

# Anmerkungen zur Berechnung des Wirkungsgrads von Miniaturgetrieben mit Zapfenerweiterungen

Hanfried Kerle\*

\* früher: TU Braunschweig, Institut für Werkzeugmaschinen und  
Fertigungstechnik  
h.kerle@t-online.de

## Kurzfassung

Miniaturgetriebe sind hier Getriebe mit geringen kinematischen Abmessungen und einfachem konstruktiven Aufbau. Eine Möglichkeit dazu ist der Einsatz von Drehgelenken in der Form einfacher und mehrfacher Zapfenerweiterungen (Exzentern). Bekanntlich treten jedoch bei Exzentern mit Gleitlagerung große Reibungsverluste auf, die eine Berechnung des Wirkungsgrads in diskreten Stellungen des Getriebes aufwändig machen. Der vorliegende Beitrag basiert auf dem dynamisch-interaktiven Geometrieprogramm „GeoGebra“ und zeigt einen effizienten Lösungsweg zur statischen Analyse von Miniaturgetrieben mit Zapfenerweiterungen auf.

## Abstract

Miniature mechanisms are characterized here by having small kinematic dimensions and simple structures. A possibility to achieve this is the use of expanding turning pairs into single or multiple eccentrics. However, eccentrics with sliding bearings cause worth mentioning friction losses that make it difficult to calculate the mechanical efficiency for discrete positions of the mechanism. The paper presented here is based on the dynamically interactive geometry program “GeoGebra” and shows an efficient way of investigating the static analysis of miniature mechanisms with eccentrics.

## 1 Einführung

Im Nachlass von KARL HOECKEN gibt es u. a. ein Skizzenblatt mit viergliedrigen Getrieben und Zapfenerweiterungen. HOECKEN war von 1930 bis 1934 einer der Nachfolger FRANZ REULEAUX's am Lehrstuhl für Getriebelehre der TH Berlin-Charlottenburg [1].

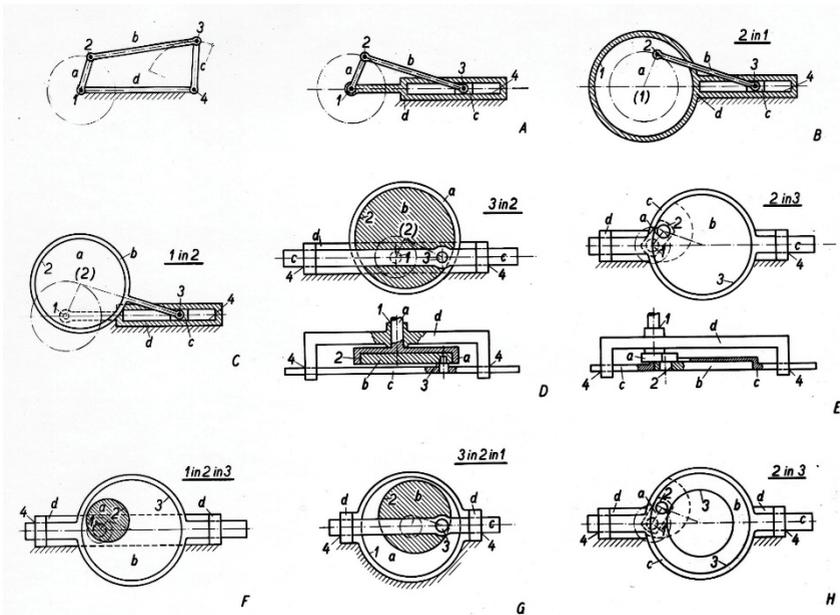


Abb. 1: Ausschnitt aus einem Skizzenblatt von KARL HOECKEN mit viergliedrigen Getrieben und Zapfenerweiterungen

Bei dem in Abb. 1 gezeigten Ausschnitt handelt es sich um Getriebe der viergliedrigen Schubkurbel- und Kreuzschubkurbelkette. Anders als heute üblich sind auf dem Skizzenblatt die Gelenke fortlaufend mit den Ziffern 1 bis 4 bezeichnet. Wenn der Wellen- oder Zapfendurchmesser eines Drehgelenks  $i$  mit dem dazugehörigen Bohrungsdurchmesser so weit vergrößert wird, dass er das vorhergehende Gelenk  $i-1$  mit einschließt, so entsteht eine Zapfen- oder Elementerweiterung. Zapfen und Bohrung gehören als Elementenpaar oder Gelenk benachbarten Gliedern an. Der Mittelpunkt des entstandenen (Kreis-)Exzenters wird lokal zum Mittelpunkt des Gelenks. Die Skizzen B bis E und H zeigen

Getriebe mit einfacher, die Skizzen F und G Getriebe mit zweifacher Zapfenerweiterung.

Bei Miniaturgetrieben erfolgt durch die ein- und mehrfache Zapfenerweiterung eine konstruktive „Verdichtung“ der Getriebe hinsichtlich der kinematischen Abmessungen (Gelenkabstände), die letztendlich die Übertragungsfunktion eines Getriebes bestimmen. Dadurch, dass ein Getriebeglied  $j$  sich im benachbarten Getriebeglied  $k = j+1$  bewegen kann, wird die Konstruktion des Miniaturgetriebes einfacher; die Anzahl der parallelen Gelenkebenen (Schichten) muss beispielsweise wegen fehlender Wellenkröpfungen nicht größer als eins sein. Dies geht allerdings zu Lasten des Bauflächen- und Materialbedarfs.

Der entscheidende Nachteil beim Einsatz von Miniaturgetrieben mit Zapfenerweiterung(en) liegt im Auftreten von Verlusten mechanischer Energie durch *Gleitreibung*, dadurch ist der Einsatz auf die Erzeugung langsamer Bewegungen beschränkt, wie z. B. Verstellbewegungen. Die Bewegung eines Exzenterglieds in einer entsprechend großen Bohrung des Nachbarglieds entspricht der Bewegung in einem Gleitlager. Zwar lassen sich die Reibungsverluste durch die Verwendung von Mini-Kugel- und Mini-Nadellagern auf dem Exzenterumfang verringern, diese Maßnahmen erhöhen jedoch den konstruktiven und in Folge auch finanziellen Aufwand.

Bei der Fragestellung, ob der Einsatz von Miniaturgetrieben energetisch sinnvoll ist, kann der mechanische Wirkungsgrad eine Entscheidungshilfe geben. Während es beim Entwurf „normaler“ Getriebe mit Kugel- oder Nadellagern in den Gelenken meistens ausreicht, die Reibungsverluste zu vernachlässigen oder zumindest im Mittel zu berücksichtigen, muss bei den reibungsempfindlichen Miniaturgetrieben – trotz Minderung der Gelenkreibung durch Schmierung – der Rechenaufwand für die Ermittlung des Wirkungsgrads erhöht und auf diskrete Getriebestellungen bezogen werden. Erst die Kenntnis des Verlaufs des Wirkungsgrads über der Antriebskoordinate liefert verlässliche Rückschlüsse darüber, ob das Miniaturgetriebe zufriedenstellend läuft oder in bestimmten Lagen zum Klemmen bzw. Hemmen neigt.

## 2 Gleichgewicht, Reibung und Wirkungsgrad

Bei der Aufstellung des Gleichgewichts zwischen An- und Abtrieb unter Berücksichtigung der Gelenkreaktionen werden üblicherweise drei Wege alternativ besprochen:

1. Zerlegung des Getriebes in statisch bestimmte Elementargruppen (Gelenkkraftverfahren, Kraft- und Seileck)
2. Zerlegung des Getriebes in Einzelglieder und Anwendung von Schwerpunkt- und Momentensatz (Schnittprinzip)
3. Anwendung des Leistungssatzes (dynamische Grundgleichung)

In allen drei Fällen wird bei den reibungsbehafteten Miniaturgetrieben eine Gelenkkraft  $G_{jk} = N_{jk}$  – ausgeübt vom Glied  $k$  auf das Glied  $j$  – zwischen den beiden Gliedern durch eine Reibungskraft  $R_{jk}$  vergrößert; diese steht senkrecht auf der Normalkraft  $N_{jk}$ , in vektorieller Schreibweise heißt das

$$\vec{G}_{jk} = \vec{N}_{jk} + \vec{R}_{jk}. \quad (1)$$

Die Reibungskraft im Gelenk  $i \neq j, k$  zwischen den Gliedern  $j$  und  $k$  soll der Einfachheit halber für Langsamlauf [2] als COULOMBSche Festreibungskraft mit der Reibungszahl  $\mu_i$  eingeführt werden, d. h.

$$\vec{R}_{jk} = -\mu_i \cdot \frac{N_{jk}}{v_{jk}} \cdot \vec{v}_{jk}. \quad (2)$$

Die Reibungskraft  $R_{jk}$  ist stets der Relativgeschwindigkeit  $v_{jk}$  an der Berührstelle beider Glieder entgegengesetzt gerichtet; für ein Drehgelenk mit dem Zapfenradius  $r_i$  gilt

$$\vec{v}_{jk} = \vec{\omega}_{jk} \times \vec{r}_i. \quad (3)$$

Mit  $\omega_{jk}$  ist die relative Winkelgeschwindigkeit zwischen beiden Gliedern bezeichnet. Das Vorhandensein der Reibungskraft  $R_{jk}$  hat zur Folge, dass die Gelenkkraft  $G_{jk}$  nicht mehr durch den Mittelpunkt des Drehgelenks geht, sondern den sog. *Reibungskreis* mit dem Radius

$$r_{Ri} = \frac{\mu_i \cdot r_i}{\sqrt{1 + \mu_i^2}} \quad (4)$$

tangiert. Für die Anwendung des Gelenkkraftverfahrens hat dieser Umstand weitreichende Konsequenzen: Die Schnittpunkte der Wirkungslinien der Kräfte in einem Lageplan des Getriebes sind schwieriger zu bestimmen; welche Tangente von vier Tangenten, die beispielsweise an zwei Reibungskreise eines binären Glieds gelegt werden können, die richtige ist, entscheidet die Vorschrift, dass das Reibungsmoment

$$M_{jk} = r_{Ri} \cdot G_{jk} = r_i \cdot R_{jk} \quad (5)$$

im Drehgelenk stets der relativen Winkelgeschwindigkeit  $\omega_{jk} = \omega_{j1} - \omega_{k1}$  entgegen gerichtet sein muss.

Auch bei der Anwendung des Leistungssatzes gibt es große mathematische Probleme, sofern die Reibungsverluste in den Gelenken exakt mit einbezogen werden sollen. Um die Leistungsverluste  $P_{Vi}$  eines Getriebes in seinen Dreh- und Schubgelenken zu ermitteln, müssen die Gelenkkräfte zuvor aus den Gleichgewichtsbedingungen der Statik ermittelt werden, die Gleichgewichtsbedingungen für Gelenke *mit* Reibung sind jedoch – wie oben erläutert – geometrisch anders umzusetzen als für Gelenke *ohne* Reibung. Wenn die Reibung nur angenähert zu berücksichtigen ist, was für Miniaturgetriebe mit Zapfenerweiterung(en) *nicht* zutrifft, ermittelt man zunächst die Gelenkkräfte ohne Reibung und multipliziert diese dann mit der jeweiligen Reibungszahl  $\mu_i$  und der passenden Relativgeschwindigkeit, um  $P_{Vi}$  zu erhalten [3].

Wenn die Gelenkreaktionen unter Berücksichtigung der Reibung exakt ermittelt wurden, verringert sich der Aufwand für die Berechnung der Antriebsleistung  $P_{an}$  bei vorgegebener Abtriebsleistung  $P_{ab}$  durch eine oder mehrere eingeprägte Kräfte bzw. Drehmomente. Es ist dann nicht mehr notwendig, gelenkweise vorzugehen, um den Leistungsverlust durch Reibung, nämlich

$$P_V = \sum_i P_{Vi} = P_{an} - P_{ab}, \quad (6)$$

zu ermitteln. Der Wirkungsgrad  $\eta$  des Miniaturgetriebes errechnet sich aus der Gleichung

$$\eta = \frac{\left| \frac{P_{ab}}{P_{an}} \right|}{\left| \frac{M_{ab} \cdot \omega_{ab}}{M_{an} \cdot \omega_{an}} \right|} = 1 - \left| \frac{P_V}{P_{an}} \right|, \quad (7)$$

in der die An- und Abtriebsleistung mit den Drehmomenten  $M$  und Winkelgeschwindigkeiten  $\omega$  am An- bzw. Abtriebsglied verknüpft sind [4].

Die Gl. (7) besitzt einen entscheidenden Nachteil, auf den schon VOLMER in seinem Buch [5] hinweist: In den Umkehr- oder Totlagen eines ungleichmäßig übersetzenden Getriebes ist  $\omega_{ab} = 0$  und damit auch  $\eta = 0$ , ohne dass das Getriebe klemmt oder Selbsthemmung eintritt. Bei einem massebehafteten Getriebe (Normalfall) fließt die Antriebsleistung vollständig in die bewegten Massen der Getriebeglieder. Der Bereich der Totlagen muss also bei der Anwendung der Gl. (7) gesondert betrachtet werden.

LENK schlägt deshalb vor, statt des normalen Wirkungsgrads  $\eta$  nach Gl. (7) den von ihm kreierten *Übertragungswirkungsgrad*  $\eta_U$  einzuführen [6]. Dieser ist allein antriebsseitig definiert und setzt das Antriebsdrehmoment *ohne* Berücksichtigung der Reibung ( $\sigma R$ ) in das Verhältnis zum Antriebsdrehmoment *mit* Berücksichtigung der Reibung ( $mR$ ), d. h.

$$\eta_{\dot{U}} = \left| \frac{(M_{an})_{oR}}{(M_{an})_{mR}} \right|. \quad (8)$$

### 3 Getriebetechnik mit „GeoGebra“

Die im Internet per Download frei verfügbare Software „GeoGebra“ verbindet dynamisch-interaktive Geometrie der Ebene – und neuerdings in der Version 5.0 – auch des Raumes mit Elementen der Computeralgebra [7]. Mit „GeoGebra“ liegt eine effiziente Alternative zu analytischen und numerischen Berechnungsverfahren für die Analyse und Synthese von Getrieben vor [8]. Das Programm besitzt neben geometrischen auch algebraische Funktionalitäten, die über unterschiedliche Fenster auf dem Computerbildschirm verknüpft und abrufbar sind. Die Kinematik ebener Getriebe wird auf die Bewegung von Kreisen abgebildet, zu denen auch Punkte und Geraden gehören [9].

#### 3.1 Auswahl und Kinematik eines Miniaturgetriebes

Die Überlegungen zum Wirkungsgrad sollen anhand eines einfachen Miniaturgetriebes überprüft werden. Die Abb. 2 zeigt sechs viergliedrige Miniaturgetriebe mit Zapfenerweiterungen, deren Kurbeln  $A_0A$  als Kreisexzenter umlaufen.

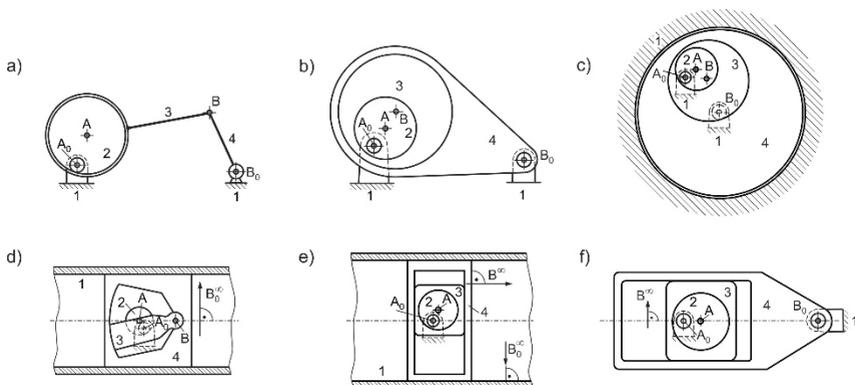


Abb. 2: Viergliedrige Miniaturgetriebe mit Zapfenerweiterungen

Bei den Getrieben (a) bis (c) handelt es sich um Kurbelschwingen  $A_0ABB_0$  mit einfacher, zweifacher und dreifacher Zapfenverlängerung. Das Getriebe (d) ist eine zentrische Schubkurbel, bei der sich sowohl das Glied 2 (Kurbel) als auch das Glied 3 (Koppel) im Glied 4, dem Abtriebsschieber, bewegen; die Getriebe (e) und (f) stellen eine Kreuzschubkurbel bzw. eine schwingende Kurbelschleife dar.

Als Rechenbeispiel für die weitere Analyse eines Miniaturgetriebes wird der Typ (c) in Abb. 2 ausgewählt, eine Kurbelschwinge mit dreifacher Zapfenverlängerung, nämlich in den Gelenken A, B und  $B_0$ .

Die Abmessungen lassen sich über Schieberegler einstellen. Für das ausgewählte Miniaturgetriebe liegt zudem ein Modell als zentrische Kurbelschwinge vor, deswegen werden folgende Abmessungen gewählt (Längenangaben in der Einheit mm):

$$\begin{aligned} l_1 &= A_0B_0 = 24 & l_2 &= A_0A = 7 \\ l_3 &= AB = 20 & l_4 &= B_0B = 15 \\ r_2 &= AC = 10.5 & r_3 &= BD = 34 \\ r_4 &= B_0E = 53 \end{aligned}$$

Mit Hilfe von „GeoGebra“ entsteht eine Skizze der Kurbelschwinge, s. Abb. 3a, deren Bewegung mit Hilfe des Schiebereglers für den Kurbelwinkel  $\varphi$  animiert werden kann.

Um die Drehbewegungen der drei Kreisexzenter in ihren Bohrungen der Nachbarglieder beobachten zu können, werden die Punktepaare  $C_2/C_3$ ,  $D_3/D_4$  und  $E_4/E_1$  auf den jeweiligen Exzenter-/Bohrungsumfängen erzeugt. Für die Antriebswinkelstellung  $\varphi = 0^\circ$  bzw.  $360^\circ$  fallen die Punktepaare jeweils auf die einzelnen Punkte C, D und E zusammen.

Für die Winkelgeschwindigkeit der Kurbel wird  $\omega_{21} = \omega = 1$  rad/s gesetzt. Damit und mit der Konstruktion des Momentanpols  $P_{13}$  sind alle für das nachfolgende Unterkapitel 3.2 wichtigen relativen (und auch absoluten) Winkelgeschwindigkeiten mit Bezug auf  $\omega_{21}$  ( $\Omega_{jk} = \omega_{jk}/\omega$ , usw.) zu ermitteln und in Abb. 3b dargestellt. Der Abb. 3b ist zu entnehmen, dass die relative Winkelgeschwindigkeit  $\omega_{23}$  über einer vollen Umdrehung der Kurbel stets positiv ist, während die übrigen Winkelgeschwindigkeiten jeweils zwei Nulldurchgänge aufweisen. Die Nulldurchgänge von  $\omega_{34}$  kennzeichnen die beiden Steglagen, die Nulldurchgänge von  $\omega_{41}$  die beiden Totlagen des Miniaturgetriebes.

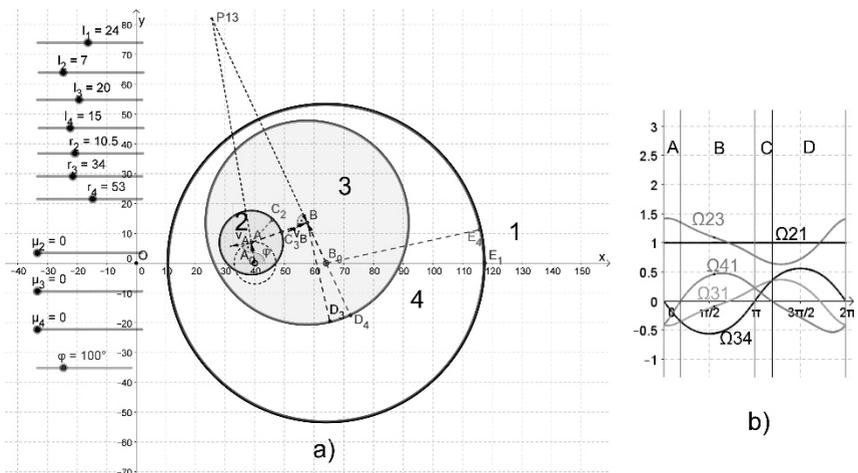


Abb. 3: „GeoGebra“-Skizze der Kurbelschwinge mit dreifacher Zapfenerweiterung: a) Aufbau in der x-y-Ebene in der Kurbelstellung  $\varphi = 100^\circ$ , b) Verlauf der relativen Winkelgeschwindigkeiten über dem Kurbelwinkel  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

### 3.2 Statik des Miniaturgetriebes „Kurbelschwinge“

Für die statische Analyse des Miniaturgetriebes „Kurbelschwinge mit dreifacher Zapfenerweiterung“ wird COULOMBSche Festreibung entsprechend dieser Vorgabe nur in den Gelenken  $A \equiv 23$ ,  $B \equiv 34$  und  $B_0 \equiv 14$  eingeführt. Die zugehörigen Reibungszahlen  $\mu_2$ ,  $\mu_3$  und  $\mu_4$  sind im Programm „GeoGebra“ per Schieberegler variabel. Falls dennoch  $\mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu = \text{konst.}$  gewählt wird, folgen daraus wegen der unterschiedlichen Zapfenradien unterschiedliche Radien  $r_{Ri}$  der Reibungskreise, vgl. Gl. (4).

Für die Anwendung des Gelenkkraftverfahrens zur Aufstellung des Gleichgewichts ist es sinnvoll, am Abtriebsglied 4 (Schwinge) eine Abtriebskraft  $F_4$  von variabler Größe und Richtung einzuführen. Auch soll die Abtriebskraft sowohl für den Hingang (H) ( $\omega_{41} > 0$ , Gegenuhrzeigersinn) als auch für den Rückgang (R) ( $\omega_{41} < 0$ , Uhrzeigersinn) der Schwinge stets ihrer Bewegungsrichtung entgegenwirken, um an der Kurbel ein positives Antriebsmoment, d. h. gleichsinnig mit  $\omega_{21}$ , zu erzeugen. Der Angriffspunkt der Antriebskraft

$F_2$  kann auf der Kurbel  $A_0A$  frei gewählt werden, die Wirkungslinie dieser Kraft wird senkrecht zur Kurbel festgelegt. Die Größe und der Richtungssinn der Antriebskraft ergeben sich dann aus den Gleichgewichtsbedingungen. Die Koppel 3 bleibt unbelastet, d. h. sie überträgt nur Zug- oder Druckkräfte.

Die Gleichgewichtsbedingungen für den reibungsfreien Fall, nämlich

$$\text{Glied 4: } \vec{F}_4 + \vec{G}_{41} + \vec{G}_{43} = \vec{0} \quad (9a)$$

$$\text{Glied 3: } \vec{G}_{34} + \vec{G}_{32} = \vec{0} \quad (9b)$$

$$\text{Glied 2: } \vec{F}_2 + \vec{G}_{21} + \vec{G}_{23} = \vec{0} \quad (9c)$$

sind vektoralgebraisch dieselben wie im reibungsbehafteten Fall, nur die geometrischen Bedingungen für die Wirkungslinien der o. a. Kräfte sind unterschiedlich. Die Gelenkkräfte  $G_{jk} = -G_{kj}$  müssen nicht nur die jeweiligen Reibungskreise tangieren, sondern obendrein den jeweiligen relativen Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_{jk} = -\omega_{kj}$  entgegenwirken, um einen Leistungsverlust zu kennzeichnen. An zwei Reibungskreise können vier Tangenten gelegt werden, von einem Punkt an einen Reibungskreis zwei Tangenten. Da der Richtungssinn von  $\omega_{23}$  während der positiv orientierten Drehung der Kurbel ebenfalls positiv bleibt, ist der Richtungssinn der Gelenkkraft  $G_{32}$  auf jeder der vier Tangenten vom Reibungskreis um B an den Reibungskreis um A vorgegeben. Anhand der Nulldurchgänge der relativen Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_{34}$  (Steglagen) und  $\omega_{41}$  (Totlagen) des Getriebes lassen sich jetzt unter Berücksichtigung der gewählten Getriebeabmessungen vier Bereiche angeben, die während einer vollen Kurbelumdrehung durchlaufen werden, vgl. Abb. 3b:

Bereich A	$0 \leq \varphi \leq 0.59$ ( $33.6^\circ$ ), $\omega_{34} < 0$ , $\omega_{41} < 0$ (Rückgang)
Bereich B	$0.59 \leq \varphi \leq \pi$ ( $180^\circ$ ), $\omega_{34} < 0$ , $\omega_{41} > 0$ (Hingang)
Bereich C	$\pi \leq \varphi \leq 3.73$ ( $213.6^\circ$ ), $\omega_{34} > 0$ , $\omega_{41} > 0$ (Hingang)
Bereich D	$3.73 \leq \varphi \leq 2\pi$ ( $360^\circ$ ), $\omega_{34} > 0$ , $\omega_{41} < 0$ (Rückgang)



reibungsfreien Lösung die Frage geklärt, welche Variante von den beiden möglichen Alternativen für die Gelenkkraft  $G_{41}$  die richtige ist.

Es ist also sinnvoll oder sogar notwendig, für jeden der vier Bereiche A bis D die reibungsfreie Lösungsfigur mit den Kraftdreiecken für Hin- und Rückgang der Schwinge und der zugehörigen Abtriebskraft  $F_{4H}$  bzw.  $F_{4R}$  mitzuführen: Die reibungsbehaftete Lösung muss zur Kontrolle beim Übergang mit  $\mu = 0$  per Schieberegler auf die reibungsfreie Lösung hinauslaufen, ohne dass die Tangentenkonfiguration an die Reibungskreise innerhalb des betrachteten Bereichs sich ändert. Das große Kraftpolygon in Abb. 5 umfasst die beiden Kraftdreiecke für die Glieder 4 und 2, wiederum beispielhaft für den Bereich B. Das verbindende Glied ist die Koppel 3 als Zugstab, s. Gl. (9b). Die kleineren Kraftpolygone gehören zur reibungsfreien Lösung für Hin- und Rückgang der Schwinge, wobei für den skizzierten Bereich B nur der Hingang gültig ist.

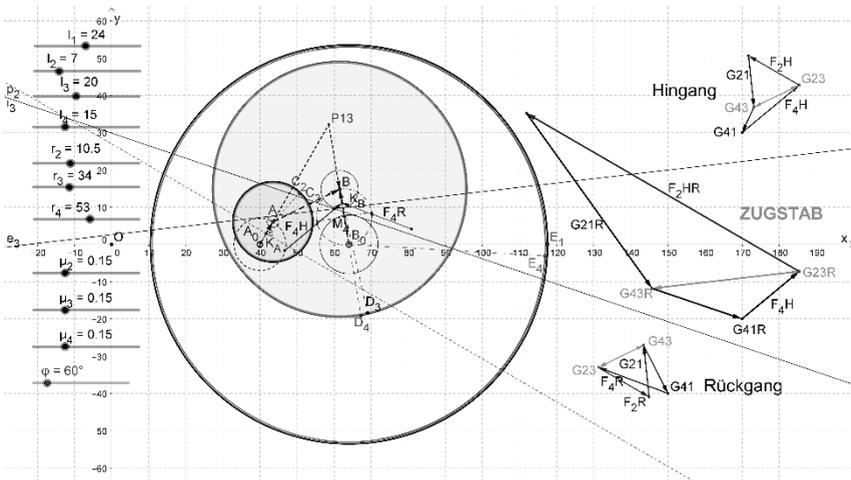


Abb. 5: Miniaturgetriebe mit Reibungskreisen für  $\mu = 0.15$  um die Gelenke A, B, und B<sub>0</sub> in der Kurbelstellung  $\varphi = 60^\circ$  mit Kraftpolygonen für den Bereich B

Die weiteren Untersuchungen zeigen folgende Ergebnisse:

- In den Bereichen A und D (Rückgang) wird die Koppel auf Druck belastet.

- In den Bereichen B und C (Hingang) wird die Koppel auf Zug belastet.
- Für die Schnittpunkte I bis IV der vorgegebenen Abtriebskraft  $F_{4H}$  oder  $F_{4R}$  mit den Tangenten an die Reibungskreise der Koppel (vgl. Abb. 4) gilt die Zuordnung I zu B, II zu D, III zu C und IV zu A.

#### 4 Ermittlung des Wirkungsgrads

Für die Ermittlung des Wirkungsgrads des Miniaturgetriebes ist es erforderlich, die Bereiche A bis D getrennt zu betrachten. Wenn der Angriffspunkt der Abtriebskraft  $F_4$  an der Schwinge mit  $K_B$  und der Angriffspunkt der Antriebskraft  $F_2$  an der Kurbel mit  $K_A$  bezeichnet werden, errechnet sich das Abtriebsmoment  $M_{ab}$  und das Antriebsmoment  $M_{an}$  aus den Gleichungen

$$\vec{M}_{ab} = \vec{r}_{KB,B0} \times \vec{F}_4 \quad (10a)$$

und

$$\vec{M}_{an} = \vec{r}_{KA,A0} \times \vec{F}_2. \quad (10b)$$

Im Maßstab 1 N/mm wird für das Rechenbeispiel eine Abtriebskraft  $F_{4H} = F_{4R} = 20$  N für den Hingang (Bereiche B und C) bzw. Rückgang (Bereiche A und D) der Schwinge so gewählt, dass der Angriffspunkt  $K_B$  im Abstand des 0.75-fachen der Schwingenlänge  $B_0B$  auf der Schwinge zu liegen kommt, von  $B_0$  aus gemessen, und mit der Schwinge im Punkt  $K_B$  einen Winkel von  $60^\circ$  bildet. Unter Berücksichtigung der Beziehungen  $\omega_{ab} \equiv \omega_{41}$  und  $\omega_{an} \equiv \omega_{21}$  lassen sich dann die Gln. (7) und (8) auswerten und der Wirkungsgrad  $\eta$  sowie der Übertragungswirkungsgrad  $\eta_0$  nach LENK bestimmen. Abb. 6 zeigt den Verlauf des Wirkungsgrads  $\eta$  über dem Kurbelwinkel  $\varphi$  für eine Reibungszahl  $\mu = 0.1$ .

In den Totlagen des Getriebes an den Übergängen zwischen den Bereichen A und B sowie C und D ist  $\eta = 0$ , da die Abtriebsleistung  $P_{ab}$  in Gl. (7) verschwindet. Bei einem masselosen Getriebe, wie hier

angenommen, ist die Antriebskraft  $F_2$  in den Totlagen ebenfalls null, und es gibt auch in dieser Sonderlage keine Verlustleistung in den Gelenken A, B und  $B_0$ , d. h. für den Übertragungswirkungsgrad gilt  $\eta_0 = 0$ . Es stellt sich heraus, dass der Übertragungswirkungsgrad  $\eta_0$  für das hier untersuchte Miniaturgetriebe „Kurbelschwinge“ stets denselben Wert wie  $\eta$  liefert.

In den Steglagen des Getriebes an den Übergängen zwischen den Bereichen B und C sowie D und A springt der Wirkungsgrad  $\eta$  von einem unteren auf einen oberen Wert. Diese Unstetigkeit liegt daran, dass die Konfiguration der Tangenten an die Reibungskreise wechselt. Auch in den Totlagen wechselt die Tangentenkonfiguration, was aber wegen fehlender Abtriebsleistung keine Rolle spielt.

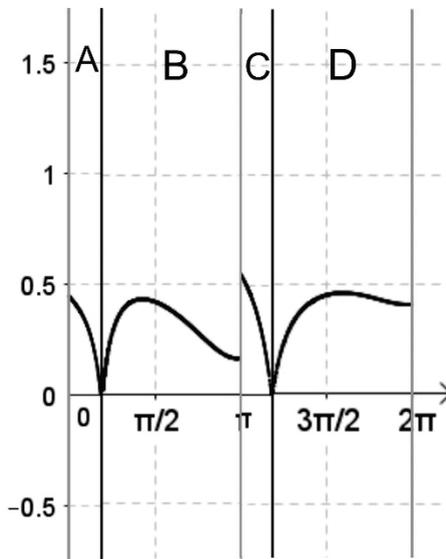


Abb. 6: Zusammenstellung des Wirkungsgrads  $\eta$  des Miniaturgetriebes für die Bereiche A bis D und  $\mu = 0.1$

In den Steglagen  $\varphi = 0^\circ$  bzw.  $360^\circ$  sowie  $\varphi = 180^\circ$  zeigt „GeoGebra“ undefinierte Werte an, diese numerische Instabilität bezieht sich lediglich auf die Bestimmung von  $\eta$ . Mit Hilfe des Übertragungswirkungsgrads  $\eta_0$  lassen sich die Sprungwerte weiter ermitteln. Sie betragen  $\eta = \eta_0 = 0.45 - 0.41 = 0.04$  bei  $\varphi = 0^\circ$  bzw.  $360^\circ$  und  $\eta = \eta_0 = 0.55 - 0.17 = 0.38$  bei  $\varphi = 180^\circ$ . Der Wert  $\eta = 0.55$  stellt

zugleich den Maximalwert des Wirkungsgrads des untersuchten Miniaturgetriebes dar.

## 5 Zusammenfassung

Die Ermittlung des Wirkungsgrads von Getrieben unter Berücksichtigung des Einflusses von Reibung in den Gelenken ist keine einfache Aufgabe, die ähnlich zügig wie die kinematische und statische bzw. kinetostatische Analyse eines Getriebes durchgeführt werden kann. Zwar stimmen bei der Anwendung des Gelenkkraftverfahrens die Vektorgleichungen für die Kräfte im reibungsbehafteten und reibungsfreien Fall überein, jedoch nicht mehr die Schnittpunkte für die Aufstellung des Kräfte- und Momentengleichgewichts für die einzelnen Getriebeglieder bzw. Elementargruppen. In diesem Beitrag wird das Vorhandensein von Reibung in den Gelenken des Getriebes allein durch COULOMBSche Festreibung mit Reibungskreisen beschrieben, jedoch sind bei anderen Reibungsgesetzen ähnliche Probleme bei der Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen zu erwarten.

Während man in früheren Arbeiten die geschilderten Probleme mit entsprechenden Algorithmen rein numerisch anging oder auch versuchte, durch aufwändige Messungen einen Einblick in die „Reibungsgeometrie“ zu erhalten [10], bietet sich heutzutage z. B. mit dem Geometrieprogramm „GeoGebra“ eine effiziente und durch Anschaulichkeit auch leicht nachvollziehbare Lösungsmethode an, um reibungsbehaftete Getriebe zu analysieren.

Für das hier untersuchte Miniaturgetriebe, eine Kurbelschwinge mit dreifacher Zapfenerweiterung, ergab sich ein Wirkungsgrad in der Größenordnung 0.5 und weniger. Zwar wurde eine relativ moderate Reibungszahl von  $\mu = 0.1$  angesetzt, diese wird jedoch bei der Bewegung des Getriebes zugleich in drei Drehgelenken wirksam. Das Miniaturgetriebe sollte folglich nur für langsame Bewegungen eingesetzt werden, nicht im Dauerbetrieb.

## Literatur

- [1] Kerle, H. „Karl Hoecken (1874-1962)“. In: *Distinguished Figures in Mechanism and Machine Science. Their Contributions and Legacies, Part 3*. Hrsg. von Marco Ceccarelli. 1. Aufl. Bd. 26 d. Reihe „History of Mechanism and Machine Science“. Springer, 2014, S. 115–140. isbn: 978-94-017-8946-2. doi: 10.1007.
- [2] Thümmel, T., Roßner, M., Rutzmoser, J. und Zenz, S. „Reibung in Drehgelenken schnelllaufender Mechanismen“. In: 10. Kolloquium Getriebetechnik. Hrsg. von Lena Zentner. Bd. 2 der Reihe „Berichte der Ilmenauer Mechanismentechnik“. Universitätsverlag Ilmenau, 2013, S. 143–160. isbn: 978-3-86360-065-5.
- [3] Stündel, D. „Der Einfluß der Mechanismengeometrie auf die Reibungsverluste in den Gelenken“. In: *Feingerätetechnik*. 23. Jg. Heft 1/1974. S. 7–11.
- [4] Kraus, R. „Zur graphisch-rechnerischen Bestimmung des Wirkungsgrades von Getrieben“. In: *Reuleaux-Mitteilungen – Archiv für Getriebetechnik*. Heft 8/1934. S. 57–58 und Bildtafel 15.
- [5] (Mehrere). *Getriebetechnik. Lehrbuch*. Hrsg. von Johannes Volmer. 2. Aufl. VEB Verlag Technik, 1972, S. 520–521.
- [6] Lenk, E. „Der Übertragungswirkungsgrad“. In: VDI-Berichte. Bd. 29. VDI-Verlag, 1958, S. 75–78.
- [7] url: [www.geogebra.org/](http://www.geogebra.org/) (besucht am 13.07.2015)
- [8] Prause, I., Kurtenbach, S., Weigel, W., Hüsing, M. und Corves, B. „Vergleich von dynamisch-interaktiver Getriebesoftware für die Maßsynthese von ebenen Getrieben“. In: 10. Kolloquium Getriebetechnik. Hrsg. von Lena Zentner. Bd. 2 der Reihe „Berichte der Ilmenauer Mechanismentechnik“. Universitätsverlag Ilmenau, 2013, S. 39–56. isbn: 978-3-86360-065-5.
- [9] Kerle, H. „Mit GeoGebra Getriebelehre neu entdecken und besser verstehen“. In: 10. Kolloquium Getriebetechnik. Hrsg. von Lena Zentner. Bd. 2 der Reihe „Berichte der Ilmenauer Mechanismentechnik“. Universitätsverlag Ilmenau, 2013, S. 21–38. isbn: 978-3-86360-065-5.
- [10] Hain, K. *Einflüsse von Gelenkspiel und Reibung auf die im Getriebe wirkenden Kräfte*. Fortschritt-Berichte VDI-Z., Reihe 1, Nr. 17. VDI-Verlag, 1969.