)^2 = \|T^n\|^2 = \|(T^n)^2\| \le \|T^{n+1}\| \|T\|^{n-1} ,$$

also $\|T\|^{n+1} \le \|T^{n+1}\| \le \|T\|^{n+1}$ und damit $\|T\|^{n+1} = \|T^{n+1}\|$. Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ folgt aus Satz 12.10

$$r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} = \|T\| .$$

Dass der Spektralradius gleich dem betragsgrößten Eigenwert ist, hatten wir bereits in (12.20) gesehen. □

Lemma 12.15 *Sei X Hilbertraum, $T \in L(X)$ normal. Dann gilt $\|Tx\| = \|T^*x\|$ für alle $x \in X$, und damit auch $\ker T = \ker T^*$. Weiter gilt*

$$Tx = \lambda x \qquad \Leftrightarrow \qquad T^*x = \overline{\lambda} x , \tag{12.35}$$

also ist $\lambda \in \mathbb{C}$ Eigenwert von T genau dann, wenn $\overline{\lambda}$ Eigenwert von T^* ist.

Beweis: Es gilt für alle $x \in X$, da T normal ist,

$$0 = \langle T^*Tx - TT^*x, x \rangle = \langle Tx, Tx \rangle - \langle T^*x, T^*x \rangle = \|Tx\|^2 - \|T^*x\|^2 .$$

Da mit T auch $\lambda - T$ normal ist, folgt die zweite Behauptung aus

$$\ker(\lambda - T) = \ker((\lambda - T)^*) = \ker(\overline{\lambda} - T^*) .$$

□

Lemma 12.16 *Sei X Hilbertraum, $T \in L(X)$ normal. Gilt $Tx = \lambda x$, $Ty = \mu y$ und $\lambda \ne \mu$, so gilt $\langle x, y \rangle = 0$, das heißt, Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.*

Beweis: Die Behauptung folgt mit (12.35) aus der Rechnung

$$\lambda \langle x, y \rangle = \langle \lambda x, y \rangle = \langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle = \langle x, \overline{\mu} y \rangle = \mu \langle x, y \rangle .$$

□

Wir kommen nun zum Spektralsatz für kompakte normale Operatoren im Hilbertraum. Er bezieht sich auf den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Er verallgemeinert den Satz aus dem Endlichdimensionalen, dass eine lineare Abbildung $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ normal ist genau dann, wenn es eine ON-Basis des $\mathbb{C}^n$ aus Eigenvektoren von T gibt.

Sei $T \in L(X)$ ein kompakter normaler Operator in einem Hilbertraum X. Wir setzen

$$U_\lambda = \ker(\lambda - T)\,, \quad \lambda \in \mathbb{C} \tag{12.36}$$

und bezeichnen mit $P_\lambda : X \to X$ die Orthogonalprojektion auf U_λ. Wegen $(\lambda - T)Tx = T(\lambda - T)x$ gilt

$$T(U_\lambda) \subset U_\lambda\,, \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{C}, \tag{12.37}$$

das heißt, T lässt den Unterraum U_λ invariant. Sei nun E_λ eine ON-Basis von U_λ, falls λ ein Eigenwert von T ist; andernfalls setzen wir $E_\lambda = \emptyset$. Wir setzen

$$E = \bigcup_{\lambda \neq 0} E_\lambda\,. \tag{12.38}$$

Aus den Sätzen 12.6 und 12.7 folgt, dass alle Eigenräume U_λ endlichdimensional sind für $\lambda \neq 0$, und dass T höchstens abzählbar unendlich viele verschiedene Eigenwerte hat. Die Menge E ist also endlich oder abzählbar unendlich. Sei

$$E = \{e_1, e_2, \dots\} = \{e_j : j \in J\} \tag{12.39}$$

mit $J = \{1, \dots, |J|\}$ bzw. $J = \mathbb{N}$.

Satz 12.17 (Spektralsatz für kompakte normale Operatoren im Hilbertraum)

Sei X separabler Hilbertraum über $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, sei $T \in L(X)$ kompakt und normal. Dann ist die Menge $E \cup E_0$ eine ON-Basis von X, und für alle $x \in X$ gilt

$$Tx = \sum_{\lambda \in \sigma_p(T)} \lambda P_\lambda x = \sum_{j \in J} \lambda_j \langle x, e_j \rangle\, e_j\,. \tag{12.40}$$

Beweis: Um zu zeigen, dass $E \cup E_0$ eine ON-Basis ist, setzen wir

$$V = \overline{\operatorname{span}(E \cup E_0)}^{\perp}\,.$$

Gemäß dem Charakterisierungssatz für ON-Basen (Satz 2.20) genügt es zu zeigen, dass V der Nullraum ist, $V = \{0\}$.
Wir zeigen $T(V) \subset V$: Sei $x \in V$. Ist $y \in E_\lambda$, $\lambda \in \mathbb{C}$ beliebig, so gilt gemäß Lemma 12.15

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle = \left\langle x, \overline{\lambda} y\right\rangle = \lambda \langle x, y\rangle = 0$$

nach Definition von V. Es folgt $Tx \in (E \cup E_0)^\perp$ und daher auch $Tx \in V$.
Wir zeigen $T|V = 0$: Andernfalls hat $T|V$ gemäß Satz 12.14 einen Eigenwert μ mit $0 \neq \|T|V\| = |\mu|$. Ist $x \in V$ ein zugehöriger Eigenvektor, so gilt $x \in U_\mu \subset V^\perp$, ein Widerspruch zu $V \cap V^\perp = \{0\}$. Also ist $T|V = 0$.

Wegen $V \subset \ker T = U_0 \subset V^\perp$ erhalten wir nun $V = \{0\}$. Also ist $E \cup E_0$ Orthonormalbasis von X. Wir zerlegen

$$X = U_0 \oplus U_0^\perp\,, \quad U_0^\perp = \overline{\operatorname{span}(E)}\,.$$

Gemäß Satz 2.20(iv) hat jedes $x \in X$ die Entwicklung

$$x = P_0 x + \sum_{j \in J} \langle x, e_j \rangle \, e_j\,.$$

Es gilt $TP_0 = 0$, da $P_0(X) = \ker T$, und $Te_j = \lambda_j$. Hieraus ergibt sich (12.40). $\square$

Der vorangehende Satz gilt auch, wenn H nicht separabel ist. Die ON-Basis des Eigenraums $U_0 = \ker T$ ist dann überabzählbar. Man verwendet dann eine allgemeinere Version des Charakterisierungssatzes 2.20, der für beliebige (auch nichtseparable) Hilberträume gilt.