

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Fakultät für Maschinenwesen

Lehrstuhl für Regelungstechnik

Modellordnungsreduktion großer Systeme unter rotodynamischem Einfluss

KRISTIN KRENEK

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Maschinenwesen
der Technischen Universität München zur Erlangung
des akademischen Grades eines

Doktor-Ingenieurs

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr. rer. nat. U. Walter

Prüfer der Dissertation:

1. Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. B. Lohmann
2. Univ.-Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. habil. H. Ulbrich

Die Dissertation wurde am 16.04.2012 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Maschinenwesen am 21.06.2012 angenommen.

Vorwort

Diese Arbeit entstand zwischen 2008 und 2012 im Rahmen meiner Doktorandentätigkeit bei der Siemens AG (Dynamowerk Berlin) in enger Zusammenarbeit mit dem Lehrstuhl für Regelungstechnik der Fakultät Maschinenwesen an der TU München. Ich möchte an dieser Stelle allen danken, die mich in dieser Zeit unterstützt haben.

Mein Dank gilt insbesondere Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. B. Lohmann für die umfassende Betreuung dieser Arbeit trotz der räumlichen Distanz und für die Möglichkeit ein Sommersemester am Lehrstuhl für Regelungstechnik zu verbringen. Herrn Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. habil. H. Ulbrich danke ich für die freundliche Übernahme der Zweitkorrektur. Herrn Prof. Dr. rer. nat. U. Walter danke ich für seine Bereitschaft, den Vorsitz des Promotionsverfahrens zu übernehmen.

Herrn Dr. H. Kümmler danke ich dafür, dass er diese Arbeit bei Siemens ermöglicht hat. Frau Dr. H. Brandtstädter danke ich für die Idee dieses Thema im Rahmen einer Industriepromotion unterzubringen und die Betreuung.

Herrn Dr. R. Eid möchte ich sehr für die Einführung in das Thema Modellordnungsreduktion danken und für die vielen Anregungen und Diskussionen vor allem während meines Aufenthaltes in München.

Mein besonderer Dank gilt zudem Herrn Dr. M. Lang für sein stetiges Interesse, vor allem aber für die ausführlichen Diskussionen, konstruktiven Kritiken und Überraschungen bei der Fertigstellung dieser Arbeit. Herrn Dr. G. Siegl möchte ich für seine vielen Anregungen und Diskussionen auf dem Gebiet der Rotordynamik danken. Für die Unterstützung bei der Umsetzung der Algorithmen bedanke ich mich sehr bei Herrn M. Richter. Herrn F. Fehres und Herrn B. Ulbrich danke ich für die Unterstützung bei der Beschaffung von Daten- und Bildmaterial.

Allen Kollegen im Siemens Dynamowerk sowie den Kollegen am Lehrstuhl für Regelungstechnik danke ich für das angenehme Arbeitsklima und ihre Unterstützung im Berufsalltag.

Weiterhin danke ich ganz besonders meiner Familie und meinem Mann Stephan für ihre umfangreiche Unterstützung und ihre Geduld.

Berlin im April 2012

Kristin Krenek

*„Formeln sind die Transformation des
Unerklärlichen ins Unverständliche.“*

Prof. Dr. rer. nat. habil. P. Will

Inhaltsverzeichnis

Abkürzungsverzeichnis	IX
1 Einführung	1
2 Beschreibung rotordynamischer Systeme	7
2.1 Beschreibung eines Laval-Rotors ohne Dämpfung	9
2.1.1 Durch Unwucht erregte Schwingungen im Laval-Rotor . .	10
2.1.2 Der Einfluss der Gyroskopie auf einen Rotor	13
2.2 Praxisbeispiel zur Verallgemeinerung auf kontinuierliche Rotoren	17
2.2.1 Auswirkungen der Gyroskopie	18
2.2.2 Berechnung einer Unwuchterregung	19
3 Grundlagen der Modellordnungsreduktionsverfahren	21
3.1 Übergang in den Zustandsraum	21
3.2 Modellordnungsreduktion als Projektionsvorgang	22
3.3 Auf der Singulärwertzerlegung basierende Modellordnungsreduk- tionsverfahren	26
3.3.1 Mathematische Grundlagen der Singulärwertzerlegung .	26
3.3.2 Balanciertes Abschneiden – Truncated Balanced Real- isation (TBR)	28
3.3.3 Erweiterte Singulärwertzerlegung zur Reduktion von Ein- und Ausgangsräumen	32
3.4 Krylov-Unterraumverfahren	34
3.4.1 Reduktion um den Entwicklungspunkt Null	35
3.4.2 Reduktion um einen frei wählbaren Entwicklungspunkt .	38

4	Parametererhaltende Reduktion von Rotormodellen	41
4.1	Bekannte parametrische Modellordnungsreduktionsverfahren . . .	41
4.1.1	Parametrische Modellordnungsreduktion durch Überlagerung von lokal reduzierten Modellen	41
4.1.2	Guard-basierte Modellordnungsreduktion schaltender linearer Systeme	44
4.1.3	Multi-Parameter Momenten Anpassung	46
4.2	Ω P-MOR – Ein neues parametererhaltendes Reduktionsverfahren für rotordynamische Systeme	47
4.2.1	Eine neuer Ansatz zur parametrischen Reduktion rotordynamischer Systeme	48
4.2.2	Bestimmung der Projektionsmatrizen zur Drehzahl Null und zur maximalen Drehzahl	50
4.2.3	Bestimmung der Projektionsmatrizen für den gesamten Parameterraum	51
4.2.4	Nachweis der vollständigen Abdeckung des Parameter-raumes	55
4.2.5	Zusammenfassung des Ω P-MOR Algorithmus	61
5	Anwendung des ΩP-MOR Algorithmus	63
5.1	Ein akademisches Rotormodell	63
5.1.1	Systemeigenschaften und Parameterabhängigkeit des Rotormodells	64
5.1.2	Einfluss der SVD bei der Reduktion mit dem Ω P-MOR Algorithmus	65
5.1.3	Vergleich von Ω P-MOR mit einer nicht parametrischen Reduktion	69
5.2	Reduktion eines realen Rotors	71
5.2.1	Modellaufbau und Reduktion mit Ω P-MOR	71
5.2.2	Transiente Simulation eines Hochlaufs	74
6	Reduktion großer Systeme unter rotordynamischem Einfluss mittels Mo(SeS-MOR)	79
6.1	Modellaufbau einer gesamten Maschine	80
6.1.1	Finite-Elemente-Modell des Gehäuses	80
6.1.2	Kraftübertragung durch die Lager	81

6.1.3	Modell einer gesamten Maschine	86
6.2	Mo(SeS-MOR) – Eine neuer Ansatz zur Berechnung einer kompletten Maschine	87
6.3	Ein neuer Algorithmus zur automatischen Trennung parametrischer und nicht parametrischer Modellkomponenten	90
6.3.1	Grober Ablauf des Algorithmus	90
6.3.2	Aufbau der Allokationsmatrix	91
6.3.3	Lokalisieren des Rotors	93
6.3.4	Trennen der Massenmatrix und der Gyroskopiematrix	94
6.3.5	Trennen der Ein- und Ausgänge	94
6.3.6	Extrahieren der Rotor-, Gehäuse- und Koppelsteifigkeiten	96
6.3.7	Extrahieren der Rotor-, Gehäuse- und Koppeldämpfungen	101
6.3.8	Erzeugen neuer lokaler Ein- und Ausgänge zur Berechnung der Koppelsteifigkeit	101
6.3.9	Erzeugen neuer lokaler Ein- und Ausgänge zur Berechnung der Koppeldämpfungen	109
6.3.10	Erstellen der Teilsysteme	110
6.3.11	Anwendbarkeit des Algorithmus auf andere Probleme	113
6.4	Reduktion der nicht parameterabhängigen Struktur	115
6.5	Rückkoppeln der reduzierten Teilsysteme	117
7	Anwendung des Mo(SeS-MOR) Verfahrens auf ein großes System unter rotordynamischem Einfluss	121
7.1	Modellaufbau der Beispielmachine	122
7.2	Trennen der parameterabhängigen und parameterunabhängigen Teilstrukturen	124
7.3	Erstellen des reduzierten Gesamtsystems	125
8	Zusammenfassung und Ausblick	129
	Abbildungsverzeichnis	133
	Literaturverzeichnis	135

Abkürzungsverzeichnis

Symbole

\mathbf{A}	Systemmatrix zu \mathbf{x} im System erster Ordnung
\mathbf{A}_G	Systemmatrix der Gyroskopie im System erster Ordnung
\mathbf{a}_i	Spaltenvektor der Systemmatrix \mathbf{A}
\mathbf{A}_0	Systemmatrix ohne Gyroskopie im System erster Ordnung
\mathbf{B}	Eingangsmatrix im System erster Ordnung
\mathbf{b}_g	Eingangsvektor der Erdbeschleunigung
\mathbf{C}	Ausgangsmatrix im System erster Ordnung
\mathbf{D}	Dämpfungsmatrix
\mathbf{d}_i	Spaltenvektor der Systemmatrix \mathbf{A}_0
\mathbf{E}	Systemmatrix zu $\dot{\mathbf{x}}$ im System erster Ordnung
\mathbf{f}	Vektor der angreifenden äußeren Kräfte
\mathbf{G}	Gyroskopiematrix
g	Erdbeschleunigung
\mathbf{g}_i	Spaltenvektor der Systemmatrix \mathbf{A}_G
$g(s)$	Übertragungsfunktion eines SISO-Systems
\mathcal{H}	Menge der Gehäusegleichungsnummern
\mathcal{I}	Menge der Gleichungsnummern
\mathbf{J}	Eingangsmatrix im System zweiter Ordnung
k	Federsteifigkeit
\mathbf{K}	Steifigkeitsmatrix
\mathbf{L}	Ausgangsmatrix im System zweiter Ordnung
m	Masse
\mathbf{M}	Massenmatrix
m_i	Momente der Übertragungsfunktion
$M_{x/y/z}$	Drehmoment um die jeweilige Achse
\mathbf{Q}	Gram'sche Steuerbarkeitsmatrix
\mathbf{P}	Gram'sche Beobachtbarkeitsmatrix
\mathbf{Q}	Allokationsmatrix (Zuordnung von Zuständen, Knoten und Richtungen von FE-Modellen)
\mathbf{S}	Diagonalmatrix der Singulärwerte

\mathcal{S}	Menge der Rotorgleichungsnummern
s_i	Singulärwert
s_0	Entwicklungspunkt der Reduktion
S	Schwerpunkt
\mathbf{U}	Matrix der Linkssingulärvektoren
\mathbf{u}	Eingangsvektor
\mathbf{u}_i	Linkssingulärvektor
U	Unwucht
\mathbf{U}_k	Matrix der relevanten Linkssingulärvektoren
\mathbf{V}	Rechte Projektionsmatrix
$\mathbf{V}_{0/\mathcal{G}}$	Rechte Projektionsmatrix im Ω P-MOR Algorithmus
\mathbf{W}	Linke Projektionsmatrix
$\mathbf{W}_{0/\mathcal{G}}$	Linke Projektionsmatrix im Ω P-MOR Algorithmus
W	Wellendurchstoßpunkt
\mathbf{x}	Zustandsvektor im System erster Ordnung
\mathbf{y}	Ausgangsvektor
y_s, z_s	Koordinaten des Schwerpunktes
y_w, z_w	Koordinaten des Wellendurchstoßpunktes
\mathbf{z}	Zustandsvektor im System zweiter Ordnung
ϵ	Exzentrizität
$\varepsilon(\Omega)$	Fehler in Abhängigkeit von Ω
φ	Rotationswinkel
λ_i	Eigenwert
Ω	Winkelgeschwindigkeit bzw. Drehzahl
Ω_{\max}	Maximale Drehzahl
$\Theta_{(a/p)}$	(axiales bzw. polares) Massenträgheitsmoment
$\mathbf{r}_{y/u}^{K/D}$	Abbildungsmatrix im Koppelsystem des Mo(SeS-MOR) Alg.

Indizes

\square^D	Eine Größe, die sich auf die Dämpfungsmatrix bezieht.
\square_h	Eine Größe, die sich auf das Gehäuse (engl.: <u>h</u> ousing) bezieht.
\square^K	Eine Größe, die sich auf die Steifigkeitsmatrix bezieht.
\square_o	Eine Größe, die sich auf das Öllager (engl.: <u>o</u> il) bzw. allgemein auf die Kopplung zwischen Rotor und Gehäuse bezieht.
\square_r	Eine Größe, die durch eine <u>R</u> eduktion verändert wurde.
\square_s	Eine Größe, die sich auf den Rotor (engl.: <u>s</u> haft) bezieht.

Mathematische Notation

\mathbb{R}	Menge aller reellen Zahlen
\mathbb{R}^n	Menge aller reellen n -dimensionalen Vektoren
$\mathbb{R}^{m \times n}$	Menge aller reellen $m \times n$ -dimensionalen Matrizen
$\mathbb{C}^{m \times n}$	Menge aller komplexen $m \times n$ -dimensionalen Matrizen
\mathbf{I}	Einheitsmatrix (mit der jeweils passenden Dimension)
\mathbf{Z}	Nullmatrix (mit der jeweils passenden Dimension)
$\forall x$	Für alle x
$\exists x$	Es existiert ein x
$x \{ \dots \}$	x mit der Eigenschaft ...
$\text{bild}(\mathbf{X})$...	Bildraum der Matrix \mathbf{X}
$\text{diag}(\mathbf{x}_i)$...	Diagonalmatrix mit den Einträgen \mathbf{x}_i auf der Diagonalen
$\text{dim}(X)$	Dimension des Vektorraums X
$\text{kern}(\mathbf{X})$...	Kern bzw. Nullraum der Matrix \mathbf{X}
$K_q(\mathbf{X}, \mathbf{x})$..	Durch \mathbf{X} und \mathbf{x} aufgespannter Krylov-Unterraum
$\min\{ \dots \}$..	Minimum der Menge $\{ \dots \}$
\oplus	Verallgemeinerte Zusammenführung von Räumen oder Matrizen
$\text{rang}(\mathbf{X})$...	Rang der Matrix \mathbf{X}
$\text{span}\{\mathbf{x}_i\}$..	Der von \mathbf{x}_i aufgespannte Raum
\ddot{x}	Kurzschreibweise für $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$
\dot{x}	Kurzschreibweise für $\frac{\partial x}{\partial t}$
$\mathbf{X}(:, \mathcal{X})$...	Alle Spalte der Matrix \mathbf{X} , die durch die Menge \mathcal{X} definiert sind.
$\mathbf{X}(:, i)$	Die i -te Spalte der Matrix \mathbf{X}
\mathbf{X}^{-1}	Inverse der Matrix \mathbf{X}
\mathbf{X}^T	Transponierte der Matrix \mathbf{X}
\mathbf{X}^{-T}	Transponierte der Inversen der Matrix \mathbf{X}

Abkürzungen

FE	<u>F</u> inite <u>E</u> lemente
HSV	Hankel'scher Singulärwert (engl. <u>H</u> ankel <u>S</u> ingular <u>V</u> alue)
MIMO	(System) mit mehreren Eingängen und mehreren Ausgängen (engl.: <u>M</u> ultiple <u>I</u> nput <u>M</u> ultiple <u>O</u> utput)
Mo(SeS-MOR)	Wiederzusammenführung von getrennt reduzierten Systemen (engl.: <u>M</u> erge of <u>S</u> eperated <u>S</u> ystems <u>M</u> OR)
MOR	<u>M</u> odell <u>o</u> rdnungs <u>r</u> eduktion
Ω P-MOR ..	Drehzahlerhaltende MOR (engl.: Ω <u>P</u> reserving <u>M</u> OR)
SISO	(System) mit einem Eingang und einem Ausgang (engl.: <u>S</u> ingle <u>I</u> nput <u>S</u> ingle <u>O</u> utput)
SVD	Singulärwertzerlegung (engl.: <u>S</u> ingular <u>V</u> alue <u>D</u> ecomposition)
TBR	Balanciertes Abschneiden (engl.: <u>T</u> runcated <u>B</u> alanced <u>R</u> ealisation)

1 Einführung

Bei der Produktion von Maschinen wurden schon immer zunächst Konstruktionszeichnungen angefertigt und die Belastung kritischer Bauteile vorab berechnet. Dies geschah in früheren Zeiten häufig analytisch mit vereinfachten Modellen. Mit zunehmender Komplexität der Gleichungen mussten diese Lösungen jedoch numerisch berechnet werden. Die Lösung dieser Probleme vereinfachte sich mit dem Aufkommen der Computer. Mit neuen Möglichkeiten der Lösung solcher Probleme wurden jedoch auch die Modellierungen der Maschinen immer weiter verbessert. Somit vergrößerten sich die Modelle immer weiter, so dass wiederum leistungsfähigere Computer nötig wurden. Auch wenn die Computer heutzutage schon über sehr viel Rechenleistung und Arbeitsspeicher verfügen, so gibt es immer wieder neue Modelle, die selbst aktuelle Computer an ihre Grenzen treiben. Um die Berechnungszeiten zu verkürzen, können entweder die Modelle vergrößert werden, was jedoch bekanntermaßen zu schlechteren Ergebnissen führt, oder es können Methoden der Modellordnungsreduktion angewandt werden. Bei der Approximation mit reduzierten Systemen treten ebenfalls Abweichungen zu den hochdimensionalen Originalmodellen auf, jedoch sind diese, im Vergleich zu einer starken Vergrößerung der Modelle, deutlich geringer.

Im Siemens Dynamowerk Berlin werden große, hoch spezialisierte Elektromotoren für unterschiedlichste Kundenanforderungen entwickelt und produziert. Die Anwendungsgebiete reichen hierbei von Schiffsantrieben über Walz- und Kompressorantrieben bis hin zu Direktantrieben für Erzmühlen mit einem Durchmesser von 12 m. Das Leistungsspektrum dieser Maschinen erstreckt sich dabei von 5 MW bis 100 MW. Bei einem solch breiten Spektrum sind für jede Maschine verschiedenste Vorausberechnungen notwendig. Zudem steigt der Entwicklungsdruck in Hinblick auf mehr Leistung, weniger Gewicht und geringe Geräuschbelastung. Jede Maschine durchläuft hierbei in der Entwicklung

eine rotordynamische Analyse. Um die Maschinen jedoch leichter oder kompakter bauen zu können und dabei die Schwingungsanforderungen zu erfüllen, müssen auch andere Komponenten, wie das Gehäuse oder teilweise auch das Fundament, mit modelliert werden. Die daraus resultierenden Modelle werden schnell sehr groß und der Berechnungsaufwand steigt enorm. Somit kann auch im Bereich der Entwicklung von großen Elektroantrieben die Modellordnungsreduktion ein sinnvolles Werkzeug sein.

Die Modellordnungsreduktion ist ein relativ junges und weites Forschungsgebiet. Die mathematischen Aspekte der Modellordnungsreduktion sind bereits 1994 in [1] gut zusammengefasst worden. Innerhalb der Modellordnungsreduktion gibt es verschiedene Reduktionsansätze. Gerade im Bereich der Finite-Elemente-Methode ist die modale Reduktion weit verbreitet [2]. Aber auch die frequenzgewichtete balancierte Modellreduktion [3, 4] findet hier ihre Anwendung. In der Systemtheorie und Regelungstechnik sind jedoch die Methoden der singularwertgestützten Modellordnungsreduktion, wie das balancierte Abschneiden [5, 6] oder die Krylov-Unterraummethoden [5, 7, 8], weiter verbreitet. All diese Methoden wurden jedoch nicht für rotordynamische Systeme entwickelt und sind folglich nicht speziell auf diese abgestimmt [9].

Rotordynamische Systeme können als eine eigene Systemklasse aufgefasst werden. Auf ihre spezifischen Eigenschaften wird in *Kapitel 2* näher eingegangen. Es sei jedoch bereits erwähnt, dass die rotordynamischen Effekte zu parameterabhängigen Systemen führen. Zudem sind die Systemmatrizen, im Gegensatz zu vielen anderen Finite-Elemente-Strukturen, nicht symmetrisch aufgebaut. Je nach Art der Lagerung der Maschine kommt es zudem häufig zu Nichtlinearitäten im System, welche mitberücksichtigt werden müssen. Eine weitere Herausforderung ist der Anspruch an eine hohe Approximationsgüte über einen weiten Frequenzbereich, da das gesamte durch den Rotor angeregte Spektrum abgedeckt werden muss. Eine weitere Anforderung resultiert aus den rotordynamischen Analysen, für deren Auswertung die Ergebnisse des reduzierten Systems physikalisch interpretierbar bleiben müssen.

Im Rahmen der Entwicklungsarbeit im Siemens Dynamowerk werden täglich rotordynamische Analysen durchgeführt. Hierzu gehören zum Einen die Untersuchung des Systems auf kritische Eigenfrequenzen, wobei diese mit der

Drehzahl des Rotors variieren. Zum Anderen müssen Unwuchtanalysen durchgeführt werden, in denen das Verhalten des Rotors unter einer nicht auszuschließenden Restunwucht bestimmt wird. Zum Teil werden auch transiente Simulationen eines Anfahrens des Rotors durchgeführt, um das Verhalten des Systems besser beurteilen zu können.

Obwohl die Berechnungen und Simulationen für die Vorhersage des Maschinenverhaltens äußerst nützlich sind, wird eine Analyse des gesamten Systems von Rotor, Gehäuse und teilweise auch des Fundaments heutzutage nur selten durchgeführt. Dies liegt darin begründet, dass die Systeme im unreduzierten Zustand viel zu groß sind, als dass solche Simulationen für jede Maschine effizient durchgeführt werden könnten. Hier sind Systemgrößen von 100 000 Zuständen keine Seltenheit.

Es stellt sich somit die Frage, welche Reduktionsmethoden für rotordynamische Systeme geeignet sind. Bisher gibt es keine pauschale Antwort auf diese Frage, jedoch existieren Betrachtungen zu verschiedenen Teilaspekten rotordynamischer Systeme oder sie können für solche herangezogen werden. Für die Reduktion der Strukturen, wie z. B. Gehäuse oder Fundament, wurden bisher die Verfahren nach Guyan [10, 11], die modale Reduktion [12–17] oder die Component Mode Synthesis [18–23] verwendet. Jedoch wurde bereits nachgewiesen, dass Reduktionsverfahren die Momente im Frequenzbereich anpassen, wie z. B. das Krylov-Unterraumverfahren, für die Reduktion häufig besser geeignet sind [24].

Einige Untersuchungen beschäftigen sich mit speziell gedämpften Systemen [13, 22, 25–27] oder mit Systemen unter gyroskopischem Einfluss [17, 28–30]. Jedoch wird fast nie auf die kombinierte Form von gedämpften Systemen unter gyroskopischem Einfluss eingegangen.

Die Modellordnungsreduktionsverfahren auf Grundlage der Singulärwertzerlegung oder der Krylov-Unterräume finden bisher meist nur für die Auslegung von Reglern in der Rotordynamik [31, 32] Anwendung. Viele der Anwendungen auf große Finite-Elemente-Strukturen beschränken sich nur auf symmetrische Systemmatrizen [33], wohingegen rotordynamische Systeme meist unsymmetrische Systemmatrizen aufweisen.

Die parametrischen Modellordnungsreduktionsverfahren sind ein vergleichsweise junges Forschungsgebiet der Modellordnungsreduktion und werden häufig für bestimmte Systemklassen entwickelt [34–36]. Auf einige Ansätze der

parametrischen Modellordnungsreduktion wird im *Kapitel 3* detaillierter eingegangen. Die Systemklasse der Rotoren wurde hierbei meist nicht betrachtet, obwohl sich einige Systemeigenschaften sehr gut für die parametererhaltende Reduktion ausnutzen lassen (siehe *Kapitel 4*).

Zusammenfassend kann also über die bestehende Literatur gesagt werden, dass sie häufig nur Teilaspekte der rotordynamischen Systemklasse abdeckt, dabei werden teilweise Annahmen getroffen, die andere rotordynamische Effekte ausschließen [9]. Hinzukommt, dass zu Testzwecken und in Beispielen oft nur Systeme mit jeweils nur einem Ein- und Ausgang behandelt werden. In der Realität und bei der Analyse von Rotorsystemen handelt es sich jedoch immer um Systeme mit mehreren Ein- und Ausgängen. Da die Methoden bisher nicht direkt für rotordynamische Systeme entwickelt wurden, werden meist auch keine rotordynamischen Analysen mit reduzierten Systemen betrachtet, genauso wenig wie transiente Rechnungen realer Beispiele.

Aus diesen Betrachtungen ergeben mehrere offene Fragen zur Modellordnungsreduktion von Systemen unter rotordynamischem Einfluss [9]. Zwei dieser bereits in der Übersichtsarbeit von Wagner et al. [9] gestellt Fragen werden in dieser Arbeit beantwortet:

1. *Können existierende Modellordnungsreduktionsverfahren effizient auf rotordynamische Systeme angewendet werden?*

Im Rahmen dieser Arbeit ist ein *parametererhaltendes* Modellordnungsreduktionsverfahren für rotordynamische Systeme entwickelt worden, welches die Systemeigenschaften von Rotorsystemen ausnutzt. In *Kapitel 4* wird gezeigt, wie ein solches System effizient und unter Beibehaltung der Drehzahl als wesentlichen Parameter reduziert werden kann. Zudem wird ein mathematischer Beweis geliefert, welcher die Gültigkeit des reduzierten Systems im gesamten Drehzahlbereich des Rotors nachweist. Somit können rotordynamische Systeme auf effiziente Weise reduziert werden, so dass ihre Analyse erstmals mit nur einem reduzierten System durchgeführt werden kann.

Um die Funktionsweise des Algorithmus vorzustellen, wird in *Kapitel 5* zunächst ein akademisches Beispiel eines Rotors mit extrem großem Drehzahlbereich reduziert. Ihm folgt ein Beispiel eines realen Rotors, wie er im Siemens Dynamowerk Berlin gebaut wurde. Dieser Rotor wird zuerst reduziert und die

Ergebnisse aus einer transienten Simulation eines Hochlaufs werden mit denen des Originalsystems verglichen.

2. *Wie können existierende Modellordnungsreduktionsverfahren effektiv genutzt werden, um große Systeme von kompletten Maschinen unter rotordynamischem Einfluss zu reduzieren?*

Zusätzlich zur Reduktion von Rotoren wird in *Kapitel 6* ein neuer Ansatz zur *Trennung* von parameterabhängigen und parameterunabhängigen Teilen der Maschine präsentiert. Dieser Algorithmus ist im Rahmen dieser Arbeit entwickelt worden und so konzipiert, dass er die zu trennenden Teilsysteme selbstständig erkennt. Nach der Trennung der Teilsysteme können diese unabhängig voneinander reduziert werden.

Es wird zudem ein Verfahren vorgestellt, welches es ermöglicht, beide Teilsysteme anschließend wieder zusammenzuführen. Die im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Art der *Trennung und Wiederausführung* der Systeme ist für unreduzierte Teilsysteme nachweislich verlustfrei und bietet, neben dem Vorteil der Parameterabspaltung, zudem die Möglichkeit, auf die oft nichtlinearen Größen der Lager direkt Einfluss zu nehmen.

Diese Methode wird anhand eines Beispiels in *Kapitel 7* erläutert und der Einfluss eines Gehäuses auf den Rotor verdeutlicht. Außerdem wird von der Möglichkeit der Variation der Lagerparameter Gebrauch gemacht.

2 Beschreibung rotordynamischer Systeme

In diesem Kapitel wird der prinzipielle Aufbau einer Maschine mit rotierender Welle erläutert. Dabei wird insbesondere auf die Modellierung und mathematische Beschreibung des Rotors detailliert eingegangen, da die Dynamik der Maschine maßgeblich durch den sich bewegenden Teil, den Rotor, zum Schwingen angeregt wird. Hierbei wird auf den Aspekt der Unwucht in Rotoren eingegangen, da selbst bei präziser Fertigung eine Restunwucht nicht auszuschließen ist. Als zweiter Aspekt soll der gyroskopische Effekt betrachtet werden, der bei solch schweren Rotoren mit großen polaren Massenträgheitsmomenten, wie denen, die im Siemens Dynamowerk produziert werden, nicht zu vernachlässigen ist.

In Abbildung 2.1 ist eine Maschine gezeigt, an der die wesentlichen Strukturelemente eines Elektromotors erkennbar sind:

- der Rotor oder auch Läufer (bestehend aus der Welle, den Blechpaketen und den Lagerstellen),
- der Ständer um den Aktivteil des Rotors dient zur Erzeugung eines Magnetfeldes, welches den Rotor antreibt,
- die Lager (Gleit-, Wälz-, Magnetlager usw.),
- die Lagerschilde oder Lagerständer,
- das Gehäuse.

In diesem Kapitel wird zunächst auf das Verhalten und die Modellierung des Rotors eingegangen. In Kapitel 6 wird der Rotor im Zusammenhang mit den Lagern und den restlichen ihn umgebenden Strukturen betrachtet. Zur Erläuterung der rotordynamischen Effekte wird ein so genannter Laval-Rotor

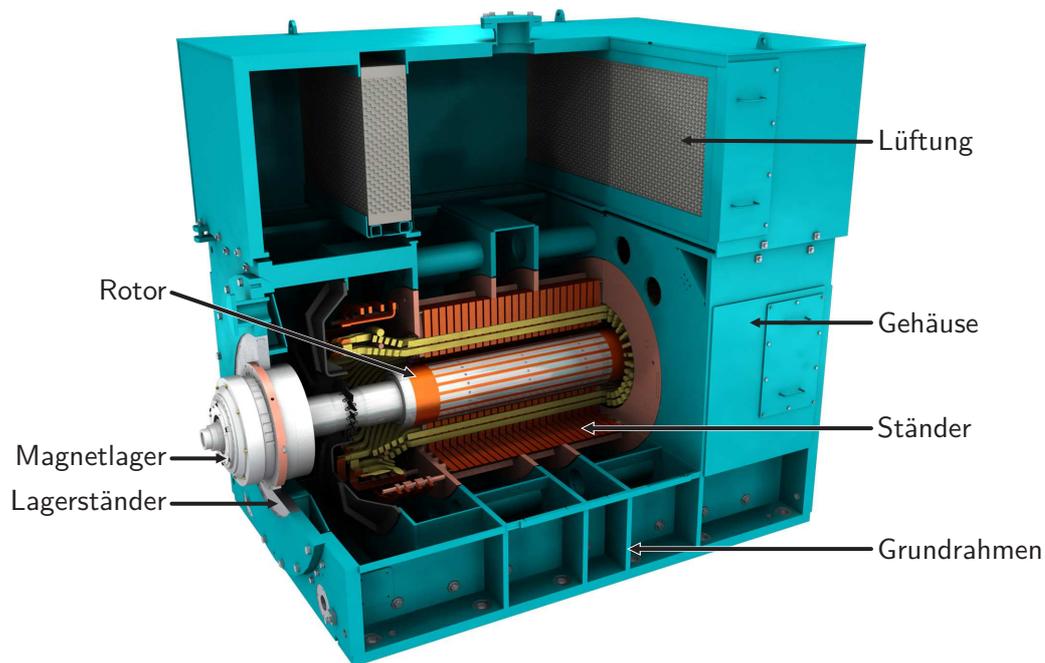


Abb. 2.1: CAD-Darstellung eines schnell laufenden, großen Kompressorantriebes mit Magnetlagern (Größe ca. 2 m × 3 m × 3 m).

betrachtet, welcher aus einer einzigen Scheibe und einer masselosen, biegeelastischen, starr gelagerten Welle besteht (siehe Abbildung 2.3 auf S. 10).

Dies scheint eine starke Vereinfachung zu sein, jedoch lassen sich bereits an diesem minimalen Beispiel alle relevanten Effekte erläutern und übersichtlich in Gleichungen darstellen. Ein realer Rotor, wie in Abbildung 2.2, wird dann durch viele aneinandergereihte Scheiben modelliert und kann als Zusammenführung vieler Laval-Rotoren verstanden werden. Die Grundlagen, welche in diesem Kapitel erläutert werden, können ausführlich nachgelesen werden in [37–39] oder [40].

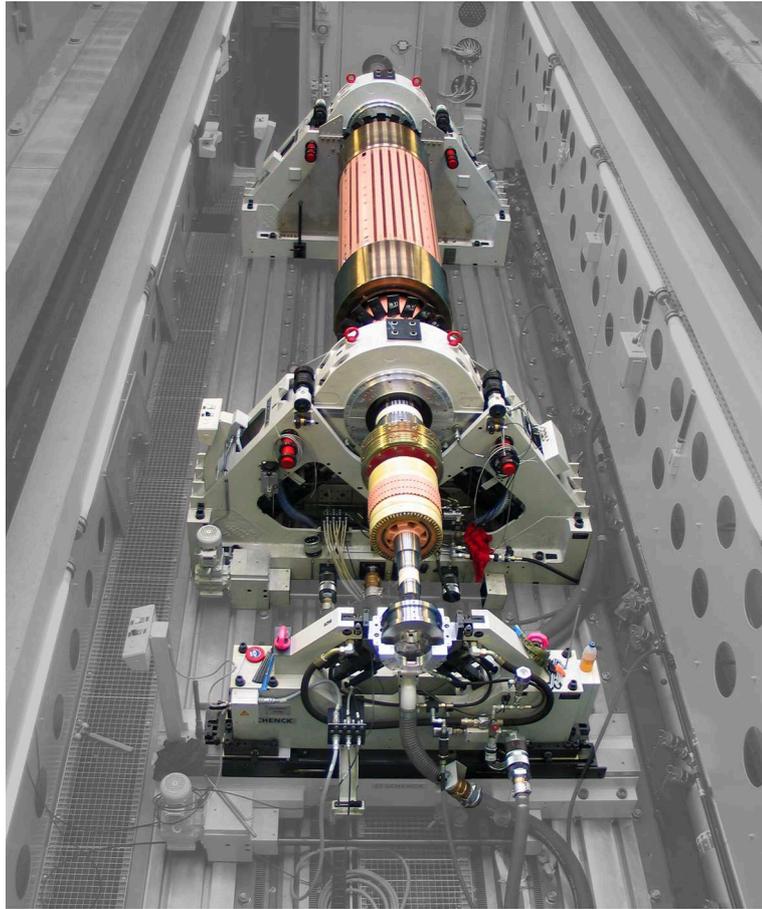


Abb. 2.2: Foto eines Rotors am Ende des Herstellungsprozesses im Bunker der Wuchtanlage im Siemens Dynamowerk Berlin.

2.1 Beschreibung eines Laval-Rotors ohne Dämpfung

Betrachtet wird, wie in Abbildung 2.3 zu sehen, eine masselose Welle mit einer gegebenen Wellensteifigkeit k und einer darauf mittig befestigten Scheibe mit der Masse m . Ein solcher Rotor wird als Laval-Rotor bezeichnet. Dämpfungskräfte werden in diesem System zunächst vernachlässigt und der Rotor befindet sich in als starr angenommenen Lagern. In diesem Abschnitt wird davon ausgegangen, dass sich bei einer Durchbiegung der Welle, die Scheibe aufgrund ihres mittigen Sitzes nicht schräg stellt. Dadurch kann zunächst auch der Einfluss der Gyroskopie vernachlässigt werden, welcher im Abschnitt 2.1.2 betrachtet werden soll.

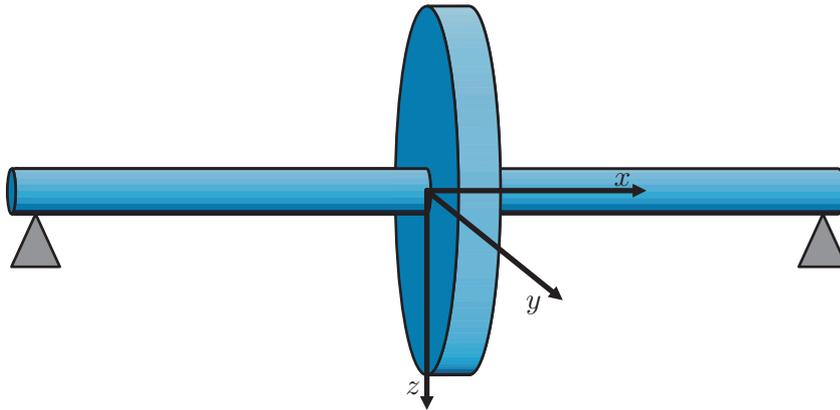


Abb. 2.3: Darstellung eines Laval-Rotors bestehend aus einer einzigen Scheibe und einer masselosen, biegeelastischen, starr gelagerten Welle, mit dem zugehörigen Koordinatensystem.

Ein solcher zu Biegeschwingungen fähiger Laval-Rotor kann freie und erzwungene Schwingungen durchführen, wobei eine der am häufigsten auftretenden erzwungenen Schwingungen die durch Unwuchten hervorgerufenen Schwingungen sind.

2.1.1 Durch Unwucht erregte Schwingungen im Laval-Rotor

Gegeben sei ein Laval-Rotor, dessen Wellendurchstoßpunkt W nicht mit dem Schwerpunkt S der Scheibe zusammenfällt und ein raumfestes Koordinatensystem, dessen x -Achse in Wellenrichtung zeigt (siehe Abbildung 2.4). Der Wellendurchstoßpunkt hat einen festen Abstand ε vom Schwerpunkt, dieser Abstand wird als Exzentrizität bezeichnet. Die Koordinaten des Schwerpunktes in der y - z -Ebene seien y_s und z_s . Der Wellendurchstoßpunkt, dessen Lage im ruhenden System dem Koordinatenursprung entspricht, hat die Bewegungskordinaten y_w und z_w . Als Unwucht U wird das Produkt aus Scheibenmasse und Exzentrizität ε bezeichnet

$$U = m\varepsilon. \quad (2.1)$$

Die in Abbildung 2.4 dargestellte Scheibe des Laval-Rotors bewegt sich in der Ebene und hat drei Freiheitsgrade, die Verschiebungen in y - und z -Richtung, welche durch die Lage des Wellendurchstoßpunktes oder des Schwerpunktes beschrieben werden können, sowie die Drehung φ um die z -Achse.

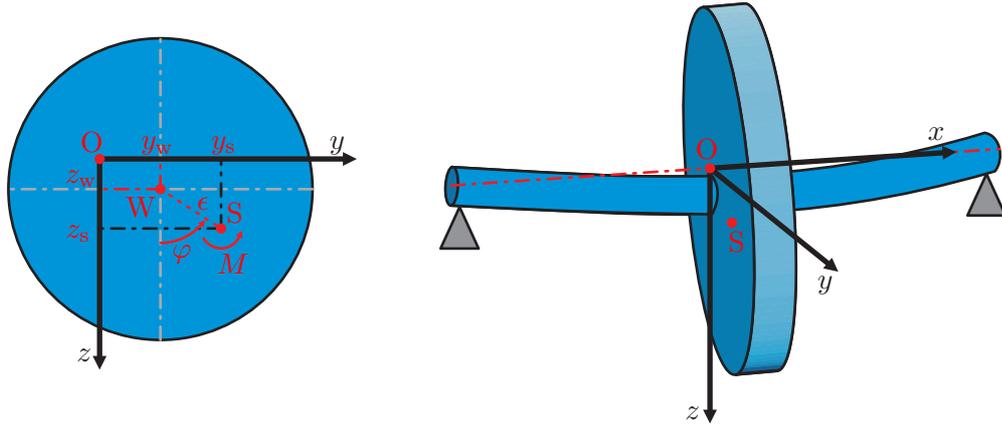


Abb. 2.4: Unwucherregte Schwingung im Laval-Rotor: In der linken Zeichnung ist der um y_w und z_w ausgelenkte Wellendurchstoßpunkt zu erkennen sowie der um die Exzentrizität ϵ dazu versetzte Schwerpunkt mit den Koordinaten y_s und z_s . Angetragen ist zudem die Drehung der Scheibe um einen Winkel φ und ein am Schwerpunkt angreifendes Moment M .

Ausgehend davon, dass sich die Welle dreht und der Wellendurchstoßpunkt aus der Ruhelage herausbewegt wurde, muss für das System folgendes Gleichgewicht der angreifenden Kräfte bestehen

$$\begin{aligned} m\ddot{y}_s &= -ky_w \\ m\ddot{z}_s &= -kz_w. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Zudem können die Koordinaten des Schwerpunktes in die Koordinaten des Wellendurchstoßpunktes überführt werden, da in den meisten Fällen davon auszugehen ist, dass die Lage des Schwerpunktes nicht bekannt ist. Es ergibt sich der einfache Zusammenhang

$$\begin{aligned} y_s &= y_w + \epsilon \cos \varphi \\ z_s &= z_w + \epsilon \sin \varphi. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Nach zweimaligem Ableiten und Einsetzen in Gleichung 2.2 ergeben sich die Bewegungsdifferentialgleichungen

$$\begin{aligned} m\ddot{y}_w + ky_w &= m \left(\epsilon \dot{\varphi}^2 \cos \varphi + \epsilon \ddot{\varphi} \sin \varphi \right) \\ m\ddot{z}_w + kz_w &= m \left(\epsilon \dot{\varphi}^2 \sin \varphi + \epsilon \ddot{\varphi} \cos \varphi \right). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Unter Anwendung des Drehimpulssatzes [41] auf die im Schwerpunkt senkrecht

stehende Achse ergibt sich für das Momentengleichgewicht

$$\Theta\ddot{\varphi} = M + k\epsilon(y_w \cos \varphi - z_w \sin \varphi) , \quad (2.5)$$

wobei Θ das Massenträgheitsmoment der Scheibe sei und M das von außen auf die Scheibe wirkende Drehmoment. Das Drehmoment M entspricht zumeist dem Antriebsmoment. Durch die Gleichungen 2.4 und 2.5 werden die Bewegungen der Scheibe und damit die Bewegungen des Laval-Rotors vollständig beschrieben.

Für viele Berechnungen genügt es den stationären Fall $\dot{\varphi} = \text{konst.}$ zu betrachten, womit sich

$$\ddot{\varphi} = 0 \quad (2.6)$$

$$\varphi = \Omega t + \beta \quad (2.7)$$

für eine konstante Drehzahl Ω und einen Startwinkel β ergibt. Damit ist das Momentengleichgewicht gelöst und die Gleichungen 2.4 vereinfachen sich zu

$$\begin{aligned} m\ddot{y}_w + ky_w &= m\epsilon\Omega^2 \cos(\Omega t + \beta) \\ m\ddot{z}_w + kz_w &= m\epsilon\Omega^2 \sin(\Omega t + \beta) . \end{aligned} \quad (2.8)$$

Damit ist das System des Laval-Rotors bei konstanter Drehzahl unter Unwuchteinfluss vollständig beschrieben.

Ein Rotor kann auch anderen äußeren Einflüssen wie einem Schlag oder anderen Krafteinwirkungen unterlegen sein. Wird die Kraft, welche durch die Unwucht auf den Rotor aufgebracht wurde, durch eine allgemeine äußere Kraft F_y und F_z ersetzt, kann das System in Matrixschreibweise überführt werden zu

$$\underbrace{\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}}_{\mathbf{M}} \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{y}_w \\ \dot{z}_w \end{pmatrix}}_{\dot{\mathbf{z}}} + \underbrace{\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{pmatrix} y_w \\ z_w \end{pmatrix}}_{\mathbf{z}} = \underbrace{\begin{pmatrix} F_y \\ F_z \end{pmatrix}}_{\mathbf{f}} , \quad (2.9)$$

wobei \mathbf{M} die Massenmatrix, \mathbf{K} die Steifigkeitsmatrix, \mathbf{f} der Vektor der angreifenden äußeren Kräfte und \mathbf{z} der Zustandsvektor des Systems ist. Aus dieser

Form heraus kann das System auf einfache Weise um verschiedene äußere Kräfte oder Dämpfungseinflüsse ergänzt werden. Zudem ist der Übergang zu einem Rotor, bestehend aus mehreren Scheiben, einfach ersichtlich.

2.1.2 Der Einfluss der Gyroskopie auf einen Rotor

Im vorherigen Abschnitt wurde davon ausgegangen, dass sich die Scheibe nicht schräg stellt. Diese Annahme ist berechtigt, wenn es sich um sehr kleine Scheiben handelt, welche nur ein sehr kleines Massenträgheitsmoment aufweisen. Bei den in dieser Arbeit betrachteten Rotoren handelt es sich jedoch um Rotoren mit einer Masse von bis zu 15 t und Scheibendurchmessern von 1 m und mehr. Bei diesen Rotoren sind die Massenträgheitsmomente nicht mehr zu vernachlässigen. Zudem ist nicht jeder Rotorabschnitt, welcher als Scheibe betrachtet wird, mittig am Rotor, so dass es bei einer Durchbiegung der Welle zwangsweise zu einer Schrägstellung der Scheiben kommt.

Um dieses Verhalten an einem einfachen Rotor zu studieren wird der zuvor betrachtete Laval-Rotor als Grundlage genommen und leicht variiert. Die Scheibe des Rotors wird außermittig plaziert. Zudem ist die Masse der Scheibe jetzt nicht mehr auf der Welle konzentriert, so dass sich axiale und polare Massenträgheitsmomente für die Scheibe ergeben. Abbildung 2.5 stellt schematisch solch einen Rotor mit den an der Scheibe angreifenden Momenten dar.

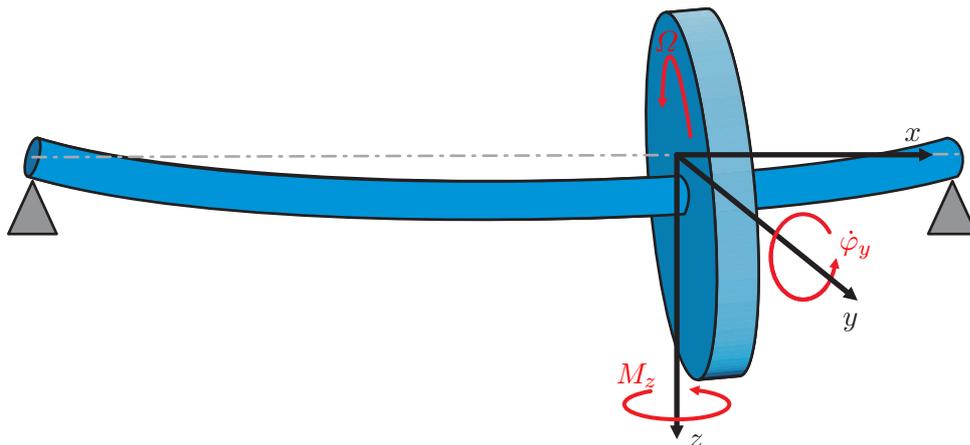


Abb. 2.5: Veranschaulichung des Einflusses der Gyroskopie auf einen Rotor, der mit $-\Omega$ um die x -Achse rotiert, durch die Biegung der Welle wird die Scheibe mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}_y$ verdreht, woraus sich das resultierende Moment M_z ergibt.

Die Kopplung der Querauslenkung und der Scheibenschragstellung lässt sich bereits bei ruhenden Rotoren beobachten. Die Schragstellung der Scheibe ergibt sich hierbei durch die Durchbiegung der Welle aufgrund der Masse der Scheibe und dem außermittigen Sitz der selben. Die Scheibe „wehrt“ sich aufgrund ihrer axialen Massenträgheit Θ_a gegen eine Schragstellung. Wird die Scheibe beispielsweise rotatorisch um die y -Achse mit $\ddot{\varphi}_y$ beschleunigt, so ergibt sich als Moment

$$M_y (\Omega = 0) = \Theta_a \ddot{\varphi}_y. \quad (2.10)$$

Bei einer rotierenden Welle treten zusätzliche Effekte auf, diese können sehr gut an dem Versuch in Abbildung 2.6 beobachtet werden, welcher schon aus dem Physikunterricht bekannt sein dürfte. Zudem lässt sich der Effekt aus dem Impulserhaltungssatz herleiten.

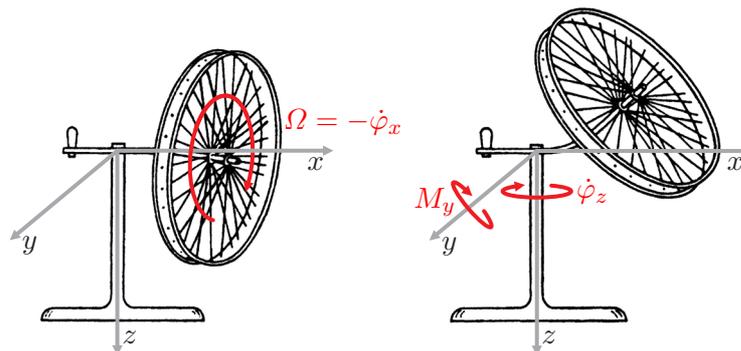


Abb. 2.6: Versuchsaufbau zur Demonstration der Gyroskopie. Hierbei stellt sich das mit Ω drehende Rad durch die Drehung am Handgriff mit $\dot{\varphi}_z$ nach oben auf, ausgelöst durch das Moment M_y (nach [38, S. 161]).

In diesem Versuch ersetzt das Rad die Scheibe des Rotors und die Welle, auf der das Rad läuft, entspricht der Welle des Rotors, mit dem einzigen Unterschied, dass es sich hier um eine einseitige Lagerung handelt. Wird nun das Rad in Rotation versetzt ($\dot{\varphi}_x = -\Omega$) und die Welle des Rades auf dem Fuß mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}_z$ gedreht, beginnt sich das Rad aufgrund seines polaren Masenträgheitsmomentes Θ_p aufzustellen. Es resultiert also ein Moment um die y -Achse aus der Drehung des Rades um die z -Achse. Wird zusätzlich das aus Gleichung 2.10 bekannte Moment berücksichtigt, ergibt sich als Gesamtmoment um die y -Achse

$$M_y (\Omega > 0) = \Theta_p \Omega \dot{\varphi}_z + \Theta_a \ddot{\varphi}_y. \quad (2.11)$$

Für den Rotor mit einer außermittigen Scheibe sowie polaren und axialen Massenträgheitsmomenten lässt sich analog das Moment um die z -Achse berechnen.

Um den Effekt der Gyroskopie nun auch in den Gleichungen zu erfassen, müssen zunächst die Drehfreiheitsgrade um die y - und z -Achse dem System aus Gleichung 2.9 hinzugefügt werden. Dies entspricht einer Erweiterung des Zustandsvektors

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} y \\ z \\ \varphi_y \\ \varphi_z \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Die Massenmatrix wird für diesen Fall um die axialen Trägheitsmomente der Scheibe erweitert und ergibt sich damit zu

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Theta_a \end{pmatrix}, \quad (2.13)$$

mit dieser Erweiterung sind bereits die Momente, welche in Gleichung 2.10 beschrieben wurden, in das System eingearbeitet.

Die Erweiterung der Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} sei hier nur kurz umrissen, vertiefend hierzu bietet sich z. B. [38] an. Für die Bewegungsgleichungen wird der Zusammenhang zwischen den Verschiebungen und Drehungen am Scheibensitz und den sich daraus ergebenden Kräften und Momenten benötigt. Es ergibt sich der Zusammenhang

$$\underbrace{\begin{pmatrix} F_y \\ F_z \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}}_{\mathbf{f}_e} = \underbrace{\begin{pmatrix} k_{11} & 0 & 0 & -k_{12} \\ 0 & k_{11} & k_{12} & 0 \\ 0 & k_{21} & k_{22} & 0 \\ -k_{21} & 0 & 0 & k_{22} \end{pmatrix}}_{\mathbf{K}} \mathbf{z}, \quad (2.14)$$

wobei \mathbf{f}_e den Vektor der Kräfte und Momente beschreibt, welche durch die vier Einheitsverformungen (siehe [38]) hervorgerufen werden. Durch die Ermittlung dieser Einheitsverformungen können die Einträge in der Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} ermittelt werden. Der Zustandsvektor \mathbf{z} in dieser Gleichung entspricht dem Zustandsvektor aus Gleichung 2.12.

Zur vollständigen Beschreibung des Systems fehlt schließlich noch der drehzahlabhängige Term der Momente, welche in Gleichung 2.11 beschrieben wurden. Hierfür wird eigens eine gyroskopische Matrix \mathbf{G} in das System eingebracht, so dass sich die Gesamtgleichung aus den Gleichungen 2.12 bis 2.14 ergibt zu

$$\underbrace{\begin{pmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Theta_a \end{pmatrix}}_{\mathbf{M}} \underbrace{\begin{pmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{z} \\ \ddot{\varphi}_y \\ \ddot{\varphi}_z \end{pmatrix}}_{\ddot{\mathbf{z}}} + \Omega \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\Theta_p \\ 0 & 0 & \Theta_p & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{G}} \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\varphi}_y \\ \dot{\varphi}_z \end{pmatrix}}_{\dot{\mathbf{z}}} + \underbrace{\begin{pmatrix} k_{11} & 0 & 0 & -k_{12} \\ 0 & k_{11} & k_{12} & 0 \\ 0 & k_{21} & k_{22} & 0 \\ -k_{21} & 0 & 0 & k_{22} \end{pmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{pmatrix} y \\ z \\ \varphi_y \\ \varphi_z \end{pmatrix}}_{\mathbf{z}} = \underbrace{\begin{pmatrix} F_y \\ F_z \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}}_{\mathbf{f}}. \quad (2.15)$$

Damit sind die allgemeinen Bewegungsdifferentialgleichungen für diesen Rotor ohne Dämpfung beschrieben. Durch die Erweiterung des Zustandsvektors und durch den analogen Aufbau der Systemmatrizen kann das Gleichungssystem auf einen realen Rotor erweitert werden. Das Modell wird aus vielen aneinandergereihten Scheiben zusammengesetzt. Daraus ergibt sich die Bewegungsdifferentialgleichung für einen ungedämpften Rotor

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{z}} + \Omega\mathbf{G}\dot{\mathbf{z}} + \mathbf{K}\mathbf{z} = \mathbf{f}, \quad (2.16)$$

mit der Massenmatrix \mathbf{M} , der Gyroskopiematrix \mathbf{G} , der Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} , dem Zustandsvektor \mathbf{z} und den äußeren Kräften \mathbf{f} . Für die allgemeine Form lässt sich diese Gleichung auf einen Rotor mit Dämpfung \mathbf{D} erweitern zu

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{z}} + (\mathbf{D} + \Omega\mathbf{G})\dot{\mathbf{z}} + \mathbf{K}\mathbf{z} = \mathbf{f}. \quad (2.17)$$

2.2 Praxisbeispiel zur Verallgemeinerung auf kontinuierliche Rotoren

In diesem Abschnitt wird ein Rotor, so wie er im Siemens Dynamowerk modelliert und gebaut wurde, vorgestellt und die Auswirkung der Gyroskopie sowie eine Unwuchterregung simuliert.

Rotoranalysen werden im Siemens Dynamowerk mit der intern entwickelten Rotordynamiksoftware „VARFEM“ durchgeführt. Dieses Programm umfasst die FE-Modellierung der Rotoren, sowie die Auswertung der Berechnungsergebnisse. Die Berechnungen werden mit dem Programm „MADYN“ [42] ausgeführt, welches in VARFEM integriert ist.

Bei dem in Abbildung 2.7 zu sehenden Rotor handelt es sich um den schnell drehenden Kompressorantrieb, wie er z. B. bei der Erdgasförderung verwendet wird. Die gesamte Maschine ist in Abbildung 2.1 am Anfang dieses Kapitels dargestellt.

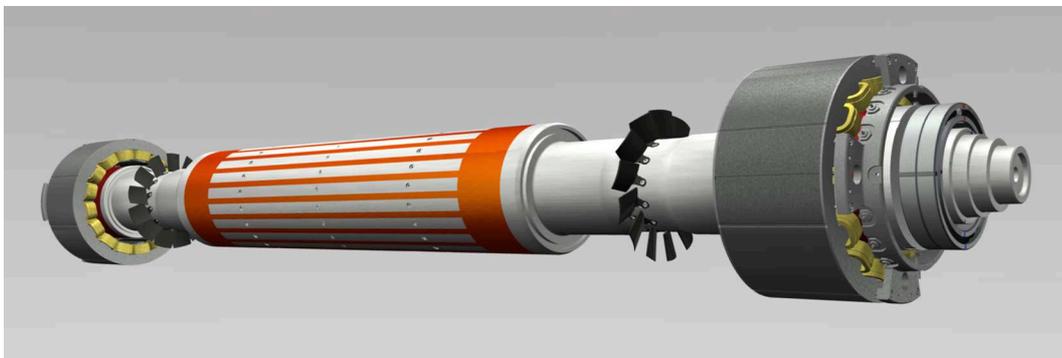


Abb. 2.7: CAD-Darstellung eines schnell laufenden Rotors mit einem gut erkennbaren Blechpaket und Magnetlagern.

Um eine Vorstellung für die Größe zu erhalten, werden die groben Abmaße angegeben. Der Rotor ist ca. 3 m lang, an seiner breitesten Stelle, dem Blechpaket, hat er einen Durchmesser von ca. 30 cm und wiegt knapp 1,5 t. Die Maschine zeichnet sich durch die, für eine Maschine dieser Größe extrem hohe Nenndrehzahl von ungefähr $15\,000\text{ min}^{-1}$ aus.

In Abbildung 2.8 ist gut zu erkennen, dass der Rotor als eine Aneinanderreihung von Scheiben modelliert ist. Um ähnliche Bedingungen wie in der Theorie

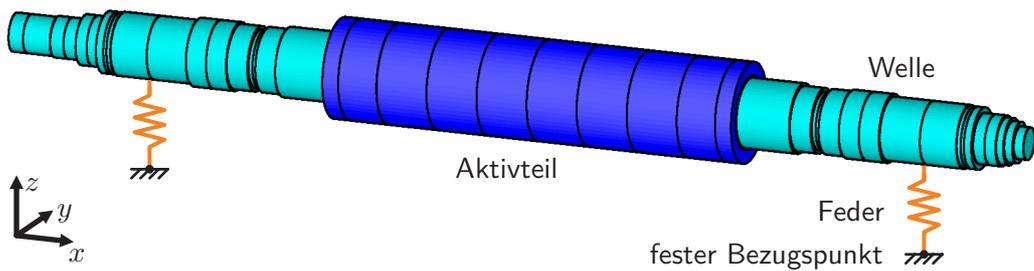


Abb. 2.8: Mit VARFEM erstelltes FE-Modell des schnell laufenden Rotors.

aus den vorangegangenen Abschnitten zu haben, ist der Rotor zu Simulationen zwecken auf sehr harten Federn gelagert und kann somit an den Lagerstellen als fest eingespannt betrachtet werden.

2.2.1 Auswirkungen der Gyroskopie

Um die Auswirkungen des gyroskopischen Effektes auf den Rotor zu verdeutlichen, wird dieser einmal mit und einmal ohne den gyroskopischen Effekt simuliert. Aufgrund der großen Massenträgheiten der einzelnen Scheiben und bedingt durch die hohe Nenndrehzahl ist ein merklicher Effekt durch die Gyroskopie zu erwarten.

In Abbildung 2.9 und 2.10 sind die ersten beiden Biegeeigenformen des Rotors ohne den Einfluss der Gyroskopie zu erkennen. Die erste biegekritische Eigenfrequenz liegt hier bei 79,66 Hz und die zweite bei 254,83 Hz.

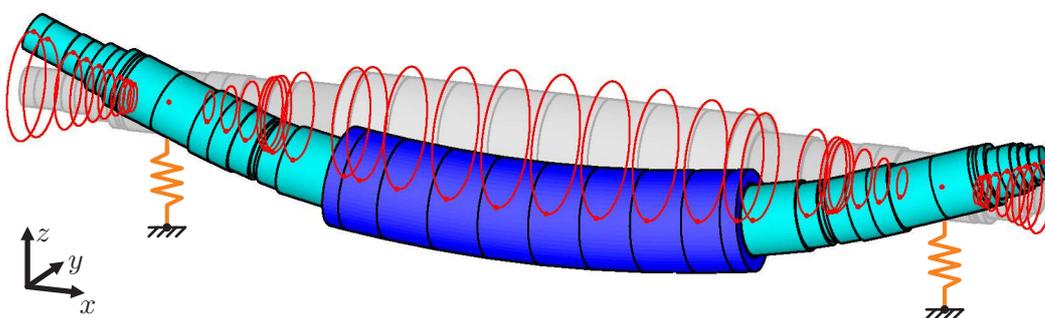


Abb. 2.9: Erste Biegeeigenform (300 000-fach überhöhte Darstellung).

Die Biegeeigenformen des Rotors unter Berücksichtigung der Gyroskopie unterscheiden sich in ihrer Ausprägung nicht von denen ohne Gyroskopie. Jedoch

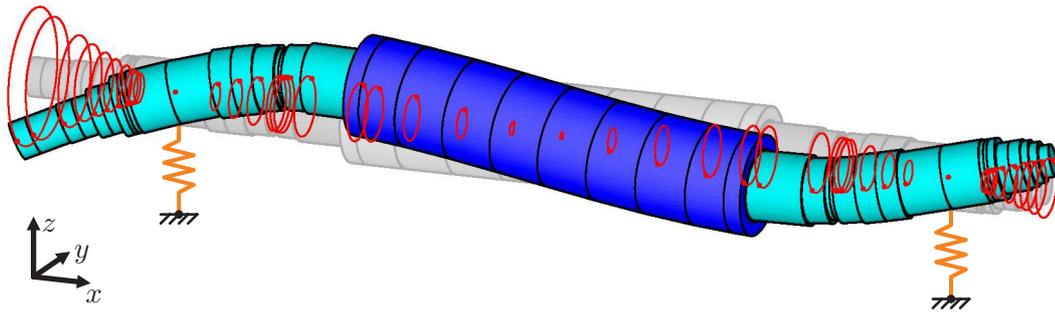


Abb. 2.10: Zweite Biegeeigenform (300 000-fach überhöhte Darstellung).

verschieben sich die Eigenfrequenzen nach unten und spalten sich in Gleich- und Gegenlauf auf (siehe [38, S. 105ff]).

Der Gleichlauf der ersten biegekritischen Eigenfrequenz liegt bei 77,99 Hz und der Gleichlauf der zweiten biegekritischen Eigenfrequenz bei 234,65 Hz. Der Einfluss der Gyroskopie ist also bereits merklich. Da die gyroskopische Matrix auf die Geschwindigkeiten \dot{z} des Zustandsvektors wirkt, verhält sich ihr Einfluss wie eine zusätzliche Dämpfung im System, daher ist eine Absenkung der Eigenfrequenzen logisch. Für solch große Rotoren und die angestrebte Genauigkeit bei den Berechnungen ist der gyroskopische Effekt folglich nicht zu vernachlässigen.

2.2.2 Berechnung einer Unwuchterregung

Für den Rotor kann nach der ISO Norm 1940 eine Unwucht von ca. 2100 g·mm bei einer Wuchtgüte von $2,5 \text{ mm}\cdot\text{s}^{-1}$ angenommen werden. Die Wuchtgüte gibt hierbei die maximal zulässige Bahngeschwindigkeit des Schwerpunktes an. Für das exakte Vorgehen bei der Berechnung der Unwucht eines Rotors sei auf die ISO Norm 1940 oder auch [43] verwiesen. Die so angenommenen Unwuchten werden für gewöhnlich an die Enden des Aktivteiles gesetzt und sind in der Abbildung 2.11 in rot gekennzeichnet.

Zur Auswertung des Unwuchteinflusses wird für jede Drehzahl die stationäre Verstärkung für einen ausgewählten Punkt des Rotors berechnet. In Abbildung 2.12 ist die Auslenkung des mittleren Rotorknoten über der Drehzahl aufgetragen.

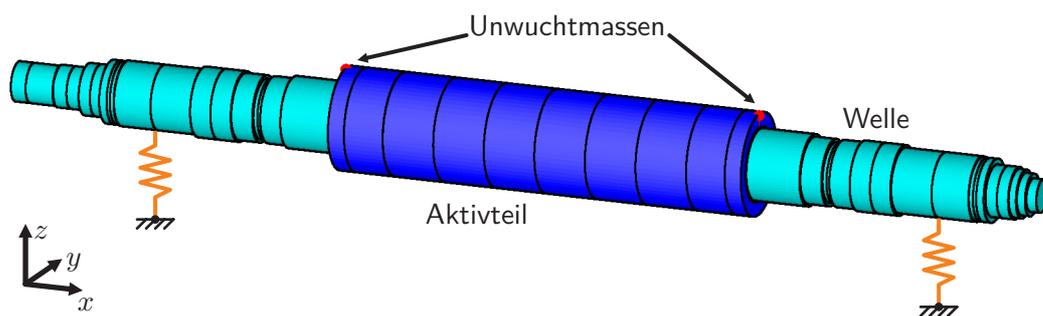


Abb. 2.11: Modell des Rotors mit Unwuchtmassen, welche die approximierten Restunwuchten darstellen.

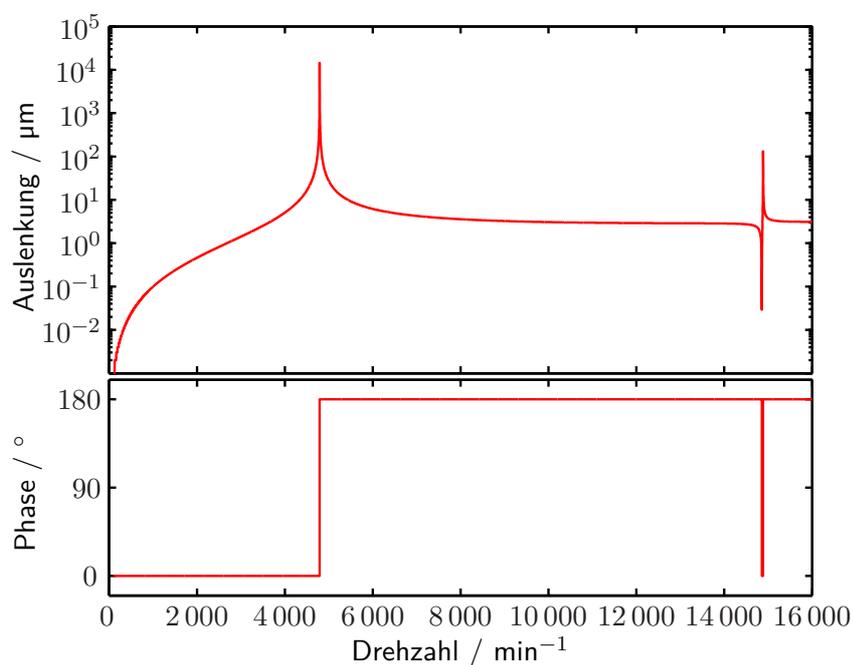


Abb. 2.12: Auslenkung des mittleren Rotorknotens als Funktion der Drehzahl

Sehr gut ist die Auslenkung des Knotens bei der ersten Eigenfrequenz zu erkennen. Die zweite Eigenfrequenz regt diesen Rotorknoten nur wenig an, da dieser Knoten nahe eines Schwingungsknotens der zweiten Eigenform liegt (siehe Abbildung 2.10). Zu beachten ist bei der Abbildung 2.12, dass, im Gegensatz zu den üblichen Übertragungsfunktionen, hier der Systemparameter der Drehzahl mit variiert wird und stets gleich der Anregungsfrequenz ist. Dies ist sinnvoll, da gerade der Einfluss der Selbsterregung durch die Unwucht interessant ist.

3 Grundlagen der Modellordnungsreduktionsverfahren

In diesem Kapitel sollen die Grundlagen der Modellordnungsreduktion dargestellt werden, wie sie unter anderem auch in [6], [7] oder [44] zu finden sind. Ausgangspunkt der meisten Modellordnungsreduktionsverfahren sind lineare zeitinvariante Systeme in Zustandsraumdarstellung. In Kapitel 2 lag zunächst ein Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung vor, so dass vor der Modellordnungsreduktion erst einmal das System in ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung überführt werden muss.

3.1 Übergang in den Zustandsraum

Das rotordynamische System zweiter Ordnung der Form

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{z}}(t) + (\mathbf{D} + \Omega\mathbf{G})\dot{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{z}(t) &= \mathbf{J}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{L}\mathbf{z}(t) \end{aligned} \tag{3.1}$$

mit den Systemmatrizen der Masse $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, der Dämpfung $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, der Gyroskopie $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und der Steifigkeit $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sowie den Eingangs- und Ausgangsmatrizen $\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ und $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ sowie dem Zustand $\mathbf{z}(t) \in \mathbb{R}^n$, dem Eingangsvektor $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$, dem Ausgangsvektor $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$, der Drehzahl Ω und der Systemgröße n kann folgendermaßen in ein Zustandsraummodell überführt werden

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{I}^{n \times n} & \mathbf{Z}^{n \times n} \\ \mathbf{Z}^{n \times n} & \mathbf{M} \end{pmatrix}}_{\mathbf{E}} \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{z}} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{pmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{Z}^{n \times n} & \mathbf{I}^{n \times n} \\ -\mathbf{K} & -(\mathbf{D} + \Omega \mathbf{G}) \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{z} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}(t)} + \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{Z}^{n \times m} \\ \mathbf{J} \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}} \mathbf{u}(t) \quad (3.2)$$

$$\mathbf{y}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{L} & \mathbf{Z}^{p \times n} \end{pmatrix}}_{\mathbf{C}} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{z} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}(t)}.$$

Es ergibt sich also das System

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \end{aligned} \quad (3.3)$$

wobei $\mathbf{E}, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{2n \times m}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p \times 2n}$ und $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^{2n}$ sind. Hierbei sind \mathbf{I} die Einheitsmatrix und \mathbf{Z} die Nullmatrix. Der Eingang $\mathbf{u}(t)$ und der Ausgang $\mathbf{y}(t)$ sind gegenüber Gleichung 3.1 unverändert geblieben.

3.2 Modellordnungsreduktion als Projektionsvorgang

Das Ziel der Ordnungsreduktion ist es, das System 3.3 in ein System

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_r \dot{\mathbf{x}}_r(t) &= \mathbf{A}_r \mathbf{x}_r(t) + \mathbf{B}_r \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}_r(t) &= \mathbf{C}_r \mathbf{x}_r(t) \end{aligned} \quad (3.4)$$

mit $\mathbf{E}_r, \mathbf{A}_r \in \mathbb{R}^{q \times q}$, $\mathbf{B}_r \in \mathbb{R}^{q \times m}$, $\mathbf{C}_r \in \mathbb{R}^{p \times q}$ und dem reduzierten Zustandsvektor $\mathbf{x}_r(t) \in \mathbb{R}^q$ sowie dem approximierten Ausgang $\mathbf{y}_r(t) \in \mathbb{R}^p$ zu überführen, wobei die Ordnung q des reduzierten Systems deutlich kleiner sein soll als die Ordnung $2n$ des Originalsystems 3.3. Bei der Reduktion bleibt \mathbf{u} als Eingang von der Reduktion unberührt. Die physikalische Interpretierbarkeit bleibt sowohl beim Eingangsvektor \mathbf{u} als auch beim Ausgangsvektor \mathbf{y}_r erhalten. Durch die Approximation des Systems durch das kleinere reduzierte System sind jedoch Abweichungen im Ausgang \mathbf{y}_r zu erwarten. Die Aufgabe besteht nun darin, das ursprüngliche System in einen kleineren Raum zu projizieren unter der Voraussetzung, dass das Ein-/Ausgangsverhalten des Systems dabei so wenig wie möglich verändert wird.

Im Folgenden wird zunächst auf die Theorie für nicht parameterabhängige Systeme eingegangen, da hierzu schon verschiedene Verfahren existieren, auf denen später in der Arbeit weiter aufgebaut wird. Es wird also von einem System wie in Gleichung 3.3 für ein konkretes Ω ausgegangen. Somit ist das System ein linear zeitinvariantes System mit konstanten Matrizen und erfüllt die Voraussetzungen für die im Folgenden dargestellten Methoden.

Da die Modellordnungsreduktionsverfahren als Projektionen verstanden werden können, soll zunächst auf die Theorie von Projektionen eingegangen werden. Dies führt schließlich direkt zu den hier vorgestellten Modellordnungsreduktionsverfahren, welche geeignete Projektionsmatrizen erzeugen. Der folgende Abschnitt zur Theorie der Projektionen kann in ähnlicher Weise auch in [45], [46] oder [47] nachgelesen werden.

Definition:

Sei M ein Vektorraum. $P \in M$ ist *idempotent* genau dann, wenn für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt $P^i = P$ gilt.

Definition:

Sei M ein Vektorraum. $P \in M$ ist eine *Projektion* genau dann, wenn P idempotent ist.

Eine Eigenschaft idempotenter Matrizen ist, dass ihre Eigenwerte nur Null oder Eins annehmen, d. h. sie können so in Diagonalform dargestellt werden, dass lediglich Nullen oder Einsen auf der Diagonalen zu finden sind. Da eine solche Matrix nun auch eine Projektion darstellt, können die Eigenräume zu dem Eigenwert Eins als der Bildraum „ $\text{bild}(P)$ “ interpretiert werden und der Eigenraum zu Null als das Komplement des Bildraumes, der Nullraum „ $\text{kern}(P)$ “. Der Vektorraum M setzt sich demzufolge aus dem Bild und dem Nullraum der Projektion P zusammen

$$M = \text{bild}(P) \oplus \text{kern}(P). \tag{3.5}$$

Daraus ergibt sich für die Dimensionen der einzelnen Räume folgender Zusammenhang

$$\dim(M) = \dim(\text{bild}(P)) + \dim(\text{kern}(P)). \tag{3.6}$$

Definition:

Sei P eine Projektion. P ist eine *orthogonale Projektion*, wenn der Bildraum und der Nullraum von P orthogonal zueinander sind und es gilt dann $P = P^T$.

Sei nun die Matrix \mathbf{V} eine Basis des Bildraumes von P und \mathbf{W} eine Basis des Kerns der Projektion P , dann lässt sich der Projektor als

$$P = \mathbf{V} (\mathbf{W}^T \mathbf{V})^{-1} \mathbf{W}^T \quad (3.7)$$

darstellen [48]. Bei orthogonalen Projektionen mit orthonormalen Basen \mathbf{V} und \mathbf{W} gilt zudem $\mathbf{W}^T \mathbf{V} = \mathbf{I}$, so dass sich die Gleichung 3.7 vereinfacht darstellen lässt als

$$P = \mathbf{V} \mathbf{W}^T. \quad (3.8)$$

Die Projektion eines beliebigen Vektors $x \in M$ führt zu einem Vektor aus dem Bildraum, welcher als Linearkombination der Basisvektoren des Bildraumes dargestellt werden kann, somit gilt

$$Px = \mathbf{V} x_r. \quad (3.9)$$

Bei der Projektion gehen Informationen des Originalvektors x verloren, welche als Fehler e betrachtet werden können

$$x = \mathbf{V} x_r + e. \quad (3.10)$$

Der Fehler ist also der Teil des Originalvektors, der im Nullraum der Projektion liegt. Wird Gleichung 3.10 in das Ausgangssystem 3.3 eingesetzt und von links mit \mathbf{W}^T multipliziert, so ergibt sich

$$\underbrace{\mathbf{W}^T \mathbf{E} \mathbf{V}}_{E_r} \dot{x}_r(t) = \underbrace{\mathbf{W}^T \mathbf{A} \mathbf{V}}_{A_r} x_r(t) + \underbrace{\mathbf{W}^T \mathbf{B}}_{B_r} u(t) + \mathbf{W}^T e(t) \quad (3.11)$$

$$\mathbf{y}_r(t) = \underbrace{\mathbf{C} \mathbf{V}}_{C_r} x_r(t).$$

Da der Fehler $e(t)$ orthogonal auf \mathbf{W}^T steht, ergibt sich $\mathbf{W}^T e(t)$ zu Null und die reduzierten Matrizen können aus dem System abgelesen werden.

Die Suche nach einem reduzierten System verlagert sich folglich auf die Suche nach geeigneten Projektionsmatrizen. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, solche Projektionsmatrizen geeignet zu bestimmen. Die Modellordnungsreduktionsverfahren, die sich daraus entwickelt haben, lassen sich, wie in Abbildung 3.1 dargestellt, grob in zwei Gruppen unterteilen. Zunächst gibt es die SVD-Methoden, sie basieren auf einer Singulärwertzerlegung (engl. singular value decomposition (SVD)) des Systems. Ein Vertreter dieser Gruppe ist das balancierte Abschneiden, auf welches in Abschnitt 3.3.1 eingegangen werden soll. Das Konzept des Balancierens eines Systems wurde erstmals von Mullis und Roberts in [49] erwähnt, jedoch erst einige Jahre später nutzte es Moore in [50] zur Reduktion.

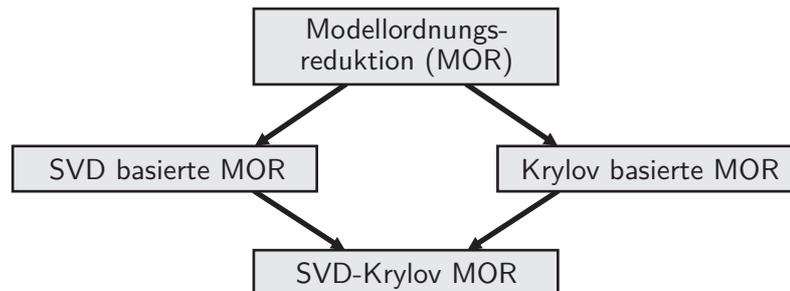


Abb. 3.1: Unterteilung der Modellordnungsreduktion in die Methoden, welche sich auf die Singulärwertzerlegung stützen und in Methoden, welche nach der Krylov-Unterraummethode vorgehen sowie einer Mischform.

Die zweite große Gruppe von Reduktionsverfahren sind die Krylov-Unterraumverfahren, welche in Abschnitt 3.4 diskutiert werden. Sie stützen sich auf Algorithmen, welche zum Teil schon länger bekannt sind, wie der Arnoldialgorithmus, welcher erstmals in [51] erwähnt wurde. Auch der Lanczos-Algorithmus entstand in dieser Zeit [52]. Für die Modellordnungsreduktion herangezogen wurden diese Verfahren Anfang der 1990er, z. B. in [44], [53] oder [54]. Beide Verfahrensweisen bieten unterschiedliche Vor- und Nachteile, auf die später eingegangen wird. Eine Zusammenstellung der Unterschiede beider Methoden findet sich unter anderem in [55].

Zusätzlich zu diesen beiden Methoden existieren nun auch noch Mischformen, so wie sie in [56] vorgestellt werden. Auf diese Methoden wird in dieser Arbeit jedoch nicht weiter eingegangen.

3.3 Auf der Singulärwertzerlegung basierende Modellordnungsreduktionsverfahren

In diesem Abschnitt soll die Modellreduktionsmethode des balancierten Abschneidens erläutert werden. Da sie ein Vertreter der SVD basierten Methoden ist und zudem auch im späteren Verlauf der Arbeit auf die Singulärwertzerlegung zurückgegriffen wird, werden als erstes einige mathematische Grundlagen der Singulärwertzerlegung erläutert.

3.3.1 Mathematische Grundlagen der Singulärwertzerlegung

Die Methode der Singulärwertzerlegung ist in vielen Bereichen der linearen Algebra und der Modellordnungsreduktion ein hilfreiches Werkzeug.

Lemma:

Zu jeder Matrix $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ existieren orthogonale Matrizen $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ und $\mathbf{V}_\dagger \in \mathbb{R}^{n \times n}$ derart, dass die Singulärwertzerlegung

$$\mathbf{X} = \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{V}_\dagger^T \quad \text{mit} \quad (3.12)$$

$$\mathbf{S} = \text{diag}(s_1, \dots, s_p) \quad \text{wobei } p = \min\{m, n\} \quad (3.13)$$

gilt. Hierbei sind s_1, \dots, s_p nicht negative Werte, welche als die Singulärwerte der Matrix \mathbf{X} bezeichnet werden. (siehe auch [57, 58])

Für die Singulärwerte gilt hierbei stets $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_p \geq 0$. Die Spaltenvektoren von \mathbf{U} werden als die Linkssingulärvektoren und die Spalten von \mathbf{V}_\dagger als die Rechtssingulärvektoren der Matrix \mathbf{X} bezeichnet. Auf den ersten Blick scheint eine solche Zerlegung der Matrix willkürlich. Bei genauerer Betrachtung stellt sich jedoch heraus, dass eine Singulärwertzerlegung viel über eine Matrix aussagt.

Lemma:

Sei $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine beliebige Matrix mit ihrer Singulärwertzerlegung

$$\mathbf{X} = \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{V}_\dagger^T$$

und für die Singulärwerte gelte $s_1 \geq \dots \geq s_r \geq s_{r+1} = \dots = s_p = 0$, dann gilt

$$\text{rang}(\mathbf{X}) = r \tag{3.14}$$

und die Matrix \mathbf{X} lässt sich als

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^r s_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T \tag{3.15}$$

darstellen.

Der Zusammenhang ist leicht einzusehen, da alle Links- und Rechtssingulärvektoren \mathbf{u}_i und \mathbf{v}_i für $i > r$ mit Singulärwerten multipliziert werden, welche Null sind. Somit leisten diese Summanden keinen neuen Beitrag zu \mathbf{X} . Ähnlich verhält sich der Nachweis über den Rang der Matrix. Dieser Zusammenhang wird z. B. zur Rangreduktion einer Matrix und zum Komprimieren von Daten genutzt. Hierzu werden nur Links- und Rechtssingulärvektoren berücksichtigt und gespeichert, die zu Singulärwerten gehören, die signifikant größer als Null sind. Dadurch lässt sich der Speicherbedarf für die Matrix \mathbf{X} auf die ersten Singulärwertvektoren reduzieren.

Eine weitere Eigenschaft der Singulärwertzerlegung ist erkennbar, wenn die Matrix $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ als eine Abbildung $\mathbf{X} : \mathbf{W}_\dagger \subseteq \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbf{V}_\dagger \subseteq \mathbb{R}^{m \times m}$ des n -dimensionalen Raumes auf den m -dimensionalen Raum betrachtet wird. Durch die Singulärwertzerlegung lassen sich die beiden wichtigsten Mengen einer Abbildung leicht ablesen. Der Kern der Abbildung \mathbf{X} , welcher alle Vektoren aus \mathbf{W}_\dagger enthält, die durch \mathbf{X} auf den Nullvektor des Raums \mathbf{V}_\dagger abgebildet werden, ergibt sich durch

$$\text{kern}(\mathbf{X}) = \text{span}\{\mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_n\} \tag{3.16}$$

wenn, wie auch im obigen Lemma gilt, dass $s_{r+1} = \dots = s_p = 0$ ([58]). Ebenso leicht lässt sich der Bildraum von \mathbf{X} erzeugen ([58]). Der Bildraum einer Abbildung ergibt sich aus allen Vektoren $\mathbf{b} \in \mathbf{W}_\dagger$, die sich darstellen lassen als $\mathbf{b} = \mathbf{X}\mathbf{x}$, wobei \mathbf{x} ein Element aus \mathbf{V} sei. Mit der Singulärwertzerlegung lässt sich der Bildraum der Abbildung \mathbf{X} durch

$$\text{bild}(\mathbf{X}) = \text{span}\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r\} \quad (3.17)$$

darstellen, wobei wiederum gelten soll, dass $s_{r+1} = \dots = s_p = 0$. Diese Eigenschaft wird später für die Reduktion des parametrischen Rotors in Kapitel 4 genutzt.

3.3.2 Balanciertes Abschneiden – Truncated Balanced Realisation (TBR)

Der Ansatz des balancierten Abschneidens basiert auf den Systemeigenschaften der Steuer- und Beobachtbarkeit.

Definition:

Ein System, welches sich aus einem beliebigen Ausgangszustand \mathbf{x}_0 in endlicher Zeit in einen beliebigen Endzustand \mathbf{x}_e überführen lässt, heißt *vollständig steuerbar* [59].

Definition:

Ein System heißt genau dann *vollständig beobachtbar*, wenn aus dem bekannten Verlauf des Eingangssignales \mathbf{u} und des Ausgangssignales \mathbf{y} auf den Ausgangszustand \mathbf{x}_0 geschlossen werden kann [59].

Es gibt verschiedene Kriterien, um die Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit von Systemen zu beurteilen. Im Folgenden sollen hierzu die Gram'sche Steuerbarkeitsmatrix und die Gram'sche Beobachtbarkeitsmatrix vorgestellt werden. Ausgehend von einem System wie 3.3 sind die Gram'sche Steuerbarkeitsmatrix \mathbf{P} und die Gram'sche Beobachtbarkeitsmatrix \mathbf{Q} definiert als

$$\mathbf{P} = \int_0^\infty e^{At} \mathbf{B} \mathbf{B}^T e^{A^T t} dt \quad (3.18)$$

$$\mathbf{Q} = \int_0^\infty e^{At} \mathbf{C} \mathbf{C}^T e^{A^T t} dt. \quad (3.19)$$

Wie unter anderem auch im [59] gezeigt wird, sind die Gram'schen Matrizen zugleich auch die Lösungen der Lyapunov-Gleichungen

$$\mathbf{A} \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}^T + \mathbf{B} \mathbf{B}^T = 0 \quad (3.20)$$

$$\mathbf{A} \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \mathbf{A}^T + \mathbf{C} \mathbf{C}^T = 0. \quad (3.21)$$

Zudem existieren für jedes vollständig steuerbare und beobachtbare System genau eine Matrix \mathbf{P} und eine Matrix \mathbf{Q} , welche positiv definit sind und vollen Rang besitzen. Anschaulich betrachtet, bedeutet das: Soll das System aus der Nulllage in unendlich langer Zeit in die Endlage \mathbf{x}_e überführt werden, so wird hierfür die Energie $\mathbf{x}_e^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{x}_e$ benötigt. Umgekehrt wird die Energie $\mathbf{x}_0^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_0$ erzeugt, wenn das System aus seiner Anfangslage \mathbf{x}_0 heraus unbeeinflusst (also $\mathbf{u} = 0$) in seine Ruhelage ausschlagen kann. Aus diesen Überlegungen lässt sich leicht schließen, dass ein Zustand, der schwer steuerbar ist, folglich viel Energie benötigt, um erreicht zu werden. Dieser Umstand lässt sich auch an den zu den verschiedenen Zuständen gehörenden Eigenwerten der Matrix \mathbf{P}^{-1} ablesen. Je mehr Energie benötigt wird, um einen bestimmten Zustand zu erreichen, umso größer ist der zu diesem Zustand gehörende Eigenwert. Analog kann diese Betrachtung auch für die Beobachtbarkeit des Systems herangezogen werden. Hier gilt jedoch: Je kleiner der entsprechende Eigenwert ist, umso schlechter ist der Zustand beobachtbar, da nach außen hin nur wenig entstehende Energie sichtbar ist.

Diese Überlegungen führen direkt zum Verfahren des balancierten Abschneidens, da Zustände, welche schlecht steuerbar und schlecht beobachtbar sind, herausgefiltert und aus dem System entfernt werden können. Das Systemverhalten wird sich hierbei nur geringfügig verändern, da solche Zustände nur einen sehr kleinen Einfluss auf das Übertragungsverhalten des Systems haben.

Ziel ist es, das System zunächst so zu transformieren, dass alle transformierten Zustände gleich steuer- und beobachtbar sind. In diesem Fall gilt für die Gram'schen Matrizen

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\text{bal}} &= \mathbf{Q}_{\text{bal}} \\ &= \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n), \end{aligned} \tag{3.22}$$

wobei es sich bei σ_i um die Hankel'schen Singulärwerte (engl. Hankel singular value (HSV)) handelt. Die HSV lassen sich aus den Eigenwerten λ_i der Gram'schen Matrizen \mathbf{PQ} durch

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i \mathbf{PQ}} \tag{3.23}$$

berechnen. Auf Grund der Eigenschaft, dass HSV gegenüber Zustandstransformationen invariant sind, korrespondieren kleine HSV mit schwer steuer- und beobachtbaren Zuständen und zwar unabhängig von der Koordinatendarstellung des Systems. Es wurde bereits in [6] gezeigt, dass sich jedes vollständig steuer- und beobachtbare System in eine solch balancierte Darstellung überführen lässt. Die Transformationsmatrizen können, wie beispielsweise in [60] gezeigt, in vier Schritten erzeugt werden:

1. Lösen der Lyapunov-Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}^T + \mathbf{B}\mathbf{B}^T &= 0 \\ \mathbf{A}\mathbf{Q} + \mathbf{Q}\mathbf{A}^T + \mathbf{C}\mathbf{C}^T &= 0, \end{aligned}$$

2. Cholesky-Zerlegung

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{S}^T \mathbf{S} \\ \mathbf{Q} &= \mathbf{R}^T \mathbf{R}, \end{aligned}$$

3. Singulärwertzerlegung

$$\mathbf{S}\mathbf{R}^T = \mathbf{U}\mathbf{S}^*\mathbf{V}_\dagger^T,$$

wobei die Singulärwerte σ_i in \mathbf{S}^* und die Matrizen \mathbf{P} und \mathbf{Q} die Gleichung 3.22 erfüllen,

4. Transformationsmatrix berechnen zu

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \mathbf{S}^T \mathbf{U} \sqrt{\mathbf{S}^*} \\ \mathbf{T} &= \sqrt{\mathbf{S}^+} \mathbf{V}_\dagger \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Bereits in [61] ist beschrieben, dass das System mit diesen Transformationsmatrizen in eine balancierte Darstellung

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_{\text{bal}} &= \underbrace{\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}}_{\mathbf{A}_{\text{bal}}} \mathbf{x}_{\text{bal}} + \underbrace{\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}}_{\mathbf{B}_{\text{bal}}} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \underbrace{\mathbf{C}\mathbf{T}}_{\mathbf{C}_{\text{bal}}} \mathbf{x}_{\text{bal}} \end{aligned} \tag{3.24}$$

überführt werden kann. Das Reduzieren eines solchen Systems von Ordnung n

auf Ordnung q kann nun auf zwei Wegen geschehen. Das balancierte System kann in die Form

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \end{pmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}_{\text{bal}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}_{\text{bal}}} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}_{\text{bal}}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}_{\text{bal}}} \mathbf{u} \quad (3.25)$$

$$\mathbf{y} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{C}_{\text{bal}}} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}_{\text{bal}}} \quad (3.26)$$

zerlegt werden, wobei $\mathbf{A}_{11} \in \mathbb{R}^{q \times q}$, $\mathbf{B}_1 \in \mathbb{R}^{q \times m}$ und $\mathbf{C}_1 \in \mathbb{R}^{p \times q}$. Da die ersten Zustände im balanciertem System mehr zum Übertragungsverhalten beitragen als die letzten, können diese weniger relevanten Zustände abgeschnitten werden.

Das einfache Abschneiden der Zustände \mathbf{x}_2 führt zu dem reduzierten System

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{A}_{11} \mathbf{x}_1 + \mathbf{B}_1 \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}_1 \mathbf{x}_1. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Eine weitere Möglichkeit, dieses balancierte System zu reduzieren, besteht darin, in Gleichung 3.25 $\dot{\mathbf{x}}_2$ auf Null zu setzen und die zweite Zeile der Matrixgleichung nach \mathbf{x}_2 umzustellen und in die erste einzusetzen. Dies setzt voraus, dass \mathbf{A}_{22} invertierbar ist, bietet jedoch den Vorteil, dass die stationäre Verstärkung erhalten bleibt ([6]).

Die Vorteile des balancierten Abschneidens liegen eindeutig darin, dass es eine stabilitätserhaltende Reduktionsvariante ist, dies ist besonders für transiente Simulationen von Bedeutung. Zudem kann beim balancierten Abschneiden eine Fehlerschranke bezüglich der h_∞ -Norm (siehe [62]) für das Übertragungsverhalten $\mathbf{G}(s)$ mit

$$\|\mathbf{G}(s) - \mathbf{G}_r(s)\|_\infty \leq 2 \sum_n^{j=r+1} \sigma_j \quad (3.28)$$

angegeben werden.

Der Nachteil dieses Verfahrens liegt jedoch darin, dass das Lösen und Invertieren der Lyapunov-Gleichungen mit sehr hohem Rechen- und Speicheraufwand

verbunden ist und somit nur relativ kleine Systeme bis ca. zur Ordnung 5000 auf normalen Rechnern effizient reduzierbar sind, da andernfalls in den meisten Fällen der Speicherkapazität nicht mehr ausreicht bzw. die Rechenzeiten für die Reduktion unverhältnismäßig groß werden. Daher ist es für die größeren Systeme wie Grundrahmen oder Fundamente, wie sie im Kapitel 6 dieser Arbeit betrachtet werden, notwendig, ein anderes Reduktionsverfahren mittels Krylov-Unterräumen zu verwenden.

3.3.3 Erweiterte Singulärwertzerlegung zur Reduktion von Ein- und Ausgangsräumen

In der Realität existieren häufig MIMO-Systeme mit vielen Ein- und Ausgängen. Da sich jedoch mit der Anzahl der Ein- und Ausgänge auch die Reduktionsgröße meist drastisch erhöht, sind solche Systeme nicht leicht zu reduzieren. Auch wenn versucht wird, die maximale Anzahl der Ein- und Ausgänge so gering wie möglich zu halten, wird das nicht immer möglich sein.

Eine relative neue Methode, um die Anzahl der Ein- und Ausgänge zu reduzieren, bietet die „extended singular value decomposition“-Methode (kurz: ESVD), welche die Ein- und Ausgangsräume reduziert [63–67]. Der Ablauf der ESVD-Methode lässt sich für ein System mit p Eingängen und q Ausgängen grob zusammenfassen zu (nach [65]):

- Die Anzahl r der zu berechnenden Blockmomente ergibt sich aus

$$r = \min \left\{ \left\lceil \frac{p}{q} \right\rceil, \left\lceil \frac{q}{p} \right\rceil \right\}. \quad (3.29)$$

- Berechnen der ersten r Blockmomente \mathbf{M}_i

$$\mathbf{M}_i = \mathbf{C}_h \left(-(s_0 \mathbf{E}_h - \mathbf{A}_h)^{-1} \mathbf{E}_h \right)^i (s_0 \mathbf{E}_h - \mathbf{A}_h)^{-1} \mathbf{B}_h \quad (3.30)$$

mit $i \in \{0, \dots, r-1\}$,

wobei die zur Berechnung notwendigen Matrizen aus Gleichung 6.94 stammen und s_0 der frei wählbare Entwicklungspunkt ist. Die Blockmomente \mathbf{M}_i ergeben sich zu Matrizen der Größe $q \times p$.

- Die Ausgangsmomenten-Antwort \mathbf{M}_O und Eingangsmomenten Antwort \mathbf{M}_I werden definiert als

$$\mathbf{M}_O := \begin{bmatrix} \mathbf{M}_0^T \\ \mathbf{M}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{M}_{r-1}^T \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_I := \begin{bmatrix} \mathbf{M}_0 \\ \mathbf{M}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{M}_{r-1} \end{bmatrix}. \quad (3.31)$$

- Durchführen der Singulärwertzerlegung für \mathbf{M}_O und \mathbf{M}_I

$$\mathbf{M}_I = \mathbf{U}_I \mathbf{S}_I \mathbf{V}_I^T \quad (3.32)$$

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{U}_O \mathbf{S}_O \mathbf{V}_O^T. \quad (3.33)$$

- Reduzieren der Matrizen \mathbf{V}_I und \mathbf{V}_O auf die ersten k_I bzw. k_O Spalten, die zu relevanten Singulärwerten korrespondieren. Damit ergeben sich

$$\mathbf{V}_{I,k_I}, \mathbf{V}_{O,k_O} \quad (3.34)$$

und die Eingangs- und Ausgangsmatrizen \mathbf{B}_h und \mathbf{C}_h können approximiert werden durch

$$\mathbf{B}_h^r \approx \mathbf{B}_h^r \mathbf{V}_{I,k_I}^T \quad (3.35)$$

$$\mathbf{C}_h^r \approx \mathbf{V}_{O,k_O} \mathbf{C}_h^r. \quad (3.36)$$

- Mit Hilfe der Moore-Penrose-Pseudoinversen [68], welche durch $(\cdot)^+$ gekennzeichnet wird, können die Gleichungen 3.35 und 3.36 umgestellt werden zu

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_h^r &= \mathbf{B}_h \mathbf{V}_{I,k_I}^{T+} \\ &= \mathbf{B}_h \mathbf{V}_{I,k_I} (\mathbf{V}_{I,k_I}^T \mathbf{V}_{I,k_I})^{-1} \\ \mathbf{B}_h^r &= \mathbf{B}_h \mathbf{V}_{I,k_I} \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_h^r &= \mathbf{V}_{O,k_O}^+ \mathbf{C}_h \\ &= (\mathbf{V}_{O,k_O}^T \mathbf{V}_{O,k_O})^{-1} \mathbf{V}_{O,k_O}^T \mathbf{C}_h \\ \mathbf{C}_h^r &= \mathbf{C}_h \mathbf{V}_{O,k_O}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Mit der so reduzierten Eingangsmatrix \mathbf{B}_h^r und der Ausgangsmatrizen \mathbf{C}_h^r (aus Gleichung 3.35 bzw. 3.36) kann das System nun geschrieben werden als

$$\mathbf{E}_h \dot{\mathbf{x}}_h = \mathbf{A}_h \mathbf{x}_h + \mathbf{B}_h^r \mathbf{V}_{I, k_I}^T \begin{pmatrix} \mathbf{u}_h \\ \mathbf{u}_{h,o} \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

$$\mathbf{y}_h = \mathbf{V}_{O, k_O} \mathbf{C}_h^r \mathbf{x}_h,$$

wobei es sich hier wieder um die aus der Gleichung 6.94 bekannten Systemmatrizen handelt und sich die neuen Ein- und Ausgangsmatrizen aus dem ESVD-Algorithmus ergeben.

Wird $\mathbf{V}_{I, k_I}^T (\mathbf{u}_h \ \mathbf{u}_{h,o})^T$ als Eingangsvektor betrachtet und $\mathbf{V}_{O, k_O}^T \mathbf{y}_h$ als Ausgangsvektor, dann kann das System mittels der Krylov-Unterräume

$$\mathbf{V} = K_{r_h} (\mathbf{A}_h^{-1} \mathbf{E}_h, \mathbf{A}_h^{-1} \mathbf{B}_h^r) \quad (3.40)$$

$$\mathbf{W} = K_{r_h} (\mathbf{A}_h^{-T} \mathbf{E}_h^T, \mathbf{A}_h^{-T} \mathbf{C}_h^r), \quad (3.41)$$

reduziert werden. Nach der Reduktion des Systems können die zuvor mit ESVD reduzierten Ein- und Ausgangsmatrizen wieder zurücktransformiert werden. Die hierzu nötigen Matrizen ergeben sich aus den Gleichungen 3.37 und 3.38. Damit kann das System nach der Reduktion wieder mit den ursprünglichen Ein- und Ausgängen geschrieben werden als

$$\mathbf{E}_{h,r} \dot{\mathbf{x}}_{h,r} = \mathbf{A}_{h,r} \mathbf{x}_{h,r} + \mathbf{B}_{h,r}^r \mathbf{V}_{I, k_I}^T \begin{pmatrix} \mathbf{u}_h \\ \mathbf{u}_{h,o} \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

$$\mathbf{y}_{h,r} = \mathbf{V}_{O, k_O} \mathbf{C}_{h,r}^r \mathbf{x}_{h,r}.$$

Mit dieser Methode kann der Nachteil der vielen Ein- und Ausgänge abgemildert werden.

3.4 Krylov-Unterraumverfahren

Sollten die zu reduzierenden Systeme zu groß für die Methode des balancierten Abschneidens werden, bieten die Krylov-Unterraummethode eine gute Alternative. Wie auch beim balancierten Abschneiden, ist das Ziel dieser Methode, die Projektionsmatrizen \mathbf{V} und \mathbf{W} zu berechnen. Das Verfahren der Reduktion mittels Krylov-Unterräumen wird unter anderem in [6, 44, 69–71] beschrieben. Die beiden wichtigsten Algorithmen zur Berechnung sind hierbei der Arnoldi-Algorithmus [51, 72, 73] und der Lanczos-Algorithmus [52, 74], welche stetig weiter entwickelt und auf hochdimensionale Probleme optimiert werden.

Zunächst wird hierbei die Theorie anhand von SISO-Systemen erläutert. Diese ergeben sich zu

$$\mathbf{E}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \quad (3.43)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \quad (3.44)$$

mit $\mathbf{E}, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^p$ und dem Zustandsvektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Definition:

Sei $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine beliebige konstante Matrix, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ein konstanter Vektor, der als Startvektor bezeichnet werden soll und $q \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann ist

$$K_q(\mathbf{X}, \mathbf{x}) = \text{span} \{ \mathbf{x}, \mathbf{X}\mathbf{x}, \dots, \mathbf{X}^{q-1}\mathbf{x} \} \quad (3.45)$$

der durch \mathbf{X} und \mathbf{x} aufgespannte *Krylov-Unterraum* ([75]).

Mit Hilfe solcher Krylov-Unterräume können die Projektionsmatrizen \mathbf{V} und \mathbf{W} als Matrizen definiert werden, welche sich aus Spaltenvektoren zusammensetzen, die zugleich eine Basis von Krylov-Unterräumen bilden. Es wird hierbei als Ausgangssystem wieder System 3.3 auf Seite 22 betrachtet.

3.4.1 Reduktion um den Entwicklungspunkt Null

Bei der Krylov-Unterraummethode kann das System um einen beliebigen Entwicklungspunkt reduziert werden. Zur Erläuterung der Theorie wird hier zunächst der einfache Fall des Entwicklungspunktes Null gezeigt und im nächsten Abschnitt auf die Reduktion mit einem beliebigen Entwicklungspunkt eingegangen.

Für die Wahl von \mathbf{V} wird der so genannte Eingangs-Krylov-Raum herangezogen. \mathbf{V} ist somit eine beliebige Basis des Krylov-Unterraumes zur Matrix $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{E}$ und dem Startvektor $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$

$$K_{q_1}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{E}, \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}) = \text{span} \left\{ \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}, \dots, (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{E})^{q_1-1} \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \right\}, \quad (3.46)$$

wobei \mathbf{A} , \mathbf{E} und \mathbf{b} aus dem System 3.3 entstammen.

Analog dazu kann die Projektionsmatrix \mathbf{W} als eine Basis des Ausgangs-Krylov-Raums gefunden werden, wobei sich der Krylov-Unterraum durch

$$K_{q_2}(\mathbf{A}^{-\text{T}}\mathbf{E}^{\text{T}}, \mathbf{A}^{-\text{T}}\mathbf{c}) = \text{span} \left\{ \mathbf{A}^{-\text{T}}\mathbf{c}, \dots, (\mathbf{A}^{-\text{T}}\mathbf{E}^{\text{T}})^{q_2-1} \mathbf{A}^{-\text{T}}\mathbf{c} \right\}, \quad (3.47)$$

mit $\mathbf{A}^{-\text{T}} := (\mathbf{A}^{-1})^{\text{T}}$ ergibt. In beiden Fällen wird die Regularität von \mathbf{A} vorausgesetzt. Für die Reduktion muss nun noch $q_1 = q_2 = q$ gefordert werden, wobei darauf zu achten ist, dass sowohl \mathbf{V} als auch \mathbf{W} nach dieser Wahl vollen Rang q besitzen. Für Systeme mit regulärer Matrix \mathbf{E} lässt sich leicht zeigen, dass die höchstmögliche Dimension der Krylov-Unterräume mit den Dimensionen der steuerbaren und beobachtbaren Unterräume des Systems 3.3 übereinstimmt [59].

Ein solches Reduktionsverfahren, das auf der Grundlage des Eingangs- und Ausgangs-Krylov-Unterraumes die Matrizen \mathbf{V} und \mathbf{W} findet, wird als zweiseitiges Verfahren bezeichnet. Es ist auch möglich, nur eine der beiden Matrizen auf die oben beschriebene Art zu wählen. Wird die verbleibende Matrix beliebig mit vollem Rang gewählt, so wird das Reduktionsverfahren als einseitig bezeichnet.

Die Wahl der Matrizen scheint zunächst willkürlich und der Vorteil des Verfahrens erschließt sich nicht auf den ersten Blick. Es lässt sich jedoch recht einfach zeigen, dass das Verfahren die sogenannten Momente des Originalsystems mit denen des reduzierten Systems bis zu einem gewissen Grad in Übereinstimmung bringt, wobei auch hier wieder die nur wenig einschränkende Annahme gilt, dass auch die reduzierte Systemmatrix \mathbf{A}_r regulär ist.

Definition:

Gegeben sei ein dynamisches SISO-System (SISO: engl. single input single output) der Form 3.3 mit der zugehörigen Übertragungsfunktion

$$g(s) = \mathbf{c}^{\text{T}} (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}. \quad (3.48)$$

Die *Momente* m_i sind definiert als die negativen Koeffizienten der Taylor-Reihe der Übertragungsfunktion um den Entwicklungspunkt $s_0 = 0$

$$\begin{aligned}
 g(s) = & - \underbrace{\mathbf{c}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}}_{m_0} - \underbrace{\mathbf{c}^T (\mathbf{A}^{-1} \mathbf{E}) \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} s}_{m_1} - \dots \\
 & - \underbrace{\mathbf{c}^T (\mathbf{A}^{-1} \mathbf{E})^i \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} s^i}_{m_i} - \dots .
 \end{aligned} \tag{3.49}$$

Lemma:

Einseitige Krylov-Reduktionsverfahren, welche das Originalsystem auf die Ordnung q reduzieren, bringen die ersten q Momente des Originalsystems und des reduzierten Systems zur Übereinstimmung. Im Falle eines zweiseitigen Verfahrens werden sogar die ersten $2q$ Momente angepasst.

An dieser Stelle soll nicht der ganze Beweis gezeigt werden, sondern lediglich die Beweisidee anhand des ersten Momentes m_0 und dem entsprechenden reduzierten Moment m_{r0}

$$\begin{aligned}
 m_{r0} &= \mathbf{c}_r^T \mathbf{A}_r^{-1} \mathbf{b}_r \\
 &= \mathbf{c}^T \mathbf{V} (\mathbf{W}^T \mathbf{A} \mathbf{V})^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{b},
 \end{aligned}$$

entscheidend ist an dieser Stelle, dass $\mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}$ im Krylov-Unterraum 3.46 liegt und somit auch als Linearkombination der Basisvektoren der Matrix \mathbf{V} durch $\mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} = \mathbf{V} \mathbf{r}_0$ dargestellt werden kann, wobei $\mathbf{r}_0 \in \mathbb{R}^q$. Für die Umformungen des ersten Momentes bedeutet dies weiterhin

$$\begin{aligned}
 m_{r0} &= \mathbf{c}^T \mathbf{V} (\mathbf{W}^T \mathbf{A} \mathbf{V})^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{b} \\
 &= \mathbf{c}^T \mathbf{V} (\mathbf{W}^T \mathbf{A} \mathbf{V})^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{A} \mathbf{V} \mathbf{r}_0 \\
 &= \mathbf{c}^T \mathbf{V} \mathbf{r}_0 \\
 &= \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} \\
 m_{r0} &= m_0.
 \end{aligned}$$

Für die höheren Momente läuft der Beweis entsprechend [54]. Es ist also erkennbar, dass bei jeder krylovbasierten Reduktion das Moment m_0 erhalten bleibt. Für das System bedeutet dies, dass die stationäre Verstärkung die gerade durch m_0 ausgedrückt werden kann, bei der Reduktion auf jeden Fall erhalten bleibt.

Da zweiseitige Krylov-Verfahren bei gleicher Reduktionsgröße im Vergleich zu einseitigen Verfahren doppelt so viele Momente anpassen können, sind meistens zweiseitige Verfahren vorzuziehen. Zudem bieten sie den Vorteil, dass die Reduktion unabhängig von der Darstellung des Originalmodells ist. Im Gegensatz dazu wirken sich reguläre Zustandstransformationen und andere Äquivalenzumformungen des Originalmodells bei der einseitigen Reduktion auf das Übertragungsverhalten im reduzierten Modell aus [76].

Trotz der Aussagen, die über angepasste Momente bei der Reduktion mit Krylov-Unterräumen getroffen werden können, gibt es bisher noch keine Fehler-schranke, die bei solchen Systemen schon vorher angegeben werden könnte. Es fehlen zur Zeit auch noch allgemeingültige Stabilitätsaussagen. Trotz dieser Einschränkungen sind die Krylov-Verfahren gerade für sehr große Systeme aufgrund ihres robusten numerischen Verhaltens oft eine gute Wahl.

3.4.2 Reduktion um einen frei wählbaren Entwicklungspunkt

Die Reduktion mittels Krylov-Unterräumen um einen frei wählbaren Entwicklungspunkt laufen sehr ähnlich zu denen um den Entwicklungspunkt Null ab. Auch die Beweisführung zur Momentenanpassung verläuft analog. Hier sollen daher die wesentlichen Änderungen an den Gleichungen zur Bestimmung der Krylov-Unterräume aufgeführt werden. Zudem wird auf verschiedene Algorithmen zum Finden eines geeigneten Entwicklungspunktes verwiesen.

Für die theoretischen Betrachtungen und Beweise der Übereinstimmung der Momente, muss zunächst die Übertragungsfunktion $g(s)$ angepasst werden. Hierzu wird der Parameter s um den gewählten Entwicklungspunkt $s_0 \neq 0$ verschoben und die Systemmatrix \mathbf{A} durch $(\mathbf{A} - s_0\mathbf{E})$ ersetzt. Damit ergibt sich die Übertragungsfunktion zu

$$g(s) = \mathbf{c}^T ((s - s_0)\mathbf{E} - (\mathbf{A} - s_0\mathbf{E}))^{-1} \mathbf{b}. \quad (3.50)$$

Durch das Ersetzen von \mathbf{A} ändern sich die Krylov-Unterräume ebenfalls. Die Eingangs- und Ausgangsunterräume ergeben sich zu

$$\mathbf{V} = K_q \left((\mathbf{A} - s_0\mathbf{E})^{-1} \mathbf{E}, (\mathbf{A} - s_0\mathbf{E})^{-1} \mathbf{b} \right) \quad (3.51)$$

$$\mathbf{W} = K_q \left((\mathbf{A} - s_0\mathbf{E})^{-T} \mathbf{E}^T, (\mathbf{A} - s_0\mathbf{E})^{-T} \mathbf{c} \right). \quad (3.52)$$

Nun stellt sich die Frage, wie ein solcher Entwicklungspunkt gewählt werden soll, oder ob vielleicht auch die Wahl mehrere Entwicklungspunkte sinnvoll ist [77]. Allgemein kann zur Wahl des Entwicklungspunktes gesagt werden:

- Für den Entwicklungspunkt $s_0 = 0$ weisen das Originalsystem und das reduzierte System die selbe stationäre Verstärkung auf.
- Um eine gute Approximation der langsamen Dynamiken eines Systems zu erreichen sollte ein kleines s_0 gewählt werden.
- Große Werte von s_0 führen zu einer guten Approximation des Systems in hohen Frequenzbereichen.
- Um einen großen Frequenzbereich abzudecken, ist es von Vorteil, mehrere Entwicklungspunkte in diesem Bereich zu wählen.

Die Grundidee für die Wahl des Entwicklungspunktes wurde bereits in [44] gelegt. Seitdem wird viel auf diesem Gebiet geforscht und es gibt bereits mehrere Algorithmen zum Auffinden günstiger Entwicklungspunkte. Diese Algorithmen gehen zumeist iterativ vor, so auch der IRKA-Algorithmus [78] oder der RK-ICOP-Algorithmus [77]. Mit Hilfe dieser Algorithmen können ein oder mehrere Entwicklungspunkte gewählt werden. Das Reduzieren der Systeme um diese Entwicklungspunkte führt meist zu besseren Approximationen der Originalsysteme in diesen Bereichen.

Bemerkung:

Das Verfahren der Krylov-Unterraummethode ist auch auf MIMO-Systeme anwendbar. Hierfür müssen die Ein- und Ausgangsvektoren in den Krylov-Unterräumen durch die Ein- und Ausgangsmatrizen ersetzt werden. Diese Krylov-Unterräume werden in der Literatur als Block-Krylov-Unterräume bezeichnet [79]. Die Algorithmen nach Lanczos und Arnoldi können auf diese Block-Krylov-Unterräume erweitert werden [54, 80, 81]. Dabei werden für jeden Eingangs- bzw. Ausgangsvektor entsprechend viele Momente in Übereinstimmung gebracht und die Vektoren zu den bis dahin gefundenen Krylov-Vektoren orthonormalisiert. Da für jeden weiteren Eingangs- bzw. Ausgangsvektor wieder Momente in Übereinstimmung gebracht werden müssen, erhöht sich mit jedem neuen Ein- bzw. Ausgang die Anzahl der Zustände im reduzierten Raum.

4 Parametererhaltende Reduktion von Rotormodellen

In diesem Kapitel sollen im ersten Teil einige Ansätze zur parametrischen Reduktion vorgestellt werden, dabei handelt es sich auch um aktuelle Forschungsansätze [35, 82, 83]. Im zweiten Teil wird ein neuer Algorithmus zur Reduktion von rotordynamischen Modellen vorgestellt, bei dem der Parameter erhalten bleibt. Dieser Ansatz ist speziell auf die Klasse der rotordynamischen Systeme abgestimmt und nutzt den in Kapitel 2 beschriebenen Aufbau dieser Systeme aus.

4.1 Bekannte parametrische Modellordnungsreduktionsverfahren

Sowohl für die nichtlineare als auch für die lineare parametrische Modellordnungsreduktion existieren bereits mehrere Ansätze. Da Rotoren lineare parametrische Systeme sind, wird im Folgenden kurz auf zwei Methoden der linearen, parametrischen Modellordnungsreduktion eingegangen.

4.1.1 Parametrische Modellordnungsreduktion durch Überlagerung von lokal reduzierten Modellen

Für die Reduktion eines von Parametern abhängigen Systems der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{p})\mathbf{x} + \mathbf{B}(\mathbf{p})\mathbf{u} \quad (4.1)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}(\mathbf{p})\mathbf{x}, \quad (4.2)$$

mit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{q \times n}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^q$ und dem Vektor der Parameter $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^k$, wurde bereits in [35, 82] ein Verfahren vorgestellt, welches in [83] ausgebaut wurde. Die Idee des Verfahrens besteht darin, mehrere sogenannte Schnappschüsse des Systems zu verschiedenen Parameterkonfigurationen zu erstellen. Diese so entstandenen Systeme zu je einem festen Parameter werden einzeln reduziert. Anschließend wird für Parameter, zu denen kein Schnappschuss existiert, zwischen ausgewählten Schnappschüssen interpoliert.

Für dieses Vorgehen wird das System in mehrere Teilsysteme

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_i &= \mathbf{A}(\mathbf{p}_i)\mathbf{x}_i + \mathbf{B}(\mathbf{p}_i)\mathbf{u} \\ \mathbf{y}_i &= \mathbf{C}(\mathbf{p}_i)\mathbf{x}_i\end{aligned}\tag{4.3}$$

zu verschiedenen Parametersätzen \mathbf{p}_i zerlegt. Mit Hilfe eines beliebigen Reduktionsverfahren, wie z. B. TBR oder der Krylov-Unterraummethode (siehe Kapitel 3, können diese Teilsysteme reduziert werden. Für die weiteren Erläuterungen wird davon ausgegangen, dass das System mit einer einseitigen Krylov-Unterraummethode reduziert wurde. Der Krylov-Unterraum wird mit $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n \times r}$ bezeichnet. Die reduzierten Teilsysteme ergeben sich somit zu

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_{i,r} &= \mathbf{V}_i^T \mathbf{A}(\mathbf{p}_i) \mathbf{V}_i \mathbf{x}_{i,r} + \mathbf{V}_i^T \mathbf{B}(\mathbf{p}_i) \mathbf{u} \\ \mathbf{y}_{i,r} &= \mathbf{C}(\mathbf{p}_i) \mathbf{V}_i \mathbf{x}_{i,r}.\end{aligned}\tag{4.4}$$

Um zwischen den Teilsystemen interpolieren zu können, müssen jedoch die Zustandsvektoren idealerweise im selben Raum existieren. Dies kann durch eine geschickt gewählte Transformation der Teilsysteme geschehen, hierbei wird für die Teilsysteme die Transformation

$$\mathbf{x}_i^* = \mathbf{T}_i \mathbf{x}_{i,r}\tag{4.5}$$

gewählt, wobei \mathbf{x}_i^* zunächst der transformierte Zustandsvektor eines Teilsystems ist. Jedoch sollten die quadratischen Transformationsmatrizen \mathbf{T}_i so gewählt sein, dass nach der Transformation alle \mathbf{x}_i^* dieselbe „physikalische“ Interpretation haben, also im selben Raum existieren. Somit gilt für alle i

$$\mathbf{x}_i^* = \mathbf{x}^*.\tag{4.6}$$

Durch die Überführung in einen gemeinsamen Zustandsraum kann zwischen den einzelnen Teilsystemen interpoliert werden. Das interpolierte Gesamtsystem ergibt sich zu

$$\dot{\mathbf{x}}^* = \sum_{i=1}^s \omega_i(p) \left(\mathbf{T}_i \mathbf{V}_i^T \mathbf{A}(\mathbf{p}_i) \mathbf{V}_i \mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{x}^* + \mathbf{T}_i \mathbf{V}_i^T \mathbf{B}(\mathbf{p}_i) \mathbf{u} \right) \quad (4.7)$$

$$\mathbf{y}_{i,r} = \sum_{i=1}^s \omega_i(p_i) \mathbf{C}(\mathbf{p}_i) \mathbf{V}_i \mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{x}^* , \quad (4.8)$$

mit den Systemmatrizen $\mathbf{A}(\mathbf{p}_i)$, $\mathbf{B}(\mathbf{p}_i)$ und $\mathbf{C}(\mathbf{p}_i)$ aus Gleichung 4.3 und den aus dem System 4.4 bekannten Projektionsmatrizen \mathbf{V}_i sowie den quadratischen Transformationsmatrizen \mathbf{T}_i aus Gleichung 4.5. Die mehrdimensionalen Gewichtsfunktionen $\omega_i(p)$ müssen passend zu den Problemen gewählt werden.

Wird beispielsweise zwischen zwei Parametern linear interpoliert, so ergibt sich für die Gewichtsfunktion der in Abbildung 4.1 gezeigte Verlauf. Für komplexe nicht lineare Probleme kann jedoch das Finden von geeigneten Interpolationsfunktionen sehr schwierig sein.

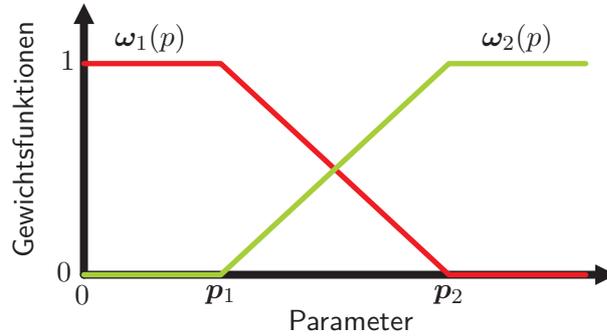


Abb. 4.1: Beispielhafter Verlauf zweier Gewichtsfunktion $\omega_1(p)$ und $\omega_2(p)$. Zwischen den Parameterausprägungen p_1 und p_2 wird linear interpoliert.

Zu Beginn der Forschungsarbeit auf dem Gebiet der Reduktion von Strukturen unter rotordynamischem Einfluss wurden erste Versuche unternommen, diese Systeme mit der Interpolationsmethode zu reduzieren. Jedoch stellte sich heraus, dass die Teilsysteme für die Parameter sehr eng gewählt werden müssen, um eine gute Approximation des Frequenzbereichs auch bei den Parametern zwischen den Stützstellen zu erhalten. Somit ist diese Variante der parametrischen Reduktion von Systemen unter rotordynamischem Einfluss nicht effizient genug und wurde daher nicht weiter verfolgt.

4.1.2 Guard-basierte Modellordnungsreduktion schaltender linearer Systeme

Ein schaltendes System liegt dann vor, wenn mehrere Teilsysteme

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}_i \mathbf{x} + \mathbf{B}_i \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}_i \mathbf{x}\end{aligned}\tag{4.9}$$

mit $\mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B}_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\mathbf{C}_i \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ existieren, zwischen denen beliebig hin und her geschaltet werden kann.

Solche schaltenden Systeme werden beispielsweise in [84, 85] vorgestellt. Hierbei wird in zeitabhängiges, ausgangabhängiges Schalten oder zustands- und ausgangabhängiges Schalten unterschieden.

Ein rotordynamisches System kann als schaltendes System aufgefasst werden, indem es in drehzahlunabhängige Teilsysteme unterteilt wird, welche jeweils einen definierten Parameterbereich abdecken. Das Schalten erfolgt dann in Abhängigkeit von der Drehzahl. Diese ist eine Systemgröße, so dass sich für rotordynamische Systeme ein zustands- bzw. ausgangabhängiges Schaltsystem ergibt.

Zunächst wurde bereits in [84] gezeigt, dass jedes zustandsabhängige System in ein ausgangabhängiges System, durch eine Erweiterung der \mathbf{C} -Matrix, überführt werden kann. Zudem hat sich auch die Methode der sogenannten Guard-Systeme als sehr effizient erwiesen. Der Übergang von einem zustandsabhängigen System in ein guard-basiertes System ist in Abbildung 4.2 veranschaulicht.

Hierbei wird das zu schaltende System Σ_Z dubliziert, wobei die Ausgangsmatrix ersetzt wird, so dass im Guard-System Σ_A lediglich die Zustände, die für das Schalten verantwortlich sind, als Ausgänge betrachtet werden. Dadurch ergibt sich für das eigentliche System ein zeitabhängiges Schaltsystem Σ_t .

Für die Reduktion eines Rotormodells bedeutet dies nun, dass das Modell in mehrere Teilmodelle unterteilt werden muss und zusätzlich Guard-Systeme definiert werden müssen. Diese Systeme können dann mit den bekannten Reduktionsverfahren aus Kapitel 3 reduziert werden.

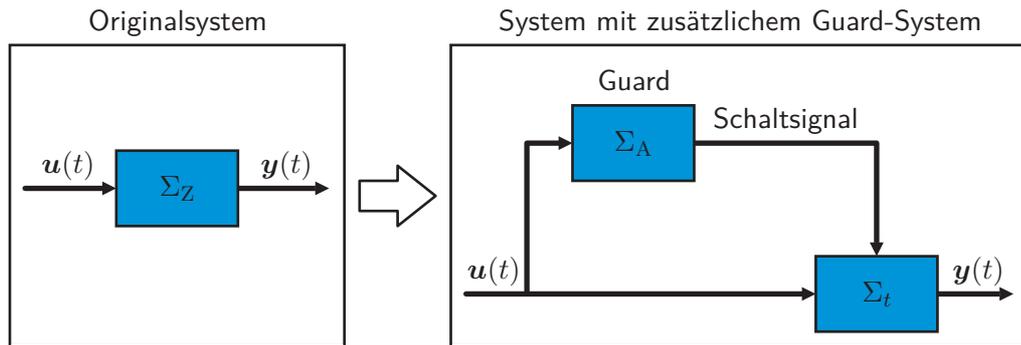


Abb. 4.2: Übergang eines zustandsabhängigen Schaltsystems Σ_Z in ein zeitabhängiges Schaltsystem Σ_t mit zusätzlichem, ausgangsabhängig geschaltetem Guard-System Σ_A (nach [84])

In der Semesterarbeit von S. Cremer [85] wurde ein Rotormodell mit 460 Zuständen betrachtet, welches in 11 Teilsysteme und 11 Guard-Systeme aufgeteilt wurde. Die Guard-Systeme konnten mit einem relativen Fehler im Bereich von 10^{-4} auf die Ordnung 2 reduziert werden. Für die nun zeitabhängig geschalteten Teilsysteme wurde jeweils eine Reduktionsgröße von 10 gewählt. Alle Teil- und Guard-Systeme wurden mit der TBR-Methode reduziert. Erste Simulationen eines Hochlaufes und eines anschließenden zyklischen Abbremsens lieferten bereits recht gute Ergebnisse mit Fehlern, die unter $8 \cdot 10^{-4}$ lagen.

Der Vorteil dieser Methode besteht darin, dass auch nichtlineare Systeme stückweise linear angenähert werden können. Dieses junge Forschungsgebiet birgt jedoch noch einige Nachteile. Zum Einen müssen die Systeme für jedes Teilsystem und jedes Guard-System einzeln reduziert werden. Zum Anderen kommt es, je nach Größe des Reduktionsfehlers im Guard-System, zu unterschiedlich großen Abweichungen bezüglich des Schaltzeitpunktes. Häufiges Schalten kann bei dieser Methode, durch ungünstige Schaltzeitpunkte, sogar zu Instabilitäten führen.

Für die linear parametrischen Rotormodelle, die in dieser Arbeit betrachtet werden, überwiegen derzeit jedoch die Nachteile der Methode. Daher soll im nächsten Abschnitt eine, im Rahmen dieser Arbeit entstandene, neue Methode zur parametererhaltenden Reduktion von rotordynamischen Modellen vorgestellt werden.

4.1.3 Multi-Parameter Momenten Anpassung

Bei den beiden bisher vorgestellten Methoden werden zunächst die reduzierten Systeme zu verschiedenen Parametern berechnet. Anschließend wird mit diesen weiter gearbeitet. Ein anderer Ansatz, welcher z. B. in [86–88] verfolgt wird, greift einen Schritt früher in den Reduktionsprozess ein. Bei diesen Reduktionsalgorithmen werden zu verschiedenen Parameterausprägungen Reduktionsmatrizen mit der Krylov-Unterraummethode berechnet. Diese werden vor dem Erstellen des reduzierten Systems zu einem Projektionsraum zusammengeführt, so dass mit nur einem Projektionsraum genau ein reduziertes parametrisches System gebildet wird.

Bei der Multi-Parameter Momenten Anpassung wird zunächst von einem System erster Ordnung ausgegangen welches sich als

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \sum_{i=1}^k p_i \mathbf{A}_i \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C} \mathbf{x}\end{aligned}\tag{4.10}$$

darstellen lässt, wobei $\mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Systemmatrizen zu den k verschiedenen Parametern $p_i \in \mathbb{R}$ sind und $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ sowie $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ die bekannten Systemgrößen darstellen.

Mit der Krylov-Unterraummethode werden zu n_p beliebigen aber festgelegten Parameterausprägungen

$$\mathbf{p}_i = \begin{pmatrix} p_1 = p_{i,1} \\ p_2 = p_{i,2} \\ \vdots \\ p_k = p_{i,k} \end{pmatrix}\tag{4.11}$$

die Projektionsräume \mathbf{V}_i gebildet mit $i = [1, n_p]$. Diese Projektionsräume werden zusammengefasst zu einem alle diese Räume umspannenden Projektionsraum \mathbf{V} mit

$$\text{span}(\mathbf{V}) = \text{span}(V_1, V_2, \dots, V_{n_p}).\tag{4.12}$$

Das System aus Gleichung 4.10 kann mit der Projektionsmatrix \mathbf{V} reduziert werden zu

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_r &= \sum_{i=1}^k p_i \mathbf{V}^T \mathbf{A}_i \mathbf{V} \mathbf{x}_r + \mathbf{V}^T \mathbf{B} \mathbf{u} \\ \mathbf{y}_r &= \mathbf{C} \mathbf{V} \mathbf{x}_r.\end{aligned}\tag{4.13}$$

Es ist leicht einzusehen, dass diese Form der Reduktion eine Momentenanpassung für die festen Parameterausprägungen \mathbf{p}_i im reduzierten System sichert. Jedoch kann bisher keine Aussage über die Momente zu anderen Parameterausprägungen getroffen werden.

Der Vorteil dieser Methode liegt in der Erhaltung des Parameters nach der Reduktion. Das reduzierte System wird zumeist etwas größer sein als die einzelnen reduzierten Systeme in den vorangegangenen Methoden, da die Eigenschaften der verschiedenen Parameterausprägungen in einem System abgebildet werden. Jedoch ist hier für die Berechnung eines beliebigen Parametersatzes nur noch ein reduziertes System notwendig und es muss nicht mehr zwischen mehreren reduzierten Systemen interpoliert oder geschaltet werden. Dies hat vor allem für transiente Rechnungen erhebliche Vorteile.

4.2 Ω P-MOR – Ein neues parametererhaltendes Reduktionsverfahren für rotordynamische Systeme

In diesem Abschnitt soll nun das Ω P-MOR Verfahren (Ω Preserving MOR) vorgestellt werden. Das Verfahren nutzt den in 4.1.3 vorgestellte Ansatz, jedoch werden im Ω P-MOR Verfahren die Charakteristika der rotordynamischen Systeme ausgenutzt, wodurch die Reduktion effizienter wird. Insbesondere sind für die Bestimmung der Projektionsmatrizen nur zwei Stützstellensysteme notwendig.

Zudem ist das Verfahren nicht auf die Krylov-Unterraummethode beschränkt. Das Vorgehen sowie der Beweis für die Reduktionsgüte im gesamten Parameterbereich sind für alle projektiven Ordnungsreduktionsverfahren (z. B. Balanciertes Abschneiden und Krylov-Unterraummethode) gültig. Die Reduktion mit dem Ω P-MOR Verfahren ermöglicht es somit den kompletten Parameterbereich mit einem reduzierten System abzudecken und somit transiente Rechnungen schnell und effektiv durchzuführen.

4.2.1 Eine neuer Ansatz zur parametrischen Reduktion rotodynamischer Systeme

In Kapitel 2 wurde bereits der Aufbau des Differentialgleichungssystems eines Rotors erläutert. Ein üblicher Übergang in ein System erster Ordnung ist in Gleichung 3.2 gezeigt worden. Das System erster Ordnung für den Rotor hat sich hierbei zu

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{Z} \\ \mathbf{Z} & \mathbf{M} \end{pmatrix}}_E \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{z}} \\ \ddot{\mathbf{z}} \end{pmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{Z} & \mathbf{I}_n \\ -\mathbf{K} & -(\mathbf{D} + \Omega\mathbf{G}) \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{z} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}(t)} + \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{Z} \\ \mathbf{J} \end{pmatrix}}_B \mathbf{u}(t) \quad (4.14)$$

$$\mathbf{y}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{L} & \mathbf{Z} \end{pmatrix}}_C \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{z} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}(t)}.$$

ergeben. Dabei sind die Systemgrößen durch die Masse $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, die Dämpfung $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, die Gyroskopie $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, die Steifigkeit $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, die Eingangs- und Ausgangsmatrizen $\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ und $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n \times p}$, den Zustandsvektor $\mathbf{z}(t) \in \mathbb{R}^n$, den Eingangsvektor $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$, den Ausgangsvektor $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$ und die Drehzahl Ω gegeben. Das System erster Ordnung ist folglich von der Größe $2n$. Dieser Modellaufbau wird unter anderem auch in der internen Software „SimSys“ des Siemens Dynamowerks zur transienten Simulation von Rotoren verwendet. Der Nachteil dieses Modellaufbaus liegt jedoch darin, dass die Systemmatrix \mathbf{A} für jeden Zeitschritt der Simulation neu aufgebaut werden muss, da sich in jedem Zeitschritt die Drehgeschwindigkeit Ω des Rotors ändern kann.

Daher wird hier eine neue, mathematisch äquivalente Formulierung des Systems erster Ordnung eingeführt, wobei die Systemmatrix \mathbf{A} in den parameterabhängigen Teil \mathbf{A}_G und den parameterunabhängigen Teil \mathbf{A}_0 aufgeteilt wird. Mit den bereits zu Gleichung 4.14 beschriebenen Systemmatrizen ergibt sich das neue System erster Ordnung zu

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{Z} \\ \mathbf{Z} & \mathbf{M} \end{pmatrix}}_{\mathbf{E}} \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{z}} \\ \ddot{\mathbf{z}} \end{pmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{Z} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{K} & -\mathbf{D} \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}_0} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{z} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}(t)} + \Omega \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{Z} & \mathbf{Z} \\ \mathbf{Z} & -\mathbf{G} \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}_G} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{z} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}(t)} + \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{Z} \\ \mathbf{J} \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}} \mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{L} & \mathbf{Z} \end{pmatrix}}_{\mathbf{C}} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{z} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}(t)}.$$
(4.15)

Mit dieser Formulierung des Systems ist es möglich, eine transiente Simulation durchzuführen, ohne für jeden Zeitschritt die Systemmatrizen neu aufbauen zu müssen.

Ein weiterer Vorteil dieser Darstellung wird sichtbar, wenn das System mittels geeigneter Reduktionsmatrizen \mathbf{V} und \mathbf{W} in einen kleineren Raum projiziert wird. Dann ergibt sich das reduzierte System aus

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^T \mathbf{E} \mathbf{V} \dot{\mathbf{x}}_r(t) &= \mathbf{W}^T \mathbf{A}_0 \mathbf{V} \mathbf{x}_r(t) + \Omega \mathbf{W}^T \mathbf{A}_G \mathbf{V} \mathbf{x}_r(t) + \mathbf{W}^T \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}_r &= \mathbf{C} \mathbf{V} \mathbf{x}_r(t), \end{aligned}$$
(4.16)

mit dem reduzierten Zustandsvektor $\mathbf{x}_r \in \mathbb{R}^q$. Hierbei wurde die allgemeine Kommutativität der Multiplikation mit einem Skalar ausgenutzt. Werden die projizierten Systemmatrizen kurz als reduzierte Matrizen geschrieben, ergibt sich für die transiente Berechnung des reduzierten Systems

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_r \dot{\mathbf{x}}_r(t) &= \mathbf{A}_{0,r} \mathbf{x}_r(t) + \Omega \mathbf{A}_{G,r} \mathbf{x}_r(t) + \mathbf{B}_r \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}_r(t) &= \mathbf{C}_r \mathbf{x}_r(t), \end{aligned}$$
(4.17)

mit $\mathbf{E}_r, \mathbf{A}_{0,r}, \mathbf{A}_{G,r} \in \mathbb{R}^{q \times q}$, $\mathbf{B}_r \in \mathbb{R}^{q \times m}$ und $\mathbf{C}_r \in \mathbb{R}^{p \times q}$.

Der Vorteil dieser Schreibweise liegt darin, dass auch nach der Reduktion der Parameter Ω weiterhin zugänglich bleibt. Das reduzierte System kann also analog zum Originalsystem transient simuliert werden.

Die Frage nach einer geschickten Wahl der Projektionsmatrizen soll im nächsten Abschnitt geklärt werden. Es wird eine Methode vorgestellt, mit deren Hilfe es möglich ist, Projektionsmatrizen \mathbf{V} und \mathbf{W} zu finden, welche den gesamten Parameterbereich des Rotors abdecken. Damit kann ein reduzierter Rotor mit nur einem reduzierten System innerhalb seines Drehzahlbereiches

transient simuliert werden, was einen extremen Zeitgewinn (siehe Kapitel 5) mit sich bringt.

Bemerkung:

Zur Erhöhung der Lesbarkeit werden die folgenden Schritte und Beweise für ein einseitiges Krylov-Unterraumverfahren erläutert. Das Vorgehen kann jedoch auf triviale Weise auf zweiseitige Reduktionsverfahren erweitert werden. Zudem können auch andere Projektionsverfahren wie das Balancierte Abschneiden verwendet werden.

4.2.2 Bestimmung der Projektionsmatrizen zur Drehzahl Null und zur maximalen Drehzahl

Als erstes wird das System aus Gleichung 4.15 bei der Drehzahl Null betrachtet. Dadurch verschwindet \mathbf{A}_G und es ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}_0\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \end{aligned} \tag{4.18}$$

mit den aus Gleichung 4.15 bekannten Systemgrößen. Für dieses System wird der Eingangs-Krylov-Unterraum

$$\mathbf{V}_0 = K_{q_0}(\mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{E}, \mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{B}) \tag{4.19}$$

mit $\mathbf{V}_0 \in \mathbb{R}^{2n \times q_0}$ bestimmt.

Nach der Reduktion für Drehzahl Null wird nun das System für eine maximale Drehzahl reduziert. Die maximale Drehzahl Ω_{\max} ist für jeden Rotor und auch für jede Art von Simulation verschieden. Für eine transiente Simulation eines Hochlaufs des Rotors bis zur Nenndrehzahl sollte die maximale Drehzahl leicht über der Nenndrehzahl gewählt werden. Für Simulationen, die den doppelten Nenndrehzahlbereich abdecken sollen, muss die maximale Drehzahl dementsprechend höher gewählt werden. Die Drehzahl Ω_{\max} muss also für jeden Rotor individuell gewählt werden. Für spätere Automatisierungen kann die Nenndrehzahl jedoch bereits jetzt schon, gemeinsam mit dem Modell, aus der Siemens internen Rotordynamiksoftware „VARFEM“ exportiert werden.

Mit der Festlegung von Ω_{\max} ergibt sich das System 4.15 zu

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}_0\mathbf{x}(t) + \Omega_{\max}\mathbf{A}_G\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Auch für dieses System kann ein Eingangs-Krylov-Unterraum

$$\mathbf{V}_G = K_{q_G} \left((\mathbf{A}_0 + \Omega_{\max}\mathbf{A}_G)^{-1} \mathbf{E}, (\mathbf{A}_0 + \Omega_{\max}\mathbf{A}_G)^{-1} \mathbf{B} \right) \quad (4.21)$$

bestimmt werden, wobei $\mathbf{V}_G \in \mathbb{R}^{2n \times q_G}$ ist.

4.2.3 Bestimmung der Projektionsmatrizen für den gesamten Parameterraum

Um die in Abschnitt 4.2.2 gefundenen Projektionsräume zu vereinen, werden diese zunächst in einer Matrix

$$\mathbf{V}_{0,G} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_0 & \mathbf{V}_G \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

mit $\mathbf{V}_{0,G} \in \mathbb{R}^{2n \times (q_0 + q_G)}$ zusammengefasst. Diese Matrix ist jedoch nicht orthogonal und muss auch nicht den maximal möglichen Rang besitzen. Dass der Rang der Matrix kleiner als der maximal mögliche Rang ist, lässt sich anschaulich leicht erklären. Sowohl für die Dynamik des Systems bei der Drehzahl Null als auch bei maximaler Drehzahl, sind einige Projektionsrichtungen gleich wichtig und somit in beiden reduzierten Systemen wiederzufinden.

Es wird nun eine Matrix \mathbf{V} gesucht, welche denselben Raum aufspannt wie die Vektoren der Matrix $\mathbf{V}_{0,G}$, dabei den maximal möglichen Rang besitzt und zudem orthogonal ist. Diese drei Anforderungen können durch eine Singulärwertzerlegung der Matrix $\mathbf{V}_{0,G}$ erfüllt werden.

Die bereits in Kapitel 3.3.1 beschriebene Singulärwertzerlegung für die Matrix $\mathbf{V}_{0,G}$ ist

$$\mathbf{V}_{0,G} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T, \quad (4.23)$$

mit den orthogonalen Matrizen $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ und $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{(q_0 + q_G) \times (q_0 + q_G)}$ sowie einer Diagonalmatrix $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{2n \times (q_0 + q_G)}$. Da die Matrix $\mathbf{V}_{0,G}$ nicht den maximalen Rang hat, besitzt sie folglich nur k Singulärwerte, wobei

$$k < (q_0 + q_G) \ll 2n$$

gilt. Das bedeutet, die Singulärwertzerlegung aus Gleichung 4.23 kann präziser geschrieben werden als

$$\mathbf{V}_{0,G} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_k & \widetilde{\mathbf{U}}_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{S}_k & \mathbf{Z} \\ \mathbf{Z} & \mathbf{Z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V}_k^T \\ \widetilde{\mathbf{V}}_k^T \end{pmatrix}. \quad (4.24)$$

Die gesuchte orthogonale Matrix mit vollem Rang, welche denselben Raum aufspannt wie $\mathbf{V}_{0,G}$ ist \mathbf{U}_k . Dass diese Matrix denselben Raum aufspannt, wird unter anderem bereits in [58] erwähnt und im Folgenden auch mathematisch bewiesen.

Satz 4.1. *Sei \mathbf{A} eine Matrix aus $\mathbb{R}^{m \times n}$ und $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T$ die Singulärwertzerlegung von \mathbf{A} mit k Singulärwerten größer Null, wobei $k \leq n$ und $k \leq m$ sei. Die Singulärwertzerlegung lässt sich dann durch*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_k & \widetilde{\mathbf{U}}_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{S}_k & \mathbf{Z} \\ \mathbf{Z} & \mathbf{Z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V}_k^T \\ \widetilde{\mathbf{V}}_k^T \end{pmatrix}, \quad (4.25)$$

darstellen, wobei $\mathbf{U}_k \in \mathbb{R}^{m \times k}$, $\mathbf{S}_k \in \mathbb{R}^{k \times k}$ und $\mathbf{V}_k \in \mathbb{R}^{n \times k}$ ist.

Aus dieser Darstellung folgt, dass \mathbf{A} als

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}_k \mathbf{S}_k \mathbf{V}_k^T \quad (4.26)$$

darstellbar ist und es gilt

$$\text{bild}(\mathbf{A}) = \text{bild}(\mathbf{U}_k). \quad (4.27)$$

Beweis

Die erste Aussage des Satzes, dass

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}_k \mathbf{S}_k \mathbf{V}_k^T$$

gilt, ist in trivialer Weise zu zeigen, da die Matrizen $\widetilde{\mathbf{U}}_k$ und $\widetilde{\mathbf{V}}_k$ jeweils mit Nullmatrizen multipliziert werden. Es kann somit zum zweiten Punkt des Satzes übergegangen werden.

Der Bildraum $\text{bild}(\mathbf{A})$ einer Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ist definiert als

$$\text{bild}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \mid \exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}\}. \quad (4.28)$$

Es muss folglich gezeigt werden, dass jedes Element \mathbf{y} aus dem Bildraum von \mathbf{A} auch ein Element des Bildraumes von \mathbf{U}_k ist und umgekehrt. Somit ergeben sich für die Beweisführung zwei Fälle.

1. Fall: $\mathbf{y} \in \text{bild}(\mathbf{A}) \Rightarrow \mathbf{y} \in \text{bild}(\mathbf{U}_k)$

Wenn \mathbf{y} ein Element der Menge $\text{bild}(\mathbf{A})$ ist, so existiert ein $\tilde{\mathbf{x}}$, so dass gilt $\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{y}$ und es soll gelten, dass auch ein \mathbf{x} existiert, so dass $\mathbf{U}_k\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Daraus folgt, dass ein \mathbf{x} gefunden werden muss, so dass

$$\mathbf{U}_k\mathbf{x} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} \quad (4.29)$$

gilt. Zunächst kann \mathbf{A} durch die Singulärwertzerlegung (siehe Gleichung 4.26) überführt werden zu

$$\mathbf{U}_k\mathbf{x} = \mathbf{U}_k\mathbf{S}_k\mathbf{V}_k^T\tilde{\mathbf{x}} \quad (4.30)$$

$$\mathbf{U}_k^T\mathbf{U}_k\mathbf{x} = \mathbf{U}_k^T\mathbf{U}_k\mathbf{S}_k\mathbf{V}_k^T\tilde{\mathbf{x}}. \quad (4.31)$$

Die Gleichung 4.31 kann auf beiden Seiten von links mit der Inversen von $\mathbf{U}_k^T\mathbf{U}_k \in \mathbb{R}^{k \times k}$ multipliziert werden. Diese Inverse der quadratischen Matrix existiert, da \mathbf{U}_k sich aus k orthogonalen Spaltenvektoren \mathbf{u}_i zusammensetzt mit $\mathbf{U}_k = (\mathbf{u}_1 \ \dots \ \mathbf{u}_k)$, so dass sich für das Produkt $\mathbf{U}_k^T\mathbf{U}_k$ Folgendes ergibt:

$$\mathbf{U}_k^T\mathbf{U}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1^T\mathbf{u}_1 & \dots & \mathbf{u}_1^T\mathbf{u}_k \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{u}_k^T\mathbf{u}_1 & \dots & \mathbf{u}_k^T\mathbf{u}_k \end{pmatrix}.$$

Durch die Orthogonalität der Vektoren \mathbf{u}_i gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i^T\mathbf{u}_j &= 0 \quad \text{für } i \neq j \\ \mathbf{u}_i^T\mathbf{u}_j &\neq 0 \quad \text{für } i = j, \end{aligned}$$

und somit ist $\mathbf{U}_k^T\mathbf{U}_k$ eine quadratische Diagonalmatrix ohne Nullen auf der Diagonale und dementsprechend invertierbar. Somit ergibt sich aus der Gleichung 4.31

$$\left(\mathbf{U}_k^T \mathbf{U}_k \mathbf{x}\right)^{-1} \mathbf{U}_k^T \mathbf{U}_k \mathbf{x} = \left(\mathbf{U}_k^T \mathbf{U}_k \mathbf{x}\right)^{-1} \mathbf{U}_k^T \mathbf{U}_k \mathbf{S}_k \mathbf{V}_k^T \tilde{\mathbf{x}} \quad (4.32)$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{S}_k \mathbf{V}_k^T \tilde{\mathbf{x}}. \quad (4.33)$$

Damit ist gezeigt, dass aus der Existenz eines $\tilde{\mathbf{x}}$ die Existenz eines \mathbf{x} folgt und somit der gesamte Bildraum von \mathbf{A} im Bildraum von \mathbf{U}_k enthalten ist. Es bleibt noch die Umkehrung zu zeigen.

2. Fall: $\mathbf{y} \in \text{bild}(\mathbf{U}_r) \Rightarrow \mathbf{y} \in \text{bild}(\mathbf{A})$

Wenn \mathbf{y} ein Element der Menge $\text{bild}(\mathbf{U}_k)$ ist, so existiert ein \mathbf{x} , so dass $\mathbf{U}_k \mathbf{x} = \mathbf{y}$ gilt und es soll gelten, dass auch ein $\tilde{\mathbf{x}}$ existiert, so dass $\mathbf{A} \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{y}$. Daraus folgt es muss ein $\tilde{\mathbf{x}}$ gefunden werden, so dass

$$\mathbf{U}_k \mathbf{x} = \mathbf{A} \tilde{\mathbf{x}} \quad (4.34)$$

gilt. Die ersten Schritte dieses Beweises sind analog zu den Schritten 4.30 bis 4.32. Es ergibt sich also wie im ersten Fall

$$\mathbf{x} = \mathbf{S}_k \mathbf{V}_k^T \tilde{\mathbf{x}}. \quad (4.35)$$

Da \mathbf{S}_k eine Diagonalmatrix mit vollem Rang ist, kann sie invertiert und von links an die Gleichung multipliziert werden

$$\mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{x} = \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{S}_k \mathbf{V}_k^T \tilde{\mathbf{x}} \quad (4.36)$$

$$\mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{x} = \mathbf{V}_k^T \tilde{\mathbf{x}}. \quad (4.37)$$

Die Gleichung kann von links mit der Matrix \mathbf{V}_k multipliziert werden zu

$$\mathbf{V}_k \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{x} = \mathbf{V}_k \mathbf{V}_k^T \tilde{\mathbf{x}}, \quad (4.38)$$

wobei sich auf der rechten Seite die quadratische Matrix $\mathbf{V}_k \mathbf{V}_k^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ergibt, welche aus denselben Gründen wie $\mathbf{U}_k^T \mathbf{U}_k$ aus Fall 1 invertierbar ist. Somit ergibt sich für die Gleichung 4.38 mit der von links multiplizierten Inversen

$$\left(\mathbf{V}_k \mathbf{V}_k^T\right)^{-1} \mathbf{V}_k \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{x} = \left(\mathbf{V}_k \mathbf{V}_k^T\right)^{-1} \mathbf{V}_k \mathbf{V}_k^T \tilde{\mathbf{x}} \quad (4.39)$$

$$\left(\mathbf{V}_k \mathbf{V}_k^T\right)^{-1} \mathbf{V}_k \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}. \quad (4.40)$$

Somit ist die Existenz eines $\tilde{\mathbf{x}}$ nachgewiesen. Dies bedeutet, dass der gesamte Bildraum von \mathbf{U}_k im Bildraum von \mathbf{A} enthalten ist.

Fall 1 und 2 zusammen betrachtet zeigen somit, dass

$$\text{bild}(\mathbf{A}) = \text{bild}(\mathbf{U}_k).$$

□

Bemerkung:

In der Realität führt eine Singulärwertzerlegung häufig dazu, dass es nicht nur signifikante Singulärwerte gibt und einige die echt Null sind. Vielmehr ergeben sich durch numerische Schmutzeffekte oder durch nur sehr kleine Abweichungen der Projektionsräume meist auch sehr kleine Singulärwerte.

Für die Wahl der Größe von k bleibt es also dem Nutzer überlassen, bis zu welchem Singulärwert er diese als signifikant einstuft. Werden nur sehr kleine Singulärwerte weggeschnitten, so entspricht der durch \mathbf{U}_k aufgespannte Raum dem durch $\mathbf{V}_{0,G}$ aufgespannten Raum mit nur minimalen Abweichungen.

Der gemeinsame Projektionsraum wird für ein gewähltes k durch

$$\mathbf{V} := \mathbf{U}_k \tag{4.41}$$

definiert und wird als Projektionsmatrix auf das Gesamtsystem, wie in Gleichung 4.16 gezeigt, angewendet.

4.2.4 Nachweis der vollständigen Abdeckung des Parameterraumes

Aus den Abschnitten 4.2.2 und 4.2.3 ist ersichtlich, dass das mit \mathbf{V} reduzierte System eine gute Approximation für das Originalsystem bei den Drehzahlen Null und Ω_{\max} darstellt. Die Behauptung, dass dieses Verfahren auch den gesamten Parameterraum $[0, \Omega_{\max}]$ gut approximiert, wenn die Randsysteme gut approximiert sind, wird zusammen mit dem folgenden neuen Satz bewiesen.

Satz 4.2. Gegeben sei ein rotordynamisches System in der aus Gleichung 4.15 bekannten Zustandsraumdarstellung

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}_0\mathbf{x}(t) + \Omega\mathbf{A}_G\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t). \end{aligned} \quad (4.42)$$

Es sei der Eingangs-Krylov-Unterraum

$$\mathbf{V}_0 = K_{q,0}(\mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{E}, \mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{B}) \quad (4.43)$$

für das System bei Drehzahl Null und

$$\mathbf{V}_G = K_{q,G}((\mathbf{A}_0 + \Omega_{\max}\mathbf{A}_G)^{-1}\mathbf{E}, (\mathbf{A}_0 + \Omega_{\max}\mathbf{A}_G)^{-1}\mathbf{B}) \quad (4.44)$$

für das System bei der maximalen Drehzahl Ω_{\max} gegeben.

Wird für die Reduktion des parametrischen, rotordynamischen Systems die Projektionsmatrix \mathbf{V} so aus der Singulärwertzerlegung von $(\mathbf{V}_0 \ \mathbf{V}_G)$ gewählt, dass gilt

$$\mathbf{V} = \mathbf{U}_k^V, \quad (4.45)$$

wobei sich \mathbf{U}_k^V aus der Singulärwertzerlegung des kombinierten Raumes

$$(\mathbf{V}_0 \ \mathbf{V}_G) = (\mathbf{U}_k^V \ \tilde{\mathbf{U}}_k^V) \begin{pmatrix} \mathbf{S}_k^V & \mathbf{Z} \\ \mathbf{Z} & \mathbf{Z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\mathbf{V}_k^V)^T \\ (\tilde{\mathbf{V}}_k^V)^T \end{pmatrix} \quad (4.46)$$

ergibt, dann kann mit dem reduzierten rotordynamischen System

$$\begin{aligned} \mathbf{V}^T\mathbf{E}\mathbf{V}\dot{\mathbf{x}}_r(t) &= \mathbf{V}^T\mathbf{A}_0\mathbf{V}\mathbf{x}_r(t) + \Omega\mathbf{V}^T\mathbf{A}_G\mathbf{V}\mathbf{x}_r(t) + \mathbf{V}^T\mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}_r(t) &= \mathbf{C}\mathbf{V}\mathbf{x}_r(t) \end{aligned} \quad (4.47)$$

das System 4.42 im gesamten Parameterbereich $\Omega \in [0, \Omega_{\max}]$ genauso gut approximiert werden wie zu den Drehzahlen Null und Ω_{\max} .

Beweis

Sowohl die Projektionsmatrizen \mathbf{V} , als auch die Systemmatrix \mathbf{A} bzw. in diesem Fall \mathbf{A}_0 und \mathbf{A}_G können als Räume, die durch die Spaltenvektoren der Matrizen aufgespannt werden, betrachtet werden. Somit beschreibt jeder Spal-

tenvektor der Systemmatrix eine Raumrichtung des dynamischen Systems. Mit Hilfe des Krylov-Unterraumverfahrens werden dominante Raumrichtungen des dynamischen Systems erkannt und bei der Reduktion erhalten, wenn auch nicht unbedingt in ihrer ursprünglichen Darstellung. Wenn also eine solche Raumrichtung für das dynamische System relevant ist, wird sie sich im Krylov-Eingangsraum \mathbf{V} widerspiegeln (im Folgenden: „die Raumrichtung bzw. der Vektor ist im Krylov-Unterraum enthalten“).

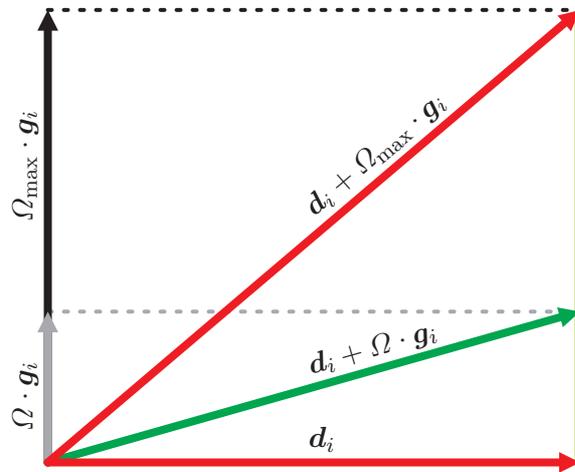


Abb. 4.3: Zweidimensionale Darstellung der durch \mathbf{d}_i und $\mathbf{d}_i + \Omega_{\max} \cdot \mathbf{g}_i$ aufgespannten Hyperebene

Die allgemeine Systemmatrix $\mathbf{A}(\Omega) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ergibt sich aus der Summe der getrennten Systemmatrizen $\mathbf{A}_0 + \Omega \mathbf{A}_G$. Da \mathbf{A}_G , wie in Gleichung 4.15 erläutert, nur im unteren rechten Viertel besetzt ist, wird für den Beweis ein beliebiger Spaltenvektor aus der rechten Hälfte der Matrix $\mathbf{A}(\Omega)$ gewählt. Die Beweisführung für die Spaltenvektoren der linken Matrixhälfte ist trivial, da sie nicht vom Parameter beeinflusst werden.

Abbildung 4.3 dient zur Veranschaulichung der folgenden Beweisschritte und der Fallunterscheidung. Der gewählte Spaltenvektor \mathbf{a}_i der Systemmatrix \mathbf{A} lässt sich folglich auch als Summe schreiben. Es sei

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{d}_i + \Omega \cdot \mathbf{g}_i, \quad (4.48)$$

wobei \mathbf{d}_i der i -te Spaltenvektor von \mathbf{A}_0 ist, welcher maßgeblich durch die Dämpfung \mathbf{D} des Systems beschrieben ist, und \mathbf{g}_i sei der i -te Spaltenvek-

tor der Matrix \mathbf{A}_G , welche ausschließlich durch die Gyroskopie \mathbf{G} beeinflusst wird.

Die Vektoren \mathbf{d}_i und $\Omega_{\max} \cdot \mathbf{g}_i$ sind Vektoren des \mathbb{R}^n und spannen in diesem eine zweidimensionale Hyperebene auf, welche folglich im zweidimensionalen Raum, wie in Abbildung 4.3, dargestellt werden kann. Für verschiedene Drehzahlen Ω ergeben sich ausschließlich Vektoren, die den Bereich zwischen den Vektoren \mathbf{d}_i und $\Omega_{\max} \cdot \mathbf{g}_i$ nicht verlassen.

Der weitere Beweis stützt sich nun darauf, zu zeigen, dass je nach Relevanz der Raumdimensionen, die durch \mathbf{d}_i und $\Omega_{\max} \cdot \mathbf{g}_i$ aufgespannte Ebene mit erfasst ist und somit die Dynamik des Systems für alle Parameter von Ω im reduzierten Raum beschrieben wird. Für den Fall, dass eine einzelne Dimension als nicht relevant erkannt wird, wird gezeigt, dass für alle anderen Drehzahlen diese Dimension ebenfalls nicht relevant sein kann.

Um alle Fälle zu erfassen, wird für die Vektoren \mathbf{d}_i und $\mathbf{d}_i + \Omega_{\max} \cdot \mathbf{g}_i$ ihre jeweilige Relevanz bei der Reduktion betrachtet. Daraus ergeben sich vier mögliche Kombinationen, die in den folgenden Fällen einzeln betrachtet werden.

1. *Fall:* \mathbf{d}_i ist bei Drehzahl Null relevant
 $\mathbf{d}_i + \Omega_{\max} \cdot \mathbf{g}_i$ ist bei Drehzahl Ω_{\max} relevant

Wenn \mathbf{d}_i vom Reduktionsalgorithmus als relevant erfasst wurde, dann ist die Raumrichtung von \mathbf{d}_i folglich im Krylov-Unterraum \mathbf{V}_0 enthalten. Ebenso verhält es sich mit dem Vektor $\mathbf{d}_i + \Omega_{\max} \cdot \mathbf{g}_i$, welcher folglich im Krylov-Unterraum \mathbf{V}_G enthalten ist. Durch die Bildungsvorschrift 4.45 für den gemeinsamen Projektionsraum \mathbf{V} ergibt sich mit dem Satz 4.1, dass sowohl die Raumrichtung \mathbf{d}_i als auch die Richtung $\mathbf{d}_i + \Omega_{\max} \cdot \mathbf{g}_i$ im Projektionsraum \mathbf{V} enthalten sind. Damit ist auch die durch diese beiden Vektoren aufgespannte Hyperebene wieder in \mathbf{V} enthalten. Folglich sind alle Vektoren $\mathbf{d}_i + \Omega \cdot \mathbf{g}_i$ für $\Omega \in [0, \Omega_{\max}]$ auch im Projektionsraum enthalten (siehe Abbildung 4.3) und die Dynamik aller Systeme für ein solches Ω ist durch die Projektion mit \mathbf{V} erfasst.

2. *Fall:* \mathbf{d}_i ist bei Drehzahl Null relevant
 $\mathbf{d}_i + \Omega_{\max} \cdot \mathbf{g}_i$ ist bei Drehzahl Ω_{\max} nicht relevant

Dieser Fall besagt, dass \mathbf{d}_i im Projektionsraum \mathbf{V}_0 , jedoch die Raumrichtung $\mathbf{d}_i + \Omega_{\max} \cdot \mathbf{g}_i$ nicht in \mathbf{V}_G enthalten ist. Folglich wird nur \mathbf{d}_i im gemeinsamen

Projektionsraum \mathbf{V} berücksichtigt. Wird das System für die Drehzahl Null betrachtet, ist die durch den Vektor \mathbf{d}_i im Originalsystem abgebildete Dynamik auch im reduzierten System enthalten.

In der Projektionsmatrix \mathbf{V}_G zur maximalen Drehzahl fehlt $\mathbf{d}_i + \Omega_{\max} \cdot \mathbf{g}_i$ aufgrund seiner geringen Relevanz. Da jedoch \mathbf{d}_i in \mathbf{V} enthalten ist, wird $\mathbf{d}_i + \Omega_{\max} \cdot \mathbf{g}_i$ durch die Reduktion mit \mathbf{V} unter anderem auf \mathbf{d}_i projiziert. Der Informationsverlust für die Dynamik des Systems bei maximaler Drehzahl beträgt dabei höchstens $\varepsilon(\Omega_{\max})$, wie in Abbildung 4.4 zu sehen ist.

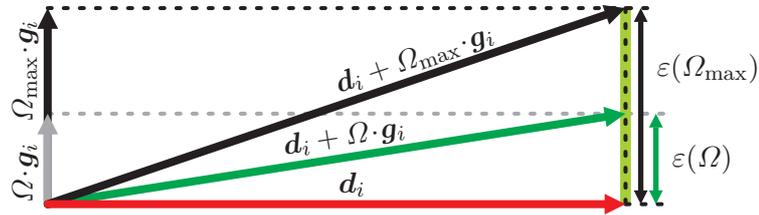


Abb. 4.4: Veranschaulichung des maximalen Approximationsfehlers bei der Wahl der Projektionsräume nach Fall 2

Da $\mathbf{d}_i + \Omega_{\max} \cdot \mathbf{g}_i$ vom Reduktionsalgorithmus als nicht relevant erkannt wurde, kann auch der Fehler $\varepsilon(\Omega)$ für die Gesamtdynamik nicht von Bedeutung sein. Für alle anderen Fehler $\varepsilon(\Omega)$, die sich für die Drehzahlen $\Omega \in [0, \Omega_{\max}]$ ergeben, gilt

$$\varepsilon(\Omega) \leq \varepsilon(\Omega_{\max}),$$

wie ebenfalls in Abbildung 4.4 veranschaulicht. Da die Fehler $\varepsilon(\Omega)$ kleiner sind als jener, der vom Reduktionsalgorithmus als vernachlässigbar eingestuft wurde, sind folglich auch die Fehler für die anderen Drehzahlen Ω zu vernachlässigen und der gesamte Parameterbereich wird mit einer Projektion mit \mathbf{V} gut approximiert.

3. Fall: \mathbf{d}_i ist bei Drehzahl Null nicht relevant

$\mathbf{d}_i + \Omega_{\max} \cdot \mathbf{g}_i$ ist bei Drehzahl Ω_{\max} relevant

Dieser Fall ist sehr ähnlich zu Fall 2, wodurch die Argumentation analog zu dem vorherigen Fall verläuft. Der Unterschied besteht lediglich darin, dass bei der Reduktion mit \mathbf{V} nun das System für die maximale Drehzahl optimal approximiert ist und sich für das System bei Drehzahl Null der maximale

Fehler von $\varepsilon(\Omega = 0)$ einstellt. Auch in diesem Fall gilt, dass für den Fehler bei den Drehzahlen $\Omega \in [0, \Omega_{\max}]$ gilt

$$\varepsilon(\Omega) \leq \varepsilon(\Omega = 0)$$

und somit sind auch die Fehler $\varepsilon(\Omega)$ zu vernachlässigen. Dieser Zusammenhang ist in Abbildung 4.5 veranschaulicht.

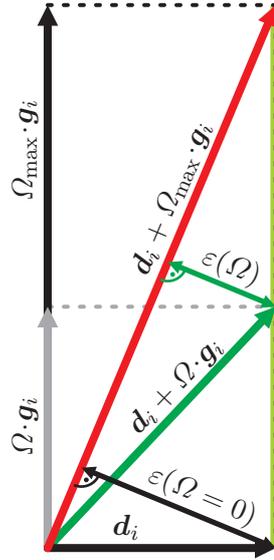


Abb. 4.5: Veranschaulichung des maximalen Approximationsfehlers bei der Wahl der Projektionsräume nach Fall 3

Ebenso wie in Fall 2 wird der gesamte Parameterbereich durch die Wahl von \mathbf{V} nach Gleichung 4.45 gut approximiert.

4. Fall: \mathbf{d}_i ist bei Drehzahl Null nicht relevant

$\mathbf{d}_i + \Omega_{\max} \cdot \mathbf{g}_i$ ist bei Drehzahl Ω_{\max} nicht relevant

Wenn weder \mathbf{d}_i noch $\mathbf{d}_i + \Omega_{\max} \cdot \mathbf{g}_i$ bei der Reduktion als relevante Raumrichtungen identifiziert werden, dann werden auch die Vektoren $\mathbf{d}_i + \Omega \cdot \mathbf{g}_i$ keine relevanten Raumrichtungen darstellen, da stets

$$|\mathbf{d}_i + \Omega \cdot \mathbf{g}_i| \leq |\mathbf{d}_i + \Omega_{\max} \cdot \mathbf{g}_i|$$

für $\Omega \in [0, \Omega_{\max}]$ gilt.

Die Fälle 1 bis 4 bilden alle möglichen Fälle ab, da sich die Frage der Relevanz

von $\mathbf{d}_i + \Omega_{\max} \mathbf{g}_i$ im System zur Drehzahl Null, aufgrund des nicht Vorhandenseins von \mathbf{g}_i in diesem System, nicht stellt. Die Relevanz von \mathbf{d}_i muss zudem nicht im System bei der Drehzahl Ω_{\max} betrachtet werden, denn aus der Relevanz des Vektors \mathbf{d}_i bei der Drehzahl Ω_{\max} folgt eindeutig die Relevanz von \mathbf{d}_i bei der Drehzahl Null.

Mit Hilfe der Fälle 1 bis 4 konnte somit bewiesen werden, dass die Wahl von $\mathbf{V} := \mathbf{U}_k$ zu einer guten Approximation im gesamten Parameterraum $[0, \Omega_{\max}]$ führt.

□

Wird auf dieselbe Weise auch ein Ausgangs-Krylov-Unterraum \mathbf{W} gewählt, so kann das rotordynamische System 4.15 mit

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^T \mathbf{E} \mathbf{V} \dot{\mathbf{x}}_r(t) &= \mathbf{W}^T \mathbf{A}_0 \mathbf{V} \mathbf{x}_r(t) + \Omega \mathbf{W}^T \mathbf{A}_G \mathbf{V} \mathbf{x}_r(t) + \mathbf{W}^T \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}_r &= \mathbf{C} \mathbf{V} \mathbf{x}_r(t) \end{aligned} \quad (4.49)$$

im gesamten Parameterraum $[0, \Omega_{\max}]$ approximiert und somit sehr effizient simuliert werden.

4.2.5 Zusammenfassung des ΩP -MOR Algorithmus

Die neue Methode zur Reduktion von drehzahlabhängigen Rotorsystemen kann folgendermaßen zusammengefasst werden:

1. Bilden der Projektionsräume \mathbf{V}_0 und \mathbf{W}_0 für das System bei der Drehzahl Null.
2. Bilden der Projektionsräume \mathbf{V}_G und \mathbf{W}_G für das System bei der maximalen Drehzahl Ω_{\max} .
3. Singulärwertzerlegung der gemeinsamen Projektionsräume

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{V}_0 & \mathbf{V}_G \end{pmatrix} &= \mathbf{U}^V \mathbf{S}^V \left(\mathbf{V}^V \right)^T \\ \begin{pmatrix} \mathbf{W}_0 & \mathbf{W}_G \end{pmatrix} &= \mathbf{U}^W \mathbf{S}^W \left(\mathbf{V}^W \right)^T . \end{aligned}$$

4. Wählen eines geeigneten k , bis zu dem die Singulärwerte aus der Zerlegung in Schritt 3 berücksichtigt werden sollen.

5. Mit k aus Schritt 4 und den Singulärwertzerlegungen aus Schritt 3 ergeben sich die Reduktionsmatrizen

$$\begin{aligned}\mathbf{V} &:= \mathbf{U}_k^{\mathbf{V}} \\ \mathbf{W} &:= \mathbf{U}_k^{\mathbf{W}}\end{aligned}$$

für den gesamten Parameterraum $\Omega \in [0, \Omega_{\max}]$.

Die Effizienz des Algorithmus wird im nächsten Kapitel anhand zweier Beispiele demonstriert.

Bemerkung:

Dieser Reduktionsalgorithmus ist auch auf andere parameterabhängige Systemklassen anwendbar, wenn diese linear von einem Parameter abhängig sind und einen ähnlichen Aufbau aufweisen. Zudem kann durch leichte Anpassungen des Algorithmus nachgewiesen werden, dass für beliebige Parameter Ω eine Anpassung der Momente erzielt werden kann, wenn die zur Reduktion die Krylov-Unterraummethode verwendet wird.

5 Anwendung des Ω P-MOR Algorithmus

In diesem Kapitel wird anhand zweier Beispiele die neue Reduktionsmethode Ω P-MOR aus Kapitel 4.2 veranschaulicht. Hierfür wird zunächst in einem akademischen Beispiel noch einmal der Einfluss der Gyroskopie auf die Ausprägung des Frequenzverhaltens der Übertragungsfunktion verdeutlicht. Außerdem werden die Auswirkungen der Singulärwertzerlegung innerhalb des Algorithmus anhand von Übertragungsfunktionen zu verschiedenen Drehzahlen gezeigt.

An einem zweiten realen Rotor wird zum Einen die Reduktionsgüte im Frequenzbereich und zum Anderen eine Simulation des Hochlaufs gezeigt. Auch bei dieser transienten Rechnung werden das reduzierte und das nicht reduzierte System verglichen.

5.1 Ein akademisches Rotormodell

Das Modell, des in diesem Abschnitt betrachteten akademischen Beispiels, ist in Abbildung 5.1 zu sehen. Der Rotor besteht aus einer relativ dünnen elastischen Welle und einer bei einem Viertel der Länge angebrachten großen Scheibe. Diese mit großen Massenträgheitsmomenten behaftete Scheibe soll den Einfluss der Gyroskopie für dieses Beispiel verstärken. Der Rotor ist an den Enden auf Federn gelagert, welche dieselbe Steifigkeit in y - und z -Richtung aufweisen.

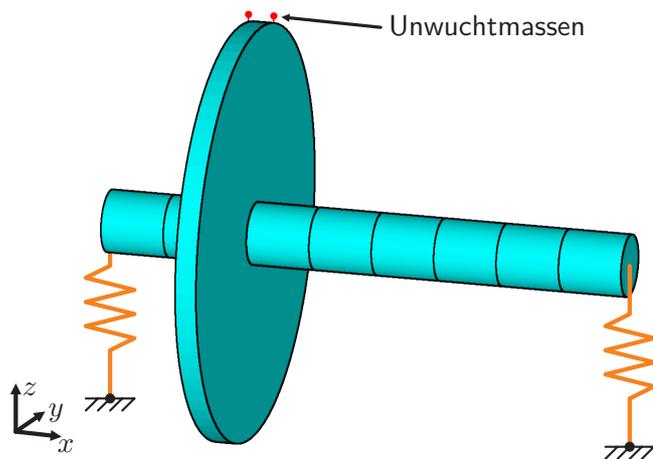


Abb. 5.1: FE-Modell des akademischen Rotors.

5.1.1 Systemeigenschaften und Parameterabhängigkeit des Rotormodells

Das Differentialgleichungssystem 2. Ordnung, welches diesen Rotor beschreibt, besteht aus 40 Gleichungen. Auch wenn es sich hier nur um ein akademisches Beispiel handelt, wurden vier Eingänge und vier Ausgänge für diesen Rotor gewählt, um die praxisnahe Anwendung der Reduktion zu demonstrieren. Die Eingänge sind jeweils die Kraftangriffspunkte links und rechts der großen Scheibe, an denen die Unwuchten in Anlehnung an die ISO Norm 1940 platziert werden. Als Ausgänge wurden die Knotenbewegungen der Lagerknoten in y - und z -Richtung gewählt.

In Abbildung 5.2 wird der große Einfluss der Gyroskopie auf das Systemverhalten gezeigt, indem die Amplituden der Übertragungsfunktionen zu verschiedenen Drehzahlen gezeigt werden.

Es ist sehr gut erkennbar, dass sich die erste Eigenfrequenz aufgrund der Gyroskopie zu niedrigen Frequenzen hin verschiebt und sich in den Gleich- und den Gegenlauf aufspaltet (siehe [38, S. 105ff]). Dass ein solch dynamisches Verhalten nicht mit einer Reduktion bei nur einer Drehzahl abgebildet werden kann, ist offensichtlich.

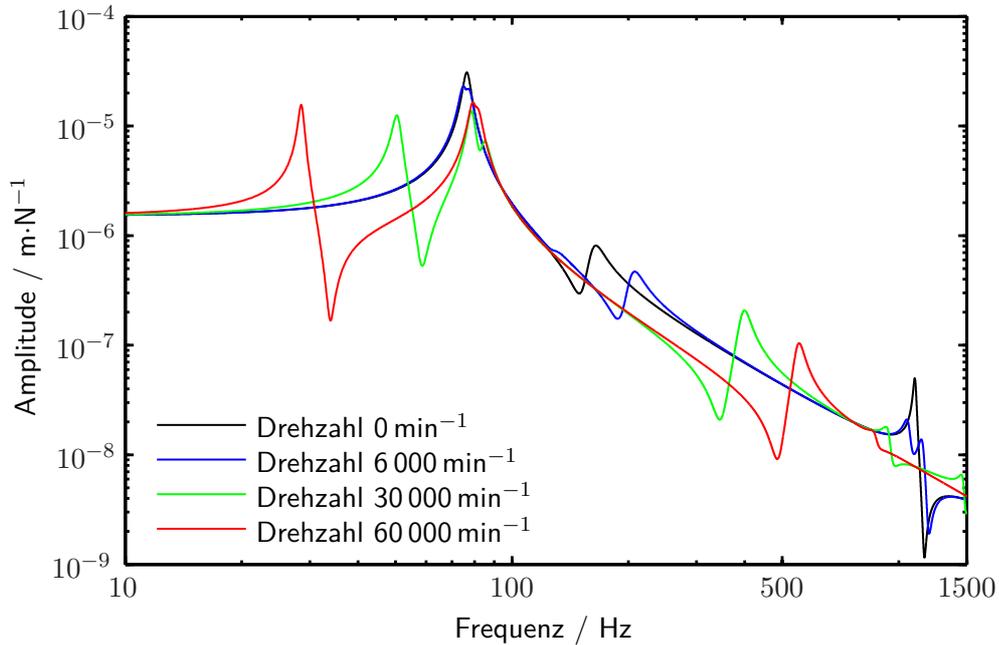


Abb. 5.2: Amplitudengang der Übertragungsfunktionen von einer Kraftanregung in y -Richtung direkt neben der Scheibe auf die Auslenkung im linken Lager bei verschiedenen Drehzahlen des Rotors.

5.1.2 Einfluss der SVD bei der Reduktion mit dem Ω P-MOR Algorithmus

Das zu reduzierende System ergibt sich aus einem Differentialgleichungssystem 1. Ordnung

$$\begin{aligned} E\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}_0\mathbf{x}(t) + \Omega\mathbf{A}_G\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (5.1)$$

mit \mathbf{E} , \mathbf{A}_0 und $\mathbf{A}_G \in \mathbb{R}^{80 \times 80}$, \mathbf{B} und $\mathbf{C}^T \in \mathbb{R}^{80 \times 4}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{80}$ sowie \mathbf{y} und $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^4$. Zunächst wurde das System für die Drehzahlen $\Omega = 0$ und $\Omega = 60\,000 \text{ min}^{-1}$ mit Hilfe des Block-Arnoli-Algorithmus (siehe Kapitel 3.4.2) auf je 12 Zustände reduziert, dabei wurden für jeden Ein- bzw. Ausgang 3 Momente in Übereinstimmung gebracht. Die nach dem Algorithmus aus Kapitel 4.2 berechneten Krylov-Eingangsräume \mathbf{V}_0 und \mathbf{V}_G bzw. Ausgangsräume \mathbf{W}_0 und \mathbf{W}_G wurden danach mit Hilfe einer Singulärwertzerlegung zusammengeführt zu \mathbf{V} und \mathbf{W} . In Abbildung 5.3 sind die Verläufe der Singulärwerte zu sehen.

Es ist erkennbar, dass die Singulärwerte des Eingangsraumes bereits ab dem

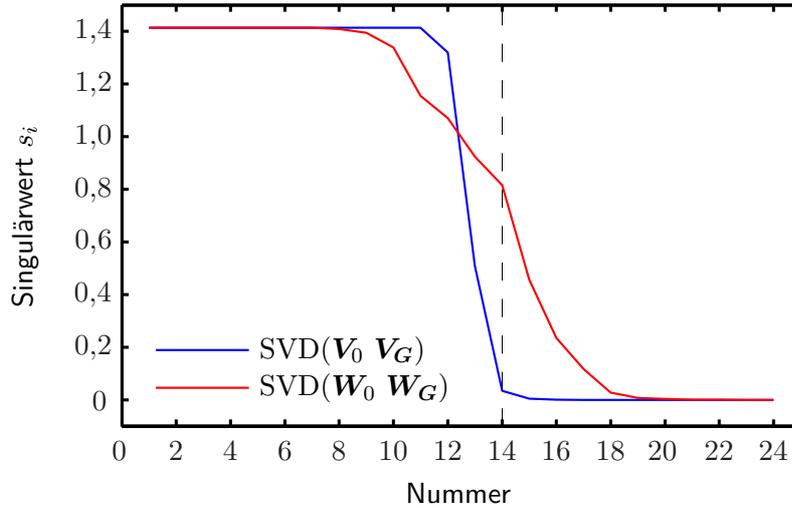


Abb. 5.3: Verlauf der Singulärwerte s_i von $(\mathbf{V}_0 \ \mathbf{V}_G)$ und $(\mathbf{W}_0 \ \mathbf{W}_G)$ zur Beurteilung der Gesamtreduktionsgröße.

15. Singulärwert sehr klein sind. Die Singulärwerte des Ausgangsraumes erfahren vom 14. zum 15. Singulärwert ebenfalls einen Abfall auf unter 0,5. Daher wurden alle Singulärwerte bis zum 14. für die Bildung von \mathbf{V} und \mathbf{W} berücksichtigt.

Werden für die Singulärwertzerlegung mehr als 14 Werte berücksichtigt, würden die sich zusätzlich ergebenden Raumrichtungen das System negativ beeinflussen, da die höheren Singulärwerte im Eingangsraum bereits so niedrig sind, dass sie zum Teil durch numerische Schmutzeffekte verursacht sein könnten. Werden Raumrichtungen zu Singulärwerten die Null oder annähernd Null sind berücksichtigt, bedeutet dies, dass eine beliebige zum relevanten Raum orthogonale Raumrichtung gewählt wird. Eine solche Wahl kann sich negativ auf das Reduktionsergebnis auswirken, da der Einfluss dieser Raumrichtung vollkommen willkürlich ist.

Das System wurde mit den durch die Singulärwertzerlegung gefundenen Gesamt-Projektionsmatrizen \mathbf{V} und \mathbf{W} zu

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^T \mathbf{E} \mathbf{V} \dot{\mathbf{x}}_r(t) &= \mathbf{W}^T \mathbf{A}_0 \mathbf{V} \mathbf{x}_r(t) + \Omega \mathbf{W}^T \mathbf{A}_G \mathbf{V} \mathbf{x}_r(t) + \mathbf{W}^T \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}_r(t) &= \mathbf{C} \mathbf{V} \mathbf{x}_r(t) \end{aligned} \quad (5.2)$$

reduziert.

Um den Einfluss der Zusammenführung der Projektionsräume über eine SVD zu verdeutlichen, wird der Ω P-MOR Algorithmus ohne eine Singulärwertzerlegung auf das System angewendet und die Reduktion ausschließlich mit \mathbf{V}_0 und \mathbf{W}_0 bzw. \mathbf{V}_G und \mathbf{W}_G durchgeführt. Die Reduktion mit nur einem dieser Projektionsmatrixpaare führt zu dem reduzierten System

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_0^T \mathbf{E} \mathbf{V}_0 \dot{\mathbf{x}}_r(t) &= \mathbf{W}_0^T \mathbf{A}_0 \mathbf{V}_0 \mathbf{x}_r(t) + \Omega \mathbf{W}_0^T \mathbf{A}_G \mathbf{V}_0 \mathbf{x}_r(t) + \mathbf{W}_0^T \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}_r(t) &= \mathbf{C} \mathbf{V}_0 \mathbf{x}_r(t). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Analog kann diese Reduktion auch mit den Projektionsmatrizen \mathbf{V}_G und \mathbf{W}_G durchgeführt werden.

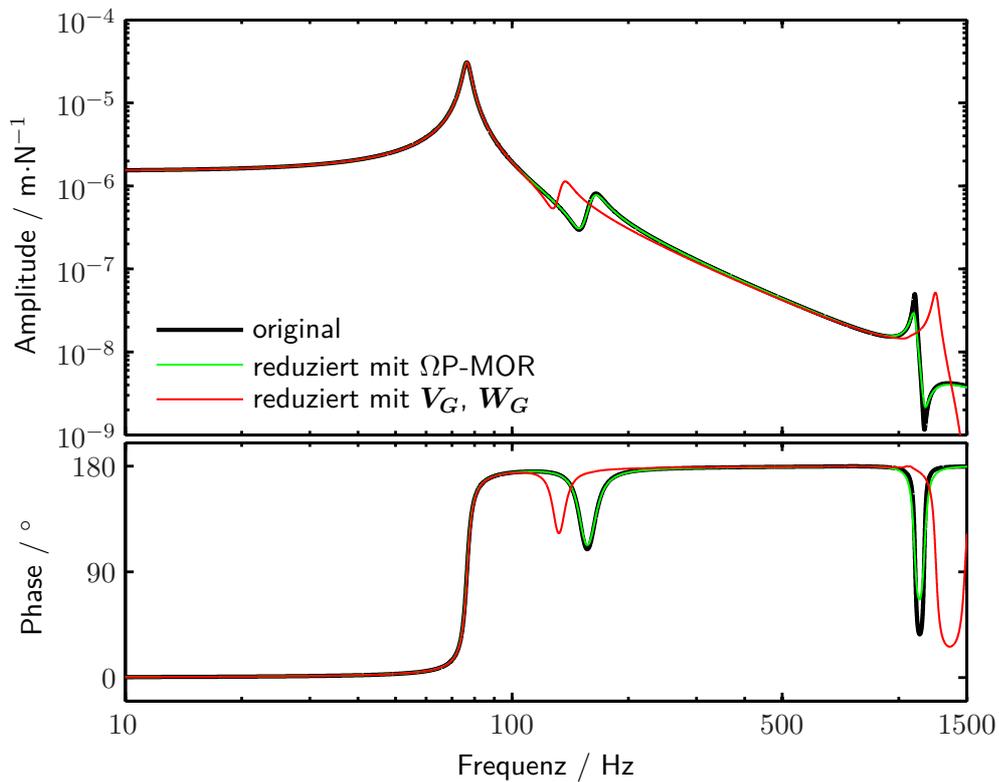


Abb. 5.4: Vergleich der Übertragungsfunktionen bei Drehzahl Null. Betrachtet wird die Übertragungsfunktion von einer Kraftanregung direkt neben der Scheibe in y -Richtung zu der Auslenkung des linken Lagerknotens in y -Richtung.

Die Abbildung 5.4 zeigt die Übertragungsfunktionen zur Drehzahl Null. Es ist gut erkennbar, dass sowohl das nach der neuen Methode reduzierte System, als

auch das System welches nach Gleichung 5.3 nur mit \mathbf{V}_G und \mathbf{W}_G reduziert wurde, die erste Resonanz sehr gut approximieren. Bereits bei der zweiten Resonanz kommt es jedoch bei der Methode nach Gleichung 5.3 sowohl im Amplitudengang als auch im Phasenverlauf zu starken Abweichungen.

Ein sehr ähnliches Verhalten kann für die maximale Drehzahl beobachtet werden. In Abbildung 5.5 sind zum Vergleich das Originalsystem, das nach der ΩP -MOR Methode reduzierte System (siehe Gl. 5.2) und das reduzierte System nach Gleichung 5.3 mit \mathbf{V}_0 und \mathbf{W}_0 dargestellt.

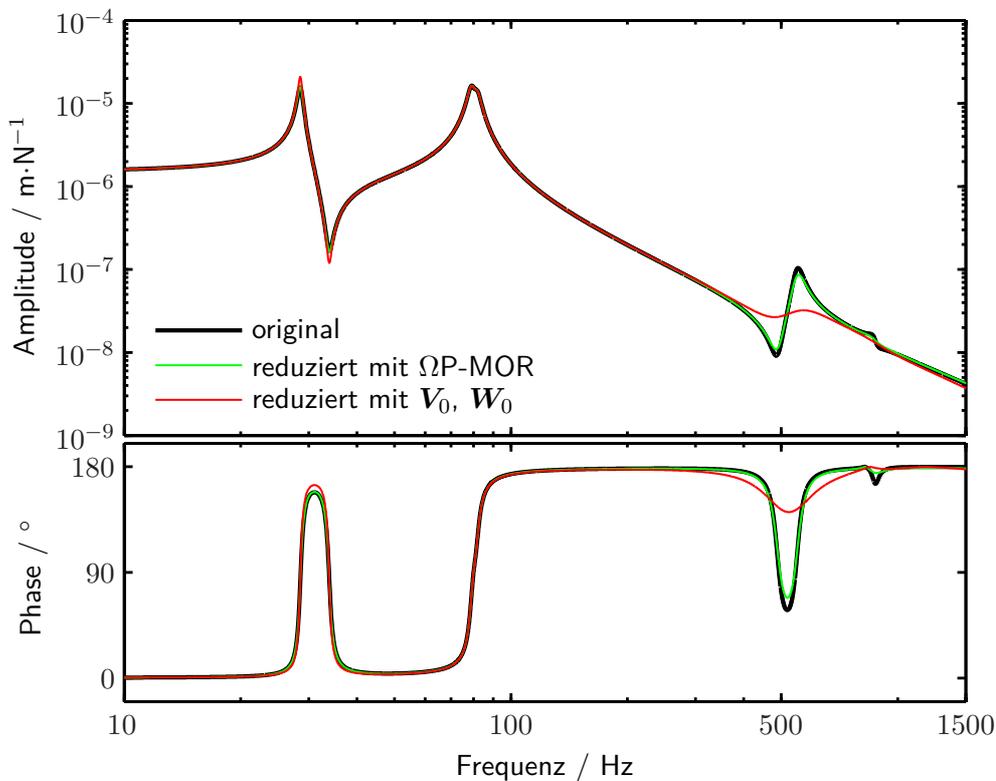


Abb. 5.5: Vergleich der Übertragungsfunktionen bei maximaler Drehzahl. Betrachtet wird dieselbe Übertragungsfunktion wie in Abbildung 5.4.

In diesem Fall wird von beiden Systemen der Gleich- und der Gegenlauf der ersten Resonanz gut approximiert, auch wenn die Reduktionsmethode ohne SVD die erste Resonanz im Amplitudengang ein wenig überzeichnet. Die Reduktionsmethode ohne die Zusammenführung der Räume weicht vor allem bei der zweiten Resonanz, bei ca. 500 Hz, deutlich vom Original und auch von der neuen Methode ab.

Anhand dieser beiden Beispiele ist erkennbar, dass der Einsatz der SVD in

Ω P-MOR einen deutlichen Einfluss auf die Approximationsgüte im gesamten Parameterbereich aufweist und die Berechnung des Systems für eine beliebige Drehzahl mit nur einem reduzierten System ermöglicht.

5.1.3 Vergleich von Ω P-MOR mit einer nicht parametrischen Reduktion

Es liegt auf der Hand, dass eine Reduktion mit Ω P-MOR für beliebige Drehzahlen $\Omega \in [0, \Omega_{\max}]$ eine bessere Approximation der Übertragungsfunktion liefert, als eine einzelne Reduktion zu genau einer festen (z. B. mittleren) Drehzahl Ω^* , in der Form

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{\Omega^*}^T \mathbf{E} \mathbf{V}_{\Omega^*} \dot{\mathbf{x}}_r(t) &= \mathbf{W}_{\Omega^*}^T \mathbf{A}(\Omega^*) \mathbf{V}_{\Omega^*} \mathbf{x}_r(t) + \mathbf{W}_{\Omega^*}^T \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}_r(t) &= \mathbf{C} \mathbf{V}_{\Omega^*} \mathbf{x}_r(t) \end{aligned} \quad (5.4)$$

mit $\mathbf{V}_{\Omega^*} = K_q(\mathbf{A}(\Omega^*)^{-1} \mathbf{E}, \mathbf{A}(\Omega^*)^{-1} \mathbf{B})$, $\mathbf{W}_{\Omega^*} = K_q(\mathbf{A}(\Omega^*)^{-T} \mathbf{E}^T, \mathbf{A}(\Omega^*)^{-T} \mathbf{C})$ und $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \Omega^* \mathbf{A}_G$. Dies wird insbesondere dann deutlich, wenn die großen Unterschiede im Amplitudengang der Übertragungsfunktionen bei verschiedenen Drehzahlen (siehe Abbildung 5.2) betrachtet werden.

Es bleibt noch zu zeigen, dass die neue Reduktionsmethode nicht nur die Extrema des Parameterbereiches gut approximiert, sondern auch die Parameter innerhalb dieses Bereiches. In Abbildung 5.6 ist die Übertragungsfunktion für $\Omega = 30\,000 \text{ min}^{-1}$ aufgetragen, wobei zum Vergleich neben dem Original und dem mit Ω P-MOR reduzierten System auch ein nach Gleichung 5.4 für $\Omega^* = 30\,000 \text{ min}^{-1}$ reduziertes System gezeigt werden.

Es ist zu sehen, dass beide Reduktionsarten vor allem den niedrigen Frequenzbereich sehr gut approximieren. Auch bei der Betrachtung der relativen Fehler der beiden reduzierten Systeme ist zu erkennen, dass die Ω P-MOR Methode, welche den gesamten Parameterraum abdeckt, gegenüber der für diese Drehzahl optimalen Reduktion keinen Nachteil aufweist.

Der Vorteil der Ω P-MOR Methode besteht jedoch nach wie vor darin, dass die Übertragungsfunktionen zu beliebigen Drehzahlen mit ein und demselben reduzierten System gewonnen werden können. Im Gegensatz dazu approximiert das nach Gleichung 5.4 reduzierte Systeme lediglich die Übertragungsfunktion

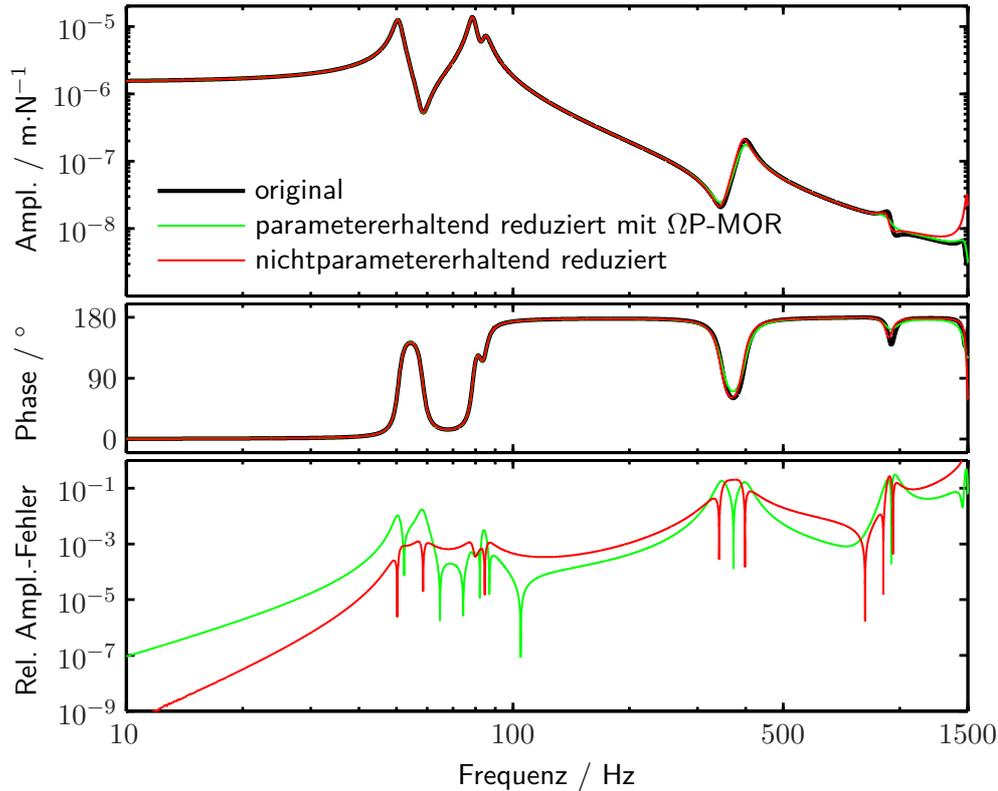


Abb. 5.6: Vergleich der Übertragungsfunktionen (aus Abb. 5.4) bei der Drehzahlen $30\,000\text{ min}^{-1}$. Verglichen wird die neue parametererhaltende Ω P-MOR Methode mit einer standard Krylov-Reduktion nach Gleichung 5.4 für diese feste Drehzahl.

bei der mittleren Drehzahl $\Omega^* = 30\,000\text{ min}^{-1}$ sehr gut, würde jedoch bei deutlich anderen Drehzahlen versagen.

Es wurde auch ein Vergleich der Rechenzeiten von Ω P-MOR und der Standard-Krylov-Reduktion durchgeführt. Da die Rechenzeiten von beiden Methoden für dieses Modell sehr klein sind, wurde zur besseren Vergleichbarkeit jeweils die Rechenzeit über hundert Reduktionen gemittelt. Die Reduktion für nur eine Drehzahl nach Gleichung 5.4 beträgt demnach mit der verwendeten Hardware rund $0,0072\text{ s}$. Die neue parametererhaltende Ω P-MOR Methode hat mit ca. $0,0143\text{ s}$ genau doppelt so lange benötigt.

Dies lässt sich leicht einsehen, da für die neue Methode die Krylov-Unterräume zu zwei Drehzahlen berechnet werden mussten. Jedoch fällt auch auf, dass die Singulärwertzerlegung zeitlich hier nicht ins Gewicht fällt. Auch wenn die Rechenzeiten für dieses akademische Beispiel bereits im nicht reduzierten Fall na-

türlich sehr gering sind, lassen sich die prinzipiellen Zusammenhänge trotzdem gut erfassen. Für die Berechnung von mehr als zwei Übertragungsfunktionen ist die Reduktionszeit der neuen Methode, dem ständigen Reduzieren für jede Drehzahl, folglich klar überlegen.

5.2 Reduktion eines realen Rotors

5.2.1 Modellaufbau und Reduktion mit ΩP -MOR

Das zweite Beispiel in diesem Kapitel ist ein realer Rotor, so wie er im Siemens Dynamowerk Berlin montiert wurde. In Abbildung 5.7 ist das FE-Modell des gewählten Rotors zu sehen.

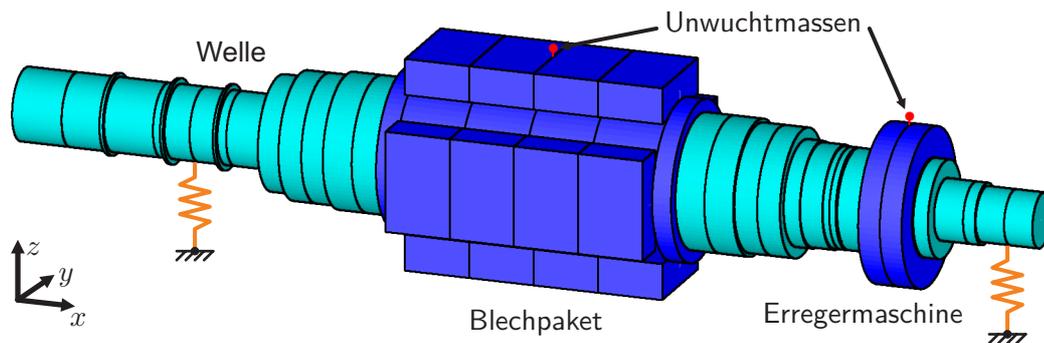


Abb. 5.7: FE-Modell eines realen Rotors mit einer Leistung von 25 000 kW und einem Gewicht von ca. 14 t.

Der Rotor ist Teil einer Drehstrom-Synchron-Maschine mit dem zu sehenden massiven Schenkelpolläufer. Die Maschine besitzt eine Leistung von 25 000 kW und wird z. B. als Antrieb für Walzen oder Mühlen verwendet. Der Rotor ist für eine Nenndrehzahl von 1500 min^{-1} (25 Hz) ausgelegt und wiegt ca. 14 t. Zu sehen ist auch, dass es sich hier um eine Maschine mit zwei Lagern und mit innen liegender Erregermaschine handelt. Das Blechpaket der Erregermaschine ist in Abbildung 5.7 rechts in dunkelblau zu sehen. Die Öllager wurden für die Berechnung durch Federn ersetzt, welche eine ähnliche Steifigkeit und Dämpfung aufweisen wie die Öllager bei der Nenndrehzahl.

Für diesen Rotor wurden, wie für das akademische Beispiel, wieder 4 Eingänge und 4 Ausgänge gewählt. Als Ausgänge sind die Auslenkungen der Lagerknoten definiert. Die 4 Eingänge sind die Krafteinwirkungspunkte der Unwuchten.

Da es sich, wie bereits erwähnt, um eine Maschine mit innen liegender Erregermaschine handelt, werden laut der ISO Norm 1940 die Unwuchten mittig der beiden Blechpakete plaziert. Somit sind als Kraftangriffspunkte die mittigen Blechpaketknoten in y - und z -Richtung gewählt. Für die Simulation wurden die Unwuchten in Phase gesetzt, wie es in Abbildung 5.7 zu sehen ist. Die Unwucht wird bei solchen Rotoren zu zwei Dritteln auf das Rotorblechpaket und zu einem Drittel auf das Erregerblechpaket verteilt.

Das sich ergebende dynamische System 2. Ordnung mit je 4 Ein- und Ausgängen hat 164 Zustände, so dass sich für das zu reduzierende System 1. Ordnung 328 Zustände ergeben.

Die Reduktion des Rotors erfolgte mit der neuen, in Kapitel 4.2 vorgestellten, Ω P-MOR Reduktionsmethode. Hierbei wurde für die Reduktion als maximale Drehzahl die Nenndrehzahl von 1500 min^{-1} angesetzt, da ein Hochlauf auf Nenndrehzahl simuliert werden soll. Die Reduktionsmatrizen für die Drehzahl Null sowie für die Nenndrehzahl wurden wieder mit Hilfe des Block-Arnoldi-Algorithmus berechnet. Für dieses Beispiel wurden für jeden Ein- bzw. Ausgang je 4 Momente zur Übereinstimmung gebracht. Die Reduktionsgröße der Teilsysteme ergibt sich somit zur Ordnung 16. Bei der Zusammenführung der Räume hat sich die Reduktionsgröße von 22 Dimensionen als vorteilhaft erwiesen. Die Zeit, die die Reduktion in Anspruch genommen hat, wurde wieder über 100 Reduktionsdurchgänge gemittelt und beträgt $0,0552 \text{ s}$. Zum Vergleich sei an dieser Stelle die Zeit erwähnt, die benötigt wird, um das System aus den einzeln exportierten Systemmatrizen und der Allokationsmatrix aufzubauen. Dieser Vorgang hat im Mittel ca. $0,0684 \text{ s}$ gedauert.

Nach der Reduktion wurden als erstes die Übertragungsfunktionen betrachtet, wobei sich für alle ein ähnliches Bild ergab. Beispielhaft wird hier die Übertragungsfunktion vom Kraftangriffspunkt im Rotorblechpaket in y -Richtung zur Auslenkung des linken Lagers in y -Richtung betrachtet. Dieser Amplitudenverlauf (siehe Abbildung 5.8) ist für das System bei der Drehzahl $\Omega = 600 \text{ min}^{-1}$ erstellt worden.

Es ist gut zu erkennen, dass die erste Eigenfrequenz sehr gut approximiert wird. Die folgenden Eigenfrequenzen weisen bereits leichte Abweichungen in der Amplitude auf, liegen jedoch in einem Frequenzspektrum, welches durch

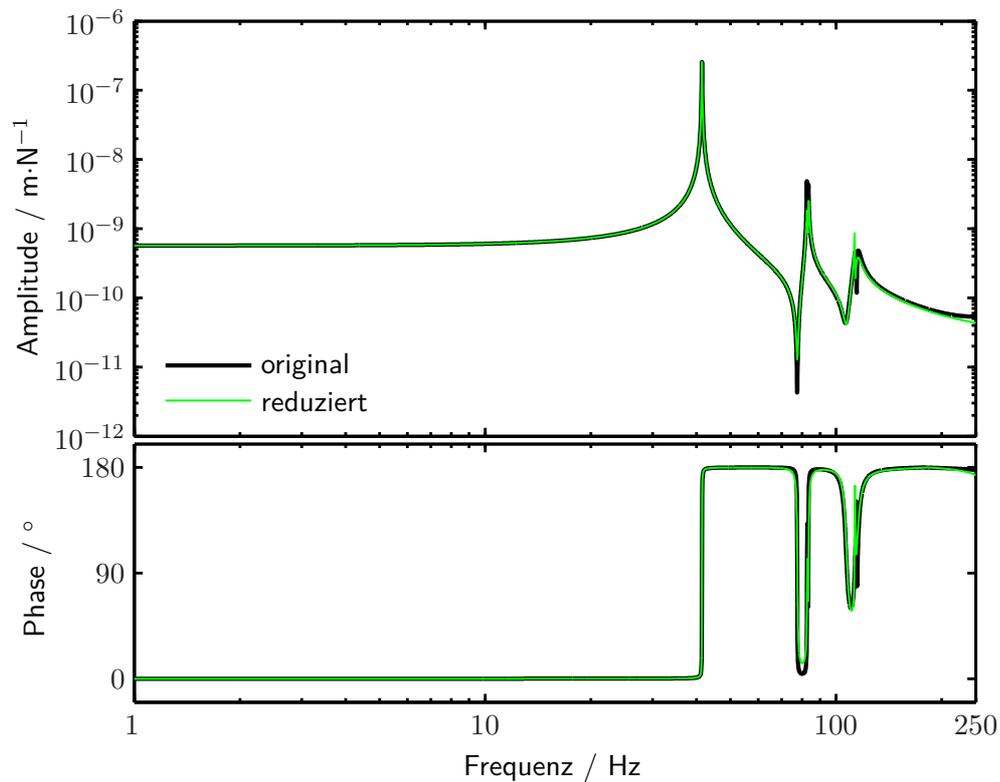


Abb. 5.8: Übertragungsfunktion vom Kraftangriffspunkt im Rotorblechpaket in y -Richtung zur Auslenkung des linken Lagers in y -Richtung bei Drehzahlen 600 min^{-1} .

die Rotation des Rotors nicht angeregt wird. Für eine Beurteilung der ersten Eigenfrequenzen und der zu erwartenden Auslenkungen ist das reduzierte System gut geeignet. Zudem ist, für eine erste Bewertung des Rotorverhaltens, der Wert der Eigenfrequenz entscheidender als die Amplitude der Frequenz, da beurteilt werden muss, ob diese in den vorgegebenen Sperrbereichen liegt oder nicht.

Ein großer Vorteil des reduzierten Systems liegt hierbei wieder in der Berechnungszeit der Übertragungsfunktionen. Während das Originalsystem 25,1 s zur Berechnung in Anspruch genommen hat, wurde das reduzierte System in nur 0,9 s berechnet. Dies entspricht einer Zeitersparnis von 96,4 %.

5.2.2 Transiente Simulation eines Hochlaufs

Um das transiente Rotorverhalten im Betrieb beurteilen zu können, wird ein Hochlauf des Rotors simuliert. Hierfür wurde der Rotor in 8 s vom Stillstand auf 1500 min^{-1} Umdrehungen beschleunigt und dann 2 s auf seiner maximalen Drehzahl gehalten. In Abbildung 5.9 ist der Verlauf der Auslenkungen im linksseitigen Lager in y -Richtung aufgetragen.

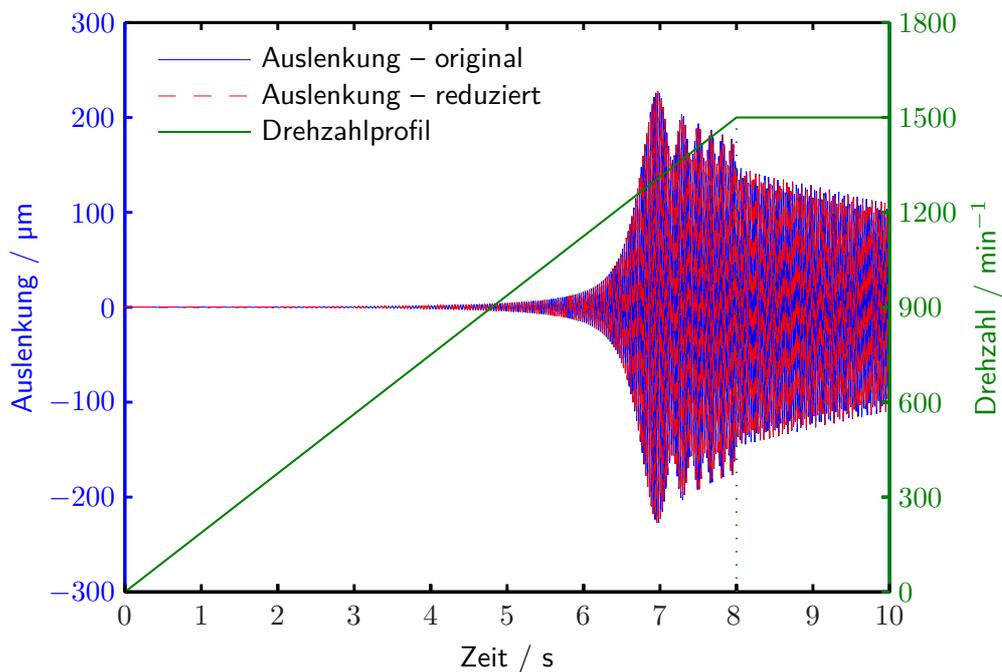


Abb. 5.9: Transiente Simulation der Auslenkungen in y -Richtung des linken Lagerknotens beim Hochlauf des Rotors bis zur Nenndrehzahl mit dem gezeigten Drehzahlprofil.

Der Rotor wird durch die beiden in den Blechpaketen platzierten Unwuchten zum Schwingen angeregt. Diese wurden nach der ISO Norm 1940 mit einer Wuchtgüte von $2,5 \text{ mm}\cdot\text{s}^{-1}$ zu insgesamt $0,226 \text{ kg}\cdot\text{m}$ berechnet.

Gut erkennbar ist die Resonanzdurchfahrt bei ca. 7 s, bei der sich das System stark aufschwingt, danach klingen die Schwingungen langsam ab. Ab dem Zeitpunkt, an dem der Rotor nicht weiter beschleunigt wird, ist auch der Einfluss der Dämpfung auf das System gut erkennbar, da die Schwingungen deutlich zurückgehen.

In Abbildung 5.9 ist ebenfalls gut zu sehen, dass sich das Verhalten des Ori-

nalsystems kaum von dem des reduzierten Systems unterscheidet. Sehr stark unterscheiden sich jedoch die Simulationszeiten. Für die Simulation des Originalsystems wurden in Simulink 9133,9s benötigt, für das reduzierte System wurden jedoch die 10s Echtzeit in nur 3,6s berechnet. Dies entspricht einer Zeitersparnis von über 99,9%. Selbst unter Berücksichtigung der Zeit, die die Reduktion in Anspruch genommen hat, bleibt die Zeitersparnis noch über 99,9%.

Zur Beurteilung der Approximationsgüte der Reduktion sei zunächst auf die Abbildungen 5.10 hingewiesen, in der drei Ausschnitte, der in Abbildung 5.9 gezeigten Rotorauslenkung, noch einmal detaillierter gezeigt werden.

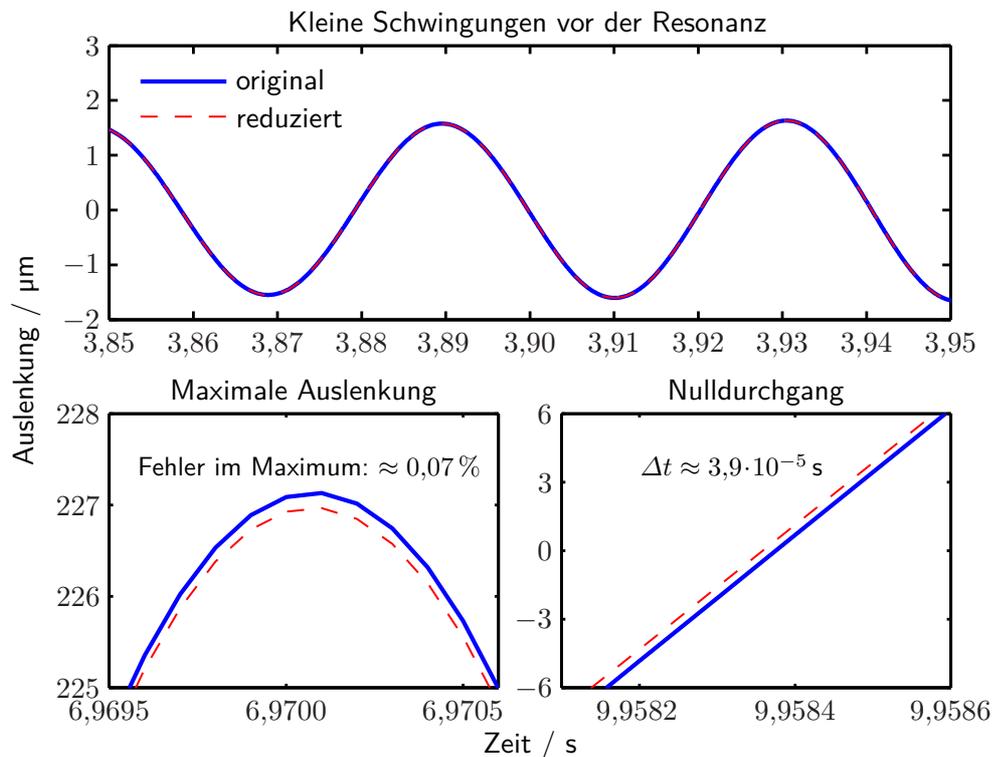


Abb. 5.10: Detaildarstellungen der in Abbildung 5.9 gezeigten transienten Simulation des Hochlaufs.

In Abbildung 5.10 ist sehr gut erkennbar, dass die Phasen der ausgeführten Schwingungen sehr gut übereinstimmen. Das bedeutet, dass das reduzierte System die Schwingfrequenz des Originalen sehr gut approximiert. Dies ist auch darin erkennbar, dass beide Systeme zum selben Zeitpunkt ihr Maxima

in der Auslenkung erreichen. Zudem ist erkennbar, dass es für die starken Auslenkungen im Resonanzfall eine leichte Abweichung zum Originalsystem gibt. Die Abweichung bei der maximalen Auslenkung liegt dabei bei gerade einmal 0,07%. Die extrem gute Übereinstimmung in Phase und Frequenz kommt in der nur minimalen Gangabweichung zum Ausdruck, so beträgt die Zeitdifferenz für den Nulldurchgang nach einer simulierten Zeit von ca. 9,96 s lediglich rund $4 \cdot 10^{-5}$ s.

Aufgrund der Schwingung des Systems um die Nulllage ist für die Fehlerbeurteilung eine Berechnung des relativen Fehlers für die gesamte Bewegung nicht sinnvoll, da für Werte nahe Null, eine Division Null durch Null durchgeführt werden müsste. Daher wird in Abbildung 5.11 der absolute Fehler gegenüber der absoluten Auslenkung in einer logarithmischen Darstellung betrachtet.

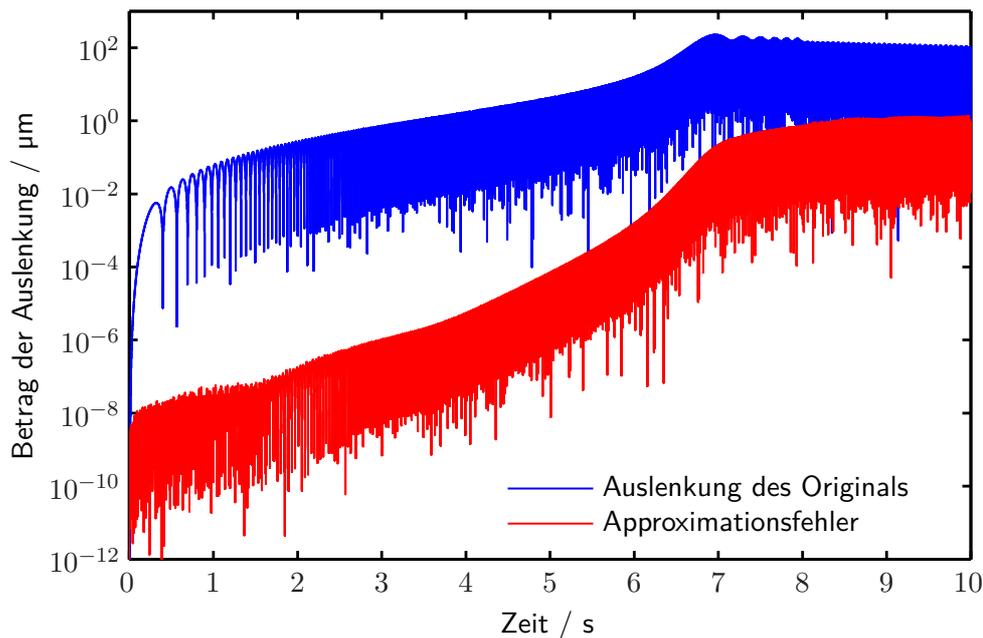


Abb. 5.11: Betrag der Auslenkung und der Abweichung des reduzierten Systems vom Originalsystem der in Abbildung 5.9 gezeigten Ergebnisse der transienten Simulation des Hochlaufs.

Bei der Betrachtung der Oberkante des absoluten Fehlers (der Einhüllenden) fällt auf, dass dieser sein Maximum nicht während der Resonanzdurchfahrt erreicht, sondern sich erst bei der maximalen Drehzahl einstellt. Für den Be-

reich der Resonanzdurchfahrt liegen zwischen den Werten für die Auslenkung und denen des absoluten Fehlers 3 Größenordnungen, so dass der relative Fehler in diesem Bereich mit 0,1 % abgeschätzt werden kann. Im Bereich vor der Resonanz liegt er noch deutlich darunter. Für die größten absoluten Fehler bei konstanter Drehzahl ergibt sich eine relative Abweichung von ca. 1 % der Auslenkung. Wird zudem die Genauigkeit der Rechnung gegenüber der Unsicherheiten bei der Modellierung oder der Annahme der Unwuchten betrachtet, so ist ein maximaler Fehler von 1 % bei der Simulation ein sehr gutes Ergebnis.

	Originalsystem	System nach Ω P-MOR
Systemaufbau	0,07 s	0,07 s
Reduktion nach Ω P-MOR	–	0,055 s
Übertragungsfkt. berechnen	25,1 s	0,9 s
Simulation in Simulink	8196,9 s	3,3 s
Summe für Übertragungsfkt.	25,2 s	1,02 s
Relative Zeit	100,0 %	4,1 %
Summe für Simulation	8170,0 s	3,4 s
Relative Zeit	100,0 %	0,04 %

Tab. 5.1: Vergleich der Berechnungszeiten für den realen Rotor

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass die neue Reduktionsmethode, sowohl für die Auswertung von Übertragungsfunktionen als auch für die transiente Simulation von Systemen sehr gute Ergebnisse liefert. Mit den reduzierten Systemen konnte, selbst unter Berücksichtigung der Reduktionszeit, die Berechnungszeit für Frequenzgänge um mehr als 96 % verringert werden. Für die transiente Simulation eines realen Rotors konnte die benötigte Zeit sogar um 99,9 % verkürzt werden und das bei einer Ungenauigkeit von maximal 1 % und in weiten Teilen auch deutlich darunter.

Die Simulation von Rotoren in einer kürzeren Zeit als die simulierte Echtzeit, führt zu neuen Möglichkeiten für die Optimierung solcher Systeme, so dass potentielle Schwachstellen schneller erkannt und neue Rotordesigns zügiger getestet werden können.

6 Reduktion großer Systeme unter rotordynamischem Einfluss mittels Mo(SeS-MOR)

In diesem Kapitel wird der Einfluss des Rotors innerhalb der gesamten Maschine betrachtet und der Mo(SeS-MOR) Algorithmus vorgestellt, welcher es ermöglicht solch große Systeme unter Beibehaltung der rotordynamischen Effekte zu reduzieren. Mo(SeS-MOR) beinhaltet hierbei die Wiederausführung von getrennt reduzierten Systemen (engl.: Merge of Separated Systems MOR). Hierfür wird zunächst in Abschnitt 6.1 der Aufbau einer Maschine und das Zusammenspiel von Rotor, Lager und Gehäuse erläutert. Der Fokus liegt dabei auf der Modellierung der Kopplung von Rotor und Gehäuse über Öllager. Die beschriebene Kopplung geschieht während der Modellerstellung solcher Systeme automatisch bei der Konstruktion der Maschine. Die Modellerstellung und Vernetzung ist schon in großen Teilen automatisiert [89]. Daher ist es meist nicht möglich nach der Erstellung eines Finite-Elemente-Modells (FE-Modell) auf die einzelnen Teilsysteme zuzugreifen.

Nach der Erläuterung des neuen Ansatzes zur Berechnung solch großer Maschinen in Abschnitt 6.2, welcher die Trennung des Systems in Teilsysteme beinhaltet, wird in Abschnitt 6.3 ein neuer Algorithmus zur automatischen Trennung von Rotor, Lager und Gehäuse vorgestellt (bereits veröffentlicht in [90]). Im Unterschied zum Freischneiden in der Mechanik [41, S. 228], bei dem die auf beiden Seiten des Schnittes wirkenden Kräfte betrachtet werden, stellt die neue Methode eine Trennung dar, bei der Kräfte als Eingänge in das System betrachtet werden und Auslenkungen als Ausgänge erzeugt werden.

Nach der Trennung der Systeme wird in Abschnitt 6.4 eine Möglichkeit zur Reduktion der parameterunabhängigen Teilstruktur aufgezeigt. Im letzten Ab-

schnitt 6.5 werden die nun zum teil reduzierten Teilsysteme für eine effiziente Berechnung wieder zusammengeführt.

Die in diesem Kapitel erarbeiteten Algorithmen sind durch rotodynamische Systeme motiviert, lassen sich jedoch in vielen Fällen leicht auf ähnliche Problemklassen übertragen.

Innerhalb dieses Kapitels wird auf die Gleichungssysteme zum Rotor, Gehäuse und auf die Übertragungsfunktionen im Lager eingegangen. Die Unterscheidung der verschiedenen Teilsysteme geschieht hierbei über die Indizes „s“ für den Rotor (engl. **shaft**), „h“ für das Gehäuse (engl. **housing**) und „o“ für die Kopplungen zwischen Rotor und Gehäuse, in diesem Fall also dem Gleitlagerölfilm (engl. **oilfilm**). Auch wenn im Text stets vom Gehäuse gesprochen wird, so kann dieser Teil der Maschine auch deutlich mehr beinhalten. Allgemein betrachtet sind hier alle Maschinenkomponenten, die nicht von der Rotationsgeschwindigkeit abhängig sind, denkbar.

6.1 Modellaufbau einer gesamten Maschine

Im FE-Modell ist der Rotor weiterhin, wie bereits in Kapitel 2 beschrieben, modelliert. Der Aufbau des Gehäuses und der Lager wird in den folgenden Abschnitten kurz erläutert.

6.1.1 Finite-Elemente-Modell des Gehäuses

Das Gehäuse und bei Bedarf auch das Fundament werden üblicherweise, wie in Abbildung 6.1, mit Schalenelementen modelliert. Um eine realitätsnahe Wiedergabe des Gehäuseverhaltens zu erreichen, muss eine ausreichende Vernetzung gewährleistet werden, wodurch die Modelle meist aus 10 000 und mehr Knoten bestehen. Da bei Schalen und Volumenelementen alle Bewegungsfreiheiten zulässig sind, führen die Modelle häufig zu Gleichungssystemen mit mehr als 50 000 Gleichungen.

Das Gehäuse kann durch das parameter-unabhängige Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_h \ddot{\mathbf{z}}_h(t) + \mathbf{D}_h \dot{\mathbf{z}}_h(t) + \mathbf{K}_h \mathbf{z}_h(t) &= \mathbf{J}_h \mathbf{u}_h(t) \\ \mathbf{y}_h(t) &= \mathbf{L}_h \mathbf{z}_h(t), \end{aligned} \tag{6.1}$$

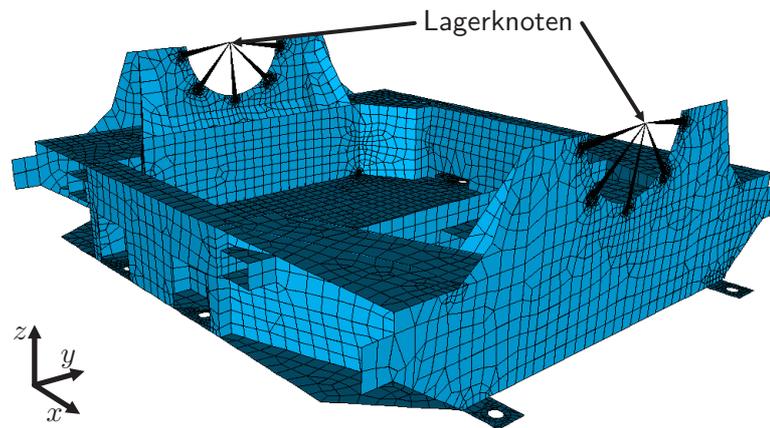


Abb. 6.1: FE-Modell eines Grundrahmens mit ca. 54 000 Freiheitsgraden.

dargestellt werden. In der Gleichung bezeichnen \mathbf{M}_h , \mathbf{D}_h , $\mathbf{K}_h \in \mathbb{R}^{n \times n}$ konstante Matrizen, welche die Masse, Dämpfung und Steifigkeit des Gehäuses repräsentieren. Der Vektor $\mathbf{z}_h(t) \in \mathbb{R}^n$ beinhaltet die generalisierten Zustände, $\mathbf{y}_h(t) \in \mathbb{R}^p$ ist der Ausgangsvektor, welcher das nach außen sichtbare (messbare) Verhalten des Gehäuses repräsentiert. Dies ist durch die Ausgangsmatrix $\mathbf{L}_h \in \mathbb{R}^{p \times n}$ festgelegt.

Der Vektor $\mathbf{u}_h(t) \in \mathbb{R}^m$ enthält alle auf das Gehäuse wirkenden externen Kräfte, deren Wirkung auf die Knoten des Gehäuses über die Eingangsmatrix $\mathbf{J}_h \in \mathbb{R}^{n \times m}$ bestimmt wird. Solche Kräfte sind zum einen die Erdbeschleunigung, die auf jeden Knoten wirkt und zum Anderen kann es sich um Anregungen von außen handeln. Es können z. B. Kräfte auf die Verbindungsstellen zum Fundament aufgebracht werden, um Erdbeben zu simulieren. Eine Anregung, die jedoch unabhängig von dem gewählten Szenario immer auf das Gehäuse wirkt, ist der Rotor. Durch die Bewegung des Rotors und meist unvermeidbaren minimalen Schwingungen, die er erzeugt, wird auch das Gehäuse angeregt. Die Schwingungen können durch die elektrischen Kräfte im Stator auf die Maschine übertragen werden. Die stärkere Kopplung und somit auch die häufigste Form der Übertragung der Schwingungen des Rotors auf das Gehäuse findet in den Lagern statt.

6.1.2 Kraftübertragung durch die Lager

Die Lager sind das Bindeglied zwischen Rotor und Gehäuse. Dabei wird im Wesentlichen zwischen Gleit-, Wälz- und Magnetlager unterschieden [38]. Sie

koppeln den Rotor mit dem Gehäuse und umgekehrt. In dieser Arbeit sollen zunächst nur Gleitlager betrachtet werden, da diese auch die am häufigsten gewählte Lagerart bei den hier betrachteten Maschinen sind.

Die Eigenschaften von Gleitlagern lassen sich über komplexe nicht lineare Modelle abbilden [91–93]. Diese Modelle werden jedoch nicht direkt in das FE-Modell eingebunden, sondern in dem eigens dafür entwickelten Programm Alp3t [94] simuliert. Ein Ergebnis der Simulation der Lager sind z. B. die dimensionslosen Sommerfeldzahlen, welche die Steifigkeiten und Dämpfungen der Lager widerspiegeln. In das FE-Modell der Maschine werden dann die dimensionsbehafteten Ersatzdämpfungen und Ersatzsteifigkeiten für verschiedene Drehzahlen integriert. Für die Simulation des Systems bei Drehzahlen, für die keine Ersatzgrößen berechnet wurden, wird zwischen benachbarten Stützstellen linear interpoliert. Im FE-Modell werden die Ersatzgrößen mit Hilfe eines allgemeinen Feder-Dämpfer-Elementes erfasst.

Da die Dämpfung und die Steifigkeit analog zueinander aufgebaut sind, sollen im Folgenden, die Besonderheiten der Ersatzgrößen anhand der Steifigkeit erläutert werden.

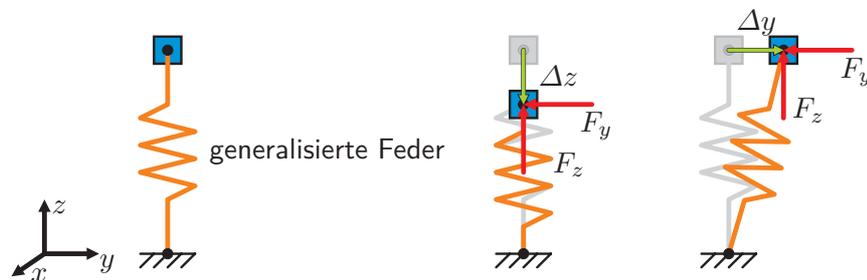


Abb. 6.2: Veranschaulichung der Wirkungsweise einer generalisierten Feder, wie sie im Folgenden als Ersatzfedern für die Ölfilmsteifigkeiten benutzt wird. Eine Auslenkung in z -Richtung bewirkt sowohl eine Kraft in z - als auch in y -Richtung und umgekehrt.

Im Gegensatz zu normalen Federelementen wirkt die Ölfilmsteifigkeit nicht nur in die Richtung der Auslenkung. Federn, die den Ölfilm ersetzen, sind generalisierte Federn, das bedeutet, dass eine solche Feder, auch wenn sie so wie in Abbildung 6.2 nur in z -Richtung ausgelenkt wird, auch eine Steifigkeit in y -Richtung besitzt und vor allem auch Koppelsteifigkeiten zwischen y und z aufweist. Abbildung 6.2 veranschaulicht die Wirkung einer solchen Feder, wenn sie einer Auslenkung in z oder y -Richtung ausgesetzt wird.

Dies lässt sich, wie in Abbildung 6.3 dargestellt, unter anderem dadurch erklären, dass eine Auslenkung des Rotors im Lager in z -Richtung dazu führt, dass in diese Richtung Öl verdrängt wird. Dadurch verändert sich in y -Richtung ebenfalls die Ölmenge, diese Veränderung des Öldruckprofils führt somit zu einer Veränderung der Steifigkeit sowohl in z - als auch in y -Richtung.

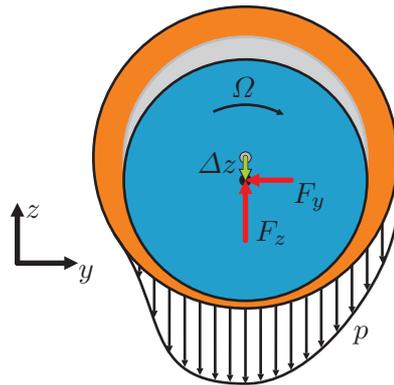


Abb. 6.3: Schematische Darstellung des sich ergebenden Öldruckprofils p in einem Gleitlager bei einer Rotationsgeschwindigkeit Ω und einer Verschiebung des Rotors um Δz . Die sich verändernden Druckverhältnisse im Öl führen zu einer Kraft in y - und einer Kraft in z -Richtung auf den Rotor.

Wird nun eine solche Steifigkeitsmatrix einer Ölfilm-Ersatzfeder betrachtet, ergibt sich für eine feste Drehzahl

$$\mathbf{K}_o = \begin{pmatrix} k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zy} & k_{zz} \end{pmatrix}.$$

Zum besseren Verständnis wird im Folgenden die Wirkung des Ölfilms auf den Rotor und das Gehäuse in zwei Schritten erläutert. In einem ersten Schritt soll die Wirkung des Ölfilms auf den Rotor gezeigt werden. Dafür wird, wie in Abbildung 6.4, die Ersatzfeder zwischen dem Lagerknoten 1 des Rotors und einem festen Bezugspunkt betrachtet.

Die Kräfte

$$\begin{aligned} F_{1y} &= k_{yy}y_1 + k_{yz}z_1, \\ F_{1z} &= k_{zy}y_1 + k_{zz}z_1, \end{aligned}$$

die auf den Lagerknoten 1 wirken, ergeben sich durch die Rückstellwirkung

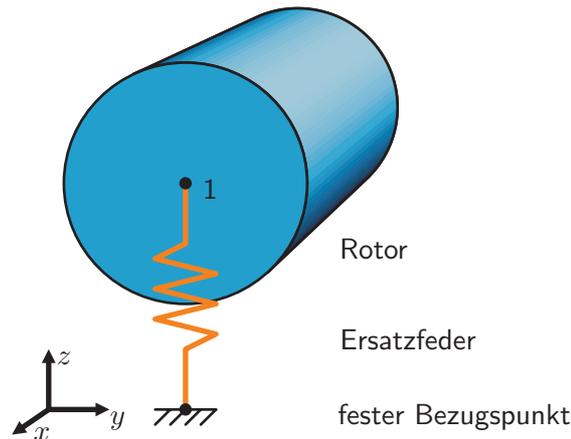


Abb. 6.4: Minimalmodell des Rotors mit einer Ölfilm-Ersatzfeder, welche zwischen dem Rotorknoten 1 und einem festen Bezugspunkt eingespannt ist.

der Ölfeder in Folge der Auslenkung des Rotors um y_1 und z_1 . Sie wirken zusätzlich zu den Kräften, die sich aus den Rotorsteifigkeiten und -dämpfungen ergeben, so dass die Ölfedersteifigkeiten also noch zu den schon im System vorhandenen Steifigkeiten dazu addiert werden müssen. Als Steifigkeitsmatrix mit Ölfilmsteifigkeit $\mathbf{K}_{s,o}$ ergibt sich

$$\mathbf{K}_{s,o} = \mathbf{K}_s \oplus \mathbf{K}_o,$$

wobei \mathbf{K}_s die Rotorsteifigkeit ist und sich die Ölfilmsteifigkeitsmatrix \mathbf{K}_o für den Rotor wie folgt ergibt

$$\mathbf{K}_o = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & & & & & & & & \\ \vdots & \ddots & & & & & & & & \\ & & \boxed{+k_{yy}}_{ii} & \boxed{+k_{yz}}_{ij} & & & & & & \\ & & \boxed{+k_{zy}}_{ji} & \boxed{+k_{zz}}_{jj} & & & & & & \\ & & & & \ddots & \vdots & & & & \\ \cdots & & & & \cdots & 0 & & & & \end{pmatrix}.$$

Hierbei sind die Positionen i und j im Zustandsvektor

$$\mathbf{z}^T = (\cdots \boxed{y_1}_i \boxed{z_1}_j \cdots),$$

den translatorischen Freiheitsgraden des Lagerknoten 1 in y - und z -Richtung zugeordnet.

Wird im nächsten Schritt nicht der Boden als zweiter Angriffspunkt der Ölfilm-Ersatzfeder gewählt sondern ein Knoten des Gehäuses, wie es vereinfacht in Bild 6.5 dargestellt ist, ergeben sich die Kräfte

$$\begin{aligned} F_{1y} &= k_{yy}(y_1 - y_2) + k_{yz}(z_1 - z_2), \\ F_{1z} &= k_{zy}(y_1 - y_2) + k_{zz}(z_1 - z_2), \\ F_{2y} &= k_{yy}(y_2 - y_1) + k_{yz}(z_2 - z_1), \\ F_{2z} &= k_{zy}(y_2 - y_1) + k_{zz}(z_2 - z_1), \end{aligned}$$

welche durch die Relativbewegung des Rotorknoten 1 gegenüber dem Gehäuseknoten 2 hervorgerufen werden. Die Steifigkeiten k_{\cdot} sind auch hier wieder die Steifigkeiten der Ölfilm-Ersatzfeder aus \mathbf{K}_o .

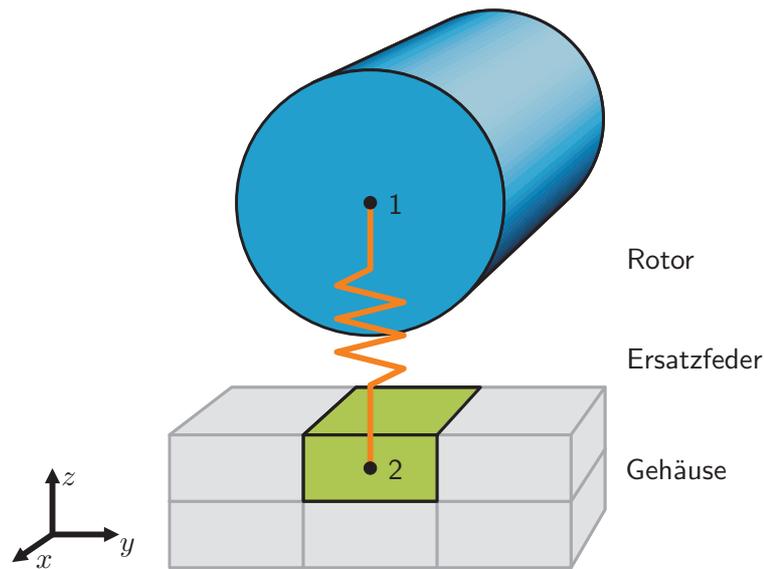


Abb. 6.5: Veranschaulichung der Interaktion zwischen dem Rotorknoten 1 und dem Gehäuseknoten 2 über eine Ölfilm-Ersatzfeder.

Im Zusammenspiel mit den schon vorhandenen Systemsteifigkeiten \mathbf{K}_s und \mathbf{K}_h des Rotors und Gehäuses, ergibt sich für die Gesamtsteifigkeit

$$\mathbf{K}_{s,o,h} = \mathbf{K}_s \oplus \mathbf{K}_h \oplus \mathbf{K}_o.$$

Im Unterschied zum ersten Fall ergibt sich die Ölfilmsteifigkeit jedoch als

reihung der Vektoren aus den Teilsystemen. Eine Ausnahme bildet der Einfluss der Gravitation. Die Erdbeschleunigung wirkt als ein Eingang. Hierbei wird ein Hilfeingangsvektor $\tilde{\mathbf{b}}_g$ benötigt, welcher jeweils für die Zustände, die zur Translation in Erdbeschleunigungsrichtung gehören, eine Eins als Eintrag enthält und ansonsten Nullen. Dieser Vektor $\tilde{\mathbf{b}}_g$ wird mit der Massenmatrix und der Erdbeschleunigung g multipliziert und ergibt dann den Eingangsvektor \mathbf{b}_g der Erdbeschleunigung

$$\mathbf{b}_g = g \cdot \mathbf{M} \cdot \tilde{\mathbf{b}}_g. \quad (6.3)$$

Wenn also auf eines der beiden Teilsysteme die Erdbeschleunigung wirkt, muss sie auch auf das andere wirken. Die Eingangsvektoren für die Erdbeschleunigung werden jedoch im Gesamtsystem nicht einfach hintereinander geschaltet, sondern zu einem Eingang zusammengefasst.

Zu beachten ist, dass in diesem Zusammenhang mit Gehäuse alle nicht parameterabhängigen Strukturen gemeint sind. Dazu zählt gerade bei der Modellierung der Lager z. B. auch das Lagergehäuse oder der Lagerbock.

In Abschnitt 6.1 wurde der Aufbau eines FE-Modells einer Maschine vorgestellt und die Verknüpfungen über die Lager verdeutlicht. Jedoch wird die Modellierung von Rotor und Gehäuse nicht getrennt betrachtet, sondern es wird in einem Arbeitsschritt ein Gesamtmodell erstellt. Modelle solcher komplexen Maschinen werden schnell sehr groß und bestehen für eine gute Abbildung der Realität meist aus sehr vielen Knoten. Daher sind Modelle mit mehr als 100 000 Freiheitsgraden keine Seltenheit. Für eine Berechnung und Simulation des Systems ist also eine Modellordnungsreduktion von großer Bedeutung.

Im nächsten Abschnitt wird daher darauf eingegangen, wie mit solchen Gesamtsystemen, welche eine innere Teilsystemstruktur aufweisen, bei der Reduktion verfahren werden kann.

6.2 Mo(SeS-MOR) – Eine neuer Ansatz zur Berechnung einer kompletten Maschine

Das Gesamtmodell einer Maschine enthält natürlich auch wieder den Rotor als einen wichtigen Bestandteil und weist daher eine Parameterabhängigkeit von

der Drehzahl Ω auf. Um z. B. das Verhalten der Maschine während des Anfahrens zu simulieren, muss die Maschine parametrisch reduziert werden. Dafür kann die Maschine für verschiedene Drehzahlen reduziert werden, was jedoch auf Grund der Größe des Modells sehr zeitaufwändig ist. Mit dem Wissen, dass die Parameterabhängigkeit lediglich aus dem Rotor resultiert, liegt die Idee nahe, zunächst die Teilsysteme voneinander zu trennen und den parameterunabhängigen Teil der Maschine zu reduzieren um ihn dann wieder an den parameterabhängigen Teil zu koppeln. Dies allein würde bereits zu einer drastischen Einsparung an Rechenzeit führen. Die Berechnung des Gesamtsystems könnte dann in einer Schleife, wie in Abbildung 6.6 gezeigt, erfolgen. Hierbei wird davon ausgegangen, dass es sich um eine Maschine mit Öllagern handelt und somit die Kopplung zwischen Rotor und Gehäuse über die Lager erfolgt. Eine andere Art der Kopplung zwischen beiden Maschinenteilen besteht zwischen dem Rotorballen und dem Stator, hier wirken magnetische Zugkräfte. Diese Kopplung soll zunächst vernachlässigt werden, jedoch wird im Verlauf der Arbeit noch einmal darauf eingegangen.

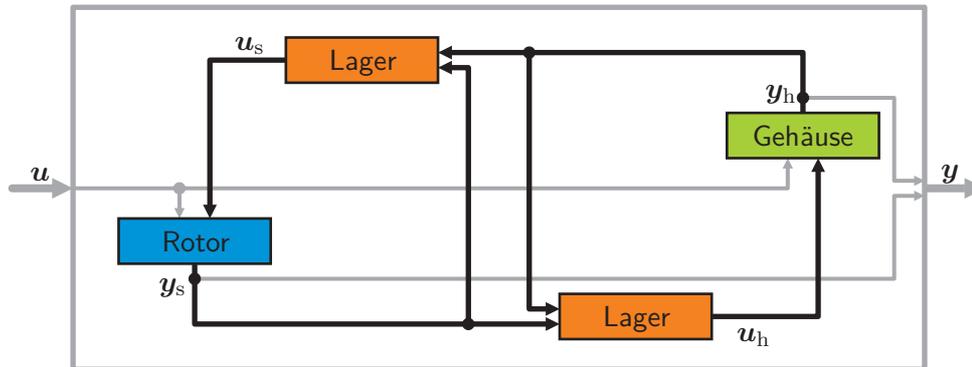


Abb. 6.6: Berechnung des Gesamtsystems innerhalb einer Schleife. Dadurch können das parameterabhängige System des Rotors (ca. 600 Zustände) und das parameterunabhängige System des Gehäuses (meist mehr als 5 000 Zustände) voneinander getrennt reduziert werden und wieder als ein Gesamtsystem berechnet werden.

Es werden folglich zwei Differenzialgleichungssysteme für den Rotor und das Gehäuse gesucht

$$\begin{aligned}
 M_{s/h} \ddot{z}_{s/h}(t) + (D_{s/h} + G_{s/h}(\Omega)) \dot{z}_{s/h}(t) + K_{s/h} z_{s/h}(t) &= J_{s/h} u_{s/h}(t) \\
 y_{s/h}(t) &= L_{s/h} z_{s/h}(t).
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

Sowohl im Rotorsystem als auch im Gehäusesystem müssen die für die Kraftübertragung relevanten Freiheitsgrade an den Lagerknoten als Eingänge und Ausgänge definiert werden. Bei der Trennung der Systeme entsteht zudem ein Satz an Gleichungen

$$\mathbf{u}_{s/h} = \widetilde{\mathbf{D}}_o \left(\pm \dot{\mathbf{y}}_{s/h} \mp \dot{\mathbf{y}}_{s/h} \right) + \widetilde{\mathbf{K}}_o \left(\pm \mathbf{y}_{s/h} \mp \mathbf{y}_{s/h} \right), \quad (6.5)$$

welche die Lagerkräfte mittels der neu definierten Ein- und Ausgänge berechnen. Somit können aus den Bewegungen der Lagerknoten über die Lagerparameter die auf die Teilsysteme wirkenden Lagerkräfte berechnet werden (siehe Abschnitt 6.1.2).

Ein Vorteil der Definition der für die Kopplung relevanten Zustände als Eingänge und Ausgänge liegt darin, dass bei der Reduktion eines Teilsystems nicht zusätzlich auf diese Zustände geachtet werden muss, da Eingänge und Ausgänge bei der Modellordnungsreduktion unverändert bleiben.

Für die Simulationen ist die Abspaltung des Lagers insofern interessant, da sich gerade bei Öllagern die Lagerparameter mit der Drehzahl stark verändern können und somit auch während der Simulation angepasst werden müssen. Die Parameterabhängigkeit ist nicht linear. Die Parameter werden mit anderen Programmen, wie z. B. Alp3T [94], für verschiedene vorgegebene Drehzahlen berechnet. Während der Simulation müssen die Parameter für die verschiedenen Drehzahlen im System ständig angepasst werden. Dies wird durch eine Abspaltung der Lager als eigenständiges System deutlich erleichtert.

Es ist leicht zu erkennen, dass dieser neue Ansatz zur Reduktion und Berechnung einer komplexen Maschine viele Vorteile bietet. Da jedoch in vielen Fällen die Modellbildung und die Simulation getrennt voneinander durchgeführt werden, ist es keine Seltenheit, dass es lediglich ein Gesamtmodell gibt und keine einzeln vorliegenden Teilmodelle von Rotor, Gehäuse und Lager existieren.

In den nachfolgenden Abschnitten wird der neue Mo(SeS-MOR) Algorithmus vorgestellt, welcher die Trennung, die Reduktion und die Wiederausführung der Teilsysteme beinhaltet.

6.3 Ein neuer Algorithmus zur automatischen Trennung parametrischer und nicht parametrischer Modellkomponenten

Da es sich bei den hier vorliegenden großen Systemen unter rotodynamischem Einfluss um sehr große Modelle handelt, sollte die Zerlegung des Gesamtmodells in Teilmodelle natürlich automatisiert ablaufen. Bei den hier vorliegenden Strukturen kann dabei die Besonderheit des gyroskopischen Einflusses auf den Rotor ausgenutzt werden, um die verschiedenen Teile der Struktur automatisiert zu identifizieren.

6.3.1 Grober Ablauf des Algorithmus

Der Algorithmus benötigt zur vollautomatisierten Durchführung der Trennung von parametrischen und nicht parametrischen Modellteilen das aus Gleichung 6.2 bekannte System zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} M\ddot{\mathbf{z}}(t) + (\mathbf{D} + \mathbf{G}(\Omega))\dot{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{z}(t) &= \mathbf{J}\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{L}\mathbf{z}(t). \end{aligned}$$

Eine Trennung der Teilsysteme ist nur dann sinnvoll, wenn das vom Parameter unabhängige Teilsystem größer ist als das vom Parameter abhängige System. Anderenfalls kann die in Kapitel 4 vorgestellte Methode der Parameter erhaltenden Reduktion angewendet werden. Für den automatisierbaren Algorithmus wird zusätzlich zu den Systemmatrizen eine Allokationsmatrix \mathbf{Q} benötigt, welche im nächsten Abschnitt erläutert wird.

Ergebnis des Algorithmus sind zwei Differentialgleichungssysteme, eines für den parametrischen und eines für den nicht parametrischen Teil sowie ein Gleichungssatz, welcher die Ausgänge der beiden Teilsysteme wieder in Eingangskräfte für beide Teilsysteme umwandelt. Somit werden alle notwendigen Gleichungen, welche für die vorgestellte Schleifenberechnung in Abbildung 6.6 benötigt werden, erzeugt.

Grober Ablauf des Algorithmus:

- Lokalisieren des Rotors durch die Einträge in der gyroskopische Matrix (siehe 6.3.3),
- Trennen der Anteile von Rotor und Gehäuse in der Massenmatrix \mathbf{M} und der Gyroskopiematrix \mathbf{G} (siehe 6.3.4),
- Trennen der globalen Ein- und Ausgänge \mathbf{J} und \mathbf{L} (siehe 6.3.5),
- Extrahieren der Rotor- und Gehäusesteifigkeit sowie der Koppelsteifigkeiten zwischen den Teilsystemen (siehe 6.3.6),
- Extrahieren der Rotor- und Gehäusedämpfungen sowie der Koppeldämpfungen zwischen den Teilsystemen (siehe 6.3.7),
- Erzeugen neuer lokaler Ein- und Ausgänge in den Teilsystemen zur Sicherstellung der korrekten Kraftübertragung durch die Koppelsteifigkeiten (siehe 6.3.8),
- Erzeugen neuer lokaler Ein- und Ausgänge in den Teilsystemen zur Sicherstellung der korrekten Kraftübertragung durch die Koppeldämpfungen (siehe 6.3.9),
- Erstellen der Teilsysteme (siehe 6.3.10).

6.3.2 Aufbau der Allokationsmatrix

Mit der zusätzlichen Information einer sogenannten Allokationsmatrix \mathbf{Q} lassen sich aus dem Gesamtsystem, wie es in Gleichung 6.2 vorgestellt wurde, die Teilsysteme von Rotor, Gehäuse und Lager automatisiert extrahieren. Die für den Algorithmus zur Trennung der Teilsysteme notwendige Allokationsmatrix $\mathbf{Q} \in \mathbb{N}^{n \times 3}$ enthält hierbei die Zuordnung der Gleichungsnummer bzw. des Zustands (erste Spalte) zu einem Knoten im FE-Modell (zweite Spalte) und der Richtung der angreifenden Kraft (dritte Spalte). Hierbei sind die Krafrichtungen der translatorischen Kräfte in x -, y - und z -Richtung mit 1, 2 und 3 bezeichnet und 4 bis 6 stellen die rotatorischen Freiheitsgrade des Systems um die Achsen dar. Solche Allokationmatrizen sind in allen FE-Programmen für die korrekte Auswertung der Systemlösungen notwendig und somit auch prinzipiell in allen FE-Programmen (wie Ansys, Salome u. Ä.) vorhanden, auch wenn es nicht immer auf triviale Weise möglich ist, an diese Systeminformationen zu gelangen.

Beispiel 6a: Allokationsmatrix

Zur Veranschaulichung soll hier ein Minimalbeispiel eines Rotors, wie in Abbildung 6.7, bestehend aus zwei Knoten und nur einem Wellenelement betrachtet werden.

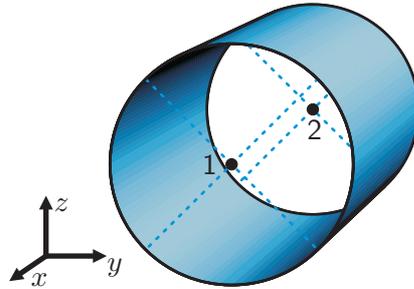


Abb. 6.7: Minimalbeispiel eines Rotors.

In diesem Beispiel sind nur folgende Freiheitsgrade für beide Knoten zulässig: Translation in z -Richtung (Freiheitsgrad 3) und Rotation um die y -Achse (Freiheitsgrad 5) und die Rotation um die z -Achse (Freiheitsgrad 6). Eine mögliche Allokationsmatrix Q^{6a} , in Abhängigkeit des Modellaufbaus, könnte also wie folgt aussehen

$$Q^{6a} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 5 & 2 & 6 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Für das Gleichungssystem dieses Rotors bedeutet das, dass z. B. der dritte Zustand ($Q^{6a}(3, 1) = 3$) die Verschiebung des zweiten Knotens ($Q^{6a}(3, 2) = 2$) in z -Richtung ($Q^{6a}(3, 3) = 3$) beschreibt. Sollen beispielsweise alle zu einem bestimmten Knoten gehörenden Zustände (bzw. Gleichungsnummern) herausgefunden werden, so muss lediglich in der zweiten Spalte der Allokationsmatrix nach dieser Knotennummer gesucht werden. Die Menge, der Zustände die zum Knoten 1 gehören, wäre somit $\{1, 2, 6\}$.

Für den im nächsten Abschnitt vorgestellten Algorithmus ist es notwendig, dass die Allokationsmatrix nach der ersten Spalte sortiert ist, d. h. in Zeile

i ist auch die Information zum Zustand i zu finden. Die automatisierte Extraktion der Teilsysteme wäre auch ohne diese Einschränkung möglich, jedoch würde es die Erläuterung des Algorithmus unnötig erschweren, da die Bildung der auftretenden Mengen mit Suchabfragen innerhalb der Allokationsmatrix verknüpft wären.

6.3.3 Lokalisieren des Rotors

Für eine kompaktere Schreibweise werden zunächst die Menge der Gleichungsnummern \mathcal{I} und die Menge aller Knotennummern \mathcal{N} definiert

$$\mathcal{I} = \{1, \dots, n\}, \quad (6.6)$$

$$\mathcal{N} = \{i \in \mathbb{N} \mid \exists j \in \mathcal{I} : \mathbf{Q}(j, 2) = i\}. \quad (6.7)$$

Dabei muss die Menge der Knotennummern \mathcal{N} nicht zusammenhängend sein, da sich z. B. durch Knotenlöschungen während des Modellierungsprozesses des FE-Modells Lücken in der Nummerierung ergeben können.

Um die zum Rotor gehörenden Gleichungen von denen des Gehäuses zu trennen, wird die gyroskopische Matrix \mathbf{G} genutzt, da nur der Rotor von der Gyroskopie beeinflusst wird. So können alle Gleichungen mit Koeffizienten ungleich Null in \mathbf{G} bereits dem Rotor zugeordnet werden. Die Bezeichnung \mathcal{S} leitet sich hierbei wieder aus dem Englischen „shaft“ ab. Es ergibt sich

$$\mathcal{S}_{\mathbf{G}} := \{i \in \mathcal{I} \mid \exists j \in \mathcal{I} : \mathbf{G}(i, j) \neq 0\}, \quad (6.8)$$

wobei dies nur die Rotorgleichungen sind, die von der Gyroskopie betroffen sind. Da jedoch auch die Verschiebung entlang der Rotorachse ein Zustand des Systems sein kann und dieser nicht von der Gyroskopie betroffen ist, müssen in einem zweiten Schritt alle Gleichungen, die zu Knoten aus $\mathcal{S}_{\mathbf{G}}$ gehören, noch zu der Menge der Rotorgleichungen hinzugenommen werden. Somit ergibt sich mit

$$\mathcal{S} := \{i \in \mathcal{I} \mid \exists j \in \mathcal{S}_{\mathbf{G}} : \mathbf{Q}(i, 2) = \mathbf{Q}(j, 2)\} \quad (6.9)$$

die Indexmenge aller Rotorgleichungen.

Die Indexmenge \mathcal{H} aller zum Gehäuse („housing“) gehörenden Gleichungen ist trivialer Weise

$$\mathcal{H} := \mathcal{I} \setminus \mathcal{S}. \quad (6.10)$$

Damit sind die Gleichungen nach Rotor- und Gehäusezugehörigkeit getrennt, nun können die Massen- und Gyroskopiatrix getrennt werden.

6.3.4 Trennen der Massenmatrix und der Gyroskopiatrix

Die Massenmatrix und die gyroskopische Matrix können in eine Rotormatrix (\cdot_s) und in eine Gehäusematrix (\cdot_h)

$$\mathbf{M}_s = \mathbf{M}(\mathcal{S}, \mathcal{S}), \quad (6.11)$$

$$\mathbf{M}_h = \mathbf{M}(\mathcal{H}, \mathcal{H}), \quad (6.12)$$

$$\mathbf{G}_s = \mathbf{G}(\mathcal{S}, \mathcal{S}) \quad (6.13)$$

unterteilt werden. Hierbei sind $\mathbf{M}_s, \mathbf{G}_s \in \mathbb{R}^{n_s \times n_s}$ und $\mathbf{M}_h \in \mathbb{R}^{n_h \times n_h}$, wobei $n_s = |\mathcal{S}|$, $n_h = |\mathcal{H}|$ und es gilt $n_s + n_h = n$. Für das Gehäuse entsteht auf Grund des nicht vorhandenen gyroskopischen Effektes auch keine gyroskopische Matrix. Die einfache Trennung der Massenmatrix ist nur möglich, da die übrigen Koeffizienten Null sind

$$\mathbf{M}(\mathcal{S}, \mathcal{H}) = \mathbf{M}(\mathcal{H}, \mathcal{S})^T = \mathbf{Z}.$$

Die Voraussetzung, dass diese Koeffizienten Null sind, ist erfüllt, da es sich innerhalb der Teilsysteme zwar um inertial gekoppelte Systeme handelt, die Teilsysteme untereinander jedoch inertial entkoppelt sind.

6.3.5 Trennen der Ein- und Ausgänge

Mit den bisherigen Erkenntnissen können auch die Ein- und Ausgangsmatrizen in den zum Rotor und Gehäuse gehörenden Teil getrennt werden. Für beide Systeme werden die jeweiligen Zeilen des Gleichungssystems extrahiert. Um dabei jedoch entstehende Nullspalten in diesen Matrizen zu vermeiden, werden zunächst die Mengen

$$\mathcal{U}_s := \{i \in \{1, \dots, p\} \mid \mathbf{J}(\mathcal{S}, i) \neq \mathbf{Z}\}, \quad (6.14)$$

$$\mathcal{U}_h := \{i \in \{1, \dots, p\} \mid \mathbf{J}(\mathcal{H}, i) \neq \mathbf{Z}\} \quad (6.15)$$

mit p aus $\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ definiert, welche die Indizes der vom Nullvektor verschiedenen Spalten im Rotor- bzw. Gehäusepart der Eingangsmatrix sind. Damit ergeben sich die neuen Eingangsmatrizen und Eingangsvektoren

$$\mathbf{J}_s = \mathbf{J}(\mathcal{S}, \mathcal{U}_s), \quad (6.16)$$

$$\mathbf{J}_h = \mathbf{J}(\mathcal{H}, \mathcal{U}_h), \quad (6.17)$$

$$\mathbf{u}_s = \mathbf{u}(\mathcal{U}_s), \quad (6.18)$$

$$\mathbf{u}_h = \mathbf{u}(\mathcal{U}_h) \quad (6.19)$$

mit $\mathbf{J}_s \in \mathbb{R}^{n_s \times p_s}$, $\mathbf{u}_s \in \mathbb{R}^{p_s}$ und $\mathbf{J}_h \in \mathbb{R}^{n_h \times p_h}$, $\mathbf{u}_h \in \mathbb{R}^{p_h}$ wobei $p_s = |\mathcal{U}_s|$ und $p_h = |\mathcal{U}_h|$ und es gilt

$$p_s + p_h \geq p. \quad (6.20)$$

Ungleichung 6.20 ergibt sich aus der Tatsache, dass ein und derselbe Eingang auf beide Teilsysteme wirken kann, wie z. B. die Gravitation. In Gleichung 6.3 wurde bereits der Aufbau des Eingangsvektors der Erdbeschleunigung erläutert. Die Erdbeschleunigung ist also im Gesamtsystem ein einziger Eingang, muss aber auf beide Teilsysteme verteilt werden, um weiterhin auf den Rotor und das Gehäuse zu wirken.

Die Trennung der Ausgangsmatrizen ist vom Ansatz her der Trennung der Eingangsmatrizen sehr ähnlich. Im Allgemeinen handelt es sich bei den Ausgängen um messbare Verformungen bestimmter Maschinenteile. Dies würde bedeuten, dass sich die Ausgänge eindeutig voneinander trennen lassen und die Summe der Ausgänge der Teilsysteme gleich der Anzahl der Ausgänge des Gesamtsystems ist. Um jedoch auch den Fall eines allgemeinen, frei wählbaren Ausgangs und die eindeutige Zuordnung der Teilausgänge zu den Originalausgängen zu gewährleisten, wird zusätzlich zur Trennung der Ausgänge auch noch eine Rücktransformation in den Vektor der Gesamtausgänge angegeben.

Zunächst ergibt sich analog zu der Eingangstrennung wie in den Gleichungen 6.14 und 6.15

$$\mathcal{Y}_s := \{i \in \{1, \dots, q\} \mid \mathbf{L}(i, \mathcal{S}) \neq \mathbf{Z}\}, \quad (6.21)$$

$$\mathcal{Y}_h := \{i \in \{1, \dots, q\} \mid \mathbf{L}(i, \mathcal{H}) \neq \mathbf{Z}\} \quad (6.22)$$

mit $|\mathcal{Y}_s| = q_s$ und $|\mathcal{Y}_h| = q_h$. Damit ergeben sich die Ausgangsmatrizen

$$\mathbf{L}_s := \mathbf{L}(\mathcal{Y}_s, \mathcal{S}), \quad (6.23)$$

$$\mathbf{L}_h := \mathbf{L}(\mathcal{Y}_h, \mathcal{H}), \quad (6.24)$$

aus der Gesamtausgangsmatrix $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{q \times n}$ mit $\mathbf{L}_s \in \mathbb{R}^{q_s \times n_s}$ und $\mathbf{L}_h \in \mathbb{R}^{q_h \times n_h}$. Für den Fall, dass $q_s + q_h > q$ ist und für die eindeutige Zuordnung der Teilsystemausgänge zu den ursprünglichen Systemausgängen können nun die Rücktransformationsmatrizen

$$\mathbf{L}_s^* := \mathbf{I}_q(:, \mathcal{Y}_s), \quad (6.25)$$

$$\mathbf{L}_h^* := \mathbf{I}_q(:, \mathcal{Y}_h) \quad (6.26)$$

definiert werden, wobei \mathbf{I}_q die q -dimensionale Einheitsmatrix ist und somit $\mathbf{L}_s^* \in \mathbb{R}^{q \times q_s}$ und $\mathbf{L}_h^* \in \mathbb{R}^{q \times q_h}$. Mit ihnen ergibt sich der ursprüngliche Gesamtausgang des Systems zu

$$\mathbf{y} = \mathbf{L}_s^* \underbrace{\mathbf{L}_s \mathbf{z}_s}_{=\tilde{\mathbf{y}}_s} + \mathbf{L}_h^* \underbrace{\mathbf{L}_h \mathbf{z}_h}_{=\tilde{\mathbf{y}}_h}. \quad (6.27)$$

Dazu ist noch zu bemerken, dass, falls eine der Mengen \mathcal{U}_s , \mathcal{U}_h , \mathcal{Y}_s , \mathcal{Y}_h leer sein sollte, bedeutet dies, dass das jeweilige Teilsystem keine Ein- oder Ausgänge durch das Gesamtsystem zugewiesen bekommt. Für die Berechnung der Teilsysteme stellt dies jedoch kein Problem dar, da sie, wie im Folgenden beschrieben, durch die Trennung neue interne Ein- und Ausgänge zugewiesen bekommen.

6.3.6 Extrahieren der Rotor-, Gehäuse- und Koppelsteifigkeiten

Durch die in Kapitel 6.1.2 beschriebenen Feder-Dämpfer-Elemente kommt es in der Dämpfungs- und in der Steifigkeitsmatrix zu Kreuzkopplungen zwischen den Rotor- und den Gehäusezuständen. Daher können diese beiden Matrizen nicht so einfach, wie die Massenmatrix, in die Teilsystemmatrizen zerlegt

werden. Im Folgenden wird zunächst nur die Steifigkeitsmatrix des Systems betrachtet, da viele der Schritte für die Dämpfung analog laufen.

Wird ohne Beschränkung der Allgemeinheit davon ausgegangen, dass der Zustandsvektor

$$\mathbf{z}^{\text{sort}} = \begin{pmatrix} \mathbf{z}_s \\ \mathbf{z}_h \end{pmatrix}$$

so sortiert ist, dass sich im oberen Teil die Zustände des Rotors befinden und im unteren die des Gehäuses, dann kann der Aufbau der Steifigkeitsmatrix vereinfacht wie folgt dargestellt werden:

$$\mathbf{K}^{\text{sort}} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{s\oplus o} & \widetilde{\mathbf{K}}_o \\ \hat{\mathbf{K}}_o & \mathbf{K}_{h\oplus o} \end{pmatrix}.$$

Hierbei enthalten $\mathbf{K}_{s\oplus o}$ und $\mathbf{K}_{h\oplus o}$ die Informationen über die Rotor- bzw. Gehäusesteifigkeiten, jedoch in beiden Fällen noch beeinflusst durch die Federsteifigkeiten zwischen Rotor und Gehäuse. Die Matrizen $\widetilde{\mathbf{K}}_o$ und $\hat{\mathbf{K}}_o$ enthalten die negativen Federsteifigkeiten der Ölfilm-Ersatzfedern. Das Ziel des nächsten Schritts ist nun, die Rotor- und Gehäusesteifigkeiten von den Federsteifigkeiten der Verbindungsfedern zu isolieren.

Das Isolieren der Ölfilmsteifigkeiten ist durch die komplexe Struktur der Ölfedern (siehe Kapitel 6.1.2) nicht trivial durchführbar. Zunächst wird eine Hilfsmatrix \mathbf{K}_{-o} mit

$$\mathbf{K}_{-o}(i, j) := \begin{cases} \mathbf{K}(i, j) & \text{für } \{i, j\} \subseteq \mathcal{S} \vee \{i, j\} \subseteq \mathcal{H} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (6.28)$$

definiert, die genau die Elemente aus \mathbf{K} beinhaltet, die ausschließlich vom Rotor auf den Rotor wirken oder vom Gehäuse auf das Gehäuse. Die Matrix \mathbf{K}_{-o} kann nach Abzug der Ölfilm-Ersatzfedersteifigkeiten in die reine Rotor- und Gehäusesteifigkeit unterteilt werden.

Für den Fall des geordneten Zustandsvektors ergibt sich somit die sortierte Steifigkeitsmatrix ohne Koppelterme

$$\mathbf{K}_{-o}^{\text{sort}} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{s\oplus o} & \mathbf{Z} \\ \mathbf{Z} & \mathbf{K}_{h\oplus o} \end{pmatrix}.$$

Die Menge der Koppelterme, welche zwischen Rotor und Gehäuse wirken, kann durch die Menge

$$\mathcal{C}^{\mathbf{K}} := \{(i, j) \mid i \in \mathcal{S}, j \in \mathcal{H} : \mathbf{K}(i, j) \neq 0\} \quad (6.29)$$

dargestellt werden. Die Koeffizienten an diesen Positionen sind die negativen Ölfilm-Federsteifigkeiten (siehe Kapitel 6.1.2) der Kopplungen. Da die Koppelsteifigkeiten in der Rotor- bzw. Gehäusesteifigkeit als positive Federsteifigkeit auftreten (siehe Kapitel 6.1.2), müssen die über $\mathcal{C}^{\mathbf{K}}$ identifizierten Koppelsteifigkeiten an den entsprechenden Stellen in der Rotor- bzw. Gehäusematrix hinzu addiert werden, um die reinen Steifigkeiten beider zu erhalten. Hierzu muss beachtet werden, welcher Rotorzustand auf welchen Gehäusezustand wirkt und umgekehrt. Dabei ist entscheidend, um welche Freiheitsgrade es sich bei den beeinflussten Knoten handelt. Dieser Zusammenhang soll zunächst an einem kleinen Beispiel erläutert werden.

Beispiel 6b: Trennen von Rotor- und Gehäusesteifigkeit

Zur Veranschaulichung soll ein Minimalbeispiel bestehend aus zwei Knoten mit jeweils zwei Freiheitsgraden genügen. Der Zustandsvektor des Systems und die nicht symmetrische Steifigkeitsmatrix sein gegeben durch

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ y_2 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_{xx} & k_{xy} & -k_{xy} & -k_{xx} \\ k_{yx} & k_{yy} & -k_{yy} & -k_{yx} \\ -k_{yx} & -k_{yy} & k_{yy} & k_{yx} \\ -k_{xx} & -k_{xy} & k_{xy} & k_{xx} \end{pmatrix}.$$

Zur besseren Übersicht soll hier auf die Allokationsmatrix verzichtet werden, dafür enthalten die Variablennamen der einzelnen Zustände alle nötigen Informationen. Die Indizes geben die Zugehörigkeit zu den Knoten 1 und 2 an und x, y beschreiben den Freiheitsgrad. Die Federsteifigkeit der Feder zwischen Knoten 1 und 2 ist aus der Steifigkeitsmatrix erkennbar, da in diesem sehr einfachen Beispiel keine zusätzlichen Steifigkeiten wirken. Die Vertauschung von x_2 und y_2 soll veranschaulichen, dass durch kleinste Störungen in der Ordnung des Zustandsvektors eine Zuordnung der jeweiligen Steifigkeiten nicht mehr trivial ist.

Wenn Knoten 1 einen Rotorknoten und Knoten 2 einen Gehäuseknoten repräsentieren, ergeben sich die Indexmengen von Rotor und Gehäuse in trivialer Weise zu

$$\begin{aligned}\mathcal{S} &= \{1, 2\} \\ \mathcal{H} &= \{3, 4\}.\end{aligned}$$

Somit kann als nächstes die Menge der Koppelterme

$$\mathcal{C}^{\mathbf{K}} = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$$

nach Gleichung 6.29 erstellt werden. Untersucht wird nun, zu welchen Rotorsteifigkeiten diese Kopplungen addiert werden müssen, um den Einfluss der Feder herauszurechnen. Es ergibt sich für den Rotorteil der Steifigkeitsmatrix folgendes Bild

$$\mathbf{K}_s = \begin{pmatrix} \mathbf{K}(1, 1) + \mathbf{K}(1, 4) & \mathbf{K}(1, 2) + \mathbf{K}(1, 3) \\ \mathbf{K}(2, 1) + \mathbf{K}(2, 4) & \mathbf{K}(2, 2) + \mathbf{K}(2, 3) \end{pmatrix}.$$

Es ist bereits an dieser Stelle erkennbar, dass die Koppelterme immer zu Elementen aus derselben Gleichung hinzu addiert werden, da sich in den Zeilen nur Elemente aus derselben Zeile befinden. Die Zuordnung der Spalten aus der Kopplung zu den Spalten der Rotormatrix erschließt sich jedoch einfacher, wenn anstelle der Positionen innerhalb der Matrix $(1, \dots, 4)$ die Zustände (x_1, \dots, x_2) verwendet werden.

Wird beispielsweise für das Matrixelement $\mathbf{K}(1, 1) + \mathbf{K}(1, 4)$ die Positionen durch die Zustände ersetzt, kann dieses Matrixelement auch als $(x_1, x_1) + (x_1, x_2)$ geschrieben werden. Für den gesamten Rotorteil der Steifigkeitsmatrix bedeutet dies

$$\mathbf{K}_s = \begin{pmatrix} (x_1, x_1) + (x_1, x_2) & (x_1, y_1) + (x_1, y_2) \\ (y_1, x_1) + (y_1, x_2) & (y_1, y_1) + (y_1, y_2) \end{pmatrix}.$$

Es ist erkennbar, dass die Koppelterme jeweils den Spalten zugeordnet wurden, deren Freiheitsgrad dem Freiheitsgrad der Spalte des Koppelterms entspricht, d.h. der Freiheitsgrad des zweiten Indizes

ist bei den zwei Summanden jeweils identisch. Für den allgemeinen Fall, dass mehr als ein Rotorknoten existiert, muss zudem darauf geachtet werden, dass der Koppelterm zu einer Rotorspalte addiert wird, die zu demselben Knoten gehört wie die Zeile, in der sich der Koppelterm befindet.

Formalisiert bedeuten die Erkenntnisse aus dem Beispiel für die Hilfssteifigkeitsmatrix aus Gleichung 6.28, dass einigen Termen neue Größen zugewiesen werden

$$\begin{aligned} \forall (i, j) \in \mathcal{C}^{\mathbf{K}} : (\exists t \in \mathcal{S} : \mathbf{Q}(t, 2) = \mathbf{Q}(i, 2) \wedge \mathbf{Q}(t, 3) = \mathbf{Q}(j, 3)) \\ \Rightarrow \mathbf{K}_{-o}(i, t) := \mathbf{K}_{-o}(i, t) + \mathbf{K}(i, j) \end{aligned} \quad (6.30)$$

$$\begin{aligned} \forall (i, j) \in \mathcal{C}^{\mathbf{K}} : (\exists t \in \mathcal{H} : \mathbf{Q}(t, 2) = \mathbf{Q}(j, 2) \wedge \mathbf{Q}(t, 3) = \mathbf{Q}(i, 3)) \\ \Rightarrow \mathbf{K}_{-o}(t, j) := \mathbf{K}_{-o}(t, j) + \mathbf{K}(i, j). \end{aligned} \quad (6.31)$$

Um die Rotorsteifigkeit von der Koppelfedersteifigkeit zu trennen, wird in Gleichung 6.30 ein Zustand t für die gleiche Rotorgleichung i gesucht, der zum selben Knoten ($\mathbf{Q}(i, 2)$) gehört wie der Rotorknoten, auf den sich die Gleichung i bezieht, jedoch denselben Freiheitsgrad ($\mathbf{Q}(j, 3)$) hat wie der Zustand j , der gerade auf die Rotorgleichung wirkt.

Beim Isolieren der Gehäusesteifigkeit in Gleichung 6.31 verhält es sich ein wenig anders. Hier wird die Gehäusegleichung t gesucht, die auf denselben Knoten ($\mathbf{Q}(j, 2)$) wirkt, zudem auch der gerade gewählte Zustand j wirkt, jedoch denselben Freiheitsgrad ($\mathbf{Q}(i, 3)$) besitzt wie die Rotorgleichung i , auf die das betrachtete Element $\mathbf{K}(i, j)$ wirkt.

Der Rotor- und der Gehäuseteil der Matrix \mathbf{K}_{-o} sind nun von den Federsteifigkeiten bereinigt und die Matrix kann in eine reine Rotorsteifigkeit

$$\mathbf{K}_s := \mathbf{K}_{-o}(\mathcal{S}, \mathcal{S}) \quad (6.32)$$

und eine Gehäusesteifigkeit

$$\mathbf{K}_h := \mathbf{K}_{-o}(\mathcal{H}, \mathcal{H}) \quad (6.33)$$

aufgeteilt werden.

6.3.7 Extrahieren der Rotor-, Gehäuse- und Koppeldämpfungen

Die Rotor- und Gehäusedämpfung können auf dieselbe Weise gewonnen werden. Analog zu den Gleichungen 6.28 bis 6.31 ergeben sich

$$\mathbf{D}_{-o}(i, j) := \begin{cases} \mathbf{D}(i, j) & \text{für } \{i, j\} \subseteq \mathcal{S} \vee \{i, j\} \subseteq \mathcal{H} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad (6.34)$$

$$\mathcal{C}^D = \{(i, j) \mid i \in \mathcal{S}, j \in \mathcal{H} : \mathbf{D}(i, j) \neq 0 \vee \mathbf{D}(j, i) \neq 0\}, \quad (6.35)$$

$$\begin{aligned} \forall (i, j) \in \mathcal{C}^D : (\exists t \in \mathcal{S} : \mathbf{Q}(t, 2) = \mathbf{Q}(i, 2) \wedge \mathbf{Q}(t, 3) = \mathbf{Q}(j, 3)) \\ \Rightarrow \mathbf{D}_{-o}(i, t) := \mathbf{D}_{-o}(i, t) + \mathbf{D}(i, j) \end{aligned} \quad (6.36)$$

$$\begin{aligned} \forall (i, j) \in \mathcal{C}^D : (\exists t \in \mathcal{H} : \mathbf{Q}(t, 2) = \mathbf{Q}(j, 2) \wedge \mathbf{Q}(t, 3) = \mathbf{Q}(i, 3)) \\ \Rightarrow \mathbf{D}_{-o}(t, j) := \mathbf{D}_{-o}(t, j) + \mathbf{D}(i, j). \end{aligned} \quad (6.37)$$

Der Rotor- und der Gehäuseteil der Matrix \mathbf{D}_{-o} enthalten nun keine Koppeldämpfungen mehr und die Matrix kann in eine reine Rotordämpfung

$$\mathbf{D}_s := \mathbf{D}_{-o}(\mathcal{S}, \mathcal{S}) \quad (6.38)$$

und eine Gehäusedämpfung

$$\mathbf{D}_h := \mathbf{D}_{-o}(\mathcal{H}, \mathcal{H}) \quad (6.39)$$

aufgeteilt werden.

6.3.8 Erzeugen neuer lokaler Ein- und Ausgänge zur Berechnung der Koppelsteifigkeit

Mit der Extraktion der Subsystemdämpfungen und -steifigkeiten sind die Systeme jedoch noch nicht vollständig beschrieben. Die Effekte, welche durch die Koppelsteifigkeit und -dämpfung zwischen Rotor und Gehäuse auftreten, sind bisher nicht abgebildet. In diesem Abschnitt wird wieder zuerst die Steifigkeit

betrachtet. Aufbauend auf der vereinfachten Darstellung einer Steifigkeitsmatrix aus Kapitel 6.3.6, lässt sich für solch ein sortiertes System die Steifigkeit, wie bereits erläutert, als

$$\mathbf{K}^{\text{sort}} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{s\oplus o} & \widetilde{\mathbf{K}}_o \\ \widehat{\mathbf{K}}_o & \mathbf{K}_{h\oplus o} \end{pmatrix}$$

darstellen. Die Kraft $\mathbf{F}_s^{\text{sort}}$, die auf den Rotor wirkt, ergibt sich damit zu

$$\mathbf{F}_s^{\text{sort}} = \mathbf{K}_{s\oplus o} \mathbf{z}_s - \widetilde{\mathbf{K}}_o \mathbf{z}_h \quad (6.40)$$

$$= \mathbf{K}_s \mathbf{z}_s + \underbrace{\mathbf{K}_{\oplus o} \mathbf{z}_s - \widetilde{\mathbf{K}}_o \mathbf{z}_h}_{=\mathbf{F}_{s,o}^{\text{sort}}}, \quad (6.41)$$

wobei $\mathbf{K}_{\oplus o}$ die Steifigkeiten repräsentiert, welche durch den Ölfilm direkt auf die Rotorzustände wirken.

Da nach der Trennung der beiden Subsysteme die Zustände des Gehäuses innerhalb des Rotorsystems jedoch nicht mehr zur Berechnung zur Verfügung stehen, muss ein anderer Weg gefunden werden, wie die Kraft $\mathbf{F}_{s,o}^{\text{sort}}$ berechnet werden kann. Im Folgenden soll nun $\mathbf{F}_{s,o}^{\text{sort}}$ als ein auf das Rotorsystem wirkender Eingang betrachtet werden. Die Zustände aus dem Rotor- und Gehäusesystem, die für die Berechnung der Kraft notwendig sind, werden als Ausgänge der beiden Subsysteme definiert und können somit für die Berechnung der übertragenen Kraft herangezogen werden. Die Kraft $\mathbf{F}_{s,o}^{\text{sort}}$ kann also als Eingang $\mathbf{u}_{s,o}^{\text{sort}}$ in Abhängigkeit der Ausgänge $\mathbf{y}_s^{\text{sort}}$, $\mathbf{y}_h^{\text{sort}}$ formuliert werden

$$\mathbf{F}_{s,o}^{\text{sort}} = \mathbf{u}_{s,o}^{\text{sort}} = \mathbf{K}_{\oplus o} \mathbf{y}_s^{\text{sort}} - \widetilde{\mathbf{K}}_o \mathbf{y}_h^{\text{sort}}. \quad (6.42)$$

Die Extraktion der Ölfilmsteifigkeit und der für die Berechnung notwendigen Ein- und Ausgänge der Subsysteme ist jedoch etwas aufwändiger und bedarf einiger Zwischenschritte.

Dass die Extraktion bereits für kleine Systeme nicht trivial ist, soll ein einfaches Beispiel zeigen, anhand dessen auch die folgenden Schritte immer wieder nachvollzogen werden können.

Beispiel 6c:

Abbildung 6.8 zeigt den Aufbau dieses zwei-dimensionalen Beispiels. Der Knoten 1 sei hierbei ein Knoten des Rotors und Knoten

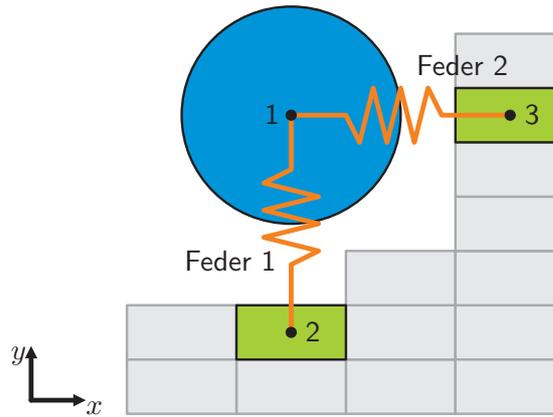


Abb. 6.8: Vereinfachtes zwei-dimensionales Beispiel zur Veranschaulichung der Interaktion zwischen dem Rotorknoten 1 und den Gehäuseknoten 2 und 3 über Ölfilm-Ersatzfedern.

2 und 3 sein Gehäuseknoten. Die Bewegungsfreiheit des Knoten 3 sei in y -Richtung gesperrt. Der Zustandsvektor ist somit

$$\mathbf{z}^{6c} = (x_1 \quad y_1 \quad y_2 \quad x_2 \quad x_3)^T.$$

Da lediglich die Extraktion der übertragenen Kräfte veranschaulicht werden soll, wird in dem Beispiel auf zusätzliche Steifigkeiten am Rotor oder den Gehäuseknoten verzichtet. Feder 1 sei wie die Ölfilmfedern eine allgemeine Feder mit Steifigkeiten in x und y -Richtung sowie Koppelsteifigkeiten, so dass die Federsteifigkeitsmatrix geschrieben werden kann als

$$\mathbf{K}_{\text{Feder 1}} = \begin{pmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{pmatrix}.$$

Die Federsteifigkeit der einfachen Feder 2 sei gegeben durch k_2 . Mit der durch den Zustandsvektor vorgegebenen Ordnung ergibt sich für die Steifigkeitsmatrix dieses Systems

$$\mathbf{K}^{6c} = \begin{pmatrix} k_{xx} + k_2 & k_{xy} & -k_{xy} & -k_{xx} & -k_2 \\ k_{yx} & k_{yy} & -k_{yy} & -k_{yx} & \\ -k_{yx} & -k_{yy} & k_{yy} & k_{yx} & \\ -k_{xx} & -k_{xy} & k_{xy} & k_{xx} & \\ -k_2 & & & & k_2 \end{pmatrix}.$$

Wird nun noch einmal Gleichung 6.42 betrachtet, könnten bereits jetzt die Matrizen $\mathbf{K}_{\oplus o}$ und $\widetilde{\mathbf{K}}_o$ extrahiert werden. Dies hätte jedoch den Nachteil, dass eine Veränderung einer einzelnen Feder zwischen zwei bestimmten Knoten nicht einfach möglich wäre. Eine solche Änderung ist z. B. für die drehzahlabhängige Anpassung des Ölfilms während einer Simulation notwendig. Bereits in dem einfachen Beispiel 6c ist der Zugriff auf k_2 in den Matrizen nicht mehr einfach möglich. Vorteilhafter ist also eine Übertragungssteifigkeitsmatrix, in der die einzelnen Federsteifigkeiten getrennt voneinander sind. In einer solchen Matrix \mathbf{K}_o sollten somit alle Steifigkeiten einer Zeile oder Spalte zu genau einer Feder des Systems gehören. Mit einer solchen Matrix können die Eingänge sowohl für den Rotor $\tilde{\mathbf{u}}_{s,o}^{\text{sort}}$ als auch für das Gehäuse $\tilde{\mathbf{u}}_{h,o}^{\text{sort}}$ berechnet werden

$$\tilde{\mathbf{u}}_{s,o}^{\text{sort}} = \mathbf{K}_o \tilde{\mathbf{y}}_s - \mathbf{K}_o \tilde{\mathbf{y}}_h \quad (6.43)$$

$$= -\tilde{\mathbf{u}}_{h,o}^{\text{sort}}. \quad (6.44)$$

Beispiel 6d:

Für das gewählte Beispiel würde eine solche Matrix bis auf Vertauschungen von Spalten und Zeilen gegeben sein durch

$$\mathbf{K}_o^{6c} = \begin{pmatrix} k_{xx} & k_{xy} & & \\ k_{yx} & k_{yy} & & \\ & & & k_2 \end{pmatrix}.$$

Bei einer trivialen Konstruktion von \mathbf{K}_o sowie den Ein- und Ausgängen der Teilsysteme, kann es passieren, dass ein Zustand eines Knotens, auf den mehrere Federn wirken, dazu führt, dass dieser Zustand mehrmals in den neu gewonnenen Ein- und Ausgängen auftaucht. Dies ist gerade für die Reduktion der Subsysteme später von Nachteil, da sich mit der Anzahl der Eingänge und Ausgänge meist auch die Reduktionsgröße erhöht. Ziel ist es also, Abbildungsmatrizen zu finden, so dass jeder Zustand in den Eingangs- bzw. Ausgangsvektoren der Subsystem exakt einmal auftritt. Wie solche Abbildungsmatrizen und die Matrix \mathbf{K}_o erzeugt werden, wird im Folgenden gezeigt.

Die Positionen aller auftretenden Koppelsteifigkeiten des Gesamtsystems in der Steifigkeitsmatrix wurde bereits in Gleichung 6.29 festgehalten. Diese Koppelsteifigkeiten müssen in eine Matrix \mathbf{K}_o überführt werden, so dass in jeder Zeile

und in jeder Spalte jeweils nur Koppelsteifigkeiten stehen, die zwischen genau einem Rotorknoten und genau einem Gehäuseknoten wirken. Für die formale Schreibweise des Algorithmus wird eine Matrix \mathbf{K}_o^* definiert, welche die maximal mögliche Größe einer Koppelmatrix hat. Dies ist genau dann der Fall, wenn Rotor und Gehäuse mit Federn verbunden sind, welche keine Kreuzkopplungen aufweisen. In der programmiertechnischen Umsetzung wird später lediglich bei jedem Schritt geprüft, ob eine neue Zeile oder Spalte in der Matrix benötigt wird und diese gegebenenfalls hinzugefügt. Auch die noch leeren Abbildungsmatrizen für die Abbildungen der Eingänge und Ausgänge werden hier dementsprechend bereitgestellt

$$\mathbf{K}_o^* = \mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{|\mathcal{C}^K| \times |\mathcal{C}^K|} \quad (6.45)$$

$$\boldsymbol{\Upsilon}_y^K = \mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{|\mathcal{C}^K| \times n} \quad (6.46)$$

$$\boldsymbol{\Upsilon}_u^K = \mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{|\mathcal{C}^K| \times n} . \quad (6.47)$$

Die Matrix $\boldsymbol{\Upsilon}_y^K$ wird später die Ausgänge auf die zu berechnenden Kräften abbilden und $\boldsymbol{\Upsilon}_u^K$ wird die entstandenen Kräfte auf die entsprechenden Eingänge abbilden. Die so vordefinierten Matrizen werden nach und nach besetzt, indem jedes Element aus \mathcal{C}^K (siehe Gleichung 6.29) ausgewertet wird.

Beispiel 6e:

Für das Beispiel ist die Menge aller Koppelterme

$$\mathcal{C}^{K,6c} = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4)\}.$$

Im Folgenden soll die Wirkung des Koppel-elementes (1, 3) ausgewertet werden, dafür muss sowohl die erste als auch die dritte Zeile und Spalte der Steifigkeitsmatrix betrachtet werden. Zur Erinnerung sei hier noch einmal der Zustandsvektor neben die Steifigkeitsmatrix geschrieben

$$\mathbf{K}^{6c} = \begin{pmatrix} k_{xx} + k_2 & k_{xy} & -k_{xy} & -k_{xx} & -k_2 \\ k_{yx} & k_{yy} & -k_{yy} & -k_{yx} & \\ -k_{yx} & -k_{yy} & k_{yy} & k_{yx} & \\ -k_{xx} & -k_{xy} & k_{xy} & k_{xx} & \\ -k_2 & & & & k_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z}^{6c} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ y_2 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} .$$

An der Stelle (1, 3) befindet sich in der Steifigkeitsmatrix das Element $-k_{xy}$. Dies ist ein Kreuzkoppellement der Federsteifigkeitsmatrix der Feder 1, d. h. eine Relativbewegung der Knoten 1 und 2 in y -Richtung erzeugt durch eine solche Kreuzkopplung eine Kraft in x -Richtung sowohl auf den Knoten 1 als auch auf den Knoten 2. In diesem Beispiel lässt sich dies an der Schreibweise der Zustände erkennen, welche die Informationen beinhaltet, die sonst die Allokationsmatrix liefert. Über den Zeilenindex lässt sich also ermitteln, auf welchen Rotorknoten die Kopplung wirkt und in welche Richtung die resultierenden Kräfte wirken. Durch den Spaltenindex lässt sich dann zusätzlich der Gehäuseknoten ermitteln, auf den die Kopplung ebenfalls wirkt.

In der Matrix \mathbf{K}_o^{*6c} wird k_{xy} als erstes Element an der Stelle (1, 1) festgehalten. In Abbildungsmatrix $\boldsymbol{\Upsilon}_y^{K,6c}$ enthält die erste Zeile die Informationen darüber, welche Relativbewegung von welchen Freiheitsgraden betrachtet wird. Die Matrix $\boldsymbol{\Upsilon}_u^{K,6c}$ hingegen enthält die Informationen über die Freiheitsgrade, auf welche die entstehenden Kräfte wirken. Die Informationen werden mit einer 1 an den entsprechenden Positionen gekennzeichnet. Es ergeben sich also folgende erste Zeilen der Matrizen

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Upsilon}_y^{K,6c}(1, :) &= (0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0) , \\ \boldsymbol{\Upsilon}_u^{K,6c}(1, :) &= (1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0) .\end{aligned}$$

Formalisiert ergibt sich der folgende Algorithmus für alle Elemente aus \mathcal{C}^K

$\forall (i, j) \in \mathcal{C}^K :$

$$i_r \in \mathbb{N} \mid \mathbf{Q}(i_r, 2) = \mathbf{Q}(i, 2) \wedge \mathbf{Q}(i_r, 3) = \mathbf{Q}(j, 3) , \quad (6.48)$$

$$r := \begin{cases} 1 & \text{für } \boldsymbol{\Upsilon}_y^K = \mathbf{Z}, \\ g & \text{für } \boldsymbol{\Upsilon}_y^K(g, i_r) = 1 \wedge \boldsymbol{\Upsilon}_y^K(g, j) = 1, \\ l & \text{sonst, wobei } \boldsymbol{\Upsilon}_y^K(l, :) = \mathbf{Z} \\ & \wedge \boldsymbol{\Upsilon}_y^K(l-1, :) \neq \mathbf{Z} \end{cases} \quad (6.49)$$

$$j_t \in \mathbb{N} \mid \mathbf{Q}(j_t, 2) = \mathbf{Q}(j, 2) \wedge \mathbf{Q}(j_t, 3) = \mathbf{Q}(i, 3), \quad (6.50)$$

$$t := \begin{cases} 1 & \text{für } \boldsymbol{\gamma}_u^K = \mathbf{Z}, \\ g & \text{für } \boldsymbol{\gamma}_u^K(g, i) = 1 \wedge \boldsymbol{\gamma}_u^K(g, j_t) = 1, \\ l & \text{sonst, wobei } \boldsymbol{\gamma}_u^K(l, :) = \mathbf{Z} \\ & \wedge \boldsymbol{\gamma}_y^K(l-1, :) \neq \mathbf{Z} \end{cases} \quad (6.51)$$

$$\boldsymbol{\gamma}_y^K(r, i_r) := 1 \quad (6.52)$$

$$\boldsymbol{\gamma}_y^K(r, j) := 1 \quad (6.53)$$

$$\boldsymbol{\gamma}_u^K(t, i) := 1 \quad (6.54)$$

$$\boldsymbol{\gamma}_u^K(t, j_t) := 1 \quad (6.55)$$

$$\mathbf{K}_o^*(t, r) := -\mathbf{K}(i, j). \quad (6.56)$$

Wenn für alle Koppelsteifigkeiten die Schritte aus Gleichung 6.48 bis 6.56 durchgeführt wurden, können nun die entstandenen Matrizen auf ihre endgültige Größe gebracht werden. Wie schon erwähnt, würden bei der Programmierung des Algorithmus keine Nullzeilen entstehen, da eine Zuweisung während der Laufzeit möglich ist. Für die formale Schreibweise muss nun jedoch zunächst ermittelt werden, ab welcher Zeile keine Informationen mehr vorliegen. Die interessierenden Zeilenzahlen ergeben sich zu

$$k_u \in \mathbb{N} \text{ mit } \boldsymbol{\gamma}_u^K(k_u, :) \neq \mathbf{Z} \wedge \boldsymbol{\gamma}_u^K(k_u + 1, :) = \mathbf{Z} \quad (6.57)$$

$$k_y \in \mathbb{N} \text{ mit } \boldsymbol{\gamma}_y^K(k_y, :) \neq \mathbf{Z} \wedge \boldsymbol{\gamma}_y^K(k_y + 1, :) = \mathbf{Z}. \quad (6.58)$$

Mit k_u und k_y kann zunächst die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_o^* in ihre endgültige Form

$$\mathbf{K}_o = \mathbf{K}_o^*(1 : k_u, 1 : k_y) \quad (6.59)$$

überführt werden. Um die Matrizen $\boldsymbol{\gamma}_y^K$ und $\boldsymbol{\gamma}_u^K$ in ihre endgültige Form zu bringen, ist es erforderlich, alle Zustände, welche für die Übertragung der Koppelkräfte wichtig sind, zu kennen. Es werden folglich zwei Mengen definiert, welche alle Koppelzustände des Rotors \mathcal{S}_o^K bzw. alle Koppelzustände des Gehäuses \mathcal{H}_o^K enthalten

$$\mathcal{S}_o^K := \{i \in \mathcal{S} \mid \exists j \in \mathcal{H} : \mathbf{K}(i, j) \neq 0\} \quad (6.60)$$

$$\mathcal{H}_o^K := \{i \in \mathcal{H} \mid \exists j \in \mathcal{S} : \mathbf{K}(i, j) \neq 0\}, \quad (6.61)$$

wobei \mathcal{S} und \mathcal{H} die Mengen sind, welche die Zustände des Rotors bzw. des Gehäuses zusammenfassen (siehe Gleichung 6.9 und 6.10).

Für Systeme ohne Koppeldämpfung können mit dem Wissen über die so definierten Koppelzustände auch die Matrizen \mathbf{r}_y^K und \mathbf{r}_u^K von Nullzeilen bereinigt werden und gleichzeitig auf die für die Übertragung der Kräfte relevanten Spalten reduziert werden

$$\mathbf{r}_{y,s}^K = \mathbf{r}_y^K(1 : k_y, \mathcal{S}_o^K) \quad (6.62)$$

$$\mathbf{r}_{y,h}^K = \mathbf{r}_y^K(1 : k_y, \mathcal{H}_o^K) \quad (6.63)$$

$$\mathbf{r}_{u,s}^K = \mathbf{r}_u^K(1 : k_u, \mathcal{S}_o^K) \quad (6.64)$$

$$\mathbf{r}_{u,h}^K = \mathbf{r}_u^K(1 : k_u, \mathcal{H}_o^K). \quad (6.65)$$

Beispiel 6f:

Werden die in den Gleichungen 6.48 bis 6.65 vorgestellten Schritte für das Beispiel durchgeführt, ergibt sich

$$\mathbf{K}_o = \begin{pmatrix} k_{xy} & k_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & k_2 \\ k_{yy} & k_{yx} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{r}_{y,s}^K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{r}_{y,h}^K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{r}_{u,s}^K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{r}_{u,h}^K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Werden nun noch die Eingänge und Ausgänge der Teilsysteme

$$\mathbf{u}_s = \mathbf{y}_s = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \end{pmatrix}^T$$

$$\mathbf{u}_h = \mathbf{y}_h = \begin{pmatrix} y_2 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^T$$

betrachtet, so ist leicht zu erkennen, dass sich die Kräfte, die durch Koppelsteifigkeiten auf den Rotorknoten übertragen werden, aus folgendem Zusammenhang ergeben

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_s &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} k_{xy} & k_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & k_2 \\ k_{yy} & k_{yx} & 0 \end{pmatrix} \left(- \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_2 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right) \\ &= (\boldsymbol{\Upsilon}_{u,s}^K)^T \mathbf{K}_o (-\boldsymbol{\Upsilon}_{y,s}^K \mathbf{y}_s + \boldsymbol{\Upsilon}_{y,h}^K \mathbf{y}_h). \end{aligned}$$

Für die auf Zustand x_1 wirkende Kraft ergibt sich folglich

$$\mathbf{u}_s(1) = k_{xy}(-y_1 + y_2) + k_{xx}(-x_1 + x_2) + k_2(-x_1 + x_2),$$

welche exakt dem Eingang aus dem Gesamtsystem entspricht (siehe Beispiel 6c).

6.3.9 Erzeugen neuer lokaler Ein- und Ausgänge zur Berechnung der Koppeldämpfungen

Zur korrekten Definition aller neuen Ein- und Ausgänge für die Teilsysteme muss die Rolle der Koppeldämpfung noch gesondert untersucht werden. Hierbei ergeben sich für den Algorithmus und das Definieren der Eingänge einige Besonderheiten, welche für die Allgemeingültigkeit des Algorithmus von Bedeutung sind. Daher kann die Dämpfung nicht völlig analog zur Steifigkeit betrachtet werden.

Analog zur Vorgehensweise für Koppelsteifigkeiten, wie sie in den Gleichungen 6.45 bis 6.65 gezeigt wurde, können für die Koppeldämpfung die Größen $\boldsymbol{\Upsilon}_y^D$, $\boldsymbol{\Upsilon}_u^D$, d_u , d_y , \mathbf{D}_o , \mathcal{S}_o^D und \mathcal{H}_o^D ermittelt werden.

Die Abbildungsmatrizen für die Abbildung der Ausgänge

$$\boldsymbol{\Upsilon}_{y,s}^D = \boldsymbol{\Upsilon}_y^D(1 : d_y, \mathcal{S}_o^D) \quad (6.66)$$

$$\boldsymbol{\Upsilon}_{y,h}^D = \boldsymbol{\Upsilon}_y^D(1 : d_y, \mathcal{H}_o^D) \quad (6.67)$$

bleiben im Vergleich zum Vorgehen bei der Steifigkeit unverändert. Jedoch ändert sich der Aufbau von $\boldsymbol{\Upsilon}_{u,s/h}^D$. Auch der Aufbau von $\boldsymbol{\Upsilon}_{u,s/h}^K$ muss für den Fall des gleichzeitigen Auftretens von Koppeldämpfungen und Koppelsteifigkeiten noch einmal angepasst werden. Dazu werden zunächst die Mengen aller aus der Steifigkeit und Dämpfung hervorgehenden Koppelzustände definiert

$$\mathcal{S}_o = \mathcal{S}_o^K \cup \mathcal{S}_o^D \quad (6.68)$$

$$\mathcal{H}_o = \mathcal{H}_o^K \cup \mathcal{H}_o^D. \quad (6.69)$$

Damit können die Abbildungsmatrizen für die Eingänge so definiert werden, dass jeweils alle relevanten Spalten enthalten sind, egal, ob sie zu Zuständen gehören, die nur für die Dämpfung oder nur für die Steifigkeit relevant sind

$$\boldsymbol{\gamma}_{u,s}^K = \boldsymbol{\gamma}_u^K(1 : k_u, \mathcal{S}_o) \quad (6.70)$$

$$\boldsymbol{\gamma}_{u,h}^K = \boldsymbol{\gamma}_u^K(1 : k_u, \mathcal{H}_o) \quad (6.71)$$

$$\boldsymbol{\gamma}_{u,s}^D = \boldsymbol{\gamma}_u^D(1 : d_u, \mathcal{S}_o) \quad (6.72)$$

$$\boldsymbol{\gamma}_{u,h}^D = \boldsymbol{\gamma}_u^D(1 : d_u, \mathcal{H}_o). \quad (6.73)$$

Diese Maßnahme ist notwendig, damit im weiteren Verlauf die Konsistenz der Matrizendimensionen weiterhin gegeben ist. Die Abbildungsmatrizen ergeben sich für die Eingänge und Ausgänge des Rotorteilsystems zu

$$\boldsymbol{\gamma}_{u,s} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\gamma}_{u,s}^K \\ \boldsymbol{\gamma}_{u,s}^D \end{pmatrix} \quad (6.74)$$

$$\boldsymbol{\gamma}_{y,s} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{Z}^{k_y \times q_s} & \boldsymbol{\gamma}_{y,s}^K & \boldsymbol{Z} \\ \boldsymbol{Z}^{d_y \times q_s} & \boldsymbol{Z} & \boldsymbol{\gamma}_{y,s}^D \end{pmatrix}, \quad (6.75)$$

für die Eingänge und Ausgänge des Gehäuseteilsystems und zu

$$\boldsymbol{\gamma}_{u,h} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\gamma}_{u,h}^K \\ \boldsymbol{\gamma}_{u,h}^D \end{pmatrix} \quad (6.76)$$

$$\boldsymbol{\gamma}_{y,h} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{Z}^{k_y \times q_h} & \boldsymbol{\gamma}_{y,h}^K & \boldsymbol{Z} \\ \boldsymbol{Z}^{d_y \times q_h} & \boldsymbol{Z} & \boldsymbol{\gamma}_{y,h}^D \end{pmatrix} \quad (6.77)$$

mit q_s und q_h aus Abschnitt 6.3.5.

6.3.10 Erstellen der Teilsysteme

Damit sind die Abbildungsmatrizen für die Ein- und Ausgänge der Teilsysteme vollständig definiert, es fehlen noch die passenden Ein- und Ausgänge der

Teilsysteme. Gäbe es lediglich eine Kopplung der Teilsysteme über die Steifigkeitsmatrix, so könnten alle relevanten Ausgänge aus dem System zweiter Ordnung gewonnen werden. Da es jedoch auch Kopplungen über die Dämpfungsmatrix gibt, müssen die Teilsysteme zunächst in Systeme erster Ordnung überführt werden. Der Übergang in das System erster Ordnung ist notwendig, da für die Berechnung der Übertragungskräfte durch die Koppeldämpfungen die Geschwindigkeiten der Zustände benötigt werden. Diese können erst im System erster Ordnung als Ausgänge definiert werden.

Der Übergang zum System erster Ordnung geschieht, wie auch schon für den Rotor in Kapitel 4 beschrieben, für beide Teilsysteme auf ähnliche Art und Weise. Hier wird dies noch einmal für das Gehäuse beispielhaft gezeigt. Es ergibt sich das Gleichungssystem erster Ordnung

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I}_{n_h} & \mathbf{Z} \\ \mathbf{Z} & \mathbf{M}_h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{z}}_h \\ \ddot{\mathbf{z}}_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Z} & \mathbf{I}_{n_h} \\ -\mathbf{K}_h & -\mathbf{D}_h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{z}_h \\ \dot{\mathbf{z}}_h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{Z}^{n_h \times p_h} \\ \mathbf{J}_h \end{pmatrix} \mathbf{u}_h \quad (6.78)$$

$$\mathbf{y}_h = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_s & \mathbf{Z}^{q_h \times n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{z}_h \\ \dot{\mathbf{z}}_h \end{pmatrix},$$

wobei sich die einzelnen Teilmatrizen aus den vorangegangenen Abschnitten ergeben. Die Ein- und Ausgänge werden nun endgültig festgelegt. Für den Rotor ist lediglich die gyroskopische Matrix zusätzlich zu betrachten, welche mit der Drehzahl Ω multipliziert und zur Dämpfung hinzu addiert wird.

Für die Teilsysteme können zunächst die durch die Kopplung zusätzlichen Ein- und Ausgänge definiert werden durch

$$\mathbf{J}_{s,o} = \mathbf{I}_n(\mathcal{S}, \mathcal{S}_o) \quad (6.79)$$

$$\mathbf{J}_{h,o} = \mathbf{I}_n(\mathcal{H}, \mathcal{H}_o) \quad (6.80)$$

$$\mathbf{L}_{s,o}^K = \mathbf{I}_n(\mathcal{S}_o^K, \mathcal{S}) \quad (6.81)$$

$$\mathbf{L}_{h,o}^K = \mathbf{I}_n(\mathcal{H}_o^K, \mathcal{H}) \quad (6.82)$$

$$\mathbf{L}_{s,o}^D = \mathbf{I}_n(\mathcal{S}_o^D, \mathcal{S}) \quad (6.83)$$

$$\mathbf{L}_{h,o}^D = \mathbf{I}_n(\mathcal{H}_o^D, \mathcal{H}). \quad (6.84)$$

Im System erster Ordnung ergeben sich dann auf einfache Weise die Eingangsmatrizen \mathbf{B}_s bzw. \mathbf{B}_h , welche sowohl die Eingänge aus der Trennung (siehe Abschnitt 6.3.5) als auch die zusätzlichen Eingänge aus den Kopplungen (sie-

he Abschnitte 6.3.8 und 6.3.9) enthalten

$$\mathbf{B}_s = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}^{n_s \times p_s} & \mathbf{Z}^{n_s \times |\mathcal{S}_o|} \\ \mathbf{J}_s & \mathbf{J}_{s,o} \end{pmatrix} \quad (6.85)$$

$$\mathbf{B}_h = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}^{n_h \times p_h} & \mathbf{Z}^{n_h \times |\mathcal{H}_o|} \\ \mathbf{J}_h & \mathbf{J}_{h,o} \end{pmatrix}. \quad (6.86)$$

Bei der Erstellung der Ausgangsmatrizen muss jedoch nach Ausgängen differenziert werden, die für die Steifigkeit relevant sind, und Ausgängen, die für die Dämpfung relevant sind, da es sich zum Einen um die Auslenkungen und zum Anderen um die Geschwindigkeiten der Knoten handelt. Somit ergibt sich dann für die Teilsystemausgänge aus Abschnitt 6.3.8 und 6.3.9 in Kombination mit den Ausgängen aus Abschnitt 6.3.5

$$\mathbf{C}_s = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_s & \mathbf{Z} \\ \mathbf{L}_{s,o}^K & \mathbf{Z} \\ \mathbf{Z} & \mathbf{L}_{s,o}^D \end{pmatrix} \quad (6.87)$$

$$\mathbf{C}_h = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_h & \mathbf{Z} \\ \mathbf{L}_{h,o}^K & \mathbf{Z} \\ \mathbf{Z} & \mathbf{L}_{h,o}^D \end{pmatrix}. \quad (6.88)$$

Für das Teilsystem ergibt sich mit den durch die Kopplung entstandenen zusätzlichen Ein- und Ausgängen schließlich folgendes System, in dem die Nullmatrizen und Einheitsmatrizen wieder dieselben Dimensionen aufweisen sollen wie bereits in Gleichung 6.78

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{Z} \\ \mathbf{Z} & \mathbf{M}_h \end{pmatrix}}_{\mathbf{E}_h} \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{z}}_h \\ \ddot{\mathbf{z}}_h \end{pmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}_h} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{Z} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{K}_h & -\mathbf{D}_h \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}_h} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{z}_h \\ \dot{\mathbf{z}}_h \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}_h} + \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{Z} & \mathbf{Z} \\ \mathbf{J}_h & \mathbf{J}_{h,o} \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}_h} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_h \\ \mathbf{u}_{h,o} \end{pmatrix} \quad (6.89)$$

$$\mathbf{y}_h = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{L}_h & \mathbf{Z} \\ \mathbf{L}_{h,o}^K & \mathbf{Z} \\ \mathbf{Z} & \mathbf{L}_{h,o}^D \end{pmatrix}}_{\mathbf{C}_h} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{z}_h \\ \dot{\mathbf{z}}_h \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}_h}.$$

Die neuen Eingänge lassen sich aus den Ausgängen \mathbf{y}_s , \mathbf{y}_h und den Abbildungsmatrizen $\mathbf{Y}_{y,s}$, $\mathbf{Y}_{u,s}$, $\mathbf{Y}_{y,h}$ und $\mathbf{Y}_{u,h}$ sowie den Koppelsteifigkeiten \mathbf{K}_o und Koppeldämpfungen \mathbf{D}_o schnell berechnen.

Dazu sei noch einmal auf Gleichung 6.42 verwiesen. In der Gleichung ist gut zu erkennen, dass für die Berechnung einer übertragenen Kraft immer Differenzen von Auslenkungen (bzw. Geschwindigkeiten) zweier Knoten benötigt werden. Mit den Matrizen $\mathbf{Y}_{y,s}$ und $\mathbf{Y}_{y,h}$ aus den Gleichungen 6.75 und 6.77 werden also die Ausgänge der Teilsysteme so auf Vektoren abgebildet, dass sich die jeweils zueinander gehörenden Knotenauslenkungen ergeben. Mit den Abbildungsmatrizen $\mathbf{Y}_{u,s}$ und $\mathbf{Y}_{u,h}$ aus den Gleichungen 6.74 und 6.76 werden die Übertragungskräfte, welche zu ein und derselben Knotenauslenkungen gehören, aufeinander abgebildet, so dass das unnötige mehrfache Auftreten von Eingängen vermieden wird.

Es ergeben sich mit den beschriebenen Abbildungen und den gewonnenen Koppeldämpfungen und Koppelsteifigkeiten folgende Kraftübertragungen

$$\mathbf{u}_{h,o} = (\mathbf{Y}_{u,h})^T \begin{pmatrix} \mathbf{K}_o & \mathbf{Z} \\ \mathbf{Z} & \mathbf{D}_o \end{pmatrix} (\mathbf{Y}_{y,s}\mathbf{y}_s - \mathbf{Y}_{y,h}\mathbf{y}_h) \quad (6.90)$$

$$\mathbf{u}_{s,o} = (\mathbf{Y}_{u,s})^T \begin{pmatrix} \mathbf{K}_o & \mathbf{Z} \\ \mathbf{Z} & \mathbf{D}_o \end{pmatrix} (-\mathbf{Y}_{y,s}\mathbf{y}_s + \mathbf{Y}_{y,h}\mathbf{y}_h) . \quad (6.91)$$

Gemeinsam mit den Teilsystemen (vgl. Gleichung 6.89)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_s \dot{\mathbf{x}}_s &= \mathbf{A}_s \mathbf{x}_s + \mathbf{B}_s \begin{pmatrix} \mathbf{u}_s \\ \mathbf{u}_{s,o} \end{pmatrix} \\ \mathbf{y}_s &= \mathbf{C}_s \mathbf{x}_s \end{aligned} \quad (6.92)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_h \dot{\mathbf{x}}_h &= \mathbf{A}_h \mathbf{x}_h + \mathbf{B}_h \begin{pmatrix} \mathbf{u}_h \\ \mathbf{u}_{h,o} \end{pmatrix} \\ \mathbf{y}_h &= \mathbf{C}_h \mathbf{x}_h \end{aligned} \quad (6.93)$$

ist die Trennung des Gesamtsystems vollständig beschrieben und die Dynamik des Systems kann, wie in Abschnitt 6.2, berechnet werden.

6.3.11 Anwendbarkeit des Algorithmus auf andere Probleme

Mit diesem Algorithmus können nicht nur Rotor-Gehäuse-Systeme getrennt werden. Rotor und Gehäuse weisen lediglich den Vorteil auf, dass die Struktu-

ren durch die gyroskopische Matrix automatisiert trennbar sind. Liegt jedoch beispielsweise eine Knotenliste mit einer eindeutigen Zuordnung der Knoten zu zwei oder mehr verschiedenen Teilen einer Struktur vor, so kann mit Hilfe des Algorithmus eine solche Struktur ebenfalls in Teilsysteme unterteilt werden. Einzige Voraussetzung an das System ist, dass die Teilsysteme inertial entkoppelt sind.

Diese Teilsysteme würden dann genauso über ein Übertragungssystem (hier Öllager) miteinander verbunden sein. Der Vorteil liegt hier, wie bei den Rotor-Gehäuse-Strukturen, in der Verknüpfung der Systeme über Ein- und Ausgänge, so dass die Teilsysteme getrennt voneinander nach unterschiedlichen Zielsetzungen reduziert werden können.

Vorstellbar ist auch eine Anwendung in der Optimierung einzelner Abschnitte einer Struktur. So kann z. B. der zu optimierende Teil herausgelöst werden und der Rest der Struktur in reduzierter Form betrachtet werden. Dies würde für die Optimierungsrechnungen eine erhebliche Zeitersparnis bedeuten.

Da die Kopplung des Rotors und des Gehäuses über Ölfilm-Ersatzfedern mit unsymmetrischen Koppelmatrizen eine sehr allgemeine Form der Kopplung darstellt, können mit dem Algorithmus auch andere Kopplungen getrennt werden.

Dies ist von Vorteil, da zu der Trennung des Rotors vom Gehäuse in den Lagerstellen mit der Einbeziehung eines Statormodells noch magnetische Kräfte zwischen Rotor und Stator in das Modell miteinfließen. Das bedeutet, dass der Rotor auch an diesen Stellen vom Gehäuse getrennt werden muss.

Die magnetischen Zugkräfte werden im FE-Modell mit der Hilfe von Federn mit negativen Steifigkeiten modelliert. Eine solche Verbindung über Federn ist in Bild 6.9 schematisch dargestellt. Die Trennung des Rotors vom Gehäuse funktioniert weiterhin, wie im Algorithmus beschrieben, es entstehen lediglich deutlich mehr Ein- und Ausgänge für die Teilsysteme. Die Anzahl der neuen Ein- und Ausgänge für den Stator ist dabei meist mehr als viermal so groß wie die Zahl der zusätzlichen Ein- und Ausgänge für den Rotor. Dies ist leicht daran zu erkennen, dass die Federn, die an einem Rotorknoten angreifen, sich auf meist vier Gehäuseknoten verteilen, um die magnetischen Zugkräfte innerhalb der Rotor-Stator-Interaktion gut zu modellieren.

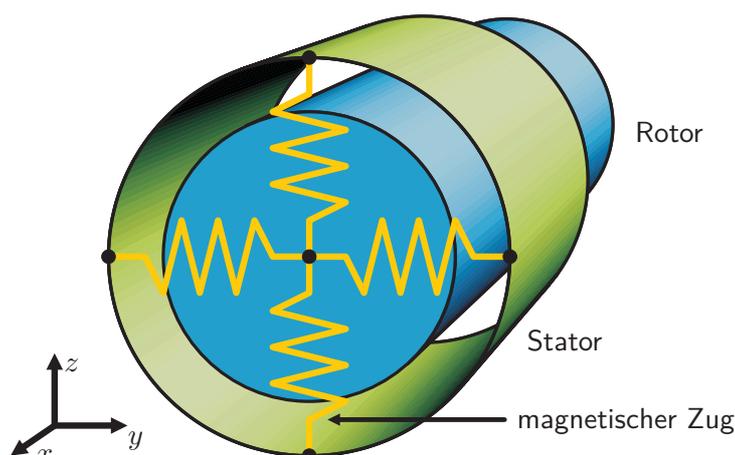


Abb. 6.9: Modellierung des magnetischen Zugs zwischen Rotor und Stator über jeweils vier Federn pro Rotorknoten mit negativen Steifigkeiten.

Eine weitere Anwendung, die bereits bei Siemens erprobt wird, ist die Unterteilung eines Rotors in einen Ballenabschnitt und die beiden Wellenenden. Nach der Trennung kann der Ballen modal transformiert und mit modaler Dämpfung versehen werden. Nach der Rücktransformation des Ballen kann dieser wieder mit den Wellenenden verbunden werden. Wie die Zusammenführung von reduzierten oder anders bearbeiteten Teilsystemen zu einem Gesamtsystem geschieht, wird in Kapitel 6.5 erläutert.

6.4 Reduktion der nicht parameterabhängigen Struktur

Nach der Zerlegung der Maschine in den drehzahlabhängigen Rotor und das vom Parameter unabhängige Gehäuse, kann dieses mit den Methoden der Modellordnungsreduktion, wie sie in Kapitel 3 vorgestellt wurden, reduziert werden. Da selbst ein FE-Modell eines Grundrahmens, welcher die kleinste, sinnvoll an den Rotor anzubindende Struktur darstellt, über 50 000 Freiheitsgrade im System zweiter Ordnung besitzt, ist die Reduktion mit der Methode des balancierten Abschneidens (siehe Abschnitt 3.3.2) nicht mehr möglich. Für diese Art von Systemen muss also auf die Krylov-Unterraumverfahren (siehe Abschnitt 3.4) zurückgegriffen werden.

Im Folgenden wird das Gehäusesystem aus der Gl. 6.93 in Abschnitt 6.3.10

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_h \dot{\mathbf{x}}_h &= \mathbf{A}_h \mathbf{x}_h + \mathbf{B}_h \begin{pmatrix} \mathbf{u}_h \\ \mathbf{u}_{h,o} \end{pmatrix} \\ \mathbf{y}_h &= \mathbf{C}_h \mathbf{x}_h, \end{aligned} \quad (6.94)$$

reduziert, wobei $\mathbf{E}_h, \mathbf{A}_h \in \mathbb{R}^{n_h \times n_h}$, $\mathbf{B}_h \in \mathbb{R}^{n_h \times p_h}$, $\mathbf{C}_h \in \mathbb{R}^{q_h \times n_h}$, $\mathbf{y}_h \in \mathbb{R}^{q_h}$, $\begin{pmatrix} \mathbf{u}_h^T & \mathbf{u}_{h,o}^T \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^{p_h}$ und n_h Zuständen und damit dem Zustandsvektor $\mathbf{x}_h \in \mathbb{R}^{n_h}$. Dieses System kann mit dem Krylov-Unterraumverfahren reduziert werden zu

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{h,r} \dot{\mathbf{x}}_{h,r} &= \mathbf{A}_{h,r} \mathbf{x}_{h,r} + \mathbf{B}_{h,r} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_h \\ \mathbf{u}_{h,o} \end{pmatrix} \\ \mathbf{y}_{h,r} &= \mathbf{C}_{h,r} \mathbf{x}_{h,r}, \end{aligned} \quad (6.95)$$

mit $\mathbf{E}_{h,r}, \mathbf{A}_{h,r} \in \mathbb{R}^{r_h \times n_h}$, $\mathbf{B}_{h,r} \in \mathbb{R}^{r_h \times p_h}$, $\mathbf{C}_{h,r} \in \mathbb{R}^{q_h \times r_h}$, $\begin{pmatrix} \mathbf{u}_h^T & \mathbf{u}_{h,o}^T \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^{p_h \times 1}$, $\mathbf{y}_{h,r} \in \mathbb{R}^{q_h \times 1}$ und $\mathbf{x}_{h,r} \in \mathbb{R}^{r_h}$, wobei $r_h \ll n_h$ ist.

Bei der Reduktion solch großer MIMO-Systeme ergeben sich mehrere Herausforderungen. Zum Einen stellt sich die Frage nach dem günstigsten Entwicklungspunkt, um den das System reduziert werden sollte, oder, ob es sich eventuell anbietet, mehrere Entwicklungspunkte zu wählen. Zum Anderen sind die sich aus den Gehäusen ergebenden Systeme stets MIMO-Systeme. Dies resultiert unter anderem daraus, dass sich allein durch die Trennung mindestens vier Ein- und Ausgänge an den Lagerstellen der Maschine ergeben. Hinzukommen dann noch, je nach Modell, die Interaktion zwischen Rotor und Stator. Abhängig von der jeweiligen Fragestellung können die Bewegungen mehrerer Punkte des Gehäuses von Interesse sein. Punkte, die für die Simulation häufig interessant sind, sind unter anderem die Bewegung der Lagerwände oder die Bewegung des Bodenblechs, da es sich hier meist um dünne Bleche handelt, die schon durch geringe Eigenfrequenzen zum Schwingen angeregt werden. Die Kräfte, die über das Gehäuse auf das Fundament übertragen werden, sind dann besonders wichtig, wenn es sich um nicht starre Fundamente handelt, wie es beispielsweise auf Ölbohrplattformen der Fall ist.

Das Problem der vielen Ein- und Ausgänge lässt sich mit Hilfe der in Abschnitt 3.3.3 vorgestellten ESVD-MOR Methode verringern. Dabei wird die Größe der Ein- und Ausgangsräume verringert. Erste Versuche ergaben, dass

sich die Ein- und Ausgangsräume gut reduzieren lassen, da es sich im Allgemeinen bei diesen Vektoren um Einheitsvektoren handelt (siehe Kapitel 2 und 6.1). Die einzige Ausnahme bildet der Vektor der Erdbeschleunigung, dieser sollte vor der ESVD Reduktion entfernt und nach der Reduktion wieder hinzugefügt werden.

Zur Wahl des Entwicklungspunktes ist zu sagen, dass sich die Reduktion um Null in den bisherigen Beispielen nicht negativ ausgewirkt hat. Es ist jedoch vorstellbar, dass stark vom Rotor beeinflusste Grundrahmen nicht nur um Null reduziert werden sollten. Ein Ansatz für die Wahl des Entwicklungspunktes besteht darin, z. B. mit Hilfe des in Kapitel 3.4.2 beschriebenen RK-ICOP Algorithmus, den günstigsten Entwicklungspunkt für den Rotor zu suchen und diesen als zusätzlichen Entwicklungspunkt bei der Reduktion des Gehäuses mit zu berücksichtigen.

6.5 Rückkoppeln der reduzierten Teilsysteme

Nach der Trennung der Teilsysteme und der Reduktion des Gehäuses und eventuell auch des Rotors kann das System nun simuliert werden. Hierfür kann das System in einer Schleife berechnet werden, wie es bereits in der Grundidee des Algorithmus (siehe Abschnitt 6.2) angedacht war, jedoch haben Schleifenberechnungen verschiedene Nachteile. Zum Einen können die Teilsysteme immer nur auf die berechneten Ergebnisse des vorherigen Zeitschrittes des anderen Teilsystems zurückgreifen. Zum Anderen kann es bei stationären Berechnungen in einer Schleife dazu kommen, dass sich der stationäre Zustand erst später einschwingt als bei einer Berechnung ohne eine Schleife. Zudem sind Schleifenberechnungen in vielen Programmiersprachen verhältnismäßig langsam. Daher ist es erstrebenswert, die Berechnung in der Schleife zu umgehen und wieder zu einem gemeinsamen System zurückzukehren.

Für die Rückkehr zu einem gemeinsamen System ist es irrelevant, ob dies mit den original Teilsystemen oder den reduzierten Teilsystemen vollzogen wird. Daher soll für eine bessere Übersichtlichkeit der Übergang mit den Originalsystemen gezeigt werden, um die benötigten Indizes so gering wie möglich zu halten.

Es wird von dem Teilsystem des Rotors aus Gleichung 6.92 auf Seite 113

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_s \dot{\mathbf{x}}_s &= \mathbf{A}_s \mathbf{x}_s + \begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{B}}_s & \mathbf{B}_{s,o} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_s \\ \mathbf{u}_{s,o} \end{pmatrix} \\ \mathbf{y}_s &= \mathbf{C}_s \mathbf{x}_s \end{aligned}$$

und dem Teilsystem des Gehäuses aus Gleichung 6.93

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_h \dot{\mathbf{x}}_h &= \mathbf{A}_h \mathbf{x}_h + \begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{B}}_h & \mathbf{B}_{h,o} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_h \\ \mathbf{u}_{h,o} \end{pmatrix} \\ \mathbf{y}_h &= \mathbf{C}_h \mathbf{x}_h \end{aligned}$$

ausgegangen, wobei die Eingangsmatrix aufgespalten wird in $\widetilde{\mathbf{B}}_{s/h}$, welche die Eingangsvektoren zu den globalen Eingängen $\mathbf{u}_{s/h}$ enthält und $\mathbf{B}_{s/h,o}$, welche zu den lokalen Eingängen $\mathbf{u}_{s/h,o}$ gehört. Zudem können die Ausgänge der Teilsysteme \mathbf{y}_h und \mathbf{y}_s in die Übertragungsgleichungen 6.91 und 6.90 eingesetzt werden, daraus ergeben sich

$$\mathbf{u}_{s,o} = \boldsymbol{\Upsilon}_{u,s}^T \mathbf{A}_o (-\boldsymbol{\Upsilon}_{y,s} \mathbf{C}_s \mathbf{x}_s + \boldsymbol{\Upsilon}_{y,h} \mathbf{C}_h \mathbf{x}_h) \quad (6.96)$$

$$\mathbf{u}_{h,o} = \boldsymbol{\Upsilon}_{u,h}^T \mathbf{A}_o (\boldsymbol{\Upsilon}_{y,s} \mathbf{C}_s \mathbf{x}_s - \boldsymbol{\Upsilon}_{y,h} \mathbf{C}_h \mathbf{x}_h) \quad (6.97)$$

$$\text{mit } \mathbf{A}_o = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_o & \mathbf{Z} \\ \mathbf{Z} & \mathbf{D}_o \end{pmatrix}. \quad (6.98)$$

Diese Übertragungsgleichungen können wiederum in die Eingänge der Rotor- bzw. Gehäuse-Teilsysteme eingesetzt werden. Daraus ergeben sich zunächst

$$\mathbf{E}_s \dot{\mathbf{x}}_s = \left(\mathbf{A}_s - \mathbf{B}_{s,o} \boldsymbol{\Upsilon}_{u,s}^T \mathbf{A}_o \boldsymbol{\Upsilon}_{y,s} \mathbf{C}_s \right) \mathbf{x}_s + \mathbf{B}_{s,o} \boldsymbol{\Upsilon}_{u,s}^T \mathbf{A}_o \boldsymbol{\Upsilon}_{y,h} \mathbf{C}_h \mathbf{x}_h + \widetilde{\mathbf{B}}_s \mathbf{u}_s \quad (6.99)$$

$$\mathbf{E}_h \dot{\mathbf{x}}_h = \left(\mathbf{A}_h - \mathbf{B}_{h,o} \boldsymbol{\Upsilon}_{u,h}^T \mathbf{A}_o \boldsymbol{\Upsilon}_{y,h} \mathbf{C}_h \right) \mathbf{x}_h + \mathbf{B}_{h,o} \boldsymbol{\Upsilon}_{u,h}^T \mathbf{A}_o \boldsymbol{\Upsilon}_{y,s} \mathbf{C}_s \mathbf{x}_s + \widetilde{\mathbf{B}}_h \mathbf{u}_h \quad (6.100)$$

für die Teilsysteme. Beide Gleichungen können in eine gemeinsame Gleichung in Matrixschreibweise überführt werden zu

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_s & \mathbf{Z} \\ \mathbf{Z} & \mathbf{E}_h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}_s \\ \dot{\mathbf{x}}_h \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{A}_s - \mathbf{B}_{s,o} \boldsymbol{\Upsilon}_{u,s}^T \mathbf{A}_o \boldsymbol{\Upsilon}_{y,s} \mathbf{C}_s & \mathbf{B}_{s,o} \boldsymbol{\Upsilon}_{u,s}^T \mathbf{A}_o \boldsymbol{\Upsilon}_{y,h} \mathbf{C}_h \\ \mathbf{B}_{h,o} \boldsymbol{\Upsilon}_{u,h}^T \mathbf{A}_o \boldsymbol{\Upsilon}_{y,s} \mathbf{C}_s & \mathbf{A}_h - \mathbf{B}_{h,o} \boldsymbol{\Upsilon}_{u,h}^T \mathbf{A}_o \boldsymbol{\Upsilon}_{y,h} \mathbf{C}_h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_s \\ \mathbf{x}_h \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{B}}_s & \mathbf{Z} \\ \mathbf{Z} & \widetilde{\mathbf{B}}_h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_s \\ \mathbf{u}_h \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.101)$$

Die ursprüngliche Gleichung der Ausgänge ergibt sich mit den Rücktransformationmatrizen \mathbf{L}_s^* und \mathbf{L}_h^* aus der Gleichung 6.27 auf Seite 96 zu

$$\mathbf{y} = \left(\mathbf{L}_s^* \mathbf{C}_s (1 \dots q_s, :) \quad \mathbf{L}_h^* \mathbf{C}_h (1 \dots q_h, :) \right) \begin{pmatrix} \mathbf{x}_s \\ \mathbf{x}_h \end{pmatrix}, \quad (6.102)$$

wobei q_s und q_h die aus Abschnitt 6.3.5 bekannten Größen der globalen Ausgänge der Teilsysteme des Rotors bzw. des Gehäuses sind.

Damit sind die Teilsysteme wieder in ein gemeinsames System 6.101 und 6.102 überführt. Hierbei ist der Unterschied zum Originalsystem vor der Trennung für die Simulation lediglich der umsortierte Eingangsvektor. Es ist im System zu einer Zustandstransformation gekommen, welche jedoch keinen Einfluss auf die Simulation hat. Der Ausgangsvektor ist in beiden Fällen identisch.

Wird der unreduzierte Fall betrachtet, so ist es möglich, durch das Umsortieren von Zeilen und Spalten im wiederzusammengeführten System, wieder exakt auf die Darstellung des Originalsystems zu kommen. Das bedeutet, dass durch die Trennung der Systeme und die anschließende Zusammenführung keinerlei Informationsverlust auftritt, sondern es lediglich zu einer Vertauschung von Zuständen kommt, was keinen Einfluss auf die Dynamik des Systems hat.

Für den Fall, dass eines oder beide Teilsysteme reduziert wurden, kommt es natürlich zu einer Ungenauigkeit durch die Reduktion. Auch wenn nur das Gehäuse reduziert werden sollte, kommt es auch für die Zustände des Rotors zu einem Reduktionsfehler, da die Ausgänge des Gehäuses ungenau sein können und auf den Rotor zurückwirken, was zu Ungenauigkeiten bei den Eingängen des Rotors führt, welche sich zu dessen Ausgängen fortpflanzen.

Die Vorteile der Trennung der Teilsysteme und der anschließenden Wiederzusammenführung nach der Reduktion liegen klar auf der Hand.

Zunächst ist durch die Trennung eine vom Parameter unabhängige Reduktion eines großen Teils des Gesamtsystems bei gleichzeitigem Erhalten des parameterabhängigen Systems möglich. Ein weiterer Vorteil besteht darin, dass die Teilstruktur des Rotors, nach der Trennung mit der in Kapitel 4 vorgestellten Methode, reduziert werden kann, wobei hier der Parameter des Systems erhalten bleibt. Auch unter diesen Umständen ist eine Wiederzusammenführung der beiden reduzierten Teilsysteme problemlos möglich.

Ein großer Vorteil für die Berechnung des Gesamtsystems besteht darin, dass die numerischen Nachteile einer Schleifenberechnung umgangen werden. Zudem kann durch die Trennung der Systeme die Parameterabhängigkeit des Rotors von der Rotationsgeschwindigkeit erhalten bleiben. Bereits vor der Trennung der Systeme hätte die Systemmatrix bei einer transienten Berechnung für jeden Zeitschritt neu aufgebaut werden müssen, um die veränderte Drehzahl mit zu erfassen. Dies muss natürlich auch im wieder zusammengeführten System geschehen, jedoch muss das System nur einmal reduziert werden. Auch müssen zwischen zwei Zeitschritten keine Interpolationen oder Schaltvorgänge berechnet werden. Das bedeutet, dass sich der Aufwand zwischen zwei Zeitschritten nach der Reduktion verringert, da sowohl beim Originalsystem als auch beim reduzierten System die Matrizen mit dem neuen Parameter aufgebaut werden müssen, es sich im reduzierten System jedoch um wesentlich weniger Gleichungen handelt.

Ein weiterer bisher noch nicht erwähnter Faktor, welcher jedoch in der Praxis von großer Bedeutung ist, ist der Zugang zu den Lagerdaten. Durch die Trennung ist es möglich, auf die Lagersteifigkeiten und -dämpfungen zugreifen zu können und diese genauso, wie die Systemmatrix des Rotors, an die aktuelle Rotationsgeschwindigkeit des Rotors anzupassen. Bisher wurde stillschweigend angenommen, dass diese Parameter im vorliegenden System konstant sind. In der Realität sind Öllager jedoch hochgradig nichtlinear und nur schwer abzubilden. Daher werden im Siemens Dynamowerk meist mehrere Ölfilm-Ersatzgrößen zu verschiedenen Drehzahlen im gesamten Drehzahlbereich errechnet. Später, in der transienten Rechnung, wird zwischen ihnen interpoliert oder sie werden mit Hilfe von hochgradigen Polynomen angepasst. Diese so errechneten Ölfilm-Ersatzgrößen können in das in Gleichung 6.101 vorgestellte System ebenso einfach für jeden Berechnungsschritt angepasst werden.

Somit ist die automatische Trennung, Reduktion und die anschließende Zusammenführung einer Maschine mit einem Rotor, Lagern und Gehäuse vollständig beschrieben, wobei der Trennungsalgorithmus so allgemein wie möglich gehalten wurde und somit auch für viele andere Problemstellungen herangezogen werden kann (siehe Abschnitt 6.3.11). Zudem lässt sich durch den vorgestellten Algorithmus auch eine parametrische Kopplung zwischen den Teilsystemen sehr effizient realisieren.

7 Anwendung des Mo(SeS-MOR) Verfahrens auf ein großes System unter rotordynamischem Einfluss

In diesem Kapitel wird anhand eines Beispiels, die Funktionsweise des neuen Mo(SeS-MOR) Algorithmus aus Kapitel 6.3 vorgestellt und dessen effiziente Anwendung für die Reduktion großer Strukturen unter rotordynamischem Einfluss demonstriert.

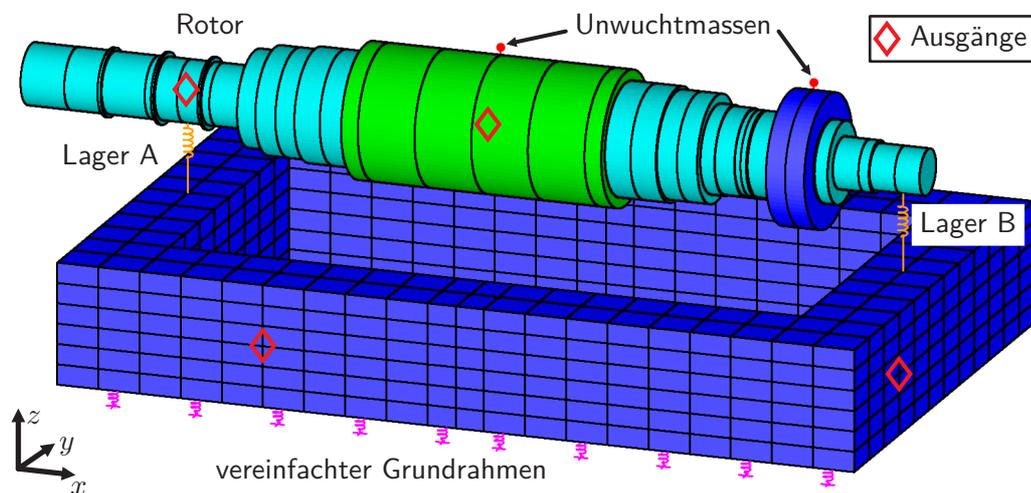


Abb. 7.1: FE-Modell eines Synchronrotors mit vereinfachtem Grundrahmen. Der Grundrahmen ist über sehr steife Federelemente (*Magenta*) mit dem Untergrund verbunden und über Federn, die eine ähnliche Steifigkeit und Dämpfung wie die originalen Öllager aufweisen (*Orange*), mit dem Rotor verbunden. Das Blechpaket des Rotors ist in *Grün* und die Erregermaschine auf der Welle in *Dunkelblau* gekennzeichnet.

7.1 Modellaufbau der Beispielmachine

Als Beispiel wurde hier ein Synchronmotor (siehe Abbildung 7.1) mit zwei Lagern und einer innen liegenden Erregermaschine gewählt. Die Nenndrehzahl dieses Rotors liegt bei 1500 min^{-1} . Solche Rotoren werden unter anderem für Antriebe von großen Lüfteranlagen verwendet. Aufgrund der sehr vielen Freiheitsgrade des Grundrahmens, wurde für dieses Beispiel eine vereinfachte Struktur als Grundrahmen gewählt. Dies war notwendig, da das System für verschiedene Testzwecke der Reduktion genutzt werden soll. Dazu müssen auch Vergleichsrechnungen mit dem Originalsystem durchführbar sein. Jedoch hat eine Abschätzung der Berechnungszeit für eine 10 s Echtzeitsimulation mit dem Originalgrundrahmen ergeben, dass diese mehr als zwei Jahre auf der verfügbaren Hardware in Anspruch nehmen würde.

Das Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung dieses Modells besitzt 3774 Freiheitsgrade. Es wurden 4 Eingänge definiert, diese befinden sich an den Kraftangriffspunkten der Unwuchtmassen am Blechpaket und der Erregermaschine, jeweils in y - und z -Richtung (siehe Abb. 7.1). Für dieses Beispiel wurden zudem 7 Ausgänge gewählt. Beobachtet wird die Bewegung des Lagers A in y - und z -Richtung, die Auslenkung des mittleren Blechpaketknotens in z -Richtung, die Bewegung eines Gehäuseknotens an der Seitenfläche in x - und y -Richtung sowie die Bewegung eines Gehäuseknotens an der Stirnseite des Lagers B in x - und y -Richtung (siehe Abb. 7.1).

An diesem Beispiel kann gut demonstriert werden, dass die Berücksichtigung des Grundrahmens bei einer Rotoranalyse von Bedeutung ist, da die Dynamik des Grundrahmens einen deutlichen Einfluss auf den Rotor hat. Hierzu wird die Amplitude der Übertragungsfunktion des frei-freien Rotors, mit dem des Rotors einschließlich des Grundrahmens verglichen. In Abbildung 7.2 ist der Amplitudenverlauf der Übertragungsfunktion von der Unwuchtanregung am Blechpaket in z -Richtung auf die Auslenkung des selben Knotens in z -Richtung in *Rot* dargestellt. Zum Vergleich ist in *Grün*, der Amplitudengang der gleichen Übertragungsfunktion mit angeschlossenem Grundrahmen gezeigt. Dieser deutliche Unterschied zeigt, welchen starken Einfluss ein Grundrahmen auf die Dynamik des Rotors haben kann.

Zusätzlich zum Übertragungsverhalten veranschaulicht Abbildung 7.3 einige Eigenformen des dynamischen Systems. Hierfür wurde eine stark überhöhte

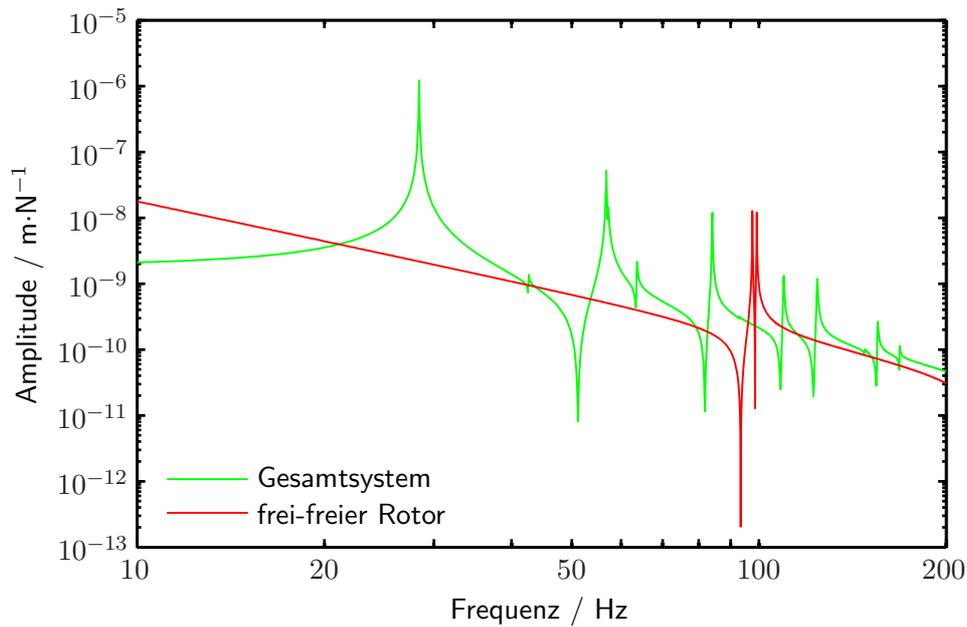


Abb. 7.2: Vergleich der Dynamik des Gesamtsystems (*Grün*) mit der Dynamik des frei-freien Rotors (*Rot*). Amplitudenverlauf der Übertragungsfunktion vom mittleren Blechpaketknoten zum selben Knoten jeweils in z -Richtung bei einer Drehzahl von 1500 min^{-1} .

Darstellung der Amplituden gewählt, da sich die Auslenkungen im Mikrometerbereich bewegen.

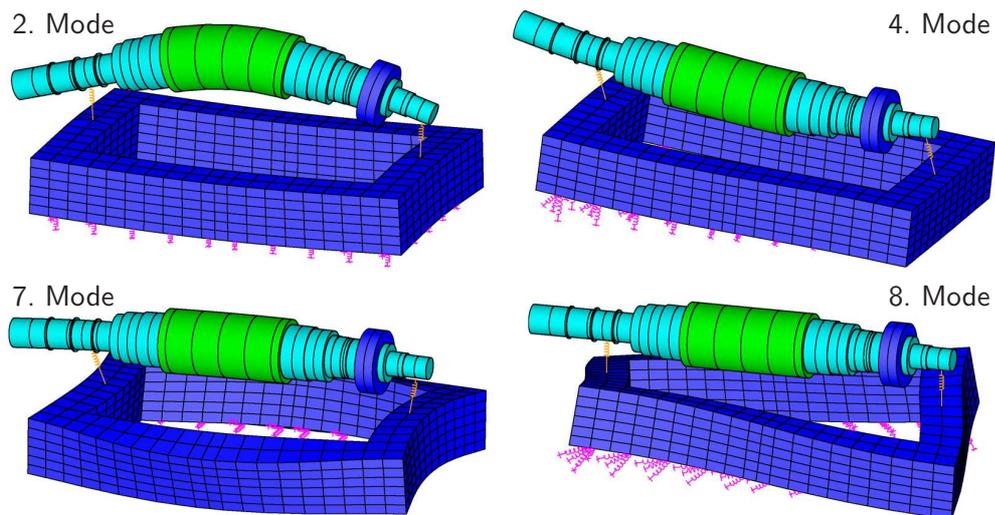


Abb. 7.3: Ausgewählte Eigenformen des Synchronrotors mit vereinfachtem Grundrahmen (450 000-fach überhöhte Darstellung).

7.2 Trennen der parameterabhängigen und parameterunabhängigen Teilstrukturen

Um nun den drehzahlabhängigen Rotor von der parameterunabhängigen Struktur des Grundrahmens zu trennen, wurde der erste Teil des Mo(SeS-MOR) Algorithmus (siehe 6.3) angewendet. Die Trennung der Systeme hat dabei 2,63 s in Anspruch genommen. Das Ergebnis der Trennung sind zwei Differentialgleichungssysteme zweiter Ordnung für den Rotor und das Gehäuse mit 246 bzw. 3528 Freiheitsgraden.

Durch die Trennung der Systeme haben sich für beide Teilsysteme jeweils 4 neue Eingänge und 8 neue Ausgänge an den Lagerstellen ergeben. Dabei sind die Eingänge jeweils die Kraftangriffspunkte in y - und z -Richtung an den Lagerstellen. Die Ausgänge ergeben sich aus den Verschiebungen in y - und z -Richtung an den Lagerstellen und aus den Geschwindigkeiten der Knotenbewegungen in y - und z -Richtung an den Lagerstellen. Zusätzlich ist bei der Trennung mit Mo(SeS-MOR) ein Gleichungssystem mit 8 Gleichungen erstellt worden, welches aus den Verschiebungen und Geschwindigkeiten der Lagerknotenbewegungen von Grundrahmen und Rotor die entstehenden Kräfte berechnet, die auf den Grundrahmen bzw. den Rotor wirken.

Das zu reduzierende System erster Ordnung des Grundrahmens besteht aus 7056 Gleichungen mit 4 Eingängen und insgesamt 12 Ausgängen (4 globale und 8 neue lokale Ausgänge). Zur Reduktion wurde der Block-Arnoldi-Algorithmus (siehe Abschnitt 3.4.2) herangezogen. Dabei wurden für jeden Eingang 12 Momente und für jeden Ausgang 7 Momente zur Übereinstimmung gebracht, wodurch sich ein reduziertes System des Grundrahmens mit 84 Zuständen ergibt. Für die Reduktion des Grundrahmens wurden 5,55 s benötigt.

Dass das Systemverhalten des Grundrahmens mit dieser Approximation sehr gut wiedergegeben wird, zeigt Abbildung 7.4. Zu sehen ist die Übertragungsfunktion von einer auf den Lagerknoten wirkenden Kraft in y -Richtung (Lager A) auf die Auslenkung des Knotens an der Seitenwand des Grundrahmens in y -Richtung. Davon ausgehend, dass die durch die Unwuchten hervorgerufenen Schwingungen innerhalb des doppelten Drefrequenzbereichs liegen (von 0 Hz bis 50 Hz), ist das System in diesem relevanten Frequenzbereich sehr gut

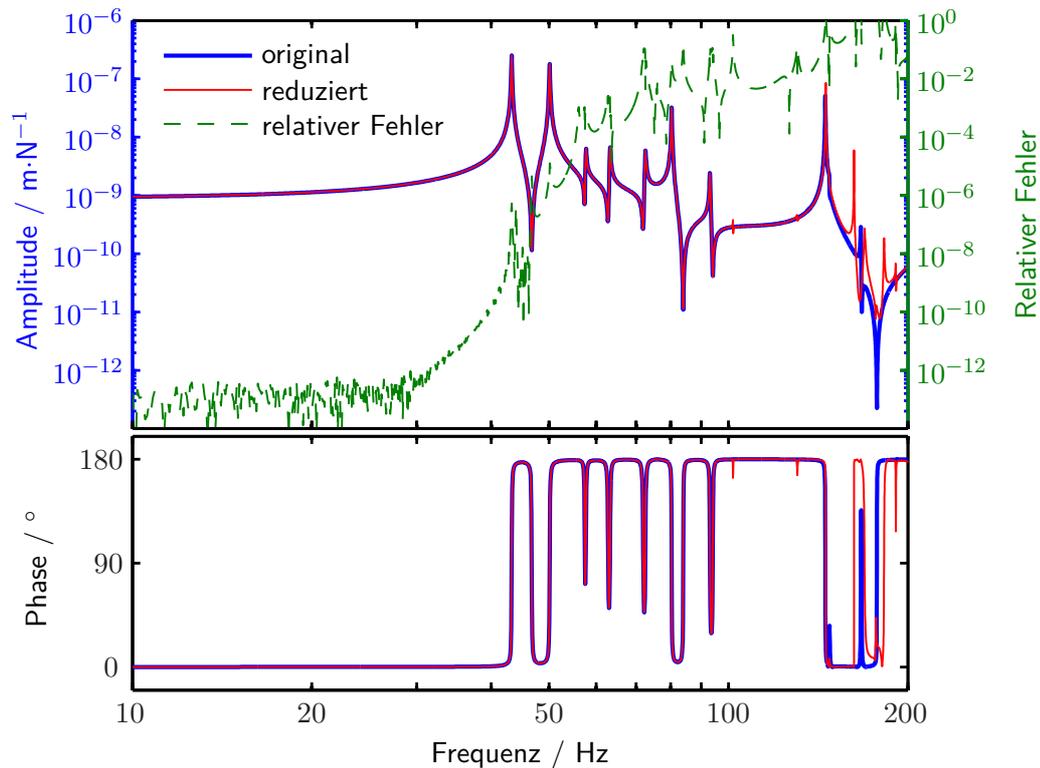


Abb. 7.4: Vergleich des originalen und reduzierten Systemverhaltens des Grundrahmens ohne Rotor anhand der Übertragungsfunktion von einem Lagerknoten des Lagers A zum Knoten auf der Seitenfläche jeweils in y -Richtung.

approximiert. Hier liegt der relative Fehler im Amplitudengang unter 10^{-5} . Zudem bleibt der Fehler bis weit über 100 Hz Anregungsfrequenz unter 1%. Der Phasenverlauf wird im relevanten Frequenzbereich ebenfalls sehr gut getroffen. Auch die Auswertung der anderen Übertragungsfunktionen haben ähnliche Ergebnisse aufgewiesen.

7.3 Erstellen des reduzierten Gesamtsystems

Das reduzierte Gesamtsystem wird für die Berechnung aus dem nicht reduzierten Rotor, den Lagergleichungen und dem reduzierten Grundrahmen zusammengesetzt. Die Wiederezusammenführung nach dem Mo(SeS)-MOR Algorithmus dauert dabei lediglich 0,04s. Eine Veränderung beispielsweise der Lagerparameter ist somit zeitlich problemlos möglich.

Nach der Wiederezusammenführung kann nun das ursprüngliche Gesamtsys-

tem mit dem reduzierten Gesamtsystem verglichen werden. Für den Vergleich wurden zwei Übertragungsfunktionen ausgewählt.

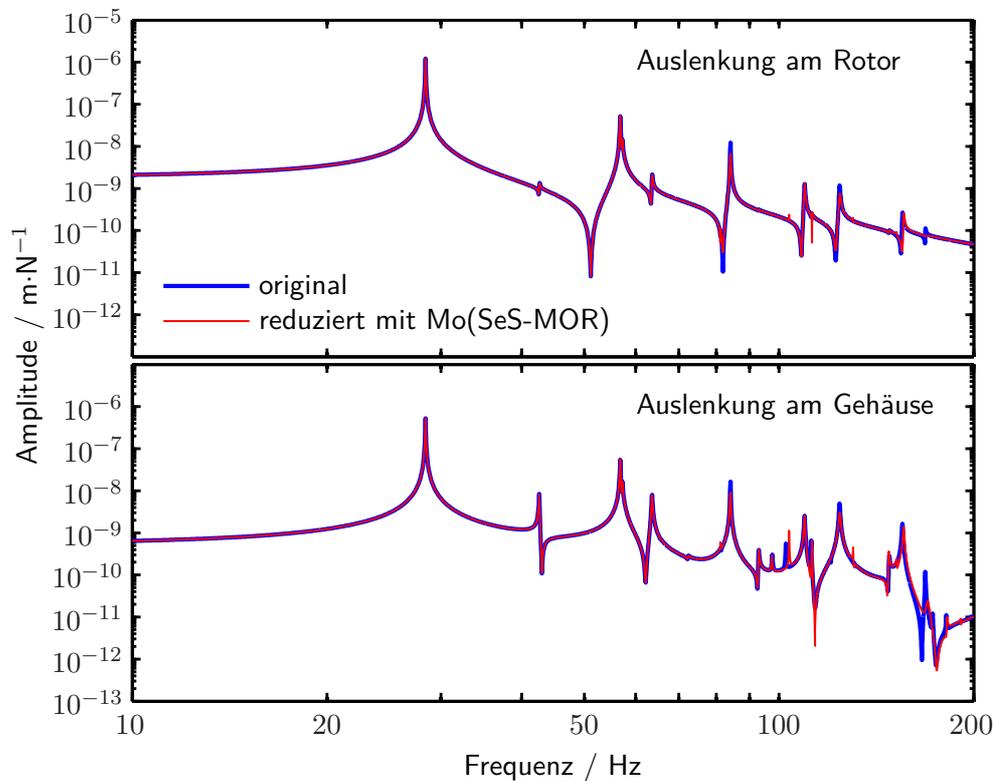


Abb. 7.5: Vergleich der Amplituden der Übertragungsfunktionen bei Drehzahl 1500 min^{-1} . Der Eingang ist jeweils der Kraftangriffspunkt der Unwucht am Blechpaket in y -Richtung. Die Amplitude des Rotors wird am selben Knoten erfasst, die des Gehäuse am Ausgang an der Seitenwand.

Zum Einen ist in Abbildung 7.5 der Amplitudenverlauf der Übertragungsfunktion von einer Unwuchtkraft auf einen Rotorknoten gezeigt. Zum Anderen wurde der Amplitudenverlauf von dieser Unwuchtkraft auf einen Gehäuseknoten verglichen. Beide Verläufe approximieren das Originalsystem bis 100 Hz sehr gut. Der Phasenverlauf, welcher nicht mitabgebildet ist, ist von der Approximationsgüte vergleichbar mit dem Phasenverlauf aus Abbildung 7.4. Die Dynamik des Gesamtsystems kann folglich sehr gut durch das reduzierte System abgebildet werden, so dass das reduzierte System für Analysen der gesamten Struktur herangezogen werden kann. Die Zeitersparnis beim Berechnen einer solchen Übertragungsfunktion lag dabei bei durchschnittlich 98,5%. Alle Zeiten für die Trennung, Reduktion, Wiederausführung und Berechnung sind noch einmal in Tabelle 7.1 am Ende dieses Kapitels zusammengefasst.

Es wurde bereits erwähnt, dass ein Vorteil der Mo(SeS-MOR) Methode darin besteht, dass die Lagerparameter unkompliziert und effizient variiert werden können. Das Austauschen der alten gegen die neuen Parameter erfordert im getrennten System lediglich ein Eingreifen in das Gleichungssystem, das die Ausgänge der Teilsysteme in Kräfte überführt. In diesem Fall muss also die 8×8 Matrix \mathbf{A}_o (siehe Gl. 6.98) ersetzt werden. Im Anschluss muss das Gesamtsystem neu zusammengeführt werden. Wichtig ist dabei, dass jedoch keine erneute Reduktion des Grundrahmens notwendig ist.

Um die Lagerparameter im nicht getrennten Originalsystem auszutauschen, bedarf es mehr Aufwand. Hier müssen zunächst die Lager identifiziert und dann die entsprechenden Parameter an den Grundrahmen- und Rotorknoten ersetzt werden.

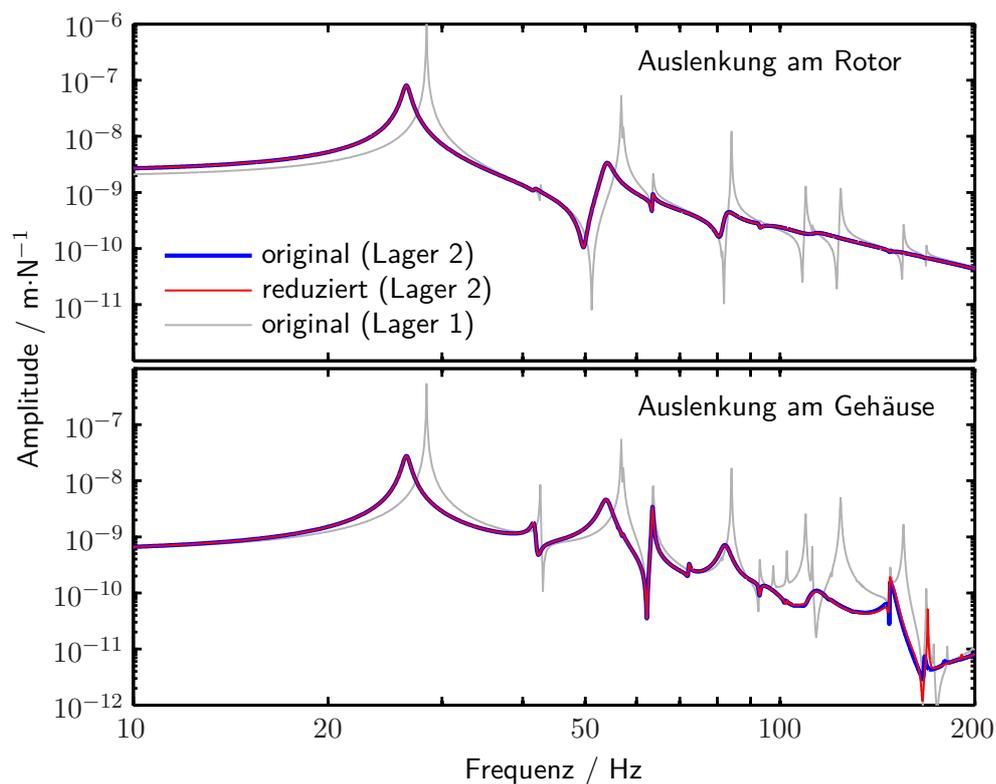


Abb. 7.6: Amplitudenverlauf der Übertragungsfunktion für die veränderten Lager mit einem Zehntel der Originallagersteifigkeit. Betrachtet werden dieselben Übertragungsfunktionen wie in Abbildung 7.5.

In Abbildung 7.6 ist zu erkennen, dass eine Änderung der Steifigkeiten in den Lagern einen deutlichen Einfluss auf die Übertragungsfunktion hat. Im hier

gezeigten Fall wurden die Steifigkeiten der Federn auf ein Zehntel verringert. Dies ist in der Praxis durch die Verwendung verschiedener Lagertypen ebenfalls möglich. Ein solcher Austausch erfolgt z. B. nach ungünstigen Ergebnissen von Rotoranalysen während der Konstruktionsphase. Andererseits kommt es bei Gleitlagern auch durch die Änderung der Drehzahl zu Änderungen der Lagersteifigkeiten [38].

Auch im Fall des veränderten Lagers wird die Übertragungsfunktion, mit demselben reduzierten System des Grundrahmens, wieder sehr gut für einen großen Frequenzbereich approximiert. Die Übereinstimmung des Phasenverlaufs war dabei wieder mit der Phasen aus Abbildung 7.4 vergleichbar. Das zeigt, dass durch die Anwendung des Mo(SeS-MOR) Algorithmus auch eine effiziente Variation von Lagerparametern möglich ist.

Der Vergleich einer Simulation eines Hochlaufs war bei diesem Beispiel derzeit nicht möglich, da die Reduktion mittels der Block-Krylovmethode zu instabilen reduzierten Systemen führte. Für eine transiente Simulation im Zeitbereich ist die Stabilität des Systems jedoch eine Voraussetzung. Dass die Reduktion mittels der Krylov-Unterraummethode zu Instabilitäten führen kann, ist bereits in [44] erwähnt worden und hinlänglich bekannt. Die Forschung auf dem Gebiet der Restabilisierung bietet bereits erste Lösungsansätze [95–97]. Diese Verfahren sind jedoch nicht auf alle Problemklassen anwendbar. Meist wird für die Restabilisierung eine SVD herangezogen, so dass diese Methoden, aufgrund der hier vorliegenden Systemgrößen, nicht angewendet werden können.

	Originalsystem	System mit Mo(SeS-MOR)
Trennen der Teilsysteme	–	2,26 s
Reduktion des Grundrahmens	–	5,55 s
Wiederzusammenführung	–	0,004 s
Berechnung eines Bode-Diagramms	748,3 s	11,7 s
Summe der Zeiten	748,3 s	19,9 s
Relative Zeit	100,0 %	2,7 %

Tab. 7.1: Vergleich der Berechnungszeiten für das gesamte System

8 Zusammenfassung und Ausblick

Die Notwendigkeit Systeme unter rotordynamischem Einfluss zu reduzieren, wurde bereits in der Übersichtsarbeit von Wagner et al. [9] ausführlich dargestellt und in *Kapitel 1* noch einmal umrissen. Wobei sich zwei wesentliche Fragen ergeben haben, die in dieser Arbeit beantwortet wurden.

Die Frage nach der Anwendbarkeit existierender Modellordnungsreduktionsverfahren für die Reduktion rotordynamischer Systeme wurde in *Kapitel 4.2* beantwortet. In dem neuen parametererhaltenden Algorithmus Ω P-MOR werden bestehende Reduktionsmethoden genutzt und erweitert, so dass der gesamte Drehzahlbereich des Rotors mit nur einem reduzierten System erfasst werden kann. Dies wird dadurch erreicht, dass für die Extrema des Parameterbereiches Projektionsmatrizen berechnet werden und diese dann zu einem gemeinsamen Projektionsraum zusammengeführt werden können. Zudem konnte mathematisch bewiesen werden, dass dieses Vorgehen die Approximation des Originalsystems im gesamten Parameterbereich zwischen den Extrema sicherstellt.

Mit den durch den Ω P-MOR Algorithmus reduzierten Systemen ist es nun möglich, auch transiente Rotoranalysen mit nur einem reduzierten System effektiv durchzuführen. Der zeitliche Aufwand für die Reduktion ist hierbei nur doppelt so groß wie für eine Reduktion zu nur einer festen Drehzahl. Damit eignet sich die Reduktion nach Ω P-MOR für alle Systeme, die für mehrere Drehzahlen analysiert oder transient simuliert werden sollen.

Für die Reduktion der Beispiele aus *Kapitel 5* wurde der gesamte Algorithmus bereits in MATLAB umgesetzt. Die Zeitersparnis, die sich aufgrund der Reduktion für die Berechnung von Übertragungsfunktionen ergeben hat, lag dabei über 95,5%. Bei der transienten Simulation des realen Rotors konnte, bei einem Fehler der Auslenkung von unter 1% (in weiten Teilen auch deutlich darunter), sogar mehr als 99,9% der Rechenzeit eingespart werden.

Die zweite Frage, nach effektiven Reduktionsmöglichkeiten kompletter Maschinen, wurde in *Kapitel 6* beantwortet. Hierfür wurde die Mo(SeS-MOR) Methode eingeführt, welche zunächst vollautomatisiert die drehzahlabhängige Rotorstruktur vom Rest der Maschine trennt. Dabei wird, im Gegensatz zum Freischneiden in der Mechanik, darauf geachtet, dass die entstehenden Teilsysteme nur über Ein- und Ausgänge miteinander gekoppelt sind. Dies wurde erreicht, indem die Verbindung beider Systeme (hier das Öllager) nach der Trennung als Gleichungssystem zwischen den beiden Teilsystemen „vermittelt“. Da die Teilsysteme lediglich über Ein- und Ausgänge miteinander gekoppelt sind, können diese unabhängig voneinander mit einem beliebigen Algorithmus reduziert werden. Nach der Reduktion können die Systeme, abgesehen vom Approximationsfehler durch die Reduktion, wieder verlustfrei zusammengeführt werden. Diese Zusammenführung ist sehr effizient möglich und erlaubt es, die Kopplungseigenschaften (hier die Lagerparameter) auf sehr einfache Weise zu ändern. Auch bei dieser Methode des Reduzierens nach dem Trennen der Systeme und anschließendem Wiederzusammenführens, ist die Rotorstruktur mit ihrem Parameter weiterhin erhalten, womit transiente Rechnungen weiterhin, mit nur einem System, möglich sind.

In *Kapitel 7* konnte anhand eines Beispiels gezeigt werden, dass der Mo(SeS-MOR) Algorithmus ein effizientes Werkzeug zur Reduktion großer Systeme unter rotordynamischem Einfluss darstellt. Zur Berechnung des Beispiels wurden alle Teile des Mo(SeS-MOR) Algorithmus in MATLAB umgesetzt. Hiermit konnte für die Erstellung einer Übertragungsfunktion eine Zeitersparnis von über 97,3 % erreicht werden. Dabei war der Fehler des Amplitudengangs weit über den relevanten Bereich hinaus kleiner als 1 %.

Für das Beispiel des Rotors mit einem Grundrahmen konnte jedoch bisher noch keine transiente Rechnung durchgeführt werden. Der Grund hierfür liegt darin, dass die Reduktion mittels der Krylov-Unterraummethode nicht zwingend zu stabilen Systemen führt [44]. Jedoch ist die Stabilität eine Voraussetzung für die Simulation im Zeitbereich. Neben der Krylov-Unterraummethode kann auch die SVD im Ω P-MOR Algorithmus zu Instabilitäten führen. Ein möglicher Grund hierfür sind numerische Schmutzeffekte, die bei einer zu geringen numerischen Genauigkeit auftreten können.

Wie empfindlich eine Matrix auf numerische Abweichungen reagiert, kann unter anderem mit der Schur-Zerlegung geprüft werden [95]. Da die hier betrach-

teten Systeme vor der Reduktion stabil waren, sind die Instabilitäten nach der Reduktion keine originalen Systemeigenschaften. Daher wird bereits in [44] argumentiert, dass diese instabilen Moden aus dem reduzierten System entfernt werden können, um so wieder ein stabiles System zu erhalten. Sowohl in [44] als auch in [95–97] werden Algorithmen zur Restabilisierung vorgeschlagen. Es wird bereits an der Weiterentwicklung und Anpassung dieser Algorithmen auf die hier vorliegende Problemklasse geforscht, wobei die Größe der hier betrachteten Probleme eine Herausforderung darstellt.

Um die Reduktionsgüte optimieren zu können, ohne Referenzrechnungen des Originalsystems durchführen zu müssen, ist es von Bedeutung die Fehler der Approximation im Frequenz sowie im Zeitbereich abschätzen zu können. Erste Forschungsergebnisse auf dem Bereich der Fehlerschätzung von Krylov-Unterraumverfahren existieren bereits [98], jedoch ist die Abschätzung der Abweichungen im Zeitbereich noch immer schwierig.

Ein weiterer noch zu prüfender Aspekt bei der Reduktion von großen Strukturen, ist die Reduktion von Systemen unter Schwerkrafteinfluss. Es wurde bereits in *Kapitel 6.1* gezeigt, wie die Erdbeschleunigung als ein Eingang des Systems mit in die Betrachtung aufgenommen werden kann. Jedoch führt dieser Eingangsvektor meist zu deutlich schlechteren Reduktionsergebnissen. Ein möglicher Grund für dieses Verhalten könnte die schlechte Konditionierung der Eingangsmatrix mit dem Erdbeschleunigungsvektor darstellen. Bei allen anderen hier betrachteten Eingangsvektoren handelt es um Einheitsvektoren. Ein Ansatz zur Lösung dieses Problems besteht darin, vor der Reduktion den Eingangserdbeschleunigungsvektor zu normieren und den auf das System wirkenden Eingang entsprechend anzupassen.

Trotz der noch offenen Fragen bieten die beiden neuen Algorithmen Ω P-MOR und Mo(SeS-MOR) bereits jetzt neue Möglichkeiten für die Entwicklungsarbeit von großen Elektromaschinen. Mit der Möglichkeit, transiente Rotoranalysen in kürzester Zeit durchführen zu können, ergibt sich die Chance, selbst hoch komplexe Optimierungsprozesse in einer akzeptablen Zeit durchführen zu können. Es sind z. B. automatische Lagervariationen in einer kompletten Strukturanalyse denkbar. Zudem könnten transiente Rechnungen großer Systeme mit Gehäusestrukturen innerhalb des normalen Entwicklungsprozesses und nicht

mehr nur als aufwendige Sonderrechnungen durchgeführt werden. Dadurch lässt sich die Vorhersage des Systemverhaltens deutlich verbessern.

Die Algorithmen sind nicht nur auf Systeme unter rotordynamischem Einfluss anwendbar. So kann der Ω P-MOR Algorithmus auf jedes System angewendet werden, welches linear von einem beliebigen Parameter Ω abhängig ist und sich durch

$$\begin{aligned} E\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}_1\mathbf{x} + \Omega\mathbf{A}_2\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} \end{aligned}$$

darstellen lässt.

Der Mo(SeS-MOR) Algorithmus kann durch leichte Modifikationen ebenfalls stark verallgemeinert werden. Wird dem Algorithmus anstelle der Suche nach Einträgen in der gyroskopischen Matrix eine konkrete Knotenliste übergeben, können beliebige Teile einer Struktur abgetrennt werden. Dadurch ist es beispielsweise möglich, in einer FE-Struktur einen Teil zu fixieren und zu reduzieren, während der andere Teil im Rahmen einer Optimierung verändert werden kann.

Somit bietet diese Arbeit nicht nur Antworten auf zwei Fragen der Reduktion von Strukturen unter rotordynamischem Einfluss, sondern auch Anregungen für die Reduktionen allgemeiner parameterabhängiger Systeme.

Abbildungsverzeichnis

2.1	CAD-Darstellung eines Kompressorantriebes	8
2.2	Rotor am Ende des Herstellungsprozesses	9
2.3	Laval-Rotor	10
2.4	Laval-Rotor mit Unwucht	11
2.5	Einfluss der Gyroskopie auf einen Rotor	13
2.6	Versuchsaufbau zur Demonstration der Gyroskopie	14
2.7	CAD-Darstellung eines schnell laufenden Rotors	17
2.8	Mit VARFEM erstelltes FE-Modell des schnell laufenden Rotors.	18
2.9	Erste Biegeeigenform des Rotors	18
2.10	Zweite Biegeeigenform des Rotors	19
2.11	Modell des Rotors mit Unwuchtmassen	20
2.12	Auslenkung des mittleren Rotorknotens als Funktion der Drehzahl	20
3.1	Übersicht der MOR-Methoden	25
4.1	Beispielhafter Verlauf zweier Gewichtungsfunktionen	43
4.2	Übergang eines zustandsabhängigen Schaltsystems in ein ausgangabhängiges Schaltsystem mit einem Guard-System	45
4.3	Zweidimensionale Darstellung der durch \mathbf{d}_i und $\mathbf{d}_i + \Omega_{\max} \cdot \mathbf{g}_i$ aufgespannten Hyperebene	57
4.4	Maximaler Approximationsfehler im Fall 2	59
4.5	Maximaler Approximationsfehler im Fall 3	60
5.1	FE-Modell des akademischen Rotors	64
5.2	Übertragungsfunktionen bei verschiedenen Drehzahlen	65
5.3	Verlauf der Singulärwerte	66
5.4	Vergleich der Reduktionsmethoden bei Drehzahl Null	67
5.5	Vergleich der Reduktionsmethoden bei maximaler Drehzahl	68

5.6	Vergleich verschiedener Reduktionsmethoden bei einer mittleren Drehzahl	70
5.7	FE-Modell eines realen Rotors	71
5.8	Übertragungsfunktion bei Drehzahl 600 min^{-1}	73
5.9	Auslenkung des Lagerknotens beim Hochlauf	74
5.10	Detaildarstellungen der transienten Simulation des Rotors	75
5.11	Betrag der Auslenkung und Approximationsfehler der transienten Simulation	76
6.1	FE-Modell eines Grundrahmens mit ca. 54 000 Freiheitsgraden.	81
6.2	Veranschaulichung einer generalisierten Feder	82
6.3	Schematische Darstellung des Öldruckprofils in einem Gleitlager	83
6.4	Minimalmodell des Rotors mit einer Ölfilm-Ersatzfeder	84
6.5	Veranschaulichung der Interaktion des Rotors mit dem Gehäuse über eine Ölfilm-Ersatzfeder	85
6.6	Berechnung des Gesamtsystems innerhalb einer Schleife	88
6.7	Minimalbeispiel eines Rotors.	92
6.8	Veranschaulichung der Interaktion von einem Rotorknoten mit zwei Gehäuseknoten	103
6.9	Magnetischer Zug zwischen Rotor und Stator	115
7.1	FE-Modell eines Synchronrotors mit vereinfachtem Grundrahmen	121
7.2	Vergleich der Gesamtsystemdynamik mit der des frei-freien Rotors	123
7.3	Eigenformen des Synchronrotors mit vereinfachtem Grundrahmen	123
7.4	Übertragungsfunktion vom Gehäuse ohne Rotor	125
7.5	Vergleich der Übertragungsfunktionen zum Rotor und zum Gehäuse	126
7.6	Vergleich der Übertragungsfunktionen zum Rotor und zum Gehäuse mit veränderten Lagersteifigkeiten	127

Literaturverzeichnis

- [1] NOOR, A. K.: Recent advances and applications of reduction methods. In: *Applied Mechanics Reviews* 47/3 (1994), S. 125–146
- [2] QU, Z.-Q.: *Model Order Reduction Techniques : with Applications in Finite Element Analysis*. New York : Springer, 2004
- [3] GHAFOOR, A. ; SREERAM, V.: Frequency weighted balanced model reduction: a survey. In: *Proceedings of the 9th International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision (ICARCV '06)* (2006), S. 1–6
- [4] GHAFOOR, A. ; SREERAM, V.: survey/review of frequency-weighted balanced model reduction techniques. In: *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Transactions of the ASME* 130/6 (2008), S. 1–16
- [5] ANTOULAS, A. C. ; SORENSEN, D. C. ; GUGERCIN, S.: A Survey of Model Reduction Methods for Large Scale Systems. In: *Contemporary Mathematics* 280 (2001), S. 193–219
- [6] GUGERCIN, S. ; ANTOULAS, A. C.: A survey of model reduction by balanced truncation and some new results. In: *International Journal of Control* 77/8 (2004), S. 748–766
- [7] ANTOULAS, A. C.: *Approximation of Large-Scale Dynamical Systems*. Philadelphia : SIAM, 2005
- [8] ANTOULAS, A. C.: An overview of model reduction methods and a new result. In: *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control Held Jointly with 28th Chinese Control Conference* (2009), S. 5357–5361
- [9] WAGNER, M. B. ; YOUNAN, A. ; ALLAIRE, P. ; COGILL, R.: Model Reduction Methods for Rotor Dynamic Analysis: A Survey and Review. In: *International Journal of Rotating Machinery* (2010). – Article ID 273716
- [10] STEPHENSON, R. W. ; ROUCH, K. W.: Modeling rotating shafts using axisymmetric solid finite elements with matrix reduction. In: *Journal of Vibration and Acoustics, Transactions of the ASME* 115/4 (1993), S. 484–489

- [11] ROUCH, K. E. ; KAO, J. S.: Dynamic reduction in rotor dynamics by the finite element method. In: *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME* 102/2 (1980), S. 360–368
- [12] CHATELET, E. ; LORNAGE, D. ; JACQUET-RICHARDET, G.: A three dimensional modeling of the dynamic behavior of composite rotors. In: *International Journal of Rotating Machinery* 8/3 (2002), S. 185–192
- [13] HOULSTON, P. R. ; GARVEY, S. D. ; POPOV, A. A.: Modal control of vibration in rotating machines and other generally damped systems. In: *Journal of Sound and Vibration* 302/1-2 (2007), S. 104–116
- [14] JEI, Y. G. ; LEE, C. W.: Modal analysis of continuous asymmetrical rotor-bearing systems. In: *Journal of Sound and Vibration* 152/2 (1992), S. 245–262
- [15] KHULIEF, Y. A. ; MOHIUDDIN, M. A.: On the dynamic analysis of rotors using modal reduction. In: *Finite Elements in Analysis and Design* 26/1 (1997), S. 41–55
- [16] LEE, C. W. ; KATZ, R. ; ULSOY, A. G. ; SCOTT, R. A.: Modal analysis of a distributed parameter rotating shaft. In: *Journal of Sound and Vibration* 122/1 (1988), S. 119–130
- [17] WANG, W. ; KIRKHOPE, J.: New eigensolutions and modal analysis for gyroscopic/rotor systems - part 1: undamped systems. In: *Journal of Sound and Vibration* 175/2 (1994), S. 159–170
- [18] GERADIN, M. ; KILL, N.: A new approach to finite element modeling of flexible rotors. In: *Engineering Computations* 1/1 (1984), S. 52–64
- [19] JACQUET-RICHARDET, G. ; FERRARIS, G. ; RIEUTORD, P.: frequencies and modes of rotating flexible bladed disc-shaft assemblies: a global cyclic symmetry approach. In: *Journal of Sound and Vibration* 191/5 (1996), S. 901–915
- [20] CHATELET, E. ; D'AMBROSIO, F. ; JACQUET-RICHARDET, G.: Toward global modelling approaches for dynamic analyses of rotating assemblies of turbomachines. In: *Journal of Sound and Vibration* 282/1-2 (2005), S. 163–178
- [21] SHANMUGAM, A. ; PADMANABHAN, C.: A fixed-free interface component mode synthesis method for rotordynamic analysis. In: *Journal of Sound and Vibration* 297/3 (2006), S. 664–679
- [22] WANG, W. ; KIRKHOPE, J.: Component mode synthesis for damped rotor systems with hybrid interfaces. In: *Journal of Sound and Vibration* 177/3 (1994), S. 393–410

-
- [23] GLASGOW, D. A. ; NELSON, H. D.: Stability analysis of rotor-bearing systems using component mode synthesis. In: *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME* 102/2 (1980), S. 352–359
- [24] LEHNER, M. ; EBERHARD, P.: Modellreduktion in elastischen Mehrkörpersystemen. In: *at - Automatisierungstechnik* 54/74 (2006), S. 170–177
- [25] ELBEHEIRY, E. M.: On eigenproblem solution of damped vibrations associated with gyroscopic moments. In: *Journal of Sound and Vibration* 320/3 (2009), S. 691–704
- [26] OHAYON, R. ; SAMPAIO, R. ; SOIZE, C.: Dynamic substructuring of damped structures using singular value decomposition. In: *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME* 64/2 (1997), S. 292–298
- [27] WANG, W. ; KIRKHOPE, J.: Complex component mode synthesis for damped systems. In: *Journal of Sound and Vibration* 181/5 (1995), S. 781–800
- [28] BRAKE, M. R. ; WICKERT, J. A.: Modal analysis of a continuous gyroscopic second-order system with nonlinear constraints. In: *Journal of Sound and Vibration* 329/7 (2010), S. 893–911
- [29] BARZDAITIS, V. ; BOGDEVICIUS, M. ; DIDZIOKAS, R. ; VASYLIUS, M.: Modeling and diagnostics of gyroscopic rotor. In: *Journal of Vibroengineering* 11/4 (2009), S. 627–635
- [30] SAMANTARAY, A. K.: Steady-state dynamics of a non-ideal rotor with internal damping and gyroscopic effects. In: *Nonlinear Dynamics* 56/4 (2009), S. 443–451
- [31] BEATTIE, C. A. ; GUGERCIN, S.: A trust region method for optimal H model reduction. In: *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control Held Jointly with 28th Chinese Control Conference* (2009), S. 5370–5375
- [32] GUGERCIN, S. ; POLYUGA, R. V. ; BEATTIE, C. A. ; SCHAFT, A. J. Van D.: Interpolation-based H model reduction for port-Hamiltonian systems. In: *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control Held Jointly with 28th Chinese Control Conference* (2009), S. 5362–5369
- [33] LEE, A. Y.: A krylov model reduction methodology for articulated, multi-flexible body structures. In: *Tech. Rep., Jet Propulsion Laboratory at California Institute of Technology* (1994)
- [34] BAUR, U. ; BEATTIE, C. A. ; BENNER, P. ; GUGERCIN, S.: Interpolatory projection methods for parameterized model reduction. In: *Chemnitz Scientific Computing Preprints* (2009)

- [35] DANIEL, L. ; SIONG, O. C. ; CHAY, L. S. ; LEE, K. H. ; WHITE, J.: A multiparameter moment-matching model-reduction approach for generating geometrically parameterized interconnect performance models. In: *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems* 23/5 (2004), S. 678–693
- [36] EID, R. ; CASTNE-SELGA, R. ; PANZER, H. ; WOLF, T. ; LOHMANN, B.: Stability-Preserving Parametric Model Reduction by Matrix Interpolation. In: *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems* (2010)
- [37] FRISWELL, M. I. ; PENNY, J. E. T. ; GARVEY, S. D. ; LEES, A. W.: *Dynamics of Rotating Machines*. Cambridge University Press, 2010
- [38] GASCH, R. ; NORMANN, R. ; PFÜTZNER, H.: *Rotordynamik*. Springer, 2006
- [39] YAMAMOTO, T. ; ISHIDA, Y.: *Linear and Nonlinear Rotordynamics: A Modern Treatment with Applications*. Wiley-Interscience, 2001
- [40] GENTA, G.: *Dynamics of Rotating Systems*. Springer Science+Business Media, Inc., 2005
- [41] K.-H. MODLER, E. H. (Hrsg.): *Grundwissen des Ingenieurs*. Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag, 2007
- [42] KLEMENT, Ing. B.: *MADYN 4.3*. www.madyn.com
- [43] KELLENBERGER, W.: *Elastisches Wuchten*. Springer-Verlag, 1987
- [44] GRIMME, E. J.: *Krylov Projection Methods for Model Reduction*, Dep. of Electrical Eng., Uni. Illinois at Urbana Champaign, PhD thesis, 1997
- [45] TREFETHEN, L. N. ; BAU, D.: *Numerical linear algebra*. Philadelphia : Society for Industrial and Applied Mathematics, 1997
- [46] MEYER, C.: *Matrix analysis and applied linear algebra*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000
- [47] LEHRSTUHL FÜR REGELUNGSTECHNIK - TU-MÜNCHEN (Hrsg.): *Moderne Methoden der Regelungstechnik 3 - Beiblatt 4*. SS 10. Lehrstuhl für Regelungstechnik - TU-München, 2010
- [48] EID, R.: *Time domain model reduction by moment matching*, Institute of Automatic Control, Technische Universität München, PhD thesis, 2009
- [49] MULLIS, C. T. ; ROBERTS, R. A.: Synthesis of minimum roundoff noise fixed point digital filters. In: *Trans. Circuits System* 23 (1976), S. 551–562

-
- [50] MOORE, B. C.: Principal component analysis in linear systems: Controllability, observability and model reduction. In: *IEEE Trans. Automatic Control* 26 (1981), S. 17–32
- [51] ARNOLDI, W. E.: The Principle of Minimized Iterations in the Solution of the Matrix Eigenvalue Problem. In: *Quart. Appl. Math.* 9 (1951), S. 17–29
- [52] LANCZOS, C.: An Iteration Method for the Solution of the Eigenvalue Problem of Linear Differential and Integral Operators. In: *J. Res. Nat. Bureau Stan.* 45 (1950), S. 255–282
- [53] GRIMME, E. ; SORENSEN, D. ; VAN DOOREN, P.: Model Reduction of State Space Systems via an Implicitly Restarted Lanczos Method. In: *Numerical Algorithms* 12 (1995), S. 1–31
- [54] SALIMBAHRAMI, B. ; LOHMANN, B.: Krylov Subspace Methods in Linear Model Order Reduction: Introduction and Invariance Properties / Inst. of Automation, Uni. Bremen. 2002. – Forschungsbericht
- [55] *Kapitel* Model reduction of large-scale systems: Rational Krylov versus balancing techniques. In: GALLIVAN, K. ; GRIMME, E. ; DOOREN, P.M.: *Error control and adaptivity in scientific computing*. H. Bulgak and C.Zenger, 1999, S. 177–190
- [56] GUGERCIN, S.: An iterative SVD-Krylov based method for model reduction of large-scale dynamical systems. In: *Lineal Algebra and its Applications* 428 (2008), S. 1964–1986
- [57] HACKBUSCH, W. ; SCHWARZ, H. R. ; ZEIDLER, E. ; ZEIDLER, E. (Hrsg.): *Teubner-Taschenbuch der Mathematik*. B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart Leipzig, 1996
- [58] GOLUB, G. H. ; VAN LOAN, C. F.: *Matrix Computations*. 3rd. John Hopkins University Press, 1996
- [59] LUNZE, Jan: *Regelungstechnik 2. Mehrgrößensysteme, Digitale Regelung*. Springer Berlin Heidelberg, 2010
- [60] LEHRSTUHL FÜR REGELUNGSTECHNIK - TU-MÜNCHEN (Hrsg.): *Moderne Methoden der Regelungstechnik 3 - Beiblatt 6*. SS 10. Lehrstuhl für Regelungstechnik - TU-München, 2010
- [61] LAUB, A. ; HEATH, M. ; PAIGE, C. ; WARD, R.: Computation of system balancing transformations and other applications of simultaneous diagonalization algorithms. In: *Automatic Control, IEEE Transactions on* 32 (1987), Nr. 2, S. 115–122

- [62] BEUTELSPACHER, Albrecht.: *Lineare Algebra : eine Einführung in die Wissenschaft der Vektoren, Abbildungen und Matrizen*. Vieweg + Teubner, 2010
- [63] FELDMANN, P. ; LUI, F.: Sparse and efficient reduced order modeling of linear subcircuits with large number of terminals. In: *ICCAD '04 Proceedings of the 2004 IEEE/ACM Intl. Conf. Computer-aided design* (2004), S. 88–92
- [64] LIU, P. ; TAN, S. X. D. ; LI, H. ; QI, Z. ; KONG, J. ; MCGAUGHY, B. ; HE, L.: An efficient method for terminal reduction of interconnect circuits considering delay variations. In: *ICCAD '05 Proceedings of the 2005 IEEE/ACM Intl. Conf. Computer-aided design* (2005), S. 821–826
- [65] LIU, P. ; TAN, S. X. D. ; YAN, B. ; MCGAUGHY, B.: An extended SVD-based terminal and model order reduction algorithm. In: *Proceedings of the IEEE International Behavioral Modeling and Simulation Workshop* (2006), S. 44–49
- [66] LIU, P. ; TAN, S.X.D. ; YAN, B. ; MCGAUGHY, B.: An efficient terminal and model order reduction algorithm. In: *Intergr. VLSI J.* 41(2) (2008), S. 210–218
- [67] TAN, S.X.D. ; HE, L.: *Advanced Model Order Reduction Techniques in VLSI Design*. Cambridge University Press, 2007
- [68] PENROSE, R.: A generalized inverse for matrices. In: *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 51/3 (1955), S. 406–413
- [69] FREUND, R. W.: Model reduction methods based on Krylov subspaces. In: *Acta Numerica* 12 (2003), S. 276–319
- [70] KAMON, M. ; WANG, F. ; WHITE, J.: Generating Nearly Optimally Compact Models from Krylov-Subspace Based Reduced-Order Models. In: *IEEE Trans. Circuit and Systems* 47/4 (2000), S. 239–248
- [71] VILLEMAGNE, C. D. ; SKELTON, R. E.: Model Reduction using a Projection Formulation. In: *Int. J. Control* 46 (1987), S. 2141–2169
- [72] SALIMBAHRAMI, B. ; LOHMANN, B. ; BECHTOLD, T. ; KORVINK, J.: A Two-Sided Arnoldi-Algorithm with Stopping Criterion and an application in Order Reduction of MEMS. In: *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems* 11 (2005), Nr. 1, S. 79–93
- [73] FREUND, R. W.: Krylov subspace methods for reduced order modeling in circuit simulation. In: *J. Comp. Appl. Math.* 123 (2000), S. 395–421

- [74] FELDMANN, P. ; FREUND, R. W.: Efficient Linear Circuit Analysis by Padé via the Lanczos Process. In: *IEEE Trans. Computer-Aided Design* 14/5 (1995), S. 639–649
- [75] LOHMANN, B. ; SALIMBAHRAMI, B.: Ordnungsreduktion mittels Krylov-Unter-Raummethoden. In: *Automatisierungstechnik* 52/1 (2004), S. 30–38
- [76] LOHMANN, B. ; SALIMBAHRAMI, B.: Introduction to Krylov Subspace Methods in Model Order Reduction. In: LOHMANN, B. (Hrsg.) ; GRÄSER, A. (Hrsg.): *Methods and Applications in Automation*. Aachen : Shaker Verlag, 2003, S. 1–13
- [77] EID, R.: *Time Domain Model Reduction By Moment Matching*. Verlag Dr. Hut, 2009
- [78] GUGERCIN, S. ; ANTOULAS, A. C. ; BEATTIE, C.: H2 model reduction for large-scale dynamical systems. In: *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* 30/2 (2008), S. 27–55
- [79] KÖHLER, A.: *Modellreduktion von linearen Deskriptorsystemen erster und zweiter Ordnung mit Hilfe von Block-Krylov-Verfahren*, TU Berlin, Diplomarbeit, 2006
- [80] BONIN, T. ; FASSBENDER, H. ; SOPPA, A. ; ZAEH, M.: A global Arnoldi method for the model reduction of second-order structural dynamical systems. In: *submitted to Linear Algebra and its Applications* (2010)
- [81] FREUND, R.: Krylov-subspace methods for reduced-order modeling in circuit simulation. In: *Journal of Computational and Applied Mathematics* 123 (2000), S. 395–421
- [82] HAASDONK, B. ; OHLBERGER, M.: Efficient Reduced Models for Parameterized Dynamical Systems by Offline/Online Decomposition. In: *Proc. of 6th MATHMOD, Vienna* (2009)
- [83] LOHMANN, B. ; EID, R.: Efficient Order Reduction of Parametric and Nonlinear Models by Superposition of Locally Reduced Models. In: *In Roppencker, G. und Lohmann, B. (Hrsg.): Methoden und Anwendungen der Regelungstechnik. Erlangen-Münchener Workshops 2007 und 2008* (2009), S. 27–37
- [84] VUONG, Anh T.: *Ordnungsreduktion schaltender linearer dynamischer Systeme*. Lehrstuhl für Regelungstechnik, TU München, Semesterarbeit, 2010
- [85] CREMER, Sylvia: *Guard-basierte Modellordnungsreduktion schaltender und vernetzter linearer Systeme mit Applikation auf Rotormodelle*. 2012. – Semesterarbeit am Lehrstuhl für Regelungstechnik der TU München

- [86] LEUNG, A. T.-M. ; KHAZAKA, R.: Parametric model order reduction technique for design optimization. In: *IEEE International Symposium on Circuits and Systems* (2005), S. 1290 – 1293
- [87] LI, Peng ; LIU, Frank ; LI, Xin ; PILEGGI, Lawrence T. ; NASSIF, Sani R.: Modeling Interconnect Variability Using Efficient Parametric Model Order Reduction. In: *Proceedings of the conference on Design, Automation and Test in Europe - Volume 2* (2005), S. 958–963
- [88] DANIEL, L. ; SIONG, Ong C. ; CHAY, L.S. ; LEE, Kwok H. ; WHITE, J.: A multiparameter moment-matching model-reduction approach for generating geometrically parameterized interconnect performance models. In: *Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems* (2004), S. 678 – 693
- [89] ULBRICH, B.G.: *Einbindung von Salome und NETGEN in die variable FEM-Berechnung (VARFEM)*, Technische Universität Berlin, Diplomarbeit, 2010
- [90] KRENEK, K. ; EID, R. ; LOHMANN, B.: *Model Order Reduction of Rotordynamical Systems*. 2011
- [91] GLIENICKE, J. ; HAN, D.-C. ; LEONHARD, M.: Practical Determination and Use of Bearing Dynamic Coefficients. In: *Tribology International* (1980), S. 297–309
- [92] ATHAVALA, M. M. ; HENDRICKS, R.C.: A Small Perturbation CFD Method for Calculation of Seal Rotordynamic Coefficients. In: *International Journal of Rotating Machinery* 2 (1996), Nr. 3, S. 167–177
- [93] SOMEYA, T.: *Journal-Bearing Databook*. Springer-Verlag, 1989
- [94] ANTRIEBSTECHNIK, FVA F.: *Alp3T (Combros)*, /www.itr.tu-clausthal.de
- [95] BRANDTS, J. H.: Matlab code for sorting real Schur forms. In: *Numer. Linear Algebra Appl.* 9 (2002), S. 249–261
- [96] NOORDEN, T.v. ; ROMMES, J.: Computing a partial generalized real Schur form using the Jacobi-Davidson method. In: *Numer. Linear Algebra Appl.* 14 (2007), S. 197–215
- [97] JAIMOUKAH, I. M. ; KASENALLY, E. M.: Implicitly Restarted Krylov Subspace Method for Stable Partial Realizations. In: *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* 18/3 (1997), S. 633–652
- [98] WOLF, T. ; PANZER, H. ; LOHMANN, B.: Gramian-based error bound in model reduction by Krylov-subspace methods. In: *Presented at the 18th IFAC World Congress* (2011)