



Technischen Universität München

TUM School of Engineering and Design

# Signalverarbeitung bei Self-mixing Interferometrie Signalen zur Rotationsgeschwindigkeitsmessung mit Hilfe von Korrelationsfunktionen

Yang Liu

Vollständiger Abdruck der von der TUM School of Engineering and Design der  
Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades  
eines

Doktors der Ingenieurwissenschaften

genehmigten Dissertation.

Vorsitz: Prof. Dr.- Ing. Harald Klein

Prüfer\*innen der Dissertation:

1. Prof. Dr.-Ing. Dr. h.c. Ralph Kennel
2. Prof. Dr.-Ing. habil. Dr. h.c. Alexander W. Koch

Die Dissertation wurde am 12.09.2022 bei der Technischen Universität  
München eingereicht und durch die TUM School of Engineering and Design am  
01.05.2023 angenommen.

## Inhaltsverzeichnis

<b>Inhaltsverzeichnis .....</b>	<b>1</b>
<b>Symbolverzeichnis .....</b>	<b>4</b>
<b>Abkürzungsverzeichnis .....</b>	<b>9</b>
<b>1 Einleitung.....</b>	<b>2</b>
1.1 Motivation und Ziele .....	2
1.2 Stand der Technik .....	6
1.3 Aufgabenstellung .....	7
1.4 Lösungsweg .....	8
<b>2 “Self-mixing”-Interferometrie.....</b>	<b>10</b>
2.1 Physikalische Grundlagen .....	10
2.1.1 „Drei Spiegel“-Modell.....	10
2.1.2 Lang & Kobayashi Modell .....	13
2.2 Geschwindigkeitsmessung mit “Self-mixing”- Interferometrie .....	15
<b>3 Grundlagen unterschiedlicher Signalverarbeitungsmethoden.....</b>	<b>19</b>
3.1 Nullpunktdetektion .....	19
3.2 Autokorrelation.....	21
3.2.1 Begriffserklärung.....	21
3.2.2 Simulationen .....	23
3.3 Kreuzkorrelation .....	28
3.3.1 Begriffserklärung .....	28
3.3.2 Mathematisches Modell.....	29
3.3.3 Simulation.....	32
3.4 Kreuzkorrelationspektrum.....	49
3.4.1 Problemstellung .....	50

3.4.2 Methodik .....	50
3.4.3 Simulationen .....	55
3.5 Vereinfachtes Kreuzkorrelationsspektrum.....	61
3.5.1 Methodik .....	61
3.5.2 Simulationen mit symmetrische Kreuzkorrelation .....	62
3.5.3 Simulationen mit unsymmetrische Kreuzkorrelation .....	66
3.5.4 Fazit.....	72
3.6 Iterativer Selbstkorrekturalgorithmus .....	72
3.6.1 Diskrete Fourier Reihe-Optimierung bei asynchroner Abtastung .....	73
3.6.2 Phasenbestimmung bei asynchroner Abtastung mithilfe von symmetrischer Kreuzkorrelation und Diskrete Fourier Reihe .....	74
<b>4 Neuartige Signalverarbeitungsmethoden .....</b>	<b>78</b>
4.1 Autokorrelationsmethodik .....	78
4.1.1 Signalselektion .....	78
4.1.2 Autokorrelation .....	80
4.1.3 Durchschnittsfenster.....	81
4.2 Schätzverfahren zur Dopplerfrequenzbestimmung von SMI-Signalen über das Kreuzkorrelationsspektrum .....	82
4.3 Frequenz- und Phasenbestimmung mithilfe des vereinfachten Kreuzkorrelationsspektrums und der Kreuzkorrelations-funktion.....	83
4.3.1 Methode 1 .....	84
4.3.2 Methode 2 .....	90
4.4 Vergleich der Berechnungszeiten .....	95
<b>5 Anwendungen der Signalverarbeitungsmethoden in „Self-mixing“- Interferometrie-Signalen .....</b>	<b>97</b>
5.1 Testsystem.....	97
5.2 Anwendungen der Autokorrelationsmethodik .....	98
5.3 Anwendungen des regulären Kreuzkorrelationsspektrums.....	101
5.4 Anwendung von Methode 1 .....	105
5.5 Anwendung von Methode 2.....	108
<b>6 Zusammenfassung und Ausblick.....</b>	<b>112</b>

6.1 Zusammenfassung .....	112
6.2 Ausblick .....	115
<b>A1 Anhang .....</b>	<b>116</b>
A1.1 Ableitung von Gleichungen (3.20-22) .....	116
A1.2 Ableitung von Gleichung (3.26) .....	118
A1.3 Ableitung von Gleichungen (3.31-33) .....	120
A1.4 Ableitung von Gleichungen (3.61-62) .....	123
<b>Danksagung .....</b>	<b>125</b>
<b>Veröffentlichungen .....</b>	<b>126</b>
6.2.1 Eigene Veröffentlichungen .....	126
6.2.2 Betreute Arbeiten .....	126
<b>Literaturverzeichnis .....</b>	<b>127</b>
<b>Abbildungsverzeichnis .....</b>	<b>138</b>
<b>Tabellenverzeichnis .....</b>	<b>144</b>

## Symbolverzeichnis

<b>Zeichen</b>	<b>Bedeutung</b>
$a_0$	Doppelte Offsetwert des Signals
$A$	Amplitude des Referenzsignals
$A_{eff}$	Amplitude des effektiven Reflektionskoeffizienten
$a_s$	Optische Verluste im Laserhohlraum
$b$	Länge des Laserhohlraums
$B$	Amplitude des Messsignals
$B_i$	Amplitude der i-ten Anteil des Messsignals
$c$	Lichtgeschwindigkeit
$C$	Optischer Feedbackfaktor
$C_1$	Amplitude einer diskreten Fourier-Reihe
$C_{1r}$	Amplitude der rekonstruierten diskreten Fourier-Reihe
$C_1^*$	Initial ermittelte Amplitude einer diskreten Fourier-Reihe
$d$	Schichtdicke der aktiven Region
$e$	Elementarladung
$E(t)$	Amplitude des elektrischen Felds
$E_M$	M-te Eingangswert des Durchschnittsfensters
$f_a$	Anfang des betrachteten Frequenzbereichs
$f_A$	Frequenz der Amplitudenmodulation
$f_D$	Dopplerfrequenz
$f_e$	Ende des betrachteten Frequenzbereichs
$f_{grob}$	Grob geschätzte Frequenz
$f_i$	Ermittelte Phase bei der i-ten Iteration
$f_s$	Abtastfrequenz
$f_w$	Frequenz des Referenzsignals im Kreuzkorrelationsspektrum
$f_y$	Frequenz des Messsignals
$f_{yi}$	Frequenz der i-ten Anteil des Messsignals
$\Delta f$	Auflösung des Kreuzkorrelationsspektrums
$g_c$	Verstärkung der Laserschwelle mit externem Hohlraum

$g_{th}$	Verstärkung der Laserschwelle ohne externen Hohlraum
$G_N$	Modaler Verstärkungskoeffizient
$\Delta g$	Verstärkungsdifferenz der Laserschwelle
$J$	Injektionsstrom
$k$	Zeit (in Datenpunkte)
$K$	Amplitude des ersten Kosinus der symmetrische Kreuzkorrelation
$K(f_w)$	Kreuzkorrelationsspektrum
$K_{ab}(f_w)$	Abstrahierte Kreuzkorrelationsspektrum
$K_{symm}(f_w)$	Kreuzkorrelationsspektrum mit symmetrische Kreuzkorrelationsfunktion
$K_{unsymm}(f_w)$	Kreuzkorrelationsspektrum mit unsymmetrische Kreuzkorrelationsfunktion
$K_i$	Amplitude der Kreuzkorrelation der i-ten Anteil
$L$	Länge des externen Hohlraums
$L_1$	Länge des in der Signalselektion betrachteten Signalabschnitts
$M$	Anzahl der für das Kreuzkorrelationsspektrum verwendete Datenpunkte
$n$	Zeitverschiebung (in Datenpunkte)
$N$	Anzahl der in Korrelationsfunktionen genutzte Datenpunkte
$N_i$	i-te Nullstelle
$N_0$	Trägerdichte ohne optisches Feedback
$N_t$	Anzahl der Rechteckimpulse
$N_{th}$	Trägerdichte des Laserschwelle
$N(t)$	Trägerdichte
$O$	Anzahl an Iterationen
$O_f(t)$	Signaloffset
$P$	Laserausgangsleistung mit externem optischem Feedback
$P_0$	Laserausgangsleistung ohne externes optisches Feedback
$Q$	Anzahl der für die Kreuzkorrelationsfunktion der Phasenbestimmung verwendete Datenpunkte
$r_1$	Reflektionskoeffizient des Lasers (Flächenausrichtung: Fotodiode)
$r_2$	Reflektionskoeffizient des Lasers (Flächenausrichtung: Zielobjekt)
$r_3$	Reflektionskoeffizient des Zielobjekts

$r_{eff}$	Effektive Reflektionskoeffizient
$r(k)$	Diskrete Version der additiven Rauschfunktion
$r(t)$	Kontinuierliche Version der additiven Rauschfunktion
$\Delta t$	Abtastintervall
$t$	Zeit (in Zeiteinheit)
$t_a$	Periodendauer der Abtastung
$t_y$	Periodendauer der Rechteckwelle
$T$	Länge des betrachteten Signalabschnitts (in Zeiteinheit)
$T_D$	Doppler-Periodenlänge
$T_i$	i-te ermittelte Periodenlänge
$v$	Lineare Geschwindigkeit des Zielobjekts
$U$	Amplitude des zweiten Kosinus der unsymmetrische Kreuzkorrelation
$V$	Amplitude des ersten Kosinus der unsymmetrische Kreuzkorrelation
$W$	Amplitude des zweiten Kosinus der symmetrische Kreuzkorrelation
$x(k)$	Diskrete Funktion des Referenzsignals
$x(t)$	Kontinuierliche Funktion des Referenzsignals
$x_s$	Schwellenwert
$x_{f_w}(k)$	Referenzsignal bei der betrachteten Frequenz $f_w$
$y(k)$	Diskrete Funktion des Messsignals
$y(t)$	Messsignal
$y_i$	y-Wert des i-ten Datenpunkt
$y_s$	Durchschnittswert des Signalabschnitts
$Y_i$	Ergebnis des rekonstruierten Signals bei der i-ten Iteration
$\Delta y$	Betrag der Hysteresebedingung
$\Delta Y$	Ergebniskorrektur
$Y^*$	Intiales Ergebnis der Signalverarbeitung
$Y_i^*$	Optimiertes Ergebnis der i-ten Iteration
$\alpha$	Erweiterungsfaktor der Linienbreite
$\varepsilon$	Nichtlineare Kompressionskoeffizient der Verstärkung
$\theta$	Winkel zwischen den Einfallrichtung des Laserstrahls und der Bewegungsrichtung des Zielobjekts
$\lambda$	Wellenlänge der Laserdiode

$\omega(t)$	Optische Laserfrequenz mit externem optischem Feedback
$\omega_0$	Unbeeinflusste optische Frequenz
$\omega_s$	Durch das SMI-Signal veränderte optische Frequenz
$w$	w-te betrachtete Referenzsignal
$\tau$	Zeitverschiebung (in Zeiteinheit)
$\tau_{ex}$	Umlaufzeit des Lasers im externen Hohlraum
$\tau_{in}$	Umlaufzeit im Laserhohlraum
$\tau_p$	Photonenlebensdauer
$\tau_s$	Trägerlebensdauer
$\kappa$	Feedbackstärke
$\phi(t)$	Phase des elektrischen Felds
$\phi_0$	Phase des unbeeinflussten Lichts
$\phi_{eff}$	Phase des effektiven Reflektionskoeffizienten
$\Delta \phi_L$	Änderung der Umlaufphase
$\phi_s$	Phase des Lichts bei externem optischem Feedback
$\phi_{xy}(\tau)$	Kontinuierliche Version der Kreuzkorrelationsfunktion
$\phi_{xy_i}(\tau)$	Kreuzkorrelationsfunktion des i-ten Anteil des Messsignals
$\phi_{xyp}(\tau)$	Kreuzkorrelationsfunktion des gesamten Messsignals
$\phi_{x_{f_w}, y, unsymm}(n)$	Unsymmetrische Kreuzkorrelationsfunktion bei der betrachteten Frequenz $f_w$
$\phi_{x_{f_w}, y, symm}(n)$	Symmetrische Kreuzkorrelationsfunktion bei der betrachteten Frequenz $f_w$
$\phi_{yy}(n)$	Diskrete Version der Autokorrelationsfunktion
$\phi_{yy}(\tau)$	Kontinuierliche Version der Autokorrelationsfunktion
$\phi_{yy, ges}(\tau)$	Autokorrelationsfunktion des Gesamtsignals
$\phi_{yy, noise}(\tau)$	Autokorrelationsfunktion des Rauschanteils
$\phi_{yy, sin}(\tau)$	Autokorrelationsfunktion des Signalanteils
$\eta$	Interne Quanteneffizienz
$\Gamma$	Confinement-Faktor
$\sigma_{yy}(n)$	geometrischen Standardabweichung des Produkts der Abtastwerte in einer Periode

$\sigma_{\phi_{yy}}(n)$	Standardabweichung der Autokorrelationsfunktion
$\varphi$	Phase des Signals
$\Delta \varphi$	Phasenänderung
$\varphi_{grob}$	Grob geschätzte Phase
$\varphi_i$	Ermittelte Phase bei der i-ten Iteration
$\varphi_r$	Phase des rekonstruierten Signals
$\varphi^*$	Initial ermittelte Phase des Signals
$\varphi_x$	Phase des Referenzsignals
$\varphi_y$	Phase des Messsignals
$\varphi_{yi}$	Phase der i-ten Anteil des Messsignals
$\varphi_{\phi_{xy}}$	Phase der Kreuzkorrelationsfunktion

## **Abkürzungsverzeichnis**

<b>Zeichen</b>	<b>Bedeutung</b>
CWT	Kontinuierliche Wavelet Transformation
DFR	Diskrete Fourier-Reihe
FFT	Schnelle Fourier-Transformation
NRMSE	normalisierte Wurzel der mittleren Fehlerquadratsumme (normalised root- mean square error)
SMI	Self-mixing Interferometrie
SNR	Signal-Rausch Verhältnis

# 1 Einleitung

## 1.1 Motivation und Ziele

Die elektrische Antriebstechnik ist in der Automatisierungstechnik von großer Bedeutung und gilt wegen ihrer Regelungseigenschaften, Dynamik und Zuverlässigkeit als unerlässlich in allen Bereichen, wo schnelle und präzise Positionierungen vorausgesetzt werden. Hierbei sorgt die Antriebsregelung für einen besseren Wirkungsgrad sowie längere Lebensdauer und ist daher von großer Wichtigkeit in der Realisierung von dynamischen Bewegungsabläufen in Betriebsmitteln wie beispielsweise Fertigungs- und Verpackungsmaschinen [1].

Dabei hat in der Antriebsregelung die Drehzahl- und Rotorlagenregelung einen hohen Stellenwert. In der Regel werden sie zusammen mit der Drehmomentregelung als dreifach kaskadierte Regelungsstruktur umgesetzt [2] und nutzen bei einer analogen Ausführung Resolver, Tachogeneratoren und Tachometer als Positions- und Geschwindigkeitssensoren [3].

Mit der zunehmenden Digitalisierung der Industrie gewinnen jedoch digitale Antriebsregelungen immer mehr an Bedeutung. Während analoge Regelungen für jede Regelungsgröße jeweils einen separaten Sensor benötigen, kann in digitalen Regelungen die Nutzung eines Sensors für mehrere Zustandsgrößen ausreichend sein [3]. Dadurch kann über eine Reduzierung der Komponentenzahl und des Verschleiß- und Wartungsaufwands eine Kostenreduktion erreicht werden. Darüber hinaus erweisen sich digitale Signale auch über längeren Strecken als robuster gegen Störungen [1].

Als digitale Sensoren werden oft Encoder verwendet. Dabei kann zwischen Inkrementalencoder und Absolutwertencoder unterschieden werden. Inkrementalencoder erzeugen aus Drehungen eines rotierenden Objekts, das sich aus mehreren gleich aufgebauten Bestandteilen zusammensetzt, periodische Ausgangsimpulse. Beispielsweise wird bei einem optischen Inkrementalencoder eine Strichgitter-Drehscheibe als Rotationsobjekt genutzt ([4]-[12]). Aus den Ausgangsimpulsen können mithilfe von Zählverfahren über die Periodendauer- und Frequenzmessung die Rotationsgeschwindigkeit ermittelt werden ([13]-[18]). Das Zählen der Winkelinkremente ermöglicht darüber hinaus die Bestimmung der relativen Winkelposition. Sollte die Nullposition bekannt sein, so kann sogar die absolute Winkelposition bestimmt werden. In Absolutwertencodern werden den Lagepositionen über den gesamten Auflösungsbereich des Encoders digitale Zahlenwerte zugewiesen. Beispielsweise kann dies mithilfe einer Gray-codierten Drehscheibe ([19]-[23]) umgesetzt werden. Auf diese Weise ist der Encoder in der Lage, die Winkelposition direkt auszulesen [4].

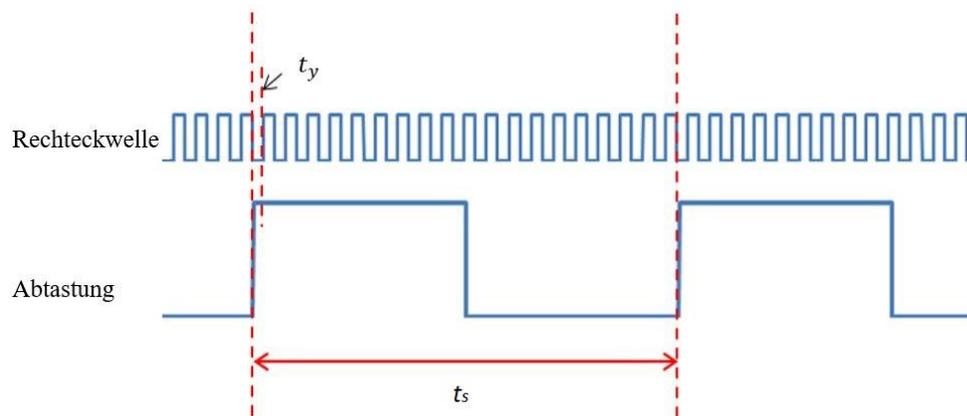
Abhängig vom zugrundeliegendem Messprinzip unterscheidet man zwischen optischen [24], kapazitiven [25] [26], induktiven [27] und magnetischen Encoder [28]-[36]. Im direkten Vergleich weist jeder Sensortyp individuelle Vor- und Nachteile auf. Beispielsweise sind optische Encoder aufgrund ihres einfachen Aufbaus sowie ihrer hohen Auflösung und Genauigkeit sehr beliebt in der Industrie [24]. Da das rotierende Bauteil jedoch aus Glas besteht, erweist sich der optische Encoder als fragil und ist daher für harsche

Umgebungsbedingungen nur bedingt geeignet. Hier haben sich aufgrund ihrer Robustheit und ihres einfachen Aufbaus magnetische Encoder als gute Option bewährt [24].

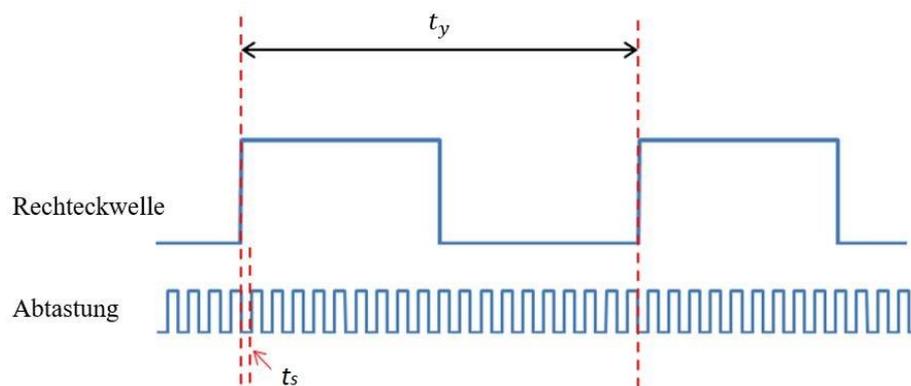
Die oben genannten digitalen Sensoren haben eine Sache gemeinsam: Grundsätzlich wird die relative Winkelverschiebung eines Objektes gemessen. Eine Drehzahlmessung wird über eine zeitliche Ableitung umgesetzt und erfolgt daher auf indirekte Weise. Abhängig vom Drehzahlbereich werden dabei folgende Messmethoden eingesetzt [37]:

- Bei hohen Drehzahlen empfiehlt sich die Frequenzmessung. Nachdem ein Signal über einen Schmitt-Trigger in eine Rechteckwelle umgewandelt worden ist, wird die Anzahl der Rechteckimpulse  $N_t$  innerhalb der Periodendauer der Abtastung  $t_a$  gezählt und die Signalfrequenz  $f_y$  über Gleichung (1.1) berechnet.

$$f_y = \frac{N_t}{t_a} = N_t * f_s \tag{1.1}$$



**Abbildung 1.1:** Schematische Darstellung der Frequenzmessung [37]



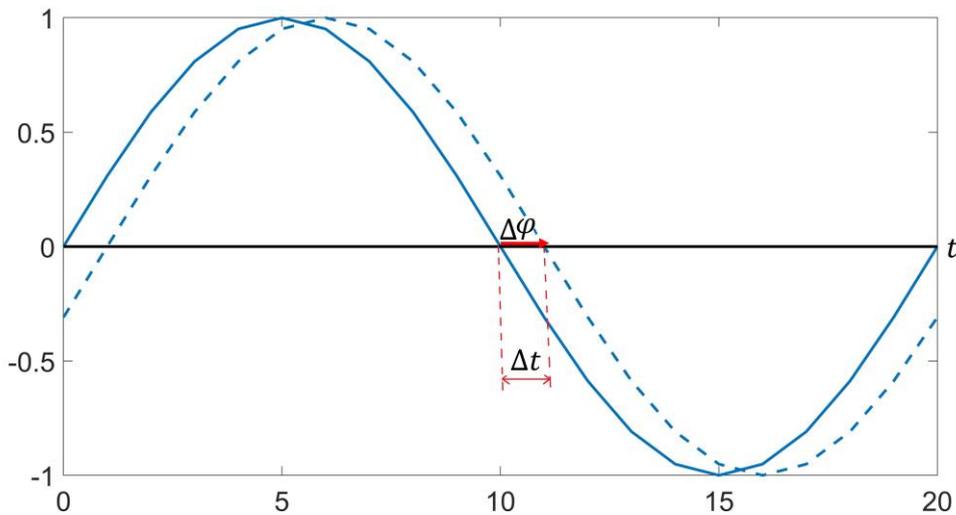
**Abbildung 1.2:** Schematische Darstellung der Periodendauermessung [37]

- Die Periodendauermessung wird bei niedrigen Drehzahlen angewandt. Hierbei wird die Anzahl der Abtastakte  $N_a$  mit einem Zeitintervall  $t_a$  innerhalb einer Periodendauer  $t_y$  der Rechteckwelle gezählt und die Periodendauer über Gleichung (1.2) ermittelt.

$$t_y = \frac{1}{f_y} = N_a * t_a \tag{1.2}$$

- Bei sehr niedrigen Drehzahlen stößt die Periodendauermessung aber an ihre Grenzen, weshalb in diesen Fällen die Drehzahlmessung über die Signalphase umgesetzt wird. Hierbei wird innerhalb des Abtastintervalls  $\Delta t$  die Phasenänderung  $\Delta\varphi$  ermittelt und die Signalfrequenz über Gleichung (1.3) berechnet.

$$f_y = \frac{\Delta\varphi}{2\pi * \Delta t} \quad (1.3)$$



**Abbildung 1.3:** Schematische Darstellung der Phasenbestimmung

Die obengenannten Messverfahren der Drehzahl rufen folgende Probleme hervor:

- Da die zeitliche Ableitung der Winkelposition digital über eine numerische Approximation berechnet wird, ist das Ergebnis in der Regel fehler- und rauschbehaftet [38].
- Es kann im Zählverfahren zur Frequenz- und Periodendauermessung zu Quantisierungsfehler, die insbesondere durch Abtastung des analogen Signals und der anschließenden Quantisierung als digitalen Wert generiert werden, kommen [16]-[18].
- Die Auflösung der Geschwindigkeit ist direkt proportional zu der Geschwindigkeit selbst. Je höher die Drehzahl desto besser ist die Auflösung bei der Frequenzmessung. Im Umkehrschluss weist die Drehzahlbestimmung bei der Frequenzmessung für langsame Geschwindigkeiten geringe Auflösungen, welche die Anforderungen der Industrie nicht erfüllen, auf.
- Bei der Periodendauermessung ergibt sich das umgekehrte Problem. Je höher die Drehzahl, desto schlechter wird die Auflösung bei der Periodendauermessung. Dadurch kann die Drehzahlmessung bei schnellen Geschwindigkeiten ungenügende Auflösungen aufweisen.
- Die Phasenmessung erweist sich als rechenintensiv und sehr rauschempfindlich. In [37] wird sie beispielsweise über eine diskrete Fourier-Reihe (DFR) umgesetzt, was in Kontext eines Echtzeitbetriebs eine Herausforderung darstellt und bei verrauschten Signalen ohne weitere Maßnahmen der Rauschunterdrückung zu signifikanten Messfehlern führt.

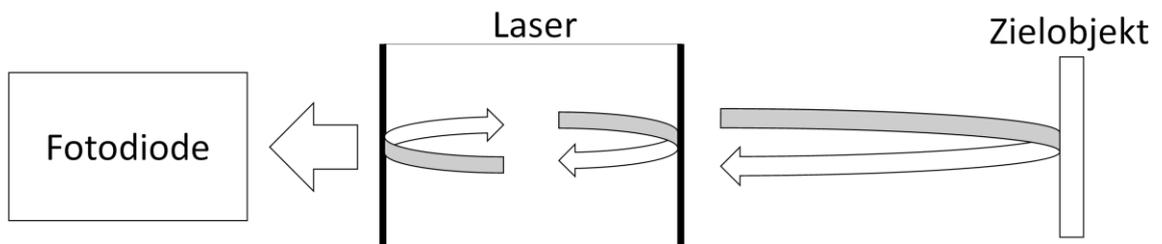
Insgesamt gelten Encoder als gute Optionen für die präzise Winkelpositionsmessung. Doch in der Drehzahlmessung können sie im niedrigem Drehzahlbereich nicht mit den analogen Varianten wie Tachometern mithalten. In Anbetracht dessen, dass in einigen Anwendungen die Geschwindigkeitsmessung einen höheren Stellenwert als die Positionsmessung genießt, gelten die Unzulänglichkeiten von Encoder und Zahnradsensoren in der Geschwindigkeitsmessung als technische Hemmnisse in der digitalen Antriebsregelung [3].

Aus diesem Grund erweist sich die Laserinterferometrie als ein Forschungsgebiet von großer Relevanz. Es handelt sich um eine etablierte Technologie, die in vielen Bereichen wie mechanische Messtechnik, Profilometrie, Vibrometrie und Geschwindigkeitsanalyse Anwendung findet. Im Gegensatz zu optischen Encodern erhalten Interferometriesensoren ihre Messergebnisse durch die Interferenz ihrer intrinsischen Wellenlängen. Dadurch erhält man inhärent hohe Auflösungen und Genauigkeiten [39].

Für die Geschwindigkeitsmessung hat sich der Laser Doppler Anemometer als eine sinnvolle Interferometrie-Technik für hohe Auflösungen und Genauigkeiten etabliert. Mithilfe eines Strahlteilers wird ein Laserstrahl in zwei Strahlen, die sich am Messpunkt wieder kreuzen, geteilt. Dadurch entsteht im Kreuzungsbereich ein Interferenzstreifenmuster. Bewegt sich ein Partikel durch das Streifenmuster, kommt es durch den Doppler-Effekt zu einer Veränderung der Laserfrequenz, die direkt proportional zu der Geschwindigkeit der Messoberfläche ist. Auf diese Weise ist eine direkte Messung von Geschwindigkeiten möglich [40].

Die Anwendung der Laser-Doppler Anemometrie bringt jedoch einige Nachteile mit sich. Aufgrund ihrer komplexen optischen Systemstruktur erweisen sich Laser-Doppler-Anemometer als sehr teure und große Geräte. Zwar sind die technischen Ergebnisse bei ihrer Anwendung in Servomotoren vielversprechend. Doch die Größe und Kosten konnten bisher nicht auf ein akzeptables Maß reduziert werden [24].

Aus diesem Grund erfreut sich die „Self-mixing“-Interferometrie (=SMI) wachsender Beliebtheit in der Forschung [41] [42]. „Self-mixing“-Interferometrie ist eine Messtechnik, in welcher der Laserstrahl einer Laserdiode von einem Objekt zurück zum Laser reflektiert wird. Es kommt zu einer Interferenz zwischen dem reflektierten Licht und dem Lichtstrahl des Lasers, wodurch die Amplitude und Frequenz des Lasers verändert werden. Indem die Ausgangsleistung eines Lasers mithilfe einer Fotodiode, die in der Laserdiode integriert ist, beobachtet wird, kann ein SMI-Signal extrahiert werden, mit dem physikalische Eigenschaften wie Vibrationen ([43]-[52]), Geschwindigkeit ([24], [39], [46], [53]-[63]) und Verschiebungen ([24] [56], [64]-[81]) usw. ermittelt werden können [39]. Abbildung 1.4 visualisiert den schematischen Aufbau eines SMI-Systems.



**Abbildung 1.4:** Schematischer Aufbau des SMI-Systems

Im Vergleich zu anderen Interferometrie-Methoden wie die Laser-Doppler Anemometrie hat SMI folgende Vorteile zu bieten [24] [82]:

- Wie in Abbildung 1.4 zu sehen ist, werden außer einer Laserdiode mit integrierter Fotodiode sowie bis zu zwei Linsen keine weiteren optischen Komponenten benötigt. Daraus ergibt sich ein sehr einfaches und kompaktes System.
- Während die Laserdiode als Lichtquelle fungiert, kann die integrierte Fotodiode als Detektor genutzt werden. Dadurch wird für die Methode kein externer Fotodetektor benötigt.
- Durch seine einfache Konfiguration ist das System von sich aus richtig ausgerichtet. Dadurch kann man sich den Aufwand für die Ausrichtung des optischen Pfades sparen.
- Der Laserstrahl trägt die effektiven Informationen und kann überall ermittelt werden.
- Die Methodik kann auf raue Oberflächen angewandt werden.
- Abhängig von der angewendeten Signalverarbeitungsmethode können Auflösungen von einigen Nanometer erreicht werden.
- Das System ist sehr sensitiv und kann eine kohärente Detektion im Quantenbereich realisieren [83].
- Die Methodik besitzt eine hohe Bandweite.
- Eine Richtungsdetektion ist unter bestimmten Bedingungen sogar visuell realisierbar.

Aufgrund dieser Eigenschaften erweist sich SMI als eine sehr vielversprechende Methode, mit der direkte Geschwindigkeitsmessungen kostengünstig umgesetzt werden könnten.

Für eine industrielle Nutzung von SMI in der Geschwindigkeitsmessung müssen jedoch Herausforderungen, die mit der Nutzung von SMI verbunden sind, überwunden werden. Dazu sind weitere Forschungsanstrengungen vonnöten. Die vorliegende Arbeit zielt darauf ab, einen signifikanten Beitrag in diesem Forschungsgebiet zu leisten.

## 1.2 Stand der Technik

Die Geschwindigkeitsmessung gehört zu den vielversprechendsten Anwendungsfällen der SMI-Technik. Die erste Publikation, in der mit einem Gas-Laser die SMI-Technik für die Geschwindigkeitsmessung genutzt worden ist, wurde 1968 von Rudd veröffentlicht [57]. Doch schon nach kurzer Zeit sind aufgrund der schnellen Entwicklung der Lasertechnologie Berichte über Geschwindigkeitsmessungen aufgetaucht, in denen Laserdioden statt Gaslasern verwendet worden sind [46] [58] [84]. Seitdem ist Geschwindigkeitsmessung mithilfe von SMI ein beliebtes Thema der Forschung geworden und geblieben.

Unter anderem haben [60] durch die Nutzung einer analogen Phasenregelschleife eine Messgenauigkeit von 1.3% innerhalb eines Geschwindigkeitsbereichs von 10-470mm/s erreicht. [59] haben den Einfluss verschiedener Systemparameter wie den Abstand zwischen Laser und Zielobjekt, und der Reflektionsgrad des Zielobjekts auf die Genauigkeit der Geschwindigkeitsmessung analysiert und konnten bei Geschwindigkeiten bis zu 100mm/s eine Genauigkeit von 1% erzielen. [79] konnte unter Nutzung von zwei parallel ausgerichtete Laserdioden einen relativen Fehler von 0.6% realisieren, während [78] wiederum ein SM-Gitterinterferometer entwickelt hat, mit dem ein Fehler von 0.5%

erreicht werden konnte.

Bezüglich der Richtungsdetektion hat [62] eine solche im Geschwindigkeitsbereich 4-30 mm/s über eine trianguläre Strommodulation realisiert, während [85] die trianguläre Strommodulation für die Richtungsbestimmung in optische Bewegungssensoren verwendet hat. Das Funktionsprinzip hierbei besteht darin, dass sich bei triangulärer Strommodulation die Frequenzen der SMI-Signalteile mit positiver oder negativer Steigung voneinander unterscheiden.

Eine ausführliche Auseinandersetzung mit der Geschwindigkeitsmessung über SMI-Signale ist in [24] erfolgt. Hierbei sind verschiedene Signalverarbeitungsmethoden, mit denen die Rotationsgeschwindigkeit eines Objekts mit SMI-Signalen ermittelt werden, entwickelt und getestet worden. Es sind verschiedene Fensterfunktionen, mit dem die Dopplerfrequenz aus dem Frequenzspektrum eines FFTs geschätzt wird, analysiert worden. Zudem ist mit dem „Maximum Likelihood Estimation“ (= MLE) eine Schätzmethodik entwickelt worden, bei dem mithilfe von SMI-Signaldaten und einem statistischen Modell des Systems die Dopplerfrequenz, welche die höchste Wahrscheinlichkeit hat, gemäß der Signaldaten richtig zu sein, ermittelt wird. Auch die Nutzung eines erweiterten Kalman Filters ist umgesetzt und geprüft worden. Insgesamt konnte MLE mit einer Genauigkeit von 0.5% das beste Ergebnis erzielen.

Doch wegen unterschiedlicher Herausforderungen, die in Kapitel 2.2 näher besprochen werden, konnte eine industrielle Anwendung bisher noch nicht realisiert werden. Entwickelte Methoden wie das MLE sind entweder zu rechenintensiv oder können die in viele industrielle Anwendungsgebiete geltenden Genauigkeitsanforderungen nicht erfüllen.

### 1.3 Aufgabenstellung

Diese Arbeit zielt auf die Entwicklung von Methoden ab, die eine direkte Messung von Rotationsgeschwindigkeiten mithilfe von SMI ermöglichen soll. Einer der größten Vorzüge von SMI ist sein einfacher und kompakter Systemaufbau und die dadurch geringeren Produktionskosten. Dies sollte in einer industriellen Anwendung möglichst beibehalten werden, weswegen sich diese Arbeit hardwaretechnisch auf das Wesentliche beschränkt und seinen Fokus auf die Entwicklung von digitaler Signalverarbeitungsalgorithmen legt. Die Algorithmen sollen in der Lage sein, Probleme bei der Nutzung von SMI zu überwinden und Geschwindigkeitsmessungen mit hoher Genauigkeit auch unter widrigen Rahmenbedingungen zu realisieren. Die wesentlichen Vorteile der SMI-Technologie im Vergleich zu anderen Methoden der Geschwindigkeitsmessung sollen dabei beibehalten werden.

Zu diesem Zweck werden die Theorie des SMI und die Herausforderungen bei der Nutzung von SMI in der Rotationsgeschwindigkeitsmessung aufgearbeitet sowie der Stand der Technik in der Signalverarbeitung analysiert. Die generierten Erkenntnisse werden anschließend zur Entwicklung neuer Signalverarbeitungsmethoden verwendet.

Dabei beschränkt sich diese Arbeit nicht auf die Weiterentwicklung von Methoden, die in

Rahmen der Rotationsgeschwindigkeitsmessung mithilfe von SMI bereits entstanden sind. Auch wenn dies unter Umständen sinnvoll ist und sich diese Option offengehalten wird, wird auch die Nutzung von Signalverarbeitungsmethoden aus anderen Anwendungsgebieten in Betracht gezogen, um eine unvoreingenommene Perspektive der Situation zu gewährleisten.

## 1.4 Lösungsweg

Entsprechend der Aufgabenstellung sind in Rahmen der vorliegenden Arbeit mehrere Signalverarbeitungsmethoden für die Rotationsgeschwindigkeitsmessung von SMI-Signalen entstanden. Sie zielen alle auf die korrekte Ermittlung der Dopplerfrequenz eines SMI-Signals unter additives Rauschen und Amplitudenmodulation ab. Die Frequenzermittlung stellt bei der Drehgeschwindigkeitsmessung mit SMI-Signalen den Kernprozess dar (siehe Kapitel 2.2), weswegen diesem die größte Aufmerksamkeit geschenkt worden ist. Alle entwickelten Methoden nutzen als Grundlage die Korrelationsfunktionen und werden im Folgenden kurz beschrieben:

- Beim ersten Verfahren wird die Frequenzbestimmung über die Periodenlänge der Autokorrelationsfunktion des SMI-Signals durchgeführt. Die Autokorrelation ermöglicht es, additives Rauschen ohne Verlust von Frequenzinformationen zu unterdrücken. Zur Reduktion von Messfehlern wird die Signalverarbeitung nur an Signalabschnitte, die ein ausreichend hohes Signal-Rausch-Verhältnis (SNR) besitzen, durchgeführt. Dazu durchläuft das SMI-Signal initial einen Signalselektionsalgorithmus. Darüber hinaus werden die Ergebnisse über ein Durchschnittsfenster verbessert.
- In dem zweiten Verfahren wird eine neue Methodik genutzt, die in Rahmen dieser Arbeit „Kreuzkorrelationsspektrum“ genannt wird. Es visualisiert die Amplitude der Kreuzkorrelationsfunktion zwischen dem SMI-Signal und eines einfachen Sinussignals als Funktion der Frequenz des Sinussignals. Mit dem generierten Spektrum können Aussagen über die Frequenzen des SMI-Signals auch unter sehr starkem Rauschen gemacht werden. Die Methodik stellt eine valide Alternative zur Fast-Fourier-Transformation und Kontinuierliche Wavelet Transformation dar, da im Kreuzkorrelationsspektrum die Frequenzauflösung vom Nutzer unabhängig von der Zeit selbst eingestellt werden kann und dadurch die Heisenberg'sche Unschärferelation kein Problem darstellt. Aus dem Kreuzkorrelationsspektrum wird mithilfe eines Schätzverfahrens und des Durchschnittsfensters die Dopplerfrequenz des SMI-Signals ermittelt.
- Die letzten zwei Methoden stellen eine Weiterentwicklung des Kreuzkorrelationsspektrums dar. Sie zielt darauf ab, die Berechnungszeit bei der Generierung des Kreuzkorrelationsspektrums zu reduzieren und über die Frequenzbestimmung hinaus die Signalphase auch unter sehr starkem Rauschen mithilfe der diskreten Fourier-Reihe einer Kreuzkorrelationsfunktion zu ermitteln. Die verschiedenen Methoden unterscheiden sich darin, welche Variante der Kreuzkorrelationsfunktion in der Frequenz- oder Phasenbestimmung genutzt worden ist. Es existiert nämlich die symmetrische und unsymmetrische Kreuzkorrelations-

funktion, die sich in einigen Charakteristika voneinander unterscheiden. Zur Reduktion von systematischen Fehlern in der Phasenbestimmung ist darüber hinaus der iterativen Selbstkorrekturalgorithmus eingesetzt worden.

Letztlich wird die vorliegende Arbeit wie folgt aufgebaut:

Kapitel 2 beschreibt die „self-mixing“-Interferometrie näher. Es werden mit dem „Drei Spiegel“-Modell sowie dem Lang & Kobayashi Modell die physikalischen Grundlagen der SMI-Technologie vorgestellt. Darüber hinaus wird erläutert, inwiefern die „self-mixing“-Interferometrie in der Messung von Rotationsgeschwindigkeiten genutzt werden kann und welche Herausforderungen hiermit verbunden sind.

Anschließend befasst sich Kapitel 3 mit den Grundlagen verschiedener Verarbeitungsmethoden, die bereits etabliert sind und in den hier neu entwickelten Methoden Anwendung finden. Es werden theoretische Grundlagen und Funktionsprinzipien beschrieben und ihre Leistung und Verhaltensweisen mit verschiedenen Simulationen visualisiert.

In Kapitel 4 werden die Signalverarbeitungsmethoden, die in Rahmen dieser Arbeit für die Rotationsgeschwindigkeitsmessung mithilfe von SMI-Signalen entwickelt worden sind, vorgestellt. Es werden der Aufbau und die Funktionsprinzipien jeder entwickelten Methode näher erläutert sowie deren Leistung mithilfe von Simulationen analysiert.

Kapitel 5 präsentiert die Anwendung der entwickelten Signalverarbeitungsmethoden an reale SMI-Signale. Nachdem das Testsystem, das in Rahmen dieser Arbeit für die Generierung von SMI-Signalen genutzt wird, vorgestellt worden ist, wird jede Methode an reale SMI-Signale durchgeführt und deren Leistungsfähigkeit in der Rotationsgeschwindigkeitsmessung mithilfe von SMI-Signalen evaluiert.

Abschließend folgt eine Zusammenfassung und Ausblick über weiterführende Forschungsanstrengungen.

## 2 "Self-mixing"-Interferometrie

Dieses Kapitel beschreibt mit der "Self-mixing"-Interferometrie (SMI) die grundlegende Sensortechnologie, die in Rahmen dieser Arbeit genutzt wird. Hierbei handelt es sich um eine Messtechnik, in welcher der Laserstrahl einer Laserdiode von einem Messobjekt zurück zum Laser reflektiert wird. Durch die Interferenz zwischen dem reflektierten Licht und dem Lichtstrahl des Lasers, kommt es zu Veränderungen der Lasereigenschaften, die Informationen über physikalische Parameter des Messobjektes enthalten und mithilfe einer Fotodiode als Signal extrahiert werden können.

In der Vergangenheit ist die SMI-Technologie für eine Vielzahl für Anwendungsgebiete genutzt worden. In der Literatur finden sich SMI-Methoden für die Messung von Verschiebungen ([24] [56], [64]-[81]), Geschwindigkeiten ([24], [39], [46], [53]-[63]), Vibrationen ([43]-[52]), Winkelposition ([86]-[89]), sowie für der Bildverarbeitung ([90]-[99]), Akustik ([100]-[102]) und Laseranalyse ([103]-[110]).

Diese Arbeit wird sich hauptsächlich auf die Nutzung der SMI-Technologie in der Geschwindigkeitsmessung konzentrieren. Dazu werden im ersten Schritt die physikalischen Grundlagen der SMI-Technologie vorgestellt. Anschließend beschäftigt sich diese Arbeit mit der Nutzung der SMI-Technologie in der Geschwindigkeitsmessung.

### 2.1 Physikalische Grundlagen

Im Folgenden sollen die physikalischen Grundlagen der „self-mixing“-Interferometrie erläutert werden. Dessen Funktionsprinzip kann mithilfe des „Drei Spiegel“-Modell und des Modells von Lang & Kobayashi [111] beschrieben werden.

#### 2.1.1 „Drei Spiegel“-Modell

Im „Drei Spiegel“-Modell wird ein Fabry-Perot Laser [112] mit den Reflektionskoeffizienten  $r_1$  und  $r_2$  an den Laserfacetten sowie ein Zielobjekt mit dem Reflektionskoeffizient  $r_3$  beschrieben (siehe Abbildung 2.1).

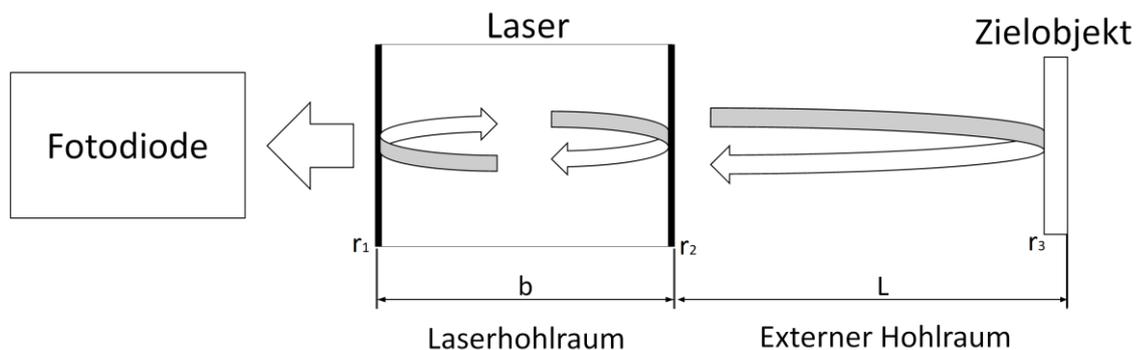


Abbildung 2.1: Schematischer Aufbau des SMI-Systems mit Kennzeichnung der Hohlräume

Um die Analyse zu erleichtern, wird davon ausgegangen, dass innerhalb des externen Hohlraums nur eine Reflektion stattfindet ( $r_2 r_3 = 1$ ). In diesem Fall kann der effektive Reflektionskoeffizient  $r_{eff}$  an der Frontfacette des Lasers durch folgende Formel beschrieben werden [112] [113].

$$r_{eff} = r_2 + (1 - |r_2|^2)r_3 e^{-j\omega_s \tau_{ex}} \quad (2.1)$$

Dabei repräsentiert  $\tau_{ex}$  und  $\omega_s$  die Umlaufzeit des Lasers im externen Hohlraum sowie die durch das SMI-Signal veränderte optische Frequenz. Die Umlaufzeit wird durch  $\tau_{ex} = 2L/c$  berechnet, wobei  $c$  die Lichtgeschwindigkeit und  $L$  die Länge des externen Hohlraums darstellt.  $1 - |r_2|^2$  stellt wiederum die Lichttransmission der Laserfacette mit dem Reflektionskoeffizient  $r_2$  dar. Der effektive Reflektionskoeffizient  $r_{eff}$  kann jedoch auch in Verhältnis zu seiner Amplitude  $A_{eff}$  und seine Phase  $\phi_{eff}$  beschrieben werden [114].

$$r_{eff} = A_{eff} e^{-j\phi_{eff}} \quad (2.2)$$

Haben die Reflektionskoeffizienten reelle und positive Werte, so ergibt sich die Amplitude und Phase aus den folgenden Formeln [112] [115].

$$A_{eff} = r_2 [1 + \kappa \cos(\omega_s \tau_{ex})] \quad (2.3)$$

$$\phi_{eff} = \kappa \sin(\omega_s \tau) \quad (2.4)$$

Dabei ist  $\kappa$  die Feedbackstärke und kann durch  $\kappa = (1 - r_2^2)r_3/r_2$  berechnet werden.  $\omega_s \tau_{ex}$  stellt wiederum die Phase im externen Hohlraum dar. Für ein stabiles SMI-Signal muss die Umlaufphase im internen Hohlraum des Lasers ein Vielfaches von  $2\pi$  ergeben. Dementsprechend kann die Phasenbedingung des „Drei Spiegel“-Modells durch folgende Gleichung beschrieben werden [112]:

$$\Delta \phi_L = -\alpha(g_c - g_{th})d + \tau_{in}(\omega_s - \omega_0) + \phi_{eff} \quad (2.5)$$

Die Amplitudenbedingung für ein stabiles SMI-Signal lautet wiederum wie folgt [112] [113] [115]:

$$r_1 A_{eff} e^{[(g_c - a_s)d]} = 1 \quad (2.6)$$

Dabei entspricht  $\Delta \phi_L$  der Änderung der Umlaufphase im Vergleich zu einem Vielfachen von  $2\pi$ , während  $\omega_0$  und  $\tau_{in}$  die optische Frequenz ohne den Einfluss von SMI sowie die Umlaufzeit im internen Hohlraum repräsentieren. Die Variable  $\alpha$  bezeichnet wiederum den Erweiterungsfaktor der Linienbreite (LEF) ([116]-[118]). Dieser Parameter beschreibt Lasereigenschaften wie das Verhalten zum externen optischen Feedback, Spektraleffekt sowie zum Modulationsverhalten und ist daher von großer Wichtigkeit [70][107]. Unter  $g_c$  und  $g_{th}$  versteht man die Verstärkung der Laserschwelle mit und ohne externen Hohlraum. Sie können durch folgende Formeln ermittelt werden [24].

$$g_{th} = a_s + d^{-1} \ln [(r_1 r_2)^{-1}] \quad (2.7)$$

$$g_c = a_s + \frac{1}{d} \ln \left( \frac{1}{r_1 r_2 [1 + \kappa \cos(\omega_s \tau_{ex})]} \right) \quad (2.8)$$

$a_s$  steht dabei für die optischen Verluste, die im internen Hohlraum entstehen. Die Verstärkungsdifferenz der Laserschwelle lautet wie folgt:

$$\Delta g = g_c - g_{th} = \frac{-\ln(1 + \kappa \cos(\omega_s \tau_{ex}))}{d} \quad (2.9)$$

Indem der natürliche Logarithmus mit der folgenden Reihe beschrieben wird (siehe Gleichung (2.10)), kann die Verstärkungsdifferenz zu Gleichung (2.11) approximiert werden.

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad (2.10)$$

$$\Delta g = g_c - g_{th} \approx -\frac{\kappa}{d} \cos(\omega_s \tau_{ex}) \quad (2.11)$$

Wird Gleichung (2.11) zusammen mit Gleichungen (2.4) in Gleichung (2.5) eingesetzt sowie  $\Delta \phi_L = 0$  angenommen, so entsteht unter Nutzung des mathematischen Zusammenhangs in Gleichung (2.12) die Gleichung (2.13) [112] [113][115]. Hierbei bezeichnet die Variable  $\alpha$  den Erweiterungsfaktor der Linienbreite (LEF) ([116]-[118]).

$$\sin(x) + \alpha \cos(x) = \sqrt{1 + \alpha^2} * \sin(x + \arctan(\alpha)) \quad (2.12)$$

$$\omega_s \tau = \omega_0 \tau_{ex} - \frac{\kappa}{\tau_{in}} \tau_{ex} \sqrt{1 + \alpha^2} * \sin(\omega_s \tau + \arctan(\alpha)) \quad (2.13)$$

Wird  $\phi_s = \omega_s \tau_{ex}$  und  $\phi_0 = \omega_0 \tau_{ex}$  festgelegt, so kann mit Gleichung (2.13) die Kernformel des SMI-Modells abgeleitet werden.

$$\phi_s = \phi_0 - C \sin[\phi_s + \arctan(\alpha)] \quad (2.14)$$

$\phi_s$  und  $\phi_0$  stellen dabei die Phasen des Lichts, die abhängig vom durch das SMI-Signal beeinflussten sowie von der unbeeinflussten optischen Frequenz  $\omega_s$  und  $\omega_0$  sind, dar. Der Parameter C wird „optischer Feedbackfaktor“ genannt und durch Gleichung (2.15) ermittelt.

$$C = \frac{\kappa}{\tau_{in}} \tau_{ex} \sqrt{1 + \alpha^2} \quad (2.15)$$

Der „optischer Feedbackfaktor“ beschreibt verschiedene Feedbackbereiche und bestimmt die Form des SMI-Signals [24].

1. Sehr schwaches optisches Feedback ( $C \ll 1$ ): Sowohl die augenblickliche Frequenz also auch die emittierte Leistung weisen eine kosinusförmige Gestalt auf.

2. schwaches optisches Feedback ( $0 < C < 1$ ): Das SMI-Signal erhält eine nicht symmetrische Form.
3. Moderates optisches Feedback ( $1 < C < 4.6$ ): Die Leistungsfunktion zeigt Hysterese, wodurch das Signal sägezahnförmig wird.
4. Starkes optisches Feedback ( $C > 4.6$ ): Interferenzmessungen sind aufgrund von Instabilitäten des SMI-Signals nicht möglich [82].

Mithilfe des „Drei-Spiegel“-Modells können einige wichtige Erkenntnisse abgeleitet werden. Um jedoch weitere relevante physikalische Phänomene und die damit verbundene Effekte auf den Laser in der Betrachtung miteinzubeziehen, muss man sich mit dem „Lang & Kobayashi“ Modell näher befassen.

### 2.1.2 Lang & Kobayashi Modell

Das „Lang & Kobayashi“(LK)-Modell ist 1980 das erste Mal vorgestellt worden und besteht aus drei differentiellen Verzögerungsgleichungen [111], die zwar auf den Lamb's Gleichungen basieren, aber um eine Gleichung für die Konzentration des Zustands erweitert worden sind [41]. Im Gegensatz zum „Drei Spiegel“-Model beschreiben die LK-Gleichungen auch das aktive Material und enthalten Laseroszillationsgleichungen. Dadurch sind die LK-Gleichungen in der Lage, das dynamische Verhalten eines Lasers mit externem optischem Feedback viel umfassender zu beschreiben [114]. Die LK-Gleichungen lauten [24]:

$$\frac{dE(t)}{dt} = \frac{1}{2} \left\{ G[N(t) - N_0] - \frac{1}{\tau_p} \right\} E(t) + \frac{\kappa}{\tau_{in}} E(t - \tau_{ex}) \cos [\omega_0 \tau_{ex} + \phi(t) - \phi(t - \tau_{ex})] \quad (2.16)$$

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = \frac{1}{2} \alpha G[N(t) - N_{th}] - \frac{\kappa}{\tau_{in}} * \frac{E(t - \tau_{ex})}{E(t)} * \sin [\omega_0 \tau_{ex} + \phi(t) - \phi(t - \tau_{ex})] \quad (2.17)$$

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{J\eta}{ed} - \frac{N(t)}{\tau_s} - G[N(t) - N_0]E^2(t) \quad (2.18)$$

Die Gleichungen (2.16-18) veranschaulichen das dynamische Verhalten der Amplitude  $E(t)$  und der Phase  $\phi(t)$  des elektrischen Felds sowie der Trägerdichte  $N(t)$ . Hierbei wird  $\phi(t)$  über  $\phi(t) = [\omega(t) - \omega_0]t$  ermittelt, wobei  $\omega(t)$  die augenblickliche optische Frequenz eines Lasers mit externem optischem Feedback repräsentiert [114].

Die Dynamik eines Lasers mit externem optischem Feedback wird über Parameter wie die Umlaufzeit  $\tau_{ex}$  oder die Feedbackstärke  $\kappa$ , die den externen Hohlraum beschreiben, und über den Injektionsstrom  $J$  bestimmt. Weitere Parameter der Gleichungen (2.16-18) sind in Tabelle 2.1 definiert [119] [120]. Sie stellen Lasercharakteristika dar und werden dementsprechend als Konstanten betrachtet.

**Tabelle 2.1:** Bedeutung der Laserparameter in den LK-Gleichungen

Symbol	Bedeutung
$\alpha$	Erweiterungsfaktor der Linienbreite
$d$	Schichtdicke der aktiven Region
$\tau_s$	Trägerlebensdauer
$\Gamma$	Confinement-Faktor
$\tau_{in}$	Umlaufzeit im internen Hohlraum
$\tau_p$	Photonenlebensdauer
$N_0$	Trägerdichte ohne optischen Feedback
$N_{th}$	Trägerdichte des Laserschwelle
$G_N$	Modaler Verstärkungskoeffizient
$e$	Elementarladung
$\eta$	Interne Quanteneffizienz
$\varepsilon$	Nichtlineare Kompressionskoeffizient der Verstärkung

Gleichung (2.14) kann aus den stationären Lösungen der LK-Gleichungen abgeleitet werden. In einem solchen Fall gilt:

$$\frac{dE(t)}{dt} = 0 \quad (2.19)$$

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = \omega_s - \omega_0 \quad (2.20)$$

$$\frac{dN(t)}{dt} = 0 \quad (2.21)$$

Indem  $E(t) = E(t - \tau_{ex}) = E_s$ ,  $\phi(t) = (\omega_s - \omega_0)t$  und  $N(t) = N_s$  in die LK-Gleichungen eingesetzt werden und die nichtlineare Verstärkung ignoriert wird, entstehen die folgende stationäre Lösungen [111].

$$E_s^2 = \frac{\frac{J\eta}{eV} - \frac{N_s}{\tau_s}}{G_N(N_s - N_0)} \quad (2.22)$$

$$N_s = N_{th} - \frac{2\kappa \cos(\omega_s \tau_{ex})}{\tau_{in} G_N} \quad (2.23)$$

$$\omega_s \tau_{ex} = \omega_0 \tau_{ex} - \frac{\kappa}{\tau_{in}} \tau \sqrt{1 + \alpha^2} \sin(\omega_s \tau + \arctan \alpha) \quad (2.24)$$

Werden die Gleichungen (2.15) sowie  $\phi_s = \omega_s \tau_{ex}$ ,  $\phi_0 = \omega_0 \tau_{ex}$  in die Gleichungen (2.22-24) eingesetzt, kann aus Gleichung (2.24) das „Drei Spiegel“-Modell (Gleichung (2.14)) abgeleitet werden.  $\phi_0$  kann hierbei durch  $\phi_0 = 4\pi L/\lambda_0$  über die unbeeinflusste Wellenlänge des Lasers  $\lambda_0$  sowie die Länge des externen Hohlraums  $L$  bestimmt werden [114].

Gleichung (2.22) ist proportional zu der Ausgangsleistung des Lasers und kann unter Rücksichtnahme von Gleichung (2.23) sowie der Annahme, dass  $\kappa \ll \tau_{in}/2\tau_p$  gilt, zu Gleichung (2.25) linearisiert werden [24].

$$P \propto E_s^2 \approx \frac{\tau_p}{\tau_{ex}} \left[ \frac{\tau_{ex} J \eta}{ed} - N_{th} \right] \left[ 1 + \frac{2\kappa\tau_p}{\tau_{in}} \cos(\omega_s \tau_{ex}) \right] \quad (2.25)$$

Die Ausgangsleistung des Lasers ohne optisches Feedback kann wiederum mit folgender Gleichung beschrieben werden.

$$P_0 \propto E_0^2 \approx \frac{\tau_p}{\tau_{ex}} \left[ \frac{\tau_{ex} J \eta}{ed} - N_{th} \right] \quad (2.26)$$

Dementsprechend kann Gleichung (2.25) wie folgt beschrieben werden.

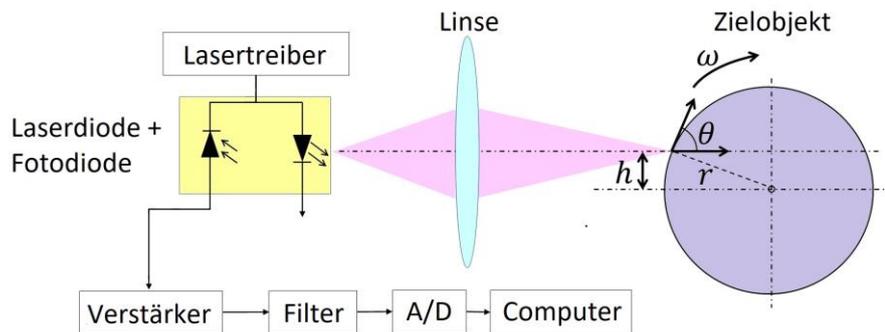
$$P \propto P_0 * \left[ 1 + \frac{2\kappa\tau_p}{\tau_{in}} \cos(\omega_s \tau_{ex}) \right] \quad (2.27)$$

Die Modulation der Ausgangsleistung ist das gesuchte SMI-Signal und stellt eine Kosinusfunktion dar (siehe Gleichung (2.27)). Zusammen mit Gleichung (2.14) bildet es das SMI-Modell ab und wird zur Beschreibung der Wellenform eines SMI-Signals angewandt. Dabei wird auf unkomplizierte Weise aus  $\phi_0$  das SMI-Signal und umgekehrt ermittelt [114].

## 2.2 Geschwindigkeitsmessung mit “Self-mixing”- Interferometrie

Dieses Kapitel beschreibt die Nutzung von SMI für die Messung von Rotationsgeschwindigkeiten näher. Abbildung 2.2 visualisiert das schematische Modell eines solchen SMI-Sensors.

Die Laserdiode emittiert ein Laserstrahl, der von der Linse fokussiert wird und anschließend auf das Zielobjekt trifft. Ein Teil des Lasers wird von der Oberfläche des Zielobjekts zurück in den Laser reflektiert und interferiert mit ihm. Dadurch wird sowohl die Amplitude als auch die Frequenz des Lasers verändert. Mithilfe der Beziehungen zwischen der Verstärkung im Medium, des Reflexionsvermögens im internen Laserhohlraum sowie anderer Laserparameter können auf diese Weise die statischen Eigenschaften eines Lasers unter optischem Feedback ermittelt werden [121].



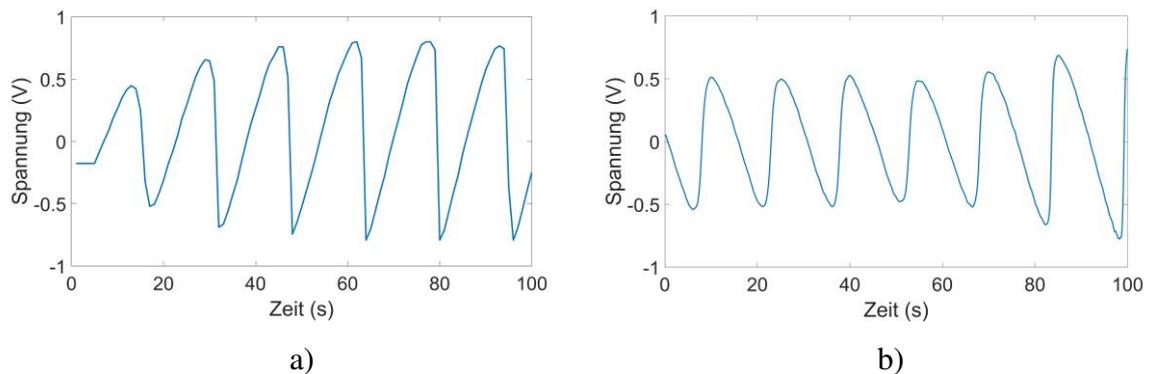
**Abbildung 2.2:** Schematischer Aufbau eines SMI-Geschwindigkeitssensors (Angepasst mit Erlaubnis von [39] © The Optical Society)

Die Änderung der Frequenz wird in diesem System durch den Doppler-Effekt hervorgerufen und dementsprechend Dopplerfrequenz genannt. Sie lässt sich durch folgende Gleichung ermitteln:

$$f_D = \frac{2v \cos \theta}{\lambda} \quad (2.28)$$

Dabei repräsentiert  $\lambda$  die Wellenlänge der Laserdiode,  $\theta$  den Winkel zwischen den Einfallrichtung des Laserstrahls und der Bewegungsrichtung des Zielobjekts sowie  $v$  die lineare Geschwindigkeit des Zielobjekts. Wie in Gleichung (2.28) deutlich zu erkennen ist, verhält sich die Doppler-Frequenz linear proportional zur linearen Geschwindigkeit des Zielobjekts  $v$ . In der Regel sind die anderen Parameter der Formel wie der Einfallswinkel des Lasers und die Laserwellenlänge nach einer festen Positionierung des Sensors Konstanten, wodurch die Rotationsgeschwindigkeit die einzige Variable der Formel darstellt. Wenn die Dopplerfrequenz bekannt ist, kann nach einer Umstellung der Formel die Rotationsgeschwindigkeit mit Leichtigkeit abgeleitet werden. Somit stellt die Frequenzabschätzung den wichtigsten Teil der Rotationsgeschwindigkeitsmessung dar. Die Bestimmung der Dopplerfrequenz ist über die Tatsache möglich, dass der Dopplereffekt die Ausgangsleistung des Lasers moduliert. Indem man die Ausgangsleistung eines Lasers mithilfe einer Fotodiode, die in vielen Laserdioden bereits integriert ist, beobachtet [82] oder zur Vereinfachung der Sensorkonfiguration die Ausgangsspannung des Lasers aufzeichnet [122], kann ein SMI-Signal extrahiert werden, welches Informationen zur Dopplerfrequenz enthält. Dieses Signal kann anschließend durch verschiedene Methoden und Algorithmen bearbeitet werden, um die Doppler-Frequenz zu ermitteln.

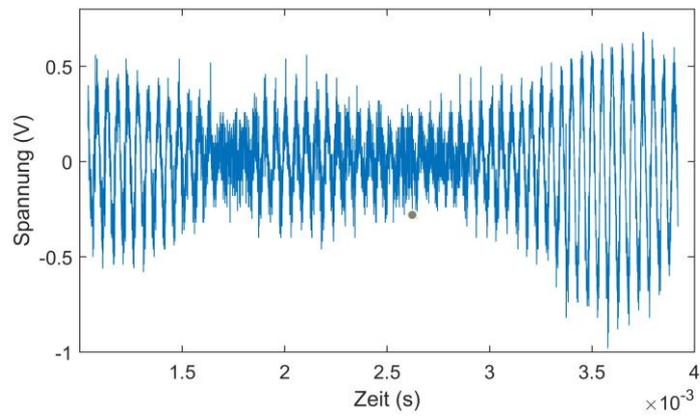
Die Bewegungsrichtung eines Objekts kann am SMI-Signal daran erkannt werden, dass sich bei ausreichend hohen optischen Feedbackfaktor ( $C > 0.5$ ) die Steigung des SMI-Signalverlaufs je nach Bewegungsrichtung unterscheidet (siehe Abbildung 2.3) [123]. Diese Charakteristik ist der „self-mixing“-Interferometrie eigen und ermöglicht es, eine Richtungsdetektion ohne Erhöhung der Systemkomplexität umzusetzen. Dabei erfolgt in der Regel die Differenzierung über eine Unterscheidung zwischen SMI-Signale [67] [68]. In [47] ist die Richtungsdetektion über eine Methode, welche die Tastgrad des SMI-Signals nutzt, umgesetzt worden.



**Abbildung 2.3:** SMI-Signale bei unterschiedliche Bewegungsrichtungen; a) gegen Uhrzeigersinn; b) im Uhrzeigersinn

Doch mehrere Faktoren erschweren die Nutzung von „self-mixing“-Interferometrie im erheblichen Maße. Die Erweiterung des Signalspektralbereichs ist eines der größten Probleme. Es wird durch verschiedene Aspekte wie Vibrationen, den Speckle-Effekt, sowie Oberflächenänderungen oder der Geschwindigkeitsverteilung im Lichtpunkt hervorgerufen [63] und verursacht Amplituden- und Frequenzänderungen im SMI-Signal [3]. In [124] ist eine umfassende Analyse von Faktoren, die das Spektrum des SMI-Signals beeinflussen, durchgeführt worden. Die Geschwindigkeit, der Eintreffwinkel, der numerische Strahlengang des Lasers und unter der Bedingung, dass der Laserpunkt sich nahe dem Zentrum der Drehscheibe befindetet, auch Geschwindigkeitsänderungen um den Laserpunkt haben einen großen Einfluss auf das Signalspektrum. Das Oberflächenprofil des Messobjekts, die Laserlinienbreite, Systemvibrationen, Instabilitäten der Geschwindigkeiten und unter der Bedingung, dass der Laserpunkt sich weit entfernt vom Zentrum der Drehscheibe befindetet, auch Geschwindigkeitsänderungen um den Laserpunkt, haben wiederum einen geringfügigen Einfluss. Doch in der Regel werden SMI-Signale zusätzlich zur Erweiterung des Spektralbereichs durch additives Rauschen [24] und dynamische Offsets, die durch Umwelteinflüsse wie elektromagnetische Interferenzen oder Instabilitäten des Messsystems entstehen, gestört. Erweist sich darüber hinaus der optische Feedbackfaktor als sehr gering, besitzt das SMI-Signal eine sinusähnliche Form, bei der eine Richtungsdetektion über die Signalform nicht mehr möglich ist.

Abbildung 2.4 visualisiert ein typisches SMI-Signal unter schwaches optisches Feedback. Der optische Feedbackfaktor eingestellt werden, indem der Abstand  $h$  zwischen dem Zentrum der Drehscheibe und dem Laserstrahl und dadurch der Lasereintreffwinkel  $\theta$  geändert wird (siehe Abbildung 2.2). Das SMI-Signal gleicht einem Sinussignal, dessen Amplitude und Frequenz moduliert und von additivem Rauschen gestört wird. Mithilfe dieses Signals die Rotationsgeschwindigkeit mit hoher Genauigkeit zu ermittelt, erfordert die Nutzung geeigneter und robuster Signalverarbeitungsmethoden.



**Abbildung 2.4:** Typisches SMI-Signal (Angepasst mit Erlaubnis von [VO2] © The Optical Society)

### 3 Grundlagen unterschiedlicher Signalverarbeitungsmethoden

In diesem Kapitel werden die theoretischen Grundlagen von Methoden, die in den hier entwickelten Signalverarbeitungsalgorithmen zum Einsatz kommen, näher beschrieben.

#### 3.1 Nullpunktdetektion

Eine Möglichkeit der Frequenzbestimmung besteht darin, über Nullpunktdetektion die Periodendauer eines Signals zu ermitteln und die Frequenz abzuleiten.

In seiner einfachsten Form wird detektiert, zwischen welchen Datenpunkten es zu einem Vorzeichenwechsel kommt. Anschließend wird zur Nullpunktbestimmung eine lineare Interpolation durchgeführt (siehe Abbildung 3.1) und die Frequenz  $f_D$  anschließend mithilfe von Gleichung (3.1) berechnet. Dabei repräsentiert in Gleichung (3.1)  $N_i$  die Position des  $i$ -ten Nullpunkts, während  $f_s$  die Abtastfrequenz darstellt [125].

$$f_D = \frac{1}{T_D} = \frac{f_s}{(N_{i+2} - N_i)} \quad (3.1)$$

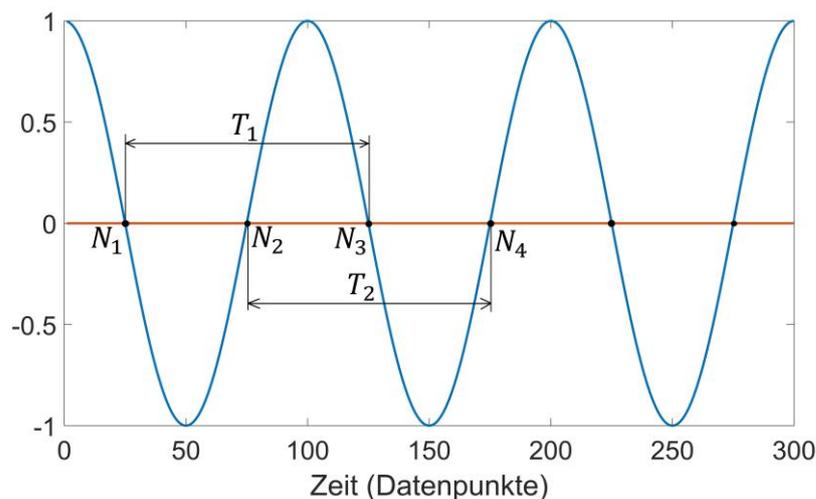


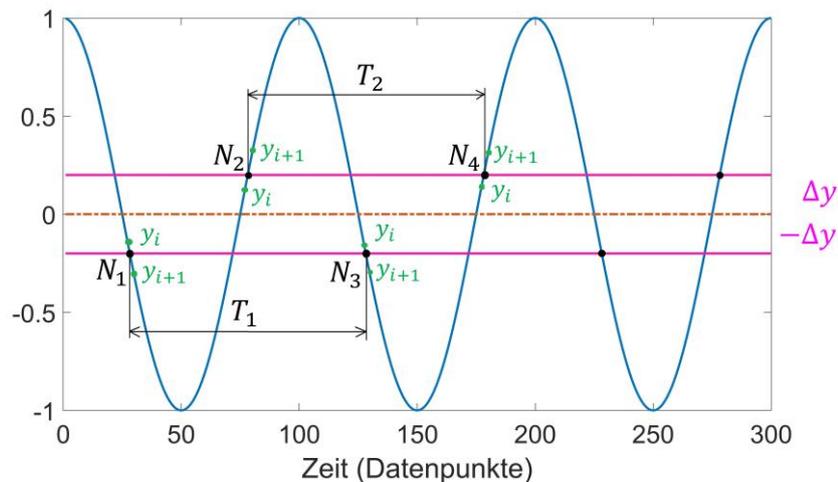
Abbildung 3.1: Nullpunktdetektion

Auf diese Weise kann auf unkomplizierte Weise die Frequenz eines Signals bestimmt werden. Diese Version der Nullpunktdetektion ist jedoch sehr rauschanfällig. Nahe der Nullstellen kann additives Rauschen für zufällige Vorzeichenwechsel, die einen Nullpunktdurchgang implizieren, sorgen. Dadurch erweist sich die Methodik bei verrauschten Signalen als unzuverlässig [125].

Um die Zuverlässigkeit der Nullpunktdetektion bei verrauschten Signalen zu erhöhen, kann eine Hysteresebedingung implementiert werden. Hierbei wird ein Nulldurchgang erkannt, wenn eines der folgenden Bedingungen erfüllt wird.

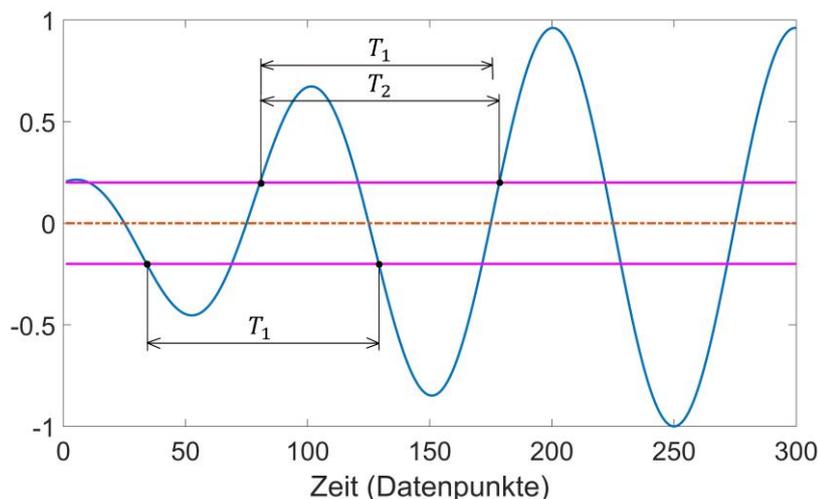
$$y_{i+1} \geq \Delta y \text{ und } y_i < \Delta y \text{ für steigender Nulldurchgang} \quad (3.2)$$

$$y_{i+1} < -\Delta y \text{ und } y_i \geq -\Delta y \text{ für fallender Nulldurchgang} \quad (3.3)$$



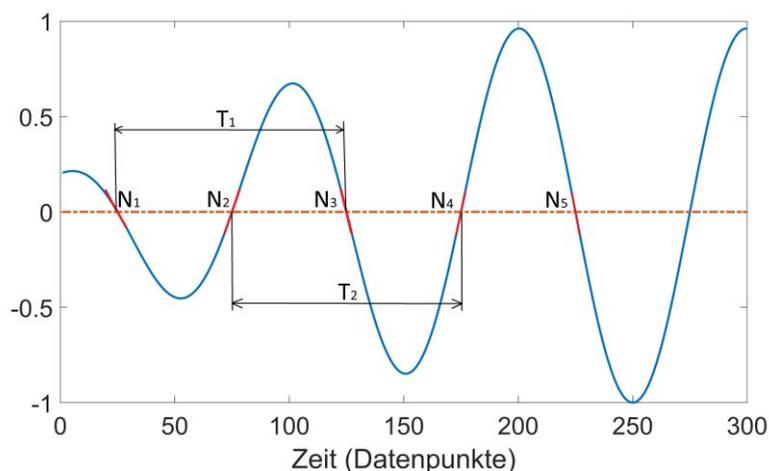
**Abbildung 3.2:** Nullpunktdetektion mit Hysteresebedingung

Durch die Bedingungen aus Gleichung (3.2) und (3.3) können zufällige Nulldurchgänge, die durch Rauschen verursacht werden, einfacher verhindert werden, wodurch die Nullpunktdetektion zuverlässiger wird. Deren Nutzung empfiehlt sich jedoch nur bei Signalen mit konstanter Amplitude. Variiert die Amplitude, so kommt es bei der Periodendauerbestimmung über die Nullpunktdetektion zu Fehler. Dies wird beispielsweise in Abbildung 3.3 näher veranschaulicht. Hierbei kann man erkennen, dass bei den ermittelten Periodendauern  $T_1 < T_2$  gilt [125].



**Abbildung 3.3:** Nullpunktdetektion mit Hysteresebedingung bei variierender Amplitude

Die lineare Regression hat sich als wirksame Methode, mit der die Nullpunktdetektion auch unter Rauschen und variierende Amplitude gut durchgeführt werden kann, etabliert. Hierbei wird mithilfe von mehreren Datenpunkte um den Nullpunkt herum eine Ausgleichsgerade generiert und die Position dessen Vorzeichenwechsels ermittelt. Auf diese Weise können Fehler durch Rauschen erheblich reduziert werden. Amplitudenmodulation hat zudem keine negativen Auswirkungen auf die Resultate. Abbildung 3.4 visualisiert die Nullpunktdetektion mithilfe der linearen Regression. Hierbei sind die generierten Ausgleichsgeraden in roter Farbe eingezeichnet worden [125].

**Abbildung 3.4:** Nullpunktdetektion mit linearer Regression bei variierender Amplitude

Insgesamt erweist sich die Nullpunktdetektion als eine einfach umsetzbare Möglichkeit der Frequenzbestimmung. Bei sehr stark verrauschten Signalen wird die ausschließliche Nutzung der Nullpunktdetektion jedoch nicht empfohlen. Es werden weitere Signalverarbeitungsmethoden benötigt, um mit der Nullpunktdetektion zuverlässige und präzise Ergebnisse erzielen zu können.

## 3.2 Autokorrelation

### 3.2.1 Begriffserklärung

Die Autokorrelation ist ein Begriff der Signalverarbeitung, mit dem die Ähnlichkeit bzw. Korrelation eines Signals mit sich selbst bei unterschiedlichen Zeitverschiebungen  $\tau$  zwischen den betrachteten Funktionswerten ermittelt wird. Allgemein ist sie wie folgt definiert:

$$\phi_{yy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y(t) * y(t - \tau) dt \quad (3.4)$$

Die Autokorrelationsfunktion ist in der Lage, Signalrauschen ohne Verlust von Frequenzinformationen zu unterdrücken. Deswegen wird es oft dazu verwendet, in stark verrauschten Signalen Schwingungen, die schwer erkenntlich sind, zu ermitteln [126].

Dies ist aufgrund folgender Eigenschaften der Autokorrelationsfunktion möglich [126]

[127]:

- Die Autokorrelationsfunktion  $\phi_{yy}(\tau)$  einer harmonischen Schwingung  $y(t)$  stellt unabhängig von seiner Phasenlage  $\varphi_y$  einer Kosinusfunktion mit der gleichen Frequenz dar.

$$y(t) = \sin(2\pi * f_y * t + \varphi_y) \quad (3.5)$$

$$\phi_{yy}(\tau) = \frac{\cos(2\pi * f_y * \tau)}{2} \quad (3.6)$$

- Die Autokorrelationsfunktion hat ein Maximum an der Stelle  $\tau = 0$ . Während sich dieses Maximum bei periodischen Signalen wiederholt, stellt die Autokorrelationsfunktion eines stochastischen offsetfreien Rauschsignals einen Deltaimpuls dar, die mit wachsender Verzögerungszeit  $\tau$  rasch gegen null verläuft.

Stört ein stochastisches Rauschsignal ein Sinussignal, kommt es zu einer Überlagerung der jeweiligen Autokorrelationsfunktionen.

$$\phi_{yy, ges}(\tau) = \phi_{yy, sin}(\tau) + \phi_{yy, noise}(\tau) \quad (3.7)$$

Bei zunehmender Verzögerungszeit geht die Autokorrelationsfunktion des stochastischen Rauschsignals  $\phi_{yy, noise}(\tau)$  gegen null und verschwindet in der Autokorrelationsfunktion des Gesamtsignals. Dadurch bleibt lediglich die Autokorrelationsfunktion des sinusförmigen Signals übrig. Das Rauschsignal ist somit vollständig unterdrückt worden [127].

Für die diskrete Signalverarbeitung wird folgende Funktion für die Autokorrelation  $\phi_{yy}(n)$  des Signals  $y(k)$  angewandt [127].

$$\phi_{yy}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y(k) * y(k-n) \quad (3.8)$$

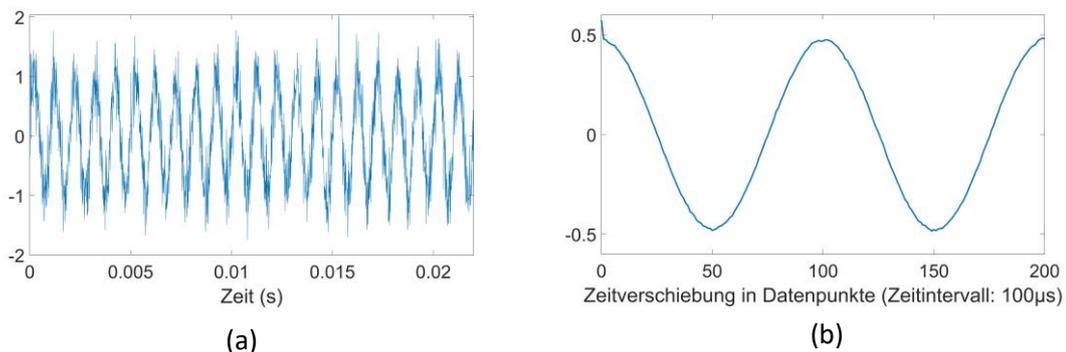
Theoretisch erfolgt eine vollständige Rauschunterdrückung bei einer unendlich großen Menge an Abtastpunkte ( $N \rightarrow \infty$ ). Dies ist zwar in der Praxis nicht realisierbar, doch auch mit einer begrenzten Zahl an Abtastpunkte sind Rauschunterdrückungen bis zu einem gewissen Maß möglich. Dabei gilt, dass gegenüber der geometrischen Standardabweichung vom Produkt der Abtastwerte in einer Periode  $\overline{\sigma_{yy}}(n)$  die Standardabweichung der Autokorrelationsfunktion  $\sigma_{\phi_{yy}}(n)$  entsprechend dem Faktor  $\sqrt{N}$  verkleinert wird [127].

$$\sigma_{\phi_{yy}}(n) \approx \frac{\sigma_{yy}(n)}{\sqrt{N}} \quad (3.9)$$

### 3.2.2 Simulationen

In den folgenden Simulationen soll die Leistung der Autokorrelationsfunktion näher betrachtet werden.

Im ersten Schritt wird die Fähigkeit der Autokorrelation, Rauschen zu unterdrücken, validiert. Dazu ist die Autokorrelationsfunktion eines verrauschten Sinussignals generiert worden. Dabei ist die Anzahl an Abtastpunkte auf 1000 festgelegt worden. Abbildung 3.5 visualisiert das Ergebnis. Analog zu der Theorie aus Kapitel 3.2.1 resultiert eine saubere Kosinusfunktion, an den nur geringfügigen Störungen zu erkennen sind.



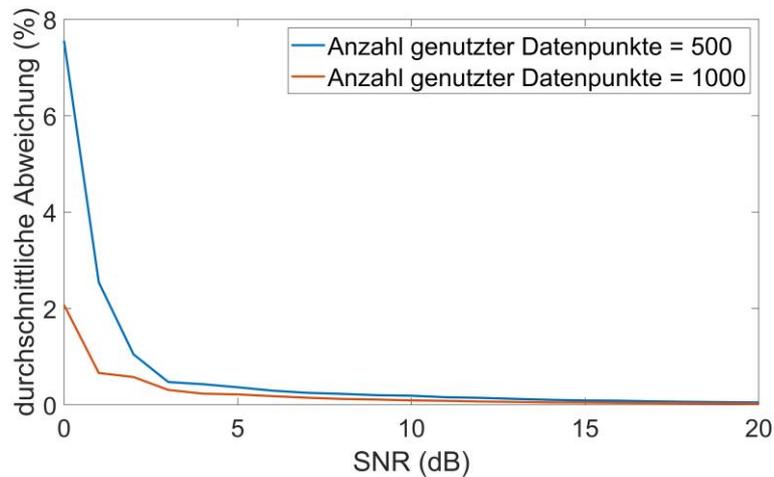
**Abbildung 3.5:** a) verrauschtes Sinussignal; b) Autokorrelationsfunktion des Sinussignals

Nun soll die Fähigkeit der Autokorrelation, Frequenzen von verrauschten Signalen zu ermitteln, näher analysiert werden. Hierbei wird ein einfaches Sinussignal der Frequenz  $f_y = 1\text{kHz}$ , das mit einer Abtastfrequenz von  $f_s = 100\text{kHz}$  generiert worden ist, als Messsignal betrachtet.

$$y(k) = \sin\left(2\pi \frac{f_y}{f_s} * k\right) + r(k) \quad (3.10)$$

Das additive Rauschen  $r(k)$  wird hierbei nicht weiter konkretisiert, sondern seine Stärke über das Signal-Rausch-Verhältnis (=SNR) beschrieben. Die Frequenzbestimmung erfolgt über eine Nullpunktdetektion an der Autokorrelationsfunktion.

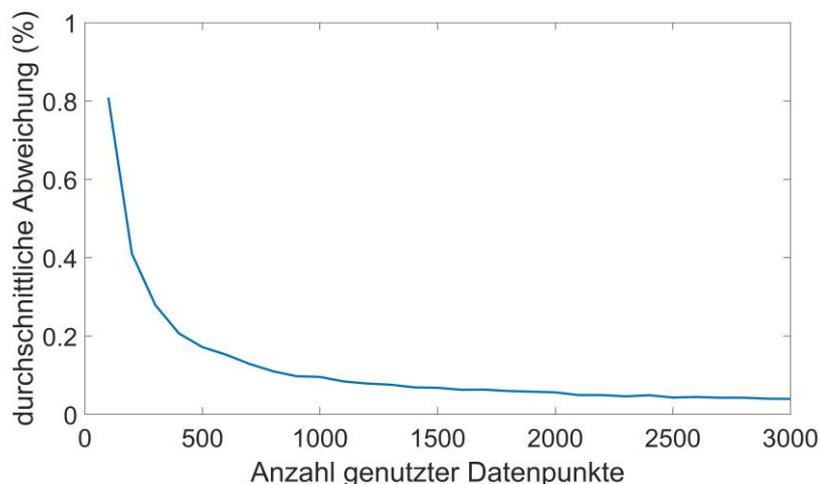
In der ersten Simulation wird die Genauigkeit der Frequenzbestimmung bei unterschiedlichen SNR getestet. Dabei wird ein SNR von 0 bis 20 dB betrachtet und für jedes SNR der durchschnittliche Fehler der Frequenzbestimmung von 500 Signalabschnitten ermittelt. Die Signalabschnittsgröße wird zuerst auf 500 Punkte festgesetzt und die Simulation anschließend mit einer Signalabschnittsgröße von 1000 Punkten wiederholt. Abbildung 3.6 visualisiert die Ergebnisse.



**Abbildung 3.6:** Genauigkeit der Methodik bei unterschiedlichen SNR

Grundsätzlich lässt sich feststellen, dass es mit sinkendem SNR zu einer Erhöhung des durchschnittlichen Fehlers kommt. Das Verhalten lässt sich mit einer Hyperbel beschreiben. Anfangs steigt der Fehler nur langsam. Erst ab einem gewissen Punkt beginnt der Fehler, sich exponentiell zu erhöhen. Sind für die Autokorrelationsberechnung mehr Datenpunkte verwendet worden, so wird der Fehler insgesamt kleiner. Zudem tritt größerer Signalabschnittsgröße der exponentielle Fehleranstieg erst bei niedrigeren SNR auf. Die Genauigkeiten erweisen sich insgesamt als sehr vielversprechend. Bei einer Signalabschnittslänge von 500 Datenpunkten liegt der durchschnittliche Fehler bei SNR höher als 10 dB unter 0.2%. Bei einer Signalabschnittslänge von 1000 Datenpunkten liegt sie in diesem SNR-Bereich unterhalb von 0.1%. Die Autokorrelation erweist sich somit als valide Methodik zur Frequenzbestimmung verrauschter, harmonischer Funktionen.

In der zweiten Simulation wird der Einfluss der Signalabschnittsgröße auf die Rauschunterdrückung der Autokorrelation untersucht. Hierbei wird ein Signal mit einem SNR von 10 dB betrachtet. Es sind mit der Methodik 500 Ergebnisse für unterschiedliche Signalabschnittslängen generiert und der jeweilige durchschnittliche Fehler ermittelt worden. Abbildung 3.7 visualisiert das Resultat.



**Abbildung 3.7:** Verhältnis zwischen Signalabschnittsgröße und die Genauigkeit

Auch hier kann das Verhalten einer Hyperbel beobachtet werden. Während anfänglich erhebliche Verbesserungen durch die Erhöhung der Signalabschnittslänge erreicht werden, verringert sich der Mehrwert mit der Signalabschnittslänge. Dies bestätigt die Aussage von Gleichung (3.9).

Nun soll die Autokorrelation mit anderem Rauschunterdrückungsverfahren wie der gleitender Mittelwert-Filter und dem Wavelet-Entrauschen verglichen werden. Hierbei bietet die Autokorrelation zwei Vorteile. Wenn der Parameter  $N$  einen ausreichend hohen Wert hat, führt die Autokorrelation zu einer besseren Rauschunterdrückung. Tabelle 3.1 visualisiert das SNR des in Abbildung 2.4 verwendeten Signalteils vor und nach der Autokorrelation, dem gleitenden Mittelwertfilter oder dem Wavelet-Entrauschen. Mit einem SNR von 39,13 dB liefert die Autokorrelation die beste Rauschunterdrückung.

**Tabelle 3.1:** SNR des SMI-Signals vor und nach der Rauschunterdrückung mit unterschiedlichen Methoden

Methoden	SNR (in dB)
Originalsignal	2.81
Gleitender Mittelwert-Filter	10.43
Wavelet-Entrauschen	30.02
Auto-korrelation	39.13

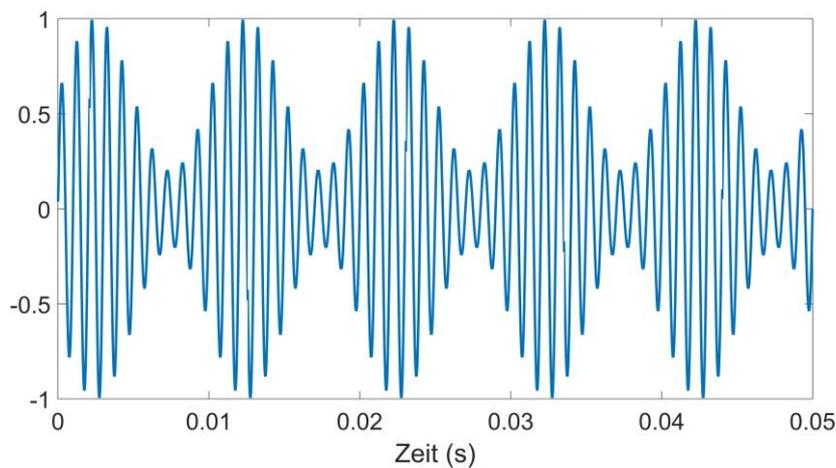
Im Kontext dieser Arbeit ist es jedoch wichtiger, dass im Vergleich zu den anderen Entrauschungsmethoden mit der Autokorrelation weniger Frequenzinformationen verloren gehen. In der folgenden Simulation sind Autokorrelation, ein gleitender Mittelwertfilter und Wavelet-Entrauschung bei einer verrauschten Sinusfunktion mit einer Periodenlänge von 20 Datenpunkten und einem SNR von 10 dB verwendet worden. Nach der Rauschunterdrückung ist die Periodenlänge mit einer Nullpunktdetektion mit Hysteresebedingung (siehe Kapitel 3.1) bestimmt worden. Tabelle 3.2 zeigt die durchschnittliche Abweichung von 500 erfassten Periodenlängen. Die Autokorrelation hat die beste Genauigkeit geliefert und ist somit für die Zwecke dieser Arbeit am besten geeignet.

**Tabelle 3.2:** durchschnittliche Abweichung der Frequenzbestimmung nach den jeweiligen Signalunterdrückungsmethoden

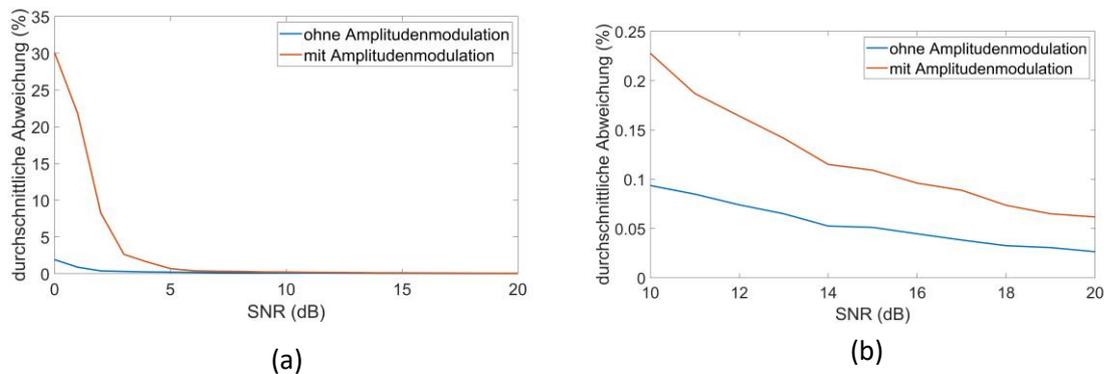
Methoden	Durchschnittliche Abweichung (in %)
Gleitender Mittelwert-Filter	1.84
Wavelet-Entrauschen	4.77
Autokorrelation	0.11

Als nächsten Schritt soll die Leistung der Autokorrelation an Signale mit additivem Rauschen und Amplitudenmodulation näher betrachtet werden. Dazu werden die Simulationen aus Abbildung 3.6 und 3.7 mit folgendem Signalmodell wiederholt. Die Frequenz der Amplitudenmodulation  $f_A$  beträgt dabei 100 Hz.

$$y(n) = |0.4 * \sin\left(2\pi \frac{f_A}{f_s} * n\right) + 0.6| * \sin\left(2\pi \frac{f_y}{f_s} * n\right) + r(n) \quad (3.11)$$



**Abbildung 3.8:** Signalmodell von Gleichung (3.11)

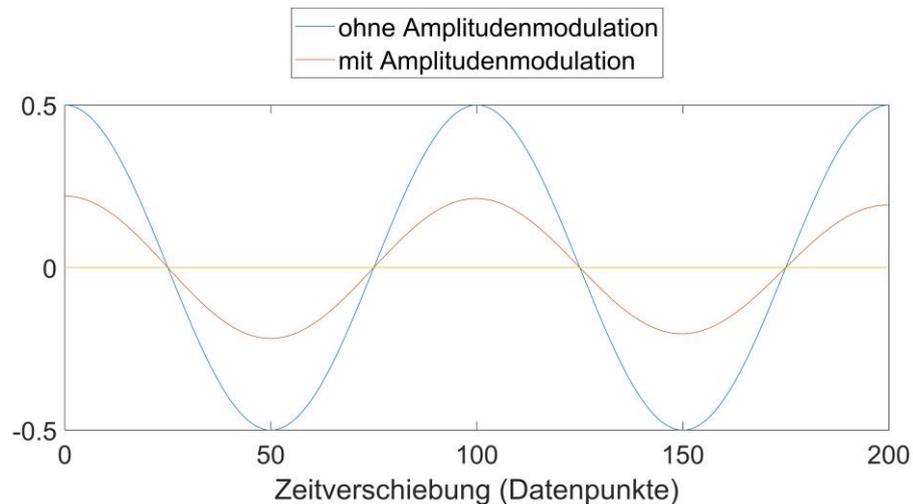


**Abbildung 3.9:** Genauigkeit der Methodik bei unterschiedlichen SNR mit und ohne Amplitudenmodulation a) Betrachtung 0 bis 20 dB; b) Betrachtung von 10 bis 20 dB

In Abbildung 3.9 werden die Ergebnisse mit und ohne Amplitudenmodulation visualisiert. Dabei ist die Anzahl an verwendete Datenpunkte auf 1000 festgelegt worden. Die Abbildung macht deutlich, dass es durch die Anwesenheit von Amplitudenmodulation zu einer signifikanten Verschlechterung der Genauigkeit kommt. Bei SNR zwischen 10 und 20 dB haben sich die durchschnittlichen Abweichungen stark erhöht (siehe Abbildung 3.9b). Beispielsweise liegt sie bei einem SNR von 10 dB bei über 0.2%. Zudem kommt es bereits bei einem SNR von 5dB zu einem exponentiellen Anstieg der durchschnittlichen Abweichung (siehe Abbildung 3.9a).

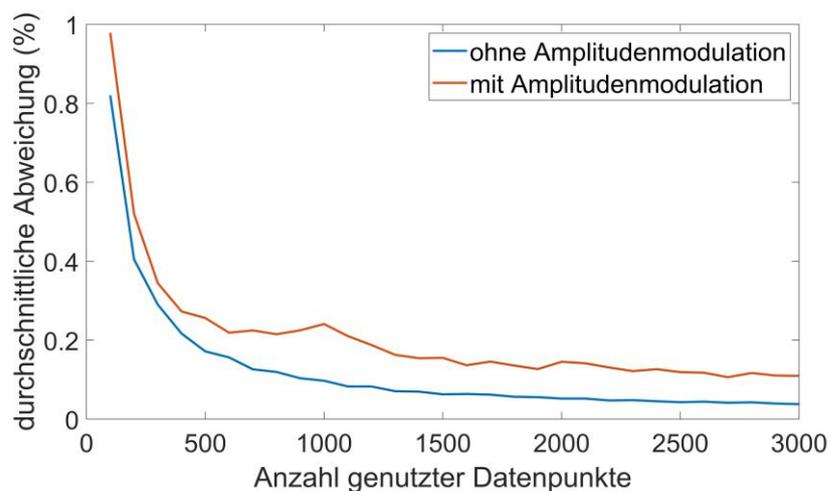
Der Genauigkeitsverlust lässt sich durch eine Betrachtung der Autokorrelation eines amplitudenmodulierten Signals begründen. Abbildung 3.10 vergleicht die Autokorrelationsfunktionen eines amplitudenmodulierten Signals mit dem eines Signals mit konstanter Amplitude. Die Amplitudenmodulation führt zu einer verringerten Amplitude in der Autokorrelationsfunktion. Bei verrauschten Signalen führt dies dazu, dass die Autokorrelationsfunktion von amplitudenmodulierten Signalen ein niedrigeres SNR als eine Autokorrelationsfunktion von Signalen ohne Amplitudenmodulation aufweist und Ersteres dadurch eine geringere Genauigkeit in der Signalperiodenbestimmung mithilfe der Nullpunktdetektion hat. Die Rauschunterdrückung ist in beiden Fällen gleich, weshalb auch

die Rauschleistung in den Autokorrelationsfunktionen gleichbleibt, falls die SNR der betrachteten Signale übereinstimmen. Dadurch ist das SNR der Autokorrelationsfunktion abhängig von dessen Amplitude.



**Abbildung 3.10:** Autokorrelationsfunktion von Signalen mit und ohne Amplitudenmodulation

Abbildung 3.11 zeigt, dass sich zwar bei Anwesenheit von Amplitudenmodulation die Genauigkeit verschlechtert, das Verhältnis zwischen Anzahl genutzter Datenpunkte und der Genauigkeit qualitativ jedoch ähnlich ist. Auch hier ist ein hyperbelähnliches Verhalten, festzustellen. Insgesamt kommt es durch Amplitudenmodulation zu einer Verschlechterung der Ergebnisse. Doch mit einer Genauigkeit von 0,25 % bei einem SNR von 10 dB erweisen sich die Ergebnisse auch hier als gut (siehe Abbildung 3.11), weshalb auch bei Amplitudenmodulation die Autokorrelation eine valide Methode der Frequenzbestimmung darstellt.



**Abbildung 3.11:** Vergleich der Standardabweichungen mit und ohne Amplitudenmodulation

### 3.3 Kreuzkorrelation

#### 3.3.1 Begriffserklärung

Die Kreuzkorrelation ist ein Begriff der Signalverarbeitung, mit dem die Ähnlichkeit bzw. Korrelation von zwei unterschiedlichen Signalen bei verschiedenen Zeitverschiebungen  $\tau$  zwischen den betrachteten Funktionswerten ermittelt wird. Allgemein ist sie wie folgt definiert [127]:

$$\phi_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) * y(t - \tau) dt \quad (3.12)$$

Einfachheitshalber wird im weiteren Verlauf dieser Arbeit  $x(t)$  Referenzsignal und  $y(t)$  Messsignal genannt. Die diskrete Kreuzkorrelation erfolgt über folgende Gleichung, in der  $N$  die Anzahl an diskrete Datenpunkte und  $k$  die Datenverschiebung darstellt.

$$\phi_{xy}(n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \sum_{k=-N}^{N-1} x(k) * y(k - n) \quad ; (n \in \mathbb{Z}) \quad (3.13)$$

Alternativ kann die Kreuzkorrelationsfunktion auch über die Gleichungen (3.14) und (3.15) generiert werden.

$$\phi_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) * y(t + \tau) dt \quad (3.14)$$

$$\phi_{xy}(n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \sum_{k=-N}^{N-1} x(k) * y(k + n) \quad ; (n \in \mathbb{Z}) \quad (3.15)$$

In der Literatur findet auch eine unsymmetrische Version der Kreuzkorrelationsfunktion Anwendung. Diese wird über die Gleichungen (3.16) und (3.17) beschrieben. Aus Verständnisgründen werden im weiteren Verlauf dieser Arbeit die Gleichungen (3.12-15) symmetrische Kreuzkorrelation genannt.

$$\phi_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) * y(t + \tau) dt \quad (3.16)$$

$$\phi_{xy}(n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) * y(k + n) \quad ; (n \in \mathbb{Z}) \quad (3.17)$$

Schon [128] hat in der Kreuzkorrelation eine Möglichkeit der Rauschunterdrückung erkannt. Das liegt daran, dass eine Kreuzkorrelation mit einem stochastischen offsetfreien Rauschsignals einen Deltaimpuls, die mit wachsender Zeitverschiebung  $\tau$  rasch gegen null

verläuft, ergibt. Indem an einem Messsignal die Kreuzkorrelation mit einem Referenzsignal derselben Frequenz, Amplitude und Phase durchgeführt wird, kommt es ohne Verlust von Frequenzinformationen zu einer Rauschunterdrückung. Während Autokorrelation die Korrelation von zwei verrauschten Signalen beschreibt, repräsentiert die Kreuzkorrelation die Korrelation zwischen einem verrauschten Messsignal und einem rauschfreien Referenzsignal. Dementsprechend erweist sich die Rauschunterdrückung der Kreuzkorrelation als effektiver [128]. Dies wird in Kapitel 3.3.3 näher verdeutlicht.

### 3.3.2 Mathematisches Modell

Analog zu Kapitel 3.2.1 werden in den folgenden Kapiteln mathematische Grundlagen der Kreuzkorrelation erarbeitet und seine Fähigkeiten in Simulationen analysiert. In Kontext einer praktischen Anwendung wird die Frage aufgestellt, wie sich die Kreuzkorrelation verhält, wenn sich die Charakteristika des Referenz- und Messsignals voneinander unterscheiden. Hierzu ist die symmetrische Kreuzkorrelation folgender Signale analysiert worden.

$$x(t) = A * \sin(2\pi * f_x * t + \varphi_x) \quad (3.18)$$

$$y(t) = B * \sin(2\pi * f_y * t + \varphi_y) + r(t) \quad (3.19)$$

Gemäß [128] konvergiert der Rauschanteil der Kreuzkorrelationsfunktion mit steigendem  $T$  gegen null, weswegen sie in der weiteren Betrachtung vernachlässigt werden kann. Insgesamt ergibt sich folgende Gleichungen (3.20-22). Die Herleitung der Gleichungen findet sich im Anhang (siehe A.1.1).

$$\begin{aligned} \phi_{xy}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A * B}{2T} \int_{-T}^T \sin(2\pi * f_x * t + \varphi_x) * \sin(2\pi * f_y * (t + \tau) + \varphi_y) dt \\ &= K * \cos(2\pi * f_y * \tau + (\varphi_y - \varphi_x)) + W * \cos(2\pi * f_y * \tau + (\varphi_x + \varphi_y)) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Mit

$$K = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A * B}{4T} * \frac{\sin(2\pi * T * (f_x - f_y))}{\pi * (f_x - f_y)} \quad (3.21)$$

$$W = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A * B}{4T} * \frac{\sin(2\pi * T * (f_x + f_y))}{\pi * (f_x + f_y)} \quad (3.22)$$

Wäre Gleichung (3.12) für die Kreuzkorrelation genutzt worden, so wäre Gleichung (3.23) entstanden. Hierbei wären  $K$  und  $W$  gleichgeblieben. Es hätten sich lediglich die Phasen der Kosinusfunktionen verändert, weshalb im weiteren Verlauf der Arbeit Gleichung (3.23) nicht weiterbetrachtet wird.

$$\phi_{xy}(\tau) = K * \cos(2\pi * f_y * \tau - (\varphi_y - \varphi_x)) + W * \cos(2\pi * f_y * \tau - (\varphi_x + \varphi_y)) \quad (3.23)$$

Die Kreuzkorrelation  $\phi_{xy}(\tau)$  stellt die Summe von zwei Kosinusfunktionen dar. Sie besitzen die gleiche Frequenz  $f_y$ , unterscheiden sich jedoch in Phase und Amplitude. Mit steigendem  $T$  werden die Amplituden der zwei Kosinusfunktionen immer kleiner. Bei  $T \rightarrow +\infty$  würde die Kreuzkorrelation null ergeben. Doch in der praktischen Anwendung ist  $T$  stets begrenzt, weswegen der Limes in den Gleichungen (3.20-22) weggelassen und davon ausgegangen werden kann, dass die Kreuzkorrelation die Summe von zwei Kosinusfunktionen ergibt.

$$K = \frac{A * B}{4T} * \frac{\sin(2\pi * T * (f_x - f_y))}{\pi * (f_x - f_y)} \quad (3.24)$$

$$W = \frac{A * B}{4T} * \frac{\sin(2\pi * T * (f_x + f_y))}{\pi * (f_x + f_y)} \quad (3.25)$$

Wie schnell die Bestandteile der Kreuzkorrelationsfunktion gegen null konvergieren, wird von unterschiedlichen Faktoren beeinflusst. Mit steigenden  $T$  und einem hohen Wert von  $(f_x + f_y)$  konvergiert die zweite Kosinusfunktion sehr schnell gegen null. Die Konvergenzgeschwindigkeit der ersten Kosinusfunktion hängt vom Frequenzunterschied der Signale ab. Je kleiner der Frequenzunterschied ist, desto langsamer konvergiert die Amplitude gegen null. Dies lässt zwei Schlussfolgerungen zu. Zum einen würde in den meisten Fällen der zweite Term der Kreuzkorrelation schneller gegen null konvergieren, weswegen es vernachlässigt werden kann, sobald sich der Frequenzunterschied der Signale relativ zu den Signalfrequenzen als ausreichend klein erweist. Beispielsweise beträgt bei einer Wertekonstellation von  $f_x = 100$  kHz und  $f_y = 100.1$  kHz das Verhältnis zwischen Amplitude  $K$  und  $W$  2001 zu 1. Dadurch vereinfacht sich die Kreuzkorrelation zu Gleichung (3.26).

$$\phi_{xy}(\tau) = K * \cos(2\pi * f_y * \tau + (\varphi_y - \varphi_x)) \quad (3.26)$$

Zum anderen ist die Amplitude der Kreuzkorrelationsfunktion am größten, wenn Referenz- und Messsignal dieselbe Frequenz besitzen. In diesem Fall würde der Parameter  $K$  den folgenden Wert besitzen.

$$K = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A * B}{4T} * \frac{\sin(2\pi * T * (f_x - f_y))}{\pi * (f_x - f_y)} = \frac{A * B}{2} \quad (3.27)$$

Die Amplitude  $K$  ist konstant und wird nicht vom Parameter  $T$  beeinflusst. Die Kreuzkorrelationsfunktion zeigt somit dasselbe Verhalten wie die Autokorrelationsfunktion und hat seine größtmögliche Amplitude.

Besteht das Messsignal aus mehreren Sinusfunktionen (siehe Gleichung (3.28)), so kann die Kreuzkorrelationsfunktion durch Gleichung (3.29) und (3.30) beschrieben werden.

$$y(t) = \sum_{i=1}^P B_i * \sin(2\pi * f_{yi} * t + \varphi_{yi}) \quad (3.28)$$

$$\phi_{xy_P}(\tau) = \sum_{i=1}^P K_i * \cos(2\pi * f_{yi} * \tau - (\varphi_{yi} - \varphi_x)) = \sum_{i=1}^P \phi_{xy_i}(\tau) \quad (3.29)$$

Mit

$$K_i = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A * B_i}{4T} * \frac{\sin(2\pi * T * (f_x - f_{yi}))}{\pi * (f_x - f_{yi})} \quad (3.30)$$

Die Kreuzkorrelationsfunktion  $\phi_{xy_P}(\tau)$  stellt hier eine Superposition der Kreuzkorrelation zwischen dem Referenzsignal und jeder Komponente des Messsignals dar. Dabei hat jede Kreuzkorrelationsfunktion  $\phi_{xy_i}(\tau)$  seine größte Amplitude bei  $f_x = f_{yi}$ .

Im Folgenden soll die unsymmetrische Kreuzkorrelationsfunktion der Gleichungen (3.16) und (3.17) näher betrachtet werden. Es ergibt sich folgendes mathematisches Modell. Hierbei ist bereits analog zu den Gleichungen (3.24) und (3.25) der Limes entfernt worden. Die Herleitung des Modells findet sich im Anhang (A.1.3).

$$\begin{aligned} \phi_{xy}(\tau) = & V * \cos(2\pi * f_y * \tau - (\varphi_x - \varphi_y) + \pi * T * (f_y - f_x)) - U \\ & * \cos(2\pi * f_y * \tau + (\varphi_x + \varphi_y) + \pi * T * (f_y + f_x)) \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$V = \frac{A * B}{2T} * \frac{\sin(\pi * T * (f_x - f_y))}{\pi * (f_x - f_y)} \quad (3.32)$$

$$U = \frac{A * B}{2T} * \frac{\sin(\pi * T * (f_x + f_y))}{\pi * (f_x + f_y)} \quad (3.33)$$

Analog zu Gleichung (3.23) kann Gleichung (3.31) wie folgt vereinfacht werden.

$$\phi_{xy}(\tau) = V * \cos(2\pi * f_y * \tau - (\varphi_x - \varphi_y) + \pi * T * (f_y - f_x)) \quad (3.34)$$

Die auffälligste Änderung im Vergleich zu Gleichung (3.34) liegt in der Phase der Kosinusfunktion. Sie erweist sich als abhängig von der betrachteten Signallänge  $T$  sowie dem Frequenzunterschied zwischen Referenz- und Messsignal. Es ist davon auszugehen, dass die diskrete Kreuzkorrelationsfunktion (siehe Gleichung (3.17)) dieses Verhalten ebenfalls besitzt. Dieses Merkmal muss im weiteren Verlauf der vorliegenden Arbeit berücksichtigt werden.

### 3.3.3 Simulation

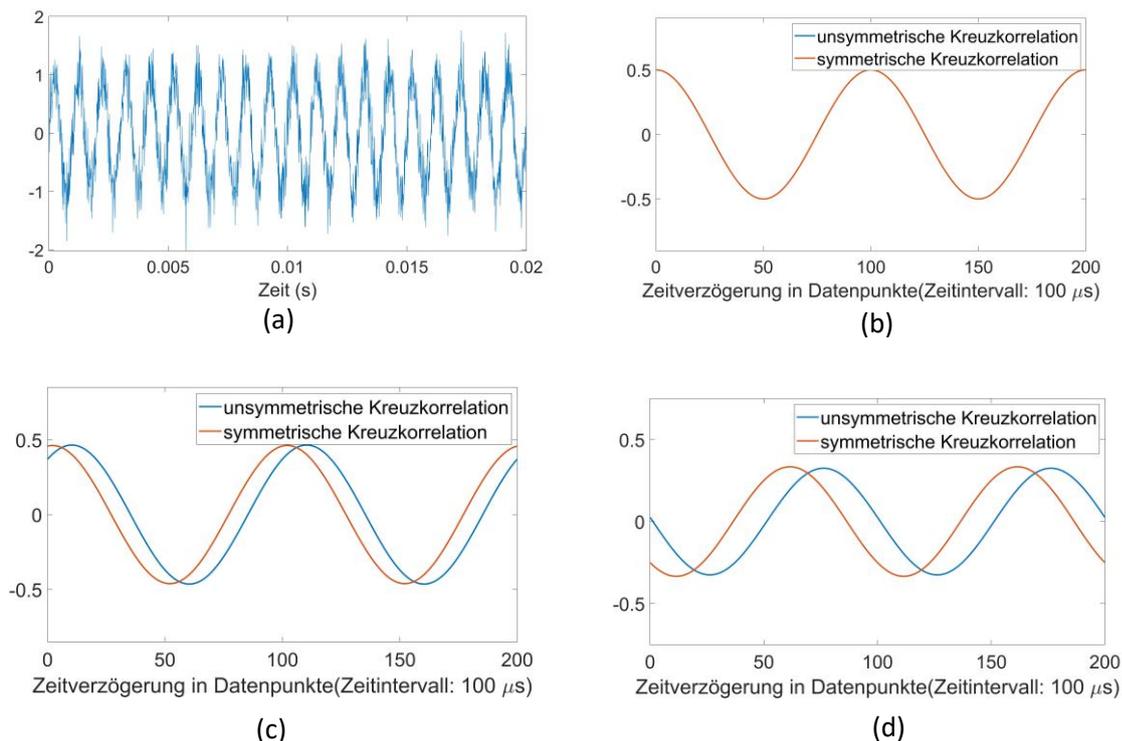
In den folgenden Simulationen soll die Leistung der Kreuzkorrelationsfunktion in der Frequenz- und Phasenbestimmung von verrauschten Signalen analysiert werden.

#### Frequenzbestimmung:

Im ersten Schritt soll geprüft werden, mit welcher Genauigkeit die Frequenz eines Messsignals über eine Periodenlängenermittlung der Kreuzkorrelationsfunktion bestimmt werden kann. Dabei wird die Leistung der Kreuzkorrelation unter den folgenden drei Fällen betrachtet:

1. Frequenzen zwischen Referenz- und Messsignal stimmen überein
2. Frequenzen zwischen Referenz- und Messsignal weichen um 2 % voneinander ab
3. Frequenzen zwischen Referenz- und Messsignal weichen um 5 % voneinander ab

Im ersten Schritt wird die Fähigkeit der Kreuzkorrelation, Rauschen ohne Verlust von Frequenzinformationen zu unterdrücken, validiert. Dazu sind die unsymmetrische und symmetrische Kreuzkorrelationsfunktionen eines einfachen verrauschten Sinussignals generiert worden. Dabei ist als Referenzsignal ein einfaches Sinussignal mit einer Frequenz entsprechend dem jeweiligen Fall genutzt und die Signalabschnittslänge auf 1000 festgelegt worden.



**Abbildung 3.12:** a) verrauschtes Signal; b) Kreuzkorrelation für Fall 1; c) Kreuzkorrelation für Fall 2; d) Kreuzkorrelation für Fall 3;

Abbildung 3.12 visualisiert das Ergebnis. In allen Fällen stellen die Kreuzkorrelationsfunktionen saubere harmonische Funktionen dar, deren Frequenz der des Messsignals entspricht. Stimmen die Frequenzen zwischen Referenz- und Messsignal überein, so entsteht in beiden Versionen der Kreuzkorrelation analog zu der Autokorrelation die gleiche

saubere Kosinusfunktion (siehe Abbildung 3.12b). Bei Frequenzabweichungen kommt es zu Veränderungen der Phase und Amplitude. Je größer die Frequenzabweichung desto kleiner wird die Amplitude. Während die Amplituden der unsymmetrischen und symmetrischen Kreuzkorrelation übereinstimmen, weichen deren Phasen bei Abbildung 3.12 c) und d) voneinander ab. Diese Ergebnisse sind im Einklang mit den Erkenntnissen aus Kapitel 3.3.2. (Gleichung (3.20) und (3.31)). Aufgrund der Tatsache, dass die unsymmetrische und symmetrische Kreuzkorrelation die gleichen Frequenzinformationen aufweisen, wird in der weiteren Auseinandersetzung mit der Frequenzbestimmung grundsätzlich nur die unsymmetrische Kreuzkorrelation betrachtet.

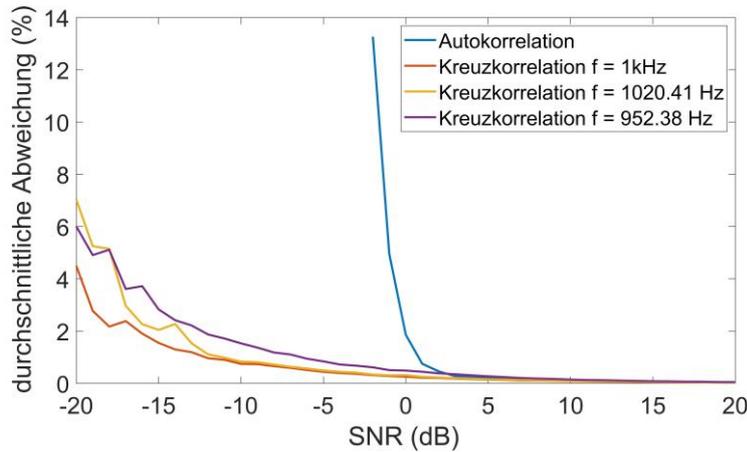
Nun soll die Fähigkeit der Kreuzkorrelation, Frequenzen von verrauschten Signalen zu ermitteln, näher analysiert werden. Hierbei ist Gleichung (3.10) aus Kapitel 3.2.2 als Messsignal mit der Frequenz  $f_x=1\text{kHz}$  verwendet worden. Als Referenzsignal  $x(k)$  wird ein einfaches Sinussignal (siehe Gleichung (3.35)), dessen Frequenz abhängig vom betrachteten Fall folgende Werte besitzt, genutzt. Die Abtastfrequenz  $f_s$  beträgt 100 kHz. Analog zu Kapitel 3.2.2 erfolgt die Frequenzbestimmung über eine Nullpunktdetektion.

1.  $f_x = 1\text{kHz}$
2.  $f_x = 1020.41\text{ Hz}$
3.  $f_x = 952.38\text{ Hz}$

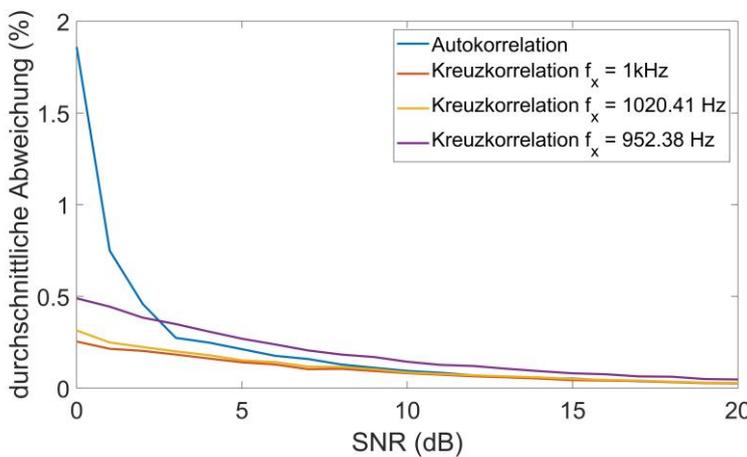
$$x(k) = \sin\left(2\pi \frac{f_x}{f_s} * k\right) \quad (3.35)$$

In der ersten Simulation wird die Genauigkeit der Frequenzbestimmung bei unterschiedlichen SNR getestet. Dabei wird ein SNR von -20 bis 20 dB betrachtet und für jedes SNR der durchschnittliche Fehler der Frequenzbestimmung von 500 Signalabschnitten ermittelt. Die Signalabschnittgröße beträgt dabei 1000 Punkte. In Abbildung 3.13 werden die Resultate der verschiedenen Betrachtungsfälle visualisiert und mit den Ergebnissen der Autokorrelation verglichen.

Die Ergebnisse verdeutlichen, dass bei sehr niedrigen SNR die Kreuzkorrelationsfunktion sogar bei Frequenzunterschiede zwischen Referenz- und Messsignale der Autokorrelation in der Frequenzbestimmung überlegen ist. Zwar erhöht sich mit steigendem Frequenzunterschied auch der durchschnittliche Fehler der Ergebnisse, doch selbst bei einem SNR von -20 dB erweist sich der Fehler der Kreuzkorrelationsfunktionen als kleiner als bei Autokorrelationsfunktionen von Signalen mit einem SNR von -4 dB. Bei SNRs zwischen 10 und 20 dB stellt die Autokorrelation die sinnvollere Methodik dar. In diesem Fall weist die Kreuzkorrelation keine Verbesserung der Genauigkeit auf. Bei hohen Frequenzunterschieden kommt es sogar zu einer Verschlechterung der Ergebnisse. Bei einem SNR zwischen 3 und 10 dB empfiehlt sich die Nutzung der Kreuzkorrelation nur, wenn es bereits eine ausreichend präzise Frequenzschätzung gibt, die lediglich optimiert werden soll.



a) -20 dB bis 20 dB



b) 0 dB bis 20 dB

Abbildung 3.13: Genauigkeit der Methoden bei unterschiedlichen SNR

In der zweiten Simulation wird der Einfluss der Signalabschnittsgröße auf die Rauschunterdrückung der Kreuzkorrelation getestet. Hierbei wird ein Signal mit einem SNR von 0 dB betrachtet. Es sind mit der Methodik 500 Ergebnisse für unterschiedliche Signalabschnittslängen generiert und damit der durchschnittliche Fehler ermittelt worden. Abbildung 3.14 zeigt das Ergebnis.

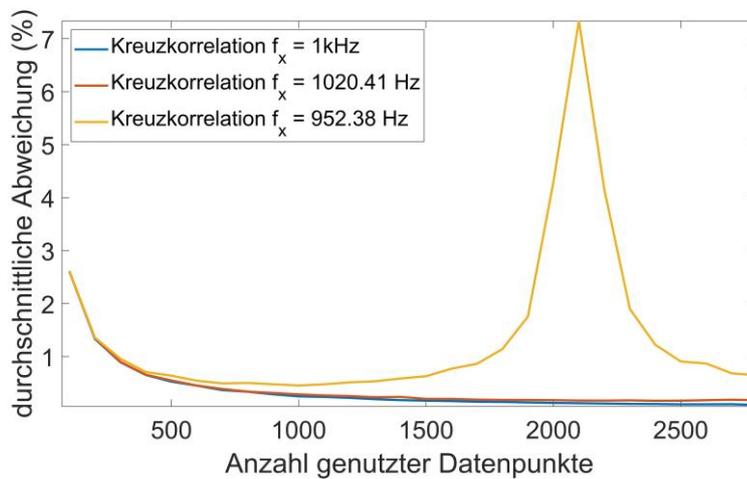


Abbildung 3.14: Verhältnis zwischen Signalabschnittsgröße und der Genauigkeit

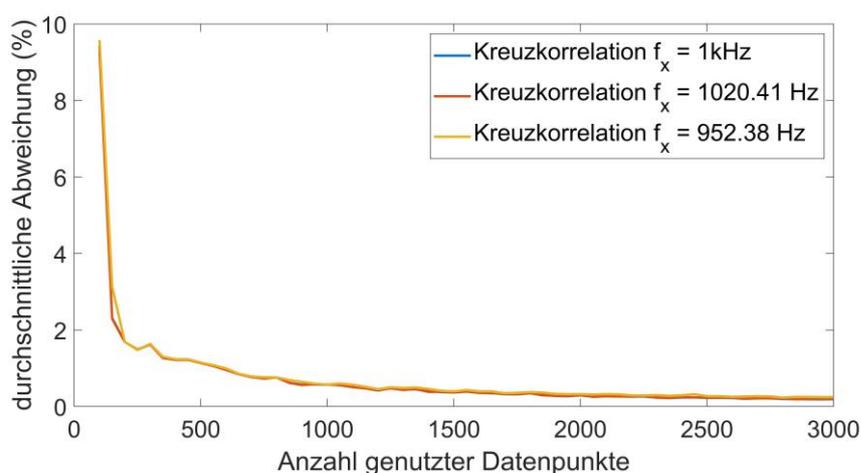
Während das Ergebnis der ersten beide Fälle den Erwartungen entspricht und sich ähnlich der Autokorrelation verhält, kommt es im dritten Fall bei steigender Signalabschnittslänge auch zu Erhöhungen des Fehlers, die ihren Höhepunkt bei 2100 Datenpunkte haben. Dabei handelt es sich um ein systematisches Problem der Kreuzkorrelation, dessen Ursache in der Amplitudenfunktion der Kreuzkorrelation (siehe Gleichung (3.21)) gefunden werden kann. Darin ist im Zähler folgende Sinusfunktion enthalten.

$$\sin\left(2\pi * T * (f_x - f_y)\right) = \sin\left(2\pi * \frac{N}{f_s} * (f_x - f_y)\right) \quad (3.36)$$

Beträgt diese Funktion damit die Amplitude null, so kann die Periodendauer der Kreuzkorrelationsfunktion nicht durch eine Nullpunktdetektion bestimmt werden, was zu erhebliche Messabweichungen führt. Diese Situation tritt ein, sobald folgendes gilt:

$$\frac{N}{f_s} * (f_x - f_y) = k; \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad (3.37)$$

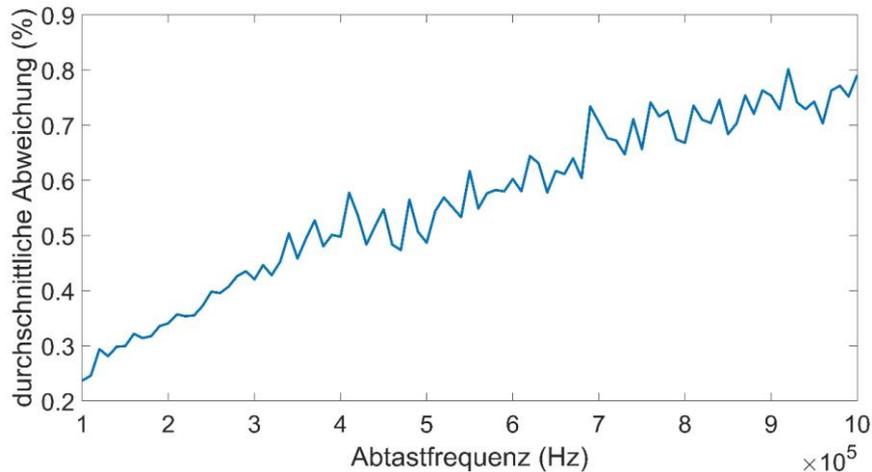
Diese Bedingung wird beispielsweise bei einer Wertekonstellation von  $N = 2100$ ,  $f_x \approx 952.38$  Hz,  $f_y = 1$  kHz und  $f_s = 100$  kHz erfüllt. Bei Anwesenheit von Rauschen kann dieses Problem aber auch bei Werten nahe den Konstellationen auftauchen. Um diese Situationen zu vermeiden, besteht die Möglichkeit, den Frequenzunterschied zwischen Referenz- und Messsignal so gering wie möglich zu halten, oder die Abtastfrequenz  $f_s$  zu erhöhen. In beiden Fällen erhöht sich nämlich für  $N$  der Wert, der notwendig wäre, damit Gleichung (3.37) null beträgt. Da bis zu einem gewissen Punkt die Erhöhung von  $N$  nicht mehr praktikabel ist, können auf diese Weise der Eintritt unerwünschter Konstellationen in Wertebereiche, die während der Anwendung nicht erfüllt werden, verlegt werden. Eine Erhöhung der Abtastfrequenz ist einfacher umzusetzen, da der Frequenzunterschied in Relation zu einem Parameter steht, die unbekannt ist. Daher wird in folgender Abbildung die Simulation von Abbildung 3.12 mit einer Abtastfrequenz von 500 kHz wiederholt.



**Abbildung 3.15:** Verhältnis zwischen Signalabschnittsgröße und der Genauigkeit bei einer Abtastfrequenz von 500 kHz

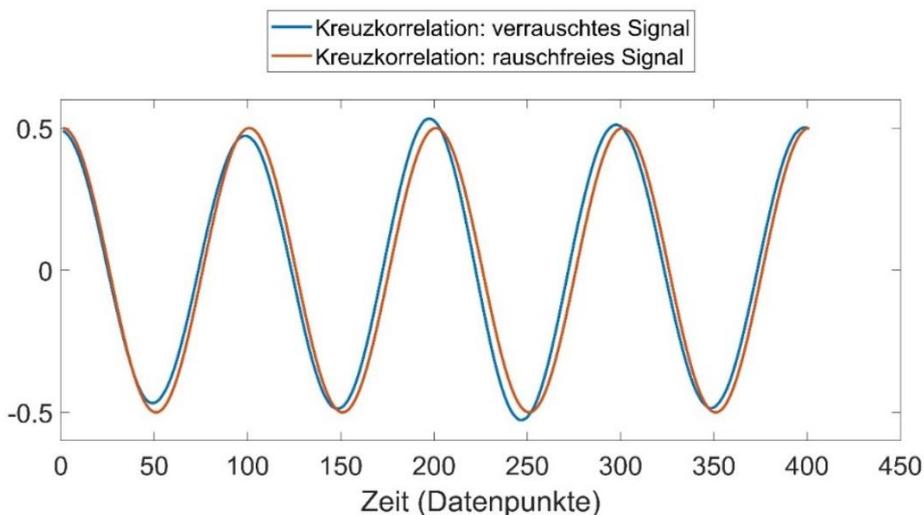
Die Abweichungsspitzen, die aufgrund der beschriebenen unerwünschten Wertekonstellationen zustande kommen, sind im hier betrachteten Wertebereich für  $N$  nicht

mehr vorzufinden. Somit können durch die Erhöhung der Abtastfrequenz die Abweichungsspitzen vermieden werden. Bedenklich ist hierbei aber, dass sich auf diese Weise auch die durchschnittlichen Abweichungen der Methode signifikant erhöht haben. Dieses Verhalten wird in der nächsten Simulation näher analysiert. Bei einem verrauschten Signal der Frequenz 10 kHz und SNR -10 dB wird die Abtastfrequenz von 100 kHz auf 1 MHz schrittweise erhöht und die Frequenz der Kreuzkorrelationsfunktion über die Nullpunktdetektion ermittelt. Abbildung 3.16 visualisiert das Verhältnis zwischen der Abtastfrequenz und der durchschnittlichen Abweichung der Frequenzbestimmung.



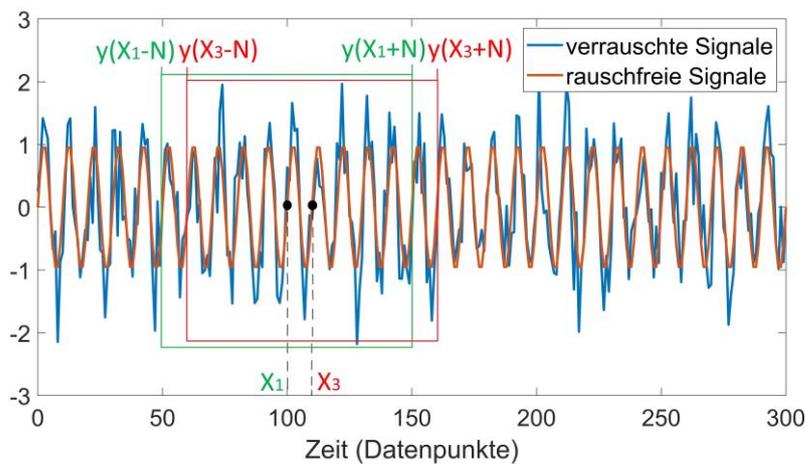
**Abbildung 3.16:** Verhältnis zwischen der Abtastfrequenz und der durchschnittlichen Abweichung der Frequenzbestimmung

Mit steigender Abtastfrequenz erhöht sich die durchschnittliche Abweichung der Frequenzbestimmung. Dieses Verhalten lässt sich mit der Form, in dem das additive Rauschen des Messsignals in der Kreuzkorrelationsfunktion repräsentiert wird, begründen. In der Kreuzkorrelation führt das additive Rauschen des Messsignals zu einer Modulation der Amplitude und Frequenz (siehe Abbildung 3.17). Die Modulationen sind aufgrund ihrer Quelle von stochastischer Natur.

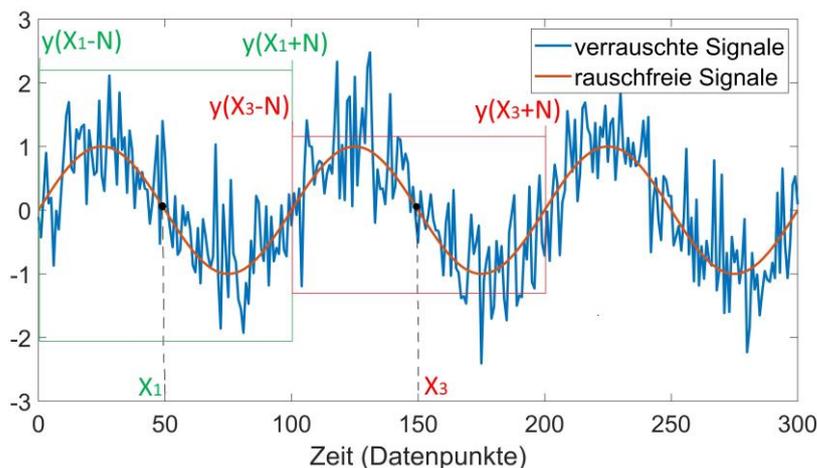


**Abbildung 3.17:** Kreuzkorrelationsfunktion eines verrauschten und rauschfreien Sinussignals

Der Grund für das Verhalten in Abbildung 3.16 besteht in der Ähnlichkeit zwischen dem Rauschanteil der Signalabschnitte, die für die Berechnung der Nullpunkte der Kreuzkorrelationsfunktion genutzt werden. Je ähnlicher sich die Rauschanteile der Signalabschnitte sind, desto ähnlicher sind sich auch die Verschiebungen der jeweiligen Nullstellen. Je ähnlicher sich wiederum die Verschiebungen sind, desto geringer fällt die Änderung der Signalperiodendauer aus. Die Rauschanteile sind sich dabei ähnlicher, je mehr sie sich überschneiden. Das erklärt, warum sich bei steigender Abtastfrequenz die Signalperiodendauer der Kreuzkorrelationsfunktion stärker verändert. Bei steigender Abtastfrequenz erhöht sich die Anzahl der Datenpunkte zwischen zwei Nullstellen. Bei gleichbleibender Länge des genutzten Signalabschnitts verringert sich dadurch auch der Anteil des Rauschens, den die für die Berechnung der Nullstellen betrachteten Abschnitte gemeinsam haben. Dies wird in den folgenden Abbildungen näher veranschaulicht.



a) Abtastfrequenz: 100 kHz



b) Abtastfrequenz: 1 MHz

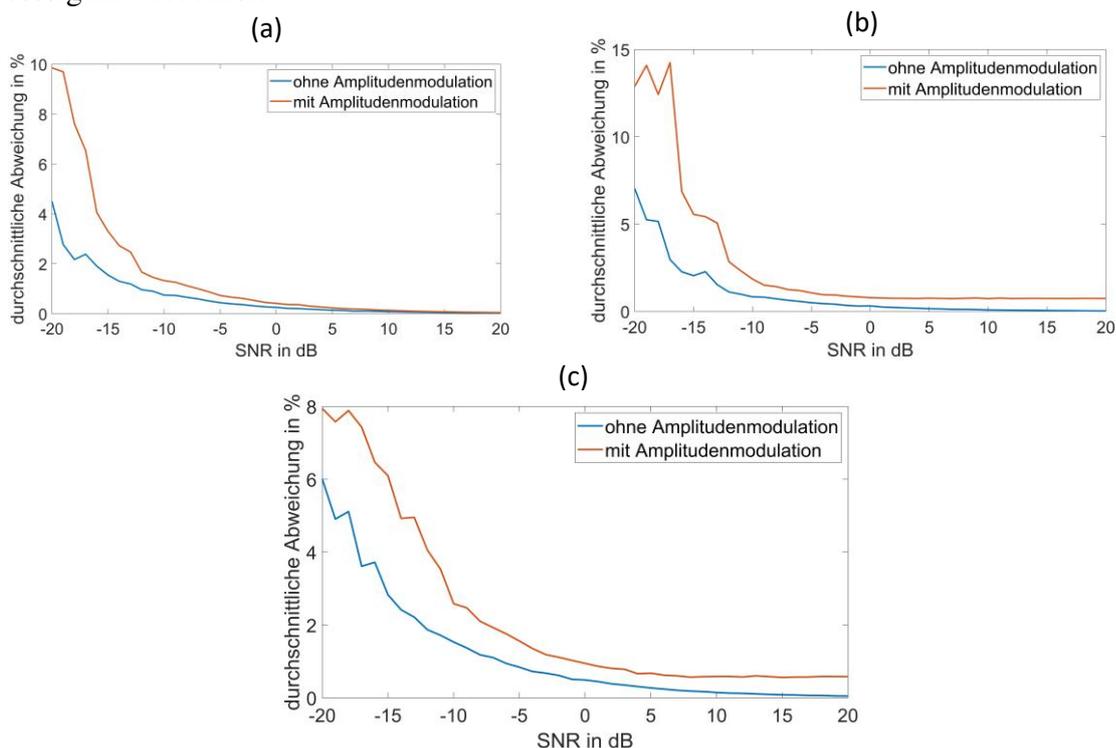
**Abbildung 3.18:** (a) verrauschtes und rauschfreies Signal bei der Abtastfrequenz 100 kHz; (b) verrauschtes und rauschfreies Signal bei der Abtastfrequenz 1 MHz;

Bei der gleichen Signalabschnittslänge  $N$ , die für die Berechnung der Kreuzkorrelation genutzt werden, sind im betrachteten Signalabschnitt bei einer niedrigeren Abtastfrequenz mehr Signalperioden als bei höherer Abtastfrequenz enthalten (vgl. Abbildungen 3.18 a) und b)). Dadurch überschneiden sich bei einer Abtastfrequenz von 100 kHz die Signalabschnitte, die für die Berechnung der ersten und dritten Nullstelle verwendet werden,

im erheblichen Maße. Ein Großteil des Rauschens, das für die Verschiebung der ersten Nullstelle verantwortlich ist, beeinflusst auch die Verschiebung der dritten Nullstelle. Signalperiodenänderungen werden nur durch die Abschnitte außerhalb der Überschneidung verursacht. Bei einer Abtastfrequenz von 1 MHz kommt es in Abbildung 3.18b) zu keiner Überschneidung der betrachteten Signalabschnitte. Dadurch können sich die Verschiebungen der jeweiligen Nullstellen viel stärker voneinander unterscheiden und sich die Signalperioden somit stärker verändern.

Dementsprechend ist die Erhöhung der Abtastfrequenz nicht zu empfehlen. Um das Problem der Abweichungsspitzen zu vermeiden, empfiehlt es sich daher, eine Schwelle für die Amplitude der Kreuzkorrelationsfunktion festzulegen. Wird diese Schwelle unterschritten, so wird die Kreuzkorrelationsfunktion mit einer angepassten Signalabschnittslänge erneut generiert. Darüber hinaus sollten Frequenzschätzungen möglichst präzise sein, um den Frequenzunterschied zu minimieren und so das Auftauchen ungewünschter Wertekonstellationen vorzubeugen.

Als nächsten Schritt soll die Leistung der Kreuzkorrelation an Signale mit additivem Rauschen und Amplitudenmodulation näher betrachtet werden. Dazu werden die vorherigen Simulationen mit dem Signalmodell aus Kapitel 3.2.2 (siehe Gleichung (3.11)) als Messsignal wiederholt.

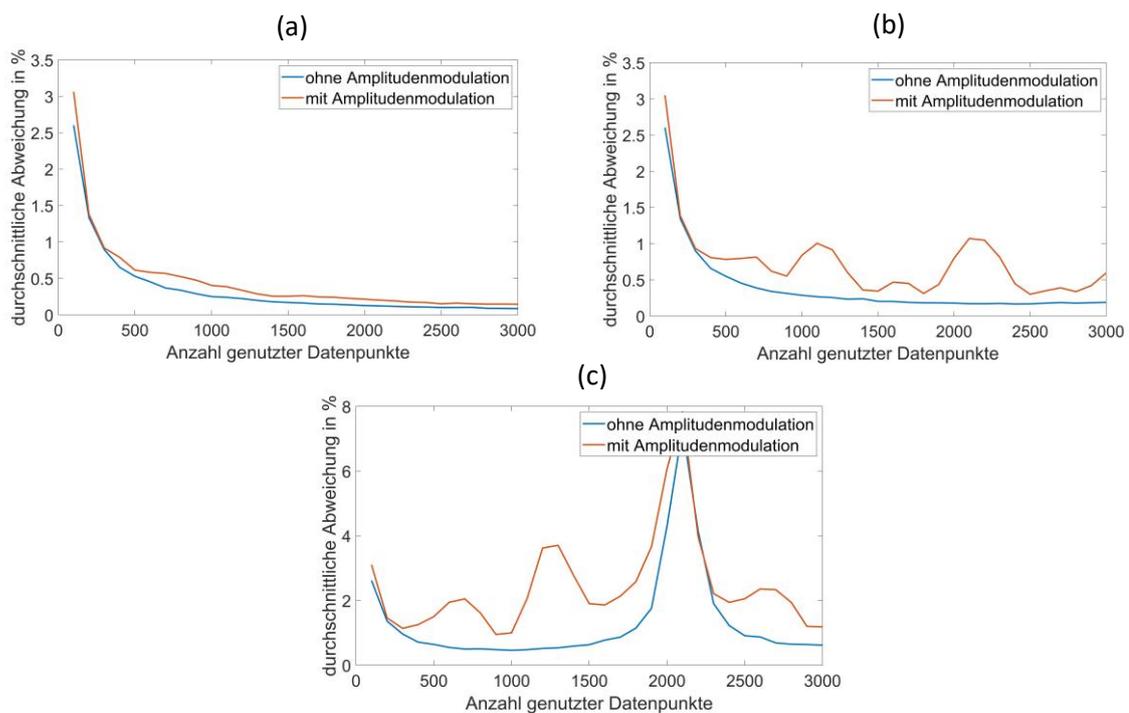


**Abbildung 3.19:** Genauigkeit der Kreuzkorrelation bei unterschiedlichen SNR mit und ohne Amplitudenmodulation; a) Fall 1; b) Fall 2; c) Fall 3 (siehe S.32)

In Abbildung 3.19 und 3.20 werden die Ergebnisse mit und ohne Amplitudenmodulation für jeden Betrachtungsfall visualisiert. Dabei ist in Abbildung 3.19 die Anzahl an verwendete Datenpunkte auf 1000 festgelegt worden, während in Abbildung 3.20 Signale mit dem SNR 0 dB betrachtet worden sind. Bei allen Fällen kommt es durch die Amplitudenmodulation zu einer Verschlechterung der Ergebnisse. Dabei verändert sich das Verhalten, falls es einen

Frequenzunterschied zwischen Referenz- und Messsignal gibt. Ohne Frequenzunterschied erhöht sich die durchschnittliche Abweichung der Ergebnisse bei Amplitudenmodulation mit sinkendem SNR lediglich schneller. Bei einem Frequenzunterschied führt die Amplitudenmodulation zu einem Fehleroffset, der auch bei sehr hohen SNR nicht unterschritten wird. In diesem Fällen kommt es durch die Amplitudenmodulation zu einer systematischen Frequenzveränderung der Kreuzkorrelationsfunktion.

Auch bei den Ergebnissen in Abbildung 3.20 kommt es bei einem Frequenzunterschied zwischen Referenz- und Messsignal zu einer Veränderung. Während sich die Ergebnisse bei identischer Frequenz auch in Anwesenheit von Amplitudenmodulation ähnlich einer Hyperbel verhalten, weist die Genauigkeit bei einem Frequenzunterschied mit steigender Zahl an genutzte Datenpunkte ein Schwingverhalten auf. Ursache dieses Verhaltens liegt ebenfalls in der Amplitude der Kreuzkorrelationsfunktion. Durch die Amplitudenmodulation des Messsignals erhöht sich die Zahl der Wertekonstellationen, in denen die Amplitude der Kreuzkorrelationsfunktion null beträgt. Doch auch hier kann das Schwingverhalten vermieden werden, wenn entweder der Frequenzunterschied reduziert oder die Abtastfrequenz erhöht wird.



**Abbildung 3.20:** Genauigkeit der Kreuzkorrelation bei unterschiedlicher Anzahl an genutzter Datenpunkte  $N$  mit und ohne Amplitudenmodulation; a) Fall 1; b) Fall 2; c) Fall 3 (siehe S. 32)

Insgesamt lässt sich schlussfolgern, dass eine Frequenzbestimmung durch die Nullpunktdetektion an Kreuzkorrelationsfunktionen nur unter Umständen Vorteile gegenüber der Autokorrelation aufweist. Die Kreuzkorrelationsfunktion ermöglicht es, Frequenzbestimmungen von Signalen mit negativen SNR durchzuführen. Frequenzunterschiede zwischen Referenz- und Messsignalen verschlechtern zwar die Genauigkeit, eine Frequenzbestimmung unter starkem Rauschen ist hier aber möglich. Unter bestimmte Wertekonstellationen konvergiert die Amplitude der Kreuzkorrelationsfunktion jedoch

gegen null, wodurch eine Frequenzbestimmung über die Periodenlänge der Kreuzkorrelationsfunktion nicht möglich ist. Diese Wertekonstellationen lassen sich aber über bestimmte Maßnahmen vermeiden. Darüber hinaus reagiert die Methodik sehr empfindlich auf Amplitudenmodulation. Im Falle eines Frequenzunterschieds zwischen Referenz- und Messsignal verändert sich durch Amplitudenmodulation die Periodenlänge der Kreuzkorrelationsfunktion, was die Ergebnisse erheblich verschlechtert. In Anbetracht dessen, dass in der Realität die Ermittlung der richtigen Signalfrequenz das Ziel darstellt, muss grundsätzlich von einem Frequenzunterschied ausgegangen werden. Daher ist eine Frequenzbestimmung durch die Nullpunktbestimmung einer Kreuzkorrelationsfunktion nur für sehr stark verrauschte harmonische Signale mit konstanter Amplitude, bei dem bereits eine präzise Frequenzschätzung existiert, zu empfehlen.

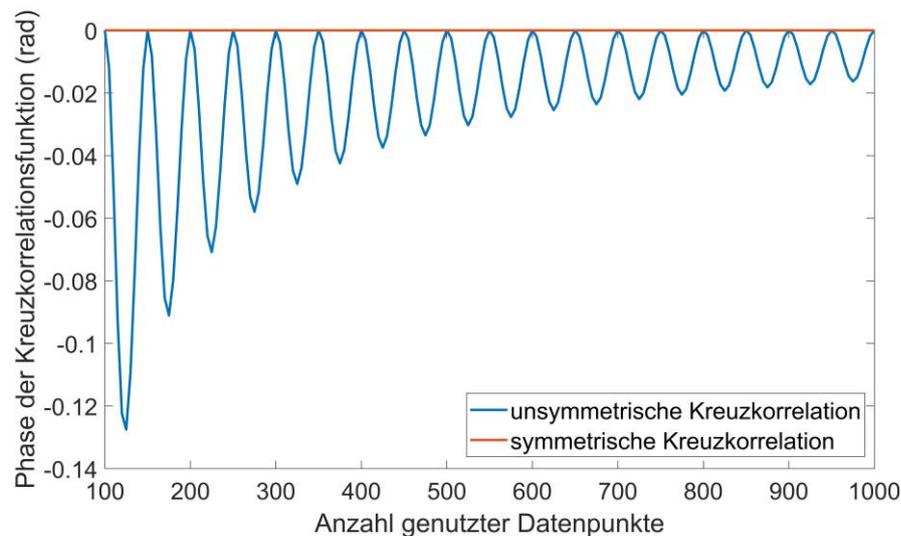
### **Phasenbestimmung:**

In den folgenden Simulationen soll geprüft werden, ob die unsymmetrische und symmetrische Kreuzkorrelation für die Phasenbestimmung eines Messsignals genutzt werden kann. Die Idee besteht darin, die Kreuzkorrelation zwischen dem Messsignal (siehe Gleichung (3.19)) und Gleichung (3.38) als Referenzsignal zu generieren. Anschließend wird die Phase des Messsignals  $\varphi_y$  ermittelt, indem die Phase der Kreuzkorrelationsfunktion  $\varphi_{\phi_{xy}}$  mithilfe der diskreten Fourier-Reihe (= DFR) und Gleichung (3.39) bestimmt wird. Die Rauschleistung wird dabei reduziert und dadurch die Phasenbestimmung insgesamt präziser.

$$x(t) = \sin(2\pi * f_x * t) \quad (3.38)$$

$$\varphi_y = \varphi_{\phi_{xy}} - \frac{\pi}{2} \quad (3.39)$$

Dies soll nun anhand von Simulationen geprüft werden. Im ersten Schritt soll die Phase eines rauschfreien Signals mithilfe der diskreten Kreuzkorrelationsfunktion (siehe Gleichung 3.15 bzw. 3.17) ermittelt werden. Hierbei ist für die Kreuzkorrelationsfunktion ein Referenz- und Messsignal mit der Frequenz 1 kHz verwendet worden. Während die Abtastfrequenz 100 kHz beträgt, liegt die Phase des Messsignals bei 0 rad. Die Anzahl der verwendeten Datenpunkte ist im Bereich 100 bis 200 Datenpunkte variiert und für jede Signalabschnittslänge die Phase der resultierenden Kreuzkorrelationsfunktion bestimmt worden. In der folgenden Abbildung sind die Ergebnisse beider Versionen der Kreuzkorrelation zu sehen.



**Abbildung 3.21:** ermittelte Phase einer Kreuzkorrelationsfunktion bei Referenz- und Messsignale mit gleicher Frequenz unter verschiedene Anzahl an genutzte Datenpunkte

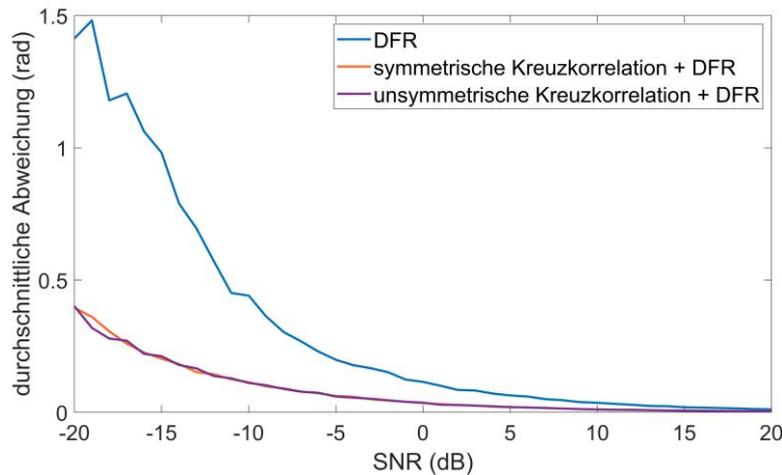
Während bei der symmetrischen Kreuzkorrelationsfunktion die ermittelte Phase bei steigender Anzahl an Datenpunkte unverändert bleibt, beträgt mit der unsymmetrischen Kreuzkorrelation der Phasenfehler nur bei Signalabschnittslängen, die ein Mehrfaches der halben Periodendauer des Messsignals entsprechen, null. Bei anderen Signalabschnittslängen kommt es in der Phasenbestimmung zu Fehler, die jedoch mit steigender Länge kleiner werden. Aus diesem Grund wird empfohlen, für die Phasenbestimmung mit der unsymmetrischen Kreuzkorrelation möglichst ein Mehrfaches der halben Periodendauer des Messsignals zu nutzen.

Der Grund für das Verhalten der unsymmetrischen Kreuzkorrelationsfunktion findet sich im mathematischen Modell. Setzt man die Bedingungen  $f_y = f_x$  und  $\varphi_x = 0$  in die Formel der unsymmetrischen Kreuzkorrelationsfunktion ein, so ergibt sich folgende Gleichung.

$$\phi_{xy}(\tau) = V * \cos(2\pi * f_y * \tau + \varphi_y) - U * \cos(2\pi * f_y * \tau + \varphi_y + 2\pi * T * f_y) \quad (3.40)$$

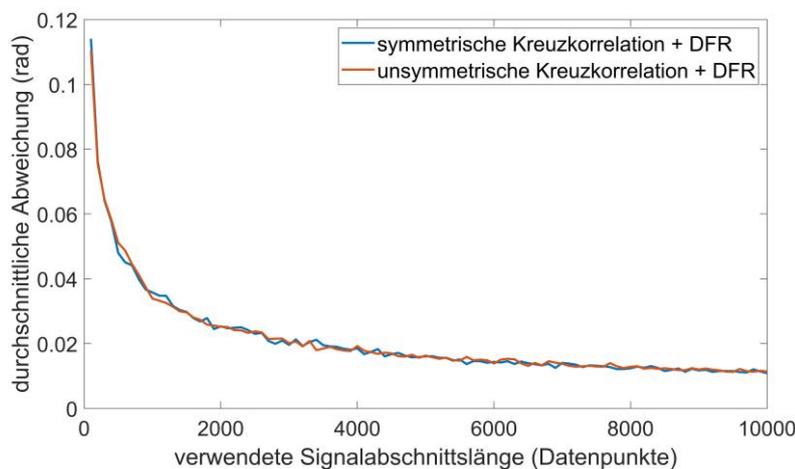
Im zweiten Summanden der Kreuzkorrelationsfunktion enthält die Phase der Kosinusfunktion einen Bestandteil, der von der Länge des genutzten Signalabschnitts abhängt und zu der Phasenänderung in der unsymmetrischen Kreuzkorrelationsfunktion führt. Dieser Bestandteil beträgt erst null, wenn die verwendete Signalabschnittslänge ein Vielfaches der halben Periodenlänge des Messsignals beträgt.

Im zweiten Schritt soll die Leistung die beschriebene Methodik bei unterschiedliche SNRs evaluiert und mit den Ergebnissen, die durch eine ausschließliche Nutzung von DFR entstehen würden, verglichen werden. Dabei wird ein verrauschtes Sinussignal der Frequenz 1 kHz und einer Phase von 1.23 rad, das mit einer Frequenz von 100 kHz abgetastet worden ist, betrachtet. Die Kreuzkorrelationsfunktion wird mit einem Sinussignal der gleichen Frequenz generiert und dabei 1000 Datenpunkte genutzt. Das Ergebnis ist in Abbildung 3.22 ersichtlich.



**Abbildung 3.22:** Genauigkeit der Phasenbestimmung bei unterschiedlichen SNR

Im Vergleich zu der ausschließlichen Nutzung von DFR sind mit der Kreuzkorrelation erhebliche Verbesserungen feststellbar. Welche Version der Kreuzkorrelationsfunktion genutzt wird, spielt in diesem Fall keine Rolle. Auch bei einem SNR von 0 dB liegt der durchschnittliche Fehler unterhalb von 0.04 rad. Bei einem noch niedrigeren SNR erhöht sich zwar der Fehler, doch auch bei einem SNR von -20 dB liegt der durchschnittlichen Fehler unterhalb von 0.5 rad und damit deutlich niedriger als zuvor.

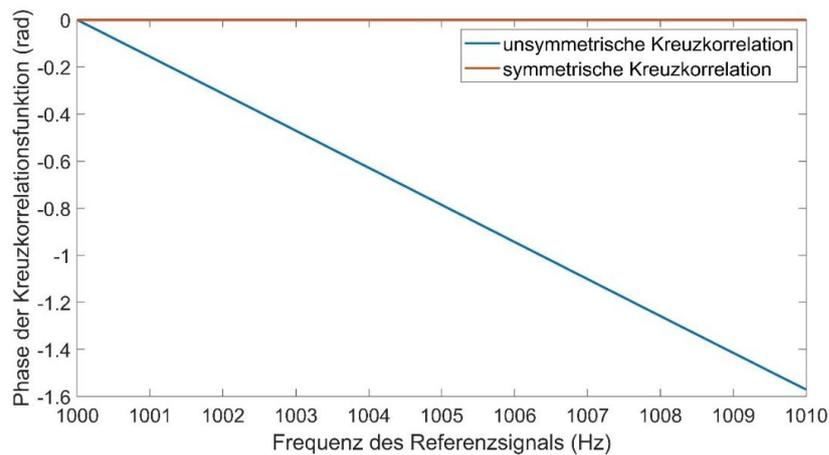


**Abbildung 3.23:** Genauigkeit der Phasenbestimmung bei unterschiedlicher Anzahl an genutzte Datenpunkte

Durch die Nutzung von mehr Datenpunkte für die Kreuzkorrelationsfunktion kann die Genauigkeit noch weiter verbessert werden. Dies wird in Abbildung 3.23 visualisiert. Hierbei ist der durchschnittliche Fehler der Methodik bei einem verrauschten Signal mit einem SNR von 0 dB unter Nutzung unterschiedlicher Mengen an Datenpunkte ermittelt worden. Durch eine steigende Zahl genutzter Datenpunkte kommt es zu einer Reduktion des Fehlers. Ab einer Menge von 3500 Datenpunkte liegt sie unterhalb von 0.02 rad.

In der Praxis kann nicht davon ausgegangen werden, dass die Frequenzen von Referenz- und Messsignal übereinstimmen werden. Daher muss analysiert werden, wie sich die Methodik schlägt, wenn eine Frequenzabweichung zwischen Referenz- und Messsignal

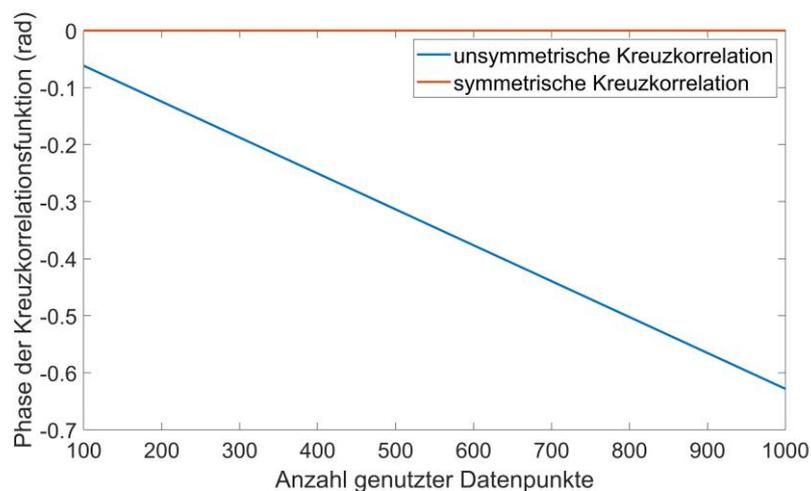
existiert. Dabei ist im ersten Schritt die Phasenbestimmung bei rauschfreien Signalen getestet worden. Dazu wird die Frequenz des Referenzsignals zwischen 1000 und 1010 Hz in 0.05Hz-Schritte variiert, während die Frequenz und Phase des Messsignals 1000 Hz und 0 rad beträgt. 500 Datenpunkte sind hierbei für die Kreuzkorrelationsfunktion genutzt worden. Abbildung 3.24 zeigt die ermittelten Phasen beider Versionen der Kreuzkorrelationsfunktion.



**Abbildung 3.24:** Phase der Kreuzkorrelationsfunktion bei unterschiedlichen Frequenzen des Referenzsignals

Während es bei der symmetrischen Kreuzkorrelation zu keinen Änderungen der Phase kommt, resultieren in der unsymmetrischen Kreuzkorrelation durch Frequenzunterschiede zwischen Referenz- und Prüfsignal Phasenverschiebungen, die direkt proportional zum Frequenzunterschied sind.

Inwiefern die Phasenverschiebung durch die Anzahl an verwendete Datenpunkte beeinflusst wird, soll in der nächsten Simulation betrachtet werden. Hierbei wird die Frequenz des Referenzsignals auf 1002 Hz festgelegt und die Anzahl an genutzte Datenpunkte von 100 auf 5000 erhöht. Das Ergebnis ist in Abbildung 3.25 ersichtlich.



**Abbildung 3.25:** Phase der Kreuzkorrelationsfunktion bei Frequenzunterschied und unterschiedliche Anzahl genutzter Datenpunkte

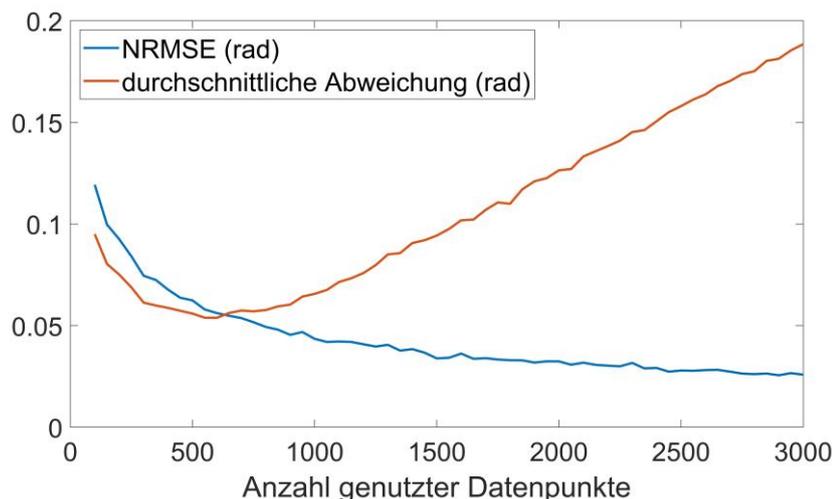
Während in der symmetrischen Kreuzkorrelation die Phase unverändert bleibt, führt in der unsymmetrischen Kreuzkorrelation eine Erhöhung der Zahl verwendeter Datenpunkte zu einer Phasenverschiebung, wobei auch hier eine Linearität zwischen der Zahl genutzter Datenpunkte und der Phasenverschiebung vorliegt. Die Ergebnisse beider Simulationen sind in Einklang mit dem mathematischen Modell aus Kapitel 3.3.2 (siehe Gleichung (3.31)).

In weiteren Verlauf des Kapitels soll zunächst ausschließlich die unsymmetrische Kreuzkorrelation näher betrachtet werden.

### **Unsymmetrische Kreuzkorrelation:**

Der Umstand, dass sich die Phase der unsymmetrischen Kreuzkorrelationsfunktion abhängig von verwendete Signalabschnittslänge und dem Frequenzunterschied zwischen Referenz- und Messsignal ändert, lässt die Schlussfolgerung, möglichst wenig Datenpunkte für die Kreuzkorrelation zu nutzen, um die Phasenänderung so gering wie möglich zu halten, zu. Doch bei der Phasenmessung darf die Anwesenheit von Rauschen nicht vernachlässigt werden. Da eine höhere Zahl an genutzte Datenpunkte die Rauschunterdrückung verbessert, muss bei der Wahl der Signalabschnittslänge ein Kompromiss eingegangen werden.

Dieser Umstand soll in der folgenden Simulation analysiert werden. Darin wird die Genauigkeit der Phasenbestimmung verrauschter Signale bei unterschiedlichen Signalabschnittslängen näher betrachtet. Das SNR, die Frequenz des Referenzsignals sowie die Phase des Messsignals werden jeweils auf 0 dB, 1002 Hz und 1.23 rad festgelegt. Die Genauigkeit wird über die normalisierte Wurzel der mittleren Fehlerquadratsumme (=NRMSE) und die durchschnittliche Abweichung von 500 verrauschte Signale veranschaulicht.



**Abbildung 3.26:** Genauigkeit der Phasenbestimmung verrauschter Signale bei unterschiedlicher Anzahl genutzter Datenpunkte

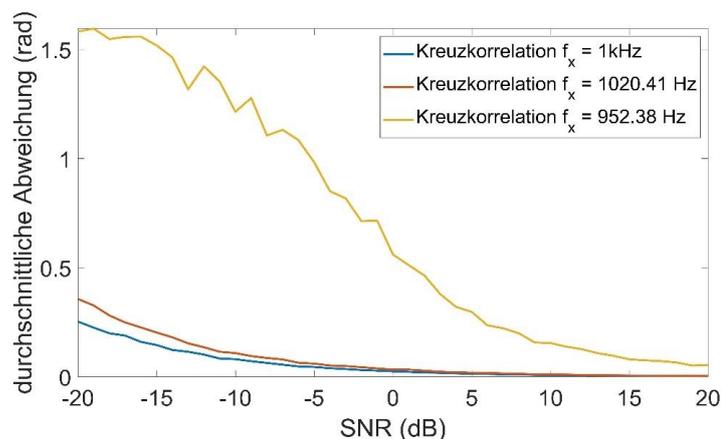
Wie zu erwarten, kommt es durch mehr verwendete Datenpunkte zu einer Verringerung des NRMSE. Somit ist auf diese Weise der Einfluss des additiven Rauschens verringert worden. Gleichzeitig kommt es analog zu den Ergebnissen von Abbildung 3.25 durch mehr Datenpunkte zu erheblichen Phasenabweichungen, welche die Ergebnisverbesserungen

aufgrund von Rauschunterdrückung ab einer bestimmten Zahl verwendeter Datenpunkte übersteigen. Eine weitere Erhöhung würde anschließend zu einem Anstieg der durchschnittlichen Abweichung führen.

Insgesamt ist die Nutzung der diskreten Fourier-Reihe an eine unsymmetrische Kreuzkorrelationsfunktion für die Phasenbestimmung eines Messsignals in der derzeitigen Form nur geeignet, wenn die Frequenz des Messsignals bekannt ist. Da dies in der Praxis nur bedingt gewährleistet werden kann, erweist sich die Methodik als wenig praxistauglich und wird im weiteren Verlauf dieser Arbeit nicht weiterbetrachtet.

### Symmetrische Kreuzkorrelation:

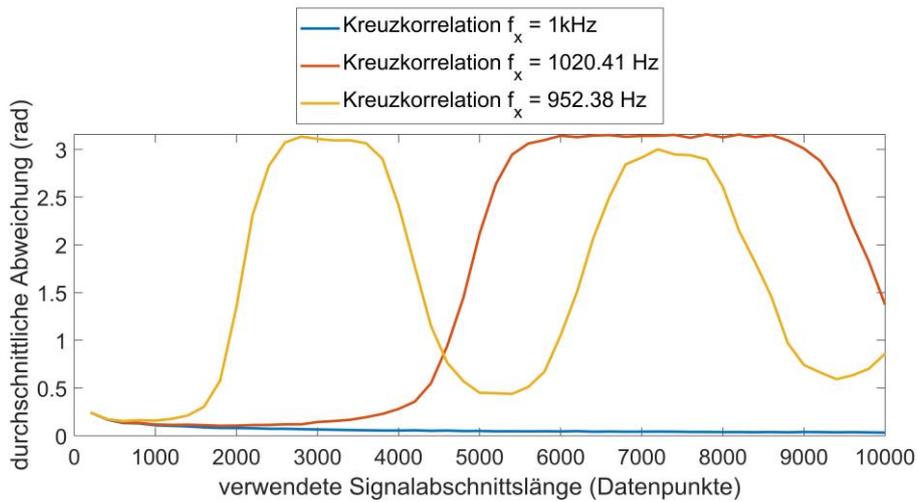
Nun wird die Phasenbestimmung mithilfe der symmetrischen Kreuzkorrelation untersucht. Nachdem die vorherigen Simulationen gezeigt haben, dass mit der symmetrischen Kreuzkorrelation die Phase eines rauschfreien Signals präzise ermittelt werden kann, wird im Anschluss das Verhalten der Methodik bei verrauschten Sinussignalen analysiert. In der ersten Simulation ist dabei die Genauigkeit der Methodik bei unterschiedlichen SNRs getestet worden. Es sind hierbei unterschiedliche Frequenzen für die Referenzsignale verwendet worden. Dadurch soll getestet werden, wie wichtig präzise Frequenzinformationen für die Phasenbestimmung mithilfe der Kreuzkorrelationsfunktion sind. Die Resultate sind in Abbildung 3.27 ersichtlich:



**Abbildung 3.27:** durchschnittliche Abweichung der Phasenbestimmung bei unterschiedlichem SNR

Durch einen steigenden Frequenzunterschied erhöht sich auch die durchschnittliche Phasenabweichung. Dies liegt jedoch hauptsächlich darin begründet, dass sich mit steigendem Frequenzunterschied die Amplitude der Kreuzkorrelationsfunktion und damit auch das SNR der Kreuzkorrelationsfunktion reduziert. Doch in Anbetracht des Ausmaßes, in dem sich die Genauigkeit bei  $f_x = 952.38\text{ Hz}$  verschlechtert hat, besteht Zweifel, dass dies der einzige Grund darstellt. Ein weiterer Grund wird im weiteren Verlauf dieses Kapitels beschrieben.

In der zweiten Simulation soll die Leistungsfähigkeit der Methodik bei steigender Anzahl verwendeter Datenpunkte betrachtet werden. Auch hier werden unterschiedliche Frequenzen für das Referenzsignal verwendet. Als SNR wird  $-10\text{ dB}$  ausgewählt. Die Ergebnisse sind in Abbildung 3.28 ersichtlich.

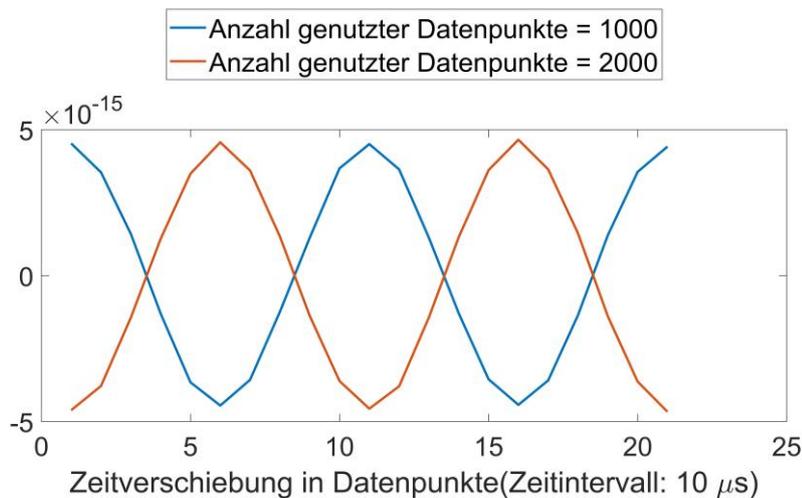


**Abbildung 3.28:** durchschnittliche Abweichung der Phasenbestimmung bei unterschiedlicher Signalabschnittslänge

Das Ergebnis verwundert im ersten Blick. Gibt es keinen Frequenzunterschied zwischen Referenz- und Messsignal, so verringert sich wie erwartet die durchschnittliche Abweichung der Phasenbestimmung. Bei Frequenzunterschiede kommt es bei der Phasenbestimmung zu erheblichen Abweichungsspitzen, die ihr Maximum bei  $\pi$  haben.

Der Grund für die erheblichen Abweichungen in den letzten beiden Simulationen findet sich im mathematischen Modell der symmetrischen Kreuzkorrelationsfunktion. Hier verändert sich die Amplitude der Kreuzkorrelationsfunktion sinusförmig mit steigender Länge des betrachteten Signalabschnitts. Dadurch kommt es bei der Amplitude zu einem Vorzeichenwechsel, der sich in der Kreuzkorrelationsfunktion als eine Phasenverschiebung um  $\pi$  widerspiegelt.

$$K = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A * B}{4T} * \frac{\sin(2\pi * T * (f_x - f_y))}{\pi * (f_x - f_y)} \tag{3.41}$$

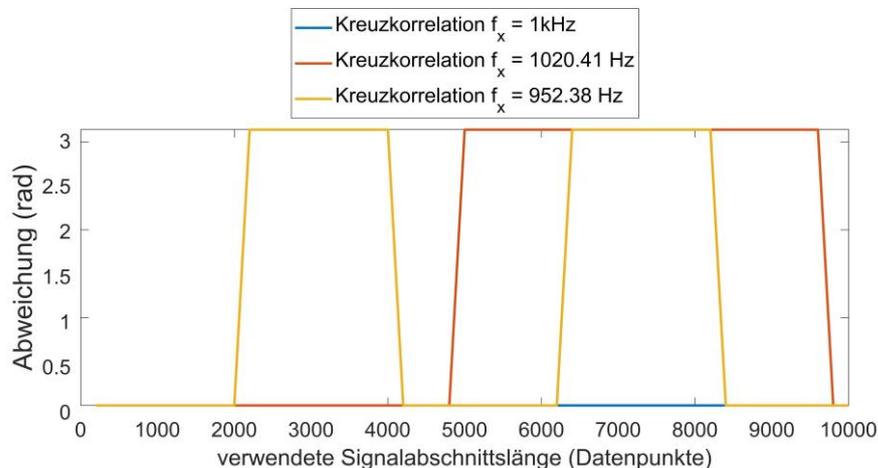


**Abbildung 3.29:** Auswirkungen des Vorzeichenwechsels in der Amplitude der Kreuzkorrelation

Dieser Sachverhalt wird in Abbildung 3.29 verdeutlicht. Hier sind zwei symmetrische Kreuzkorrelationsfunktionen von zwei Sinussignalen der Frequenz 10 kHz und 9.9 kHz mit 500 und 1000 Datenpunkte generiert worden. Man kann hier leicht erkennen, dass durch ein Vorzeichenwechsel der Amplitude die Phasen der Kreuzkorrelationsfunktionen eine Differenz von  $\pi$  aufweisen.

Es müssen Möglichkeiten gefunden, mit denen die Verschiebung der Phase um  $\pi$  verhindert werden kann. Analog zur Frequenzbestimmung gilt als erfolgsversprechend, den Frequenzunterschied zwischen Referenz- und Messsignal so gering wie möglich zu halten bzw. die Abtastfrequenz  $f_s$  zu erhöhen. In beiden Fällen erhöht sich für Signalabschnittslänge der Schwellenwert, bei dem die Amplitude sein Vorzeichen wechselt. Da bis zu einem gewissen Punkt die Erhöhung der Signalabschnittslänge nicht mehr praktikabel ist, können auf diese Weise die Vorzeichenwechsel auf Signallängenbereiche, die in der Praxis nicht genutzt werden, verlegt werden.

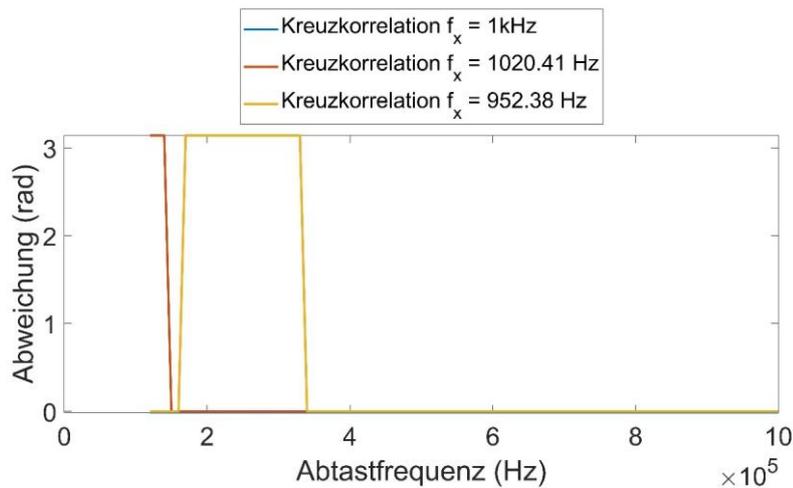
Analog zur Frequenzbestimmung erweist sich eine Erhöhung der Abtastfrequenz als einfacher umzusetzen, da der Frequenzunterschied in Relation zu einem unbekanntem Parameter steht. In den folgenden Simulationen soll daher analysiert werden, inwiefern über die Abtastfrequenz das Problem gelöst werden kann und ob die Abtastfrequenz wie in der Frequenzbestimmung einen Einfluss auf die Genauigkeit der Ergebnisse hat. Dazu werden initial zwei Simulationen durchgeführt. In der ersten Simulation soll die obige Simulation ohne Rauschen wiederholt werden.



**Abbildung 3.30:** Abweichung der Phasenbestimmung eines rauschfreien Signals bei unterschiedlicher Signalabschnittslänge

In der Abbildung ist eindeutig ersichtlich, dass es bei Frequenzunterschiede mit steigender Anzahl an verwendete Datenpunkte zu Vorzeichenwechsel in der Kreuzkorrelationsamplitude kommt und dadurch die Phase um  $\pi$  verschoben wird.

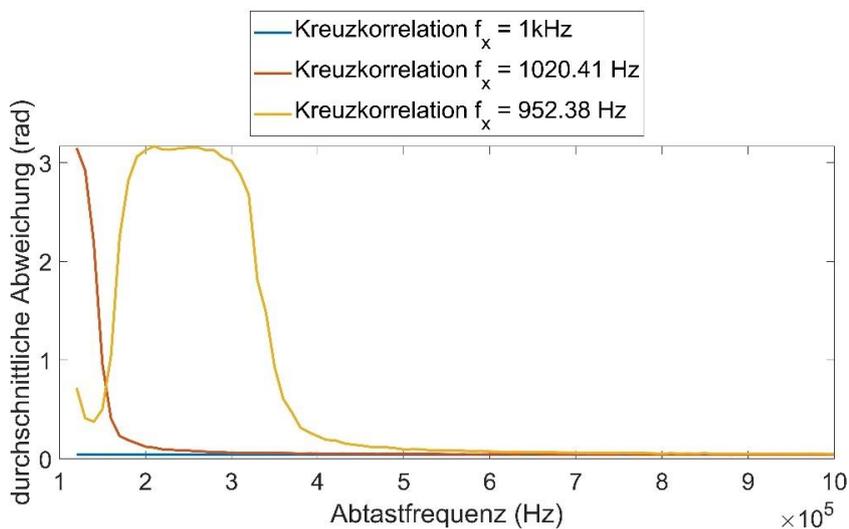
Bei der zweiten Simulation soll der Einfluss der Abtastfrequenz auf die Phasenbestimmung mithilfe der symmetrischen Kreuzkorrelation näher analysiert werden. Dazu wird im ersten Schritt ein rauschfreies Signal betrachtet.



**Abbildung 3.31:** Abweichung der Phasenbestimmung eines rauschfreien Signals bei unterschiedlichen Abtastfrequenzen

Ab einer Abtastfrequenz von ungefähr 0.35 MHz kommt es bei einer Signalabschnittslänge von 7000 Datenpunkten zu keinem Vorzeichenwechsel mehr. Somit bestätigt die Simulation die Vermutung, dass sich bei einer höheren Abtastfrequenz die Anzahl an Datenpunkte, die für einen Vorzeichenwechsel der Kreuzkorrelationsamplitude erforderlich ist, erhöht.

Im Anschluss soll geprüft werden, inwiefern die Vermeidung des Vorzeichenwechsels über die Abtastfrequenz auch im Falle eines stark verrauschten Signals wirksam ist. Dazu wird die obige Simulation mit einem Signal mit einem SNR von -10 dB wiederholt.



**Abbildung 3.32:** durchschnittliche Abweichung der Phasenbestimmung eines verrauschten Signals bei unterschiedliche Abtastfrequenzen

Abgesehen von der Tatsache, dass sich die durchschnittliche Abweichung der Phasenbestimmung aufgrund des additiven Rauschens erhöht hat, hat sich am grundsätzlichen Verhalten nichts geändert. Ab einer gewissen Abtastfrequenz kommt es zu keinem Vorzeichenwechsel der Amplitudenfunktion. Zudem kommt es durch die Erhöhung der Abtastfrequenz nicht wie bei der Frequenzbestimmung zu erhebliche

Genauigkeitsverluste der Phasenbestimmung. Somit erweist sich die Erhöhung der Abtastfrequenz als eine effektive Methode, um einen Vorzeichenwechsel in der Amplitude der Kreuzkorrelationsfunktion zu vermeiden.

Abschließend soll untersucht werden, inwiefern es durch Asynchronität zwischen Signal- und Abtastfrequenz zu Fehler in der Phasenbestimmung kommt. Dazu wird ein rauschfreies Signal der Phase 1 rad bei unterschiedlichen Frequenzen und der Abtastfrequenz 100 kHz betrachtet.

**Tabelle 3.3:** Phasenbestimmung mithilfe der symmetrischen Kreuzkorrelation bei asynchroner Abtastung

Signalfrequenz (in Hz)	Abtastfrequenz/ Signalfrequenz	Ermittelte Signalphase (in rad)
10000	10	1
10250	9.7561	0.8177
10520	9.5057	0.8767
10740	9.3110	0.9234
10954	9.1291	0.9678
11000	9.0909	0.9772
11250	8.8889	0.7624

Sobald es eine Asynchronität zwischen der Abtast- und Signalfrequenz gibt, existiert ein Fehler in der Phasenbestimmung. Dies liegt in der Differenz zwischen der tatsächlichen Signalperiodendauer und der Anzahl an Datenpunkte, die in der diskreten Fourier-Reihe verwendet wird, begründet. Letzteres stellt nämlich in dieser Simulation stets einen abgerundeten Wert der Signalperiodendauer dar. Je größer die Differenz, desto größer ist auch der Phasenfehler.

### 3.4 Kreuzkorrelationsspektrum

In diesem Kapitel wird mit dem Kreuzkorrelationsspektrum eine Methode, mit der unter Zuhilfenahme von Kreuzkorrelation die Frequenzen eines Signals auch unter hohem Rauschen präzise bestimmt werden können, vorgestellt. Sie fungiert als Alternative zur schnellen Fourier-Transformation (=FFT) sowie der kontinuierlichen Wavelet-Transformation (=CWT) und ist in der Lage, Defizite bei der Nutzung von FFT und CWT zu umgehen. Darüber hinaus ist das Kreuzkorrelationsspektrum der Autokorrelation in seiner Fähigkeit, Rauschen ohne Verlust von Frequenzinformationen zu unterdrücken, überlegen.

Die Grundidee ist in [129] das erste Mal beschrieben worden. Dort ist sie jedoch in stark abgewandelter Form ausschließlich für die Spektralanalyse von Impulsantworten genutzt worden. Diese Arbeit zielt darauf ab, die Methodik in der abgewandelten Form näher zu beschreiben und seine Leistungsfähigkeit zu analysieren. Dazu wird im ersten Schritt die Problemstellung zum besseren Verständnis des Kontexts erläutert.

### 3.4.1 Problemstellung

Das FFT erstellt ein Energiespektrum, mit dem ermittelt werden kann, aus welchen Frequenzen sich ein Signal zusammensetzt. Dabei handelt es sich jedoch um ein Integral über die Zeit. Dadurch enthält das Energiespektrum keine Informationen über zeitliche Frequenzänderungen. Somit kann zwar beschrieben werden, welche Frequenzen aufgetaucht sind. Wann jedoch eine bestimmte Frequenz aufgetaucht ist, wird hiermit nicht erklärt. Dieses Problem kann mit der Kurzzeit-Fourier-Transformation (=STFT) gelöst werden [130]. Hier wird das Signal in kleine Zeitperioden unterteilt, die jeweils in Frequenzspektrern transformiert werden. Auf diese Weise verschlechtert sich jedoch die Frequenzauflösung in einem erheblichen Maß. Dies liegt in der Heisenberg'schen Unschärferelation begründet. Diese besagt, dass eine Verbesserung der Zeitauflösung nur zulasten einer schlechteren Frequenzauflösung, und umgekehrt, erreicht werden kann. Somit erkaufte sich die Kurzzeit-Fourier Transformation die verbesserte Zeitauflösung mit einer verschlechterten Frequenzauflösung [130] [131].

Die Kontinuierliche Wavelet Transformation ist entwickelt worden, um die Auflösungsprobleme der STFT zu beheben. Doch diese Methode ist nur für Signale, die hauptsächlich niedrige Frequenzen und nur kurzzeitig hohe Frequenzen enthält, geeignet [130]. Die hier genutzte Fensterfunktion wird nämlich entsprechend der vorliegenden Frequenzen skaliert, sodass bei höheren Frequenzen eine hohe Zeitauflösung mit niedriger Frequenzauflösung und umgekehrt vorherrscht. In Situationen, in denen sowohl hohe Frequenz- als auch hohe Zeitaufösungen erforderlich sind, kann die Wavelet Transformation nur eingeschränkt eingesetzt werden.

Autokorrelation ist wiederum in vielen Situationen eine geeignete Methode, um Rauschen ohne Verlust der Signalfrequenz zu unterdrücken. Doch bei Kleinsignalen mit sehr niedrigen SNR stößt sie an ihre Grenzen (siehe Kapitel 3.3.3).

### 3.4.2 Methodik

Das Kreuzkorrelationsspektrum  $K(f_w)$  fußt auf den Erkenntnissen aus Kapitel 3.3 sowie der Tatsache aus der Fourier-Analyse, dass jedes Signal als eine Linearkombination von trigonometrischen Funktionen approximiert werden kann. Sie kann mithilfe der Gleichungen (3.42) bis (3.48) beschrieben werden und visualisiert die Amplitude einer symmetrischen oder unsymmetrischen Kreuzkorrelationsfunktion zwischen dem Messsignal  $y(n)$  und der Sinusfunktion  $x_{f_w}(n)$  (Gleichung (3.42)) als Funktion der Frequenz  $f_w$ , welches gemäß Gleichung (3.43) festgelegt wird.

$$x_{f_w}(k) = \sin\left(2\pi * f_w * \frac{k}{f_s}\right) \quad (3.42)$$

$$f_w = w * \Delta f; \quad w \in \left[\frac{f_a}{\Delta f}; \frac{f_e}{\Delta f}\right] \quad (3.43)$$

$$y(k) = \sum_{i=1}^P B_i * \sin\left(2\pi * f_{yi} * \frac{k}{f_s} + \varphi_{yi}\right) \quad (3.44)$$

$$\phi_{x_{f_w}y, \text{unsymm}}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_{f_w}(k) * y(k-n) \quad ; (k \in \mathbb{N}) \quad (3.45)$$

$$\phi_{x_{f_w}y, \text{symm}}(n) = \frac{1}{2N} \sum_{k=-N}^{N-1} x_{f_w}(k) * y(k-n) \quad ; (k \in \mathbb{Z}) \quad (3.46)$$

$$K_{\text{unsymm}}(f_w) = \left| \sum_{i=1}^P \frac{B_i}{2N} * \frac{\sin\left(\pi * N * (f_w - f_{yi})\right)}{\pi * (f_w - f_{yi})} \right| \quad (3.47)$$

$$K_{\text{symm}}(f_w) = \left| \sum_{i=1}^P \frac{B_i}{4N} * \frac{\sin\left(2\pi * N * (f_w - f_{yi})\right)}{\pi * (f_w - f_{yi})} \right| \quad (3.48)$$

Das Kreuzkorrelationsspektrum kann wie folgt generiert werden (siehe Abbildung 3.33):

1. Der Frequenzbereich  $[f_a; f_e]$  und die Frequenzauflösung  $\Delta f$  werden vom Nutzer festgelegt. Um die Frequenz des Messsignals effizient zu analysieren, wird im Voraus eine grobe Frequenzschätzung durchgeführt, um den Frequenzbereich so klein wie möglich zu halten, ohne Frequenzanteile des Signals auszuschließen.  $\Delta f$  wird entsprechend den Messanforderungen festgelegt. Beispielsweise sollte bei einem Signal der Frequenz 1 kHz, die Auflösung auf 1Hz festgelegt werden, falls eine Genauigkeit von 0.05% verlangt wird.
2.  $f_w$  wird auf  $f_a$  festgelegt.
3. Die Sinusfunktion  $x_{f_w}(n)$  wird gemäß Gleichung (3.42) generiert.
4. Die Kreuzkorrelationsfunktion  $\phi_{x_{f_w}y}(k)$  zwischen dem Messsignal  $y(n)$  und  $x_{f_w}(n)$  wird mit Gleichung (3.45) für unsymmetrische Kreuzkorrelation oder mit Gleichung (3.46) für symmetrische Kreuzkorrelation berechnet. Die Länge der Kreuzkorrelationsfunktion sollte auf eine Signalperiode festgelegt werden.
5. Für die derzeitige Frequenz  $f_w$  wird der Wert des Kreuzkorrelationsspektrums  $K(f_w)$  bestimmt, indem die Amplitude der Kreuzkorrelationsfunktion  $\phi_{x_{f_w}y}(k)$  ermittelt wird.
6. Die Frequenz  $f_w$  wird um  $\Delta f$  erhöht, d.h.  $w = w + 1$  (siehe Gleichung (3.43))
7. Die Schritte 3-6 werden wiederholt, bis  $K(f_e)$  bestimmt worden ist.

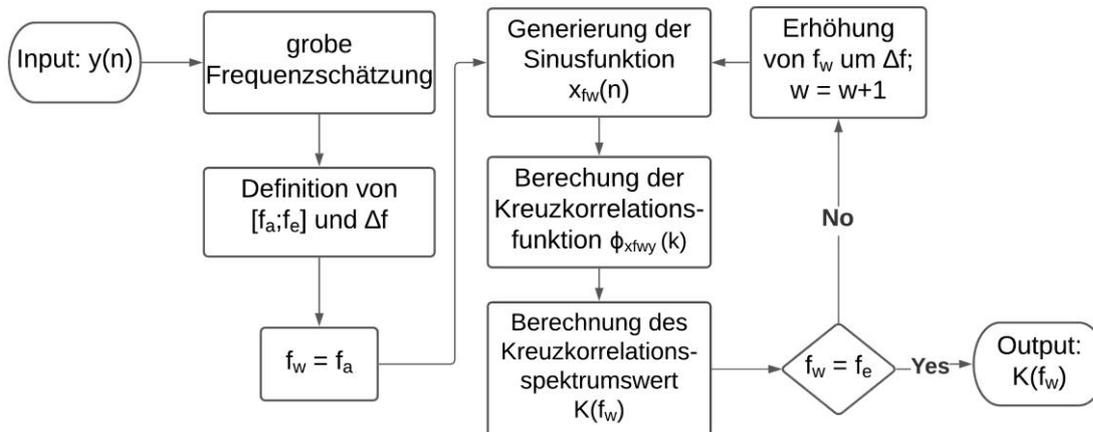


Abbildung 3.33: Berechnungsprozess des Kreuzkorrelationsspektrums

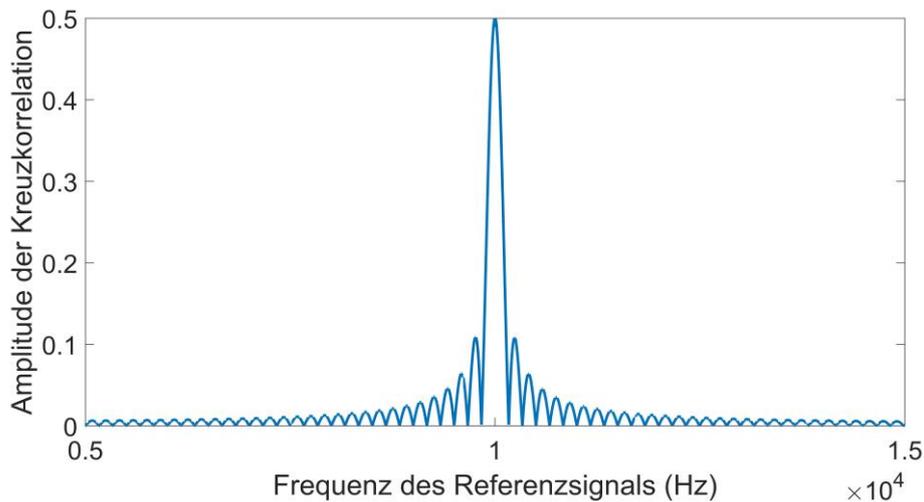
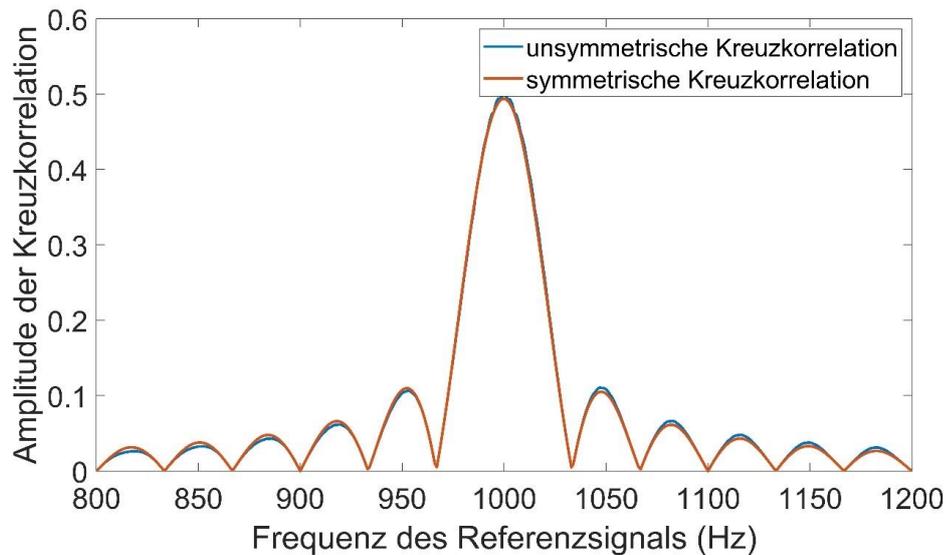


Abbildung 3.34: Kreuzkorrelationsspektrum eines Sinussignals

Abbildung 3.34 zeigt ein beispielhaftes Kreuzkorrelationsspektrum, das mithilfe der symmetrischen Kreuzkorrelation generiert worden ist. Dabei ist eine einfache Sinusfunktion der Frequenz 10 kHz als Messsignal verwendet worden. Das Ergebnis ähnelt der Betragsfunktion eines Sinus cardinalis, das an der Frequenz des Messsignals symmetrisch ist und sein globales Maximum hat. Der Wert des globalen Maximums beträgt dabei die Hälfte der Messsignalamplitude. Die Erstellung eines Kreuzkorrelationsspektrums stellt somit eine valide Möglichkeit dar, um Informationen zu den Frequenzen eines Signales zu generieren.

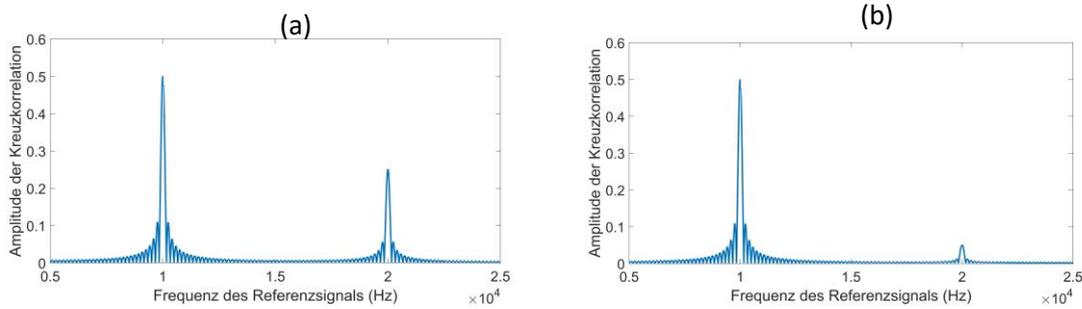
Im Anschluss wird das Kreuzkorrelationsspektrum sowohl mit der symmetrischen als auch mit der unsymmetrischen Kreuzkorrelation unter den gleichen Bedingungen erstellt und die Ergebnisse miteinander verglichen. Das Resultat findet sich in Abbildung 3.35.



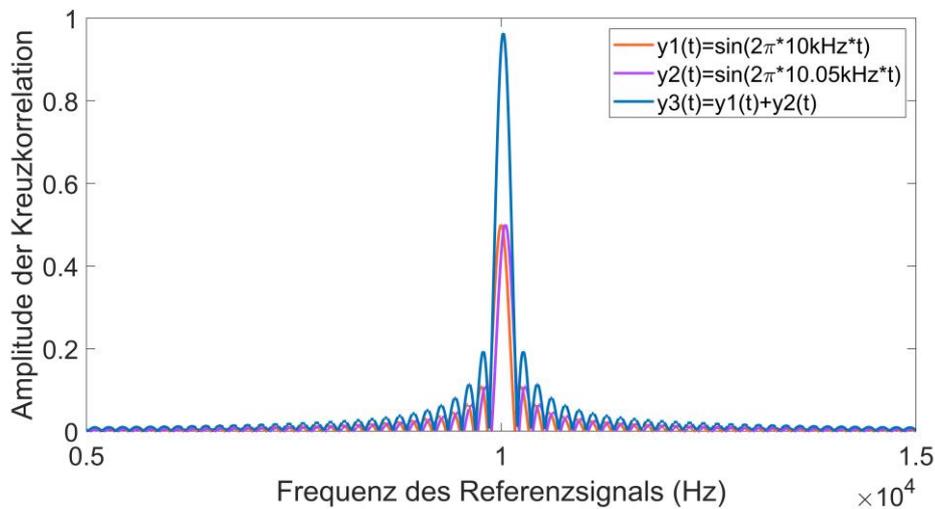
**Abbildung 3.35:** Kreuzkorrelationsspektren mit symmetrischer oder unsymmetrischer Kreuzkorrelation

Grundsätzlich gibt es keine großen Unterschiede zwischen beide Ergebnisse. Das Kreuzkorrelationsspektrum mit der unsymmetrischen Kreuzkorrelationsfunktion weist jedoch nahe der Messsignalfrequenz ein zackenförmiges Verhalten auf. Dieses Verhalten tritt insbesondere dann auf, wenn die Signalperiodendauer nur wenige Datenpunkte beträgt. Der Grund für das unsaubere Spektrum liegt in der Asynchronität zwischen der Signal- und der Abtastfrequenz der Kreuzkorrelationsfunktion begründet. Diese führt dazu, dass das eigentliche Funktionsmaximum zwischen Datenpunkte liegen kann. Bleibt die Phase der Kreuzkorrelationsfunktion bei der Frequenz des Referenzsignals unverändert, so würde sich trotzdem eine saubere Form des Spektrums ergeben, da sich die Position des Maximums zwischen zwei Datenpunkte nicht verändern würde. Bei der unsymmetrischen Kreuzkorrelationsfunktion wird die Phase der Kreuzkorrelation aber vom Frequenzunterschied zwischen Referenz- und Messsignal beeinflusst (siehe Gleichung (3.31)). Dadurch befindet sich bei jedem Frequenzunterschied das Maximum unterschiedlich weit von seinen benachbarten Datenpunkten entfernt. Dies führt zu einer unsauberen Form des Kreuzkorrelationsspektrums. Insgesamt erweist sich, das symmetrische Kreuzkorrelationsspektrum als viel sauberer, weswegen im weiteren Verlauf dieses Kapitels ausschließlich die symmetrische Kreuzkorrelation für die Generierung des Kreuzkorrelationsspektrums verwendet wird.

In Abbildung 3.36 wird Fähigkeit der Methodik, Frequenzen eines Signals, das aus mehreren Frequenzen besteht, zu detektieren, aufgezeigt. Zu diesem Zweck wird dem Signal aus Abbildung 3.34 ein Sinussignal der Frequenz 20 kHz hinzugefügt. Es sind zwei Betragsfunktionen eines Sinus cardinalis, die ihre jeweiligen Maxima in den Signalfrequenzen haben, ersichtlich. Der Wert der Maxima beträgt dabei stets die Hälfte der Amplitude der jeweiligen Signalfrequenz. Somit ist die Methode in der Lage die verschiedenen Frequenzanteile eines Signals sowie ihre Amplituden zu identifizieren.



**Abbildung 3.36:** Kreuzkorrelationsspektrums eines Signals mit zwei Frequenzen. Die tatsächliche Amplitude des Signalanteils mit der Frequenz 2 kHz liegt bei (a) 0.1 und (b) 0.5



**Abbildung 3.37:** Die Kreuzkorrelationsspektren von zwei Sinussignalen und deren Summe

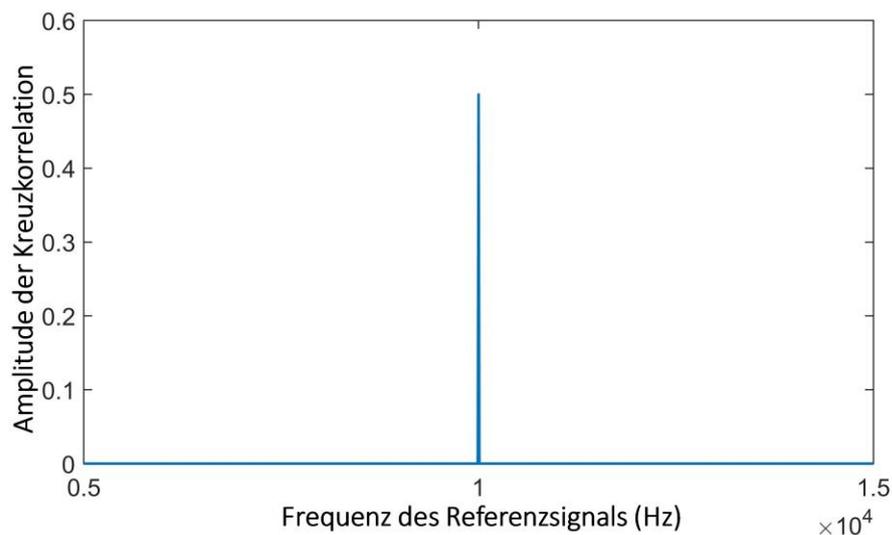
Liegen die verschiedenen Frequenzanteile nah beieinander, so ähnelt das Ergebnis einer Superposition der jeweiligen Sinus cardinalis. Dies ist in Abbildung 3.37 ersichtlich, wo die Kreuzkorrelationsspektren von zwei einfachen Sinussignalen mit jeweils unterschiedlicher Frequenz sowie das Kreuzkorrelationspektrum von der Summe der zwei Sinussignalen visualisiert wird.

Im Vergleich zu FFT und CWT sind Frequenz- und Zeitauflösung beim Kreuzkorrelationsspektrum voneinander unabhängig. Beides kann vom Nutzer separat festgelegt werden, wodurch Auflösungsprobleme auf ein Minimum reduziert werden können. Somit sind mithilfe dieser Methodik auch Frequenzbestimmungen unter hoher Zeit- und Frequenzauflösung möglich. Zudem hat die Höhe der Signalfrequenzen keinen Einfluss auf die Anwendbarkeit der Methodik, weshalb die Methodik auch an grundsätzlich hochfrequente Signale problemlos angewandt werden kann. Daher können viele Einschränkungen, mit denen FFT und Wavelet Transformationen verbunden sind, mit dem Kreuzkorrelationsspektrum umgangen werden.

Das Kreuzkorrelationsspektrum darf dabei nicht mit dem „Kreuzleistungsspektrum“ verwechselt werden. Während das „Kreuzleistungsspektrum“ die Beziehung zwischen zwei Zeitfunktionen als eine Funktion der Frequenz beschreibt und damit verdeutlicht, welche Frequenzen die zwei Funktionen gemeinsam haben [132], analysiert das

Kreuzkorrelationsspektrum nur ein Zeitsignal (= Messsignal) und stellt Frequenzinformationen des Messsignals zur Verfügung, indem es seine Korrelation mit Referenzsignalen, die über Software generiert werden, beschreibt. Somit unterscheiden sich beide Spektren sowohl in Zweck als auch im Funktionsprinzip.

Es muss jedoch berücksichtigt werden, dass die Zeitauflösung Einfluss auf die Form der Funktionen, mit denen einzelne Frequenzen im Kreuzkorrelationsspektrum beschrieben werden, hat. Je länger der genutzte Zeitsignalabschnitt ist, desto mehr wird im Kreuzkorrelationsspektrum der Sinus cardinalis gestaucht. Ab einer ausreichenden Stauchung ist im Kreuzkorrelationsspektrum nur ein Deltaimpuls bei der Frequenz des Messsignals festzustellen, wodurch das Kreuzkorrelationsspektrum einem Frequenzspektrum entspricht (siehe Abbildung 3.38).



**Abbildung 3.38:** Kreuzkorrelationsspektrum bei einer Signalabschnittslänge von 10000 Datenpunkten

### 3.4.3 Simulationen

In den folgenden Simulationen soll die Leistung der Methodik an verrauschten Signalen getestet werden. Im ersten Schritt sind dazu die Kreuzkorrelationsspektren von unterschiedlich stark verrauschten Sinussignalen der Frequenz 10 kHz generiert worden. Die Abtastfrequenz  $f_s$  und die Signalabschnittslänge ist auf 100 kHz und 1000 Datenpunkte festgelegt worden. Während Abbildung 3.39 die diskreten Zeitsignale mit rauschfreien Signalen vergleicht, visualisiert Abbildung 3.40 die jeweiligen Kreuzkorrelationsspektren. Sogar bei geringem SNR ist die Signalfrequenz im Kreuzkorrelationsspektrum leicht zu erkennen. Bis zu einem SNR von -10dB, liegt das Maximum des Spektrums noch sichtbar in der Frequenz des Messsignals. Nur bei einem SNR von -20 dB ist die Frequenz nicht mehr identifizierbar.

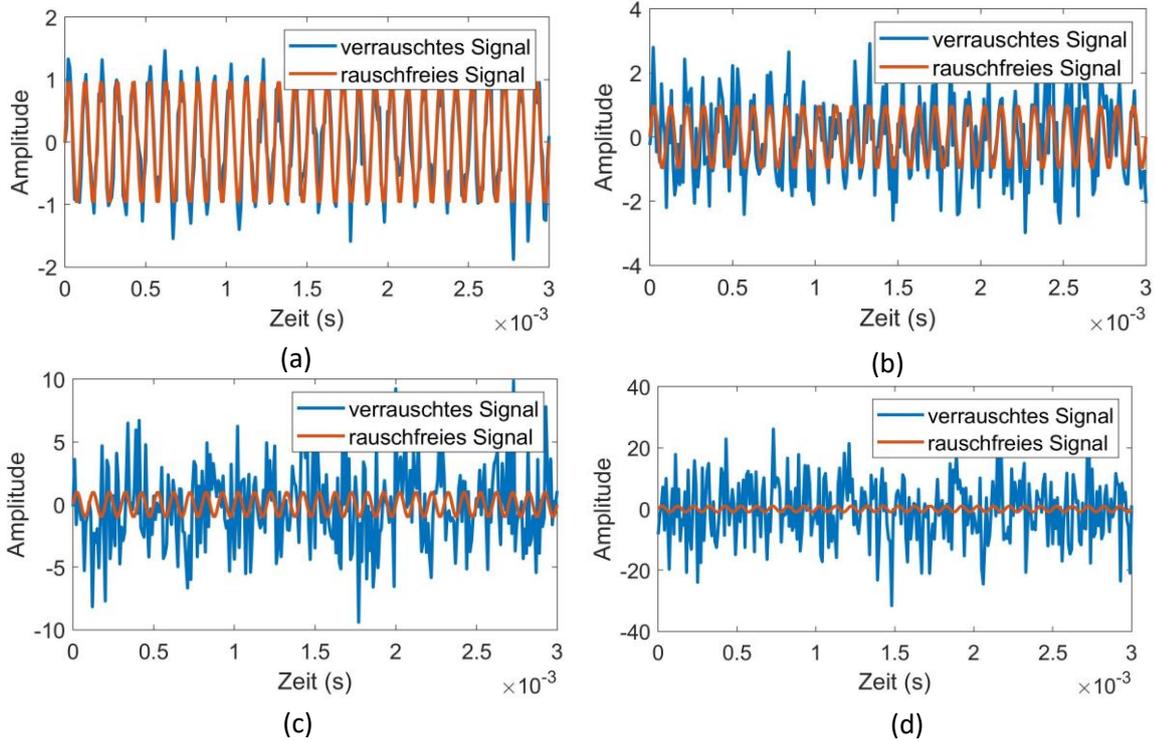


Abbildung 3.39: verrauschte Sinussignale unter verschiedene SNR; (a) 10 dB; (b) 0 dB; (c) -10 dB; (d) -20 dB

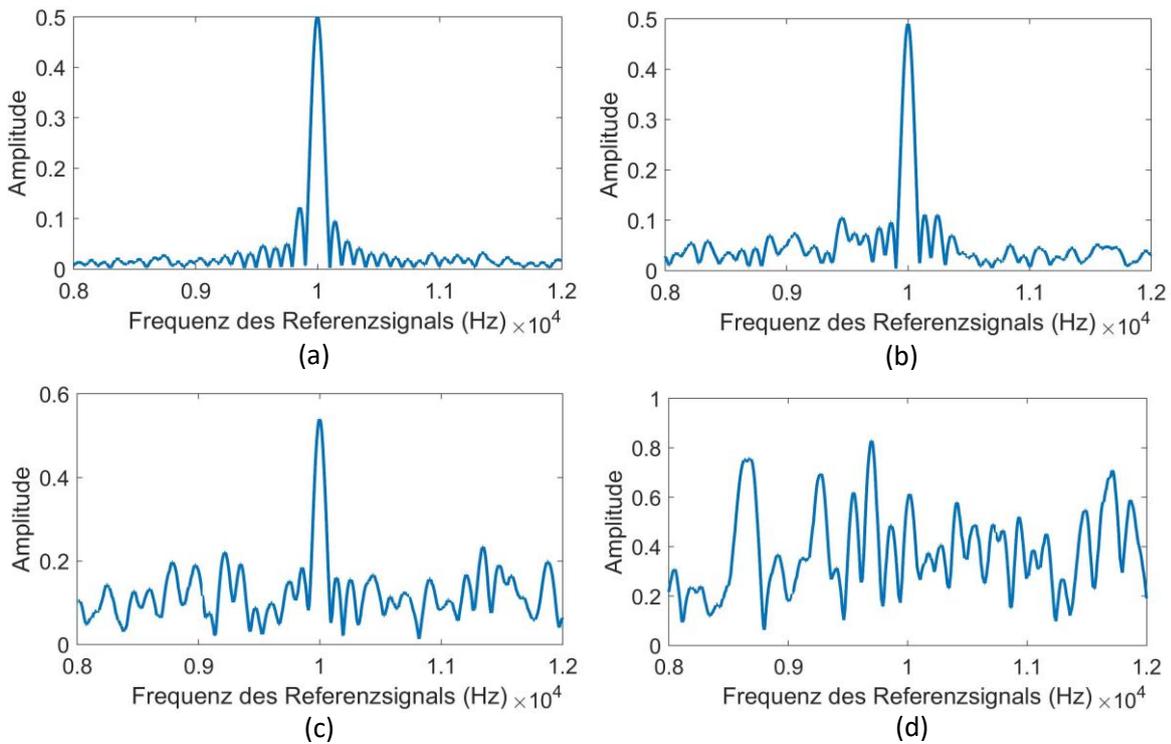
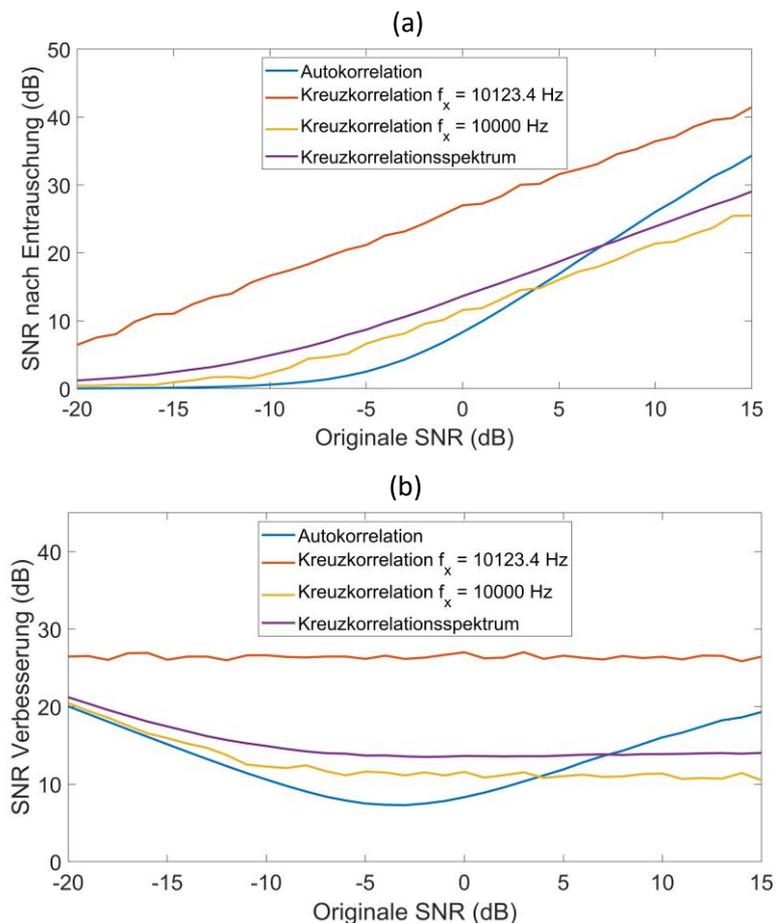


Abbildung 3.40: Kreuzkorrelationsspektren bei verschiedene SNR; (a) 10 dB; (b) 0 dB; (c) -10 dB; (d) -20 dB

In Abbildung 3.41 wird die Fähigkeit der Autokorrelation, der Kreuzkorrelation sowie des Kreuzkorrelationsspektrums zur Rauschunterdrückung miteinander verglichen. Bei der Kreuzkorrelation wird darüber hinaus unterschieden, ob mit 10123.4 Hz richtige oder mit 10 kHz fehlerhafte Signalfrequenzinformationen genutzt werden. Abbildung 3.41a) visualisiert die SNR von verrauschte Signale nach der Verarbeitung durch die Autokorrelation und das Kreuzkorrelationsspektrum als Funktion des ursprünglichen SNRs, während Abbildung 3.41b) die SNR Verbesserungen der Methoden als Funktion der ursprünglichen SNR darstellt. Dabei ist die SNR Verbesserung als die Differenz zwischen dem SNR nach der Entrauschung und dem ursprünglichen SNR definiert worden. Grundsätzlich ist die Rauschunterdrückung bei einer Kreuzkorrelation mit korrekten Frequenzinformationen am besten. Dessen SNR Verbesserung bleibt konstant bei 26 dB und damit über die Rauschunterdrückung der anderen Methoden. Welche der anderen Methoden besser für die Rauschunterdrückung geeignet ist, ist vom ursprünglichen SNR abhängig. Während die SNR Verbesserungen bei Autokorrelation besser sind, sobald das ursprüngliche SNR größer als 8 dB ist, ist das Kreuzkorrelationsspektrum bei niedrigeren SNR-Werten wirksamer. Die Kreuzkorrelation mit fehlerhaften Frequenzinformationen ist dem Kreuzkorrelationsspektrum in der Rauschunterdrückung unterlegen.

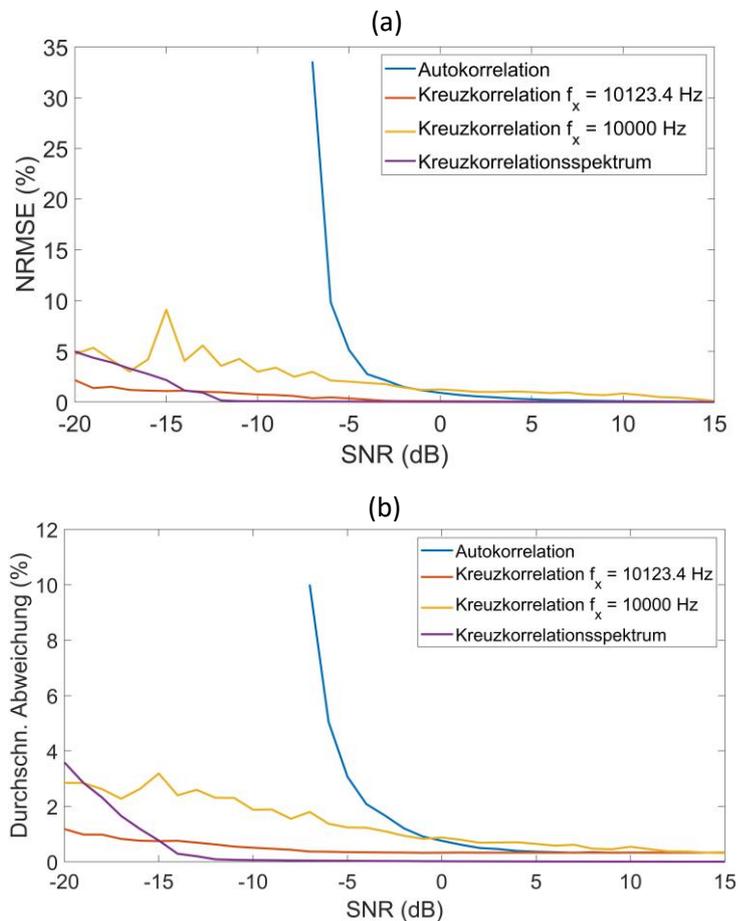


**Abbildung 3.41:** (a) SNR nach der Signalverarbeitung (b) SNR Verbesserungen durch die Methoden

Doch im Kontext dieser Arbeit ist die Fähigkeit der Methoden, Frequenzen eines verrauschten Signals zu bestimmen, von größerer Relevanz. Wenn die Rausch-

unterdrückung zu einem Verlust von Frequenzinformationen führt, hat die Methodik sein Ziel verfehlt. Daher ist folgende Simulation durchgeführt worden:

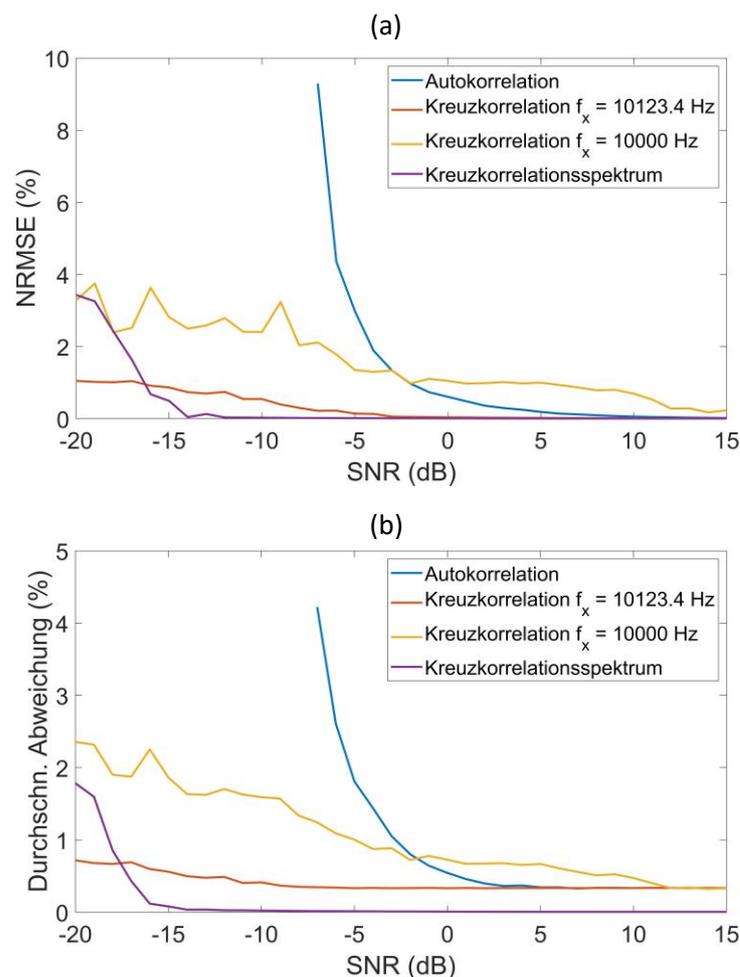
Das SNR ist schrittweise von 15 dB auf -20 dB reduziert worden. Für jedes SNR ist die Frequenz von 300 Messsignalen mithilfe von drei Methoden ermittelt worden. Die erste Methode besteht aus einer Autokorrelation und einer nachfolgenden Nullpunktdetektion. In der zweiten Methode wird Autokorrelation durch die Kreuzkorrelation ersetzt. Hierbei werden analog zur vorherigen Simulation zwei Fälle betrachtet. Es wird zwischen der Nutzung korrekter (10123.4 Hz) und fehlerhafter Frequenzinformationen (10 kHz) unterschieden. In der letzten Methodik wird ein Kreuzkorrelationsspektrum generiert und die Frequenz mit dem höchsten Wert im Spektrum als Ergebnis ausgegeben. Der Frequenzbereich und die Auflösung des Kreuzkorrelationsspektrums sind auf 9 bis 11 kHz und 1 Hz festgelegt worden. Die Abtastfrequenz beträgt wie bei Abbildung 3.39 und 3.40 100 kHz. Darüber hinaus ist in allen Methoden die gleiche Signalabschnittslänge (= 1000 Datenpunkte) verwendet worden. Abbildung 3.42 vergleicht den NRMSE und die durchschnittliche Abweichung der Methoden miteinander.



**Abbildung 3.42:** (a) NRMSE der Methoden unter verschiedene SNR (b) Durchschnittliche Abweichung der Methoden unter verschiedene SNR

Die Autokorrelation ist nur bei SNR größer als 5 dB für die Frequenzbestimmung geeignet. Hierbei entspricht dessen Genauigkeit ungefähr dessen der Kreuzkorrelation mit korrekten Informationen. Bei niedrigerem Signal-Rausch-Verhältnis steigen die Fehler bei der Autokorrelation exponentiell an, wodurch sie für die Frequenzbestimmung unbrauchbar wird. Bei der Kreuzkorrelation mit korrekten Frequenzinformationen steigt die

durchschnittliche Abweichung mit sinkendem SNR von 0.33 % (5 dB) auf 1.18% (-20 dB) an. Bei falscher Frequenzinformation verschlechtert sich die Genauigkeit der Kreuzkorrelation im erheblichen Maße. Dort wird bei einem SNR von -20 dB eine durchschnittliche Abweichung von 3.19% erreicht. Das Kreuzkorrelationsspektrum weist in den meisten Fällen die besten Ergebnisse auf. Bis zu einem SNR von -14 dB bleibt die durchschnittliche Abweichung unterhalb von 0.3%. Bei SNR über 7 dB liegt sie sogar unter 0.01%. Bei einem SNR kleiner als -14 dB steigen die durchschnittlichen Abweichungen jedoch erheblich und überholen sogar die der Kreuzkorrelation. Dies kann mit der Art der Frequenzbestimmung begründet werden. Indem die Frequenz, die im Spektrum den höchsten Wert besitzt, als die Signalfrequenz deklariert wird, kommt es zu höheren Abweichungen, falls die Rauschunterdrückung nicht ausreicht und im Spektrum die Leistung des Rauschens das gleiche Niveau wie die des Nutzsignals aufweist. Bei der Frequenzbestimmung mithilfe des Kreuzkorrelationsspektrums muss sichergestellt werden, dass die Spektralleistung des Nutzsignals signifikant höher als die des Rauschens ist. Dies kann beispielsweise durch die Nutzung einer größeren Signalabschnittslänge erreicht werden. In Abbildung 3.43 wird die Simulation mit einer genutzten Signalabschnittslänge von 2000 Datenpunkte wiederholt. Während die Abweichungen des Kreuzkorrelationsspektrums zuvor die der Kreuzkorrelation mit korrekten Frequenzinformationen bei einem SNR unterhalb von -15 dB überholen, geschieht dies hier erst bei SNR unter -18 dB.



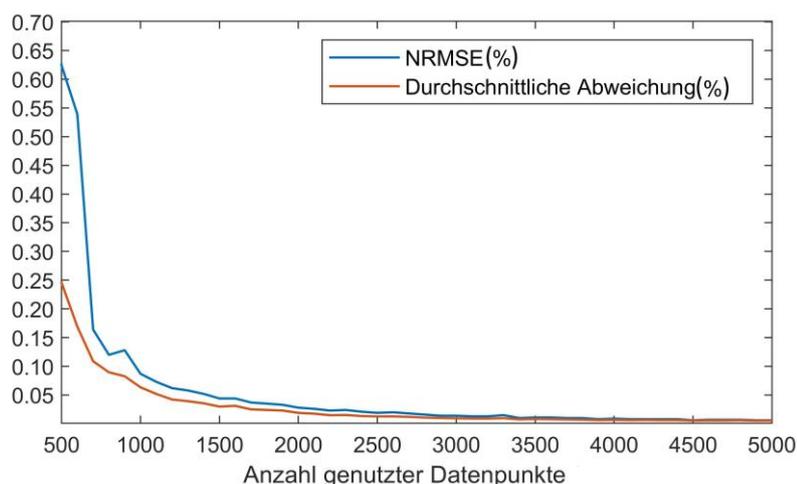
**Abbildung 3.43:** (a) NRMSE der Methoden unter verschiedenen SNR (b) Durchschnittliche Abweichung der Methoden unter verschiedenen SNR; verwendete Signallänge beträgt 2000 Datenpunkte

Tabelle 3.4 bietet einen tieferen Einblick in die Messgenauigkeit des Kreuzkorrelationspektrums aus Abbildung 3.42. Die Ergebnisse sind auch bei nur 1000 Datenpunkte sehr vielversprechend. Für SNR, die höher als -3 dB sind, beträgt die durchschnittliche Abweichung unter 0.03%. Sogar bei einem SNR von -10 dB liegen die Abweichungen noch unterhalb von 0.1%. Erst ab niedrigeren SNR steigen die Abweichungen signifikant.

**Tabelle 3.4:** NRMSE und durchschnittliche Abweichung des Kreuzkorrelationsspektrums

SNR in dB	NRMSE in %	Durchschnittliche Abweichung in %
-20	4.9534	3.5906
-15	2.1653	0.7718
-10	0.0771	0.0616
-5	0.0465	0.0375
-4	0.0386	0.0312
-3	0.0360	0.0282
-2	0.0335	0.0267
-1	0.0273	0.0222
0	0.0248	0.0202
1	0.0210	0.0172
2	0.0203	0.0162

Durch die Nutzung längerer Signalabschnitte kann die Messgenauigkeit des Kreuzkorrelationsspektrums noch weiter verbessert werden. Dies wird in der folgenden Simulation illustriert. Die Methode ist an 500 Messsignale mit einem SNR von -10 dB durchgeführt und dabei die genutzte Signalabschnittslänge variiert worden. Der NRMSE und die durchschnittliche Abweichung der Ergebnisse ist für jede Länge bestimmt und in Abbildung 3.44 visualisiert worden. Wie erwartet verbessert sich die Genauigkeit mit steigender Signallänge. Beispielsweise liegen bei einer Länge von 1500 Punkten sowohl der NRMSE als auch die durchschnittliche Abweichung selbst bei einem SNR von -10 dB unterhalb von 0.10 %.



**Abbildung 3.44:** Abweichungen des Kreuzkorrelationsspektrums unter Nutzung verschiedener Signallängen

### 3.5 Vereinfachtes Kreuzkorrelationsspektrum

Mit dem Kreuzkorrelationsspektrum ist eine Methodik entwickelt worden, mit der die Frequenz eines Signals auch unter starkem Rauschen ermittelt werden kann. Doch in seiner bisherigen Version erweist sich dessen Generierung als sehr rechenintensiv. Dies erschwert eine Nutzung im Echtzeitbetrieb enorm. Aus diesem Grund wird in diesem Kapitel eine vereinfachte Version des Kreuzkorrelationsspektrums, mit der die Berechnungszeit reduziert werden kann, vorgestellt.

#### 3.5.1 Methodik

Mit dem Kreuzkorrelationsspektrum wird beschrieben, welche Amplitude  $K(f_w)$  eine Kreuzkorrelationsfunktion hat, wenn die Kreuzkorrelation zwischen dem Messsignal  $y(k)$  und einem einfachen Sinussignal  $x(k)$  mit der Frequenz  $f_w$  durchgeführt wird. In Kapitel 3.4 ist  $K(f_w)$  ermittelt worden, indem mindestens eine Periode der Kreuzkorrelationsfunktion berechnet und der höchste Absolutwert als  $K(f_w)$  festgesetzt worden ist. Die Durchführung dieser Prozedur für jedes  $f_w$  erweist sich jedoch als sehr rechenintensiv. Es wird eine Möglichkeit angestrebt, mit der  $K(f_w)$  mit weniger Berechnungsaufwand ermittelt werden kann. Zu diesem Anlass wird erneut die Kreuzkorrelationsfunktion zwischen zwei Sinussignalen verschiedener Amplitude, Frequenz und Phase betrachtet (siehe Kapitel 3.3). Insgesamt kann die Kreuzkorrelationsfunktion zu einer Kosinusfunktion mit der Amplitude  $K(f_w)$  approximiert werden (siehe Gleichung (3.26) und (3.34)).

Um die Amplitude der Kreuzkorrelation  $K(f_w)$  zu ermitteln, muss der Funktionswert mit dem größten Betrag ermittelt werden. Dieser liegt bei

$$\cos(2\pi * f_y * \tau + (\varphi_x - \varphi_y)) = \pm 1 \quad (3.49)$$

Dazu muss folgendes gelten

$$2\pi * f_y * \tau + (\varphi_x - \varphi_y) = z * \pi \quad z \in N_0 \quad (3.50)$$

Am ressourceneffizientesten ist es, wenn die Amplitude der Kreuzkorrelation durch die Ermittlung eines Kreuzkorrelationswerts bestimmt werden kann. Dazu muss ein  $\tau$ , bei der Gleichung (3.50) gilt, bekannt sein. Der hierfür einfachste Fall ist, wenn  $z = 0$  gilt.

Würde darüber hinaus  $\varphi_x = \varphi_y$  gelten, so ist Gleichung (3.50) bei  $\tau = 0$  erfüllt. Dieser Fall stellt das Fundament der hier vorgestellten Verarbeitungsmethode dar. Da die Phase  $\varphi_x$  Teil des Referenzsignals ist, kann sie im Rahmen der Methodik vom Nutzer selbst bestimmt werden. Hat der Nutzer die Phase des Messsignals  $\varphi_y$  präzise ermittelt, so kann er  $\varphi_x$  der Phase  $\varphi_y$  gleichsetzen. In diesem Fall muss lediglich der Kreuzkorrelationswert bei  $\tau = 0$  berechnet werden, um die Amplitude der Kreuzkorrelationsfunktion zu ermitteln. Auf diese Weise kann der Berechnungsaufwand des Kreuzkorrelationsspektrums erheblich reduziert werden.

Dementsprechend besteht die Verarbeitungsmethode aus den folgenden Bestandteilen:

- 1.) Grobe Frequenzschätzung zur optimierten Festlegung des betrachteten Frequenzbereichs.
- 2.) Ermittlung der Phasen des Messsignals  $\varphi_{yi}$  (siehe Gleichung (3.51)).
- 3.) Erstellung des Kreuzkorrelationsspektrums gemäß den Gleichungen (3.51-3.57).

$$x_{f_w}(k) = \sin\left(2\pi * f_w * \frac{k}{f_s} + \varphi_{yi}\right) \quad (3.51)$$

$$f_w = w * \Delta f; \quad w \in \left[\frac{f_a}{\Delta f}; \frac{f_e}{\Delta f}\right] \quad (3.52)$$

$$y(k) = \sum_{i=1}^P B_i * \sin\left(2\pi * f_{Mi} * \frac{k}{f_s} + \varphi_{yi}\right) \quad (3.53)$$

$$\phi_{x_{f_w}y,unsymm}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_{f_w}(k) * y(k-n) \quad ; (k \in \mathbb{N}) \quad (3.54)$$

$$\phi_{x_{f_w}y,symm}(n) = \frac{1}{2N} \sum_{k=-N}^{N-1} x_{f_w}(k) * y(k-n) \quad ; (k \in \mathbb{Z}) \quad (3.55)$$

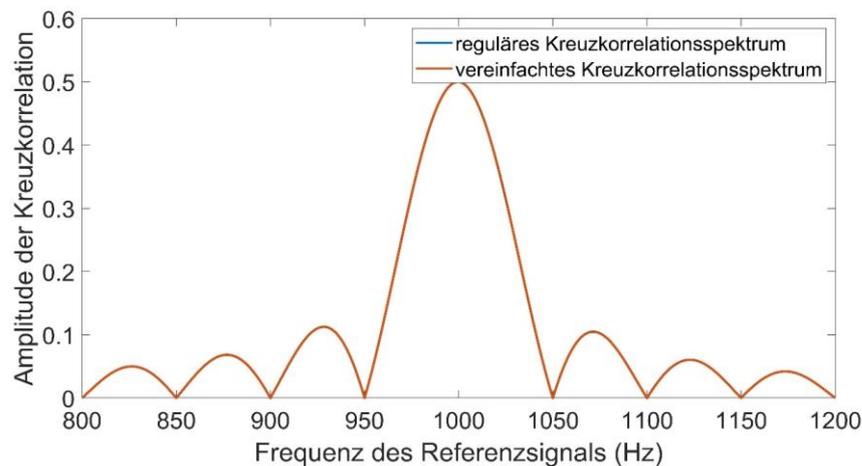
$$K(f_w) = |\phi_{x_{f_w}y,unsymm}(0)| \quad (3.56)$$

$$K(f_w) = |\phi_{x_{f_w}y,symm}(0)| \quad (3.57)$$

### 3.5.2 Simulationen mit symmetrische Kreuzkorrelation

In diesem Kapitel werden die Eigenschaften eines vereinfachten Kreuzkorrelationsspektrums, das mithilfe der symmetrischen Kreuzkorrelation generiert worden ist, näher betrachtet.

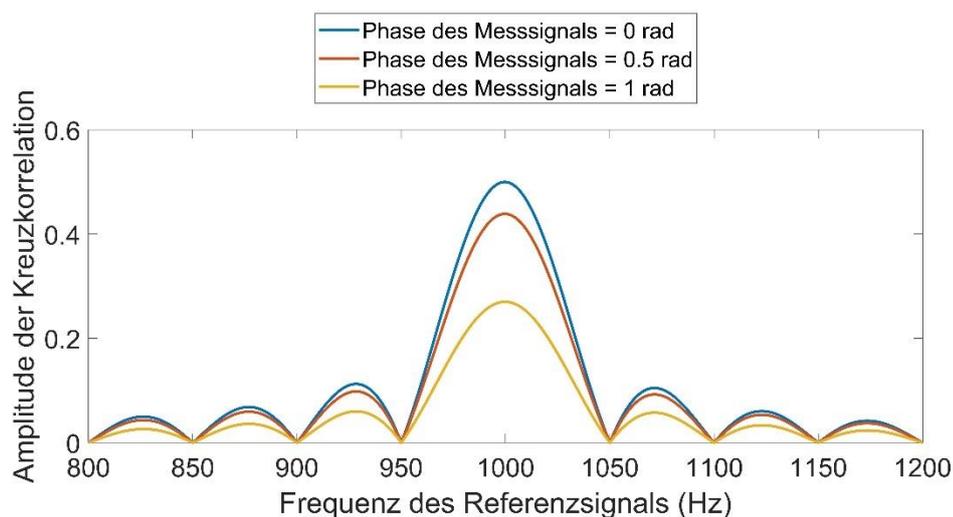
Im ersten Schritt soll dazu die vereinfachte und die reguläre Version des Kreuzkorrelationsspektrums bei symmetrischer Kreuzkorrelationsfunktion miteinander verglichen werden.



**Abbildung 3.45:** Vergleich zwischen dem regulären und vereinfachten Kreuzkorrelationsspektrums

Falls die Phase des Referenz- und Messsignals übereinstimmen, so existiert kein Unterschied zwischen beide Versionen. Der große Unterschied besteht darin, dass in der neuen Methodik Informationen zur Messsignalphase von Relevanz sind. Diese beeinflusst nämlich die Amplitude der Kreuzkorrelationsfunktion. Daher wird in den nächsten Simulationen untersucht, inwiefern sich Phasenunterschiede zwischen Referenz- und Messsignale auf die Form des Kreuzkorrelationsspektrums auswirken.

Im ersten Schritt wird die Phase des Referenzsignals auf 0 rad festgesetzt und lediglich die Phase des Messsignals variiert. Abbildung 3.46 visualisiert das Ergebnis. Man kann feststellen, dass mit steigender Phase des Messsignals zwar die Form des Kreuzkorrelationsspektrums gleichbleibt, sich dessen Amplitude jedoch reduziert.

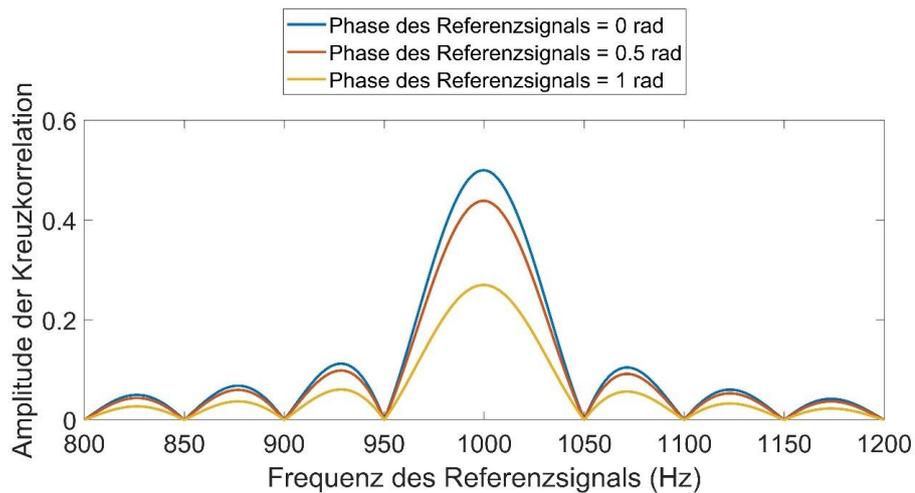


**Abbildung 3.46:** Vereinfachte Kreuzkorrelationsspektren bei unterschiedlichen Phasen des Messsignals

In der zweiten Simulation wird die Phase des Messsignals 0 rad festgesetzt und lediglich die Phase des Referenzsignals variiert. Abbildung 3.47 zeigt das Ergebnis. Mit steigender Phase des Referenzsignals verringert sich die Amplitude des Kreuzkorrelationsspektrums im

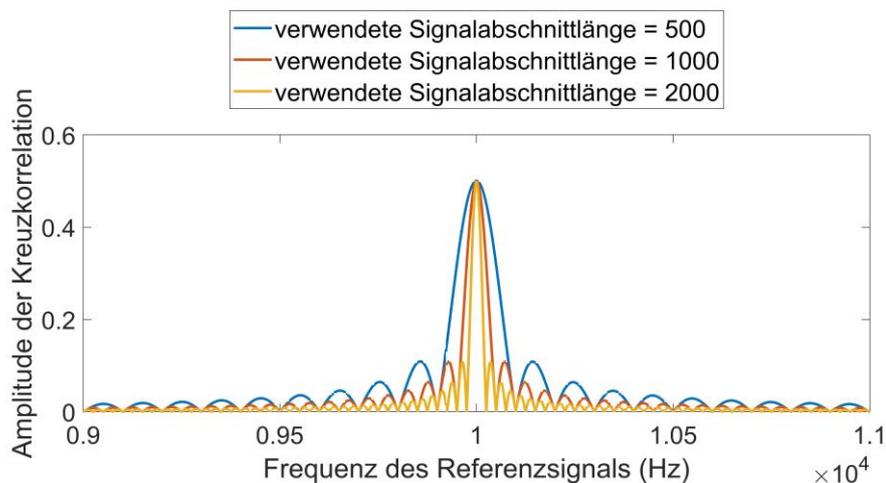
gleichen Maße wie in der vorherigen Simulation. Dies verdeutlicht, dass grundsätzlich der Phasenunterschied zwischen Referenz- und Messsignal direkten Einfluss auf die Amplitude des Spektrums hat. Daher muss darauf geachtet werden, dass der Phasenunterschied nicht zu einer zu kleinen Amplitude führt. Ansonsten wird die Frequenzmessung enorm erschwert. Dies ist beispielsweise nahe den Phasen der folgenden Gleichung der Fall:

$$\varphi_x - \varphi_y = (0.5 + k) * \pi \quad ; \quad k \in \mathbb{Z} \quad (3.58)$$



**Abbildung 3.47:** Vereinfachte Kreuzkorrelationsspektren bei unterschiedlichen Phasen des Referenzsignals

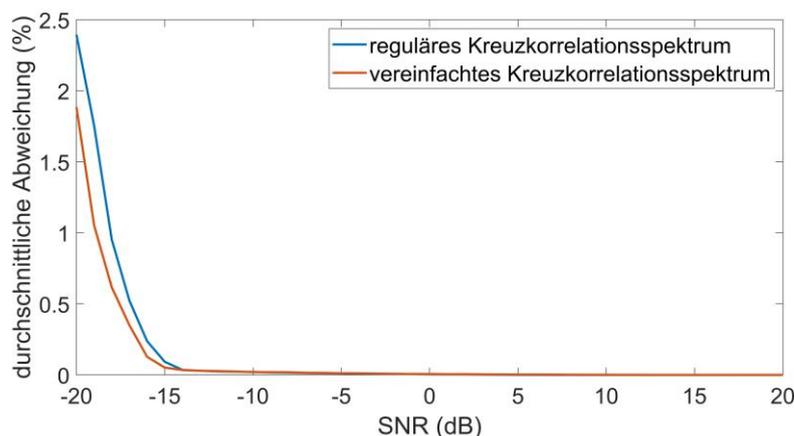
Nun wird geprüft, inwiefern sich durch eine Erhöhung der Anzahl an verwendete Datenpunkte das Kreuzkorrelationsspektrum verändert (siehe Abbildung 3.48). Analog zum regulären Kreuzkorrelationsspektrum kommt es durch die Nutzung von mehr Datenpunkte zu einer Stauchung des Kreuzkorrelationsspektrums.



**Abbildung 3.48:** Kreuzkorrelationsspektren unter Nutzung verschiedener Signallängen

In der folgenden Simulation soll die Genauigkeit des vereinfachten Kreuzkorrelationsspektrums unter unterschiedlichen SNR mit dem des regulären Kreuzkorrelationsspektrums

verglichen werden. Für jedes SNR ist die Frequenz von 300 Messsignalen mithilfe beider Spektren ermittelt worden. Dabei sind jeweils Signalabschnittlängen von 2000 Datenpunkten genutzt und im vereinfachten Kreuzkorrelationsspektrum die korrekten Phaseninformationen eingesetzt worden. Die Ergebnisse werden in folgende Abbildung visualisiert.



**Abbildung 3.49:** Vergleich der Messgenauigkeit der regulären und vereinfachten Kreuzkorrelationsspektren unter unterschiedlichen SNR

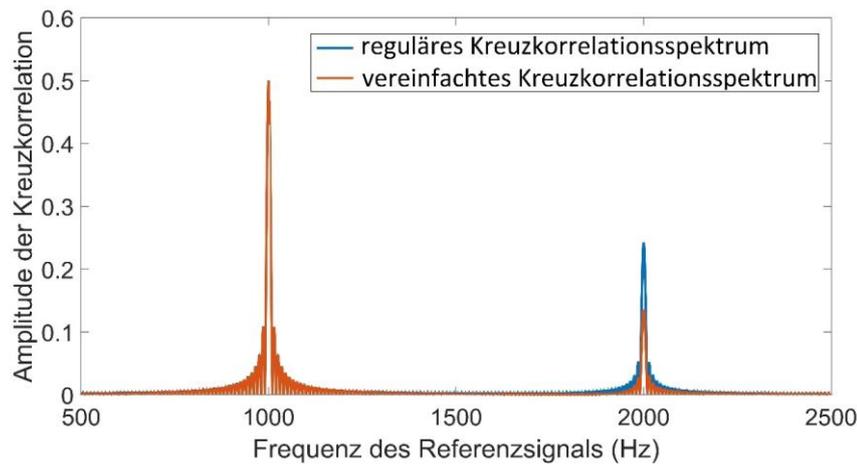
Das vereinfachte Kreuzkorrelationsspektrum weist insgesamt die besseren Ergebnisse auf. Ab einem SNR von -4 dB beträgt die Genauigkeit 0.01%. Ab 9 dB liegt sie sogar unter 0.001%. Bei korrekten Phaseninformationen sind dessen durchschnittliche Abweichung bei SNR zwischen -20 und -15 dB deutlich niedriger als beim regulären Kreuzkorrelationsspektrum. Die Methode, mit der im regulären Kreuzkorrelationsspektrum die Amplitude der Kreuzkorrelation ermittelt wird, erweist sich bei ungenügender Rauschunterdrückung als störanfälliger als beim vereinfachten Kreuzkorrelationsspektrum. Unter höheren SNR sind die Genauigkeitsunterschiede beider Spektren gering. Mit dem vereinfachten Kreuzkorrelationsspektrum kann somit nicht nur die Berechnungszeit reduziert, sondern auch die Genauigkeit der Frequenzmessungen verbessert werden, sofern korrekte Informationen über die Phase des Messsignals zur Verfügung stehen.

Das Fehlen von Phaseninformationen kann für die Frequenzbestimmung eines Signals bei der Nutzung der symmetrischen Kreuzkorrelation unter bestimmten Umständen kein Problem darstellen. Sollte es sich jedoch um mehrfrequente Signale handeln, so können mangelhafte Phaseninformationen zu signifikantem Fehler bei der Bestimmung der relativen Leistungsanteile der verschiedenen Frequenzen im Signal führen. Zur Veranschaulichung dieser Problematik wird folgendes Signal betrachtet. Es handelt sich um die Summe von Sinusfunktionen, bei dem die Oberschwingung eine Phase von 1 rad enthält.

$$y(k) = \sin\left(2\pi \frac{f_{x1}}{f_s} * k\right) + 0.5 * \sin\left(2\pi \frac{f_{x2}}{f_s} * k + 1\right) \quad (3.59)$$

$f_{x1}$  und  $f_{x2}$  werden auf 1 kHz und 2 kHz festgelegt, während die Abtastfrequenz  $f_s$  10 kHz beträgt. Im Folgenden werden das vereinfachte und das reguläre Kreuzkorrelationsspektrum des Signals generiert. Dabei wird bei den Referenzsignalen keine Phase eingesetzt.

Abbildung 3.50 zeigt den generierten Kreuzkorrelationsspektren. Durch die Phase der Oberschwingung weist das vereinfachte Kreuzkorrelationsspektrum eine reduzierte Amplitude für die Frequenz der Oberschwingung auf. Insgesamt ist es somit zu einem Fehler bei der Darstellung der Verhältnisse zwischen den verschiedenen Frequenzanteilen gekommen. Dieses Problem muss bei der Nutzung des vereinfachten Kreuzkorrelationsspektrums mithilfe der symmetrische Kreuzkorrelation berücksichtigt werden.



**Abbildung 3.50:** Vergleich zwischen regulärem und vereinfachtem Kreuzkorrelationsspektrum bei mehreren Signalfrequenzen

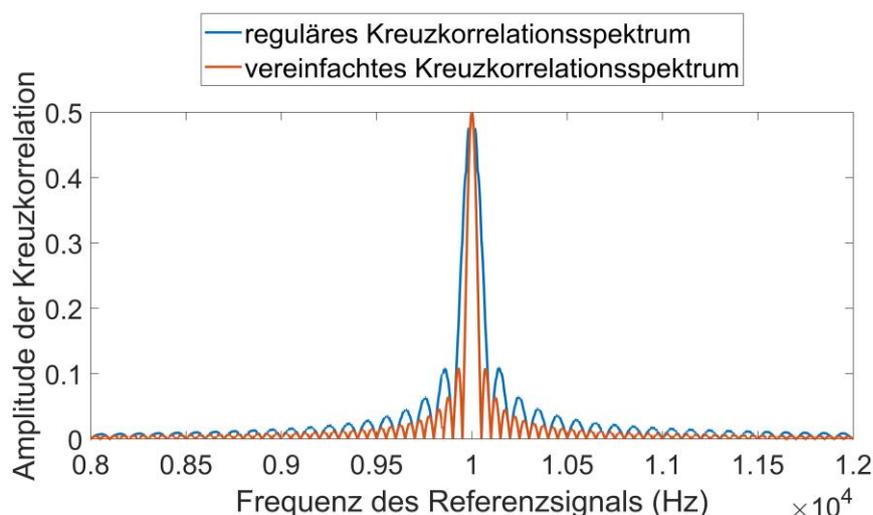
### 3.5.3 Simulationen mit unsymmetrische Kreuzkorrelation

Nun wird das Verhalten des vereinfachten Kreuzkorrelationsspektrums unter Nutzung der unsymmetrischen Kreuzkorrelation näher betrachtet. Dazu wird als Erstes unter gleichen Voraussetzungen ein reguläres und vereinfachtes Kreuzkorrelationsspektrum des folgenden Messsignals (Gleichung (3.60)) generiert und die Ergebnisse miteinander verglichen. Tabelle 3.5 spezifiziert die Parameter der generierten Kreuzkorrelationsspektren.

$$y(k) = \sin\left(2\pi * f_y * \frac{k}{f_s} + \varphi_y\right) \quad (3.60)$$

**Tabelle 3.5:** Wertzuweisung der Simulationsparameter

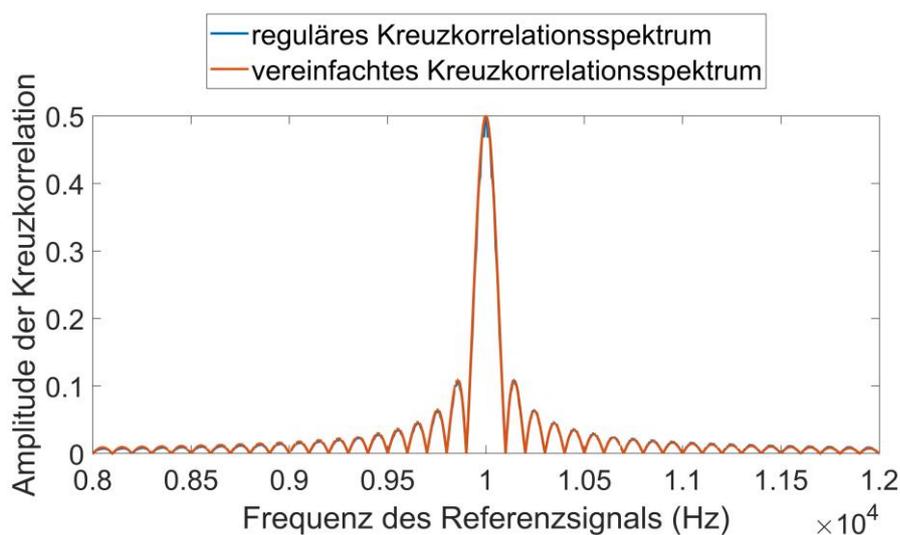
Objekt/Parameter	Gleichung/Wert
$f_y$	10 kHz
$f_s$	100 kHz
$\varphi_y$	0
$N$	1000
$[f_a; f_e]$	8kHz - 12 kHz



**Abbildung 3.51:** das reguläre und vereinfachte Kreuzkorrelationsspektrum mithilfe der unsymmetrischen Kreuzkorrelation

Wenn  $\varphi_x = \varphi_y$  gilt, ergibt sich das orangene Kreuzkorrelationsspektrum in Abbildung 3.51. Sowohl im regulären als auch in der vereinfachten Version des Spektrums ergibt sich ein Sinus cardinalis. Auffällig ist hierbei jedoch, dass das vereinfachte Kreuzkorrelationsspektrum viel schmäler ist. Dies ist in Anbetracht dessen, dass das Kreuzkorrelationsspektrum damit präziser ist, eine positive Entwicklung.

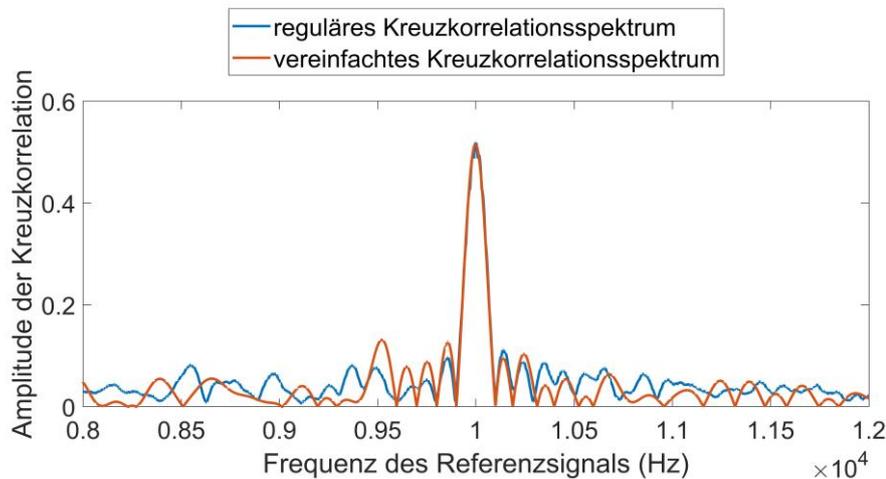
Halbiert man für das vereinfachte Kreuzkorrelationsspektrum die verwendete Signalabschnittslänge, so ergibt sich das orangene Spektrum in Abbildung 3.52. Das reguläre und vereinfachte Spektrum stimmt grundsätzlich überein.



**Abbildung 3.52:** Kreuzkorrelationsspektrum der neuen Methodik mit der Hälfte der Datenpunkte im Vergleich zum Spektrum der alten Methodik

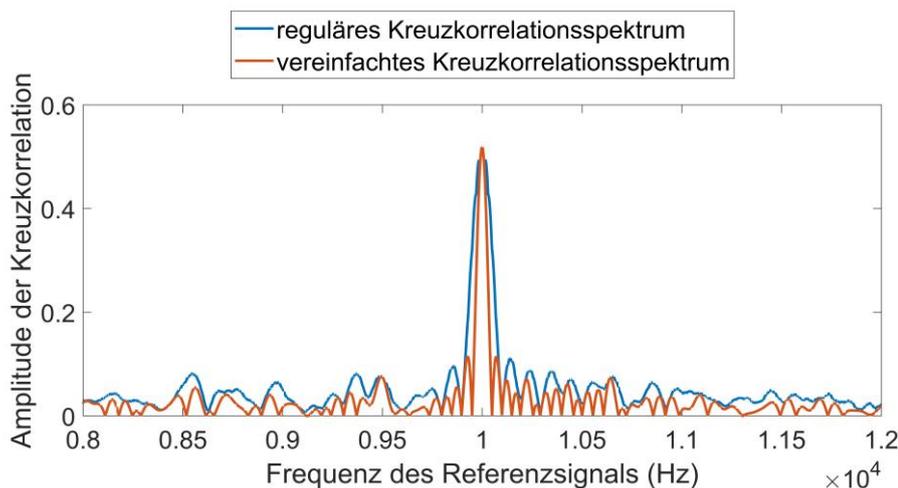
Nun soll analysiert werden, wie sich die vereinfachte Kreuzkorrelationsspektrum bei verrauschten Signalen im Vergleich zum regulären Spektrum schlägt. Dazu wird die Simulation von Abbildung 3.53 mit einem Signal, das durch weißes Rauschen durchzogen

ist und dadurch ein SNR von 0 dB hat, wiederholt.



**Abbildung 3.53:** Kreuzkorrelationsspektrum der neuen Methodik mit der Hälfte der Datenpunkte im Vergleich zum Spektrum der alten Methodik bei verrauschtem Signal

Es sind Formunterschiede zwischen den zwei Kreuzkorrelationsspektren festzustellen. Zwar werden die Signalfrequenzen ähnlich dargestellt, doch für das Rauschen sind andere Frequenzanteile ersichtlich. Das liegt daran, dass im vereinfachten Kreuzkorrelationsspektrum nur die Hälfte der Datenpunkte verwendet und damit die Frequenzen eines anderen Signalabschnitts betrachtet worden sind. Werden für beide Kreuzkorrelationsspektren die gleiche Anzahl an Datenpunkte verwendet, so ergibt sich *Abbildung 3.54*.



**Abbildung 3.54:** Kreuzkorrelationsspektren der alten und neuen Methodik bei verrauschten Signalen

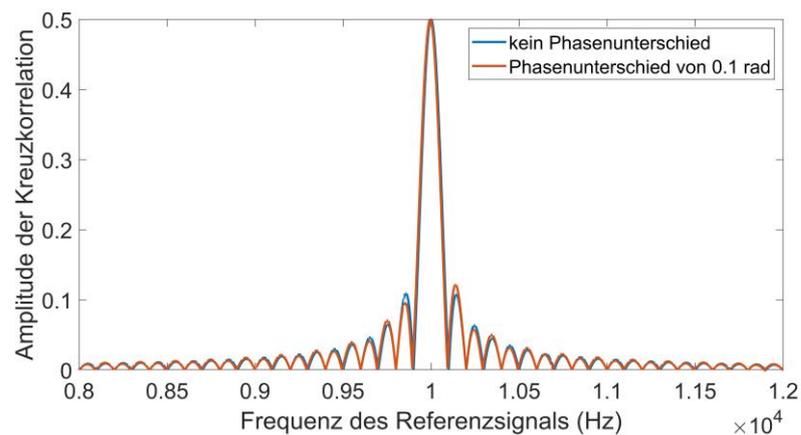
Das vereinfachte Kreuzkorrelationsspektrum ist nun schmaler geworden und liegt innerhalb des regulären Spektrums. Dies bedeutet, dass mit beiden Spektren zwar das gleiche Frequenzbild visualisiert wird, das neue Spektrum in seiner Darstellung aber präziser ist. Die Sinus Cardinalis nahe beieinanderliegender Frequenzen werden seltener miteinander vermischt (siehe *Abbildung 3.37*) und öfter separat voneinander dargestellt.

Das Verhalten des vereinfachten Kreuzkorrelationsspektrums mit unsymmetrischer Kreuzkorrelation lässt sich mathematisch begründen. Wird Gleichung (3.34) in Gleichung (3.59) eingesetzt und die Bedingungen  $\varphi_x = \varphi_y$  und  $\tau = 0$  berücksichtigt, so ergibt sich folgende Formel. Eine detaillierte Herleitung findet sich in Ableitung A.1.4.

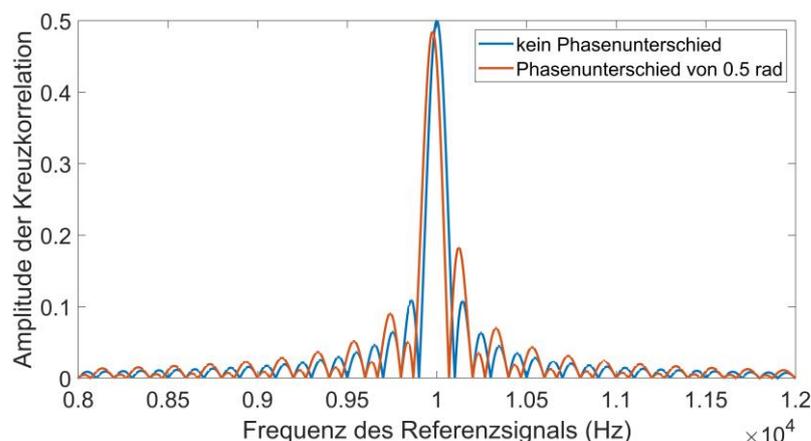
$$K(f_w) = |\phi_{x_{f_w}, y, \text{unsymm}}(0)| = \left| \frac{A * B * (\sin(2\pi * T * (f_x - f_y)))}{T * 4\pi * (f_x - f_y)} \right| \quad (3.61)$$

Im Vergleich zu Gleichung (3.47), welches beim regulären Kreuzkorrelationsspektrum dessen Amplitude beschreibt, hat sich in Gleichung (3.61) die Winkelgeschwindigkeit ( $\omega = 2\pi * T$ ) des Sinusanteils verdoppelt. Dies erklärt, warum für die gleiche Stauchung nur halb so viele Datenpunkte benötigt werden.

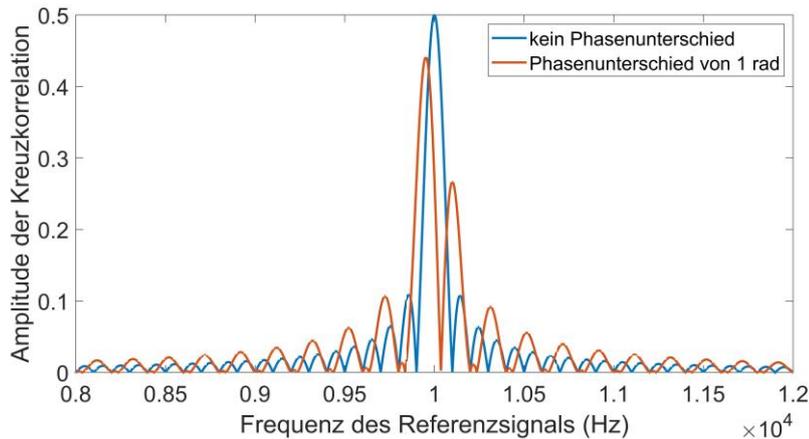
In den nächsten Simulationen soll untersucht werden, wie sich das vereinfachte Kreuzkorrelationsspektrum mit unsymmetrischer Kreuzkorrelation verhält, wenn es zwischen dem Mess- und Referenzsignal einen Phasenunterschied gibt. In Abbildungen 3.55 bis 3.57 sind die vereinfachte Kreuzkorrelationsspektren bei Phasenunterschiede von 0.1, 0.5 und 1 rad im Vergleich zu einem Spektrum ohne Phasenunterschied zu sehen.



**Abbildung 3.55:** Kreuzkorrelationsspektrum mit und ohne Phasenunterschied von 0.1 rad

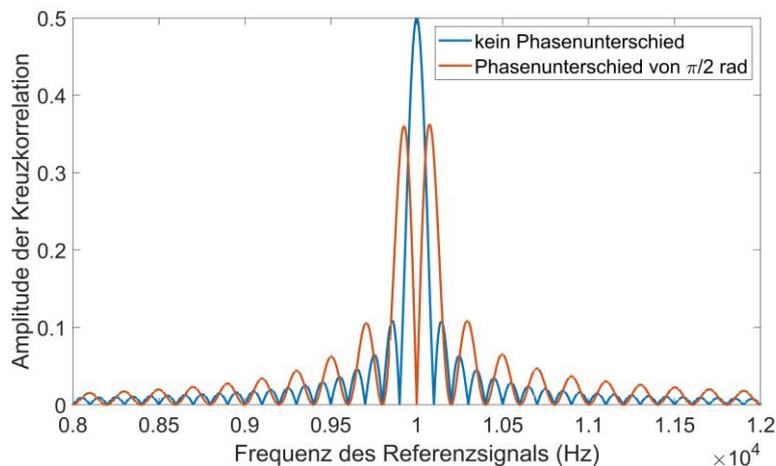


**Abbildung 3.56:** Kreuzkorrelationsspektrum mit und ohne Phasenunterschied von 0.5 rad



**Abbildung 3.57:** Kreuzkorrelationsspektrum mit und ohne Phasenunterschied von 1 rad

Das vereinfachte Kreuzkorrelationsspektrum mit unsymmetrischer Kreuzkorrelation wird durch den Phasenunterschied im erheblichen Maße verformt, was eine richtige Bestimmung der Signalfrequenzen stark erschwert. Je größer die Phasenabweichung, desto stärker ist auch die Verformung. Dabei ist diese bei einer Phasenabweichung von  $\frac{\pi}{2}$  rad am größten (siehe Abbildung 3.58).



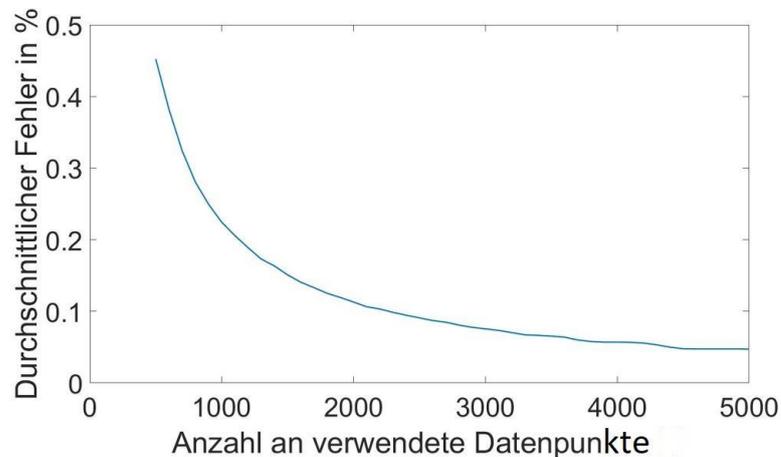
**Abbildung 3.58:** Kreuzkorrelationsspektrum mit und ohne Phasenunterschied von  $\frac{\pi}{2}$  rad

Auch dieses Verhalten lässt sich mathematisch begründen. Wird in Gleichung (3.34) in Gleichung (3.56) eingesetzt und lediglich die Bedingung  $\tau = 0$  berücksichtigt, so ergibt sich folgende Formel. Eine detaillierte Herleitung findet sich in Ableitung A.1.4.

$$\begin{aligned}
 K(f_w) &= |\phi_{x_{f_w}, y, \text{unsymm}}(0)| \\
 &= \left| \frac{A * B * (\sin(2\pi * T * (f_x - f_y) + (\varphi_x - \varphi_y)) - \sin(\varphi_x - \varphi_y))}{T * 4\pi * (f_x - f_y)} \right| \quad (3.62)
 \end{aligned}$$

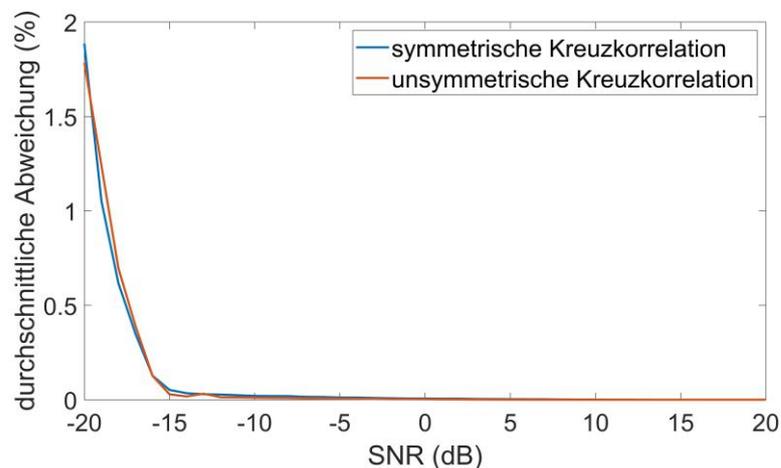
Im Vergleich zu Gleichung (3.61) ist im Sinusteil der Amplitudenfunktion der Phasenunterschied zwischen Referenz- und Messsignal enthalten. Dieser Umstand führt zu den Verformungen im Kreuzkorrelationsspektrum und erschwert die Frequenzbestimmung.

Der Fehler kann jedoch reduziert werden, wenn mehr Datenpunkte für das Kreuzkorrelationsspektrum genutzt werden. Dies wird in der untenstehenden Abbildung visualisiert.



**Abbildung 3.59:** Genauigkeit des Kreuzkorrelationsspektrums bei unterschiedlicher Anzahl an verwendete Datenpunkte

In der nächsten Simulation soll untersucht werden, inwiefern es einen Einfluss auf die Genauigkeit hat, ob das vereinfachte Kreuzkorrelationsspektrum mit der symmetrischen oder unsymmetrischen Kreuzkorrelationsfunktion generiert wird. Dazu ist für unterschiedliche SNR die Frequenz von 300 Messsignalen mithilfe beider Spektren ermittelt worden. Dabei sind jeweils Signalabschnittlängen von 2000 Datenpunkten genutzt und stets die korrekten Phaseninformationen eingesetzt worden. Die Ergebnisse werden in folgende Abbildung visualisiert.



**Abbildung 3.60:** Genauigkeit der Frequenzbestimmung des vereinfachten Kreuzkorrelationsspektrums mit symmetrische oder unsymmetrische Kreuzkorrelation bei korrekte Phaseninformationen

Ob das vereinfachte Kreuzkorrelationsspektrum mithilfe der symmetrischen oder unsymmetrischen Kreuzkorrelationsfunktion generiert worden ist, scheint korrekte Phaseninformationen keinen Einfluss auf die Genauigkeit der Frequenzmessung zu haben. Obwohl bei der Nutzung der unsymmetrischen Kreuzkorrelation ein feingliedrigeres Spektrum entsteht, bleibt die Rauschunterdrückung gleich.

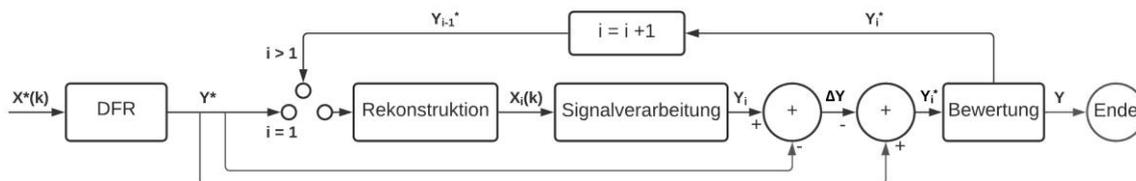
### 3.5.4 Fazit

Beim vereinfachten Kreuzkorrelationsspektrum führt die Wahl, ob symmetrische oder unsymmetrische Kreuzkorrelation verwendet wird, zu erhebliche Unterschiede im Verhalten des Spektrums.

Bei der symmetrischen Kreuzkorrelation ist bei einem Phasenunterschied zwischen Referenz- und Messsignal lediglich eine Reduktion des Amplitudenwerts des Spektrums feststellbar. Bei der unsymmetrischen Kreuzkorrelation führt ein Phasenunterschied zu einer Formänderung des Spektrums. Je größer die Phasenabweichung, desto stärker ist auch die Verformung. Diese ist dabei bei einer Phasenabweichung von  $\frac{\pi}{2}$  rad am größten. Durch einen Phasenunterschied sind die Signalfrequenzen nicht mehr im Kreuzkorrelationsspektrum ersichtlich. Die unsymmetrische Kreuzkorrelation bringt jedoch den Vorteil, dass mit der gleichen Signalabschnittslänge eine viel stärkere Stauchung des Kreuzkorrelationsspektrums erzielt werden kann. In der Regel kann mit der Hälfte der Datenpunkte die gleiche Stauchung wie beim regulären Kreuzkorrelationsspektrum erreicht werden. Insgesamt wird daher die unsymmetrische Kreuzkorrelation empfohlen, falls sichergestellt werden kann, dass es keine Phasenunterschiede zwischen Referenz- und Messsignale gibt. Ansonsten erweist sich die symmetrische Kreuzkorrelation als die sichere Methodik.

## 3.6 Iterativer Selbstkorrekturalgorithmus

In diesem Kapitel wird der iterative Selbstkorrekturalgorithmus vorgestellt. Ursprünglich ist dieser von [127] für die Fehlerkorrektur bei der Datenverarbeitung asynchron abgetasteter Signale entwickelt worden. Abbildung 3.61 visualisiert den Algorithmus.



**Abbildung 3.61:** Funktionsprinzip des iterativen Selbstkorrekturalgorithmus

Im Selbstkorrekturalgorithmus werden mithilfe der Ergebnisse der eigentlichen Signalverarbeitung  $Y^*$  das Eingangssignal rekonstruiert und die Signalverarbeitung an das rekonstruierte Signal wiederholt. Mit dessen Ergebnisse  $Y_1$  wird über Gleichung (3.63) folgendes optimiertes Ergebnis  $Y_i^*$  generiert.

$$Y_i^* = Y_0^* - \Delta Y = 2 * Y^* - Y_1 \quad (3.63)$$

Soll das Ergebnis noch weiter optimiert werden, so kann das Eingangssignal mit den optimierten Ergebnisse  $Y$  erneut rekonstruiert und die Signalverarbeitung an das rekonstruierte Signal wiederholt werden. Bei mehreren Korrekturiterationen ergibt sich das

optimierte Ergebnis  $Y$  durch folgende Gleichung.

$$Y = (O + 1) * Y^* - \sum_{i=1}^O Y_i \tag{3.64}$$

Mit dieser Methodik ist es möglich, systematische Messfehler ohne zusätzlichen Input zu minimieren. Diese Fähigkeit soll anhand verschiedener Anwendungsbeispiele näher betrachtet werden.

### 3.6.1 Diskrete Fourier Reihe-Optimierung bei asynchroner Abtastung

Im folgenden Beispiel werden die Parameter eines Signals mithilfe der diskreten Fourier-Reihe bestimmt und der Fehler, der durch eine asynchrone Abtastung entsteht, über den Selbstkorrekturalgorithmus reduziert. In Abbildung 3.62 wird dargestellt, wie der Algorithmus in diesem Fall arbeitet. Dabei wird die Signal- und Abtastfrequenz als bekannt vorausgesetzt. Als Signal wird Gleichung (3.65) verwendet.

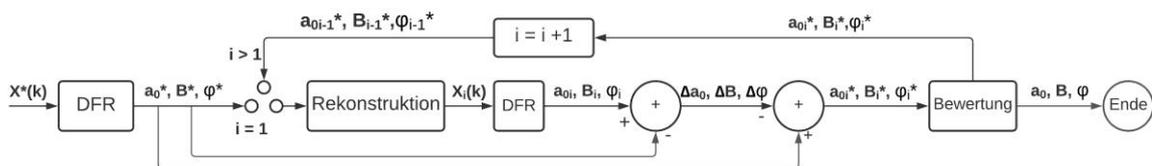


Abbildung 3.62: der iterative Selbstkorrekturalgorithmus bei der Phasenbestimmung über DFR

$$y(k) = \frac{a_0}{2} + B * \sin\left(2\pi \frac{f_y}{f_s} * k + \varphi\right) \tag{3.65}$$

Tabelle 3.6: in Parametern der Gleichung (3.65) eingesetzte Werte

Parameter	Wert
$a_0$	0.5
B	2
$f_y$	9569.378Hz
$f_s$	100 kHz
$\varphi$	1.6 rad

Die Wahl der Signalfrequenz führt dazu, dass die Signalperiodenlänge 10.45 Datenpunkte beträgt, was eine Asynchronität von 0.45 Datenpunkten bedeutet. Die diskrete Fourier-Reihe allein würde hier zu einer fehlerhaften Bestimmung von  $a_0$ ,  $B$  und  $\varphi$  führen.

Die Ergebnisse des Algorithmus sind in Tabelle 3.7 ersichtlich. Mit jeder Iteration des Algorithmus wird der Unterschied zwischen Soll- und Istwert kleiner. Somit ist der Algorithmus in der Lage, nicht-stochastische Fehler, die durch die Rahmenbedingungen der Signalverarbeitung hervorgerufen werden, zu verringern.

**Tabelle 3.7:** Ergebnisse des iterativen Selbstkorrekturalgorithmus

	$a_0$	$B$	$\varphi$
<b>Soll</b>	0.5	2	1.6
<b>Kein Algorithmus</b>	0.33267794	1.96213079	1.46092443
<b>1. Iteration</b>	0.48544512	1.98877774	1.60371637
<b>2. Iteration</b>	0.49932632	2.00004187	1.59988004
<b>3. Iteration</b>	0.49999486	1.99999251	1.60000386
<b>4. Iteration</b>	0.49999965	2.00000012	1.59999988
<b>5. Iteration</b>	0.5	1.99999999	1.6

### 3.6.2 Phasenbestimmung bei asynchroner Abtastung mithilfe von symmetrischer Kreuzkorrelation und Diskrete Fourier Reihe

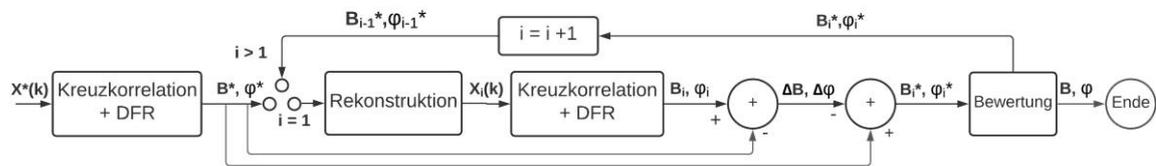
In diesem Kapitel soll untersucht werden, inwiefern mithilfe des iterativen Selbstkorrekturalgorithmus Fehler, die in der Phasenbestimmung mithilfe der DFR einer symmetrischen Kreuzkorrelationsfunktion durch Asynchronität zwischen Signal- und Abtastfrequenz entstehen, kompensiert werden können. Diese Fehler werden in der folgenden Simulation näher veranschaulicht. Dazu wird ein rauschfreies Signal mit einer Phase von 1 rad bei unterschiedlichen Frequenzen betrachtet und dessen Signalphase ermittelt. Die Abtastfrequenz beträgt dabei 100 kHz.

**Tabelle 3.8:** Phasenbestimmung mithilfe der symmetrischen Kreuzkorrelation bei asynchroner Abtastung

Signalfrequenz (in Hz)	Abtastfrequenz/ Signalfrequenz	Ermittelte Signalphase (in rad)
10000	10	1
10250	9.7561	0.8177
10520	9.5057	0.8767
10740	9.3110	0.9234
10954	9.1291	0.9678
11000	9.0909	0.9772
11250	8.8889	0.7624

Sobald es eine Asynchronität zwischen der Abtast- und Signalfrequenz gibt, existiert ein Fehler in der Phasenbestimmung. Dies liegt in der Differenz zwischen der tatsächlichen Signalperiodendauer und der Anzahl an Datenpunkte, die in der diskreten Fourier-Reihe verwendet wird, begründet. Letzteres stellt in dieser Simulation nämlich einen abgerundeten

Wert der Signalperiodendauer dar. Je größer die Differenz, desto größer ist auch der Phasenfehler.



**Abbildung 3.63:** iterativer Selbstkorrekturalgorithmus zur Phasenbestimmung mit Kreuzkorrelation und DFR

Der hier genutzte Algorithmus wird in Abbildung 3.63 beschrieben. Gemäß der Methodik aus Kapitel 3.3. wird eine Phasen- und Amplitudenbestimmung über eine Kreuzkorrelationsfunktion zwischen Referenz- und Messsignal sowie einer diskreten Fourier-Reihe durchgeführt. Dabei erfolgt die Phasenbestimmung des Messsignals über Gleichung (3.19) und (3.39) aus Kapitel 3.3.3, während die Amplitudenbestimmung gemäß Gleichung (3.19) über die Gleichung (3.66) umgesetzt wird. Signaloffsets werden in der Kreuzkorrelationsfunktion eliminiert und haben dadurch keinen Einfluss in der Methodik, weshalb hier keine Ermittlung von  $a_0$  erfolgt.

$$C_1 = 2 * C_{\phi_{xy}} \tag{3.66}$$

Mithilfe der Ergebnisse  $C_1^*$  und  $\varphi^*$  wird das Messsignal rekonstruiert und die Signalverarbeitung mit dem rekonstruierten Signal wiederholt. Mit dem Resultat  $C_{1r}$  und  $\varphi_r$  werden abschließend die initialen Ergebnisse  $C_1^*$  und  $\varphi^*$  korrigiert.

In der folgenden Simulation wird die Wirkung des iterativen Selbstkorrekturalgorithmus getestet. Dazu wird ein rauschfreies Messsignal der Frequenz 10520 Hz und der Phase 1 rad betrachtet und diese als bekannt vorausgesetzt. Die Tabelle 3.9 zeigt auf, welche Phase bei einer bestimmten Anzahl an Iterationen ermittelt wird. Mit jeder Iteration wird der Phasenfehler immer geringer. Die Nutzung des iterativen Selbstkorrekturalgorithmus erweist sich damit als sinnvoll.

**Tabelle 3.9:** Phasenbestimmung mit symmetrischer Kreuzkorrelation und iterativen Selbstkorrekturalgorithmus bei asynchroner Abtastung

Iterationen	Ermittelte Phase (in rad)
0	0.876772591745504
1	1.004573275376679
2	0.999859800797063
3	1.000004333087698

Nun wird die Situation betrachtet, dass die Signalfrequenz nicht bekannt ist und die falsche Frequenz verwendet wird. Es sind dabei stets drei Iterationen des Selbstkorrekturalgorithmus durchgeführt worden. Das Ergebnis findet sich in Tabelle 3.10. Wird für die

Funktion die falsche Signalfrequenz eingesetzt, so verringert sich die Genauigkeit der Methodik. Frequenzinformationen sind somit relevant für die Methodik und sollten möglichst präzise sein.

**Tabelle 3.10:** Phasenbestimmung mit symmetrischer Kreuzkorrelation und iterativen Selbstkorrekturalgorithmus bei asynchroner Abtastung bei fehlerhaften Frequenzinformationen

Frequenz (in Hz)	Ermittelte Phase (in rad)
10520	1.000004333087698
10400	1.024977947849443
10300	1.045780313881645
10200	1.066575896491125
10100	1.087366327035014

Die Leistung der Methodik soll nun in Anwesenheit von Rauschen näher untersucht werden. Hierbei wird ein rauschbehaftetes Signal der Frequenz 10520 Hz und der Phase 0 rad mit einem SNR von 0 dB betrachtet. Im ersten Schritt wird davon ausgegangen, dass die richtige Signalfrequenz bekannt ist und diese in der diskreten Fourier-Reihe eingesetzt wird. Dabei wird die betrachtete Signalabschnittslänge auf 1000 Datenpunkte festgelegt. Tabelle 3.11 zeigt auf, welche Phase durchschnittlich bei einer bestimmten Anzahl an Iterationen ermittelt worden ist. Dabei sind für die Durchschnittsbildung die Ergebnisse von 500 Signalabschnitte genutzt worden.

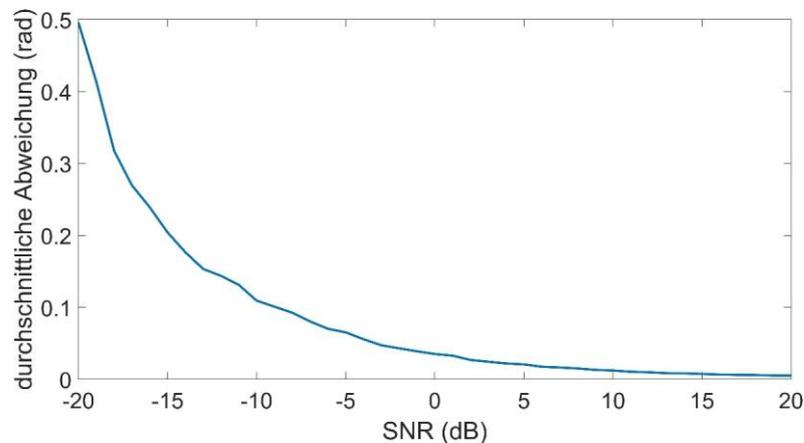
**Tabelle 3.11:** Phasenbestimmung mit symmetrischer Kreuzkorrelation und iterativen Selbstkorrekturalgorithmus bei asynchroner Abtastung und additiven Rauschen

Iterationen	Ermittelte Phase (in rad)
0	0.126802211273968
1	0.0368602633855438
2	0.0378290337047808
3	0.0339973120177646

Die Ergebnisse zeigen, dass bei der Phasenbestimmung verrauschter Signale eine Iteration der Selbstkorrektur ausreicht. Die mögliche Reduzierung des systematischen Phasenfehlers durch eine weitere Iteration ist im Vergleich zum stochastischen Fehler durch additives Rauschen vernachlässigbar.

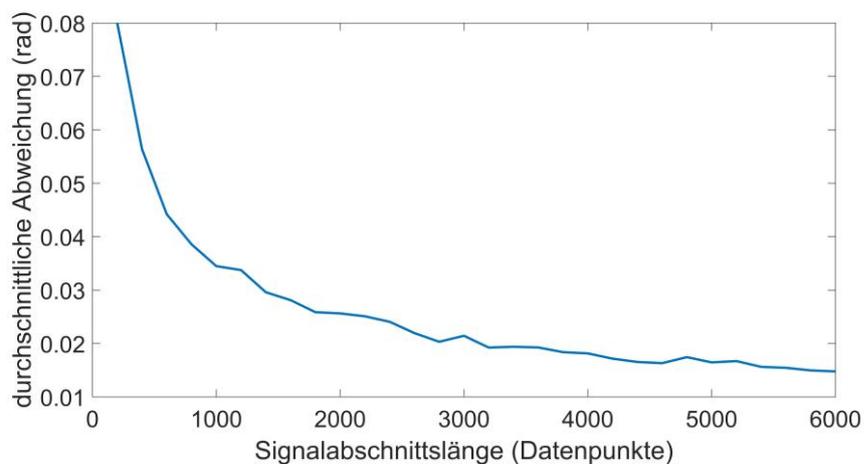
In der folgenden Simulation soll nun die Leistung der Methodik bei verrauschten Signalen mit unterschiedlichem SNR ausgetestet werden. Es wird eine Signalabschnittslänge von 1000 Datenpunkte verwendet. Signalfrequenz und Abtastfrequenz bleiben unverändert 10520 Hz und 100 kHz. Es wird hierbei davon ausgegangen, dass die Signalfrequenz bekannt ist und in der Methodik genutzt wird. Die iterative Selbstkorrektur wird auf eine Iteration beschränkt. Abbildung 3.64 visualisiert das Ergebnis. Wie erwartet wird die durchschnittliche Abweichung mit steigendem SNR immer kleiner. Dabei konvergiert diese

gegen null und nicht, wie bei Asynchronität zwischen Signal- und Abtastfrequenz üblich, gegen einem positiven Offsetwert.



**Abbildung 3.64:** Genauigkeit der Phasenbestimmung mithilfe symmetrischer Kreuzkorrelation und iterativen Selbstkorrekturalgorithmus bei unterschiedlichem SNR

Abschließend soll die Leistung der Methodik bei verrauschten Signalen mit dem SNR von 0 dB bei unterschiedlicher Anzahl an verwendete Datenpunkte ausgetestet werden. Auch hier wird wie erwartet die durchschnittliche Abweichung mit steigender Anzahl an Datenpunkte immer kleiner.



**Abbildung 3.65:** Genauigkeit der Phasenbestimmung mithilfe symmetrischer Kreuzkorrelation und iterativen Selbstkorrekturalgorithmus bei unterschiedlicher Anzahl verwendeter Datenpunkte

## 4 Neuartige Signalverarbeitungsmethoden

In diesem Kapitel werden die Signalverarbeitungsmethoden, die in Rahmen dieser Arbeit für die Rotationsgeschwindigkeitsmessung mithilfe von SMI-Signalen entwickelt worden sind, vorgestellt sowie ihre Charakteristika und Fähigkeiten in Simulationen analysiert.

### 4.1 Autokorrelationsmethodik

Dieser Kapitel beschreibt eine Methodik zur Frequenzmessung von SMI, die sich die Eigenschaften der Autokorrelation zunutze macht. Sie arbeitet unter sehr kleines optisches Feedback und besteht aus den folgenden vier Schritten:

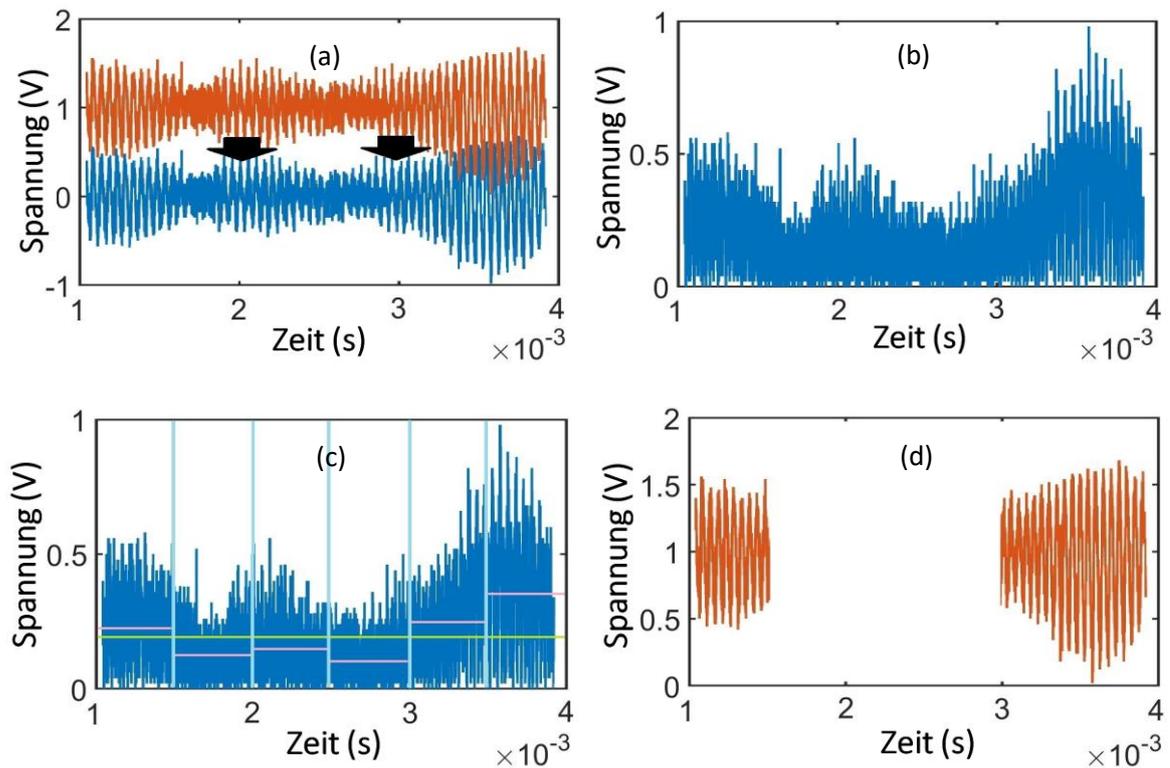
1. Signalselektion
2. Autokorrelation
3. Nullpunktdetektion und Frequenzbestimmung
4. Durchschnittsfenster

Im Folgenden werden die einzelnen Schritte im Detail beschrieben.

#### 4.1.1 Signalselektion

Es kann davon ausgegangen werden, dass sich bei gleichbleibenden Umgebungsbedingungen und Systemeigenschaften die durchschnittliche Rauschleistung über die Zeit nicht oder nur in geringfügige Maße verändert. Dementsprechend verändert sich die SNR des SMI-Signals auf die gleiche Weise wie die Signalamplitude. Zur Veranschaulichung sind die SNR von Signalteile aus Abbildung 2.4 analysiert worden. Dazu ist die MATLAB-Funktion „snr(x)“, dass die SNR mithilfe eines modifizierten Periodogram und einem Kaiser-Fenster berechnet, genutzt worden. Abhängig von der Signalamplitude, variiert die berechnete SNR von Signalteile aus Abbildung 2.4 zwischen -9.05 dB und 12.2 dB. Je höher die Signalamplitude desto höher ist das SNR und umgekehrt.

Grundsätzlich führt eine Erhöhung des SNRs zu einer genaueren Frequenzmessung. Aus diesem Grund besteht der erste Schritt der Autokorrelationsmethodik aus einem Signalselektionsalgorithmus, welches Signalabschnitte mit geringem SNR von nachfolgenden Signalverarbeitungsschritten ausschließt. Auf diese Weise kann der durchschnittliche SNR der verarbeiteten Signalabschnitte bis zum SNR der Signalabschnitte mit der höchsten Amplitude erhöht werden.



**Abbildung 4.1:** Signalselektionsmethode: (a) Offsetkorrektur; (b) Betragsfunktion; (c) Aufteilung der Betragsfunktion und Wertanalyse (d) Signalselektion

Die Signalselektion besteht aus den folgenden Schritten (siehe Abbildung 4.1):

1. Offsetkorrektur: Das Signaloffset  $O_f(t)$  wird berechnet und vom Signal  $y(t)$  subtrahiert.

$$O_f(t) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N y(t) \quad (4.1)$$

$$y_1(t) = y(t) - O_f(t) \quad (4.2)$$

2. Betragsfunktion: Die Betragswerte des Signals werden ermittelt.

$$y_2(t) = |y_1(t)| \quad (4.3)$$

3. Aufteilung der Betragsfunktion und Wertanalyse: Die Ergebnisse des zweiten Schritts werden in Abschnitte fester Länge  $L_1$  unterteilt. Der Durchschnittswert der Abschnitte  $y_s$  wird ermittelt und mit einem Schwellenwert  $x_s$  verglichen, der vom Nutzer festgelegt wird.

$$y_s = \frac{1}{L_1} \int_{t_{an}}^{t_{en}=t_{an}+L_1} y_2(t) dt \quad (4.4)$$

4. Signalselektion: Liegt der berechnete Durchschnitt unterhalb des Schwellenwerts, so wird der entsprechende Signalabschnitt von nachfolgenden Verarbeitungsschritten ausgeschlossen. Welcher Schwellenwert genutzt wird, hängt davon ab, wie viel das SNR des Signals mindestens betragen soll, und muss mithilfe von Referenzsignalen optimiert werden.

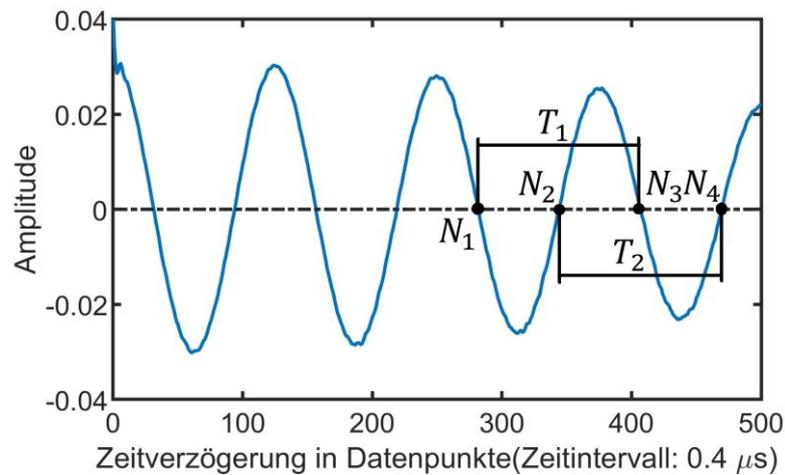
$$\text{Wenn } y_s < x_s \text{ dann } [y_2(t_{an}); y_2(t_{en})] = [] \quad (4.5)$$

#### 4.1.2 Autokorrelation

An alle Signalabschnitte, die von der Signalselektion als geeignet bewertet worden sind, wird im Anschluss eine Autokorrelationsfunktion generiert und deren Frequenz mithilfe der Nullpunktdetektion bestimmt. Zwischen Auto- und Kreuzkorrelation hat man sich für Ersteres entschieden, da Amplitudenmodulation bei der Kreuzkorrelation zwischen Referenz- und Messsignalen mit unterschiedlichen Frequenzen zu Periodenlängenänderungen in der Kreuzkorrelationsfunktion führt und die Frequenzbestimmung des Messsignals dadurch erheblich beeinträchtigt. Zudem ist mithilfe der Signalselektion das SNR der betrachteten Signalabschnitte erhöht worden, wodurch auch bei SMI-Signalen mit konstanter Amplitude die Kreuzkorrelation gegenüber der Autokorrelation keinen bedeutenden Mehrwert liefern würde.

Im Kontext dieser Methodik dient die Autokorrelation nicht nur der Rauschunterdrückung. Sie fasst auch das gesamte Frequenzspektrum, das durch die Spektralverbreiterung des SMI-Signals entsteht, über seine Periodenlänge in einen Frequenzwert zusammen. Dies fungiert in dieser Methodik als ein Schätzverfahren, mit dem die Dopplerfrequenz aus dem Frequenzspektrum ermittelt werden soll.

Bei der Nullpunktdetektion hat man sich für die einfachere Variante ohne Hysteresebedingung entschieden (siehe Abbildung 3.1), da sich die Autokorrelation aufgrund seiner Leistungsfähigkeit in der Rauschunterdrückung als sehr stetige Funktion erweist, bei der die Gefahr von zufälligen Nulldurchgängen sehr gering ausfällt. Zudem würde die Nutzung einer Hysterese die Gefahr von Messfehler mit sich bringen, da die Autokorrelationsfunktion eines SMI-Signals Amplitudenmodulation aufweisen kann (siehe Abbildung 3.3). Da die Autokorrelation von stochastischem Rauschen mit zunehmender Verzögerungszeit gegen Null konvergiert, beginnt die Nullpunktdetektion erst nach einer definierten Verzögerungszeit, um eine ausreichende Rauschunterdrückung zu gewährleisten. In dieser Arbeit beginnt die Detektion nach zwei Perioden der Autokorrelationsfunktion (siehe Abbildung 4.2).



**Abbildung 4.2:** Nullpunktdetektion und Periodenlängenbestimmung der Autokorrelationsfunktion

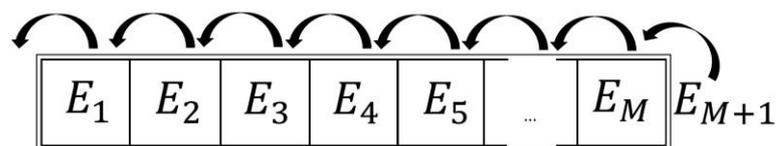
Für die Frequenzbestimmung werden vier aufeinanderfolgende Nullpunkte erfasst. Zwei Frequenzen werden berechnet, indem der erste und dritte Nullpunkt für eine Frequenz und der zweite und vierte Nullpunkt für die zweite Frequenz verwendet werden. Als Ergebnis für den nächsten Verarbeitungsschritt wird der Mittelwert beider Frequenzen genutzt. Die Methodik wird mit den Gleichungen (4.6) und (4.7) beschrieben. Hierbei repräsentiert  $N_i$  die Position des  $i$ -ten Nullpunkts, während  $t_s$  und  $f_s$  den Abtastintervall und die Abtastfrequenz darstellen.

$$T_D = \frac{(T_1 + T_2)}{2} = \frac{[(N_3 - N_1) * t_s + (N_4 - N_2) * t_s]}{2} \tag{4.6}$$

$$f_D = \frac{1}{T_D} = \frac{2 * f_s}{[(N_3 - N_1) + (N_4 - N_2)]} \tag{4.7}$$

### 4.1.3 Durchschnittsfenster

Im letzten Schritt des Algorithmus werden die Ergebnisse der Frequenzschätzung in einem Durchschnittsfenster weiterverarbeitet, um Frequenzmodulationen, die durch verschiedene Phänomene wie Speckle-Effekt oder Vibrationen verursacht werden, zu kompensieren.



**Abbildung 4.3:** Durchschnittsfenster

Das Durchschnittsfenster funktioniert wie folgt: Wenn ein Ergebnis aus den vorherigen Schritten generiert wird, wird es in das Durchschnittsfenster eingefügt und der Durchschnitt

aller im Fenster enthaltenen Werte als endgültigen Output des Algorithmus ausgegeben. Wenn alle Slots des Fensters belegt sind und der neue Eingangswert  $E_{M+1}$  eingespeist werden soll, werden alle Werte im Fenster um einen Slot nach links verschoben. Der älteste Wert  $E_1$  wird aus dem Fenster entfernt und  $E_{M+1}$  nimmt den vorherigen Slot von  $E_M$  ein. Die Fenstergröße wird vom Benutzer auf eine feste Anzahl von Slots festgelegt. Eine Erhöhung der Größe verbessert die Genauigkeit, verschlechtert jedoch auch die Reaktionszeit auf Geschwindigkeitsänderungen.

## 4.2 Schätzverfahren zur Dopplerfrequenzbestimmung von SMI-Signalen über das Kreuzkorrelationsspektrum

Um mit SMI-Signalen die Rotationsgeschwindigkeit eines Objektes zu ermitteln, muss die Frequenz des SMI-Signals ermittelt werden. Durch die Spektralverbreiterung aufgrund von Phänomenen wie dem Speckle Effekt (siehe Kapitel 2.2) ist aber aus einer einzelnen Frequenz ein Frequenzbereich entstanden. Dabei kann das Kreuzkorrelationsspektrum grundsätzlich als die Betragsfunktion einer Superposition mehrerer Sinus cardinalis, deren globalen Maxima und vertikale Achsensymmetrie an den Frequenzen des betrachteten Signals liegen, betrachtet werden. In diesem Kapitel wird eine Methodik vorgestellt, mit der für die Rotationsgeschwindigkeitsmessung die ursprüngliche Frequenz des SMI-Signals aus dem generierten Kreuzkorrelationsspektrum abgeschätzt werden soll. Sie wird in Abbildung 4.4 visualisiert und besteht aus den folgenden Schritten:

1. **Normalisiertes Integral:** Es wird das Integral des Kreuzkorrelationsspektrums gebildet und anschließend normalisiert, indem das Integral mit dessen Maximum dividiert wird. Das Maximum befindet sich bei  $f_e$ , da das Kreuzkorrelationsspektrum ausschließlich aus positiven Werten besteht.

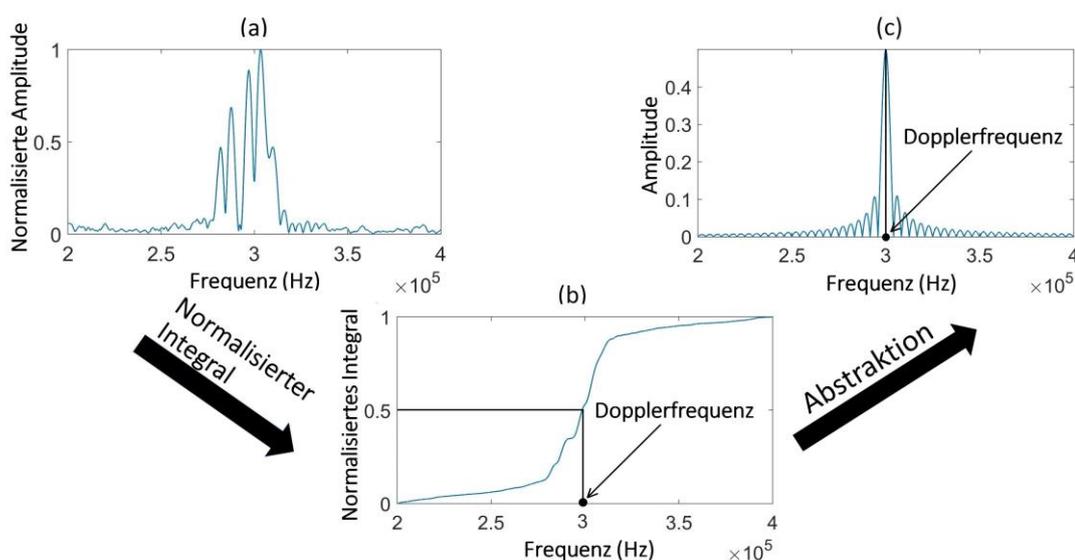
$$\text{norm} \left( \int_{f_a}^{f_e} K(f_w) df_w \right) = \frac{\int_{f_a}^{f_e} K(f_w) df_w}{\max \left( \int_{f_a}^{f_e} K(f_w) df_w \right)} \quad (4.8)$$

2. **Ableitung der Dopplerfrequenz:** Es wird angenommen, dass das Spektrum ohne Störeinflüsse ein Sinus cardinalis an der Dopplerfrequenz  $f_d$  darstellt. Dementsprechend wird das Kreuzkorrelationsspektrum  $K(f_w)$  als ein solches Spektrum  $K_{ab}(f_w)$  abstrahiert (siehe Gleichung (4.9)). Dabei wird davon ausgegangen, dass nach der Spektralverbreiterung das Integral des Kreuzkorrelationsspektrums im betrachteten Frequenzbereich betragsmäßig gleichgeblieben ist (siehe Gleichung (4.10)). Da  $K_{ab}(f_w)$  an der Dopplerfrequenz vertikal achsensymmetrisch ist, würde die Dopplerfrequenz  $f_d$  an der Stelle, an der das Integral des Kreuzkorrelationsspektrums die Hälfte seines Maximalwertes erreicht, liegen (siehe Gleichung (4.11)). Die Ermittlung dieser Frequenz  $f_d$  ist das Ziel der Schätzmethodik.

$$K_{ab}(f_w) = |\text{sinc}(f_w)| \quad (4.9)$$

$$\left| \int_{f_a}^{f_e} K_{ab}(f_w) df_w \right| = \left| \int_{f_a}^{f_e} K(f_w) df_w \right| \quad (4.10)$$

$$\text{norm}\left(\int_{f_a}^{f_e} K(f_w) df_w\right) = 0.5 \quad (4.11)$$



**Abbildung 4.4:** a) Kreuzkorrelationsspektrum eines SMI-Signals; b) Integral des Kreuzkorrelationsspektrums; c) Abstraktion des Kreuzkorrelationsspektrums

### 4.3 Frequenz- und Phasenbestimmung mithilfe des vereinfachten Kreuzkorrelationsspektrums und der Kreuzkorrelationsfunktion

Kapitel 3.5 hat gezeigt, dass mithilfe des vereinfachten Kreuzkorrelationsspektrums Signalfrequenzen mit viel geringerem Berechnungsaufwand als mit dem regulären Kreuzkorrelationsspektrum ermittelt werden können. Phasenunterschiede zwischen Referenz- und Messsignalen beeinflussen das Kreuzkorrelationsspektrum jedoch auf negative Art und Weise. Falls sich Phaseninformationen als mangelhaft erweisen, kann es zu signifikanten Fehlern bei der Frequenzbestimmung kommen. Für eine industrielle Anwendung des vereinfachten Kreuzkorrelationsspektrums ist es daher erforderlich, auch unter starkem Rauschen präzise Phaseninformationen der Frequenzanteile zur Verfügung stellen zu können. In Rahmen dieser Arbeit sind daher zwei verschiedene Methoden entwickelt worden, mit denen sowohl die Frequenz- als auch die Phase eines Signals mit hoher Genauigkeit ermittelt werden kann. In beiden Methoden wird die Frequenzbestimmung mithilfe des vereinfachten Kreuzkorrelationsspektrums und die Phasenmessung

über die diskrete Fourier-Reihe einer symmetrischen Kreuzkorrelationsfunktion umgesetzt. Die Methoden unterscheiden jedoch darin, ob das Kreuzkorrelationsspektrum mit der symmetrischen oder der unsymmetrischen Kreuzkorrelation (siehe Gleichungen (3.13) und (3.17)) berechnet worden ist. Tabelle 4.1 veranschaulicht dies. In den folgenden Kapiteln werden die einzelnen Methoden und ihre Fähigkeiten in Simulationen vorgestellt.

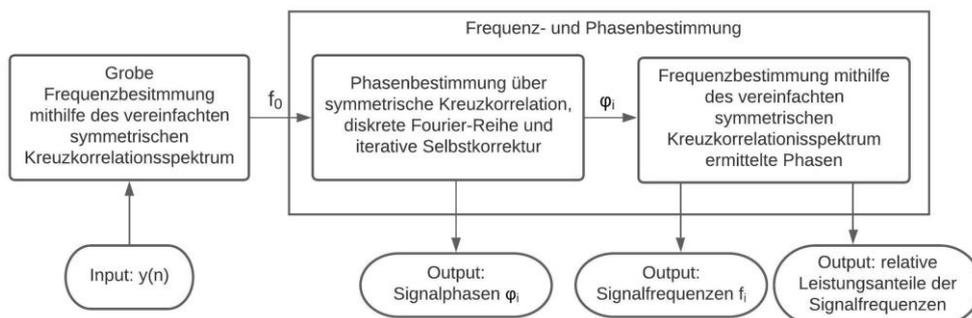
**Tabelle 4.1:** Verwendete Kreuzkorrelationsfunktion in Methode 1 und Methode 2

	<b>Frequenzbestimmung mit vereinfachtem Kreuzkorrelationsspektrum</b>	<b>Phasenbestimmung mit Kreuzkorrelationsfunktion + DFR</b>
<b>Methode 1</b>	Symmetrisch	Symmetrisch
<b>Methode 2</b>	Unsymmetrisch	Symmetrisch

### 4.3.1 Methode 1

Kapitel 3.5.2 hat veranschaulicht, dass mithilfe des vereinfachten, symmetrischen Kreuzkorrelationsspektrums Signalfrequenzen mit viel geringerem Berechnungsaufwand und hoher Genauigkeit ermittelt werden können. Phasenunterschiede zwischen Referenz- und Messsignalen beeinflussen jedoch die Amplitude der betrachteten Frequenzanteile. Bei mehrfrequenten Signalen kann es dadurch zu signifikanten Fehlern bei der Bestimmung von relativen Leistungsanteilen der Signalfrequenzen kommen, falls sich die Phaseninformationen als fehlerhaft erweisen. Dementsprechend ist aus den bisherigen Erkenntnissen ein neuer Algorithmus entwickelt worden, das aus den folgenden Schritten besteht:

1. Grobe Frequenzbestimmung des Messsignals mithilfe des vereinfachten, symmetrischen Kreuzkorrelationsspektrums
2. Phasenbestimmung des Messsignals mithilfe der symmetrischen Kreuzkorrelationsfunktion, der DFR und dem iterativen Selbstkorrekturalgorithmus
3. Präzise Frequenzbestimmung des Messsignals mithilfe des vereinfachten, symmetrischen Kreuzkorrelationsspektrums unter Nutzung der ermittelten Phasen zur Korrektur der Amplitudeninformationen.
4. Ausgangsgröße: Phasen, Frequenzen und relative Leistungsanteile der Signalfrequenzen.



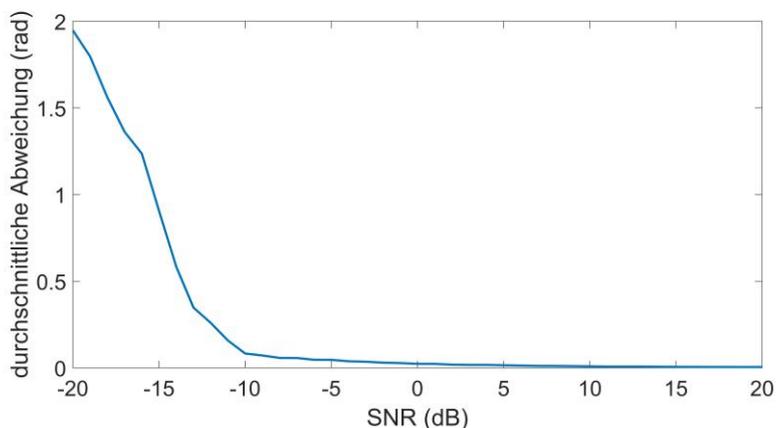
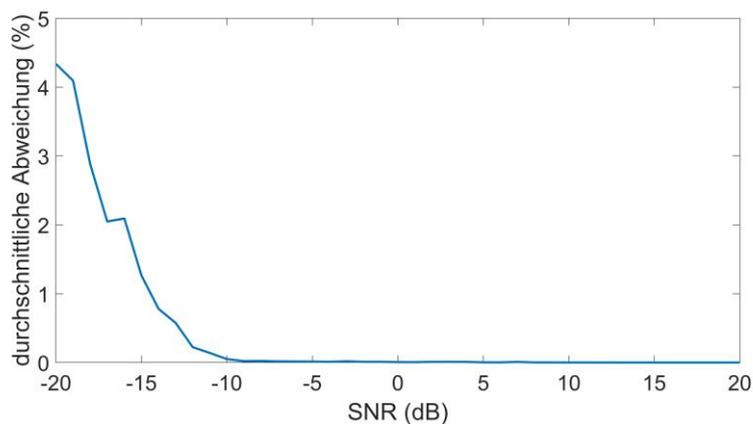
**Abbildung 4.5:** Schema der Frequenz- und Phasenbestimmung

**Simulationen:**

Die Methodik soll in seiner Fähigkeit analysiert werden, Frequenzen und Phasen auch unter starkem Rauschen ermitteln zu können. Im ersten Schritt wird dazu die SNR variiert und für jedes SNR die Genauigkeit der Frequenz- und Phasenbestimmung von 300 verrauschten Signalen ermittelt. Dazu sind die Parameterwerte in Tabelle 4.2 genutzt worden. Die Ergebnisse werden in Abbildungen 4.6 a) und b) visualisiert.

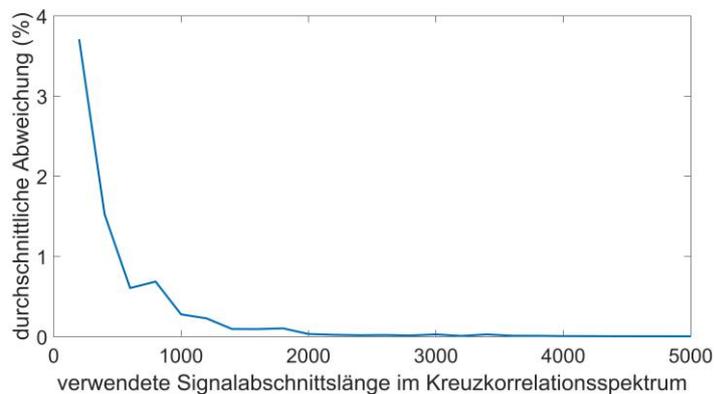
**Tabelle 4.2:** Parameterwerte der ersten Simulation

Parameter	Wert
Frequenz des Messsignals	10520 Hz
Abtastfrequenz	100 kHz
Auflösung des Kreuzkorrelationsspektrums	1 Hz
Anzahl der verwendete Datenpunkte für das Kreuzkorrelationsspektrum	2000
Anzahl der verwendete Datenpunkte für die Kreuzkorrelationsfunktion der Phasenbestimmung	2000

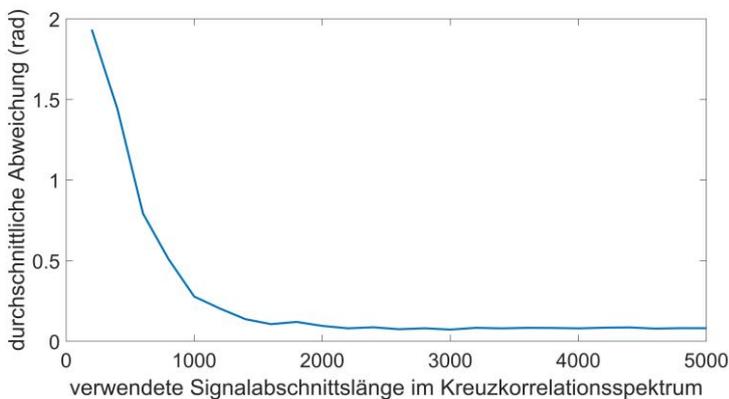
**Abbildung 4.6:** durchschnittliche Abweichung der Frequenz- und Phasenbestimmung unter verschiedene SNR

Wie erwartet kommt es durch die steigenden SNR zu einer Verringerung der durchschnittlichen Abweichung sowohl in der Frequenz- als auch in der Phasenbestimmung. In der Frequenzbestimmung liegt die durchschnittliche Abweichung schon ab einem SNR von -7 dB unterhalb von 0.02%. In der Phasenbestimmung liegt die durchschnittliche Abweichung ab einem SNR von -10 dB unterhalb von 0.1 rad. Ab einem SNR von 2 dB ist sie sogar kleiner als 0.02 rad.

Im zweiten Schritt wird die Anzahl an Datenpunkte für das Kreuzkorrelationsspektrum variiert. Dazu wird das SNR auf -10 dB festgesetzt und ansonsten die gleichen Parameterwerte wie in der vorherigen Simulation genutzt. Abbildungen 4.7 a) und b) zeigen die Resultate. Wie erwartet kommt es durch eine steigende Anzahl an verwendete Punkte im Kreuzkorrelationsspektrum zu einer Genauigkeitsverbesserung in der Frequenzbestimmung. Ab 1000 Datenpunkte liegt die durchschnittliche Abweichung unterhalb von 0.1%. Ab 3000 Datenpunkte ist sie sogar kleiner als 0.01%. Bei der Phasenbestimmung kommt es anfangs zu einer Verbesserung. Ab 1000 Datenpunkte bleibt die durchschnittliche Abweichung im Bereich 0.07-0.09 rad. Dieses Verhalten ergibt Sinn, da sich hier die Phasenbestimmung ausschließlich durch die Verbesserung der Frequenzbestimmung verbessert. Während initial die Verbesserungen in der Frequenzmessung sehr hoch sind, erweisen sich die Verbesserungen ab 1000 Datenpunkte als klein. Die Phasenbestimmung kann weiter verbessert werden, indem mehr Datenpunkte in der Kreuzkorrelationsfunktion der Phasenbestimmung eingesetzt wird. Dies wird in der folgenden Simulation näher beleuchtet.



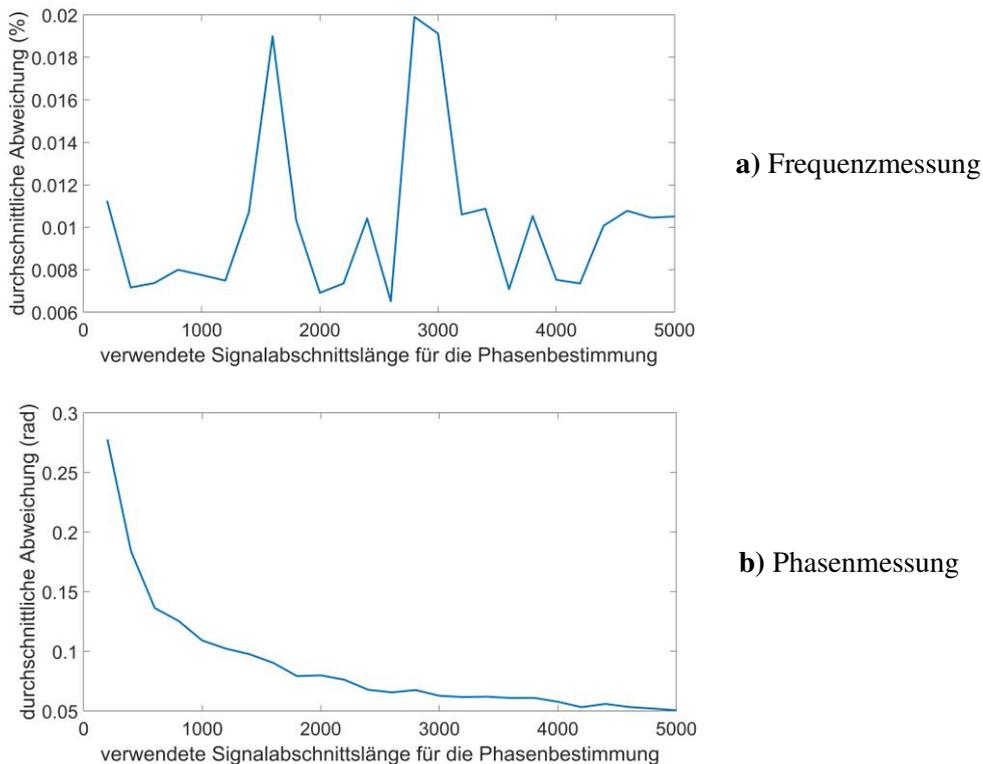
a) Frequenzmessung



b) Phasenmessung

**Abbildung 4.7:** durchschnittliche Abweichung der Frequenz- und Phasenbestimmung bei unterschiedlichen verwendeten Signalabschnittslängen im Kreuzkorrelationsspektrum

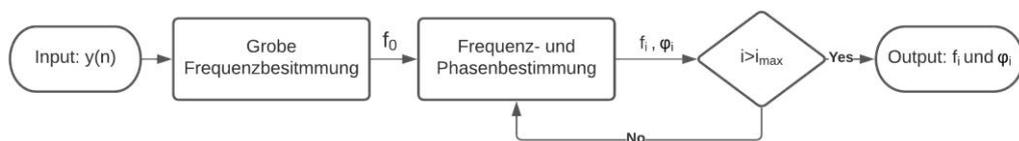
Im dritten Schritt wird die Anzahl der Datenpunkte für die Phasenbestimmung variiert. Dazu wird das SNR auf -10 dB festgesetzt. Erneut werden ansonsten die Werte aus Tabelle 4.2 angewandt. Abbildungen 4.8 a) und b) visualisieren die Ergebnisse. Auf die Frequenzbestimmung hat die Anzahl der verwendeten Datenpunkte in der Phasenbestimmung keinen Einfluss. Die aufgezeigten Abweichungen liegen in der stochastischen Natur des Rauschens begründet. In der Phasenbestimmung kommt es durch die Verwendung längerer Signalabschnitte erwartungsgemäß zu einer Verbesserung der Genauigkeit. Ab 1400 Datenpunkte liegt diese unter 0.1 rad.



**Abbildung 4.8:** durchschnittliche Abweichung der Frequenz- und Phasenbestimmung bei unterschiedlichen verwendeten Signalabschnittslängen für die Phasenbestimmung

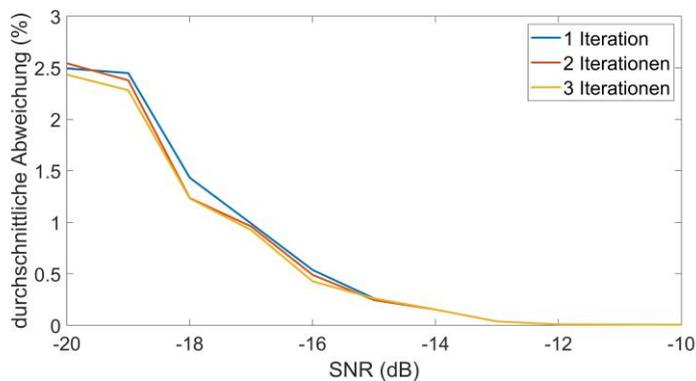
**Iterative Frequenz- und Phasenbestimmung:**

Im Folgenden wird untersucht, inwiefern sich die Frequenz- und Phasenbestimmungen bei SNR unterhalb von -10 dB verbessert, wenn die Frequenz- und Phasenbestimmung gemäß Abbildung 4.9 mehrmals iteriert wird. Existiert nämlich ein Phasenunterschied zwischen Referenz- und Messsignal, so reduziert sich das SNR des Kreuzkorrelationsspektrums. Dadurch verschlechtert sich die Messgenauigkeit in der Frequenzbestimmung, was sich bei geringem SNR des Messsignals auch negativ auf die Phasenbestimmung auswirkt.

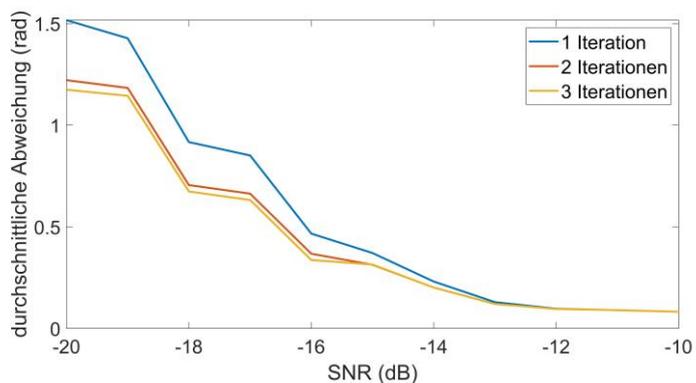


**Abbildung 4.9:** Algorithmus der iterativen Frequenz- und Phasenbestimmung

Dazu wird eine Simulation durchgeführt, bei dem der Algorithmus in Abbildung 4.9 getestet wird. Darin wird nach der groben Frequenzbestimmung (siehe Abbildung 4.5) die Frequenz- und Phasenbestimmung in Abbildung 4.5 mehrere Male iteriert und das Ergebnis erst danach ausgegeben. In der Simulation wird Frequenz- und Phasenbestimmung eines Signals bei unterschiedlicher Zahl an Iterationen sowie SNR umgesetzt und die Genauigkeit der Messungen ermittelt. Die Resultate sind in Abbildung 4.10 zu finden.



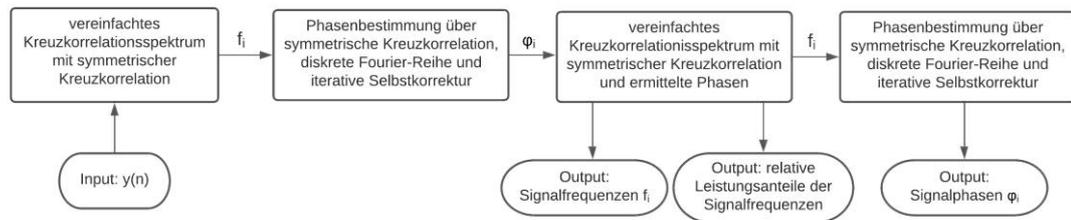
a) Frequenzmessung



b) Phasenmessung

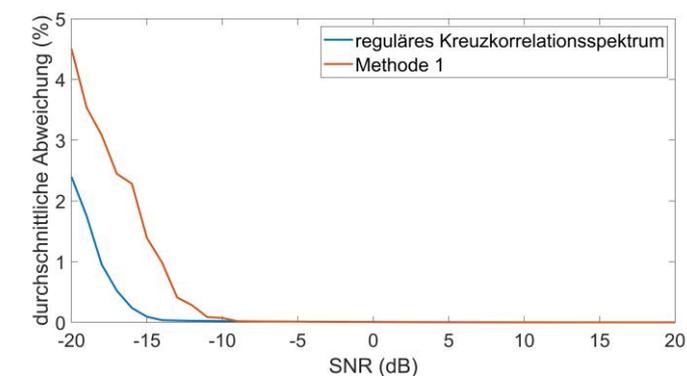
**Abbildung 4.10:** durchschnittliche Abweichung der Frequenz- und Phasenbestimmung bei unterschiedlicher Zahl an Iterationen des Algorithmus

Man kann feststellen, dass die Iteration der Frequenz- und Phasenbestimmung durchaus zu einer Verbesserung der Frequenz- und Phasenbestimmung führt. Das Verbesserungspotenzial wird jedoch mit jeder weiteren Iteration signifikant kleiner. Zudem steigt das Verbesserungspotenzial mit sinkendem SNR. Für die bestmögliche Genauigkeit erweisen sich mehrere Iterationen der Frequenz- und Phasenbestimmung als sinnvoll. In der Praxis muss aber ein Kompromiss zwischen Verbesserungspotenzial und Berechnungsaufwand getroffen werden. In Anbetracht dessen, dass das Kreuzkorrelationsspektrum auch in seiner vereinfachten Version einen hohen Berechnungsaufwand aufweist und eine zweite Iteration zu relativ geringen Verbesserungen führt, wird für die meisten Fälle lediglich eine Iteration der Frequenzbestimmung empfohlen. In der Phasenbestimmung kommt es durch eine zweite Iteration zu einer bedeutenden Verbesserung der Genauigkeit. Da der Berechnungsaufwand der Phasenbestimmung viel geringer als bei der Frequenzbestimmung ausfällt, werden zwei Iterationen der Phasenbestimmung empfohlen. Der Algorithmus von Abbildung 4.5 wird dementsprechend angepasst und ist in Abbildung 4.11 zu sehen. Die nachfolgenden Simulationen werden mit diesem Algorithmus durchgeführt.

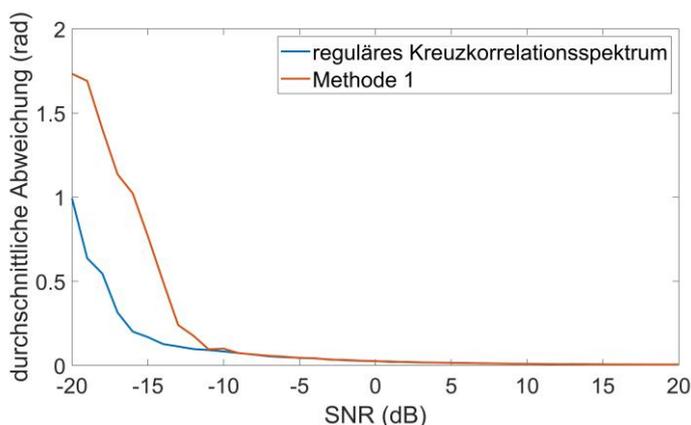


**Abbildung 4.11:** optimierte Version von Methode 1

Nun soll die Genauigkeit der neuen Methodik unter verschiedene SNR untersucht und mit den Genauigkeiten des regulären Kreuzkorrelationsspektrums verglichen werden. Dabei ist bei der Betrachtung des regulären Kreuzkorrelationsspektrums ebenfalls eine symmetrische Kreuzkorrelationsfunktion für die Phasenbestimmung genutzt worden. Für unterschiedliche SNR ist die Frequenz von 300 Messsignalen mithilfe beider Methoden ermittelt worden. Hierbei sind stets Signalabschnittlängen von 2000 Datenpunkten genutzt worden und. Die Ergebnisse werden in den folgenden Abbildungen visualisiert.



**a)** Frequenzmessung



**b)** Phasenmessung

**Abbildung 4.12:** Genauigkeit von Methode 1 im Vergleich zum regulären Kreuzkorrelationsspektrum

Im Vergleich zum regulären Kreuzkorrelationsspektrum hat sich die Genauigkeit der Methodik bei niedrigen SNR deutlich verschlechtert. Dies liegt hauptsächlich in mangelhafte Phaseninformationen begründet. Durch den Phasenunterschied zwischen Referenz- und Messsignal reduziert sich die Amplitude des Sinus Cardinalis im Spektrum (siehe Kapitel 3.5.2). Dadurch verringert sich das SNR des Kreuzkorrelationsspektrums,

wodurch es bei gleichbleibender Rauschleistung sehr viel öfter zu Fehlern in der Frequenzbestimmung mithilfe des Spektrums kommt. Die Phasenbestimmung kann ab einem SNR von -10 dB keine zufriedenstellenden Ergebnisse liefern. Neben einer ungenügenden Rauschunterdrückung liegt dies in den Frequenzinformationen, die das Kreuzkorrelationsspektrum in der groben Frequenzschätzung liefert, begründet. Der Frequenzunterschied zwischen Referenz- und Messsignal sorgt für eine reduzierte Amplitude der Kreuzkorrelationsfunktion, wodurch sich auch hier das SNR der Kreuzkorrelationsfunktion verringert und Phasenmessungen höhere Abweichungen aufweisen. Doch insgesamt bietet die Methodik ab einem SNR von -9 dB immer noch überzeugende Ergebnisse. Die Frequenzmessung weist hier eine Genauigkeit von 0.02% auf. Ab einem SNR von -4 dB liegt sie sogar bei 0.01%. Die Phasenmessungen besitzen ab einem SNR von -11 dB eine durchschnittliche Abweichung von 0.1 rad. Ab 1 dB hat sie sich auf unter 0.02 rad reduziert. Um die Genauigkeiten der Methodik zu verbessern, wird empfohlen, sowohl für die Frequenz- als auch für die Phasenbestimmung mehr Datenpunkte zu verwenden. Präzisere Frequenzinformationen in Rahmen der groben Frequenzschätzung verbessern die Ergebnisse ebenfalls.

### 4.3.2 Methode 2

Die Methodik in Kapitel 4.3.1 ist in der Lage, die Frequenzen und Phasen eines verrauschten Signals mit einem SNR bis -9 dB mit hoher Genauigkeit zu ermitteln. Doch Kapitel 3.5.3 hat gezeigt, dass die Erstellung des vereinfachten Kreuzkorrelationsspektrums mithilfe der unsymmetrischen Kreuzkorrelation nicht nur die Berechnungszeit reduziert, sondern auch die Möglichkeit bietet, die gewünschte Stauchung des Spektrums nur mit der Hälfte der Datenpunkte zu erzielen. Bei vorgegebener Signalabschnittslänge kann auf diese Weise ein feingliedrigeres Kreuzkorrelationsspektrum generiert werden. Phasenunterschiede zwischen Referenz- und Messsignale führen jedoch zu unerwünschte Verformungen des Spektrums. Bevor die Methodik in der Frequenzbestimmung zum Einsatz kommen kann, muss daher sichergestellt werden, dass der Methodik korrekte Informationen über die Phase des Messsignals zur Verfügung gestellt werden.

In diesem Kapitel wird eine Methode vorgestellt, mit dem die genannten Probleme angegangen werden können. Darin wird dem vereinfachten, unsymmetrischen Kreuzkorrelationsspektrum die erforderlichen Phaseninformationen mithilfe der symmetrischen Kreuzkorrelation bereitgestellt. Es wird dabei die gleiche Algorithmus-Struktur wie in Methode 1 (siehe Abbildung 4.5) angewandt.

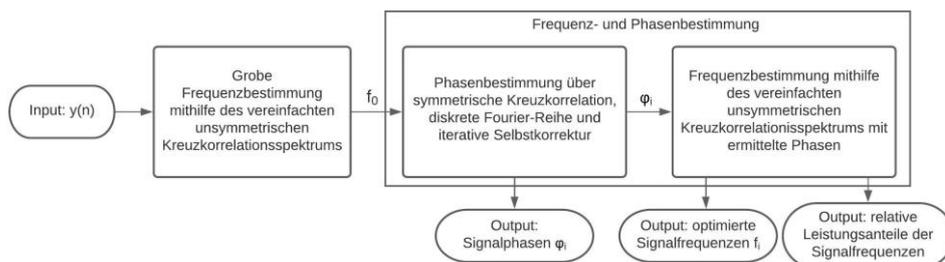
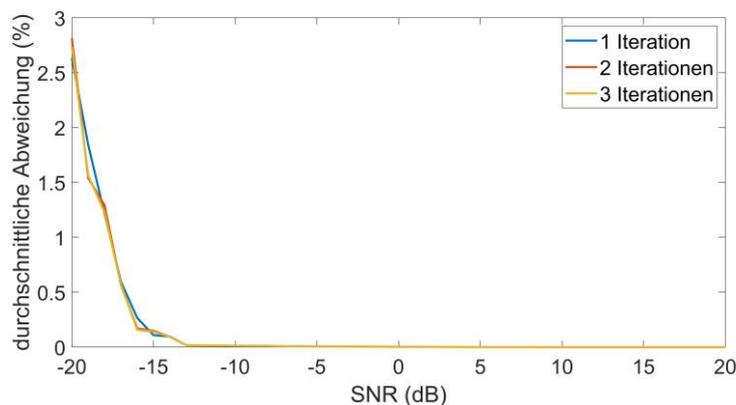


Abbildung 4.13: Algorithmus von Methode 2

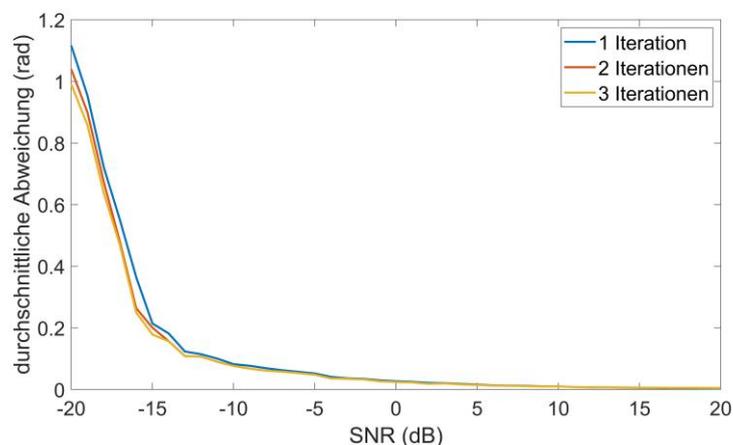
Analog zu Methode 1 wird daher auch hier untersucht, ob die Nutzung von mehreren Iterationen der Frequenz- und Phasenbestimmung Sinn ergibt. Dazu wird die Genauigkeit der Frequenz- und Phasenmessung bei unterschiedlicher Anzahl an Iterationen ermittelt. Dabei wird das SNR von -20 dB bis 20 dB variiert und die Parameterwerte in Tabelle 4.3 genutzt. Abbildungen 4.14 a) und b) visualisieren die Ergebnisse. Die Ergebnisse stimmen qualitativ mit ihren Pendanten in Methode 1 überein und lassen die gleichen Schlussfolgerungen zu. Deswegen wird in die nachfolgenden Simulationen der Algorithmus in Abbildung 4.15 betrachtet.

**Tabelle 4.3:** Parameterwerte der ersten Simulation

Parameter	Wert
Frequenz des Messsignals	10520 Hz
Abtastfrequenz	100 kHz
Auflösung des Kreuzkorrelationsspektrums	1 Hz
Anzahl der verwendete Datenpunkte M für das Kreuzkorrelationsspektrum	2000
Anzahl der verwendete Datenpunkte Q für die Kreuzkorrelationsfunktion der Phasenbestimmung	2000



a) Frequenzmessung



b) Phasenmessung

**Abbildung 4.14:** durchschnittliche Abweichung der Frequenz- und Phasenbestimmung bei unterschiedlicher Zahl an Iterationen des Algorithmus

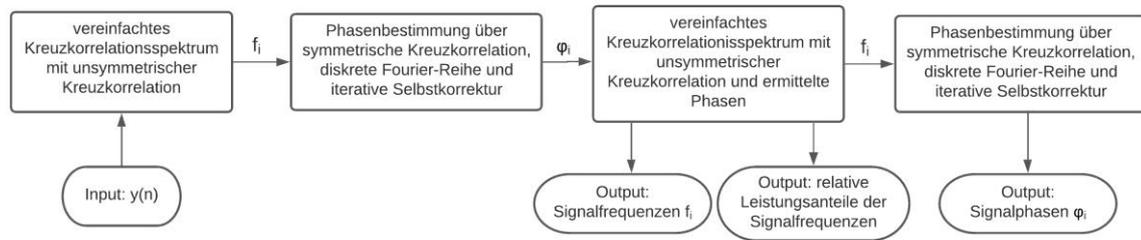
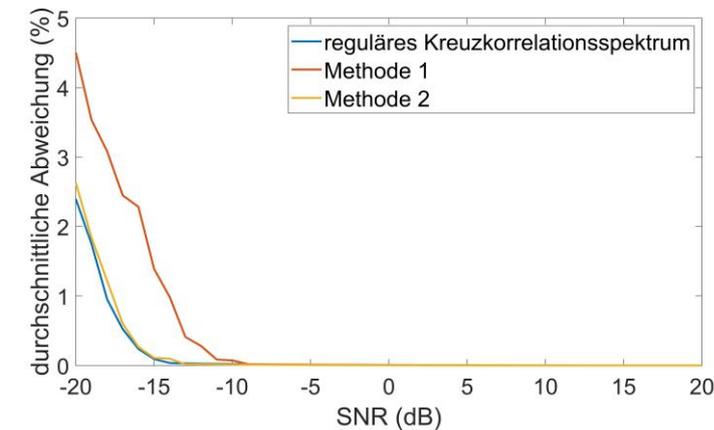


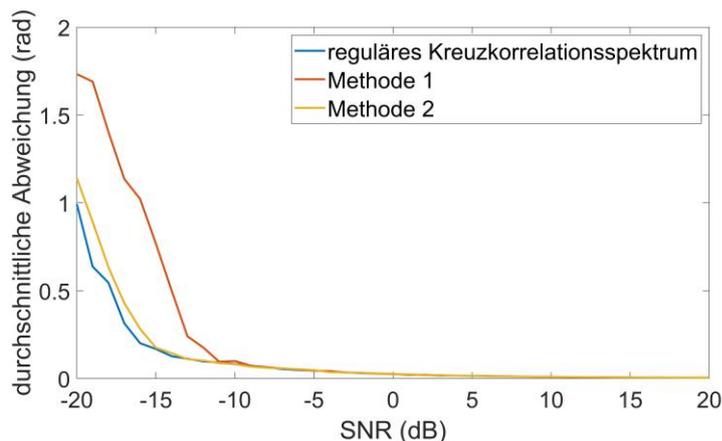
Abbildung 4.15: optimierte Version von Methode 2

### Simulationen:

Nun soll die Genauigkeit von Methode 2 mit denen von Methode 1 und dem regulären Kreuzkorrelationsspektrum verglichen werden. Dazu ist für unterschiedliche SNR die Frequenz von 300 Messsignalen mithilfe der drei Methoden ermittelt worden. Dabei sind stets Signalabschnitte mit einer Länge von 2000 Datenpunkten genutzt worden. Die Ergebnisse werden in folgende Abbildung visualisiert.



a) Frequenzmessung



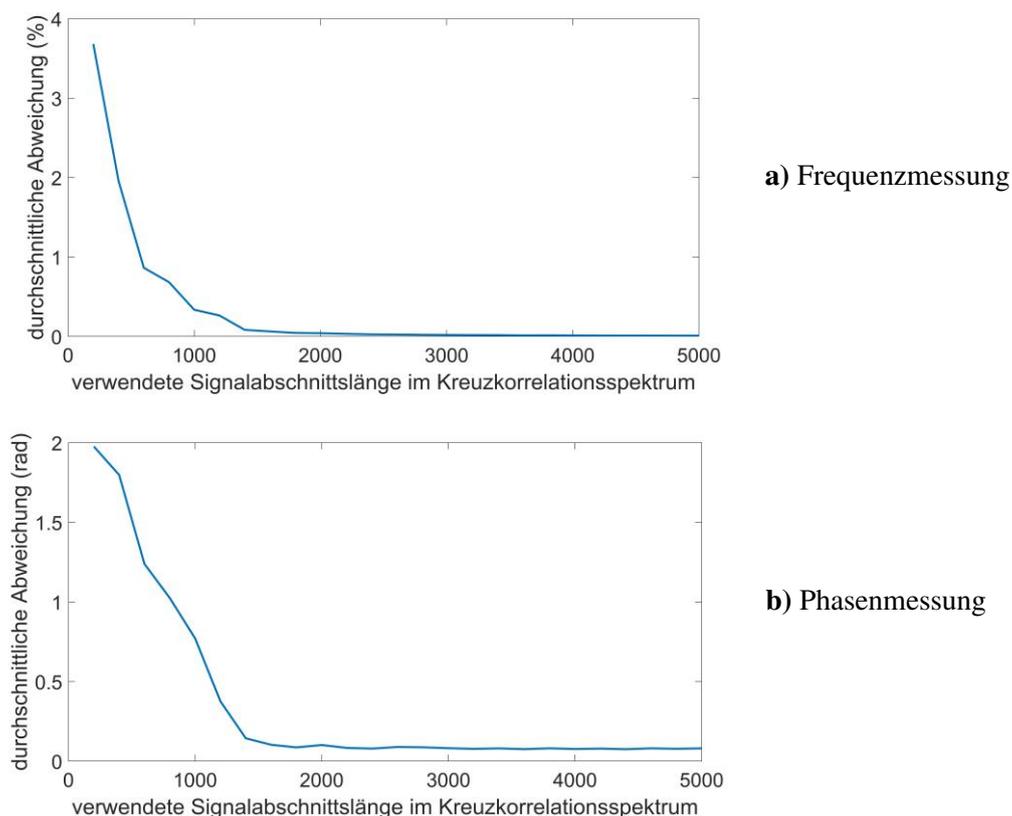
b) Phasenmessung

Abbildung 4.16: Genauigkeit von Methode 2 im Vergleich zur Methode 1 und reguläres Kreuzkorrelationsspektrum

Im Vergleich zu den Ergebnissen von Kapitel 4.3.1 sind bei Methode 2 sowohl in der Frequenz- als auch in der Phasenmessung deutlich bessere Genauigkeiten vorzufinden. Mangelhafte Phaseninformationen führen bei dieser Methodik zwar zu einer Verformung des Kreuzkorrelationsspektrums (siehe Kapitel 3.5.3), doch im Vergleich zu Methode 1, in

der Phasenunterschiede zu Amplitudenreduktionen (siehe Kapitel 3.5.2) führen, wird hier das SNR weniger reduziert. In Anbetracht des Verfahrens, mit dem die Signalfrequenz mithilfe des Kreuzkorrelationsspektrums ermittelt wird (siehe Kapitel 3.4.3), hat das SNR des Spektrums den größten Einfluss auf die Genauigkeit der Methodik. Somit wirken sich Phasenunterschiede zwischen Referenz- und Messsignale bei sehr niedrige SNR weniger negativ auf die Genauigkeit der Methodik aus. Bessere Frequenzmessungen verbessern wiederum die Phasemessungen, weshalb sich bei der neuen Methodik auch die Phasengenauigkeit verbessert hat. Die Methodik kann bei der Frequenzmessung ab einem SNR von -14 dB eine Genauigkeit von 0.1% vorweisen. Ab -7 dB liegt diese sogar bei 0.01%. In der Phasemessung beträgt die durchschnittliche Abweichung ab -11 dB bei 0.1rad, während sie sich ab einem SNR von 3 dB auf 0.02 rad reduziert. Im Vergleich zum regulären Kreuzkorrelationsspektrum erweist sich die Genauigkeit als geringfügig schlechter. Doch in Anbetracht dessen, dass mit der Methodik die Berechnungszeit erheblich verkürzt werden kann, kann Methode 2 überzeugen.

In der nächsten Simulation wird die Anzahl an Datenpunkte für das Kreuzkorrelationsspektrum variiert. Dazu wird das SNR auf -10 dB festgesetzt. Ansonsten bleiben die Parameterwerte von Tabelle 4.3 erhalten. Abbildungen 4.17 a) und b) zeigen das Resultat.

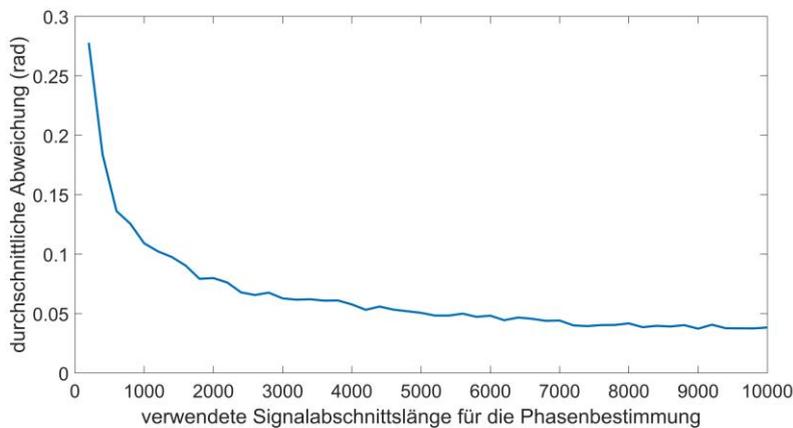
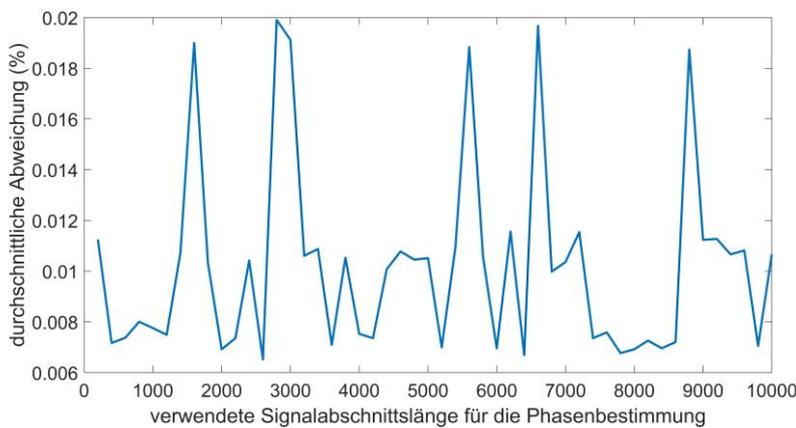


**Abbildung 4.17:** durchschnittliche Abweichung der Frequenz- und Phasenbestimmung bei unterschiedlichen verwendeten Signalabschnittslängen im Kreuzkorrelationsspektrum

Wie erwartet kommt es durch eine steigende Anzahl an verwendete Punkte im Kreuzkorrelationsspektrum zu einer Verbesserung der Genauigkeit in der

Frequenzbestimmung. Ab 1000 Datenpunkte liegt die durchschnittliche Abweichung unterhalb von 0.1%. Ab 3000 Datenpunkte ist sie sogar kleiner als 0.01%. Bei der Phasenbestimmung kommt es anfangs zu einer Verbesserung. Ab 1000 Datenpunkte bleibt die durchschnittliche Abweichung im Bereich 0.07-0.09 rad. Dieses Verhalten ergibt Sinn, da sich hier die Phasenbestimmung ausschließlich durch die Verbesserung der Frequenzbestimmung verbessert. Während initial die Verbesserungen in der Frequenzmessung sehr hoch sind, erweisen sich die Verbesserungen ab 1000 Datenpunkte als klein. Die Phasenbestimmung kann weiter verbessert werden, indem mehr Datenpunkte in der Kreuzkorrelationsfunktion der Phasenbestimmung eingesetzt werden. Dies wird in der folgenden Simulation näher beleuchtet.

In der dritten Simulation wird die Anzahl an Datenpunkte für die Phasenbestimmung variiert. Dazu wird das SNR auf -10 dB festgesetzt und die restlichen Parameterwerte entsprechend Tabelle 4.3 beibehalten. Das Ergebnis findet sich in den Abbildungen 4.18 a) und b). Auf die Frequenzbestimmung hat die Anzahl der genutzten Datenpunkte  $Q$  keinen Einfluss. Die aufgezeigten Abweichungen liegen in der stochastischen Natur des Rauschens begründet. Doch in der Phasenbestimmung kommt es durch mehr Datenpunkte zu einer Verbesserung der Genauigkeit. Ab 2600 Datenpunkte liegt sie bei einem SNR von -10 dB sogar unterhalb von 0.05 rad.



**Abbildung 4.18:** durchschnittliche Abweichung der Frequenz- und Phasenbestimmung bei unterschiedlichen verwendeten Signalabschnittslängen für die Phasenbestimmung

#### 4.4 Vergleich der Berechnungszeiten

In diesem Kapitel sollen die Berechnungszeiten der hier vorgestellten Signalverarbeitungsmethoden miteinander verglichen werden. Dazu wird die folgende Simulation durchlaufen: An ein Signal der Frequenz 1 kHz, das mit einer Frequenz von 100 kHz abgetastet worden ist, werden die entwickelte Signalverarbeitungsmethoden ausgeführt und die Berechnungszeiten aufgezeichnet. Hierbei sind bei den Kreuzkorrelationsspektren die Auflösung und der betrachtete Frequenzbereich auf 1 Hz sowie 900 bis 1100 Hz festgelegt worden. Für die Kreuzkorrelationsspektren werden 2000 Datenpunkte eingesetzt, während für die Kreuzkorrelationsfunktion in der Phasenbestimmung 500 Datenpunkte zum Einsatz kommen. In der Autokorrelationsmethodik sind stets Signalabschnitte mit einer Länge von 2000 Datenpunkte für die Frequenzbestimmung genutzt worden. Die Signalselektion hat dabei Signalteile mit einer Länge von 200 Datenpunkte evaluiert. In Tabelle 4.4 werden die durchschnittlichen Berechnungszeiten der verschiedenen Methoden visualisiert.

**Tabelle 4.4:** durchschnittliche Berechnungszeiten des regulären Kreuzkorrelationsspektrums und der neuen Methodik

<b>Reguläres Kreuzkorrelationsspektrum</b>	<b>Autokorrelation</b>	<b>Methode 1</b>	<b>Methode 2</b>
286.93 ms	5.07 ms	43.57 ms	30.82 ms

Das reguläre Kreuzkorrelationsspektrum hat mit einer durchschnittlichen Berechnungszeit von 286.93 ms den größten Berechnungsaufwand. Mit den Methoden 1 und 2 konnte die Berechnungszeit auf 15.2% bis 10.74% der bisherigen Berechnungszeit reduziert werden. Dies erweist sich als eine erhebliche Verbesserung des Berechnungsaufwands. Die Zeitreduktion ist lediglich durch eine Änderung in der Generierung des Kreuzkorrelationsspektrums entstanden. In den folgenden Punkten besteht noch weiterer Einsparpotenzial:

- Die Erstellung der Referenzsignale mit jeweils unterschiedlichen Frequenzen kann viel Berechnungsaufwand mit sich bringen. Dieser Aufwand könnte durch verbesserte Algorithmen stark reduziert werden.
- Nach einer groben Frequenzschätzung kann der im Kreuzkorrelationsspektrum betrachtete Frequenzbereich verkleinert werden. Eine Verkleinerung des Frequenzbereichs verringert den Berechnungsaufwand erheblich.
- Abhängig vom Anwendungsgebiet könnte die Auflösung des Kreuzkorrelationsspektrums flexibel gestaltet werden. Während initial eine niedrigere Auflösung genutzt wird, könnten kritische Frequenzbereiche höhere Auflösungen zugesprochen werden. Auf diese Weise könnte ein Optimum zwischen Genauigkeit und Berechnungsaufwand erreicht werden.

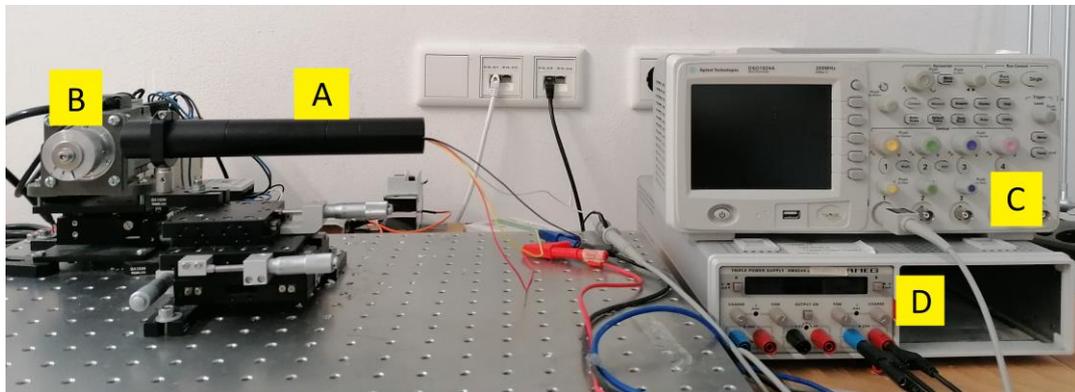
Die Autokorrelationsmethodik hat mit einer Berechnungszeit von 5.07 ms den geringsten Aufwand. Hierbei muss jedoch berücksichtigt werden, dass mit der Methodik nur die Grundschiwingung eines Signals ermittelt werden kann. Das Kreuzkorrelationsspektrum

stellt im Gegensatz dazu Informationen über alle Frequenzen eines Signals zur Verfügung. Darüber hinaus erfolgt in den Methoden 1 bis 3 eine Phasenbestimmung. Somit bieten die Methoden 1 bis 3 mehr Informationen als die Autokorrelationsmethodik. Das reguläre Kreuzkorrelationsspektrum bietet von allen Spektren die höchste Genauigkeit und erweist sich somit als die beste Wahl, wenn Berechnungsaufwand keine Rolle spielt. Abhängig vom Anwendungsfall haben somit alle hier vorgestellte Methoden ihre Daseinsberechtigung.

## 5 Anwendungen der Signalverarbeitungsmethoden in „Self-mixing“- Interferometrie-Signalen

In diesem Kapitel werden die Signalverarbeitungsmethoden aus Kapitel 4 an reale SMI-Signale angewandt und deren Leistung näher analysiert und miteinander verglichen. Dabei wird im ersten Schritt das Testsystem, aus dem die genutzte SMI-Signale stammen, näher vorgestellt.

### 5.1 Testsystem



**Abbildung 5.1:** Systemaufbau zur Drehgeschwindigkeitsmessung mithilfe von SMI. A: Sensoreinheit; B Servomotor; C: Oszilloskop; D: Stromversorgung

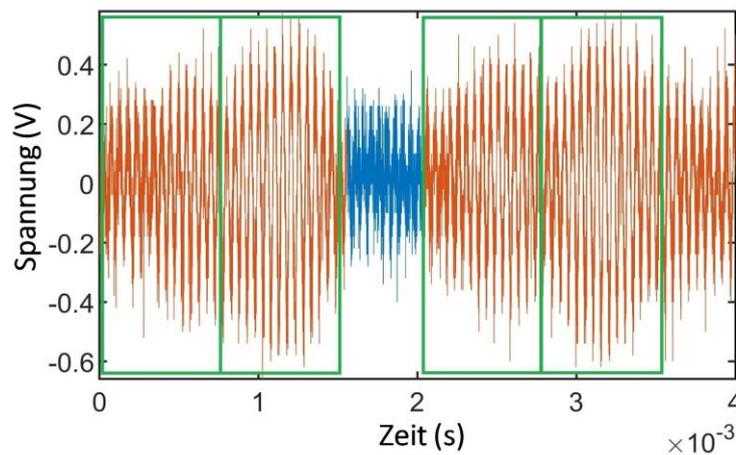
Das Testsystem, das in Rahmen dieser Arbeit für SMI-Experimente genutzt worden ist, ist in Abbildung 5.1 zu sehen. Im Folgenden soll die Funktionsweise des Testsystems beschrieben werden:

Die Sensoreinheit besteht aus einem 785 nm Laserdiode mit integrierter Fotodiode, zwei Linsen, einen Lasertreiber sowie eine Vorverarbeitungsschaltung. Über eine Stromversorgung und dem Lasertreiber wird die Laserdiode mit konstantem Strom versorgt. Der Laser zielt auf eine Drehscheibe, die auf der Welle eines Yaskawa SGMJV-02A3E6S Servomotors montiert ist. Mithilfe des Servotreibers SGDV-1R6A01B002000 wird der Motor über einen Computer gesteuert und rotiert die Scheibe mit einer konstanten Rotationsgeschwindigkeit. Dabei wird die Rotationsgeschwindigkeit durch einen 21-bit optischen Encoder reguliert, wodurch eine gute Geschwindigkeitsreferenz gewährleistet wird [24]. Die in der Laserdiode integrierte Fotodiode detektiert das optische Feedback, das durch „self-mixing“-Interferometrie generiert wird, und sendet seinen Output an die Vorverarbeitungsschaltung. Die Schaltung extrahiert das SMI-Signal aus dem Output und verstärkt ihn. Das Signal wird abschließend an ein Oszilloskop, mit dem Daten des SMI-Signals für Signalanalysen extrahiert werden können, gesendet. In diesem Testsystem wird dabei der 8-bit DSO1024A Oszilloskop von Agilent verwendet. Durch seine große Bandbreite von 200 MHz ist sichergestellt, dass der Messbereich des Systems nicht durch das Messgerät eingeschränkt wird. Die extrahierten SMI-Signaldaten werden abschließend

mithilfe von MATLAB näher analysiert und für den Test entwickelter Signalverarbeitungsmethoden verwendet.

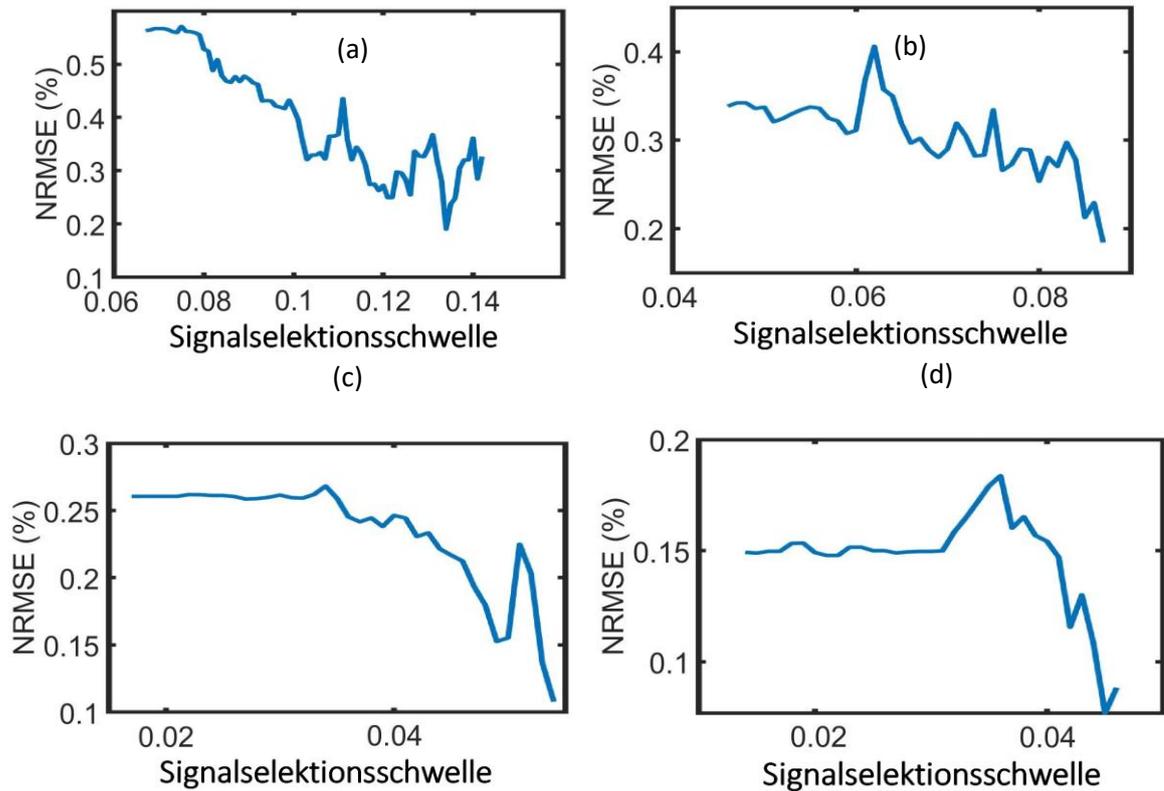
## 5.2 Anwendungen der Autokorrelationsmethodik

Im Folgenden sollen die Möglichkeiten der Autokorrelationsmethodik in Experimenten an SMI-Signale getestet werden. Dazu wurde im ersten Experiment die Leistung der Signalselektionsgrenze validiert. Unter verschiedenen Signalselektionsgrenzen sind die Frequenzen der extrahierten SMI-Signaldatensätze mithilfe der Autokorrelationsmethodik ermittelt worden. Dabei wurde die Autokorrelation an Signalteilen mit einer festen Länge von 2500 Datenpunkten durchgeführt. Ist ein zugelassener Signalteil länger gewesen, so ist er in Signalabschnitte der festgelegten Länge aufgeteilt worden. Übrig gebliebene Signalteile, die aus weniger als 2500 Datenpunkten bestehen, wurden nicht weiter berücksichtigt (siehe Abbildung 5.2). Die Größe des Durchschnittsfensters wurde auf 20 Slots eingestellt und der Output des Durchschnittsfensters erst akzeptiert, wenn alle Slots des Durchschnittsfensters belegt waren.



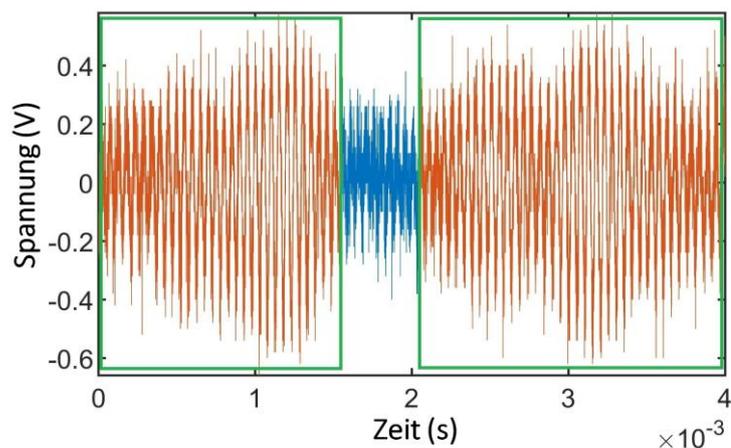
**Abbildung 5.2:** Die Auswahlmethodik des ersten Experiments zur Bestimmung der Signalabschnitte für die Autokorrelation; blaues Signal: ausgeschlossenes Signalabschnitt; oranges Signal: akzeptiertes Signalabschnitt; grünes Fenster: genutztes Signalabschnitt für Autokorrelation

Abbildungen 5.3 (a), (b) (c) und (d) zeigen die normalisierte Wurzel der mittleren Fehlerquadratsumme (=NRMSE) des Verfahrens unter verschiedene Schwellenwerte der Signalselektion für die Drehzahlen 5, 50, 150 und 200 U/min. Trotz einiger Fehlerspitzen wird der Trend, dass der NRMSE mit steigendem Schwellenwert abnimmt, festgestellt. Die NRMSE anderer Drehzahlen zeigen das gleiche Verhalten. Es wird davon ausgegangen, dass die Fehlerspitzen von stochastischer Natur sind.



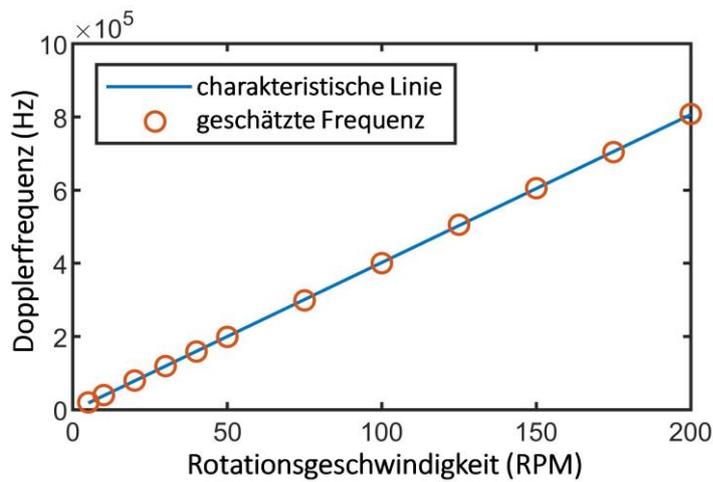
**Abbildung 5.3:** NRMSE unter verschiedene Signalselektionsgrenzen; (a) 5 RPM, (b) 50 RPM, (c) 150 RPM, (d) 200 RPM

Das nächste Experiment untersucht die Fähigkeit der Methode, Rotationsgeschwindigkeiten zu messen. Während die meisten Einstellungen des vorherigen Experiments beibehalten worden sind, haben sich die für die Autokorrelation die verwendeten Signallängen geändert. Anstatt Signale mit fester Länge zu verwenden, ist die gesamte Länge eines selektierten Signalteils für die Autokorrelation verwendet worden (siehe Abbildung 5.4). Die Mindestanzahl von Datenpunkten ist auf 2500 Punkte festgelegt worden.



**Abbildung 5.4:** Die Auswahlmethodik des zweiten Experiments zur Bestimmung der Signalabschnitte für die Autokorrelation; blaues Signal: ausgeschlossenes Signalabschnitt; oranges Signal: akzeptiertes Signalabschnitt; grünes Fenster: genutztes Signalabschnitt für Autokorrelation

Zunächst wird die Linearität der Ergebnisse mit der Rotationsgeschwindigkeit des Ziels validiert. Für jede Geschwindigkeit wurde der Durchschnittswert aus allen 50 Datensätzen berechnet und die Kennlinie mittels linearer Regression gebildet. Dabei kann gemäß Kapitel 4.1.1 abhängig von der Signalamplitude von einem SNR zwischen -9.05 dB und 12.2 dB ausgegangen werden. Abbildung 5.5 und Tabelle 5.1 zeigen die Ergebnisse. Die Nichtlinearität beträgt schlimmstenfalls 0,31%. Grundsätzlich besteht somit eine Linearität zwischen der berechneten Dopplerfrequenz und der Rotationsgeschwindigkeit. Daher ist das entwickelte Signalverarbeitungsverfahren für Drehzahlmessungen geeignet.



**Abbildung 5.5:** Linearität zwischen Dopplerfrequenz und Rotationsgeschwindigkeit

**Tabelle 5.1:** Nichtlinearität der Ergebnisse

Rotationsgeschwindigkeit (in RPM)	Durchschnittliche gemessene Dopplerfrequenz $f_{DM}$ (in Hz)	Dopplerfrequenz der charakteristischen Linie $f_D$ (in Hz)	Nichtlinearität (in %)
5	19826.03	18096.90	+0.21
10	39761.44	38311.90	+0.18
20	79555.68	78741.90	+0.10
30	119104.9	119171.9	-0.01
40	158807.0	159601.9	-0.10
50	198868.3	200031.9	-0.14
75	298626.7	301106.9	-0.31
100	400476.8	402181.9	-0.21
125	505384.7	503256.9	+0.26
150	605333.1	604331.9	+0.12
175	703954.4	705406.9	-0.18
200	808175.4	806481.9	+0.21

Die NRMSE sind mit unterschiedlichen Signalselektionsschwellen berechnet und der Wert mit dem niedrigsten Wert für jede Drehzahleinstellung als die bestmögliche Genauigkeit der

Methode identifiziert worden. Hierbei ist für die Normalisierung des RMSEs die durchschnittlich gemessene Dopplerfrequenz  $f_{DM}$  genutzt worden (siehe Gleichung (5.1)). Tabelle 5.3 stellt die Ergebnisse dar. Im Vergleich zu den Ergebnissen in [24], bei denen eine Fast-Fourier-Transformation (FFT) und ein parabolischer Fit für Frequenzmessungen verwendet worden sind (siehe Tabelle 5.2), bietet die neue Methode signifikante Genauigkeitsverbesserungen. Während der beste NRMSE-Wert der FFT-Methode 0,78 % beträgt, bleibt der NRMSE der neuen Methode unter 0,2 %. Die Ergebnisse zeigen das große Potenzial des Verfahrens, in industriellen Messanwendungen eingesetzt zu werden und die Nachteile optischer Encoder in Bezug auf die Drehzahlerfassung zu überwinden.

$$NRMSE = \frac{RMSE}{f_{DM}} * 100\% \quad (5.1)$$

**Tabelle 5.2:** NRMSE der Ergebnisse mithilfe von FFT + parabolischen Fit [24]

Rotationsgeschwindigkeit (in RPM)	NRMSE (in %)
3	1.69
50	1.57
100	1.08
150	1.31
200	1.19
250	0.78
300	0.89
350	1.51
400	1.20

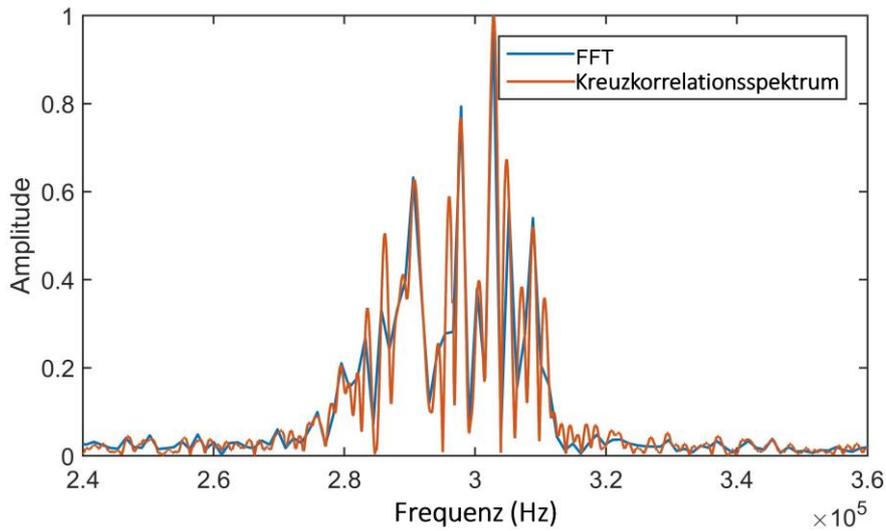
**Tabelle 5.3:** NRMSE der Ergebnisse mithilfe der Autokorrelationsmethodik

Rotationsgeschwindigkeit (in RPM)	NRMSE (in %)
5	0.16
10	0.06
20	0.05
30	0.08
40	0.15
50	0.13
75	0.07
100	0.06
125	0.06
150	0.07
175	0.05
200	0.06

### 5.3 Anwendungen des regulären Kreuzkorrelationsspektrums

In diesem Kapitel wird Leistung des regulären Kreuzkorrelationsspektrums für die

Rotationsgeschwindigkeitsmessung mit SMI-Signalen analysiert. Dazu soll im ersten Schritt validiert werden, ob mithilfe des Kreuzkorrelationsspektrums Informationen zu Signalfrequenzen generiert werden können. Zu diesem Zweck sind sowohl das Kreuzkorrelationsspektrum als auch das FFT eines SMI-Signals erstellt, normalisiert und miteinander verglichen worden (siehe Abbildung 5.6). Dazu wird ein Signalabschnitt mit einer Größe von 10240 Datenpunkten und Abtastfrequenz von 12.5 MHz genutzt.



**Abbildung 5.6:** normalisierte FFT und Kreuzkorrelationsspektrum im Vergleich

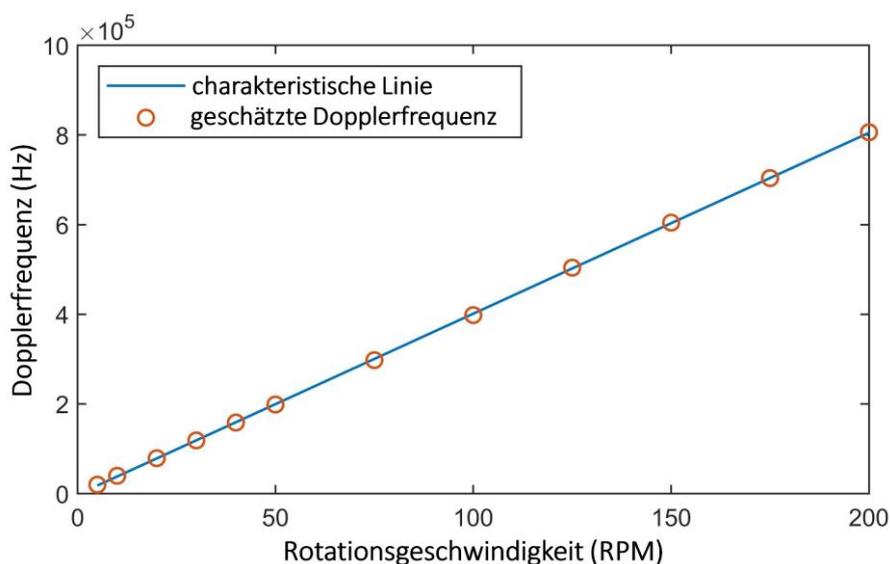
**Tabelle 5.4:** Energie des FFT und des Kreuzkorrelationsspektrums

FFT		Kreuzkorrelationsspektrum	
Frequenz	Energie	Frequenz	Energie
301513	0.1750	...	
		301480	0.1600
		301490	0.1618
		301500	0.1643
		301510	0.1665
		301520	0.1695
		301530	0.1727
		301540	0.1765
		301550	0.1803
301560	0.1841		
302734	1	...	
		302710	0.9808
		302720	0.9827
		302730	0.9840
		302740	0.9861
		302750	0.9894
		...	
		302820	0.9986
		302830	0.9996
302840	1		

Es liegt größtenteils eine Übereinstimmung zwischen dem FFT und dem Kreuzkorrelationsspektrum vor. Doch eine nähere Betrachtung der Spektren zeigt, dass das Kreuzkorrelationsspektrum präziser ist (siehe Tabelle 5.4). Während die Frequenzauflösung des FFTs ungefähr bei 1221 Hz liegt, ist sie beim Kreuzkorrelationsspektrum auf 10 Hz festgelegt worden. Dadurch ist das Frequenzspektrum des FFTs gröber und damit ungenauer.

Nun soll geprüft werden, ob mithilfe des Kreuzkorrelationsspektrums die Ermittlung der Rotationsgeschwindigkeit durch SMI-Signale möglich ist. Dazu werden bei den gleichen SMI-Signalen wie bei Kapitel 5.2 die Dopplerfrequenz mithilfe des regulären Kreuzkorrelationsspektrums, dem Schätzverfahren aus Kapitel 4.2 sowie einen Durchschnittsfenster gemäß Kapitel 4.1.3 berechnet. Der Durchschnittsfenster wird benötigt, da die Schätzmethode aus Kapitel 4.2 zwar eine Schätzung der ursprünglichen Frequenz des SMI-Signals trotz Spektralverbreiterung ermöglicht, jedoch Messfehler durch Frequenzänderungen, die vor und nach dem betrachteten Signalabschnitt auftauchen, hiermit nur begrenzt kompensiert werden können. Für das Kreuzkorrelationsspektrum ist die maximale Signalabschnittslänge von 10240 Datenpunkten genutzt und die Größe des Durchschnittsfensters auf 20 Werte festgelegt worden. Der Frequenzbereich, der im Kreuzkorrelationsspektrum betrachtet wird, hat signifikanten Einfluss auf die Ergebnisse der Schätzmethodik. Es soll sowohl alle Frequenzkomponenten des Signals enthalten als auch möglichst viel Rauschen ausschließen. Daher sind die Kreuzkorrelationsspektren der Datensätzen visuell evaluiert und die Grenzen auf eine Weise festgelegt worden, dass die genannten Bedingungen erfüllt werden.

Analog zu Kapitel 5.2 wird im ersten Schritt die Nichtlinearität der Methodik ermittelt, indem die Durchschnittswerte der jeweiligen Geschwindigkeiten berechnet und über lineare Regression die charakteristische Linie abgeleitet wird. Abbildung 5.7 und Tabelle 5.5 zeigen das Ergebnis. Im schlimmsten Fall liegt die Linearität bei 0.4 %. Somit besteht grundsätzlich eine Linearität zwischen der Dopplerfrequenz und der Rotationsgeschwindigkeit.



**Abbildung 5.7:** Linearität zwischen Dopplerfrequenz und Rotationsgeschwindigkeit beim regulären Kreuzkorrelationsspektrum

**Tabelle 5.5:** Linearität von 50 Datensätzen der jeweiligen Rotationsgeschwindigkeiten

Rotationsgeschwindigkeit	Dopplerfrequenz in Hz	Linearität
5	19815.9671	+0.23%
10	39667.4893	+0.19%
20	79136.3848	+0.08%
30	118742.854	-0.01%
40	158466.829	-0.09%
50	198649.663	-0.11%
75	298182.992	-0.28%
100	397461.285	-0.34%
125	503480.664	+0.16%
150	603878.901	+0.10%
175	703902.583	-0.00%
200	806249.316	+0.18%

Tabelle 5.6 visualisiert die Genauigkeit der Methodik als NRMSE der Ergebnisse und stellt sie den Ergebnissen von Tabelle 5.3 gegenüber. Auch hier ist die durchschnittliche Dopplerfrequenz der jeweiligen Rotationsgeschwindigkeit als Referenz des NRMSE verwendet worden.

Die Genauigkeit der neuen Methodik ist dem der Autokorrelationsmethodik sehr ähnlich. In beiden Fällen liegt der NRMSE unterhalb von 0.2%. Somit ist es auch mit dem Kreuzkorrelationsspektrum möglich, Rotationsgeschwindigkeiten präzise über self-mixing-Interferometrie zu messen.

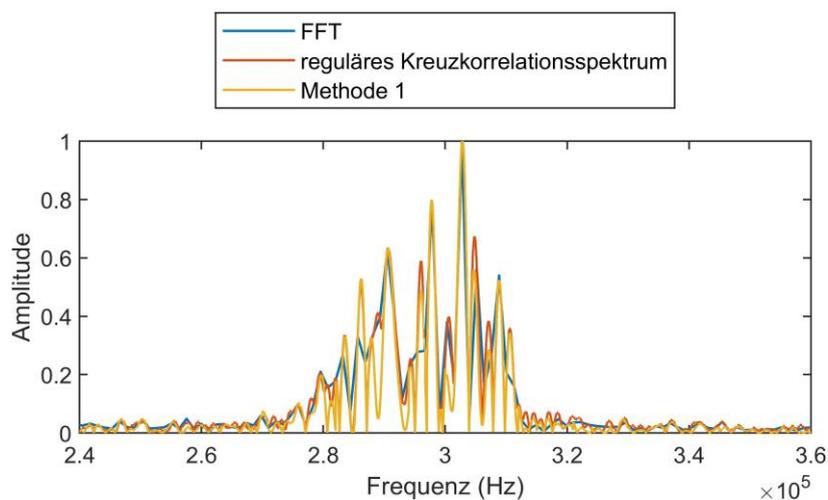
**Tabelle 5.6:** NRMSE der Ergebnisse durch das Kreuzkorrelationsspektrum und aus Tabelle 5.3

Rotationsgeschwindigkeit (RPM)	NRMSE des Kreuzkorrelationsspektrumsmethodik (%)	NRMSE der Autokorrelationsmethodik (%)
5	0.16	0.16
10	0.06	0.06
20	0.08	0.05
30	0.14	0.08
40	0.18	0.15
50	0.13	0.13
75	0.04	0.07
100	0.06	0.06
125	0.06	0.06
150	0.08	0.07
175	0.06	0.05
200	0.03	0.06

## 5.4 Anwendung von Methode 1

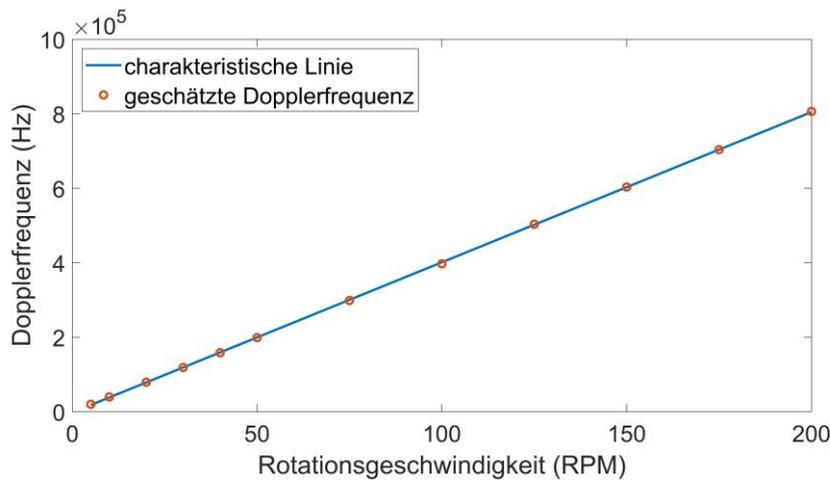
In diesem Kapitel werden die Experimente aus Kapitel 5.3 mit Methode 1 wiederholt. Dabei muss bei der Bestimmung der ursprünglichen Dopplerfrequenz analog zu Kapitel 5.3 ebenfalls die Spektralverbreiterung von SMI-Signalen berücksichtigt werden, weswegen auch hier das Schätzverfahren aus Kapitel 4.2 sowie das Durchschnittsfenster aus Kapitel 4.1.3 zum Einsatz kommen. Darüber hinaus muss berücksichtigt werden, dass bei der Phasenbestimmung lediglich die Phase der Signalteils, dessen Frequenz im betrachteten Frequenzbereich den größten Leistungsteil besitzt, ermittelt wird. Im Kreuzkorrelationsspektrum wird dementsprechend lediglich der Sinus Cardinalis dieses Signalanteils im betrachteten Frequenzbereich optimal generiert. Die Sinus Cardinalis der anderen Signalfrequenzen können noch fehlerhafte Amplituden aufweisen. Möchte man die Phasen aller Signalteile ermitteln und das Kreuzkorrelationsspektrum entsprechend optimieren, empfiehlt es sich, den betrachteten Frequenzbereich in mehrere Bereiche, in denen jeweils die Frequenz eines einzelnen Signalanteil enthalten ist, zu unterteilen. Der Algorithmus wird dann an jedem Frequenzbereich durchgeführt und auf diese Weise sowohl die Phase jeder Signalfrequenz bestimmt als auch die Amplituden der jeweiligen Signalfrequenzen im Kreuzkorrelationsspektrum korrekt visualisiert.

Im ersten Experiment wird mit Methode 1 ein Kreuzkorrelationsspektrum des gleichen Signalabschnitts, das auch im ersten Experiment von Kapitel 5.3 zum Einsatz kam, generiert. Bei seiner Erstellung wird das Kreuzkorrelationsspektrum in gleichmäßige Abschnitte der Länge 3000 Hz aufgeteilt, um der Anwesenheit mehrerer Signalfrequenzen Rechnung zu tragen. Das Resultat wird dem Diagramm aus Abbildung 5.6 hinzugefügt (siehe Abbildung 5.8).



**Abbildung 5.8:** normalisierte FFT, reguläres sowie vereinfachtes Kreuzkorrelationsspektrum im Vergleich

Zu großen Teilen stimmt das vereinfachte Kreuzkorrelationsspektrum mit dem regulären Kreuzkorrelationsspektrum und dem FFT überein. Es existieren jedoch Unterschiede in den Amplituden einiger Frequenzen. Dies liegt im folgenden Problem begründet: Enthält ein Signal mehrere Frequenzen, die nah beieinanderliegen, vermischen sich die Sinus Cardinalis der jeweiligen Frequenzen, falls bei der Generierung des Spektrums nicht genug Datenpunkte verwendet worden sind (siehe Abbildung 3.37). In diesem Fall kommt es bei der Erstellung des vereinfachten Kreuzkorrelationsspektrums zu Fehler. Das liegt daran, dass im vereinfachten Kreuzkorrelationsspektrum die Phaseninformationen jedes Signalteils von großer Wichtigkeit sind und die Form des Spektrums beeinflusst. Vermischen sich die Sinus Cardinalis mehrerer Frequenzen zu einer einzelnen Sinus Cardinalis einer repräsentativen Frequenz, so wird lediglich diese Frequenz detektiert und dementsprechend dessen repräsentative Phase ermittelt. Diese Phase wird mit keiner Phase der tatsächlichen Frequenzanteile übereinstimmen, wodurch die Sinus Cardinalis der jeweiligen Frequenzen falsche Amplituden aufweisen und insgesamt ein fehlerhaftes Spektrum generiert wird. Um dieses Problem zu vermeiden, empfiehlt es sich, eine Vermischung von Frequenzen zu verhindern, indem für die Generierung des Kreuzkorrelationsspektrums möglichst viele Datenpunkte verwendet werden.



**Abbildung 5.9:** Linearität zwischen Dopplerfrequenz und Rotationsgeschwindigkeit bei Methode 1

**Tabelle 5.7:** Linearität des iterativen Selbstkorrekturalgorithmus bei 50 Datensätzen der jeweiligen Rotationsgeschwindigkeiten

Rotationsgeschwindigkeit	Mittelwert	Nichtlinearität
5	19785	+0.22%
10	39631	+0.18%
20	79111	+0.07%
30	118702	-0.02%
40	158440	-0.10%
50	198879	-0.08%
75	298790	-0.20%
100	397453	-0.26%

125	503378	+0.15%
150	603483	+0.06%
175	703715	-0.02%
200	806539	+0.22%

Im Anschluss soll die Linearität und die Genauigkeit der neuen Methode 1 in der Messung von Rotationsgeschwindigkeiten über SMI-Signale ermittelt werden. Dazu bedient man sich dem gleichen Experimentaufbau wie in Kapitel 5.3. Die Anzahl der Datenpunkte, die für die Kreuzkorrelationsfunktion in der Phasenbestimmung benutzt wird, wird auf 1000 festgelegt. Die Linearität, die auf die gleiche Weise, wie bisher ermittelt worden ist, ist in Tabelle 5.7 und Abbildung 5.9 ersichtlich.

Tabelle 5.8 visualisiert die Genauigkeit der Methode 1 als NRMSE der Ergebnisse und vergleicht sie mit den Ergebnissen der bisherigen Methoden. Die Referenz des NRMSE ist dabei unverändert geblieben. Die Linearität und NRMSE von Methode 1 liegt bei 0.3% sowie 0.25%. Die Genauigkeit hat sich somit verschlechtert. Dies liegt in Fehler im vereinfachten Kreuzkorrelationsspektrum, die durch Vermischung von Frequenzen entstehen, begründet. Mit dem vereinfachten Kreuzkorrelationsspektrums über symmetrische Kreuzkorrelation erkaufte man sich eine reduzierte Berechnungszeit mit Genauigkeitseinbußen. Die Genauigkeiten erweisen sich aber dennoch als hoch, weshalb auch diese Methodik für die Rotationsgeschwindigkeitsmessung mit „self-mixing“-Interferometrie genutzt werden kann.

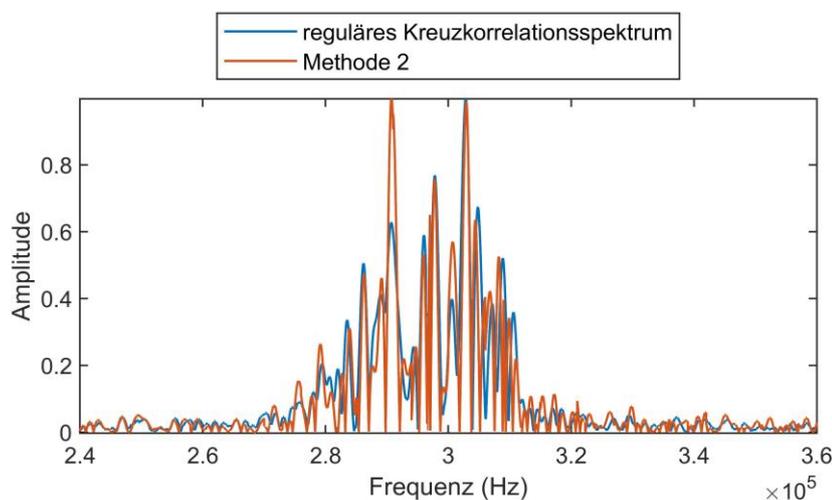
**Tabelle 5.8:** NRMSE der Ergebnisse der neuen und bisherigen Methoden

<b>Rotations- geschwindigkeit</b>	<b>NRMSE des regulären Kreuzkorrelationspektrumsmethodik (%)</b>	<b>NRMSE von Methode 1 (%)</b>
5	0.16	0.24
10	0.06	0.06
20	0.08	0.09
30	0.14	0.16
40	0.18	0.20
50	0.13	0.19
75	0.04	0.07
100	0.06	0.09
125	0.06	0.08
150	0.08	0.06
175	0.06	0.06
200	0.03	0.03

## 5.5 Anwendung von Methode 2

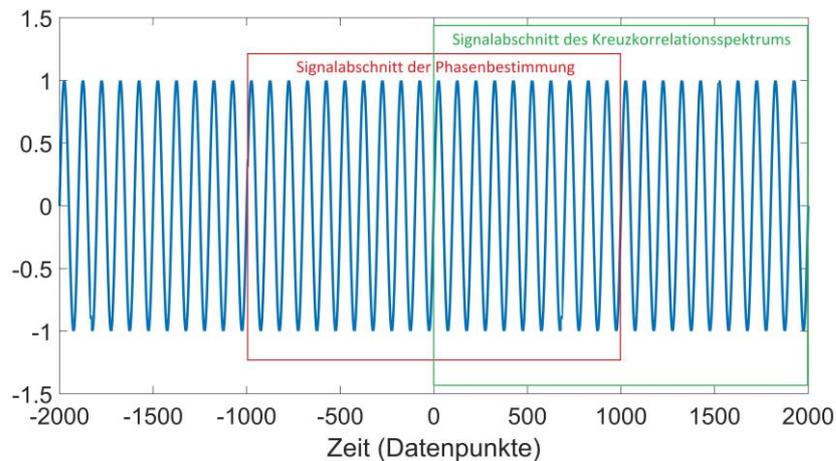
Analog zu Kapitel 5.4 wird nun Methode 2 an SMI-Signale getestet und die Ergebnisse evaluiert. Dazu werden die Experimente aus Kapitel 5.4 mit Methode 2 wiederholt. Auch hier findet sowohl das Schätzverfahren von Kapitel 4.2 als auch der Durchschnittsfenster Anwendung. Eine Aufteilung des Frequenzbereichs in mehrere Bereiche (siehe Kapitel 5.4) findet auch hier statt.

Im ersten Schritt wird mit Methode 2 ein Kreuzkorrelationsspektrum des gleichen Signalabschnitts, das auch in Abbildung 5.8 aus Kapitel 5.4 zum Einsatz kam, erstellt. Um der Anwesenheit verschiedener Frequenzen im Signal Rechnung zu tragen, wird auch hier bei der Erstellung des Spektrums der Frequenzbereich in gleichmäßige Abschnitte der Länge 3000 Hz aufgeteilt. In Abbildung 5.10 wird das Resultat der Methodik mit dem regulären Kreuzkorrelationsspektrum aus Abbildung 5.8 in Kapitel 5.4 verglichen.

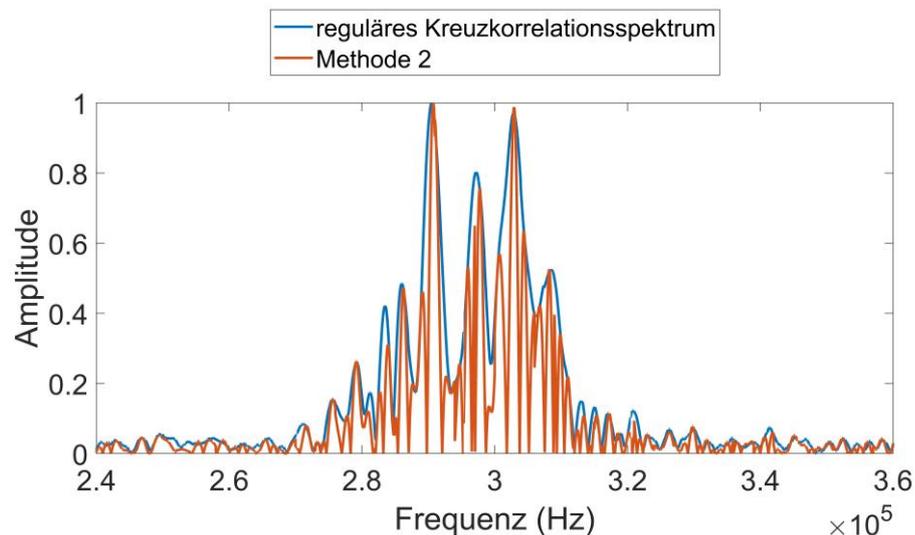


**Abbildung 5.10:** normalisierte reguläres Kreuzkorrelationsspektrum und vereinfachte Kreuzkorrelationsspektrum mit symmetrischer Phasenbestimmung im Vergleich

Das vereinfachte Kreuzkorrelationsspektrum weicht stark vom regulären Kreuzkorrelationsspektrum ab. Das liegt daran, dass für die Frequenz- und Phasenbestimmung zwar der gesamte Signalabschnitt genutzt wird, jedoch durch die Nutzung der verschiedenen Versionen der Kreuzkorrelationsfunktion unterschiedliche Signalabschnitte, die in ihre Länge kürzer als die Gesamtabschnittslänge ausfallen, für die Frequenz- und Phasenbestimmung Anwendung finden (siehe Abbildung 5.11). In Abbildung 5.10 sind die Signalabschnittslängen der Frequenz- und Phasenbestimmung jeweils auf zwei Drittel der Gesamtlänge festgelegt worden. Damit sind bei den jeweiligen Kreuzkorrelationsspektren unterschiedliche Signalabschnitte betrachtet worden, weswegen sie sich voneinander unterscheiden.



**Abbildung 5.11:** in Methode 2 verwendete Signalabschnitte



**Abbildung 5.12:** normalisierte reguläres und vereinfachtes Kreuzkorrelationsspektrum mit symmetrischer Phasenbestimmung bei gleichen betrachteten Signalabschnitt

Aus diesem Grund wird in Abbildung 5.12 das vereinfachte Kreuzkorrelationsspektrum mit einem regulären Kreuzkorrelationsspektrum, das den gleichen Signalabschnitt wie die Frequenzbestimmung von Methode 2 betrachtet, verglichen. Es liegt eine Übereinstimmung zwischen den Kreuzkorrelationsspektren vor. Im Vergleich zum regulären Kreuzkorrelationsspektrum erweist sich das vereinfachte Spektrum als noch feingliedriger und präziser. Wie in Kapitel 3.5.3 herausgearbeitet worden ist, wird bei Methode 2 das Sinus Cardinalis, das im Spektrum eine Frequenz repräsentiert, bei der gleichen Signalabschnittslänge stärker gestaucht. Dadurch können Frequenzen, die nahe beieinander liegen, besser voneinander unterschieden werden, da sich die Gefahr, dass sich die Sinus cardinalis der jeweiligen Frequenzen miteinander vermischen, verringert.

Im Anschluss soll analog zu Kapitel 5.4 die Linearität und die Genauigkeit von Methode 2 in der Messung von Rotationsgeschwindigkeiten über SMI-Signale ermittelt werden. Dazu sind bei einem Signalabschnitt der Länge 10000 Datenpunkte für die Phasenbestimmung 1000 Datenpunkte und für die Frequenzbestimmung die maximal mögliche Signallänge

verwendet worden. Die Linearität ist in Tabelle 5.9 und Abbildung 5.13 ersichtlich. Es ist mit 0.4% grundsätzlich die gleiche Linearität wie beim regulären Kreuzkorrelationspektrum festzustellen.

Tabelle 5.10 visualisiert die Genauigkeit der neuen Methoden als NRMSE der Ergebnisse und vergleicht sie mit den Ergebnissen der bisherigen Methoden. Die Referenz des NRMSEs ist dabei unverändert geblieben. Die Genauigkeit hat sich auf im Vergleich zu Methode 1 verbessert und liegt bei maximal 0.21 %.

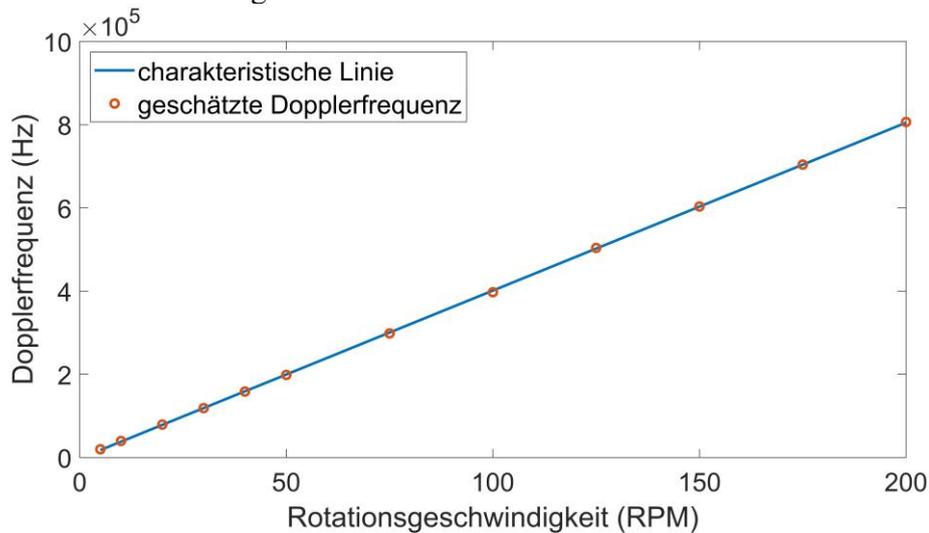


Abbildung 5.13: Linearität zwischen Dopplerfrequenz und Rotationsgeschwindigkeit bei Methode 2

Tabelle 5.9: Linearität des iterativen Selbstkorrekturalgorithmus bei 50 Datensätze der jeweiligen Rotationsgeschwindigkeiten

Rotationsgeschwindigkeit	Mittelwert von Methode 2	Nichtlinearität bei Methode 2
5	19812.9439	+0.23%
10	39676.6688	+0.20%
20	79124.5751	+0.08%
30	118766.851	-0.00%
40	158362.004	-0.10%
50	198684.623	-0.10%
75	298188.237	-0.27%
100	397411.012	+0.32%
125	503231.423	+0.14%
150	603827.056	+0.10%
175	704050.495	+0.02%
200	806255.18	+0.18%

**Tabelle 5.10:** NRMSE der Ergebnisse von Methode 1 und 2 sowie vom regulären Kreuzkorrelationspektrum

<b>Rotations- geschwindigkeit</b>	<b>NRMSE des regulären Kreuzkorrelationspektrums (%)</b>	<b>NRMSE von Methode 1 (%)</b>	<b>NRMSE von Methode 2 (%)</b>
5	0.16	0.24	0.18
10	0.06	0.06	0.07
20	0.08	0.09	0.09
30	0.14	0.16	0.13
40	0.18	0.20	0.21
50	0.13	0.19	0.12
75	0.04	0.07	0.05
100	0.06	0.09	0.07
125	0.06	0.08	0.09
150	0.08	0.06	0.08
175	0.06	0.06	0.07
200	0.03	0.03	0.03

## 6 Zusammenfassung und Ausblick

In Rahmen dieser Arbeit sind Signalverarbeitungsmethoden entwickelt worden, mit dem die präzise Messung von Rotationsgeschwindigkeiten mithilfe der „self-mixing“-Interferometrie realisiert werden soll. Im folgenden Abschnitt werden die Inhalte dieser Arbeit zusammengefasst und ein Ausblick über zukünftige Forschungsanstrengungen gemacht.

### 6.1 Zusammenfassung

In Rahmen dieser Arbeit sind mehrere Signalverarbeitungsmethoden entwickelt worden, die auf Basis der Autokorrelation, Kreuzkorrelation und dem iterativen Selbstkorrekturalgorithmus konzipiert worden sind. Bei der Kreuz- und Autokorrelation handelt es sich um Funktionen, mit denen die Korrelation zwischen zwei Signalen bzw. mit sich selbst beschrieben wird. Sie ermöglichen eine Rauschunterdrückung mit geringfügigem Verlust von Frequenzinformationen und sind daher für die Frequenzbestimmung, die in der Rotationsgeschwindigkeitsmessung über SMI-Signale eine kritische Rolle spielt, von großem Interesse. Dabei existieren für die Kreuzkorrelationsfunktion zwei Versionen, die in Rahmen dieser Arbeit symmetrische und unsymmetrische Kreuzkorrelation genannt werden. Sie unterscheiden sich darin, welches Signalabschnitt von einem festgelegten Ausgangspunkt aus betrachtet für die Erstellung der Kreuzkorrelationsfunktion genutzt wird. Dieser Unterschied hat erheblichen Einfluss auf die Eigenschaften der Kreuzkorrelationsfunktion und ist dementsprechend in Rahmen dieser Arbeit intensiv untersucht worden. Beim iterativen Selbstkorrekturalgorithmus handelt es sich um eine Methode, mit der systematische Fehler einer Messung ohne zusätzlichen Input reduziert werden können. Hierbei wird mithilfe der Ergebnisse der initialen Signalverarbeitung das Eingangssignal rekonstruiert und die Signalverarbeitung an das rekonstruierte Signal wiederholt. Das Ergebnis des rekonstruierten Signals kann zur Optimierung der Messergebnisse verwendet werden.

Die erste entwickelte Methodik setzt sich aus einem Signalselektionsalgorithmus, eine Frequenzbestimmung über die Periodenlänge einer Autokorrelationsfunktion sowie einem Durchschnittsfenster zusammen. Die Signalselektion soll Signalabschnitte mit zu geringem SNR von weiterführenden Signalverarbeitungsschritten ausschließen und auf diese Weise den durchschnittlichen SNR der betrachteten Signalabschnitte erhöhen. Hierbei wird die Betragsfunktion des jeweiligen Signalabschnitts bewertet. Von akzeptierten Signalabschnitten wird die Autokorrelationsfunktion generiert und dessen Periodenlänge für die Frequenzbestimmung des SMI-Signals genutzt. Das Ergebnis wird abschließend in ein Durchschnittsfenster, das den Durchschnitt seines Inhalts als Ergebnis ausgibt, eingespeist. Experimentergebnisse an reale SMI-Signale sind vielversprechend und weisen eine Linearität von 0.5 % und ein NRMSE von 0.2% auf.

Die nächste Signalverarbeitungsmethode nutzt als Grundlage eine neue Methodik, die in Rahmen dieser Arbeit Kreuzkorrelationsspektrum genannt wird. Sie beruht auf die Erkenntnisse über die Kreuzkorrelationsfunktion zwischen zwei Sinussignalen mit

unterschiedlichen Frequenzen. Zwar besitzen diese die Frequenz des zeitverschobenen Sinussignals, durch den Frequenzunterschied kommt es jedoch zu einer verringerten Amplitude der Kreuzkorrelationsfunktion. Dementsprechend hat die Kreuzkorrelationsfunktion seinen Amplitudenmaximum, wenn die Frequenzen der zwei genutzten Signale übereinstimmen. Diese Erkenntnis und die Tatsache aus der Fourier-Analyse, dass jedes Signal als eine Linearkombination von trigonometrischen Funktionen approximiert werden kann, macht sich das Kreuzkorrelationsspektrum zunutze. Es visualisiert die Amplitude der Kreuzkorrelationsfunktion zwischen dem zu prüfenden Signal (Messsignal) und eines generierten Sinussignals (Referenzsignals) als Funktion der Frequenz des Referenzsignals. Auf diese Weise entsteht ein Spektrum, mit dem Aussagen über alle Frequenzen des zu prüfenden Signals auch unter sehr starkem Rauschen gemacht werden können. Die Methodik stellt eine Alternative zur Fast-Fourier-Transformation und Kontinuierliche Wavelet Transformation dar. In diesen Methoden muss wegen der Heisenberg'sche Unschärferelation stets ein Kompromiss zwischen Zeit- und Frequenzauflösung gemacht werden. Im Kreuzkorrelationsspektrum kann die Frequenzauflösung vom Nutzer unabhängig von der Zeit selbst eingestellt werden. Dadurch sind Ergebnisse mit hoher Zeit- und Frequenzauflösung realisierbar. Erste Simulationsergebnisse überzeugen mit hohen Genauigkeiten auch unter negativen SNR. Beispielsweise konnte auch bei einem SNR von -10 dB die Signalfrequenz mit einer Genauigkeit von 0.1% bestimmt werden. Bei Experimenten mit SMI-Signalen hat das Kreuzkorrelationsspektrum dem Frequenzspektrum des FFTs entsprochen. Die Frequenzauflösung konnte beim Kreuzkorrelationsspektrum jedoch vom Nutzer selbst und damit viel höher eingestellt werden, wodurch insgesamt präzisere Ergebnisse erzielt worden sind. Zur Bestimmung der Rotationsgeschwindigkeit mithilfe von SMI-Signalen ist zur Rücksichtnahme der Spektralverbreiterung zusätzlich zum Kreuzkorrelationsspektrum eine Schätzmethodik und der Durchschnittsfenster aus der Autokorrelationsmethodik genutzt worden. Dabei wird in der Schätzmethodik das normalisierte Integral des Kreuzkorrelationsspektrums generiert und die Frequenz, bei dem das normalisierte Integral den Wert 0.5 besitzt, als Dopplerfrequenz deklariert. Experimentergebnisse weisen auch hier eine Linearität von 0.5% und NRMSE von 0.2% auf.

Das Kreuzkorrelationsspektrum erweist sich als mächtige Methode zur Bestimmung von Signalfrequenzen. Bei der Erstellung des Spektrums ist aber für jeden Wert des Spektrums mindestens eine Periode einer Kreuzkorrelationsfunktion generiert worden. Dies stellt einen enormen Rechenaufwand dar, der die Einsatzmöglichkeiten der Methodik einschränkt. Daher ist in dieser Arbeit eine Lösung entwickelt worden, mit der das Kreuzkorrelationsspektrum mit geringerem Berechnungsaufwand generiert werden kann. Die Idee besteht darin, für jede Kreuzkorrelationsfunktion statt einer Periode nur einen Punkt zu berechnen. Die Amplitude einer Kreuzkorrelationsfunktion kann auf diese Weise ermittelt werden, falls die Phasen des Mess- und Referenzsignals miteinander übereinstimmen. Hierzu muss die Phase des Messsignals ermittelt werden. Eine Phasenbestimmung von stark verrauschten Signalen wäre realisierbar, indem man die diskrete Fourier Reihe einer Kreuzkorrelationsfunktion zwischen dem Mess- und einem Referenzsignal berechnet. Die Genauigkeit dieses Vorgehen ist dabei am besten, wenn die Frequenzen des Mess- und Referenzsignals identisch sind. Damit ist eine Wechselwirkung

zwischen der Frequenz- und Phasenbestimmung festzustellen. Die Frequenzbestimmung benötigt die Phase des Messsignals, während die Phasenbestimmung dessen Frequenz erfordert. Aus diesem Grund sind Methoden der iterativen Frequenz- und Phasenbestimmung entwickelt worden. Nach einer groben Frequenzschätzung wird mithilfe der Frequenzinformationen die Phase des Messsignals über die diskrete Fourier-Reihe einer Kreuzkorrelationsfunktion ermittelt. Das Ergebnis wird genutzt, um ein Kreuzkorrelationsspektrum mithilfe der ermittelten Phase zu generieren und damit die Frequenz zu bestimmen. Dieser Prozess kann wiederholt und auf diese Weise die Frequenz- und Phasenbestimmung iterativ optimiert werden.

Bei dieser Methodik macht es einen großen Unterschied, ob für die Frequenz- und Phasenbestimmung die symmetrische oder unsymmetrische Kreuzkorrelationsspektrum genutzt wird. Bei der Nutzung der symmetrischen Kreuzkorrelation kommt es beim vereinfachten Kreuzkorrelationsspektrum dazu, das sich abhängig vom Phasenunterschied zwischen Referenz- und Messsignal die Amplitude des Spektrums verringert. In der Phasenbestimmung kommt es bei Frequenzunterschiede zwischen Referenz- und Messsignal zu keiner Phasenänderung der Kreuzkorrelationsfunktion. Bei der Nutzung der unsymmetrischen Kreuzkorrelationsfunktion verhält es sich anders. Hier führt ein Phasenunterschied bei der Frequenzbestimmung zu einer Verformung des Kreuzkorrelationsspektrums. Gibt es in der Phasenbestimmung einen Frequenzunterschied zwischen Mess- und Referenzsignal, kommt es wiederum zu einer systematischen Phasenänderung in der Kreuzkorrelationsfunktion. Die Nutzung der unsymmetrischen Kreuzkorrelation hat jedoch den Vorteil, dass beim vereinfachten, unsymmetrischen Kreuzkorrelationsspektrum nur die Hälfte der Datenpunkte benötigt wird, um die gleiche Stauchung wie beim vereinfachten, symmetrischen Kreuzkorrelationsspektrum zu erreichen. Bei korrekten Phaseninformationen erweist sich das vereinfachte, unsymmetrische Kreuzkorrelationsspektrum somit als viel präziser und feingliedriger.

Im Kontext dessen sind in Rahmen dieser Arbeit zwei Methoden entwickelt worden. Sie unterscheiden sich darin, welche Variante der Kreuzkorrelationsfunktion im vereinfachten Kreuzkorrelationsspektrum Anwendung findet. Methode 1 nutzt die symmetrische Kreuzkorrelation, während Methode 2 sich der unsymmetrischen Kreuzkorrelation bedient. Die Phasenbestimmung nutzt in beiden Fällen die symmetrische Kreuzkorrelation und setzt darüber hinaus den iterativen Selbstkorrekturalgorithmus ein, um Asynchronitäten zwischen Signal- und Abtastfrequenz zu kompensieren.

Die Ergebnisse sind sehr vielversprechend. Dabei konnte insbesondere Methode 2 überzeugen. In Simulationen kann sie bei der Frequenzmessung ab einem SNR von -14 dB eine Genauigkeit von 0.1% vorweisen. Ab -7 dB liegt diese sogar bei 0.01%. In der Phasenmessung beträgt die durchschnittliche Abweichung ab -11 dB wiederum bei 0.1rad, während sie sich ab einem SNR von 3 dB auf 0.02 rad reduziert. Zudem hat sich bei einem Signal mit einer Periodenlänge von 100 Datenpunkte die Berechnungszeit bei Methode 1 und 2 um mindestens 84.8% reduziert. In Experimenten mithilfe von SMI-Signalen aus dem Testsystem sind bei Methode 1 und 2 geringfügige Genauigkeitseinbußen festzustellen. Während sie bei Methode 1 0.25 % beträgt, liegt sie bei der Methode 2 bei 0.21 %. Da sich aber bei Methode 1 und 2 die Berechnungszeiten erheblich reduziert haben, ist insgesamt dennoch eine signifikante Verbesserung der Ergebnisse festzustellen.

## 6.2 Ausblick

Trotz der vielversprechenden Resultate sind weitere Forschungsanstrengungen in der Rotationsgeschwindigkeitsmessung mithilfe von SMI notwendig. In allen Methoden sind Bemühungen unternommen worden, trotz Spektralverbreiterung die Rotationsgeschwindigkeitsmessung über SMI-Signale zu ermöglichen. Bei der Autokorrelationsmethodik wird das gesamte Frequenzspektrum des SMI-Signals auf die Frequenz der resultierenden Autokorrelationsfunktion reduziert. Im Kreuzkorrelationsspektrum und den iterativen Kreuzkorrelationsalgorithmus wird die Dopplerfrequenz wiederum über ein Schätzverfahren ermittelt. Doch es besteht stets die Gefahr, dass im betrachteten Signalabschnitt nur ein Teil der gesamten Spektralverbreiterung enthalten ist. Bei gleichbleibender Geschwindigkeit könnten die Frequenzspektren von zwei Signalabschnitten grundlegend anders aussehen. Dadurch wird es bei jedem Signalabschnitt zu Ergebnisunterschieden kommen. Die Messungenauigkeiten können mit dem Durchschnittsfenster reduziert werden. Um die Ergebnisse jedoch noch weiter zu verbessern, wird empfohlen, Lösungen zu finden, mit denen die Spektralverbreiterung des SMI-Signals reduziert werden kann. Sollte dieses Problem gelöst und die vorgestellten Signalverarbeitungsmethoden weiterentwickelt werden, ist man dem Ziel, eine marktfähige Lösung zur Rotationsgeschwindigkeitsmessung mit SMI zu entwickeln, einen großen Schritt nähergekommen.

Mit dem Kreuzkorrelationsspektrum und beide Methoden der Frequenz- und Phasenbestimmung sind vielversprechende Methoden konzipiert worden. Bei SMI-Signalen haben sie zufriedenstellende Ergebnisse geliefert. Doch ihr Potenzial beschränkt sich nicht nur auf dieses Anwendungsgebiet. Sie können in jeder Situation genutzt werden, in der eine präzise Frequenz- und/oder Phasenbestimmung mit hoher Zeit- und Frequenzauflösung unter sehr starkem Rauschen benötigt wird. Solche Situationen finden sich in verschiedensten Industriegebieten wie Robotik, Energietechnik und Audiotechnik usw. Doch auch bei Drehzahlgebern wie optische oder magnetische Encoder könnten die Methoden einen großen Mehrwert bringen. Methoden 1 und 2 der Frequenz- und Phasenbestimmung ermöglichen es, Drehzahlen sowohl über die Frequenz als auch über die Phase unter niedrigen SNR zu bestimmen. Dadurch könnten die Methoden in alle Drehzahlbereiche sowie harsche Betriebsbedingungen gute Ergebnisse liefern. Zudem könnten sie die meisten Probleme, die mit der Drehzahlmessung über Encoder verbunden sind, lösen (siehe Kapitel 1.1).

Es besteht jedoch noch viel Forschungsbedarf. Zum einen sollten die Methoden in weitere praktische Anwendungsgebiete getestet sowie ihre Leistung und Potenzial evaluiert werden. Zum anderen unterscheiden sich die Spektren von Methode 1 und 2 in ihr Verhalten klar voneinander und besitzen dadurch verschiedene Vor- und Nachteile. Die Frage, welche Methode in welchen Situationen genutzt werden sollte, stellt ebenfalls ein sinnvoller Gegenstand weiterführender Forschungsarbeit dar.

Zudem existiert noch großes Verbesserungspotenzial bei den Methoden. Beispielsweise muss die Berechnungszeit der Methoden noch weiter optimiert werden. Insgesamt werden daher weitere Forschungsarbeiten an den Methoden empfohlen.

## A1 Anhang

### A1.1 Ableitung von Gleichungen (3.20-22)

In diesem Abschnitt dieser Arbeit werden die mathematischen Herleitungen der Gleichungen (3.20-22) aus Kapitel 3.3.2 vorgestellt. Es wird die Kreuzkorrelationsfunktion der folgenden zwei Signale betrachtet.

$$x(t) = A * \sin(2\pi * f_x * t + \varphi_x) \quad (\text{A.1})$$

$$y(t) = B * \sin(2\pi * f_y * t + \varphi_y) \quad (\text{A.2})$$

Gleichungen A.1 und A.2 werden in Gleichung (3.12) aus Kapitel 3.3.1 eingesetzt. Anschließend wird die trigonometrische Formel (A.4) genutzt und die Kreuzkorrelationsfunktion vereinfacht. Es ergeben sich zwei Terme, die aus Gründen der Übersichtlichkeit separat betrachtet werden.

$$\phi_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A * B}{2T} \int_{-T}^T \sin(2\pi * f_x * t + \varphi_x) * \sin(2\pi * f_y * (t + \tau) + \varphi_y) dt \quad (\text{A.3})$$

$$\sin(x) * \sin(y) = \frac{(\cos(x - y) - \cos(x + y))}{2} \quad (\text{A.4})$$

$$\begin{aligned} & \phi_{xy}(\tau) \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A * B}{2T} \int_{-T}^T \frac{\cos(2\pi * f_x * t + \varphi_x - (2\pi * f_y * (t + \tau) + \varphi_y))}{2} \\ & \quad - \frac{\cos(2\pi * f_x * t + \varphi_x + 2\pi * f_y * (t + \tau) + \varphi_y)}{2} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A * B}{2T} \int_{-T}^T \frac{\cos(2\pi * t * (f_x - f_y) - 2\pi * f_y * \tau + (\varphi_x - \varphi_y))}{2} \\ & \quad - \frac{\cos(2\pi * t * (f_x + f_y) + 2\pi * f_y * \tau + (\varphi_x + \varphi_y))}{2} dt \quad (\text{A.5}) \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A * B}{2T} \left[ \frac{\sin(2\pi * t * (f_x - f_y) - 2\pi * f_y * \tau + (\varphi_x - \varphi_y))}{4\pi * (f_x - f_y)} \right]_{-T}^T \\ & \quad - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A * B}{2T} * \left[ \frac{\sin(2\pi * t * (f_x + f_y) + 2\pi * f_y * \tau + (\varphi_x + \varphi_y))}{4\pi * (f_x + f_y)} \right]_{-T}^T = \end{aligned}$$

Zuerst wird der erste Term (A.6) betrachtet. Dieser wird im ersten Schritt vollständig

ausformuliert.

$$\begin{aligned}
& \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A * B}{2T} \left[ \frac{\sin(2\pi * t * (f_x - f_y) - 2\pi * f_y * \tau + (\varphi_x - \varphi_y))}{4\pi * (f_x - f_y)} \right]_{-T}^T \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A * B}{8\pi * T * (f_x - f_y)} \\
& * (\sin((-2\pi * f_y * \tau + (\varphi_x - \varphi_y)) + 2\pi * T * (f_x - f_y)) \\
& - \sin((-2\pi * f_y * \tau + (\varphi_x - \varphi_y)) + 2\pi * (-T) * (f_x - f_y))) =
\end{aligned} \tag{A.6}$$

In diesem Term werden nun die folgenden trigonometrische Formeln verwendet. Dadurch ergibt sich Gleichung (A.9).

$$\sin(x + y) = \sin(x) * \cos(y) + \cos(x) * \sin(y) \tag{A.7}$$

$$\sin(x - y) = \sin(x) * \cos(y) - \cos(x) * \sin(y) \tag{A.8}$$

$$\begin{aligned}
& \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A * B}{4\pi * T * (f_x - f_y)} (\cos(-2\pi * f_y * \tau + (\varphi_x - \varphi_y)) * \sin(2\pi * T * \\
& * (f_x - f_y))) \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A * B}{4\pi * T * (f_x - f_y)} (\cos(2\pi * f_y * \tau + (\varphi_y - \varphi_x)) * \sin(2\pi * \\
& * T * (f_x - f_y))) =
\end{aligned} \tag{A.9}$$

Zur Vereinfachung wird folgende Substitution durchgeführt.

$$K = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A * B}{4T} * \frac{\sin(2\pi * T * (f_x - f_y))}{\pi * (f_x - f_y)} \tag{A.10}$$

Dadurch ergibt sich Gleichung (A.11).

$$K * \cos(2\pi * f_y * \tau + (\varphi_y - \varphi_x)) \tag{A.11}$$

In der Praxis würde Gleichung (A.12) Anwendung finden, da die Anzahl genutzter Datenpunkte in der Realität begrenzt ist.

$$K = \frac{A * B}{4T} * \frac{\sin(2\pi * T * (f_x - f_y))}{\pi * (f_x - f_y)} \tag{A.12}$$

Nun wird der zweite Term von Gleichung (A.5) betrachtet. Diese wird ebenfalls ausformuliert.

$$\begin{aligned}
& \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A * B}{2T} \\
& * \left[ \frac{1}{2\pi * (f_x + f_y)} \frac{\sin(2\pi * t * (f_x + f_y) + 2\pi * f_y * \tau + (\varphi_x + \varphi_y))}{2} \right]_{-T}^T \\
& = \frac{A * B}{4\pi * T * (f_x + f_y)} * \left( \frac{\sin(2\pi * f_y * \tau + (\varphi_x + \varphi_y) + 2\pi * T * (f_x + f_y))}{2} \right. \\
& \left. - \frac{\sin(2\pi * f_y * \tau + (\varphi_x + \varphi_y) + 2\pi * (-T) * (f_x + f_y))}{2} \right) \quad (A.13)
\end{aligned}$$

Indem die trigonometrischen Formeln (A.7) und (A.8) genutzt werden, ergibt sich das folgende Ergebnis.

$$\begin{aligned}
& \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A * B}{4\pi * T * (f_x + f_y)} (\cos(2\pi * f_y * \tau + (\varphi_x + \varphi_y)) * \sin(2\pi * (T) \\
& * (f_x + f_y))) \quad (A.14)
\end{aligned}$$

Zur Vereinfachung wird folgende Substitution durchgeführt.

$$W = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A * B}{4T} * \frac{\sin(2\pi * T * (f_x + f_y))}{\pi * (f_x + f_y)} \quad (A.15)$$

Dadurch vereinfacht sich der zweite Term von Gleichung (A.16) zu:

$$W * \cos(2\pi * f_y * \tau + (\varphi_x + \varphi_y)) = 0 \quad (A.16)$$

Wenn nur eine begrenzte Anzahl an Datenpunkte  $T$  für die Kreuzkorrelation verwendet wird, entsteht folgende Gleichung.

$$W = \frac{A * B}{4T} * \frac{\sin(2\pi * T * (f_x + f_y))}{\pi * (f_x + f_y)} \quad (A.17)$$

Insgesamt ergibt sich für die Kreuzkorrelationsfunktion Gleichung (3.20) aus Kapitel 3.3.2.

$$\phi_{xy}(\tau) = K * \cos(2\pi * f_y * \tau + (\varphi_y - \varphi_x)) + W * \cos(2\pi * f_y * \tau + (\varphi_x + \varphi_y)) \quad (A.18)$$

### A1.2 Ableitung von Gleichung (3.26)

In diesem Abschnitt wird geprüft, wie sich Gleichung verhält, wenn  $f_y \approx f_x$  gilt. Dazu wird

im ersten Schritt die Amplitude der ersten Kosinusfunktion der Kreuzkorrelationsfunktion betrachtet (siehe Gleichung (3.26)).

$$K = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A * B * \sin(2\pi * T * (f_x - f_y))}{4\pi * T * (f_x - f_y)} \quad (\text{A.19})$$

Sowohl sein Zähler als auch sein Nenner ergeben im betrachteten Fall null.

$$\lim_{T \rightarrow \infty} (A * B * \sin(2\pi * (T) * (f_x - f_y))) = 0 \quad (\text{A.20})$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} 4\pi * T * (f_x - f_y) = 0 \quad (\text{A.21})$$

Aus diesem Grund wird im Anschluss die Regel von l'Hopital eingesetzt (siehe Gleichung A.22):

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g'(x)}{h'(x)} \quad (\text{A.22})$$

Dadurch ergibt sich:

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} g'(x) &= \lim_{T \rightarrow \infty} (A * B * \sin(2\pi * (T) * (f_x - f_y)))' \\ &= (A * B * \cos(0) * 2\pi * (f_x - f_y)) = A * B * 2\pi * (f_x - f_y) \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} h'(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} (4\pi * T * (f_x - f_y))' = \lim_{T \rightarrow \infty} (4\pi * (f_x - f_y)) = 4\pi * (f_x - f_y) \quad (\text{A.24})$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left( \left( \frac{1}{2T} \frac{\sin(2\pi * (T) * (f_x - f_y))}{2\pi * (f_x - f_y)} \right) \right) \approx \frac{A * B * 2\pi * (f_x - f_y)}{4\pi * (f_x - f_y)} = \frac{A * B}{2} \quad (\text{A.25})$$

Somit gilt für den ersten Summanden der Gleichung (A.26) für den Fall  $f_x \approx f_y$ :

$$K * \cos(2\pi * f_y * \tau + (\varphi_y - \varphi_x)) = \frac{A * B}{2} * \cos(2\pi * f_y * \tau + (\varphi_y - \varphi_x)) \quad (\text{A.26})$$

Auf den zweiten Summanden der Kreuzkorrelationsfunktion hat der Fall  $f_N \approx f_M$  keinen Einfluss. Dementsprechend kann die Kreuzkorrelationsfunktion in diesem Fall über folgende Gleichung beschrieben werden.

$$\begin{aligned} \phi_{xy}(\tau) &= \frac{A * B}{2} * \cos(2\pi * f_y * \tau + (\varphi_y - \varphi_x)) \\ &\quad - W \cos(2\pi * f_y * \tau + (\varphi_x + \varphi_y)) \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Mit steigenden  $T$  konvergiert der zweite Summand von Gleichung (A.27) gegen null. Bei ausreichend großem  $T$  kann die Kreuzkorrelationsfunktion daher zu Gleichung (A.28) vereinfacht werden.

$$\phi_{xy}(\tau) = \frac{A * B}{2} * \cos(2\pi * f_y * \tau + (\varphi_y - \varphi_x)) \quad (\text{A.28})$$

### A1.3 Ableitung von Gleichungen (3.31-33)

In diesem Abschnitt dieser Arbeit werden die mathematischen Herleitungen der Gleichungen (3.31-33) aus Kapitel 3.3.2 vorgestellt. Es wird wieder die Kreuzkorrelationsfunktion der zwei Signale (A.1) und (A.2) betrachtet und in Gleichung (3.16) aus Kapitel 3.3.1 eingesetzt. Anschließend wird die Kreuzkorrelationsfunktion mit der trigonometrischen Formel (A.4) (siehe Anhang A1.1) vereinfacht. Es ergeben sich zwei Terme, die aus Gründen der Übersichtlichkeit separat betrachtet werden.

$$\phi_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A * B}{T} \int_0^T \sin(2\pi * f_x * t + \varphi_x) * \sin(2\pi * f_y * (t + \tau) + \varphi_y) dt \quad (\text{A.29})$$

$$\begin{aligned} & \phi_{xy}(\tau) \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A * B}{T} \int_0^T \frac{\cos(2\pi * f_x * t + \varphi_x - (2\pi * f_y * (t + \tau) + \varphi_y))}{2} \\ & \quad - \frac{\cos(2\pi * f_x * t + \varphi_x + 2\pi * f_y * (t + \tau) + \varphi_y)}{2} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A * B}{T} \int_0^T \frac{\cos(2\pi * t * (f_x - f_y) - 2\pi * f_y * \tau + (\varphi_x - \varphi_y))}{2} \\ & \quad - \frac{\cos(2\pi * t * (f_x + f_y) + 2\pi * f_y * \tau + (\varphi_x + \varphi_y))}{2} dt \quad (\text{A.30}) \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A * B}{T} \left[ \frac{\sin(2\pi * t * (f_x - f_y) - 2\pi * f_y * \tau + (\varphi_x - \varphi_y))}{4\pi * (f_x - f_y)} \right]_0^T \\ & \quad - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A * B}{T} * \left[ \frac{\sin(2\pi * t * (f_x + f_y) + 2\pi * f_y * \tau + (\varphi_x + \varphi_y))}{4\pi * (f_x + f_y)} \right]_0^T = \end{aligned}$$

Zuerst wird der erste Term (A.31) betrachtet. Dieser wird im ersten Schritt vollständig ausformuliert.

$$\begin{aligned}
& \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A * B}{T} \left[ \frac{\sin(2\pi * t * (f_x - f_y) - 2\pi * f_y * \tau + (\varphi_x - \varphi_y))}{4\pi * (f_x - f_y)} \right]_0^T \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A * B}{2\pi * T * (f_x - f_y)} \left( \frac{\sin((-2\pi * f_y * \tau + (\varphi_x - \varphi_y)) + 2\pi * T * (f_x - f_y))}{2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\sin(-2\pi * f_y * \tau + (\varphi_x - \varphi_y))}{2} \right) =
\end{aligned} \tag{A.31}$$

In diesem Term werden nun die folgenden trigonometrische Formeln verwendet. Dadurch ergibt sich Gleichung (A.33).

$$\sin(x + y) - \sin(x) = 2 * \sin\left(\frac{y}{2}\right) \cos\left(\frac{y}{2} + x\right) \tag{A.32}$$

$$\begin{aligned}
& \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{A * B}{2\pi * (f_x - f_y)} \left( \frac{\sin((-2\pi * f_y * \tau + (\varphi_x - \varphi_y)) + 2\pi * T * (f_x - f_y))}{2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\sin((-2\pi * f_y * \tau + (\varphi_x - \varphi_y))}{2} \right) \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A * B}{2\pi * T * (f_x - f_y)} \left( \sin(\pi * T * (f_x - f_y)) \right. \\
&\quad \left. * \cos\left(\left(-2\pi * f_y * \tau + (\varphi_x - \varphi_y)\right) + \pi * T * (f_x - f_y)\right) \right) \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A * B * \sin(\pi * T * (f_x - f_y))}{T * 2\pi * (f_x - f_y)} * \cos((-2\pi * f_y * \tau \\
&\quad + (\varphi_x - \varphi_y)) + \pi * T * (f_x - f_y)) \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A * B * \sin(\pi * T * (f_x - f_y))}{T * 2\pi * (f_x - f_y)} * \cos(2\pi * f_y * \tau \\
&\quad - (\varphi_x - \varphi_y) + \pi * T * (f_y - f_x))
\end{aligned} \tag{A.33}$$

Zur Vereinfachung wird folgende Substitution durchgeführt.

$$V = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A * B * (\sin(\pi * T * (f_x - f_y)))}{T * 2\pi * (f_x - f_y)} \tag{A.34}$$

Dadurch ergibt sich Gleichung (A.35).

$$V * \cos(2\pi * f_y * \tau - (\varphi_x - \varphi_y) + \pi * T * (f_y - f_x)) \quad (\text{A.35})$$

In der Praxis würde Gleichung (A.36) Anwendung finden, da die Anzahl genutzter Datenpunkte in der Realität begrenzt ist.

$$V = \frac{A * B * \sin(\pi * T * (f_x - f_y))}{T * 2\pi * (f_x - f_y)} \quad (\text{A.36})$$

Nun wird der zweite Term von Gleichung (A.30) betrachtet. Diese wird ebenfalls ausformuliert.

$$\begin{aligned} & \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A * B}{T} \\ & * \left[ \frac{1}{2\pi * (f_x + f_y)} \frac{\sin(2\pi * t * (f_x + f_y) + 2\pi * f_y * \tau + (\varphi_x + \varphi_y))}{2} \right]_0^T \\ & = \frac{A * B}{2\pi * T * (f_x + f_y)} * \left( \frac{\sin(2\pi * f_y * \tau + (\varphi_x + \varphi_y) + 2\pi * T * (f_x + f_y))}{2} \right. \\ & \left. - \frac{\sin(2\pi * f_y * \tau + (\varphi_x + \varphi_y))}{2} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

Indem die trigonometrische Formel (A.32) genutzt wird, ergibt sich das folgende Ergebnis.

$$\begin{aligned} & \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A * B * \sin(\pi * T * (f_x + f_y))}{2 * T * \pi * (f_x + f_y)} \\ & * \cos(2\pi * f_y * \tau + (\varphi_x + \varphi_y) + \pi * T * (f_x + f_y)) \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

Zur Vereinfachung wird folgende Substitution durchgeführt.

$$U = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A * B * \sin(\pi * T * (f_x + f_y))}{2 * T * \pi * (f_x + f_y)} \quad (\text{A.39})$$

Dadurch vereinfacht sich der zweite Term von Gleichung (A.16) zu:

$$U * \cos(2\pi * f_y * \tau + (\varphi_x + \varphi_y) + \pi * T * (f_x + f_y)) \quad (\text{A.40})$$

Wenn nur eine begrenzte Anzahl an Datenpunkte  $T$  für die Kreuzkorrelation verwendet, entsteht folgende Gleichung.

$$U = \frac{A * B * \sin(\pi * T * (f_x + f_y))}{2 * T * \pi * (f_x + f_y)} \quad (\text{A.41})$$

Insgesamt ergibt sich für die Kreuzkorrelationsfunktion Gleichung (3.31) aus Kapitel 3.3.2.

$$\begin{aligned} \phi_{xy}(\tau) = & V * \cos(2\pi * f_y * \tau - (\varphi_x - \varphi_y) + \pi * T * (f_y - f_x)) \\ & - U * \cos(2\pi * f_y * \tau + (\varphi_x + \varphi_y) + \pi * T * (f_x + f_y)) \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

#### A1.4 Ableitung von Gleichungen (3.61-62)

In diesem Abschnitt dieser Arbeit werden die mathematischen Herleitungen der Gleichungen (3.61) und (3.62) aus Kapitel 3.5.3 vorgestellt. In Anbetracht dessen, dass beim Kreuzkorrelationsspektrum aus Kapitel 3.4, unter der Bedingung  $\varphi_x = \varphi_y$  die Amplitude der Kreuzkorrelation mit dessen Wert bei  $\tau = 0$  gleichgesetzt wird, wird Gleichung (3.34) aus Kapitel 3.3.2 unter  $\varphi_x = \varphi_y$  und  $\tau = 0$  näher betrachtet.

$$\phi_{xy}(0) = V * \cos(\pi * T * (f_y - f_x)) - U * \cos((\varphi_x + \varphi_y) + \pi * T * (f_x + f_y)) \quad (\text{A.43})$$

Im für die Frequenzbestimmung kritischen Bereich des Spektrums kann von einem ausreichend kleinem Frequenzunterschied ausgegangen werden, weshalb der zweite Summand vernachlässigt werden kann. Dadurch gilt:

$$\begin{aligned} \phi_{xy}(0) = & V * \cos(\pi * T * (f_y - f_x)) \\ = & \frac{A * B * (\sin(\pi * T * (f_x - f_y)) * \cos(\pi * T * (f_y - f_x)))}{T * 2\pi * (f_x - f_y)} \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

Unter der Nutzung des trigonometrischen Zusammenhangs (A.45) kann Gleichung (A.44) zu folgender Gleichung vereinfacht werden:

$$\sin(x) * \cos(x) = \frac{1}{2} * \sin(2x) \quad (\text{A.45})$$

$$\phi_{xy}(0) = \frac{A * B * (\sin(2\pi * T * (f_x - f_y)))}{T * 4\pi * (f_x - f_y)} \quad (\text{A.46})$$

Gilt  $\varphi_x = \varphi_y$  nicht, so ändert sich Gleichung (A.43) zu Gleichung (A.47)

$$\begin{aligned} \phi_{xy}(0) = & V * \cos((\varphi_x - \varphi_y) + \pi * T * (f_y - f_x)) \\ & - U * \cos((\varphi_x + \varphi_y) + \pi * T * (f_x + f_y)) \end{aligned} \quad (\text{A.47})$$

Analog zu Gleichung (A.44) kann der zweite Summand vernachlässigt werden. Dadurch gilt:

$$\begin{aligned} \phi_{xy}(0) &= V * \cos\left((\varphi_x - \varphi_y) + \pi * T * (f_y - f_x)\right) \\ &= \frac{A * B * (\sin(\pi * T * (f_x - f_y)) * \cos((\varphi_x - \varphi_y) + \pi * T * (f_y - f_x)))}{T * 2\pi * (f_x - f_y)} \end{aligned} \quad (\text{A.48})$$

Unter der Nutzung des trigonometrischen Zusammenhangs (A.49) kann Gleichung (A.48) zu Gleichung (A.50) vereinfacht werden:

$$\sin(x) * \cos(x + a) = \frac{1}{2} * (\sin(2x + a) - \sin(a)) \quad (\text{A.49})$$

$$\phi_{xy}(0) = \frac{A * B * (\sin(2\pi * T * (f_x - f_y) + (\varphi_x - \varphi_y)) - \sin(\varphi_x - \varphi_y))}{T * 4\pi * (f_x - f_y)} \quad (\text{A.50})$$

## Danksagung

Mein besonderer Dank gebührt Herrn Professor Dr.-Ing. Ralph Kennel für seine Bereitwilligkeit, diese Arbeit im Rahmen einer Industrie- bzw. externen Promotion zu betreuen. Seine Anregungen und Fragen sowie die offene Atmosphäre, die er am Lehrstuhl für Elektrische Antriebssysteme und Leistungselektronik geschaffen, waren für mich eine große Hilfe in der Erstellung dieser Arbeit.

Großer Dank gilt auch allen Mitarbeitern am Lehrstuhl für Elektrische Antriebssysteme und Leistungselektronik für ihre Freundlichkeit und Unterstützung. Gerade die Möglichkeiten zur offenen Diskussion, die trotz der räumlichen Trennung über Firmengrenzen hinweg möglich gewesen sind, haben mir sehr geholfen.

Die vorliegende Arbeit ist während meiner Tätigkeit als Entwicklungsingenieur im Unternehmen ChenYang Technologies GmbH & Co. KG entstanden. Ich möchte mich insbesondere bei Herrn Dr.-Ing. habil. Jigou Liu für die Erlaubnis und das entgegengebrachte Vertrauen, das Thema in Rahmen eines Dissertationsvorhabens zu bearbeiten, bedanken. Er war und ist ein wertvoller Diskussionspartner, der mit seiner Kritik, seiner Fragen seinen Anregungen im richtigen Moment erheblich bei der Erstellung dieser Arbeit beigetragen hat.

Mein Dank richtet sich auch an meine Familie, die sie mich während des Dissertationsvorhabens jederzeit unterstützt und ermutigt haben.

Zu guter Letzt gilt mein Dank all meinen Kollegen im Unternehmen und alle Studenten, deren Arbeit ich betreut habe. Sie haben mir mit wertvollen Ratschlägen und anregende Diskussionen erheblich bei der Fertigstellung der Arbeit geholfen.

## Veröffentlichungen

Im Folgenden werden alle Veröffentlichungen, die in Rahmen dieser Dissertation entstanden sind, in chronologischer Reihenfolge aufgelistet. Sie werden in eigene Veröffentlichungen (VO) sowie betreute Arbeiten (BO) unterteilt.

### 6.2.1 Eigene Veröffentlichungen

- [VO1] Y. Liu, J.G. Liu, Q. Song und R. Kennel, „Rotationsgeschwindigkeitsmessung mit Hilfe von „Self-Mixing“-Interferometrie“, in *20. GMA/ITG Fachtagung Sensoren und Messsysteme 2019*, S. 663-670, 2019.
- [VO2] Y. Liu, J.G. Liu und R. Kennel, “Rotational speed measurement using self-mixing interferometry”, *Applied Optics*, Vol. 60, Nr. 17, S. 5074-5080, 2021.
- [VO3] Y. Liu, J.G. Liu und R. Kennel, “Frequency Measurement Method of Signals with Low Signal-to-Noise-Ratio Using Cross-Correlation”, *Machines*, Vol. 9, Nr. 6, S. 1-17, 2021.
- [VO4] Y. Liu, J.G. Liu und R. Kennel, “Optimization of the Processing Time of Cross-Correlation Spectra for Frequency Measurements of Noisy Signals”, *Metrology*, Vol. 2, Nr. 2, S. 293-310, 2022.

### 6.2.2 Betreute Arbeiten

- [BO1] Q. Song, “Schaltungsdesign und Optimierung des selbstmischenden interferometrischen Laserdrehzahlsensors”, Bachelorarbeit, Fakultät für angewandte Naturwissenschaften und Mechatronik, Hochschule München, 2019.

## Literaturverzeichnis

- [1] C. Liu, “Neuartiges Signalverarbeitungsverfahren zur Drehgeschwindigkeitserfassung bei Servoantrieben,” Dissertation, Technische Universität München, 2018.
- [2] R. M. Kennel, “Encoders for simultaneous sensing of position and speed in electrical drives with digital control,” *IEEE Transactions on Industry Applications*, Vol. 43, Nr.6, S. 1572-1577, 2007.
- [3] P. Drabarek and R. M. Kennel, “Are interferometric encoders a reasonable alternative in servo drive applications?,” in *4th IET Conference on Power Electronics, Machines and Drives*, S. 149–153, 2008.
- [4] SEW Eurodrive, “Praxis der Antriebstechnik,” *Antriebstechnik*, Nr. 4, 1997.
- [5] Fritz Kübler GmbH, “Inkrementale Drehgeber,” 2013. Verfügbar: [https://www.kuebler.com/pdf?5826\\_de.pdf](https://www.kuebler.com/pdf?5826_de.pdf) [abgerufen am: 20.08.2021]
- [6] R. Merry, R. Van De Molengraft, and M. Steinbuch, “Error modeling and improved position estimation for optical incremental encoders by means of time stamping,” in *2007 American Control Conference*, S. 3570–3575, 2007.
- [7] K. Pogorzelski and F. Hillenbrand, “Inkrementalgeber – Funktionsprinzip und grundsätzliche Auswertemöglichkeiten ihrer Signale,” *imc Test & Measurement GmbH*, Vol. 43, Nr. 0, S. 59–62, 2007.
- [8] FRABA B.V., “INKREMENTALGEBER FUNKTIONSWEISE.” [Online]. Verfügbar: <https://www.posital.com/de/produkte/schnittstelle/incremental/inkrementale-drehgeber.php>. [abgerufen am: 20.08.2021].
- [9] Pepperl+Fuchs Group, “Incremental Encoder Output Signal Overview.” Verfügbar: <https://de.scribd.com/document/366763358/Incremental-Encoder-Output-Signal-Overview> [abgerufen am: 20.08.2021]
- [10] Fritz Kübler GmbH, “Produktübersicht/Technische Grundlagen“, 2015. [Online] Verfügbar: [https://www.kuebler.com/pdf?PBS\\_Grundlagen\\_Drehgeber\\_2015\\_de.pdf](https://www.kuebler.com/pdf?PBS_Grundlagen_Drehgeber_2015_de.pdf) [abgerufen am: 20.08.2021]
- [11] T. Kojima, Y. Kikuchi, S. Seki, and H. Wakiwaka, “Study on high accuracy optical encoder with 30 bits,” in *8th IEEE Int. Work. Adv. Motion Control 2004 AMC 04*, S. 493–498, 2004.
- [12] J. Best, “Inkrementalgeber,” 2000. Verfügbar: <http://docplayer.org/34152911-Inkrementalgeber-encod-j-best-ws2000-01-seite-1.html> [Zugegriffen am: 20.08.2021]

- [13] U. Kiencke and K. Dostert, “Praktikum: Versuch 1 Digitale Drehzahlmessung mit dem  $\mu\text{C}$  80C517A,” Universität (TH) Karlsruhe. Verfügbar: <https://docplayer.org/59482613-Digitale-drehzahlmessung-mit-dem-uc-80c517a.html> [abgerufen am: 20.08.2021]
- [14] Y. Li, F. Gu, G. Harris, A. Ball, N. Bennett, and K. Travis, “The measurement of instantaneous angular speed,” *Mechanical System and Signal Processing*, Vol. 19, Nr. 4, S. 786–805, 2005.
- [15] R. Petrella, M. Tursini, L. Peretti, and M. Zigliotto, “Speed measurement algorithms for low resolution incremental encoder equipped drives: A comparative analysis”, in *2007 International Aegean Conference on Electrical Machines and Power Electronics.*, S. 780–787, 2007.
- [16] “Praktikum zur Vorlesung Mess- und Sensortechnik - Versuchsanleitung Frequenz- und Drehzahlmessung,” Technische Universität Dresden, 2013.
- [17] H. Czichos, *Die Grundlagen der Ingenieurwissenschaften*, 31. Edition. Springer, 2000.
- [18] H.-R. Tränkler and G. Fischerauer, *Das Ingenieurwissen: Messtechnik*, Springer, 2014.
- [19] M. Kurt, C. Atilgan, and M. E. Berberler, “A dynamic programming approach for generating n-ary reflected gray code list,” [Online] Verfügbar: <https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.1067.6055&rep=rep1&type=pdf> [abgerufen am: 20.08.2021]
- [20] H. Lohninger, “Gray-Code,” *Angewandte Mikroelektronik*, 2011. [Online]. Verfügbar: [http://www.vias.org/mikroelektronik/dig\\_graycode.html](http://www.vias.org/mikroelektronik/dig_graycode.html) [abgerufen am: 16-Aug-2021].
- [21] A. T. Phillips, M. R. Wick, and E. Claire, “A Dynamic Programming Approach to Generating a Binary Reflected Gray Code Sequence”, 2005.
- [22] M. M. Ali and M. S. K. Rumi, “Parallel binary reflected Gray code sequence generation on multicore architectures,” *International Journal of Parallel, Emergent Distributed Systems*, Vol. 29, Nr. 5, S. 513–520, 2014.
- [23] U. Berger, K. Miyamoto, H. Schwichtenberg, and H. Tsuiki, “Logic for gray-code computation,” in *Concepts of Proof in Mathematics, Philosophy, and Computer Science*, De Gruyter, 2016.
- [24] H. Sun, “Optimization of Velocity and Displacement Measurement with Optical Encoder and Laser Self-Mixing Interferometry”, Dissertation, Technische Universität München (2020).
- [25] R. Jastrzebski, D. Matusiak, T. Sillanpaa, A. Romanenko, P. Jaatinen, K. Tolsa, T. Lindh und O. Pyrhonen, “Modelling and Evaluation of Radial-Axial PCB Capacitive Position Sensor Prototype” in *16th European Conference on Power Electronics and Applications*, 2014.

- 
- [26] Camille Bauer Ltd., “KINAX 2W2-SSI Capacitive Absolute Encoder Single-turn with SSI Interface,” 2004. Verfügbar: [http://www.gmc-camillebauer.com/pic/DM-2W2\\_SSI\\_KIN-WB\\_02-000405-3-L.pdf](http://www.gmc-camillebauer.com/pic/DM-2W2_SSI_KIN-WB_02-000405-3-L.pdf) [Abgerufen am 20.8.2021]
- [27] Dr. Johannes Heidenhain GmbH, “Absoluter induktiver Drehgeber in kleiner Bauform erschließt neue Anwendungen,” messtec drives Automation, 2005.
- [28] Allegro MicroSystems Inc., “Hall-effect IC applications guide,” 27701–AN, Rev. 5, 2019.
- [29] Baumer Magres BMMH 30, “Magnetische Drehgeber sind stark im Kommen,” *Polyscope*, Vol. 8, Nr. 8, S. 20–23, 2008.
- [30] E. Ramsden, *Hall-Effect Sensors*, 2. Edition, Oxford: Newnes Elsevier, 2006.
- [31] Allegro Microsystems, “Hall-Effect Sensors Applications Guide”, [Online]. Verfügbar: <https://www.allegromicro.com/en/insights-and-innovations/technical-documents/hall-effect-sensor-ic-publications/hall-effect-ic-applications-guide> [abgerufen am: 24.08.2021]
- [32] Honeywell Inc., “Hall Effect Sensing and Application,” Sensing and Control, 2011. [Online] Verfügbar: <https://sensing.honeywell.com/honeywell-sensing-sensors-magnetoresistive-hall-effect-applications-005715-2-en2.pdf> [ abgerufen am: 23.08.2021]
- [33] Melexis Microelectronic Systems, “Hall-Effect Geartooth Sensor.” [Online]. Verfügbar: <http://www.melexis.com/Assets/Hall-Effect-Geartooth-Sensor--3721.aspx>. [abgerufen am: 23.08.2021].
- [34] Renishaw plc, “Non-contact Position Encoders Guide 2021,” [Online]. Verfügbar: <http://resources.renishaw.com/en/download/pocket-guide-non-contact-position-encoders-2021-digital-edition--121723> [abgerufen am: 25.07.2021].
- [35] E. Eitel, “Basics of Rotary Encoders: Overview and New Technologies,” *Machine Design*, 2014. [Online]. Verfügbar: <http://machinedesign.com/sensors/basics-rotary-encoders-overview-and-newtechnologies-0>. [abgerufen am: 24.08.2021].
- [36] iC-Haus, “Absolute Encoder Design : Magnetic or Optical ?”, iC-Haus GmbH, S. 1–10, 2012.
- [37] Q. Song, “Entwicklung einer Signalverarbeitungseinheit für Drehzahlsensoren mit Rechteckimpuls und sinusförmigem Signal“, Bachelorarbeit, Fakultät für angewandte Naturwissenschaften und Mechatronik, Hochschule München, 2021.
- [38] D. Levy, “Numerical Differentiation,” in *Introduction to Numerical Analysis*, Department of Mathematics and Center for Scientific Computation and Mathematical Modeling, University of Maryland, 2010.

- [39] H. Sun, J.G. Liu, Q. Zhang und R. Kennel, "Self-mixing interferometry for rotational speed measurement of servo drives." *Applied Optics*, Vol. 55, Nr. 2, S. 236-241 (2016).
- [40] C. Barth, "Geschwindigkeit und Länge lasergenau messen", *etz elektrotechnik & automation*, Nr. 9, S. 22-25, 2012.
- [41] S. Donati. "Developing self-mixing interferometry for instrumentation and measurements", *Laser & Photonics Reviews*, Vol. 6, Nr. 3, S. 393-417, 2012.
- [42] T. Taimre, M. Nikolic, K. Bertling, Y.L. Lim, T. Bosch und A.D. Rakic, "Laser feedback interferometry: a tutorial on the self-mixing effect for coherent sensing", *Advances in Optics and Photonics*, Vol. 7, Nr. 3, S. 570-631, 2015.
- [43] Y. Gao, Y. Yu, J. Xi und Q. Guo, "Simultaneous measurement of vibration and parameters of a semiconductor laser using selfmixing interferometry", *Applied Optics*, Vol. 53, Nr. 19, 4256–4263, 2014.
- [44] C. Jiang, Z. Zhang und C. Li, "Vibration measurement based on multiple self-mixing interferometry", *Optics Communications*, Vol. 367, S. 227–233, 2016.
- [45] C. Jiang, X. Wen, S. Yin und Y. Liu, "Multiple self-mixing interference based on phase modulation and demodulation for vibration measurement", *Applied Optics*, Vol. 56, Nr. 4, S. 1006-1011, 2017.
- [46] J. Perchoux, L. Campagnolo, Y. L. Lim und A. D. Rakic, "'lens-free' self-mixing sensor for velocity and vibrations measurements", in *2010 Conference on Optoelectronic and Microelectronic Materials and Devices*, S. 43-44, 2010
- [47] A. Magnani, A. Pesatori, und M. Norgia, "Self-mixing vibrometer with real-time digital signal elaboration," *Applied Optics*, Vol. 51, Nr. 21, S. 5318–5325, 2012.
- [48] Z. Huang, X. Sun und C. Li, "Self-mixing interference signal analysis based on Fourier transform method for vibration measurement", *Optical Engineering*, Vol. 52, Nr. 5, 053601, 2013.
- [49] M. Usman, U. Zabit, O. D. Bernal, G. Raja, und T. Bosch, "Detection of Multimodal Fringes for Self-Mixing-Based Vibration Measurement," *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, Vol. 69, Nr. 1, S. 258-267, 2020.
- [50] Z. Zhang, C. Jiang, L. Shen, C. Li, und Z. Huang, "Vibration Measurement Based on the Local Maximum Detection Algorithm for Laser Self-Mixing Interferometry," *IEEE Access*, Vol. 8, S. 63462-63469, 2020.
- [51] Z. Zhang, F. Wang, T. Yuan und C. Li, "Multiple self-mixing interferometry based on lock-in amplifier analysis for vibration measurement," *Optical Review*, Vol. 27, S. 313-320, 2020.

- 
- [52] Y. Tao, M. Wang und W. Xia, "Semiconductor laser self-mixing micro-vibration measuring technology based on Hilbert transform", *Optics Communications*, Vol. 368, S. 12–19, 2016.
- [53] J. Chen, H. Zhu, W. Xia, D. Guo, H. Hao, und M. Wang, "Self-mixing birefringent dual-frequency laser Doppler velocimeter," *Optics Express*, Vol. 25, Nr. 2, S. 560-572, 2017.
- [54] A. Magnani und M. Norgia, "Spectral analysis for velocity measurement through self-mixing interferometry," *IEEE Journal of Quantum Electronics*, Vol. 49, Nr. 9, S. 765–769, 2013.
- [55] A. Magnani, A. Pesatori, und M. Norgia, "Real-time self-mixing interferometer for long distances," *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, Vol. 63, Nr. 7, S. 1804–1809, 2014.
- [56] M. Norgia, D. Melchionni, und A. Pesatori, "Self-mixing instrument for simultaneous distance and speed measurement," *Optics and Lasers in Engineering*, Vol. 99, S. 31-38, 2017.
- [57] M. J. Rudd, "A laser doppler velocimeter employing the laser as a mixer-oscillator", *Journal of Physics E: Scientific Instruments*, Vol. 1, Nr. 7, S. 723-726, 1968.
- [58] L. Scalise, Y. Yu, G. Giuliani, G. Plantier und T. Bosch. "Self-mixing laser diode velocimetry: application to vibration and velocity measurement", *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, Vol. 53, Nr. 1, S. 223-232, 2004.
- [59] A. S. Alexandrova, V. Tzoganis und C. P. Welsch, "Laser diode self-mixing interferometry for velocity measurements", *Optical Engineering*, Vol. 54, Nr. 3, 2015.
- [60] W. Huang, H. Gui, L. Lu, J. Xie, H. Ming, D. He, H. Wang & T. Zhao, "Effect of angle of incidence on self-mixing laser doppler velocimeter and optimization of the system", *Optics Communications*, Vol. 281, Nr. 6, S. 1662 -1667, 2008.
- [61] S. Shinohara, H. Naito, H. Yoshida, H. Ikeda, und M. Sumi, "Compact and versatile self-mixing type semiconductor laser doppler velocimeters with direction discrimination circuit," *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, Vol. 38, Nr. 2, S. 574–577, 1989.
- [62] N. Tsukuda, S. Shinohara, T. Shibata, H. Yoshida, H. Ikeda, und M. Sumi, "New range-finding speedometer using a self-mixing laser diode modulated by triangular wave pulse current," in *Conference Proceedings. 10th Anniversary. IMTC/94. Advanced Technologies in I M. 1994 IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conference*, Nr. 94CH3424-9, Vol. 1, S. 332-335 1994.
- [63] S. M. Yang und S. J. Ke, "Performance evaluation of a velocity observer for accurate velocity estimation of servo motor drives," *IEEE Transactions on Industry*

- Applications*, Vol. 36, Nr. 1, S. 98–104, 2000.
- [64] D. Guo, M. Wang und S. Tan, “Self-mixing interferometer based on sinusoidal phase modulating technique”, *Optics Express*, Vol. 13, Nr. 5, S. 1537-1543, 2005.
- [65] S. Donati, G. Giuliani und S. Merlo, “Laser Diode Feedback Interferometer for Measurement of Displacements without Ambiguity”, *IEEE Journal of Quantum Electronics*, Vol. 31, Nr. 1, S. 113-119, 1995.
- [66] M. Norgia, S. Donati und D. D’Alessandro, “Interferometric Measurements of Displacement on a Diffusing Target by a Speckle Tracking Technique”, *IEEE Journal of Quantum Electronics*, Vol. 37, Nr. 6, S. 800-806, 2001.
- [67] M. Norgia und S. Donati, “A displacement-measuring instrument utilizing self-mixing interferometry,” *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, Vol. 52, Nr. 6, S. 1765–1770, 2003.
- [68] S. Donati, L. Falzoni, und S. Merlo, “A pc-interfaced, compact laser-diode feedback interferometer for displacement measurements,” *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, Vol. 45, Nr. 6, S. 942–947, 1996.
- [69] C. Bes, G. Plantier und T. Bosch, “Displacement measurements using a self-mixing laser diode under moderate feedback”. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, Vol. 55, Nr. 4, S. 1101-1105, 2006.
- [70] Y. Fan, Y. Yu, J. Xi, und J. F. Chicharo, “Improving the measurement performance for a self-mixing interferometry-based displacement sensing system”, *Applied Optics*, Vol. 50, Nr. 26, S. 5064-5072, 2011.
- [71] N. Servagent, F. Gouaux und T. Bosch, “Measurements of displacement using the self-mixing interference in a laser diode”, *Journal of Optics*, Vol. 29, Nr. 3, S. 168-173, 1998.
- [72] N. Servagent, T. Bosch und M. Lescure, “Design of a Phase-Shifting Optical Feedback Interferometer Using an Electrooptic Modulator”, *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*, Vol. 6, Nr. 5, S. 798-802, 2000.
- [73] M. Wang und G. Lai, “Displacement measurement based on Fourier transform method with external laser cavity modulation”, *Review of Scientific Instruments*, Vol. 72, Nr. 8, S. 3440-3445, 2001.
- [74] X. Wang, Z. Xiang, B. Gao und C. Jiang, “Multiple self-mixing interferometry for displacement measurement based on quadrature demodulation technique”, *Optical Engineering*, Vol. 55, Nr. 12, 126116, 2016.
- [75] X. Wang, R. Tan, C. Jiang, B. Gao und P. Chen, “Micro-displacement measurement based on multiple self-mixing interference technology”, *Journal of Modern Optics*,

- Vol. 64, Nr. 16, S. 1632–1638, 2017.
- [76] K. Zhu, B. Guo, Y. Lu, S. Zhang, und Y. Tan, "Single-spot two-dimensional displacement measurement based on self-mixing interferometry," *Optica*, Vol. 4, Nr. 7, S. 729-735, 2017.
- [77] U. Zabit, T. Bosch und F. Bony, "Adaptive transition detection algorithm for a self-mixing displacement sensor," *IEEE Sensors Journal*, Vol. 9, Nr. 12, S. 1879–1886, 2009.
- [78] T. Dong, B. Gao, C. Qing und Y. Geng, "Rotation velocity measurement based on a self-mixing grating interferometer," *Applied Optics*, Vol. 59, Nr. 20, S. 5930-5936, 2020.
- [79] C. Jiang, Y. Geng, Y. Liu, Y. Liu, P. Chen und S. Yin, "Rotation velocity measurement based on self-mixing interference with a dual-external-cavity single-laser diode." *Applied Optics*, Vol. 58, Nr. 3, S. 604-608, 2019.
- [80] T. Yoshino, M. Nara, S. Mnatzakanian, B.S. Lee und C. Strand, "Laser diode feedback interferometer for stabilization and displacement measurements", *Applied Optics*, Vol. 26, Nr. 5, S. 892-897, 1987.
- [81] W. J. Wu, C. K. Lee, und C. T. Hsieh, "Signal processing algorithms for doppler effect based nanometer positioning systems," *Japanese Journal of Applied Physics*, Vol. 38, Nr. 3B Part 1, S. 1725–1729, 1999.
- [82] G. Giuliani, M. Norgia, S. Donati und T. Bosch, "Laser diode self-mixing technique for sensing applications", *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics*, Vol. 4, Nr. 6, S. 283-294, 2002.
- [83] S. Donati. *Electro-Optical Instrumentation: Sensing and Measuring with Lasers*, New Jersey: Prentice Hall New Jersey, 2004.
- [84] M. Nikolic, E. Hicks, Y. L. Lim, K. Bertling, und A. D. Rakic, "Selfmixing laser doppler flow sensor: an optofluidic implementation", *Applied Optics*, Vol. 52, Nr. 33, S. 8128-8133, 2013.
- [85] M. Liess, G. Weijers, C. Heinks, A. van der Horst, A. Rommers, R. Duijve, und G. Mimmagh, "A miniaturized multidirectional optical motion sensor and input device based on laser self-mixing," *Measurement Science and Technology*, Vol. 13, Nr. 12, S. 2001-2006, 2002.
- [86] Y. K. Zhao, X. W. Fan, C. C. Wang, und L. Lu, "An improved intersection feedback micro-radian angle-measurement system based on the Laser self-mixing interferometry," *Optics and Lasers in Engineering*, 126, 2020.
- [87] J. Zhong, X. Zhang und Z. Ju. "Absolute small-angle measurement based on optical

- feed- back interferometry”. *Chinese Optics Letters*, Vol. 6, Nr. 11, S. 830–832, 2008.
- [88] S. Zhang, Y. Tan Y and S. Zhang. “Non-contact angle measurement based on parallel multi- plex laser feedback interferometry”, *Chinese Physics B*, Vol. 23, Nr. 11, 114202, 2014.
- [89] B. Yang, D. Wang, L. Zhou, S. Wu, R. Xiang, W. Zhang, H. Gui, J. Liu, H. Wang, L. Lu und B. Yu, “A ultra-small-angle self-mix- ing sensor system with high detection resolution and wide measurement range.” *Optics & Laser Technology* Vol. 91, S. 92–97, 2017.
- [90] P. Dean, Y. L. Lim, A. Valavanis, R. Kliese, M. Nikolic´, S. P. Khanna, M. Lachab, D. Indjin, Z. Ikonic´, P. Harrison, A. D. Rakic´, E. H. Linfield, und A. G. Davis, “Terahertz imaging through self-mixing in a quantum cascade laser,” *Optics Letters*, Vol. 36, Nr. 13, S. 2587–2589, 2011.
- [91] P. Dean, A. Valavanis, J. Keeley, K. Bertling, Y. L. Lim, R. Alhathlool, S. Chowdhury, T. Taimre, L.H. Li,D. Indjin, S. J. Wilson,A.D. Rakic´, E. H. Linfield, und A. G. Davies, “Coherent three-dimensional terahertz imaging through selfmixing in a quantumcascade laser,” *Applied Physics Letters*, Vol. 103, 181112.1-4, 2013.
- [92] P. Dean, A. Valavanis, J. Keeley, K. Bertling, Y. Lim, R. Alhathlool, A. Burnett, L. Li, S. Khanna, D. Indjin, T. Taimre, A. D. Rakic´, E. H. Linfield, und A. G. Davies, “Terahertz imaging using quantum cascade lasers—a review of systems and applications,” *Journal of Physics D: Applied Physics*, Vol. 47, 374008, 2014.
- [93] J. Keeley, P. Dean, A. Valavanis, K. Bertling, Y. L. Lim, R. Alhathlool, T. Taimre, L. H. Li, D. Indjin, A. D. Rakic´, E. H. Linfield, und A. G. Davies, “Three-dimensional terahertz imaging using swept-frequency feedback interferometry with a quantum cascade laser,” *Optics Letters*, Vol. 40, Nr. 6, S. 994–997, 2015.
- [94] Y.L. Lim, K. Bertling, T. Taimre, T. Gillespie, C. Glenn, A. Robinson, D. Indjin, Y.J. Han, L.H. Li, E.H. Linfield, G. Davies, P. Dean, A.D. Rakic´, “Coherent imaging using laser feedback interferometry with pulsed-mode terahertz quantum cascade lasers”, *Optics Express*, Vol. 27, Nr. 7, S. 10221–10233, 2019.
- [95] F. Mezzapesa, M. Petruzzella, M. Dabbicco, H. Beere, D. Ritchie, M. Vitiello, und G. Scamarcio, “Continuous-wave reflection imaging using optical feedback interferometry in terahertz and mid-infrared quantum cascade lasers,” *IEEE Transactions on Terahertz Science and Technology*, Vol. 4, Nr. 5, S. 631–633, 2014.
- [96] A. D. Rakić, T. Taimre, K. Bertling, Y. L. Lim, P. Dean, A. Valavanis, und D. Indjin, "Sensing and imaging using laser feedback interferometry with quantum cascade lasers," *Applied Physics Reviews*, Vol. 6, Nr. 2, 021320, 2019.
- [97] M. Ravaro, V. Jagtap, G. Santarelli, C. Sirtori, L. Li, S. Khanna, E. H. Linfield, and S. Barbieri, “Continuous-wave coherent imaging with terahertz quantum cascade lasers

- using electro-optic harmonic sampling,” *Applied Physics Letters*, Vol. 102, Nr. 9, 091107, 2013.
- [98] Y. Ren, R. Wallis, D. S. Jessop, R. Degl’Innocenti, A. Klimont, H. E. Beere, und D. A. Ritchie, “Fast terahertz imaging using a quantum cascade amplifier,” *Applied Physics Letters*, Vol. 107, Nr. 1, 011107, 2015.
- [99] M. Wienold, T. Hagelschuer, N. Rothbart, L. Schrottke, K. Biermann, H. Grahn, und H.-W. Hubers, “Real-time terahertz imaging through self-mixing in a quantum-cascade laser,” *Applied Physics Letters*, Vol. 109, Nr. 1, 011102 2016.
- [100] B. Liu, Y. Ruan, Y. Yu, J. Xi, Q. Guo, J. Tong, und G. Rajan, “Laser self-mixing fiber Bragg grating sensor for acoustic emission measurement,” *Sensors*, Vol. 18, Nr. 6, 1956, 2018.
- [101] B. Liu, Y. Ruan, and Y. Yu, "All-Fiber Laser-Self-Mixing Sensor for Acoustic Emission Measurement," *Journal of Lightwave Technology*, Vol. 39, Nr. 12, S. 4062-4068, 2021.
- [102] M. Suleiman, H. C. Seat, und T. Bosch, “Interrogation of fiber Bragg grating dynamic strain sensors by self-mixing interferometry,” *IEEE Sensors Journal*, Vol. 8, Nr. 7, S. 1317-1323, 2008.
- [103] M. C. Cardilli, M. Dabbicco, F. P. Mezzapesa, und G. Scamarcio, “Linewidth measurement of mid infrared quantum cascade laser by optical feedback interferometry,” *Applied Physics Letters*, Vol. 108, Nr. 3, 031105, 2016.
- [104] G. Giuliani, S. Donati, und W. Elsässer, “Measurement of linewidth enhancement factor of different semiconductor lasers in operating conditions,” *Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering 61841*, 61841D, 2006.
- [105] T. Inoue, K. Tsushima, S. Mori, und K. Kasahara, “Quantum cascade laser intensity noise under external feedback conditions estimated from selfmixing method,” *Electronics Letters*, Vol. 49, S. 407–409, 2013.
- [106] J. von Staden, T. Gensty, W. Elsässer, G. Giuliani, und C. Mann, “Measurements of the a factor of a distributed-feedback quantum cascade laser by an optical feedback self-mixing technique,” *Optics Letters*, Vol. 31, Nr. 17, S. 2574–2576, 2006.
- [107] Y. Yu, G. Giuliani, und S. Donati, “Measurement of the linewidth enhancement factor of semiconductor lasers based on the optical feedback self-mixing effect”, *IEEE Photonics Technology Letters*, Vol. 16, Nr. 4, S. 990-992, 2004.
- [108] Y.G. Yu, J.T. Xi, J.F. Chicharo und T. Bosch, “Toward automatic measurement of the linewidth-enhancement factor using optical feedback self-mixing interferometry with weak optical feedback”, *IEEE Journal of Quantum Electronics*, Vol. 43, Nr. 7, S. 527–534, S. 2007.

- [109] Y. Yu und J. Xi, "Influence of external optical feedback on the alpha factor of semiconductor lasers," *Optics Letters*, Vol. 38, Nr. 11, S. 1781–1783, 2013.
- [110] B. Liu, Y. Ruan, Y. Yu, B. Wang, und L. An, "Influence of feedback optical phase on the relaxation oscillation frequency of a semiconductor laser and its application," *Optics Express*, Vol. 29, Nr. 3, S. 3163-3172, 2021.
- [111] R. Lang und K. Kobayashi, "External optical feedback effects on semiconductor injection laser properties", *IEEE Journal of Quantum Electronics*, Vol. 16, Nr. 3, S. 347-355, 1980.
- [112] K. Petermann, *Laser diode modulation and noise* Heidelberg: Springer, 1988.
- [113] K. Petermann, "External optical feedback phenomena in semiconductor lasers." *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*, Vol. 1, Nr. 2, S. 480-489, 1995.
- [114] Y. Yu, Y. Fan, B. Liu, „Self-mixing interferometry and its applications”, *Optical Design and Testing*, Vol. 7, 100210, 2016.
- [115] A. Uchida, *Optical communication with chaotic lasers: applications of nonlinear dynamics and synchronization*. Weinheim: Wiley-VCH, 2012.
- [116] I. D. Henning, I. D. und J. V. Collins, "Measurements of the semiconductor laser linewidth broadening factor", *Electronics Letters*, Vol. 19, Nr. 22, S. 927-929, 1983.
- [117] C. Henry, "Theory of the linewidth of semiconductor lasers", *IEEE Journal of Quantum Electronics*, Vol. 18, Nr. 2, S. 259-264, 1982.
- [118] M. Osinski, M. und J. Buus, J., "Linewidth broadening factor in semiconductor lasers - An overview", *Journal of Quantum Electronics*, Vol. 23, Nr. 1, S. 9-29, 1987.
- [119] J. Mork, B. Tromborg, und J. Mark, "Chaos in semiconductor lasers with optical feedback: theory and experiment." *IEEE Journal of Quantum Electronics*, Vol. 28, Nr. 1, S. 93-108, 1992.
- [120] Y. Fan, Y. Yu, J. Xi, und Q. Guo, "Stability limit of a semiconductor laser with optical feedback", *IEEE Journal of Quantum Electronics*, Vol. 51, Nr. 2, S. 1-9, 2015.
- [121] J. Ohtsubo, "Semiconductor Lasers Stability, Instability and Chaos", Heidelberg: Springer, 2013.
- [122] M. Nikolic, D. P. Jovanovi, Y. L. Lim, K. Bertling, T. Taimre und A. D. Rakic, "Approach to frequency estimation in self-mixing interferometry: multiple signal classification", *Applied Optics*, Vol. 52, Nr. 14, S. 3345-3350, 2013.
- [123] A. Pruijboom, M. Schemmann, J. Hellmig, J. Schutte, H. Moench, und J. Pankert, "Vcsel-based miniature laser-doppler interferometer," in *Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering*, 6908, 2008.

- 
- [124] A. Mowla, M. Nikolic, T. Taimre, J. Tucker, Y. Lim, K. Bertling und A. Rakic. "Effect of the optical system on the Doppler spectrum in laser-feedback interferometry", *Applied Optics*, Vol. 54, Nr. 1, S. 18-26, 2015.
- [125] R. Kennel: Detecting Crossover Moments of Alternating Voltages. First European Conference on Power Electronics and Applications EPE, Brussels (1985), S. 2.23 - 2.27
- [126] L. Lajmi und T. Müller. "Labor Informationstechnik", Ostfalia Hochschule für angewandte Wissenschaften, 2016.
- [127] J.G. Liu. "Eigenkalibrierende Meßverfahren und deren Anwendungen bei den Messungen elektrischer Größen". Düsseldorf: VDI Verlag GmbH, Vol. 8, Nr. 830, 2000.
- [128] Y. Lee, T.P. Cheatham und J. Wiesner. "The application of correlation functions in the detection of small signals in noise", Technical Report No. 141, Research Laboratory of Electronics, Massachusetts Institute of Technology, 1949.
- [129] A. Kotowski, "Cross-Correlation-Based Method vs. Classical Fft for Spectral Analysis of Impulse Response" *Acta Mechanica et Automatica*, Vol. 8, Nr. 4, S. 219-222, 2014.
- [130] A.H. Najmi und J. Sadowsky. "The Continuous Wavelet Transform and Variable Resolution Time-Frequency Analysis", *Johns Hopkins APL Technical Digest*, Vol. 18, Nr. 1, S. 134-139, 1997.
- [131] N.A. Khan, M.N. Jafri und S.A. Qazi. "Improved resolution short time Fourier transform", in *2011 7th International Conference 424 on Emerging Technologies*, 2011.
- [132] J. Larsen, "Correlation Functions and Power Spectra", Section for Cognitive Systems, Informatics and Mathematical Modelling, Technische Universität Dänemarks, 8. Edition, 2009.

## Abbildungsverzeichnis

1.1	Schematische Darstellung der Frequenzmessung	3
1.2	Schematische Darstellung der Periodendauermessung	3
1.3	Schematische Darstellung der Phasenbestimmung	4
1.4	Schematischer Aufbau des SMI-Systems	5
2.1	Schematischer Aufbau des SMI-Systems mit Kennzeichnung der Hohlräume	10
2.2	Schematischer Aufbau eines SMI-Geschwindigkeitssensors (Angepasst mit Erlaubnis von [39] © The Optical Society)	16
2.3	SMI-Signale bei unterschiedliche Bewegungsrichtungen; a) gegen Uhrzeigersinn; b) im Uhrzeigersinn	17
2.4	Typisches SMI-Signal (Angepasst mit Erlaubnis von [VO2] © The Optical Society)	18
3.1	Nullpunktdetektion	19
3.2	Nullpunktdetektion mit Hysteresebedingung	20
3.3	Nullpunktdetektion mit Hysteresebedingung bei variierender Amplitude	20
3.4	Nullpunktdetektion mit linearer Regression bei variierender Amplitude	21
3.5	a) verrauschtes Sinussignal; b) Autokorrelationsfunktion des Sinussignals	23
3.6	Genauigkeit der Methodik bei unterschiedlichen SNR	24
3.7	Verhältnis zwischen Signalabschnittsgröße und die Genauigkeit	24
3.8	Signalmodell von Gleichung (3.11)	26
3.9	Genauigkeit der Methodik bei unterschiedlichen SNR mit und ohne Amplitudenmodulation a) Betrachtung 0 bis 20 dB; b) Betrachtung von 10 bis 20 dB	26
3.10	Autokorrelationsfunktion von Signalen mit und ohne Amplitudenmodulation	27
3.11	Vergleich der Standardabweichungen mit und ohne Amplitudenmodulation	27
3.12	a) verrauschtes Signal; b) Kreuzkorrelation für Fall 1; c) Kreuzkorrelation für Fall 2; d) Kreuzkorrelation für Fall 3;	32
3.13	Genauigkeit der Methoden bei unterschiedlichen SNR	34

---

3.14	Verhältnis zwischen Signalabschnittsgröße und der Genauigkeit	34
3.15	Verhältnis zwischen Signalabschnittsgröße und der Genauigkeit bei einer Abtastfrequenz von 500 kHz	35
3.16	Verhältnis zwischen der Abtastfrequenz und der durchschnittlichen Abweichung der Frequenzbestimmung	36
3.17	Kreuzkorrelationsfunktion eines verrauschten und rauschfreien Sinussignals	36
3.18	(a) verrauschtes und rauschfreies Signal bei der Abtastfrequenz 100 kHz; (b) verrauschtes und rauschfreies Signal bei der Abtastfrequenz 1 MHz;	37
3.19	Genauigkeit der Kreuzkorrelation bei unterschiedlichen SNR mit und ohne Amplitudenmodulation; a) Fall 1; b) Fall 2; c) Fall 3 (siehe S.39)	38
3.20	Genauigkeit der Kreuzkorrelation bei unterschiedlicher Anzahl an genutzter Datenpunkte N mit und ohne Amplitudenmodulation; a) Fall 1; b) Fall 2; c) Fall 3 (siehe S. 39)	39
3.21	ermittelte Phase einer Kreuzkorrelationsfunktion bei Referenz- und Messsignale mit gleicher Frequenz unter verschiedene Anzahl an genutzte Datenpunkte	41
3.22	Genauigkeit der Phasenbestimmung bei unterschiedlichen SNR	42
3.23	Genauigkeit der Phasenbestimmung bei unterschiedlicher Anzahl an genutzte Datenpunkte	42
3.24	Phase der Kreuzkorrelationsfunktion bei unterschiedlichen Frequenzen des Referenzsignals	43
3.25	Phase der Kreuzkorrelationsfunktion bei Frequenzunterschied und unterschiedliche Anzahl genutzter Datenpunkte	43
3.26	Genauigkeit der Phasenbestimmung verrauschter Signale bei unterschiedlicher Anzahl genutzter Datenpunkte	44
3.27	durchschnittliche Abweichung der Phasenbestimmung bei unterschiedlichem SNR	45
3.28	durchschnittliche Abweichung der Phasenbestimmung bei unterschiedlicher Signalabschnittslänge	46
3.29	Auswirkungen des Vorzeichenwechsels in der Amplitude der Kreuzkorrelation	46
3.30	Abweichung der Phasenbestimmung eines rauschfreien Signals bei unterschiedlicher Signalabschnittslänge	47
3.31	Abweichung der Phasenbestimmung eines rauschfreien Signals bei	48

	unterschiedlichen Abtastfrequenzen	
3.32	durchschnittliche Abweichung der Phasenbestimmung eines verrauschten Signals bei unterschiedliche Abtastfrequenzen	49
3.33	Berechnungsprozess des Kreuzkorrelationsspektrums	52
3.34	Kreuzkorrelationsspektrum eines Sinussignals	52
3.35	Kreuzkorrelationsspektren mit symmetrischer oder unsymmetrischer Kreuzkorrelation	53
3.36	Kreuzkorrelationsspektrums eines Signals mit zwei Frequenzen. Die tatsächliche Amplitude des Signalanteil mit der Frequenz 2 kHz liegt bei (a) 0.1 und (b) 0.5	54
3.37	Die Kreuzkorrelationsspektren von zwei Sinussignalen und deren Summe	54
3.38	Kreuzkorrelationsspektrum bei einer Signalabschnittslänge von 10000 Datenpunkten	55
3.39	Kreuzkorrelationsspektrum der neuen Methodik mit der Hälfte der Datenpunkte im Vergleich zum Spektrum der alten Methodik bei verrauschtem Signal	56
3.40	Kreuzkorrelationsspektren bei verschiedene SNR; (a) 10 dB; (b) 0 dB; (c) -10 dB; (d) -20 dB	56
3.41	(a) SNR nach der Signalverarbeitung (b) SNR Verbesserungen durch die Methoden	57
3.42	(a) NRMSE der Methoden unter verschiedene SNR (b) Durchschnittliche Abweichung der Methoden unter verschiedene SNR	58
3.43	(a) NRMSE der Methoden unter verschiedene SNR (b) Durchschnittliche Abweichung der Methoden unter verschiedene SNR; verwendete Signallänge beträgt 2000 Datenpunkte	59
3.44	Abweichungen des Kreuzkorrelationsspektrums unter Nutzung verschiedener Signallängen	60
3.45	Vergleich zwischen dem regulären und vereinfachten Kreuzkorrelationsspektrums	63
3.46	Vereinfachte Kreuzkorrelationsspektren bei unterschiedlichen Phasen des Messsignals	63
3.47	Vereinfachte Kreuzkorrelationsspektren bei unterschiedlichen Phasen des Referenzsignals	64
3.48	Kreuzkorrelationsspektren unter Nutzung verschiedener Signallängen	64
3.49	Vergleich der Messgenauigkeit der regulären und vereinfachten Kreuzkorrelationsspektren unter unterschiedlichen SNR	65

---

3.50	Vergleich zwischen regulären und vereinfachten Kreuzkorrelationsspektrum bei mehreren Signalfrequenzen	66
3.51	das reguläre und vereinfachte Kreuzkorrelationsspektrum mithilfe der unsymmetrischen Kreuzkorrelation	67
3.52	Kreuzkorrelationsspektrum der neuen Methodik mit der Hälfte der Datenpunkte im Vergleich zum Spektrum der alten Methodik	67
3.53	Kreuzkorrelationsspektrum der neuen Methodik mit der Hälfte der Datenpunkte im Vergleich zum Spektrum der alten Methodik bei verrauschtem Signal	68
3.54	Kreuzkorrelationsspektren der alten und neuen Methodik bei verrauschten Signalen	68
3.55	Kreuzkorrelationsspektrum mit und ohne Phasenunterschied von 0.1 rad	69
3.56	Kreuzkorrelationsspektrum mit und ohne Phasenunterschied von 0.5 rad	69
3.57	Kreuzkorrelationsspektrum mit und ohne Phasenunterschied von 1 rad	70
3.58	Kreuzkorrelationsspektrum mit und ohne Phasenunterschied von $\pi/2$ rad	70
3.59	Genauigkeit des Kreuzkorrelationsspektrums bei unterschiedlicher Anzahl an verwendete Datenpunkte	71
3.60	Genauigkeit der Frequenzbestimmung des vereinfachten Kreuzkorrelationsspektrums mit symmetrische oder unsymmetrische Kreuzkorrelation bei korrekte Phaseninformationen	71
3.61	Funktionsprinzip des iterativen Selbstkorrekturalgorithmus	72
3.62	der iterative Selbstkorrekturalgorithmus bei der Phasenbestimmung über DFR	73
3.63	iterativer Selbstkorrekturalgorithmus zur Phasenbestimmung mit Kreuzkorrelation und DFR	75
3.64	Genauigkeit der Phasenbestimmung mithilfe symmetrischer Kreuzkorrelation und iterativen Selbstkorrekturalgorithmus bei unterschiedlichem SNR	77
3.65	Genauigkeit der Phasenbestimmung mithilfe symmetrischer Kreuzkorrelation und iterativen Selbstkorrekturalgorithmus bei unterschiedlicher Anzahl verwendeter Datenpunkte	77
4.1	Signalselektionsmethode: (a) Offsetkorrektur; (b) Betragsfunktion; (c) Aufteilung der Betragsfunktion und Wertanalyse (d) Signalselektion	79

4.2	Nullpunktdetektion und Periodenlängenbestimmung der Autokorrelationsfunktion	81
4.3	Durchschnittsfenster	81
4.4	a) Kreuzkorrelationsspektrum eines SMI-Signals; b) Integral des Kreuzkorrelationsspektrums; c) Abstraktion des Kreuzkorrelationsspektrums	83
4.5	Schema der Frequenz- und Phasenbestimmung	84
4.6	durchschnittliche Abweichung der Frequenz- und Phasenbestimmung unter verschiedene SNR	85
4.7	durchschnittliche Abweichung der Frequenz- und Phasenbestimmung bei unterschiedlichen verwendeten Signalabschnittslängen im Kreuzkorrelationsspektrum	86
4.8	durchschnittliche Abweichung der Frequenz- und Phasenbestimmung bei unterschiedlichen verwendeten Signalabschnittslängen für die Phasenbestimmung	87
4.9	Algorithmus der iterativen Frequenz- und Phasenbestimmung	87
4.10	durchschnittliche Abweichung der Frequenz- und Phasenbestimmung bei unterschiedlicher Zahl an Iterationen des Algorithmus	88
4.11	optimierte Version von Methode 1	89
4.12	Genauigkeit von Methode 1 im Vergleich zum regulären Kreuzkorrelationsspektrum	89
4.13	Algorithmus von Methode 2	90
4.14	durchschnittliche Abweichung der Frequenz- und Phasenbestimmung bei unterschiedlicher Zahl an Iterationen des Algorithmus	91
4.15	optimierte Version von Methode 2	92
4.16	Genauigkeit von Methode 2 im Vergleich zur Methode 1 und reguläres Kreuzkorrelationsspektrum	92
4.17	durchschnittliche Abweichung der Frequenz- und Phasenbestimmung bei unterschiedlichen verwendeten Signalabschnittslängen im Kreuzkorrelationsspektrum	93
4.18	durchschnittliche Abweichung der Frequenz- und Phasenbestimmung bei unterschiedlichen verwendeten Signalabschnittslängen für die Phasenbestimmung	94
5.1	Systemaufbau zur Drehgeschwindigkeitsmessung mithilfe von SMI. A: Sensoreinheit; B Servomotor; C: Oszilloskop; D: Stromversorgung	97
5.2	Die Auswahlmethodik des ersten Experiments zur Bestimmung der	98

---

	Signalabschnitte für die Autokorrelation; blaues Signal: ausgeschlossenes Signalabschnitt; oranges Signal: akzeptiertes Signalabschnitt; grünes Fenster: genutztes Signalabschnitt für Autokorrelation	
5.3	NRMSE unter verschiedene Signalselektionsgrenzen; (a) 5 RPM, (b) 50 RPM, (c) 150 RPM, (d) 200 RPM	99
5.4	Die Auswahlmethodik des zweiten Experiments zur Bestimmung der Signalabschnitte für die Autokorrelation; blaues Signal: ausgeschlossenes Signalabschnitt; oranges Signal: akzeptiertes Signalabschnitt; grünes Fenster: genutztes Signalabschnitt für Autokorrelation	99
5.5	Linearität zwischen Dopplerfrequenz und Rotationsgeschwindigkeit	100
5.6	normalisierte FFT und Kreuzkorrelationsspektrum im Vergleich	102
5.7	Linearität zwischen Dopplerfrequenz und Rotationsgeschwindigkeit beim regulären Kreuzkorrelationsspektrum	103
5.8	normalisierte FFT, reguläres sowie vereinfachtes Kreuzkorrelationsspektrum im Vergleich	105
5.9	Linearität zwischen Dopplerfrequenz und Rotationsgeschwindigkeit bei Methode 1	106
5.10	normalisierte reguläres Kreuzkorrelationsspektrum und vereinfachte Kreuzkorrelationsspektrum mit symmetrischer Phasenbestimmung im Vergleich	108
5.11	in Methode 2 verwendete Signalabschnitte	108
5.12	normalisierte reguläres und vereinfachtes Kreuzkorrelationsspektrum mit symmetrischer Phasenbestimmung bei gleichen betrachteten Signalabschnitt	109
5.13	Linearität zwischen Dopplerfrequenz und Rotationsgeschwindigkeit bei Methode 2	110

## Tabellenverzeichnis

2.1	Bedeutung der Laserparameter in den LK-Gleichungen	14
3.1	SNR des SMI-Signals vor und nach der Rauschunterdrückung mit unterschiedlichen Methoden	25
3.2	durchschnittliche Abweichung der Frequenzbestimmung nach den jeweiligen Signalunterdrückungsmethoden	25
3.3	Phasenbestimmung mithilfe der symmetrischen Kreuzkorrelation bei asynchroner Abtastung	49
3.4	NRMSE und durchschnittliche Abweichung des Kreuzkorrelationsspektrums	60
3.5	Wertzuweisung der Simulationsparameter	66
3.6	in Parametern der Gleichung (3.65) eingesetzte Werte	73
3.7	Ergebnisse des iterativen Selbstkorrekturalgorithmus	74
3.8	Phasenbestimmung mithilfe der symmetrischen Kreuzkorrelation bei asynchroner Abtastung	74
3.9	Phasenbestimmung mit symmetrischer Kreuzkorrelation und iterativen Selbstkorrekturalgorithmus bei asynchroner Abtastung	75
3.10	Phasenbestimmung mit symmetrischer Kreuzkorrelation und iterativen Selbstkorrekturalgorithmus bei asynchroner Abtastung bei fehlerhaften Frequenzinformationen	76
3.11	Phasenbestimmung mit symmetrischer Kreuzkorrelation und iterativen Selbstkorrekturalgorithmus bei asynchroner Abtastung und additiven Rauschen	76
4.1	Verwendete Kreuzkorrelationsfunktion in Methode 1 und Methode 2	84
4.2	Parameterwerte der ersten Simulation	85
4.3	Parameterwerte der ersten Simulation	91
4.4	durchschnittliche Berechnungszeiten des regulären Kreuzkorrelationsspektrums und der neuen Methodik	95
5.1	Nichtlinearität der Ergebnisse	100
5.2	NRMSE der Ergebnisse mithilfe von FFT + parabolischen Fit [24]	101
5.3	NRMSE der Ergebnisse mithilfe der Autokorrelationsmethodik	101
5.4	Energie des FFT und des Kreuzkorrelationsspektrums	102
5.5	Linearität von 50 Datensätzen der jeweiligen Rotationsgeschwindigkeiten	104

---

5.6	NRMSE der Ergebnisse durch das Kreuzkorrelationsspektrum und aus Tabelle 5.3	104
5.7	Linearität des iterativen Selbstkorrekturalgorithmus bei 50 Datensätzen der jeweiligen Rotationsgeschwindigkeiten	106
5.8	NRMSE der Ergebnisse der neuen und bisherigen Methoden	107
5.9	Linearität des iterativen Selbstkorrekturalgorithmus bei 50 Datensätze der jeweiligen Rotationsgeschwindigkeiten	110
5.10	NRMSE der Ergebnisse von Methode 1 und 2 sowie vom regulären Kreuzkorrelationsspektrum	111