



Lehrstuhl für Elektrische Antriebssysteme
Technische Universität München
Professor Dr.-Ing. Dr.-Ing. h.c. Dierk Schröder

Christian Westermaier

Zeitdiskrete adaptive Regelung mit allgemeinem Referenzmodell bei instabilen Diskretisierungsnullstellen



Lehrstuhl für Elektrische Antriebssysteme
Technische Universität München

Zeitdiskrete adaptive Regelung mit allgemeinem Referenzmodell bei instabilen Diskretisierungsnullstellen

Christian Westermaier

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik
der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktor-Ingenieurs

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr.-Ing. Hans-Georg Herzog

Prüfer der Dissertation:

1. Univ.-Prof. Dr.-Ing., Dr.-Ing. h.c. Dierk Schröder, i.R.
(nur schriftliche Beurteilung)
2. Univ.-Prof. Dr.-Ing./Univ. Tokio Martin Buss
3. Univ.-Prof. Dr.-Ing. Gerd Griepentrog
Technische Universität Darmstadt
(nur mündliche Prüfung)

Die Dissertation wurde am 16.06.2014 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik am 29.09.2014 angenommen.

Vorwort

Der Inhalt der vorliegenden Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Assistent am Lehrstuhl für Elektrische Antriebssysteme der Technischen Universität München.

Mein besonderer Dank gebührt meinem Doktorvater Herrn Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. h.c. Dierk Schröder für das Ermöglichen dieser Dissertation. An seinem Lehrstuhl führte er mich in ein interessantes Forschungsgebiet ein, in welchem ich mich mit herausfordernden Problemstellungen tiefgründig auseinandersetzen durfte. Auf Grund des mir überlassenen Freiraums konnte ich mich in meiner Forschungstätigkeit entfalten und eigene Ideen entwickeln. Dank der fortwährenden Förderung, Unterstützung und dem entgegengebrachten Vertrauen meines Doktorvaters wurden mir Beiträge an internationalen wissenschaftlichen Konferenzen und ein erfolgreicher Abschluss der Forschungstätigkeit ermöglicht.

Für die Übernahme des Zweitgutachtens und das entgegengebrachte Interesse an dieser Arbeit danke ich Herrn Prof. Dr.-Ing./Univ. Tokio Martin Buss. Ebenso spreche ich Herrn Prof. Dr.-Ing. Hans-Georg Herzog für die Übernahme des Prüfungsvorsitzes meinen Dank aus. Als Mitglied der Prüfungskommission im Rigorosum gebührt mein Dank Herrn Prof. Dr.-Ing. Gerd Griepentrog.

Sehr herzlich bedanke ich mich bei Herrn Dr.-Ing. Matthias Feiler und Herrn Dr.-Ing. Hans Schuster für all die interessanten tiefgründigen Diskussionen innerhalb der Forschungsgruppe adaptiver Regler, für ihre Hilfsbereitschaft sowie für die ausgesprochen freundschaftliche Atmosphäre.

Für die motivierende und tatkräftige Unterstützung bei allen Arbeiten in Forschung und Lehre danke ich allen ehemaligen Kollegen und Mitgliedern des Lehrstuhls. Mein spezieller Dank gilt Frau Dr.-Ing. Anne Angermann, Herrn Prof. Dr.-Ing. Christian Endisch und Herrn Dr.-Ing. Christoph Hackl für die gute Zusammenarbeit.

Nicht zuletzt bedanke ich mich bei meiner Familie und Freunden für das mir entgegengebrachte Verständnis, die uneingeschränkte Unterstützung und den dauerhaften Beistand, der mir stets ein großer Rückhalt war. Besonders danke ich meinen langjährigen Freunden Martina und Walter Demel, Hubert Gronegger und Dr. Christopher Rössler.

Ohne dem fortwährenden emotionalen Beistand, Ermutigung und allumfassender Unterstützung meiner Eltern, Renate und Simon Westermaier, sowie meiner Frau Gabriele Czentner wäre die Vollendung meiner Dissertation nicht möglich gewesen. Ich danke meinen Eltern sehr herzlich, dass sie mir meine Ausbildung ermöglicht und stets an mich geglaubt haben.

In den Momenten der Rückschläge sowie der Erfolge stand meine Frau Gabriele mir stets zur Seite und war Quell meiner Inspiration. Daher widme ich ihr diese Arbeit in innigster Verbundenheit.

Kurzzusammenfassung

Das zentrale Element dieser Dissertation ist die *Anwendbarkeit eines zeitdiskreten modellbasierten adaptiven Reglers auf ein schwingungsfähiges zeitkontinuierliches unbekanntes Antriebssystem zur **beliebigen Beeinflussung** der Streckendynamik innerhalb der physikalischen Grenzen*. Um das Streckenverhalten im geregelten System beliebig vorgeben zu können, muss auch die Nulldynamik der realen minimalphasigen Strecke eliminiert werden. Dies ist ohne Gefährdung der Regelkreisstabilität möglich, wenn die Nulldynamik stabil ist, d.h. stabile Nullstellen vorliegen. Da auf Grund der *Zeitdiskretisierung* für die Realisierung eines *digitalen Reglers* trotz stabiler Nullstellen des zeitkontinuierlichen Systems (*minimalphasiges zeitkontinuierliches System*) instabile Nullstellen entstehen (*nicht-minimalphasiges zeitdiskretes System*), wird eine beliebige stabile Beeinflussung der Strecke mit einem digitalen Regler unterbunden. Instabile sog. *Diskretisierungsnullstellen* entstehen beispielsweise bei einem *schwingungsfähigen Zwei-Massen-System*, sobald durch eine geeignete Wahl der Abtastzeit die Eigenfrequenz durch den Regler detektiert werden kann, d.h. keine Unterabtastung vorliegt: entweder die Nulldynamik ist nicht zu eliminieren oder die Schwingungen sind nicht aktiv zu bedämpfen. Diese Problematik der instabilen Diskretisierungsnullstellen wird in der vorliegenden Arbeit grundlegend untersucht und ein Vorgehen zur Reglerauslegung erarbeitet, so dass ein minimalphasiges zeitkontinuierliches System beliebig durch einen digitalen Regler beeinflusst werden kann. Basierend auf diesem Ergebnis wird die *stabile Anwendung des adaptiven Referenzmodellreglers*, einer stabilen Kombination aus Regler und Identifikation, ermöglicht. Um im adaptiven Fall auch bei mangelnder beständiger Anregung der Identifikation das Entstehen instabiler Systemnullstellen zu unterbinden und somit zu jeder Zeit eine beliebige Streckenbeeinflussung zu gewährleisten, ist die Umsetzung einer *Parameterbeschränkung* auf entsprechend physikalisch relevante Gebiete, basierend auf den erarbeiteten Eigenschaften der Diskretisierungsnullstellen, notwendig. Um trotz unbekanntem System neben sehr gutem *hochdynamischen Folgeverhalten* auch stets eine gegenüber der Parameteradaption *robuste stationäre Genauigkeit* zu gewährleisten, ist eine Strukturänderung des Standardreglers mit *internen Modellen* notwendig. Es resultiert ein hochdynamischer stabiler und robuster adaptiver digitaler Regler. Für die Darstellung der linearen sowie nicht-linearen bzw. zeitvarianten Systemtheorie steht die *ingenieurwissenschaftliche Sichtweise* im Vordergrund.

Abstract

The main topic of this thesis is the *applicability of a time-discrete model-reference-adaptive-control to an oscillatory time-continuous unknown drive system* aiming to control the drive system **arbitrarily within physical limitations**. Hence, the zero-dynamics has to be eliminated as well in order to enable the plant to follow an arbitrary reference trajectory. On condition of overall stability of the control loop, compensation of the zero-dynamics is only possible if it is stable, i.e. if the zeros are stable. However, when realizing a *digital controller*, the *process of sampling* leads to unstable zeros of the time-discrete representation of the plant (*non-minimum-phase time-discrete system*) although the time-continuous plant has stable zeros (*minimum-phase time-continuous system*). Therefore, forcing the plant with a

digital controller to behave like an arbitrary system-dynamics will not be possible without compromising system stability. In the case of an *oscillating two-mass-system* unstable so called *sampling-zeros* will occur as soon as a correctly chosen sampling time makes it possible to detect the resonance frequency: either the zero-dynamics cannot be eliminated or the oscillation cannot be damped by the controller. In this thesis, the above mentioned problem of unstable sampling-zeros will be investigated fundamentally. Furthermore, a solution will be provided in order to manipulate a minimum-phase time-continuous plant arbitrarily with a digital controller. These results will allow a *stable application of a model-reference-adaptive-control* consisting in a stable integration of an identification algorithm into the control law. In order to avoid unstable system-zeros resulting from a lack of persistence of excitation during the identification process in the adaptive case, it is necessary to *constrain the estimated parameters* to a physically relevant convex area based on the acquired knowledge of the properties of sampling-zeros. Extending the adaptive controller in this way, an arbitrary manipulation of the plant is possible in every instance of time even in the adaptive case. However, the resulting controller has a *high dynamic following behaviour* but its *stationary accuracy* is unrobust to parameter adaption. Hence, a change in structure of the standard controller with *internal models* is necessary. The result is a stable and robust adaptive digital controller. In this thesis, the linear and non-linear as well as time-variant system theory is presented from the point of view of *engineering science*.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung und Inhaltsbeschreibung	1
2	Lineare Systemtheorie aus physikalisch/technischer Sicht	8
2.1	Problemstellung: Zeitdiskrete Regler für zeitkontinuierliche Systeme	8
2.1.1	Abgetastete Systemsignale	9
2.1.2	Quantisierte Systemsignale	10
2.1.3	Digitaler Regler	11
2.2	Zeitkontinuierliche Systeme und Regler	12
2.2.1	Zustandsraumbeschreibung	12
2.2.1.1	Stabilität unter Beachtung der Steuerbarkeit bzw. Beobachtbarkeit	13
2.2.1.2	Stabilitätsbedingung linearer Systeme: Modale Zustandsdarstellung	15
2.2.1.3	Zusammenhang zwischen Rückkopplungen und Stabilität	17
2.2.2	Ein- Ausgangsbeschreibung: Operatordarstellung	19
2.2.3	Übertragungsfunktion: Polstellen und Nullstellen	22
2.2.4	Zusammenhang zwischen Übertragungsfunktion und Zustandsraumbeschreibung: Regelungsnormform	24
2.2.5	Auswirkung der Nullstellen auf das dynamische Verhalten des Systems bzw. geschlossenen Regelkreises	29
2.2.5.1	Relativgrad	29
2.2.5.2	Stabilitätsproblem für proportionale Regler: Zählerpolynom beeinflusst ungeeignet den Einschwingvorgang	32
2.2.5.3	Eigenschaften nicht-minimalphasiger Systeme	41
2.2.5.4	Hochverstärkungsbasierter Regler: Instabilität bei nicht-minimalphasigen Systemen	48
2.2.5.5	Zustandsregler: eine Elimination der Nullstellendynamik führt bei nicht-minimalphasigen Systemen zur Instabilität	57
2.2.5.6	Transformation nach Morse: jeder Regler, der die Dynamik instabiler Nullstellen verändert, führt zur Instabilität	65

2.2.6	Referenzmodellregelung (engl. Model-Reference-Control)	74
2.2.6.1	Zustandsregler	75
2.2.6.2	Zustandsbeobachter	75
2.2.6.3	Zustandsregler basierend auf einem Zustandsbeobachter	83
2.2.6.4	Zustandsregler mit internem Modell und Zustandsbeobachter	103
2.2.6.5	Referenzmodellregler mit freier Polverschiebbarkeit	117
2.2.6.6	Berechnung der Diophantinen Gleichung (Bezout-Identität)	126
2.2.6.7	Erweiterte Referenzmodellregelung	133
2.2.6.8	Referenzmodellregelung mit internem Modell	142
2.3	Zeitdiskrete Systeme und Regler	160
2.3.1	Zeitdiskretisierung	160
2.3.2	Zustandsraumdarstellung	163
2.3.2.1	Stabilität unter Beachtung der Steuerbarkeit bzw. Beobachtbarkeit	164
2.3.2.2	Stabilitätsbedingung linearer Systeme: Modale Zustandsdarstellung	165
2.3.2.3	Zusammenhang zwischen Rückkopplungen und Stabilität	167
2.3.3	Ein- Ausgangsbeschreibung: Operatordarstellung	170
2.3.4	Übertragungsfunktion: Polstellen und Nullstellen	173
2.3.5	Zusammenhang zwischen Übertragungsfunktion und Zustandsraumbeschreibung: Regelungsnormalform	176
2.3.6	Auswirkung der Zeitdiskretisierung auf das dynamische Verhalten des Systems bzw. geschlossenen Regelkreises	180
2.3.6.1	Relativgrad	181
2.3.6.2	Einfluss der Zeitdiskretisierung auf die Stabilität und Minimalphasigkeit	182
2.3.6.3	Referenzmodellregelung mit internem Modell	197
2.3.6.4	Robuste Reglerberechnung mit Hilfe des δ -Modells	207
3	Anwendbarkeit des zeitdiskreten Referenzmodellreglers auf ein Zwei-Massen-System	213
3.1	Zwei-Massen-System	213
3.1.1	Elektrische Komponenten	214
3.1.2	Mechanische Komponenten	216
3.2	Digitaler Regler	219
3.2.1	Hardware	219
3.2.2	Software	220
3.3	Modellbildung	220

3.3.1	Ein-Massen-System (EMS): Einheit „Umrichter – Synchronmaschine – Mechanik“	220
3.3.1.1	Permanenterregte Synchronmaschine	220
3.3.1.2	Umrichter mit Stromregler	224
3.3.2	Zwei-Massen-Systems (ZMS): Einheit „EMS – Welle – EMS“	226
3.4	Instabile Diskretisierungsnullstellen	232
3.4.1	Ungedämpftes Zwei-Massen-System mit Vernachlässigung des Momentenregelkreises	232
3.4.2	Gedämpftes Zwei-Massen-System mit Vernachlässigung des Momentenregelkreises	236
3.4.3	Gedämpftes Zwei-Massen-System ohne Vernachlässigung des Momentenregelkreises	241
4	Anwendung eines inversen Reglers bei instabilen Diskretisierungsnullstellen	243
4.1	Eigenschaften der Diskretisierungs-Nullstellen	243
4.1.1	Anzahl instabiler Diskretisierungsnullstellen	244
4.1.2	Dynamischer Einfluss auf das Systemverhalten	245
4.1.2.1	Vernachlässigung von Diskretisierungs-Parametern	245
4.1.2.2	Vernachlässigung von Diskretisierungs-Nullstellen	248
4.2	Vernachlässigung von Diskretisierungsnullstellen bei der Reglerauslegung .	259
4.3	Anpassung eines inversen Reglers bei instabilen Diskretisierungsnullstellen	266
4.3.1	Referenzmodellregler	266
4.3.2	Erweiterter Referenzmodellregler	267
4.3.3	Anwendung des erweiterten Referenzmodellreglers auf ein Zwei-Massen-System	268
4.3.4	Adaptiver Referenzmodellregler	271
5	Adaptiver Referenzmodellregler	273
5.1	ARMA-Modell als Prädiktionsmodell	275
5.2	Systemidentifikation	283
5.2.1	Projektionsalgorithmus	285
5.2.2	Rekursiver Least-Squares-Algorithmus (RLS)	296
5.3	Entwurf des adaptiven Regelkreises	301
5.3.1	Referenzmodellregler mit integrierter Systemidentifikation	302
5.3.2	Stabilitätsuntersuchung des geschlossenen Regelkreises	306
5.4	Adaptiver Referenzmodellregler mit internem Modell	310

5.5	Parameterbeschränkung auf physikalisch relevante Gebiete	316
5.5.1	Parameterprojektion	317
5.5.1.1	Parameterprojektion für den Projektionsalgorithmus	317
5.5.1.2	Parameterprojektion für den rekursiven Least-Squares-Algorithmus	319
5.5.2	Beschränkung der Parameter auf Gebiete mit stabilen Nullstellen sowie Diskretisierungsnullstellen	321
5.6	Anwendung des adaptiven Referenzmodellreglers auf ein reales ZMS	325
5.7	Zusammenfassung und Ausblick	331
6	Einordnung und Ausblick	336
A	Mathematische Grundlagen	343
A.1	Lineare Algebra	343
A.1.1	Determinante, Adjungierte sowie Inverse einer Matrix	343
A.1.2	Wurzel einer Matrix	344
A.1.3	Umformungen	344
A.1.4	Hurwitz-Kriterium	346
A.1.5	Spektraltheorem	347
A.1.6	Jury-Kriterium	347
A.1.7	Euler-Formel	349
A.1.8	Laplace-Transformation	349
A.1.9	Reihen und Summen	349
A.1.10	Trigonometrie	350
	Bezeichnungen	351
	Literaturverzeichnis	363

Kapitel 1

Einleitung und Inhaltsbeschreibung

Die Dissertation „Zeitdiskrete adaptive Regelung mit allgemeinem Referenzmodell bei instabilen Diskretisierungsnullstellen“ befasst sich mit der Problematik, ein in Struktur und Parameter *unbekanntes schwingungsfähiges System* beliebig¹⁾ innerhalb der **Systemgrenzen** durch einen *digitalen Regler* beeinflussen zu können, ohne die Stabilität zu gefährden. Hierbei stehen nicht nur die stationäre Genauigkeit und ein exaktes Folgeverhalten des geregelten unbekanntes Systems im Fokus, sondern ebenfalls das Störverhalten und die beliebige Vorgabe des Einschwingverhaltens, d.h. der Systemdynamik. Neben der Herausforderung, ein unbekanntes Antriebssystem stabil zu regeln, ergeben sich weitere Probleme bei der Kombination eines digitalen Reglers mit einem schwingungsfähigen Antriebssystem, welche eine beliebige Beeinflussung des Systems verhindern. Der Hintergrund sowie der Umgang mit dieser Beschränkung wird in dieser Arbeit beleuchtet und daraus eine Lösung des Problems erarbeitet. Mathematische Hintergründe werden aus Sicht der Ingenieurwissenschaften betrachtet und dementsprechend aufbereitet. Es steht das physikalisch/technische Verständnis des Sachverhalts im Vordergrund.

Mit dem Wunsch, ein beliebiges Verhalten des Gesamtsystems innerhalb der Systemgrenzen vorgeben zu können, bedarf es als Grundlage des adaptiven Reglers eines Referenzmodellreglers. Mit diesem ist eine beliebige „Verschiebbarkeit“ der Pol- und Nullstellen ohne Kenntnis der Zustände möglich, da der Referenzmodellregler einer Kombination aus Zustandsregler und Beobachter entspricht (→ **Kapitel 2.2.6** und **Kapitel 2.3.6.3**). Mit dieser Reglerarchitektur kann ein beliebiges Referenzmodell unter Einhaltung des minimalen Relativgrades r realisiert werden, d.h. im Extremfall eines maximal schnellen diskreten Reglers kann der Solltrajektorie innerhalb von r Zeitschritten gefolgt werden (Minimum-Varianz-Regler, Dead-Beat-Regler → **Kapitel 5.6**).

Wird mit dem Referenzmodellregler der Einfluss der Nullstellen kompensiert, um ein beliebiges Referenzmodell vorgeben zu können, liegt ein *inverser Regler* vor. Dieser ist nur realisierbar, wenn alle Nullstellen des Systems stabil sind (→ **Kapitel 2.2.5.5**). Andernfalls

¹⁾ In dieser Dissertation bedeutet „beliebige Systembeeinflussung“ stets „beliebige Systembeeinflussung innerhalb der physikalischen Systemgrenzen“. Bei einer beliebigen Systembeeinflussung können die Systempole sowie Systemnullstellen und somit die Systemdynamik theoretisch beliebig verändert werden ohne Gefährdung der Stabilität, praktisch kann die gewünschte Systemdynamik jedoch z.B. durch Stellgrößenbeschränkungen, Untermodellierungen, Störungen, Rauschen, numerische Rundungsfehler, begrenzte Prozessorwortbreite, usw. limitiert sein.

führt ein inverser Regler in realer Umgebung generell zur Instabilität des Gesamtsystems (\rightarrow **Kapitel 2.2.5.6**). Nachdem annähernd alle mechatronischen Antriebssysteme minimalphasig sind, d.h. stabile Nullstellen aufzeigen, ist eine stabile Regelung zunächst zu erwarten. Bei einer zeitkontinuierlichen Reglerumsetzung wäre dies auch der Fall, jedoch nicht zwangsweise bei einer zeitdiskreten Reglerumsetzung.

Da in der Regelungstechnik vorwiegend nur noch digitale Regler zum Einsatz kommen, sind die Auswirkungen der Zeitdiskretisierung in Betracht zu ziehen [1, 8, 38, 51, 83, 119, 135]. Wird eine schnelle Reaktionszeit des digitalen Reglers verlangt, die beispielsweise nur wenige Vielfache der Taktzeit beträgt, so darf das zu verarbeitende Signal und somit das System mit Regler nicht als quasi zeitkontinuierlich betrachtet werden, da sonst Stabilitätsprobleme zu erwarten sind. Das bedeutet, dass für die Entwicklung eines schnellen adaptiven digitalen Reglers für ein zeitkontinuierliches Antriebssystem eine zeitdiskrete Beschreibung/Modellierung des Gesamtsystems mit Strecke und Regler erforderlich ist (\rightarrow **Kapitel 2.1**).

Um ein zeitkontinuierliches System für einen digitalen Regler zu modellieren, muss ein Halteglied sowie ein Abtaster modelliert werden. Dies entspricht der Zeitdiskretisierung eines zeitkontinuierlichen Systems mit der ZOH-Diskretisierungsmethode (\rightarrow **Kapitel 2.3.1**). Ein mit der ZOH-Methode zeitdiskretisiertes System erhält unabhängig vom Relativgrad \tilde{r} des zeitkontinuierlichen Systems einen Relativgrad $r = 1$. Somit entstehen durch die Diskretisierung $\tilde{r} - 1$ neue Nullstellen, die sog. *Diskretisierungsnullstellen*. Je nach Wahl der Abtastzeit h sowie Größe des Relativgrads \tilde{r} können diese neu erzeugten Diskretisierungsnullstellen instabil werden. Für Relativgrade $\tilde{r} > 2$ ist stets mindestens eine dieser Nullstellen für $h \rightarrow 0$ s instabil (\rightarrow **Kapitel 2.3.6**). Mit den Eigenschaften der Nullstellen zeitdiskretisierter Systeme beschäftigt sich die Literatur [7, 8, 12, 43, 56, 58, 63, 64, 67, 68, 74, 88, 89, 97, 123, 137, 163, 176, 180, 185, 187]. Eine entsprechende erweiterte Betrachtung nicht-linearen Systeme ist in [24, 25, 59, 87, 120, 131, 132, 193, 194] zu finden.

Am Beispiel des Zwei-Massen-Systems, welches als Grundelement eines mechatronischen Systems anzusehen ist, entstehen instabile Nullstellen, sobald die gewählte Abtastzeit eine Detektion der Eigenschwingung des Systems erlaubt (\rightarrow **Kapitel 3.4**). Somit lässt sich die Dynamik der Nullstellen (die sog. Nulldynamik) eines Zwei-Massen-Systems nicht ohne Gefährdung der Stabilität durch eine Pol-Nullstellenkompensation eliminieren, womit eine beliebige Vorgabe der Systemdynamik bzw. der Referenztrajektorie mit einem zeitdiskreten Referenzmodellregler ausgeschlossen ist.

Sobald die Dynamik der System-Nullstellen mit dem Ziel einer beliebig wählbaren Referenztrajektorie eliminiert werden soll, kann ein hierfür notwendiger inverser Referenzmodellregler mit differenzierendem Verhalten bei Strecken mit Relativgraden $\tilde{r} > 2$ nicht angewendet werden. Obwohl die zeitkontinuierliche reale Strecke minimalphasig ist und somit nur stabile Nullstellen vorliegen, führt die Zeitdiskretisierung zu einem *nicht-minimalphasigen zeitdiskreten Streckenmodell*.

Diese Dissertation beschäftigt sich mit den Eigenschaften und Auswirkungen von Nullstellen in der zeitkontinuierlichen (\rightarrow **Kapitel 2.2.5**) sowie der zeitdiskreten Systembeschreibung (\rightarrow **Kapitel 2.3.6**) aus physikalisch/technischer Ingenieurssicht. Insbesondere wird die Frage geklärt, weshalb instabile Diskretisierungsnullstellen entstehen, welche physikalische Bedeutung diese hinsichtlich der Systembeschreibung der realen Strecke aufweisen

und wie ein inverser Regler trotz instabiler Nullstellen die Nullstellendynamik der Strecke eliminieren kann (\rightarrow **Kapitel 4**).

Die Diskrepanz zwischen der zeitkontinuierlichen und zeitdiskreten Modellierung ist bereits bei der Betrachtung der Operatoren s und z des Frequenzbereichs zu finden. Während s^{-1} dem Verhalten eines Integrators im Zeitbereich, d.h. Integration des Eingangssignals entspricht, ist z^{-1} lediglich ein Schiebeoperator, d.h. zeitliche Verzögerung des Eingangssignals. Nachdem die Operatoren hinsichtlich ihrer Funktion nicht vergleichbar sind, ist zu erwarten, dass aus physikalischer Sicht die Bedeutung des Relativgrades ebenfalls nicht vergleichbar ist und sich ein Unterschied zwischen den Modellierungen ergeben wird. Speziell mit Grundlagen zeitdiskreter Systeme beschäftigt sich die Literatur [24, 58, 59, 92, 119, 135, 193].

Nachdem im z -Modell für $h \rightarrow 0$ s alle Nullstellen gegen Eins konvergieren, sind alle Parameter des Nullstellenpolynoms ähnlich gewichtet. Ein Vernachlässigen der $\tilde{r} - 1$ Parameter bzw. der instabilen Nullstellen zur Umsetzung des inversen Reglers führt zu einer starken Untermodellierung (\rightarrow **Kapitel 4.2**), auf Grund derer sich zum einen die Güte des Regelers sowie die Performance verschlechtert und zum anderen die Stabilität des adaptiven Reglers gefährdet wird. Zudem fordert der Stabilitätsbeweis des adaptiven Referenzmodellreglers die Konvergenz der geschätzten Parameter (\rightarrow **Kapitel 5.3.2**), was bei starker Untermodellierung nicht gewährleistet ist.

Es gibt in der Literatur unterschiedliche Lösungsansätze mit dem Problem instabiler Diskretisierungsnullstellen während des Regelvorgangs zu verfahren: [19, 26, 34, 52, 56, 58, 59, 60, 86, 91, 119, 136, 147, 193]. Das Bestreben, instabile Diskretisierungsnullstellen zu vermeiden, reicht bis hin zu einer zeitvarianten Abtastzeit [34, 52, 60], was aus praktischer Sicht nicht zielführend ist. Eine weitere Möglichkeit zur Lösung des Problems besteht darin, eine zeitdiskrete Modellierung für den adaptiven Referenzmodellregler zu finden, die einen physikalischen Bezug zur zeitkontinuierlichen Modellierung hat. Hierzu dient der δ -Operator mit $\delta^{-1} = \frac{h}{z-1}$ (\rightarrow **Kapitel 2.3.6.4**), was einem Integrator im z -Bereich entspricht und somit der Bezug zum s -Operator hergestellt ist [56, 58, 59, 91, 119, 136, 193].

Trotz der Beschreibung des Systems mit dem δ -Operator ergibt sich weiterhin stets ein Relativgrad $r = 1$, jedoch nimmt die Gewichtung der $\tilde{r} - 1$ Parameter höherer Ordnung des diskreten Nullstellenpolynoms gegenüber der \tilde{m} Parameter des zeitkontinuierlichen Nullstellenpolynoms mit zunehmend kleiner werdender Abtastzeit ab. Mit dem Übergang $h \rightarrow 0$ s verschwinden diese Parameter höherer Ordnung und es findet der Übergang zur zeitkontinuierlichen Beschreibung statt. Für $h \rightarrow 0$ s gilt $r = \tilde{r}$. Bei mittlerer und schneller Abtastung können nun die $\tilde{r} - 1$ Parameter des diskreten Nullstellenpolynoms mit nur geringer Untermodellierung vernachlässigt werden, mit dem Vorteil, dass keine instabilen Nullstellen mehr präsent sind (\rightarrow **Kapitel 4.1.2.1**). Neben der unkonventionellen Umsetzung des digitalen Reglers kann besonders im adaptiven Fall bei mittlerer Abtastung die verbleibende Untermodellierung dennoch zu Problemen führen.

In [56, 119] wird der adaptive Referenzmodellregler vollständig in der aufwändigen δ -Beschreibung realisiert und, wie beschrieben, die $\tilde{r} - 1$ Parameter für die Modellierung gestrichen. Hiermit ist auf Grund der geringen Untermodellierung ein performanter Regler mit vernachlässigbarem Regelfehler realisierbar. Auf Grund der verbleibenden Untermodellierung kommt es jedoch zu keiner Konvergenz des in den adaptiven Regler integrierten

Parameterschätzers, womit die Stabilität gefährdet ist. Mit Hilfe einer Totzone wird der Parameterschätzer abgeschaltet, sobald der verbleibende Fehler auf Grund der Untermodellierung entsteht. Für die Wahl der Größe der Totzone sowie für einen Stabilitätsbeweis sind Abschätzungen notwendig, die eine Anwendung im adaptiven Fall in Frage stellen. Aus diesem Grund wird in [91] das vollständige Modell identifiziert und anschließend die Parameter für die Reglerauslegung gestrichen. Somit ist die Konvergenz des Parameterschätzers garantiert, jedoch basiert die Reglerauslegung auf einer Untermodellierung, was ebenfalls bei einem dynamischen Regler zu einem Stabilitätsproblem führen kann.

In dieser Arbeit wird ein alternatives Vorgehen dargestellt, mit welchem eine Untermodellierung weder bei der Parameteridentifikation noch bei der online-Reglerauslegung vorliegt, und zudem der digitale Regler in der üblichen einfachen z -Beschreibung realisiert werden kann. Hierzu wird zunächst das physikalisch/technische Verständnis der Diskretisierungsnullstellen und deren Bedeutung für die Repräsentation des realen Systems erarbeitet. Mit dem Resultat, dass instabile Diskretisierungsnullstellen bei robuster Abtastung kein physikalisches Verhalten des Systems beschreiben (\rightarrow **Kapitel 4.1.2.2**), besteht keine Notwendigkeit, instabile Diskretisierungsnullstellen für die gewünschte Nulldynamikkompensation der Strecke zu eliminieren (\rightarrow **Kapitel 4.2**). Die beliebige Vorgabe der Systemdynamik durch einen Referenzmodellregler ist möglich, auch wenn die instabilen Diskretisierungsnullstellen in der Übertragungsfunktion erhalten bleiben.

Durch die Einführung eines *allgemeinen Referenzmodells für den adaptiven Regler* mit Stabilitätsbeweis wird es möglich, gezielt die physikalisch relevanten Nullstellen sowie die stabilen Diskretisierungsnullstellen zu kompensieren und gleichzeitig die instabilen Diskretisierungsnullstellen in der Übertragungsfunktion zu erhalten (\rightarrow **Kapitel 4.3**). Hiermit wird für die Reglerauslegung das vollständige Modell verwendet und keine Dynamik vernachlässigt, was die Stabilität stets garantiert. Bei einer robusten Abtastung beeinflussen die im Gesamtsystem erhaltenen instabilen Diskretisierungsnullstellen nicht mehr das Wunschverhalten des Systems. Trotz Zeitdiskretisierung lässt sich nun auch für schwingungsfähige Antriebssysteme, wie beispielsweise das Zwei-Massen-System, ein schneller inverser Regler mit beliebiger Referenztrajektorie anwenden.

Mit diesem Vorgehen ist eine aufwändige Umsetzung des Reglers in der δ -Beschreibung nicht mehr notwendig und eine Realisierung des inversen Reglers in der gewohnten z -Beschreibung zur Kompensation der Nulldynamik der Strecke wird ermöglicht. Dennoch zeigt sich, dass mit der δ -Beschreibung numerische Probleme bei der Reglerberechnung umgangen werden können (\rightarrow **Kapitel 2.3.6.4**). So ist eine viel kleinere Abtastzeit ohne Gefährdung der Stabilität wegen numerischer Probleme bei der Reglerparameterbestimmung wählbar, als sie bei der Reglerparameterbestimmung mit der z -Beschreibung wäre [4, 106, 119]. Daher ist es aus Gründen der Robustheit zielführend, die Reglerparameterberechnung in der δ -Beschreibung durchzuführen, während die Reglerstruktur des adaptiven Reglers wegen der Einfachheit in der z -Beschreibung realisiert wird.

Basierend auf den genannten Problemlösungen lässt sich der allgemeine Referenzmodellregler (\rightarrow **Kapitel 2.3.6.3**) auf den adaptiven Fall erweitern (\rightarrow **Kapitel 5.4**). Die *modellbasierte adaptive Regelung (Model Reference Adaptive Control: MRAC* \rightarrow **Kapitel 5**) ermöglicht es, Regelung und Identifikation stabil zu vereinen, so dass ein unbekanntes System mit u.U. zeitvarianten Parametern maximal schnell unter Beachtung von Sättigung

und Rauschen einer beliebigen Trajektorie folgen kann. Hierbei finden Regelung und Identifikation parallel statt (\rightarrow **Kapitel 5.3.1**), d.h. es wird im geschlossenen Regelkreis identifiziert bzw. es wird bereits während der Identifikation geregelt (indirekte adaptive Regelung). Da von Beginn an versucht wird, trotz unbekannter Parameter das Regelziel zu erreichen, ist verständlich, dass nicht ausreichend beständige Anregung für die Identifikation zur Verfügung steht, d.h. es ist im Allgemeinen zu erwarten, dass die Parameter nicht gegen die wahren Systemparameter konvergieren werden. Für eine erfolgreiche Regelung ist es aber auch nicht notwendig, bei einem bestimmten Sollsignalverlauf Wissen über das gesamte Systemverhalten zu besitzen. Der Grundgedanke des adaptiven Konzeptes besteht vielmehr darin, nur so viel Systeminformation zu sammeln bzw. zu identifizieren, wie momentan für das Erreichen der Solltrajektorie bzw. des Regelziels notwendig ist (\rightarrow **Kapitel 5.2**). Sobald mehr Systemwissen zum Regeln notwendig ist, findet in einem kurzen transienten Vorgang die Anpassung der Parameter statt. Die Stabilität des zeitvarianten und somit nichtlinearen Gesamtsystems ist mit Hilfe eines Widerspruchsbeweises sowie der Lyapunov-Methode zu zeigen (\rightarrow **Kapitel 5.3.2**).

Nachdem die Grundlagentheorie adaptiver Regler wegen der nichtlinearen Eigenschaft des Reglers stark mathematisch orientiert ist, liegt der Fokus dieser Arbeit in der Darstellung des Sachverhaltes aus Sicht der Ingenieurwissenschaft. Hinsichtlich der Theorie adaptiver Regler sei auf folgende Literatur verwiesen: [3, 6, 10, 16, 28, 32, 33, 35, 40, 42, 48, 53, 54, 55, 56, 61, 62, 80, 81, 96, 98, 99, 102, 103, 104, 105, 108, 115, 118, 119, 124, 125, 126, 128, 143, 144, 145, 146, 150, 153, 154, 156, 170, 177, 179, 191]. Die bei indirekten adaptiven Reglern integrierte Identifikation wird für sich in [15, 41, 44, 47, 57, 83, 84, 110, 130, 133, 141, 167] betrachtet. Allgemein befasst sich [18, 36, 90, 93, 95, 109, 172, 184] mit der linearen und nichtlinearen Systemtheorie.

Im Unterschied zur Stabilität und Folgeverhalten ist die stationäre Genauigkeit des adaptiven Referenzmodellreglers unrobust gegenüber den geschätzten Parametern. So entstehen auf Grund einer nicht beständigen Anregung der Parameterschätzung Abweichungen im Reglergebnis, welche zu keiner Instabilität führen, jedoch die stationäre Genauigkeit des Reglers stark beeinträchtigen. Um deterministische Störungen zu kompensieren, zu der auch die stationäre Abweichung als konstante Störung gezählt werden kann, ist die Theorie der internen Modelle (\rightarrow **Kapitel 2.2.6.4**) bereits sehr lange bekannt [49, 50, 188]. Eine Anwendung auf den zeitdiskreten adaptiven Referenzmodellregler ist in [119] zu finden. Das interne Störmodell wird hierbei vor die Strecke eingebracht. Nachdem diese Platzierung des Integrators als Störmodell konstanter Störungen keine von geschätzten Parametern unabhängige Differenzbildung zwischen Soll- und Istsignal erlaubt, können konstante Störungen zwar grundsätzlich kompensiert werden, jedoch ohne Gewährleistung einer stationären Genauigkeit wegen der Abhängigkeit von der Güte der geschätzten Parameter.

Aus diesem Grund wird in dieser Arbeit eine Anpassung der klassischen Reglerstruktur bzgl. der *internen Modelle* durchgeführt, so dass eine Differenzbildung zwischen Soll- und Istsignal ohne Abhängigkeit von geschätzten Parametern möglich ist (\rightarrow **Kapitel 2.2.6.8**). Dies erfordert eine Verlegung entsprechender interner Störmodelle an den Streckenausgang. Die Berechnungen zeigen, dass lediglich das interne Modell für konstante Störungen an den Streckenausgang verlegt werden darf, so dass die Reglerparameterberechnung des allgemeinen Referenzmodellreglers (\rightarrow **Kapitel 2.2.6.6**) weiterhin mit Hilfe der Diophantinen Gleichung möglich ist. Alle anderen internen Modelle für deterministische Störungen sind

vor die Strecke zu platzieren. Die resultierende Reglerstruktur garantiert, dass der adaptive Regler mit internem Modell (\rightarrow **Kapitel 5.4**) auch bei nicht beständiger Anregung stets ein stationär genaues Verhalten besitzt.

Mit Hilfe der der Strecke vorgeschalteten internen Modelle können beliebige deterministische Störungen kompensiert werden. Das Grundelement zur Rekonstruktion von Störsignalen als Fourier-Reihe ist das Modell zur Nachbildung eines Sinussignals (\rightarrow **Kapitel 2.2.6.8**). Im Unterschied zum nicht-adaptiven Fall können nicht nur Amplitude und Phase, sondern auch die Frequenz des internen Modells durch den Regler angepasst werden, so dass die Frequenzen nicht mehr fest vorgegeben werden müssen, um ein unbekanntes Störsignal zu kompensieren. Die Ordnung des adaptiven Reglers ist dadurch im Unterschied zum nicht-adaptiven Regler mit internen Modellen stark reduziert. Einen Überblick der adaptiven Regelung unter Störeinflüssen gibt die Literatur [42].

Die Parameter einer minimalphasigen zeitkontinuierlichen Strecke werden nach einer vollständigen Identifikation mit dem integrierten Parameterschätzer bei beständiger Anregung gemäß obiger Darstellung in Abhängigkeit der Abtastzeit h und Relativgrad \tilde{r} zu einem zeitdiskreten Modell mit instabilen Diskretisierungsnullstellen führen. Dies tritt bei einem Zwei-Massen-System auf, sobald die gewählte Abtastzeit eine Detektion der Eigenschwingung ermöglicht. Wie in der vorliegenden Arbeit gezeigt wird, liegen bei einer robusten Abtastung all diese instabilen Diskretisierungsnullstellen in einem bekannten Gebiet, welches kein reales Systemverhalten beschreibt. Aus diesem Grund brauchen die instabilen Diskretisierungsnullstellen nicht kompensiert zu werden, um die Nulldynamik des realen Systems zu eliminieren.

Nachdem der adaptive Regler nicht den wahren Parametersatz benötigt, um das aktuelle Systemverhalten bei mangelnder beständiger Anregung ausreichend zu beschreiben, ist es möglich, dass der geschätzte Parametersatz das aktuelle reale Systemverhalten auch mit instabilen Nullstellen beschreibt. Da diese, einen Teil der Systemdynamik beschreibenden Nullstellen, aus Stabilitätsgründen nicht eliminiert werden dürfen, kann folglich die Referenztrajektorie bzw. die Systemdynamik durch den Regler nicht mehr beliebig vorgegeben werden. Spätestens, wenn die geschätzten Parameter gegen die wahren Parameter konvergieren, d.h. die Strecke vollständig identifiziert ist, und instabile Nullstellen als Diskretisierungsnullstellen kein Systemverhalten mehr beschreiben, ist eine beliebige Beeinflussung der Strecke wieder möglich.

Damit während und zwischen der Adaptionsvorgänge bei mangelnder beständiger Anregung nicht Systemverhalten beschreibende instabile Nullstellen entstehen, wird der adaptive Regler um eine *Parameterbeschränkung* gemäß [55] erweitert (\rightarrow **Kapitel 5.5**). Mit dem Vorwissen, dass das zeitdiskrete Modell eines vollständig identifizierten minimalphasigen zeitkontinuierlichen Systems keine instabilen Systemnullstellen besitzt, kann das Gebiet der Parameteridentifikation entsprechend beschränkt werden (\rightarrow **Kapitel 5.5.2**). Hiermit entstehen zu keinem Zeitpunkt instabile Systemnullstellen, womit garantiert ist, dass mit dem adaptiven Referenzmodellregler stets eine beliebige Systemdynamik vorgegeben werden kann, ohne das zu regelnde System zu kennen.

Durch alle genannten Erweiterungen des adaptiven Referenzmodellreglers gewinnt man, begrenzt durch Stellgrößenbeschränkungen und notwendige Signal-Filterungen, ein hochdynamisches adaptives Regelungskonzept, das für die Umsetzung an realen Anlagen mit

einem digitalen Regler geeignet ist und alle Vorteile des theoretischen MRAC-Konzeptes besitzt. Der Erfolg der adaptiven Regelung mit Erweiterungen wird abschließend an einem realen Zwei-Massen-System (\rightarrow **Kapitel 3.1**) demonstriert (\rightarrow **Kapitel 5.6**).

Kapitel 2

Lineare Systemtheorie aus physikalisch/technischer Sicht

In dieser Arbeit wird ein Regelungskonzept vorgestellt, mit welchem unbekannte lineare Systeme stabil geregelt werden können. Das in der Theorie überzeugende Konzept, wie es in Kapitel 5 dargestellt wird, soll im Laufe dieser Arbeit aus physikalisch/technischer Sicht kritisch beleuchtet werden, um dessen Schwächen durch geeignete Erweiterungen zu beheben. Aus diesem Grund ist es als sinnvoll zu betrachten, in den entsprechenden problembehafteten Bereichen der linearen Systemtheorie neben dem mathematischen ein physikalisch/technisches Verständnis zu erlangen. Hierzu wird im Folgenden die zeitkontinuierliche und zeitdiskrete lineare Systemtheorie [1, 2, 8, 36, 38, 39, 46, 51, 72, 73, 82, 83, 92, 93, 111, 112, 113, 114, 119, 127, 135, 138, 139, 140, 149, 159, 160, 161, 165, 166, 168, 169, 181, 182] entsprechend aufbereitet.

2.1 Problemstellung: Zeitdiskrete Regler für zeitkontinuierliche Systeme

Zunächst stellt sich die Frage, ob ein zeitkontinuierliches oder ein zeitdiskretes System vorliegt und ob hierfür ein zeitkontinuierlicher oder zeitdiskreter Regler Anwendung finden soll. Ebenso ist zu klären, ob das System wertkontinuierliche oder wertdiskrete Zustände, d.h. Signalwerte der Speicherelemente (z.B. träge Massen und Feder beim Zwei-Massen-System) einnehmen kann.

Die in dieser Arbeit zu betrachtenden Antriebssysteme können ihre Signalwerte kontinuierlich mit der Zeit t verändern, d.h. es liegt nicht nur zu bestimmten Zeitpunkten ein Wert vor, sondern für jeden beliebigen Zeitpunkt. Der Wert des Zustands $\underline{x}(t)$ zum Zeitpunkt t kann hierbei ebenfalls jeden beliebigen Wert annehmen. Der zu regelnde Antrieb besitzt somit wert- und zeitkontinuierliche Signale und wird daher korrekt durch eine wert- und zeitkontinuierliche Systembeschreibung modelliert, d.h. nur in dieser Beschreibung werden die Systemparameter eine physikalisch interpretierbare Bedeutung haben.

Da mittlerweile in der Regelungstechnik vorwiegend digitale Regler zum Einsatz kommen, ist es von Rechnerarchitektur und Prozessor abhängig, wie genau ein zeit- und wertkon-

tinuierliches Signal einer Anlage aufgelöst werden kann. Die Taktfrequenz des Prozessors gibt vor, in welchen Zeitabständen h ein zeitkontinuierliches Signal eingelesen, d.h. abgetastet werden kann. Aus dem zeitkontinuierlichen Signal resultiert ein zeitdiskretes Signal. Desweiteren gibt die Anzahl der verfügbaren Bits des Rechners vor, welche Genauigkeit bzw. Auflösung der gemessene Signalwert zum Abtastzeitpunkt haben kann. Es ergibt sich eine geringste Differenz bzw. Quantisierung Δ zwischen zwei Zahlen. Somit liegt für die Berechnung im Regler ein zeit- und wertdiskretes Signal vor, und der digitale Regler wird korrekt durch eine wert- und zeitdiskrete Systembeschreibung modelliert.

Für den Entwurf eines Reglers muss jedoch Regler und System als Gesamtsystem in einer gemeinsamen Systembeschreibung modelliert werden. Entweder es wird der Regler zeitkontinuierlich modelliert oder das System, die zu regelnde Strecke, wird zeitdiskret modelliert. Es ist zu erwarten, dass in beiden Fällen Probleme entstehen werden. Wird beispielsweise ein kontinuierlicher Regler auf einem zeitdiskreten Rechner implementiert, so kann das Gesamtsystem instabil werden, obwohl die Stabilitätsuntersuchung stabiles Verhalten garantiert hat. Dies ist verständlich, da ein wert- und zeitdiskreter Rechner nicht zu jedem Zeitpunkt mit beliebigen Werten reagieren kann, wie es bei einem kontinuierlichen Regler gefordert wird. Da dieser Sachverhalt bei schnellen Reglern zu Stabilitätsproblemen führen kann, wird in dieser Arbeit, der Entwicklung eines schnellen adaptiven Reglers, auf die zeitdiskrete Beschreibung des zu regelnden Systems und somit des Gesamtsystems zurückgegriffen. Bewiesene Stabilität ist zu jedem Zeitpunkt garantiert, wenn die Abtastung der Strecke ebenfalls modelliert wird. Durch die Abtastung entstehen jedoch andere Probleme, wie sie in Kapitel 2.3.6, 3.4 und 4 diskutiert und gelöst werden.

2.1.1 Abgetastete Systemsignale

Ein *zeitkontinuierliches Signal* wird beschrieben durch eine Funktion $x(\cdot)$, welche die Zeit $t \in \mathbb{R}$ auf einen Wert $x(t) \in \mathbb{R}$ abbildet:

$$x(\cdot) : t \mapsto x(t) \quad (2.1)$$

$$x(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.2)$$

Betrachtet man ein mit der Zeit $h \in \mathbb{R}$ abgetastetes Signal, so ändert sich die Abbildungsvorschrift wie folgt:

$$x(\cdot) : t \mapsto x(t), \quad t = kh, \quad k \in \mathbb{N} \quad (2.3)$$

$$x(\cdot) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.4)$$

Somit können in die Funktion $x(\cdot)$ nur noch diskrete Zeiten $t = kh$ eingesetzt werden, womit ein *zeitdiskretes Signal* vorliegt. Für den entsprechenden Signalwert zum Abtastzeitpunkt $t = kh$ wird folgender Formalismus festgelegt:

$$x(kh) = x[k] \quad (2.5)$$

Hierbei bedeutet $x[k]$ Signalwert des abgetasteten Signals $x[\cdot]$ zum k -ten Abtastschritt, d.h. zum Abtastzeitpunkt $t = kh$. Die Funktion (2.3) geht hiermit über in

$$x[\cdot] : k \mapsto x[k], \quad k \in \mathbb{N} \quad (2.6)$$

womit das zeitdiskrete Signal als Folge interpretierbar wird. Eine Folge von Zahlen $x[\cdot]$, in der die k -te Zahl der Folge mit $x[k]$ bezeichnet wird, lässt sich formal schreiben als

$$x[\cdot] = \{x[k]\}, \quad k \in \mathbb{N} \quad (2.7)$$

In Abbildung 2.1 links ist eine mit $h = 0.05s$ abgetastete Halbsinuswelle dargestellt, deren abgetastete Werte bis zum nächsten Abtastzeitpunkt gehalten werden (ZOH / HG0: Zero-Order-Hold / Halteglied nullter Ordnung).

Der Formalismus $[\cdot]$ zur Beschreibung der Parameterabhängigkeit wird in dieser Arbeit für alle Signale, Polynome und Funktionen verwendet, die sich auf ein zeitdiskretes System beziehen. Alle Signale, Polynome und Funktionen, die ein zeitkontinuierliches System beschreiben, spiegeln die Parameterabhängigkeit in dem Formalismus (\cdot) wider.

2.1.2 Quantisierte Systemsignale

Berücksichtigt man nun ebenfalls die Quantisierung der Messwerte mit Δ , so können die Messwerte nur noch Element des Wertebereiches \mathbb{W}_Q sein:

$$\mathbb{W}_Q = \{i \Delta\} \equiv \{q_i\}, \quad i \in \mathbb{Z} \quad (2.8)$$

Der Bereich \mathbb{R} des *wertkontinuierlichen Signals* $\{x[k]\}$ wird durch die Quantisierungsfunktion $Q[\cdot]$ auf den Wertebereich \mathbb{W}_Q abgebildet:

$$Q[\cdot] : x[k] \mapsto x^\Delta[k] = Q[x[k]] \quad (2.9)$$

$$Q[\cdot] : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{W}_Q \quad (2.10)$$

Das mit Δ quantisierte und somit *wertdiskrete Signal* wird mit $\{x^\Delta[k]\}$ bzw. $x^\Delta[\cdot]$ bezeichnet, wobei $x^\Delta[k]$ dem entsprechenden Signalwert zum k -ten Abtastschritt entspricht.

Da die Funktion $Q[\cdot]$ eine Funktion $x[\cdot]$ abbildet, spricht man auch von einem Operator Q auf die Funktion $x[\cdot]$, der das zeitdiskrete und wertkontinuierliche Signal $x[\cdot]$ auf das zeit- und wertdiskrete Signal $x^\Delta[\cdot]$ abbildet:

$$x^\Delta[\cdot] = (Qx)[\cdot] \equiv Q[x[\cdot]] \quad (2.11)$$

Eine Quantisierungsfunktion bzw. -operator für den Fall $\Delta = 1$ ist in Abbildung 2.1 rechts zu finden. Das quantisierte Signal $(Qx)[\cdot]$ ist in Abbildung 2.1 links zu sehen. Befindet sich der kontinuierliche Wert $x[k]$ im Bereich $\frac{2i+1}{2}\Delta < x[k] \leq \frac{2i+3}{2}\Delta$, so gilt für den diskreten Wert $x^\Delta[k] = i\Delta$ mit $k \in \mathbb{N}$ und $i \in \mathbb{Z}$; der wertkontinuierliche Signalwert $x[k]$ wird durch die Quantisierungsfunktion entsprechend auf- oder abgerundet, wobei gemäß (2.8) nur Werte

$$x^\Delta[k] = q_i \in \{i \Delta\}, \quad i \in \mathbb{Z} \quad (2.12)$$

angenommen werden können.

Für die weitere Nomenklatur ist festzuhalten, dass ein zeit- und wertkontinuierliches Signal allgemein durch die Funktion $x(\cdot)$ beschrieben wird. Handelt es sich um ein abgetastetes

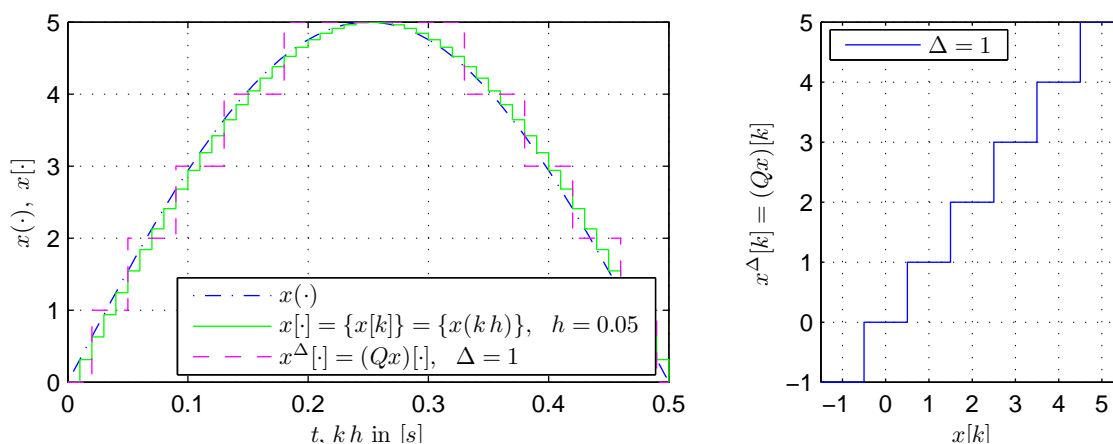


Abbildung 2.1: links: Abgetastetes ($h = 0.05$) und quantisiertes ($\Delta = 1$) Signal $x(\cdot)$; rechts: Quantisierungsfunktion

Signal, so beschreibt dies die Funktion $x[\cdot]$ bzw. Folge $\{x[k]\}$, wobei $x[k] \in \mathbb{R}$ den Signalwert zum Zeitpunkt $t = kh$ bezeichnet, d.h. zum k -ten Abtastzeitpunkt. Unterliegt das zeitdiskrete Signal zusätzlich einer Quantisierung mit Δ , so wird dies durch die Funktion $x^\Delta[\cdot]$ bzw. Folge $\{x^\Delta[k]\}$ beschrieben; zum Zeitpunkt $t = kh$ beträgt der wertdiskrete Messwert $x^\Delta[k] = q_i \in \{i \Delta\}$ mit $i \in \mathbb{Z}$.

2.1.3 Digitaler Regler

Es wurde hiermit verdeutlicht, dass ein digitaler Regler eine Wert- und Zeitdiskretisierung durchführt. Die Taktfrequenz des Prozessors gibt die kleinstmögliche Abtastzeit h vor und die verfügbaren Bits die Genauigkeit Δ des gemessenen Signals. Während die Anzahl der Bits heutzutage keine Beschränkung mehr für die Auflösung darstellt und somit das quantisierte Signal $x^\Delta[\cdot]$ als quasi wertkontinuierliches Signal $x[\cdot]$ betrachtet werden kann, ist eine beliebig kleine Abtastzeit nicht realisierbar. Die Prozessoren werden zwar immer schneller, aber auch die zu implementierenden Regler werden immer aufwändiger. Während einer Taktperiode sind oftmals aufwändige teils nichtlineare Berechnungen durchzuführen, die nicht in der Zeit $h \rightarrow 0s$ abzuarbeiten sind. Wird eine schnelle Reaktionszeit des digitalen Reglers verlangt, die beispielsweise nur wenige Vielfache der Taktzeit beträgt, so darf das zu verarbeitende Signal und somit das System mit Regler nicht als quasi zeitkontinuierlich betrachtet werden, da sonst Stabilitätsprobleme zu erwarten sind. Das bedeutet, dass für diese Arbeit, der Entwicklung eines schnellen adaptiven digitalen Reglers für ein wert- und zeitkontinuierliches Antriebssystem, eine wertkontinuierliche sowie zeitdiskrete Beschreibung/Modellierung des Gesamtsystems mit Strecke und Regler erforderlich ist.

2.2 Zeitkontinuierliche Systeme und Regler

2.2.1 Zustandsraumbeschreibung

Um ein lineares wert- und zeitkontinuierliches System vollständig zu beschreiben, bedient man sich der Zustandsraumbeschreibung:

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}}(t) &= \tilde{\mathbf{A}} \underline{x}(t) + \tilde{\underline{b}} u(t), & \underline{x}(0) &= \underline{x}_0 \\ y(t) &= \tilde{\underline{c}}^T \underline{x}(t)\end{aligned}\tag{2.13}$$

mit $\underline{x}, \tilde{\underline{b}}, \tilde{\underline{c}} \in \mathbb{R}^{\tilde{n}}$ und $\tilde{\mathbf{A}} \in \mathbb{R}^{\tilde{n} \times \tilde{n}}$. Den entsprechenden Signalflussplan zeigt Abbildung 2.2.

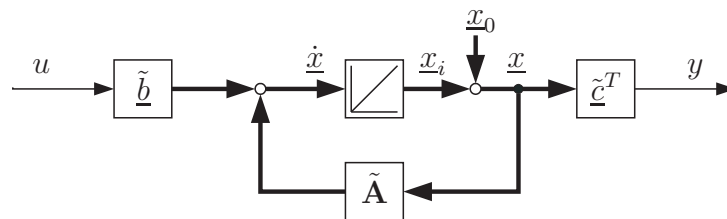


Abbildung 2.2: Signalflussplan der zeitkontinuierlichen Zustandsbeschreibung eines Systems

Der Vektor \underline{x} wird als Zustandsvektor bezeichnet und beinhaltet die Zustände $x_1, x_2, \dots, x_{\tilde{n}}$. Die Anzahl der Zustände wird als *Ordnung* \tilde{n} des Systems bezeichnet. Jeder *Zustand* x_i ($i = 1, \dots, \tilde{n}; i \in \mathbb{N}$) repräsentiert einen Energiespeicher des Systems, der seine Energie nicht sprunghaft ändern kann. Bedingt durch die physikalische Verkopplung der Energiespeicher resultiert eine systemspezifische Dynamik, nach der der Energiespeicher seinen „momentanen Zustand“ ändert, was den Namen erklärt: man spricht von einem Zustand $\underline{x}(t)$ des Systems und dessen Veränderung $\dot{\underline{x}}(t)$ zu einem bestimmten Zeitpunkt t . Findet keine Anregung des Systems über das Eingangssignal $u(\cdot)$ statt, verändern sich die Zustände auf Grund von Anfangswerten \underline{x}_0 und der physikalischen Verkopplung der Zustände so lange, bis die Ruhelage \underline{x}_∞ , auch Gleichgewichtslage oder *stationärer Zustand* genannt, eingenommen wird, bei der keine Veränderung der Zustandswerte mehr stattfindet: $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{0}$. Die Verkopplung der Zustände bzw. Energiespeicher spiegelt sich in der Systemmatrix $\tilde{\mathbf{A}}$ wider, welche somit vollständig die Systemdynamik beschreibt. Sobald über den systembedingten Einkoppelvektor $\tilde{\underline{b}}$ durch das Eingangssignal $u(\cdot)$ wieder eine Veränderung $\dot{\underline{x}}(t)$ bestimmter Zustandswerte beginnt, findet über die physikalische Verkopplung der Zustände erneut eine dynamische Veränderung des Systems statt. Der Systemausgang bzw. das Ausgangssignal $y(\cdot)$ bildet sich aus einer systembedingten Linearkombination der Signale $\underline{x}(\cdot)$ der Energiespeicher; der Auskoppelvektor $\tilde{\underline{c}}$ beschreibt hierbei die Gewichtung der Zustände.

Der Vorteil der Zustandsbeschreibung (2.13) besteht in der Möglichkeit, exakt die real vorkommende Verkopplung der Signale im wert- und zeitkontinuierlichem System zu modellieren. In der Systemmatrix sowie dem Ein- und Auskoppelvektor befinden sich physikalisch interpretierbare Systemparameter. Auf Grund der gesamten Beschreibung des Systems mit

seinen Zuständen können Aussagen über sämtliche Signalverläufe im System getroffen werden – die geschlossene *Lösungsformel* für $t \geq t_0$ lautet wie folgt:

$$\underline{x}(t) = e^{\tilde{\mathbf{A}}(t-t_0)} \underline{x}_0 + \int_{t_0}^t e^{\tilde{\mathbf{A}}(t-\tau)} \tilde{\underline{b}} u(\tau) d\tau \quad (2.14)$$

Der erste Summand bezeichnet die *freie Bewegung*, welche Lösung der homogenen Differentialgleichung (2.13) ist, d.h. es gilt $u(\cdot) \equiv 0$. Liegt ein Anfangswert \underline{x}_0 vor, so zeigt das System auf Grund der in $\tilde{\mathbf{A}}$ beschriebenen Systemdynamik einen eindeutig bestimmbar zeitlichen Verlauf. Erfährt das System eine Anregung $u(\cdot)$ von außen über den Einkoppelvektor $\tilde{\underline{b}}$, findet sich im zweiten Summanden die *erzwungene Bewegung* des Systems wieder. Beide Summanden beschreiben eindeutig das zeitliche Verhalten in Abhängigkeit des Anfangswertes \underline{x}_0 und Eingangssignals $u(\cdot)$, d.h. die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (2.13).

2.2.1.1 Stabilität unter Beachtung der Steuerbarkeit bzw. Beobachtbarkeit

Wie in (2.14) zu erkennen, muss sich die erzwungene Bewegung nicht auf alle Zustände auswirken; es hängt davon ab, in welche Zustände das Eingangssignal $u(\cdot)$ über $\tilde{\underline{b}}$ einkoppelt und wie diese Zustände über die Systemmatrix $\tilde{\mathbf{A}}$ miteinander verkoppelt sind. Das kann mit Hilfe der *Steuerbarkeitsmatrix*

$$\tilde{\mathbf{Q}}_S = [\tilde{\underline{b}} \quad \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\underline{b}} \quad \dots \quad \tilde{\mathbf{A}}^{\tilde{n}-1}\tilde{\underline{b}}] \quad (2.15)$$

überprüft werden, die sowohl $\tilde{\underline{b}}$ als auch $\tilde{\mathbf{A}}$ enthält.

Definition 2.1: Steuerbarkeit

Besitzt die Steuerbarkeitsmatrix $\tilde{\mathbf{Q}}_S$ vollen Rang bzw. ist die Determinante ungleich Null, so ist das System vollständig steuerbar:

$$\text{Rang}(\tilde{\mathbf{Q}}_S) = \tilde{n}, \quad \det(\tilde{\mathbf{Q}}_S) \neq 0 \quad (2.16)$$

Dies bedeutet, dass mit einem bestimmten Eingangssignal $u(\cdot)$ jeder Systemzustand \underline{x} von einem beliebigen Anfangszustand $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$ in endlicher Zeit $t_e - t_0$ in den Ursprung $\underline{x}(t_e) = \underline{0}$ überführt werden kann und folglich das Eingangssignal $u(\cdot)$ auf alle Zustände wirkt.

Hiermit wurde die Frage beantwortet, ob über das Eingangssignal $u(\cdot)$ alle Zustände von außen beeinflusst werden können. Interessant ist jedoch auch, ob alle Zustandssignale $\underline{x}(\cdot)$ auf den Ausgang y wirken, d.h. im Ausgangssignal $y(\cdot)$ sichtbar sind. Das hängt zum einen davon ab, wie die Zustände über die Systemmatrix $\tilde{\mathbf{A}}$ verkoppelt sind und zum anderen, welcher Zustand über den Auskoppelvektor $\tilde{\underline{c}}$ auf den Ausgang wirkt. Um diesen Zusammenhang bestimmen zu können, bedient man sich der *Beobachtbarkeitsmatrix*:

$$\tilde{\mathbf{Q}}_B = \begin{bmatrix} \tilde{\underline{c}}^T \\ \tilde{\underline{c}}^T \tilde{\mathbf{A}} \\ \vdots \\ \tilde{\underline{c}}^T \tilde{\mathbf{A}}^{\tilde{n}-1} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Definition 2.2: Beobachtbarkeit

Besitzt die Beobachtbarkeitsmatrix $\tilde{\mathbf{Q}}_B$ vollen Rang bzw. ist die Determinante ungleich Null, so ist das System vollständig beobachtbar:

$$\text{Rang}(\tilde{\mathbf{Q}}_B) = \tilde{n}, \quad \det(\tilde{\mathbf{Q}}_B) \neq 0 \quad (2.18)$$

Folglich gibt es keinen Zustand x_i ($i = 1, \dots, \tilde{n}; i \in \mathbb{N}$), der bei Abwesenheit des Eingangssignals ($u(t) \equiv 0$) und einem beliebigen Anfangswert $x_{i,0}$ für alle Zeiten einen Null-Beitrag für das Ausgangssignal $y(\cdot)$ bedeutet. In diesem Fall können aus dem Signalverlauf von $y(\cdot)$ eindeutig die Anfangswerte \underline{x}_0 der Zustände rekonstruiert werden.

Ob ein System vollständig beobachtbar bzw. steuerbar ist, hat für die Regelung eine wichtige Bedeutung. Ein instabiles System kann nur erfolgreich stabilisiert werden, wenn die instabile Dynamik beobachtbar und steuerbar ist.

Definition 2.3: Instabilität

Instabilität bedeutet bzgl. der Lyapunov-Stabilität, dass bei Auslenkung aus der Ruhelage und anschließender Abwesenheit der Anregung ($u(t) = 0$) mindestens ein Zustand in seinem Wert unbegrenzt anwächst:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\underline{x}(t)\| \rightarrow \infty \quad (2.19)$$

Tritt Instabilität auf und ist der entsprechende Zustand nicht steuerbar, so kann die Regelung diesen Zustand nicht stabilisieren. Ist dieser Zustand gleichzeitig auch nicht beobachtbar, so ist von außen nicht erkennbar, dass das System im Inneren zerstört wird. Ist der Zustand nicht steuerbar aber beobachtbar, kann das System noch rechtzeitig abgeschaltet werden, falls die Anfangswerte zu instabilem Verhalten führen. Von außen jedoch kann der Zustand nicht stabilisiert werden. Ist der Zustand steuerbar aber nicht beobachtbar, bekommt eine Regelung über den Systemausgang y nicht die notwendige Rückkopplung, um einem Aufklingen entgegenzuwirken. Nur mit Zuhilfenahme der Zustandsdarstellung bzw. Messung des instabilen Zustandssignals kann eine Regelung durchgeführt werden. Es ist festzuhalten, dass das alleinige Ein- Ausgangsverhalten zur Regelung nur dann herangezogen werden darf, wenn das System vollständig beobachtbar und steuerbar ist bzw. die nicht beobachtbare und/oder steuerbare Dynamik asymptotisch stabiles Verhalten aufzeigt und somit die Anfangswerte \underline{x}_0 asymptotisch auf die Ruhelage \underline{x}_∞ abklingen.

Definition 2.4: Lyapunov-Stabilität

Die Ruhelagen bzw. einen Zustand bezeichnet man als Lyapunov-stabil, wenn nach einer Auslenkung aus der Ruhelage und anschließender Abwesenheit der Anregung ($u(t) = 0$) der Betrag des Zustands für alle Zeiten innerhalb einer endlichen Schranke $M < \infty$ verbleibt:

$$\|\underline{x}(t)\| < M, \quad \forall t > t_0 \quad (2.20)$$

Definition 2.5: Asymptotische Stabilität

Ist eine Ruhelage Lyapunov-stabil und kehrt der Zustand nach seiner Auslenkung und Abwesenheit der Anregung ($u(t) = 0$) in seine Ruhelage \underline{x}_∞ zurück, so spricht man von einer asymptotisch stabilen Ruhelage:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\underline{x}(t)\| = \underline{x}_\infty, \quad \|\underline{x}(t)\| < M, \quad \forall t > t_0 \quad (2.21)$$

Definition 2.6: Ein-Ausgangs-Stabilität

Für die Ein-Ausgangs-Stabilität werden nur diejenigen Zustände auf Lyapunov-Stabilität untersucht, welche steuerbar und zugleich beobachtbar sind. Ist in einem System Ein-Ausgangs-Stabilität gegeben, können nach Definition nicht-beobachtbare Zustände instabiles Verhalten zeigen.

2.2.1.2 Stabilitätsbedingung linearer Systeme: Modale Zustandsdarstellung

Da die Systemdynamik durch die Systemmatrix $\tilde{\mathbf{A}}$ beschrieben wird, muss sich mit ihr die Stabilitätseigenschaft eines Systems bestimmen lassen. Wendet man eine lineare Transformation mit

$$\underline{x}(t) = \tilde{\mathbf{T}} \underline{\bar{x}}(t), \quad \tilde{\mathbf{T}} \in \mathbb{C}^{\tilde{n} \times \tilde{n}} \quad (2.22)$$

auf das System (2.13) an, so ergeben sich folgende neue Systemmatrizen und -vektoren:

$$\bar{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{T}}^{-1} \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{T}} \quad (2.23)$$

$$\bar{\underline{b}} = \tilde{\mathbf{T}}^{-1} \underline{\tilde{b}} \quad (2.24)$$

$$\bar{\underline{c}}^T = \underline{\tilde{c}}^T \tilde{\mathbf{T}} \quad (2.25)$$

Durch geeignete Wahl der Transformationsmatrix $\tilde{\mathbf{T}} = \tilde{\mathbf{T}}_M$ als *Modalmatrix* wird das System in neuen Koordinaten beschrieben, mit dem Vorteil, dass die Systemmatrix Diagonalgestalt annimmt:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{\bar{x}}}(t) &= \bar{\mathbf{A}} \underline{\bar{x}}(t) + \bar{\underline{b}} u(t) = \begin{bmatrix} \tilde{\lambda}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \tilde{\lambda}_n \end{bmatrix} \underline{\bar{x}}(t) + \bar{\underline{b}} u(t), & \underline{\bar{x}}(0) = \underline{\bar{x}}_0 \\ y(t) &= \bar{\underline{c}}^T \underline{\bar{x}}(t) \end{aligned} \quad (2.26)$$

Die Zustände $\underline{\bar{x}}$ besitzen nach der sog. *Modaltransformation* zwar keine physikalische Bedeutung mehr, jedoch lassen sich auf Grund der linearen Transformation Rückschlüsse auf die Stabilität der Systemzustände ziehen: ist der Signalverlauf $\underline{\bar{x}}(\cdot)$ beschränkt, so ist auch der Signalverlauf der realen Systemzustände $\underline{x}(\cdot)$ beschränkt. Dieser Zusammenhang zeigt sich auch darin, dass das Ein- Ausgangsverhalten in beiden Beschreibungen identisch ist. Zur Durchführung der Modaltransformation ist die Bestimmung der Eigenwerte und Eigenvektoren notwendig:

Theorem 2.1: Eigenwerte und Eigenvektoren [183]

Die Eigenwerte $\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_{\tilde{n}}$ lassen sich mit Hilfe des charakteristischen Polynoms

$$A(\tilde{\lambda}_i) = \det[\tilde{\lambda}_i \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}] \quad (2.27)$$

der Systemmatrix $\tilde{\mathbf{A}}$ durch Nullsetzen bestimmen. Die sog. Eigenwertgleichung lautet:

$$\det[\tilde{\lambda}_i \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}] = 0, \quad i = 1, \dots, \tilde{n}, \quad \tilde{\lambda}_i \in \mathbb{C} \quad (2.28)$$

Liegen die Eigenwerte vor, so können über

$$[\tilde{\lambda}_i \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}] \tilde{\underline{m}}_i = \underline{0}, \quad i = 1, \dots, \tilde{n}, \quad \tilde{\lambda}_i \in \mathbb{C}, \quad \tilde{\underline{m}}_i \in \mathbb{C}^{\tilde{n}} \quad (2.29)$$

die Eigenvektoren $\tilde{\underline{m}}_i$ bestimmt werden, welche die Spalten der Modalmatrix bilden:

$$\tilde{\mathbf{T}}_M = [\tilde{\underline{m}}_1, \dots, \tilde{\underline{m}}_{\tilde{n}}] \quad (2.30)$$

Beweis:

Durch Umformen der Gleichung (2.23) und Verwendung des Zusammenhangs (2.30) folgt:

$$\tilde{\mathbf{T}}_M \tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{T}}_M = \mathbf{0} \quad (2.31)$$

$$[\tilde{\underline{m}}_1, \dots, \tilde{\underline{m}}_{\tilde{n}}] \begin{bmatrix} \tilde{\lambda}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \tilde{\lambda}_{\tilde{n}} \end{bmatrix} - \tilde{\mathbf{A}} [\tilde{\underline{m}}_1, \dots, \tilde{\underline{m}}_{\tilde{n}}] = \mathbf{0} \quad (2.32)$$

$$[\tilde{\lambda}_1 \tilde{\underline{m}}_1, \dots, \tilde{\lambda}_{\tilde{n}} \tilde{\underline{m}}_{\tilde{n}}] - \tilde{\mathbf{A}} [\tilde{\underline{m}}_1, \dots, \tilde{\underline{m}}_{\tilde{n}}] = [\underline{0}, \dots, \underline{0}]$$

Aus den einzelnen Spalten der Gleichung (2.32) ergibt sich sofort Gleichung (2.29). Diese hat eine nicht-triviale Lösung, wenn die Matrix $[\tilde{\lambda}_i \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}]$ Rangabfall besitzt, d.h. wenn $\det[\tilde{\lambda}_i \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}] = 0$ gilt; hiermit resultiert die Eigenwertgleichung (2.28). ■

Wendet man nun nach einer erfolgten Modaltransformation die geschlossene Lösungsformel (2.14) auf den homogenen Teil der Differentialgleichung (2.26) an, so ergibt sich:

$$\underline{\bar{x}}(t) = e^{\tilde{\mathbf{A}}t} \underline{\bar{x}}_0 = \begin{bmatrix} e^{\tilde{\lambda}_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\tilde{\lambda}_{\tilde{n}} t} \end{bmatrix} \underline{\bar{x}}_0 = \begin{pmatrix} e^{\tilde{\lambda}_1 t} \bar{x}_{0,1} \\ \vdots \\ e^{\tilde{\lambda}_{\tilde{n}} t} \bar{x}_{0,\tilde{n}} \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

Auf Grund der Diagonalgestalt von $\tilde{\mathbf{A}}$ sind die Anfangswerte in der Lösungsformel (2.33) entkoppelt, womit über den linearen Zusammenhang der Modaltransformation

$$\underline{x}(t) = \tilde{\mathbf{T}}_M \underline{\bar{x}}(t) = \tilde{\mathbf{T}}_M \begin{pmatrix} e^{\tilde{\lambda}_1 t} \bar{x}_{0,1} \\ \vdots \\ e^{\tilde{\lambda}_{\tilde{n}} t} \bar{x}_{0,\tilde{n}} \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

direkt eine Stabilitätsaussage über das System mit der Systemmatrix $\tilde{\mathbf{A}}$ getroffen werden kann. Bei Abwesenheit einer Anregung ($u(t) = 0$) klingen die Systemzustände ab, sobald der Realteil der Eigenwerte negativ ist.

Theorem 2.2: Asymptotische Stabilität für lineare Systeme

Ein lineares System ist asymptotisch stabil, wenn gilt:

$$\operatorname{Re}\{\tilde{\lambda}_i\} = \operatorname{Re}\{\sigma_i + j\omega_i\} = \sigma_i < 0, \quad i = 1, \dots, \tilde{n} \quad (2.35)$$

Theorem 2.3: Stabilität für lineare Systeme

Ein Systemzustand x_i ist stabil, wenn dieser bei Abwesenheit einer Anregung ($u(t) = 0$) und einem Anfangszustand $x_{0,i} \neq 0$ nicht aufklingt:

$$\operatorname{Re}\{\tilde{\lambda}_i\} = \operatorname{Re}\{\sigma_i + j\omega_i\} = \sigma_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, \tilde{n} \quad (2.36)$$

Mit Definition 2.4 dürfen die Eigenwerte gleich Null sein, was bedeutet, dass der entsprechende Systemzustand konstant bleibt und somit entsprechend der Definition 2.4 innerhalb einer Schranke M verbleibt. Sobald für einen Eigenwert $\tilde{\lambda}_i = 0$ gilt, besitzt das System ein *integrales Verhalten*, d.h. für ein Eingangssignal $u(\cdot) \neq 0$ wächst das Zustandssignal $x_i(\cdot)$ unbegrenzt an.

Mit diesem Kapitel wurde deutlich, dass mit Hilfe der Eigenwerte die Stabilität eines Systems beurteilt werden kann. Zur Berechnung der Eigenwerte sei an dieser Stelle Folgendes erwähnt:

Lemma 2.1: charakteristisches Polynom

Zur Bestimmung des charakteristischen Polynoms (2.27) eines Systems mit der Matrix $\tilde{\mathbf{A}}$ ist es irrelevant, ob dieses einer linearen Transformation gemäß Gleichung (2.23) unterzogen wurde:

$$\det[\tilde{\lambda}_i \mathbf{E} + \tilde{\mathbf{A}}] = \det[\tilde{\lambda}_i \mathbf{E} + \tilde{\mathbf{T}}^{-1} \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{T}}] = \det[\tilde{\lambda}_i \mathbf{E} + \bar{\mathbf{A}}], \quad i = 1, \dots, \tilde{n}, \quad \tilde{\lambda}_i \in \mathbb{C} \quad (2.37)$$

Mit der transformierten Systemmatrix $\bar{\mathbf{A}}$ kann ebenfalls das charakteristische Polynom und somit die Eigenwerte der Systemmatrix $\tilde{\mathbf{A}}$ bestimmt werden, d.h. eine Stabilitätsaussage ist auch mit Hilfe des transformierten Systems zu treffen.

Beweis:

$$\det[\tilde{\lambda}_i \mathbf{E} + \tilde{\mathbf{A}}] \stackrel{\text{Lemma A.1}}{=} \det[\tilde{\mathbf{T}}^{-1}[\tilde{\lambda}_i \mathbf{E} + \tilde{\mathbf{A}}]\tilde{\mathbf{T}}] \quad (2.38)$$

$$= \det[\tilde{\lambda}_i \tilde{\mathbf{T}}^{-1}\tilde{\mathbf{T}} + \tilde{\mathbf{T}}^{-1}\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{T}}] \quad (2.39)$$

$$= \det[\tilde{\lambda}_i \mathbf{E} + \tilde{\mathbf{T}}^{-1}\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{T}}] \quad (2.40)$$

■

2.2.1.3 Zusammenhang zwischen Rückkopplungen und Stabilität

Abschließend lassen sich die Aussagen bzgl. der Stabilität von linearen Systemen sehr anschaulich am Signalfussplan 2.3 der modalen Zustandsform (2.26) verdeutlichen. Es ist gut

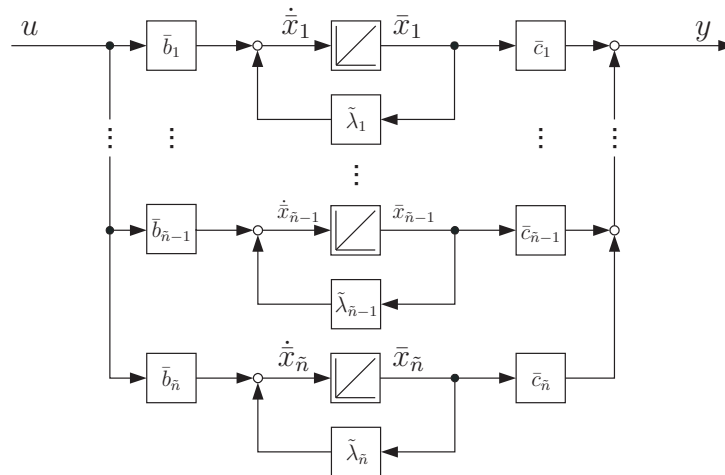


Abbildung 2.3: Signalflussplan eines zeitkontinuierlichen linearen Systems in modaler Zustandsdarstellung

zu erkennen, dass durch die Modaltransformation eine Entkopplung der Zustände stattfindet. Die Stabilität eines Zustands \bar{x}_i mit $i \in \{1, \dots, \tilde{n}\}$ ist lediglich abhängig von der jeweiligen Rückkopplung über $\tilde{\lambda}_i$. Gilt $\underline{x}_0 = \underline{0}$ der Anfangszustände und findet ein Sprung des Eingangssignals $u(\cdot)$ auf einen konstanten Wert statt, so wird dieser, skaliert über \tilde{b}_i , integriert. Sobald $\bar{x}_i \neq 0$ gilt, ist die Rückkopplung aktiv – zeigt der Eigenwert $\tilde{\lambda}_i$ ein positives Vorzeichen, so liegt am Eingang des Integrators ein betragsmäßig größerer Wert als zu Beginn vor, d.h. die Zunahme $\dot{\bar{x}}_i$ des Zustands \bar{x}_i erhöht sich. Der resultierende große Betrag des Zustands führt nun zu einer noch schnelleren Zunahme. Die sog. *Mitkopplung* durch das positive Vorzeichen resultiert in einem unbeschränkten, exponentiellen Anwachsen des Zustands, selbst wenn das Eingangssignal $u(\cdot)$ wieder auf Null gesetzt wird. Demzufolge liegt nach Definition 2.4 ein instabiles System vor, da bei einer kurzzeitigen Auslenkung des Zustands aus der Ruhelage der Zustand unbeschränkt anwächst; dies ist das Resultat eines positiven Eigenwertes, d.h. einer Mitkopplung, womit sich Theorem 2.3 bestätigt.

Zeigt der Eigenwert $\tilde{\lambda}_i$ hingegen ein negatives Vorzeichen, liegt eine stabile *Gegenkopplung* vor. Zunächst gilt bei Abwesenheit des Eingangssignals ($u(\cdot) = 0$) im Gleichgewichtszustand $\bar{x}_i = 0$. Setzt der Sprung ein, so nimmt zu Beginn mit $\dot{\bar{x}}_i = \tilde{b}_i u(t = 0+)$ der Zustand \bar{x}_i am stärksten zu, denn sobald $\bar{x}_i \neq 0$ gilt, sinkt der Betrag von $\dot{\bar{x}}_i$ auf Grund der negativen Rückkopplung – der Zustand \bar{x}_i nimmt folglich weniger stark zu. Der weiterhin betragsmäßig steigende Zustand führt über die Rückkopplung zu einer weiteren Abnahme der Steigung bis $\dot{\bar{x}}_i = 0$ gilt und der Zustand seine *Gleichgewichtslage* erreicht hat: $\bar{x}_i = \bar{x}_{i,\infty}$. Dieser erfüllt dann die Gleichung $\bar{x}_{i,\infty} \tilde{\lambda}_i = \tilde{b}_i u_\infty$. Das beschriebene Verhalten entspricht dem eines Verzögerungsgliedes erster Ordnung (PT_1) mit der Zeitkonstante $T = -1/\tilde{\lambda}_i$; asymptotisch wird der beschränkte Endwert erreicht, was Theorem 2.2 bestätigt.

Gilt des Weiteren $\tilde{\lambda}_i = 0$, so liegt keine Rückkopplung vor, d.h. so lange ein Eingangssignal $u(\cdot)$ anliegt, steigt der Zustand \bar{x}_i betragsmäßig an, andernfalls bleibt er konstant. Dieses Verhalten wird durch Theorem 2.3 beschrieben. In den Überlegungen wurde angenommen, dass reelle Eigenwerte und somit reelle Signale vorliegen. Durch die Modaltransformation

können jedoch konjugiert komplexe Eigenwerte entstehen, woraufhin auch die Zustandssignale als komplex zu betrachten sind. Die Summation aller beobachtbaren Zustandssignale, die über $\bar{c}_i \neq 0$ auf den Ausgang y ausgekoppelt werden, ergeben jedoch, wie zu erwarten ist, ein rein reelles Signal. Nachdem der Imaginärteil lediglich für den schwingenden Anteil des Signals verantwortlich ist, muss im Falle von konjugiert komplexen Eigenwerten der Realteil für die Stabilitätsuntersuchung herangezogen werden, wie dies die besagten Theoreme zum Ausdruck bringen.

Durch die Modaltransformation kann jedes System zustandsentkoppelt dargestellt werden, so dass es nur aus einer Parallelstruktur von \tilde{n} PT_1 -Gliedern besteht. Sobald eine Mitkopplung vorliegt, ist das System nach Lyapunov instabil. Das Ein- Ausgangsverhalten bzw. die Übertragungsfunktion, auf welche näher in den folgenden Kapiteln eingegangen wird, lässt sich an Hand des Signalflussplanes 2.3 leicht in Partialbruchdarstellung bestimmen:

$$\frac{y(t)}{u(t)} = F(\rho) = \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \frac{r_i}{\rho - \tilde{\lambda}_i}; \quad r_i = \bar{b}_i \bar{c}_i \quad (2.41)$$

Zusammenfassend hält man fest:

Anmerkung 2.1: System-Rückkopplungen

Instabilitäten im System sind stets auf Rückkopplungen zurückzuführen. Entweder liegt eine Mitkopplung systembedingt vor oder es wird durch einen Eingriff, beispielsweise durch einen Regler, aus einer stabilen Gegenkopplung eine instabile Mitkopplung.

Eine lineare Transformation nach Gleichung (2.22) ändert lediglich die Struktur und Betrag der Rückkopplung, nicht jedoch die Tatsache einer vorhandenen Rückkopplung.

Ein System der Ordnung \tilde{n} besitzt \tilde{n} Gegenkopplungen, wobei bei integralem Verhalten die Verstärkungen der entsprechenden Gegenkopplungen den Wert Null annehmen, d.h. nicht aktiv sind. Durch einen Regler können die Rückkopplungen jedoch stets aktiviert und, abhängig von der Reglerordnung, hinzugefügt werden. Effektiv besteht bzgl. eines geregelten Systems die Möglichkeit von mindestens \tilde{n} instabilen Mitkopplungen.

2.2.2 Ein- Ausgangsbeschreibung: Operatordarstellung

Mit der Zustandsdarstellung liegt eine Beschreibung des Systems in Form von n inhomogenen Differentialgleichungen erster Ordnung vor. Der Verlauf eines Zustands, z.B. $x_1(\cdot)$, ist in dieser Darstellung abhängig von zunächst nur der eigenen Dynamik und der eventuellen Einkopplung der anderen Zustandssignale $x_2(\cdot)$ bis $x_{\tilde{n}}(\cdot)$ sowie des Eingangssignals $u(\cdot)$, wie dies die erste Zeile der Zustandsbeschreibung (2.13) zeigt:

$$\dot{x}_1(t) = \tilde{a}_{11} x_1(t) + \tilde{a}_{12} x_2(t) + \cdots + \tilde{a}_{1\tilde{n}} x_{\tilde{n}}(t) + \tilde{b}_1 u(t) \quad (2.42)$$

Die anderen Zustände x_2 bis $x_{\tilde{n}}$ in Gleichung (2.42) werden direkt oder indirekt über die Systemmatrix $\tilde{\mathbf{A}}$ durch x_1 selbst beeinflusst, so dass x_2 bis $x_{\tilde{n}}$ effektiv einer der i -ten Ableitung mit $i \in \{2, \dots, \tilde{n}\}$ des Signals x_1 entspricht, je nachdem, über wie viele der anderen Zustände das Signal x_1 auf sich zurückwirkt. Je mehr Zustände durchlaufen werden, desto

größer ist die zeitliche Verzögerung des Signals $x_1(\cdot)$ auf sich, was durch die zeitliche Ableitung des Signals zum Ausdruck kommt. Koppelt in die jeweiligen durchlaufenen Zustände auch das Eingangssignal ein, so müssen ebenfalls die j -ten Ableitungen des Eingangssignals berücksichtigt werden ($j \in \{1, \dots, \tilde{m}\}$). Mit dieser Überlegung kann Gleichung (2.42) auch wie folgt geschrieben werden:

$$\tilde{\alpha}'_1 \dot{x}_1(t) = \tilde{\alpha}'_0 x_1(t) + \tilde{\alpha}'_2 \ddot{x}_1(t) + \dots + \tilde{\alpha}'_{\tilde{n}} x_1^{(\tilde{n})}(t) + \tilde{\gamma}'_0 u(t) + \tilde{\gamma}'_1 \dot{u}(t) + \dots + \tilde{\gamma}'_{\tilde{m}} u^{(\tilde{m})}(t) \quad (2.43)$$

Der Vorteil dieser Systembeschreibung ist, dass nur die Systemdynamik zwischen zwei Signalen betrachtet wird, ohne Abhängigkeit von weiteren Signalen; es wird somit das Ein-Ausgangsverhalten zweier Signale dargestellt.

Anmerkung 2.2:

Jedes inhomogene Differentialgleichungssystem erster Ordnung mit dem Rang \tilde{n} kann durch eine inhomogene Differentialgleichung \tilde{n} -ter Ordnung beschrieben werden, wobei der inhomogene Anteil wiederum einer homogenen Differentialgleichung \tilde{m} -ter Ordnung entspricht, d.h. effektiv liegt eine Addition von zwei homogenen Differentialgleichungen höherer Ordnung vor.

Für die Umformung zwischen Zustandsbeschreibung und Ein- Ausgangsbeschreibung betrachtet man die zeitliche Ableitung als Operator

$$\rho = \frac{d}{dt}, \quad (2.44)$$

so dass für die i -te Ableitung gilt:

$$\rho^i = \frac{d^i}{dt^i} \quad (2.45)$$

Angewandt auf die Zustandsdarstellung (2.13) wird ein algebraisches Lösen der Differentialgleichung nach \underline{x} möglich:

$$\underline{x}(t) = [\rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}]^{-1} \tilde{\underline{b}} u(t) \quad (2.46)$$

Es resultieren \tilde{n} unabhängige Gleichungen in ρ , die das dynamische Verhalten zwischen Eingangssignal $u(\cdot)$ und Zustandssignal $x_i(\cdot)$ mit $i \in \{1, \dots, \tilde{n}\}$ beschreiben. Wendet man für die Berechnung der Inversen die Kofaktor-Methode aus Theorem A.2 an, so wird deutlich, dass in jeder Gleichung jedes Signal mit einem Polynom in ρ multipliziert wird:

$$\det[\rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}] \underline{x}(t) = \text{adj}[\rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}] \tilde{\underline{b}} u(t) \quad (2.47)$$

$$A(\rho) \underline{x}(t) = \underline{C}(\rho) u(t) \quad (2.48)$$

$$A(\rho) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{\tilde{n}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_{\tilde{n}} \end{pmatrix} u(t) \quad (2.49)$$

Die Operator Darstellung,

$$A(\rho)x_i(t) = C_i(\rho)u(t) \quad (2.50)$$

$$(\tilde{\alpha}'_n \rho^{\tilde{n}} + \tilde{\alpha}'_{n-1} \rho^{\tilde{n}-1} + \dots + \tilde{\alpha}'_1 \rho + \tilde{\alpha}'_0) x_i(t) = (\tilde{\gamma}'_m \rho^{\tilde{m}} + \tilde{\gamma}'_{m-1} \rho^{\tilde{m}-1} + \dots + \tilde{\gamma}'_1 \rho + \tilde{\gamma}'_0) u(t) \quad (2.51)$$

die das Verhalten zwischen dem Eingang u und einem Zustand x_i beschreibt, entspricht gemäß der Beziehung (2.45) der Addition einer homogenen Differentialgleichung \tilde{n} -ter Ordnung mit einer homogenen Differentialgleichung \tilde{m} -ter Ordnung:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}'_n x_i^{(\tilde{n})}(t) + \tilde{\alpha}'_{n-1} x_i^{(\tilde{n}-1)}(t) + \dots + \tilde{\alpha}'_1 \dot{x}_i(t) + \tilde{\alpha}'_0 x_i(t) = \\ \tilde{\gamma}'_m u^{(\tilde{m})}(t) + \tilde{\gamma}'_{m-1} u^{(\tilde{m}-1)}(t) + \dots + \tilde{\gamma}'_1 \dot{u}(t) + \tilde{\gamma}'_0 u(t) \end{aligned} \quad (2.52)$$

Dieses Ergebnis entspricht der vorangegangenen Überlegung in Gleichung (2.43), dass das dynamische Verhalten des Systems hinsichtlich zweier Signale eindeutig durch die Beziehung dieser und deren Ableitungen zu beschreiben ist.

Mit diesem Vorgehen ist ebenfalls eine Ein- Ausgangsbeschreibung zwischen dem Eingang u und dem Ausgang y eines Systems zu finden. Gemäß der Zustandsbeschreibung (2.13) bestimmt sich das Ausgangssignal nach $y(t) = \tilde{c}^T \underline{x}(t)$. Durch Einsetzen der nach \underline{x} aufgelösten Gleichung (2.46) folgt:

$$y(t) = \tilde{c}^T [\rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}]^{-1} \tilde{\mathbf{b}} u(t) \quad (2.53)$$

$$\det[\rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}] y(t) = \tilde{c}^T \text{adj}[\rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}] \tilde{\mathbf{b}} u(t) \quad (2.54)$$

$$A(\rho) y(t) = B(\rho) u(t) \quad (2.55)$$

$$(\tilde{\alpha}'_n \rho^{\tilde{n}} + \tilde{\alpha}'_{n-1} \rho^{\tilde{n}-1} + \dots + \tilde{\alpha}'_1 \rho + \tilde{\alpha}'_0) y(t) = (\tilde{\beta}'_m \rho^{\tilde{m}} + \tilde{\beta}'_{m-1} \rho^{\tilde{m}-1} + \dots + \tilde{\beta}'_1 \rho + \tilde{\beta}'_0) u(t) \quad (2.56)$$

Die entsprechende, das Ein- Ausgangsverhalten beschreibende Differentialgleichung höherer Ordnung lautet:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}'_n y^{(\tilde{n})}(t) + \tilde{\alpha}'_{n-1} y^{(\tilde{n}-1)}(t) + \dots + \tilde{\alpha}'_1 \dot{y}(t) + \tilde{\alpha}'_0 y(t) = \\ \tilde{\beta}'_m u^{(\tilde{m})}(t) + \tilde{\beta}'_{m-1} u^{(\tilde{m}-1)}(t) + \dots + \tilde{\beta}'_1 \dot{u}(t) + \tilde{\beta}'_0 u(t) \end{aligned} \quad (2.57)$$

Mit Gleichung (2.54) und (2.55) wird deutlich, dass das Polynom $A(\rho)$ die Eigenwerte des Systems und folglich die Stabilität bestimmt: $A(\rho) = 0$ entspricht dem charakteristischen Polynom (2.28), wobei $\tilde{\lambda}_i = \rho_i$ gilt ($i \in \{1, \dots, \tilde{n}\}$).

Durch Auflösen der Gleichung (2.55) bzw. (2.56) resultiert das *Ein- Ausgangsverhalten des Systems in Operator Darstellung*:

$$y(t) = \frac{B(\rho)}{A(\rho)} u(t) = \frac{\tilde{\beta}'_m \rho^{\tilde{m}} + \tilde{\beta}'_{m-1} \rho^{\tilde{m}-1} + \dots + \tilde{\beta}'_1 \rho + \tilde{\beta}'_0}{\tilde{\alpha}'_n \rho^{\tilde{n}} + \tilde{\alpha}'_{n-1} \rho^{\tilde{n}-1} + \dots + \tilde{\alpha}'_1 \rho + \tilde{\alpha}'_0} u(t) \quad (2.58)$$

Dies führt direkt zum Formalismus einer Übertragungsfunktion $F(\rho)$ im Zeitbereich:

$$\frac{y(t)}{u(t)} = F(\rho) = \frac{B(\rho)}{A(\rho)} \quad (2.59)$$

Üblicherweise sind Übertragungsfunktionen jedoch im Frequenzbereich definiert. Durch Anwendung des Differentiationssatzes der Laplace-Transformation [183]

$$\dot{\underline{x}}(t) = \rho \underline{x}(t) \circ \underline{\mathcal{L}} \bullet s \underline{x}(s) - \underline{x}_0 \quad (2.60)$$

für die Transformation in den Frequenzbereich wird deutlich, dass die Operatordarstellung im Zeitbereich und die Übertragungsfunktion im Frequenzbereich zu demselben Formalismus führen, wenn ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Anfangswerte des Systems auf Null gesetzt werden: $\underline{x}_0 = \underline{0}$. Aus diesem Grund ist ein Wechsel zwischen Frequenzbereich und Zeitbereich stets schnell durchführbar, indem lediglich die Operatoren s und ρ gegeneinander getauscht werden. Wie in dem folgenden Kapitel gezeigt wird, ist es vor allem unter diesem Gesichtspunkt irrelevant, ob Systemeigenschaften, wie z.B. die Systemstabilität, mittels der Eigenwerte der Systemmatrix im Zeitbereich oder mittels der Polstellen des Nennerpolynoms der Übertragungsfunktion im Frequenzbereich untersucht werden.

Anmerkung 2.3:

Jede Übertragungsfunktion im Frequenzbereich (Operator s) beschreibt zugleich im selben Formalismus das Ein- Ausgangsverhalten im Zeitbereich (Operator $\rho = \frac{d}{dt}$) mit Hilfe von Differentialgleichungen höherer Ordnung.

2.2.3 Übertragungsfunktion: Polstellen und Nullstellen

Ein System mit all seinen Signalverläufen kann vollständig mit der Zustandsbeschreibung (2.13) erfasst werden. Ist man jedoch nicht am zeitlichen Verhalten aller Signale, sondern lediglich am Verhalten des Ausgangs $y(\cdot)$ in Abhängigkeit des Eingangs $u(\cdot)$ interessiert, kann aus der Zustandsbeschreibung (2.13) eine Übertragungsfunktion gewonnen werden, bei der nur noch die Dynamik betrachtet wird, die tatsächlich eine Auswirkung vom Eingang auf den Ausgang besitzt. Durch Anwendung der *Laplace-Transformation* auf die Zustandsbeschreibung (2.13) mit dem Differentiationssatz [183]

$$\dot{\underline{x}}(t) \circ \underline{\mathcal{L}} \bullet s \underline{x}(s) - \underline{x}_0 \quad (2.61)$$

wird ein algebraisches Lösen der Differentialgleichung nach y im Frequenzbereich möglich. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit folgt mit $\underline{x}_0 = \underline{0}$ die Übertragungsfunktion im Frequenzbereich:

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \tilde{\underline{c}}^T [s \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}]^{-1} \tilde{\underline{b}} \quad (2.62)$$

Mit der komplexen Variable

$$s = \sigma + j\omega, \quad s \in \mathbb{C} \quad (2.63)$$

ist die Laplace-Transformation eine Entwicklung nach gedämpften ($\sigma > 0$) bzw. verstärkten ($\sigma < 0$) Schwingungen der Frequenz ω und ist daher eine Verallgemeinerung der Fourier-Transformation, welche eine Entwicklung nach freien Schwingungen ist. Für $\sigma = 0$ geht die Laplace-Transformation in die Fourier-Transformation über; in diesem Fall wird die Laplace-Transformation entlang der imaginären Achse ausgeführt, was für die Frequenzgang-Untersuchung eines Systems mit Bode-Diagrammen von Interesse ist.

Gleichung (2.62) lässt sich aufteilen in ein Zählerpolynom $B(s)$ und ein Nennerpolynom $A(s)$. Wendet man für die Berechnung der Inversen die Kofaktor-Methode an (vgl. Theorem A.2), folgt:

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{\tilde{\underline{c}}^T \operatorname{adj}[s \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}] \tilde{\underline{b}}}{\det[s \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}]} = \frac{B(s)}{A(s)} \quad (2.64)$$

Greift man auf die Berechnungsvorschrift der Determinante einer Hypermatrix zurück (vgl. Theorem A.1), kann Gleichung (2.62) ebenfalls getrennt in Zähler und Nennerpolynom geschrieben werden:

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{\det \begin{bmatrix} [s \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}] & -\tilde{\underline{b}} \\ \tilde{\underline{c}}^T & 0 \end{bmatrix}}{\det[s \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}]} = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{\tilde{\beta}'_m s^m + \tilde{\beta}'_{m-1} s^{m-1} + \dots + \tilde{\beta}'_1 s + \tilde{\beta}'_0}{\tilde{\alpha}'_n s^n + \tilde{\alpha}'_{n-1} s^{n-1} + \dots + \tilde{\alpha}'_1 s + \tilde{\alpha}'_0} \quad (2.65)$$

Anmerkung 2.4:

An dieser Stelle zeigt sich, dass die Übertragungsfunktion (2.65) im Frequenzbereich identisch mit der Ein- Ausgangsbeschreibung (2.58) im Zeitbereich ist, obwohl erstere mit Hilfe der Laplace-Transformation und letztere mit Hilfe des Operators $\rho = \frac{d}{dt}$ berechnet wurde. Im Frequenzbereich verwendet der Formalismus einer Übertragungsfunktion lediglich den Operator s , während im Zeitbereich der Operator ρ benutzt wird. Werden allgemein die Polynome $A(\cdot)$, $B(\cdot)$, usw. untersucht, kann folglich das Ergebnis sowohl auf den Frequenzbereich wie auch auf den Zeitbereich bezogen werden. Siehe auch Anmerkung 2.3.

Im Allgemeinen wird die Übertragungsfunktion eindeutig mit einem monischen Nennerpolynom dargestellt; ein Polynom der Ordnung \tilde{n} bezeichnet man als *monisch*, wenn für den höchsten Koeffizienten $\tilde{\alpha}'_{\tilde{n}} = 1$ gilt. Dies ergibt sich, wenn Zähler und Nenner durch $\tilde{\alpha}'_{\tilde{n}}$ dividiert werden:

$$\frac{y(s)}{u(s)} = F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{\frac{\tilde{\beta}'_m}{\tilde{\alpha}'_{\tilde{n}}} s^m + \frac{\tilde{\beta}'_{m-1}}{\tilde{\alpha}'_{\tilde{n}}} s^{m-1} + \dots + \frac{\tilde{\beta}'_1}{\tilde{\alpha}'_{\tilde{n}}} s + \frac{\tilde{\beta}'_0}{\tilde{\alpha}'_{\tilde{n}}}}{s^{\tilde{n}} + \frac{\tilde{\alpha}'_{\tilde{n}-1}}{\tilde{\alpha}'_{\tilde{n}}} s^{\tilde{n}-1} + \dots + \frac{\tilde{\alpha}'_1}{\tilde{\alpha}'_{\tilde{n}}} s + \frac{\tilde{\alpha}'_0}{\tilde{\alpha}'_{\tilde{n}}}} \quad (2.66)$$

$$= \frac{\tilde{\beta}_m s^m + \tilde{\beta}_{m-1} s^{m-1} + \dots + \tilde{\beta}_1 s + \tilde{\beta}_0}{s^{\tilde{n}} + \tilde{\alpha}_{\tilde{n}-1} s^{\tilde{n}-1} + \dots + \tilde{\alpha}_1 s + \tilde{\alpha}_0} \quad (2.67)$$

$$= k_0 \frac{(s - \tilde{q}_1)(s - \tilde{q}_2) \dots (s - \tilde{q}_m)}{(s - \tilde{p}_1)(s - \tilde{p}_2) \dots (s - \tilde{p}_{\tilde{n}})} \quad (2.68)$$

Durch weiteres Ausklammern von $\tilde{\beta}_m$ liegt sowohl ein monisches Nenner- als auch Zählerpolynom vor; den Faktor k_0 bezeichnet man dann als *instantane Verstärkung* (vgl. Anmerkung 2.7):

$$k_0 = \tilde{\beta}_m = \frac{\tilde{\beta}'_m}{\tilde{\alpha}'_{\tilde{n}}}, \quad \tilde{\beta}'_m \neq 0, \quad \tilde{\alpha}'_{\tilde{n}} \neq 0 \quad (2.69)$$

Die Wurzeln \tilde{p}_i des Nennerpolynoms $A(s)$ mit der Ordnung \tilde{n} werden als *Pole* bezeichnet:

$$A(s) = \det[s \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}] = \tilde{\alpha}'_{\tilde{n}}(s - \tilde{p}_1)(s - \tilde{p}_2) \dots (s - \tilde{p}_{\tilde{n}}) = 0 \quad \forall s = \tilde{p}_i \in \mathbb{C}, \quad i = 1, \dots, \tilde{n} \quad (2.70)$$

Es ist sofort zu erkennen, dass das Nennerpolynom $A(s)$ dem charakteristischen Polynom aus Gleichung (2.28) entspricht und somit die Aussage bzgl. Stabilität des Systems trifft; die Eigenwerte sind gleichbedeutend mit den Polen: $\lambda_i \equiv \tilde{p}_i \in \mathbb{C}$.

Die Wurzeln \tilde{q}_j des Zählerpolynoms $B(s)$ mit der Ordnung \tilde{m} bezeichnet man als *Nullstellen*:

$$B(s) = \det \begin{bmatrix} [s \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}] & -\tilde{\mathbf{b}} \\ \tilde{\mathbf{c}}^T & 0 \end{bmatrix} = \tilde{\beta}'_{\tilde{m}} (s - \tilde{q}_1) \cdots (s - \tilde{q}_{\tilde{m}}) = 0 \quad \forall s = \tilde{q}_j \in \mathbb{C}, \quad j = 1, \dots, \tilde{m} \quad (2.71)$$

Die Nullstellen treffen keine Aussage bzgl. Stabilität. Wie in Gleichung (2.71) zu erkennen ist, beinhaltet die Berechnung der Nullstellen den Ein- und Auskoppelvektor $\tilde{\mathbf{b}}$ und $\tilde{\mathbf{c}}$, weshalb das Ein-Ausgangsverhalten des Systems durch das Nullstellenpolynom beeinflusst werden muss. Liegen Nullstellen vor, so reagiert der Systemausgang beschleunigt auf eine Eingangssignaländerung. Je nachdem, ob es sich um stabile oder instabile Nullstellen handelt, ergibt sich jedoch ein stark unterschiedliches dynamisches Verhalten des Einschwingvorganges, was im Folgenden ausführlich an Hand von Beispielsystemen diskutiert wird.

2.2.4 Zusammenhang zwischen Übertragungsfunktion und Zustandsraumbeschreibung: Regelungsnormalform

Der Einfluss des Zählerpolynoms $B(\cdot)$ lässt sich sehr gut mit Hilfe der *Regelungsnormalform* verdeutlichen.

Theorem 2.4: Regelungsnormalform

Wird die lineare Transformation (2.22) mit $\tilde{\mathbf{T}} = \tilde{\mathbf{T}}_R$ auf das System (2.13) angewandt, ergibt sich die Regelungsnormalform:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{\mathbf{x}}}(t) &= \bar{\mathbf{A}} \underline{\mathbf{x}}(t) + \bar{\mathbf{b}} u(t) = \tilde{\mathbf{T}}_R^{-1} \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{T}}_R \underline{\mathbf{x}}(t) + \tilde{\mathbf{T}}_R^{-1} \tilde{\mathbf{b}} u(t) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\bar{a}_0 & -\bar{a}_1 & -\bar{a}_2 & \cdots & -\bar{a}_{\tilde{n}-1} \end{bmatrix} \underline{\mathbf{x}}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t), \quad \underline{\mathbf{x}}(0) = \underline{\mathbf{x}}_0 \end{aligned} \quad (2.72)$$

$$y(t) = \tilde{\mathbf{c}}^T \underline{\mathbf{x}}(t) = \tilde{\mathbf{c}}^T \tilde{\mathbf{T}}_R \underline{\mathbf{x}}(t) = (\tilde{c}_0 \quad \tilde{c}_1 \quad \tilde{c}_2 \quad \cdots \quad \tilde{c}_{\tilde{n}-1}) \underline{\mathbf{x}}(t)$$

Die Transformationsmatrix bestimmt sich mit

$$\tilde{\mathbf{T}}_R = \begin{bmatrix} \tilde{q}_S^T \\ \tilde{q}_S^T \tilde{\mathbf{A}} \\ \tilde{q}_S^T \tilde{\mathbf{A}}^2 \\ \vdots \\ \tilde{q}_S^T \tilde{\mathbf{A}}^{\tilde{n}-1} \end{bmatrix}^{-1}, \quad \tilde{q}_S^T = (0 \quad 0 \quad \cdots \quad 1) \tilde{\mathbf{Q}}_S^{-1}, \quad (2.73)$$

wobei $\tilde{\underline{q}}_S^T$ der letzten Zeile der inversen Steuerbarkeitsmatrix $\tilde{\mathbf{Q}}_S^{-1}$ aus Gleichung (2.15) entspricht.

Beweis:

Wie das Gleichungssystem (2.72) sukzessive nach $\tilde{\mathbf{T}}_R$ gelöst werden kann, ist u.a. in [46] zu finden. ■

Da durch die Transformation das Ein-Ausgangsverhalten erhalten bleibt, kann die Übertragungsfunktion (2.65) auch mit Zuhilfenahme der Regelungsnormalform (2.72) bestimmt werden; für das Zählerpolynom $B(\cdot)$ folgt dann:

$$B(s) = \det \begin{bmatrix} [s\mathbf{E} - \bar{\mathbf{A}}] & -\bar{\underline{b}} \\ \tilde{\underline{c}}^T & 0 \end{bmatrix} = \det \left[\begin{array}{ccccc|c} s & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & s & -1 & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s & -1 & 0 \\ \hline \bar{a}_0 & \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \cdots & s + \bar{a}_{\tilde{n}-1} & -1 \\ \hline \bar{c}_0 & \bar{c}_1 & \bar{c}_2 & \cdots & \bar{c}_{\tilde{n}-1} & 0 \end{array} \right] \quad (2.74)$$

Entwickelt man die Determinante nach der letzten Spalte entsprechend Gleichung (A.3), so vereinfacht sich die Berechnung zu:

$$B(s) = \det \begin{bmatrix} s & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & s & -1 \\ \bar{c}_0 & \bar{c}_1 & \bar{c}_2 & \cdots & \bar{c}_{\tilde{n}-1} \end{bmatrix} = \bar{c}_0 + \bar{c}_1 s + \bar{c}_2 s^2 + \cdots + \bar{c}_{\tilde{n}-1} s^{\tilde{n}-1} \quad (2.75)$$

Hiermit sind im Zählerpolynom nur noch die Koeffizienten \bar{c}_i ($i = 1, \dots, \tilde{n} - 1$) des Auskoppelvektors der Regelungsnormalform enthalten. Für das Nennerpolynom mit

$$A(s) = \det[s\mathbf{E} - \bar{\mathbf{A}}] \quad (2.76)$$

gilt analog:

$$A(s) = \det \begin{bmatrix} s & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & s & -1 \\ \bar{a}_0 & \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \cdots & s + \bar{a}_{\tilde{n}-1} \end{bmatrix} = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 s + \bar{a}_2 s^2 + \cdots + \bar{a}_{\tilde{n}-1} s^{\tilde{n}-1} + s^{\tilde{n}} \quad (2.77)$$

Die Übertragungsfunktion, berechnet mit Hilfe der Regelungsnormalform, lautet:

$$\frac{y(s)}{u(s)} = F(s) = \frac{\bar{c}_0 + \bar{c}_1 s + \bar{c}_2 s^2 + \cdots + \bar{c}_{\tilde{n}-1} s^{\tilde{n}-1}}{\bar{a}_0 + \bar{a}_1 s + \bar{a}_2 s^2 + \cdots + \bar{a}_{\tilde{n}-1} s^{\tilde{n}-1} + s^{\tilde{n}}} \quad (2.78)$$

Der Vergleich mit der Übertragungsfunktion (2.67) mit monischem Nennerpolynom zeigt, dass die Koeffizienten $\tilde{\alpha}_i$ des Nennerpolynoms den Einträgen \bar{a}_i der Systemmatrix $\bar{\mathbf{A}}$

($i = 1, \dots, \tilde{n}$) und die Koeffizienten $\tilde{\beta}_j$ des Zählerpolynoms den Einträgen \bar{c}_j des Auskoppelvektors \bar{c} ($j = 1, \dots, \tilde{m}$) entsprechen. Hierbei ist zu erkennen, dass der Zählergrad $\tilde{m} \leq \tilde{n} - 1$ sein muss. Unter anderem wird diese Eigenschaft in Abbildung 2.4 deutlich, in welcher der Signalflussplan der Regulationsnormalform (2.72) zu sehen ist.

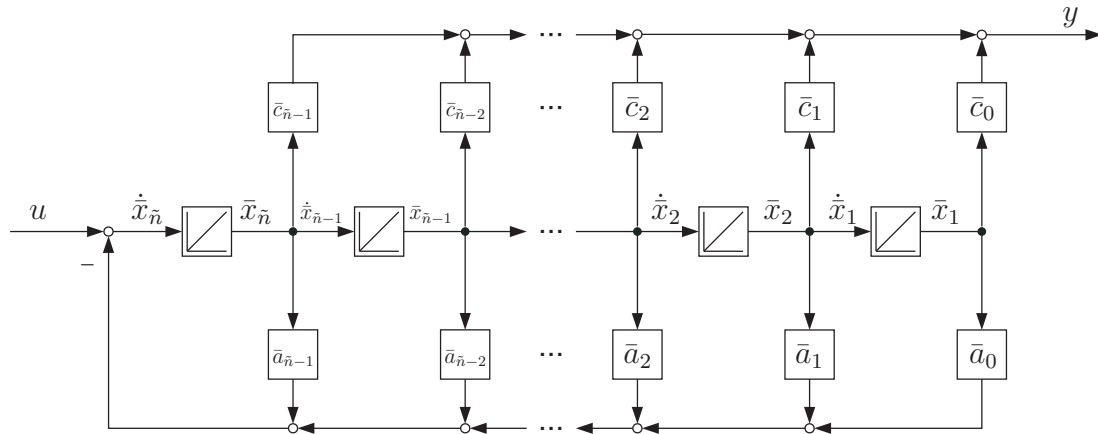


Abbildung 2.4: Signalflussplan eines zeitkontinuierlichen linearen Systems in Regulationsnormalform

Die Ordnung des Systems ist \tilde{n} , d.h. es beschreiben \tilde{n} Differentialgleichungen das dynamische Verhalten, womit \tilde{n} Integratoren im Signalflussplan zu finden sind. Um eine Eigendynamik erzeugen zu können, bedarf es mindestens einer Rückkopplung. Hierbei hängt es von den Vorzeichen sowie Verstärkungen der Rückkopplungen ab, ob es sich um eine stabile Gegenkopplung oder um eine instabile Mitkopplung handelt. Wie im Signalflussplan zu erkennen, bestimmen, wie erwartet, die Einträge der Systemmatrix $\bar{\mathbf{A}}$ die Art der Rückkopplungen, womit diese und folglich das Nennerpolynom $A(\cdot)$ das dynamische Verhalten des Systems beschreiben. Es ist einzig das Nennerpolynom für Stabilität verantwortlich.

Auch die Funktion des Zählerpolynoms ist in der Regulationsnormalform eindeutig zu erkennen. Die Koeffizienten des Zählerpolynoms $\tilde{\beta}_j$, welche den Einträgen \bar{c}_i des Auskoppelvektors entsprechen, erzeugen das Ausgangssignal $y(\cdot)$ aus einer Linearkombination der Zustandssignale $\bar{x}(\cdot)$. Wie bereits erwähnt, ist deren Verlauf lediglich abhängig vom Nennerpolynom $A(s)$ bzw. der Systemmatrix $\bar{\mathbf{A}}$. Findet nun ein positiver Signalsprung am Eingang u statt und es galt zuvor $\bar{x}_0 = \underline{0}$, so nehmen die Zustandssignale mit $\bar{x}_i = \int \bar{x}_{i+1} dt$ verzögert von Integrator zu Integrator bzw. von \bar{x}_n bis \bar{x}_1 mit positiver Steigung zu und streben für $t \rightarrow \infty$ ihren Endwert an, falls es sich um ein stabiles System handelt; dann finden keine Signaländerungen mehr statt: $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\bar{x}}(t) = \dot{\bar{x}}_\infty = \underline{0}$. Diese Tatsache, angewandt auf Gleichung (2.13), ergibt den sich einstellenden *Gleichgewichtspunkt*:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{x}(t) = \bar{x}_\infty = -\bar{\mathbf{A}}^{-1} \bar{\mathbf{b}} u_\infty, \quad \dot{\bar{x}}_\infty = \underline{0} \quad (2.79)$$

In der Integrator-kette muss dann

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{x}_1(t) = \bar{x}_{1,\infty} = \frac{1}{\bar{a}_0} u(t) \quad (2.80)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{x}_i(t) = \bar{x}_{i,\infty} = 0, \quad i = 2, \dots, \tilde{n} \quad (2.81)$$

gelten. Abhängig von der Eigendynamik, beschrieben durch die Einträge \bar{a}_i der Systemmatrix, erreichen die Zustandssignale mehr oder weniger schnell ihren Endwert und es ist bei konjugiert komplexen Polen eine Schwingung überlagert.

Beispielsystem:

$$\dot{\bar{x}}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -6.25 & -12.5 & -12.25 & -7 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \bar{x}(t) + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\bar{b}} u(t) + \bar{f} v(t) \quad (2.82)$$

$$y(t) = \bar{c}^T \bar{x}$$

Das Beispielsystem besitzt bzgl. des Stellsignals $u(\cdot)$ als Eingang und $y(\cdot)$ als Ausgangssignal Regelungsnormalform. Für den Einkoppelvektor der Stellgröße $u(\cdot)$ gilt daher, wie dargestellt, generell:

$$\bar{b}^T = (0 \ 0 \ 0 \ 1)$$

Der Einkoppelvektor einer später zu betrachtenden Störung $v(\cdot)$ lautet:

$$\bar{f}^T = (0.02 \ 0 \ 0 \ 0)$$

Der Auskoppelvektor des Systems kann mit nachstehenden Werten beaufschlagt werden:

$$\bar{c}^T = (\bar{c}_0 \ \bar{c}_1 \ \bar{c}_2 \ \bar{c}_3) = \begin{cases} \bar{c}_0^T = (5 \ 0 \ 0 \ 0) \\ \bar{c}_1^T = (5 \ 6.5 \ 6.5 \ 0.2) \\ \bar{c}_2^T = (5 \ 0.5 \ 0.5 \ 5) \\ \bar{c}_3^T = (5 \ -2 \ 2 \ 0.2) \\ \bar{c}_4^T = (5 \ 3 \ 4 \ -2) \\ \bar{c}_5^T = (5 \ 0.1 \ 10 \ 1) \end{cases}$$

Die zeitlichen Verläufe der Zustandssignale $\bar{x}_i(\cdot)$ des Beispielsystems vierter Ordnung mit konjugiert komplexen Polen sind in Abbildung 2.5 oben zu sehen. Wie zu erwarten, streben alle Zustandssignale, bis auf das des letzten Integrators $\bar{x}_1(\cdot)$, den Wert Null an. Mit $\bar{a}_0 = 6.25$ nimmt der Zustand \bar{x}_1 nach Gleichung (2.80) den Wert $\bar{x}_{1,\infty} = 0.16$ an. Auf Grund der konjugiert komplexen Pole findet jeweils ein Einschwingvorgang statt. Für die Bestimmung von Vorzeichen und Betrag des Endwertes des Ausgangssignals $y(\cdot)$ greift man auf die Tatsache zurück, dass das System und somit das Nennerpolynom $A(\cdot)$ als stabil angenommen wurde. Entsprechend des Hurwitz-Kriteriums müssen nach Theorem A.4 als

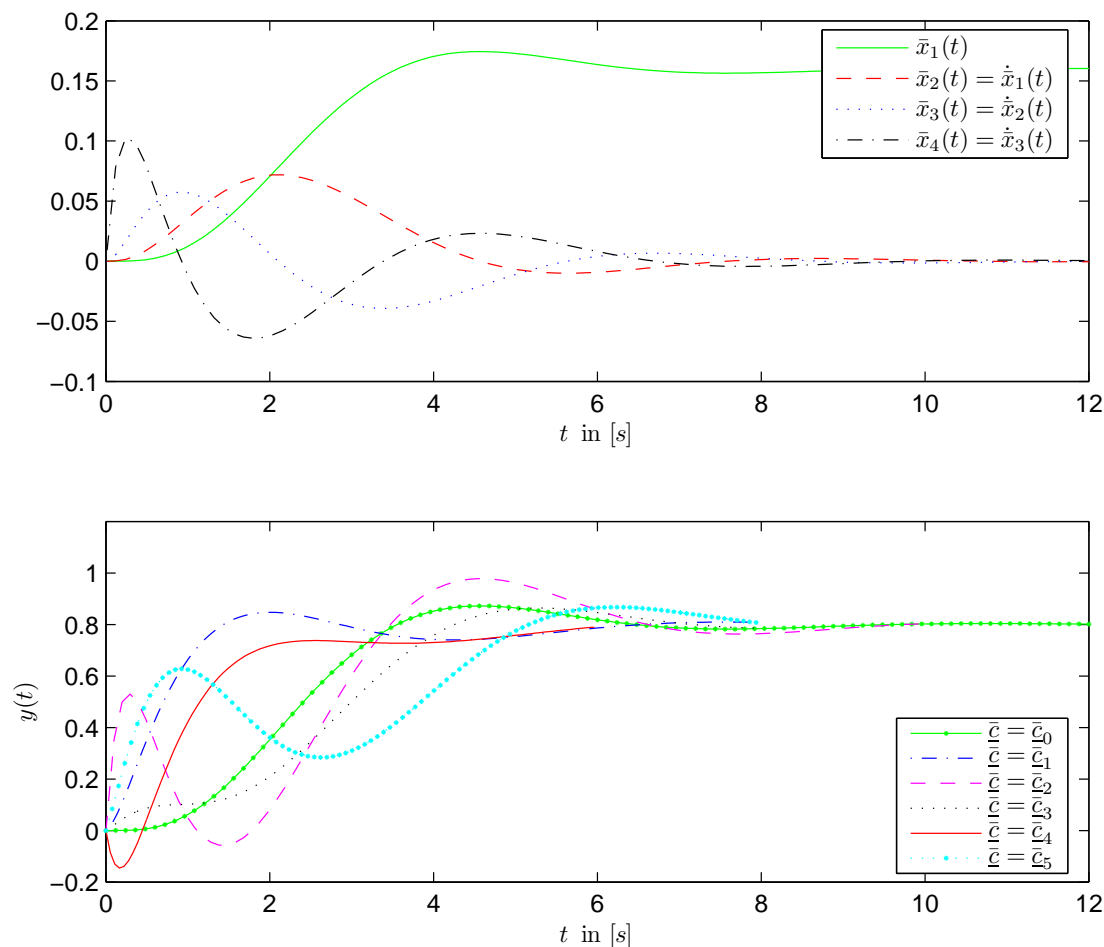


Abbildung 2.5: Sprungantworten der Zustände \bar{x}_i sowie des Ausgangs y eines Systems in Regelungsnormform bei unterschiedlichen Auskoppelvektoren \bar{c}

notwendige Bedingung alle Koeffizienten \bar{a}_i mit $i = 1, \dots, \tilde{n}$ positiv sein, womit lediglich das Vorzeichen von \bar{c}_0 bestimmt, ob der Ausgang einen positiven oder negativen Endwert einnimmt. Über die Gleichung (2.79) bzw. (2.80) berechnet sich der Endwert des Ausgangs:

$$y_\infty = -\bar{c}^T \bar{\mathbf{A}}^{-1} \bar{\mathbf{b}} u_\infty = \bar{c}_0 \bar{x}_1(t) = \frac{\bar{c}_0}{\bar{a}_0} u_\infty, \quad \rightarrow \quad \bar{r}_\infty = \frac{y_\infty}{\bar{x}_{1,\infty}} = \bar{c}_0, \quad k_\infty = \frac{y_\infty}{u_\infty} = \frac{\bar{c}_0}{\bar{a}_0} \quad (2.83)$$

Hiermit ergibt sich die stationäre Verstärkung $k_\infty = y_\infty/u_\infty$ des Systems, die sich auch über den Frequenzbereich bestimmen lässt.

Anmerkung 2.5: Stationäre Verstärkung

Im Zeitbereich bedeutet stationärer Zustand, dass für $t \rightarrow \infty$ keine Signaländerungen mehr auftreten, d.h. für die Berechnung der stationären Verstärkung zwischen Ein- und Ausgang des Systems über den Frequenzbereich muss daher $\omega \rightarrow 0$ gelten. Diese Überlegung bestätigt der Endwertsatz der Laplace-Transformation [183], bei dem der Grenzwert $s = \sigma + j\omega \rightarrow 0$ betrachtet wird, um den Endwert $y(t \rightarrow \infty)$ über den Frequenzbereich zu berechnen:

$$y(t \rightarrow \infty) = y_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s) u(s) \quad (2.84)$$

Die stationäre Verstärkung k_∞ lässt sich nun bestimmen, wenn für das Eingangssignal ein Einheitssprung $u(s) = 1/s$ bzw. $u(t) = \sigma(t)$ mit dem Endwert $u(t \rightarrow \infty) = u_\infty = 1$ angenommen wird:

$$y_\infty \Big|_{u(t)=\sigma(t)} = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s) \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} F(s) \quad \Rightarrow \quad k_\infty = \frac{y_\infty}{u_\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} F(s) \quad (2.85)$$

Angewandt auf die Übertragungsfunktion (2.78) bzw. (2.67) ergibt sich für die stationäre Verstärkung:

$$k_\infty = \frac{y_\infty}{u_\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} F(s) = \frac{\bar{c}_0}{\bar{a}_0} = \frac{\tilde{\beta}_0}{\tilde{\alpha}_0} \quad (2.86)$$

Dies bestätigt den Zusammenhang in Gleichung (2.83). Eine alternative Bestimmung bzw. Herleitung der stationären Verstärkung ist auch in Anmerkung 2.18 zu finden.

Anmerkung 2.6:

Wenn $\tilde{\alpha}_0 = 0$ gilt, besitzt der Nenner mindestens einen Pol bei $s = 0$ und ist folglich grenzstabil. Hiermit zeigt das System integrales Verhalten und strebt bei einem Eingangssignal $u(\cdot) \neq 0$ nach Unendlich: die stationäre Verstärkung k_∞ ist entsprechend der Gleichung (2.86) unendlich.

Bezüglich des Beispielsystems (2.82) muss sich wegen $\bar{c}_0 = 5$ bei einem Einheitssprung ($u(t) = 1 \quad \forall t \geq 0$) in allen Fällen mit $\bar{a}_0 = 6.25$ nach Gleichung (2.83) ein Endwert $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0.8$ ergeben, was die Simulation 2.5 bestätigt.

2.2.5 Auswirkung der Nullstellen auf das dynamische Verhalten des Systems bzw. geschlossenen Regelkreises

2.2.5.1 Relativgrad

Es stellt sich die Frage, wie die Nullstellen das Einschwingverhalten beeinflussen. Hierzu betrachtet man zunächst das Beispielsystem (2.82) ohne Nullstellen bzw. Zählerpolynom ohne Dynamik. Der Auskoppelvektor $\underline{\bar{c}}_0$ führt zu einem Zählerpolynom $B(s) = 5$ und koppelt folglich nur den letzten Zustand \bar{x}_1 der Kette aus, d.h. in der Simulation 2.5 unten entspricht der Ausgang y dem skalierten Verlauf von \bar{x}_1 . Wie zu Beginn der Diskussion beschrieben, ist die Reaktion des Ausgangs sehr langsam, da das konstante Signal am Eingang über eine Kette von vier Integratoren, die sich in einer stabilen Rückkopplung befinden, über die Zeit aufsummiert wird; das sehr schnell ansteigende Signal am Eingang steigt daher am Ausgang nur sehr langsam an. Betrachtet man in der Simulation 2.5 oben die anfängliche Reaktion der Zustände, so ist zu erkennen, dass der Zustand \bar{x}_4 , der sich direkt am Eingang befindet, gefolgt von \bar{x}_3 , \bar{x}_2 und \bar{x}_1 am schnellsten reagiert. Die anfängliche Steigung ist für alle Zustände stets positiv, wird jedoch auf Grund der Integration von \bar{x}_n bis \bar{x}_1 immer flacher und folglich die Reaktion des Systems immer langsamer, je mehr Integratoren zwischen Eingang und der ersten Auskopplung auf den Ausgang liegen. Die Anzahl der Integratoren, die auf dem kürzesten Weg zwischen Ausgang und Eingang liegen, bestimmt sich über den Relativgrad \tilde{r} .

Definition 2.7: Relativgrad

Die Differenz der Ordnungen von Zähler- und Nennerpolynom bezeichnet man als Relativgrad \tilde{r}

$$\tilde{r} = \tilde{n} - \tilde{m} \quad (2.87)$$

und stellt ein Maß für die Verzögerung des Eingangssignals beim Durchlaufen des Systems und somit die Trägheit eines dynamischen Systems dar.

Der Relativgrad bzw. die Trägheit des Systems zeigt sich darin, dass das Ausgangssignal $y(\cdot)$ des Systems \tilde{r} -fach differenziert werden muss, bis das Eingangssignal $u(\cdot)$ einen Durchgriff auf den Ausgang y besitzt, d.h. je höher der Relativgrad, desto träger das System.

Liegen keine Nullstellen vor, so ist die Ordnung \tilde{m} des Zählerpolynoms $\tilde{m} = 0$. Folglich besitzt das System für den Fall \underline{c}_0 bzw. $B(s) = 5$ mit $\tilde{r} = \tilde{n} = 4$ vollen Relativgrad, d.h. es gibt keine Nullstellen und es zeigt sich ein gemächliches Ansteigen des Ausgangssignals.

Wird der Ausgang bzgl. der Integratorkette bereits früher ausgekoppelt, d.h. \tilde{x}_i mit $i \geq 2$, so ist zu erwarten, dass auch der Ausgang schneller auf den Eingangssprung reagiert. Im Falle von \underline{c}_1 werden alle Zustände mit einem positiven Vorzeichen ausgekoppelt, womit ein schnelleres Ansteigen des Ausgangs resultiert – die Anfangssteigung ist nun ungleich Null. Die Ordnung des Zählerpolynoms ergibt $\tilde{m} = \tilde{n} - 1$ und folglich ist der Relativgrad $\tilde{r} = 1$, weshalb ein schnelleres Durchlaufen des Systems zu erwarten ist.

Ein Relativgrad $\tilde{r} = 0$ würde einen Durchgriff $\tilde{d}_D \neq 0$ bedeuten, d.h. das Eingangssignal $u(\cdot)$ wirkt über den Verstärkungsfaktor \tilde{d}_D sofort auf den Ausgang y ohne Verzögerung, womit das Ausgangssignal $y(\cdot)$ einen Sprung erfährt. In diesem Fall müsste die Zustandsbeschreibung (2.13) wie folgt erweitert werden:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}(t) &= \tilde{\mathbf{A}} \underline{x}(t) + \tilde{\underline{b}} u(t), & \underline{x}(0) &= \underline{x}_0 \\ y(t) &= \tilde{\underline{c}}^T \underline{x}(t) + \tilde{d}_D u(t) \end{aligned} \quad (2.88)$$

Da Systeme mit Durchgriff bzgl. Antriebssysteme nicht vorkommen (Trägheit der Natur), beschränkt man sich in dieser Arbeit auf den Fall $\tilde{d}_D = 0$; die Ordnung des Zählerpolynoms ist maximal $\tilde{m} = \tilde{n} - 1$. Mit dieser Erklärung wird deutlich, dass die Ordnung des Zählerpolynoms nie größer als die des Nennerpolynoms sein darf: das Ausgangssignal kann nicht ansteigen, bevor nicht ein Eingangssignal anliegt; dies wäre ein *nicht kausales* und somit nicht realisierbares System. Betrachtet man die Laplace-Transformations-Vorschrift (2.61), so ist zu erkennen, dass ein Laplace-Operator s im Zähler einer Ableitung und folglich einer Beschleunigung der Systemreaktion entspricht, was die bisherigen Überlegungen unterstützt.

Anmerkung 2.7: Instantane Verstärkung

An dieser Stelle ist mit Hilfe des Signalflussplanes 2.4 ($\tilde{r} = 1$) der Begriff „instantane Verstärkung“ bzgl. Gleichung (2.69) zu verstehen. Wie oben gezeigt, wirkt bei einem Relativgrad von $\tilde{r} = \tilde{n} - \tilde{m}$ erst der Zustand $x_{\tilde{n}+1-\tilde{r}}$ über den Auskoppelfaktor $\tilde{c}_{\tilde{n}-\tilde{r}} = \tilde{c}_{\tilde{m}}$ auf den Ausgang, d.h. das Eingangssignal $u(\cdot)$ besitzt erst nach \tilde{r} -fachem Ableiten des Ausgangs einen Durchgriff auf diesen. Folglich wirkt das Eingangssignal durch die \tilde{r} -fache Integratorkette verzögert auf den Ausgang, wobei die erste Reaktion des Systems auf die Verstärkung

$\bar{c}_{\tilde{n}-\tilde{r}}$ zurückzuführen ist. Diese sog. instantane Verstärkung des \tilde{r} -fach abgeleiteten Systems gibt die Stärke des „verzögerten Durchgriffs“ an:

$$k_0 = \left. \frac{y^{(\tilde{r})}(t)}{u(t)} \right|_{t=0^+} = \bar{c}_{\tilde{n}-\tilde{r}} = \bar{c}_{\tilde{m}} \quad (2.89)$$

Die instantane Verstärkung lässt sich auch über den Frequenzbereich bestimmen. Da im Zeitbereich für die instantane Verstärkung die erste Reaktion zwischen Ein- und Ausgang direkt nach dem Einheitssprung auftritt, d.h. für $t \rightarrow 0$, und sich in diesem Moment vor allem die hohen Frequenzen auswirken, muss im Frequenzbereich die Verstärkung für $\omega \rightarrow \infty$ ausgewertet werden. Diese Überlegung bestätigt der Anfangswertsatz der Laplace-Transformation [183], bei dem der Grenzwert $s = \sigma + j\omega \rightarrow \infty$ betrachtet wird, um den Anfangswert $y(t = 0^+)$ über den Frequenzbereich zu berechnen:

$$y(t = 0^+) = y_0 = \lim_{s \rightarrow \infty} s F(s) u(s) \quad (2.90)$$

Bei der Verwendung eines Einheitssprungs $u(t) = \sigma(t) \circ \bullet u(s) = 1/s$ als Eingangssignal wird deutlich, dass bei Systemen mit Relativgrad $\tilde{r} \geq 1$, d.h. ohne Durchgriff \tilde{d}_D , der Anfangswert und somit die anfängliche Verstärkung stets Null ist; dies zeigt die Anwendung auf die Übertragungsfunktion (2.78):

$$y(t = 0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s F(s) \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = \bar{c}_{\tilde{n}} \stackrel{\tilde{r} \geq 1}{=} 0 \quad (2.91)$$

Da der Ausgang somit auf einen Sprung nicht mit einem Sprung antworten kann, ist zu untersuchen, ob das System mit einer Anfangssteigung reagiert. Hierzu ist die zeitliche Ableitung des Ausgangssignals $y(\cdot)$ mit $d/dt \circ \bullet s$ zu bestimmen:

$$\left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=0^+} = \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 F(s) \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow \infty} s F(s) = \bar{c}_{\tilde{n}-1} \stackrel{\tilde{r} \geq 2}{=} 0 \quad (2.92)$$

Der Koeffizient $\bar{c}_{\tilde{n}-1}$ ist jedoch nur für Systeme mit Relativgrad $\tilde{r} = 1$ ungleich Null. Da bei höherem Relativgrad mit $\tilde{r} > 1$ das Eingangssignal \tilde{r} -fach integriert wird bevor es auf den Ausgang wirkt, ist die Anfangssteigung stets Null: $\bar{c}_{\tilde{n}-1} = 0$. Die erste Reaktion des Ausgangs auf den Einheitssprung ist daher in einer höheren Ableitung zu suchen – bei einem höheren Relativgrad muss daher das System \tilde{r} -fach abgeleitet werden, um einen Wert ungleich Null zu erhalten ($d^{\tilde{r}}/dt^{\tilde{r}} \circ \bullet s^{\tilde{r}}$):

$$\left. \frac{d^{\tilde{r}}y(t)}{dt^{\tilde{r}}} \right|_{t=0^+} = y_0^{(\tilde{r})} = \lim_{s \rightarrow \infty} s^{\tilde{r}+1} F(s) \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow \infty} s^{\tilde{r}} F(s) = \bar{c}_{\tilde{n}-\tilde{r}} = \bar{c}_{\tilde{m}} \neq 0 \quad (2.93)$$

Da für das Eingangssignal ein Einheitssprung mit dem Anfangswert $u(t = 0^+) = u_0 = 1$ angenommen wurde, folgt mit Gleichung (2.93) die anfängliche Verstärkung des \tilde{r} -fach abgeleiteten Systems $s^{\tilde{r}} F(s)$:

$$k_0 = \frac{y_0^{(\tilde{r})}}{u_0} = \lim_{s \rightarrow \infty} s^{\tilde{r}} F(s) = \bar{c}_{\tilde{n}-\tilde{r}} = \bar{c}_{\tilde{m}} = \tilde{\beta}'_{\tilde{m}} = \frac{\tilde{\beta}'_{\tilde{m}}}{\tilde{\alpha}'_{\tilde{n}}}, \quad \tilde{\beta}'_{\tilde{m}} \neq 0, \tilde{\alpha}'_{\tilde{n}} \neq 0 \quad (2.94)$$

Diese sog. instantane Verstärkung k_0 (engl.: high frequency gain [128]) stellt allgemein ein Maß für die anfängliche Reaktion eines Systems mit beliebigem Relativgrad \tilde{r} dar. ■

2.2.5.2 Stabilitätsproblem für proportionale Regler: Zählerpolynom beeinflusst ungeeignet den Einschwingvorgang

Analog des Beispielsystems (2.82) mit dem Auskoppelvektor \bar{c}_1 besitzt das Beispielsystem auch mit den Auskoppelvektoren \bar{c}_2 bis \bar{c}_5 einen Relativgrad $\tilde{r} = 1$, was einer schnelleren Reaktion des Ausgangs entspricht. Dies bedeutet jedoch nicht zwingend, dass das Ausgangssignal schneller das 2%-Band um den Endwert erreicht. Während das System mit \bar{c}_1 und \bar{c}_4 diesbezüglich eine Beschleunigung erfährt, unterliegt das System mit \bar{c}_3 und \bar{c}_5 einer Verzögerung bezogen auf das System ohne Nullstellen (\bar{c}_0); des Weiteren wird das 2%-Band um den Endwert mit dem Auskoppelvektor \bar{c}_2 , d.h. System mit Relativgrad $\tilde{r} = 1$, ebenso schnell erreicht, wie mit dem System ohne Nullstellen und Relativgrad $\tilde{r} = 4$ (\bar{c}_0). Der Relativgrad gibt qualitativ Auskunft darüber, wie schnell, bezogen auf ein System ohne Nullstellen (voller Relativgrad), der Systemausgang auf eine Signaländerung am Eingang reagieren kann, nicht jedoch, wie schnell das System dem Endwert entgegen strebt. Reagiert beispielsweise der Ausgang sehr schnell, jedoch anstatt mit einer Signalzunahme zunächst mit einer Abnahme, so liegt zwar eine schnellere Reaktion vor, das 2%-Band um den Endwert wird aber später erreicht. Nullstellen können eine beschleunigende aber auch verzögernde Eigenschaft besitzen. Betrachtet man den Verlauf der Zustände \bar{x}_i in der Simulation 2.5 oben und beachtet, dass der Systemausgang eine beliebige Kombination der Zustände in Betrag und Vorzeichen ist, so gibt es unzählige Möglichkeiten des Signalverlaufes $y(\cdot)$.

Da bei der Regelungsnormalform die Rückkopplung sowie das Eingangssignal nur im ersten Glied der Integratorkette einkoppelt, ist jeder Zustand \bar{x}_{i+1} die Ableitung des Zustands \bar{x}_i , d.h. an den Extremstellen von $\bar{x}_1(\cdot)$ besitzt $\bar{x}_2(\cdot)$ Nulldurchgänge und an den Wendepunkten von $\bar{x}_1(\cdot)$ bzw. Extremstellen von $\bar{x}_2(\cdot)$ zeigt $\bar{x}_3(\cdot)$ Nulldurchgänge usw. Folglich setzt sich das Ausgangssignal $y(\cdot)$ über den Auskoppelvektor \bar{c} aus einer Summation des Zustandssignals $\bar{x}_1(\cdot)$ und/oder den i -ten Ableitungen mit $i = 1, \dots, \tilde{n} - 1$ zusammen. Da diese versetzte Maxima besitzen (bei einer Sinusanregung jeweils um 90° phasenverschoben) wird verständlich, dass durch die Wahl der Nullstellen der Verlauf des Ausgangssignals sehr stark beeinflusst werden kann. Die erste Ableitung besitzt im Wendepunkt und somit im Punkt des steilsten Anstiegs des Signals $\bar{x}_1(\cdot)$ ein Extremum, d.h. wird zusätzlich zum Signal $\bar{x}_1(\cdot)$ auch $\bar{x}_2(\cdot)$ mit gleichem Vorzeichen ausgekoppelt, so ist ein beschleunigter Signalanstieg des Ausgangs zu erwarten. Wird dieser hingegen mit einem negativen Vorzeichen ausgekoppelt, so ist der gegenteilige Effekt zu erwarten. In der Simulation 2.5 unten ist der beschleunigende Effekt sehr gut zu sehen: durch Verwendung des Auskoppelvektors \bar{c}_1 , bei dem neben \bar{x}_1 und \bar{x}_2 zusätzlich der den Effekt verstärkende Zustand \bar{x}_3 ebenfalls mit gleichem Vorzeichen ausgekoppelt wird (\bar{x}_4 hat nur einen sehr geringen Beitrag), ist das 2%-Band um den Endwert sehr viel schneller erreicht, als im Falle ohne Nullstellen bei einer Auskopplung mit \bar{c}_0 . Der verzögernde Effekt wird erreicht, wenn beispielsweise, wie diskutiert, der Zustand \bar{x}_2 über den Koeffizienten \bar{c}_1 in \bar{c}_3 negativ ausgekoppelt wird.

Eine negative Auskopplung bedeutet jedoch nicht zwingend, dass das Einschwingverhalten verlangsamt wird, wie dies wiederum eine Auskopplung mit \bar{c}_4 zeigt. Da bei Sinusanregung und abgeschlossenem Einschwingvorgang ein Integrator das Signal um 90° verzögert, muss ähnliches bei einer Sprungantwort zu finden sein: das Signal \bar{x}_2 ist annähernd um 180° phasenverschoben zu \bar{x}_4 . Dies bedeutet, dass durch ein negatives Auskoppeln des Zustands

\bar{x}_4 über \bar{c}_3 ein beschleunigender Effekt wie bei positiver Auskopplung des Signals \bar{x}_2 über \bar{c}_1 zu erreichen ist. Dies bestätigt die Verwendung des Auskoppelvektors $\underline{\bar{c}}_4$, mit dem das 2%-Band des Endwerts trotz anfänglicher Richtungsumkehr schneller erreicht wird, als im Fall ohne Nullstellen ($\underline{\bar{c}}_0$).

Hiermit wird deutlich, dass durch die Nullstellen das Ein- Ausgangsverhalten stark beeinflusst wird, so dass das Erreichen des Endwertes beschleunigt, aber auch verzögert werden kann. Dies verändert jedoch nicht die Stabilität des Systems. Im geregelten Zustand hingegen spielt es eine große Rolle, wie der Signalverlauf $y(\cdot)$ des Ausgangs durch die Nullstellen beeinflusst wird – basiert eine Regelung auf der Information des Ausgangssignals, so kann bei einem ungünstigen Verlauf von $y(\cdot)$ die Regelung des zunächst stabilen Systems zur Instabilität führen; selbst bei einer zustandsbasierten Regelung kann ein ungünstiges Ein-Ausgangsverhalten des Systems, bedingt durch die Nullstellen, instabile Systemzustände zur Folge haben, wenn das Systemverhalten beliebig beeinflusst werden soll (vgl. Kapitel 2.2.5.5). Welche Verläufe des Ausgangssignals nun kritisch für ein geregeltes System sind und welche Eigenschaften der Nullstellen damit verbunden sind, soll im Folgenden geklärt werden.

In der Simulation 2.5 unten zeigt das Beispielsystem sowohl mit $\underline{\bar{c}}_2$ bei $t = 1.1$ s als auch mit $\underline{\bar{c}}_4$ bei $t = 0.0$ s eine Richtungsumkehr bzw. anfängliche Richtungsumkehr.

Definition 2.8: Richtungsumkehr

Der Begriff „Richtungsumkehr“ eines Systems bedeutet, dass sich das Ausgangssignal $y(\cdot)$ nach einem Sprung $\sigma(\cdot)$ am Eingang u zwischenzeitlich vom Endwert y_∞ entfernt und in der Zeit $t_1 < t < t_2$ das gegensätzliche Vorzeichen des Endwerts annimmt, bevor es sich diesem wieder annähert:

$$\text{sign}(y(t)) = -\text{sign}(y_\infty) \quad \forall t \in]t_1, t_2[\quad (2.95)$$

Zudem muss in der Zeit $t_1 < t < t_2$ der Abstand zum Endwert $|y(t) - y_\infty|$ den bisher größten Betrag annehmen:

$$\sup_{t_1 < t < t_2} |y(t) - y_\infty| > \sup_{0 \leq t \leq t_1} |y(t) - y_\infty| \quad (2.96)$$

Ist nur die Bedingung (2.95) ohne (2.96) erfüllt, handelt es sich lediglich um einen Einschwingvorgang und nicht um eine Richtungsumkehr.¹⁾

Ist das Ausgangssignal innerhalb der Zeit $0 \leq t \leq t_1$ Null, so spricht man von „anfänglicher Richtungsumkehr“, d.h. die Richtungsumkehr tritt sofort in Folge des Einheitssprungs $u(t) = \sigma(t)$ nach einer eventuellen Verzögerung durch den Relativgrad ein. Zu obigen Bedingungen muss Folgendes gelten:

$$y(t) = 0, \quad \forall t \in [0, t_1] \quad (2.97)$$

¹⁾ Bezüglich des Beispielsystems würde dies bei einer Auskopplung mit $\underline{c}^T = [5 \ 0.1 \ 100 \ 1]$ auftreten. Hierbei wird der Zustand \underline{x}_2 sehr stark gewichtet, welcher einen Einschwingvorgang um Null vollzieht. Folglich gibt es eine Zeit, bei welcher das Ausgangssignal das gegensätzliche Vorzeichen des Endwerts einnimmt, jedoch wird der Abstand zum Endwert die bisher aufgetretenen Maxima nicht mehr überschreiten; deshalb handelt es sich nicht um eine Richtungsumkehr, sondern um einen Einschwingvorgang.

Systeme mit Richtungsumkehr stellen ein großes Problem bzgl. ihrer Regelbarkeit dar, so dass eine beschleunigende Eigenschaft von Nullstellen einen Regler nicht zwingend positiv unterstützt. Rein intuitiv ist dies verständlich, da trotz richtigem Stellsignal der Regelfehler bei einer Richtungsumkehr zunimmt, bevor er abnehmen würde – sobald sich das System anfänglich vom erwünschten Sollwert entfernt, antwortet beispielsweise ein Ausgangsregler, welcher keine Informationen über die Zustände hat, jedoch mit einer neuen Aktion, welche sich dann destabilisierend auswirken kann.

Dieser Sachverhalt wird klar, wenn man sich die qualitative Funktion eines Reglers verdeutlicht – hierzu soll ein *proportionaler Regler* dienen, welcher das Grundprinzip eines Reglers widerspiegelt: Durch Vergleich des Istsignals $y(\cdot)$ mit dem Sollsignal $r'(\cdot)$ wird detektiert, ob das Regelziel erreicht oder eine Stellgrößenänderung notwendig ist. Liegt eine Abweichung bzw. ein Regelfehler $e(t) = r'(t) - y(t) \neq 0$ vor, muss der Regler mit einer Anpassung der Stellgröße $u(\cdot)$ reagieren; je größer die Abweichung, desto höher die Stellgröße. Im einfachsten Fall des proportionalen Reglers wird, entsprechend des Namens, proportional zum Fehler e die Stellgröße u über die Verstärkung k angepasst, um eine Verkleinerung des Regelfehlers zu erreichen. Das Regelgesetz lautet:

$$u(t) = k (r'(t) - y(t)) = k e(t) \quad (2.98)$$

Setzt man Gleichung (2.98) in das System (2.72) ein, ergibt sich mit $y(t) = \bar{c}^T \bar{x}(t)$ die Zustandsdarstellung des proportional geregelten Systems in Regelungsnormalform:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) &= \underbrace{[\bar{\mathbf{A}} - k \bar{\mathbf{b}} \bar{\mathbf{c}}^T]}_{\bar{\mathbf{A}}_{r'y}} \bar{x}(t) + k \bar{\mathbf{b}} r'(t) \\ y(t) &= \bar{\mathbf{c}}^T \bar{x}(t) \end{aligned} \quad (2.99)$$

Der proportionale Regler, wie ihn die Abbildung 2.6 zeigt, fügt dem System im Signal-

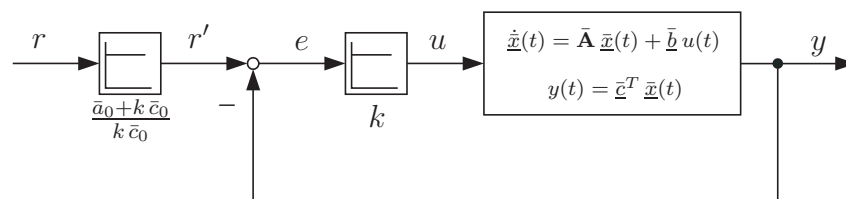


Abbildung 2.6: Signalflussplan eines zeitkontinuierlich geregelten zeitkontinuierlichen Systems mit proportionalem Regler und Vorverstärkung (Vorfilter)

flussplan 2.4 eine äußere Rückkopplung über y hinzu, d.h. über die Auskoppelkoeffizienten \bar{c}_0 bis $\bar{c}_{\tilde{m}}$ wird die Rückkopplung der Zustände \bar{x}_1 bis $\bar{x}_{\tilde{m}+1}$ beeinflusst, so dass effektiv \tilde{m} Rückkopplungsverstärkungen des Systems in Regelungsnormalform durch den Regler mit einer Addition von a_i auf $a_i + k c_i$ verändert werden ($i \in \{0, \dots, \tilde{m}\}$). Die resultierende Regelungsnormalform des geschlossenen Kreises ist in Abbildung 2.7 zu sehen. Gemäß des Zusammenhangs zwischen Regelungsnormalform und Übertragungsfunktion nach Kapitel 2.2.4 folgt die Übertragungsfunktion des proportional geregelten Systems $F_{ry}(\cdot)$, welche auch direkt über den Signalflussplan 2.6 und der Übertragungsfunktion $F(s) = B(s)/A(s)$

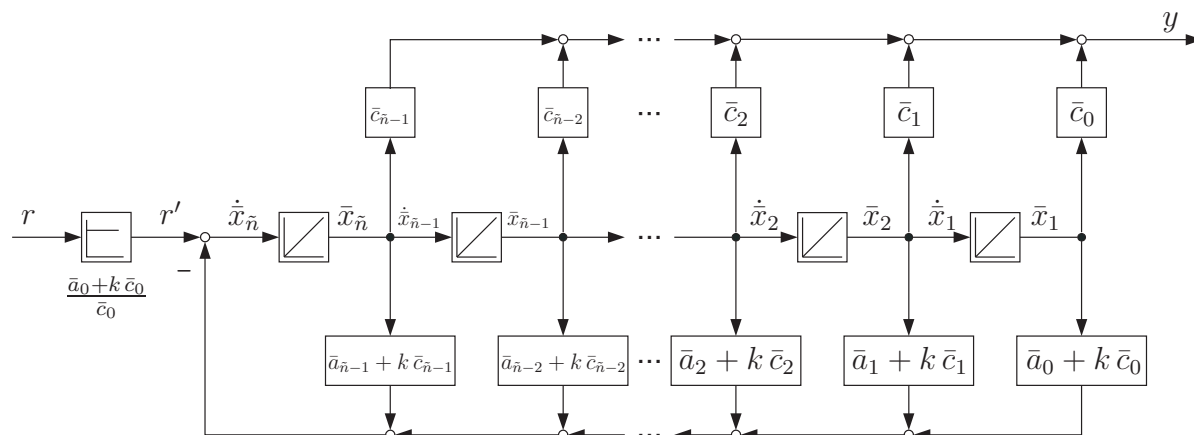


Abbildung 2.7: Signalflussplan des mit proportionalem Regler geregelten Systems aus Abbildung 2.6 in Regulationsnormalform (geschlossener Kreis)

des unregulierten Systems zu bestimmen ist:

$$\begin{aligned}
 F_{ry}(s) = \frac{y(s)}{r(s)} &= \frac{k F(s)}{1 + k F(s)} = \frac{k B(s)}{A(s) + k B(s)} & (2.100) \\
 &= \frac{k (\bar{c}_0 + \bar{c}_1 s + \bar{c}_2 s^2 + \bar{c}_3 s^3)}{(\bar{a}_0 + k \bar{c}_0) + (\bar{a}_1 + k \bar{c}_1) s + (\bar{a}_2 + k \bar{c}_2) s^2 + (\bar{a}_3 + k \bar{c}_3) s^3 + s^4}
 \end{aligned}$$

Mit der Vorverstärkung bzw. -filter

$$F_V(s) = \frac{r'(s)}{r(s)} = \frac{1}{-\underline{\bar{c}}^T \underline{\bar{A}}_{r'y}^{-1} \underline{\bar{b}}} = \frac{\bar{a}_0 + k \bar{c}_0}{k \bar{c}_0} = k_V \quad (2.101)$$

kann gemäß Gleichung (2.83) eine stationäre Abweichung vom Sollwert verhindert werden, sofern keine Störung wirkt. Das Ergebnis von Gleichung (2.101) ist auch an Hand des Signalflussplanes 2.7 nachzuvollziehen.

Das Sollsignal $r(\cdot)$ für $t \geq 0$ s wird aus Gründen der Vergleichbarkeit in den folgenden Simulationen dem Endwert $r(t) = y_\infty = 0.8$ des Systems $F(s)$ entsprechen. Um den Einfluss der Richtungsumkehr erfassen zu können, ist es hilfreich, sich das Stellgrößensignal $u(\cdot)$ mit dem Übergang $\Delta \rightarrow 0$ quantisiert als $u^\Delta(\cdot)$ vorzustellen – dann entspricht jede Stellgrößenänderung einem Sprung um Δ , so dass das Ausgangssignal mit Hilfe der Sprungantworten in Abbildung 2.5 durch Superposition näherungsweise konstruiert werden kann.

Zunächst wird das System mit Auskoppelvektor $\underline{\bar{c}}_1$ betrachtet, welches keine Richtungsumkehr nach Definition 2.8 zeigt. Die Anwendung des proportionalen Reglers findet unter dem Aspekt statt, einen schnelleren Einschwingvorgang zu erhalten. Die entsprechende Simulation mit einer quantisierten Stellgröße ($\Delta = 2$) ist in Abbildung 2.8 links zu finden. Auf Grund des großen Regelfehlers e gibt der Regler mit $k = 10$ zu Beginn bei t_0 eine hohe Stellgröße aus (vgl. Abbildung 2.8 links unten), weshalb sich die Ausgangsgröße sehr schnell dem 2%-Band um den Endwert bzw. Sollwert nähert (vgl. Abbildung 2.8 links oben/Mitte). Je kleiner der Abstand zum Sollwert wird, desto kleiner wird der Regelfehler und folglich die Stellgröße – die Steigung des Ausgangssignals $y(\cdot)$ nimmt ab. Bei jeder sprungartigen

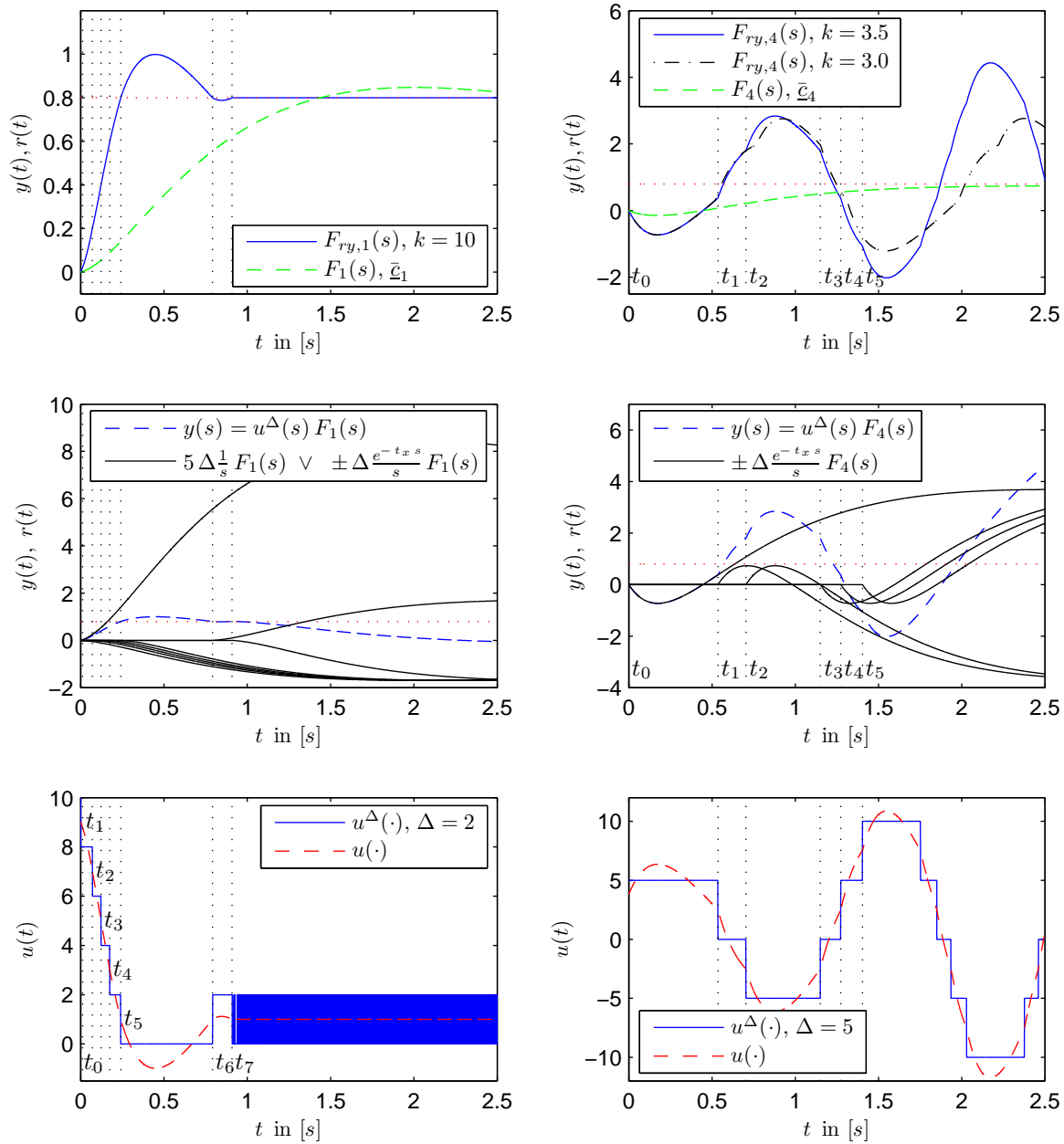


Abbildung 2.8: Sprungantwort $y(\cdot)$ des geregelten Systems $F_{ry,1}(\cdot)$ bzw. $F_{ry,4}(\cdot)$ (**oben**) mit der entsprechenden quantisierten Stellgröße $u^\Delta(\cdot)$ (**unten**); das Ausgangssignal $y(\cdot)$ wird durch Superposition der einzelnen verschobenen Sprungantworten, welche durch die quantisierte Stellgröße zu den Zeitpunkten t_0 bis t_x hervorgerufen werden, erzeugt (**Mitte**); **links:** System $F_1(\cdot)$ mit Auskoppelvektor \bar{c}_1 **rechts:** System $F_4(\cdot)$ mit Auskoppelvektor \bar{c}_4

Veränderung der Stellgröße um $\Delta = 2$ wirkt ab dem Zeitpunkt t_x des Sprunges eine weitere Sprungantwort des Systems $F_1(\cdot)$ mit Auskoppelvektor \bar{c}_1 ; der Sprung $\sigma(t) \circ \bullet 1/s$ ist hierbei um t_x verschoben und mit $+\Delta$ bzw. $-\Delta$ bei einer Vergrößerung bzw. Verkleinerung der Stellgröße skaliert: $u^\Delta(s) = \pm \Delta e^{-t_x s} / s$ (vgl. Abbildung 2.8 links Mitte). Dies bedeutet, dass bei abnehmender Stellgröße eine negative Sprungantwort addiert wird, womit die

Addition eines Signals mit negativer Steigung die Gesamtsteigung des Ausgangssignals verkleinert. Es ist in der Simulation 2.8 links Mitte gut zu erkennen, dass mit jedem Sprung von t_1 bis t_5 die Steigung des Ausgangssignals $y(\cdot)$ abnimmt. Sobald bei t_5 der Sollwert $r(t) = 0.8$ durchschritten wird, ist der Regelfehler $e(t)$ und somit auch die Stellgröße $u(t)$ Null. Auf Grund der Systemträgheit steigt die Ausgangsgröße über den erwünschten Endwert und es kommt zu einem sog. Überschwingen. In diesem Fall ändert der Regelfehler sein Vorzeichen und folglich würde auch die Stellgröße ihr Vorzeichen wechseln, um dem Überschwingen entgegenzuwirken. Im Falle der Quantisierung kommt das Verhalten der Sprungantwort des Systems $F_1(\cdot)$ mit Auskoppelvektor \bar{c}_1 dem entgegen: die Superposition aller bisherigen Sprungantworten führt ohne weitere Stellgrößenaktion zu einer Abnahme des Ausgangssignals und zu einer Annäherung an den Sollwert; die negative Stellgröße $u(\cdot)$ ist kleiner als die Quantisierung, womit $u^\Delta(\cdot)$ Null bleibt. Nachdem das Ausgangssignal den Sollwert wieder unterschreitet, wird die Stellgröße zum Zeitpunkt t_6 erneut erhöht, um ein Annähern an den Sollwert mit flacher Steigung zu erreichen. Da noch ein kleines Überschwingen auftritt, muss die Stellgröße bei t_7 wieder erniedrigt werden. Auf diese Weise findet eine aktive Bedämpfung des Einschwingvorgangs statt, bis das 2%-Band nicht mehr verlassen wird. Auf Grund der Quantisierung findet im stationären Zustand eine Mittelwertbildung der Stellgröße durch abwechselndes Erhöhen und Erniedrigen statt. Der Regler führt, wie erwünscht, zu einem beschleunigten Einschwingvorgang bezogen auf die Sprungantwort des Systems $F_1(\cdot)$. Mit dieser Darstellung ist gut zu erkennen, dass das Verhalten der Sprungantwort des Systems $F_1(\cdot)$ mit Auskoppelvektor \bar{c}_1 das Regelverhalten unterstützt: fordert der Regler eine Verkleinerung der Steigung, so führt eine Verkleinerung der Stellgröße im Zusammenhang mit der Systemantwort sofort zum richtigen Verhalten – ein positiver Sprung hat ein Ausgangssignal mit positiver Steigung zur Konsequenz. Die beschleunigend wirkenden Nullstellen des System mit $F_1(\cdot)$ stellen für das geregelte System somit kein Problem dar – es bleibt für alle Verstärkungen stabil.

Anders verhält es sich jedoch, wenn eine Richtungsumkehr nach Definition 2.8 vorliegt, wie es bei dem System $F_4(\cdot)$ mit Auskoppelvektor \bar{c}_4 der Fall ist. Die Simulation mit quantisierter Stellgröße ($\Delta = 5$) ist in Abbildung 2.8 rechts zu sehen. Wie im vorigen Beispiel liegt zu Beginn ein großer Regelfehler vor, auf den der Regler ($k = 3.5$) mit einer hohen Stellgröße reagiert. Diese würde effektiv zu einem Ansteigen des Ausgangssignals führen, da ein positiver Endwert der Sprungantwort zu erwarten ist, auch wenn diese zu Beginn eine kurzzeitige Richtungsumkehr vollzieht (vgl. Abbildung 2.8 rechts Mitte). Ohne „abzuwarten“ reagiert der Regler jedoch auf die Richtungsumkehr, wie das im Verlauf der Simulation zu erkennen ist, was zu einem Aufschwingen führt: auf die anfängliche positive Stellgröße bei t_0 reagiert der Systemausgang nicht mit einem anwachsenden, sondern mit einem fallenden Signal, womit der Regelfehler größer wird. Hierauf erhöht der Regler weiter die Stellgröße $u(t)$. Eine Erhöhung würde für die quantisierte Stellgröße $u^\Delta(t)$ einen Stellgrößenprung um Δ bedeuten, was zur Konsequenz hätte, dass auf Grund einer erneuten Sprungantwort mit anfänglicher Richtungsumkehr das Ausgangssignal noch stärker fällt und der Regelfehler weiter anwächst; da jedoch im vorliegenden Fall der Quantisierung mit $\Delta = 5$ die neue Stellgröße $u(t)$ zu keiner Erhöhung von $u^\Delta(t)$ führt, findet auch keine zusätzliche Richtungsumkehr statt und das Ausgangssignal $y(\cdot)$ wächst nach Beendigung der ersten Richtungsumkehr wie gefordert an. Dies zeigt: würde der Regler nie auf eine Richtungsumkehr mit einer unnötigen Stellgrößenänderung reagieren, d.h. „abwartet“,

könnte das Regelziel stets erfüllt werden. Dem ist jedoch nicht so, wie die nächste Aktion zeigt. Sobald sich das Ausgangssignal an den Sollwert annähert, soll wie im vorigen Beispiel die Steigung verkleinert werden, um ein Anschmiegen an den Sollwert zu ermöglichen. Hierfür wird die Stellgröße bei t_1 verkleinert, d.h. es wird zum Ausgangssignal eine um $-\Delta$ skalierte und um t_1 verschobene Sprungantwort des Systems mit Auskoppelvektor \underline{c}_4 addiert. Auf Grund der anfänglichen Richtungsumkehr wird die Steigung des Ausgangssignals nicht flacher, sondern steiler und wirkt dem Ziel des Reglers entgegen – der Sollwert wird mit großer Steigung durchschritten. Da nun der Regelfehler zunächst wieder ansteigt, wird die Stellgröße unnötigerweise bei t_2 weiter um den Sprung $-\Delta$ erniedrigt und wechselt das Vorzeichen, um ein fallendes Signal zu erhalten. Erneut führt die entsprechende Sprungantwort mit anfänglicher Richtungsumkehr zu einer weiteren Erhöhung des Ausgangssignals bzw. Regelfehlers. Nach kurzer Zeit haben die Sprungantworten der bisherigen Stellgrößenänderungen ihre Richtungsumkehr abgeschlossen und tragen den erwünschten Beitrag zur Verkleinerung des Ausgangssignals bei; verspätet wirkt hierbei jedoch eine zu starke Absenkung des Signales durch die unnötige Stellgrößenänderung, wodurch die negative Steigung des Ausgangssignals sehr groß wird und sich schneller als gewünscht dem Sollwert nähert. Dies ist darauf zurückzuführen, dass der Regler auf Grund des wachsenden Regelfehlers, ohne die Richtungsumkehr „abzuwarten“, das Stellsignal bei t_2 betragsmäßig erhöht hat. Verzögert wirkt jetzt die zu starke Absenkung. Um dieser entgegenzuwirken, senkt der Regler bei t_3 den Betrag der Stellgröße bzw. führt einen positiven Sprung um Δ durch, der die negative Steigung des Ausgangssignals abflachen soll. Die sich anschließende Richtungsumkehr der entsprechenden Sprungantwort hat jedoch ein noch steileres Durchschreiten des Sollwertes zur Konsequenz, so dass der Regler in Folge noch mehr unnötige Stellgrößenänderungen durchführen wird als zuvor, bis eine Annäherung an den Sollwert zu verzeichnen ist. Fand dies in der vorigen Halbperiode nur zum Zeitpunkt t_2 statt, tritt dies jetzt bei t_4 und t_5 auf. Die verzögerte Auswirkung der unnötigen Stellgrößenänderungen führt wiederum zu einem noch steileren Durchschreiten des Sollwertes – im Endeffekt wird mit jeder Halbperiode die Steigung beim Durchschreiten des Sollwertes und die Anzahl der unnötigen Stellgrößenänderungen größer, so dass ein Aufklingen der Ausgangsgröße resultiert; der geschlossene Regelkreis zeigt auf Grund der Richtungsumkehr des Systems instabiles Verhalten.

Um einen stabilen Regelkreis trotz Richtungsumkehr zu erhalten, wäre es notwendig, dass dem Regler die Tatsache der Richtungsumkehr bekannt ist und folglich mit weiteren Regleraktivitäten „gewartet“ wird, bis die kurzzeitige Richtungsumkehr als Folge einer Stellgrößenänderung abgeschlossen ist. Würde beispielsweise im Fall der Quantisierung die „falsche“ Stellgrößenänderung, bedingt durch die Richtungsumkehr, kleiner als die Quantisierung sein, so käme dies einem „Warten“ gleich. Hierzu müsste die Verstärkung des Reglers erniedrigt werden, so dass bei gleichem Regelfehler eine kleinere Stellgröße resultiert. Wird im obigen Beispiel die Verstärkung von $k = 3.5$ auf $k = 3.0$ gesenkt, so erhält man den grenzstabilen Fall, wie er in Abbildung 2.8 rechts oben zu sehen ist. Die Stellgröße führt nun nicht mehr dazu, dass die Steigung beim Durchschreiten des Sollwertes immer größer wird; folglich bleibt die Anzahl der notwendigen Stellgrößenänderungen bis zum Annähern an den Sollwert immer gleich – es resultiert eine grenzstabile Dauerschwingung um den Sollwert. Bei einer weiteren Verkleinerung der Reglerverstärkung erhält man einen stabilen Regelkreis, jedoch ist dann das Ziel der Beschleunigung des Einschwingvorganges

durch den Regler nicht mehr erreicht.

Definition 2.9: temporärer Einbruch im Signalwachstum

Der Begriff „temporärer Einbruch im Signalwachstum“ eines Systems bedeutet, dass es nach einem Sprung $\sigma(\cdot)$ am Eingang u eine Zeit $t \in [t_1, t_2]$ gibt, in der die Steigung des Ausgangssignals $y(\cdot)$ bezogen auf den Endwert y_∞ temporär flacher bzw. negativ wird, d.h. sich kurzfristig langsamer dem Endwert nähert oder sich sogar von diesem entfernt, bevor es sich dem Endwert wieder mit großer Steigung annähert:

$$\sup_{t_1 \leq t \leq t_2} (\text{sign}(y_\infty) \dot{y}(t)) < \sup_{t < t_1} (\text{sign}(y_\infty) \dot{y}(t)) \quad \& \quad \sup_{t_1 \leq t \leq t_2} (\text{sign}(y_\infty) \dot{y}(t)) < \sup_{t > t_2} (\text{sign}(y_\infty) \dot{y}(t)) \quad (2.102)$$

Nimmt jedoch bei negativer Steigung (bezogen auf den Endwert) das Ausgangssignal das gegensätzliche Vorzeichen des Endwertes an, liegt eine Richtungsumkehr nach Definition 2.8 vor.

Des Weiteren unterscheidet man zwischen frühem und spätem temporären Einbruch im Signalwachstum. Von letzterem spricht man, wenn der Einbruch kurz vor Erreichen des Endwertes auftritt. Der regelungstechnisch problematische Fall ist jedoch der frühe temporäre Einbruch, der bereits bei Erreichen eines geringen Anteils des Endwertes auftritt.

Systeme mit später auftretender Richtungsumkehr gemäß des Systems mit Auskoppelvektor \bar{c}_2 nach Definition 2.8 als auch Systeme mit frühem temporären Einbruch im Signalwachstum nach Definition 2.9, wie das System mit Auskoppelvektor \bar{c}_3 , führen auf das gleiche Problem, was ihre Regelbarkeit betrifft, wie Systeme mit anfänglicher Richtungsumkehr: das Kernproblem besteht darin, dass der Regler auf Grund temporärer Vergrößerung des Regelfehlers unnötige Stellgrößenänderungen vornimmt, die nach Durchschreiten der Richtungsumkehr bzw. Durchschreiten des Einbruchs eine zu große Ausgangsgrößenänderung verursacht, so dass ein Aufklingen resultiert. Im Falle des Systems mit Auskoppelvektor \bar{c}_2 findet die Richtungsumkehr im Unterschied zum System mit Auskoppelvektor \bar{c}_4 nicht am Anfang, sondern zu einem späteren Zeitpunkt statt. Das Problem der Richtungsumkehr bleibt jedoch bestehen: sobald der Regelfehler auf Grund der Richtungsumkehr kurzzeitig wieder ansteigt, erhöht der Regler weiter die Stellgröße, bis verzögert die nun zu starke Stellgröße wirkt und so zu einem Aufschwingen führt. Im Falle des Systems mit Auskoppelvektor \bar{c}_3 , bei dem ein Einbruch des Signalwachstums stattfindet, ist Ähnliches zu beobachten, wie an Hand der Simulation 2.9 mit quantisierter Stellgröße ($\Delta = 3$) zu erkennen ist:

Auf Grund des großen Regelfehlers gibt die Stellgröße bei $t_0 = 0 \text{ s}$ mit $u^\Delta(t) = 2 \Delta \sigma(t)$ einen großen Wert aus (vgl. Abb. 2.9 unten). Das System antwortet zu Beginn gemäß der Sprungantwort mit einem Signalanstieg von $y(\cdot)$, was zu einer Verkleinerung des Regelfehlers führt (vgl. Abb. 2.9 oben) – der Regler arbeitet zunächst korrekt. Da der Regelfehler geringer wird, folgt eine Verkleinerung der Stellgröße zum Zeitpunkt $t_1 = 0.16 \text{ s}$. Die Auswirkung der Stellgrößenänderung auf das Ausgangssignal $y(\cdot)$ wird durch Addieren einer mit $-\Delta$ skalierten und um t_1 verschobene Sprungantwort deutlich (vgl. Abb. 2.9 Mitte): es ergibt sich korrekt eine Verringerung der Steigung mit dem Ziel, sich an den Sollwert anzuschmiegen. Jedoch tritt jetzt der Signaleinbruch des ersten Sprungs in Erscheinung, so

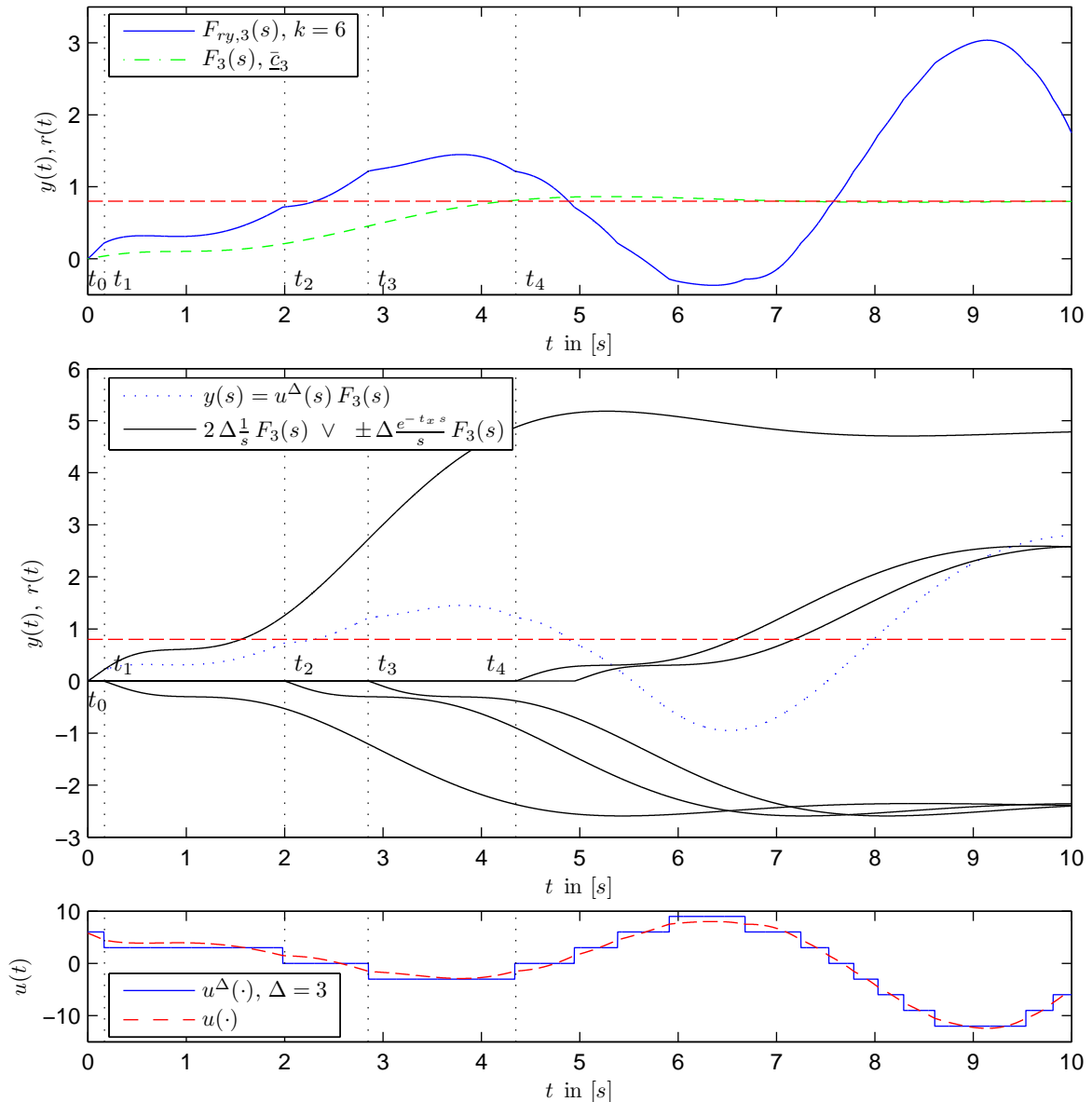


Abbildung 2.9: Sprungantwort $y(\cdot)$ des geregelten Systems $F_{ry,3}(\cdot)$ (**oben**) mit der entsprechenden quantisierten Stellgröße $u^\Delta(\cdot)$ (**unten**); das Ausgangssignal $y(\cdot)$ von $F_{ry,3}(s)$ wird durch Superposition der einzelnen verschobenen Sprungantworten von $F_3(\cdot)$, welche durch die quantisierte Stellgröße zu den Zeitpunkten t_0 bis t_x hervorgerufen werden, erzeugt (**Mitte**); das System $F_3(\cdot)$ besitzt den Auskoppelvektor \bar{c}_3

dass kein Anschmiegen eintritt, sondern in Summe eine Zunahme des Regelfehlers. Da diese jedoch innerhalb der Quantisierung liegt, tritt keine weitere Stellgrößenaktivität auf. Dies kommt wieder einem „Warten“ gleich – nachdem der temporäre Signaleinbruch vorüber ist, zeigt sich das gewünschte Verhalten eines Annäherns an den Sollwert mit flacherer Steigung. Kurz vor Erreichen des Sollwertes wird bei $t_2 = 2.0$ s die Stellgröße weiter verkleinert und es ergibt sich zunächst das gewünschte Anschmiegen. Nachdem jetzt jedoch der Signaleinbruch dieser letzten negativen Sprungantwort eintritt, beginnt das Ausgangssignal wieder stark zu wachsen und durchtritt den Sollwert mit großer Steigung. Der Betrag des Re-

gelfehlers nimmt wieder zu. Um dem entgegenzuwirken findet eine weitere Absenkung der Stellgröße mit Vorzeichenwechsel bei $t_3 = 2.85 \text{ s}$ statt, obwohl der Regler an dieser Stelle wie zuvor lediglich „abwarten“ müsste, bis der Signalverlauf nach Beendigung des temporären Signaleinbruchs wieder flacher wird. Diese unnötige zu starke Stellgrößenänderung wird sich bei t_4 negativ auswirken. Zunächst zeigt sich jedoch das gewünschte Abflachen des Ausgangssignals, bis der Signalverlauf wegen des anschließenden Signaleinbruchs wieder steiler wird. Dieser unerwünschte Effekt dauert jedoch nur kurzzeitig an, da dann keiner der vorigen temporären Einbrüche mehr präsent ist – dementsprechend wirken sich die letzten Absenkungen der Stellgröße vollständig aus und der Betrag des Regelfehlers nimmt wie erwünscht ab. Die Stellgröße muss folglich bei $t_4 = 4.35 \text{ s}$ erhöht werden, um den Signalverlauf des Ausgangs zum Annähern an den Sollwert wieder abzuflachen. Sobald jedoch der Signaleinbruch in Folge eintritt und zudem die unnötige Stellgrößenabsenkung vom Zeitpunkt $t_3 = 2.85 \text{ s}$ dominiert, kommt es zu einem steilen Durchtritt des Sollwerts. Auch hier gilt, wie im Falle der anfänglichen Richtungsumkehr, dass nach jeder Halbperiode der Durchtritt steiler wird und folglich mehr unnötige Stellgrößenänderungen vollzogen werden, was wieder einen steileren Durchtritt bedeutet: das Ausgangssignal klingt auf.

Mit einer kleineren Reglerverstärkung k ist, wie im vorigen Beispiel, ein „Warten“ zu erreichen, so dass ein stabiler Regelkreis resultieren kann. Im Falle eines späteren Einbruchs des Signalwachstums kann sich das „Warten“ auf $t \rightarrow 0 \text{ s}$ beschränken, d.h. es könnte eine Reglerverstärkung $k \rightarrow \infty$ verwendet werden ohne der Gefahr eines instabilen Regelkreises. Tritt beispielsweise, wie bei dem System mit Auskoppelvektor \bar{c}_5 , der Einbruch erst kurz vor Erreichen des 2%-Bandes um den Endwert ein, geht das obig beschriebene Verhalten über in einen stabilen Einschwingvorgang um den Sollwert. Dies ist darauf zurückzuführen, dass der Endwert der Systemantwort von $F_5(\cdot)$ vor der erneuten Erhöhung des Regelfehlers mit kleinen Stellgrößen fast erreicht ist und folglich unnötige Stellgrößenänderungen lediglich zu einer abklingende Schwingung um den Endwert führen. Insofern unterscheidet man gemäß Definition 2.9 zwischen *frühem* und *spätem Einbruch im Signalwachstum*.

Die betrachteten Regelkreise $F_{ry,1}(\cdot)$, $F_{ry,4}(\cdot)$ und $F_{ry,3}(\cdot)$ mit dem Übergang $\Delta \rightarrow 0$, d.h. ohne Quantisierung, sind in den Abbildung 2.10, 2.11 sowie 2.13 zu finden.

2.2.5.3 Eigenschaften nicht-minimalphasiger Systeme

Nachdem deutlich wurde, dass Systeme mit Richtungsumkehr sowie frühem Einbruch im Signalwachstum eine Beschränkung bzgl. ihrer Regelbarkeit bedeuten, stellt sich die Frage, mit welcher Eigenschaft des Auskoppelvektors \bar{c} bzw. Nullstellenpolynoms $B(\cdot)$ dies im Zusammenhang steht. Hierzu betrachtet man das Ausgangssignal $y(\cdot)$ erneut als Linearkombination der Zustandssignale $\bar{x}(\cdot)$ über den Auskoppelvektor \bar{c} in Abbildung 2.5. Zu Beginn nehmen alle Zustandssignale \bar{x}_i zu, bis sie anschließend in ihren Einschwingvorgang übergehen; die Steigung nimmt hierbei auf Grund der Integratorkette von $\bar{x}_{\bar{n}}$ bis \bar{x}_1 ab. Sobald \bar{x}_i eine Anfangssteigung ungleich Null besitzt, ist die Anfangssteigung von \bar{x}_{i-l} mit $l \in \{1, \dots, i+1\}$ noch Null, d.h. die Zustandssignale wirken auf $y(\cdot)$ in der Reihenfolge $\bar{x}_{\bar{n}+1-\bar{r}}$ bis \bar{x}_1 . Somit kommt eine anfängliche Richtungsumkehr nach Definition 2.8 Zustande, wenn der Zustand $\bar{x}_{\bar{n}+1-\bar{r}}$ über $\bar{c}_{\bar{n}-\bar{r}}$ negativ ausgekoppelt wird, wobei $\bar{c}_{\bar{n}-\bar{r}}$ einen

beliebigen Betrag besitzen darf:

$$\text{sign}(\bar{c}_{\tilde{n}-\tilde{r}}) = -\text{sign}(\bar{c}_0) \Leftrightarrow \text{anfängliche Richtungsumkehr} \quad (2.103)$$

Das System mit dem Auskoppelvektor \bar{c}_4 erfüllt diese Bedingung.

Auf Grund der positiven Steigung aller Zustandssignale zu Beginn kann eine negative Auskopplung eines oder mehrerer Zustände mit ausreichendem Betrag zu einer später auftretenden Richtungsumkehr nach Definition 2.8 führen. Ist der Betrag jedoch zu gering, ergibt der negative Beitrag nur einen temporären Einbruch im Signalwachstum des Ausgangs nach Definition 2.9, wie es bei dem System mit Auskoppelvektor \bar{c}_3 zu erkennen ist. Besitzt somit mindestens ein Element des Auskoppelvektors ein gegensätzliches Vorzeichen von \bar{c}_0 , so tritt eine Richtungsumkehr oder ein früher temporärer Einbruch im Signalwachstum auf:

$$\text{sign}(\bar{c}_i) = -\text{sign}(\bar{c}_0), \quad i \in \{1, \dots, \tilde{n} - \tilde{r}\} \Rightarrow \text{Richtungsumkehr} \vee \begin{matrix} \text{temporärer} \\ \text{Einbruch} \end{matrix} \quad (2.104)$$

Es muss jedoch nicht, wie bisher angenommen, ein negatives Vorzeichen ausschlaggebend für eine Richtungsumkehr bzw. frühen kurzzeitigen Einbruch des Ausgangssignals sein. Der Auskoppelvektor \bar{c}_2 besitzt nur positive Elemente, trotzdem tritt eine Richtungsumkehr nach Definition 2.8 ein. Dies liegt daran, dass der Zustand \bar{x}_4 sehr stark mit \bar{c}_3 positiv gewichtet wird und dieser auf Grund der Integratorkette annähernd eine Verzögerung von 180° bzgl. \bar{x}_2 zeigt, was dem Effekt eines negativen Vorzeichens gleich kommt, d.h. die gegenseitige Phasenverschiebung der Zustandssignale spielt auch eine entscheidende Rolle bzgl. einer Richtungsumkehr bzw. frühen temporären Einbruch im Signalwachstum.

Vergleicht man die Bedingungen des Auskoppelvektors \bar{c} bzw. Zählerpolynoms $B(\cdot)$ für eine Richtungsumkehr oder temporären Einbruch mit den Hurwitz-Kriterien in Theorem A.4, so fordert dieses ein instabiles Zählerpolynom. Sobald gemäß der Bedingung (2.103) oder (2.104) ein negativer Koeffizient im Zählerpolynom vorliegt, ist das notwendige Kriterium (A.23) für ein stabiles Polynom nicht mehr erfüllt. Die Bedingung, dass die gegenseitige Phasenverschiebung der Zustandssignale beachtet werden muss, behandelt das hinreichende Kriterium (A.24). Bezüglich des Beispielsystems mit $\tilde{m} = 3$ fordert das Kriterium zum Erhalt eines stabilen Nullstellenpolynoms folgende Ungleichung:

$$\bar{c}_3 < \frac{\bar{c}_1 \bar{c}_2}{\bar{c}_0} \quad (2.105)$$

Demnach darf die Gewichtung des Zustands \bar{x}_4 über \bar{c}_3 , wie oben beschrieben, nicht dominieren. Andernfalls liegt ein instabiles Zählerpolynom wie im Falle des Systems mit \bar{c}_2 vor. Hiermit ist als Ergebnis festzuhalten, dass ein System eine Richtungsumkehr bzw. einen temporären Einbruch im Signalwachstum zeigt, wenn instabile Nullstellen bestehen:

$$\text{Re}\{\tilde{q}_j\} < 0, \quad j \in \{1, \dots, \tilde{m}\} \Rightarrow \text{Richtungsumkehr} \vee \text{temporärer Einbruch} \quad (2.106)$$

Die Aussage (2.106) ist notwendig und hinreichend, wenn neben der Richtungsumkehr nur frühe temporäre Einbrüche des Signalwachstums betrachtet werden. Alle Systeme, die in diese Klasse fallen, bezeichnet man als *nicht-minimalphasige Systeme*.

Korollar 2.1:

nicht-minimalphasiges System \Rightarrow *Richtungsumkehr \vee temporärer Einbruch im Signalwachstum*

Das Beispielsystem gehört zur Klasse der minimalphasigen Systeme und besitzt folglich keine Richtungsumkehr sowie frühen kurzzeitigen Einbruch im Signalwachstum, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$\bar{c}_0 > 0, \quad \bar{c}_1 > \frac{\bar{c}_0 \bar{c}_3}{\bar{c}_2}, \quad \bar{c}_2 > 0, \quad \bar{c}_3 > 0 \quad (2.107)$$

Der Eigenschaft „minimalphasig“ liegt folgende Definition zu Grunde:

Definition 2.10: Minimalphasige Systeme ²⁾

Das lineare dynamische System (2.13) wird als minimalphasig bezeichnet, wenn keine instabilen Nullstellen existieren:

$$B(s) = \det \begin{bmatrix} [s \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}] & -\tilde{\mathbf{b}} \\ \tilde{\mathbf{c}}^T & 0 \end{bmatrix} \neq 0 \quad \forall s \in \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad \operatorname{Re}\{s\} > 0 \quad (2.108)$$

Andernfalls liegt ein nicht-minimalphasiges System vor.

Die Übertragungsfunktion (2.67) eines Systems lässt sich stets in die Pol- Nullstellendarstellung (2.68) überführen, mit der der Phasen- und Amplitudengang aus einer multiplikativen Kombination von Grundbausteinen des Zählers und Nenners

$$F_B(s) = B(s) = \prod_{j=1}^{\tilde{m}} F_{Bj}(s) = \prod_{j=1}^{\tilde{m}} (s - \tilde{q}_j) = \prod_{j=1}^{\tilde{m}} (s - (\sigma_j + j \omega_j)) \quad (2.109)$$

$$F_A(s) = \frac{1}{A(s)} = \prod_{i=1}^{\tilde{n}} F_{Ai}(s) = \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \frac{1}{s - \tilde{p}_i} = \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \frac{1}{s - (\sigma_i + j \omega_i)} \quad (2.110)$$

resultiert. Die Grundbausteine lauten:

$$\begin{aligned} G_B(s) &= \sigma_B(s) + j \omega_B(s) = \tilde{r}_B(s) e^{j \tilde{\varphi}_B(s)} \\ &= s - \tilde{q}_1 = s - (\sigma_1 + j \omega_1) = G_A^{-1}(s) = \frac{1}{\tilde{r}_A(s)} e^{-j \tilde{\varphi}_A(s)} \end{aligned} \quad (2.111)$$

$$\begin{aligned} G_A(s) &= \sigma_A(s) + j \omega_A(s) = \tilde{r}_A(s) e^{j \tilde{\varphi}_A(s)} \\ &= \frac{1}{s - \tilde{q}_1} = \frac{1}{s - (\sigma_1 + j \omega_1)} = G_B^{-1}(s) = \frac{1}{\tilde{r}_B(s)} e^{-j \tilde{\varphi}_B(s)} \end{aligned} \quad (2.112)$$

²⁾ In der Literatur (vgl. [14], [39], [46], [113],[138]) sind auch strengere Definitionen zu finden, so dass ein minimalphasiges System zum einen keine grenzstabilen Nullstellen besitzen darf und zum anderen in einer noch strengeren Definition zudem nur stabile Polstellen auftreten dürfen: $\operatorname{Re}\{\tilde{q}_j\} < 0$, $\operatorname{Re}\{\tilde{p}_i\} < 0$. Nachdem es sich in dieser Arbeit um die Regelbarkeit von Systemen mit instabilen Nullstellen handelt, ist die Definition 2.10 ausreichend und zielführend.

Es gilt folgender Zusammenhang zwischen Nenner- und Zähler-Grundbaustein:

$$|G_B(s)| = |G_A(s)|^{-1} = \tilde{r}_B(s) = \frac{1}{\tilde{r}_A(s)} \quad (2.113)$$

$$\angle G_B(s) = -\angle G_A(s) = \tilde{\varphi}_B(s) = -\tilde{\varphi}_A(s) \quad (2.114)$$

Zur Bestimmung des Amplituden- und Phasen-Ganges eines Grundbausteins wird dieser mit sinusförmigen Signalen beaufschlagt bzw. die Untersuchung entlang der imaginären Achse durchgeführt. Pole auf der imaginären Achse sind grenzstabil und führen zu Dauerschwingungen mit der Frequenz ω . Aus Gleichung (2.111) folgt:

$$G_B(j\omega) = -\sigma_1 + j(\omega - \omega_1) \quad (2.115)$$

Die Amplitude und Phase eines Grundbausteins berechnet sich gemäß:

$$|G_B(j\omega)| = \tilde{r}_B(\omega) = \sqrt{\sigma_1^2 + (\omega - \omega_1)^2} \quad (2.116)$$

$$\angle G_B(j\omega) = \tilde{\varphi}_B(\omega) = \arctan\left(\frac{\omega - \omega_1}{-\sigma_1}\right) \quad (2.117)$$

Um die globale Phasendrehung beim Durchlaufen der Frequenz $\omega = 0$ nach $\omega \rightarrow \infty$ in Richtung und Betrag zu bestimmen, wird zunächst die Ableitung $d\tilde{\varphi}_B/d\omega$ gebildet:

$$\frac{d\tilde{\varphi}_B(\omega)}{d\omega} = -\frac{\sigma_1}{\sigma_1^2 + (\omega - \omega_1)^2} \quad (2.118)$$

Mit Gleichung (2.118) wird deutlich, dass bei stabilen Nullstellen mit $\sigma_1 \leq 0$ der Phasenwinkel monoton zunimmt, während er für instabile Nullstellen mit $\sigma_1 > 0$ streng monoton abnimmt. Somit berechnet sich die globale Phasendrehung mit Gleichung (2.117) und (2.118):

$$\Delta\tilde{\varphi}_B = \tilde{\varphi}_B(\omega)\Big|_0^\infty = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \arctan\left(\frac{\omega - \omega_1}{-\sigma_1}\right) - \lim_{\omega \rightarrow 0} \arctan\left(\frac{\omega - \omega_1}{-\sigma_1}\right) \quad (2.119)$$

$$= -\frac{\sigma_1}{|\sigma_1|} \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{|\omega_1|}{\sigma_1}\right), \quad \omega_1 \geq 0 \quad (2.120)$$

$$= -\frac{\sigma_1}{|\sigma_1|} \frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{|\omega_1|}{\sigma_1}\right), \quad \omega_1 < 0 \quad (2.121)$$

Für einen reellen minimalphasigen Zähler-Grundbaustein (2.111), d.h. $\omega_1 = 0$ und $\sigma_1 \leq 0$, resultieren mit Gleichung (2.120) folgende globale Phasendrehungen ³⁾:

$$G_B(s) = (s - \tilde{q}_1), \quad \tilde{q}_1 \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{Re}\{\tilde{q}_1\} \leq 0 :$$

$$\Delta\tilde{\varphi}_B = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{d\tilde{\varphi}_B(\omega)}{d\omega} \geq 0 \quad (2.122)$$

³⁾ Der grenzstabile Fall $\sigma_1 = 0$ wird als Übergang des stabilen Falls $\sigma_1 < 0$ betrachtet, so dass ein Anstieg von 0° auf 90° als Sprung bei $\omega = 0$ auftritt (vgl. Übergang vom PT_1 -Glied auf das I -Glied für $\sigma_1 = 0$).

Es findet eine Phasenhebung statt und kompensiert die Phasenabsenkung einer Polstelle. Ist der reelle Zähler-Grundbaustein mit $\sigma_1 > 0$ nicht-minimalphasig, führt die Phasendrehung gemäß Gleichung (2.120) entsprechend einer stabilen Polstelle zu einer weiteren Phasenabsenkung:

$$\begin{aligned} G_B(s) &= (s - \tilde{q}_1), \quad \tilde{q}_1 \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{Re}\{\tilde{q}_1\} > 0 : \\ \Delta\tilde{\varphi}_B &= -\frac{\pi}{2}, \quad \frac{d\tilde{\varphi}_B(\omega)}{d\omega} < 0 \end{aligned} \quad (2.123)$$

Komplexe Grundbausteine treten stets paarweise mit $G_{B1}(\cdot)$ und $G_{B2}(\cdot)$ auf, wobei diese konjugiert komplex zueinander sind. Die Pol- bzw. Nullstellen sind symmetrisch zur reellen Achse, d.h. $\omega_1 = -\omega_2$ und $\sigma_1 = \sigma_2$. Nachdem die Fallunterscheidung in Gleichung (2.119) bis (2.121) zwischen oberer und unterer Hälfte der komplexen s -Ebene differenziert, bestimmt sich die globale Phasendrehung zweier konjugiert komplexer Grundbausteine durch Summation der beiden Fälle. Für einen minimalphasigen konjugiert komplexen Zähler-Grundbaustein folgt:

$$\begin{aligned} G_B(s) &= G_{B1}(s)G_{B2}(s) = (s - \tilde{q}_1)(s - \tilde{q}_2) = (s - \tilde{q}_1)(s - \bar{\tilde{q}}_1), \quad \tilde{q}_1 \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re}\{\tilde{q}_1\} \leq 0 : \\ \Delta\tilde{\varphi}_B &= \pi, \quad \frac{d\tilde{\varphi}_B(\omega)}{d\omega} \geq 0 \end{aligned} \quad (2.124)$$

Während die einzelnen konjugiert komplexen Bausteine eine voneinander unterschiedliche Phasendrehung von $\pi/2 \pm \alpha$ besitzen, ergibt sich in Summe stets eine Phasenhebung um π . Sobald auch im komplexen Fall instabile Nullstellen, d.h. nicht-minimalphasige Grundbausteine vorliegen, kommt es zu einer Phasenabsenkung um denselben Betrag, wie die Summation der beiden Fälle in Gleichung (2.119) bis (2.121) zeigt:

$$\begin{aligned} G_B(s) &= G_{B1}(s)G_{B2}(s) = (s - \tilde{q}_1)(s - \tilde{q}_2) = (s - \tilde{q}_1)(s - \bar{\tilde{q}}_1), \quad \tilde{q}_1 \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re}\{\tilde{q}_1\} > 0 : \\ \Delta\tilde{\varphi}_B &= -\pi, \quad \frac{d\tilde{\varphi}_B(\omega)}{d\omega} < 0 \end{aligned} \quad (2.125)$$

Die Eigenschaften des Zähler-Grundbausteins (2.111) kann mit dem Zusammenhang (2.114) auf den Nenner-Grundbaustein (2.112) übertragen werden. Gemäß der Eigenschaft (2.122) folgt für reelle stabile Nenner-Grundbausteine eine Phasenabsenkung (siehe Fußnote auf Seite 44):

$$\begin{aligned} G_A(s) &= \frac{1}{(s - \tilde{q}_1)}, \quad \tilde{q}_1 \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{Re}\{\tilde{q}_1\} \leq 0 : \\ \Delta\tilde{\varphi}_A &= -\frac{\pi}{2}, \quad \frac{d\tilde{\varphi}_A(\omega)}{d\omega} \leq 0 \end{aligned} \quad (2.126)$$

Im Unterschied zur Phasenhebung beim komplex konjugierten minimalphasigen Zähler-Grundbaustein (2.124) führt ein komplex konjugierter stabiler Nenner-Grundbaustein zur Phasenabsenkung:

$$\begin{aligned} G_A(s) &= G_{A1}(s)G_{A2}(s) = \frac{1}{(s - \tilde{q}_1)(z - \tilde{q}_2)} = \frac{1}{(s - \tilde{q}_1)(s - \bar{\tilde{q}}_1)}, \quad q \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re}\{\tilde{q}_1\} \leq 0 : \\ \Delta\tilde{\varphi}_A &= -\pi, \quad \frac{d\tilde{\varphi}_A(\omega)}{d\omega} \leq 0 \end{aligned} \quad (2.127)$$

Theorem 2.5: Globale Phasendrehung

Die Pol- und Nullstellen zeitkontinuierlicher Systeme führen zu einer globalen Phasendrehung $\Delta\tilde{\varphi}$ gemäß folgender Tabelle:

	Polstelle		Nullstelle			
	stabil, grenzst.		stabil, grenzst. (minimalphasig)		instabil (nicht-minimalphasig)	
	reell	komplex	reell	komplex	reell	komplex
zeitkontinuierlich: $\Delta\tilde{\varphi}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\pi$	$+\frac{\pi}{2}$	$+\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\pi$

Obwohl ein zeitkontinuierliches komplexes Polpaar nur in Summe eine globale Phasendrehung von $\pm\pi$ ergibt, lässt sich folgende vereinfachte Aussage ohne Beschränkung der Allgemeinheit treffen:

- jede stabile Polstelle führt zu einer globalen Phasenabsenkung von $\Delta\tilde{\varphi} = -90^\circ$
- jede minimalphasige Nullstelle führt zu einer globalen Phasenhebung v. $\Delta\tilde{\varphi} = 90^\circ$
- jede nicht-minimalphasige Nullstellen zeigt dasselbe Verhalten wie eine stabile Polstelle und führt zu einer globalen Phasenabsenkung von $\Delta\tilde{\varphi} = -90^\circ$

Die globale Phasendrehung eines zeitkontinuierlichen Systems bestimmt sich gemäß:

$$\begin{aligned} \angle F(j\omega) \Big|_{\omega=0}^{\infty} = \Delta\tilde{\varphi} &= \angle F_A(j\omega) \Big|_{\omega=0}^{\infty} + \angle F_B(j\omega) \Big|_{\omega=0}^{\infty} = \Delta\tilde{\varphi}_A + \Delta\tilde{\varphi}_B \\ &= -\tilde{n} \frac{\pi}{2} + \tilde{m}_{\text{stabil}} \frac{\pi}{2} - \tilde{m}_{\text{instabil}} \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (2.128)$$

Ein minimalphasiges zeitkontinuierliches System besitzt eine vom Relativgrad \tilde{r} abhängige globale Phasendrehung von:

$$\angle F(j\omega) \Big|_{\omega=0}^{\infty} = \Delta\tilde{\varphi} = -\tilde{n} \frac{\pi}{2} + \tilde{m} \frac{\pi}{2} = -\tilde{r} \frac{\pi}{2} \quad (2.129)$$

Anmerkung 2.8: Gruppenlaufzeit

Die Gruppenlaufzeit stellt ein Maß dar, wie stark ein System bzw. Filter ein Eingangssignal verzögert. Eine Wellengruppe benötigt die Zeit $\tau_{Gr}(\omega)$ zum Durchlaufen des Systems.

Wie der Phasenwinkel $\tilde{\varphi}(\omega)$ zwischen sinusförmigen Ein- und Ausgangssignalen mit der Periodendauer $T = 2\pi/\omega$ in eine zeitliche Verzögerung, die Phasenlaufzeit

$$\tau_{Ph}(\omega) = -\frac{T}{2\pi} \tilde{\varphi}(\omega) = -\frac{\tilde{\varphi}(\omega)}{\omega}$$

umgerechnet werden kann, so trifft die Gruppenlaufzeit

$$\tau_{Gr}(\omega) = -\frac{d\tilde{\varphi}(\omega)}{d\omega}$$

dieselbe Aussage für zeitlich begrenzte Wellengruppen als Eingangssignal.

Die Differentiation des Phasenganges nach der Frequenz $d\tilde{\varphi}_B(\omega)/d\omega$ in Gleichung (2.118) entspricht dem Negativen der Gruppenlaufzeit $\tau_{Gr,B}(\omega)$:

$$\tau_{Gr,B}(\omega) = -\frac{d\tilde{\varphi}_B(\omega)}{d\omega} = \frac{\sigma_1}{\sigma_1^2 + (\omega - \omega_1)^2} \quad (2.130)$$

Mit Gleichung (2.130) wird deutlich, dass die Gruppenlaufzeit für stabile Nullstellen ($\sigma_1 \leq 0$) stets negativ und für instabile Nullstellen ($\sigma_1 > 0$) stets positiv ist, d.h. durch stabile Nullstellen wird die Gruppenlaufzeit des Systems verkürzt, durch instabile Nullstellen verlängert.

Bei Systemen mit demselben Amplitudengang besitzt das minimalphasige System (nur stabile Nullstellen) die kleinste Gruppenlaufzeit, das maximalphasige System (nur instabile Nullstellen) die größte Gruppenlaufzeit und ist daher schwieriger zu regeln. Systeme mit stabilen und instabilen Nullstellen bezeichnet man als gemischtphasige Systeme, deren Gruppenlaufzeit sich zwischen den oben genannten Extremen befindet.

Neben der Eigenschaft nicht-minimalphasiger Systeme einer hohen Phasenverzögerung und einer hohen Gruppenlaufzeit gegenüber minimalphasiger Systeme mit demselben Amplitudengang, was jeweils ein erfolgreiches Regeln erschwert, ermöglichen nicht-minimalphasige Systeme keinen Rückschluss zwischen Phasen- und Amplitudengang. Begründen lässt sich dies mit der Tatsache, dass jedes nicht-minimalphasige System in ein minimalphasiges System und einen Allpass zerlegt werden kann [149].

Theorem 2.6: Allpass

Ein Allpass besitzt für jeden stabilen reellen Pol sowie für jedes stabile komplexe Polpaar an der imaginären Achse gespiegelt instabile Nullstellen und ist daher ein nicht-minimalphasiges System:

$$F_{AP}(s) = \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \frac{(s - (-\sigma_i + j\omega_i))}{(s - (\sigma_i + j\omega_i))}, \quad \sigma_i < 0 \quad (2.131)$$

Mit einem Amplitudengang von

$$|F_{AP}(j\omega)| = \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \frac{\sqrt{\sigma_i^2 + (\omega - \omega_i)^2}}{\sqrt{\sigma_i^2 + (\omega - \omega_i)^2}} = 1 \quad (2.132)$$

wird jede Frequenz mit Eins verstärkt bzw. bleibt das Ausgangssignal in der Amplitude unverändert und wird daher als Allpass bezeichnet.

Mit einem konstanten Amplitudengang ist kein Rückschluss zwischen Amplitudengang und Phasengang möglich, wie es bei minimalphasigen Systemen der Fall ist.

Als nicht-minimalphasiges System besitzt der Allpass eine globale Phasendifferenz von

$$\Delta\tilde{\varphi}_{AP} = -2\tilde{n}\frac{\pi}{2} = -\tilde{n}\pi \quad (2.133)$$

und führt zu einer starken Phasenabsenkung.

Ersetzt man die instabilen Nullstellen eines nicht-minimalphasigen Systems durch stabile Nullstellen und führt die instabilen Nullstellen einem Allpass zu, so wird das nicht-minimalphasige System in ein minimalphasiges System und einen Allpass aufgeteilt, während das Ein- Ausgangsverhalten unverändert bleibt. Die stabilen Pole des Allpasses kompensieren die stabilen Nullstellen des minimalphasigen Systems.

Nachdem gemäß Theorem 2.6 bei einem Allpass kein Schluss vom Amplitudengang auf den Phasengang möglich ist, gilt dies folglich auch für ein nicht-minimalphasiges System.

Mit den gewonnenen Erkenntnissen muss die Systemklasse der nicht-minimalphasigen Systeme im Gegensatz zur Systemklasse der minimalphasigen Systeme schwer zu regeln sein. Dies wird im folgenden Kapitel an Hand des hochverstärkungsbasierten Reglers gezeigt.

2.2.5.4 Hochverstärkungsbasierter Regler: Instabilität bei nicht-minimalphasigen Systemen

Der hochverstärkungsbasierte Regler stellt einen Spezialfall des proportionalen Reglers dar, bei dem sehr hohe Verstärkungen zur Stabilisierung und Regelung der Strecke verwendet werden; dieser Regler ist das Grundelement für einen modellunabhängigen adaptiven Regler, den sog. High-Gain-Regler [205, 206, 207, 208, 209, 210, 211] bzw. Funnel-Regler [204] (direkter adaptiver Regler). Wie im Anschluss gezeigt wird, ist die Verwendung des hochverstärkungsbasierten Reglers nur für minimalphasige Systeme möglich. Hierfür bedient man sich der Wurzelortskurve, mit welcher der geschlossene Regelkreis des proportionalen Reglers auf Stabilität untersucht wird:

Theorem 2.7: Wurzelortskurve

Die Wurzelortskurve beschreibt in der komplexen Ebene den Verlauf aller \tilde{n} Pole \tilde{p}_i des geschlossenen Regelkreises in Abhängigkeit eines Parameters. Im Speziellen entspricht dieser Parameter der Reglerverstärkung k eines proportionalen Reglers. Um die Wurzelortskurve zu erhalten, muss für alle Verstärkungen folgende Gleichung gelöst und die resultierenden Pole des geschlossenen Regelkreises in die komplexe Ebene eingezeichnet werden:

$$A_{ry}(\tilde{p}_i) = A(\tilde{p}_i) + k B(\tilde{p}_i) = 0 \quad \forall k \in [0, \infty[, \quad \tilde{p}_i \in \mathbb{C}, \quad i = \{1, \dots, \tilde{n}\} \quad (2.134)$$

Hierbei entspricht $A(\cdot)$ bzw. $B(\cdot)$ dem Nennerpolynom bzw. Zählerpolynom der Strecke und $A_{ry}(\cdot)$ dem Nennerpolynom des geschlossenen Regelkreises.

Es gelten folgende wichtige Eigenschaften:

- die Pole von $A_{ry}(\cdot)$ liegen entweder auf der reellen Achse (reelle Pole) oder symmetrisch zur reellen Achse (konjugiert komplexe Pole)
- für $k = 0$ liegen \tilde{n} Pole von $A_{ry}(\cdot)$ in den Polen von $A(\cdot)$
- für $k \rightarrow \infty$ enden \tilde{m} Pole von $A_{ry}(\cdot)$ in den \tilde{m} Nullstellen von $B(\cdot)$
- die restlichen $\tilde{r} = \tilde{n} - \tilde{m}$ Pole von $A_{ry}(s)$ enden im Unendlichen.

Beweis:

Der ausführliche Beweis ist u.a. in der Literatur [46], [113] sowie [149] zu finden, bei der der Sachverhalt im Frequenzbereich abgeleitet wird. Die folgende Beweisidee greift auf die Gleichung (2.100) zurück und führt den Grenzübergang $k \rightarrow 0$ und $k \rightarrow \infty$ durch:

$$\lim_{k \rightarrow 0} F_{ry}(s) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\bar{a}_0 + k \bar{c}_0}{k \bar{c}_0} \frac{k B(s)}{A(s) + k B(s)} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\bar{a}_0}{k \bar{c}_0} \frac{k B(s)}{A(s)} = \frac{\bar{a}_0}{\bar{c}_0} \frac{B(s)}{A(s)} \quad (2.135)$$

Dies zeigt deutlich, dass bei sehr geringer Reglerverstärkung $k \rightarrow 0$ das Verhalten des geschlossenen Regelkreises dem der Strecke entspricht. Folglich beginnen die Äste der Wurzelortskurve in den Polen der Strecke.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F_{ry}(s) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\bar{a}_0 + k \bar{c}_0}{k \bar{c}_0} \frac{k B(s)}{A(s) + k B(s)} = \frac{\bar{c}_0}{\bar{c}_0} \frac{B(s)}{B(s)} = 1 \quad (2.136)$$

Es wandern für $k \rightarrow \infty$ \tilde{m} Pole des geschlossenen Regelkreises in die \tilde{m} Nullstellen der Strecke. Die restlichen $\tilde{r} = \tilde{m} - \tilde{n}$ Pole streben gegen Unendlich, was durch Umformen und Betragsbildung der Gleichung (2.134) deutlich wird:

$$|k| = \frac{|A(\tilde{p}_i)|}{|B(\tilde{p}_i)|} \quad (2.137)$$

Da die Ordnung von $A(\cdot)$ größer als die von $B(\cdot)$ ist, gilt $k \rightarrow \infty$ nicht nur, wenn $B(\tilde{p}_i) = 0$, d.h. die Pole des Regelkreises in die Nullstellen der Strecke wandern, sondern auch, wenn $|\tilde{p}_i| \rightarrow \infty$. Folglich müssen $\tilde{r} = \tilde{n} - \tilde{m}$ Pole gegen Unendlich streben. Hiermit ist $|s| = \infty$ als \tilde{r} -fache Nullstelle der Strecke zu verstehen. ■

Korollar 2.2:

Ein stabiles minimalphasiges System ist stets mit einem proportionalen Regler beliebiger Verstärkung $k \in [0, \infty[$ zu regeln, sofern ein Relativgrad $\tilde{r} = 1$ vorliegt. Der Einschwingvorgang kann dann beliebig beschleunigt werden, ohne dass die Stabilität des geschlossenen Regelkreises gefährdet wird.

Beweis:

Nach Theorem 2.7 beginnen \tilde{n} Pole des geschlossenen Regelkreises in den \tilde{n} Polen des zu regelnden Systems und es wandern \tilde{m} Pole des geschlossenen Regelkreises für $k \rightarrow \infty$ in die \tilde{m} Nullstellen des zu regelnden Systems. Da ein stabiles System mit stabilen Polen vorausgesetzt wird und die Nullstellen eines minimalphasigen Systems nach Definition 2.10 ebenfalls stabil sein müssen, befinden sich \tilde{m} Pole des geschlossenen Regelkreises für geringe Verstärkungen $k \in [0, k_1]$ und hohe Verstärkungen $k \in [k_2, \infty[$ stets in der linken stabilen Halbebene des Laplace-Bereiches. Die restlichen \tilde{r} Pole wandern für hohe Verstärkungen k gegen Unendlich, was zunächst nicht bedeutet, dass diese im stabilen Bereich bleiben. Sobald jedoch Relativgrad $\tilde{r} = 1$ gilt, können keine konjugiert komplexen Pole vorliegen, d.h. der eine Pol wandert gegen $+\infty$ oder $-\infty$. Nach Gleichung (2.100) bzw. (2.134) gilt für das Nennerpolynom des geschlossenen Regelkreises:

$$\begin{aligned} A_{ry}(s) &= A(s) + k B(s) \\ &= (\bar{a}_0 + k \bar{c}_0) + (\bar{a}_1 + k \bar{c}_1) s + (\bar{a}_2 + k \bar{c}_2) s^2 + (\bar{a}_3 + k \bar{c}_3) s^3 + s^4 \end{aligned} \quad (2.138)$$

Nach Voraussetzung ist das Zählerpolynom $B(\cdot)$ der Strecke stabil und ein stabiles Polynom besitzt gemäß des Hurwitz-Kriteriums A.4 keine negativen Koeffizienten. Für $k \rightarrow \infty$ mit $k \in \mathbb{R}^+$ dominieren im Fall von $\tilde{r} = 1$ in Gleichung (2.138) die Koeffizienten des Zählerpolynoms $B(\cdot)$ alle Koeffizienten des Nennerpolynoms $A(\cdot)$, womit das Polynom des geschlossenen Regelkreises $A_{ry}(\cdot)$ nur positive Koeffizienten besitzen muss, unabhängig davon, ob ein stabiles oder instabiles Nennerpolynom $A(\cdot)$ der Strecke vorliegt. Mit der Tatsache, dass für den Grenzübergang $k \rightarrow \infty$ \tilde{m} Pole in die \tilde{m} Nullstellen des Polynoms $B(\cdot)$ wandern, ist dies jedoch nur möglich, wenn der verbleibende Pol ($\tilde{r} = 1$) gegen $-\infty$ wandert und somit auch stabil ist, wie folgende Gleichung zeigt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_{ry}(s) = (s + \infty)^{(-)} B(s) \quad (2.139)$$

Andernfalls lägen negative Koeffizienten des Polynoms $A_{ry}(\cdot)$ vor. Demzufolge führt eine ausreichend hohe Verstärkung bei einer stabilen als auch instabilen Strecke zu einem stabilen geschlossenen Regelkreis.

Wegen der geringen Phasenlaufzeit für ein stabiles minimalphasiges System mit Relativgrad $\tilde{r} = 1$ lässt sich zudem zeigen, dass die System-Pole nicht nur für geringe und hohe Verstärkungen k stets in der linken stabilen Halbebene des Laplace-Bereiches liegen, sondern die System-Pole beim Durchfahren aller Verstärkungen $k \in [0, \infty[$ die stabile Ebene auch für den mittleren Verstärkungsbereich $k \in]k_1, k_2[$ nicht verlassen (siehe Regelprinzip eines proportionalen Reglers in Kapitel 2.2.5.2). Hiermit bleiben alle Pole des geschlossenen Regelkreises für alle Verstärkungen in der linken Halbebene und folglich stabil. ■

Korollar 2.3:

Für ein instabiles minimalphasiges System mit Relativgrad $\tilde{r} = 1$ existiert stets ein proportionaler Regler, der bei ausreichend hoher Verstärkung $k \in [0, \infty[$ das System stabilisiert.

Beweis:

Liegen instabile Pole des zu regelnden Systems vor, so wandern nach Theorem 2.7 für $k \rightarrow \infty$ \tilde{m} Pole in die stabilen Nullstellen und $\tilde{r} = 1$ Pol wandert gemäß des Beweises von Korollar 2.2 gegen $-\infty$. Folglich existiert ein $k \in [0, \infty[$, bei dem alle instabilen Pole in die linke stabile Halbebene eingetreten sind. ■

Da der Auskoppelvektor $\underline{\bar{c}}_1$ des Beispielsystems (2.82) mit der Übertragungsfunktion $F_1(\cdot)$ nur positive Elemente besitzt und diese die Ungleichung (2.105) erfüllen, liegt ein minimalphasiges System vor, welches nach Korollar 2.1 weder eine Richtungsumkehr noch einen frühen Einbruch im Signalwachstum zeigen darf. Weiter muss nach Korollar 2.2 für alle Verstärkungen ein stabiler Regelkreis resultieren, was bedeutet, dass der Einschwingvorgang beliebig zu beschleunigen ist. Die Aussagen werden durch die Sprungantwort des geregelten Systems $F_{ry,1}(\cdot)$ bzw. der entsprechenden Wurzelortskurve in Abbildung 2.10 bestätigt: alle Pole bleiben innerhalb der linken stabilen Halbebene; das geregelte System ist unabhängig der Regler-Verstärkung stabil und zeigt auf Grund der Abwesenheit einer Richtungsumkehr bzw. Einbruches im Signalwachstum in $F_1(\cdot)$ ein beschleunigtes Einschwingen von $F_{ry,1}(\cdot)$.

Sobald jedoch ein nicht-minimalphasiges System vorliegt, gibt es Stabilitäts-Probleme. Da

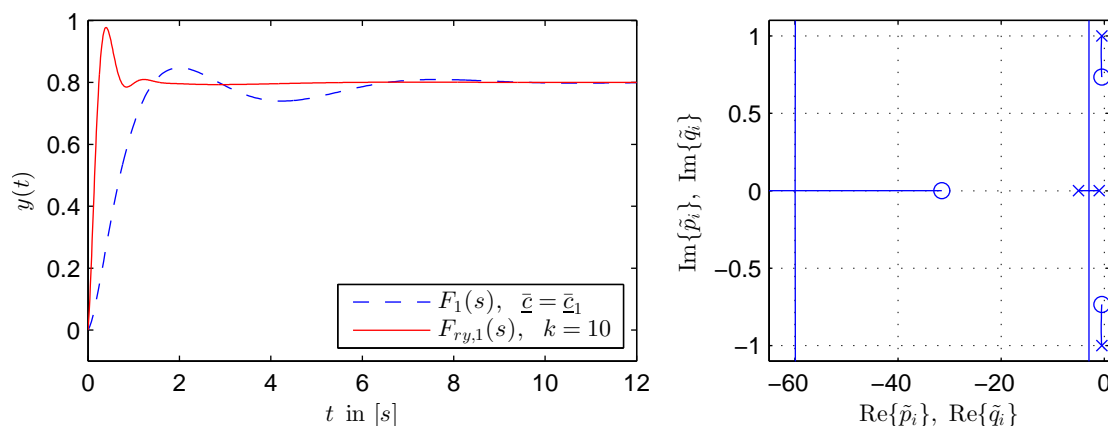


Abbildung 2.10: links: Sprungantwort des geregelten Systems $F_{ry,1}(\cdot)$ sowie unregulierten Systems $F_1(\cdot)$ mit Auskoppelvektor \bar{c}_1 ;

rechts: Wurzelortskurve (\times : Pole, \circ : Nullstellen): stabiles Verhalten für alle Verstärkungen $k \in \mathbb{R}^+$

der Auskoppelvektor \bar{c}_4 im Element \bar{c}_3 ein negatives Vorzeichen besitzt, muss nach Ungleichung (2.107) das Nullstellenpolynom instabil sein und nach (2.103) eine anfängliche Richtungsumkehr auftreten. Demnach kann das System durch den Regler nicht mehr beliebig beschleunigt werden. Dies bestätigt die Simulation und Wurzelortskurve in Abbildung 2.11. Die Sprungantwort von $F_4(\cdot)$ besitzt eine anfängliche Richtungsumkehr und in

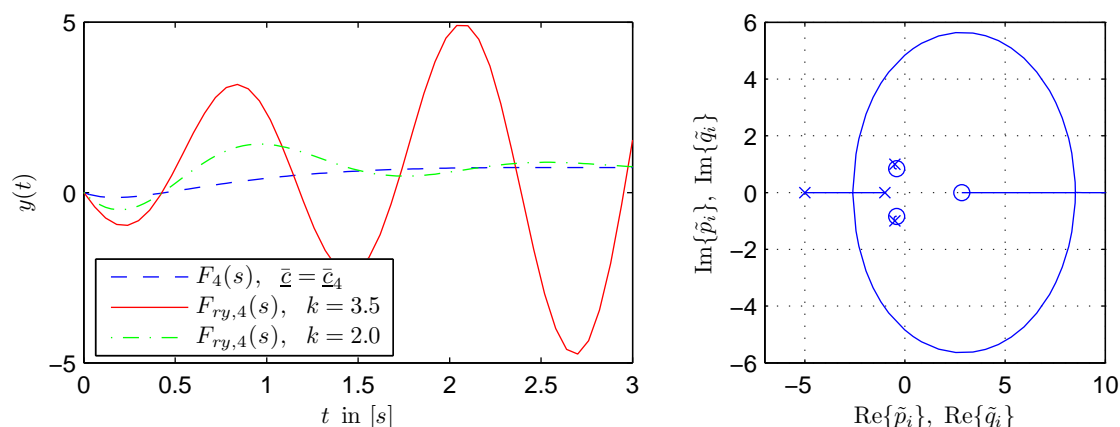


Abbildung 2.11: links: Sprungantwort des geregelten Systems $F_{ry,4}(\cdot)$ sowie unregulierten Systems $F_4(\cdot)$ mit Auskoppelvektor \bar{c}_4 ;

rechts: Wurzelortskurve (\times : Pole, \circ : Nullstellen): instabiles Verhalten tritt ab einer Verstärkung von $k = 3.04$ auf

der Wurzelortskurve ist eine instabile Nullstelle zu erkennen. Bei dem Versuch, das Systemverhalten mit dem proportionalen Regler zu beschleunigen, treten durch Erhöhung der Reglerverstärkung zwei Pole des geschlossenen Regelkreises bei $k = 3.04$ in die instabile rechte Halbebene ein, wobei einer in die instabile Nullstelle und der andere gegen $+\infty$

wandert ⁴⁾ – das geregelte System wird instabil, wie es für $k = 3.5$ die Sprungantwort von $F_{ry,4}(\cdot)$ zeigt. Es dürfen daher nur Verstärkungsfaktoren $k < 3.04$ Anwendung finden. Dieses Verhalten bestätigt die Überlegung im Falle der quantisierten Stellgröße bzgl. des Systems $F_4(\cdot)$: erst durch Verringerung der Reglerverstärkung erhält man ein stabiles Gesamtsystem, wobei für ca. $k = 3.04$ der grenzstabile Fall auftritt, wie er in Abbildung 2.8 oben rechts zu sehen ist. In der Simulation 2.11 rechts ist die Sprungantwort des geregelten Systems $F_{ry,4}(\cdot)$ für $k = 2$ abgebildet. Wie zu erwarten, ergibt sich bei geringer Reglerverstärkung keine Verbesserung des Einschwingverhaltens durch den Regler im Vergleich zur Sprungantwort des Systems $F_4(\cdot)$. Das erfolgreiche Regeln eines nicht-minimalphasigen Systems stellt ein Problem dar.

Dementsprechend müsste das System $F_2(\cdot)$ mit Auskoppelvektor $\underline{\bar{c}}_2$ ebenfalls ab einer bestimmten Reglerverstärkung instabil werden, da trotz der positiven Elemente des Auskoppelvektors diese die Ungleichung (2.105) nicht erfüllen und daher ein nicht-minimalphasiges System vorliegt. Die Wurzelortskurve in Abbildung 2.12 bestätigt, dass auch in diesem

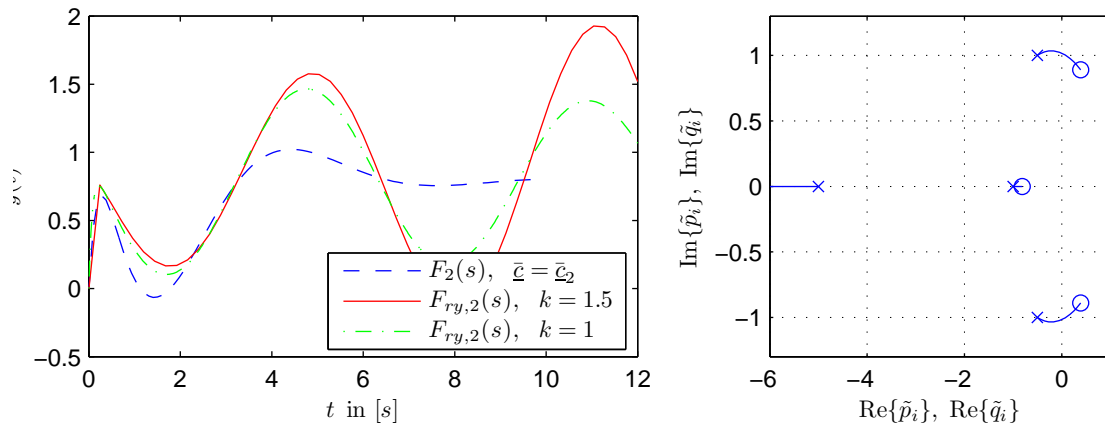


Abbildung 2.12: links: Sprungantwort des geregelten Systems $F_{ry,2}(\cdot)$ sowie ungeredelten Systems $F_2(\cdot)$ mit Auskoppelvektor $\underline{\bar{c}}_2$;

rechts: Wurzelortskurve (\times : Pole, \circ : Nullstellen): instabiles Verhalten tritt ab einer Verstärkung von $k = 1.12$ auf

Fall instabile Nullstellen existieren, in welchen zwei Pole des geschlossenen Regelkreises für $k \rightarrow \infty$ enden; bereits ab einer Reglerverstärkung von $k = 1.12$ liegt ein instabiler Regelkreis vor, so dass es mit den zulässigen Verstärkungen $0 < k < 1.12$ zu keiner Beschleunigung des Systems durch den Regler kommen kann, wie das die Simulation 2.12 zeigt. Der Grund liegt erneut an einer Richtungsumkehr von $F_2(\cdot)$, die im Unterschied zum System $F_4(\cdot)$ nicht zu Beginn, sondern zu einem späteren Zeitpunkt stattfindet. Wie die Übertragungsfunktion $F_{ry,2}(\cdot)$ des geschlossenen Kreises zeigt, ist das System mit einer Reglerverstärkung von $k = 1.5$ instabil. Wird eine Reglerverstärkung von $k = 1$ verwendet, ist das Gesamtsystem zwar stabil, jedoch ist das Reglergebnis bzgl. des Einschwingvorganges nicht zufriedenstellend. Je kleiner die Reglerverstärkung wird, desto mehr entspricht die Sprungantwort des geregelten Systems der des ungeredelten Systems, womit keine Beschleunigung der Strecke vorliegt. Dies bestätigt der Grenzübergang $k \rightarrow 0$ in Gleichung (2.135).

⁴⁾ Da kein stabiles Nullstellenpolynom $B(\cdot)$ existiert, enden die $\tilde{r} = 1$ Pole im Unterschied zum Beweis von Korollar 2.2 nicht in $-\infty$.

Der Vorteil des Reglers beläuft sich bei nicht-minimalphasigen Systemen auf das Ausregeln von Störeinwirkungen (beim proportionalen Regler verbleibt eine stationäre Abweichung). Läge zudem ein instabiles System vor, würde das Hauptziel nicht die Beschleunigung des Einschwingvorganges sein, sondern die Stabilisierung, welche auch mit kleiner Verstärkung möglich sein kann.

Zeigen nicht-minimalphasige Systeme keine Richtungsumkehr, dann führen sie nach Korollar 2.1 zu einem Einbruch im Signalwachstum, wie dies beim System $F_3(\cdot)$ mit Auskoppelvektor \bar{c}_3 in Abbildung 2.13 zu erkennen ist. Da ein Element des Auskoppelvektors \bar{c}_3

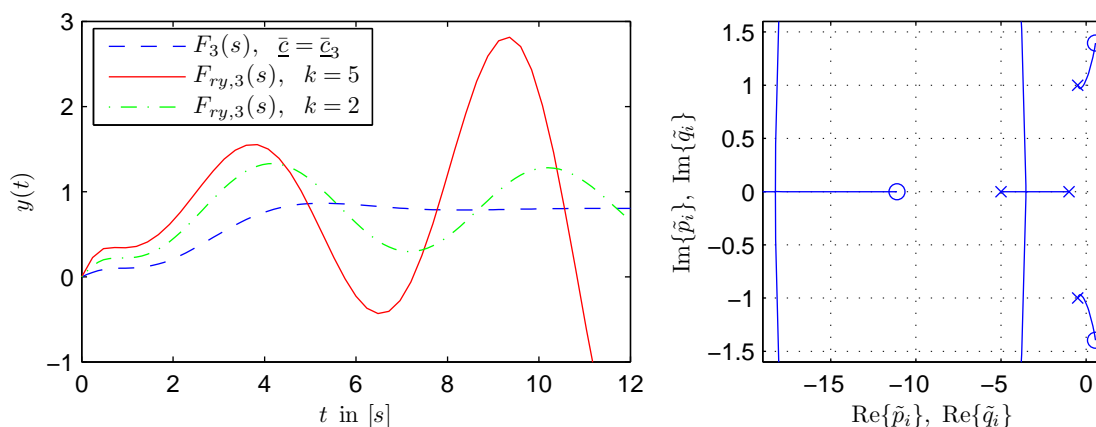


Abbildung 2.13: links: Sprungantwort des geregelten Systems $F_{ry,3}(\cdot)$ sowie unregulierten Systems $F_3(\cdot)$ mit Auskoppelvektor \bar{c}_3 ;
rechts: Wurzelortskurve (\times : Pole, \circ : Nullstellen): instabiles Verhalten tritt ab einer Verstärkung von $k = 2.16$ auf

ein negatives Vorzeichen besitzt, liegt wieder ein nicht-minimalphasiges System vor mit denselben Nachteilen: ab einer gewissen Reglerverstärkung wird auch das geregelte System $F_{ry,3}(\cdot)$ instabiles Verhalten zeigen. Zwei Äste der Wurzelortskurve erreichen für $k = 2.16$ die instabile Halbebene und enden für $k \rightarrow \infty$ in den beiden instabilen Nullstellen. Aus diesem Grund führt die Verstärkung $k = 5$ zu einem aufklingenden Verhalten des geschlossenen Regelkreises mit der Übertragungsfunktion $F_{ry,3}(\cdot)$; bei einer Verstärkung von $k = 2$ liegt ein stabiler Regelkreis vor, jedoch ist die Verstärkung für eine erfolgreiche Beschleunigung des Regelkreises zu gering.

Es bleibt das System mit $F_5(\cdot)$ zu untersuchen, welches mit dem Auskoppelvektor \bar{c}_5 zustande kommt. Dessen Elemente erfüllen die Ungleichung (2.107) und somit alle Bedingungen für ein minimalphasiges System, d.h. das Systemverhalten sollte sich beliebig beschleunigen lassen. Betrachtet man jedoch die Sprungantwort des Systems $F_5(\cdot)$ in Simulation 2.14, so ist ein Einbruch im Signalwachstum zu erkennen. Durch den Auskoppelvektor \bar{c}_5 wird der Zustand \bar{x}_3 in Abbildung 2.5 gegenüber \bar{x}_1 und \bar{x}_2 sehr stark gewichtet, so dass trotz Einhaltung der Bedingungen für ein minimalphasiges System ein temporärer Einbruch im Signalwachstum auftritt. Entsprechend der sich der Definition 2.9 anschließenden Veranschaulichung von „frühem und spätem Einbruch im Signalwachstum“ auf Seite 41 liegt jedoch bzgl. der Übertragungsfunktion des Systems $F_5(\cdot)$ ein später Einbruch im Signalwachstum vor, so dass keine Probleme zu erwarten sind – die Sprungantwort des Systems

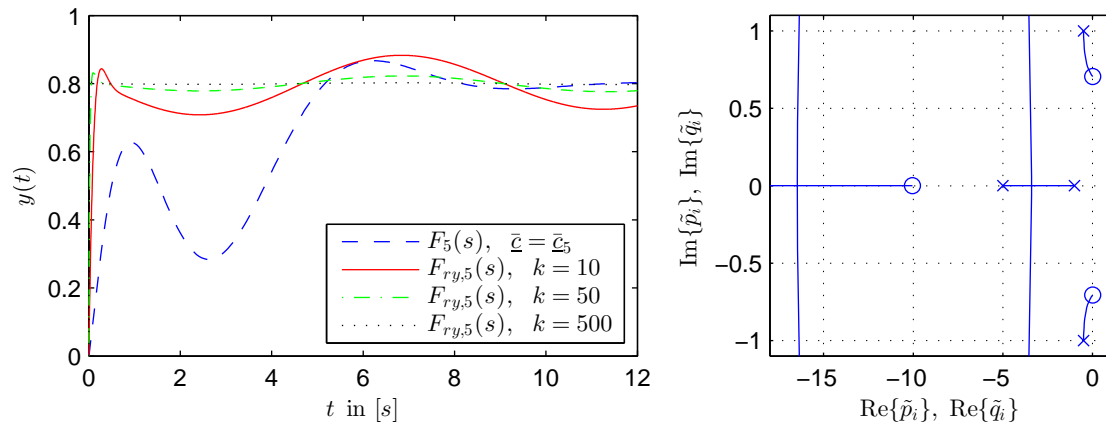


Abbildung 2.14: links: Sprungantwort des geregelten Systems $F_{ry,5}(\cdot)$ sowie ungeredelten Systems $F_5(\cdot)$ mit Auskoppelvektor \bar{c}_5 ;

rechts: Wurzelortskurve (\times : Pole, \circ : Nullstellen): stabiles Verhalten für alle Verstärkungen $k \in \mathbb{R}^+$

$F_5(\cdot)$ erreicht im Unterschied zu der von $F_3(\cdot)$ fast den Endwert, bevor der temporäre Einbruch des Signalwachstums beginnt. Demzufolge ist nur mit Schwingungen um den Sollwert und nicht mit einem Aufklingen zu rechnen, die durch eine hohe Verstärkung bedämpft werden können. Die Wurzelortskurve in Abbildung 2.14 rechts zeigt, dass gemäß eines minimalphasigen Systems nur stabile Nullstellen vorliegen, auch wenn diese auf Grund des späten temporären Einbruchs im Signalwachstum sehr nahe an der Grenze zwischen stabiler und instabiler Halbebene liegen – da es einen fließenden Übergang zwischen frühem und spätem Einbruch gibt, muss es auch einen fließenden Übergang zwischen stabilen und instabilen Nullstellen geben, d.h. die stabilen Nullstellen liegen bei einem späten temporären Einbruch des Signalwachstums nahe an der imaginären Achse in der stabilen Halbebene. Folglich befinden sich die Pole des geschlossenen Regelkreises für alle Verstärkungen $k \in \mathbb{R}^+$ in der linken Halbebene und die Regelung bleibt stets stabil, jedoch unrobust. In der Simulation 2.14 ist die beschleunigende und bedämpfende Eigenschaft des Regler für eine zunehmende Verstärkung k sehr gut zu erkennen: bei einer Verstärkung von $k = 10$ wird das 2%-Band sehr schnell erreicht; da der Anstieg des Ausgangssignals auf Grund des Anschmiegens an den Sollwert bereits gegen Null geht, bevor der späte temporäre Einbruch im Signalwachstum des Systems $F_5(\cdot)$ eintritt, kommt dieser einem temporären Signaleinbruch des Signals gleich, der kein Problem bzgl. der Stabilität darstellt – der temporäre Signaleinbruch führt lediglich zu einem schwach bedämpften Einschwingvorgang um den Sollwert. Durch Erhöhung der Verstärkung auf $k = 50$ ergibt sich eine weitere Beschleunigung des Einschwingvorganges – zudem tritt wegen der stärkeren Bedämpfung kaum mehr eine Schwingung auf. Hierbei ist sehr gut zu erkennen, dass das System für $k \rightarrow \infty$ die Eigendynamik des Systems eliminiert: \tilde{m} Pole des geschlossenen Regelkreises wandern an die Stelle der \tilde{m} Nullstellen des Systems, d.h. Nullstellen des geschlossenen Regelkreises, wodurch eine *Pol-Nullstellenkompensation* stattfindet – die Eigendynamik des Systems wird durch entsprechende Auskopplung der Zustände kompensiert, so dass am Ausgang diese nicht zu erkennen ist. Es verbleibt lediglich die Dynamik des $\tilde{r} = 1$ Poles, der nach $\tilde{p} \rightarrow -\infty$ wandert, d.h. das geregelte System verhält sich für eine sehr große Verstärkung $k \rightarrow \infty$

gemäß eines Verzögerungsgliedes erster Ordnung (PT_1) mit einer sehr kleinen Zeitkonstante $T = -1/\tilde{p} \rightarrow 0$ s:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{\bar{a}_0 + k \bar{c}_0}{k \bar{c}_0} \frac{k B(s)}{A(s) + k B(s)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{y(s)}{r(s)} = \frac{1}{1 + sT} \quad (2.140)$$

Nach kurzer Zeit erreicht das Ausgangssignal das 2%-Band und verlässt dieses nicht mehr. Für $k \rightarrow \infty$ ähnelt der PT_1 -Verlauf immer mehr einem Sprung, wie dies die Sprungantwort des Systems $F_{ry,5}(\cdot)$ bereits für $k = 500$ zeigt: in der Zeit $T \rightarrow 0$ s steigt das Ausgangssignal auf exakt den Endwert, d.h. das geregelte System entspricht nur noch einer Verstärkung ohne Dynamik; es findet kein für zeitkontinuierliche Regler typisches exponentielles Annähern an den Sollwert mehr statt. Dies bestätigt auch der Grenzübergang $k \rightarrow \infty$ in Gleichung (2.136), bei dem für die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises gilt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F_{ry}(s) = 1 \quad (2.141)$$

Theorem 2.8: Hochverstärkungsbasierter Regler

Ein proportionaler Regler mit hoher Verstärkung $k \rightarrow \infty$ (hochverstärkungsbasierter Regler) arbeitet wie ein kausaler inverser Regler, der bei der Invertierung aus Gründen der Realisierbarkeit einen Pol ($\tilde{r} = 1$) mit der Zeitkonstante $T \rightarrow 0$ s erhalten muss – in kürzester Zeit wird das Regelziel erreicht.

Dieser Regler besitzt eine für zeitkontinuierliche Regler untypische endliche Einstellzeit, die im Allgemeinen zeitdiskreten Reglern vorbehalten ist. In dieser Arbeit wird u.a. ein Deadbeat-Regler Anwendung finden, der innerhalb eines Abtastschrittes h , d.h. in kürzester Zeit, den Endwert erreicht. Hierbei handelt es sich auch um einen inversen Regler, der für $h \rightarrow 0$ s dem hochverstärkungsbasierten zeitkontinuierlichen Regler mit der Verstärkung $k \rightarrow \infty$ entspricht. In beiden Fällen verhindert die Bedingung eines minimalphasigen Systems mit Relativgrad $\tilde{r} = 1$ bzw. $r = 1$ eine Instabilität des geschlossenen Regelkreises. Bezüglich des hochverstärkungsbasierten Reglers ist dies auf Korollar 2.2 bzw. 2.3 zurückzuführen und für den Dead-Beat-Regler als inverser Regler auf Theorem 2.40. Der Vorteil des zeitdiskreten Reglers besteht darin, dass er die Eigenschaft der endlichen Einstellzeit mit einer endlichen Stellgröße erreicht. Zudem darf ein zeitkontinuierlicher Regler mit hoher Verstärkung aus Stabilitätsgründen nicht auf einem zeitdiskreten digitalen Regler implementiert werden, was in Kapitel 2.1 verdeutlicht wurde. Wie im Folgenden gezeigt wird, führt die Nichteinhaltung der Bedingung an den Relativgrad oder an die Minimalphasigkeit auf dieselbe Problematik zurück.

Die Tatsache von Korollar 2.2 bzw. 2.3, dass ein System nur für Relativgrad $\tilde{r} = 1$ mit beliebig hohen Verstärkungen geregelt werden kann, ist nun mit dem gewonnenen Verständnis erklärbar. Im entsprechenden Beweis konnte nur für $\tilde{r} = 1$ gezeigt werden, dass der verbleibende Pol, der nicht in einer Nullstelle endet, gegen $-\infty$ wandert und somit stabil bleibt. Sobald ein höherer Relativgrad vorliegt, wandern die \tilde{r} Pole nach Theorem 2.7 gegen $|\tilde{p}| = |\sigma + j\omega| = |\infty|$, d.h. die entsprechenden Äste können auch in der instabilen Halbebene gegen Unendlich verlaufen. Dies bestätigt sich für das System mit dem Auskoppelvektor \bar{c}_0 bzw. Übertragungsfunktion $F_0(\cdot)$, welches einen vollen Relativgrad $\tilde{r} = 4$

besitzt – da es keine Nullstellen gibt, streben alle Äste der Wurzelortskurve des geregelten Systems in Abbildung 2.15 gegen Unendlich, wobei zwei Äste ab einer Verstärkung von $k = 2.51$ in die rechte instabile Halbebene eintreten. Aus diesem Grund zeigt die Sprungantwort der Übertragungsfunktion $F_{ry,0}(\cdot)$ des geregelten Systems in der Simulation 2.15 für $k = 3$ instabiles Verhalten. Bei einer Verstärkung von $k = 2$ klingen die Schwingungen ab, jedoch ist das Regelergebnis nicht zufriedenstellend. Erst ab einer kleinen Verstärkung von $k = 0.5$ ist der Einschwingvorgang akzeptabel, jedoch kann man dann von keiner Beschleunigung durch den Regler mehr sprechen – die Sprungantwort ähnelt bereits der des Systems, welche für $k \rightarrow 0$ in diese übergeht.

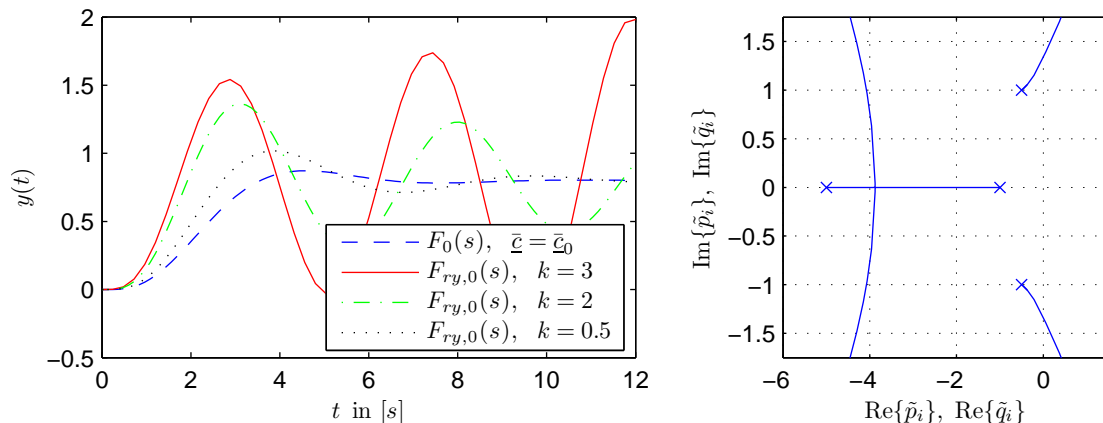


Abbildung 2.15: links: Sprungantwort des geregelten Systems $F_{ry,0}(\cdot)$ sowie unregulierten Systems $F_0(\cdot)$ mit Auskoppelvektor \bar{c}_0 ;
rechts: Wurzelortskurve (x: Pole, o: Nullstellen): instabiles Verhalten tritt ab einer Verstärkung von $k = 2.51$ auf

Es zeigt sich somit auch für Systeme mit höherem Relativgrad $\tilde{r} > 1$ die Problematik nicht-minimalphasiger Systeme. Geht man grundsätzlich bei einem System mit Ordnung \tilde{n} von einem Nullstellenpolynom der Ordnung $\tilde{m} = \tilde{n} - 1$ aus, so erfüllen alle Nullstellenpolynome mit einem Relativgrad $\tilde{r} > 1$ nicht die Bedingung der Minimalphasigkeit in Definition 2.10 bzw. Gleichung (2.107), mit der kein Koeffizient Null sein darf. Für das Beispielsystem mit Auskoppelvektor \bar{c}_0 ist mit dieser Betrachtung die Bedingung (2.107) der Minimalphasigkeit nicht erfüllt, was wiederum bedeutet, dass nach Korollar 2.1 eine Richtungsumkehr oder ein früher temporärer Einbruch im Signalwachstum präsent sein müsste. Bei Betrachten der Sprungantwort von $F_0(\cdot)$ in Abbildung 2.5 bzw. 2.15 ist zu erkennen, dass zu Beginn die Steigung des Ausgangssignals $y(\cdot)$ längere Zeit flach bleibt, bevor die Steigung zunimmt und der Endwert angestrebt wird. Wie bereits erwähnt wurde, ist dieses Verhalten auf die Integrator-kette zurückzuführen (vgl. Abbildung 2.4); nachdem mit \bar{c}_0 nur der letzte Zustand \bar{x}_1 der Kette ausgekoppelt wird und daher ein Relativgrad $\tilde{r} = \tilde{n} = 4$ vorliegt, behält dieser den Wert Null, bis, beginnend bei \bar{x}_4 , alle Zustände nacheinander ungleich Null sind. Im Falle von Relativgrad $\tilde{r} = 1$ besteht bei $t = 0$ s immer eine Anfangssteigung ungleich Null – für $\tilde{r} > 1$ liegt immer eine Anfangssteigung Null vor. Dies erinnert an die auf Seite 39ff geschilderte Problematik von Systemen mit temporären Einbruch im Signalwachstum: sobald der Regler eine Stellgrößenänderung beim Anschmieg an den Sollwert durchführt, zeigt sich zunächst keine Reaktion am Ausgang, so dass das

Ausgangssignal den Sollwert durchquert und der Betrag des Regelfehlers wieder zunimmt. Es findet eine erneute unnötige Stellgrößenänderung statt, da sich die vorige Änderung der Stellgröße verzögert noch auswirken wird. Sobald beide Änderungen nach den temporären Einbrüchen zusammen wirken, ist die Stellgrößenänderung zu groß – das Ausgangssignal schwingt auf. Dieses Problem tritt ab einer bestimmten Reglerverstärkung auf, die um so niedriger ist, je größer die Verzögerung bzw. höher der Relativgrad ist. Man stellt somit fest, dass es sich im Falle höheren Relativgrades um einen anfänglichen Einbruch im Signalwachstum handelt, der zu einem Problem in der Regelbarkeit des Systems führt:

Definition 2.11: anfänglicher Einbruch im Signalwachstum

Ein System zeigt einen „anfänglichen Einbruch im Signalwachstum“, wenn die Anfangssteigung des Ausgangssignals $y(\cdot)$ nach einer Sprunganregung am Eingang u zunächst Null ist, bevor das Ausgangssignal mit positiver Steigung bezogen auf den Endwert y_∞ anwächst:

$$\dot{y}(t) = 0, \quad \forall t \in [0, t_1[\quad \& \quad \text{sign}(y_\infty) \dot{y}(t_1) > 0 \quad (2.142)$$

Für diese Verhalten ist ein Relativgrad $\tilde{r} > 1$ Voraussetzung. Wächst das Ausgangssignal jedoch mit einer negativen Steigung bezogen auf den Endwert an, so handelt es sich um eine anfängliche Richtungsumkehr nach Definition 2.8.

Zusammenfassend hält man fest, dass Systeme mit anfänglicher Richtungsumkehr oder mit anfänglichem Einbruch im Signalwachstum, d.h. mit negativer oder keiner Steigung des Ausgangssignals $y(\cdot)$ bezogen auf den Endwert y_∞ , nicht mit einem hochverstärkungs-basierten Regler stabilisiert werden können. Sobald eine anfängliche positive Steigung vorhanden ist, kann stabilisiert werden, sofern sich kein früher temporärer Einbruch im Signalwachstum bzw. eine Richtungsumkehr anschließt. In allen Fällen, bei dem der hochverstärkungs-basierte Regler keine Anwendung finden kann, liegt ein nicht-minimalphasiges System mit instabilen Nullstellen vor. Da für eine Verstärkung $k \rightarrow \infty$, wie gezeigt, \tilde{m} Polstellen des geregelten Systems in den \tilde{m} Nullstellen des Systems enden, ist die diskutierte Problematik bei nicht-minimalphasigen Systemen auf eine instabile Pol-Nullstellenkompensation zurückzuführen, welche im nächsten Kapitel behandelt wird.

2.2.5.5 Zustandsregler: eine Elimination der Nullstellendynamik führt bei nicht-minimalphasigen Systemen zur Instabilität

Das Ziel eines jeden Reglers ist es, die Dynamik eines Systems beliebig beeinflussen zu können. Wie deutlich wurde, tragen sowohl die Pol- als auch Nullstellen zum dynamischen Verhalten bei, womit sich die Frage stellt, wie diese verändert werden können. Im Falle des proportionalen Reglers wurde deutlich, dass durch eine Rückkopplung des Ausgangs über einen Faktor k die Pole kontinuierlich mit k verschoben werden können. Da die die Pole bestimmenden Koeffizienten des Nennerpolynoms des Systems in der Rege-lungsnormalform den Faktoren der Rückkopplungen bzw. Gegenkopplungen der einzelnen Zustände auf den Eingang entsprechen (vgl. Signalfussplan 2.4), können die Pole durch Hinzufügen weiterer Rückkopplungen verschoben werden. Der proportionale Regler aus Abbildung 2.6 fügt eine äußere Rückkopplung über y hinzu, d.h. über die Auskoppelkoeffizienten \bar{c}_0 bis $\bar{c}_{\tilde{m}}$ wird die Rückkopplung der Zustände \bar{x}_1 bis $\bar{x}_{\tilde{m}+1}$ beeinflusst, so

dass effektiv \tilde{m} Rückkopplungsverstärkungen des Systems in Regelungsnormform durch den Regler von \bar{a}_i mit einer Addition auf $\bar{a}_i + k \bar{c}_i$ verändert werden ($i \in \{0, \dots, \tilde{m}\}$); dies bestätigt Gleichung (2.100). Die Regelungsnormform des geschlossenen Kreises ist in Abbildung 2.7 zu sehen. Durch die Reglerverstärkung k ist es somit möglich, die Pole kontinuierlich zu verschieben. Da der Regler zur Verschiebung der \tilde{n} Pole jedoch nur einen Freiheitsgrad mit dem Faktor k bietet, bewegen sich die Pole, wie gezeigt, beschränkt auf der Wurzelortskurve. Fügt ein Regler nicht nur eine äußere Rückkopplung hinzu, sondern koppelt jeden Zustand \bar{x}_i über einen einstellbaren Faktor k_{i-1} mit $i \in \{1, \dots, n\}$ zurück, so kann jeder Koeffizient bzw. Pol des Nenners der Strecke beliebig verändert werden – dieser Regler wird als *Zustandsregler* bezeichnet und garantiert eine *freie Polverschiebbarkeit*. Der entsprechende Signalflussplan ist in Abbildung 2.16 zu sehen. Das Regelgesetz

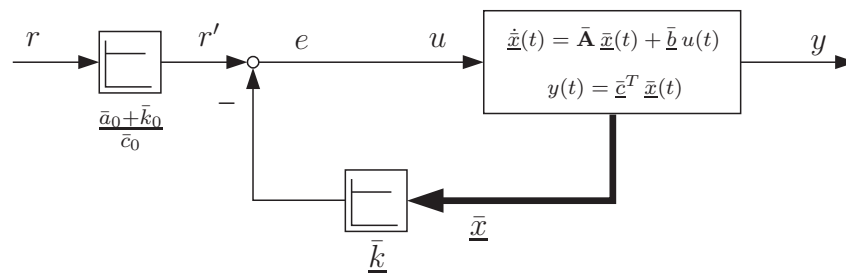


Abbildung 2.16: Signalflussplan eines zeitkontinuierlich geregelten zeitkontinuierlichen Systems mit Zustands-Regler und Vorverstärkung (Vorfilter)

mit dem gefilterten Sollsignal $r'(\cdot)$ lautet:

$$u(t) = r'(t) - \bar{k}^T \bar{x}(t) = r'(t) - (\bar{k}_0 \quad \bar{k}_1 \quad \dots \quad \bar{k}_{n-1}) \bar{x}(t) \quad (2.143)$$

Angewandt auf das System (2.72) folgt für die Zustandsbeschreibung des geschlossenen Regelkreises in Regelungsnormform:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) &= \underbrace{(\bar{A} - \bar{b} \bar{k}^T)}_{\bar{A}_{\text{Reg}}} \bar{x}(t) + \bar{b} r'(t) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -(\bar{a}_0 + \bar{k}_0) & -(\bar{a}_1 + \bar{k}_1) & -(\bar{a}_2 + \bar{k}_2) & \cdots & -(\bar{a}_{\tilde{n}-1} + \bar{k}_{\tilde{n}-1}) \end{bmatrix} \bar{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} r'(t) \end{aligned}$$

$$y(t) = \bar{c}^T \bar{x} \quad (2.144)$$

Den entsprechenden Signalflussplan zeigt Abbildung 2.17. Es ist sehr leicht zu erkennen, dass eine Vorverstärkung bzw. -filter

$$F_V(s) = \frac{r'(t)}{r(t)} = \frac{1}{-\bar{c}^T \bar{A}_{\text{Reg}}^{-1} \bar{b}} = \frac{\bar{a}_0 + \bar{k}_0}{\bar{c}_0} \quad (2.145)$$

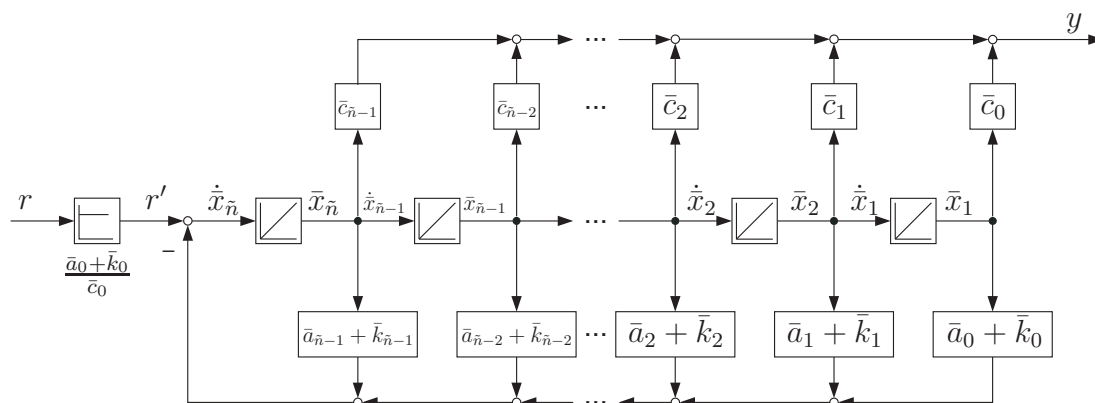


Abbildung 2.17: Signalflussplan des zustandsgeregelten Systems aus Abbildung 2.16 in Regelungsnormalform (geschlossener Kreis)

gemäß Gleichung (2.83) eine stationäre Abweichung vom Sollwert verhindert.

Theorem 2.9: Zustandsregler

Die Übertragungsfunktion $F_{r,y,Z}(\cdot)$ bzw. $F_{r',y,Z}(\cdot)$ des zustandsgeregelten Systems lautet mit Zuhilfenahme der Regelungsnormalform (2.144):

$$F_{r,y,Z}(s) = \frac{\bar{a}_0 + \bar{k}_0}{\bar{c}_0} \frac{\bar{c}_0 + \bar{c}_1 s + \bar{c}_2 s^2 + \dots + \bar{c}_{n-\bar{r}} s^{\bar{n}-\bar{r}}}{(\bar{a}_0 + \bar{k}_0) + (\bar{a}_1 + \bar{k}_1) s + \dots + (\bar{a}_{n-1} + \bar{k}_{n-1}) s^{\bar{n}-1} + s^{\bar{n}}} \quad (2.146)$$

$$= F_V(s) \frac{B(s)}{A_{Reg}^*(s)} \quad (2.147)$$

bzw.

$$F_{r',y,Z}(s) = \frac{B(s)}{A_{Reg}^*(s)} \quad (2.148)$$

Hiermit bestätigt sich, dass durch die n beliebig einstellbaren Verstärkungsfaktoren von $\underline{\bar{k}}$ des Zustandsreglers alle Koeffizienten des Nennerpolynoms frei verändert und folglich alle Systempole beliebig verschoben werden können, um ein Wunschpolynom $A_{Reg}^*(\cdot)$ des geschlossenen Regelkreises zu erhalten; die Nullstellen bleiben jedoch unverändert.

Mit beiden Reglern bleiben die Nullstellen der Strecke im geregelten Zustand erhalten – dies zeigt sich sowohl in der Übertragungsfunktion (2.100) als auch (2.146) des proportional- bzw. zustandsgeregelten Systems; durch Hinzufügen von Rückkopplungen wird die Dynamik, bedingt durch die Polstellen, zwar verändert, die der Nullstellen bleibt jedoch erhalten. Eine Verschiebung von Nullstellen ist daher mit diesen Reglern nie möglich. Um die dynamische Auswirkung der Nullstellen verändern zu können, muss die Dynamik der Nullstellen vollständig kompensiert und das gewünschte dynamische Verhalten durch neue Nullstellen erzeugt werden. Für eine Kompensation bedarf es der Polstellen eines anderen oder desselben Systems als Gegenspieler.

Im Falle des Zustandsreglers mit freier Polverschiebbarkeit können zur Elimination der Nullstellendynamik \tilde{m} Pole desselben Systems auf die \tilde{m} Nullstellen verschoben werden, womit sich die Auswirkung der Nullstellen mit der der Polstellen kompensiert. Am Ausgang des Systems \tilde{n} -ter Ordnung zeigt sich das Verhalten eines um die Ordnung \tilde{m} reduziertes System der Ordnung $\tilde{r} = \tilde{n} - \tilde{m}$ ohne Nullstellen, dessen \tilde{r} Polstellen durch den Zustandsregler beliebig eingestellt werden können. Der Regler führt somit eine sog. *Pol-Nullstellenkürzung* durch, mit welcher ein Teil des Systems nicht steuerbar als auch nicht beobachtbar wird. An dieser Stelle ist bereits zu erkennen, dass die dynamische Eigenschaft der Nullstellen nur verändert werden darf, wenn das resultierende nicht beobachtbare und steuerbare Teilsystem stabil bleibt. Um dies näher zu beleuchten, wird im Folgenden das Vorgehen der Pol-Nullstellenkürzung im Zeitbereich betrachtet.

Um die Eigenschaft der Nullstellen, d.h. des Auskoppelvektors zu eliminieren, muss das zeitliche Verhalten der Zustände über die Rückkopplung des Reglers derart verändert werden, so dass die systemabhängige Auskopplung der Zustände über $\underline{\bar{c}} \in \mathbb{R}^{\tilde{n}}$ ein Ausgangssignal $y(\cdot)$ ergibt, welches einem reduzierten System der Ordnung \tilde{r} ohne Nullstellen, d.h. einem System mit Auskoppelvektor $\underline{\bar{c}}^T = (\bar{c}_0 \ 0 \ \dots \ 0) \in \mathbb{R}^{\tilde{r}}$ entspricht.

Die Simulation 2.18 zeigt die Veränderung der Zustandsverläufe des Beispielsystems (2.82) mit Auskoppelvektor $\underline{\bar{c}} = \underline{\bar{c}}_1$ durch einen Zustandsregler. Die Reglerparameter $\underline{\bar{k}}$ des Zustandsreglers sind dabei derart auszulegen, dass eine Pol-Nullstellenkürzung stattfindet und der verbleibende Pol ($\tilde{r} = 1$) auf $\tilde{p}_1 = -10$ verschoben wird. Zur Bestimmung ist allgemein die Übertragungsfunktion (2.146) mit folgender Gleichheit heranzuziehen:

$$\begin{aligned} (s - \tilde{p}_1) \cdots (s - \tilde{p}_{\tilde{r}})(\bar{c}_0 + \bar{c}_1 s + \bar{c}_2 s^2 + \cdots + \bar{c}_{\tilde{n}-\tilde{r}} s^{\tilde{n}-\tilde{r}}) \\ = (\bar{a}_0 + \bar{k}_0) + (\bar{a}_1 + \bar{k}_1) s + \cdots + (\bar{a}_{\tilde{n}-1} + \bar{k}_{\tilde{n}-1}) s^{\tilde{n}-1} + s^{\tilde{n}} \end{aligned} \quad (2.149)$$

Es ergeben sich \tilde{n} unabhängige Gleichungen zur Berechnung der Rückführverstärkungen \bar{k}_i mit $i \in \{0, \dots, \tilde{n} - 1\}$. Es resultiert der Rückführvektor

$$\underline{\bar{k}} = \underline{\bar{k}}_1 = (243.75 \ 337.5 \ 345.25 \ 35.5)^T \quad (2.150)$$

Wie die Pol- Nullstellenkarte in Abbildung 2.19 zeigt, werden durch den Zustandsregler drei Pole (\times) des Beispielsystems vierter Ordnung in die drei Nullstellen (\circ) verschoben; die Pole des geregelten Systems werden mit dem Symbol \square dargestellt. Der verbleibende Pol wird auf $\tilde{p}_1 = -10$ verschoben. Bei erfolgreicher Kompensation verbleibt ein System erster Ordnung mit einer Zeitkonstante $T_{PT_1} = -1/\tilde{p}_1 = 0.1$, ein sog. Verzögerungsglied erster Ordnung (PT_1), welches nicht schwingungsfähig ist. Wie die Simulation des unregulierten System in Abbildung 2.18 oben zeigt, ist das Beispielsystem hingegen schwingungsfähig und wurde folglich durch den Zustandsregler aktiv bedämpft. Die stark positiven Elemente \bar{k}_i des Rückführvektors (2.150) erhöhen die bereits positiven Verstärkungen \bar{a}_i der Systemrückkopplungen, womit entsprechend des Signalflussplanes 2.17 ein schnellerer Einschwingvorgang zu erwarten ist. Die hierdurch auftretende Verkleinerung des Endwertes wird durch die Vorverstärkung kompensiert. Als Folge reagieren die Zustände des geregelten Systems in Abbildung 2.18 unten schneller als die des unregulierten Systems in Abbildung 2.18 oben auf einen Eingangssprung. Durch die Wahl des Rückführvektors werden die zeitlichen Verläufe der einschwingenden Zustände derart verschoben, so dass die

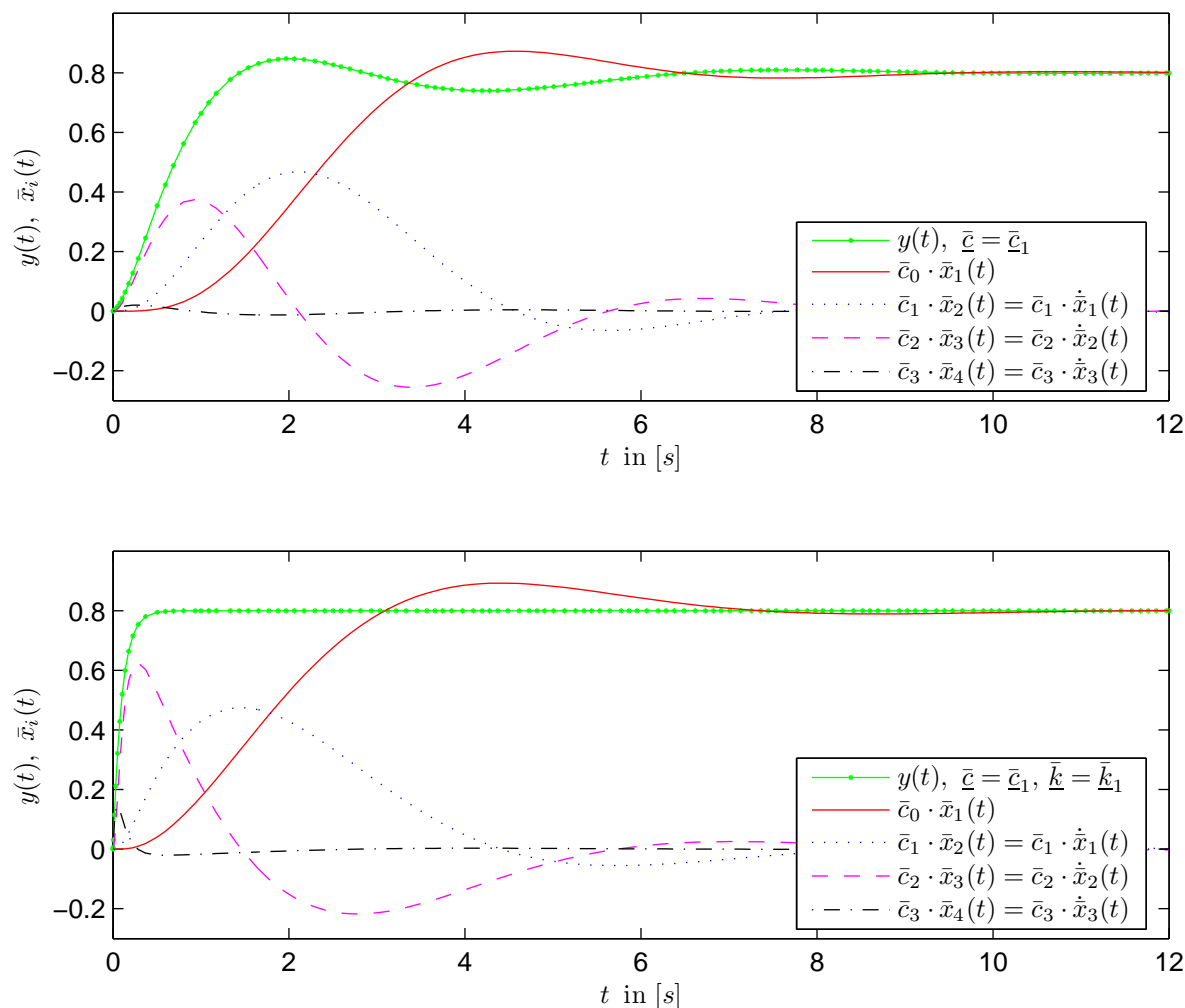


Abbildung 2.18: Sprungantworten der Zustände \bar{x}_i sowie des Ausgangs y des unregulierten (**oben**) bzw. mit \bar{k}_1 zustandsgeregelten (**unten**) Beispielsystems in Regulationsnormalform mit Auskoppelvektor \bar{c}_1 ; die Zustände sind bereits mit den Elementen des Auskoppelvektors gewichtet; im geregelten Fall liegt eine stabile Pol-Nullstellenkürzung vor

mit dem Auskoppelvektor \bar{c}_1 gewichtete Überlagerung der Zustände ein nicht schwingendes Ausgangssignal $y(\cdot)$ ergibt, welches der Sprungantwort eines PT_1 -Systems entspricht; gemäß der Zeitkonstante werden nach $t = 0.1s$ 63% des Endwertes erreicht. Das System der Ordnung $\tilde{n} = 4$ mit Nullstellen verhält sich wie ein System der Ordnung $\tilde{n} = 1$ ohne Nullstellen. Durch die Pol-Nullstellenkürzung ist am Ausgang nicht mehr zu erkennen, dass schwingungsfähige Zustände vorliegen, womit ein Teil des Systems unbeobachtbar wurde. Im vorliegenden Beispiel zeigen die nicht beobachtbaren Zustände abklingendes und somit stabiles Verhalten, d.h. es liegt eine stabile Pol-Nullstellenkürzung vor. Dies ist darauf zurückzuführen, dass das System mit Auskoppelvektor \bar{c}_1 stabile Nullstellen besitzt und folglich die Pole des geregelten Systems stabil bleiben.

Anders verhält es sich, wenn, wie im Falle des Systems mit Auskoppelvektor \bar{c}_4 , instabile Nullstellen auftreten. Für eine Pol-Nullstellenkompensation muss ein Pol des geschlos-

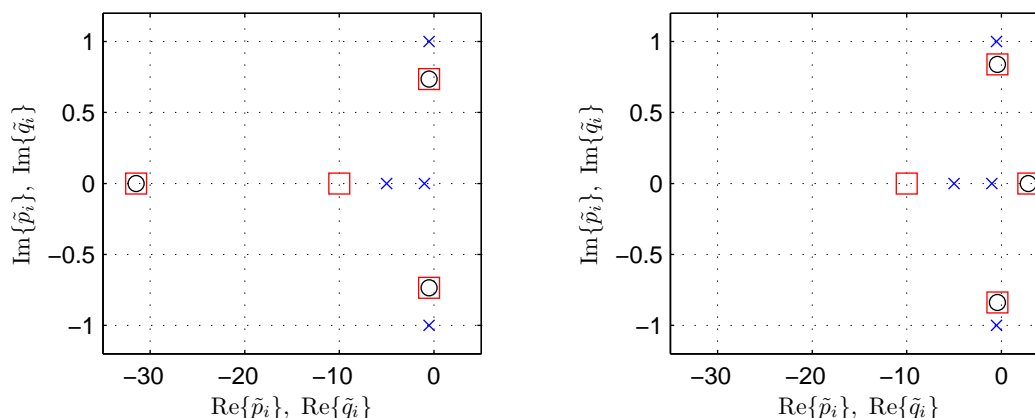


Abbildung 2.19: \circ : Nullstellen des unregulierten wie auch regulierten Systems; \times : Polstellen des unregulierten Systems; \square : Polstellen des regulierten Systems

links: System mit Auskoppelvektor \bar{c}_1 (stabile Nullstellen)

rechts: System mit Auskoppelvektor \bar{c}_4 (stabile und instabile Nullstellen)

senen Kreises in die instabile Ebene des Laplace-Bereiches verschoben werden, d.h. der Regelkreis besitzt instabile Pole. Aus diesem Grund muss es Zustände geben, deren Werte unbegrenzt mit der Zeit anwachsen. Bei einer exakten Pol- Nullstellenkompensation tritt zwar der instabile Pol im reduzierten System und somit das unbegrenzt anwachsende Signal im Ausgangssignal nicht auf, dennoch nehmen nicht-beobachtbare Signale im System unbegrenzt zu. Entweder das reale System wird dadurch zerstört oder es findet eine Begrenzung des Signals statt. Im letzteren Fall kommt es dann zu keiner Pol- Nullstellenkürzung mehr und die zuvor nicht beobachtbaren Signale wirken auf den Ausgang, d.h. die Dynamik der Nullstellen wird nicht mehr wie gewünscht eliminiert.

Theorem 2.10: Instabile Pol- Nullstellenkürzung

Die Dynamik instabiler Nullstellen lässt sich unter der Bedingung eines stabilen Regelkreises nicht eliminieren bzw. beliebig verändern.

Für das Beispielsystem mit Auskoppelvektor \bar{c}_4 berechnet sich nach Gleichung (2.149) folgender Rückführvektor für eine instabile Pol- Nullstellenkürzung:

$$\bar{k} = \bar{k}_4 = (-31.25 \quad 30.0 \quad -33.75 \quad 1.0)^T \quad (2.151)$$

Der verbleibende Pol wird wieder auf $\tilde{p}_1 = -10$ gelegt, d.h. es ist erneut das Ein- Ausgangsverhalten eines PT_1 -Systems zu erwarten. Dies bestätigt die Simulation 2.20 unten des zustandsgeregelten System. Im Unterschied zum unregulierten Systemverhalten in Abbildung 2.20 oben zeigt das Ausgangssignal $y(\cdot)$ kein schwingendes Verhalten mehr – wie erwünscht entspricht das Ein- Ausgangsverhalten dem eines PT_1 -Systems mit der Zeitkonstante $T = 0.1s$, und die Dynamik der instabilen Nullstellen wurde eliminiert. Durch den Zustandsregler wird der zeitliche Verlauf der Zustände wieder derart verändert, dass die Überlagerung der mit dem Auskoppelvektor \bar{c}_4 gewichteten Zustände einen Ausgangssignalverlauf ergibt, der dem eines PT_1 -Systems entspricht. Unglücklicherweise besteht die einzige Möglichkeit dies zu erreichen, in unbegrenzt anwachsenden Zustandssignalen. Al-

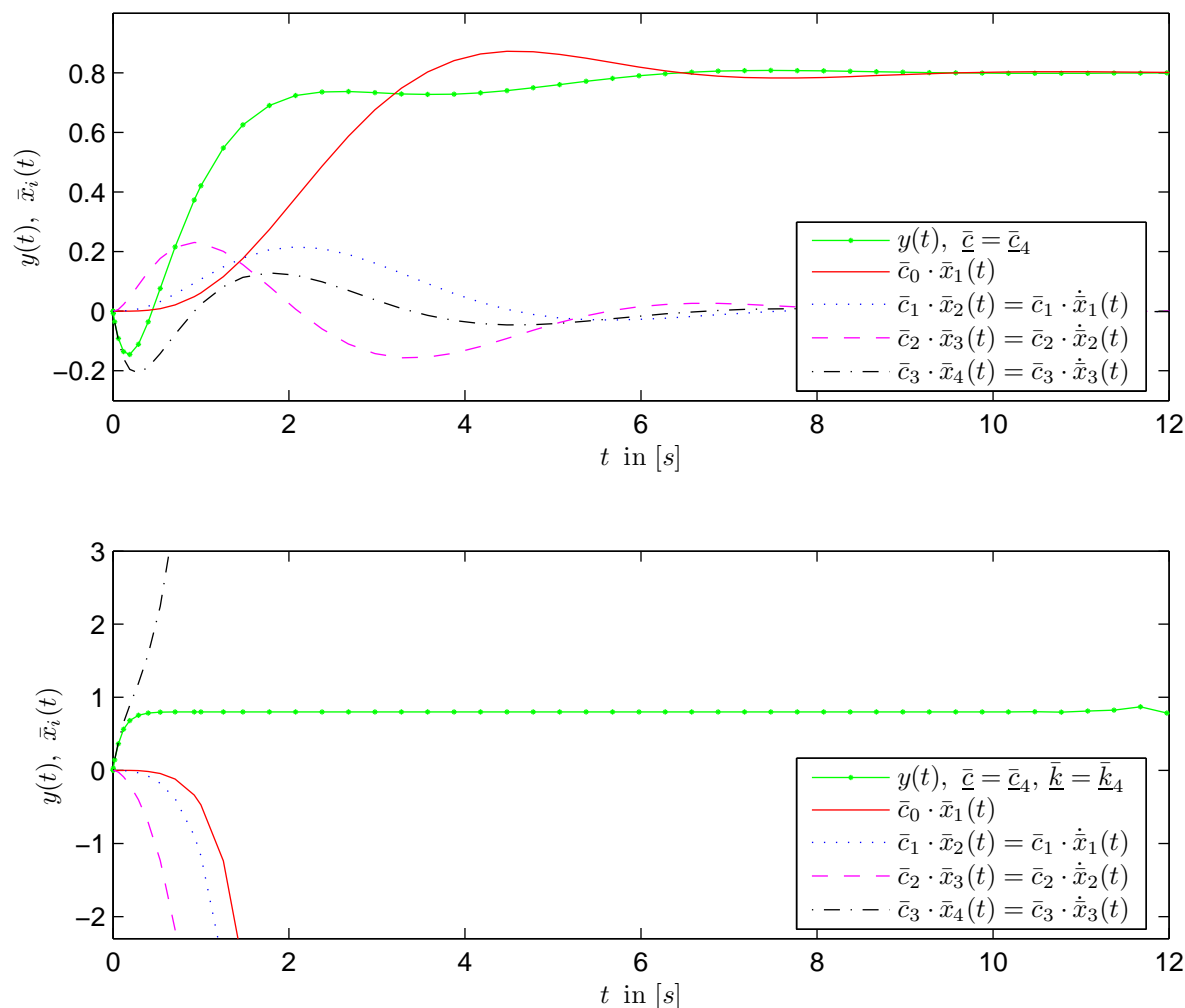


Abbildung 2.20: Sprungantworten der Zustände \bar{x}_i sowie des Ausgangs y des unregulierten (**oben**) bzw. mit \bar{k}_A zustandsgeregelten (**unten**) Beispielsystems in Regulationsnormalform mit Auskoppelvektor \bar{c}_A ; die Zustände sind bereits mit den Elementen des Auskoppelvektors gewichtet; im geregelten Fall liegt eine instabile Pol-Nullstellenkürzung vor

le möglichen Überlagerungen von abklingenden Zustandsverläufen führen in Verbindung mit dem nicht veränderbaren Auskoppelvektor \bar{c}_A zu keinem PT_1 -Verhalten bzw. zu keiner Elimination der Nullstellen-Dynamik. Die Simulation bestätigt Theorem 2.10. Eine instabile Pol-Nullstellenkürzung ist theoretisch möglich, wenn unbegrenzt anwachsende Signale akzeptiert werden, aber selbst in der Simulation treten ab einer gewissen Höhe des Signalwerts Probleme auf Grund der Rechengenauigkeit auf, so dass eine exakte Pol-Nullstellenkürzung scheitert; dies ist am Ende der Simulation zu erkennen, wo sich die Schwingung der Zustände auch im Ausgangssignal zeigt und dieses schließlich aufklingt. In der Realität ist somit eine instabile Pol-Nullstellenkürzung nicht umsetzbar.

Dies gilt für alle Regler, welche die Elimination der System-Nullstellen zum Ziel haben. Für den hochverstärkungsbasierten Regler wurde gezeigt, dass für hohe Verstärkungen gemäß der Wurzelortskurve \tilde{m} Pole in die \tilde{m} Nullstellen wandern und somit zu einer Pol-

Nullstellenkompensation führen. Liegen instabile Nullstellen vor, so ist der Regler nicht anwendbar. Liegen jedoch stabile Nullstellen und ein Relativgrad $\tilde{r} = 1$ vor, so zeigt das geregelte System für die Verstärkung $k \rightarrow \infty$ unabhängig vom Auskoppelvektor \bar{c} ein sehr schnelles PT_1 -Verhalten, wie dies in (2.140) deutlich wurde. In diesem Fall entspricht der hochverstärkungsbasierte Regler einem Zustandsregler, der eine Pol- Nullstellenkürzung durchführt und den verbleibenden Pol gegen $-\infty$ verschiebt.

Wie ersichtlich wurde, muss für die Elimination der Nullstellendynamik der Verlauf der Zustandssignale, die über den Auskoppelvektor das Ausgangssignal bilden, geeignet verändert werden. In den beschriebenen Fällen wurde zur Beeinflussung der Zustandssignale ein Regler verwendet, der die Rückkopplungen der einzelnen Zustände anpasst und somit zum gewünschten Signalverlauf führt. Eine Beeinflussung der Zustandssignale kann jedoch auch durch eine geeignete Anpassung des Eingangssignales durch ein Filter erreicht werden. Soll die Nullstellen-Dynamik des Systems mit der Übertragungsfunktion $F(s) = B(s)/A(s)$ eliminiert werden, wobei die Dynamik der Polstellen im Unterschied zu obiger Vorgehensweise zu erhalten ist, so kann dies durch Erweiterung des Systems um das Filter $F_F(s) = 1/B(s)$ mit den Systemnullstellen als Filterpolstellen erreicht werden. Die Verläufe der Zustandssignale werden dabei derart beeinflusst, dass der nicht veränderbare Auskoppelvektor ein Ausgangssignal erzeugt, welches dem des Systems ohne Nullstellen entspricht – das Ein-Ausgangsverhalten der Serienschaltung $F_S(\cdot)$ aus Filter und System gleicht dem des Systems ohne Nullstellen. Im Frequenzbereich ist dieser Zusammenhang offensichtlich:

$$F_S(s) = F_F(s) F(s) = \frac{1}{A_F(s)} \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{1}{A(s)}; \quad A_F(s) = B(s) \quad (2.152)$$

Über das Filter $F_F(\cdot)$ lässt sich nun auch ein neues Nullstellenpolynom $B_F(\cdot)$ einbringen, so dass es nach außen wirkt, als würde das System einen neuen Auskoppelvektor besitzen:

$$F_S(s) = F_F(s) F(s) = \frac{B_F(s)}{A_F(s)} \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{B_F(s)}{A(s)}; \quad A_F(s) = B(s) \quad (2.153)$$

Mit dieser Darstellung wird deutlich, dass der eigentliche Systemauskoppelvektor nicht verändert werden kann. Es können nur die auszukoppelnden Zustände beeinflusst werden; entweder durch einen Regler oder durch ein Vorfilter. Im Falle des Reglers werden die systemeigenen Polstellen für die Kompensation bzw. Elimination der Nullstellendynamik herangezogen, wodurch sich die Ordnung des nach außen sichtbaren Systems verkleinert, während die Ordnung des Gesamtsystems dieselbe bleibt. Sobald, wie im Falle des Vorfilters, die Nullstellendynamik nicht nur eliminiert, sondern verändert werden soll, bleibt nach außen hin die Ordnung dieselbe, die Ordnung des Gesamtsystems muss sich jedoch um die des Filters erhöhen. Findet also allgemein eine Pol- Nullstellenkompensation statt, ist die nach außen sichtbare Systemordnung stets geringer als die tatsächliche Systemordnung. Aus diesem Grund besteht die Gefahr einer nicht beobachtbaren Instabilität, welche in Erscheinung tritt, wenn die Dynamik instabiler System-Nullstellen verändert werden soll. Für den Fall des Reglers wurde dies mit der Simulation 2.20 verdeutlicht. Im Falle des Filters ist Gleichung (2.153) heranzuziehen. Liegen instabile Nullstellen vor, so besitzt das Filter instabile Pole, womit Zustandssignale des Gesamtsystems aus Filter und System unbegrenzt anwachsen. Die Zustandssignale werden jedoch durch den Auskoppelvektor derart superpositioniert, dass sich die unbegrenzt ansteigenden Anteile gegenseitig aufheben

und am Ausgang nicht in Erscheinung treten. Das Ausgangssignal zeigt das gewünschte Verhalten des Systems ohne Nullstellen, womit die um das Filter erweiterte Ordnung im Ein- Ausgangsverhalten nicht zu erkennen ist. Die Zustandssignale des durch das Filter erzeugten unbeobachtbaren Teilsystems wachsen jedoch unbegrenzt an und zerstören das System.

2.2.5.6 Transformation nach Morse: jeder Regler, der die Dynamik instabiler Nullstellen verändert, führt zur Instabilität

Neben den Überlegungen im vorigen Kapitel kann auch mit Hilfe der Transformation nach Morse [123, 124] bzw. Khalil [95] (siehe Anmerkung 2.9) gezeigt werden, dass ein geregeltes System mit dem Ziel, die Dynamik instabiler Nullstellen zu eliminieren, unbegrenzt anwachsende Signalverläufe zur Folge hat (siehe auch [167, 90]). Für die Transformation wird das lineare dynamische System mit der Übertragungsfunktion

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)}, \quad \deg(B) = \tilde{m} < \deg(A) = \tilde{n} \quad (2.154)$$

in zwei verkoppelte Subsysteme aufgeteilt. Diese bestimmen sich über die Polynomdivision

$$\frac{A(s)}{B(s)} = Q(s) + \frac{R(s)}{B(s)} = \frac{B(s)Q(s) + R(s)}{B(s)} \quad (2.155)$$

mit $Q(\cdot)$ als Quotientenpolynom und $R(\cdot)$ als Restpolynom. Nimmt man nun die Inverse der Gleichung (2.155) und dividiert Zähler und Nenner durch das Produkt $B(s)Q(s)$, so ergibt sich der Formalismus

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{B(s)}{B(s)Q(s) + R(s)} = \frac{\frac{1}{Q(s)}}{1 + \frac{1}{Q(s)} \frac{R(s)}{B(s)}} \quad (2.156)$$

eines gegengekoppelten Systems mit der Übertragungsfunktion $F_V(s) = 1/Q(s)$ des Subsystems im Vorwärtszweig und der Übertragungsfunktion $F_R(s) = R(s)/B(s)$ des Subsystems im Rückwärtszweig. Der entsprechende Signalflussplan ist in Abbildung 2.21 zu sehen. Betrachtet man die Polynomdivision (2.155), so muss das Quotientenpolynom $Q(\cdot)$

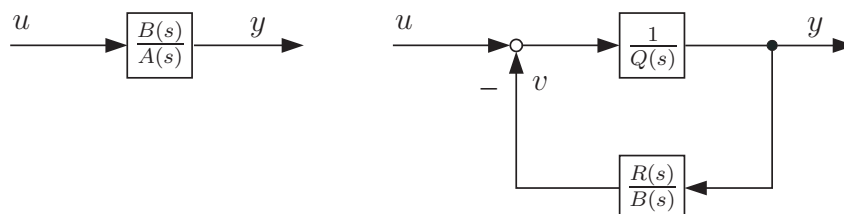


Abbildung 2.21: links: Übertragungsfunktion eines linearen Systems
rechts: Transformation des lineare Systeme nach Morse

die Differenz zwischen der Ordnung \tilde{m} des Zählerpolynoms $B(\cdot)$ und der Ordnung \tilde{n} des

Nennerpolynoms $A(\cdot)$ besitzen, d.h. es gilt $\deg(Q) = \tilde{r} = \tilde{n} - \tilde{m}$. Folglich hat das Subsystem im Vorwärtszweig die Ordnung \tilde{r} . Das Subsystem im Rückwärtszweig zeigt als Nennerpolynom das Zählerpolynom des Systems, womit dieses die Ordnung \tilde{m} besitzen muss. Mit der Transformation nach Morse können die Nullstellen des Systems alternativ als Polstellen des Rückführzweiges betrachtet werden.

Anmerkung 2.9: Byrnes-Isidori-Normalform

Die Transformation nach Morse stellt einen Spezialfall der Transformation in die Byrnes-Isidori-Normalform dar. Letztere spaltete ein nichtlineares dynamisches System in zwei verkoppelte Teilsysteme mit dem Vorteil auf, bekannte Aussagen linearer, zeitinvarianter System auf nichtlineare, zeitvariante Systeme übertragen zu können. Beispielsweise ist der Relativgrad und der Begriff der Minimalphasigkeit zunächst nur für lineare Systeme definiert. Die entsprechenden Eigenschaften lassen sich jedoch auch bei nichtlinearen Systemen finden. Liegt die Byrnes-Isidori-Normalform vor, so kann der Relativgrad des nichtlinearen Systems anhand der Ordnung des Teilsystems im Vorwärtszweig direkt abgelesen werden. Ob ein nichtlineares System die Eigenschaften eines nicht-minimalphasigen linearen Systems zeigt, kann durch Untersuchung des Teilsystems im Rückwärtszweig herausgefunden werden. Zeigt der Zustandsverlauf des Teilsystems im Rückwärtszweig, die sog. Nulldynamik, instabiles Verhalten, so liegt ein nicht-minimalphasiges System im Sinne eines linearen Systems vor. Führt man die Transformation in die Byrnes-Isidori-Normalform für ein lineares System durch, so findet sich das Zählerpolynom des Systems im Nenner des Teilsystems im Rückwärtszweig, d.h. liegt im Falles eines nicht-minimalphasigen Systems ein instabiles Zählerpolynom vor, so ist folglich das Teilsystem im Rückwärtszweig instabil. Zudem entspricht die Ordnung des Teilsystems im Vorwärtszweig dem Relativgrad des linearen Systems. Es wird somit sehr schnell der Zusammenhang der Begriffe Nulldynamik und Minimalphasigkeit sowie Relativgrad zwischen linearen und nichtlinearen Systemen deutlich. Für eine weitergehende Betrachtung der Byrnes-Isidori-Normalform sei auf die Literatur [90] verwiesen. Um die Byrnes-Isidori-Normalform für lineare Systeme zu erhalten, ist ein einfacheres Vorgehen möglich, welches der Transformation nach Morse entspricht.

Liegt nun ein System mit instabilen Nullstellen vor, so ist das Subsystem mit $F_R(\cdot)$ im Rückführzweig instabil. Dies hat jedoch nicht zur Konsequenz, dass das System mit $F(\cdot)$ instabil ist – dessen Stabilität wird bekanntlich durch das Nennerpolynom $A(\cdot)$ beschrieben, welches als stabil angenommen wird. Aus Sicht des instabilen Subsystems besitzt es eine Rückkopplung über das Subsystem im Vorwärtszweig, d.h. das Subsystem mit der Übertragungsfunktion $F_V(\cdot)$ kann als stabilisierender Regler betrachtet werden, der die Pole des Subsystems im Rückwärtszweig verschiebt – das Gesamtsystem ist daher stabil. Bricht ein äußerer Regelkreis jedoch diese stabilisierende Rückkopplung auf, so hat dies Stabilitätsprobleme zur Konsequenz. Dieser Effekt tritt ein, wenn die Dynamik der Nullstellen eliminiert werden soll. Die Nullstellen befinden sich im Subsystem des Rückführzweiges, d.h. ein Regler muss für die Elimination über das Stellsignal $u(\cdot)$ ein Signalverlauf erzeugen, welcher dem des Rückführzweiges entspricht. Sobald für die Stellgröße $u(t) = v(t)$ gilt, ist die Eigenschaft der Nullstellen kompensiert. Wird der Stellgröße nun mit $u(t) = v(t) + r(t)$ zusätzlich ein Signal $r(\cdot)$ überlagert, so hat das Gesamtsystem die Übertragungsfunktion

$y(s)/r(s) = 1/Q(s)$; das beobachtbare Systemverhalten ist reduziert auf das des Subsystems im Vorwärtszweig.

Diesen Überlegungen ist ein Regler zu Grunde gelegt, der dem Zustandsregler gemäß Signalflossplan 2.16 entspricht: \tilde{m} Systempole werden auf die Systemnullstellen für die Pol-Nullstellenkompensation gelegt und die verbleibenden \tilde{r} Pole werden auf die des Polynoms $Q(\cdot)$ verschoben. Dies kommt der zuvor angestellten Überlegung gleich, dass durch die Polynomdivision das Subsystem im Vorwärtszweig die Ordnung \tilde{r} haben muss. Die Konsequenz einer instabilen Pol-Nullstellenkompensation wurde bereits in der Simulation 2.20 dargestellt. Mit Hilfe der Transformation nach Morse in Abbildung 2.21 wird nun auch deutlich, weshalb die nicht beobachtbaren Zustände unbegrenzt anwachsen. Hat der Regler beispielsweise das Ziel $y(t) = \text{const} \neq 0$ und kompensiert folglich zu jedem Zeitpunkt das Signal $v(\cdot)$ des Rückwärtszweiges, womit die gegenseitig stabilisierende Wirkung der beiden Subsysteme aufgebrochen wird, so wächst das Signal $v(\cdot)$ auf Grund des instabilen Subsystems im Rückwärtszweig unbegrenzt an. Da der Regler stets versucht, dieses Signal zu kompensieren, sind die unbegrenzt anwachsenden Zustände am Ausgang y nicht zu beobachten. Die Stellgröße wächst im Zuge ihrer Regelaufgabe gegen Unendlich und folglich auch Signale des Systems. Kann der Regler über das Stellglied beliebig viel Energie abgeben, so wird das System zerstört. Tritt vorher eine Begrenzung der Stellgröße ein, so kann das Signal $v(\cdot)$ nicht mehr kompensiert werden und die beiden Subsysteme sind wieder verkoppelt, was eine Stabilisierung zur Konsequenz hat – die zuvor nicht beobachtbaren Zustände wachsen zwar nicht mehr unbegrenzt an und streben ihre Gleichgewichtslage an, die Nullstellendynamik zeigt sich jedoch wieder am Ausgang, womit die Kompensation der Nullstellen nicht mehr wirksam ist. Die Transformation nach Morse bestätigt alle bisherigen Überlegungen im Zeit- und Frequenzbereich, weshalb eine Veränderung der Nullstellendynamik eines Systems mit instabilen Nullstellen unter der Bedingung eines Lyapunov-stabilen Gesamtsystems nicht möglich ist. Nicht-minimalphasige Systeme besitzen die Fähigkeit, auf ein steigendes Eingangssignal nicht zu antworten. Wie der Name „Nullstelle“ bereits andeutet, werden bestimmte Eingangssignale durch diese genullt und erscheinen daher nicht im Ausgangssignal. Für instabile Nullstellen werden sogar unbegrenzt anwachsende Eingangssignale genullt und erreichen daher nicht den Ausgang.

Das dies nur mit nicht-minimalphasigen Systemen möglich ist, lässt sich nun in einer abschließenden Betrachtung mit einem quantisierten Regelkreis und Korollar 2.1 erklären. Hiernach besitzen derartige Systeme kurzzeitig ein dem Regelziel entgegenwirkendes Signalwachstum. Als Beispiel soll erneut das Beispielsystem (2.82) mit dem Auskoppelvektor \bar{c}_4 herangezogen werden. Die Übertragungsfunktion $F_4(\cdot)$ zeigt eine anfängliche Richtungs-umkehr, bei der der Abstand zum Endwert nach einer Sprunganregung zunächst zunimmt, bevor er gegen Null strebt. Dies verdeutlicht die Simulation 2.22 oben. Führt man die Transformation nach Morse durch

$$\frac{A(s)}{B(s)} = \frac{s^4 + 7s^3 + 12.25s^2 + 12.5s + 6.25}{-2s^3 + 4s^2 + 3s + 5} = Q(s) + \frac{R(s)}{B(s)} \quad (2.157)$$

so ergeben sich folgende Polynome für $Q(\cdot)$ und $R(\cdot)$:

$$Q(s) = -0.5s - 4.5 \quad R(s) = 31.75s^2 + 28.5s + 28.75 \quad (2.158)$$

Um nun den Effekt der instabilen Nullstellen zu eliminieren, muss die Auswirkung des Teilsystems mit $F_R(s) = R(s)/B(s)$ kompensiert werden. Somit zeigt das Gesamtsystem

von außen betrachtet das Verhalten des Teilsystems im Vorwärtszweig mit $F_V(s) = 1/Q(s)$. Nach (2.158) besitzt das System im Vorwärtszweig einen Pol bei $\tilde{p}_1 = -9$ ($\tilde{r} = 1$). Für die Umsetzung der Kompensation ist demnach ein Zustandsregler notwendig, der \tilde{m} Pole auf die \tilde{m} Nullstellen des Systems verschiebt und den verbleibenden Pol auf $\tilde{p}_1 = -9$ setzt. Hiermit ergibt sich folgender Rückführvektor des Zustandsreglers, welcher aus den Elementen des Restpolynoms $R(\cdot)$ und Nullen besteht:

$$\bar{k} = (28.75 \quad 28.5 \quad 31.75 \quad 0)^T \quad (2.159)$$

Mit $F_V(s) = 1/Q(s)$ soll sich das geregelte System gemäß eines PT_1 -Gliedes mit der Zeitkonstante $T = 1/9s = 0.1s$ verhalten; der entsprechende Sollwert $r(\cdot)$ ist in der Simulation 2.22 oben und Mitte eingezeichnet.

Bringt man eine Quantisierung der Stellgröße mit $\Delta = 2$ ein, so verdeutlicht die Simulation 2.22 das Reglerverhalten bei einer instabilen Pol-Nullstellenkürzung, welches nach bisheriger Überlegung zu einer unendlich anwachsenden Stellgröße führen muss. Durch die Auslegung des Reglers wird, wie in der Simulation 2.22 Mitte zu erkennen, die negative Sprungantwort und somit die anfängliche Richtungsumkehr des Systems verwendet, um den Regelfehler zu verkleinern; hierfür wird bei t_0 eine negative Stellgröße von $u^\Delta(t_0) = -2\Delta$ auf das System geschaltet. Wie in Abbildung 2.22 oben zu erkennen, verhält sich das Ausgangssignal $y(\cdot)$ anfänglich ähnlich dem Sollverlauf $r(\cdot)$. Nach kurzer Zeit ist jedoch die Richtungsumkehr abgeschlossen, und die Systemantwort strebt in Folge der negativen Stellgröße einen negativen Endwert an; der Regelfehler steigt an und der Regler versucht diesen mit einer weiteren negativen Sprungantwort mit Richtungsumkehr zu verkleinern – hierzu wird ein weiterer Sprung bei t_1 mit $u^\Delta(t_1) = -\Delta$ auf das System geschaltet. Der ersten Sprungantwort wird nun eine weitere superpositioniert, worauf sich der Regelfehler wieder verkleinert. Sobald jedoch erneut die Richtungsumkehr abgeschlossen ist, muss die Stellgröße wieder betragsmäßig erhöht werden. Nachdem jede Sprungantwort ihren negativen Wert anstreben wird, muss die Stellgröße für $t \rightarrow \infty$ ständig erhöht werden, um das Regelziel zu erreichen. In Folge strebt $|u^\Delta(t)| \rightarrow \infty$. Da mit jeder weiteren Sprungantwort der negative Endwert betragsmäßig anwächst, muss immer früher die Stellgröße erhöht werden, um dem Sollsignal noch folgen zu können; somit wächst die Stellgröße exponentiell ins Unendliche.

Abbildung 2.22 Mitte zeigt die Superposition der Sprungantworten; würde der Regler, wie dargestellt, z.B. bei t_{10} zum letzten Mal die Stellgröße um $-\Delta$ erhöhen und dann konstant bleiben, würde das Ausgangssignal sehr schnell den negativen Endwert anstreben. Wird die Stellgröße hingegen exponentiell erhöht, bleibt der Regelfehler Null und das Regelziel ist erreicht (vgl. Abbildung 2.22 oben). Jedoch zeigen sich bereits am Ende der Zeitskala Unregelmäßigkeiten im Verlauf des Ausgangssignals, die auf numerische Probleme auf Grund des hohen Betrages der Stellgröße zurückzuführen sind. Eine instabile Pol-Nullstellenkürzung ist daher nicht realisierbar. Wollte man das Problem der unendlich anwachsenden Stellgröße umgehen, müsste der Regler mit Aktionen warten, bis die Richtungsumkehr abgeschlossen ist. Dann besitzt der Endwert der einzelnen Sprungantworten dasselbe Vorzeichen wie das Sollsignal – folglich muss die Stellgröße nicht mehr ständig erhöht werden, da es eine beschränkte Anzahl an notwendigen Sprungantworten gibt, die in Summe dem Endwert des Sollsignals entsprechen. Durch das Abwarten, bis die Richtungsumkehr abgeschlossen ist, entspricht jedoch bereits zu Beginn der Istverlauf nicht dem Sollverlauf,

d.h. dem eines PT_1 -Gliedes. Die dann dabei auftretenden Schwingungen werden durch die nicht vollständig kompensierten Nullstellen erzeugt; Abwarten bedeutet somit Erhalt der Nullstellen, die unerwünschte Schwingungen im Ausgangssignal hervorrufen. Der Verlauf eines PT_1 -Gliedes kann nur erzeugt werden, wenn der Regler sofort reagiert und somit die Richtungsumkehr des Systems nutzt, um den Regelfehler zu verkleinern, was jedoch eine unendlich anwachsende Stellgröße zur Folge hat.

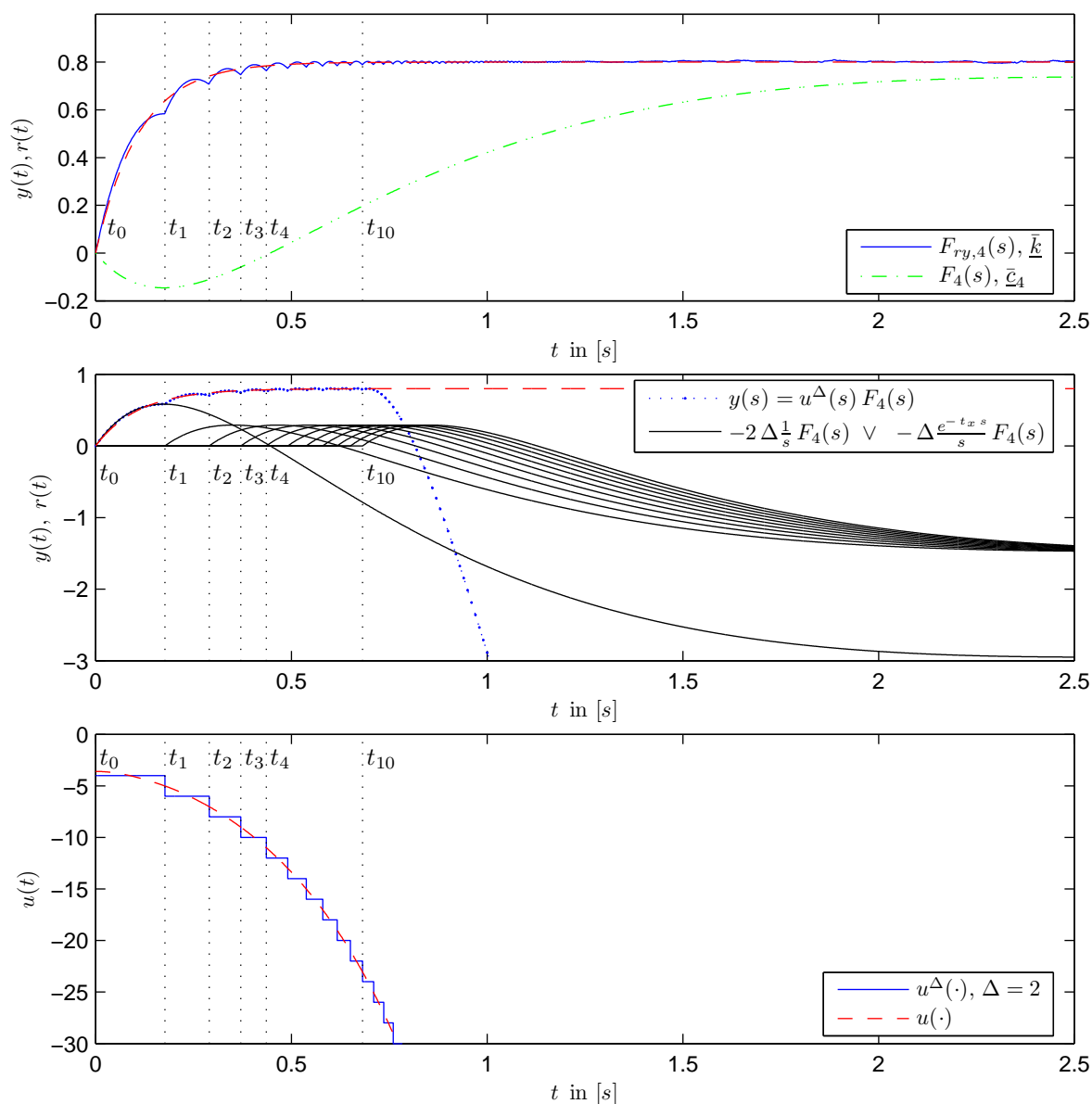


Abbildung 2.22: Sprungantwort $y(\cdot)$ des zustandsgeregelten Systems $F_{ry,4}(\cdot)$ (**oben**) mit der entsprechenden quantisierten Stellgröße $u^\Delta(\cdot)$ (**unten**); das Ausgangssignal $y(\cdot)$ von $F_{ry,4}(\cdot)$ wird durch Superposition der einzelnen verschobenen Sprungantworten von $F_4(\cdot)$, welche durch die quantisierte Stellgröße zu den Zeitpunkten t_0 bis t_x hervorgerufen werden, erzeugt (**Mitte**); das System $F_4(\cdot)$ besitzt den Auskoppelvektor \bar{c}_4 ; der Zustandsregler mit \bar{k} führt zu einer instabilen Pol- Nullstellenkompensation

Zur Verdeutlichung der instabilen Pol- Nullstellenkürzung bei nichtminimalphasigen Systemen mit Hilfe der Transformation nach Morse wurde stellvertretend ein System mit anfänglicher Richtungsumkehr verwendet. Nach Korollar 2.1 müssen Systeme mit später Richtungsumkehr sowie kurzzeitigem Einbruch im Signalwachstum dasselbe Problem mit sich bringen. Dies bestätigt die Simulation 2.23 des Beispielsystems (2.82) mit Auskoppelvektor \bar{c}_2 – die Überlegungen sind hierbei dieselben: Entsprechend der Transformation

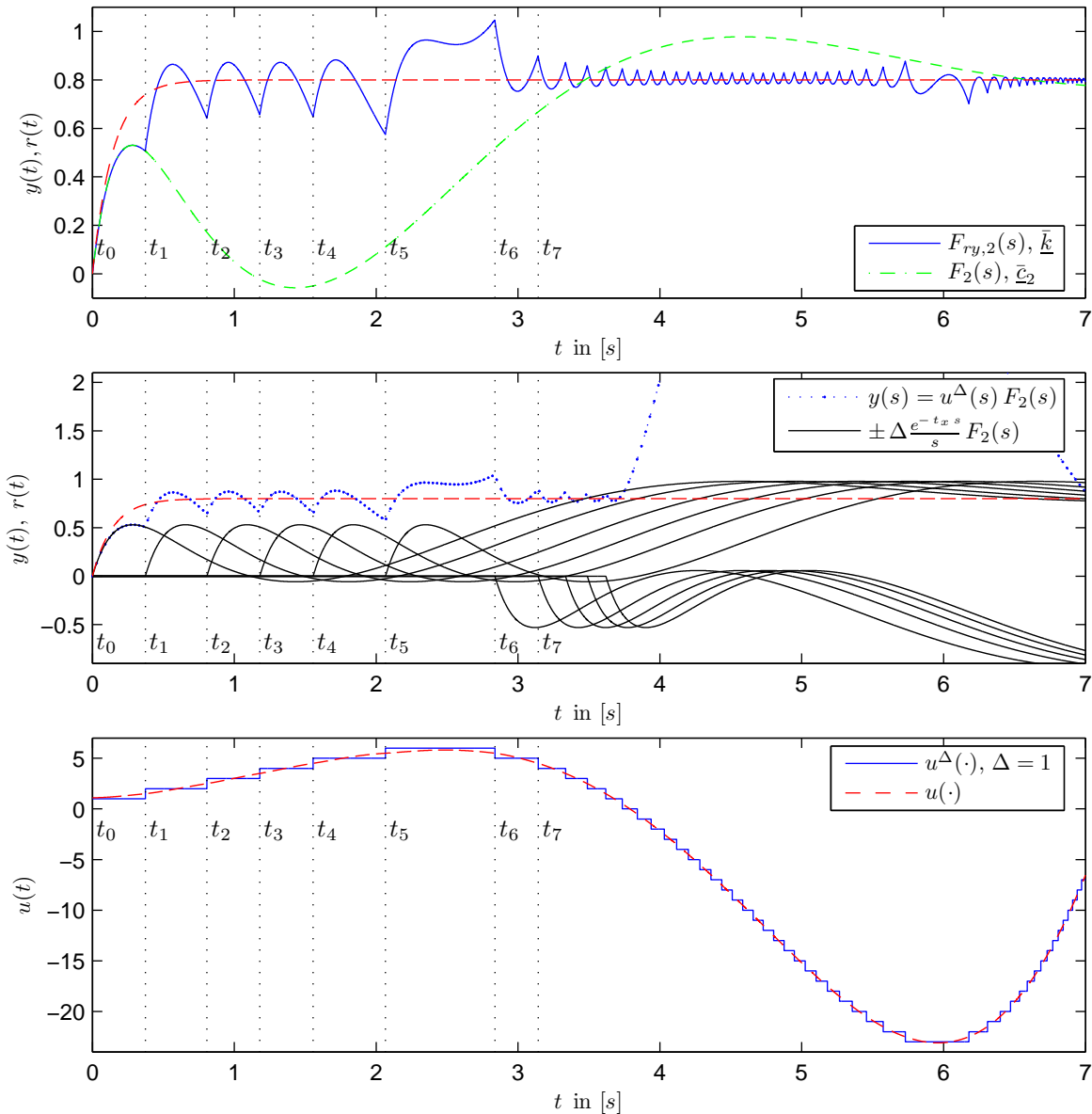


Abbildung 2.23: Sprungantwort $y(\cdot)$ des zustandsgeregelten Systems $F_{ry,2}(\cdot)$ (**oben**) mit der entsprechenden quantisierten Stellgröße $u^\Delta(\cdot)$ (**unten**); das Ausgangssignal $y(\cdot)$ von $F_{ry,2}(\cdot)$ wird durch Superposition der einzelnen verschobenen Sprungantworten von $F_2(\cdot)$, welche durch die quantisierte Stellgröße zu den Zeitpunkten t_0 bis t_x hervorgerufen werden, erzeugt (**Mitte**); das System $F_2(\cdot)$ besitzt den Auskoppelvektor \bar{c}_2 ; der Zustandsregler mit \bar{k} führt zu einer instabilen Pol- Nullstellenkompensation

nach Morse

$$\frac{A(s)}{B(s)} = \frac{s^4 + 7s^3 + 12.25s^2 + 12.5s + 6.25}{5s^3 + 0.5s^2 + 0.5s + 5} = Q(s) + \frac{R(s)}{B(s)}, \quad (2.160)$$

ergeben sich folgende Polynome für $Q(\cdot)$ und $R(\cdot)$:

$$Q(s) = 0.2s + 1.38 \quad R(s) = 11.46s^2 + 10.81s - 0.65 \quad (2.161)$$

Um nun den Effekt der instabilen Nullstellen zu eliminieren, muss die Auswirkung des Teilsystems mit $F_R(s) = R(s)/B(s)$ kompensiert werden, womit das Gesamtsystem von außen betrachtet das Verhalten des Teilsystems im Vorwärtszweig mit $F_V(s) = 1/Q(s)$ zeigt. Nach (2.161) besitzt das System im Vorwärtszweig einen Pol bei $\tilde{p}_1 = -9.6$ ($\tilde{r} = 1$). Für die Umsetzung der Kompensation des Rückwärtszweiges des nach Morse transformierten Systems ist ein Zustandsregler notwendig, der m Pole auf die m Nullstellen des Systems verschiebt und den verbleibenden Pol auf $\tilde{p}_1 = -9.6$ setzt. Es ergibt sich folgender Rückführvektor:

$$\bar{k} = (0.65 \quad -10.81 \quad -11.46 \quad 0)^T \quad (2.162)$$

Das entsprechende Simulationsergebnis mit einer quantisierten Stellgröße von $\Delta = 1$ zeigt Abbildung 2.23. Im Unterschied zum System $F_4(\cdot)$ mit anfänglicher Richtungsumkehr wird bei t_0 eine positive Stellgröße aufgebracht, um den Regelfehler zu verkleinern, womit das Vorzeichen des Endwertes der Sprungantwort dem des Sollwertes entspricht. Folglich wird keine exponentiell anwachsende Stellgröße, wie zuvor, resultieren. Tritt jedoch der temporäre Einbruch auf, welcher in diesem Fall sogar einer verspäteten Richtungsumkehr gleich kommt, wird deutlich, weshalb die Stellgröße dennoch unbegrenzt anwachsen muss. Sobald der Einbruch bzw. die Richtungsumkehr bei t_1 einen zu großen Regelfehler erzeugt, wird die Stellgröße um $+\Delta$ erhöht. Aber auch diese resultierende Sprungantwort und die folgenden werden ihre verspätete Richtungsumkehr zeigen, womit die Stellgröße mehrmals um $+\Delta$ erhöht werden muss, um die in Folge immer wieder auftretenden Einbrüche durch Superposition neuer Sprungantworten zu kompensieren (t_2 bis t_5). Sobald jedoch die kurzzeitige Richtungsumkehr der ersten Sprungantworten abgeschlossen ist, und die positiven Endwerte angestrebt werden, nimmt das aus den Sprungantworten superpositionierte Ausgangssignal sehr stark zu, so dass bei t_6 der Regelfehler zu einem negativen Sprung $-\Delta$ der quantisierten Stellgröße führt; in Folge nimmt der Regelfehler wieder ab, jedoch nur kurzzeitig, da nun verzögert wieder die Richtungsumkehr auftritt und das Ausgangssignal auf Grund der Sprungantworten von t_0 bis t_5 stark zunimmt. Letzteres führt dazu, dass die folgenden Sprungantworten immer früher und öfter erzeugt werden müssen, d.h. die Stellgröße wird öfters um $-\Delta$ verkleinert, als sie zuvor um $+\Delta$ vergrößert wurde – effektiv ergibt sich eine aufschwingende Stellgröße, deren Umhüllende gegen $+\infty$ bzw. $-\infty$ streben muss, um das Ausgangssignal $y(\cdot)$ gemäß des Sollwertes konstant zu halten.

Da eine später auftretende Richtungsumkehr prinzipiell einem verstärkten Einbruch im Signalwachstum entspricht, wie dies der Vergleich der beiden System mit \bar{c}_2 und \bar{c}_3 in Abbildung 2.5 zeigt, können die angestellten Überlegungen direkt auf Systeme mit einem Einbruch im Signalwachstum übertragen werden. Somit wurde mit diesen Beispielen deutlich, dass ein System eine Richtungsumkehr bzw. einen Einbruch im Signalwachstum besitzen muss, damit eine unbegrenzt wachsende Stellgröße ein konstantes Ausgangssignal erzeugen kann.

Abschließend sollen zum Vergleich die Aktionen des Zustandsreglers mit quantisierter Stellgröße bei einer stabilen Pol- Nullstellenkompensation betrachtet werden. Hierfür bedient man sich des Beispielsystems mit Auskoppelvektor \bar{c}_1 . Entsprechend der Transformation nach Morse

$$\frac{A(s)}{B(s)} = \frac{s^4 + 7s^3 + 12.25s^2 + 12.5s + 6.25}{0.2s^3 + 6.5s^2 + 6.5s + 5} = Q(s) + \frac{R(s)}{B(s)}, \quad (2.163)$$

ergeben sich folgende Polynome für $Q(\cdot)$ und $R(\cdot)$:

$$Q(s) = 5s - 127.5 \quad R(s) = 808.5s^2 + 816.25s + 643.75 \quad (2.164)$$

Da ein minimalphasiges System, d.h. stabile Nullstellen vorliegen, ist das Teilsystem im Rückwärtszweig mit $F_R(s) = R(s)/B(s)$ stabil. Um den Effekt der stabilen Nullstellen zu eliminieren, muss daher der Signalverlauf eines stabilen Systems kompensiert werden, wofür nur eine endliche Stellgröße erforderlich ist. Das Gesamtsystem verhält sich dann von außen betrachtet gleich dem Teilsystem im Vorwärtszweig mit $F_V(s) = 1/Q(s)$. Nachdem jedoch nach Gleichung (2.164) der Nenner $Q(\cdot)$ einen instabilen Pol bei $\tilde{p}_1 = 25.5$ besitzt, muss ein Regler neben der Kompensationsaufgabe zudem das Teilsystem im Vorwärtszweig stabilisieren – die erforderliche Verschiebung stellt jedoch gemäß aller bisherigen Diskussionen kein Problem dar. Für die Umsetzung der Kompensation des Rückwärtszweiges des nach Morse transformierten Systems ist ein Zustandsregler notwendig, der \tilde{m} Pole auf die \tilde{m} Nullstellen des Systems verschiebt und den verbleibenden Pol von $\tilde{p}_1 = 25.5$ auf beispielsweise $\tilde{p}_1 = -10$ verschiebt; dies führt zu dem bereits in Simulation 2.18 besprochenen Gesamtsystem. Der notwendige Rückführvektor lautet

$$\bar{k} = (243.75 \quad 337.5 \quad 345.25 \quad 35.5)^T \quad (2.165)$$

und muss mit Gleichung (2.150) übereinstimmen. Nimmt man eine Quantisierung der Stellgröße mit $\Delta = 5$ an, ergibt sich die Simulation 2.24. Im Unterschied zu den nicht-minimalphasigen Systemen tritt die betragsmäßig größte Stellgröße zu Beginn bei t_0 mit einem Sprung von $+8\Delta$ auf. Diese führt zu einer derart skalierten Sprungantwort, so dass deren Anfangssteigung der des gewünschten Sollverlaufes, d.h. dem PT_1 -Glied mit der Zeitkonstante $T = 0.1s$, entspricht. Dies ist sehr gut in Abbildung 2.24 Mitte zu Beginn der Zeitskala erkennbar. Nachdem der Verlauf der Sprungantwort von $F_1(s)$ einen Wendepunkt besitzt, nimmt die Steigung bzgl. der Anfangssteigung zu (vgl. Abbildung 2.24 oben); das gewünschte Sollverhalten zeigt jedoch die größte Steigung zu Beginn. Folglich muss der Betrag des Ausgangssignals durch Superposition weiterer Sprungantworten mit gegensätzlichem Vorzeichen abgebaut werden. Hierzu erfährt die Stellgröße zu den Zeitpunkten t_1 bis t_8 jeweils einen Sprung um $-\Delta$ und nimmt daher ab. Das Ausgangssignal $y(\cdot)$ folgt dem Sollverlauf in Betracht der Quantisierung sehr gut. Zum Zeitpunkt t_8 hat die Stellgröße $u^\Delta(\cdot)$ acht Sprünge um $-\Delta$ durchgeführt, d.h. in Summe mit dem ersten Sprung bei t_0 um $+8\Delta$ ist mit den bisherigen Stellgrößen ein Endwert von Null des Ausgangssignals $y(\cdot)$ zu erwarten. Da der Sollverlauf einen Endwert von $y_\infty = 0.8$ besitzen soll, d.h. dem der Sprungantwort, ist ein Sprung der Stellgröße um $0.2\Delta = 1$ notwendig. Nachdem dies die Quantisierung mit $\Delta = 5$ nicht zulässt, findet ab t_9 eine Mittelwertbildung der Stellgröße durch ständige Schaltbewegungen statt. Auf Grund der Quantisierung zeigt sich in Abbildung 2.24 oben eine Abweichung zwischen Ist- und Sollverlauf. Würde

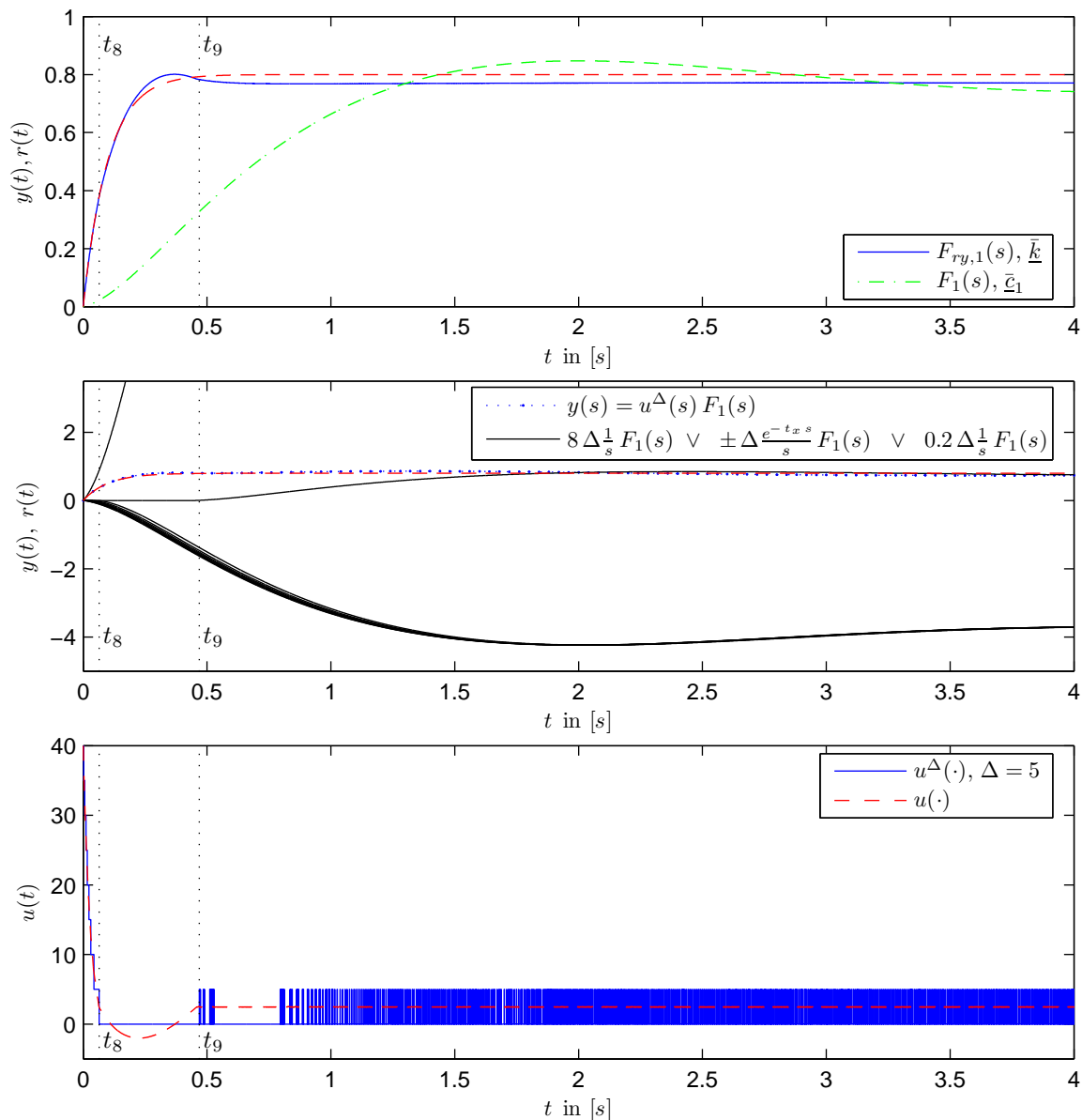


Abbildung 2.24: Sprungantwort $y(\cdot)$ des zustandsgeregelten Systems $F_{ry,1}(\cdot)$ (**oben**) mit der entsprechenden quantisierten Stellgröße $u^\Delta(\cdot)$ (**unten**); das Ausgangssignal $y(\cdot)$ von $F_{ry,1}(\cdot)$ wird durch Superposition der einzelnen verschobenen Sprungantworten von $F_1(\cdot)$, welche durch die quantisierte Stellgröße zu den Zeitpunkten t_0 bis t_x hervorgerufen werden, erzeugt (**Mitte**); das System $F_1(\cdot)$ besitzt den Auskoppelvektor \bar{c}_1 ; der Zustandsregler mit \bar{k} führt zu einer stabilen Pol- Nullstellenkompensation

jedoch zum Zeitpunkt t_9 eine Stellgrößenänderung um $+0.2\Delta$ möglich sein, so wäre das Regelziel erreicht, wie dies Abbildung 2.24 Mitte durch Superposition verdeutlicht. Die Stellgröße bleibt nun für alle Zeiten konstant und somit begrenzt. Wäre die Quantisierung kleiner, könnten auch die Schwingung um den Sollwert durch entsprechende beschränkte Gegenschwingungen der Stellgröße eliminiert werden. Die Pol- Nullstellenkompensation bei minimalphasigen Systemen ist stets stabil – keine Systemsignale, insbesondere nicht

die unbeobachtbaren Zustandssignale, wachsen unbegrenzt an.

Mit Hilfe der gewonnenen Erkenntnis kann folgendes Theorem bzgl. minimalphasiger und nicht-minimalphasiger Systeme formuliert werden:

Theorem 2.11:

Besitzt ein System eine Richtungsumkehr bzw. einen temporären Einbruch im Signalwachstum, d.h. es liegt ein nicht-minimalphasiges System vor, so existiert eine Konstellation, bei der ein unendlich anwachsendes Eingangssignal nicht am Ausgang beobachtet werden kann. Ist hingegen ein System minimalphasig, so ist ein unbegrenzt anwachsendes Eingangssignal stets am Ausgang erkennbar.

Da der hochverstärkungsbasierte Regler aus Abschnitt 2.2.5.4 nach dem Prinzip arbeitet, das Ausgangssignal durch Erhöhung der Stellgröße beliebig verändern zu können, scheitert dieser bei der Anwendung auf nicht-minimalphasige Systeme; eine Erhöhung der Stellgröße führt unter Umständen zu keiner Veränderung des Ausgangssignals, was Stabilitätsprobleme zur Folge hat. Der Zustandsregler aus Abschnitt 2.2.5.5 ist auch auf nicht-minimalphasige Systeme anwendbar, jedoch unter der Bedingung, dass die Systemnullstellen unverändert bleiben. Andernfalls kommt es zu einer instabilen Pol-Nullstellenkompensation, welche ebenfalls Stabilitätsprobleme mit sich bringt.

2.2.6 Referenzmodellregelung (engl. Model-Reference-Control)

Es ist im Folgenden ein Regler gesucht, mit dem das dynamische Verhalten eines Systems vollständig beeinflusst werden kann, d.h. sowohl die Polstellen als auch die Nullstellen. Mit Kapitel 2.2.5.6 wurde jedoch verdeutlicht, dass diesem Bestreben von Grund auf Grenzen gesetzt sind, sobald ein zu regelndes System instabile Nullstellen besitzt, d.h. nicht-minimalphasig ist. In diesem Fall können die Nullstellen unter der notwendigen Voraussetzung eines stabilen Gesamtsystems nicht verändert werden. Da in dieser Arbeit der Fokus in der Antriebstechnik liegt, in welcher vorwiegend minimalphasige Systeme zu regeln sind, stellt dies zunächst für einen zeitkontinuierlichen Regler kein Problem dar. Beschränkt man sich somit auf minimalphasige Systeme, kann die Forderung nach einer vollständigen Beeinflussung des Systems mit Hilfe eines Zustandsreglers bereits erfüllt werden (vgl. Kapitel 2.2.5.5). Im Gegensatz zu einem proportionalen bzw. hochverstärkungsbasierten Regler (vgl. Kapitel 2.2.5.4) ist hierfür keine Verstärkung $k \rightarrow \infty$, d.h. unbegrenzte Stellgröße notwendig. Für die Regelung wird jedoch die Messbarkeit aller Zustände vorausgesetzt, was im Allgemeinen nicht der Fall ist. Dieses Problem kann wiederum mit Zustandsbeobachtern gelöst werden, so dass effektiv ein Regler mit beliebiger Systembeeinflussung resultiert, der lediglich die Messung des Ausgangssignals $y(\cdot)$ voraussetzt. Für die Auslegung des Reglers müsste die Kenntnis über das Ein- Ausgangsverhalten demnach ausreichen, d.h. es müsste zum Regeln lediglich die Übertragungsfunktion des Systems bekannt sein und nicht die vollständige Zustandsbeschreibung. Im Folgenden soll gezeigt werden, dass gemäß dieser Gedanken aus einem Zustandsregler mit Beobachter ein sog. *Referenzmodellregler* (MRC) resultiert, bei dem eine beliebige Wunschübertragungsfunktion, das Modell, vorgegeben wird, gemäß diesem sich das geregelte System verhält.

2.2.6.1 Zustandsregler

In Kapitel 2.2.5.5 wurde dargestellt, dass die Polstellen eines Systems in Regelungsnormalform durch einen Zustandsregler mit dem Rückführvektor $\underline{\tilde{k}}$ beliebig verschoben werden können. Da für die Beweisführung eine lineare Transformation (2.22) mit der Transformationsmatrix (2.73) in Regelungsnormalform verwendet wurde, muss zum Erhalt des Rückführvektors $\underline{\tilde{k}} = \tilde{\mathbf{T}}_R \underline{\tilde{k}}$ die Rücktransformation mit $\tilde{\mathbf{T}}_R$ Anwendung finden. Diese verändert nicht das Systemverhalten, womit die freie Polverschiebbarkeit auch für das Originalsystem (2.13)

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}}(t) &= \tilde{\mathbf{A}} \underline{x}(t) + \tilde{\underline{b}} u(t) + \tilde{\underline{f}} v(t), & \underline{x}(t) &= \underline{x}_i + \underline{x}_0 \\ y(t) &= \tilde{\underline{c}}^T \underline{x}(t)\end{aligned}\quad (2.166)$$

mit dem Stellsignal $u(\cdot)$, dem unbekanntem Störsignal $v(\cdot)$ und den Anfangswerten $\underline{x}(t = 0) = \underline{x}_0$ erhalten bleibt und bewiesen ist. Das Regelgesetz des Zustandsreglers bzgl. des Originalsystems mit dem gefilterten Sollsignal $r'(\cdot)$ lautet gemäß (2.143)

$$u(t) = r'(t) - \underline{\tilde{k}}^T \underline{x}(t) \quad (2.167)$$

Durch Anwendung dieses Regelgesetzes ergibt sich die Systemmatrix des geregelten Systems gemäß Gleichung (2.144) wie folgt:

$$\tilde{\mathbf{A}}_{Reg} = \tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\underline{b}} \underline{\tilde{k}}^T \quad (2.168)$$

Hieraus lässt sich das die Pole bestimmende charakteristische Polynom des zustandsgeregelten Systems berechnen (vgl. Theorem 2.1):

$$A_{Reg}(s) = \det[s \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}_{Reg}] = \det[s \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}} + \tilde{\underline{b}} \underline{\tilde{k}}^T] \quad (2.169)$$

Mit dem Regelgesetz (2.167) ist klar ersichtlich, dass für die Regelung alle Zustände des Systems messbar sein müssen, es sei denn, die Zustände werden geschätzt. Liegt Systemwissen in Form eines Modells vor, d.h. ist die Zustandsbeschreibung des Systems bekannt, so kann ein paralleles Modell mit derselben Stellgröße wie die des realen Systems beaufschlagt werden. Das Modell nimmt dann dieselben Zustandswerte wie das reale System ein, mit der Bedingung, dass gleiche Anfangswerte der Zustände vorlagen und keine Störung auf das System wirkte. Dies ist jedoch nicht zu gewährleisten, wenn die realen Systemzustände unbekannt sind, so dass ein Fehler in den geschätzten Zuständen $\hat{\underline{x}}(t)$ resultieren wird. In diesem Fall bedarf es eines Beobachters.

2.2.6.2 Zustandsbeobachter

Es ist nun die Aufgabe eines Beobachters, den Fehler, bedingt durch unterschiedliche Anfangswerte ($\underline{x}_0 \neq \hat{\underline{x}}_0$) und unbekanntem Störung, zu korrigieren bzw. zu minimieren. Hierfür werden die geschätzten Zustände solange angepasst, bis das real auftretende messbare Ausgangssignal $y(\cdot)$ mit dem des Modells $\hat{y}(\cdot)$ maximal übereinstimmt – dann müssen die geschätzten Zustände $\hat{\underline{x}}(t)$ denen des realen Systems $\underline{x}(t)$ maximal entsprechen. Die Anpassung der Zustände erfolgt proportional zum Schätzfehler $\dot{\hat{y}}(t) = y(t) - \hat{y}(t)$. Der Signalflussplan 2.25 des Zustands-beobachteten Systems zeigt diesen Sachverhalt sehr anschaulich.

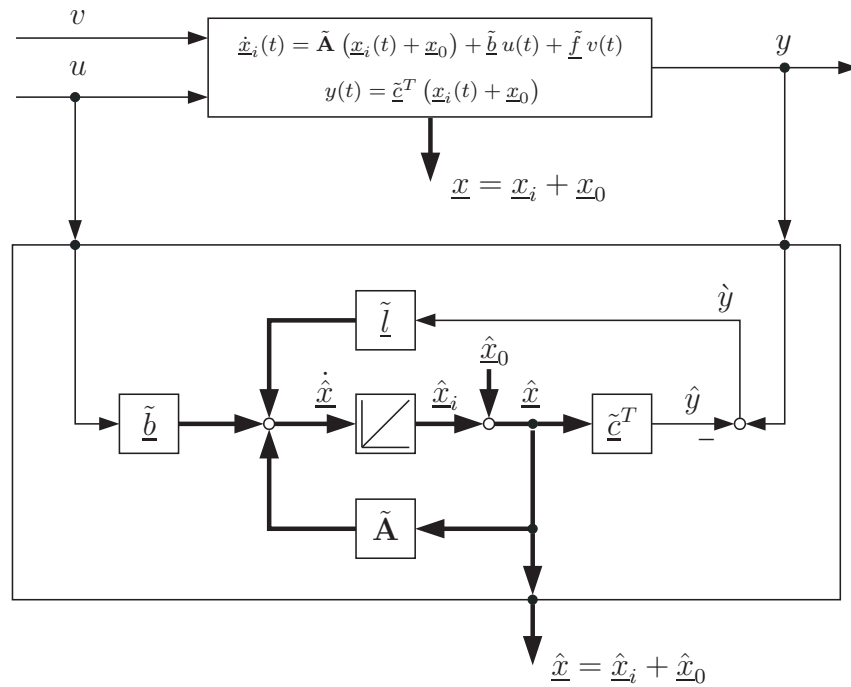


Abbildung 2.25: Signalflussplan eines Zustandsbeobachters

Sobald der Schätzfehler der Zustände $\underline{\hat{x}}(t) = \underline{x}(t) - \underline{\hat{x}}(t)$ identisch Null ist, findet auf Grund von $\dot{y}(t) = y(t) - \hat{y}(t) = 0$ keine Anpassung der Zustände mehr statt – der Beobachter stellt nun ein paralleles identisches System zur realen Strecke dar, welches mit demselben Eingangssignal beaufschlagt wird. Sobald erneut eine Abweichung auftritt, findet wieder eine Anpassung statt und Beobachter und Strecke sind erneut verkoppelt. Nachdem der Beobachter zwar einen Anfangswert modellieren kann, die unbekannte Störung jedoch nicht, ist zu erwarten, dass der Fehler $\underline{\hat{x}}(t)$ bzw. $\hat{y}(t)$ auf Grund der unterschiedlichen Anfangswerte vollständig eliminiert werden kann, der durch die Störung verursachte Fehler jedoch nur zu minimieren ist. Daher ist es im ersten Fall möglich, dass das System nach erfolgter Schätzung entkoppelt ist, im zweiten Fall besteht jedoch ständig eine Verkopplung, um durch den Beobachter ohne Störmodell durch ständiges Anpassen das System mit Störung maximal zu repräsentieren und somit den Schätzfehler der Zustände zu minimieren. Je schneller angepasst wird, d.h. je schneller der Beobachter, desto geringer der verbleibende Fehler. Welches dynamische Verhalten das Gesamtsystem aus Strecke und Beobachter nun besitzen und ob Stabilität auf Grund der Verkopplung gewährt wird, ist im Folgenden zu klären. Die betrachtete Beobachter-Struktur lautet:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= \tilde{\mathbf{A}} \hat{x}(t) + \tilde{\mathbf{b}}u(t) + \tilde{\mathbf{l}}(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) &= \tilde{\mathbf{c}}^T \hat{x}(t)\end{aligned}\quad (2.170)$$

bzw. ineinander eingesetzt

$$\dot{\hat{x}}(t) = [\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{l}}\tilde{\mathbf{c}}^T] \hat{x}(t) + \tilde{\mathbf{b}}u(t) + \tilde{\mathbf{l}}y(t)\quad (2.171)$$

mit der Beobachter-Systemmatrix

$$\tilde{\mathbf{A}}_{Beo} = \tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{l}}\tilde{\mathbf{c}}^T\quad (2.172)$$

und dem charakteristischen Polynom

$$A_{Beo}(s) = \det[s \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}_{Beo}] = \det[s \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}} + \tilde{\mathbf{l}}\tilde{\mathbf{c}}^T] \quad (2.173)$$

Die Fehlerdifferentialgleichung mit dem Zustandsfehlervektor $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{x}(t) - \hat{\underline{x}}(t)$ ergibt sich durch Subtraktion der Gleichung (2.166) von Gleichung (2.170):

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}(t) &= \tilde{\mathbf{A}} \underline{x}(t) + \tilde{\mathbf{f}} v(t) - \tilde{\mathbf{l}}(y(t) - \tilde{\mathbf{c}}^T \hat{\underline{x}}(t)) \\ &= \tilde{\mathbf{A}} \underline{x}(t) + \tilde{\mathbf{f}} v(t) - \tilde{\mathbf{l}}\tilde{\mathbf{c}}^T \underline{x}(t) + \tilde{\mathbf{l}}\tilde{\mathbf{c}}^T (\underline{x}(t) - \hat{\underline{x}}(t)) \\ \dot{\underline{x}}(t) &= [\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{l}}\tilde{\mathbf{c}}^T] \underline{x}(t) + \tilde{\mathbf{f}} v(t) \end{aligned} \quad (2.174)$$

Wegen des homogenen Anteils ($v(t) = 0$) der Differentialgleichung (2.174) wird deutlich, dass der Fehler auf Grund unterschiedlicher Anfangszustände asymptotisch auf Null abklingt, wenn die Beobachter-Systemmatrix $\tilde{\mathbf{A}}_{Beo} = \tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{l}}\tilde{\mathbf{c}}^T$ stabile Eigenwerte aufweist. Folglich klingt die inhomogene Fehlerdifferentialgleichung bei beschränktem Störsignal $v(\cdot)$ nicht auf und es kommt zu keiner Akkumulation des Schätzfehlers, obwohl die Störung durch den Beobachter nicht modelliert werden kann. Jedoch bleibt für $v(t) \neq 0$ ein kleiner Restfehler $\dot{\underline{x}}(t) \neq 0$; stationär lautet dieser mit $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = v_\infty$ gemäß Gleichung (2.79) bzw. (2.83):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\underline{x}}(t) = \dot{\underline{x}}_\infty = -[\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{l}}\tilde{\mathbf{c}}^T]^{-1} \tilde{\mathbf{f}} v_\infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{y} = \dot{y}_\infty = \tilde{\mathbf{c}}^T \dot{\underline{x}}_\infty \quad (2.175)$$

Wirkt keine Störung, d.h. gilt $v(t) = 0$, so klingen, wie erwartet, die Schätzfehler auf Null ab. Führt man entsprechend des Kapitels 2.2.1.2 eine Modaltransformation durch, welche das Ein- Ausgangsverhalten nicht verändert, so kann mit der Systemmatrix in Diagonalgestalt Gleichung (2.175) umgeschrieben werden:

$$\dot{y}_\infty = -\tilde{\mathbf{c}}^T [\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{l}}\tilde{\mathbf{c}}^T]^{-1} \tilde{\mathbf{f}} v_\infty \quad (2.176)$$

$$= -\tilde{\mathbf{c}}^T \begin{bmatrix} \tilde{\lambda}_{1,Beo} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \tilde{\lambda}_{\tilde{n},Beo} \end{bmatrix}^{-1} \tilde{\mathbf{f}} v_\infty = -\tilde{\mathbf{c}}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{\tilde{\lambda}_{1,Beo}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\tilde{\lambda}_{\tilde{n},Beo}} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{f}} v_\infty \quad (2.177)$$

Hiermit wird deutlich, dass durch Wahl eines sehr schnellen Beobachters, d.h. schnelle Beobachterpole bzw. -eigenwert $\tilde{\lambda}_{i,Beo}$, die Schätzfehler auf Grund der Störung gegen Null gehen:

$$\lim_{\operatorname{Re}\{\tilde{\lambda}_{i,Beo}\} \rightarrow -\infty} \dot{y}_\infty = 0, \quad \lim_{\operatorname{Re}\{\tilde{\lambda}_{i,Beo}\} \rightarrow -\infty} \dot{\underline{x}}_\infty = \underline{0}, \quad i \in \{1, \dots, \tilde{n}\} \quad (2.178)$$

Dass die Beobachterdynamik durch den Beobachterrückführvektor $\tilde{\mathbf{l}}$ beliebig gewählt werden kann und stets ein stabiler Beobachter realisierbar ist, unabhängig davon, ob das System mit der Systemmatrix $\tilde{\mathbf{A}}$ stabiles oder instabiles Verhalten zeigt, soll im Folgenden untersucht werden; hierzu betrachtet man das System in Beobachtungsnormalform.

Theorem 2.12: Beobachtungsnormalform

Durch Anwendung der linearen Transformation (2.22) mit $\tilde{\mathbf{T}} = \tilde{\mathbf{T}}_B$ auf das System (2.166)

resultiert die Beobachtungsnormalform:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}(t) &= \bar{\mathbf{A}} \underline{x}(t) + \bar{\mathbf{b}} u(t) + \bar{\mathbf{f}} v(t) = \tilde{\mathbf{T}}_B^{-1} \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{T}}_B \underline{x}(t) + \tilde{\mathbf{T}}_B^{-1} \tilde{\mathbf{b}} u(t) + \tilde{\mathbf{T}}_B^{-1} \tilde{\mathbf{f}} v(t) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\bar{a}_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\bar{a}_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & -\bar{a}_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -\bar{a}_{\tilde{n}-1} \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{pmatrix} \bar{b}_0 \\ \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \vdots \\ \bar{b}_{\tilde{n}-1} \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} \bar{f}_0 \\ \bar{f}_1 \\ \bar{f}_2 \\ \vdots \\ \bar{f}_{\tilde{n}-1} \end{pmatrix} v(t) \end{aligned} \quad (2.179)$$

$$y(t) = \underline{\bar{c}}^T \underline{x}(t) = \underline{\tilde{c}}^T \tilde{\mathbf{T}}_B \underline{x}(t) = (0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 1) \underline{x}(t)$$

Die Transformationsmatrix bestimmt sich mit

$$\tilde{\mathbf{T}}_B = \begin{bmatrix} \underline{\tilde{q}}_B & \tilde{\mathbf{A}} \underline{\tilde{q}}_B & \tilde{\mathbf{A}}^2 \underline{\tilde{q}}_B & \cdots & \tilde{\mathbf{A}}^{\tilde{n}-1} \underline{\tilde{q}}_B \end{bmatrix}, \quad \underline{\tilde{q}}_B = \tilde{\mathbf{Q}}_B^{-1} (0 \ 0 \ \cdots \ 1)^T, \quad (2.180)$$

wobei $\underline{\tilde{q}}_B$ der letzten Spalte der inversen Beobachtbarkeitsmatrix $\tilde{\mathbf{Q}}_B^{-1}$ aus Gleichung (2.17) entspricht.

Beweis:

Wie das Gleichungssystem (2.179) sukzessive nach $\tilde{\mathbf{T}}_B$ gelöst werden kann, ist u.a. in [46] zu finden.

Anmerkung 2.10: Zusammenhang Regelungs- und Beobachtungsnormalform

Führt man die Berechnungen des Zählerpolynoms $A(\cdot)$ und des Nennerpolynoms $B(\cdot)$ ausgehend von der Beobachtungsnormalform entsprechend des Vorgehens bei der Regelungsnormalform in den Gleichungen (2.74) bis (2.78) durch, so stellt man folgenden Zusammenhang zwischen Regelungs- und Beobachtungsnormalform fest (es gilt jeweils der Index R oder B):

$$\bar{\mathbf{A}}_B = \bar{\mathbf{A}}_R^T, \quad \bar{\mathbf{b}}_B = \underline{\bar{c}}_R, \quad \underline{\bar{c}}_B = \bar{\mathbf{b}}_R \quad (2.181)$$

Hiermit wird das Nennerpolynom $A(\cdot)$ in beiden Fällen, wie erwartet, durch die Dynamik der Systemmatrix bestimmt und das Zählerpolynom $B(\cdot)$ in der Beobachtungsnormalform durch die Einkopplung der Stellgröße u in die Systemzustände \underline{x} bzw. in der Regelungsnormalform durch die Auskopplung der Systemzustände \underline{x} auf den Ausgang y .

In Kapitel 2.2.4 wurde deutlich, dass die Eigenwerte durch eine lineare Transformation des Systems nicht beeinflusst werden. Es stellt somit keine Beschränkung der Allgemeinheit dar, ob die realen Zustände oder die der Beobachtungsnormalform durch den Beobachter rekonstruiert werden, da mit Hilfe der Transformationsmatrix $\tilde{\mathbf{T}}_B$ zwischen diesen umgerechnet werden kann. Für den Beobachter bzgl. des Systems (2.179) in Beobachtungsnormalform ergibt sich gemäß (2.174) folgende die Stabilität bestimmende homogene Fehlerdifferential-

gleichung:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\bar{a}_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\bar{a}_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & -\bar{a}_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -\bar{a}_{\bar{n}-1} \end{bmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{l}_0 \\ \bar{l}_1 \\ \bar{l}_1 \\ \vdots \\ \bar{l}_{\bar{n}-1} \end{pmatrix} (0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 1) \right) \underline{x}(t) \quad (2.182)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -(\bar{a}_0 + \bar{l}_0) \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -(\bar{a}_1 + \bar{l}_1) \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & -(\bar{a}_2 + \bar{l}_2) \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -(\bar{a}_{\bar{n}-1} + \bar{l}_{\bar{n}-1}) \end{bmatrix} \underline{x}(t) \quad (2.183)$$

Nachdem eine Systemmatrix in Beobachternormalform der transponierten Systemmatrix in Regelungsnormalform entspricht (vgl. Gleichung (2.181)), kann das charakteristische Polynom (2.173) des Beobachters gemäß der Gleichung (2.76) bzw. (2.77) berechnet werden:

$$\begin{aligned} A_{Beo}(s) &= \det[s \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}_{Beo}] \stackrel{\text{Lemma 2.1}}{=} \det[s \mathbf{E} - \bar{\mathbf{A}}_{Beo}] \\ &= \det[s \mathbf{E} - (\bar{\mathbf{A}} - \bar{\underline{l}} \bar{\underline{c}}^T)] \\ &= (\bar{a}_0 + \bar{l}_0) + (\bar{a}_1 + \bar{l}_1) s + (\bar{a}_2 + \bar{l}_2) s^2 + \cdots + (\bar{a}_{\bar{n}-1} + \bar{l}_{\bar{n}-1}) s^{\bar{n}-1} + s^{\bar{n}} \end{aligned} \quad (2.184)$$

Hiermit wird deutlich, dass jeder Koeffizient des Beobachter-Nenners über den Beobachterrückführvektor $\bar{\underline{l}}$ beliebig und unabhängig verändert werden kann. Dementsprechend können die Eigenwerte bzw. Pole des Beobachters frei gewählt werden. Unter Berücksichtigung der linearen Transformation $\tilde{\underline{l}} = \tilde{\mathbf{T}}_B \bar{\underline{l}}$ ergibt sich folgendes Theorem:

Theorem 2.13: Zustandsbeobachter

Die Dynamik eines Zustandsbeobachters kann über den Beobachterrückführvektor $\tilde{\underline{l}}$ beliebig eingestellt werden. Somit ist ein beliebig schnelles Abklingen des Schätzfehlers bei entsprechend hoher Verstärkung zu erreichen. Unabhängig der Stabilität des zu beobachtenden Systems existiert stets ein stabiler Beobachter.

Anmerkung 2.11:

Die Transformationsmatrix $\tilde{\mathbf{T}}_B$ in Gleichung (2.180) lässt sich nur bestimmen, wenn die Beobachtbarkeitsmatrix $\tilde{\mathbf{Q}}_B$ invertierbar ist, d.h. die zu rekonstruierenden Zustände am Ausgang beobachtbar sind. Folglich müssen für die Anwendung eines Zustandsbeobachters alle Zustände beobachtbar sein.

Abbildung 2.26 zeigt die Simulation eines Beobachters für das Beispielsystem (2.82) mit dem Auskoppelvektor $\bar{\underline{c}}_0$. Der Anfangszustand des System wird als $\bar{\underline{x}}_0 = (0.1 \ 0 \ 0 \ 0)$ angenommen, d.h. der Anfangswert des Ausgangs beläuft sich auf $y_0 = 0.5$. Die Zustände seien nicht messbar, lediglich der Systemausgang $y(t)$ kann erfasst werden. Wird nun mit dem Wissen der Systemparameter $\bar{\mathbf{A}}$, $\bar{\underline{b}}$ sowie $\bar{\underline{c}}$ zur Rekonstruktion der Zustände $\bar{\underline{x}}$ ein

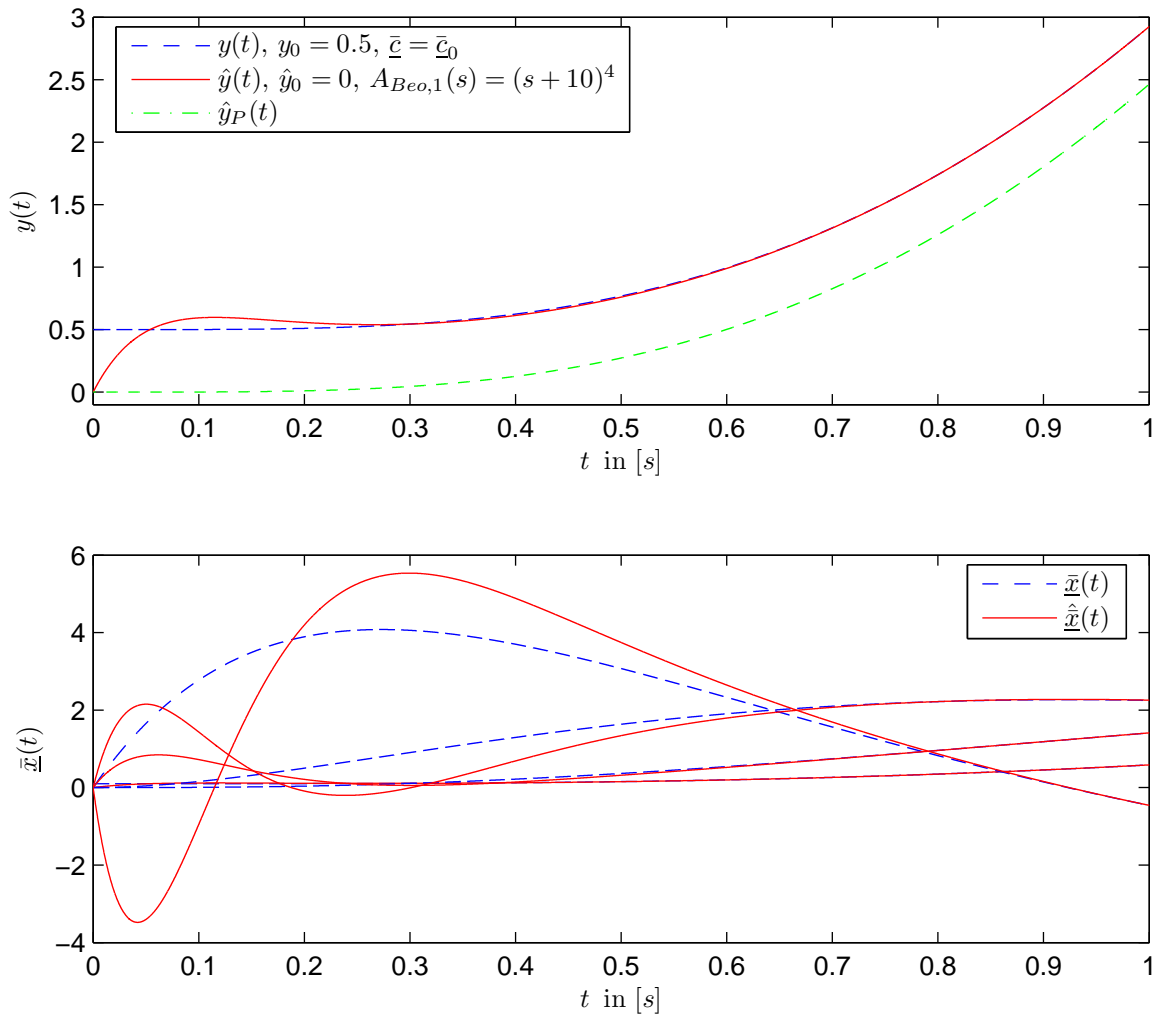


Abbildung 2.26: Einschwingvorgang eines Beobachters mit geringer Dynamik; die Beobachterpole liegen bei $\tilde{\underline{p}}_{Beo,1} = (-10 \ -10 \ -10 \ -10)$

Parallelsystem ohne Verkopplung mit der Strecke erzeugt, so werden sich die Zustände nach Beaufschlagung desselben Eingangssignals $u(\cdot)$ stets um die Anfangswerte unterscheiden. Dies zeigt sich in der Simulation im Ausgangssignal $y_P(\cdot)$ des Parallelsystems, welches auf Grund der Anfangszustände $\underline{\tilde{x}}_{0,P} = (0 \ 0 \ 0 \ 0)$ bei $y_{0,P} = 0$ beginnt und stets einen Fehler von $\dot{y}(t) = y_0 - y_{0,P} = 0.5$ im Ausgangssignal zwischen Strecke und Parallelmodell besitzt. Bedenkt man, dass durch eine fehlerhafte Modellierung bzw. Untermodellierung oder Systemstörung die realen und die rekonstruierten Signale auseinanderdriften und der Fehler $\dot{y}(t)$ weiter anwächst, ist mit einem Parallelmodell zur Rekonstruktion der Zustände eine erfolgreiche Zustandsregelung nicht möglich. Aus diesem Grund verwendet man den betrachteten Zustandsbeobachter, der eine Verkopplung mit dem System besitzt und daher die geschätzten Zustände $\hat{\underline{x}}(t)$ den realen Zuständen $\underline{x}(t)$ stets nachführt. Der notwendige Beobachterrückführvektor $\underline{\tilde{l}}$ wird durch Vorgabe der Beobachterdynamik über die Wunschkpole bzw. das Wunschpolynom $A_{Beo}^*(\cdot)$ bestimmt; je schneller die Pole, d.h. je weiter links die Pole sich in der s -Halbebene befinden, desto schneller klingt der Zustandsfehlervektor $\dot{\underline{x}}(t)$ ab. Für den Beobachter in Simulation 2.26 werden die Pole auf

$\tilde{p}_{B_{eo,1}} = (-10 \ -10 \ -10 \ -10)$ gelegt, womit sich für das charakteristische Polynom des Beobachters $A_{B_{eo,1}}(s) = (s+10)^4$ ergibt. Zunächst wirkt keine Störung $v(\cdot)$ auf das System. Da die Anfangszustände des Beobachters, wie beim Parallelmodell, auf $\hat{\underline{x}}_0 = (0 \ 0 \ 0 \ 0)$ festgesetzt sind, beginnt der Verlauf der geschätzten Zustände $\hat{\underline{x}}(\cdot)$ bzw. des geschätzten Ausgangssignals $\hat{y}(\cdot)$ bei Null und nähern sich entsprechend der festgelegten Dynamik dem Verlauf der Systemzustände $\underline{x}(\cdot)$ – die geschätzten Zustände $\hat{\underline{x}}(t)$ haben den Wert der Systemzustände $\underline{x}(t)$ bei ca. $t = 0.8s$ fast erreichen. Der Fehler $\hat{y}(t)$ zwischen dem Systemausgang $y(t)$ und dem geschätzten Systemausgang $\hat{y}(t)$ nähert sich asymptotisch dem Wert Null. Ab dem Zeitpunkt $t = 0.8s$ spiegeln die geschätzten Zustände die realen Zustände wider. Erhöht man die Dynamik des Beobachters durch Verschiebung der Pole auf $\tilde{p}_{B_{eo,2}} = (-100 \ -100 \ -100 \ -100)$, tritt dies bereits ca. ab dem Zeitpunkt $t = 0.2s$ ein. Die entsprechende Simulation zeigt Abbildung 2.27. Das charakteristische Polynom

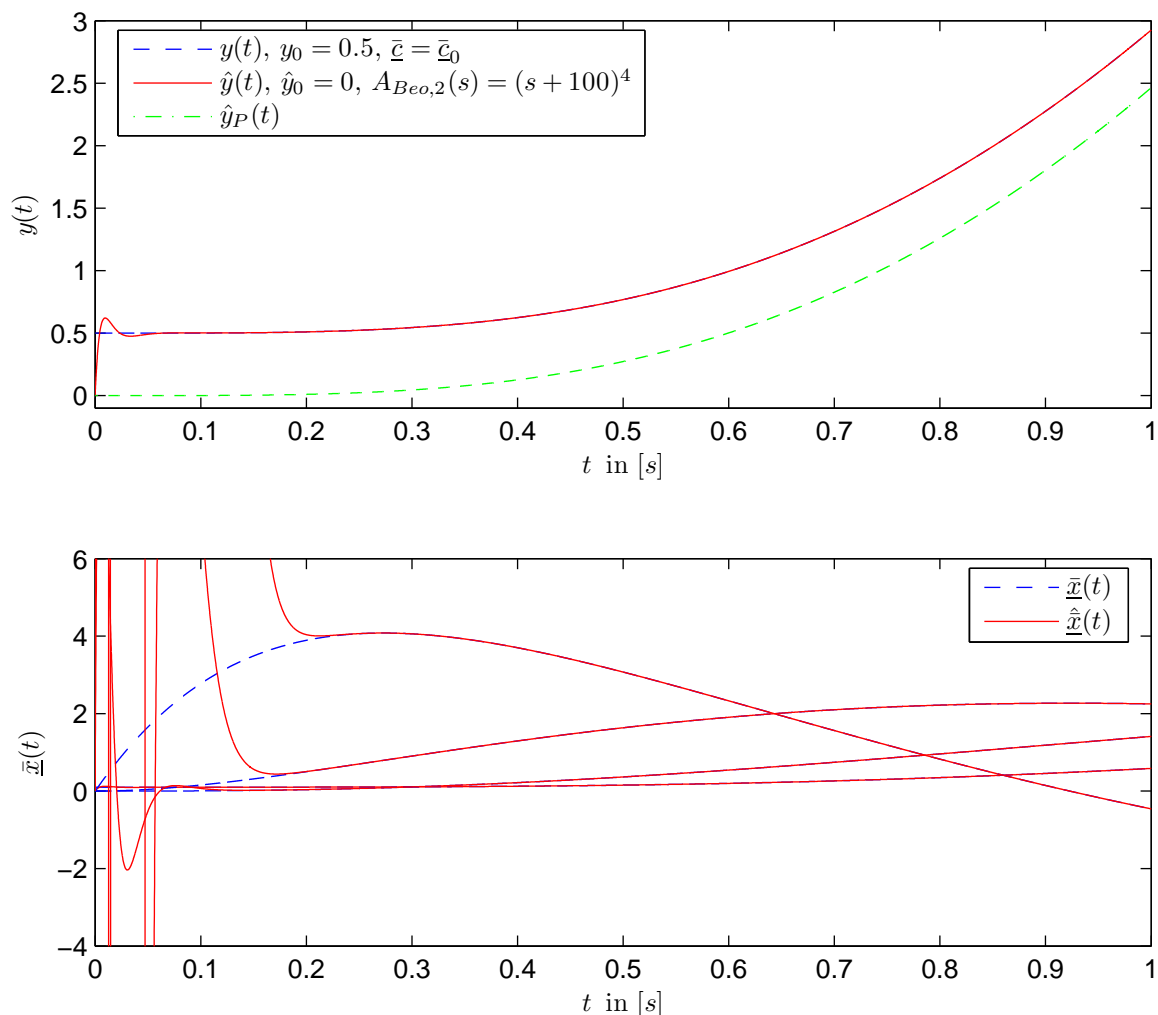


Abbildung 2.27: Einschwingvorgang eines Beobachters mit hoher Dynamik; die Beobachterpole liegen bei $\tilde{p}_{B_{eo,2}} = (-100 \ -100 \ -100 \ -100)$

des Beobachters lautet in diesem Fall $A_{B_{eo,2}}(s) = (s + 100)^4$. Durch Verschieben der Pole gegen $-\infty$ wird folglich ein sofortiges Einschwingen der Zustände und des Ausgangs, d.h.

Abbau des Fehlers $\hat{\underline{x}}(t)$ sowie $\hat{y}(t)$, erreicht. Mit Gleichung (2.178) gilt allgemein:

$$\lim_{\operatorname{Re}\{\tilde{p}_{i,Beo}\} \rightarrow -\infty} \hat{\underline{x}}(t) = 0 \quad \text{für } t > 0, \quad i \in \{1, \dots, \tilde{n}\} \quad (2.185)$$

$$\lim_{\operatorname{Re}\{\tilde{p}_{i,Beo}\} \rightarrow -\infty} \hat{y}(t) = \hat{y}(t) \quad \text{für } t > 0, \quad i \in \{1, \dots, \tilde{n}\} \quad (2.186)$$

Es ist in der Simulation 2.27 jedoch auch zu erkennen, dass, je schneller der Einschwingvorgang, desto höher die Amplitude der geschätzten Zustände während des Einschwingvorganges ($\max(\hat{\underline{x}}) = 12445$). Demzufolge gilt im Grenzfall (2.185):

$$\lim_{\operatorname{Re}\{\tilde{p}_{i,Beo}\} \rightarrow -\infty} |\hat{\underline{x}}(t)| \rightarrow \infty \quad \text{für } t = 0+, \quad i \in \{1, \dots, \tilde{n}\} \quad (2.187)$$

Dies stellt bzgl. der Realisierbarkeit des Beobachters ein Problem dar, da die unendlich hohen Amplituden in der Hardware des Beobachters zur Berechnung der Schätzwerte aus numerischen Gründen nicht verarbeitet werden können. Selbst wenn sehr hohe Amplituden noch verarbeitet werden könnten, ist zu bedenken, dass die Schätzwerte im Allgemeinen für die Berechnung der Stellgröße eines Reglers dienen werden – demzufolge treten bei einer sehr hohen Dynamik des Beobachters während des kurzen Einschwingvorganges hohe Stellgrößen auf, die zwar durch eine Stellgrößenbegrenzung beschränkt bleiben, jedoch trotzdem zu einer kurzzeitigen maximalen Beschleunigung des Systems führen, bei der Schwingungen angeregt werden. Stellt diese kurzzeitige Anregung des Systems kein Problem dar, so kann der Beobachter generell mit einer sehr hohen Dynamik ausgelegt werden.

Es ist jedoch weiter zu bedenken, dass sich Messrauschen im Ausgangssignal $y(\cdot)$ bei hoher Dynamik des Beobachters stark auf die geschätzten Zustände $\hat{\underline{x}}(t)$ auswirkt. In der Simulation 2.28 besitzt das gemessene Ausgangssignal ein Messrauschen innerhalb eines Bandes von $\Delta y = 0.2$. Werden schnelle Beobachterpole bei $\tilde{p}_{Beo,3} = (-1000 \ -1000 \ -1000 \ -1000)$ angenommen, d.h. ein charakteristisches Polynom $A_{Beo,3}(s) = (s + 1000)^4$, so werden die Zustände zwar unverzüglich geschätzt, jedoch tritt das Rauschsignal in annähernd derselben Höhe auch in dem geschätzten Zustandssignal $\hat{\underline{x}}(\cdot)$ auf. Ein auf diesen Zuständen basierender Regler zeigt bekanntlich unnötige Stellaktionen auf Grund des Rauschens. Wird hingegen ein langsamerer Beobachter verwendet, findet indirekt eine Filterung des Ein- und Ausgangssignals statt, so dass in den geschätzten Zuständen, je nachdem, wie träge die Dynamik des Beobachters ist, kaum mehr ein Rauschen auftritt. Für das charakteristische Polynom $A_{Beo,1}(\cdot)$ ist dies in Abbildung 2.28 oben zu erkennen. Die Filtereigenschaft des Beobachters wird in Kapitel 2.2.6.5 besonders deutlich.

Das Verhalten des Beobachters bei einer Störung $v(t) \neq 0$ zeigt Abbildung 2.29. Gemäß der Fehlerdifferentialgleichung (2.174) muss der durch eine Störung $v(t)$ hervorgerufene Schätzfehler $\hat{\underline{x}}(t)$ mit derselben Dynamik abgebaut werden, wie der durch eine unterschiedliche Anfangsinitialisierung der Zustände verursachte Schätzfehler. In der Simulation 2.29 oben ist dieser Sachverhalt für den langsamen Beobachter mit $A_{Beo,1}(\cdot)$ zu erkennen: die Minimierung des Fehlers nach dem Sprung der Störung bei $t = 0.5 \text{ s}$ ist nach annähernd derselben Zeit erreicht, wie der Ausgleich der Anfangszustände zu Beginn der Simulation. In der Abbildung 2.26 war zu erkennen, dass der Schätzfehler, bedingt durch unterschiedliche Anfangswerte, vollständig abklingt – entsprechend Gleichung (2.175) verbleibt bei einer präsenten Störung jedoch ein Schätzfehler $\hat{y}_\infty \neq 0$, was bei ca. $t = 1.2 \text{ s}$ zu erkennen ist. Durch das ständige Nachführen der Zustände ist dieser sehr klein. Durch ein

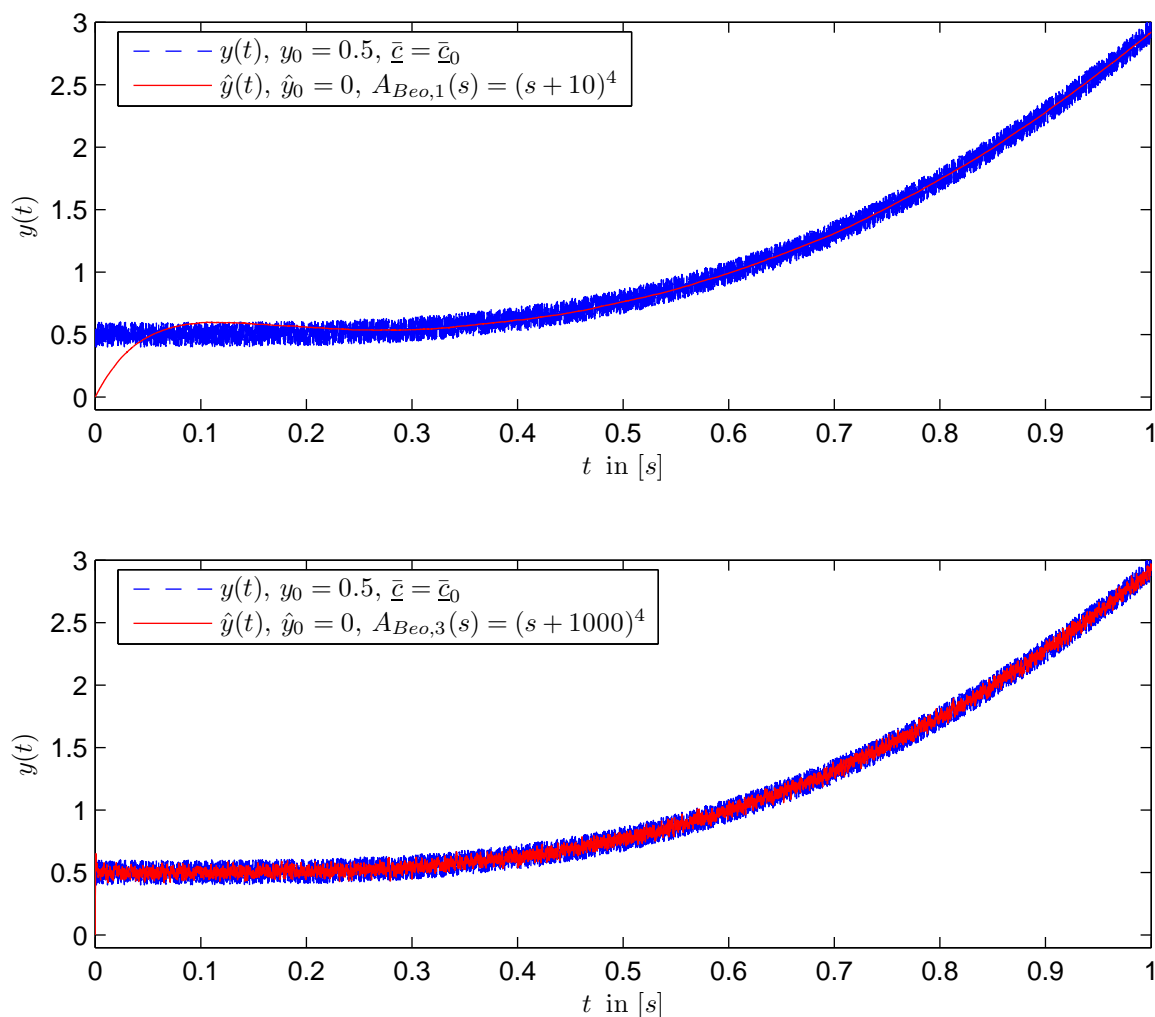


Abbildung 2.28: Einschwingvorgang eines Beobachters mit geringer (**oben**) sowie sehr hoher Dynamik (**unten**) bei einem verrauschten Messsignal $y(\cdot)$; die Beobachterpole liegen bei $\underline{\tilde{p}}_{B_{eo},1} = (-10 \ -10 \ -10 \ -10)$ bzw. $\underline{\tilde{p}}_{B_{eo},3} = (-1000 \ -1000 \ -1000 \ -1000)$

Beschleunigen des Nachführens, d.h. Erhöhung der Beobachtdynamik, muss dieser sich nach Gleichung (2.178) noch weiter verringern. In Abbildung 2.29 unten wurde dieselbe Simulation für den schnellen Beobachter mit $A_{B_{eo},2}(\cdot)$ durchgeführt: der Einschwingvorgang ist sowohl beim Angleichen der Anfangszustände als auch beim Minimieren des durch die Störung bedingten Schätzfehlers wesentlich schneller abgeschlossen und der nach einer Störung verbleibende Fehler \dot{y}_∞ ist in dieser Auflösung, wie erwartet, nicht mehr zu erkennen.

2.2.6.3 Zustandsregler basierend auf einem Zustandsbeobachter

Mit einem Zustandsbeobachter kann nun ein Zustandsregler Anwendung finden, der lediglich die Messbarkeit des Ausgangssignals $y(\cdot)$ und nicht die der Zustände voraussetzt. Es stellt sich jedoch die Frage, ob sich die Dynamik von Zustandsbeobachter und -regler derart

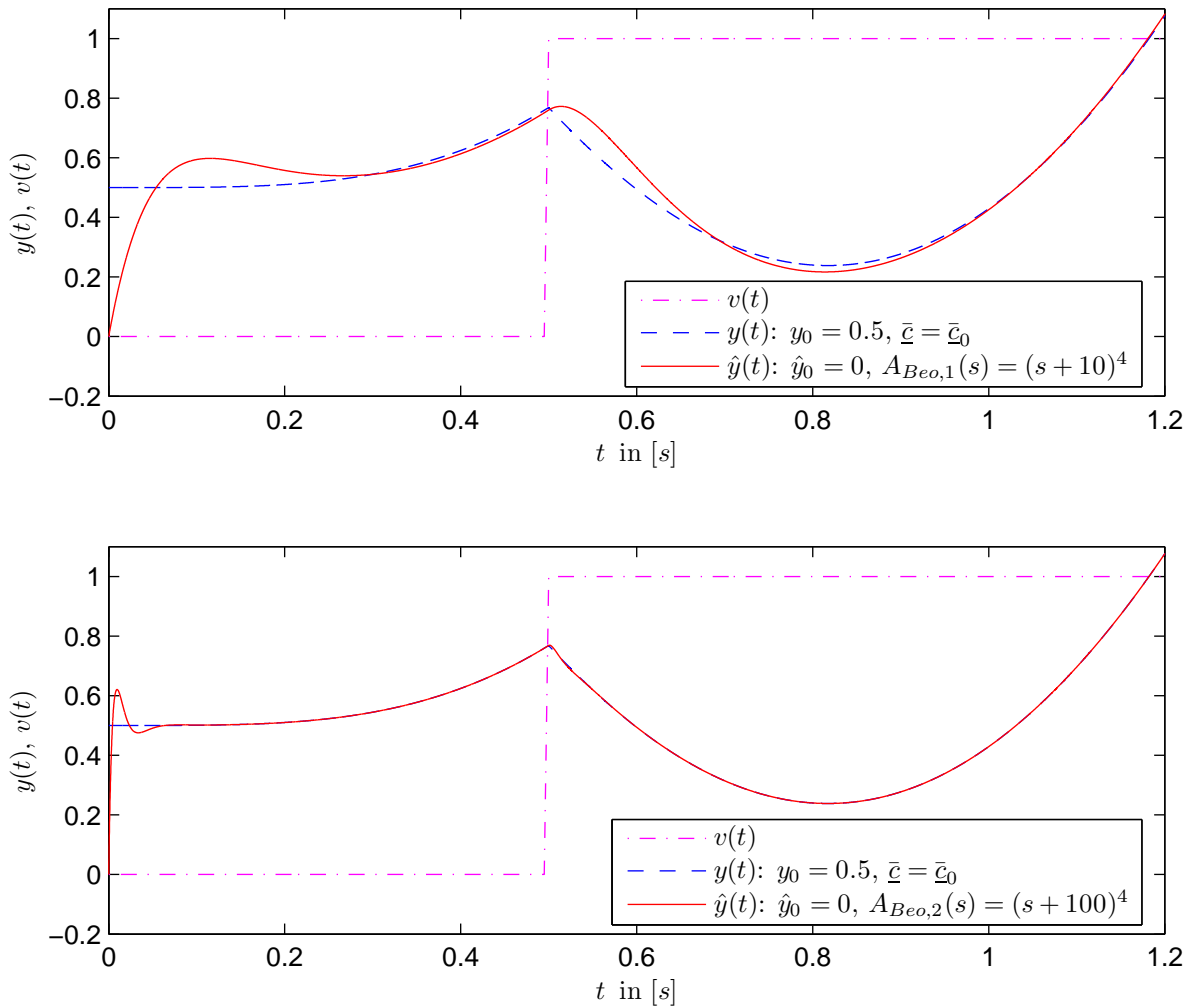


Abbildung 2.29: Einschwingvorgang eines Beobachters mit geringer (**oben**) sowie hoher Dynamik (**unten**) nach Auftreten eines unbekanntes Störsignals $v(\cdot)$; die Beobachterpole liegen bei $\tilde{\underline{p}}_{Beo,1} = (-10 \ -10 \ -10 \ -10)$ bzw. $\tilde{\underline{p}}_{Beo,2} = (-100 \ -100 \ -100 \ -100)$

beeinflussen, so dass trotz stabiler Auslegung der Komponenten ein instabiles Gesamtsystem resultieren kann. Um dies zu evaluieren, wird im Folgenden die Zustandsbeschreibung des Gesamtsystems erstellt:

Das Gesamtsystem setzt sich aus dem zu regelnden System (2.166), dessen Zustände $\underline{x}(t)$ mit Hilfe des Zustandsbeobachters (2.170) bestimmt werden, und dem Zustandsregler zusammen, welchem die geschätzten Zustände $\hat{\underline{x}}(t)$ des Beobachters für die Regelaufgabe übergeben werden (vgl. Abbildung 2.30). Die geschätzten Zustände $\hat{\underline{x}}(t)$ setzen sich aus den wahren Zuständen $\underline{x}(t)$ und den Schätzfehlern $\underline{\hat{x}}(t)$ zusammen: $\hat{\underline{x}}(t) = \underline{x}(t) - \underline{\hat{x}}(t)$. Mit den geschätzten Zuständen lautet das Regelgesetz (2.167):

$$u(t) = r'(t) - \tilde{\underline{k}}^T \hat{\underline{x}}(t) = r'(t) - \tilde{\underline{k}}^T (\underline{x}(t) - \underline{\hat{x}}(t)) \quad (2.188)$$

Setzt man nun die Gleichungen (2.188), (2.174) und (2.166) ineinander ein, so resultiert

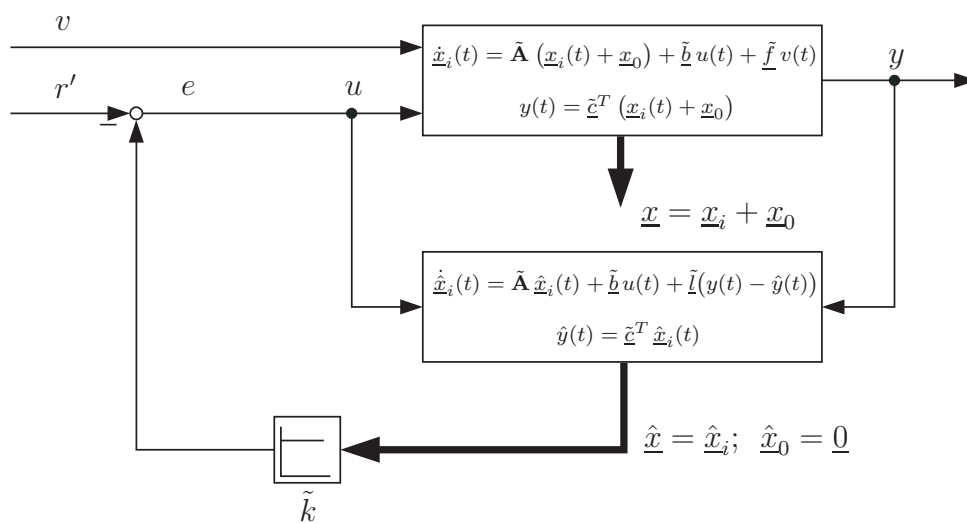


Abbildung 2.30: Signalflussplan eines Zustandsreglers mit Beobachter

das Gesamtsystem:

$$\begin{pmatrix} \dot{\underline{x}}(t) \\ \dot{\underline{\hat{x}}}(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{b}}\tilde{\mathbf{k}}^T & \tilde{\mathbf{b}}\tilde{\mathbf{k}}^T \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{l}}\tilde{\mathbf{c}}^T \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{A}}_{RK}} \begin{pmatrix} \underline{x}(t) \\ \underline{\hat{x}}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{b}} \\ \underline{0} \end{pmatrix} r'(t) + \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{f}} \\ \tilde{\mathbf{f}} \end{pmatrix} v(t) \quad (2.189)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{c}}^T & \underline{0}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{x}(t) \\ \underline{\hat{x}}(t) \end{pmatrix}$$

Zur Bestimmung der Eigenwerte von $\tilde{\mathbf{A}}_{RK}$ bzw. Polstellen des geschlossenen Regelkreises greift man auf die Gleichung (2.28) bzw. (2.70) zurück. Da die Systemmatrix Blockdarstellung aufweist, findet zur Berechnung der Determinante Gleichung (A.4) Anwendung. Somit gilt für das charakteristische Polynom des Regelkreises mit Beobachter unter Beachtung von Gleichung (2.169) und (2.173):

$$A_{RK}(s) = \det[s \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}_{RK}] = \det(s \mathbf{E} - \underbrace{(\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{b}}\tilde{\mathbf{k}}^T)}_{\tilde{\mathbf{A}}_{Reg}}) \det(s \mathbf{E} - \underbrace{(\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{l}}\tilde{\mathbf{c}}^T)}_{\tilde{\mathbf{A}}_{Beo}}) = A_{Reg}(s) A_{Beo}(s) \quad (2.190)$$

Theorem 2.14: Zustandsregler mit Beobachter

Mit Gleichung (2.190) steht fest, dass die die Stabilität bestimmenden Polstellen des geschlossenen Regelkreises denen des zustandsgeregelten Systems und Zustandsbeobachters entsprechen, d.h. es kann der Zustandsregler mit der Annahme ausgelegt werden, die Zustände seien messbar und der Zustandsbeobachter ist unabhängig vom Regler auszulegen. Sind Zustandsregler und -beobachter jeweils stabil, ist das Gesamtsystem stabil.

Nach dieser Erkenntnis bzgl. der Stabilität des Regelkreises stellt sich die Frage nach der Performance des Zustandsreglers mit Beobachter im Vergleich mit dem ohne Beobachter.

Die Gleichung (2.189) verdeutlicht zwar, dass weder das Sollsignal $r'(\cdot)$ in den Zustandsfehlervektor $\underline{\hat{x}}(t)$ eingreift, noch dieser auf den Ausgang $y(t)$ ausgekoppelt wird, dennoch ist der Zustandsfehlervektor $\underline{\hat{x}}(t)$ über die Systemmatrix mit dem Zustandsvektor $\underline{x}(t)$ verknüpft, so dass der Beobachter das Führungsverhalten des Zustandsreglers beeinflusst. Das unbekannte Störsignal $v(\cdot)$ wirkt gemäß Gleichung (2.189) sowohl auf das geregelte System als auch den Zustandsbeobachter. Es stellt sich die Frage, ob das Störverhalten durch die Verkopplung von Beobachter und Zustandsregler verbessert oder verschlechtert wird.

Zunächst soll das Führungsverhalten ($r'(t) \neq 0$; $v(t) = 0$) an Hand des Beispielsystems (2.82) mit Auskoppelvektor $\underline{\bar{c}}_0$ untersucht werden. Es sei an dieser Stelle nochmals darauf hingewiesen, dass ein Zustandsregler nach Theorem 2.9 das Zählerpolynom $B(\cdot)$ der Strecke nicht verändert, für das Nennerpolynom $A_{Reg}(\cdot)$ jedoch freie Polverschiebbarkeit garantiert. Durch die Reglerauslegung gibt man somit folgendes Wunschübertragungsverhalten vor:

$$y^*(s) = \frac{B(s)}{A_{Reg}^*(s)} r'(s) \quad (2.191)$$

Der Zustandsregler wird nun derart ausgelegt, dass die Pole des Beispielsystems auf $\underline{\tilde{p}}_{Reg} = (-5 \ -5 \ -5 \ -5)$ verschoben werden und ein Nennerpolynom $A_{Reg}(s) = (s+5)^4$ des geschlossenen Regelkreises resultiert. Die Strecke besitzt den Anfangszustand $\underline{\bar{x}}_0 = (0.1 \ 0 \ 0 \ 0)$ und somit den Anfangswert $y_0 = 0.5$ für den Ausgang. Um eine stationäre Abweichung im Führungsverhalten zu verhindern, wendet man erneut die Vorverstärkung (2.145) an. Als Sollsignal finden zwei Sprünge $r(t) = 0.8 \sigma(t)$ bei $t = 0 \text{ s}$ und $t = 2.5 \text{ s}$ statt.

Das Simulationsergebnis für den Zustandsregler ohne Beobachter, d.h. bei direkt messbaren Zuständen, zeigt Abbildung 2.31 oben. Ausgehend vom Anfangswert y_0 wird das Regelziel gemäß der Dynamik des geschlossenen Regelkreises mit $F_{Reg}(s) = 5/A_{Reg}(s)$, einem PT_4 -Glied, asymptotisch bei ca. $t = 2.5 \text{ s}$ erreicht, bevor der zweite Sprung eintritt. Wird nun angenommen, dass die Zustände nicht messbar sind, bedarf es eines Beobachters.

In der Simulation 2.26 wurde das Beobachter-Verhalten gezeigt – die geschätzten Zustände $\underline{\hat{x}}(t)$ bzw. der geschätzte Ausgang $\hat{y}(t)$ nähert sich entsprechend der Beobachterdynamik den Zuständen der Strecke $\underline{x}(t)$ bzw. dem Ausgang $y(t)$ an. Dies trifft im geregelten Fall auch zu, jedoch mit dem Unterschied, dass der Beobachter dem durch sich selbst beeinflussten Systemverlauf folgen muss. Das ist darauf zurückzuführen, dass der Beobachter nun über den Regler auf das System wirkt und das System somit bidirektional mit dem Beobachter verknüpft ist. Dies wird im Signalfussplan 2.30 in Verbindung mit dem Signalfussplan 2.25 deutlich und ist in der Simulation 2.31 gut zu erkennen: würden die Anfangszustände von Strecke und Beobachter identisch sein, ergäbe sich ein Schätzfehler $\dot{y}(t) = y(t) - \hat{y}(t) = 0$, womit der Beobachter einem Parallelmodell der Strecke entspräche; die Beaufschlagung mit dem Sollsignal $r(\cdot)$ müsste dann zu einem ansteigenden Ausgangssignal führen, welches den Regelfehler $e(t) = r(t) - y(t)$ verkleinern würde; das Systemverhalten käme dann dem eines Zustandsreglers ohne Beobachter gleich. Nachdem jedoch die Strecke einen Anfangswert $y_0 = 0.5$ und der Beobachter einen Anfangswert $\hat{y}_0 = 0$ besitzt, verändert der Schätzfehler $\dot{y}(t) = y(t) - \hat{y}(t) \neq 0$ über den Beobachterrückführvektor $\underline{\bar{l}}$ das dynamische Verhalten – der Beobachter entspricht keinem Parallelmodell mehr, sondern versucht dem Zustandssignal $\underline{x}(\cdot)$ bzw. dem Ausgangssignal $y(\cdot)$ zu folgen. Die hierfür not-

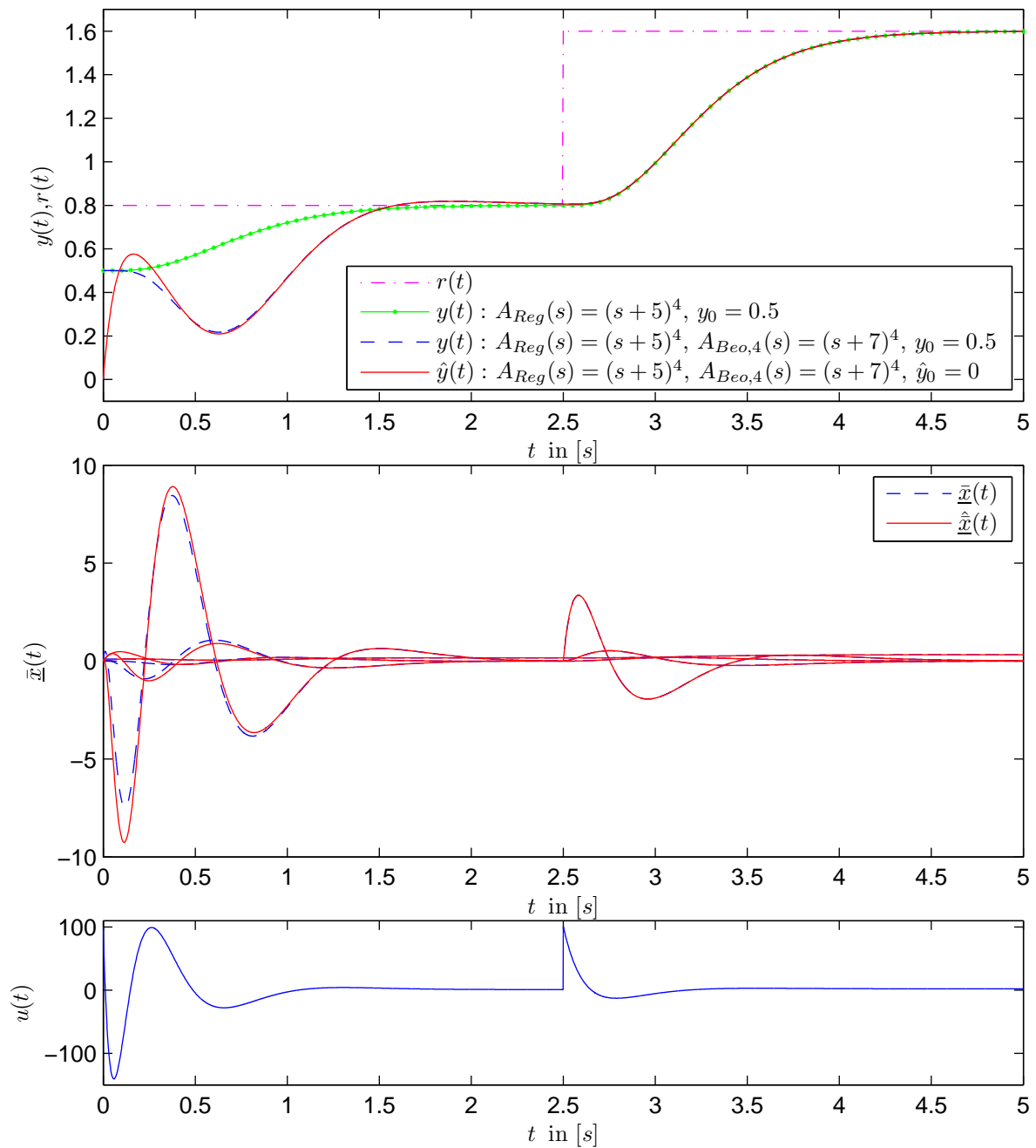


Abbildung 2.31: Zustandsregler mit Beobachter für das Beispielsystem (2.82) mit Auskoppelvektor \bar{c}_0 ; der Beobachter geringer Dynamik besitzt seine Pole bei $\tilde{p}_{Beo,4} = (-7 \ -7 \ -7 \ -7)$; die Pole des zustandsregelten Systems liegen bei $\tilde{p}_{Reg} = (-5 \ -5 \ -5 \ -5)$

wendige Veränderung der Zustände $\dot{\hat{x}}(t)$ führt zu Zustandswerten $\hat{x}(t)$, die temporär keinen Bezug zur vorliegenden Strecke aufzeigen und folglich über den Zustandsrückführvektor \bar{k} ein Stellsignal $u(\cdot)$ ergeben, welches nicht mehr gezielt den Regelfehler verkleinern kann – in der Simulation 2.31 ist eine Abnahme des Ausgangssignals $y(\cdot)$ zu erkennen, mit der

eine Zunahme des Regelfehlers verbunden ist. Auf diese Veränderung reagiert wiederum der Beobachter und versucht dem Ausgangssignal zu folgen, worauf die für die Regelung notwendigen Zustände $\hat{\underline{x}}(t)$ erneut verändert werden. Nachdem gemäß Theorem 2.14 das Gesamtsystem stabil ist, wird der Schätzfehler $\dot{y}(t)$ bzw. $\dot{\hat{\underline{x}}}(t)$ entsprechend der Beobachterdynamik gegen Null gehen, was in der Simulation 2.31 bei ca. $t = 1.4 \text{ s}$ erreicht ist. Sobald die Systemzustände annähernd geschätzt wurden ($\hat{\underline{x}}(t) \approx \underline{0}$), ist ein sinnvolles Regeln wieder möglich und der Regelfehler nimmt entsprechend des Regelgesetzes sukzessive ab. Bis dahin vollzieht das System einen sog. *transienten Vorgang*, dessen Signalverlauf je nach Auslegung von Beobachter und Regler völlig unterschiedlich sein kann. Im dargestellten Szenario nimmt das Ausgangssignal zunächst ab, das Ausgangssignal könnte jedoch auch stark zunehmen und zu einem großen Überschwingen führen. Die Dauer des transienten Vorgangs ist durch die Dynamik des Beobachters vorgegeben, welche durch das charakteristische Polynom $A_{Beo}(\cdot)$ beschrieben wird. In der vorliegenden Simulation befinden sich die Beobachterpole bei $\tilde{\underline{p}}_{Beo,4} = [-7 \ -7 \ -7 \ -7]$, was ein charakteristisches Polynom $A_{Beo,4}(s) = (s+7)^4$ ergibt. Die Beobachterpole $\tilde{\underline{p}}_{Beo,4}$ sind nur unmerklich schneller als die des zustandsgeregelten Systems mit $\tilde{\underline{p}}_{Reg}$. Dies erklärt, weshalb ein Schätzfehler $\dot{y}(t) \rightarrow 0$ erst am Ende des Einschwingvorganges des Reglers bei ca. $t = 1.4 \text{ s}$, d.h. in der Nähe des Sollwertes, erreicht wird.

Generell sollte die Beobachterdynamik schneller als die des Reglers sein, so dass die Dauer des transienten Vorgangs möglichst minimiert wird. Mit Gleichung (2.190) steht dann fest, dass der Zustandsregler mit Beobachter annähernd nach derselben Zeit das Regelziel erreicht, wie ein Zustandsregler ohne Beobachter. Unterscheiden sich die Anfangswerte von Strecke und Beobachter, vollzieht der Zustandsregler mit Beobachter jedoch im Unterschied zum Zustandsregler ohne Beobachter unter Umständen einen stark abweichenden Verlauf des Einschwingvorganges. Es könnte nun die Vermutung entstehen, dass dem durch Erhöhung der Beobachterdynamik entgegengewirkt werden kann, d.h. wird der Schätzfehler sehr früh zu Null, so ähnelt der Verlauf dem eines Zustandsreglers ohne Beobachter; dem ist jedoch nicht so, wie dies die Abbildungen 2.32 und 2.33 verdeutlichen. Die Beobachterpole werden in den Simulationen auf $\tilde{\underline{p}}_{Beo,5} = [-20 \ -20 \ -20 \ -20]$ bzw. $\tilde{\underline{p}}_{Beo,6} = [-200 \ -200 \ -200 \ -200]$ festgelegt, womit ein Beobachter mittlerer Dynamik und hoher Dynamik mit $A_{Beo,5}(s) = (s+20)^4$ bzw. $A_{Beo,6}(s) = (s+200)^4$ resultiert.

Obwohl bzgl. des Beobachters mit mittlerer Dynamik in Abbildung 2.32 bzw. 2.33 oben der Schätzfehler $\dot{y}(t)$ bereits bei $t = 0.55 \text{ s}$ annähernd den Wert Null erreicht hat, ergibt sich eine größere Regelabweichung $e(t)$ als im Falle des Beobachters geringer Dynamik in Simulation 2.31. Dies ist darauf zurückzuführen, dass im Zuge des kürzeren transienten Vorgangs schnellere zeitliche Veränderungen der geschätzten und realen Zustandssignale $\hat{\underline{x}}(\cdot)$ bzw. $\bar{\underline{x}}(\cdot)$ mit höheren Amplituden stattfinden müssen, was der Vergleich von Abbildung 2.31 Mitte mit Abbildung 2.32 Mitte zeigt. Als Folge dieser hohen Beobachteraktivität ergibt sich eine starke Veränderung des Ausgangssignals $y(\cdot)$, was dem Regelziel unter Umständen entgegenwirkt. Im vorliegenden Fall führt der Beobachter mittlerer Dynamik zu einem steilen Abstieg des Ausgangssignals $y(\cdot)$, was einen größeren Regelfehler als im Falle des Beobachters geringer Dynamik zur Folge hat. Ein Beobachter höherer Dynamik verbessert somit nicht das Einschwingverhalten. Sobald der unruhige transiente Vorgang, bestimmt durch $A_{Beo,5}(\cdot)$, bei $t = 0.55 \text{ s}$ abgeschlossen ist und die richtigen Zustände geschätzt sind, wird

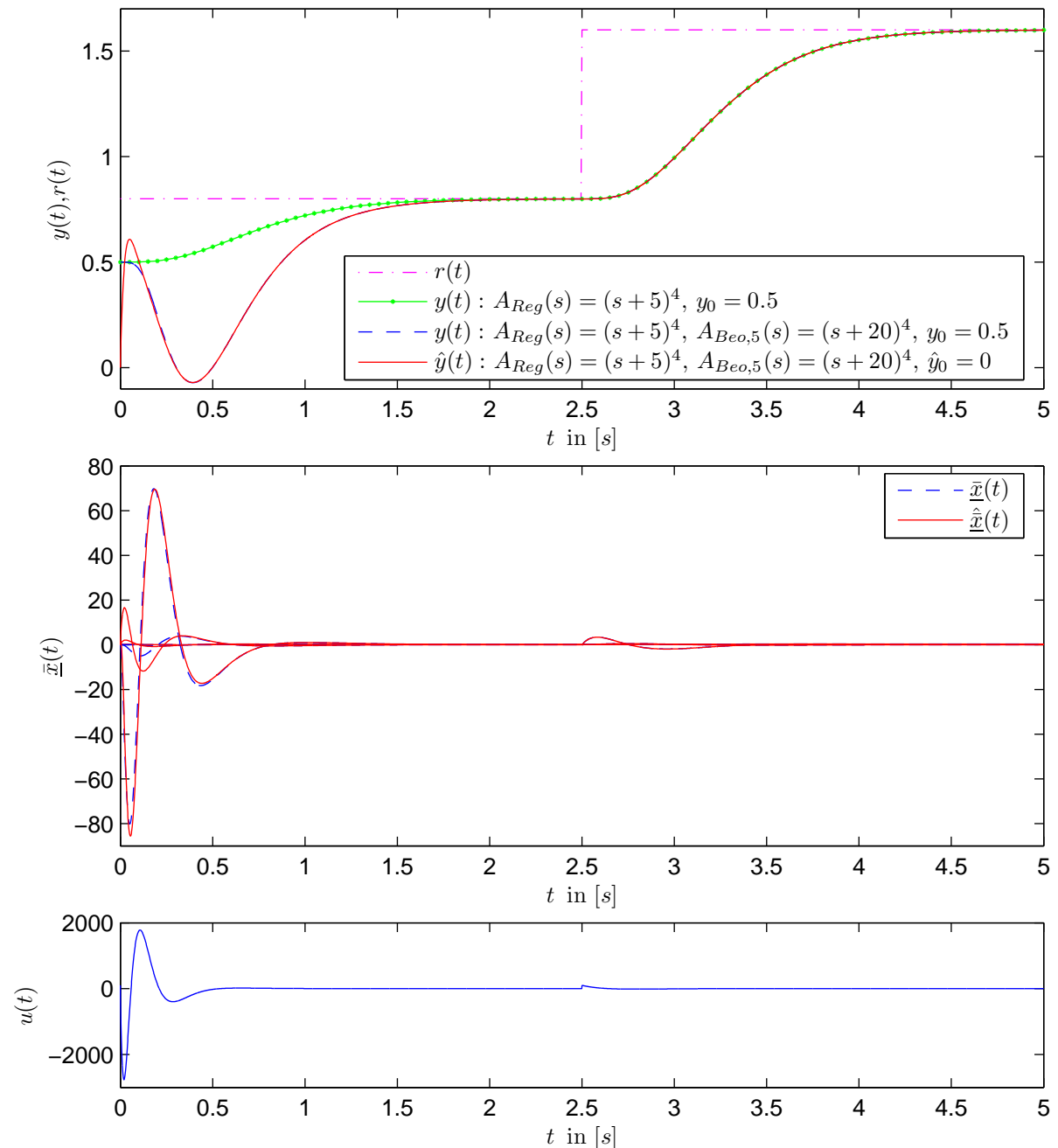


Abbildung 2.32: Zustandsregler mit Beobachter für das Beispielsystem (2.82) mit Auskoppelvektor \bar{c}_0 ; der Beobachter mittlerer Dynamik besitzt seine Pole bei $\tilde{p}_{Beo,5} = (-20 \ -20 \ -20 \ -20)$; die Pole des zustandsgeregelten Systems liegen bei $\tilde{p}_{Reg} = (-5 \ -5 \ -5 \ -5)$

der sich anschließende Verlauf, d.h. die Annäherung an den Sollwert, lediglich durch die Dynamik des Zustandsreglers über $A_{Reg}(\cdot)$ bestimmt. Dies ist gut zu erkennen, wenn die geschätzten Zustände $\hat{x}(t)$ am Ende der transienten Phase bei $t = 0.55$ s als Anfangswerte $\bar{x}_0 = (0.0 \ 0.3 \ 0.7 \ -11.7)^T$ für einen Zustandsregler ohne Beobachter mit derselben Reglerdynamik initialisiert werden; das Ergebnis ist in Simulation 2.33 oben eingetragen

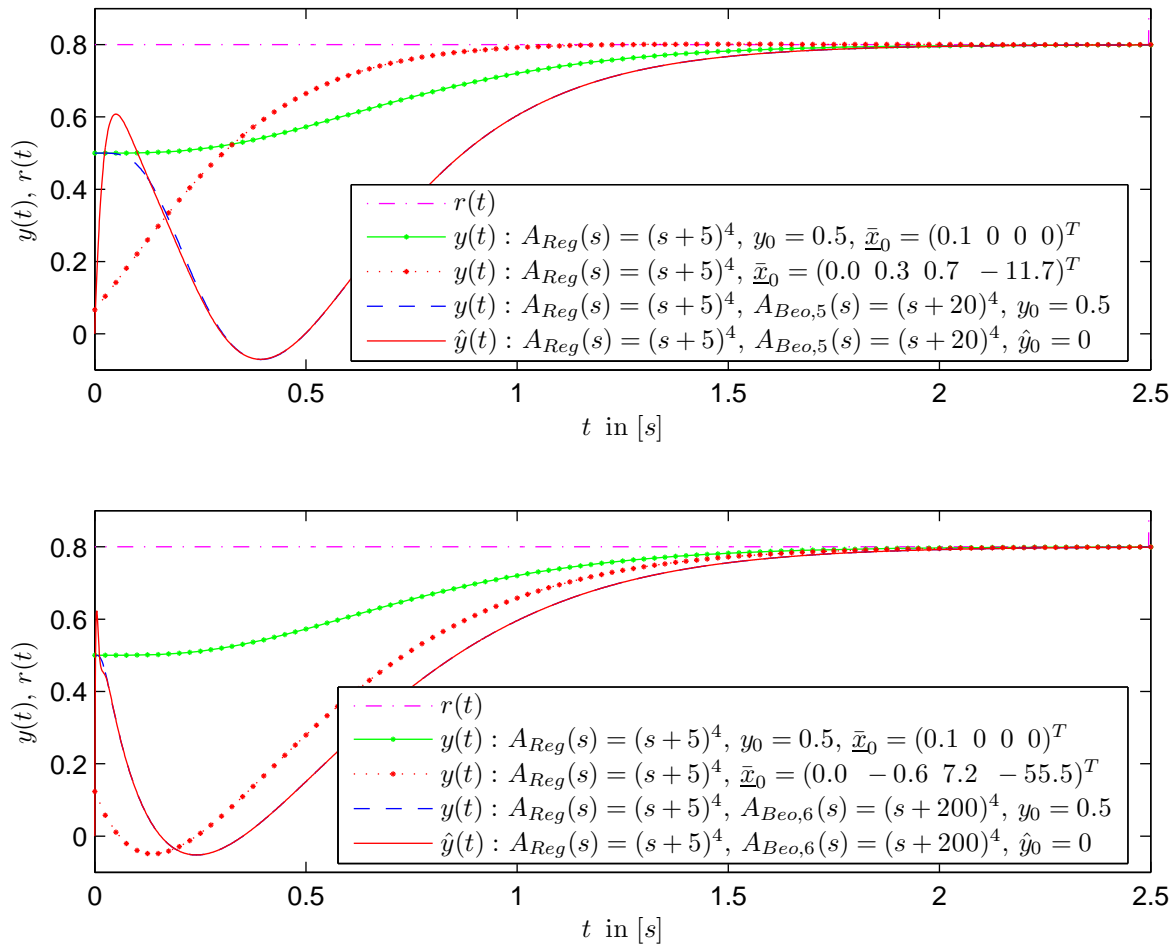


Abbildung 2.33: Zustandsregler mit Beobachter für das Beispielsystem (2.82) mit Auskoppelvektor \bar{c}_0 ; der Beobachter mittlerer Dynamik (**oben**) bzw. hoher Dynamik (**unten**) besitzt seine Pole bei $\tilde{p}_{Bco,5} = (-20 \ -20 \ -20 \ -20)$ bzw. $\tilde{p}_{Bco,6} = (-200 \ -200 \ -200 \ -200)$; die Pole des zustandsgeregelten Systems liegen bei $\tilde{p}_{Reg} = (-5 \ -5 \ -5 \ -5)$; es ist zu erkennen, dass sich der Zustandsregler mit Beobachter wie ein Zustandsregler mit Anfangszuständen verhält, sobald für den Schätzfehler $\dot{y}(t) = y(t) - \hat{y}(t) = 0$ gilt, d.h. der Beobachter eingeschwungen ist;

und lässt erkennen, dass sich dasselbe Einschwingverhalten des Zustandsreglers ohne Beobachter zeigt, wie das des Zustandsreglers mit Beobachter ab dem Zeitpunkt $t = 0.55$ s nach der transienten Phase.

Die Simulation 2.33 unten beruht auf einem Beobachter hoher Dynamik. Der Schätzfehler $\dot{y}(t)$ hat bereits den Wert Null bei ca. $t = 0.1$ s erreicht, jedoch zeigt das Ausgangssignal $y(\cdot)$ auf Grund des kürzeren transienten Vorgangs, wie oben beschrieben, einen noch steileren Abstieg. Bei ca. $t = 0.1$ s sind zwar bereits die richtigen Zustände geschätzt ($\hat{x}(t) \approx \bar{x}(t)$), jedoch kann der entstandene kleinere Regelfehler bezogen auf den maximalen Regelfehler während des transienten Vorgangs beim Beobachter mittlerer Dynamik nur gemäß der Reglerdynamik mit $A_{Reg}(\cdot)$ abgebaut werden. Nachdem ein sehr steiler Abstieg des Ausgangssignals vorliegt, erhöht sich der Regelfehler daher zunächst weiter, bis sich

das Ausgangssignal dem Endwert annähern kann. Dies zeigt erneut, dass der Regelfehler in der transienten Phase durch Erhöhung der Beobachterdynamik nicht zwingend verkleinert werden kann. Auch für den Beobachter hoher Dynamik zeigt Abbildung 2.33 unten, dass der dem transienten Vorgang ab $t = 0.1$ s folgende Verlauf alleiniges Resultat der Reglerdynamik mit $A_{Reg}(\cdot)$ ist. Die geschätzten Zustände $\hat{\underline{x}}(t)$ bei $t = 0.1$ s werden als Anfangswerte $\underline{\hat{x}}_0 = (0.0 \quad -0.6 \quad 7.2 \quad -55.5)^T$ einem Zustandsregler ohne Beobachter mit derselben Reglerdynamik übergeben; es ist zu erkennen, dass sich dasselbe Einschwingverhalten des Zustandsreglers ohne Beobachter zeigt, wie das des Zustandsreglers mit Beobachter ab dem Zeitpunkt $t = 0.1$ s.

Man hält somit fest: ein sehr schneller Einschwingvorgang des Beobachters hat sehr steile Verläufe der Signale zur Konsequenz, so dass bei abgeklungenem Schätzfehler auf Grund der Trägheit der Reglerdynamik zunächst eine weitere Erhöhung des Regelfehlers auftritt. Aus diesem Grund resultiert trotz der höheren Beobachterdynamik keine Verringerung des maximal auftretenden Regelfehlers eines Beobachters geringerer Dynamik, bei welchem die hohe Reglerabweichung während der transienten Phase entsteht.

Ein Vergleich der Zustandsregler mit unterschiedlicher Beobachterdynamik zeigt, dass zwar die realen Zustände der Strecke bei hoher Dynamik schneller geschätzt werden, deshalb jedoch kein besserer Einschwingvorgang des geregelten Systems resultiert – alle Zustandsregler erreichen das Regelziel in annähernd derselben Zeit, sofern die Dynamik des Beobachters größer als die des Reglers ist. Sobald die Schätzung der Zustände abgeschlossen ist, kommt der Dynamik des Beobachters im weiteren Verlauf keine Bedeutung mehr zu, wie dies in Abbildung 2.31 oben sowie 2.32 oben die zweite Sprungantwort zeigt. Im Falle eines veräuschten Messsignals $y(\cdot)$ führt ein Beobachter geringerer Dynamik sogar zu einer besseren Filterung des Signals und verhindert somit eine unruhige Regelung. Zudem sei noch auf die sehr hohe Amplitude der geschätzten Zustandssignale $\hat{\underline{x}}(t)$ und den daraus resultierenden hohen Stellgrößen $u(\cdot)$ in der Simulation 2.32 hingewiesen, die bei hoher Beobachterdynamik auftreten und dadurch das System in der transienten Phase stark belasten.

Im idealen Fall, wenn der Beobachter exakt die Strecke widerspiegelt, ist gemäß dieser Punkte ein Beobachter geringer Dynamik vorzuziehen. Dies gilt jedoch nicht, wenn eine unbekannte Störung auf die Strecke wirkt, welche der Beobachter in seinem Modell nicht berücksichtigen kann. Dann entspricht der Beobachter bei einer Störung nie einem Parallelmodell und der Beobachter versucht die durch die Störung verursachte Abweichung $\dot{y}(t)$ durch Anpassung der geschätzten Zustände $\hat{\underline{x}}(t)$ über den Einkoppelvektor \bar{l} zu minimieren. Der Einfluss der Störung wird somit durch falsche Schätzwerte der Zustände maximal kompensiert. Dies erklärt, weshalb entsprechend der Fehlerdifferentialgleichung (2.174) bei $v(t) \neq 0$ stets eine Abweichung $\dot{\underline{x}}(t)$ verbleibt. Da der Einfluss der Störung durch eine Anpassung der Zustände lediglich minimiert werden kann, verbleibt auch eine Abweichung $\dot{y}(\cdot)$ im Ausgangssignal. Je schneller die geschätzten Zustände bei einem beliebigen Störersignal $v(\cdot)$ jedoch angepasst werden können, desto mehr zeigt sich ein stückweises quasistationäres Verhalten des Beobachters, womit sich der verbleibende Schätzfehler (2.175) gemäß Gleichung (2.177) stärker minimieren lässt, d.h. je schneller der Beobachter, desto besser das Störverhalten des Beobachters. Für einen unendlich schnellen Beobachter ($\tilde{\lambda}_i = \tilde{p}_i \rightarrow -\infty$) verbleibt nach Gleichung (2.178) kein Schätzfehler. In diesem Fall müsste das Störverhalten des Zustandsreglers mit Beobachter dem des Zustandsreglers ohne Beobachter entsprechend, was durch Auflösen der Gleichung (2.189) im stationären Zustand

$$\begin{pmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\underline{b}}\tilde{\underline{k}}^T & \tilde{\underline{b}}\tilde{\underline{k}}^T \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\underline{l}}\tilde{\underline{c}}^T \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\underline{x}}_\infty \\ \hat{\underline{x}}_\infty \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{\underline{f}} \\ \tilde{\underline{f}} \end{pmatrix} v_\infty \quad (2.192)$$

deutlich wird:

$$\hat{\underline{x}}_\infty = - \left[\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\underline{b}}\tilde{\underline{k}}^T \right]^{-1} \tilde{\underline{b}}\tilde{\underline{k}}^T \hat{\underline{x}}_\infty - \left[\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\underline{b}}\tilde{\underline{k}}^T \right]^{-1} \tilde{\underline{f}} v_\infty \quad (2.193)$$

$$\hat{\underline{x}}_\infty = - \left[\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\underline{l}}\tilde{\underline{c}}^T \right]^{-1} \tilde{\underline{f}} v_\infty \quad (2.194)$$

Setzt man Gleichung (2.194) unter Beachtung des Grenzübergangs (2.178) in Gleichung (2.193) ein, ergibt sich das Störverhalten des Zustandsreglers mit unendlich schnellem Beobachter im eingeschwungenen Zustand, welches dem des Zustandsreglers ohne Beobachter entspricht:

$$y_\infty = \tilde{\underline{c}}^T \hat{\underline{x}}_\infty = -\tilde{\underline{c}}^T \left[\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\underline{b}}\tilde{\underline{k}}^T \right]^{-1} \tilde{\underline{f}} v_\infty \quad (2.195)$$

Für den realisierbaren Fall eines endlich schnellen Beobachters folgt durch ineinander einsetzen der Gleichungen (2.193) und (2.194) das Störverhalten des Zustandsreglers mit endlich schnellem Beobachter im stationären Zustand:

$$\begin{aligned} y_\infty = \tilde{\underline{c}}^T \hat{\underline{x}}_\infty &= \tilde{\underline{c}}^T \left[\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\underline{b}}\tilde{\underline{k}}^T \right]^{-1} \tilde{\underline{b}}\tilde{\underline{k}}^T \left[\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\underline{l}}\tilde{\underline{c}}^T \right]^{-1} \tilde{\underline{f}} v_\infty - \left[\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\underline{b}}\tilde{\underline{k}}^T \right]^{-1} \tilde{\underline{f}} v_\infty \\ &= \left[\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\underline{b}}\tilde{\underline{k}}^T \right]^{-1} \left[\tilde{\underline{b}}\tilde{\underline{k}}^T \left[\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\underline{l}}\tilde{\underline{c}}^T \right]^{-1} - \mathbf{E} \right] \tilde{\underline{f}} v_\infty \end{aligned} \quad (2.196)$$

Es fällt auf, dass für diese Gleichung eine Vielzahl an Beobachterrückführvektoren $\tilde{\underline{l}}$ gefunden werden kann, so dass der zweite Faktor zu Null wird und sich folglich für das Störverhalten $y_\infty(v_\infty) = 0$ ergibt, d.h. bei einer bestimmten Wahl der Dynamik des Beobachters kann der Zustandsregler, basierend auf einem Beobachter, eine stationäre Störung kompensieren. Weiter ließe sich durch eine gezielte Wahl des Beobachterrückführvektors auch die Auswirkung einer dynamischen Störung $v(t)$ auf den Ausgang minimieren. Nachdem jedoch die Störung unbekannt ist, lässt sich eine gezielte Kompensation nicht umsetzen, zumal die entsprechenden Beobachterrückführvektoren $\tilde{\underline{l}}$ in beiden Fällen nicht zwingend zu einem stabilen Beobachter führen. Die interessante Erkenntnis besteht jedoch darin, dass es gemäß Gleichung (2.196) stabile Beobachterrückführvektoren $\tilde{\underline{l}}$ gibt, mit denen der Zustandsregler mit Beobachter den Fehler auf Grund der Störung minimiert und somit ein besseres Störverhalten zeigt, als der Zustandsregler ohne Beobachter; im Umkehrschluss existieren aber auch Beobachterrückführvektoren $\tilde{\underline{l}}$, die zu einem schlechteren Störverhalten führen. Nachdem die Störung unbekannt ist, kann das Störverhalten durch eine bestimmte Wahl der Dynamik nicht gezielt beeinflusst werden.

In Abbildung 2.34 oben findet nun für das zustandsgeregelte System aus Simulation 2.31 ($A_{Reg}(s) = (s + 5)^4$, $A_{Beo,4}(s) = (s + 7)^4$) bei $t = 3.5 \text{ s}$ eine Störung $v(t) = 5 \sigma(t - 3.5 \text{ s})$ statt. Wie zu Beginn eine transiente Phase von ca. $\Delta t = 1.4 \text{ s}$ notwendig ist, bis der Beobachter seinen stationären Zustand mit den korrekt geschätzten Zuständen erreicht hat, dauert es nach Aufschaltung der Störung ebenfalls ca. $\Delta t = 1.4 \text{ s}$, bis der Beobachter eingeschwungen ist. Bei ca. $t = 4.9 \text{ s}$ zeigt sich der transiente Vorgang als abgeschlossen und es verbleibt gemäß Gleichung (2.194) bzw. (2.175) ein konstanter Schätzfehler \hat{y} auf

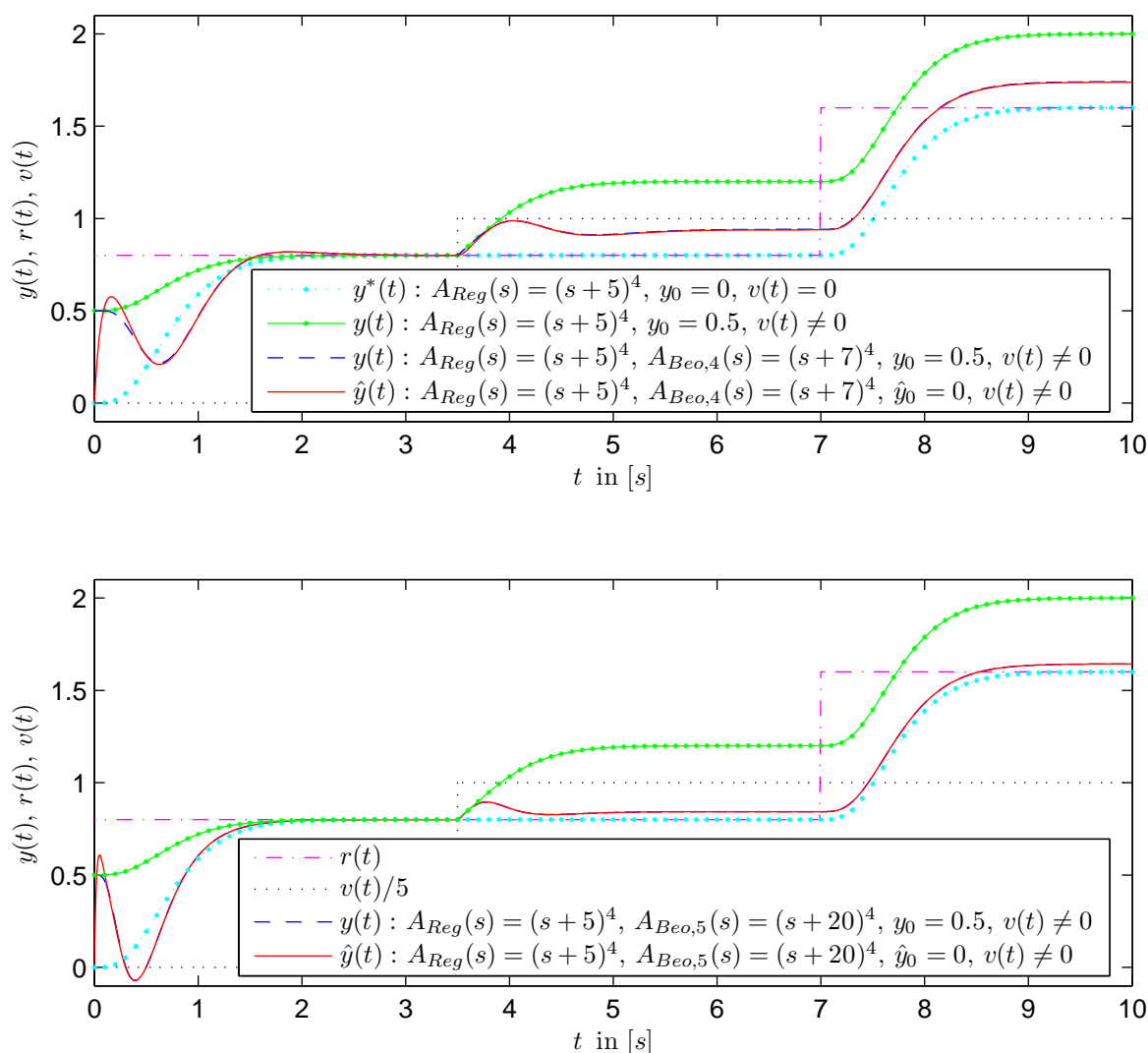


Abbildung 2.34: Zustandsregler mit Beobachter unter Störeinwirkung $v(t)$ am Beispiel des Systems (2.82) mit Auskoppelvektor \bar{c}_0 ; der Beobachter geringer Dynamik (**oben**) bzw. mittlerer Dynamik (**unten**) besitzt seine Pole bei $\tilde{p}_{Beo,4} = (-7 \ -7 \ -7 \ -7)$ bzw. $\tilde{p}_{Beo,5} = (-20 \ -20 \ -20 \ -20)$; die Pole des zustandsgeregelten Systems liegen bei $\tilde{p}_{Reg} = (-5 \ -5 \ -5 \ -5)$;

Grund der Untermodellierung des Beobachters bzgl. der Störung. Ab diesem Zeitpunkt findet erneut der abschließende Einschwingvorgang gemäß der Dynamik des Reglers statt – bei ca. $t = 6.5$ s ist der stationäre Endwert erreicht, der eine deutliche Abweichung vom Sollsignal $y^*(\cdot)$ zeigt. Jedoch ist diese wesentlich geringer, als sie bei einem Zustandsregler ohne Beobachter wäre, was die Abbildung 2.34 oben verdeutlicht. Der Einfluss des Beobachters mit endlicher Dynamik auf den geschlossenen Regelkreis führt in diesem Beispiel gemäß Gleichung (2.196) zu einem besseren Störverhalten. Bei $t = 7$ s tritt ein weiterer Führungssprung um $\Delta u = 0.8$ auf; nachdem der Beobachter sowohl bezüglich der unterschiedlichen Anfangswerte als auch Störung eingeschwungen ist, ergibt sich kein transienter Vorgang mehr und das Ausgangssignal $y(\cdot)$ folgt dem Verlauf des Sollsignals $y^*(\cdot)$, jedoch

mit einem konstanten Versatz, welcher auf das Störverhalten (2.196) zurückzuführen ist.

An Hand des Beispiels war gut zu erkennen, dass der transiente Vorgang sowohl im Falle unterschiedlicher Anfangswerte als auch im Falle von Störungen durch die Dynamik des Beobachters bestimmt wird. Dies wird nochmals mit Abbildung 2.34 unten bestätigt, die die Simulation 2.32 bei einer präsenten Störung zeigt; es liegt hierbei eine höhere Dynamik des Beobachters vor ($A_{Beo,5}(s) = (s + 20)^4$). Die transiente Phase zu Beginn auf Grund der unterschiedlichen Anfangswerte ist bereits nach $\Delta t = 0.55 s$ abgeschlossen, was auch für den transienten Vorgang nach dem Störsprung gilt. Bei $t = 4.05 s$ findet bereits der abschließende Einschwingvorgang gemäß der Reglerdynamik statt. Es fällt auf, dass durch die Erhöhung der Beobachterdynamik der Schätzfehler $\hat{y}(t)$ und der Regelfehler $e(t) = y(t) - y^*(t)$ kleiner geworden sind. Die Abweichung vom Sollverlauf $y^*(\cdot)$ als Folge der Störung ist nun um ein Vielfaches kleiner als im Falle des Zustandsreglers ohne Beobachter. Durch weiteres Erhöhen der Reglerdynamik verkleinert sich der Regelfehler weiter, jedoch muss er für sehr hohe Werte gemäß der Gleichung (2.195) wieder größer werden, um für eine unendlich hohe Beobachterdynamik dem Regelfehler eines Zustandsreglers ohne Beobachter zu entsprechen.

Der glückliche Zustand, dass trotz Erhöhung der Beobachterdynamik der transiente Vorgang nach dem Auftreten einer Störung keine höhere Unruhe mit größeren Amplituden wie zu Beginn der Simulation bei anfänglich unterschiedlichen Anfangszuständen zeigt, ist das Ergebnis eines geeigneten Zusammenspiels von Strecke, Beobachter und Regler. Dies wird durch Veränderung der Streckendynamik bei gleichbleibender Einstellung von Regler und Beobachter deutlich. In Simulation 2.35 findet wiederholt die Simulation 2.34 statt, jedoch mit dem Unterschied, dass dem System ein Nullstellenpolynom hinzugefügt wird; es handelt sich um das Beispielsystem (2.82) mit Auskoppelvektor \bar{c}_1 (vgl. Abbildung 2.5). In Simulation 2.35 oben ist zu erkennen, dass der stationäre Regelfehler e_∞ auf Grund einer Störung beim Zustandsregler mit Beobachter nun größer als bei dem ohne Beobachter ist. Ergab sich bei derselben Auslegung von Regler und Beobachter in Simulation 2.34 eine Verbesserung des Störverhaltens, verschlechtert sich dieses nun durch Hinzufügen des Nullstellenpolynoms; dass es je nach Auslegung bezogen auf ein System zu einer Verbesserung oder Verschlechterung des Störverhaltens kommt, lässt sich auf Gleichung (2.196) zurückführen.

Durch Erhöhen der Beobachterdynamik in Simulation 2.35 unten verbessert sich der Regelfehler nur unwesentlich – erst für eine annähernd unendlich hohe Beobachterdynamik ändert der Regelfehler sein Vorzeichen, bis bei unendlich hoher Dynamik der Regelfehler dem des Zustandsreglers ohne Beobachter entspricht.

Vergleicht man in Abbildung 2.35 die obere Simulation bei geringer Beobachterdynamik mit der unteren bei mittlerer Beobachterdynamik, so zeigt sich bei erhöhter Dynamik eine sehr unruhige transiente Phase mit sehr hohen Amplituden, womit sich eine wesentliche Verschlechterung des Störverhaltens mit hohen transienten Regelfehlern ergibt. Selbst wenn die, bezogen auf das Regelziel, falschen Stellgrößen mit hohen Amplituden begrenzt werden, resultieren mit den maximalen Stellamplituden des Reglers trotzdem große Regelfehler $e(t)$ in der transienten Phase.

Zusammenfassend überwiegen die Nachteile einer sehr hohen Dynamik für einen Beobachter im zustandsgeregelten System, was sich vor allem bei Systemen mit Nullstellenpolynomen

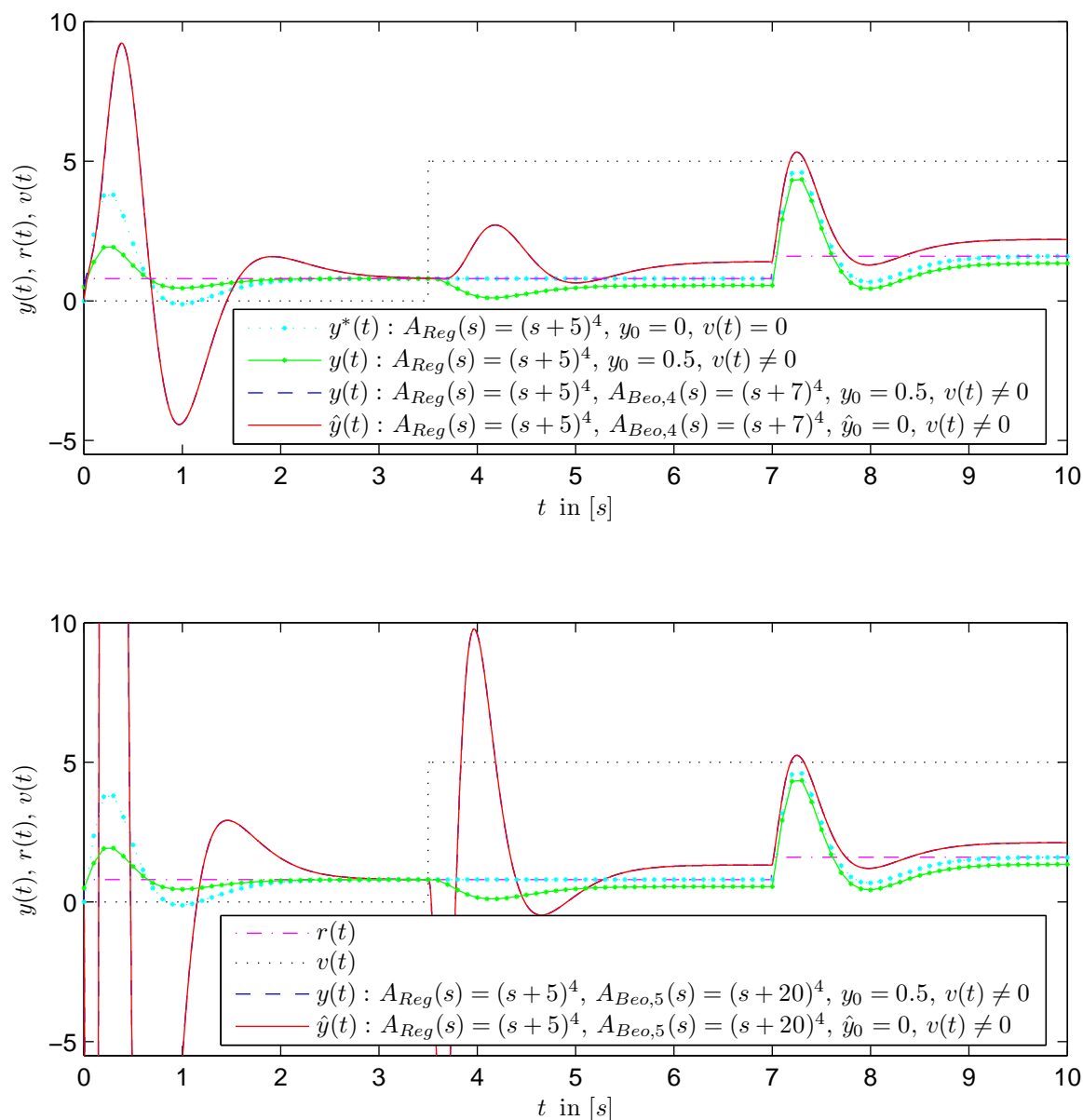


Abbildung 2.35: Zustandsregler mit Beobachter unter Störeinwirkung $v(t)$ am Beispiel des Systems (2.82) mit Auskoppelvektor \bar{c}_1 – im Unterschied zur Simulation 2.34 besitzt das System ein Nullstellenpolynom; der Beobachter geringer Dynamik (**oben**) bzw. mittlerer Dynamik (**unten**) besitzt seine Pole bei $\tilde{p}_{Beo,4} = (-7 \ -7 \ -7 \ -7)$ bzw. $\tilde{p}_{Beo,5} = (-20 \ -20 \ -20 \ -20)$; die Pole des zustandsgeregelten Systems liegen bei $\tilde{p}_{Reg} = (-5 \ -5 \ -5 \ -5)$;

äußert. Stabile Nullstellen führen gemäß Kapitel 2.2.5.1 zu einer schnelleren Reaktion des Ausgangs y bzw. \hat{y} nach einem Sprung des Eingangssignals $u(\cdot)$. Mit Zuhilfenahme des Signalflussplanes 2.4 der Regelungsnormalform wurde in Kapitel 2.2.4 deutlich, dass durch ein Nullstellenpolynom mit zunehmender Ordnung mehr Systemzustände auf den Ausgang ausgekoppelt werden. Hiermit wird die Aktivität aller \tilde{m} ausgekoppelten Zustände \bar{x}_i mit $i \in \{1, \dots, \tilde{m}\}$ am Ausgang sichtbar. Dieser Sachverhalt gilt sowohl für die realen als

auch geschätzten Zustände, da die Strecke und der Beobachter denselben Auskoppelvektor besitzen. Sobald nun ein Schätzfehler $\hat{y}(t) \neq 0$ vorliegt, führt dieser über den Beobachterrückführvektor \bar{l} gemäß des Signalflussplanes 2.25 direkt zu einer Änderung $\dot{\hat{x}}(t)$ der geschätzten Zustände, um die geschätzten Zustände an die realen Zustände anzugleichen – die Zustände \hat{x} zeigen entsprechend der Beobachterdynamik einen dynamischen Einschwingvorgang. Je mehr Zustände während dieses transienten Ausgleichvorganges auf den Ausgang \hat{y} ausgekoppelt werden, desto unruhiger bzgl. Frequenz und Amplitude wird das Ausgangssignal auf Grund der Summation der skalierten Zustände; da jeder Zustand \bar{x}_i mit $i \in \{2, \dots, \tilde{m}\}$ der $(i - 1)$ -ten Ableitung des Ausgangs entspricht und der Ausgang durch Superposition gebildet wird, ist verständlich, dass auf Grund der unruhigen Beobachterdynamik ein sehr unruhiges geschätztes Ausgangssignal resultiert. Nachdem der geschätzte Ausgang \hat{y} und somit die geschätzten Zustände \hat{x} über den Zustandsregler mit den realen Zuständen \underline{x} der Strecke verkoppelt sind und das Ziel des Beobachters das Angleichen der Zustände ist, zeigen diese und folglich der Ausgang y ein ähnlich unruhiges Verhalten. Je höher nun die Dynamik des Beobachters ist, d.h. je größer die Beträge der Elemente des Beobachterrückführvektors \bar{l}_i ($i \in \{1, \dots, \tilde{n}\}$) sind, desto unruhiger wird gemäß dieser Darstellung das Verhalten des Ausgangssignals $y(\cdot)$. Um diesen Effekt zu minimieren, ist somit die Beobachterdynamik niedrig zu halten:

Theorem 2.15: Zustandsregler mit Beobachter: Beobachterdynamik

Um bei einem Zustandsregler mit Beobachter den Einschwingvorgang des Beobachters nach einer Störung bzgl. der maximal auftretenden Amplitude und Frequenz des Ausgangssignals $y(\cdot)$ im Mittel zu beruhigen, ist es notwendig, die Beobachterdynamik gering zu halten. Somit wird ein unruhiges Reglerverhalten während des Einschwingvorganges des Beobachters vermieden. Die Beobachterdynamik sollte lediglich minimal schneller als die des zustandsregulierten Systems sein, damit die Reglerdynamik nicht dominiert wird, es sei denn, dies wird wie im Falle eines Referenzmodellreglers gewünscht.

Des Weiteren findet bei einer geringeren Beobachterdynamik eine bessere Filterung der Messsignale statt.

Ein Spezialfall für geringe Dynamik eines Beobachters im Kontext eines Zustandsreglers ergibt sich, wenn \tilde{m} Beobachterpole auf die \tilde{m} Systemnullstellen hinsichtlich des Störsignals $v(\cdot)$ gelegt werden, um das Störverhalten des Reglers zu verbessern. Der Hintergrund hierbei wird bei der Darstellung des Zustandsreglers mit Beobachter als Referenzmodellregler mit freier Polverschiebbarkeit in Kapitel 2.2.6.5 deutlich. Das dort abgeleitete Ein- Ausgangsverhalten des Zustandsreglers mit Beobachter und gefiltertem Sollsignal $r'(s) = F_F(s) r(s)$ zeigt Gleichung (2.276):

$$y(s) = \underbrace{\frac{B(s)}{A_{Reg}^*(s)} F_F(s) r(s)}_{y_r(s)} + \underbrace{\frac{A_{EA}(s) \underline{B}_0^T(s)}{A_{Reg}^*(s) A_{Beo}^*(s)} \underline{x}_0}_{y_{\underline{x}_0}(s)} + \underbrace{\frac{A_{EA}(s) B_v(s)}{A_{Reg}^*(s) A_{Beo}^*(s)} v(s)}_{y_v(s)} \quad (2.197)$$

Durch die Wahl $A_{Beo}(s) = B_v(s) A_{Beo,red}(s)$ findet eine Pol- Nullstellenkürzung in der Störübertragungsfunktion statt, so dass das unruhige Einschwingverhalten bei Beaufschlagung der Störgröße bedingt durch die Nullstellen verhindert wird. Die Störübertragungsfunktion

wird dann nur noch von den Reglerpolynomen $A_{Reg}(\cdot)$, $A_{EA}(\cdot)$ und $A_{Beo,red}(\cdot)$ beeinflusst. Die Gleichung (2.276) bzw. (2.197) zeigt weiter, dass das Führungsverhalten durch die Wahl von $A_{Beo}(\cdot)$ unverändert bleibt. Das Einschwingverhalten auf Grund der Anfangswerte \underline{x}_0 des Systems wird ebenfalls etwas bedämpft. Es findet zwar keine exakte Pol-Nullstellenkürzung mit der entsprechenden Elimination der Dynamik wie im Falle des Nullstellenpolynoms der Störung statt, dennoch wird der beschleunigenden Eigenschaft der Nullstellen entgegengewirkt, je näher und je mehr Systempolstellen bei den Systemnullstellen liegen und dadurch das System bedämpfen. Jedes Nullstellenpolynom enthält neben der Information, wie die Eingangsgrößen in die Zustände einkoppeln, auch die Information, wie die Zustände auf den Ausgang auskoppeln. Da das Auskoppeln der Zustände auf den Ausgang für alle Eingangssignale ($u(\cdot)$, $v(\cdot)$, \underline{x}_0) identisch ist, müssen in den Nullstellenpolynomen ($B(\cdot)$, $B_v(\cdot)$, $\underline{B}_0(\cdot)$) identische Informationen enthalten sein. Aus diesem Grund ist zu erwarten, dass es beim Verschieben der Polstellen von $A_{Beo}(\cdot)$ auf die Nullstellen eines der drei Polynome $B(\cdot)$, $B_v(\cdot)$ oder $\underline{B}_0(\cdot)$ zu einer mehr oder weniger starken Bedämpfung des durch die Störung $v(\cdot)$ bzw. Anfangswerte \underline{x}_0 angeregten Systemverhaltens kommt (vgl. Gleichung (2.197) bzw. (2.276)). Mit diesem Vorgehen erreicht man, dass sich das geregelte System nach abgeschlossener Schätzung der Zustände gemäß Gleichung (2.191) wie ein Zustandsregler verhält, der die Nullstellen von $B(\cdot)$ erhält; die Systemnullstellen von $B_v(\cdot)$ der Störübertragungsfunktion werden jedoch einer Pol-Nullstellenkürzung bzw. „-schwächung“ unterzogen, womit sich ein sehr beruhigtes Störverhalten ergibt.

Die entsprechende Simulation zeigt Abbildung 2.36. In der Abbildung oben besitzt der Beobachter das Wunschpolynom $A_{Beo,7}(s) = B_v(s)(s + 7)$, d.h. \tilde{m}_v Pole werden auf die Nullstellen des Polynoms $B_v(\cdot)$ der Strecke gelegt und der verbleibende Pol ($\tilde{n} - \tilde{m}_v = 1$) wird, wie beim Beobachter geringer Dynamik ($A_{Beo,4}(\cdot)$), auf $\tilde{p} = -7$ festgesetzt (die Störübertragungsfunktion der Strecke besitzt wie die Führungsübertragungsfunktion Relativgrad $\tilde{r} = 1$). In der Abbildung unten findet sich ein Beobachter mittlerer Dynamik mit $A_{Beo,8}(s) = B_v(s)(s + 20)$, d.h. der verbleibende Pol befindet sich bei $\tilde{p} = -20$. Durch Vergleich von Simulation 2.36 mit Simulation 2.35 bestätigt sich die Theorie: es ergeben sich auf Grund der exakten Pol-Nullstellenkürzung keine unruhigen Verläufe des Ausgangssignals $y(\cdot)$ mit hohen Amplituden mehr nach Beaufschlagung der Störung $v(\cdot)$. Für den Einschwingvorgang zu Beginn, bedingt durch die unterschiedlichen Anfangswerte, wird nun eine gute Bedämpfung erreicht, was auf die Pol-Nullstellenschwächung zwischen $\underline{B}_0(\cdot)$ im Zähler und $B_v(\cdot)$ als Teil des Beobachterpolynoms im Nenner zurückzuführen ist. Weiter ist mit Hilfe der beiden Simulationen in Abbildung 2.36 gut zu erkennen, dass das Störverhalten des Zustandsreglers mit Beobachter durch Erhöhung der Beobachterdynamik gemäß Gleichung (2.195) immer mehr dem eines Zustandsreglers ohne Beobachter entspricht.

Ist der Einkoppelvektor \underline{f} bzw. das Nullstellenpolynom $B_v(\cdot)$ der Störung v nicht bekannt, um eine exakte Pol-Nullstellenkürzung durchzuführen, so führt auch die oben dargestellte Pol-Nullstellenschwächung mit dem Nullstellenpolynom $B(\cdot)$ der Strecke, welches ebenfalls die Information enthält, wie die Zustände auf den Ausgang ausgekoppelt werden, zu einer Beruhigung des Einschwingverhaltens. Im Unterschied zur Simulation 2.36 oben enthält das Wunschpolynom des Beobachters mit $A_{Beo,9}(s) = B(s)(s + 7)$ in Simulation 2.37 das Nullstellenpolynom $B(\cdot)$ der Strecke. Durch die Pol-Nullstellenschwächung kommt es erneut zu einem sehr beruhigtem Systemverhalten.

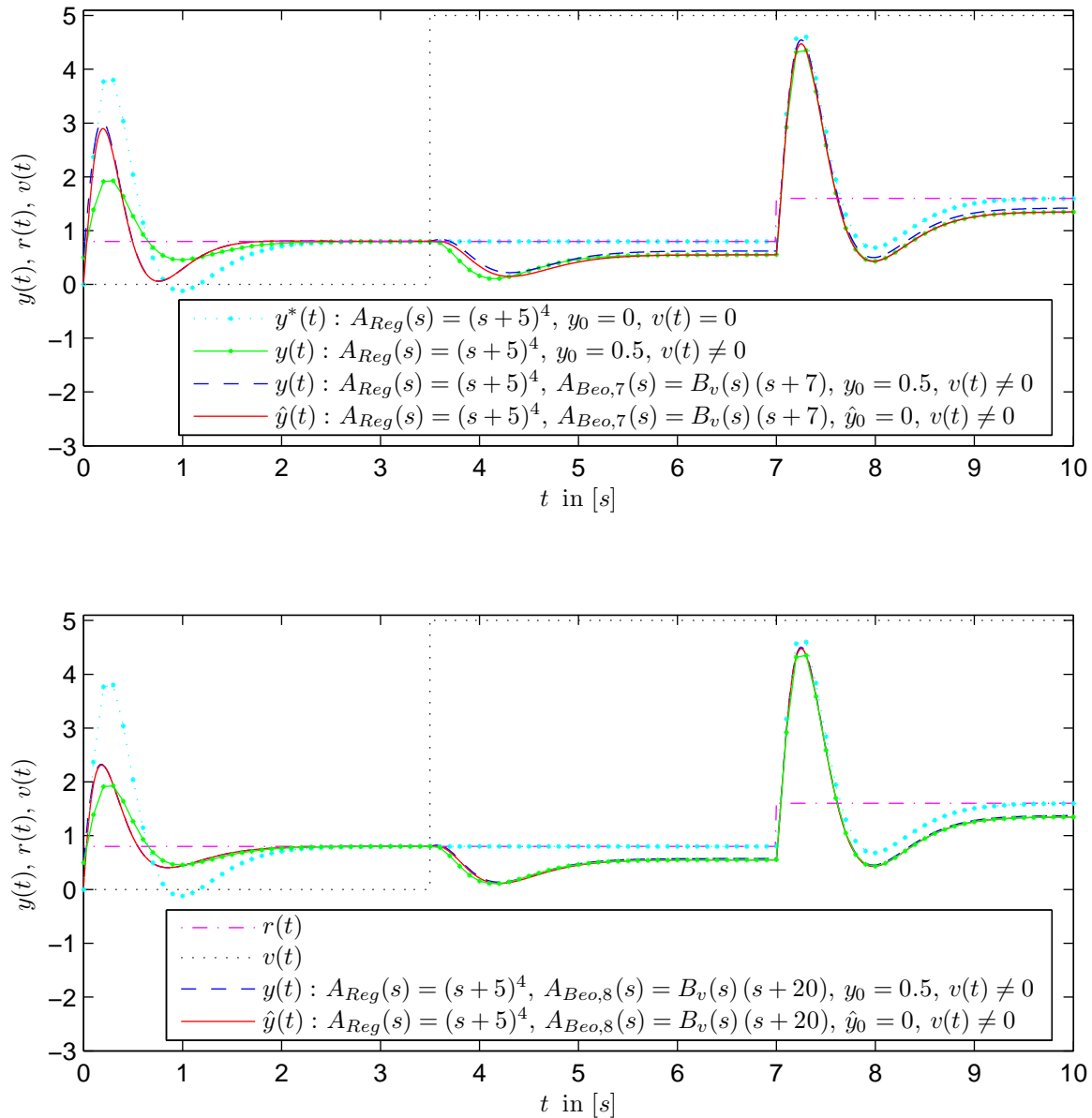


Abbildung 2.36: Zustandsregler mit Beobachter unter Störeinwirkung $v(t)$ am Beispiel des Systems (2.82) mit Auskoppelvektor \bar{c}_1 ; der Beobachter geringer Dynamik (**oben**) bzw. mittlerer Dynamik (**unten**) besitzt seine Pole im Unterschied zur Simulation 2.35 bei $\tilde{p}_{Bco,7} = \begin{pmatrix} -7 & \tilde{q}_v^T \end{pmatrix}$ bzw. $\tilde{p}_{Bco,8} = \begin{pmatrix} -20 & \tilde{q}_v^T \end{pmatrix}$, womit die Nullstellen \tilde{q}_v der Strecke gekürzt werden; die Pole des zustandsregulierten Systems liegen bei $\tilde{p}_{Reg} = (-5 \quad -5 \quad -5 \quad -5)$;

Betrachtet man den Zusammenhang der Ein- und Ausgangssignale in Gleichung (2.197), so wird deutlich, dass trotz Kürzung bzw. Schwächung der entsprechenden Nullstellenpolynome der Zähler weiter durch das Reglerpolynom $\underline{A}_{EA}(\cdot)$ bestimmt wird, d.h. das Störverhalten lässt sich bei freier Polverschiebbarkeit im Führungsverhalten über die Wahl von $A_{Bco}(\cdot)$ lediglich minimieren. Weiter ist zu beachten, dass eine Pol-Nullstellenkürzung nach Kapitel 2.2.5.6 nur dann zu einem stabilen Regelkreis führt, wenn die Strecke ein stabiles Nullstellenpolynom $B_v(\cdot)$ bzw. $B(\cdot)$ besitzt. Andernfalls darf dieses Vorgehen zur

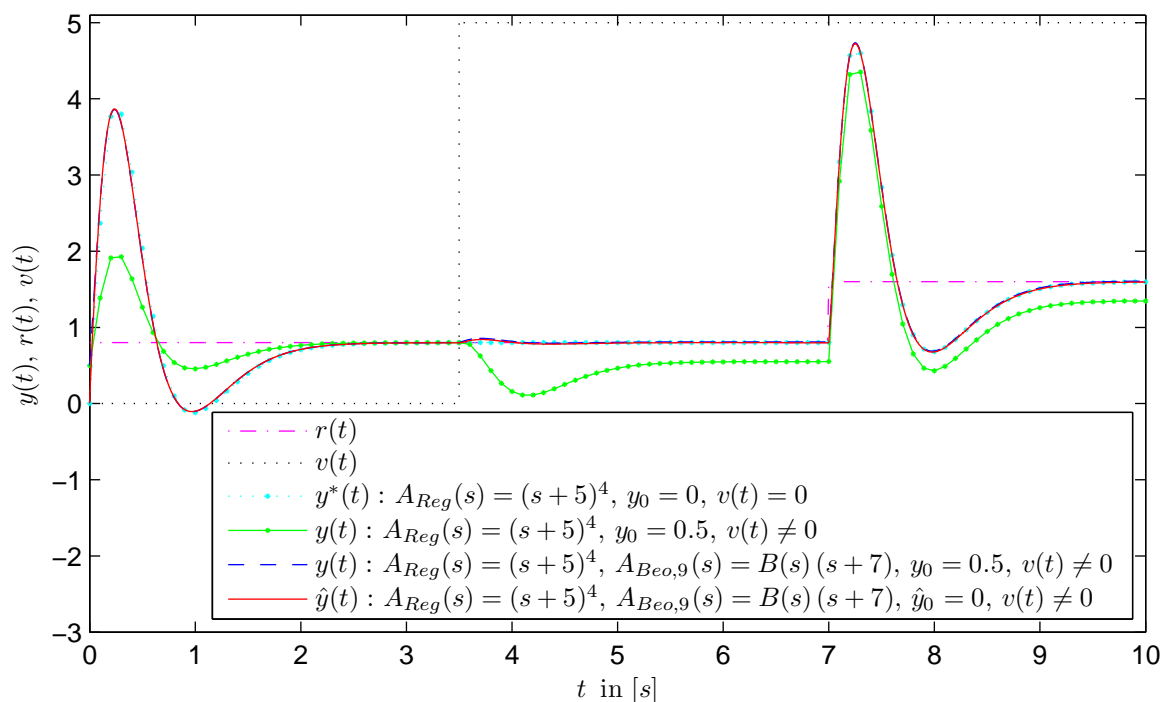


Abbildung 2.37: Zustandsregler mit Beobachter unter Störeinwirkung $v(t)$ am Beispiel des Systems (2.82) mit Auskoppelvektor \bar{c}_1 – im Unterschied zur Simulation 2.36 oben besitzt der Beobachter geringere Dynamik, seine Pole bei $\tilde{p}_{\text{Beo},9} = (-7 \tilde{q}^T)$ (\tilde{q} : Nullstellen der Führungsübertragungsfunktion), womit die Auswirkung der Nullstellen \tilde{q}_v der Störübertragungsfunktion in der transienten Phase nach Aufschaltung der Störung $v(t)$ geschwächt wird; die Pole des zustandsregulierten Systems liegen bei $\tilde{p}_{\text{Reg}} = (-5 \ -5 \ -5 \ -5)$;

Verbesserung des Störverhaltens keine Anwendung finden und es ist Theorem 2.15 anzuwenden.

Theorem 2.16: Zustandsregler mit Beobachter: Verbesserung des Störverhaltens

Auf Grund der Nullstellenpolynome der Strecke kann sich ein sehr unruhiges Verhalten des geschätzten Streckenausgangs \hat{y} während der transienten Phase des Beobachters zur Schätzung der Zustände ergeben, wenn unterschiedliche Anfangswerte zwischen Beobachter und Strecke vorliegen bzw. eine Störung auf die Strecke wirkt. Dies führt dann im zustandsregulierten System zu einem sehr unruhigen Verhalten des Streckenausgangs y mit großen temporären Regelfehlern e .

Das stark dynamische Verhalten des Regelfehlers mit hohen Beträgen lässt sich minimieren, wenn die Beobachtdynamik die Nullstellendynamik $B_v(\cdot)$ des Systems durch eine Pol-Nullstellenkompensation bzw. -schwächung eliminiert bzw. dämpft. Das Führungsverhalten bleibt hierbei unberührt – es wird lediglich das Störverhalten verbessert.

Dieses Vorgehen führt jedoch nur dann zu einem stabilen Regelkreis, wenn eine minimalphasige Strecke bzgl. der Störung vorliegt.

Wie zu sehen war, kann durch die Beobachterdynamik, unabhängig vom Führungsverhalten, das Störverhalten beeinflusst werden. Möchte man nun auch die Nullstellen bzgl. der Führungsübertragungsfunktion eliminieren, so kann dies durch zusätzliche Filterung des Sollsignals $r(\cdot)$ mit $r'(s)/r(s) = F_F(s) = 1/B(s)$ erfolgen. Um die stationäre Genauigkeit zu erhalten, ist erneut eine Skalierung um r_∞/r'_∞ bezogen auf den Filter gemäß Gleichung (2.83) notwendig. Das Ergebnis zeigt Simulation 2.38 oben. Da es sich nach der Kürzung des Nullstellenpolynoms $B(\cdot)$ effektiv um die Regelung des Systems (2.82) mit Auskoppelvektor \bar{c}_0 handelt, ist der ähnliche Verlauf im Führungsübertragungsverhalten des Ausgangssignals $y(\cdot)$ in Abbildung 2.34 oben nicht verwunderlich.

Möchte man den Effekt des Nullstellenpolynoms sowohl im Führungs- als auch Störverhalten, wie eben gezeigt, eliminieren bzw. schwächen, und gleichzeitig die nach außen sichtbare Ordnung des geregelten System verringern, kann dies mit Hilfe des Zustandsreglers durch Vorgabe eines Wunschpolynoms $A_{Reg,2}^*(s) = B(s)(s+5)$ erfolgen. Hiermit werden die Signale des Systems durch den Regler derart gefiltert, so dass der Einfluss aller Nullstellen eliminiert bzw. geschwächt wird (vgl. Gleichung (2.197)). Dementsprechend ergibt sich ein ruhiges und schnelles Führungsverhalten gemäß eines $PT_{\bar{r}}$ -Gliedes (ohne Nullstellen) minimaler Ordnung, im Beobachter entsteht kein unruhiges Verhalten der Signale mehr und es zeigt sich in der transienten Phase während des Schätzvorganges ein gutes beruhigtes Regelergebnis. Es ist kein Vorfilter $F_F(\cdot)$ notwendig und der Beobachter kann beliebig ausgelegt werden; für die Simulation 2.38 unten wurde erneut das Beobachterpolynom $A_{Beo,4}(\cdot)$ geringer Dynamik gewählt. Es bestätigt sich das gute Stör- und Führungsverhalten. Im Unterschied zu Simulation 2.38 oben besitzt das Wunschübertragungsverhalten nach Gleichung (2.191) mit $y^*(s) = 1/A_{Reg,red}^*(s) = 1/(s+5)r'(s)$ durch die Pol-Nullstellenkürzung eine geringere Ordnung von $\tilde{n}^* = 1$, die sich zuvor auf $\tilde{n}^* = 4$ belief. Dies äußert sich in einer Anfangssteigung ungleich Null und einem schnelleren Einschwingen des Ausgangssignals $y(\cdot)$.

Wollte man die Ordnung des Wunschübertragungsverhaltens nicht reduzieren, sondern bei $\tilde{n}^* = 4$ mit $A_{Reg}(s) = (s+5)^4$ belassen, so muss bei dieser Vorgehensweise ein zusätzliches System $F'(s) = 1/(s+5)^3$ eingebracht werden. Würde man dies lediglich in Form eines Vorfilters bzgl. des Sollsignals $r(\cdot)$ realisieren, hätte die entsprechende Dynamik des Wunschpolynoms $A_{Reg}^*(\cdot)$ nur Auswirkung auf das Führungsverhalten – das Störverhalten würde nach wie vor durch $A_{Reg,red}^*(\cdot)$ bestimmt sein, d.h. eine schnellere Reaktion zeigen. Oftmals ist dies nicht erwünscht, da die Dynamik der Wunschübertragungsfunktion gezielt geringer gewählt wird, um nicht in Stellgrößenbeschränkung zu gelangen, auch nicht bei einer Störung. Demzufolge muss das System $F'(\cdot)$ auch in den geschlossenen Regelkreis eingebracht werden. Hierzu kann die frei wählbare Beobachterdynamik genutzt werden, welche sich im geschlossenen Regelkreis befindet: $A_{Beo}^*(s) = (s+7) \cdot 1/F'(s) = (s+7)(s+5)^3$. Das über den Beobachter eingebrachte System $F'(s)$ wirkt sich, wie oben gezeigt, nur auf das Störverhalten und transienten Phase aus; das Führungsverhalten muss durch Filterung des Sollsignals $r(\cdot)$ mit $r'(s)/r(s) = F_F(s) = F'(s) = 1/(s+5)^3$ beeinflusst werden; die hieraus resultierende stationäre Abweichung ist durch eine Verstärkung r_∞/r'_∞ zu berücksichtigen. Das resultierende Gesamtsystem der nicht reduzierten Ordnung $\tilde{n}^* = 4$ zeigt die Nennerdynamik der Wunschübertragungsfunktion sowohl im Führungs- als auch Störverhalten.

Die Simulation dieses Zustandsreglers mit Beobachter führt auf dasselbe Ergebnis wie Simulation 2.38 oben, was gemäß Gleichung (2.197) und gefiltertem Sollsignal $r'(s) = F_F(s)r(s)$

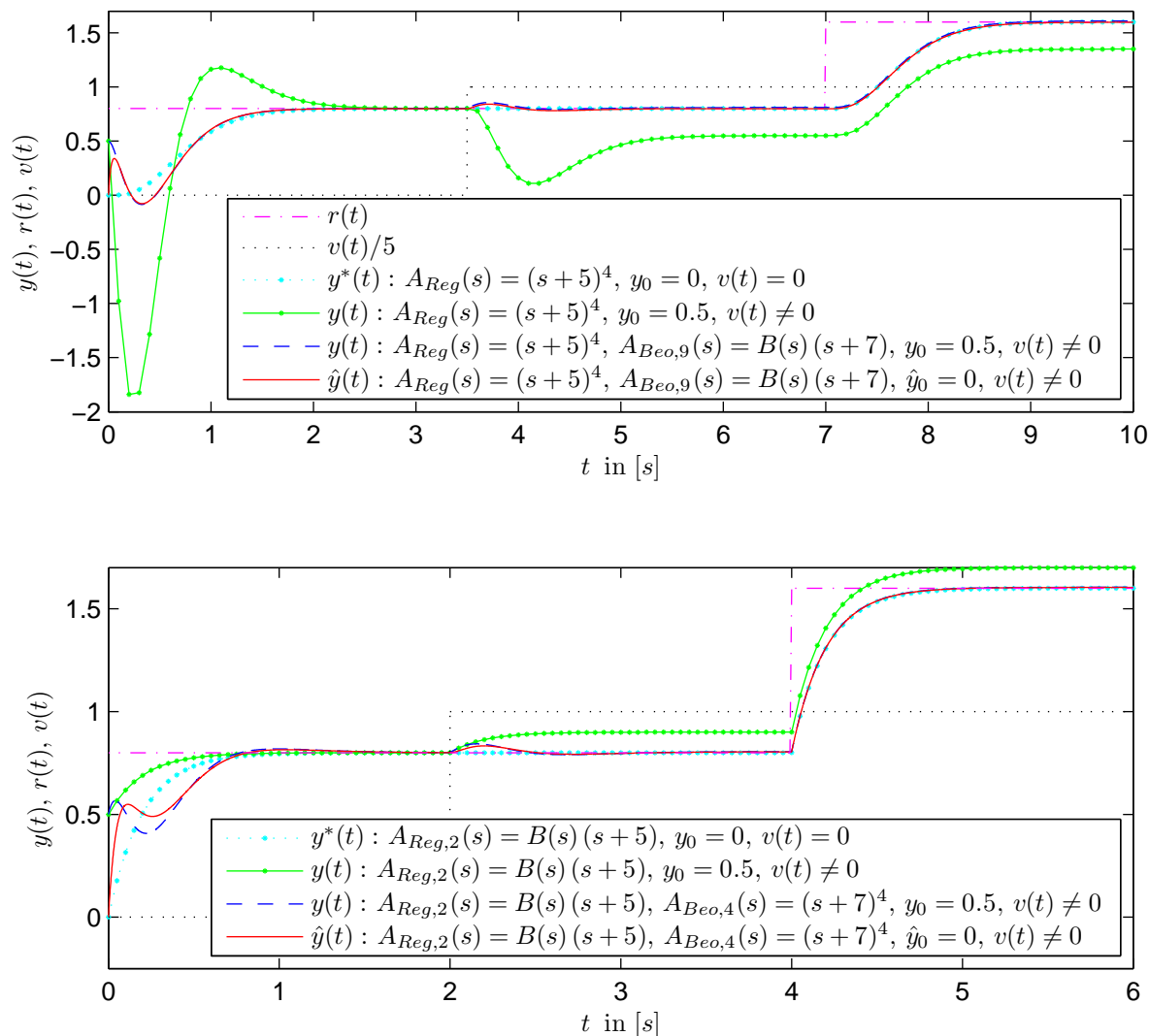


Abbildung 2.38: Zustandsregler mit Beobachter unter Störeinwirkung $v(t)$ am Beispiel des Systems (2.82) mit Auskoppelvektor $\underline{\tilde{e}}_1$, d.h. Nullstellenpolynom $B(\cdot)$; **oben:** der Beobachter geringer Dynamik besitzt seine Pole bei $\tilde{\underline{p}}_{Beo,9} = (-7 \ \underline{\tilde{q}}^T)$, womit die Nullstellen $\underline{\tilde{q}}_v$ der Strecke in der Störübertragungsfunktion geschwächt werden; zudem kürzt ein Vorfilter $1/B(s)$ die Nullstellen der Strecke in der Führungsübertragungsfunktion; die Pole des zustandsregulierten Systems liegen bei $\tilde{\underline{p}}_{Reg} = (-5 \ -5 \ -5 \ -5)$; **unten:** der Beobachter geringer Dynamik besitzt seine Pole bei $\tilde{\underline{p}}_{Beo,4} = (-7 \ -7 \ -7 \ -7)$; die Pole des zustandsregulierten Systems liegen bei $\tilde{\underline{p}}_{Reg,2} = (-5 \ \underline{\tilde{q}}^T)$, womit die Nullstellen $\underline{\tilde{q}}$ der Strecke sowohl in der Führungs- als auch Störübertragungsfunktion gekürzt bzw. geschwächt werden bei gleichzeitiger Ordnungsreduktion;

nicht verwunderlich ist: der lediglich im transienten Vorgang sowie Störverhalten auftretende Teil $(s+7)$ der Beobachterdynamik $A_{Beo}^*(\cdot)$ bzw. der im Führungsverhalten auftretende Teil $(s+5)$ der Reglerdynamik $A_{Reg}^*(\cdot)$ ist in beiden Fällen identisch; für die stets im Regelkreis präsente Dynamik von $(s+5)^3$ sowie $B(s)$ ist es irrelevant, ob diese über den Zustandsregler mit $A_{Reg}^*(\cdot)$ oder über den Beobachter mit $A_{Beo}^*(\cdot)$ eingebracht wird. In die-

ser Darstellung wurde $B(s)$ über den Regler und $(s + 5)^3$ über den Beobachter erzeugt, in Simulation 2.38 oben war dies umgekehrt. Je nach Wahl von $A_{Reg}^*(\cdot)$ ist dann ein entsprechender Vorfilter $F_F(\cdot)$ zu wählen, um in beiden Fällen das gewünschte Führungsverhalten zu erreichen.

Anmerkung 2.12:

Man stellt fest, dass der Zustandsregler mit Beobachter Freiheitsgrade besitzt, mit denen teils unabhängig das Führungs- sowie Störübertragungsverhalten durch Wahl der Regler- sowie Beobachterparameter beeinflusst werden kann. Zudem ist eine Ordnungsreduktion des Wunschübertragungsverhaltens möglich bzw. eine gezielte Vorgabe eines Wunschstreckenmodells, das sog. Referenzmodell.

An dieser Stelle zeichnet sich der Übergang zum Referenzmodellregler ab. Das Prinzip wurde an den Beispielen anschaulich dargestellt – die Herleitung der Gleichung (2.197) und somit die Bestätigung der Überlegungen bzw. der Anmerkung 2.12 erfolgt in den Kapiteln 2.2.6.5, 2.2.6.6 und 2.2.6.7.

Durch gezielte Elimination der Nullstellendynamik ist es nun möglich, das unruhige Verhalten des Ausgangssignals $y(\cdot)$ während des Einschwingvorganges auf Grund von unterschiedlichen Anfangswerten zwischen System und Beobachter bzw. einer auftretenden Störung zu minimieren. Eine Abweichung des Ausgangssignals $y(\cdot)$ vom Sollwert $y^*(\cdot)$ bei präsen- ter Störung verbleibt jedoch. Nachdem die Störung unbekannt ist, lässt sich der verbleibende Regelfehler e durch eine geeignete Wahl der Beobachterdynamik nach Gleichung (2.196) auch nicht minimieren, zumal der Freiheitsgrad gemäß Anmerkung 2.12 zur Modellbildung genutzt wird bzw. der Beruhigung des Ausgangssignals entsprechend des Theorems 2.15 bzw. Theorems 2.16 während der transienten Phase dient. Demzufolge verbleibt ein mehr oder weniger großer Regelfehler, der nicht bestimmbar ist. Wie jedoch im folgenden Kapitel gezeigt wird, kann der resultierende Regelfehler auf Grund einer Störung bei einem zustandsgeregelten System mit Beobachter generell durch ein internes Modell vollständig eliminiert werden.

Abschließend sei erwähnt, dass nach obigen Überlegungen eine hohe Dynamik in allen Zuständen des Beobachters nur noch sinnvoll ist, um ein besseres Regel- bzw. Führungsverhalten bei unzureichender Modellierung der Strecke zu erhalten. Der Beobachter kann an Hand des Ein- Ausgangsverhaltens nicht unterscheiden, ob der Schätzfehler auf Grund einer Störung beliebigen Signalverlaufes oder einer unzureichenden Modellierung resultiert. In beiden Fällen müssen die Zustände stets nachgeführt werden und es ergibt sich nie ein Parallelmodell. Je schneller der Beobachter, desto mehr kann der Schätzfehler zu jedem Zeitpunkt minimiert werden. Das Problem der Störung lässt sich, wie erwähnt, durch ein internes Modell beheben, das der unzureichenden Modellierung jedoch nicht; hier ist der Modellierungsfehler nur durch einen schnellen Beobachter zu minimieren. Es sei jedoch erwähnt, dass der Stabilitätsbeweis bei falscher Modellierung keine Gültigkeit mehr besitzt – im Allgemeinen führt ein geringer Modellierungsfehler jedoch noch zu keiner Instabilität. Um eine Stabilitätsgarantie zu erhalten, ist ein adaptiver Regler zu verwenden, der sich stets an die momentanen Gegebenheiten anpasst und zudem Stabilität garantiert. Dieser Regler wird in Kapitel 5 behandelt, dessen Grundlage der Referenzmodellregler mit freier

Polverschiebbarkeit des Kapitels 2.2.6.5 darstellt, welcher das Ergebnis des behandelten Zustandsreglers mit Beobachter ist.

2.2.6.4 Zustandsregler mit internem Modell und Zustandsbeobachter

Wie im vorigen Kapitel zu sehen war, führen Störungen $v(t) \neq 0$ zu einer Abweichung vom Sollwert, die durch den Regler nicht korrigiert werden kann. Dies ist darauf zurückzuführen, dass der Regler keine Möglichkeit besitzt, Störungen zu modellieren. Wie im Falle des Zustandsreglers mit Beobachter der Beobachter einem Modell entspricht, welches das Systemverhalten mit Anfangszuständen repräsentieren kann und deshalb der Regler eine Abweichung vom Sollwert auf Grund unterschiedlicher Anfangswerte regulieren kann, muss im Falle der Störung ebenfalls ein weiteres Modell in den geschlossenen Regelkreis zur Interpretation der Störung integriert werden. So hat der Regler die Möglichkeit, eine auftretende Störung aktiv zu kompensieren. Des Weiteren wird es durch ein internes Modell möglich, die stationäre Abweichung im Führungsverhalten zu kompensieren, so dass keine Vorverstärkung ausgelegt werden muss.

Das Prinzip eines internen Modells lässt sich sehr anschaulich am Beispiel des proportionalen Reglers (2.98) erklären; der entsprechende Signalflussplan des proportional geregelten Systems mit Störung v ist in Abbildung 2.39 zu sehen. Wendet man sich zunächst der

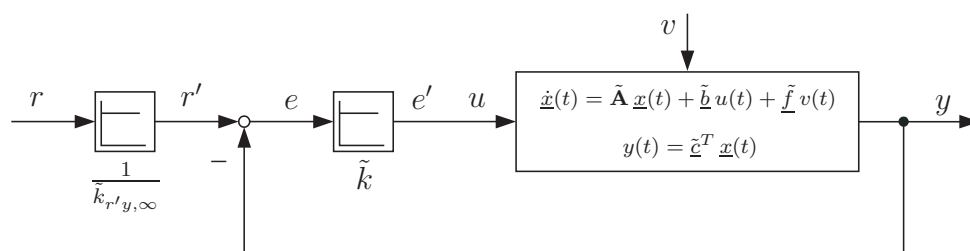


Abbildung 2.39: Signalflussplan eines proportional geregelten Systems mit Störung v

stationären Abweichung e_∞ vom Sollwert r' eines proportionalen Reglers zu ($v(t) \equiv 0$). Liegt eine beliebige $PT_{\tilde{n}}$ -Strecke vor, so ist eine Stellgröße $u_\infty \neq 0$ notwendig, um ein Ausgangssignal $y_\infty \neq 0$ gemäß Gleichung (2.86) zu erhalten. Mit Signalflussplan 2.39 bzw. Gleichung (2.98) folgt, dass dann stets ein Regelfehler $e_\infty \neq 0$ vorliegen muss – ein proportionaler Regler kann keine stationäre Genauigkeit gewährleisten. Aus diesem Grund ist gemäß Gleichung (2.101) die Verwendung einer Vorverstärkung \tilde{k}_V mit dem Inversen der stationären Verstärkung (2.86) notwendig: $\tilde{k}_V = 1/\tilde{k}_{r'y,\infty}$. Nachdem diese lediglich einer Filterung des Sollsignals $r(\cdot)$ entspricht, wirkt sie sich nur auf das Führungsverhalten aus; eine Störung führt trotzdem zu einer Abweichung vom Sollwert, wie es auch im Falle des Zustandsreglers zu erkennen war. Eine Lösung besteht nun darin, den Regler um ein System zu erweitern, so dass im stationären Zustand eine Stellgröße $u_\infty \neq 0$ bei einem Regelfehler $e_\infty = 0$ aufgebracht werden kann. Dies ermöglicht ein Integrator mit der Zustandsdarstellung:

$$\dot{\underline{x}}_I(t) = e'(t); \quad u(t) = x_I(t) \quad (2.198)$$

Dementsprechend tritt erst ein stationärer Zustand des Gesamtsystems ein, wenn $\dot{\underline{x}}_I(t) =$

$0 = e'_\infty$ gilt, d.h. keine Regelabweichung e_∞ mehr vorliegt. Der proportionale Regler mit einem Integrator als sog. *internes Modell* ist unter dem Begriff *I-Regler* bekannt und garantiert eine stationäre Genauigkeit.

Nachdem mit diesem internen Modell eine konstante Abweichung vom Sollwert kompensiert werden kann, müsste eine stationäre Genauigkeit auch bzgl. einer konstanten Störung gelten, welche ebenfalls eine konstante Abweichung vom Sollwert verursacht: sobald eine konstante Störung auf das proportional geregelte System ohne zusätzlichem Integrator wirkt, kommt es im stationären Zustand zu einer konstanten Abweichung des Ausgangssignals gemäß Gleichung (2.86): $\Delta y_\infty = k_{vy,\infty} v(t)$. Damit der Regler die durch die konstante Störung verursachte Abweichung Δy_∞ stationär eliminieren kann und zudem das Regelziel erreicht, muss die Stellgröße u um den Wert

$$\Delta u_\infty = -\frac{1}{k_{uy,\infty}} \Delta y_\infty = -\frac{k_{vy,\infty}}{k_{uy,\infty}} v(t) \quad (2.199)$$

angepasst werden. Damit eine negative Aufschaltung die Auswirkung der Störung auf den Ausgang y vollständig eliminiert, muss der Ort der Einkopplung berücksichtigt werden; da i.A. eine unterschiedliche Einkopplung der Störung v und Stellgröße u in das System vorliegt, muss Δu gegenüber v gemäß Gleichung (2.199) skaliert sein, um die betragsmäßig selbe Auswirkung am Ausgang y zu erzeugen, wie die Störung v . Im geregelten System mit internem Modell führt die Störung zu einem Regelfehler e , womit am Integrator (2.198) ein Wert ungleich Null anliegt. Die Stellgröße u wird dadurch so lange angepasst, bis im stationären Zustand erneut $e_\infty = 0$ gilt; dann muss Gleichung (2.199) erfüllt sein. Der Integrator modelliert die konstante Störung und kompensiert diese durch negative Aufschaltung auf das System, d.h. das interne Modell (2.198) entspricht dem Störmodell einer konstanten Störung $v(t) = \text{const.}$ Es zeigt sich eine stationäre Genauigkeit sowohl im Führungs- als auch Störverhalten.

Mit dieser Darstellung wird die Funktion eines internen Modells deutlich. Das interne Modell erweitert die Strecke um ein System, das bei einem Eingangssignal $e'(t) \equiv 0$ ein bestimmtes Ausgangssignal $u(\cdot)$ erzeugt, um eine an beliebiger Stelle des Systems einkoppelnde Störung v zu kompensieren. Es sei in diesem Zusammenhang daran erinnert, dass sich gemäß der Fourier-Transformation jedes beliebige Signal $v(\cdot)$ mit Hilfe von Sinus-, Cosinus und Exponentialfunktionen darstellen lässt. Koppelt daher ein gedämpftes sinusförmiges Signal in ein lineares zeitinvariantes System ein, wird dieses in Phase sowie Amplitude verändert, jedoch nicht in der Frequenz; je nach Ort der Einkopplung in das System ergibt sich eine unterschiedliche Veränderung der Phase und Amplitude. Um nun eine an beliebiger Stelle einkoppelnde Störung zu kompensieren, bedarf es eines internen Modells, welches gemäß der Fourier-Transformation gedämpfte Sinussignale erzeugt; hierbei muss das Modell zum Einen alle für die Bildung der Störung notwendigen Frequenzen generieren und zum Anderen die Dämpfung festlegen. Über das Eingangssignal $e'(t)$ des internen Modells muss dann die Amplitude sowie Phase der Sinussignale veränderbar sein, so dass das Störsignal durch einen Regler entsprechend der Fourier-Transformation nachgebildet werden kann und der unterschiedliche Ort der Einkopplung berücksichtigt wird; ist dies erreicht, gilt $e'(t) \equiv 0$ und das interne Modell erzeugt die gewünschten dynamischen Signale, welche in Summe die Auswirkung der Störung auf den Ausgang y kompensieren.

Entsprechend dieser Gedanken kann eine Störung durch ein dynamisches Modell nachgebil-

det werden, wenn sie deterministisch ist und somit exakt in die Zukunft prädiziert werden kann. Jedes periodische und somit deterministische Signal lässt sich mit Hilfe von Cosinus- und Sinussignalen gemäß der Fourier-Reihe beschreiben. Die Fourier-Reihe

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{FR,k} e^{jk\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad (2.200)$$

ist eine Spektraldarstellung des Signals $x(\cdot)$ mit

$$x(t) = a_{FR,0} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{FR,k} \cos(k\omega_0 t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_{FR,k} \sin(k\omega_0 t) \quad (2.201)$$

bestehend aus einem Gleichanteil $a_{FR,0}$, der Kennkreisfrequenz ω_0 und den höheren Harmonischen $k\omega_0$. Die Spektralkoeffizienten $c_{FR,k}$ berechnen sich hierbei wie folgt:

$$c_{FR,k} = \begin{cases} \frac{a_{FR,k} - jb_{FR,k}}{2} & \text{für } k \in \mathbb{N} \\ a_{FR,0} & \text{für } k = 0 \end{cases}, \quad a_{FR,-k} = a_{FR,k}, \quad b_{FR,-k} = b_{FR,k} \quad (2.202)$$

Durch den Übergang $T_0 \rightarrow \infty$ von der Fourier-Reihe zur Fourier-Transformation können auch nicht-periodische deterministische Signale durch Cosinus-, Sinus- und Exponentialfunktionen dargestellt werden, d.h. es müssen die dem Störsignal enthaltenen Frequenzen $k f_0 = k 2\pi\omega_0$, der Gleichanteil sowie die die Dämpfung bestimmenden Zeitkonstanten T_i der Exponentialfunktionen für das Störmodell bekannt sein.

Gemäß der dargestellten Fourier-Zerlegung muss ein grundlegendes Störmodell bei einem Eingangssignal $e'(t) \equiv 0$ ein sinusförmiges Störsignal $v_{SM}(t) = G \cos(\omega_0 t + \varphi)$ der Frequenz ω_0 , Amplitude G und Phase φ erzeugen können. Durch Bildung der Ableitung

$$x_1(t) = v_{SM}(t) = G \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (2.203)$$

$$x_2(t) = \dot{v}_{SM}(t) = -\omega_0 G \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad (2.204)$$

$$\ddot{v}_{SM}(t) = -\omega_0^2 G \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (2.205)$$

wird deutlich, dass sich das Signal $v(\cdot)$ selbst erhält, wenn dieses über den Verstärkungsfaktor ω_0^2 auf seine zweite Ableitung $\ddot{v}(\cdot)$ gegengekoppelt wird. Den Signalfussplan zeigt Abbildung 2.40 unten; die zugehörige Zustandsdarstellung des Störmodells mit den notwendigen Anfangswerten für $t = 0$ s gemäß der Gleichungen (2.203) und (2.205) lautet:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{1,i}(t) \\ \dot{x}_{2,i}(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,i}(t) + x_{1,0} \\ x_{2,i}(t) + x_{2,0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e'(t), \quad e'(t) \equiv 0 \quad (2.206)$$

$$v_{SM}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,i}(t) + x_{1,0} \\ x_{2,i}(t) + x_{2,0} \end{pmatrix} \quad (2.207)$$

$$x_{1,0} = G \cos(\varphi) \quad x_{2,0} = -\omega_0 G \cos(\varphi) \quad (2.208)$$

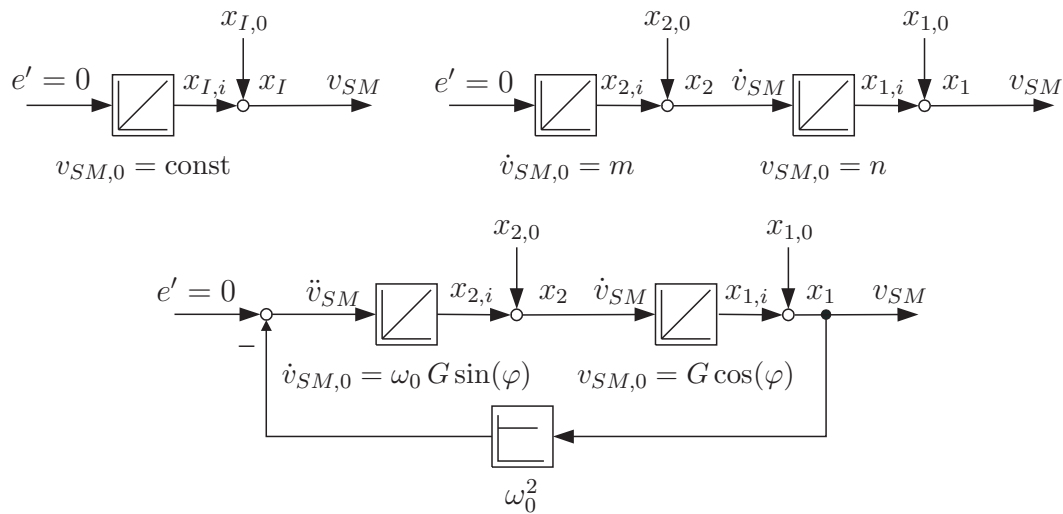


Abbildung 2.40: Störmodelle für eine ...

oben links: ... konstante Störung $v(t) = \text{const}$

oben rechts: ... linear ansteigende Störung $v(t) = n + m t$

unten: ... sinusförmige Störung $v(t) = G \cos(\omega t + \varphi)$

Mit dem Formalismus (2.258) bis (2.260) der Zustandsbeschreibung und der sich ergebenden Gleichung (2.262) folgt die Ein- Ausgangsbeschreibung des Störmodells in Operatordarstellung:

$$v_{SM}(t) = \frac{B_{0,SM}^T(\rho)}{A_{SM}(\rho)} \underline{x}_0 + \frac{B_{SM}(\rho)}{A_{SM}(\rho)} e'(t) \quad (2.209)$$

$$= \frac{\rho^2}{\rho^2 + \omega_0^2} x_{1,0} + \frac{\rho}{\rho^2 + \omega_0^2} x_{2,0} + \frac{1}{\rho^2 + \omega_0^2} e'(t); \quad e'(t) \equiv 0 \quad (2.210)$$

Nachdem die Anfangswerte $\underline{x}_0 = (x_{1,0} \quad x_{2,0})^T$ konstante Größen sind und folglich die Ableitungen $\rho^2 x_{1,0}$ und $\rho x_{2,0}$ zu Null werden, ergibt sich mit $e'(t) \equiv 0$ die implizite Darstellung des Störmodells mit sinusförmigen Ausgangssignal:

$$A_{SM}(\rho) v_{SM}(t) = (\rho^2 + \omega_0^2) v_{SM}(t) = 0 \quad (2.211)$$

Da das sinusförmige Störsignal (2.203) mit der entsprechenden Ableitung (2.205) diese implizite Gleichung erfüllt, wird neben der Bestätigung der obigen Zusammenhänge folgendes deutlich:

Theorem 2.17: Internes Modell

Die für das Störmodell entscheidende Information ist im Nennerpolynom $A_{SM}(\cdot)$ zu finden. Das Ziel zur Elimination einer Störung muss daher sein, mittels eines internen Modells das Polynom $A_{SM}(\cdot)$ in den Zähler der Störübertragungsfunktion einzubringen und somit durch eine Pol- Nullstellenkompensation das Störsignal $v(\cdot)$ zu eliminieren.

Wendet man für die Anfangswerte die Laplace-Transformation

$$x_1(t=0) = x_{1,0} \circ \frac{\mathcal{L}}{s} \bullet \frac{x_{1,0}}{s} \quad x_2(t=0) = x_{2,0} \circ \frac{\mathcal{L}}{s} \bullet \frac{x_{2,0}}{s} \quad (2.212)$$

an, so ergibt sich mit Gleichung (2.210) und $e'(s) \equiv 0$ das Störmodell für sinusförmige Störungen im Frequenzbereich:

$$v_{SM}(s) = \frac{B_{0,SM}^T(s)}{A_{SM}(s)} \frac{\underline{x}_0}{s} = \frac{x_{1,0} s}{s^2 + \omega_0^2} + \frac{x_{2,0}}{s^2 + \omega_0^2} \quad (2.213)$$

Es zeigt sich, dass die beiden Summanden in Gleichung (2.213) der Laplace-Transformierten einer Cosinus- sowie Sinusfunktion entsprechen [183]: die Pole des Störmodells sind rein imaginär, womit eine gewünschte Dauerschwingung der Frequenz ω_0 bestätigt wird.

Ein Spezialfall ergibt sich, wenn die Frequenz $\omega_0 = 0 \text{ rad/s}$ betrachtet wird; dann liegt lediglich eine Integratorkette aus zwei Elementen vor. Nachdem jedoch entsprechend der Anfangswerte (2.208) $x_{2,0} = 0$ und $x_{1,0} = G \cos(\varphi)$ gilt und kein Eingangssignal wegen $e'(t) \equiv 0$ anliegt, verbleibt ein System erster Ordnung mit einem Integrator, dessen Anfangswert $x_{I,0} = x_{1,0} = \text{const}$ beliebig gewählt werden kann (siehe Abbildung 2.40 oben links). Da das Eingangssignal dieses Integrators Null ist, bleibt das Ausgangssignal $v(\cdot)$ beim Initialisierungswert – es handelt sich somit um das Modell einer konstanten Störung:

$$\dot{x}_{I,i}(t) = e'(t); \quad e'(t) \equiv 0 \quad (2.214)$$

$$v_{SM}(t) = x_{I,i}(t) + x_{I,0} \quad (2.215)$$

$$x_{I,0} = \text{const} \quad (2.216)$$

Für die Ein- Ausgangsbeschreibung des Störmodells in Operatordarstellung folgt gemäß Gleichung (2.262):

$$v_{SM}(t) = \frac{B_{0,SM}^T(\rho)}{A_{SM}(\rho)} \underline{x}_0 + \frac{B_{SM}(\rho)}{A_{SM}(\rho)} e'(t) = \frac{\rho}{\rho} x_{I,0} + \frac{1}{\rho} e'(t); \quad e'(t) \equiv 0 \quad (2.217)$$

Die implizite Darstellung ergibt sich mit $e'(t) \equiv 0$ zu:

$$A_{SM}(\rho) v_{SM}(t) = \rho v_{SM}(t) = 0 \quad (2.218)$$

Mit

$$x_I(t=0) = x_{I,0} \circ \frac{\mathcal{L}}{s} \bullet \frac{x_{I,0}}{s} \quad (2.219)$$

lautet das Störmodell für konstante Störungen im Frequenzbereich:

$$v_{SM}(s) = \frac{B_{0,SM}^T(s)}{A_{SM}(s)} \frac{\underline{x}_0}{s} = \frac{x_{I,0}}{s} \quad (2.220)$$

Hiermit wird nochmals deutlich, dass das gewählte interne Modell (2.198) dem einer konstanten Störung entspricht und diese folglich kompensieren kann.

Damit ein Störmodell ohne Eingangssignal ($e'(t) \equiv 0$) gemäß der Fourier-Reihe (2.201) ein Ausgangssignal mit dem Endwert $u_\infty \neq 0$ bzw. einen Gleichanteil $a_{FR,0}$ erzeugen kann, muss das Störmodell mindestens einen Pol auf der imaginären Achse besitzen, so dass das Ausgangssignal weder auf- noch abklingt. Demzufolge muss das Störmodell zumindest eines der beiden Modelle (2.206) oder (2.214) enthalten. Ist dies erfüllt, kann ein Störmodell aus beliebigen weiteren dynamischen Systemen bestehen, die ein Auf- oder Abklingverhalten vorgeben. Wird beispielsweise das Störmodell einer konstanten Störung (2.214) mit $x_{1,0} = x_{2,0} = m$ um einen weiteren Integrator mit dem Anfangswert $x_{1,0} = n$ erweitert, findet eine Modellierung einer Störung $v(t) = n + mt$ mit konstanter Steigung m und Anfangswert $v_0 = n$ statt, wenn für das Eingangssignal $e'(t) \equiv 0$ gilt. Den Signalfussplan zeigt Abbildung 2.40 oben rechts. Die Zustandsdarstellung mit entsprechenden Anfangswerten lautet:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{1,i}(t) \\ \dot{x}_{2,i}(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,i}(t) + x_{1,0} \\ x_{2,i}(t) + x_{2,0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e'(t), \quad e'(t) \equiv 0 \quad (2.221)$$

$$v_{SM}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,i}(t) + x_{1,0} \\ x_{2,i}(t) + x_{2,0} \end{pmatrix} \quad (2.222)$$

$$x_{1,0} = n \quad x_{2,0} = m \quad (2.223)$$

Für die Ein- Ausgangsbeschreibung des Störmodells in Operatordarstellung folgt:

$$v_{SM}(t) = \frac{B_{0,SM}^T(\rho)}{A_{SM}(\rho)} \underline{x}_0 + \frac{B_{SM}(\rho)}{A_{SM}(\rho)} e'(t) = \frac{\rho^2}{\rho^2} x_{1,0} + \frac{\rho}{\rho^2} x_{2,0} + \frac{1}{\rho^2} e'(t); \quad e'(t) \equiv 0 \quad (2.224)$$

Die implizite Darstellung ergibt sich mit $e'(t) \equiv 0$ zu:

$$A_{SM}(\rho) v_{SM}(t) = \rho^2 v_{SM}(t) = 0 \quad (2.225)$$

Das Störmodell für Störungen mit konstanter Steigung lautet im Frequenzbereich:

$$v_{SM}(s) = \frac{B_{0,SM}^T(s)}{A_{SM}(s)} \frac{\underline{x}_0}{s} = \frac{x_{1,0}}{s} + \frac{x_{2,0}}{s^2} \quad (2.226)$$

Mit Hilfe vieler Störmodelle in einem Störmodell können somit deterministische Störungen nachgebildet werden. Die Signalfrequenzen sowie -dämpfungen dieses Störmodells werden fest durch die Modelle vorgegeben, wie das in Gleichung (2.206) durch Vorgabe der Verstärkung $-\omega_0^2$ in der Systemmatrix deutlich wurde. Die Amplituden sowie Phasen der Signale hingegen werden als Anfangswert übergeben und können daher stets über das Eingangssignal $e'(t) \neq 0$ neu eingestellt und verändert werden. Dies entspricht der geforderten Voraussetzung des Störmodells für die Verwendung als internes Modell innerhalb einer Regelung zur Kompensation der Störung trotz unterschiedlicher Einkopplung von Störung und Störmodell. Es sei bereits an dieser Stelle erwähnt, dass im Falle eines adaptiven Reglers in Kapitel 5 nicht nur die Phasen und Amplituden des Störmodells durch den Regler eingestellt werden können, sondern auch die Verstärkungen, d.h. Frequenzen, so dass für die Modellierung bzw. Kompensation einer unbekanntenen Störung lediglich eine ausreichende Ordnung des gesamten Störmodells garantiert werden muss. Allgemein lautet somit die

Zustandsdarstellung des Störmodells:

$$\dot{\underline{x}}_{SM,i}(t) = \tilde{\mathbf{A}}_{SM} (\underline{x}_{SM,i}(t) + \underline{x}_{SM,0}) + \tilde{\mathbf{b}}_{SM} e'(t); \quad e'(t) \equiv 0 \quad (2.227)$$

$$v_{SM}(t) = \tilde{\mathbf{c}}_{SM}^T (\underline{x}_{SM,i}(t) + \underline{x}_{SM,0}) \quad (2.228)$$

Für die Ein- Ausgangsbeschreibung des Störmodells in Operatorform folgt:

$$v_{SM}(t) = \frac{B_{0,SM}^T(\rho)}{A_{SM}(\rho)} \underline{x}_0 + \frac{B_{SM}(\rho)}{A_{SM}(\rho)} e'(t) \quad e'(t) \equiv 0 \quad (2.229)$$

Für die implizite Darstellung ergibt sich:

$$A_{SM}(\rho) v_{SM}(t) = 0 \quad (2.230)$$

Im Frequenzbereich gilt für das Störmodell:

$$v_{SM}(s) = \frac{B_{0,SM}^T(s)}{A_{SM}(s)} \underline{x}_0(s) + \frac{B_{SM}(s)}{A_{SM}(s)} e'(s) \quad e'(s) \equiv 0 \quad (2.231)$$

$$= \frac{B_{0,SM}^T(s)}{A_{SM}(s)} \frac{\underline{x}_0}{s} + \frac{B_{SM}(s)}{A_{SM}(s)} e'(s) \quad e'(s) \equiv 0 \quad (2.232)$$

Die Verwendung des Störmodells als *internes Modell* am Beispiel des proportionalen Reglers aus Abbildung 2.39 zeigt der Signalflussplan 2.41. Die deterministische unbekannte

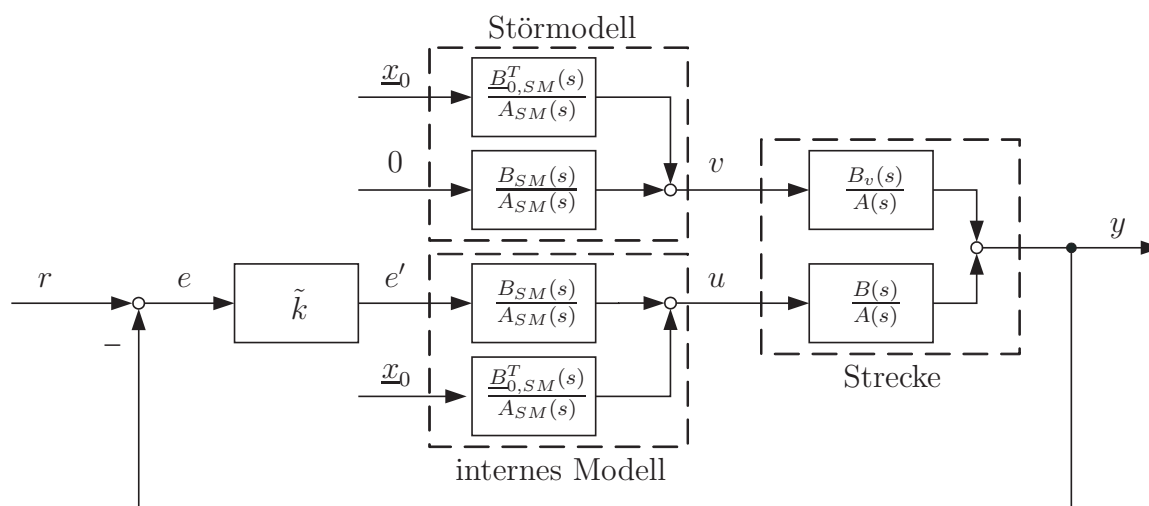


Abbildung 2.41: Signalflussplan eines proportionalen Systems mit Störung v ; zur Kompensation der Störung sowie stationären Abweichung wird ein internes Modell, basierend auf einem Störmodell, verwendet

Störung v wird als Ausgangssignal des Störmodells (2.231) dargestellt. Diese koppelt an einer beliebigen Stelle der Strecke ein, was durch das Nullstellenpolynom $B_v(\cdot)$ zum Ausdruck kommt, und wirkt sich auf den Systemausgang y aus. Die Strecke kann jedoch nur über die Stellgröße u beeinflusst werden, deren Einkopplung in das System durch das

Nullstellenpolynom $B(\cdot)$ verdeutlicht wird. Aus diesem Grund ergibt sich bei identischem Störmodell und internem Modell ein Phasen- und Amplitudenunterschied am Ausgang, weshalb die Auswirkung der Störung nicht kompensiert werden kann. Daher ist es essentiell, dass über das Eingangssignal $e'(\cdot)$ die Phase und Amplitude des internen Modells bzgl. des Störmodells angepasst werden kann, bis es zu einer Kompensation der Störung bezogen auf den Ausgang y kommt. Sobald sich zur Kompensation eine geeignete konstante Phase sowie Amplitude des internen Modells einstellt, muss das Eingangssignal $e'(t) = e'_\infty = 0$ des Störmodells zu Null werden, wenn alle auftretenden Störungen kompensiert werden.

Wie zu Beginn des Kapitels dargestellt, verbleibt beim proportionalen Regler ein konstanter Regelfehler e_∞ auf Grund der stationären Abweichung. Da es für das interne Modell irrelevant ist, an welcher Stelle eine Störung einkoppelt, kann die stationäre Abweichung als Resultat einer konstanten Störung interpretiert werden. Demzufolge muss das interne Modell eines proportionalen Reglers ein Störmodell einer konstanten Störung enthalten oder um dieses erweitert werden, um eine erfolgreiche Kompensation einer beliebigen Störung bei gleichzeitiger Vermeidung einer stationären Abweichung zu gewährleisten. Ein Vergleich zwischen dem Störmodell einer konstanten Störung (2.214) mit dem notwendigen Modell (2.198) zur Kompensation der stationären Abweichung bestätigt diese Überlegung. Die Vorverstärkung $\tilde{k}_V = 1/\tilde{k}_{r'y,\infty}$ kann nun entfallen, da stationäre Genauigkeit garantiert ist. Der Regler in Verbindung mit dem Störmodell ist so lange aktiv, bis ein Regelfehler $e_\infty = 0$ erreicht ist – dann gilt für den Eingang des Störmodells ebenfalls $e'_\infty = 0$, womit die korrekte Phase und Amplitude eingestellt wurde, so dass die unbekannt dynamische Störung v und die stationäre Abweichung am Ausgang y stets vollständig kompensiert werden. Diese Überlegungen werden durch das Aufstellen der Störübertragungsfunktion und Einsetzen des Störmodells (2.232) als Störung v bestätigt:

$$y(s) = \frac{B_v(s) A_{SM}(s)}{A_{SM}(s) A(s) + \tilde{k} B(s) B_{SM}(s)} v_{SM}(s) \quad (2.233)$$

$$= \frac{B_v(s) A_{SM}(s)}{A_{SM}(s) A(s) + \tilde{k} B(s) B_{SM}(s)} \frac{B_{0,SM}^T(s)}{A_{SM}(s)} \frac{x_0}{s} \quad (2.234)$$

Gemäß des Theorems 2.17 findet durch das interne Modell eine Pol- Nullstellenkompensation des Nennerpolynoms $A_{SM}(\cdot)$ der Störung statt, so dass deren Dynamik hinsichtlich des Ausgangssignals $y(\cdot)$ vollständig eliminiert wird.

Im Folgenden soll nun das Prinzip des internen Modells zur Vermeidung einer stationären Abweichung sowie zur Kompensation einer Störung auf den Zustandsregler in Abbildung 2.16 mit dem Regelgesetz (2.143) angewandt werden. Bringt man wie beim Beispiel des proportionalen Reglers in Abbildung 2.41 ein internes Modell (2.231) bzw. (2.227)/(2.228) vor das System ein, wird das Signal $e(\cdot)$ zwar zu Null und eine entsprechende modellierte Störung wird durch das eingebrachte Störmodell kompensiert, jedoch im Hinblick auf das Signal $\tilde{k}^T \tilde{x}(\cdot)$, d.h. der Linearkombination der Zustände, und nicht im Hinblick auf das Ausgangssignal $y(\cdot)$. Eine stationäre Abweichung sowie eine Auswirkung der Störung auf das Ausgangssignal $y(\cdot)$ ist weiter präsent und kann nicht kompensiert werden, da ein Zustandsregler im Vergleich zum proportionalen Regler nicht das Ausgangssignal, sondern die Zustände zurückführt.

Zur Lösung des Problems bringt man das Störmodell (Index SM) als internes Modell beim

Zustandsregler, wie im Signalflussplan 2.42 dargestellt, hinter dem System ein. Damit das

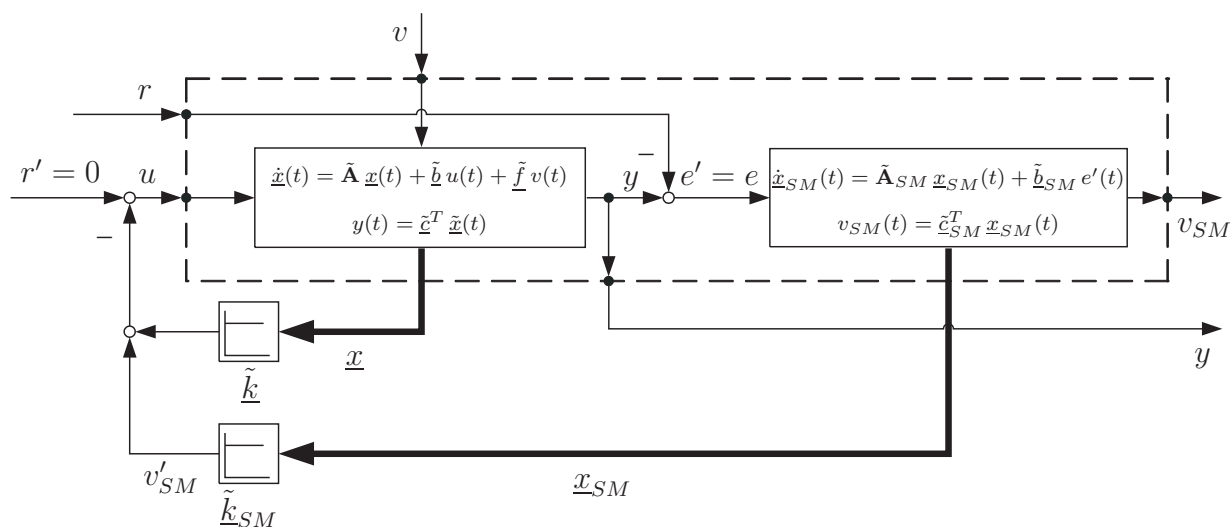


Abbildung 2.42: Signalflussplan eines zustandsregulierten Systems mit internem Modell

Störmodell im stationären Zustand gemäß Gleichung (2.227) den Eingang $e'(t) = e'_\infty = 0$ aufzeigt, muss das Sollsignal $r(\cdot)$ zwischen System und Störmodell eingespeist werden (das negative Vorzeichen der Rückkopplung verbleibt aus formellen Gründen weiter beim Regler):

$$e'(t) = e(t) = y(t) - r(t) \quad (2.235)$$

Sobald das Regelziel $e(t) = 0$ erreicht ist, erzeugt das interne Modell, wie beschrieben, ein Signal zur Kompensation der modellierten Störung sowie der stationären Abweichung des Zustandsreglers, so dass gilt: $r_\infty = y_\infty$. Das Prinzip der freien Polverschiebbarkeit durch den Zustandsregler wird, wie im Weiteren dargestellt, durch die Verlegung des Sollsignals $r(\cdot)$ nicht verletzt. Für den Zustandsregler gilt nun: $r'(t) \equiv 0$. Das Regelgesetz des Zustandsreglers für ein System mit internem Modell (Index IM) lautet:

$$u(t) = -\tilde{k}^T \underline{x}(t) - \tilde{k}_{SM}^T \underline{x}_{SM}(t) = -\underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{k}^T & \tilde{k}_{SM}^T \end{pmatrix}}_{\tilde{k}_{IM}^T} \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{x}(t) \\ \underline{x}_{SM}(t) \end{pmatrix}}_{\underline{x}_{IM}(t)} \quad (2.236)$$

Wie zu erkennen ist, wird nicht der Ausgang v_{SM} des Störmodells, wie beim proportionalen Regler, auf das System geschaltet, sondern die Linearkombination der Zustände \underline{x}_{SM} des Störmodells. Dies ermöglicht zum Einen die Vereinheitlichung zwischen Systemen mit und ohne internen Störmodellen bei der im nächsten Schritt folgenden Verwendung eines Beobachters und dementsprechend die Umsetzbarkeit von Störmodellen bei einem Ein-Ausgangsregler mit freier Polverschiebbarkeit des Kapitels 2.2.6.5 und zum Anderen wird somit die Aktivität des Störmodells durch die Polvorgabe beschleunigt. Effektiv ist die Linearkombination der Zustände des Störmodells $v'_{SM}(t) = \tilde{k}_{SM}^T \underline{x}_{SM}(t)$ bereits eine Anpassung der erzeugten Störung v_{SM} auf das System und die Rückführung von $v'(t) = v(t)$ ist ein Spezialfall, der eintritt, wenn $\tilde{k}_{SM} = \tilde{c}_{SM}$ gewählt wird. Insgesamt zeigt sich, wie

erwartet, trotz Unterschiede im Vorgehen, die Ähnlichkeit in der Funktion des internen Modells zwischen proportionalem Regler und Zustandsregler.

Die Zustandsdarstellung der um das Störmodell (2.227)/(2.228) erweiterten Strecke gemäß des Signalflossplans 2.42 lautet allgemein:

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{\underline{x}}(t) \\ \dot{\underline{x}}_{SM}(t) \end{pmatrix}}_{\dot{\underline{x}}_{IM}(t)} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}} & \mathbf{0} \\ \tilde{\underline{b}}_{SM}\tilde{\underline{c}}^T & \tilde{\mathbf{A}}_{SM} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{A}}_{IM}} \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{x}(t) \\ \underline{x}_{SM}(t) \end{pmatrix}}_{\underline{x}_{IM}(t)} + \underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{\underline{b}} \\ 0 \end{pmatrix}}_{\tilde{\underline{b}}_{IM}} u(t) - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\underline{b}}_{SM} \end{pmatrix}}_{\tilde{\underline{g}}_{IM}} r(t) + \underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{\underline{f}} \\ 0 \end{pmatrix}}_{\tilde{\underline{f}}_{IM}} v(t) \\
 v_{SM}(t) &= \underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{\underline{0}}^T & \tilde{\underline{c}}_{SM}^T \end{pmatrix}}_{\tilde{\underline{c}}_{IM,v}^T} \begin{pmatrix} \underline{x}(t) \\ \underline{x}_{SM}(t) \end{pmatrix} \\
 y(t) &= \underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{\underline{c}}^T & \underline{0}^T \end{pmatrix}}_{\tilde{\underline{c}}_{IM,y}^T} \begin{pmatrix} \underline{x}(t) \\ \underline{x}_{SM}(t) \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.237}$$

Theorem 2.18: Zustandsregler für ein System mit internem Modell

Für das Vorgehen bzgl. Reglerauslegung ist es irrelevant, ob eine Strecke mit oder ohne internem Modell betrachtet wird, da die entsprechenden Zustandsdarstellungen formell identisch sind:

$$\begin{aligned}
 \dot{\underline{x}}_{IM}(t) &= \tilde{\mathbf{A}}_{IM} \underline{x}_{IM}(t) + \tilde{\underline{b}}_{IM} u(t) - \tilde{\underline{g}}_{IM} r(t) + \tilde{\underline{f}}_{IM} v(t) \\
 v_{SM}(t) &= \tilde{\underline{c}}_{IM,v}^T \underline{x}_{IM}(t) \\
 y(t) &= \tilde{\underline{c}}_{IM,y}^T \underline{x}_{IM}(t)
 \end{aligned} \tag{2.238}$$

Es existiert jedoch für die Sollgröße r ein zusätzlicher Eingang und für die modellierte Störgröße v_{SM} ein zusätzlicher Ausgang. Weiter erhöht sich die Ordnung des zu regelnden Systems um die Ordnung \tilde{n}_{SM} des Störmodells.

Durch Einsetzen des Regelgesetzes (2.236) in die um das Störmodell erweiterte Systembeschreibung (2.238) ergibt sich die Zustandsdarstellung des geregelten Systems:

$$\begin{aligned}
 \dot{\underline{x}}_{IM}(t) &= \underbrace{\left(\tilde{\mathbf{A}}_{IM} - \tilde{\underline{b}}_{IM}\tilde{\underline{k}}_{IM}^T \right)}_{\tilde{\mathbf{A}}_{Reg,IM}} \underline{x}_{IM}(t) - \tilde{\underline{g}}_{IM} r(t) + \tilde{\underline{f}}_{IM} v(t) \\
 y(t) &= \tilde{\underline{c}}_{IM,y}^T \underline{x}_{IM}(t)
 \end{aligned} \tag{2.239}$$

Der Vergleich mit Kapitel 2.2.5.5/2.2.6.1 bzw. Gleichung (2.144) zeigt, dass, wie erwartet, die freie Polverschiebbarkeit durch den Zustandsregler trotz Erweiterung des Systems um das interne Modell sowie Verlegung des Sollsignals weiter gewährt wird.

Gemäß Kapitel 2.2.6.3 kann nun das geregelte System um einen Zustandsbeobachter mit

den geschätzten Zuständen $\hat{\underline{x}}_{IM}$ erweitert werden:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\underline{x}}}_{IM}(t) &= \tilde{\mathbf{A}}_{IM} \hat{\underline{x}}_{IM}(t) + \tilde{\mathbf{b}}_{IM} u(t) - \tilde{\mathbf{g}}_{IM} r(t) + \tilde{\mathbf{l}}_{IM} (v_{SM}(t) - \hat{v}_{SM}(t)) \\ \hat{v}_{SM}(t) &= \tilde{\mathbf{c}}_{IM,v}^T \hat{\underline{x}}_{IM}(t)\end{aligned}\quad (2.240)$$

Das Regelgesetz (2.236) lautet dann wie folgt:

$$u(t) = - \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{k}}^T & \tilde{\mathbf{k}}_{SM}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\underline{x}}(t) \\ \hat{\underline{x}}_{SM}(t) \end{pmatrix} = -\tilde{\mathbf{k}}_{IM}^T \hat{\underline{x}}_{IM}(t) \quad (2.241)$$

Basierend auf dem Signalflussplan 2.42 (gestrichelter Systemblock) bzw. der Systemgleichung (2.237) ergibt sich der Signalflussplan 2.43 des Zustandsreglers mit Zustandsbeobachter, wobei das System um ein internes Modell ergänzt wurde.

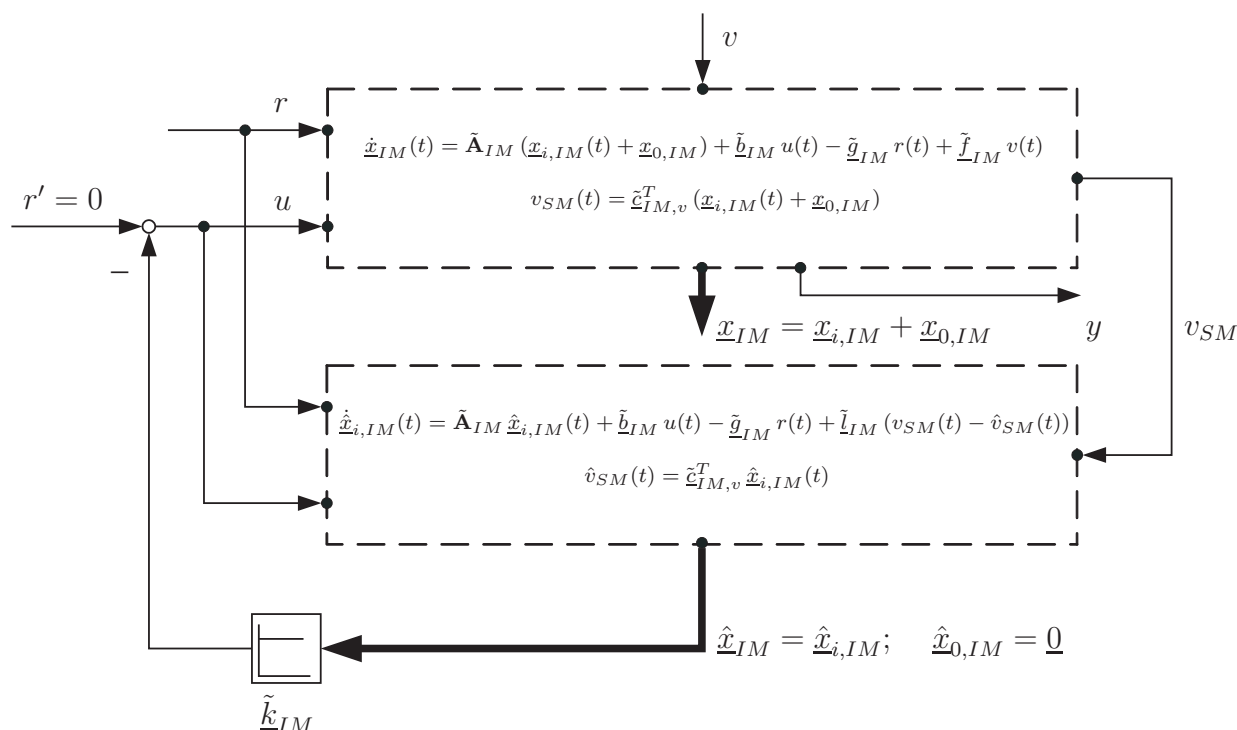


Abbildung 2.43: Signalflussplan eines zustandsgeregelt Systems mit internem Modell und Beobachter

Gemäß Gleichung (2.189) lautet die um die Schätzfehler $\underline{\hat{x}}_{IM} = \underline{x}_{IM} - \hat{\underline{x}}_{IM}$ erweiterte Zustandsdarstellung des geregelten Systems:

$$\begin{pmatrix} \dot{\underline{\hat{x}}}_{IM}(t) \\ \dot{\hat{v}}_{SM}(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{IM} - \tilde{\mathbf{b}}_{IM} \tilde{\mathbf{k}}_{IM}^T & \tilde{\mathbf{b}}_{IM} \tilde{\mathbf{k}}_{IM}^T \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{A}}_{IM} - \tilde{\mathbf{l}}_{IM} \tilde{\mathbf{c}}_{IM,v}^T \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{A}}_{RK,IM}} \begin{pmatrix} \underline{\hat{x}}_{IM}(t) \\ \hat{v}_{SM}(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{g}}_{IM} \\ \underline{0} \end{pmatrix} r(t) + \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{f}}_{IM} \\ \tilde{\mathbf{f}}_{IM} \end{pmatrix} v(t)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{c}}_{IM,y}^T & \underline{0}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\hat{x}}_{IM}(t) \\ \hat{v}_{SM}(t) \end{pmatrix} \quad (2.242)$$

Somit gilt für das charakteristische Polynom des Regelkreises mit Beobachter und internem Modell gemäß Gleichung (2.190):

$$A_{RK,IM}(s) = \det[s \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}_{RK,IM}] \quad (2.243)$$

$$= \det\left(s \mathbf{E} - \underbrace{(\tilde{\mathbf{A}}_{IM} - \tilde{\mathbf{b}}_{IM} \tilde{\mathbf{k}}_{IM}^T)}_{\tilde{\mathbf{A}}_{RegIM}} \det\left(s \mathbf{E} - \underbrace{(\tilde{\mathbf{A}}_{IM} - \tilde{\mathbf{l}}_{IM} \tilde{\mathbf{c}}_{IM,v}^T)}_{\tilde{\mathbf{A}}_{BeoIM}}\right)\right) \quad (2.244)$$

$$= A_{RegIM}(s) A_{BeoIM}(s) \quad (2.245)$$

Es wird deutlich, dass die Stabilitätskriterien des zustandsgeregelten Systems mit Beobachter auch bei Erweiterung des Systems um ein internes Modell zur Kompensation von Störungen erhalten bleiben.

Theorem 2.19: Zustandsregler mit Beobachter für ein System mit internem Modell

Mit Gleichung (2.245) steht fest, dass die die Stabilität bestimmenden Polstellen des geschlossenen Regelkreises denen des zustandsgeregelten Systems und Zustandsbeobachters entsprechen, d.h. der Zustandsregler und der Zustandsbeobachter sind unabhängig voneinander für das um das Störmodell erweiterte System auszulegen. Sind Zustandsregler und -beobachter jeweils stabil, ist das Gesamtsystem mit internem Modell stabil.

In Ergänzung zu den Untersuchungen in Kapitel 2.2.6.3 soll nun am Beispielsystem (2.82) gezeigt werden, wie die stationäre Abweichung bei einem Zustandsregler trotz präsenster Störung mit Hilfe eines internen Modells vermieden werden kann. Da im benannten Kapitel deutlich wurde, dass vorhandene Nullstellen das Störverhalten sowie das Einschwingverhalten in der transienten Phase durch hoch dynamische Vorgänge negativ beeinflussen, soll der Auskoppelvektor $\tilde{\mathbf{c}}_1$ des Beispielsystems verwendet werden, d.h. ein System mit Nullstellen, um die Funktion des Reglers zu verdeutlichen.

Wendet man das Störmodell (2.214) einer konstanten Störung auf Gleichung (2.237) an, so ergibt sich folgende Zustandsdarstellung des um das interne Modell einer konstanten Störung erweiterten Systems:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{x}_{SM}(t) \end{pmatrix}}_{\tilde{\mathbf{x}}_{IM}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}} & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{c}}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{A}}_{IM}} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ x_I(t) \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}_{IM}(t)} + \underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{b}} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}}_{\tilde{\mathbf{b}}_{IM}} u(t) - \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}}_{\tilde{\mathbf{g}}_{IM}} r(t) + \underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{f}} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}}_{\tilde{\mathbf{l}}_{IM}} v(t)$$

$$v_{SM}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{0}}^T & \mathbf{1} \end{pmatrix}}_{\tilde{\mathbf{c}}_{IM,v}^T} \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ x_I(t) \end{pmatrix} \quad (2.246)$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{c}}^T & \mathbf{0} \end{pmatrix}}_{\tilde{\mathbf{c}}_{IM,y}^T} \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ x_I(t) \end{pmatrix}$$

In Signalflussplan 2.42 bedeutet dies den Austausch des Störmodells mit einem Integrator, so dass $\underline{x}_{SM}(t) = x_I(t) = v_{SM}(t)$ gilt.

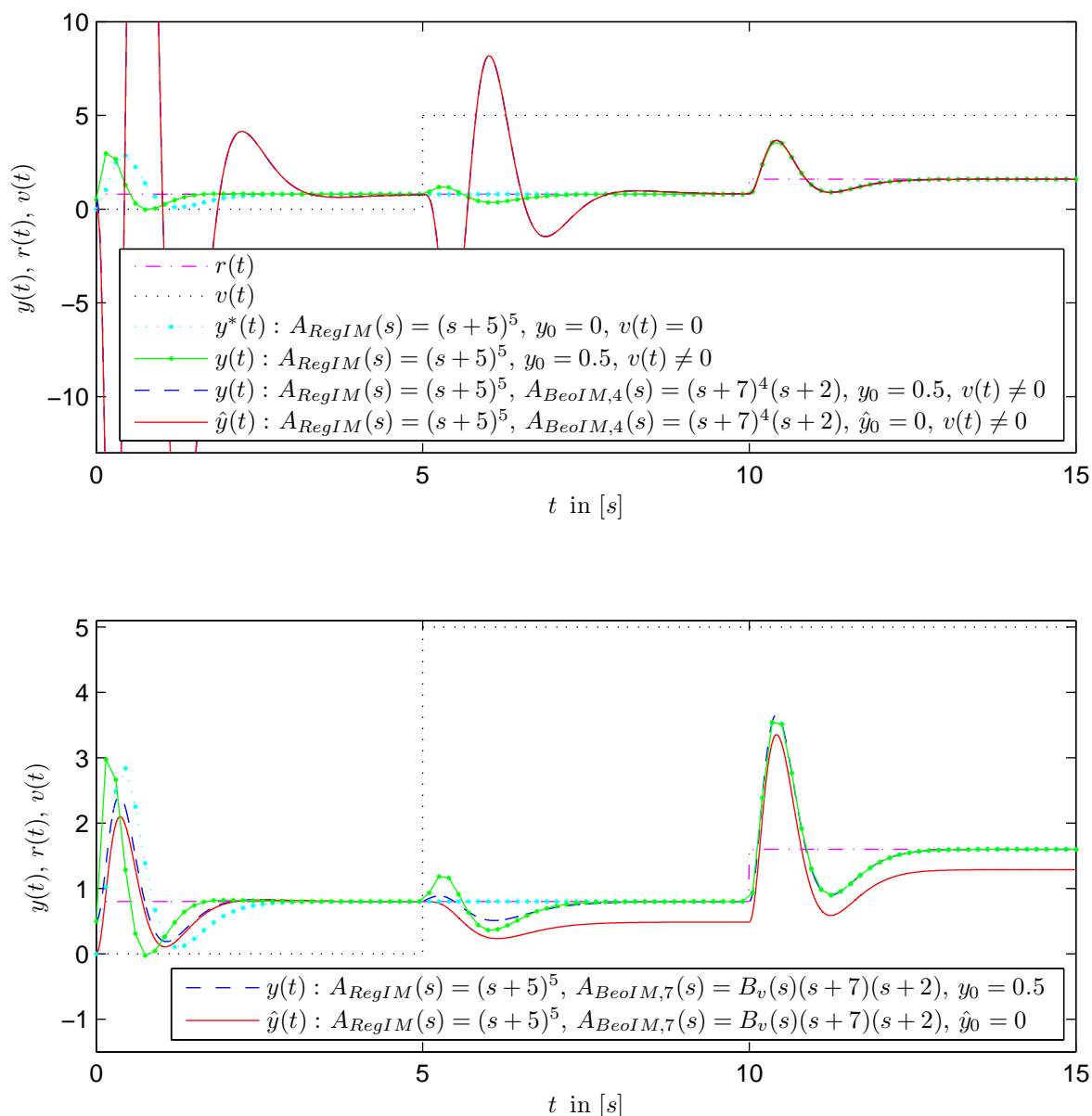


Abbildung 2.44: Zustandsregler mit internem Modell und Beobachter unter Störeinwirkung $v(t)$ am Beispiel des Systems (2.82) mit Auskoppelvektor \bar{c}_1 , d.h. Systemnullstellen; **oben:** der Beobachter geringer Dynamik besitzt seine Pole bei $\tilde{p}_{BeoIM,4} = (-7 \ -7 \ -7 \ -7 \ -2)$, womit keine Systemnullstellen gekürzt werden; **unten:** der Beobachter geringer Dynamik besitzt seine Pole bei $\tilde{p}_{BeoIM,7} = \begin{pmatrix} \tilde{q}_v^T & -7 & -2 \end{pmatrix}$, womit die Nullstellen \tilde{q}_v in der Störübertragungsfunktion der Strecke gekürzt werden; die Pole des zustandsgeregelten Systems liegen jeweils bei $\tilde{p}_{RegIM} = (-5 \ -5 \ -5 \ -5 \ -5)$; auf Grund des internen Modells ergibt sich bei beiden Fällen keine stationäre Abweichung mehr

Die Simulation 2.44 zeigt die Regelung des erweiterten Systems (2.246) gemäß des Signalflussplans 2.43 mit dem Zustandsbeobachter (2.240) und Regelgesetz (2.241), wobei das Beispielsystem (2.82) mit Auskoppelvektor \bar{c}_1 zu Grunde gelegt wurde. Die Simulati-

on 2.44 oben wiederholt die Simulation 2.35 oben, jedoch nun mit einem zusätzlichen Integrator im System als internes Modell. Da der Beobachter ein um eine Ordnung erhöhtes System schätzen muss, lautet die Polvorgabe $\tilde{\underline{p}}_{BeoIM,4} = (-7 \ -7 \ -7 \ -7 \ -2)$, d.h. $A_{BeoIM,4}(s) = (s+7)^4(s+2)$. Der zusätzliche Pol zeigt eine geringere Dynamik, weil der Anfangszustand des internen Modells als bekannt gilt und somit nicht mehr stark verändert werden sollte. Hiermit wird erreicht, dass der stark dynamische Einschwingvorgang, bedingt durch die nicht gekürzten Nullstellen, nicht unnötig durch das Schätzen des internen Modells verlängert und weiter dynamisiert wird. Die Polvorgabe für den Zustandsregler lautet: $A_{Reg}(s) = (s+5)^5$. In der Simulation ist zu erkennen, dass die Dynamik und Amplitude in der transienten Phase sowie nach dem Auftreten einer Störung durch die erhöhte Ordnung des Systems mit internem Modell größer geworden ist. Dies würde noch stärker ausfallen, wenn der zusätzliche Pol des Beobachters eine größere Dynamik zeigen würde. Durch Vergleich mit Simulation 2.35 wird deutlich, dass auf Grund des internen Modells die große stationäre Abweichung bei präsezierter Störung vollständig kompensiert wird. Weiter ist keine Vorverstärkung des Zustandsreglers mehr notwendig, um eine stationäre Genauigkeit im Führungsverhalten zu erreichen. Das interne Modell erfüllt seine Aufgabe.

Die Simulation 2.44 unten hat im Unterschied zu Simulation 2.44 oben die Kompensation der Nullstellen $\tilde{\underline{q}}_v$ der Störübertragungsfunktion zum Ziel und wiederholt daher die Simulation 2.36 oben, jedoch mit internem Modell. Der Beobachter geringer Dynamik besitzt folglich seine Pole bei $\tilde{\underline{p}}_{BeoIM,7} = \begin{pmatrix} \tilde{\underline{q}}_v^T & -7 & -2 \end{pmatrix}$ und es gilt für das Polstellenpolynom $A_{BeoIM,7}(s) = B_v(s)(s+7)(s+2)$. Es wird deutlich, dass sich durch die Kürzung der Nullstellen in der Störübertragungsfunktion bzw. Schwächung der Nullstellen in der transienten Phase des Beobachters keine negativen Auswirkungen auf die Dynamik und Amplitude beim Aufschalten der Störung v sowie in der transienten Phase mehr zeigen, wie es in der vorhergehenden Simulation 2.44 oben der Fall war (unterschiedliche Maßstäbe in der y -Achse der beiden Simulationen beachten). Trotz Erweiterung des Systems um das interne Modell ist das dynamische Verhalten von Simulation 2.44 unten und Simulation 2.36 oben durch die Kürzung bzw. Schwächung der Nullstellen quasi identisch. An dieser Stelle wird erneut die Wichtigkeit deutlich, die Nullstellen für eine gute Regelung zu eliminieren. Durch das interne Modell kann erneut die stationäre Abweichung des Ausgangssignals $y(\cdot)$ stets vollständig kompensiert werden. In diesem Beispiel ist gut zu erkennen, dass der Beobachter, welcher kein Modell für das Störsignal $v(\cdot)$ enthält und folglich dieses nicht interpretieren kann, im geschätzten Ausgangssignal $\hat{y}(\cdot)$ eine stationäre Abweichung zeigen muss. Das interne Modell ist nun dafür verantwortlich, dass trotz der Abweichung im Beobachter keine stationäre Abweichung im Ausgangssignal auftritt und folglich im stationären Zustand stets $y_\infty = r_\infty$ gilt.

Die Simulation 2.45 zeigt die Kompensation der Nullstellen im Führungsverhalten, mit der eine Ordnungsreduktion einhergeht. Zudem ergibt sich eine Schwächung der Nullstellen in der transienten Phase sowie im Störübertragungsverhalten. Im Unterschied zu Simulation 2.38 unten wurde das System um ein internes Modell zur Kompensation der stationären Abweichung erweitert. Die Polvorgabe des Beobachters bzw. des Zustandsreglers lautet daher $A_{BeoIM,4}(s) = (s+7)^4(s+2)$ bzw. $A_{RegIM,2}(s) = B(s)(s+5)^2$. Es zeigt sich durch die Nullstellenkürzung bzw. -schwächung und Ordnungsreduktion im Führungsverhalten in beiden Simulationen ein sehr gutes Regelverhalten, wobei im Falle

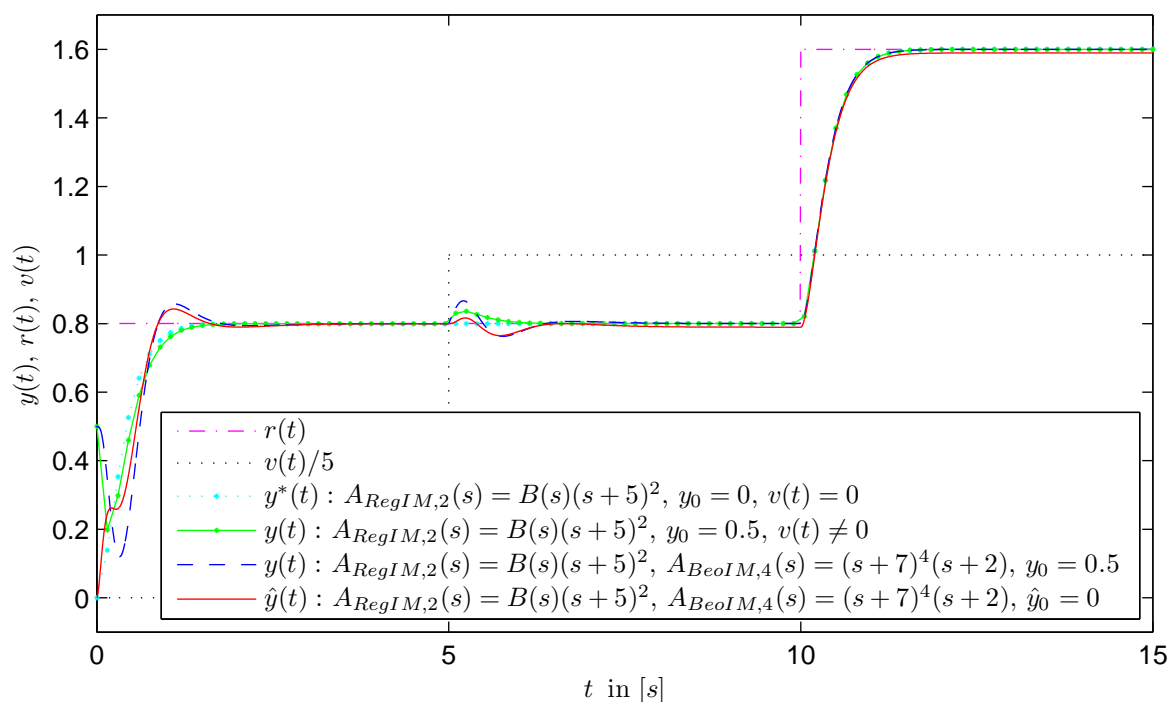


Abbildung 2.45: Zustandsregler mit internem Modell und Beobachter unter Störeinwirkung $v(t)$ am Beispiel des Systems (2.82) mit Auskoppelvektor $\underline{\tilde{c}}_1$, d.h. Systemnullstellen; der Beobachter geringer Dynamik besitzt seine Pole bei $\underline{\tilde{p}}_{BeoIM,4} = (-7 \ -7 \ -7 \ -7 \ -2)$; die Pole des zustandsgeregelten Systems liegen bei $\underline{\tilde{p}}_{RegIM,2} = (\underline{\tilde{q}}^T \ -5 \ -2)$, womit die Nullstellen $\underline{\tilde{q}}$ bzw. $\underline{\tilde{q}}_v$ der Strecke sowohl in der Führungs- als auch Störübertragungsfunktion gekürzt bzw. geschwächt werden bei gleichzeitiger Ordnungsreduktion; durch das interne Modell zeigt sich keine stationäre Abweichung mehr

des internen Modells zudem die stationäre Abweichung erfolgreich kompensiert wird. Auch hier ist wieder zu erkennen, dass das geschätzte Ausgangssignal $\hat{y}(\cdot)$ wie erwartet eine stationäre Abweichung zeigt, das Ausgangssignal $y(\cdot)$ jedoch stationär genau ist.

Im folgenden Kapitel wird nun der Übergang vom Zustandsregler mit Beobachter zum Referenzmodellregler mit freier Polverschiebbarkeit dargestellt. Hierbei bestätigt sich in Kapitel 2.2.6.8 auch hinsichtlich des Zustandsreglers mit internem Modell das Theorem 2.17.

2.2.6.5 Referenzmodellregler mit freier Polverschiebbarkeit

Der Zustandsregler mit Beobachter aus Kapitel 2.2.6.3 kann in die Ein- Ausgangsbeschreibung überführt werden, womit der sog. *Referenzmodellregler* vorliegt. Dazu verwendet man an Stelle der Zustandsdarstellung die Operatordarstellung aus Kapitel 2.2.2. Angewandt auf den Zustandsbeobachter (2.171) folgt mit

$$\rho \hat{\underline{x}}(t) = [\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{l}}\tilde{\mathbf{c}}^T] \hat{\underline{x}}(t) + \tilde{\mathbf{b}}u(t) + \tilde{\mathbf{l}}y(t) \quad (2.247)$$

die Ein- Ausgangsbeschreibung:

$$\hat{\underline{x}}(t) = \underbrace{[\rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}} + \tilde{\mathbf{l}} \tilde{\mathbf{c}}^T]^{-1} \tilde{\mathbf{b}}}_{\frac{\underline{C}_{Beo,u}(\rho)}{A_{Beo}(\rho)}} u(t) + \underbrace{[\rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}} + \tilde{\mathbf{l}} \tilde{\mathbf{c}}^T]^{-1} \tilde{\mathbf{l}}}_{\frac{\underline{C}_{Beo,y}(\rho)}{A_{Beo}(\rho)}} y(t) \quad (2.248)$$

Wendet man für die Berechnung der Inversen die Kofaktormethode aus Theorem A.2 an, so lässt sich Gleichung (2.248) mit Hilfe von Polynomen bzw. Polynom-Vektoren ausdrücken:

$$A_{Beo}(\rho) \hat{\underline{x}}(t) = \underline{C}_{Beo,u}(\rho) u(t) + \underline{C}_{Beo,y}(\rho) y(t) \quad (2.249)$$

Hierbei gilt:

$$\underline{C}_{Beo,u}(\rho) = \text{adj} [\rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}} + \tilde{\mathbf{l}} \tilde{\mathbf{c}}^T] \tilde{\mathbf{b}} \quad (2.250)$$

$$\underline{C}_{Beo,y}(\rho) = \text{adj} [\rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}} + \tilde{\mathbf{l}} \tilde{\mathbf{c}}^T] \tilde{\mathbf{l}} \quad (2.251)$$

$$A_{Beo}(\rho) = \det [\rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}} + \tilde{\mathbf{l}} \tilde{\mathbf{c}}^T] \quad (2.252)$$

Setzt man Gleichung (2.249) in das Regelgesetz (2.167) ein

$$u(t) = r'(t) - \tilde{\mathbf{k}}^T \left(\frac{1}{A_{Beo}(\rho)} \underline{C}_{Beo,u}(\rho) u(t) + \frac{1}{A_{Beo}(\rho)} \underline{C}_{Beo,y}(\rho) y(t) \right), \quad (2.253)$$

ergibt sich die Ein- Ausgangsbeschreibung des Zustandsreglers basierend auf einem Beobachter:

$$\frac{A_{EA}(\rho)}{A_{Beo}(\rho)} u(t) = r'(t) - \frac{B_{EA}(\rho)}{A_{Beo}(\rho)} y(t) \quad (2.254)$$

Die Reglerparameter des resultierenden Referenzmodellreglers mit freier Polverschiebbarkeit lauten:

$$A_{EA}(\rho) = A_{Beo}(\rho) + \tilde{\mathbf{k}}^T \underline{C}_{Beo,u}(\rho) \quad (2.255)$$

$$B_{EA}(\rho) = \tilde{\mathbf{k}}^T \underline{C}_{Beo,y}(\rho) \quad (2.256)$$

Den Signalflussplan zu Gleichung (2.253) zeigt Abbildung 2.46. Mit Hilfe des Eingangssignals $u(\cdot)$ und Ausgangssignals $y(\cdot)$ werden an Hand des Beobachters die Zustände $\hat{\underline{x}}$ geschätzt, die dann entsprechend eines Zustandsreglers zur Berechnung der Stellgröße über den Rückführvektor $\tilde{\mathbf{k}}$ dienen. Mit Hilfe des Signalflussplanes ist gut die Filtereigenschaft des Beobachters zu erkennen, welche bereits in Kapitel 2.2.6.3 dargestellt wurde: sowohl das Eingangssignal $u(\cdot)$ als auch das Ausgangssignal $y(\cdot)$ passieren das Filter

$$F_{F,Beo}(s) = \frac{1}{A_{Beo}(s)}, \quad (2.257)$$

dessen Eigenschaft durch das charakteristische Polynom $A_{Beo}(\cdot)$ des Beobachters bestimmt ist – besitzt der Beobachter eine hohe Dynamik, so führen die entsprechenden schnellen Pole zu einer minimalen Filterung; liegt hingegen eine geringe Dynamik des Beobachters vor, so ergeben sich trotz verrauschtem Messsignal $y(\cdot)$ auf Grund der Filterung geglättete Schätzwerte $\hat{\underline{x}}$ der Zustände. Da die Filterung sowohl auf das Eingangssignal $u(\cdot)$ als auch

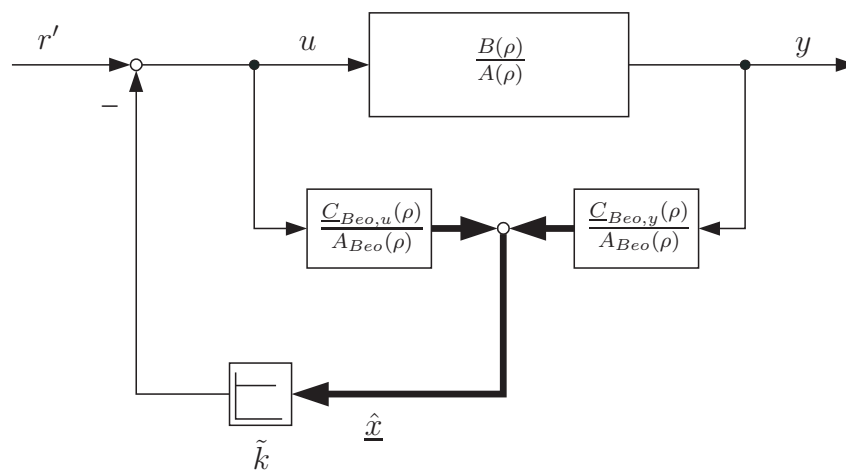


Abbildung 2.46: Signalflussplan eines zustandsregulierten Systems basierend auf einem Zustandsbeobachter

das Ausgangssignal $y(\cdot)$ wirkt, wird das Führungsverhalten, wie es im Folgenden gezeigt wird, nicht beeinflusst. Lediglich Störgrößen unterliegen der Filterung. Je stärker jedoch die Filterung ist, desto länger dauert der Einschwingvorgang auf Grund unterschiedlicher Anfangswerte, was jedoch gemäß des Kapitels 2.2.6.3 als unwesentlich angesehen werden kann.

An Hand des Signalflussplans 2.46 wird deutlich, dass sich durch Vereinfachung des Zustandsreglers mit Beobachter ein Regler in der Ein- Ausgangsbeschreibung bilden lässt. Durch Zusammenfassen des linken geschlossenen Kreises erhält man die Struktur eines Referenzmodellreglers, welcher in Abbildung 2.47 zu finden ist bzw. durch das Regelgesetz (2.254) repräsentiert wird.

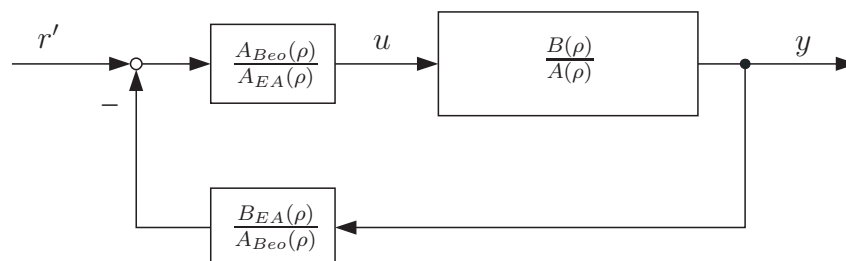


Abbildung 2.47: Signalflussplan eines Referenzmodellreglers, d.h. eines zustandsregulierten Systems in Ein- Ausgangsdarstellung basierend auf einem Zustandsbeobachter

Um nun das Ein- Ausgangsverhalten des geschlossenen Regelkreises zu erhalten, wendet man dieses Regelgesetz auf die Strecke (2.166) in Operatordarstellung an. Da es im geregelten System die Aufgabe des Beobachters ist, in einem Einschwingvorgang die Anfangswerte zwischen Beobachter ($\hat{x}(0) = \underline{0}$) und System ($\underline{x}(0) = \underline{x}_0$) auszugleichen, stellt es sich als nützlich dar, das Ein- Ausgangsverhalten des Systems neben der Stellgröße und einer Störgröße auch in Abhängigkeit der Anfangswerte darzustellen. Hierzu betrachtet man den Zustand \underline{x} als Summe von Anfangswert \underline{x}_0 und Ausgang \underline{x}_i des Integrators:

$\underline{x}(t) = \underline{x}_i(t) + \underline{x}_0$. Wie dies bereits im Signalflussplan 2.30 berücksichtigt wurde, lautet dann die Zustandsbeschreibung:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \rho \underline{x}(t) = \tilde{\mathbf{A}} \underline{x}(t) + \tilde{\underline{b}} u(t) + \tilde{\underline{f}} v(t) \quad (2.258)$$

$$\dot{\underline{x}}_i(t) = \rho \underline{x}_i(t) = \tilde{\mathbf{A}} (\underline{x}_i(t) + \underline{x}_0) + \tilde{\underline{b}} u(t) + \tilde{\underline{f}} v(t) \quad (2.259)$$

$$y(t) = \tilde{\underline{c}}^T \underline{x}(t) = \tilde{\underline{c}}^T (\underline{x}_i(t) + \underline{x}_0) \quad (2.260)$$

Entsprechend des Vorgehens für Gleichung (2.58) erhält man die Ein- Ausgangsbeschreibung der Strecke, wobei der Anfangswert und die Störung jeweils als weiterer Eingang betrachtet werden:

$$y(t) = \tilde{\underline{c}}^T [\rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}]^{-1} \tilde{\mathbf{A}} \underline{x}_0 + \tilde{\underline{c}}^T [\rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}]^{-1} \tilde{\underline{b}} u(t) + \tilde{\underline{c}}^T [\rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}]^{-1} \tilde{\underline{f}} v(t) + \tilde{\underline{c}}^T \underline{x}_0 \quad (2.261)$$

$$= \underbrace{\tilde{\underline{c}}^T [\rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}]^{-1} \tilde{\underline{b}}}_{\frac{B(\rho)}{A(\rho)}} u(t) + \underbrace{\tilde{\underline{c}}^T [\rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}]^{-1} \tilde{\underline{f}}}_{\frac{B_v(\rho)}{A(\rho)}} v(t) + \underbrace{\tilde{\underline{c}}^T [\mathbf{E} + [\rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}]^{-1} \tilde{\mathbf{A}}]}_{\frac{B_0^T(\rho)}{A(\rho)}} \underline{x}_0 \quad (2.262)$$

Die Strecke wird somit durch

$$A(\rho) y(t) = B(\rho) u(t) + B_v(\rho) v(t) + \underline{B}_0^T(\rho) \underline{x}_0 \quad (2.263)$$

beschrieben, wobei mit Theorem A.2 gilt:

$$B(\rho) = \tilde{\underline{c}}^T \text{adj} [\rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}] \tilde{\underline{b}} \quad (2.264)$$

$$B_v(\rho) = \tilde{\underline{c}}^T \text{adj} [\rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}] \tilde{\underline{f}} \quad (2.265)$$

$$\underline{B}_0^T(\rho) = \tilde{\underline{c}}^T \left[\det [\rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}] \mathbf{E} + \text{adj} [\rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}] \tilde{\mathbf{A}} \right] \quad (2.266)$$

$$A(\rho) = \det [\rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}] \quad (2.267)$$

Durch Einsetzen des nach $u(t)$ aufgelösten Systems (2.263) in das Regelgesetz (2.254) resultiert das Ein- Ausgangsverhalten des geschlossenen Regelkreises:

$$y(t) = \frac{B_{RK}(\rho)}{A_{RK}(\rho)} r'(t) + \frac{B_{RK0}^T(\rho)}{A_{RK}(\rho)} \underline{x}_0 + \frac{B_{RKv}(\rho)}{A_{RK}(\rho)} v(t) \quad (2.268)$$

$$= \frac{B(\rho) A_{Beo}(\rho)}{A_{EA}(\rho) A(\rho) + B_{EA}(\rho) B(\rho)} r'(t) + \frac{A_{EA}(\rho) \underline{B}_0^T(\rho)}{A_{EA}(\rho) A(\rho) + B_{EA}(\rho) B(\rho)} \underline{x}_0 + \dots$$

$$\dots + \frac{A_{EA}(\rho) B_v(\rho)}{A_{EA}(\rho) A(\rho) + B_{EA}(\rho) B(\rho)} v(t) \quad (2.269)$$

Der Nenner $A_{RK}(\cdot)$ des geschlossenen Regelkreises lässt sich wie folgt umformen:

$$\begin{aligned}
& A_{EA}(\rho) A(\rho) + B_{EA}(\rho) B(\rho) \\
&= \left(A_{Beo}(\rho) + \underline{\tilde{k}}^T \underline{C}_{Beo,u}(\rho) \right) A(\rho) + \underline{\tilde{k}}^T \underline{C}_{Beo,y}(\rho) B(\rho) \\
&\stackrel{(2.53),(2.58)}{=} A(\rho) \left(A_{Beo}(\rho) + \underline{\tilde{k}}^T \left(\underline{C}_{Beo,u}(\rho) + \underline{C}_{Beo,y}(\rho) \underline{\tilde{c}}^T [\rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}]^{-1} \tilde{\mathbf{b}} \right) \right) \\
&\stackrel{(2.248)}{=} A(\rho) A_{Beo}(\rho) \left(1 + \underline{\tilde{k}}^T [\rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}} + \underline{\tilde{l}} \underline{\tilde{c}}^T]^{-1} \tilde{\mathbf{b}} + \dots \right. \\
&\quad \left. \dots + \underline{\tilde{k}}^T [\rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}} + \underline{\tilde{l}} \underline{\tilde{c}}^T]^{-1} \underline{\tilde{l}} \underline{\tilde{c}}^T [\rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}]^{-1} \tilde{\mathbf{b}} \right) \\
&= A(\rho) A_{Beo}(\rho) \left(1 + \underline{\tilde{k}}^T [\rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}} + \underline{\tilde{l}} \underline{\tilde{c}}^T]^{-1} \left[\mathbf{E} + \underline{\tilde{l}} \underline{\tilde{c}}^T [\rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}]^{-1} \right] \tilde{\mathbf{b}} \right) \\
&= A(\rho) A_{Beo}(\rho) \left(1 + \underline{\tilde{k}}^T [\rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}} + \underline{\tilde{l}} \underline{\tilde{c}}^T]^{-1} \left[[\rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}] + \underline{\tilde{l}} \underline{\tilde{c}}^T \right] [\rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}]^{-1} \tilde{\mathbf{b}} \right) \\
&= A(\rho) A_{Beo}(\rho) \left(1 + \underline{\tilde{k}}^T [\rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}]^{-1} \tilde{\mathbf{b}} \right) \\
&\stackrel{\text{Lemma A.2}}{=} A(\rho) A_{Beo}(\rho) \det \left[\mathbf{E} + [\rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}]^{-1} \tilde{\mathbf{b}} \underline{\tilde{k}}^T \right] \\
&= A(\rho) A_{Beo}(\rho) \det \left[[\rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}]^{-1} \left[[\rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}] + \tilde{\mathbf{b}} \underline{\tilde{k}}^T \right] \right] \\
&= A(\rho) A_{Beo}(\rho) \det \left[[\rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}]^{-1} \right] \det \left[\rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}} + \tilde{\mathbf{b}} \underline{\tilde{k}}^T \right] \\
&\stackrel{(2.54),(2.55)}{=} A_{Beo}(\rho) \det \left[\rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}} + \tilde{\mathbf{b}} \underline{\tilde{k}}^T \right] \stackrel{(2.169)}{=} A_{Beo}(\rho) A_{Reg}(\rho) \tag{2.270}
\end{aligned}$$

Wie mit Gleichung (2.190) zu erwarten war, bildet sich das charakteristische Polynom $A_{RK}(\cdot)$ des Regelkreises zum Einen aus den Polstellen des zustandsregulierten Systems und zum Anderen aus den Polstellen des Zustandsbeobachters:

$$A_{RK}(\rho) = A_{EA}(\rho) A(\rho) + B_{EA}(\rho) B(\rho) = A_{Beo}(\rho) A_{Reg}(\rho) \tag{2.271}$$

Mit dieser Gleichung wird deutlich, dass die Reglerpolynome $A_{EA}(\cdot)$ und $B_{EA}(\cdot)$ des Reglergesetzes (2.254) nicht nur durch Vorgabe des Regler- und Beobachterrückführvektors $\underline{\tilde{k}}$ bzw. $\underline{\tilde{l}}$ über die Gleichungen (2.250), (2.251), (2.252), (2.255) und (2.256) bestimmt werden können, sondern alternativ direkt über die Vorgabe der Wunschpolynome $A_{Reg}^*(\cdot)$ und $A_{Beo}^*(\cdot)$ für den Zustandsregler bzw. Beobachter:

$$A_{EA}(\rho) A(\rho) + B_{EA}(\rho) B(\rho) = A_{Beo}^*(\rho) A_{Reg}^*(\rho) \tag{2.272}$$

Wendet man dieses Ergebnis auf Gleichung (2.268) an, folgt das Ein- Ausgangsverhalten des zustandsregulierten Systems basierend auf einem Beobachter:

$$y(t) = \frac{B_{RK}(\rho)}{A_{RK}(\rho)} r'(t) + \frac{\underline{B}_{RK0}^T(\rho)}{A_{RK}(\rho)} \underline{x}_0 + \frac{B_{RKv}(\rho)}{A_{RK}(\rho)} v(t) \tag{2.273}$$

$$= \frac{B(\rho) A_{Beo}^*(\rho)}{A_{Reg}^*(\rho) A_{Beo}^*(\rho)} r'(t) + \frac{A_{EA}(\rho) \underline{B}_0^T(\rho)}{A_{Reg}^*(\rho) A_{Beo}^*(\rho)} \underline{x}_0 + \frac{A_{EA}(\rho) B_v(\rho)}{A_{Reg}^*(\rho) A_{Beo}^*(\rho)} v(t) \tag{2.274}$$

Es fällt auf, dass die Dynamik des Zustandsbeobachters im Regelkreis bzgl. der Führungsübertragungsfunktion durch eine Pol- Nullstellenkompensation vollständig eliminiert wird; die minimale Repräsentation des Regelkreisverhaltens lautet daher:

$$y(t) = \frac{B_{RK,red}(\rho)}{A_{RK,red}(\rho)} r'(t) + \frac{B_{RK0}^T(\rho)}{A_{RK}(\rho)} \underline{x}_0 + \frac{B_{RKv}(\rho)}{A_{RK}(\rho)} v(t) \quad (2.275)$$

$$= \underbrace{\frac{B(\rho)}{A_{Reg}^*(\rho)} r'(t)}_{y_{r'}(t)} + \underbrace{\frac{A_{EA}(\rho) \underline{B}_0^T(\rho)}{A_{Reg}^*(\rho) A_{Beo}^*(\rho)} \underline{x}_0}_{y_{\underline{x}_0}(t)} + \underbrace{\frac{A_{EA}(\rho) B_v(\rho)}{A_{Reg}^*(\rho) A_{Beo}^*(\rho)} v(t)}_{y_v(t)} \quad (2.276)$$

Das Verhalten des Ausgangssignals $y(\cdot)$ des geschlossenen Systems setzt sich aus der über das Eingangssignal $r'(\cdot)$ erzwungenen Bewegung $y_{r'}(\cdot)$, der freien Bewegung $y_{\underline{x}_0}(\cdot)$ als Resultat der Anfangszustände \underline{x}_0 und der über das Störsignal $v(\cdot)$ erzwungenen Bewegung $y_v(\cdot)$ zusammen. Die über das Eingangssignal erzwungene Bewegung $y_{r'}(\cdot)$, d.h. das Führungsverhalten, entspricht gemäß Gleichung (2.148) exakt dem eines Zustandsreglers ohne Beobachter. Weiter verbleibt mit Gleichung (2.174) wegen des enthaltenen Beobachters kein Fehler auf Grund unbekannter Anfangszustände \underline{x}_0 des Systems. Dies äußert sich in Gleichung (2.276) durch das Abklingen der freien Bewegung $y_{\underline{x}_0}(\cdot)$ auf Null: nachdem gemäß Gleichung (2.34) die Anfangszustände eines stabilen Systems abklingen, muss die Übertragungsfunktion $\underline{B}_0^T(\rho)/A(\rho)$ der Strecke in Gleichung (2.262) eine stationäre Verstärkung $k_\infty = 0$ zeigen, d.h. es müssen alle Polynome des Polynom-Vektors $\underline{B}_0^T(\cdot)$ der Strecke entsprechend Gleichung (2.86) eine Nullstelle bei Null besitzen (die Koeffizienten mit dem Index 0 sind Null). Folglich besitzen auch die entsprechenden Zählerpolynome des Vektors $\underline{B}_{RK0}^T(s) = A_{EA}(s) \underline{B}_0^T(s)$ in Gleichung (2.275) des geschlossenen Regelkreises eine Nullstelle bei Null; die Multiplikation mit dem Reglerpolynom $A_{EA}(\cdot)$ ändert zwar, wie bereits diskutiert, den Verlauf der Zustände, das abklingende Verhalten bleibt jedoch erhalten, so dass $y_{\underline{x}_0}(\cdot)$ nach dem transienten Vorgang des Beobachter in Abhängigkeit der Zeitkonstanten des Reglers unterschiedlich schnell keinen Beitrag mehr zum Ausgangssignal $y(\cdot)$ zeigen wird.

Im Unterschied hierzu wird das Störsignal $v(\cdot)$ zu einem bleibenden Regelfehler führen, der durch den Beitrag von $y_v(\cdot)$ zu Stande kommt. Vergleicht man die Zählerpolynome (2.264), (2.265) und (2.266), so wird deutlich, dass $B_v(\cdot)$ wie $B(\cdot)$ die Struktur einer Signalein- und Signalauskopplung besitzt und es generell nicht zu erwarten ist, dass das Zählerpolynom eine Nullstelle bei Null besitzt und somit der Einfluss der Störgröße abklingt. Mit Gleichung (2.195) wurde gezeigt, dass sich beim Zustandsregler ohne Beobachter eine stationäre Abweichung vom Sollwert ergibt, die von den Reglerparametern sowie Systemparametern abhängt und sich somit bei Vorgabe eines bestimmten Führungsverhaltens über das Wunschpolynom $A_{Reg}^*(\cdot)$ ergibt – das Störverhalten kann daher nicht gezielt beeinflusst werden. Beim Zustandsregler mit Beobachter bzw. Referenzmodellregler mit freier Polverschiebbarkeit kann über die Beobachterdynamik, die sich nicht auf das Führungsverhalten auswirkt, das Störverhalten positiv beeinflusst werden. Dies wurde bereits in Gleichung (2.196) angedacht. Konkret müsste, wie im obigen Fall $\underline{B}_0^T(\cdot)$ bzgl. der Anfangswerte \underline{x}_0 , das Reglerpolynom $A_{EA}(\cdot)$ und somit $B_{RKv}(\cdot)$ in Gleichung (2.276) eine Nullstelle bei Null besitzen; dann ergäbe sich, unter Berücksichtigung der Verstärkung im Rückführzweig in einer Sollsignalfilterung, keine stationäre Abweichung mehr auf Grund einer konstanten Störung.

Durch dieses Vorgehen bekäme der Regler im Vorwärtszweig im Signalflussplan 2.47 integrales Verhalten, was zum Prinzip des internen Modells bzgl. konstanter Störungen führen würde (vgl. Kapitel 2.2.6.4). Um dies zu erreichen, müsste man bei der Auslegung über die Diophantine Gleichung (2.272) bzw. (2.278) den Koeffizienten $\tilde{\alpha}'_{0,EA}$ von $A_{EA}(\cdot)$ mit $\tilde{\alpha}'_{0,EA} = 0$ vorgeben, d.h. einen Freiheitsgrad bei der Beobacherauslegung nutzen, um das Störverhalten zu verbessern. Bei der Verwendung eines internen Modells nach Kapitel 2.2.6.4 verliert man zwar keinen Freiheitsgrad für die Beobacherauslegung, jedoch erhöht sich die Systemordnung.

Die Simulation 2.48 zeigt die beiden Anteile $y_{r'}(\cdot)$ und $y_{\underline{x}_0}(\cdot)$ getrennt voneinander ($v(t) = 0$): die freie Bewegung klingt innerhalb der ersten Sprungantwort ab und im Anschluss wird

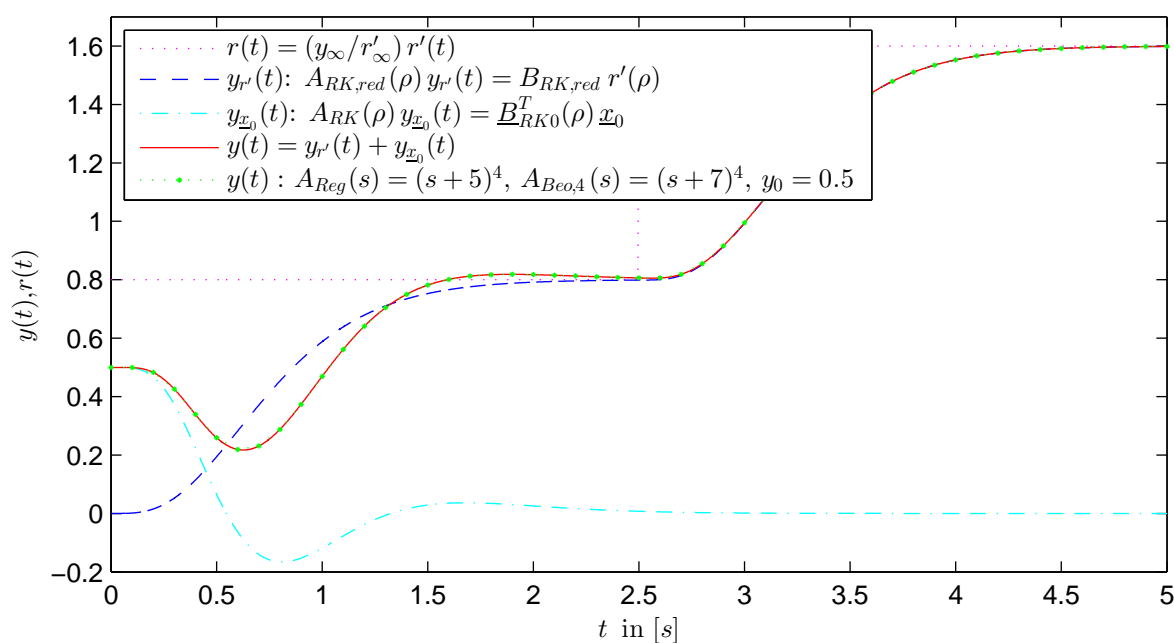


Abbildung 2.48: Referenzmodellregler mit freier Polverschiebbarkeit für das Beispielsystem (2.82) mit Auskoppelvektor $\underline{\bar{c}}_0$; die Beobachterpole geringer Dynamik für das Wunschpolynom $A_{Bco,4}^*(\cdot)$ liegen bei $\tilde{\underline{p}}_{Bco,4} = (-7 \ -7 \ -7 \ -7)$; die Pole für das Wunschpolynom $A_{Reg}^*(\cdot)$ des zustandsgeregelten Systems liegen bei $\tilde{\underline{p}}_{Reg} = (-5 \ -5 \ -5 \ -5)$; der Verlauf des Ausgangssignals $y(\cdot)$ ergibt sich aus der Superposition von Sprungantwort $y_{r'}(\cdot)$ und ausgekoppelter freier Bewegung $y_{\underline{x}_0}(\cdot)$ (abklingende Anfangswerte);

das Systemverhalten nur noch durch die erzwungene Bewegung beschrieben. Es wurde dabei dasselbe System sowie Auslegung wie in Simulation 2.31 für den Zustandsregler mit Beobachter zu Grunde gelegt: Beispielsystem (2.82) mit Auskoppelvektor $\underline{\bar{c}}_0$, Anfangswert $y_0 = 0.5$, $A_{Reg}(\rho) = (s + 5)^4$, $A_{Bco}(\rho) = (s + 7)^4$, Vorverstärkung $r'(\rho) = (r'_\infty/y_\infty)r(\rho)$ gemäß Gleichung (2.145) bzw. als Inverse der stationären Verstärkung des geschlossenen Regelkreises (Anmerkung 2.5). Nachdem der Referenzmodellregler (2.254) entsprechend des Signalflussplanes 2.47 direkt vom Zustandsregler mit Beobachter abgeleitet wurde, führt die Überlagerung von $y_{r'}(\cdot)$ und $y_{\underline{x}_0}(\cdot)$ zu demselben Ausgangsverlauf $y(\cdot)$, wie er in Simulation 2.31 bzgl. des Zustandsreglers mit Beobachter zu finden ist. Für die alternative

Berechnung der Reglerparameter über die Diophantine Gleichung von Kapitel 2.2.6.6 ist in diesem Fall von $\tilde{n}_{Beo} = \tilde{n}$ auszugehen und in Gleichung (2.319) $i = 1$ zu wählen. Es sei an dieser Stelle bereits erwähnt, dass für einen Referenzmodellregler mit freier Polverschiebbarkeit der Beobachter nicht, wie hier, $\tilde{n}_{Beo} = \tilde{n}$ Zustände schätzen müsste, sondern $\tilde{n}_{Beo} = \tilde{n} - 1$ Schätzungen ausreichend wären (vgl. Kapitel 2.2.6.6 mit Anmerkung 2.13). Dann ergäbe sich folglich auch ein abweichender Verlauf der transienten Phase, wie er in Abbildung 2.50 dargestellt ist.

Mit Gleichung (2.276) und der Simulation 2.48 werden die Aussagen von Kapitel 2.2.6.3 nochmals bestätigt. Im Ein- Ausgangsverhalten zeigt sich die Dynamik des Beobachters nur anfänglich, wenn Beobachter und Strecke unterschiedliche Anfangszustände besitzen, d.h. für die Anfangszustände der Strecke $\underline{x}_0 \neq \underline{0}$ gilt: nachdem sich das Nennerpolynom $A_{RK}(\cdot)$ aus dem stabil zu wählenden charakteristischen Polynom des Beobachters $A_{Beo}^*(\cdot)$ und des zustandsgeregelten Systems $A_{Reg}^*(\cdot)$ bestimmt, klingen die Anfangszustände gemäß der Gleichung (2.34) nach Kapitel 2.2.1.2 ab. Da die Dynamik des Beobachters, wie im vorigen Kapitel dargestellt, im Allgemeinen höher ist, wird das Abklingen der Anfangszustände durch $A_{Beo}(\cdot)$ und das Einschwingen der Zustände vorwiegend durch $A_{Reg}(\cdot)$ bestimmt, d.h. das Einschwingen des Referenzmodellreglers folgt vorwiegend der Dynamik des zustandsgeregelten Systems ohne Beobachter. Der Verlauf des Abklingens der Anfangszustände wird jedoch stark durch das Nennerpolynom $B_{RK0}(\cdot)$ beeinflusst, was sich in dem unruhigen Verhalten während des transienten Vorgangs widerspiegelt (siehe Kapitel 2.2.6.3). Die Auswirkung der Nullstellen des Gesamtsystems ist stark von der Konstellation Beobachter, Regler und Strecke abhängig. Sobald die Anfangszustände jedoch abgeklungen sind, ist von Außen betrachtet nicht mehr zu erkennen, ob ein Zustandsregler auf die realen oder die geschätzten Zustände zurückgreift. Die Übertragungsfunktion (2.276) für $\rho = s$ und $\underline{x}_0 = \underline{0}$ zeigt, dass, wie bei einem reinen Zustandsregler ohne Beobachter, die Nullstellen $B(\cdot)$ des zu regelnden Systems erhalten bleiben und das Nennerpolynom des geschlossenen Regelkreises lediglich durch die frei einstellbaren Pole, dem Wunschpolynom $A_{Reg}^*(\cdot)$ bestimmt wird. Der Beobachter zeigt keine Auswirkung auf das Führungsübertragungsverhalten. Zusammenfassend gilt:

Theorem 2.20: Referenzmodellregler mit freier Polverschiebbarkeit

Der Referenzmodellregler

$$\frac{A_{EA}(\rho)}{A_{Beo}^*(\rho)} u(t) = r'(t) - \frac{B_{EA}(\rho)}{A_{Beo}^*(\rho)} y(t) \quad (2.277)$$

verhält sich wie ein Zustandsregler und garantiert freie Polverschiebbarkeit, wenn für die Reglerauslegung die sog. Diophantine Gleichung

$$A_{EA}(\rho) A(\rho) + B_{EA}(\rho) B(\rho) = A_{Beo}^*(\rho) A_{Reg}^*(\rho) = A_{RK}^*(\rho) \quad (2.278)$$

Anwendung findet (siehe Kapitel 2.2.6.6). Durch Vorgabe eines Wunschnennerpolynoms $A_{RK}^(\cdot)$ für das geregelte System lassen sich die Reglerpolynome $A_{EA}(\cdot)$ und $B_{EA}(\cdot)$ berechnen, sofern das Ein- Ausgangsverhalten $A(\rho) u(t) = B(\rho) y(t)$ des zu regelnden Systems bekannt ist. Sind die Anfangswerte des Gesamtsystems abgeklungen, lautet das reduzierte*

Ein- Ausgangsverhalten des geschlossenen Regelkreises und somit das Wunschverhalten:

$$y^*(t) = \frac{B_{RK,red}(\rho)}{A_{RK,red}(\rho)} r'(t) = \frac{B(\rho)}{A_{Reg}^*(\rho)} r'(t) \quad (2.279)$$

Den Signalflussplan des geregelten Systems zeigt Abbildung 2.47 bzw. 2.49. Bei beiden wird deutlich, dass ein realisierbarer Regler, d.h. ein kausales System (siehe Seite 30), nur vorliegt, wenn die Ordnung des Polynoms $B_{EA}(\cdot)$ größer oder gleich der von $A_{EA}(\cdot)$ ist. Die Reglerstruktur 2.49 darf auf Grund der Kausalität nur bei einer Beobachterordnung von $\tilde{n}_{Beo} = \tilde{n} - 1$ Anwendung finden, da $B_{EA}(\cdot)$ nach Kapitel 2.2.6.6 stets die Ordnung $\tilde{n} - 1$ besitzt (vgl. Theorem 2.21); bei einer nicht notwendigen Beobachterordnung von $\tilde{n}_{Beo} = \tilde{n}$ muss auf die Reglerstruktur 2.47 zurückgegriffen werden (vgl. Anmerkung 2.13).

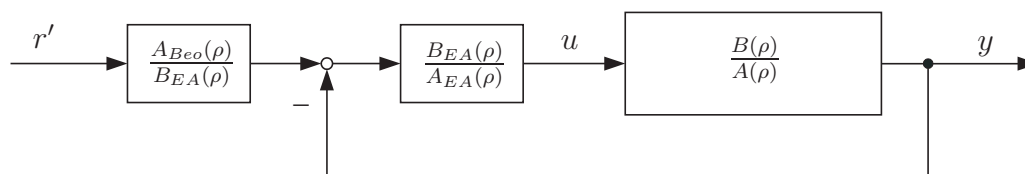


Abbildung 2.49: Signalflussplan eines Referenzmodellreglers, d.h. eines ein- ausgangsgeregelten Systems mit freier Polverschiebbarkeit

Abschließend hält man fest, dass der Referenzmodellregler mit freier Polverschiebbarkeit indirekt einen Zustandsbeobachter enthält, welcher aus dem Ein- Ausgangsverhalten die Zustände schätzt und somit das Rückführsignal gemäß eines Zustandsreglers bilden kann. Folglich muss auch für den Referenzmodellregler mit freier Polverschiebbarkeit ein Beobachter durch Vorgabe stabiler Beobachterpole $A_{Beo}^*(\cdot)$ ausgelegt werden. Die Wahl der Pole bewirkt jedoch keine Änderung des Führungsübertragungsverhaltens, d.h. für das Ein- Ausgangsverhalten bzgl. der Stellgröße u ist es irrelevant, welches Einschwingverhalten der Beobachter zeigt. Demzufolge kann der Beobachter beliebig schnell ausgelegt werden. Es ist jedoch die dann resultierende hohe anfängliche Stellgröße sowie das Störverhalten des Reglers zu beachten. Liegt ein sehr schneller Zustandsbeobachter vor, so wirkt sich Rauschen im Ausgangssignal $y(\cdot)$ direkt auf die geschätzten Zustände aus, was zu einem schlechten Regerverhalten führt. Zeigt sich hingegen ein langsames Einschwingverhalten des Beobachters, so wirkt sich ein verrauschtes Messsignal unwesentlich auf das Reglerergebnis aus. Dieser Sachverhalt wird mit Signalflussplan 2.46 deutlich: Sowohl das Eingangssignal $u(\cdot)$ als auch das Ausgangssignal $y(\cdot)$ unterliegen einer Tiefpassfilterung durch das Beobachterpolynom $A_{Beo}(\cdot)$

$$u_F(t) = \frac{1}{A_{Beo}(\rho)} u(t), \quad y_F(t) = \frac{1}{A_{Beo}(\rho)} y(t), \quad (2.280)$$

d.h. je schneller die Pole bzw. das Einschwingverhalten des Beobachters, desto weniger wird das jeweilige Signal gefiltert und um so mehr beeinträchtigt Messrauschen das Reglerergebnis. Der Beobachter besitzt von Außen betrachtet somit lediglich eine Filterfunktion für das Ein- Ausgangsverhalten.

2.2.6.6 Berechnung der Diophantinen Gleichung (Bezout-Identität)

Im Folgenden ist die Frage zu beantworten, wie die *Diophantine Gleichung* (2.278), auch *Bezout-Identität* genannt,

$$A_{EA}(\rho) A(\rho) + B_{EA}(\rho) B(\rho) = A_{RK}^*(\rho) \quad (2.281)$$

$$(\tilde{\alpha}'_{\tilde{n}_{EA},EA} \rho^{\tilde{n}_{EA}} + \dots + \tilde{\alpha}'_{0,EA})(\tilde{\alpha}'_{\tilde{n}} \rho^{\tilde{n}} + \dots + \tilde{\alpha}'_0) + \dots \quad (2.282)$$

$$\dots + (\tilde{\beta}'_{\tilde{m}_{EA},EA} \rho^{\tilde{m}_{EA}} + \dots + \tilde{\beta}'_{0,EA})(\tilde{\beta}'_{\tilde{m}} \rho^{\tilde{m}} + \dots + \tilde{\beta}'_0) = (\tilde{\alpha}'_{\tilde{n}^*,RK} \rho^{\tilde{n}^*,RK} + \dots + \tilde{\alpha}'_{0,RK})$$

nach den Reglerpolynomen $A_{EA}(\cdot)$ und $B_{EA}(\cdot)$ gelöst werden kann und ob stets eine eindeutige Lösung existiert. Zunächst muss die Ordnung der Reglerpolynome festgelegt werden; das Wunschpolynom $A_{RK}^*(\cdot)$ auf der rechten Seite der Gleichung (2.281) ist nur dann beliebig beeinflussbar, wenn die Summanden der linken Seite dieselbe Ordnung aufzeigen. Nachdem $A(\cdot)$ und $B(\cdot)$ die Ordnung \tilde{n} bzw. \tilde{m} aufweisen, muss folglich $A_{EA}(\cdot)$ und $B_{EA}(\cdot)$ die Ordnung $\tilde{m} - i$ bzw. $\tilde{n} - i$ besitzen, wobei i noch zu bestimmen ist. Hiermit liegt auf der linken Seite der Gleichung eine Summation zweier Polynome der Ordnung $\tilde{n} + \tilde{m} - i$ vor, d.h. liegt ein ausreichender Freiheitsgrad der Reglerparameter vor, so kann die Gleichheit bzgl. des Wunschpolynoms $A_{RK}^*(\cdot)$ auf der rechten Seite erreicht werden. Mit den Polynomen in ρ der Ordnung $\tilde{n} + \tilde{m} - i$ auf beiden Seiten lässt sich ein lineares Gleichungssystem $(\tilde{n} + \tilde{m} - i + 1)$ -ter Ordnung aufstellen. Da es für das Lösen der $\tilde{n} + \tilde{m} - i + 1$ Gleichungen ebenso viele Reglerparameter bedarf und mit der obigen Wahl der Ordnung der Reglerpolynome insgesamt $(\tilde{n} - i + 1) + (\tilde{m} - i + 1)$ Parameter vorliegen, ergibt sich der Wert für i :

$$\tilde{n} + \tilde{m} - i + 1 = \tilde{n} - i + 1 + \tilde{m} - i + 1 \quad \rightarrow \quad i = 1 \quad (2.283)$$

Folglich muss das Reglerpolynom $A_{EA}(\cdot)$ und $B_{EA}(\cdot)$ für das eindeutige Lösen des Gleichungssystems die Ordnung $\tilde{m} - 1$ bzw. $\tilde{n} - 1$ aufzeigen:

$$\tilde{n}_{EA} = \tilde{m} - 1, \quad \tilde{m}_{EA} = \tilde{n} - 1 \quad (2.284)$$

Das Wunschpolynom $A_{Reg}^*(\cdot)$ kann dann eine Ordnung zwischen

$$0 \leq \tilde{n}_{Reg}^* \leq \tilde{n} + \tilde{m} - 1 \quad (2.285)$$

annehmen. Das Gleichungssystem bzgl. Gleichung (2.282) lautet:

$$\tilde{m} + \tilde{n} \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\alpha}'_{\tilde{n}} & 0 & \dots & 0 & \tilde{\beta}'_{\tilde{m}} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \tilde{\alpha}'_{\tilde{n}} & \ddots & \vdots & \vdots & \tilde{\beta}'_{\tilde{m}} & \ddots & \vdots \\ \tilde{\alpha}'_1 & \vdots & \ddots & 0 & \tilde{\beta}'_1 & \vdots & \ddots & 0 \\ \tilde{\alpha}'_0 & \tilde{\alpha}'_1 & & \tilde{\alpha}'_{\tilde{n}} & \tilde{\beta}'_0 & \tilde{\beta}'_1 & & \tilde{\beta}'_{\tilde{m}} \\ 0 & \tilde{\alpha}'_0 & \ddots & \vdots & 0 & \tilde{\beta}'_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \tilde{\alpha}'_1 & \vdots & \ddots & \ddots & \tilde{\beta}'_1 \\ 0 & \dots & 0 & \tilde{\alpha}'_0 & 0 & \dots & 0 & \tilde{\beta}'_0 \end{bmatrix}}_{\tilde{m}} \right\} \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\alpha}'_{(\tilde{m}-1),EA} \\ \vdots \\ \tilde{\alpha}'_{1,EA} \\ \tilde{\alpha}'_{0,EA} \\ \tilde{\beta}'_{(\tilde{n}-1),EA} \\ \vdots \\ \tilde{\beta}'_{1,EA} \\ \tilde{\beta}'_{0,EA} \end{bmatrix}}_{\tilde{n}} = \begin{bmatrix} \tilde{\alpha}'_{(\tilde{n}+\tilde{m}-1),RK} \\ \vdots \\ \tilde{\alpha}'_{5,RK} \\ \tilde{\alpha}'_{4,RK} \\ \tilde{\alpha}'_{3,RK} \\ \tilde{\alpha}'_{2,RK} \\ \tilde{\alpha}'_{1,RK} \\ \tilde{\alpha}'_{0,RK} \end{bmatrix} \quad (2.286)$$

$$\tilde{\mathbf{M}}_S \tilde{\underline{\theta}}_{EA} = \underline{\tilde{\alpha}}_{RK}^* \quad (2.286)$$

Die $(\tilde{n} + \tilde{m}) \times (\tilde{n} + \tilde{m})$ -Matrix $\tilde{\mathbf{M}}_S$ wird als Sylvester-Matrix bezeichnet. Diese muss zur Bestimmung des Reglerparametervektors $\tilde{\underline{\theta}}_{EA}$ invertiert werden:

$$\tilde{\underline{\theta}}_{EA} = \tilde{\mathbf{M}}_S^{-1} \tilde{\underline{\alpha}}_{RK}^* \quad (2.287)$$

Diese Invertierung und somit die Lösung der Diophantinen Gleichung ist stets möglich, wenn die Sylvester-Matrix $\tilde{\mathbf{M}}_S$ bzgl. $A(\cdot)$ und $B(\cdot)$ nicht singulär ist, d.h. keinen Rangabfall aufzeigt. Unter welchen Bedingungen dies gilt, beschreibt das Sylvestertheorem:

Lemma 2.2: Sylvester-Theorem

Besitzen zwei Polynome $A(\cdot)$ und $B(\cdot)$ gemeinsame Wurzeln, so ist die entsprechende Sylvester-Matrix $\tilde{\mathbf{M}}_S$ singulär und folglich nicht invertierbar. Sind die beiden Polynome hingegen teilerfremd, so existiert stets eine nicht-singuläre Sylvester-Matrix und somit die Inverse $\tilde{\mathbf{M}}_S^{-1}$.

Beweis [119]:

Es wird angenommen, dass die beiden Polynome $A(\cdot)$ und $B(\cdot)$ eine gemeinsame Wurzel κ besitzen:

$$A(\rho) = (\rho - \kappa) A_{red}(\rho) = (\rho - \kappa) (\tilde{\alpha}'_{(\tilde{n}-1),red} \rho^{\tilde{n}-1} + \dots + \tilde{\alpha}'_{0,red}) \quad (2.288)$$

$$B(\rho) = (\rho - \kappa) B_{red}(\rho) = (\rho - \kappa) (\tilde{\beta}'_{(\tilde{m}-1),red} \rho^{\tilde{m}-1} + \dots + \tilde{\beta}'_{0,red}) \quad (2.289)$$

Ineinander eingesetzt ergibt sich:

$$B_{red}(\rho) A(\rho) + (-A_{red}(\rho)) B(\rho) = 0 \quad (2.290)$$

Diese Gleichung entspricht exakt der Diophantinen Gleichung (2.281) mit $A_{RK}^*(\rho) = 0$ sowie $A_{red}(\rho) = -B_{EA}(\rho)$ und $B_{red}(\rho) = A_{EA}(\rho)$ mit jeweils der Ordnung $\tilde{n} - 1$ bzw. $\tilde{m} - 1$ nach Gleichung (2.284). Dementsprechend gilt nach (2.286):

$$\tilde{\mathbf{M}}_S \tilde{\underline{\theta}}_{EA} = 0 \quad (2.291)$$

$$\tilde{\mathbf{M}}_S \begin{pmatrix} \tilde{\beta}'_{(\tilde{m}-1),red} & \dots & \tilde{\beta}'_{0,red} & \tilde{\alpha}'_{(\tilde{n}-1),red} & \dots & \tilde{\alpha}'_{0,red} \end{pmatrix}^T = 0 \quad (2.292)$$

Diese Gleichung hat eine nicht-triviale Lösung für $\tilde{\underline{\theta}}_{EA}$, wenn die Sylvester-Matrix $\tilde{\mathbf{M}}_S$ singulär ist, d.h. $\det[\tilde{\mathbf{M}}_S] = 0$ gilt. Eine nicht-triviale Lösung muss existieren, da die Diophantiner Gleichung durch das ineinander Einsetzen zweier Polynome $A(\cdot)$ und $B(\cdot)$ mit derselben Wurzel entstand. Liegen teilerfremde Polynome vor, so darf es folglich keine Lösung geben, womit die Sylvester-Matrix nicht-singulär sein muss: $\det[\tilde{\mathbf{M}}_S] \neq 0$. ■

Hiermit steht fest, dass die Diophantiner Gleichung (2.281) mit (2.286) stets nach den Reglerparametern eindeutig gelöst werden kann, sofern die System-Polynome $A(\cdot)$ und $B(\cdot)$ teilerfremd sind, d.h. keine gemeinsamen Wurzeln besitzen. Gäbe es gemeinsame Wurzeln, würde das bedeuten, dass Systemteile nicht beobachtbar bzw. steuerbar sind und folglich keine Auswirkung auf das Ein- Ausgangsverhalten zeigen, was sich in einer Pol- Nullstellenkompensation ausdrückt. Da der nicht beobachtbare bzw. nicht steuerbare Systemteil

nicht geregelt werden kann und somit stabil sein muss (vgl. Kapitel 2.2.1.1), stellt es keine Einschränkung dar, wenn für die Reglerauslegung die minimale Repräsentation der Ein-Ausgangsbeschreibung nach einer Pol- Nullstellenkürzung herangezogen wird.

Nach Gleichung (2.285) kann das Wunschpolynom eine maximale Ordnung $\tilde{n}_{RK}^* = \tilde{n} + \tilde{m} - 1$ annehmen. Ist es erforderlich, dass das Wunschpolynom $A_{RK}^*(\cdot)$ eine höhere Ordnung

$$\tilde{n}_{RK}^* = \tilde{n} + \tilde{m} - 1 + j, \quad j \in \mathbb{N} \quad (2.293)$$

besitzt, so muss die Sylvester-Matrix $\tilde{\mathbf{M}}_S$ unter der Bedingung einer quadratischen, invertierbaren Matrix erweitert werden. Wird der Vektor $\tilde{\mathbf{a}}_{RK}^*$ mit den Wunschkoeffizienten um j Einträge erweitert, muss ebenfalls die Anzahl der Reglerparameter um j erhöht werden, damit ein ausreichender Freiheitsgrad zum Erreichen des Regelziels zur Verfügung steht; konkret erhöht man die Ordnung des Reglerpolynoms $A(\cdot)$ um j und muss folglich die Sylvester-Matrix auf der linken Seite um j Spalten fortsetzen (vgl. Gleichung (2.300)). Nachdem generell $\tilde{\alpha}'_n \neq 0$ gilt, wird die Singularität der Matrix hiermit nicht verändert – die erweiterte Sylvester-Matrix $\tilde{\mathbf{M}}'_S$ ist ebenfalls nicht-singulär. Somit ist weiterhin ein eindeutiges Bestimmen der Reglerparameter durch Bildung der Inversen stets möglich. Für das Lösen der Diophantinen Gleichung lässt sich allgemein zusammenfassend folgendes Theorem formulieren:

Theorem 2.21: Bestimmung der Reglerparameter für freie Polverschiebbarkeit: Lösen der Diophantinen Gleichung

Liegt die minimale Repräsentation der Ein- Ausgangsbeschreibung eines Systems vor

$$y(t) = \frac{B(\rho)}{A(\rho)} u(t) = \frac{\tilde{\beta}'_{\tilde{m}} \rho^{\tilde{m}} + \cdots + \tilde{\beta}'_1 \rho + \tilde{\beta}'_0}{\tilde{\alpha}'_{\tilde{n}} \rho^{\tilde{n}} + \cdots + \tilde{\alpha}'_1 \rho + \tilde{\alpha}'_0} u(t), \quad (2.294)$$

d.h. werden nicht beobachtbare und nicht steuerbare Systemteile durch eine Pol- Nullstellenkürzung nicht mehr beschrieben, lassen sich die Reglerpolynome eines Referenzmodellreglers mit freier Polverschiebbarkeit (Signalflussplan 2.47)

$$A_{EA}(\rho) = \tilde{\alpha}'_{(\tilde{m}-1+j),EA} \rho^{\tilde{m}-1+j} + \cdots + \tilde{\alpha}'_{1,EA} \rho + \tilde{\alpha}'_{0,EA} \quad (2.295)$$

$$B_{EA}(\rho) = \tilde{\beta}'_{(\tilde{n}-1),EA} \rho^{\tilde{n}-1} + \cdots + \tilde{\beta}'_{0,EA} \rho + \tilde{\beta}'_{0,EA} \quad (2.296)$$

durch Vorgabe eines Wunschpolynoms

$$A_{RK}^*(\rho) = \tilde{\alpha}'_{\tilde{n}_{RK}^*,RK} \rho^{\tilde{n}_{RK}^*} + \cdots + \tilde{\alpha}'_{1,RK} \rho + \tilde{\alpha}'_{0,RK} \quad (2.297)$$

beliebiger Ordnung \tilde{n}_{RK}^ mit der Umrechnung*

$$j = \begin{cases} \tilde{n}_{RK}^* - (\tilde{n} + \tilde{m} - 1) & \text{für } \tilde{n}_{RK}^* > (\tilde{n} + \tilde{m} - 1) \\ 0 & \text{für } \tilde{n}_{RK}^* \leq (\tilde{n} + \tilde{m} - 1) \end{cases} \quad (2.298)$$

eindeutig bestimmen. Hierzu muss die Diophantinen Gleichung gelöst werden:

$$A_{EA}(\rho) A(\rho) + B_{EA}(\rho) B(\rho) = A_{RK}^*(\rho) \quad (2.299)$$

Diese lässt sich in ein Gleichungssystem umschreiben:

$$\tilde{n} + \tilde{m} + j \left\{ \begin{array}{cccccccccccc} \tilde{\alpha}'_{\tilde{n}} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \tilde{\alpha}'_{\tilde{n}} & \ddots & & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \tilde{\alpha}'_1 & \vdots & \tilde{\alpha}'_{\tilde{n}} & \ddots & & & \vdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \tilde{\alpha}'_0 & \tilde{\alpha}'_1 & \vdots & \tilde{\alpha}'_{\tilde{n}} & \ddots & & \vdots & \tilde{\beta}'_{\tilde{m}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \tilde{\alpha}'_0 & \tilde{\alpha}'_1 & \vdots & \tilde{\alpha}'_{\tilde{n}} & \ddots & \vdots & \vdots & \tilde{\beta}'_{\tilde{m}} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \tilde{\alpha}'_0 & \tilde{\alpha}'_1 & \vdots & \ddots & 0 & \tilde{\beta}'_1 & \vdots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \tilde{\alpha}'_0 & \tilde{\alpha}'_1 & & \tilde{\alpha}'_{\tilde{n}} & \tilde{\beta}'_0 & \tilde{\beta}'_1 & & \tilde{\beta}'_{\tilde{m}} \\ \vdots & & & \ddots & \tilde{\alpha}'_0 & \ddots & \vdots & 0 & \tilde{\beta}'_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \tilde{\alpha}'_1 & \vdots & \ddots & \ddots & \tilde{\beta}'_1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \tilde{\alpha}'_0 & 0 & \cdots & 0 & \tilde{\beta}'_0 \end{array} \right. \dots$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{\tilde{m} + j} \qquad \underbrace{\hspace{15em}}_{\tilde{n}}$

$$\dots \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}'_{(\tilde{m}-1+j),EA} \\ \vdots \\ \tilde{\alpha}'_{4,EA} \\ \tilde{\alpha}'_{3,EA} \\ \tilde{\alpha}'_{2,EA} \\ \tilde{\alpha}'_{1,EA} \\ \tilde{\alpha}'_{0,EA} \\ \tilde{\beta}'_{(\tilde{n}-1),EA} \\ \vdots \\ \tilde{\beta}'_{1,EA} \\ \tilde{\beta}'_{0,EA} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}'_{(\tilde{n}_{RK}^*),RK} \\ \vdots \\ \tilde{\alpha}'_{8,RK} \\ \tilde{\alpha}'_{7,RK} \\ \tilde{\alpha}'_{6,RK} \\ \tilde{\alpha}'_{5,RK} \\ \tilde{\alpha}'_{4,RK} \\ \tilde{\alpha}'_{3,RK} \\ \tilde{\alpha}'_{2,RK} \\ \tilde{\alpha}'_{1,RK} \\ \tilde{\alpha}'_{0,RK} \end{pmatrix} \quad (2.300)$$

$$\tilde{\mathbf{M}}'_S \tilde{\underline{\theta}}_{EA} = \tilde{\underline{\alpha}}^*_{RK} \quad (2.301)$$

Für den Fall $\tilde{n}_{RK}^* < \tilde{n} + \tilde{m} - 1$ ($j = 0$) muss der Vektor $\tilde{\underline{\alpha}}^*_{RK} \in R^{\tilde{n}+\tilde{m}}$ mit Nullen gefüllt werden.

Der Reglerparametervektor $\tilde{\underline{\theta}}_{EA}$ ergibt sich nun durch Invertieren der erweiterten Sylvester-Matrix $\tilde{\mathbf{M}}'_S$:

$$\tilde{\underline{\theta}}_{EA} = \tilde{\mathbf{M}}'^{-1}_S \tilde{\underline{\alpha}}^*_{RK} \quad (2.302)$$

Da auf Grund der minimalen Repräsentation (2.294) der Ein- Ausgangsbeschreibung des Systems die System-Polynome $A(\cdot)$ und $B(\cdot)$ teilerfremd sind, existiert stets eine eindeutige Lösung. ■

Betrachtet man den Referenzmodellregler mit freier Polverschiebbarkeit in Abbildung 2.49 unter Beachtung der Ordnung der Reglerpolynome in Gleichung (2.295) und (2.296), so wird deutlich, dass mit

$$\frac{B_{EA}(\rho)}{A_{EA}(\rho)} = \frac{\tilde{\beta}'_{(\tilde{n}-1),EA} \rho^{\tilde{n}-1} + \cdots + \tilde{\beta}'_{0,EA}}{\tilde{\alpha}'_{(\tilde{m}-1+j),EA} \rho^{\tilde{m}-1+j} + \cdots + \tilde{\alpha}'_{0,EA}} \quad \tilde{n} > \tilde{m} \quad (2.303)$$

ein nicht kausaler und somit nicht realisierbarer Regler (vgl. Kapitel 2.2.5.1) vorliegt, wenn $(\tilde{n} - 1) > (\tilde{m} - 1 + j)$, d.h. $j < \tilde{n} - \tilde{m}$. Mit der Erkenntnis, dass für einen kausalen Regler

$$j \geq \tilde{n} - \tilde{m} = \tilde{r}, \quad \tilde{n} > \tilde{m} \quad \rightarrow \quad j \in \{1, 2, \dots\} \quad (2.304)$$

gelten muss, lässt sich in Gleichung (2.298) die erlaubte Ordnung des Wunschpolynoms bestimmen:

$$\tilde{n}_{RK}^* \geq 2\tilde{n} - 1 = \tilde{r} + \tilde{n} + \tilde{m} - 1 \quad (2.305)$$

Hiermit ergibt sich folgende Ergänzung zu Theorem 2.21:

Theorem 2.22: Minimale Ordnung des Wunschpolynoms bei einem Referenzmodellregler mit freier Polverschiebbarkeit

Ein realisierbarer Referenzmodellregler mit freier Polverschiebbarkeit nach Theorem 2.21 ergibt sich nur für Wunschpolynome $A_{RK}^(\cdot)$ der Ordnung*

$$\tilde{n}_{RK}^* = 2\tilde{n} - 1 + i, \quad i \in \{0, 1, \dots\} \quad (2.306)$$

Für diese erlaubten Ordnungen gilt für die Lösung der Diophantinen Gleichung in (2.300):

$$j = \tilde{r} + i \quad (2.307)$$

Mit Gleichung (2.296) steht die Ordnung des Polynoms $B_{EA}(\cdot)$ für einen Regler mit freier Polverschiebbarkeit fest: $\tilde{m}_{EA} = \tilde{n} - 1$. Betrachtet man im Hinblick eines kausalen Reglers mit diesem Wissen das Teilsystem

$$\frac{A_{Beo}(\rho)}{B_{EA}(\rho)} = \frac{\tilde{\alpha}'_{\tilde{n}_{Beo},Beo} \rho^{\tilde{n}_{Beo}} + \cdots + \tilde{\alpha}'_{0,Beo}}{\tilde{\beta}'_{(\tilde{n}-1),EA} \rho^{\tilde{n}-1} + \cdots + \tilde{\beta}'_{0,EA}} \quad \tilde{n} > \tilde{m} \quad (2.308)$$

in Abbildung 2.49, so fällt auf, dass freie Polverschiebbarkeit bereits für einen Beobachter der Ordnung

$$\tilde{n}_{Beo} = \tilde{n} - 1 \quad (2.309)$$

garantiert sein muss, obwohl das zu regelnde System \tilde{n} -ter Ordnung \tilde{n} Zustände besitzt; warum daher der Zustandsbeobachter nicht \tilde{n} -ter Ordnung sein muss, soll im Folgenden geklärt werden.

Nachdem für die Reglerauslegung nach Theorem 2.21 nur das Ein- Ausgangsverhalten (2.294)

$$y(t) = \frac{B(\rho)}{A(\rho)} u(t) = \frac{\tilde{\beta}'_{\tilde{m}} \rho^{\tilde{m}} + \cdots + \tilde{\beta}'_1 \rho + \tilde{\beta}'_0}{\tilde{\alpha}'_{\tilde{n}} \rho^{\tilde{n}} + \cdots + \tilde{\alpha}'_1 \rho + \tilde{\alpha}'_0} u(t) \quad (2.310)$$

herangezogen wird und es für dieses eine unbegrenzte Anzahl an Zustandsdarstellungen mit demselben Ein- Ausgangsverhalten gibt, können für eine freie Polverschiebbarkeit die Zustände aller möglichen Darstellungen Anwendung finden. Eine Realisierung wäre beispielsweise die Beobachtungsnormalform aus Theorem 2.12. Da nach Gleichung (2.181) ein direkter Zusammenhang zwischen Beobachtungs- und Regelungsnormalform besteht und in Kapitel 2.2.4 die Beziehung zwischen Regelungsnormalform (2.72) und Übertragungsfunktion (2.78) verdeutlicht wurde, lässt sich für die Ein- Ausgangsbeschreibung (2.310) des Systems in monischer Darstellung

$$y(t) = \frac{B(\rho)}{A(\rho)} u(t) = \frac{\tilde{\beta}_{\tilde{n}} \rho^{\tilde{m}} + \cdots + \tilde{\beta}_1 \rho + \tilde{\beta}_0}{\rho^{\tilde{n}} + \tilde{\alpha}_{\tilde{n}-1} \rho^{\tilde{n}-1} + \cdots + \tilde{\alpha}_1 \rho + \tilde{\alpha}_0} u(t), \quad (2.311)$$

direkt die Beobachtungsnormalform formulieren ($s = \rho$):

$$\dot{\underline{\tilde{x}}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\tilde{\alpha}_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\tilde{\alpha}_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & -\tilde{\alpha}_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -\tilde{\alpha}_{\tilde{n}-1} \end{bmatrix} \underline{\tilde{x}}(t) + \begin{pmatrix} \tilde{\beta}_0 \\ \vdots \\ \tilde{\beta}_{\tilde{m}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \quad (2.312)$$

$$y(t) = (0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 1) \underline{\tilde{x}}(t) \quad (2.313)$$

Gleichung (2.313) verdeutlicht, dass eine Zustandsdarstellung existiert, bei der lediglich der Zustand \tilde{x}_1 direkt ausgekoppelt wird, d.h. das gemessene Ausgangssignal entspricht direkt einem Zustandssignal. Für diesen Zustand gilt somit $\tilde{x}_1(t) = y(t)$, welcher daher nicht mehr geschätzt werden muss – die Ordnung des Beobachters reduziert sich folglich um Eins.

Theorem 2.23: Ordnung des Zustandsbeobachters eines Referenzmodellreglers mit freier Polverschiebbarkeit

Der Referenzmodellregler nach Theorem 2.20 garantiert freie Polverschiebbarkeit, wenn der integrierte Beobachter bzw. das Wunschpolynom $A_{Beo}^*(\cdot)$ eine Ordnung von

$$\tilde{n}_{Beo}^* = \tilde{n} - 1 \quad (2.314)$$

besitzt.

Anmerkung 2.13:

Auch ein Beobachter der Ordnung $\tilde{n}_{Beo} = \tilde{n}$, welcher alle Zustände und somit auch das messbare Ausgangssignal $y(\cdot)$ schätzt, ist anwendbar, jedoch erhöht sich damit unnötig die Ordnung. Der Regler gemäß Signalflussplan 2.49 ist dann nicht mehr kausal – in diesem Fall muss auf die Reglerstruktur 2.47 zurückgegriffen werden.

Die Simulation 2.50 zeigt den unterschiedlichen Verlauf der transienten Phase des Ausgangssignals $y(\cdot)$ eines ein- ausgangsgeregelten Systems, wenn zum Einen ein Beobachter der Ordnung $\tilde{n}_{Beo} = \tilde{n}$ und zum Anderen ein Beobachter der reduzierten Ordnung

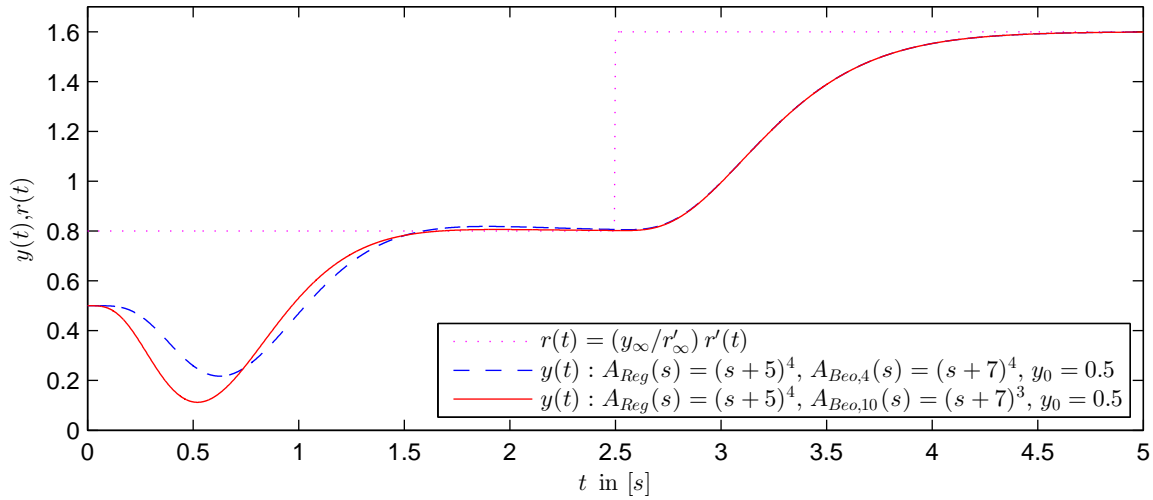


Abbildung 2.50: Referenzmodellregler mit freier Polverschiebbarkeit für das Beispielsystem (2.82) mit Auskoppelvektor $\underline{\bar{c}}_0$; die Pole für das Wunschpolynom $A_{Reg}^*(\cdot)$ des zustands-geregelten Systems liegen bei $\underline{\tilde{p}}_{Reg} = (-5 \ -5 \ -5 \ -5)$; es findet ein Beobachter der Ordnung $\tilde{n}_{Beo} = \tilde{n}$ als auch einer der reduzierten Ordnung $\tilde{n}_{Beo} = \tilde{n} - 1$ Anwendung; die entsprechenden Beobachterpole geringer Dynamik für das Wunschpolynom $A_{Beo,4}^*(\cdot)$ bzw. $A_{Beo,10}^*(\cdot)$ liegen bei $\underline{\tilde{p}}_{Beo,4} = (-7 \ -7 \ -7 \ -7)$ bzw. $\underline{\tilde{p}}_{Beo,10} = (-7 \ -7 \ -7)$

$\tilde{n}_{Beo} = \tilde{n} - 1$ verwendet wird. Es wurde zum Vergleich dasselbe System sowie Auslegung wie in Simulation 2.48 zu Grunde gelegt. Die Pole des Beobachters \tilde{n} -ter Ordnung liegen bei $\underline{\tilde{p}}_{Beo,4} = (-7 \ -7 \ -7 \ -7)$ und die des Beobachters $(\tilde{n} - 1)$ -ter Ordnung bei $\underline{\tilde{p}}_{Beo,10} = (-7 \ -7 \ -7)$. Wie zu erwarten schwingt ein Beobachter geringerer Ordnung schneller ein; der Verlauf der transienten Phase führt auf Grund der höheren Dynamik jedoch temporär zu einem größeren Regelfehler $e(t) = r(t) - y(t)$.

Nachdem sich der Regelkreis aus dem zu regelnden System \tilde{n} -ter Ordnung, einem reduzierten Zustandsbeobachter $(\tilde{n} - 1)$ -ter Ordnung und einem proportionalen Zustandsregler (0-ter Ordnung) zusammensetzt, ergibt sich für die minimale Ordnung des Gesamtsystems $\tilde{n}_{RK} = 2\tilde{n} - 1$, was die Voraussetzung für einen kausalen Referenzmodellregler mit freier Polverschiebbarkeit in Theorem 2.22 bestätigt; die Ordnung \tilde{n}_{RK} ist des Weiteren durch Hinzufügen eines stabilen Filters $1/A_i(\rho)$ beliebig zu erhöhen. Die $\tilde{n} - 1$ Pole des integrierten Zustandsbeobachters können unter Beachtung der Stabilität beliebig gewählt werden und die \tilde{n} Pole des Systems sind, ebenfalls unter Beachtung der Stabilität, durch den integrierten Zustandsregler beliebig zu verschieben. Demzufolge darf das erweiterte Nennerpolynom des Gesamtregelkreises $A_{RK}(\rho) = A_{Beo}(\rho) A_{Reg}(\rho) A_i(\rho)$, welches sich aus dem Nennerpolynom des Beobachters, dem des zustands-geregelten Systems und dem des Filters zusammensetzt, im Rahmen der Stabilität beliebig gewählt werden – das erweiterte Wunschpolynom lautet $A_{RK}^*(\rho) = A_{Beo}^*(\rho) A_{Reg}^*(\rho) A_i^*(\rho)$, wie es in Gleichung (2.278) Anwendung finden kann.

Theorem 2.24: Zusammensetzung und Ordnung des erweiterten Wunschpolynoms

Berücksichtigt das Wunschpolynom $A_{RK}^*(\cdot)$ gemäß Gleichung (2.278) nicht nur die Regler- und Beobachterausslegung, sondern sollen weitere i Polstellen durch den Referenzmodellregler eingebracht werden, muss das Wunschpolynom um das Polynom $A_i^*(\cdot)$ erweitert werden:

$$A_{RK}^*(\rho) = A_{Beo}^*(\rho) A_{Reg}^*(\rho) A_i^*(\rho) \quad (2.315)$$

Nach Gleichung (2.314) ist für den Beobachter eine Ordnung $\tilde{n}_{Beo}^* = \tilde{n} - 1$ vorzusehen. Da der Zustandsregler alle \tilde{n} Zustände des Systems berücksichtigt, gilt $\tilde{n}_{Reg}^* = \tilde{n}$. Das zusätzlich eingebrachte System mit dem Nennerpolynom $A_i^*(\cdot)$ erhöht die Ordnung um i . Die erlaubte Ordnung des Wunschpolynoms in Gleichung (2.306) setzt sich daher wie folgt zusammen:

$$\tilde{n}_{RK}^* = 2\tilde{n} - 1 + i, \quad i \in \{0, 1, \dots\} \quad (2.316)$$

$$= \underbrace{\tilde{n}} + \underbrace{\tilde{n} - 1 + i} \quad (2.317)$$

$$= \tilde{n}_{Reg}^* + \tilde{n}_{Beo}^* + i \quad (2.318)$$

Zur Lösung der Diophantinen Gleichung mit Theorem 2.21 gilt:

$$j = \tilde{r} + i \quad (2.319)$$

Die Reglerpolynome $A_{EA}(\cdot)$ und $B_{EA}(\cdot)$ besitzen folglich die Ordnung:

$$\tilde{n}_{EA} = \tilde{n} - 1 + i \quad (2.320)$$

$$\tilde{m}_{EA} = \tilde{n} - 1 \quad (2.321)$$

Da sich die Dynamik des Beobachters nach Gleichung (2.279) nicht auf das Führungsverhalten auswirkt, reduziert sich die minimale Ordnung $\tilde{n}_{RK} = 2\tilde{n} - 1$ ($i = 0$) des geschlossenen Regelkreises um die Ordnung $\tilde{n}_{Beo} = \tilde{n} - 1$ des Beobachters, womit das nach Außen sichtbare dynamische Verhalten der Ordnung \tilde{n} des Systems entspricht – der Referenzmodellregler mit freier Polverschiebbarkeit besitzt von Außen betrachtet dieselbe Ordnung wie ein Zustandsregler ohne Beobachter. Nachdem die Nullstellen der Ordnung \tilde{m} des Systems nach Gleichung (2.279) durch den Referenzmodellregler nicht verändert werden, wird der Relativgrad $\tilde{r} = \tilde{n} - \tilde{m}$ und somit die Trägheit des Systems (siehe Kapitel 2.2.5.1) durch den Regler für $i = 0$ nicht erhöht, sondern bleibt erhalten. Da die Verzögerung der Signale durch ein System nie verkleinert werden kann, ist zumindest der Erhalt des Relativgrades das oberste Ziel eines Reglers, wenn es um die Beschleunigung des Einschwingverhaltens geht, d.h. in diesem Fall ist $i = 0$ zu wählen.

Werden nun, wie im nächsten Kapitel dargestellt, \tilde{m} Pole auf die \tilde{m} Nullstellen verschoben, so verbleibt von Außen betrachtet ein System der Ordnung $\tilde{r} = \tilde{n} - \tilde{m}$ mit dem Relativgrad \tilde{r} .

2.2.6.7 Erweiterte Referenzmodellregelung

Ein Spezialfall des Referenzmodellreglers mit freier Polverschiebbarkeit liegt vor, wenn \tilde{m} Wurzeln des Wunschpolynoms $A_{RK}^*(\cdot)$ der Gleichung (2.278) entsprechend der Wurzeln des

Polynoms $B(\cdot)$ der Strecke gewählt werden:

$$A_{RK}^*(\rho) = A_{RK,red}^*(\rho) B(\rho), \quad \tilde{n}_{RK,red}^* = \tilde{n}_{RK}^* - \tilde{m} \quad (2.322)$$

Mit Gleichung (2.322) folgt allgemein für die Diophantine Gleichung (2.278):

$$A_{EA}(\rho) A(\rho) + B_{EA}(\rho) B(\rho) = A_{RK,red}^*(\rho) B(\rho) \quad (2.323)$$

Nachdem $B(\cdot)$ ein Faktor der rechten Seite und ein Faktor des zweiten Terms der linken Seite ist, lässt sich schlussfolgern, dass er auch ein Faktor des ersten Terms sein muss:

$$\underbrace{A_{EA,red}(\rho) B(\rho)}_{A_{EA}(\rho)} A(\rho) + B_{EA}(\rho) B(\rho) = \underbrace{A_{RK,red}^*(\rho) B(\rho)}_{A_{RK}^*(\rho)} \quad (2.324)$$

Das reduzierte Reglerpolynom $A_{EA,red}(\cdot)$ besitzt dann nach Gleichung (2.320) eine reduzierte Ordnung von

$$\tilde{n}_{EA,red} = \tilde{r} - 1 + i \quad (2.325)$$

Durch Kürzung ergibt sich für Gleichung (2.324):

$$A_{EA,red}(\rho) A(\rho) + B_{EA}(\rho) = A_{RK,red}^*(\rho) \quad (2.326)$$

Hierbei handelt es sich um eine vereinfachte Diophantine Gleichung (2.278), mit der nun im Vergleich zur Bestimmung der Reglerparameter über Theorem 2.21 eine einfache Polynomdivision zur Lösung führt:

$$\frac{A_{RK,red}^*(\rho)}{A(\rho)} = A_{EA,red}(\rho) + \frac{B_{EA}(\rho)}{A(\rho)} \quad (2.327)$$

Das Reglerpolynom $B_{EA}(\cdot)$ entspricht dem Rest der Polynomdivision und das Reglerpolynom

$$A_{EA}(\rho) = A_{EA,red}(\rho) B(\rho) \quad (2.328)$$

nach Gleichung (2.324) setzt sich aus dem Systempolynom $B(\cdot)$ und dem Quotienten $A_{EA,red}(\cdot)$ der Polynomdivision zusammen. Mit dem Zusammenhang (2.328) folgt für den Regler (2.277):

$$\frac{A_{EA,red}(\rho) B(\rho)}{A_{Beo}^*(\rho)} u(t) = r'(t) - \frac{B_{EA}(\rho)}{A_{Beo}^*(\rho)} y(t) \quad (2.329)$$

Den Signalflussplan des geregelten Systems zeigt Abbildung 2.51. Es ist sehr gut zu erkennen, dass der Regler das Nullstellenpolynom $B(\cdot)$ der Strecke kürzt. Aus diesem Grund darf kein nicht-minimalphasiges System vorliegen, da sonst eine instabile Pol-Nullstellenkürzung zu einem instabilen Regler führt. Nur unter der Bedingung stabiler Wurzeln des Polynoms $B(\cdot)$ bzw. stabiler Nullstellen der Führungsübertragungsfunktion der Strecke ergibt sich ein stabiler Regler, d.h. dieser Regler kann nur auf minimalphasige Systeme angewandt werden. Hierzu sei auf Kapitel 2.2.5.5 und 2.2.5.6 verwiesen.

Nachdem die Dynamik der System-Nullstellen $B(\cdot)$ kompensiert ist, kann über den Regler unter Beachtung der Kausalität ein neues Zähler-Wunschpolynom für den geschlossenen Regelkreis

$$B_{RK,red}^*(\rho) = B_i^*(\rho), \quad \tilde{m}_{RK} = \tilde{m}_i \quad (2.330)$$

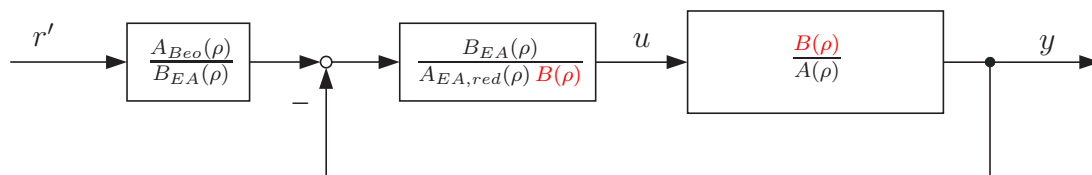


Abbildung 2.51: Signalflussplan eines Referenzmodellreglers, d.h. eines ein- ausgangsgeregelten Systems mit freier Polverschiebbarkeit, bei dem der Regler die Nullstellen $B(\cdot)$ des Systems kürzt

d.h. neue System-Nullstellen in der Führungsübertragungsfunktion erzeugt werden. Nachdem für die minimale Realisierung des Reglers mit $i = 0$ alle Zähler- und Nennerpolynome des Reglers in Signalflussplan 2.51 gemäß der Gleichungen (2.325), (2.320), (2.321) und (2.314) die Ordnung $\tilde{n} - 1$ besitzen, kann kein Nullstellenpolynom ohne Erhöhung der Ordnung des geregelten Systems zur Gewährung der Kausalität eingebracht werden. Hierfür gibt es wie folgt zwei Möglichkeiten, so dass das Konzept des Referenzmodellreglers mit freier Polverschiebbarkeit (Diophantine Gleichung) und somit der geschlossene Regelkreis nicht verändert wird. Es findet eine Filterung des Eingangssignals $r'(\cdot)$ mit

$$F_{F,i}(s) = \frac{B_i^*(s)}{A_i^*(s)}, \quad \tilde{n}_i \geq \tilde{m}_i \quad (2.331)$$

statt, wobei sich die Ordnungserhöhung mit der entsprechenden Veränderung der Dynamik nur auf das Führungsverhalten und nicht auf das Störverhalten bzw. transienten Phase des Beobachters auswirkt. Soll sich das zusätzliche System $1/A_i(s)$ hingegen auch auf das Störverhalten sowie transiente Phase auswirken, ist das Wunschnennerpolynom $A_{RK}^*(\cdot)$ gemäß Gleichung (2.315) um $A_i^*(\cdot)$ der Ordnung

$$\tilde{n}_i^* = i \geq \tilde{m}_i^* \quad (2.332)$$

zu erweitern. Das Zählerpolynome $B_i^*(\cdot)$ mit der gewünschten Ordnung \tilde{m}_i^* muss dann zur Gewährung der Kausalität in den geschlossenen Regelkreis verschoben werden, wie es der Signalflussplan 2.52 verdeutlicht. Das erweiterte Regelgesetz lautet:

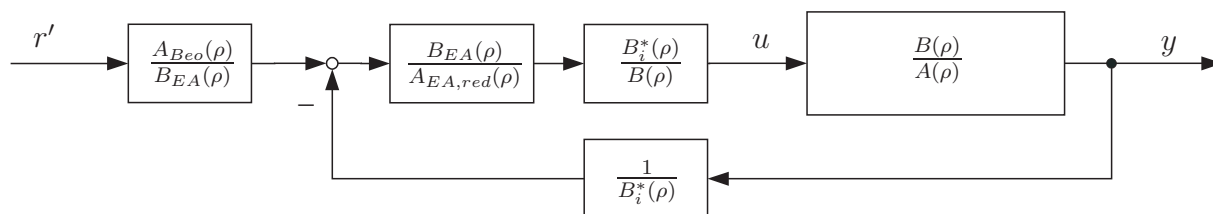


Abbildung 2.52: Signalflussplan eines erweiterten Referenzmodellreglers, bei dem der Regler die Nullstellen $B(\cdot)$ des Systems kürzt und neue Nullstellen $B_i^*(\cdot)$ einbringt

$$\frac{A_{EA,red}(\rho)}{A_{Beo}(\rho)} \frac{B(\rho)}{B_i^*(\rho)} u(t) = r'(t) - \frac{B_{EA}(\rho)}{A_{Beo}(\rho)} \frac{1}{B_i^*(\rho)} y(t) \quad (2.333)$$

Durch Einsetzen des nach $u(t)$ aufgelösten Systems (2.263) in das Regelgesetz (2.333) resultiert das Ein- Ausgangsverhalten des geschlossenen Regelkreises:

$$\begin{aligned}
y(t) = & \frac{B(\rho) A_{Bco}(\rho) B_i^*(\rho)}{\underbrace{A_{EA,red}(\rho) B(\rho) A(\rho) + B_{EA}(\rho) B(\rho)}_{A_{RK}^*(\rho)}} r'(t) + \dots \\
& \dots + \frac{\overbrace{A_{EA,red}(\rho) B(\rho) \underline{B}_0^T(\rho)}^{A_{EA}(\rho)}}{\underbrace{A_{EA,red}(\rho) B(\rho) A(\rho) + B_{EA}(\rho) B(\rho)}_{A_{EA}(\rho)}} \underline{x}_0 + \dots \\
& \dots + \frac{\overbrace{A_{EA,red}(\rho) B(\rho) B_v(\rho)}^{A_{EA}(\rho)}}{\underbrace{A_{EA,red}(\rho) B(\rho) A(\rho) + B_{EA}(\rho) B(\rho)}_{A_{EA}(\rho)}} v(t) \quad (2.334)
\end{aligned}$$

Die Nennerpolynome entsprechen der Diophantinen Gleichung (2.324), welche mit Hilfe der Polynomdivision (2.327) gelöst werden kann; wegen Gleichung (2.322) stehen hinsichtlich des Wunschkpolynoms (2.315) folgende Alternativen zu Auswahl:

$$A_{RK}^*(\rho) = A_{Bco}^*(\rho) A_{Reg}^*(\rho) A_i^*(\rho) = A_{RK,red}^*(\rho) B(\rho) \quad (2.335)$$

$$= A_{Bco}^*(\rho) \underbrace{A_{Reg,red}^*(\rho) B(\rho)}_{A_{Reg}^*(\rho)} A_i^*(\rho), \quad \tilde{n}_{Reg,red}^* = \tilde{n}_{Reg}^* - \tilde{m} = \tilde{n} - \tilde{m} = \tilde{r} \quad (2.336)$$

$$= \underbrace{A_{Bco,red}^*(\rho) B(\rho)}_{A_{Bco}^*(\rho)} A_{Reg}^*(\rho) A_i^*(\rho), \quad \tilde{n}_{Bco,red}^* = \tilde{n}_{Bco}^* - \tilde{m} = \tilde{r} - 1 \quad (2.337)$$

Ordnet man das Nullstellenpolynom $B(\cdot)$ dem Regler gemäß Gleichung (2.336) zu, lässt sich Gleichung (2.334) wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned}
y(t) = & \underbrace{\frac{B_i^*(\rho)}{A_{Reg,red}^*(\rho) A_i^*(\rho)}}_{y_{r'}(t)} r'(t) + \underbrace{\frac{A_{EA,red}(\rho) \underline{B}_0^T(\rho)}{A_{Bco}^*(\rho) A_{Reg,red}^*(\rho) A_i^*(\rho)}}_{y_{\underline{x}_0}(t)} \underline{x}_0 + \dots \\
& \dots + \underbrace{\frac{A_{EA,red}(\rho) B_v(\rho)}{A_{Bco}^*(\rho) A_{Reg,red}^*(\rho) A_i^*(\rho)}}_{y_v(t)} v(t) \quad (2.338)
\end{aligned}$$

Hiermit ist bestätigt, dass das Nullstellenpolynom $B(\cdot)$ der Strecke eliminiert und durch das Wunschkpolynom $B_i^*(\cdot)$ ersetzt wird. Dieses verändert, wie gewünscht, nicht das Verhalten des geschlossenen Kreises und wirkt sich daher nur auf das Führungsverhalten $y_{r'}(t)$ aus. Das Polynom $A_i^*(\cdot)$ beeinflusst hingegen sowohl das Führungsverhalten $y_{r'}(t)$, Störverhalten $y_v(t)$ als auch das Verhalten $y_{\underline{x}_0}(t)$ der transienten Phase des Beobachters. Maximale Ordnungsreduktion der Strecke durch den Regler tritt auf, wenn kein neues Nullstellenpolynom mit $B_i^*(\rho) = 1$ erzeugt und folglich $A_i^*(\rho) = 1$ gewählt werden kann. Dann reduziert sich

die Ordnung \tilde{n} der Strecke mit Relativgrad \tilde{r} auf eine von Außen sichtbare Ordnung von $\tilde{n}_{Reg,red}^* = \tilde{r}$ (vgl. Gleichung (2.336)) bei einem Relativgrad von \tilde{r} . Der physikalisch bedingte Relativgrad des Systems kann im Gegensatz zur Ordnung durch einen Regler im Hinblick der Kausalität nie reduziert werden (siehe Kapitel 2.2.5.1). Dies wird auch mit Gleichung (2.332) deutlich: durch Hinzufügen eines Zählerpolynoms $B_i^*(\cdot)$ mit der Ordnung \tilde{m}_i muss sich gleichzeitig die Ordnung des Nennerpolynoms durch eine Erweiterung mit $A_i^*(\cdot)$ um mindestens dieselbe Ordnung erhöhen, womit der Relativgrad nicht kleiner werden kann. Wie auch bereits mit Gleichung (2.276) gezeigt, ist die Beobachtdynamik $A_{Beo}(\cdot)$ in der Führungsübertragungsfunktion nicht sichtbar, womit die Beobachtdynamik herangezogen werden kann, das Störverhalten $y_v(t)$ sowie das Verhalten des Systems während der transienten Phase des Beobachters $y_{\underline{x}_0}(t)$ unabhängig vom Führungsverhalten $y_{r'}(t)$ zu beeinflussen.

Theorem 2.25: Erweiterte Referenzmodellregelung

Durch den um $B_i^*(\cdot)$ erweiterten Referenzmodellregler

$$\frac{A_{EA,red}(\rho)}{A_{Beo}^*(\rho)} \frac{B(\rho)}{B_i^*(\rho)} u(t) = r'(t) - \frac{B_{EA}(\rho)}{A_{Beo}^*(\rho)} \frac{1}{B_i^*(\rho)} y(t) \quad (2.339)$$

mit freier Polverschiebbarkeit ist die gesamte Systemdynamik einer Strecke im Führungsverhalten beliebig zu verändern. Da mit den Wunschpolynomen

$$A_{RK}^*(\rho) = A_{Beo}^*(\rho) \underbrace{A_{Reg,red}^*(\rho) B(\rho)}_{A_{Reg}^*(\rho)} A_i^*(\rho) \quad (2.340)$$

$$B_{RK}^*(\rho) = A_{Beo}^*(\rho) B(\rho) B_i^*(\rho) \quad (2.341)$$

der Ordnungen

$$\tilde{n}_{Beo}^* = \tilde{n} - 1, \quad \tilde{n}_{Reg,red}^* = \tilde{r}, \quad \tilde{n}_i^* \geq \tilde{m}_i^*, \quad \tilde{n}_i^*, \tilde{m}_i^* \in \mathbb{N} \quad (2.342)$$

ein beliebiges Referenzmodell mit Relativgrad $r_{RK}^* \geq r$

$$y^*(t) = \frac{B_{RK}^*(\rho)}{A_{RK}^*(\rho)} r'(\rho) = \frac{B_{RK,red}^*(\rho)}{A_{RK,red}^*(\rho)} r'(\rho) = \frac{B_i^*(\rho)}{A_i^*(\rho) A_{Reg,red}^*(\rho)} r'(t) \quad (2.343)$$

vorgegeben wird, gemäß diesem sich die geregelte Strecke verhalten soll, spricht man von einer Referenzmodellregelung (engl.: Model Reference Control, Abk.: MRC) – das Ausgangssignal $y(\cdot)$ der Strecke soll stets dem Ausgang $y^*(\cdot)$ des Referenzmodells folgen.

Eine stabile Regelung bei Vorgabe eines beliebigen Referenzmodells hinsichtlich des Nullstellenpolynoms kann nur bei minimalphasigen Systemen gewährt werden. Nichtminimalphasige Systeme werden durch das Ersetzen des Nullstellenpolynoms instabil (siehe Kapitel 2.2.5.5 und 2.2.5.6).

Den Signalflussplan des erweiterten Referenzmodellreglers zeigt Abbildung 2.52.

Die Reglerpolynome $A_{EA,red}(\cdot)$ und $B_{EA}(\cdot)$ lassen sich mit Hilfe der Polynomdivision (2.327)

$$\frac{A_{RK,red}^*(\rho)}{A(\rho)} = \frac{A_{Beo}^*(\rho) A_{Reg,red}^*(\rho) A_i^*(\rho)}{A(\rho)} = A_{EA,red}(\rho) + \frac{B_{EA}(\rho)}{A(\rho)} \quad (2.344)$$

bestimmen.

Wie im Kapitel 2.2.6.3 bereits dargestellt, wird das Störverhalten wesentlich verbessert, wenn die Nullstellen der Störübertragungsfunktion gekürzt bzw. geschwächt werden. Im allgemeinen Fall (2.276) des Referenzmodellreglers mit freier Polverschiebbarkeit, bei dem alle Wurzeln des Wunschpolynoms $A_{RK}^*(\cdot)$ beliebig gewählt werden können und nicht, wie hier, \tilde{m} Wurzeln des Wunschpolynoms $A_{RK}^*(\cdot)$ entsprechend der Wurzeln des Polynoms $B(\cdot)$ der Strecke zu wählen sind, werden durch das Reglerpolynom $A_{EA}(\cdot)$ zusätzlich zu den Nullstellen $B_v(\cdot)$ der Störübertragungsfunktion der Strecke weitere $\tilde{n} - 1 + i$ Nullstellen hinzugefügt, was das dynamische Störverhalten verschlechtern kann. Bei freier Wahl des Wunschpolynoms $A_{RK}^*(\cdot)$ ist das Reglerpolynom $A_{EA}(\cdot)$ nicht unabhängig beeinflussbar und somit auch nicht das Störverhalten. Werden jedoch \tilde{m} Wurzeln des Wunschpolynoms $A_{RK}^*(\cdot)$ entsprechend der Wurzeln des Polynoms $B(\cdot)$ der Strecke gewählt, reduziert sich die Ordnung des Reglerpolynoms $A_{EA}(\cdot)$ und somit die Anzahl der hinzugefügten Nullstellen generell gemäß Gleichung (2.325) von $\tilde{n} - 1 + i$ auf $\tilde{r} - 1 + i$, da das Reglerpolynom mit $A_{EA}(\rho) = A_{EA,red}(\rho) B(\rho)$ eine Pol-Nullstellenkürzung bzgl. $B(\cdot)$ erfährt. Besitzt demnach eine Strecke maximal viele Nullstellen mit $\tilde{m} = \tilde{n} - 1$, d.h. einen Relativgrad von $\tilde{r} = 1$, und wird die Ordnung des Systems mit $i = 0$ nicht über $A_{EA}(\cdot)$ erhöht bzw. stattdessen der Filter (2.331) verwendet, findet eine vollständige Elimination des Reglerpolynoms $A_{EA}(\cdot)$ statt und es verbleibt nur das Nullstellenpolynom $B_v(\cdot)$ in der Störübertragungsfunktion der Strecke. Dieses kann dann mit Hilfe des frei wählbaren Beobachterpolynoms $A_{Beo}^*(\rho) = A_{Beo,red}^*(\rho) B_v(\rho)$ gekürzt werden oder, falls $B_v(\cdot)$ unbekannt ist, mit $B(\cdot)$ geschwächt werden. Der beschriebene vorteilhafte Fall für Relativgrade $\tilde{r} = 1$ wird besonders für den zeitdiskretisierten Referenzmodellregler in Kapitel 2.3.6.3 von Interesse sein, da mit einem Halteglied erster Ordnung zeitdiskretisierte Systeme stets Relativgrad $r = 1$ besitzen (vgl. Kapitel 2.3.6.1).

Für Systeme mit Relativgrad $\tilde{r} > 1$ sei an dieser Stelle erwähnt, dass über die Freiheitsgrade des Beobachters auch das verbleibende Reglerpolynom $A_{EA,red}(\cdot)$ zu Gunsten einer geeigneteren Dynamik des Nullstellenpolynoms der Störübertragungsfunktion in Gleichung (2.338) gewählt werden kann. Beispielsweise lässt sich durch Umschreiben der reduzierten Diophantinen Gleichung (2.326)

$$\underbrace{A_{RK,red}(\rho)}_{A_{Reg,red}^*(\rho) A_{Beo}(\rho)} - B_{EA}(\rho) = A_{EA,red}^*(\rho) A(\rho) \quad (2.345)$$

durch Vorgabe eines gewünschten Reglerpolynoms $A_{EA,red}^*(\cdot)$ mit der Polynomdivision

$$\frac{A_{EA,red}^*(\rho) A(\rho)}{A_{Reg,red}^*(\rho)} = A_{Beo}(\rho) - \frac{B_{EA}(\rho)}{A(\rho)} \quad (2.346)$$

ein hierfür notwendiges Beobachterpolynom $A_{Beo}(\cdot)$ bestimmen (Quotient der Polynomdivision). Es ist jedoch darauf zu achten, dass sich ein stabiles Beobachterpolynom ergibt, welches eine höhere Dynamik als das gewünschte Reglerpolynom besitzt und somit in der Störübertragungsfunktion nicht dominiert. Es zeigt sich somit erneut, dass mit Hilfe der Beobachterdynamik, welche sich nicht auf das Führungsverhalten auswirkt, Freiheitsgrade für die Optimierung der Störübertragungsfunktion zur Verfügung stehen.

Die Überlegungen zum Störverhalten $y_v(t)$ gelten auch für das Verhalten $y_{\underline{x}_0}(t)$ in der transienten Phase des Beobachters, da gemäß Gleichung (2.338) die Struktur der zugehörigen Übertragungsfunktionen identisch ist.

Theorem 2.26: Referenzmodellregelung: Verbesserung des Führungs- und Störverhaltens

Durch die Wahl der Wunschpolynome mit

$$A_{Reg}^*(\rho) = A_{Reg,red}^*(\rho) B(\rho) \quad (2.347)$$

$$A_{Beo}^*(\rho) = A_{Beo,red}^*(\rho) B_v(\rho) \quad (2.348)$$

bzw. bei unbekannter Störübertragungsfunktion mit

$$A_{Beo}^*(\rho) = A_{Beo,red}^*(\rho) B(\rho) \quad (2.349)$$

wird durch Pol-Nullstellenkürzungen bzw. -schwächungen das Führungs- als auch Störverhalten sowie Verhalten des Beobachters in der transienten Phase gemäß Gleichung (2.338) durch Kürzung bzw. Schwächung der Nullstellenpolynome maximal verbessert, ohne die freie Wählbarkeit der Führungsübertragungsfunktion nach Theorem 2.25 zu unterbinden.

Für den Fall $\tilde{r} = 1$ wird durch die Wahl (2.347) bzw. (2.349) das Reglerpolynom $A_{EA,red}(\cdot)$ in der Störübertragungsfunktion $y(t)/v(t)$ bzw. in der Übertragungsfunktion $y(t)/\underline{x}_0(t)$ zur Darstellung der transienten Phase des Beobachters wegen $A_{EA}(\rho) = B(\rho)$ vollständig eliminiert, d.h. auf Grund von $A_{EA,red}(\rho) = 1$ besitzen die entsprechenden Übertragungsfunktionen in Gleichung (2.338) lediglich die Nullstellenpolynome $B_v(\cdot)$ bzw. $B_{\underline{x}_0}(\cdot)$ der Strecke und zeigen daher keine zusätzlichen Nullstellen durch die Reglerauslegung.

Die obige Wahl der Wunschpolynome darf nur bei minimalphasigen Systemen Anwendung finden, d.h. sofern die Nullstellenpolynome $B(\cdot)$ bzw. $B_v(\cdot)$ stabil sind.

Ordnet man im Unterschied zu Gleichung (2.338) das Nullstellenpolynom $B(\rho)$ dem Beobachter gemäß Gleichung (2.337) und nicht dem Regler zu, lässt sich Gleichung (2.334) wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned} y(t) = & \underbrace{\frac{B(\rho) B_i^*(\rho)}{A_{Reg}^*(\rho) A_i^*(\rho)} r'(t)}_{y_{r'}(t)} + \underbrace{\frac{A_{EA,red}(\rho) \underline{B}_0^T(\rho)}{A_{Beo,red}^*(\rho) A_{Reg}^*(\rho) A_i^*(\rho)} \underline{x}_0}_{y_{\underline{x}_0}(t)} + \dots \\ & \dots + \underbrace{\frac{A_{EA,red}(\rho) B_v(\rho)}{A_{Beo,red}^*(\rho) A_{Reg}^*(\rho) A_i^*(\rho)}}_{y_v(t)} v(t) \end{aligned} \quad (2.350)$$

Das Störverhalten $y_v(t)$ sowie das Verhalten $y_{\underline{x}_0}(t)$ in der transienten Phase des Beobachters ändert sich durch diese Zuordnung nicht und es gelten daher entsprechend dieselben Anmerkungen und Vorteile wie für Gleichung (2.338). Im Führungsverhalten $y_{r'}(t)$ findet jedoch keine Kürzung der Systemnullstellen $B(\cdot)$ und somit keine Ordnungsreduktion statt.

Die Zuordnung der Nullstellen $B(\cdot)$ zur Beobachterdynamik gemäß des Wunschpolynoms (2.337) zeigt die Simulation 2.53 oben. Der Referenzmodellregler mit freier Polverschieb-

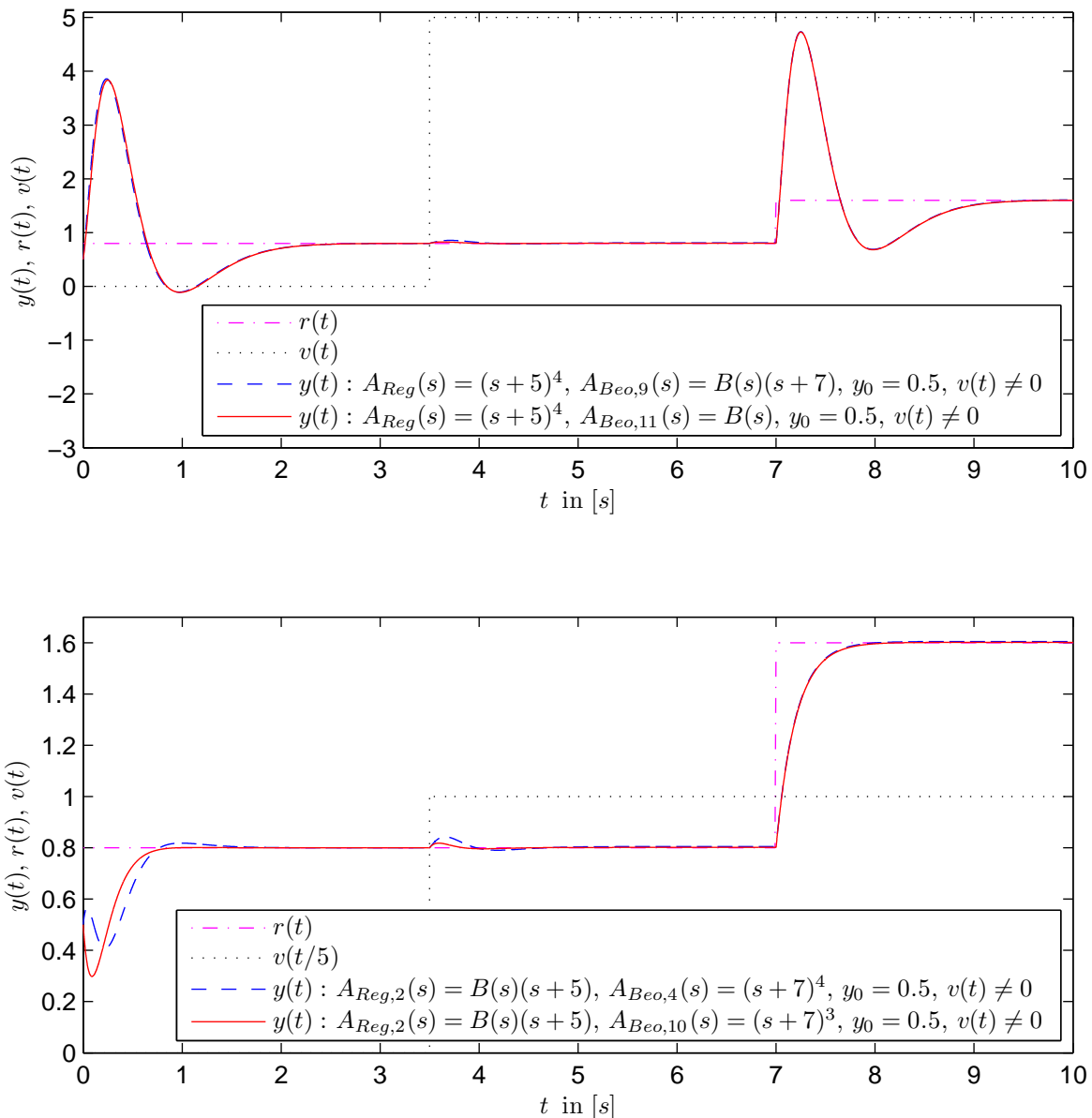


Abbildung 2.53: Referenzmodellregler mit freier Polverschiebbarkeit unter Störeinwirkung $v(t)$ am Beispiel des Systems (2.82) mit Auskoppelvektor $\underline{\bar{c}}_1$, d.h. Nullstellenpolynom $B(\cdot)$; es findet ein Beobachter der Ordnung $\tilde{n}_{Beo} = \tilde{n}$ als auch einer der reduzierten Ordnung $\tilde{n}_{Beo} = \tilde{n} - 1$ Anwendung; **oben:** der Beobachter besitzt seine Pole bei $\tilde{\underline{p}}_{Beo,9} = (-7 \ \tilde{\underline{q}}^T)$ bzw. $\tilde{\underline{p}}_{Beo,11} = \tilde{\underline{q}}^T$, womit die Nullstellen $\tilde{\underline{q}}$ in der Stör- und Anfangswertübertragungsfunktion gekürzt werden; die Pole des zustandsgeregelten Systems liegen bei $\tilde{\underline{p}}_{Reg} = (-5 \ -5 \ -5 \ -5)$, womit die Nullstellen $\tilde{\underline{q}}$ im Führungsverhalten erhalten bleiben; **unten:** der Beobachter geringer Dynamik besitzt seine Pole bei $\tilde{\underline{p}}_{Beo,4} = (-7 \ -7 \ -7 \ -7)$ bzw. $\tilde{\underline{p}}_{Beo,10} = (-7 \ -7 \ -7)$; die Pole des zustandsgeregelten Systems liegen bei $\tilde{\underline{p}}_{Reg,2} = (-5 \ \tilde{\underline{q}}^T)$, womit die Nullstellen $\tilde{\underline{q}}$ sowohl in der Führungs-, Stör- als auch Anfangswertübertragungsfunktion gekürzt werden (Ordnungsreduktion)

barkeit wird auf das Beispielsystem (2.82) mit Auskoppelvektor \bar{c}_1 angewandt, d.h. für die Strecke gilt ein Relativgrad $\tilde{r} = 1$. Der Beobachter besitzt das Wunschpolynom $A_{B_{eo},11}^*(s) = B(s)$, d.h. alle $\tilde{n} - 1 = \tilde{n} - \tilde{r} = \tilde{m}$ Pole des Beobachters werden auf die \tilde{m} Nullstellen des Polynoms $B(\cdot)$ der Strecke gelegt. Die Wunschpole des zustandsgeregelten Systems lauten $A_{Reg}^*(s) = (s + 5)^4$. Es ergibt sich ein Verhalten des Ausgangssignals $y(\cdot)$ gemäß der Gleichung (2.350), wobei für $\tilde{r} = 1$ $A_{EA,red}(\rho) = 1$ gilt. Dies ist auf Gleichung (2.334) zurückzuführen, bei der das Reglerpolynom $A_{EA}(\rho) = B(\rho)$ ($\tilde{r} = 1$) einer Pol-Nullstellenkürzung unterliegt. Folglich zeigt das Reglerpolynom $A_{EA}(\cdot)$ keine Auswirkung mehr auf das Störverhalten bzw. Verhalten des Beobachters in der transienten Phase. Wie in der Simulation 2.53 oben zu erkennen ist, resultiert ein stark beruhigtes Verhalten nach Aufschaltung der Störung v bzw. zu Beginn der transienten Phase. Da durch die Zuordnung der Nullstellen $B(\cdot)$ zur Beobachterdynamik gemäß der Gleichung (2.350) keine Elimination des Nullstellenpolynoms $B(\cdot)$ in der Führungsübertragungsfunktion stattfinden soll, ist deren dynamisches Verhalten bei Sprüngen des Sollwerts \tilde{r} deutlich zu erkennen.

Dass die Grundform des Referenzmodellreglers mit freier Polverschiebbarkeit der Zustandsregler mit Beobachter aus Kapitel 2.2.6.3 ist, zeigt die wiederholte Simulation 2.53 oben mit einem Beobachter der Ordnung $\tilde{n}_{B_{eo}} = \tilde{n}$ statt $\tilde{n}_{B_{eo}} = \tilde{n} - 1$: $A_{B_{eo},9}(\rho) = B(s)(s + 7)$. Der Verlauf entspricht exakt der Simulation 2.37, womit auch das Theorem 2.16 rückwirkend bestätigt ist: eine Kürzung von Nullstellen in der Störübertragungsfunktion bzw. transienten Phase des Beobachters führt bei einem Zustandsregler mit Beobachter zu einem beruhigten Regelverhalten. Im Unterschied zur Simulation mit einem Beobachter der Ordnung $\tilde{n}_{B_{eo}} = \tilde{n} - 1$, bei dem alle Wurzeln des Reglerpolynoms $A_{EA}(\cdot)$ wegen der Pol-Nullstellenkompensation $\tilde{n}_{EA} - \tilde{m} = \tilde{n}_{B_{eo}} - \tilde{m} = \tilde{n} - 1 - \tilde{m} = 0$ eliminiert werden, verbleibt im Falle des Beobachters der Ordnung $\tilde{n}_{B_{eo}} = \tilde{n}$ ein reduziertes Reglerpolynom $A_{EA,red}(\cdot)$ der Ordnung $\tilde{n}_{EA} - \tilde{m} = \tilde{n}_{B_{eo}} - \tilde{m} = \tilde{n} - \tilde{m} = 1$, d.h. das Nullstellenpolynom der Stör- bzw. Anfangswertübertragungsfunktion wird zwar nicht wie im allgemeinen Fall ohne Kompensation des Nullstellenpolynoms um die Ordnung $\tilde{n}_{B_{eo}} = \tilde{n}$ des Reglerpolynoms erhöht, jedoch um die Ordnung $\tilde{n} - \tilde{m} = 1$. Diese, wenn auch sehr gering erhöhte Dynamik des Beobachters \tilde{n} -ter Ordnung gegenüber dem der Ordnung $\tilde{n} - 1$ wird in den Simulationen der Abbildung 2.53 deutlich. Des Weiteren zeigt der Regler basierend auf dem Beobachter geringerer Ordnung ein schnelleres Einschwingen.

Bei der Zuordnung der Nullstellen $B(\cdot)$ zur Reglerdynamik gemäß des Wunschpolynoms (2.336) resultiert neben eines beruhigten Störübertragungsverhaltens bzw. einer beruhigten transienten Phase des Beobachters auch eine Kürzung der Nullstellen in der Führungsübertragungsfunktion, was ein sehr gutes Reglerverhalten ($PT_{\tilde{r}}$ -Verhalten) in der Simulation 2.53 unten zur Folge hat. Die Beobachterdynamik wird für den Beobachter \tilde{n} -ter bzw. $(\tilde{n} - 1)$ -ter Ordnung mit $A_{B_{eo},4}(s) = (s + 7)^4$ bzw. $A_{B_{eo},10}(s) = (s + 7)^3$ gewählt, die Reglerdynamik mit $A_{Reg,2}(s) = B(s)(s + 5)$. Die Gleichheit zwischen dieser und der Simulation 2.38 unten bestätigt die Anmerkung 2.12 und somit den Zusammenhang zwischen dem Referenzmodellregler und dem Zustandsregler mit Beobachter: das Ausgangssignal $y(\cdot)$ folgt in beiden Fällen der Gleichung (2.338), bei der das Nullstellenpolynom auch in der Führungsübertragungsfunktion gekürzt wird. Aus diesem Grund ist im zweiten Sprung des Sollsignals, nachdem die Anfangswerte abgeklungen sind (transiente Phase), in den entsprechenden Simulationen ein $PT_{\tilde{r}}$ -Verhalten mit $\tilde{r} = 1$ zu erkennen – das Beispielsystem der Ordnung $\tilde{n} = 4$ mit Nullstellenpolynom der Ordnung $\tilde{m} = 3$ verhält sich wie das Referenzmodellregler mit Beobachter.

renzmodell $y^*(t) = 5/(s+5) r'(t)$ der Ordnung $\tilde{n} = \tilde{r} = 1$. Es findet eine Ordnungsreduktion statt und die Beobachterdynamik ist im Führungsverhalten nicht sichtbar.

2.2.6.8 Referenzmodellregelung mit internem Modell

In Abbildung 2.53 ist zu erkennen, dass auf Grund der konstanten Störung v ein Regelfehler e im Führungsverhalten verbleibt. Wie bereits in Kapitel 2.2.6.4 für den Zustandsregler dargestellt, soll nun für den Referenzmodellregler mit freier Polverschiebbarkeit die Störung durch ein internes Modell kompensiert werden. Nachdem es sich laut Kapitel 2.2.6.5 beim Referenzmodellregler mit freier Polverschiebbarkeit um einen Zustandsregler mit Beobachter handelt, ist das interne Modell zur Kompensation konstanter Störungen sowie das Sollsignal $r(\cdot)$ ebenfalls am Ausgang der Strecke gemäß Abbildung 2.42 bzw. Gleichung (2.237) einzubringen. Mit der Ein- Ausgangsdarstellung des Zustandsreglers in Form des Referenzmodellreglers (siehe Abbildung 2.52) wäre eine Verlegung des internen Modells an den Ausgang nicht notwendig, wenn eine parameterabhängige Skalierung des Sollsignals $r(\cdot)$ vorgenommen wird. Jedoch ist die stationäre Genauigkeit dann abhängig von der Genauigkeit der Parameter, was besonders im adaptiven Fall (siehe Kapitel 5 bzw. 5.2) schnell zu Abweichungen vom stationären Endwert führt.

Im Folgenden soll die Erstellung der Ein- Ausgangsbeschreibung des Zustandsreglers basierend auf einem Beobachter gemäß des Kapitels 2.2.6.5 für den Fall des zusätzlichen internen Störmodells sowie der angepassten Einkopplung des Sollsignals $r(\cdot)$ wiederholt werden. Die Operator Darstellung des Zustandsbeobachters (2.240) lautet gemäß Gleichung (2.247):

$$\rho \hat{\underline{x}}_{IM}(t) = [\tilde{\mathbf{A}}_{IM} - \tilde{\underline{l}}_{IM} \tilde{\underline{c}}_{IM,v}^T] \hat{\underline{x}}_{IM}(t) + \tilde{\underline{b}}_{IM} u(t) - \tilde{\underline{g}}_{IM} r(t) + \tilde{\underline{l}}_{IM} v_{SM}(t) \quad (2.351)$$

Hieraus ergibt sich die Ein- Ausgangsbeschreibung des um das interne Modell erweiterten Beobachters:

$$\begin{aligned} \hat{\underline{x}}_{IM}(t) = & \underbrace{[\rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}_{IM} + \tilde{\underline{l}}_{IM} \tilde{\underline{c}}_{IM,v}^T]^{-1} \tilde{\underline{b}}_{IM}}_{\frac{\underline{C}_{BeoIM,u}(\rho)}{A_{BeoIM}(\rho)}} u(t) - \underbrace{[\rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}_{IM} + \tilde{\underline{l}}_{IM} \tilde{\underline{c}}_{IM,v}^T]^{-1} \tilde{\underline{g}}_{IM}}_{\frac{\underline{C}_{BeoIM,r}(\rho)}{A_{BeoIM}(\rho)}} r(t) + \dots \\ & \dots + \underbrace{[\rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}_{IM} + \tilde{\underline{l}}_{IM} \tilde{\underline{c}}_{IM,v}^T]^{-1} \tilde{\underline{l}}_{IM}}_{\frac{\underline{C}_{BeoIM,v}(\rho)}{A_{BeoIM}(\rho)}} v_{SM}(t) \end{aligned} \quad (2.352)$$

Wendet man für die Berechnung der Inversen die Kofaktormethode aus Theorem A.2 an, so lässt sich Gleichung (2.352) mit Hilfe von Polynomen bzw. Polynom-Vektoren ausdrücken:

$$A_{BeoIM}(\rho) \hat{\underline{x}}_{IM}(t) = \underline{C}_{BeoIM,u}(\rho) u(t) - \underline{C}_{BeoIM,r}(\rho) r(t) + \underline{C}_{BeoIM,v}(\rho) v_{SM}(t) \quad (2.353)$$

Hierbei gilt:

$$\underline{C}_{BeoIM,u}(\rho) = \text{adj} [\rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}_{IM} + \tilde{\underline{l}}_{IM} \tilde{\underline{c}}_{IM,v}^T] \tilde{\underline{b}}_{IM} \quad (2.354)$$

$$\underline{C}_{BeoIM,r}(\rho) = \text{adj} [\rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}_{IM} + \tilde{\underline{l}}_{IM} \tilde{\underline{c}}_{IM,v}^T] \tilde{\underline{g}}_{IM} \quad (2.355)$$

$$\underline{C}_{BeoIM,v}(\rho) = \text{adj} [\rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}_{IM} + \tilde{\underline{l}}_{IM} \tilde{\underline{c}}_{IM,v}^T] \tilde{\underline{l}}_{IM} \quad (2.356)$$

$$A_{BeoIM}(\rho) = \det [\rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}_{IM} + \tilde{\underline{l}}_{IM} \tilde{\underline{c}}_{IM,v}^T] \quad (2.357)$$

Setzt man Gleichung (2.353) in das Regelgesetz (2.241) ein

$$u(t) = -\tilde{\mathbf{k}}_{IM}^T \frac{1}{A_{BeoIM}(\rho)} (\underline{\mathbf{C}}_{BeoIM,u}(\rho) u(t) - \underline{\mathbf{C}}_{BeoIM,r}(\rho) r(t) + \underline{\mathbf{C}}_{BeoIM,v}(\rho) v_{SM}(t)), \quad (2.358)$$

ergibt sich die Ein- Ausgangsbeschreibung des Zustandsreglers basierend auf einem Beobachter und internem Modell:

$$u(t) = \frac{B'_{EA,IM}(\rho)}{A_{EA,IM}(\rho)} r(t) - \frac{B_{EA,IM}(\rho)}{A_{EA,IM}(\rho)} v_{SM}(t) \quad (2.359)$$

Die Reglerparameter des resultierenden Referenzmodellreglers mit freier Polverschiebbarkeit lauten:

$$A_{EA,IM}(\rho) = A_{BeoIM}(\rho) + \tilde{\mathbf{k}}_{IM}^T \underline{\mathbf{C}}_{BeoIM,u}(\rho) \quad (2.360)$$

$$B'_{EA,IM}(\rho) = \tilde{\mathbf{k}}_{IM}^T \underline{\mathbf{C}}_{BeoIM,r}(\rho) \quad (2.361)$$

$$B_{EA,IM}(\rho) = \tilde{\mathbf{k}}_{IM}^T \underline{\mathbf{C}}_{BeoIM,v}(\rho) \quad (2.362)$$

Wendet man das Regelgesetz (2.359) auf die um das interne Störmodell erweiterte Strecke aus Abbildung 2.42 an, folgt der Signalflussplan 2.54. Hierbei gilt für die Strecke in Operatordarstellung:

$$y(t) = \underline{\tilde{\mathbf{c}}}^T [\rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}]^{-1} \tilde{\mathbf{b}} u(t) = \frac{\underline{\tilde{\mathbf{c}}}^T \text{adj}[\rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}] \tilde{\mathbf{b}}}{\det[\rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}]} u(t) = \frac{B(\rho)}{A(\rho)} u(t) \quad (2.363)$$

$$y(t) = \underline{\tilde{\mathbf{c}}}^T [\rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}]^{-1} \tilde{\mathbf{f}} v(t) = \frac{\underline{\tilde{\mathbf{c}}}^T \text{adj}[\rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}] \tilde{\mathbf{f}}}{\det[\rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}]} v(t) = \frac{B_v(\rho)}{A(\rho)} v(t) \quad (2.364)$$

$$v_{SM}(t) = \underline{\tilde{\mathbf{c}}}_{SM}^T [\rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}_{SM}]^{-1} \tilde{\mathbf{b}}_{SM} e(t) = \frac{\underline{\tilde{\mathbf{c}}}_{SM}^T \text{adj}[\rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}_{SM}] \tilde{\mathbf{b}}_{SM}}{\det[\rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}_{SM}]} e(t) = \frac{B_{SM}(\rho)}{A_{SM}(\rho)} e(t) \quad (2.365)$$

Mit Hilfe des Signalflussplanes 2.54 lässt sich die Führungs- und Störübertragungsfunktion bzgl. des Eingangssignals $r(\cdot)$ und $v(\cdot)$ mit den entsprechenden Ausgangssignalen $y_r(\cdot)$ und

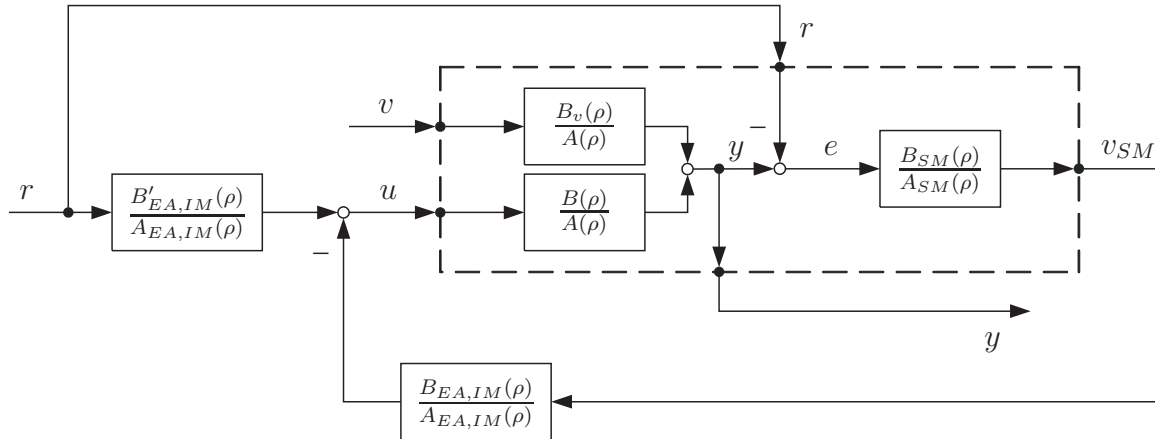


Abbildung 2.54: Signalflussplan eines Referenzmodellreglers mit internem Modell, d.h. eines zustandsgeregelten Systems mit internem Modell in Ein- Ausgangsdarstellung basierend auf einem Zustandsbeobachter

$y_v(\cdot)$ aufstellen:

$$y(t) = \frac{B'_{EA,IM}(\rho) B(\rho) A_{SM}(\rho) + B_{EA,IM}(\rho) B(\rho) B_{SM}(\rho)}{A_{EA,IM}(\rho) \underbrace{A(\rho) A_{SM}(\rho)}_{A_{IM}(\rho)} + B_{EA,IM}(\rho) \underbrace{B(\rho) B_{SM}(\rho)}_{B_{IM}(\rho)}} r(t) + \dots \quad (2.366)$$

$$\dots + \frac{A_{EA,IM}(\rho) B_v(\rho) A_{SM}(\rho)}{A_{EA,IM}(\rho) \underbrace{A(\rho) A_{SM}(\rho)}_{A_{IM}(\rho)} + B_{EA,IM}(\rho) \underbrace{B(\rho) B_{SM}(\rho)}_{B_{IM}(\rho)}} v(t) \quad (2.367)$$

$$= \underbrace{\frac{(B'_{EA,IM}(\rho) A_{SM}(\rho) + B_{EA,IM}(\rho) B_{SM}(\rho)) B(\rho)}{A_{EA,IM}(\rho) A_{IM}(\rho) + B_{EA,IM}(\rho) B_{IM}(\rho)}}_{y_r(t)} r(t) + \dots \quad (2.368)$$

$$\dots + \underbrace{\frac{A_{EA,IM}(\rho) B_v(\rho) A_{SM}(\rho)}{A_{EA,IM}(\rho) A_{IM}(\rho) + B_{EA,IM}(\rho) B_{IM}(\rho)}}_{y_v(t)} v(t) \quad (2.369)$$

Hiermit wird zunächst deutlich, dass der die Stabilität bestimmende Nenner der Übertragungsfunktionen formell dem der Gleichung (2.269) entspricht. Die Polynome $A(\cdot)$ und $B(\cdot)$ der Strecke wurden lediglich um die Polynome des Störmodells $A_{SM}(\cdot)$ und $B_{SM}(\cdot)$ erweitert, d.h. die neuen Streckenpolynome lauten $A_{IM}(\cdot)$ und $B_{IM}(\cdot)$. Folglich gilt entsprechend der Umformung (2.270):

$$A_{EA,IM}(\rho) A_{IM}(\rho) + B_{EA,IM}(\rho) B_{IM}(\rho) = A_{BeoIM}(\rho) A_{RegIM}(\rho) \quad (2.370)$$

Diese Diophantische Gleichung bestätigt die in Kapitel 2.2.6.4 getroffenen Aussagen, speziell Gleichung (2.245). Trotz der Erweiterung der Strecke um ein Störmodell und der veränderten Einkopplung des Sollsignals $r(\cdot)$ lassen sich die Pole des geregelten Systems

beliebig beeinflussen und es kann somit stets Stabilität gewährleistet werden (vgl. Theorem 2.19). Das Führungs- und Störverhalten des Referenzmodellreglers mit freier Polverschiebbarkeit und internem Modell lautet:

$$y_r(t) = \frac{(B'_{EA,IM}(\rho) A_{SM}(\rho) + B_{EA,IM}(\rho) B_{SM}(\rho)) B(\rho)}{A_{BeoIM}^*(\rho) A_{RegIM}^*(\rho)} r(t) \quad (2.371)$$

$$y_v(t) = \frac{A_{EA,IM}(\rho) B_v(\rho) A_{SM}(\rho)}{A_{BeoIM}^*(\rho) A_{RegIM}^*(\rho)} v(t) \quad (2.372)$$

Die Gleichung (2.372) zeigt, dass gemäß des Theorems 2.17 durch das interne Modell der Zähler der Störübertragungsfunktion um den Nenner $A_{SM}(\cdot)$ des Störmodells erweitert wird (vgl. Gleichung (2.274)). Diese hinzugefügten Nullstellen „nullen“ ein Signal mit dem Nenner $A_{SM}(\cdot)$, was eine entsprechende Pol- Nullstellenkürzung zeigt. Wird somit das System mit einer durch das Störmodell (2.229) beschriebenen Störung

$$v(t) = v_{SM}(t) = \frac{B_{0,SM}^T(\rho)}{A_{SM}(\rho)} \underline{x}_{0,SM} \quad (2.373)$$

beaufschlagt, unterliegt die Störung v einer Pol- Nullstellenkürzung und wird folglich vollständig eliminiert:

$$y_v(t) = \frac{A_{EA,IM}(\rho) B_v(\rho) A_{SM}(\rho)}{A_{BeoIM}^*(\rho) A_{RegIM}^*(\rho)} \frac{B_{0,SM}^T(\rho)}{A_{SM}(\rho)} \underline{x}_{0,SM} \rightarrow 0 \quad (2.374)$$

Mit Gleichung (2.371) wird deutlich, dass durch die Veränderung des Orts der Einkopplung des Sollsignals $r(\cdot)$ das Zählerpolynom verändert wurde (vgl. Gleichung (2.274)) und somit im Zähler nicht mehr nur wie beim Referenzmodellregler mit freier Polverschiebbarkeit in Gleichung (2.276) das Nullstellenpolynom $B(\cdot)$ der Strecke erhalten bleibt. Dadurch ist der Zähler sowie das Systemverhalten gemäß des erweiterten Referenzmodellreglers in Kapitel 2.2.6.7 nicht mehr beliebig beeinflussbar. Zur näheren Untersuchung lässt sich der abweichende Teil des Zählers wie folgt umformen:

$$\begin{aligned} & B'_{EA,IM}(\rho) A_{SM}(\rho) + B_{EA,IM}(\rho) B_{SM}(\rho) \\ & \stackrel{(2.361),(2.362)}{=} \tilde{\underline{k}}_{IM}^T \underline{C}_{BeoIM,r}(\rho) A_{SM}(\rho) + \tilde{\underline{k}}_{IM}^T \underline{C}_{BeoIM,v}(\rho) B_{SM}(\rho) \\ & \stackrel{(2.352)}{=} \tilde{\underline{k}}_{IM}^T A_{BeoIM}(\rho) [\rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}_{IM} + \tilde{\underline{l}}_{IM} \tilde{\underline{c}}_{IM,v}^T]^{-1} \tilde{\underline{g}}_{IM} A_{SM}(\rho) \cdots \\ & \cdots + \tilde{\underline{k}}_{IM}^T A_{BeoIM}(\rho) [\rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}_{IM} + \tilde{\underline{l}}_{IM} \tilde{\underline{c}}_{IM,v}^T]^{-1} \tilde{\underline{l}}_{IM} \tilde{\underline{c}}_{SM}^T [\rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}_{SM}]^{-1} \tilde{\underline{b}}_{SM} A_{SM}(\rho) \end{aligned} \quad (2.375)$$

An dieser Stelle sei auf die Gleichheit

$$\frac{B_{SM}(\rho)}{A_{SM}(\rho)} = \tilde{\underline{c}}_{SM}^T [\rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}_{SM}]^{-1} \tilde{\underline{b}}_{SM} = \tilde{\underline{c}}_{IM,v}^T [\rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}_{IM}]^{-1} \tilde{\underline{g}}_{IM} \quad (2.376)$$

hingewiesen.

Beweis:

$$\begin{aligned}
 \frac{v_{SM}(\rho)}{r(\rho)} &= \tilde{\underline{c}}_{IM,v}^T [\rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}_{IM}]^{-1} \tilde{\underline{g}}_{IM} \\
 &\stackrel{(2.237)}{=} \begin{pmatrix} \tilde{\underline{0}}^T & \tilde{\underline{c}}_{SM}^T \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}} & \underline{\mathbf{0}} \\ \tilde{\underline{b}}_{SM} \tilde{\underline{c}}^T & \rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}_{SM} \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{0}} \\ \tilde{\underline{b}}_{SM} \end{pmatrix} \\
 &\stackrel{(A.7)}{=} \begin{pmatrix} \tilde{\underline{0}}^T & \tilde{\underline{c}}_{SM}^T \end{pmatrix} \begin{bmatrix} [\rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}]^{-1} & & & \\ & -[\rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}_{SM}]^{-1} \tilde{\underline{b}}_{SM} \tilde{\underline{c}}^T [\rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}]^{-1} & & \\ & & [\rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}_{SM}]^{-1} & \\ & & & [\rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}_{SM}]^{-1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{0}} \\ \tilde{\underline{b}}_{SM} \end{pmatrix} \\
 &= \tilde{\underline{c}}_{SM}^T [\rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}_{SM}]^{-1} \tilde{\underline{b}}_{SM} = \frac{v_{SM}(\rho)}{e(\rho)}
 \end{aligned}$$

■

Dieses Ergebnis verdeutlicht der Signalflussplan 2.55 der um das Störmodell erweiterten Strecke. Nachdem das Sollsignal $r(\cdot)$ weder direkt noch indirekt in die Strecke einkoppelt,

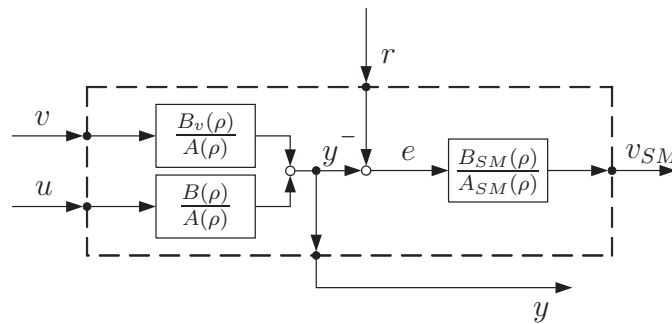


Abbildung 2.55: Signalflussplan der um ein Störmodell erweiterten Strecke gemäß Gleichung (2.237), bei dem das Sollsignal $r(\cdot)$ zwischen Strecke und internem Modell (Störmodell) einkoppelt

sondern lediglich in das Störmodell, ist das Führungsverhalten $v_{SM}(\rho)/r(\rho)$ der erweiterten Strecke gleich dem Führungsverhalten $v_{SM}(\rho)/e(\rho)$ des Störmodells. Mit der Bezie-

hung (2.376) lässt sich nun Gleichung (2.375) weiter umformen:

$$\begin{aligned}
 & B'_{EA,IM}(\rho) A_{SM}(\rho) + B_{EA,IM}(\rho) B_{SM}(\rho) \\
 & \stackrel{(2.376)}{=} \underline{\tilde{k}}_{IM}^T A_{B_{eoIM}}(\rho) [\rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}_{IM} + \tilde{\mathbf{l}}_{IM} \tilde{\mathbf{c}}_{IM,v}^T]^{-1} \underline{\tilde{g}}_{IM} A_{SM}(\rho) \cdots \\
 & \cdots + \underline{\tilde{k}}_{IM}^T A_{B_{eoIM}}(\rho) [\rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}_{IM} + \tilde{\mathbf{l}}_{IM} \tilde{\mathbf{c}}_{IM,v}^T]^{-1} \tilde{\mathbf{l}}_{IM} \tilde{\mathbf{c}}_{IM,v}^T [\rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}_{IM}]^{-1} \underline{\tilde{g}}_{IM} A_{SM}(\rho) \\
 & = \underline{\tilde{k}}_{IM}^T A_{B_{eoIM}}(\rho) [\rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}_{IM} + \tilde{\mathbf{l}}_{IM} \tilde{\mathbf{c}}_{IM,v}^T]^{-1} \cdots \\
 & \quad \cdots \left[\mathbf{E} + \tilde{\mathbf{l}}_{IM} \tilde{\mathbf{c}}_{IM,v}^T [\rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}_{IM}]^{-1} \right] \underline{\tilde{g}}_{IM} A_{SM}(\rho) \\
 & = \underline{\tilde{k}}_{IM}^T A_{B_{eoIM}}(\rho) [\rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}_{IM} + \tilde{\mathbf{l}}_{IM} \tilde{\mathbf{c}}_{IM,v}^T]^{-1} \cdots \\
 & \quad \cdots \left[[\rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}_{IM}] + \tilde{\mathbf{l}}_{IM} \tilde{\mathbf{c}}_{IM,v}^T \right] [\rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}_{IM}]^{-1} \underline{\tilde{g}}_{IM} A_{SM}(\rho) \\
 & = A_{B_{eoIM}}(\rho) \underline{\tilde{k}}_{IM}^T [\rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}_{IM}]^{-1} \underline{\tilde{g}}_{IM} A_{SM}(\rho) \tag{2.377}
 \end{aligned}$$

Gleichung (2.377) enthält entsprechend des Systems (2.237) und der Gleichung (2.236), dargestellt im Signalflussplan 2.56, folgendes Ein- Ausgangsverhalten:

$$\frac{y'_{IM}(\rho)}{r(\rho)} = \underline{\tilde{k}}_{IM}^T [\rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}_{IM}]^{-1} \underline{\tilde{g}}_{IM} \tag{2.378}$$

Wie der Signalflussplan verdeutlicht, ist die enthaltene Strecke zwar über das Eingangssi-

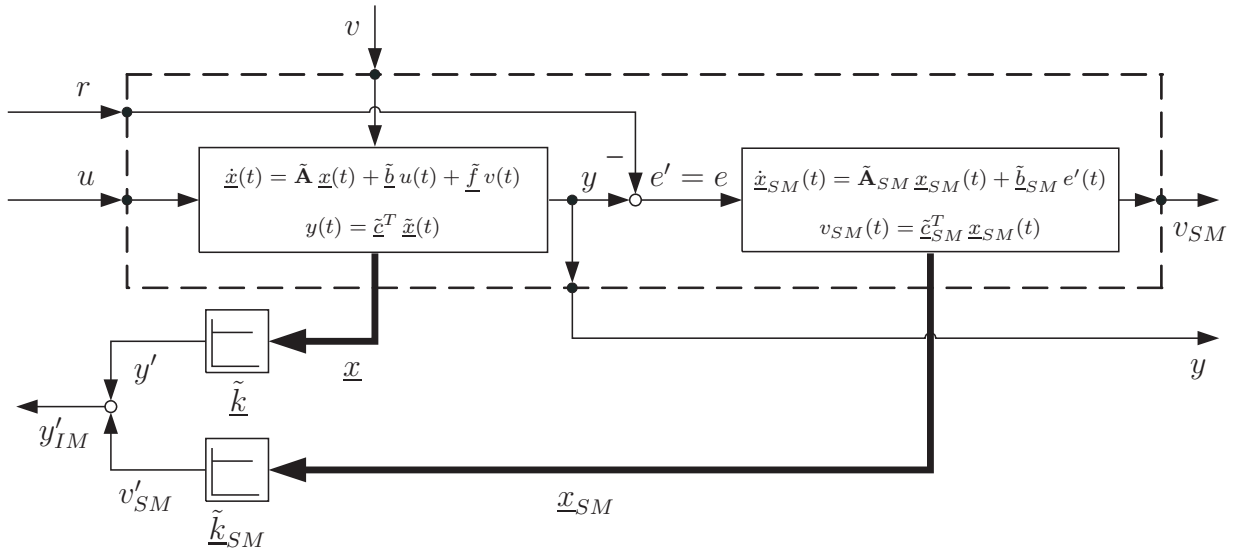


Abbildung 2.56: Signalflussplan der um ein Störmodell erweiterten Strecke gemäß Gleichung (2.237), bei dem das Sollsignal $r(\cdot)$ zwischen Strecke und internem Modell (Störmodell) einkoppelt; es sind weiter die Zustandsauskopplungen dargestellt

gnal $u(\cdot)$, nicht jedoch über das Eingangssignal $r(\cdot)$ steuerbar. Das Signal $y'(\cdot)$ liefert zum

Ein- Ausgangsverhalten $\frac{y'_{IM}(\rho)}{r(\rho)}$ daher keinen Beitrag, was in Gleichung (2.378) durch eine Pol- Nullstellenkürzung bzw. Ordnungsreduktion zum Ausdruck kommt:

$$\begin{aligned} \frac{y'_{IM}(\rho)}{r(\rho)} &= \tilde{\underline{k}}_{IM}^T [\rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}_{IM}]^{-1} \tilde{\underline{g}}_{IM} \\ &= \tilde{\underline{k}}_{SM}^T [\rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}_{SM}]^{-1} \tilde{\underline{b}}_{SM} = \frac{v'_{SM}(\rho)}{e(\rho)} = \frac{B'_{SM}(\rho)}{A_{SM}(\rho)} \end{aligned} \quad (2.379)$$

Angewandt auf Gleichung (2.377) ergibt sich für das Führungsverhalten aus Gleichung (2.371):

$$\begin{aligned} y_r(t) &= \frac{(B'_{EA,IM}(\rho) A_{SM}(\rho) + B_{EA,IM}(\rho) B_{SM}(\rho)) B(\rho)}{A_{BeoIM}^*(\rho) A_{RegIM}^*(\rho)} r(t) \\ &= \frac{A_{BeoIM}^*(\rho) B'_{SM}(\rho) B(\rho)}{A_{BeoIM}^*(\rho) A_{RegIM}^*(\rho)} r(t) = \frac{B'_{SM}(\rho) B(\rho)}{A_{RegIM}^*(\rho)} r(t) \end{aligned} \quad (2.380)$$

Ein Vergleich mit Gleichung (2.274) bzw. (2.276) des Referenzmodellreglers mit freier Polverschiebbarkeit zeigt, dass durch die Verlegung des Sollsignals $r(\cdot)$ zwischen Strecke und internem Modell eine Auswirkung auf die Zählerdynamik resultiert. Der Zähler besteht nun nicht mehr nur aus Streckennullstellen $B(\cdot)$ bzw. $B_{IM}(\cdot) = B(\cdot) B_{SM}(\cdot)$, sondern aus einem vom Auskoppelvektor $\tilde{\underline{k}}_{SM}$ abhängigen Polynom $B'_{SM}(\cdot)$, der wiederum ein Resultat der freien Polverschiebbarkeit ist. Auf Grund dieser Abhängigkeit lässt sich das Polynom $B'_{SM}(\cdot)$ nicht generell durch eine bestimmte Polvorgabe eliminieren – die freie Polverschiebbarkeit ginge verloren und folglich könnte Stabilität nicht mehr stets gewährleistet werden. Hierzu sei im Folgenden ein Sonderfall dargestellt:

Findet eine Polvorgabe unter der Bedingung $\tilde{\underline{k}}_{SM}^T = \tilde{\underline{c}}_{SM}^T$ statt, so ergibt sich für Gleichung (2.379)

$$\begin{aligned} \frac{y'_{IM}(\rho)}{r(\rho)} &= \tilde{\underline{k}}_{IM}^T [\rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}_{IM}]^{-1} \tilde{\underline{g}}_{IM} \\ &= \tilde{\underline{k}}_{SM}^T [\rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}_{SM}]^{-1} \tilde{\underline{b}}_{SM} \\ (\tilde{\underline{k}}_{IM}^T &\stackrel{!}{=} \tilde{\underline{c}}_{IM}^T) \quad \tilde{\underline{c}}_{SM}^T [\rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}_{SM}]^{-1} \tilde{\underline{b}}_{SM} = \frac{v_{SM}(\rho)}{e(\rho)} = \frac{B_{SM}(\rho)}{A_{SM}(\rho)} \end{aligned} \quad (2.381)$$

Erneut angewandt auf Gleichung (2.377) resultiert für das Führungsverhalten aus Gleichung (2.371):

$$\begin{aligned} y_r(t) &= \frac{(B'_{EA,IM}(\rho) A_{SM}(\rho) + B_{EA,IM}(\rho) B_{SM}(\rho)) B(\rho)}{A_{BeoIM}^*(\rho) A_{RegIM}^*(\rho)} r(t) \\ &= \frac{A_{BeoIM}^*(\rho) B_{SM}(\rho) B(\rho)}{A_{BeoIM}^*(\rho) A_{RegIM}^*(\rho)} r(t) \\ &= \frac{A_{BeoIM}^*(\rho) B_{IM}(\rho)}{A_{BeoIM}^*(\rho) A_{RegIM}^*(\rho)} r(t) = \frac{B_{IM}(\rho)}{A_{RegIM}^*(\rho)} r(t) \end{aligned} \quad (2.382)$$

Ein Vergleich mit Gleichung (2.274) bzw. (2.276) zeigt, dass das Führungsverhalten durch die Verlegung der Einkopplung des Sollsignals $r(\cdot)$ nun unverändert bleibt, jedoch ist die starke Bedingung $\tilde{k}_{IM}^T = \tilde{c}_{IM}^T$ nicht tolerierbar, da damit die freie Polverschiebbarkeit verloren geht und folglich Stabilität nicht mehr stets gewährleistet werden kann.

Im Umkehrschluss darf unter der Bedingung des Erhalts des gewünschten Führungsverhaltens, um mit dem Referenzmodellregler auch bei einem internen Modell ein beliebiges Verhalten vorgeben zu können, nicht jedes interne Modell mit der Sollgröße $r(\cdot)$ an den Ausgang der Strecke verlegt werden.

Beschränkt man sich auf interne Modelle der Ordnung $\tilde{n}_{SM} = 1$ ohne Durchgriff ($\tilde{r}_{SM} = 1$), so wird das Polynom mit $B'_{SM}(\rho) = const$ gemäß Gleichung (2.379) keine Dynamik aufzeigen und es wird folgende Vereinfachung möglich:

$$\begin{aligned} \frac{y'_{IM}(\rho)}{r(\rho)} &= \tilde{k}_{IM}^T [\rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}_{IM}]^{-1} \tilde{g}_{IM} = \tilde{k}_{SM}^T [\rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}_{SM}]^{-1} \tilde{b}_{SM} \\ &= \underbrace{\frac{\tilde{k}_{SM} \tilde{b}_{SM}}{\rho - \tilde{a}_{SM}}}_{A_{SM}(\rho)} = \frac{\tilde{k}_{SM} \tilde{c}_{SM} \tilde{b}_{SM}}{\tilde{c}_{SM} \underbrace{\rho - \tilde{a}_{SM}}_{A_{SM}(\rho)}} = \frac{\tilde{k}_{SM} B_{SM}(\rho)}{\tilde{c}_{SM} A_{SM}(\rho)} = \frac{v'_{SM}(\rho)}{e(\rho)} \end{aligned} \quad (2.383)$$

Angewandt auf Gleichung (2.377) ergibt sich folgende Gleichheit:

$$\begin{aligned} &B'_{EA,IM}(\rho) A_{SM}(\rho) + B_{EA,IM}(\rho) B_{SM}(\rho) \\ &= A_{BeoIM}(\rho) \tilde{k}_{IM}^T [\rho \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}_{IM}]^{-1} \tilde{g}_{IM} A_{SM}(\rho) \\ &= A_{BeoIM}(\rho) \frac{\tilde{k}_{SM}}{\tilde{c}_{SM}} B_{SM}(\rho) \end{aligned} \quad (2.384)$$

Für das Führungsverhalten aus Gleichung (2.371) folgt:

$$\begin{aligned} y_r(t) &= \frac{\tilde{k}_{SM}}{\tilde{c}_{SM}} \frac{A_{BeoIM}^*(\rho) B_{SM}(\rho) B(\rho)}{A_{BeoIM}^*(\rho) A_{RegIM}^*(\rho)} r(t) \\ &= \frac{\tilde{k}_{SM}}{\tilde{c}_{SM}} \frac{A_{BeoIM}^*(\rho) B_{IM}(\rho)}{A_{BeoIM}^*(\rho) A_{RegIM}^*(\rho)} r(t) = \frac{\tilde{k}_{SM}}{\tilde{c}_{SM}} \frac{B_{IM}(\rho)}{A_{RegIM}^*(\rho)} r(t) \end{aligned} \quad (2.385)$$

Ein erneuter Vergleich mit Gleichung (2.274) bzw. (2.276) zeigt, dass das Führungsverhalten durch die Verlegung der Einkopplung des Sollsignals $r(\cdot)$ nun bis auf einen konstanten Faktor, der durch das Störmodell erster Ordnung stationäre Genauigkeit garantiert, unverändert bleibt; freie Polverschiebbarkeit und somit Stabilität ist stets gewährleistet. Über einen Referenzmodellregler kann somit das Führungsverhalten trotz internem Modell beliebig beeinflusst werden.

Nachdem die Anordnung des internen Modells am Streckenausgang mit entsprechender Verlegung des Sollsignaleingangs notwendig wurde, um stationäre Abweichungen bzw. konstante Störungen zu kompensieren (vgl. Kapitel 2.2.6.4), ist die Verwendung eines der Strecke nachgeschaltetem Störmodells maximal erster Ordnung keine Einschränkung, da

zusätzliche Störmodelle $B_{SM1}(\rho)/A_{SM1}(\rho)$ höherer Ordnung weiterhin vor das System geschaltet werden können, ohne dass diese das Führungsverhalten beeinflussen. Somit ist lediglich der Integrator (2.214) bzw. (2.217) mit

$$\frac{B_{SM2}(\rho)}{A_{SM2}(\rho)} = \frac{1}{\rho} \quad (2.386)$$

zur Kompensation stationärer Abweichungen hinter das System zu schalten. Mit einem dem System vor- und nachgeschaltetem Störmodell folgt der Signalflussplan 2.57, mit welchem sich abschließend die Führungs- und Störübertragungsfunktion bzgl. des Eingangssignals $r(\cdot)$ und $v(\cdot)$ mit den entsprechenden Ausgangssignalen $y_r(\cdot)$ und $y_v(\cdot)$ aufstellen lässt:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{B'_{EA,IM}(\rho) B_{SM1}(\rho) B(\rho) A_{SM2}(\rho) + B_{EA,IM}(\rho) B_{SM1}(\rho) B(\rho) B_{SM2}(\rho)}{A_{EA,IM}(\rho) \underbrace{A_{SM1}(\rho) A(\rho) A_{SM2}(\rho)}_{A_{IM}(\rho)} + B_{EA,IM}(\rho) \underbrace{B_{SM1}(\rho) B(\rho) B_{SM2}(\rho)}_{B_{IM}(\rho)}} r(t) + \\ &+ \frac{A_{EA,IM}(\rho) B_v(\rho) A_{SM1}(\rho) A_{SM2}(\rho)}{A_{EA,IM}(\rho) \underbrace{A_{SM1}(\rho) A(\rho) A_{SM2}(\rho)}_{A_{IM}(\rho)} + B_{EA,IM}(\rho) \underbrace{B_{SM1}(\rho) B(\rho) B_{SM2}(\rho)}_{B_{IM}(\rho)}} v(t) \\ &= \underbrace{\frac{(B'_{EA,IM}(\rho) A_{SM2}(\rho) + B_{EA,IM}(\rho) B_{SM2}(\rho)) B_{SM1}(\rho) B(\rho)}{A_{EA,IM}(\rho) A_{IM}(\rho) + B_{EA,IM}(\rho) B_{IM}(\rho)}}_{y_r(t)} r(t) + \end{aligned} \quad (2.387)$$

$$+ \underbrace{\frac{A_{EA,IM}(\rho) B_v(\rho) A_{SM1}(\rho) A_{SM2}(\rho)}{A_{EA,IM}(\rho) A_{IM}(\rho) + B_{EA,IM}(\rho) B_{IM}(\rho)}}_{y_v(t)} v(t) \quad (2.388)$$

Durch Anwenden der Gleichheit (2.384) auf das Führungsverhalten (2.387) unter Berücksichtigung von $A_{SM}(\rho) = A_{SM2}(\rho)$ bzw. $B_{SM}(\rho) = B_{SM2}(\rho)$ folgt:

$$\begin{aligned} y_r(t) &= \frac{\tilde{k}_{0,SM2}}{\tilde{c}_{0,SM2}} \frac{A^*_{BeoIM}(\rho) \overbrace{B_{SM1}(\rho) B(\rho) B_{SM2}(\rho)}^{B_{IM}(\rho)}}{A^*_{BeoIM}(\rho) A^*_{RegIM}(\rho)} r(t) \\ &= \frac{\tilde{k}_{0,SM2}}{\tilde{c}_{0,SM2}} \frac{A^*_{BeoIM}(\rho) B_{IM}(\rho)}{A^*_{BeoIM}(\rho) A^*_{RegIM}(\rho)} r(t) = \frac{\tilde{k}_{0,SM2}}{\tilde{c}_{0,SM2}} \frac{B_{IM}(\rho)}{A^*_{RegIM}(\rho)} r(t) \end{aligned} \quad (2.389)$$

Der Vergleich mit Gleichung (2.385) zeigt wie erwartet, dass das Einbringen eines weiteren Störmodells vor die Strecke das Führungsverhalten bzw. die Übertragungsfunktion strukturell nicht beeinflusst. Es wird lediglich die Strecke um das Störmodell erweitert, was die Ordnung der Strecke und somit die des Reglers erhöht. Die freie Polverschiebbarkeit bleibt erhalten. Das Nullstellenpolynom des geregelten Systems wird zwar um das des Störmodells erweitert, kann jedoch mit einem Referenzmodellregler im Falle von stabilen Nullstellen eliminiert werden.

Dass es für die Kompensation einer Störung irrelevant ist, an welcher Stelle das Störmodell eingebracht wird, verdeutlicht das Störverhalten (2.388):

$$y_v(t) = \frac{A_{EA,IM}(\rho) B_v(\rho) A_{SM1}(\rho) A_{SM2}(\rho)}{A^*_{BeoIM}(\rho) A^*_{RegIM}(\rho)} v(t) \quad (2.390)$$

Gemäß Gleichung (2.374) werden nun sowohl die Störung $v_1(\cdot)$ als auch die Störung $v_2(\cdot)$ mit

$$v_1(t) = v_{SM1}(t) = \frac{\underline{B}_{0,SM1}^T(\rho)}{A_{SM1}(\rho)} \underline{x}_{0,SM1} \quad v_2(t) = v_{SM2}(t) = \frac{\underline{B}_{0,SM2}^T(\rho)}{A_{SM2}(\rho)} \underline{x}_{0,SM2} \quad (2.391)$$

auf Grund der Pol- Nullstellenkompensation vollständig eliminiert. Mit diesen Erkenntnissen ergibt sich folgendes Theorem:

Theorem 2.27: Referenzmodellregler mit freier Polverschiebbarkeit für ein System mit internen Modellen

Um stationäre Abweichungen und Störungen hinsichtlich eines Referenzmodellreglers mit freier Polverschiebbarkeit ohne parameterabhängige Skalierung des Sollsignals $r(\cdot)$ kompensieren zu können, ist es notwendig, das Sollsignal $r(\cdot)$ und das Störmodell (Index SM2) gemäß des Signalflussplanes 2.57 an den Streckenausgang zu verlegen. Damit sich im

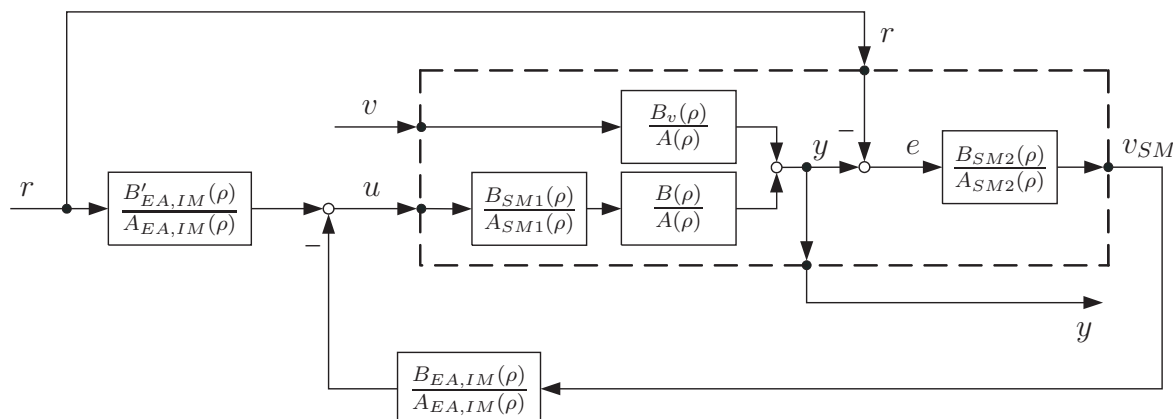


Abbildung 2.57: Signalflussplan eines Referenzmodellreglers mit internen Modellen, d.h. eines zustandsgeregelten Systems mit internen Modellen in Ein- Ausgangsdarstellung basierend auf einem Zustandsbeobachter

Führungsverhalten durch diese Verlegung keine Reglerparameter-abhängige Nullstellen ergeben, die nicht beliebig kompensiert werden können, ohne die Stabilität bzw. freie Polverschiebbarkeit zu gefährden, darf für die Ordnung des nachgeschalteten Störmodells $\max. \tilde{n}_{SM2} = 1$ gelten. Dies ist jedoch ausreichend, um stationäre Genauigkeit des Reglers gewährleisten zu können, da es hierzu lediglich des Integrators (2.214) bzw. (2.217) als internes Modell bedarf. Somit gilt für das der Strecke nachgeschaltete Störmodell zur Kompensation stationärer Abweichungen und Störungen:

$$\frac{B_{SM2}(\rho)}{A_{SM2}(\rho)} = \frac{1}{\rho} \quad (2.392)$$

Zur Kompensation weiterer beliebiger deterministischer Störungen wird ein zusätzliches Störmodell (Index SM1) der Strecke gemäß des Signalflussplanes 2.57 vorgeschaltet. Durch die Kombination von vor- und nachgeschaltetem Störmodell stellt die maximal erlaubte Ordnung \tilde{n}_{SM2} für das nachgeschaltete Störmodell keine Einschränkung der Allgemeinheit

bzgl. der Kompensation einer beliebigen deterministischen Störung da. Es ergeben sich keine Reglerparameter-abhängige Nullstellen in der Führungsübertragungsfunktion. Das gesamte dynamische Verhalten der Nullstellen der Führungsübertragungsfunktion kann daher, im Falle von stabilen Nullstellen, beliebig durch eine Pol-Nullstellenkompensation eliminiert werden.

Der entsprechende Referenzmodellregler mit freier Polverschiebbarkeit lautet:

$$u(t) = \frac{B'_{EA,IM}(\rho)}{A_{EA,IM}(\rho)} r(t) - \frac{B_{EA,IM}(\rho)}{A_{EA,IM}(\rho)} v_{SM}(t) \quad (2.393)$$

Dieser bezieht sich auf ein um die Störmodelle erweitertes System:

$$v_{SM}(t) = \left(\underbrace{\frac{B_{SM1}(\rho)}{A_{SM1}(\rho)}}_{SM1} \frac{B(\rho)}{A(\rho)} u(t) - r(t) \right) \underbrace{\frac{1}{\rho}}_{SM2} \quad (2.394)$$

$$y(t) = \frac{B_{SM1}(\rho)}{A_{SM1}(\rho)} \frac{B(\rho)}{A(\rho)} u(t) \quad (2.395)$$

Die internen Störmodelle dienen der Kompensation stationärer Abweichungen und Störungen sowie beliebiger dynamischer Störungen.

Es ergibt sich folgendes Führungs- und Störverhalten des geregelten Systems:

$$y_r(t) = \underbrace{\tilde{k}_{SM2}}_{const} \frac{B_{SM1}(\rho) B(\rho) \overbrace{1}^{B_{SM2}(\rho)}}{A_{RegIM}^*(\rho)} r(t) = \underbrace{\tilde{k}_{SM2}}_{const} \frac{B_{IM}(\rho)}{A_{RegIM}^*(\rho)} r(t) \quad (2.396)$$

$$= \underbrace{\left(\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{B_{IM}(\rho)}{A_{RegIM}^*(\rho)} \right)^{-1}}_{\tilde{k}_{SM2}} \frac{B_{IM}(\rho)}{A_{RegIM}^*(\rho)} r(t) = \underbrace{\frac{\tilde{\alpha}_{0,RegIM}^*}{\tilde{\beta}_{0,IM}}}_{\tilde{k}_{SM2}} \frac{B_{IM}(\rho)}{A_{RegIM}^*(\rho)} r(t) \quad (2.397)$$

$$y_v(t) = \frac{A_{EA,IM}(\rho) B_v(\rho) A_{SM1}(\rho) \overbrace{\rho}^{A_{SM2}(\rho)}}{A_{BeoIM}^*(\rho) A_{RegIM}^*(\rho)} v(t) \quad (2.398)$$

Für die zugehörige Diophantine Gleichung zur Bestimmung der Reglerparameter gilt:

$$A_{EA,IM}(\rho) \underbrace{A_{SM1}(\rho) A(\rho) \overbrace{\rho}^{A_{SM2}(\rho)}}_{A_{IM}(\rho)} + B_{EA,IM}(\rho) \underbrace{B_{SM1}(\rho) B(\rho) \overbrace{1}^{B_{SM2}(\rho)}}_{B_{IM}(\rho)} = \underbrace{A_{BeoIM}^*(\rho) A_{RegIM}^*(\rho)}_{A_{RK,IM}^*(\rho)} \quad (2.399)$$

Die Reglerparameter des verbleibenden Polynoms $B'_{EA,IM}(\cdot)$ müssen nicht gemäß Gleichung (2.361) berechnet werden, sondern es kann hierfür Gleichung (2.384) Anwendung

finden ($A_{SM}(\rho) = A_{SM2}(\rho) = \rho$, $B_{SM}(\rho) = B_{SM2}(\rho) = 1$, $\tilde{c}_{SM} = \tilde{c}_{SM2} = 1$):

$$B'_{EA,IM}(\rho) = \frac{A_{BeoIM}^*(\rho) \frac{\tilde{k}_{SM2}}{\tilde{c}_{SM2}} B_{SM2} - B_{EA,IM}(\rho) B_{SM2}}{A_{SM2}} \quad (2.400)$$

$$= \frac{A_{BeoIM}^*(\rho) \tilde{k}_{SM2} - B_{EA,IM}(\rho)}{\rho} \quad (2.401)$$

Um das Reglerpolynom $B'_{EA,IM}(\cdot)$ bestimmen zu können, muss der Rückführkoeffizient \tilde{k}_{SM2} nicht explizit berechnet werden, sondern ergibt sich aus obiger Polynomdivision (2.401). Da diese keinen Rest ergeben darf, gilt:

$$\tilde{k}_{SM2} = \frac{\tilde{\beta}_{0,(EA,IM)}}{\tilde{\alpha}_{0,BeoIM}^*} \quad (2.402)$$

Nachdem das Störmodell SM2 eine stationäre Genauigkeit von $y_\infty = r_\infty$ erzwingt, kann die Berechnung des Rückführkoeffizienten \tilde{k}_{SM2} alternativ mit Gleichung (2.396) durchgeführt werden:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t)}{r(t)} = 1 = \tilde{k}_{SM2} \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{B_{IM}(\rho)}{A_{RegIM}^*(\rho)} \quad (2.403)$$

$$\tilde{k}_{SM2} = \left(\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{B_{IM}(\rho)}{A_{RegIM}^*(\rho)} \right)^{-1} = \frac{\tilde{\alpha}_{0,RegIM}^*}{\tilde{\beta}_{0,IM}} \quad (2.404)$$

Das Störverhalten $y_v(\cdot)$ in Gleichung (2.398) zeigt, dass eine konstante Störung gemäß des Störmodells (2.217) / (2.220) mit

$$v(t) = v_{SM2}(t) = \frac{\rho}{\rho} x_{I,0} \quad \circlearrowleft \mathcal{L} \bullet \quad v(s) = v_{SM2}(s) = \frac{x_{I,0}}{s} \quad (2.405)$$

und eine beliebige deterministische Störung gemäß des Störmodells (2.229) / (2.232)

$$v(t) = v_{SM1}(t) = \frac{B_{0,SM1}^T(\rho)}{A_{SM1}(\rho)} \underline{x}_0 \quad \circlearrowleft \mathcal{L} \bullet \quad v(s) = v_{SM1}(s) = \frac{B_{0,SM1}^T(s)}{A_{SM1}(s)} \frac{\underline{x}_0}{s} \quad (2.406)$$

durch das interne Modell kompensiert wird.

Nachdem die Störmodelle gemäß Theorem 2.27 derart in den Regelkreis eingebracht wurden, dass in der Führungsübertragungsfunktion keine Reglerparameter-abhängigen Nullstellen entstehen, sondern lediglich Systemnullstellen über $B(\cdot)$ sowie Störmodellnullstellen über $B_{SM1}(\cdot)$, können diese mit Hilfe des in Kapitel 2.2.6.7 vorgestellten erweiterten Referenzmodellreglers eliminiert und durch beliebige Nullstellen ersetzt werden. Zum Einbringen neuer Nullstellen kann, wie auf Seite 135 dargestellt, eine Filterung des Eingangssignals $\tilde{r}(\cdot)$ mit

$$F_{F,i}(s) = \frac{B_i^*(s)}{A_i^*(s)}, \quad \tilde{n}_i \geq \tilde{m}_i \quad (2.407)$$

stattfinden, wobei sich die Ordnungserhöhung mit der entsprechenden Veränderung der Dynamik nur auf das Führungsverhalten und nicht auf das Störverhalten auswirkt. Soll

sich das zusätzliche System $1/A_i(s)$ hingegen auch auf das Störverhalten auswirken, ist das Wunschnennerpolynom $A_{RK,IM}^*(\cdot)$ gemäß Gleichung (2.315) um $A_i^*(\cdot)$ der Ordnung

$$\tilde{n}_i^* = i \geq \tilde{m}_i^* \quad (2.408)$$

zu erweitern:

$$A_{RK,IM}^*(\rho) = A_{BeoIM}^*(\rho) A_{RegIM}^*(\rho) A_i^*(\rho) \quad (2.409)$$

Das Zählerpolynom $B_i^*(\cdot)$ mit der gewünschten Ordnung \tilde{m}_i^* muss dann zur Gewährung der Kausalität in den geschlossenen Regelkreis verschoben werden, wie es der Signalflussplan 2.58 verdeutlicht.

Theorem 2.28: Erweiterter Referenzmodellregler für ein System mit internen Modellen

Durch den um $B_i^*(\cdot)$ erweiterten Referenzmodellregler mit freier Polverschiebbarkeit aus Theorem 2.27

$$\frac{B_{IM}(\rho)}{B_i^*(\rho)} u(t) = \frac{B_{SM1}(\rho) B(\rho)}{B_i^*(\rho)} u(t) = \frac{B'_{EA,IM}(\rho)}{A_{EAred,IM}(\rho)} r(t) - \frac{B_{EA,IM}(\rho)}{A_{EAred,IM}(\rho)} v_{SM}(t) \quad (2.410)$$

ist die gesamte Systemdynamik der um die Störmodelle und $B_i^*(\cdot)$ erweiterten Strecke

$$v_{SM}(t) = \left(\frac{\overbrace{B_{SM1}(\rho) B(\rho)}^{B_{IM}(\rho)}}{A_{SM1}(\rho) A(\rho)} \frac{1}{B_i^*(\rho)} u(t) - r(t) \right) \frac{B_{SM2}}{A_{SM2}}, \quad \frac{B_{SM2}}{A_{SM2}} = \frac{1}{\rho} \quad (2.411)$$

$$y(t) = \frac{B_{SM1}(\rho) B(\rho)}{A_{SM1}(\rho) A(\rho)} u(t) \quad (2.412)$$

im Führungsverhalten beliebig zu verändern. Die internen Störmodelle dienen hierbei der Kompensation stationärer Abweichungen und Störungen (SM2) sowie beliebiger dynamischer Störungen (SM1). Auf Grund der Verlegung des Sollsignals $r(\cdot)$ und des Störmodells SM2 gemäß des Signalflussplans 2.58 an den Streckenausgang ist keine parameterabhängige Skalierung des Sollsignals $r(\cdot)$ (im adaptiven Fall) notwendig, um stationäre Genauigkeit zu erreichen.

Da mit den Wunschnennern

$$A_{RK,IM}^*(\rho) = A_{BeoIM}^*(\rho) \underbrace{A_{RegIM,red}^*(\rho) B_{IM}(\rho)}_{A_{RegIM}^*(\rho)} A_i^*(\rho) \quad (2.413)$$

$$= A_{RKred,IM}^*(\rho) B_{IM}(\rho) \quad (2.414)$$

$$B_{RK,IM}^*(\rho) = \overbrace{\tilde{k}_{SM2}}^{const} A_{BeoIM}^*(\rho) B_{IM}(\rho) B_i^*(\rho) \frac{1}{\beta_{0,i}^*} \quad (2.415)$$

Die Reglerpolynome $A_{EAred,IM}(\cdot)$ und $B_{EA,IM}(\cdot)$ lassen sich gemäß der Polynomdivision (2.327)

$$\frac{A_{RKred,IM}^*(\rho)}{A_{IM}(\rho)} = \frac{A_{BeoIM}^*(\rho) A_{RegIM,red}^*(\rho) A_i^*(\rho)}{A_{IM}(\rho)} = A_{EAred,IM}(\rho) + \frac{B_{EA,IM}(\rho)}{A_{IM}(\rho)} \quad (2.422)$$

oder Diophantinen Gleichung (2.399) bestimmen. Für das Reglerpolynom $B'_{EA,IM}(\cdot)$ gilt:

$$B'_{EA,IM}(\rho) = \frac{A_{BeoIM}^*(\rho) \tilde{k}_{SM2} - B_{EA,IM}(\rho)}{\rho} \quad (2.423)$$

Nachdem das Störmodell SM2 eine stationäre Genauigkeit von $y_\infty = r_\infty$ erzwingt, kann die Berechnung des Rückführkoeffizienten \tilde{k}_{SM2} mit Gleichung (2.419) durchgeführt werden:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t)}{r(t)} = 1 = \frac{\tilde{k}_{SM2}}{\tilde{\beta}_{0,i}^*} \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{B_i^*(\rho)}{A_i^*(\rho) A_{RegIM,red}^*(\rho)} \quad (2.424)$$

$$\tilde{k}_{SM2} = \left(\frac{1}{\tilde{\beta}_{0,i}^*} \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{B_i^*(\rho)}{A_i^*(\rho) A_{RegIM,red}^*(\rho)} \right)^{-1} = \tilde{\alpha}_{0,i}^* \tilde{\alpha}_{0,RegIM,red}^* \quad (2.425)$$

Alternativ ist eine Bestimmung gemäß der Gleichung (2.402) in Theorem 2.27 möglich.

Da sich das Einbringen des Wunschpolynoms $B_i^*(\cdot)$ nur auf das Führungsverhalten auswirkt, lautet das Störverhalten entsprechend der Gleichung (2.398)

$$y_v(t) = \frac{\overbrace{A_{EAred,IM}(\rho) B_{IM}(\rho)}^{A_{EA,IM}(\rho)} B_v(\rho) A_{SM1}(\rho) \rho}{\underbrace{A_{BeoIM}^*(\rho) A_{RegIM,red}^*(\rho) B_{IM}(\rho) A_i^*(\rho)}_{A_{RegIM}^*(\rho)}} v(t) \quad (2.426)$$

$$= \frac{A_{EAred,IM}(\rho) B_v(\rho) A_{SM1}(\rho) \rho}{A_{BeoIM}^*(\rho) A_{RegIM,red}^*(\rho) A_i^*(\rho)} v(t) \quad (2.427)$$

Hiermit wird deutlich, dass eine konstante Störung

$$v(t) = v_{SM2}(t) = \frac{\rho}{\rho} x_{I,0} \quad \circlearrowleft \mathcal{L} \bullet \quad v(s) = v_{SM2}(s) = \frac{x_{I,0}}{s} \quad (2.428)$$

und eine beliebige deterministische Störung

$$v(t) = v_{SM1}(t) = \frac{B_{0,SM1}^T(\rho)}{A_{SM1}(\rho)} \underline{x}_0 \quad \circlearrowleft \mathcal{L} \bullet \quad v(s) = v_{SM1}(s) = \frac{B_{0,SM1}^T(s)}{A_{SM1}(s)} \frac{\underline{x}_0}{s} \quad (2.429)$$

durch das interne Modell gemäß Theorem 2.17 kompensiert wird.

Zu Beginn des Kapitels wurde auf die Simulation 2.53 verwiesen, bei der auf Grund einer konstanten Störung v ein Regelfehler e im Führungsverhalten verbleibt. Diese Simulation soll nun durch das interne Modell (2.392) bzw. (2.217) einer konstanten Störung der

Ordnung $\tilde{n}_{SM2} = 1$ ergänzt werden. Es wird erneut das Beispielsystem (2.82) mit Auskoppelvektor $\tilde{\underline{c}}_1$ zu Grunde gelegt. Da der Beobachter wegen des Störmodells ein um eine Ordnung erhöhtes System mit $\tilde{n}_{IM} = \tilde{n} + \tilde{n}_{SM1} + \tilde{n}_{SM2} = \tilde{n} + 1 = 5$ schätzen muss, lautet die Polvorgabe für einen Beobachter \tilde{n}_{IM} -ter Ordnung $\tilde{\underline{p}}_{BeoIM,4} = (-7 \ -7 \ -7 \ -7 \ -2)$, d.h. $A_{BeoIM,4}(s) = (s+7)^4(s+2)$; für einen Beobachter reduzierter Ordnung mit $\tilde{n}_{IM} - 1$ gilt $\tilde{\underline{p}}_{BeoIM,5} = (-7 \ -7 \ -7 \ -2)$, d.h. $A_{BeoIM,5}(s) = (s+7)^3(s+2)$. Da der Anfangszustand des internen Modells bekannt ist und somit nicht mehr stark verändert werden sollte, zeigt der zusätzliche Pol eine geringere Dynamik. Die Erweiterung um das Störmodell führt auch hinsichtlich der Polvorgabe für den Regler zu einer Erhöhung der Ordnung um $\tilde{n}_{SM2} = 1$: $A_{RegIM,2}(s) = B(s)(s+5)^2$. Das Ergebnis der Simulation ist in Abbildung 2.59 oben zu sehen. Im Unterschied zur Simulation 2.53 wird die stationäre Regelabweichung durch das interne Modell nun vollständig eliminiert. Der Tatsache, dass die Amplitude sowie die Zeitdauer der Einschwingvorgänge durch die Ordnungserhöhung ein wenig größer wird, lässt sich durch Erhöhung der Beobachter- und Reglerdynamik entgegenwirken, wie in Abbildung 2.60 gezeigt wird. Der Vergleich zwischen der Simulation 2.59 oben für den Fall des Beobachters \tilde{n}_{IM} -ter Ordnung und der Simulation 2.45 bestätigt erneut den direkten Zusammenhang zwischen Referenzmodellregler und dem Zustandsregler mit Beobachter – beide Verläufe sind identisch. Für den Fall des Beobachters $(\tilde{n}_{IM} - 1)$ -ter Ordnung ergibt sich wie erwartet ein geringeres Überschwingen. In beiden Fällen folgt das Ist-Signal $y(\cdot)$ ab dem zweiten Sollgrößensprung exakt dem Sollverlauf $r(t) = y^*(t)$ gemäß des Referenzmodells mit einem $PT_{\tilde{r}_{IM}}$ -Verhalten, wobei für $\tilde{r}_{IM} = \tilde{r} + \tilde{r}_{SM1} + \tilde{r}_{SM2} = \tilde{r} + 0 + 1 = 2$ gilt. Das Referenzmodell lautet: $y^*(t) = 25/(\rho + 5)^2 r(t)$. Es sei angemerkt, dass sich durch den Referenzmodellregler zu Gunsten der stationären Genauigkeit auf Grund der Erhöhung des Relativgrades um das des Störmodells nur noch ein Referenzmodell der minimalen Ordnung $\tilde{n}_{RK,red}^* \geq 2$ darstellen lässt.

Dass das gewählte interne Modell einer konstanten Störung nur diese kompensieren kann, zeigt die Simulation 2.59 unten: zusätzlich zu der konstanten Störung wird das System mit einer sinusförmigen Störung beaufschlagt. Wie zu erkennen ist, kann diese nicht durch das interne Modell repräsentiert werden und ist somit nicht durch das geregelte System zu kompensieren.

Um auch diese sinusförmige Störung im Führungsverhalten eliminieren zu können, bedarf es eines weiteren internen Modells. Gemäß der Gleichung (2.210) muss dieses wie folgt lauten:

$$\frac{B_{SM1}(\rho)}{A_{SM1}(\rho)} = \frac{1}{\rho^2 + \omega_0^2} \quad (2.430)$$

Hiermit wird die Ordnung und der Relativgrad weiter um $\tilde{n}_{SM1} = 2$ bzw. $\tilde{r}_{SM1} = 2$ auf $\tilde{n}_{IM} = 7$ bzw. $\tilde{r}_{IM} = 4$ erhöht. Nachdem im Vergleich mit dem Referenzmodellregler ohne internen Modell mit $\tilde{n} = 4$ die Ordnung auf $\tilde{n}_{IM} = 7$ annähernd verdoppelt wurde, muss zum Erhalt der gewünschten Zeitkonstanten die Dynamik des Reglers sowie Beobachters erhöht werden. Daher lautet nun die Polvorgabe für den Beobachter \tilde{n}_{IM} -ter Ordnung $\tilde{\underline{p}}_{BeoIM,6} = (-14 \ -14 \ -14 \ -14 \ -14 \ -14 \ -2)$ und für den Beobachter $(\tilde{n}_{IM} - 1)$ -ter Ordnung $\tilde{\underline{p}}_{BeoIM,7} = (-14 \ -14 \ -14 \ -14 \ -14 \ -2)$, womit $A_{BeoIM,6}(s) = (s+14)^6(s+2)$ bzw. $A_{BeoIM,7}(s) = (s+14)^5(s+2)$ gilt. Das entsprechende Reglerpolynom lautet: $A_{RegIM,3}(s) = B(s)(s+10)^4$. Die Simulation 2.60 verdeutlicht, dass sowohl die

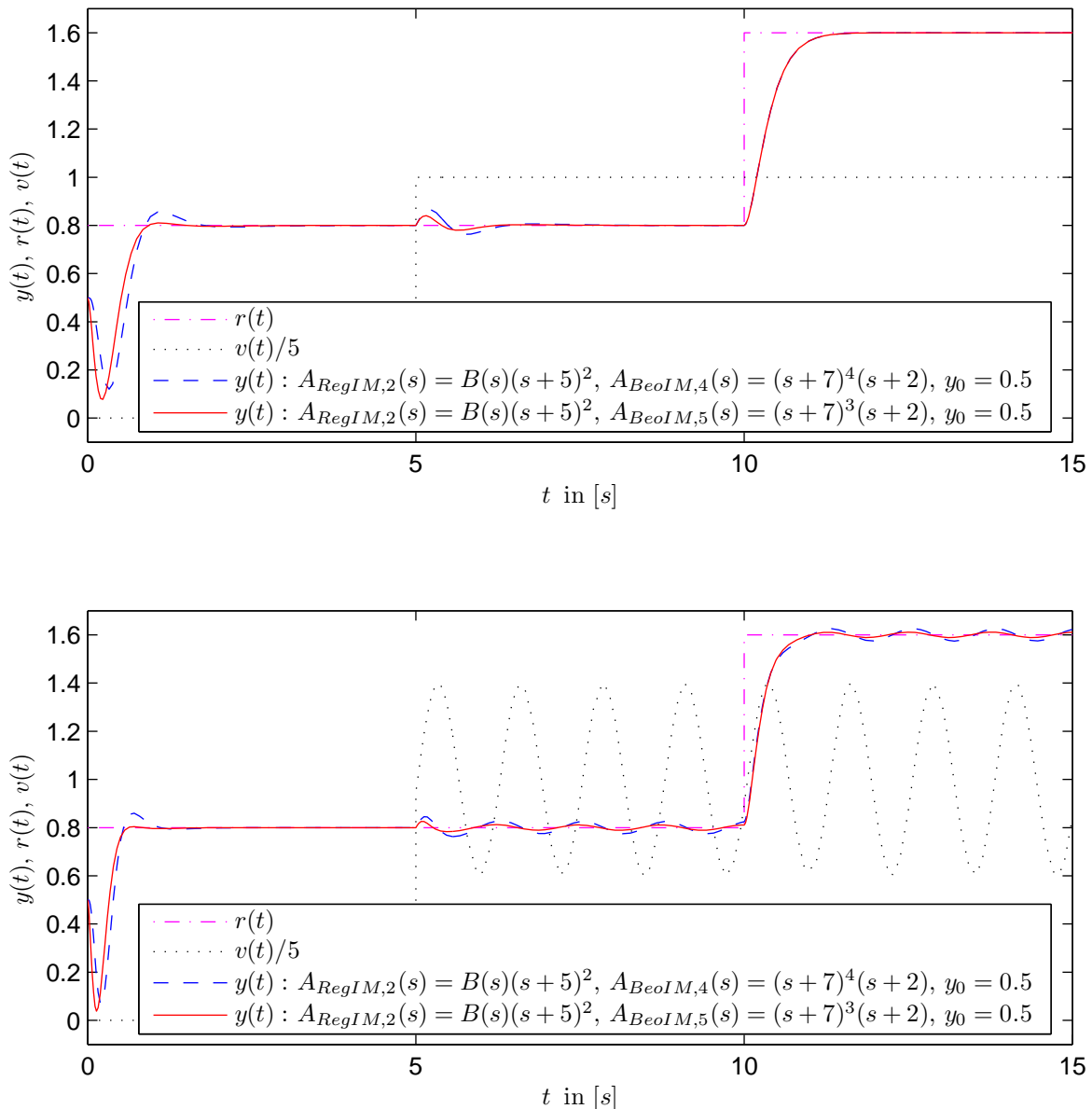


Abbildung 2.59: Referenzmodellregler mit freier Polverschiebbarkeit und internem Modell unter Störeinwirkung $v(t)$ am Beispiel des Systems (2.82) mit Auskoppelvektor \bar{c}_1 , d.h. Nullstellenpolynom $B(\cdot)$; das interne Modell dient der Kompensation von konstanten Störungen; die Ordnung des Systems wird um die des Störmodells erweitert; es findet ein Beobachter der Ordnung $\tilde{n}_{BeoIM} = \tilde{n}$ als auch einer der reduzierten Ordnung $\tilde{n}_{BeoIM} = \tilde{n} - 1$ Anwendung; **oben:** der Beobachter besitzt seine Pole bei $\tilde{p}_{BeoIM,4} = (-7 \ -7 \ -7 \ -7 \ -2)$ bzw. $\tilde{p}_{BeoIM,5} = (-7 \ -7 \ -7 \ -2)$; die Pole des zustandsregulierten Systems liegen bei $\tilde{p}_{RegIM,2} = (-5 \ -5 \ \tilde{q}^T)$; auf Grund des internen Modells (I-Anteil) verbleibt keine stationäre Abweichung im Führungsverhalten bei präsenter konstanter Störung; **unten:** eine zusätzliche sinusförmige Störung kann durch dieses interne Modell (I-Anteil) nicht kompensiert werden – es zeigt sich eine sinusförmige Abweichung zwischen Ist- und Sollsignal

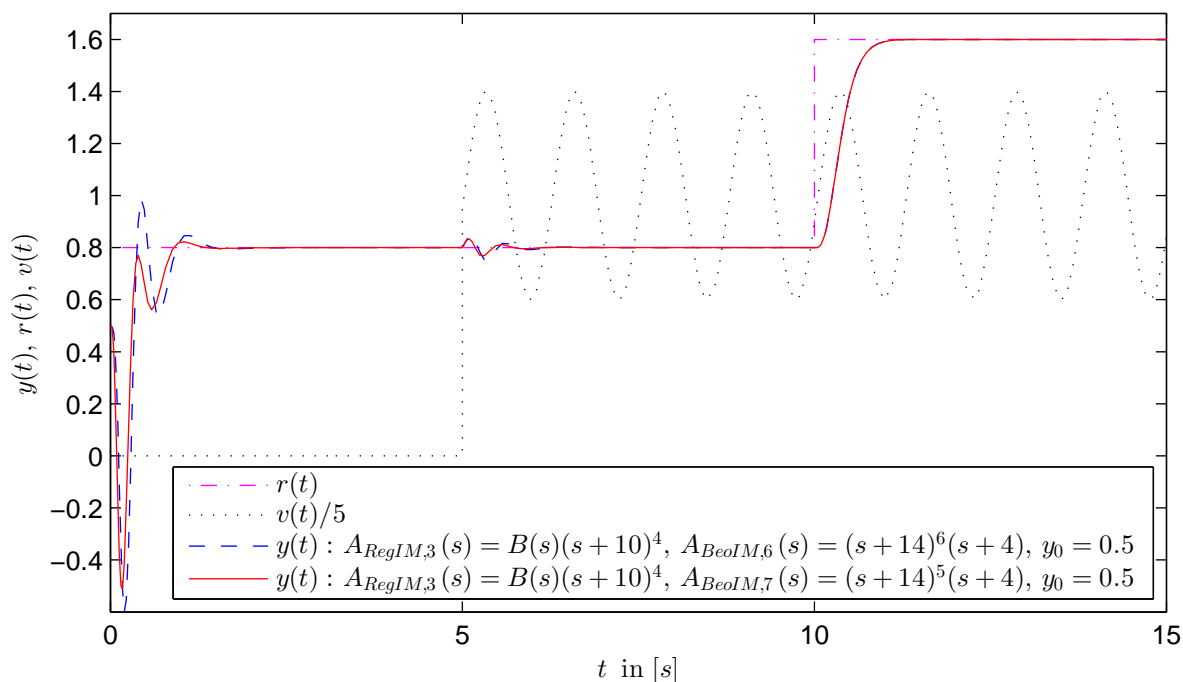


Abbildung 2.60: Referenzmodellregler mit freier Polverschiebbarkeit und internem Modell unter Störeinwirkung $v(t)$ am Beispiel des Systems (2.82) mit Auskoppelvektor \bar{c}_1 , d.h. Nullstellenpolynom $B(\cdot)$; es findet ein Beobachter der Ordnung $\tilde{n}_{BeoIM} = \tilde{n}$ als auch einer der reduzierten Ordnung $\tilde{n}_{BeoIM} = \tilde{n} - 1$ Anwendung; die Ordnung des Systems wird um die der Störmodelle (konstante und sinusförmige Störung) erweitert: der Beobachter höherer Dynamik besitzt daher seine Pole bei $\tilde{p}_{BeoIM,6} = (-14 \ -14 \ -14 \ -14 \ -14 \ -14 \ -4)$ bzw. $\tilde{p}_{BeoIM,7} = (-14 \ -14 \ -14 \ -14 \ -14 \ -4)$; die Pole des zustandsregulierten Systems liegen bei $\tilde{p}_{RegIM,3} = (-10 \ -10 \ -10 \ -10 \ \tilde{q}^T)$; das erweiterte interne Modell ermöglicht nun auch die Kompensation der sinusförmigen Störung, womit im Führungsverhalten kein Regelfehler mehr verbleibt

konstante als auch die sinusförmige Störung vollständig eliminiert wird. Das Ist-Signal $y(\cdot)$ folgt nach den transienten Vorgängen exakt dem Sollsignal des Referenzmodells $y^*(t) = 10000/(\rho + 10)^4 r(t)$.

Im folgenden Kapitel sollen nun die Erkenntnisse auf einen zeitdiskreten Referenzmodellregler übertragen und die entstehenden Probleme beleuchtet werden.

2.3 Zeitdiskrete Systeme und Regler

2.3.1 Zeitdiskretisierung

Reale Anlagen besitzen zeitkontinuierliche Signale, weshalb im vorigen Kapitel zeitkontinuierliche Systembeschreibungen untersucht und hierfür zeitkontinuierliche Regler entwickelt wurden. Wie in Kapitel 2.1 dargestellt, kommen annähernd nur noch digitale Regler zum Einsatz. Dementsprechend ist der in Kapitel 5 zu entwickelnde adaptive Regler mit integrierter Parameterschätzung digital umzusetzen.

Bei einer digitalen Implementierung des Reglers kann lediglich im Abstand der Abtastzeit h in das System eingegriffen werden. Man spricht von einem zeitdiskreten Regler. Um Stabilität des Gesamtsystems zu gewährleisten, muss die reale zeitkontinuierliche Strecke für die Reglerauslegung zeitdiskret modelliert werden.

Das Schema in Abbildung 2.61 verdeutlicht das zeitdiskrete Verhalten des Reglers im Zusammenspiel mit der zeitkontinuierlichen Strecke. Das kontinuierliche Ausgangssignal $y(\cdot)$

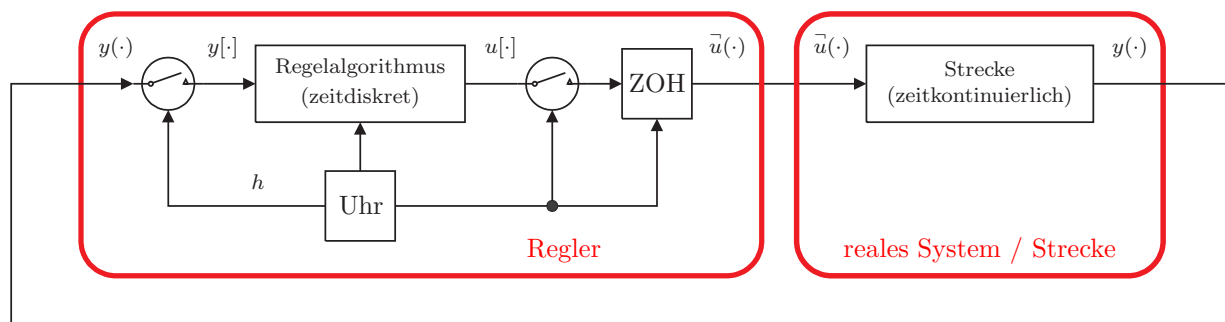


Abbildung 2.61: Zeitdiskretes Verhalten des digitalen Reglers

wird am Reglereingang im Abstand h abgetastet, so dass dem digitalen Regler zum Abtastzeitpunkt die diskreten Anlagendaten $y[k]$ vorliegen. Es folgt die Abarbeitung des Regelalgorithmus, um den diskreten Reglerausgang bzw. diskreten Stellgrößen-Wert $u[k + 1]$ für den nächsten Abtastschritt zu berechnen. Die Ausgangsfolge $\{u[k]\}$ mit $k \in \mathbb{N}$ wird durch ein Halteglied 0-ter Ordnung (HG0, engl. ZOH: Zero-Order-Hold) in eine stückweise konstante Stufenfunktion $\bar{u}(\cdot)$ umgewandelt und der realen Anlage aufgeschaltet. Die Werte dieses kontinuierlichen Signals $\bar{u}(\cdot)$ werden in einem Zeitabstand von h aktualisiert und innerhalb der Zeit h durch das Halteglied konstant gehalten.

Für einen stabilen Reglerentwurf ist es nun notwendig, eine zeitdiskrete Streckenbeschreibung der Anlage zu entwickeln. Das mathematische Vorgehen der ZOH-Diskretisierung eines zeitkontinuierlichen Modells in Zustandsdarstellung spiegelt das aus Abbildung 2.61 abgeleitete Schema in Abbildung 2.62 wider. Aus dem zeitdiskreten Stellsignal $u[\cdot]$ des Reglers wird mit Hilfe eines Halteglieds 0-ter Ordnung ein zeitkontinuierliches Signal in Form einer Stufenfunktion $\bar{u}(\cdot)$

$$\bar{u}(t) = u(t_k) = u[k] \quad \text{für} \quad t_k \leq t < t_{k+1}, \quad k \in \mathbb{N} \quad (2.431)$$

erzeugt. Nachdem eine Wertänderung dieses zeitkontinuierlichen Signals nur in einem Zeitabstand von h möglich ist, ergibt sich ein unterschiedliches Verhalten der Strecke bei Verwendung eines zeitkontinuierlichen bzw. zeitdiskreten Reglers. Nur mit schneller Abtastung $1/h$ findet eine Approximation des Verhaltens beider Regler statt, wenn die Abtastung im Streckenverhalten nicht berücksichtigt wird. Bei schnellen Reglern müsste die Abtastung annähernd unendlich schnell sein, um bei der Reglerauslegung Stabilität zu gewährleisten. Daher ist es zwingend notwendig, die Abtastung sowie das Halteglied in der Streckenmodellierung zu berücksichtigen.

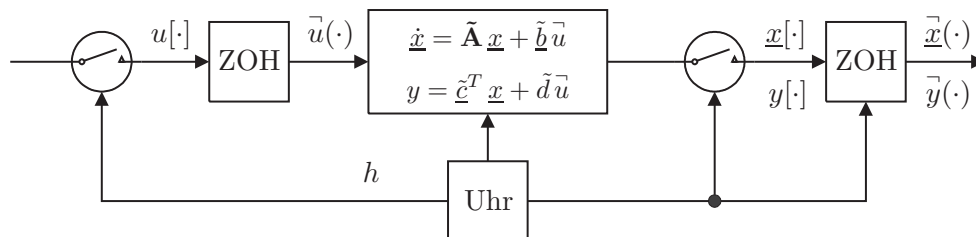


Abbildung 2.62: Schematische Darstellung der ZOH-Äquivalenzmethode

Mit dem stufenförmigen Eingangssignal $\vec{u}(\cdot)$ lässt sich die allgemeine Lösungsformel für zeitkontinuierliche SISO-Systeme gemäß Gleichung (2.14) aufstellen, wobei für den Anfangszeitpunkt $t_0 = t_k$ und für die Anfangswerte $\underline{x}_0 = \underline{x}(t_k)$ gesetzt wird:

$$\underline{x}(t) = e^{\tilde{\mathbf{A}}(t-t_k)} \underline{x}(t_k) + \int_{t_k}^t e^{\tilde{\mathbf{A}}(t-\tau)} \tilde{\mathbf{b}} \vec{u}(\tau) d\tau \quad (2.432)$$

Berechnet man nun die Lösung der Gleichung (2.432) nach einem Abtastschritt zum Zeitpunkt

$$t = t_{k+1} = t_k + h$$

und beachtet, dass die Eingangsgröße innerhalb des Abtastschrittes konstant ist, so folgt

$$\underline{x}(t_{k+1}) = e^{\tilde{\mathbf{A}}(t_{k+1}-t_k)} \underline{x}(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{\tilde{\mathbf{A}}(t_{k+1}-\tau)} d\tau \tilde{\mathbf{b}} \vec{u}(t_k)$$

Findet anschließend eine Substitution mit

$$\eta = t_{k+1} - \tau \quad \rightarrow \quad d\tau = -d\eta$$

statt und wird die diskrete Schreibweise der Eingangsgröße aus Gleichung (2.431) sowie $\underline{x}(t_{k+1}) = \underline{x}[k+1]$, $\underline{x}(t_k) = \underline{x}[k]$ verwendet, so erhält man eine rekursive Berechnungsformel für den Übergang der Zustände des kontinuierlichen Systems von einem zum anderen Abtastzeitpunkt:

$$\underline{x}[k+1] = \underbrace{e^{\tilde{\mathbf{A}}h}}_{\mathbf{A}} \underline{x}[k] + \underbrace{\int_0^h e^{\tilde{\mathbf{A}}\eta} d\eta}_{\tilde{\mathbf{b}}} \tilde{\mathbf{b}} u[k] \quad (2.433)$$

Hiermit lässt sich aus dem aktuellen Zustand des zeitdiskretisierten Systems der zukünftige Zustand bestimmen. Nachdem mit dieser Formel entsprechend der Zustandsdarstellung

zeitkontinuierlicher Systeme eine Aussage über die Veränderung der zeitdiskreten Zustände möglich ist, liegt die zeitdiskrete Zustandsdarstellung vor:

$$\begin{aligned}\underline{x}[k+1] &= \mathbf{A} \underline{x}[k] + \underline{b} u[k] \\ y[k] &= \underline{c}^T \underline{x}[k] + d u[k]\end{aligned}$$

Die zeitdiskrete Systemmatrix \mathbf{A} sowie Ein- und Auskoppelvektor \underline{b} und \underline{c} berechnen sich mit Gleichung (2.433) wie folgt aus denen des zeitkontinuierlichen Modells:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= e^{\tilde{\mathbf{A}}h} \\ \underline{b} &= \int_0^h e^{\tilde{\mathbf{A}}\eta} d\eta \tilde{\underline{b}} \\ \underline{c} &= \tilde{\underline{c}} \\ d &= \tilde{d}\end{aligned}\tag{2.434}$$

Im Unterschied zur zeitkontinuierlichen Zustandsdarstellung (2.13) wird der neue Zustandswert nicht indirekt durch die Veränderung der Zustände ausgedrückt, sondern es wird einfacher statt einer Differentiation nach der Zeit auf der linken Gleichungsseite direkt der neue veränderte Zustandswert dargestellt. Wie in den späteren Kapiteln gezeigt wird, liegt hier der große Unterschied zwischen der zeitkontinuierlichen und der zeitdiskreten Systemdarstellung. Auf der einen Seite ergeben sich durch die Umgehung der Differentiation Vereinfachungen, jedoch führt dies auf der anderen Seite zu Problemen bei bestimmten Reglerauslegungen.

Die Gleichungen (2.434) stellen die Umrechnungsvorschrift der ZOH-Zeitdiskretisierung dar. Neben den vielen Diskretisierungsmethoden soll hier die ZOH-Äquivalenzmethode zum Einsatz kommen, da das Verfahren das Diskretisierungsproblem direkt im Zeitbereich unter Berücksichtigung der realen Bedingung eines Systems mit digitalem Regler mit Abtaster und Halteglied löst. Dabei wird die allgemeine Lösungsformel für Zustandsgleichungen zu jedem Abtastzeitpunkt berechnet – dies hat zur Folge, dass das zeitkontinuierliche und das zeitdiskretisierte Modell zu jedem Abtastzeitpunkt exakt übereinstimmen (Zustands- wie Ausgangsgrößen). Die ZOH-Methode ist für Systeme mit Stufenfunktionen als Eingang somit keine Näherung. Da der digitale Regler entsprechend der Abbildung 2.61 eine Stufenfunktion erzeugt, ist diese Methode ideal.

Liegt das zeitkontinuierliche System im Frequenzbereich vor, so erhält man das mit der ZOH-Methode zeitdiskretisierte Modell durch Anwendung der z -Transformation (2.484) auf das Gesamtsystem $G(\cdot)$ aus Strecke $F(\cdot)$ und Halteglied $F_{ZOH}(\cdot)$. Für die Laplace-Transformierte (A.45) des Halteglieds mit der Haltedauer h ist $a = 0$ und $b = h$ zu setzen. Mit $z^{-1} = e^{-sh}$ gemäß Gleichung (2.513) folgt:

$$G(s) = F_{ZOH}(s) F(s) = \frac{1 - e^{-sh}}{s} F(s) \quad \overset{\mathcal{Z}}{\circlearrowleft} \quad F[z] = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\frac{F(s)}{s} \right] \tag{2.435}$$

2.3.2 Zustandsraumdarstellung

Gemäß der Herleitung im vorigen Kapitel lautet die zeitdiskrete Zustandsraumdarstellung:

$$\begin{aligned}\underline{x}[k+1] &= \mathbf{A} \underline{x}[k] + \underline{b} u[k], & \underline{x}[0] &= \underline{x}_0 \\ y[k] &= \underline{c}^T \underline{x}[k] + d u[k]\end{aligned}\quad (2.436)$$

mit $\underline{x}, \underline{b}, \underline{c} \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Den entsprechenden Signalflussplan zeigt Abbildung 2.63. Im Unterschied zum zeitkontinuierlichen Signalflussplan in Abbildung 2.2 wurde die In-

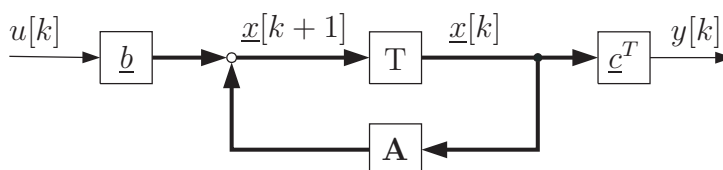


Abbildung 2.63: Signalflussplan der zeitdiskreten Zustandsbeschreibung eines Systems

tegratorfunktion durch eine Verzögerungsfunktion ersetzt. Der entsprechende Block, gekennzeichnet mit einem T, entspricht einem Speicherelement, welches einen Signalwert um die Abtastzeit h verzögert ausgibt. Nachdem das zentrale Element der zeitdiskreten Zustandsdarstellung ebenfalls wie bei der zeitkontinuierlichen Zustandsdarstellung ein Energiespeicher ist, können oftmals die gleichen Aussagen getroffen werden. Daher sei auf Kapitel 2.2.1 verwiesen. Abweichungen ergeben sich stets auf Grund der Darstellung als Zustandsänderung $\dot{\underline{x}}(t)$ oder als zukünftigen Zustandswert $\underline{x}[k+1]$. Dementsprechend ist der aktuelle Zustandswert auf eine Integration bzw. eine Verzögerung zurückzuführen. Der *stationäre Zustand* des zeitdiskreten Systems gilt als erreicht, wenn $\underline{x}[k+1] = \underline{x}[k]$ bzw. $\underline{x}[k+1] - \underline{x}[k] = 0$. Wie im Zeitkontinuierlichen mit $\dot{\underline{x}}(t) = 0$ liegt die Gleichgewichtslage vor, wenn keine Änderung der Zustände mehr stattfindet, d.h. für die zeitdiskrete Ableitung mit der Abtastzeit h

$$\frac{x[k+1] - x[k]}{h} = 0 \quad (2.437)$$

gilt.

Durch rekursives Anwenden der Zustandsdarstellung (2.436)

$$\begin{aligned}\underline{x}[0] &\equiv \underline{x}_0 \\ \underline{x}[1] &= \mathbf{A} \underline{x}[0] + \underline{b} u[0] = \mathbf{A} \underline{x}_0 + \underline{b} u[0] \\ \underline{x}[2] &= \mathbf{A} \underline{x}[1] + \underline{b} u[1] = \mathbf{A}^2 \underline{x}_0 + \mathbf{A} \underline{b} u[0] + \underline{b} u[1] \\ &\vdots\end{aligned}$$

ergibt sich die geschlossene Lösungsformel zur Bestimmung der Zustände $\underline{x}(t)$ zu einem beliebigen Zeitpunkt:

Theorem 2.29: Lösungsformel der Differenzgleichung

Zu einem bestimmten Zeitpunkt k bezogen auf einen gegebenen Anfangszustand \underline{x}_0 sowie

Verlauf der Anregung $u[\cdot]$ berechnet sich der Zustandsvektor $\underline{x}[k]$ eines zeitdiskreten Systems wie folgt:

$$\underline{x}[k] = \mathbf{A}^k \underline{x}_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{A}^{k-1-i} \underline{b} u[i], \quad k, i \in \mathbb{N} \quad (2.438)$$

2.3.2.1 Stabilität unter Beachtung der Steuerbarkeit bzw. Beobachtbarkeit

Für die Beobachtbarkeit, Steuerbarkeit sowie Stabilität gelten gemäß Kapitel 2.2.1.2 dieselben Aussagen wie für zeitkontinuierliche Systeme. Im Folgenden seien die Definitionen nochmals in angepasster Nomenklatur für den zeitdiskreten Bereich dargestellt. Die Hintergründe bzw. die Herleitung der Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit sind in Kapitel 5.1 veranschaulicht.

Definition 2.12: Steuerbarkeit

Besitzt die Steuerbarkeitsmatrix \mathbf{Q}_S mit

$$\mathbf{Q}_S = [\underline{b} \quad \mathbf{A}\underline{b} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1}\underline{b}] \quad (2.439)$$

vollen Rang bzw. ist die Determinante ungleich Null, so ist das System vollständig steuerbar:

$$\text{Rang}(\mathbf{Q}_S) = n, \quad \det(\mathbf{Q}_S) \neq 0 \quad (2.440)$$

Dann kann mit einem bestimmten Eingangssignal $u[\cdot]$ jeder Systemzustand \underline{x} von einem beliebigen Anfangszustand $\underline{x}[0] = \underline{x}_0$ in endlichen Schritten k in den Ursprung $\underline{x}[k] = \underline{0}$ überführt werden – folglich wirkt das Eingangssignal $u[\cdot]$ auf alle Zustände.

Definition 2.13: Beobachtbarkeit

Besitzt die Beobachtbarkeitsmatrix \mathbf{Q}_B mit

$$\mathbf{Q}_B = \begin{bmatrix} \underline{c}^T \\ \underline{c}^T \mathbf{A} \\ \vdots \\ \underline{c}^T \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.441)$$

vollen Rang bzw. ist die Determinante ungleich Null, so ist das System vollständig beobachtbar:

$$\text{Rang}(\mathbf{Q}_B) = n, \quad \det(\mathbf{Q}_B) \neq 0 \quad (2.442)$$

Folglich gibt es keinen Zustand $x_i[k]$ ($i = 1, \dots, n; i \in \mathbb{N}$), der bei Abwesenheit des Eingangssignals ($u[\cdot] \equiv 0$) und einem beliebigen Anfangswert $x_{i,0}$ für alle Zeiten einen Null-Beitrag für das Ausgangssignal $y[\cdot]$ liefert. In diesem Fall können aus dem Signalverlauf von $y[\cdot]$ eindeutig die Anfangswerte \underline{x}_0 der Zustände rekonstruiert werden.

Ob ein System vollständig beobachtbar bzw. steuerbar ist, hat für die Regelung eine wichtige Bedeutung. Ein instabiles System kann nur erfolgreich stabilisiert werden, wenn die instabile Dynamik beobachtbar und steuerbar ist.

Definition 2.14: Instabilität

Instabilität bedeutet in Betracht der Lyapunov-Stabilität, dass bei Auslenkung aus der Ruhelage und anschließender Abwesenheit der Anregung ($u[k] \equiv 0, \quad \forall k > 0$) mindestens ein Zustand in seinem Wert unbegrenzt anwächst:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\underline{x}[k]\| \rightarrow \infty \quad (2.443)$$

Definition 2.15: Lyapunov-Stabilität

Die Ruhelagen bzw. einen Zustand bezeichnet man als Lyapunov-stabil, wenn nach einer Auslenkung aus der Ruhelage und anschließender Abwesenheit der Anregung ($u[k] \equiv 0, \quad \forall k > 0$) der Betrag des Zustands für alle Zeiten innerhalb einer endlichen Schranke $M < \infty$ verbleibt:

$$\|\underline{x}[k]\| < M, \quad \forall k > 0 \quad (2.444)$$

Definition 2.16: Asymptotische Stabilität

Ist eine Ruhelage Lyapunov-stabil und kehrt der Zustand nach seiner Auslenkung und Abwesenheit der Anregung ($u[k] \equiv 0, \quad \forall k > 0$) in seine Ruhelage \underline{x}_∞ zurück, so spricht man von einer asymptotisch stabilen Ruhelage:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\underline{x}[k]\| = \underline{x}_\infty, \quad \|\underline{x}[k]\| < M, \quad \forall k > 0 \quad (2.445)$$

Definition 2.17: Ein-Ausgangs-Stabilität

Für die Ein- Ausgangsstabilität werden nur diejenigen Zustände auf Lyapunov-Stabilität untersucht, welche steuerbar und zugleich beobachtbar sind. Ist ein System Ein- Ausgangsstabil, können nach Definition nicht-beobachtbare Zustände instabiles Verhalten zeigen.

Es ist festzuhalten, dass das alleinige Ein- Ausgangsverhalten zur Regelung nur dann herangezogen werden darf, wenn das System vollständig beobachtbar und steuerbar ist bzw. die nicht beobachtbare und/oder steuerbare Dynamik asymptotisch stabiles Verhalten aufzeigt und somit die Anfangswerte \underline{x}_0 asymptotisch auf die Ruhelage \underline{x}_∞ abklingen.

2.3.2.2 Stabilitätsbedingung linearer Systeme: Modale Zustandsdarstellung

Analog des Kapitels 2.2.1.2 lässt sich auch im Zeitdiskreten mit Hilfe der Systemmatrix \mathbf{A} durch Transformation in Diagonalgestalt eine Aussage bzgl. der System-Stabilität treffen. Grundlage ist die Bestimmung der Eigenwerte und Eigenvektoren:

Theorem 2.30: Eigenwerte und Eigenvektoren

Die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ lassen sich mit Hilfe des charakteristischen Polynoms

$$A(\lambda_i) = \det[\lambda_i \mathbf{E} - \mathbf{A}] \quad (2.446)$$

der Systemmatrix \mathbf{A} durch Nullsetzen bestimmen. Die sog. Eigenwertgleichung lautet:

$$\det[\lambda_i \mathbf{E} - \mathbf{A}] = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad \lambda_i \in \mathbb{C} \quad (2.447)$$

Liegen die Eigenwerte vor, so können über

$$[\lambda_i \mathbf{E} - \mathbf{A}] \underline{\mathbf{m}}_i = \underline{\mathbf{0}}, \quad i = 1, \dots, n, \quad \lambda_i \in \mathbb{C}, \quad \underline{\mathbf{m}}_i \in \mathbb{C}^n \quad (2.448)$$

die Eigenvektoren $\underline{\mathbf{m}}_i$ bestimmt werden, welche die Spalten der Modalmatrix bilden:

$$\mathbf{T}_M = [\underline{\mathbf{m}}_1, \dots, \underline{\mathbf{m}}_n] \quad (2.449)$$

Durch die lineare Transformation

$$\underline{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{T}_M \check{\underline{\mathbf{x}}}(t), \quad \mathbf{T}_M \in \mathbb{C}^{n \times n} \quad (2.450)$$

mit der Modalmatrix \mathbf{T}_M ergibt sich die Zustandsdarstellung (2.436) mit der Systemmatrix \mathbf{A} in Diagonalgestalt:

$$\begin{aligned} \check{\underline{\mathbf{x}}}[k+1] &= \underbrace{\mathbf{T}_M^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}_M}_{\check{\mathbf{A}}} \check{\underline{\mathbf{x}}}[k] + \underbrace{\mathbf{T}_M^{-1} \mathbf{b}}_{\check{\mathbf{b}}} u[k] \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}}_{\check{\mathbf{A}}} \check{\underline{\mathbf{x}}}[k] + \check{\mathbf{b}} u[k], \quad \check{\underline{\mathbf{x}}}[0] = \check{\underline{\mathbf{x}}}_0 \end{aligned} \quad (2.451)$$

$$y[k] = \check{\underline{\mathbf{c}}}^T \check{\underline{\mathbf{x}}}[k]$$

Wendet man nun die Lösungsformel (2.438) auf den homogenen Teil der Differenzgleichung (2.451) an, so ergibt sich:

$$\check{\underline{\mathbf{x}}}[k] = \Lambda^k \check{\underline{\mathbf{x}}}_0 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}^k \check{\underline{\mathbf{x}}}_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1^k \check{x}_{0,1} \\ \vdots \\ \lambda_n^k \check{x}_{0,n} \end{pmatrix} \quad (2.452)$$

Auf Grund der Diagonalgestalt von \mathbf{A} sind die Anfangswerte in der Lösungsformel (2.452) entkoppelt, womit über den linearen Zusammenhang der Modaltransformation

$$\underline{\mathbf{x}}[k] = \mathbf{T}_M \check{\underline{\mathbf{x}}}[k] = \mathbf{T}_M \begin{pmatrix} \lambda_1^k \check{x}_{0,1} \\ \vdots \\ \lambda_n^k \check{x}_{0,n} \end{pmatrix} \quad (2.453)$$

sehr schnell eine Stabilitätsaussage über das System mit der Systemmatrix \mathbf{A} getroffen werden kann. Bei Abwesenheit einer Anregung ($u[\cdot] \equiv 0$) klingen die Systemzustände ab, sobald der Betrag der Eigenwerte kleiner Eins ist.

Theorem 2.31: Asymptotische Stabilität für lineare Systeme

Ein zeitdiskretes lineares System ist asymptotisch stabil, wenn gilt:

$$|\lambda_i| = |\zeta_i + j\nu_i| = |r_i e^{j\varphi_i}| = r_i < 1, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.454)$$

Theorem 2.32: Stabilität für lineare Systeme

Ein Systemzustand x_i ist stabil, wenn dieser bei Abwesenheit einer Anregung ($u[\cdot] \equiv 0$) und einem Anfangszustand $x_{0,i} \neq 0$ nicht aufklingt:

$$|\lambda_i| = |\zeta_i + j\nu_i| = |r_i e^{j\varphi_i}| = r_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.455)$$

Sind die Eigenwerte gleich Eins, so bleibt der jeweilige Systemzustand konstant und entsprechend der Definition 2.15 innerhalb einer Schranke M . Sobald für einen Eigenwert $\lambda_i = 1$ gilt, besitzt das System ein *integrales Verhalten*, d.h. für ein Eingangssignal $u[\cdot] \neq 0$ wächst das Zustandssignal $x_i[\cdot]$ unbegrenzt an.

Ein zeitdiskretes System ist stabil, wenn die Eigenwerte auf oder innerhalb des Einheitskreises liegen.

2.3.2.3 Zusammenhang zwischen Rückkopplungen und Stabilität

Wie für zeitkontinuierliche Systeme in Kapitel 2.2.1.3 lassen sich für zeitdiskrete lineare Systeme die Stabilitätsaussagen anschaulich am Signalflussplan 2.64 der modalen Zustandsform (2.451) verdeutlichen. Durch die Modaltransformation findet auch in der zeitdiskreten Differenzendarstellung eine Entkopplung der Zustände statt. Die Stabilität eines Zustands \check{x}_i mit $i \in \{1, \dots, n\}$ ist lediglich abhängig von der jeweiligen Rückkopplung über λ_i . Sobald $\check{x}_i[k] \neq 0$ gilt, ist die Rückkopplung aktiv. Dies wird durch einen Anfangswert $\check{x}_0 \neq \underline{0}$ oder durch ein Eingangssignal $u[\cdot] \neq 0$, welches nach einem Abtastschritt den Zustand \check{x}_i über \check{b}_i verändert, erreicht. Nimmt man nach erfolgter Auslenkung der Zustände das Eingangssignal auf $u[\cdot] \equiv 0$ zurück, führt ein $|\lambda_i| > 1$ zu einem ständigen immer schnelleren Anwachsen des Zustands \check{x}_i (Mitkopplung). Der Zustandswert wird nach jedem Abtastschritt betragsmäßig das λ_i -fache sein. Gemäß der Definition 2.14 spricht man bei diesem unbeschränkten, exponentiellen Anwachsen von Instabilität.

Ist die Rückkopplung hingegen $|\lambda_i| < 1$, so wird der Zustandswert bei Abwesenheit eines Eingangssignals nach einem Abtastschritt betragsmäßig stets kleiner als der alte Wert sein bis asymptotisch die Gleichgewichtslage $\check{x}_{i,\infty} = 0$ eingenommen wird. Es handelt sich gemäß Definition 2.16 um eine stabile Rückkopplung, eine sog. Gegenkopplung. Hiermit wurde das Theorem 2.31 veranschaulicht.

Theorem 2.33: Gleichgewichtslage

Ein zeitdiskretes System erreicht seine Gleichgewichtslage \underline{x}_∞ , wenn ab dem Abtastschritt

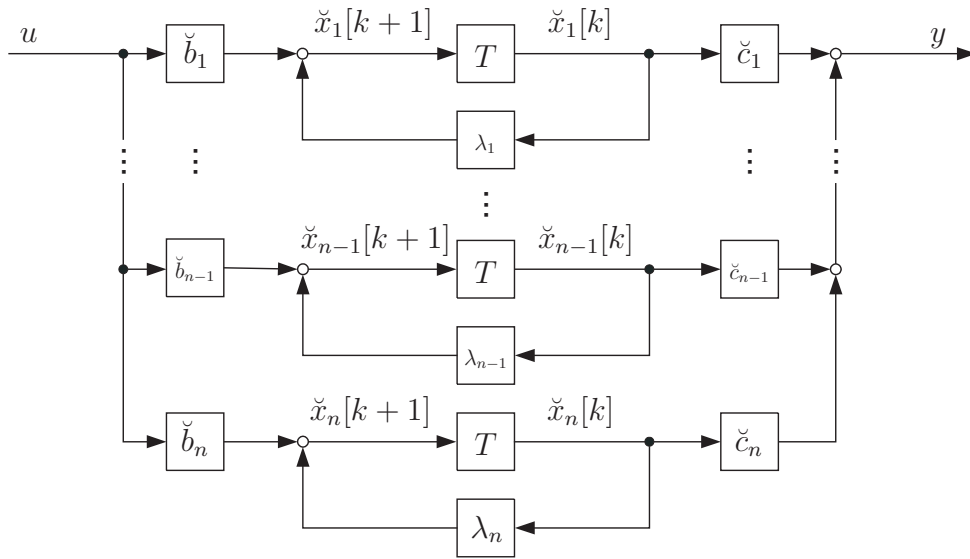


Abbildung 2.64: Signalflussplan eines zeitdiskreten linearen Systems in modaler Zustandsdarstellung

k_∞ keine Änderung der Zustände mehr stattfindet.

$$\underline{x}_\infty = \underline{x}[k+1] = \underline{x}[k] \quad \forall k > k_\infty \quad (2.456)$$

Aus der Zustandsdarstellung 2.436 berechnet sich die Gleichgewichtslage:

$$\underline{x}_\infty = (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \underline{b} u_\infty \quad (2.457)$$

$$y_\infty = \underline{c}^T \underline{x}_\infty + d u_\infty \quad (2.458)$$

Gibt es im System keinen Durchgriff ($d = 0$), bestimmt sich die stationäre Verstärkung wie folgt:

$$k_\infty = \frac{y_\infty}{u_\infty} = \underline{c}^T (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \underline{b} \quad (2.459)$$

Wie zu erkennen ist, kann bei einer stabilen Gegenkopplung nur ein Eingangssignal $u_\infty \neq 0$ eine Gleichgewichtslage $\underline{x}_\infty \neq \underline{0}$ erzwingen. Für jeden Zustandwert der modalen Zustandsdarstellung gilt:

$$\check{x}_{i,\infty} = \frac{\check{b}_i}{1 - \lambda_i} u_\infty \quad (2.460)$$

Im Falle eines anliegenden Eingangssignals $u[\cdot] = \check{b}_i u = \text{const} = u_\infty$ wird bei jedem Abtastschritt ein konstanter Wert zum skalierten Zustand $\lambda_i x_i[k]$ addiert, weshalb bei einem positiven realen Eigenwert der Zustandwert x_i betragsmäßig mit jedem Schritt steigt. Nachdem aber zu jedem Abtastschritt der Zustandwert erneut mit einem $|\lambda_i| < 1$ auf einen kleineren Wert skaliert wird, verlieren die zuvor addierten Werte des mit \check{b}_i skalierten Eingangssignals $u[\cdot]$ immer mehr an Gewicht. Mathematisch gesehen entspricht

das Verhalten einer konvergierenden Reihe ($x_{i,0} = 0$):

$$\begin{aligned} \left(\left(\check{b}_i u \lambda_i + \check{b}_i u \right) \lambda_i + \check{b}_i u \right) \lambda_i + \check{b}_i u \dots &= \check{b}_i u + \check{b}_i u \lambda_i + \check{b}_i u \lambda_i^2 + \check{b}_i u \lambda_i^3 + \dots \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \check{b}_i u \lambda_i^l = \frac{\check{b}_i u_{\infty}}{1 - \lambda_i}, \quad \forall l \in \mathbb{N}, \quad -1 < \lambda < 1 \end{aligned} \quad (2.461)$$

Diese alternative Bestimmung des Gleichgewichtspunkts bestätigt Theorem 2.33. Die Tatsache, dass die Reihe nur für $-1 < \lambda < 1$ konvergiert, bestätigt zudem die Stabilitätsforderung in Theorem 2.31.

Gemäß obiger Veranschaulichung steigt der Zustandswert bei einem $\lambda \in]0, 1[$, d.h. für ein stabiles positives λ ohne Imaginärteil, immer langsamer und nähert sich asymptotisch dem Gleichgewichtspunkt $x_{i,\infty}$ für $k \rightarrow \infty$. Das beschriebene Verhalten entspricht dem eines Verzögerungsgliedes erster Ordnung (PT_1). Bei einem $\lambda \in]-1, 0[$ tritt ein Oszillieren mit jedem Abtastschritt auf, wobei sich ebenfalls ein konstanter Wert einstellt. Liegt ein Imaginärteil des Eigenwertes vor, ergibt sich je nach dessen Wert eine unterschiedliche Frequenz der Oszillation. Nachdem Eigenwerte mit Imaginärteil stets paarweise auftreten, spricht man bzgl. des Gesamtsystems bereits von einem Verzögerungsglied zweiter (PT_2) oder höherer Ordnung (PT_n). Mit konjugiert komplexen Eigenwerten liegen in der modalen Zustandsbeschreibung auch komplexe Zustandssignale vor. Die Summation der über \check{c}_i ausgekoppelten rein mathematisch zu betrachtenden komplexen Zustandssignale $\check{x}_i[\cdot]$ führt jedoch wieder zu einem reellen physikalischen Ausgangssignal $y[\cdot]$.

Für den Spezialfall $|\lambda_i| = 1$ wird keine Gleichgewichtslage eingenommen, da zu jedem Abtastzeitpunkt der Wert des mit \check{b}_i skalierten Eingangssignals zum aktuellen Zustandswert addiert wird. Abgesehen vom Fall $\lambda_i = -1$, bei dem mit jedem Abtastschritt ein Oszillieren zwischen positiven und negativen Eingangswert auftritt, liegt die zeitdiskrete Form des Integrators vor. Die Anwendung der ZOH-Methode (2.434) auf die Zustandsdarstellung

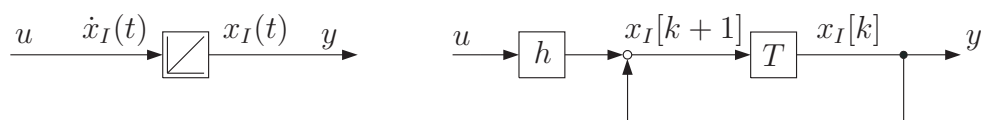


Abbildung 2.65: Signalflussplan eines zeitkontinuierlichen (**links**) und zeitdiskreten (**rechts**) Integrators

eines Integrators (Abbildung 2.65 links) mit

$$\dot{x}_I(t) = u(t); \quad y(t) = x_I(t) \quad (2.462)$$

verdeutlicht dies. Mit $\tilde{\mathbf{A}} = 0$, $\tilde{\mathbf{b}} = 1$ und $\tilde{\mathbf{c}} = 1$ ergeben sich die zeitdiskreten Systemparameter

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= e^{\tilde{\mathbf{A}}h} = 1 \\ \underline{\mathbf{b}} &= \int_0^h e^{\tilde{\mathbf{A}}\eta} d\eta \tilde{\mathbf{b}} = h \\ \underline{\mathbf{c}} &= \tilde{\mathbf{c}} = 1 \end{aligned}$$

sowie die zeitdiskrete Zustandsdarstellung des Integrators:

$$\begin{aligned}x_I[k+1] &= x_I[k] + h u[k] \\ y[k] &= x_I[k]\end{aligned}\tag{2.463}$$

Den entsprechenden Signalflussplan zeigt Abbildung 2.65 rechts und bestätigt, dass dieser im Signalflussplan 2.64 der modalen Zustandsdarstellung für $\lambda_i = 1$ und $\check{b}_i = h$ enthalten ist. Somit wurde auch das Theorem 2.32 anschaulich dargestellt – liegt keine Stellgröße am Integrator an, so klingt das System nicht auf.

Durch die Modaltransformation kann jedes System zustandsentkoppelt dargestellt werden, so dass es nur aus einer Parallelstruktur von n PT_1 -Gliedern besteht. Sobald eine Mitkopplung vorliegt, ist das System nach Lyapunov instabil. Das Ein- Ausgangsverhalten bzw. die Übertragungsfunktion, auf welche näher in den folgenden Kapiteln eingegangen wird, lässt sich an Hand des Signalflussplanes 2.64 leicht in Partialbruchdarstellung bestimmen:

$$\frac{y[k]}{u[k]} = F[q] = \sum_{i=1}^n \frac{r_i}{q - \lambda_i}; \quad r_i = \check{b}_i \check{c}_i\tag{2.464}$$

Zusammenfassend hält man fest, dass Instabilitäten im System stets auf Rückkopplungen zurückzuführen sind. Es ist dabei unerheblich, ob die Speicherelemente als Integratoren gemäß der zeitkontinuierlichen Darstellung oder als Verzögerungselemente gemäß der zeitdiskreten Darstellung repräsentiert werden. Je nachdem handelt es sich um eine Differentialgleichung oder eine Differenzgleichung. Durch die Zeitdiskretisierung liegt lediglich ein Unterschied in den Systemparametern λ_i , \check{b}_i und \check{c}_i vor, der zu einer abweichenden Ordnung m des Zählerpolynoms, jedoch zu keiner Abweichung in der Ordnung n des Nennerpolynoms führen kann. Wie später gezeigt wird, bleibt die Stabilitätseigenschaft des Nennerpolynoms erhalten, die des Zählerpolynoms kann sich jedoch auf Grund der Darstellung als Differential- oder Differenzgleichung unterscheiden.

2.3.3 Ein- Ausgangsbeschreibung: Operatordarstellung

Mit der Zustandsdarstellung liegt eine Beschreibung des Systems in Form von n Differenzgleichungen vor, die jeweils die nächsten Zustandswerte (Schritt $k+1$) in Abhängigkeit der aktuellen Werte (Schritt k) berechnet. Der Verlauf eines Zustands, z.B. $x_1[\cdot]$, ist in dieser Darstellung abhängig von zunächst nur der eigenen Dynamik und der eventuellen Einkopplung der anderen Zustandssignale $x_2[\cdot]$ bis $x_n[\cdot]$ sowie des Eingangssignals $u[\cdot]$, wie dies die erste Zeile der Zustandsbeschreibung (2.436) zeigt:

$$x_1[k+1] = a_{11} x_1[k] + a_{12} x_2[k] + \cdots + a_{1n} x_n[k] + b_1 u[k]\tag{2.465}$$

Die anderen Zustände $x_2[k]$ bis $x_n[k]$ in Gleichung (2.465) werden direkt oder indirekt über die Systemmatrix \mathbf{A} durch den Zustand $x_1[k]$ selbst und über den Einkoppelvektor \underline{b} durch das Eingangssignal $u[\cdot]$ beeinflusst, so dass die Zustände $x_2[k]$ bis $x_n[k]$ in Gleichung (2.465) mit ihrer eigenen Dynamik effektiv skalierten vergangenen Werten $x_1[k-i]$ des Signals $x_1[\cdot]$ mit $i \in \{1, \dots, n-1\}$ entsprechen, je nachdem, über wie viele der anderen Zustände das

Signal $x_1[\cdot]$ auf sich zurückwirkt. Je mehr Zustände durchlaufen werden, desto größer ist die zeitliche Verzögerung des Signals $x_1[\cdot]$ auf sich, was durch die zeitliche Verschiebung $k-i$ des Signals zum Ausdruck kommt. Koppelt in die jeweiligen durchlaufenen Zustände auch das Eingangssignal ein, so müssen ebenfalls die skalierten vergangenen Werte $u[k-j]$ des Signals $u[\cdot]$ mit $j \in \{n-m-1, \dots, n-1\}$ berücksichtigt werden. Mit dieser Überlegung sollte Gleichung (2.465) auch wie folgt geschrieben werden können, was im Anschluss gezeigt wird:

$$\begin{aligned} \alpha'_n x_1[k+1] &= \alpha'_{n-1} x_1[k] + \alpha'_{n-2} x_1[k-1] + \dots + \alpha'_0 x_1[k-n+1] + \\ &+ \gamma'_m u[k+m-n+1] + \gamma'_{m-1} u[k-1] + \dots + \gamma'_0 u[k-n+1] \end{aligned} \quad (2.466)$$

Der Vorteil dieser Systembeschreibung ist, dass nur die Systemdynamik zwischen zwei Signalen betrachtet wird, ohne Abhängigkeit von weiteren Signalen; es wird somit das Ein-Ausgangsverhalten zweier Signale dargestellt.

Für die Umformung zwischen Zustandsbeschreibung und Ein- Ausgangsbeschreibung wird im Zeitbereich der sog. *Schiebeoperator* q eingeführt:

$$q \underline{x}[k] \equiv \underline{x}[k+1], \quad q u[k] \equiv u[k+1], \quad q y[k] \equiv y[k+1] \quad (2.467)$$

Durch die Multiplikation eines Signals mit q bezieht man sich auf den Signalwert einen Abtastschritt später. Eine Verschiebung um mehrere Abtastschritte ergibt sich dann mit der i -fachen Multiplikation des Operators:

$$q^i \underline{x}[k] = \underline{x}[k+i], \quad q^i u[k] = u[k+i], \quad q^i y[k] = y[k+i] \quad (2.468)$$

Angewandt auf die Zustandsdarstellung (2.436) wird ein algebraisches Lösen der Differenzgleichung nach \underline{x} möglich:

$$\underline{x}[k] = [q \mathbf{E} - \mathbf{A}]^{-1} \underline{b} u[k] \quad (2.469)$$

An dieser Stelle wird beim Vergleich der Gleichungen (2.46) und (2.469) deutlich, dass durch die Operatorformdarstellung der Formalismus bei zeitkontinuierlichen und zeitdiskreten Systemen identisch ist, was ein einheitliches Vorgehen bei der Reglerauslegung ermöglicht.

Mit Gleichung (2.469) resultieren n unabhängige Gleichungen in q , die das dynamische Verhalten zwischen Eingangssignal $u[\cdot]$ und Zustandssignal $x_i[\cdot]$ mit $i \in \{1, \dots, n\}$ beschreiben. Wendet man für die Berechnung der Inversen die Kofaktor-Methode aus Theorem A.2 an, so wird deutlich, dass in jeder Gleichung jedes Signal mit einem Polynom in q multipliziert wird:

$$\det[q \mathbf{E} - \mathbf{A}] \underline{x}[k] = \text{adj}[q \mathbf{E} - \mathbf{A}] \underline{b} u[k] \quad (2.470)$$

$$A[q] \underline{x}[k] = \underline{C}[q] u[k] \quad (2.471)$$

$$A[q] \begin{pmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \\ \vdots \\ x_n[k] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} u[k] \quad (2.472)$$

Die Operatordarstellung,

$$A[q]x_i[k] = C_i[q]u[k] \quad (2.473)$$

$$(\alpha'_n q^n + \alpha'_{n-1} q^{n-1} + \cdots + \alpha'_1 q + \alpha'_0) x_i[k] = (\gamma'_m q^m + \gamma'_{m-1} q^{m-1} + \cdots + \gamma'_1 q + \gamma'_0) u[k] \quad (2.474)$$

die das Verhalten zwischen dem Eingang $u[k]$ und einem Zustand $x_i[k]$ beschreibt, entspricht gemäß der Beziehung (2.468) der Addition einer homogenen Differenzgleichung n -ter Ordnung mit einer homogenen Differenzgleichung m -ter Ordnung:

$$\begin{aligned} \alpha'_n x_i[k+n] + \alpha'_{n-1} x_i[k+n-1] + \cdots + \alpha'_1 x_i[k+1] + \alpha'_0 x_i[k] = \\ \gamma'_m u[k+m] + \gamma'_{m-1} u[k+m-1] + \cdots + \gamma'_1 u[k+1] + \gamma'_0 u[k] \end{aligned} \quad (2.475)$$

Diese Gleichung ist nach einer Verschiebung um $n-1$ Schritte identisch mit der Gleichung (2.466) und bestätigt somit die vorangegangene Überlegung, dass das dynamische Verhalten des Systems hinsichtlich zweier Signale eindeutig durch die aktuellen und vergangenen Werte dieser zu beschreiben ist.

Mit diesem Vorgehen ist ebenfalls eine Ein- Ausgangsbeschreibung zwischen dem Eingang $u[k]$ und dem Ausgang $y[k]$ eines Systems zu finden. Gemäß der Zustandsbeschreibung (2.436) bestimmt sich das Ausgangssignal nach $y[k] = \underline{c}^T \underline{x}[k]$. Durch Einsetzen der nach \underline{x} aufgelösten Gleichung (2.469) folgt:

$$y[k] = \underline{c}^T [q\mathbf{E} - \mathbf{A}]^{-1} \underline{b} u[k] \quad (2.476)$$

$$\det[q\mathbf{E} - \mathbf{A}] y[k] = \underline{c}^T \text{adj}[q\mathbf{E} - \mathbf{A}] \underline{b} u[k] \quad (2.477)$$

$$A[q] y[k] = B[q] u[k] \quad (2.478)$$

$$(\alpha'_n q^n + \alpha'_{n-1} q^{n-1} + \cdots + \alpha'_1 q + \alpha'_0) y[k] = (\beta'_m q^m + \beta'_{m-1} q^{m-1} + \cdots + \beta'_1 q + \beta'_0) u[k] \quad (2.479)$$

Die entsprechende, das Ein- Ausgangsverhalten beschreibende Differenzgleichung höherer Ordnung lautet:

$$\begin{aligned} \alpha'_n y[k+n] + \alpha'_{n-1} y[k+n-1] + \cdots + \alpha'_1 y[k+1] + \alpha'_0 y[k] = \\ \gamma'_m u[k+m] + \gamma'_{m-1} u[k+m-1] + \cdots + \gamma'_1 u[k+1] + \gamma'_0 u[k] \end{aligned} \quad (2.480)$$

Mit Gleichung (2.477) und (2.478) wird deutlich, dass das Polynom $A(\cdot)$ die Eigenwerte des Systems und folglich die Stabilität bestimmt: $A(q) = 0$ entspricht dem charakteristischen Polynom (2.447), wobei $\lambda_i = q_i$ gilt ($i \in \{1, \dots, n\}$).

Durch Auflösen der Gleichung (2.478) bzw. (2.479) resultiert das Ein- Ausgangsverhalten des Systems in Operatordarstellung:

$$y[k] = \frac{B[q]}{A[q]} u[k] = \frac{\beta'_m q^m + \beta'_{m-1} q^{m-1} + \cdots + \beta'_1 q + \beta'_0}{\alpha'_n q^n + \alpha'_{n-1} q^{n-1} + \cdots + \alpha'_1 q + \alpha'_0} u[k] \quad (2.481)$$

Dies führt direkt zum Formalismus einer Übertragungsfunktion $F[\cdot]$ im Zeitbereich:

$$\frac{y[k]}{u[k]} = F[q] = \frac{B[q]}{A[q]} \quad (2.482)$$

Üblicherweise sind Übertragungsfunktionen jedoch im Frequenzbereich definiert. Die Anwendung der Transformationsvorschrift (2.485) mit

$$\underline{x}[k+i] = q^i \underline{x}[k] \stackrel{z}{\circlearrowleft} z^i \underline{x}[z] \quad (2.483)$$

für die Transformation in den Frequenzbereich zeigt, dass die Operatordarstellung im Zeitbereich und die Übertragungsfunktion im Frequenzbereich auf denselben Formalismus führen. Aus diesem Grund ist ein Wechsel zwischen Frequenzbereich und Zeitbereich stets schnell durchführbar, indem lediglich die Operatoren z und q gegeneinander getauscht werden. Wie in dem folgenden Kapitel gezeigt wird, ist es vor allem unter diesem Gesichtspunkt irrelevant, ob Systemeigenschaften wie z.B. die Systemstabilität an Hand der Eigenwerte der Systemmatrix im Zeitbereich oder der Polstellen des Nennerpolynoms der Übertragungsfunktion im Frequenzbereich untersucht werden.

Anmerkung 2.14:

Jede Übertragungsfunktion im Frequenzbereich (Operator z) beschreibt zugleich im selben Formalismus das Ein- Ausgangsverhalten im Zeitbereich (Schiebeoperator q) mit Hilfe von Differenzgleichungen.

Abschließend hält man Folgendes fest:

Anmerkung 2.15: Operatordarstellung

Während sich ein deutlicher Unterschied zwischen der zeitkontinuierlichen und zeitdiskreten Zustandsdarstellung in Form einer Differential- bzw. Differenzgleichung zeigt, liegt mit der Operatordarstellung ein einheitlicher Formalismus zwischen zeitkontinuierlichen und zeitdiskreten Systemen vor. Dies ermöglicht ein einheitliches Vorgehen bei der Reglerauslegung.

2.3.4 Übertragungsfunktion: Polstellen und Nullstellen

Wie bereits im vorigen Kapitel dargestellt, ist der Formalismus zwischen dem Ein- Ausgangsverhalten des Systems in Operatordarstellung (Zeitbereich) und einer Übertragungsfunktion (Frequenzbereich) identisch. In beiden Fällen wird das Verhalten des Ausgangs y in Abhängigkeit des Eingangs u beschrieben, d.h. es wird nur noch die Dynamik des Systems (2.436) betrachtet, die tatsächlich eine Auswirkung vom Eingang auf den Ausgang besitzt. Für die Transformation eines zeitdiskreten Systems in den Frequenzbereich findet die bilaterale z -Transformation Anwendung:

$$\underline{x}[z] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{x}[k] z^{-k} \quad (2.484)$$

Hiermit bestimmt sich die Transformationsvorschrift für Signale $\underline{x}[\cdot]$, die im Zeitbereich um i Schritte verschoben werden [183]:

$$\underline{x}[k+i] \stackrel{\mathcal{Z}}{\circlearrowleft} z^i \underline{x}[z] \quad (2.485)$$

Alternativ zum Vorgehen in Kapitel 2.3.3 kann mit Gleichung (2.485) und $i \in \{0, 1\}$ direkt aus der Zustandsbeschreibung (2.436) eine Übertragungsfunktion gewonnen werden. Nach der Transformation in den Frequenzbereich wird ein algebraisches Lösen der Differenzengleichung nach y möglich und es resultiert die Übertragungsfunktion im Frequenzbereich:

$$\frac{y[z]}{u[z]} = \underline{c}^T [z \mathbf{E} - \mathbf{A}]^{-1} \underline{b} \quad (2.486)$$

Mit der komplexen Variable

$$z = r e^{j\omega h} = r e^{j\varphi}, \quad z \in \mathbb{C} \quad (2.487)$$

ist die z -Transformation eine Entwicklung nach gedämpften ($r < 1$) bzw. verstärkten ($r > 1$) Schwingungen der Frequenz ω und ist daher eine Verallgemeinerung der zeitdiskreten Fourier-Transformation, welche eine Entwicklung nach freien Schwingungen ist. Für $|z| = r = 1$ geht die z -Transformation in die zeitdiskrete Fourier-Transformation über; in diesem Fall wird die z -Transformation entlang des Einheitskreises in der komplexen Ebene ausgeführt. Somit wird durch die z -Transformation die imaginäre Achse des zeitkontinuierlichen s -Bereichs auf den Einheitskreis des zeitdiskreten z -Bereichs abgebildet (siehe Theorem 2.36 und Abbildung 2.68). Der stabile Bereich der reellen Achse des s -Bereichs findet sich im z -Bereich zwischen $z \in [0, 1]$ wieder. Die stabile linke Hälfte ($\sigma < 0$) wird in den Einheitskreis ($r < 1$) und der Nullpunkt $s = 0$ (Integrator: vgl. Kapitel 2.3.2.3) auf $z = 1$ abgebildet. Bei $z = 0$ tritt eine typische Eigenschaften des zeitdiskreten Systems auf. Sehr schnelle Pole mit $\sigma \rightarrow -\infty$ werden auf $z = 0$ abgebildet, d.h. es findet eine Verzögerung um die Abtastzeit statt. Dies ist die schnellstmögliche Reaktion des zeitdiskreten Systems. Weiteres zur Abbildungsvorschrift ist in Kapitel 2.3.6.2 zu finden.

Gleichung (2.486) lässt sich aufteilen in ein Zählerpolynom $B[\cdot]$ und ein Nennerpolynom $A[\cdot]$. Wendet man für die Berechnung der Inversen die Kofaktor-Methode an (vgl. Theorem A.2), folgt:

$$\frac{y[z]}{u[z]} = \frac{\underline{c}^T \text{adj}[z \mathbf{E} - \mathbf{A}] \underline{b}}{\det[z \mathbf{E} - \mathbf{A}]} = \frac{B[z]}{A[z]} \quad (2.488)$$

Greift man auf die Berechnungsvorschrift der Determinante einer Hypermatrix zurück (vgl. Theorem A.1), kann Gleichung (2.486) ebenfalls getrennt in Zähler und Nennerpolynom geschrieben werden:

$$\frac{y[z]}{u[z]} = \frac{\det \begin{bmatrix} [z \mathbf{E} - \mathbf{A}] & -\underline{b} \\ \underline{c}^T & 0 \end{bmatrix}}{\det[z \mathbf{E} - \mathbf{A}]} = \frac{B[z]}{A[z]} = \frac{\beta'_m z^m + \beta'_{m-1} z^{m-1} + \dots + \beta'_1 z + \beta'_0}{\alpha'_n z^n + \alpha'_{n-1} z^{n-1} + \dots + \alpha'_1 z + \alpha'_0} \quad (2.489)$$

Anmerkung 2.16:

An dieser Stelle zeigt sich, dass die Übertragungsfunktion (2.489) im Frequenzbereich identisch mit der Ein- Ausgangsbeschreibung (2.481) im Zeitbereich ist, obwohl erstere mit Hilfe

der z -Transformation und letztere mit Hilfe des Operators q berechnet wurde. Im Frequenzbereich verwendet der Formalismus einer Übertragungsfunktion lediglich den Operator z , während im Zeitbereich der Operator q benutzt wird. Werden allgemein die Polynome $A(\cdot)$, $B(\cdot)$, usw. untersucht, kann folglich das Ergebnis sowohl auf den Frequenzbereich wie auch Zeitbereich bezogen werden. Siehe auch Anmerkung 2.14.

Im Allgemeinen wird die Übertragungsfunktion eindeutig mit einem monischen Nennerpolynom dargestellt; ein Polynom der Ordnung n bezeichnet man als *monisch*, wenn für den höchsten Koeffizienten $\alpha_n = 1$ gilt. Dies ergibt sich, wenn Zähler und Nenner durch α'_n dividiert werden:

$$\frac{y[z]}{u[z]} = F[z] = \frac{B[z]}{A[z]} = \frac{\frac{\beta'_m}{\alpha'_n} z^m + \frac{\beta'_{m-1}}{\alpha'_n} z^{m-1} + \dots + \frac{\beta'_1}{\alpha'_n} z + \frac{\beta'_0}{\alpha'_n}}{z^n + \frac{\alpha'_{n-1}}{\alpha'_n} z^{n-1} + \dots + \frac{\alpha'_1}{\alpha'_n} z + \frac{\alpha'_0}{\alpha'_n}} \quad (2.490)$$

$$= \frac{\beta_m z^m + \beta_{m-1} z^{m-1} + \dots + \beta_1 z + \beta_0}{z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \dots + \alpha_1 z + \alpha_0} \quad (2.491)$$

$$= k_0 \frac{(z - q_1)(z - q_2) \cdots (z - q_m)}{(z - p_1)(z - p_2) \cdots (z - p_n)} \quad (2.492)$$

Durch weiteres Ausklammern von β_m liegt sowohl ein monisches Nenner- als auch Zählerpolynom vor; den Faktor k_0 bezeichnet man als *instantane Verstärkung* (siehe auch Anmerkung 2.7):

$$k_0 = \beta_m = \frac{\beta'_m}{\alpha'_n}, \quad \beta'_m \neq 0, \alpha'_n \neq 0 \quad (2.493)$$

Die Wurzeln p_i des Nennerpolynoms $A[\cdot]$ mit der Ordnung n werden als *Pole* bezeichnet:

$$A[z] = \det[z \mathbf{E} - \mathbf{A}] = \alpha'_n (z - p_1)(z - p_2) \cdots (z - p_n) = 0, \quad \forall z = p_i \in \mathbb{C}, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.494)$$

Es ist zu erkennen, dass das Nennerpolynom $A[\cdot]$ dem charakteristischen Polynom aus Gleichung (2.447) entspricht und somit die Aussage bzgl. Stabilität des Systems trifft; die Eigenwerte sind gleichbedeutend mit den Polen: $\lambda_i \equiv p_i \in \mathbb{C}$.

Die Wurzeln q_j des Zählerpolynoms $B[\cdot]$ mit der Ordnung m bezeichnet man als *Nullstellen*:

$$B[z] = \det \begin{bmatrix} [z \mathbf{E} - \mathbf{A}] & -\underline{b} \\ \underline{c}^T & 0 \end{bmatrix} = \beta'_m (z - q_1) \cdots (z - q_m) = 0, \quad \forall z = q_j \in \mathbb{C}, \quad j = 1, \dots, m \quad (2.495)$$

Die Nullstellen treffen keine Aussage bzgl. Stabilität. Wie in Gleichung (2.495) zu erkennen ist, beinhaltet die Berechnung der Nullstellen den Ein- und Auskoppelvektor \underline{b} und \underline{c} , weshalb das Ein-Ausgangsverhalten des Systems durch das Nullstellenpolynom beeinflusst werden muss. Wie im nächsten Kapitel dargestellt wird, gibt die Anzahl der Nullstellen eine Aussage darüber, nach wie vielen Abtastschritten der Ausgang y eine Reaktion auf das Eingangssignal $u[\cdot]$ zeigt, d.h. wie groß die Totzeit ist.

2.3.5 Zusammenhang zwischen Übertragungsfunktion und Zustandsraumbeschreibung: Regelungsnormform

Nachdem gemäß der Anmerkung 2.15 der Formalismus zwischen zeitkontinuierlicher und zeitdiskreter Ein- Ausgangsbeschreibung bzw. Übertragungsfunktion identisch ist, existiert eine zeitdiskrete Regelungsnormform identischer Struktur der zeitkontinuierlichen Regelungsnormform aus Theorem 2.4. Die entsprechende Berechnung verläuft analog Kapitel 2.2.4 mit folgendem Ergebnis:

Theorem 2.34: Regelungsnormform

Wird die lineare Transformation (2.450) mit $\mathbf{T} = \mathbf{T}_R$ auf das System (2.436) angewandt, ergibt sich die Regelungsnormform:

$$\begin{aligned} \check{\underline{x}}[k+1] &= \check{\underline{A}} \check{\underline{x}}[k] + \check{\underline{b}} u[k] = \mathbf{T}_R^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}_R \check{\underline{x}}[k] + \mathbf{T}_R^{-1} \underline{b} u[k] \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\check{a}_0 & -\check{a}_1 & -\check{a}_2 & \cdots & -\check{a}_{n-1} \end{bmatrix} \check{\underline{x}}[k] + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u[k], \quad \check{\underline{x}}[0] = \check{\underline{x}}_0 \end{aligned} \quad (2.496)$$

$$y[k] = \check{\underline{c}}^T \check{\underline{x}}[k] = \check{\underline{c}}^T \mathbf{T}_R \underline{x}[k] = (\check{c}_0 \quad \check{c}_1 \quad \check{c}_2 \quad \cdots \quad \check{c}_{n-1}) \underline{x}[k]$$

Die Transformationsmatrix bestimmt sich mit

$$\mathbf{T}_R = \begin{bmatrix} \underline{q}_S^T \\ \underline{q}_S^T \mathbf{A} \\ \underline{q}_S^T \mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \underline{q}_S^T \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix}^{-1}, \quad \underline{q}_S^T = (0 \quad 0 \quad \cdots \quad 1) \mathbf{Q}_S^{-1}, \quad (2.497)$$

wobei \underline{q}_S^T der letzten Zeile der inversen Steuerbarkeitsmatrix \mathbf{Q}_S^{-1} aus Gleichung (2.439) entspricht.

Da durch die Transformation das Ein-Ausgangsverhalten erhalten bleibt, kann die Übertragungsfunktion (2.489) mit Zuhilfenahme der Regelungsnormform (2.496) analog des Kapitels 2.2.4 bestimmt werden:

$$\frac{y[z]}{u[z]} = F[z] = \frac{\check{c}_0 + \check{c}_1 z + \check{c}_2 z^2 + \cdots + \check{c}_{n-1} z^{n-1}}{\check{a}_0 + \check{a}_1 z + \check{a}_2 z^2 + \cdots + \check{a}_{n-1} z^{n-1} + z^n} \quad (2.498)$$

Der Vergleich mit der Übertragungsfunktion (2.491) mit monischem Nennerpolynom zeigt, dass die Koeffizienten α_i des Nennerpolynoms den Einträgen \check{a}_i der Systemmatrix \mathbf{A}

($i = 1, \dots, n$) und die Koeffizienten β_j des Zählerpolynoms den Einträgen \check{c}_j des Auskopplvektors $\check{\underline{c}}$ ($j = 1, \dots, m$) entsprechen. Mit diesem Zusammenhang zwischen Ein- Ausgangsbeschreibung und Zustandsbeschreibung ist es möglich, Aussagen über das Zähler- und Nennerpolynom und somit über den Relativgrad des zeitdiskretisierten Systems zu treffen. Der Signalflussplan der Regelungsnormform (2.496) ist in Abbildung 2.66 zu sehen.

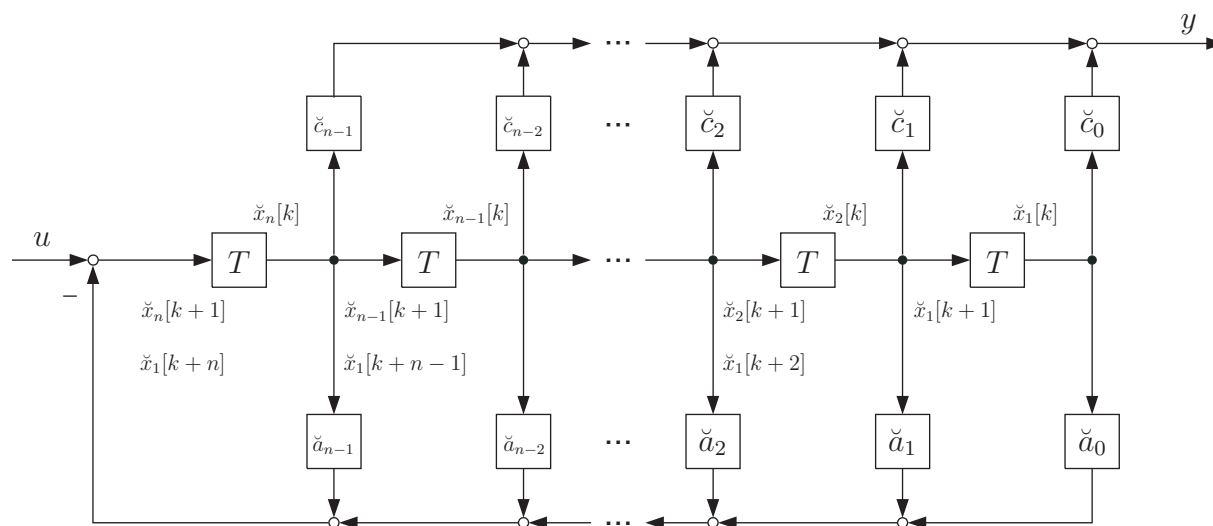


Abbildung 2.66: Signalflussplan eines zeitdiskreten linearen Systems in Regelungsnormform

Die Ordnung des Systems ist n , d.h. es beschreiben n Differenzgleichungen das dynamische Verhalten, womit n Speicherelemente mit Verzögerungsfunktion im Signalflussplan zu finden sind. Um eine Eigendynamik erzeugen zu können, bedarf es mindestens einer Rückkopplung. Hierbei hängt es von den Vorzeichen sowie Verstärkungen der Rückkopplungen ab, ob es sich um eine stabile Gegenkopplung oder um eine instabile Mitkopplung handelt. Wie im Signalflussplan zu erkennen, bestimmen, wie erwartet, die Einträge der Systemmatrix $\check{\mathbf{A}}$ die Art der Rückkopplungen, womit diese und folglich das Nennerpolynom $A[\cdot]$ das dynamische Verhalten des Systems beschreiben. Es ist einzig das Nennerpolynom für Stabilität verantwortlich. Durch die Zeitdiskretisierung bleibt die Ordnung n des Systems bzw. des Nennerpolynoms erhalten, da dieselbe Anzahl an Speicherelementen (Integrator vs. Verzögerer) zur Darstellung der Systemdynamik notwendig ist.

Im Unterschied zur zeitkontinuierlichen Darstellung besteht die zeitdiskrete Regelungsnormform nicht aus einer Integrator-kette, sondern einer Kette aus Verzögerungselementen (siehe Abbildung 2.66). Somit bestimmt sich der Zustand i nicht mehr aus einer mehrfachen Integration des Zustands j gemäß

$$x_i(t) = \int \dots \int x_j(t) d^{(j-i)}t, \quad i < j \leq n, \quad i, j \in \mathbb{N} \quad (2.499)$$

sondern aus einer zeitlichen Verzögerung um die Abtastzeit h des Zustands j :

$$x_i[k] = x_j[k + j - i], \quad i < j \leq n, \quad i, j \in \mathbb{N} \quad (2.500)$$

Der Ausgang y ist daher keine Linearkombination aus Zustandsveränderungen mehr (vgl. Abb. 2.4), sondern die Linearkombination des aktuellen und der vergangenen Werte des Zustands x_n bzw. des aktuellen und der zukünftigen Werte des Zustands x_1 . Die Gewichte der Linearkombination in der Regelungsnormalform, d.h. die Einträge \check{c}_i des Auskoppelvektors entsprechen den Koeffizienten des Zählerpolynoms β_i . Die Funktion des Zählerpolynoms ist daher in der Regelungsnormalform eindeutig zu erkennen.

Ein positiver Signalsprung am Eingang u führt nach einem Abtastschritt zu einer Veränderung des Zustands \check{x}_n und nach n Abtastschritten liegt dieser Wert auch am Zustand \check{x}_1 vor. Trotz konstantem Eingangssignal $u[\cdot]$ führt die Rückkopplung über die Nennerkoeffizienten \check{a}_i nach jedem Abtastschritt zu einer Veränderung des Zustands x_n und somit verzögert auch zu einer Veränderung der restlichen Zustände. Ist das System stabil, findet ein Einschwingvorgang auf die Gleichgewichtslage statt. Hiermit wird erneut deutlich, dass die Dynamik des Systems lediglich vom Nennerpolynom $A[\cdot]$ bzw. der Systemmatrix $\check{\mathbf{A}}$ abhängt. Es findet keine Veränderung der Zustände mehr statt, wenn alle Zustände den gleichen Wert einnehmen – eine Weitergabe zum nächsten Zustand durch das Verzögerungsglied führt dann zu keiner Änderung der Zustände mehr, womit die Gleichgewichtslage erreicht ist: $\lim_{k \rightarrow \infty} \check{x}_i[k] = \check{x}_{n,\infty} = \dots = \check{x}_{1,\infty}$. Das bestätigt das Theorem 2.33. Mit dieser Überlegung können die Verzögerungsglieder des Signalflussplanes im stationären Zustand durch eine Verstärkung mit 1 ersetzt werden. Folgende Gleichung kann somit nach der Gleichgewichtslage gelöst werden:

$$\check{x}_{i,\infty} = u_\infty - (\check{a}_0 + \check{a}_1 + \dots + \check{a}_{n-1}) \check{x}_{i,\infty} \quad (2.501)$$

$$\check{x}_{i,\infty} = \frac{1}{\check{a}_0 + \check{a}_1 + \dots + \check{a}_{n-1} + 1} u_\infty \quad (2.502)$$

Mit derselben Überlegung bestimmt sich das Ausgangssignal in der Gleichgewichtslage:

$$y_\infty = (\check{c}_0 + \check{c}_1 + \dots + \check{c}_{n-1}) \check{x}_{i,\infty} = \check{r}_\infty \check{x}_{i,\infty} \quad (2.503)$$

$$y_\infty = \frac{\check{c}_0 + \check{c}_1 + \dots + \check{c}_{n-1}}{\check{a}_0 + \check{a}_1 + \dots + \check{a}_{n-1} + 1} u_\infty \quad (2.504)$$

Es fällt auf, dass Gleichung (2.504) aus der Übertragungsfunktion (2.498), (2.491) bzw. (2.481) in monischer Darstellung berechnet werden kann, wenn für $z = 1$ bzw. $q = 1$ gesetzt wird. Da die Gleichsetzung mit Eins der oben dargestellten Ersetzung des Schiebeoperators gleichkommt, ergibt sich mit Anmerkung 2.14 die allgemein gültige Formel für die *stationäre Verstärkung*:

Anmerkung 2.17: Stationäre Verstärkung

Die Verstärkung zwischen Eingang u und Ausgang y in der Gleichgewichtslage wird für ein System in Ein- Ausgangsbeschreibung (Operatordarstellung, Übertragungsfunktion) wie folgt bestimmt:

$$k_\infty = \frac{y_\infty}{u_\infty} = \lim_{z \rightarrow 1} F[z] = \lim_{q \rightarrow 1} F[q] = \frac{\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_{m-1}}{\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1} + 1} \quad (2.505)$$

Liegt das System in Zustandsdarstellung vor, so ist das Theorem 2.33 anzuwenden.

Anmerkung 2.18:

Wie zur Bestimmung der Gleichgewichtslage zeitdiskreter Systeme das Verzögerungsglied durch eine Verstärkung Eins ersetzt wird, kann für zeitkontinuierliche Systeme wegen $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\underline{x}} = \underline{0}$ im stationären Zustand der Integrator durch eine Verstärkung Null ersetzt bzw. eliminiert werden. Gemäß der Anmerkung 2.3 kann somit sowohl der Operator s als auch ρ in der Ein- Ausgangsbeschreibung zur Bestimmung der stationären Verstärkung zu Null gesetzt werden. Dies führt zu der Erkenntnis in Anmerkung 2.5

Abhängig von der Eigendynamik, beschrieben durch die Einträge \check{a}_i der Systemmatrix bzw. α_i des Nennerpolynoms, erreichen die Zustandssignale mehr oder weniger schnell ihren Endwert und es ist bei konjugiert komplexen Polen eine Schwingung überlagert. Der Verlauf des Ausgangssignals wird zudem von den Einträgen \check{c}_i des Auskoppelvektors bzw. β_i des Zählerpolynoms bestimmt.

Das zeitkontinuierliche Beispielsystem (2.82) wird im Folgenden gemäß der Umrechnung (2.434) mit der ZOH-Methode zeitdiskretisiert und ebenfalls in die Regelungsnormalform überführt. Als Abtastzeit wird $h = 0.1s$ gewählt.

Beispielsystem ($h = 0.1s$):

$$\underline{\check{x}}[k+1] = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.4966 & 2.4064 & -4.3146 & 3.4043 \end{bmatrix}}_{\underline{\check{A}}} \underline{\check{x}}[k] + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\underline{\check{b}}} u[k] + \underline{\check{f}} v[k] \quad (2.506)$$

$$y[k] = \underline{\check{c}}^T \underline{\check{x}}$$

Für den Einkoppelvektor der Stellgröße $u[k]$ gilt in Regelungsnormalform:

$$\underline{\check{b}}^T = (0 \ 0 \ 0 \ 1)$$

Der Einkoppelvektor der Störung $v[k]$ lautet:

$$\underline{\check{f}}^T = (28.0942 \ 28.0934 \ 28.0941 \ 28.0892)$$

Hinsichtlich des Signals $v[\cdot]$ liegt keine Regelungsnormalform vor.

Die verschiedenen wählbaren Auskoppelvektoren ergeben sich nach der Zeitdiskretisierung zu:

$$\underline{\check{c}}^T = (\check{c}_0 \ \check{c}_1 \ \check{c}_2 \ \check{c}_3) = \begin{cases} \underline{\check{c}}_0^T = (0.0119 & 0.1516 & 0.1743 & 0.0182) 10^{-3} \\ \underline{\check{c}}_1^T = (0.0057 & 0.0249 & -0.0711 & 0.0408) \\ \underline{\check{c}}_2^T = (-0.3510 & 1.0560 & -1.0589 & 0.3542) \\ \underline{\check{c}}_3^T = (-0.0076 & 0.0385 & -0.0524 & 0.0218) \\ \underline{\check{c}}_4^T = (0.1533 & -0.4331 & 0.4047 & -0.1245) \\ \underline{\check{c}}_5^T = (-0.0390 & 0.1883 & -0.2591 & 0.1102) \end{cases}$$

Die Untersuchung des Nennerpolynoms $A[\cdot]$ mit dem Jury-Kriterium aus Theorem A.6 zeigt, dass die Stabilitätseigenschaft durch die Zeitdiskretisierung erhalten bleibt. Die Stabilitätsuntersuchung des Zählerpolynoms $B[\cdot]$ verdeutlicht jedoch, dass stabile Nullstellen nicht zwingend erhalten bleiben. Alle Nullstellenpolynome, die mit den Auskoppelvektoren \check{c} gebildet werden, besitzen die volle Ordnung, d.h. das System mit dem Auskoppelvektor \check{c}_0 bekommt durch die Diskretisierung drei Nullstellen hinzu, wobei eine Nullstelle instabil wird. Das System mit dem Auskoppelvektor \check{c}_1 verändert bei voller Ordnung des zeitkontinuierlichen Systems nicht die Anzahl der Nullstellen, weshalb die Eigenschaft stabiler Nullstellen erhalten bleibt. Nach dem Jury-Test zeigen alle weiteren Systeme mit den unterschiedlichen Auskoppelvektoren \check{c}_2 bis \check{c}_5 entsprechend ihres zeitkontinuierlichen Systems instabile Nullstellen.

Während sich das Verhalten der zeitdiskreten und zeitkontinuierlichen Zustände unterschiedlich zeigt, ist das Verhalten der Ausgangssignale $y[\cdot]$ und $y(\cdot)$ in der Simulation 2.67 identisch. Die zeitlichen Verläufe der zeitdiskreten Zustandssignale $\check{x}_i[\cdot]$ des Beispielsystems vierter Ordnung mit konjugiert komplexen Polen sind in Abbildung 2.67 oben zu sehen. Zum Vergleich sind auch die zeitkontinuierlichen Zustände dargestellt, wobei alle Zustände auf den Wert des Ausgangssignals gemäß Gleichung (2.503) bzw. (2.83) skaliert sind. Es ist hierbei anzumerken, dass alle Auskoppelvektoren \bar{c} des Beispielsystems auf Grund ihrer Skalierung auf denselben Endwert führen.

Der Verlauf der zeitdiskreten Zustände bestätigt obige Diskussion: die vier Zustände sind zeitlich um eine Abtastzeit h zueinander versetzt und streben einen gemeinsamen Endwert an. Nachdem das zeitdiskrete Ausgangssignal $y[\cdot]$ eine Linearkombination der zeitversetzten Zustände ist, zeigen diese einen ähnlichen Verlauf wie das Ausgangssignal $y[\cdot]$ bzw. $y(\cdot)$, liegen jedoch nicht auf diesem. Das zeitkontinuierliche Zustandssignal $\bar{x}_1(\cdot)$ repräsentiert in der Simulation mit der Skalierung $\bar{r}_\infty = \bar{c}_0$ das Ausgangssignal $y(\cdot)$ gemäß Gleichung (2.83). Die restlichen zeitkontinuierlichen Zustände streben auf Grund der Integrator-kette im stationären Zustand gegen Null.

In Abbildung 2.67 unten sind die Verläufe des Ausgangssignals $y[\cdot]$ bzw. $y(\cdot)$ basierend auf den sechs unterschiedlichen Auskoppelvektoren \bar{c} zu sehen. Gemäß des Kapitels 2.3.1 liegt das mit der ZOH-Methode diskretisierte Signal bei jedem Abtastschritt exakt auf dem zeitkontinuierlichen Signal – die ZOH-Methode ist daher keine Näherung. Somit ist das zeitdiskrete Signal basierend auf der ZOH-Methode zur fehlerfreien Identifikation des Systems in Kapitel 5.2 geeignet. Der Endwert $\lim_{k \rightarrow \infty} y[k] = 0.8$, bestimmt mit Gleichung (2.504), wird in der Simulation bestätigt. Auf Grund der konjugiert komplexen Pole findet jeweils ein Einschwingvorgang statt, der durch die jeweiligen Nullstellen bzw. Auskoppelvektoren mehr oder weniger verstärkt wird.

2.3.6 Auswirkung der Zeitdiskretisierung auf das dynamische Verhalten des Systems bzw. geschlossenen Regelkreises

Wie im vorigen Kapitel am Beispielsystem dargestellt wurde, kann sich die Anzahl der Nullstellen und folglich die Stabilitätseigenschaft des Zählerpolynoms durch die Zeitdiskretisierung verändern. Das Systemverhalten bleibt jedoch erhalten.

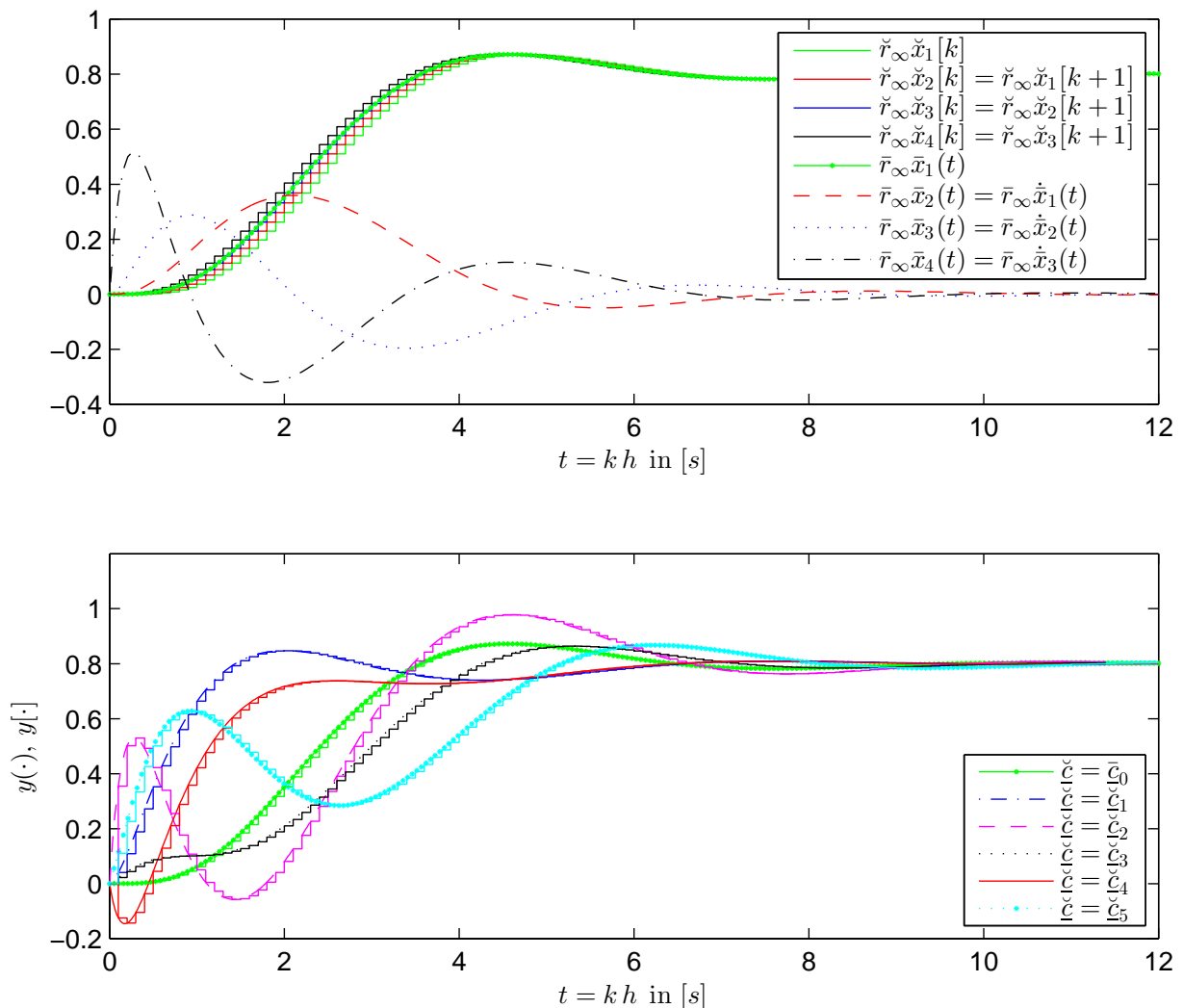


Abbildung 2.67: Sprungantworten der mit $\check{r}_\infty = \sum_0^{n-1} \check{c}_i$ bzw. $\bar{r}_\infty = \bar{c}_0$ skalierten zeitdiskreten bzw. zeitkontinuierlichen Zustände \check{x}_i bzw. \bar{x}_i sowie des Ausgangs y eines Systems in Regulationsnormalform bei unterschiedlichen Auskoppelvektoren \check{c}_i ; Abtastzeit: $h = 0.1s$

2.3.6.1 Relativgrad

Wie im Zeitkontinuierlichen bezeichnet der Relativgrad auch im Zeitdiskreten die Ordnungsdifferenz $r = n - m$ zwischen dem Zähler und dem Nennerpolynom. Anhand der Regulationsnormalform lässt sich jeweils der physikalische Hintergrund erklären. Das Kapitel 2.2.5.1 hat verdeutlicht, dass sich mit steigender Anzahl an Nullstellen des zeitkontinuierlichen Systems die Dynamik erhöht. Je mehr Integratoren im Signalfussplan 2.4 nach Beaufschlagung des Eingangssignals durchlaufen werden müssen, bevor eine Auskopplung durch das Nullstellenpolynom bzw. durch den Auskoppelvektor auf den Ausgang geschieht, desto flacher ist die Anfangssteigung des zeitkontinuierlichen Ausgangssignals $y(\cdot)$.

Der zeitdiskrete Signalfussplan 2.66 der Regulationsnormalform weist an Stelle einer Kette aus Integratoren eine Kette aus Verzögerungsgliedern auf. Ein beaufschlagtes Eingangssignal gelangt je nach Auskoppelvektor bzw. Nullstellenpolynom um ein Vielfaches der Ab-

tastzeit h verzögert an den Ausgang. Über die zeitdiskreten Nullstellen wird daher nicht die Anfangssteigung, sondern die Verzögerung bzw. Totzeit zwischen dem Eingangssignal $u[\cdot]$ und Ausgangssignal $y[\cdot]$ beschrieben.

Das zeitkontinuierliche System 2.13 besitzt keinen Durchgriff und keine Totzeit zwischen Eingang und Ausgang. Je nach Dynamik des Systems unterscheidet sich lediglich die Anfangssteigung zum Zeitpunkt $t = 0^+$, d.h. die instantane Verstärkung (Anmerkung 2.7). Nachdem das Ausgangssignal $y[\cdot]$ des mit der ZOH-Methode zeitdiskretisierten Systems nach jedem Abtastschritt h exakt auf dem Signalverlauf $y(\cdot)$ des zeitkontinuierlichen Systems liegt (vgl. Kapitel 2.3.1), kann die Verzögerung bzw. Totzeit des zeitdiskreten Systems lediglich h betragen. Folglich muss der Auskoppelvektor der zeitdiskreten Regelungsnormalform stets ein $\check{c}_{n-1} \neq 0$ aufweisen (siehe Signalfussplan 2.66), was zu einem Nullstellenpolynom der Ordnung $m = n - 1$ und einem Relativgrad $r = 1$ führt.

Theorem 2.35: Relativgrad nach ZOH-Diskretisierung

Als Relativgrad r wird die Differenz der Ordnungen von Zähler- und Nennerpolynom bezeichnet:

$$r = n - m \quad (2.507)$$

Ein Relativgrad r bedeutet eine Totzeit

$$t_T = r h \quad (2.508)$$

zwischen einer Änderung des Eingangssignals $u[\cdot]$ und der Antwort des Ausgangssignals $y[\cdot]$ auf diese Änderung. Mit h wird die Abtastzeit der Zeitdiskretisierung bezeichnet.

Die Zeitdiskretisierung eines Systems ohne Totzeit und Durchgriff führt mit der ZOH-Methode zwangsläufig zu einem Relativgrad $r = 1$. Dies ist die schnellstmögliche Antwort des zeitdiskreten Modells auf eine Signaländerung des zu repräsentierenden zeitkontinuierlichen Systems ohne Totzeit und Durchgriff bei einer Abtastzeit h .

2.3.6.2 Einfluss der Zeitdiskretisierung auf die Stabilität und Minimalphasigkeit

Es stellt sich die Frage, ob bei der Zeitdiskretisierung die Stabilitätseigenschaft der Eigenwerte/Pole erhalten bleibt. Der stabile Bereich ist für zeitkontinuierliche Systeme gemäß Theorem 2.3 die linke s -Halbebene einschließlich der imaginären Achse, während er für zeitdiskrete Systeme gemäß Theorem 2.32 die Scheibe innerhalb des Einheitskreises einschließlich des Einheitskreises selbst ist. Es ist nun zu zeigen, dass durch die Zeitdiskretisierung die imaginäre Achse auf den Einheitskreis abgebildet wird, womit die Stabilitätseigenschaft erhalten bliebe. Durch Anwendung der Transformationsvorschrift (2.434) auf die Systemmatrix der modalen Zustandsdarstellung (2.451) in Diagonalgestalt folgt:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} = \Lambda = e^{\tilde{\Lambda} h} = e^{\begin{bmatrix} \tilde{\lambda}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \tilde{\lambda}_n \end{bmatrix} h} = \begin{bmatrix} e^{\tilde{\lambda}_1 h} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\tilde{\lambda}_n h} \end{bmatrix} \quad (2.509)$$

Hiermit ergibt sich die eindeutige Abbildungsvorschrift:

Theorem 2.36: Abbildungsvorschrift der Eigenwerte/Pole

Durch Anwendung der ZOH-Zeitdiskretisierung findet die Abbildung der Eigenwerte bzw. Pole gemäß der Vorschrift

$$\lambda_i = e^{\tilde{\lambda}_i h}, \quad p_i = e^{\tilde{p}_i h}, \quad i \in \{1, \dots, n\} \quad (2.510)$$

statt. Die Anzahl der Pole bleibt erhalten. Je nach Abtastzeit h ergeben sich unterschiedliche Werte der Eigenwerte/Pole. Als Grenzwert für eine sehr schnelle Abtastung gilt:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \lambda_i = 1, \quad \lim_{h \rightarrow 0} p_i = 1, \quad i \in \{1, \dots, n\} \quad (2.511)$$

Bildet man mit Gleichung (2.510) die imaginäre Achse der s -Ebene als Stabilitätsgrenze in den z -Bereich ab, so resultiert mit

$$z_{EK} = e^{j \operatorname{Im}\{s\} h} \stackrel{(2.63)}{=} e^{j\omega h} \stackrel{(A.44)}{=} \cos(\omega h) + j \sin(\omega h) \quad (2.512)$$

der Einheitskreis als Stabilitätsgrenze in der z -Ebene. Mit dem Stabilitätskriterium in Theorem 2.32 wird damit die Stabilitätseigenschaft des Systems trotz Zeitdiskretisierung stets erhalten.

Generell gilt zwischen dem s - und z -Bereich unter Beachtung der Gleichungen (2.63) und (2.487) die Abbildungsvorschrift:

$$z = e^{s h} = e^{\sigma h} [\cos(\omega h) + j \sin(\omega h)], \quad s = \sigma + j\omega, \quad z = r e^{j\varphi} \quad (2.513)$$

Die Abbildung des stabilen Bereiches der s -Ebene zeigt Abbildung 2.68. Hierbei ist zu

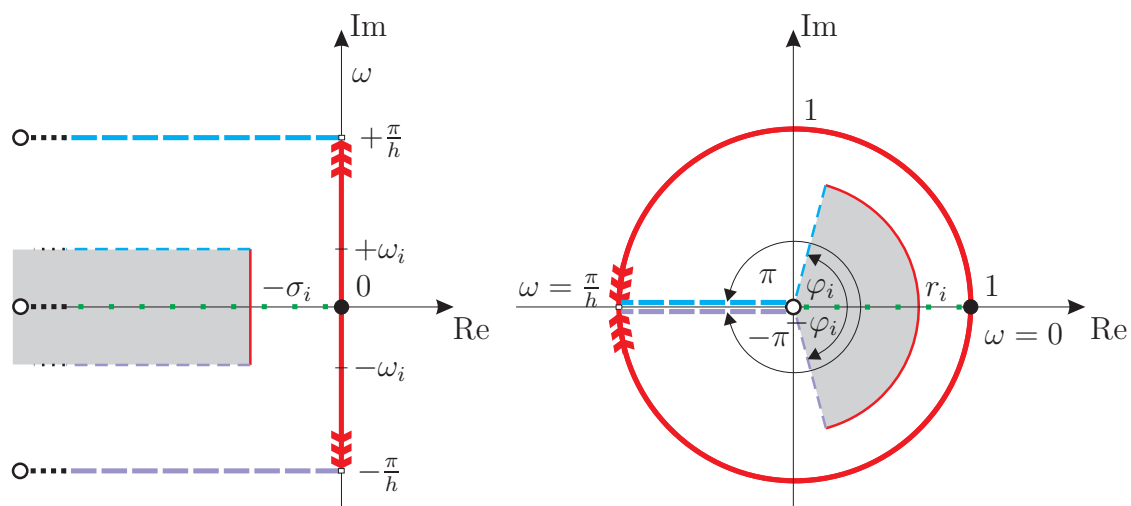


Abbildung 2.68: Abbildung des Stabilitätsbereiches der s - bzw. p -Ebene (**links**) in die z - bzw. q -Ebene (**rechts**)

beachten, dass das zeitdiskrete Modell das zeitkontinuierliche System nur bei Einhaltung des Abtasttheorems nach Shannon eindeutig repräsentiert [51, 135].

Theorem 2.37: Abtasttheorem nach Shannon

Um eine eindeutige Rekonstruktion des zeitkontinuierlichen Signals nach vollzogener Zeitdiskretisierung zu ermöglichen, muss die Abtastfrequenz $f_A = 1/h$ bzw. Abtastkreisfrequenz $\omega_A = 2\pi/h$ mindestens der doppelten der im System vorkommenden Eigenfrequenzen $f_{D,i}$ bzw. Kennkreisfrequenzen $\omega_{D,i}$

$$f_A \geq 2 f_{D,i} = \frac{\text{Im}\{\tilde{p}_i\}}{\pi} = \frac{\omega_i}{\pi}, \quad \omega_A \geq 2 \omega_{D,i} = 2 \text{Im}\{\tilde{p}_i\} = 2 \omega_i \quad (2.514)$$

sowie Eckfrequenzen $f_{E,i}$ bzw. Eckkreisfrequenzen $\omega_{E,i}$

$$f_A \geq 2 f_{E,i} = -\frac{2}{\tilde{p}_i}, \quad \omega_A \geq 2 \omega_{E,i} = -\frac{4\pi}{\tilde{p}_i} \quad (2.515)$$

entsprechen.

Für die Abbildung in den z -Bereich bedeutet dies, dass nur Frequenzen bis zur halben Abtastfrequenz betrachtet werden dürfen:

$$\omega_{max} = 2\pi f_{max} = 2\pi \frac{f_A}{2} = \frac{\pi}{h} \quad (2.516)$$

Folglich führt nur die Abbildung der imaginären Achse zwischen $[-\pi/h, \pi/h]$ zu einer sinnvollen physikalischen Repräsentation des realen Systems durch das zeitdiskrete Modell. Die Abbildungsvorschrift (2.512) bestätigt dies, nachdem bereits für Frequenzen $-\pi/h \leq \omega \leq \pi/h$ ein Winkel von $\varphi = -180^\circ$ bis $\varphi = 180^\circ$ durchfahren wird und sich damit der Einheitskreis für diese Auswahl an Frequenzen schließt. Wird das Abtasttheorem nicht eingehalten, d.h. enthält das System dennoch höhere Kennkreisfrequenzen mit $\omega_{D,i} > \omega_A/2$, so werden diese Kennkreisfrequenzen durch das zeitdiskrete Modell nicht bzw. verfälscht durch die Verschiebung auf/in den Einheitskreis mit der Kennkreisfrequenz $\omega_A - \omega_{D,i}$ dargestellt. Durch die Faltung verhält sich das zeitdiskrete Modell, als hätte das reale zeitkontinuierliche System Pole bei

$$\tilde{p}_i = -\sigma_i \pm j(\omega_i \pm l\omega_A); \quad l \in \mathbb{N}^+ \quad (2.517)$$

an Stelle von $\tilde{p}_i = -\sigma_i \pm j\omega_i$.

Bei Einhaltung des Abtasttheorems findet gemäß der Gleichung (2.513) folgende Abbildung statt:

- $s = 0 \rightarrow z = 1$
- $s = -\sigma + j\omega|_{\sigma \rightarrow \infty} \rightarrow z = 0$
- Die imaginäre Achse $s = j\omega$ mit $\omega \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ wird auf den Einheitskreis mit $r = 1$ und $\varphi \in [-180^\circ, 180^\circ]$ abgebildet
- Achsen parallel zur imaginären Achse mit $\sigma = \text{const} \in]-\infty, \infty[$ und $\omega \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ werden auf einen Kreis mit dem Radius $r \in [0, \infty[$ abgebildet
- Die reelle Achse wird auf die Gerade mit $\varphi = 0$ und $r \in [0, \infty[$ abgebildet

- Achsen parallel zur reellen Achse mit $\omega = \text{const} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ werden auf eine Gerade mit $\varphi \in [-180^\circ, 180^\circ]$ und $r \in [0, \infty[$ abgebildet

Wie Abbildung 2.68 veranschaulicht, wird mit obiger Abbildungsvorschrift ein um die reelle Achse symmetrisches Rechteck in der stabilen linken Halbebene des s -Bereichs auf einen um die reelle Achse symmetrischen Sektor im stabilen Einheitskreis des z -Bereichs abgebildet. Eine Besonderheit ist die Abbildung von sehr schnellen Polen mit $\tilde{p}_i = (-\sigma_i + j\omega_i)|_{\sigma_i \rightarrow \infty}$ auf $p_i = 0$. $p_i = 0$ bedeutet eine Verzögerung um die Abtastzeit h und stellt damit die schnellstmögliche Reaktion des zeitdiskreten Systems dar. Um ein schnelles zeitkontinuierliches System gut zu repräsentieren, sollte die Abtastzeit entsprechend klein gewählt werden.

Die Stabilitätseigenschaft basierend auf den Polstellen wird durch die Zeitdiskretisierung nicht beeinflusst. Jedoch wird die Eigenschaft der Minimalphasigkeit basierend auf den Nullstellen durch die Zeitdiskretisierung verändert.

Nachdem gemäß des Theorems 2.35 jedes mit der ZOH-Methode zeitdiskretisierte System einen Relativgrad $r = 1$ erhält, müssen durch den Diskretisierungsvorgang weitere Nullstellen entstehen, sofern das zeitkontinuierliche System einen Relativgrad $\tilde{r} > 1$ hat. Während alle Polstellen mit der eindeutigen Vorschrift (2.510) durch die Zeitdiskretisierung von der stabilen s -Ebene in den stabilen Einheitskreis der z -Ebene abgebildet werden, gilt dies nicht für die Nullstellen.

Wie anhand der Regelungsnormalformen zu sehen war, kommt den Nullstellen abhängig von einer Differential- oder einer Differenzendarstellung eine unterschiedliche mathematische Bedeutung zu. Das Ausgangssignal wird nicht mehr wie bei der zeitkontinuierlicher Darstellung durch eine Linearkombination der Zustandsänderungen, sondern durch eine Linearkombination der zeitlich versetzten Zustände gebildet.

Durch die Zeitdiskretisierung werden die Nullstellen derart angepasst, so dass das Ausgangssignal trotz der Zustandsbeschreibung in Differenzendarstellung repräsentiert wird. Hierzu findet eine Erhöhung der Anzahl der Nullstellen auf $m = n - 1$ statt und es können notwendigerweise dadurch Nullstellen außerhalb des Einheitskreises entstehen bzw. dorthin verschoben werden. Wie im Folgenden deutlich wird, ist dies unter anderem von der Wahl der Abtastzeit abhängig.

Das zeitkontinuierliche minimalphasige Beispielsystem 2.82 mit dem Auskoppelvektor \bar{c}_0 wurde für die Abbildung 2.69 mit den unterschiedlichen Abtastzeiten $h = 3.2s$, $h = 2.36s$ sowie $h = 0.1s$ diskretisiert. In der Abbildung 2.69 unten links führt eine schnelle Abtastung zu einer eindeutigen Repräsentation des zeitkontinuierlichen Systems durch das zeitdiskrete System. Mit der Abbildung 2.69 unten rechts wird jedoch deutlich, dass eine schnelle Abtastung mit der Entstehung einer instabilen Diskretisierungsnullstelle erkauft werden muss. Obwohl das physikalische Verhalten der Strecke eindeutig repräsentiert wird, entsteht aus einer gut regelbaren zeitkontinuierlichen Strecke, einer minimalphasigen Strecke, eine zeitdiskrete Strecke mit instabilen Nullstellen. Während das zeitdiskrete System beliebig mit einem erweiterten Referenzmodellregler beeinflusst werden kann, können nun mit der vorliegenden zeitdiskreten nicht-minimalphasigen Strecke die Nullstellen nicht mehr beeinflusst werden ohne entstehender Instabilität des geschlossenen Regelkreises.

Wird die Abtastzeit erhöht, so wandert die instabile Nullstelle in den stabilen Einheits-

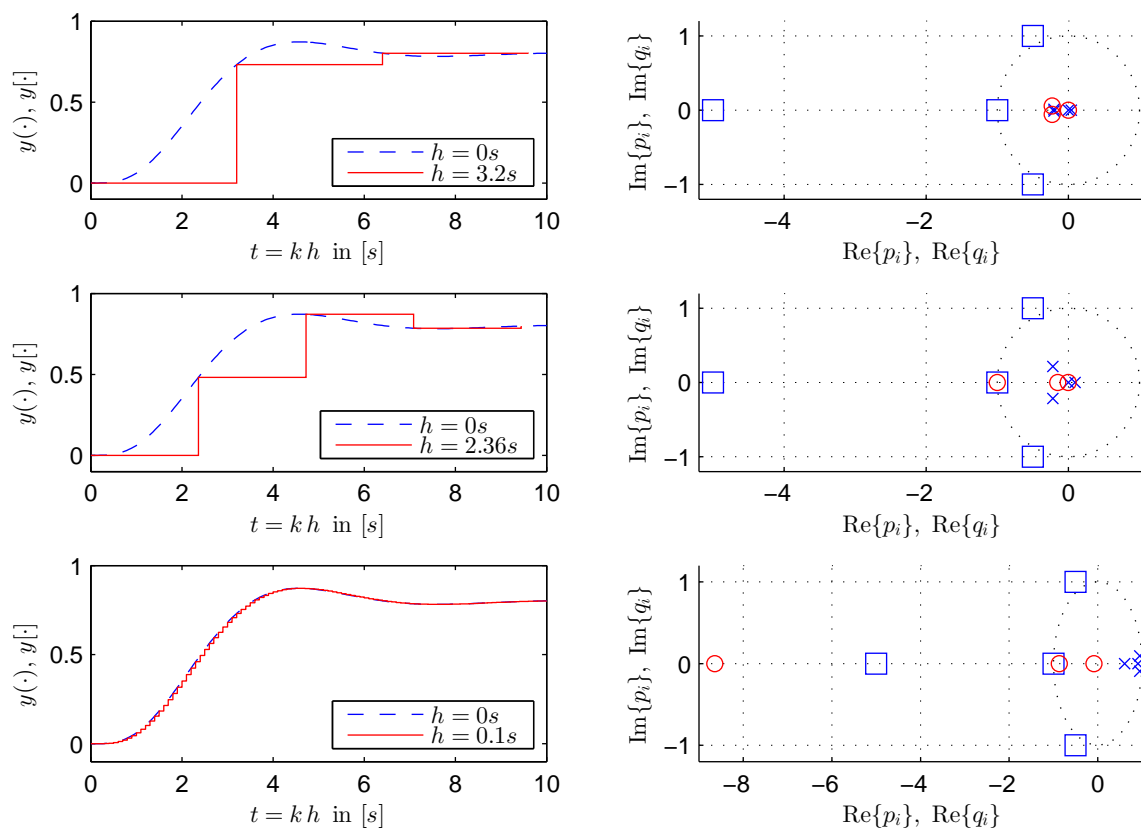


Abbildung 2.69: \circ : Nullstellen des zeitdiskreten Systems; \times : Polstellen des zeitdiskreten Systems; \square : Polstellen des zeitkontinuierlichen Systems

links: zeitkontinuierliche und zeitdiskrete Sprungantworten bei verschiedenen Abtastzeiten
rechts: zugehörige Pol- Nullstellenverteilungen

kreis. Die Simulation in der Abbildung 2.69 Mitte zeigt den Eintritt der Nullstelle in den Einheitskreis bei $h = 2.36s$. Wie die Sprungantwort verdeutlicht, ist bei dieser Abtastzeit die zeitkontinuierliche Systemantwort gerade noch rekonstruierbar – der Wendepunkt, das Maximum des Überschwingens als auch das Minimum des Unterschwingens werden durch die Abtastung erfasst. Wird die Abtastzeit noch größer gewählt, wie es Abbildung 2.69 oben links zeigt, ist eine Rekonstruktion nicht mehr möglich – das zeitdiskrete Signal suggeriert die Systemantwort eines PT_1 -Systems ohne Über- und Unterschwingen. Den Vorteil stabiler Nullstellen (vgl. Abbildung 2.69 oben rechts) erkaufte man sich nun mit einer Unterabtastung des Systems, was ein erfolgreiches Regeln unterbindet (das Shannon-Theorem 2.37 wird nicht erfüllt). Die Erfahrung zeigt, wie später auch beim Zwei-Massen-System zu erkennen sein wird, dass bei ausreichend guter Abtastung zur Repräsentation der Systemeigenschaften instabile Nullstellen entstehen. Somit kann zur Elimination der Schwingungen kein inverser Regler Verwendung finden. Sobald die Abtastzeit so gewählt wird, dass das System mit einem inversen Regler beeinflusst werden kann, wird auf Grund der Unterabtastung die Schwingung nicht mehr erkannt und somit durch den Regler auch nicht eliminiert. An dieser Stelle wird deutlich, dass die Anwendung eines Referenzmodellreglers auf ein zeitdiskretisiertes System zur Beeinflussung der Nulldynamik problematisch ist, selbst wenn das zeitkontinuierliche System minimalphasig ist.

Mit der Erkenntnis, dass ein mit der ZOH-Methode diskretisiertes System eine Übereinstimmung der Ausgangssignalwerte $y(kh) \stackrel{!}{=} y[k]$ bei jedem Abtastschritt aufzeigt, und mit der Bedingung einer ausreichend hohen Abtastzeit zur Repräsentation aller systemeigenen Schwingungen muss das physikalische Verhalten des zeitdiskretisierten Systems identisch mit dem des zeitkontinuierlichen Systems sein. Dies bestätigt die Abbildung 2.69 unten links, jedoch entstehen bei mittlerer bis hoher Abtastung instabile Diskretisierungsnullstellen. Es stellt sich die Frage, weshalb sich instabile Nullstellen nicht auf das physikalische Verhalten des Systems auswirken, wie es für zeitkontinuierliche Strecken in Kapitel 2.2.5 dargestellt wurde.

Systeme mit instabilen Nullstellen bezeichnet man sowohl für den zeitkontinuierlichen als auch zeitdiskreten Bereich als nicht-minimalphasig. In Anlehnung an die zeitkontinuierliche Definition 2.10 der Minimalphasigkeit gilt für den zeitdiskreten Bereich:

Definition 2.18: Minimalphasige Systeme ⁵⁾

Das lineare dynamische System (2.436) wird als minimalphasig bezeichnet, wenn keine instabilen Nullstellen existieren:

$$B[z] = \det \begin{bmatrix} [z \mathbf{E} - \mathbf{A}] & -\underline{b} \\ \underline{c}^T & 0 \end{bmatrix} \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad |z| > 1 \quad (2.518)$$

Andernfalls liegt ein nicht-minimalphasiges System vor.

Die Übertragungsfunktion (2.491) eines Systems lässt sich stets in die Pol- Nullstellendarstellung (2.492) überführen, mit der der Phasen- und Amplitudengang aus einer multiplikativen Kombination von Grundbausteinen des Nenners und Zählers

$$F_B[z] = \prod_{j=1}^{m=n-1} F_{Bj}[z] = \prod_{j=1}^{n-1} (z - q_j) = \prod_{j=1}^{n-1} (z - r_j e^{j\varphi_j}) \quad (2.519)$$

$$F_A[z] = \prod_{i=1}^n F_{Ai}[z] = \prod_{i=1}^n \frac{1}{z - p_i} = \prod_{i=1}^n \frac{1}{z - r_i e^{j\varphi_i}} \quad (2.520)$$

resultiert. Die Grundbausteine lauten:

$$G_B[z] = r_B[z] e^{j\varphi_B[z]} = z - q_1 = z - r_1 e^{j\varphi_1} = G_A[z]^{-1} = \frac{1}{r_A[z]} e^{-j\varphi_A[z]} \quad (2.521)$$

$$G_A[z] = r_A[z] e^{j\varphi_A[z]} = \frac{1}{z - q_1} = \frac{1}{z - r_1 e^{j\varphi_1}} = \frac{1}{r_B[z] e^{j\varphi_B[z]}} = G_B[z]^{-1} = \frac{1}{r_B[z]} e^{-j\varphi_B[z]} \quad (2.522)$$

⁵⁾ In der Literatur (vgl. [14], [39], [46], [113],[138]) sind auch strengere Definitionen zu finden, so dass ein minimalphasiges System zum einen keine grenzstabilen Nullstellen besitzen darf und zum anderen in einer noch strengeren Definition zudem nur stabile Polstellen auftreten dürfen: $|q_j| < 1$, $|p_i| < 1$. Nachdem es sich in dieser Arbeit um die Regelbarkeit von Systemen mit instabilen Nullstellen handelt, ist die Definition 2.18 ausreichend und zielführend.

Es gilt folgender Zusammenhang zwischen Nenner- und Zähler-Grundbaustein:

$$|G_B[z]| = |G_A[z]|^{-1} = r_B[z] = \frac{1}{r_A[z]} \quad (2.523)$$

$$\angle G_B[z] = -\angle G_A[z] = \varphi_B[z] = -\varphi_A[z] \quad (2.524)$$

Zur Bestimmung des Amplituden- und Phasenganges eines Grundbausteins wird dieser mit sinusförmigen Signalen beaufschlagt bzw. die Untersuchung entlang des Einheitskreises durchgeführt. Pole auf dem Einheitskreis sind grenzstabil und führen zu Dauerschwingungen mit der Frequenz ω . Gemäß der Gleichung (2.512) gilt für Pole auf dem Einheitskreis $z = e^{-j\omega h}$. Zur Einhaltung des Shannon-Theorems darf gemäß der Gleichung (2.516) die Frequenz nur Werte $\omega \in [0, \pi/h]$ annehmen. Aus Gleichung (2.521) folgt:

$$G_B[e^{j\omega h}] = e^{j\omega h} - r_1 e^{j\varphi_1} = [\cos(\omega h) - r_1 \cos \varphi_1] + j[\sin(\omega h) - r_1 \sin \varphi_1] \quad (2.525)$$

Für den Amplituden- und Phasengang gilt:

$$|G_B[e^{j\omega h}]| = r_B[\omega] = \sqrt{[\cos(\omega h) - r_1 \cos \varphi_1]^2 + [\sin(\omega h) - r_1 \sin \varphi_1]^2} \quad (2.526)$$

$$= \sqrt{1 + r_1^2 - 2r_1 \cos(\omega h - \varphi_1)} \quad (2.527)$$

$$\angle G_B[e^{j\omega h}] = \varphi_B[\omega] = \arctan \left(\frac{\sin(\omega h) - r_1 \sin \varphi_1}{\cos(\omega h) - r_1 \cos \varphi_1} \right) \quad (2.528)$$

Um die globale Phasendrehung beim Durchlaufen der Frequenz $\omega = 0$ nach $\omega = \pi/h$ in Richtung und Betrag zu bestimmen, wird die Ableitung $d\varphi_B/d\omega$ gebildet:

$$\frac{d\varphi_B[\omega]}{d\omega} = h \frac{1 - r_1 \cos(\varphi_1 - \omega h)}{1 + r_1^2 - 2r_1 \cos(\varphi_1 - \omega h)} = h \frac{1 - r_1 \cos(\varphi_1 - \omega h)}{r_B^2[\omega]} \quad (2.529)$$

Die globale Phasendrehung berechnet sich durch Integration der Gleichung (2.529):

$$\Delta\varphi_B = \int_{\omega=0}^{\frac{\pi}{h}} \frac{d\varphi}{d\omega} d\omega = \frac{\omega h}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{h}} + \arctan \left[\frac{(1 + r_1^2)^2 \tan \frac{\omega h - \varphi_1}{2}}{1 - r_1^2} \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{h}} \quad (2.530)$$

Mit eingesetzten Grenzen resultiert:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_B &= \frac{\pi}{2} + \arctan \left[\frac{(1 + r_1^2)^2 \tan \frac{\pi - |\varphi_1|}{2}}{1 - r_1^2} \right] + \arctan \left[\frac{(1 + r_1^2)^2 \tan \frac{|\varphi_1|}{2}}{1 - r_1^2} \right], \quad 0 \leq \varphi_1 \leq \pi \\ \Delta\varphi_B &= \frac{\pi}{2} - \arctan \left[\frac{(1 + r_1^2)^2 \tan \frac{\pi - |\varphi_1|}{2}}{1 - r_1^2} \right] - \dots \\ &\dots - \arctan \left[\frac{(1 + r_1^2)^2 \tan \frac{|\varphi_1|}{2}}{1 - r_1^2} \right] + \pi \frac{1 - r_1^2}{|1 - r_1^2|}, \quad -\pi < \varphi_1 < 0 \end{aligned} \quad (2.531)$$

Hierbei ist die Unstetigkeit der tan-Funktion bei $\pi/2$ zu beachten, welche zu einem Sprung der arctan-Funktion um $-\pi$ ($r_1 \leq 1$) bzw. π ($r_1 > 1$) führt. Dies berücksichtigt die Fallunterscheidung in Gleichung (2.531) durch Addition von π ($r_1 \leq 1$) bzw. $-\pi$ ($r_1 > 1$), so dass eine stetige Funktion für $\Delta\varphi_B$ resultiert.

Für einen reellen minimalphasigen Zähler-Grundbaustein (2.521), d.h. $\varphi_1 = 0$ oder $\varphi_1 = \pi$ und $0 \leq r_1 \leq 1$, ergibt sich mit Gleichung (2.531) folgende globale Phasendrehungen: ⁶⁾

$$\begin{aligned} G_B[z] &= (z - q_1), \quad q_1 \in \mathbb{R}, \quad |q_1| \leq 1 : \\ \Delta\varphi_B &= \pi, \quad \frac{d\varphi_B[\omega]}{d\omega} \geq 0 \end{aligned} \quad (2.532)$$

Mit Gleichung (2.529) wird zudem deutlich, dass für einen reellen minimalphasigen Zähler-Grundbaustein die Phasenverschiebung mit steigender Frequenz monoton steigt. Ist der reelle Zähler-Grundbaustein mit $r_1 > 1$ nicht-minimalphasig, so liegt kein monotonen Verhalten mehr im Phasengang vor. Die Richtungsumkehr der Phasendrehung führt gemäß Gleichung (2.531) auf den Anfangswert zurück:

$$\begin{aligned} G_B[z] &= (z - q_1), \quad q_1 \in \mathbb{R}, \quad |q_1| > 1 : \\ \Delta\varphi_B &= 0, \quad \frac{d\varphi_B[\omega]}{d\omega} \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (2.533)$$

Komplexe Grundbausteine treten stets paarweise mit $G_{B1}[\cdot]$ und $G_{B2}[\cdot]$ auf, wobei diese konjugiert komplex zueinander sind. Die Pol- bzw. Nullstellen sind symmetrisch zur reellen Achse, d.h. $\varphi_1 = -\varphi_2$ und $r_1 = r_2$ (siehe Abbildung 2.68). Nachdem die Fallunterscheidung in Gleichung (2.531) zwischen oberer und unterer Hälfte der komplexen z -Ebene differenziert, bestimmt sich die globale Phasendrehung zweier konjugiert komplexer Grundbausteine durch Summation der beiden Fälle. Für einen minimalphasigen konjugiert komplexen Zähler-Grundbaustein folgt:

$$\begin{aligned} G_B[z] &= G_{B1}[z] G_{B2}[z] = (z - q_1)(z - q_2) = (z - q_1)(z - \bar{q}_1), \quad q_1 \in \mathbb{C}, \quad |q_1| \leq 1 : \\ \Delta\varphi_B &= 2\pi, \quad \frac{d\varphi_B[\omega]}{d\omega} \geq 0 \end{aligned} \quad (2.534)$$

Sobald auch im komplexen Fall instabile Nullstellen, d.h. nicht-minimalphasige Grundbausteine vorliegen, findet eine Richtungsänderung in der Phasendrehung auf Grund eines oder beider konjugiert komplexer Grundbausteine statt. Dies führt zu einer globalen Phasendrehung von Null bei Summation der beiden Fälle in Gleichung (2.531):

$$\begin{aligned} G_B[z] &= G_{B1}[z] G_{B2}[z] = (z - q_1)(z - q_2) = (z - q_1)(z - \bar{q}_1), \quad q_1 \in \mathbb{C}, \quad |q_1| > 1 : \\ \Delta\varphi_B &= 0, \quad \frac{d\varphi_B[\omega]}{d\omega} \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (2.535)$$

Die Eigenschaften des Zähler-Grundbausteins (2.521) können mit dem Zusammenhang (2.524) auf den Nenner-Grundbaustein (2.522) übertragen werden. Gemäß der Eigenschaft (2.532) folgt für reelle stabile Nenner-Grundbausteine eine Phasenabsenkung

⁶⁾ Der grenzstabile Fall $r_1 = 1$ wird als Übergang des stabilen Falls $0 \leq r_1 < 1$ betrachtet, bei dem für $r_1 \rightarrow 1$ ein monotoner Anstieg von 0° auf 180° über ein Plateau bei 90° stattfindet. Für $r_1 = 1$ tritt daher ein Anstieg von 0° auf 90° als Sprung bei $\omega = 0$ auf mit anschließendem monotonen Anstieg auf 180° (siehe Abbildung 4.4).

(siehe Fußnote auf Seite 189):

$$G_A[z] = \frac{1}{(z - q_1)}, \quad q_1 \in \mathbb{R}, \quad |q_1| \leq 1 :$$

$$\Delta\varphi_A = -\pi, \quad \frac{d\varphi_B[\omega]}{d\omega} \leq 0 \quad (2.536)$$

Im Unterschied zur Phasenhebung beim konjugiert komplexen minimalphasigen Zähler-Grundbaustein (2.534) führt ein konjugiert komplexer stabiler Nenner-Grundbaustein zur Phasenabsenkung:

$$G_A[z] = G_{A1}[z] G_{A2}[z] = \frac{1}{(z - q_1)(z - q_2)} = \frac{1}{(z - q_1)(z - \bar{q}_1)}, \quad q_1 \in \mathbb{C}, \quad |q_1| \leq 1 :$$

$$\Delta\varphi_A = -2\pi, \quad \frac{d\varphi_B[\omega]}{d\omega} \leq 0 \quad (2.537)$$

Theorem 2.38: Globale Phasendrehung

Im Unterschied zu Pol- und Nullstellen zeitkontinuierlicher Systeme (siehe Theorem 2.5) führen die der zeitdiskreten Systeme zu einer abweichenden globalen Phasendrehung $\Delta\varphi$. Einen Vergleich zeigt folgende Tabelle:

	Polstelle		Nullstelle			
	stabil, grenzst.		stabil, grenzst. (minimalphasig)		instabil (nicht-minimalphasig)	
	reell	komplex	reell	komplex	reell	komplex
zeitdiskret: $\Delta\varphi$	$-\pi$	-2π	$+\pi$	$+2\pi$	0	0
zeitkontinuierlich: $\Delta\tilde{\varphi}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\pi$	$+\frac{\pi}{2}$	$+\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\pi$

Obwohl ein zeitdiskretes bzw. zeitkontinuierliches komplexes Polpaar nur in Summe eine globale Phasendrehung von $\pm 2\pi$ bzw. $\pm\pi$ ergibt, lässt sich folgende vereinfachte Aussage ohne Beschränkung der Allgemeinheit treffen:

Zeitdiskrete Systeme:

- jede stabile Polstelle führt zu einer globalen Phasenabsenkung von $\Delta\varphi = -180^\circ$
- jede minimalphasige Nullstelle führt zu einer globalen Phasenhebung v. $\Delta\varphi = 180^\circ$
- nicht-minimalphasige Nullstellen haben mit $\Delta\varphi = 0^\circ$ keinen Einfluss auf die globale Phasendrehung

Die globale Phasendrehung eines zeitdiskreten Systems (ZOH-Methode) bestimmt sich gemäß

$$\begin{aligned} \angle F[e^{j\omega h}] \Big|_{\omega=0}^{\frac{\pi}{h}} &= \Delta\varphi = \angle F_A[e^{j\omega h}] \Big|_{\omega=0}^{\frac{\pi}{h}} + \angle F_B[e^{j\omega h}] \Big|_{\omega=0}^{\frac{\pi}{h}} = \Delta\varphi_A + \Delta\varphi_B \\ &= -n\pi + m_{\text{stabil}}\pi, \end{aligned} \quad (2.538)$$

wobei m_{stabil} die Anzahl der stabilen/minimalphasigen Nullstellen angibt. Das zeitdiskretisierte System besitzt $m_{\text{instabil}} = n - 1 - m_{\text{stabil}}$ instabile/nicht-minimalphasige Nullstellen. Ein minimalphasiges zeitdiskretes System durchläuft eine feste globale Phasendrehung von:

$$\angle F[e^{j\omega h}] \Big|_{\omega=0}^{\frac{\pi}{h}} = \Delta\varphi = -n\pi + (n-1)\pi = -\pi \quad (2.539)$$

Zeitkontinuierliche Systeme:

- jede stabile Polstelle führt zu einer globalen Phasenabsenkung von $\Delta\tilde{\varphi} = -90^\circ$
- jede minimalphasige Nullstelle führt zu einer globalen Phasenhebung v. $\Delta\tilde{\varphi} = 90^\circ$
- jede nicht-minimalphasige Nullstelle zeigt dasselbe Verhalten wie eine stabile Polstelle und führt zu einer globalen Phasenabsenkung von $\Delta\tilde{\varphi} = -90^\circ$

Die globale Phasendrehung eines zeitkontinuierlichen Systems bestimmt sich gemäß:

$$\begin{aligned} \angle F(j\omega) \Big|_{\omega=0}^{\infty} = \Delta\tilde{\varphi} &= \angle F_A(j\omega) \Big|_{\omega=0}^{\infty} + \angle F_B(j\omega) \Big|_{\omega=0}^{\infty} = \Delta\tilde{\varphi}_A + \Delta\tilde{\varphi}_B \\ &= -\tilde{n} \frac{\pi}{2} + \tilde{m}_{\text{stabil}} \frac{\pi}{2} - \tilde{m}_{\text{instabil}} \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (2.540)$$

Ein minimalphasiges zeitkontinuierliches System besitzt eine vom Relativgrad \tilde{r} abhängige globale Phasendrehung von:

$$\angle F(j\omega) \Big|_{\omega=0}^{\infty} = \Delta\tilde{\varphi} = -\tilde{n} \frac{\pi}{2} + \tilde{m} \frac{\pi}{2} = -\tilde{r} \frac{\pi}{2} \quad (2.541)$$

Anmerkung 2.19: Gruppenlaufzeit

Die Gruppenlaufzeit stellt ein Maß dar, wie stark ein System bzw. Filter ein Eingangssignal verzögert. Eine Wellengruppe benötigt die Zeit $\tau_{Gr}[\omega]$ zum Durchlaufen des Systems.

Wie der Phasenwinkel $\varphi[\omega]$ zwischen sinusförmigen Ein- und Ausgangssignalen mit der Periodendauer $T = 2\pi/\omega$ in eine zeitliche Verzögerung, die Phasenlaufzeit

$$\tau_{Ph}[\omega] = -\frac{T}{2\pi} \varphi[\omega] = -\frac{\varphi[\omega]}{\omega}$$

umgerechnet werden kann, so trifft die Gruppenlaufzeit

$$\tau_{Gr}[\omega] = -\frac{d\varphi[\omega]}{d\omega}$$

dieselbe Aussage für zeitlich begrenzte Wellengruppen als Eingangssignal.

Die Differentiation des Phasenganges nach der Frequenz $d\varphi_B[\omega]/d\omega$ in Gleichung (2.529) entspricht dem Negativen der Gruppenlaufzeit $\tau_{Gr,B}[\omega]$:

$$\tau_{Gr,B}[\omega] = -\frac{d\varphi_B[\omega]}{d\omega} = -h \frac{r_1^{-1} - \cos(\omega h - \varphi_1)}{r_1^{-1} + r_1 - 2 \cos(\omega h - \varphi_1)} \quad (2.542)$$

Mit Gleichung (2.542) wird deutlich, dass die Gruppenlaufzeit für stabile Nullstellen ($0 \leq r_1 \leq 1$) stets negativ ist, d.h. durch stabile Nullstellen wird die Gruppenlaufzeit des Systems verkürzt. Ersetzt man r_1 mit $1/r_1$, wodurch sich die Nullstelle mit $r_1^{-1} > 1$ außerhalb des stabilen Einheitskreises befindet, so bleibt der Nenner gleich. Wegen des Zählers nimmt der Betrag der negativen Gruppenlaufzeit jedoch ab bzw. die Gruppenlaufzeit nimmt positive Werte an.

Instabile Nullstellen verkürzen die Gruppenlaufzeit eines Systems weniger als stabile Nullstellen und können sogar zu einer Verlängerung der System-Gruppenlaufzeit führen.

Bei Systemen mit demselben Amplitudengang besitzt das minimalphasige System (nur stabile Nullstellen) die kleinste Gruppenlaufzeit, das maximalphasige System (nur instabile Nullstellen) die größte Gruppenlaufzeit und ist daher schwieriger zu regeln. Systeme mit stabilen und instabilen Nullstellen bezeichnet man als gemischtphasige Systeme, deren Gruppenlaufzeit sich zwischen den oben genannten Extremen befindet.

Mit Theorem 2.38 wird deutlich, dass instabile Nullstellen des zeitdiskreten Modells einen notwendigen Freiheitsgrad zur Repräsentation des zeitkontinuierlichen Systems darstellen. Nachdem jedes mit der ZOH-Methode zeitdiskretisierte System einen Relativgrad $r = 1$ besitzt, würde die Bedingung stabiler Nullstellen gemäß Gleichung (2.539) eine globale Phasendrehung von $\Delta\varphi = -180^\circ$ festsetzen. Um beliebige globale Phasendrehungen $\Delta\varphi \neq -180^\circ$ mit dem zeitdiskreten Modell beschreiben zu können, müssen nicht-minimalphasige Nullstellen einfließen, auch wenn das entsprechende zeitkontinuierliche System minimalphasig ist. Im Zeitkontinuierlichen ist der globale Phasenwinkel eines Systems nicht nur gemäß der Gleichung (2.540) über instabile Nullstellen einstellbar, sondern auch entsprechend der Gleichung (2.541) über den Relativgrad. Somit können im Zeitkontinuierlichen instabile Nullstellen für eine große physikalisch relevante Klasse an Systemen, den minimalphasigen Systemen (vgl. Kapitel 2.2.5.3), vermieden werden.

Mit dieser Überlegung ist eine zeitdiskrete Darstellung ohne instabile Nullstellen bis zu einem Relativgrad $\tilde{r} \leq 2$ noch möglich. Die minimalphasige zeitkontinuierliche Strecke besitzt bei $\tilde{r} = 2$ ein $\Delta\tilde{\varphi} = -180^\circ$, d.h. denselben globalen Phasenwinkel wie bei jeder minimalphasigen zeitdiskreten Strecke (ZOH-Methode). Bei höheren Relativgraden der zeitkontinuierlichen Strecke sind instabile Diskretisierungs-Nullstellen nicht mehr zu vermeiden. Anhand eines Beispielsystems

$$F(s) = \frac{1}{s^{\tilde{r}}}, \quad \tilde{r} \in \mathbb{N} \quad (2.543)$$

wird in Kapitel 4.1.2.2 bzw. in [9, 92] allgemein gezeigt, dass instabile Diskretisierungs-Nullstellen bei der Anwendung der ZOH-Methode für kleine Abtastzeit $h \rightarrow 0$ s bereits ab

der Ordnung $\tilde{r} \geq 3$ entstehen. Die ersten Zählerpolynome $B_{\tilde{r}}[\cdot]$ mit $\tilde{r} \in \{1, \dots, 6\}$ lauten

$$\begin{aligned}
 B_1[z] &= 1 \\
 B_2[z] &= z + 1 \\
 B_3[z] &= z^2 + 4z + 1 \\
 B_4[z] &= z^3 + 11z^2 + 11z + 1 \\
 B_5[z] &= z^4 + 26z^3 + 66z^2 + 26z + 1 \\
 B_6[z] &= z^5 + 57z^4 + 302z^3 + 302z^2 + 57z + 1 \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{2.544}$$

mit den folgenden instabilen, grenzstabilen und stabilen Nullstellen \underline{q} :

$$\begin{aligned}
 \tilde{r} = 1 : \quad \underline{q} &= () \\
 \tilde{r} = 2 : \quad \underline{q} &= (-1.000) \\
 \tilde{r} = 3 : \quad \underline{q} &= (-0.268 \quad -3.732) \\
 \tilde{r} = 4 : \quad \underline{q} &= (-0.100 \quad -1.000 \quad -9.899) \\
 \tilde{r} = 5 : \quad \underline{q} &= (-0.043 \quad -0.431 \quad -2.323 \quad -23.203) \\
 \tilde{r} = 6 : \quad \underline{q} &= (-0.020 \quad -0.220 \quad -1.000 \quad -4.542 \quad -51.218) \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{2.545}$$

Hierbei wird deutlich, dass für $\tilde{r} = 2$ die Nullstelle noch grenzstabil ist. Für $\tilde{r} \geq 3$ entstehen jedoch bereits instabile Nullstellen, was obige Überlegung bestätigt. Laut der Definition 2.18 liegt somit ab der Ordnung $\tilde{r} \geq 3$ auf Grund der Diskretisierungs-Nullstellen ein nicht-minimalphasiges System vor.

Das zeitkontinuierliche minimalphasige Beispielsystem 2.82 mit dem Auskoppelvektor $\underline{\bar{c}}_0$ wurde für die Abbildung 2.69 mit den unterschiedlichen Abtastzeiten $h = 3.2 \text{ s}$, $h = 2.36 \text{ s}$ sowie $h = 0.1 \text{ s}$ diskretisiert und die Lage der Nullstellen diskutiert. Im Folgenden soll nun der entsprechende Phasengang in Abbildung 2.70 betrachtet werden. Das zeitkontinuierliche Beispielsystem ($h = 0 \text{ s}$) der Ordnung $\tilde{n} = 4$ und dem Relativgrad $\tilde{r} = 4$ zeigt eine globale Phasendrehung von $\Delta\tilde{\varphi} = -\tilde{r}90^\circ = -360^\circ$. Bei einer Abtastung mit $h = 3.2 \text{ s}$ liegt ein minimalphasiges zeitdiskretes Modell vor (vgl. Abbildung 2.69), was in dem Phasengang 2.70 durch eine globale Phasendrehung um $\Delta\varphi = -180^\circ$ bestätigt wird (vgl. Gleichung (2.539)). Die Abtastung mit $h = 2.36 \text{ s}$ sowie $h = 0.1 \text{ s}$ führt mit einer instabilen an Stelle einer stabilen Nullstelle (vgl. Abbildung 2.69) indirekt zu einer weiteren Phasenabsenkung um -180° , weshalb im Bode-Diagramm jeweils eine globale Phasendrehung von -360° erreicht wird (vgl. Gleichung (2.538)).

Mit einer schnellen Abtastung von $h = 0.1 \text{ s}$ repräsentiert das zeitdiskrete Modell im relevanten Bereich links der Eckkreisfrequenz $\omega_{E,i}$ sehr gut das reale minimalphasige System. Weshalb ein zeitdiskretes System, welches das minimalphasige Systemverhalten des zeitkontinuierlichen Systems aus physikalischer Sicht eindeutig repräsentiert, die Eigenschaft der Nichtminimalphasigkeit besitzt, wird hier veranschaulicht.

Wie in Theorem 2.38 gezeigt wurde, kommt es an der Grenze $\omega_{max} = \pi/h$ (senkrechte Gerade in Abbildung 2.70) zwangsläufig zu einer Phasenabweichung zum realen System,

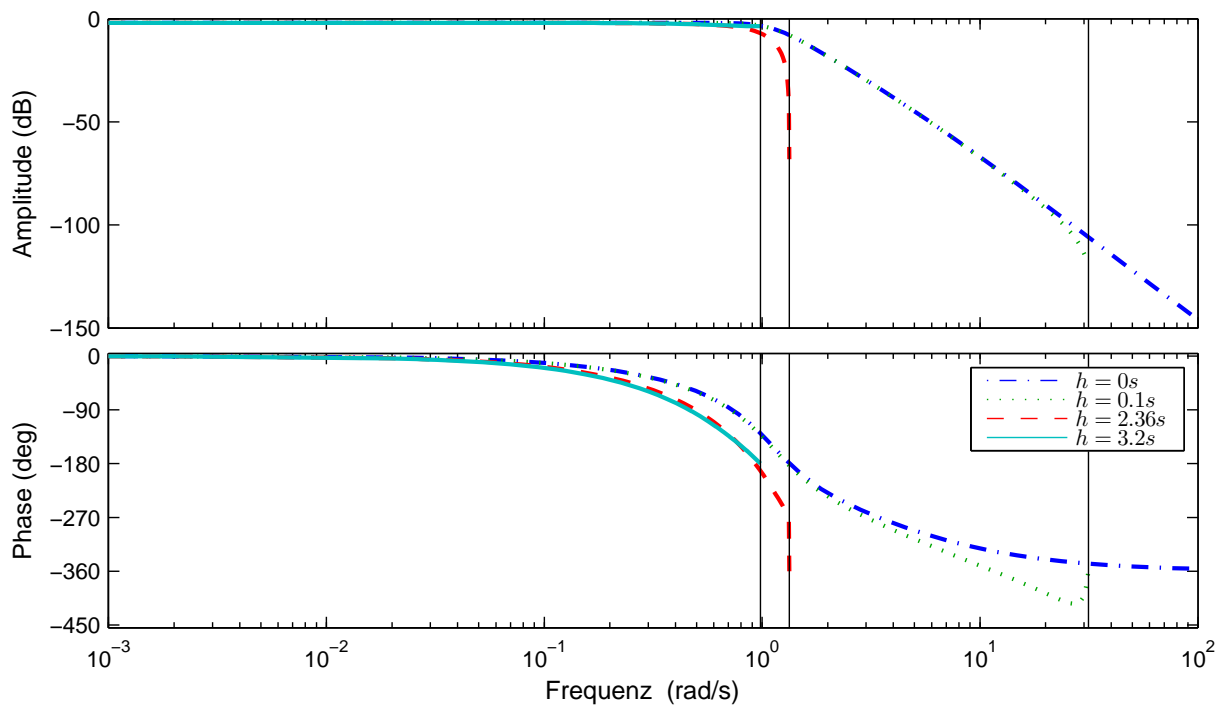


Abbildung 2.70: Bode-Diagramm eines minimalphasigen zeitkontinuierlichen Systems sowie Bode-Diagramm des zeitdiskretisierten Systems mit unterschiedlichen Abtastzeiten

da $\varphi[\omega_{max}] = \Delta\varphi$ nur diskrete Werte mit einem Vielfachen von $-\pi$ annehmen kann. Nahe der Grenze $\omega \rightarrow \omega_{max} = \pi/h$, an welcher Systemfrequenzen wegen der gewählten Abtastfrequenz (Shannon-Theorem) durch das zeitdiskrete Modell gerade noch abgebildet werden können, divergiert der Phasenverlauf des zeitdiskreten Modells deshalb von dem des realen Systems und es bildet sich eine Abweichung. Da wegen Gründen der Robustheit die Abtastkreisfrequenz mit $\omega_A \gg 2\omega_{D,i}$ bzw. $\omega_A \gg 2\omega_{E,i}$ höher gewählt werden sollte, als dies das Shannon-Theorem 2.37 fordert, sind Frequenzen nahe dieser Grenze für die Systemmodellierung nicht relevant. Die Abweichungen zwischen zeitdiskretem Modell und realem System sind daher aus technisch/physikalischer Sicht nicht von Belang, wenn die System-Eckkreisfrequenzen als auch die System-Kennkreisfrequenzen mit $\omega_{E,i} \ll \omega_{max} = \pi/h$ bzw. $\omega_{D,i} \ll \omega_{max} = \pi/h$ links der Grenze liegen.

Obwohl die Abweichung nahe der Grenzkreisfrequenz ω_{max} technisch unbedeutend ist, repräsentiert das zeitdiskrete Modell aus mathematischer Sicht ein System mit einer stärkeren globalen Phasenabsenkung als das reale System tatsächlich besitzt. Wollte man mit der zeitkontinuierlichen Beschreibung die höhere Phasenabsenkung darstellen, müsste man gemäß Theorem 2.38 bei gleichbleibender Ordnung \tilde{n} und vollem Relativgrad $\tilde{r} = \tilde{n}$ für eine weitere Absenkung der Phase eine instabile Nullstelle einbringen, womit die zeitkontinuierliche Beschreibung ebenfalls nicht-minimalphasig wäre.

Theorem 2.39:

Da jedes mit der ZOH-Methode zeitdiskretisierte minimalphasige System eine globale Phasendifferenz von $\Delta\varphi = -180^\circ$ besitzt, können zeitkontinuierliche Systeme mit betragsmäßig

größerer globalen Phasendifferenz über den Bereich $0 \leq \omega \leq \omega_{max} = \pi/h$ nur durch Einbringen instabiler Nullstellen in das zeitdiskrete Modell repräsentiert werden. Für das zeitdiskrete Modell eines zeitkontinuierlichen minimalphasigen Systems mit dem Phasenwinkel $\varphi(\omega)$ gilt daher:

$$|\varphi(\omega_{max})| \quad \begin{cases} \leq \pi : & |\Delta\varphi| = \pi & \rightarrow \text{zeitdiskretes System ist minimalphasig} \\ > \pi : & |\Delta\varphi| = (n - m_{stabil})\pi & \rightarrow \text{zeitdiskr. System ist nicht-minimalph.} \end{cases} \quad (2.546)$$

Da die globale Phasendifferenz eines zeitdiskreten Modells nur ein Vielfaches von -180° sein kann, ergibt sich eine Abweichung der Phasenverläufe zwischen zeitdiskretem Modell und zeitkontinuierlichem System nahe der Grenzfrequenz $\omega \rightarrow \omega_{max} = \pi/h$.

Mit einer robusten Abtastung, bei der die System-Kennkreisfrequenzen $\omega_{D,i}$ und System-Eckkreisfrequenzen $\omega_{E,i}$ nicht nahe der Abtastgrenze $\omega_{max} = \pi/h$ liegen, ist die Abweichung nicht relevant zur physikalisch eindeutigen Repräsentation des zeitkontinuierlichen minimalphasigen Systems durch das zeitdiskrete nicht-minimalphasige Modell.

Wollte man die durch die Abweichung bedingte technisch irrelevante größere Phasenablenkung des zeitdiskreten Modells durch ein zeitkontinuierliches Modell beschreiben, wäre dieses auf Grund der Abweichung zur realen Strecke ebenfalls nicht-minimalphasig.

Bei einer langsameren Abtastung mit $h = 2.36 \text{ s}$ liegt die Eckkreisfrequenz noch links der Grenzkreisfrequenz $\omega_{max} = \pi/h$, weshalb keine Unterabtastung im idealen Fall vorliegt. Nachdem die Eckkreisfrequenz jedoch bereits nahe an der Grenzkreisfrequenz ω_{max} liegt, tritt bereits eine Abweichung im relevanten Frequenzbereich auf. Im unrobusten Fall wird daher eine Rekonstruktion des realen Signals aus dem zeitdiskreten Modell problematisch. Die Phasenabweichung für $\omega \rightarrow \omega_{max}$ wird durch das Modell über einen größeren Frequenzbereich gering gehalten, bis diese schließlich schnell zunimmt, um den Wert -360° zu erreichen. Die Abweichung zum zeitkontinuierlichen System mit $\approx -180^\circ$ ist an der Grenze sehr hoch. Wie oben dargestellt ist folglich das zeitdiskrete Modell nicht-minimalphasig, um die dominante Dynamik des realen minimalphasigen Systems gerade noch repräsentieren zu können.

Die Abtastung mit $h = 3.2 \text{ s}$ führt, wie in Abbildung 2.69 bereits zu erkennen war, zur Unterabtastung, nachdem die Eckkreisfrequenz $\omega_{E,i}$ rechts der Grenzkreisfrequenz ω_{max} liegt. Ein Vergleich des zeitdiskreten Modells mit dem realen System ist daher nur noch begrenzt sinnvoll, obwohl nun ein minimalphasiges zeitdiskretes Modell mit $\varphi[\omega_{max}] = \Delta\varphi = -180^\circ$ das minimalphasige reale System zu repräsentieren versucht.

Mit obigen Überlegungen wurde deutlich, dass durch die Wahl der Abtastzeit h die Grenzkreisfrequenz $\omega_{max} = \pi/h$ verschoben werden kann. Bei größer werdender Abtastzeit verschiebt sich die senkrechte Gerade der Grenzfrequenz im Bode-Diagramm nach links zu kleiner werdenden Frequenzen. Schneidet diese Gerade den Phasengang des zeitkontinuierlichen Systems bei $|\tilde{\varphi}| \leq 180^\circ$, so ist das zeitdiskrete Modell minimalphasig. Liegen sämtliche Kennkreisfrequenzen $\omega_{D,i}$ bzw. Eckkreisfrequenzen $\omega_{E,i}$ des realen Systems dann links der Geraden, d.h. $\omega_{max} = \pi/h \geq \omega_{D,i}$ bzw. $\omega_{max} = \pi/h \geq \omega_{E,i}$, so gibt es ein minimalphasiges zeitdiskretes Modell des realen Systems. Liegt hingegen mindestens eine für die Regelung relevante Kennkreisfrequenz $\omega_{D,i}$ bzw. Eckkreisfrequenz $\omega_{E,i}$ rechts der Ge-

raden, d.h. $\omega_{max} = \pi/h < \omega_{D,i}$ bzw. $\omega_{max} = \pi/h < \omega_{E,i}$, ergibt sich eine Unterabtastung und es existiert kein minimalphasiges zeitdiskretes Modell zur Repräsentation der realen Strecke. Hierzu muss eine kleinere Abtastzeit gewählt werden, d.h. die Gerade nach rechts verschoben werden, was jedoch zu einem nicht-minimalphasigen zeitdiskreten Modell des zeitkontinuierlichen Systems führt.

Durch diese Veranschaulichung wird erneut deutlich, dass ein minimalphasiges zeitkontinuierliches System mit einer globalen Phasendrehung von $\Delta\tilde{\varphi} = -\tilde{r} 90^\circ$ bis zu einem Relativgrad von $\tilde{r} = 2$ durch ein minimalphasiges zeitdiskretes Modell mit $\Delta\varphi = -180^\circ = \Delta\tilde{\varphi}$ repräsentiert werden kann, ohne dass es zur Unterabtastung kommt. Für einen Relativgrad $\tilde{r} = 3$, d.h. für eine globale Phasendrehung von $\Delta\tilde{\varphi} = -270^\circ$ kann je nach Lage der Eck- bzw. Eigenfrequenzen noch eine unrobuste Abtastzeit gefunden werden, so dass die dominante Dynamik durch ein minimalphasiges zeitdiskretes Modell beschrieben wird. Ab einem Relativgrad $\tilde{r} \geq 4$ mit einer globalen Phasendrehung von $\Delta\tilde{\varphi} = -360^\circ$ gibt es jedoch mindestens eine Eigenfrequenz/Eckfrequenz, die durch ein minimalphasiges zeitdiskretes System mit einer globalen Phasendrehung von nur $\Delta\varphi = -180^\circ$ nicht mehr beschrieben werden kann, wie dies das Bode-Diagramm 2.70 zeigt.

Theorem 2.40:

Für minimalphasige zeitkontinuierliche Systeme kann für Relativgrade $\tilde{r} \geq 3$ keine robuste Abtastzeit gefunden werden, so dass das mit der ZOH-Methode erzeugte zeitdiskrete Modell ebenfalls minimalphasig ist. Folglich besitzt das entsprechende zeitdiskrete Modell instabile Nullstellen, womit das Regeln mit einem zeitdiskreten inversen Regler zur Kompensation der Nulldynamik zur Instabilität führt.

Die Erzeugung der instabilen Nullstellen durch die Zeitdiskretisierung ist rein mathematisch durch die Darstellung des Systems mit Differenzgleichungen motiviert, womit die physikalische Bedeutung der Nullstellen gemäß des Kapitels 2.2.5 verloren geht. Dennoch behält die Verknüpfung zwischen instabilen Nullstellen und der Eigenschaft, ob ein System minimalphasig ist, bei zeitdiskretisierten Systemen seine Gültigkeit. Trotz instabiler Nullstellen repräsentiert die nicht-minimalphasige zeitdiskrete Modellierung das relevante physikalische Verhalten der minimalphasigen zeitkontinuierlichen Strecke.

Ein u.U. physikalisch nicht-minimalphasiges Verhalten des zeitdiskreten Modells im Sinne eines nicht-minimalphasigen zeitkontinuierlichen Systems ist im relevanten Frequenz-Bereich nicht sichtbar. Aus mathematischer Sicht bedeutet dies jedoch, das trotz eines aus physikalischer Sicht minimalphasigen Systems der Regler mit den Problemen eines nicht-minimalphasigen Systems konfrontiert ist.

Wie gezeigt wurde, sind zeitkontinuierliche nicht-minimalphasige Systeme größtenteils schwer zu regeln. Minimalphasige Systeme hingegen stellen für Regler keine Einschränkungen dar, d.h. auf Grund der stabilen Nullstellen kann das System mit einem Referenzmodellregler beliebig beeinflusst werden, indem neben den Polstellen auch die Nullstellen beliebig verschoben werden können (vgl. Kapitel 2.2.6). Das zeitdiskretisierte System zeigt zwar dasselbe physikalische Verhalten wie die reale zeitkontinuierliche Strecke, besitzt jedoch instabile Nullstellen. Eine beliebige Beeinflussung der Nulldynamik ist daher nicht mehr möglich.

Die Auswirkungen instabiler Diskretisierungsnullstellen werden im folgenden Kapitel erkennbar.

2.3.6.3 Referenzmodellregelung mit internem Modell

Mit der Operatordarstellung liegt ein einheitlicher Formalismus zwischen zeitkontinuierlicher und zeitdiskreter Systemdarstellung vor (siehe Anmerkung 2.15). In Kapitel 2.2.2 wird mit Hilfe der Operatordarstellung eine zeitkontinuierliche Differentialgleichung beschrieben und mit demselben Formalismus in Kapitel 2.3.3 eine zeitdiskrete Differenzgleichung. Der Operator ρ repräsentiert mit

$$\rho^i \underline{x}(t) = \frac{d^i}{dt^i} \underline{x}(t) \quad (2.547)$$

eine Differentialgleichung und der Operator q mit

$$q^i \underline{x}[k] = \underline{x}[k + i] \quad (2.548)$$

eine Differenzgleichung. Auf Grund dieses einheitlichen Formalismus können alle zeitkontinuierlichen Regler in Operatordarstellung durch Ersetzen des Operators ρ mit q direkt als zeitdiskrete Regler verwendet werden [119]. Konkret betrifft dies den Referenzmodellregler in Kapitel 2.2.6.5 bis 2.2.6.8.

Das Kapitel 2.2.6.8 integriert Störmodelle als interne Modelle in den Regelkreis. Für Störmodelle in Operatordarstellung ist ebenfalls eine direkte Anwendung im zeitdiskreten Bereich möglich. Im Unterschied zu Kapitel 2.2.6.4 ist zu beachten, dass die Anfangszustände nicht mehr durch konstante Eingangssignale ab dem Zeitpunkt $t = 0$ s modelliert werden, sondern dass die Eingangssignale Impulse bei $t = kh = 0$ s auf die Werte \underline{x}_0 entsprechen. Das ist auf die Modellierung mit Verzögerern (Differenzgleichungen) an Stelle von Integratoren (Differentialgleichungen) zurückzuführen. Am Beispiel des Störmodells für konstante Größen wird dies im Folgenden deutlich. In Abbildung 2.71 ist auf der linken Seite der Integrator als Störmodell konstanter Größen für zeitkontinuierliche Systeme abgebildet, wie er in Kapitel 2.2.6.4 diskutiert wurde. Auf der rechten Seite ist das Störmodell

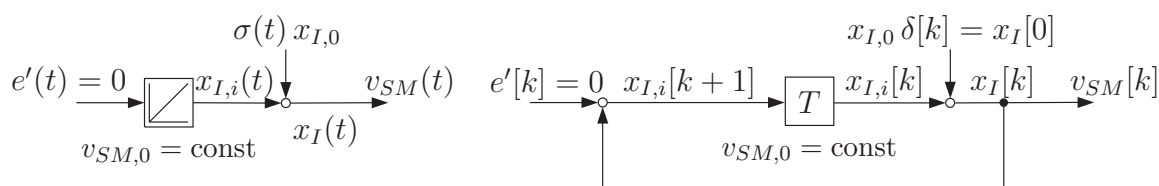


Abbildung 2.71: Störmodell für eine ...

links: ... konstante Störung im Zeitkontinuierlichen: $v(t) = \text{const}$

rechts: ... konstante Störung im Zeitdiskreten: $v[k] = \text{const}$

für konstante Größen für den zeitdiskreten Bereich dargestellt.

Die Anfangswerte \underline{x}_0 werden im Zeitkontinuierlichen durch einen gewichteten Einheitsprung $\sigma(\cdot)\underline{x}_0$ als Eingangssignal modelliert mit:

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases} \quad (2.549)$$

Im Zeitdiskreten hingegen entsprechen die Anfangswerte einem gewichteten Einheitsimpuls $\delta[\cdot] \underline{x}_0$ als Eingangssignal mit:

$$\delta[k] = \begin{cases} 0 & \text{für } k < 0 \\ 1 & \text{für } k = 0 \\ 0 & \text{für } k > 0 \end{cases} \quad (2.550)$$

Das Verzögerungsglied im Signalflussplan 2.71 rechts ist mit $x_{I,i}[0] = 0$ zunächst unbelegt und liefert keinen Beitrag für den Ausgang v_{SM} , jedoch der Impuls zum Zeitpunkt $k = 0$ mit dem Anfangszustand $x_{I,0}$. Zudem wird der Eingang des Verzögerungsglieds $x_{I,i}[1]$ mit dem Anfangszustand $x_{I,0}$ belegt, so dass zum Zeitpunkt $k = 1$ der Ausgang erneut den Wert $v_{SM}[1] = x_{I,0}$ annimmt. Somit wird durch die Mitkopplung und der Abwesenheit des Eingangssignals für $k > 0$ der Anfangswert $x_{I,0}$ am Ausgang v_{SM} durch die Eigendynamik aufrecht gehalten. Dieses Verhalten entspricht dem eines Integrators im Zeitkontinuierlichen.

Hiermit liegt ein Störmodell für eine konstante Störung vor. Bis auf die Verstärkung h des Eingangssignals entspricht dieses dem zeitdiskretisierten Integrator der Abbildung 2.65. Nachdem das Eingangssignal $e'[\cdot]$ eines Störmodells identisch Null ist und für das Störmodell gemäß Theorem 2.17 nur die Systemdynamik Bedeutung hat, ist zur Kompensation konstanter Störungen als internes Modell der reduzierte Integrator mit $h = 1$ ausreichend. Es wird deutlich, dass auch im Zeitdiskreten die Eigendynamik eines Integrators notwendig ist, um im Regelkreis stationäre Genauigkeit zu gewährleisten und konstante Störungen zu kompensieren. Die Zustandsdarstellung des reduzierten Integrators lautet:

$$\begin{aligned} x_{I,i}[k+1] &= x_{I,i}[k] + \delta[k] x_{I,0} + e'[k]; & e'[k] &\equiv 0 \\ v_{SM}[k] &= x_{I,i}[k] + \delta[k] x_{I,0} \end{aligned} \quad (2.551)$$

$$x_{I,0} = \text{const} \quad (2.552)$$

Die Ein- Ausgangsbeschreibung des Störmodells in Operatordarstellung lautet somit gemäß Gleichung (2.217):

$$v_{SM}[k] = \frac{B_{0,SM}^T[q]}{A_{SM}[q]} \underline{x}_0 \delta[k] + \frac{B_{SM}[q]}{A_{SM}[q]} e'[k] = \frac{q}{q-1} x_{I,0} \delta[k] + \frac{1}{q-1} e'[k]; \quad e'[k] \equiv 0 \quad (2.553)$$

Die implizite Darstellung ergibt sich mit $e'[\cdot] \equiv 0$ zu:

$$A_{SM}[q] v_{SM}[k] = (\rho - 1) v_{SM}[k] = 0 \quad (2.554)$$

Mit

$$x_{I,0} \delta[k] = x_I[0] \circ \overset{\mathcal{Z}}{\bullet} x_{I,0} \quad (2.555)$$

lautet das Störmodell für konstante Störungen im Frequenzbereich:

$$v_{SM}[z] = \frac{B_{0,SM}^T[z]}{A_{SM}[z]} \underline{x}_0 = \frac{z}{z-1} x_{I,0} \quad (2.556)$$

Allgemein ergibt sich folgende Zustandsdarstellung für ein Störmodell:

$$\underline{x}_{SM,i}[k+1] = \mathbf{A}_{SM} (\underline{x}_{SM,i}[k] + \underline{x}_{SM,0} \delta[k]) + \underline{b}_{SM} e'[k]; \quad e'[k] \equiv 0 \quad (2.557)$$

$$v_{SM}[k] = \underline{c}_{SM}^T (\underline{x}_{SM,i}[k] + \underline{x}_{SM,0} \delta[k]) \quad (2.558)$$

Für die Ein- Ausgangsbeschreibung des Störmodells in Operatordarstellung folgt:

$$v_{SM}[k] = \frac{B_{0,SM}^T[q]}{A_{SM}[q]} \underline{x}_0 \delta[k] + \frac{B_{SM}[q]}{A_{SM}[q]} e'[k] \quad e'[k] \equiv 0 \quad (2.559)$$

Die implizite Darstellung ergibt sich zu:

$$A_{SM}[q] v_{SM}[k] = 0 \quad (2.560)$$

Im Frequenzbereich gilt mit

$$\underline{x}_0 \delta[k] \circ \underline{Z} \bullet \underline{x}_0 \quad (2.561)$$

für das Störmodell (2.559):

$$v_{SM}[z] = \frac{B_{0,SM}^T[z]}{A_{SM}[z]} \underline{x}_0 + \frac{B_{SM}[z]}{A_{SM}[z]} e'[z] \quad e'[z] \equiv 0 \quad (2.562)$$

Mit diesem Hintergrund lassen sich nun die Theoreme aus Kapitel 2.2.6.8 für den zeitdiskreten Bereich formulieren:

Theorem 2.41: Referenzmodellregler mit freier Polverschiebbarkeit für ein System mit internen Modellen

Ein zeitdiskreter Zustandsregler mit internen Modellen lässt sich mit der Operatordarstellung in einen zeitdiskreten Referenzmodellregler mit freier Polverschiebbarkeit und internen Modellen überführen. Den Signalflussplan zeigt Abbildung 2.72. Das Störmodell mit dem

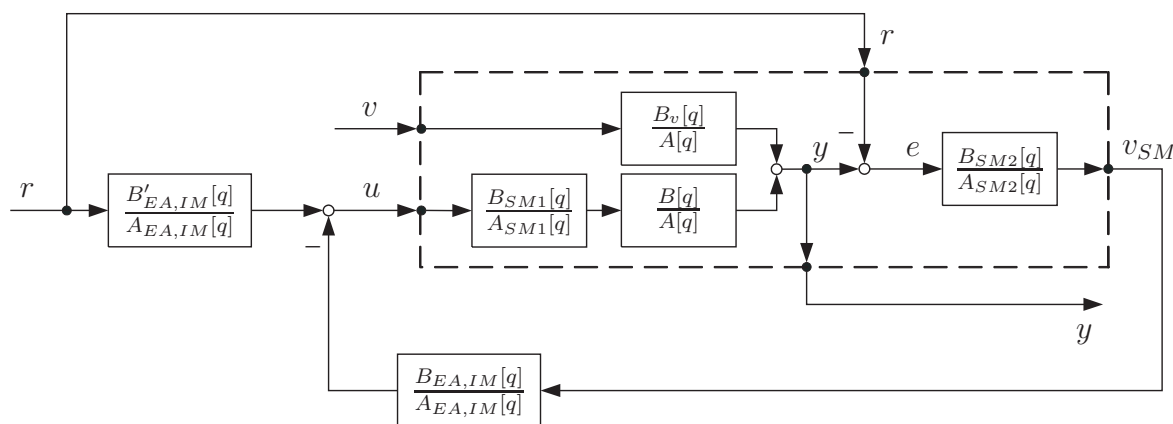


Abbildung 2.72: Signalflussplan eines zeitdiskreten Referenzmodellreglers mit internen Modellen, d.h. eines zustandsgeregelten Systems mit internen Modellen in Ein- Ausgangsdarstellung basierend auf einem Zustandsbeobachter

Index $SM2$ als internes Modell am Streckenausgang dient der Kompensation von stationären Abweichungen und Störungen. Auf Grund der Verlegung des Sollsignals $r[\cdot]$ und des Störmodell $SM2$ an den Streckenausgang ist keine parameterabhängige Skalierung des Sollsignals $r[\cdot]$ (im adaptiven Fall) notwendig, um stationäre Genauigkeit zu erreichen.

Damit die Stabilität bzw. freie Polverschiebbarkeit durch die Verlegung nicht gefährdet wird, darf für die Ordnung des nachgeschalteten Störmodells $\max. n_{SM2} = 1$ gelten (vgl. Kapitel 2.2.6.8). Dies ist ausreichend, um stationäre Abweichungen und Störungen mit einem reduzierten Integrator gemäß Gleichung (2.551) bzw. (2.553) und Signalflussplan 2.71 rechts als nachgeschaltetes internes Modell kompensieren zu können:

$$\frac{B_{SM2}[q]}{A_{SM2}[q]} = \frac{1}{q-1} \quad (2.563)$$

Mit dem Eingang $e[k] = y[k] - r[k]$ am Integrator wird eine stationäre Genauigkeit von $y_\infty = r_\infty$ erzwungen:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{y[k]}{r[k]} = 1 \quad (2.564)$$

Zur Kompensation weiterer beliebiger deterministischer Störungen ist ein zusätzliches Störmodell beliebiger Ordnung mit dem Index $SM1$ der Strecke vorgeschaltet, womit die Ordnungsbeschränkung des nachgeschalteten internen Modells keine Einschränkung der Allgemeinheit darstellt (internes Modell: siehe Kapitel 2.2.6.4).

Der entsprechende Referenzmodellregler mit freier Polverschiebbarkeit lautet:

$$u[k] = \frac{B'_{EA,IM}[q]}{A_{EA,IM}[q]} r[k] - \frac{B_{EA,IM}[q]}{A_{EA,IM}[q]} v_{SM}[k] \quad (2.565)$$

Dieser bezieht sich auf ein um die Störmodelle $SM1$ und $SM2$ erweitertes System:

$$v_{SM}[k] = \left(\underbrace{\frac{B_{SM1}[q]}{A_{SM1}[q]}}_{SM1} \frac{B[q]}{A[q]} u[k] - r[k] \right) \underbrace{\frac{1}{q-1}}_{SM2} \quad (2.566)$$

$$y[k] = \frac{B_{SM1}[q]}{A_{SM1}[q]} \frac{B[q]}{A[q]} u[k] \quad (2.567)$$

Die internen Störmodelle dienen der Kompensation stationärer Abweichungen und Störungen sowie beliebiger dynamischer Störungen.

Das gesamte dynamische Verhalten der Nullstellen der Führungsübertragungsfunktion kann, im Falle von stabilen Nullstellen, beliebig durch Vorgabe eines Nennerwunschnomials $A_{RegIM}^*[\cdot]$ mit einer entsprechenden Pol- Nullstellenkompensation eliminiert werden (vgl.

Kapitel 2.2.6.8). Dies wird am Führungsverhalten des geregelten Systems deutlich:

$$y^*[k] = \overbrace{\frac{\overbrace{B_{SM1}[q] B[q]}^{B_{IM}[q]} \overbrace{1}^{B_{SM2}[q]}}{A_{RegIM}^*[q]}}^{const} r[k]}^{k_{SM2}} = \overbrace{\frac{B_{IM}[q]}{A_{RegIM}^*[q]}}^{const} r[k]}^{k_{SM2}} \quad (2.568)$$

$$= \underbrace{\left(\lim_{q \rightarrow 1} \frac{B_{IM}[q]}{A_{RegIM}^*[q]} \right)^{-1}}_{k_{SM2}} \frac{B_{IM}[q]}{A_{RegIM}^*[q]} r[k] = \frac{\sum_{j=0}^{n_{RegIM}^*} \alpha_{j,RegIM}^*}{\sum_{j=0}^{m_{IM}} \beta_{j,IM}} \frac{B_{IM}[q]}{A_{RegIM}^*[q]} r[k] \quad (2.569)$$

Für die zugehörige Diophantische Gleichung zur Bestimmung der Reglerparameter gilt:

$$A_{EA,IM}[q] \underbrace{A_{SM1}[q] A[q]}_{A_{IM}[q]} \overbrace{(q-1)}^{A_{SM2}[q]} + B_{EA,IM}[q] \underbrace{B_{SM1}[q] B[q]}_{B_{IM}[q]} \overbrace{1}^{B_{SM2}[q]} = \underbrace{A_{BcoIM}^*[q] A_{RegIM}^*[q]}_{A_{RK,IM}^*[q]} \quad (2.570)$$

Mit Theorem 2.21 lässt sich die Diophantische Gleichung lösen.

Die Reglerparameter des verbleibenden Polynoms $B'_{EA,IM}[\cdot]$ sind mit Gleichung (2.384) zu bestimmen ($A_{SM}[q] = A_{SM2}[q] = q - 1$, $B_{SM}[q] = B_{SM2}[q] = 1$, $c_{SM} = c_{SM2} = 1$):

$$B'_{EA,IM}[q] = \frac{A_{BcoIM}^*[q] \frac{k_{SM2}}{c_{SM2}} B_{SM2} - B_{EA,IM}[q] B_{SM2}}{A_{SM2}} \quad (2.571)$$

$$= \frac{A_{BcoIM}^*[q] k_{SM2} - B_{EA,IM}[q]}{q - 1} \quad (2.572)$$

Nachdem das Störmodell SM2 eine stationäre Genauigkeit von $y_\infty = r_\infty$ erzwingt, kann die Berechnung des Rückführkoeffizienten k_{SM2} mit Gleichung (2.568) durchgeführt werden:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{y[k]}{r[k]} = 1 = k_{SM2} \lim_{q \rightarrow 1} \frac{B_{IM}[q]}{A_{RegIM}^*[q]} \quad (2.573)$$

$$k_{SM2} = \left(\lim_{q \rightarrow 1} \frac{B_{IM}[q]}{A_{RegIM}^*[q]} \right)^{-1} = \frac{\sum_{j=0}^{n_{RegIM}^*} \alpha_{j,RegIM}^*}{\sum_{j=0}^{m_{IM}} \beta_{j,IM}} \quad (2.574)$$

Das Störverhalten $y_v[\cdot]$ des geregelten Systems

$$y_v[k] = \frac{A_{EA,IM}[q] B_v[q] \overbrace{A_{SM1}[q] (q-1)}^{A_{SM2}[q]}}{A_{BcoIM}^*[q] A_{RegIM}^*[q]} v[k] \quad (2.575)$$

zeigt, dass eine konstante Störung gemäß des Störmodells (2.553) / (2.556) mit

$$v[k] = v_{SM2}[k] = \frac{q}{1-q} x_{I,0} \delta[k] \quad \circ \underline{\mathcal{Z}} \bullet \quad v[z] = v_{SM2}[z] = \frac{z}{1-z} x_{I,0} \quad (2.576)$$

und eine beliebige deterministische Störung gemäß des allgemeinen Störmodells (2.559) / (2.562)

$$v[k] = v_{SM1}[k] = \frac{B_{0,SM1}^T[q]}{A_{SM1}[q]} \underline{x}_0 \delta[k] \quad \circ \underline{z} \bullet \quad v[z] = v_{SM1}[z] = \frac{B_{0,SM1}^T[z]}{A_{SM1}[z]} \underline{x}_0 \quad (2.577)$$

durch das interne Modell kompensiert wird.

Theorem 2.42: Erweiterter Referenzmodellregler für ein System mit internen Modellen

Durch den um $B_i^*[\cdot]$ erweiterten Referenzmodellregler mit freier Polverschiebbarkeit aus Theorem 2.41

$$\frac{B_{IM}[q]}{B_i^*[q]} u[k] = \frac{B_{SM1}[q] B[q]}{B_i^*[q]} u[k] = \frac{B'_{EA,IM}[q]}{A_{EAred,IM}[q]} r[k] - \frac{B_{EA,IM}[q]}{A_{EAred,IM}[q]} v_{SM}[k] \quad (2.578)$$

ist die gesamte Systemdynamik der um die Störmodelle und $B_i^*[\cdot]$ erweiterten Strecke

$$v_{SM}[k] = \left(\frac{\overbrace{B_{SM1}[q] B[q]}^{B_{IM}[q]}}{A_{SM1}[q] A[q]} \frac{1}{B_i^*[q]} u[k] - r[k] \right) \frac{B_{SM2}}{A_{SM2}}, \quad \frac{B_{SM2}}{A_{SM2}} = \frac{1}{q-1} \quad (2.579)$$

$$y[k] = \frac{B_{SM1}[q] B[q]}{A_{SM1}[q] A[q]} u[k] \quad (2.580)$$

im Führungsverhalten beliebig zu verändern. Die internen Störmodelle dienen hierbei der Kompensation stationärer Abweichungen und Störungen (SM2) sowie beliebiger dynamischer Störungen (SM1). Auf Grund der Verlegung des Sollsignals $r[\cdot]$ und des Störmodells SM2 gemäß des Signalflussplans 2.73 an den Streckenausgang ist keine parameterabhängige Skalierung des Sollsignals $r[\cdot]$ (im adaptiven Fall) notwendig, um stationäre Genauigkeit zu erreichen.

Da mit den Wunschpolynomen

$$A_{RK,IM}^*[q] = A_{BeoIM}^*[q] \underbrace{A_{RegIM,red}^*[q] B_{IM}[q]}_{A_{RegIM}^*[q]} A_i^*[q] \quad (2.581)$$

$$= A_{RKred,IM}^*[q] B_{IM}[q] \quad (2.582)$$

$$B_{RK,IM}^*[q] = \overbrace{k_{SM2}}^{const} A_{BeoIM}^*[q] B_{IM}[q] B_i^*[q] \frac{1}{\sum_{j=0}^{m_i^*} \beta_{j,i}^*} \quad (2.583)$$

der Ordnungen

$$n_{BeoIM}^* = n + n_{SM1} + n_{SM2} - 1 = n + n_{SM1} = n_{IM} - 1 \quad (2.584)$$

$$n_{RegIM,red}^* = r + r_{SM1} + r_{SM2} = r + r_{SM1} + 1 = r_{IM} \quad (2.585)$$

$$n_i^* \geq m_i^*, \quad n_i^*, m_i^* \in \mathbb{N} \quad (2.586)$$

ein beliebiges Referenzmodell

$$y^*[k] = \frac{B_{RK,IM}^*[q]}{A_{RK,IM}^*[q]} r[k] = k_{SM2} \frac{B_i^*[q]}{A_i^*[q] A_{RegIM,red}^*[q]} r[k] \frac{1}{\sum_{j=0}^{m_i^*} \beta_{j,i}^*} \quad (2.587)$$

$$= \left(\lim_{q \rightarrow 1} \frac{B_i^*[q]}{A_i^*[q] A_{RegIM,red}^*[q]} \right)^{-1} \frac{B_i^*[q]}{A_i^*[q] A_{RegIM,red}^*[q]} r[k] \quad (2.588)$$

mit Relativgrad $r_{RK}^* \geq r_{IM}$ vorgegeben wird, gemäß diesem sich die geregelte Strecke verhalten soll, spricht man von einer Referenzmodellregelung (engl.: Model-Reference-Control, Abk.: MRC) – das Ausgangssignal $y[\cdot]$ der Strecke soll stets dem Ausgang $y^*[k]$ des Referenzmodells folgen.

Eine stabile Regelung bei Vorgabe eines beliebigen Referenzmodells hinsichtlich des Nullstellenpolynoms kann nur bei minimalphasigen Systemen gewährt werden. Nicht-minimalphasige Systeme werden durch das Ersetzen des Nullstellenpolynoms instabil (siehe Kapitel 2.2.5.5 und 2.2.5.6).

Den Signalflussplan des erweiterten Referenzmodellreglers zeigt Abbildung 2.73. Mit dem

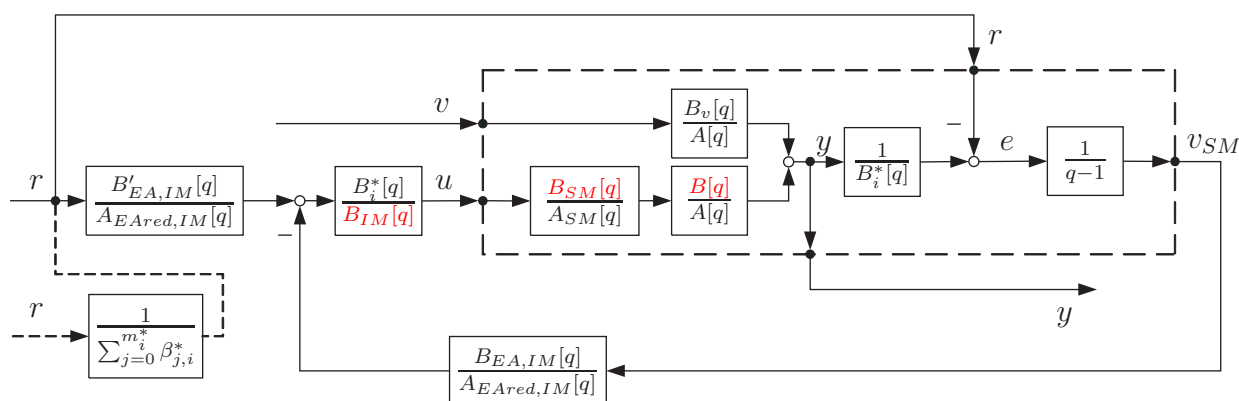


Abbildung 2.73: Signalflussplan eines zeitdiskreten erweiterten Referenzmodellreglers mit internen Modellen

Ziel der stationären Genauigkeit zwischen den Signalen

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y[k] = \lim_{k \rightarrow \infty} y^*[k] = \lim_{k \rightarrow \infty} r[k] \quad (2.589)$$

ist für das Polynom $B_i^*[\cdot]$ eine stationäre Verstärkung $\lim_{q \rightarrow 1} B_i^*[q] = 1$ zu wählen oder das Sollsignal $r[\cdot]$ wie in Gleichung (2.587) mit $1/\sum_{j=0}^{m_i^*} \beta_{j,i}^*$ zu skalieren.

Die Reglerpolynome $A_{EAred,IM}[\cdot]$ und $B_{EA,IM}[\cdot]$ lassen sich gemäß der Polynomdivision (2.327)

$$\frac{A_{RKred,IM}^*[q]}{A_{IM}[q]} = \frac{A_{BeoIM}^*[q] A_{RegIM,red}^*[q] A_i^*[q]}{A_{IM}[q]} = A_{EAred,IM}[q] + \frac{B_{EA,IM}[q]}{A_{IM}[q]} \quad (2.590)$$

oder Diophantinen Gleichung (2.570) bestimmen. Für das Reglerpolynom $B'_{EA,IM}[\cdot]$ gilt:

$$B'_{EA,IM}[q] = \frac{A_{BeoIM}^*[q] k_{SM2} - B_{EA,IM}[q]}{q - 1} \quad (2.591)$$

Nachdem das Störmodell $SM2$ eine stationäre Genauigkeit von $y_\infty = r_\infty$ erzwingt, kann die Berechnung des Rückführkoeffizienten k_{SM2} mit Gleichung (2.587) durchgeführt werden:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{y[k]}{r[k]} = 1 = \frac{k_{SM2}}{\sum_{j=0}^{m_i^*} \beta_{j,i}^*} \lim_{q \rightarrow 1} \frac{B_i^*[q]}{A_i^*[q] A_{RegIM,red}^*[q]} \quad (2.592)$$

$$k_{SM2} = \left(\frac{1}{\sum_{j=0}^{m_i^*} \beta_{j,i}^*} \lim_{q \rightarrow 1} \frac{B_i^*[q]}{A_i^*[q] A_{RegIM,red}^*[q]} \right)^{-1} = \sum_{j=0}^{n_i^*} \alpha_{j,i}^* \sum_{j=0}^{n_{RegIM,red}^*} \alpha_{j,RegIM,red}^* \quad (2.593)$$

Da sich das Einbringen des Wunschpolynoms $B_i^*[\cdot]$ nur auf das Führungsverhalten auswirkt, lautet das Störverhalten entsprechend der Gleichung (2.575)

$$y_v[k] = \frac{\overbrace{A_{EA,IM}[q]}^{A_{EA,IM}[q]} A_{EAred,IM}[q] B_{IM}[q] B_v[q] A_{SM1}[q] (q-1)}{A_{BeoIM}^*[q] \underbrace{A_{RegIM,red}^*[q] B_{IM}[q] A_i^*[q]}_{A_{RegIM}^*[q]}} v[k]} \quad (2.594)$$

$$= \frac{A_{EAred,IM}[q] B_v[q] A_{SM1}[q] (q-1)}{A_{BeoIM}^*[q] A_{RegIM,red}^*[q] A_i^*[q]} v[k] \quad (2.595)$$

Hiermit wird deutlich, dass eine konstante Störung

$$v[k] = v_{SM2}[k] = \frac{q}{1-q} x_{I,0} \delta[k] \quad \circ \underline{\mathcal{Z}} \bullet \quad v[z] = v_{SM2}[z] = \frac{z}{1-z} x_{I,0} \quad (2.596)$$

und eine beliebige deterministische Störung

$$v[k] = v_{SM1}[k] = \frac{B_{0,SM1}^T[q]}{A_{SM1}[q]} \underline{x}_0 \delta[k] \quad \circ \underline{\mathcal{Z}} \bullet \quad v[z] = v_{SM1}[z] = \frac{B_{0,SM1}^T[z]}{A_{SM1}[z]} \underline{x}_0 \quad (2.597)$$

durch das interne Modell gemäß Theorem 2.17 kompensiert wird.

Wie ersichtlich wurde, kann ein erweiterter Referenzmodellregler nicht auf nicht-minimalphasige Systeme angewandt werden, da hierzu instabile Nullstellen eliminiert würden. Nachdem, wie in Kapitel 2.3.6.2 dargestellt, die zeitdiskrete Modellierung von minimalphasigen zeitkontinuierlichen Systemen mit einem Relativgrad $\tilde{r} > 2$ stets zu instabilen Nullstellen führt, ist die Anwendung des erweiterten Referenzmodellreglers nur noch auf eine stark eingeschränkte Systemklasse möglich. Somit führt die Anwendung des erweiterten Referenzmodellreglers auf das Beispielsystem (2.506) mit dem Auskoppelvektor $\underline{\check{c}}_0$ zur Instabilität. Mit dieser Problematik beschäftigt sich das Kapitel 3.4 und 4.

Auf das Beispielsystem (2.506) mit dem Auskoppelvektor $\underline{\check{c}}_1$ ist hingegen eine Anwendung des erweiterten Referenzmodellreglers möglich, da das Nullstellenpolynom des zeitkontinuierlichen Originalsystems bereits vollen Grad besitzt und somit dem zeitdiskretisierten System keine Diskretisierungsnullstellen mehr hinzugefügt werden. Das System behält somit trotz Zeitdiskretisierung die Eigenschaft der Minimalphasigkeit, womit die zeitdiskreten Nullstellen vollständig eliminiert werden können. Das Ergebnis der Simulation zeigt

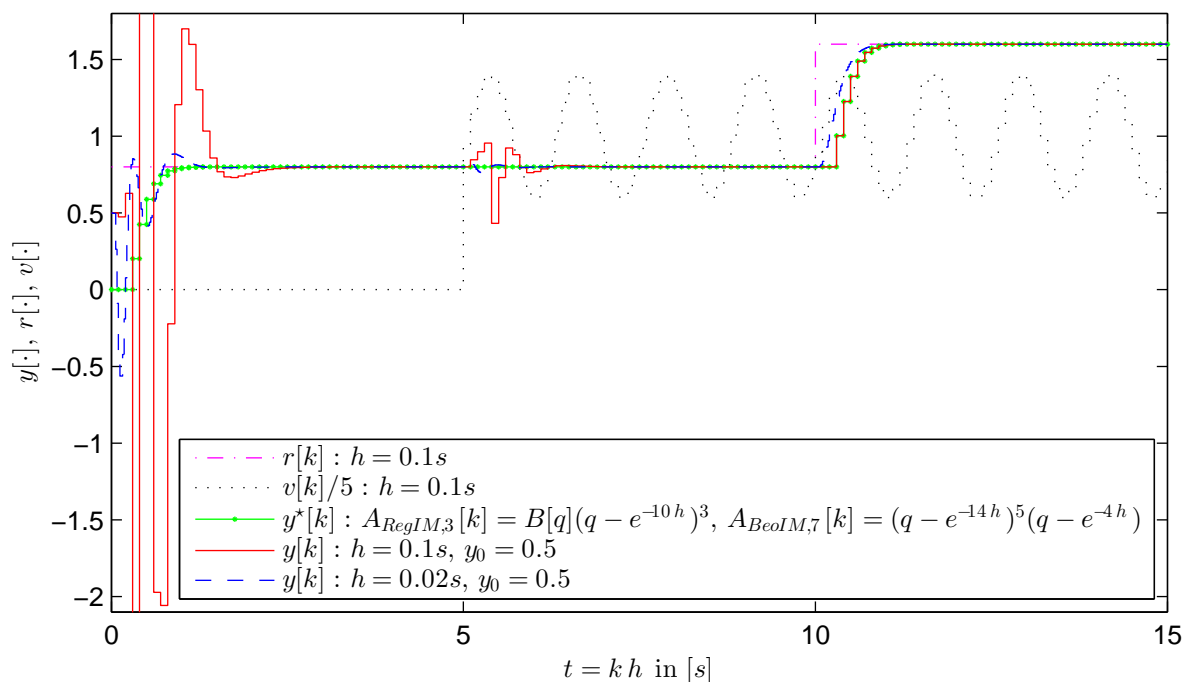


Abbildung 2.74: Zeitdiskreter Referenzmodellregler mit freier Polverschiebbarkeit und internen Modellen unter Störeinwirkung $v[k]$ am Beispiel des mit $h = 0.1$ s zeitdiskretisierten Systems (2.506) mit Auskoppelvektor \underline{z}_1 , d.h. Nullstellenpolynom $B[\cdot]$; die Ordnung des Systems wird um die der Störmodelle (konstante und sinusförmige Störung) erweitert: der Beobachter besitzt seine Pole bei $\underline{p}_{BeoIM,7} = (e^{-14h} \ e^{-14h} \ e^{-14h} \ e^{-14h} \ e^{-14h} \ e^{-4h})$ und die Pole des zustandsgeregelten Systems liegen bei $\underline{p}_{RegIM,3} = (e^{-10h} \ e^{-10h} \ e^{-10h} \ \underline{q}^T)$; da das Nullstellenpolynom kompensiert wird, liegt der Spezialfall des zeitdiskreten erweiterten Referenzmodellreglers mit internen Modellen vor; neben der Abtastzeit $h = 0.1$ s findet auch $h = 0.02$ s Anwendung

Abbildung 2.74. Neben der Abtastzeit $h = 0.1$ s ist auch eine Simulation mit der Abtastzeit $h = 0.02$ s dargestellt. Ein Vergleich mit der zeitkontinuierlichen Reglerrealisierung mit den gleichen Randbedingungen in Simulation 2.60 zeigt, dass das Regelziel $y^*[\cdot]$ bei eingeschwungenem Beobachter und Störung gleichermaßen erreicht wird (Sprung von $r[\cdot]$ bei 10 s). Die Wunsch-Pole des zustandsgeregelten Systems werden gemäß der Umrechnung (2.513) für die Zeitdiskretisierung zu $\underline{p}_{RegIM,3} = (e^{-10h} \ e^{-10h} \ e^{-10h} \ \underline{q}^T)$ gewählt, d.h. mit derselben Dynamik wie in Simulation 2.60. Gleiches gilt für die Umrechnung der Beobachterpole mit $\underline{p}_{BeoIM,7} = (e^{-14h} \ e^{-14h} \ e^{-14h} \ e^{-14h} \ e^{-14h} \ e^{-4h})$.

Nachdem bei nicht eingeschwungenem Beobachter bzw. Störmodell bei einer Störung auf Grund der langsamen Abtastung mit $h = 0.1$ s der Fehler bis zur nächstmöglichen Reaktion des Beobachter/Reglers stärker anwächst, ergeben sich beim Einschwingvorgang des Beobachter bei $t = 0$ s und des Störmodells bei $t = 5$ s höhere Amplituden als im zeitkontinuierlichen Fall in Simulation 2.60. Bei der Wahl einer kleineren Abtastzeit von $h = 0.02$ s ist eine schnellere Reaktion des Beobachter/Reglers auf Fehler möglich, womit sich die Einschwingvorgänge an den zeitkontinuierlichen Fall mit kleineren Ausschlägen annähern bis sich für $h \rightarrow 0$ s ein identisches Verhalten zeigen würde.

Abhängig von der Abtastzeit h ergibt sich eine unterschiedliche Totzeit des Reglers, was bei $t = 10\text{ s}$ zwischen dem Fall $h = 0.1\text{ s}$ und $h = 0.02\text{ s}$ deutlich wird. Nachdem das System, bestehend aus Strecke, Störmodell 1 und Störmodell 2 mit einem jeweiligen Relativgrad von $r = 1$, zu einem Relativgrad $r_{IM} = 3$ des Gesamtsystems führt, ergibt sich eine Totzeit von $t_T = 0.3\text{ s}$ bzw. $t_T = 0.06\text{ s}$.

Der zeitdiskrete erweiterte Referenzmodellregler kompensiert vollständig das Nullstellenpolynom des Gesamtsystems und folgt dem Referenzmodell mit $y^*[k] = (1 - e^{-10h})^3 / (q - e^{-10h})^3 r[k]$. Da das Nullstellenpolynom des Gesamtsystems auf Grund der (grenzstabilen) Diskretisierungsnullstelle des Störmodells 1 (sinusförmige Störung) um eine Ordnung größer als im zeitkontinuierlichen Fall ist, verkleinert sich entsprechend der Relativgrad des Gesamtsystems, womit durch die Nullstellenkompensation das zeitdiskrete Referenzmodell eine geringere Ordnung $n_{RK}^* = 3$ als das zeitkontinuierliche Referenzmodell mit $\tilde{n}_{RK}^* = 4$ hat. Folglich ist mit einem PT_3 -Verhalten der zeitdiskrete Regler bei gleicher Wahl der Wunsch-Polstellen schneller als der zeitkontinuierliche Regler mit dem PT_4 -Verhalten. Um dasselbe Verhalten zu erreichen, müsste das Referenzmodell gemäß Theorem 2.42 um das Wunschpolynom $A_i^*[q] = q - e^{-10h}$ erweitert werden.

Damit schnelle Einschwingvorgänge zu erreichen sind, die denen des zeitkontinuierlichen geregelten Systems entsprechen, sollte nach obiger Darstellung eine kleine Abtastzeit gewählt werden. Wie jedoch Abbildung 2.75 zeigt, führt eine Abtastzeit von bereits $h \leq 0.0121\text{ s}$

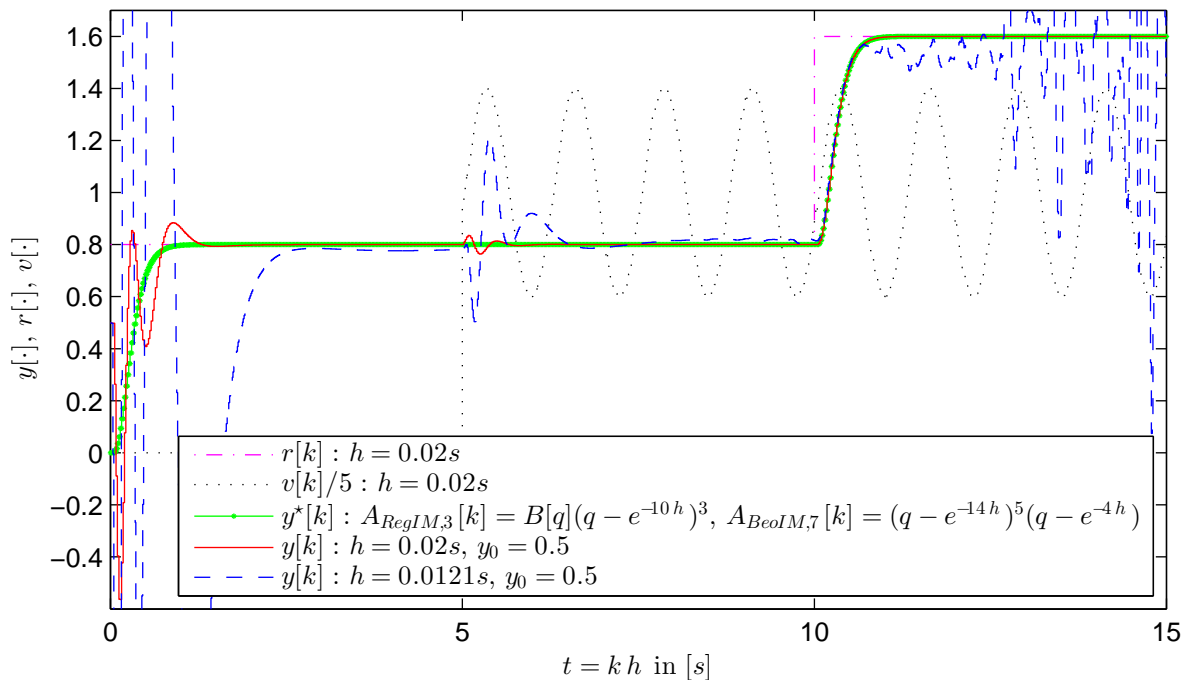


Abbildung 2.75: Erweiterter Referenzmodellregler mit internem Modell unter Störeinwirkung $v[k]$ am Beispiel des Systems (2.506) mit Auskoppelvektor \check{c}_1 ; im Unterschied zur Simulation 2.74 findet eine kleinere Abtastzeit von $h = 0.0121\text{ s}$ Anwendung, was zur Instabilität führt

zur Instabilität. Die Abtastzeit des geregelten Systems kann nicht beliebig verkleinert werden. Wie das folgende Kapitel zeigt, führt die Modellierung der Strecke als Differenzen-

darstellung bei kleinen Abtastzeiten zu numerischen Problemen bei der Berechnung der Reglerparameter und somit zur Instabilität des Referenzmodellreglers.

2.3.6.4 Robuste Reglerberechnung mit Hilfe des δ -Modells

Wie mit der Simulation 2.75 deutlich wurde, besteht für einen zeitdiskreten Regler im q - bzw. z -Modell bei kleinen Abtastzeiten h die Gefahr der Instabilität. Hierbei handelt es sich um ein numerisches Problem, welches bei der Berechnung der Reglerparameter im q - bzw. z -Bereich auftritt [4, 106, 119]. Wie in Kapitel 2.3.6.2 dargestellt wurde, bildet der Vorgang der Zeitdiskretisierung gemäß des Theorems 2.36 die stabile linke s - bzw. ρ -Halbebene auf das Innere des Einheitskreises der z - bzw. q -Ebene ab. Damit wird eine unendlich große Fläche auf die Fläche π des Einheitskreises projiziert, d.h. der Wertebereich für die Beträge stabiler Polstellen wird stark zusammengedrängt:

$$|\tilde{p}| \in]0, \infty[\quad \longrightarrow \quad |p| \in]0, 1[\quad (2.598)$$

Somit verschiebt sich die Unterscheidung der Polstellen stark in den Nachkommabereich, womit der absolute Fehler bei Rechenoperationen in einem hohen relativen Fehler in den Reglerparametern resultiert. Auf Grund dieser numerischen Probleme bei der Reglerberechnung kommt es bei der Polplatzierung durch den Regler zu starken Abweichungen zwischen den Soll- und den Ist-Polstellen. Polstellen, die im s -Bereich nahe beieinander liegen aber dennoch klar unterschieden werden können, differenzieren sich im z -Bereich nicht mehr, was die physikalische Eigenschaft der Polplatzierung negativ beeinflusst.

Problematisch wird es, wenn sich die Abstände der Soll-Polstellen von der Stabilitätsgrenze nur noch in hohen Nachkommastellen unterscheiden und somit die Ist-Polstellen durch numerische Fehler bei der Reglerberechnung durch den Regler in den instabilen Bereich verschoben werden. Nach Gleichung (2.513) besteht diese Gefahr, wenn die stabilen Pole \tilde{p} im s -Bereich kleine Beträge haben, d.h. nahe an der Stabilitätsgrenze liegen, und zudem eine kleine Abtastzeit h gewählt wird.

Nachdem Pole \tilde{p} mit kleinen Beträgen eine langsame Dynamik beschreiben, könnte die Abtastzeit entsprechend groß gewählt werden, womit durch die Wahl einer angepassten Abtastzeit die Problematik der Instabilität aufgrund numerischer Fehler umgangen werden könnte. Jedoch wird dann eine höhere Dynamik nicht mehr berücksichtigt, d.h. es liegt eine Untermodellierung vor. Zudem ist bei adaptiven Reglern gemäß Kapitel 5 die Dynamik des Systems unbekannt, womit eine angepasste Wahl der Abtastzeit keine Lösung darstellt.

Die Abtastzeit muss ohne Gefahr der Instabilität klein gewählt werden können, um möglichst viele Eigenfrequenzen durch das zeitdiskrete System repräsentieren zu können. Wird somit durch die Wahl einer kleinen Abtastzeit ein großer Bereich unterschiedlicher Dynamik durch den Einheitskreis repräsentiert, verschieben sich langsame Pole an die Stabilitätsgrenze: je kleiner die Abtastzeit h , desto mehr nähern sich die Pole nach Gleichung (2.511) der Stabilitätsgrenze an, bis trotz stabiler Auslegung Instabilität auf Grund numerischer Ungenauigkeit eintritt.

Zur Lösung des Problems ist eine Transformation notwendig, welche die linke Halbebene des ρ/s -Bereiches bzw. den Einheitskreis des q/z -Bereiches ebenfalls in einen Kreis abbildet, jedoch sollte der Radius und somit die Fläche des Kreises mit kleiner werdender Abtastzeit

größer werden, um ein Annähern an die Stabilitätsgrenze bei der Wahl einer kleineren Abtastzeit zu unterbinden. Eine entsprechende Umrechnung lautet

$$\delta = \frac{q-1}{h}, \quad \gamma = \frac{z-1}{h} \quad (2.599)$$

welche die q - bzw. z -Ebene in die sog. δ - bzw. γ -Ebene transformiert (Zeit- bzw. Frequenzbereich). Die Rücktransformation lautet:

$$q = h\delta + 1, \quad z = h\gamma + 1 \quad (2.600)$$

Mit der Transformation (2.599) werden der Mittelpunkt p_M des Einheitskreises und weitere Punkte p_1 und p_2 auf dem Einheitskreis wie folgt transformiert:

$$p_M = 0 \quad \longrightarrow \quad \check{p}_M = -\frac{1}{h} \quad (2.601)$$

$$p_1 = 1 \quad \longrightarrow \quad \check{p}_1 = 0 \quad (2.602)$$

$$p_2 = j \quad \longrightarrow \quad \check{p}_2 = \frac{j-1}{h} = -\frac{1}{h} + j\frac{1}{h} \quad (2.603)$$

Somit findet wie gewünscht eine Streckung des Einheitskreises um den Faktor $1/h$ statt, d.h. mit kleiner werdenden Abtastzeit h nimmt der Radius und Fläche des Kreises zu. Weiter ist die rechte Seite des Kreises in der δ -Ebene an den Nullpunkt fixiert, wie es die Abbildung 2.76 zeigt. Für den Grenzübergang $h \rightarrow 0$ s zu unendlich kleinen Abtastzeiten

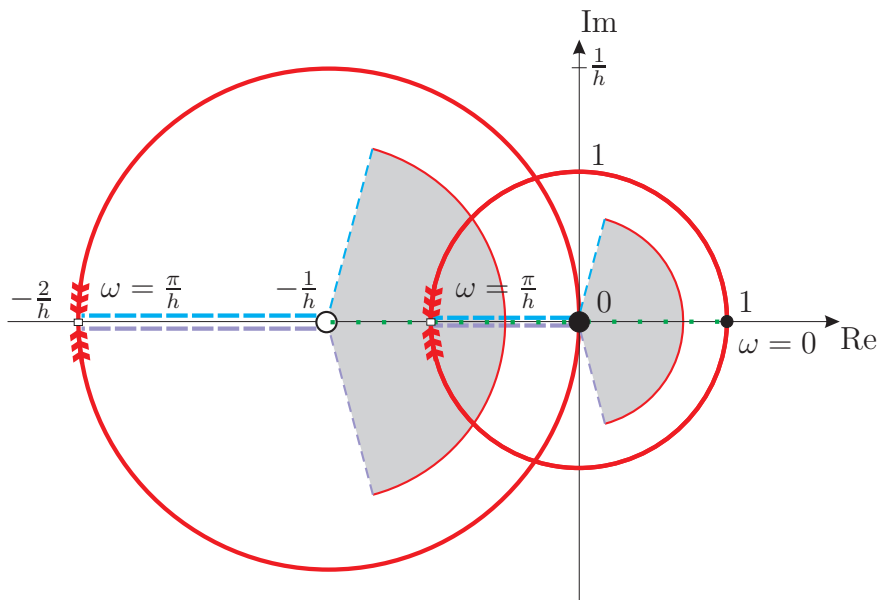


Abbildung 2.76: Abbildung des Stabilitätsbereiches der z - bzw. q -Ebene in die γ - bzw. δ -Ebene

wird der Radius des Kreises unendlich groß. Nachdem der Kreis am Nullpunkt fixiert ist, wird der Einheitskreis zur imaginären Achse. Ein Vergleich mit Abbildung 2.68 lässt erkennen, dass die δ - bzw. γ -Ebene für $h \rightarrow 0$ s in die ρ - bzw. s -Ebene übergeht. Somit besteht

ein direkter Zusammenhang zwischen zeitdiskretem und zeitkontinuierlichem System, mit welchem sich Kapitel 4.1.2.1 beschäftigt.

Der Vergleich zwischen ρ - und δ -Ebene zeigt, dass eine unendlich große Fläche der linken Halbebene nun auf die Fläche π/h^2 projiziert wird und folglich der Wertebereich für die Beträge der stabilen Polstellen im Vergleich zum Wertebereich (2.598) mit kleiner werdender Abtastzeit h weniger stark zusammengedrängt wird, bis für $h \rightarrow 0$ s derselbe Wertebereich in beiden Ebenen vorliegt:

$$|\tilde{p}| \in]0, \infty[\quad \longrightarrow \quad |\check{p}| \in]0, \frac{1}{h}[\quad (2.604)$$

Wird die Reglerberechnung in Theorem 2.41 und 2.42 mit Hilfe des δ -Operators durchgeführt, ergeben sich keine numerischen Probleme mehr bei kleinen Abtastzeiten, die zur Instabilität führen.

Das δ -Modell der Strecke erhält man durch Substitution der zeitdiskretisierten Strecke (2.491) bzw. (2.492)

$$\frac{y[q]}{u[q]} = \frac{B[q]}{A[q]} = \frac{\beta_m q^m + \beta_{m-1} q^{m-1} + \dots + \beta_1 q + \beta_0}{q^n + \alpha_{n-1} q^{n-1} + \dots + \alpha_1 q + \alpha_0} \quad (2.605)$$

$$= k_0 \frac{(q - q_1)(q - q_2) \dots (q - q_m)}{(q - p_1)(q - p_2) \dots (q - p_n)} \quad (2.606)$$

mit Gleichung (2.600):

$$\frac{y[\delta]}{u[\delta]} = \frac{B[\delta]}{A[\delta]} = \frac{\beta_m (h\delta + 1)^m + \beta_{m-1} (h\delta + 1)^{m-1} + \dots + \beta_1 (h\delta + 1) + \beta_0}{(h\delta + 1)^n + \alpha_{n-1} (h\delta + 1)^{n-1} + \dots + \alpha_1 (h\delta + 1) + \alpha_0} \quad (2.607)$$

$$= \frac{\check{\beta}_m \delta^m + \check{\beta}_{m-1} \delta^{m-1} + \dots + \check{\beta}_1 \delta + \check{\beta}_0}{\delta^n + \check{\alpha}_{n-1} \delta^{n-1} + \dots + \check{\alpha}_1 \delta + \check{\alpha}_0} \quad (2.608)$$

bzw.:

$$\frac{y[\delta]}{u[\delta]} = \frac{B[\delta]}{A[\delta]} = k_0 \frac{((h\delta + 1) - q_1)((h\delta + 1) - q_2) \dots ((h\delta + 1) - q_m)}{((h\delta + 1) - p_1)((h\delta + 1) - p_2) \dots ((h\delta + 1) - p_n)} \quad (2.609)$$

$$= k_0 \frac{h^m (\delta - \frac{q_1-1}{h})(\delta - \frac{q_2-1}{h}) \dots (\delta - \frac{q_m-1}{h})}{h^n (\delta - \frac{p_1-1}{h})(\delta - \frac{p_2-1}{h}) \dots (\delta - \frac{p_n-1}{h})} \quad (2.610)$$

$$= \check{k}_0 \frac{(\delta - \check{q}_1)(\delta - \check{q}_2) \dots (\delta - \check{q}_m)}{(\delta - \check{p}_1)(\delta - \check{p}_2) \dots (\delta - \check{p}_n)} \quad (2.611)$$

$$\text{mit } \check{k}_0 = \frac{k_0}{h^r}, \quad \check{q}_j = \frac{q_j - 1}{h}, \quad \check{p}_i = \frac{p_i - 1}{h} \quad (2.612)$$

Wunsch-Polstellen und Wunsch-Nullstellen werden gemäß Gleichung (2.612) in den δ -Bereich transformiert, in welchem die zeitdiskreten Reglerparameter ohne numerische Probleme bestimmt werden können. Anschließend müssen die Reglerpolynome $B'_{EA,IM}[\delta]$, $B_{EA,IM}[\delta]$, $A_{EA,IM}[\delta]$ bzw. $A_{EAred,IM}[\delta]$ als Pol- Nullstellendarstellung

$$\frac{B_{EA,IM}[\delta]}{A_{EA,IM}[\delta]} = \check{k}_{0,(EA,IM)} \frac{(\delta - \check{q}_{1,(EA,IM)})(\delta - \check{q}_{2,(EA,IM)}) \dots (\delta - \check{q}_{m,(EA,IM)})}{(\delta - \check{p}_{1,(EA,IM)})(\delta - \check{p}_{2,(EA,IM)}) \dots (\delta - \check{p}_{n,(EA,IM)})} \quad (2.613)$$

in die q -Ebene zurück transformiert werden. Hierzu gilt gemäß der Gleichungen in (2.612) für die instantane Verstärkung, Nullstellen und Pole der Reglerübertragungsfunktionen in der q -Ebene:

$$\begin{aligned} k_{0,(EA,IM)} &= h^r \check{k}_{0,(EA,IM)} \\ q_{j,(EA,IM)} &= \check{q}_{j,(EA,IM)} h + 1 \\ q_{i,(EA,IM)} &= \check{q}_{i,(EA,IM)} h + 1 \end{aligned} \quad (2.614)$$

Nachdem es sich beim Referenzmodellregler um einen Polplatzierungsregler handelt, minimiert die Pol- Nullstellendarstellung des Reglers

$$\frac{B_{EA,IM}[q]}{A_{EA,IM}[q]} = k_{0,(EA,IM)} \frac{(q - q_{1,(EA,IM)})(q - q_{2,(EA,IM)}) \cdots (q - q_{m,(EA,IM)})}{(q - p_{1,(EA,IM)})(q - p_{2,(EA,IM)}) \cdots (q - p_{n,(EA,IM)})} \quad (2.615)$$

weitere numerische Fehler. Die Polynomdarstellung ist zu vermeiden.

Anmerkung 2.20:

Nachdem durch die Transformation des Polynoms $A_{SM2}[q] = q - 1$ in die δ -Ebene mit $A_{SM2}[\delta] = h\delta$ der Koeffizient $\alpha_{0,SM2}$ zu Null wird, lässt sich der Rückführkoeffizient \check{k}_{SM2} alternativ gemäß Gleichung (2.402) in Theorem 2.27 berechnen:

$$\check{k}_{SM2} = \frac{\check{\beta}_{0,(EA,IM)}}{\check{\alpha}_{0,BeoIM}^*} \quad (2.616)$$

Wiederholt man die Simulation 2.75 mit den über den δ -Bereich bestimmten Regler gemäß Gleichung (2.615)/(2.614), so kann eine beliebig kleine Abtastzeit h des zeitdiskreten Reglers ohne Gefährdung der Stabilität gewählt werden. Das Ergebnis mit unterschiedlichen Abtastzeiten zeigt Abbildung 2.77. Während ohne Benutzung der Transformation zur Vermeidung numerischer Probleme Instabilität ab einer Abtastzeit von $h \leq 0.0121$ s auftrat, ist nun eine Abtastzeit von $h = 0.002$ s und $h = 0.00002$ s ohne Problem möglich. Ein Vergleich mit der Abtastzeit $h = 0.02$ s zeigt, dass die Amplituden beim Einschwingvorgang des Beobachters bzw. Störmodells auf Grund der schnelleren Reaktionsmöglichkeit noch kleiner werden. Der vernachlässigbare Unterschied zwischen dem Fall $h = 0.002$ s und $h = 0.00002$ s zeigt, dass das zeitkontinuierliche geregelte System in Simulation 2.60 ab der Abtastzeit $h = 0.002$ s bzgl. aller Einschwingvorgänge sehr gut durch das zeitdiskrete geregelte System repräsentiert wird.

Die Lösung der numerischen Probleme mit dem zeitdiskreten δ -Operator lässt sich auch mit der Verwandtschaft zum zeitkontinuierlichen Operator ρ erklären [119]. Die Transformationsvorschrift (2.599) angewandt auf ein Signal entspricht der zeitdiskreten Ableitung (Differenzenquotient):

$$\delta \underline{x}[k] = \frac{q - 1}{h} \underline{x}[k] = \frac{\underline{x}[k + 1] - \underline{x}[k]}{h} = \frac{\underline{x}[k + 1] - \underline{x}[k]}{t_{k+1} - t_k} \quad (2.617)$$

Der Operator δ bestimmt den Wertzuwachs pro Abtastzeit h eines Signals. Für $h \rightarrow 0$ s resultiert der Übergang zur zeitkontinuierlichen Ableitung (Differentialquotient):

$$\lim_{h \rightarrow 0s} \delta \underline{x}[k] = \lim_{h \rightarrow 0s} \frac{\underline{x}[k + 1] - \underline{x}[k]}{h} = \lim_{h \rightarrow 0s} \frac{\underline{x}(kh + h) - \underline{x}(kh)}{h} = \frac{d}{dt} \underline{x}(t) = \rho \underline{x}(t) \quad (2.618)$$

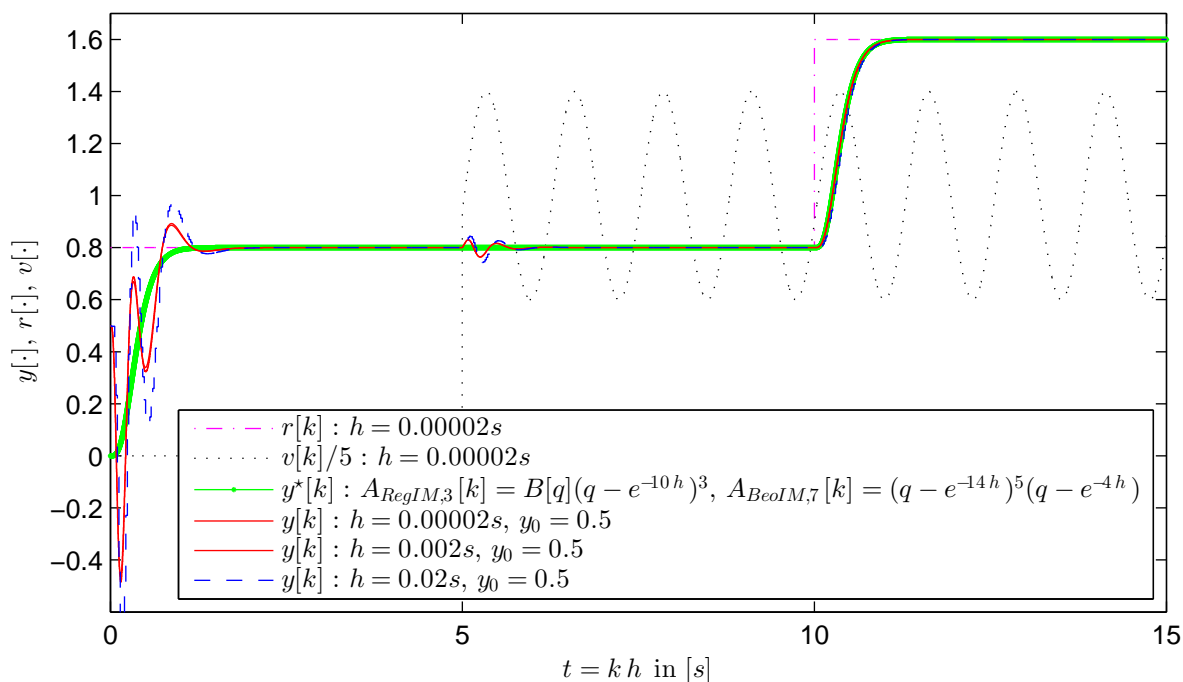


Abbildung 2.77: Erweiterter Referenzmodellregler mit internem Modell unter Störeinwirkung $v[k]$ am Beispiel des Systems (2.506) mit Auskoppelvektor $\underline{\zeta}_1$; im Unterschied zur Simulation 2.75 wird die Bestimmung der Reglerparameter in der δ -Ebene durchgeführt, womit sehr kleine Abtastzeiten ohne Gefährdung der Stabilität gewählt werden können

Dieser Zusammenhang erklärt nun die Eigenschaft in Abbildung 2.76, dass der stabile Kreis der δ -Ebene für $h \rightarrow 0s$ in die stabile linke ρ -Halbebene übergeht.

Theorem 2.43: δ -Operator

Die Differenzendarstellung eines Systems mit dem Schiebeoperator q führt zu einer starken Verkleinerung des Wertebereiches für Polstellen im Vergleich zur Differentialdarstellung mit dem Operator ρ . Bei gleicher Prozessorwortbreite des digitalen Reglers, aber kleiner werdenden Abtastzeit h , wachsen Rundungsfehler an, die für technisch sinnvolle Abtastzeiten bereits zur Instabilität des geschlossenen Regelkreises führen.

Mit Hilfe des δ -Operators

$$\delta = \frac{q - 1}{h} \quad (2.619)$$

als zeitdiskrete Ableitung $\delta \underline{x}[k]$ des Signals $x[\cdot]$ besteht für $h \rightarrow 0s$ ein direkter Übergang zur zeitkontinuierlichen Ableitung $\rho \underline{x}(t)$. Auf Grund der Erweiterung des zeitdiskreten Wertebereiches für kleiner werdende Abtastzeiten resultiert der Übergang zwischen zeitdiskreter und zeitkontinuierlicher Modellbeschreibung, womit numerische Probleme bei kleinen Abtastzeiten verhindert werden.

Die Reglerberechnungen sollten daher in der δ -Ebene mit dem transformierten δ -Modell durchgeführt werden, um Instabilität des Reglers auf Grund numerischer Fehler zu unterbinden. Nach Rücktransformation der Reglerparameter kann der Regler selbst in der

q-Ebene umgesetzt werden ohne der Gefahr der Instabilität bei kleinen Abtastzeiten.

Das δ -Modell wird in Kapitel 4 auf Grund der direkten Beziehung zum ρ -Modell verwendet, um die Anwendung des zeitdiskreten erweiterten Referenzmodellreglers auf alle minimalphasigen zeitkontinuierlichen realen Systeme zu ermöglichen. Es wird dabei die Problematik der instabilen Diskretisierungsnullstellen umgangen. Als reales Beispielsystem dient das Zwei-Masse-System, welches im folgenden Kapitel vorgestellt wird.

Kapitel 3

Anwendbarkeit des zeitdiskreten Referenzmodellreglers auf ein Zwei-Massen-System

Das Zwei-Massen-System stellt das Grundelement annähernd jeder mechatronischen Anlage dar und soll daher in dieser Arbeit als Fallbeispiel dienen.

3.1 Zwei-Massen-System

Die zu regelnde Anlage ist in Abbildung 3.1 dargestellt: es handelt sich um ein Zwei-Massen-System (ZMS). Die wesentlichen Komponenten verdeutlicht dabei das Schema in

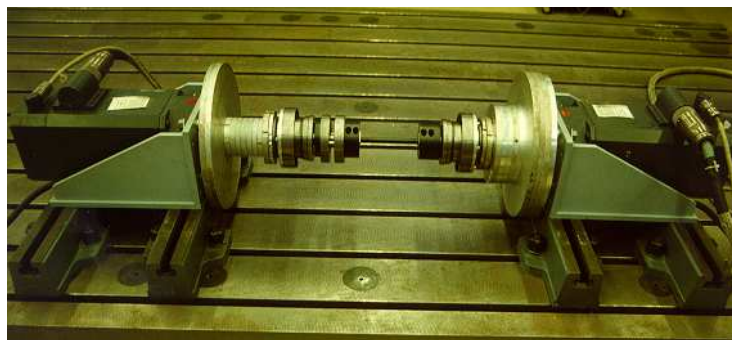


Abbildung 3.1: *Zwei-Massen-System (ZMS)*

Abbildung 3.2. Die Strecke besteht aus zwei Motoren, die elastisch über eine Welle verbunden sind. Mit diesem Aufbau soll folgendes allgemeingültiges Szenario repräsentiert werden: Eine Arbeitsmaschine (Index A) – wie beispielsweise eine Fräse – wird von einem Motor (Index M) angetrieben. Dabei hat der Motor u.U. eine geringere drehende Masse als die Arbeitsmaschine, d.h. das Trägheitsmoment J_A ist größer als J_M . Da meist der Motor nicht direkt an der Arbeitsmaschine angebracht werden kann, ist eine Kraftübertragungseinheit nötig. Diese gewährt im Allgemeinen keine starre Kopplung zwischen den beiden Maschinen. Dieser Effekt wird durch eine dünne Welle als Kopplungselement erreicht. Das Gesamt-

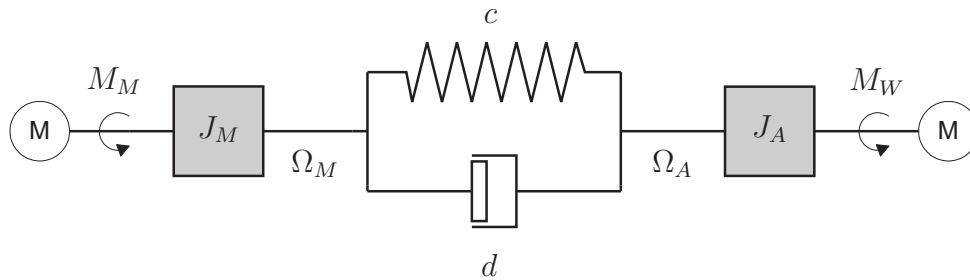


Abbildung 3.2: *Schema des Zwei-Massen-Systems (ZMS)*

system ist nun schwingungsfähig, was in dem Schema durch ein Feder-Dämpfer-Glied (Federkonstante c , Dämpfungskonstante d) deutlich wird. Mit Hilfe des zweiten Motors an der Arbeitsmaschinenseite wird es möglich, Störmomente $M_W(t)$ aufzuschalten, d.h. es kann beispielsweise der Momentenverlauf eines an das Werkstück heranfahrenden Fräskopfes abgebildet werden: im Augenblick der Werkstückkontaktierung entsteht ein sprunghaftes Lastmoment, welches die Strecke zum Schwingen anregen kann. Es kristallisiert sich ein klassisches, aber immer noch schwer zu handhabendes Regelungsproblem heraus: gutes und stabiles Folge- und Störverhalten der Drehzahl $\Omega_A(t)$ der Arbeitsmaschine (Abtriebsseite), welche jedoch schwingungsfähig mit dem Antrieb/Motor (Antriebsseite/Motorseite mit der Drehzahl $\Omega_M(t)$) verkoppelt ist; zum Erreichen des Regelziels bedarf es ein aktives Bedämpfen der Eigenschwingung durch den Regler.

Eine umfassende Beschreibung der elektrischen und mechanischen Komponenten ist in [148] zu finden. In den folgenden zwei Abschnitten wird ein Überblick über die einzelnen Komponenten mit ihren Daten gegeben.

3.1.1 Elektrische Komponenten

Eine Übersicht der elektrischen Konfiguration des Zwei-Massen-Systems zeigt die Abbildung 3.3. Für die Antriebs- bzw. Arbeitsmaschine kommt ein permanenterregter Synchronmotor der Firma *Siemens* vom Typ *1FT6068-8AC71-1CD3* mit integriertem Encoder zur Rotorlageerfassung ($\varphi_M(\cdot)$, $\varphi_A(\cdot)$) zum Einsatz. Die wesentlichen technischen Daten sind in der Tabelle 3.1 aufgeführt. Weitere Informationen können der Bedienungsanleitung [155]

Nenndrehzahl	2000 min^{-1}
Nenndrehmoment	23 Nm
Nennstrom	10.9 A
Nennleistung	4.8 kW
Trägheitsmoment	$6.65 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$

Tabelle 3.1: *Technische Daten der Synchronmaschinen*

entnommen werden.

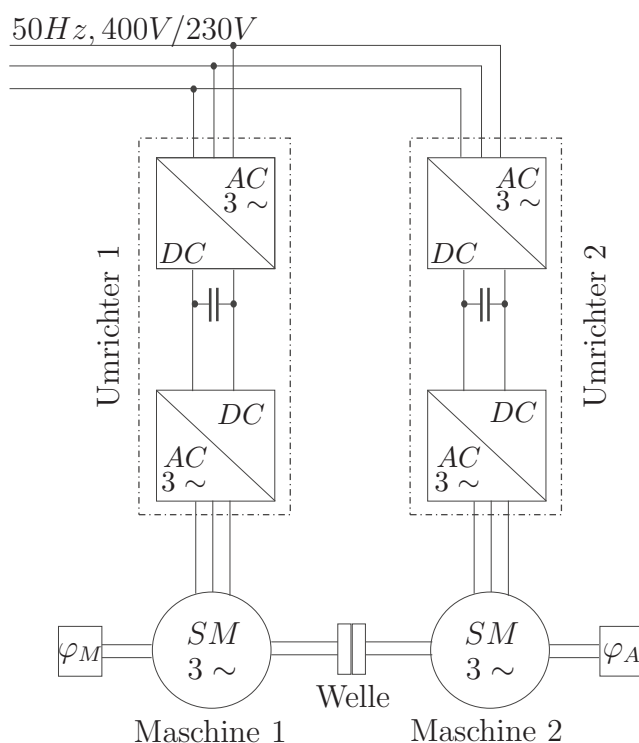


Abbildung 3.3: Übersicht zur elektrischen Konfiguration des Prüfstandes

Zur Ansteuerung der Synchronmaschinen dienen zwei Spannungszwischenkreis-Umrichter der Firma *Siemens* vom Typ *Simovert Master Drives SC 6SE7022-6EC30*. Auch hier sei für weitere Details auf das Handbuch [155] verwiesen, wobei die wichtigsten Daten in der Tabelle 3.2 zu finden sind.

Netzspannung	3 AC 380 V bis 460 V ($\pm 15\%$)
Zwischenkreisspannung	DC 510V bis 620 V ($\pm 15\%$)
Ausgangsspannung	3 AC 0 V bis 0.86 x Netzspannung
Netzfrequenz	50 / 60 Hz ($\pm 15\%$)
Ausgangsfrequenz	0 Hz bis 400 Hz
Pulsfrequenz	5 kHz bis 7.5 kHz
Ausgangsbemessungsstrom	25.2 A
Grundlaststrom	23.2 A
Kurzzeitstrom	40.8 A
Verlustleistung	0.43 kW (bei 5 kHz)
Wirkungsgrad	96 bis 98 %

Tabelle 3.2: Technische Daten der U-Umrichter

Die Einheit Umrichter – Synchronmaschine ist mit einer Drehmomentregelung ausgestattet. Dem Umrichter wird ein Sollmoment übergeben, welches nach einer kurzen Verzögerungszeit an der Maschine anliegt. Eine nähere Untersuchung der Einheit ist in Kapitel 3.3.1 zu finden.

3.1.2 Mechanische Komponenten

Wie aus Abbildung 3.2 hervorgeht, werden die dominanten mechanischen Komponenten des Zwei-Massen-Systems durch folgende Parameter bestimmt:

- Massenträgheitsmomente der beiden Synchronmaschinen: J_M, J_A in $[N m^2]$
- Federsteifigkeit: c in $[Nm/rad]$
- Dämpfungskonstante: d in $[Nm s/rad]$

Wegen des gewünschten Szenarios, dass die Maschinen unterschiedliche Trägheiten aufweisen, wurden verschiedene Schwungscheiben angeflanscht (vgl. Abbildung 3.1). Die Trägheitsmomente eines beliebigen Körpers bestimmen sich gemäß folgender physikalischen Formel [100]:

$$J = \int r^2 dm \quad (3.1)$$

Hierbei wird das Trägheitsmoment eines Körpers der Masse m berechnet, dessen infinitesimalen Masse-Punkte dm die Abstände r von der Drehachse besitzen. Für einfachere Körper, beispielsweise einer Kreisscheibe mit dem Radius r , gilt:

$$J = m \frac{r^2}{2} \quad (3.2)$$

Bei bekannter Dichte

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (3.3)$$

des Werkstoffes kann auf eine Gewichtsmessung verzichtet werden und es muss lediglich das Volumen V , d.h. die Abmessungen des Körpers bekannt sein.

Eine genaue Untersuchung der Trägheitsmomente wurde bereits in der Arbeit [5, 11] durchgeführt – dabei entstand die Tabelle 3.3. Sie listet alle rotierenden Teile des Zwei-Massen-

Trägheitsmoment in $[kg m^2]$	Antriebsseite	Abtriebsseite
Rotor	$6.650 \cdot 10^{-3}$	$6.650 \cdot 10^{-3}$
Flansch	$3.626 \cdot 10^{-3}$	$3.626 \cdot 10^{-3}$
Schwungscheibe (groß)	$2 \cdot 68.644 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 68.644 \cdot 10^{-3}$
Schwungscheibe (klein)	—	$5 \cdot 6.0301 \cdot 10^{-3}$
Distanzscheibe	$7 \cdot 0.082 \cdot 10^{-3}$	—
Kupplungskonstruktion	$17.800 \cdot 10^{-3}$	$17.800 \cdot 10^{-3}$
Gesamt	$165.938 \cdot 10^{-3}$	$332.882 \cdot 10^{-3}$

Tabelle 3.3: Massenträgheitsmomente der rotierenden Komponenten des ZMS's

Systems mit den entsprechenden Trägheitsmomenten auf. Durch Summation der starr miteinander verbundenen Elemente der jeweiligen Teilsysteme resultieren die Gesamtmassträgheitsmomente der Tabelle 3.4.

Trägheitsmoment in $[kg\ m^2]$	J_M	J_A
Gesamt	0.166	0.333

Tabelle 3.4: *Massenträgheitsmoment der Antriebsmaschine (J_M) und Arbeitsmaschine (J_A)*

Eine einfache mathematische Bestimmungsmöglichkeit existiert für die Federsteifigkeit sowie Dämpfungskonstante nicht. Diese Parameter sind mit Hilfe eines Prüfstandes zu identifizieren. Das Zwei-Massen-System wird hierbei mit einem konstanten Signal und einem überlagerten Rauschen angeregt, um die unbekannt Parameter mit Hilfe eines Least-Squares-Verfahrens bestimmen zu können [178]. Die Qualität von auf Messergebnissen basierenden Identifikationen hängt u.a. von der Anzahl der Identifizierungsvorgänge (Mittelwert), der Art der gewählten Erregung wie auch der Stärke und Gewichtung von Störungen (Rauschen) ab. Ungenaue Parameterwerte stellen kein Problem für konservative Regler dar, für einen schnellen Regler bedeutet jedoch ein ungenauer Wert eine Gefahr für die Stabilität.

Auf Grund dieser Unsicherheit ist das Ziel die Implementierung einer adaptiven Regelung in Kapitel 5, die *nicht* auf der Kenntnis von Parameterwerten basiert. Zur Abschätzung der Federsteifigkeit wurde auf eine Parameteridentifikation verzichtet und lediglich eine Messung durchgeführt.

Die Steifigkeit einer Torsionsfeder beschreibt folgende Gleichung:

$$c = -\frac{M_F(t)}{\varphi(t)} = \frac{M_{F\ddot{U}}(t)}{\varphi(t)} \quad (3.4)$$

Wird eine Feder um einen Winkel $\varphi(t)$ verdreht, so entsteht ein über den Faktor c proportionales Federmoment $M_F(t)$, welches der Drehrichtung entgegenwirkt. Dabei ist $M_{F\ddot{U}}(t)$ das aufzuwendende Moment für diese Verdrehung, welches über die Feder bzw. Welle übertragen wird und ist betragsmäßig gleich dem Federmoment $M_F(t)$. Entsprechend dieses physikalischen Zusammenhangs wird für eine Bestimmung von c der Rotor der Arbeitsmaschine starr befestigt und auf die Antriebsmaschine ein sinusförmiges Moment (Scheitelpunkt: M_c) aufgebracht, so dass es zu einer Torsion der Welle kommt. Über eine gewisse Simulationszeit werden $M_M(\cdot)$ und $\varphi_M(\cdot)$ der Antriebsmaschine aufgenommen. Es interessieren nun die Mittelwerte $\bar{\varphi}_{max}$ und $\bar{\varphi}_{min}$ aller Winkel $\varphi(\cdot)$ an den positiven wie negativen Scheitelpunkten des Momentenverlaufes. Aus diesen berechnet sich mit

$$c = \frac{2 \cdot M_c}{\bar{\varphi}_{max} - \bar{\varphi}_{min}} \quad (3.5)$$

die grobe Näherung der Federsteifigkeit. Die Tabelle 3.5 listet die Werte für die vier zur Verfügung stehenden Wellen auf; sie unterscheiden sich in Härte und Durchmesser. Bezüglich der Messung sei noch bemerkt, dass es für eine Vernachlässigung der Reibung wichtig ist, einen sich sehr langsam ändernden Momentenverlauf zu verwenden – so wirkt am Scheitelpunkt der Geschwindigkeit annähernd M_c .

Entsprechend der Federsteifigkeit ist es aufwändig, die Dämpfungskonstante

$$d = -\frac{M_i(t)}{\Omega(t)} = -\frac{M_i(t)}{\dot{\varphi}(t)} = \frac{M_{D\ddot{U}}(t)}{\dot{\varphi}(t)} \quad (3.6)$$

Federsteifigkeit in $[Nm/rad]$	c
Welle 1 (weich)	410
Welle 2 (weich)	1220
Welle 3 (hart)	2610
Welle 4 (fast starr)	4070

Tabelle 3.5: *Federsteifigkeit der Torsionswellen (Messungen)*

zu ermitteln. Zum einen ist die eindeutige Bestimmung der Materialeigenschaften schwierig, um auf die Dämpfung schließen zu können. Zum anderen müssen weitere dämpfende Effekte zur Unterscheidung ebenfalls bestimmt werden.

Physikalisch betrachtet wird die Dämpfung durch die innere Reibung des Werkstoffes verursacht – dieses innere Moment $M_i(t)$ wirkt invers proportional zur Winkelgeschwindigkeit $\Omega(t)$ und ist ihr entgegengerichtet (vgl. Gleichung (3.6)). Wird eine Welle aufgezogen, so überträgt diese geschwindigkeitsabhängig das Dämpfermoment $M_{D\dot{U}}(\Omega(\cdot))$. Gleichzeitig wirkt geschwindigkeitsabhängig das innere Moment $M_i(\Omega(\cdot))$ dem antreibenden Moment entgegen und hat somit bremsenden Effekt. Dem antreibenden Moment wirkt jedoch nicht nur die innere Reibung, sondern auch die Gleitreibung entgegen. Dies hat zur Folge, dass bei einer Identifikation von d ohne Kenntnis der Reibkennlinien der Effekt der Reibung der Dämpfung zugeordnet werden würde. Man erhielte einen falschen Parameterwert. Aus diesem Grund ist für eine Identifikation ein gutes Modell der Anlage nötig; dementsprechend muss auch die Reibkennlinie aufgenommen werden. Hinsichtlich einer eindeutigen Bestimmung der Parameter für einen schnellen Regler ist es fraglich, wie gut sich diese physikalischen Effekte trennen lassen.

Die Parameter-Identifikation von d hängt von einer Vielzahl von Messungen ab, deren Qualität stark durch Störungen und nicht beachtete Effekte beeinflusst wird; bereits die Bestimmung des Winkelgeschwindigkeitssignals $\Omega(\cdot)$ beruht auf einer Differenzierung des Rotorwinkelsignals $\varphi(\cdot)$ (Encoder). Auch die Aufnahme der Reibkennlinie ist davon betroffen.

Eine reine Messung von d – ähnlich der Messung für c – ist nicht möglich: nach Gleichung 3.6 ist zu verstehen, dass auf Grund der für eine Bestimmung notwendigen Beobachtung der Winkelgeschwindigkeit eine dynamische Messung durchgeführt werden muss. Es lassen sich nicht mehr einfache Gleichungen für stationäre Fälle aufstellen, vielmehr entstehen Differentialgleichungen, die ebenso die Federsteifigkeit wie Trägheitsmomente beinhalten. Letztendlich muss das gesamte schwingungsfähige ZMS betrachtet werden, um über die Abklingzeiten eine Aussage über d zu gewinnen. Beispielsweise könnte die Welle über die Antriebsmaschine – bei fixierter Arbeitsmaschine – aufgezogen werden, um anschließend das Moment gleich Null zu setzen. Man erhält eine abklingende Schwingung, über die anhand der Amplitudenverhältnisse auf den Dämpfungsgrad geschlossen werden kann. Bei Kenntnis der übrigen Parameter lässt sich die Dämpfungskonstante ableiten. Eine derartige Messung ist jedoch nur möglich, wenn eine Berücksichtigung der Reibung und Haftung erfolgt (vgl. oben). Die Aussagekraft des Ergebnisses ist fraglich, weshalb ebenso auf eine mathematische Schätzung von d zurückgegriffen werden kann, wenn die übrigen Parameter bereits bekannt sind. Eine weitere Ausführung folgt im Kapitel 3.3.2.

In der Praxis ist es wichtig, die Federsteifigkeit c zu kennen. Die Dämpfungskonstante d wird bei einem konservativen Regler derart eingestellt, so dass es zu einem guten Regelungsverhalten kommt.

All diese beschriebenen Identifikationsprobleme werden durch eine adaptive Regelung, wie sie in Kapitel 5 vorgestellt wird, umgangen.

3.2 Digitaler Regler

3.2.1 Hardware

Als Schnittstelle zwischen Hard- und Software dient ein Standard-PC, der mit einer Ein- und Ausgabekarte ausgestattet ist. Die Eingabekarte ermöglicht das Auslesen des Encoders der Synchronmaschinen, um die Rotorlage $\varphi(t)$ bzw. die Winkelgeschwindigkeit $\Omega(t)$ zu erfassen. Die Ausgabekarte dient der Momentensollwertübergabe an den Umrichter. Auf diesen mit einem Echtzeitbetriebssystem ausgerüsteten Target-PC können die entworfene Regelung sowie die gewünschten Sollwertverläufe geladen werden. Hierfür ist ein weiterer Standard-PC, der sog. Host-PC notwendig, mit dem der Target-PC angesteuert und überwacht wird. Während des Regelungsbetriebes bildet die Einheit „Target-PC – Umrichter – Synchronmaschinen“ ein autarkes System, d.h. einen nicht mehr beeinflussbaren geschlossenen Regelkreis. Am Target-PC-Bildschirm kann online das Regelungsergebnis betrachtet werden; der Host-PC nimmt die Messergebnisse auf. Eine schematische Übersicht der beschriebenen Hardwarekonstellation ist in Abbildung 3.4 zu sehen. Die wichtigsten

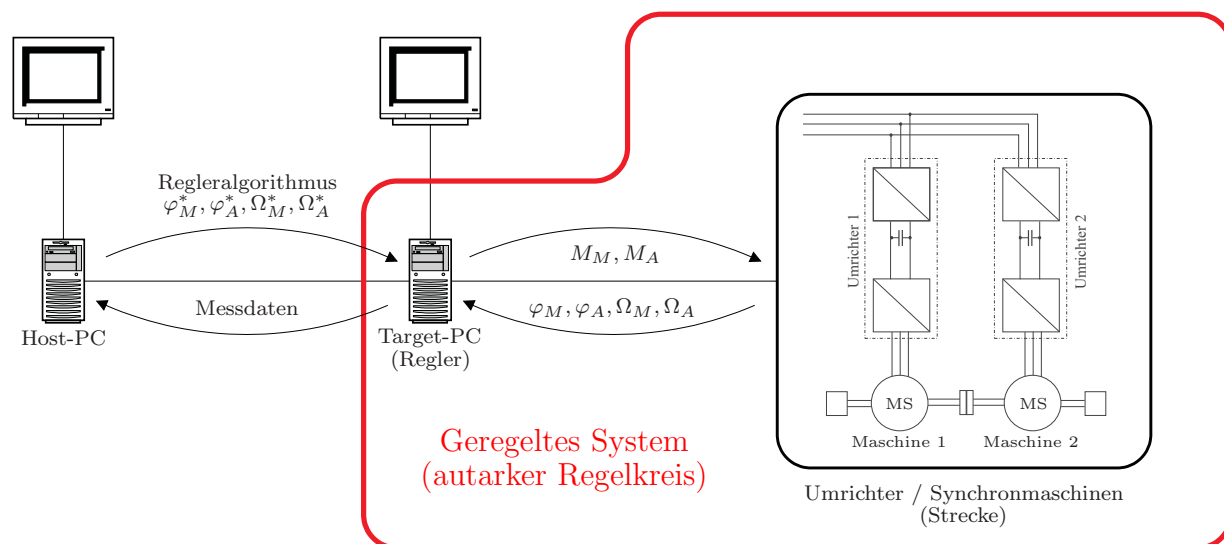


Abbildung 3.4: Schema zur Reglereinbindung

Daten und Elemente der beiden PC's sind in Tabelle 3.6 nachzulesen. Die Taktfrequenz des Target-PC's wurde ausreichend hoch gewählt, um aufwändige Regleralgorithmen echtzeitfähig innerhalb kleiner Abtastzeiten abarbeiten zu können.

	Target-PC (echtzeitfähig)	Host-PC
Prozessor	Intel Pentium III	
Taktfrequenz	1200MHz	
Arbeitsspeicher	128MB	
Betriebssystem	<i>xPC-Target V 1.5,</i> <i>Mathworks</i>	<i>Windows NT 4.0,</i> <i>Microsoft</i>
Software		<i>Matlab 6.1 Release 12.1,</i> <i>Mathworks</i>
Eingabekarte	Interpolationskarte: <i>IK121V, Heidenhain [70]</i>	keine
Ausgabekarte	12 Bit DA-Wandler: <i>DAS-1602, Keithley Instruments [94]</i>	keine

Tabelle 3.6: Ausstattung von Target- und Host-PC

3.2.2 Software

Die gesamte Reglerimplementierung stützt sich auf Programme der Firma *Mathworks*: so findet die Reglerentwicklung auf dem Host-PC in *Simulink (Matlab 6.1 release 12.1)* statt, die Reglerinbetriebnahme bzw. der Reglerbetrieb auf dem Target-PC beruht auf dem Echtzeitbetriebssystem *xPC-Target V 1.5*. *Simulink* ermöglicht die Programmierung eines Reglers in Form eines übersichtlichen Signalfussplanes bestehend aus verknüpften Funktionsblöcken. Neben vorgefertigter Blöcke lassen sich weitere Funktionalitäten in Form von C-Code einbinden.

Nachdem der Regler auf dem Host-PC konfiguriert und die Solltrajektorien festgelegt wurden, wird das *Simulink*-Modell in Quellcode gewandelt und an den Target-PC übertragen. Dieser dient nun als zeitdiskreter Regler dem geregelten Betrieb des Zwei-Massen-Systems.

3.3 Modellbildung

3.3.1 Ein-Massen-System (EMS):

Einheit „Umrichter – Synchronmaschine – Mechanik“

3.3.1.1 Permanenterregte Synchronmaschine

Bei den verwendeten Maschinen handelt es sich um permanentmagneterregte Synchronmaschinen (PMSM), die zur Klasse der Drehfeldmaschinen gehören. Der Läuferfluss Ψ_{PM} wird hierbei durch einen Permanentmagneten erzeugt, während der Statorfluss elektrisch erregt wird. Die Spulen besitzen die Induktivität L_1 sowie den Widerstand R_1 . Durch die räumlich versetzte Anordnung der drei Statorspulen um 120° ergibt sich beim bestromen der Spulen mit Wechselströmen der Frequenz Ω_1 , die elektrisch um 120° versetzt zueinander sind, durch Überlagerung der Spulenfelder ein Drehfeld. Mit dem Hintergrund, dass bei einem symmetrischen Dreiphasensystem die Summe aller drei Spulenströme den Wert

Null ergibt, und dass die vektorielle Addition der durch die Ströme erzeugten Felder ein Drehfeld ergibt, wird die Darstellung aller Signale in der zweidimensionalen komplexen Ebene als sog. Raumzeiger ermöglicht. Hierdurch werden drei entsprechende Signale der drei Spulen zu einem zusammengefasst, was die Darstellung vereinfacht.

Entsprechend der Polpaarzahl Z_p bilden sich über den Gesamtumfang der Maschine Z_p Sektoren aus, die durch ein Feld der Frequenz Ω_1 durchlaufen werden. Auf Grund der fließenden Übergänge an den Sektorgrenzen ergeben sich „optisch“ Z_p Drehfelder, die mit der Frequenz Ω_1/Z_p drehen. Stationär folgt der Rotor mit einem lastabhängigen Polradwinkel dem Drehfeld, d.h. der Läufer dreht sich stationär mit der mechanischen Drehzahl $\Omega_m(t) = \Omega_1(t)/Z_p$. Die Drehzahl $\Omega_m(t)$ des Läufers ist somit direkt proportional zur Frequenz $\Omega_1(t)$ der Spulenströme.

Die entsprechenden Maschinengleichungen werden im läuferfesten d - q -Koordinatensystem beschrieben, welches sich mit der Frequenz

$$\Omega_L(t) = Z_p \Omega_m(t) \quad (3.7)$$

dreht. Stationär gilt: $\Omega_L(t) = \Omega_1(t)$. Durch die Transformation verlieren die Raumzeiger ihre Zeitvarianz bzgl. der Position und verhalten sich mit ihrer verbleibenden Zeitvarianz bzgl. der Amplitude wie bekannte Signale. Der konstante Läuferfluss Ψ_{PM} ist an die d -Koordinate orientiert, weshalb man beim Reglerentwurf mit dieser Koordinatentransformation von einer *feldorientierten Regelung* spricht. Die Statorinduktivität L_1 wird in diesem Koordinatensystem in seine Komponenten L_d und L_q zerlegt, wie auch alle Signale.

Für die Vertiefung des physikalischen Verständnisses von elektrischen Maschinen sei auf die Literatur [165] verwiesen ¹⁾. Die folgende Herleitung stützt sich auf die Literatur [166, 107], die sich intensiv mit der Theorie von Drehfeldmaschinen befasst. Es wird ein kurzer Überblick gegeben mit dem Ziel der Modellbildung für die Reglerauslegung.

Die Maschinengleichungen für den Statorkreis der PMSM lauten:

$$\frac{d\Psi_d(t)}{dt} = U_d(t) - R_1 I_d(t) + \Omega_L(t) \Psi_q \quad (3.8)$$

$$\frac{d\Psi_q(t)}{dt} = U_q(t) - R_1 I_q(t) + \Omega_L(t) \Psi_d \quad (3.9)$$

Die Flussgleichungen ergeben sich zu:

$$\Psi_d(t) = \Psi_{PM} + L_d I_d(t) \quad (3.10)$$

$$\Psi_q(t) = L_q I_q(t) \quad (3.11)$$

Für das resultierende Luftspaltmoment gilt:

$$M_M(t) = \frac{3}{2} Z_p \left(\Psi_d(t) I_q(t) - \Psi_q(t) I_d(t) \right) \quad (3.12)$$

$$= \frac{3}{2} Z_p \left(\Psi_{PM} I_q(t) + (L_d - L_q) I_q(t) I_d(t) \right) \quad (3.13)$$

¹⁾ Um den Lesern und Leserinnen ohne große Vorkenntnisse in neuer Art und sehr anschaulich die prinzipielle Funktionsweise der Maschinen zu vermitteln und dabei andererseits die für den Fachmann gebotene Präzision der Darstellung beizubehalten, hat der Autor dieser Dissertation in diesem Buch [165] einen wesentlichen Beitrag geleistet (siehe „Vorwort zur dritten Auflage“).

Maschinengleichungen. Für die Flussgleichungen (3.10) und (3.11) gilt mit $I_d(\cdot) \equiv 0$:

$$\Psi_d(t) = \Psi_{PM} = \text{const} \quad (3.15)$$

$$\Psi_q(t) = L_q I_q(t) \quad (3.16)$$

Setzt man die neuen Flussgleichungen in die Statorgleichungen (3.8) und (3.9) ein, gibt es nur noch eine Differentialgleichung für den Statorkreis:

$$U_d(t) = -\Omega_L(t) L_q I_q(t) = -Z_p \Omega_m(t) L_q I_q(t) \quad (3.17)$$

$$\frac{d\Psi_q(t)}{dt} = U_q(t) - R_1 \frac{\Psi_q(t)}{L_q} + \Omega_L(t) \Psi_{PM} \quad (3.18)$$

Mit den Gleichungen (3.18), (3.7) und (3.14) resultiert der vereinfachte Signalflussplan in Abbildung 3.6. Gleichung (3.17) stellt die Steuerbedingung für die Spannung $U_d(t)$

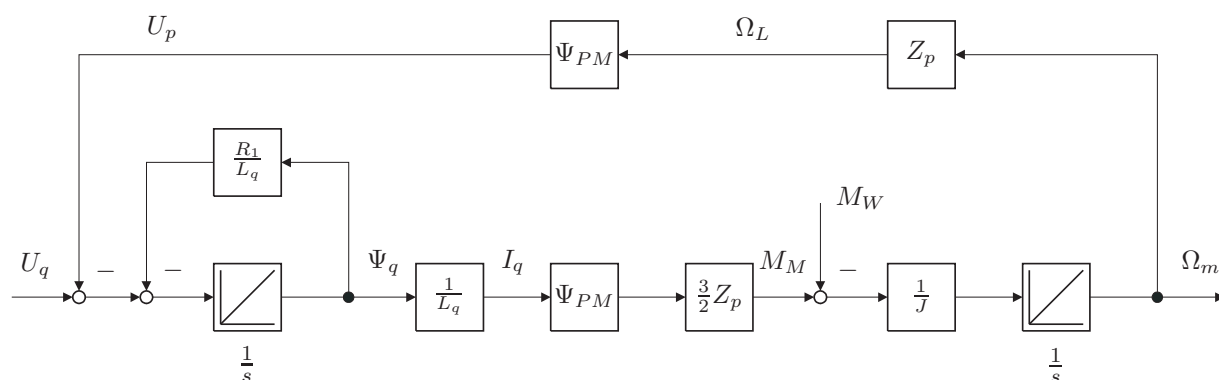


Abbildung 3.6: Vereinfachter Signalflussplan der permanentenerregten Drehfeldmaschine bei Einhaltung der Steuerbedingung (3.17) für die Spannung U_d [165, 166]

dar, mit welcher in Abhängigkeit des momenterzeugenden Stroms $I_q(t)$ und der aktuellen Läufergeschwindigkeit $\Omega_L(t)$ der Strom $I_d(t) \equiv 0$ erzwungen wird und folglich der Signalflussplan 3.6 bzw. die Gleichung (3.18) seine Gültigkeit erhält (siehe Signal-Kompensation am Integriereingang in Signalflussplan 3.5). Über die Spannung U_q ist direkt das Motormoment M_M zu beeinflussen, was das Verhalten einer Gleichstrommaschine widerspiegelt. Das innere Moment M_M wirkt auf den Rotor und beschleunigt ihn je nach Größe des Trägheitsmomentes J sowie Widerstandsmoments M_W unterschiedlich schnell. Die Beziehung zwischen Beschleunigung $\dot{\Omega}_m$ und Winkelgeschwindigkeit Ω_m des mechanischen Teils der Synchronmaschine wird durch einen Integrator modelliert. Wie bei einer Gleichstrommaschine nimmt mit zunehmender Drehzahl des Rotors die induzierte Spannung, die sog. elektromotorische Kraft (EMK), zu und wirkt der anliegenden Eingangsspannung U_q entgegen. Im Kontext der Synchronmaschine wird diese induzierte Spannung als Polradspannung U_p bezeichnet.

Mit dem Signalflussplan 3.6 steht ein Modell zur Verfügung, das dem der Gleichstrommaschine entspricht und folglich dieselben Regelungsmethoden erlaubt.

3.3.1.2 Umrichter mit Stromregler

Die Ansteuerung der PMSM geschieht über einen Umrichter. Dieser ist mit einer feldorientierten Stromregelung ausgestattet, die es ermöglicht, den Strom $I_d(t) = 0$ zur Einhaltung der Steuerbedingung (3.17) und den Strom $I_q(t)$ zur Momenterzeugung einzuprägen. Ein Schema der stromgeregelten Synchronmaschine ist in Abbildung 3.7 zu sehen. Es wird ein

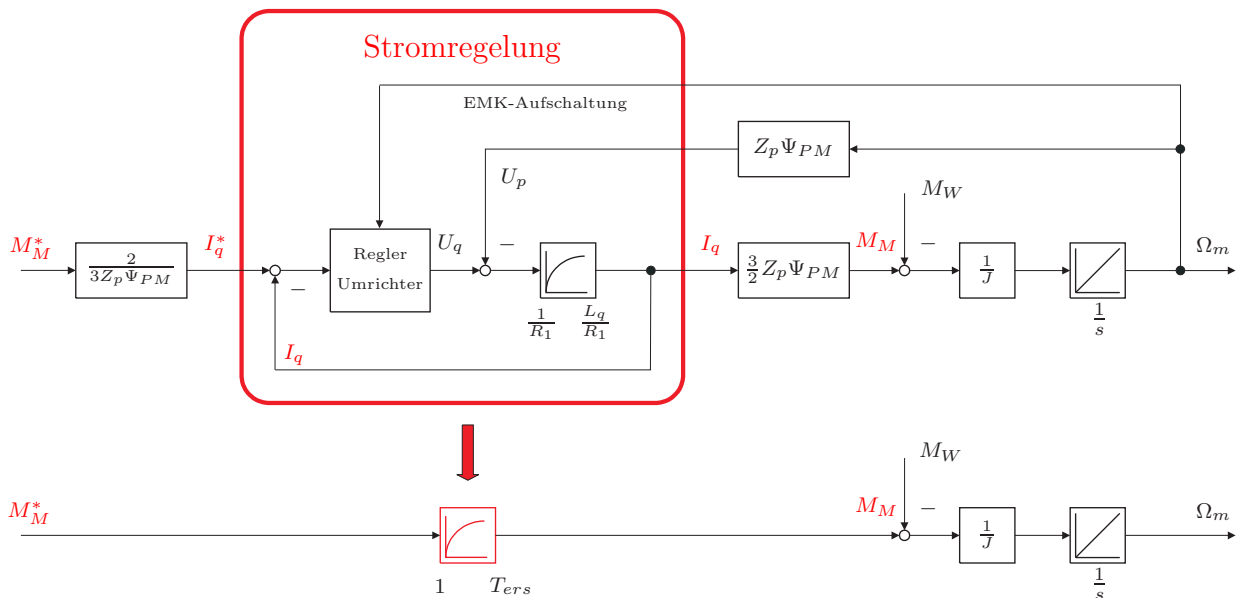


Abbildung 3.7: Signalflussplan einer stromgeregelten permanentenerregten Drehfeldmaschine mit Ersatzschaltbild

Sollmoment M_M^* an den Umrichter übergeben. Der Umrichter bestimmt dann über den inversen maschinenabhängigen Proportionalitätsfaktor $K = \frac{3}{2} Z_p \Psi_{PM}$ den Sollstrom I_q^* und regelt mit Hilfe von Messwerten den Strom I_d auf Null und den Strom I_q auf den Sollwert, womit das gewünschte Moment M_M am Rotor anliegt. Um die störende Wirkung der induzierten Gegenspannung (EMK) auf den Stromregelkreis zu unterbinden, kann mit Hilfe des Messwertes $\Omega_m(t)$ eine EMK-Aufschaltung zur Kompensation der Polradspannung $U_p(t)$ realisiert werden.

Wie aus Abbildung 3.7 hervorgeht, liegt das Sollmoment erst nach einer gewissen Verzögerungszeit am Ausgang an. Der Grund ist zum einen auf die Statorzeitkonstante L_q/R_1 und zum anderen auf die Umrichtertotzeit zurückzuführen. Der Steuersatz des Umrichters arbeitet mit einer endlich hohen Zündimpulsfrequenz $1/T$, wodurch sich eine mittlere Totzeit T_t ergibt, in der der Umrichter nicht auf Veränderungen des Sollstromes reagieren kann. Der Umrichter verhält sich wie ein Halteglied nullter Ordnung mit der Abtastperiode T . Im statistischen Mittel ist die Wartezeit bzw. Totzeit

$$T_t = 0.5 T \tag{3.19}$$

Die Übertragungsfunktion eines Totzeitgliedes lautet im Laplace-Bereich $F(s) = e^{-sT_t}$. Unter Berücksichtigung einer statischen Verstärkung ist das Übertragungsverhalten des Umrichters demnach

$$G_{UR}(s) = V_{UR} \cdot e^{-sT_t}$$

und für eine Näherung 1. Ordnung ergibt sich ein PT_1 -Verhalten:

$$G_{UR}(s) \approx \frac{V_{UR}}{1 + sT_t}$$

Die Strecke des Stromregelkreises wird somit durch die Umrichterzeitkonstante T_t und der Statorzeitkonstante $T_1 = L_q/R_1$ bestimmt:

$$G_S(s) = \frac{V_{UR}}{1 + sT_t} \frac{\frac{1}{R_1}}{1 + sT_1} \quad (3.20)$$

In der Regel ist die Umrichterzeitkonstante mit $T_t \ll T_1$ viel kleiner als die Statorzeitkonstante.

Wird der Stromregler als PI-Regler nach dem Betragsoptimum [166] ausgelegt, findet eine Kompensation der großen Zeitkonstante, d.h. der Statorzeitkonstante T_1 statt. Die Übertragungsfunktion zweiter Ordnung des betragsoptimierten Regelkreises lautet folglich:

$$G_{RK}(s) \Big|_{BO} = \frac{1}{1 + 2T_t s + 2T_t^2 s^2} \quad (3.21)$$

Wegen $2T_t^2 \ll 1$ lässt sich das dominante Verhalten des Stromregelkreises sehr gut durch ein PT_1 -Glied mit der Ersatzzeitkonstante T_{ers} repräsentieren:

$$G_{RK,ers}(s) \Big|_{BO} = \frac{1}{1 + T_{ers} s}, \quad T_{ers} = 2T_t \quad (3.22)$$

Die entsprechende Ersatzzeitkonstante des Prüfstandes unter Berücksichtigung der Tabelle 3.2, Gleichung (3.22) und Gleichung (3.19) beträgt:

$$T_{ers} = 0.2 \text{ ms} \quad (3.23)$$

Als Ergebnis ist festzuhalten, dass das Übertragungsverhalten der permanentmagneterregten Synchronmaschine mit Umrichter gemäß Abbildung 3.7 auf die Mechanik und eine Ersatzzeitkonstante reduziert werden kann. Die Zustandsbeschreibung des Ein-Massen-

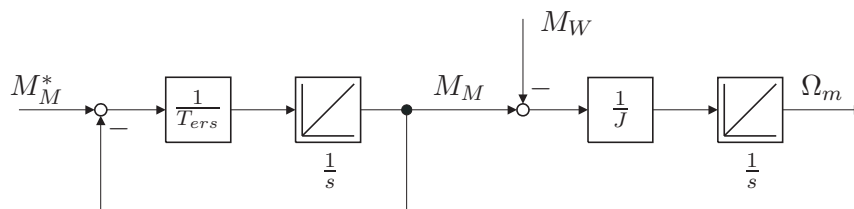


Abbildung 3.8: Modell des Ein-Massen-Systems

Systems folgt aus dem Signalflussplan 3.8:

$$\dot{\Omega}_m(t) = \frac{1}{J} (M_M(t) - M_W(t)) \quad (3.24)$$

$$\dot{M}_M(t) = \frac{1}{T_{ers}} (M_M^*(t) - M_M(t)) \quad (3.25)$$

Die allgemeine Matrizendarstellung (2.13) mit $u(t) = M_M^*(t)$, $v(t) = M_W(t)$ und $y(t) = \Omega_m(t)$ lautet:

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J} \\ 0 & -\frac{1}{T_{ers}} \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{T_{ers}} \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} -\frac{1}{J} \\ 0 \end{pmatrix} v(t) \\ y(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}^T \underline{x}(t)\end{aligned}\quad (3.26)$$

Für die Übertragungsfunktion gilt:

$$\frac{\Omega_m(s)}{M_M^*(s)} = \underbrace{\frac{1}{1 + T_{ers} s}}_{\text{Momentenregelung}} \cdot \overbrace{\frac{1}{J s}}^{\text{Mechanik}} \quad (3.27)$$

3.3.2 Zwei-Massen-Systems (ZMS): Einheit „EMS – Welle – EMS“

Das Zwei-Massen-System (ZMS) besteht aus zwei über eine weiche Welle gekoppelten Ein-Massen-Systemen, welche ausführlich im vorigen Kapitel 3.3.1 diskutiert wurden. Die elastische Kopplung zwischen den beiden Synchronmaschinen wird gemäß des Schemas 3.2 durch ein Feder-Dämpfer-System beschrieben. Nach Kapitel 3.1.2 bestimmt sich das Übertragungsmoment der Feder sowie des Dämpfers gemäß der Gleichungen (3.4) und (3.6) wie folgt:

$$M_{F\ddot{U}}(t) = c \Delta\varphi(t) = c (\varphi_M(t) - \varphi_A(t)) \quad (3.28)$$

$$M_{D\dot{U}}(t) = d \Delta\dot{\varphi}(t) = d (\dot{\varphi}_M(t) - \dot{\varphi}_A(t)) \quad (3.29)$$

Der Verdrehwinkel $\Delta\varphi(t)$ ergibt sich aus der Differenz zwischen Antriebsmaschinenwinkel $\varphi_M(t)$ (Motor) und Arbeitsmaschinenwinkel $\varphi_A(t)$. Die Summe aller übertragenen Momente des Feder-Dämpfer-Systems wird mit

$$M_{FD\ddot{U}}(t) = M_{F\ddot{U}}(t) + M_{D\dot{U}}(t) \quad (3.30)$$

bezeichnet. Entsprechend der Abbildung 3.8 des Modells des Ein-Massen-Systems und der daraus abgeleiteten Differentialgleichung (3.24) berechnet sich das Beschleunigungsmoment $M_B(t)$ aus der Differenz zwischen Antriebsmoment $M_M(t)$ und Widerstandsmoment $M_W(t)$. Für die Einheit Antriebsmaschine und Arbeitsmaschine gilt mit den entsprechenden Trägheitsmomenten:

$$M_{BM}(t) = M_M(t) - M_{WM}(t) = J_M \dot{\Omega}(t) = J_M \ddot{\varphi}(t) \quad (3.31)$$

$$M_{BA}(t) = M_{MA}(t) - M_W(t) = J_A \dot{\Omega}(t) = J_A \ddot{\varphi}(t) \quad (3.32)$$

Entsprechend des Szenarios in Kapitel 3.1 soll das Trägheitsmoment J_A der Arbeitsmaschine größer als das Trägheitsmoment J_M der Antriebsmaschine sein (siehe Tabelle 3.4).

Es wird nun die Antriebsmaschine (Index M) im Verbund mit der Arbeitsmaschine (Index A) betrachtet. Zieht die Antriebsmaschine die Welle auf, so wird das Feder-Dämpfer-Moment $M_{FD\ddot{U}}(t)$ über die Welle an die Arbeitsmaschine übertragen und es entsteht das dem Antriebsmoment $M_M(t)$ entgegengerichtete Feder-Dämpfer-Moment $M_{FD}(t) = -M_{FD\ddot{U}}(t)$. Für die Antriebsmaschine entspricht die Rückwirkung des Feder-Dämpfer-Moments $M_{FD\ddot{U}}(t)$ einem Widerstandsmoment $M_{WM}(t)$. Durch Einsetzen der Beziehung $M_{WM}(t) = M_{FD\ddot{U}}(t)$ in die Gleichung (3.31) folgt mit den Gleichungen (3.28), (3.29) und (3.30) die Differentialgleichung der Antriebsmaschine:

$$\begin{aligned} M_{BM}(t) &= M_M(t) - M_{FD\ddot{U}}(t) \\ &= M_M(t) - [c(\varphi_M(t) - \varphi_A(t)) + d(\dot{\varphi}_M(t) - \dot{\varphi}_A(t))] = J_M \ddot{\varphi}_M(t) \end{aligned} \quad (3.33)$$

Das Feder-Dämpfer-System überträgt das Moment $M_{FD\ddot{U}}(t)$ der Antriebsmaschine auf die Arbeitsmaschine. Durch Einsetzen der Beziehung $M_{MA}(t) = M_{FD\ddot{U}}(t)$ in die Gleichung (3.32) ergibt sich mit den Gleichungen (3.28), (3.29) und (3.30) die Differentialgleichung der Arbeitsmaschine:

$$\begin{aligned} M_{BA}(t) &= M_{FD\ddot{U}}(t) - M_W(t) \\ &= [c(\varphi_M(t) - \varphi_A(t)) + d(\dot{\varphi}_M(t) - \dot{\varphi}_A(t))] - M_W(t) = J_A \cdot \ddot{\varphi}_M(t) \end{aligned} \quad (3.34)$$

Zur Berücksichtigung der Dynamik des Stromregelkreises bzgl. des Momentenaufbaus gilt für die Antriebs- und Arbeitsmaschine entsprechend der Abbildung 3.8 des Modells des Ein-Massen-Systems und der daraus abgeleiteten Differentialgleichung (3.25):

$$\dot{M}_M(t) = \frac{1}{T_{ers}} (M_M^*(t) - M_M(t)) \quad (3.35)$$

$$\dot{M}_W(t) = \frac{1}{T_{ers}} (M_W^*(t) - M_W(t)) \quad (3.36)$$

Aus den Differentialgleichungen (3.33), (3.34), (3.35) und (3.36) lässt sich der Signalflussplan 3.9 des Zwei-Massen-Systems erstellen.

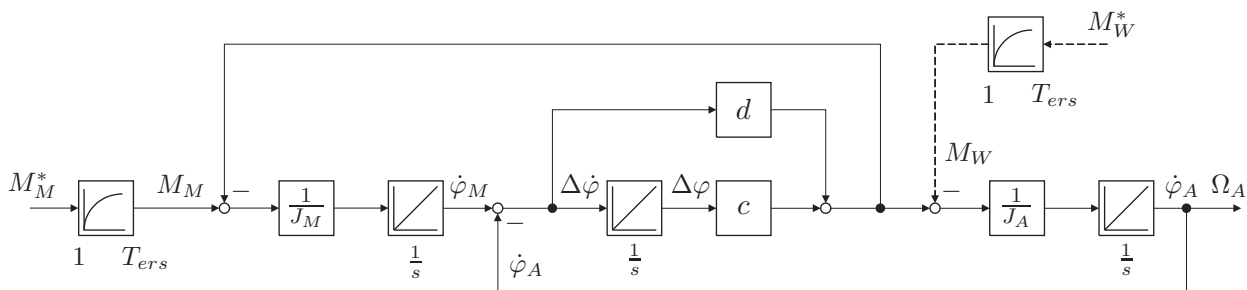


Abbildung 3.9: Modell des Zwei-Massen-Systems

Mit Hilfe der Abbildung 3.9 kann die Zustandsdarstellung des Zwei-Massen-Systems ent-

wickelt werden:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \ddot{\varphi}_M(t) \\ \Delta\dot{\varphi}(t) \\ \ddot{\varphi}_A(t) \\ \dot{M}_M(t) \end{pmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{d}{J_M} & -\frac{c}{J_M} & \frac{d}{J_M} & \frac{1}{J_M} \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ \frac{d}{J_A} & \frac{c}{J_A} & -\frac{d}{J_A} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{T_{ers}} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{A}}} \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_M(t) \\ \Delta\varphi(t) \\ \dot{\varphi}_A(t) \\ M_M(t) \end{pmatrix} + \dots & (3.37) \\
 &\dots + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{T_{ers}} \end{pmatrix}}_{\tilde{\mathbf{b}}_1} M_M^*(t) + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{J_A} \\ 0 \end{pmatrix}}_{\tilde{\mathbf{b}}_2} M_W(t) \\
 \Omega_A(t) &= \underbrace{(0 \ 0 \ 1 \ 0)}_{\tilde{\mathbf{c}}^T} \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_M(t) \\ \Delta\varphi(t) \\ \dot{\varphi}_A(t) \\ M_M(t) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Mit dem Signalflussplan 3.9 lässt sich ebenfalls die Übertragungsfunktion bilden:

$$\frac{\Omega_A(s)}{M_M(s)} = \underbrace{\frac{1}{1 + T_{ers}s}}_{\text{Momentenregelung}} \cdot \underbrace{\frac{1}{s(J_M + J_A)}}_{\text{Mechanik: starre Verbindung (vgl. EMS)}} \cdot \underbrace{\frac{1 + s\frac{d}{c}}{1 + s\frac{d}{c} + s^2\frac{J_M J_A}{c(J_M + J_A)}}}_{\text{Einfluss der elastischen Welle}} \quad (3.38)$$

Das erste Teilsystem in Gleichung (3.38) repräsentiert den Momenten- bzw. Stromregelkreis der Einheit „Umrichter – Synchronmaschine“ als Verzögerungsglied erster Ordnung (PT_1 -Verhalten). Die Eckfrequenz des PT_1 -Gliedes lautet mit Gleichung (3.23):

$$\omega_{E,ers} = \frac{1}{T_{ers}} = 5000 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \quad f_{E,ers} = \frac{1}{2\pi} \omega_{E,ers} = 795.8 \text{ Hz} \quad (3.39)$$

Das zweite Teilsystem spiegelt das integrale Verhalten (I -Verhalten) der Mechanik wider. Zusammen ergeben das erste und zweite Teilsystem das aus Gleichung (3.27) bekannte Ein-Massen-System. In dieses geht das Zwei-Massen-System über, wenn mit $c \rightarrow \infty$ eine starre Kopplung von Antriebs- und Arbeitsmaschine vorliegt und folglich das dritte Teilsystem den Wert Eins annimmt. Besteht eine starre Verbindung zwischen den beiden Synchronmotoren, was annähernd durch die Welle 4 (vgl. Tabelle 3.5) erreicht wird, können die Trägheitsmomente J_M und J_A zu einem einzigen zusammengefasst werden – es resultiert ein Ein-Massen-System (EMS). Aus der Tabelle 3.4 ergibt sich das entsprechende Massenträgheitsmoment:

$$J = J_M + J_A = 0.499 \text{ kg m}^2 \quad (3.40)$$

Das dritte Teilsystem der Gleichung (3.38) repräsentiert bei einer weichen Welle die schwingungsfähige Komponente des Zwei-Massen-Systems als Verzögerungsglied zweiter Ordnung (PT_2 -Verhalten). Die Standardübertragungsfunktion des PT_2 -Gliedes lautet:

$$F_{PT2}(s) = \frac{K}{1 + s\frac{2D}{\omega_0} + s^2\frac{1}{\omega_0^2}} \quad (3.41)$$

Die Berechnung der Pole führt zu:

$$p_{(1,2),PT2} = -\underbrace{\omega_0 D}_{\sigma_{D,PT2}} \mp j \underbrace{\omega_0 \sqrt{1-D^2}}_{\omega_{D,PT2}}, \quad 0 < D < 1 \quad (3.42)$$

$$= -\omega_0 (D \pm \sqrt{D^2 - 1}), \quad D \geq 1 \quad (3.43)$$

Es wird deutlich, dass das Systeme für $D = 0$ eine Dauerschwingung mit der Kreisfrequenz ω_0 zeigt. Folglich bezeichnet D den Dämpfungsgrad und ω_0 die Kennkreisfrequenz des ungedämpften Systems. In Abhängigkeit des Dämpfungsgrads kann das Ab- bzw. Aufklingverhalten in folgende Bereiche eingeteilt werden:

- $D < 0$: das System ist instabil
- $0 \leq D < 1$: das Systemverhalten ist periodisch und stabil (schwingungsfähig)
- $D \geq 1$: das Verhalten ist aperiodisch stabil

Nachdem der Realteil im schwingungsfähigen Fall (3.42) das Abklingverhalten beschreibt, bezeichnet $1/\sigma_{D,PT2}$ die Abklingzeitkonstante. Der Imaginärteil beschreibt mit $\omega_{D,PT2}$ die Kennkreisfrequenz des gedämpften Systems.

Führt man einen Vergleich zwischen Gleichung (3.41) und (3.38) durch, so erhält man die Kennkreisfrequenz $\omega_{0,ZMS}$ des ungedämpften Zwei-Massen-Systems bei Verwendung der Welle 1 (vgl. Tabelle 3.5):

$$\omega_{0,ZMS} = \sqrt{\frac{c(J_M + J_A)}{J_M J_A}} = \sqrt{\frac{410 \cdot (0.166 + 0.333)}{0.166 \cdot 0.333}} \frac{rad}{s} = 60.84 \frac{rad}{s} \quad (3.44)$$

Ein angeregtes Zwei-Massen-System mit der Welle 1 schwingt somit im ungedämpften Fall mit der Torsionseigenfrequenz von:

$$f_{0,ZMS} = \frac{1}{2\pi} \omega_{0,ZMS} = 9.68 \text{ Hz} \quad (3.45)$$

Für den Fall eines gedämpften Zwei-Massen-Systems ergibt sich bei Anregung gemäß Gleichung (3.42) eine Schwingung geringerer Frequenz:

$$\omega_{D,ZMS} = \omega_{0,ZMS} \sqrt{1 - D^2}, \quad f_{D,ZMS} = \frac{1}{2\pi} \omega_{D,ZMS} \quad (3.46)$$

Der Berechnung liegt die Kenntnis des Dämpfungsgrades D zu Grunde, der sich beim Vergleich zwischen Gleichung (3.41) und (3.38) wie folgt ergibt:

$$D = \frac{d}{2} \sqrt{\frac{J_M + J_A}{J_M J_A c}} \quad (3.47)$$

Wegen der schwer bestimmbareren Dämpfungskonstante d (siehe Kapitel 3.1.2) lässt sich die Torsionseigenfrequenz $f_{D,ZMS}$ ebenfalls nur unzureichend bestimmen.

Mit Hilfe des Dämpfungsgrades (3.47) kann jedoch im Umkehrschluss eine Eingrenzung des Wertebereiches für die schwer bestimmbare Dämpfungskonstante d erfolgen:

$$d = 2D \sqrt{\frac{J_M J_A c}{J_M + J_A}} \quad (3.48)$$

Da bekannt ist, dass das Gesamtsystem der realen Anlage schwingungsfähig ist, liegt der Dämpfungsgrad im Bereich $0 \leq D < 1$. Angewandt auf die Gleichung (3.48) können die möglichen Werte von d der Versuchsanlage auf einen Bereich

$$0 \frac{Nm \cdot s}{rad} \leq d < 13.4787 \frac{Nm \cdot s}{rad} \quad (3.49)$$

eingeschränkt werden, der seine physikalische Richtigkeit hat.

Der tatsächliche Wert der Dämpfungskonstante bzw. des Dämpfungsgrades ergibt sich nach aufwändiger Identifikation und liegt bei:

$$d = 1.25 \frac{Nm \cdot s}{rad}, \quad D = 0.09 \quad (3.50)$$

Mit diesem Wert zeigen die gedämpften Schwingungen des Zwei-Massen-Systems mit der Welle 1 eine Kennkreisfrequenz/Eigenfrequenz von:

$$\omega_{D,ZMS} = 60.57 \frac{rad}{s}, \quad f_{D,ZMS} = 9.64 Hz \quad (3.51)$$

Nachdem die Frequenz $f_{0,ZMS}$ des ungedämpften Systems einfacher zu bestimmen ist als die Frequenz $f_{D,ZMS}$ des gedämpften Systems und $f_{D,ZMS} \leq f_{0,ZMS}$ gilt, ist die Wahl der Abtastzeit gemäß Theorem 2.37 mit

$$h \leq \frac{1}{2 f_{0,ZMS}} \left(\leq \frac{1}{2 f_{D,ZMS}} \right) \quad (3.52)$$

bei zeitdiskreten Reglern zum Bedämpfen der Schwingungen stets zielführend.

Das inverse PT_1 -Glied im Zähler des dritten Teilsystems in Gleichung (3.38) bewirkt eine Beschleunigung des Ein- Ausgangsverhaltens. Die stabile Nullstelle

$$q_{ZMS} = -\frac{c}{d} = -\frac{\omega_{0,ZMS}}{2D} \quad (3.53)$$

entspricht einer Eckfrequenz von:

$$\omega_{E,ZMS} = \frac{c}{d} = \frac{\omega_{0,ZMS}}{2D} = 328 \frac{rad}{s}, \quad f_{E,ZMS} = \frac{1}{2\pi} \omega_{E,ZMS} = 52.2 Hz \quad (3.54)$$

Je größer die Dämpfung d , desto größer wird der beschleunigende Einfluss der Nullstelle q_{ZMS} auf das Ein- Ausgangsverhalten des Zwei-Massen-Systems. Dies zeigt die Sprungantwort des Zwei-Massen-Systems in Abbildung 3.10 links. Je geringer die Dämpfung, desto stärker muss die Welle aufgezogen werden, um ein Moment übertragen zu können. Der hierfür notwendige Zeitaufwand führt zu Beginn der Anregung zu einem langsameren Ansteigen des Ausgangssignals $\Omega_A(\cdot)$ und folglich zu größeren Amplituden die langsamer abklingen. Im Grenzfall $D = 0$ ergibt sich nach Anregung des Zwei-Massen-Systems mit dem Einheitssprung der flachste Anstieg und eine Dauerschwingung. Im Gegensatz hierzu

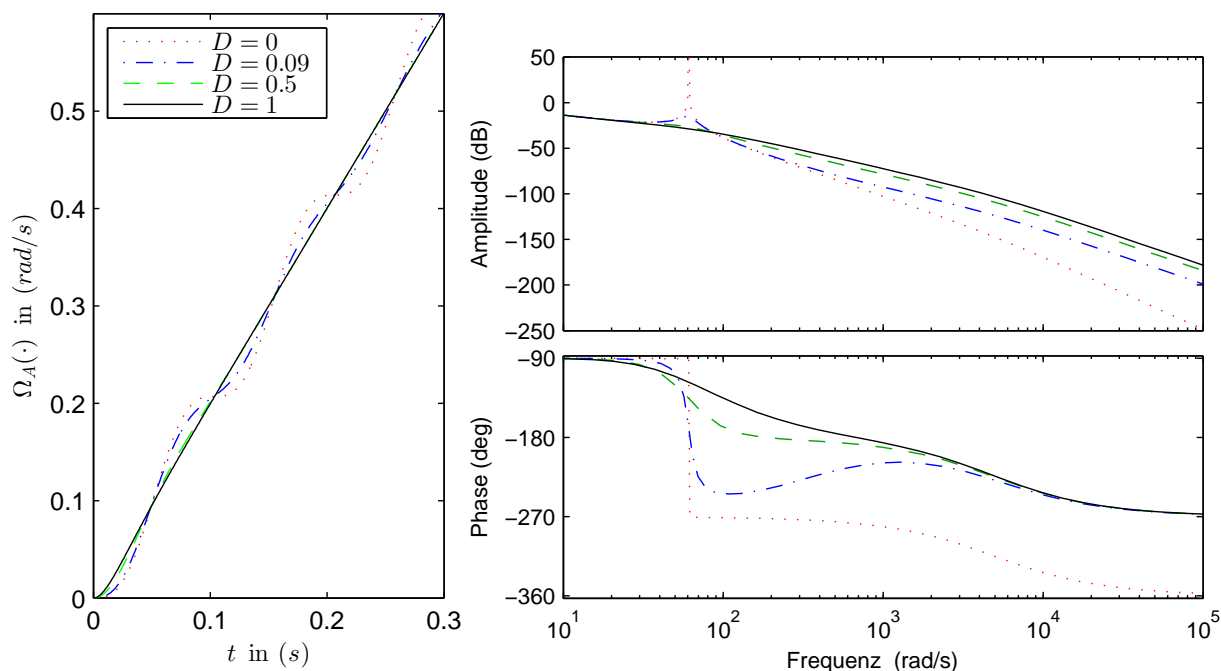


Abbildung 3.10: Sprungantwort (*links*) und Bode-Diagramm (*rechts*) eines Zwei-Massen-Systems mit Berücksichtigung des Momentenregelkreises ($\tilde{n}_{ZMS} = 4$); es werden unterschiedliche Dämpfungsgrade dargestellt, wobei für den Prüfstand $D = 0.09$ gilt

ergeben sich mit dem Grenzfall $D = 1$ keine Schwingungen mehr und es zeigt sich eine schnellere Reaktion des Ausgangssignals $\Omega_A(\cdot)$ nach der Anregung. Bereits für $D = 0.5$ klingt eine Schwingung sehr schnell ab und besitzt nur kleine Amplituden, so dass eine aktive Dämpfung durch einen Regler nicht zwingend notwendig ist. Für das vorgestellte reale Zwei-Massen-System mit $D = 0.09$ ist jedoch für einen schnellen Regler eine aktive Dämpfung erforderlich.

Das Bodediagramm, welches die Reaktion des Zwei-Massen-Systems in Amplitude und Phase für alle Anregungsfrequenzen für die entsprechenden unterschiedlichen Dämpfungsgrade darstellt, zeigt die Abbildung 3.10 rechts. Der integrale Anteil der Mechanik ist für eine Phasenabsenkung um 90° über den gesamten Frequenzbereich verantwortlich. Symmetrisch zu $\omega_{0,ZMS}$ findet auf Grund des Einflusses der elastischen Welle eine Phasenabsenkung um 180° statt, welche mit kleiner werdendem Dämpfungsgrad steiler wird. Diese Phasenabsenkung wird bei der Eckfrequenz $\omega_{E,ZMS}$ durch eine Phasenhebung um 90° überlagert. Je geringer der Dämpfungsgrad, desto mehr verschiebt sich diese Eckfrequenz in den hochfrequenten Bereich. Für $D = 0$ befindet sich diese im Unendlichen, womit die Nullstelle q_{ZMS} und somit die Phasenhebung um 90° verschwindet. Das verzögernde PT_1 -Verhalten des Momentenregelkreises tritt auf Grund der hohen Taktfrequenz des Umrichters erst bei hohen Frequenzen in Erscheinung. Bei $\omega_{E,ers}$ findet daher eine weitere Phasenabsenkung um 90° statt.

Für $0 \leq D < \sqrt{2}/2$ ergibt sich in der Amplitude bei der Resonanzkreisfrequenz $\omega_{R,ZMS} = \omega_{0,ZMS} \sqrt{1 - 2D^2}$ eine Überhöhung, die für $D = 0$ unendlich wird. Die Anregung eines ungedämpften Zwei-Massen-Systems mit der Eigenfrequenz $\omega_{0,ZMS}$ führt somit zur Re-

sonanzkatastrophe. Im Phasengang wird dies durch einen Sprung um 180° bei $\omega_{0,ZMS}$ deutlich. Eine weitere Analyse der einzelnen Teilsysteme folgt im nächsten Kapitel.

Abschließend lautet die allgemeine Matrixendarstellung (2.13) des Zwei-Massen-Systems (3.37) mit $u(t) = M_M^*(t)$, $v(t) = M_W(t)$ und $y(t) = \Omega_A(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{d}{J_M} & -\frac{c}{J_M} & \frac{d}{J_M} & \frac{1}{J_M} \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ \frac{d}{J_A} & \frac{c}{J_A} & -\frac{d}{J_A} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{T_{ers}} \end{bmatrix}}_{\underline{\mathbf{A}}} \underline{x}(t) + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{T_{ers}} \end{pmatrix}}_{\underline{\tilde{b}}_1} u(t) + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{J_A} \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{\tilde{b}}_2} v(t) \\ y(t) &= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\underline{\tilde{c}}^T} \underline{x}(t) \end{aligned} \quad (3.55)$$

3.4 Instabile Diskretisierungsnullstellen

In diesem Kapitel ist zu zeigen, dass für ein schwingungsfähiges Zwei-Massen-System (3.38) mit $\tilde{r} = 3$ kein Referenzmodellregler Anwendung finden kann, der die Kompensation der Nullstellen zum Ziel hat. In Kapitel 2.3.6.2 wurde mit Theorem 2.40 dargestellt, dass für Relativgrade $\tilde{r} \geq 3$ keine robuste Abtastzeit gefunden werden kann, so dass das zeitdiskretisierte Modell minimalphasig bleibt. Ein minimalphasiges zeitdiskretes System besitzt gemäß Theorem 2.38, Gleichung (2.539), stets eine globale Phasendrehung von $\Delta\varphi = -180^\circ$. Sobald das zeitkontinuierliche System bei $\omega_{max} = \pi/h$ (vgl. Theorem 2.37) einen Phasenwinkel von $|\varphi(\omega_{max})| > 180^\circ$ erreicht, benötigt das zeitdiskrete Modell zur Repräsentation der globalen Phasenabsenkung mit $|\Delta\varphi| > 180^\circ$ instabile Nullstellen (siehe Theorem 2.39).

3.4.1 Ungedämpftes Zwei-Massen-System mit Vernachlässigung des Momentenregelkreises

Zunächst wird das ungedämpfte Zwei-Massen-System (3.38) mit $D = 0$ betrachtet, womit die Nullstelle entfällt ($\tilde{m} = 0$). Wird angenommen, dass die Taktzeit des Umrichters gegenüber der Eigenfrequenz $f_{0,ZMS}$ des Zwei-Massen-Systems um ein Vielfaches höher ist, kann der folglich sehr schnelle Momentenregelkreis in seiner Dynamik vernachlässigt werden. Somit besitzt das Zwei-Massen-System die Ordnung $\tilde{n} = 3$ mit dem Relativgrad $\tilde{r} = 3$. Die Sprungantwort zeigt die Abbildung 3.11 links. Entsprechend der Gleichung (3.38) besteht das betrachtete System aus der Reihenschaltung eines I - und eines PT_2 -Gliedes, dessen Verhalten jeweils auf die Mechanik mit der Bewegungsgleichung bzw. auf den Einfluss der schwingungsfähigen Welle zurückzuführen ist. Die Sprungantworten der Teilsysteme sind ebenfalls dargestellt. Das PT_2 -Glieder mit $D = 0$ entspricht dem internen Modell (2.210) einer sinusförmigen Störung. Mit den Anfangszuständen Null wegen der entspannten Welle ergibt sich eine Sinus-Schwingung der Kreisfrequenz $\omega_{0,ZMS}$ um den Wert Eins mit der Amplitude Eins. Durch das Teilsystem der Mechanik erfolgt in Abhängigkeit der

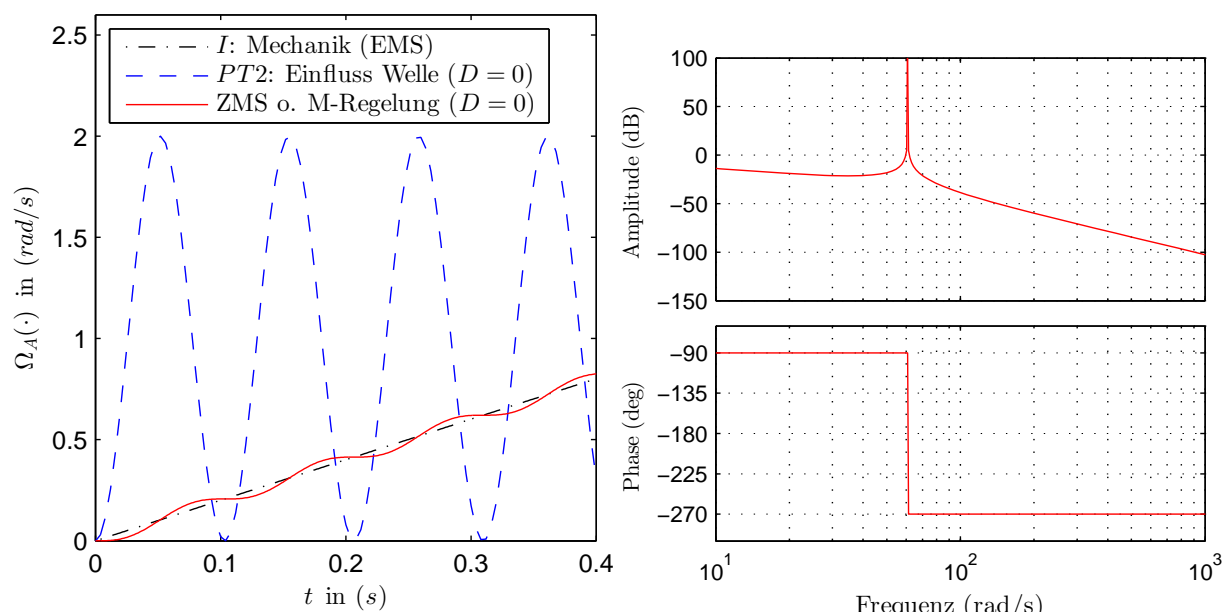


Abbildung 3.11: Sprungantwort (**links**) und Bode-Diagramm (**rechts**) eines ungedämpften ($D = 0$) Zwei-Massen-Systems ohne Berücksichtigung des Momentenregelkreises ($\tilde{n}_{ZMS} = 3$); neben der Sprungantwort des Zwei-Massen-Systems werden zudem die der Teilsysteme aus Gleichung (3.38) dargestellt (Mechanik, Welle)

Massenträgheiten eine Integration der Offset-behafteten Sinus-Schwingung, was zu einer Schwingung der Winkelgeschwindigkeit der Arbeitsmaschine $\Omega_A(\cdot)$ um den linearen Anstieg führt. Die Abbildung 3.11 rechts zeigt das Bodediagramm des ungedämpften Zwei-Massen-Systems ($D = 0$). Der I -Anteil führt im gesamten Frequenzbereich zu einer Phasenabsenkung um -90° . Das ungedämpfte PT_2 -Glied zeigt bei der Torsions-Kennkreisfrequenz $\omega_{0,ZMS}$ den typischen Phasensprung von -180° . Die globale Phasendrehung ergibt sich zu $\Delta\tilde{\varphi} = -270^\circ$ und bestätigt Gleichung (2.541) für ein zeitkontinuierliches System mit einem Relativgrad $\tilde{r} = 3$.

Das Bodediagramm des zeitdiskretisierten Systems mit unterschiedlichen Abtastzeiten h ist in Abbildung 3.12 rechts dargestellt. An der Stelle der Kennkreisfrequenz $\omega_{0,ZMS} = 60.84 \text{ rad/s}$ bzw. Eigenfrequenz $f_{0,ZMS} = 9.68 \text{ Hz}$ aus Gleichung (3.44) bzw. (3.45) springt der Phasenwinkel $\varphi(\cdot)$ von -90° auf -270° , d.h. es gilt an der Unstetigkeitsstelle:

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} -90^\circ & \text{für } \omega < \omega_{0,ZMS} \\ -180^\circ & \text{für } \omega = \omega_{0,ZMS} \\ -270^\circ & \text{für } \omega > \omega_{0,ZMS} \end{cases} \quad (3.56)$$

Zur Einhaltung des Shannon-Theorems 2.37 muss gemäß Gleichung (3.52) mindestens mit doppelter Frequenz $f_A = 2 f_{0,ZMS}$ abgetastet werden, um die Eigenfrequenz des Systems durch das zeitdiskrete Modell repräsentieren zu können. Wegen der Unstetigkeitsstelle gilt sogar $f_A > 2 f_{0,ZMS}$, d.h. $h < 0.0516 \text{ s}$. Wie die Abbildung 3.12 rechts zeigt, beschreibt das zeitdiskrete Modell, erzeugt mit einer Abtastzeit $h = 0.0516 \text{ s}$, nicht das für ungedämpfte Zwei-Massen-Systeme ($D = 0$) spezifische Verhalten mit der beschriebenen Amplitudenüberhöhung sowie dem Phasensprung. Vielmehr ähnelt der Verlauf dem

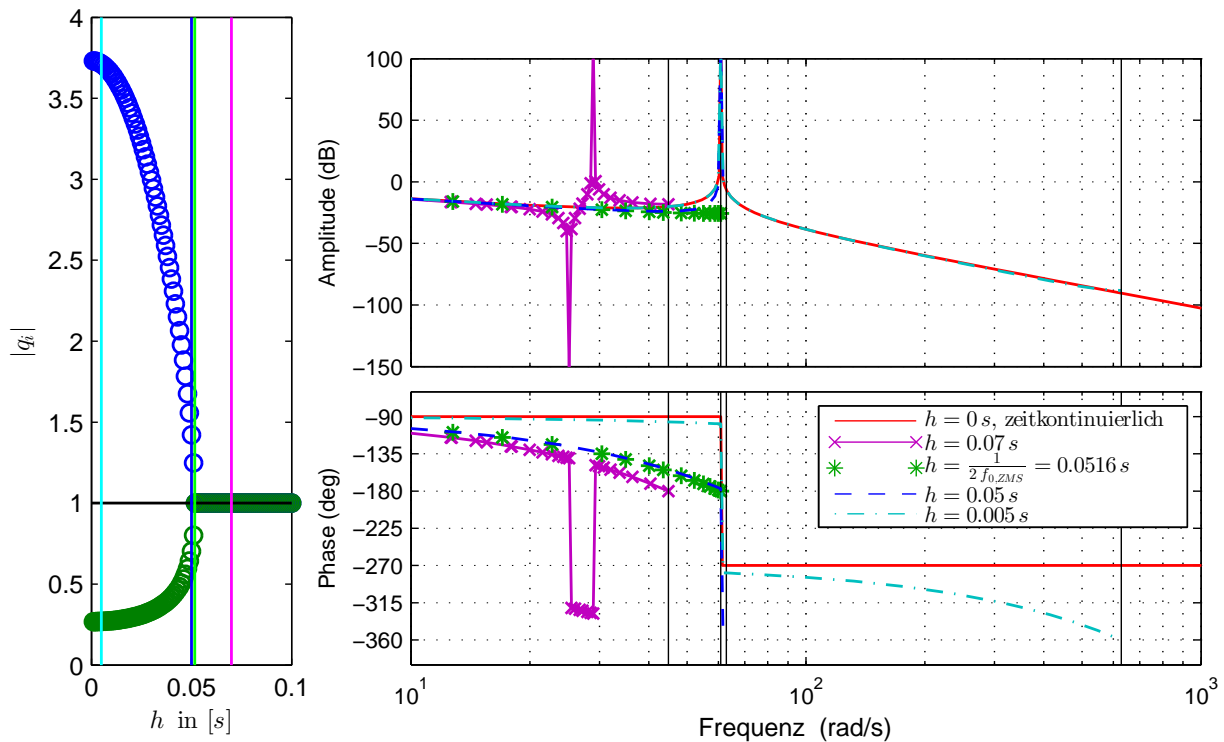


Abbildung 3.12: Bode-Diagramm (*rechts*) des mit h zeitdiskretisierten ungedämpften ($D = 0$) Zwei-Massen-Systems ohne Berücksichtigung des Momentenregelkreises ($n_{ZMS} = 3$); in Abhängigkeit der Abtastzeit h entstehen mit $|q_i| > 1$ instabile Diskretisierungs-Nullstellen (*links*)

aperiodischen Verlauf eines gedämpften Zwei-Massen-Systems ($D \geq 1$) für Frequenzen $0 \leq \omega < \omega_{0,ZMS}$, d.h. es liegt ein Modellierungsfehler wegen der grenzwertigen Abtastung vor. Nachdem die zeitdiskrete Realisierung gemäß des Theorems 2.38 nur globale Phasendrehungen mit einem Vielfachen von 180° erlaubt, muss für $h = 0.0516$ s bei $\omega_{0,ZMS}$ der Wert -180° erreicht werden. Nachdem eine globale Phasendrehungen von $\Delta\varphi = -180^\circ$ durch ein minimalphasiges zeitdiskretes Modell beschrieben werden kann, entstehen mit der Abtastung $h = 0.0516$ s keine instabilen Diskretisierungsnullstellen, wie dies in Abbildung 3.12 links zu erkennen ist. Jedoch sind mit der grenzwertigen Abtastung und dem daraus resultierenden Modellierungsfehler die ungedämpften Schwingungen des Zwei-Massen-Systems nicht sichtbar und somit auch nicht aktiv zu bedämpfen.

Für Abtastzeiten $h > 0.0516$ s entstehen ebenfalls keine instabilen Nullstellen, jedoch findet eine Unterabtastung statt. Eine entsprechende Simulation mit $h = 0.07$ s zeigt Abbildung 3.12. Auf Grund der Unterabtastung entstehen Faltungspole gemäß der Gleichung (2.517). Die physikalische Kennkreisfrequenz $\omega_{0,ZMS}$ wird im Modell auf die Frequenz $\omega_{UA,ZMS} = \omega_A - \omega_{0,ZMS} = 28.92$ rad/s verschoben. Eine Amplitudenüberhöhung sowie ein Phasensprung wird somit falsch modelliert, womit ein auf diesem Modell basierender Regler zu schlechten Regelungs-Ergebnissen führt.

Eine sinnvolle aktive Dämpfung des Zwei-Massen-Systems erfordert mindestens eine Abtastzeit $h < 0.0516$ s. Für die Simulation 3.12 wurde daher $h = 0.05$ s gewählt. Im Unter-

schied zur Abtastzeit $h = 0.0516 \text{ s}$ wird nun die Amplitudenüberhöhung sowie ein Phasensprung bei $\omega_{0,ZMS}$ repräsentiert, womit eine aktive Dämpfung durch einen Regler möglich wird. Zur Modellierung des Phasensprungs von -90° auf -270° ist eine globale Phasendrehung des zeitdiskreten Modells von mehr als $\Delta\varphi > 180^\circ$ notwendig, womit das zeitdiskrete Modell nicht-minimalphasig wird (siehe Theorem 2.39). Mit der Ordnung $n = 3$ und dem generellen Relativgrad $r = 1$ eines zeitdiskreten Systems (vgl. Kapitel 2.3.6.1) fordert die Gleichung (2.538) eine instabile Nullstelle. Dies bestätigt der Verlauf der Nullstellenbeträge in Abbildung 3.12 links. Ab einer Abtastkreisfrequenz $\omega_A > \omega_{0,ZMS}$ ist der Betrag einer Nullstelle größer Eins, womit diese Nullstelle instabil wird. Die globale Phasendrehung des zeitdiskreten Modells erreicht mit Gleichung (2.538) $\Delta\varphi = -360^\circ$.

Für noch kleiner werdende Abtastzeiten h wird die Modellierung des Phasensprungs sowie der Amplitudenüberhöhung immer exakter. Die Simulation mit $h = 0.005 \text{ s}$ in Abbildung 3.12 bestätigt das. Dies erkauft man sich jedoch mit einer instabilen Diskretisierungsnullstelle. Die Rasterung der globalen Phasendrehung eines zeitdiskreten Systems mit einem Vielfachen von 180° führt auch für $h = 0.005 \text{ s}$ sowie für alle Abtastzeiten $h < 1/(2 f_{0,ZMS}) \text{ s} = \pi/\omega_{0,ZMS} \text{ s}$ zu einer Abweichung von 90° zwischen zeitkontinuierlichem und zeitdiskretem System beim Erreichen der Frequenz $\omega_{max} = \pi/h$ (vgl. Theorem 2.37 und Theorem 2.39). Je kleiner die Abtastzeit h gewählt wird bzw. je weiter ω_{max} in den hochfrequenten Bereich mit großem Abstand von der Eigenfrequenz des Systems verschoben wird, desto mehr kann die Abweichung vernachlässigt werden.

Zusammenfassend hält man fest:

Theorem 3.1: Zwei-Massen-System ($D = 0$): aktive Bedämpfung vs. Stabilität

Die zeitdiskrete Modellierung eines minimalphasigen ungedämpften Zwei-Massen-Systems ohne Unterabtastung erhält (trotz Vernachlässigung der Dynamik des Momenten-Reglers) eine instabile Diskretisierungsnullstelle, d.h. das zeitdiskrete Modell wird nicht-minimalphasig.

Sobald die Abtastzeit bzgl. der Kennkreisfrequenz des Systems mit $h < \pi/\omega_{0,ZMS}$ ausreichend klein gewählt wird, um die Schwingungen nach Shannon detektieren zu können, darf auf Grund der dann entstehenden instabilen Nullstellen kein inverser Regler Anwendung finden. Folglich kann das Zwei-Massen-System mit einem Referenzmodellregler ohne Gefährdung der Stabilität nicht beliebig beeinflusst werden.

Es entstehen keine instabilen Nullstellen, wenn mit $h > \pi/\omega_{0,ZMS}$ eine Unterabtastung gewählt wird. Dann ist die Anwendung eines erweiterten Referenzmodellreglers möglich, jedoch können die Schwingungen durch den Regler nicht detektiert und somit nicht aktiv bedämpft werden.

Eine aktive Bedämpfung der Schwingungen eines ungedämpften Systems (Mehr-Massen-System) und die Anwendung eines stabilen zeitdiskreten inversen Reglers schließen sich gegenseitig aus.

3.4.2 Gedämpftes Zwei-Massen-System mit Vernachlässigung des Momentenregelkreises

Im Unterschied zum vorigen Kapitel 3.4.1 wird nun ein gedämpftes Zwei-Massen-System mit einem Dämpfungsgrad $D > 0$ betrachtet. Der Momentenregler wird auf Grund der üblichen hohen Taktzeiten des Umrichters weiterhin vernachlässigt. In Abbildung 3.13 links ist die Sprungantwort gemäß der realen Anlage mit dem Dämpfungsgrad $D = 0.09$ nach

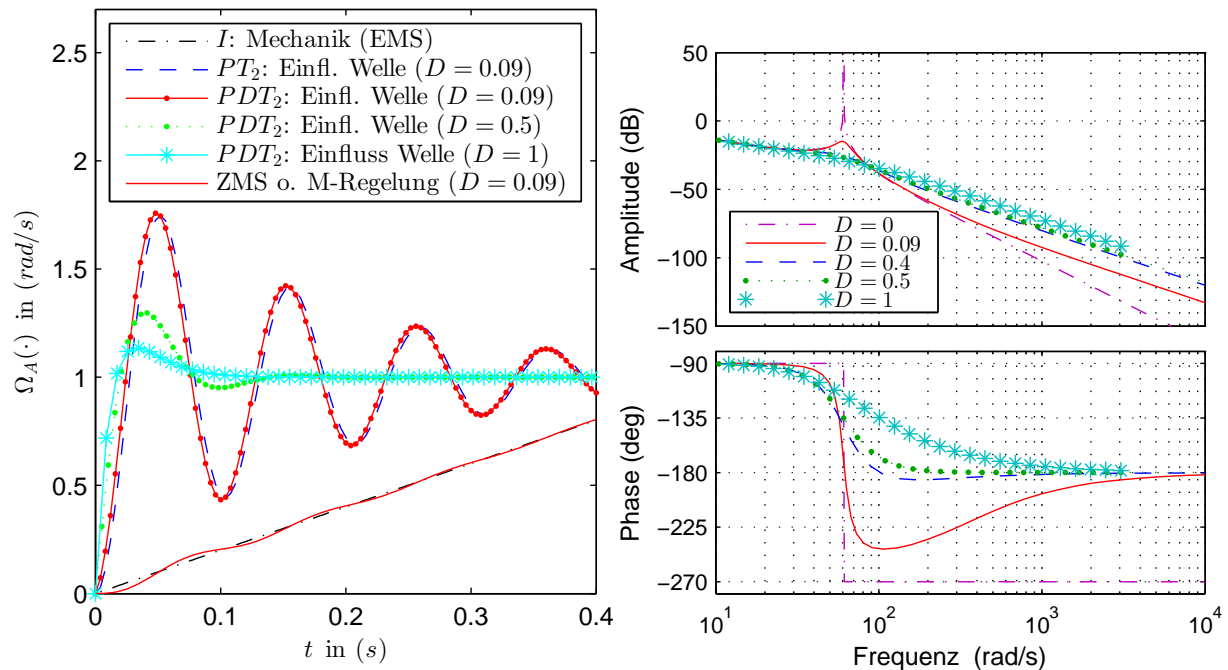


Abbildung 3.13: Sprungantwort (*links*) und Bode-Diagramm (*rechts*) eines gedämpften ($D > 0$) Zwei-Massen-Systems ohne Berücksichtigung des Momentenregelkreises ($\tilde{n}_{ZMS} = 3$); es werden unterschiedliche Dämpfungsgrade D betrachtet; neben der Sprungantwort des Zwei-Massen-Systems sind die der Teilsysteme aus Gleichung (3.38) dargestellt (Mechanik, Welle)

Gleichung (3.50) dargestellt. Im Unterschied zur Simulation 3.11 klingt die Schwingung um den linearen Anstieg der Winkelgeschwindigkeit $\Omega_A(\cdot)$ der Arbeitsmaschine ab, bis lediglich das integrale Verhalten der Mechanik verbleibt.

Mit $D \neq 0$ bzw. $d \neq 0$ wird der Einfluss der Welle gemäß der Gleichung (3.38) nicht mehr nur durch ein PT_2 -Glied mit der Kennkreisfrequenz $\omega_{0,ZMS}$ bzw. $\omega_{D,ZMS}$ beschrieben, sondern zudem durch ein inverses PT_1 -Glied mit der Eckkreisfrequenz $\omega_{E,ZMS}$. Auf Grund der differenzierenden bzw. beschleunigenden Eigenschaft wird dieses als D -Glied bezeichnet, womit der Einfluss der Welle insgesamt durch ein PDT_2 -Glied modelliert wird. Den Einfluss des D -Gliedes zeigt der Vergleich zwischen der Sprungantwort des PT_2 - und des PDT_2 -Gliedes in Abbildung 3.13 links ($D = 0.09$). Durch die Dämpfung klingt nicht nur die Schwingung ab, sondern die Dämpfung der Welle ermöglicht zudem eine schnellere Beschleunigung der Arbeitsmaschine, was durch das differenzierende D -Glied modelliert wird.

Mit größer werdender Dämpfung d bzw. Dämpfungsgrad D verschiebt sich die Eckkreisfrequenz $\omega_{E,ZMS}$ gemäß Gleichung (3.54) in Richtung kleinerer Frequenzen, während die Kennkreisfrequenz $\omega_{0,ZMS}$ des PT_2 -Gliedes nach Gleichung (3.44) unabhängig von der Dämpfung gleich bleibt; der Phasengang des PT_2 -Glieds verläuft für jeden Dämpfungsgrad symmetrisch zur ungedämpften Kennkreisfrequenz $\omega_{0,ZMS}$. Somit beeinflusst das D -Glied mit dem Dämpfungsgrad sehr stark den Phasenverlauf des Zwei-Massen-Systems, wie es das Bode-Diagramm in Abbildung 3.13 verdeutlicht: in Abhängigkeit des Dämpfungsgrades D nimmt die maximale Phasenabsenkung $\tilde{\varphi}_{max,ab}$ des Phasenverlaufes den Wert -180° (für $D \geq 0.5$), -270° (für $D = 0$) oder einen Wert zwischen -180° und -270° an (für $0 < D < 0.5$). Die globale Phasenabsenkung beläuft sich hingegen für $D \neq 0$ mit der stabilen Nullstelle (3.53) und folglich dem Relativgrad $\tilde{r} = 2$ bei der Ordnung $\tilde{n} = 3$ gemäß Gleichung (2.541) stets auf $\Delta\tilde{\varphi} = -180^\circ$.

Für eine nähere Betrachtung zeigt das Bode-Diagramm in Abbildung 3.14 und 3.15 für den Fall $D = 0.4$ und $D = 0.09$ sowohl den Phasenverlauf des Gesamtsystems als auch den der Teilsysteme (zeitkontinuierlich: $h = 0$ s).

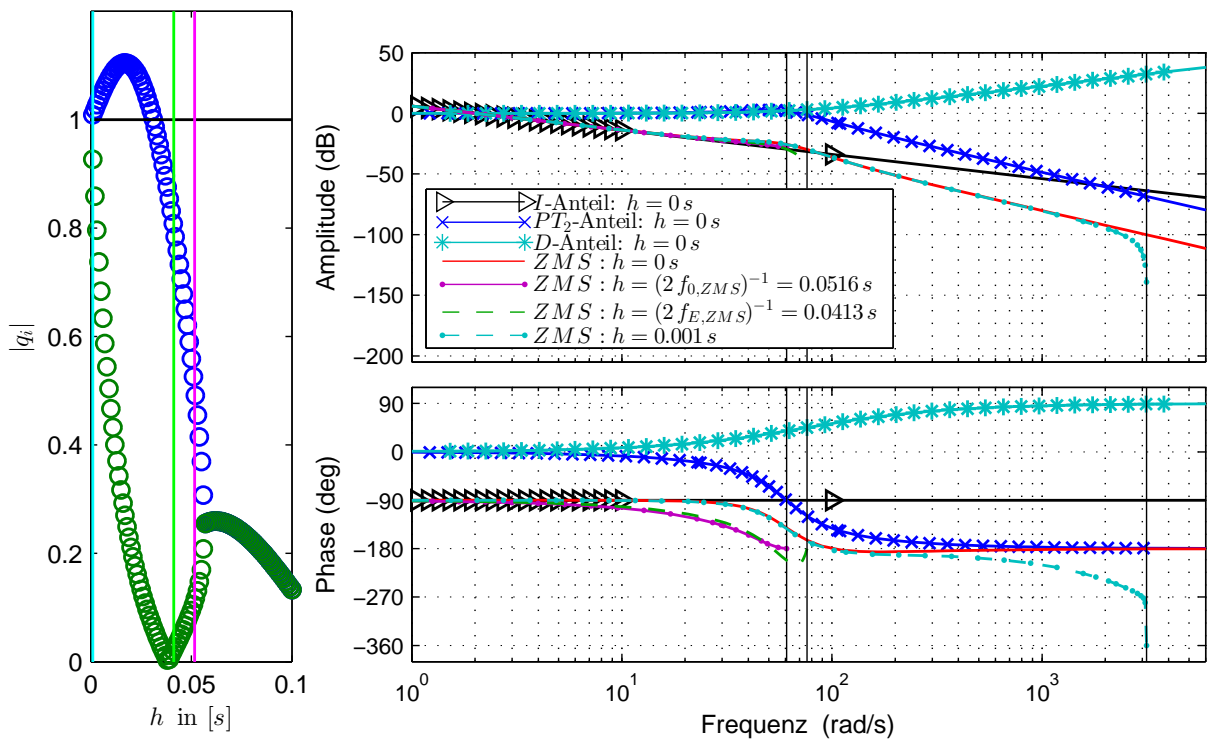


Abbildung 3.14: Bode-Diagramm (*rechts*) des mit h zeitdiskretisierten gedämpften ($D = 0.4$) Zwei-Massen-Systems ohne Berücksichtigung des Momentenregelkreises ($n_{ZMS} = 3$); in Abhängigkeit der Abtastzeit h entstehen mit $|q_i| > 1$ instabile Diskretisierungs-Nullstellen (*links*)

Während die globale Phasenhebung $\Delta\tilde{\varphi}_D = 90^\circ$ des D -Glieds bzw. die globale Phasenabsenkung $\Delta\tilde{\varphi}_{PT_2} = -180^\circ$ des PT_2 -Glieds symmetrisch um die Eckkreisfrequenz $\omega_{E,ZMS}$ bzw. Kennkreisfrequenz $\omega_{0,ZMS}$ ist, bleibt die Symmetrie des Gesamtsystems aus beiden Teilsystemen nur für $\omega_{0,ZMS} = \omega_{E,ZMS}$ erhalten. Für diesen Fall ergibt sich mit Glei-

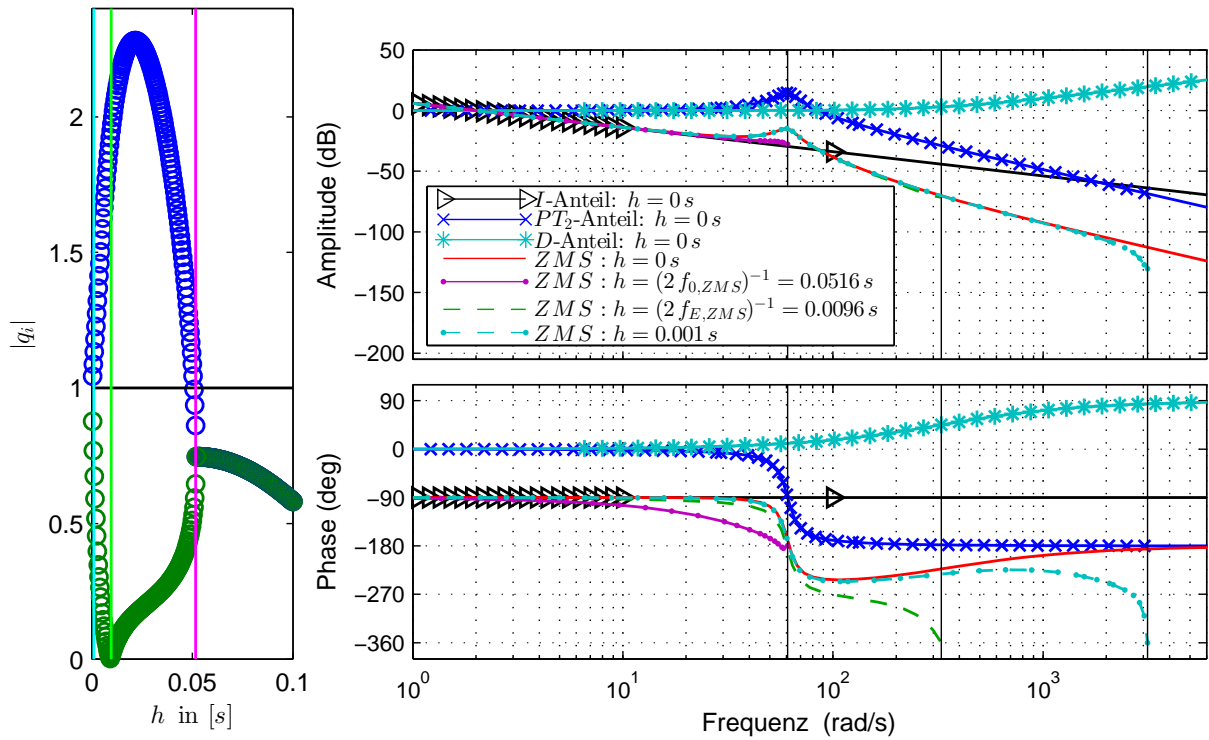


Abbildung 3.15: Bode-Diagramm (*rechts*) des mit h zeitdiskretisierten gedämpften ($D = 0.09$) Zwei-Massen-Systems ohne Berücksichtigung des Momentenregelkreises ($n_{ZMS} = 3$); in Abhängigkeit der Abtastzeit h entstehen mit $|q_i| > 1$ instabile Diskretisierungs-Nullstellen (*links*)

chung (3.54) folgender Dämpfungsgrad:

$$\omega_{E,ZMS} = \frac{1}{2D} \omega_{0,ZMS} \quad \rightarrow \quad D = 0.5 \quad \text{für} \quad \omega_{E,ZMS} \equiv \omega_{0,ZMS} \quad (3.57)$$

Die Abbildung 3.13 rechts bestätigt den symmetrischen Verlauf für $D = 0.5$. Die Unsymmetrie des Gesamtsystems aus beiden Teilsystemen (D - und PT_2 -Glieder) für $\omega_{0,ZMS} < \omega_{E,ZMS}$ führt zu einer maximalen Phasenabsenkung $\tilde{\varphi}_{max,ab}$ des Zwei-Massen-Systems, die betragsmäßig größer als die globale Phasendrehung $\Delta\tilde{\varphi}$ ist. Für $\omega_{0,ZMS} > \omega_{E,ZMS}$ entspricht die maximale Phasenabsenkung $\tilde{\varphi}_{max,ab}$ betragsmäßig der globalen Phasenabsenkung $\Delta\tilde{\varphi}$. Es ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$D \in \begin{cases}]0.5, \infty[: & \omega_{0,ZMS} > \omega_{E,ZMS} & \rightarrow & \tilde{\varphi}_{max,ab} = \Delta\tilde{\varphi} = -\pi^- \\ 0.5 : & \omega_{0,ZMS} = \omega_{E,ZMS} & \rightarrow & \tilde{\varphi}_{max,ab} = \Delta\tilde{\varphi} = -\pi^- \\]0, 0.5[: & \omega_{0,ZMS} < \omega_{E,ZMS} & \rightarrow & -\frac{3}{2}\pi < \tilde{\varphi}_{max,ab} < -\pi, \quad \Delta\tilde{\varphi} = -\pi^+ \\ 0 : & \omega_{0,ZMS} \ll \omega_{E,ZMS} = \infty & \rightarrow & \tilde{\varphi}_{max,ab} = \Delta\tilde{\varphi} = -\frac{3}{2}\pi \end{cases} \quad (3.58)$$

Die Phasenabsenkung nähert sich asymptotisch von größeren bzw. kleineren Werten an die globale Phasenabsenkung $\Delta\tilde{\varphi} = \pi$, was mit $\Delta\tilde{\varphi} = \pi^+$ bzw. $\Delta\tilde{\varphi} = \pi^-$ bezeichnet wird. Der Sachverhalt in Gleichung (3.58) wird in Abbildung 3.13 rechts bestätigt. Die Abbildung 3.13 links zeigt die Sprungantwort des PDT_2 -Glieds für den Grenzfall $D = 0.5$ sowie für den Übergang zum aperiodischen Verhalten mit $D = 1$. Es ist zwar noch eine Schwingung

zu erkennen, jedoch ist die Dämpfung d bzgl. der Federsteifigkeit c derart groß, so dass die Schwingung nach kurzer Zeit abgeklungen ist. Nachdem das Verhalten bereits einem Einschwingvorgang eines gut eingestellten Reglers entspricht, kann für Dämpfungsgrade $D \geq 0.5$ auf eine aktive Dämpfung durch einen Regler verzichtet werden. Für $D \in [0, 0.5[$ ist hingegen eine aktive Dämpfung notwendig. Wie im Folgenden gezeigt wird, entstehen jedoch bei der Zeitdiskretisierung eines Zwei-Massen-Systems mit dem Wertebereich $D \in [0, 0.5[$ instabile Nullstellen, so dass eine aktive Bedämpfung durch einen inversen Regler nicht möglich ist.

Mit dem Zusammenhang (3.58) wird deutlich, dass bei einem Dämpfungsgrad $D \in [0.5, \infty[$ die Phasenabsenkung des Zwei-Massen-Systems über alle Frequenzen betragsmäßig nie größer als die globale Phasendrehung von $|\Delta\tilde{\varphi}| = 180^\circ$ ist und der Phasenwinkel sich für $\omega \rightarrow \infty$ von betragsmäßig kleineren Werten aus annähert. Dies hat zur Folge, dass gemäß der Forderung (2.546) bei der Zeitdiskretisierung für alle Abtastzeiten h ein minimalphasiges zeitdiskretes Modell resultiert. Es entstehen keine instabilen Nullstellen, weshalb ein inverser Regler Anwendung finden kann. Jedoch ist für diesen Dämpfungsbereich, wie oben dargestellt, keine aktive Dämpfung erforderlich.

Im Unterschied hierzu bedeutet gemäß des Zusammenhangs (3.58) ein Dämpfungsgrad von $D \in [0, 0.5[$ eine Absenkung der Phase über -180° und folglich für $\omega \rightarrow \infty$ eine Annäherung an den Wert der globalen Phasendrehung $|\Delta\tilde{\varphi}| = 180^\circ$ von betragsmäßig größeren Werten aus. Mit der Beziehung (2.546) hat dies zur Folge, dass für kleine Abtastzeiten das zeitdiskrete Modell nicht-minimalphasig wird, d.h. instabile Diskretisierungsnullstellen entstehen. Dies bestätigt die Abbildung 3.14 links für den Fall $D = 0.4$, bei dem für Abtastzeiten $h < 0.031$ s eine instabile Nullstelle mit $|q_1| > 1$ vorliegt. Nachdem für den Fall $D \in [0, 0.5[$ die Eckkreisfrequenz mit $\omega_{E,ZMS} > \omega_{0,ZMS}$ rechts von der Kennkreisfrequenz liegt, muss zur Vermeidung einer Untermodellierung die Abtastzeit unter Beachtung der Eckkreisfrequenz $\omega_{E,ZMS} = 76.04$ rad/s bestimmt werden. Mit der Einhaltung des Shannon-Theorems ergibt sich eine erlaubte Abtastzeit von $h < 0.0413$ s. Ein minimalphasiges zeitdiskretes System ohne Unterabtastung ergibt sich daher nur für einen sehr kleinen Wertebereich $\Delta h \approx 0.01$ s für die Abtastzeit h : 0.031 s $\leq h \leq 0.0413$ s. Bei einer robusten Auslegung ist es daher unmöglich, ein minimalphasiges zeitdiskretes Modell zu garantieren. Für eine robuste Abtastung, die den Bereich der Eckfrequenz/Eigenfrequenz mit der Absenkung bzw. Anhebung im Phasenverlauf sowie Änderung der Steigung im Amplitudenverlauf eindeutig beschreibt ($PT_1, D : \omega_A > 2(\omega_E + 1\text{Dekade})$), sind zur zeitdiskreten Modellierung des Systems instabile Nullstellen nicht zu vermeiden.

Dies verdeutlicht das Bode-Diagramm in Abbildung 3.14 rechts. Zunächst wurde die Abtastzeit mit $h = \pi/\omega_{0,ZMS} = 0.0516$ s auf die Kennkreisfrequenz $\omega_{0,ZMS} = 60.84$ rad/s abgestimmt. Wegen $\omega_{E,ZMS} > \omega_{0,ZMS}$ führt dies zur Untermodellierung, bei der das D -Glied mit der gewählten Abtastzeit nicht modelliert werden kann: es ist kein Ansatz einer Phasenhebung bzw. Änderung der Amplitudensteigung zu erkennen. Mit der Abstimmung der Abtastzeit $h = \pi/\omega_{E,ZMS} = 0.0413$ s ist die größtmögliche Abtastzeit nach Shannon gewählt, mit der das Verhalten des D -Glieds noch durch das zeitdiskrete Modell repräsentiert werden kann: die Simulation zeigt im Bode-Diagramm 3.14 den Ansatz einer Steigungsänderung im Amplitudenverlauf. Für einen Regler ist die Modellierung des gesamten Amplituden- bzw. Phasenverlaufes nicht notwendig, der Verlauf bis zur Eck- bzw. Eigenfrequenz und der Ansatz der Änderung bei der Eck- bzw. Eigenfrequenz ist

ausreichend, um auf eine Änderung des Systemverhaltens reagieren zu können. Wegen der unrobusten Abtastung kann der Phasenverlauf gemäß Theorem 2.39 an der Abtastgrenze jedoch nicht repräsentiert werden. Mit der gewählten Abtastzeit entspricht die Abtastgrenze ω_{max} der Eckkreisfrequenz $\omega_{E,ZMS}$, d.h. der Phasenverlauf an der Eckfrequenz zeigt eine Abweichung zum realen Phasenverlauf. Aus diesem Grund und in Betracht von Störungen und möglichen diversen Untermodellierungen ist die Wahl der unrobusten Abtastfrequenz als die doppelte Eckfrequenz zu vermeiden. Vielmehr sollte die Abtastfrequenz mindestens dem 20ig-fachen der größten Eckfrequenz/Eigenfrequenz entsprechen. Hiermit werden alle Phasenänderungen sowie Steigungsänderungen des Amplitudenverlaufs vollständig repräsentiert. In Abbildung 3.14 wird dies mit der Abtastzeit $h = 0.001 \text{ s}$ erreicht.

Für die Abtastzeit $h = 0.001 \text{ s}$ ist jedoch wegen $|\varphi(\omega_{max})| > \pi$ an der Grenzkreisfrequenz $\omega_{max} = \pi/h$ eine zeitdiskrete globale Phasendrehung $\Delta\varphi = -\pi$ gerade nicht mehr ausreichend, um das zeitkontinuierliche System durch das zeitdiskrete Modell zu beschreiben (siehe Theorem 2.39). Gemäß Gleichung (2.538) ergibt sich der nächsthöhere Wert für die globale Phasendrehung mit $\Delta\varphi = -2\pi$ durch Wechsel einer stabilen Nullstelle in eine instabile Nullstelle. Wie die Abbildung 3.14 rechts verdeutlicht, erreicht die Phase für $h = 0.001 \text{ s}$ den Wert $\varphi[\omega_{max}] = -360^\circ$. Nach Abbildung 3.14 links liegt hierbei nun eine instabile Nullstelle vor.

Im Unterschied hierzu ist bei der unrobusten Wahl der Abtastzeit mit $h = 0.0413 \text{ s}$ wegen $|\varphi(\omega_{max})| < \pi$ an der Grenzfrequenz $\omega_{max} = \pi/h$ eine zeitdiskrete globale Phasendrehung $\Delta\varphi = -\pi$ noch ausreichend, um das zeitkontinuierliche System durch das zeitdiskrete Modell zu beschreiben. Die Phase des zeitdiskreten Modells erreicht an der Grenzfrequenz $\omega_{max} = \pi/h$ für $h = 0.0413 \text{ s}$ den Wert $\varphi[\omega_{max}] = -180^\circ$, weshalb noch ein minimalphasiges zeitdiskretes System vorliegt. Die Nullstelle ist noch stabil, wie dies die Abbildung 3.14 links verdeutlicht. Von der Wahl der unrobusten Abtastzeit innerhalb eines nur sehr kleinen Fensters von $\Delta h \approx 0.01 \text{ s}$ ist jedoch abzuraten.

Das Zeitfenster Δh zur Wahl der Abtastzeit für ein minimalphasiges zeitdiskretes Modell des Zwei-Massen-Systems ohne Untermodellierung verkleinert sich mit kleiner werdendem Dämpfungsgrad D . Dies ist auf den dann steiler werdenden Abfall des Phasenwinkels des PT_2 -Glieds zurückzuführen. Für den Fall $D = 0.09$ des realen Zwei-Massen-Systems hat sich dieses Fenster bereits geschlossen, wenn eine Untermodellierung vermieden werden soll. In Abbildung 3.15 rechts liegt die Eckkreisfrequenz $\omega_{E,ZMS}$ nun weiter von der Kennkreisfrequenz $\omega_{0,ZMS}$ entfernt. Der Phasenwinkel des zeitkontinuierlichen Systems an der Grenzfrequenz fordert mit $|\varphi(\pi/h)| > \pi$ für alle Abtastzeiten, die eine Untermodellierung vermeiden, eine globale Phasendrehung $\Delta\varphi = -2\pi$ des zeitdiskreten Modells, womit eine instabile Diskretisierungsnullstelle entsteht. Gemäß der Abbildung 3.15 links führt ein Dämpfungsgrad $D = 0.09$ für alle erlaubten Abtastzeiten zu einem nicht-minimalphasigen zeitdiskreten Modell des Zwei-Massen-Systems.

Theorem 3.2: Zwei-Massen-System: aktive Bedämpfung vs. Stabilität

Ob die zeitdiskrete Modellierung eines minimalphasigen gedämpften Zwei-Massen-Systems mit Vernachlässigung der Dynamik des Momenten-Reglers zu einem minimalphasigen zeit-

diskreten System führt, ist vom Wert des Dämpfungsgrads D abhängig:

$$D \in \begin{cases} 0 : & \text{ungedämpfte Schwingung} & \rightarrow & \text{nicht-minimalphasig für alle } h \\]0, 0.5[: & \text{schwach gedämpfte Schwingung} & \rightarrow & \text{nicht-minimalph. für robuste } h \\ [0.5, 1[: & \text{stark gedämpfte Schwingung} & \rightarrow & \text{minimalphasig für alle } h \\ [1, \infty[: & \text{keine Schwingung} & \rightarrow & \text{minimalphasig für alle } h \end{cases} \quad (3.59)$$

Wird die Abtastkreisfrequenz mit

$$\omega_A > 2(\omega_{E,ZMS} + 1 \text{ Dekade}) = 2 \cdot 10^{\log \omega_{E,ZMS} + 1} = 2 \cdot 10^1 \cdot \omega_{E,ZMS} = 20 \cdot \omega_{E,ZMS} \quad (3.60)$$

gewählt, so dass der vollständige Phasenwechsel des D -Glieds nach Shannon durch das zeitdiskrete System modelliert werden kann, spricht man von einer robusten Abtastung.

Setzt man eine robuste Abtastung mit $h < 2\pi/\omega_A$ voraus, wird das Zwei-Massen-System mit $0 \leq D < 0.5$, welches eine aktive Dämpfung benötigt, durch die Zeitdiskretisierung nicht-minimalphasig. Dies verhindert die Anwendung eines inversen Reglers zur aktiven Schwingungsdämpfung.

Sobald die Abtastzeit gemäß Gleichung (3.60) ausreichend klein und robust gewählt wird, um die gedämpften Schwingungen auch unter Störeinflüssen und Rauschen detektieren zu können, darf das Zwei-Massen-System auf Grund der dann entstehenden instabilen Nullstellen nicht beliebig durch einen Referenzmodellregler ohne Gefährdung der Stabilität beeinflusst werden.

Es entstehen keine instabilen Nullstellen bei einem Dämpfungsgrad $D \geq 0.5$, womit die Anwendung eines beliebigen Referenzmodellreglers möglich wird. Jedoch benötigt ein Zwei-Massen-System mit einem Dämpfungsgrad $D \geq 0.5$ keine aktive Dämpfung.

Eine notwendige aktive Bedämpfung der Schwingungen eines Mehr-Massen-Systems und die Anwendung eines stabilen zeitdiskreten inversen Reglers schließen sich gegenseitig aus.

3.4.3 Gedämpftes Zwei-Massen-System ohne Vernachlässigung des Momentenregelkreises

Der Momentenregelkreis besitzt wegen der kleinen Taktzeit des Umrichters eine hohe Dynamik, welche durch ein PT_1 -Glied mit der Eckfrequenz (3.39) repräsentiert wird. Die Eckkreisfrequenz $\omega_{E,ers}$ der Momentenregelung als Teilsystem des Zwei-Massen-Systems (3.38) ist in realen Anwendungen mit $\omega_{E,ers} \gg \omega_{E,ZMS}$ bzw. $\omega_{E,ers} \gg \omega_{0,ZMS}$ um ein Vielfaches größer als die Kennkreisfrequenz $\omega_{0,ZMS}$ bzw. Eckkreisfrequenz $\omega_{E,ZMS}$ des Teilsystems, welches den Einfluss der elastischen Welle beschreibt. Soll der Momentenregelkreis trotz der hohen Dynamik nicht vernachlässigt werden, muss gemäß Gleichung (3.39) eine sehr kleine Abtastzeit mit $h \leq \pi/\omega_{E,ers} = \pi T_{ers} = 0.63 \text{ ms}$ gewählt werden.

Das PT_1 -Glied des Momentenregelkreises besitzt eine globale Phasenabsenkung von $\Delta\tilde{\varphi}_{PT_1} = -90^\circ$, wobei die Phasenabsenkung symmetrisch um die Eckfrequenz $\omega_{E,ers}$ auftritt. Die weitere Phasenabsenkung bei der Eckfrequenz $\omega_{E,ers}$ ist daher $\varphi(\omega_{E,ers}) = -45^\circ$. Dementsprechend ändert sich die globale Phasendrehung des Zwei-Massen-Systems mit der Ordnungserhöhung des Nenners auf $\tilde{n} = 4$ bei gleichbleibender Zählerordnung von $\tilde{m} = 1$ mit einem Relativgrad $\tilde{r} = 3$ gemäß Gleichung (2.541) von $\Delta\tilde{\varphi} = -180^\circ$ auf $\Delta\tilde{\varphi} = -270^\circ$.

Die Berücksichtigung des Momentenregelkreises in der Modellierung zeigt im Unterschied zur Abbildung 3.13 die Abbildung 3.10. Die kleine zeitliche Verzögerung in der Sprungantwort durch das PT_1 -Glied spiegelt sich im Bode-Diagramm im hochfrequenten Bereich in einer Phasenabsenkung bei der Eckkreisfrequenz $\omega_{E,ers} = 5000 \text{ rad/s}$ um -90° wider.

Damit das zeitdiskrete Modell den Momentenregelkreis berücksichtigt, muss mindestens mit $h \leq \pi/\omega_{E,ers}$ abgetastet werden, so dass die Eckfrequenz $\omega_{E,ers}$ nach Shannon gerade noch durch das Modell repräsentiert wird. Je nach Abtastzeit $0 < h \leq \pi/\omega_{E,ers}$ ergibt sich für die Phase $\varphi(\omega_{max})$ des Zwei-Massen-Systems ein Wertebereich von $-270^\circ < \varphi(\omega_{max}) \leq -225^\circ$, wenn $\omega_{E,ers} \gg \omega_{E,ZMS}$ bzw. $\omega_{E,ers} \gg \omega_{0,ZMS}$ angenommen wird. Für den Spezialfall $D = 0$ gilt sogar ein Wertebereich von $-360^\circ < \varphi(\omega_{max}) \leq -315^\circ$. Der Phasenwinkel des Zwei-Massen-Systems ist somit für alle möglichen Grenzfrequenzen $\omega_{max} = \pi/h$ betragsmäßig größer als 180° . Wegen $|\varphi(\omega_{max})| > \pi$ ist für alle erlaubten Abtastzeiten eine globale Phasendrehung $\Delta\varphi = -\pi$ des zeitdiskreten Modells nicht mehr ausreichend, um das minimalphasige zeitkontinuierliche System durch ein minimalphasiges zeitdiskretes Modell zu beschreiben (siehe Theorem 2.39). Gemäß Gleichung (2.538) ergibt sich der nächsthöhere Wert für die zeitdiskrete globale Phasendrehung mit $\Delta\varphi = -2\pi$ durch Wechsel einer stabilen Nullstelle in eine instabile Nullstelle. Den Verlauf der Nullstellenbeträge $|q_i|$ in Abhängigkeit der Abtastzeit h sowie die Stabilitätsgrenze zeigt Abbildung 4.2 oben. Es ist für alle Abtastzeiten $h \leq (2 f_{E,ers})^{-1}$, die zu keiner Untermodellierung führen, ein nicht-minimalphasiges zeitdiskretes Modell notwendig, um das zeitkontinuierliche System zu beschreiben. Die Phase des zeitdiskreten Modells erreicht für alle Abtastzeiten den Wert $\varphi[\omega_{max}] = -360^\circ$.

Theorem 3.3: Zwei-Massen-System: Anwendbarkeit eines inversen Reglers

Die zeitdiskrete Modellierung eines minimalphasigen ungedämpften Zwei-Massen-Systems ohne Vernachlässigung der Dynamik des Momentenreglers hat unabhängig von der Dämpfung eine instabile Diskretisierungsnullstelle, d.h. das zeitdiskrete Modell wird nicht-minimalphasig.

Sobald die Abtastzeit bzgl. der Eckfrequenz des Momentenreglers mit $h < \pi/\omega_{E,ers}$ ausreichend klein gewählt wird, um die Dynamik aller Teilsysteme des Zwei-Massen-Systems (3.38) nach Shannon detektieren zu können, darf auf Grund der dann entstehenden instabilen Nullstellen kein inverser Regler Anwendung finden. Folglich kann das Zwei-Massen-System nicht beliebig mit einem Referenzmodellregler ohne Gefährdung der Stabilität beeinflusst werden.

Kapitel 4

Anwendung eines inversen Reglers bei instabilen Diskretisierungsnullstellen

Mit Kapitel 3.4 wurde deutlich, dass wegen der entstehenden instabilen Diskretisierungsnullstelle das Zählerpolynom des Zwei-Massen-Systems nicht beliebig durch einen zeitdiskreten Referenzmodellregler (inverser Regler) beeinflusst werden kann, ohne die Stabilität zu gefährden. Im Folgenden wird nun die Eigenschaft der stabilen und instabilen Diskretisierungsnullstellen sowie die Trennbarkeit zwischen System- und Diskretisierungs-Nullstellen untersucht. Ziel ist die Anwendung des zeitdiskreten Referenzmodellreglers zur beliebigen Beeinflussung der physikalisch relevanten Eigenschaften des Zähler- und Nennerpolynoms.

4.1 Eigenschaften der Diskretisierungs-Nullstellen

Die Hintergründe der Entstehung von stabilen und instabilen Diskretisierungsnullstellen wurde in Kapitel 2.3.6 dargestellt. Nachdem jedes mit der ZOH-Methode zeitdiskretisierte System gemäß Kapitel 2.3.6.1 einen Relativgrad $r = n - m = 1$ besitzt, entstehen bei der Zeitdiskretisierung eines zeitkontinuierlichen Systems mit dem Relativgrad $\tilde{r} = \tilde{n} - \tilde{m}$ zusätzliche Nullstellen. Die Anzahl der sog. Diskretisierungsnullstellen m_{DNS} beträgt:

$$m_{DNS} = \tilde{n} - 1 - \tilde{m} = \tilde{r} - 1 \quad (4.1)$$

Nachdem bei einem zeitkontinuierlichen System ohne Nullstellen, d.h. einem System mit vollem Relativgrad $\tilde{r} = \tilde{n}$, $m_{DNS} = \tilde{n} - 1$ Diskretisierungsnullstellen entstehen, besteht ein direkter Zusammenhang zwischen den Diskretisierungsnullstellen und den Polstellen. Soll durch einen Regler für das zeitkontinuierliche System eine Polverschiebung vorgenommen werden, müssten in der zeitdiskreten Modellierung durch den Regler ebenfalls die Diskretisierungsnullstellen angepasst werden. Sobald jedoch instabile Diskretisierungsnullstellen vorliegen, ist eine Anpassung unter Erhalt der Stabilität nicht mehr möglich. Gemäß Kapitel 2.2.5.5 bzw. 2.2.6.7 ist für die Änderung der Nullstellen eine Pol-Nullstellenkompensation mit zusätzlichem Einbringen neuer Nullstellen notwendig. Die Kompensation

instabiler Nullstellen führt jedoch entsprechend Kapitel 2.2.5.6 zur Instabilität.

4.1.1 Anzahl instabiler Diskretisierungsnullstellen

Die Anzahl der instabilen Diskretisierungsnullstellen $m_{DNS,instabil}$ lässt sich entsprechend der Erkenntnis in Kapitel 2.3.6.2 bestimmen. Liegt keine Untermodellierung vor, kann mit Hilfe der globalen Phasendrehung $\Delta\tilde{\varphi}$ des zeitkontinuierlichen bzw. $\Delta\varphi$ des zeitdiskreten Systems in Theorem 2.38 eine Aussage über die instabilen Diskretisierungsnullstellen getroffen werden. Die Abtastzeit h muss zur Vermeidung einer Untermodellierung ausreichend klein gewählt werden, so dass mit der durch die Abtastzeit h festgelegten Grenzfrequenz $\omega_{max} = \pi/h$ und somit den durch das zeitdiskrete Modell repräsentierten Frequenzbereich $0 \leq \omega \leq \omega_{max}$ alle Eigen- und Eckfrequenzen detektiert werden können. Die globale Phasendrehung des zeitkontinuierlichen Systems bei $\omega \rightarrow \infty$ beträgt stets ein Vielfaches von 90° , während die des zeitdiskreten Systems bei ω_{max} stets einem Vielfachen von 180° entspricht. Zur Bestimmung der globalen Phasendifferenz $\Delta\varphi$ des zeitdiskreten Modells ist der Winkel $\varphi(\omega_{max})$ des zeitkontinuierlichen Systems bei der mit der Abtastzeit h gewählten Kreisfrequenz ω_{max} entscheidend. Um den Winkel $\varphi(\omega_{max})$ bei der Grenzfrequenz durch das zeitdiskrete Modell mit der globalen zeitdiskreten Phasendrehung $\Delta\varphi = \varphi[\omega_{max}]$ repräsentieren zu können, muss $\Delta\varphi$ als Vielfaches l von 180° mit

$$\Delta\varphi = \varphi[\omega_{max}] = -l\pi \leq \varphi(\omega_{max}), \quad l \in \mathbb{N} \quad (4.2)$$

gewählt werden. Nachdem durch die Wahl einer geeigneten Abtastzeit keine Untermodellierung vorliegt, gilt $\varphi(\omega_{max}) \approx \Delta\tilde{\varphi}$; der Phasenwinkel nähert sich mit kleiner werdenden Abtastzeit $h \rightarrow 0s$ asymptotisch von betragsmäßig größeren bzw. kleineren Werten an die globale Phasendrehung $\Delta\tilde{\varphi}$ an. Für eine direkte Beziehung zwischen der zeitdiskreten und der zeitkontinuierlichen globalen Phasendrehung ist daher eine Fallunterscheidung notwendig:

$$\Delta\varphi = -l\pi \begin{cases} < \Delta\tilde{\varphi} & \text{für } \Delta\tilde{\varphi} - \varphi(\omega_{max}) > 0 \\ \leq \Delta\tilde{\varphi} & \text{für } \Delta\tilde{\varphi} - \varphi(\omega_{max}) \leq 0 \end{cases}, \quad l \in \mathbb{N} \quad (4.3)$$

Hieraus ergibt sich mit Theorem 2.38, speziell mit Gleichung (2.538), folgendes Theorem:

Theorem 4.1: Anzahl stabiler/instabiler Diskretisierungsnullstellen

Durch die Zeitdiskretisierung (ZOH-Methode) eines zeitkontinuierlichen minimalphasigen Systems der Ordnung \tilde{n} und dem Relativgrad \tilde{r} entstehen neben den $m_{Sys} = \tilde{n}$ Systemnullstellen $m_{DNS, stabil}$ stabile sowie $m_{DNS, instabil}$ instabile Diskretisierungsnullstellen. Die Anzahl der Diskretisierungsnullstellen bestimmt sich aus folgender Tabelle, wenn keine Unterabtastung, sondern eine robuste Abtastung mit $\varphi(\omega_{max} = \pi/h) \approx \Delta\tilde{\varphi}$ vorliegt:

zeitkontinuierlich			zeitdiskret			$\Delta\varphi_\epsilon = \Delta\tilde{\varphi} - \Delta\varphi$
$\Delta\tilde{\varphi}$	\tilde{r}	$\Delta\tilde{\varphi} - \varphi(\omega_{max})$	$\Delta\varphi$	$m_{DNS, stabil}$	$m_{DNS, inst.}$	
$-\tilde{r} \frac{\pi}{2}$	gerade	> 0	$\Delta\tilde{\varphi} - \pi$	$\tilde{r} + \frac{\Delta\varphi}{\pi}$	$-\frac{\Delta\varphi}{\pi} - 1$	π
	gerade	≤ 0	$\Delta\tilde{\varphi}$			0
	ungerade	beliebig	$\Delta\tilde{\varphi} - \frac{\pi}{2}$			$\frac{\pi}{2}$

Die Tabelle gibt einen direkten Zusammenhang zwischen der zeitdiskreten globalen Phasendrehung $\Delta\varphi$ und der zeitkontinuierlichen globalen Phasendrehung $\Delta\tilde{\varphi}$. Je nach Relativgrad \tilde{r} ergibt sich eine Abweichung/Modellierungsfehler $\Delta\varphi_\epsilon = \Delta\tilde{\varphi} - \Delta\varphi$ von bis zu 180° .

Während die globale Phasendrehung $\Delta\tilde{\varphi}$ bei der zeitkontinuierlichen Beschreibung sowohl durch den Relativgrad \tilde{r} als auch durch die Wahl zwischen stabilen und instabilen Nullstellen beeinflusst werden kann, ist die Regulierung der globalen Phasendrehung $\Delta\varphi$ bei der zeitdiskreten Beschreibung wegen $r \equiv 1$ nur durch das Einbringen von instabilen statt stabilen Nullstellen möglich (siehe Theorem 2.39 und Tabelle in Theorem 2.38). Entsprechend des Theorems 4.1 führt die Zeitdiskretisierung des Zwei-Massen-Systems (3.37) mit einem Relativgrad $\tilde{r} = 3$ (siehe Kapitel 3.4.3) zu zwei Diskretisierungsnullstellen, wobei eine instabile Diskretisierungsnullstelle vorliegt. Somit wird die zeitkontinuierliche globale Phasendrehung $\Delta\tilde{\varphi} = -270^\circ$ durch die zeitdiskrete globale Phasendrehung $\Delta\tilde{\varphi} = -360^\circ$ mit einem Modellierungsfehler von $\Delta\varphi_\epsilon = \Delta\tilde{\varphi} - \Delta\varphi = 90^\circ$ repräsentiert. Den Verlauf der Nullstellen bzgl. ihrer Beträge zeigt Abbildung 4.2 oben. Es ist entsprechend des Kapitels 3.4.3 zu erkennen, dass bei Vermeidung einer Unterabtastung mit einer notwendigen Abtastzeit von $h \leq (2f_{E,ers})^{-1}$ stets eine instabile Nullstelle präsent ist.

4.1.2 Dynamischer Einfluss auf das Systemverhalten

Es stellt sich nun die Frage nach dem Einfluss der Diskretisierungsnullstellen auf die zeitdiskrete Modellierung des physikalischen Verhaltens des zeitkontinuierlichen Systems. Um eine Aussage treffen zu können, ist ein Zusammenhang zwischen Diskretisierungsnullstellen und zeitkontinuierlichen Systemnullstellen zu finden.

4.1.2.1 Vernachlässigung von Diskretisierungs-Parametern

Das δ -Modell (2.608) bzw. (2.611) aus Kapitel 2.3.6.4 zeigt mit dem δ -Operator (2.619) als zeitdiskrete Ableitung zum einen eine einfache Beziehung zwischen der zeitdiskreten q - und δ -Modellbeschreibung und zum anderen besteht gemäß der Gleichung (2.618) für $h \rightarrow 0$ s ein direkter Übergang zwischen der zeitkontinuierlichen ρ - und der zeitdiskreten

δ -Modellbeschreibung (siehe Theorem 2.43):

$$\frac{B[q]}{A[q]} = \frac{\beta_m q^m + \beta_{m-1} q^{m-1} + \cdots + \beta_1 q + \beta_0}{q^n + \alpha_{n-1} q^{n-1} + \cdots + \alpha_1 q + \alpha_0} \quad (4.4)$$

$$= k_0 \frac{(q - q_1)(q - q_2) \cdots (q - q_m)}{(q - p_1)(q - p_2) \cdots (q - p_n)} \quad (4.5)$$

$$\Updownarrow \quad \delta = \frac{q - 1}{h} \quad \text{bzw.} \quad \check{q}_j = \frac{q_j - 1}{h}, \quad \check{p}_i = \frac{p_i - 1}{h}, \quad \check{k}_0 = \frac{k_0}{h^r} \quad (4.6)$$

$$\frac{B[\delta]}{A[\delta]} = \frac{\check{\beta}_m \delta^m + \check{\beta}_{m-1} \delta^{m-1} + \cdots + \check{\beta}_1 \delta + \check{\beta}_0}{\delta^n + \check{\alpha}_{n-1} \delta^{n-1} + \cdots + \check{\alpha}_1 \delta + \check{\alpha}_0} \quad (4.7)$$

$$= \check{k}_0 \frac{(\delta - \check{q}_1)(\delta - \check{q}_2) \cdots (\delta - \check{q}_m)}{(\delta - \check{p}_1)(\delta - \check{p}_2) \cdots (\delta - \check{p}_n)} \quad (4.8)$$

$$\Updownarrow \quad \frac{B[\delta]}{A[\delta]} = \frac{B(\rho)}{A(\rho)} \quad \text{für } h \rightarrow 0 \text{ s} \quad (4.9)$$

$$\frac{B(\rho)}{A(\rho)} = \frac{\tilde{\beta}_m \rho^m + \tilde{\beta}_{m-1} \rho^{m-1} + \cdots + \rho + \tilde{\beta}_1 \rho + \tilde{\beta}_0}{\rho^n + \tilde{\alpha}_{n-1} \rho^{n-1} + \cdots + \tilde{\alpha}_1 \rho + \tilde{\alpha}_0} \quad (4.10)$$

$$= k_0 \frac{(\rho - \tilde{q}_1)(\rho - \tilde{q}_2) \cdots (\rho - \tilde{q}_m)}{(\rho - \tilde{p}_1)(\rho - \tilde{p}_2) \cdots (\rho - \tilde{p}_n)} \quad (4.11)$$

Nachdem die q -Modellbeschreibung (4.4)/(4.5) gemäß Kapitel 2.3.6.1 stets einen Relativgrad $r \equiv 1$ besitzt, gilt dies mit der Beziehung (4.6) auch für die δ -Modellbeschreibung:

$$\check{r} = r \equiv 1 \quad (4.12)$$

Mit der Beziehung (4.9) wird ein Bezug zwischen der zeitkontinuierlichen und zeitdiskreten Modellbeschreibung hergestellt. Für den Relativgrad des δ -Modells gilt daher auch:

$$\check{r} = \tilde{r} \quad \text{für } h \rightarrow 0 \text{ s} \quad (4.13)$$

Folglich werden $m_{DNS} = \tilde{r} - 1$ Zählerparameter der zeitdiskreten Beschreibung für $h \rightarrow 0 \text{ s}$ zu Null. Für die Zählerparameter des δ -Modells gilt:

$$\begin{aligned} B[\delta] &= \check{\beta}_m \delta^m + \check{\beta}_{m-1} \delta^{m-1} + \cdots + \check{\beta}_1 \delta + \check{\beta}_0 \\ &= \check{\beta}_{\tilde{n}-1,\epsilon} \delta^{\tilde{n}-1} + \cdots + \check{\beta}_{\tilde{m}+1,\epsilon} \delta^{\tilde{m}+1} + \check{\beta}_{\tilde{m},red} \delta^{\tilde{m}} + \cdots + \check{\beta}_{0,red} \\ &= B_\epsilon[\delta] + B_{red}[\delta] \end{aligned} \quad (4.14)$$

mit:

$$\lim_{h \rightarrow 0 \text{ s}} \check{\beta}_j = \begin{cases} \check{\beta}_{j,\epsilon} = 0 & \text{für } j = \tilde{m} + 1, \dots, \tilde{n} - 1 \\ \check{\beta}_{j,red} = \tilde{\beta}_j & \text{für } j = 0, \dots, \tilde{m} \end{cases} \quad (4.15)$$

Für kleine Abtastzeiten $h \rightarrow 0$ s sind daher die durch die Zeitdiskretisierung entstandenen Parameter $\check{\beta}_{j,\epsilon}$ im Verhältnis zu den physikalisch relevanten Parametern $\check{\beta}_{j,red}$ zu vernachlässigen [56]. Diese Trennung der Parameter ist nur im δ -Modell wegen der direkten Beziehung zum zeitkontinuierlichen ρ -Modell möglich. Im q -Modell bleibt das Verhältnis aller Parameter mit sich ändernder Abtastzeit annähernd gleich und es findet keine Trennung zwischen physikalisch relevanten Parametern und Diskretisierungsparametern statt. Dies bestätigt Abbildung 4.1 oben, in welcher die Verläufe der Zählerparameter β_j des q -

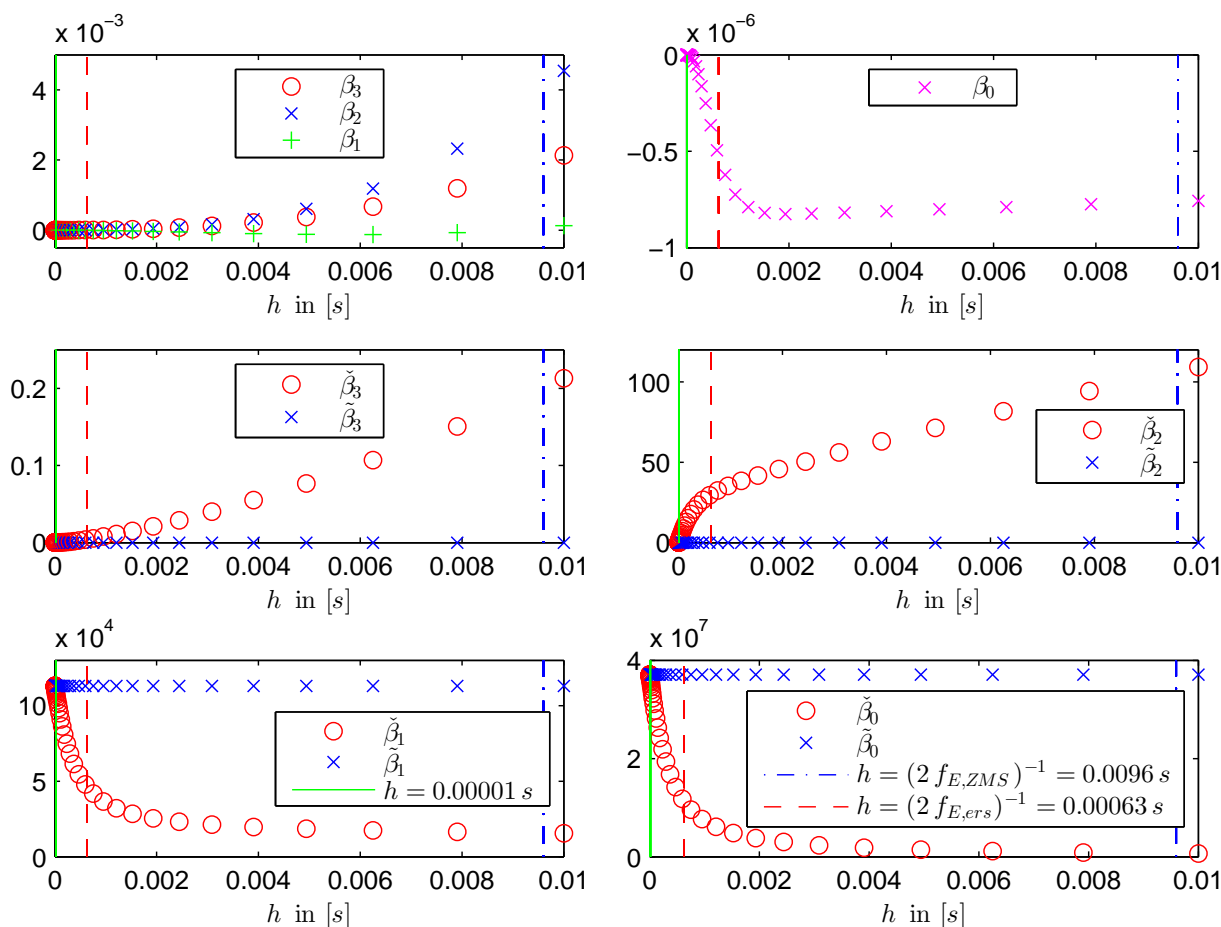


Abbildung 4.1: Verlauf der Zählerpolynomparameter des schwach gedämpften ($D = 0.09$) Zwei-Massen-Systems mit Berücksichtigung des Momentenregelkreises ($n_{ZMS} = 4$) in Abhängigkeit der Abtastzeit h ; es werden die Zählerparameter β_j der zeitdiskreten q -Modellbeschreibung (**oben**), $\check{\beta}_j$ der zeitdiskreten δ -Modellbeschreibung (**Mitte/unten**) sowie $\tilde{\beta}_j$ der zeitkontinuierlichen ρ -Modellbeschreibung (**Mitte/unten**) dargestellt

Modells des Zwei-Massen-Systems dargestellt sind. Alle Parameter streben für abnehmende Abtastzeit h gegen betragsmäßig kleine Werte und es ist keine Trennung erkennbar. Die Verläufe der Zählerparameter $\check{\beta}_j$ des δ -Modells des Zwei-Massen-Systems in Abbildung 4.1 Mitte hingegen verdeutlichen, dass die durch die Diskretisierung entstandenen Parameter $\check{\beta}_3$ und $\check{\beta}_2$ für abnehmende Abtastzeit gegen Null streben. Die Parameter $\check{\beta}_1$ und $\check{\beta}_0$ hingegen nehmen für $h \rightarrow 0$ s den Wert $\tilde{\beta}_1$ und $\tilde{\beta}_0$ des zeitkontinuierlichen Modells an (siehe Abbildung 4.1 unten). In den Abbildungen sind jeweils die Abtastgrenzen als vertikale

Linien eingezeichnet. Sobald mit $h = (2 f_{E,ers})^{-1}$ die kleinste Eckfrequenz des Zwei-Masse-Systems nach Shannon detektiert werden kann und somit gerade keine Unterabtastung vorliegt, unterscheiden sich die physikalischen Parameter von den Diskretisierungsparametern bereits mindestens um die Potenz 10^3 . Bei der gewählten Abtastzeit von $h = 0.00001$ s ist es bereits eine Potenz $> 10^5$.

Theorem 4.2: Physikalische Bedeutung der Diskretisierungs-Parameter

Durch die Transformation des q -Modells in den δ -Bereich ist für robuste Abtastzeiten h (siehe Gleichung 3.60 in Theorem 3.2) eine Trennung der physikalisch relevanten Zählerparameter von den durch die Zeitdiskretisierung entstandenen Zählerparametern gemäß Gleichung (4.14)/(4.15) möglich, was die Vernachlässigung der Diskretisierungsparameter ermöglicht. Werden die Diskretisierungsparameter vor der Rücktransformation in den q -Bereich gestrichen, liegt ein q -Modell mit $B_{red}[\cdot]$ ohne instabile Nullstellen vor, welches auf Grund der gewählten kleinen/robusten Abtastzeit keine bzw. vernachlässigbare Abweichungen im physikalisch relevanten Bereich zeigt.

4.1.2.2 Vernachlässigung von Diskretisierungs-Nullstellen

Um einen entstehenden Modellierungsfehler durch eine reduzierte Darstellung konkreter betrachten zu können, sei im Folgenden ein alternatives Vorgehen mit direktem Bezug auf die Diskretisierungsnullstellen dargestellt.

In Abbildung 4.2 sind die Nullstellenverläufe bzgl. ihrer Beträge aller Modelle zu erkennen. Wenn gemäß Gleichung (4.15) für $h \rightarrow 0$ s die Zählerparameter $\check{\beta}_{j,\epsilon}$ zu Null werden, müssen folglich $m_{DNS} = \tilde{r} - 1$ Diskretisierungsnullstellen gegen Unendlich streben, so dass die unendlich hohe Dynamik zu vernachlässigen ist. Dies bestätigt Abbildung 4.2 unten: bereits bei der größtmöglichen Abtastzeit $h = (2 f_{E,ers})^{-1}$ mit Vermeidung einer Unterabtastung ist die Dynamik der langsamsten Diskretisierungsnullstelle um ca. den Faktor 3 schneller als die Systemnullstelle. Mit der gewählten robusten Abtastzeit $h = 0.00001$ s liegt ein Faktor von 10^3 vor; die zeitdiskrete Systemnullstelle $|\check{q}_j|$ erreicht den Betrag der zeitkontinuierlichen Systemnullstelle $|\tilde{q}_j|$. Somit ist mit dem δ -Modell direkt eine Trennung der System- von den Diskretisierungsnullstellen möglich. Durch die Transformation in den δ -Bereich ändert sich die Stabilität der Nullstellen nicht, was der Vergleich zwischen dem Nullstellenverlauf des q - und δ -Modells in Abbildung 4.2 oben und Mitte bzgl. der Stabilitätsgrenze $|q_j| = 1$ bzw. $|\text{Re}\{\check{q}_j\} + 1/h + j \text{Im}\{\check{q}_j\}| = 1/h$ bestätigt: die instabile Nullstelle tritt bei derselben Abtastzeit auf. Eine Trennung der Diskretisierungsnullstellen von den Systemnullstellen ist jedoch auch direkt im q -Modell möglich, wenn im Folgenden das Verhalten für $h \rightarrow 0$ s untersucht wird.

Mit Hilfe der Beziehung zwischen den Beschreibungsmodellen (4.4) bis (4.11) lässt sich eine Aussage über die Nullstellen q_j für $h \rightarrow 0$ s treffen. Es wurde mit Gleichung (4.6) und Gleichung (4.9) bzw. (4.15) deutlich, dass für $h \rightarrow 0$ s der Zusammenhang $m = \check{m} = \tilde{m}$ zwischen allen Modellbeschreibungen gilt. In keiner Modellbeschreibung treten noch Diskretisierungsnullstellen auf. Nachdem mit Gleichung (4.9) sowohl für Pol- als auch Nullstellen der Umrechnungsfaktor 1 zwischen ρ - und δ -Modell gilt und weiter sowohl für Pol- als auch Nullstellen die Umrechnungsbeziehung (4.6) zwischen q - und δ -Modell gilt,

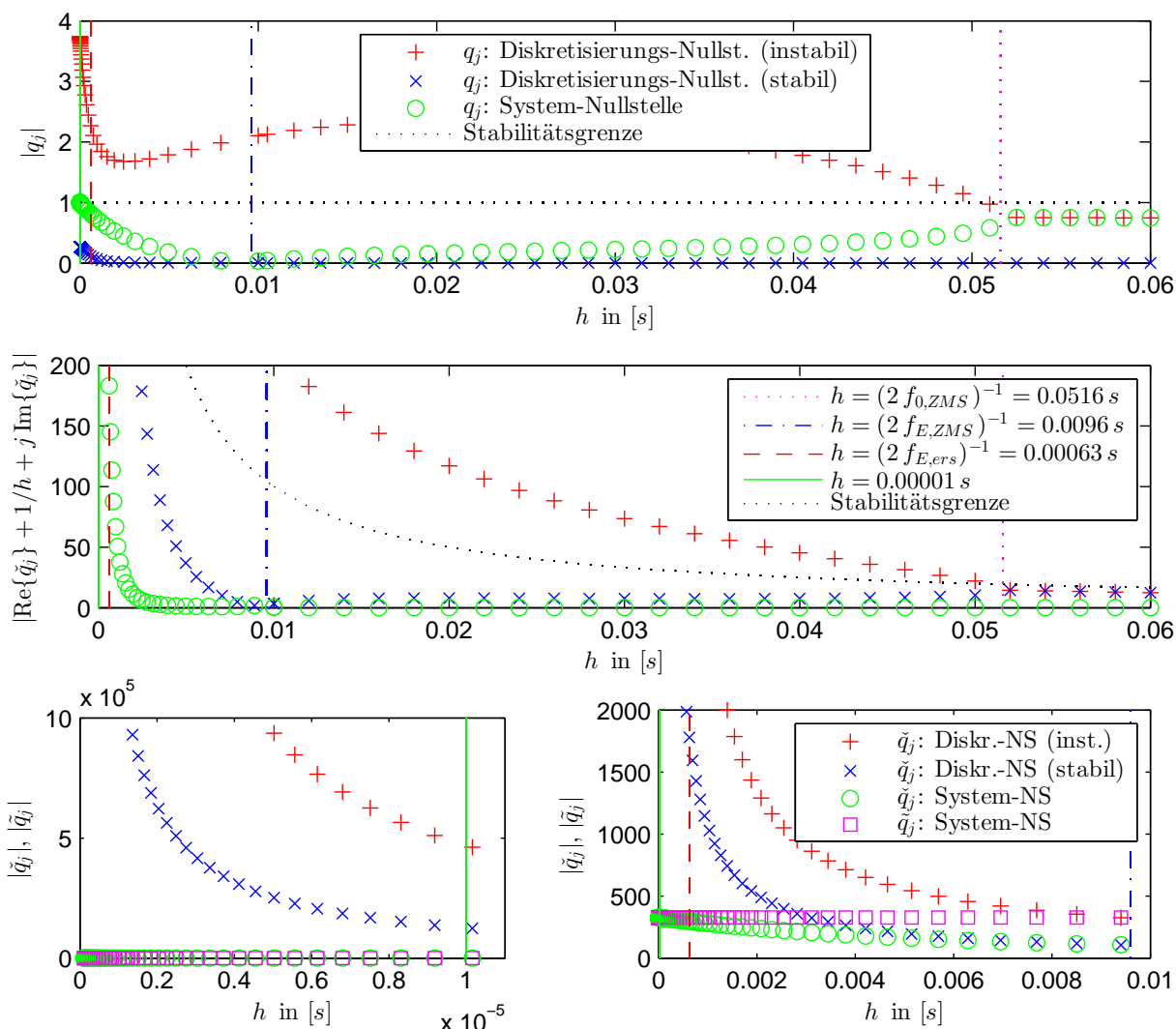


Abbildung 4.2: Verlauf der Nullstellenbeträge des schwach gedämpften ($D = 0.09$) Zwei-Massen-Systems mit Berücksichtigung des Momentenregelkreises ($n_{ZMS} = 4$) in Abhängigkeit der Abtastzeit h ; es werden die Nullstellen q_j der zeitdiskreten q -Modellbeschreibung (**oben**), \tilde{q}_j der zeitdiskreten δ -Modellbeschreibung (**unten**) sowie \hat{q}_j der zeitkontinuierlichen ρ -Modellbeschreibung (**Mitte/unten**) dargestellt; des Weiteren ist der Verlauf der Stabilitätsgrenze in der ρ -Modellbeschreibung (**oben**) sowie der δ -Modellbeschreibung (**Mitte**) zu erkennen

muss gemäß obiger Zusammenhänge die Nullstellenumrechnung zwischen ρ - und q -Modell ebenfalls gleich der Polstellenumrechnung (2.510) sein (Berechnung alternativ in [9]):

$$\lim_{h \rightarrow 0s} p_i = \lim_{h \rightarrow 0s} \tilde{p}_i h + 1 = \lim_{h \rightarrow 0s} \tilde{p}_i h + 1 = \lim_{h \rightarrow 0s} e^{\tilde{p}_i h} = 1, \quad i \in \{1, \dots, \tilde{n}\} \quad (4.16)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0s} q_j = \lim_{h \rightarrow 0s} \tilde{q}_j h + 1 = \lim_{h \rightarrow 0s} \tilde{q}_j h + 1 = \lim_{h \rightarrow 0s} e^{\tilde{q}_j h} = 1, \quad j \in \{1, \dots, \tilde{m}\} \quad (4.17)$$

Für die weitere Betrachtung mit $h \rightarrow 0s$ kann somit die Transformation des Stabilitätsbereiches zwischen ρ - und q -Ebene gemäß Abbildung 2.68 sowohl für Pol- als auch Nullstellen verwendet werden. Die Polstellen und Systemnullstellen streben gemäß Glei-

chung (4.16) und (4.17) für $h \rightarrow 0$ *s* die Werte $p_i \rightarrow 1$ sowie $q_j \rightarrow 1$ an. Für das q -Modell bedeutet dies, dass der neue Wert $y[k+1]$ bzw. $u[k+1]$ annähernd dem alten Wert $y[k]$ bzw. $u[k]$ entspricht, was für sehr kleine Abtastzeiten h zutreffend ist. An dieser Stelle sei auf die numerischen Probleme hingewiesen, auf welche in Kapitel 2.3.6.4 eingegangen wird. In den obigen Betrachtungen wurden wegen $h \rightarrow 0$ *s* auch im q -Modell die Diskretisierungsnullstellen vernachlässigt und eine reduzierte Ordnung $m_{red} = \tilde{m}$ angesetzt. Zur Überprüfung der Richtigkeit sollen nun die Grenzwerte der Diskretisierungsnullstellen des Polynoms $B_{DNS}[\cdot]$ bestimmt werden. Um die Nullstellen vernachlässigen zu können, müssten die Grenzwerte hochdynamischen Nullstellen entsprechen.

Streben sowohl Pol- als auch Systemnullstellen den Wert 1 an, lässt sich eine Pol- Nullstellenkürzung ansetzen mit folgendem Ergebnis:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{B[q]}{A[q]} = \frac{B_{DNS}[q] (q-1)^{\tilde{m}}}{(q-1)^{\tilde{n}}} = \frac{B_{DNS}[q]}{(q-1)^{\tilde{r}}} \quad (4.18)$$

Der \tilde{r} -fache Pol bei $p = 1$ entspricht gemäß Gleichung (2.463) einem \tilde{r} -fachen integralen Verhalten. Somit gilt folgende Beziehung zwischen dem z - und s -Frequenzbereich:

$$F[z] = \frac{B_{DNS}[z]}{(z-1)^{\tilde{r}}} \quad \Leftrightarrow \quad F(s) = \frac{1}{s^{\tilde{r}}} \quad (4.19)$$

Die zeitkontinuierliche Strecke $F(\cdot)$ wird nun der ZOH-Diskretisierung (2.435) unterzogen, um das Polynom $B_{DNS}[\cdot]$ zu bestimmen, welches durch die Zeitdiskretisierung erzeugt wird:

$$F[z] = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\frac{1}{s^{\tilde{r}+1}} \right] \quad (4.20)$$

Die Rücktransformation von $s^{-(\tilde{r}+1)}$ in den Zeitbereich lautet [183]:

$$\frac{1}{s^{\tilde{r}+1}} \quad \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \quad \frac{1}{\tilde{r}!} t^{\tilde{r}} \quad (4.21)$$

Mit dem Ergebnis (4.21) kann nun unter Beachtung der Abtastung ($t = kh$) die z -Transformation (2.484) auf Gleichung (4.20) angewandt werden:

$$F[z] = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\frac{1}{\tilde{r}!} t^{\tilde{r}} \right] = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\frac{1}{\tilde{r}!} (kh)^{\tilde{r}} \right] = \frac{h^{\tilde{r}}}{\tilde{r}!} (1 - z^{-1}) \sum_{k=0}^{\infty} k^{\tilde{r}} z^{-k} \quad (4.22)$$

Durch Verwendung der geometrischen Reihe (A.46) folgt das Ergebnis für das Polynom $B_{DNS}[\cdot]$ mit den Diskretisierungsnullstellen für $h \rightarrow 0$ *s*:

$$F[z] = \frac{h^{\tilde{r}}}{\tilde{r}!} (1 - z^{-1}) \sum_{k=0}^{\infty} k^{\tilde{r}} (z^{-1})^k = \frac{h^{\tilde{r}}}{\tilde{r}!} \frac{\sum_{j=1}^{\tilde{r}} a_j^{(\tilde{r})} z^{-j}}{(1 - z^{-1})^{\tilde{r}}} \quad (4.23)$$

$$= \frac{h^{\tilde{r}} (\tilde{r}!)^{-1} \sum_{j=1}^{\tilde{r}} a_j^{(\tilde{r})} z^{\tilde{r}-j}}{(z-1)^{\tilde{r}}} = \frac{B_{DNS}[z]}{(z-1)^{\tilde{r}}} \quad (4.24)$$

Die berechneten Polynome

$$B_{DNS}[z] = h^{\tilde{r}} (\tilde{r}!)^{-1} \sum_{j=1}^{\tilde{r}} a_j^{(\tilde{r})} z^{\tilde{r}-j}, \quad \text{für } h \rightarrow 0 \text{ } s \quad (4.25)$$

für die Relativgrade $\tilde{r} = 1, \dots, 6$ sind in Gleichung (2.544) aufgelistet. Die zugehörigen Nullstellen, welche denen des *Euler-Frobenius-Polynoms* entsprechen [187], zeigt Gleichung (2.545). Das Polynom $B_{DNS}[\cdot]$ besitzt somit ab dem Relativgrad $\tilde{r} \geq 3$ instabile Diskretisierungsnullstellen. Eine erweiterte Liste ist in [9, 92] zu finden. Nachdem die gesuchten Grenzwerte der hochdynamischen Diskretisierungsnullstellen nun vorliegen, ist noch die oben angenommene Eigenschaft der hohen Dynamik zu bestätigen.

Entsprechend der Gleichung (4.25) als Euler-Frobenius-Polynom [187] bzw. der Gleichung (2.545) sind alle Diskretisierungsnullstellen $q_{j,DNS}$ des Polynoms $B_{DNS}[\cdot]$ für kleine Abtastzeiten $h \rightarrow 0$ s reell und negativ ($q_{j,DNS} \in \mathbb{R}^-$), was in [64] bewiesen wird:

$$B_{DNS}[q] = \prod_{j=1}^{\tilde{r}-1} (q - q_{j,DNS}), \quad q_{j,DNS} \in] - \infty, 0[\quad \text{für } h \rightarrow 0 \text{ s} \quad (4.26)$$

Betrachtet man mit diesem Ergebnis die Transformation zwischen der q - und ρ -Ebene in Abbildung 2.68, so entspricht die negative reelle Achse im q -Bereich zweier zur reellen Achse um $\pm\pi/h$ parallel verschobenen Geraden im ρ -Bereich:

$$q_{j,DNS} \in] - \infty, 0[\quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} \text{Re}\{\tilde{q}_{j,DNS}\} \in \mathbb{R} \\ \text{Im}\{\tilde{q}_{j,DNS}\} = \pm\omega_{max} = \pm\frac{\pi}{h} \end{array}, \quad \text{für } h \rightarrow 0 \text{ s} \quad (4.27)$$

Nachdem gemäß Theorem 2.37 für eine gewählte Abtastzeit h die Kreisfrequenz $\omega_{max} = \pi/h$ die größte detektierbare Frequenz ist, besitzen die Diskretisierungsnullstellen mit $\text{Im}\{\tilde{q}_{j,DNS}\} = \pm\omega_{max} = \pm\pi/h$ die bzgl. einer Abtastzeit h höchste Dynamik (Abtastgrenze ω_{max}). Die Diskretisierungsnullstellen unterscheiden sich lediglich im Realteil und somit im Dämpfungsanteil. Wegen der im Grenzübergang $h \rightarrow 0$ s unendlich hohen Dynamik der Diskretisierungsnullstellen können diese bzgl. des physikalisch relevanten Verhaltens vernachlässigt werden. Trotz einer reduzierten Ordnung $m_{red} = m - m_{DNS} = \tilde{m}$ des zeitdiskreten Nullstellenpolynoms gemäß Gleichung (4.17) ist eine ausreichende Modellierung für kleine Abtastzeiten gewährleistet.

Den Verlauf der Nullstellen des Zwei-Massen-Systems für Abtastzeit $h \leq 0.06$ s zeigt Abbildung 4.3, was obige Theorie bestätigt. Nachdem die kleinste systemtypische Frequenz, die Eigenfrequenz $f_{0,ZMS}$ des Zwei-Massen-Systems, nur für Abtastzeiten $h \leq (2f_{0,ZMS})^{-1} = 0.0516$ s detektiert werden kann, führt eine Abtastzeit $h = 0.06$ s zur Unterabtastung. Dementsprechend liegt keine Modellierung des physikalischen Verhaltens vor, was in der Position der Nullstellen erkennbar ist – System- und Diskretisierungsnullstelle bilden ein konjugiert komplexes Polpaar, womit beide Nullstellen denselben Beitrag zur Systemmodellierung leisten. Sobald mit $h = 0.0516$ s die Eigenfrequenz $f_{0,ZMS}$ modelliert wird, beginnt die Trennung zwischen System- und Diskretisierungsnullstellen. Die Diskretisierungsnullstellen liegen gemäß Gleichung (4.27) beide bereits auf der negativen reellen Achse.

Nachdem die Eckfrequenz $\omega_{E,ZMS}$ durch die Wahl der Abtastzeit $h = 0.0516$ s noch nicht modelliert werden kann, liegt die Systemnullstelle ebenfalls auf der negativen reellen Achse, um die bzgl. der Abtastzeit größtmögliche Dynamik zu erhalten mit dem Ziel noch keinen Beitrag zur Systemdynamik zu liefern (siehe Transformation der Stabilitätsbereiche in Abbildung 2.68). Nachdem jedoch mit der gewählten unrobusten Abtastzeit laut zeitdiskretem Modell $\omega_{max} = \omega_{0,ZMS} = \omega_{E,ZMS}$ gilt (alle Nullstellen in Abbildung 4.3 liegen

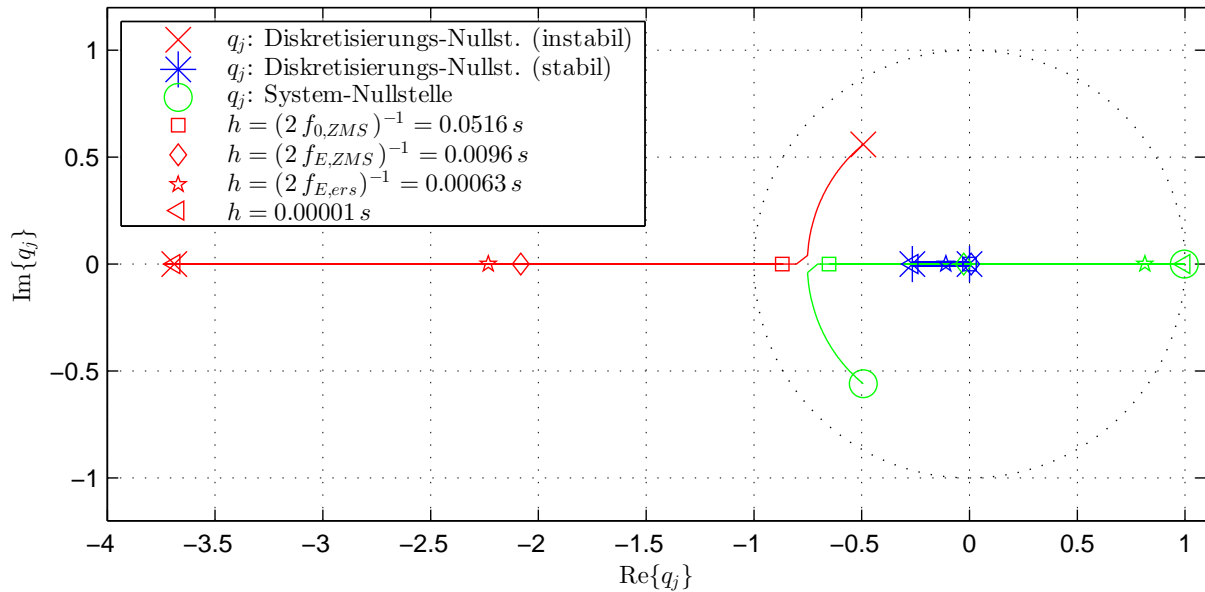


Abbildung 4.3: Verlauf der Diskretisierungs-Nullstellen und System-Nullstelle des Zwei-Massen-Systems ($n_{ZMS} = 4$) in Abhängigkeit der Abtastzeit h mit dem Wertebereich $0 \text{ s} < h \leq 0.06 \text{ s}$

auf der negativen stabilen reellen Achse), trägt jede Nullstelle noch gleichermaßen ihren Beitrag zum Systemverhalten bei, d.h. die Modellierung ist unzureichend.

Entsprechend des Kapitels 3.4.2 ist zur Modellierung der Eigenfrequenz mit der Wahl $\omega_{max} \approx \omega_{0,ZMS}$ noch keine instabile Nullstelle notwendig, weshalb alle Nullstellen innerhalb der Stabilitätsgrenze (Einheitskreis) liegen. Sobald jedoch mit der Abtastzeit $h \leq (2 f_{E,ZMS})^{-1} = 0.0096 \text{ s}$ ebenfalls die Eckfrequenz $f_{E,ZMS}$ der Systemnullstelle modelliert wird, führt die Diskretisierung zu einer instabilen Nullstelle. Mit dieser Abtastzeit erreicht zudem die System-Nullstelle den Übergang von der negativen zur positiven reellen Achse, d.h. es kann ein nicht-schwingungsfähiges Zählerpolynom, ein inverses PT_1 -System (D -Glieder) modelliert werden. Nachdem mit $\omega_{max} \approx \omega_{E,ZMS}$ die Abtastgrenze noch der Eckfrequenz entspricht, muss das D -Glieder bzgl. der Abtastzeit eine hohe Dynamik aufzeigen, was einer Systemnullstelle $q_{ZMS} \approx 0$ entspricht. Beide Diskretisierungsnullstellen verbleiben auf der negativen reellen Achse.

Sobald die Systemnullstelle auf der positiven reellen Achse und nur die Diskretisierungsnullstellen auf der negativen reellen Achse liegen und sich alle vom Nullpunkt entfernen, können die Diskretisierungsnullstellen auf Grund ihrer hohen Dynamik von der Systemnullstelle getrennt und vernachlässigt werden. Dies tritt ein, sobald bzgl. der Systemnullstelle keine Unterabtastung, sondern eine robuste Abtastung mit $\omega_A > 2(\omega_{E,ZMS} + 1 \text{ Dekade})$ vorliegt und folglich $q_{ZMS} > 0$ sein muss (siehe Gleichung (4.39)). Wie mit Abbildung 4.3 deutlich wird, tritt eine robuste Abtastung hinsichtlich der Nullstelle und somit eine eindeutige Trennung zwischen den System- und Diskretisierungsnullstellen bei der Abtastung mit $h \leq (2 f_{E,ers})^{-1} = 0.00063 \text{ s}$ zur Modellierung des Momentenregelkreises auf. Eine robuste Abtastzeit $h = 0.00001 \text{ s}$ bzgl. der Eckfrequenz $f_{E,ers}$ des Momentenreglers entspricht bereits einer Abtastzeit $h \rightarrow 0 \text{ s}$, mit der die Diskretisierungsnullstellen als auch die

Systemnullstelle annähernd ihre Grenzwerte erreicht haben. Diese lauten für die Diskretisierungsnullstellen gemäß Gleichung (4.25) bzw. (2.545) mit $\tilde{r} = 3$ und für die Systemnullstelle gemäß Gleichung (4.17):

$$q_{1,DNS} = -0.268, \quad q_{2,DNS} = -3.732, \quad q_{ZMS} = 1, \quad \text{für } h \rightarrow 0 \text{ s} \quad (4.28)$$

Im Folgenden soll der Beitrag der Diskretisierungsnullstellen zum Phasenwinkel des Gesamtsystems bei einer robusten Abtastung gemäß Gleichung (3.60) bestimmt werden. Hierzu wird der Zählergrundbaustein (2.521) mit $q_1 \in \mathbb{R}$, d.h. $\varphi_1 \in \{0, \pi\}$ und $r_1 = |q_1| \geq 0$ näher untersucht. Das Bodediagramm des Zählergrundbausteins für $h = 0.00001 \text{ s}$ zeigt Abbildung 4.4 rechts. Entsprechend der Tabelle in Theorem 2.38 liegt für stabile/grenzstabile

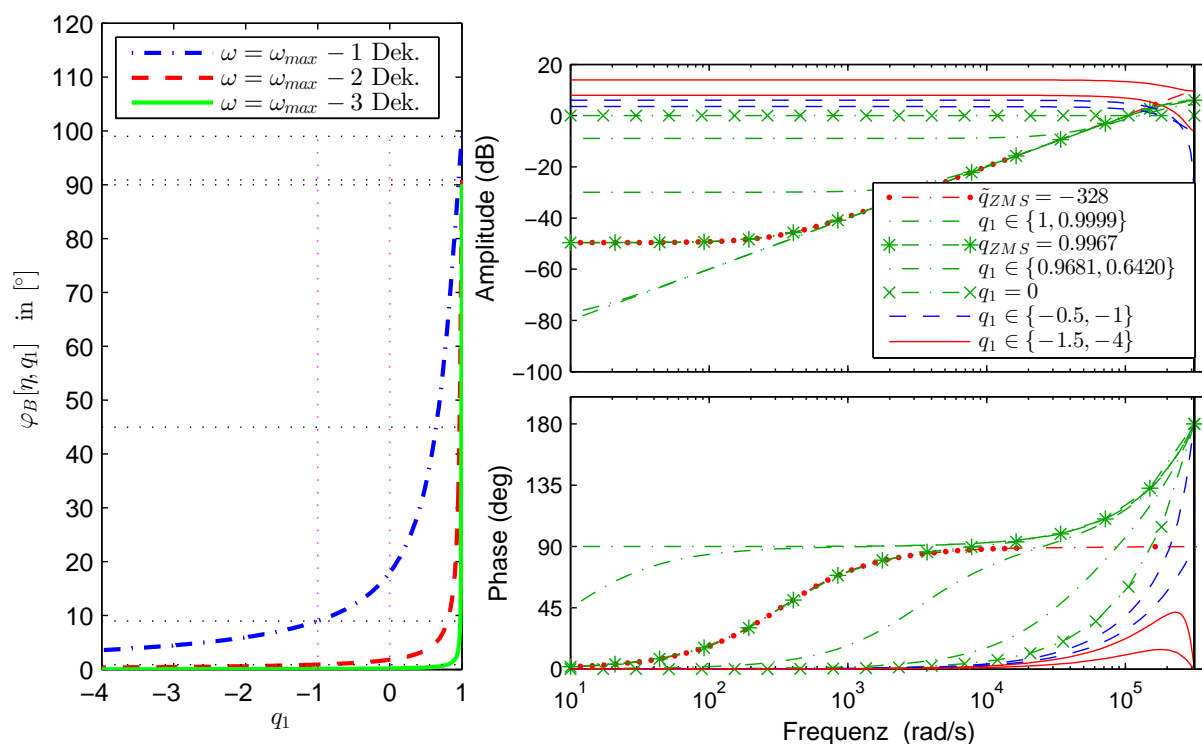


Abbildung 4.4: links: Beitrag einer reellen Diskretisierungsnullstelle q_1 zum Phasenwinkel unabhängig von der Abtastzeit h ; der Phasenwinkel wird bei einer Frequenz $\omega = (\omega_{max} - \eta \cdot \text{Dekaden})$ mit einem Abstand von einer bis drei Dekaden von der Abtastgrenze ω_{max} bestimmt; rechts: Bodediagramm einer reellen zeitdiskreten Nullstelle für unterschiedliche Werte q_1 bei einer Abtastzeit $h = 0.00001 \text{ s}$ und das Bodediagramm der zu modellierenden zeitkontinuierlichen Nullstelle \tilde{q}_{ZMS} des Zwei-Massen-Systems

Nullstellen ($-1 \leq q_1 \leq 1$) eine globale Phasendrehung von $\Delta\varphi = \pi$ vor. Hierbei findet ein monotoner Anstieg gemäß Gleichung (2.532) statt. Für $q_1 \rightarrow -1$ zeigt sich ein streng monotoner Anstieg auf $\Delta\varphi = \pi$, während für $q_1 \rightarrow 1$ ein monotoner Anstieg über einen Sattelpunkt bei $\pi/2$ auftritt. Der sich ergebende Wendepunkt bei 45° ermöglicht die Repräsentation des zeitkontinuierlichen Zählergrundbausteins (2.111) mit einer globalen Phasendrehung $\Delta\tilde{\varphi} = \pi/2$ gemäß der Tabelle in Theorem 2.5 und einem Wendepunkt bei 45° . Der Anstieg von 90° auf 180° ist mathematisch begründet und dient nicht der Modellierung des zeitkontinuierlichen Grundbausteins und führt vielmehr zu einer Abweichung

an der Abtastgrenze ω_{max} , wie es hinleitend zu Theorem 2.39 dargestellt wurde. In Abbildung 4.4 rechts ist der Vergleich zwischen dem Phasenverlauf des zeitkontinuierlichen Zählerbausteins des Zwei-Massen-Systems und dem des entsprechenden repräsentierenden zeitdiskreten Zählerbausteins zu sehen. Je kleiner die Abtastzeit wird, desto breiter wird das Plateau bei 90° und desto mehr verschiebt sich der unerwünschte Anstieg von 90° auf 180° mit ω_{max} in den hochfrequenten Bereich, womit dieser Modellierungsfehler $\Delta\varphi_\epsilon$ bei ω_{max} bzgl. des zu repräsentierenden physikalischen Verhaltens zu vernachlässigen ist.

Die Phasenverläufe der grenzstabilen Nullstelle $q_1 = 1$ und $q_1 = -1$ stellen Grenzfälle der oben dargestellten Verläufe dar. Für $q_1 = 1$ findet bei $\omega = 0$ ein Sprung auf das Plateau 90° statt mit einem anschließenden streng monotonen Anstieg auf 180° . Bei $q_1 = -1$ findet zunächst ein streng monotoner Anstieg auf 90° statt mit einem anschließenden Sprung auf 180° bei $\omega_{max} = \pi/h$.

Entsprechend der Tabelle in Theorem 2.38 liegt für instabile Nullstellen ($-\infty < q_1 < -1$) eine globale Phasendrehung von $\Delta\varphi = 0$ vor. Die Abbildung 4.4 rechts bestätigt dies: nach einem flachen streng monotonen Anstieg wird nahe der Abtastgrenze ω_{max} das Phasenmaximum erreicht, bevor ein steiler Abfall zurück auf 0° folgt. Für $q_1 \rightarrow -\infty$ wird das Phasenmaximum zu Null.

Es ist zu erkennen, dass Nullstellen auf der negativen reellen Achse nur in dem Bereich dominant sind, in welchen auch der oben beschriebene Modellierungsfehler $\Delta\varphi_\epsilon$ des Zählergrundbausteins bei ω_{max} , d.h. der unerwünschte Anstieg von 90° auf 180° , fällt. Folglich ist die Abtastzeit entsprechend groß zu wählen, so dass weder der Modellierungsfehler $\Delta\varphi_\epsilon$ der System-Nullstelle noch das Maximum der instabilen Diskretisierungs-Nullstelle sowie der steile Anstieg der stabilen Diskretisierungs-Nullstelle in den zu modellierenden Phasenwechsel von 0° auf 90° des zeitkontinuierlichen Zählergrundbausteins fällt. Nachdem nach Shannon aus Symmetrie-Gründen um die Eckkreisfrequenz ω_E die Modellierung des Phasenwechsels von 0° auf $\varphi(\omega_E) = 45^\circ$ zwar nicht robust aber theoretisch ausreichend ist, muss zumindest der Bereich des Anstiegs von 0° auf 45° von den Einflüssen der Diskretisierungsnullstellen durch entsprechende Wahl der Abtastzeit getrennt werden. Dies fordert jedoch bei realer Abtastung mit $\omega_A > 2\omega_E$ eine höhere Abtastfrequenz als von Shannon gefordert: $\omega_A = 2\omega_E$ ist nicht zielführend.

Es wird nun untersucht, welchen Phasenwert $\varphi_B[\omega_E]$ die Diskretisierungsnullstellen bei der Eckkreisfrequenz ω_E annehmen, wenn die Abtastgrenze ω_{max} mit einem Abstand von η Dekaden zur Eckkreisfrequenz ω_E des Zählergrundbausteins gewählt wird. Unter den Randbedingungen eines reellen Pols ergibt sich mit $\varphi_1 = 0$ bzw. $\varphi_1 = \pi$ und $r_1 = |q_1|$ für die Gleichung (2.528):

$$\varphi_B[\omega] = \arctan\left(\frac{\sin(\omega h)}{\cos(\omega h) - q_1}\right) \quad (4.29)$$

Wird der Abstand zwischen Eckkreisfrequenz ω_E und Abtastgrenze ω_{max} mit η Dekaden festgelegt, gilt:

$$\omega_E = 10^{-\eta} \omega_{max} = 10^{-\eta} \frac{\pi}{h} \quad (4.30)$$

Wendet man Gleichung (4.30) auf Gleichung (4.29) an, lassen sich unabhängig von der Ab-

tastzeit h die Beiträge zum Phasenwinkel durch die Diskretisierungsnullstellen bestimmen:

$$\varphi_B[\eta] \Big|_{q_1} = \arctan \left(\frac{\sin(10^{-\eta} \pi)}{\cos(10^{-\eta} \pi) - q_1} \right), \quad \text{für } \omega_{max} - \omega_E = \eta \text{ Dekaden} \quad (4.31)$$

Die Kennlinie der Funktion (4.31) für $\eta \in \{1, 2, 3\}$ zeigt Abbildung 4.4 links. Nachdem der Phasenwinkel gemäß der Ableitung

$$\frac{d}{dq_1} \varphi_B[\eta, q_1] = \frac{(\cos(10^{-\eta} \pi) - q_1)^2}{(\cos(10^{-\eta} \pi) - q_1)^2 + \sin^2(10^{-\eta} \pi)} > 0 \quad (4.32)$$

streng monoton wächst, zeigen stabile Diskretisierungsnullstellen $q_1 \in] - 1, 0[$ den maximalen Phasenbeitrag bei $q_1 = 0^-$ und instabile Diskretisierungsnullstellen $q_1 \in] - \infty, -1[$ bei $q_1 = -1^-$. Für die entsprechenden Phasenbeiträge bei der Eckkreisfrequenz ω_E mit einem Abstand von η Dekaden zwischen der Eckkreisfrequenz ω_E und der Abtastgrenze ω_{max} gilt:

$$\varphi_B[\eta] \Big|_{q_1} \in \begin{cases} [0, \frac{\pi}{2} \cdot 10^{-\eta}[& \text{für instabile Nullst.: } q_1 \in] - \infty, -1[\\ [\frac{\pi}{2} \cdot 10^{-\eta}] & \text{für grenzst. Nullst.: } q_1 \in [-1] \\ [\frac{\pi}{2} \cdot 10^{-\eta}, \pi \cdot 10^{-\eta}[& \text{für stabile Nullst.: } q_1 \in] - 1, 0[\end{cases} \quad (4.33)$$

für $\omega_{max} - \omega_E = \eta$ Dekaden

Hierbei ist zu erkennen, dass instabile Diskretisierungs-Nullstellen im Vergleich zu stabilen Diskretisierungs-Nullstellen einen kleineren Phasenwinkel zeigen und dieser für $p_1 \rightarrow -\infty$ zu Null werden kann. Der Phasenwinkel der stabilen Diskretisierungs-Nullstellen ist im besten Fall nie kleiner als der Phasenwinkel der instabilen Diskretisierungs-Nullstellen im schlechtesten Fall. Aus diesem Grund ist die Vernachlässigung von lediglich instabilen Diskretisierungs-Nullstellen der Vernachlässigung aller Diskretisierungsnullstellen vorzuziehen.

Nachdem der Phasenwinkel bei stabilen Diskretisierungs-Nullstellen gemäß Gleichung (2.532) monoton steigt, zeigt die stabile Diskretisierungsnullstelle im Bereich $[0, \omega_E]$ bei der Frequenz ω_E den maximalen Wert. Instabile Diskretisierungs-Nullstellen sind entsprechend der Gleichung (2.533) nicht monoton und besitzen ein Maximum (siehe Abbildung 4.4). Mit Gleichung (2.529) lässt sich die Position ω_M des Maximums unter den Randbedingungen einer reellen negativen Nullstelle mit $\varphi_1 = \pi$ und $r_1 = |q_1| > 1$ bestimmen:

$$0 = 1 - r_1 \cos(\varphi_1 - \omega h)$$

$$\omega_M h = \pi - \arccos \frac{1}{|q_1|}, \quad \text{für } |q_1| > 1 \quad \Rightarrow \quad 0.5 \frac{\pi}{h} < \omega_M < \frac{\pi}{h} \quad (4.34)$$

Wegen $10^{-\eta} \pi/h < 0.5 \pi/h$ mit $\eta \geq 1$ liegt das Maximum ω_M für $\omega_{max} - \omega_E = \eta$ Dekaden stets rechts der Eckfrequenz, d.h. der Phasenwinkel steigt bei instabilen Diskretisierungsnullstellen im Bereich $[0, \omega_E]$ monoton und erreicht bei der Frequenz ω_E den maximalen Wert. Eine Aussage über den Phasenbeitrag der Diskretisierungsnullstellen bei der Eckkreisfrequenz ω_E stellt damit für den relevanten Frequenzbereich $[0, \omega_E]$ den schlechtesten Fall mit dem größten Phasenbeitrag dar; die Werte in Gleichung (4.33) sind der „worst case“.

Eine zeitkontinuierliche System-Nullstelle wird ideal repräsentiert, wenn sich für $q_1 \rightarrow 1$ ein Plateau bei 90° ausbildet. Der sich anschließende Anstieg von 90° auf 180° des zeitdiskreten Modells ist unerwünscht und führt zum Modellierungsfehler $\varphi_{\epsilon,B}[\omega_{max}] = \Delta\varphi_\epsilon = \pi/2$ bei ω_{max} . Es ist zu untersuchen, welcher Abstand χ Dekaden vom gewählten ω_{max} notwendig ist, so dass an der Stelle ω_χ nur ein geringer Modellierungsfehler $\varphi_{\epsilon,B}[\omega_\chi] \approx 0^\circ$ vorliegt.

Der Grenzfall $q_1 = 1$ stellt den schlechtesten Fall dar, bei dem der Anstieg des Modellierungsfehlers

$$\varphi_{\epsilon,B}[\omega] \Big|_{q_1=1} = \varphi_B[\omega] \Big|_{q_1=1} - \frac{\pi}{2} > 0 \quad (4.35)$$

bei einer niedrigeren Frequenz beginnt, als bei allen anderen möglichen reellen System-Nullstellen $q_1 \in [0, 1[$ (vgl. Abbildung 4.4). Eine Untersuchung mit Gleichung (4.31) bzw. Abbildung 4.4 zeigt, dass der Verlauf des zeitdiskreten Phasenganges für $q_1 = 1$ dem um $\pi/2$ verschobenen Phasengang für $q_1 = -1$ entspricht, wenn von dem Sprung bei ω_{max} von 90° auf 180° abgesehen wird. Der Modellierungsfehler $\varphi_{\epsilon,B}[\chi]$ bei einer Kreisfrequenz ω_χ mit dem Abstand von χ Dekaden zur Abtastgrenze ω_{max} entspricht somit dem Beitrag $\varphi_B[\chi]$ der grenzstabilen Diskretisierungs-Nullstelle $q_1 = -1$:

$$\varphi_{\epsilon,B}[\chi] \Big|_{q_1=1} = \varphi_B[\chi] \Big|_{q_1=-1} = \frac{\pi}{2} \cdot 10^{-\chi}, \quad \text{für } \omega_{max} - \omega_\chi = \chi \text{ Dekaden} \quad (4.36)$$

Nachdem der Phasenwinkel bei stabilen Nullstellen gemäß Gleichung (2.532) monoton steigt, weicht der Phasengang der System-Nullstelle $q_1 = 1$ im Bereich $[0, \omega_\chi]$ vom erwünschten Wert $\pi/2$ maximal um

$$\epsilon_{max,B}[\chi] = \varphi_{\epsilon,B}[\chi] \Big|_{q_1=1} = \frac{\pi}{2} \cdot 10^{-\chi}, \quad \text{für } \omega_{max} - \omega_\chi = \chi \text{ Dekaden} \quad (4.37)$$

ab. Ausgehend von diesem Grenzfall wird die Phase $\varphi_B[\cdot]$ beliebiger System-Nullstellen $q_1 \in [0, 1]$ den Plateauwert von 90° im Bereich $[0, \omega_\chi]$ nie mehr als den Winkel $\epsilon_{max,B}[\chi]$ überschreiten:

$$\varphi_B[\chi] \Big|_{q_1} \leq \frac{\pi}{2} + \underbrace{\frac{\pi}{2} \cdot 10^{-\chi}}_{\epsilon_{max,B}[\chi]}, \quad \text{für } q_1 \in [0, 1], \quad \omega_{max} - \omega_\chi = \chi \text{ Dekaden} \quad (4.38)$$

Der Modellierungsfehler $\epsilon_{max,B}[\chi]$ ist gemäß der Gleichung (4.33) stets kleiner als der Beitrag $\varphi_B[\chi]$ einer stabilen Diskretisierungsnullstelle. Der Beitrag $\varphi_B[\chi]$ einer instabilen Diskretisierungs-Nullstelle ist jedoch stets kleiner als der Modellierungsfehler $\epsilon_{max,B}[\chi]$. Somit wird der Fehler durch ein Vernachlässigen einer instabilen Diskretisierungs-Nullstelle durch den mathematisch bedingten Modellierungsfehler einer System-Nullstelle mit Plateaubildung bei 90° dominiert. Ein Fehler durch eine Vernachlässigung entspricht damit der Größenordnung eines bereits durch die Diskretisierung erzeugten Fehlers. Für den Fall $\chi = 1$ mit $\epsilon_{max,B}[1] = 9^\circ$ sind in der Abbildung 4.4 die beschriebenen Zusammenhänge gut zu erkennen: die Phase beträgt für $q_1 = -1$ den Wert $\varphi_B[1] \Big|_{q_1=-1} = 9^\circ$ und der Modellierungsfehler beträgt für $q_1 = 1$ ebenfalls den Wert $\epsilon_{max,B} = \varphi_{\epsilon,B}[1] \Big|_{q_1=1} = 99^\circ - 90^\circ = 9^\circ$.

Setzt man einen Abstand von 2 Dekaden zwischen der Eckkreisfrequenz ω_E und der Abtastgrenze ω_{max} an, d.h. eine Dekade, um den vollständigen Phasenwechsel des zeitkontinuierlichen Zählergrundbausteins repräsentieren zu können und eine weitere Dekade, in der der

Modellierungsfehler $\varphi_{\epsilon,B}[\omega] \in] \sim 9^\circ, 90^\circ]$ mit dem unerwünschten Anstieg der Phase $\varphi_B[\cdot]$ von 90° auf 180° dominant wird, bedeutet dies im schlechtesten Fall einen Phasenwinkel-Beitrag $\varphi_B[2]|_{-1} = 0.9^\circ$ der instabilen Diskretisierungsnullstellen und $\varphi_B[2]|_0 = 1.8^\circ$ der stabilen Diskretisierungsnullstellen bei der Kreisfrequenz $\omega_\chi = \omega_E$. Bezogen auf einen zu repräsentierenden Phasenwinkel $\varphi(\omega_E) = 45^\circ$ bei der Eckkreisfrequenz ω_E ergibt sich ein vernachlässigbarer Fehler von 2% bzw. 4%. Mit jeder weiteren Erhöhung des Abstands $\eta = \chi$ um eine Dekade verkleinert sich der Fehler um den Faktor 10.

Bei der Erhöhung des Abstands ist jedoch zu bedenken, dass die System-Nullstellen q_1 gegen den Grenzwert Eins konvergieren. Dies wird ersichtlich, wenn in Gleichung (4.31) für den zu erreichenden Phasenwinkel bei der Eckfrequenz $\varphi_B[\eta]|_{q_1} = \pi/4$ gesetzt und nach q_1 aufgelöst wird:

$$q_1[\eta] = \cos(10^{-\eta} \pi) - \sin(10^{-\eta} \pi), \quad \text{für } \omega_{max} - \omega_E = \eta \text{ Dekaden} \quad (4.39)$$

Zur zeitdiskreten Repräsentation eines zeitkontinuierlichen Zählerbausteins mit einem Abstand von η Dekaden zwischen der Eckfrequenz ω_E und der Abtastgrenze ω_{max} ergeben sich folgende Werte für die zeitdiskrete Nullstelle q_1 :

$$q_1[1] = 0.6420, \quad q_1[2] = 0.9681 \quad q_1[2.9813] = 0.9967 \quad (4.40)$$

Die zugehörigen Bodediagramme sind in Abbildung 4.4 rechts zu finden. Die Nullstelle $q_1[2.9813] = 0.9967$ entspricht der des D -Glieds des Zwei-Massen-Systems bei einer Abtastzeit von $h = 0.00001 \text{ s}$ und repräsentiert eindeutig den Phasenwechsel. Um numerische Probleme bei der Reglerauslegung für $q_1 \rightarrow 1$ zu vermeiden, sollte nach Kapitel 2.3.6.4 vorgegangen werden.

Theorem 4.3: Physikalische Bedeutung der Diskretisierungsnullstellen

Für kleine Abtastzeiten $h \rightarrow 0 \text{ s}$ gilt für System-Nullstellen $q_{j,sys}$ dieselbe Transformationsvorschrift zwischen der ρ - und q -Ebene wie für System-Pole mit folgendem Grenzwert:

$$\lim_{h \rightarrow 0 \text{ s}} q_{j,sys} = e^{\tilde{q}_{j,sys}} = 1, \quad j \in \{1, \dots, \tilde{m}\} \quad (4.41)$$

Der entsprechende Grenzwert der $m_{DNS} = \tilde{r} - 1$ Diskretisierungsnullstellen bestimmt sich aus folgendem Polynom:

$$\lim_{h \rightarrow 0 \text{ s}} B_{DNS}[z] = h^{\tilde{r}} (\tilde{r}!)^{-1} \sum_{j=1}^{\tilde{r}} a_j^{(\tilde{r})} z^{\tilde{r}-j} \quad (4.42)$$

Die berechneten Diskretisierungsnullstellen für $\tilde{r} = 1, \dots, 6$ sind in Gleichung (2.545) aufgelistet. Die Diskretisierungsnullstellen sind stets reell und negativ (Euler-Frobenius-Polynom):

$$B_{DNS}[q] = \prod_{j=1}^{\tilde{r}-1} (q - q_{j,DNS}), \quad q_{j,DNS} \in] - \infty, 0[\quad \text{für } h \rightarrow 0 \text{ s} \quad (4.43)$$

Dieser Wertebereich repräsentiert in der ρ -Ebene Nullstellen mit der höchsten Dynamik bzgl. der gewählten Abtastzeit h :

$$q_{j,DNS} \in] - \infty, 0[\quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} \operatorname{Re}\{\tilde{q}_{j,DNS}\} &\in \mathbb{R} \\ \operatorname{Im}\{\tilde{q}_{j,DNS}\} &= \pm \omega_{max} = \pm \frac{\pi}{h}, \quad \text{für } h \rightarrow 0 \text{ s} \end{aligned} \quad (4.44)$$

Die Diskretisierungsnullstellen $q_{j,DNS}$ besitzen die Frequenz der Abtastgrenze $\omega_{max} = \pi/h$. Wird die Abtastgrenze ω_{max} mit kleinen Abtastzeiten h größer als die schnellste Eckkreisfrequenz ω_E bzw. Kennkreisfrequenz ω_0 eines Systems gewählt, hat die Dynamik der Diskretisierungsnullstellen keine Auswirkung auf die durch das zeitdiskrete Modell zu repräsentierende physikalische Dynamik des Systems.

Folgende Tabelle zeigt den Beitrag der Diskretisierungsnullstellen zum Phasenwinkel mit $\varphi_{DNS}[\omega_E]$ bzw. $\varphi_{DNS}[\omega_0]$ an der Stelle der Eckkreisfrequenz ω_E bzw. Kennkreisfrequenz ω_0 , wenn durch die Wahl der Abtastzeit h ein Abstand von η Dekaden zwischen $\omega_{max} = \pi/h$ und ω_E bzw. ω_0 gewählt wird:

	Diskretisierungsnullstelle $q_{j,DNS}$		
	instabil] $-\infty, -1[$	grenzstabil] $-1]$	stabil] $-1, 0[$
$\omega_{max} - \omega_E/0$	$\varphi_{DNS,instabil}[\omega_E/0]$	$\varphi_{DNS,grenzst.}[\omega_E/0]$	$\varphi_{DNS,stabil}[\omega_E/0]$
1 Dekade	$]0, 9.00^\circ[$	$]9.00^\circ]$	$]9.00^\circ, 18.00^\circ[$
2 Dekaden	$]0, 0.90^\circ[$	$]0.90^\circ]$	$]0.90^\circ, 1.80^\circ[$
3 Dekaden	$]0, 0.09^\circ[$	$]0.09^\circ]$	$]0.09^\circ, 0.18^\circ[$
η Dekaden	$]0, 90^\circ \cdot 10^{-\eta}[$	$]90^\circ \cdot 10^{-\eta}]$	$]90^\circ \cdot 10^{-\eta}, 180^\circ \cdot 10^{-\eta}[$

Eine robuste Abtastzeit h liegt vor, wenn der Abstand $\omega_{max} - \omega_E$ mit $\eta \geq 1$ mindestens 1 Dekade entspricht. Innerhalb dieser Dekade steigt zum einen der Beitrag zum Phasenwinkel durch die Diskretisierungsnullstellen stark an und zum anderen bildet sich der Modellierungsfehler $\Delta\varphi_\epsilon$ aus (siehe Tabelle in Theorem 4.1). Bis zur Eckkreisfrequenz ω_E wird der Phasengang durch das zeitdiskrete Modell gut modelliert; im schlechtesten Fall hat die stabile Diskretisierungsnullstelle einen unerwünschten Beitrag von 18° und die instabile Diskretisierungsnullstelle einen Beitrag von 9° bezogen auf einen zu modellierenden Winkel von 45° an der Eckkreisfrequenz ω_E .

Wird ein Abstand von 2 Dekaden gewählt, kann der Phasenwechsel des zeitkontinuierlichen Systems an der Eckkreisfrequenz ω_E vollständig modelliert werden und es verbleibt nur ein sehr geringer Beitrag der Diskretisierungsnullstellen zur Phase: 0.9° für eine instabile und 1.8° für eine stabile Diskretisierungsnullstelle. Dies entspricht lediglich einem Beitrag von 2% bzw. 4% bezogen auf die zu erreichenden 45° an der Stelle der Eckkreisfrequenz.

Der Beitrag stabiler Diskretisierungsnullstellen zur Phase ist im schlechtesten Fall doppelt so groß wie der instabiler Diskretisierungsnullstellen. Zudem gibt es eine untere Schwelle bei stabilen Diskretisierungsnullstellen, wohingegen der Beitrag instabiler Diskretisierungsnullstellen für $q_{DNS,inst.} \rightarrow -\infty$ gegen Null geht. Der Vorteil der instabilen Diskretisierungsnullstellen hinsichtlich des geringen Beitrags zum Phasenwinkel liegt in der globalen Phasendrehung von nur $\Delta\varphi = 0^\circ$ im Unterschied zur globalen Phasendrehung von $\Delta\varphi = 180^\circ$ bei stabilen Diskretisierungsnullstellen.

Je geringer der Beitrag einer Diskretisierungsnullstelle zum physikalisch relevanten Phasengang ist, desto geringer ist der Modellierungsfehler des zeitdiskreten Modells, wenn Diskretisierungsnullstellen vernachlässigt werden. Daher sollten bei Notwendigkeit bevorzugt instabile Nullstellen vernachlässigt werden, deren Beitrag zum Phasengang gering ist. Zu-

dem ändert das Vernachlässigen einer instabilen Nullstelle nicht die globale Phasendrehung $\Delta\varphi$ der zeitdiskreten Modellierung. Das Vernachlässigen einer stabilen Diskretisierungsnullstelle hingegen ändert die globale Phasendrehung um 180° , was zu einer Vergrößerung des Modellierungsfehlers $\Delta\varphi_\epsilon$ führt.

Es ist zu bemerken, dass der Modellierungsfehler $\Delta\varphi_\epsilon$ mit einer Abweichung bis zu 180° an der Abtastgrenze ω_{max} (siehe Tabelle in Theorem 4.1) den Modellierungsfehler beim Vernachlässigen einer instabilen Diskretisierungsnullstelle im Bereich ω_{max} bis $\omega_{max}-1$ Dekade dominiert. An der Abtastgrenze wird die globale Phasendrehung $\Delta\tilde{\varphi} = -\tilde{r} 90^\circ$ des zeitkontinuierlichen Systems durch eine zeitdiskrete globale Phasendrehung $\Delta\varphi = -(n-m_{stabil}) 180^\circ$ mit einer Rasterung von nur 180° modelliert, was folglich zu einem Modellierungsfehler $\Delta\varphi_\epsilon$ führt (siehe Kapitel 4.1.1). Innerhalb der letzten Dekade vor der Abtastgrenze ω_{max} bildet sich der Modellierungsfehler $\Delta\varphi_\epsilon$ aus. Daher sollte der physikalisch relevante Bereich mit $\omega \in [0, \omega_\chi]$ festgelegt werden, so dass mindestens ein Abstand zwischen Abtastgrenze $\omega_{max} = \pi/h$ und ω_ϵ von $\chi \geq 1$ Dekade besteht. Damit verläuft die Phase $\varphi_{SNS}[\cdot]$ einer System-Nullstelle $q_{j,Sys}$ im Bereich $\omega \in [0, \omega_\chi]$ stets unterhalb folgender Grenze:

$$\varphi_{SNS}[\chi] \leq 90^\circ + \underbrace{90^\circ \cdot 10^{-\chi}}_{\epsilon_{max,B}[\chi]}, \quad \text{für } q_{j,Sys} \in [0, 1], \quad \omega_{max} - \omega_\chi = \chi \text{ Dekaden} \quad (4.45)$$

Der mathematisch begründete Modellierungsfehler $\epsilon_{max,B}[\chi]$ der Zeitdiskretisierung liegt in der selben Größenordnung wie der Fehler beim Vernachlässigen einer instabilen Diskretisierungs-Nullstelle. Wird der Phasenwechsel der zeitkontinuierlichen System-Nullstelle vollständig modelliert, d.h. es bildet sich ein Plateau bei 90° des zeitdiskreten Phasenganges aus, ist der Fehler beim Vernachlässigen einer instabilen Diskretisierungs-Nullstelle kleiner als der Modellierungsfehler, was eine Elimination instabiler Nullstellen begünstigt. Mit größer werdendem Abstand $\chi = \eta$ nimmt der maximal mögliche Fehler gleichermaßen exponentiell ab.

Um das zeitkontinuierliche System mit vollständigem Phasenwechsel an den Eckfrequenzen/Eigenfrequenzen eindeutig zu modellieren, den Modellierungsfehler $\epsilon_{max,B}[\cdot]$ zu minimieren und zudem instabile Nullstellen ohne Auswirkung auf das physikalische Verhalten des Modells streichen zu können, ist eine robuste Abtastgrenze ω_{max} mit einem Abstand von mindestens $\eta = 2$ Dekaden zur größten Eckfrequenz/Eigenfrequenz des Systems zu wählen. Bei einem $\eta > 2$ ist zu bedenken, dass wegen $p_i \rightarrow 1$ und $q_j \rightarrow 1$ auftretende numerische Probleme bei der Reglerauslegung nur mit Beachtung des Kapitels 2.3.6.4 gelöst werden können.

Diskretisierungsnullstellen besitzen bei der Wahl einer robusten Abtastzeit keine physikalische Bedeutung und können ohne Beeinflussung der physikalischen Eigenschaft des Modells vernachlässigt werden.

4.2 Vernachlässigung von Diskretisierungsnullstellen bei der Reglerauslegung

Nachdem gemäß Theorem 3.3 in Kapitel 3.4.3 sowie Theorem 3.2 in Kapitel 3.4.2 das zeitdiskrete Modell eines Zwei-Massen-Systems mit und ohne Berücksichtigung des Mo-

mentenregelkreises bei der Wahl einer robusten Abtastzeit stets instabile Diskretisierungsnullstellen besitzt, muss für die Anwendung eines inversen Reglers (siehe Kapitel 2.3.6.3) die Dynamik des Nullstellenpolynoms bzw. Teile davon vernachlässigt werden. Ziel ist es, nur die Dynamik zu vernachlässigen, welche keine Auswirkung auf die Repräsentation des physikalischen Verhaltens durch das zeitdiskrete Modell hat und somit der auf dem zeitdiskreten Modell basierende Regler das reale System vollständig beeinflussen kann. Im Folgenden sollen die im vorigen Kapitel 4.1 diskutierten Methoden am Beispiel des Zwei-Massen-Systems (Kapitel 3.3.2) untersucht werden. Die Erläuterungen basieren auf den Theoremen 4.1, 4.2 und 4.3.

Die Abbildung 4.5 zeigt das Bodediagramm des zeitkontinuierlichen und zeitdiskreten Zwei-

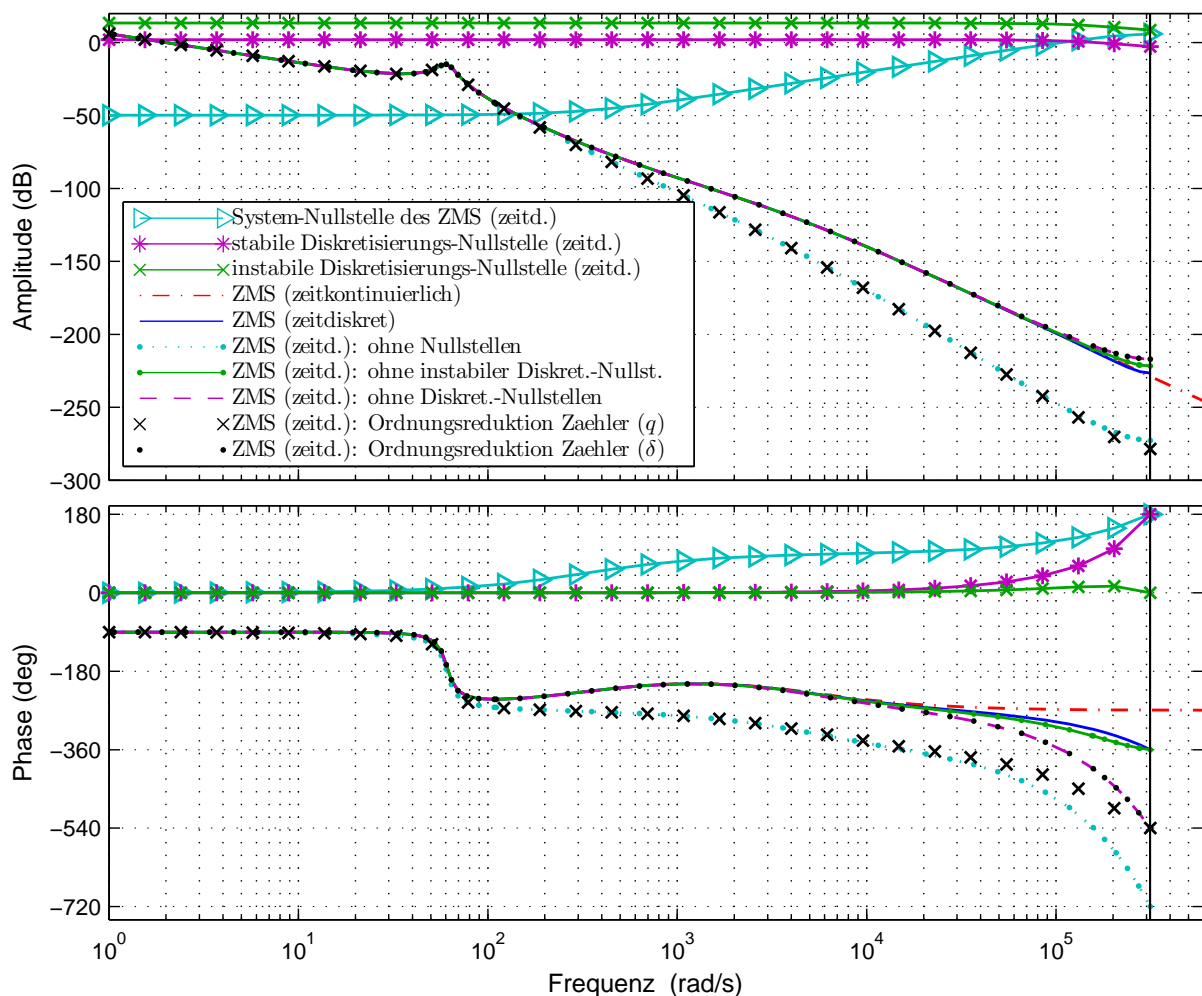


Abbildung 4.5: Bode-Diagramm des mit $h = 0.00001$ s zeitdiskretisierten schwach gedämpften ($D = 0.09$) Zwei-Massen-Systems mit Berücksichtigung des Momentenregelkreises ($n_{ZMS} = 4$); es wird der Phasen- und Amplituden-Verlauf des Zwei-Massen-Systems mit und ohne Diskretisierungs-Nullstellen (stabil/instabil) bzw. System-Nullstellen sowie bei einer Ordnungsreduktion des Zählers dargestellt

Massen-Systems mit Berücksichtigung des Momentenregelkreises ($\tilde{n} = 4$). Es wurde eine robuste Abtastzeit mit $h = 0.00001$ s gewählt. Mit einem Relativgrad von $\tilde{r} = 3$ ergibt

sich gemäß Theorem 4.1 eine globale Phasendrehung des zeitkontinuierlichen Systems von $\Delta\tilde{\varphi} = -270^\circ$. Modelliert wird dies durch ein zeitdiskretes Modell mit einem globalen Phasenwinkel von $\Delta\varphi = -360^\circ$, woraus sich ein Modellierungsfehler $\Delta\varphi_\epsilon = 90^\circ$ ergibt. Diese entstehende Abweichung in der letzten Dekade vor der Abtastgrenze $\omega_{max} = \pi/h = 3.1 \cdot 10^5 \text{ rad/s}$ ist in Abbildung 4.5 gut zu erkennen.

Wie in Kapitel 3.3.2 und 3.4 beschrieben, findet auf Grund des integralen Verhaltens ein Phasensprung auf -90° bei $\omega = 0 \text{ rad/s}$ statt gefolgt von einer Phasenabsenkung um -180° an der Stelle der Kennkreisfrequenz $\omega_{0,ZMS} = 60.84 \text{ rad/s}$ als physikalische Eigenschaft des Feder-Dämpfer-Systems. Die Eigenschaft des Dämpfers zeigt sich zudem in einer Anhebung der Phase um 90° bei der Eckkreisfrequenz $\omega_{E,ZMS} = 328 \text{ rad/s}$. Der schnelle Momentenregelkreis führt im hochfrequenten Bereich bei $\omega_{E,ers} = 5000 \text{ rad/s}$ zu einer weiteren Phasenabsenkung von -90° . In Summe ergibt sich die globale Phasenabsenkung von $\Delta\tilde{\varphi} = -270^\circ$. Mit einem Abstand von annähernd zwei Dekaden zwischen der höchsten Systemfrequenz, der Eckkreisfrequenz $\omega_{E,ers}$, und der Abtastgrenze $\omega_{max} = 3.2 \cdot 10^5 \text{ rad/s}$ liegt eine robuste Abtastung des Gesamtsystems vor.

Wie dargestellt, gibt es eine System-Nullstelle ($m = 1$), welche für eine Phasenhebung um 90° bei $\omega_{E,ZMS} = 328 \text{ rad/s}$ verantwortlich ist. Entsprechend der Tabelle in Theorem 4.1 resultieren mit einer Systemordnung von $n = 4$ zwei Diskretisierungs-Nullstellen, wobei eine Diskretisierungs-Nullstelle instabil sein muss. Den Verlauf der System-Nullstelle sowie der stabilen und instabilen Diskretisierungs-Nullstelle zeigt Abbildung 4.5. Wie mit Abbildung 4.4 beschrieben, repräsentiert die zeitdiskrete System-Nullstelle das Verhalten einer zeitkontinuierlichen reellen System-Nullstelle mit einem um die Eckfrequenz symmetrischen Phasenwechsel von 0° auf 90° . Der durch die Diskretisierungsmethode mathematisch bedingte Phasenanstieg von 90° auf 180° wirkt sich in der letzten Dekade vor der Abtastgrenze ω_{max} aus und entspricht dem Modellierungsfehler $\Delta\varphi_\epsilon = -90^\circ$ der System-Nullstelle an der Abtastgrenze ω_{max} . 1 Dekade vor der Abtastgrenze ist der Modellierungsfehler der System-Nullstelle nur noch $\varphi_{\epsilon,SNs}[\chi = 1] = 3.78^\circ \leq 9^\circ$ (siehe Tabelle in Theorem 4.3) und fällt weiter für $\omega \rightarrow 0 \text{ rad/s}$. Die stabile Diskretisierungs-Nullstelle hat über einen großen Bereich einen Phasenverlauf von annähernd Null, bevor ebenfalls in der letzten Dekade vor der Abtastgrenze ω_{max} der Wert auf 180° ansteigt. 1 bzw. 2 Dekaden vor der Abtastgrenze liegt der Phasenwert nur bei $\varphi_{DNS,stabil}[\eta = 1] = 14.22^\circ \leq 18^\circ$ bzw. $\varphi_{DNS,stabil}[\eta = 2] = 1.42^\circ \leq 1.8^\circ$ (siehe Tabelle in Theorem 4.3). Die stabile Diskretisierungs-Nullstelle hat bei einer robusten Abtastung keinen Beitrag zum physikalischen Verhalten des Systems, sie dient dem Anpassen der globalen Phasendrehung. $\Delta\tilde{\varphi} = -270^\circ$ muss durch das zeitdiskrete System mit einem Vielfachen von -180° repräsentiert werden, d.h. es muss ein globaler zeitdiskreter Phasenwinkel von $\Delta\varphi = -360^\circ$ erreicht werden. Nachdem der Nenner mit $\tilde{n} = 4$ zu einer globalen Phasenabsenkung von -720° führt, sind zwei stabile Nullstellen mit jeweils einer Phasenhebung von 180° notwendig. Neben der System-Nullstelle wird daher eine stabile Diskretisierungs-Nullstelle benötigt, die lediglich der Anhebung der globalen Phasendrehung dient. Die dritte Nullstelle darf keinen Beitrag mehr zur globalen Phasendrehung leisten, weshalb diese instabil mit einer globalen Phasendrehung von 0° sein muss. Das beschriebene Verhalten der Diskretisierungs-Nullstellen bestätigt Abbildung 4.5. Die instabile Nullstelle ist über den gesamten Phasenverlauf annähernd Null. Nur in der letzten Dekade vor der Abtastgrenze ω_{max} ist das Maximum zu erkennen. 1 bzw. 2 Dekaden vor der Abtastgrenze liegt der Phasenwert nur bei $\varphi_{DNS,instabil}[\eta = 1] = 3.78^\circ \leq 9^\circ$ bzw.

$\varphi_{DNS,instabil}[\eta = 2] = 0.378^\circ \leq 0.9^\circ$ (siehe Tabelle in Theorem 4.3).

Die instabilen Diskretisierungs-Nullstellen können somit ohne Auswirkung auf das physikalische Verhalten des Modells vernachlässigt werden. Dies bestätigt der entsprechende Phasenverlauf des Systems in Abbildung 4.5 ohne instabile Diskretisierungs-Nullstellen, bei dem die globale Phasendrehung erhalten bleibt und nur eine kleine Abweichung in der letzten Dekade vor der Abtastgrenze ω_{max} zu erkennen ist. Werden neben der instabilen auch die stabilen Diskretisierungs-Nullstellen vernachlässigt, ist die Auswirkung auf die größte Eckkreisfrequenz $\omega_{E,ers}$ wegen des Abstands von 2 Dekaden zur Abtastgrenze ω_{max} gering. Nur innerhalb der letzten beiden Dekaden vor der Abtastgrenze zeigt sich eine große Abweichung, die mit der Änderung des globalen Phasenwinkels um -90° einhergeht. Ob alle Diskretisierungs-Nullstellen direkt im q -Modell gestrichen werden (vgl. Theorem 4.3) oder die Diskretisierungs-Parameter des Zählerpolynoms über das δ -Modell mit einer Ordnungsreduktion eliminiert werden (vgl. Theorem 4.2), ergibt für kleine Abtastzeiten dasselbe Verhalten des Systems, wie dies Abbildung 4.5 zeigt. Eine Ordnungsreduktion direkt im q -Bereich ist jedoch fatal, da keine Trennung zwischen System- und Diskretisierungs-Parametern möglich ist. Wie es in Abbildung 4.5 zu erkennen ist, wurde mit dem Streichen der Parameter der höchsten Ordnungen auch Systemverhalten eliminiert – die Dynamik der System-Nullstelle bei der Frequenz $\omega_{E,ZMS}$ ist nicht mehr vorhanden. Das Vernachlässigen der vollständigen Nullstellendynamik des zeitdiskreten Modells stellt die ungeeignetste Lösung dar, mit dem Problem der instabilen Nullstellen umzugehen. Damit liegt zum einen die bereits erwähnte große globale Phasenabsenkung durch die Polstellen mit jeweils -180° vor, was zu einer globalen Phasendrehung von -720° führt. Zum anderen fehlt in der Modellierung die Dynamik der System-Nullstelle. Das Verhalten des realen zeitkontinuierlichen Systems kann daher trotz Anwendbarkeit eines inversen Reglers, der auf diesem Modell basiert, nicht beliebig beeinflusst werden.

Die zugehörige Sprungantwort des Zwei-Massen-Systems, welche das vollständige Frequenzband anregt, zeigt Abbildung 4.6. Links liegt eine globale Betrachtung vor, bei der die Schwingung des Zwei-Massen-Systems zu erkennen ist. Nachdem die Pole bei einer robusten Abtastung unberührt von einer Vernachlässigung von Nullstellen sind, zeigt sich das integrale sowie das schwingende Verhalten des Zwei-Massen-Systems für alle vorgestellten Modellversionen. Das Fehlen der beschleunigenden Wirkung der System-Nullstelle ist jedoch bereits in der globalen Betrachtung zu erkennen, wenn die nicht zielführende Ordnungsreduktion direkt im q -Bereich oder das Vernachlässigen der vollständigen Dynamik des Zählerpolynoms angewandt wird. Es ist eine Verzögerung in der Sprungantwort der beiden Modellversionen zu erkennen. In Abbildung 4.6 rechts zeigt ein Detailausschnitt, bei dem die Abtastschritte zu erkennen sind, die Unterschiede aller Modellvarianten gemäß des Bodediagramms 4.5. Die zeitdiskrete Sprungantwort verläuft bei jedem Abtastpunkt exakt auf der zeitkontinuierlichen Sprungantwort. Die Vernachlässigung der instabilen Nullstelle zeigt auf Grund des kleinen Fehlers $\varphi_{DNS,inst.}[\omega_{E,ers}] = 0.378^\circ < 0.9^\circ$, $\varphi_{DNS,inst.}[\omega_{E,ZMS}] = 0.0378^\circ < 0.09^\circ$ bzw. $\varphi_{DNS,inst.}[\omega_{0,ZMS}] = 0.00378^\circ < 0.009^\circ$ bei der Eckkreisfrequenz $\omega_{E,ers}$, $\omega_{E,ZMS}$ bzw. Kennkreisfrequenz $\omega_{0,ZMS}$, welche ca. 2, 3 bzw. ca. 4 Dekaden von der Abtastgrenze entfernt sind, nur einen sehr kleinen Fehler. Der Fehler wird ca. 4 Mal so groß, wenn auch die stabilen Diskretisierungs-Nullstellen vernachlässigt werden. Dies ist auf den größeren Fehler von $\varphi_{DNS,stabil}[\omega_{E,ers}] = 1.42^\circ < 1.8^\circ$, $\varphi_{DNS,stabil}[\omega_{E,ZMS}] = 0.142^\circ < 0.18^\circ$ bzw. $\varphi_{DNS,stabil}[\omega_{0,ZMS}] = 0.0142^\circ < 0.018^\circ$ zurückzuführen, der bei der Eckkreisfrequenz

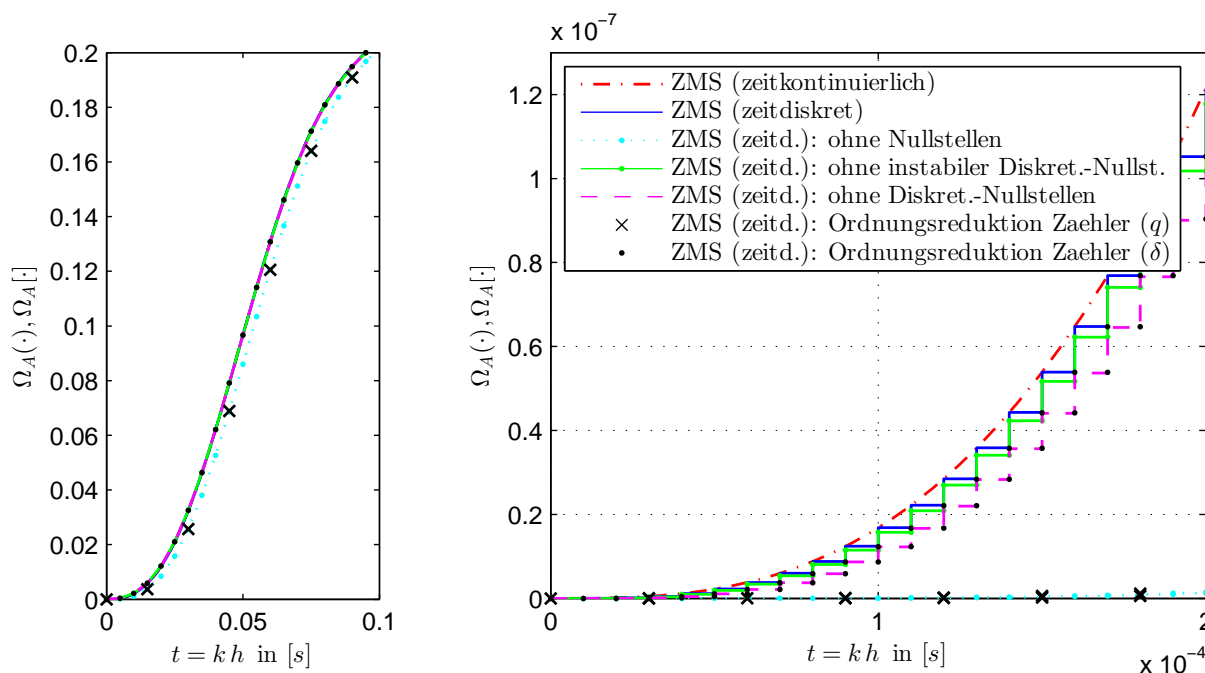


Abbildung 4.6: Sprungantwort des mit $h = 0.00001$ s zeitdiskretisierten schwach gedämpften ($D = 0.09$) Zwei-Massen-Systems mit Berücksichtigung des Momentenregelkreises ($n_{ZMS} = 4$); es wird die Sprungantwort des Zwei-Massen-Systems mit und ohne Diskretisierungs-Nullstellen (stabil/instabil) bzw. System-Nullstellen sowie bei einer Ordnungsreduktion des Zählers dargestellt

$\omega_{E,ers}$ mit ca. 2 Dekaden, bei der Eckkreisfrequenz $\omega_{E,ZMS}$ mit 3 Dekaden und bei der Kennkreisfrequenz $\omega_{0,ZMS}$ mit ca. 4 Dekaden Abstand von der Abtastgrenze auftritt. Wie bereits im Bodediagramm zu erkennen war, führt die Ordnungsreduktion im δ -Modell bei kleiner Abtastzeit zum gleichen Verhalten wie das Vernachlässigen aller Diskretisierungsnullstellen. Der sehr große Fehler beim Anwenden der Ordnungsreduktion direkt im q -Bereich bzw. beim Vernachlässigen der kompletten Nullstellendynamik ist in der Detailansicht im Zeitbereich nochmals stark veranschaulicht.

Theorem 4.4: Vernachlässigung von Diskretisierungsnullstellen

Basiert ein inverser Regler auf einem zeitdiskreten Modell (ZOH-Methode) eines minimalphasigen zeitkontinuierlichen Systems mit einer Ordnung $\tilde{r} \geq 3$, so muss instabiles Verhalten durch Vernachlässigen der instabilen Diskretisierungs-Nullstellen im Modell bzw. bei der Pol-Nullstellenkürzung (Erhalt der instabilen Diskretisierungsnullstellen im Systemverhalten) verhindert werden.

Auf Grund des geringen Modellierungsfehlers beim Vernachlässigen der Diskretisierungs-Nullstellen ist dieses Vorgehen der Vernachlässigung aller Diskretisierungs-Nullstellen bzw. einer Ordnungsreduktion im δ -Bereich nach [56, 91, 119] vorzuziehen. Eine Ordnungsreduktion im δ -Bereich ist trotz des größeren Fehlers dann geeignet, wenn lediglich das Zählerpolynom vorliegt und eine Nullstellen-Bestimmung nicht möglich ist.

Von einer Ordnungsreduktion im q -Bereich sowie einer vollständigen Vernachlässigung der Zählerdynamik ist abzusehen, wenn eine hoch dynamische Regelung mit vollständiger Beeinflussung des realen Systems gewünscht ist.

Zum stabilen Anwenden eines schnellen zeitdiskreten Referenzmodell-Reglers aus Theorem 2.41 bzw. eines schnellen erweiterten Referenzmodell-Reglers aus Theorem 2.42 ist alleinig die Vernachlässigung der instabilen Nullstellen im Modell bzw. bei der Pol-Nullstellenkürzung zielführend. Das physikalische Verhalten wird bei robuster Abtastung hierdurch nicht beeinflusst und eine beliebige Kontrolle über ein System ermöglicht.

Abschließend ist in Abbildung 4.7 das Bodediagramm für ein Zwei-Masse-System ohne Berücksichtigung des Momentenregelkreises gemäß Kapitel 3.4.1 dargestellt ($\tilde{n} = 3$). Ohne

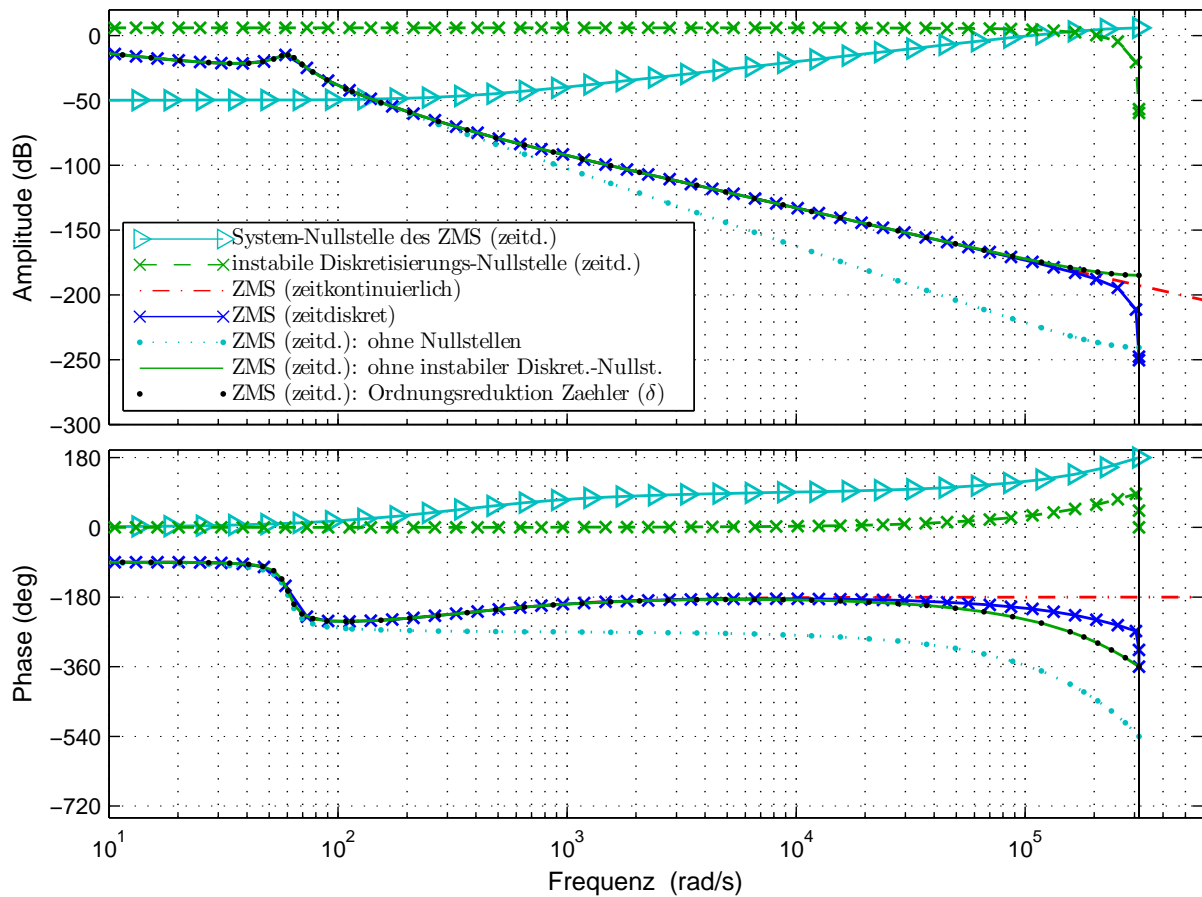


Abbildung 4.7: Bode-Diagramm des mit $h = 0.00001$ s zeitdiskretisierten schwach gedämpften ($D = 0.09$) Zwei-Massen-Systems ohne Berücksichtigung des Momentenregelkreises ($n_{ZMS} = 3$); es wird der Phasen- und Amplituden-Verlauf des Zwei-Massen-Systems mit und ohne Diskretisierungs-Nullstelle (instabil) bzw. System-Nullstellen sowie bei einer Ordnungsreduktion des Zählers dargestellt

Phasenabsenkung um -90° bei $\omega_{E,ers}$ beträgt die globale Phasendrehung nur $\Delta\tilde{\varphi} = -180^\circ$. Nachdem sich der Phasengang jedoch von betragsmäßig größeren Werten als 180° annähert, ist die zeitdiskrete globale Phasendrehung weiterhin $\Delta\varphi = -360^\circ$. Der Modellierungsfehler

mit $\Delta\varphi_\epsilon = 180^\circ$ ist somit größer als der für das Zwei-Massen-System mit Berücksichtigung des Momentenregelkreises (siehe Abbildung 4.5).

Für $h \rightarrow 0$ s entsteht laut Gleichung (2.545) zwar keine instabile, sondern nur eine grenzstabile Diskretisierungs-Nullstelle, jedoch nähert sich diese für $h \rightarrow 0$ s aus dem instabilen Bereich kommend an den grenzstabilen Wert an. Der Verlauf der Nullstellen ist in Abbildung 3.14 links dargestellt. Für alle kleinen Abtastzeiten $h \neq 0$ entsteht daher gemäß der Tabelle in Theorem 4.1 bei einem Relativgrad $\tilde{r} = 2$ eine instabile Diskretisierungs-Nullstelle, keine stabile Diskretisierungs-Nullstelle und eine stabile System-Nullstelle. Nachdem es sich bei der instabilen Diskretisierungs-Nullstelle annähernd um eine grenzstabile Nullstelle handelt, ist der Phasenbeitrag gemäß der Tabelle in Theorem 4.3 bei 1 bzw. 2 Dekaden Abstand von der Abtastgrenze mit $\varphi_{DNS,inst.}[\eta = 1] \approx 9^\circ$ bzw. $\varphi_{DNS,inst.}[\eta = 2] \approx 0.9^\circ$ der größtmögliche für eine instabile Nullstelle. Da mit der gewählten Abtastzeit von $h = 0.00001$ s zur schnellsten Systemkreisfrequenz $\omega_{E,ZMS}$ ein Abstand von 3 Dekaden vorliegt, reduziert sich der Phasen-Beitrag der instabilen Nullstelle an der Eckkreisfrequenz $\omega_{E,ZMS}$ auf einen kleinen Wert $\varphi_{DNS,inst.}[\eta = 3] \approx 0.09^\circ$.

Nachdem es nur eine Diskretisierungsnullstelle gibt, führt die Vernachlässigung der instabilen Diskretisierungs-Nullstelle auf das gleiche Ergebnis wie die Ordnungsreduktion im δ -Bereich. Weil die Vernachlässigung in beiden Fällen nur eine instabile Nullstelle betrifft, findet durch die Ordnungsreduktion keine Änderung der globalen Phasendrehung des zeitdiskreten Modells statt. Die Vernachlässigung der kompletten Nullstellendynamik führt im Unterschied zu obigen Methoden zu einer großen Abweichung im physikalisch relevanten Bereich; die Phasenhebung durch die System-Nullstelle liegt nicht mehr vor.

Da die Dynamik des Momentenregelkreises nicht berücksichtigt wird und somit die höchste Kreisfrequenz $\omega_{E,ZMS}$ ist, könnte der Abstand zwischen $\omega_{E,ZMS}$ und ω_{max} durch Wahl einer größeren robusten Abtastzeit h von 3 auf 2 Dekaden reduziert werden. Dann kann der Momentenregelkreis durch den übergeordneten Regler nicht mehr beeinflusst bzw. beschleunigt werden, was bei einem Umrichter auf Grund der bereits sehr hohen Taktzeit nicht zwingend notwendig ist.

Wird eine zu große Abtastzeit bzgl. des Gesamtsystems gewählt, so können die hohen Frequenzen nicht mehr abgetastet und rekonstruiert werden, d.h. die abgetasteten hohen Frequenzen erscheinen als Rauschen und man spricht von einer *Untermodellierung*. Um dies zu verhindern, muss das Signal mit einem Tiefpass gefiltert werden, bevor es abgetastet wird. So erreichen nur die Signale den digitalen Regler, die auch rekonstruiert werden können, d.h. der Regler kann richtig auf die tiefen Frequenzen reagieren und wird nicht durch ein Rauschsignal gestört – die hohen Frequenzen des Systems bleiben, wie gewünscht, unausgeregelt und der Regler „sieht“ kein Rauschsignal einer Unterabtastung, auf welches er ohne Filterung reagieren würde. Mit einer Filterung kann somit einer Untermodellierung begegnet werden. Bei der Verwendung eines Referenzmodellreglers (siehe Theorem 2.42) kann über die Wahl der Beobachterpole $A_{Bco}^*[\cdot]$ gemäß der Gleichung (2.257) bzw. des Kapitels 2.2.6.3/2.2.6.2 eine Filterung realisiert werden.

Im folgenden Kapitel wird ein zeitdiskreter inverser Regler auf das Zwei-Massen-System angewandt.

4.3 Anpassung eines inversen Reglers bei instabilen Diskretisierungsnullstellen

4.3.1 Referenzmodellregler

Der Referenzmodellregler mit internen Modellen und freier Polverschiebbarkeit aus Theorem 2.41 (siehe Kapitel 2.3.6.3 bzw. 2.2.6.8) ist gemäß Theorem 4.4 nur anwendbar, wenn die instabilen Diskretisierungs-Nullstellen (siehe Theorem 4.1) nicht durch den Regler eliminiert werden. Das zu regelnde Gesamtsystem $B_{IM}(\cdot)/A_{IM}(\cdot)$ sowie das entsprechende zeitdiskrete Modell $B_{IM}[\cdot]/A_{IM}[\cdot]$, bestehend aus der Strecke $B[\cdot]/A[\cdot]$ und den vor- und nachgeschalteten internen Modellen $B_{SM1}[\cdot]/A_{SM1}[\cdot]$ bzw. $1/A_{SM2}[\cdot]$, lauten:

$$\frac{B_{IM}(\rho)}{A_{IM}(\rho)} = \frac{B(\rho) B_{SM1}(\rho)}{A(\rho) A_{SM1}(\rho) A_{SM2}(\rho)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{B_{IM}[q]}{A_{IM}[q]} = \frac{B[q] B_{SM1}[q]}{A_{IM}[q] A_{SM1}[q] A_{SM2}[q]} \quad (4.46)$$

Das Zählerpolynom $B_{IM}[\cdot]$ lässt sich nach der Zeitdiskretisierung mit der ZOH-Methode in Polynome mit stabilen und instabilen Diskretisierungs-Nullstellen sowie System-Nullstellen aufteilen:

$$\frac{B_{IM}[q]}{A_{IM}[q]} = \frac{B_{Sys}[q] B_{DNS, stabil}[q] B_{DNS, instabil}[q] B_{SM1}[q]}{A_{IM}[q]} \quad (4.47)$$

Werden die $m_{DNS, instabil}$ instabilen Nullstellen (siehe Tabelle des Theorems 4.1) des Polynoms $B_{DNS, instabil}[\cdot]$ bei der Polplatzierung mit dem Wunschpolynom

$$A_{RegIM}^*[q] = A_{RegIM, red}^*[q] B_{Sys}[q] B_{DNS, stabil}[q], \quad n_{RegIM, red}^* = n_{RegIM}^* - m_{Sys} - m_{DNS, stabil} \quad (4.48)$$

nicht berücksichtigt, ergibt sich gemäß der Gleichung (2.568) folgendes Referenzmodell $R[\cdot]$ des Reglers:

$$\frac{y^*[k]}{r[k]} = R[q] = k_{SM2} \frac{B_{DNS, instabil}[q]}{A_{RegIM, red}^*[q]} \quad (4.49)$$

Nachdem gemäß Theorem 4.3 instabile Diskretisierungs-Nullstellen und somit das Polynom $B_{DNS, instabil}$ bei einer robusten Abtastung keine physikalisch relevante Auswirkung auf das Systemverhalten haben, kann die Systemdynamik trotz nicht eliminiertes instabiler Diskretisierungs-Nullstellen mit Vorgabe eines Wunschpolynoms $A_{RegIM}^*[\cdot]$ beliebig beeinflusst werden. Die Dynamik der System-Nullstellen und die der stabilen Diskretisierungs-Nullstellen lässt sich vollständig eliminieren. Die Dynamik der verbleibenden Polstellen ist mit $A_{RegIM, red}^*[\cdot]$ beliebig zu verändern. Eine vollständige Nullstellenkompensation zum beliebigen Beeinflussen der Strecke ist nicht notwendig. Nachdem die instabilen Diskretisierungsnullstellen nicht vernachlässigt werden, sondern lediglich keine Auswirkung auf das Systemverhalten zeigen, besteht keine Gefahr der Instabilität wegen eines Modellierungsfehlers durch Vernachlässigung. Da nur stabile Diskretisierungs-Nullstellen und System-Nullstellen und nicht die instabilen Diskretisierungs-Nullstellen eine Pol-Nullstellenkürzung erfahren, findet analog des zeitkontinuierlichen Reglers durch den Regler keine Änderung der globalen Phasendrehung $\Delta\varphi$ statt (siehe Theorem 2.38).

Theorem 4.5:

Ein zeitdiskreter Referenzmodellregler mit freier Polverschiebbarkeit (siehe Theorem 2.41)

mit dem Ziel, das Pol- und Nullstellenverhalten einer zeitkontinuierlichen minimalphasigen Strecke vollständig zu beeinflussen, zeigt bei einer robusten Abtastung dasselbe Ergebnis in Stabilität und Performance wie seine zeitkontinuierliche Realisierung (siehe Theorem 2.27), wenn die instabilen Diskretisierungs-Nullstellen nicht durch den Regler eliminiert werden und im Systemverhalten erhalten bleiben. Diese repräsentieren keine Eigenschaft der zeitkontinuierlichen Strecke.

Da die instabilen Diskretisierungs-Nullstellen bei der Reglerauslegung nicht vernachlässigt werden, besteht selbst bei einer unrobusten Wahl der Abtastzeit keine Gefährdung der Stabilität des zeitdiskreten Regelkreises auf Grund einer Untermodellierung. Es ergibt sich dann jedoch ein Einfluss der instabilen Diskretisierungs-Nullstellen gemäß Gleichung (4.49) auf das Referenzmodell, da diese bei einer unrobusten Abtastzeit auch Streckenverhalten repräsentieren können.

4.3.2 Erweiterter Referenzmodellregler

Der erweiterte Referenzmodellregler aus Theorem 2.42 (siehe Kapitel 2.3.6.3 bzw. 2.2.6.8) mit der vereinfachten Reglerpolynom-Berechnung (2.590) ist nur anwendbar, wenn keine instabilen Nullstellen vorliegen und somit alle Nullstellen eliminiert werden können. Sobald instabile Diskretisierungs-Nullstellen bei minimalphasigen zeitkontinuierlichen Systemen mit einer Ordnung $\tilde{r} \geq 3$ auftreten (siehe Theorem 4.3), ist diese Voraussetzung nicht mehr gegeben, womit eine Lösung nur durch eine Vernachlässigung der instabilen Nullstellen im Modell erreicht werden kann. Wird für die Reglerauslegung jedoch ein Systemmodell verwendet, bei dem physikalisch dominante Nullstellen vernachlässigt werden, kann der geschlossene Regelkreis zur Instabilität führen. Nachdem gemäß Theorem 4.3 instabile Diskretisierungs-Nullstellen bei robuster Abtastung kein Streckenverhalten repräsentieren, dürfen die instabilen Diskretisierungs-Nullstellen zur Auslegung des erweiterten Referenzmodellreglers im Streckenmodell vernachlässigt werden, ohne dass hierbei die Stabilität gefährdet wird.

Durch die Vernachlässigung instabiler Diskretisierungs-Nullstellen erhöht sich der Relativgrad des Modells, was eine Erhöhung der Totzeit um $\Delta t_T = m_{DNS,instabil} h$ bedeutet (siehe Kapitel 2.3.6.1). Bei einer robusten, d.h. ausreichend schnellen Abtastung bzgl. der Systemdynamik zeigt die Vergrößerung der Totzeit jedoch keine Auswirkung auf die Stabilität des Regelkreises. Eine Vernachlässigung instabiler Diskretisierungs-Nullstellen hat gemäß Theorem 2.38 des Weiteren keine Auswirkung auf die globale Phasendrehung $\Delta\varphi$.

Das Gesamtsystem (4.47) mit vernachlässigten Diskretisierungs-Nullstellen ($B_{DNS,instabil}[\cdot]$) lautet:

$$\frac{B'_{IM}[q]}{A_{IM}[q]} = \frac{B_{Sys}[q] B_{DNS,stab}[q] B_{SM1}[q]}{A_{IM}[q]} \quad (4.50)$$

Auf dieses Ersatz-Streckenmodell lässt sich der erweiterte Referenzmodellregler aus Theorem 2.42 nun anwenden, womit sich die geregelte Strecke trotz Vernachlässigung der instabilen Diskretisierungsnullstellen entsprechend des Referenzmodells (2.587) verhält:

$$\frac{y^*[k]}{r[k]} = R[q] = k_{SM2} \frac{B_i^*[q]}{A_i^*[q] A_{RegIM,red}^*[q]}, \quad n_{RegIM,red}^* = r_{IM} + m_{DNS,instabil} \quad (4.51)$$

Das durch die zeitkontinuierliche Nullstellendynamik repräsentierte Verhalten kann folglich auch in der zeitdiskreten Darstellung vollständig eliminiert werden, nachdem die vernachlässigte Dynamik der instabilen Diskretisierungs-Nullstellen im physikalisch relevanten Bereich keinen Einfluss hat. Durch das Einbringen beliebiger Nullstellen $B_i[\cdot]$ und Polstellen $A_i[\cdot]$ sowie $A_{RegIM,red}^*[\cdot]$ lässt sich ein gewünschtes Einschwingverhalten des geregelten Systems vorgeben.

Anmerkung 4.1:

Entsprechend des Kapitels 2.2.6.3 wurde deutlich (Beispielsystem (2.82) mit Auskoppelvektor \bar{c}_1), dass eine nicht kompensierte Nullstellendynamik das Systemverhalten stark beeinflussen kann, womit eine alleinige Polvorgabe ohne Kompensation der Nullstellen das Einschwingverhalten zwar stabilisieren aber nicht ausreichend beruhigen kann.

Auf Grund der einfacheren Reglerparameterberechnung ist der erweiterte Referenzmodellregler (siehe Theorem 2.42) bei robuster Abtastung dem Referenzmodellregler (siehe Theorem 2.41) vorzuziehen, wenn wegen numerischer Probleme das Lösen der Diophantinen Gleichung problematisch wird. Obwohl nach Theorem 2.21 stets eine eindeutige Lösung für die Diophantine Gleichung existiert, kann die endliche Prozessorwortbreite bei der Berechnung zu einer annähernd singulären Matrix \tilde{M}'_S führen. Ein Invertieren der Matrix \tilde{M}'_S zum Lösen der Diophantinen Gleichung führt in diesem Fall zu ungenauen Reglerparametern, die Instabilität des Regelkreises zur Folge haben können.

Theorem 4.6:

Ein zeitdiskreter erweiterter Referenzmodellregler (siehe Theorem 2.42) mit dem Ziel, das Pol- und Nullstellenverhalten einer zeitkontinuierlichen minimalphasigen Strecke vollständig zu beeinflussen, zeigt bei einer robusten Abtastung dasselbe Ergebnis in Stabilität und Performance, wie seine zeitkontinuierliche Realisierung (siehe Theorem 2.27), wenn die instabilen Diskretisierungs-Nullstellen bei der zeitdiskreten Modellierung des zeitkontinuierlichen Systems vernachlässigt werden. Diese repräsentieren bei einer robusten Abtastung zum einen keine Eigenschaft des zeitkontinuierlichen Systems und zum anderen ist die größere Totzeit im Modell auf Grund der Vernachlässigung (Erhöhung des Relativgrades) bzgl. der zu modellierenden Systemdynamik unwesentlich.

Da die instabilen Diskretisierungs-Nullstellen bei der Reglerauslegung vernachlässigt werden, muss eine robuste Abtastzeit gewählt werden (siehe Theorem 4.3), um keine Gefährdung der Stabilität des zeitdiskreten Regelkreises auf Grund einer Untermodellierung zu erhalten.

4.3.3 Anwendung des erweiterten Referenzmodellreglers auf ein Zwei-Massen-System

Auf das Zwei-Massen-System (3.38) mit dem Bodediagramm 4.5 wird der erweiterte Referenzmodellregler aus Theorem 2.42 unter Berücksichtigung des Theorems 4.6 angewandt. Der Momentenregelkreis des Systems wird berücksichtigt, so dass eine Ordnung $\tilde{n} = n = 4$ und ein Relativgrad $\tilde{r} = 3$ des zeitkontinuierlichen und $r = 1$ des zeitdiskreten

Modells vorliegen. Es wird eine robuste Abtastzeit von $h = 0.00001$ s gewählt.

Mit Hilfe des internen Modells

$$\frac{B_{SM1}(\rho)}{A_{SM1}(\rho)} = \frac{1}{\rho} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{B_{SM1}[q]}{A_{SM1}[q]} = \frac{1}{q-1}$$

und

$$\frac{B_{SM2}(\rho)}{A_{SM2}(\rho)} = \frac{1}{\rho^2 + 25} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{B_{SM2}[q]}{A_{SM2}[q]} = 5 \cdot 10^{-11} \frac{q+1}{q^2 - 2q + 1}, \quad \underline{x}_0 = (0 \ 50)^T$$

kann eine konstante und eine sinusförmige Störung (5 rad/s) kompensiert werden (siehe Kapitel 2.2.6.4).

Das zeitdiskrete Gesamtsystem, bestehend aus der Serienschaltung von zeitdiskretisiertem Zwei-Massen-System und den zeitdiskreten internen Modellen, besitzt eine Ordnung $n_{IM} = 7$ und einen Relativgrad $r_{IM} = 3$. Gemäß Theorem 4.1 entstehen $m_{DNS, stabil} = 2$ stabile und $m_{DNS, instabil} = 1$ instabile Diskretisierungs-Nullstellen sowie $m_{Sys} = 1$ System-Nullstellen. Mit dem Vernachlässigen der instabilen Diskretisierungs-Nullstelle gemäß Kapitel 4.3.2 wird die Anwendung des inversen Reglers ermöglicht. Entsprechend der Gleichung (4.50) erhöht sich der Relativgrad auf $r'_{IM} = 4$ bzw. verkleinert sich die Ordnung des Nullstellenpolynoms auf $m'_{IM} = 3$.

Über das Wunschpolynom $A_{RK,IM}^*[\cdot]$ werden $n_{IM} - 1 = 6$ Beobachter-Pole und $n_{IM} = 7$ Regler-Pole festgelegt, wobei $m'_{IM} = 3$ Pole für die Pol-Nullstellenkompensation verwendet werden:

$$A_{RK,IM}^*[q] = A_{BeoIM}^*[q] A_{RegIM}^*[q] = A_{BeoIM}^*[q] A_{RegIM,red}^*[q] B'_{IM}[q]$$

mit:

$$\begin{aligned} A_{BeoIM}^*[q] &= (q - e^{-150h})^6 \\ A_{RegIM}^*[q] &= \underbrace{(q - e^{-10h})^4}_{A_{RegIM,red}^*[q]} B'_{IM}[q] \end{aligned}$$

Die Beobachterdynamik wird bzgl. der einzelnen Pole 15-fach schneller als die Reglerdynamik ausgelegt. Es folgt das Referenzmodell (4.51):

$$\frac{y^*[k]}{r[k]} = \frac{k_{SM2}}{A_{RegIM,red}^*[q]} = \frac{(1 - e^{-10h})^4}{(q - e^{-10h})^4} \quad (4.52)$$

Die Reglerberechnung findet aus numerischen Gründen gemäß Kapitel 2.3.6.4 im δ -Bereich statt.

Das geregelte Zwei-Massen-System ist in der Simulation 4.8 zu sehen. Durch die Wahl des Referenzmodells (4.52) ergibt sich ein PT_4 -Verhalten des geregelten Systems mit einer flachen Anfangssteigung. Würden drei Pole des Wunschpolynoms mit $q = 0$ auf die schnellstmögliche Dynamik gelegt (Verzögerung um eine Abtastzeit h), ergäbe sich verzögert ein PT_1 -Verhalten mit Anfangssteigung, was jedoch eine sehr hohe nicht realisierbare Stellgröße $M_M[\cdot]$ erfordern würde. Wie in Abbildung 4.8 zu erkennen ist, ermöglicht

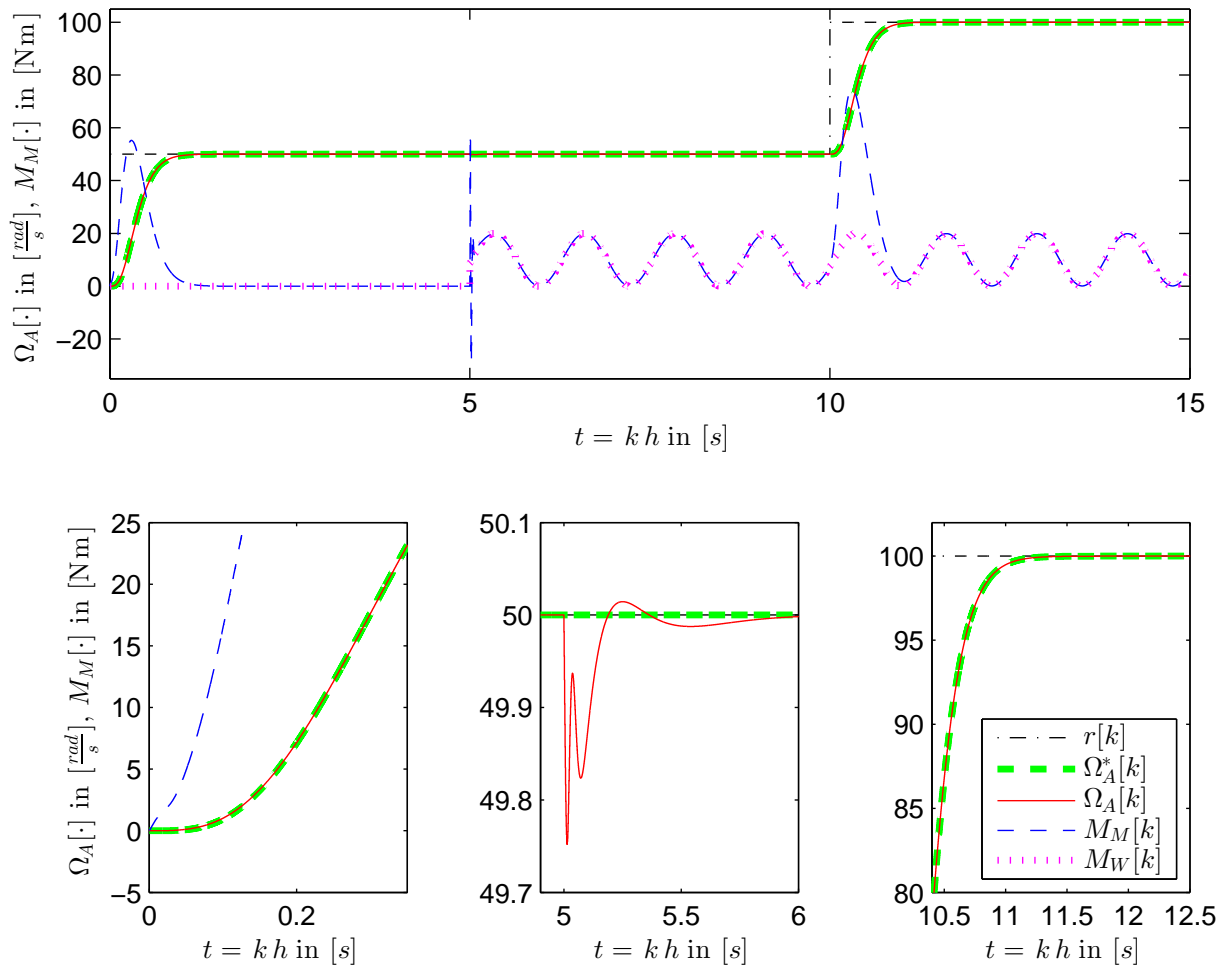


Abbildung 4.8: Zeitdiskreter erweiterter Referenzmodellregler ($h = 0.00001$ s) mit internem Modell unter Störeinwirkung $M_W[\cdot]$ am Beispiel des Zwei-Massen-Systems ($\tilde{n} = 4$, $D = 0.09$); es wird die Arbeitsmaschinen-Drehzahl $\Omega_A[\cdot]$ gemäß eines aperiodischen PT_4 -Referenzmodells geregelt

das PT_4 -Referenzmodell bei einem Sprung des Sollsignals $r[\cdot]$ von 0 rad/s auf 50 rad/s ($t = 0 \text{ s}$) einen realistischen Stellgrößenverlauf $M_M[\cdot]$ mit schnellem Erreichen des Endwertes $\Omega_{A,\infty} = 50 \text{ rad/s}$.

Durch das Vernachlässigen der instabilen Diskretisierungs-Nullstelle liegt ein stabiles Regelverhalten vor. Dass die vernachlässigte Dynamik keine Auswirkung auf das physikalisch relevante Verhalten hat, bestätigt der Verlauf der Drehzahl $\Omega_A[\cdot]$, welcher exakt dem Referenzmodell $\Omega_A^*[\cdot]$ folgt. Es treten keine Schwingungen des Zwei-Massen-Systems auf. Der Vergleich zwischen Abbildung 3.10 links ($D = 0.09$) und Abbildung 4.8 links unten zeigt, dass durch den Regler die Eigenschaft des Zwei-Massen-Systems der Schwingungsfähigkeit unterbunden wird.

Bei $t = 5 \text{ s}$ wird dem Zwei-Massen-System ein Störmoment/Widerstandsmoment $M_W[\cdot]$ aufgeschaltet. Dieses beinhaltet einen Offset von 10 Nm sowie eine sinusförmige Schwingung mit der Frequenz 5 rad/s und der Amplitude 10 Nm . Wie in der Abbildung 4.8 unten

Mitte zu erkennen, findet in einer kurzen Phase die Einstellung der internen Modelle bzgl. Amplitude, Phase und Offset statt, worauf diese die Störung vollständig kompensieren. Das interne Modell $SM1$ unterbindet das sinusförmige Widerstandsmoment und das interne Modell $SM2$ ermöglicht eine stationäre Genauigkeit trotz konstanter Störung. Auf Grund der schnellen Reaktion des Reglers mit den internen Modellen ergibt sich trotz großem Störmoment nur eine sehr kleine Abweichung von ca. 0.25 rad/s innerhalb des kurzen Einschwingvorganges von ca. 1 s . Mit einer Periodendauer von ca. 0.1 s der Schwingung des Zwei-Massen-Systems ist zu Beginn bei $t = 5 \text{ s}$ die aktive Dämpfung mit anschließendem Einschwingvorgang gemäß des Störverhaltens (siehe Theorem 2.42, Kapitel 2.2.6.3 und 2.2.6.4) zu erkennen. Ein Abklingen entsprechend der natürlichen Dämpfung (siehe Abbildung 3.10 links mit $D = 0.09$) ist nicht vorhanden. Der Regler reagiert auf die sprungförmige Anregung durch die Störung mit einer aktiven Bedämpfung und einer Einstellung der internen Modelle zur vollständigen Kompensation der Störungen.

Bei präserter Störung findet bei $t = 10 \text{ s}$ ein weiterer Sprung des Sollsignals $r[\cdot]$ um 50 rad/s auf 100 rad/s statt. Der Istwert $\Omega_A[k]$ liegt exakt auf dem Verlauf $\Omega_A^*[\cdot]$ des Referenzmodells trotz Störung (siehe Abbildung 4.8 unten rechts).

Die Änderung der Standardreglerstruktur des MRC hinsichtlich der Position des internen Modells für konstante Störungen ermöglicht stets stationäre Genauigkeit ohne Skalierung des Sollsignals $r[\cdot]$ (siehe Kapitel 2.2.6.8). Der Vorteil wird sich vor allem beim adaptiven Referenzmodellregler zeigen, bei dem andernfalls eine Skalierung des Sollsignals mit unbekanntem Parametern durchgeführt werden müsste.

Mit der Simulation wird deutlich, dass trotz Vernachlässigung der instabilen Diskretisierungs-Nullstelle das Regelziel mit aktiver Schwingungsdämpfung exakt erreicht wird, d.h. instabile Diskretisierungs-Nullstellen bei robuster Abtastung keinen Beitrag zur Repräsentation des physikalischen Verhaltens des Zwei-Massen-Systems leisten. Durch die Vernachlässigung wird die Anwendung des zeitdiskreten inversen Reglers ermöglicht.

4.3.4 Adaptiver Referenzmodellregler

In Kapitel 5 wird der adaptive Referenzmodellregler vorgestellt. Nachdem dieser ebenfalls einem inversen Regler entspricht, muss das Problem der instabilen Diskretisierungsnullstellen auch für den adaptiven Regler geklärt werden.

In [56, 91] wird der adaptive Regler direkt in der δ -Modellierung gemäß Kapitel 2.3.6.4 realisiert, um entsprechend des Theorems 4.2 die Diskretisierungs-Parameter im δ -Bereich zu streichen. Im Unterschied zu Kapitel 2.3.6.4 findet keine Rücktransformation in den q -Bereich statt, sondern eine Umsetzung der Reglerstruktur im δ -Bereich. Mit diesem Konzept befasst sich die (vom Autor betreute) Bachelorarbeit [196] bzw. Diplomarbeit [197].

Die entscheidende Komponente der adaptiven Regelung ist die stabil integrierte Parameterschätzung der Strecke. In [56] werden zur Parameterschätzung um die Anzahl der Diskretisierungs-Parameter weniger Parameter zur Verfügung gestellt, so dass direkt das reduzierte Modell identifiziert wird. Hiermit liegt jedoch für den realen Fall $h \neq 0 \text{ s}$ eine Untermodellierung des Schätzers vor, weshalb die Parameteridentifikation nicht konvergieren kann; eine zu geringe Zahl an Schätzparametern verhindert, dass ein über den gesamten

Frequenzbereich gültiger Parametersatz gefunden werden kann. Eine Parameterkonvergenz ist jedoch entscheidend für den Stabilitätsbeweis (siehe Kapitel 5.3.2). Um eine Konvergenz zu erzwingen, wird in [56] eine Dead-Zone vorgestellt. Diese ist jedoch nicht einfach festzulegen bzw. eindeutig auszulegen, weshalb die Umsetzung eines stabilen adaptiven Referenzmodellreglers in realer Umgebung fraglich ist.

In [91] wird eine Dead-Zone vermieden, indem das vollständige zeitdiskrete Modell einschließlich instabiler Nullstellen im δ -Bereich identifiziert wird und somit eine Parameterkonvergenz vorliegt. Für die Reglerauslegung im δ -Bereich werden die Diskretisierungsparameter nach der Identifikation gestrichen. Die Reglerauslegung basiert somit auf einer Untermodellierung, welche je nach Abtastzeit zur Instabilität führen kann. Wie mit Kapitel 4.1.2 und 4.2 gezeigt wurde, führt das Streichen der Diskretisierungsparameter im δ -Bereich für $h \rightarrow 0$ s zwar zu einem ähnlichen Modellverhalten wie das Vernachlässigen der instabilen und stabilen Diskretisierungsnullstellen, die Stabilität des Restpolynoms $B_{red}[\cdot]$ nach Streichen der Diskretisierungsparameter kann jedoch nur für $h = 0$ s garantiert werden. Des Weiteren ist der Modellierungsfehler beim Streichen auch der stabilen Diskretisierungsnullstellen gemäß Theorem 4.3 größer, während sich durch das Streichen lediglich instabiler Nullstellen bei beliebiger Abtastung annähernd keine Auswirkung auf das Systemverhalten ergibt. Zudem ändert sich im Gegensatz zu instabilen Diskretisierungsnullstellen die globale Phasendrehung durch die Vernachlässigung der stabilen Diskretisierungsnullstellen.

Mit dem Vorgehen nach Kapitel 4.3.1 bzw. 4.3.2 werden nur die instabilen Diskretisierungsnullstellen betrachtet, welche gemäß des Theorems 4.3 keine Auswirkung auf das zu repräsentierende Verhalten der Strecke haben. Mit den vollständig identifizierten Parametern findet die Reglerberechnung gemäß des Certainty-Equivalence-Prinzips (siehe Kapitel 5.3.1) statt. Entsprechend des Theorems 4.5 in Kapitel 4.3.1 werden die bei der Identifikation entstandenen instabilen Diskretisierungsnullstellen beim inversen Regler mit allgemeinem Referenzmodell nicht berücksichtigt. Bis auf die instabilen Diskretisierungsnullstellen werden alle Nullstellen eliminiert. Hiermit ist der inverse adaptive Regler anwendbar und es liegt keine Untermodellierung vor, nachdem die instabilen Nullstellen in der Modellierung nicht vernachlässigt werden. Bei einer robusten Abtastung (siehe Theorem 4.3) haben die instabilen Diskretisierungsnullstellen keine physikalische Bedeutung, weshalb sich die im geregelten Gesamtsystem bzw. im Referenzmodell erhaltenen instabilen Diskretisierungsnullstellen nicht auf das Systemverhalten auswirken. Unabhängig der Abtastzeit besteht keine Gefahr der Instabilität; es kann sich bei einer unrobusten Abtastzeit lediglich eine messbare Auswirkung der instabilen Nullstellen auf das Referenzmodell zeigen. Bei einer robusten Abtastung ist das Vorgehen gemäß Kapitel 4.3.2 ebenfalls möglich. Während aus numerischen Gründen die Reglerparameter im δ -Bereich zu berechnen sind (siehe Kapitel 2.3.6.4), kann die Implementierung der Reglerstruktur einschließlich Parameteridentifikation in beiden Fällen im einfachen bekannten q -Bereich durchgeführt werden.

Im folgenden Kapitel wird der adaptive Referenzmodellregler im Detail vorgestellt.

Kapitel 5

Adaptiver Referenzmodellregler

In der klassischen Regelungstechnik werden die Themen Regelung sowie Identifikation im Allgemeinen getrennt voneinander betrachtet. Zum einen wurden ausgereifte Regelungsmethoden entwickelt, die ein in einer mathematischen Form vorliegendes System erfolgreich regeln und zum anderen benötigt man Identifikations-Methoden, die eine reale Anlage auf ein mathematisches Modell abbilden, damit die Voraussetzungen für den Regelungsentwurf gegeben sind. Nur wenn das Modell die dominanten Eigenschaften der realen Anlage widerspiegelt, d.h. die Anlage richtig identifiziert wurde, garantiert die entworfene Regelung die Stabilität des geschlossenen Regelkreises sowie eine den Spezifikationen entsprechende stationäre Genauigkeit bzw. gutes Folgeverhalten. Man spricht von zwei getrennten Themengebieten, die im Grunde eng miteinander verkoppelt sind: wird eine ungeeignete Identifikationsmethode verwendet, bedarf es eines sehr guten robusten Reglers, für den Parameterschwankungen kaum Auswirkungen auf das Regelergebnis besitzen; wird ein einfacher Regler verwendet, so müssen die identifizierten Parameter das zu regelnde System eindeutig repräsentieren, um eine stabile Regelung des realen Systems gewähren zu können.

Im klassischen Sinne sieht nun eine Reglerauslegung für ein reales System wie folgt aus: Zunächst ist es für eine Identifikation notwendig, die Struktur des Systems zu kennen, um zu wissen, welche Systemparameter identifiziert werden müssen, so dass das dominante Verhalten des Systems widergespiegelt wird. Für den Identifikations-Vorgang wird ein geeignetes Eingangssignal mit sog. *beständiger Anregung* auf die Anlage geschaltet, um durch Anregen aller Zustände und möglichst vieler Eigenfrequenzen ausreichend Systeminformation zu sammeln. Dadurch wird das System über eine längere Identifikationszeit sehr belastet. Es ist ungewiss, wie lange diese Zeit sein muss, ob das System mit einer ausreichenden Zahl an Frequenzen angeregt wurde und ob folglich nach Beendigung der Identifikation die richtigen Parameter überhaupt vorliegen. Zudem verhindern stochastische Störungen sowie nicht modellierte deterministische Störungen eine Konvergenz des Identifikationsalgorithmus, womit eine eindeutige Identifikation bei präsenter Störung nicht möglich ist. Legt man nun den Regler mit diesen unsicheren Parametern aus, so stellt sich die Frage, ob der Gesamtregelkreis stets Stabilität zeigen wird; dies kann nicht garantiert werden. Zudem kann der klassische fest eingestellte Regler nicht auf spätere Parameteränderungen bzw. Schwankungen reagieren, was ebenfalls die Stabilität gefährden kann. Weiter muss nach jeder Modifikation des Systems erneut ein Identifikationslauf durchgeführt werden. Man sieht, mit einer seriellen Abfolge von Identifikation und Regelung sind durchaus Risiken

und Nachteile verbunden, vor allem, wenn die Komplexität der realen Systeme und somit Modelle zunimmt.

Die modellbasierte/indirekte adaptive Regelung [10, 55, 115, 128, 156, 177] ermöglicht es, Regelung und Identifikation stabil zu vereinen, um die oben beschriebenen Probleme zu umgehen. Hierbei finden Regelung und Identifikation nicht mehr seriell, sondern parallel statt, d.h. es wird im geschlossenen Regelkreis identifiziert bzw. es wird bereits während der Identifikation geregelt. Da von Beginn an versucht wird, das Regelziel zu erreichen, ist verständlich, dass nicht ausreichend beständige Anregung für die Identifikation zur Verfügung steht, d.h. es ist im Allgemeinen zu erwarten, dass die Parameter nicht gegen die wahren Systemparameter konvergieren werden. Für eine erfolgreiche Regelung ist es aber auch nicht notwendig, in einem bestimmten Betriebspunkt bei einem bestimmten Sollsignal, Wissen über das gesamte Systemverhalten zu besitzen. Der Grundgedanke des adaptiven Konzeptes besteht vielmehr darin, nur so viel Systeminformation zu sammeln bzw. zu identifizieren, wie momentan für das Erreichen der Solltrajektorie bzw. des Regelziels notwendig ist.

In diesem Kapitel wird exemplarisch obiges Prinzip an Hand eines diskreten adaptiven Referenzmodellreglers nach [55, 156, 177] vorgestellt. Dieser ist unter dem Begriff MRAC (Model-Reference-Adaptive-Control) bekannt. Für die Erfüllung des beschriebenen Grundgedankens stützt sich das adaptive Regelungskonzept MRAC mit seiner enthaltenen Identifikation auf das einfachste Modell einer Anlage, die Ein- Ausgangsbeschreibung mit variablen Parametern. Nachdem dieses nur das Ein- Ausgangsverhalten eines Systems beschreibt, muss folglich keine Kenntnis über die Struktur des Systems vorliegen; lediglich die Ordnung n sowie Relativgrad r des zeitdiskretisierten Systems müssen bekannt sein bzw. n darf nicht kleiner und r nicht größer angenommen werden als sie tatsächlich sind. Zur Identifikation der Parameter der Ein- Ausgangsbeschreibung eignet sich u.a. der einfache Projektionsalgorithmus bzw. der Rauschsignal-optimierte RLS-Algorithmus. Abhängig vom Betriebspunkt bzw. Sollsignal und dem bis dato angeeigneten Vorwissen muss dieser nun zu jedem Zeitpunkt den Parametersatz erneuern, so dass stets das notwendige Wissen für die momentane Regelung zur Verfügung steht. Die Anpassung der Parameter bezeichnet man als *Adaption*.

Wie in diesem Kapitel gezeigt wird, beruht das Konzept auf der Tatsache, dass für das Erreichen eines Regelziels nicht das vollständige Systemwissen notwendig ist, womit eine gleichzeitige Regelung und Identifikation möglich wird. Mit der Anregung des Systems durch das Sollsignal, welches für die Identifikation keine beständige Anregung garantiert, kann dieses zwar nicht vollständig identifiziert werden, es ist jedoch für das Erreichen des momentanen Sollsignals das Wissen über das angeregte Systemverhalten ausreichend - effektiv muss nur so viel Wissen über das System gelernt werden, wie für das Erreichen des momentanen Regelziels bezogen auf das Sollsignal notwendig ist. Sobald sich das Sollsignal ändert, kann neues Systemwissen identifiziert werden, mit dem das neue Regelziel zu erreichen ist. Mit jeder Änderung der Systemanregung in Frequenz und Amplitude auf noch nicht genutzte Signale nähert man sich dem Verhalten einer beständigen Anregung, so dass letztendlich ein vollständig identifiziertes System resultieren kann. Im Unterschied zum konventionellen Vorgehen kann jedoch bereits erfolgreich geregelt werden, auch wenn noch nicht das vollständige Systemwissen vorliegt. Mit Hilfe eines später aufgeführten Widerspruchsbeweises in Kapitel 5.3.2 lässt sich zeigen, dass trotz eines nicht vollständig

identifizierten Systems stets ein stabiler Regelkreis vorliegt.

Zusammengefasst bedeutet das, dass ein unbekanntes System ohne vorhergehende Untersuchungen stabil geregelt werden kann, wenn ausreichend viele Modellparameter für die Identifikation vorliegen und somit das System in seiner Ordnung und seinem Relativgrad nachgebildet werden kann. Dabei ist es nicht notwendig, die richtigen Parameter zu finden, um ein gutes Regelergebnis zu erzielen. Dementsprechend stellen zeitlich begrenzte Parameterschwankungen sowie ständige nicht zu dynamische Parameterschwankungen kein Problem mehr dar.

Die Einfachheit des Regelkonzeptes erkaufte man sich durch die Zeitvarianz der Parameter – obwohl von einer linearen Streckenstruktur ausgegangen wird, handelt es sich bei der Verknüpfung mit dem zeitvarianten Regler um ein hochgradig nichtlineares Gesamtsystem.

Der wesentliche Punkt in der Akzeptanz des adaptiven Konzeptes besteht zum einen darin, zu zeigen, dass das Regelziel trotz eines nicht korrekt geschätzten Parametersatzes erreicht wird und zum anderen darin, dass trotz falscher Parameter die Stabilität des Gesamtregelkreises bewiesen werden kann. Nachdem ein zeitvariantes Gesamtsystem vorliegt, führen LTI-Methoden hinsichtlich der Stabilitätsanalyse zu keiner Aussage. Für das MRAC-Konzept findet daher im Folgenden ein Widerspruchsbeweis Anwendung, mit dem zeitvariante / nichtlineare Systeme auf Stabilität untersucht werden können.

Es wird im Folgenden das theoretische Grundkonzept der adaptiven Referenzmodellregelung (MRAC) vorgestellt und basierend auf dieser Theorie ein entsprechender stabiler Regler für das in Kapitel 3 vorgestellte Zwei-Massen-System, die Grundkomponente eines jeden mechatronischen Systems, entwickelt.

Sowohl im Zeitkontinuierlichen [10, 128, 177, 156] als auch im Zeitdiskreten [10, 55, 115, 156, 177] ist das Prinzip von MRAC umsetzbar. Da mechatronische Systeme heutzutage generell über digitale Rechner gesteuert bzw. geregelt werden, ist es aus Stabilitätsgründen sinnvoll, direkt einen diskreten Reglerentwurf durchzuführen. Dementsprechend wird hier das diskrete MRAC-Prinzip erläutert.

5.1 ARMA-Modell als Prädiktionsmodell

Da es sich bei dem adaptiven Referenzmodellregler um einen modellgestützten Regler handelt, bedarf es eines geeigneten Modells der Strecke, dessen Parameter an Hand von Systemsignalen parallel zum Regelvorgang identifiziert werden können. Nimmt man im ungünstigsten Fall an, dass weder die Systemstruktur bekannt ist noch die Systemzustände $\underline{x}[\cdot]$ messbar sind, kann die ein System vollständig beschreibende Zustandsdarstellung (2.436) nicht als Modell angewandt werden. Liegen lediglich die Messwerte des Systemausgangs $y[k]$ vor, ist das ARMA-Modell nach [55]

$$A[q] y[k] = B[q] u[k] \quad (5.1)$$

zu verwenden, welches im Zeitbereich einen direkten Zusammenhang zwischen Eingangssignal $u[\cdot]$ und Ausgangssignal $y[\cdot]$ bietet, d.h. das Ein- Ausgangsverhalten eines Systems in Operatorform gemäß Kapitel 2.3.3 eindeutig beschreibt. Mit Hilfe des Ein- und

Ausgangssignals wird durch das ARMA-Modell eine Identifikation des Systemverhaltens und dadurch eine adaptive Regelung ermöglicht.

Das ARMA-Modell nach [55] lautet im Frequenzbereich:

$$y[z] = \frac{B[z]}{A[z]} \cdot u[z] \quad (5.2)$$

Wird durch das Modell neben dem Eingangssignal $u[\cdot]$ auch das Störsignal $v[\cdot]$ berücksichtigt, ergibt sich das sog. ARMAX-Modell nach [55]:

$$y[z] = \frac{B[z]}{A[z]} \cdot u[z] + \frac{C[z]}{A[z]} \cdot v[z] \quad (5.3)$$

Die Gleichung (5.3) entspricht exakt der des ARMAX-Modells nach [128]. Jedoch zeigt sich in der Definition der Eingangssignale der Modelle zwischen [55] und [128] ein Unterschied, welcher in einem formell unterschiedlichen ARMA-Modell resultiert. Im Unterschied zu Gleichung (5.2) lautet das ARMA-Modell nach [128]:

$$y[z] = \frac{B[z]}{A[z]} \cdot v[z] \quad (5.4)$$

Je nach Anwendungsgebiet liegt bzgl. der Definition des ARMA-Modells (ARMA: Auto-Regressive-Moving-Average) ein deterministisches Eingangssignal $u[\cdot]$ oder ein stochastisches Störsignal $v[\cdot]$ vor, welches den „Moving-Average“-Anteil bildet. Wirken beide Signale auf das System, so bezeichnet man eines der beiden Signale als einen zusätzlichen Eingang, d.h. „Exogenous Input“ bzw. „Auxiliary Input“, womit das sog. ARMAX-Modell resultiert. Nach [128] wird das stochastische Störsignal $v[\cdot]$ als Hauptsignal und das deterministische Signal $u[\cdot]$ als Zusatzsignal verwendet. Dies ist sinnvoll, wenn Identifikationsprozesse betrachtet werden, die für die Systemanregung stochastische Signale verwenden. Für Regelungsaufgaben hingegen greift man auf das deterministische Signal $u[\cdot]$ als Hauptsignal zurück. Dementsprechend wird für den MRAC-Reglerentwurf das ARMA-Modell (5.2) bzw. (5.1) nach [55] mit dem Eingangssignal $u[\cdot]$ und dem Ausgangssignal $y[\cdot]$ angewandt.

Das ARMA-Modell (5.1) kann direkt im Zeitbereich an Hand der allgemeinen Zustandsbeschreibung eines Systems abgeleitet werden, was beweist, dass das ARMA-Modell eindeutig das Ein- Ausgangsverhalten eines Systems repräsentiert. Die Zustandsdarstellung (2.436) beschreibt sämtliche die Dynamik des Systems bestimmenden Zustände und spiegelt damit das vollständige Systemverhalten mit einer eindeutigen Systemstruktur wider, so dass bei gegebenem Eingangssignal und bekannten Anfangszuständen auch das Ausgangssignal zu berechnen ist. Bezüglich der adaptiven Regelung nimmt man jedoch den ungünstigsten Fall an, bei dem die Systemzustände nicht gemessen bzw. ausgewertet werden können, um die Identifikation des Zustandsmodells zu ermöglichen. Für eine modellgestützte Regelung ist Wissen über die Systemstruktur jedoch nicht notwendig, sondern die Modellierung des Ein- Ausgangsverhaltens ausreichend. Durch Ersetzen der Zustände in der Zustandsbeschreibung durch eine Linearkombination von vergangenen Ein- und Ausgangssignalen ergibt sich aus der Zustandsdarstellung ein Modell, welches das Ein- Ausgangsverhalten eindeutig beschreibt, die Zustände dafür aber nicht explizit verwendet und somit kein Wissen über die Systemstruktur benötigt. Dieses sog. *ARMA-Modell* wird im Folgenden abgeleitet:

Ausgehend von der diskreten Zustandsbeschreibung eines SISO-Systems n -ter Ordnung

$$\underline{x}[k+1] = \mathbf{A} \underline{x}[k] + \underline{b} u[k] \quad (5.5)$$

$$y[k] = \underline{c}^T \underline{x}[k] \quad (5.6)$$

mit $k \in \mathbb{N}$, $\{u, y\} \in \mathbb{R}$, $\{\underline{x}, \underline{b}, \underline{c}\} \in \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ bedarf es der Elimination der n Zustände. Wendet man die Differenzgleichung (5.5) rekursiv an, so ergibt sich für wachsende k folgende Sequenz,

$$\begin{aligned} & \underline{x}[k] \\ \underline{x}[k+1] &= \mathbf{A} \underline{x}[k] + \underline{b} u[k] \\ \underline{x}[k+2] &= \mathbf{A} \underline{x}[k+1] + \underline{b} u[k+1] = \mathbf{A}^2 \underline{x}[k] + \mathbf{A} \underline{b} u[k] + \underline{b} u[k+1] \\ & \vdots \end{aligned}$$

woraus sich eine allgemeine Lösungsformel der diskreten Zustandsbeschreibung bestimmen lässt, die ausgehend vom Zustandsvektor $\underline{x}[k]$ den in m Zeitschritten folgenden Zustandsvektor $\underline{x}[k+m]$

$$\underline{x}[k+m] = \mathbf{A}^m \underline{x}[k] + \sum_{i=0}^{m-1} \mathbf{A}^{m-1-i} \underline{b} u[k+i] \quad (5.7)$$

bzw. den gemäß Gleichung (5.6) zugehörigen Ausgangswert $y[k+m]$ berechnet:

$$\begin{aligned} y[k+m] &= \\ &= \underline{c}^T \mathbf{A}^m \underline{x}[k] + \sum_{i=0}^{m-1} \underline{c}^T \mathbf{A}^{m-1-i} \underline{b} u[k+i] \quad (5.8) \\ &= \underline{c}^T \mathbf{A}^m \underline{x}[k] + \underbrace{\left(\underline{c}^T \underline{b} \quad \dots \quad \underline{c}^T \mathbf{A}^{m-2} \underline{b} \quad \underline{c}^T \mathbf{A}^{m-1} \underline{b} \right)}_{\underline{q}_U^T \in \mathbb{R}^{m-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} u[k+m-1] \\ \vdots \\ u[k+1] \\ u[k] \end{pmatrix}}_{\underline{U}_S[k+m-1]} \end{aligned}$$

Ist der Zustand $\underline{x}[k]$ bekannt, so kann ohne Kenntnis weiterer Zustandssignale an Hand der Stellgrößenabfolge $u[\cdot]$ jeder zukünftige Wert $\hat{y}[k+m]$ des Ausgangssignals mit Hilfe des Modells (5.8) prädiziert werden. Nachdem jedoch keine Zustandssignale vorliegen, ist die Frage zu beantworten, ob der Zustandsvektor $\underline{x}[k]$ der Gleichung (5.8) mit vergangenen Ein- und Ausgangswerten zu bestimmen ist.

Zunächst ist zu klären, wie viele vergangene Ein- und Ausgangswerte bekannt sein müssten, um auf einen Zustandsvektor schließen zu können. Hierzu ist im Umkehrschluss zu überlegen, wie viele Schritte m im Gleichungssystem (5.7) nötig sind, damit, ausgehend vom Zustandsvektor $\underline{x}[k]$, ein beliebiger Wert des Zustandsvektors $\underline{x}[k+m]$ über eine Steuersequenz $\underline{U}_S[k+m-1] = (u[k+m-1], \dots, u[k])$ erreicht werden kann, d.h. wie viele Gleichungen aus (5.8) sind für die Bildung des gesuchten Modells notwendig, damit dieses

das Kriterium der Steuerbarkeit erfüllt. Wird beispielsweise der Nullzustand $\underline{x}[k+m] = \underline{0}$ in Gleichung (5.7) gefordert, so erhält man

$$-\mathbf{A}^m \underline{x}[k] = \underbrace{\left(\underline{b} \quad \mathbf{A}\underline{b} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{m-2}\underline{b} \quad \mathbf{A}^{m-1}\underline{b} \right)}_{\mathbf{Q}_S} \underbrace{\begin{pmatrix} u[k+m-1] \\ u[k+m-2] \\ \vdots \\ u[k+1] \\ u[k] \end{pmatrix}}_{\underline{U}_S[k+m-1]} \quad (5.9)$$

Um die Steuersequenz $\underline{U}_S[\cdot]$ bestimmen zu können, muss zum einen die Steuerbarkeitsmatrix \mathbf{Q}_S (siehe Definition 2.12) invertierbar sein, d.h. das zeitdiskrete Modell (5.5) muss steuerbar sein. Zum anderen ist das Gleichungssystem (5.9) mit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nur für $m = n$ eindeutig lösbar, wobei n die Ordnung des Systemmodells ist. Dementsprechend sind mindestens n Gleichungen zur Bestimmung eines Zustandsvektors aus vergangenen Ein- und Ausgangssignalen und somit zur Bestimmung eines Prädiktions-Modells nötig, was die Tatsache unterstreicht, dass die Systemdynamik gemäß der Zustandsdarstellung (5.5) durch genau n Zustände eindeutig beschrieben wird.

Mit diesen Überlegungen wurde deutlich, dass zum Aufstellen eines lösbaren Gleichungssystems hinsichtlich der Bestimmung eines Zustandsvektors $\underline{x}[k]$ der Ordnung n die Gleichung (5.8) zu n unterschiedlichen Zeitpunkten herangezogen werden muss; mit $m \in \{0, \dots, n-1\}$ resultiert eine Sequenz von n Ausgangswerten:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y[k+n-1] \\ \vdots \\ y[k+2] \\ y[k+1] \\ y[k] \end{pmatrix}}_{\underline{Y}[k+n-1] \in \mathbb{R}^n} = \quad (5.10)$$

$$= \begin{pmatrix} \underline{c}^T \mathbf{A}^{n-1} \\ \vdots \\ \underline{c}^T \mathbf{A}^2 \\ \underline{c}^T \mathbf{A} \\ \underline{c}^T \end{pmatrix} \underline{x}[k] + \begin{pmatrix} \underline{c}^T \mathbf{A}^{n-2} \underline{b} \cdot u[k] + \cdots + \underline{c}^T \underline{b} \cdot u[k+n-2] \\ \vdots \\ \underline{c}^T \mathbf{A} \underline{b} \cdot u[k] + \underline{c}^T \underline{b} \cdot u[k+1] \\ \underline{c}^T \underline{b} \cdot u[k] \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{c}^T \mathbf{A}^{n-1} \\ \vdots \\ \underline{c}^T \mathbf{A}^2 \\ \underline{c}^T \mathbf{A} \\ \underline{c}^T \end{pmatrix}}_{\mathbf{Q}_B \in \mathbb{R}^{n \times n}} \underline{x}[k] + \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{c}^T \underline{b} & \cdots & \underline{c}^T \mathbf{A}^{n-3} \underline{b} & \underline{c}^T \mathbf{A}^{n-2} \underline{b} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \underline{c}^T \underline{b} & \underline{c}^T \mathbf{A} \underline{b} \\ 0 & \cdots & 0 & \underline{c}^T \underline{b} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{Q}_U \in \mathbb{R}^{n \times (n-1)}} \underbrace{\begin{pmatrix} u[k+n-2] \\ u[k+1] \\ \vdots \\ u[k] \end{pmatrix}}_{\underline{U}[k+n-2] \in \mathbb{R}^{(n-1)}}$$

Unter der Bedingung, dass das Modell der realen Anlage beobachtbar und somit die Beobachtbarkeitsmatrix \mathbf{Q}_B (siehe Definition 2.13) invertierbar ist, kann nach den Zuständen

$\underline{x}[k]$ aufgelöst werden; hierbei impliziert Beobachtbarkeit, dass alle Zustände des Modells eine Wirkung auf den Ausgang y aufweisen:

$$\underline{x}[k] = \mathbf{Q}_B^{-1} \begin{pmatrix} y[k+n-1] \\ \vdots \\ y[k] \end{pmatrix} - \mathbf{Q}_B^{-1} \mathbf{Q}_U \begin{pmatrix} u[k+n-2] \\ \vdots \\ u[k] \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

Gemäß Gleichung (5.11) können nun an Hand der Sequenzen von Ein- und Ausgangswerten

$$\underline{Y}[k+n-1] = (y[k+n-1] \ \cdots \ y[k])^T \quad (5.12)$$

$$\underline{U}[k+n-2] = (u[k+n-2] \ \cdots \ u[k])^T \quad (5.13)$$

die Systemzustände $\underline{x}[k]$ des Zeitpunkts k bestimmt werden, womit für eine Modellbildung die Systemzustände nicht mehr explizit notwendig sind. Durch Einsetzen des Zustandsvektors $\underline{x}[k]$ aus Gleichung (5.11) in Gleichung (5.8) ergibt sich das gesuchte Modell, welches eindeutig das Ein- Ausgangsverhalten beschreibt – liegen Sequenzen von Ein- und Ausgangswerten vor, so können Prädiktionen des Systemausgangs $\hat{y}[k+m]$ mit $m \geq n$ durchgeführt werden; $y[k+n-1]$ muss gemäß Gleichung (5.12) zur Bestimmung des Zustands $\underline{x}[k]$ bereits bekannt sein:

$$\begin{aligned} \hat{y}[k+m] &= \underline{c}^T \mathbf{A}^m \mathbf{Q}_B^{-1} \begin{pmatrix} y[k+n-1] \\ \vdots \\ y[k] \end{pmatrix} + \dots \\ &\quad - \underline{c}^T \mathbf{A}^m \mathbf{Q}_B^{-1} \mathbf{Q}_U \begin{pmatrix} u[k+n-2] \\ \vdots \\ u[k] \end{pmatrix} + \underline{q}_U^T \begin{pmatrix} u[k+m-1] \\ \vdots \\ u[k] \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.14)$$

Durch eine Verschiebung der Zeitachse um $n-1$ Schritte genügt man der Deklaration, dass der Zeitpunkt k als die Gegenwart bezeichnet wird und somit alle Daten von Ein- und Ausgängen bis zum Zeitpunkt k bekannt sind. Der Prädiktionshorizont $p = m - n + 1$ gibt an, wie viele Schritte $p \in \{1, 2, \dots\}$ in die Zukunft prädiziert werden:

$$\begin{aligned} \hat{y}[k+p] &= \underline{c}^T \mathbf{A}^m \mathbf{Q}_B^{-1} \underbrace{\begin{pmatrix} y[k] \\ \vdots \\ y[k-n+1] \end{pmatrix}}_{\underline{Y}[k] \in \mathbb{R}^n} + \dots \\ &\quad - \underline{c}^T \mathbf{A}^m \mathbf{Q}_B^{-1} \mathbf{Q}_U \underbrace{\begin{pmatrix} u[k-1] \\ \vdots \\ u[k-n+1] \end{pmatrix}}_{\underline{U}[k-1] \in \mathbb{R}^{(n-1)}} + \underline{q}_U^T \underbrace{\begin{pmatrix} u[k+p-1] \\ \vdots \\ u[k-n+1] \end{pmatrix}}_{\underline{U}_S[k+p-1] \in \mathbb{R}^{(n-1+p)}} \end{aligned} \quad (5.15)$$

Die ersten beiden Summanden bestimmen den für das Modell bzw. für die Prädiktion notwendigen Ausgangszustand $\underline{x}[k - n + 1]$ mit Hilfe der erforderlichen Anzahl an aktuell gemessenen Ein- und Ausgangssignalen, d.h. in $\underline{Y}[k]$ bzw. $\underline{U}[k - 1]$ finden sich keine Werte für Zeiten größer k . Der dritte Summand dient der Prädiktion von diesem abgeleiteten Ausgangszustand aus, weshalb in der Steuersequenz $\underline{U}_S[k + p - 1]$ Werte der Stellgröße für Zeiten bis $k + p - 1$ enthalten sein können, d.h. auch zukünftige Stellgrößen, die einen Beitrag zum Ausgangswert $\hat{y}[k + p]$ leisten. Ob bereits die Stellgröße $u[k + p - 1]$ nach einem Zeitschritt eine Auswirkung auf den Ausgang $y[k + p]$ zeigen wird oder auf Grund der Signallaufzeiten durch das System erst r Zeitschritte verzögert den Ausgang erreicht, wird durch den Relativgrad r beschrieben (siehe Kapitel 2.3.6.1). Sofern kein System mit Durchgriff vorliegt, dauert es mindestens $r = 1$ Zeitschritt, bis sich eine Stellgrößenaufschaltung $u[k]$ auf das Ausgangssignal $y[\cdot]$ auswirkt.

Im Gleichungssystem (5.10) ist zu erkennen, dass ein Eingangssignal $u[k]$ zum Zeitpunkt k sofort im nächsten Zeitpunkt $k + 1$ auf das Ausgangssignal $y[k + 1]$ wirkt – es wird somit ein System mit Relativgrad $r = 1$ beschrieben. Im Falle eines höheren Relativgrads $r > 1$ würde es r Zeitschritte dauern, bis eine Erregung am Eingang am Ausgang gemessen werden kann. Im Gleichungssystem (5.10) hätte dies zur Konsequenz, dass $\underline{c}^T \underline{b} = \underline{c}^T \mathbf{A} \underline{b} = \dots = \underline{c}^T \mathbf{A}^{r-2} \underline{b} \equiv 0$ und erst $\underline{c}^T \mathbf{A}^{r-1} \underline{b} \neq 0$ wäre. Die momentan anliegende Stellgröße $u[k]$ wirkt sich demnach erst bei $y[k + r]$ aus. Sobald auf Grund von $r > 1$ die Einträge

$$\underline{c}^T \mathbf{A}^i \underline{b} = 0 \quad \text{für} \quad i \in \{0, \dots, r - 2\} \quad (5.16)$$

in der Matrix \mathbf{Q}_U des Gleichungssystems (5.10) sowie Vektor \underline{q}_U der Gleichung (5.8) zu Null gesetzt werden können, hat das Stellsignal $u[\cdot]$ im Unterschied zu dem im Prädiktor-Modell (5.15) zu $r - 1$ Zeitpunkten noch keine Auswirkung auf den betrachteten Ausgang $\hat{y}[k + p]$. Dementsprechend lässt sich die Ordnung der Vektoren $\underline{U}[\cdot]$ und $\underline{U}_S[\cdot]$ auf $n - r$ bzw. $n - r + p$ reduzieren. Die Ordnung der Matrix \mathbf{Q}_U muss durch Streichen von $r - 1$ Null-Spalten angepasst werden, womit sich eine Ordnung von $n \times (n - r)$ ergibt. Ebenso muss die Ordnung des Vektors \underline{q}_U durch Streichen der entsprechenden Nullen auf $n - r + p$ reduziert werden. Für den allgemeinen Fall mit Relativgrad $r \geq 1$ lässt sich das Prädiktor-Modell (5.15) dann wie folgt formulieren:

$$\begin{aligned} \hat{y}[k + p] = & \underline{c}^T \mathbf{A}^m \mathbf{Q}_B^{-1} \underbrace{\begin{pmatrix} y[k] \\ \vdots \\ y[k - n + 1] \end{pmatrix}}_{\underline{Y}[k] \in \mathbb{R}^n} + \dots \\ & - \underline{c}^T \mathbf{A}^m \mathbf{Q}_B^{-1} \underbrace{\mathbf{Q}_{U,red}}_{\in \mathbb{R}^{(n \times (n-r))}} \underbrace{\begin{pmatrix} u[k - r] \\ \vdots \\ u[k - n + 1] \end{pmatrix}}_{\underline{U}_{red}[k-r] \in \mathbb{R}^{(n-r)}} + \underbrace{\underline{q}_{U,red}^T}_{\in \mathbb{R}^{(n-r+p)}} \underbrace{\begin{pmatrix} u[k + p - r] \\ \vdots \\ u[k - r] \\ \vdots \\ u[k - n + 1] \end{pmatrix}}_{\underline{U}_{S,red}[k+p-r] \in \mathbb{R}^{(n-r+p)}} \end{aligned} \quad (5.17)$$

Hiermit wird deutlich, dass für die Bestimmung des zurückliegenden Anfangszustandes $\underline{x}[k - n + 1]$ zum Zeitpunkt k die aktuellsten n Ausgangswerte herangezogen werden (1.

Summand) sowie die letzten auf das System geschalteten $n-r$ Stellsignale, die entsprechend des Relativgrades eine Auswirkung auf $y[k]$ zeigen (2. Summand). Ausgehend von diesem Anfangszustand $\underline{x}[k-n+1]$ wird die gewünschte Prädiktion von $\hat{y}[k+p]$ durchgeführt (3. Summand). Hierzu werden alle Stellsignale ausgehend vom Zeitpunkt $k-n+1$ des bestimmten Zustands $\underline{x}[k-n+1]$ benötigt, die entsprechend des Relativgrades r eine Auswirkung auf $\hat{y}[k+p]$ zeigen. Dies können je nach Prädiktionshorizont und Relativgrad ($p < r$) auch lediglich vergangene Stellgrößen sein, die sich auf Grund des Relativgrades noch nicht auf den aktuellen Ausgangswert $y[k]$ ausgewirkt haben, sondern erst auf einen zukünftigen Ausgangswert wirken. Für $p = r$ bzw. $p > r$ werden neben vergangener Werte für das Stellsignal $u[\cdot]$ auch die aktuelle Stellgröße $u[k]$ bzw. zukünftige Stellgrößen $u[k+i]$ mit $i \in \mathbb{N}$ für die Bestimmung des zu prädizierenden Ausgangswertes benötigt.

Führt man die Matrizen- und Vektoroperationen in Gleichung (5.17) durch und fasst alle Ein- und Ausgänge in einem Regressionsvektor $\underline{x}[k+1]$ zusammen, ergibt sich das allgemeine ARMA-Modell in Vektordarstellung:

$$\hat{y}[k+p] = \underbrace{\left(-\alpha_{n-1}''' \quad \dots \quad -\alpha_0''' \quad \beta_{n-1-r+p}''' \quad \dots \quad \beta_0''' \right)}_{\underline{\theta}_0^T} \underbrace{\begin{pmatrix} y[k] \\ \vdots \\ y[k-n+1] \\ u[k+p-r] \\ \vdots \\ u[k-n+1] \end{pmatrix}}_{\underline{x}[k+1]} \quad (5.18)$$

Die berechneten Koeffizienten werden als die Parameter des ARMA-Modells bezeichnet und sind in dem Parametervektor $\underline{\theta}_0$ zusammengefasst. Die Bedeutung des Namens „ARMA-Modell“, „Auto-Regressive-Moving-Average-Model“ wird in der Summendarstellung deutlich:

$$\hat{y}[k+p] = \underbrace{-\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{n-1-i}''' \cdot y[k-i]}_{\text{Auto-Regressive-Anteil}} + \underbrace{\sum_{j=r-p}^{n-1} \beta_{n-1-j}''' \cdot u[k-j]}_{\text{Moving-Average-Anteil}} \quad (5.19)$$

Die Grundform des ARMA-Modells entsteht, wenn $p = 1$ gewählt wird:

$$\hat{y}[k+1] = \underbrace{\left(-\alpha_{n-1} \quad \dots \quad -\alpha_0 \quad \beta_{n-r} \quad \dots \quad \beta_0 \right)}_{\underline{\theta}_0^T} \underbrace{\begin{pmatrix} y[k] \\ \vdots \\ y[k-n+1] \\ u[k+1-r] \\ \vdots \\ u[k-n+1] \end{pmatrix}}_{\underline{x}[k+1]} \quad (5.20)$$

Hierbei werden nur vergangene Werte der Stellgröße bzw. bei $r = 1$ der aktuelle Wert der Stellgröße verwendet und es wird lediglich einen Schritt in die Zukunft prädiziert. Das dynamische Systemverhalten wird damit eindeutig beschrieben – es kann zu jedem Zeitpunkt an Hand des Modells der nächste zu erwartende Ausgangswert mit Hilfe vergangener

und aktueller Ein- und Ausgangswerte bestimmt werden. Der Vorteil der Modellbeschreibung (5.20) besteht darin, dass auf Grund des geringen Prädiktionshorizontes von $p = 1$ keine zusätzliche Systemdynamik wegen der Prädiktion entsteht, d.h. in der entsprechenden Ein- Ausgangsbeschreibung der Ordnung n

$$\frac{\hat{y}[k]}{u[k]} = \frac{B[q]}{A[q]} = \frac{\beta_{n-r} \cdot q^{n-r} + \dots + \beta_0}{q^n + \alpha_{n-1} \cdot q^{n-1} + \dots + \alpha_0} \quad (5.21)$$

wird es keine prädiktionsbedingte Pol- Nullstellenkürzungen geben. Der Nachteil dieser Modellform hingegen zeigt sich bei einem Relativgrad $r > 1$, wenn das Modell zur Stellgrößenberechnung $u[k]$ verwendet werden soll oder wenn die auf Grund des Relativgrades r verzögerte Auswirkung der Stellgröße $u[k]$ nach r Abtastschritten auf den Ausgang $y[k+r]$ bestimmt werden soll. In Gleichung (5.20) ist zu erkennen, dass bei $r > 1$ nach einer Verschiebung um $r - 1$ zwar nach $u[k]$ aufgelöst bzw. $u[k]$ eingesetzt werden kann, jedoch dann auch zukünftige Werte des Ausgangs bis $y[k+r-1]$ bekannt sein müssten, um die Stellgröße $u[k]$ bzw. den Ausgang $y[k+r]$ bestimmen zu können. Die Stellgrößen- bzw. Ausgangswertberechnung stößt hiermit auf ein Realisierungsproblem.

Dieses kann gelöst werden, wenn die unbekanntenen Ausgangswerte rekursiv bestimmt werden, d.h. wenn in Gleichung (5.18) $p = r$ gewählt wird; sobald $p > 1$ gilt, bezeichnet man das ARMA-Modell als *Prädiktor-ARMA-Modell*:

$$\hat{y}[k+r] = \underbrace{\left(-\alpha''_{n-1} \quad \dots \quad -\alpha''_0 \quad \beta''_{n-1} \quad \dots \quad \beta''_0 \right)}_{\underline{\theta}_0^T} \underbrace{\begin{pmatrix} y[k] \\ \vdots \\ y[k-n+1] \\ u[k] \\ \vdots \\ u[k-n+1] \end{pmatrix}}_{\underline{x}[k+1]} \quad (5.22)$$

Für diesen Spezialfall kann nun bestimmt werden, wie und wann eine zum Zeitpunkt k aufgeschaltete Stellgröße $u[k]$ das Ausgangssignal beeinflusst - gemäß Gleichung (5.22) wird sich deren Wirkung zum Zeitpunkt $k+r$ zeigen und der entsprechende Signalwert bestimmt sich wie gefordert nur aus aktuellen und vergangenen Ein- Ausgangssignalwerten. Im Kontext der Stellgrößenberechnung kann mit dem zukünftigen Wert $\hat{y}[k+r]$ ein Sollwert $y^*[k+r]$ vorgegeben und nach $u[k]$ aufgelöst werden. Im Unterschied zum zeitlich verschobenen Modell (5.20) liegen für die entsprechenden Berechnungen nur bekannte Werte vor, womit diese realisierbar werden. Im Gegenzug wird jedoch durch den höheren Prädiktionshorizont mit $p = r$ eine nicht beobachtbare zusätzliche Dynamik entstehen; da mehr vergangene Stellgrößenwerte benötigt werden, erhöht sich die Ordnung der entsprechenden Ein- Ausgangsbeschreibung im Vergleich zur Ein- Ausgangsbeschreibung (5.21) von n auf $r+n-1$:

$$\frac{\hat{y}[k]}{u[k]} = \frac{B''[q]}{A''[q]} = \frac{\beta''_{n-1} \cdot q^{n-1} + \dots + \beta''_0}{q^{r+n-1} + \alpha''_{n-1} \cdot q^{n-1} + \dots + \alpha''_0} \quad (5.23)$$

Die zusätzliche Dynamik der Prädiktion der Ordnung $r-1$ ist jedoch auf Grund von Pol-Nullstellenkürzungen am Ausgang nicht beobachtbar, sofern diese stabil ist.

Der große Vorteil des ARMA-Modells besteht in der Tatsache, dass das Ausgangssignal linear in den Parametern darstellbar ist und daher, wie im folgenden Abschnitt dargestellt, sehr einfache lineare Identifikationsmethoden angewandt werden können. In den folgenden Kapiteln bezieht man sich auf das Prädiktor-ARMA-Modell (5.22):

$$\hat{y}[k+r] = \underline{\theta}_0^T \underline{x}[k+1] \quad (5.24)$$

5.2 Systemidentifikation

Das zentrale Element der adaptiven Regelung ist ein Parameterschätzer. Seine Aufgabe ist es, durch eine geeignete Adaption im geschlossenen Regelkreis dem Regler Systemparameter zur Verfügung zu stellen, mit denen eine sichere und gute Regelung des Systems zu jedem Zeitpunkt durchgeführt werden kann. Zum Erreichen dieses Zieles wird die Eigenschaft des Identifikationsalgorithmus genutzt, zu jedem Zeitpunkt durch eine Adaption der Parameter einen Identifikationsfehler von Null zu erzwingen. Mit einer geeigneten Wahl des Regelgesetzes sowie Kombination von Regler und Identifikation ist zu erreichen, dass der Regelfehler die Eigenschaft des Identifikationsfehlers erbt und somit gegen Null geht, weshalb ein erfolgreiches Regelverhalten trotz unbekannter Systemparameter zu erwarten ist.

Es werden zwei Identifikations-Algorithmen vorgestellt, die jeweils die notwendige Eigenschaft für die Eingliederung in den adaptiven Regler besitzen: der Projektionsalgorithmus sowie der rekursive Least-Squares-Algorithmus (RLS-Algorithmus) [55]. Beide setzen die Trennung von Parametern und Systemsignalen (Ein- und Ausgänge) in Form von Vektoren entsprechend des ARMA-Modells (siehe Kapitel 5.1) voraus.

Wie dargestellt wurde, beschreibt das ARMA-Modell das dynamische Verhalten eines linearen Systems. Sind die Systemparameter der Zustandsdarstellung (5.5)/(5.6) oder der Übertragungsfunktion (5.21) bekannt, so kann im ersten Fall mit Hilfe der Gleichung (5.17) bzw. im zweiten Fall über die rekursive Umformung das ARMA-Modell (5.22) mit dem Parametervektor $\underline{\theta}_0$ erzeugt werden. Dieser Parametervektor $\underline{\theta}_0$ beschreibt exakt das Ein-Ausgangsverhalten des Systems, so dass mit dem bereits vergangenen Ausgangssignalverlauf sowie Stellsignalverlauf der aktuelle Wert $y[k]$ des Ausgangssignals bestimmt werden kann. Hierzu dient das um r Schritte verschobene ARMA-Modell (5.22) bzw. (5.24), das sog. *Strecken-Modell*:

$$y[k] = \hat{y}[k] = \underline{\theta}_0^T \underline{x}[k-r+1] \quad (5.25)$$

Liegt der genaue Parametervektor $\underline{\theta}_0$ der Strecke vor, so entspricht der über das Modell berechnete Wert $\hat{y}[k]$ exakt dem zum Zeitpunkt k gemessenen Wert $y[k]$. Nachdem ein unbekanntes System vorliegt und folglich der Parametervektor $\underline{\theta}_0$ nicht bekannt ist, kann im Umkehrschluss zum Zeitpunkt k mit Hilfe des gemessenen Werts $y[k]$ ein Parametervektor $\hat{\underline{\theta}}[k]$ bestimmt werden, der in Kombination mit dem Regressionsvektor $\underline{x}[k+1-r]$ den Ausgangswert $y[k]$ ergibt, d.h die Gleichung (5.25) zumindest für den Zeitpunkt k erfüllt.

Mit Hilfe der Identifikations-Algorithmen soll nun zu jedem Zeitschritt k ein Schätzwert $\hat{\underline{\theta}}[k]$ von $\underline{\theta}_0$ bestimmt werden. Wie gut dieser Schätzwert bezogen auf die Dynamik des Ein- Ausgangsverhaltens, d.h. die zeitliche Veränderungen des Regressionsvektors ist, lässt

sich frühestens einen Abtastschritt später feststellen. Aus diesem Grund prädiziert man mit dem neuen Schätzwert $\hat{\underline{\theta}}[k]$ einen Schritt ($p = 1$) in die Zukunft; das dabei verwendete ARMA-Modell (5.24) bezeichnet man als *Schätz-Modell*:

$$\hat{y}[k+1] = \hat{\underline{\theta}}[k]^T \underline{x}[k-r+2] \quad (5.26)$$

Bildet man dann im nächsten Zeitschritt die Differenz zwischen dem nun messbaren Ausgangswert $y[k+1]$ des Systems bzw. des exakten Strecken-Modells (5.25) und dem Ausgangswert $\hat{y}[k+1]$ des Schätz-Modells (5.26), so kann der *Identifikationsfehler*

$$\varepsilon[k+1] = y[k+1] - \hat{y}[k+1] = y[k+1] - \hat{\underline{\theta}}[k]^T \underline{x}[k-r+2] \quad (5.27)$$

$$= \left(\underline{\theta}_0 - \hat{\underline{\theta}}[k] \right)^T \underline{x}[k-r+2] = \tilde{\underline{\theta}}[k]^T \underline{x}[k-r+2] \quad (5.28)$$

definiert werden, welcher eine Aussage darüber liefert, wie gut ein geschätzter Parametervektor das Ein- Ausgangsverhalten des Systems in Abhängigkeit des Regressionsvektors nach Verstreichen einer Abtastzeit h repräsentiert.

Gemäß Gleichung (5.28) gibt es zwei Möglichkeiten, dass der Identifikationsfehler $\varepsilon[k+1]$ Null wird: der geschätzte Parametervektor $\hat{\underline{\theta}}[k]$ entspricht dem wahren System-Parametervektor $\underline{\theta}_0$, womit das System korrekt identifiziert wurde ($\tilde{\underline{\theta}}[k] = 0$), oder das Skalarprodukt $\tilde{\underline{\theta}}[k]^T \underline{x}[k-r+2]$ wird zu Null, womit der Parameterfehlervektor $\tilde{\underline{\theta}}[k]^T$ und der Regressionsvektor $\underline{x}[k-r+2]$ wie zum Zeitpunkt $k-r+1$ der Schätzung weiterhin senkrecht aufeinander stehen. Der letzte Fall tritt auf, wenn ein bestimmtes dynamisches Verhalten des Regressionsvektors, d.h. Ein- Ausgangsverhaltens bereits gelernt wurde – dann verändert sich zwar der Regressionsvektor, steht jedoch immer senkrecht auf dem Parameterfehlervektor. In anderen Worten wurde das momentan auftretende dynamische Verhalten bereits gelernt, womit $\varepsilon[k+1] = 0$ resultiert; da jedoch noch nicht das vollständige dynamische Systemverhalten gelernt wurde, verbleibt trotzdem ein Parameterfehlervektor ungleich Null: $\tilde{\underline{\theta}}[k] \neq 0$.

Sobald noch nicht identifizierte Systemdynamik angeregt wird, stehen die Vektoren nicht mehr senkrecht aufeinander und es resultiert ein Identifikationsfehler $\varepsilon[k+1] \neq 0$. Ähnelt das Ein- Ausgangsverhalten bereits identifiziertem Verhalten, so stehen der Regressionsvektor und der Parameterfehlervektor weiterhin annähernd senkrecht zueinander, womit ein nur sehr kleiner Identifikationsfehler resultiert. Der geschätzte Parametervektor $\hat{\underline{\theta}}[k]$ repräsentiert daher immer noch ausreichend das Systemverhalten, womit gleichzeitig geregelt ($\hat{\underline{\theta}}[k]$ dient der Auslegung des Reglers) und auf Grund der neuen Anregung weiter identifiziert werden kann, so dass ein neuer Schätzwert $\hat{\underline{\theta}}[k+1]$ zukünftig auch bei der aktuellen Anregung zu einem Identifikationsfehler Null führt.

Tritt jedoch eine bisher noch nicht identifizierte Anregung auf, so stehen der Regressionsvektor und der Parameterfehlervektor weder annähernd senkrecht aufeinander noch ist der Parameterfehlervektor Null. In diesem Fall wird sich ein großer Identifikationsfehler zeigen; das Regelverhalten wird zwar in diesem Moment schlechter, jedoch folgt auf Grund der hohen Anregung ein rascher Identifikationsvorgang, so dass neben erneut senkrecht stehendem Regressionsvektor und Parameterfehlervektor sich der Betrag des Parameterfehlervektors $\tilde{\underline{\theta}}[k+1]$ stark verkleinert und schnell wieder zu einem guten Regelergebnis führt. Sobald ein Identifikationsfehler ungleich Null vorliegt, führt der nächste Identifikationsschritt zu einer

Verkleinerung des Parameterfehlervektors bis er schließlich zu Null wird, was bedeutet, dass das System inzwischen vollständig angeregt und somit vollständig identifiziert wurde.

Theorem 5.1: Adaptiver Regler

Der Vorteil des adaptiven Konzeptes besteht darin, dass nur so viel Systemdynamik identifiziert werden muss, wie durch das Wunschregelverhalten durch das Sollsignal angeregt wird. In anderen Worten muss nur so viel Information identifiziert werden, wie zum momentanen Regeln des Systems notwendig ist.

Entsprechend dieser Überlegungen müsste stets ein stabiler Regler vorliegen, der trotz unbekannter Systemparameter ein gutes Regelverhalten zeigt und parallel zum Regelvorgang das System entsprechend der Anregung des Systems ausreichend identifiziert – dies soll in den nächsten Kapiteln näher untersucht werden.

Auf der Grundlage dieser Erkenntnisse ist nun ein Algorithmus zu finden, der, wie oben angedeutet, zu jedem Zeitpunkt k für den aktuellen Regressionsvektor $\underline{x}[k-r+1]$ und Ausgangswert $y[k]$ einen Parametervektor $\hat{\underline{\theta}}[k]$ bestimmt, der bei gleichbleibender Anregung, d.h. der Regressionsvektor steht senkrecht auf dem Parameterfehlervektor ($\underline{x}[\cdot] \perp \tilde{\underline{\theta}}[k]$), zu einem Identifikationsfehler $\varepsilon[\cdot] = 0$ führt.

5.2.1 Projektionsalgorithmus

Das Prinzip der Identifikation lässt sich sehr anschaulich mit dem Projektionsalgorithmus erklären. Man bezieht sich im Folgenden auf das Strecken-Modell (5.25). Da zum Zeitpunkt k sowohl der Ausgang $y[k]$ als auch der Regressionsvektor $\underline{x}[k-r+1]$ durch Messung bekannt sind, ist eine Aussage über den zu identifizierenden unbekanntem Systemparametervektor $\underline{\theta}_0$ möglich. Die Gleichung (5.25) entspricht mathematisch gesehen einer Hyperebenengleichung:

$$H = \{ \underline{z} \mid y[k] = \underline{z}^T \underline{x}[k-r+1] \} \quad (5.29)$$

Alle Punkte \underline{z} , die die Gleichung (5.29) erfüllen, liegen in der Hyperebene, deren Abstand vom Ursprung durch $y[k]$ bestimmt wird und dessen Normalenvektor $\underline{x}[k-r+1]$ ist. Ein einziger Punkt $\underline{z} = \underline{\theta}_0$ der Ebene entspricht dem wahren Parametervektor; jedoch führen alle anderen Parametervektoren $\underline{\theta} = \underline{z}$ für diese Konstellation von Ein- Ausgangswerten, beschrieben durch den Regressionsvektor $\underline{x}[k-r+1]$, zu dem selben Ausgangswert $y[k]$ wie das Strecken-Modell (5.25) des realen Systems. Es wird nun von all den möglichen Parametervektoren \underline{z} ein Schätzwert $\hat{\underline{\theta}}[k]$ ausgewählt. Geht man davon aus, dass sich der Regressionsvektor, wie einleitend beschrieben, innerhalb eines Abtastschrittes von $\underline{x}[k-r+1]$ auf $\underline{x}[k-r+2]$ nicht zu sehr ändert bzw. nur bereits identifizierte Änderungen vollzieht, bei denen gemäß Gleichung (5.28) $\underline{x}[k-r+2] \perp \tilde{\underline{\theta}}[k]$ gilt, so wird der neue Parametervektor $\hat{\underline{\theta}}[k]$ zu einem Identifikationsfehler $\varepsilon[\cdot] \approx 0$ bzw. $\varepsilon[\cdot] = 0$ führen.

Von den möglichen Vektoren \underline{z} der Hyperebene H wird durch den Projektionsalgorithmus der Schätzwert $\hat{\underline{\theta}}[k] \in H$ mit dem geringsten Abstand zum zuletzt geschätzten Parametervektor $\hat{\underline{\theta}}[k-1]$ ausgewählt. Es muss hierzu das Minimum von

$$J = \frac{1}{2} \left\| \hat{\underline{\theta}}[k] - \hat{\underline{\theta}}[k-1] \right\|^2$$

unter der Nebenbedingung, dass $\hat{\underline{\theta}}[k]$ die Ebenengleichung (5.29) erfüllt, berechnet werden. Dies kommt einer orthogonalen Projektion auf die Hyperebene H gleich, womit der Name des Algorithmus erklärt ist.

Extremwertuntersuchungen mit Nebenbedingungen können mit Hilfe des Lagrange-Multiplikators durchgeführt werden. Die Lagrange Hilfsfunktion lautet:

$$L \left[\hat{\underline{\theta}}[k], \lambda \right] = \frac{1}{2} \left\| \hat{\underline{\theta}}[k] - \hat{\underline{\theta}}[k-1] \right\|^2 + \lambda \underbrace{\left(y[k] - \hat{\underline{\theta}}[k]^T \underline{x}[k-r+1] \right)}_{\text{homogene NB}}$$

Für die Minimumsuche bildet man $\nabla L \left[\hat{\underline{\theta}}[k], \lambda \right] = \underline{0}$, womit zwei Gleichungssysteme resultieren:

$$\hat{\underline{\theta}}[k] - \hat{\underline{\theta}}[k-1] - \lambda \underline{x}[k-r+1] = \underline{0} \quad (5.30)$$

$$y[k] - \hat{\underline{\theta}}[k]^T \underline{x}[k-r+1] = 0 \quad (5.31)$$

Löst man nun Gleichung (5.30) nach $\hat{\underline{\theta}}[k]$ auf und setzt den Ausdruck in (5.31) ein, so lässt sich mit der neu gewonnenen Gleichung das λ in (5.30) ersetzen. Das Ergebnis ist der Projektionsalgorithmus, mit dem zu jedem Zeitschritt eine Aktualisierung des Parametervektors durchgeführt werden kann, so dass ein Identifikationsfehler $\varepsilon[\cdot] \approx 0$ durch ständige Adaption von Beginn an erreicht werden kann:

$$\hat{\underline{\theta}}[k] = \hat{\underline{\theta}}[k-1] + \frac{\underline{x}[k-r+1]}{\underline{x}[k-r+1]^T \underline{x}[k-r+1]} \underbrace{\left(y[k] - \hat{\underline{\theta}}[k-1]^T \underline{x}[k-r+1] \right)}_{\varepsilon[k]} \quad (5.32)$$

Die geometrische Interpretation des Projektionsalgorithmus ist in Abbildung 5.1 für einen zweidimensionalen Fall zu sehen. Es sind für drei Abtastzeitpunkte ($k-1, k, k+1$) die Hyperebenen $H[\cdot]$ mit ihren senkrecht stehenden Regressionsvektoren $\underline{x}[\cdot]$ als Normalenvektoren gemäß Gleichung (5.29) eingezeichnet. Da der Parametervektor $\underline{\theta}_0$ die wirklichen Systemparameter enthält und folglich $\underline{\theta}_0$ die Gleichung (5.29) zu jedem beliebigen Zeitpunkt und bei jedem beliebigen Regressionsvektor $\underline{x}[\cdot]$ erfüllt, müssen die Hyperebenen $H[\cdot]$ stets durch den Punkt $\underline{\theta}_0$ verlaufen und diesen somit enthalten. Entsprechend obiger Überlegungen erfüllen zum Zeitpunkt k alle Parametervektoren $\hat{\underline{\theta}}[k]$ in der Hyperebene $H[k]$ in Verbindung mit dem Regressionsvektor $\underline{x}[k-r+1]$ die Modellgleichung (5.25), d.h. führen zu dem gleichen Ausgangswert $y[k]$. Geometrisch ist dieser Sachverhalt deutlich in Abbildung 5.1 zu erkennen. Betrachtet man den Parameterfehlervektor $\tilde{\underline{\theta}}[k] = \underline{\theta}_0 - \hat{\underline{\theta}}[k]$, so steht dieser senkrecht auf dem Regressionsvektor $\underline{x}[k-r+1]$, womit das Skalarprodukt zwischen beiden Null wird; dies gilt für alle Vektoren \underline{z} der Ebene $H[k]$. Folglich hat der Parameterfehler zum Zeitpunkt k keine Auswirkung auf den Ausgang – sowohl $\underline{\theta}_0$ als auch alle $\hat{\underline{\theta}}[k] \in H$ ergeben in Verbindung mit $\underline{x}[k-r+1]$ den Ausgangswert $y[k]$. Würde der Regressionsvektor zum nächsten Zeitpunkt $k+1$ unverändert bleiben bzw. nur seinen Betrag und nicht die Richtung verändern, d.h. sich in keiner oder nur einer Dimension bewegen (gedrehtes kartesisches Koordinatensystem oder Polarkoordinatensystem), wäre das entsprechende stationäre bzw. beschränkt dynamische Systemverhalten durch den geschätzten

Es ist in der Grafik weiter gut zu erkennen, dass eine kleine Richtungsveränderung des Regressionsvektors zu einer vernachlässigbaren Komponente von $\tilde{\hat{\theta}}[k]$ parallel zu $\underline{x}[k-r+1]$ führt, d.h. das entsprechende Skalarprodukt zur Berechnung des Identifikationsfehlers ergibt nur einen sehr kleinen Wert: $\varepsilon[k+1] \approx 0$.

Der Projektionsalgorithmus wählt als neuen Parametervektor $\hat{\theta}[k]$ nach Definition innerhalb aller möglichen Vektoren $\underline{z}[k]$ der Hyperebene $H[k]$ den mit dem kleinsten Abstand zum zuletzt gültigen Parametervektor $\hat{\theta}[k-1]$ aus: geometrisch bedeutet dies, dass ein Lot durch $\hat{\theta}[k-1]$ auf die Ebene $H[k]$ gefällt wird, um den neuen Schätzwert $\hat{\theta}[k]$ zu erhalten. Für die Richtung dieser orthogonalen Projektion kann $\underline{x}[k-r+1]$ verwendet werden, da dieser den Normalenvektor der Hyperebene darstellt und somit senkrecht auf dieser steht. Der gesuchte Projektionsvektor zwischen $\hat{\theta}[k-1]$ und $\hat{\theta}[k]$ ergibt sich demnach durch eine orthogonale Projektion des Parameterfehlervektors $\tilde{\hat{\theta}}[k-1]$ auf den Regressionsvektor $\underline{x}[k-r+1]$. Im rechtwinkligen Dreieck gilt

$$\cos \varphi = \frac{\|\hat{\theta}[k] - \hat{\theta}[k-1]\|}{\|\tilde{\hat{\theta}}[k-1]\|} \quad (5.33)$$

und das Skalarprodukt ist wie folgt definiert:

$$\tilde{\hat{\theta}}[k-1]^T \underline{x}[k-r+1] = \cos \varphi \cdot \|\tilde{\hat{\theta}}[k-1]\| \cdot \|\underline{x}[k-r+1]\| \quad (5.34)$$

Nachdem die Gleichungen (5.33) und (5.34) ineinander eingesetzt wurden, kann nach dem Betrag des gesuchten Projektionsvektors $\|\hat{\theta}[k] - \hat{\theta}[k-1]\|$ aufgelöst werden. Skaliert man mit diesem den normierten Regressionsvektor $\underline{x}[k-r+1]$, so resultiert der Projektionsvektor:

$$\hat{\theta}[k] - \hat{\theta}[k-1] = \frac{\tilde{\hat{\theta}}[k-1]^T \underline{x}[k-r+1]}{\underline{x}[k-r+1]^T \underline{x}[k-r+1]} \cdot \underline{x}[k-r+1]$$

Setzt man $\tilde{\hat{\theta}}[k-1] = \underline{\theta}_0 - \hat{\theta}[k-1]$ und löst nach $\hat{\theta}[k]$ auf, so ergibt sich über die geometrische Betrachtung ebenfalls der Projektionsalgorithmus:

$$\begin{aligned} \hat{\theta}[k] &= \hat{\theta}[k-1] + \frac{\underline{\theta}_0^T \underline{x}[k-r+1]}{\underline{x}[k-r+1]^T \underline{x}[k-r+1]} \cdot \underline{x}[k-r+1] \\ &\quad - \frac{\hat{\theta}[k-1]^T \underline{x}[k-r+1]}{\underline{x}[k-r+1]^T \underline{x}[k-r+1]} \cdot \underline{x}[k-r+1] \end{aligned} \quad (5.35)$$

Die orthogonale Projektion des zweiten und dritten Summanden ist in Abbildung 5.1 durch die gestrichelten Linien angedeutet. Nach Anwendung der Gleichung (5.25) ist die direkte Übereinstimmung von (5.35) mit (5.32) zu erkennen.

Sobald der Regressionsvektor in einem gedrehten Koordinatensystem in mindestens einer Dimension unverändert bleibt, wird der entsprechende dynamische Teil des Systems nicht mehr angeregt, womit dieser durch den zuletzt geschätzten Parametervektor $\hat{\theta}[k] \neq \underline{\theta}_0$ ausreichend beschrieben wird, bis erneut eine Anregung auftritt. Für eine Konvergenz zu den wahren Parametern ist daher für höherdimensionale Systeme der Ordnung n eine Anregung in n Dimensionen des Regressionsvektors, d.h. eine Anregung mit n verschiedenen Frequenzen notwendig.

Mit Hilfe der Abbildung 5.1 kann bereits an dieser Stelle eine Aussage über die Stabilität und Parameterkonvergenz des Projektionsalgorithmus getroffen werden. Auf Grund der orthogonalen Projektion von Ebene $H[k-1]$ auf $H[k]$ entsteht generell ein rechtwinkliges Dreieck mit den Ecken $\hat{\underline{\theta}}[k-1]$, $\hat{\underline{\theta}}[k]$ und $\underline{\theta}_0$. Nach Pythagoras ist die Hypotenuse des Dreiecks stets größer (bzw. im Grenzfall gleich) als die Katheten; es gilt:

$$\|\hat{\underline{\theta}}[k]\| \leq \|\hat{\underline{\theta}}[k-1]\| \quad (5.36)$$

Man stellt fest, dass im Laufe des Regelungs- bzw. Identifikationsvorganges der Parameterfehler nie zunimmt – der Projektionsalgorithmus ist stabil.

Im Falle einer sehr langsamen oder fast konstanten Anregung des Systems, d.h. der Regressionsvektor erfährt kaum eine Richtungsänderung, wie es die Abbildung 5.1 beim Übergang von $\underline{x}[k-r]$ auf $\underline{x}[k-r+1]$ darstellen soll, sind die Hyperebenen $H[k-1]$ und $H[k]$ nur gering voneinander verdreht, wodurch sich der geschätzte Parametervektor mit $\hat{\underline{\theta}}[k-1] \approx \hat{\underline{\theta}}[k]$ nur unmerklich an den wahren Parametervektor $\underline{\theta}_0$ annähert und der Parameterfehler $\|\hat{\underline{\theta}}[k-1]\| \approx \|\hat{\underline{\theta}}[k]\|$ daher als unverändert angesehen werden kann. Es findet hiermit zwar keine oder eine nur sehr langsame Identifikation im Sinne der Konvergenz zum wahren Parametervektor $\underline{\theta}_0$ statt, jedoch ist der Identifikationsfehler $\varepsilon[\cdot]$ bei einer nur geringen Änderung des Regressionsvektors zu jedem Zeitpunkt annähernd Null, was einen erfolgreichen Regelvorgang des adaptiven Reglers bei Abwesenheit einer beständigen Systemanregung ermöglichen wird.

Erfährt das System eine beständige Anregung, d.h. hochdynamische Erregung mit einer Vielzahl von Frequenzen (Sprünge, Rauschen), so ändert der Regressionsvektor in kurzer Zeit sehr stark seine Richtung; in Abbildung 5.1 soll dies mit dem Übergang von $\underline{x}[k-r+1]$ auf $\underline{x}[k-r+2]$ gezeigt werden. Betrachtet man das rechtwinklige Dreieck, so stellt man eine wesentlich stärkere Abnahme des Betrages des Parameterfehlervektors von $\|\hat{\underline{\theta}}[k]\|$ auf $\|\hat{\underline{\theta}}[k+1]\|$ fest. Liegt demnach eine beständige Anregung des Systems vor, wird der geschätzte Parametervektor $\hat{\underline{\theta}}[k+i]$ mit zunehmendem i schnell zu dem wahren Parametervektor $\underline{\theta}_0$ konvergieren.²⁾ Die Identifikationsfehler $\varepsilon[\cdot]$ sind zwar in einer kurzen transienten Phase groß, jedoch werden schnell die richtigen Parameter gefunden, was wiederum $\varepsilon[\cdot] = 0$ bedeutet und folglich zu einem guten Regelverhalten führen wird.

Es wurden die beiden Extremfälle „annähernd keine Anregung“ und „beständige Anregung“ diskutiert. Im ersten Fall dauert es sehr lange, bis die angeregte Dynamik durch den geschätzten Parametervektor identifiziert ist, jedoch wird durch die ständige Adaption $\varepsilon[\cdot] \approx 0$ gewährt, bis schließlich $\varepsilon[\cdot] = 0$ erreicht ist. Im Beispiel des Systems erster Ordnung in Abbildung 5.1 liegt dann eine abgeschlossene Identifikation mit $\hat{\underline{\theta}}[\cdot] = \underline{\theta}_0$ vor. Bei Systemen höherer Ordnung ist es möglich, dass nur ein Teil der Systemdynamik angeregt wurde; dann gilt das Gesamtsystem mit $\hat{\underline{\theta}}[\cdot] \neq \underline{\theta}_0$ als nicht identifiziert, dennoch resultiert $\varepsilon[\cdot] = 0$. Dies besagt lediglich, dass die angeregte Dynamik als vollständig identifiziert gilt. Sobald

²⁾ Im Falle eines Systems erster Ordnung mit einem zweidimensionalen Regressionsvektor ist eine Anregung mit lediglich einem Sinussignal beliebiger Frequenz ausreichend, um dieses eindeutig zu identifizieren. Dies bestätigt die Abbildung 5.1 mit der Darstellung eines rotierenden Regressionsvektors zweiter Ordnung. Bei jeder noch so kleinen Richtungsänderung findet eine Annäherung an den richtigen Parameterwert statt. Je größer die Richtungsänderung des Regressionsvektors bzw. je schneller dieser rotiert, desto schneller konvergieren die Parameter.

sich die Anregung ändert, ergibt sich erneut $\varepsilon[\cdot] \neq 0$. Ist die Anregung wieder dem ersten Extremfall zuzuordnen, zeigt sich in der transienten Phase $\varepsilon[\cdot] \approx 0$, bis nach längerer Zeit wieder $\varepsilon[\cdot] = 0$ gilt. Im zweiten Extremfall „beständige Anregung“ ist $\varepsilon[\cdot] \neq 0$, bis nach bereits kurzer Zeit $\varepsilon[\cdot] = 0$ erreicht wird. In beiden Fällen gilt $\varepsilon[\cdot] \rightarrow 0$ und in langen transienten Phasen gilt $\varepsilon[\cdot] \approx 0$. Dies lässt darauf schließen, dass bis auf kurze Zeiten zu Beginn einer starken Anregung mit dem geschätzten Parametervektor $\hat{\underline{\theta}}[\cdot]$ das angeregte Systemverhalten stets ausreichend bekannt ist, womit eine erfolgreiche stabile Regelung möglich sein muss, sofern der Regler eine Parameteranpassung ermöglicht.

In Bezug auf physikalisch sinnvolle Erregungen des Systems (Sinus, Rampe, gefilterter Sprung) im Zuge einer Regelung stellt man fest, dass eine Konvergenz zu den wahren Parameterwerten gar nicht oder nur sehr langsam stattfindet, d.h. die entsprechende Anregung mehr dem ersten Extremfall zuzuordnen ist. Aus diesem Grund muss während des Regelvorganges eines unbekanntes Systems stets die Möglichkeit einer Adaption der Parameter zum Erreichen eines Identifikationsfehlers $\varepsilon[\cdot] \rightarrow 0$ gewährt werden, was die Notwendigkeit eines adaptiven Reglers zeigt.

Um den vorgestellten Projektionsalgorithmus für die Realisierung einer Identifikation verwenden zu können, sind zwei Modifikationen notwendig. Betrachtet man den Nenner des zweiten Summanden in Gleichung (5.32), so fällt auf, dass bei einem Betrag Null des Regressionsvektors eine Division durch Null stattfindet. Dies kann verhindert werden, wenn eine kleine Konstante $c > 0$ dem Nenner addiert wird – hiermit entsteht zwar in der Projektion ein Fehler, der jedoch gering ist und wie in der weiteren Beweisführung gezeigt wird, zu keiner negativen Auswirkung führt. Die zweite Modifikation betrifft die Dynamik des Projektionsalgorithmus. Durch Einführung einer Konstante η mit

$$0 < \eta < 2 \quad (5.37)$$

im Zähler des zweiten Summanden in Gleichung (5.32) wird die Projektionsweite in Richtung der neuen Hyperebene beeinflusst.

Für $\eta = 1$ findet die Projektion entsprechend obiger Darstellung direkt auf die nächste Hyperebene statt, sobald eine Änderung des Regressionsvektors auftritt. Ändert sich beispielsweise der Regressionsvektor von $\underline{x}[k-r]$ auf $\underline{x}[k-r+1]$, so wird ausgehend vom alten Schätzwert $\hat{\underline{\theta}}[k-1]$ direkt auf die Hyperebene $H[k]$ projiziert. Würde im nächsten Schritt der Regressionsvektor unverändert bleiben, ergäbe sich ein Identifikationsfehler $\varepsilon[k+1] = 0$. Mit $\eta = 1$ wird der Projektionsalgorithmus daher im Fall „annähernd keine Anregung“ maximal schnell einen Identifikationsfehler Null erzeugen. Würde im beschriebenen Szenario $\eta < 1$ bzw. $\eta > 1$ gelten, so fände ausgehend vom alten Schätzwert $\hat{\underline{\theta}}[k-1]$ eine Projektion vor bzw. hinter die Hyperebene $H[k]$ statt – würde in diesem Fall im nächsten Schritt der Regressionsvektor unverändert bleiben, ergäbe sich ein Identifikationsfehler $\varepsilon[k+1] \neq 0$. In jedem folgenden Schritt nähert sich der Schätzwert $\hat{\underline{\theta}}[\cdot]$ bei gleichbleibendem Regressionsvektor an die Hyperebene an, wodurch mit jedem Schritt der Identifikationsfehler kleiner wird (ein Schätzwert auf der Hyperebene führt zu einem Identifikationsfehler Null). Es ist nun vom Betrag von η abhängig, wie schnell eine Abnahme des Identifikationsfehlers stattfindet. Effektiv werden mit $\eta < 1$ nur kleine Änderungen im Betrag des geschätzten Parametervektors $\hat{\underline{\theta}}[k-1]$ pro Zeitschritt erlaubt. Die Wahl von $\eta \neq 1$ ist daher auf Grund längerer Konvergenzzeiten im Fall „annähernd keine Anregung“ bei Abwesenheit von Störungen ungeeignet.

Für den Fall „beständige Anregung“ ergibt sich hingegen mit $\eta < 1$ ein Vorteil: wie oben dargestellt, findet bei einer beständigen Anregung sehr schnell eine Konvergenz zu den wahren Parametern statt, jedoch ergibt sich unter Umständen in dieser transienten Phase ein großer schwankender Identifikationsfehler und folglich großer Regelfehler mit unruhigem Regelverhalten. Nimmt man beispielsweise in Abbildung 5.1 an, dass durch eine entsprechende Anregung der Regressionsvektor ständig zwischen $\underline{x}[k - r + 1]$ und $\underline{x}[k - r + 2]$ wechselt, nimmt bei einer Projektion mit $\eta = 1$ der Betrag des Parameterfehlervektors $\hat{\underline{\theta}}[\cdot]$ sehr schnell ab, jedoch ergibt sich dabei auch ein größerer Identifikationsfehler. Nach kurzer Zeit sind die wahren Parameter $\underline{\theta}_0$ erreicht und es stellt sich $\varepsilon[\cdot] = 0$ ein. Würde in dem beschriebenen Fall der im Wechsel auftretenden Regressionsvektoren bzw. Hyperebenen beispielsweise $\eta = 0.5$ gelten, so würde nur zur Hälfte in die Richtung der neuen Hyperebenen projiziert werden, womit der beruhigte neu geschätzte Parametervektor das Systemverhalten beim ständigen Wechsel zwischen beiden Regressionsvektoren besser beschreibt – in der transienten Phase ergäbe sich ein Identifikationsfehler, der nur halb so groß ist, jedoch verlängert sich die Konvergenzzeit zu den wahren Parametern. Durch die Anpassung von η wird das Regelverhalten in der transienten Phase im Fall „beständige Anregung“ beruhigt und dadurch verbessert, womit im Verhalten ein Übergang zum Fall „annähernd keine Anregung“ stattfindet und der Identifikationsfehler insgesamt nur noch kleinere Werte annimmt. Die Konvergenzzeiten verlängern sich jedoch in beiden Fällen.

Durch die Wahl $\eta \ll 1$ wird verhindert, dass sich durch eine beständige Anregung ein bereits gut gewählter Schätzwert der Parameter zu sehr verändert. Liegt beispielsweise Untermodellierung oder verrauschte Messsignale vor, würde der sich dadurch verändernde Regressionsvektor nicht das korrekte Systemverhalten widerspiegeln und folglich zu einer falschen Änderung der Parameterschätzwerte führen. Das daraus resultierende schlechtere bzw. unruhigere Regelverhalten wird durch eine Schrittweite $\eta \ll 1$ unterbunden, da nur wenig in die neue Richtung projiziert wird. Diese kleine Änderung der Schätzwerte erlaubt jedoch im Mittel eine Annäherung an die wahren Parameter, welche zwar langsamer erreicht werden, das System sich jedoch beruhigt zeigt. Somit kommt die Wahl $\eta < 1$ einer Filterung der Schätzwerte gleich, d.h. die Parameteradaptation weist ein beruhigtes Verhalten auf. Damit, wie im Folgenden bewiesen wird, die Stabilität des Systems trotz der Anpassung der Schrittweite η gewährleistet bleibt, sind die Grenzen in (5.37) einzuhalten. Die modifizierte Form des *Projektionsalgorithmus* lautet:

$$\begin{aligned} \hat{\underline{\theta}}[k] &= \\ &= \hat{\underline{\theta}}[k - 1] + \eta \cdot \frac{\underline{x}[k - r + 1]}{c + \underline{x}[k - r + 1]^T \underline{x}[k - r + 1]} \left[y[k] - \hat{\underline{\theta}}[k - 1]^T \underline{x}[k - r + 1] \right] \\ &= \hat{\underline{\theta}}[k - 1] + \eta \cdot \frac{\underline{x}[k - r + 1]}{c + \underline{x}[k - r + 1]^T \underline{x}[k - r + 1]} \cdot \varepsilon[k] \end{aligned} \quad (5.38)$$

Es folgen nun wichtige Beweise (vgl. [55]), deren Relevanz sich in der Stabilitätsuntersuchung des geschlossenen adaptiven Regelkreises zeigen wird. Für die Untersuchung des linearen Projektionsalgorithmus auf Stabilität muss auf eine Methode zurückgegriffen werden, die auch für zeitvariante bzw. nichtlineare Systeme verwendet werden kann. Damit dürfen die Stabilitätsaussagen der Identifikation auch für die ganzheitliche Stabilitätsuntersuchung des zeitvarianten adaptiven Reglers in Kapitel 5.3.2 Anwendung fin-

den. Aus diesem Grund wird die Stabilitätsanalyse nun mit der nichtlinearen Lyapunov-Methode durchgeführt.

Der Projektionsalgorithmus (5.38) wird für das weitere Vorgehen umgeschrieben, so dass eine Untersuchung des Betrages des Parameterfehlervektors $\tilde{\theta}[k] = \theta_0 - \hat{\theta}[k]$ möglich ist; dazu subtrahiert man auf jeder Seite θ_0 , multipliziert die Gleichung mit -1 und stellt die Lyapunov-Funktion

$$V[k] = \tilde{\theta}[k]^T \tilde{\theta}[k] = \left\| \tilde{\theta}[k] \right\|^2 \quad (5.39)$$

auf:

$$\begin{aligned} V[k] &= \left(\tilde{\theta}[k-1] - \eta \cdot \frac{\underline{x}[k-r+1] \cdot \varepsilon[k]}{c + \underline{x}[k-r+1]^T \underline{x}[k-r+1]} \right)^T \\ &\quad \cdot \left(\tilde{\theta}[k-1] - \eta \cdot \frac{\underline{x}[k-r+1] \cdot \varepsilon[k]}{c + \underline{x}[k-r+1]^T \underline{x}[k-r+1]} \right) \\ &= \underbrace{\tilde{\theta}[k-1]^T \tilde{\theta}[k-1]}_{V[k-1]} - 2\eta \cdot \frac{\overbrace{\tilde{\theta}[k-1]^T \underline{x}[k-r+1]}^{\varepsilon[k]} \cdot \varepsilon[k]}{c + \underline{x}[k-r+1]^T \underline{x}[k-r+1]} + \\ &\quad + \eta^2 \cdot \frac{\underline{x}[k-r+1]^T \underline{x}[k-r+1] \cdot \varepsilon[k]^2}{(c + \underline{x}[k-r+1]^T \underline{x}[k-r+1])^2} \end{aligned}$$

Es resultiert die Differenzgleichung der Lyapunov-Funktion:

$$\begin{aligned} V[k] - V[k-1] &= \left\| \tilde{\theta}[k] \right\|^2 - \left\| \tilde{\theta}[k-1] \right\|^2 \\ &= \underbrace{\eta \left(-2 + \eta \cdot \frac{\underline{x}[k-r+1]^T \underline{x}[k-r+1]}{c + \underline{x}[k-r+1]^T \underline{x}[k-r+1]} \right)}_{\kappa[k-r+1]} \cdot \frac{\varepsilon[k]^2}{\underbrace{c + \underline{x}[k-r+1]^T \underline{x}[k-r+1]}_{\geq 0}} \end{aligned} \quad (5.40)$$

$$\kappa[\cdot] < 0 \quad \text{für } 0 < \eta < 2 \quad \wedge \quad c > 0 \quad (5.41)$$

Die rechte Seite der Gleichung (5.40) ist unter der Bedingung (5.41) stets negativ oder Null. Daraus folgt, dass die Differenzgleichung der Lyapunov-Funktion $V[k] - V[k-1]$ unter der Bedingung (5.41) negativ semidefinit ist. Dies hat zur Konsequenz, dass der Parameterfehler $\|\tilde{\theta}[\cdot]\|$ im Laufe der Identifikation stets gleich bleibt oder abnimmt – der Parameterfehler wächst unter keinen Umständen an, selbst wenn der Regressionsvektor, d.h. sämtliche Ein- und Ausgänge unbeschränkt anwachsen:

$$\left\| \tilde{\theta}[k] \right\| \leq \left\| \tilde{\theta}[k-1] \right\| \leq \left\| \tilde{\theta}[0] \right\| \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (5.42)$$

Damit ist die bereits geometrisch getroffene Aussage in Gleichung (5.36) bestätigt. Ebenso ist gezeigt, dass die Einführung der Schrittweite η und der Konstante c unter der Bedingung (5.41) keine destabilisierende Eigenschaft mit sich führt.

Summiert man alle Änderungen $\|\tilde{\theta}[k]\|^2 - \|\tilde{\theta}[k-1]\|^2$ des quadrierten Parameterfehlervektors der Gleichungen (5.40) von Beginn an ($k = 1$) bis zum Zeitpunkt k auf, so ergibt sich folgende Gleichung:

$$\|\tilde{\theta}[k]\|^2 = \|\tilde{\theta}[0]\|^2 + \sum_{i=1}^k \kappa[i-r+1] \cdot \frac{\varepsilon[i]^2}{c + \underline{x}[i-r+1]^T \underline{x}[i-r+1]} \quad (5.43)$$

Mit der Tatsache, dass die Norm eines Vektors ($\|\tilde{\theta}[k]\|^2 = \tilde{\theta}^T[k] \tilde{\theta}[k] \geq 0$) nach Definition nie negativ sein kann, folgt mit der Bedingung (5.41), dass der zweite Summand der Gleichung (5.43) beschränkt sein muss:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k \frac{\varepsilon[i]^2}{c + \underline{x}[i-r+1]^T \underline{x}[i-r+1]} < \infty \quad (5.44)$$

Das hat zur Konsequenz, dass der Identifikationsfehler $\varepsilon[\cdot]$, sollte er tatsächlich unbegrenzt anwachsen können, nie schneller anwächst, als der Betrag des Regressionsvektors $\underline{x}[\cdot]$:

$$|\varepsilon[k]| = O \left[\sup_{\kappa \leq k-r+1} \|\underline{x}[\kappa]\| \right] \quad (5.45)$$

Diese Erkenntnis wird bezüglich der Stabilitätsuntersuchung des geschlossenen Regelkreises von tragender Bedeutung sein.

Aus Gleichung (5.44) folgt direkt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon[k]}{\sqrt{c + \underline{x}[k-r+1]^T \underline{x}[k-r+1]}} = 0 \quad (5.46)$$

Hiermit ist gezeigt, dass bei beschränktem Regressionsvektor der Identifikationsfehler $\varepsilon[\cdot]$ stets zu Null wird, unabhängig von der Art der Anregung des Systems über den Regressionsvektor – sowohl für den Fall „annähernd keine Anregung“ als auch den Fall „beständige Anregung“ stellt sich ein Identifikationsfehler Null ein. Dies bestätigt die vorangegangenen Überlegungen zum Identifikationsalgorithmus: sobald die angeregte Systemdynamik identifiziert ist, kommt der Identifikationsprozess zum Erliegen ($\varepsilon[\cdot] = 0$). Wird ein weiterer noch nicht identifizierter Teil der Systemdynamik angeregt, ergibt sich erneut ein Identifikationsfehler ungleich Null, bis nach einer bestimmten Identifikationszeit dieser wieder zu Null wird. $\varepsilon[\cdot] = 0$ besagt somit nicht, dass der wahre Parametervektor θ_0 gefunden wurde. Dies ist erst der Fall, wenn die vollständige Systemdynamik angeregt wurde, d.h. effektiv eine beständige Anregung des Systems stattfand. An dieser Stelle ist weiter anzumerken, dass bei Untermodellierung des Systems oder bei verrauschten Messsignalen eine Konvergenz des geschätzten Parametervektors $\hat{\theta}[\cdot]$ zu konstanten Parametern verhindert wird und folglich für den Identifikationsfehler in Gleichung (5.46) nur $\varepsilon[\cdot] \approx 0$ gilt. Wie zuvor beschrieben, kann jedoch über die Schrittweite mit $\eta < 1$ der Identifikationsprozess beruhigt werden, sodass trotz Untermodellierung oder Rauschen $\varepsilon[\cdot] \rightarrow 0$ mit $\eta \rightarrow 0$ erreicht werden kann. Im Anschluss wird bewiesen, dass für $\varepsilon[\cdot] \rightarrow 0$ eine Konvergenz des geschätzten Parametervektors $\hat{\theta}[\cdot]$ zu konstanten Parametern stattfindet:

Bildet man den Betrag des Abstandsvektors zweier zeitlich benachbarter Schätzwerte über die Gleichung (5.38)

$$\begin{aligned} \left\| \hat{\underline{\theta}}[k] - \hat{\underline{\theta}}[k-1] \right\| &= \left\| \eta \cdot \frac{\underline{x}[k-r+1] \cdot \varepsilon[k]}{c + \underline{x}[k-r+1]^T \underline{x}[k-r+1]} \right\| \\ &= \sqrt{\eta^2 \cdot \frac{\underline{x}[k-r+1]^T \underline{x}[k-r+1] \cdot \varepsilon[k]^2}{(c + \underline{x}[k-r+1]^T \underline{x}[k-r+1])^2}} \end{aligned}$$

und stellt des Weiteren fest, dass

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\underline{x}[k-r+1]^T \underline{x}[k-r+1] \cdot \varepsilon[k]^2}{(c + \underline{x}[k-r+1]^T \underline{x}[k-r+1])^2}} &< \sqrt{\frac{(c + \underline{x}[k-r+1]^T \underline{x}[k-r+1]) \cdot \varepsilon[k]^2}{(c + \underline{x}[k-r+1]^T \underline{x}[k-r+1])^2}} \\ &= \frac{\varepsilon[k]}{\sqrt{c + \underline{x}[k-r+1]^T \underline{x}[k-r+1]}} \end{aligned}$$

gilt, so kann mit Hilfe der Gleichung (5.44) folgende Aussage getroffen werden:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k \left\| \hat{\underline{\theta}}[i] - \hat{\underline{\theta}}[i-1] \right\| < \infty$$

Wird die Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\begin{aligned} \left\| \hat{\underline{\theta}}[i] - \hat{\underline{\theta}}[i-r] \right\|^2 &= \\ &= \left\| \hat{\underline{\theta}}[i] - \hat{\underline{\theta}}[i-1] + \hat{\underline{\theta}}[i-1] - \hat{\underline{\theta}}[i-2] + \dots + \hat{\underline{\theta}}[i-r+1] - \hat{\underline{\theta}}[i-r] \right\|^2 \\ &\leq \left\| \hat{\underline{\theta}}[i] - \hat{\underline{\theta}}[i-1] \right\|^2 + \left\| \hat{\underline{\theta}}[i-1] - \hat{\underline{\theta}}[i-2] \right\|^2 + \dots + \left\| \hat{\underline{\theta}}[i-r+1] - \hat{\underline{\theta}}[i-r] \right\|^2 \end{aligned}$$

darauf angewendet, resultiert

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k \left\| \hat{\underline{\theta}}[i] - \hat{\underline{\theta}}[i-r] \right\| < \infty$$

und daraus die für die spätere Regelkreisstabilitätsuntersuchung wichtige Gleichung

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \hat{\underline{\theta}}[k] - \hat{\underline{\theta}}[k-r] \right\| = 0 \quad (5.47)$$

Diese Gleichung besagt, dass der Identifikationsprozess zum Erliegen kommen wird und sich ein konstanter geschätzter Parametervektor $\hat{\underline{\theta}}[\cdot]$ einstellt, der nicht dem wahren Parametervektor $\underline{\theta}_0$ entsprechen muss. Gemäß der Erklärung zu Gleichung (5.46) wird keine Aussage über die Konvergenz zu den wahren Parameterwerten getroffen.

Theorem 5.2: Parameterkonvergenz des Projektionsalgorithmus

Der Projektionsalgorithmus besitzt folgende Eigenschaften:

- Der Parameterfehler $\|\tilde{\underline{\theta}}[\cdot]\|$ nimmt stets ab oder bleibt gleich:

$$\|\tilde{\underline{\theta}}[k]\| \leq \|\tilde{\underline{\theta}}[k-1]\| \leq \|\tilde{\underline{\theta}}[0]\| \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (5.48)$$

- Der Identifikationsfehler $\varepsilon[\cdot]$ wächst nie schneller an, als der Betrag des Regressionsvektors $\underline{x}[\cdot]$:

$$|\varepsilon[k]| = O \left[\sup_{\kappa \leq k-r+1} \|\underline{x}[\kappa]\| \right] \quad (5.49)$$

- Bei beschränktem Regressionsvektor $\underline{x}[\cdot]$ wird der Identifikationsfehler $\varepsilon[\cdot]$ stets zu Null:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon[k]}{\sqrt{c + \underline{x}[k-r+1]^T \underline{x}[k-r+1]}} = 0 \quad (5.50)$$

- Der geschätzte Parametervektor $\hat{\underline{\theta}}[\cdot]$ konvergiert stets gegen einen konstanten Wert:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\hat{\underline{\theta}}[k] - \hat{\underline{\theta}}[k-r]\| = 0 \quad (5.51)$$

Sobald die angeregte Systemdynamik identifiziert ist, kommt der Identifikationsprozess zum Erliegen ($\varepsilon[\cdot] = 0$), womit sich ein konstanter geschätzter Parametervektor $\hat{\underline{\theta}}[\cdot] = \text{const.}$ einstellt.

Der konvergierte Parametervektor $\hat{\underline{\theta}}[\cdot]$ entspricht im Allgemeinen nicht dem wahren Parametervektor $\underline{\theta}_0$. Hierzu ist eine vollständige Anregung der Systemdynamik notwendig.

Der Grundgedanke der adaptiven Regelung konnte mit dem Projektionsalgorithmus als zentrales Element sehr gut und anschaulich erklärt werden; auch die für den Stabilitätsbeweis notwendigen Gleichungen waren sehr einfach aufzustellen und geometrisch zu interpretieren, womit der Projektionsalgorithmus durch seine Einfachheit und Anschaulichkeit überzeugt.

Allgemein gilt, dass eine schnelle Konvergenz zu einem konstanten Parametersatz bzw. zu den wahren Parametern für eine stabile adaptive Regelung nicht notwendig ist, jedoch ergeben sich nur Vorteile, wenn die Parameterwerte möglichst schnell konstant sind bzw. den wahren Werten entsprechen. Je schneller die Konvergenz zu einem konstanten Parametersatz, desto schneller wird der Identifikationsfehler und somit der Regelfehler zu Null, d.h. die transienten Phasen verkürzen sich. Auch ist zu bedenken, dass sich die Konvergenzzeiten weiter erhöhen, sobald ein System hoher Ordnung mit vielen zu schätzenden Parametern vorliegt. Sind zudem Störungen gegenwärtig, so verliert der Projektionsalgorithmus auf Grund seiner geringen Konvergenzgeschwindigkeit an Bedeutung. Durch die Wahl eines kleinen η kann Rauschen der Systemsignale zwar geglättet werden, jedoch wiederum auf Kosten der Konvergenzgeschwindigkeit.

Ein großer Vorteil der Anwendung des Projektionsalgorithmus besteht in der ständigen Reaktionsmöglichkeit auf zeitvariante Parameterschwankungen. Entsprechend der Darstellung in diesem Kapitel ist es möglich, den Identifikationsfehler zu jedem Zeitschritt zu minimieren. Dies gelingt sehr gut für Systeme mit ständig langsam variierenden Parametern

(annähernd keine Anregung durch langsame Parameterschwankungen) oder für Systeme mit kurzzeitig dynamischen Parameteränderungen gefolgt von stückweise konstanten Systemparametern (beständige Anregung), so dass sich eine erfolgreiche Regelung mit einer, je nach Konvergenzeigenschaft des Identifikationsalgorithmus, kurzen bzw. längeren transienten Phase ergibt. Für ständige dynamische Parameterschwankungen steigt jedoch mit zunehmender Zeitvarianz der Identifikationsfehler pro Zeitschritt an. Es zeigt sich zwar eine beständige Anregung durch die schnellen Parameterschwankungen, da sich die wahren Parameter jedoch ebenfalls dynamisch verändern, muss der Identifikationsalgorithmus eine höhere Dynamik als die Parameterschwankungen aufweisen, um ein Nachführen der Parameter noch gewährleisten zu können. Auf Grund der langsamen Konvergenzeigenschaft des Projektionsalgorithmus kann bei ständig dynamisch schwankenden Systemparametern daher keine stabile Regelung mehr gewährleistet werden.

Eine Lösung der dargestellten Probleme bietet der sehr effiziente rekursive Least-Squares-Algorithmus, der im Vergleich zum Projektionsalgorithmus eine sehr hohe Konvergenzgeschwindigkeit ermöglicht.

5.2.2 Rekursiver Least-Squares-Algorithmus (RLS)

Das Prinzip des RLS-Algorithmus kann mit dem sog. *orthogonalisierten Projektionsalgorithmus*

$$\hat{\underline{\theta}}[k] = \hat{\underline{\theta}}[k-1] + \frac{\mathbf{P}[k-r] \underline{x}[k-r+1]}{\underline{x}[k-r+1]^T \mathbf{P}[k-r] \underline{x}[k-r+1]} \cdot \varepsilon[k] \quad (5.52)$$

$$\mathbf{P}[k-r+1] = \mathbf{P}[k-r] - \frac{\mathbf{P}[k-r] \underline{x}[k-r+1] \underline{x}[k-r+1]^T \mathbf{P}[k-r]}{\underline{x}[k-r+1]^T \mathbf{P}[k-r] \underline{x}[k-r+1]} \quad (5.53)$$

erklärt werden. Es fällt die Ähnlichkeit der Form zum Projektionsalgorithmus (5.38) auf, wobei sich nun eine mehrdimensionale Matrix \mathbf{P} an der Stelle der Konstanten η befindet und der Spezialfall $c = 0$ gilt. Da die Schrittweite η jetzt mehrdimensional ist, kann eine elementweise Gewichtung des Regressionsvektors durchgeführt werden, womit eine größere Freiheit einer Projektion interpretiert werden kann – dies macht eine schnellere Konvergenz plausibel. Mit $c = 0$ findet, wie bei der in Abbildung 5.1 dargestellten Grundform (5.32) des Projektionsalgorithmus, eine exakte Projektion statt.

Bezieht man sich noch einmal auf die geometrische Darstellung des Projektionsalgorithmus in Abbildung 5.1, so ist vorstellbar, dass $\hat{\underline{\theta}}[k+1]$ mit $\underline{\theta}_0$ zusammenfällt, wenn $\underline{x}[k-r+2]$ zufällig orthogonal zu $\underline{x}[k-r+1]$ ist; $\hat{\underline{\theta}}[k]$ wird dann direkt auf den Schnittpunkt der Ebenen, d.h. $\underline{\theta}_0$ projiziert. Dies würde im zweidimensionalen bzw. allgemeinen Fall eine Konvergenz nach 2 bzw. n Schritten bedeuten. Man könnte demnach eine beträchtliche Verbesserung des Projektionsalgorithmus erreichen, wenn in eine Richtung projiziert wird, die orthogonal zu den letzten linear unabhängigen Regressionsvektoren ist. Letztendlich ist es die Aufgabe des orthogonalisierten Projektionsalgorithmus, sequentiell bzw. rekursiv ein Gleichungssystem zur Bestimmung dieser Projektionsrichtung mit Betrag zu lösen. Bei n Unbekannten des Parametervektors $\hat{\underline{\theta}}[\cdot]$ bedarf es n linear unabhängiger Gleichungen und somit n linear unabhängiger Regressionsvektoren, um die wahren Werte von $\underline{\theta}_0$ durch eine Linearkombination von geschätzten Parametervektoren $\hat{\underline{\theta}}[\cdot]$ erreichen zu können.

Bezüglich der Konvergenzgeschwindigkeit zu den wahren Werten bedeutet dies, dass so viele Zeitschritte vergehen müssen, bis n linear unabhängige Regressionsvektoren genutzt werden konnten. Bezieht man sich auf die Gleichung (5.52), so repräsentiert der Vektor $\mathbf{P}[k-r] \underline{x}[k-r+1]$ die Komponente des Regressionsvektors $\underline{x}[k-r+1]$, die orthogonal zu den letzten Regressionsvektoren steht, was in [55] bewiesen wird. Die Matrix $\mathbf{P}[k-r]$ ist der dafür notwendige Projektionsoperator, der zur rekursiven Lösung des Gleichungssystems führt. Der Unterschied zwischen dem Projektionsalgorithmus und dem orthogonalisiertem Projektionsalgorithmus ist in Abbildung 5.2 veranschaulicht.

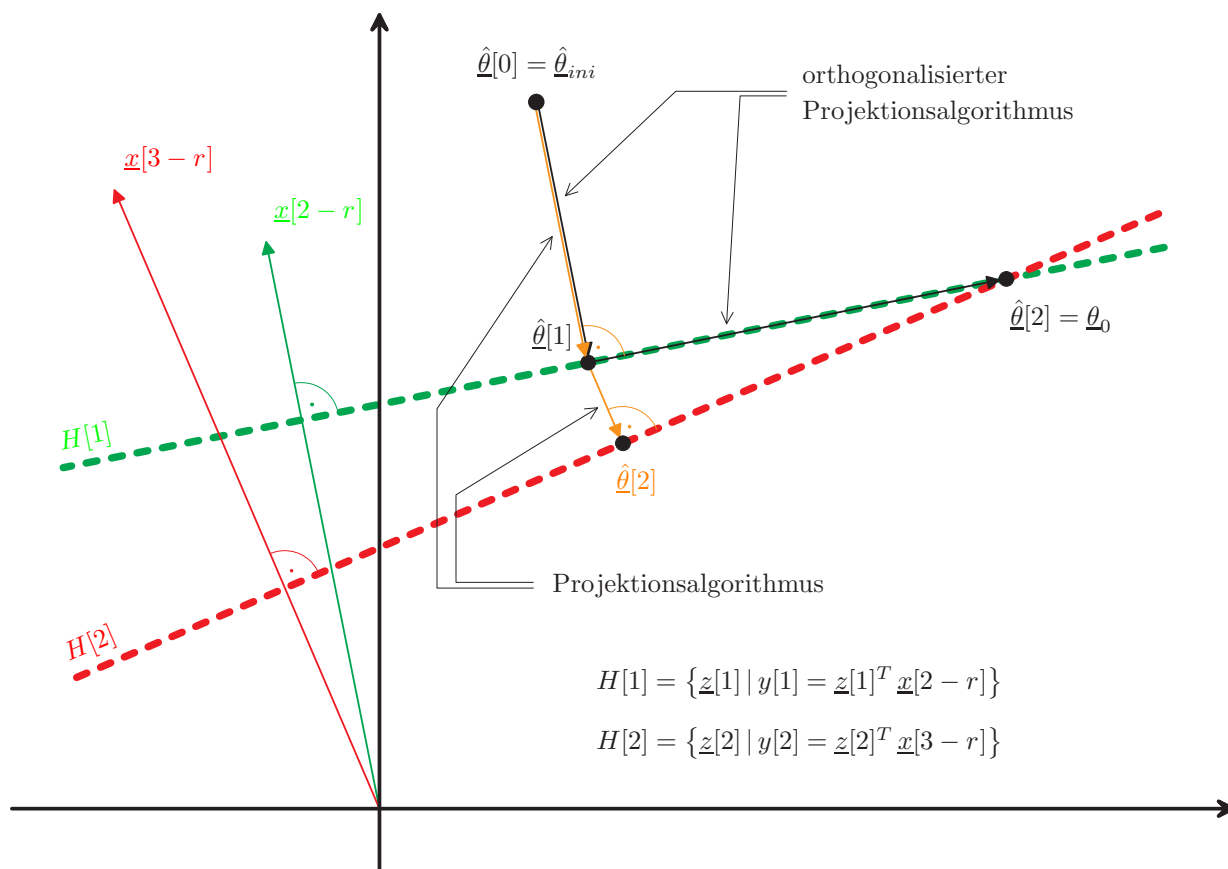


Abbildung 5.2: Vergleich zwischen Projektionsalgorithmus und orthogonalisiertem Projektionsalgorithmus bezogen auf ein System erster Ordnung ($n = 1, r = 1$) mit zweidimensionalem Parametervektor

Damit der orthogonale Projektionsalgorithmus (5.52) entsprechend der Diskussion beim Projektionsalgorithmus (5.38) keine Division durch Null vollzieht, wird im Nenner eine Konstante $c > 0$ hinzugefügt:

$$\hat{\underline{\theta}}[k] = \hat{\underline{\theta}}[k-1] + \frac{\mathbf{P}[k-r] \underline{x}[k-r+1]}{c + \underline{x}[k-r+1]^T \mathbf{P}[k-r] \underline{x}[k-r+1]} \cdot \varepsilon[k] \quad (5.54)$$

Hiermit wird, wie im Falle des Projektionsalgorithmus, eine exakte Projektion verhindert, was dazu führt, dass der wahre Parametervektor $\hat{\underline{\theta}}[\cdot] = \underline{\theta}_0$ bei einer beständigen Anregung noch nicht nach bereits n Schritten gefunden wird, d.h. durch eine Wahl $c > 0$ wird

der Identifikationsalgorithmus beruhigt, was besonders bei verrauschten Messsignalen sowie bei Untermodellierung von Interesse ist. Es hängt nun von der Höhe des Betrages der Initialisierungsmatrix \mathbf{P}_{ini} im Verhältnis zu der Konstanten c ab, wie lange der Identifikationsvorgang bzw. die Konvergenz zu den wahren Parametern dauert. Im Folgenden wird angenommen, dass $c = 1$ gilt. Werden nun sehr große Beträge für die Elemente der Matrix \mathbf{P}_{ini} gewählt, ist die Addition der Konstanten c im Nenner des Algorithmus (5.54) vernachlässigbar, so dass sich ein Verhalten entsprechend des oben diskutierten orthogonalen Projektionsalgorithmus zeigen wird. Je kleiner jedoch der Betrag der Initialisierungsmatrix \mathbf{P}_{ini} , desto mehr ergibt sich eine Abweichung zum orthogonalen Projektionsalgorithmus bzgl. der Konvergenzgeschwindigkeit – es resultiert ein beruhigter, Rauschsignal-optimierter Identifikationsalgorithmus. Da die Matrix $\mathbf{P}[\cdot]$ unabhängig von der Initialisierung \mathbf{P}_{ini} mit Verlauf des Identifikationsvorganges gemäß Gleichung (5.53) stetig abnimmt, findet stets ein Übergang von einem zunächst mehr oder weniger schnellem Identifikationsvorgang (beeinflusst durch \mathbf{P}_{ini}) zu einem Rauschsignal-optimierten Identifikationsvorgang statt, sobald $c > 0$ gewählt wird.

Durch diese Darstellung wird deutlich, dass die Matrix $\mathbf{P}[\cdot]$ als mehrdimensionale Schrittweite interpretiert werden kann. Im Unterschied zu der eindimensionalen Schrittweite η des Projektionsalgorithmus nimmt die Schrittweite, beginnend bei der durch \mathbf{P}_{ini} vorgegebenen Schrittweite, mit zunehmender Zeit ab, womit eine stärker werdende Filterung einhergeht. Liegt bereits ein guter Schätzwert $\hat{\theta}[0] = \hat{\theta}_{ini} \approx \theta_0$ vor, so gewährleistet die Initialisierung von \mathbf{P}_{ini} mit kleinen Werten, d.h. mit einer kleinen Schrittweite, dass der Identifikationsvorgang dieses Vorwissen nutzt und den Initialisierungswert $\hat{\theta}_{ini}$ nur langsam in Richtung des wahren Wertes adaptiert. Besteht hingegen kein Vorwissen, so sollte die Matrix \mathbf{P}_{ini} mit großen Beträgen initialisiert werden, so dass schnell durch einen zunächst aggressiven Identifikationsvorgang mit großer Schrittweite ein das System gut beschreibender Schätzwert vorliegt.

Gemäß dieser Überlegungen entspricht der gesuchte schnelle Rauschsignal-optimierte RLS-Algorithmus einem orthogonalen Projektionsalgorithmus mit $c = \text{konst.}$ Um dies zu zeigen wird im Folgenden der RLS-Algorithmus direkt mit Hilfe der oben dargestellten Eigenschaften abgeleitet. Es ist ein Algorithmus gesucht, der zum einen für alle vergangenen Identifikationsvorgänge nachträglich einen gemeinsamen Schätzwert bestimmt, so dass bei einer beständigen Anregung des Systems eine schnelle Konvergenz nach bereits n Schritten erreicht werden kann. Zum anderen muss der gesuchte Algorithmus auch eine Gewichtung der anfänglichen Parameterschätzwerte $\hat{\theta}_{ini}$ berücksichtigen, so dass Vorwissen eingebracht werden kann und der Identifikationsvorgang dadurch zu beruhigen ist. Die im ersten Punkt geforderte nachträgliche Bestimmung eines gemeinsamen Schätzwertes \underline{z} für die Parametervektoren $\hat{\theta}[i-1]$ mit $i \in \{1, \dots, k\}$ entspricht der Minimierung aller bisherigen Identifikationsfehler $\varepsilon[i] \rightarrow 0$, d.h. der neue Schätzwert $\hat{\theta}[k] = \underline{z}$ wird wie gefordert das gesamte bisher aufgetretene Systemverhalten maximal repräsentiert. Sobald das System vollständig angeregt wurde, liegt durch dieses Vorgehen der wahre Parametervektor vor. Es ist somit eine Minimierung folgender quadratischer Kostenfunktion erforderlich:

$$J(\underline{z}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \left(\underbrace{y[i] - \underline{z}^T \mathbf{x}[i-r+1]}_{\varepsilon[i]} \right)^2 + \frac{1}{2} (\underline{z} - \hat{\theta}_{ini})^T \mathbf{P}_{ini}^{-1} (\underline{z} - \hat{\theta}_{ini}) \quad (5.55)$$

Der erste Summand garantiert, dass bei einer beständigen Anregung des Systems bereits nach n Schritten der wahre Parameterwert $\hat{\underline{\theta}}[n] = \underline{\theta}_0$ gefunden wird. Der zweite Summand wirkt dem durch die Wahl einer Matrix \mathbf{P}_{ini} mit kleinen Beträgen entgegen und führt zu einer stärkeren Gewichtung des Anfangswertes $\hat{\underline{\theta}}_{ini}$, wodurch eine längere Konvergenzzeit und ein beruhigter Identifikationsvorgang resultiert – gut gewählte Anfangswerte $\hat{\underline{\theta}}_{ini} \approx \underline{\theta}_0$ werden durch den Algorithmus nur angepasst und nicht verworfen, womit Systemwissen eingebracht werden kann. Durch die Wahl sehr großer Beträge für die Matrix \mathbf{P}_{ini} ist der zweite Summand zu vernachlässigen, weshalb die Parameteridentifikation maximal schnell in einem unruhigen transienten Vorgang zu den wahren Werten konvergieren wird – hierbei ist die Wahl geeigneter Anfangswerte $\hat{\underline{\theta}}_{ini}$ irrelevant, womit diese beliebig gesetzt werden können.

Die Durchführung der Minimierung (5.55) zeigt [133, 167] und ergibt den sog. *Recursive-Least-Squares-Algorithmus (RLS)* für das ARMA-Modell (5.20); es sei diesbezüglich auch auf die Literatur [10, 55, 177] verwiesen. Der RLS-Algorithmus zeichnet sich, wie erwartet, durch hohe Konvergenzgeschwindigkeit sowie Robustheit gegenüber Störgrößen aus. Dieser RLS-Algorithmus ist für die Anwendung auf das Prädiktor-ARMA-Modell (5.24) bzw. (5.22) mit dem Relativgrad r wie folgt umzuschreiben:

$$\hat{\underline{\theta}}[k] = \hat{\underline{\theta}}[k-1] + \mathbf{P}[k-r+1] \underline{x}[k-r+1] \cdot \varepsilon[k] \quad (5.56)$$

$$= \hat{\underline{\theta}}[k-1] + \underbrace{\frac{\mathbf{P}[k-r] \underline{x}[k-r+1]}{1 + \underline{x}[k-r+1]^T \mathbf{P}[k-r] \underline{x}[k-r+1]}}_{\gamma[k-r]} \cdot \varepsilon[k] \quad (5.57)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[k-r+1] &= \mathbf{P}[k-r] - \frac{\mathbf{P}[k-r] \underline{x}[k-r+1] \underline{x}[k-r+1]^T \mathbf{P}[k-r]}{1 + \underline{x}[k-r+1]^T \mathbf{P}[k-r] \underline{x}[k-r+1]} \\ &= \mathbf{P}[k-r] - \gamma[k-r] \underline{x}[k-r+1] \underline{x}[k-r+1]^T \mathbf{P}[k-r] \end{aligned} \quad (5.58)$$

Zu Beginn der Identifikation ($k = 0$) muss als Startwert des Parametervektors $\hat{\underline{\theta}}[0] = \hat{\underline{\theta}}_{ini}$ gesetzt und die \mathbf{P} -Matrix mit einer beliebigen positiv definiten Matrix \mathbf{P}_{ini} (z.B. Diagonalmatrix) initialisiert werden. Der RLS-Algorithmus (5.57) entspricht für $r = 1$ nach Verschiebung um einen Zeitschritt exakt dem abgeleiteten Algorithmus aus [167]; dabei wird der Identifikationsfehler $\varepsilon[\cdot]$, definiert in Gleichung (5.27), als der sog. Korrekturterm bezeichnet. Ebenso findet sich die Rekursionsformel (5.58) in [167] wieder.

Mit Gleichung (5.57) ist zu erkennen, dass der RLS-Algorithmus mit $c = 1$ tatsächlich ein Spezialfall des oben beschriebenen orthogonalen Projektionsalgorithmus (5.54) ist. Durch den mit $c \neq 0$ beruhigten orthogonalen Projektionsalgorithmus, dem RLS-Algorithmus, wird sich schnell ein gutes und beruhigtes Regelergebnis des im folgenden Kapitel 5.3 herzuleitenden adaptiven Reglers zeigen. Für den Nachweis der Stabilität des adaptiven Reglers in Kombination mit dem RLS-Algorithmus im geschlossenen Regelkreis wird, wie beim Projektionsalgorithmus, auf dessen Eigenschaften zurückgegriffen.

Da es sich bei dem RLS-Algorithmus, wie gezeigt, um einen schnellen und Rauschsignal-optimierten Projektionsalgorithmus handelt, ist es nicht verwunderlich, dass die mathematische Untersuchung des RLS-Algorithmus (vgl. [55]) zu annähernd denselben für die

Stabilitätsanalyse notwendigen Gleichungen führt, wie die des Projektionsalgorithmus. Als Basis der Untersuchung dient gemäß Gleichung (5.39) eine Lyapunov-Funktion der Form

$$V[k] = \tilde{\underline{\theta}}^T [k] \mathbf{P}[k]^{-1} \tilde{\underline{\theta}}[k] \quad (5.59)$$

Anstelle der Gleichung (5.48) ergibt sich

$$\left\| \tilde{\underline{\theta}}[k] \right\|^2 \leq \kappa_1 \left\| \tilde{\underline{\theta}}[0] \right\|^2 \quad \text{für } \forall k > 0 \quad (5.60)$$

$$\text{mit } \kappa_1 = \frac{\lambda_{\max} [(\mathbf{P}_{ini})^{-1}]}{\lambda_{\min} [(\mathbf{P}_{ini})^{-1}]}$$

$\lambda_{\min}, \lambda_{\max}$: kleinster, größter Eigenwert

was besagt, dass der Betrag des Parameterfehlervektors stets abnimmt oder gleich bleibt, d.h. stets beschränkt bleibt. Analog zu Gleichung (5.44) bzw. (5.50) resultiert

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k \frac{\varepsilon[i]^2}{1 + \underline{x}[i-r+1]^T \mathbf{P}[i-r] \underline{x}[i-r+1]} < \infty \quad (5.61)$$

bzw.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon[k]}{\sqrt{c + \underline{x}[k-r+1]^T \mathbf{P}[i-r] \underline{x}[k-r+1]}} = 0 \quad (5.62)$$

Dies hat, wie im Falle des Projektionsalgorithmus, zur Konsequenz, dass der Identifikationsfehler $\varepsilon[\cdot]$ – sollte er tatsächlich unbegrenzt anwachsen können – nie schneller anwächst, als der Betrag des Regressionsvektors $\underline{x}[\cdot]$:

$$|\varepsilon[k]| = O \left[\sup_{\kappa \leq k-r+1} \|\underline{x}[\kappa]\| \right] \quad (5.63)$$

Und schließlich ist Gleichung (5.51) mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \hat{\underline{\theta}}[k] - \hat{\underline{\theta}}[k-r] \right\| = 0 \quad (5.64)$$

identisch. Somit wird auch beim RLS-Algorithmus der Identifikationsprozess nach einer beschränkten Zeit zum Erliegen kommen und sich ein konstanter geschätzter Parametervektor $\hat{\underline{\theta}}[\cdot]$ einstellen, der nicht dem wahren Parametervektor $\underline{\theta}_0$ entsprechen muss.

Theorem 5.3: Parameterkonvergenz des RLS-Algorithmus

Der RLS-Algorithmus besitzt folgende Eigenschaften:

- Der Parameterfehler $\|\tilde{\underline{\theta}}[\cdot]\|$ nimmt stets ab oder bleibt gleich:

$$\left\| \tilde{\underline{\theta}}[k] \right\|^2 \leq \kappa_1 \left\| \tilde{\underline{\theta}}[0] \right\|^2 \quad \text{für } \forall k > 0 \quad (5.65)$$

$$\text{mit } \kappa_1 = \frac{\lambda_{\max} [(\mathbf{P}_{ini})^{-1}]}{\lambda_{\min} [(\mathbf{P}_{ini})^{-1}]}$$

- Der Identifikationsfehler $\varepsilon[\cdot]$ wächst nie schneller an, als der Betrag des Regressionsvektors $\underline{x}[\cdot]$:

$$|\varepsilon[k]| = O \left[\sup_{\kappa \leq k-r+1} \|\underline{x}[\kappa]\| \right] \quad (5.66)$$

- Bei beschränktem Regressionsvektor $\underline{x}[\cdot]$ wird der Identifikationsfehler $\varepsilon[\cdot]$ stets zu Null:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon[k]}{\sqrt{c + \underline{x}[k-r+1]^T \mathbf{P}[i-r] \underline{x}[k-r+1]}} = 0 \quad (5.67)$$

- Der geschätzte Parametervektor $\hat{\underline{\theta}}[\cdot]$ konvergiert stets gegen einen konstanten Wert:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \hat{\underline{\theta}}[k] - \hat{\underline{\theta}}[k-r] \right\| = 0 \quad (5.68)$$

Sobald die angeregte Systemdynamik identifiziert ist, kommt der Identifikationsprozess zum Erliegen ($\varepsilon[\cdot] = 0$), womit sich ein konstanter geschätzter Parametervektor $\hat{\underline{\theta}}[\cdot] = \text{const.}$ einstellt.

Der konvergierte Parametervektor $\hat{\underline{\theta}}[\cdot]$ entspricht im Allgemeinen nicht dem wahren Parametervektor $\underline{\theta}_0$. Hierzu ist eine vollständige Anregung der Systemdynamik notwendig.

Die Konsequenz obiger Aussagen ist, dass beide Algorithmen für die Stabilitätsanalyse des adaptiven Reglers im Folgenden wegen Theorem 5.2 und 5.3 gleich behandelt werden können. Es wird sich zeigen, dass beide Schätzalgorithmen im adaptiven Regler Stabilität gewähren und somit als zentrales Element des adaptiven Konzeptes angewandt werden dürfen.

5.3 Entwurf des adaptiven Regelkreises

Um ein System klassisch regeln zu können, müssen die Parameter des Systems bekannt sein – nur dann kann eine Reglereinstellung erfolgen. Sind die Systemparameter jedoch unbekannt, wäre es naheliegend, die Parameter zu jedem Zeitschritt entsprechend der vorgestellten stabilen Algorithmen zu identifizieren, um mit den erhaltenen Werten einen Regler zu jedem Zeitschritt stabil auslegen zu können. Mit diesem Vorgehen besteht jedoch die Gefahr eines instabilen Verhaltens des Regelkreises – es ist nicht gewährleistet, dass das Gesamtsystem, bestehend aus einer stabilen Identifikation und einem zu jedem Zeitschritt stabil ausgelegten Regler, ebenfalls stabil ist. Da sich die Systemparameter durch die Identifikation zu jedem Zeitschritt ändern, entsteht durch die Zeitvarianz eine mögliche destabilisierende Dynamik, die mit linearen Stabilitätsuntersuchungen nicht bestimmt werden kann. Dies wird an Hand des Beispiels von Vinograd [95] deutlich, bei dem ein rein mathematisch begründetes System präsentiert wird, welches zeitvariant ist und stabile Eigenwerte liefert, aber dennoch Instabilität zeigt. Das entsprechende System

$$\dot{\underline{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \underline{x}(t) \quad \text{mit}$$

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} -1 - 9 \cos^2(6t) + 6 \sin(12t) & 12 \cos^2(6t) + 4.5 \sin(12t) \\ -12 \sin^2(6t) + 4.5 \sin(12t) & -1 - 9 \sin^2(6t) - 6 \sin(12t) \end{bmatrix}$$

besitzt eine zeitvariante Systemmatrix $\mathbf{A}(\cdot)$. Die Eigenwertuntersuchung

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \lambda^2 + 11\lambda + 10$$

führt zu den beiden stabilen Eigenwerten

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -10$$

Die Simulation 5.3 zeigt jedoch ein instabiles System.

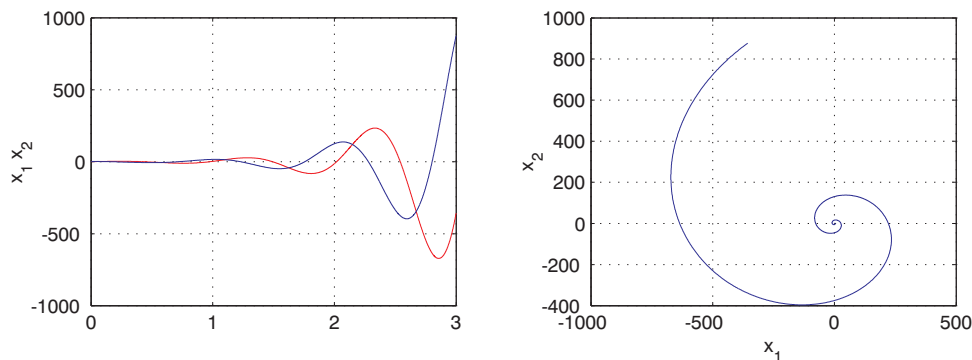


Abbildung 5.3: *Vinograd: Stabilitätsverhalten eines zeitvarianten Systems mit stabilen Eigenwerten*

Man kommt zu dem Resultat, dass Regelkreis und Identifikation nicht getrennt voneinander betrachtet werden dürfen. Eine separate Stabilitätsanalyse führt zu keiner Stabilitätsaussage des geschlossenen Regelkreises mit integrierter Identifikation. Es ist nun das Ziel, eine Kombination von Regler und Identifikation zu finden, die zu einem stabilen Gesamregelkreis führt. Hierfür muss eine nichtlineare Stabilitätsuntersuchung Anwendung finden.

5.3.1 Referenzmodellregler mit integrierter Systemidentifikation

Mit dem Kapitel 5.2 wurde deutlich, dass durch den Identifikationsvorgang jede angeregte Systemdynamik stets vollständig identifiziert wird. Dies bestätigt die Gleichung (5.51) des Projektionsalgorithmus bzw. (5.68) des RLS-Algorithmus mit der Konvergenz des Parametervektors $\hat{\underline{\theta}}[\cdot]$ gegen einen konstanten Parametersatz, der das momentan angeregte Systemverhalten mit einem Identifikationsfehler $\varepsilon[\cdot] = 0$ bei beschränktem Regressionsvektor $\underline{x}[\cdot]$ gemäß der Gleichung (5.50) bzw. (5.67) eindeutig repräsentiert. Der konvergierte Parametersatz $\hat{\underline{\theta}}[\cdot] = \text{konst}$ muss jedoch nicht den wahren Systemparametern $\underline{\theta}_0$ entsprechen, denn sobald ein Teil der Systemdynamik nicht angeregt wird, kann diese auch nicht identifiziert werden. Es ist durch den Schätzvorgang nur so viel Systemverhalten zu lernen, wie an Hand des Ein- Ausgangsverhaltens durch die Systemanregung „sichtbar“ wird. Da

für eine Regelung nur das Systemverhalten bekannt sein muss, welches durch das Sollsignal angeregt wird, liegt die Vermutung nahe, dass für einen erfolgreichen stabilen Regelvorgang nicht der wahre Parametervektor $\underline{\theta}_0$ bekannt sein muss – vielmehr scheint ein Identifikationsfehler $\varepsilon[\cdot] = 0$ hierfür ausreichend, was in Kapitel 5.3.2 auf Basis folgender Ausgangssituation gemäß [55] bewiesen wird .

Da, wie beschrieben, nach einem transienten Identifikationsvorgang stets ein Parametervektor vorliegt, der nicht den wahren Parameterwerten des Systems entsprechen muss, aber trotzdem das momentan angeregte Systemverhalten eindeutig beschreibt, kann ein Regler zu jedem Abtastzeitpunkt k mit den geschätzten Parametern ausgelegt werden, was als *Certainty-Equivalence-Prinzip* bezeichnet wird.

Das Prädiktor-ARMA-Modell bzw. Streckenmodell lautet nach Gleichung (5.22) bzw. Gleichung (5.25):

$$\begin{aligned} y[k] &= \frac{B''[q]}{A''[q]} u[k] = \underline{\theta}_0^T \underline{x}[k-r+1] = \\ &= -\alpha''_{n-1} \cdot y[k-r] - \dots - \alpha''_0 \cdot y[k-n+1-r] + \dots \\ &\quad \dots + \beta''_{n-1} \cdot u[k-r] + \dots + \beta''_0 \cdot u[k-n+1-r] \end{aligned}$$

Zum Zeitpunkt k ist der Regressionsvektor $\underline{x}[k-r+1]$ und $y[k]$ bekannt, womit die Schätzung des Parametervektors $\underline{\theta}_0$ mit $\hat{\underline{\theta}}[k]$ durchgeführt werden kann:

$$y[k] = \underline{\theta}_0^T \underline{x}[k-r+1] = \hat{\underline{\theta}}[k]^T \underline{x}[k-r+1] \quad (5.69)$$

$$\rightarrow \hat{\underline{\theta}}[k] : \hat{\alpha}''_{n-1}[k], \dots, \hat{\alpha}''_0[k], \hat{\beta}''_{n-1}[k], \dots, \hat{\beta}''_0[k] \quad (5.70)$$

Nimmt man an, dass das oben beschriebene Certainty-Equivalence Prinzip mit $\hat{\underline{\theta}}[k] \stackrel{!}{=} \hat{\underline{\theta}}[k+r]$ gemäß Gleichung (5.51) bzw. (5.68) nach einer transienten Phase anwendbar ist, so sind für den Schritt $k+r$ nach entsprechender Verschiebung der Gleichung (5.69)

$$y[k+r] = \underline{\theta}_0^T \underline{x}[k+1] = \hat{\underline{\theta}}[k+r]^T \underline{x}[k+1] \stackrel{!}{=} \hat{\underline{\theta}}[k]^T \underline{x}[k+1] \quad (5.71)$$

alle Parameter und Signalwerte bekannt, bis auf den zukünftigen Ausgangswert $y[k+r]$ und den zum Zeitschritt k auszugebenden Stellwert $u[k]$:

$$\begin{aligned} y[k+r] &= -\alpha''_{n-1} \cdot y[k] - \dots - \alpha''_0 \cdot y[k-n+1] + \dots \\ &\quad \dots + \beta''_{n-1} \cdot u[k] + \dots + \beta''_0 \cdot u[k-n+1] \\ &\stackrel{!}{=} -\hat{\alpha}''_{n-1}[k] \cdot y[k] - \dots - \hat{\alpha}''_0[k] \cdot y[k-n+1] + \dots \\ &\quad \dots + \hat{\beta}''_{n-1}[k] \cdot u[k] + \dots + \hat{\beta}''_0[k] \cdot u[k-n+1] \end{aligned} \quad (5.72)$$

Über die Stellgröße $u[k]$ kann nun das Verhalten des geschlossenen Regelkreises vorgegeben und der zukünftige Ausgangswert $y[k+r] = y^*[k+r]$ beeinflusst werden.

Wird der Referenzmodellregler aus Theorem 2.20 mit Anmerkung 2.15 für zeitdiskrete Systeme angewandt (siehe Beginn des Kapitels 2.3.6.3 auf Seite 197), ergibt sich unter

Beachtung der Gleichungen (2.490)/(2.491) sowie Theoreme 2.21 bis 2.24 ($i = 0$) mit Gleichung (2.277) folgende Stellgröße in Summendarstellung:

$$u[k] = \frac{1}{\hat{\alpha}_{(n-1),EA}''} \left[\sum_{j=0}^{n-1} \hat{\alpha}_{(n-1-j),Beo}'' \cdot r'[k-j] - \sum_{j=0}^{n-1} \hat{\beta}_{(n-1-j),EA}'' \cdot y[k-j] - \dots \right. \\ \left. \dots - \sum_{j=1}^{n-1} \hat{\alpha}_{(n-1-j),EA}'' \cdot u[k-j] \right] \quad (5.73)$$

Für die Reglerparametrierung werden die Schätzwerte des Parametervektors $\hat{\theta}[k]$ aus Gleichung (5.70) verwendet, womit sich der *adaptive Referenzmodellregler*, engl. *Model-Reference-Adaptive-Control (MRAC)*, ergibt. Mit der Stellgröße (5.73) erzwingt der Regler den Verlauf des Ausgangssignals $y[\cdot] = y^*[\cdot]$ gemäß des Referenzmodells (2.279):

$$y[k-n+1] = y^*[k-n+1] = \frac{\hat{B}''[q]}{\hat{A}_{Reg}''^*[q]} r'[k-n+1] \quad (5.74) \\ = \frac{\hat{\beta}_{n-1}'' q^{n-1} + \dots + \hat{\beta}_0''}{q^{r+n-1} + \hat{\alpha}_{n-1,Reg}''^* q^{n-1} + \dots + \hat{\alpha}_{0,Reg}''^*} r'[k-n+1]$$

Dies ergibt folgende ARMA-Modelldarstellung des Referenzmodells:

$$y[k+r] = y^*[k+r] = \hat{\theta}^{*T} \underline{x}[k+1] \quad (5.75)$$

$$= \underbrace{\left(-\hat{\alpha}_{(n-1),Reg}''^* \quad \dots \quad -\hat{\alpha}_{0,Reg}''^* \quad \hat{\beta}_{n-1}'' \quad \dots \quad \hat{\beta}_0'' \right)}_{\hat{\theta}^{*T}} \underbrace{\begin{pmatrix} y[k] \\ \vdots \\ y[k-n+1] \\ r'[k] \\ \vdots \\ r'[k-n+1] \end{pmatrix}}_{\underline{x}[k+1]}$$

Bei der Wahl des Wunschpolynoms $A_{Reg}''^*[\cdot]$ für eine Pol- Nullstellenkompensation werden die Schätzwerte (5.70) der Strecke verwendet, womit auch das Wunschpolynom selbst mit $\hat{A}_{Reg}''^*[\cdot]$ einem Schätzwert entspricht. Enthält das geschätzte Zählerpolynom $\hat{B}[\cdot]$ instabile Diskretisierungsnullstellen, dürfen diese gemäß Theorem 4.4 bzw. 2.20 nicht eliminiert werden. Diese erhaltenen instabilen Diskretisierungsnullstellen wirken sich jedoch bei robuster Abtastung gemäß Theorem 4.3 nicht auf das Systemverhalten aus (siehe Kapitel 4.1.2 bzw. 4.2).

Wird der Regler (5.73) mit dem Referenzmodell (5.75) entsprechend des Certainty-Equivalence-Prinzips mit den Schätzwerten (5.70) des Parametervektors $\hat{\theta}[k]$ ausgelegt, so führt die Stellgröße $u[k]$ gemäß Gleichung (5.72) bzw. (5.71) zwangsweise zu dem gewünschten Ausgang $y^*[k+r]$, d.h. es gilt folgender Zusammenhang:

$$y^*[k+r] = -\hat{\alpha}_{n-1}''[k] \cdot y[k] - \dots - \hat{\alpha}_0''[k] \cdot y[k-n+1] + \dots \\ \dots + \hat{\beta}_{n-1}''[k] \cdot u[k] + \dots + \hat{\beta}_0''[k] \cdot u[k-n+1] \\ = \hat{\theta}[k]^T \underline{x}[k+1] \quad (5.76)$$

Die Gleichung (5.76) stellt die Basis für die Regelfehlerberechnung sowie den Stabilitätsbeweis in Kapitel 5.3.2 dar. Die Abbildung 5.4 zeigt schematisch die Kombination von inversem Regler und Systemidentifikation zum adaptiven Referenzmodellregler.

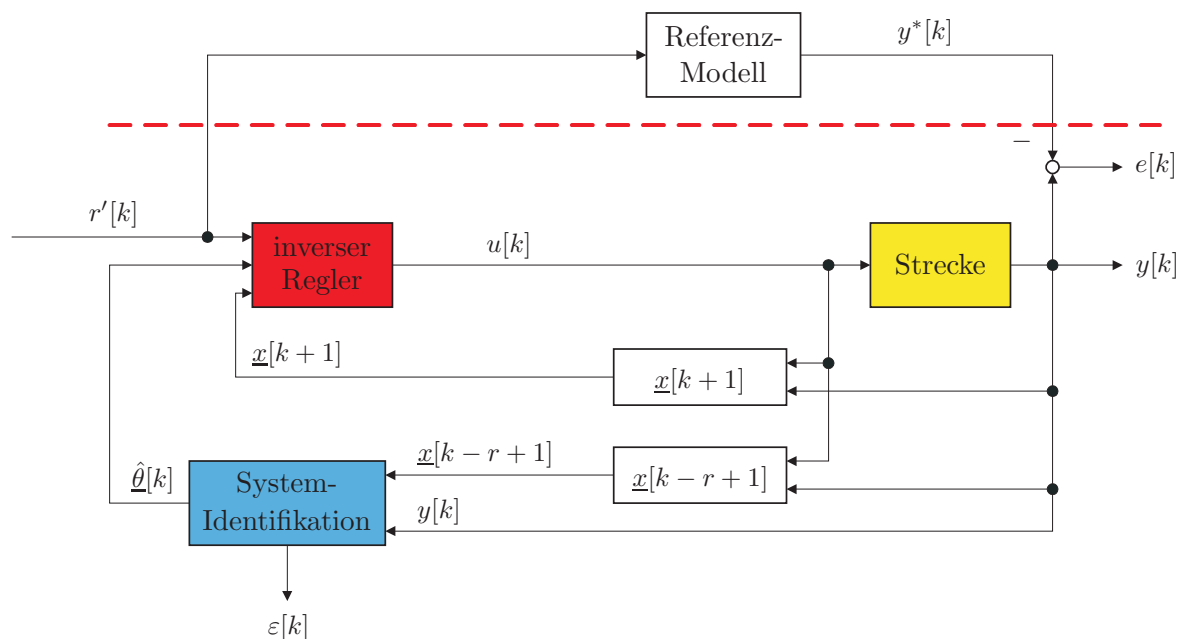


Abbildung 5.4: Schema der adaptiven Referenzmodellregelung (MRAC)

Der entscheidende Vorteil des vorgestellten adaptiven Regelkonzeptes ist, dass die Reglerparameter unmittelbar aktualisiert werden, sobald neues Systemwissen vorliegt. Jedes durch den Regler angeregte Systemverhalten wird innerhalb eines kurzen transienten Vorgangs identifiziert. Sobald sich ein Identifikationsfehler $\varepsilon[\cdot] = 0$ ergibt, gilt das auftretende Systemverhalten als bekannt, womit ein mit den geschätzten Parametern ausgelegter Regler ein erfolgreiches und stabiles Verhalten zeigen müsste: $e[\cdot] = 0$. Demnach stünde der Regelfehler $e[k]$ in direktem Zusammenhang mit dem Identifikationsfehler $\varepsilon[k]$ – der Regelfehler e erbt die Eigenschaft des Identifikationsfehlers ε , durch die Systemidentifikation zu jedem Zeitschritt minimiert zu werden.

Dieser Zusammenhang ist im Folgenden zu beweisen. Dabei ist zu beachten, dass durch den in den Regler integrierten Identifikationsprozess ein zeitvariantes System vorliegt und dementsprechend ein nichtlinearer Beweis, wie beispielsweise ein Widerspruchsbeweis, angesetzt werden muss. Konkret ist zu zeigen, dass sich mit dem Regelgesetz (5.73) ohne Kenntnis der wahren Parameter stets ein erfolgreiches Regelverhalten mit $e[k] = \varepsilon[k] \rightarrow 0$ einstellen wird und dass sich folglich eine mögliche Instabilität auf Grund des mit falschen Parametern initialisierten Reglers innerhalb einer beschränkten Zahl an Abtastschritten unterdrücken lässt.

5.3.2 Stabilitätsuntersuchung des geschlossenen Regelkreises

Der Stabilitätsbeweis basiert grundlegend auf den Eigenschaften der Identifikationsalgorithmen; deshalb greift man im Folgenden mehrmals auf die Ergebnisse des Projektionsalgorithmus (Theorem 5.2) bzw. RLS-Algorithmus (Theorem 5.3) in Kapitel 5.2.1 bzw. 5.2.2 zurück.

Das Regelziel wird erreicht, wenn sich das abgetastete Ausgangssignal $y[\cdot]$ des realen Systems (5.25) gleich dem Ausgangssignal $y^*[\cdot]$ des Referenzmodells (5.75) verhält und damit der Regelfehler

$$e[k] = y[k] - y^*[k] \quad (5.77)$$

zu Null wird.

Es ist nun zu untersuchen, in welcher Beziehung der Regelfehler e und der Identifikationsfehler ε stehen. Da der Regler (5.73) mit der Stellgröße $u[k]$ die Gleichheit (5.76) gemäß der Auslegung mit dem Referenzmodell (5.75) erzwingt, kann in der Formel des Regelfehlers (5.77) $y^*[k]$ durch die um r zeitlich verschobene Gleichung (5.76) ersetzt werden. Mit zusätzlichem Einbringen des ebenfalls zeitlich verschobenen Schätz-Modells (5.26) sowie der Gleichung (5.27) des Identifikationsfehlers ergibt sich die gesuchte Verknüpfung zwischen Regel- und Identifikationsfehler:

$$e[k] = y[k] - \hat{y}[k] + \hat{y}[k] - y^*[k] \quad (5.78)$$

$$= \underbrace{y[k] - \hat{y}[k]}_{\varepsilon[k]} + \hat{\theta}[k-1]^T \underline{x}[k-r+1] - \hat{\theta}[k-r]^T \underline{x}[k-r+1]$$

$$= \varepsilon[k] + \left(\hat{\theta}[k-1]^T - \hat{\theta}[k-r]^T \right) \underline{x}[k-r+1] \quad (5.79)$$

Mit Gleichung (5.79) wird deutlich, dass das Verhalten des Regelfehlers e direkt von der Konvergenzeigenschaft der Identifikation abhängt und somit die Eigenschaft des Identifikationsfehlers ε erbt. Mit Hilfe der Gleichung (5.51) des Projektionsalgorithmus bzw. (5.68) des RLS-Algorithmus wurde gezeigt, dass die Parameteraktualisierung des Identifikationsalgorithmus in beschränkter Zeit zum Erliegen kommt, d.h. die Schätzparameter konvergieren zu einem festen Parametersatz, unabhängig davon, ob die richtigen Systemparameter erreicht wurden oder nicht. Da die beiden Gleichungen (5.51) und (5.68) jeweils aus der Gleichung (5.50) des Projektionsalgorithmus bzw. der Gleichung (5.67) des RLS-Algorithmus abgeleitet wurden, muss sich zeitgleich entsprechend dieser Gleichungen (5.50) bzw. (5.67) ein Identifikationsfehler $\varepsilon[\cdot] = 0$ einstellen, sofern die Signale des geschlossenen adaptiven Regelkreises beschränkt bleiben ($\|\underline{x}[\cdot]\| < \infty$). Hiermit werden die Summanden in Gleichung (5.79) und somit der Regelfehler entsprechend dem Konvergenzverhalten der Identifikation gegen Null gehen, d.h. wird der Identifikationsfehler zu Null, gilt dies auch für den Regelfehler – der Regelfehler erbt die Eigenschaft des Identifikationsfehlers:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} e[k] &= \lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon[k] + \underbrace{\left[\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\hat{\theta}[k-1]^T - \hat{\theta}[k-r]^T \right) \right]}_{\substack{0 \text{ wg. Gl. (5.51) bzw. (5.68)}}} \underline{x}[k-r+1] \\ \lim_{k \rightarrow \infty} e[k] &= \underbrace{\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon[k]}_{\substack{0 \text{ wg. Gl. (5.50) bzw. (5.67)}}} = 0 \quad \text{für} \quad \|\underline{x}[k]\| < \infty \quad \forall k \end{aligned} \quad (5.80)$$

Man kommt zu folgendem Ergebnis:

Theorem 5.4: Adaptiver Referenzmodellregler: Regelfehler

Der adaptive Referenzmodellregler folgt mit einem Regelfehler Null dem Referenzmodell, sobald nach einer kurzen transienten Phase für den Identifikationsfehler $\varepsilon[\cdot] = 0$ gilt und entsprechend die geschätzten Parameter zu einem konstanten Parametersatz konvergiert sind. Hierbei müssen nicht die wahren Systemparameter gefunden werden.

In den transienten Phasen entsteht ein Regelfehler, der eine direkte Konsequenz der Systemidentifikation ist. Dieser klingt gemäß der Eigenschaft der Systemidentifikation ab und geht gegen Null. Der Regelfehler e erbt die Eigenschaft des Identifikationsfehlers ε :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e[k] = \lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon[k] = 0 \quad \text{für} \quad \|\underline{x}[k]\| < \infty \quad \forall k \quad (5.81)$$

Das Theorem 5.4 ist gültig, wenn gemäß der Bedingung in Gleichung (5.80) der geschlossene Regelkreis zu allen Zeiten stabil ist, d.h. alle Signale für $k \rightarrow \infty$ beschränkt sind: $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\underline{x}[k]\| < \infty$. Es folgt der Stabilitätsbeweis [55, 90].

Da Regelfehler und Identifikationsfehler in direktem Zusammenhang stehen, wachsen beide mit der selben Rate:

$$\sup_{\kappa \leq k} |e[\kappa]| \sim \sup_{\kappa \leq k} |\varepsilon[\kappa]| \quad (5.82)$$

Die Voraussetzung für die Stabilitätsanalyse (Widerspruchsbeweis) des adaptiven Regelkonzeptes ist eine minimalphasige zeitkontinuierliche Strecke. Gemäß Theorem 2.11 liegt damit eine eindeutige Beziehung des Signalwachstums zwischen Ein- und Ausgang der Strecke im geschlossenen Regelkreis vor (siehe Kapitel 2.2.5). Während es bei nicht-minimalphasigen Systemen möglich ist, dass ein unendlich anwachsendes Eingangssignal nicht am Ausgang beobachtet werden kann (vgl. Kapitel 2.2.5.6), wächst bei minimalphasigen Systemen der Eingang für beliebige Eingangssignale niemals schneller an, als der Ausgang:

$$|u[k-r]| = O \left[\sup_{\kappa \leq k} |y[\kappa]| \right] \quad (5.83)$$

Wird das Eingangssignal in Form des Regressionsvektors ausgedrückt, so resultiert:

$$\|\underline{x}[k-r+1]\| = O \left[\sup_{\kappa \leq k} |y[\kappa]| \right] \quad (5.84)$$

Mit Kapitel 2.2.5 wird deutlich, dass nicht-minimalphasige Systeme auf Grund von Stabilitätsproblemen im geschlossenen Regelkreis schwer regelbar sind. Für diese Systemklasse ist u.a. eine Umkehrung des Wirkungssinns als Reaktion auf sprungartige Veränderungen des Stellsignals typisch, womit das Regelungsproblem bereits klar ersichtlich wird. Mathematisch kennzeichnet sich die Nichtminimalphasigkeit gemäß Definition 2.10 durch das Auftreten mindestens einer instabilen Nullstelle. Da nicht-minimalphasige Systeme im mechatronischen Anwendungsfeld selten sind, führt die Annahme eines minimalphasigen realen Systems für die Anwendung eines stabilen adaptiven Referenzmodellreglers zu keiner großen Einschränkung. Nachdem das Ziel dieser Arbeit die vollständige Kompensation

der Nulldynamik eines Systems mit einem zeitdiskreten Regler ist, liegt ohnehin die Beschränkung auf zeitkontinuierliche minimalphasige Systeme vor, da instabile Nullstellen ohne Gefährdung der Stabilität nicht verändert werden können (siehe Kapitel 2.2.5.6).

Für das weitere Vorgehen des Stabilitätsbeweises vergleicht man die Zuwachsrate des Ausgangs und des Regelfehlers. Mit der Tatsache, dass das gewünschte Sollverhalten $y^*[\cdot]$ stets als begrenzt angenommen werden kann, folgt über die Ungleichung

$$|y[k]| = |e[k] + y^*[k]| \leq |e[k]| + |y^*[k]|$$

dass das Ausgangssignal $y[\cdot]$ und der Regelfehler $e[\cdot]$ mit der selben Rate anwachsen:

$$\sup_{\kappa \leq k} |e[\kappa]| \sim \sup_{\kappa \leq k} |y[\kappa]| \quad (5.85)$$

Wendet man nun die Ausdrücke (5.85) und (5.82) auf die Gleichung (5.84) an, so kann mit

$$\|\underline{x}[k - r + 1]\| = O \left[\sup_{\kappa \leq k} |\varepsilon[\kappa]| \right] \quad (5.86)$$

folgende Aussage getroffen werden: sollte im Falle einer instabilen adaptiven Regelung der Betrag des Regressionsvektors $\|\underline{x}[\cdot]\|$ ins Unendliche anwachsen, dann muss gemäß der Gleichung (5.86) der Identifikationsfehler noch schneller als der Regressionsvektor unbeschränkt ansteigen.

Die Eigenschaft des Identifikationsalgorithmus in Theorem 5.2 bzw. 5.3 besagt jedoch genau das Gegenteil: nach Gleichung (5.49) des Projektionsalgorithmus bzw. Gleichung (5.66) des RLS-Algorithmus wächst der Identifikationsfehler nie stärker als der Betrag des Regressionsvektors. Dieser Widerspruch erlaubt die Feststellung, dass der Regressionsvektor nicht unendlich groß werden kann, d.h. beschränkt ist (Widerspruchsbeweis). Folglich wird das adaptive System mit unbekanntem Parametern durch die Systemidentifikation, wie zu erwarten war, stabilisiert. Über die Gleichung (5.50) des Projektionsalgorithmus bzw. Gleichung (5.67) des RLS-Algorithmus kann nun mit dem Wissen eines beschränkten Regressionsvektors $\underline{x}[\cdot]$ gesichert werden, dass der Identifikationsfehler in beschränkter Zeit verschwindet. Man hält fest:

Theorem 5.5: Adaptiver Referenzmodellregler: Stabilität

Die Anwendung eines adaptiven Referenzmodellreglers auf eine unbekannte zeitkontinuierliche minimalphasige Strecke führt stets zu einem stabilen geschlossenen Regelkreis. Die Ein- und Ausgänge des Systems bleiben zu jeder Zeit beschränkt, womit der adaptive Regler stabil ist:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\underline{x}[k]\| < \infty \quad (5.87)$$

Das Regelziel wird somit gemäß Theorem 5.4 trotz unbekannter Parameter erreicht:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e[k] = 0 \quad (5.88)$$

Die in den Regelkreis integrierte Systemidentifikation besitzt eine stabilisierende Funktion für das adaptive Gesamtsystem mit unbekanntem Parametern.

Die adaptive Regelung erfüllt trotz unbekannter Systemparameter die geforderten Eigenschaften einer guten Regelung: das Regelziel wird erreicht und der Regler besitzt eine stabilisierende Wirkung auf das System.

Für die Anwendung des adaptiven Referenzmodellreglers muss die Ordnung $n = \tilde{n}$ des zu regelnden Systems bekannt sein oder höher angesetzt werden, so dass für die Identifikation des Systems ausreichend Parameter zur Verfügung stehen. Liegen nicht ausreichend viele Parameter vor, d.h. wird die Systemordnung zu niedrig angesetzt, kann das Systemverhalten nicht eindeutig identifiziert werden. Demnach können die geschätzten Parameter $\hat{\theta}[\cdot]$ nicht gegen einen konstanten Parametersatz konvergieren, was jedoch Voraussetzung des Stabilitätsbeweises ist. Lässt sich durch die Untermodellierung lediglich die schnelle Dynamik des Systems nicht beschreiben, so kommt es zwar öfters zu längeren transienten Phasen, der geschlossene Regelkreis bleibt jedoch stabil; kann hingegen die langsame Hauptdynamik des Systems nicht modelliert werden, ist instabiles Reglerverhalten möglich.

Nachdem gemäß Theorem 2.35 die zeitdiskrete Modellierung einer abgetasteten zeitkontinuierlichen Strecke stets einen Relativgrad $r = 1$ besitzt, ist keine Kenntnis über den Relativgrad \tilde{r} der zeitkontinuierlichen Strecke notwendig. Der Relativgrad \tilde{r} muss daher nicht als bekannt angenommen werden. Sollte das zeitkontinuierliche System eine Totzeit besitzen, so sind mit der Annahme $r = 1$ ausreichend Parameter zur Verfügung gestellt, die während des Identifikationsvorganges auf Grund des tatsächlich größeren Relativgrades zu Null gesetzt werden.

Stabilität des adaptiven Regelkreises kann gemäß Theorem 5.5 nur für zeitkontinuierliche *minimalphasige* Strecken gewährleistet werden. Es ist zu beachten, dass eine minimalphasige zeitkontinuierliche Strecke für $\tilde{r} \geq 3$ als nicht-minimalphasige zeitdiskrete Strecke identifiziert wird (siehe Theorem 2.40). Dies ist auf die instabilen Diskretisierungsnullstellen zurückzuführen, welche keine Strecken-Eigenschaft repräsentieren, bei einem inversen Regler jedoch zur Instabilität führen (siehe Kapitel 4). Deshalb ist zu jedem Abtastschritt das Vorhandensein instabiler Diskretisierungsnullstellen zu prüfen; liegen instabile Diskretisierungsnullstellen vor, sind diese entweder über die Vorgabe des Referenzmodells zu erhalten und nicht zu eliminieren oder bei der Reglerparametrierung zu vernachlässigen (siehe Kapitel 4.3).

Da in der Beweisführung außer der Systemordnung \tilde{n} keinerlei Kenntnis über das System vorausgesetzt wurde, lässt sich auch eine instabile Strecke mit dem adaptiven Konzept regeln, sofern diese minimalphasig ist.

Theorem 5.6: Adaptiver Referenzmodellregler: Voraussetzungen

Der zeitdiskrete adaptive Referenzmodellregler ist auf (zeitkontinuierliche) reale Strecken nur anwendbar, wenn diese minimalphasig sind.

Für die Reglerauslegung muss die Ordnung \tilde{n} der Strecke bekannt sein oder ausreichend groß gewählt werden.

Hat der zeitdiskrete adaptive Referenzmodellregler die Kompensation der Nulldynamik der zeitkontinuierlichen Strecke zum Ziel, so müssen instabile Diskretisierungsnullstellen hierbei ausgeschlossen werden bzw. bei der Reglerauslegung vernachlässigt werden.

Trotz dieser Maßnahmen ist eine vollständige Kompensation der Nulldynamik der zeitkon-

tinuierlichen Strecke möglich, wenn eine robuste Abtastzeit h verwendet wird.

5.4 Adaptiver Referenzmodellregler mit internem Modell

Nachdem gemäß Theorem 2.35 die zeitdiskrete Modellierung einer abgetasteten zeitkontinuierlichen Strecke stets einen Relativgrad $r = 1$ besitzt, entspricht das Prädiktor-ARMA-Modell (5.22) der Grundform (5.20). Folglich gleicht die Struktur der Ein- Ausgangsbeschreibung (5.23) der der Standard-Ein- Ausgangsbeschreibung (5.21):

$$\frac{y[k]}{u[k]} = \frac{B''[q]}{A''[q]} = \frac{B[q]}{A[q]} = \frac{\beta_{n-1} \cdot q^{n-1} + \dots + \beta_0}{q^n + \alpha_{n-1} \cdot q^{n-1} + \dots + \alpha_0}, \quad m = n - 1 \quad (5.89)$$

Somit kann der Formalismus der Referenzmodellregler in u.a. Kapitel 2.3.6.3 direkt auf den adaptiven Fall übertragen werden. Die unbekannt Parameter $\underline{\theta}_0$ werden mit Hilfe des ARMA-Modells gemäß der Gleichung (5.69) identifiziert:

$$y[k] = \underline{\theta}_0^T \underline{x}[k] = \underbrace{\left(-\hat{\alpha}_{n-1} \quad \dots \quad -\hat{\alpha}_0 \quad \hat{\beta}_{n-1} \quad \dots \quad \hat{\beta}_0 \right)}_{\hat{\underline{\theta}}[k]^T} \underbrace{\begin{pmatrix} y[k-1] \\ \vdots \\ y[k-n] \\ u[k-1] \\ \vdots \\ u[k-n] \end{pmatrix}}_{\underline{x}[k]} \quad (5.90)$$

Die geschätzten Parameter im Parametervektor $\hat{\underline{\theta}}[k]$

$$\hat{\underline{\theta}}[k] : \hat{\alpha}_{n-1}[k], \dots, \hat{\alpha}_0[k], \hat{\beta}_{n-1}[k], \dots, \hat{\beta}_0[k] \quad (5.91)$$

ergeben das geschätzte Ein- Ausgangsverhalten der identifizierten Strecke:

$$\frac{y[k]}{u[k]} = \frac{\hat{B}[q]}{\hat{A}[q]} \quad (5.92)$$

Entsprechend des Certainty-Equivalence-Prinzips lässt sich hiermit der Referenzmodellregler aus Theorem 2.20 mit Anmerkung 2.15 im Vergleich zu Kapitel 5.3.1 direkt auslegen.

Wirkt eine Störung $v[\cdot]$ auf die Strecke, so ist eine Umsetzung des Referenzmodellreglers mit internem Modell entscheidend für die Konvergenz der Systemidentifikation und somit der Stabilität, was im Folgenden näher betrachtet wird. Den Signalfussplan des um die Systemidentifikation erweiterten Referenzmodellreglers mit internem Modell aus Theorem 2.41 zeigt Abbildung 5.5. Gemäß Theorem 5.6 muss für einen stabilen adaptiven Regler die Ordnung \tilde{n} des zu regelnden Systems bekannt sein. Dadurch können ausreichend Parameter zur eindeutigen Beschreibung des Ein- Ausgangsverhaltens bereitgestellt werden. Durch Messung des Eingangssignals $u[\cdot]$ und des Ausgangssignals $y[\cdot]$ lassen sich die Systemparameter eindeutig bestimmen. Koppelt in das System eine Störung $v[\cdot]$ ein und wirkt sich

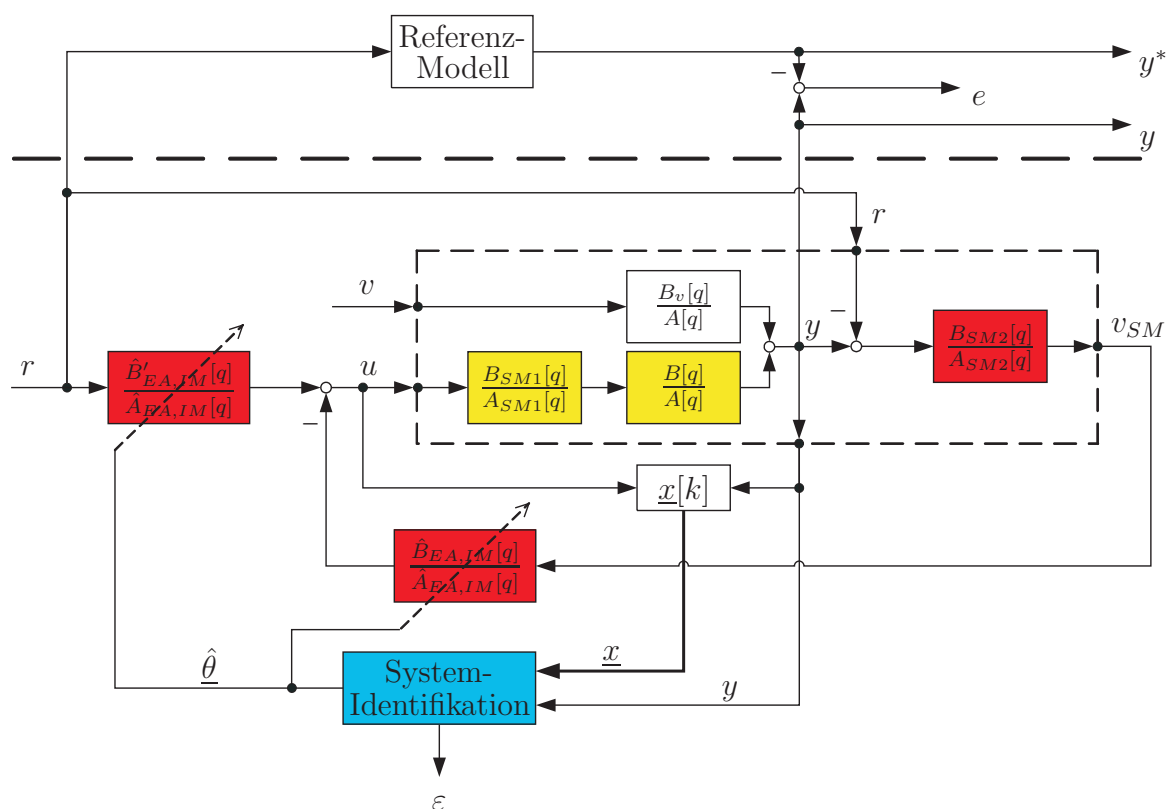


Abbildung 5.5: Signalflussplan des adaptiven Referenzmodellreglers mit internem Modell

auf das Ausgangssignal $y[\cdot]$ aus, so kann das Ein- Ausgangsverhalten bzgl. des gemessenen Eingangssignals $u[\cdot]$ nicht mehr eindeutig bestimmt werden, weshalb die Schätzparameter nicht konvergieren können, was jedoch die Voraussetzung für den Stabilitätsbeweis ist.

In Kapitel 2.2.6.4 wurde deutlich, dass ein internes Modell die Auswirkung auf das Ausgangssignal $y[\cdot]$ einer beliebig in das System einkoppelnden deterministischen Störung $v[\cdot]$ kompensieren kann. Sobald das interne Modell die Störung im Ausgangssignal $y[\cdot]$ eliminiert, ist das interne Störmodell $SM1$ im Ein- Ausgangsverhalten

$$y[k] = \frac{B_{SM1}[q]}{A_{SM1}[q]} \frac{B[q]}{A[q]} u[k] \quad (5.93)$$

nicht mehr beobachtbar. In diesem Zustand wäre nun eine Ordnung $n = \tilde{n}$ der Systemidentifikation ausreichend, um mit dem gemessenen Eingangssignal $u[\cdot]$ und Ausgangssignal $y[\cdot]$ eindeutig das Ein- Ausgangsverhalten der Strecke zu bestimmen. Solange das interne Modell jedoch noch nicht eingestellt ist und dieses somit im Ein- Ausgangsverhalten noch sichtbar ist, liegt mit einer Ordnung n der Systemidentifikation eine Untermodellierung vor. Folglich können die Parameter der Systemidentifikation noch nicht konvergieren, was das Einstellen des internen Modells wiederum erschwert. Dieses Problem kann gelöst werden, wenn die Ordnung der Systemidentifikation um die des internen Modells erhöht wird. Es ist zu erwähnen, dass dadurch ein bekanntes System identifiziert wird, was unnötig den transienten Vorgang verlängert. Es stellt sich die Frage, ob die nun enthaltene Identifikation des noch als bekannt angenommenen Störmodells genutzt werden kann.

Eine erfolgreiche Identifikation ist trotz Erhöhung der Ordnung der Systemidentifikation auch dann nur möglich, wenn die Störung durch das interne Modell vollständig zu kompensieren ist. Wie in Kapitel 2.2.6.4 verdeutlicht wurde, sind interne Modelle im geschlossenen Regelkreis nicht beliebig anpassbar. So ist beispielsweise das interne Modell einer sinusförmigen Störung im geschlossenen Regelkreis in Amplitude und Phase veränderlich, die Frequenz der Störung muss jedoch fest vorgegeben werden und somit bekannt sein. Entspricht die reale Störfrequenz nicht exakt der des Störmodells, so ist eine Kompensation nicht möglich, womit die Schätzparameter erneut nicht konvergieren können. Das Konzept des internen Modells ist daher sehr unrobust.

Um die beschriebene Problematik zu umgehen, nutzt man die Systemidentifikation, um das passende Störmodell zu finden. Mit dem Wissen, dass ein geeignetes Störmodell bzw. internes Modell der Ordnung n_{SM1} zur Kompensation der Störung existiert, wird die Ordnung der Systemidentifikation mit $n + n_{SM1}$ ausreichend groß gewählt. Dies ermöglicht der Systemidentifikation, die am Ausgang y auftretende Störung neben der Systemdynamik ebenfalls zu beschreiben. Hierbei wird indirekt ein Störmodell durch die Systemidentifikation modelliert, womit nun das Ein- Ausgangsverhalten (5.93) durch die Systemidentifikation trotz Störung eindeutig beschrieben werden kann. Das notwendige Störmodell wird durch die Identifikation selbst bestimmt und muss nicht vorgegeben werden. Dementsprechend muss nun auch im Beispiel der sinusförmigen Störung die Frequenz nicht mehr bekannt sein, sondern wird wie Phase und Amplitude durch die Systemidentifikation bestimmt. Es ist kein Wissen mehr über die deterministische Störung notwendig bis auf die erforderliche Ordnung des Störmodells. Damit sind nicht mehr viele einzelne Störmodelle, wie in Kapitel 2.2.6.4 beschrieben, notwendig, um einen bestimmten Frequenzbereich abdecken zu können – ein Störmodell, welches sich an die Sinusschwingung anpasst, ist ausreichend. Hiermit findet zum einen ein Downsizing des Störmodells und zum anderen eine Steigerung der Robustheit des Konzepts der Störmodelle statt.

Im Unterschied zu Theorem 2.41 wird nun das Störmodell $SM1$ nicht mehr parametrisiert direkt, sondern unparametrisiert indirekt durch die Ordnungserhöhung der Systemidentifikation in den Regelkreis eingebracht. Das interne Modell $SM2$ zur Kompensation stationärer Abweichungen sowie konstanter Störungen muss hingegen nicht parametrisiert werden, weshalb dieses weiterhin als Teil des Reglers direkt in den Regelkreis eingebracht wird und nicht identifiziert werden muss (siehe Abbildung 5.5).

Der Vorteil der Verlegung des Störmodells $SM2$ an den Streckenausgang gemäß Kapitel 2.2.6.8 zeigt sich im adaptiven Fall. Ohne diese Maßnahme wäre eine parameterabhängige Skalierung des Sollsignals $r[\cdot]$ notwendig, um stationäre Genauigkeit zu erreichen. Jedoch ist die stationäre Genauigkeit dann abhängig von der Genauigkeit der Parameter $\underline{\theta}_0$, was besonders im adaptiven Fall mit geschätzten Parametern $\hat{\underline{\theta}}[\cdot]$ schnell zu Abweichungen vom stationären Endwert führen kann. Durch die Verlegung des Störmodells $SM2$ an den Streckenausgang ist somit eine stationäre Genauigkeit garantiert, selbst bei unzureichender beständiger Anregung des Systems.

Entsprechend obiger Darstellung wird mit einer minimalen Ordnung von $n + n_{SM1}$ die Serienschaltung aus Strecke und Störmodell $SM1$ identifiziert. Das Störmodell $SM2$ wird von der Identifikation ausgeschlossen. Die unbekannt Parameter $\underline{\theta}_0$ werden mit Hilfe des

ARMA-Modells geschätzt:

$$y[k] = \underline{\theta}_0^T \underline{x}[k] = \underbrace{\left(-\hat{\alpha}_{n+n_{SM1}-1} \quad \cdots \quad -\hat{\alpha}_0 \quad \hat{\beta}_{n+n_{SM1}-1} \quad \cdots \quad \hat{\beta}_0 \right)}_{\hat{\underline{\theta}}[k]^T} \underbrace{\begin{pmatrix} y[k-1] \\ \vdots \\ y[k-n-n_{SM1}] \\ u[k-1] \\ \vdots \\ u[k-n-n_{SM1}] \end{pmatrix}}_{\underline{x}[k]} \quad (5.94)$$

Die identifizierten Parameter im Parametervektor $\hat{\underline{\theta}}[k]$

$$\hat{\underline{\theta}}[k] : \hat{\alpha}_{n+n_{SM1}-1}[k], \dots, \hat{\alpha}_0[k], \hat{\beta}_{n+n_{SM1}-1}[k], \dots, \hat{\beta}_0[k] \quad (5.95)$$

ergeben das geschätzte Ein- Ausgangsverhalten der Strecke:

$$\frac{y[k]}{u[k]} = \frac{\hat{B}_{SM1}[q] \hat{B}[q]}{\hat{A}_{SM1}[q] \hat{A}[q]} \quad (5.96)$$

Für die geschätzte erweiterte Strecke (2.566)/(2.567) gilt damit:

$$v_{SM}[k] = \left(\frac{\hat{B}_{SM1}[q] \hat{B}[q]}{\hat{A}_{SM1}[q] \hat{A}[q]} u[k] - r[k] \right) \frac{1}{q-1} \quad (5.97)$$

$$y[k] = \frac{\hat{B}_{SM1}[q] \hat{B}[q]}{\hat{A}_{SM1}[q] \hat{A}[q]} u[k] \quad (5.98)$$

Weiter gilt folgende Definition für die Reglerauslegung:

$$\frac{\hat{B}_{IM}[q]}{\hat{A}_{IM}[q]} = \frac{\hat{B}_{SM1}[q] \hat{B}[q] B_{SM2}[q]}{\hat{A}_{SM1}[q] \hat{A}[q] A_{SM2}[q]} \quad (5.99)$$

Für die adaptive Version des Referenzmodellreglers mit internem Modell ergeben sich mit Theorem 2.41 und dem identifizierten System (5.98) bzw. (5.99) die geschätzten Reglerparameter bzw. folgendes Regelgesetz:

$$u[k] = \frac{\hat{B}'_{EA,IM}[q]}{\hat{A}_{EA,IM}[q]} r[k] - \frac{\hat{B}_{EA,IM}[q]}{\hat{A}_{EA,IM}[q]} v_{SM}[k] \quad (5.100)$$

Der adaptive Referenzmodellregler erzwingt mit dieser Stellgröße den Verlauf des Ausgangssignals $y[\cdot]$ gemäß des Referenzmodells (2.568) mit enthaltenen Schätzwerten:

$$y^*[k] = \hat{k}_{SM2} \frac{\hat{B}_{IM}[q]}{A_{RegIM}^*[q]} r[k] \quad (5.101)$$

Um die Nulldynamik der zeitkontinuierlichen Strecke vollständig zu eliminieren, muss bei der Polvorgabe über das Wunschpolynom $A_{RegIM}^*[\cdot]$ das geschätzte Zählerpolynom $\hat{B}_{IM}[\cdot]$

berücksichtigt werden, womit das Wunschpolynom $\hat{A}_{RegIM}^*[\cdot]$ folglich auch Schätzwerte enthält. Nachdem die instabilen Diskretisierungsnullstellen entsprechend des Theorems 4.4 nicht eliminiert werden dürfen, sondern gemäß Theorem 4.5 im Systemverhalten erhalten bleiben müssen, resultiert gemäß Gleichung (4.49) folgendes Referenzmodell:

$$y^*[k] = \hat{k}_{SM2} \frac{\hat{B}_{DNS,instabil}[q]}{A_{RegIM,red}^*[q]} r[k] \quad (5.102)$$

Da die instabilen Diskretisierungsnullstellen kein physikalisches Verhalten der zeitkontinuierlichen Strecke beschreiben, kann die unbekannte Strecke mit dem adaptiven Referenzmodellregler beliebig beeinflusst werden. Entsprechend des Theorems 5.4 bzw. 5.5 bleibt der geschlossene Regelkreis stets stabil und folgt nach einem kurzen transienten Vorgang exakt dem Referenzmodell, auch wenn die wahren Parameter wegen mangelnder beständiger Anregung noch nicht bekannt sind. Beschreiben in der transienten Phase auch instabile Nullstellen das aktuelle physikalische Verhalten der Strecke, entsteht keine Instabilität, da diese weder vernachlässigt noch gekürzt werden. Der Erhalt der instabilen Nullstelle im Referenzmodell aus Stabilitätsgründen führt jedoch zu einem unerwünschten Verhalten der geregelten Strecke, wenn die instabilen Nullstellen Streckenverhalten repräsentieren.

Um dies zu verhindern, sollte der Erhalt der instabilen Nullstellen im Referenzmodell nur durchgeführt werden, wenn diese auf der negativ reellen Achse zu liegen kommen, d.h. der Eigenschaft instabiler Diskretisierungsnullstellen entsprechen. Kommt es während der transienten Phase somit auf Grund instabiler Nullstellen kurzzeitig zu einem instabilen Regler, wird die Parameteridentifikation stark angeregt, was zu einer Konvergenz zu den richtigen Parametern führt (vergleichbares Verhalten wie bei geschätzten instabilen Polstellen während der transienten Phase); diese Parameter repräsentieren nur stabile Nullstellen und instabile Diskretisierungsnullstellen. Die instabilen Diskretisierungsnullstellen beschreiben kein Systemverhalten mehr und können im Referenzmodell ohne Auswirkung auf das gewünschte Verhalten erhalten werden.

Der Bereich der negativen reellen Achse mit erlaubten geschätzten instabilen Nullstellen kann gemäß Abbildung 5.6 mit $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$ erweitert werden, ohne dass geschätzte instabile Nullstellen Systemverhalten repräsentieren. Mit dem Grenzfall $\varphi = 90^\circ$ repräsentieren die entsprechenden Nullstellen in der linken Halbebene nur hohe Kreisfrequenzen ω zwischen $\omega_{max} = \pi/h \geq \omega \geq \pi/2h = \omega_{max}/2$. Bei einer robusten Abtastzeit mit mindestens einer Dekade Abstand zwischen der größten Kennkreisfrequenz ω_0 bzw. Eckkreisfrequenz ω_E und der Abtastgrenze $\omega_{max} = \pi/h \geq 10\omega_E$ können instabile Nullstellen in der linken Halbebene mit $\omega_{max}/2 \geq 5\omega_E$ kein Systemverhalten beschreiben.

Es ergibt sich folgende Erweiterung des Regel-Algorithmus: erst wenn sich instabile Nullstellen nur noch in der linken q -Halbebene zeigen, werden diese im Referenzmodell erhalten. Mit dieser Vergrößerung des erlaubten Bereiches für instabile Nullstellen verringert sich zum einen die Häufigkeit von unruhigem Verhalten auf Grund einer kurzzeitig auftretenden instabilen Pol- Nullstellenkürzung in der transienten Phase und zum anderen beeinflussen erhaltene instabile Nullstellen nicht mehr das dominante Verhalten des Referenzmodells.

Alternativ zu diesem Vorgehen kann gemäß Kapitel 5.5 eine Parameterprojektion angewandt werden, mit der die transiente Phase verkürzt wird und keine kurzzeitige Instabilität des Reglers für eine schnelle Konvergenz der Nullstellen zu stabilen Nullstellen bzw.

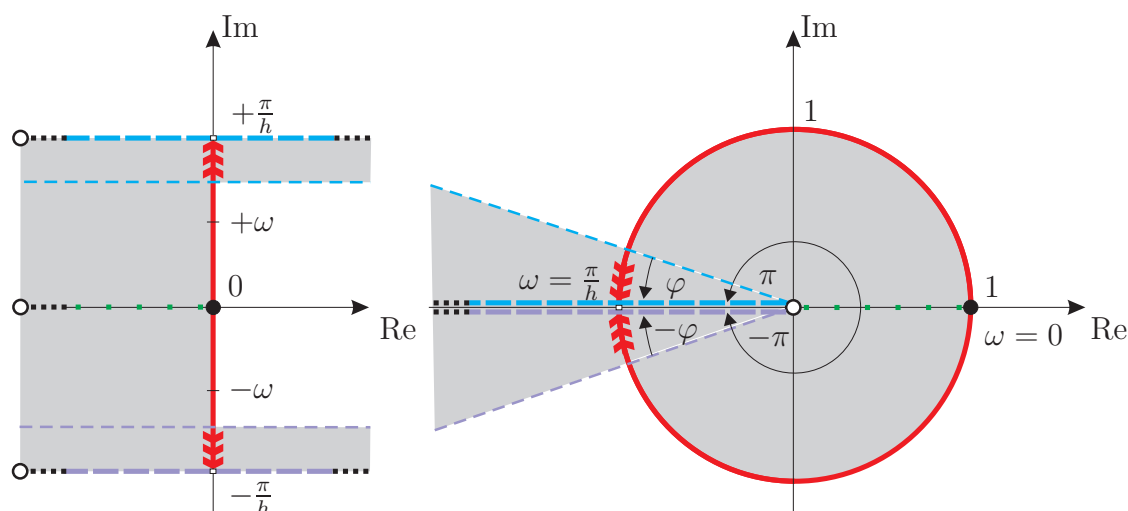


Abbildung 5.6: rechts: Erlaubter Bereich der geschätzten Nullstellen des zeitdiskreten Modells, in welchem instabile Nullstellen mit $0 \leq \varphi \leq 90^\circ$ kein Systemverhalten des minimalphasigen realen Systems beschreiben; links: Darstellung des erlaubten Nullstellenbereiches der z - bzw. q -Ebene in der s - bzw. ρ -Ebene

instabilen Diskretisierungsnullstellen notwendig ist.

Das in diesem Kapitel beschriebene Vorgehen ist auf den erweiterten Referenzmodellregler mit internem Modell aus Theorem 2.42 übertragbar. Dieser erzwingt mit der Stellgröße (2.578) den Verlauf des Ausgangssignals $y[\cdot]$ gemäß des Referenzmodells (2.587), wobei jeweils die entsprechenden Schätzwerte anzusetzen sind. Werden die instabilen Diskretisierungsnullstellen nach Theorem 4.6 vernachlässigt, so gilt mit Gleichung (4.51):

$$\frac{y^*[k]}{r[k]} = k_{SM2} \frac{B_i^*[q]}{A_i^*[q] A_{RegIM,red}^*[q]} \quad (5.103)$$

Auf Grund der Vernachlässigung instabiler Nullstellen ist es in der transienten Phase möglich, dass kurzzeitig instabiles Verhalten auftritt, wenn auch die instabilen Nullstellen mangels beständiger Anregung das aktuelle physikalische Verhalten der Strecke mit beschreiben. Dadurch wird die Identifikation jedoch angeregt, wodurch instabile Nullstellen ihre physikalische Bedeutung verlieren und die Eigenschaft instabiler Diskretisierungsnullstellen annehmen. Somit ist auch der adaptive erweiterte Referenzmodellregler 2.42 nach einer kurzen unruhigen transienten Phase stets stabil und erfüllt das Regelziel. Mit der Parameterprojektion in Kapitel 5.5 kann die beschriebene unruhige transiente Phase vermieden werden, indem verhindert wird, dass instabile Nullstellen physikalisches Streckenverhalten beschreiben. Damit entsteht durch die Vernachlässigung instabiler Nullstellen zu keiner Zeit mehr instabiles Verhalten des geregelten Systems.

Theorem 5.7: Adaptiver Referenzmodellregler mit internem Modell

Nachdem System-Störungen eine Konvergenz der Schätzparameter verhindern und dadurch die Stabilität des adaptiven Reglers gefährden können, ist die Anwendung interner Modelle zur Kompensation von Störungen notwendig.

Das geeignete Störmodell wird beim adaptiven Regler durch die integrierte Systemidentifi-

kation selbst bestimmt. Die Ordnung der Systemidentifikation ist daher um mindestens die Ordnung des notwendigen Störmodells zur Kompensation der Störung zu erhöhen. Hiermit wird das Störmodell SM1 indirekt über die Systemidentifikation in den Regelkreis eingebracht und darf daher nicht mehr direkt, wie bei der nicht-adaptiven Realisierung in Theorem 2.41, Teil des Reglers sein.

Die Verlegung des Störmodells SM2 an den Streckenausgang zur Kompensation einer stationären Abweichung sowie stationärer Störungen garantiert stationäre Genauigkeit unabhängig von der Genauigkeit der Schätzwerte. Eine unrobuste Skalierung des Sollsignals mit Schätzwerten zum Erreichen der stationären Genauigkeit ist nicht mehr notwendig.

5.5 Adaptiver Referenzmodellregler mit Parameterbeschränkung auf physikalisch relevante Gebiete

Wie mit Kapitel 4 deutlich wurde, besitzt das zeitdiskrete Modell eines zeitkontinuierlichen Systems mit Relativgrad $\tilde{r} \geq 2$ Diskretisierungsnullstellen. Diese kommen für robuste Abtastzeiten auf der negativen reellen Achse zu liegen und es ist gemäß Gleichung (2.545) mindestens eine Diskretisierungsnullstelle grenzstabil bzw. instabil. Für den Identifikationsvorgang des adaptiven Referenzmodellreglers bedeutet dies, dass die Parameterschätzung gegen einen Parametersatz konvergiert, der zu instabilen Nullstellen führt. Erreichen die sog. Diskretisierungsnullstellen ihre Werte auf der negativ reellen Achse, so beschreiben die entsprechenden instabilen Nullstellen kein Systemverhalten. Folglich muss die Dynamik der Diskretisierungsnullstellen zum beliebigen Beeinflussen der realen Strecke nicht eliminiert werden und die instabilen Diskretisierungsnullstellen können im Referenzmodell erhalten bleiben. Nachdem das reale System minimalphasig ist, besitzt das zeitdiskrete Modell lediglich stabile Systemnullstellen innerhalb des Einheitskreises und die besagten Diskretisierungsnullstellen auf der negativ reellen Achse ohne Einfluss auf das physikalische Verhalten des Modells.

In Kapitel 5.2 wurde verdeutlicht, dass der Identifikationsalgorithmus zu jedem Zeitschritt neue Systemparameter schätzt, mit dem Ziel, dass diese die momentane Hyperebenengleichung (5.29) erfüllen. Es ist ersichtlich, dass es sich dabei um einen rein mathematischen Vorgang handelt und folglich die neuen Parameter, welche das aktuelle Ein- Ausgangsverhalten beschreiben, keinen Bezug zum realen System aufweisen müssen. Aus diesem Grund besteht die Möglichkeit, dass zufällig Werte geschätzt werden, die für die gewählte Reglerstruktur Probleme mit sich führen. So ist es möglich, dass das aktuelle Systemverhalten auch mit Hilfe von instabilen Nullstellen beschrieben wird, womit eine beliebige Beeinflussung des Systems durch Kompensation der Nulldynamik zur Instabilität führt. Die instabilen Nullstellen dürfen nicht eliminiert werden und müssen im Referenzmodell erhalten bleiben, was eine Systemabhängigkeit des Referenzmodells bedeutet und folglich kein beliebiges Verhalten mehr vorgegeben werden kann.

Diese Problematik würde sich nicht ergeben, wenn auf eine andere Stelle der aktuellen Hyperebene mit physikalisch sinnvollen Parameterwerten projiziert worden wäre. Entsprechend dieser Idee sollte der Parameterraum durch Einbringen von Vorwissen auf physikalisch sinnvolle Werte begrenzt werden; damit wird die Systemidentifikation in Gebiete

verlagert, in denen sich der wahre Parameterwert befindet – die Parameter können schneller konvergieren und das Gesamtsystem wird robustifiziert.

Nachdem ein minimalphasiges reales System betrachtet wird, darf der Parameterraum mit der Erkenntnis des Kapitels 4 derart begrenzt werden, dass sich lediglich Polstellen im Einheitskreis und bei robuster Abtastung nur Nullstellen im Einheitskreis und auf der reellen negativen Achse ergeben (siehe Abbildung 5.6 mit $\varphi = 0^\circ$). Im Folgenden wird untersucht, wie die einzelnen Parameterwerte während des Identifikationsvorganges auf diesen Parameterraum begrenzt werden können, ohne die Stabilitätsbedingungen zu verletzen [55].

5.5.1 Parameterprojektion

5.5.1.1 Parameterprojektion für den Projektionsalgorithmus

Sollen die vom Projektionsalgorithmus bestimmten Parameter verändert werden, so ist die Grundvoraussetzung der Stabilitätsanalyse zu erfüllen, welche in der Eigenschaft der positiv semidefiniten Lyapunov-Funktion (5.39) zu finden ist. Die Differenzgleichung der Lyapunov-Funktion muss negativ semidefinit sein, d.h. die Norm des Parameterfehlervektors $\|\underline{\hat{\theta}}[\cdot]\|$ darf nicht anwachsen. Eine derartige Forderung lässt sich mit dem Wunsch, die Parameter zu verändern, in Einklang bringen. Hierfür ist es wichtig, dass alle erlaubten Parameterschätzwerte in einem konvexen Gebiet liegen, welches auch den wahren Parameterwert beinhaltet; dabei besagt Konvexität, dass eine Verbindungslinie zwischen zwei Punkten des Randes stets vollständig innerhalb des Gebietes liegen muss. Auf Grund der dadurch erhaltenen Form des Gebietes ist eine orthogonale Projektion der falschen Parameterschätzwerte auf das Randgebiet der erlaubten Werte eindeutig; die Projektionsrichtung enthält immer eine Komponente in Richtung des wahren Wertes. Um dabei der Forderung eines betragsmäßig nicht anwachsenden Parameterfehlervektors gleich zu kommen, ist, wie bereits erwähnt, eine orthogonale Projektion auf das Randgebiet notwendig; dadurch gilt für den neuen geschätzten Parameterfehlervektor $\underline{\hat{\theta}}'[k]$ stets:

$$\|\underline{\hat{\theta}}'[k]\| \leq \|\underline{\hat{\theta}}[k]\| \quad (5.104)$$

Ein Schema der orthogonalen Projektion auf das konvexe Gebiet ist in Abbildung 5.7 zu sehen. Mit diesem soll nun die Gültigkeit der Ungleichung (5.104) bei Anwendung der orthogonalen Projektion bewiesen werden. Mit dem Cosinus-Satz aus Theorem A.10 kann man folgende Ungleichung als Bedingung aufstellen:

$$\|\underline{\hat{\theta}}[k]\|^2 - \|\underline{\hat{\theta}}'[k]\|^2 = \|\underline{\hat{\theta}}[k] - \underline{\hat{\theta}}'[k]\|^2 - 2 \|\underline{\hat{\theta}}[k] - \underline{\hat{\theta}}'[k]\| \|\underline{\hat{\theta}}'[k]\| \cos(\alpha + \beta) \geq 0$$

Verwendet man die Umformung (A.50) und setzt $\beta = 90^\circ$, so folgt:

$$\|\underline{\hat{\theta}}[k] - \underline{\hat{\theta}}'[k]\|^2 + 2 \|\underline{\hat{\theta}}[k] - \underline{\hat{\theta}}'[k]\| \|\underline{\hat{\theta}}'[k]\| \sin \alpha \geq 0 \quad (5.105)$$

$$\rightarrow \quad 0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ \quad (5.106)$$

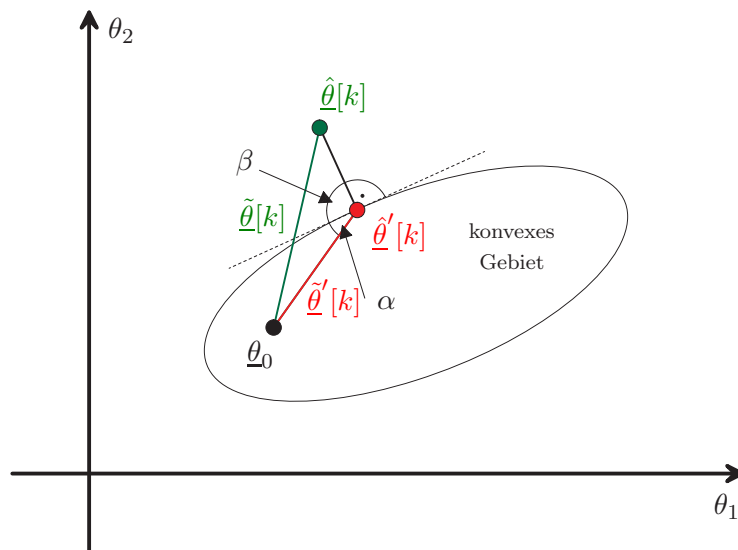


Abbildung 5.7: Parameterbeschränkung (Projektionsalgorithmus)

Die Ungleichung (5.105) ist für alle Winkel der Bedingung (5.106) erfüllt, d.h. der unbekannte Parametervektor $\underline{\theta}_0$ kann beliebig im konvexen Gebiet liegen und dennoch wird die Ungleichung (5.105) erfüllt; der Betrag des Parameterfehlervektors nimmt demnach auf Grund der Parameterbeschränkung nie zu, womit die Ungleichung (5.104) ihre Berechtigung hat – trotz Veränderung der Parameter kann Konvergenz und Stabilität gesichert werden, wenn orthogonal auf das Randgebiet des konvexen Gebietes projiziert wird.

Detektiert der Parameterbeschränkungs-Algorithmus einen Parameterschätzwert $\hat{\underline{\theta}}[k]$, der außerhalb des festgelegten konvexen Gebietes liegt, so findet eine orthogonale Projektion von $\hat{\underline{\theta}}[k]$ auf den Rand des Gebietes statt; es resultiert $\hat{\underline{\theta}}'[k]$. Auf diese Weise wird die Systemidentifikation laufend auf die Einhaltung der erlaubten Parameterschätzwerte überprüft und gegebenenfalls findet eine Korrektur statt. Ein Beispiel einer möglichen Abfolge wird in Abbildung 5.8 gezeigt.

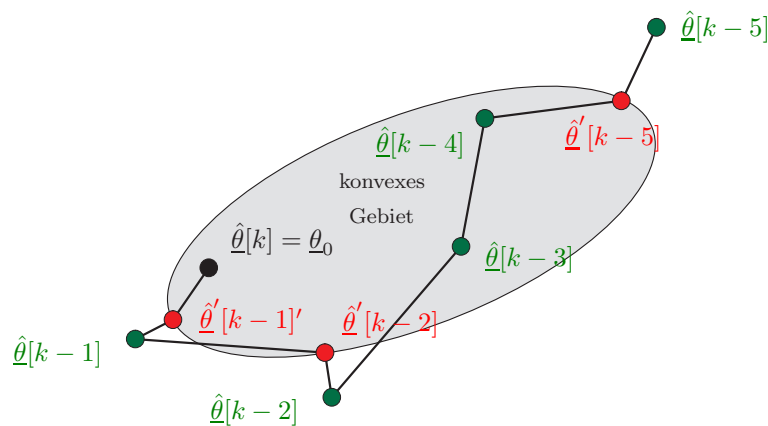


Abbildung 5.8: Beispiel einer Systemidentifikation mit Parameterbeschränkung (Projektionsalgorithmus)

5.5.1.2 Parameterprojektion für den rekursiven Least-Squares-Algorithmus

Um die Gültigkeit des Stabilitätsbeweises des rekursiven Least-Squares-Algorithmus (RLS-Algorithmus, engl.: Recursive-Least-Squares-Algorithm) trotz Parameterveränderung zu erhalten, muss wie beim Projektionsalgorithmus garantiert werden, dass die Differenzengleichung der Lyapunov-Funktion negativ semidefinit ist. Im Unterschied zum Projektionsalgorithmus beinhaltet die Lyapunov-Funktion (5.59) die Matrix $\mathbf{P}[\cdot]$, so dass die Eigenschaft (5.104) und damit eine orthogonale Projektion nicht ausreichend sind. Es ist folgende Koordinatentransformation notwendig, um eine Zunahme der Lyapunov-Funktion $V[\cdot]$ bei der Projektion des Parameterschätzwerts $\hat{\underline{\theta}}[k]$ auf den Rand des konvexen Gebietes stets zu verhindern:

$$\vartheta[k] = (\mathbf{P}[k])^{-\frac{1}{2}} \underline{\theta}[k] \quad (5.107)$$

$$\underline{\theta}[k] = (\mathbf{P}[k])^{\frac{1}{2}} \underline{\vartheta}[k] \quad (5.108)$$

Der Parametervektor $\underline{\theta}$ wird in einem neuen Koordinatensystem als $\underline{\vartheta}$ ausgedrückt. Bei der Transformationsmatrix $(\mathbf{P}[\cdot])^{\frac{1}{2}}$ handelt es sich um die sog. Wurzel aus der Matrix $\mathbf{P}[\cdot]$; diese Wurzel ist für die positiv semidefinite Matrix $\mathbf{P}[\cdot]$ wie folgt definiert und berechnet sich gemäß Theorem A.3:

$$\mathbf{P}[k] = (\mathbf{P}[k])^{\frac{1}{2}} (\mathbf{P}[k])^{\frac{1}{2}}$$

Wendet man die Transformation (5.108) auf die Lyapunov-Funktion (5.59) an, so resultiert folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} V[k] &= (\hat{\underline{\theta}}[k] - \underline{\theta}_0)^T \mathbf{P}[k]^{-1} (\hat{\underline{\theta}}[k] - \underline{\theta}_0) \\ &= (\hat{\underline{\vartheta}}[k] - \underline{\vartheta}_0)^T (\mathbf{P}[k])^{\frac{T}{2}} \mathbf{P}[k]^{-1} (\mathbf{P}[k])^{\frac{1}{2}} (\hat{\underline{\vartheta}}[k] - \underline{\vartheta}_0) \end{aligned}$$

Die Matrix $\mathbf{P}[\cdot]$ ist symmetrisch, weshalb weiter vereinfacht werden kann:

$$V[k] = (\hat{\underline{\vartheta}}[k] - \underline{\vartheta}_0)^T (\hat{\underline{\vartheta}}[k] - \underline{\vartheta}_0) = \tilde{\underline{\vartheta}}[k]^T \tilde{\underline{\vartheta}}[k] \quad (5.109)$$

Da die Form der Lyapunov-Funktion (5.109), berechnet über den Bildraum, genau der des Projektionsalgorithmus in Gleichung (5.39) entspricht, kann das gesamte Vorgehen der orthogonalen Projektion auf den Rand des konvexen Gebietes aus Kapitel 5.5.1.1 für den RLS-Algorithmus übernommen werden, jedoch bezogen auf den Bildraum. Hierfür muss man sowohl das konvexe Gebiet, wie auch den während der Identifikation detektierten Parameterschätzwert $\hat{\underline{\theta}}[k]$, der außerhalb des erlaubten Bereiches liegt, mit Gleichung (5.108) bzw. (5.107) in den Bildraum transformieren. Die Transformation entspricht einer linearen Abbildung, d.h. es findet eine Drehstreckung und Verschiebung des Gebietes statt – ein konvexes Gebiet bleibt auch im Bildraum konvex. Deshalb kann dort die orthogonale Projektion auf den Gebietsrand durchgeführt werden, womit im Bildraum $\hat{\underline{\vartheta}}'[k]$ bzw. $\tilde{\underline{\vartheta}}'[k]$ resultiert. Entsprechend der Gleichung (5.104) gilt:

$$\begin{aligned} \|\tilde{\underline{\vartheta}}'[k]\| &\leq \|\tilde{\underline{\vartheta}}[k]\| \\ \|\hat{\underline{\vartheta}}'[k] - \underline{\vartheta}_0\| &\leq \|\hat{\underline{\vartheta}}[k] - \underline{\vartheta}_0\| \end{aligned} \quad (5.110)$$

Wird nun $\hat{\underline{\vartheta}}'[k]$ mit Gleichung (5.108) zurücktransformiert, so resultiert ein neues $\hat{\underline{\theta}}'[k]$, welches auf dem vorgegebenen Gebietsrand im realen Koordinatensystem zu liegen kommt und gleichzeitig die für die Stabilität notwendige Bedingung an die Lyapunov-Funktion des RLS-Algorithmus erfüllt. Bestätigt wird dies durch die Rücktransformation der Gleichung (5.110) mit der Beziehung (5.107):

$$\begin{aligned} \left(\hat{\underline{\theta}}'[k] - \underline{\theta}_0\right)^T \mathbf{P}^{-1}[k] \left(\hat{\underline{\theta}}'[k] - \underline{\theta}_0\right) &\leq \left(\hat{\underline{\theta}}[k] - \underline{\theta}_0\right)^T \mathbf{P}^{-1}[k] \left(\hat{\underline{\theta}}[k] - \underline{\theta}_0\right) \\ \left(\tilde{\underline{\theta}}'[k]\right)^T \mathbf{P}^{-1}[k] \left(\tilde{\underline{\theta}}'[k]\right) &\leq \left(\tilde{\underline{\theta}}[k]\right)^T \mathbf{P}^{-1}[k] \left(\tilde{\underline{\theta}}[k]\right) \\ V'[k] &\leq V[k] \end{aligned}$$

Die Lyapunov-Funktion wächst demnach als Folge der Aktivität des Parameterbeschränkungs-Algorithmus nie an, womit der RLS-Algorithmus trotz Parameterbeschränkung stets konvergiert. Abschließend sei auf die Grafik 5.9 hingewiesen, die den Parameterbeschränkungs-Algorithmus in einem Schema verdeutlicht.

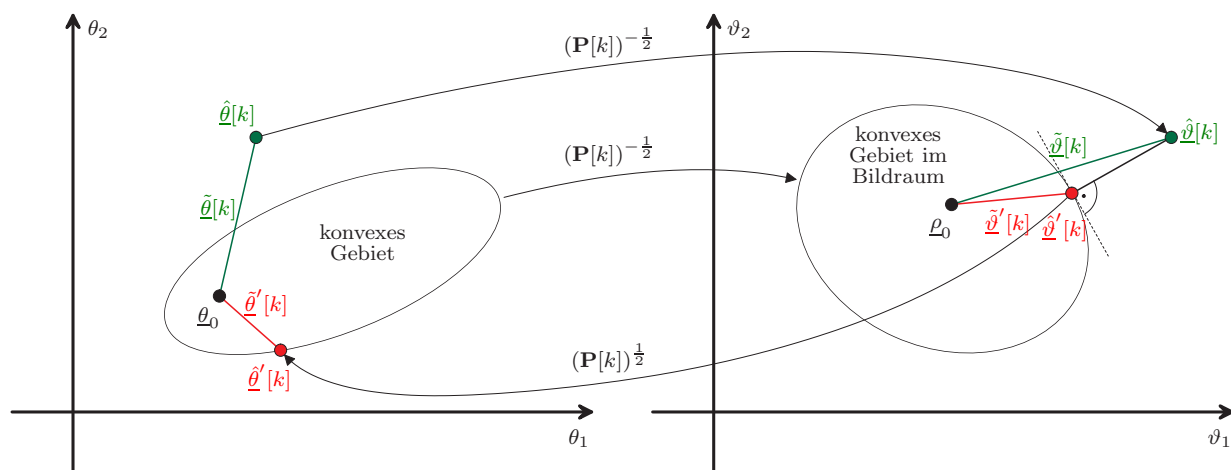


Abbildung 5.9: Parameterbeschränkung (RLS-Algorithmus)

Theorem 5.8: Parameterbeschränkung

Das Gebiet der zu identifizierenden Parameter kann während der Identifikation auf ein konvexes Gebiet, welches die wahren Parameter enthält, beschränkt werden. Liegt ein geschätzter Parametervektor außerhalb des Gebiets, findet eine orthogonale Projektion auf den Rand des Gebiets statt.

Ist die Bedingung eines konvexen Gebiets erfüllt, bleibt die Stabilitäts- bzw. Konvergenzeigenschaft der Identifikationsalgorithmen trotz der orthogonalen Projektion erhalten. Im Unterschied zum Projektionsalgorithmus muss die orthogonale Projektion beim RLS-Algorithmus im Bildbereich stattfinden, damit die Konvergenzeigenschaft ihre Gültigkeit behält.

Die Parameterbeschränkung führt zu einer Beschleunigung der transienten Phase, womit schneller ein geeigneter Parametersatz mit den Eigenschaften des vorgegebenen Gebiets gefunden wird.

5.5.2 Beschränkung der Parameter auf Gebiete mit stabilen Nullstellen sowie Diskretisierungsnullstellen

In Kapitel 4 wurde deutlich, dass die zeitdiskrete Modellierung der Klasse der minimalphasigen Systeme bei einer robusten Abtastung lediglich zu stabilen System-Nullstellen innerhalb des Einheitskreises und stabilen bzw. instabilen Diskretisierungs-Nullstellen auf der negativen reellen Achse führen kann. Außerdem wurde gezeigt, dass die instabilen Diskretisierungsnullstellen kein Systemverhalten des zeitkontinuierlichen Systems beschreiben. Eine Beschränkung instabiler Nullstellen auf die negativ reelle Achse während der Parameteridentifikation ermöglicht nun auch bei noch nicht zu den wahren Werten konvergierten Parametern eine beliebige Dynamikvorgabe des geregelten Systems über das Referenzmodell, da die aus Stabilitätsgründen zu erhaltenen instabilen Diskretisierungsnullstellen auf der negativen reellen Achse keine Auswirkung auf die gewünschte zu regelnde Systemdynamik zeigen.

Ist der Relativgrad \tilde{r} des zeitkontinuierlichen Systems bekannt, so lässt sich die Anzahl der Diskretisierungsnullstellen gemäß Theorem 4.1 bestimmen. Die Diskretisierungsnullstellen nehmen bei einer robusten Abtastung und bekanntem Relativgrad \tilde{r} die Werte (4.42) an und liegen gemäß Theorem 4.3 stets auf der negativen reellen Achse mit der bzgl. der Abtastzeit höchsten Dynamik. Konkrete Werte der Diskretisierungsnullstellen zeigt Gleichung (2.545). Den Nullstellenverlauf des Zwei-Massen-Systems ($\tilde{n} = 4$, $\tilde{r} = 3$) in Abhängigkeit der Abtastzeit h zeigt Abbildung 4.3. Bereits bei einer robusten Abtastfrequenz mit dem 10- bis 20-fachen der größten Eigen- bzw. Eckfrequenz erreichen die Diskretisierungsnullstellen ihre theoretischen Werte (2.545).

Mit diesem Wissen sollte die Parameteridentifikation auf ein Parametergebiet beschränkt werden, mit welchem nur Systeme mit stabilen Nullstellen innerhalb des Einheitskreises und instabilen Nullstellen auf der negativ reellen Achse repräsentiert werden. Dies zeigt Abbildung 5.6 mit $\varphi = 0^\circ$. Aus Stabilitätsgründen darf die Parameterprojektion nur direkt in der Parameterebene durchgeführt werden, wobei garantiert werden muss, dass das geschlossene Gebiet konvex ist (siehe Theorem 5.8). Eine orthogonale Projektion instabiler Nullstellen auf ein konvexes Gebiet in der Nullstellenebene der Abbildung 5.6 mit anschließender Bestimmung der Parameter ist nicht erlaubt, da ein konvexes Gebiet in der Nullstellenebene nicht zwangsläufig einem konvexen Gebiet in der Parameterebene entspricht, was für die Stabilität der Identifikation zwingend ist. Ist das Parametergebiet nicht konvex, so kann die Identifikation auf Grund der Parameterprojektion bei einem ungeeigneten Wert und Anregung sich selbst blockieren; dies äußert sich in einem nicht mehr monoton fallenden Betrag des Parameterfehlervektors, womit der Regelkreis instabil werden kann.

Ist kein konvexes Gebiet mit den gewünschten Eigenschaften zu finden, muss eine konvexe Hülle über das gewünschte Gebiet gelegt werden, auch wenn damit kleine vorgelagerte Gebiete bei der Identifikation erlaubt werden, die zu instabilen Nullstellen führen können. Für die Entscheidung, ob instabile Nullstellen im Referenzmodell erhalten werden, ist das eigentliche Gebiet zu verwenden und die konvexe Hülle von diesem ist nur für die orthogonale Projektion heranzuziehen. Sollte daher ein Parametersatz mit instabilen Nullstellen nahe des erlaubten Gebietes identifiziert werden, gelangen die Schätzparameter auf Grund der starken Anregung durch die kurzzeitige Instabilität unmittelbar in das erlaubte Gebiet.

Für das Beispiel des Zwei-Massen-Systems existieren konvexe Gebiete. Das Zwei-Massen-System mit der Ordnung $\tilde{n} = 3$ bzw. $\tilde{n} = 4$ (siehe Kapitel 3) besitzt $m_{Sys} = 1$ stabile und reelle Systemnullstellen sowie $m_{DNS} = 1$ bzw. $m_{DNS} = 2$ Diskretisierungsnullstellen. Unabhängig vom Wert der reellen Systemnullstelle konvergieren die Diskretisierungsnullstellen bei robuster Abtastung gemäß Gleichung (2.545) zu folgenden Werten:

$$\tilde{n} = 3 : \quad q_{1,DNS} = -1 \quad (5.111)$$

$$\tilde{n} = 4 : \quad q_{1,DNS} = -0.268 \quad (5.112)$$

$$q_{2,DNS} = -3.732 \quad (5.113)$$

Mit diesem Wissen können die Nullstellenbereiche für die zwei bzw. drei Nullstellen festgelegt werden, innerhalb derer die Werte des zu identifizierenden realen Systems zu finden sind:

$$\tilde{n} = 3 : \quad q_{1,Sys} \in [0, 1] \quad (5.114)$$

$$q_{1,DNS} \in [-2, 0[\quad (5.115)$$

$$\tilde{n} = 4 : \quad q_{1,Sys} \in [0, 1] \quad (5.116)$$

$$q_{1,DNS} \in [-1, 0[\quad (5.117)$$

$$q_{2,DNS} \in [-4, -1[\quad (5.118)$$

Der Zusammenhang zwischen Nullstellen q_j und Systemparametern β_j des zu identifizierenden monischen Nullstellenpolynoms $B[\cdot]$ lautet:

$$m = \tilde{n} - 1 = 2 : \quad B[q] = q^2 + \underbrace{(-q_{1,Sys} - q_{1,DNS})}_{\beta_1} q + \underbrace{(q_{1,Sys} q_{1,DNS})}_{\beta_0} \quad (5.119)$$

$$m = \tilde{n} - 1 = 3 : \quad B[q] = q^3 + \underbrace{(-q_{1,Sys} - q_{1,DNS} - q_{2,DNS})}_{\beta_2} q^2 + \dots$$

$$\dots + \underbrace{(q_{1,Sys} q_{1,DNS} + q_{2,DNS} (q_{1,Sys} + q_{1,DNS}))}_{\beta_1} q + \underbrace{(-q_{1,Sys} q_{1,DNS} q_{2,DNS})}_{\beta_0} \quad (5.120)$$

Für das Zwei-Massen-System mit der Ordnung $\tilde{n} = 3$ lassen sich mit Gleichung (5.119) folgende Zusammenhänge aufstellen:

$$\beta_0 = -q_{1,Sys}^2 - q_{1,Sys} \beta_1 \quad (5.121)$$

$$\beta_0 = -q_{1,DNS}^2 - q_{1,DNS} \beta_1 \quad (5.122)$$

Mit den Grenzen aus Gleichung (5.114) und (5.115) ergeben sich die Gebietsgrenzen:

$$\beta_0 = 0, \quad \beta_0 = -1 - \beta_1, \quad \beta_0 = -4 + 2\beta_1 \quad (5.123)$$

Das mit den Geradengleichungen (5.123) eingegrenzte konvexe Gebiet zeigt Abbildung 5.10.

Für das Zwei-Massen-System mit der Ordnung $\tilde{n} = 4$ lassen sich mit Gleichung (5.120) in gleicher Weise abgrenzende Ebenengleichungen des dreidimensionalen Parameterraumes

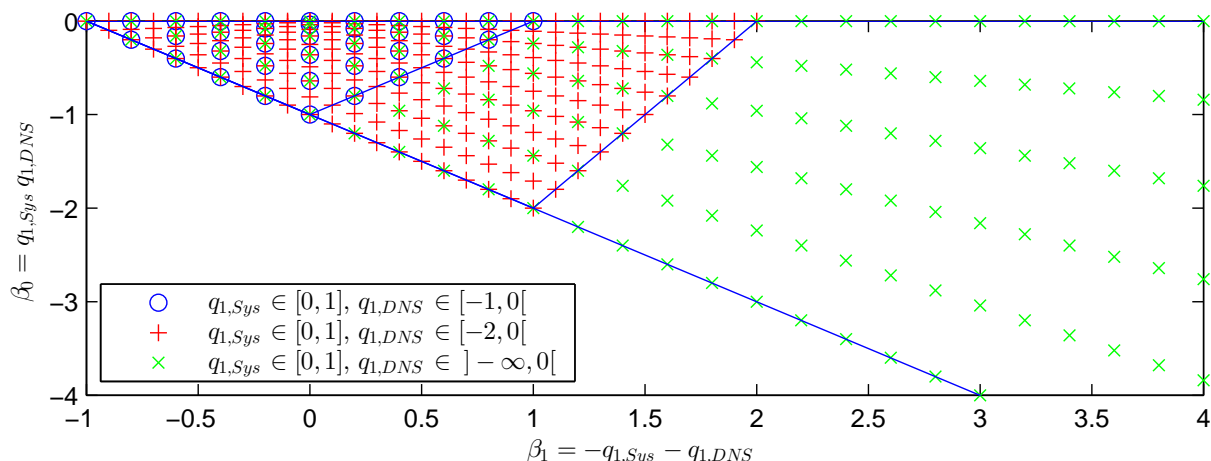


Abbildung 5.10: Konvexes Gebiet aller Parameterkombinationen β_0 und β_1 ($m=2$), die zu einer stabilen reellen Systemnullstelle $q_{1,Sys} \in [0, 1]$ und zu einer stabilen bzw. instabilen reellen Diskretisierungsnullstelle $q_{1,DNS} \in] - \infty, 0[$ führen

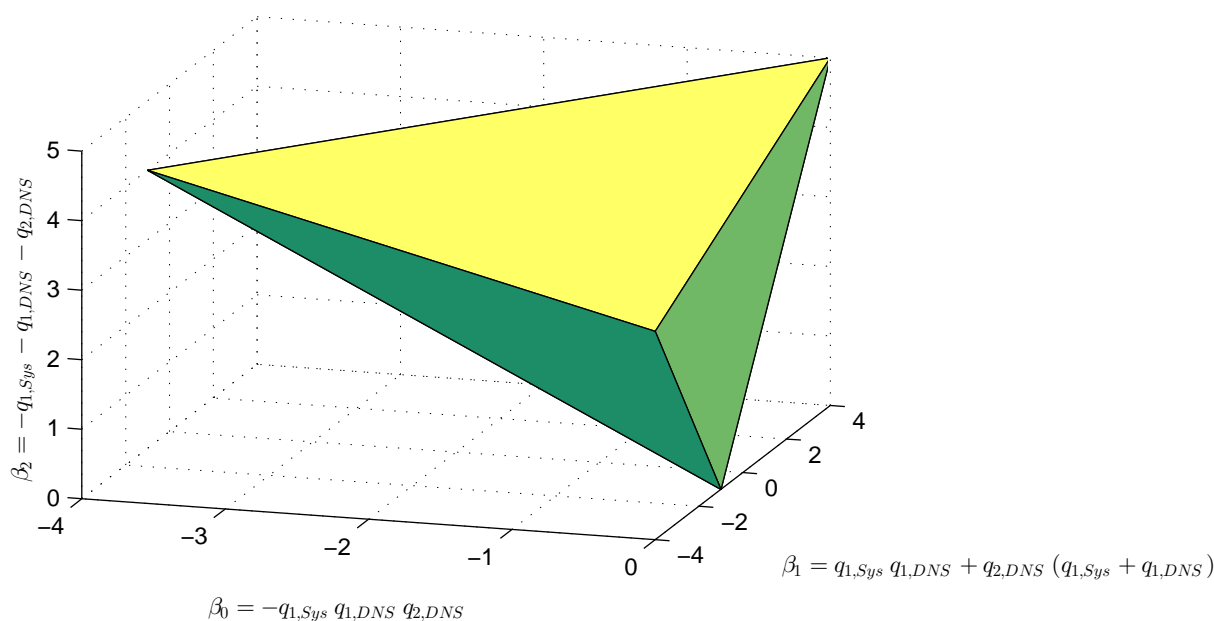


Abbildung 5.11: Konvexes Gebiet aller Parameterkombinationen β_0 , β_1 und β_2 ($m=3$), die zu einer stabilen reellen Systemnullstelle $q_{1,Sys} \in [0, 1]$ und zu einer stabilen reellen Diskretisierungsnullstelle $q_{1,DNS} \in [-1, 0[$ sowie zu einer instabilen reellen Diskretisierungsnullstelle $q_{2,DNS} \in [-4, -1[$ führen

des Nullstellenpolynoms $B[\cdot]$ bestimmen. Mit den vorgegebenen Nullstellen-Bereichen in Gleichung (5.116) bis (5.118) resultiert das in Abbildung 5.11 dargestellte dreidimensionale konvexe Parametergebiet.

Mit der Kenntnis der konvexen Parameter-Gebiete, in welchen der Parametervektor $\hat{\theta}[\cdot]$ die gewünschten Systemeigenschaften erfüllt und der wahre Parametervektor θ_0 zu finden ist, lässt sich nun der in Kapitel 5.5.1 beschriebene Parameterbeschränkungs-Algorithmus

anwenden. Hierbei müssen geschätzte Parameter, die sich außerhalb des Gebiets befinden, orthogonal auf die Gebietsflächen, Schnittgeraden bzw. Eckpunkte projiziert werden. Eine n -dimensionale Ebene mit dem Normalenvektor \underline{n} und dem Abstand d der Ebene vom Nullpunkt wird mit folgender Gleichung beschrieben:

$$d = \underline{\theta}^T \underline{n} \quad (5.124)$$

Alle Werte $\underline{\theta}$ der Ebene erfüllen diese Gleichung. Mit den Ebenengleichungen lassen sich die Schnittgeraden und Eckpunkte bestimmen.

Für die orthogonale Projektion kann der in Kapitel 5.2.1 beschriebene Projektionsalgorithmus Anwendung finden. Dieser berechnet die orthogonale Projektion des Parametervektors $\hat{\underline{\theta}}[\cdot]$ auf die Ebene (5.124):

$$\hat{\underline{\theta}}'[k] = \hat{\underline{\theta}}[k] + \frac{\underline{n}}{\underline{n}^T \underline{n}} (d - \hat{\underline{\theta}}[k]^T \underline{n}) \quad (5.125)$$

Bei Verwendung des RLS-Algorithmus für die Identifikation ist zu beachten, dass das konvexe Gebiet, d.h. die Ebenengleichungen, sowie die Parameterwerte mit Gleichung (5.108) bzw. (5.107) in den Bildbereich transformiert werden müssen, bevor die orthogonale Projektion durchgeführt werden kann. Für eine detaillierte Umsetzung des Parameterbeschränkungs-Algorithmus sei auf [212] verwiesen.

Theorem 5.9: Parameterbeschränkung auf Gebiete mit stabilen Nullstellen sowie Diskretisierungsnullstellen

Nachdem ein zeitdiskretisiertes minimalphasiges zeitkontinuierliches System bei einer robusten Abtastzeit neben stabilen Nullstellen nur instabile Nullstellen auf der negativen reellen Achse besitzt, welche keinen Beitrag zur Beschreibung des zeitkontinuierlichen Systems leisten, müssen die instabilen Diskretisierungsnullstellen für eine beliebige Beeinflussung der Strecke nicht eliminiert werden und können im Referenzmodell aus Gründen der Stabilität erhalten bleiben.

Im Falle des adaptiven Referenzmodellreglers kann das aktuelle Systemverhalten bei unzureichender beständiger Anregung auch durch instabile Nullstellen beschrieben werden. Nachdem instabile Nullstellen durch den Regler nicht eliminiert werden dürfen und im Referenzmodell erhalten bleiben müssen, würden diese eine beliebige Beeinflussung des Systems verhindern, wenn sie Systemverhalten beschreiben. Um dies zu verhindern ist eine Beschränkung der geschätzten Parameter während der Identifikation notwendig.

Die Parameterbeschränkung begrenzt während der Identifikation die geschätzten Parameter auf ein Gebiet, in welchem nur Systeme mit Nullstellen innerhalb des Einheitskreises sowie auf der negativ reellen Achse repräsentiert werden. Hiermit wird gewährleistet, dass instabile Nullstellen nie Systemverhalten beschreiben, d.h. deren Dynamik gemäß der Diskretisierungsnullstellen vernachlässigbar ist. Zudem führt die Parameterbeschränkung zu einer Verkürzung der transienten Phase und zu einer Robustifizierung, da die geschätzten Parameter auf einen physikalisch relevanten Bereich begrenzt werden.

Im Falle des Zwei-Massen-Systems mit einer reellen Systemnullstelle ist die Beschränkung der Parameterschätzung auf Systeme mit Nullstellen auf der reellen Achse ausreichend.

Das Gebiet, auf welches beschränkt wird, muss zur Gewährung der Stabilitäts- und Konvergenzeigenschaften des geschlossenen Regelkreises konvex sein. Kann dies nicht gewährleistet werden, ist eine konvexe Hülle, welche der stabilen orthogonalen Projektion dient, um das Gebiet zu legen. Solange die geschätzten Parameter nicht im gewünschten Gebiet liegen, findet kein Erhalt instabiler Nullstellen im Referenzmodell statt. Dadurch führt eine mögliche kurzzeitige Instabilität des geregelten Systems auf Grund einer instabilen Pol-Nullstellenkürzung wegen der entsprechenden Anregung des Systems zum unmittelbaren Eintreten des geschätzten Parametervektors in das gewünschte Gebiet.

5.6 Anwendung des Referenzmodellreglers auf ein reales Zwei-Massen-System

Im Folgenden wird der Referenzmodellregler mit internem Modell aus Kapitel 5.4 auf ein reales Zwei-Massen-System angewandt, dessen ausführliche Beschreibung in Kapitel 3.1 zu finden ist. Es wird die Drehzahl $\Omega_A[\cdot]$ der Arbeitsmaschine geregelt und der strengste Fall gefordert, dass der gewünschte Ausgangswert $\Omega_A^*[k+i]$ maximal schnell, d.h. bereits nach der systembedingten Totzeit von $i = r_{IM}$ Zeitschritten, dem Sollwert $r[k]$ entspricht. Zudem soll die Nulldynamik der realen Anlage vollständig kompensiert werden. Gemäß des Stabilitätsbereichs in Abbildung 2.68 wird deutlich, dass maximal schnelle Pole mit $\tilde{p} = -\infty$ im kontinuierlichen Bereich auf $p = 0$ des zeitdiskreten Bereichs abgebildet werden. Dies entspricht einer Verzögerung um die Abtastzeit h , was die schnellstmögliche Reaktion eines zeitdiskreten Systems ist.

Für die maximal schnelle Reaktion des Referenzmodellreglers ist ein maximal schneller Beobachter notwendig. Folglich werden $n_{IM} - 1$ Beobachterpole auf $p_i = 0$ mit $i \in \{1, \dots, n_{IM} - 1\}$ gelegt:

$$A_{BeoIM}^*[q] = q^{n_{IM}-1} \quad (5.126)$$

Alle Reglerpole, die nicht der Kompensation stabiler Nullstellen dienen, werden ebenfalls auf $p_i = 0$ mit $i \in \{1, \dots, r_{IM} + m_{DNS,instabil}\}$ gelegt:

$$\hat{A}_{RegIM}^*[q] = q^{(r_{IM} + m_{DNS,instabil})} \hat{B}_{Sys}[q] \hat{B}_{DNS,stab}[q] \quad (5.127)$$

Mit diesen Regler- und Beobachter-Wunschpolynomen erzwingt der adaptive Referenzmodellregler gemäß Gleichung (5.102) das geforderte Referenzmodell mit:

$$\Omega_A^*[k] = \frac{1}{\hat{B}_{DNS,instabil}[1]} \frac{\hat{B}_{DNS,instabil}[q]}{q^{(r_{IM} + m_{DNS,instabil})}} r[k] \quad (5.128)$$

Instabile Diskretisierungsnullstellen bleiben aus Stabilitätsgründen erhalten, haben jedoch gemäß Theorem 2.20 keinen Einfluss auf das Systemverhalten bei robuster Abtastung. Nachdem die instabilen Diskretisierungsnullstellen keinen Beitrag zur Beschreibung der Nulldynamik des realen Zwei-Massen-Systems leisten, wird die Nulldynamik des realen Zwei-Massen-Systems mit obigem Regler vollständig eliminiert. Für das Referenzmodell (5.128) gilt somit im Zeitbereich:

$$\Omega_A^*[k + r_{IM}] \approx r[k] \quad (5.129)$$

Das Sollsignal wird somit bereits nach r_{IM} Abtastschritten erreicht. Der beschriebene maximal schnelle Referenzmodellregler wird als *Minimum-Varianz-Regler* bezeichnet, wenn alle Systemnullstellen eliminiert werden. Andernfalls handelt es sich um einen *Dead-Beat-Regler*.

Nachdem das Ziel die aktive Bedämpfung des Zwei-Massen-Systems ist, kann die sehr schnelle Dynamik des Umrichters mit der Eckfrequenz (3.39) vernachlässigt werden. Die höchste zu erfassende Eigen- bzw. Eckfrequenz ist somit gemäß Gleichung (3.54) die Eckfrequenz $f_{E,ZMS} = 52.2 \text{ Hz}$. Mit einer Dekade Abstand erhält man die notwendige robuste Abtastzeit von $h = 0.001 \text{ s}$, so dass die Dynamik der instabilen Nullstellen vernachlässigt werden kann (siehe Theorem 4.3).

Für die Modellierung des Zwei-Massen-Systems ohne Berücksichtigung des Momentenregelkreises des Umrichters wird daher gemäß Kapitel 3.4.2 die Ordnung $\tilde{n} = 3$ mit dem Relativgrad $\tilde{r} = 2$ angesetzt. Die zeitdiskrete Modellerfassung durch die Systemidentifikation führt damit nach Theorem 4.1 zu einer instabilen Diskretisierungsnullstelle, die beim inversen Regler erhalten werden muss. Damit Störungen bzw. evtl. vorhandene Untermodele die Konvergenz der Systemidentifikation nicht negativ beeinflussen, wird die Ordnung der Systemidentifikation von $n = 3$ auf $n_{IM} = n + n_{SM1} = 6$ erhöht, damit die Systemidentifikation entsprechende notwendige Störmodelle *SM1* bilden kann. Hierbei können weitere instabile Diskretisierungsnullstellen entstehen, die ebenfalls keine Pol-Nullstellenkürzung erfahren dürfen.

Neben dem Störmodell *SM1* wird direkt in den Regelkreis das Störmodell *SM2* zur Kompensation stationärer Abweichungen und Störungen eingebracht. Nachdem das reale Zwei-Massen-System eine Stellgrößenbegrenzung von $M_M[\cdot] \in [-22Nm, 22Nm]$ hat, muss wegen des integralen Verhaltens ein Anti-Windup für das Störmodell *SM2* realisiert werden [166].

In Abbildung 5.12 sind die Messungen des adaptiv geregelten Zwei-Massen-Systems für drei unterschiedliche Sollwertverläufe für die Arbeitsmaschine zu sehen. Von links nach rechts steigert sich die Anforderung an die Regelung und an das System: die Sollsignale (zwei überlagerte Sinussignale bzw. Zufallssignal mit Offset) werden immer hochfrequenter bei relativ großen Amplitudenänderungen.

Zunächst betrachtet man die linke und mittlere Messung. Für $t < 10 \text{ s}$ ist die Adaption abgeschaltet, es wirkt lediglich der Referenzmodellregler (5.100) auf die Strecke. Da der Regler mit völlig falschen Werten initialisiert wird, d.h. die Schätzparameter entsprechen nicht den realen Parametern des Systems, und eine Adaption verhindert wird, ist das Regelergebnis äußerst schlecht: für den Regelfehler gilt $e[\cdot] \gg 0$. Hiermit wird deutlich, dass ohne Adaption und ohne jegliches Systemwissen nicht geregelt werden kann. Wenn zum Zeitpunkt $t = 10 \text{ s}$ die Adaption des RLS-Algorithmus (geringe Dynamik auf Grund der Initialisierung mit $\mathbf{P}_{ini} = \mathbf{I}$) beginnt, besteht ein großer Regelfehler, womit die geschätzten Parameter durch den sich schnell verändernden Regressionsvektor in wenigen Abtastschritten in eine geeignete Region gelangen. Der Istverlauf entspricht sehr schnell der Solltrajektorie, wie in den zoomten Ausschnitten zu sehen ist (Abbildung 5.12 unten); der anschließende Verlauf kommt einem sehr guten Folgeverhalten gleich. Dabei ändern sich die Parameter nur noch minimal und werden mit der Zeit gegen einen konstanten Parametersatz konvergieren. Vergleicht man beide Messungen, so ist zu erkennen, dass sich unterschiedliche Parametersätze einstellen, da die Systeme mit unterschiedlichen Frequenzen über die Soll-

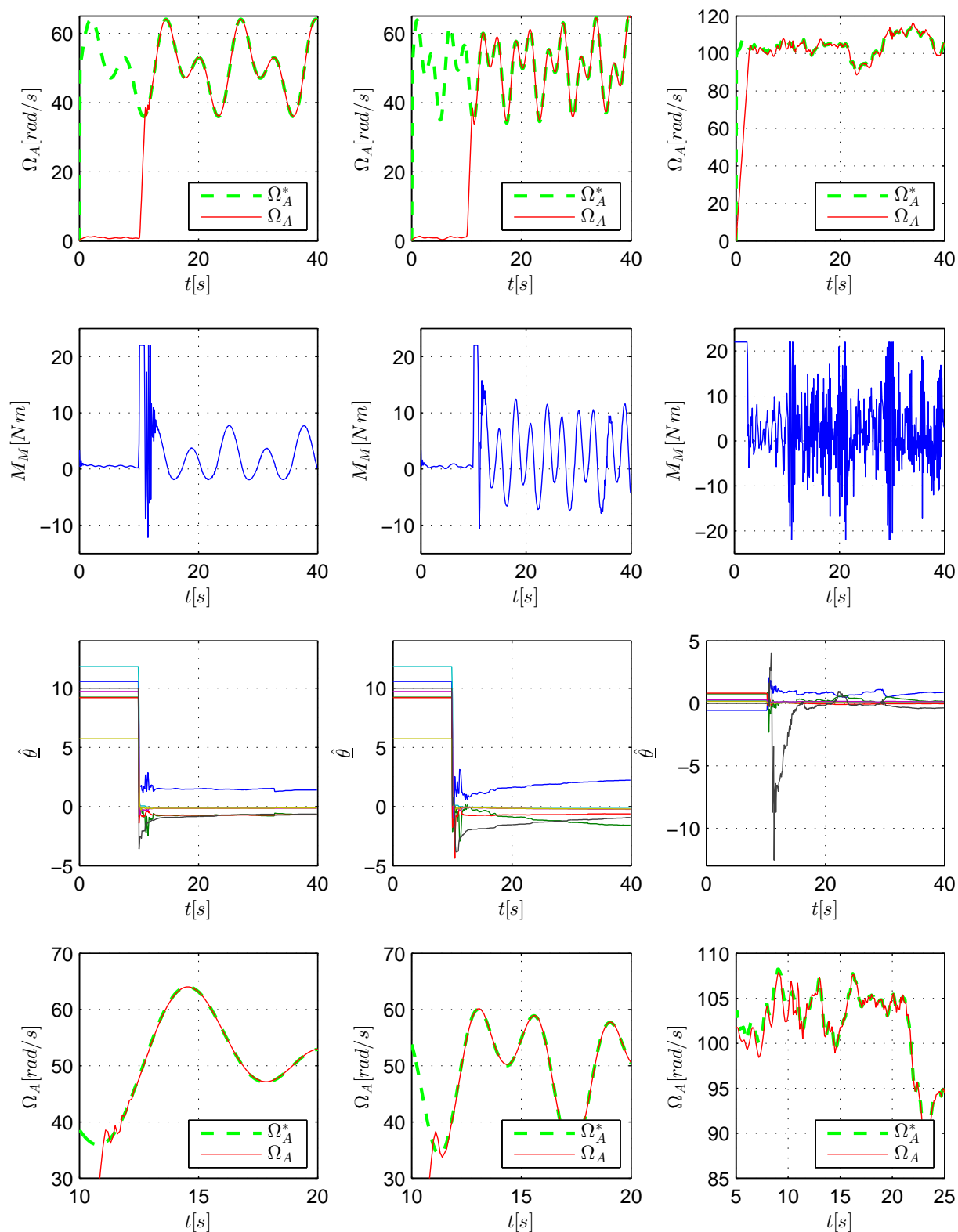


Abbildung 5.12: Reales Zwei-Massen-System mit adaptivem Referenzmodellregler (RLS-Algorithmus); es wird die Drehzahl $\Omega_A[\cdot]$ der Arbeitsmaschine geregelt; der geschätzte Parametervektor wird mit $\hat{\theta} \neq \theta_0$ falsch initialisiert, $\mathbf{P}_{ini} = \mathbf{I}$; Beginn der Adaption bei $t = 10$ s

trajektorie angeregt werden, d.h. eine Konvergenz zu den wahren Werten ist nicht gegeben und entsprechend der Theorie für eine erfolgreiche Regelung nicht zwingend. Das Stellsignal $M_M[\cdot]$ zeigt des Weiteren einen stets angemessenen Verlauf.

Es sei an dieser Stelle erwähnt, dass eine konventionelle Ausgangsregelung selbst bei exakt bekannten Parameter nicht auf die Drehzahl einer weich angekoppelten Arbeitsmaschine geregelt werden kann, ohne instabil zu werden [166, 167]. Folglich kann mit einem konventionellem Ausgangsregler auftretenden Schwingungen nicht entgegengewirkt werden. Dies ist darauf zurückzuführen, dass die Ordnung des Reglers, beispielsweise die eines *PI*-Reglers, nicht ausreicht, um die Dynamik des Zwei-Massen-Systems beliebig beeinflussen zu können. Der Regler ist somit bzgl. der Dynamik des Systems bei auftretenden Schwingungen zu langsam, was neben einem bleibenden Regelfehler bei ungünstigen Verzögerungen des Reglers im geschlossenen Regelkreis zur Instabilität führt. Ein Referenzmodellregler besitzt hingegen mindestens die Ordnung des Systems, womit dieser mindestens eine ebenso schnelle Dynamik wie das zu regelnde System zeigen kann. Ist das Verhalten der Strecke in Form eines Modells bekannt, kann dieses gezielt beeinflusst werden, so dass es sich im geschlossenen Regelkreis entsprechend eines beliebigen Referenzmodells verhält – auftretende Schwingungen sind daher mit einem Referenzmodellregler aktiv zu bedämpfen. In diesem Kontext ist zu erwähnen, dass ein Referenzmodellregler einem Zustandsregler mit Beobachter entspricht, was in Kapitel 2.2.6.5 näher beleuchtet wird. Dies erklärt ebenfalls die Möglichkeit des Referenzmodellreglers, die Dynamik der Strecke beliebig beeinflussen zu können.

Auch der adaptive Referenzmodellregler besitzt trotz unbekannter Systemparameter die Möglichkeit, die auftretenden Schwingungen bei starker Anregung des Zwei-Massen-Systems aktiv zu bedämpfen. Nachdem mit der im adaptiven Regler enthaltenen Identifikation jedes auftretende Systemverhalten gelernt wird und mit diesem Wissen die Parameter des modellbasierten Reglers entsprechend adaptiert werden, kann das neu aufgetretene Systemverhalten nach einer kurzen transienten Phase beliebig beeinflusst werden. Sobald demnach Schwingungen durch den Sollverlauf angeregt werden, ist die entsprechende Systemdynamik zu identifizieren, so dass nach kurzer Zeit ausreichend Wissen über das schwingungsfähige System vorliegt, um dieses aktiv zu bedämpfen – das ist möglich, ohne die exakten Parameter des Systems zu kennen.

Zum Zeitpunkt $t \approx 11 \text{ s}$ findet der Einregelvorgang statt, durch welchen das System stark angeregt wird und somit neues Systemverhalten durch die Identifikation erlernt werden kann, um das Regelziel zu erreichen. In dieser transienten Phase zeigt das Stellsignal $M_M[\cdot]$ und somit auch das Drehzahlsignal $\Omega_A[\cdot]$ ein unruhiges Verhalten, wie dies in Abbildung 5.12 unten links und unten Mitte zu erkennen ist. Durch das unruhige Verhalten der Stellgröße erfährt das Zwei-Massen-System beim Einregelvorgang eine Anregung der Eigenfrequenz der elastischen Welle, wodurch sich Schwingungen dem Drehzahlsignal $\Omega_A[\cdot]$ der Arbeitsmaschine überlagern. Sobald die transiente Phase abgeschlossen ist und folglich geeignete Schätzparameter $\hat{\theta}$ zum Erreichen des Regelziels vorliegen, können die Schwingungen ($f_{0,ZMS} = 9.68 \text{ Hz}$) durch den adaptiven Regler aktiv bedämpft werden.

Der Vorgang der aktiven Dämpfung nach dem transienten Vorgang der Parameteranpassung ist in der Abbildung 5.12 unten links sowie unten Mitte zu erkennen. Beim schnellen Einregeln, d.h. starker Anregung der Welle, zeigt sich ein schnelles Abklingen der Schwin-

gung. Je schneller das Schwingungsverhalten im transienten Vorgang der Identifikation gelernt wird, desto schneller findet das Einschwingen statt. Aus diesem Grund ist auch ein unterschiedliches Einschwingverhalten zwischen Abbildung 5.12 unten links und unten Mitte zu erkennen. Sobald sich ein konstanter Parametersatz mit einem Identifikationsfehler Null eingestellt hat, wird bei einem nächsten Sollsignalsprung bzw. Momentensprung das Ausregeln der Schwingung gemäß des Minimum-Varianz-Reglers maximal schnell geschehen unter Beachtung der Stellgrößenbeschränkung.

In der nächsten Messung (Abbildung 5.12 rechts) fordert man vom adaptiv geregelten System, einem Zufallssignal als Solltrajektorie zu folgen. Die Identifikation wird mit den wahren Parameterwerten initialisiert, die zuvor in einem konventionellen Identifikationslauf ohne Regler bestimmt wurden. Mit diesen findet bis zum Zeitpunkt $t = 10 \text{ s}$ eine rein inverse Regelung statt. Ein Ausschnitt des Messergebnisses ist vergrößert unten rechts in Abbildung 5.12 dargestellt. Man erkennt, dass die angeblich „wahren Parameterwerte“ des Identifikationslaufs ohne Regler doch nicht exakt diesen entsprechen – die Maschine kann dem Random-Signal nicht folgen. Nach Hinzuschalten der Systemidentifikation der adaptiven Regelung zeigt sich perfektes Folgeverhalten. Dass dies ein hochfrequentes Stellsignal $M_M[\cdot]$ mit großen Amplituden fordert, ist verständlich und durch das zweite Bild von oben in der rechten Spalte bestätigt. Die Stellgröße gerät sogar mehrmals in Begrenzung, d.h. das maximal stellbare Moment der Maschine bzw. des Umrichters ist erreicht – zu diesen Zeitpunkten wird es zu einer Abweichung vom gewünschten Sollverlauf der Drehzahl kommen, die jedoch sofort korrigiert wird, sobald die Stellgröße die Begrenzung wieder verlässt. Da das System mit einem Random-Signal angeregt wird, erhält die integrierte Systemidentifikation des adaptiven Reglers sehr viel Information über das System. Dementsprechend zeigen sich starke Schwankungen im Schätzparameter-Verlauf. Für $t > 30 \text{ s}$ tritt eine Konvergenz ein, d.h. ab diesem Zeitpunkt bringt die Erregung keine neue Information – es ist anzunehmen, dass dies die wirklichen Parameter des Systems sind. Auf Grund der Initialisierung des RLS-Algorithmus mit $\mathbf{P}_{ini} = \mathbf{I}$ liegt eine geringe Dynamik der Identifikation auf Kosten einer stärkeren Signalfilterung vor, weshalb die Konvergenz zu den wahren Parametern trotz starker Anregung durch den Regressionsvektor längere Zeit benötigt. Zusammenfassend hält man fest:

Theorem 5.10:

Für eine gute Regelung müssen die wahren Parameter des Systems nicht bekannt sein, es muss nur so viel Systeminformation identifiziert werden, wie momentan für das Erreichen des Regelziels notwendig ist.

Wird das System über die Solltrajektorie nur wenig erregt, wie es in der linken und mittleren Messung in Abbildung 5.12 der Fall ist, so findet der Algorithmus einen falschen, aber zur erfolgreichen Regelung ausreichenden Parametersatz. Das Certainty-Equivalence Prinzip kommt hierbei zur Anwendung. Erfährt das System über die Zeit weitere neue Erregungsmuster, wird mehr Systeminformation gesammelt und die Schätzparameter entsprechen immer mehr den wahren Parametern, so dass ein Lernen vorliegt: wiederholen sich Erregungsmuster, so finden keine transienten Vorgänge mehr statt, bis das System erneut ein noch nicht aufgetretenes Erregungsmuster erfährt.

Liegt von Beginn an eine starke Anregung vor, wie dies in der rechten Messung in Abbil-

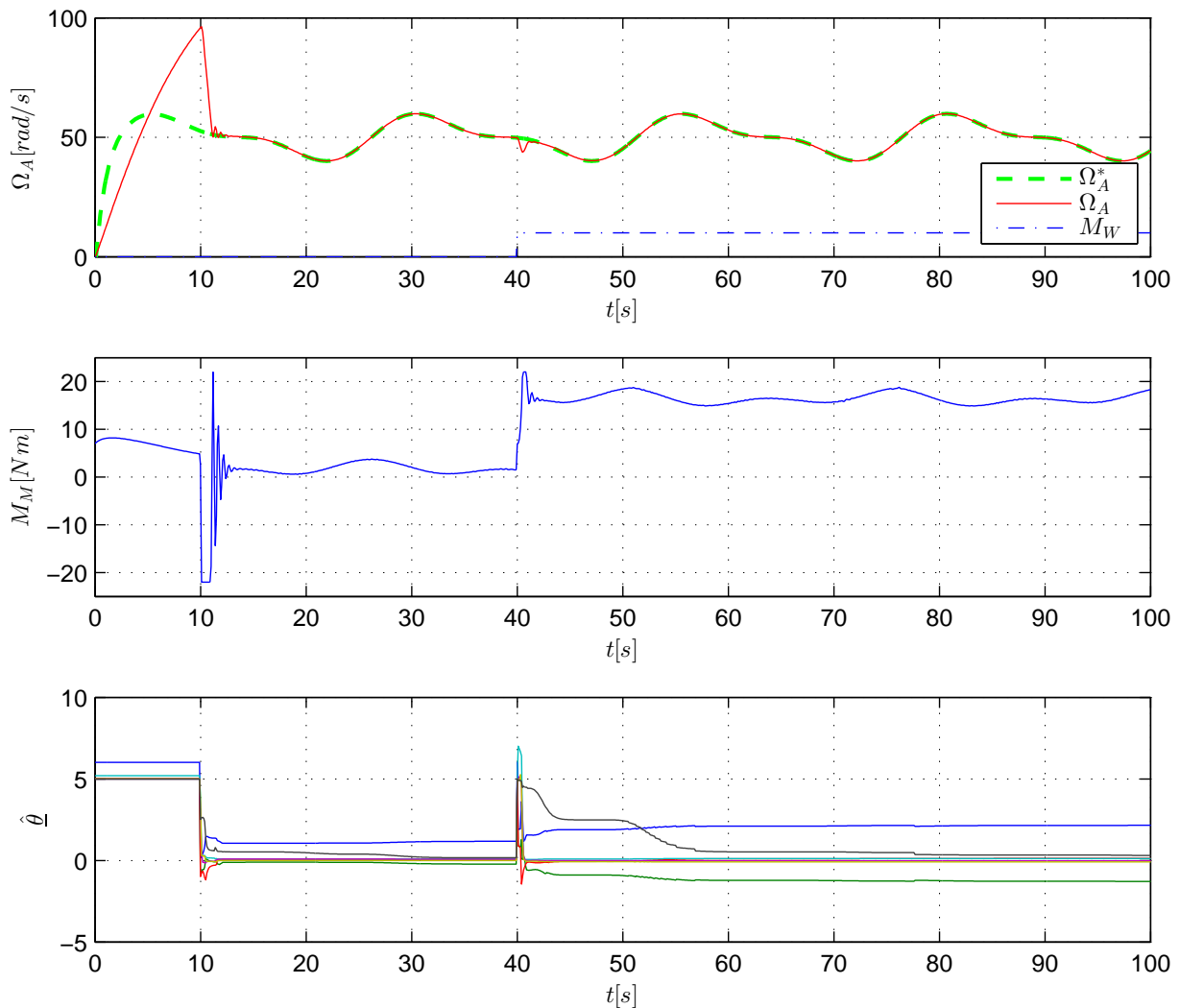


Abbildung 5.13: Reales Zwei-Massen-System mit adaptivem Referenzmodellregler (RLS-Algorithmus); es wird die Drehzahl $\Omega_A[\cdot]$ der Arbeitsmaschine geregelt; der geschätzte Parametervektor wird mit $\hat{\theta} \neq \theta_0$ falsch initialisiert; $\mathbf{P}_{ini} = 1000 \mathbf{I}$; Beginn der Adaption bei $t = 10$ s; es findet bei $t = 40$ s ein Sprung des Widerstandsmoments auf $M_W = 10 \text{ Nm}$ statt

Abbildung 5.12 der Fall ist, so findet die Identifikation in Abhängigkeit der mit \mathbf{P}_{ini} gewählten Dynamik/Filterung entsprechend schnell die wahren Parameter, wodurch die Strecke vollständig beschrieben ist. Es zeigt sich dann eine erfolgreiche Regelung basierend auf dem vollständig identifizierten System. Der Regelvorgang stützt sich dann nicht mehr auf das Certainty-Equivalence-Prinzip. Es treten folglich im Weiteren keine transienten Vorgänge mehr auf.

In allen Situationen ermöglicht somit der adaptive Regler ein erfolgreiches Regeln des unbekanntes Systems.

Das Verhalten des Referenzmodellreglers mit internen Modellen auf einen Momentensprung als Störung zeigt die Messung 5.13. Im Unterschied zur Messung 5.12 wurde der Parameter-

vektor mit anderen falschen Werten initialisiert. Diese führen nun nicht mehr zu einer quasi konstanten, kleinen Drehzahl, sondern zu einem unkontrollierten Anwachsen der Drehzahl $\Omega_A[\cdot]$, solange die Adaption für $0\text{ s} \leq t < 10\text{ s}$ nicht aktiv ist. Sobald die Adaption bei $t = 10\text{ s}$ beginnt, werden die Parameter $\hat{\underline{\theta}}$ angepasst und es findet der oben beschriebene Einschwingvorgang statt. Nach der transienten Phase bei nur noch langsam konvergierenden Parametern zeigt sich perfektes Folgeverhalten. Das interne Modell *SM2* sorgt für stationäre Genauigkeit. Zum Zeitpunkt $t = 40\text{ s}$ findet ein Sprung des Widerstandsmoments $M_W[\cdot]$ auf 10 Nm statt. Das stark angeregte System ermöglicht nun eine weitere Anpassung des Parametervektors $\hat{\underline{\theta}}$, womit auch das interne Modell *SM1* zur Kompensation von anderen unbekanntem Störungen einschließlich einer möglichen Untermodellierung weiter erlernt wird. Nach einem kurzen transienten Vorgang ist das Drehzahlsignal $\Omega_A[\cdot]$ wieder eingeschwungen. Das interne Modell *SM2* sorgt erneut für stationäre Genauigkeit.

Die guten Ergebnisse in Messung 5.12 und 5.13 sind nur möglich, da die zwangsläufig entstehenden instabilen Diskretisierungsnullstellen des Zwei-Massen-Systems bzw. des erlernten Störmodells *SM1* durch den Regler bestimmt und im Zuge der Nulldynamikkompensation aktiv nicht berücksichtigt werden. Die Parameterbeschränkung, welche die Identifikation der Parameter auf Systeme mit Nullstellen auf der reellen Achse begrenzt, erzwingt, dass die während der Identifikation bei unzureichender beständiger Anregung entstehenden instabilen Nullstellen stets die Eigenschaft instabiler Diskretisierungsnullstellen besitzen und folglich kein Systemverhalten beschreiben. Wie mit den Messungen deutlich wurde, zeigen die im Referenzmodell erhaltenen Diskretisierungsnullstellen keine Auswirkung auf das gewünschte Folgeverhalten – instabile Diskretisierungsnullstellen repräsentieren kein Systemverhalten des realen Zwei-Massen-Systems.

Die Messung 5.14 links zeigt die Situation, wenn die vollständige Nulldynamik einschließlich instabiler Diskretisierungsnullstellen eliminiert wird. Es entsteht ein nicht vertretbares Verhalten des Stellsignals $M_M[\cdot]$, welches zwischen maximaler negativer und positiver Stellgröße oszilliert; ohne Stellgrößenbegrenzung wäre das geregelte System instabil. Sobald die Detektion instabiler Diskretisierungsnullstellen aktiviert wird, um diese von der Nulldynamikkompensation auszuschließen, ergibt sich erneut ein perfektes Verhalten des adaptiven Referenzmodellreglers, wie dies die Messung 5.14 rechts zeigt.

5.7 Zusammenfassung und Ausblick

Mit dem in dieser Arbeit resultierenden adaptiven Referenzmodellregler mit integrierter Identifikation können minimalphasige zeitkontinuierliche Systeme trotz unbekanntem Parametern und instabilen Diskretisierungsnullstellen **beliebig innerhalb der Systemgrenzen** beeinflusst werden, ohne die Stabilität zu gefährden – der Regelfehler erbt die Eigenschaft des Identifikationsfehlers, welcher nach einer transienten Phase zu Null wird. Eine instabile Pol- Nullstellenkürzung bei konvergierten Parametern auf Grund der instabilen Diskretisierungsnullstellen wird unterbunden, indem bei der Vorgabe eines allgemeinen Referenzmodells die instabilen Diskretisierungsnullstellen erhalten bleiben. Nachdem instabile Diskretisierungsnullstellen bei einer robusten Abtastung kein Systemverhalten beschreiben, wird die beliebige Beeinflussung des Systems mit Hilfe des allgemeinen Referenzmodells trotz instabiler Nullstellen ermöglicht.

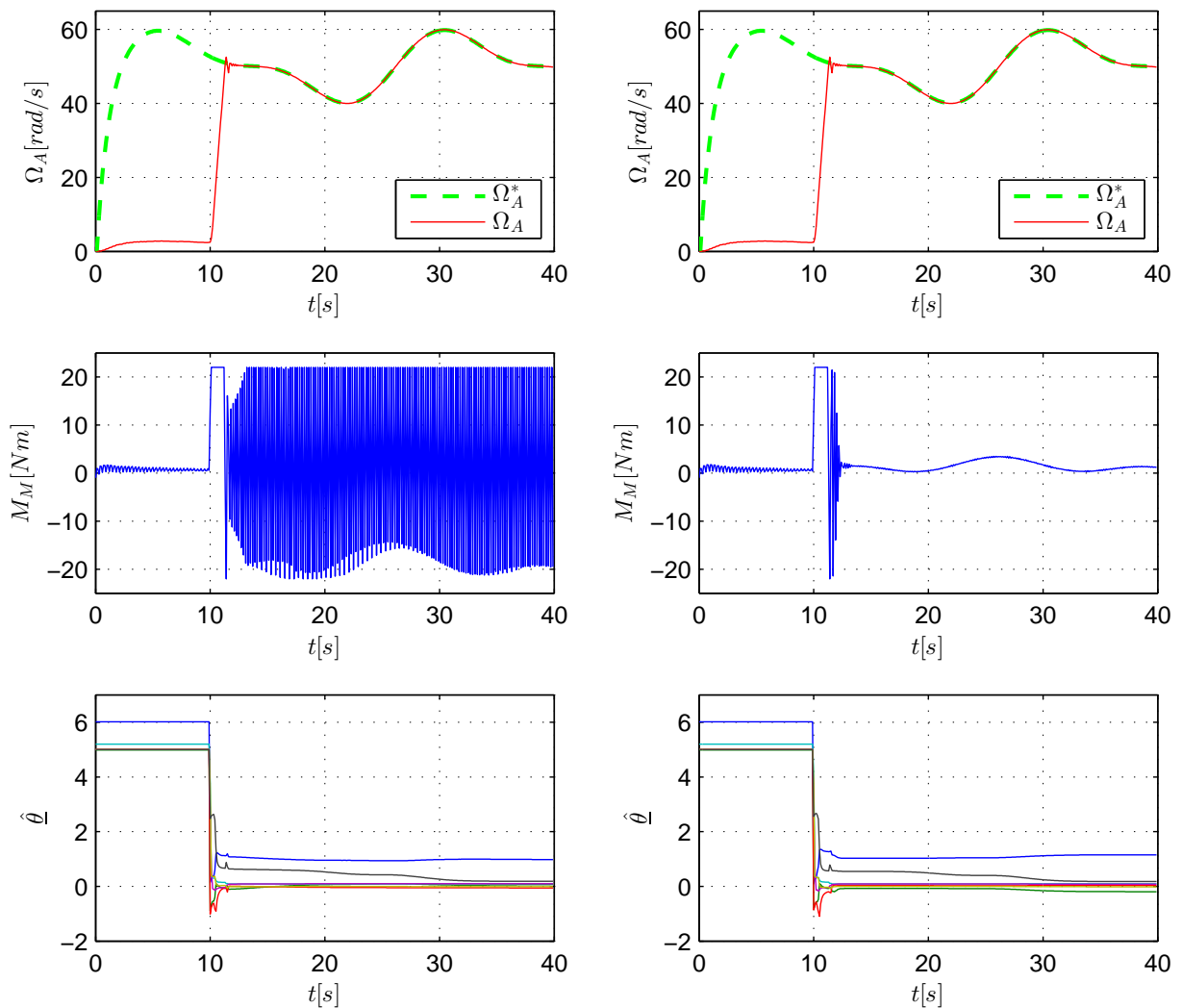


Abbildung 5.14: Reales Zwei-Massen-System mit adaptivem Referenzmodellregler (RLS-Algorithmus); es wird die Drehzahl $\Omega_A[\cdot]$ der Arbeitsmaschine geregelt; der geschätzte Parametervektor wird mit $\hat{\theta} \neq \theta_0$ falsch initialisiert, $\mathbf{P} = \mathbf{I}$; Beginn der Adaption bei $t = 10$ s
links: instabile Diskretisierungsnullstellen werden eliminiert
rechts: instabile Diskretisierungsnullstellen bleiben erhalten

Damit während der Identifikation in der transienten Phase des adaptiven Reglers bis auf instabile Diskretisierungsnullstellen keine instabilen Nullstellen entstehen, findet eine Begrenzung des Parameterraums statt. Alle Parameter im erlaubten Gebiet beschreiben nur physikalisch relevante Systeme mit stabilen Nullstellen sowie instabilen Diskretisierungsnullstellen. Diese Parameterbeschränkung ermöglicht zudem eine Beschleunigung des Einschwingvorganges der Identifikation und verkürzt die transiente Phase.

Durch eine Anpassung der Standard-Reglerstruktur eines Referenzmodellreglers mit Erweiterung um ein Störmodell wird ermöglicht, dass unabhängig von den geschätzten Parametern des adaptiven Reglers stets stationäre Genauigkeit des geregelten Systems gewährleistet werden kann. Weitere interne Modelle dienen der Unterdrückung von deterministischen Störungen. Durch die Integration der Störmodelle in den adaptiven Regler ist eine Kompensation von Störungen beliebiger Frequenz, Phase und Amplitude möglich. Im Unterschied zum nicht-adaptiven Fall lässt sich ein Störmodell auch hinsichtlich der Frequenz adaptieren.

Nachdem der adaptive Regler auf Parameterschwankungen wegen der ständig aktiven Identifikation reagieren kann, ist durch ein Nachführen der Parameter auch eine Kompensation sich langsam ändernder nichtlinearer Störungen möglich. Die Gewährung der Stabilität wird hierbei auf die Averaging-Theorie [3] zurückgeführt. Sobald jedoch hochdynamische nichtlineare Störungen vorliegen, ist eine die Stabilität garantierende Konvergenz der Identifikation nicht mehr gewährleistet (siehe auch [134]) und das Regelergebnis wird durch andauernde transiente Vorgänge unbrauchbar. Es sei das Beispiel der Reibung bei einem Sinus als Sollsignal der Drehzahl genannt. Bei jedem Nulldurchgang muss der Parametersatz adaptiert werden, was zu einem schlechten Regelergebnis nach jedem Nulldurchgang führt.

Um die Stabilität und Güte des adaptiven Reglers auch in diesem Fall gewähren zu können, ist die Integration eines neuronalen Netzes [41, 130, 167] in den Referenzmodellregler unter Gewährleistung der Stabilität zur Modellierung von Nichtlinearitäten möglich. Die Erweiterung des adaptiven Reglers um ein neuronales Netz zeigt die vom Autor betreute Arbeit [199]. Hierbei wird ein GRNN (General-Regression-Neural-Network) basierend auf einem RBF-Netz (Radial-Basis-Function) verwendet. Nachdem die Gewichte des Netzes mit dem RLS-Algorithmus gelernt werden können [27], ist eine Integration in den Parameterschätzer des adaptiven Referenzmodellreglers möglich. Die Gewichte werden im Parametervektor mit den Systemparametern zusammengefasst und der Regressionsvektor wird um die Aktivierungsfunktionen ergänzt. Somit werden die Gewichte des RBF-Netzes ebenfalls wie die Systemparameter gleichzeitig mit der integrierten Parameterschätzung, dem RLS-Algorithmus des adaptiven Reglers, gelernt, um eine (unbekannte) nichtlineare Störung kompensieren zu können.

Mit einem integrierten neuronalen Netz liegt folglich auch bei Nichtlinearitäten weder eine Untermodellierung hinsichtlich der Systemmodellierung noch der von Störungen vor, womit die Parameterschätzung konvergieren kann. Die Stabilität bleibt stets erhalten und das Regelergebnis wird durch andauernde transiente Vorgänge während eines sonst nötigen Nachführens der Parameter nicht gestört. Bezüglich des genannten Beispiels der Reibung wird mit dieser Erweiterung durch den Parameterschätzer nach den ersten Sinusanregungen das Verhalten des linearen Systems als auch das nichtlineare Verhalten auf Grund der Rei-

bung gelernt, so dass bei allen weiteren Nulldurchgängen ein perfektes Regelungsergebnis vorliegt.

Mit der Wahl des RLS-Algorithmus zur Identifikation der Parameter in Kapitel 5.2.2 liegt ein schneller und robuster adaptiver Regler vor. Die Adaptions-Geschwindigkeit ist direkt abhängig von der Menge an erfassten Messdaten. Liegen wenig Daten vor, zeigt sich während der Initialisierung des Reglers eine schnelle Adaption. Liegen bereits viele Messdaten vor, wurde bereits ausreichend Information über das System gesammelt. Folglich kann die Dynamik der Identifikation reduziert werden, so dass Messrauschen zunehmend keinen Einfluss mehr auf die Identifikation hat und sich ein robuster Parametersatz einstellt. Diese Dynamik des Algorithmus spiegelt sich in den Beträgen der Kovarianzmatrix $\mathbf{P}[\cdot]^{-1}$ wider. Dementsprechend nehmen die Beträge gemäß Gleichung (5.53) mit der Zunahme an Messdaten ab. Tiefere Betrachtungen sind in der Literatur [15, 47, 41, 141, 133, 167] zu finden.

Der Nachteil dieses bzgl. der Initialisierung des adaptiven Reglers schnellen und robusten RLS-Algorithmus zeigt sich bei ändernden Parametern und Störungen während des Betriebs. Auf Grund der geringen Dynamik, d.h. Robustheit der Parameterschätzung während des Betriebs, findet eine Anpassung der Parameter bei Änderungen im System nur sehr langsam in langen transienten Phasen statt mit dem Resultat einer über längeren Zeitraum ungenügenden Regelung. Um den RLS-Algorithmus permanent aktiv halten zu können, müssen alte Messdaten verworfen bzw. neue Daten stärker gewichtet werden. Letzteres ermöglicht der EFRA-Algorithmus (Exponential Forgetting and Resetting Algorithmus) aus [119], welcher auf der Basis des RLS-Algorithmus entwickelt wird. Ebenfalls beschäftigt sich folgende Literatur mit einer Erweiterung der Parameterschätzung: [23, 33, 48, 65, 142, 152].

Die vom Autor betreute Arbeit [200] stellt einen Überblick über diese bewährten Methoden dar und entwickelt einen RLS-Algorithmus mit Datenfensterung, um stets schnell auf Parameteränderung während des Betriebs reagieren zu können und trotzdem ausreichend robustes Verhalten garantieren zu können. Hierbei wird für die Bestimmung der Parameterschätzwerte nur ein Fenster der letzten N Messdaten verwendet.

Ein weiteres Problem schneller hochdynamischer Referenzmodellregler für Mehr-Massen-Systeme stellt eine Stellgrößenbegrenzung dar, wenn die Abtriebsseite des schwingungsfähigen Systems bei sehr kleiner Dämpfung zu regeln ist. Wird nach einem Sollsprung das Regelziel maximal schnell angefahren, lässt sich das Ausgangssignal der Abtriebsseite nach Erreichen der Solltrajektorie auf Grund der begrenzten Stellgröße nicht sofort „einfangen“. Nach Abbremsen der Abtriebsseite mit der maximal zur Verfügung stehenden negativen Stellgröße wird das Regelziel erneut maximal schnell angefahren. Wegen der in der Welle zwischengespeicherten Energie wird die Solltrajektorie nun noch schneller erreicht und kann mit der begrenzten Stellgröße noch schwieriger „eingefangen“ werden. Es ergibt sich ein aufschwingendes Oszillieren um die Solltrajektorie.

Auf Grund der Stellgrößenbeschränkung ergibt sich bei einem maximal schnellen Anfahren des Regelziels und Einfangen in die Solltrajektorie zu Beginn ein Zweipunktregler. Im Phasendiagramm wird deutlich, dass dieser bei einem Mehr-Massen-System zu einem aufschwingenden instabilen Verhalten führt. Eine Untersuchung dieser Problemstellung findet sich in der vom Autor betreuten Arbeit [197]. Als nahe liegende Problemlösung

ist das allgemeine Referenzmodell des Reglers derart einzustellen, so dass keine Stellgrößenbeschränkung auftritt.

Alternativ lässt sich ein prädiktiver Regler [21, 22, 37, 151, 153, 154, 173, 192] in den adaptiven Regler integrieren, womit auch Stellgrößenbeschränkungen im Regelvorgang berücksichtigt werden können und folglich keine Instabilität bei schnellen Reglern für schwach gedämpfte Mehr-Massen-Systeme auftritt. Mit diesem Regler ist stets das mit der zur Verfügung stehenden Stellgröße maximal schnelle Erreichen des Regelziels möglich. Nachdem der grundlegende Formalismus des prädiktiven Reglers und der des vorgestellten adaptiven Referenzmodellreglers identisch ist, liegt die Entwicklung eines prädiktiven adaptiven Reglers nahe. Die vom Autor betreute Arbeit [201] befasst sich hierzu mit der stabilen Integration des prädiktiven Reglers in den adaptiven Referenzmodellregler. In diesem Kontext sei auf die Literatur [28, 29, 30, 31, 32, 35, 143, 190] verwiesen.

Kapitel 6

Einordnung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde aus Sicht der Ingenieurwissenschaften die Problematik zeitdiskreter Regler bei schneller Abtastung dargestellt, wenn die Systemdynamik **innerhalb der Systemgrenzen beliebig** beeinflusst werden soll, d.h. auch die der Nulldynamik. Es wurde deutlich, dass in Abhängigkeit der Abtastzeit instabile Diskretisierungsnullstellen entstehen können, obwohl die zeitkontinuierliche reale Strecke minimalphasig ist. Diese instabile Nulldynamik darf aus Stabilitätsgründen nicht eliminiert werden. Es wurde gezeigt, dass bei ausreichend schneller Abtastung diese instabile Nulldynamik keine physikalisch relevante Dynamik der zeitdiskretisierten Strecke beschreibt und somit zur beliebigen Beeinflussung der Strecke nicht eliminiert werden muss. Dieser Ansatz kann jedoch nur auf den nicht-adaptiven Fall angewandt werden. Nachdem bei einem adaptiven Regler bei mangelnder beständigen Anregung ein Teil der physikalisch relevanten Streckendynamik auch durch eine instabile Nulldynamik beschrieben werden kann, waren in der vorliegenden Arbeit für den adaptiven Fall weitere Überlegungen notwendig, um eine beliebige Beeinflussung der Streckendynamik trotz instabiler Nullstellen bei garantierter Stabilität des geschlossenen Regelkreises zu ermöglichen (siehe Kapitel 5.7 „Zusammenfassung und Ausblick“).

Wie die jüngste Literatur und Forschung zeigt, stellen Diskretisierungsnullstellen sowie instabile Nullstellen nach wie vor eine Herausforderung in der Regelungstechnik dar. Nachdem durch instabile Nullstellen das Eingangssignal durch das System genullt werden kann, ist eine Rekonstruktion der Zustände und des Eingangssignals bei einem nicht-minimalphasigen System problematisch. Mit dieser Thematik beschäftigt sich die Literatur [116]. Es wird gezeigt, dass es lediglich bei Systemen mit Durchgriff möglich ist, z.B. mit der geometrischen Methode, die Zustände und das Eingangssignal über das Ausgangssignal zu bestimmen. Trotzdem besteht auch mit der alternativen geometrischen Methode gemäß [117] generell keine Möglichkeit, instabile Nullstellen eines Systems stabil zu eliminieren, womit sich die Beschränkung auf minimalphasige Systeme mit stabilen Nullstellen zeigt.

Nachdem ein Zusammenhang zwischen der Nulldynamik und der Passivität eines Systems existiert und sich auf Grund der Abtastung eines Systems die Stabilität der Nulldynamik ändern kann, gilt dies auch für die Passivität eines Systems. Somit kann ein zeitdiskretisiertes System durch den Vorgang der Diskretisierung die für Regler sehr wichtige Eigenschaft der Passivität verlieren. Die Bedingung der Passivität eines zeitkontinuierlichen Systems bleibt beim Diskretisieren garantiert erhalten, wenn das System einen Durchgriff besitzt. Nachdem Systeme ohne Durchgriff überwiegen, kann die Eigenschaft der Passivität wie die

der Minimalphasigkeit nicht generell auf das zeitdiskretisierte System übertragen werden. Um dennoch eine Aussage bzgl. der Passivität eines abgetasteten Systems ohne Durchgriff treffen zu können, wird in [180] die Average-Passivity-Theorie vorgestellt. Des Weiteren wird in [137] untersucht, wie viel Passivität durch die Diskretisierung verloren geht. Diese Verminderung der Passivität wird als Funktion der Abtastzeit angegeben.

In diesem Kontext ist der Sonderfall zu verstehen, dass bei Systemen mit Durchgriff, wie in dieser Arbeit gezeigt wurde, keine (instabilen) Diskretisierungsnullstellen entstehen, womit die Nulldynamik eines abgetasteten minimalphasigen Systems stets stabil kompensiert werden kann.

Auf Grund der bestehenden Problematik und der daraus resultierenden Gefahr der Instabilität bei bestimmten Reglerkonstellationen behandelt die aktuelle Literatur die Eigenschaften und das Verhalten der Nulldynamik unter dem Einfluss der Abtastung bzw. Diskretisierung. In [7] wird die Beziehung zwischen Diskretisierungsnullstellen, Splines und der numerischen Integration bzgl. zeitdiskreter linearer Modelle untersucht. Es wird der Zusammenhang zwischen der Anzahl der Diskretisierungsnullstellen und der Ordnung des Halteglieds (ZOH, FOH, SOH, ...) bzw. der Integrationsmethode dargestellt.

In [88] werden die asymptotischen Eigenschaften der Nullstellen von abgetasteten linearen Systemen untersucht und Potenzreihen der Nullstellen in Abhängigkeit der Abtastzeit entwickelt. Es wird des Weiteren die Stabilität der Nullstellen in Abhängigkeit der Abtastzeit diskutiert und Stabilitätsbedingungen aufgestellt. Die Eigenschaften und Stabilitätsbedingungen zeitdiskretisierter Systeme werden in [89] auf entkoppelte lineare MIMO-Systeme erweitert. Hierbei werden die Nullstellen erneut als Potenzreihe in Abhängigkeit der Abtastzeit dargestellt und Stabilitätskriterien der Nullstellen für kleine Abtastzeiten gegeben.

Der Artikel [58] befasst sich mit den Grundlagen der Abtastung, Diskretisierung, Nullstellenmodellen und deren Empfindlichkeit bzgl. Störungen. Es wird verdeutlicht, dass fundamentale Probleme bei einer hohen Abtastrate auftreten. Hierbei wird das Delta-Modell zur Beschreibung des Übergangs zwischen zeitkontinuierlicher und zeitdiskreter Systemmodellierung eingeführt, womit bekannte Regelkonzepte einfacher in den zeitdiskreten Bereich übertragen werden können. Mit Hilfe des Delta-Modells sind die aus der Abtastung resultierenden Problemstellungen, wie in dieser Arbeit dargestellt, einfacher zu separieren.

Generell wird an einem zeitkontinuierlichen System in [171] die Empfindlichkeit von Pol- und Nullstellen bzgl. der Regelbarkeit eines Systems untersucht. In diesem Kontext stellt sich auch die Frage bzgl. der Genauigkeit von Identifikations-Algorithmen, die in adaptiven Reglern zur Parameter-Schätzung verwendet werden. Beispielsweise zeigt der Artikel [44], mit welcher Genauigkeit die Systemnullstellen mit dem Least-Squares-Verfahren in Abhängigkeit des Modells identifiziert werden können.

Nachdem sich die beschriebene Problematik abgetasteter Systeme, das Entstehen instabiler Nulldynamik, auch bei nichtlinearen Systemen zeigt, wurden innerhalb des letzten Jahrzehnts zeitdiskrete Modelle für nichtlineare Systeme entwickelt. Ein Grundlagen-Artikel ist [193], welcher ein zeitdiskretes Modell auf Basis des Delta-Modells beschreibt. Es wird die Eigenschaft der nichtlinearen Diskretisierungsnullstellen basierend auf der Eigenschaft der linearen Diskretisierungsnullstellen untersucht.

Das in [193] entwickelte Modell für ein zeitdiskretisiertes nichtlineares System führt eine Diskretisierungs-Nullodynamik ein, die instabil sein kann. Dies ergibt, wie im linearen Fall mit eingeführten Diskretisierungs-Nullstellen, Probleme bei Reglern, die auf einer Pol-Nullstellen-Kürzung bzw. Kürzung der Nullodynamik basieren. Hiermit beschäftigt sich intensiv die Literatur [87, 131, 132].

Wie im linearen Fall mit einem Relativgrad Eins ergeben sich auch im entsprechenden nichtlinearen Fall eindeutige Eigenschaften. Der Artikel [24] entwickelt ein zeitdiskretes Modell für ein nichtlineares System ohne unendliche Nullstellen.

Der allgemeine Fall wird in [25] behandelt. Es wird die Eigenschaft der Diskretisierungsnullstellen hinsichtlich eines nichtlinearen Systems untersucht mit dem Ergebnis, dass bei hoher Systemdynamik die Diskretisierungs-Nullodynamik nicht vernachlässigt werden darf, um stets Stabilität zu gewährleisten.

In [194] wird ein genaueres Diskretisierungsmodell als in [193] für nichtlineare Systeme für Relativgrad Zwei entwickelt und ein Ansatz für die Erweiterung auf MIMO-Systeme gegeben, was einer Erweiterung von [131] von SISO auf MIMO entspricht. Es wird eine Bedingung für das entwickelte nichtlineare Modell mit Relativgrad Zwei vorgestellt, welche die Stabilität der Diskretisierungs-Nullodynamik gewährt. Wie im linearen Bereich ist dies auf den Spezialfall „Relativgrad Zwei“ zurückzuführen.

Eine umfangreiche Zusammenfassung bzgl. Abtastung, Diskretisierungsmodelle für lineare und nichtlineare Systeme sowie der Eigenschaft der Nullodynamik in Abhängigkeit der Abtastung findet sich in [59]. Bei ausreichend hoher Abtastung können Diskretisierungsnullstellen linearer Systeme vernachlässigt werden.

Der Delta-Operator wird zum Einen verwendet, um eine direkte Beziehung bzw. einen einheitlichen Formalismus zwischen zeitkontinuierlicher sowie zeitdiskreter Modellierung zu erhalten. Zum Anderen führt der Delta-Operator bei schneller Abtastung zu besseren numerischen Eigenschaften des Modells. Beide Eigenschaften verdeutlicht der Artikel [4]. Mit dem Delta-Operator können somit im Unterschied zum Schiebe-Operator numerische Probleme wegen der steigenden Empfindlichkeit bei kleiner werdender Abtastzeit vermieden werden, was in [106] behandelt wird.

Nachdem Nullstellen zu einem Über- und Unterschwingen führen können, besteht auch in jüngster Zeit das Bestreben, die entsprechende Dynamik mit Hilfe eines Reglers zu eliminieren, um eine Strecke innerhalb der physikalischen Grenzen dynamisch beliebig beeinflussen zu können. In [162] werden alternative Konzepte untersucht, um den Einfluss der Nullstellen bzgl. des Über- und Unterschwingens des Reglers zu unterbinden. Das gewünschte Verhalten des geschlossenen Regelkreises ist hierbei das eines Dead-Beat-Reglers. Wie Nullstellen in ein System eingebracht werden können zeigt der Artikel [186].

Die Elimination instabiler Nullstellen bzw. einer instabilen Nullodynamik bleibt jedoch auch in jüngster Zeit unter Gewährleistung der Stabilität unmöglich. Die Auswirkung der instabilen Nullodynamik kann durch den Regler lediglich minimiert werden, wie auch das folgende Beispiel zeigt.

In [53] wird ein indirekter adaptiver Regler vorgestellt, der für nichtlineare sowie nicht-minimalphasige Systeme geeignet ist. Hierzu werden neuronale Netze und multiple Modelle für einen indirekt selbsteinstellenden Regler verwendet. Dieser basiert auf dem Konzept der

optimalen Regler, d.h. es wird eine Kostenfunktion mit optimaler Gewichtung verwendet, um trotz instabiler Nullstellen auf Kosten der Performance stabil regeln zu können.

Auch der Artikel [80] bestätigt, dass MRAC generell nur auf minimalphasige Systeme beschränkt ist, wenn Nullstellen kompensiert werden sollen. Eine Erweiterung auf nicht-minimalphasige Systeme ist jedoch möglich, wenn die instabilen Nullstellen bekannt sind. Dann kann ein Hilfs-Regelfehler erzeugt werden, der einer Näherung des realen Regelfehlers entspricht und eine stabile Regelung auf Kosten der Performance ermöglicht. Die instabile Nulldynamik wird durch das Vorwissen gezielt von der Regelung ausgeschlossen, weshalb das System nicht beliebig beeinflusst werden kann. Um den Regelfehler durch den Hilfs-Regelfehler ausreichend gut zu approximieren, minimiert ein RLS-basiertes adaptives Regelgesetz eine quadratische Kostenfunktion.

Unterschiedliche MRAC-Konzepte, d.h. direkte und indirekte MRAC-Konzepte im zeitdiskreten bzw. zeitkontinuierlichen Bereich, werden in [156] auf Robustheit gegenüber einer variablen bzw. schwankenden Stellgrößenverstärkung untersucht. Je nach Konzept zeigt sich eine unterschiedliche Robustheit.

In Erweiterung hierzu wird in [108] die Robustheit von MRAC bzgl. Sensorungenauigkeiten untersucht. Die Ergebnisse zeigen, dass eine robuste und stabile Regelung der Flugzeugdynamik mit einem diskreten adaptiven Referenzmodellregler trotz Sensor-Ungenauigkeiten möglich ist.

Auch im Hinblick auf Fehlerfälle ist die Anwendung von MRAC zielführend. Der Artikel [61] zeigt die Anwendung eines diskreten adaptiven Referenzmodellreglers zur stabilen Regelung der nichtlinearen Flugzeugdynamik, wenn die Gefahr einer strukturellen und parametrischen Systemänderung im Fehlerfall besteht. Der Reglerentwurf basiert hierbei auf einer Linearisierung.

Um die transiente Phase eines MRAC-Reglers bei einem zeitvarianten System durch Wahl eines Modells mit geeignetsten Anfangswert, d.h. kleinstem Identifikationsfehler, zu verkürzen, lässt sich das MRAC-Konzept um Multiple Modelle gemäß [42, 129, 212] erweitern. Hierbei findet ein Schalten zwischen mehreren Modellen mit unterschiedlichen Anfangswerten statt.

Einen Spezialfall zeitvarianter Systeme beschreibt [179]. Hierbei wird die diskrete adaptive Regelung auf lineare Systeme mit periodisch veränderlichen Parametern angewandt. Es zeigt sich, dass ein Großteil der Ergebnisse der klassischen adaptiven Regelungstechnik übertragen werden kann.

Der Artikel [104] beschreibt die Anwendung eines diskreten direkten adaptiven Reglers zur Dämpfung unbekannter Vibrationen mit einem Massenträgheiten-Aktuator. Es kommt zur Regelung das interne-Modell-Prinzip mit Youla-Kucera-Parametrisierung zum Einsatz. Zur Parameterschätzung wird der RLS-Algorithmus verwendet.

In den meisten adaptiven Reglern wird das Least-Squares-Verfahren (LS, RLS) verwendet, um die Parameter für den aktuellen Regelvorgang zu schätzen. Dies gilt besonders für Regler mit dem Certainty-Equivalence-Prinzip, auf welchem auch der in dieser Arbeit dargestellte MRAC-Regler basiert. Mit der Verwendung von Least-Squares-Verfahren für adaptive Regler mit dem Certainty-Equivalence-Prinzip beschäftigt sich in der aktuellen Literatur auch der Artikel [16].

Mit dem RLS-Algorithmus können sogar MISO-Systeme bei unterschiedlichen Abtastfrequenzen bzw. Aktualisierungsfrequenzen identifiziert werden. Hierfür wird in [66] ein Modell erstellt.

Der RLS-Algorithmus ist auch Basis für kostenoptimierte Regler zur Minimierung einer Kostenfunktion. Ausgehend vom Konzept des MRAC-Reglers wurde beispielsweise in jüngster Zeit der RCAC-Regler (Retrospective-Cost-Adaptive-Control) entwickelt, welcher im Unterschied zum MRAC-Regler auf einer Kostenfunktion-Optimierung zur Berechnung der Stellgröße basiert. Der RCAC als adaptiver Regler mit dem RLS-Algorithmus zur Schätzung der Parameter bzw. Optimierung der Kostenfunktion wird in [75, 157] vorgestellt. Für eine ausführliche Darstellung des RCAC mit seinen Fehlergleichungen und Stabilitätsbeweise sei auf [76, 77] bzw. [78, 79] verwiesen.

Während der MRAC-Regler auch auf nicht-minimalphasige Systeme angewandt werden kann, sofern die instabile Nulldynamik nicht eliminiert wird, benötigt der RCAC-Regler die exakte Kenntnis über den ersten von Null verschiedenen Markov-Parameter und die instabilen Nullstellen der Strecke, um stets Stabilität gewährleisten zu können [158]. Somit stellt auch für dieses neue Verfahren eine nicht-minimalphasige Strecke ein Stabilitätsproblem für den geschlossenen Regelkreis dar. Nur wenn die Lage der instabilen Nullstellen des unbekanntes Systems bekannt ist, lässt sich ein stabiler Regler auf Kosten der Dynamik aufstellen – die Nulldynamik darf nicht eliminiert werden. Die Anwendung des RCAC auf ein nicht-minimalphasiges System, einen Roboterarm, zeigt der Artikel [121].

Mit dem RCAC-Regler muss somit vermieden werden, dass die instabilen Nullstellen eliminiert werden, um Stabilität zu gewährleisten. Hierzu müssen alle instabilen Nullstellen bekannt sein. Mit der Problematik, wie die Robustheit bei Anregung der Dynamik der instabilen Nullstellen erhöht werden kann, befasst sich der Artikel [122].

Wie für jeden Regler, der die Kompensation der Nulldynamik zum Ziel hat, muss das Problem der instabilen Diskretisierungsnullstellen, die selbst beim Diskretisieren eines minimalphasigen Systems entstehen können, betrachtet werden. Bereits 1967 kam es auf Grund der Nichtbeachtung instabiler Diskretisierungsnullstellen zum Unglück des raketentriebenen Experimentalflugzeugs X-15. Man nahm an, dass adaptive Systeme mit nicht modellierter hochfrequenter Dynamik zu einer großen unbekanntes Phasenverschiebung führen, welche zur Instabilität des Systems führt. Wegen dieser angenommenen Unrobustheit verlor die adaptive Regelung an Bedeutung. Das Problem war jedoch nicht die untermodellierte Dynamik für sich, sondern deren nicht berücksichtigten instabilen Diskretisierungsnullstellen in Kombination mit einem adaptiven inversen Regelungskonzept.

Mit diesem Hintergrund wird in [174] das Verhalten des RCAC im Hinblick auf die Abtastung des realen Systems untersucht. Es wird eine zeitkontinuierliche Strecke mit untermodellierter hoher Dynamik betrachtet, welche abgetastet zu nicht-minimalphasigen Nullstellen führt. Nachdem die exakte Kenntnis instabiler Nullstellen für eine stabile Regelung mit dem RCAC Voraussetzung ist und die Diskretisierungsnullstellen nicht als bekannt gelten können, wird die Problemstellung besonders auch für dieses Regelungskonzept deutlich. Mit einer Performance-abhängigen Gewichtung wird das Problem umgangen.

Der RCAC wird in [189] auf eine spezielle Klasse nichtlinearer Systeme erweitert. Hierbei handelt es sich um Hammerstein-Systeme, d.h. Systeme mit Nichtlinearitäten im System-Eingang. Die unbekanntes Nichtlinearität muss hierbei monoton sein. Für die Umsetzung

wird der Regler um Hilfs-Nichtlinearitäten erweitert.

Der Artikel [175] befasst sich mit der Robustheit des RCAC-Reglers gegenüber Aliasing-Effekten, Untermodellierung und Störungen. Somit zeigt dieser Regler neben der stabilisierenden Eigenschaft, gutem Folgeverhalten und Störverhalten auch Robustheit gegenüber Untermodellierung. Jedoch benötigt der Regler hierzu die exakte Kenntnis über die instabilen Nullstellen der Strecke, womit auch für dieses neue Verfahren instabile Diskretisierungsnullstellen ein Stabilitätsproblem für den geschlossenen Regelkreis darstellen, wenn die Systemdynamik ohne Performance-Einbußen innerhalb der physikalischen Grenzen beliebig beeinflussbar sein soll.

Mit diesem abschließenden Kapitel wurde deutlich, dass eine instabile Diskretisierungs-Nullodynamik von linearen sowie nichtlinearen Strecken nach wie vor problematisch für adaptive Regler ist, welche die Veränderung bzw. Kompensation der Nullodynamik/Nullstellen einer Strecke zum Ziel haben. Vor allem bei direkten adaptiven Reglern ohne Modell lässt sich die System-Nullodynamik nur schwer von der Diskretisierungs-Nullodynamik unterscheiden und eine entsprechende Anpassung des Reglers durchführen. Selbst wenn Systeminformationen vorliegen, besteht die Gefahr, dass eine nicht modellierte Dynamik des Systems während des adaptiven Regelvorganges durch die Abtastung zu einer hochfrequenten instabilen Nullodynamik führt, die durch den adaptiven Regler instabil kompensiert wird.

Auf Grund dieser Unrobustheit gegenüber einer möglichen instabilen Diskretisierungs-Nullodynamik wird in dieser Arbeit ein erweiterter indirekter adaptiver Regler vorgestellt, dessen zentrales Element die stabil integrierte Systemidentifikation ist. Liegt damit zu jedem Zeitpunkt ein Modell der Strecke vor, kann stets eine Aussage über die Nullodynamik getroffen und entsprechend beeinflusst werden, bevor das identifizierte Modell für die Regelung verwendet wird.

Mit Hilfe eines Referenzmodells kann gezielt entschieden werden, welcher Dynamik-Anteil angepasst bzw. kompensiert werden soll und welcher aus Stabilitätsgründen erhalten bleiben muss. Mit einer stabil integrierten Parameterbeschränkung lässt sich bei minimalphasigen zeitkontinuierlichen Strecken erzwingen, dass nur instabile Diskretisierungs-Nullstellen und keine instabilen System-Nullstellen während des adaptiven Regelvorganges entstehen. Damit wird erreicht, dass sich die System-Nullodynamik des zeitkontinuierlichen Systems beliebig innerhalb der Systemgrenzen beeinflussen lässt, ohne die Stabilität zu gefährden. Die instabilen Diskretisierungs-Nullstellen bleiben über das Referenzmodell erhalten. Wie es in dieser Arbeit ausführlich dargestellt wird, repräsentieren die instabilen Diskretisierungs-Nullstellen bei entsprechenden Randbedingungen kein Systemverhalten, weshalb das Erhalten der instabilen Diskretisierungs-Nullstellen im Referenzmodell einer beliebigen Beeinflussung der Systemdynamik nicht entgegensteht.

Im Unterschied zu anderen Methoden werden die Diskretisierungs-Nullstellen nicht vernachlässigt, sondern, wie dargestellt, im Referenzmodell erhalten. Folglich liegt zu keinem Zeitpunkt eine Untermodellierung vor. Sollten aus unerwarteten Gründen Randbedingungen verletzt werden, führt dies daher zu keiner Instabilität des Regelkreises, sondern lediglich zu einer nicht vollständigen Kompensation der Nullodynamik, d.h. zu Performance-Einbußen. Damit ist der vorgestellte Regler nur im Ausnahmefall bei Verletzung von Randbedingungen so schlecht, wie es bei anderen vorgestellten Regelungsmethoden Standard zum Garantieren der Stabilität ist. Nachdem der Regler des Weiteren adaptiv Störmodelle

bildet, wird die Robustheit gegenüber Störungen und Untermodellierung stark erhöht.

Das nicht kalkulierbare Entstehen von instabilen Diskretisierungsnullstellen während des Regelvorganges eines adaptiven Reglers stellt für den vorgestellten adaptiven Referenzmodellregler kein Problem mehr dar. Durch die Verwendung eines indirekten adaptiven Reglers liegt stets ausreichend Systeminformation vor, um einen stabilen Regelkreis bei gewünschter hoher Performance zu garantieren. Zusammenfassend hält man fest:

Das zentrale Element dieser Dissertation ist die Anwendbarkeit eines zeitdiskreten modellbasierten adaptiven Reglers auf ein zeitkontinuierliches unbekanntes minimalphasiges Antriebssystem. Die Streckendynamik soll trotz instabiler Diskretisierungsnullstellen innerhalb der physikalischen Systemgrenzen beliebig vorgegeben werden können. Am Beispiel des Zwei-Massen-Systems, das Grundelement eines mechatronischen Systems, wird deutlich, dass instabile Diskretisierungsnullstellen entstehen, sobald die gewählte Abtastzeit eine Detektion der Eigenschwingung des Systems erlaubt. Es wird die Bedeutung der Diskretisierungsnullstellen aus ingenieurwissenschaftlicher Sichtweise dargestellt, deren Einfluss auf die Regelkreisstabilität untersucht und ein Vorgehen zur stabilen Auslegung des adaptiven Referenzmodellreglers erarbeitet, so dass die Nulldynamik des zeitkontinuierlichen Systems beliebig beeinflusst werden kann. Der erweiterte Referenzmodellregler beinhaltet eine Parameterbeschränkung auf physikalisch relevante Gebiete, damit im adaptiven Fall bei mangelnder beständiger Anregung der Identifikation das Entstehen instabiler Systemnullstellen unterbunden wird. Zudem erhöhen adaptive Störmodelle die Robustheit gegenüber Störungen und Untermodellierung.

Anhang A

Mathematische Grundlagen

A.1 Lineare Algebra

A.1.1 Determinante, Adjungierte sowie Inverse einer Matrix [17, 101, 183]

Theorem A.1: Determinante

Die Determinante der Matrix \mathbf{A}

$$\det \mathbf{A} = \det[a_{ij}] = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (\text{A.1})$$

wird entweder nach der i -ten Zeile

$$\det \mathbf{A} = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} \quad (\text{A.2})$$

oder j -ten Spalte rekursiv entwickelt:

$$\det \mathbf{A} = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij} \quad (\text{A.3})$$

Die **Adjunkte** bzw. Kofaktor A_{ij} entspricht der mit dem Vorzeichenfaktor $(-1)^{i+j}$ multiplizierten $(n-1)$ -reihigen Unterdeterminante des Elements a_{ij} , welche durch Streichen der i -ten Zeile und der j -ten Spalte entsteht.

Die Determinante einer **Hypermatrix**, bei der \mathbf{B} und \mathbf{E} quadratisch sowie regulär sind ($\det \mathbf{B} \neq 0$, $\det \mathbf{E} \neq 0$), bestimmt sich wie folgt:

$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{D} & \mathbf{E} \end{bmatrix} = \det[\mathbf{B}] \det[\mathbf{E} - \mathbf{D}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}] = \det[\mathbf{E}] \det[\mathbf{B} - \mathbf{C}\mathbf{E}^{-1}\mathbf{D}] \quad (\text{A.4})$$

Definition A.1: Adjungierte Matrix

Bildet man eine Matrix aus den Adjunkten A_{ij} der Matrix \mathbf{A} (vgl. Theorem A.1) und transponiert diese anschließend, so ergibt sich die adjungierte Matrix von \mathbf{A} :

$$\text{adj}[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}^T \quad (\text{A.5})$$

Theorem A.2: Inverse Matrix

Liegt eine reguläre Matrix \mathbf{A} der Ordnung n vor ($\text{Rang } \mathbf{A} = n$ bzw. $\det \mathbf{A} \neq 0$), so berechnet sich die Inverse \mathbf{A}^{-1} mit Hilfe der Determinante $\det[\mathbf{A}]$ sowie adjungierten Matrix $\text{adj}[\mathbf{A}]$ (vgl. Definition A.1) durch Anwenden der Kofaktor-Methode:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det[\mathbf{A}]} \text{adj}[\mathbf{A}] \quad (\text{A.6})$$

Die Inverse einer **Hypermatrix**, bei der \mathbf{B} und \mathbf{E} quadratisch sowie regulär sind ($\det \mathbf{B} \neq 0$, $\det \mathbf{E} \neq 0$), bestimmt sich wie folgt:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{D} & \mathbf{E} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (\mathbf{B} - \mathbf{C}\mathbf{E}^{-1}\mathbf{D})^{-1} & -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}(\mathbf{E} - \mathbf{D}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C})^{-1} \\ -\mathbf{E}^{-1}\mathbf{D}(\mathbf{B} - \mathbf{C}\mathbf{E}^{-1}\mathbf{D})^{-1} & (\mathbf{E} - \mathbf{D}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C})^{-1} \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

A.1.2 Wurzel einer Matrix**Theorem A.3:**

Die Wurzel einer Matrix \mathbf{A} lässt sich neben der numerischen Bestimmung mit Hilfe der Modaltransformation berechnen:

$$\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} = \mathbf{M}\mathbf{\Lambda}^{\frac{1}{2}}\mathbf{M}^{-1} = \begin{pmatrix} \underline{m}_1 & \cdots & \underline{m}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{m}_1 & \cdots & \underline{m}_n \end{pmatrix}^{-1} \quad (\text{A.8})$$

Die Modalmatrix enthält die Eigenvektoren $\underline{m}_1 \dots \underline{m}_n$ der Matrix \mathbf{A} , die Diagonalmatrix $\mathbf{\Lambda}$ setzt sich aus den Eigenwerten $\lambda_1 \dots \lambda_n$ von \mathbf{A} zusammen. Liegt eine Matrix in Diagonalgestalt vor, so kann die Wurzel dieser elementweise bestimmt werden.

A.1.3 Umformungen**Lemma A.1:**

Für die Berechnung der Determinante einer Matrix \mathbf{A} ist es unwesentlich, ob diese einer linearen Transformation unterzogen wurde:

$$\det[\mathbf{A}] = \det[\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}] \quad (\text{A.9})$$

Beweis:

$$\det[\mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}] = \det[\mathbf{T}^{-1}] \det[\mathbf{T}] \det[\mathbf{A}] = (\det[\mathbf{T}])^{-1} \det[\mathbf{T}] \det[\mathbf{A}] = \det[\mathbf{A}] \quad (\text{A.10})$$

■

Lemma A.2:

Sind zwei Vektoren \underline{a} und \underline{b} beliebiger Ordnung n gegeben, so gilt folgender Zusammenhang:

$$1 + \underline{a}^T \underline{b} = \det[\mathbf{E} + \underline{a} \underline{b}^T], \quad \underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^n \quad (\text{A.11})$$

Beweis:

Da die Matrix

$$\underline{a} \underline{b}^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} (b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_n) = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \cdots & a_2 b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \cdots & a_n b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \underline{b}^T \\ a_2 \underline{b}^T \\ \vdots \\ a_n \underline{b}^T \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

aus zwei Vektoren gebildet wird, muss sie einen Rangabfall zeigen; wie in Gleichung (A.12) gut zu erkennen, ist jede Zeile ein Vielfaches des Vektors \underline{b} , womit alle Zeilen linear abhängig sind. Folglich besitzt die Matrix nur maximal einen Eigenwert ungleich Null. Der zugehörige Eigenvektor ist $\underline{g} = \underline{a}$. Nach Definition muss ein Eigenwert λ und ein Eigenvektor \underline{g} einer Matrix \mathbf{A} die Gleichung

$$\mathbf{A} \underline{g} = \lambda \underline{g} \quad (\text{A.13})$$

erfüllen. Hiermit ergibt sich der gesuchte Eigenwert:

$$\underline{a} \underline{b}^T \underline{a} = \lambda \underline{a} \quad \rightarrow \quad \lambda = \underline{b}^T \underline{a} = \underline{a}^T \underline{b} \quad (\text{A.14})$$

Führt man eine Modaltransformation einer Matrix \mathbf{A} auf Diagonalgestalt $\mathbf{\Lambda}$ gemäß

$$\text{diag}[\mathbf{A}] = \mathbf{\Lambda} = \mathbf{T}_M^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}_M = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (\text{A.15})$$

durch, so enthält $\mathbf{\Lambda}$ in der Diagonalen alle Eigenwerte der Matrix \mathbf{A} . Nachdem die Eigenwerte der Matrix $\underline{a} \underline{b}^T$ bekannt sind, liegt auch deren Diagonalgestalt vor:

$$\text{diag}[\underline{a} \underline{b}^T] = \mathbf{T}_M^{-1} [\underline{a} \underline{b}^T] \mathbf{T}_M = \begin{bmatrix} \underline{a}^T \underline{b} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.16})$$

Mit Gleichung (A.16) und dem Zusammenhang

$$\det[\mathbf{E} + \mathbf{A}] \stackrel{\text{Lemma 2.1}}{=} \det[\mathbf{E} + \mathbf{T}_M^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}_M] = \det[\mathbf{E} + \text{diag}[\mathbf{A}]] \quad (\text{A.17})$$

sowie

$$\det[\mathbf{A}] = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n \quad (\text{A.18})$$

lässt sich Gleichung (A.11) nun beweisen:

$$\det[\mathbf{E} + \underline{a}\underline{b}^T] = \det[\mathbf{E} + \text{diag}[\underline{a}\underline{b}^T]] = \det \begin{bmatrix} 1 + \underline{a}^T \underline{b} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 + \underline{a}^T \underline{b} \quad (\text{A.19})$$

■

A.1.4 Hurwitz-Kriterium [113, 183]

Theorem A.4:

Die Nullstellen q_j eines Polynoms

$$B(s) = \pm(\tilde{\beta}_m s^m + \tilde{\beta}_{m-1} s^{m-1} + \cdots + \tilde{\beta}_1 s + \tilde{\beta}_0) \quad (\text{A.20})$$

$$= \pm(s - \tilde{q}_1)(s - \tilde{q}_2) \cdots (s - \tilde{q}_m) = 0, \quad \forall s = \tilde{q}_j \in \mathbb{C}, \quad j = 1, \dots, m \quad (\text{A.21})$$

besitzen nur negative Realteile

$$\text{Re}\{\tilde{q}_j\} < 0, \quad \forall j = 1, \dots, m \quad (\text{A.22})$$

wenn folgende Kriterien erfüllt sind:

- *Alle Koeffizienten $\tilde{\beta}_j$ sind positiv (notwendige Bedingung):*

$$\tilde{\beta}_j > 0, \quad \forall j = 1, \dots, m \quad (\text{A.23})$$

Ein negatives Vorzeichen aller Koeffizienten kann hierbei ausgeklammert werden und ist als Vorfaktor des Polynoms für die Stabilitätsuntersuchung nicht zu betrachten.

- *Die m führenden Hauptabschnittsdeterminanten D_j der Hurwitz-Matrix \mathbf{H} sind positiv (hinreichende Bedingung):*

$$D_j > 0, \quad \forall j = 1, \dots, m \quad (\text{A.24})$$

In der Hurwitz-Matrix \mathbf{H} sind die Koeffizienten des Polynoms (A.20) wie folgt angeordnet:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \boxed{\tilde{\beta}_1} & \tilde{\beta}_3 & \tilde{\beta}_5 & \tilde{\beta}_7 & \cdots \\ \tilde{\beta}_0 & \boxed{\tilde{\beta}_2} & \tilde{\beta}_4 & \tilde{\beta}_6 & \cdots \\ 0 & \tilde{\beta}_1 & \boxed{\tilde{\beta}_3} & \tilde{\beta}_5 & \cdots \\ 0 & \tilde{\beta}_0 & \tilde{\beta}_2 & \boxed{\tilde{\beta}_4} & \cdots \\ 0 & 0 & \tilde{\beta}_1 & \tilde{\beta}_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} \in \mathbb{R}^{m \times m} \quad (\text{A.25})$$

Die Koeffizienten von \mathbf{H} , deren Index größer als m ist, werden durch Null ersetzt. Wie in Gleichung (A.25) eingezeichnet, sind die Unterdeterminanten D_j wie folgt zu bilden:

$$D_1 = \tilde{\beta}_1 \quad (\text{A.26})$$

$$D_2 = \det \begin{bmatrix} \tilde{\beta}_1 & \tilde{\beta}_3 \\ \tilde{\beta}_0 & \tilde{\beta}_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.27})$$

$$D_3 = \det \begin{bmatrix} \tilde{\beta}_1 & \tilde{\beta}_3 & \tilde{\beta}_5 \\ \tilde{\beta}_0 & \tilde{\beta}_2 & \tilde{\beta}_4 \\ 0 & \tilde{\beta}_1 & \tilde{\beta}_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.28})$$

$$\vdots \quad (\text{A.29})$$

$$D_n = \det \mathbf{H} \quad (\text{A.30})$$

A.1.5 Spektraltheorem [183]

Theorem A.5: Spektraltheorem

Ist die Matrix \mathbf{A} symmetrisch und bezeichnet $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte und $\underline{g}_1, \dots, \underline{g}_n$ die Eigenvektoren von \mathbf{A} , so gelten folgende Zusammenhänge:

1. $|\underline{g}_i| = 1$ und $\underline{g}_i \perp \underline{g}_j$ ($i \neq j$), d.h. die EV sind normiert und paarweise orthogonal
2. $\mathbf{P} := [\underline{g}_1, \underline{g}_2, \dots, \underline{g}_n]$ ist eine orthogonale Matrix
3. $\mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P} = \mathbf{D} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$
4. $\mathbf{A} = \mathbf{P} \mathbf{D} \mathbf{P}^T$, $\mathbf{A}^k = \mathbf{P} \mathbf{D}^k \mathbf{P}^T = \mathbf{P} \text{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k) \mathbf{P}^T$
5. $\lambda_i = \frac{\underline{g}_i^T \mathbf{A} \underline{g}_i}{|\underline{g}_i|^2}$
6. $\lambda_{\min} \leq \frac{\underline{x}^T \mathbf{A} \underline{x}}{|\underline{x}|^2} \leq \lambda_{\max}$, ($\underline{x} \neq \underline{0}$)

A.1.6 Jury-Kriterium [38, 114, 135]

Theorem A.6:

Die Nullstellen q_j eines Polynoms

$$B[z] = \pm(\beta_m z^m + \beta_{m-1} z^{m-1} + \dots + \beta_1 z + \beta_0) \quad (\text{A.31})$$

$$= \pm(z - q_1)(z - q_2) \cdots (z - q_m) = 0, \quad \forall z = q_j \in \mathbb{C}, \quad j = 1, \dots, m \quad (\text{A.32})$$

befinden sich innerhalb des Einheitskreises

$$|q_j| < 1, \quad \forall j = 1, \dots, m \quad (\text{A.33})$$

wenn folgende Kriterien erfüllt sind:

- Das Nullstellenpolynom ist für $z = 1$ positiv:

$$B[z]|_{z=1} > 0 \quad (\text{A.34})$$

- Das Nullstellenpolynom ist bei gerader bzw. ungerader Ordnung m für $z = -1$ positiv bzw. negativ:

$$(-1)^m B[z]|_{z=-1} > 0 \quad (\text{A.35})$$

- Für die Polynomkoeffizienten gilt:

$$|\beta_0| < |\beta_m| \quad (\text{A.36})$$

- Die Einträge in der zweiten Spalte unter z^0 der Jury-Tabelle erfüllen folgende Beziehungen:

$$|\gamma_0| > |\gamma_{m-1}| \quad (\text{A.37})$$

$$|\epsilon_0| > |\epsilon_{m-2}| \quad (\text{A.38})$$

⋮

$$|\psi_0| > |\psi_3| \quad (\text{A.39})$$

$$|\omega_0| > |\omega_2| \quad (\text{A.40})$$

Jury-Tabelle:

Zeile	z^0	z^1	z^2	z^3	\dots	z^{m-2}	z^{m-1}	z^m	Berechnung
1	β_0	β_1	β_2	β_3	\dots	β_{m-2}	β_{m-1}	β_m	Polynomkoeffizienten
2	β_m	β_{m-1}	β_{m-2}	β_{m-3}	\dots	β_2	β_1	β_0	
3	γ_0	γ_1	γ_2	γ_3	\dots	γ_{m-2}	γ_{m-1}		$\gamma_i = \beta_0 \beta_i - \beta_m \beta_{m-i}$
4	γ_{m-1}	γ_{m-2}	γ_{m-3}	\dots	γ_2	γ_1	γ_0		$i \in \{0, \dots, m-1\}$
5	ϵ_0	ϵ_1	ϵ_2	ϵ_3	\dots	ϵ_{m-2}			$\epsilon_i = \gamma_0 \gamma_i - \gamma_{m-1} \gamma_{m-1-i}$
6	ϵ_{m-2}	ϵ_{m-3}	\dots	ϵ_2	ϵ_1	ϵ_0			$i \in \{0, \dots, m-2\}$
⋮	⋮	⋮							⋮
$2m-5$	ψ_0	ψ_1	ψ_2	ψ_3					$\psi_i = \chi_0 \chi_i - \chi_4 \chi_{4-i}$
$2m-4$	ψ_3	ψ_2	ψ_1	ψ_0					$i \in \{0, \dots, 3\}$
$2m-3$	ω_0	ω_1	ω_2						$\omega_i = \psi_0 \psi_i - \psi_3 \psi_{3-i}$
$2m-2$	ω_2	ω_1	ω_0						$i \in \{0, \dots, 2\}$

Die erste Zeile der Jury-Tabelle beinhaltet die Polynomkoeffizienten in aufsteigender Reihenfolge. Die zweite Zeile zeigt die Polynomkoeffizienten in absteigender Reihenfolge. Generell entsprechen die geraden Zeilen in der Jury-Tabelle der vorangegangenen ungeraden

Zeile in umgekehrter Reihenfolge. Jede ungerade Zeile, ausgenommen der Start-Zeile 1, berechnet sich aus der vorangegangenen ungeraden Zeile durch Bildung von Determinanten:

$$\gamma_i = \det \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_{m-i} \\ \beta_m & \beta_i \end{bmatrix}, \quad i \in \{0, \dots, m-1\} \quad (\text{A.41})$$

$$\epsilon_i = \det \begin{bmatrix} \gamma_0 & \gamma_{m-1-i} \\ \gamma_{m-1} & \gamma_i \end{bmatrix}, \quad i \in \{0, \dots, m-2\} \quad (\text{A.42})$$

$$\zeta_i = \det \begin{bmatrix} \epsilon_0 & \epsilon_{m-2-i} \\ \epsilon_{m-2} & \epsilon_i \end{bmatrix}, \quad i \in \{0, \dots, m-3\} \quad (\text{A.43})$$

⋮

Die entsprechenden Determinanten sind auch in der Spalte „Berechnung“ der Jury-Tabelle zu finden. Die Bildung der Jury-Tabelle kann beendet werden, sobald eine Zeile nur noch drei Elemente aufweist – dies ist die Zeile $2m-3$.

A.1.7 Euler-Formel [183]

Theorem A.7: Euler-Formel

$$e^{j\omega} = \cos \omega + j \sin \omega \quad (\text{A.44})$$

Gemäß der Euler-Formel wird die imaginäre Achse auf den Einheitskreis abgebildet.

A.1.8 Laplace-Transformation [183]

Theorem A.8: Halteglied

Die Laplace-Transformierte des Halteglieds 0-ter Ordnung bestimmt sich wie folgt:

$$\left. \begin{array}{l} f(t) = 0 \quad \text{für} \quad t < a, \quad t > b \\ f(t) = 1 \quad \text{für} \quad a \leq t \leq b \end{array} \right\} \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) = \frac{e^{-as} - e^{-bs}}{s} \quad (\text{A.45})$$

Das Halteglied 0-ter Ordnung wird zur Modellierung eines zeitkontinuierlichen Systems bei Verwendung eines zeitdiskreten Reglers benötigt.

A.1.9 Reihen und Summen [183]

Theorem A.9: Geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^r z^k = \frac{\sum_{j=1}^r a_j^{(r)} z^j}{(1-z)^{r+1}}, \quad r = 1, 2, 3, \dots, \quad -1 \leq z \leq 1 \quad (\text{A.46})$$

$$a_1^{(r)} = a_r^{(r)} = 1 \tag{A.47}$$

$$a_j^{(r)} = j a_j^{(r-1)} + (r - j + 1) a_{j-1}^{(r-1)}, \quad j = 2, \dots, r - 1 \tag{A.48}$$

A.1.10 Trigonometrie [183]

Theorem A.10: Cosinus-Satz

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \tag{A.49}$$

Hierbei sind a , b und c die Kanten eines Dreiecks mit den entsprechenden gegenüberliegenden Winkeln α , β und γ .

Theorem A.11: Vereinfachung

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta \tag{A.50}$$

Bezeichnungen

Typografische Kennzeichnungen

$\underline{x}, \underline{b}, \underline{c}, \dots$ x_i, b_i, c_i, \dots A a_{ij} $\underline{x}^T, \mathbf{A}^T$ A, B, C, \dots A'', B'', C'', \dots F, G Q R $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \dots$ $\alpha'_i, \beta'_i, \gamma'_i, \dots$ $\alpha''_i, \beta''_i, \gamma''_i, \dots$ $\alpha'''_i, \beta'''_i, \gamma'''_i, \dots$	Skalare, Vektoren, Matrizen und Polynome Vektoren (unterstrichene Kleinbuchstaben) i -tes Element einer vektoriellen Größe Matrizen (Großbuchstaben in Fettschrift) ij -tes Element einer Matrix Transponierte eines Vektors oder einer Matrix Polynome (Großbuchstabe); Polynome einer monischen Übertragungsfunktion; Polynome der Grundform des ARMA-Modells mit Prädiktionshorizont $p = 1$ Polynome des Prädiktor-ARMA-Modells mit Prädiktionshorizont $p = r$ Übertragungsfunktionen aus Nenner- u. Zählerpolynom (Großbuchstabe) Quotient einer Polynomdivision Rest einer Polynomdivision i -ter Parameter eines Polynoms (griechischer Buchstabe); i -ter Parameter einer monischen Übertragungsfunktion; i -ter Parameter der Grundform des ARMA-Modells mit Prädiktionshorizont $p = 1$ i -ter Parameter einer nicht monischen Übertragungsfunktion i -ter Parameter des Prädiktor-ARMA-Modells mit Prädiktionshorizont $p = r$ i -ter Parameter des allgemeinen ARMA-Modells mit Prädiktionshorizont p
(·)	zeitkontinuierliche Systeme dieser Formalismus zur Beschreibung der Parameterabhängigkeit wird für alle Signale, Polynome und Funktionen verwendet, die sich auf ein zeitkontinuierliches System beziehen
$x(\cdot)$ $A(\cdot), B(\cdot), \dots$ $x(t)$	zeitkontinuierliches Signal Polynome für eine zeitkontinuierliche Systembeschreibung Wert des zeitkontinuierlichen Signals zum Zeitpunkt t

$\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{b}}, \tilde{\mathbf{c}}, \tilde{r}, \dots$	Matrizen, Vektoren und Skalare für eine zeitkontinuierliche Systembeschreibung
$A(\rho), B(\rho), \dots$	Polynome in ρ zur Beschreibung eines zeitkontinuierlichen Systems im Zeitbereich
$A(s), B(s), \dots$	Polynome in s zur Beschreibung eines zeitkontinuierlichen Systems im Frequenzbereich
$\bar{x}(\cdot)$	zeitkontinuierliches Signal in transformierter Zustandsdarstellung (Modalform, Regelungs- bzw. Beobachtungsnormalform)
$\bar{x}(t)$	Wert des zeitkontinuierlichen Signals zum Zeitpunkt t in transformierter Zustandsdarstellung
$\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}, \bar{r}, \dots$	Matrizen, Vektoren und Skalare für eine zeitkontinuierliche Systembeschreibung in transformierter Zustandsdarstellung
$[\cdot]$	zeitdiskrete Systeme dieser Formalismus zur Beschreibung der Parameterabhängigkeit wird für alle Signale, Polynome und Funktionen verwendet, die sich auf ein zeitdiskretes System beziehen
$x[\cdot]$	zeitdiskretes Signal
$A[\cdot], B[\cdot], \dots$	Polynome für eine zeitdiskrete Systembeschreibung
$x[k]$	Wert des zeitdiskreten Signals zum Zeitpunkt $t = k h$
$\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, r, \dots$	Matrizen, Vektoren und Skalare für eine zeitdiskrete Systembeschreibung
$A[q], B[q], \dots$	Polynome in q zur Beschreibung eines zeitdiskreten Systems im Zeitbereich
$A[z], B[z], \dots$	Polynome in z zur Beschreibung eines zeitdiskreten Systems im Frequenzbereich
$\check{\mathbf{A}}, \check{\mathbf{b}}, \check{\mathbf{c}}, \check{r}, \dots$	Matrizen, Vektoren und Skalare für eine zeitdiskrete Systembeschreibung auf Basis des δ -Modells
$A[\delta], B[\delta], \dots$	Polynome in δ zur Beschreibung eines zeitdiskreten Systems im Zeitbereich auf Basis des δ -Modells
$A[\gamma], B[\gamma], \dots$	Polynome in γ zur Beschreibung eines zeitdiskreten Systems im Frequenzbereich auf Basis des δ -Modells
$\check{x}(\cdot)$	zeitdiskretes Signal in transformierter Zustandsdarstellung (Modalform, Regelungs- bzw. Beobachtungsnormalform)
$\check{x}(t)$	Wert des zeitkontinuierlichen Signals zum Zeitpunkt t in transformierter Zustandsdarstellung
$\check{\mathbf{A}}, \check{\mathbf{b}}, \check{\mathbf{c}}, \check{r}, \dots$	Matrizen, Vektoren und Skalare für eine zeitkontinuierliche Systembeschreibung in transformierter Zustandsdarstellung
$x^\Delta[\cdot]$	zeit- und wertdiskretes Signal
$x^\Delta[k]$	Wert des zeit- und wertdiskreten Signals zum Zeitpunkt $t = k h$
x_0	Anfangswert einer Größe
x_∞	stationärer Endwert einer Größe in der Gleichgewichtslage
$\dot{x}, \frac{d}{dt}x$	zeitliche Ableitung erster Ordnung einer Größe
$x^{(i)}, \frac{d^i}{dt^i}x$	zeitliche Ableitung i -ter Ordnung einer Größe

\hat{x}	prädizierte/geschätzte/identifizierte Größe
$\hat{\dot{x}} = x - \hat{x}$	Schätzfehler einer Größe (Zustandsbeobachter)
$\tilde{x} = x - \hat{x}$	Schätzfehler einer Größe (Identifikation)
x^*	Sollwert/Wunschwert einer Größe

Abkürzungen

adj	Adjungierte
ARMA	A uto- R egressive- M oving- A verage
ARMAX	A uto- R egressive- M oving- A verage (e xogenous I nput)
BO	Regleroptimierung nach dem B etrags o ptimum
D	D ifferenzierendes G lied
det	Determinante
EFRA	Identifikationsalgorithmus mit exponentiellem Vergessen (engl.: E xponential F orgetting and R esetting A lgorithm)
EMK	E lektromotorische K raft
EMS	E in- M assen- S ystem
GRNN	Neuronales Netz (engl.: G eneral- R egression- N eural- N etwork)
HG0	H alteglied 0 ter Ordnung (engl.: Z ero- O rdner- H old)
I -Regler	I ntegraler R egler
Im	I maginärteil
lim	Grenzwert
LTI	L inear- T ime- I nvariant
MIMO	Mehrgrößensysteme (engl.: M ultiple- I nput- M ultiple- O utput- S ysteme)
MRAC	Adaptiver Referenzmodellregler (engl.: M odel- R eference- A daptive- C ontrol)
MRC	Referenzmodellregler (engl.: M odel- R eference- C ontrol)
NB	N eben b edingung
NS	N ull s telle
P -Regler	P roportionaler R egler
PD	Glied mit verstärkenden und differenzierenden Anteil
PDT_2	Verzögerungsglied zweiter Ordnung mit differenzierenden Anteil
PMSM	P ermanent m agneterregte S ynchron m aschine
PS	P ol s telle
PT_1	Verzögerungsglied erster Ordnung
PT_2	Verzögerungsglied zweiter Ordnung
RBF	radiale Basisfunktion (engl.: R adial- B asis- F unction)
RCAC	Kostenoptimierter Adaptiver Regler (engl.: R etrospective- C ost- A daptive- C ontrol)
Re	R ealteil
RLS	rekursiver Algorithmus der kleinsten Quadrate (engl.: R ecursive- L east- S quares)

SISO SM	Eingrößensysteme (engl.: Single-Input-Single-Output-Systeme) Synchronmaschine
T	Speicherelement, welches einen Signalwert um die Zeit h verzögert ausgibt (Verzögerer)
ZMS ZOH	Zwei-Massen-System Halteglied nullter Ordnung (engl.: Zero-Order-Hold)

Indizes von Systembeschreibungen

ϵ	Systemanteile, die bei einem Grenzübergang zu Null werden
A A	Nenner-Grundbaustein Arbeitsmaschinen-Seite bei einem ZMS
B Beo	Zähler-Grundbaustein Systembeschreibung eines Beobachters
d D DNS	d -Komponente im läuferfesten d - q -Koordinatensystem, in welchem das Systemverhalten einer PMSM beschrieben wird D -Glied Diskretisierungs-Nullstelle
EA EA,red	Systembeschreibung eines Referenzmodellreglers, d.h. eines Zustandsreglers mit Beobachter in Ein-Ausgangsbeschreibung Systembeschreibung eines Referenzmodellreglers, d.h. eines Zustandsreglers mit Beobachter in Ein-Ausgangsbeschreibung, der das Nullstellenpolynom der Strecke eliminiert
ers	Ersatz-Systembeschreibung für den Stromregelkreis eines Umrichters
IM	Systembeschreibung eines Systems mit internem Modell
M	Motor-Seite bei einem ZMS
$PT2$	PT_2 -Glied
q	q -Komponente im läuferfesten d - q -Koordinatensystem, in welchem das Systemverhalten einer PMSM beschrieben wird
red Reg Reg,red RK RK,red	Systemanteile, die bei einem Grenzübergang erhalten bleiben und nicht zu Null werden Systembeschreibung eines geschlossenen Regelkreises ohne Beobachter Systembeschreibung eines geschlossenen Regelkreises ohne Beobachter, bei dem das Nullstellenpolynom der Strecke eliminiert wird Systembeschreibung eines geschlossenen Regelkreises mit Beobachter (Zustandsregler bzw. Referenzmodellregler) Systembeschreibung eines geschlossenen Regelkreises mit Beobachter, bei dem das Nullstellenpolynom der Strecke eliminiert wird (Zustandsregler bzw. erweiterter Referenzmodellregler)
SM SNS	Systembeschreibung eines Störmodells System-Nullstelle
UR	Systembeschreibung des Umrichters
ZMS	Systembeschreibung des Zwei-Massen-Systems

Formelzeichen

α	Winkel in $[\circ]$ oder $[rad]$
γ	Differenzen-Operator zur Beschreibung eines zeitdiskreten Systems im Frequenzbereich auf Basis des δ -Modells
δ $\delta(\cdot), \delta[\cdot]$ Δ $\Delta\varphi$ $\Delta\varphi(\cdot), \Delta\varphi[\cdot]$ $\Delta\varphi_\epsilon$	Differenzen-Operator zur Beschreibung eines zeitdiskreten Systems im Zeitbereich mit Hilfe des δ -Modells Einheitsimpuls/Dirac Quantisierung globale Phasendrehung, globale Phasendifferenz in $[\circ]$ oder $[rad]$ Verdrehwinkel der Welle beim ZMS in $[rad]$ Abweichung/Modellierungsfehler zwischen der globalen Phasendrehung des zeitkontinuierlichen Systems und des zeitdiskreten Modells in $[\circ]$ oder $[rad]$: $\varphi_\epsilon[\omega_{max}] = \Delta\varphi_\epsilon = \Delta\tilde{\varphi} - \Delta\varphi$
$\varepsilon[\cdot]$ $\epsilon_{max,B}[\cdot]$	Identifikationsfehler: $\varepsilon[k] = \underline{\hat{\theta}}[k-1] \underline{x}[k-r+1]$ maximaler Modellierungsfehler zwischen dem Phasenverlauf eines zeitkontinuierlichen Zählergrundbausteins (PD -Glied) und des entsprechenden zeitdiskreten Modells über alle Nullstellen $q_1 \in [0, 1]$
ζ_i, ζ_j	Realteil des i -ten Eigenwertes λ_i , Polstelle p_i oder j -ten Nullstelle q_j des zeitdiskreten Systems
η η	Anzahl der Dekaden zwischen der Abtastgrenze ω_{max} und der größten Kennkreisfrequenz ω_0 bzw. Eckkreisfrequenz ω_E : $\omega_{max} - \omega_E = \eta$ Dekaden Schrittweite: Skalierung der Projektionsweite des Projektionsalgorithmus
$\underline{\theta}$ $\underline{\theta}_0$ $\underline{\hat{\theta}}[\cdot]$ $\underline{\hat{\theta}}'[\cdot]$ $\underline{\hat{\theta}}_{ini}$ $\underline{\tilde{\theta}}[\cdot]$ $\underline{\tilde{\theta}}'[\cdot]$ $\underline{\vartheta}[\cdot]$ $\underline{\hat{\vartheta}}[\cdot]$ $\underline{\hat{\vartheta}}'[\cdot]$ $\underline{\tilde{\vartheta}}[\cdot]$	Parametervektor (wahrer/realer) Parametervektor des ARMA-Modells geschätzter/identifizierter Parametervektor des ARMA-Modells durch eine Parameterprojektion veränderter geschätzter/identifizierter Parametervektor des ARMA-Modells Initialisierung der Parameterschätzwerte $\underline{\hat{\theta}}[\cdot]$ Parameterfehlervektor des ARMA-Modells: $\underline{\tilde{\theta}}[k] = \underline{\theta}_0 - \underline{\hat{\theta}}[k]$ durch eine Parameterprojektion veränderter Parameterfehlervektor des ARMA-Modells: $\underline{\tilde{\theta}}'[k] = \underline{\theta}_0 - \underline{\hat{\theta}}'[k]$ Parametervektor $\underline{\theta}[\cdot]$ des ARMA-Modells nach einer Koordinatentransformation: $\underline{\vartheta}[k] = (\mathbf{P}[k])^{-\frac{1}{2}} \underline{\theta}[k]$ geschätzter/identifizierter Parametervektor $\underline{\hat{\theta}}[\cdot]$ des ARMA-Modells nach einer Koordinatentransformation: $\underline{\hat{\vartheta}}[k] = (\mathbf{P}[k])^{-\frac{1}{2}} \underline{\hat{\theta}}[k]$ durch eine Parameterprojektion veränderter geschätzter/identifizierter Parametervektor $\underline{\hat{\vartheta}}[\cdot]$ Parameterfehlervektor $\underline{\tilde{\theta}}[\cdot]$ des ARMA-Modells nach einer Koordinatentransformation: $\underline{\tilde{\vartheta}}[k] = (\mathbf{P}[k])^{-\frac{1}{2}} \underline{\tilde{\theta}}[k]$

$\underline{\tilde{y}}'[\cdot]$	durch eine Parameterprojektion veränderter geschätzter/identifizierter Parameterfehlervektor $\underline{\tilde{y}}[\cdot]$
λ λ_i $\mathbf{\Lambda}$	Lagrange-Multiplikator i -ter Eigenwert Systemmatrix \mathbf{A} in Diagonalgestalt
ν_i, ν_j	Realteil des i -ten Eigenwertes λ_i , Polstelle p_i oder j -ten Nullstelle q_j des zeitdiskreten Systems
ρ ρ	Dichte in $[kg/m^3]$ Differential-Operator zur Beschreibung eines zeitkontinuierlichen Systems im Zeitbereich
$\sigma(\cdot), \sigma[\cdot]$ $\sigma(\cdot), \sigma[\cdot]$ σ_D σ_i, σ_j	Realteil einer Systembeschreibung Einheitssprung reziproke Abklingzeitkonstante Realteil des i -ten Eigenwertes $\tilde{\lambda}_i$, Polstelle \tilde{p}_i oder j -ten Nullstelle \tilde{q}_j des zeitkontinuierlichen Systems, welcher einer reziproken Abklingzeitkonstante des Systems entspricht
$\tau_{Gr}(\cdot), \tau_{Gr}[\cdot]$ $\tau_{Ph}(\cdot), \tau_{Gr}[\cdot]$	Gruppenlaufzeit in $[s]$ Phasenlaufzeit in $[s]$
φ φ $\varphi(\cdot), \varphi[\cdot]$ $\varphi(\cdot), \varphi[\cdot]$ $\varphi_\epsilon[\cdot]$ $\varphi_A(\cdot), \varphi_A[\cdot]$ $\varphi_{DNS}[\cdot]$ φ_i, φ_j $\varphi_M(\cdot), \varphi_M[\cdot]$ $\varphi_{max,ab}$ $\varphi_{SNS}[\cdot]$	Winkel in $[\circ]$ oder $[rad]$ Winkel einer Übertragungsfunktion in $[\circ]$ oder $[rad]$ Winkel einer Systembeschreibung in Polarkoordinaten in $[\circ]$ oder $[rad]$ Phasengang, Phasenwinkel in $[\circ]$ oder $[rad]$ Abweichung/Modellierungsfehler zwischen dem Phasenverlauf des zeitkontinuierlichen Systems und des zeitdiskreten Modells in $[\circ]$ oder $[rad]$: $\varphi_\epsilon[\cdot] = \varphi(\cdot) - \varphi[\cdot]$ Winkelposition der Arbeitsmaschine in $[rad]$ Phasenwinkel einer Diskretisierungsnullstelle in $[\circ]$ oder $[rad]$ Winkel in $[\circ]$ oder $[rad]$ des i -ten Eigenwertes λ_i , Polstelle p_i oder j -ten Nullstelle q_j in Polarkoordinaten Winkelposition der Antriebsmaschine bzw. des Motors in $[rad]$ maximale Phasenabsenkung des Phasenverlaufes in $[\circ]$ oder $[rad]$ Phasenwinkel einer Systemnullstelle in $[\circ]$ oder $[rad]$
χ	Anzahl der Dekaden zwischen der Abtastgrenze ω_{max} und einer Kreisfrequenz ω_χ : $\omega_{max} - \omega_\chi = \chi$ Dekaden
Ψ Ψ_{PM}	Fluss in $[Wb]$ Läuferfluss einer PMSM in $[Wb]$
ω $\omega(\cdot), \omega[\cdot]$ ω_χ ω_0 ω_A ω_D	Kreisfrequenz in $[rad/s]$: $\omega = 2\pi f$ (für die Kreisfrequenz wird oftmals auch nur der Begriff „Frequenz“ verwendet) Imaginärteil einer Systembeschreibung Kreisfrequenz in $[rad/s]$, die einen Abstand von χ Dekaden von der Abtastgrenze ω_{max} besitzt: $\omega_{max} - \omega_\chi = \chi$ Dekaden Kennkreisfrequenz (ungedämpft) in $[rad/s]$ Abtastkreisfrequenz in $[rad/s]$ Kennkreisfrequenz (gedämpft) in $[rad/s]$

ω_E	Eckkreisfrequenz in $[rad/s]$
ω_i, ω_j	Imaginärteil des i -ten Eigenwertes $\tilde{\lambda}_i$, Polstelle \tilde{p}_i oder j -ten Nullstelle \tilde{q}_j des zeitkontinuierlichen Systems, welcher einer Kennkreisfrequenz/Eigenfrequenz des Systems entspricht
ω_M	Kreisfrequenz, an der ein Phasenmaximum auftritt in $[rad/s]$
ω_{max}	Grenzkreisfrequenz, Abtastgrenze in $[rad/s]$: maximale Kreisfrequenz, die durch die Zeitdiskretisierung mit h nach Shannon durch das zeitdiskrete Modell repräsentiert werden kann
ω_R	Resonanzkreisfrequenz in $[rad/s]$
Ω_1	Frequenz der Stator-Spulenströme einer SM in $[rad/s]$
$\Omega_A(\cdot), \Omega_A[\cdot]$	Drehzahl der Arbeitsmaschine in $[rad/s]$
Ω_m	mechanische Drehzahl einer SM in $[rad/s]$
$\Omega_M(\cdot), \Omega_M[\cdot]$	Drehzahl der Antriebsmaschine bzw. des Motors in $[rad/s]$
A	Systemmatrix
\mathbf{A}_{Beo}	Systemmatrix des Beobachters
$A_{Beo}(\cdot), A_{Beo}[\cdot]$	charakteristisches Polynom des Beobachters
\mathbf{A}_{BeoIM}	Systemmatrix des Beobachters eines Systems mit internem Modell
$A_{BeoIM}(\cdot),$ $\dots A_{BeoIM}[\cdot]$	charakteristisches Polynom des Beobachters eines Systems mit internem Modell
$A_{Beo}^*(\cdot), A_{Beo}^*[\cdot]$	charakteristisches Wunschpolynom des Beobachters
$A_{EA}(\cdot), A_{EA}[\cdot]$	Regler-Polynom des Referenzmodellreglers, d.h. des Zustandsreglers mit Beobachter in Ein-Ausgangsbeschreibung
$A_{EA,IM}(\cdot),$ $\dots A_{EA,IM}[\cdot]$	Regler-Polynom des Referenzmodellreglers mit internem Modell
$A_{EA,red}(\cdot),$ $\dots A_{EA,red}[\cdot]$	Regler-Polynom des Referenzmodellreglers, d.h. des Zustandsreglers mit Beobachter in Ein-Ausgangsbeschreibung, reduziert um das Zählerpolynom B der Strecke: $A_{EA} = A_{EA,red} B$
\mathbf{A}_{IM}	Systemmatrix des internen Modells
$A_{IM}(\cdot), A_{IM}[\cdot]$	charakteristisches Polynom des internen Modells
$A_i^*(\cdot), A_i^*[\cdot]$	Wunsch-Nennerpolynom, um welches das geregelte System zum Einbringen des Wunsch-Zählerpolynoms B_i^* erweitert werden muss
\mathbf{A}_{SM}	Systemmatrix des Störmodells
$A_{SM}(\cdot), A_{SM}[\cdot]$	charakteristisches Polynom des Störmodells
\mathbf{A}_{Reg}	Systemmatrix des geregelten Systems
$A_{Reg}(\cdot), A_{Reg}[\cdot]$	charakteristisches Polynom des geregelten Systems
\mathbf{A}_{RegIM}	Systemmatrix des geregelten Systems mit internem Modell
$A_{RegIM}(\cdot),$ $\dots A_{RegIM}[\cdot]$	charakteristisches Polynom des geregelten Systems mit internem Modell
$A_{Reg}^*(\cdot), A_{Reg}^*[\cdot]$	charakteristisches Wunschpolynom des geregelten Systems
$A_{RK}(\cdot), A_{RK}[\cdot]$	charakteristisches Polynom des geschlossenen Regelkreises mit Beobachter bzw. des Referenzmodellreglers: $A_{RK} = A_{Reg} A_{Beo}$
$A_{RK,red}(\cdot),$ $\dots A_{RK,red}[\cdot]$	charakteristisches Polynom A_{RK} des geschlossenen Regelkreises mit Beobachter reduziert um das Zählerpolynom B der Strecke: $A_{RK} = A_{RK,red} B$
\underline{b}	Einkoppelvektor der Stellgröße u in ein System

$B(\cdot), B[\cdot]$	Zählerpolynom, welches die Einkopplung der Stellgröße u in das System und die Auskopplung der Zustände \underline{x} aus dem System auf den Ausgang y beschreibt
$B'[\cdot]$	zeitdiskretes Zählerpolynom $B[\cdot]$ mit Vernachlässigung der instabilen Diskretisierungs-Nullstellen, d.h. mit Vernachlässigung des Polynoms $B_{DNS,instabil}[\cdot]$
$B_\epsilon(\cdot), B_\epsilon[\cdot]$	Zählerpolynom, welches beim Grenzübergang $h \rightarrow 0$ s zu Null wird
$\underline{B}_0(\cdot), \underline{B}_0[\cdot]$	Zählerpolynom-Vektor, welcher die Einkopplung der Anfangszustände \underline{x}_0 in das System und die Auskopplung der Zustände \underline{x} aus dem System auf den Ausgang y beschreibt
$B_{DNS,instabil}[\cdot]$	Zählerpolynom, welches nach der Zeitdiskretisierung (ZOH-Methode) die instabilen Diskretisierungs-Nullstellen enthält
$B_{DNS,stabil}[\cdot]$	Zählerpolynom, welches nach der Zeitdiskretisierung (ZOH-Methode) die stabilen Diskretisierungs-Nullstellen enthält
$B_{EA}(\cdot), B_{EA}[\cdot]$	Regler-Polynom des Referenzmodellreglers, d.h. des Zustandsreglers mit Beobachter in Ein-Ausgangsbeschreibung
$B_{EA,IM}(\cdot),$ $\dots B_{EA,IM}[\cdot]$	Regler-Polynom des Referenzmodellreglers mit internem Modell
$B'_{EA,IM}(\cdot),$ $\dots B'_{EA,IM}[\cdot]$	Regler-Polynom des Referenzmodellreglers mit internem Modell
$B_i^*(\cdot), B_i^*[\cdot]$	Wunsch-Zählerpolynom, um welches das geregelte System erweitert wird
$B_{red}(\cdot), B_{red}[\cdot]$	Zählerpolynom, welches beim Grenzübergang $h \rightarrow 0$ s erhalten bleibt und nicht zu Null wird
$B_{RK}(\cdot), B_{RK}[\cdot]$	Zählerpolynom des geschlossenen Regelkreises mit Beobachter bzw. des Referenzmodellreglers
$B_{Sys}[\cdot]$	Zählerpolynom, welches nach der Zeitdiskretisierung (ZOH-Methode) die physikalischen System-Nullstellen enthält
$B_v(\cdot), B_v[\cdot]$	Zählerpolynom, welches die Einkopplung der Störgröße v in das System und die Auskopplung der Zustände \underline{x} aus dem System auf den Ausgang y beschreibt
c	Federsteifigkeit in $[Nm/rad]$
c	Konstante, die beim Projektions- und RLS-Algorithmus eine Division durch Null verhindert
\underline{c}	Auskoppelvektor eines Systems
\mathbb{C}	komplexe Zahlen
$\underline{C}_r(\cdot), \underline{C}_r[\cdot]$	Zählerpolynom-Vektor, welcher die Einkopplung der Sollgröße r in das System und die Auskopplung der Zustände \underline{x} aus dem System beschreibt
$\underline{C}_u(\cdot), \underline{C}_u[\cdot]$	Zählerpolynom-Vektor, welcher die Einkopplung der Stellgröße u in das System und die Auskopplung der Zustände \underline{x} aus dem System beschreibt
$\underline{C}_v(\cdot), \underline{C}_v[\cdot]$	Zählerpolynom-Vektor, welcher die Einkopplung der Störgröße v in das System und die Auskopplung der Zustände \underline{x} aus dem System beschreibt

$\underline{C}_y(\cdot), \underline{C}_y[\cdot]$	Zählerpolynom-Vektor, welcher die Einkopplung des Ausgangs y in das System und die Auskopplung der Zustände \underline{x} aus dem System beschreibt
d	Dämpfungskonstante in $[Nm\ s/rad]$
d	Abstand einer Ebene vom Nullpunkt; alle Werte $\underline{\theta}$ erfüllen die Ebenengleichung: $d = \underline{\theta}^T \underline{n}$
d_D	Durchgriff eines Systems
D	Dämpfungsgrad
$e(\cdot), e[\cdot]$ $e'(\cdot), e'[\cdot]$	Regelfehler Ausgangssignal des vorgeschalteten Störmodells (gefilterter Regelfehler)
E	Einheitsmatrix
f	Frequenz in $[1/s]$
\underline{f}	Einkoppelvektor einer Störung v in ein System
f_0	Eigenfrequenz (ungedämpft) in $[1/s]$
f_A	Abtastfrequenz in $[1/s]$
f_D	Eigenfrequenz (gedämpft) in $[1/s]$
f_E	Eckfrequenz in $[1/s]$
f_{max}	Grenzfrequenz, Abtastgrenze in $[1/s]$: maximale Frequenz, die durch die Zeitdiskretisierung mit h nach Shannon durch das zeitdiskrete Modell repräsentiert werden kann
f_R	Resonanzfrequenz in $[1/s]$
$F(\cdot), F[\cdot]$	Übertragungsfunktion der Strecke
$F_F(\cdot), F_F[\cdot]$	Übertragungsfunktion der Signalfilterung: z.B. Sollsignalfilterung $F_F = k_V$
$F_{ry}(\cdot), F_{ry}[\cdot]$	Übertragungsfunktion des mit proportionalem Regler geregelten Systems
$F_{ry,Z}(\cdot), F_{ry,Z}[\cdot]$	Übertragungsfunktion des mit Zustandsregler geregelten Systems
\underline{g}	Einkoppelvektor der Sollgröße r in ein System
h	Abtastzeit in $[s]$
$H[\cdot]$	Hyperebene
H	Hurwitz-Matrix
i	Index einer Größe, Laufparameter
I	Strom-Raumzeiger
j	Index einer Größe, Laufparameter
j	imaginäre Einheit
J	Kostenfunktion
J	Massenträgheitsmoment in $[N\ m^2]$
k	Abtastschritt mit $t_k = k\ h$
k, \underline{k}	Reglerverstärkung, Verstärkung allg.
k_0	instantane Verstärkung
k_∞	stationäre Verstärkung bezogen auf den Eingang (vgl. r_∞)
k_V	Vorverstärkung für stationäre Genauigkeit
l	Index einer Größe, Laufparameter
l, \underline{l}	Beobacherverstärkung

L	Induktivität in $[H]$
$L[\cdot]$	Lagrange-Hilfsfunktion
m	Ordnung des Zählerpolynoms bzw. der Nulldynamik, Anzahl der Nullstellen
m	Masse in $[kg]$
m'	reduzierte Ordnung des zeitdiskreten Zählerpolynoms $B[\cdot]$ bei Vernachlässigung der instabilen Diskretisierungsnullstellen
m_{DNS}	Anzahl der Diskretisierungsnullstellen
$m_{DNS,instabil}$	Anzahl der instabilen Diskretisierungsnullstellen
$m_{DNS,stabil}$	Anzahl der stabilen Diskretisierungsnullstellen
\underline{m}_i	i -ter Eigenvektor
$m_{instabil}$	Anzahl instabiler/nicht-minimalphasiger Nullstellen
m_{stabil}	Anzahl stabiler/minimalphasiger Nullstellen
m_{Sys}	Anzahl der Systemnullstellen, welche das physikalische Verhalten des Systems beschreiben
$M_A(\cdot), M_A[\cdot]$	Moment der Arbeitsmaschine in $[Nm]$
$M_B(\cdot), M_B[\cdot]$	Beschleunigungsmoment in $[Nm]$
$M_{D\ddot{U}}(\cdot), M_{D\ddot{U}}[\cdot]$	übertragenes Dämpfermoment in $[Nm]$
$M_F(\cdot), M_F[\cdot]$	Federmoment in $[Nm]$
$M_{FD}(\cdot), M_{FD}[\cdot]$	Feder-Dämpfer-Moment in $[Nm]$: $M_{FD} = M_F + M_i$
$M_{FD\ddot{U}}(\cdot),$ $\dots M_{FD\ddot{U}}[\cdot]$	Summe aller übertragenen Momente eines Feder-Dämpfer-Systems in $[Nm]$: $M_{FD\ddot{U}} = M_{F\ddot{U}} + M_{D\ddot{U}}$
$M_{F\ddot{U}}(\cdot), M_{F\ddot{U}}[\cdot]$	übertragenes Federmoment in $[Nm]$
$M_i(\cdot), M_i[\cdot]$	Dämpfungsmoment durch innere Reibung des Werkstoffes in $[Nm]$
$M_M(\cdot), M_M[\cdot]$	Motormoment in $[Nm]$
\mathbf{M}_S	Sylvester-Matrix
$M_W(\cdot), M_W[\cdot]$	Lastmoment, Widerstandsmoment, Störmoment in $[Nm]$
n	Systemordnung, Ordnung des Nennerpolynoms bzw. der Systemmatrix, Anzahl der Polstellen
\underline{n}	Normalenvektor einer Ebene; alle Werte $\underline{\theta}$ erfüllen die Ebenengleichung: $d = \underline{\theta}^T \underline{n}$
N	Datenfensterung über N Messdaten
\mathbb{N}	natürliche Zahlen
p	Prädiktionshorizont: Anzahl der in die Zukunft prädizierter Zeitschritte
p_i	i -te Polstelle
\bar{p}_i	i -te konjugiert komplexe Polstelle
$\mathbf{P}[\cdot]$	inverse Kovarianzmatrix, Projektionsmatrix des RLS-Algorithmus
\mathbf{P}_{ini}	Initialisierungsmatrix der Projektionsmatrix $\mathbf{P}[\cdot]$ des RLS-Algorithmus
q	Schiebe-Operator zur Beschreibung eines zeitkontinuierlichen Systems im Zeitbereich
q_j	j -te Nullstelle
\bar{q}_j	j -te konjugiert komplexe Nullstelle
$q_{j,DNS}$	j -te Diskretisierungs-Nullstelle

$q_{j, Sys}$	j -te System-Nullstelle
\underline{q}_U	Skalierungsvektor der Sequenz $\underline{U}_S[\cdot]$ im Prädiktionsmodell
$Q[\cdot]$	Quantisierungsfunktion
\mathbf{Q}_B	Beobachtbarkeitsmatrix
\mathbf{Q}_S	Steuerbarkeitsmatrix
\mathbf{Q}_U	Skalierungsmatrix der Sequenz $\underline{U}[\cdot]$ im Prädiktionsmodell
r	Relativgrad, Ordnungsdifferenz zwischen Nenner- und Zählerpolynom
r	Verstärkung einer Übertragungsfunktion
r	Radius in $[m]$
$r(\cdot), r[\cdot]$	Sollsignal, Sollgröße
r'	erhöhter Relativgrad des zeitdiskreten Modells bei Vernachlässigung der instabilen Diskretisierungs-Nullstellen
$r(\cdot), r[\cdot]$	Amplitude einer Systembeschreibung in Polarkoordinaten (Radius)
$r'(\cdot), r'[\cdot]$	gefiltertes Sollsignal, Sollgröße
r_∞	stationäre Verstärkung bezogen auf die Zustände (vgl. k_∞)
r_i, r_j	Amplitude des i -ten Eigenwertes λ_i , Polstelle p_i oder j -ten Nullstelle q_j in Polarkoordinaten
R	Widerstand in $[\Omega]$
\mathbb{R}	reelle Zahlen
$R(\cdot), R[\cdot]$	Referenzmodell
s	Differential-Operator zur Beschreibung eines zeitkontinuierlichen Systems im Frequenzbereich: Laplace-Operator $s = \sigma + j\omega$
t	Zeit in $[s]$
t_0	Anfangszeitpunkt in $[s]$
t_k	Zeit in $[s]$ zum Abtastschritt k
t_T	Totzeit in $[s]$
T	Zeitkonstante in $[s]$
\mathbf{T}	Transformationsmatrix
T_1	Statorzeitkonstante in $[s]$
\mathbf{T}_B	Matrix zur Transformation der Systemmatrix auf Beobachtungsnormalform
T_{ers}	Ersatzzeitkonstante in $[s]$
\mathbf{T}_M	Modalmatrix zur Transformation der Systemmatrix auf Diagonalgestalt
\mathbf{T}_R	Matrix zur Transformation der Systemmatrix auf Regelungsnormalform
T_t	Umrichter-Totzeit in $[s]$
$u(\cdot), u[\cdot]$	Systemeingang, Stellgröße, Stellsignal
$\vec{u}(\cdot)$	Stellgröße eines digitalen Reglers: gemäß der Modellierung mit einem ZOH-Glied wird eine Stufenfunktion ausgegeben
U	Spannungs-Raumzeiger
$\underline{U}[\cdot]$	mit der Sequenz $\underline{U}[\cdot]$ von Eingangswerten $u[\cdot]$ und der Sequenz $\underline{Y}[\cdot]$ von Ausgangswerten $y[\cdot]$ lassen sich Zustandsvektoren bestimmen

$\underline{U}_S[\cdot]$	Steuersequenz von Eingangswerten $u[\cdot]$, um den Null-Zustandsvektor zu erreichen
$v(\cdot), v[\cdot]$ $v_{SM}(\cdot), v_{SM}[\cdot]$ V $V(\cdot), V[\cdot]$ V_{UR}	Störgröße, Störsignal Störsignal, welches durch ein Störmodell nachgebildet wird Volumen in $[m^3]$ Lyapunov-Funktion Umrichter-Verstärkung
\mathbb{W}	Wertebereich
$x(\cdot), x[\cdot]$ $\underline{x}[\cdot]$ $x_{I,i}(\cdot)$ $x_{I,i}[\cdot]$	Systemzustand, Zustandssignal Regressionsvektor des ARMA-Modells, welcher die zur Modellbeschreibung notwendigen vergangenen Ein- und Ausgangssignale enthält Zustandssignal ohne Anfangswert: $x_I(t) = x_{I,i}(t) + x_{I,0}$ Zustandssignal ohne Anfangswert: $x_I[k] = x_{I,i}[k] + \delta[k] x_{I,0}$
$y(\cdot), y[\cdot]$ $y_r(\cdot), y_r[\cdot]$ $y_v(\cdot), y_v[\cdot]$ $y_{\underline{x}_0}(\cdot), y_{\underline{x}_0}[\cdot]$ $y^*(\cdot), y^*[\cdot]$ $\hat{y}[\cdot]$ $\underline{Y}[\cdot]$	Systemausgang, Istsignal anteiliges Systemausgangssignal erzeugt durch das Führungsverhalten anteiliges Systemausgangssignal erzeugt durch das Störverhalten anteiliges Systemausgangssignal erzeugt durch die Anfangswerte Wunsch-Systemausgangssignal, Sollsignal mit dem ARMA-Modell prädizierter zukünftiger Ausgangswert mit der Sequenz $\underline{U}[\cdot]$ von Eingangswerten $u[\cdot]$ und der Sequenz $\underline{Y}[\cdot]$ von Ausgangswerten $y[\cdot]$ lassen sich Zustandsvektoren bestimmen
z \mathbb{Z} \mathbb{Z}_p	Schiebe-Operator zur Beschreibung eines zeitkontinuierlichen Systems im Frequenzbereich: z -Operator $z = r e^{j\omega h} = r e^{j\varphi}$ ganze Zahlen Polpaarzahl

Literaturverzeichnis

- [1] ACKERMANN, J.: *Abtastregelung*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1988.
- [2] ACKERMANN, J.: *Robuste Regelung*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1993.
- [3] ANDERSON, B.D.O., BITMEAD, R.R., JOHNSON, C.R., KOKOTOVIC, P.V., KOSUT, R.L., MAREELS, I.M.Y., PRALY, L., RIEDLE, B.D.: *Stability of Adaptive Systems: Passivity and Averaging Analysis*. MIT Press, 1986.
- [4] ANDERSON, S.R., KADIRKAMANATHAN, V.: *Modelling and Identification of Non-Linear Deterministic Systems in the Delta-Domain*. Automatica, Vol. 43(11), S. 1859-1868, 2007.
- [5] ANGERER, B.: *Online Identifikation mechatronischer Systeme mit Hilfe rekurrenter Netze*. Diplomarbeit, TU-München, 2001.
- [6] ANNASWAMY, A.M., KÁRASON, S.P.: *Discrete-Time Adaptive Control in the Presence of Input Constraints*. Automatica, 31, S. 1421-1431, 1995.
- [7] ARRIAGADA, I.A., YUZ, J.I.: *On the relationship between Splines, Sampling Zeros and Numerical Integration in Sampled-Data models for Linear Systems*. Proceedings of the 2008 IEEE American Control Conference, ACC, Seattle, USA, S. 3665-3670, 2008.
- [8] ÅSTRÖM, K.J., WITTENMARK, B.: *Computer Controlled Systems. Theory and Design*. Prentice Hall, Englewood and Cliffs, New York, 1984.
- [9] ÅSTRÖM, K.J., HAGANDER, P., STERNBY, J.: *Zeros of Sampled Systems*. Automatica, 20, S.31-39, Pergamon Press Ltd., Great Britain, 1984.
- [10] ÅSTRÖM, K.J., WITTENMARK, B.: *Adaptive Control*. Addison-Wesley Publishing Company, 1995.
- [11] BERCHTENBREITER, F.: *Implementierung einer Prädiktiven Regelung für Systeme mit isolierten Nichtlinearitäten*. Diplomarbeit, TU-München, 2002.
- [12] BLACHUTA, M.J.: *On Zeros of Sampled Systems*. Proceedings of the American Control Conference, 1997.

- [13] BLACHUTA, M.J., GRYGIEL, R.T.: *Are anti-aliasing filters really necessary for sampled-data control?*. Proceedings of the 2009 IEEE American Control Conference, ACC, St. Louis, USA, S. 3200-3205, 2009.
- [14] BODE, H.: *Network Analysis and Feedback Amplifier Design*. D. Van Nostrand Company, Inc., Toronto, 1952.
- [15] BOMZE, I.M., GROSSMANN, W.: *Optimierung - Theorie und Algorithmen*. Wissenschaftsverlag Leipzig, Wien, Zürich, 1993.
- [16] BOŠKOVIĆ, J.D.: *Stable Certainty Equivalence Adaptive Control using Normalized Parameter Adjustment Laws*. Proceedings of the 2009 IEEE American Control Conference, ACC, St. Louis, USA, S. 1256-1261, 2009.
- [17] BRONSTEIN, S.: *Taschenbuch der Mathematik*. B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart Leipzig, Moskau 1991.
- [18] BYRNES, C., ISIDORI, A.: *Asymptotic Stabilization of Minimum Phase Nonlinear Systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 36(10), S. 1122-1137, 1991.
- [19] CABRERA, J.B.D., NARENDRA, K.S.: *The General Tracking Problem for Discrete-Time Dynamical Systems*. Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control, Vol. 2, S. 1451-1456, 1997.
- [20] CABRERA, J.B.D., NARENDRA, K.S.: *Issues in the Application of Neural Networks for Tracking based on Inverse Control*. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 44(11), S. 2007-2027, 1999.
- [21] CAMACHO, E.F., BORDONS-ALBA, C.: *Model Predictive Control in the Industry*. Springer Verlag, London, 1995.
- [22] CAMACHO, E.F., BORDONS, C.: *Model Predictive Control*. Springer Verlag, London, 2007.
- [23] CAO, L., SCHWARTZ, H.: *A Directional Forgetting Algorithm Based on the Decomposition of the Information Matrix* Automatica, Vol. 36, S. 1725-1731, 2000.
- [24] CARRASCO, D.S., GOODWIN, G.C.: *An Input-Output Sampled Data Model for a Class of Continuous-Time Nonlinear Systems Having No Finite Zeros*. Proceedings of the 9th IEEE International Conference on Control and Automation (ICCA), Santiago, Chile, S. 336-339, 2011.
- [25] CARRASCO, D.S., GOODWIN, G.C.: *The Role of Asymptotic Sampling Zero Dynamics in the Sampled-Data Control of Continuous Nonlinear Systems*. Proceedings of the 52nd IEEE Conference on Decision and Control, CDC, Florenz, Italien, S. 4742-4747, 2013.
- [26] CHAN, J.T.: *Stabilization of Discrete System Zeros: An Improved Design*. International Journal of Control, Vol. 75(10), S. 759-765, 2002.

- [27] CHEN, S., COWAN, C.F.N., GRANT, P.M.: *Orthogonal Least Squares Algorithm for Radial Basis Function Networks*. IEEE Transactions on Neural Networks, Vol. 2, S. 302-309, 1991.
- [28] CLARKE, D.W., GAWTHROP, P.J.: *Self Tuning Control*. Proceedings IEEE, 123, S. 633-640, 1979.
- [29] CLARKE, D.W., MOHTADI, C., TUFFS, P.S.: *Generalized Predictive Control - Part I. The Basic Algorithm*. Automatica, Vol. 23(2), 1987.
- [30] CLARKE, D.W., MOHTADI, C., TUFFS, P.S.: *Generalized Predictive Control - Part II. Extensions and Interpretations*. Automatica, Vol. 23(2), 1987.
- [31] CLARKE, D.W., SCATTOLINI, R.: *Constrained Receding-horizon Predictive Control*. Proceedings IEE, 138(4), S. 347-354, 1991.
- [32] CLARKE, D.W., MOSCA, E., SCATTOLINI, R.: *Robustness of an Adaptive Predictive Controller*. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 39(5), 1994.
- [33] CORDERO, A.O., MAYNE, D.Q.: *Deterministic Convergence of a Self-Tuning Regulator with Variable Forgetting Factor*. Proceedings IEE, 128(1), S. 19-23, 1981.
- [34] DASGUPTA, S.: *An Approach to Multirate Control*. Proceedings of the 38th Conference on Decision & Control, Phoenix, Arizona, S. 3446-3451, 1999.
- [35] DE KEYSER, R.M.C., VAN CUAWENBERGHE, A.R.: *Extended Prediction Self Adaptive Control*. IFAC Symp. on Identification and System Parameter Estimation, York, UK, S. 1317-1322, 1985.
- [36] DESOER, C., VIDYASAGAR, M.: *Feedback Systems: Input-Output Properties*. Academic Press, New York, 1975.
- [37] DITTMAR, R., PFEIFFER, B.M.: *Modellbasierte prädiktive Regelung - Eine Einführung für Ingenieure*. Oldenbourg Wissenschaftsverlag München, 2004.
- [38] DOGAN, I.: *Microcontroller Based Applied Digital Control*. John Wiley & Sons Ltd, West Sussex, England, 2006.
- [39] DRĂGAN, V., HALANAY, A.: *Stabilization of Linear Systems*. Birkhäuser, Boston, 1999.
- [40] EGARDT, B.: *Stability of Adaptive Controllers*. Springer Verlag, Berlin, 1979.
- [41] ENDISCH, C.: *Optimierungsstrategien für die Identifikation mechatronischer Systeme*. Dissertation am Lehrstuhl für Elektrische Antriebssysteme, TU-München, 2009.
- [42] FEILER, M.: *Adaptive Control in the Presence of Disturbances*. Dissertation am Lehrstuhl für Elektrische Antriebssysteme, TU-München, 2004.
- [43] FEUER, A., GOODWIN, G.: *Generalized Sample Hold Functions: Frequency Domain Analysis of Robustness, Sensivity and Intersample Difficulties*. Transactions on IEEE Automatic Control, Vol. 39(5), S. 1042-1047, 1994.

- [44] FLEDDERJOHN, M.S., HOLZEL, M.S., MOROZOV, A.V., BERNSTEIN, D.S.: *On the Accuracy of Least Squares Algorithms for Estimating Zeros*. Proceedings of the 2010 IEEE American Control Conference, ACC, Baltimore, USA, S. 3729-3734, 2010.
- [45] FLETCHER, R.: *Practical Methods of Optimization*. John Wiley and Sons Ltd., 1987.
- [46] FÖLLINGER, O.: *Regelungstechnik*. Hüthig Buch Verlag, Heidelberg, 1994.
- [47] FÖLLINGER, O.: *Optimierung dynamischer Systeme*. R. Oldenbourg Verlag, München Wien, 1985.
- [48] FORTESCUE, T.R., KERSHENBAUM, L.S., YDSTIE, B.E.: *Implementation of Self-tuning Regulators with Variable Forgetting Factors*, Automatica, Vol. 17, No. 6, S. 831-835, 1981.
- [49] FRANCIS, B.A., WONHAM, W.M.: *The Internal Model Principle for Linear Multivariable Regulators*. Journal Applied Mathematics & Optimization, Vol. 2(2), S. 170-194, 1975.
- [50] FRANCIS, B.A., WONHAM, W.M.: *The Internal Model Principle of Control Theory*. Automatica, Vol. 12, S. 457-465, 1976.
- [51] FRANKLIN, G.F., POWELL, J.D., WORKMAN, M.L.: *Digital Control of Dynamic Systems*. Addison-Wesley Publishing Company, United States of America, 1992.
- [52] FU, Y., DUMONT, G.A.: *Choice of Sampling to Ensure Minimum-Phase Behavior*. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 34(5), 1989.
- [53] FU, Y., CHAI, T.: *Indirect Self-tuning Control of a Nonlinear Non-minimum Phase System*. Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control, CDC, Shanghai, China, S. 829-834, 2009.
- [54] GOODWIN, G.C., SIN, K.S., BITMEAD, R.R.: *An Adaptive d-Step Ahead Predictor Based on Least Squares*. IEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-25, 1980.
- [55] GOODWIN, G.C., SIN, K.S.: *Adaptive Filtering Prediction and Control*. Prentice – Hall, Englewood Cliffs NJ, 1984.
- [56] GOODWIN, G.C., LOZANO LEAL, R., MAYNE, D.Q., MIDDLETON, R.H.: *Rapprochement between Continuous and Discrete Model Reference Adaptive Control*. Automatica, Vol. 22, No. 2, S. 199-207, 1986.
- [57] GOODWIN, G.C., SERON, M.M., DE DONÁ, J.A.: *Constrained Control and Estimation – An Optimisation Approach*. Springer-Verlag, London, 2005.
- [58] GOODWIN, G.C.: *Sampling and Sampled-Data Models*. Proceedings of the 2010 IEEE American Control Conference, ACC, Baltimore, USA, S. 1-20, 2010.

- [59] GOODWIN, G.C., AGÜERO, J.C., CEA GARRIDO, M.E., SALGADO, M.E., YUZ, J.I.: *Sampling and Sampled-Data Models: the Interface between the Continuous World and Digital Algorithms*. IEEE Control Systems Magazine, 2013.
- [60] GRECO, C., MANGA, G., MOSCA, E., ZAPPA, G.: *Performance Improvement on Self Tuning Controllers by Multistep Horizon: the MUSMAR approach*. Automatica Vol. 20, S. 681-700, 1984.
- [61] GUO, J., TAO, G.: *Discrete-Time Adaptive Control of A Nonlinear Aircraft Flight Dynamic System (NASA GTM) with Damage*. Proceedings of the 51st IEEE Conference on Decision and Control, CDC, Maui, USA, S. 1746-1751, 2012.
- [62] HÄGGLUND, T., ÅSTRÖM, K.J.: *Supervision of Adaptive Control Algorithms* Automatica, Vol. 36, S. 1171-1180, 2000.
- [63] HAGIWARA, T., YUASA, T., ARAKI, M.: *Limiting Properties of the Zeros of Sampled-Data Systems with Zero- and First-Order Holds*. Proceedings of the 31th Conference on Decision & Control, Tucson, Arizona, 1982.
- [64] HAGIWARA, T., YUASA, T., ARAKI, M.: *Stability of the Limiting Zeros of Sampled-Data Systems with Zero- and First-Order Holds*. International Journal of Control, Vol. 58(6), S. 1325-1346, 1993.
- [65] HAN, Z., FRANK, P.M.: *Comment on 'Modified Least Squares Algorithm Incorporating Exponential Resetting and Forgetting'*. International Journal of Control, Vol. 68(4), S. 947-953, 1997.
- [66] HAN, L., SHENG, J., DING, F., SHI, Y.: *Recursive least squares identification for multirate multi-input single-output systems*. Proceedings of the 2009 IEEE American Control Conference, ACC, St. Louis, USA, S. 5604-5609, 2009.
- [67] HARA, S., KATORI, H., KONDO, R.: *The Relationship Between Real Poles and Real Zeros in SISO Sampled Data Systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 34(6), S. 632-635, 1989.
- [68] HARA, S., KONDO, R., KATORI, H.: *Properties of Zeros in Digital Control Systems with Computational Time Delay*. International Journal of Control, Vol. 49(2), S. 493-511, 1989.
- [69] HAVERLAND, M.: *Der Einfluss von Nullstellen bei abgetasteten Regelsystemen*. Automatisierungstechnik Band 35, Heft 5, 1986.
- [70] HEIDENHAIN, J. GMBH: *Benutzer-Handbuch IK 121*. Dr. Johannes Heidenhain GmbH, 1998.
- [71] HEIMANN, B., GERTH, W., POPP, K.: *Mechatronik*. Carl-Hanser-Verlag, München Wien, 2001.
- [72] HINRICHSSEN, D., PRITCHARD, A.J.: *Mathematical Systems Theory I – Modelling, State Space Analysis, Stability and Robustness*. Springer-Verlag, Berlin, 2005.

- [73] HIPPE, P., WURMTALER, C.: *Zustandsregelung*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1985.
- [74] HOAGG, J., BERNSTEIN, D.: *Nonminimum-Phase Zeros: Much to Do about Nothing*. IEEE Control Systems Magazine, Vol. 27(3), S. 45-57, 2007.
- [75] HOAGG, J.B., BERNSTEIN, D.S.: *Cumulative Retrospective Cost Adaptive Control with RLS-Based Optimization*. Proceedings of the 2010 IEEE American Control Conference, ACC, Baltimore, USA, S. 4016-4021, 2010.
- [76] HOAGG, J.B., BERNSTEIN, D.S.: *Retrospective Cost Adaptive Control for Nonminimum-Phase Discrete-Time Systems, Part 1: The Ideal Controller and Error System*. Proceedings of the 49th IEEE Conference on Decision and Control, CDC, Atlanta, USA, S. 893-898, 2010.
- [77] HOAGG, J.B., BERNSTEIN, D.S.: *Retrospective Cost Adaptive Control for Nonminimum-Phase Discrete-Time Systems, Part 2: The Adaptive Controller and Stability Analysis*. Proceedings of the 49th IEEE Conference on Decision and Control, CDC, Atlanta, USA, S. 899-904, 2010.
- [78] HOAGG, J.B., BERNSTEIN, D.S.: *Retrospective Cost Model Reference Adaptive Control for Nonminimum-Phase Discrete-Time Systems, Part 1: The Adaptive Controller*. Proceedings of the 2011 IEEE American Control Conference, ACC, San Francisco, USA, S. 2933-2938, 2011.
- [79] HOAGG, J.B.: *Retrospective Cost Model Reference Adaptive Control for Nonminimum-Phase Discrete-Time Systems, Part 2: Stability Analysis*. Proceedings of the 2011 IEEE American Control Conference, ACC, San Francisco, USA, S. 2927-2932, 2011.
- [80] HOAGG, J.B.: *Multi-Input Multi-Output Direct Model Reference Adaptive Control for Systems with Known Nonminimum-Phase Zeros*. Proceedings of the 2012 IEEE American Control Conference, ACC, Fairmont Queen Elizabeth, Canada, S. 338-343, 2012.
- [81] IOANNOU, P.A., SUN, J.: *Robust Adaptive Control*. Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 1996.
- [82] ISERMANN, R.: *Mechatronische Systeme – Grundlagen*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2002.
- [83] ISERMANN, R.: *Digitale Regelsysteme 1*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1988.
- [84] ISERMANN, R.: *Identifikation dynamischer Systeme 1 - Grundlegende Methoden*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2. Auflage, 1992.
- [85] ISERMANN, R.: *Identifikation dynamischer Systeme 2 - Besondere Methoden, Anwendungen*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2. Auflage, 1992.

-
- [86] ISHITOBI, M.: *Conditions for Stable Zeros of Sampled Systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 37(10), 1992.
- [87] ISHITOBI, M., NISHI, M.: *Zero Dynamics of Sampled-Data Models for Nonlinear Systems*. Proceedings of the 2008 IEEE American Control Conference, ACC, Seattle, USA, S. 1184-1189, 2008.
- [88] ISHITOBI, M., KOGA, T., NISHI, M., KUNIMATSU, S.: *Asymptotic Properties of Zeros of Sampled-Data Systems*. Proceedings of the 49th IEEE Conference on Decision and Control, CDC, Atlanta, USA, S. 4952-4957, 2010.
- [89] ISHITOBI, M., NISHI, M., KUNIMATSU, S.: *Asymptotic Properties and Stability Criteria of Zeros of Sampled-Data Models for Decouplable MIMO Systems*. Transactions on IEEE Automatic Control, Vol. 58(11), S. 2985-2990, 2013.
- [90] ISIDORI, A.: *Nonlinear Control Systems*. Springer-Verlag, London, 2001.
- [91] JANECKI, D.: *Model Reference Adaptive Control Using Delta Operator*. Transactions on IEEE Automatic Control, Vol. 33, 1988.
- [92] JURI, E.I.: *Theory and Application of the Z-Transform*. John Wiley, New-York, 1964.
- [93] KAILATH, T.: *Linear Systems*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1980.
- [94] KEITHLEY INSTRUMENTS: *DAS-1600 / 1400 Series User's Guide*. Keithley Instruments Inc., 1996.
- [95] KHALIL, H.: *Nonlinear Systems*. Prentice-Hall, Upper Saddle River, Englewood Cliffs NJ, 3. Auflage, 2001.
- [96] KOFAHL, R.: *Robuste Parameteradaptive Regelungen*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1988.
- [97] KOWALCZUK, Z.: *Discrete Approximation of Continuous-Time Systems: a Survey*. IEE Proceedings, Vol. 140(4), 1993.
- [98] KREISSELMEIER, G., NARENDRA, K.S.: *Stable Model Reference Adaptive Control in the Presence of Bounded Disturbances*. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 27, S. 1169-1175, 1982.
- [99] KREISSELMEIER, G., ANDERSON, B.D.O.: *Robust Model Reference Adaptive Control*. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 31(2), 1986.
- [100] KUCHLING, H.: *Taschenbuch der Physik*. Carl Hanser Verlag, München Wien, 1996.
- [101] LANCASTER, P., TISMENETSKY, M.: *The Theory of Matrices*. Aus der Reihe: Computer Science and Applied Mathematics, 2. Auflage, Academic Press, London Sydney Tokio, 1985.

- [102] LANDAU, Y.D.: *Adaptive Control – The Model Reference Approach*. Marcel Dekker, Inc., New York, USA, 1979.
- [103] LANDAU, I.D., LOZANO, R., M'SAAD, M.: *Adaptive Control*. Springer-Verlag, London, 1998.
- [104] LANDAU, I.D., ALMA, M., MARTINEZ, J.J., BUCHE, G.: *Direct adaptive suppression of multiple unknown vibrations using an inertial actuator*. Proceedings of the 49th IEEE Conference on Decision and Control, CDC, Atlanta, USA, S. 1743-1748, 2010.
- [105] LEMOS, J.M., MOSCA, E.: *A Multipredictor-based LQ self-tuning Controller*. IFAC Symp. on Identification and System Parameter Estimation, York, UK, S. 137-141, 1985.
- [106] LENNARTSON, B., MIDDLETON, R.: *Numerical Sensitivity of Linear Matrix Inequalities for Shorter Sampling Periods*. Proceedings of the 51st IEEE Conference on Decision and Control, CDC, Maui, USA, S. 4247-4252, 2012.
- [107] LEONHARD, W.: *Control of Electrical Drives*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1996.
- [108] LI, S., TAO, G.: *Discrete-Time Multivariable MRAC Schemes with Output Sensor Uncertainty Compensation*. Proceedings of the 49th IEEE Conference on Decision and Control, CDC, Atlanta, USA, S. 1761-1766, 2010.
- [109] LIBERZON, D., MORSE, A., SONTAG, E.: *Output-Input Stability and Minimum-Phase Nonlinear Systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 47(3), S. 422-436, 2002.
- [110] LJUNG, L.: *System Identification – Theory for the User*. Prentice - Hall, Upper Saddle River NJ, 1999.
- [111] LUDYK, G.: *Theoretische Regelungstechnik 1*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1995.
- [112] LUDYK, G.: *Theoretische Regelungstechnik 2*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1995.
- [113] LUNZE, J.: *Regelungstechnik 1*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 4. Auflage, 2004.
- [114] LUNZE, J.: *Regelungstechnik 2*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 3. Auflage, 2005.
- [115] MAREELS, I., POLDERMAN, J.W.: *Adaptive Systems – An Introduction*. Birkhäuser, Boston, 1996.

- [116] MARRO, G., BERNSTEIN, D.S., ZATTONI, E.: *Geometric Methods for Unknown-State, Unknown-Input Reconstruction in Discrete-Time Nonminimum-Phase Systems with Feedthrough Terms*. Proceedings of the 49th IEEE Conference on Decision and Control, CDC, Atlanta, USA, S. 6022-6027, 2010.
- [117] MARRO, G., ZATTONI, E.: *Geometric Methods for Invariant Zero Cancellation in Discrete-Time Non-strictly-proper Linear Multivariable Systems*. Proceedings of the 2011 IEEE American Control Conference, ACC, San Francisco, USA, S. 1212-1217, 2011.
- [118] MIDDLETON, R.H., GOODWIN, G.C., HILL, D.J., MAYNE, D.Q.: *Design Issues in Adaptive Control*. IEEE Transactions on Automatic Control, 33:50-58, 1988.
- [119] MIDDLETON, R.H., GOODWIN, G.C.: *Digital Control and Estimation: A Unified Approach*. Prentice – Hall, Englewood Cliffs NJ, 1990.
- [120] MONACO, S., NORMAND-CYROT, D.: *Zero Dynamics of Sampled Nonlinear Systems*. Systems & Control Letters, Vol. 11(3), S. 229-234, 1988.
- [121] MOROZOV, A.V., HOAGG, J.B., BERNSTEIN, D.S.: *Retrospective Cost Adaptive Control of a Planar Multilink Arm with Nonminimum-Phase Zeros*. Proceedings of the 49th IEEE Conference on Decision and Control, CDC, Atlanta, USA, S. 899-904, 2010.
- [122] MOROZOV, A.V., D'AMATO, A.M., HOAGG, J.B., BERNSTEIN, D.S.: *Retrospective Cost Adaptive Control for Nonminimum-Phase Systems with Uncertain Nonminimum-Phase Zeros Using Convex Optimization*. Proceedings of the 2011 IEEE American Control Conference, ACC, San Francisco, USA, S. 1188-1193, 2011.
- [123] MORSE, S.: *A Three-Dimensional Universal Controller for the Adaptive Stabilization of Any Strictly Proper Minimum-Phase System with Relative Degree Not Exceeding Two*. IEEE Transaction on Automatic Control, Vol. 30(12), 1985.
- [124] MORSE, S.: *Simple Algorithms For Adaptive Stabilization*. In: Lecture Notes in Control and Information Sciences, hg. von C. Byrnes and A. Kurzhanski, Nr. 105, Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [125] MORSE, S.: *Global Stability of Parameter Adaptive Control Systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 25(3), S. 433-439, 1980.
- [126] MOSCA, E.: *Optimal, Predictive and Adaptive Control*. Prentice–Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1995.
- [127] MÜLLER, P. C.: *Stabilität und Matrizen*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1977.
- [128] NARENDRA, K.S., ANNASWAMY, A.M.: *Stable Adaptive Systems*. Prentice – Hall, Englewood Cliffs NJ, 1989.

- [129] NARENDRA, K.S., ZHUO, H.: *Discrete-Time Adaptive Control Using Multiple Models*. Proceedings of the 2011 IEEE American Control Conference, ACC, San Francisco, USA, S. 2921-2926, 2011.
- [130] NELLES, O.: *Nonlinear System Identification*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2001.
- [131] NISHI, M., ISHITOBI, M., KUNIMATSU, S.: *Nonlinear Sampled-Data Models and Zero Dynamics*. Proceedings of the 2009 IEEE International Conference on Networking, Sensing and Control, Okayama, Japan, S. 373-378, 2009.
- [132] NISHI, M., ISHITOBI, M., KUNIMATSU, S.: *Sampled-Data Models and Zero Dynamics for Nonlinear Systems*. Proceedings of the 2009 International Joint Conference, Fukuoka, Japan, S. 2448-2453, 2009.
- [133] NOCEDAL, J., WRIGHT, S.J.: *Numerical Optimization*. Springer-Verlag, New York, 1999.
- [134] NORDSJÖ, A.E., WIGREN, T.: *On Estimation of Errors Caused by Nonlinear Undermodelling in System Identification*. International Journal of Control, 75(14), S. 1100-1113, 2002.
- [135] OGATA, K.: *Discrete-Time Control Systems*. Prentice – Hall, Englewood Cliffs NJ, 1987.
- [136] OH, P.Y.: *Improved Model Reference Adaptive Control Using the Euler Operator*. Proceedings of the 1997 IEEE International Conference on Robotics and Automation, New Mexico, 1997.
- [137] OISHI, Y.: *Passivity Degradation under the Discretization with the Zero-Order Hold and the Ideal Sampler*. Proceedings of the 49th IEEE Conference on Decision and Control, CDC, Atlanta, USA, S. 7613-7617, 2010.
- [138] OPPELT, W.: *Kleines Handbuch technischer Regelvorgänge*. Verlag Chemie GmbH, Weinheim/Bergstr., 1972.
- [139] OPPENHEIM, A.V., WILLSKY, A. S.: *Signals und Systems*. VCH Verlagsgesellschaft, Weinheim, 1992.
- [140] OPPENHEIM, A. V., SCHAFER, R.W.: *Zeitdiskrete Signalverarbeitung*. R. Oldenbourg Verlag, München Wien, 1999.
- [141] PAPAGEORGIOU, M.: *Optimierung*. R. Oldenbourg Verlag, München Wien, 1991.
- [142] PARKUM, J.E., POULSEN, N.K., HOLST, J.: *Recursive Forgetting Algorithms*, International Journal of Control, Vol. 55, S. 109-128.
- [143] PETERKA, V.: *Predictor Based Self-tuning Control*. Automatica Vol. 20(1), S. 39-50, 1984 .

- [144] POLDERMAN, J.W.: *Adaptive Pole Assignment by State Feedback*. Centre for Mathematics and Computer Science, Amsterdam, Report Klassifizierung 93C40, 1980.
- [145] POLDERMAN, J.W.: *Adaptive Pole Assignment by State Feedback*. In: *Modelling and Adaptive Control*, hg. C.I. Byrnes und A. Kurzhanski, Lecture Notes in Control and Information Science, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1988.
- [146] POLDERMAN, J.W.: *Adaptive Control and Identification: Conflict or Conflux?* Centre for Mathematics and Computer Science, Amsterdam, 1989.
- [147] POLDERMAN, J.W., MAREELS, I.M.Y: *The Pole Zero Cancellation Problem in Adaptive Pole-Placement Revisited*. 4th European Control Conference, WE-MC4, Nr. 412, S. 1-5, Brüssel, 1997
- [148] POMMER, H.: *Experimentelle Identifikation und Kompensation von Lose*. Diplomarbeit Nr. 385, Lehrstuhl für Elektrische Antriebstechnik, TU-München, 1998.
- [149] REINSCHKE, K.: *Lineare Regelungs- und Steuerungstheorie*. Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [150] ROHRS, C.E., ATHANS, M., VALVANI, L., STEIN, G.: *Some Design Guidelines for Discrete-Time Adaptive Controllers*. Automatica, Vol. 20, S. 653-660, 1984.
- [151] ROSSITER, J.A.: *Model-Based Predictive Control*. CRC Press 2004.
- [152] SALGADO, E., GOODWIN, G.C., MIDDLETON, R.H.: *Modified Least Squares Algorithm Incorporating Exponential Resetting and Forgetting*. International Journal of Control, Vol. 47(2), S. 477-491, 1988.
- [153] SÁNCHEZ, J.M., RODELLAR, J.: *Adaptive Predictive Control*. Prentice Hall, Europe, 1996.
- [154] SÁNCHEZ, J.M., RODELLAR, J.: *Adaptive Predictive Control: Limits of Stability*. International Journal of Adaptive Control and Signal Processing, Vol. 11, S. 263-283, 1997.
- [155] SAND, D.: *Simovert Master Drives, Spannungszwischenkreis-Umrichter für Drehstromantriebe*. Siemens AG, 1995.
- [156] SANG, Q., TAO, G.: *Performance Robustness of MRAC under Reduction in Actuator Effectiveness*. Proceedings of the 2009 IEEE American Control Conference, ACC, St. Louis, USA, S. 4506-4511, 2009.
- [157] SANTILLO, M.A., HOLZEL, M.S., HOAGG, J.B., BERNSTEIN, D.S.: *Adaptive Control Using Retrospective Cost Optimization with RLS-Based Estimation for Concurrent Markov-Parameter Updating*. Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control, CDC, Shanghai, China, S. 3466-3471, 2009.

- [158] SANTILLO, M.A., HOAGG, J.B., BERNSTEIN, D.S.: *Adaptive Static-Output-Feedback Stabilization Using Retrospective Cost Optimization*. Proceedings of the 2010 IEEE American Control Conference, ACC, Baltimore, USA, S. 1677-1682, 2010.
- [159] SCHMIDT, G.: *Grundlagen der Regelungstechnik*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1994.
- [160] SCHMIDT, G.: *Regelungs- und Steuerungstechnik 1*. Skriptum zur Vorlesung, Lehrstuhl für Regelungs- und Steuerungstechnik, TU-München, 2000.
- [161] SCHMIDT, G.: *Regelungs- und Steuerungstechnik 2*. Skriptum zur Vorlesung, Lehrstuhl für Regelungs- und Steuerungstechnik, TU-München, 2000.
- [162] SCHMID, R.: *Nonovershooting and nonundershooting linear multivariable state-feedback tracking controllers for discrete-time systems*. Proceedings of the 51st IEEE Conference on Decision and Control, CDC, Maui, USA, S. 3833-3838, 2012.
- [163] SCHRADER, C.B., SAIN, M.K.: *Research on System Zeros: a Survey*. International Journal of Control, Vol. 50(4), S. 1407-1433, 1989.
- [164] SCHRÖDER, D.(ED.): *Intelligent Observer and Control Design for Nonlinear Systems*. Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [165] SCHRÖDER, D.: *Elektrische Antriebe – Grundlagen*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 4. Auflage, 2009.
- [166] SCHRÖDER, D.: *Elektrische Antriebe – Regelung von Antriebssystemen*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 3. Auflage, 2009.
- [167] SCHRÖDER, D.: *Intelligente Verfahren – Identifikation und Regelung nichtlinearer Systeme*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2010.
- [168] SCHRÜFER, E.: *Elektrische Messtechnik*. 6. Auflage, Carl Hanser Verlag, München Wien, 1995.
- [169] SCHRÜFER, E.: *Signalverarbeitung*. 2. Auflage, Carl Hanser Verlag, München Wien, 1992.
- [170] SCHUSTER, H.: *Hochverstärkungsbasierte Regelung nichtlinearer Antriebssysteme*. Dissertation am Lehrstuhl für Elektrische Antriebssysteme, TU-München, 2008.
- [171] SEFERLIS, P.: *System Poles and Zeros Sensitivity for Dynamic Process Controllability*. Proceedings of the 2010 IEEE American Control Conference, ACC, Baltimore, USA, S. 1868-1873, 2010.
- [172] SLOTINE, J., LI, W.: *Applied Nonlinear Control*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1991.
- [173] SOETERBOEK, R.: *Predictive Control - A Unified Approach*. Prentice-Hall International, UK, 1992.

- [174] SUMER, E.D., BERNSTEIN, D.S.: *Robust Sampled-Data Adaptive Control of the Rohrs Counterexamples*. Proceedings of the 51st IEEE Conference on Decision and Control, CDC, Maui, USA, S. 7273-7278, 2012.
- [175] SUMER, E.D., BERNSTEIN, D.S.: *Aliasing Effects in Direct Digital Adaptive Control of Plants with High-Frequency Dynamics and Disturbances*. Proceedings of the 2013 IEEE American Control Conference, ACC, Washington DC, USA, S. 4934-4939, 2013.
- [176] SVARICEK, F.: *Nullodynamik linearer und nichtlinearer Systeme: Definitionen, Eigenschaften und Anwendungen*. Automatisierungstechnik, Vol. 54(7), S. 310-322, 2006.
- [177] TAO, G.: *Adaptive Control Design and Analysis*. John Wiley & Sons, Inc., New Jersey, 2003.
- [178] THE MATHWORKS: *System Identification Toolbox, Users Guide*, 2000.
- [179] TIAN, Z., NARENDRA, K.S.: *Adaptive Control of Linear Periodic Systems*. Proceedings of the 2009 IEEE American Control Conference, ACC, St. Louis, USA, S. 1274-1279, 2009.
- [180] TIEFENSEE, F., MONACO, S., NORMAND-CYROT, D.: *Passivity Degradation under the Discretization with the Zero-Order Hold and the Ideal Sampler*. Proceedings of the 49th IEEE Conference on Decision and Control, CDC, Atlanta, USA, S. 7594-7599, 2010.
- [181] UNBEHAUEN, H.: *Regelungstechnik 1: Klassische Verfahren zur Analyse und Synthese linearer kontinuierlicher Regelsysteme, Fuzzy-Regelsysteme*. Vieweg + Teubner Verlag, Wiesbaden, 2008.
- [182] UNBEHAUEN, H.: *Regelungstechnik 2: Zustandsregelung, digitale und nichtlineare Regelsysteme*. Vieweg & Sohn Verlag, Wiesbaden, 2007.
- [183] VACHENAUER, D.: *Mathematische Formeln, Taschenbuch für Ingenieure, Naturwissenschaftler, Wirtschaftswissenschaftler*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1997.
- [184] VIDYASAGAR, M.: *Nonlinear Systems Analysis*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1993.
- [185] WAHLBERG, B.: *Limit Results for Sampled Systems*. International Journal of Control, Vol. 48(3), S. 1267-1283, 1988.
- [186] WAN, Y., ROY, S., AABERI, A.: *A Pre- + Post- + Feedforward Compensator Design for Zero Placement*. Proceedings of the 2010 IEEE American Control Conference, ACC, Baltimore, USA, S. 335-336, 2010.
- [187] WELLER, S., MORAN, W., NINNESS, B., POLLINGTON, A.: *Sampling Zeros and the Euler-Frobenius Polynomials*. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 46(2), S. 340-343, 2001.

- [188] WONHAM, W.M.: *Towards an Abstract Internal Model Principle*. IEEE Transactions on Systems, Man & Cybernetics, Vol. 6(11), S. 735-740, 1976.
- [189] YAN, J., D'AMATO, A.M., SUMER, E.D., HOAGG, J.B., BERNSTEIN, D.S.: *Adaptive Control of Uncertain Hammerstein Systems with Monotonic Input Nonlinearities Using Auxiliary Nonlinearities*. Proceedings of the 51st IEEE Conference on Decision and Control, CDC, Maui, USA, S. 4811-4816, 2012.
- [190] YDSTIE, B.E.: *Extended Horizon Adaptive Control*. IFAC No. 9, Budapest, 1984.
- [191] YDSTIE, B.E.: *Transient Performance and Robustness of Direct Adaptive Control*. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 37(8), 1992.
- [192] YOON, T.W., CLARKE, D.W.: *Advances in Model-Based Predictive Control*. S. 402-414. Oxford University Press, 1994.
- [193] YUZ, J.I., GOODWIN, G.C.: *On Sampled-Data Models for Nonlinear Systems*. Transactions on IEEE Automatic Control, Vol. 50(10), S. 1477-1489, 2005.
- [194] ZENG, C., LIANG, S., SU, Y., LI, Y.: *Sampled-data models and zero dynamics for nonlinear systems with relative degree two*. Proceedings of the 25th IEEE Chinese Control and Decision Conference, S. 1967-1972, 2013.

vom Autor betreute Bachelor-, Master und Diplomarbeiten:

- [195] GRAF, M.W.: *Robuste Drehzahlregelung eines unsicheren elastischen Zweimassensystems mit Lose*. Bachelorarbeit Nr. 12, betreut von C. Westermaier, Lehrstuhl für Elektrische Antriebssysteme der TU-München, 2004.
- [196] HENZE, C.: *Bedeutung der Diskretisierungsmethode beim Entwurf eines inversen adaptiven Reglers*. Bachelorarbeit Nr. 22, betreut von C. Westermaier, Lehrstuhl für Elektrische Antriebssysteme der TU-München, 2006.
- [197] HENZE, C.: *Schwingungsdämpfung an einem realen unbekanntem Zwei-Massen-System mit Hilfe eines MRAC*. Diplomarbeit Nr. 451, betreut von C. Westermaier, Lehrstuhl für Elektrische Antriebssysteme der TU-München, 2007.
- [198] JANKER, K.A.: *Adaptive zeitkontinuierliche Regelung (Model Reference Adaptive Control) am Beispiel des Zwei-Massen-Systems*. Bachelorarbeit Nr. 023, betreut von C. Westermaier, Lehrstuhl für Elektrische Antriebssysteme der TU-München, 2006.
- [199] KIRCHMEIER, T.: *Stable Integration of Neural Networks in the MRAC-Concept to Control a Nonlinear Unknown Mechatronic System*. Masterarbeit Nr. 004, betreut von C. Westermaier, Lehrstuhl für Elektrische Antriebssysteme der TU-München, 2007.

- [200] PRIEGL, W.: *Robuste adaptive Regelung eines zeitvarianten mechatronischen Systems*. Diplomarbeit Nr. 453, betreut von C. Westermaier, Lehrstuhl für Elektrische Antriebssysteme der TU-München, 2007.
- [201] SCHWEIZER, R.: *Stabile adaptive Regelung eines mechatronischen Systems mittels prädiktivem Regler mit integrierter Parameterschätzung*. Diplomarbeit Nr. 455, betreut von C. Westermaier, Lehrstuhl für Elektrische Antriebssysteme der TU-München, 2007.
- [202] WINKLER, R.: *Entwicklung und Anwendung eines adaptiven Zustandsreglers auf ein Zwei-Massen-System*. Diplomarbeit Nr. 434, betreut von C. Westermaier, Lehrstuhl für Elektrische Antriebssysteme der TU-München, 2004.

Veröffentlichungen des Autors:

- [203] FEILER, M., WESTERMAIER, C., SCHRÖDER, D.: *Adaptive Speed Control of a Two-Mass-System*. Proceedings of the 2003 IEEE International Conference on Control Applications, CCA, Istanbul, Türkei, S. 1112-1117, 2003.
- [204] HACKL, C., SCHUSTER, H., WESTERMAIER, C., SCHRÖDER, D.: *Funnel-Control with Integrating Prefilter for Nonlinear, Time-varying Two-Mass Flexible Servo Systems*. Proceedings of the 9th IEEE International Workshop on Advanced Motion Control, AMC, Istanbul, Türkei, S. 456-461, 2006.
- [205] SCHRÖDER, D., SCHUSTER, H., WESTERMAIER, C.: *Mechatronic - Advanced Computational Intelligence*. Proceedings of the 7th IEEE Int. Conference on Power Electronics and Drive Systems, PEDS, Bangkok, Thailand, S. 994-1001, 2007.
- [206] SCHUSTER, H., WESTERMAIER, C., SCHRÖDER, D.: *High-Gain-Control of Systems with Arbitrary Relative Degree: Speed Control for a Two-Mass Flexible Servo System*. Proceeding of the 8th IEEE Int. Conference on Intelligent Engineering Systems, INES, Cluj-Napoca, Rumänien, S. 486-491, 2004.
- [207] SCHUSTER, H., WESTERMAIER, C., SCHRÖDER, D.: *High-Gain-Control for Systems with Zero Dynamics and Arbitrary Relative Degree*. Proceedings of the IEEE Int. Conference on Mechatronics and Robotics, MechRob, Aachen, Deutschland, S. 426-431, 2004.
- [208] SCHUSTER, H., WESTERMAIER, C., SCHRÖDER, D.: *Non-Identifier-Based Adaptive Tracking Control for a Two-Mass-System*. Proceedings of the 10th IEEE Int. Conference on Intelligent Engineering Systems, INES, London, Großbritannien, S. 190-195, 2006.
- [209] SCHUSTER, H., WESTERMAIER, C., SCHRÖDER, D.: *Non-Identifier-Based Adaptive Speed Control for a Two-Mass Flexible Servo System: Consideration of Stability and Steady State Accuracy*. Proceedings of the 14th Mediterranean Conference on Control and Automation, MED, Ancona, Italien, 2006.

-
- [210] SCHUSTER, H., WESTERMAIER, C., SCHRÖDER, D.: *Non-Identifier-Based Adaptive Control for a Mechatronic System Achieving Stability and Steady State Accuracy*. Proceedings of the 2006 IEEE Int. Conference on Control Applications, CCA, München, Deutschland, S. 1819-1824, 2006.
- [211] SCHUSTER, H., WESTERMAIER, C., SCHRÖDER, D.: *Mechatronics and Intelligent Control*. Proceedings of the 2007 Korea-Germany Joint Symposium on Power Electronics, Pohang, Korea, S. 1-6, 2007.
- [212] WESTERMAIER, C.: *Adaptive Drehzahlregelung für ein Zwei-Massen-System*. Diplomarbeit Nr. 418, betreut von M. Feiler, Lehrstuhl für Elektrische Antriebssysteme der TU-München, 2003.
- [213] WESTERMAIER, C., SCHUSTER, H., SCHRÖDER, D.: *Industrietauglichkeit adaptiver Konzepte: Robuster MRAC-Ansatz*. Tagungsband des Internationalen Forums Mechatronic, Augsburg, Deutschland, S. 511-531, 2005.
- [214] WESTERMAIER, C., SCHUSTER, H., SCHRÖDER, D.: *Controlling the Loop-Gain for Robust Adaptive Control of a Mechatronic System*. Proceedings of the 5th IEEE Int. Conference on Technology and Automation, ICTA, Thessaloniki, Griechenland, S. 160-165, 2005.
- [215] WESTERMAIER, C.: *Modellbasierte Adaptive Regelung*. In: *Intelligente Verfahren - Identifikation und Regelung nichtlinearer Systeme*, hg. von Dierk Schröder, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, Deutschland, S. 487-527, 2010.