

Ein gleichstromgepumpter Josephson-Wanderwellenverstärker

Peter Russer

Einleitung und Zusammenfassung

Die Berechnung des elektrischen Stromes zwischen schwach gekoppelten Supraleitern durch B. D. Josephson führte im Jahre 1962 zu einer Reihe interessanter Vorhersagen, die wenig später experimentell bestätigt wurden und seither ein sehr fruchtbares Forschungsgebiet eröffnet haben [1 bis 6]. „Josephson-Element“ oder „schwach gekoppelte Supraleiter“ (im Englischen: „Josephson junction“ bzw. „superconducting weak link“) ist der Sammelbegriff für verschiedenartige supraleitende Bauelemente, in welchen der Josephson-Effekt auftritt. Charakteristische Eigenschaften von Josephson-Elementen sind, daß ein Gleichstrom bis zu einer Größe I_{max} eingepreßt werden kann, ohne daß ein Spannungsabfall auftritt und daß bei einer angelegten Gleichspannung durch das Josephson-Element ein sinusförmiger Wechselstrom mit der Amplitude I_{max} und einer Frequenz fließt, die proportional der angelegten Gleichspannung ist. Der Proportionalitätsfaktor zwischen Spannung und Frequenz ist für alle Josephson-Elemente gleich und beträgt $(483,693718 \pm 0,000060)$ MHz/ μ V [7]. Der Strom I_{max} hängt vom Material, der Geometrie und der Temperatur des Josephson-Elementes ab.

Schwach gekoppelte Supraleiter lassen sich auf unterschiedliche Weise realisieren. Bei Tunnelementen sind beide Supraleiter durch eine dünne isolierende oder normalleitende Schicht getrennt. Durch diese Schicht kann auf Grund des quantentheoretisch begründeten Tunneleffektes ein schwacher supraleitender Strom fließen. Die Herstellung von Josephson-Elementen mit isolierender Zwischenschicht erfolgt beispielsweise durch Aufdampfen eines Metallfilms auf ein isolierendes Substrat, Oxidation einer Isolierschicht (10 bis 20 Å dick) und Aufdampfen eines zweiten Metallfilms [8 bis 10]. Eine andere Realisierung schwach gekoppelter Supraleiter ist die Dayem-Brücke [10, 11]. Diese besteht aus einer einzigen aufgedampften Metallschicht von etwa 1000 Å Dicke mit einer Einschnürung auf 0,1 bis 5 μ m Breite. Die Einschnürung bewirkt die schwache Kopplung der beiden Teile des Metallfilms und bildet ein Josephson-Element. Ein experimentell leicht zu realisierendes Josephson-Element ist der Punktkontakt. Er besteht aus einer supraleitenden Spitze, die gegen eine supraleitende Fläche drückt [12 bis 14]. Nachteilig ist beim Spitzenkontakt die geringe mechanische Stabilität. Die schwache Kopplung kann bei Punktkontakten sowohl durch Tunnelschichten als auch durch leitende Kanäle hervorgerufen werden.

Auf Grund ihrer Eigenschaft, Gleichstromleistung in Wechselstromleistung umzusetzen und wegen ihrer Nichtlinearität können mit Josephson-Elementen Generatoren, Detektoren, Mischer und parametrische Verstärker für Mikrowellen realisiert werden [4, 5, 15, 16]. Die Anwendungsmöglichkeit erstreckt sich dabei bis in den Bereich der Submillimeterwellen. Mischprodukte wurden bis zu 8200 GHz experimentell nachgewiesen [17].

Parametrische Verstärker ermöglichen rauscharme Verstärkung bis zu sehr hohen Frequenzen [18 bis 20]. Clorfeine [21] erzielte 1965 parametrische Verstärkung in einem offenen Mikrowellenresonator aus Rutil, der auf einer Fläche mit einer 250 Å dicken Zinnschicht bedampft und auf 2 K gekühlt war. Der Effekt wurde damit erklärt, daß ein derartig dünner Film mikroskopische Diskontinuitäten enthält, die als Josephson-Elemente wirken. Zimmer [22] erzielte

zuerst parametrische Verstärkung mit einem Josephson-Tunnelement, das ebenfalls auf einen Rutil-Resonator aufgedampft war. In einer Anzahl darauffolgender theoretischer Arbeiten wurden die parametrische Verstärkung mit Josephson-Elementen untersucht und die Möglichkeit gleichstromgepumpter parametrischer Verstärker gezeigt [23 bis 28]. Experimentell wurden gleichstromgepumpte parametrische Verstärker für 30 MHz [29], für 9 GHz [30 bis 32] als Aufwärtsmischer von 115 MHz auf $(9 \pm 0,115)$ GHz [32, 33] und für 1 mm Wellenlänge [34] realisiert. Mit dem Aufwärtsmischer [32] wurde 25fache Leistungsverstärkung und eine auf den Eingang bezogene Rauschtemperatur ≤ 15 K erzielt. Außerdem wurden verschiedene mikrowellengepumpte parametrische Verstärker mit Josephson-Elementen realisiert [35 bis 38]. Mit Dünnschichtstrukturen, bestehend aus einer größeren Anzahl von Josephson-Elementen, wurden bei 10 GHz 12 dB Gewinn, 1 GHz Bandbreite und eine Rauschtemperatur unter 20 K [35] erzielt, und ebenfalls bei 10 GHz 24 dB Gewinn [38]. Mit einem einzigen Punktkontakt wurden bei 36 GHz 11 dB Verstärkung bei einer Rauschtemperatur unter 50 K erreicht [37].

Der Josephsonstrom ist durch sehr schwache Magnetfelder beeinflussbar [3 bis 5]. Ist ein Josephson-Element linear oder flächenhaft ausgedehnt und wird die Barriere zwischen beiden Supraleitern von einem magnetischen Fluß durchsetzt, so tritt eine räumliche Modulation der Josephsonstromdichte ein. Es spielt dabei keine Rolle, ob es sich um ein externes Magnetfeld oder um das vom Josephsonstrom selbst erzeugte Magnetfeld handelt. Durch eine angelegte Gleichspannung und ein transversales magnetisches Gleichfeld läßt sich die Josephsonstromdichte eines leitungsartigen Josephson-Elementes zeitlich und räumlich periodisch modulieren, so daß eine in einer Richtung fortschreitende Wellenbewegung der Josephsonstromdichte entsteht [4, 5, 39 bis 42]. Durch diese Wellenbewegung wird ein Parallel-Induktivitätsbelag des leitungsartigen Josephson-Elementes moduliert. Dieser Effekt kann zum Bau eines parametrischen Wanderwellenverstärkers ausgenutzt werden. Gegenüber parametrischen Verstärkern mit einer konzentrierten nichtlinearen Reaktanz bietet der parametrische Wanderwellenverstärker die Vorteile wesentlich größerer Bandbreite und der ohne besondere zusätzliche Maßnahmen erzielbaren Entkopplung zwischen Ein- und Ausgang des Verstärkers [18 bis 20]. Beim parametrischen Wanderwellenverstärker mit einem leitungsartigen Josephson-Element wird die Pumpwelle durch eine elektrische Gleichspannung und ein magnetisches Gleichfeld erzeugt. Das leitungsartige Josephson-Element erlaubt dabei auch die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen bei einer Signalfrequenz und einer oder mehreren Hilfsfrequenzen. Zur Verkopplung der elektromagnetischen Signalwelle und der Hilfswelle(n) mit der Pumpwelle müssen außer den Frequenzbedingungen auch noch Wellenzahlbedingungen erfüllt sein. Andererseits soll keine Verkopplung der Pumpwelle mit einer elektromagnetischen Welle bei der Pumpfrequenz erfolgen. Durch Ausnutzung der Dispersions-eigenschaften leitungsartiger Josephson-Elemente und durch zusätzliche konstruktive Beeinflussung dieser Dispersions-eigenschaften lassen sich diese Bedingungen erfüllen. Von Yoshida und Irie stammen zwei Vorschläge für derartige Wanderwellenverstärker, wobei es sich in einem Fall um einen Rückwärtswellenverstärker

[43] handelt und im anderen Fall [44] das nichtlineare Dispersionsverhalten eines mit einer elektromagnetischen Leitung induktiv verkoppelten leitungsformigen Josephsonelementes [42] ausgenutzt wird. Mit beiden Lösungen sind Einschränkungen hinsichtlich Frequenz und Bandbreite des Wanderwellenverstärkers verbunden.

In dieser Arbeit wird ein gleichstromgepumpter Wanderwellenverstärker mit einem leitungsformigen Josephsonelement theoretisch untersucht. Es wird davon ausgegangen, daß auf Grund der geometrischen Leitungsstruktur bei der Pumpfrequenz keine Überkoppelung von Leistung in eine elektromagnetische Leitungswelle auftreten kann. Diese Bedingung läßt sich durch Leitungen mit räumlich periodischer Struktur leicht erfüllen.

Im folgenden Abschnitt wird versucht, das physikalische Prinzip des Josephsoneffektes anschaulich zu erklären, im zweiten Abschnitt werden die Leistungsbeziehungen für die Frequenzumsetzung in Josephsonelementen erläutert, und im dritten Abschnitt wird die Phasenwellengleichung für leitungsformige Josephsonelemente abgeleitet. Diese Gleichung ist der Ausgangspunkt für die Ableitung der Grundgleichungen des Wanderwellenverstärkers im vierten Abschnitt. In den beiden folgenden Abschnitten werden Gewinn und Leistungsbilanz des verlustfreien parametrischen Verstärkers mit beiden bzw. nur mit der unteren Hilfsfrequenz berechnet. Anschließend wird das Rauschverhalten des verlustfreien parametrischen Wanderwellenverstärkers mit der unteren Hilfsfrequenz theoretisch untersucht. Im letzten Abschnitt wird die Möglichkeit der Realisierung des gleichstromgepumpten Wanderwellenverstärkers diskutiert.

1. Der Josephsoneffekt

Der Josephsoneffekt ist auf der Basis der von Bardeen, Cooper und Schrieffer aufgestellten mikroskopischen Theorie der Supraleitung erklärbar [45 bis 49]. Im Supraleiter tritt auf Grund einer von Phononen vermittelten anziehenden Wechselwirkung zwischen den Elektronen eine Paarbildung von Elektronen mit entgegengesetztem Impuls und entgegengesetztem Spin auf. Die dabei entstehenden sogenannten Cooperpaare haben wegen ihres verschwindenden Gesamtspins bosonenartiges Verhalten. Bei tiefen Temperaturen erfolgt Bose-Einstein-Kondensation einer großen Anzahl von Cooperpaaren in *einen* gemeinsamen Grundzustand. Dieser Grundzustand ist dadurch gekennzeichnet, daß alle Cooperpaare den gleichen (im stromlosen Fall verschwindenden) Wellenvektor besitzen. Immer, wenn ein quantenmechanischer Zustand von einer großen Zahl von Quanten gleichzeitig eingenommen wird, hat das zur Folge, daß die zugehörige Wellenfunktion eine makroskopische Bedeutung bekommt. Licht hat beispielsweise eine makroskopische Wellennatur, da die Photonen Bosonen sind und sich eine beliebige Anzahl im gleichen Quantenzustand befinden kann. Daher ist die Wellenfunktion des Lichtes nicht nur in der Lage, die Wahrscheinlichkeitsamplitude für ein *einzelnes* Photon zu beschreiben, vielmehr kann die gleiche Wellenfunktion auch die Amplitude des klassischen Wellenvorganges angeben, bei dem sich eine sehr große Anzahl von Photonen im gleichen Zustand befindet. Solche kohärenten Vielteilchenzustände sind bei Fermionen wegen des Paulischen Ausschließungsprinzips normalerweise nicht möglich. Im Supraleiter haben alle Cooperpaare den gleichen Gesamtimpuls und daher gleichen Materiewellenvektor. Die kondensierten Elektronen können daher durch eine einzige Wellenfunktion beschrieben werden, die repräsentativ für den kohärenten Vielteilchenzustand der kondensierten Elektronenpaare ist.

Cooperpaare bewegen sich im Supraleiter reibungsfrei, da zur Impulsabgabe an das Gitter das Paar aufbrechen müßte und dazu vorher die Bindungsenergie des Paares zugeführt werden müßte. Durch zu hohe Temperatur (a) oder zu hohe Stromdichte (b) wird die Supraleitfähigkeit zerstört, da dann (a) durch die thermische Energie oder (b) durch die Bewegungsenergie die Bindungsenergie der Cooperpaare überschritten wird. Im homogenen Supra-

leiter kann grundsätzlich kein Gleichspannungsabfall auftreten, da bei immer fortschreitender Erhöhung eines eingepprägten Gleichstromes zuerst die Supraleitfähigkeit zerstört wird.

Bei schwach gekoppelten Supraleitern kann im Koppelbereich eine Diskontinuität im Phasenwinkel der Materiewelle auftreten. Normalerweise würde eine Diskontinuität im Phasenwinkel einer Materiewelle zu unendlich großer Teilchenstromdichte führen. Die Teilchenstromdichte bleibt jedoch endlich, wenn wir gleichzeitig mit der Länge, innerhalb welcher sich der Phasenwinkel um einen endlichen Betrag ändert, die Teilchendichte im Koppelbereich oder die Querschnittsfläche des Koppelbereiches gegen Null gehen lassen. Bei kleiner Fläche des Kontaktes, über den die Supraleiter gekoppelt sind, kann man auf jeder Seite der Fläche einen konstanten Phasenwinkel der Materiewellenfunktion annehmen. Der Phasensprung erfolgt beim Durchgang durch die Fläche. Der durch den Kontakt fließende Strom steht dann in direkter Beziehung zum Phasensprung der Materiewelle. Wenn ϕ die Phasendifferenz der Materiewellenfunktion auf Seite 1 und Seite 2 des Kontaktes ist, so fließt ein Strom

$$I(t) = I_{max} \sin \phi(t) \quad (1)$$

Der Maximalstrom I_{max} hängt von der Beschaffenheit des Kontaktes und der Temperatur ab. Für Materiewellen besteht ein linearer Zusammenhang zwischen Energie und Frequenz. Wird an ein Josephsonelement eine Spannung U angelegt, so ändert sich die Energie eines Cooperpaares beim Übergang über den Tunnelkontakt um $2eU$, wobei e die Elementarladung ist. Liegt am Kontakt eine Spannung $U(t)$, so ist die Frequenz der Materiewelle zu beiden Seiten des Kontaktes unterschiedlich. Folglich ist auch die Phasendifferenz $\phi(t)$ einer zeitlichen Änderung unterworfen. Es gilt die Beziehung

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = \frac{2eU(t)}{\hbar} \quad (2)$$

In den Gln. (1) und (2) haben die Zählpfeile für U und I gleiche Richtung. Der Umstand, daß bei schwach gekoppelten Supraleitern die Phasenwinkel der Materiewellen nicht starr gekoppelt sind, erlaubt das Anlegen einer Gleichspannung ohne Zerstörung des supraleitenden Zustandes. Wird eine Gleichspannung U_0 angelegt, so fließt nach Gl. (1) und (2) ein sinusförmiger Wechselstrom mit der Kreisfrequenz

$$\omega_0 = \frac{2eU_0}{\hbar} \quad (3)$$

und der Amplitude I_{max} .

2. Die parametrische Verstärkung mit Josephsonelementen

Parametrische Verstärker beruhen auf der Anwendung nichtlinearer oder zeitlich periodisch variabler Schaltelemente [18 bis 20]. Sofern nicht von vornherein zeitlich variable Schaltelemente verwendet werden, wird die zeitliche Variation dadurch erreicht, daß einem nichtlinearen Schaltelement ein starkes periodisches Pumpsignal eingeppräggt wird. Im allgemeinen handelt es sich bei dem nichtlinearen Schaltelement um eine nichtlineare Reaktanz, die möglichst verlustfrei sein soll. Für nichtlineare verlustfreie Reaktanzen haben Manley und Rowe Gleichungen angegeben, welche die bei verschiedenen Frequenzen in die Reaktanz hineinfließenden Wirkleistungen zueinander in Beziehung setzen [18 bis 20, 50]. Treten neben den Kreisfrequenzen ω_1 und ω_2 noch die Mischprodukte $m\omega_1 + n\omega_2$ (m und n sind ganze Zahlen) auf, so lauten diese Leistungsbeziehungen

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{m P_{mn}}{m\omega_1 + n\omega_2} = 0 \quad (4)$$

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n P_{mn}}{m \omega_1 + n \omega_2} = 0 \quad (5)$$

P_{mn} ist die bei der Kreisfrequenz $m \omega_1 + n \omega_2$ in die nichtlineare Reaktanz hineinfließende Wirkleistung. Die Gleichungen vereinfachen sich stark, wenn durch ein Netzwerk, in das die nichtlineare Reaktanz eingebettet ist, bis auf drei oder vier Frequenzen alle anderen unterdrückt werden. Werden der nichtlinearen Reaktanz Signale mit den Kreisfrequenzen ω_s und $\omega_p > \omega_s$ zugeführt und kann auf Grund des äußeren Netzwerkes auch bei der Kreisfrequenz $\omega_{n,2} = \omega_s + \omega_p$ Leistung mit dem nichtlinearen Element ausgetauscht werden, so folgt aus (4) und (5) die Beziehung

$$\frac{P_s}{\omega_s} = \frac{P_p}{\omega_p} = - \frac{P_{n,2}}{\omega_{n,2}} \quad (6)$$

Wird bei ω_s und ω_p Leistung zugeführt, so wird bei $\omega_{n,2}$ Leistung abgegeben. Der Aufwärtsmischer arbeitet nach diesem Prinzip [18 bis 20]. Durch das Eingangssignal mit der Kreisfrequenz ω_s wird dem parametrischen Verstärker die Leistung P_s zugeführt. Die Ausgangsleistung $P_{n,2}$ wird bei der höheren Kreisfrequenz $\omega_{n,2}$ abgegeben. Die Signale bei ω_s und $\omega_{n,2}$ haben dabei im allgemeinen so kleine Amplituden, daß ein linearer Zusammenhang zwischen Eingangs- und Ausgangsamplitude entsteht. Das Pumpsignal hat hingegen eine große Amplitude und bewirkt die zeitliche Änderung der nichtlinearen Reaktanz.

Tritt neben den Kreisfrequenzen ω_s und ω_p nur die Hilfsfrequenz $\omega_{n,1} = \omega_p - \omega_s$ auf, so erhält man aus (4) und (5)

$$\frac{P_s}{\omega_s} = \frac{P_p}{\omega_p} = - \frac{P_{n,1}}{\omega_{n,1}} \quad (7)$$

Wird ein Pumpsignal zugeführt, so kann bei ω_s und $\omega_{n,1}$ von der nichtlinearen Reaktanz Leistung abgegeben werden. Im stabilen Betrieb wird nur dann Leistung umgesetzt, wenn bei ω_s ein Signal zugeführt wird. Da P_s in Gl. (7) negatives Vorzeichen hat, ist die bei ω_s reflektierte Wirkleistung größer als die bei ω_s zugeführte Wirkleistung. Verstärkung ist daher sowohl bei einem Ausgangssignal mit der Frequenz ω_s als auch bei einem Ausgangssignal mit der Frequenz $\omega_{n,1}$ möglich.

Eine nichtlineare verlustfreie Reaktanz ist beispielsweise ein nichtlinearer Kondensator, bei dem die Spannung eine eindeutige Funktion des Integrals des Stromes über die Zeit ist oder eine nichtlineare Induktivität, bei der der Strom eine eindeutige Funktion des Integrals der Spannung über die Zeit ist. Spannung bzw. Strom lassen sich dann als eindeutige Funktionen einer Ladung bzw. eines Flusses darstellen. Es ist dabei nicht unbedingt nötig, daß die Ladung bzw. der magnetische Fluß eine konkrete physikalische Bedeutung haben. Ist beispielsweise der Strom durch einen Zweipol eine nichtlineare eindeutige Funktion des Integrals der Spannung über die Zeit, so läßt sich formal ein magnetischer Fluß durch das Integral der Spannung über die Zeit definieren. Der Strom ist dann eine nichtlineare eindeutige Funktion des magnetischen Flusses und der Zweipol eine nichtlineare verlustfreie Induktivität.

Da nichtlineare verlustfreie Reaktanzen selbst kein Rauschen produzieren, sind parametrische Verstärker sehr rauscharm. Die zusätzlichen Rauschquellen sind beim parametrischen Verstärker die Hilfskreise und der Pumpschwingung. Diese Rauschbeiträge können durch Kühlen der Hilfskreise bzw. des ganzen parametrischen Verstärkers und durch besonders rauscharme Pumpschwingungen klein gehalten werden.

Aus den Gln. (1) und (2) folgt, daß der Strom durch ein Josephson-element eine eindeutige Funktion des Integrals der Spannung über die Zeit ist. (Die Integrationskonstante bei der Integration von Gl.

(2) ist ja nicht willkürlich, sondern durch die Anfangsbedingung $\Phi = 0$ vor dem Einschalten festgelegt). Da ein Josephson-element nicht nur eine nichtlineare verlustfreie Induktivität ist, sondern auch bei Anlegen einer Gleichspannung einen Wechselstrom erzeugt, sind mit Josephson-elementen parametrische Verstärker realisierbar, bei denen die Pumpenergie durch eine angelegte Gleichspannung zugeführt wird [23 bis 34]. Für Josephson-elemente gelten erweiterte Leistungsbeziehungen, die sich von den Gln. (4) und (5) durch einen zusätzlichen Term für die in das Josephson-element hineinfließende Gleichstromleistung P_o unterscheiden [23, 25, 27]. Wird ein Josephson-element in ein Netzwerk in solcher Weise eingebettet, daß Leistungen bei den Kreisfrequenzen ω_1 und ω_2 und beliebigen Mischprodukten $m \omega_1 + n \omega_2$ ausgetauscht werden können, wird außerdem an das Josephson-element eine Gleichspannung U_o angelegt, wobei die der Gleichspannung U_o nach Gl. (3) entsprechende Kreisfrequenz ω_o ebenfalls eine Kombinationsfrequenz von ω_1 und ω_2 ist, so gelten die Beziehungen

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{m P_{mn}}{m \omega_1 + n \omega_2} = \frac{-k P_o}{k \omega_1 + l \omega_2} \quad (8)$$

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n P_{mn}}{m \omega_1 + n \omega_2} = \frac{-l P_o}{k \omega_1 + l \omega_2} \quad (9)$$

mit

$$\omega_o = k \omega_1 + l \omega_2 \quad (10)$$

Die Gleichstromleistung P_o wird also genau so behandelt wie eine Wechselstrom-Wirkleistung bei der Frequenz ω_o . Das ist der Grund für die Möglichkeit, gleichstromgepumpte parametrische Verstärker zu bauen. Da Supraleiter eine Reihe wesentlicher Eigenschaften bis zu mehreren 100 GHz beibehalten [46 bis 49], ist die Anwendung von Josephson-elementen ebenfalls bis zu sehr hohen Frequenzen möglich. Riedel zeigte, daß für höhere Spannungen bei Josephson-elementen Abweichungen von der durch die Gln. (1) und (2) festgelegten Strom-Spannungsbeziehung auftreten [51]. $J_{m,n}$ wird spannungsabhängig, und außer dem Paarsstrom fließt noch ein verlustbehafteter Strom über das Josephson-element. Diese Effekte bewirken das Zustandekommen einer oberen Grenzfrequenz für ein Josephson-element, die allerdings im Bereich von einigen 100 bis einigen 1000 GHz liegt.

3. Die Phasenwellengleichung für flächenhafte Josephson-elemente

Bild 1 zeigt die geometrische Anordnung eines flächenhaften Josephson-elementes. Das Josephson-element besteht aus den beiden Supraleitern 1 und 2 mit der Breite b und der Länge l , die durch eine dünne Isolationsschicht von einigen 10 Å Dicke getrennt sind. Die Dichte des Tunnelstromes ist dem Sinus der örtlichen Quanten-Phasendifferenz $\Phi(x, t)$ proportional. Des weiteren treten ein Quasiteilchen-Tunnelstrom auf, der durch den

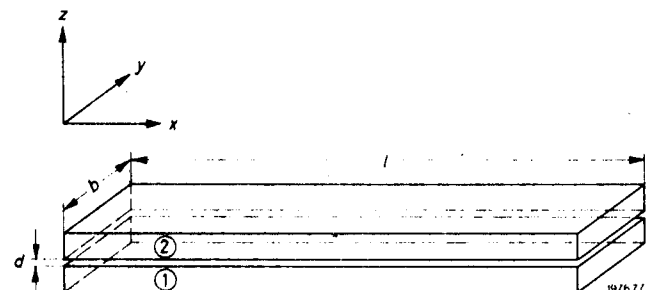


Bild 1: Geometrische Anordnung des flächenhaften Josephson-elementes

Leitwertbelag G_1 beschrieben werden kann, und ein Strombeitrag, der dem Produkt aus der Spannung und dem Kosinus der Quantenphasendifferenz proportional ist. Der letzte Beitrag kommt durch das Aufbrechen der Quasiteilchen bei etwas höheren Spannungen zustande und wird durch den Koeffizienten G_2 (mit der Dimension eines Leitwertes je Flächeneinheit) beschrieben. Insgesamt erhält man die (in Bild 1 in z-Richtung) über den Kontakt fließende Stromdichte [4, 5, 52, 53]

$$J_z(x, t) = J_{\max} \sin \Phi(x, t) + G_1 U(x, t) + G_2 U(x, t) \cos \Phi(x, t) \quad (11)$$

$U(x, t)$ ist die Spannung von Leiter 1 gegen Leiter 2. J_{\max} ist die maximale Josephson-Stromdichte des homogenen Flächenkontaktes. Die Bedingungen werden im folgenden so gewählt, daß nur in x -Richtung eine räumliche Variation von $\Phi(x, t)$ und $U(x, t)$ auftritt. Die zeitliche Änderung von $\Phi(x, t)$ ist wie in Gl. (2) mit der Spannung verknüpft.

$$\frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial t} = \frac{2e}{\hbar} U(x, t) \quad (2a)$$

Wird die Isolationsschicht zwischen den Supraleitern von einem Magnetfeld durchflossen, so tritt auch eine räumliche Änderung von Φ auf. Da Magnetfelder in einen Supraleiter nur mit einer Eindringtiefe von einigen 100 bis einigen 1000 Å eindringen können, wird sich ein Magnetfeld zwischen den Leitern 1 und 2 parallel zur xy -Fläche ausbreiten. Die durch ein Magnetfeld hervorgerufene Änderung von Φ erfolgt in der xy -Fläche senkrecht zur Richtung der magnetischen Kraftlinien. Hat das zwischen den Leitern existierende Magnetfeld nur eine y -Komponente (B_y), so erfolgt eine räumliche Variation von Φ nur in x -Richtung und ist durch

$$\frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial x} = \frac{2e d_m}{\hbar} B_y(x, t) \quad (12)$$

mit

$$d_m = d + \lambda_{m1} + \lambda_{m2} \quad (13)$$

gegeben. Mit λ_{m1} und λ_{m2} werden die magnetischen Eindringtiefen der Supraleiter 1 und 2 bezeichnet [47 bis 49]. Die räumliche Änderung der Quantenphasen zwischen zwei Punkten x und $x + \Delta x$ der Kontaktebene ist proportional dem magnetischen Fluß $\Delta x d_m B_y(x, t)$ zwischen x und $x + \Delta x$. Die räumliche Variation von Φ in y -Richtung kann vernachlässigt werden, wenn ein äußeres Magnetfeld nur eine y -Komponente besitzt und die Breite b des Josephson-elementes so klein ist, daß das vom Tunnelstrom J_z erzeugte Magnetfeld keine nennenswerte Variation von Φ in y -Richtung hervorruft.

Um zur Wellengleichung für das Josephson-element zu gelangen, benötigen wir noch die zweite Maxwell'sche Gleichung

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (14)$$

Die erste Maxwell'sche Gleichung ist bereits in den Gln. (2a) und (12) enthalten. Ist C_x der Kapazitätsbelag je Flächeneinheit des Josephson-elementes, so gilt

$$D_x(x, t) = C_x U(x, t) \quad (15)$$

und man erhält für $B_x = 0$ aus den Gln. (14) und (15)

$$\frac{\partial B_y(x, t)}{\partial x} = \mu_0 J_z(x, t) + \mu_0 C_x \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} \quad (16)$$

Aus den Gln. (2a), (11), (12) und (16) folgt nun die Phasengleichung

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \frac{1}{\lambda_J^2} \sin \Phi + \beta_1 \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \beta_2 \frac{\partial}{\partial t} (\sin \Phi) \quad (17)$$

mit

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 C_x d_m}} \quad (18)$$

$$\lambda_J = \sqrt{\frac{\hbar}{2e \mu_0 d_m J_{\max}}} \quad (19)$$

$$\beta_1 = \mu_0 d_m G_1 \quad (20)$$

$$\beta_2 = \mu_0 d_m G_2 \quad (21)$$

wobei c die Phasengeschwindigkeit der elektromagnetischen Welle (EMW) ist. Da die z -Komponente des elektrischen Feldes nicht in den Supraleiter eindringt (zum Unterschied von der Tangentialkomponente des Magnetfeldes) ist der Kapazitätsbelag

$$C_x = \epsilon_0 \epsilon_r / d \quad (22)$$

und mit der Vakuum-Lichtgeschwindigkeit $c_0 = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ erhält man

$$c = c_0 \sqrt{\frac{d}{\epsilon_r d_m}} \quad (23)$$

Für eine relative Dielektrizitätskonstante $\epsilon_r = 10$ und $d = 10 \text{ Å}$, $d_m = 900 \text{ Å}$ folgt $c = 10^7 \text{ ms}^{-1}$. Die Wellenlänge der elektromagnetischen Welle ist in diesem Fall um den Faktor 30 kleiner als im Vakuum.

Der Parameter λ_J ist die sogenannte Josephson-Eindringtiefe. Die Breite b des Kontaktes muß klein gegen λ_J sein, so daß die räumliche Variation von Φ in y -Richtung vernachlässigbar bleibt. Mit einem typischen $J_{\max} = 0,5 \cdot 10^6 \text{ Am}^{-2}$ und $d_m = 900 \text{ Å}$ erhält man $\lambda_J = 76,3 \text{ µm}$.

4. Die Grundgleichungen des Wanderwellenverstärkers

Auf der linken Seite der Phasengleichung (17) steht die Wellengleichung einer verlustfreien und dispersionsfreien Leitung. Der erste Term auf der rechten Seite beschreibt einen nichtlinearen verlustfreien Induktivitätsbelag, die beiden anderen Terme die oben bereits besprochenen Verlustanteile. Wird an das Josephson-element eine Gleichspannungskomponente U_0 angelegt, so ändert sich die Phase mit der Winkelgeschwindigkeit ω_0 entsprechend Gl. (3). Wird zusätzlich ein transversales, zwischen den Supraleitern 1 und 2 homogenes und konstantes Magnetfeld $B_y = -B_0$ angelegt, so ändert sich nach Gl. (12) die Phase räumlich in x -Richtung mit dem Wellenvektor

$$k_0 = \frac{2e B_0 d_m}{\hbar} \quad (24)$$

Die Stromdichte $J_{\max} \sin \Phi(x, t)$ ändert sich nun räumlich und zeitlich sinusförmig, und eine in positiver x -Richtung laufende Wellenbewegung entsteht. Die Phasengeschwindigkeit dieser Wellenbewegung ist durch ω_0/k_0 gegeben und muß nicht mit der Phasengeschwindigkeit einer sich bei der Frequenz ω_0 auf der Leitung ausbreitenden elektromagnetischen Welle identisch sein. Die Phasenwelle des Josephsonstromes (JPW) transportiert keine Energie in x -Richtung. Nur wenn die Phasengeschwindigkeit der JPW identisch mit der Phasengeschwindigkeit der bei ω_0 auf der Leitung ausbreitungsfähigen elektromagnetischen Welle ist, findet eine Überkopplung von Leistung aus der JPW in die elektromagnetische Welle statt. Ist k_0 die Wellenzahl der elektromagnetischen Welle

bei ω_0 , so lautet die Bedingung für die Überkopplung von Leistung aus der JPW in die elektromagnetische Welle $k_0 = k'_0$. Da von der JPW der nichtlineare Induktivitätsbelag des Josephsonelementes ebenfalls räumlich und zeitlich moduliert wird, entstehen bei der Einkopplung eines Signales mit der Kreisfrequenz $\omega_s < \omega_0$ auch die Mischprodukte

$$\omega_{h1} = \omega_0 - \omega_s \quad (25)$$

$$\omega_{h2} = \omega_0 + \omega_s \quad (26)$$

Die Wellenzahlen der elektromagnetischen Wellen (EMWs) mit den Kreisfrequenzen ω_{h1} und ω_{h2} seien k_{h1} und k_{h2} . Wenn die Bedingungen

$$k_{h1} = k'_0 - k_s \quad (27)$$

und

$$k_{h2} = k_0 + k_s \quad (28)$$

erfüllt sind, dann können die entlang der Leitung bei ω_{h1} und ω_{h2} entstehenden Mischprodukte im Josephsonstrom die elektromagnetische Welle bei diesen Frequenzen anregen.

An Hand von sogenannten Brillouin-Diagrammen [19] sollen nun verschiedene mögliche Fälle diskutiert werden. Bild 2 zeigt das Brillouin-Diagramm für den dispersionsfreien Fall, welcher durch den linearen Zusammenhang $\omega = k \cdot c$ gekennzeichnet ist. Die durch U_0 und B_0 bestimmten Größen ω_0 und k_0 liegen auf der Dispersionsgeraden der elektromagnetischen Wellen. Es ist sowohl eine direkte Leistungsumsetzung der dem Josephsonelement über U_0 zugeführten Gleichstromleistung in die elektromagnetische Welle bei ω_0 möglich als auch (wenn am linken Ende der Leitung ein Eingangssignal mit der Kreisfrequenz ω_s eingekoppelt wird) eine Leistungsumsetzung nach ω_{h1} und ω_{h2} .

Die Kopplung von Leistung in eine elektromagnetische Welle bei ω_0 ist unerwünscht und läßt sich bei Leitungen mit nichtlinearer Dispersion in einfacher Weise vermeiden. Des weiteren ist nicht immer erwünscht, daß sowohl bei ω_{h1} als auch bei ω_{h2} elektromagnetische Wellen angeregt werden, sondern es wird Beschränkung auf ein Seitenband bei ω_{h1} oder ω_{h2} gefordert. Bild 3 zeigt das Brillouin-Diagramm einer Leitung mit Tiefpaß-Charakter, bei der ω_0 und k'_0 so gewählt wurden, daß keine Anregung von

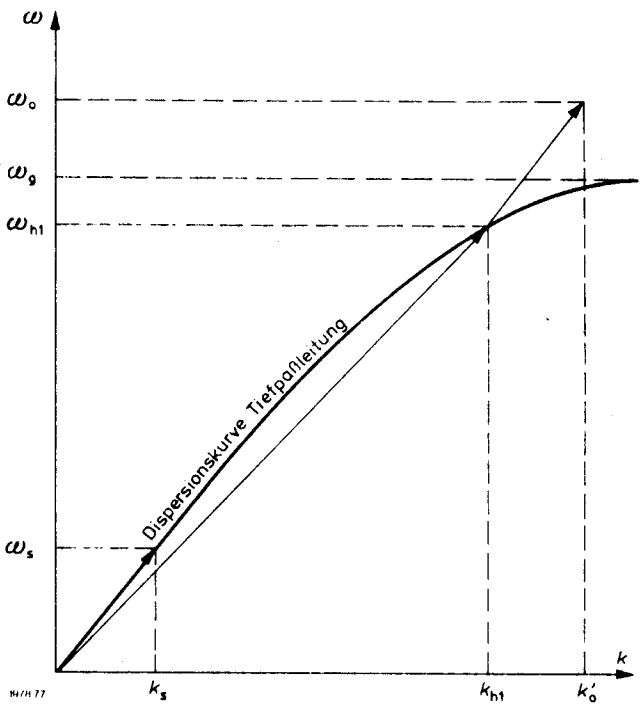


Bild 3: Brillouin-Diagramm für die Ausbreitung der elektromagnetischen Wellen bei ω_s und ω_{h1} auf einer Tiefpaßleitung mit der Grenzfrequenz ω_0 .

Wellen bei ω_{h2} und ω_0 möglich ist. Außer bei der Signal-Kreisfrequenz ω_s tritt nur bei der unteren Hilfs-Kreisfrequenz ω_{h1} eine elektromagnetische Welle auf. Durch eine andere Wahl von ω_0 und k'_0 wird in Bild 4 erreicht, daß sich nur die obere der beiden Hilfswellen ausbreiten kann. Ein besonderer Vorteil des parametrischen Wanderwellenverstärkers mit einem Josephsonelement liegt in der einfachen und von einander unabhängigen Abstimmbarkeit von ω_0 und k'_0 durch die Gleichspannung U_0 und das konstante externe Magnetfeld B_0 .

In Bild 5 ist noch ein Beispiel für den Fall angegeben, daß bei beiden Hilfs-Kreisfrequenzen ω_{h1} und ω_{h2} , nicht aber bei der Pump-Kreisfrequenz ω_0 elektromagnetische Wellen angeregt werden. Das wird in diesem speziellen Fall dadurch erreicht, daß die Leitung einen Sperrbereich von ω_{g1} bis ω_{g2} hat. Natürlich

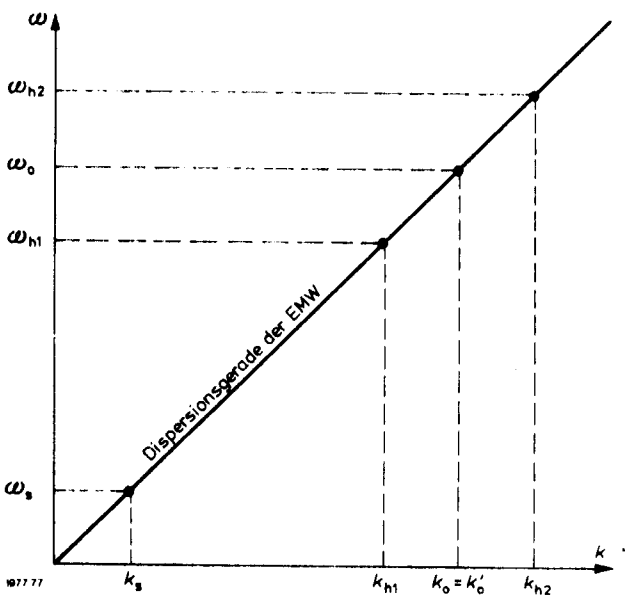


Bild 2: Brillouin-Diagramm für den dispersionsfreien Fall

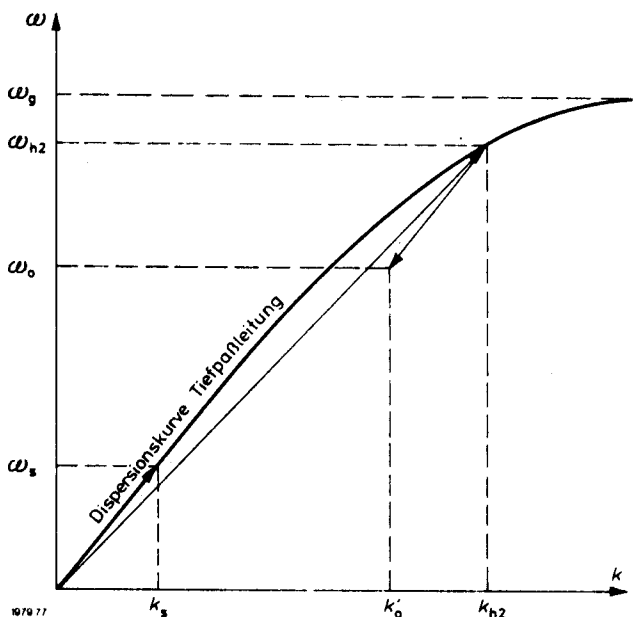


Bild 4: Brillouin-Diagramm für die Ausbreitung der elektromagnetischen Wellen bei ω_s und ω_{h2} auf einer Tiefpaßleitung

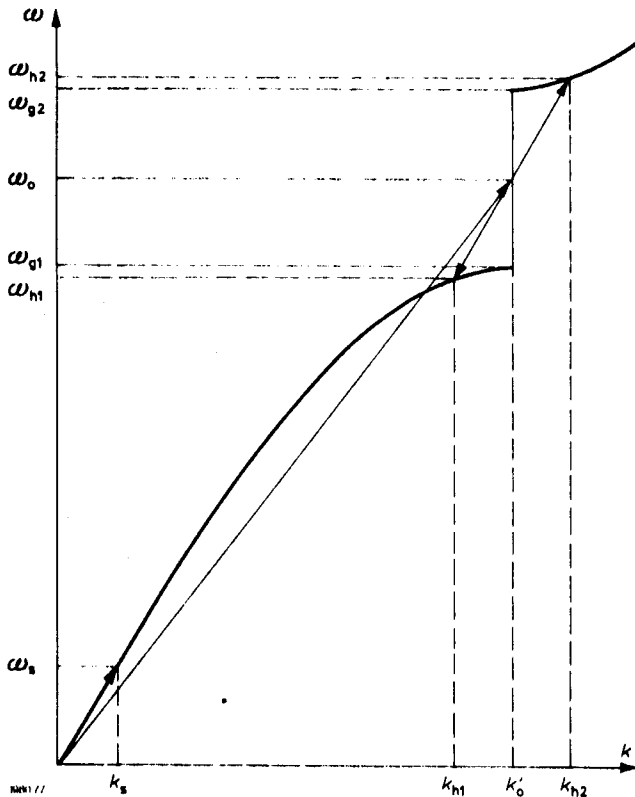


Bild 5: Brillouin-Diagramm für die Ausbreitung der elektromagnetischen Wellen bei ω_s , ω_{h1} und auf einer Leitung mit einem Sperrbereich von ω_{s1} und ω_{s2} .

können auch bei dieser Leitung ω_0 und k'_0 so gewählt werden, daß nur bei einer der beiden Hilfsfrequenzen die Wellenzahlbedingung für die Anregung der elektromagnetischen Welle erfüllt ist. Zur Erzielung der Dispersionskurven der Bilder 3 bis 5 ist das Josephsonelement nach Bild 1 mit einer Struktur zu versehen, wie sie für Streifenleitungen mit Tiefpaßcharakter oder mit Sperrbereich üblich sind.

Im folgenden wird mit der für eine homogene Leitung gültigen Phasenwellengleichung (17) gerechnet. Die durch die nichtlinearen Dispersionsdiagramme erzielte Frequenzselektion wird durch einen Ansatz für $\Phi(x, t)$ berücksichtigt, in dem nur die (aufgrund des Brillouin-Diagramms) möglichen Frequenzen vorkommen. Wir beschränken uns auf die Untersuchung des Wanderwellenverstärkers im linearen Bereich und wenden die Störungsrechnung erster Ordnung auf Gl. (17) an. Die ungestörte Lösung ist die Großsignallösung für die Pumpwelle. Zwar ist Gl. (17) für $\beta_1 = \beta_2 = 0$ exakt lösbar [39 bis 41], die mathematische Behandlung des Wanderwellenverstärkers wird jedoch im folgenden wesentlich vereinfacht, wenn eine für $\lambda_j k'_0 \gg 1$ und $\beta_1, \beta_2 \ll k'_0$ gültige Näherungslösung verwendet wird. Die getroffenen Voraussetzungen bedeuten, daß das vom Josephsonstrom erzeugte Magnetfeld im Vergleich zu B_0 klein ist und die Leitungsverluste klein sind. Diese Voraussetzungen sind bei sinnvoller Parameterwahl erfüllt. Aus den Gln. (2a), (3), (12) und (24) folgt dann in nullter Näherung für die zeitliche und räumliche Variation der Quantenphasendifferenz $\Phi_0(x, t) = \omega_0 t - k'_0 x + \varphi_0$. Dabei ist φ_0 ein Phasenwinkel, der von den Anfangsbedingungen abhängt. Das voraussetzungsgemäße Auftreten von elektromagnetischen Wellen in positiver x -Richtung bei den Kreisfrequenzen ω_s , ω_{h1} und ω_{h2} führt zu dem Ansatz

$$\Phi(x, t) = \omega_0 t - k'_0 x + \varphi_0 + \Phi_s(x) e^{j(\omega_s t - k_s x)} + \Phi_s^*(x) e^{-j(\omega_s t - k_s x)} + \Phi_{h1}(x) e^{j(\omega_{h1} t - k_{h1} x)} + \Phi_{h1}^*(x) e^{-j(\omega_{h1} t - k_{h1} x)} + \Phi_{h2}(x) e^{j(\omega_{h2} t - k_{h2} x)} + \Phi_{h2}^*(x) e^{-j(\omega_{h2} t - k_{h2} x)} \quad (29)$$

Φ_s , Φ_{h1} und Φ_{h2} sind die komplexen Kleinsignalamplituden der Signal- und Hilfswellen. Es wurde angenommen, daß bei ω_0 keine elektromagnetische Pumpwelle angeregt wird. Wir wollen nur den Kleinsignalfall untersuchen, bei dem sich der Wanderwellenverstärker bezüglich der Amplituden Φ_s , Φ_{h1} und Φ_{h2} linear verhält. In diesem Fall kann $\sin \Phi(x, t)$ an der Stelle $\omega_0 t - k'_0 x + \varphi_0$ in eine Taylor-Reihe entwickelt werden. Werden nur die Frequenzanteile bei ω_s , ω_{h1} und ω_{h2} und der Gleichanteil berücksichtigt, die Reihenentwicklung bis zur zweiten Ordnung durchgeführt und die Gln. (25) bis (28) berücksichtigt, so erhält man die Näherung

$$\begin{aligned} \sin \Phi(x, t) = & \frac{1}{2j} e^{j(\omega_0 t - k'_0 x + \varphi_0)} + \\ & + \frac{1}{2} \Phi_s(x) e^{j(\omega_s t - k_s x + \varphi_0)} + \frac{1}{2} \Phi_s^*(x) e^{j(\omega_s t - k_s x + \varphi_0)} + \\ & + \frac{1}{2} \Phi_{h1}^*(x) e^{j(\omega_{h1} t - k_{h1} x + \varphi_0)} + \frac{1}{2} \Phi_{h2}^*(x) e^{j(\omega_{h2} t - k_{h2} x + \varphi_0)} - \\ & - \frac{1}{2j} \Phi_{h1}^*(x) \Phi_s^*(x) e^{j\varphi_0} - \frac{1}{2j} \Phi_{h2}^*(x) \Phi_s(x) e^{j\varphi_0} + \text{C. C.} \end{aligned} \quad (30)$$

Mit C.C. wird der zum (auf der rechten Seite der Gleichung) vorhergehenden Ausdruck konjugiert komplexe Wert bezeichnet. Wir setzen nun (29) und (30) in die Phasenwellengleichung (17) ein. Da wir die Koeffizienten auf der rechten Seite von Gl. (17) als klein vorausgesetzt haben, können wir die zweiten Ableitungen der Amplitudenfunktionen Φ_s , Φ_{h1} und Φ_{h2} vernachlässigen. Durch Separation nach den Kreisfrequenzen ω_s , ω_{h1} und ω_{h2} erhält man das Gleichungssystem

$$\frac{d\Phi_s}{dx} + \frac{\omega_s \beta_1}{2k_s} \Phi_s = \frac{j}{4k_s} \left(\frac{1}{\lambda_j^2} + j\omega_s \beta_2 \right) \cdot (\Phi_{h1}^* e^{j\varphi_0} + \Phi_{h2} e^{-j\varphi_0}) \quad (31)$$

$$\frac{d\Phi_{h1}^*}{dx} + \frac{\omega_{h1} \beta_1}{2k_{h1}} \Phi_{h1}^* = -\frac{j}{4k_{h1}} \left(\frac{1}{\lambda_j^2} + j\omega_{h1} \beta_2 \right) \Phi_s e^{-j\varphi_0} \quad (32)$$

$$\frac{d\Phi_{h2}}{dx} + \frac{\omega_{h2} \beta_1}{2k_{h2}} \Phi_{h2} = \frac{j}{4k_{h2}} \left(\frac{1}{\lambda_j^2} + j\omega_{h2} \beta_2 \right) \Phi_s e^{j\varphi_0} \quad (33)$$

Diese Gleichungen sind auch für Leitungsstrukturen mit nichtlinearem Dispersionsverhalten gültig, vorausgesetzt, daß die Gln. (25) bis (28) erfüllt sind. Die Erzielung hoher Bandbreite ist allerdings davon abhängig, daß die $d\omega/dk$ für die Signalwelle und die Hilfswelle(n) nur geringfügig voneinander abweichen. Durch Integration dieses Differentialgleichungssystems erhält man die Amplituden der Quantenphasendifferenzen in Abhängigkeit von x . Treten nur ω_s und ω_{h1} auf, so entfällt Gl. (33) und in Gl. (31) wird $\Phi_{h2} = 0$ gesetzt. Ebenso entfällt Gl. (32) und in Gl. (31) wird $\Phi_{h1}^* = 0$ gesetzt, wenn nur ω_s und ω_{h2} auftreten. Die komplexen Spannungsamplituden U_ν ($\nu = s, h1, h2$) sind nach Gl. (2a) durch

$$U_\nu(x) = \frac{j\omega_\nu \hbar}{2e} \Phi_\nu(x) \quad (34)$$

gegeben. Die zeitlich und örtlich variablen Anteile des Magnetfeldes $B_\nu(x, t)$ sind mit einem über das Josephsonelement in x -Richtung fließenden Strom $I(x, t)$ verknüpft. Aus der zweiten Maxwell'schen Gleichung folgt

$$I(x, t) = -\frac{b}{\mu_0} B_\nu(x, t) \quad (35)$$

und mit Gl. (12) erhält man die komplexen Stromamplituden

$$I_\nu(x) = \frac{b \hbar}{d_m 2e \mu_0} \left(jk_\nu \Phi_\nu(x) - \frac{d\Phi_\nu(x)}{dx} \right) \quad (36)$$

Der Wellenwiderstand bei der Kreisfrequenz ω_v ist

$$Z_{wv}(x) = \frac{U_v(x)}{I_v(x)} = Z_{wv}(x) \cdot \left(1 + j \frac{1}{k_v \Phi_v(x)} \frac{d\Phi_v(x)}{dx}\right)^{-1} \quad (37)$$

mit

$$Z_{wv}(x) = \frac{\mu_0 d_m \omega_v}{b k_v} \quad (38)$$

Auf Grund der bereits oben gemachten Voraussetzungen gilt $(k_v \Phi_v(x))^{-1} \cdot d\Phi_v(x)/dx \ll 1$. Für die homogene Leitung ist die Phasengeschwindigkeit $\omega_v/k_v = c$ durch Gl. (23) gegeben und es gilt:

$$Z_{wv}(x) = Z_0 \frac{\sqrt{d d_m}}{b \epsilon_r} \quad (39)$$

wobei $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 377 \Omega$ der Wellenwiderstand des Vakuums ist. Mit $d = 10 \text{ \AA}$, $d_m = 900 \text{ \AA}$, $b = 2 \mu\text{m}$ und $\epsilon_r = 10$ erhält man $Z_{wv} = 179 \text{ m}\Omega$. Im letzten Abschnitt wird diskutiert, wie das mit derartig niedrigen Wellenwiderständen verbundene Anpassungsproblem gelöst werden kann.

Die bei der Kreisfrequenz ω_s in x -Richtung fließende Wirkleistung ist

$$P_v(x) = U_v(x) I_v^*(x) + U_v^*(x) I_v(x) \quad (40)$$

Mit den Gln. (34) und (36) folgt daraus

$$P_v(x) = \frac{2b}{\mu_0 d_m} \left(\frac{\hbar}{2e}\right)^2 k_v \omega_v |\Phi_v(x)|^2 \quad (41)$$

6. Der verlustfreie parametrische Verstärker mit beiden Hilfsfrequenzen

Wir nehmen an, die Gln. (25) bis (28) seien erfüllt. Der verlustfreie parametrische Verstärker ist durch $\beta_1 = \beta_2 = 0$ gekennzeichnet. Diese Vernachlässigung ist, wie bereits erwähnt bei Josephson-Tunnelementen weit unterhalb der Grenzfrequenz gerechtfertigt. Aus den Gln. (31) bis (33) folgt mit Berücksichtigung der Gln. (27) und (28)

$$\frac{d^2 \Phi_s(x)}{dx^2} - \mu^2 \Phi_s(x) = 0 \quad (42)$$

mit

$$\mu = \frac{1}{2\lambda_J^2 |2k_{n1} k_{n2}|} \quad (43)$$

Die Lösung von Gl. (42) ist

$$\Phi_s(x) = A \cosh(\mu x) + C \sinh(\mu x) \quad (44)$$

Mit Gl. (32) bzw. (33) erhält man weiter

$$\Phi_{n1}^*(x) = -j \sqrt{\frac{k_{n2}}{2k_{n1}}} (C \cosh(\mu x) + A \sinh(\mu x)) e^{-i\varphi_0} \quad (45)$$

$$\Phi_{n2}(x) = +j \sqrt{\frac{k_{n1}}{2k_{n2}}} (C \cosh(\mu x) + A \sinh(\mu x)) e^{+i\varphi_0} \quad (46)$$

Wir nehmen an, daß das Josephsonselement bei $x=0$ beginnt und $x=l$ endet. Bei $x=0$ wird ein Signal mit der Kreisfrequenz ω_s eingekoppelt. Bei den Hilfsfrequenzen ω_{n1} und ω_{n2} ist hier noch keine Signalamplitude vorhanden. Daraus folgt $C=0$ und wir erhalten

$$\Phi_s(x) = A \cosh(\mu x) \quad (44a)$$

$$\Phi_{n1}^*(x) = -j \sqrt{\frac{k_{n2}}{2k_{n1}}} A \sinh(\mu x) \cdot e^{-i\varphi_0} \quad (45a)$$

$$\Phi_{n2}(x) = +j \sqrt{\frac{k_{n1}}{k_{n2}}} A \sinh(\mu x) \cdot e^{+i\varphi_0} \quad (46a)$$

Sowohl die Signalwelle als auch die Hilfswellen wachsen mit zunehmendem x .

Wir stellen nun die Leistungsbilanz des Wanderwellenverstärkers auf: Aus den Gln. (41) und (44a) bis (46a) folgen die bei den drei Frequenzen in x -Richtung fließenden Wirkleistungen

$$P_s(x) = \frac{b}{\mu_0 d_m} \left(\frac{\hbar}{2e}\right)^2 k_s \omega_s |A|^2 (\cosh(2\mu x) + 1) \quad (47)$$

$$P_{n1}(x) = \frac{b}{\mu_0 d_m} \left(\frac{\hbar}{2e}\right)^2 \frac{1}{2} k_{n2} \omega_{n1} |A|^2 (\cosh(2\mu x) - 1) \quad (48)$$

$$P_{n2}(x) = \frac{b}{\mu_0 d_m} \left(\frac{\hbar}{2e}\right)^2 \frac{1}{2} k_{n1} \omega_{n2} |A|^2 (\cosh(2\mu x) - 1) \quad (49)$$

Die Leistungsverstärkung eines Signals mit der Kreisfrequenz ω_s beträgt zwischen $x=0$ und $x=l$

$$V_s(l) = P_s(l)/P_s(0) = \frac{1}{2} (\cosh(2\mu l) + 1) \quad (50)$$

Als Beispiel betrachten wir einen Wanderwellenverstärker mit einem Josephsonselement mit den oben beschriebenen Daten ($J_{max} = 0,5 \cdot 10^6 \text{ Am}^{-2}$, $d = 10 \text{ \AA}$, $d_m = 900 \text{ \AA}$, $\lambda_J = 76,3 \mu\text{m}$). Für die Signal- und die beiden Hilfsfrequenzen sei die Phasengeschwindigkeit der elektromagnetischen Wellen jeweils durch $c = 10^7 \text{ ms}^{-1}$ gegeben. Bei der Pumpfrequenz ω_0 sei die Anregungsbedingung der EM-Welle nicht erfüllt. Der Wanderwellenverstärker sei für $\omega_s/2\pi = 100 \text{ GHz}$ und $\omega_0/2\pi = 500 \text{ GHz}$ ausgelegt. Die Hilfsfrequenzen sind dann $\omega_{n1}/2\pi = 400 \text{ GHz}$ und $\omega_{n2}/2\pi = 600 \text{ GHz}$. Daraus ergeben sich für die Wellenlängen $2\pi/k_s = 100 \mu\text{m}$, $2\pi/k_{n1} = 25 \mu\text{m}$, $2\pi/k_{n2} = 20 \mu\text{m}$ und $2\pi/k_{n2} = 16,6 \mu\text{m}$. Aus den Gln. (3) und (24) folgen $U_0 = 1,034 \text{ mV}$ und $B_0 = 1,148 \cdot 10^{-3} \text{ Vs m}^{-2}$ und aus Gl. (43) $\mu = 1,97 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$. Bild 6 zeigt den Gewinn in Abhängigkeit von der Leitungslänge. Bei 1 cm Leitungslänge ist bei ω_s bereits $11,28 \text{ dB}$ Gewinn erzielbar. Der Wanderwellenverstärker muß bei ω_s , ω_{n1} und ω_{n2} reflexionsfrei abgeschlossen werden. Ein zusätzlicher Gewinn ist erzielbar, wenn am Ausgang bei den Hilfsfrequenzen Leistung ausgekoppelt wird.

Die gesamte, vom Wanderwellenverstärker abgegebene Mikrowellenleistung ist

$$P_{HF} = P_s(l) - P_s(0) + P_{n1}(l) + P_{n2}(l) = \frac{b}{\mu_0 d_m} \left(\frac{\hbar}{2e}\right)^2 k_0 \omega_0 |A|^2 (\cosh(2\mu l) - 1) \quad (51)$$

Die dem Josephsonselement zugeführte Gleichstromleistung ist

$$P_0 = b U_0 \int_0^l J_s(x) dx \quad (52)$$

$J_s(x)$ ist der lineare zeitliche Mittelwert der Josephsonstromdichte $J_s(x, t)$. Aus den Gln. (11) und (30) folgt

$$J_s(x) = J_{max} \left(-\frac{1}{2j} \Phi_{n1}^* \Phi_s^* e^{i\varphi_0} - \frac{1}{2j} \Phi_{n2}^* \Phi_s e^{i\varphi_0} + C \cdot C \right) \quad (53)$$

und mit den Gln. (27), (28) und (44a) bis (46a) erhält man

$$J_s(x) = \frac{1}{2} J_{max} \left(\sqrt{\frac{k_{n1}}{2k_{n2}}} + \sqrt{\frac{k_{n2}}{2k_{n1}}} \right) |A|^2 \sinh(2\mu x) \quad (54)$$

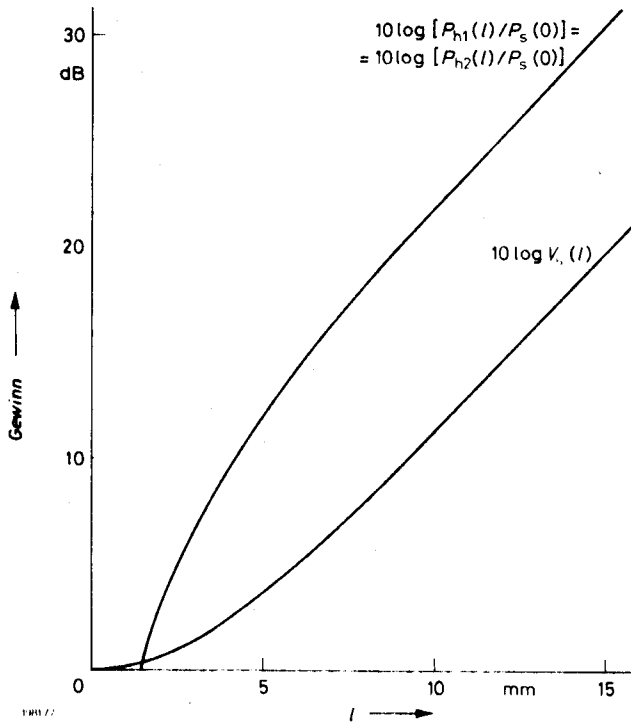


Bild 6 Gewinn in Abhängigkeit von der Verstärkerlänge l (beide Hilfsfrequenzen treten auf)

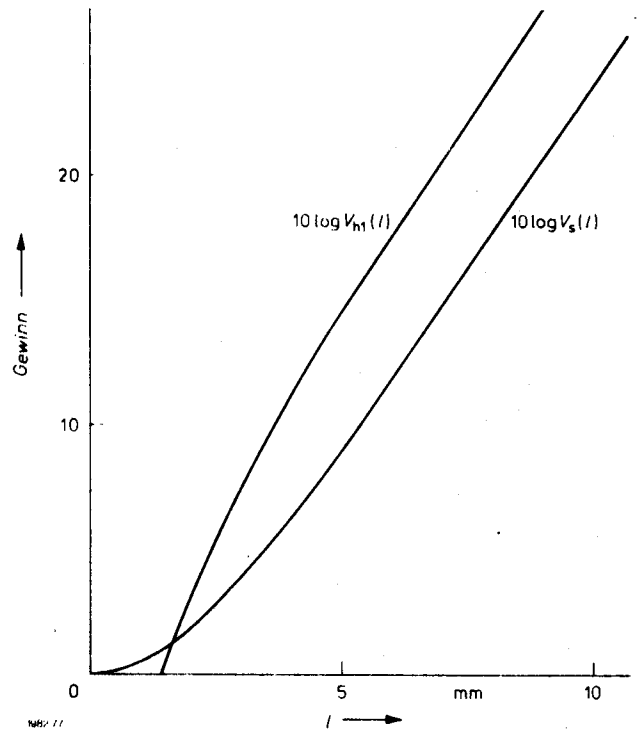


Bild 7 Gewinn in Abhängigkeit von der Verstärkerlänge l (nur die untere Hilfsfrequenz tritt auf)

Durch Einsetzen in Gl. (52) und Integration folgt unter Berücksichtigung der Gln. (3), (19) und (43)

$$P_0 = \frac{b}{\mu_0 d_m} \left(\frac{\hbar}{2e} \right)^2 k_0 \omega_0 |A|^2 (\cosh(2\tilde{\mu}l) - 1) \quad (55)$$

Durch Vergleich mit Gl. (51) sieht man, daß die zugeführte Gleichstromleistung P_0 identisch mit der gesamten abgegebenen Mikrowellenleistung P_{H1} ist.

7. Der verlustfreie parametrische Verstärker mit der unteren Hilfsfrequenz ω_{H1}

Es seien die Gln. (25) und (27), nicht jedoch die Gln. (26) und (28) erfüllt. Wir setzen wieder $\beta_1 = \beta_2 = 0$. Außerdem sollen nur bei den Frequenzen ω_s und ω_{H1} elektromagnetische Wellen angeregt werden. Aus den Gln. (31) und (32) folgt dann

$$\frac{\partial^2 \Phi_s(x)}{\partial x^2} - \tilde{\mu}^2 \Phi_s(x) = 0 \quad (56)$$

mit

$$\tilde{\mu} = \frac{1}{4A_0^2 \sqrt{k_{H1} k_s}} \quad (57)$$

Für $\Phi_{H1}^*(x=0) = 0$ erhält man die Lösungen

$$\Phi_s(x) = A \cosh(\tilde{\mu}x) \quad (58)$$

$$\Phi_{H1}^*(x) = -j \sqrt{\frac{k_s}{k_{H1}}} A \sinh(\tilde{\mu}x) e^{-j\omega_0 t} \quad (59)$$

Die in x -Richtung fließenden Wirkleistungen sind

$$P_s(x) = \frac{b}{\mu_0 d_m} \left(\frac{\hbar}{2e} \right)^2 k_s \omega_s |A|^2 (\cosh(2\tilde{\mu}x) + 1) \quad (60)$$

$$P_{H1}^*(x) = \frac{b}{\mu_0 d_m} \left(\frac{\hbar}{2e} \right)^2 k_s \omega_{H1} |A|^2 (\cosh(2\tilde{\mu}x) - 1) \quad (61)$$

Die Leistungsverstärkung eines Signals mit der Kreisfrequenz ω_s , das bei $x=0$ eingekoppelt und bei $x=l$ ausgekoppelt wird, beträgt

$$V_s(l) = P_s(l)/P_s(0) = \frac{1}{2} (\cosh(2\tilde{\mu}l) + 1) \quad (50a)$$

Wird das verstärkte Signal bei ω_{H1} ausgekoppelt, so beträgt die Leistungsverstärkung

$$V_{H1} = P_{H1}^*(l)/P_s(0) = \frac{1}{2} \frac{\omega_{H1}}{\omega_s} (\cosh(2\tilde{\mu}l) - 1) \quad (62)$$

Verwendet man für den Verstärker und die Wellen bei ω_s , ω_{H1} und ω_0 die gleichen numerischen Daten wie im Rechenbeispiel des vorigen Abschnitts, so erhält man $\tilde{\mu} = 3,42 \cdot 10^2 \text{ m}^{-1}$. Bild 7 zeigt die Verstärkung bei der Signal-Kreisfrequenz ω_s und der Hilfs-Kreisfrequenz ω_{H1} .

Die in den Verstärker hineinfließende Gleichstromleistung ist

$$P_0 = \frac{b}{\mu_0 d_m} \left(\frac{\hbar}{2e} \right)^2 k_s \omega_0 |A|^2 (\cosh(2\tilde{\mu}l) - 1) \quad (63)$$

Wegen

$$P_0 = P_s(l) - P_s(0) + P_{H1}^*(l) \quad (64)$$

ist die in den Verstärker hineinfließende Gleichstromleistung identisch mit der gesamten vom Verstärker abgegebenen Mikrowellenleistung. Für die bei den Kreisfrequenzen ω_s und ω_{H1} in den Verstärker hineinfließenden Mikrowellenleistungen $-P_s(l) - P_s(0)$ und $-P_{H1}^*(l)$ und die Gleichstromleistung P_0 sind die Leistungsbeziehungen nach Gl. (7) erfüllt, wenn man entsprechend den Gln. (8) und (9) P_p durch P_0 ersetzt.

8. Das Rauschverhalten des Wanderwellenverstärkers

Auch beim hier untersuchten Wanderwellenverstärker ist die Empfindlichkeit durch verschiedene Schwankungserscheinungen begrenzt. Folgende Rauschursachen sind zu berücksichtigen:

- Widerstandsrauschen vom eingangsseitigen Abschluß des Wanderwellenverstärkers bei der (den) Hilfsfrequenz(en)
- Schrottrauschen des Josephsongleichstromes
- Schrottrauschen des Quasiteilchenstromes

d) Schrotrauschen des Josephson-Quasiteilchen-Interferenzstromes

e) Rauschen durch Schwankungen von U_0

Die Rauschursachen c bis e stellen keine prinzipielle Begrenzung der Empfindlichkeit dar, da sie bei Verwendung von Tunnelelementen und einer gut stabilisierten Spannungsquelle für U_0 beliebig gering gehalten werden können. Die ersten beiden Rauschquellen sind prinzipiell unvermeidlich. Wir untersuchen daher den Einfluß dieser Rauschquellen am Beispiel des parametrischen Wanderwellenverstärkers, in dem nur die untere Hilfsfrequenz auftritt.

Wir berechnen zunächst das vom eingangsseitigen Abschluß des Wanderwellenverstärkers herrührende Rauschen. Aus dem Planckschen Strahlungsgesetz folgt, daß eine auf der absoluten Temperatur T und mit ihrer Umgebung im thermodynamischen Gleichgewicht befindliche Strahlungsquelle im Frequenzintervall $\Delta\omega$ die Rauschleistung

$$P_r = \frac{\hbar\omega}{4\pi} \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2kT}\right) \Delta\omega \quad (65)$$

anbietet. Wir setzen sowohl für die Signalquelle bei ω_s als auch für die eingangsseitige Abschlußimpedanz bei ω_{n1} näherungsweise thermodynamisches Gleichgewicht und daher Gültigkeit von Gl. (65) voraus. Der eingangsseitige Abschluß sei für beide Frequenzen reflexionsfrei und für ω_s auf der Temperatur T_s und für ω_{n1} auf der Temperatur T_{n1} befindlich. Die am Ausgang des Wanderwellenverstärkers angebotene Rauschleistung P_r' kann dann aus den Gln. (50a), (62) und (65) berechnet werden. In Gl. (62) sind dabei ω_{n1} und ω_s zu vertauschen, da die Signaleinkopplung bei ω_{n1} und die Signalauskopplung bei ω_s erfolgt. Wir erhalten

$$P_r'(l) = \frac{\hbar\omega_s}{8\pi} \left[\coth\left(\frac{\hbar\omega_s}{2kT_s}\right) (\cosh(2\tilde{\mu}l) + 1) + \coth\left(\frac{\hbar\omega_{n1}}{2kT_{n1}}\right) (\cosh(2\tilde{\mu}l) - 1) \right] \Delta\omega_s \quad (66)$$

Der erste Term in der eckigen Klammer von Gl. (66) beschreibt das von der Signalquelle am Ausgang des Wanderwellenverstärkers hervorgerufene Rauschen, der zweite das vom eingangsseitigen Abschluß des Wanderwellenverstärkers bei der Hilfsfrequenz am Ausgang hervorgerufene Rauschen. Die Rauschzahl F , definiert durch das Verhältnis der totalen, am Verstärkeranfang angebotenen, Rauschleistung zu der nur von der Signalquelle am Verstärkeranfang hervorgerufenen Rauschleistung ist

$$F = 1 + \frac{\coth\left(\frac{\hbar\omega_{n1}}{2kT_{n1}}\right)}{\coth\left(\frac{\hbar\omega_s}{2kT_s}\right)} \tanh^2(\tilde{\mu}l) \quad (67)$$

Für $2kT_{n1} \gg \hbar\omega_{n1}$, $2kT_s \gg \hbar\omega_s$ und $(2\tilde{\mu}l) \gg 1$ gilt die bekannte Näherungsformel für die Rauschzahl parametrischer Verstärker

$$F = 1 + \frac{\omega_s}{\omega_{n1}} \frac{T_{n1}}{T_s} \quad (68)$$

Für $\hbar\omega_{n1} \gg kT_{n1}$, $\hbar\omega_s \gg kT_s$ und $(2\tilde{\mu}l) \gg 1$ gilt näherungsweise $F = 2$. Das durch den Josephsongleichstrom verursachte Schrotrauschen bewirkt im Frequenzintervall $\Delta\omega$ auf der Leitungslänge dx das mittlere Stromschwankungsquadrat [54, 55]

$$d\overline{\delta i(x, \omega)^2} = \frac{b}{\pi} |e \cdot J_c(x)| \left[\coth\left(\frac{\hbar(\omega_0 + \omega)}{2kT}\right) + \coth\left(\frac{\hbar(\omega_0 - \omega)}{2kT}\right) \right] \Delta\omega dx \quad (69)$$

Die Spannungsabhängigkeit von J_{max} wurde vernachlässigt. Für $\hbar(\omega_{n1} \pm \omega) \gg 2kT$ gilt näherungsweise

$$d\overline{\delta i(x, \omega)^2} = \frac{2b}{\pi} |e \cdot J_c(x)| \Delta\omega dx \quad (70)$$

Man erkennt, daß diese Gleichung das Schrotrauschen eines Stromes mit der Teilchenladung $2e$ beschreibt. Es ist interessant festzustellen, daß dieses Schrotrauschen des Josephsonstromes aus der Wechselwirkung eines durch die makroskopischen Gleichungen (1) und (2) beschriebenen Josephsonelements mit einem quantisierten elektromagnetischen Feld zustande kommt. Der Schroteffekt des Josephsoneffektes ist also eine Folge von Schwankungsvorgängen im elektromagnetischen Feld und nicht der Schwankungsvorgänge in der supraleitenden Elektronenphase. Das hängt damit zusammen, daß die Zahl der in der supraleitenden Phase kondensierten Elektronen verglichen mit der Photonenzahl des mit dem Josephsonelement verkoppelten elektromagnetischen Feldes sehr hoch ist. Mit Schwankungsvorgängen in der supraleitenden Elektronenphase sind die (bei Tunnelelementen unter den obigen Voraussetzungen vernachlässigbaren) Quasiteilchenanregungen und das dadurch hervorgerufene Schrotrauschen verknüpft.

Die durch das Schrotrauschen in einem Leitungselement der Länge dx hervorgerufene und sich in einer Richtung ausbreitende Rauschleistung ist

$$dP_r(x, \omega) = \frac{1}{2} d\overline{\delta i(x, \omega)^2} \cdot Z_w \quad (71)$$

Zur Berechnung der durch das Schrotrauschen am Verstärkeranfang bei der Kreisfrequenz ω_s und in einem Intervall $\Delta\omega_s$ hervorgerufenen Rauschleistung P_r' ist $dP_r(x, \omega_s)$ mit der Leistungsverstärkung zwischen x und l zu multiplizieren und $dP_r(x, \omega_{n1})$ mit der Leistungsverstärkung bei Frequenzumsetzung von ω_{n1} nach ω_s zu multiplizieren; beide Ausdrücke sind dann über die Länge l des Wanderwellenverstärkers zu integrieren. Mit Gl. (71) und den für die Verstärkerlänge $(l-x)$ und Frequenzumsetzung von ω_{n1} nach ω_s modifizierten Gln. (50a) und (62) erhält man

$$P_r'(l) = \frac{1}{2} \int_0^l \left[(\cosh 2\tilde{\mu}(l-x) + 1) \frac{dP_r(x, \omega_s)}{dx} + \frac{\omega_s}{\omega_{n1}} (\cosh 2\tilde{\mu}(l-x) - 1) \frac{dP_r(x, \omega_{n1})}{dx} \right] dx \quad (72)$$

Aus den Gln. (53), (58) und (59) folgt

$$J_c(x) = \frac{1}{2} J_{max} \sqrt{\frac{k_s}{k_{n1}}} |A|^2 \sinh(2\tilde{\mu}x) \quad (73)$$

Aus den Gln. (60), (61), (69), (71), (72) und (73) folgt

$$\frac{P_r'(l)}{P_s(l)} = \frac{Z_w e^2}{\hbar} K \frac{\Delta\omega_s}{\omega_s} \quad (74)$$

mit

$$K = \frac{1}{2\pi} \frac{\tilde{\mu}l \sinh(2\tilde{\mu}l) + \cosh(2\tilde{\mu}l) - 1}{\cosh(2\tilde{\mu}l) + 1} \cdot K' + \frac{1}{2\pi} \frac{\omega_s}{\omega_{n1}} \frac{\tilde{\mu}l \sinh(2\tilde{\mu}l) - \cosh(2\tilde{\mu}l) + 1}{\cosh(2\tilde{\mu}l) + 1} \cdot K'' \quad (75)$$

wobei

$$K' = \left[\coth\left(\frac{\hbar(\omega_0 + \omega_s)}{2kT}\right) + \coth\left(\frac{\hbar(\omega_0 - \omega_s)}{2kT}\right) \right]$$

$$K'' = \left[\coth\left(\frac{\hbar(\omega_0 + \omega_{n1})}{2kT}\right) + \coth\left(\frac{\hbar(\omega_0 - \omega_{n1})}{2kT}\right) \right]$$

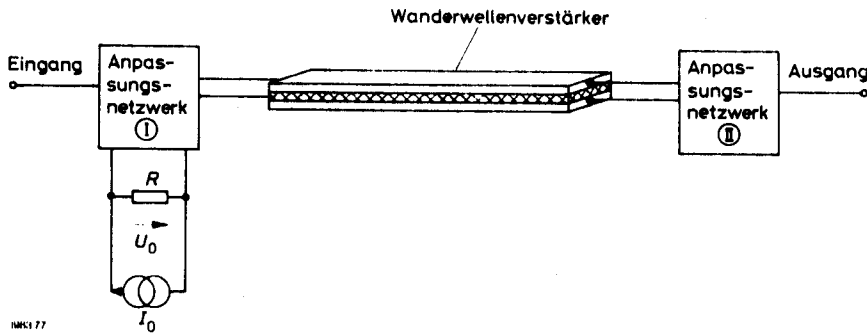


Bild 8: Schaltungsanordnung zum Betrieb von parametrischen Wanderwellenverstärkern

Für $2\beta l \gg 1$ gilt die Näherung

$$K = \frac{\beta l}{2\pi} \left[K' + \frac{\omega_s}{\omega_{n1}} K'' \right] \quad (76)$$

Ist außerdem $\hbar\omega_s, \hbar\omega_s, \hbar\omega_{n1} \gg 2kT$ erfüllt, so gilt

$$K = \frac{\beta l}{\pi} \left(1 + \frac{\omega_s}{\omega_{n1}} \right) \quad (77)$$

Wie man aus Gl. (74) sieht, ist im Fall es verlustfreien Wanderwellenverstärkers die durch den Schroteffekt bewirkte Rauschleistung der Signalleistung proportional. Da der Wellenwiderstand Z_w immer klein gegen $\hbar/e^2 = 4108,35 \Omega$ ist, und die relative Bandbreite $\Delta\omega_s/\omega_s$ klein gegen 1, spielt das Schrotrauschen beim verlustfreien Wanderwellenverstärker praktisch keine Rolle.

9. Ausführungsformen des Wanderwellenverstärkers

Bild 8 zeigt eine Schaltungsanordnung zum Betrieb von parametrischen Wanderwellenverstärkern. Das Anpassungsnetzwerk I hat die Aufgabe, das Eingangssignal mit der Kreisfrequenz ω_s auf die Eingangsimpedanz des Wanderwellenverstärkers zu transformieren und dem Wanderwellenverstärker die Gleichspannung U_0 zuzuführen. Der Wanderwellenverstärker hat einen Aufbau nach Bild 1. Durch das Anpassungsnetzwerk II wird der Wanderwellenverstärker bei der Signal- und bei den Hilfsfrequenzen (bzw. der Hilfsfrequenz) reflexionsfrei abgeschlossen. Außerdem wird die Ausgangsleistung bei der Signalfrequenz oder einer der Hilfsfrequenzen auf den Wellenwiderstand der am Ausgang anzuschließenden Leitung transformiert und ausgekoppelt. Da mit Supraleitern im Mikrowellenbereich Netzwerke außerordentlich hoher Güte realisierbar sind, können Anpassungsnetzwerke mit hohem Transformationsverhältnis realisiert werden. Eine beträchtliche Erhöhung der Impedanz ist möglich, wenn eine große Anzahl von Wanderwellenverstärkern eingangs- und ausgangsseitig jeweils in Serie geschaltet werden. Wegen der einfachen Struktur und der geringen Abmessungen des Wanderwellenverstärkers sind (in Dünnschichttechnik realisierte) Anordnungen aus einigen 10 bis einigen 100

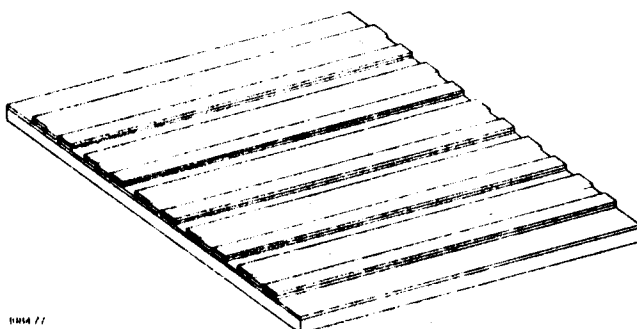
eingangs- und ausgangsseitig in Serie geschalteten Wanderwellenverstärkern vorstellbar. Wellenwiderstände von einigen zehn Ohm wären damit erzielbar. Hat beispielsweise ein einzelnes leitungsartiges Josephsonelement einen Wellenwiderstand von $170 \text{ m}\Omega$, so erzielt man durch Serienschaltung von 280 Josephsonelementen einen Wellenwiderstand von 50Ω . Bild 9 zeigt eine geometrische Realisierung mehrerer, über die ganze Länge in Serie geschalteter Josephsonelemente. Bei $2 \mu\text{m}$ Breite der einzelnen Josephsonelemente und ebenso großem Abstand beträgt die Gesamtbreite des Wanderwellenverstärkers $1,12 \text{ mm}$.

Zur Gewinnung der niedrigen, extrem gut stabilisierten Gleichspannung U_0 wird ein gut stabilisierter Gleichstrom I_0 einem niederohmigen Widerstand R eingepreßt. R ist genügend niederohmig zu wählen und ebenfalls zu kühlen, damit durch das thermische Rauschen von R nicht eine Verbreiterung der Spektrallinie ω_0 auftritt.

Zur Erzeugung des Magnetfeldes B_0 wird eine supraleitende Spule verwendet. Nach Einstellung des gewünschten Magnetfeldes wird die Spule über ein Kryotron [56] kurzgeschlossen. Das Magnetfeld bleibt nun über beliebige Zeiträume ohne Schwankungen bestehen.

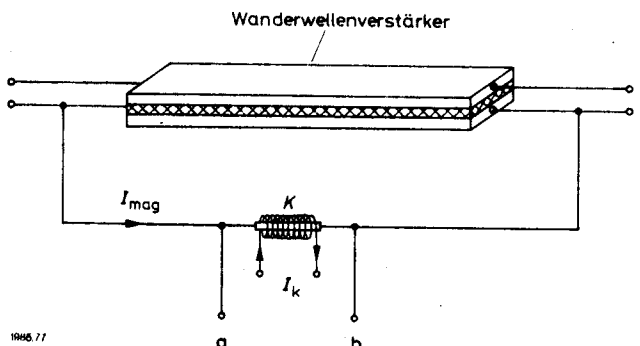
In Bild 10 ist eine Möglichkeit dargestellt, nach der B_0 durch eine Gleichstrom-Einprägung im Wanderwellenverstärker selbst hervorgerufen werden kann. Bei einer der beiden Leiterbahnen des Wanderwellenverstärkers wird eine (gleichstrommäßige) Rückführung vom Ausgang zum Eingang des Wanderwellenverstärkers vorgenommen. Diese Rückführung wird durch das Kryotron unterbrochen und ist sonst überall supraleitend. Wird das Kryotron durch Einprägung eines Steuerstromes I_k normalleitend gemacht, so kann dem Wanderwellenverstärker ein Gleichstrom I_{mag} eingepreßt werden. Nach Einstellung eines Stromes I_{mag} , der im Wanderwellenverstärker das gewünschte Magnetfeld B_0 hervorruft, wird I_k abgeschaltet. I_{mag} fließt jetzt über eine geschlossene supraleitende Schleife vom Ausgang des Wanderwellenverstärkers zum Eingang zurück. Die Anschlüsse a und b können nun von der externen Gleichstromquelle abgekoppelt werden.

Zur Realisierung eines bestimmten Dispersionsverlaufes für die elektromagnetischen Wellen kann das Josephson-Flächenelement



1984/77

Bild 9: Serienschaltung von leitungsartigen Josephsonelementen



1986/77

Bild 10: Erzeugung des Magnetfeldes B_0

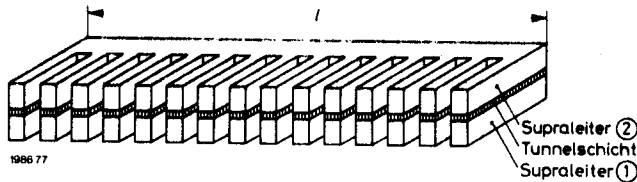


Bild 11: Wanderwellenverstärker mit räumlich periodischer Struktur (die Dicke der Schichten ist in der Zeichnung stark übertrieben)

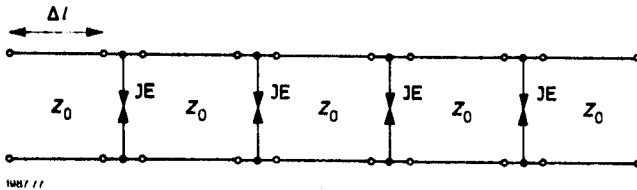


Bild 12: Wanderwellenverstärker mit diskreten Josephson-Elementen

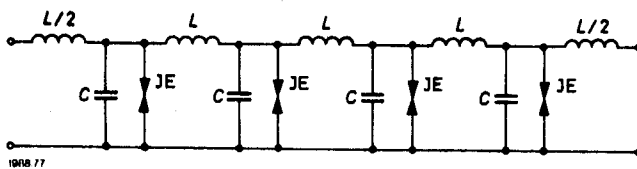


Bild 13: Wanderwellenverstärker mit diskreten Josephson-Elementen und diskret nachgebildeten Leitungselementen

mit einer in Bild 1 nicht eingezeichneten Flächenstruktur versehen werden. Bild 11 zeigt einen Wanderwellenverstärker, bestehend aus zwei supraleitenden Schichten mit einer räumlich periodischen Flächenstruktur. Im übrigen gelten die Dimensionierungsgrundlagen nach Bild 1. Leitungen mit räumlich periodischen Strukturen weisen Durchlaß- und Sperrbereiche für die elektromagnetische Welle auf [57 und 58]. Mit einer Geometrie nach Bild 11 kann daher das in Bild 5 dargestellte Dispersionsdiagramm realisiert werden.

Abschließend sollen noch zwei weitere Realisierungsmöglichkeiten des Wanderwellenverstärkers kurz erwähnt werden. Ebenso wie Leitungen durch eine Nachbildung mit diskreten Bauelementen realisiert werden können, ist das auch bei Wanderwellenverstärkern möglich [18, 19]. In Bild 12 werden zwischen kurzen Leitungselementen mit der Länge Δl diskrete (nicht flächenhafte) Josephson-elemente (JE) geschaltet. Die JPW entsteht dadurch, daß alle Josephson-elemente auf U_0 vorgespannt sind, die Ströme mit ω_0 oszillieren und außerdem jede von einem Leitungselement der Länge Δl und den beiden angrenzenden Josephson-elementen gebildete Masche von einem bestimmten magnetischen Fluß Φ_{mag} durchsetzt wird. Dadurch entsteht eine Quantenphasendifferenz

$$\Delta\Phi = \frac{2e}{\hbar} \Phi_{mag} \quad (78)$$

zwischen benachbarten Josephson-elementen, sofern die Masche durchgehend supraleitend ist [4, 5]. Bild 13 zeigt eine Konfiguration, bei der auch die zwischen den Josephson-elementen befindlichen Leitungselemente diskret nachgebildet sind. Bei der diskreten Leitungsnachbildung wird ein Dispersionsdiagramm nach Bild 3 oder Bild 4 erzielt.

Da man bei den Anordnungen nach Bild 12 und 13 kleinflächige Josephson-elemente und Leitungselemente mit höherem Wellenwiderstand verwenden kann, bleibt ein größerer konstruktiver Freiheitsgrad zur Erzielung höherer Wellenwiderstände offen. Der einzige zur Zeit in Hinblick auf Empfindlichkeit und Frequenzbereich vergleichbare Verstärker ist der Maser. Beim Maser ist jedoch

ebenfalls Kühlung mit flüssigem Helium erforderlich. Die Struktur des Wanderwellenverstärkers aus schwach gekoppelten Supraleitern ist kleiner und einfacher als die des Masers. Außerdem sind höhere Bandbreiten zu erzielen als beim Wanderwellen-Maser, da bei ihm die Bandbreite durch die Breite der Energieniveaus der Atome, beim supraleitenden Wanderwellenverstärker hingegen nur durch die (konstruktiv leicht beeinflussbare) Leitungsdispersion begrenzt ist. Sofern die technologischen Probleme der Herstellung befriedigend gelöst werden können, ist der supraleitende Wanderwellenverstärker eine interessante Alternative zum Maser.

NE3-UL
Eingang 18. 5. 77

Schrifttum

- [1] B. D. Josephson: Possible new effects on superconductive tunneling. Phys. Letters 1 (1962) pp. 251-253
- [2] B. D. Josephson: Coupled superconductors. Rev. Mod. Phys. 36 (1964) pp. 218-220
- [3] B. D. Josephson: Supercurrents through barriers. Advanc. Phys. 14 (1966) pp. 419-451
- [4] L. Solymar: Superconductive tunneling and applications. London (1972)
- [5] B. W. Petley: Einführung in die Josephson-Effekte. Heidelberg (1974)
- [6] J. R. Waldram: The Josephson effects in weakly coupled superconductors. Rep. Prog. Phys. 39 (1976) pp. 751-821
- [7] T. F. Finnegan, A. Denenstein and D. N. Langenberg: ac-Josephson-effect determination of e/h : A standard of electrochemical potential based in macroscopic quantum phase coherence in superconductors. Phys. Rev. B 4 (1971) pp. 1487-1522
- [8] J. Matisoo: The tunneling cryotron - a superconductive logic element based on electron tunneling. Proc. IEEE 55 (1967) pp. 172-180
- [9] W. Schroen: Physics of preparation of Josephson barriers. J. Appl. Phys. 39 (1968) pp. 2671-2678
- [10] J. T. C. Yeh: Techniques for fabrication of superconducting microbridges and small Josephson tunnel junctions. J. Appl. Phys. 45 (1974) pp. 4617-4621
- [11] P. W. Anderson and A. H. Dayem: Radio frequency effects in superconducting thin film bridges. Phys. Rev. Lett. 13 (1964) pp. 195-197
- [12] J. E. Zimmermann and A. H. Silver: Macroscopic quantum interference effects through superconducting point contacts. Phys. Rev. 141 (1966) pp. 367-375
- [13] C. C. Grimes, P. L. Richards and S. Shapiro: Josephson-effect far - infrared detector. J. Appl. Phys. 39 (1968) pp. 3905-3912
- [14] H. Tolner and C. D. Andriese: High-impedance point contact Josephson junctions. IEEE Trans. Magn. MAG-11 (1975) pp. 866-869
- [15] P. L. Richards, F. Auracher and T. van Duzer: Millimeter and submillimeter wave detection and mixing with superconducting weak links. Proc. IEEE 61 (1973) pp. 36-45
- [16] R. A. Kamper: Review of superconducting electronics. IEEE Trans. Magn. MAG-11 (1975) pp. 141-146
- [17] D. H. McDonald, V. E. Kose, K. M. Evenson, J. S. Wells and I. D. Cupp: Harmonic generation and submillimeter wave mixing with the Josephson effect. Appl. Phys. Lett. 15 (1969) pp. 121-122
- [18] K.-H. Steiner and L. Punga: Parametrische Systeme. Stuttgart (1965)
- [19] L. A. Blackwell and K. L. Kotzebue: Semiconductor-diode parametric amplifiers. Englewood Cliffs (1961)
- [20] W. H. Louisell: Coupled mode and parametric electronics. New York, London (1960)
- [21] A. S. Clorfaine: On the mechanism of amplification in superconducting films. Proc. IEEE 53 (1965) p. 388
- [22] H. Zimmer: Parametric amplification of microwaves in superconducting Josephson tunnel junctions. Appl. Phys. Lett. 7 (1967) pp. 193-194
- [23] P. Russer: Parametric amplification with Josephson junctions. AEU 23 (1969) pp. 417-420
- [24] A. N. Vystavskiy, V. N. Gubankov, G. F. Leshchenko, K. K. Likharev and V. V. Migulin: Parametric conversion and amplification with the use of superconducting point contacts. Radio Eng. Electron. Phys. 15 (1970) pp. 2121-2124
- [25] P. Russer: General energy relations for Josephson junctions. Proc. IEEE 59 (1971) pp. 282-283
- [26] A. N. Vystavkin, V. N. Gubankov, L. S. Kuz'min, K. K. Likharev and V. V. Migulin: Characteristics of parametric oscillation in superconducting point contacts. Radio Eng. Electron. Phys. 17 (1972) pp. 705-707
- [27] E. D. Thompson: Power flow for Josephson elements. IEEE Trans. Electron. Dev. ED-20 (1973) pp. 680-683
- [28] S. E.-D. E.-S. Habib and S. Dmitrevsky: Small-signal analysis of the gain and noise performance of the Josephson mixer. J. Appl. Phys. 46 (1975) pp. 900-906
- [29] H. Kanter and A. H. Silver: Self-pumped Josephson parametric amplification. Appl. Phys. Lett. 19 (1971) pp. 515-517
- [30] H. Kanter: A novel parametric negative - resistance effect in Josephson junctions. Appl. Phys. Lett. 23 (1973) pp. 350-352

- [31] H. Kanter: Two-idler parametric amplification with Josephson junctions. *J. Appl. Phys.* 46 (1975) pp. 4018-4025
- [32] H. Kanter: Parametric amplification with self-pumped Josephson junctions. *IEEE Trans. Magn. MAG-11* (1975) pp. 789-793
- [33] H. Kanter: Low noise parametric upconversion with a self pumped Josephson junction. *J. Appl. Phys.* 46 (1975) pp. 2261-2263
- [34] B. T. Ulrich and M. T. Levinson: First evidence of 1 mm wavelength parametric amplification in a Josephson junction microwave source. *Appl. Phys. Lett.* 28 (1975) pp. 131-133
- [35] P. T. Parrish and R. Y. Chiao: Amplification of microwaves by superconducting microbridges in a four wave parametric mode. *Appl. Phys. Lett.* 25 (1975) pp. 627-629
- [36] M. J. Feldman, P. I. Parrish and R. Y. Chiao: Parametric amplification by unbiased Josephson junctions. *J. Appl. Phys.* 46 (1975) pp. 4031-4042
- [37] Y. Taur and P. L. Richards: Parametric amplification and oscillation at 36 GHz using a point-contact Josephson junction. *J. Appl. Phys.* 48 (1977) pp. 1321-1326
- [38] S. Wahlsten, S. Rudner and T. Claesson: Parametric amplification in arrays of Josephson tunnel junctions. *Appl. Phys. Lett.* 30 (1977) pp. 298-300
- [39] I. O. Kulik: Propagation of waves in the Josephson junction in the presence of vortices and the electrodynamics of weak superconductivity. *Sov. Phys. - JETP* 24 (1966) pp. 1307-1317
- [40] P. Leubwohl and M. J. Stephen: Properties of vortex lines in superconducting barriers. *Phys. Rev.* 163 (1967) pp. 376-379
- [41] A. C. Scott: A nonlinear Klein-Gordon equation. *Am. J. Phys.* 37 (1969) pp. 52-61
- [42] C. S. Owen and D. J. Scalapino: Inductive coupling of Josephson junctions to external circuits. *J. Appl. Phys.* 41 (1970) pp. 2047-2056
- [43] K. Yoshida and F. Irie: Frequency conversion in a long Josephson junction with a moving vortex array. *Appl. Phys. Lett.* 27 (1975) pp. 469-470
- [44] K. Yoshida and F. Irie: Parametric amplification by a Josephson junction line. *Proc. 14th Int. Conf. Low. Temp. Phys. Otaniemi, Finland, 14-20 Aug. 1975* Vol. 4, pp. 178-179
- [45] J. Bardeen, L. N. Cooper and J. R. Schrieffer: Theory of superconductivity. *Phys. Rev.* 108 (1957) pp. 1175-1204
- [46] J. R. Schrieffer: Theory of superconductivity. New York (1964)
- [47] P. G. De Gennes: Superconductivity of metals and alloys. New York (1966)
- [48] G. Rickayzen: Theory of superconductivity. New York (1965)
- [49] M. Tinkham: Introduction to superconductivity. New York (1975)
- [50] J. M. Manley and H. E. Rowe: Some general properties of nonlinear elements - part I, general energy relations. *Proc. IRE* 44 (1956) pp. 904-913
- [51] E. Riedel: Zum Tunneleffekt bei Supraleitern im Mikrowellenfeld. *Z. Naturforschung* 19a (1964) S. 1634-1635
- [52] C. M. Falco, W. H. Parker and S. E. Trullinger: Observation of a phase-modulated quasiparticle current in superconducting weak links. *Phys. Rev. Lett.* 31 (1973) pp. 933-936
- [53] R. E. Harris: Cosine and other terms in the Josephson tunneling current. *Phys. Rev. B* 10 (1974) pp. 84-94
- [54] D. Rogovin, M. O. Scully and P. Lee: Quantum theory of Josephson radiation. *Progress in quantum electronics* 4 (1973) pp. 215-291
- [55] D. Rogovin and D. J. Scalapino: Fluctuation phenomena in tunnel junctions. *Annals of Physics* 86 (1974) pp. 1-90
- [56] V. L. Newhouse: Applied superconductivity I. New York (1975)
- [57] L. Brillouin: Wave propagation in periodic structures. New York (1946)
- [58] R. E. Collin: Grundlagen der Mikrowellentechnik. VEB-Verlag Technik Berlin (1973)

A DC-pumped Josephson travelling-wave amplifier

Peter Russer

Wiss. Ber. AEG-TELEFUNKEN 50 (1977) 4/5, pp. 171-182

In this paper a travelling-wave amplifier formed by a one-dimensional Josephson junction line is investigated theoretically. Electro-magnetic waves propagating in the Josephson junction line are amplified by interaction with a pump wave. This pump wave is generated by a DC voltage and a transverse stationary magnetic field, both applied to the Josephson junction line.

The Josephson line (Fig. 1) is formed by two superconductors separated by a small insulation barrier of thickness d . The Josephson current I_J per unit of length in x -direction depends on the quantum phase difference $\Phi(x, t)$ on the line voltage $U(x, t)$ (eq. (11)). The time and space dependence of $\Phi(x, t)$ is governed by the line voltage $U(x, t)$ and by a transverse magnetic field $B_z(x, t)$ (eq. (2a), (12)). A DC voltage U_0 and a spatially and temporarily constant transverse magnetic field B_0 generate a quantum phase wave propagating in positive x -direction with angular frequency ω_0 (eq. (3)) and wave vector k_0 (eq. (24)). It is assumed that due to the dispersion relations of the Josephson junction line an electro-magnetic wave with wave vector k_0 does not exist at the angular frequency ω_0 . By means of appropriate line structures dispersion diagrams as shown in Figs. 3 to 5 may be achieved. Electro-magnetic waves at the signal angular frequency ω_s and the idler angular frequencies $\omega_{n,1}$ and $\omega_{n,2}$ propagate with the wave vectors k_s , $k_{n,1}$ and $k_{n,2}$. If the conditions (25), (27) and/or (26), (28) are satisfied, parametric amplification of the electro-magnetic waves is possible. A system of linear differential equations ((31) to (33)) for the complex small signal amplitudes Φ_s , $\Phi_{n,1}$ and $\Phi_{n,2}$ of the quantum phase wave is derived by inserting the "Ansatz"

(29) in the Josephson junction line equation (17). The complex voltage and current amplitude U_ν , I_ν , the characteristic line impedance $Z_{w\nu}$ and the power P_ν flowing in positive x -direction are given by eq. (34), (36), (37), (41) ($\nu = s, h1, h2$).

The power amplification of a lossless ($\beta_1 = \beta_2 = 0$) travelling-wave amplifier of length l with both idler frequencies is given by eq. (50). The parameter μ is defined by equation (43) and the Josephson penetration depth λ_J by eq. (19). For a Josephson junction line with $I_{max} = 0.5 \cdot 10^6 \text{ Am}^{-2}$, $d = 10 \text{ \AA}$, $d_m = 900 \text{ \AA}$, $\lambda_J = 76.3 \text{ \mu m}$ and for $\omega_s/2\pi = 100 \text{ GHz}$, $\omega_0/2\pi = 500 \text{ GHz}$, $\omega_{h,1}/2\pi = 400 \text{ GHz}$ and $\omega_{h,2}/2\pi = 600 \text{ GHz}$ we calculate $U_0 = 1.034 \text{ mV}$, $B_0 = 1.148 \cdot 10^{-3} \text{ Vs m}^{-2}$ and $\mu = 1.97 \cdot 10^2 \text{ m}^{-1}$. For the amplifier with a single idler frequency at $\omega_{h,1}$ the power gain is given by eq. (50a) for the output signal at $\omega_{h,1}$ and by eq. (62) for the output signal at $\omega_{h,2}$. The dependence of power gain on line width is shown in Fig. 6 for two idler frequencies $\omega_{h,1}$, $\omega_{h,2}$ (for the single idler frequency $\omega_{h,1}$ in Fig. 7).

The sensitivity of the travelling-wave amplifier is limited by the idler input termination noise and the DC Josephson current shot noise. For the single idler ($\omega_{h,1}$) parametric amplifier the idler input termination yields the noise figure F (eq. (67) and appropriate solution for eq. (68) for $2kT_{n,1} \gg \hbar\omega_{h,1}$ and $2kT_n \gg \hbar\omega_s$) and $2\hbar l \gg 1$. The ratio of the output noise power P_n (due to shot noise) to output signal power P_s (eq. (74)) can be neglected since the characteristic line impedance Z_w is smaller than $\hbar/e^2 = 4108.35 \text{ ohms}$ by several orders of magnitude. A Josephson line is shown in Fig. 10 with strongly nonlinear dispersion to achieve mismatch between quantum phase wave and electro-magnetic wave at ω_0 . Examples of iterated travelling-wave amplifiers with discrete Josephson junctions are shown in Figs. 11 and 12.