Analysis IV *

Martin Brokate †

Inhaltsverzeichnis

1 Differenzierbarkeit im Mehrdimensionalen **1**

2 Der Mittelwertsatz **4**

3 Kurvenintegrale und Potentiale **8**

4 Der Fixpunktsatz von Banach **13**

5 Inverse und implizite Funktionen **15**

6 Substitutionsformel im Mehrdimensionalen (Teil 2) **24**

7 Mannigfaltigkeiten, Oberflächenintegral **32**

8 Der Integralsatz von Gauß **43**

9 Der Integralsatz von Stokes **50**

10 Differenzierbarkeit in $\mathbb{C}$ **54**

11 Das Kurvenintegral in $\mathbb{C}$ **58**

12 Zusammenhang **68**

13 Isolierte Singularitäten, Laurentreihen **75**

14 Der Residuensatz **81**

*Vorlesungsskript, SS 2005

†Zentrum Mathematik, TU München

1 Differenzierbarkeit im Mehrdimensionalen

In diesem Abschnitt werden einige aus der Analysis 2 bekannte Begriffe der Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$ zusammengestellt, um die später verwendete Terminologie und Notation zu klären. Siehe auch meine Vorlesung aus dem Sommersemester 2000. Wir verzichten hier auf Numerierung und formale Unterteilung in Definition und Satz, sowie auf Beweise.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Für $x \in \Omega$ und $v \in \mathbb{R}^n$ definieren wir die **Richtungsableitung** von f an der Stelle x in Richtung v durch

$$\partial_v f(x) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}\,, \tag{1.1}$$

falls der Grenzwert existiert. Ist $v = e_i$ der i-te Einheitsvektor, so sprechen wir von der i-ten **partiellen Ableitung** von f an der Stelle x, wir bezeichnen sie mit

$$\partial_i f(x)\,.$$

Andere gebräuchliche Schreibweisen für $\partial_i f(x)$ sind

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\,, \quad \frac{\partial}{\partial x_i} f(x)\,, \quad D_i f(x)\,.$$

Die Funktion f heißt **partiell differenzierbar** in Ω, falls $\partial_i f(x)$ existiert für alle $x \in \Omega$ und alle i, $1 \le i \le n$. Eine in Ω partiell differenzierbare Funktion f heißt **stetig differenzierbar** in Ω, falls die Funktionen

$$\partial_i f : \Omega \to \mathbb{R}$$

stetig sind für alle i.

Für $x \in \Omega$ (Ω offen) ist $x + tv \in \Omega$ und damit $f(x+tv)$ definiert, falls t hinreichend klein ist. Ist Ω nicht offen und $x \notin \operatorname{int}(\Omega)$, so kann man (1.1) modifizieren zu

$$\partial_v f(x) = \lim_{\substack{t \to 0, t \neq 0 \\ x+tv \in \Omega}} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}\,. \tag{1.2}$$

Ein etwas anderer (hier nicht, aber z.B. in der Optimierung viel verwendeter) Begriff ist der der **einseitigen** Richtungsableitung, definiert als

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}\,. \tag{1.3}$$

Höhere partielle Ableitungen sind rekursiv definiert. f heißt $(k+1)$**-mal partiell differenzierbar** in Ω, falls f k-mal partiell differenzierbar in Ω ist und alle k-ten partiellen Ableitungen der Form

$$\partial_{i_k} \partial_{i_{k-1}} \dots \partial_{i_1} f\,, \quad 1 \le i_j \le n\,, \quad 1 \le j \le k\,,$$

partiell differenzierbar sind. f heißt k-mal stetig differenzierbar, falls alle partielle Ableitungen der Ordnung $\leq k$ existieren und stetig sind. Wir definieren

$$\begin{aligned} C^0(\Omega) &= C(\Omega)\,, \\ C^k(\Omega) &= \{f \mid f : \Omega \to \mathbb{R} \ k\text{-mal stetig differenzierbar}\}\,, \\ C^\infty(\Omega) &= \bigcap_{k\in\mathbb{N}} C^k(\Omega)\,. \end{aligned}$$

Funktionen in $C^\infty(\Omega)$ heißen unendlich oft differenzierbar.

Ist $f \in C^2(\Omega)$, so gilt (Satz von Schwarz)

$$\partial_j\partial_i f(x) = \partial_i\partial_j f(x)\,, \quad \text{für alle } x \in \Omega,\ 1 \leq i, j \leq n. \tag{1.4}$$

Für $f \in C^n(\Omega)$ können wir also die Reihenfolge von bis zu n partiellen Ableitungen beliebig vertauschen. Insbesondere können wir partielle Ableitungen sortieren, z.B.:

$$\partial_1\partial_4\partial_1\partial_2\partial_4\partial_1 f = \partial_1\partial_1\partial_1\partial_2\partial_4\partial_4 f = \partial_1^3\partial_2\partial_4^2 f\,.$$

Wir verwenden dabei die Schreibweise

$$\partial_i^k f = \underbrace{\partial_i\partial_i\ldots\partial_i}_{k \text{ mal}} f\,.$$

Ein $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt auch **skalares Feld**. Ein $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ heißt **Vektorfeld**. Für ein skalares Feld $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt der Vektor

$$\operatorname{grad} f(x) = \nabla f(x) = (\partial_1 f(x), \ldots, \partial_n f(x)) \tag{1.5}$$

der Gradient von f in x, es ergibt sich das Vektorfeld $\operatorname{grad} f : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion mit Komponentenfunktionen $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, so können wir die partiellen Ableitungen $\partial_j f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bilden. Der Begriff "differenzierbar" wird nun koordinatenfrei definiert. (Er ist dadurch ohne weiteres ins Unendlichdimensionale übertragbar.) Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ heißt **differenzierbar** in $x \in \Omega$, falls eine lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ existiert mit

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{\|f(x+h) - f(x) - T(h)\|}{\|h\|} = 0\,. \tag{1.6}$$

Zu gegebenem f und x gibt es höchstens eine solche Abbildung T. Statt "differenzierbar" sagt man auch "Fréchet-differenzierbar" oder "total differenzierbar". Die Abbildung T heißt Ableitung (oder Fréchet-Ableitung oder totale Ableitung) von f in x, wir bezeichnen sie mit $Df(x)$.

Wegen der Äquivalenz aller Normen im $\mathbb{R}^n$ ist es gleichgültig, welche Norm man in (1.6) zugrundelegt.

Verallgemeinert man diese Definition auf Abbildungen $f : X \to Y$ zwischen beliebigen normierten Räumen X, Y, so verlangt man zusätzlich, daß T stetig ist (im Endlichdimensionalen ist jede lineare Abbildung stetig).

Jede in $x \in \Omega$ differenzierbare Funktion ist stetig in x und partiell differenzierbar in x, und die Ableitung $Df(x)$ hat bezüglich der kanonischen Basis die Matrixdarstellung

$$(Df(x))(h) = (J_f(x))h\,, \quad J_f(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x) & \cdots & \partial_n f_1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_m(x) & \cdots & \partial_n f_m(x) \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

Die Matrix $J_f(x) \in \mathbb{R}^{(m,n)}$ heißt Jacobi-Matrix, oder auch Funktionalmatrix, von f in x. Wir können also die Ableitung interpretieren als Abbildung

$$Df : \Omega \to L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)\,, \quad J_f : \Omega \to \mathbb{R}^{(m,n)}\,, \tag{1.8}$$

wobei $L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ den Vektorraum aller linearen Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$ bezeichnet.

Sind alle Komponentenfunktionen f_i von f stetig differenzierbar in Ω, so ist f differenzierbar in Ω. Die Existenz und Stetigkeit von Df in Ω ist also äquivalent zur stetigen Differenzierbarkeit aller Komponentenfunktionen. in diesem Fall heißt f **stetig differenzierbar** in Ω.

Es gelten die Implikationen:

f stetig differenzierbar in Ω	$\Rightarrow$	f differenzierbar in Ω
f differenzierbar in Ω	$\Rightarrow$	f partiell differenzierbar in Ω
f differenzierbar in Ω	$\Rightarrow$	f stetig in Ω

Alle anderen (außer die sich durch Transitivität ergebenden) möglichen Implikationen zwischen diesen 4 Begriffen gelten nicht !

Stetigkeit impliziert nicht partielle Differenzierbarkeit: Beispiel $n = 1$, $f(x) = |x|$.

Partielle Differenzierbarkeit impliziert nicht Stetigkeit: Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(0) = 0\,, \quad f(x) = \frac{x_1 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}\,,\; x \neq 0\,. \tag{1.9}$$

Partielle Differenzierbarkeit impliziert nicht Differenzierbarkeit: Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(0) = 0\,, \quad f(x) = \frac{x_1^3}{x_1^2 + x_2^2}\,,\; x \neq 0\,. \tag{1.10}$$

Differenzierbarkeit impliziert nicht stetige Differenzierbarkeit: Beispiele für $n = 1$.

2 Der Mittelwertsatz

Definition 2.1 (Verbindungsstrecke)
Ist X Vektorraum, so bezeichnen wir die Verbindungsstrecke zweier Punkte x und y in X mit

$$[x,y] = \{ty + (1-t)x : t \in [0,1]\} . \tag{2.1}$$

□

Satz 2.2 (Mittelwertsatz für skalare Felder)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ differenzierbar, seien $x, y \in \Omega$ mit $[x,y] \subset \Omega$. Dann gibt es ein $\xi \in [x,y]$ mit

$$f(y) - f(x) = \langle \operatorname{grad} f(\xi), y - x \rangle \ . \tag{2.2}$$

Beweis: Wir definieren $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch $g(t) = f(ty + (1-t)x)$, dann ist g stetig in $[0,1]$ und differenzierbar in $(0,1)$. Aus dem Mittelwertsatz im $\mathbb{R}$ folgt, daß ein $t \in (0,1)$ existiert mit

$$g(1) - g(0) = g'(t) \,,$$

also, wenn wir $g'(t)$ mit der Kettenregel berechnen,

$$f(y) - f(x) = \langle \operatorname{grad} f(ty + (1-t)x), y - x \rangle \ ,$$

also die Behauptung mit $\xi = ty + (1-t)x$. □

Ist $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ vektorwertig, so kann es vorkommen, dass

$$f(y) - f(x) \neq (Df(\xi))(y-x) \,, \text{ für alle } \xi \in [x,y].$$

Aus dem Mittelwertsatz wird eine Ungleichung. Im eindimensionalen Fall $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ erhält man diese unmittelbar,

$$|f(y) - f(x))| = |f'(\xi)|\,|y-x| \le \left(\sup_{\xi \in [x,y]} |f'(\xi)| \right) |y - x| = \|f'\|_\infty |y-x| \,. \tag{2.3}$$

Wir wenden Satz 2.2 auf die Komponenten eines Vektorfelds einzeln an.

Satz 2.3 (Mittelwertsatz im Mehrdimensionalen, Variante 1)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar, seien $x, y \in \Omega$ mit $[x,y] \subset \Omega$. Dann gilt

$$\|f(y) - f(x)\|_\infty \le L\|y-x\|_1 \le nL\|y-x\|_\infty \,, \tag{2.4}$$

wobei

$$L = \max\{|\partial_j f_i(\xi)| : 1 \le i \le m,\, 1 \le j \le n,\, \xi \in [x,y]\} \,. \tag{2.5}$$

Beweis: Das Maximum in (2.5) existiert, da alle partiellen Ableitungen stetig sind und $[x,y]$ kompakt ist. Für alle i gibt es nach Satz 2.2 ein $\xi_i \in [x,y]$ mit

$$f_i(y) - f_i(x) = \langle \operatorname{grad} f_i(\xi_i), y - x \rangle = \sum_{j=1}^n \partial_j f_i(\xi_i)(y_j - x_j) \,,$$

also gilt für alle i

$$|f_i(y) - f_i(x)| \le L \sum_{j=1}^{n} |y_j - x_j| \le nL \max_{1\le j\le n} |y_j - x_j| .$$

$\square$

Unbefriedigend an Satz 2.3 ist die spezielle Wahl der Norm sowie die dimensionsabhängige Konstante nL.

Für ein Skalarfeld $f : \Omega \to \mathbb{R}$ wie in Satz 2.2 folgt aus der Hölderschen Ungleichung

$$|f(y) - f(x)| = |\langle \operatorname{grad} f(ty + (1-t)x), y - x\rangle| \le \left(\sup_{\xi\in[x,y]} \|\operatorname{grad} f(\xi)\|_p \right) \|y - x\|_q , \quad (2.6)$$

wobei p, q die konjugierten Exponenten mit $1/p + 1/q = 1$ sind, beispielsweise $p = q = 2$.

Ein anderer Ansatz, der auch für Vektorfelder zum Ziel führt, basiert auf dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Sei zunächst $\Omega \subset \mathbb{R}$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Mit $g(t) = f(ty + (1 - t)x)$ wie oben erhalten wir

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) = g(1) - g(0) &= \int_0^1 g'(t)\, dt = \int_0^1 f'(ty + (1-t)x)(y - x)\, dt \\ &= \left(\int_0^1 f'(ty + (1-t)x)\, dt \right) (y - x) . \end{aligned} \quad (2.7)$$

Aus dieser anderen Gleichungsform der Mittelwerteigenschaft ergibt sich ebenfalls die Ungleichung (2.3) durch die Abschätzung

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 f'(ty + (1-t)x)\, dt \right| \le \int_0^1 |f'(ty + (1-t)x)|\, dt &\le \sup_{t\in[0,1]} |f'(ty + (1-t)x)| \\ &= \sup_{\xi\in[x,y]} |f'(\xi)| . \end{aligned} \quad (2.8)$$

Da die Ableitung im Mehrdimensionalen durch Vektoren bzw. Matrizen beschrieben wird, erfordert die Übertragung von (2.7) die Definition des Integrals vektorwertiger Funktionen.

Definition 2.4 (Integral einer vektorwertigen Funktion)
Sei $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^m$, $[a, b] \subset \mathbb{R}$, seien die Komponentenfunktionen $\varphi_i : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar für $i = 1, \ldots, m$. Wir sagen dann, dass φ integrierbar ist und definieren

$$\int_a^b \varphi(t)\, dt \quad (2.9)$$

als Vektor im $\mathbb{R}^m$ mit den Komponenten

$$\int_a^b \varphi_i(t)\, dt , \quad 1 \le i \le m .$$

Ist $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^{(m,n)}$ matrixwertig, so ist das Integral (2.9) definiert als Matrix im $\mathbb{R}^{(m,n)}$ mit den Elementen

$$\int_a^b \varphi_{ij}(t)\, dt , \quad 1 \le i \le m , 1 \le j \le n .$$

$\square$

Sei nun $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar. Ganz analog zu (2.7) erhalten wir

$$
\begin{aligned}
f(y) - f(x) = g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t)\,dt &= \int_0^1 (Df(ty + (1-t)x))(y-x)\,dt \\
&= \left(\int_0^1 Df(ty + (1-t)x)\,dt\right)(y-x)\,. \qquad (2.10)
\end{aligned}
$$

Die zweite Gleichheit folgt aus einer komponentenweisen Anwendung des Hauptsatzes, die dritte aus der Kettenregel, und die vierte aus der Linearität des Integrals: Ist $A : [0,1] \to \mathbb{R}^{(m,n)}$ integrierbar und $z \in \mathbb{R}^n$, so gilt für die i-te Komponente von $\int_0^1 A(t)z\,dt$

$$
\begin{aligned}
\left(\int_0^1 A(t)z\,dt\right)_i = \int_0^1 (A(t)z)_i\,dt = \int_0^1 \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)z_j\,dt &= \sum_{j=1}^n \int_0^1 a_{ij}(t)\,dt \cdot z_j \\
&= \sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 A(t)\,dt\right)_{ij} z_j\,.
\end{aligned}
$$

Ist $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ integrierbar, so gilt

$$
\left\|\int_a^b \varphi(t)\,dt\right\| \le \int_a^b \|\varphi(t)\|\,dt \qquad (2.11)
$$

für jede Norm im $\mathbb{R}^m$. Das ist eine Konsequenz aus der **Jensenschen Ungleichung**, die wir hier nicht behandeln wollen. Zum Beweis von (2.11) für den Fall, dass φ stetig ist, siehe auch die Übung. Wenden wir nun (2.11) auf (2.10) an, so erhalten wir

$$
\|f(y) - f(x)\| \le \int_0^1 \|(Df(ty + (1-t)x))(y-x)\|\,dt\,, \qquad (2.12)
$$

für jede (beliebig gewählte) Norm im $\mathbb{R}^m$. Um nun die Norm im Integranden abzuschätzen, betrachtet man eine geeignete Operatornorm (falls wir die Ableitung als lineare Abbildung auffassen) bzw. Matrixnorm (falls wir sie als Matrix auffassen). Seien $A \in \mathbb{R}^{(m,n)}$, $z \in \mathbb{R}^n$, sei $\|\cdot\|_X$ eine Norm im $\mathbb{R}^n$ und $\|\cdot\|_Y$ eine Norm im $\mathbb{R}^m$. Dann gilt

$$
\|Az\|_Y \le \|A\| \cdot \|z\|_X\,, \qquad (2.13)
$$

falls die Matrixnorm $\|A\|$ durch die beiden Vektornormen erzeugt wird gemäß

$$
\|A\| = \sup_{\|z\|_X = 1} \|Az\|_Y\,, \qquad (2.14)
$$

aber auch in anderen Fällen. (Siehe die Behandlung von Matrixnormen in der Numerik 1.) Aus (2.12) erhalten wir nun weiter

$$
\begin{aligned}
\|f(y) - f(x)\|_Y &\le \int_0^1 \|(Df(ty + (1-t)x))(y-x)\|_Y\,dt \\
&\le \int_0^1 \|Df(ty + (1-t)x)\|\,\|(y-x)\|_X\,dt \\
&= \int_0^1 \|Df(ty + (1-t)x)\|\,dt \cdot \|(y-x)\|_X \\
&\le \left(\sup_{t\in[0,1]} \|Df(ty + (1-t)x)\|\right)\|y-x\|_X\,.
\end{aligned}
$$

Wir fassen das Ergebnis zusammen.

Satz 2.5 (Mittelwertsatz im Mehrdimensionalen, Variante 2)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *offen,* $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ *stetig differenzierbar, seien* $x, y \in \Omega$ *mit* $[x, y] \subset \Omega$*. Sei* $\|\cdot\|_X$ *eine Norm im* $\mathbb{R}^n$*,* $\|\cdot\|_Y$ *eine Norm im* $\mathbb{R}^m$*. Dann gilt*

$$\|f(y) - f(x)\|_Y \le \left(\sup_{\xi \in [x,y]} \|Df(\xi)\| \right) \|y - x\|_X \,, \tag{2.15}$$

falls die Operator- bzw. Matrixnorm gemäß (2.13) mit den beiden Vektornormen verträglich ist. □

3 Kurvenintegrale und Potentiale

Zur Motivation: Ein konstantes Kraftfeld, repräsentiert durch einen Vektor $F \in \mathbb{R}^3$, leistet entlang der Strecke, welche einen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^3$ mit einem Punkt $x_1 \in \mathbb{R}^3$ verbindet, die Arbeit

$$W = \langle F, x_1 - x_0 \rangle = \|F\|_2 \|x_1 - x_0\|_2 \cos\varphi$$

wobei φ der von den Vektoren F und $x_1 - x_0$ eingeschlossene Winkel ist. Betrachten wir den Streckenzug, welcher nacheinander die Punkte $x_0, x_1, \ldots x_N$ verbindet, und nehmen wir an, dass längs der Verbindung von x_{i-1} nach x_i die Kraft F_i wirkt, so ergibt sich die Gesamtarbeit zu

$$W = \sum_{i=1}^{N} \langle F_i, x_i - x_{i-1} \rangle \ . \tag{3.1}$$

Wenn wir diesen Streckenzug als Kurve $x : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ mit $x(t_i) = x_i$ zu einer geeigneten Zerlegung auffassen und $F(x_i) = F_i$ setzen, so wird (3.1) zu

$$W = \sum_{i=1}^{N} \left\langle F(x(t_i)), \frac{x(t_i) - x(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \right\rangle (t_i - t_{i-1}) \,, \tag{3.2}$$

Ist $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ stetig und $x : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar, so ist die längs x verrichtete Arbeit gleich

$$\int_a^b \langle F(x(t)), x'(t) \rangle \ dt \,.$$

Definition 3.1 (Kurve)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Jede stetige Funktion $x : [a, b] \to \Omega$ heißt Kurve in Ω mit Anfangspunkt $x(a)$ und Endpunkt $x(b)$. □

Definition 3.2 (Kurvenintegral)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, seien $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ stetig und $x : [a, b] \to \Omega$ stetig differenzierbar, sei $C = x([a, b])$. Dann heißt

$$\int_C F \cdot dx := \int_a^b \langle F(x(t)), x'(t) \rangle \ dt \tag{3.3}$$

das Kurvenintegral von F entlang C von $x(a)$ nach $x(b)$. □

Diese Definition ist sinnvoll, da das Kurvenintegral sich nicht ändert, wenn wir eine andere Parametrisierung von C wählen, die die Orientierung erhält. Ist etwa $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ eine C^1-Parametertransformation (das heißt, $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ ist bijektiv, φ und φ^{-1} sind stetig differenzierbar), so gilt

$$\begin{aligned}
\int_\alpha^\beta \langle F((x \circ \varphi)(\tau)), (x \circ \varphi)'(\tau) \rangle \ d\tau &= \int_\alpha^\beta \langle F(x(\varphi(\tau))), x'(\varphi(\tau)) \rangle \, \varphi'(\tau) \, d\tau \\
&= \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} \langle F(x(t)), x'(t) \rangle \ dt \\
&= \pm \int_a^b \langle F(x(t)), x'(t) \rangle \ dt \,,
\end{aligned}$$

je nachdem, ob die Parametertransformation φ orientierungserhaltend ($\varphi(\alpha) = a$) oder orientierungsumkehrend ($\varphi(\alpha) = b$) ist.

Für stückweise stetig differenzierbare Kurven $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ setzen wir

$$\int_C F \cdot dx = \sum_{i=1}^k \int_{C_i} F \cdot dx\,, \tag{3.4}$$

falls $x|[t_{i-1}, t_i]$ stetig differenzierbar ist und $C_i = x([t_{i-1}, t_i])$. (Man zeigt, dass diese Definition unabhängig ist von der Wahl der Zerlegung.) Aus der Linearität des Integrals folgt unmittelbar

$$\int_C (F + G) \cdot dx = \int_C F \cdot dx + \int_C G \cdot dx\,, \quad \int_C \lambda F \cdot dx = \lambda \int_C F \cdot dx\,, \tag{3.5}$$

für $\lambda \in \mathbb{R}$.

Satz 3.3 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(\Omega)$, $x : [a, b] \to \Omega$ stückweise stetig differenzierbar. Dann gilt für $C = x([a, b])$*

$$\int_C \operatorname{grad} f \cdot dx = f(x(b)) - f(x(a))\,. \tag{3.6}$$

Beweis: Sei zunächst $x \in C^1([a, b])$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_C \operatorname{grad} f \cdot dx &= \int_a^b \langle \operatorname{grad} f(x(t)), x'(t)\rangle \; dt = \int_a^b (f \circ x)'(t)\, dt \\ &= f(x(b)) - f(x(a)) \end{aligned}$$

nach Kettenregel und Hauptsatz. Ist x stückweise stetig differenzierbar und (t_i) eine entsprechende Zerlegung von $[a, b]$, so folgt

$$\int_C \operatorname{grad} f \cdot dx = \sum_{i=1}^k \int_{C_i} \operatorname{grad} f \cdot dx = \sum_{i=1}^k [f(x(t_i)) - f(x(t_{i-1}))] = f(x(b)) - f(x(a))\,.$$

□

Gilt $F = \operatorname{grad} f$ für ein skalares Feld f, so sagt man, dass F ein **Gradientenfeld** ist, und f heißt **Potential** für F.

Aus Satz 3.3 folgt: Ist $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ein Gradientenfeld, so ist das Kurvenintegral zwischen zwei Punkten $P, Q \in \mathbb{R}^n$ unabhängig davon, wie die Kurve von P nach Q verläuft. Insbesondere ist dann

$$\int_C F \cdot dx = 0$$

für jede geschlossene Kurve C (das heißt, $x(a) = x(b)$).

Lemma 3.4 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Ist F ein Gradientenfeld, so gilt*

$$\partial_i F_j(x) = \partial_j F_i(x) \tag{3.7}$$

für alle $x \in \Omega$ und alle i, j mit $1 \leq i, j \leq n$.

Beweis: Ist $F = \operatorname{grad} f$, so gilt

$$\partial_i F_j(x) = \partial_i(\partial_j f)(x) = \partial_j(\partial_i f)(x) = \partial_j F_i(x)\,.$$

□

Definition 3.5 *Sei X Vektorraum, sei $Y \subset X$. Y heißt sternförmig, falls es ein $y \in Y$ gibt mit $[x,y] \subset Y$ für alle $x \in Y$.* □

Satz 3.6 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und sternförmig, sei $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Gilt*

$$\partial_i F_j(x) = \partial_j F_i(x) \tag{3.8}$$

für alle $x \in \Omega$ und alle i,j, $1 \le i,j \le n$, so ist F ein Gradientenfeld, also gibt es $f \in C^2(\Omega)$ mit

$$F = \operatorname{grad} f\,. \tag{3.9}$$

Beweis: Sei $y \in \Omega$ mit $[y,x] \subset \Omega$ für alle $x \in \Omega$. Wir definieren f als das Kurvenintegral von F entlang der Strecke von y nach x, wir setzen also

$$f(x) = \int_0^1 \langle F(y + t(x-y)), x - y\rangle \; dt\,.$$

Die Voraussetzungen des Satzes aus der Analysis 3 zur Differentiation unter dem Integralzeichen (Satz 4.23) sind erfüllt. Für

$$\tilde{f}(x) = \langle F(y + t(x-y)), x - y\rangle$$

gilt

$$\partial_i \tilde{f}(x) = \langle t\partial_i F(y + t(x-y)), x - y\rangle + \langle F(y + t(x-y)), e_i\rangle\;,$$

also

$$\partial_i f(x) = \int_0^1 \langle t\partial_i F(y + t(x-y)), x - y\rangle + F_i(y + t(x-y))\, dt\,.$$

Für

$$g_i(t) = tF_i(y + t(x-y))$$

gilt

$$g_i'(t) = \langle t(\operatorname{grad} F_i)(y + t(x-y)), x - y\rangle + F_i(y + t(x-y))\,,$$

und mit $z = y + t(x-y)$

$$\begin{aligned}\langle (\operatorname{grad} F_i)(z), x - y\rangle &= \sum_{j=1}^n \partial_j F_i(z)(x_j - y_j) = \sum_{j=1}^n \partial_i F_j(z)(x_j - y_j) \\ &= \langle \partial_i F(z), x - y\rangle\;.\end{aligned}$$

Es folgt

$$g_i'(t) = \langle t(\partial_i F)(y + t(x-y)), x - y\rangle + F_i(y + t(x-y))\,,$$

und damit

$$\partial_i f(x) = \int_0^1 g_i'(t)\, dt = g_i(1) - g_i(0) = F_i(x)\,.$$

□

Definition 3.7 (Wegzusammenhang)
Ein metrischer Raum (X, d) heißt wegzusammenhängend, wenn es für alle $x_a, x_b \in X$ eine Kurve $r : [0,1] \to X$ gibt mit $r(0) = x_a$ und $r(1) = x_b$. □

Definition 3.8 (Konservatives Vektorfeld)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Ein Vektorfeld $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ heißt konservativ auf Ω, falls "das Kurvenintegral wegunabhängig ist", d.h. falls für alle Punkte $x_a, x_b \in \Omega$ und alle stückweise C^1-Kurven C_1, C_2 von x_a nach x_b, welche in Ω verlaufen, gilt

$$\int_{C_1} F \cdot dx = \int_{C_2} F \cdot dx\,. \tag{3.10}$$

□

Satz 3.9 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und wegzusammenhängend, sei $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ stetig. Dann gilt*

$$F \text{ ist Gradientenfeld auf } \Omega \qquad \Leftrightarrow \qquad F \text{ ist konservativ auf } \Omega\ .$$

Beweis: "$\Rightarrow$": Folgt aus Satz 3.3.
"$\Leftarrow$": Seien $x, y \in \Omega$ beliebig. Wir beweisen zunächst

$$\text{Es gibt eine stückweise } C^1\text{-Kurve von } y \text{ nach } x. \tag{3.11}$$

Sei $r : [0,1] \to \Omega$ stetig mit $r(0) = y$, $r(1) = x$. Sei

$$U_\varepsilon = \{z : z \in \mathbb{R}^n,\ \mathrm{dist}\,(z, r([0,1])) < \varepsilon\}\,.$$

Wir wählen $\varepsilon > 0$ so, dass $U_\varepsilon \subset \Omega$ gilt (das ist möglich, da $\mathrm{dist}\,(\partial\Omega, r([0,1]) > 0$ wegen Satz 7.26 aus der Analysis 3, falls $\partial\Omega \neq \emptyset$, was gleichbedeutend ist mit $\Omega \neq \mathbb{R}^n$). Für eine hinreichend feine Unterteilung (t_i) von $[0,1]$ gilt, daß der Polygonzug, welcher $r(0), r(t_1), \ldots, r(1)$ verbindet, ganz in U_ε und damit auch in Ω liegt. Damit ist (3.11) bewiesen. Wir wählen nun $x_* \in \Omega$ und definieren $f : \Omega \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \int_C F \cdot\, dx\,, \tag{3.12}$$

wobei C eine stückweise C^1-Kurve von x_* nach x ist (eine solche gibt es nach (3.11), und nach Voraussetzung hängt das Kurvenintegral nicht von der Wahl von C ab). Zu zeigen ist noch $F = \mathrm{grad}\, f$, das heißt, $F_i = \partial_i f$ für $1 \leq i \leq n$. Sei $x \in \Omega$ beliebig, sei $h > 0$ so gewählt, dass $[x, x + he_i] \subset \Omega$ gilt. Sei C_* eine stückweise C^1-Kurve von x_* nach x, sei $C(h)$ definiert durch

$$r_h : [0,h] \to \Omega\,, \quad r_h(t) = x + te_i\,.$$

Dann gilt

$$f(x + he_i) = \int_{C_*} F \cdot\, dx + \int_{C(h)} F \cdot\, dx = f(x) + \int_{C(h)} F \cdot\, dx\,.$$

Für

$$g(h) = f(x + he_i) - f(x)$$

gilt also

$$g(h) = \int_{C(h)} F \cdot dx = \int_0^h \langle F(r_h(t)), r_h'(t) \rangle \, dt = \int_0^h F_i(x + te_i) \, dt \,,$$

also ist g rechtsseitig differenzierbar in 0 und $g_+'(0) = F_i(x)$. Dasselbe Argument mit $-e_i$ statt e_i liefert die Existenz von $\partial_i f(x)$ und die Formel $\partial_i f(x) = F_i(x)$. $\square$

Als Beispiel betrachten wir

$$\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \,, \quad F : \Omega \to \mathbb{R} \,, \quad F(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2} \,, \frac{x}{x^2+y^2} \right) . \tag{3.13}$$

Es gilt für alle $(x,y) \neq (0,0)$

$$\partial_1 F_2(x,y) = \partial_2 F_1(x,y) \,.$$

Für jede sternförmige Teilmenge $\tilde{\Omega}$ von Ω gibt es also nach Satz 3.6 ein $f \in C^2(\tilde{\Omega})$ mit

$$F(x) = \operatorname{grad} f(x) \,, \quad \text{für alle } x \in \tilde{\Omega} \,.$$

Aber andererseits gilt, wenn wir den Einheitskreis als eine geschlossene Kurve C auffassen, mit $r : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $r(t) = (\cos t, \sin t)$

$$\int_C F \cdot dx = \int_0^{2\pi} \langle F(r(t)), r'(t) \rangle \, dt = \int_0^{2\pi} \sin^2 t + \cos^2 t \, dt = 2\pi \,,$$

also ist F nicht konservativ auf Ω. Aus Satz 3.9 (bzw. schon Satz 3.3) folgt, dass es kein $f \in C^2(\Omega)$ geben kann mit $F = \operatorname{grad} f$ in Ω.

4 Der Fixpunktsatz von Banach

Definition 4.1 (Fixpunkt)
Sei X Menge, $f : X \to X$. Ein $x \in X$ mit

$$x = f(x) \tag{4.1}$$

heißt Fixpunkt von f. Die Iteration

$$x_{k+1} = f(x_k)\,, \quad x_0 \in X \text{ gegeben,} \tag{4.2}$$

heißt Fixpunktiteration. □

"Fixpunktsätze" machen Aussagen über Lösungen der Fixpunktgleichung $x = f(x)$, etwa über Existenz und Eindeutigkeit von Fixpunkten, unter gewissen Voraussetzungen an X und f. Fixpunktsätze stellen ein zentrales Werkzeug der Analysis dar.

Definition 4.2 (Lipschitz-Stetigkeit)
Seien (X, d_1), (Y, d_2) metrische Räume. Ein $f : X \to Y$ heißt Lipschitz-stetig mit der Lipschitz-Konstante L, falls gilt

$$d_2(f(x_1), f(x_2)) \le L d_1(x_1, x_2)\,, \quad \text{für alle } x_1, x_2 \in X. \tag{4.3}$$

Falls $Y = X$, $d_1 = d_2$ und $L < 1$, so heißt f Kontraktion. □

Jede Lipschitz-stetige Abbildung ist gleichmäßig stetig (das folgt unmittelbar aus den Definitionen).

Satz 4.3 (Banachscher Fixpunktsatz, Kontraktionssatz)
Sei (X, d) vollständiger metrischer Raum, $f : X \to X$ Kontraktion. Dann gilt:

(i) f hat genau einen Fixpunkt x.

(ii) Für jedes $x_0 \in X$ konvergiert die durch die Fixpunktiteration $x_{k+1} = f(x_k)$ definierte Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen x.

(iii) Ist $L < 1$ eine Lipschitz-Konstante für f, so gilt die Fehlerabschätzung

$$d(x_k, x) \le \frac{L}{1-L} d(x_{k-1}, x_k)\,. \tag{4.4}$$

Beweis: Sei $x_0 \in X$ beliebig, sei $L < 1$ Lipschitz-Konstante für f. Dann gilt für die durch die Fixpunktiteration definierte Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$

$$d(x_k, x_{k+1}) = d(f(x_{k-1}), f(x_k)) \le L d(x_{k-1}, x_k)\,, \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N},$$

also (mit Induktion)

$$d(x_k, x_{k+1}) \le L^k d(x_0, x_1)\,, \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N},$$

also für alle $k, m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
d(x_k, x_{k+m}) &\leq d(x_k, x_{k+1}) + \ldots + d(x_{k+m-1}, x_{k+m}) \\
&\leq L^k d(x_0, x_1) + \ldots + L^{k+m-1} d(x_0, x_1) = L^k \left(\sum_{j=0}^{m-1} L^j \right) d(x_0, x_1) \\
&\leq \frac{L^k}{1-L} d(x_0, x_1) \qquad \text{da } L < 1.
\end{aligned}$$

Die Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist also eine Cauchyfolge, welche wegen der Vollständigkeit von X gegen ein $x \in X$ konvergiert. Aus der Stetigkeit von f folgt

$$x = \lim_{k \to \infty} x_k = \lim_{k \to \infty} f(x_{k-1}) = f(x) \,.$$

Ist y ebenfalls Fixpunkt von x, so gilt

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq L d(x, y) \,,$$

also $(1 - L) d(x, y) \leq 0$, also $d(x, y) = 0$ und damit $x = y$. Zum Beweis von (4.4) zeigen wir wie oben

$$d(x_k, x_{k+m}) \leq L \left(\sum_{j=0}^{m-1} L^j \right) d(x_{k-1}, x_k) \leq \frac{L}{1-L} d(x_{k-1}, x_k) \,,$$

also

$$d(x_k, x) = \lim_{m \to \infty} d(x_k, x_{k+m}) \leq \frac{L}{1-L} d(x_{k-1}, x_k) \,.$$

□

5 Inverse und implizite Funktionen

Zur Motivation eine Wiederholung aus dem Eindimensionalen: Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Ist $x \in (a,b)$ mit $f'(x) \neq 0$, so ist die Einschränkung $f : I_\delta \to \mathbb{R}$, $I_\delta = (x-\delta, x+\delta)$, für hinreichend kleines $\delta > 0$ streng monoton und damit, aufgefasst als Abbildung

$$f : I_\delta \to f(I_\delta)$$

bijektiv. Die Bildmenge $f(I_\delta)$ ist ebenfalls ein offenes Intervall im $\mathbb{R}$, und die Umkehrung $f^{-1} : f(I_\delta) \to I_\delta$ ist stetig differenzierbar. Aus der Voraussetzung $f'(x) \neq 0$ folgt also, dass f "lokal invertierbar" und die Inverse ebenfalls stetig differenzierbar ist.

Wir können auch einen globalen Satz formulieren: Ist $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$, so ist f invertierbar, und $f^{-1} : f((a,b)) \to (a,b)$ ist ebenfalls stetig differenzierbar.

Wir betrachten nun Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. In diesem Abschnitt beweisen wir einen Satz über die lokale Invertierbarkeit von f. Aussagen über globale Invertierbarkeit sind i.a. schwieriger und nicht Gegenstand dieser Vorlesung.

Falls die Inverse f^{-1} auf irgendeinem Teilgebiet existiert und differenzierbar ist, können wir ihre Ableitung sofort aus der Kettenregel berechnen. Aus $f^{-1} \circ f = id$ folgt

$$(D(f^{-1} \circ f))(x) = (D(id))(x) = id\,,$$

und weiter aus der Kettenregel

$$id = (D(f^{-1} \circ f))(x) = (Df^{-1})(f(x)) \circ (Df)(x)$$

beziehungsweise

$$I = J_{f^{-1}}(f(x)) \cdot J_f(x)\,.$$

Eine differenzierbare Inverse von f kann also nur dann existieren, wenn die Ableitung bzw. die Funktionalmatrix von f invertierbar ist.

Ist f eine lineare Abbildung, also $f(x) = Ax$ mit einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$, so ist $J_f(x) = A$ in allen Punkten x, und $f^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ existiert genau dann, wenn A invertierbar ist; in diesem Fall ist f^{-1} auch differenzierbar. Ist A nicht invertierbar, so ist die Einschränkung von f auf eine offene Kugel $B_\delta(x)$ nicht invertierbar, egal wie klein δ ist und wo x liegt. Damit ist für lineare Abbildungen im Endlichdimensionalen die Frage der Invertierbarkeit geklärt. In der Linearen Algebra wird weiter bewiesen, daß gilt

$$A \text{ invertierbar} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{rang}(A) = n \quad \Leftrightarrow \quad \det(A) \neq 0$$

Satz 5.1 *Die Determinante, aufgefasst als Funktion*

$$\det : \mathbb{R}^{(n,n)} \to \mathbb{R} \tag{5.1}$$

ist beliebig oft stetig differenzierbar. Die Menge

$$GL(n,\mathbb{R}) = \{A :\ A \in \mathbb{R}^{(n,n)},\ A \text{ invertierbar}\} \tag{5.2}$$

ist eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^{(n,n)}$.

Beweis: In der Linearen Algebra wird die folgende Formel bewiesen:

$$\det(A) = \sum_{\pi} \operatorname{sign}(\pi) \prod_{i=1}^{n} a_{\pi(i),i}\,,$$

wobei die Summe über alle Permutationen π der Indexmenge $\{1, \ldots, n\}$ gebildet wird. Die Determinante, aufgefasst als Funktion der Matrixelemente, ist also ein Polynom und damit beliebig oft stetig differenzierbar. Die zweite Behauptung folgt aus der Darstellung

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{A : A \in \mathbb{R}^{(n,n)}, \det(A) \neq 0\}\,,$$

d.h. $GL(n, \mathbb{R})$ ist das Urbild der offenen Menge $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ unter der stetigen Abbildung "det". $\square$

Folgerung 5.2 *Die Abbildung*

$$T : GL(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{(n,n)}\,, \quad T(A) = A^{-1}\,, \tag{5.3}$$

ist stetig differenzierbar.

Beweis: Folgt aus Satz 5.1, da sich die Inverse mit einer Formel darstellen lässt, in der nur Determinanten vorkommen, nämlich (siehe Lineare Algebra)

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\operatorname{adj} A)^T\,,$$

wobei $\operatorname{adj} A$ diejenige Matrix im $\mathbb{R}^{(n,n)}$ ist, deren (i, j)-tes Element gegeben ist durch

$$(-1)^{i+j} \det(\tilde{A}_{ij})\,,$$

und $\tilde{A}_{ij}$ diejenige Matrix im $\mathbb{R}^{(n-1),(n-1)}$ ist, die aus A durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht. $\square$

Satz 5.3 (Satz über inverse Funktionen, Spezialfall)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $0 \in \Omega$, sei $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, es gelte $f(0) = 0$ und $Df(0) = id$, d.h. $J_f(0) = I$. Dann gibt es offene Mengen $U, V \subset \mathbb{R}^n$ mit $0 \in U \subset \Omega$, so dass gilt:

(i) $f|U : U \to V$ *ist bijektiv.*

(ii) $(f|U)^{-1} : V \to U$ *ist differenzierbar in* 0, $Df^{-1}(0) = id$.

Beweis: In diesem Beweis steht $\|\cdot\|$ für $\|\cdot\|_\infty$. Zur Konstruktion der lokalen Inverse wird der Banachsche Fixpunktsatz herangezogen. Zu diesem Zweck definieren wir für jedes $y \in \mathbb{R}^n$ eine Abbildung $T_y : \Omega \to \mathbb{R}^n$ durch

$$T_y(x) = x + y - f(x)\,. \tag{5.4}$$

Es gilt dann

$$y = f(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad x \text{ ist Fixpunkt von } T_y$$

und weiter ist $T_y \in C^1(\Omega)$,

$$J_{T_y}(x) = J_{T_0}(x) = I - J_f(x)\,, \quad J_{T_y}(0) = 0\,.$$

Wir wählen ein $\delta > 0$, so dass gilt

$$\|T_y(x) - T_y(\xi)\| \leq \frac{1}{2}\|x - \xi\|\,, \qquad \text{für alle } x, \xi \in K_\delta(0),\ y \in \mathbb{R}^n. \tag{5.5}$$

(Dass das möglich ist, folgt aus dem Mittelwertsatz (Version 2.3 oder 2.5), der Stetigkeit der Abbildung $x \mapsto J_{T_0}(x)$ und der Kompaktheit der abgeschlossenen Kugeln $K_\delta = K_\delta(0)$.) Für $x \in K_\delta$ gilt also

$$\|T_y(x)\| = \|x + y - f(x)\| \leq \|T_0(x)\| + \|y\| \leq \frac{1}{2}\|x\| + \|y\|\,. \tag{5.6}$$

Aus (5.5) und (5.6) folgt:

$$T_y : K_\delta \to K_\delta \text{ ist Kontraktion, falls } \|y\| \leq \frac{\delta}{2}\,. \tag{5.7}$$

Aus dem Banachschen Fixpunktsatz folgt nun, dass alle solche T_y einen eindeutigen Fixpunkt $x \in K_\delta$ haben, also gilt

$$\text{zu jedem } y \in K_{\frac{\delta}{2}} \text{ gibt es genau ein } x \in K_\delta \text{ mit } f(x) = y\,, \tag{5.8}$$

und für dieses x gilt wegen (5.6) und $x = T_y(x)$, dass

$$\|x\| \leq 2\|y\|\,. \tag{5.9}$$

Wir definieren ($B_\delta = B_\delta(0)$ offene Kugel)

$$V = B_{\frac{\delta}{2}}\,, \quad U = f^{-1}(V) \cap B_\delta\,.$$

Es ist $0 \in U$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f(U) \subset V$, und wegen (5.8) ist $f|U$ injektiv. Es ist auch $V \subset f(U)$ wegen (5.9), also ist (i) bewiesen. Zum Beweis von (ii) genügt es zu zeigen: Für jede Folge $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $B_{\frac{\delta}{2}}$ mit $y_k \to 0$, $y_k \neq 0$ für alle k, gilt

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|f^{-1}(y_k) - f^{-1}(0) - I(y_k - 0)\|}{\|y_k - 0\|} = 0\,. \tag{5.10}$$

Sei (y_k) eine solche Folge, sei $x_k = f^{-1}(y_k)$, dann ist $x_k \neq 0$ für alle k, und es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\|f^{-1}(y_k) - f^{-1}(0) - I(y_k - 0)\|}{\|y_k - 0\|} &= \frac{\|f^{-1}(y_k) - y_k\|}{\|y_k\|} \\
&= \frac{\|x_k - f(x_k)\|}{\|x_k\|} \cdot \frac{\|x_k\|}{\|y_k\|} \\
&\leq \frac{\|f(x_k) - f(0) - I(x_k - 0)\|}{\|x_k\|} \cdot 2\,,
\end{aligned}$$

und die rechte Seite dieser Ungleichung konvergiert gegen 0 für $k \to \infty$, da $J_f(0) = I$ und da $x_k \to 0$ wegen (5.9). Damit ist (5.10) bewiesen. □

Satz 5.4 (Satz über inverse Funktionen)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, sei $x_* \in \Omega$, sei $Df(x_*)$ invertierbar. Dann gibt es offene Mengen $U, V \subset \mathbb{R}^n$ mit $x_* \in U \subset \Omega$, so dass gilt:

(i) $f|U : U \to V$ *ist bijektiv.*

(ii) $(f|U)^{-1} : V \to U$ *ist stetig differenzierbar in* V*, und für alle* $x \in U$ *gilt*

$$Df^{-1}(f(x)) = (Df(x))^{-1}\,, \quad J_{f^{-1}}(f(x)) = J_f(x)^{-1}\,. \tag{5.11}$$

Beweis: Die Menge

$$\begin{aligned}\tilde{\Omega} &= \{x : x \in \Omega,\ Df(x) \text{ ist invertierbar}\} \\ &= \Omega \cap \{x : J_f(x) \in GL(n, \mathbb{R})\} = \Omega \cap (J_f)^{-1}(GL(n, \mathbb{R}))\end{aligned}$$

ist offen nach Satz 5.1, da J_f stetig von x abhängt. Da es genügt, den Beweis für $\tilde{\Omega}$ statt Ω zu führen, können wir o.B.d.A. annehmen, dass $Df(x)$ invertierbar ist für alle $x \in \Omega$. Wir setzen $\Omega_* = \Omega - x_*$ und definieren $f_* : \Omega_* \to \mathbb{R}^n$ durch

$$f_*(h) = (Df(x_*))^{-1}(f(x_* + h) - f(x_*))\,. \tag{5.12}$$

Für f_* sind alle Voraussetzungen von Satz 5.3 erfüllt, da $f_*(0) = 0$ und $Df_*(0) = Df(x_*)^{-1} \circ Df(x_*) = id$, also gibt es $U_*, V_* \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $0 \in U_* \subset \Omega_*$, $f_* : U_* \to V_*$ bijektiv, f_*^{-1} differenzierbar in 0 mit $Df_*^{-1}(0) = id$. Wir setzen

$$U = U_* + x_*\,.$$

Aus (5.12) folgt, dass für alle $x \in U$ gilt

$$f(x) = f(x_*) + Df(x_*)(f_*(x - x_*))\,. \tag{5.13}$$

Da f_* auf U_* bijektiv und $Df(x_*)$ invertierbar, ist f auf U injektiv. Wir setzen

$$V = f(U) = f(x_*) + Df(x_*)(f_*(U_*)) = f(x_*) + Df(x_*)(V_*)\,.$$

Mit V_* ist auch V offen, und $f|U : U \to V$ bijektiv. Nach (5.12) gilt für alle $x \in U$

$$f_*(x - x_*) = Df(x_*)^{-1}(f(x) - f(x_*))\,,$$

also

$$x = x_* + f_*^{-1}[Df(x_*)^{-1}(f(x) - f(x_*)]\,,$$

also für alle $y \in V$

$$f^{-1}(y) = x_* + f_*^{-1}[Df(x_*)^{-1}(y - f(x_*)]\,.$$

Aus der Kettenregel folgt

$$(Df^{-1})(f(x_*)) = (Df_*^{-1})(0) \circ (Df(x_*))^{-1} = (Df(x_*))^{-1}\,, \quad J_{f^{-1}}(f(x_*)) = J_f(x_*)^{-1}\,.$$

Da für jedes $x \in U$ die Voraussetzungen des Satzes (mit x statt x_*) erfüllt sind, ist f^{-1} auf ganz V differenzierbar, und (5.11) gilt. Es ist außerdem f^{-1} stetig auf V (siehe Kapitel 1) und wegen Folgerung 5.2 auch die Abbildung

$$y \mapsto (J_f(f^{-1}(y)))^{-1} = J_{f^{-1}}(y)\,.$$

$\square$

Wir kommen auf die Polarkoordinaten

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\,, \quad f(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

zurück. Es ist

$$\det(J_f(r,\varphi)) = r\,,$$

also ist f lokal invertierbar in allen Punkten (r,φ) mit $r \neq 0$. Es gilt darüber hinaus, dass $f : U \to V$ bijektiv ist für

$$U = \{(r,\varphi) : r > 0,\, 0 < \varphi < 2\pi\}\,, \quad V = \{(x,y) : y \neq 0 \text{ oder } x < 0\}\,.$$

Wir befassen uns nun mit **implizit definierten Funktionen**. Im einfachsten Fall wollen wir eine Gleichung der Form

$$f(x,y) = 0\,, \quad f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,,$$

nach y auflösen. Beispiel:

$$xy - 1 = 0\,,$$

Lösung:

$$y = \frac{1}{x}\,.$$

Wir haben also eine Funktion $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ gefunden, nämlich $g(x) = 1/x$, so dass gilt

$$f(x, g(x)) = 0\,. \tag{5.14}$$

Im allgemeinen ist das nicht in einer so explizit angebbaren Form möglich, oder vielleicht auch nicht sinnvoll. Es stellt sich dann u.a. die Frage, unter welchen Voraussetzungen an f ein solches g existiert. Weiteres Beispiel: Der Einheitskreis

$$0 = f(x,y) = x^2 + y^2 - 1\,. \tag{5.15}$$

Hier liefern

$$g(x) = +\sqrt{1-x^2}\,, \quad g(x) = -\sqrt{1-x^2}\,,$$

Lösungen von (5.14). Hier ist also die Lösung "global" mehrdeutig, aber "lokal" (d.h. in einer hinreichend kleinen Umgebung eines Punktes (x,y) mit $f(x,y) = 0$) eindeutig für $|x| < 1$; lokal mehrdeutig für $|x| = 1$, dort ist g nicht differenzierbar; nicht definiert für $|x| > 1$.

Existiert eine differenzierbare Funktion g, so dass (5.14) gilt, so erhält man aus der Kettenregel

$$0 = \frac{d}{dx} f(x, g(x)) = \partial_x f(x, g(x)) + \partial_y f(x, g(x)) g'(x)\,,$$

also

$$g'(x) = -\frac{\partial_x f(x, g(x))}{\partial_y f(x, g(x))}\,,$$

jedenfalls dann, wenn $\partial_y f(x, g(x)) \neq 0$. Andernfalls kann es Probleme geben. Für (5.15) haben wir

$$\partial_x f(x,y) = 2x\,, \quad \partial_y f(x,y) = 2y\,.$$

Die allgemeine Situation im Endlichdimensionalen sieht so aus: Wir haben m Gleichungen mit $n+m$ Unbekannten, von denen wir mit Hilfe der Gleichungen m Unbekannte eliminieren wollen, indem wir sie als Funktionen der anderen n Unbekannten ausdrücken.

$$\begin{aligned} f_1(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m) &= 0\,, \\ f_2(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m) &= 0\,, \\ &\vdots \\ f_m(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m) &= 0\,. \end{aligned}$$

Gesucht sind Funktionen g_i, "$y_i = g_i(x_1,\dots,x_n)$", für $1 \le i \le m$, mit

$$f_j(x_1,\dots,x_n,g_1(x_1,\dots,x_n),\dots,g_m(x_1,\dots,x_n)) = 0\,, \quad 1 \le j \le m\,.$$

Erheblich übersichtlicher ist die vektorielle Schreibweise: Gegeben ist

$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m\,,$$

gesucht ist

$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \qquad \text{mit} \qquad f(x,g(x)) = 0$$

für alle (oder doch möglichst viele) $x \in \mathbb{R}^n$. In einem solchen Fall empfiehlt es sich, auch für die Jacobi-Matrix eine Block-Notation einzuführen. Ist $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ differenzierbar, und schreiben wir $(x,y) = (x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)$ für die Elemente in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, so definieren wir

$$\partial_x f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f_1(x,y) & \cdots & \partial_{x_n} f_1(x,y) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{x_1} f_k(x,y) & \cdots & \partial_{x_n} f_k(x,y) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(k,n)}\,, \tag{5.16}$$

$$\partial_y f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_{y_1} f_1(x,y) & \cdots & \partial_{y_m} f_1(x,y) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{y_1} f_k(x,y) & \cdots & \partial_{y_m} f_k(x,y) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(k,m)}\,. \tag{5.17}$$

Die gesamte Jacobi-Matrix setzt sich aus zwei nebeneinanderstehenden Blöcken zusammen,

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_x f(x,y) & \partial_y f(x,y) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(k,n+m)}\,.$$

Satz 5.5 (Implizite Funktionen)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ offen, sei $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar, sei $(x_*,y_*) \in \Omega$ mit $f(x_*,y_*) = 0$. Ist $\partial_y f(x_*,y_*)$ invertierbar, so gibt es eine Umgebung W von x_* und eine stetig differenzierbare Funktion $g : W \to \mathbb{R}^m$ mit $y_* = g(x_*)$ und

$$f(x,g(x)) = 0\,, \quad (x,g(x)) \in \Omega\,, \quad \textit{für alle } x \in W, \tag{5.18}$$

und es gilt

$$J_g(x) = -\partial_y f(x,g(x))^{-1} \partial_x f(x,g(x)) \tag{5.19}$$

für alle $x \in W$.

Beweis: Wir definieren

$$F : \Omega \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m\,, \quad F(x,y) = (x, f(x,y))\,.$$

Wir zeigen, dass F in (x_*, y_*) die Voraussetzungen des Satzes 5.4 über inverse Funktionen erfüllt. Dazu genügt es zu zeigen, dass die Funktionalmatrix

$$J_F(x,y) = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ \partial_x f(x,y) & \partial_y f(x,y) \end{pmatrix}$$

für $(x,y) = (x_*, y_*)$ invertierbar ist. In der Tat, die Matrix

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ B(x,y) & (\partial_y f(x,y))^{-1} \end{pmatrix}\,, \quad B(x,y) = -(\partial_y f(x,y))^{-1} \partial_x f(x,y)\,,$$

ist für $(x,y) = (x_*, y_*)$ die Inverse von $J_F(x_*, y_*)$. Aus Satz 5.4 folgt nun: Es gibt offene Mengen $U, V \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ mit $(x_*, y_*) \in U \subset \Omega$, so dass $F : U \to V$ bijektiv und $F^{-1} : V \to U$ stetig differenzierbar ist. Wir zerlegen F^{-1} in zwei Blöcke,

$$F^{-1}(x,y) = (\varphi_x(x,y), \varphi_y(x,y))\,,$$

mit $\varphi_x : V \to \mathbb{R}^n$, $\varphi_y : V \to \mathbb{R}^m$. Für $(x,y) \in V$ gilt dann

$$\begin{aligned} (x,y) &= F(F^{-1}(x,y)) = F(\varphi_x(x,y), \varphi_y(x,y)) \\ &= (\varphi_x(x,y), f(\varphi_x(x,y), \varphi_y(x,y)))\,, \end{aligned}$$

also

$$x = \varphi_x(x,y)\,, \quad y = f(x, \varphi_y(x,y))\,. \tag{5.20}$$

Wir wählen nun offene Mengen $W \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$, mit

$$F(x_*, y_*) = (x_*, 0) \in W \times Y \subset V\,,$$

und definieren $g : W \to \mathbb{R}^m$ durch

$$g(x) = \varphi_y(x, 0)\,. \tag{5.21}$$

Ausserdem verlangen wir, daß $\partial_y f(x, g(x))$ invertierbar ist für alle $x \in W$ (das können wir immer durch Verkleinern von W erreichen). Es gilt dann wegen (5.20)

$$0 = f(x, \varphi_y(x, 0)) = f(x, g(x))\,, \quad \text{für alle } x \in W,$$

und

$$(x_*, y_*) = F^{-1}(x_*, 0) = (x_*, \varphi_y(x_*, 0)) = (x_*, g(x_*))\,,$$

also

$$y_* = g(x_*)\,.$$

Da F^{-1} stetig differenzierbar ist, ist auch g stetig differenzierbar. Die Formel (5.19) für J_g folgt aus der Kettenregel, angewendet auf

$$x \mapsto \begin{pmatrix} x \\ g(x) \end{pmatrix} \mapsto f(x, g(x)) = 0\,,$$

da wir durch Differenzieren erhalten

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{pmatrix} \partial_x f(x, g(x)) & \partial_y f(x, g(x)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n \\ J_g(x) \end{pmatrix} \\ &= \partial_x f(x, g(x)) + \partial_y f(x, g(x)) J_g(x) \,. \end{aligned}$$

□

Als Beispiel betrachten wir die Niveaulinien einer stetig differenzierbaren Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Sei $(x_*, y_*) \in \Omega$, $f(x_*, y_*) = c$, also $(x_*, y_*) \in N_c(f)$,

$$N_c(f) = \{(x, y) : (x, y) \in \Omega,\ f(x, y) = c\} \,.$$

Die Frage ist: Wie sieht $N_c(f)$ in der Nähe von (x_*, y_*) aus? Wir betrachten zunächst den regulären Fall

$$\operatorname{grad} f(x_*, y_*) \neq 0 \,. \tag{5.22}$$

In diesem Fall ist mindestens eine der beiden partiellen Ableitungen nicht Null. Ist $\partial_y f(x_*, y_*) \neq 0$, so gibt es nach Satz 5.5 ein offenes Intervall $I = (x_* - \delta, x_* + \delta)$ und ein $g \in C^1(I)$ mit $g(x_*) = y_*$ und $f(x, g(x)) = 0$, d.h. y lässt sich in der Nähe von (x_*, y_*) nach x auflösen. Ist $\partial_x f(x_*, y_*) \neq 0$, so gibt es nach Satz 5.5 ein offenes Intervall $J = (y_* - \delta, y_* + \delta)$ und ein $h \in C^1(J)$ mit $h(y_*) = x_*$ und $f(h(y), y) = 0$, d.h. x lässt sich in der Nähe von (x_*, y_*) nach y auflösen. Das ist der Fall in Beispiel (5.15), in dem

$$\begin{aligned} \partial_x f(x, y) &\neq 0 \,, \quad \text{ausser in } (0, 1),\ (0, -1), \\ \partial_y f(x, y) &\neq 0 \,, \quad \text{ausser in } (1, 0),\ (-1, 0). \end{aligned}$$

Man kann ausserdem zeigen, dass es im regulären Fall (5.22) in einer hinreichend kleinen Umgebung von (x_*, y_*) keine anderen Punkte von $N_c(f)$ geben kann.

Der singuläre Fall ist charakterisiert durch

$$\operatorname{grad} f(x_*, y_*) = 0 \,. \tag{5.23}$$

Hier kann alles mögliche passieren. Sei etwa

$$f(x, y) = x^3 - y^2 = 0 \,, \tag{5.24}$$

dann ist

$$\operatorname{grad} f(x, y) = (3x^2, -2y) \,, \quad \operatorname{grad} f(0) = 0 \,.$$

Wir können x nach y auflösen,

$$x = h(y) = \sqrt[3]{y^2} \,,$$

aber h ist nicht differenzierbar in 0, und $N_0(f)$ hat eine Spitze in 0. Für

$$f(x, y) = x^2 - y^2 = 0 \,, \tag{5.25}$$

gilt

$$\operatorname{grad} f(x, y) = (2x, -2y) \,, \quad \operatorname{grad} f(0) = 0 \,,$$

und $N_0(f)$ besteht aus den beiden Winkelhalbierenden (die sich im Nullpunkt schneiden). Eine kompliziertere Situation liegt vor bei

$$f(x,y) = r^6 \sin\frac{1}{r^2}\,, \quad r = \sqrt{x^2+y^2}\,, \quad f(0) = 0\,. \tag{5.26}$$

Hier ist ebenfalls $\operatorname{grad} f(0) = 0$, und $N_0(f)$ besteht aus unendlich vielen Kreisen um 0 mit den Radien r, wobei

$$\frac{1}{r^2} = \pi n\,, \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

sowie den Nullpunkt selbst. Es gilt allgemein (ohne Beweis):

> Zu jeder abgeschlossenen Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ gibt es eine stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $A = N_0(f)$.

6 Substitutionsformel im Mehrdimensionalen (Teil 2)

In Fortsetzung von Kapitel 8 aus Analysis 3 beschäftigen wir uns nochmals mit der Substitutionsregel der Integration im Mehrdimensionalen. Im Falle einer affin linearen Abbildung

$$T(x) = Ax + b\,, \quad A \in \mathbb{R}^{(n,n)} \text{ nichtsingulär, } b \in \mathbb{R}^n, \tag{6.1}$$

gilt (siehe Satz 8.3, Analysis 3)

$$\int_\Omega f(Ax+b)\, d\lambda^n(x) = \frac{1}{|\det(A)|} \int_{T(\Omega)} f(y)\, d\lambda^n(y)\,. \tag{6.2}$$

Wir betrachten nunmehr auch nichtlineare Transformationen T.

Definition 6.1
Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Abbildung $T : U \to V$ heißt C^k-Diffeomorphismus, falls T bijektiv ist und falls $T \in C^k(U;\mathbb{R}^n)$ und $T^{-1} \in C^k(V;\mathbb{R}^n)$ gelten. □

Lemma 6.2 *Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $T : U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus. Sei $I = [a,b) \in \mathcal{J}^n$ mit $\overline{I} \subset U$. Dann gilt*

$$\lambda^n(T(I)) \le \sup_{x\in I} |\det DT(x)| \cdot \lambda^n(I)\,. \tag{6.3}$$

Beweis: Der Fall $I = \emptyset$ ist trivial. Sei also $I \neq \emptyset$, also $\lambda^n(I) > 0$. Wir definieren $c \ge 0$ durch

$$\lambda^n(T(I)) = c\lambda^n(I)\,. \tag{6.4}$$

Wir zerlegen $I^{(0)} := I$ durch Halbierung jeder Seite, also in 2^n Teilquader. Sei $I^{(1)}$ einer dieser Teilquader mit

$$\lambda^n(T(I^{(1)})) \ge c\lambda^n(I^{(1)})\,.$$

Einen solchen Teilquader muss es geben, da andernfalls (6.4) nicht gilt. Durch Wiederholen dieser Konstruktion erhalten wir eine Folge $(I^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{J}^n$ mit $I^{(k+1)} \subset I^{(k)}$ und

$$\lambda^n(T(I^{(k)})) \ge c\lambda^n(I^{(k)}) \tag{6.5}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Da die zugehörigen Seitenlängen gegen 0 konvergieren und da $\overline{I}$ kompakt ist, gibt es ein $z \in \overline{I}$ mit

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \overline{I^{(k)}} = \{z\}\,. \tag{6.6}$$

Sei $x^{(k)}$ der Mittelpunkt von $I^{(k)}$, wir setzen

$$I_\varepsilon^{(k)} = (1+\varepsilon)(I^{(k)} - x^{(k)}) + x^{(k)}\,. \tag{6.7}$$

Die Idee des Beweises besteht nun darin, $T(I^{(k)})$ als Teilmenge des Bildes von $I_\varepsilon^{(k)}$ unter der Linearisierung von T zu erhalten und hierauf die Substitutionsformel für affine Transformationen anzuwenden. Wir definieren zunächst eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ durch

$$\|x\| = \max_{1\le i\le n} \frac{2}{b_i - a_i} |x_i|\,. \tag{6.8}$$

Es ist dann

$$\overline{I^{(k)}} = K(x^{(k)}, 2^{-k}) = \{x : \|x - x^{(k)}\| \le 2^{-k}\}\,, \quad \overline{I_\varepsilon^{(k)}} = K(x^{(k)}, (1+\varepsilon)2^{-k})\,. \tag{6.9}$$

Da T und T^{-1} differenzierbar sind, ist $DT(z)$ eine bijektive lineare Abbildung (siehe Kapitel 5). Bestimme M so, dass

$$\|DT(z)^{-1}y\| \le M\|y\|\,, \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}^n. \tag{6.10}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ fest gewählt. Wir wählen k hinreichend groß, so dass

$$\|T(x) - T(z) - DT(z)(x-z)\| \le \frac{\varepsilon}{2M}\|x - z\|\,, \quad \text{für alle } x \in I^{(k)}. \tag{6.11}$$

(T ist differenzierbar.) Es ist dann

$$T(x) - T(z) - DT(z)(x-z) \in K(0, \frac{\varepsilon}{M}2^{-k})\,,$$

also

$$T(I^{(k)}) \subset T(z) + DT(z)(I^{(k)} - z) + K(0, \frac{\varepsilon}{M}2^{-k})\,. \tag{6.12}$$

Aus (6.10) folgt

$$K(0, \frac{\varepsilon}{M}2^{-k}) = DT(z)DT(z)^{-1}K(0, \frac{\varepsilon}{M}2^{-k}) \subset DT(z)K(0, \varepsilon 2^{-k})\,,$$

also

$$\begin{aligned} T(I^{(k)}) &\subset T(z) + DT(z)(I^{(k)} - z) + DT(z)K(0, \varepsilon 2^{-k}) \\ &= T(z) + DT(z)(I^{(k)} + K(0, \varepsilon 2^{-k}) - z)\,, \end{aligned}$$

und hieraus folgt wegen (6.9) und

$$K(x^{(k)}, 2^{-k}) + K(0, \varepsilon 2^{-k}) \subset K(x^{(k)}, (1+\varepsilon)2^{-k})$$

dass

$$T(I^{(k)}) \subset T(z) + DT(z)(K(x^{(k)}, (1+\varepsilon)2^{-k}) - z) = T(z) + DT(z)(\overline{I_\varepsilon^{(k)}} - z)\,.$$

Aus der Transformationsformel für das Lebesgue-Maß unter der linearen Abbildung $DT(z)$ und der Translationsinvarianz folgt

$$\begin{aligned} \lambda^n(T(I^{(k)})) &\le \lambda^n(DT(z)(\overline{I_\varepsilon^{(k)}} - z)) \\ &= |\det DT(z)|\lambda^n(\overline{I_\varepsilon^{(k)}}) \\ &= |\det DT(z)|(1+\varepsilon)^n\lambda^n(I^{(k)})\,. \end{aligned}$$

Aus (6.5) folgt nun

$$c\lambda^n(I^{(k)}) \le \lambda^n(T(I^{(k)})) \le |\det DT(z)|(1+\varepsilon)^n\lambda^n(I^{(k)}) \tag{6.13}$$

$$\le (1+\varepsilon)^n\lambda^n(I^{(k)}) \sup_{x\in I} |\det DT(x)|\,, \tag{6.14}$$

und weiter

$$c \le (1+\varepsilon)^n \sup_{x\in I} |\det DT(x)|\,. \tag{6.15}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, folgt

$$c \le \sup_{x\in I} |\det DT(x)|$$

und damit (6.3) aus (6.4). □

Lemma 6.3 *Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $T : U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus. Sei $I = [a,b) \in \mathcal{J}^n$ mit $\overline{I} \subset U$. Dann gilt*

$$\lambda^n(T(I)) \le \int_I |\det DT(x)|\, d\lambda^n(x)\,. \tag{6.16}$$

Beweis: Für alle $k \in \mathbb{N}$ sei $(I_{k,j})$, $1 \le j \le 2^{kn}$, diejenige disjunkte Zerlegung von I in 2^{kn} Teilquader, welche durch k-fache Halbierung jeder Seite (d.h. Zerlegung jeder Seite in 2^k Teile) von I entsteht. Wir definieren $u_k : I \to \mathbb{R}$ durch

$$u_k = \sum_{j=1}^{2^{kn}} 1_{I_{k,j}} \sup_{\xi \in I_{k,j}} |\det DT(\xi)|\,. \tag{6.17}$$

Aus Lemma 6.2 folgt nun für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\lambda^n(T(I)) = \sum_{j=1}^{2^{kn}} \lambda(T(I_{k,j})) \le \sum_{j=1}^{2^{kn}} \lambda^n(I_{k,j}) \sup_{\xi\in I_{k,j}} |\det DT(\xi)| = \int_I u_k(x)\, d\lambda^n(x)\,. \tag{6.18}$$

Da DT und die Determinantenfunktion stetig und $\overline{I}$ kompakt sind, ist $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig beschränkt, und es gilt

$$\lim_{k\to\infty} u_k(x) = |\det DT(x)|$$

punktweise (sogar gleichmäßig) in I. Aus dem Satz von Lebesgue folgt daher

$$\lim_{k\to\infty} \int_I u_k(x)\, dx = \int_I |\det DT(x)|\, dx\,,$$

also mit (6.18) die Behauptung. □

Satz 6.4 (Dichte) *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, $g : \Omega \to [0,\infty]$ messbar. Dann wird durch*

$$\nu(A) = \int_A g\, d\mu\,, \quad A \in \mathcal{A}\,, \tag{6.19}$$

ein Maß ν auf $\mathcal{A}$ definiert. Für $f : \Omega \to [-\infty,\infty]$ gilt

$$f \in \mathcal{L}^1(\Omega;\nu) \qquad \Leftrightarrow \qquad f\cdot g \in \mathcal{L}^1(\Omega;\mu)\,, \tag{6.20}$$

und in diesem Fall ist

$$\int_A f\, d\nu = \int_A fg\, d\mu\,, \quad \text{für alle } A \in \mathcal{A}. \tag{6.21}$$

Wir schreiben

$$\nu = g\mu \tag{6.22}$$

und sagen, dass ν die Dichte g bezüglich μ hat.

Beweis: Übung. $\square$

Lemma 6.5 *Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $T : U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus. Dann gilt für alle Borelmengen $A \subset U$*

$$\lambda^n(T(A)) \leq \int_A |\det DT(x)| \, d\lambda^n(x) \,. \tag{6.23}$$

Beweis: Nach Satz 6.4 wird durch

$$\nu(A) = \int_A |\det DT(x)| \, d\lambda^n(x) \tag{6.24}$$

ein Maß auf der (auf U eingeschränkten) Borel-Algebra definiert, und nach Lemma 6.3 gilt

$$(T^{-1}(\lambda^n))(I) = \lambda^n(T(I)) \leq \nu(I) \tag{6.25}$$

für alle $I \in \mathcal{J}^n$ mit $\overline{I} \subset U$. Es folgt

$$(T^{-1}(\lambda^n))(F) = \lambda^n(T(F)) \leq \nu(F) \tag{6.26}$$

für alle Figuren $F \in \mathcal{F}^n$ mit $\overline{I} \subset U$, da diese sich als disjunkte endliche Vereinigung von Intervallen I darstellen lassen. Da alle solchen F einen Ring $\mathcal{R}$ bilden, und $\sigma(\mathcal{R})$ gerade die auf U eingeschränkte Borel-Algebra liefert, folgt aus Satz 1.24 (Analysis 3)

$$(T^{-1}(\lambda^n))(A) \leq \nu(A)$$

für alle Borelmengen A mit $A \subset U$. $\square$

Lemma 6.6 *Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $T : U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus, sei $f : V \to [0, \infty]$ messbar. Dann gilt*

$$\int_{T(U)} f(y) \, d\lambda^n(y) \leq \int_U f(T(x)) |\det DT(x)| \, d\lambda^n(x) \,. \tag{6.27}$$

Beweis: Ist $A \subset U$ messbar und $f = 1_{T(A)}$, so folgt (6.27) direkt aus (6.23). Hieraus folgt für

$$f = \sum_{j=1}^{l} \alpha_j 1_{T(A_j)} \,,$$

mit $\alpha_j \geq 0$ und $A_j \subset U$ messbar, mit der Linearität des Integrals ebenfalls (6.27), und die Erweiterung auf beliebige nichtnegative messbare Funktionen wird wie gehabt mit dem Satz von Beppo-Levi ausgeführt. $\square$

Satz 6.7 (Substitutionsregel)
Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $T : U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus, sei $f : V \to [-\infty, \infty]$ messbar. Dann gilt

$$f \in \mathcal{L}^1(V) \qquad \Leftrightarrow \qquad f \circ T \cdot |\det DT| \in \mathcal{L}^1(U) \,, \tag{6.28}$$

und in diesem Fall ist

$$\int_{T(U)} f(y) \, dy = \int_U f(T(x)) |\det DT(x)| \, dx \,. \tag{6.29}$$

Beweis: Sei zunächst $f \geq 0$. Nach Lemma 6.6 gilt

$$\int_{T(U)} f(y)\,dy \leq \int_U f(T(x))|\det DT(x)|\,dx\,.$$

Wir wenden Lemma 6.6 an auf die Funktion (dabei nehmen T^{-1} und V die Rolle von T und U ein)

$$f \circ T \cdot |\det DT| : U = T^{-1}(V) \to [0,\infty]\,,$$

so gilt

$$\begin{aligned}
&\int_{T^{-1}(V)} (f \circ T)(x))|\det DT(x)|\,dx \\
&\qquad \leq \int_V (f \circ T)(T^{-1}(y))|\det DT(T^{-1}(y))| \cdot |\det DT^{-1}(y)|\,dy \\
&\qquad = \int_V f(y)\,dy\,,
\end{aligned}$$

da aus dem Satz über inverse Funktionen folgt

$$DT^{-1}(y) = (DT(T^{-1}(y)))^{-1}\,, \quad \det DT^{-1}(y) = \frac{1}{\det DT(T^{-1}(y))}\,.$$

Also gilt (6.29). Da

$$[(f \circ T)|\det DT|]^{\pm} = f^{\pm} \circ T|\det DT|\,,$$

folgen für beliebiges f nun alle Aussagen aus der Zerlegung $f = f^+ - f^-$. □

Satz 6.8 (Polarkoordinaten in der Ebene)
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ messbar, sei $T : (0,\infty) \times (0,2\pi)$ definiert durch

$$T(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,. \tag{6.30}$$

Für

$$\tilde{f}(r,\varphi) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \cdot r \tag{6.31}$$

gilt

$$f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2) \qquad \Leftrightarrow \qquad \tilde{f} \in \mathcal{L}^1((0,\infty) \times (0,2\pi))\,, \tag{6.32}$$

und in diesem Fall ist

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)r\,dr\,d\varphi\,. \tag{6.33}$$

Beweis: Wir setzen in Satz 6.7

$$U = (0,\infty) \times (0,2\pi)\,, \quad V = T(U) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : x \geq 0\}\,.$$

Da $\mathbb{R}^2 \setminus V$ eine Nullmenge ist, gilt

$$f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2) \quad \Leftrightarrow \quad f \in \mathcal{L}^1(V)\,, \quad \int_{\mathbb{R}^2} f\,d\lambda^2 = \int_V f\,d\lambda^2\,.$$

Wegen $|\det DT(r,\varphi)| = r$ folgen nun alle Behauptungen aus Satz 6.7. □

Beispiel 6.9

1. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ rotationssymmetrisch, das heißt,
$$f(x,y) = g(\sqrt{x^2+y^2})\,, \quad g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}\,.$$
Dann ist $(f \circ T)(r,\varphi) = g(r)$, also
$$\int_{\mathbb{R}^2} f\,d\lambda^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty g(r)r\,dr\,d\varphi = 2\pi \int_0^\infty g(r)r\,dr\,,$$
falls $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1(0,\infty)$ gilt für die durch $\tilde{f}(r) = rg(r)$ definierte Funktion $\tilde{f}$.

2. Fläche des Kreises K_R um 0 mit Radius R: Hier ist $g = 1_{[0,R]}$,
$$\lambda^2(K_R) = 2\pi \int_0^\infty r 1_{[0,R]}(r)\,dr = \pi R^2\,.$$

3. Für
$$f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$$
erhalten wir
$$g(r) = e^{-r^2}\,,$$
also
$$\int_{\mathbb{R}^2} f\,d\lambda^2 = 2\pi \int_0^\infty re^{-r^2}\,dr = -\pi e^{-r^2}\Big|_{r=0}^{r=\infty} = \pi\,.$$
Da andererseits
$$\int_{\mathbb{R}^2} f\,d\lambda^2 = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \left(\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx\right)^2\,,$$
folgt außerdem
$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}\,.$$

Satz 6.10 (Kugelkoordinaten im Raum)
Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ messbar, sei $T : (0,\infty) \times (0,\pi) \times (0,2\pi) = U \to \mathbb{R}^3$ definiert durch
$$T(r,\theta,\varphi) = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)\,. \tag{6.34}$$
Für
$$\tilde{f}(r,\theta,\varphi) = f(T(r,\theta,\varphi)) \cdot r^2\sin\theta \tag{6.35}$$
gilt
$$f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^3) \qquad \Leftrightarrow \qquad \tilde{f} \in \mathcal{L}^1(U)\,, \tag{6.36}$$
und in diesem Fall ist
$$\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty f(T(r,\theta,\varphi))r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi\,. \tag{6.37}$$

Beweis: Analog zum Beweis von Satz 6.8, beachte, dass (Rechnung)

$$|\det DT(r,\theta,\varphi)| = r^2 \sin\theta$$

und dass

$$\mathbb{R}^3 \setminus T(U) = \{(x,0,z) : x \geq 0,\ z \in \mathbb{R}\}$$

eine Nullmenge ist. $\square$

Beispiel 6.11

1. Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ rotationssymmetrisch, das heißt,

   $$f(x,y,z) = g(\sqrt{x^2+y^2+z^2}), \quad g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}.$$

   Dann ist $(f \circ T)(r,\theta,\varphi) = g(r)$, also

   $$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} f\, d\lambda^3 &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} g(r) r^2 \sin\theta \, dr\, d\theta\, d\varphi = 2\pi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{\infty} g(r) r^2\, dr \\ &= 4\pi \int_0^{\infty} g(r) r^2\, dr, \end{aligned} \tag{6.38}$$

   und

   $$f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^3) \qquad \Leftrightarrow \qquad r^2 g(r) \in \mathcal{L}^1(0,\infty).$$

2. Volumen der Kugel K_R um 0 mit Radius R: Hier ist $g = 1_{[0,R]}$,

   $$\lambda^3(K_R) = 4\pi \int_0^{\infty} r^2 1_{[0,R]}(r)\, dr = 4\pi \int_0^R r^2\, dr = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

3. Gravitationspotential der Kugel K_R mit rotationssymmetrischer Dichte ρ: Das Potential im Punkt $P = (0,0,a)$ oberhalb der Kugel ($a > R$) ist gegeben durch

   $$u(P) = \gamma \int_{K_R} \frac{\rho(\|x\|_2)}{\|x-P\|_2}\, d\lambda^3(x),$$

   wobei γ die Gravitationskonstante ist. Wir substituieren $x = T(r,\theta,\varphi)$ und erhalten

   $$\rho(T(r,\theta,\varphi)) = \rho(r),$$

   sowie

   $$\begin{aligned}\|T(r,\theta,\varphi) - P\|_2^2 &= r^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi + r^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi + (a - r\cos\theta)^2 \\ &= r^2 \sin^2\theta + a^2 - 2ar\cos\theta + r^2\cos^2\theta \\ &= a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta.\end{aligned}$$

   Es folgt also

   $$\begin{aligned}u(P) &= \gamma \int_{K_R} \frac{\rho(\|x\|_2)}{\|x-P\|_2}\, d\lambda^3(x) = \gamma \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} \frac{\rho(r) r^2 \sin\theta}{\sqrt{a^2+r^2-2ar\cos\theta}}\, dr\, d\theta\, d\varphi \\ &= 2\pi\gamma \int_0^R \rho(r) r^2 \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta}{\sqrt{a^2+r^2-2ar\cos\theta}}\, d\theta\, dr.\end{aligned}$$

Substitution $t = -\cos\theta$, $dt = \sin\theta\, d\theta$ ergibt

$$\int_0^\pi \frac{\sin\theta}{\sqrt{a^2+r^2-2ar\cos\theta}}\, d\theta = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{a^2+r^2+2art}}\, dt = \frac{1}{ar}\sqrt{a^2+r^2+2art}\,\Bigg|_{t=-1}^{t=1}$$

$$= \frac{1}{ar}\left(\sqrt{(a+r)^2} - \sqrt{(a-r)^2}\right) = \frac{2}{a}\,,$$

also

$$u(P) = \frac{4\pi\gamma}{a}\int_0^R \rho(r) r^2\, dr\,.$$

Andererseits gilt für die Gesamtmasse der Kugel

$$M = \int_{K_R} \rho(x)\, dx = 4\pi \int_0^\infty 1_{[0,R]}(r)\rho(r) r^2\, dr = 4\pi \int_0^R \rho(r) r^2\, dr\,,$$

also

$$u(P) = \frac{\gamma M}{a}\,.$$

Als Ergebnis erhalten wir: Das von der Kugel herrührende Gravitationsfeld ist außerhalb der Kugel dasselbe wie das von einer Punktmasse M im Nullpunkt erzeugte Feld.

7 Mannigfaltigkeiten, Oberflächenintegral

Ziel dieses Abschnittes ist es, das Integral einer nur auf einer k-dimensionalen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ mit $k < n$ definierten Funktion zu definieren, und zwar so, dass es einem Integral im $\mathbb{R}^k$ entspricht. Wir wollen uns dabei nicht auf k-dimensionale Unterräume oder deren Translationen beschränken (hier könnten wir das bereits definierte Integral durch eine lineare Isomorphie einfach übertragen), sondern auch allgemeinere Mengen, etwa (eindimensionale) Kurven oder (zweidimensionale) gekrümmte Flächen betrachten. Wir müssen daher den Begriff der Dimension auf allgemeinere Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ ausdehnen.

Wir gehen aus von der Beschreibung affiner Unterräume. Ist $a \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor und $X \subset \mathbb{R}^n$ ein Unterraum mit $\dim X = k$, so können wir den affinen Unterraum

$$M = \{a + x : x \in X\} \tag{7.1}$$

auf zwei verschiedene Weisen beschreiben:

- mit einer Parameterdarstellung: Sei $(v_1, \dots, v_k)$ Basis von X, sei $\Phi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ definiert durch
$$\Phi(t_1, \dots, t_k) = a + \sum_{i=1}^{k} t_i v_i \,, \tag{7.2}$$
dann ist
$$M = \Phi(\mathbb{R}^k)\,, \quad \Phi : \mathbb{R}^k \to M \quad \text{bijektiv.} \tag{7.3}$$

- als Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems: Sei $(w_1, \dots, w_{n-k})$ Basis des orthogonalen Komplements
$$X^\perp = \{w : \, w^T x = 0 \quad \text{für alle } x \in X\}\,, \tag{7.4}$$
sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$ definiert durch
$$f_i(x) = w_i^T (x - a)\,, \tag{7.5}$$
so ist
$$M = \{x : \, f(x) = 0\}\,. \tag{7.6}$$

Affin lineare Unterräume können also als Urbild der 0 bzw. als Bild eines $\mathbb{R}^k$ vermittels affin linearer Abbildungen dargestellt werden. Verzichten wir auf die Linearität, so können wir allgemeinere Teilmengen darstellen, etwa gekrümmte Flächen. Wir werden aber verlangen, dass die darstellenden Abbildungen differenzierbar sind.

Nun ist es aber so, dass man zur Darstellung einer gekrümmten Fläche im allgemeinen nicht mit einer einzigen darstellenden Abbildung auskommt, sondern mehrere benötigt, die geeignet zusammengesetzt werden müssen.

Definition 7.1 (Mannigfaltigkeit)
Eine Teilmenge M von $\mathbb{R}^n$ heißt k-dimensionale C^α-Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$ (hierbei ist

$0 \leq k \leq n$, $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$), falls zu jedem $a \in M$ eine offene Umgebung U im $\mathbb{R}^n$ und ein $f \in C^\alpha(U; \mathbb{R}^{n-k})$ existieren mit

$$M \cap U = \{x : \; f(x) = 0\}, \quad \operatorname{rang} J_f(a) = n - k\,. \tag{7.7}$$

□

Beispiel 7.2

1. Affine Unterräume. Wie in (7.4) – (7.6) dargestellt, können wir in Definition 7.1 $U = \mathbb{R}^n$ und für jedes a dasselbe f wählen.

2. Niveaumengen. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^\alpha(U)$, $c \in \mathbb{R}$,

$$N_c(f) = \{x : \; f(x) = c\}\,. \tag{7.8}$$

   $N_c(f)$ ist eine $(n-1)$-dimensionale C^α-Mannigfaltigkeit, falls $\operatorname{grad} f(x) \neq 0$ gilt für alle $x \in N_c(f)$. Ein Spezialfall davon ist die Oberfläche der n-dimensionalen Einheitskugel in der euklidischen Norm,

$$S^{n-1} = \{x : \; \|x\|_2 = 1\}\,. \tag{7.9}$$

   S^{n-1} ist eine $(n-1)$-dimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit.

□

Satz 7.3 (Darstellung von C^α-Mannigfaltigkeiten)
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{N}$. Dann sind äquivalent:

(i) M ist eine k-dimensionale C^α-Mannigfaltigkeit.

(ii) Für alle $a \in M$ gibt es offene Mengen $U, V \subset \mathbb{R}^n$ und einen C^α-Diffeomorphismus $F : U \to V$ mit $a \in U$ und

$$F(M \cap U) = V \cap E_k\,, \quad E_k = \{(x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0) : \; x_i \in \mathbb{R}, \, 1 \leq i \leq k\}\,. \tag{7.10}$$

(iii) Für alle $a \in M$ gibt es eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ mit $a \in U$, eine offene Menge $T \subset \mathbb{R}^k$ und ein $\Phi \in C^\alpha(T; \mathbb{R}^n)$, so dass $\Phi : T \to M \cap U$ bijektiv, $\Phi^{-1} : M \cap U \to T$ stetig ist und

$$\operatorname{rang} J_\Phi(t) = k\,, \quad \textit{für alle } t \in T. \tag{7.11}$$

Beweis: "(i)⇒(ii)": Sei U' Umgebung von $a \in M$, sei $f \in C^\alpha(U'; \mathbb{R}^{n-k})$ mit

$$M \cap U' = \{x : x \in \mathbb{R}^n, \, f(x) = 0\}, \quad \operatorname{rang} J_f(a) = n - k\,.$$

Wir betrachten zunächst den Spezialfall, dass die letzten $n-k$ Spalten von $J_f(a)$ linear unabhängig sind. Wir zerlegen $x \in \mathbb{R}^n$ in

$$x = (\xi, \eta)\,, \quad \xi \in \mathbb{R}^k\,, \quad \eta \in \mathbb{R}^{n-k}\,.$$

Die Matrix $\partial_\eta f(a) \in \mathbb{R}^{(n-k,n-k)}$ ist invertierbar. Also gibt es (Satz über implizite Funktionen) offene Mengen $U_1 \subset \mathbb{R}^k$, $U_2 \subset \mathbb{R}^{n-k}$, mit $(a_1, \ldots, a_k) \in U_1$, und ein $g : U_1 \to U_2$, $g \in C^\alpha(U_1; \mathbb{R}^{n-k})$, mit

$$M \cap (U_1 \times U_2) = \{(\xi, g(\xi)) : \xi \in U_1\} \subset M \cap U',$$

also $f(\xi, g(\xi)) = 0$. Wir setzen

$$U = U_1 \times U_2, \quad V = F(U), \quad F(\xi, \eta) = (\xi, \eta - g(\xi)).$$

Dann ist F injektiv, also $F : U \to F(U)$ bijektiv, und

$$(\xi, \eta) \in M \cap U \quad \Leftrightarrow \quad \xi \in U_1, \quad \eta = g(\xi) \quad \Leftrightarrow \quad F(\xi, \eta) \in V \cap E_k.$$

Weiter ist

$$J_F(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -J_g(\xi) & I \end{pmatrix},$$

also $J_F(\xi, \eta)$ invertierbar und daher (Satz über inverse Funktionen) F ein C^α-Diffeomorphismus. Der allgemeine Fall wird durch Umnumerieren der Koordinatenachsen darauf zurückgeführt. Seien die Spalten $i_1, i_2, \ldots, i_{n-k}$ von $J_f(a)$ linear unabhängig. Sei $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung, welche die Einheitsvektoren permutiert, und zwar der Form

$$P(x_1, \ldots, x_n) = (\ldots, x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-k}}).$$

Dann ist $P(M)$ eine k-dimensionale C^α-Mannigfaltigkeit mit der lokalen Darstellung (in einer Umgebung von $P(a)$)

$$P(M) \cap P(U') = P(M \cap U') = \{y : y \in P(U'), \, (f \circ P^{-1})(y) = 0\}$$

und die letzten $n-k$ Spalten von $J_{f \circ P^{-1}}(Pa)$ sind linear unabhängig. Also existiert F wie behauptet mit

$$V \cap E_k = F(P(M) \cap U) = (F \circ P)(M \cap P^{-1}(U)),$$

das heißt, $F \circ P$ leistet das Verlangte.

"(ii)$\Rightarrow$(iii)": Seien F, U, V wie in (ii) gegeben. Wir setzen

$$T = \{\xi : \xi \in \mathbb{R}^k, \, (\xi, 0) \in V\}, \quad \Phi(\xi) = F^{-1}(\xi, 0).$$

Dann ist $\Phi : T \to M \cap U$ bijektiv, $\Phi^{-1} = F|(M \cap U)$ stetig, und

$$J_\Phi(\xi) = J_{F^{-1}}(\xi, 0) \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix},$$

das heißt, J_Φ entsteht aus $J_{F^{-1}}$, indem man die Spalten $k+1, \ldots, n$ auf 0 setzt. Da $\operatorname{rang}(J_{F^{-1}}(\xi, 0)) = n$, ist $\operatorname{rang}(J_\Phi(\xi)) = k$.

"(iii)$\Rightarrow$(i)": Sei $a \in M$, seien U, T, Φ wie in (iii) gegeben. Wir setzen $c = \Phi^{-1}(a) \in T$ und betrachten den Spezialfall, dass die ersten k Zeilen von $J_\Phi(c)$ linear unabhängig sind. (Der allgemeine Fall wird wie oben durch eine geeignete Permutation darauf zurückgeführt.) Nach dem Satz über inverse Funktionen gibt es offene Mengen $\hat{T}, \hat{V} \subset \mathbb{R}^k$ mit $c \in \hat{T} \subset T$, so dass

$$\hat{\Phi} = (\Phi_1, \ldots, \Phi_k) : \hat{T} \to \hat{V}$$

ein C^α-Diffeomorphismus ist. Wir definieren

$$G : \hat{T} \times \mathbb{R}^{n-k} \to \hat{V} \times \mathbb{R}^{n-k}, \quad G(\xi, \eta) = \Phi(\xi) + (0, \eta).$$

Es ist

$$J_G(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} J_{\hat{\Phi}}(\xi) & 0 \\ * & I \end{pmatrix}, \quad \xi \in \hat{T}, \quad \eta \in \mathbb{R}^{n-k},$$

also ist J_G invertierbar auf $\hat{T} \times \mathbb{R}^{n-k}$. Wir zeigen, dass G bijektiv ist auf $\hat{T} \times \mathbb{R}^{n-k}$. Es gilt

$$\begin{aligned} G(\xi, \eta) = G(\xi', \eta') \quad &\Rightarrow \quad \Phi(\xi) + (0, \eta) = \Phi(\xi') + (0, \eta') \quad \Rightarrow \quad \hat{\Phi}(\xi) = \hat{\Phi}(\xi') \\ &\Rightarrow \quad \xi = \xi' \quad \Rightarrow \quad \eta = \eta', \end{aligned}$$

also ist G injektiv. Sei nun $(y, z) \in \hat{V} \times \mathbb{R}^{n-k}$. Es ist

$$(y, z) = \Phi(\xi) + (0, \eta),$$

wenn wir $\xi = \hat{\Phi}^{-1}(y)$ setzen und η so definieren, dass die Gleichung erfüllt ist. Also ist G auch surjektiv und damit

$$G : \hat{T} \times \mathbb{R}^{n-k} \to \hat{V} \times \mathbb{R}^{n-k}$$

ein C^α-Diffeomorphismus. Wir setzen

$$\hat{U} = (\hat{V} \times \mathbb{R}^{n-k}) \cap U,$$

und zerlegen

$$G^{-1} = (\hat{f}, f), \quad \hat{f} : \hat{U} \to \hat{T}, \quad f : \hat{U} \to \mathbb{R}^{n-k}.$$

Dann gilt für alle $x \in \hat{U}$

$$x \in M \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, \xi \in \hat{T},\, \Phi(\xi) = x \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, \xi \in \hat{T},\, G^{-1}(x) = (\xi, 0) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = 0,$$

also ist

$$M \cap \hat{U} = \{x : \, x \in \hat{U}, \; f(x) = 0\}.$$

Da $J_{G^{-1}}(x)$ invertierbar ist für alle $x \in \hat{U}$, hat $J_f(x)$ maximalen Rang, also $\operatorname{rang}(J_f(x)) = n - k$ für alle $x \in \hat{U}$. □

Definition 7.4 (Karte, Atlas)
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale C^α-Mannigfaltigkeit. Eine Abbildung $\Phi : T \to M \cap U$ mit den in Satz 7.3(iii) genannten Eigenschaften heißt C^α-Karte (oder einfach Karte) von M. Eine Familie $(\Phi_j)_{j \in J}$ von Karten $\Phi_j : T_j \to M \cap U_j$ heißt Atlas von M, falls

$$M \subset \bigcup_{j \in J} (M \cap U_j).$$

□

Aus Satz 7.3 folgt unmittelbar, dass jede Mannigfaltigkeit einen Atlas besitzt. Ist M kompakt, so besitzt M einen endlichen Atlas (d.h. einen Atlas mit einer endlichen Indexmenge J).

Satz 7.5 *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale C^α-Mannigfaltigkeit, seien $\Phi_j : T_j \to M \cap U_j$, $j = 1, 2$, C^α-Karten von M, sei $M \cap U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Dann sind*

$$W_j = \Phi_j^{-1}(M \cap U_1 \cap U_2) \tag{7.12}$$

offene Teilmengen von $\mathbb{R}^k$ mit $W_j \subset T_j$, und

$$\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1 : W_1 \to W_2 \tag{7.13}$$

ist ein C^α-Diffeomorphismus. Die Abbildung $\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1$ heißt Kartenwechsel.

Beweis: Nach Konstruktion gilt $W_j \subset T_j$ für $j = 1, 2$, und $\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1 : W_1 \to W_2$ ist bijektiv. Wir zeigen nun, dass W_j offen ist, indem wir die Annahme $W_j \cap \partial W_j \neq \emptyset$ zum Widerspruch führen. Sei $t \in W_j \cap \partial W_j$. Dann gibt es eine Folge $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^k$ mit $t_n \to t$ und $t_n \notin W_j$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für hinreichend großes n gilt dann $t_n \in T_j$ (da $t \in T_j$ und T_j offen), und außerdem $\Phi_j(t_n) \in U_1 \cap U_2$ (da $\Phi_j(t) \in U_1 \cap U_2$, Φ_j stetig und U_1, U_2 offen) Es folgt $\Phi_j(t_n) \in U_1 \cap U_2 \cap M$, also $t_n \in W_j$, ein Widerspruch. Also ist $W_j \cap \partial W_j = \emptyset$ und damit W_j offen. Wir zeigen nun, dass $\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1$ ein C^α-Diffeomorphismus ist. Es genügt zu zeigen, dass $\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1 \in C^\alpha(W_1; \mathbb{R}^k)$. Sei $c_1 \in W_1$ beliebig. Wir setzen $a = \Phi_1(c_1)$. Gemäß Satz 7.3(ii) wählen wir eine offene Menge $U \subset U_1 \cap U_2$ mit $a \in U$, eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^n$ und eine Abbildung $F : U \to V$ mit $F(M \cap U) = V \cap E_k$. Wir setzen

$$\hat{W}_j = \Phi_j^{-1}(M \cap U)\,.$$

Dass $\hat{W}_j$ offen ist, zeigt man genauso wie oben für W_j. Es ist

$$F \circ \Phi_1 : \hat{W}_1 \to \mathbb{R}^n\,, \quad F \circ \Phi_1 = (g_1, \dots, g_k, 0, \dots, 0)\,,$$
$$F \circ \Phi_2 : \hat{W}_2 \to \mathbb{R}^n\,, \quad F \circ \Phi_2 = (h_1, \dots, h_k, 0, \dots, 0)\,.$$

Sei $g = (g_1, \dots, g_k)$, $h = (h_1, \dots, h_k)$. Es ist

$$\operatorname{rang} J_F = n\,, \quad \operatorname{rang} J_{\Phi_j} = k\,,$$

also

$$\operatorname{rang} J_{F \circ \Phi_j} = k\,,$$

also

$$\operatorname{rang} J_g = \operatorname{rang} J_h = k\,.$$

Hieraus folgt mit dem Satz über inverse Funktionen, dass es Umgebungen $\tilde{W}_j \subset \hat{W}_j$ von $c_j = \Phi_j^{-1}(a)$ gibt, so dass

$$g : \tilde{W}_1 \to g(\tilde{W}_1)\,, \quad h : \tilde{W}_2 \to h(\tilde{W}_2)\,,$$

C^α-Diffeomorphismen sind, und dass

$$\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1 = h^{-1} \circ g\,, \quad \text{auf } \tilde{W}_1\,.$$

Da $c_1 \in W_1$ beliebig war, folgt $\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1 \in C^\alpha(W_1; \mathbb{R}^k)$. □

Satz 7.5 besagt, dass alle Kartenwechsel C^α-Diffeomorphismen sind. Hieraus läßt sich eine allgemeinere Definition einer Mannigfaltigkeit M gewinnen, die nicht mehr von vorneherein als Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ gegeben ist. Solche sogenannten *differenzierbaren Mannigfaltigkeiten* werden in der Differentialtopologie untersucht.

Um zum Begriff des Oberflächenintegrals zu kommen, befassen wir uns noch einmal mit der Fläche eines Parallelogramms. Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$, sei P das aufgespannte Parallelogramm

$$P = \{\lambda x + \mu y : \lambda, \mu \in [0,1]\}.$$

Der 2-dimensionale Inhalt (Flächeninhalt) ist

$$F(P) = \|x\| \, \|y\| \sin\varphi ,$$

wobei φ der Winkel zwischen x und y ist. Sei $A \in \mathbb{R}^{n,2}$ die Matrix mit den Spalten x und y. Dann gilt

$$A^T A = \begin{pmatrix} x^T \\ y^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^T x & x^T y \\ y^T x & y^T y \end{pmatrix} ,$$

und

$$\begin{aligned} \det(A^T A) &= (x^T x)(y^T y) - (x^T y)(y^T x) = \|x\|^2 \, \|y\|^2 - \langle x, y \rangle^2 \\ &= \|x\|^2 \, \|y\|^2 (1 - \cos^2\varphi) = F(P)^2 , \end{aligned}$$

also

$$F(P) = \sqrt{\det A^T A} .$$

Definition 7.6 (Maßtensor, Gramsche Determinante)
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale C^α-Mannigfaltigkeit, sei $\Phi : T \to M \cap U$ eine Karte von M, wobei $U \subset \mathbb{R}^n$ und $T \subset \mathbb{R}^k$ offene Mengen sind. Wir definieren $G : T \to \mathbb{R}^{(k,k)}$ und $g : T \to \mathbb{R}$ durch

$$G(t) = J_\Phi(t)^T J_\Phi(t) , \quad g(t) = \det G(t) . \tag{7.14}$$

G heißt der Maßtensor, g die Gramsche Determinante. □

Definition 7.7 *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale C^α-Mannigfaltigkeit, sei $f : M \to [-\infty, \infty]$. f heißt messbar auf M, falls $f \circ \Phi$ messbar ist für jede C^α-Karte $\Phi : T \to \mathbb{R}^n$, wobei $T \subset \mathbb{R}^k$ offen ist.* □

Definition 7.8 *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale C^α-Mannigfaltigkeit, sei $f : M \to [-\infty, \infty]$. f heißt integrierbar über M bezüglich der Karte $\Phi : T \to \mathbb{R}^n$, falls $f \circ \Phi$ messbar ist und falls die durch*

$$t \mapsto f(\Phi(t))\sqrt{g(t)} \tag{7.15}$$

definierte Funktion über T integrierbar ist bezüglich des k-dimensionalen Lebesgue-Maßes λ^k. In diesem Fall definieren wir

$$\int_{\Phi(T)} f(\xi) \, dS(\xi) = \int_T f(\Phi(t)) \sqrt{g(t)} \, d\lambda^k(t) . \tag{7.16}$$

□

Das folgende Lemma zeigt, dass das Integral auf der linken Seite von (7.16) nur von der Menge $\Phi(T)$, nicht aber von der Wahl von Φ abhängt, und dass also Definition 7.8 sinnvoll ist.

Lemma 7.9 *Sind $\Phi : T \to \mathbb{R}^n$ und $\hat{\Phi} : \hat{T} \to \mathbb{R}^n$ Karten mit $\Phi(T) = \hat{\Phi}(\hat{T})$, so ist f integrierbar über M bezüglich Φ genau dann, wenn f integrierbar ist über M bezüglich $\hat{\Phi}$, und es gilt*

$$\int_T f(\Phi(t))\sqrt{g(t)}\,d\lambda^k(t) = \int_{\hat{T}} f(\hat{\Phi}(t))\sqrt{\hat{g}(t)}\,d\lambda^k(t)\,. \tag{7.17}$$

Beweis: Wir definieren $\Psi : \hat{T} \to T$ durch $\Psi = \Phi^{-1} \circ \hat{\Phi}$. Nach Satz 7.5 ist Ψ ein C^α-Diffeomorphismus. Sei nun f integrierbar über M bezüglich Φ. Dann ist $f \circ \Phi$ messbar, also auch $f \circ \hat{\Phi} = f \circ \Phi \circ \Psi$. Aus der Substitutionsregel (Satz 6.7) folgt, dass die Funktion

$$s \mapsto f(\Phi(\Psi(s)))\sqrt{g(\Psi(s))}|\det J_\Psi(s)|$$

auf $\hat{T}$ integrierbar ist, und dass gilt

$$\int_T f(\Phi(t))\sqrt{g(t)}\,d\lambda^k(t) = \int_{\hat{T}} f(\Phi(\Psi(s)))\sqrt{g(\Psi(s))}|\det J_\Psi(s)|\,d\lambda^k(s)\,.$$

Es ist $\hat{\Phi} = \Phi \circ \Psi$, also

$$J_{\hat{\Phi}}(s) = J_\Phi(\Psi(s))J_\Psi(s)\,,$$

also

$$\begin{aligned}
\hat{g}(s) &= \det(J_{\hat{\Phi}}(s)^T J_{\hat{\Phi}}(s)) = \det(J_\Psi(s)^T J_\Phi(\Psi(s))^T J_\Phi(\Psi(s))J_\Psi(s)) \\
&= \det(J_\Psi(s)^T)\det(J_\Phi(\Psi(s))^T J_\Phi(\Psi(s)))\det(J_\Psi(s)) \\
&= g(\Psi(s))(\det J_\Psi(s))^2\,,
\end{aligned}$$

also

$$\int_T f(\Phi(t))\sqrt{g(t)}\,d\lambda^k(t) = \int_{\hat{T}} f(\hat{\Phi}(s))\sqrt{\hat{g}(s)}\,d\lambda^k(s)\,.$$

□

Definition 7.10 (Zerlegung der Eins)
*Sei M eine k-dimensionale C^α-Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$, sei $(\Phi_j)_{1\le j\le N}$ ein endlicher Atlas von M mit den Karten $\Phi_j : T_j \to M \cap U_j$. Eine Familie $(\alpha_j)_{1\le j\le N}$ von Funktionen $\alpha_j : M \to \mathbb{R}$ heißt **messbare Zerlegung der Eins** für den Atlas $(\Phi_j)_j$, falls gilt:*

(i) α_j *ist auf* M *messbar für alle* j,

(ii) $0 \le \alpha_j \le 1$, *für alle* j,

(iii) $\alpha_j(x) = 0$ *für alle* $x \notin U_j$,

(iv)

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j(x) = 1\,, \quad \text{für alle } x \in M.$$

□

Definition 7.11 (Oberflächenintegral)
Sei M eine k-dimensionale C^α-Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$. Ein $f : M \to [-\infty, \infty]$ heißt integrierbar über M, falls es einen endlichen Atlas $(\Phi_j)_{1\le j\le N}$, $\Phi_j : T_j \to M \cap U_j$, gibt, so dass f integrierbar ist über M bezüglich aller Karten Φ_j, $1 \le j \le N$. In diesem Fall definieren wir das Oberflächenintegral von f über M als

$$\int_M f(\xi)\, dS(\xi) = \sum_{j=1}^{N} \int_{\Phi_j(T_j)} \alpha_j(\xi) f(\xi)\, dS(\xi)\,, \tag{7.18}$$

wobei $(\alpha_j)_{1\le j\le N}$ eine messbare Zerlegung der Eins für $(\Phi_j)_{1\le j\le N}$ ist. □

Das folgende Lemma zeigt, dass Definition 7.11 sinnvoll ist.

Lemma 7.12 *In der Situation von Definition 7.11 gilt:*

(i) Jeder endliche Atlas $(\Phi_j)_{1\le j\le N}$ hat eine messbare Zerlegung der Eins $(\alpha_j)_{1\le j\le N}$.

(ii) Für alle i, j gilt: Ist f über M bezüglich Φ_j integrierbar, so auch $\alpha_i f$.

(iii) Der in (7.18) definierte Wert des Oberflächenintegrals hängt weder von der Wahl des Atlas noch von der Wahl der Zerlegung ab.

Beweis: Zum Beweis von (i) setzen wir für $\Phi_j : T_j \to M \cap U_j$

$$\alpha_j = 1_{W_j}\,, \quad W_j = (M \cap U_j) \setminus \bigcup_{i<j} (M \cap U_i)\,.$$

Zum Beweis von (ii) bemerken wir, dass $\alpha_i \circ \Phi_j : T_j \to \mathbb{R}$ messbar ist, und dass für alle $t \in T_j$ gilt

$$0 \le \alpha_i(\Phi_j(t))|f(\Phi_j(t))|\sqrt{g_j(t)} \le |f(\Phi_j(t))|\sqrt{g_j(t)}\,,$$

also definiert der mittlere Ausdruck eine auf T_j integrierbare Funktion. Zum Beweis von (iii) betrachten wir einen weiteren endlichen Atlas

$$(\tilde\Phi_k)_{1\le k\le \tilde N}\,, \quad \tilde\Phi_k : \tilde T_k \to M \cap \tilde U_k\,,$$

für M mit messbarer Zerlegung

$$(\tilde\alpha_k)_{1\le k\le \tilde N}\,.$$

Es gilt dann

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{N} \int_{\Phi_j(T_j)} \alpha_j(\xi) f(\xi)\, dS(\xi) &= \sum_{j=1}^{N} \int_{\Phi_j(T_j)} \sum_{k=1}^{\tilde N} \tilde\alpha_k(\xi)\alpha_j(\xi) f(\xi)\, dS(\xi) \\ &= \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{\tilde N} \int_{\Phi_j(T_j)} \tilde\alpha_k(\xi)\alpha_j(\xi) f(\xi)\, dS(\xi)\,,\end{aligned}$$

und ebenso

$$\sum_{k=1}^{\tilde N} \int_{\tilde\Phi_k(\tilde T_k)} \tilde\alpha_k(\xi) f(\xi)\, dS(\xi) = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{\tilde N} \int_{\tilde\Phi_k(\tilde T_k)} \tilde\alpha_k(\xi)\alpha_j(\xi) f(\xi)\, dS(\xi)\,,$$

und für alle j,k gilt

$$\begin{aligned}\int_{\Phi_j(T_j)} \tilde\alpha_k(\xi)\alpha_j(\xi) f(\xi)\, dS(\xi) &= \int_{\Phi_j(T_j)\cap\tilde\Phi_k(\tilde T_k)} \tilde\alpha_k(\xi)\alpha_j(\xi) f(\xi)\, dS(\xi)\\ &= \int_{\tilde\Phi_k(\tilde T_k)} \tilde\alpha_k(\xi)\alpha_j(\xi) f(\xi)\, dS(\xi)\,,\end{aligned}$$

da $\alpha_j\tilde\alpha_k = 0$ außerhalb von $\Phi_j(T_j) \cap \tilde\Phi_k(\tilde T_k)$. □

Ist K Teilmenge einer k-dimensionalen C^α-Mannigfaltigkeit M, so definieren wir

$$\int_K f(\xi)\, dS(\xi) = \int_M 1_K(\xi) f(\xi)\, dS(\xi)\,,$$

falls $1_K f$ über M integrierbar ist. Für $f = 1$ erhalten wir den k-dimensionalen Inhalt von K,

$$F(K) = \int_M 1_K(\xi)\, d\xi\,.$$

Ist

$$F(K) = 0\,,$$

so heißt K eine k-dimensionale Nullmenge in M. In diesem Fall gilt

$$\int_{M\setminus K} f(\xi)\, dS(\xi) = \int_M f(\xi)\, dS(\xi)\,,$$

falls f über M integrierbar ist.

Beispiel 7.13

(i) Kurvenlänge: Sei $T = (a,b) \subset \mathbb{R}$, $\Phi : T \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar mit $\Phi'(t) \neq 0$ für alle $t \in (a,b)$, $M = \Phi(T)$. Es ist dann

$$g(t) = G(t) = J_\Phi(t)^T J_\Phi(t) = (\Phi_1'(t), \dots, \Phi_n'(t)) \begin{pmatrix} \Phi_1'(t) \\ \vdots \\ \Phi_n'(t) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \Phi_i'(t)^2\,, \tag{7.19}$$

$$\int_M 1\, dS(\xi) = \int_T 1\sqrt{g(t)}\, dt = \int_a^b \|\Phi'(t)\|_2\, dt\,. \tag{7.20}$$

Der 1-dimensionale Inhalt von M ist also gerade die Länge der Kurve Φ.

(ii) Rotationsflächen: Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, sei $f > 0$. Dann ist

$$M = \{(x,y,z) : \, x \in (a,b),\, y^2 + z^2 = f(x)^2\} \tag{7.21}$$

eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^3$. Die durch

$$\Phi(t,s) = (t, f(t)\cos s, f(t)\sin s) \tag{7.22}$$

definierte Abbildung

$$\Phi : T = (a,b) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3 \tag{7.23}$$

ist eine C^1-Karte von M, da

$$J_\Phi(t,s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f'(t)\cos s & -f(t)\sin s \\ f'(t)\sin s & f(t)\cos s \end{pmatrix} \tag{7.24}$$

den Rang 2 hat. Der Maßtensor von Φ ist

$$G(t,s) = J_\Phi(t,s)^T J_\Phi(t,s) = \begin{pmatrix} 1 + f'(t)^2 & 0 \\ 0 & f(t)^2 \end{pmatrix} . \tag{7.25}$$

Die Menge

$$M \setminus \Phi(T) = \{(t, f(t), 0) : \, t \in (a,b)\}$$

ist eine 2-dimensionale Nullmenge in M. Also ist

$$\int_M 1 \, dS(\xi) = \int_{\Phi(T)} 1 \, dS(\xi) = \int_T \sqrt{\det G(t,s)} \, d\lambda^2(t,s) \tag{7.26}$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_a^b f(t)\sqrt{1 + f'(t)^2} \, dt \, ds = 2\pi \int_a^b f(t)\sqrt{1 + f'(t)^2} \, dt \, . \tag{7.27}$$

(iii) Oberfläche der Einheitskugel im $\mathbb{R}^3$: Das ist ein Spezialfall von (ii) mit $(a,b) = (-1,1)$, $f(t) = \sqrt{1-t^2}$. Es ist

$$f'(t) = -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \, ,$$

also gilt

$$\int_M 1 \, dS(\xi) = 2\pi \int_{-1}^1 f(t)\sqrt{1 + f'(t)^2} \, dt = 2\pi \int_{-1}^1 1 \, dt = 4\pi \, .$$

(iv) Inhalt des Graphen einer Funktion: Sei $T \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen, $F : T \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar,

$$M = \{(t, F(t)) : t \in T\} \subset \mathbb{R}^n \, . \tag{7.28}$$

Die Abbildung

$$\Phi : T \to \mathbb{R}^n \, , \quad \Phi(t) = (t, F(t)) \, ,$$

ist C^1-Karte mit $\Phi(T) = M$. Es ist

$$J_\Phi(t) = \begin{pmatrix} I \\ \partial_1 F(t) \cdots \partial_{n-1} F(t) \end{pmatrix}$$

$$G(t) = J_\Phi(t)^T J_\Phi(t) = I + \begin{pmatrix} \partial_1 F(t) \\ \vdots \\ \partial_{n-1} F(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_1 F(t) & \cdots & \partial_{n-1} F(t) \end{pmatrix} \, ,$$

also (siehe Lemma 7.14 unten)

$$g(t) = \det G(t) = 1 + \|\mathrm{grad}\, F(t)\|_2^2 \,. \tag{7.29}$$

Der $(n-1)$-dimensionale Inhalt des Graphen von F ist also

$$\int_M 1\, dS(\xi) = \int_T \sqrt{1 + \|\mathrm{grad}\, F(t)\|_2^2}\, dt \,. \tag{7.30}$$

□

Lemma 7.14 *Sei $a \in \mathbb{R}^m$, $I \in \mathbb{R}^{(m,m)}$ die Einheitsmatrix. Dann ist*

$$\det(I + aa^T) = 1 + \|a\|_2^2 \,, \quad aa^T = \begin{pmatrix} a_1a_1 & \cdots & a_1a_m \\ \vdots & & \vdots \\ a_ma_1 & \cdots & a_ma_m \end{pmatrix} \tag{7.31}$$

Beweis: Sei $a \neq 0$ (sonst trivial). Wir berechnen die Eigenwerte von $I + aa^T$:

$$(I + aa^T)x = \lambda x \qquad \Leftrightarrow \qquad (a^Tx) \cdot a = (\lambda - 1)x \,.$$

Es ist also a ein Eigenvektor zum Eigenwert $1 + \|a\|_2^2$, und jeder Vektor x mit $x \perp a$ ist Eigenvektor zum Eigenwert 1. Wir erhalten also eine Basis aus Eigenvektoren mit den Eigenwerten

$$\lambda_1 = 1 + \|a\|_2^2 \,, \quad \lambda_2 = \cdots = \lambda_m = 1 \,,$$

also

$$\det(I + aa^T) = \prod_{i=1}^m \lambda_i = 1 + \|a\|_2^2 \,.$$

□

Satz 7.15 *Sei M eine k-dimensionale C^α-Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$, sei $r > 0$. Dann ist*

$$rM = \{rx : x \in M\} \tag{7.32}$$

ebenfalls eine k-dimensionale C^α-Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$. Ist $f : rM \to [-\infty, \infty]$, so gilt

$$f \text{ integrierbar über } rM \quad \Leftrightarrow \quad x \mapsto f(rx) \text{ integrierbar über } M \,, \tag{7.33}$$

und in diesem Fall ist

$$\int_{rM} f(\xi)\, dS(\xi) = r^k \int_M f(r\xi)\, dS(\xi) \,. \tag{7.34}$$

Beweis: Ist $\Phi : T \to U \cap M$ Karte für M, so ist

$$\tilde{\Phi} : T \to rU \cap rM \,, \quad \tilde{\Phi}(t) = r\Phi(t) \,,$$

Karte für rM. Die erste Behauptung folgt nun aus Satz 7.3. Zum Beweis von (7.33) und (7.34) bemerken wir, dass

$$\tilde{g}(t) = \det(J_{\tilde{\Phi}}(t)^T J_{\tilde{\Phi}}(t)) = \det(r^2 J_\Phi(t)^T J_\Phi(t)) = r^{2k} g(t) \,,$$

also gilt für jede Karte

$$\int_T f(\tilde{\Phi}(t)) \sqrt{\tilde{g}(t)}\, dt = \int_T f(r\Phi(t)) r^k \sqrt{g(t)}\, dt \,.$$

Summation über eine Zerlegung der Eins liefert die Behauptung. □

8 Der Integralsatz von Gauß

Wir betrachten offene Mengen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft, dass $\partial\Omega$ eine $(n-1)$-dimensionale C^1-Mannigfaltigkeit ist und Ω lokal nur auf einer Seite von $\partial\Omega$ liegt.

Definition 8.1 (C^1-Rand)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wir sagen, dass Ω einen C^1-Rand hat, falls gilt: Für alle $a \in \partial\Omega$ gibt es eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ und eine Funktion $f \in C^1(U)$ so dass $\nabla f(x) \neq 0$ für alle $x \in U$ gilt und

$$\partial\Omega \cap U = \{x : x \in U, f(x) = 0\}\,, \tag{8.1}$$
$$\Omega \cap U = \{x : x \in U, f(x) < 0\}\,. \tag{8.2}$$

□

Definition 8.2 (Tangentialvektor, Tangentialraum)
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale C^1-Mannigfaltigkeit, sei $a \in M$. Ein $v \in \mathbb{R}^n$ heißt Tangentialvektor an M in a, falls eine stetig differenzierbare Kurve $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ existiert (wobei I ein offenes Intervall im $\mathbb{R}$ mit $0 \in I$ ist) mit

$$\varphi(0) = a\,, \quad \varphi'(0) = v\,, \quad \varphi(I) \subset M\,. \tag{8.3}$$

Die Menge

$$T_a(M) = \{v : v \textit{ ist Tangentialvektor an } M \textit{ in } a\} \tag{8.4}$$

heißt der Tangentialraum an M in a. □

Satz 8.3 (Charakterisierung des Tangentialraums)
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale C^1-Mannigfaltigkeit, sei $a \in M$, sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $a \in U$. Dann gilt:

(i) $T_a(M)$ ist ein k-dimensionaler Unterraum von $\mathbb{R}^n$.

(ii) Ist $\Phi : T \to M \cap U$ eine Karte von M mit $\Phi(c) = a$, $c \in T$, $T \subset \mathbb{R}^k$ offen, so bilden die k Spalten der Funktionalmatrix $J_\Phi(c)$, das heißt die Vektoren

$$\{\partial_1\Phi(c), \ldots, \partial_k\Phi(c)\}$$

eine Basis von $T_a(M)$.

(iii) Ist

$$M \cap U = \{x : x \in U,\ f(x) = 0\}$$

mit $f \in C^1(U; \mathbb{R}^{n-k})$ und $\operatorname{rang} J_f(a) = n-k$, so ist

$$T_a(M) = \{v : v \in \mathbb{R}^n,\ \langle v, \nabla f_i(a)\rangle = 0 \textit{ für alle } i,\ 1 \le i \le n-k\}\,. \tag{8.5}$$

Beweis: Sei V_1 der von den Spalten von $J_\Phi(c)$ aufgespannte Unterraum und

$$V_2 = \{v : v \in \mathbb{R}^n,\ \langle v, \nabla f_i(a)\rangle = 0 \text{ für alle } i,\ 1 \le i \le n-k\}\,.$$

Wegen $\dim(V_1) = \dim(V_2) = k$ genügt es zu zeigen, dass

$$V_1 \subset T_a(M) \subset V_2\,. \tag{8.6}$$

Zum Beweis der ersten Inklusion sei

$$v = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \partial_j \Phi(c)$$

ein beliebiges Element von V_1. Wir definieren für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ eine Abbildung $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ durch

$$\varphi(s) = \Phi(c_1 + \lambda_1 s, c_2 + \lambda_2 s, \dots, c_k + \lambda_k s)\,.$$

Dann ist $\varphi(s) \in M$ für alle s, $\varphi(0) = a$, und aus der Kettenregel folgt

$$\varphi'(0) = J_\Phi(c) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \partial_j \Phi(c) = v\,,$$

also $v \in T_a(M)$. Zum Beweis der zweiten Inklusion sei $v \in T_a(M)$. Wähle $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ gemäß Definition 8.2, dann gilt $f(\varphi(s)) = 0$ für $|s|$ hinreichend klein, also gilt für alle i mit $1 \le i \le n-k$

$$0 = (f_i \circ \varphi)'(0) = \langle \nabla f_i(\varphi(0)), \varphi'(0)\rangle = \langle \nabla f_i(a), v\rangle\ ,$$

also ist $v \in V_2$. □

In Satz 8.3 ergibt sich aus (iii) im Spezialfall $\dim M = n-1$, dass $\dim T_a(M) = n-1$ und dass $\nabla f(a)$ auf $T_a(M)$ senkrecht steht.

Satz 8.4 (Existenz einer stetigen äußeren Normalen)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, Ω habe einen C^1-Rand. Dann gibt es genau ein Vektorfeld $\nu : \partial\Omega \to \mathbb{R}^n$ so dass für alle $a \in \partial\Omega$ gilt

$$\nu(a) \perp T_a(\partial\Omega)\,, \quad \|\nu(a)\|_2 = 1\,, \tag{8.7}$$

und dass es für alle $a \in \partial\Omega$ ein $\varepsilon > 0$ gibt mit

$$a + t\nu(a) \notin \Omega\,, \quad \textit{für alle } t \in (0, \varepsilon)\,. \tag{8.8}$$

Das Vektorfeld ν ist stetig auf $\partial\Omega$. Der Vektor $\nu(a)$ heißt der äußere (Einheits-) Normalenvektor an $\partial\Omega$ in a.

Beweis: Nach Satz 8.3 ist ist $\dim T_a(\partial\Omega) = n-1$, und es gilt für $z \in \mathbb{R}^n$

$$z \perp T_a(\partial\Omega)\,, z \neq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad z = \lambda \nabla f(a) \quad \text{für ein } \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0.$$

Für solche z und hinreichend kleines $t > 0$ gilt

$$f(a+tz) = f(a) + t\,\langle z, \nabla f(a)\rangle + o(t) = t\lambda \|\nabla f(a)\|_2^2 + o(t) = t\left(\lambda \|\nabla f(a)\|_2^2 + \frac{o(t)}{t}\right),$$

also folgt für hinreichend kleine t

$$a + tz \notin \Omega \qquad \Leftrightarrow \qquad f(a+tz) > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda > 0\,.$$

Falls außerdem $\|z\|_2 = 1$ gelten soll, ist also

$$\nu(a) = \frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|_2} \tag{8.9}$$

der eindeutig bestimmte Vektor, welcher (8.7) und (8.8) erfüllt. Da f stetig differenzierbar ist, ist ν stetig in a, und da a beliebig war, ist ν stetig auf $\partial\Omega$. □

Wir betrachten als Spezialfall das Normalenfeld an den Graphen einer Funktion. Sei dazu $x \in \mathbb{R}^n$ zerlegt in

$$x = (x', x_n)\,, \quad x' \in \mathbb{R}^{n-1}\,, \quad x_n \in \mathbb{R}\,, \tag{8.10}$$

und wir betrachten folgende Situation: $W \subset \mathbb{R}^{n-1}$ ist offen und beschränkt, $h \in C^1(W)$ mit $h(W) \subset I = (a,b) \subset \mathbb{R}$,

$$M = \operatorname{graph}(h) = \{(x', x_n) :\, x' \in W,\, x_n = h(x')\} \subset W \times I\,, \tag{8.11}$$

$$A = \{(x', x_n) :\, x' \in W\,,\, x_n \in I\,,\, x_n < h(x')\}\,. \tag{8.12}$$

Nach Konstruktion im Beweis von Satz 8.4 (siehe (8.9)) gilt für $x \in M$

$$\nu(x) = \frac{(-\nabla h(x'), 1)}{\|(-\nabla h(x'), 1)\|_2}\,. \tag{8.13}$$

Satz 8.5 (Partielle Integration im $\mathbb{R}^n$)
Es liege die Situation (8.10) – (8.13) vor. Dann gilt für alle $f \in C^1(W \times I)$ mit kompaktem Träger in $W \times I$

$$\int_A \partial_i f(x)\,dx = \int_M f(\xi)\nu_i(\xi)\,dS(\xi)\,, \quad 1 \le i \le n\,. \tag{8.14}$$

Beweis: Da f kompakten Träger hat, sind f und $\partial_i f$ stetig und beschränkt, also existieren alle Integrale, die im Folgenden auftreten.
Fall 1: $i = n$. Es ist (Fubini)

$$\begin{aligned}
\int_A \partial_n f(x)\,dx &= \int_W \int_a^{h(x')} \partial_n f(x', x_n)\,dx_n\,dx' = \int_W f(x', h(x'))\,dx' \\
&= \int_W f(x', h(x'))\nu_n(x', h(x'))\sqrt{1 + \|\nabla h(x')\|_2^2}\,dx' \\
&= \int_M f(\xi)\nu_n(\xi)\,dS(\xi)\,,
\end{aligned}$$

da $g(x') = 1 + \|\nabla h(x')\|_2^2$ gilt für die Gramsche Determinante der Funktion $x' \mapsto (x', h(x'))$, siehe (7.29).
Fall 2: Sei $1 \le i \le n-1$. Die durch

$$F(x') = \int_a^{h(x')} f(x', x_n)\, dx_n$$

definierte Funktion $F : W \to \mathbb{R}$ hat kompakten Träger in W, also gilt (Übungsaufgabe)

$$0 = \int_W \partial_i F(x')\, dx' = \int_W \partial_i \left(\int_a^{h(x')} f(x', x_n)\, dx_n \right) dx' .$$

Es folgt weiter (unter Verwendung von Fubini und (8.13))

$$\begin{aligned} 0 &= \int_W \left[\int_a^{h(x')} \partial_i f(x', x_n)\, dx_n + f(x', h(x'))\partial_i h(x') \right] dx' \\ &= \int_W \int_a^{h(x')} \partial_i f(x', x_n)\, dx_n\, dx' + \int_W f(x', h(x'))\partial_i h(x')\, dx' \\ &= \int_A \partial_i f(x)\, dx - \int_W f(x', h(x'))\nu_i(x', h(x'))\sqrt{1 + \|\nabla h(x')\|_2^2}\, dx' \\ &= \int_A \partial_i f(x)\, dx - \int_M f(\xi)\nu_i(\xi)\, dS(\xi)\,, \end{aligned}$$

□

Folgerung 8.6 *Satz 8.5 gilt auch, falls A auf der anderen Seite von M liegt, das heißt, falls*

$$A = \{(x', x_n) : \; x' \in W\,,\; x_n \in I\,,\; x_n > h(x')\}\,, \tag{8.15}$$

gilt. Die äußere Normale ist dann gegeben durch

$$\nu(x) = \frac{(\nabla h(x'), -1)}{\|(\nabla h(x'), -1)\|_2} . \tag{8.16}$$

Ebenso gilt Satz 8.5 auch, falls die Darstellung von M nach einer anderen Koordinate aufgelöst ist, also

$$M = \{(x_1, \dots, x_n) : (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in W\,,\; x_i = h(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)\} \tag{8.17}$$

und A, ν entsprechend.

Beweis: Entweder durch Modifikation des Beweises von Satz 8.6 oder durch Transformation auf die Situation des Satzes. □

Definition 8.7 (C^∞-Zerlegung der Eins)
Sei $K \subset \mathbb{R}^n$, sei $(U_j)_{1 \le j \le N}$ eine offene Überdeckung von K. Eine Familie $(\alpha_j)_{1 \le j \le N}$ von Funktionen $\alpha_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ heißt C^∞-Zerlegung der Eins für K bezüglich $(U_j)_j$, falls gilt

$$0 \le \alpha_j \le 1\,, \quad \text{für alle } j, \tag{8.18}$$

$$\alpha_j(x) = 0\,, \quad \text{falls } x \notin U_j, \tag{8.19}$$

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j(x) = 1 \quad \text{falls } x \in K. \tag{8.20}$$

□

Kompakte Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ besitzen immer eine solche Zerlegung der Eins.

Satz 8.8
Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, sei $(U(x))_{x\in K}$ ein System offener Mengen mit $x \in U(x)$ für alle $x \in K$. Dann gibt es endlich viele $x^j \in K$, $1 \le j \le N$, mit

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{N} U(x^j)\,,$$

und eine C^∞-Zerlegung der Eins für K bezüglich $(U_j)_{1\le j\le N}$, wobei $U_j = U(x^j)$.

Beweis: Wie früher beginnen wir mit $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ definiert durch

$$\psi(t) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{t}\right)\,, & t > 0\,, \\ 0\,, & t \le 0\,. \end{cases}$$

Wir setzen

$$\tilde{\psi}(t) = \frac{\psi(4-t)}{\psi(4-t) + \psi(t-1)}\,.$$

Es ist dann $\tilde{\psi} \in C^\infty(\mathbb{R})$, und es gilt $\tilde{\psi}(t) = 1$ für $t \le 1$, $\tilde{\psi}(t) = 0$ für $t \ge 4$. Zu jedem $x \in K$ wählen wir $\varepsilon_x > 0$ mit $B(x; 3\varepsilon_x) \subset U(x)$. Weiterhin wählen wir endlich viele $x^j \in K$, $1 \le j \le N$, so dass

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{N} B(x^j; \varepsilon_j)\,, \quad \varepsilon_j = \varepsilon_{x^j}\,,$$

und definieren für $x \in \mathbb{R}^n$

$$\tilde{\alpha}_j(x) = \tilde{\psi}\left(\frac{\|x - x^j\|_2^2}{\varepsilon_j^2}\right)\,.$$

Dann ist $\tilde{\alpha}_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $0 \le \tilde{\alpha}_j \le 1$, $\tilde{\alpha}_j = 1$ in $K(x^j; \varepsilon_j)$ (wobei $K(x;\varepsilon) = \{y : \|y - x\|_2 \le \varepsilon\}$), und $\tilde{\alpha}_j = 0$ außerhalb von $K(x^j; 2\varepsilon_j)$. Eine Zerlegung der Eins wie verlangt erhalten wir nun durch

$$\alpha_j(x) = \frac{\tilde{\alpha}_j(x)}{p(x) + \sum_{k=1}^{N} \tilde{\alpha}_k(x)}\,, \quad p(x) = \prod_{k=1}^{N} (1 - \tilde{\alpha}_k(x))\,.$$

□

Satz 8.9 (Gaußscher Integralsatz)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, Ω habe einen C^1-Rand. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $\overline{\Omega} \subset U$, sei $F : U \to \mathbb{R}^n$ ein C^1-Vektorfeld. Dann gilt

$$\int_\Omega \operatorname{div} F(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} \langle F(\xi), \nu(\xi)\rangle \, dS(\xi)\,. \tag{8.21}$$

Beweis: Für jedes $x \in \Omega$ wählen wir eine offene Menge $U(x)$ mit $x \in U(x) \subset \Omega$. Für jedes $x \in \partial\Omega$ betrachten wir zunächst gemäß Definition 8.1 eine lokale Darstellung

$$\partial\Omega \cap U' = \{f = 0\}, \quad \Omega \cap U' = \{f < 0\},$$

mit $f \in C^1(U')$ und $\nabla f \neq 0$ überall. Nach dem Satz über implizite Funktionen gibt es offene Mengen (die wir o.B.d.A. konvex wählen können) $W(x) \subset \mathbb{R}^{n-1}$, $I(x) \subset \mathbb{R}$ und $h_x : W(x) \to I(x)$, $h_x \in C^1(W(x))$ mit

$$\begin{aligned} U(x) \cap \partial\Omega &= \{(x', x_n) : x_n = h_x(x')\}, \\ U(x) \cap \Omega &= \{(x', x_n) : x_n < h_x(x')\}, \\ U(x) &= W(x) \times I(x), \end{aligned}$$

oder mit "$>$" statt "$<$" beziehungsweise aufgelöst nach x_i statt x_n. Gemäß Satz 8.8, angewendet auf $K = \Omega \cup \partial\Omega$, wählen wir endlich viele $U(x^j)_{1 \le j \le N}$ und eine zugeordnete C^∞-Zerlegung der Eins $(\alpha_j)_{1 \le j \le N}$. Wir numerieren so, dass $x^1, \ldots, x^M \in \partial\Omega$, $x^{M+1}, \ldots, x^N \in \Omega$. Es gilt nun

$$\begin{aligned} \int_\Omega \operatorname{div} F(x)\, dx &= \int_\Omega \sum_{k=1}^n \partial_k \left(\sum_{j=1}^N \alpha_j F_k \right)(x)\, dx \\ &= \int_\Omega \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^n \partial_k(\alpha_j F_k)(x)\, dx \\ &= \sum_{j=1}^N \int_\Omega \operatorname{div}(\alpha_j F)(x)\, dx, \end{aligned}$$

sowie

$$\int_{\partial\Omega} \langle F(\xi), \nu(\xi) \rangle \, dS(\xi) = \sum_{j=1}^N \int_{\partial\Omega} \langle \alpha_j(\xi) F(\xi), \nu(\xi) \rangle \, dS(\xi).$$

Es genügt daher, den Satz für $\alpha_j F$, $1 \le j \le N$, zu beweisen.
Fall 1: $j \le M$. Wir wenden Satz 8.5 an mit

$$f = \alpha_j F_k, \quad A = \Omega \cap U(x^j), \quad M = \partial\Omega \cap U(x_j),$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \int_\Omega \operatorname{div}(\alpha_j F)(x)\, dx = \sum_{k=1}^n \int_\Omega \partial_k(\alpha_j F_k)(x)\, dx &= \sum_{k=1}^n \int_{\partial\Omega} \alpha_j(\xi) F_k(\xi) \nu_k(\xi)\, dS(\xi) \\ &= \int_{\partial\Omega} \langle \alpha_j(\xi) F(\xi), \nu(\xi) \rangle \, dS(\xi). \end{aligned}$$

Fall 2: $M < j \le N$. Es ist $U(x_j) \subset \Omega$, also $\operatorname{supp}(\alpha_j) \subset \Omega$, also

$$\int_{\partial\Omega} \langle \alpha_j(\xi) F(\xi), \nu(\xi) \rangle \, dS(\xi) = 0,$$

und (Übungsaufgabe)

$$\int_\Omega \operatorname{div}(\alpha_j F)(x)\, dx = \sum_{k=1}^n \int_\Omega \partial_k(\alpha_j F_k)(x)\, dx = 0.$$

□

Satz 8.10 (1. Greensche Formel)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, Ω habe einen C^1-Rand. Seien $f \in C^1(U)$, $g \in C^2(U)$, wobei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen ist mit $\overline{\Omega} \subset U$. Dann gilt

$$\int_\Omega f(x)\Delta g(x)\, dx = -\int_\Omega \langle \nabla f(x), \nabla g(x)\rangle \, dx + \int_{\partial\Omega} f(\xi)\partial_\nu g(\xi)\, dS(\xi)\,, \tag{8.22}$$

wobei

$$\partial_\nu g(\xi) = \langle \nabla g(\xi), \nu(\xi)\rangle$$

die Richtungsableitung in Richtung der äußeren Normalen bezeichnet. ($\partial_\nu g$ heißt auch die Normalenableitung von g.)

Beweis: Sei $F : U \to \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$F(x) = f(x)\nabla g(x)\,,$$

dann ist

$$\langle F(\xi), \nu(\xi)\rangle = f(\xi)\partial_\nu g(\xi)\,,$$

und

$$\operatorname{div} F(x) = \langle \nabla f(x), \nabla g(x)\rangle + f(x)\operatorname{div}(\nabla g(x)) = \langle \nabla f(x), \nabla g(x)\rangle + f(x)\Delta g(x)\,.$$

Die Behauptung folgt nun aus Satz 8.9. □

Folgerung 8.11 (2. Greensche Formel)
Es liege die Situation aus Satz 8.10 vor. Dann gilt (setze $f = 1$)

$$\int_\Omega \Delta g(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} \partial_\nu g(\xi)\, dS(\xi)\,. \tag{8.23}$$

Ist außerdem $f \in C^2(U)$, so gilt

$$\int_\Omega (f\Delta g - g\Delta f)(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} (f\partial_\nu g - g\partial_\nu f)(\xi)\, dS(\xi)\,. \tag{8.24}$$

□

9 Der Integralsatz von Stokes

Wir beschäftigen uns zunächst mit einer zweidimensionalen Situation. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen, beschränkt, mit einem C^1-Rand $\partial\Omega$. Wir nehmen an, es gebe eine stetig differenzierbare Parametrisierung $r : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, mit $r(a) = r(b)$, so dass $r : [a,b) \to \partial\Omega$ bijektiv ist und $r'(t) \neq 0$ gilt für alle $t \in [a,b]$.

Sei $\nu : \partial\Omega \to \mathbb{R}^2$ das zugehörige Normalenfeld, siehe Satz 8.4. Für $a \in \partial\Omega$, $a = r(t)$ ist

$$T_a(\partial\Omega) = \operatorname{span}\{r'(t)\} = \{\lambda r'(t) : \lambda \in \mathbb{R}\},$$

also

$$r'(t) \perp \nu(r(t)).$$

Durch die Parametrisierung r wird ein Durchlaufsinn für $\partial\Omega$ festgelegt. Wir sagen, dass $\partial\Omega$ von r im **mathematisch positiven Sinn** durchlaufen wird, falls

$$\det(\nu(r(t)) \mid r'(t)) > 0. \tag{9.1}$$

Das ist dann der Fall, wenn

$$\nu(r(t)) = \frac{1}{\|r'(t)\|_2} \begin{pmatrix} r_2'(t) \\ -r_1'(t) \end{pmatrix}, \quad r'(t) = \|r'(t)\|_2 \begin{pmatrix} -\nu_2(r(t)) \\ \nu_1(r(t)) \end{pmatrix}. \tag{9.2}$$

Anschaulich bedeutet das, dass $\partial\Omega$ entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen wird, und dass Ω immer "links von der Richtung $r'(t)$ liegt".

Satz 9.1 (Satz von Stokes im $\mathbb{R}^2$)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen und beschränkt, Ω habe einen C^1-Rand $\partial\Omega$, welcher von der Parametrisierung r im mathematisch positiven Sinn durchlaufen wird. Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen mit $\overline{\Omega} \subset U$, sei $F : U \to \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt

$$\int_r F(x) \cdot dx = \int_\Omega (\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1)(x)\, dx. \tag{9.3}$$

Beweis: Aus der Definition des Kurvenintegrals und aus (9.2) folgt

$$\begin{aligned}
\int_r F(x) \cdot dx &= \int_a^b \langle F(r(t)), r'(t)\rangle \, dt = \int_a^b \left\langle F(r(t)), \begin{pmatrix} -\nu_2(r(t)) \\ \nu_1(r(t)) \end{pmatrix} \right\rangle \|r'(t)\|_2 \, dt \\
&= \int_a^b \left\langle \begin{pmatrix} F_2(r(t)) \\ -F_1(r(t)) \end{pmatrix}, \nu(r(t)) \right\rangle \|r'(t)\|_2 \, dt = \int_{\partial\Omega} \left\langle \begin{pmatrix} F_2 \\ -F_1 \end{pmatrix}(\xi), \nu(\xi) \right\rangle dS(\xi) \\
&= \int_\Omega (\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1)(x)\, dx,
\end{aligned}$$

letzteres nach dem Satz von Gauß. □

Für $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$F(x) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

gilt also

$$\int_{\partial\Omega} F(x) \cdot dx = \int_\Omega 1\, dx = \lambda^2(\Omega)\,,$$

also etwa für den Einheitskreis $\Omega = B_1(0;1)$, $r(t) = (\cos t, \sin t)$

$$\lambda^2(\Omega) = \int_0^{2\pi} \langle F(r(t)), r'(t)\rangle \; dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin^2(t) + \cos^2(t)\, dt = \pi\,.$$

Wir beschäftigen uns nun mit dem Satz von Stokes im $\mathbb{R}^3$. Dieser involviert die sogenannte **Rotation** eines Vektorfeldes $F : V \to \mathbb{R}^3$, $V \subset \mathbb{R}^3$ offen, definiert durch

$$\operatorname{rot} F : V \to \mathbb{R}^3\,, \tag{9.4}$$

$$(\operatorname{rot} F)(x) = (\partial_2 F_3(x) - \partial_3 F_2(x), \partial_3 F_1(x) - \partial_1 F_3(x), \partial_1 F_2(x) - \partial_2 F_1(x))\,. \tag{9.5}$$

Sei M eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^3$. Wir betrachten nur den Spezialfall, dass M durch eine einzige Karte (siehe Kapitel 7) beschrieben wird,

$$M = \Phi(T)\,, \quad \Phi : T \to \mathbb{R}^3\,, \quad T \subset \mathbb{R}^2 \text{ offen.} \tag{9.6}$$

Sei nun $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen und beschränkt, Ω habe einen C^1-Rand $\partial\Omega$, es gelte

$$\overline{\Omega} \subset T\,.$$

Wir betrachten

$$A = \Phi(\overline{\Omega}) \tag{9.7}$$

und definieren (nur für den Rest dieses Abschnitts)

$$\partial A = \Phi(\partial\Omega)\,. \tag{9.8}$$

Unter ∂A stellen wir uns den eindimensionalen Rand der zweidimensionalen Mannigfaltigkeit $\Phi(\Omega)$ vor. Sei nun $V \subset \mathbb{R}^3$ offen, $M \subset V$, $F : V \to \mathbb{R}^3$. Der **Satz von Stokes** besagt, dass unter geeigneten Voraussetzungen gilt

$$\int_{\partial A} F(x) \cdot dx = \int_A \langle (\operatorname{rot} F)(\xi), \nu(\xi)\rangle \; dS(\xi)\,. \tag{9.9}$$

Hierbei müssen der Umlaufsinn der Randkurve ∂A und die Normalenrichtung $\nu(\xi)$ zueinander passend gewählt werden. Das erreicht man, indem man erstens ∂A parametrisiert durch eine Kurve $\Phi \circ r : [a,b] \to A$, wobei $r : [a,b] \to T$ eine Kurve ist, welche $\partial\Omega$ im mathematisch positiven Sinn durchläuft, und zweitens das Vorzeichen der Normalen in einem Punkt $\xi = \Phi(u)$, $u \in \Omega$, festlegt durch ("$\times$" bezeichnet das Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$)

$$\nu(\Phi(u)) = \frac{1}{\|\partial_1\Phi(u) \times \partial_2\Phi(u)\|_2}\, \partial_1\Phi(u) \times \partial_2\Phi(u)\,. \tag{9.10}$$

Es ergibt sich dann, da $(\Phi \circ r)'(t) = J_\Phi(r(t))r'(t)$,

$$\int_{\partial A} F(x) \cdot dx = \int_{\Phi\circ r} F(x) \cdot dx = \int_a^b \langle F(\Phi(r(t))), J_\Phi(r(t))r'(t)\rangle \; dt \tag{9.11}$$

$$= \int_a^b \left\langle J_\Phi(r(t))^T F(\Phi(r(t))), r'(t)\right\rangle \; dt \tag{9.12}$$

$$= \int_r \tilde{F}(u) \cdot du\,, \tag{9.13}$$

wobei $\tilde{F} : T \to \mathbb{R}^2$ definiert ist durch

$$\tilde{F}(u) = J_\Phi(u)^T F(\Phi(u)) . \tag{9.14}$$

Wir können jetzt Satz 9.1 anwenden und erhalten

$$\int_r \tilde{F}(u) \cdot du = \int_\Omega (\partial_1 \tilde{F}_2 - \partial_2 \tilde{F}_1)(u)\, du . \tag{9.15}$$

Nach (9.14) hat $\tilde{F}$ die komponentenweise Form

$$\tilde{F}_i(u) = \langle \partial_i \Phi(u), F(\Phi(u)) \rangle \ , \quad i = 1, 2 . \tag{9.16}$$

Aus der Produktregel (für Skalarprodukte) und der Kettenregel folgt

$$\partial_1 \tilde{F}_2(u) = \langle \partial_1 \partial_2 \Phi(u), F(\Phi(u)) \rangle + \langle \partial_2 \Phi(u), J_F(\Phi(u)) \partial_1 \Phi(u) \rangle \tag{9.17}$$

$$\partial_2 \tilde{F}_1(u) = \langle \partial_2 \partial_1 \Phi(u), F(\Phi(u)) \rangle + \langle \partial_1 \Phi(u), J_F(\Phi(u)) \partial_2 \Phi(u) \rangle \tag{9.18}$$

Es folgt, falls Φ zweimal stetig differenzierbar ist,

$$(\partial_1 \tilde{F}_2 - \partial_2 \tilde{F}_1)(u) = \langle \partial_2 \Phi(u), J_F(\Phi(u)) \partial_1 \Phi(u) \rangle - \langle \partial_1 \Phi(u), J_F(\Phi(u)) \partial_2 \Phi(u) \rangle \ . \tag{9.19}$$

Die rechten Seite von (9.19) hat die Form

$$\langle y, Ax \rangle - \langle x, Ay \rangle \ , \quad x, y \in \mathbb{R}^3 \, , \ A \in \mathbb{R}^{3,3} \, .$$

Es gilt die algebraische Identität

$$\langle y, Ax \rangle - \langle x, Ay \rangle = \sum_{i,j=1}^{3} y_i a_{ij} x_j - \sum_{i,j=1}^{3} x_i a_{ij} y_j = \langle \begin{pmatrix} a_{32} - a_{23} \\ a_{13} - a_{31} \\ a_{21} - a_{12} \end{pmatrix} , x \times y \rangle$$

Anwendung auf (9.19) liefert mit (9.10)

$$(\partial_1 \tilde{F}_2 - \partial_2 \tilde{F}_1)(u) = \langle \begin{pmatrix} \partial_2 F_3 - \partial_3 F_2 \\ \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3 \\ \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 \end{pmatrix} (\Phi(u)) \, , \, \partial_1 \Phi(u) \times \partial_2 \Phi(u) \rangle \tag{9.20}$$

$$= \langle (\operatorname{rot} F)(\Phi(u)), \nu(\Phi(u)) \rangle \, \| \partial_1 \Phi(u) \times \partial_2 \Phi(u) \|_2 \, . \tag{9.21}$$

Es ist also

$$\int_\Omega (\partial_1 \tilde{F}_2 - \partial_2 \tilde{F}_1)(u)\, du = \int_\Omega \langle (\operatorname{rot} F)(\Phi(u)), \nu(\Phi(u)) \rangle \, \| \partial_1 \Phi(u) \times \partial_2 \Phi(u) \|_2 \, du . \tag{9.22}$$

Wir können das Integral auf der rechten Seite dieser Gleichung in ein Oberflächenintegral über M zurückführen. Sei dazu $B = (x \,|\, y) \in \mathbb{R}^{3,2}$ eine Matrix mit den Spalten x und y. Es gilt die algebraische Identität

$$\det(B^T B) = \det \begin{pmatrix} x^T x & x^T y \\ y^T x & y^T y \end{pmatrix} = \|x\|_2^2 \|y\|_2^2 - \langle x, y \rangle^2 = \|x \times y\|_2^2 \, . \tag{9.23}$$

Mit $x = \partial_1 \Phi(u)$, $y = \partial_2 \Phi(u)$ folgt also, dass für die Gramsche Determinante $g(u)$ der Karte Φ gilt

$$\sqrt{g(u)} = \sqrt{\det(J_\Phi(u)^T J_\Phi(u))} = \| \partial_1 \Phi(u) \times \partial_2 \Phi(u) \|_2 \, . \tag{9.24}$$

Die Gleichungen (9.11), (9.15), (9.22) und (9.24) zusammengenommen ergeben die Formel (9.9) des Satzes von Stokes. Wir haben also bewiesen:

Satz 9.2 (Satz von Stokes im $\mathbb{R}^3$)
Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit, welche durch eine globale Karte $\Phi : T \to M$ beschrieben wird, sei Φ zweimal stetig differenzierbar. Seien $A \subset M$ und $F : V \to \mathbb{R}^3$ wie in (9.6) – (9.9) beschrieben, sei der Umlaufsinn von ∂A und die Normalenrichtung $\nu(\xi)$ passend gewählt wie beschrieben. Dann gilt

$$\int_{\partial A} F(x) \cdot dx = \int_A \langle (\operatorname{rot} F)(\xi), \nu(\xi) \rangle \, dS(\xi) \,. \tag{9.25}$$

□

Die Sätze von Gauß und Stokes stellen eine Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung ins Mehrdimensionale dar. Gemeinsam ist ihnen, dass ein Integral einer Funktion über den Rand einer Mannigfaltigkeit mit einem Integral eines Differentials dieser Funktion über die gesamte Mannigfaltigkeit in Verbindung gebracht wird. Einen einheitlichen allgemeinen begrifflichen Rahmen für diese Sätze liefert die Theorie der **Differentialformen**.

10 Differenzierbarkeit in $\mathbb{C}$

Wir wissen bereits einiges über die komplexen Zahlen. Aufgefaßt als $\mathbb{R}$-Vektorraum, ist $\mathbb{C}$ vermittels $j : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$,

$$j(z) = (\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z) \tag{10.1}$$

zu $\mathbb{R}^2$ isomorph. Da

$$|z| = \|j(z)\|_2 \,, \tag{10.2}$$

ist die metrische Struktur von $\mathbb{C}$ mit der von $\mathbb{R}^2$ identisch. Also ist eine Teilmenge U von $\mathbb{C}$ genau dann offen (abgeschlossen, kompakt, ...), wenn die entsprechende Menge $j(U) \subset \mathbb{R}^2$ diese Eigenschaft hat. Eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann in $\mathbb{C}$, wenn die Folge $(j(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^2$ konvergiert.

Definition 10.1 (Differenzierbarkeit)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ heißt differenzierbar in $z \in U$, falls der Grenzwert

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \tag{10.3}$$

existiert. Wir definieren in diesem Fall die Ableitung von f in z durch

$$f'(z) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \,. \tag{10.4}$$

Ist f in ganz U differenzierbar, so sagen wir, dass f in U holomorph ist. □

Die aus dem Reellen bekannten Rechenregeln gelten auch im Komplexen (Beweis genauso): Sind $f, g : U \to \mathbb{C}$ holomorph, so auch $f+g$, $f \cdot g$, αf für $\alpha \in \mathbb{C}$, sowie $f/g : U \setminus \{g = 0\} \to \mathbb{C}$, und es gilt

$$(f+g)' = f' + g' \,, \quad (fg)' = f'g + fg' \,, \quad (\alpha f)' = \alpha f' \,, \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2} \,.$$

Außerdem gilt die Kettenregel: Sind $f : U \to V$, $g : V \to \mathbb{C}$ holomorph, so ist auch $g \circ f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, und

$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z) \,, \quad z \in U \,.$$

Fassen wir $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum der Dimension 2 auf, so ist eine Abbildung $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\mathbb{R}$-linear, falls gilt

$$T(z+w) = T(z) + T(w) \,, \quad \text{für alle } z, w \in \mathbb{C},$$
$$T(\alpha z) = \alpha T(z) \,, \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C},\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Ist $c \in \mathbb{C}$, so ist die durch

$$T(z) = c \cdot z \tag{10.5}$$

definierte Abbildung $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ natürlich $\mathbb{C}$-linear, und damit auch $\mathbb{R}$-linear. Ihre Matrixdarstellung hat die Form

$$\begin{pmatrix} c_1 & -c_2 \\ c_2 & c_1 \end{pmatrix} , \quad c_1 = \operatorname{Re} c \,, \quad c_2 = \operatorname{Im} c \,, \tag{10.6}$$

was sich unmittelbar aus der Formel für die Multiplikation

$$(c_1 + ic_2)(z_1 + iz_2) = (c_1 z_1 - c_2 z_2) + i(c_2 z_1 + c_1 z_2)$$

ergibt. Ein weiteres Beispiel ist die komplexe Konjugation,

$$T(z) = \overline{z}\,.$$

Wegen $T(\alpha z) = \overline{\alpha} \cdot \overline{z}$ ist T $\mathbb{R}$-linear, aber nicht $\mathbb{C}$-linear.

Jeder Abbildung $f : U \to \mathbb{C}$, $U \subset \mathbb{C}$ entspricht kanonisch eine Abbildung $\tilde{f} : j(U) \to \mathbb{R}^2$. Auf $\tilde{f}$ ist die in Analysis 2 entwickelte Differentialrechnung im Mehrdimensionalen anwendbar. Wir werden im folgenden f und $\tilde{f}$ in der Notation nicht unterscheiden, sondern einfach von $f : U \to \mathbb{C}$ sprechen.

Definition 10.2 (Reelle Differenzierbarkeit)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Abbildung $f : U \to \mathbb{C}$ heißt reell differenzierbar, falls sie differenzierbar ist, aufgefaßt als Abbildung von $U \subset \mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$. □

Lemma 10.3 *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$, $z \in U$. Dann sind äquivalent:*

(i) f ist differenzierbar in z.

(ii) f ist reell differenzierbar in z, und die Jacobi-Matrix $J_f(z) \in \mathbb{R}^{2,2}$ hat die Form

$$J_f(z) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \tag{10.7}$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$.

Beweis: Wie im Reellen beweist man, dass (10.4) äquivalent ist zu

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(z+h) - f(z) - f'(z)h}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{|f(z+h) - f(z) - f'(z)h|}{|h|} = 0\,. \tag{10.8}$$

Hieraus folgt die Behauptung, siehe (10.2), (10.5) und (10.6). □

Schreiben wir

$$f(z) = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix},$$

also $u(x,y) = \operatorname{Re} f(z)$, $v(x,y) = \operatorname{Im} f(z)$, $z = x + iy$, so ist

$$J_f(z) = \begin{pmatrix} \partial_x u(x,y) & \partial_y u(x,y) \\ \partial_x v(x,y) & \partial_y v(x,y) \end{pmatrix}. \tag{10.9}$$

Satz 10.4 (Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$. Dann sind äquivalent:

(i) f ist holomorph in U.

(ii) f ist reell differenzierbar in U, und für die Funktionen $u = \operatorname{Re} f$ und $v = \operatorname{Im} f$ gilt

$$\partial_x u(x,y) = \partial_y v(x,y)\,, \tag{10.10}$$
$$\partial_y u(x,y) = -\partial_x v(x,y)\,, \tag{10.11}$$

für alle $(x,y) \in U$.

Die Gleichungen (10.10) und (10.11) heißen die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen.

Beweis: Folgt direkt aus Lemma 10.3 und (10.9). □

Aus der Analysis 2 wissen wir, dass stetige Differenzierbarkeit der Funktionen u und v die reelle Differenzierbarkeit von f impliziert. Beispiel: Für die komplexe Exponentialfunktion gilt

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x \cos y + i e^x \sin y\,,$$

also

$$u(x,y) = e^x \cos y\,, \quad v(x,y) = e^x \sin y\,.$$

Man sieht unmittelbar, dass die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen in $\mathbb{R}^2$ erfüllt sind, also ist die Exponentialfunktion in $\mathbb{C}$ holomorph.

Ist $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, und sind $u = \operatorname{Re} f$ und $v = \operatorname{Im} f$ zweimal stetig differenzierbar (was, wie sich später herausstellen wird, bereits aus der Holomorphie folgt), so folgt aus den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\Delta u = \partial_x(\partial_x u) + \partial_y(\partial_y u) = \partial_x \partial_y v - \partial_y \partial_x v = 0\,,$$

und analog

$$\Delta v = 0\,.$$

Real- und Imaginärteil einer holomorphen Funktion sind also immer Lösungen der Laplace-Gleichung in U.

Wir betrachten nun komplexe Potenzreihen der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k \tag{10.12}$$

mit den Koeffizienten $(c_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}$ um den Entwicklungspunkt $a \in \mathbb{C}$. Wir wissen bereits aus der Analysis 2, dass diese Potenzreihe im Inneren ihres Konvergenzkreises $B(a,r)$,

$$r = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}}$$

absolut konvergiert und dort eine stetige Funktion

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k \tag{10.13}$$

definiert. Wir wissen außerdem, dass die durch gliedweises Differenzieren gebildete Potenzreihe

$$g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k (z-a)^{k-1} \tag{10.14}$$

ebenfalls in $B(a,r)$ absolut konvergiert.

Satz 10.5 *Jede komplexe Potenzreihe definiert eine im Innern ihres Konvergenzkreises holomorphe Funktion, deren Ableitung sich durch gliedweises Differenzieren ergibt.*

Beweis: Seien f, g durch (10.13), (10.14) gegeben, sei zunächst $a = 0$. Wir müssen zeigen, dass f für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < r$ differenzierbar ist und $f'(z) = g(z)$ gilt. Sei ein solches z fest gewählt. Wir definieren

$$q_k(w) = \sum_{j=0}^{k-1} z^j w^{k-1-j} \,.$$

Dann ist

$$w^k - z^k = (w-z) q_k(w) \,,$$

also für $|w| < r$

$$f(w) - f(z) = (w-z) \sum_{k=1}^{\infty} c_k q_k(w) \,,$$

also für $|w| < r$, $w \neq z$

$$\frac{f(w) - f(z)}{w - z} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k q_k(w) =: \tilde{g}(w) \,.$$

Da

$$\tilde{g}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k q_k(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k k z^{k-1} = g(z) \,,$$

genügt es zu zeigen, dass $\tilde{g}$ stetig ist in z. Nun gilt aber für alle $|w| < r$ und alle k

$$|c_k q_k(w)| \leq |c_k| k \rho^{k-1} \,, \quad \rho = \max\{|w|, |z|\} \,,$$

und aus dem Weierstraß-Kriterium für Funktionenreihen (Analysis 2) folgt wie im Reellen die gleichmäßige Konvergenz der Partialsummen von $\tilde{g}$ gegen $\tilde{g}$, also ist $\tilde{g}$ stetig in z. Der allgemeine Fall $a \neq 0$ wird darauf zurückgeführt, indem wir das eben Bewiesene auf

$$\tilde{f}(z) = f(z+a)$$

anwenden. $\square$

11 Das Kurvenintegral in $\mathbb{C}$

Sei $I = [a, b]$, $f : I \to \mathbb{C}$. Wir definieren

$$\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b (\operatorname{Re} f)(t)\, dt + i \int_a^b (\operatorname{Im} f)(t)\, dt\,. \tag{11.1}$$

Diese Definition macht Sinn, falls $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ Lebesgue-integrierbar sind. Für die hier behandelten Teile der Analysis im Komplexen ist es weitgehend ausreichend, nur stückweise stetige Funktionen zu betrachten. Dafür sind auch andere Integralbegriffe (etwa das Regelintegral, oder das Riemann-Integral) ausreichend.

Definition 11.1 (Kurvenintegral in $\mathbb{C}$)
Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ eine stückweise stetig differenzierbare Kurve, sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig. Wir definieren das (komplexe) Kurvenintegral von f entlang γ durch

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt\,. \tag{11.2}$$

□

Der Wert des Kurvenintegrals in (11.2) ist also eine komplexe Zahl.

Wie im Reellen zeigt man, dass sich das Kurvenintegral durch Umparametrisieren nicht ändert, das heißt,

$$\int_{\tilde{\gamma}} f(z)\, dz = \int_\gamma f(z)\, dz\,,$$

falls $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \psi$, $\psi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ stetig differenzierbar, monoton wachsend und bijektiv ist. Mit

$$C = \gamma([a, b])$$

können wir daher statt $\int_\gamma f(z)\, dz$ auch

$$\int_C f(z)\, dz$$

schreiben, wenn festliegt, in welcher Richtung C durchlaufen wird. (Ändern wir die Durchlaufrichtung, so kehrt sich das Vorzeichen des Kurvenintegrals um.)

Beispiel: Sei $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = tw + (1 - t)z$, die Verbindungsstrecke von z nach w. Dann gilt

$$\int_\gamma 1\, dz = \int_0^1 \gamma'(t)\, dt = \int_0^1 (w - z)\, dt = w - z\,. \tag{11.3}$$

Lemma 11.2 *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Sei $c \in U$ mit $K(c, r) \subset U$, $r > 0$. Dann gilt für $C = \partial B(c, r)$, durchlaufen im mathematisch positiven Sinn,*

$$\int_C \frac{1}{z - c}\, dz = 2\pi i\,, \tag{11.4}$$

$$\int_C (z - c)^n\, dz = 0\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,, n \neq -1\,. \tag{11.5}$$

Beweis: Wir definieren $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ durch

$$\gamma(t) = c + re^{it} .$$

Dann gilt für alle $n \in \mathbb{Z}$

$$\int_C (z-c)^n \, dz = \int_0^{2\pi} r^n e^{int} ire^{it} \, dt = ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} \, dt ,$$

woraus beide Behauptungen folgen. □

Lemma 11.3 *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ stetig, $\gamma : [a, b] \to U$ eine stückweise stetig differenzierbare Kurve. Dann gilt*

$$\left| \int_\gamma f(z) \, dz \right| \leq \|f\|_\infty L(\gamma) , \tag{11.6}$$

wobei

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| \, dt \tag{11.7}$$

die Länge der Kurve γ ist.

Beweis: Es ist

$$\left| \int_\gamma f(z) \, dz \right| = \left| \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) \, dt \right| \leq \|f\|_\infty \int_a^b |\gamma'(t)| \, dt .$$

□

Definition 11.4 (Stammfunktion)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$. Eine holomorphe Funktion $F : U \to \mathbb{C}$ heißt Stammfunktion von f in U, falls $F'(z) = f(z)$ gilt für alle $z \in U$. □

Lemma 11.5 *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ stetig, sei F eine Stammfunktion von f in U. Dann gilt*

$$\int_\gamma f(z) \, dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) \tag{11.8}$$

für jede stückweise stetig differenzierbare Kurve $\gamma : [a, b] \to U$. Insbesondere gilt

$$\int_\gamma f(z) \, dz = 0 \tag{11.9}$$

falls γ geschlossen ist (das heißt, es gilt $\gamma(b) = \gamma(a)$).

Beweis: Es gilt

$$\int_\gamma f(z) \, dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) \, dt = \int_a^b (F \circ \gamma)'(t) \, dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) .$$

□

Die Formel (11.5) in Lemma 11.2 für $n \neq -1$ ist ein Spezialfall von Lemma 11.5 mit

$$f(z) = (z-c)^n \,, \quad F(z) = \frac{1}{n+1}(z-c)^{n+1} \,.$$

Es hängt u.a. von der Form von U ab, ob zu einer gegebenen Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ eine Stammfunktion existiert. Aus Lemma 11.2 folgt beispielsweise, dass

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

in $U = \mathbb{C}\setminus\{0\}$ keine Stammfunktion hat. (In $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ist $F(t) = \ln(|t|)$ eine Stammfunktion von $f(t) = 1/t$.)

Wir erinnern: Ein $U \subset \mathbb{C}$ heißt sternförmig, falls ein Punkt $c \in U$ existiert, so dass für alle $z \in U$ die Verbindungsstrecke $[c, z]$ ganz in U liegt. Zu einem solchen c betrachten wir Dreiecke $\Delta(c)$ der Form

$$\Delta(c) = \operatorname{conv}\{c, z, w\} \,, \quad z, w \in U \,. \tag{11.10}$$

Satz 11.6 *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und sternförmig, sei $f : U \to \mathbb{C}$ stetig, es gelte*

$$\int_{\partial\Delta(c)} f(z)\, dz = 0 \tag{11.11}$$

für alle Dreiecke $\Delta(c)$ der Form (11.10), welche $\Delta(c) \subset U$ erfüllen. Dann hat f eine Stammfunktion in U.

Beweis: Für $z \in U$ definieren wir

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(\zeta)\, d\zeta \,, \tag{11.12}$$

wobei

$$\gamma_z : [0,1] \to U \,, \quad \gamma_z(t) = tz + (1-t)c$$

die Verbindungsstrecke von c nach z ist. Sei $r > 0$ so klein, dass $B(z,r) \subset U$, sei $w \in B(z,r)$ beliebig. Dann liegt das durch (11.10) definierte Dreieck $\Delta(c)$ ganz in U, und es gilt

$$0 = \int_{\partial\Delta(c)} f(\zeta)\, d\zeta = \int_{[c,z]} f(\zeta)\, d\zeta + \int_{[z,w]} f(\zeta)\, d\zeta + \int_{[w,c]} f(\zeta)\, d\zeta \,,$$

also

$$F(w) = F(z) + \int_{[z,w]} f(\zeta)\, d\zeta \,.$$

Für $w \in B(z,r)$, $w \neq z$ folgt mit (11.3)

$$\frac{F(w) - F(z)}{w - z} - f(z) = \frac{1}{w-z} \int_{[z,w]} f(\zeta)\, d\zeta - f(z) = \frac{1}{w-z} \int_{[z,w]} f(\zeta) - f(z)\, d\zeta \,,$$

also mit Lemma 11.3

$$\left| \frac{F(w) - F(z)}{w - z} - f(z) \right| \le \frac{1}{|w-z|} L([z,w]) \sup_{\zeta \in [z,w]} |f(\zeta) - f(z)| = \sup_{\zeta \in [z,w]} |f(\zeta) - f(z)| \,,$$

also

$$\sup_{\substack{w\in B(z,r)\\ w\neq z}} \left| \frac{F(w)-F(z)}{w-z} - f(z) \right| \le \sup_{w\in B(z,r)} |f(w)-f(z)|\,,$$

und aus der Stetigkeit von f folgt

$$\lim_{\substack{w\to z\\ w\neq z}} \left[\frac{F(w)-F(z)}{w-z} - f(z) \right] = 0\,,$$

also ist F differenzierbar in z und $F'(z) = f(z)$. Da $z \in U$ beliebig war, folgt die Behauptung. □

Satz 11.7 (Lemma von Goursat)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0 \tag{11.13}$$

für jedes Dreieck Δ mit $\Delta \subset U$.

Beweis: Sei $\Delta = \operatorname{conv}\{a_1, a_2, a_3\}$ ein Dreieck mit $\Delta \subset U$. Wir setzen $\Delta_0 = \Delta$ und zerlegen Δ_0 in 4 kongruente Dreiecke $D_1, \dots, D_4$, indem wir die drei Seitenmitten verbinden. Es gilt dann

$$\int_{\partial\Delta_0} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{4} \int_{\partial D_k} f(z)\,dz\,, \tag{11.14}$$

wenn wir die Ränder alle im mathematisch positiven Sinn durchlaufen. Wir setzen $\Delta_1 = D_k$, wobei wir k so wählen, dass

$$\left| \int_{\partial\Delta_0} f(z)\,dz \right| \le 4 \left| \int_{\partial\Delta_1} f(z)\,dz \right| \tag{11.15}$$

gilt. Indem wir diese Konstruktion wiederholen, erhalten wir eine Folge $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Dreiecken mit

$$\left| \int_{\partial\Delta_{n-1}} f(z)\,dz \right| \le 4 \left| \int_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz \right|\,. \tag{11.16}$$

Aufgrund der Konstruktion gilt offensichtlich

$$\operatorname{diam}(\Delta_n) = 2^{-n}\operatorname{diam}(\Delta)\,, \quad L(\partial\Delta_n) = 2^{-n}L(\partial\Delta)\,. \tag{11.17}$$

Da $\Delta_0 \supset \Delta_1 \supset \dots$ und alle Δ_n kompakt sind, folgt aus der endlichen Durchschnittseigenschaft kompakter Mengen, dass es ein $c \in U$ gibt mit

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n = \{c\}\,. \tag{11.18}$$

Wir definieren nun $g : U \to \mathbb{C}$ durch

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(c)}{z-c} - f'(c)\,, & z \neq c\,,\\ 0\,, & z = c\,. \end{cases}$$

Da f holomorph ist, ist g stetig in U, und es gilt

$$f(z) = f(c) + (z-c)f'(c) + (z-c)g(z)\,,$$

also für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz = \int_{\partial\Delta_n} f(c)\,dz + \int_{\partial\Delta_n} (z-c)f'(c)\,dz + \int_{\partial\Delta_n} (z-c)g(z)\,dz\,. \tag{11.19}$$

Die ersten beiden Integrale auf der rechten Seiten sind Null nach Lemma 11.5, da die Integranden (als Funktionen von z) Stammfunktionen besitzen. Aus Lemma 11.3 folgt

$$\left|\int_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz\right| \le L(\partial\Delta_n) \sup_{z\in\partial\Delta_n} |z-c||g(z)| \le (L(\partial\Delta_n))^2 \sup_{z\in\partial\Delta_n} |g(z)|\,, \tag{11.20}$$

da in jedem Dreieck D gilt $\operatorname{diam}(D) \le L(\partial D)$. Aus (11.16) und (11.17) folgt weiter

$$\left|\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz\right| \le 4^n \left|\int_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz\right| \le 4^n (L(\partial\Delta_n))^2 \sup_{z\in\partial\Delta_n} |g(z)| = (L(\partial\Delta))^2 \sup_{z\in\partial\Delta_n} |g(z)|\,. \tag{11.21}$$

Da g stetig ist und $g(c) = 0$, folgt

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{z\in\partial\Delta_n} |g(z)| = 0\,,$$

und damit aus (11.21)

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0\,.$$

□

Satz 11.8 (Integralsatz von Cauchy)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und sternförmig, sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann hat f eine Stammfunktion in U, und es gilt

$$\int_C f(z)\,dz = 0 \tag{11.22}$$

für jede geschlossene, stückweise stetig differenzierbare Kurve C in U.

Beweis: Nach Satz 11.7 gilt (11.22) für alle Kurven C der Form $C = \partial\Delta$, $\Delta \subset U$ Dreieck. Aus Satz 11.6 folgt, dass f in U eine Stammfunktion hat, und aus Lemma 11.5 folgt, dass (11.22) für jede geschlossene Kurve gilt. □

Satz 11.9 (Integralformel von Cauchy für Kreise)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei $K(c,r) \subset U$ mit $c \in U$, $r > 0$. Dann gilt für alle $z \in B = B(c,r)$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(w)}{w-z}\,dw\,. \tag{11.23}$$

Beweis: Sei $z \in B$ fest gewählt. Im ersten Schritt des Beweises zeigen wir, dass

$$\int_{\partial B(c,r)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw = \int_{\partial B(z,\varepsilon)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw \tag{11.24}$$

gilt für alle $\varepsilon > 0$ mit $B(z,\varepsilon) \subset B(c,r)$. Dies folgt aus Satz 11.8, angewendet auf die in $U \setminus \{z\}$ holomorphe Funktion $\tilde{f}$,

$$\tilde{f}(w) = \frac{f(w)}{w-z},$$

und die Kurven C_1 und C_2, welche in den sternförmigen Mengen $U_1 = B(c, r+\delta) \setminus L_1$ beziehungsweise $U_2 = B(c, r+\delta) \setminus L_2$ liegen (siehe Bild). Es gilt nämlich

$$\int_{\partial B(c,r)} \tilde{f}(w)\, dw = \int_{C_1} \tilde{f}(w)\, dw + \int_{C_2} \tilde{f}(w)\, dw + \int_{\partial B(z,\varepsilon)} \tilde{f}(w)\, dw,$$

und nach Satz 11.8 sind die Kurvenintegrale über C_1 und C_2 gleich Null. Im zweiten Schritt des Beweises zeigen wir, dass die rechte Seite in (11.24) gleich $2\pi i f(z)$ ist. Aus (11.24) folgt

$$\begin{aligned}\int_{\partial B(c,r)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw &= \int_{\partial B(z,\varepsilon)} \frac{f(z)}{w-z}\, dw + \int_{\partial B(z,\varepsilon)} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\, dw \\ &= 2\pi i f(z) + \int_{\partial B(z,\varepsilon)} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\, dw \end{aligned} \tag{11.25}$$

wegen Lemma 11.2. Die durch

$$g(w) = \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}, & w \neq z, \\ f'(z), & w = z, \end{cases}$$

definierte Funktion $g : U \to \mathbb{C}$ ist stetig, also auf der kompakten Menge $K(c,r)$ beschränkt, sei etwa $|g(w)| \leq M$. Es folgt aus Lemma 11.3

$$\left| \int_{\partial B(z,\varepsilon)} g(w)\, dw \right| \leq 2\pi\varepsilon M.$$

Da wegen (11.25) das Integral $\int_{\partial B(z,\varepsilon)} g(w)\, dw$ nicht von ε abhängt, folgt

$$\int_{\partial B(z,\varepsilon)} g(w)\, dw = 0,$$

und damit die Behauptung des Satzes. □

Wenden wir die Integralformel mit $z = c$ an, so erhalten wir unmittelbar den folgenden Satz.

Satz 11.10 (Mittelwerteigenschaft)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei $K(z,r) \subset U$ mit $z \in U$, $r > 0$. Dann gelten

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{it})\, dt, \tag{11.26}$$

sowie

$$|f(z)| \leq \max_{w \in \partial B(z,r)} |f(w)|. \tag{11.27}$$

Beweis: Aus (11.23) folgt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z,r)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z+re^{it})}{re^{it}} ire^{it}\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z+re^{it})\, dt\,,$$

und (11.27) folgt unmittelbar aus (11.26). □

Satz 11.11 (Entwicklungssatz von Cauchy-Taylor)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, sei $K(a,r) \subset U$ mit $a \in U$, $r > 0$. Dann gilt

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k\,, \quad c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(a,r)} \frac{f(w)}{(w-a)^{k+1}}\, dw\,, \tag{11.28}$$

für alle $z \in B(a,r)$, und dort konvergiert die Potenzreihe absolut.

Beweis: Wir betrachten zunächst den Fall $a = 0$. Sei $z \in U$ mit $|z| < r$ fest gewählt. Die Integralformel von Cauchy besagt, dass

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r} \frac{f(w)}{w-z}\, dw\,. \tag{11.29}$$

Es gilt für alle w mit $|w| = r$

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w} \frac{1}{1-\frac{z}{w}} = \frac{1}{w} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{w}\right)^k\,,$$

also

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r} \frac{f(w)}{w} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{w}\right)^k dw\,. \tag{11.30}$$

Für $g_k : \partial B(0,r) \to \mathbb{C}$,

$$g_k(w) = \frac{f(w)}{w} \left(\frac{z}{w}\right)^k\,,$$

gilt

$$\|g_k\|_\infty \le \frac{\|f\|_\infty}{r} q^k\,, \quad q = \frac{|z|}{r} < 1\,,$$

also sind die Partialsummen $s_n = \sum_{k=0}^n g_k$ nach dem Weierstraß-Kriterium gleichmäßig gegen eine stetige Funktion konvergent, und wir können die Summe mit dem Integral vertauschen, also

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{|w|=r} \frac{f(w)}{w} \left(\frac{z}{w}\right)^k dw = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r} \frac{f(w)}{w^{k+1}}\, dw \cdot z^k\,.$$

Der Fall eines allgemeinen a wird durch Translation auf den obigen Fall zurückgeführt, indem wir wieder $\tilde{f}(z) = f(z-a)$ betrachten. □

Folgerung 11.12 *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist f in jedem Punkt $z \in U$ beliebig oft komplex differenzierbar.*

Beweis: Nach Satz 11.11 läßt sich f in einer (hinreichend kleinen) Umgebung jedes Punktes $z \in U$ in eine Potenzreihe entwickeln. Potenzreihen sind innerhalb ihres Konvergenzkreises beliebig oft differenzierbar, wie aus Satz 10.5 folgt. □

Folgerung 11.13 *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei $K(a,r) \subset U$ mit $a \in U$, $r > 0$. Dann gilt für die Koeffizienten c_k der Potenzreihenentwicklung (11.28) von f um a die Abschätzung*

$$|c_k| \le \frac{M(r)}{r^k}, \quad M(r) = \max_{|z-a|=r} |f(z)|. \tag{11.31}$$

Beweis: Nach Satz 11.11 gilt

$$|c_k| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\partial B(a,r)} \frac{f(w)}{(w-a)^{k+1}} \, dw \right| \le \frac{1}{2\pi} 2\pi r \frac{M(r)}{r^{k+1}} = \frac{M(r)}{r^k}.$$

□

Folgerung 11.14 (Satz von Liouville)
Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph. Ist f auf $\mathbb{C}$ beschränkt, so ist f konstant.

Beweis: Sei $a \in \mathbb{C}$ beliebig. Mit $\|f\|_\infty = \sup_{z\in\mathbb{C}} |f(z)|$ folgt aus Folgerung 11.13, dass für die Potenzreihendarstellung

$$f(z) = \sum_{k=0} c_k (z-a)^k$$

gilt, dass

$$|c_k| \le \frac{\|f\|_\infty}{r^k}$$

für alle k und alle $r > 0$, also ist $c_k = 0$ für alle $k \ge 1$ und damit $f(z) = c_0$ konstant in allen $K(a,r)$ und damit in ganz $\mathbb{C}$. □

Umgekehrt bedeutet der Satz von Liouville, dass jede nichtkonstante Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, welche auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph ist, unbeschränkt sein muss.

Satz 11.15 (Satz von Morera)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ stetig, es gelte

$$\int_{\partial\Delta} f(z) \, dz = 0 \tag{11.32}$$

für alle Dreiecke Δ mit $\Delta \subset U$. Dann ist f holomorph in U.

Beweis: Sei $z \in U$ beliebig. Wähle $r > 0$ mit $B(z,r) \subset U$. Nach Satz 11.6 hat f eine Stammfunktion F in $B(z,r)$. F ist holomorph und nach Folgerung 11.12 zweimal differenzierbar in $B(z,r)$, also ist $f = F'$ differenzierbar in z. Da z beliebig war, ist f holomorph in U. □

Zusammengenommen folgt aus dem Integralsatz von Cauchy und dem Satz von Morera, dass in einer offenen sternförmigen Menge die Holomorphie von f äquivalent ist zum Verschwinden aller Integrale über geschlossenen Kurven.

Satz 11.16 *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von holomorphen Funktionen $f_n : U \to \mathbb{C}$, welche kompakt gegen eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ konvergiert, das heißt, $f_n|K \to f|K$ gleichmäßig für jede kompakte Teilmenge $K \subset U$. Dann ist f holomorph in U.*

Beweis: Sei Δ ein beliebiges Dreieck mit $\Delta \subset U$. Dann gilt $f_n|\Delta \to f|\Delta$ gleichmäßig, da Δ kompakt ist, also ist $f|\Delta$ stetig. Da jedes $z \in U$ innerer Punkt eines solchen Dreiecks ist, ist f auf ganz U stetig. Aus dem Integralsatz von Cauchy, angewendet auf eine offene konvexe Umgebung von Δ, folgt

$$\int_{\partial\Delta} f_n(z)\,dz = 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus der gleichmäßigen Konvergenz $f_n \to f$ auf $\partial\Delta$ folgt

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = \lim_{n\to\infty} \int_{\partial\Delta} f_n(z)\,dz = 0\,.$$

Also ist nach Satz 11.15 f holomorph in U. □

Die folgenden Ausführungen über das Schwarzsche Spiegelungsprinzip wurden in der Vorlesung nicht behandelt.

Wir betrachten nun folgende Situation. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, es gelte

$$\tau(U) = U\,, \tag{11.33}$$

wobei $\tau(z) = \overline{z}$ die komplexe Konjugation bezeichnet. Wir setzen

$$U_+ = U \cap \{z : z \in \mathbb{C},\, \operatorname{Im} z > 0\}\,, \tag{11.34}$$

$$U_- = U \cap \{z : z \in \mathbb{C},\, \operatorname{Im} z < 0\}\,, \tag{11.35}$$

$$U_0 = U \cap \mathbb{R}\,. \tag{11.36}$$

Zu einer gegebenen Funktion $f : U_+ \cup U_0 \to \mathbb{C}$ betrachten wir die durch $\tilde{f}|(U_+ \cup U_0) = f$ und

$$\tilde{f}(z) = \overline{f(\overline{z})}\,, \quad z \in U_-\,, \tag{11.37}$$

definierte Fortsetzung $\tilde{f} : U \to \mathbb{C}$ von f.

Satz 11.17 (Schwarzsches Spiegelungsprinzip)
Seien U, f und $\tilde{f}$ wie in (11.33)–(11.37) beschrieben. Sei f stetig auf $U_+ \cup U_0$, holomorph auf U_+, und es gelte $f(U_0) \subset \mathbb{R}$. Dann ist $\tilde{f}$ auf U holomorph.

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass $\tilde{f}$ in allen Punkten $z \in U$ stetig ist. Für $z \in U_+$ und $z \in U_-$ folgt dies direkt aus der Definition. Sei nun $z \in U_0$, sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in U mit $z_n \to z$. Ist $z_n \in U_+ \cup U_0$ für alle n, so gilt $\tilde{f}(z_n) = f(z_n) \to f(z) = \tilde{f}(z)$ nach Voraussetzung; ist $z_n \in U_-$ für alle n, so gilt

$$\tilde{f}(z_n) = \overline{f(\overline{z_n})} \to \overline{f(\overline{z})} = f(z)\,,$$

da $f(U_0) \subset \mathbb{R}$. Verläuft die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sowohl in U_+ als auch in U_-, so zerlegen wir sie in die beiden entsprechenden Teilfolgen. Nun zur Differenzierbarkeit von $\tilde{f}$. Auf U_-

ist $\tilde{f} = \tau \circ f \circ \tau$ reell differenzierbar. Sei $z \in U_-$. Ist $f'(\overline{z}) = a + ib$, so folgt aus der Kettenregel

$$J_{\tilde{f}}(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} ,$$

also ist $\tilde{f}$ nach Lemma 10.3 differenzierbar in z und damit (da z beliebig war) holomorph in U_-. Sei nun $z \in U_0$, sei $r > 0$ so gewählt, dass $B(z,r) \subset U$. Sei $\Delta \subset B(z,r)$ ein beliebiges Dreieck. Gilt $\Delta \subset U_+$ oder $\Delta \subset U_-$, so folgt

$$\int_{\partial\Delta} \tilde{f}(z)\, dz = 0 \tag{11.38}$$

aus dem Integralsatz von Cauchy, angewendet auf $U_+ \cap B(z,r)$ beziehungsweise $U_- \cap B(z,r)$. Andernfalls gilt $\Delta \cap U_0 \neq \emptyset$, und die reelle Achse teilt Δ in zwei Teile (oder eine Seite oder Ecke von Δ liegt auf der reellen Achse). Es folgt

$$\int_{\partial\Delta} \tilde{f}(z)\, dz = \int_{C_+} \tilde{f}(z)\, dz + \int_{C_-} \tilde{f}(z)\, dz \,, \tag{11.39}$$

wobei C_+ den Rand von $\Delta \cap U_+$ bezeichnet. (Die Menge $\Delta \cap U_+$ ist entweder ein Dreieck, oder ein Viereck, oder sie ist leer.) Sei $\varepsilon > 0$ hinreichend klein, sei $C_+(\varepsilon)$ der Rand von $\Delta \cap \{z : z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} z > \varepsilon\}$. Dann ist $C_+(\varepsilon)$ eine Kurve in U_+, und wie oben folgt

$$\int_{C_+(\varepsilon)} \tilde{f}(z)\, dz = 0 \,. \tag{11.40}$$

Aus der Stetigkeit von $\tilde{f}$ folgt (siehe Bild)

$$\int_{C_+} \tilde{f}(z)\, dz = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{C_+(\varepsilon)} \tilde{f}(z)\, dz = 0 \,. \tag{11.41}$$

Analog beweist man $\int_{C_-} \tilde{f}(z)\, dz = 0$. Damit ist die rechte Seite in (11.39) gleich Null, also gilt (11.38) für alle Dreiecke in $B(z,r)$. Aus Satz 11.15 folgt nun, dass f in $B(z,r)$ holomorph ist. □

12 Zusammenhang

Definition 12.1 (Zusammenhang, Wegzusammenhang)
Sei (X, d) metrischer Raum. X heißt zusammenhängend, falls es außer $\emptyset$ und X keine Teilmenge von X gibt, die sowohl offen als auch abgeschlossen ist. X heißt wegzusammenhängend, falls es für alle $x, y \in X$ eine stetige Funktion $r : [0, 1] \to X$ gibt mit $r(0) = x$, $r(1) = y$. Ein solches r heißt Weg von x nach y. □

Offensichtlich ist $\mathbb{R}^n$ wegzusammenhängend für alle $n \in \mathbb{N}$, und damit auch $\mathbb{C}$.

Lemma 12.2 *Sei (X, d) metrischer Raum. Ist X wegzusammenhängend, so ist X auch zusammenhängend.*

Beweis: Sei X wegzusammenhängend. Wir nehmen an, X ist nicht zusammenhängend. Sei $U \subset X$ offen und abgeschlossen mit $U \neq \emptyset$, $U \neq X$. Seien $x, y \in X$ mit $x \in U$, $y \notin U$, sei $r : [0, 1] \to X$ ein Weg von x nach y. Wir definieren

$$J = \{t : t \in [0, 1), r([0, t]) \subset U\}, \quad T = \sup J .$$

Es ist $0 \in J$, $1 \notin J$, und es gilt entweder $J = [0, T]$ oder $J = [0, T)$. Ist $J = [0, T]$, so ist $r(T) \in U$, $T < 1$, und es gibt ein $\delta > 0$ mit $r([T, T + \delta)) \subset U$ (da r stetig und U offen), also gilt $\sup J \geq T + \delta$, ein Widerspruch. Ist $J = [0, T)$, so ist $r(T) \notin U$, $T > 0$, und es gibt ein $\delta > 0$ mit $r((T - \delta, T]) \subset X \setminus U$ (da r stetig und $X \setminus U$ offen), also gilt $\sup J \leq T - \delta$, ebenfalls ein Widerspruch. □

Für eine Teilmenge X von $\mathbb{R}$ (aufgefasst als metrischer Raum, mit der von $|\cdot|$ induzierten Metrik) gilt (Übung)

$$X \text{ zusammenhängend} \quad \Leftrightarrow \quad X \text{ wegzusammenhängend} \quad \Leftrightarrow \quad X \text{ Intervall} \tag{12.1}$$

Satz 12.3 *Seien (X, d_1), (Y, d_2) metrische Räume, sei $f : X \to Y$ stetig und surjektiv. Dann gilt:*

$$X \text{ zusammenhängend} \quad \Rightarrow \quad Y \text{ zusammenhängend} \tag{12.2}$$

$$X \text{ wegzusammenhängend} \quad \Rightarrow \quad Y \text{ wegzusammenhängend} \tag{12.3}$$

Beweis: Zu (12.2). Ist Y nicht zusammenhängend, so gibt es $V \subset Y$ mit $V \neq \emptyset$, $V \neq Y$, V ist offen und abgeschlossen in Y. Dann ist auch $U = f^{-1}(V)$ offen und abgeschlossen in X, und da f surjektiv ist, gilt $U \neq \emptyset$ und $U \neq X$, also ist X nicht zusammenhängend.
Zu (12.3). Seien $y_1, y_2 \in Y$, dann wählen wir $x_1, x_2 \in X$ mit $f(x_i) = y_i$. Ist $r : [0, 1] \to X$ ein Weg von x_1 nach x_2, so ist $f \circ r : [0, 1] \to Y$ ein Weg von y_1 nach y_2. □

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Wenden wir Satz 12.3 an mit $X = [a, b]$, $Y = f([a, b])$, so ergibt sich wegen (12.1), dass $f([a, b])$ ebenfalls ein Intervall ist. Satz 12.3 verallgemeinert also den Zwischenwertsatz aus Analysis 1.

Lemma 12.4 *Sei (X,d) metrischer Raum. Dann wird durch*

$$x \sim y \qquad \Leftrightarrow \qquad \text{es gibt einen Weg von } x \text{ nach } y \tag{12.4}$$

eine Äquivalenzrelation auf X definiert. Die zugehörigen Äquivalenzklassen heißen Wegkomponenten von X.

Beweis: Ist $r : [0,1] \to X$ ein Weg von x nach y, so definiert $\tilde{r}(t) = r(1-t)$ einen Weg von y nach x. Sind $r, \tilde{r} : [0,1] \to X$ Wege von x nach y beziehungsweise von y nach z, so ist $\overline{r} : [0,1] \to X$,

$$\overline{r}(t) = \begin{cases} r(2t)\,, & 0 \le t \le \frac{1}{2}\,, \\ \tilde{r}(2t-1)\,, & \frac{1}{2} \le t \le 1\,, \end{cases}$$

ein Weg von x nach z. $\square$

Ein metrischer Raum (X,d) ist also wegzusammenhängend genau dann, wenn X nur eine Wegkomponente besitzt (nämlich X selbst).

Satz 12.5 *Eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist genau dann zusammenhängend, wenn sie wegzusammenhängend ist.*

Beweis: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wegen Lemma 12.2 braucht nur die Implikation

$$U \text{ zusammenhängend} \qquad \Rightarrow \qquad U \text{ wegzusammenhängend} \tag{12.5}$$

bewiesen zu werden. Zunächst gilt, dass jede Wegkomponente W von U offen ist in $\mathbb{R}^n$. (Ist $x \in W$, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B(x,\varepsilon) \subset U$, und da für $y \in B(x,\varepsilon)$ auch $[x,y] \subset B(x,\varepsilon)$ gilt, folgt $B(x,\varepsilon) \subset W$.) Sei nun U nicht wegzusammenhängend, sei $W \subset U$ eine Wegkomponente von U mit $W \neq U$. Da $U \setminus W$ die Vereinigung aller von W verschiedenen Wegkomponenten von U ist, ist $U \setminus W$ offen in $\mathbb{R}^n$. Die Mengen W und $U \setminus W$ sind auch offen in U, damit ist W abgeschlossen in U, und $W \neq \emptyset$, $W \neq U$. Also ist U nicht zusammenhängend. $\square$

Definition 12.6 (Gebiet)
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$. U heißt Gebiet, falls U offen und zusammenhängend ist.

Satz 12.7 *Sei $U \subset \mathbb{C}$ Gebiet, sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f' = 0$ in U. Dann ist f in U konstant.*

Beweis: Sei $a \in U$ beliebig. Nach Satz 11.11 hat f in einer hinreichend kleinen Umgebung $B(a,\varepsilon)$ eine Potenzreihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k\,.$$

In $B(a,\varepsilon)$ gilt $f^{(k)} = 0$ für alle $k \ge 1$, also auch $c_k = f^{(k)}(a)/k! = 0$ für alle $k \ge 1$, also $f(z) = c_0 = f(a)$ für alle $z \in B(a,\varepsilon)$. Sei $c \in U$ fest gewählt, sei

$$A = \{z : \, z \in U,\, f(z) = f(c)\}\,.$$

Nach dem eben Bewiesenen ist A offen in U. Wegen $A = f^{-1}(\{f(c)\})$ ist A abgeschlossen in U. Da U zusammenhängend ist und $A \neq \emptyset$, ist $A = U$. $\square$

Satz 12.8 (Inverse Funktionen)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, $c \in U$. Ist $f'(c) \neq 0$, so gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass für $B = B(c, \varepsilon)$ gilt:

(i) $f : B \to f(B)$ ist bijektiv, $f(B)$ ist offen in $\mathbb{C}$,

(ii) $f^{-1} : f(B) \to B$ ist holomorph.

Beweis: Da f nach Folgerung 11.12 beliebig oft differenzierbar ist, ist insbesondere $f' : U \to \mathbb{C}$ stetig. Wegen $f'(c) \neq 0$ ist $J_f(c) \in \mathbb{R}^{(2,2)}$ invertierbar; ist $f'(c) = a + ib$, so ist

$$J_f(c) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad J_f(c)^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}. \tag{12.6}$$

Aus dem Satz über inverse Funktionen (Satz 5.4) folgt die Existenz von $\varepsilon > 0$, so dass (i) gilt, f^{-1} in $f(B)$ stetig reell differenzierbar ist und

$$J_{f^{-1}}(f(z)) = J_f(z)^{-1}, \quad \text{für alle } z \in B.$$

Da (12.6) auch gilt, wenn wir c durch $z \in B(c, \varepsilon)$ ersetzen (und entsprechend $f'(z) = a+ib$ zerlegen), ist f^{-1} in $f(z)$ (komplex) differenzierbar für alle $z \in B$ nach Lemma 10.3, also folgt (ii). □

Definition 12.9 (Biholomorphe Funktion)
Seien $U, V \subset \mathbb{C}$ offen. Eine auf U holomorphe Funktion $f : U \to V$ heißt biholomorph, wenn f bijektiv und f^{-1} auf V holomorph ist. □

Satz 12.8 besagt also, dass holomorphe Funktionen f lokal biholomorph sind in Punkten c mit $f'(c) \neq 0$. Das einfachste Beispiel einer nicht biholomorphen, nicht konstanten Funktion ist

$$f(z) = z^m, \quad m \geq 2. \tag{12.7}$$

Für

$$w = re^{i\varphi}, \quad z = \rho e^{i\psi},$$

mit $w \neq 0$ gilt

$$f(z) = z^m = w \tag{12.8}$$

genau dann, wenn

$$\rho^m = r, \quad e^{im\psi} = e^{i\varphi},$$

und letzteres gilt genau dann, wenn

$$m\psi - \varphi = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Es gibt also genau m verschiedene Zahlen

$$z_k = \sqrt[m]{r} \exp\left(i\frac{\varphi}{m} + 2\pi i \frac{k}{m}\right), \quad k = 0, \dots, m-1, \tag{12.9}$$

welche (12.8) erfüllen. Für $w = 1$ ergeben sich die sogenannten m-ten Einheitswurzeln

$$z_k = \exp\left(2\pi i \frac{k}{m}\right), \quad k = 0, \dots, m-1. \tag{12.10}$$

Definition 12.10 (Ordnung einer Nullstelle)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, $a \in U$ mit $f(a) = 0$. Die Zahl

$$m = \min\{k : \ f^{(k)}(a) \neq 0\} \tag{12.11}$$

heißt die Ordnung der Nullstelle a. (Sind alle Ableitungen in a gleich Null, so sprechen wir von einer Nullstelle unendlicher Ordnung.) □

Die Funktion $f(z) = z^m$ hat offensichtlich in 0 eine Nullstelle der Ordnung m.

Satz 12.11 *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, $a \in U$ eine Nullstelle von f der Ordnung $m \in \mathbb{N}$. Dann gibt es eine Umgebung $B(a, \varepsilon) \subset U$ von a und eine holomorphe Funktion $h : B(a, \varepsilon) \to \mathbb{C}$ mit $h(a) = 0$, $h'(a) \neq 0$ und*

$$f(z) = h(z)^m \,, \quad z \in B(a, \varepsilon) \,, \tag{12.12}$$

und

$$f(z) \neq 0 \,, \quad \textit{für alle } z \in B(a, \varepsilon), z \neq a. \tag{12.13}$$

Beweis: f läßt sich in einer hinreichend kleinen Umgebung V von a in eine Potenzreihe entwickeln, also (da $f^{(k)}(a) = 0$ für $k < m$)

$$f(z) = (z-a)^m g(z) \,, \quad g(z) = c_m + \sum_{k=m+1}^{\infty} c_k (z-a)^{k-m} \,, \tag{12.14}$$

und

$$g(a) = c_m \neq 0 \tag{12.15}$$

nach Voraussetzung. Da auch die Potenzreihe für g in V konvergiert, ist g in V holomorph. Sei $c \in \mathbb{C}$ mit

$$p(c) = g(a) \,, \quad \text{wobei } p(z) = z^m \,.$$

(Es gibt m verschiedene Zahlen c mit dieser Eigenschaft.) Dann ist $c \neq 0$, $p'(c) = mc^{m-1} \neq 0$, also gibt es nach Satz 12.8 ein $\delta > 0$, so dass p auf $B(c, \delta)$ biholomorph ist. Wähle nun $\varepsilon > 0$ mit

$$B(a, \varepsilon) \subset V \,, \quad 0 \notin g(B(a, \varepsilon)) \subset p(B(c, \delta)) \,,$$

und definiere (mit $p^{-1} := (p|B(c, \delta))^{-1}$)

$$h(z) = (z-a) p^{-1}(g(z)) \,, \quad z \in B(a, \varepsilon) \,. \tag{12.16}$$

Dann ist h holomorph auf $B(a, \varepsilon)$, und

$$h(z)^m = (z-a)^m (p^{-1}(g(z)))^m = (z-a)^m g(z) = f(z) \,.$$

Aus (12.16) folgt $h(a) = 0$ und $h'(a) = p^{-1}(g(a)) = c \neq 0$. □

Die Aussage (12.13) bedeutet: Jede Nullstelle a endlicher Ordnung einer holomorphen Funktion ist isoliert, das heißt, in einer hinreichend kleinen Umgebung von a liegen keine weiteren Nullstellen von f.

Satz 12.12 (Identitätssatz)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ Gebiet, seien $f, g : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann sind äquivalent:

(i) Es gilt $f = g$ auf U.

(ii) Die Menge $\{f = g\}$ hat einen Häufungspunkt in U.

(iii) Es gibt ein $a \in U$ mit $f^{(k)}(a) = g^{(k)}(a)$ für alle $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Beweis: "(i)⇒(ii)" ist klar.
"(ii)⇒(iii)": Sei $a \in U$ Häufungspunkt von $\{f = g\}$. Da $\{f = g\}$ abgeschlossen ist in U, ist $a \in \{f = g\}$. Die Funktion $w = f - g$ ist holomorph in U, und $w(a) = 0$. Da nach Voraussetzung in jeder Umgebung von a eine weitere Nullstelle von w liegt, kann a nach Satz 12.11 keine endliche Ordnung haben, also

$$0 = w^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) - g^{(k)}(a)$$

für alle $k \in \mathbb{N}$.
"(iii)⇒(i)": Wir definieren

$$A = \{z : z \in U, \, f^{(k)}(z) = g^{(k)}(z) \text{ für alle } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} = \bigcap_{k=0}^{\infty} \{f^{(k)} = g^{(k)}\} . \qquad (12.17)$$

Dann ist A abgeschlossen in U als Durchschnitt abgeschlossener Mengen, und nichtleer nach Voraussetzung. A ist außerdem offen in U: Sei $a \in A$, $w = f - g$, dann gilt

$$w(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k = 0$$

in einer hinreichend kleinen Umgebung V von a, also auch $w^{(k)}(z) = 0$ für alle $z \in V$ und alle $k \in \mathbb{N}$. Da U zusammenhängend ist, folgt $A = U$ und damit $f = g$ in U. □

Eine holomorphe Funktion f ist also bereits dann eindeutig bestimmt, wenn wir ihre Werte $f(z_n)$ kennen für irgendeine konvergente Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die aus unendlich vielen verschiedenen Folgengliedern besteht.

Folgerung 12.13 *Sei I Intervall in $\mathbb{R}$, sei U Gebiet in $\mathbb{C}$ mit $I \subset U$. Dann gibt es zu jeder Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ höchstens eine holomorphe Fortsetzung $\tilde{f} : U \to \mathbb{C}$.* □

Folgerung 12.14 *Sei $U \subset \mathbb{C}$ Gebiet, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, sei $a \in U$ eine Nullstelle unendlicher Ordnung von f. Dann ist $f = 0$ in U.*

Beweis: Wir setzen $g = 0$ in Satz 12.12. □

Satz 12.15 *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, sei $a \in U$ eine Nullstelle von f der Ordnung m. Dann gibt es ein $\delta > 0$ und eine offene Umgebung V von a mit $V \subset U$, so dass gilt:*

$$f(V) = B(0, \delta) , \qquad (12.18)$$

jedes $w \in B(0, \delta)$ mit $w \neq 0$ hat genau m Urbilder unter f in V, und a ist die einzige Nullstelle von f in V.

Beweis: Wir setzen

$$p(z) = z^m .$$

Im Spezialfall $a = 0$, $f = p$, gelten die Aussagen des Satzes für alle $\delta > 0$ mit

$$V = B(0, \sqrt[m]{\delta}) .$$

Zum Beweis des allgemeinen Falls betrachten wir eine Funktion $h : B(a,\varepsilon) \to \mathbb{C}$ mit den Eigenschaften aus Satz 12.11, wobei wir $\varepsilon > 0$ so klein wählen, dass h auf $B(a,\varepsilon)$ biholomorph und $h(B(a,\varepsilon))$ offen ist. (Das ist möglich nach Satz 12.8, da $h'(a) \neq 0$.) Wir wählen $\delta > 0$ so, dass

$$B(0, \sqrt[m]{\delta}) \subset h(B(a,\varepsilon)) ,$$

und setzen

$$V = h^{-1}(B(0, \sqrt[m]{\delta})) .$$

Wegen $f(z) = h(z)^m$ ist $f = p \circ h$ auf V, und da h auf V bijektiv ist, folgen alle Aussagen für f aus den entsprechenden Aussagen für p. □

Definition 12.16 (Offene Abbildung)
Seien (X, d_1), (Y, d_2) metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt offen, falls für alle $W \subset X$ gilt

$$W \text{ offen} \qquad \Rightarrow \qquad f(W) \text{ offen.} \tag{12.19}$$

□

Satz 12.17 *Sei $U \subset \mathbb{C}$ Gebiet, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant. Dann ist f offen, und $f(U)$ ist ebenfalls ein Gebiet.*

Beweis: Sei W offen in U, sei $c \in f(W)$ beliebig, $c = f(a)$, $a \in W$. Wir betrachten $g : U \to \mathbb{C}$,

$$g(z) = f(z) - c .$$

Dann ist a eine Nullstelle endlicher Ordnung von g. (Andernfalls wäre $g = 0$ und damit f konstant nach Folgerung 12.14.) Wir wenden Satz 12.15 an auf $g|W : W \to \mathbb{C}$. Also gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$B(0,\delta) \subset g(W) ,$$

also

$$c \in c + B(0,\delta) \subset c + g(W) = f(W) ,$$

also $c \in \operatorname{int}(f(W))$. Da c beliebig war, ist $f(W)$ offen. Aus Satz 12.3 folgt, dass $f(U)$ zusammenhängend ist, also ist $f(U)$ Gebiet. □

Satz 12.18 (Maximumprinzip)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ Gebiet, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, es gebe ein $a \in U$ mit

$$|f(a)| = \max_{z \in U} |f(z)| . \tag{12.20}$$

Dann ist f konstant.

Beweis: Ist f nicht konstant, so ist $f(U)$ offen nach Satz 12.17, also gibt es zu jedem $a \in U$ ein $\delta > 0$ mit

$$f(a) \subset B(f(a), \delta) \subset f(U)\,,$$

also kann (12.20) nicht gelten. □

Folgerung 12.19 *Sei $U \subset \mathbb{C}$ beschränktes Gebiet, sei $f : \overline{U} \to \mathbb{C}$ stetig in $\overline{U}$ und holomorph in U. Dann gilt*

$$\sup_{z \in U} |f(z)| = \max_{z \in \partial U} |f(z)|\,. \tag{12.21}$$

Beweis: Auf der kompakten Menge $\overline{U}$ hat $|f|$ ein Maximum, welches wegen Satz 12.18 nur dann in U liegen kann, wenn f konstant ist. □

13 Isolierte Singularitäten, Laurentreihen

Notation 13.1 (Punktierte Kreisscheibe)
Sei $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$. Die Menge

$$B^0(a,r) = B(a,r) \setminus \{a\} \tag{13.1}$$

heißt die punktierte Kreisscheibe um a mit Radius r. □

Definition 13.2 (Isolierte Singularität)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Ist $a \in \mathbb{C}$ mit $a \notin U$, aber $B^0(a,r) \subset U$ für ein $r > 0$, so heißt a eine isolierte Singularität von f. □

Ein solches a ist ein isolierter Punkt des Komplements $\mathbb{C} \setminus U$. Wir interessieren uns für das Verhalten einer holomorphen Funktion in der Nähe eines solchen Punktes, welcher ein Loch im Definitionsgebiet von f repräsentiert. Zunächst ist klar, dass in der Situation von Definition 13.2 die Menge $U \cup \{a\}$ ebenfalls offen ist.

Satz 13.3 (Fortsetzungssatz von Riemann, hebbare Singularität)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, a eine isolierte Singularität von f. Dann sind äquivalent:

(i) f ist holomorph auf $U \cup \{a\}$ fortsetzbar (das heißt, es gibt eine holomorphe Funktion $\tilde{f} : U \cup \{a\} \to \mathbb{C}$ mit $\tilde{f}|U = f$).

(ii) f ist stetig auf $U \cup \{a\}$ fortsetzbar.

(iii) Es gibt ein $r > 0$, so daß f auf $B^0(a,r)$ beschränkt ist.

(iv) Es gilt

$$\lim_{\substack{z \to a \\ z \neq a}} (z-a) f(z) = 0\,. \tag{13.2}$$

In diesem Fall heißt a eine hebbare Singularität von f.

Beweis: Die Implikationen "(i)⇒(ii)⇒(iii)⇒(iv)" sind offensichtlich. Wir zeigen die Implikation "(iv)⇒(i)". Seien $g, h : U \cup \{a\} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$g(z) = \begin{cases} (z-a)f(z)\,, & z \neq a\,, \\ 0\,, & z = a\,, \end{cases}$$
$$h(z) = (z-a)g(z)\,.$$

Wegen (13.2) ist g stetig in a. Wegen

$$h(z) = h(a) + (z-a)g(z)$$

ist h differenzierbar in a, also holomorph in $U \cup \{a\}$. Also hat h in einer hinreichend kleinen Umgebung $B(a,\delta)$ von a eine Potenzreihenentwicklung der Form (da $h(a) = 0$, $h'(a) = g(a) = 0$)

$$h(z) = \sum_{k=2}^{\infty} c_k (z-a)^k = (z-a)^2 \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+2} (z-a)^k\,.$$

Da außerdem gilt $h(z) = (z-a)^2 f(z)$ für $z \neq a$, folgt für alle $z \in B^0(a,\delta)$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+2}(z-a)^k \,,$$

also ist die durch $\tilde{f}|U = f$ und $\tilde{f}(a) = c_2$ definierte Funktion die gesuchte holomorphe Fortsetzung von f auf $U \cup \{a\}$. $\square$

Definition 13.4 (Pol, wesentliche Singularität)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, a eine isolierte Singularität von f, welche nicht hebbar ist. a heißt ein Pol von f, falls es ein $m \in \mathbb{N}$ gibt, so dass a eine hebbare Singularität der durch

$$g(z) = (z-a)^m f(z)$$

definierten holomorphen Funktion ist. Die kleinste Zahl m mit dieser Eigenschaft heißt die Ordnung des Pols a von f. Ist a kein Pol von f, so heißt a eine wesentliche Singularität von f. $\square$

Die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^m}$$

hat in a einen Pol der Ordnung m. Die Funktion

$$f(z) = \exp\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{-k}}{k!}$$

hat in 0 eine wesentliche Singularität nach Satz 13.3, da $z^m f(z)$ für alle $m \in \mathbb{N}$ in jeder Umgebung von 0 unbeschränkt ist.

Lemma 13.5 *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, sei $a \in \mathbb{C}$, sei der Kreisring*

$$A = \{z : z \in \mathbb{C},\, r \le |z-a| \le R\}\,, \quad 0 < r < R\,, \tag{13.3}$$

eine Teilmenge von U. Dann gilt

$$\int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-a}\, dz = \int_{|z-a|=R} \frac{f(z)}{z-a}\, dz\,. \tag{13.4}$$

Beweis: Wir definieren für $s \in [r,R]$

$$J(s) = \int_{\gamma_s} \frac{f(z)}{z-a}\, dz\,, \quad \gamma_s = \{z : \, |z-a| = s\}\,.$$

Dann gilt

$$J(s) = \int_0^{2\pi} \frac{f(a+se^{it})}{a+se^{it}-a} ise^{it}\, dt = \int_0^{2\pi} if(a+se^{it})\, dt\,,$$

also

$$J'(s) = \int_0^{2\pi} f'(a+se^{it}) ie^{it}\, dt = \frac{1}{s}\int_{\gamma_s} f'(z)\, dz = 0\,,$$

da γ_s geschlossen ist und f' in U eine Stammfunktion (nämlich f) besitzt. Also ist J konstant in $[r,R]$ und damit $J(r) = J(R)$. $\square$

Folgerung 13.6 (Satz von Cauchy für Kreisringe)
Unter den Voraussetzungen von Lemma 13.5 gilt außerdem

$$\int_{|z-a|=r} f(z)\,dz = \int_{|z-a|=R} f(z)\,dz\,. \tag{13.5}$$

Beweis: Wir wenden Lemma 13.5 an auf die durch

$$g(z) = (z-a)f(z)$$

definierte holomorphe Funktion $g : U \to \mathbb{C}$. □

Ist a eine isolierte Singularität einer holomorphen Funktion $f : U \to \mathbb{C}$, so hat f eine Potenzreihenentwicklung in der Nähe von a,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k$$

genau dann, wenn a hebbar ist (das heißt, gar keine "echte" Singularität ist). Ist a eine nicht hebbare Singularität, so läßt sich, wie wir gleich sehen werden, f in der Nähe von a darstellen durch eine Reihe der Form

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k + \sum_{k=-1}^{-\infty} c_k (z-a)^k\,. \tag{13.6}$$

Eine solche Reihe heißt **Laurentreihe**.

Satz 13.7 (Laurentreihe, Entwicklungssatz)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, $a \in \mathbb{C}$ eine isolierte Singularität von f mit $B^0(a,\delta) \subset U$. Dann gilt für alle $z \in B^0(a,\delta)$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k + \sum_{k=-1}^{-\infty} c_k (z-a)^k\,, \tag{13.7}$$

wobei

$$c_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(a,r)} \frac{f(w)}{(w-a)^{k+1}}\,dw\,, \tag{13.8}$$

und $r \in (0,\delta)$ beliebig ist.

Beweis: Wir bemerken zunächst, dass wegen Satz 13.6 die rechte Seite in (13.8) nicht von der Wahl von r abhängt. Sei nun $z \in B^0(a,\delta)$ fest gegeben. Wir definieren $g : B^0(a,\delta) \to \mathbb{C}$ durch

$$g(w) = \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,, & w \neq z\,, \\ f'(z)\,, & w = z\,. \end{cases} \tag{13.9}$$

Die Funktion $g|V$, wobei $V = B^0(a,\delta) \setminus \{z\}$, hat eine isolierte Singularität in z. Aus Satz 13.3 folgt, dass g in $B^0(a,\delta)$ holomorph ist. Wir wählen r, R mit

$$0 < r < |z-a| < R < \delta\,.$$

Für die Kreise $\gamma_r = \partial B(a,r)$ und $\gamma_R = \partial B(a,R)$ gilt nach Satz 13.6

$$\int_{\gamma_r} g(w)\, dw = \int_{\gamma_R} g(w)\, dw\,, \tag{13.10}$$

also

$$\int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w-z}\, dw - f(z)\int_{\gamma_r} \frac{1}{w-z}\, dw = \int_{\gamma_R} \frac{f(w)}{w-z}\, dw - f(z)\int_{\gamma_R} \frac{1}{w-z}\, dw\,. \tag{13.11}$$

Aus Satz 11.8 folgt

$$\int_{\gamma_r} \frac{1}{w-z}\, dw = 0\,, \tag{13.12}$$

da der Integrand holomorph ist in $B(a,|z-a|)$. Aus der Integralformel von Cauchy 11.9, angewendet für $f = 1$, folgt

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} \frac{1}{w-z}\, dw = 1\,. \tag{13.13}$$

Aus (13.11) – (13.13) folgt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} \frac{f(w)}{w-z}\, dw - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w-z}\, dw\,. \tag{13.14}$$

Von hier ab verläuft der Beweis analog zum Beweis des Entwicklungssatzes von Cauchy-Taylor (Satz 11.11). Auf γ_R gilt wegen $|z-a| < R = |w-a|$ und

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-a}{w-a}} = \frac{1}{w-a}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^k,$$

dass

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} \frac{f(w)}{w-z}\, dw = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} \frac{f(w)}{(w-a)^{k+1}}\, dw\cdot(z-a)^k\,. \tag{13.15}$$

Auf γ_r gilt wegen $|z-a| > r = |w-a|$

$$\frac{1}{z-w} = \frac{1}{z-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{w-a}{z-a}} = \frac{1}{z-a}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{w-a}{z-a}\right)^k,$$

dass

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{z-w}\, dw &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} (w-a)^k f(w)\, dw\cdot\frac{1}{(z-a)^{k+1}}\\ &= \sum_{k=-1}^{-\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w-a)^{k+1}}\, dw\cdot(z-a)^k\,.\end{aligned} \tag{13.16}$$

Setzen wir (13.15) und (13.16) in (13.14) ein, so ergibt sich die Behauptung. □

In der Zerlegung (13.7) heißt

$$\sum_{k=-1}^{-\infty} c_k(z-a)^k$$

der **Hauptteil**, und

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k$$

der **Nebenteil** der Laurentreihe (13.7).

Satz 13.8 (Eindeutigkeit der Laurententwicklung)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, $a \in \mathbb{C}$ eine isolierte Singularität von f mit $B^0(a,\delta) \subset U$. Sind $g : B(a,\delta) \to \mathbb{C}$ und $h : \mathbb{C} \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen mit $f = g + h$ und $\lim_{z\to\infty} h(z) = 0$, so gilt

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k \,, \tag{13.17}$$

sowie

$$h(z) = \sum_{k=-1}^{-\infty} c_k(z-a)^k \,, \tag{13.18}$$

mit den Koeffizienten c_k aus (13.8).

Beweis: Übung. □

Aus Satz 13.8 folgt insbesondere, dass die Koeffizienten c_k in der Formel (13.7) eindeutig bestimmt sind. Die Laurentreihe (13.7), (13.8) heißt daher die **Laurentreihe von f in** a.

Notation 13.9 (Grenzwert "$z \to \infty$")
Für $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{C}$ definieren wir

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = c \tag{13.19}$$

durch: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $R > 0$ mit

$$|z| > R \quad \Rightarrow \quad |f(z) - c| < \varepsilon \,.$$

□

Folgerung 13.10 *Unter den Voraussetzungen von Satz 13.7 gilt für die Laurentreihe von f in a:*

(i) Die Singularität a ist hebbar genau dann, wenn der Hauptteil gleich Null ist, also $c_k = 0$ für alle $k < 0$.

(ii) Die Singularität a ist ein Pol der Ordnung m genau dann, wenn $c_k = 0$ für alle $k < -m$ und $c_{-m} \neq 0$.

(iii) Die Singularität a ist wesentlich genau dann, wenn es unendlich viele $k < 0$ gibt mit $c_k \neq 0$.

Beweis: Hat $g(z) = (z-a)^m f(z)$ eine hebbare Singularität für ein $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, so ist g holomorph fortsetzbar auf $B(a,\delta)$ und nach dem Eindeutigkeitssatz der Hauptteil von g gleich Null. □

Wir untersuchen die Frage der gleichmäßigen Konvergenz der Laurententwicklung. Wir betrachten eine Laurentreihe der Form

$$\sum_{k=-1}^{-\infty} c_k (z-a)^k \tag{13.20}$$

mit $a \in \mathbb{C}$, $c_k \in \mathbb{C}$ für alle $k < 0$.

Lemma 13.11 *Die Laurentreihe (13.20) sei konvergent in $B^0(a,\delta)$ für ein $\delta > 0$. Dann wird durch*

$$f(z) = \sum_{k=-1}^{-\infty} c_k (z-a)^k \tag{13.21}$$

eine auf $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ holomorphe Funktion definiert. Für jedes $r > 0$ konvergieren die Partialsummen

$$s_n(z) = \sum_{k=-1}^{-n} c_k (z-a)^k \tag{13.22}$$

gleichmäßig gegen f auf $\{z : |z-a| \geq r\}$.

Beweis: Es ist

$$|z-a| < \delta \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{|z-a|} > \frac{1}{\delta}\,,$$

also konvergiert die Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} \zeta^k \tag{13.23}$$

in $\{\zeta : |\zeta| > \frac{1}{\delta}\}$ und damit in ganz $\mathbb{C}$. Die Konvergenz der Partialsummen für (13.23) ist gleichmäßig auf allen kompakten Kreisscheiben

$$\{\zeta : |\zeta| \leq \frac{1}{r}\}\,,$$

wie wir bereits aus der Analysis 2 wissen. Hieraus folgen alle Behauptungen. □

Satz 13.12 (Laurententwicklung, gleichmäßige Konvergenz)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, $a \in \mathbb{C}$ eine isolierte Singularität von f mit $B^0(a,\delta) \subset U$. Dann konvergieren die Partialsummen

$$s_n(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k (z-a)^k + \sum_{k=-1}^{-n} c_k (z-a)^k \tag{13.24}$$

der Laurentreihe von f in a gleichmäßig gegen f auf jedem Kreisring $\{z : r \leq |z-a| \leq R\}$ mit $0 < r < R < \delta$.

Beweis: Folgt für den Hauptteil aus Lemma 13.11 und für den Nebenteil aus dem bekannten Resultat für Potenzreihen. □

14 Der Residuensatz

Definition 14.1 (Windungszahl)
Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ eine geschlossene, stückweise stetig differenzierbare Kurve, sei $z \in \mathbb{C}$, $z \notin \gamma([a,b])$. Wir definieren die Windungszahl von γ um z durch

$$\nu(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{w - z}\, dw\,. \tag{14.1}$$

□

Für $\gamma = \partial B(z,r)$ gilt

$$\nu(\gamma, z) = 1\,. \tag{14.2}$$

Sind γ_1, γ_2 zwei geschlossene Wege mit demselben Anfangs- und Endpunkt, und bezeichnet γ die Verkettung von γ_1 und γ_2 (das heißt, wir durchlaufen nacheinander γ_1 und γ_2), so gilt

$$\nu(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\gamma_1} \frac{1}{w-z}\, dw + \int_{\gamma_2} \frac{1}{w-z}\, dw\right) = \nu(\gamma_1, z) + \nu(\gamma_2, z)\,. \tag{14.3}$$

Satz 14.2 *Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ eine geschlossene, stückweise stetig differenzierbare Kurve, sei $U = \mathbb{C} \setminus \gamma([a,b])$. Dann gilt:*

(i) $\nu(\gamma, z) \in \mathbb{Z}$ für alle $z \in U$.

(ii) Auf den Wegkomponenten von U ist ν konstant.

(iii) Es gilt $\nu(\gamma, z) = 0$ für alle $z \in U$ mit $|z| > \|\gamma\|_\infty$.

Beweis: (i): Sei $z \in U$. Wir definieren $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ und $F : [a,b] \to \mathbb{C}$ durch

$$f(t) = \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z}\, ds\,, \quad F(t) = (\gamma(t) - z)\exp(-f(t))\,.$$

Dann ist F stetig und stückweise stetig differenzierbar, und

$$F'(t) = \gamma'(t)\exp(-f(t)) - (\gamma(t) - z)\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}\exp(-f(t)) = 0$$

in allen Punkten $t \in (a,b)$, in denen γ differenzierbar ist. Also ist F konstant auf $[a,b]$. Es folgt (da $F \neq 0$)

$$1 = \frac{F(b)}{F(a)} = \frac{\gamma(b) - z}{\gamma(a) - z}\exp(-(f(b) - f(a)) = \exp\left(-\int_a^b \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z}\, ds\right) = \exp\left(-\int_\gamma \frac{1}{w - z}\, dw\right)\,, \tag{14.4}$$

also gibt es $k \in \mathbb{Z}$ mit

$$-\int_\gamma \frac{1}{w - z}\, dw = 2\pi i k\,.$$

Damit ist (i) bewiesen.
(ii): U ist offen, da $\gamma([a,b])$ kompakt ist. Die durch

$$\tilde{\nu}(z) = \nu(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z} \, ds$$

definierte Funktion $\tilde{\nu} : U \to \mathbb{R}$ ist stetig. Ist W eine Wegkomponente von U, so ist $\tilde{\nu}(W)$ wegzusammenhängend nach Satz 12.3. Da $\tilde{\nu}(W) \subset \mathbb{Z}$ nach (i), ist $\tilde{\nu}(W)$ einelementig.
(iii): Für $|z| > \|\gamma\|_\infty$ gilt $|\gamma(t) - z| \geq |z| - |\gamma(t)| \geq |z| - \|\gamma\|_\infty$, also

$$|\nu(\gamma, z)| \leq \frac{1}{2\pi} L(\gamma) \sup_{t \in [a,b]} \frac{1}{|\gamma(t) - z|} \leq \frac{1}{2\pi} L(\gamma) \frac{1}{|z| - \|\gamma\|_\infty} .$$

Wegen (i) folgt $\nu(\gamma, z) = 0$ falls $|z|$ hinreichend groß ist, und da

$$\{z : z \in \mathbb{C}, \, |z| > \|\gamma\|_\infty\}$$

eine wegzusammenhängende Teilmenge von U ist, folgt (iii) aus (ii). □

Sei nun $f : B^0(z, \delta) \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit der Laurententwicklung

$$f(w) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (w - z)^k + \sum_{k=-1}^{-\infty} c_k (w - z)^k . \tag{14.5}$$

Satz 14.3 *Sei $z \in \mathbb{C}$, $\delta > 0$, sei $\gamma : [a,b] \to B^0(z, \delta)$ eine geschlossene, stückweise stetig differenzierbare Kurve mit $z \notin \gamma([a,b])$. Dann gilt für jede holomorphe Funktion $f : B^0(z, \delta) \to \mathbb{C}$ der Form (14.5)*

$$\int_\gamma f(w) \, dw = 2\pi i c_{-1} \nu(\gamma, z) . \tag{14.6}$$

Beweis: Für $k \neq -1$ hat $p(w) = (w - z)^k$ eine Stammfunktion in $\mathbb{C} \setminus \{z\}$, nämlich

$$q(w) = \frac{1}{k+1} (w - z)^{k+1} ,$$

also gilt

$$\int_\gamma (w - z)^k \, dw = 0 , \quad k \neq -1 . \tag{14.7}$$

Nach Definition der Windungszahl gilt

$$\int_\gamma \frac{1}{w - z} \, dw = 2\pi i \nu(\gamma, z) . \tag{14.8}$$

Da $\gamma([a,b])$ in einem kompakten Kreisring um z enthalten ist, folgt aus Satz 13.12

$$\int_\gamma f(w) \, dw = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_\gamma (w - z)^k \, dw = c_{-1} 2\pi i \nu(\gamma, z) .$$

□

Definition 14.4 (Residuum)
Sei $z \in \mathbb{C}$, $\delta > 0$, sei $f : B^0(z, \delta) \to \mathbb{C}$ holomorph. Wir definieren das Residuum von f in z durch

$$\operatorname{Res}(f, z) = c_{-1}\,, \tag{14.9}$$

wobei c_{-1} der erste Koeffizient des Hauptteils der Laurentreihe von f in z ist.

Lemma 14.5 *Sei $z \in \mathbb{C}$, $\delta > 0$, sei $f : B^0(z, \delta) \to \mathbb{C}$ holomorph.*

(i) Für alle $r \in (0, \delta)$ gilt

$$\operatorname{Res}(f, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z,r)} f(w)\, dw \tag{14.10}$$

(ii) Ist außerdem $g : B^0(z, \delta) \to \mathbb{C}$ holomorph, so gilt

$$\operatorname{Res}(\lambda f + \mu g, z) = \lambda \operatorname{Res}(f, z) + \mu \operatorname{Res}(g, z) \tag{14.11}$$

für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

(iii) Ist z eine hebbare Singularität von f, so gilt

$$\operatorname{Res}(f, z) = 0\,. \tag{14.12}$$

Beweis: (i): Folgt unmittelbar aus Satz 14.3 und (14.2).
(ii): Folgt direkt aus (i).
(iii): Folgt mit (i) aus dem Integralsatz von Cauchy. □

Satz 14.6 (Residuensatz)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und sternförmig, sei $\gamma : [a, b] \to U$ eine geschlossene, stückweise stetig differenzierbare Kurve. Sei S eine endliche Teilmenge von U mit $S \cap \gamma([a, b]) = \emptyset$, sei $f : U \setminus S \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt

$$\int_\gamma f(w)\, dw = 2\pi i \sum_{z \in S} \operatorname{Res}(f, z) \nu(\gamma, z)\,. \tag{14.13}$$

Beweis: Sei für jedes $z \in S$

$$f_z(w) = \frac{\operatorname{Res}(f, z)}{w - z} + \sum_{k=-2}^{-\infty} c_k (w - z)^k \tag{14.14}$$

der Hauptteil der Laurentreihe von f in z. Nach Lemma 13.11 wird hierdurch eine holomorphe Funktion $f_z : \mathbb{C} \setminus \{z\} \to \mathbb{C}$ definiert. Wir definieren $g : U \setminus S \to \mathbb{C}$ durch

$$g(w) = f(w) - \sum_{z \in S} f_z(w)\,. \tag{14.15}$$

Für jedes $z \in S$ ist der Hauptteil der Laurentreihe von g in z gleich Null, da f_z nach Konstruktion in z denselben Hauptteil wie f hat und f_ζ für $\zeta \neq z$ holomorph ist in einer

Umgebung von z. Also sind alle $z \in S$ hebbare Singularitäten von g, und wir können g zu einer holomorphen Funktion $\tilde{g} : U \to \mathbb{C}$ fortsetzen (Satz 13.3). Aus dem Integralsatz von Cauchy folgt (U ist sternförmig)

$$\int_\gamma g(w)\, dw = \int_\gamma \tilde{g}(w)\, dw = 0\,, \tag{14.16}$$

also nach Satz 14.3

$$\int_\gamma f(w)\, dw = \sum_{z \in S} \int_\gamma f_z(w)\, dw = \sum_{z \in S} 2\pi i \operatorname{Res}(f_z, z)\nu(\gamma, z)\,. \tag{14.17}$$

Da $\operatorname{Res}(f_z, z) = \operatorname{Res}(f, z)$ nach Konstruktion von f_z, folgt die Behauptung. □

Lemma 14.7 *Sei $f : B^0(a, \delta) \to \mathbb{C}$ holomorph, sei a ein einfacher Pol (= Pol erster Ordnung) von f. Dann gilt*

$$\operatorname{Res}(f, a) = \lim_{z \to a}(z - a)f(z)\,. \tag{14.18}$$

Beweis: Es ist

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - a} + p(z)\,, \quad p \text{ holomorph.}$$

□

Lemma 14.8 *Seien $g, h : B(a, \delta) \to \mathbb{C}$ holomorph, es gelte $g(a) \neq 0$, $h(a) = 0$, $h'(a) \neq 0$. Dann hat die durch*

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}\,, \tag{14.19}$$

definierte Funktion einen einfachen Pol in a, und es gilt

$$\operatorname{Res}(f, a) = \frac{g(a)}{h'(a)}\,. \tag{14.20}$$

Beweis: Es gilt

$$\lim_{z \to a} \frac{h(z)}{z - a} = h'(a)\,,$$

also

$$\lim_{z \to a}(z - a)f(z) = \lim_{z \to a} \frac{g(z)}{\frac{h(z)}{z-a}} = \frac{g(a)}{h'(a)}\,.$$

Also ist a hebbare Singularität von $z \mapsto (z - a)f(z)$ und damit einfacher Pol von f. Die Behauptung folgt aus Lemma 14.7. □

Beispiele: Wir betrachten

$$f(z) = \frac{1}{1 + z^2}\,. \tag{14.21}$$

$h(z) = 1 + z^2$ hat einfache Nullstellen in $z = \pm i$, es folgt

$$\operatorname{Res}(f, \pm i) = \pm\frac{1}{2i}\,. \tag{14.22}$$

Wir betrachten

$$f(z) = \frac{z^2}{1+z^4} \,. \tag{14.23}$$

$h(z) = 1 + z^4$ hat vier einfache Nullstellen, nämlich

$$a = \exp\left(\frac{\pi i}{4}\right) \,, ia \,, -a \,, -ia \,. \tag{14.24}$$

Es ist

$$\operatorname{Res}(f,a) = \frac{a^2}{4a^3} = \frac{1}{4a} = \frac{1}{4}\exp\left(-\frac{\pi i}{4}\right) \,, \quad \operatorname{Res}(f,ia) = \frac{1}{4}\exp\left(-\frac{3\pi i}{4}\right) \,, \tag{14.25}$$

und analog für die anderen beiden Pole.

Wir wollen den Residuensatz verwenden, um uneigentliche Integrale der Form

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \tag{14.26}$$

zu berechnen.

Satz 14.9 *Sei S eine endliche Teilmenge von $\mathbb{C}$ mit $S \cap \mathbb{R} = \emptyset$, sei $f : \mathbb{C} \setminus S \to \mathbb{C}$ holomorph, es gelte $\int_{\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx < \infty$ sowie*

$$\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0 \,. \tag{14.27}$$

Dann gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\substack{a\in S\\ Im\ a>0}} \operatorname{Res}(f,a) \,. \tag{14.28}$$

Beweis: Wir betrachten die durch $[-r,r]$ und den Halbkreis

$$\gamma_r : [0,\pi] \to \mathbb{C} \,, \quad \gamma_r(t) = re^{it} \,,$$

definierte Kurve Γ_r und wählen r so groß, dass alle $a \in S$ mit $\operatorname{Im} a > 0$ im Innern von Γ_r liegen. Für $a \in S$ gilt (Übung)

$$\nu(\Gamma_r, a) = \begin{cases} 1 \,, & \operatorname{Im} a > 0 \,, \\ 0 \,, & \operatorname{Im} a < 0 \,. \end{cases}$$

Aus dem Residuensatz folgt

$$\int_{-r}^{r} f(x)\,dx + \int_{\gamma_r} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_r} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\substack{a\in S\\ Im\ a>0}} \operatorname{Res}(f,a) \,.$$

Es gilt weiter

$$\left|\int_{\gamma_r} f(z)\,dz\right| \le \int_0^{\pi} |f(re^{it})||rie^{it}|\,dt \le \pi \sup_{|z|=r} |zf(z)| \to 0 \,, \qquad \text{falls } r \to \infty$$

nach Voraussetzung (14.27). Hieraus folgt die Behauptung. □

Folgerung 14.10 *Seien p, q Polynome in $\mathbb{C}$ mit $\deg(q) \geq \deg(p)+2$, q habe keine reellen Nullstellen, sei*

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} \,. \tag{14.29}$$

Dann gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 2\pi i \sum_{\substack{a\in S \\ Im\ a>0}} \operatorname{Res}(f,a) \,. \tag{14.30}$$

Beweis: f erfüllt alle Voraussetzungen von Satz 14.9. □

Beispiele: Für

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

gilt $S = \{i, -i\}$ und

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = 2\pi i \operatorname{Res}(f,i) = 2\pi i \frac{1}{2i} = \pi \,.$$

Für

$$f(z) = \frac{z^2}{1+z^4}$$

gilt $S = \{a, ia, -a, -ia\}$ (siehe (14.24)) und

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\, dx &= 2\pi i(\operatorname{Res}(f,a) + \operatorname{Res}(f,ia)) = 2\pi i \frac{1}{4}\left(\exp\left(-\frac{\pi i}{4}\right) + \exp\left(-\frac{3\pi i}{4}\right)\right) \\ &= 2\pi i \frac{1}{4}(-\sqrt{2}i) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \,.\end{aligned}$$

Der Residuensatz eignet sich auch zur Berechnung der Fouriertransformation gewisser Funktionen.

Satz 14.11 *Sei S eine endliche Teilmenge von $\mathbb{C}$ mit $S \cap \mathbb{R} = \emptyset$, sei $g : \mathbb{C} \setminus S \to \mathbb{C}$ holomorph, es gelte*

$$\lim_{z\to\infty} g(z) = 0 \,. \tag{14.31}$$

Dann gilt für $f(z) = g(z)e^{iz\xi}$, $\xi \in \mathbb{R}$, $\xi \neq 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{ix\xi}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 2\pi i \sum_{\substack{a\in S \\ Im\ a>0}} \operatorname{Res}(f,a) \,, \quad \xi > 0 \,, \tag{14.32}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{ix\xi}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = -2\pi i \sum_{\substack{a\in S \\ Im\ a<0}} \operatorname{Res}(f,a) \,, \quad \xi < 0 \,. \tag{14.33}$$

Hierbei ist das uneigentliche Integral definiert als

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{0} f(x)\, dx + \lim_{s\to\infty} \int_{0}^{s} f(x)\, dx \,. \tag{14.34}$$

(Es wird weder behauptet noch vorausgesetzt, dass $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < \infty$.)

Beweis: Sei zunächst $\xi > 0$. Für $r, s > 0$ betrachten wir das Quadrat $Q_{r,s} \subset \mathbb{C}$ mit den Ecken $(-r, 0)$, $(s, 0)$, $(s, r+s)$ und $(-r, r+s)$ und den Seiten $\gamma_0, \dots, \gamma_3$ (beginnend mit $(-r, 0)$, in der beschriebenen Reihenfolge). Seien r, s so groß, dass alle $a \in S$ mit $\operatorname{Im} a > 0$ in $Q_{r,s}$ liegen. Dann folgt aus dem Residuensatz

$$\int_{\partial Q_{r,s}} f(z)\,dz = \int_{-r}^{s} f(x)\,dx + \sum_{j=1}^{3} \int_{\gamma_j} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\substack{a\in S\\ \operatorname{Im}\, a>0}} \operatorname{Res}(f,a) =: c\,, \quad \xi > 0\,. \tag{14.35}$$

Für $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$e^{iz\xi} = e^{i\xi \operatorname{Re}\, z} e^{-\xi \operatorname{Im}\, z}\,, \quad \left|e^{iz\xi}\right| = e^{-\xi \operatorname{Im}\, z}\,.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \left|\int_{\gamma_2} g(z) e^{iz\xi}\,dz\right| &= \left|-\int_{-r}^{s} g(t + i(r+s)) e^{it\xi} e^{-(r+s)\xi}\,dt\right| \\ &\le (r+s) e^{-(r+s)\xi} \sup_{t\in[-r,s]} |g(t+i(r+s))|\,, \end{aligned} \tag{14.36}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} \left|\int_{\gamma_1} g(z) e^{iz\xi}\,dz\right| &= \left|\int_0^{r+s} g(s+it) e^{is\xi} e^{-t\xi} i\,dt\right| \le \frac{1}{\xi}(1 - e^{-(r+s)\xi}) \sup_{t\in[0,r+s]} |g(s+it))| \\ &\le \frac{1}{\xi} \sup_{t\in[0,r+s]} |g(s+it))|\,, \end{aligned} \tag{14.37}$$

Ebenso beweist man

$$\left|\int_{\gamma_3} g(z) e^{iz\xi}\,dz\right| \le \frac{1}{\xi} \sup_{t\in[0,r+s]} |g(-r+it)|\,. \tag{14.38}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Wegen (14.36) – (14.38) gibt es ein $M > 0$, so dass

$$\sum_{j=1}^{3} \left|\int_{\gamma_j} g(z) e^{iz\xi}\,dz\right| \le \varepsilon\,, \quad \text{für alle } r, s \ge M,$$

also

$$\left|\int_{-r}^{s} f(x)\,dx - c\right| \le \varepsilon\,, \quad \text{für alle } r, s \ge M. \tag{14.39}$$

also

$$\left|\int_{-r}^{s} f(x)\,dx - \int_{-\rho}^{\sigma} f(x)\,dx\right| \le 2\varepsilon\,,$$

für alle $r, s, \rho, \sigma \ge M$, und damit auch

$$\left|\int_0^{s} f(x)\,dx - \int_0^{\sigma} f(x)\,dx\right| \le 2\varepsilon\,, \quad \left|\int_{-r}^{0} f(x)\,dx - \int_{-\rho}^{0} f(x)\,dx\right| \le 2\varepsilon\,,$$

für alle $r, s, \rho, \sigma \ge M$. Hieraus folgt die Behauptung für $\xi > 0$. Der Fall $\xi < 0$ wird analog bewiesen; in diesem Fall hat das Quadrat $Q_{r,s}$ die Ecken $(-r, 0)$, $(s, 0)$, $(s, -(r+s))$ und $(-r, -(r+s))$. $\square$

Definition 14.12 (Meromorphe Funktion)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion f heißt meromorph auf U, falls es eine Menge $P \subset U$ gibt, so dass $f : U \setminus P \to \mathbb{C}$ holomorph ist und jedes $a \in P$ ein Pol von f ist. □

Die meromorphen Funktionen **auf einem Gebiet** U bilden einen Körper bezüglich der Addition und Multiplikation, da eine von Null verschiedene meromorphe Funktion wegen des Identitätssatzes nur isolierte Nullstellen hat und alle diese Nullstellen eine endliche Ordnung haben.

Sei f auf einem Gebiet U meromorph und nicht identisch 0. Dann ist auch die durch

$$g(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

definierte Funktion meromorph auf U, da f' und f meromorph sind. Die Funktion g heißt die **logarithmische Ableitung von f**, da sie die Ableitung der Funktion $z \mapsto \ln f(z)$ ist.

Satz 14.13 *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und sternförmig, sei f eine auf U meromorphe, von Null verschiedene Funktion, sei P die Menge der Pole und N die Menge der Nullstellen von f in U. Sei γ eine geschlossene Kurve in U, so dass keine Nullstelle von f und kein Pol von f auf γ liegt. Es gelte außerdem $\nu(\gamma, a) = 1$ für alle $a \in P \cup N$. Dann gilt*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \sum_{a \in N} \mathrm{ord}\,(a) - \sum_{a \in P} \mathrm{ord}\,(a)\,, \tag{14.40}$$

wobei ord (a) *die Ordnung der Nullstelle beziehungsweise des Pols a bezeichnet.*

Beweis: Zunächst gilt, dass $N \cup P$ endlich ist (nach Satz 14.2(iii) liegt $N \cup P$ in einer beschränkten Menge, und $N \cup P$ hat keine Häufungspunkte), und dass f'/f holomorph ist in $U \setminus (N \cup P)$. Sei $a \in N \cup P$. Dann gibt es eine holomorphe Funktion $g : B(a, \delta) \to \mathbb{C}$, $\delta > 0$ hinreichend klein, mit

$$f(z) = (z-a)^m g(z)\,, \quad g(a) \neq 0\,,$$

und $g(z) \neq 0$ für alle $z \in B(a, \delta)$. Ist $a \in N$, so ist hierbei m die Ordnung von a; ist $a \in P$, so ist $-m$ die Ordnung von a. Aus

$$f'(z) = m(z-a)^{m-1} g(z) + (z-a)^m g'(z)$$

folgt

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)}\,. \tag{14.41}$$

Da g keine Nullstelle in $B(a, \delta)$ hat, ist g'/g holomorph in $B(a, \delta)$, also hat f'/f einen einfachen Pol in a mit

$$\mathrm{Res}\left(\frac{f'}{f}, a\right) = m\,.$$

Die Behauptung folgt nun aus dem Residuensatz. □