

Technische Universität München

ZENTRUM MATHEMATIK

Multivariate Value at Risk
Schätzung
von Zins Swap Sätzen

Diplomarbeit

von

Gabriel Kuhn

Themenstellung: Prof. Dr. Claudia Klüppelberg

Betreuung: Prof. Dr. Claudia Klüppelberg

Maximilian Hogger (HVB)

Abgabetermin: 1. November 2001

Hiermit erkläre ich, daß ich die Diplomarbeit selbständig angefertigt und nur die angegebenen Quellen verwendet habe.

München, 1. November 2001

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Das Thema	1
1.2	Die Daten	3
1.3	Die Struktur	5
2	Test der Zeitreihen auf iid und ihre univariaten VFn	8
2.1	Testmethoden zur Untersuchung von Daten auf ihre iid Eigenschaft	8
2.1.1	Test auf Unkorreliertheit mit der empirischen Autokorrelationsfunktion	9
2.1.2	Gleitender Mittelwert	10
2.2	Anwendung der Testmethoden auf die Tagesdifferenzen der Swap-Rates	11
2.3	Bestimmung der Verteilung der Tagesdifferenzen der Swap-Rates	11
3	Univariate Extremwertanalyse	23
3.1	Univariate Extremwerttheorie	23
3.1.1	Schwache Konvergenz normierter Maxima	24
3.1.2	Maximaler Anziehungsbereich MDA	25
3.1.3	MDA für die Fréchet Verteilung $\Phi_\alpha(x) = \exp\{-x^{-\alpha}\}$	27
3.1.4	MDA für die Weibull Verteilung $\Psi_\alpha(x) = \exp\{-(-x)^\alpha\}$	29
3.1.5	MDA für die Gumbel Verteilung $\Lambda(x) = \exp\{-e^{-x}\}$	30
3.1.6	Die verallgemeinerte Extremwertverteilung GEV und die verallgemeinerte Paretoverteilung GPD	34
3.2	Statistische Methoden für extreme Ereignisse	39
3.2.1	Die Mittlere Exzess Funktion	40
3.2.2	Die Ratio der Maxima	41
3.2.3	Schätzen unter MDA -Bedingungen	42
3.2.4	Die POT -Methode	48

4	Abhängigkeitsstruktur mit Copula	67
4.1	Copula - Einführung	67
4.2	Tail-dependence als Abhängigkeitsmaß	72
4.2.1	Upper/lower Tail dependence	72
4.2.2	Schätzer für die Tail dependence	77
5	Multivariate Extremwerttheorie	92
6	Konstruktion einer Copula	97
7	Abschätzung der Portfolio-Verlustwahrscheinlichkeit	111
7.1	Schranken für $\mathbb{P}(\sum a_i X_i > k)$	111
7.1.1	Bivariater Fall	111
7.1.2	Multivariater Fall	116
7.2	Generierung von Zufallsvektoren für eine spezielle Copula	120
	Zusammenfassung	123
	Abkürzungsverzeichnis	127
	Literaturverzeichnis	128
	Abbildungsverzeichnis	128
	Tabellenverzeichnis	132

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Das Thema

Der *Value at Risk*, kurz **VaR**, hat als Risikomaß eine wichtige Rolle übernommen. Er ist definiert durch das $\alpha\%$ -Quantil der Gewinn/Verlust-Verteilung eines Portfolios für *kleine* Werte von α , meist 5%, 1% oder 0.1%. In einfachen Fällen wird der Portfoliopreis als einzige Risikoquelle angenommen, d.h. man modelliert das Risiko durch die Preisänderung bei einem Zeithorizont von einem Tag ($\Delta t = 1$). Geht man von solchen Tagespreisen aus, muß das $\alpha\%$ -Quantil der Verteilung der Tagespreisänderung geschätzt werden. Die Schwierigkeit der Schätzung eines kleinen Quantils besteht darin, Aussagen über das extreme Verhalten des Portfolios zu treffen in einem Bereich der Stichprobe, in dem nur sehr wenige oder auch gar keine Daten vorhanden sind.

Mit der Extremwerttheorie wurden Methoden entwickelt, um Aussagen über den Randbereich der Verteilung treffen zu können, unabhängig davon, ob die Verteilung der Daten bekannt ist oder nicht. Der zentrale Satz in diesem Umfeld, der Satz von *Fisher-Tippett*, charakterisiert Grenzverteilungen normierter Maxima $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ für $n \rightarrow \infty$ in eine Klasse von parametrischen Verteilungen. Die Parameter der Grenzverteilungen können anhand der Daten geschätzt werden und somit können Aussagen über extreme Änderungen des Portfolios getroffen werden, ohne viele Informationen über den äußeren Bereich der Verteilung zu haben. Im einfachen Fall werden unabhängig identisch verteilte (**iid**) Daten vorausgesetzt und es wird sich herausstellen, daß die zu analysierenden Daten diese Annahme erlauben. Der **VaR** zum Konfidenzniveau α ist damit die Inverse der Gewinn/Verlust Verteilung an der Stelle α .

Ein Problem der klassischen Extremwerttheorie für diese Arbeit ist jedoch die An-

nahme, die Tagesdifferenzen eines Portfolios seien **iid**, da sich die Zusammensetzung des Portfolios und damit auch die Verteilungsfunktion des Portfolios fast täglich ändert. Was allerdings meist über einen längeren Zeitraum konstant bleibt, sind die Komponenten des Portfolios (z.B. bei einem DAX-Portfolio).

Bei den Komponenten macht dann die Annahme der **iid** Eigenschaft mehr Sinn – zeitliche Abhängigkeiten können natürlich vorkommen. Eine zeitliche Abhängigkeit liegt in einer Zeitreihe $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ vor, wenn Werte $(X_t)_{t \neq T}$ Einfluß haben auf den Wert X_T zum Zeitpunkt T . In der Zeitreihentheorie werden hauptsächlich stationäre Prozesse (Definition 2.2) betrachtet, z.B. lineare Prozesse

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j Z_{t-j},$$

mit **iid noise** Zufallsvariablen $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ mit $\mathbb{E}Z_t = 0$ und $\text{var}Z_t = \sigma_Z^2 < \infty$. Ein Beispiel für einen linearen Prozess ist der **ARMA**(p, q) Prozess, gegeben durch

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \dots - \phi_p X_{t-p} = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \dots + \theta_q Z_{t-q}, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Mehr über Zeitreihentheorie ist zu finden in Brockwell&Davis [1].

Wenn mehrere Zeitreihen

$$\begin{pmatrix} X_{1,1} & X_{1,2} & \cdots & X_{1,n} \\ X_{2,1} & X_{2,2} & \cdots & X_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{m,1} & X_{m,2} & \cdots & X_{m,n} \end{pmatrix},$$

vorliegen, so kann eine Abhängigkeitsstruktur zwischen den Zeitreihen bestehen; im Fall $(X_{i,t})_{t=1,\dots,n} \stackrel{\text{iid}}{\sim} F_i$ gilt für die Verteilung des Komponentenvektors:

$$\left(\begin{matrix} X_{1,t} \\ X_{2,t} \\ \vdots \\ X_{m,t} \end{matrix} \right)_{t \in \{1,\dots,n\}} \stackrel{\text{iid}}{\sim} H,$$

mit der m -variaten **VF** H , dessen univariate Rand**VFn** die $(F_i)_{i=1,\dots,m}$ sind. Damit ergibt sich eine Möglichkeit, das Risiko des Portfolios besser zu bestimmen, indem mittels einer multivariaten Erweiterung der Extremwerttheorie die Abhängigkeitsstruktur des Komponentenvektors $(X_{1,t}, \dots, X_{m,t})^T$ modelliert wird, um *extreme Ereignisse* für die m Zeitreihen durch die **VF** H bestimmen zu können.

Mit der Verteilung H kann dann die Verlustwahrscheinlichkeit $\mathbb{P}\{\sum a_i X_i > k\}$ des Portfolios abgeschätzt werden, wenn das Portfolio aus einer Linearkombination der Komponenten besteht. Bei komplizierteren Finanzprodukten (z.B. Optionsscheinen) in einem Portfolio, und wenn die Komponenten die Basiswerte der Finanzprodukte sind, ist das Portfolio natürlich keine Linearkombination aus den Komponenten. In solchen Fällen wird der Kurs der Finanzprodukte annähernd (in einem kleinen Bereich) als linear zu seinem Basiswert angesehen. Ein Problem bei der Abschätzung des **VaR** des Portfolios ist die Tatsache, daß im multivariaten Fall keine inverse Verteilungsfunktion existiert.

Die Modellierung von Abhängigkeiten wird oft mittels linearer Korrelation beschrieben, z.B. wenn die Tagesdifferenzen der Portfoliokomponenten mit einer multivariaten Normalverteilung modelliert werden. Es wird sich herausstellen, daß die Korrelation als Abhängigkeitsmaß ungeeignet ist, um *extreme* Abhängigkeiten, d.h. Abhängigkeiten im oberen/unteren Tailbereich darzustellen. Ein besseres Abhängigkeitsmaß für die Randbereiche der Verteilung ist die sogenannte *upper* bzw. *lower tail dependence* λ_U bzw. λ_L zwischen zwei Zufallsvariablen X und Y , die Wahrscheinlichkeit, daß Y *groß* ist unter der Bedingung, daß auch X *groß* ist. Gesucht ist für die **VaR** Berechnung also eine multivariate *Extremwertverteilung*, die unter anderem die in den Daten auftretende *tail dependence* als Abhängigkeitsstruktur aufweist.

Die eindimensionale Datenanalyse wird mit dem Softwarepaket *EVIS* von Alexander McNeil durchgeführt. Dieses Paket besteht aus *S-Plus* Routinen und setzt das Statistikprogramm *S-Plus* voraus. *EVIS* steht auf der Homepage www.math.ethz.ch/mcneil/software.html zur Verfügung. Die im Kapitel 3 beschriebene univariate Extremwerttheorie lehnt sich stark an die Kapitel 3 und 6 in *Embrechts, Klüppelberg und Mikosch (1997), Modelling Extremal Events* (EKM [6]) an. Dort ist die Extremwerttheorie ausführlich erklärt. Weitere Beispiele dazu sind auf der Website www.ma.tum.de/stat und www.math.ethz.ch aufgelistet. Dort sind auch einigen Arbeiten zu finden, die den Einfluss zeitlicher Abhängigkeiten für die Extremwerttheorie und den **VaR** klären.

1.2 Die Daten

Diese Diplomarbeit wurde mit Unterstützung der Risikoabteilung RCO1 der HypoVereinsbank erstellt, die auch die Daten zur Verfügung stellten. Bei den verwendeten Zeitreihen handelt es sich um *Annually Compounded Zero Coupon Swap Sätze* der Währungen Schweizer Franken (CHF), Deutsche Mark (DEM), Euro (EUR), Britische Pfund (GBP) und Japanische Yen (JPY) mit Laufzeiten von 30 Tagen bis 10 Jahren. Im folgenden wer-

den die Analysen nur für die EUR Swap Sätze durchgeführt. Für die restlichen Swap Sätze sind die Analysen analog. Die Zins Swap Sätze werden durch ein sogenanntes *Bootstrapping*-Verfahren aus Swap Par Sätzen abgeleitet. Die Swap Par Sätze werden von Brokern quotiert als der Festzinssatz eines normalen *Zinsswaps*.

Ein normaler *Zinsswap* (*Plain Vanilla Interest Rate Swap*) ist ein Vertrag zwischen zwei Parteien, über einen bestimmten Zeitraum feste Zinszahlung gegen eine an einen Referenzzins gekoppelte variable Zinszahlung zu tauschen. Die zu Grunde liegenden Nominalbeträge dienen lediglich als Rechengrösse für die Zinszahlungen und werden nicht ausgetauscht, weil sie sich normalerweise entsprechen. Die Zahlungshäufigkeiten der beiden Seiten werden sich oftmals unterscheiden, da in der Regel variable Zinszahlungen halb- oder vierteljährlich erfolgen und der Festsatz jährlich bezahlt wird. Nachfolgend werden die beiden Seiten eines Zinsswaps (*Swap-Legs*) getrennt beschrieben.

In Abhängigkeit von der Zahlungshäufigkeit der festen Seite des Swap (*Swap Fixed Leg*) ergeben sich regelmässige Zahlungsdaten zwischen dem Beginn und der Fälligkeit des Swaps. Die Zinszahlungen erfolgen am Ende jeder Periode. Die Höhe der Zinszahlung ergibt sich als Produkt aus dem festen Zinssatz, dem Nominalbetrag und der Zahlungsperiodenlänge.

Analog werden die Zahlungsdaten für die variable Seite (*Swap Float Leg*) ermittelt. Der Zinsfeststellungstag des im Swapvertrag definierten Referenzzinses (z.B. 6-Monats Libor) ist in der Regel zwei Tage vor Beginn jeder Periode. Die tatsächliche variable Zinszahlung für die kommende Periode ergibt sich als Produkt aus dem fixierten Referenzzinssatz, dem Nominalbetrag und der Zahlungsperiodenlänge.

Zur Wertermittlung eines Swap Satzes während einer Laufzeit müssen alle zukünftigen Festsatzzahlungen barwertig mit den variablen Zahlungsströmen verglichen werden, die auf Basis der Erwartungswerte zukünftiger Periodenzinssätze berechnet werden. Als Erwartungswerte werden einheitlich die fairen Terminzinssätze verwendet, die sich aufgrund von Arbitrageüberlegungen aus den am Bewertungstag gültigen Spotzinssätzen (*Swap Par Sätze*) berechnen lassen.

Von Interesse sind bei der Analyse zur Ermittlung des **VaR** extreme Änderungen der Swap Sätze unter Berücksichtigung der Abhängigkeit zwischen den unterschiedlichen Laufzeiten innerhalb einer Währung. Für die Untersuchungen werden die Tagesdifferenzen der Swap Sätze betrachtet (im Gegensatz zu der normalerweise bei der Untersuchung von Finanzdaten verwendeten Betrachtung der Differenzen der logarithmierten Tageskurse) $\delta_t = R_t - R_{t-1}$. Die Portfolios, für die der **VaR** bestimmt werden soll, bestehen aus Derivaten oben genannter Swap Sätze, die in dem Portfolio *short* oder *long* gehalten werden.

In erster Näherung wird angenommen, das Portfolio besteht aus einer Linearkombination der Swap Sätze.

In Abbildung 1.1 sind die Zeitreihen der Tagesdifferenzen der EUR Swap Par Sätze abgebildet; man kann beobachten, daß die Swap Sätze mit kurzen Laufzeiten stärkeren Schwankungen unterliegen, als die mit langen Laufzeiten. Die Swap Sätze der anderen Währungen verhalten sich ähnlich. Die Lücken in den Zeitreihen entstehen, wenn die Swap Sätze an zwei aufeinanderfolgenden Tagen $t - 1$ und t fast gleich sind und die Tagesdifferenz $\delta_t = R_t - R_{t-1} \approx 0$ ist.

In Abbildung 1.2 sind die Histogramme der Tagesdifferenzen abgebildet. Dort erkennt man, daß die Verteilung der Differenzen nicht symmetrisch ist und die positiven Änderungen für diese Zeitreihen sind stärker, als die negativen; eine symmetrische **VF** zur Modellierung der Tagesdifferenzen zu verwenden ist somit fraglich.

1.3 Die Struktur

Für die Analyse der Daten wird zuerst überprüft, ob die **iid** Annahme nicht verworfen werden kann. Entsprechende Tests verwerfen diese Hypothese nicht. Weiterhin wird sich herausstellen, daß die Exponentialverteilung eine gute Verteilung der getrennt betrachteten positiven und negativen Tagesdifferenzen der Swap Sätze δ_t sind. Zuerst werden beide Annahmen überprüft. Im ersten Analyseschritt wird die univariate Extremwerttheorie erklärt, dann werden alle Swap Sätze einzeln einer Extremwertanalyse unterzogen und Extreme Quantile für die Swap Sätze bestimmt. In diesem Kontext werden die dort benötigten Schätzverfahren erklärt. Im zweiten Analyseschritt wird die multivariate Extremwerttheorie erläutert. Ausgangspunkt ist dabei *Skllars Theorem*, das besagt, daß sich bei einer multivariaten Verteilung die Abhängigkeitsstruktur und die univariaten Randverteilungen getrennt betrachten läßt. Die Abhängigkeiten werden dann mit sogenannten *Copula* modelliert (das sind multivariate Gleichverteilungen). Danach wird die *tail dependence* als Abhängigkeitsmaß und Schätzer dafür erläutert. Anschliessend folgt eine kurze Einführung in die Konstruktion multivariater Copula, bei der am Schluß eine Copula angegeben wird mit einer möglichst weiten Abhängigkeitsstruktur. Danach folgt die multivariate Extremwerttheorie, die hier mit *Extremcopula* erklärt wird. Am Schluß wird ein Verfahren zur Abschätzung für die Verlustwahrscheinlichkeit des Portfolios gegeben (die Verteilung des Portfolios kann nicht aus der Kenntnis der multivariaten Verteilung der Portfoliokomponenten bestimmt werden) sowie ein Algorithmus bestimmt, um Zufallsvektoren mit der gleichen Extremwertverteilung zu generieren, wie die der untersuchten Daten.

Abbildung 1.1: Zeitreihen der Tagesdifferenzen der EUR Swap Sätze.

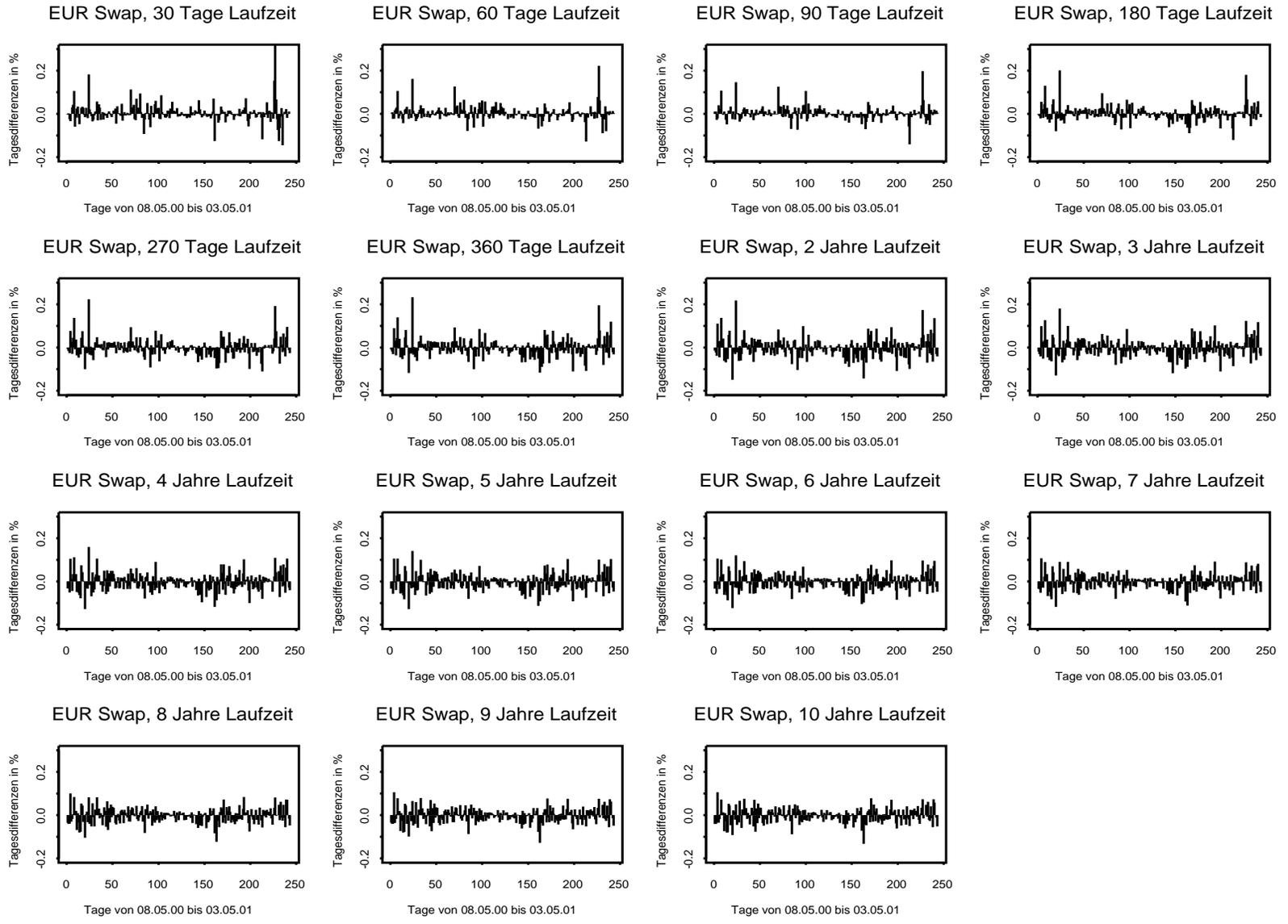
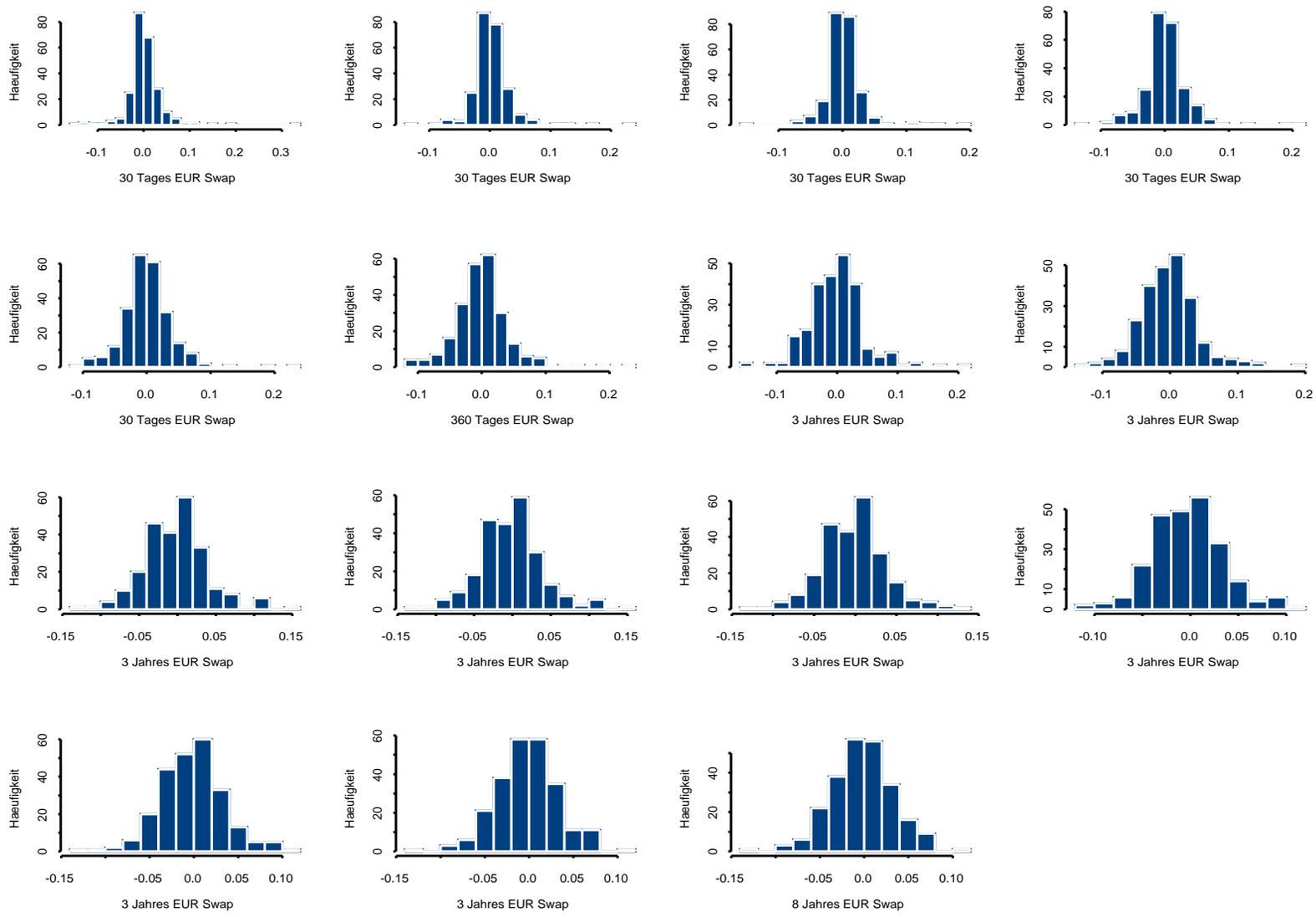


Abbildung 1.2: Histogramm der Tagesdifferenzen der EUR Swap Sätze.



Kapitel 2

Test der Zeitreihen auf iid und ihre univariaten VFn

Bei den meisten Analyseverfahren von Finanzdaten wird vorausgesetzt, die Daten (Tageskurse, Tagesdifferenzen, Differenzen der log-Tageskurse) seien **iid**. Sollten Abhängigkeiten in den Zeitreihen entdeckt werden, so können die später aufgeführten Analyseverfahren auf allgemeinere Modelle erweitert werden, die dann Abhängigkeitsstrukturen berücksichtigen. Im folgenden Abschnitt werden die einzelnen Zeitreihen auf ihre **iid** Eigenschaft hin überprüft und eine mögliche Verteilung wird gefunden, die die Verteilung der Daten gut widerspiegelt.

2.1 Testmethoden zur Untersuchung von Daten auf ihre iid Eigenschaft

Gegeben ist die Zeitreihe $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ mit einer Stichprobe X_1, \dots, X_n der Länge $n \in \mathbb{N}$.

Definition 2.1 (Autokovarianzfunktion (acf) von (X_t)) Sei $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ ein stochastischer Prozeß mit $\text{var}(X_t) < \infty \forall t \in \mathbb{Z}$. Dann heißt

$$\gamma_X(s, t) = \text{cov}(X_s, X_t) = \mathbb{E}[(X_s - \mathbb{E}X_s)(X_t - \mathbb{E}X_t)], \quad s, t \in \mathbb{Z},$$

Autokovarianzfunktion (**acf**) von $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$. □

Definition 2.2 (schwach stationärer Prozeß) $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ heißt schwach stationär, falls

(i) $\mathbb{E}|X_t|^2 < \infty, \quad \forall t \in \mathbb{Z},$

$$(ii) \mathbb{E}X_t = \mu, \quad \forall t \in \mathbb{Z},$$

$$(iii) \gamma_X(s, t) = \gamma_X(s + h, t + h), \quad \forall s, t, h \in \mathbb{Z}.$$

□

Bemerkung 2.3 Für einen schwach stationären Prozeß $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ gilt

$$\gamma_X(s, t) = \gamma_X(t - s, 0), \quad \forall s, t \in \mathbb{Z}.$$

Man definiert deshalb

$$\gamma_X(h) = \gamma_X(h, 0) = \text{cov}(X_{t+h}, X_t), \quad \forall t, h \in \mathbb{Z}.$$

γ_X heißt *Autokovarianzfunktion* des schwach stationären Prozeß $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$.

□

Definition 2.4 (empirische acf) Die empirische oder Stichprobenautokovarianzfunktion von X_1, \dots, X_n ist definiert durch

$$\hat{\gamma}(k) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-k} (X_{j+k} - \bar{X})(X_j - \bar{X}), \quad 0 \leq k \leq n, \quad \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

□

Definition 2.5 (Autokorrelationsfunktion (acr) und empirische acr) Die Autokorrelationsfunktion eines schwach stationären Prozeß $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ ist definiert durch

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)}.$$

Die empirische oder Stichprobenautokorrelationsfunktion von X_1, \dots, X_n ist definiert durch

$$\hat{\rho}(k) = \frac{\hat{\gamma}(k)}{\hat{\gamma}(0)}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

□

2.1.1 Test auf Unkorreliertheit mit der empirischen Autokorrelationsfunktion

Das folgende Lemma ist Ausgangspunkt, um eine Stichprobe X_1, \dots, X_n auf ihre Unkorreliertheit zu überprüfen:

Lemma 2.6 Sei $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}} \sim \mathbf{WN}(0, \sigma^2)$, d.h. alle X_t sind unkorreliert mit Erwartungswert 0 und Varianz σ^2 . Folglich ist $\rho(h) = 0 \forall h \neq 0$. Seien die Vektoren der **acr** und der empirischen **acr** Funktion bezeichnet mit

$$\underline{\rho}(h) = (\rho(1), \dots, \rho(h))^T \quad \text{und} \quad \widehat{\underline{\rho}}(h) = (\widehat{\rho}(1), \dots, \widehat{\rho}(h))^T.$$

Dann gilt

$$\sqrt{n} [\widehat{\underline{\rho}}(h) - \underline{\rho}(h)] \xrightarrow{d} (N_1, \dots, N_h)^T \quad \text{mit} \quad N_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathbf{N}(0, 1), \quad i = 1, \dots, h.$$

□

Bemerkung 2.7 Lemma 2.6 besagt $\widehat{\underline{\rho}}(1), \dots, \widehat{\underline{\rho}}(h) \stackrel{\text{iid}}{\approx} \mathbf{AN}(0, \frac{1}{n})$. Für grosse n hat jede einzelne Schätzung $\widehat{\rho}(i)$, $i = 1, \dots, h$ das 95%-**KI** $(-1.96/\sqrt{n}, 1.96/\sqrt{n})$. Da aber

$$\mathbb{P} \{ \widehat{\rho}(1) \in \mathbf{KI}, \dots, \widehat{\rho}(h) \in \mathbf{KI} \} = 0.95^h \ll 0.95,$$

führen einige Schätzwerte $\widehat{\rho}(i)$ ausserhalb von **KI** noch nicht zur Ablehnung der Nullhypothese $H_0 : (X_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ unkorreliert. Lemma 2.6 wird abgeleitet aus der *Formel von Bartlett*, nachzulesen in Brockwell&Davis [1]. Man beachte, die Schätzung $\widehat{\rho}(h)$ wird schlecht für h nahe bei n . Als Faustregel gilt eine Schätzung zuverlässig ab $n \geq 50$ und $h \leq 0.25n$. □

Die **iid** Eigenschaft ist allgemein schlecht zu schätzen, deshalb werden X_i und $t(X_i)$ auf Unkorreliertheit getestet – meist werden dazu die Transformationen $t(X_i) = X_i^2$ und $t(X_i) = |X_i|$ verwendet. Wenn auch in diesen Fällen die Unkorreliertheit nicht abgelehnt werden kann, dann wird angenommen, X_i sei **iid**.

2.1.2 Gleitender Mittelwert

Ein weiteres Tool zur Überprüfung, ob die Daten X_i von der gleichen Verteilung F stammen, erhält man mit dem gleitenden Mittelwert

$$\overline{X}_{i,m} = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} X_{i+j}.$$

Wenn sich die Verteilung der X_i nicht ändert, dann sollte sich bei ausreichender Datenmenge der gleitende Mittelwert, ein Schätzer für den Erwartungswert der Verteilung, nicht zu stark ändern. Bei diesem Tool werden die Datenpunkte geplottet und dazu der gleitende Mittelwert eingefügt. Bei zu starker Änderung von $\overline{X}_{i,m}$ gibt dies einen Hinweis auf eine Änderung in der Verteilung der Daten in dem entsprechenden Zeitraum. Hierbei

muß natürlich die Länge m in $\bar{X}_{i,m}$ in Bezug zu der Stichprobenlänge n passend gewählt werden. Ist m zu klein, so fluktuiert der $\bar{X}_{i,m}$ -Plot zu stark (bei $m = 1$ entspricht er der eigentlichen Stichprobe X_1, \dots, X_n), ist m zu groß, so enthält er zu wenig Informationen. Ein robuster Schätzer für den gleitenden Mittelwert ist in *S-Plus* mit der Funktion *lowess* implementiert.

2.2 Anwendung der Testmethoden auf die Tagesdifferenzen der Swap-Rates

In Abbildung 2.1 wird der Test auf Unkorreliertheit mit der empirischen Autokorrelationsfunktion auf die Tagesdifferenzen der EUR Swap Sätze angewendet. Die beiden horizontal gestrichelten Linien in den einzelnen Graphen entsprechen dem 95% **KI**. Bei den Tagesdifferenzen der 30 bis 90 Tage EUR Swap Sätze sind schwache Abhängigkeiten bei Lag 1 zu erkennen, die durch einen **AR**(1) Prozeß modelliert werden könnten; bei den 270 Tagen bis zu den 10 Jahres Swap Sätzen ist eine sehr schwache Abhängigkeit bei Lag 9 zu erkennen. In den Abbildungen 2.2 und 2.3 sind die **acr** Tests mit den Absolutbeträgen und den Quadraten der Tagesdifferenzen der Swaps geplottet. Dort sind ebenfalls einige schwache Abhängigkeiten zu erkennen – allerdings nur sehr wenige. Deswegen kann die **iid** Hypothese nicht verworfen werden und alle Swap Zeitreihen können durch das gleiche Zeitreihenmodell zu beschrieben werden: Alle Swap Zeitreihen werden als **iid** modelliert.

Bei dem Plot mit dem gleitenden Mittelwert $\bar{X}_{i,m}$ (Abbildung 2.4 und 2.5) ergeben sich auch keine Hinweise auf eine Veränderung in der Verteilung. Dazu sind die Änderungen in $\bar{X}_{i,m}$ zu gering.

2.3 Bestimmung der Verteilung der Tagesdifferenzen der Swap-Rates

Im folgenden wird eine geeignete Verteilung für die Zeitreihen der Tagesdifferenzen der Swap Sätze gesucht. Bei Aktien wird im allgemeinen angenommen, daß die Kurse einer Brownschen Bewegung folgen. Durch logarithmierte Differenzen werden relative Veränderungen der Kurse dargestellt, die allgemein als normalverteilt modelliert werden, auch wenn dies häufig nicht der Realität entspricht. Für die geplante Analyse der Swap Sätze zur Risikoabschätzung mit Hilfe des **VaR** Quantils, sind die Tagesdifferenzen besser ge-

eignet, als die logarithmierten Differenzen. Im folgenden sei die verallgemeinerte Inverse einer **VF** F bezeichnet mit $F^{\leftarrow}(t) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq t\}$. Ein probates Mittel, eine Verteilungsklasse für ein Stichprobe zu verifizieren oder zu widerlegen, ist der **QQ**-Plot: Seien $X, X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} F$ mit stetiger Verteilungsfunktion F . Folglich

$$\mathbb{P}(F(X) \leq a) = \mathbb{P}(X \leq F^{\leftarrow}(a)) = F(F^{\leftarrow}(a)) = a \Rightarrow F(X) \sim U(0, 1).$$

Sei im folgenden $U_i = F(X_i)$. Für die Ordnungsstatistik $X_{n,n} \leq \dots \leq X_{1,n}$ gilt damit:

$$\begin{aligned} X_{1,n} \leq X_{2,n} \leq \dots \leq X_{n,n} &\Leftrightarrow U_{1,n} \leq U_{2,n} \leq \dots \leq U_{n,n}, \\ (F(X_{1,n}) \leq F(X_{2,n}) \leq \dots \leq F(X_{n,n})) &\stackrel{d}{=} (U_{1,n} \leq U_{2,n} \leq \dots \leq U_{n,n}), \\ \Rightarrow \mathbb{E}[F(X_{k,n})] = \mathbb{E}[U_{k,n}] &= \frac{n-k+1}{n+1}. \end{aligned}$$

F_n bezeichne die empirische Verteilungsfunktion der Stichprobe X_1, \dots, X_n . Damit ist

$$F_n(X_{k,n}) = \frac{n-k+1}{n}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Der Graph

$$\left\{ \left[X_{k,n}, F^{\leftarrow} \left(\frac{n-k+1}{n+1} \right) \right] : k = 1, \dots, n \right\}$$

wird als *Quantil Plot* oder **QQ**-Plot bezeichnet. Die asymptotische Linearität dieser **QQ**-Plots (wenn $X_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} F$) folgt für $n \rightarrow \infty$ aus dem Satz von *Glivenko-Cantelli*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| \xrightarrow{\text{f.s.}} 0,$$

und der Tatsache, daß für die Inverse dasselbe gilt – siehe Resnick [12]. Die X_1, \dots, X_n werden mittels **QQ**-Plot gegenüber einer Verteilungsklasse $F((\cdot - \mu)/\psi)$ mit μ als Erwartungswert und ψ als Standardabweichung von F überprüft. Bei richtiger Wahl von F ist der **QQ**-Plot linear mit Steigung ψ und Achsenabschnitt μ . Mit linearer Regression können z.B. beide Parameter leicht geschätzt werden. Es folgen nun einige Eigenschaften des **QQ**-Plots, die recht nützlich für die Analyse von Daten sind. Für weitere Eigenschaften siehe Chambers [3]:

- (i) (Vergleich von Verteilungen) Wenn die Daten von der Referenzverteilung generiert werden, sollte der Plot ungefähr wie die Identität aussehen. Für lineare Transformationen der Verteilung ist der Graph linear.
- (ii) (Lage und Skalierung) Weil eine Änderung der Verteilung durch eine lineare Transformation den Plot durch dieselbe Transformation verändert, kann die Lage und Skalierung graphisch geschätzt werden unter der Annahme, die Daten stammen von der Referenzverteilung.

- (iii) (Ausreisser) Wenn einige wenige der Daten mit groben Fehlern verunreinigt sind oder aus welchem Grund auch immer vom Wert her sehr unterschiedlich sind im Vergleich zu den restlichen Daten, die (mehr oder weniger) nach der Referenzverteilung verteilt sind, sind die Ausreisser sehr leicht im Plot zu erkennen.
- (iv) (Gestalt) Einige Unterschiede in der Verteilungsart können aus der Form des Plots abgeleitet werden. Wenn zum Beispiel die Referenzverteilung dickere Tails hat, als die Beispieldaten (die Tails der Daten sind nicht so groß, wie die der Referenzverteilung), dann wird sich der Plot links nach unten verdrehen und/oder rechts nach oben; wenn die Daten von einer Verteilung stammen, die schwerere Tails hat, als die Referenzverteilung, dann verdreht sich der Plot links nach oben und/oder rechts nach unten.

Es folgen einige Beispiele von **QQ**-Plots. In Abbildung 2.6 werden je 1000 simulierte **ZVn** gegen die **exp**(1) Verteilung geplottet. In Abbildung 2.7 werden die **ZVn** gegen die **N**(0, 1) Verteilung geplottet. Hier sind die in (iv) beschriebenen Eigenschaften gut zu erkennen. Die Gleichverteilung und die Normalverteilung haben leichtere Tails als die Exponentialverteilung, die Lognormalverteilung hat schwerere Tails. Gegenüber der Normalverteilung hat die Gleichverteilung leichtere Tails, die Exponential- und Lognormalverteilung fettere Tails.

Bei der **QQ**-Plot Analyse der Tagesdifferenzen der Swap Sätze konnte festgestellt werden, daß die Exponentialverteilung eine sehr gute Wahl ist für die Verteilung der positiven und negativen Tagesdifferenzen (Abbildung 2.8 und 2.9). Lediglich für sehr kurze Laufzeiten (Abbildung 2.8) sind die Tails der **exp**-Verteilung etwas zu leicht, bei allen anderen Laufzeiten sehen die **QQ**-Plots bezüglich der **exp**-Verteilung fast genauso aus, wie die **QQ**-Plots von simulierten **exp** Zufallsvariablen. Die Schätzer für die Parameter λ der Exponentialverteilung sowie die relativen Häufigkeiten der positiven und negativen Änderungen der Tagesdifferenzen der Swap Sätze stehen in Tabelle 2.1.

	30d	60d	90d	180d	270d	360d	2a	
positiv	36.881	45.878	50.084	41.626	36.889	34.208	31.840	
Häufigkeit	0.494	0.514	0.514	0.494	0.494	0.494	0.494	
negativ	49.255	57.143	60.985	47.912	39.001	34.492	29.667	
Häufigkeit	0.506	0.486	0.486	0.506	0.506	0.506	0.506	
	3a	4a	5a	6a	7a	8a	9a	10a
positiv	33.160	34.429	34.841	37.563	37.533	39.925	39.753	40.306
Häufigkeit	0.481	0.494	0.481	0.494	0.469	0.481	0.477	0.481
negativ	31.160	30.221	31.728	32.291	35.362	35.800	36.461	36.567
Häufigkeit	0.519	0.507	0.519	0.506	0.531	0.519	0.523	0.519

Tabelle 2.1: Schätzer des Parameters λ der **exp**-Verteilung jeweils für die positiven und negativen Tagesdifferenzen der EUR Swap Sätze sowie die relativen Häufigkeiten einer positiven bzw. negativen Änderung.

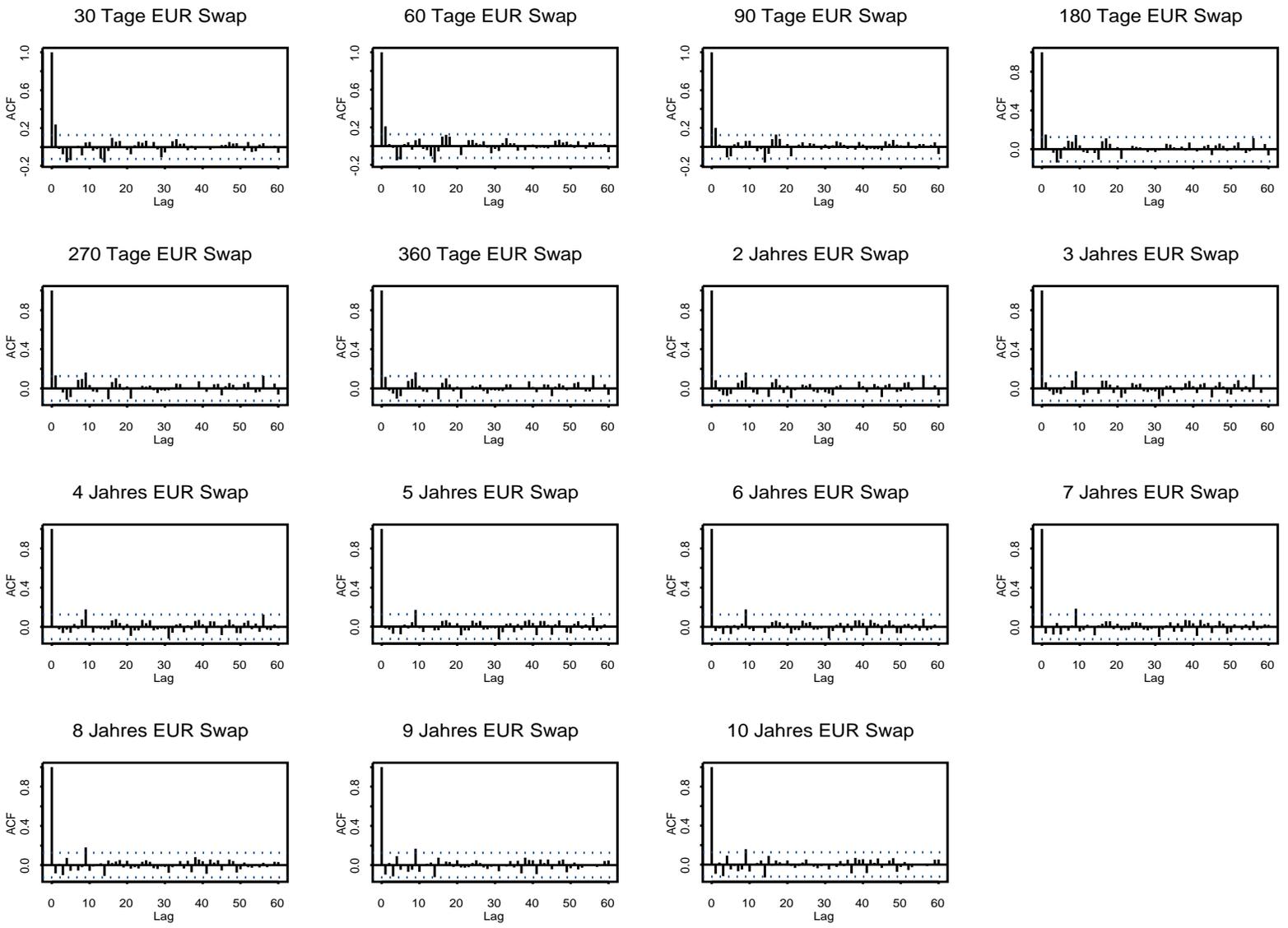


Abbildung 2.1: acf Analyse der Tagesdifferenzen der EUR Swap Sätze.

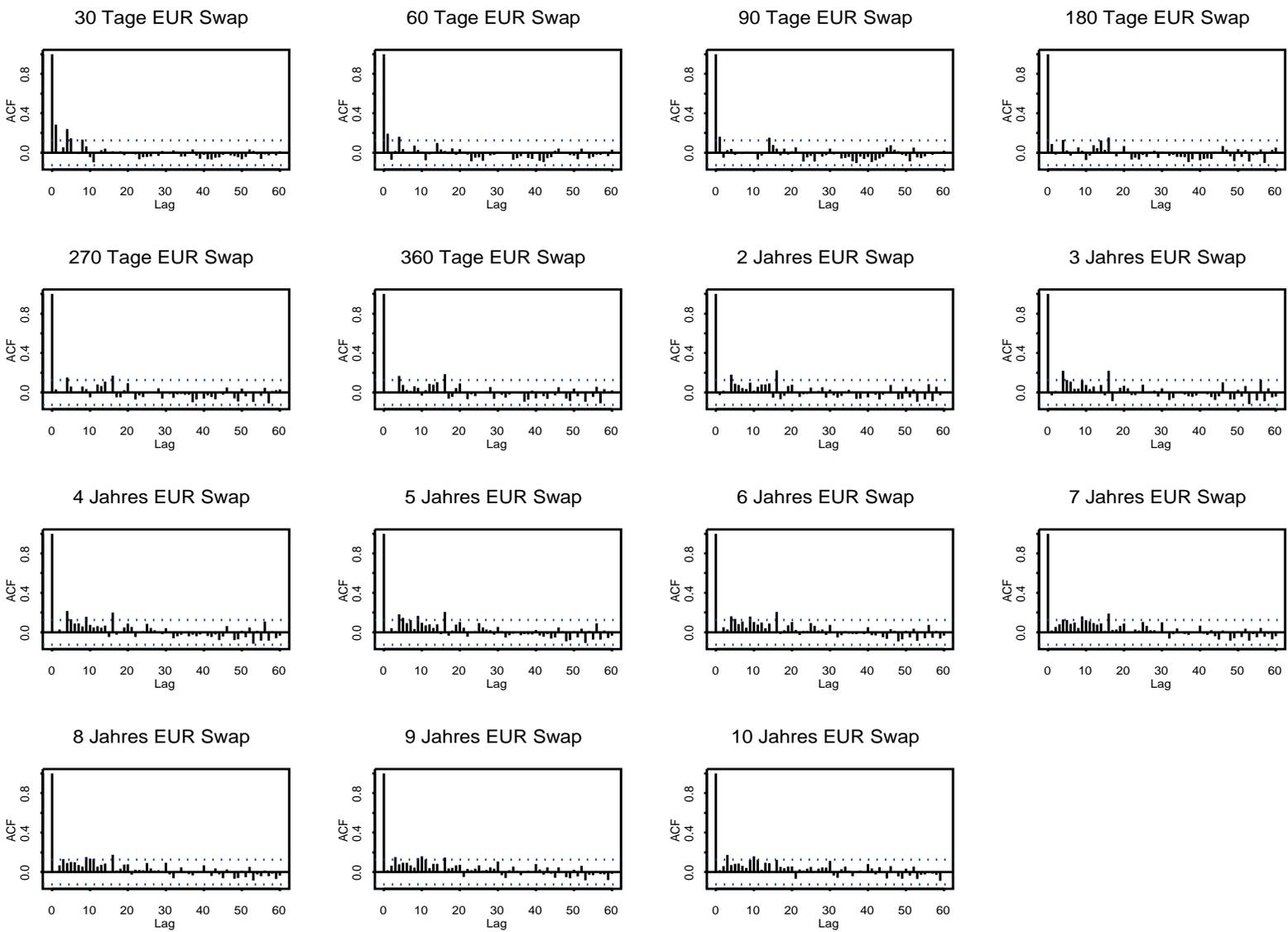


Abbildung 2.2: acf Analyse der Absolutbeträge der Tagesdifferenzen der EUR Swap Sätze.

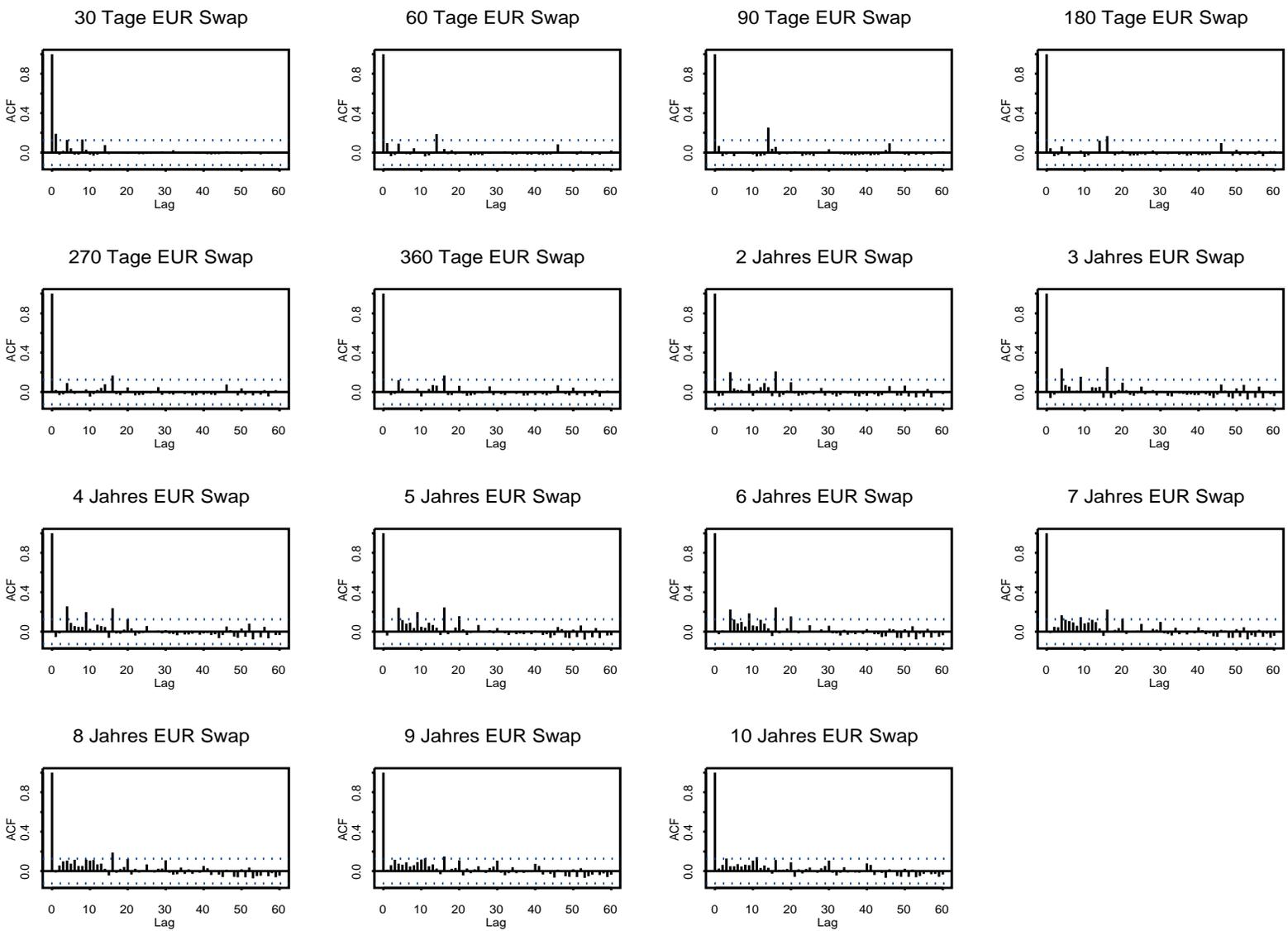


Abbildung 2.3: acf Analyse der quadrierten Tagesdifferenzen der EUR Swap Sätze.

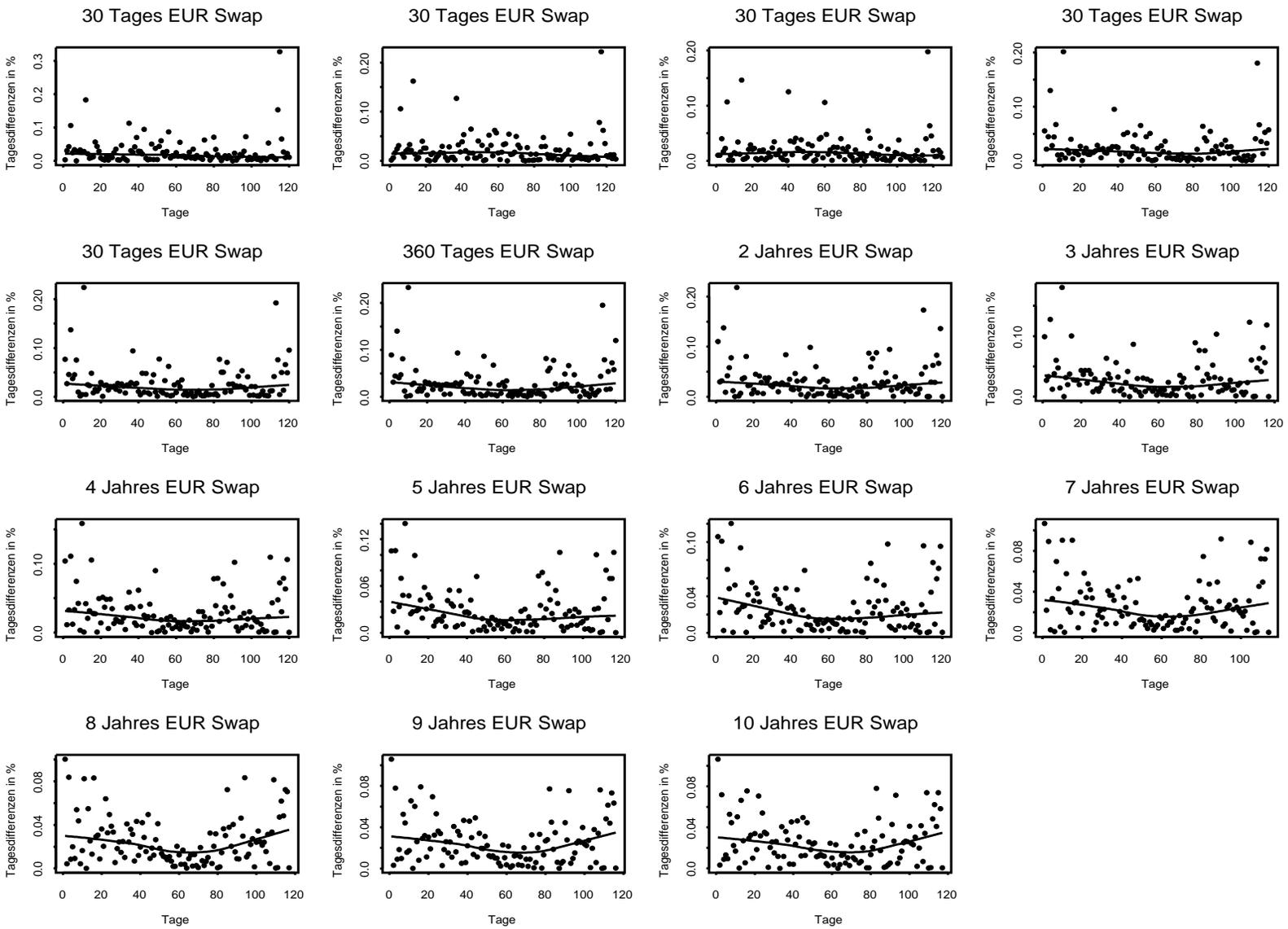


Abbildung 2.4: Gleitender Mittelwert der positiven Tagesdifferenzen der EUR Swap Sätze.

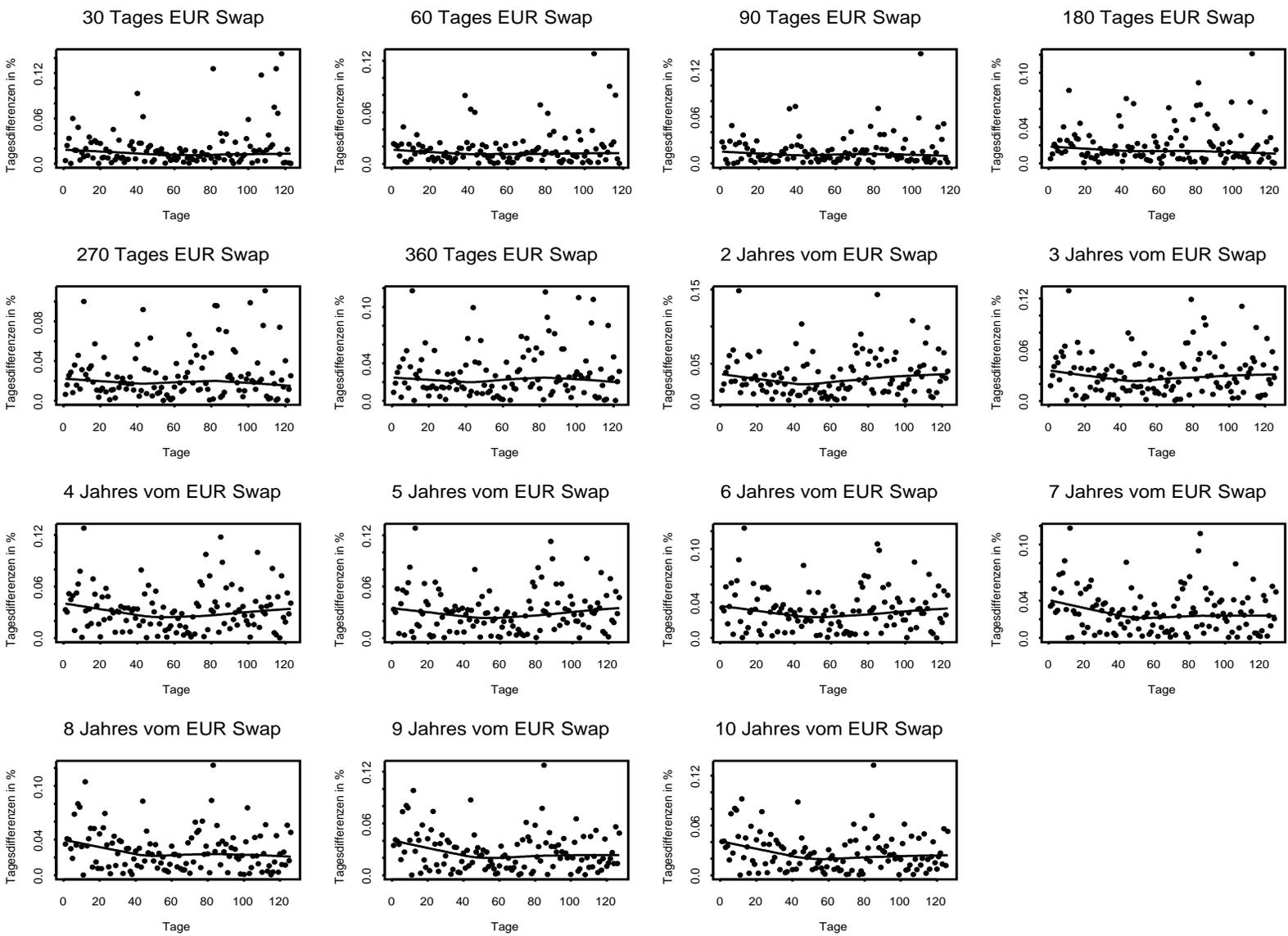
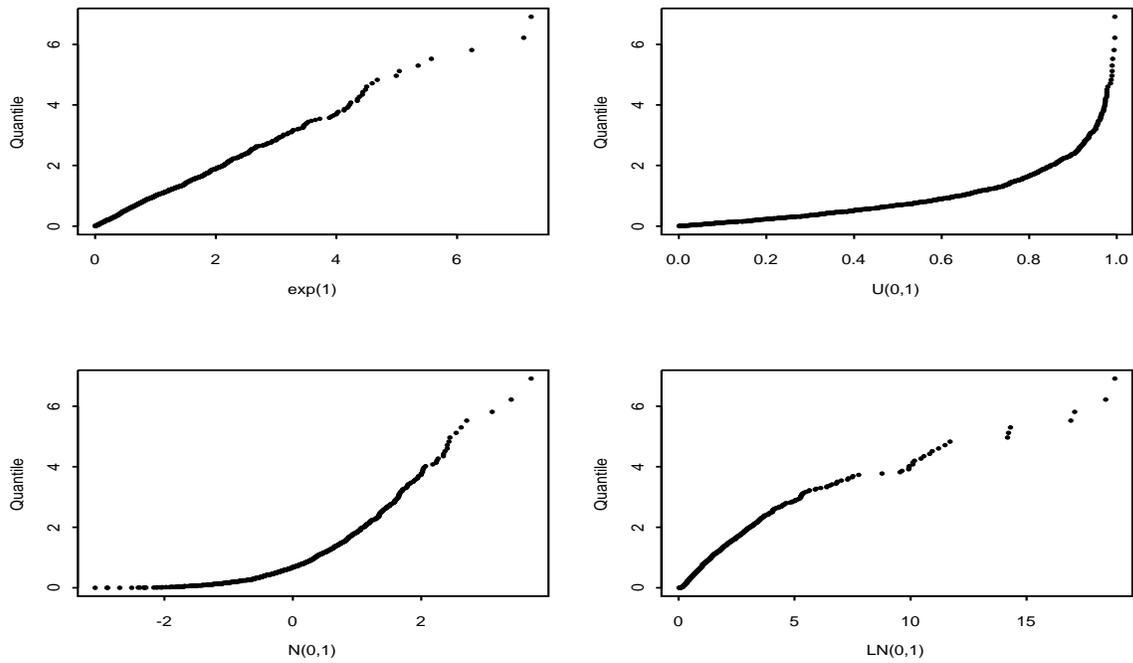
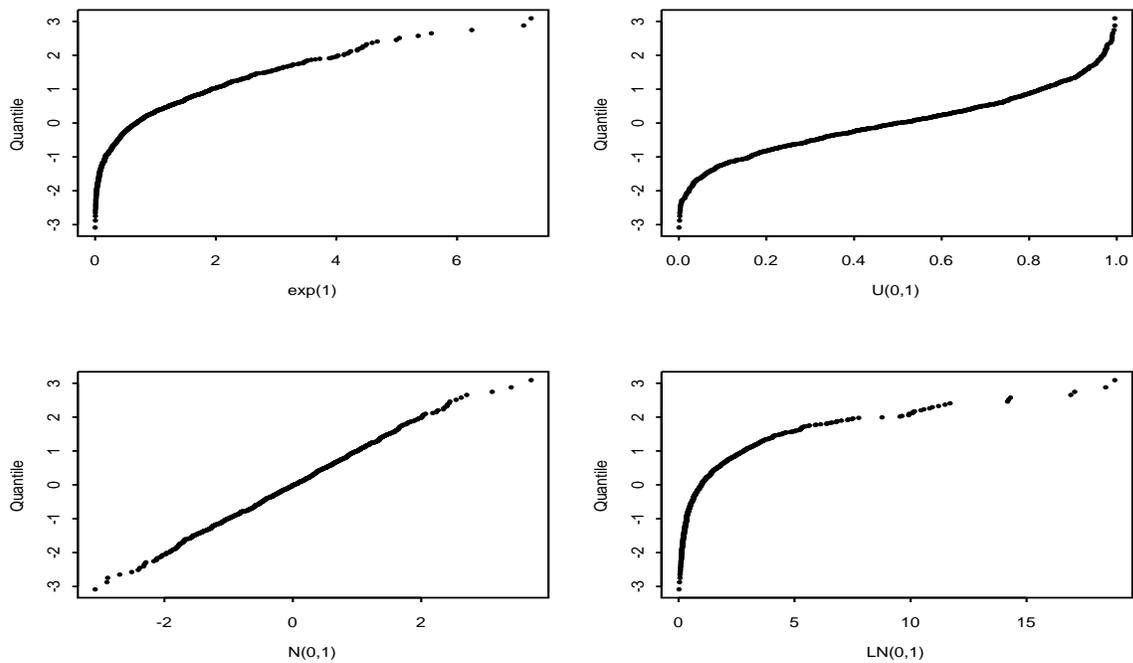


Abbildung 2.5: Gleitender Mittelwert der negativen Tagesdifferenzen der EUR Swap Sätze.

Abbildung 2.6: Beispiel **QQ**-Plots von **ZV_n** gegen die Exponentialverteilung.Abbildung 2.7: Beispiel **QQ**-Plots von **ZV_n** gegen die Normalverteilung.

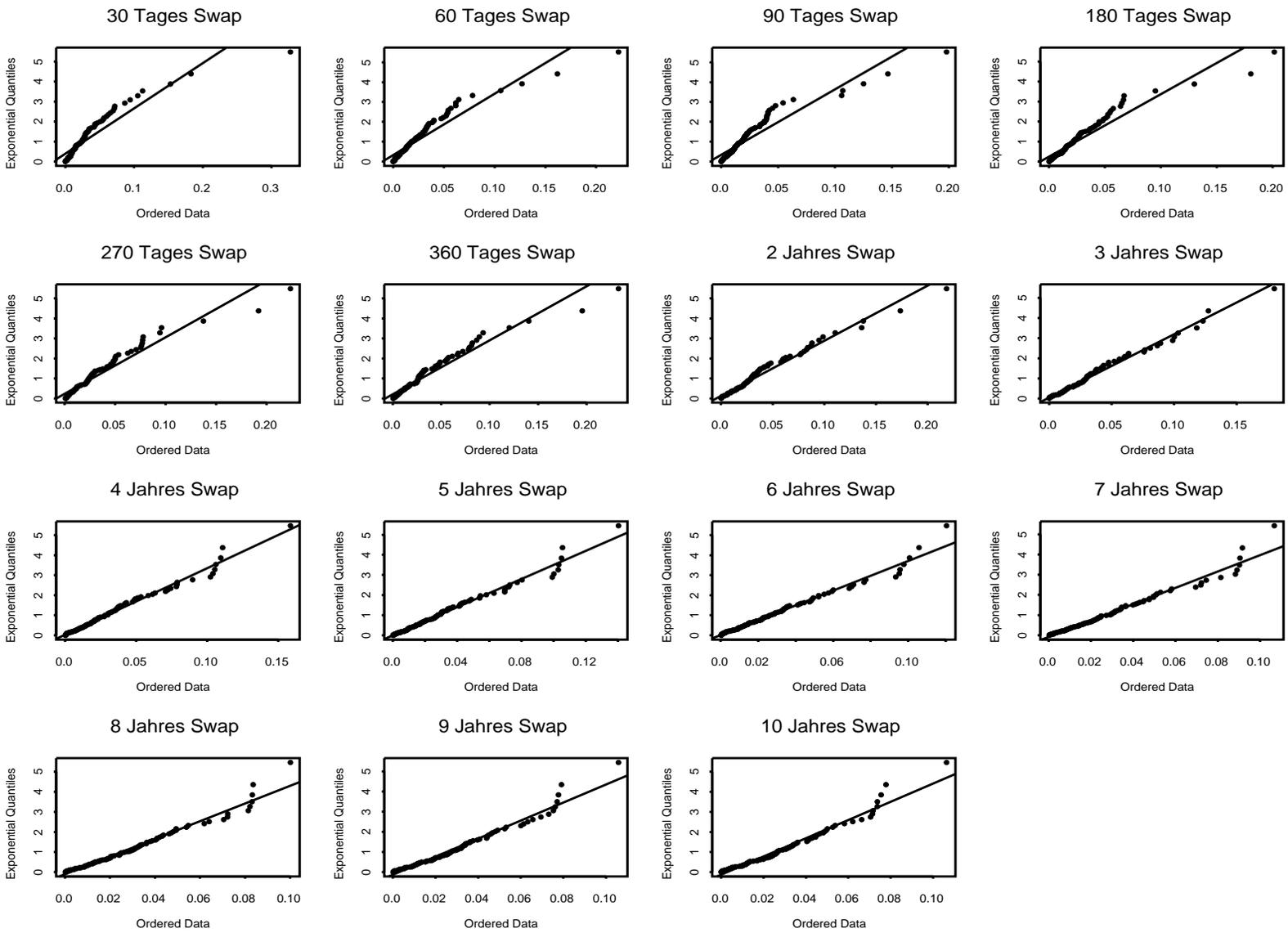


Abbildung 2.8: QQ-Plots der positiven Tagesdifferenzen der EUR Swap Sätze gegen die exp- Verteilung.

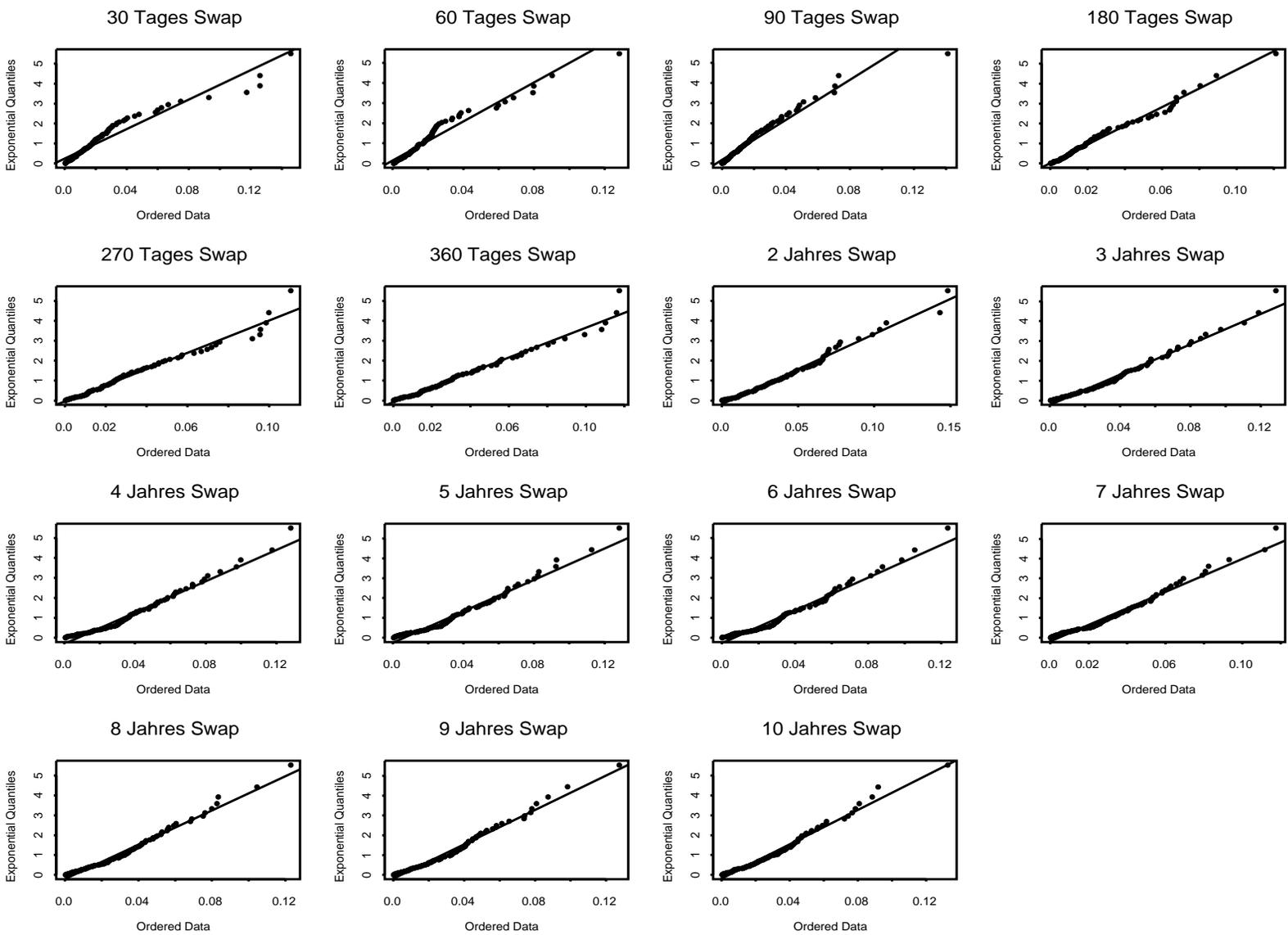


Abbildung 2.9: QQ-Plots der negativen Tagesdifferenzen der EUR Swap Sätze gegen die exp- Verteilung.

Kapitel 3

Univariate Extremwertanalyse

Im vorhergehenden Kapitel konnten alle Voraussetzungen für eine Extremwertanalyse an den Daten verifiziert werden. Es ist nützlich, die Verteilungseigenschaften der Daten zu kennen, allerdings ist dieses Kenntnis nicht notwendig für die jetzt folgende Analyse. Sinn der Extremwertanalyse ist es, eine Verteilung der Daten für sehr grosse Quantile zu bestimmen, für die meistens keine oder nur sehr wenige Daten vorliegen. Der Hauptteil dieser Diplomarbeit konzentriert sich auf die multivariate Extremwertanalyse, die die Abhängigkeitsstruktur zwischen den einzelnen Datensätzen berücksichtigt. Die univariate Extremwerttheorie wird deshalb kürzer und ohne Beweise dargestellt. Eine ausführlichere Darstellung dieser Theorie steht in EKM [6] in Kapitel 3 und 6. Die klassische Extremwerttheorie beschreibt das Verhalten der größten Werte einer Stichprobe oder der Exzedenten über einer hohen Schwelle.

3.1 Univariate Extremwerttheorie

Dieser Abschnitt befaßt sich mit der klassischen Extremwerttheorie und ist deswegen die Grundlage für viele Ergebnisse dieser Arbeit. Die zentrale Aussage ist der Satz von *Fisher-Tippett*, welcher die Form der möglichen Grenzverteilungen der zentrierten und normierten Maxima beschreibt. Es gibt (bis auf affine Transformationen) drei Familien der möglichen Grenzverteilungen und sie werden *Extremwertverteilungen* (**EVFn**) genannt.

3.1.1 Schwache Konvergenz normierter Maxima

Es liegt die Stichprobe X_1, \dots, X_n von **iid**-Zufallsvariablen vor, bei der man zunächst die partiellen Maxima betrachtet:

$$M_1 = X_1, \quad M_n = \max \{X_1, \dots, X_n\}, \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Entsprechende Ergebnisse für Minima erhält man aus den für Maxima, wenn folgende Gleichheit verwendet wird:

$$\min \{X_1, \dots, X_n\} = - \max \{-X_1, \dots, -X_n\}.$$

Folgender Satz, eine Art *zentraler Grenzwertsatz für Maxima*, bildet die Grundlage der klassischen Extremwerttheorie:

Theorem 3.1 (Fisher-Tippett Theorem) Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von **iid** Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F . Wenn normierende Konstanten $c_n > 0$, $d_n \in \mathbb{R}$ und eine nichtdegenerierte Verteilungsfunktion H existieren, so daß

$$\frac{M_n - d_n}{c_n} \xrightarrow{d} H \quad \text{für } n \rightarrow \infty \quad (3.1)$$

gilt, dann ist H eine der folgenden drei Verteilungsfunktionen:

$$\begin{aligned} \text{Fréchet: } \Phi_\alpha(x) &= \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \exp(-x^{-\alpha}), & x > 0, \end{cases} \quad \text{für } \alpha > 0, \\ \text{Weibull: } \Psi_\alpha(x) &= \begin{cases} \exp(-(-x)^\alpha), & x \leq 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases} \quad \text{für } \alpha > 0, \\ \text{Gumbel: } \Lambda(x) &= \exp(-e^{-x}), \quad \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

□

Die Dichten der **EVFn** sind in Abbildung 3.1 skizziert. Einen vollständigen Beweis von Theorem 3.1 kann man in Resnick [12], Proposition 0.3 nachlesen.

Definition 3.2 (ExtremwertVF n und ExtremwertZV n) Die in Theorem (3.1) beschriebenen drei **VF n** Φ_α , Ψ_α und Λ heißen Standard Extremwertverteilungen (**EVFn**), die zugehörigen **ZV n** heißen Standard Extremwert Zufallsvariablen. □

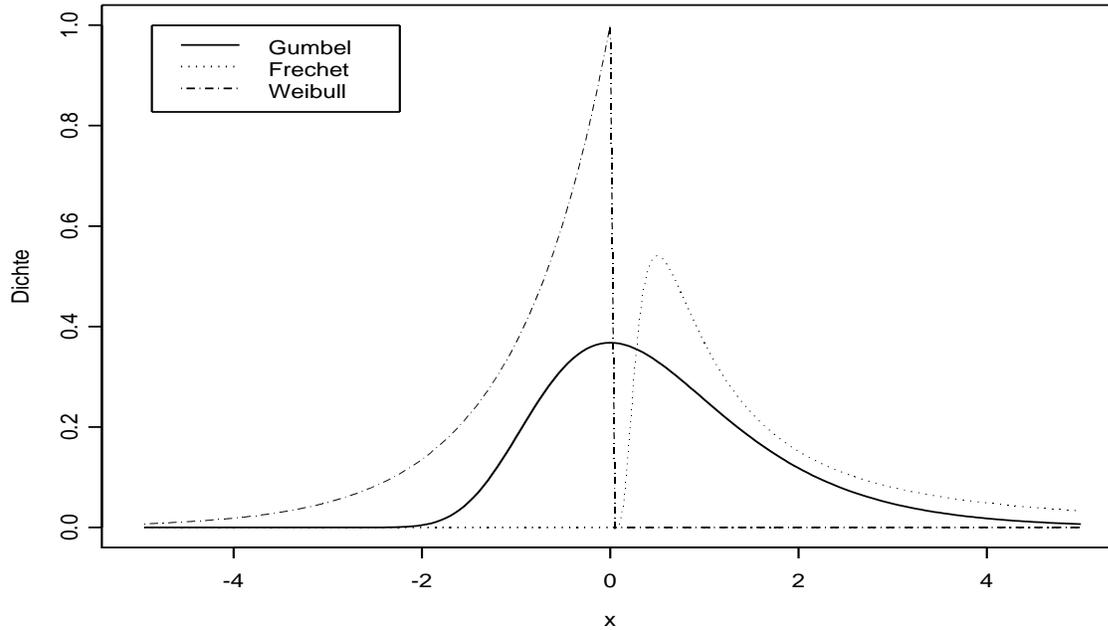


Abbildung 3.1: Dichten der Standard **EVFn** Λ , Φ_1 und Ψ_1 .

3.1.2 Maximaler Anziehungsbereich MDA

Im vorherigen Abschnitt 3.1.1 wurden die Extremwertverteilungen **EVFn** als die Limiten normierter Maxima von **iid ZVn** identifiziert. Nun stellt sich die Frage bei gegebener **EVF** H , welche Bedingungen muß die **VF** F erfüllen, damit die normierten Maxima M_n schwach gegen H konvergieren. Eng damit verknüpft ist die Frage, wie die Konstanten $c_n > 0$ und $d_n \in \mathbb{R}$ zu wählen sind, damit $c_n^{-1}(M_n - d_n) \xrightarrow{d} H$ konvergiert, und ob es passieren kann, daß unterschiedliche normierende Konstanten die Konvergenz zu unterschiedlichen Grenzverteilungen bedeuten. Letzere Frage beantwortet nachfolgendes Theorem:

Theorem 3.3 (Konvergenz zu Verteilungstypen) *Seien A, B, A_1, A_2, \dots **ZVn** und $b_n > 0$, $\beta_n > 0$ und $a_n, \alpha_n \in \mathbb{R}$ Konstanten. Nehme an, daß*

$$b_n^{-1}(A_n - a_n) \xrightarrow{d} A, \quad n \rightarrow \infty.$$

Dann gilt die Relation

$$\beta_n^{-1}(A_n - \alpha_n) \xrightarrow{d} B, \quad n \rightarrow \infty, \quad (3.2)$$

genau dann, wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{\beta_n} = b \in [0, \infty), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - \alpha_n}{\beta_n} = a \in \mathbb{R}. \quad (3.3)$$

Wenn (3.2) gilt, dann ist $B \stackrel{d}{=} bA + a$ und a, b sind eindeutige Konstanten, für die dies erfüllt ist. Wenn (3.2) gilt, dann ist B nicht-degeneriert genau dann, wenn $b > 0$ und dann gehören A und B demselben Verteilungstyp an. Aus (3.3) folgt die Eindeutigkeit von a_n und b_n bis auf eine asymptotische Relation. \square

Definition 3.4 (Maximaler Anziehungsbereich) Wir sagen, die **ZV** X (oder die **VF** F von X) gehört zum maximalen Anziehungsbereich der Extremwertverteilung H , wenn Konstanten $c_n > 0$, $d_n \in \mathbb{R}$ existieren, so daß (3.1) gilt. Wir schreiben $X \in \mathbf{MDA}(H)$ oder $F \in \mathbf{MDA}(H)$. \square

Bemerkung 3.5 Die **EVFn** sind stetig auf \mathbb{R} , folglich ist

$$c_n^{-1} (M_n - d_n) \xrightarrow{d} H$$

äquivalent zu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(M_n \leq c_n x + d_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(c_n x + d_n) = H(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

\square

Proposition 3.6 (Charakterisierung des $\mathbf{MDA}(H)$) Die **VF** F gehört zum maximalen Anziehungsbereich der Extremwertverteilung H ($F \in \mathbf{MDA}(H)$) mit den normierenden Konstanten $c_n > 0$, $d_n \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\bar{F}(c_n x + d_n) = -\ln(H), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Wenn $H(x) = 0$, wird der Limes als ∞ interpretiert. \square

Für alle Standard **EVFn** kann deren **MDA** charakterisiert werden. Mit dem Konzept der *regulär variierenden Funktionen* ist diese Charakterisierung für die Fréchetverteilung Φ_α und die Weibullverteilung Ψ_α nicht schwierig, für die Gumbelverteilung Λ gestaltet sich die Darstellung aufwendiger.

Definition 3.7 (Reguläre Variation) (i) Eine positive Lebesgue-messbare Funktion \mathcal{L} auf $(0, \infty)$ ist langsam variierend bei ∞ (wir schreiben $\mathcal{L} \in \mathcal{R}_0$), wenn

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{L}(tx)}{\mathcal{L}(x)} = 1, \quad \forall t > 0.$$

(ii) Eine positive Lebesgue-messbare Funktion h auf $(0, \infty)$ ist regulär variierend bei ∞ mit dem Index $\alpha \in \mathbb{R}$ (wir schreiben $h \in \mathcal{R}_\alpha$), wenn

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(tx)}{h(x)} = t^\alpha, \quad \forall t > 0.$$

□

Definition 3.8 (Tail-Äquivalenz) Zwei **VF**n F und G heißen tailäquivalent, wenn sie denselben rechten Endpunkt ($x_F = \sup\{x \in \mathbb{R} : F(x) < 1\}$) haben, also $x_F = x_G$, und

$$\lim_{x \nearrow x_F} \frac{\overline{F}(x)}{\overline{G}(x)} = c$$

für eine Konstante $0 < c < \infty$. □

Es kann gezeigt werden, daß jeder **MDA** abgeschlossen ist bezüglich der Tailäquivalenz, d.h. für zwei tailäquivalente **VF**n F und G gilt $F \in \mathbf{MDA}(H) \Leftrightarrow G \in \mathbf{MDA}(H)$. Weiterhin können für zwei beliebige tailäquivalente **VF**n dieselben normierenden Konstanten gewählt werden.

3.1.3 MDA für die Fréchet Verteilung $\Phi_\alpha(x) = \exp\{-x^{-\alpha}\}$

In diesem Abschnitt wird der **MDA**(Φ_α) charakterisiert. Mittels Taylor-Entwicklung erhält man

$$\overline{\Phi}_\alpha(x) = 1 - \Phi_\alpha(x) = 1 - \exp\{-x^{-\alpha}\} \sim x^{-\alpha}, \quad x \rightarrow \infty,$$

folglich fällt der Φ_α -Tail wie eine Potenzfunktion. Es stellt sich die Frage, *wie weit können wir uns von einem Potenz-Tail entfernen und trotzdem im **MDA**(H) bleiben?* Man kann zeigen, daß der **MDA**(Φ_α) aus den **VF**n F besteht, deren rechter Tail regulär variiert mit Index $-\alpha$. Für $F \in \mathbf{MDA}(\Phi_\alpha)$ können die Konstanten $d_n = 0 \forall n$ gewählt werden und die Konstanten c_n über die Quantilfunktion:

$$\begin{aligned} c_n = F^{\leftarrow}(1 - n^{-1}) &= \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq 1 - n^{-1}\} \\ &= \inf\{x \in \mathbb{R} : (1/\overline{F})(x) \geq n\} \\ &= (1/\overline{F})^{\leftarrow}(n). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Theorem 3.9 (MDA(Φ_α)) Die **VF** F gehört zum maximalen Anziehungsbereich von Φ_α , $\alpha > 0$, genau dann, wenn $\overline{F}(x) = x^{-\alpha} \mathcal{L}(x)$ für $\mathcal{L} \in \mathcal{R}_0$ gilt. Wenn $F \in \mathbf{MDA}(\Phi_\alpha)$, dann gilt

$$c_n^{-1} M_n \xrightarrow{d} \Phi_\alpha, \quad n \rightarrow \infty, \tag{3.5}$$

wobei die normierenden Konstanten gemäß (3.4) gewählt werden können. \square

Dieses Ergebnis impliziert einen unendlichen rechten Endpunkt $x_F = \infty$ für jede $\mathbf{VF} F \in \mathbf{MDA}(\Phi_\alpha)$. Weiterhin bilden die (c_n) eine regulär variierende Folge mit $c_n = n^{1/\alpha} \mathcal{L}_1(n)$ und $\mathcal{L}_1 \in \mathcal{R}_0$. Damit können wir den $\mathbf{MDA}(\Phi_\alpha)$ beschreiben:

$$F \in \mathbf{MDA}(\Phi_\alpha) \Leftrightarrow \overline{F} \in \mathcal{R}_{-\alpha}$$

Diese Klasse von $\mathbf{VF}n$ besteht aus den Verteilungen mit *sehr schweren Tails* in dem Sinne, daß $\mathbb{E}(X^+)^\delta = \infty$ für $\delta > \alpha$ und $X^+ = \max\{0, X\}$. Diese Verteilungen sind geeignete $\mathbf{VF}n$, um grosse Versicherungsverluste oder stark fluktuierende Preise bzw. log>Returns zu modellieren. *Von Mises* fand einige leicht überprüfbare Bedingungen für die Dichte einer Verteilung, damit diese zu einem $\mathbf{MDA}(H)$ gehört:

Korollar 3.10 (Von Mises Bedingung) Sei F eine absolut stetige \mathbf{VF} mit der Dichte f , die die Bedingung

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xf(x)}{\overline{F}(x)} = \alpha > 0 \quad (3.6)$$

erfüllt. Dann gilt $F \in \mathbf{MDA}(\Phi_\alpha)$. \square

Aus Theorem 3.9 folgt $F \in \mathbf{MDA}(\Phi_\alpha)$ genau dann, wenn $\overline{F} \in \mathcal{R}_{-\alpha}$. Man kann zeigen, daß jede $\mathbf{VF} F \in \mathbf{MDA}(\Phi_\alpha)$ tailäquivalent ist zu einer absolut stetigen \mathbf{VF} , die (3.6) erfüllt. Zusammenfassend ergibt dies

$\mathbf{MDA}(\Phi_\alpha)$ besteht aus den die von Mises Bedingung (3.6) erfüllenden $\mathbf{VF}n$ und deren tail-äquivalenten $\mathbf{VF}n$.

Beispiel 3.11 (Paretoartige $\mathbf{VF}n$) Beispiele für $\mathbf{VF}n F \in \mathbf{MDA}(\Phi_\alpha)$ sind die Pareto- und Cauchyverteilung. Alle diese $\mathbf{VF}n$ sind paretoartig in dem Sinne, daß deren rechte Tails die Form

$$\overline{F}(x) \sim Kx^{-\alpha}, \quad x \rightarrow \infty,$$

für $K, \alpha > 0$ aufweisen. Offensichtlich gilt dann $\overline{F} \in \mathcal{R}_{-\alpha}$ und das bedeutet $F \in \mathbf{MDA}(\Phi_\alpha)$; als normierende Konstanten können $c_n = (Kn)^{1/\alpha}$ (siehe Theorem 3.9) gewählt werden. Dann gilt

$$(Kn)^{1/\alpha} M_n \xrightarrow{d} \Phi_\alpha, \quad n \rightarrow \infty.$$

\square

3.1.4 MDA für die Weibull Verteilung $\Psi_\alpha(x) = \exp\{-(-x)^\alpha\}$

In diesem Abschnitt wird der $\mathbf{MDA}(\Psi_\alpha)$ für $\alpha > 0$ bestimmt. Für alle $\mathbf{VF} F \in \mathbf{MDA}(\Psi_\alpha)$ gilt $x_F < \infty$. Weiterhin gilt, daß Ψ_α und Φ_α eng verwandt sind:

$$\Psi_\alpha(-x^{-1}) = \Phi_\alpha(x), \quad x > 0.$$

Theorem 3.12 ($\mathbf{MDA}(\Psi_\alpha)$) *Die $\mathbf{VF} F$ gehört zum $\mathbf{MDA}(\Psi_\alpha)$ für $\alpha > 0$ genau dann, wenn $x_F < \infty$ und $\bar{F}(x_F - x^{-1}) = x^{-\alpha}\mathcal{L}(x)$ für $\mathcal{L} \in \mathcal{R}_0$. Wenn $F \in \mathbf{MDA}(\Psi_\alpha)$, dann gilt*

$$c_n^{-1}(M_n - x_F) \xrightarrow{d} \Psi_\alpha, \quad n \rightarrow \infty, \quad (3.7)$$

wobei die normierenden Konstanten $c_n = x_F - F^{\leftarrow}(1 - n^{-1})$ und $d_n = x_F$ gewählt werden können. \square

Damit ergibt sich folgende Bedingung

$$F \in \mathbf{MDA}(\Psi_\alpha) \Leftrightarrow x_F < \infty \text{ und } \bar{F}(x_F - x^{-1}) \in \mathcal{R}_{-\alpha}$$

Entsprechend Korollar 3.10 kann auch über die Dichte f einer $\mathbf{VF} F$ dessen Zugehörigkeit zu $\mathbf{MDA}(\Psi_\alpha)$ bestimmt werden:

Korollar 3.13 (**Von Mises Bedingung**) *Sei F eine absolut stetige \mathbf{VF} mit auf einem endlichen Intervall (z, x_F) positiver Dichte f . Wenn*

$$\lim_{x \nearrow x_F} \frac{(x_F - x)f(x)}{\bar{F}(x)} = \alpha > 0, \quad (3.8)$$

dann ist $F \in \mathbf{MDA}(\Psi_\alpha)$. \square

Zusammenfassend ergibt dies

$$\mathbf{MDA}(\Psi_\alpha) \text{ besteht aus den die von Mises Bedingung (3.8) erfüllenden } \mathbf{VF} \mathbf{n} \text{ und deren tail-äquivalenten } \mathbf{VF} \mathbf{n}.$$

Nun noch ein Beispiel für eine $\mathbf{VF} F \in \mathbf{MDA}(\Psi_\alpha)$:

Beispiel 3.14 (**Gleichverteilung auf $(0, 1)$**) Für den rechten Endpunkt gilt $x_F = 1$ und $\bar{F}(1 - x^{-1}) = x^{-1} \in \mathcal{R}_{-1}$. Mit Theorem 3.12 folgt $U(0, 1) \in \mathbf{MDA}(\Psi_1)$. Da $\bar{F}(1 - n^{-1}) = n^{-1}$, kann $c_n = n^{-1}$ gewählt werden. Dies bedeutet,

$$n(M_n - 1) \xrightarrow{d} \Psi_1, \quad n \rightarrow \infty.$$

\square

3.1.5 MDA für die Gumbel Verteilung $\Lambda(x) = \exp\{-e^{-x}\}$

Der maximale Anziehungsbereich der Gumbel Verteilung Λ deckt einen grossen Bereich von **VF**n ab. Allerdings wird eine Erweiterung der regulären Variation nötig, um den **MDA** (Λ) zu charakterisieren. Die Taylor Entwicklung ergibt

$$1 - \Lambda(x) \sim e^{-x}, \quad x \rightarrow \infty,$$

folglich fällt $\bar{\Lambda}(x)$ exponentiell. Wieder stellt sich die Frage, *wie weit kann man sich vom exponentiellen Tail entfernen und trotzdem noch in **MDA**(Λ) bleiben?* Es zeigt sich, daß **MDA**(Λ) **VF**n mit sehr unterschiedlichen Tails enthält, von der Lognormal**VF** mit moderat schweren Tails, bis zur Normal**VF** mit leichten Tails. Beide Fälle $x_F < \infty$ und $x_F = \infty$ sind möglich.

Definition 3.15 (Von Mises Funktion) Sei F eine **VF** mit rechtem Endpunkt $x_F \leq \infty$. Angenommen, es existiere $z < x_F$, so daß F die Darstellung

$$\bar{F}(x) = c \exp \left\{ - \int_z^x \frac{1}{a(t)} dt \right\}, \quad z < x < x_F, \quad (3.9)$$

aufweist, wobei c eine positive Konstante ist. $a(\cdot)$ ist eine positive, absolut stetige Funktion (bezüglich dem Lebesgue-Maß) mit Dichte a' und $\lim_{x \nearrow x_F} a'(x) = 0$. Dann heißt F von Mises Funktion und die Funktion $a(\cdot)$ heißt die Hilfsfunktion von F . \square

Beispiel 3.16 (i) Exponentialverteilung:

$$\bar{F}(x) = e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0, \quad \lambda > 0.$$

F ist eine von Mises Funktion mit der Hilfsfunktion $a(x) = \lambda^{-1}$.

(ii) Weibullverteilung:

$$\bar{F}(x) = \exp\{-cx^\tau\}, \quad x \geq 0, \quad c, \tau > 0.$$

F ist eine von Mises Funktion mit Hilfsfunktion $a(x) = c^{-1}\tau^{-1}x^{1-\tau}$, $x > 0$. \square

Proposition 3.17 (Eigenschaften der von Mises Funktionen) Jede von Mises Funktion ist absolut stetig auf (z, x_F) mit positiver Dichte f . Die Hilfsfunktion kann mit $a(x) = \bar{F}(x)/f(x)$ gewählt werden und es gelten folgende Eigenschaften:

(i) Wenn $x_F = \infty$, dann ist $\bar{F} \in \mathcal{R}_{-\infty}$ und

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x f(x)}{\bar{F}(x)} = \infty. \quad (3.10)$$

(ii) Wenn $x_F < \infty$, dann ist $\overline{F}(x_F - x) \in \mathcal{R}_{-\infty}$ und

$$\lim_{x \nearrow x_F} \frac{(x_F - x) f(x)}{\overline{F}(x)} = \infty. \quad (3.11)$$

□

Nun kann man zeigen, daß die von Mises Funktionen zu $\mathbf{MDA}(\Lambda)$ gehören. Ebenfalls erlaubt es die spezielle Form von \overline{F} , die normierenden Konstanten c_n mittels der Hilfsfunktion $a(\cdot)$ zu berechnen.

Proposition 3.18 (Von Mises Funktionen und $\mathbf{MDA}(\Lambda)$) *Angenommen, F sei eine von Mises Funktion. Dann gilt $F \in \mathbf{MDA}(\Lambda)$. Eine mögliche Wahl der normierenden Konstanten ist*

$$d_n = F^{\leftarrow}(1 - n^{-1}), \quad c_n = a(d_n), \quad (3.12)$$

wobei $a(\cdot)$ die Hilfsfunktion von F ist. □

Von Mises Funktionen beschreiben nicht vollständig den maximalen Anziehungsbereich von Λ . Eine leichte Modifikation der Definition (3.9) ergibt eine vollständige Darstellung von $\mathbf{MDA}(\Lambda)$:

Theorem 3.19 (Darstellung 1 von $\mathbf{MDA}(\Lambda)$) *Die VF F mit rechtem Endpunkt $x_F \leq \infty$ gehört zum $\mathbf{MDA}(\Lambda)$ genau dann, wenn es ein $z < x_F$ gibt, so daß F nachfolgende Darstellung hat,*

$$\overline{F}(x) = c(x) \exp \left\{ - \int_z^x \frac{g(t)}{a(t)} dt \right\}, \quad z < x < x_F. \quad (3.13)$$

c und g sind meßbare Funktionen, die $c(x) \rightarrow c > 0$ und $g(x) \rightarrow 1$ für $x \nearrow x_F$ erfüllen. $a(x)$ ist eine positive, absolut stetige Funktion (bezüglich Lebesguemaß) mit Dichte $a'(x)$, die $\lim_{x \nearrow x_F} a'(x) = 0$ erfüllt. Für F mit der Darstellung (3.13) können die normierenden Konstanten mit

$$d_n = F^{\leftarrow}(1 - n^{-1}) \quad \text{und} \quad c_n = a(d_n)$$

gewählt werden. Eine mögliche Wahl für die Funktion a ist

$$a(x) = \int_x^{x_F} \frac{\overline{F}(t)}{\overline{F}(x)} dt, \quad x < x_F, \quad (3.14)$$

entsprechend den von Mises Funktionen wird die Funktion a in (3.13) Hilfsfunktion für F genannt. □

Bemerkung 3.20 (i) Die Darstellung (3.13) ist nicht eindeutig, es gibt einen möglichen Trade-Off zwischen den Funktionen c und g . Folgende Darstellung kann alternativ verwendet werden

$$\bar{F}(x) = c(x) \exp \left\{ - \int_z^x \frac{1}{a(t)} dt \right\}, \quad z < x < x_F, \quad (3.15)$$

für die Funktionen c und a mit den Eigenschaften wie in Theorem 3.19.

(ii) Für eine **ZV** X ist die Funktion a in (3.14) nichts anderes als die *mittlere Exzessfunktion*

$$\begin{aligned} a(x) &= \mathbb{E}(X - x | X > x) = \frac{1}{\mathbb{P}(X > x)} \int_x^{x_F} (t - x) f(t) dt \\ &\stackrel{\text{part.Int}}{=} \left[\frac{1}{\bar{F}(x)} (x - t) \bar{F}(t) \right]_{t=x}^{t=x_F} + \frac{1}{\bar{F}(x)} \int_x^{x_F} \bar{F}(t) dt, \quad x < x_F. \end{aligned} \quad (3.16)$$

□

Aus dem Beweis von Proposition 3.18 folgt eine weitere Darstellungsmöglichkeit für den $\text{MDA}(\Lambda)$:

Theorem 3.21 (Darstellung 2 von $\text{MDA}(\Lambda)$) Die **VF** F mit $x_F \leq \infty$ gehört zum $\text{MDA}(\Lambda)$ genau dann, wenn eine positive Funktion \tilde{a} existiert, die

$$\lim_{x \nearrow x_F} \frac{\bar{F}(x + t\tilde{a}(x))}{\bar{F}(x)} = e^{-t}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (3.17)$$

erfüllt. Eine mögliche Wahl ist mit $\tilde{a} \equiv a$ in (3.14) gegeben. □

Ähnlich zu den $\text{MDA}(\Phi_\alpha)$ und $\text{MDA}(\Psi_\alpha)$ ist die Tailäquivalenz (siehe auch Definition 3.8) ein hilfreiches Tool zur Entscheidung, ob eine bestimmte Verteilung zum $\text{MDA}(\Lambda)$ gehört, und um dessen normierende Konstanten zu berechnen.

Proposition 3.22 (Abgeschlossenheit von $\text{MDA}(\Lambda)$ bezüglich Tailäquivalenz) F und G Seien **VF**n mit denselben rechten Endpunkten $x_F = x_G$ und sei $F \in \text{MDA}(\Lambda)$ mit den normierenden Konstanten $c_n > 0$ und $d_n \in \mathbb{R}$, d.h.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(c_n x + d_n) = \Lambda(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G^n(c_n x + d_n) = \Lambda(x + b), \quad x \in \mathbb{R},$$

genau dann, wenn F und G tailäquivalent sind mit

$$\lim_{x \nearrow x_F} \frac{\overline{F}(x)}{\overline{G}(x)} = e^b.$$

□

Der $\mathbf{MDA}(\Lambda)$ besteht aus einer grossen Vielzahl von Verteilungen, deren Tails sehr unterschiedlich beschaffen sein können. Als Konsequenz dieser Menge an Tails in $\mathbf{MDA}(\Lambda)$ variieren die normierenden Konstanten ebenfalls. Im Gegensatz zu $\mathbf{MDA}(\Phi_\alpha)$ und $\mathbf{MDA}(\Psi_\alpha)$, deren normierende Konstanten mit Anwendung der Theorie über reguläre Variation berechnet werden, benötigt man weitere Ergebnisse für $\mathbf{MDA}(\Lambda)$. Eine vollständige Theorie dazu wurde von de Haan [8] entwickelt. Nachfolgende Beispiele zeigen die Nützlichkeit von Ergebnissen, wie Proposition 3.22.

Weitere Eigenschaften von Verteilungen in $\mathbf{MDA}(\Lambda)$

Zum Schluß dieses Abschnitts folgen nun noch einige weitere nützliche Eigenschaften der Verteilungen in $\mathbf{MDA}(\Lambda)$.

Korollar 3.23 (Existenz der Momente) Die ZV X habe die VF $F \in \mathbf{MDA}(\Lambda)$ mit $x_F = \infty$. Dann gilt $\overline{F} \in \mathcal{R}_{-\infty}$. Insbesondere gilt $\mathbb{E}(X^+)^{\alpha} < \infty \forall \alpha > 0$. □

Beispiel 3.24 (i) (Einbettung des $\mathbf{MDA}(\Phi_\alpha)$ in den $\mathbf{MDA}(\Lambda)$) Die ZV habe VF $F \in \mathbf{MDA}(\Phi_\alpha)$ mit den normierenden Konstanten c_n . Sei

$$X^* = \ln(1 \vee X) = \ln(\max\{1, X\}),$$

mit der VF F^* . Mittels Proposition 3.6 und Theorem 3.9 gilt $F \in \mathbf{MDA}(\Phi_\alpha)$ genau dann, wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \overline{F}(c_n x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(c_n x)}{\overline{F}(c_n)} = x^{-\alpha}, \quad x > 0.$$

Mit $\overline{F^*}(x) = \mathbb{P}(X^* > x) = \mathbb{P}(X > e^x) = \overline{F}(e^x)$ impliziert dies

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overline{F^*}(\alpha^{-1}x + \ln c_n)}{\overline{F^*}(\ln c_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(c_n \exp\{\alpha^{-1}x\})}{\overline{F}(c_n)} = e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Folglich ist $F^* \in \mathbf{MDA}(\Lambda)$ mit den normierenden Konstanten $c_n^* = \alpha^{-1}$ und $d_n^* = \ln c_n$. Die Hilfsfunktion a^* kann gewählt werden als

$$a^*(x) = \int_x^\infty \frac{\overline{F^*}(y)}{\overline{F^*}(x)} dy.$$

- (ii) (Abgeschlossenheit des $\mathbf{MDA}(\Lambda)$ bezüglich logarithmischen Transformationen) Die \mathbf{ZV} X habe die \mathbf{VF} $F \in \mathbf{MDA}(\Lambda)$ mit $x_F = \infty$ und normierenden Konstanten c_n, d_n , die gemäß Theorem 3.19 gewählt sind. X^* und F^* seien wie oben definiert. Es ist geplant, $F^* \in \mathbf{MDA}(\Lambda)$ zu zeigen, mit den normierenden Konstanten $d_n^* = \ln d_n$ und $c_n^* = c_n/d_n$. Wegen $a'(x) \rightarrow 0$ gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} a(x)/x = 0$ und wegen $d_n = F^{\leftarrow}(1 - n^{-1}) \rightarrow \infty$ folgt

$$\frac{c_n}{d_n} = \frac{a(d_n)}{a_n} \rightarrow \infty.$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} \overline{F^*}(c_n^*x + d_n^*) &= \overline{F}\left(\exp\left\{\frac{c_n}{d_n}x\right\}d_n\right) \\ &= \overline{F}\left[d_n\left(1 + \frac{c_n}{d_n}x + o(c_n/d_n)\right)\right] \\ &= \overline{F}(c_nx + d_n + o(c_n)) \\ &\sim \overline{F}(c_nx + d_n) \sim n^{-1}e^{-x}, \text{ für } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis läßt sich aus Proposition 3.6 folgern. □

3.1.6 Die verallgemeinerte Extremwertverteilung GEV und die verallgemeinerte Paretoverteilung GPD

In Abschnitt 3.1.1 wurden die Standard Extremwertverteilungen als die einzig möglichen nicht-degenerierten Grenzverteilungen für affin transformierte Maxima von **iid ZVn** vorgestellt. Für statistische Zwecke ist eine einparametrische Darstellung der drei Standardfälle nützlich. Man kann z.B. einen Parameter ξ einführen, so daß

$\xi = \alpha^{-1} > 0$	entspricht der Fréchet Verteilung Φ_α ,
$\xi = 0$	entspricht der Gumbel Verteilung Λ ,
$\xi = -\alpha^{-1} < 0$	entspricht der Weibull Verteilung Ψ_α .

Folgende Wahl wird momentan als *die* Standard Darstellung akzeptiert.

Definition 3.25 (Jenkinson-von Mises Darstellung der Extremwertverteilung)

Definiere die \mathbf{VF} H_ξ mit

$$H_\xi(x) = \begin{cases} \exp\left\{-(1 + \xi x)^{-1/\xi}\right\} & \text{für } \xi \neq 0, \\ \exp\{-e^{-x}\} & \text{für } \xi = 0, \end{cases}$$

wobei $1 + \xi x > 0$ erfüllt sein muß. Folglich entspricht

$$\begin{aligned} x &> -\xi^{-1}, & \text{für } \xi > 0, \\ x &< -\xi^{-1}, & \text{für } \xi < 0, \\ x &\in \mathbb{R}, & \text{für } \xi = 0 \end{aligned}$$

dem Träger von H_ξ . H_ξ heißt Standard Verallgemeinerte Extremwertverteilung (**GEV**). Man kann die dazu verwandte Lage-Skalierungs Familie $H_{\xi;\mu,\psi}$ einführen, indem man das Argument x von oben durch $(x - \mu)/\psi$ mit $\mu \in \mathbb{R}$ und $\psi > 0$ ersetzt. Der Träger muß dann entsprechend angepaßt werden. $H_{\xi;\mu,\psi}$ wird ebenfalls als **GEV** bezeichnet. \square

Betrachtet man die **VF** H_0 als Grenzwert von H_ξ für $\xi \rightarrow 0$, dann dient die Familie

$$H_\xi(x) = \exp \left\{ -(1 + \xi x)^{-1/\xi} \right\}, \quad 1 + \xi x > 0$$

als Darstellung der **GEV** für alle $x \in \mathbb{R}$. Die **GEV** ist eine praktische vereinheitlichende Darstellung der drei **EVFn** Gumbel, Fréchet und Weibull. Ihre Einführung ist hauptsächlich motiviert durch statistische Anwendungen. Das Fitten der **GEV** wird in Kapitel 3.2 beschrieben.

Das folgende Theorem ist ein weiteres wichtiges Ergebnis der Extremwerttheorie. Es liefert essentielle Informationen, die in den vorausgehenden Abschnitten gesammelt wurden bezüglich des maximalen Anziehungsbereiches. Weiterhin liefert es die Basis für statistische Techniken die in Kapitel 3.2 erläutert werden. Zunächst sei mit der Quantilfunktion F^\leftarrow einer **VF** F die Funktion u definiert durch

$$u(t) = F^\leftarrow(1 - t^{-1}), \quad t > 0.$$

Theorem 3.26 (Darstellung des MDA (H_ξ)) Für $\xi \in \mathbb{R}$ sind die drei folgenden Behauptungen äquivalent:

(i) $F \in \text{MDA}(H_\xi)$.

(ii) Es existiert eine positive meßbare Funktion $a(\cdot)$, so daß für $1 + \xi x > 0$ gilt

$$\lim_{u \nearrow x_F} \frac{\overline{F}(u + xa(u))}{\overline{F}(u)} = \begin{cases} (1 + \xi x)^{-1/\xi}, & \text{wenn } \xi \neq 0, \\ e^{-x}, & \text{wenn } \xi = 0. \end{cases} \quad (3.18)$$

(iii) Für $x, y > 0$ und $y \neq 1$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{U(sx) - U(s)}{U(sy) - U(s)} = \begin{cases} \frac{x^\xi - 1}{y^\xi - 1}, & \text{wenn } \xi \neq 0, \\ \frac{\ln x}{\ln y}, & \text{wenn } \xi = 0. \end{cases} \quad (3.19)$$

□

Die Bedingung (3.18) hat eine interessante probabilistische Interpretation. Sei X eine **ZV** mit der **VF** $F \in \mathbf{MDA}(H_\xi)$, dann kann (3.18) umformuliert werden zu

$$\lim_{u \nearrow x_F} \mathbb{P} \left(\frac{X - u}{a(u)} > x \mid X > u \right) = \begin{cases} (1 + \xi x)^{-1/\xi}, & \text{wenn } \xi \neq 0, \\ e^{-x}, & \text{wenn } \xi = 0. \end{cases} \quad (3.20)$$

Folglich liefert (3.20) eine Approximation der Verteilung für die skalierten Exzesse über einer hohen Schwelle u . Ein passender Skalierungsfaktor ist $a(u)$. Diese Darstellung ist entscheidend für viele Anwendungen. Für den Begriff *Exzess* nun noch eine präzise Definition:

Definition 3.27 (Exzess Verteilungsfunktion, mittlere Exzessfunktion) Sei X eine **ZV** mit rechtem Endpunkt $x_F \leq \infty$. Für ein festes $u < x_F$ ist

$$F_u(x) = \mathbb{P}(X - u \leq x \mid X > u), \quad x \geq 0, \quad (3.21)$$

die Exzess**VF** der **ZV** X (oder der **VF** F) über der Schwelle u . Die Funktion

$$e(u) = \mathbb{E}(X - u \mid X > u)$$

heißt mittlere Exzessfunktion von X (vergleiche Bemerkung 3.20 (2)). □

Berechnung der mittleren Exzessfunktion:

Mit der Definition der mittleren Exzessfunktion und partieller Integration können nachfolgende Formeln bestimmt werden. Diese sind nützlich, um für spezielle Fälle die mittlere Exzessfunktion zu berechnen. Wegen einfacher Darstellung sei X eine positive **ZV** mit **VF** F und endlichem Erwartungswert. Dann folgt mit (3.16)

$$e(u) = \frac{1}{\overline{F}(u)} \int_u^{x_F} \overline{F}(x) dx. \quad (3.22)$$

Wenn F stetig ist, dann folgt mit (3.15)

$$\overline{F}(x) = \frac{e(0)}{e(x)} \exp \left\{ - \int_0^x \frac{1}{e(u)} du \right\}, \quad x > 0. \quad (3.23)$$

Aus (3.23) folgt, daß eine stetige **VF** eindeutig durch ihre mittlere Exzessfunktion bestimmt ist. Wenn $\overline{F} \in \mathcal{R}_{-\alpha}$ für $\alpha > 1$, dann folgt aus der Anwendung von *Karamaters Theorem*,

$$\int_x^\infty t^\alpha \mathcal{L}(t) dt \sim -(\alpha + 1)^{-1} x^{\alpha+1} \mathcal{L}(x), \quad x \rightarrow \infty, \quad \alpha < -1, \quad \mathcal{L} \in \mathcal{R}_0,$$

daß $e(u) \sim u/(\alpha - 1)$ für $u \rightarrow \infty$ gilt. Die Darstellung aus (3.20) motiviert die folgende Definition:

Definition 3.28 (Die verallgemeinerte Pareto Verteilung (GPD)) Die VF G_ξ sei definiert mit

$$G_\xi(x) = \begin{cases} 1 - (1 + \xi x)^{-1/\xi}, & \text{wenn } \xi \neq 0, \\ 1 - e^{-x}, & \text{wenn } \xi = 0. \end{cases} \quad (3.24)$$

wobei

$$\begin{aligned} x &\geq 0, & \text{wenn } \xi &\geq 0, \\ 0 &\leq x \leq -\frac{1}{\xi}, & \text{wenn } \xi &< 0. \end{aligned}$$

G_ξ heißt Standard verallgemeinerte Pareto Verteilung (**GPD**). Man kann die dazu verwandte Lage-Skalierungs Familie $G_{\xi;\nu,\beta}$ einführen, indem man das Argument x durch $(x - \nu)/\beta$ für $\nu \in \mathbb{R}$ und $\beta > 0$ ersetzt. Der Träger muß entsprechend angepaßt werden. $G_{\xi;\nu,\beta}$ wird ebenfalls als **GPD** bezeichnet. \square

Wie im Fall H_0 kann G_0 als der Grenzwert von $\lim_{\xi \rightarrow 0} G_\xi$ interpretiert werden. Eine wichtige Rolle in Kapitel 3.2 spielt die VF $G_{\xi;0,\beta}$. Um die Darstellung zu vereinfachen, wird $G_{\xi;0,\beta}$ mit

$$G_{\xi,\beta}(x) = 1 - \left(1 + \xi \frac{x}{\beta}\right)^{-1/\xi}, \quad x \in \mathbb{D}(\xi, \beta), \quad (3.25)$$

notiert, wobei

$$x \in \mathbb{D}(\xi, \beta) = \begin{cases} [0, \infty), & \text{wenn } \xi \geq 0, \\ \left[0, -\frac{\beta}{\xi}\right], & \text{wenn } \xi < 0. \end{cases}$$

Wenn gesagt wird, die ZV X habe eine **GPD** mit den Parametern ξ und β , so ist damit gemeint, daß X die VF $G_{\xi,\beta}$ hat. Nun die Zusammenfassung:

Die **GEV** H_ξ , $\xi \in \mathbb{R}$, sind die Grenzverteilungen von normierten Maxima.

Die **GPD** $G_{\xi,\beta}$, $\xi \in \mathbb{R}$ und $\beta > 0$, sind die Grenzverteilungen von skalierten Exzessen.

Das Fitten der **GPD** ist ein sehr nützliches Konzept in der Statistik von extremen Ereignissen, siehe Kapitel 3.2. Nun noch einige probabilistischen Eigenschaften der **GPD**:

Theorem 3.29 (Eigenschaften der GPD) (i) Die ZV X habe **GPD** mit den Parametern ξ und β . Dann ist $\mathbb{E}X < \infty$ genau dann, wenn $\xi < 1$. Im letzteren Fall ist

$$\mathbb{E} \left(1 + \frac{\xi}{\beta} X\right)^{-r} = \frac{1}{1 + \xi r}, \quad r > -\frac{1}{\xi}.$$

(ii) Für alle $\xi \in \mathbb{R}$ gilt $F \in \mathbf{MDA}(H_\xi)$ genau dann, wenn

$$\lim_{u/x_F} \sup_{0 < x < x_F - u} |F_u(x) - G_{\xi, \beta(u)}(x)| = 0 \quad (3.26)$$

für eine positive Funktion β .

(iii) Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{D}(\xi, \beta)$. Dann gilt

$$\frac{\overline{G}_{\xi, \beta}(x_1 + x_2)}{\overline{G}_{\xi, \beta}(x_1)} = \overline{G}_{\xi, \beta + \xi x_1}(x_2). \quad (3.27)$$

(iv) N sei $\text{Poi}(\lambda)$ und unabhängig von der **iid** Folge (X_n) mit einer **GPD** mit Parametern ξ und β . Sei $M_N = \max(X_1, \dots, X_N)$. Dann gilt

$$\mathbb{P}(M_N \leq x) = \exp \left\{ -\lambda \left(1 + \xi \frac{x}{\beta} \right)^{-1/\xi} \right\} = H_{\xi; \mu, \beta}(x), \quad (3.28)$$

wobei $\mu = \beta \xi^{-1} (\lambda^\xi - 1)$ und $\psi = \beta \lambda^\xi$. Im Fall $\xi = 0$ reduziert sich die Formel zu

$$\mathbb{P}(M_N \leq x) = \exp \left\{ -e^{-\frac{1}{\beta}(x - \beta \ln \lambda)} \right\}.$$

(v) X habe **GPD** mit den Parametern $\xi < 1$ und β . Dann gilt für $u < x_F$

$$e(u) = \mathbb{E}(X - u \mid X > u) = \frac{\beta + \xi u}{1 - \xi}, \quad \beta + u\xi > 0. \quad (3.29)$$

□

Bemerkung 3.30 (i) Theorem 3.29 faßt verschiedene Eigenschaften zusammen, die essentiell für die spezielle Rolle der **GPD** in der statistischen Analyse von Extrema sind, siehe Kapitel 3.2.

(ii) Die Eigenschaft (iii) wird oft folgendermaßen reformuliert: Die Klasse der **GPD VFn** ist abgeschlossen bezüglich des Wechsels der Schwelle. Die linke Seite von Gleichung (3.27) ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, daß unter der Annahme, die zugrunde liegende **ZV** X sei grösser als x_1 , sie auch noch die Schwelle $x_1 + x_2$ überschreitet. Die rechte Seite zeigt dann, daß diese Wahrscheinlichkeit ebenfalls eine **GPD** ist.

(iii) Die Eigenschaft (ii) schlägt die **GPD** als geeignete Approximation der Exzess**VF** F_u für grosse u vor. Dieses Ergebnis greift zurück auf Pickand [10] und wird oft wie

folgt formuliert: Für eine Funktion β , die von den Daten aus geschätzt werden muß, gilt

$$\bar{F}_u(x) = \mathbb{P}(X - u > x \mid X > u) \approx \bar{G}_{\xi, \beta(u)}(x), \quad x > 0.$$

Alternativ kann man dies für $x > u$ schreiben

$$\mathbb{P}(X > x \mid X > u) \approx \bar{G}_{\xi; u, \beta(u)}(x), \quad x > 0.$$

In beiden Fällen muß u ausreichend groß gewählt werden. Ebenfalls folgt aus (ii), wenn F **GEV** H_{ξ_H} und **GPD** $G_{\xi_G, \beta}$ hat, dann gilt $\xi_H = \xi_G$.

- (iv) Eigenschaft (ii) und (v) zusammen liefern eine praktische graphische Technik, um die Schwelle u so groß zu wählen, daß die Approximation der Exzess **VF** F_u durch eine **GPD** gerechtfertigt ist: Gegeben sei eine **iid** Stichprobe X_1, \dots, X_n ; man konstruiert die empirische mittlere Exzessfunktion $e_n(u)$ als die Stichprobenversion der mittleren Exzessfunktion $e(u)$. Aus (v) folgt, die mittlere Exzessfunktion einer **GPD** ist linear, folglich muß man nach einem u -Bereich suchen, für den der Graph von $e_n(u)$ ungefähr linear wird. Für solch ein u scheint die Approximation von F_u durch eine **GPD** brauchbar.

□

Zusammenfassend ergibt dies:

- (i) Die Anzahl der Exzesse über einer hohen Schwelle folgt einem Poisson Prozeß, d.h. die Zeiten zwischen zwei auftretenden Exzessen sind **iid** exponentialverteilt, siehe auch EKM [6] S.167, Bemerkung (7).
- (ii) Die Verteilung der Exzesse über hohe Schwellen kann durch eine **GPD** modelliert werden.
- (iii) Ein geeigneter Wert für eine hohe Schwelle kann mittels eines Plots der empirischen mittleren Exzessfunktion gefunden werden.
- (iv) Die Verteilung vom Maximum einer Poisson Anzahl von **iid** Exzessen über hohen Schwellen ist eine **GEV**.

3.2 Statistische Methoden für extreme Ereignisse

Im folgenden werden statistische Methoden eingeführt, um die **EVF** einer **iid** Stichprobe zu ermitteln. Eine dieser Methoden zur Untersuchung der **iid** Stichprobe ist mit den **QQ**-Plots bereits in Kapitel 2.3 beschrieben.

3.2.1 Die Mittlere Exzess Funktion

In Definition 3.27 wurde die mittlere Exzess Funktion $e(u) = \mathbb{E}(X - u \mid X > u)$ eingeführt. Im Risiko-Management im Finanzbereich bezeichnet $e(u)$ den sogenannten *Shortfall*, indem man vom rechten Tail zum linken wechselt. Ein graphischer Test für das Tailverhalten basiert auf der empirischen mittleren Exzessfunktion. Seien X_1, \dots, X_n **iid** mit **VF** F und sei F_n die empirische **VF**

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \text{card}\{i : X_i \leq x, i = 1, \dots, n\}.$$

Weiter bezeichne $\Delta_n(u) = \{i : X_i > u, i = 1, \dots, n\}$, dann ist

$$e_n(u) = \frac{1}{\overline{F}_n(u)} \int_u^\infty \overline{F}_n(y) dy = \frac{1}{\text{card}\Delta_n(u)} \sum_{i \in \Delta_n(u)} (X_i - u), \quad u \geq 0, \quad (3.30)$$

mit der Konvention $0/0 = 0$. Ein *mittlerer Exzess Plot* (**ME-Plot**) enthält damit den Graphen

$$\{(X_{k,n}, e_n(X_{k,n})) : k = 1, \dots, n\}.$$

Hier wird der **ME-Plot** als graphische Methode genutzt, um zwischen leichten und schweren Tails einer Verteilung zu unterscheiden. Im Falle der **exp**-Verteilung ist $e_{\text{exp}(\lambda)}(u) = \lambda^{-1}$ konstant, bei schwereren Tails strebt die **ME**-Funktion gegen unendlich, bei leichteren Tails gegen Null (siehe Tabelle 3.1). Im Falle der Paretoverteilung ist $e(u)$ linear, die mittleren Exzessfunktionen der anderen Verteilungen mit fetten Tails liegen zwischen der Pareto- und der Exponentialverteilung. Da $\text{exp}(\lambda) \in \mathbf{MDA}(\Lambda)$, liegen somit die Verteilungen mit schwereren Tails in $\mathbf{MDA}(\Phi_\alpha)$, die mit den leichteren Tails im $\mathbf{MDA}(\Psi_\alpha)$. Somit liefert der **ME-Plot** einen Hinweis, in welchem maximalen Anziehungsbereich die Verteilung der Stichprobe liegt.

Das Problem der empirischen Version $e_n(u)$ liegt an der geringen Stichprobenmenge für grosse Werte von u . Die **ME-Plots** reagieren in diesem Bereich sehr sensibel auf Änderungen von Daten und der **ME-Plot** einer (simulierten) Stichprobe sieht meist sehr unterschiedlich gegenüber dem theoretisch richtigen Graphen aus. Oft kann man allerdings anhand des Graphen erkennen, ob es sich um eine Verteilung mit fetten Tails handelt, oder nicht. In Abbildung 3.2 sind die **ME-Plots** von simulierten **exp(1) ZVn** abgebildet; in Abbildung 3.3 und 3.4 folgen die **ME-Plots** der EUR Swap Sätze – die Plots von kürzeren Laufzeiten sind steigend, die von mittleren Laufzeiten verlaufen flach und die Plots von längeren Laufzeiten sind fallend. Man findet wohl bei den simulierten **ME-Plots** der **expVF** Pfade, die den **ME-Plots** der Swap Sätze ähneln, allerdings sehen diese Plots

Pareto	$\frac{\kappa+u}{\alpha-1}, \alpha > 0$
Loggamma	$\frac{u}{\alpha-1} (1 + o(1)), \alpha > 1$
Lognormal	$\frac{\sigma^2 u}{\ln u - \mu} (1 + o(1))$
Weibull	$\frac{u^{1-\tau}}{c\tau} (1 + o(1))$
Exponential	$\frac{1}{\lambda}$
Gamma	$\frac{1}{\beta} \left(1 + \frac{\alpha-1}{\beta u} + o(u^{-1}) \right)$

Tabelle 3.1: Mittlere Exzess Funktionen für einige Standardverteilungen. Asymptotik gilt für $u \rightarrow \infty$.

nicht wie typische **ME**-Plots einer **expVF** aus. Bestätigt wird allerdings die Annahme, die Tails der Swap Sätze werden leichter, je länger die Laufzeit ist.

3.2.2 Die Ratio der Maxima

In diesem Abschnitt wird ein weiteres einfaches Tool beschrieben, das die Ordnung der endlichen Momente grob abschätzt und damit auch einen Hinweis auf die Schwere der Tails gibt. Sei eine **iid** Stichprobe X_1, \dots, X_n gegeben; definiere für ein positives p die Größen

$$\begin{aligned}
 S_n(p) &= |X_1|^p + \dots + |X_n|^p, \quad n \geq 1, \\
 M_n(p) &= \max(|X_1|^p, \dots, |X_n|^p), \quad n \geq 1, \\
 R_n(p) &= \frac{M_n(p)}{S_n(p)}, \quad n \geq 1, \quad p > 0.
 \end{aligned}
 \tag{3.31}$$

Aus diesen Relationen können die folgenden Äquivalenzen abgeleitet werden:

$$\begin{aligned}
 R_n(p) \xrightarrow{\text{f.s.}} 0 &\Leftrightarrow \mathbb{E}|X|^p < \infty, \\
 R_n(p) \xrightarrow{P} 0 &\Leftrightarrow \mathbb{E}|X|^p I_{\{|X| \leq x\}} \in \mathcal{R}_0, \\
 R_n(p) \xrightarrow{P} 1 &\Leftrightarrow \mathbb{P}(|X| > x) \in \mathcal{R}_0.
 \end{aligned}$$

Um die Endlichkeit der Momente festzustellen, wird $R_n(p)$ gegen n für mehrere Werte von p geplottet. Wenn $\mathbb{E}|X|^p < \infty$, dann sollte $R_n(p)$ klein sein, für n groß. Wenn andererseits $R_n(p)$ große Abweichungen von 0 aufweist, ist dies ein Indikator für $\mathbb{E}|X|^p = \infty$, siehe dazu Abbildung 3.5 als Beispiel für simulierte Daten.

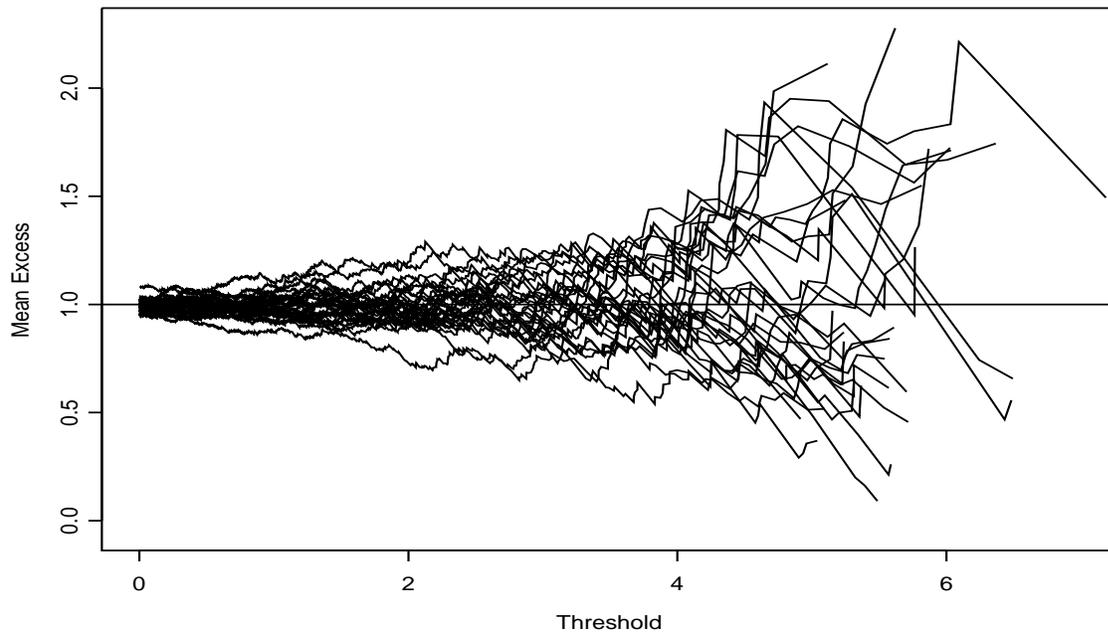


Abbildung 3.2: 30 empirische **ME**-Plots von je 1000 simulierten **exp ZVn**.

Bei Betrachtung der Daten ist es allerdings schwierig, konkrete Angaben über die Endlichkeit der Momente zu machen, da die Zeitreihen ziemlich kurz sind. Unter der Annahme, die Daten seien $\mathbf{exp}(\lambda)$, müssten wegen $\mathbb{E}|X|^p = p!\lambda^{-p} < \infty$ für $p \in \mathbb{N}$ auch alle Momente existieren. In den Abbildungen 3.6 bis 3.9 sind die Ratiofunktionen für mehrere Werte von p geplottet. Welche Momente endlich sind, läßt sich allerdings weniger erkennen; die vorliegenden Zeitreihen sind wahrscheinlich zu kurz.

3.2.3 Schätzen unter MDA-Bedingungen

In diesem Abschnitt werden Schätzmethoden für den Parameter ξ der **GEV** $H_\xi(x) = \exp\{-(1 + \xi x)^{-1/\xi}\}$ vorgestellt. Sei nun für ein $\xi \in \mathbb{R}$ die Stichprobe

$$X_1, \dots, X_n \text{ iid } \sim F \in \mathbf{MDA}(H_\xi). \quad (3.32)$$

Mit Proposition 3.6 ist $F \in \mathbf{MDA}(H_\xi)$ äquivalent zu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\overline{F}(c_n x + d_n) = -\ln H_\xi(x), \quad (3.33)$$

für geeignete Folgen c_n , d_n und x liegt im passenden Definitionsbereich. Folglich gilt für grosse $u = c_n x + d_n$

$$n\bar{F}(u) \approx \left(1 + \xi \frac{u - d_n}{d_c}\right)^{-1/\xi}.$$

Somit erhält man einen Tail-Schätzer der Form (für geeignete Schätzer von ξ , c_n und d_n).

$$\widehat{\bar{F}}(u) = \frac{1}{n} \left(1 + \xi \frac{\widehat{u} - \widehat{d}_n}{\widehat{c}_n}\right)^{-1/\widehat{\xi}}, \text{ für } u \text{ groß.} \quad (3.34)$$

Da (3.32) hauptsächlich eine Tail-Eigenschaft beschreibt, kann man die Schätzung von ξ , c_n und d_n auf die Ordnungsstatistik der k grössten Stichprobenwerte $X_{k,n} \leq \dots \leq X_{1,n}$ beschränken. Dabei muß k folgende Eigenschaften erfüllen:

- (i) $k(n) \rightarrow \infty$, um die Varianz der Schätzer gering zu halten, muß die obere Ordnungsstatistik groß sein, aber
- (ii) $\frac{n}{k(n)} \rightarrow \infty$, da eine Schätzung für die Tails entsteht, sollten auch nur die Tails in die Schätzung einfließen.

Bemerkung 3.31 In der Praxis ist die Länge n der Stichprobe konstant, k variiert und graphisch wird überprüft, welcher Wert von k passend ist, oder wie sich der Schätzer mit wechselndem k verändert. \square

Methode 1: Pickand Schätzer, für $\xi \in \mathbb{R}$.

Für diesen Schätzer wird eine Bedingung gesucht, die äquivalent ist zu $F \in \mathbf{MDA}(H_\xi)$ und den Parameter ξ einbezieht. Die Idee hinter der Konstruktion dieses Schätzers geht zurück auf Pickands [10]. Hier bietet sich Theorem 3.26 an: Für $U(t) = F^\leftarrow(1 - t^{-1})$ gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{U(2t) - U(t)}{U(t) - U(t/2)} = \frac{2^\xi - 1}{1 - 2^{-\xi}} = 2^\xi.$$

Diese Gleichheit kann auch statt für t für positive Funktionen $c(t)$ mit $\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = 2$ gezeigt werden:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{U(c(t)t) - U(t)}{U(t) - U(t/c(t))} = 2^\xi. \quad (3.35)$$

Nun gilt

$$(X_{k,n})_{k=1,\dots,n} \xrightarrow{d} (U(V_{k,n}))_{k=1,\dots,n},$$

wobei $X_{k,n}$ die Ordnungsstatistik der Stichprobe X_1, \dots, X_n **iid** $\sim F$ ist. Also ist $V_{k,n}$ das empirische $(1 - \frac{k}{n})$ -Quantil von F_V . Damit kann man für $k = k(n) \rightarrow \infty$ und $k/n \rightarrow 0$ zeigen

$$\frac{k}{n} V_{k,n} \xrightarrow{P} 1, \quad n \rightarrow \infty.$$

Daraus ergibt sich

$$V_{k,n} \rightarrow \infty \text{ und } \frac{V_{2k,n}}{V_{k,n}} \xrightarrow{P} \frac{1}{2}, \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Zusammen mit (3.35) erhält man

$$\frac{U(V_{k,n}) - U(V_{2k,n})}{U(V_{2k,n}) - U(V_{4k,n})} \xrightarrow{P} 2^\xi, \quad n \rightarrow \infty,$$

somit wird der Pickand Schätzer definiert:

Definition 3.32 (Pickand-Schätzer $\widehat{\xi}_{k,n}^{(P)}$ für $\xi \in \mathbb{R}$)

$$\widehat{\xi}_{k,n}^{(P)} = \frac{1}{\ln 2} \ln \frac{X_{k,n} - X_{2k,n}}{X_{2k,n} - X_{4k,n}}. \quad (3.36)$$

□

Dieser Schätzer stellt sich als schwach konsistent heraus für $k = k(n) \rightarrow \infty$ und $k/n \rightarrow 0$:

$$\widehat{\xi}_{k,n}^{(P)} \xrightarrow{P} \xi, \quad n \rightarrow \infty.$$

Die gesamte Analyse dieses Schätzer kann in Dekkers&de Haan [5] nachgelesen werden; daraus stammt auch folgendes Resultat:

Theorem 3.33 (Eigenschaften des Pickand-Schätzer) Sei (X_n) eine **iid** Folge mit **VF** $F \in \text{MDA}(H_\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}$ und sei $\widehat{\xi}^{(P)} = \widehat{\xi}_{k,n}^{(P)}$ der Pickand Schätzer (3.36).

(i) (Schwache Konsistenz) Wenn $k = k(n) \rightarrow \infty$ und $k/n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$, dann gilt

$$\widehat{\xi}^{(P)} \xrightarrow{P} \xi, \quad n \rightarrow \infty.$$

(ii) (Starke Konsistenz) Wenn $k/n \rightarrow 0$ und $k/\ln \ln n \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$, dann gilt

$$\widehat{\xi}^{(P)} \xrightarrow{\text{f.s.}} \xi, \quad n \rightarrow \infty.$$

(iii) (Asymptotische Normalität) Unter weiteren Bedingungen an k und F (Dekkers&de Haan [5], S.1799) gilt

$$\sqrt{k} \left(\widehat{\xi}^{(P)} - \xi \right) \xrightarrow{d} \mathbf{N} \left(0, v(\xi) \right), \text{ mit } v(\xi) = \frac{\xi^2 (2^{2\xi+1} + 1)}{(2(2^\xi - 1) \ln 2)^2}.$$

□

Bemerkung 3.34 (i) Dieses Theorem ist Grundlage für viele weitere Resultate, die in Deckers&de Haan [5] zu finden sind; mit diesem Schätzer kann man dann Quantil- und Tailschätzer konstruieren und asymptotische Konfidenzintervalle bestimmen.

(ii) Die Berechnung des Pickand Schätzers (3.36) bezieht eine mit n wachsende Folge von oberen Ordnungsstatistiken ein. Bei der Analyse der Daten wird der *Pickands-Plot* betrachtet,

$$\left\{ \left(k, \tilde{\xi}_{k,n}^{(P)} \right) : k = 1, \dots, n \right\},$$

um eine *gute* Wahl für k treffen zu können. Allerdings ist die Interpretation solcher Plots schwierig und es existiert keine eindeutige beste Wahl für k . Intuitiv wählt man einen Bereich von *kleinen* k aus, in dem der Plot ungefähr horizontal verläuft und sich wenig ändert.

□

Methode 2: Hill Schätzer, für $\xi = \frac{1}{\alpha} > 0$.

Seien X_1, \dots, X_n iid mit **VF** $F \in \mathbf{MDA}(\Phi_\alpha)$, für $\alpha > 0$. Mit Theorem 3.9 gilt $\bar{F}(x) = x^{-\alpha} \mathcal{L}(x)$, $x > 0$, mit $\mathcal{L} \in \mathcal{R}_0$ (also die Verteilungen mit umso fetteren Tails, je kleiner α bzw. je größer ξ ist). Man kann nachrechnen, daß $\mathbb{E}|X|^p = \infty$ gilt, wenn $X \in \mathbf{MDA}(\Phi_\alpha)$ und $p > \alpha > 0$. Im einfachsten Fall wird angenommen, die **ZV** X habe die **VF** F , so daß gilt

$$\mathbb{P}(X > x) = \bar{F}(x) = x^{-\alpha}, \quad x \geq 1, \quad \alpha > 0.$$

Folglich gilt für $Y = \ln X$, daß $\mathbb{P}(Y > y) = e^{-\alpha y}$, für $y \geq 0$. Also ist $Y \sim \mathbf{exp}(\alpha)$ und der **MLE** $\hat{\alpha}_n$ von α ist gegeben durch

$$\hat{\alpha}_n = \bar{Y}_n^{-1} = \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \ln X_j \right)^{-1} = \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \ln X_{j,n} \right)^{-1}.$$

Da nicht mehr Informationen über F vorliegen, wird im Sinne von $F \in \mathbf{MDA}(\Phi_\alpha)$ mit $\mathcal{L} \in \mathcal{R}_0$ angenommen,

$$\bar{F}(x) = x^{-\alpha} \mathcal{L}(x) \approx C x^{-\alpha}, \quad x \geq u > 0, \quad (3.37)$$

für $\mathcal{L}(x) \approx C = \text{const}$ und einer bekannte Schwelle u . Wenn (3.37) als vollständig beschrieben angenommen wird ($C = u^\alpha$), erhält man den **MLE** von α mit

$$\hat{\alpha}_n = \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \ln \left(\frac{X_{j,n}}{u} \right) \right)^{-1} = \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \ln X_{j,n} - \ln u \right)^{-1}. \quad (3.38)$$

Sei

$$K = \text{card} \{i : X_{i,n} > u, i = 1, \dots, n\}. \quad (3.39)$$

Bedingt auf das Ereignis $\{K = k\}$ reduziert sich der **MLE** von α und C in (3.37) auf die Maximierung der gemeinsamen Dichte von $(X_{k,n}, \dots, X_{1,n})$. Daraus ergibt sich der Hill Schätzer für α und für C .

Definition 3.35 (Hill Schätzer $\hat{\alpha}_{k,n}^{(H)}$ für $\xi = \frac{1}{\alpha} > 0$) Der Hill Schätzer $\hat{\alpha}_{k,n}^{(H)}$ von α für die Stichprobe $X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} F \in \mathbf{MDA}(\Phi_\alpha)$ und $\bar{F}(x) \approx Cx^{-\alpha}$ für $x > u$ bei der Schwelle u ist gegeben durch

$$\hat{\alpha}_{k,n}^{(H)} = \left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^n \ln \left(\frac{X_{j,n}}{X_{k,n}} \right) \right)^{-1} = \left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^n \ln X_{j,n} - \ln X_{k,n} \right)^{-1}.$$

Der Schätzer $\hat{C}_{k,n}$ für C ist gegeben durch

$$\hat{C}_{k,n} = \frac{k}{n} X_{k,n}^{\hat{\alpha}_{k,n}^{(H)}}.$$

$k = k(n)$ erfüllt die Bedingungen $k(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ und $k(n)/n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. □

Es zeigt sich, daß für eine **ZV** X mit **VF** $F \in \mathbf{MDA}(\Phi_\alpha)$, $\alpha > 0$ die mittlere Exzess Funktion e^* von $\ln X$ gegen $1/\alpha$ konvergiert.

$$e^*(u) = \mathbb{E}(\ln X - \ln u \mid \ln X > \ln u) \rightarrow \frac{1}{\alpha}, \quad u \rightarrow \infty.$$

Damit entspricht die empirische mittlere Exzess Funktion e_n^* für die Schwelle $u = X_{k,n}$ gerade dem Hill Schätzer

$$1/e_n^*(X_{k,n}) = \hat{\alpha}_{k,n}^{(H)}.$$

Nun noch einige Eigenschaften des Hill Schätzers; dies erfordert einige Kenntnisse über lineare Prozesse und schwach abhängige, strikt stationäre Prozesse; siehe hierzu EKM [6] Kapitel 4.4, 5.5 und 7.1.

Theorem 3.36 (Eigenschaften des Hill Schätzers) Sei (X_n) strikt stationär mit der **VF** $F \in \mathbf{MDA}(\Phi_\alpha)$, die für ein $\alpha > 0$ und $\mathcal{L} \in \mathcal{R}_0$ die Gleichung

$$\bar{F}(x) = \mathbb{P}(X > x) = x^{-\alpha} \mathcal{L}(x), \quad x > 0,$$

erfüllt und sei $\hat{\alpha}^{(H)} = \hat{\alpha}_{k,n}^{(H)}$ der Hill Schätzer aus Definition 3.35.

(i) (Schwache Konsistenz) Seien (X_n) **iid** oder schwach abhängig oder ein linearer Prozeß. Wenn $k \rightarrow \infty$ und $k/n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$, dann gilt

$$\widehat{\alpha}^{(H)} \xrightarrow{P} \alpha.$$

(ii) (Starke Konsistenz) Wenn X_n eine **iid** Folge ist und wenn $k/n \rightarrow 0$ und $k/\ln \ln n \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$, dann gilt

$$\widehat{\alpha}^{(H)} \xrightarrow{\text{f.s.}} \alpha.$$

(iii) (Asymptotische Normalität) Wenn X_n eine **iid** Folge ist und weitere Bedingungen für k und F erfüllt sind, dann gilt

$$\sqrt{k} (\widehat{\alpha}^{(H)} - \alpha) \xrightarrow{d} \mathbf{N}(0, \alpha^2).$$

□

Bemerkung 3.37 (i) Wie beim Pickand Schätzer wird die Analyse, basierend auf dem Hill Schätzer, üblicherweise graphisch vorgenommen. Der *Hill-Plot*,

$$\left\{ \left(k, \widehat{\alpha}_{k,n}^{(H)} \right) : k = 2, \dots, n \right\},$$

hat sich dabei als sehr nützlich herausgestellt, um das optimale k zu finden.

(ii) Die asymptotische Varianz von $\widehat{\alpha}^{(H)}$ hängt vom unbekanntem Parameter α ab, so daß für die Berechnung der asymptotischen Konfidenzintervalle ein geeigneter Schätzer von α benötigt wird, üblicherweise $\widehat{\alpha}^{(H)}$.

(iii) Der Hill Schätzer ist sehr sensibel gegenüber Abhängigkeiten innerhalb der Zeitreihen. In diesem Fall liefert der Schätzer meistens völlig unbrauchbare Ergebnisse, zu lesen in EKM [6], S.336.

(iv) Der Hill Schätzer ist im Programmpaket *EVIS* mit der Funktion *hillplot* implementiert.

(v) (Bias/Varianz Trade Off) Theorem 3.36 zeigt, für $k = k(n) \rightarrow \infty$ geeignet gewählt, die asymptotische Normalverteilung

$$\sqrt{k} (\widehat{\alpha}^{(H)} - \alpha) \xrightarrow{d} \mathbf{N}(0, \alpha^2).$$

Allerdings ist in diesem Fall ein Trade-Off zwischen Bias und Varianz möglich, abhängig von der Wahl von k und $\mathcal{L} \in \mathcal{R}_0$. Aus der Formel geht eine sinkende

Varianz bei steigendem k hervor; wenn allerdings k zu groß gewählt wird, so kann ein Bias eintreten. Eine Erweiterung von Theorem 3.36 für den Trade-Off existiert. \square

In Abbildung 3.10 ist der Hill-Plot von simulierten $\mathbf{exp}(1)$ \mathbf{ZVn} geplottet. Hier erkennt man ein Problem des Hill Schätzers, da hier ohne Kenntnis der Verteilung nichts Brauchbares geschätzt wird. Mehr zum *Hill Horror Plot* ist in EKM [6], S.342ff zu finden, allerdings gibt es auch Fälle, in denen der Hill-Plot gute Ergebnisse liefert – die Ergebnisse müssen aber in jedem Fall mit anderen Schätzmethoden verglichen werden. Bei \mathbf{exp} \mathbf{ZVn} gilt $\alpha = 0$, damit ist die Bedingung des Hill Schätzers ($\alpha > 0$) nicht erfüllt und es ist fraglich, was in diesem Fall geschätzt wird. Zum Vergleich mit den Daten der Swap Sätze ist der Plot trotzdem interessant. In Abbildung 3.11 und 3.12 sind die Hillschätzer der EUR Swap Sätze geplottet. Beide Abbildungen sehen dem Plot der simulierten Daten sehr ähnlich.

3.2.4 Die POT-Methode

Im vorherigen Abschnitt wurden Möglichkeiten zur Parameter Schätzung beschrieben. Nun werden mit diesen Parametern große Quantile und die Wahrscheinlichkeiten für große Werte abgeschätzt; in Abschnitt 3.1.6 wurde mit den Exzessen über hohe Schwellen ein weiterer Ansatz vorgeschlagen, der jetzt ausgebaut wird.

Seien X, X_1, \dots, X_n **iid** mit der **VF** $F \in \mathbf{MDA}(H_\xi)$ für ein $\xi \in \mathbb{R}$. Man wählt nun eine hohe Schwelle u und notiert mit

$$N_u = \text{card}\{i : X_i > u, i = 1, \dots, n\}$$

die Anzahl der Ausreisser über u aus der Stichprobe X_1, \dots, X_n . Diese Ausreisser werden mit

$$Y_1 = X_{i_1} - u, \dots, Y_{N_u} = X_{i_{N_u}} - u, \text{ für } \{i_1, \dots, i_{N_u}\} = \{i : X_i > u, i = 1, \dots, n\}$$

bezeichnet. Die Exzess**VF** von X ist damit gegeben durch

$$F_u(y) = \mathbb{P}(X - u \leq y \mid X > u) = \mathbb{P}(Y \leq y \mid X > u), \quad y \geq 0.$$

Diese Relation kann umgeschrieben werden in

$$\begin{aligned} \bar{F}_u(y) &= \mathbb{P}(X - u > y \mid X > u) = \frac{\bar{F}(u + y)}{\bar{F}(u)} \\ \Rightarrow \bar{F}(u + y) &= \bar{F}(u)\bar{F}_u(y). \end{aligned} \tag{3.40}$$

Ein Resultat von Theorem 3.29 gibt eine Limeseigenschaft von $\overline{F}_u(y)$ an,

$$\lim_{u \nearrow x_F} \sup_{0 < x < x_F - u} |F_u(x) - G_{\xi, \beta(u)}(x)| = 0,$$

für eine geeignete Funktion $\beta(u)$. Daraus ergibt sich für große u die Abschätzung

$$\overline{F}_u(y) \approx \overline{G}_{\xi, \beta(u)}(y). \quad (3.41)$$

In der Praxis muß u ausreichend groß gewählt werden (β ändert sich mit wachsender Schwelle u , ist also als abhängig von u zu verstehen). Die Relation (3.40) liefert eine Methode, grosse Quantile F abzuschätzen, indem $\overline{F}_u(y)$ und $\overline{F}(u)$ separat geschätzt werden. Die Idee hinter diesem Verfahren, grosse Quantile am Rande oder außerhalb der Stichprobe abzuschätzen, ist die Schwelle u so groß (aber nicht zu groß) zu wählen, daß für diesen Bereich genügend Daten vorliegen und die empirische Schätzung von $\overline{F}(u)$ hinreichend genau ist; die Näherung von $\overline{F}_u(y)$ ergibt sich dann aus (3.41) und somit kann man recht genau Bereiche abschätzen, in denen nur sehr wenige oder gar keine Daten vorliegen. Einen natürlichen Schätzer für $\overline{F}(u)$ liefert die empirische **VF**

$$\widehat{\overline{F}(u)} = \overline{F}_n(u) = \frac{1}{n} \text{card}\{i : X_i > u, i = 1, \dots, n\} = \frac{N_u}{n}. \quad (3.42)$$

Weiterhin bietet (3.41) einen Schätzer an,

$$\widehat{\overline{F}_u(y)} = \overline{G}_{\widehat{\xi}, \widehat{\beta}}(y), \quad (3.43)$$

für geeignete Schätzer $\widehat{\xi} = \widehat{\xi}_{N_u}$ und $\widehat{\beta} = \widehat{\beta}_{N_u}$. Mit Definition 3.28,

$$\overline{G}_{\xi, \beta}(y) = \left(1 + \xi \frac{y}{\beta}\right)^{-1/\xi},$$

erhält man dann einen Schätzer für $\overline{F}(u + y)$ der Form

$$\widehat{\overline{F}(u + y)} = \frac{N_u}{n} \left(1 + \widehat{\xi} \frac{y}{\widehat{\beta}}\right)^{-1/\widehat{\xi}}. \quad (3.44)$$

Damit ergibt sich für $x_p = u + y$ und $\overline{F}(x_p) = 1 - p$ der Schätzer für das p -Quantil

$$\widehat{x}_p = u + \frac{\widehat{\beta}}{\widehat{\xi}} \left[\left(\frac{n}{N_u} (1 - p) \right)^{-\widehat{\xi}} - 1 \right]. \quad (3.45)$$

Nun wird noch eine optimale Wahl für die Schwelle u benötigt. Für einen zu hohen Wert von u gibt es zu wenig Ausreisser und folglich wird die Varianz zu groß und für zu kleine

u werden die Schätzer verzerrt. Eine in der Praxis gebräuchliche Methode stützt sich auf die Linearität der mittleren Exzess Funktion $e(u)$ für **GPDn**: Aus Theorem 3.29 folgt für eine **ZV** X mit **VF** $G_{\xi,\beta}$ die Linearität von $e(u)$,

$$e(u) = \mathbb{E}(X - u \mid X > u) = \frac{\beta + \xi u}{1 - \xi}, \quad \beta + u\xi > 0, \quad \xi < 1.$$

In (3.30) ist die Definition der empirischen mittleren Exzess Funktion der Stichprobe X_1, \dots, X_n gegeben mit

$$e_n(u) = \frac{1}{N_u} \sum_{i \in \Delta_n(u)} (X_i - u), \quad u > 0.$$

Damit ergibt sich ein graphischer Ansatz zur Wahl von u :

wähle $u > 0$, so daß $e_n(u)$ approximativ linear ist für $x \geq u$.

Die Schwierigkeit liegt dabei in der Interpretation von *approximativ*. Es wird oft eine Änderung in der Steigung von $e_n(u)$ festgestellt für einige Werte von u ; eine eindeutige Wahl von u wird wahrscheinlich nie existieren. Die Plots dieser Schätzer weisen dasselbe Verhalten auf, wie die Hill-Plots: Grosse Varianz für kleine u und grosse Verzerrtheit für grosse u .

Maximum Likelihood Schätzer

Die Originaldaten $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ seien **iid** mit **VF** F . Zunächst sei angenommen, F habe **GPD** mit den Parametern ξ und β . Dann ist die Dichte f (siehe (3.25) für den Definitionsbereich)

$$f(x) = \frac{1}{\beta} \left(1 + \xi \frac{x}{\beta}\right)^{-1/\xi-1}, \quad x \in \mathbb{D}(\xi, \beta).$$

Daraus ergibt sich die Log-Likelihood Funktion

$$\ell((\xi, \beta); \mathbf{X}) = -n \ln \beta - \left(\frac{1}{\beta} + 1\right) \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \frac{\xi}{\beta} X_i\right), \quad X_i \in \mathbb{D}(\xi, \beta),$$

mit $\mathbb{D}(\xi, \beta) = [0, \infty)$ für $\xi \geq 0$. Diese Likelihood Gleichungen können numerisch gelöst werden und daraus ergeben sich die **MLE** $\hat{\xi}_n, \hat{\beta}_n$. Diese Methode funktioniert gut für $\xi > -\frac{1}{2}$; dann kann gezeigt werden, daß

$$\sqrt{n} \left(\hat{\xi}_n - \xi, \frac{\hat{\beta}_n}{\beta} - 1 \right)^T \xrightarrow{d} N(\mathbf{0}, M^{-1}), \quad n \rightarrow \infty,$$

mit

$$M^{-1} = (1 + \xi) \begin{pmatrix} 1 + \xi & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

gilt und $\mathbf{N}(\mu, \Sigma)$ steht für die bivariate Normalverteilung. Wegen (3.41) ist die Annahme realistisch, die Exzesse Y_1, \dots, Y_{N_u} haben **GPD** und N_u ist unabhängig von den Y_i für u ausreichend hoch. Die daraus resultierende bedingte Likelihood Gleichung kann am besten gelöst werden über die Reparametrisierung $(\xi, \beta) \rightarrow (\xi, \tau)$, mit $\tau = -\xi/\beta$. Daraus berechnet sich die Lösung

$$\hat{\xi} = \hat{\xi}(\tau) = N_u^{-1} \sum_{i=1}^{N_u} \ln(1 - \tau Y_i),$$

und τ erfüllt die Gleichung

$$h(\tau) = \frac{1}{\tau} + \frac{1}{N_u} \left(\frac{1}{\hat{\xi}(\tau)} + 1 \right) \sum_{i=1}^{N_u} \frac{Y_i}{1 - \tau Y_i} = 0.$$

Die Funktion $h(\tau)$, definiert auf $\tau \in (-\infty, \max\{Y_1, \dots, Y_{N_u}\})$, ist stetig bei 0.

In Abbildung 3.13 ist der **MLE** des Parameters ξ von simulierten **exp ZVn** geplottet. Dieser Plot liefert gute Schätzungen für ξ . Die **MLE**-Plots der EUR Swap Sätze (Abbildung 3.14 und 3.15) liefern ebenfalls brauchbare Ergebnisse. Im 95%–**KI** des **MLE** ist sehr oft die 0 enthalten. Im rechten Bereich der Plots (zwischen 40 und 10 Ausreißern) ist zu beobachten, für kürzere Laufzeiten befindet sich der Plot tendenziell über der Null, für längere Laufzeiten tendenziell unterhalb der Null. Bei den negativen Änderungen der Tagesdifferenzen liegt der **MLE** von ξ bei den Laufzeiten von 30 und 180 Tagen und 2 bis 10 Jahren nahe bei Null, bei den Laufzeiten 270 und 360 Tage fällt der Schätzer bis auf -1 ab für 40 bis 10 Ausreißer. Betrachtet man in diesem Fall die **QQ**-Plots (Abbildung 2.9), so ergeben sich daraus keine Hinweise, wieso der Schätzer gegen -1 fällt. Für die restlichen Swap Sätze unterstützt der **MLE** die Annahme, die Daten seien **exp**-verteilt. Die Schätzer für ξ sind über einen grossen Bereich von Schwellen u bei den Swap Sätzen mit längeren Laufzeiten etwas kleiner, als bei den Swap Sätzen mit kürzeren Laufzeiten. Das unterstützt auch die Annahme, Swap Sätze mit längeren Laufzeiten haben leichtere Tails als Swap Sätze mit den kürzeren Laufzeiten. Die Funktion in *EVIS* für den **MLE** des **GPD** Parameters ξ heißt *shape*.

Anwendung auf Daten

Im oberen Abschnitt wurden die Ideen hinter dem **GPD** Fitting Programm erläutert. In der Praxis bestehen zwei Hauptinteressen:

- (i) Fitten der *bedingten VF* $F_u(x)$ für einen geeigneten Bereich von x und u .
- (ii) Fitten der *unbedingten VF* $F(x)$ für passende x -Werte.

Durch die Formeln (3.43) und (3.44) ist dieses Problem im Prinzip gelöst, in der Praxis muß man vorsichtig sein bezüglich dem Bereich der vorhandenen Daten und dem Intervall, das gefittet werden soll. Abhängig von der Höhe der Schwelle u (und damit der Anzahl N_u der Exzesse) ändern sich die Schätzer $\hat{\xi}$ und $\hat{\beta}$. Im hier vorliegenden Fall mit den Zeitreihen der Swap Sätze, bei denen sich die **exp**-Verteilung als brauchbare **VF** der positiven bzw. negativen Differenzen herausstellte, kann $\xi = 0$ angenommen werden. Daraus resultiert der **MLE** von β mit

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta}, \\
 \Rightarrow \ell((0, \beta), \underline{Y}) &= -n \ln \beta - \frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^{N_u} Y_i, \\
 \Rightarrow \ell'((0, \beta), \underline{Y}) &= -\frac{N_u}{\beta} + \frac{1}{\beta^2} \sum_{i=1}^{N_u} Y_i \stackrel{!}{=} 0, \\
 \Rightarrow \hat{\beta} &= \frac{1}{N_u} \sum_{i=1}^{N_u} Y_i = \bar{Y}.
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

Jetzt interessiert noch, F im Fall $\xi \neq 0$ zu schätzen um Informationen über die Häufigkeit zu erhalten, mit der das Level z erreicht wird. Aus (3.44),

$$\widehat{\bar{F}(u+y)} = \frac{N_u}{n} \left(1 + \hat{\xi} \frac{\widehat{y}}{\hat{\beta}} \right)^{-1/\hat{\xi}},$$

folgt eine Darstellung von $\widehat{F}(z)$ als drei-Parameter **GPD**:

$$\begin{aligned}
 \widehat{F}(z) &= 1 - \left[\left(\frac{N_u}{n} \right)^{-\hat{\xi}} \left(1 + \hat{\xi} \frac{z-u}{\hat{\beta}} \right) \right]^{-1/\hat{\xi}} \\
 &= 1 - \left[1 - \frac{\left(\frac{N_u}{n} \right)^{\hat{\xi}} - 1}{\left(\frac{N_u}{n} \right)^{\hat{\xi}}} + \frac{\hat{\xi}}{\hat{\beta}} \left(\frac{N_u}{n} \right)^{-\hat{\xi}} (z-u) \right]^{-1/\hat{\xi}} \\
 &= 1 - \left[1 + \hat{\xi} \frac{z-u - \frac{\hat{\beta}}{\hat{\xi}} \left(\left(\frac{N_u}{n} \right)^{\hat{\xi}} - 1 \right)}{\hat{\beta} \left(\frac{N_u}{n} \right)^{\hat{\xi}}} \right]^{-1/\hat{\xi}}
 \end{aligned}$$

$$= 1 - \left[1 + \widehat{\xi} \frac{z - u - \widehat{\nu}}{\widehat{\beta}'} \right]^{-1/\widehat{\xi}}, \quad (3.47)$$

wobei

$$\widehat{\nu} = \frac{\widehat{\beta}}{\widehat{\xi}} \left(\left(\frac{N_u}{n} \right)^{\widehat{\xi}} - 1 \right) \quad \text{und} \quad \widehat{\beta}' = \widehat{\beta} \left(\frac{N_u}{n} \right)^{\widehat{\xi}}.$$

Dieser Schätzer der **VF** F ist allerdings nur gut für Werte von z über der Schwelle u . Unterhalb von u sind meist reichlich Daten vorhanden und so kann z.B. dort die empirische Verteilungsfunktion benützt werden. Kombiniert man beides (**GPD** oberhalb von u und empirische **VF** unterhalb von u), kann ein guter Fit für den gesamten Wertebereich erzielt werden. Zusammenfassend läßt sich die **POT** Methode folgendermaßen formulieren:

- (i) Die Exzesse einer **iid** (oder stationären) Folge über einer hohen Schwelle u treten zu den Zeiten eines Poisson Prozesses auf.
- (ii) Die zugehörigen Exzesse über u sind unabhängig und haben **GPD**.
- (iii) Die Exzesse und die Zeitpunkte, zu denen die Exzesse auftreten, sind unabhängig voneinander.

Diese Annahmen müssen natürlich überprüft werden. Die Zeiten zwischen zwei auftretenden Ereignissen eines Poisson Prozesses sind **exp**-verteilt. Dies kann mittels dem **QQ**-Plot getestet werden, indem die Zeiten zwischen zwei Exzessen über u im **QQ**-Plot gegen die **exp**-Verteilung plottet. Die Unkorreliertheit wird mit der **acr** Funktion und eine mögliche Änderung in der Verteilung wird mit dem gleitenden Mittelwert überprüft.

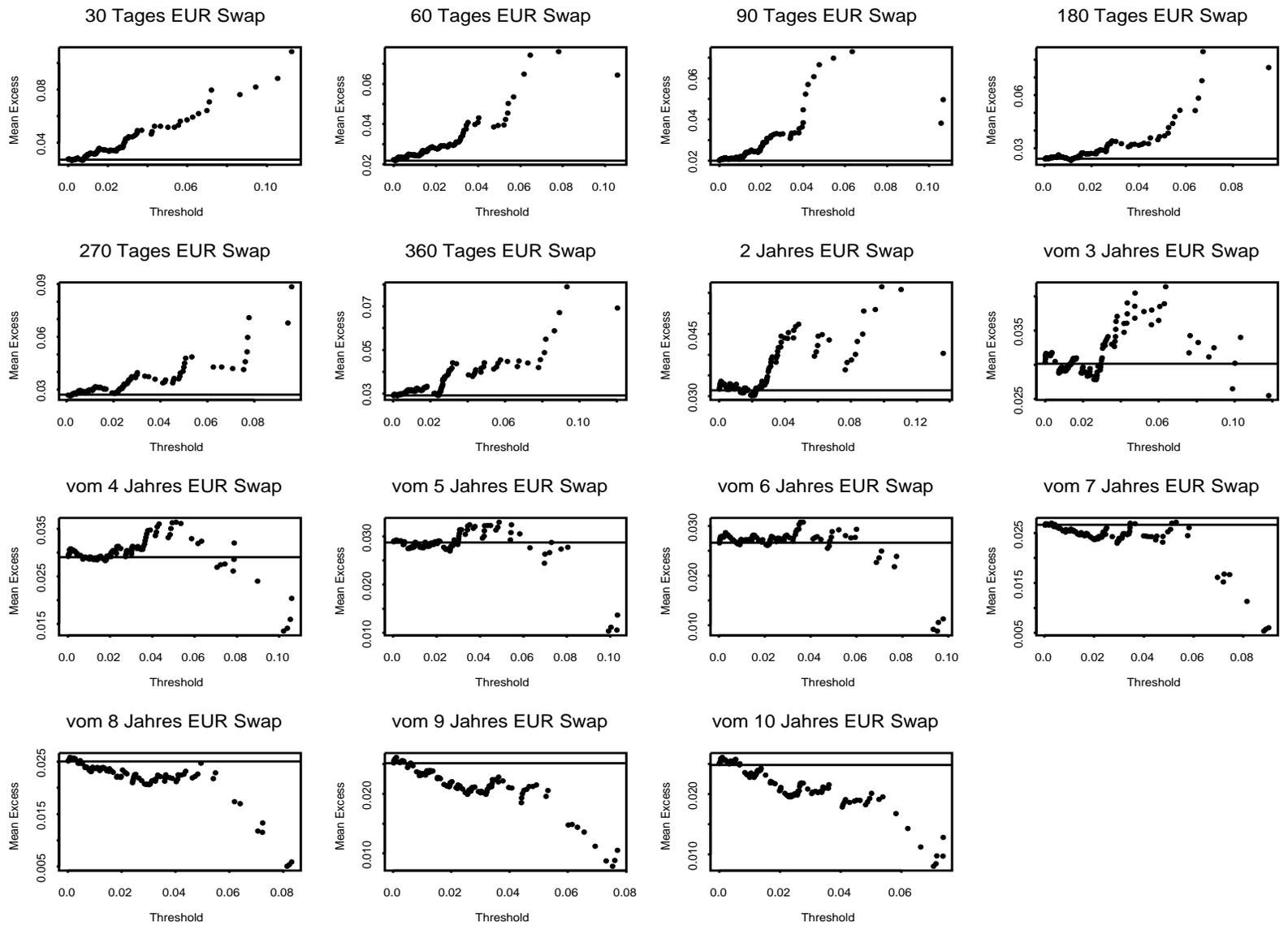


Abbildung 3.3: ME-Plots der positiven Tagesdifferenzen der EUR Swap Sätze.

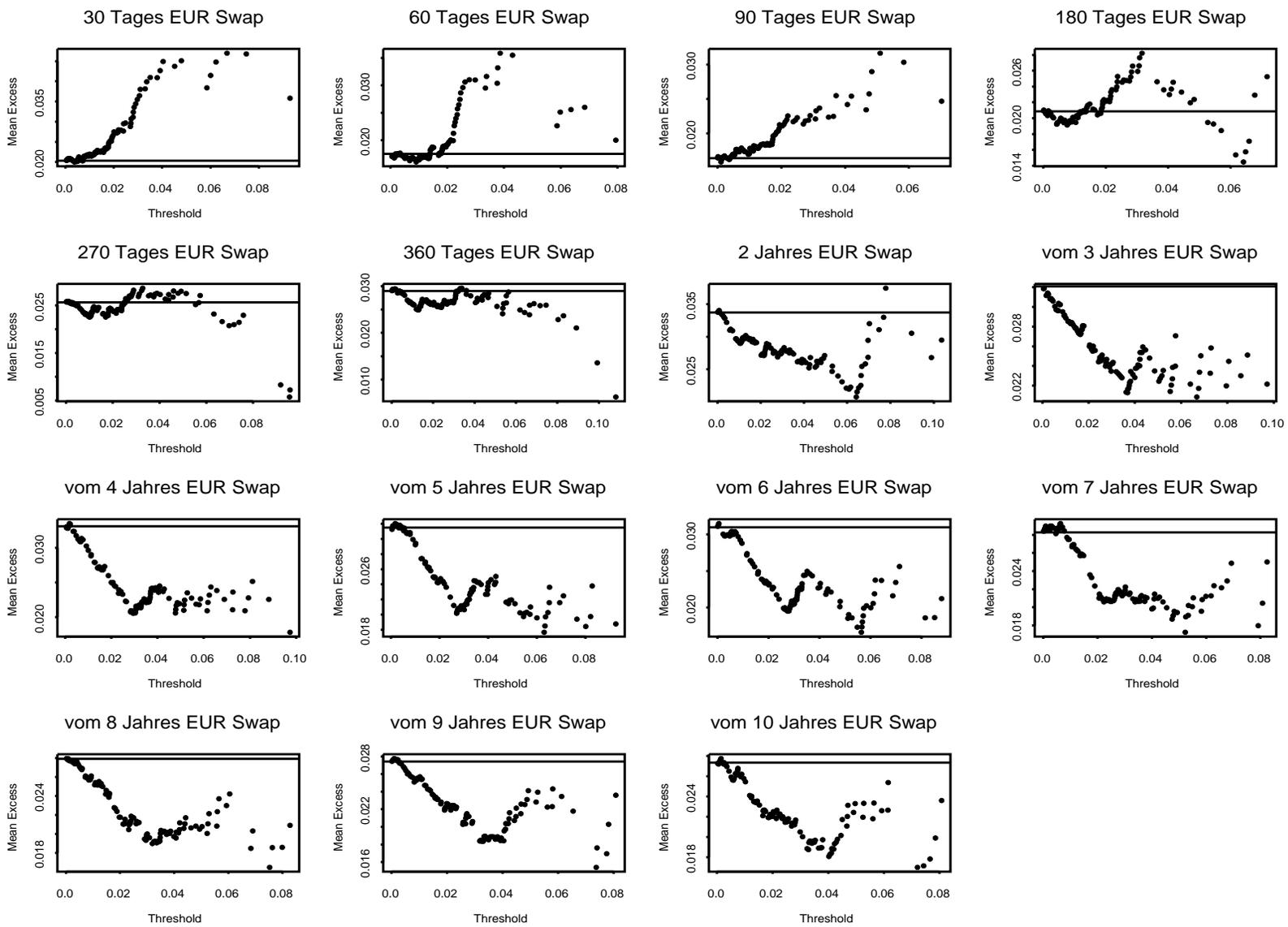


Abbildung 3.4: ME-Plots der negativen Tagesdifferenzen der EUR Swap Sätze.

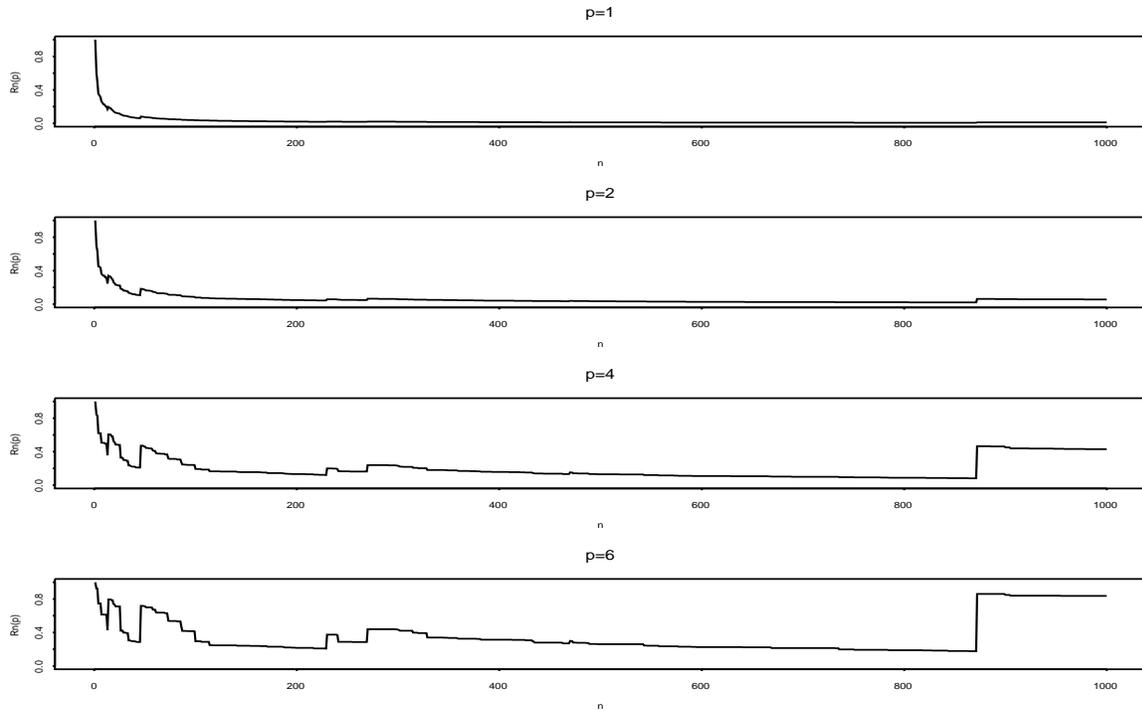
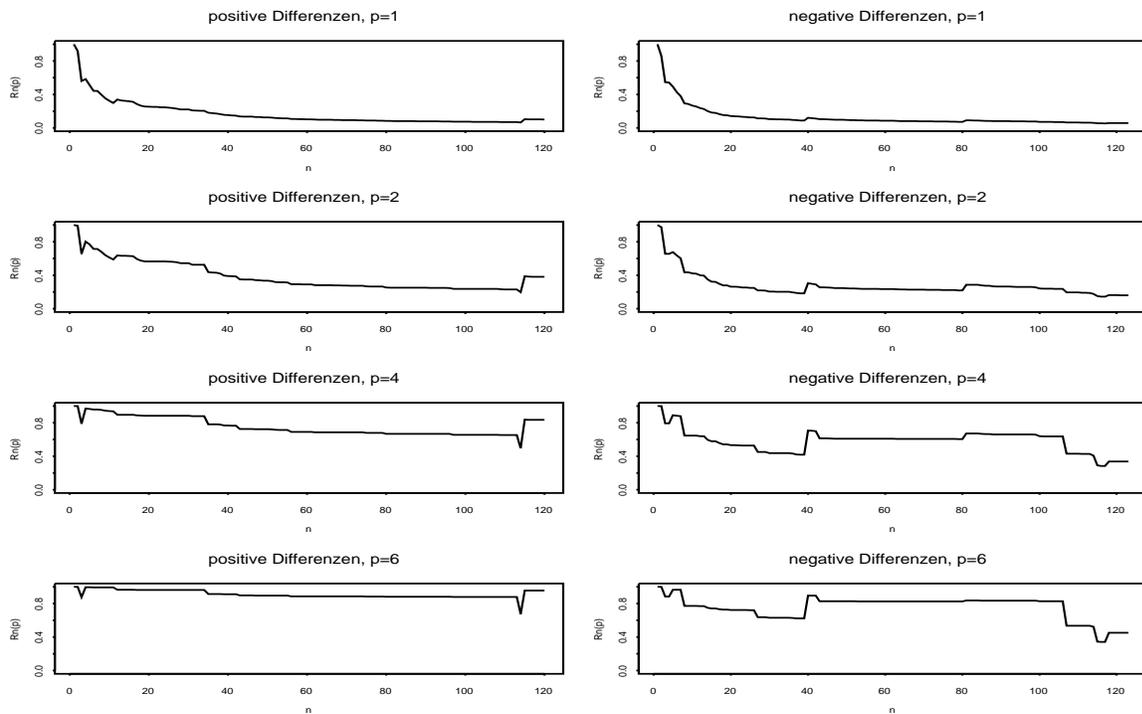
Abbildung 3.5: Ratio Funktion von 1000 simulierten $\exp\text{-ZVn}$.

Abbildung 3.6: Ratio Funktion der 30 Tages EUR Swap Sätze.

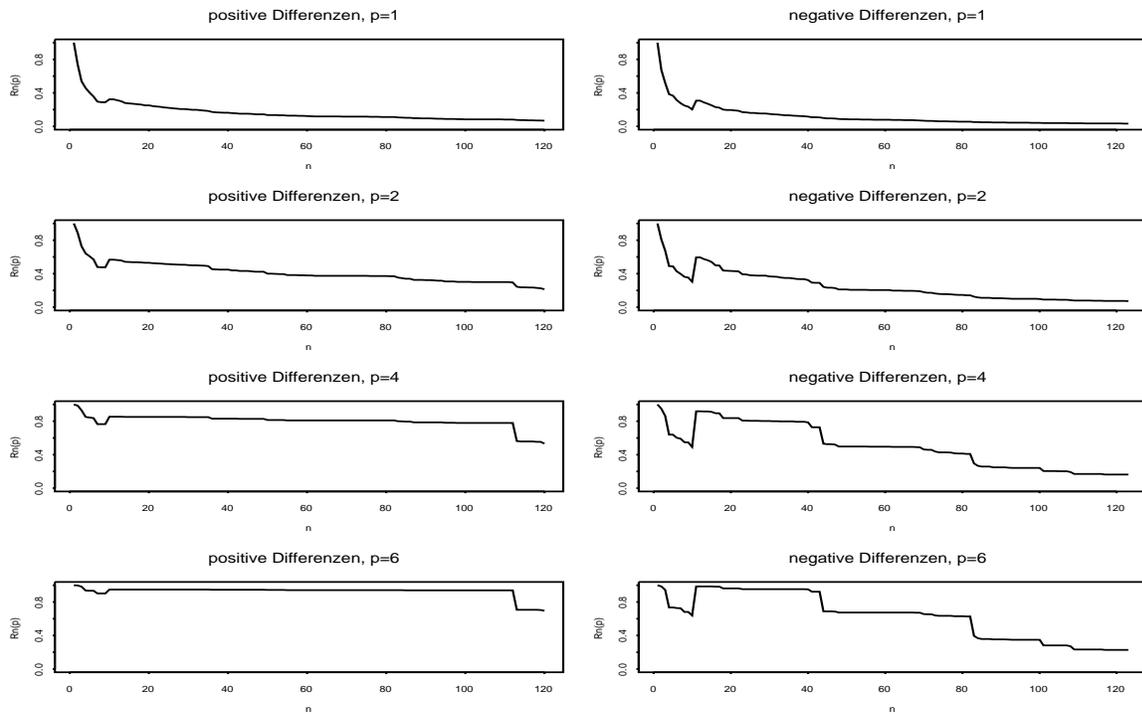


Abbildung 3.7: Ratio Funktion der 360 Tages EUR Swap Sätze.

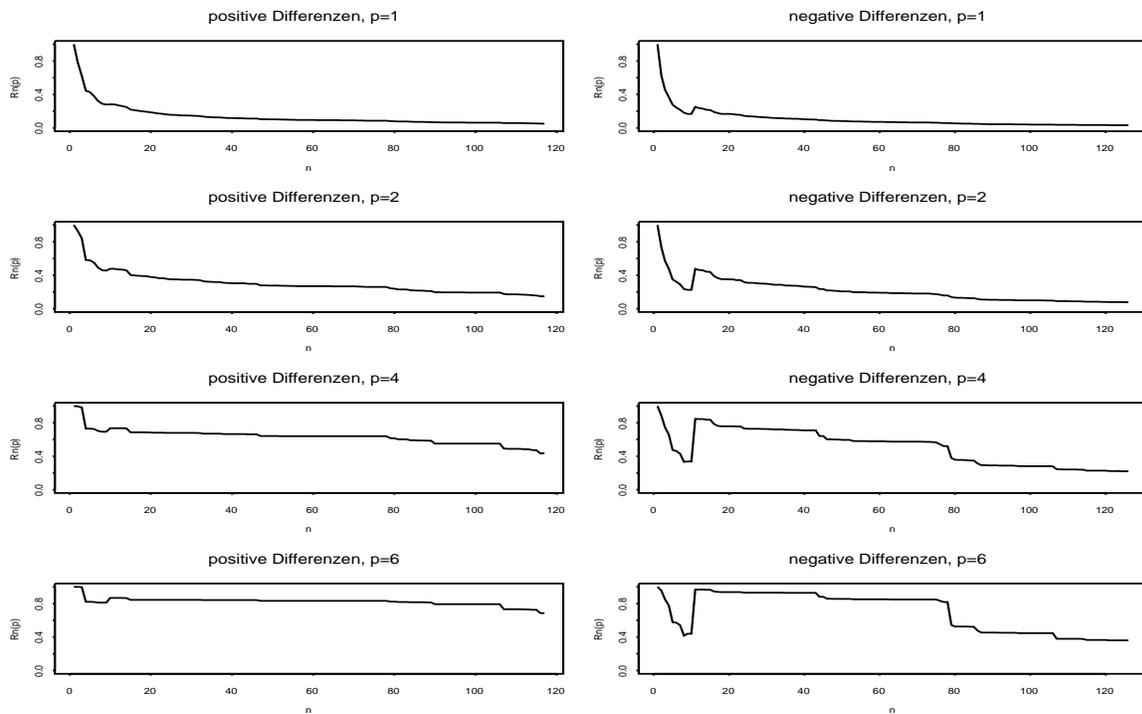


Abbildung 3.8: Ratio Funktion der 3 Jahres EUR Swap Sätze.

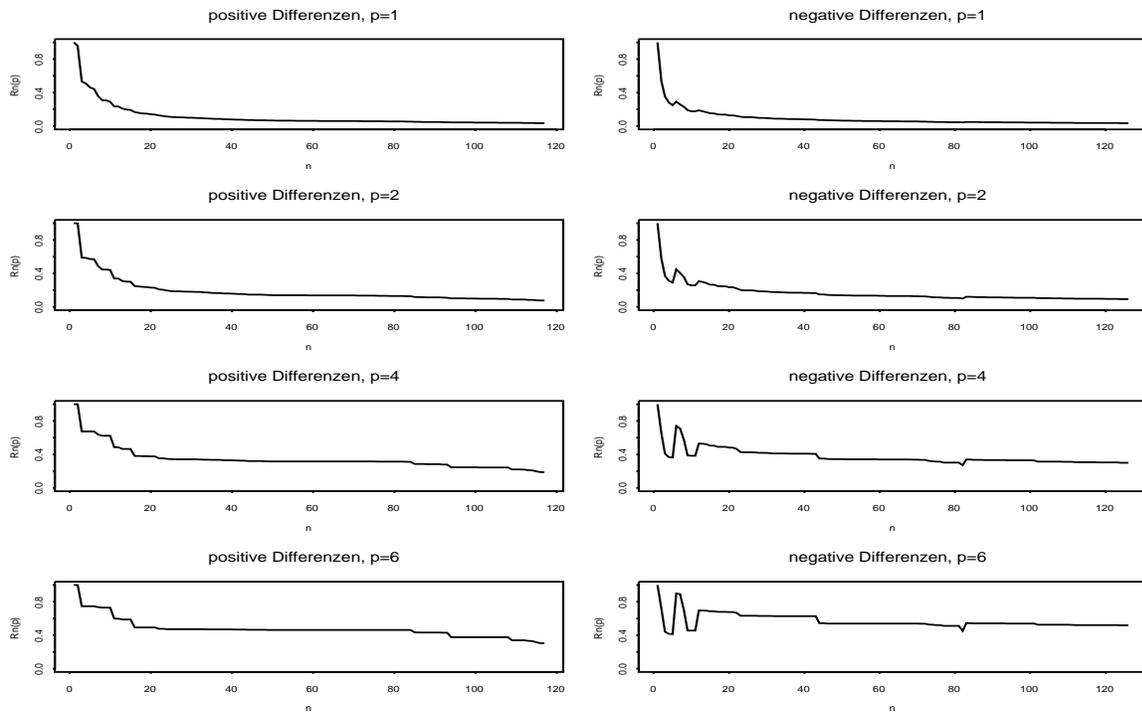
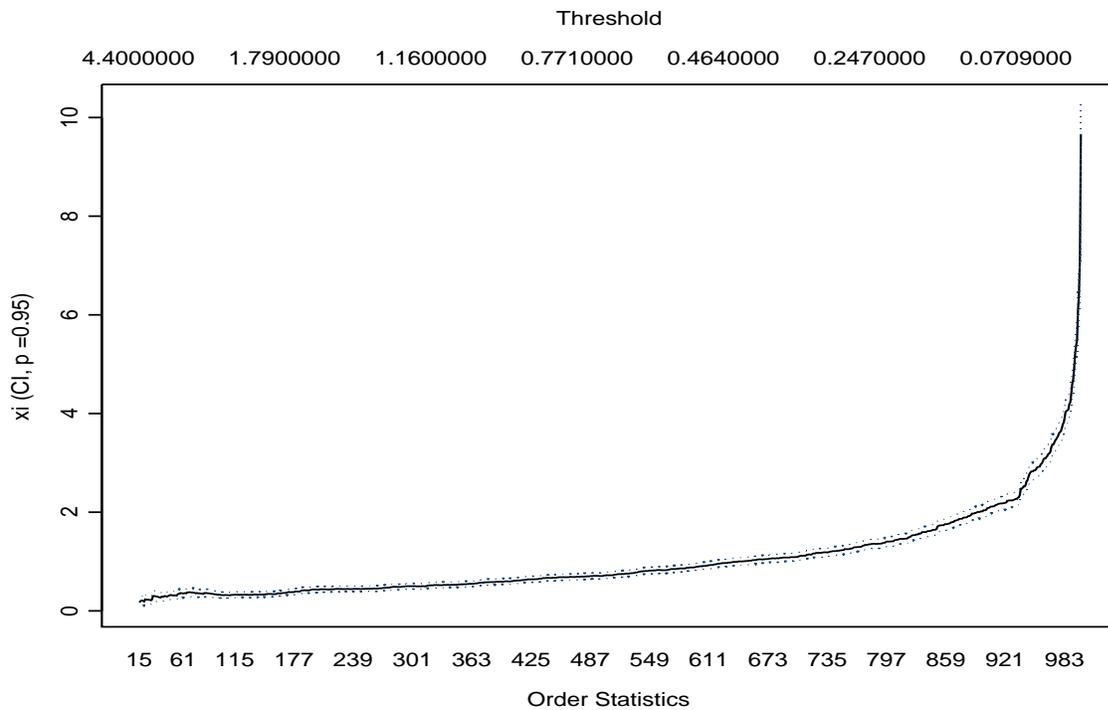


Abbildung 3.9: Ratio Funktion der 8 Jahres EUR Swap Sätze.

Abbildung 3.10: Hill-Plot von 1000 simulierten $\exp(1)$ ZVn.

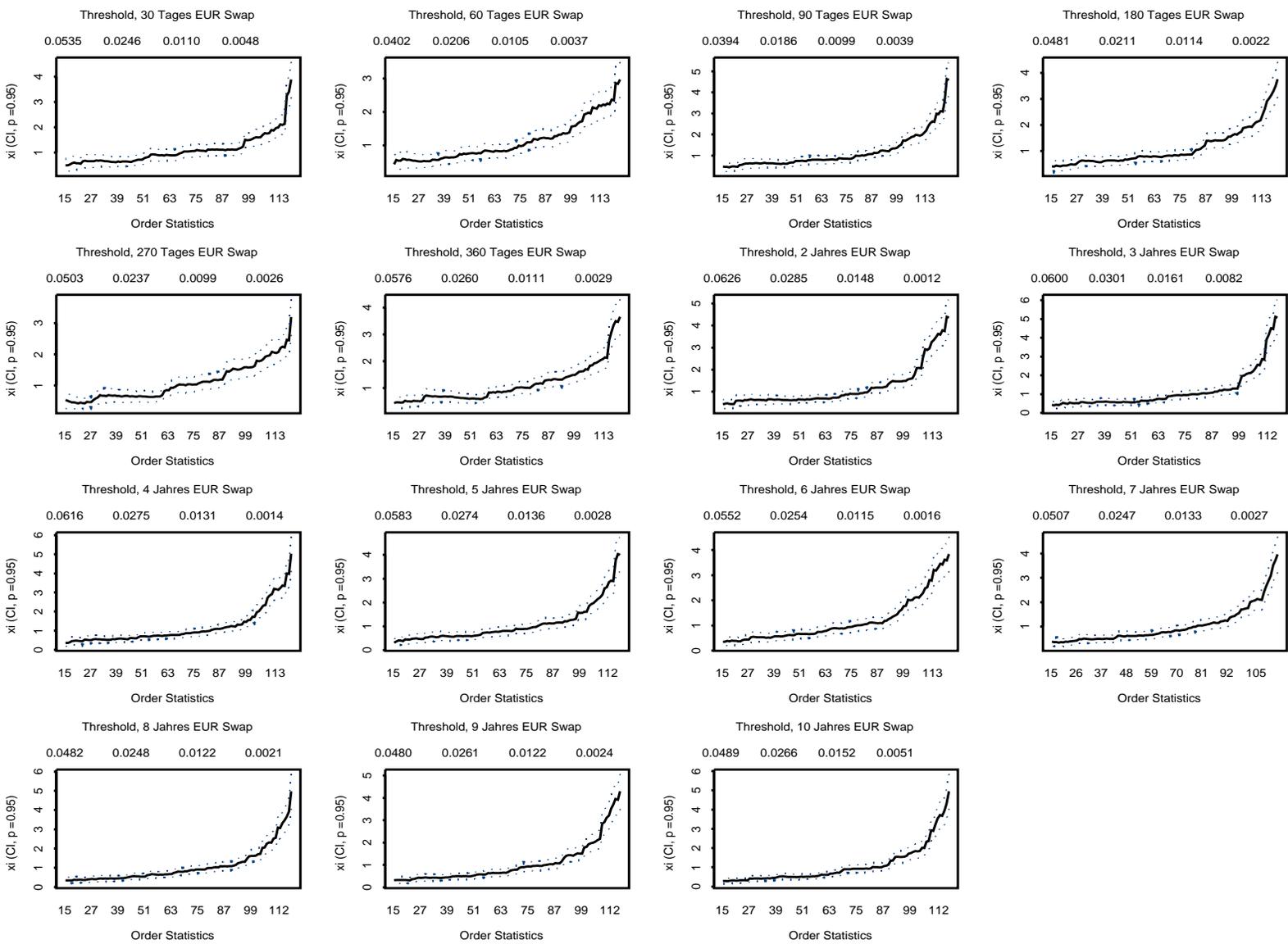


Abbildung 3.11: Hill-Plots der positiven Tagesdifferenzen der EUR Swap Sätze.

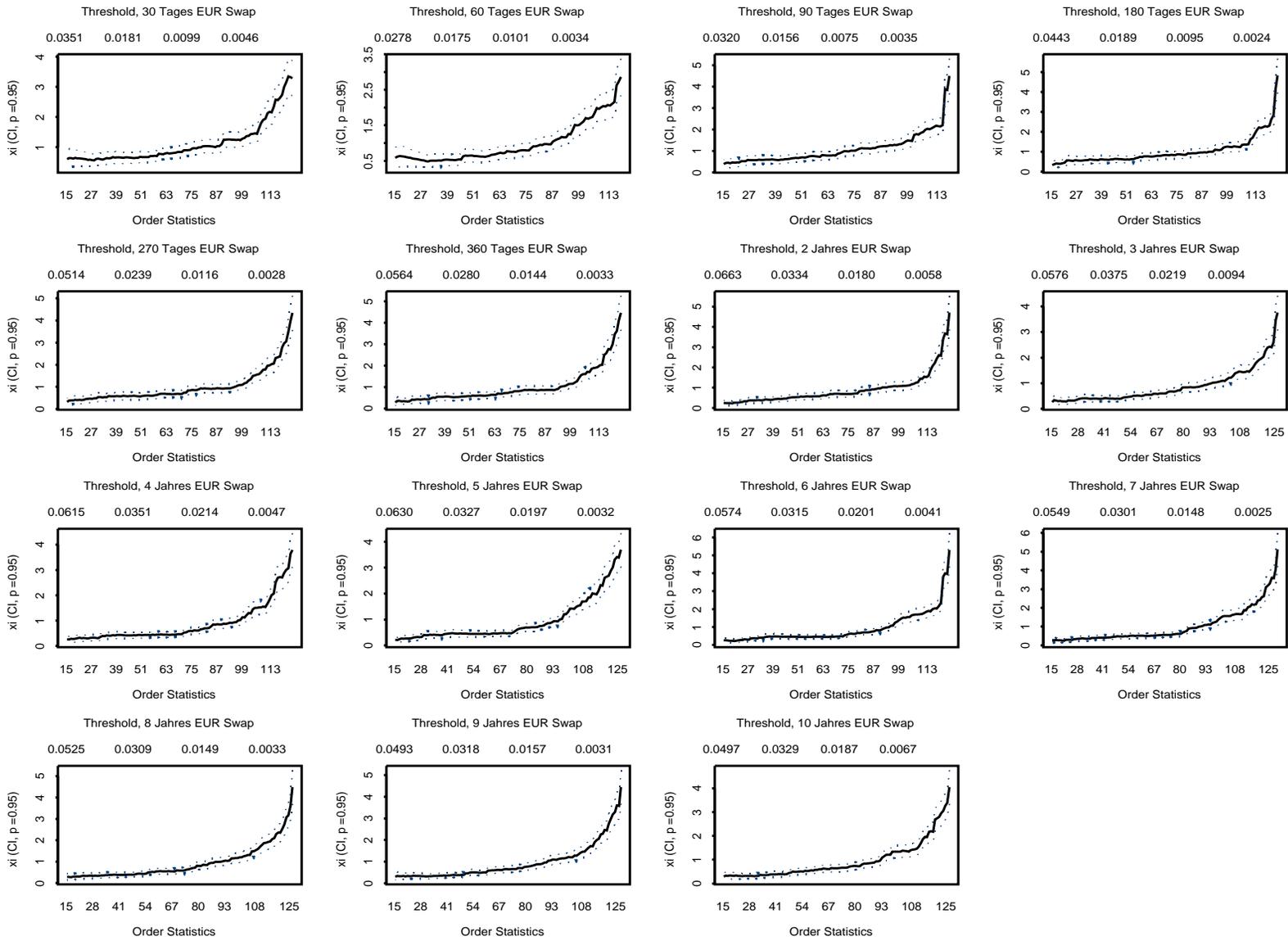


Abbildung 3.12: Hill-Plots der negativen Tagesdifferenzen der EUR Swap Sätze.

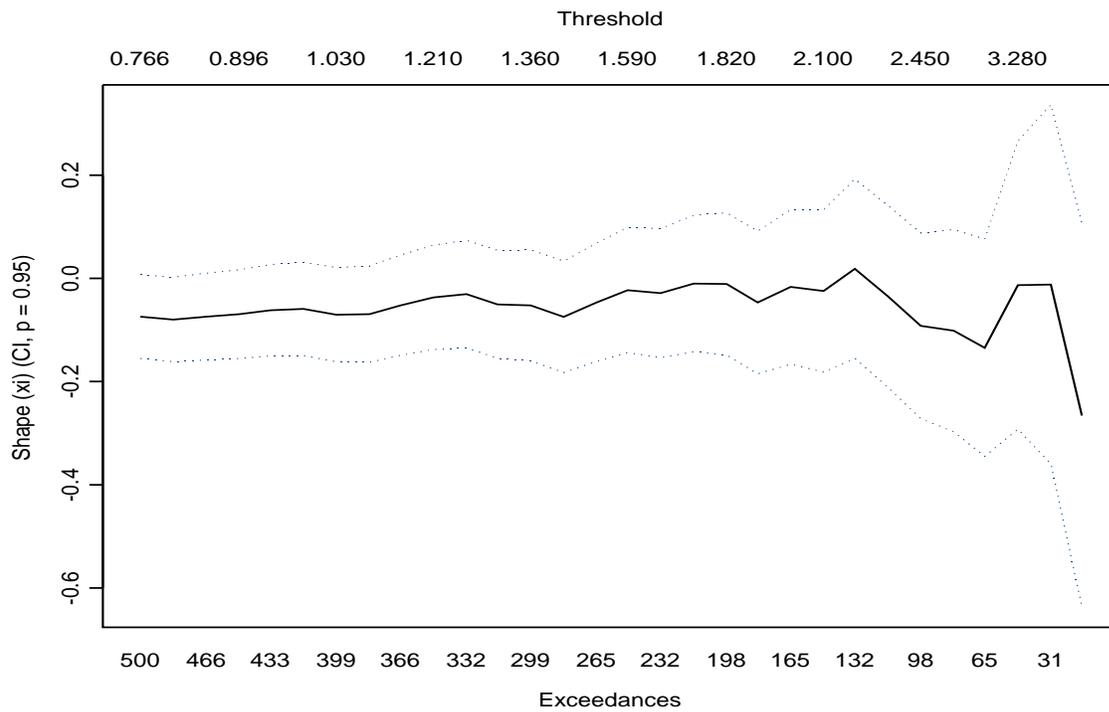
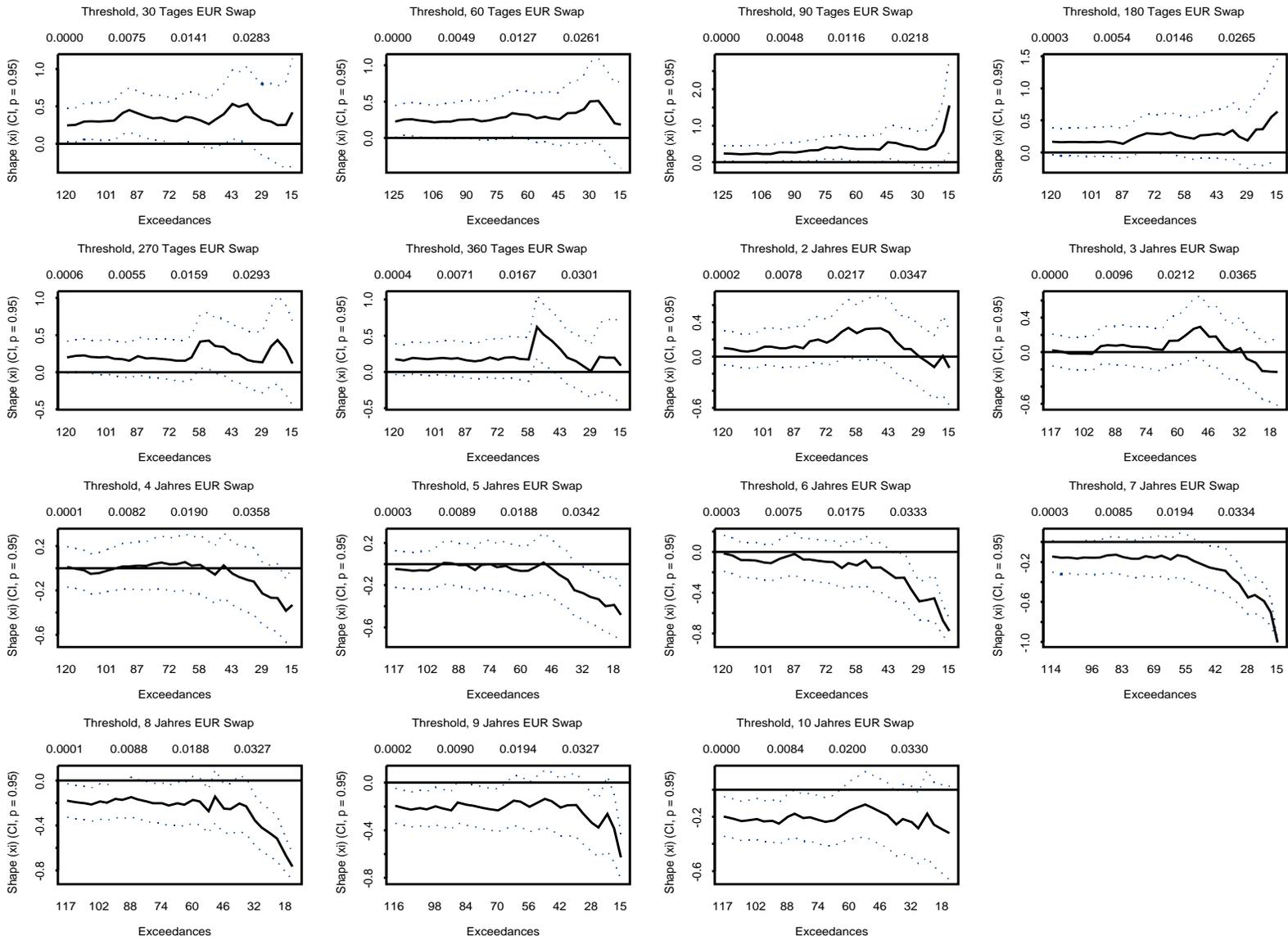
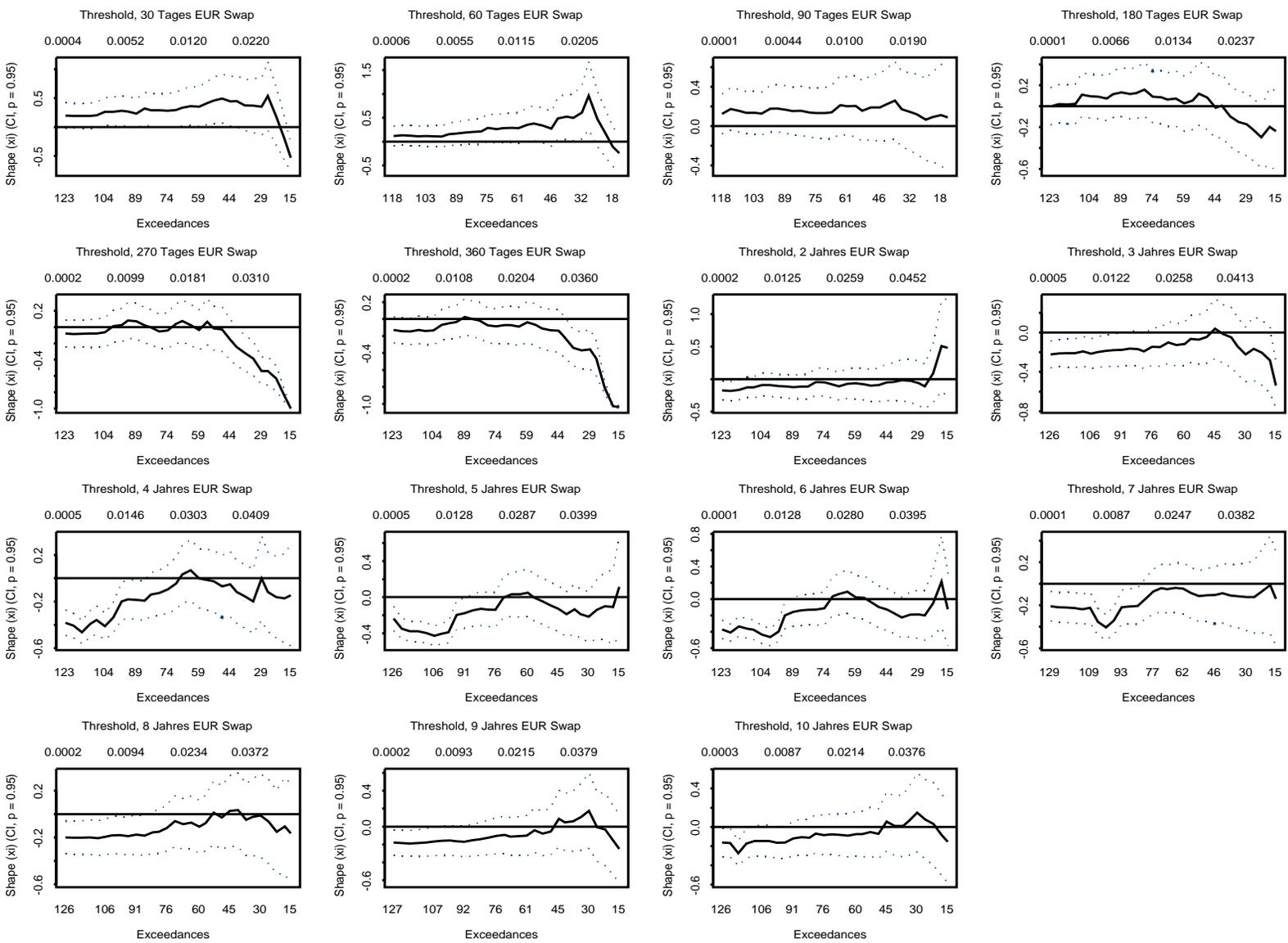


Abbildung 3.13: **MLE** von ξ von 1000 simulierten $\exp(1)$ **ZVn**.

Abbildung 3.14: **MLE** von ξ der positiven Tagesdifferenzen der EUR Swap Sätze.

Abbildung 3.15: MLE-Schätzer von ξ der negativen Tagesdifferenzen der EUR Swap Sätze.

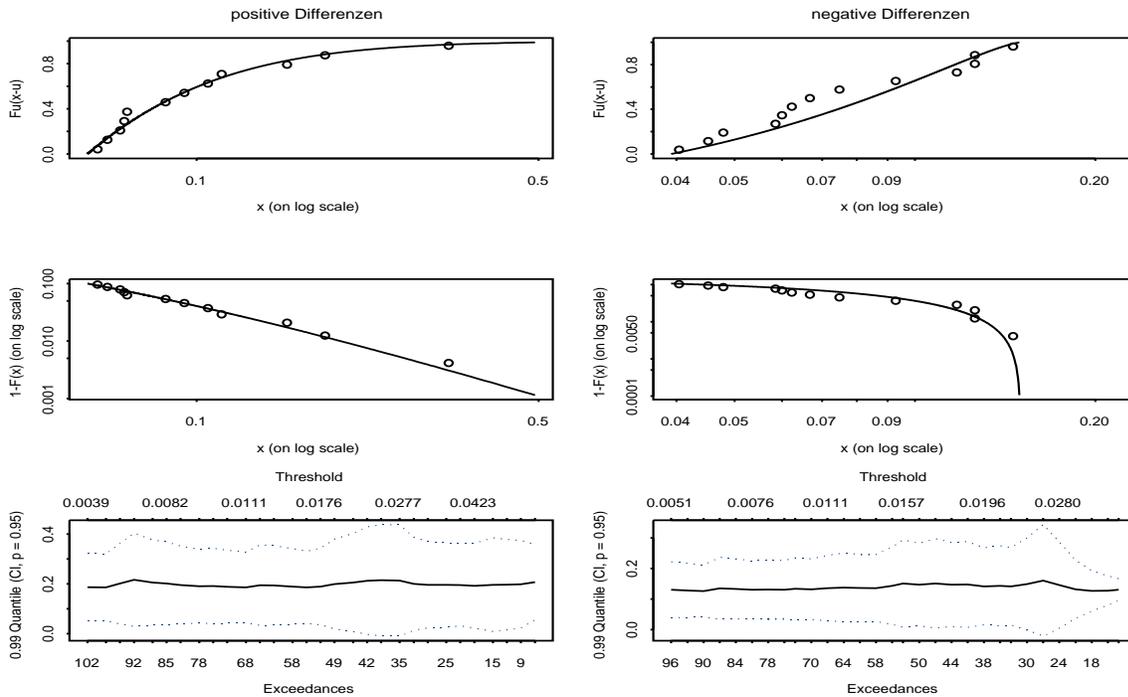


Abbildung 3.16: **GPD**-Fit der 30 Tages EUR Swap Sätze, links für die positiven und rechts für die negativen Differenzen.

Oben: Fit für $F_u(x+u)$.

Mitte: Tail-Fit für $\bar{F}(x+u)$.

Unten: 99%-Quantilschätzer.

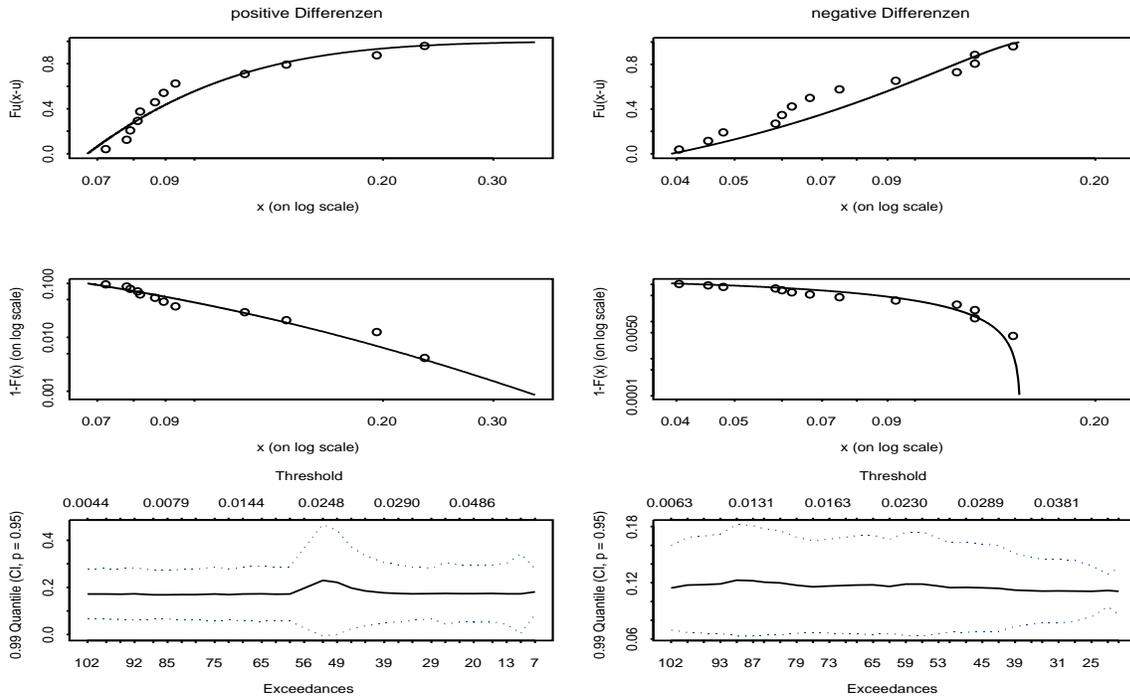


Abbildung 3.17: GPD-Fit der 360 Tages EUR Swap Sätze.

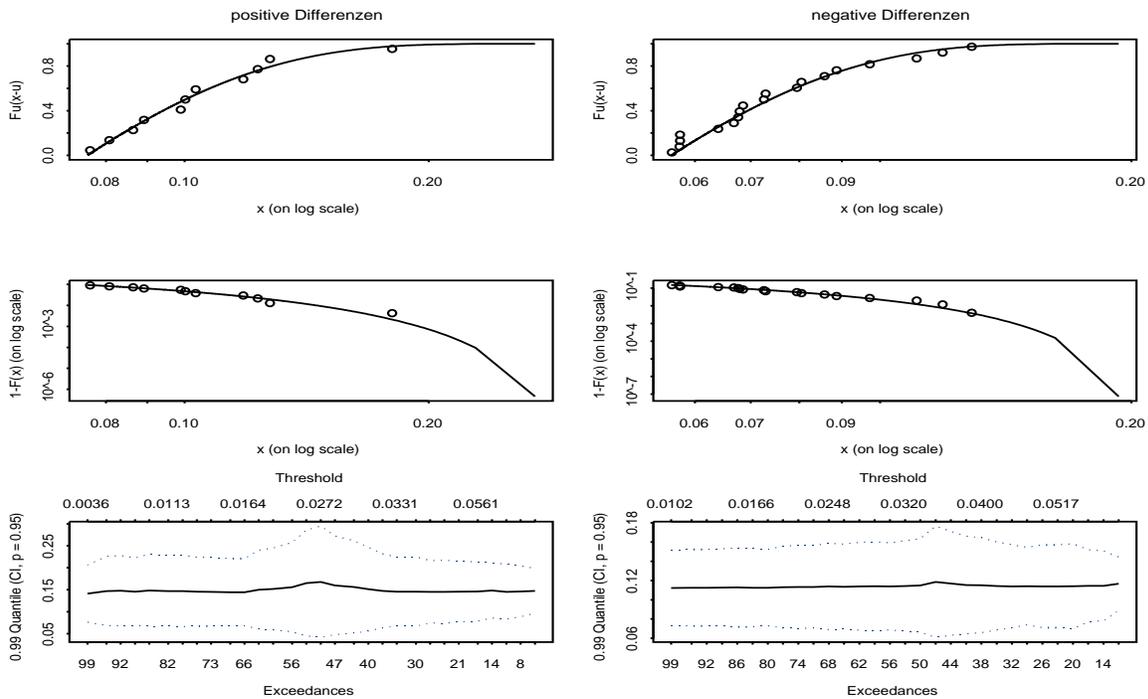
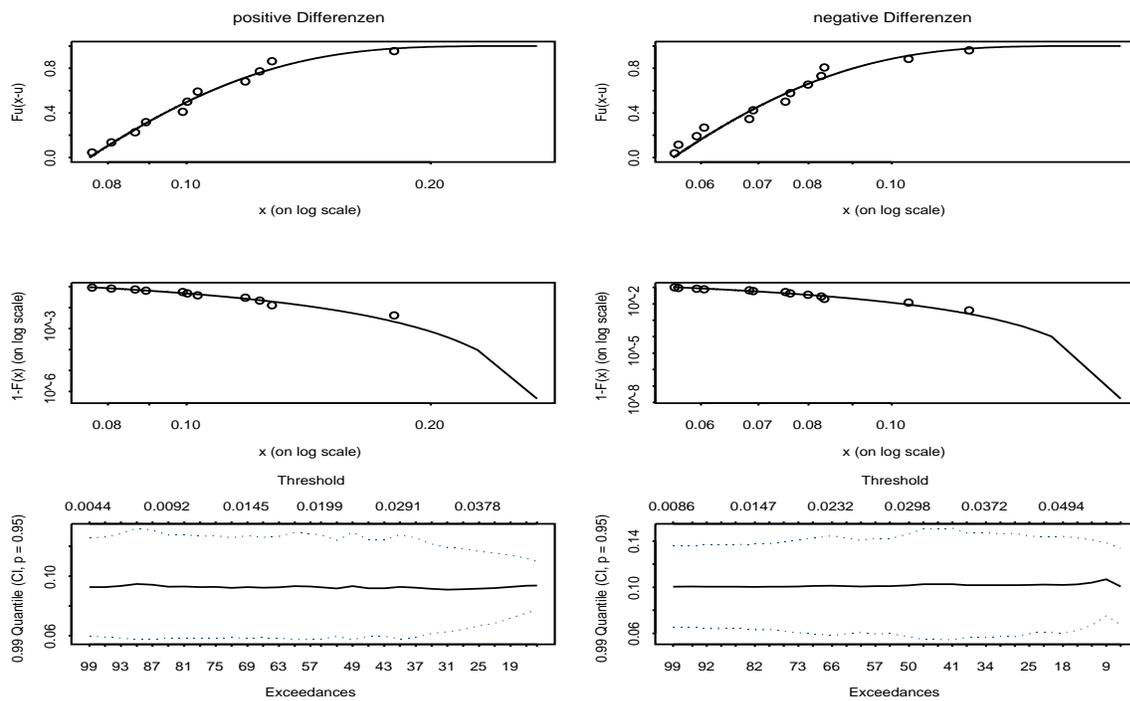


Abbildung 3.18: GPD-Fit der 3 Jahres EUR Swap Sätze.

Abbildung 3.19: **GPD**-Fit der 8 Jahres EUR Swap Sätze.

Kapitel 4

Abhängigkeitsstruktur mit Copula

In diesem Kapitel verzichten wir auf Beweise und verweisen auf Embrechts, Lindskog und McNeill (2001) (ELM [7]). Im folgenden wird ein Vektor $(t_1, \dots, t_m)^T$ mit \mathbf{t} notiert. Dieses Kapitel beschäftigt sich mit einer bestimmten Verteilungsklasse, den sogenannten Copula. In Sklars Theorem wird sich herausstellen, daß mit den Copula die Abhängigkeitsstruktur einer multivariaten Verteilung repräsentiert werden kann.

4.1 Copula - Einführung

Definition 4.1 (*H*-Volumen) Seien S_1, \dots, S_m nichtleere Teilmengen von $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$. Sei H eine reelle Funktion $H : S_1 \times \dots \times S_m \rightarrow \mathbb{R}$ und sei $B = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ ein m -Quader mit Ecken in $\text{Dom}H = S_1 \times \dots \times S_m$. Dann ist das H -Volumen von B definiert durch

$$V_H(B) = \sum_{\mathbf{c} \in B} \text{sgn}(\mathbf{c})H(\mathbf{c}),$$

wobei die Summe über alle Ecken \mathbf{c} von B genommen wird, und $\text{sgn}(\mathbf{c})$ definiert ist durch

$$\text{sgn}(\mathbf{c}) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \text{card}\{k : c_k = a_k, k = 1, \dots, m\} \text{ gerade,} \\ -1, & \text{wenn } \text{card}\{k : c_k = a_k, k = 1, \dots, m\} \text{ ungerade.} \end{cases}$$

□

Definition 4.2 (*m*-steigend) Eine reelle Funktion H von m Variablen heißt *m*-steigend, wenn $V_H(B) \geq 0$ für alle m -Quader B mit Ecken in $\text{Dom}H$. □

Definition 4.3 (geerdete Funktion H , Ränder von H) Sei $\text{Dom}H = S_1 \times \dots \times S_m$, mit $S_i \subseteq \overline{\mathbb{R}} \ \forall i$ und $H : \text{Dom}H \rightarrow \mathbb{R}$, wobei jedes S_k ein kleinstes Element a_k hat. H heißt

geerdet, wenn $H(\mathbf{t}) = 0$ für alle $\mathbf{t} \in \text{Dom}H$ mit $t_k = a_k$ für mindestens ein k . Wenn alle $S_k \neq \emptyset$ und ihre grössten Elemente b_k sind, dann hat H Ränder und die eindimensionalen Ränder von H sind die Funktionen H_k mit $\text{Dom}H_k = S_k$ und für alle $x \in S_k$ ist

$$H_k(x) = H(b_1, \dots, b_{k-1}, x, b_{k+1}, \dots, b_m).$$

Höherdimensionale Ränder sind entsprechend definiert. Eindimensionale Ränder heissen Ränder. \square

Lemma 4.4 Seien S_1, \dots, S_m nichtleere Teilmengen von $\overline{\mathbb{R}}$ und sei H eine geerdete m -steigende Funktion mit Definitionsbereich $\text{Dom}H = S_1 \times \dots \times S_m$. Dann ist H steigend in jedem Argument, d.h. wenn

$$(t_1, \dots, t_{k-1}, x, t_{k+1}, \dots, t_m), (t_1, \dots, t_{k-1}, y, t_{k+1}, \dots, t_m) \in \text{Dom}H \text{ und } x \leq y,$$

dann gilt

$$H(t_1, \dots, t_{k-1}, x, t_{k+1}, \dots, t_m) \leq H(t_1, \dots, t_{k-1}, y, t_{k+1}, \dots, t_m).$$

\square

Lemma 4.5 Seien S_1, \dots, S_m nichtleere Teilmengen von $\overline{\mathbb{R}}$ und sei H eine geerdete m -steigende Funktion mit Definitionsbereich $\text{Dom}H = S_1 \times \dots \times S_m$. Die Ränder H_k von H seien notiert, wie in Definition 4.3. Wenn $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)^T$ und $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)^T$ beliebige Punkte in $\text{Dom}H$ sind, dann gilt

$$|H(\mathbf{x}) - H(\mathbf{y})| \leq \sum_{k=1}^m |H_k(x_k) - H_k(y_k)|.$$

\square

Definition 4.6 (m -dimensionale Verteilungsfunktion) Eine m -dimensionale Verteilungsfunktion ist eine Funktion H mit Definitionsbereich $\overline{\mathbb{R}}^m$, so daß H geerdet und m -steigend ist sowie $H(\infty, \dots, \infty) = 1$. \square

Aus Lemma 4.4 folgt, daß die Ränder einer m -dimensionalen **VF** wieder **VFn** sind. Wir bezeichnen diese sogenannten Rand**VFn** mit F_1, \dots, F_m .

Definition 4.7 (Copula) Eine m -dimensionale Copula (m -Copula) ist eine Funktion $C : [0, 1]^m \rightarrow [0, 1]$ mit

(i) C ist geerdet und m -steigend.

(ii) C hat die Ränder C_k , $k = 1, \dots, m$, mit $C_k(u) = u$ für alle $u \in [0, 1]$.

□

Bemerkung 4.8 (i) Für jede m -Copula C mit $m \geq 3$ ist für $k < m$ jeder k -dimensionale Rand von C eine k -Copula.

(ii) Äquivalent zu Definition 4.7 ist eine m -Copula eine Funktion $C : [0, 1]^m \rightarrow [0, 1]$ mit folgenden Eigenschaften:

(a) Für alle $\mathbf{u} \in [0, 1]^m$ ist $C(\mathbf{u}) = 0$, wenn mindestens eine Koordinate u_k gleich Null ist und $C(\mathbf{u}) = u_k$, wenn alle Koordinaten von \mathbf{u} gleich 1 sind, ausser u_k .

(b) Für alle \mathbf{a} und \mathbf{b} in $[0, 1]^m$ mit $a_i \leq b_i$ für alle i ist $V_C([\mathbf{a}, \mathbf{b}]) \geq 0$.

(iii) Weil eine Copula eine gemeinsame **VF** ist (auf $[0, 1]^m$), induziert eine Copula C ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $[0, 1]^m$ mittels

$$V_C([0, u_1] \times \dots \times [0, u_m]) = C(u_1, \dots, u_m).$$

Aus Definition 4.7 folgt, eine Copula C ist eine **VF** auf $[0, 1]^m$ mit gleichverteilten Rändern auf $[0, 1]$.

□

Aus Lemma 4.5 folgt das nächste Theorem.

Theorem 4.9 Sei C eine m -Copula. Dann gilt für alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in [0, 1]^m$,

$$|C(\mathbf{v}) - C(\mathbf{u})| \leq \sum_{k=1}^m |v_k - u_k|.$$

Folglich ist C gleichmäßig stetig auf $[0, 1]^m$.

□

Das folgende Theorem bildet die Grundlage für alle weiteren Überlegungen in Abschnitt 5 (*multivariate Extremwerttheorie*).

Theorem 4.10 (Satz von Sklar) Sei H eine m -dimensionale **VF** mit den Rand**VFn** F_1, \dots, F_m . Dann existiert eine m -Copula C , so daß für alle $\mathbf{x} \in \overline{\mathbb{R}}^m$,

$$H(x_1, \dots, x_m) = C(F_1(x_1), \dots, F_m(x_m)). \quad (4.1)$$

Wenn alle F_1, \dots, F_m stetig sind, ist C eindeutig; sonst ist C eindeutig bestimmt auf $\text{Ran}F_1 \times \dots \times \text{Ran}F_m$, dem Bild von H . Wenn umgekehrt C eine m -Copula ist und $F_1, \dots, F_m \mathbf{VF}\mathbf{n}$ sind, dann ist die in (4.1) definierte Funktion H eine m -dimensionale \mathbf{VF} mit $\text{Rand}\mathbf{VF}\mathbf{n}$ F_1, \dots, F_m . \square

Aus dem Sklars Theorem folgt für multivariate $\mathbf{VF}\mathbf{n}$, daß die univariaten Ränder und die multivariate Abhängigkeitsstruktur getrennt werden können. Die Abhängigkeitsstruktur wird durch eine Copula repräsentiert.

Korollar 4.11 Sei in der Situation von Sklars Theorem H eine m -dimensionale \mathbf{VF} mit $\text{Rand}\mathbf{VF}\mathbf{n}$ F_1, \dots, F_m und Copula C (entsprechend (4.1)). Dann gilt für alle $\mathbf{u} \in [0, 1]^m$,

$$C(u_1, \dots, u_m) = H(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_m^{-1}(u_m)).$$

\square

Definition 4.12 (Überlebenscopula) Sei H eine m -variate \mathbf{VF} mit Copula C und $\text{Rand}\mathbf{VF}\mathbf{n}$ F_1, \dots, F_m ,

$$\mathbb{P}\{X_1 \leq x_1, \dots, X_m \leq x_m\} = H(x_1, \dots, x_m) = C(F_1(x_1), \dots, F_m(x_m)).$$

Dann wird mit \bar{H} die Überlebensfunktion bezeichnet,

$$\mathbb{P}\{X_1 > x_1, \dots, X_m > x_m\} = \bar{H}(x_1, \dots, x_m).$$

Die Überlebenscopula \hat{C} wird eingeführt, mit

$$\bar{H}(x_1, \dots, x_m) = \mathbb{P}\{X_1 > x_1, \dots, X_m > x_m\} = \hat{C}(\bar{F}_1(x_1), \dots, \bar{F}_m(x_m)).$$

Im bivariaten Fall gilt

$$\hat{C}(u, v) = 1 - u - v + C(u, v), \quad u, v \in [0, 1],$$

\square

Bemerkung 4.13 Sei $\alpha \equiv 1 - \text{id}$ eine streng monoton fallende Transformation. Somit ist $\alpha U_i \sim \mathbf{U}(0, 1)$, für $U_i \sim \mathbf{U}(0, 1)$, $i = 1, \dots, m$ und es gilt

$$\begin{aligned} \hat{C}_{U_1, \dots, U_m}(u_1, \dots, u_m) &= \mathbb{P}\{U_1 > 1 - u_1, \dots, U_m > 1 - u_m\} \\ &= \mathbb{P}\{\alpha U_1 < u_1, \dots, \alpha U_m < u_m\} \\ &= C_{\alpha U_1, \dots, \alpha U_m}(u_1, \dots, u_m). \end{aligned}$$

Folglich ist die Überlebenscopula \hat{C} eine Copula. \square

Theorem 4.14 Sei $(X_1, \dots, X_m)^T$ ein Vektor von stetigen \mathbf{ZVn} mit Copula C , so sind X_1, \dots, X_m genau dann unabhängig, wenn $C = \Pi^m$ mit $\Pi^m(u_1, \dots, u_m) = u_1 \cdots u_m$. \square

Eine angenehme Eigenschaft einer Copula ist die Invarianz gegenüber streng monoton steigenden Transformationen der \mathbf{ZVn} . Im Falle von streng monotonen Transformationen der \mathbf{ZVn} kann die zugehörige Copula einfach aus der ursprünglichen Copula berechnet werden. Wenn die \mathbf{VF} einer $\mathbf{ZV} X$ stetig ist und wenn α eine streng monotone Funktion ist, deren Definitionsbereich das Bild $\text{Ran}X$ enthält, so ist auch die \mathbf{VF} der $\mathbf{ZV} \alpha(X)$ stetig.

Theorem 4.15 Sei $(X_1, \dots, X_m)^T$ ein Vektor von stetigen \mathbf{ZVn} mit Copula C . Wenn $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ streng monoton steigende Funktionen sind, jeweils auf $\text{Ran}X_1, \dots, \text{Ran}X_n$, dann hat auch der Vektor $(\alpha_1(X_1), \dots, \alpha_m(X_m))^T$ Copula C . \square

Theorem 4.16 Sei $(X_1, \dots, X_m)^T$ ein Vektor von stetigen \mathbf{ZVn} mit Copula C_{X_1, \dots, X_m} . Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ streng monotone Funktionen auf $\text{Ran}X_1, \dots, \text{Ran}X_n$ und $C_{\alpha_1(X_1), \dots, \alpha_m(X_m)}$ sei die Copula von $(\alpha_1(X_1), \dots, \alpha_m(X_m))^T$. Weiter sei α_k streng monoton fallend für ein k (o.E. sei $k = 1$). Dann gilt

$$\begin{aligned} C_{\alpha_1(X_1), \alpha_2(X_2), \dots, \alpha_m(X_m)}(u_1, u_2, \dots, u_m) &= C_{\alpha_2(X_2), \dots, \alpha_m(X_m)}(u_2, \dots, u_m) \\ &\quad - C_{X_1, \alpha_2(X_2), \dots, \alpha_m(X_m)}(1 - u_1, u_2, \dots, u_m). \end{aligned}$$

\square

Beispiel 4.17 (Bivariater Fall) Sei α_1 streng monoton fallend und α_2 streng monoton steigend. Dann ist

$$\begin{aligned} C_{\alpha_1(X_1), \alpha_2(X_2)}(u_1, u_2) &= u_2 - C_{X_1, \alpha_2(X_2)}(1 - u_1, u_2) \\ &= u_2 - C_{X_1, X_2}(1 - u_1, u_2). \end{aligned}$$

Seien nun α_1 und α_2 streng monoton fallend. Dann gilt

$$\begin{aligned} C_{\alpha_1(X_1), \alpha_2(X_2)}(u_1, u_2) &= u_2 - C_{X_1, \alpha_2(X_2)}(1 - u_1, u_2) \\ &= u_2 - (1 - u_1 - C_{X_1, X_2}(1 - u_1, 1 - u_2)) \\ &= u_1 + u_2 - 1 + C_{X_1, X_2}(1 - u_1, 1 - u_2). \end{aligned}$$

Somit ist die Copula $C_{\alpha_1(X_1), \alpha_2(X_2)}$ von $(\alpha_1(X_1), \alpha_2(X_2))^T$ für α_1 und α_2 streng monoton fallend gleichzeitig die Überlebenscopula \widehat{C} von $(X_1, X_2)^T$,

$$\overline{H}(x_1, x_2) = \mathbb{P}\{X_1 > x_1, X_2 > x_2\} = \widehat{C}(\overline{F}_1(x_1), \overline{F}_2(x_2)).$$

\square

4.2 Tail-dependence als Abhängigkeitsmaß

Um Wahrscheinlichkeiten für extreme Ereignisse bestimmen zu können, werden Kenntnisse über die Abhängigkeitsstruktur in den Tails benötigt. Ein gängiges Modell einer Abhängigkeitsstruktur ist die lineare Korrelation:

Definition 4.18 (Lineare Korrelation) *Seien X und Y zwei \mathbf{ZVn} mit $\text{var}X, \text{var}Y < \infty$. Der lineare Korrelationskoeffizient von X und Y ist dann*

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{var}X} \sqrt{\text{var}Y}} \in [-1, 1]. \quad (4.2)$$

□

Lineare Korrelation ist ein Maß linearer Abhängigkeit und $|\rho(X, Y)| = 1 \Leftrightarrow Y \stackrel{f.s.}{=} aX + b$ mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Eine weitere Eigenschaft der linearen Korrelation ist die Invarianz gegenüber streng monoton steigenden *linearen* Transformationen. In der folgenden Abbildung 4.1 wird ein Nachteil der linearen Korrelation als Abhängigkeitsmaß deutlich. Dort sind drei Realisierungen von Zufallsvektoren $(\mathbf{N}(0, 1), \mathbf{N}(0, 1))^T$ geplottet mit gleicher Korrelation $\rho = 0.85$, aber mit drei unterschiedlichen Abhängigkeitsstrukturen. Im linken Graphen liegt im oberen Tailbereich ein starke Abhängigkeit vor, aber keine im unteren Tail. In der Mitte besteht nur in den unteren Tails Abhängigkeit und im rechten Graphen sind mittelstarke Abhängigkeiten in den unteren und oberen Tails vorhanden. Bei der Beschreibung extremer Ereignisse interessiert besonders der äussere Bereich der Verteilung, über den der Korrelationskoeffizient manchmal gar keine Informationen bezüglich der Abhängigkeit enthält.

4.2.1 Upper/lower Tail dependence

Das Konzept der *Tail dependence* bezieht sich auf den Grad der Abhängigkeit im oberen rechten Quadranten bzw. im unteren linken Quadranten der bivariaten Verteilung und ist somit relevant, um Abhängigkeiten von extremen Ereignissen zu untersuchen. Aus Sklars Theorem 4.10 folgt die Trennbarkeit von Abhängigkeitsstruktur und Randverteilungen, somit ist die Tail dependence eine Eigenschaft der Copula, und wegen Theorem 4.15 ist die Tail dependence invariant unter streng monoton steigenden Transformationen der \mathbf{ZVn} . Die Wahrscheinlichkeit, daß die beide \mathbf{ZVn} X und Y in der Nähe des rechten Endpunktes der Verteilung sind, geht gegen Null. Daher wird für die Messung der *upper Tail dependence* das bedingte Ereignis betrachtet, daß die \mathbf{ZV} Y über einem grossen Quantil liegt unter der Bedingung, X liegt über dem grossen Quantil:

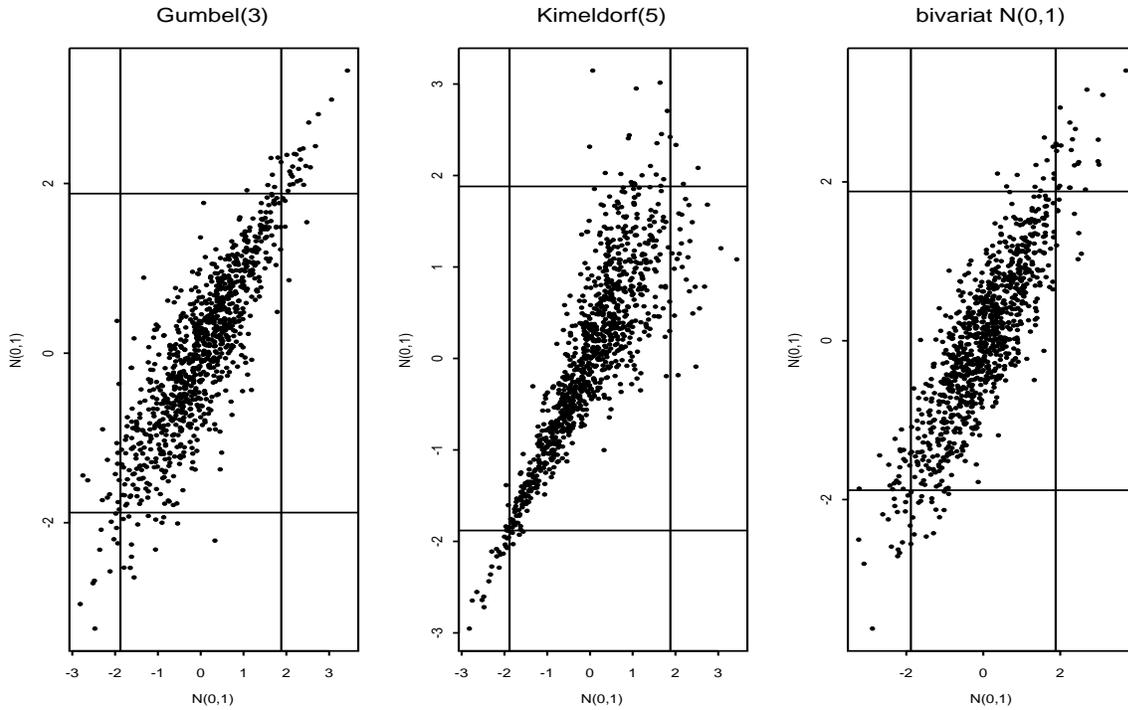


Abbildung 4.1: Simulierte **ZVn** von 3 Verteilungen mit identischen Rand**VF**n $N(0,1)$, gleicher Korrelation $\rho = 0.85$, aber unterschiedlichen Abhängigkeitsstrukturen.

Links: Gumbel-Copula $C_\theta(u, v) = \exp \left\{ - \left[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta \right]^{1/\theta} \right\}$ mit $\theta = 3$.

Mitte: Kimeldorf-Copula $C_\delta(u, v) = (u^{-\delta} + v^{-\delta} - 1)^{-1/\delta}$ mit $\delta = 5$.

Rechts: Bivariate Normalverteilung mit $\rho = 0.85$.

Definition 4.19 (Tail Dependence) Seien X und Y stetige **ZVn** mit **VF**n F und G . Der Koeffizient der upper Tail dependence von X und Y ist gegeben durch

$$\lambda_U := \lim_{u \nearrow 1} \mathbb{P} \left\{ Y > G^{-1}(u) \mid X > F^{-1}(u) \right\}, \quad (4.3)$$

sofern der Grenzwert $\lambda_U \in [0, 1]$ existiert. Wenn $\lambda_U \in (0, 1]$, dann heißen X und Y asymptotisch abhängig im oberen Tail, wenn $\lambda_U = 0$ heißen X und Y asymptotisch unabhängig im oberen Tail. Entsprechend wird die lower Tail dependence definiert durch

$$\lambda_L := \lim_{u \searrow 0} \mathbb{P} \left\{ Y < G^{-1}(u) \mid X < F^{-1}(u) \right\}, \quad (4.4)$$

sofern $\lambda_L \in [0, 1]$ existiert. □

Wegen

$$\mathbb{P} \left\{ Y > G^{-1}(u) \mid X > F^{-1}(u) \right\}$$

$$= \frac{1 - \mathbb{P}\{X \leq F^{-1}(u)\} - \mathbb{P}\{Y \leq G^{-1}(u)\} + \mathbb{P}\{X \leq F^{-1}(u), Y \leq G^{-1}(u)\}}{1 - \mathbb{P}\{X \leq F^{-1}(u)\}},$$

kann mit Korrolar 4.11 eine äquivalente Definition der Tail dependence mittels Copula gegeben werden:

Definition 4.20 Wenn für die bivariate Copula C

$$\lambda_U = \lim_{u \nearrow 1} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u}$$

existiert, so hat C upper Tail dependence für $\lambda_U \in (0, 1]$ und upper Tail independence für $\lambda_U = 0$. Wenn für die Copula C

$$\lambda_L = \lim_{u \searrow 1} \frac{C(u, u)}{u}$$

existiert, dann hat C lower Tail dependence für $\lambda_L \in (0, 1]$ bzw. independence für $\lambda_L = 0$. \square

Beispiel 4.21 Betrachte die bivariate *Gumbel* Familie,

$$C_\theta(u, v) = \exp \left\{ - \left[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta \right]^{1/\theta} \right\},$$

für $\theta \geq 1$. Dann ist

$$\lambda_U = \lim_{u \nearrow 1} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u} = 2 - \lim_{u \nearrow 1} 2^{1/\theta} u^{2^{1/\theta}-1} = 2 - 2^{1/\theta}.$$

Folglich hat C_θ für $\theta > 1$ upper Tail dependence. Wegen

$$\lambda_L = \lim_{u \searrow 0} \frac{C(u, u)}{u} = \lim_{u \searrow 0} u^{2^{1/\theta}-1} = 0,$$

hat C_θ für $\theta > 1$ keine lower Tail dependence. \square

Bemerkung 4.22 Die Überlebenscopula \widehat{C} von zwei **ZVn** mit Copula C ist nach Definition 4.12 gegeben durch

$$\widehat{C}(u, v) = u + v - 1 + C(1 - u, 1 - v).$$

Folglich gilt

$$\lambda_U^{\widehat{C}} = \lim_{u \nearrow 1} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u} = \lim_{u \nearrow 1} \frac{\widehat{C}(1 - u, 1 - u)}{1 - u} = \lim_{u \searrow 0} \frac{\widehat{C}(u, u)}{u} = \lambda_L^{\widehat{C}}.$$

Der Koeffizient der upper Tail dependence von C ist somit gleich dem lower Tail dependence Parameter von \widehat{C} und umgekehrt. Für eine multivariate Copula gilt diese Gleichheit $\lambda_{U,ij}^C = \lambda_{L,ij}^{\widehat{C}}$ ebenfalls, da zur Berechnung der Tail dependence Indizes die bivariaten Randverteilungen verwendet werden und es gilt:

$$\widehat{C}(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1, u_j, 1, \dots, 1) = u_i + u_j - 1 + C(1, \dots, 1, 1 - u_i, 1, \dots, 1, 1 - u_j, 1, \dots, 1).$$

Für

$$\mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_m \leq x_m) = F(x_1, \dots, x_m) = C(F_1(x_1), \dots, F_m(x_m))$$

sei

$$\mathbb{P}(X_1 > x_1, \dots, X_m > x_m) = \overline{F}(x_1, \dots, x_m) = \widehat{C}(\overline{F}_1(x_1), \dots, \overline{F}_m(x_m)).$$

Für die upper Tail dependence Indizes $\lambda_{U,ij}^C$ von Copula C und den lower Tail dependence Indizes $\lambda_{L,ij}^{\widehat{C}}$ von Copula \widehat{C} gilt Gleichheit:

$$\lambda_{L,ij}^{\widehat{C}} = \lambda_{U,ij}^C \quad \forall i, j. \quad (4.5)$$

Wegen Bemerkung 4.13 ist \widehat{C} eine Copula und somit kann die Überlebensfunktion $\mathbb{P}\{X_1 > x_1, \dots, X_m > x_m\}$ für grosse Quantile mit einer Copula \widehat{C} dargestellt werden, für die (4.5) erfüllt ist, wobei (X_1, \dots, X_m) die Copula C hat. \square

Alternative Berechnung von λ_U

Um alternativ λ_U als Limes einer asymptotisch äquivalenten Funktion zu erhalten, wird nachfolgende Beziehung verwendet:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{V > u | U > u\} &= \frac{\mathbb{P}\{U > u, V > u\}}{\mathbb{P}\{U > u\}} \\ &= \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u} = 2 - \frac{1 - C(u, u)}{1 - u} \\ &\sim 2 - \frac{\ln C(u, u)}{\ln u}, \text{ für } u \nearrow 1. \end{aligned}$$

Sei $\lambda_U(u)$ definiert mit

$$\lambda_U(u) = 2 - \frac{\ln \mathbb{P}\{U < u, V < u\}}{\ln \mathbb{P}\{U < u\}}, \quad u \in [0, 1],$$

mit den zu (U, V) transformierten Zufallsvektor (X, Y) . Folglich gilt

$$\lambda_U = \lim_{u \nearrow 1} \lambda_U(u).$$

Für unabhängige Variablen gilt $\lambda_U(u) = 0$, für perfekt abhängige gilt $\lambda_U(u) = 1$ und für Extremcopula C_θ (siehe Kapitel 5) gilt $\lambda_U(u) = c_\theta$, ist unabhängig von u (gilt z.B. für Beispiel 4.21).

Allerdings bedeutet asymptotische Unabhängigkeit nicht vollständige Unabhängigkeit. Die bivariate Normalverteilung hat z.B. für alle Korrelationen $\rho \neq 1$ die upper Tail dependence $\lim_{u \nearrow 1} \lambda_U(u) = 0$, obwohl in den endlichen Tailbereichen durchaus Abhängigkeiten zu erkennen sind. Dies zeigt sich in Abbildung 4.1: Links (Gumbel-Copula $C_{\theta=3}$) mit $\lambda_U \approx 0.74$, $\lambda_L = 0$, in der Mitte (Kimeldorf-Copula $C_{\delta=5}$) mit $\lambda_U = 0$, $\lambda_L \approx 0.87$ und rechts die bivariate Normalverteilung mit $\rho = 0.85$ ohne upper bzw. lower Tail dependence. In der Abbildung sind mit den horizontalen bzw. vertikalen Linien die univariaten 97% bzw. 3% Quantile eingezeichnet. Dabei fällt auf, daß die Abhängigkeit in den oberen bzw. unteren Tails der Normalverteilung grösser ist, als bei der Gumbel- bzw. Kimeldorfcopula, obwohl in den jeweiligen Tails keine Abhängigkeit vorhanden ist. Um diesen Nachteil des Abhängigkeitsmaßes λ_U und λ_L zu überwinden wird jetzt ein weiteres Abhängigkeitsmaß $\overline{\lambda_U}$ eingeführt, ein Maß über den Grad der *asymptotischen Unabhängigkeit*.

Abhängigkeitsmaß $\overline{\lambda_U}$

Durch aktuelle Forschungen stellte sich die Bedeutung der Klasse von asymptotisch unabhängigen Verteilungen in der multivariaten Extremwerttheorie heraus. Wie oben im Beispiel mit der Normalverteilung gezeigt, gilt in dieser Klasse $\lambda_U = 0$, somit enthält das Maß λ_U in diesem Fall keine Information über den *Grad der Abhängigkeit kurz vor x_F , dem rechten Endpunkt der Verteilung* – extreme Quantile werden immer für $u < 1$ geschätzt; dort kann trotz $\lambda_U = 0$ dennoch nahe 1 Abhängigkeit bestehen. Um diese Abhängigkeit zu messen wird ein weiteres Abhängigkeitsmaß $\overline{\lambda_U}$ definiert,

$$\overline{\lambda_U}(u) = \frac{2 \ln \mathbb{P}\{U > u\}}{\ln \mathbb{P}\{U > u, V > u\}} - 1 = \frac{2 \ln(1-u)}{\ln \overline{C}(u, u)} - 1, \quad u \in [0, 1],$$

mit $\overline{\lambda_U}(u) \in (-1, 1]$ für alle $u \in [0, 1]$. Der Limes wird analog zu λ_U definiert mit

$$\overline{\lambda_U} = \lim_{u \nearrow 1} \overline{\lambda_U}(u) \in [-1, 1].$$

Für asymptotisch abhängige **ZVn** gilt immer $\overline{\lambda_U} = 1$. Nützlicher ist dieses Maß für asymptotisch unabhängige Variablen, bei denen $\overline{\lambda_U}$ mit der Stärke der Abhängigkeit wächst. Für exakt unabhängige Variablen gilt $\overline{\lambda_U}(u) = 0 \quad \forall u \in [0, 1]$, somit $\overline{\lambda_U} = 0$. Im Falle der bivariaten Normalverteilung gilt $\overline{\lambda_U} = \rho$: $\overline{\lambda_U}(u)$ konvergiert also gegen den Korrelationskoeffizienten des Zufallsvektors (X, Y) . Der Parameter $\overline{\lambda_U}$ ist ein Maß für die Abhängigkeit *kurz vor $u = 1$* .

4.2.2 Schätzer für die Tail dependence

Die hier beschriebenen Schätzer sind aus Poon, Rockinger und Tawn (2001) (PRT [11]) entnommen. Die Idee hinter diesen Schätzern ist, zunächst zwei \mathbf{ZVn} zu Einheits-Fréchet \mathbf{ZVn} zu transformieren. Es kann dann gezeigt werden, daß die gemeinsame \mathbf{VF} der beiden \mathbf{ZVn} Fréchet-Tails hat. Danach wird mit dem Hillschätzer aus Definition 3.35 ein Schätzer für die Tail dependence bestimmt. Aus der univariaten Extremwerttheorie folgt mit Theorem 3.9 für eine $\mathbf{ZV} Z$ mit Fréchet-Tail ($\xi > 0$), daß der Tail der $\mathbf{ZV} Z$ über einer hohen Schwelle u approximiert wird durch

$$\mathbb{P}\{Z > z\} = \mathcal{L}(z)z^{-1/\xi} \text{ für } z > u \text{ und } \mathcal{L} \in \mathcal{R}_0. \quad (4.6)$$

Da nicht mehr Informationen vorliegen, wird die langsam variierende Funktion \mathcal{L} als konstant für alle $z > u$ betrachtet, $\mathcal{L}(z) = c$. In Definition 3.35 ist der Hillschätzer für $\xi > 0$ und c gegeben mit

$$\hat{\xi} = \frac{1}{n_u} \sum_{j=1}^{n_u} \ln \left(\frac{z^{(j)}}{u} \right), \quad (4.7)$$

$$\hat{c} = \frac{n_u}{n} u^{1/\hat{\xi}}, \quad (4.8)$$

wobei $z_{(n_u)} < \dots < z_{(1)}$ die n_u Beobachtungen der $\mathbf{ZV} Z > u$ sind. Sei $S = -1/\ln(F_X(X))$, wobei F_X die \mathbf{VF} der $\mathbf{ZV} X$ ist. Wegen

$$\mathbb{P} \left\{ -\frac{1}{\ln F_X(X)} > x \right\} = \mathbb{P} \{ F_X(X) > e^{-1/x} \} = 1 - e^{-1/x}$$

hat S die Einheits-Fréchetverteilung Φ_1 . Der Zufallsvektor (X, Y) wird transformiert in den Zufallsvektor (S, T) mit Einheits-Fréchet Rand \mathbf{VFn} mittels

$$S = -1/\ln(F_X(X)) \text{ und } T = -1/\ln(F_Y(Y)),$$

wobei $F_X(X)$ bzw. $F_Y(Y)$ die Rand \mathbf{VFn} der $\mathbf{ZVn} X$ bzw. Y sind. Folglich gilt

$$\mathbb{P}\{S > s\} = \mathbb{P}\{T > s\} \sim s^{-1} \text{ für } s \rightarrow \infty. \quad (4.9)$$

Da $-1/\ln F(\cdot)$ streng monoton steigend ist, hat wegen Theorem 4.15 (S, T) dieselbe Abhängigkeitsstruktur, wie (X, Y) . In der Praxis erhält man F_X und F_Y im mittleren Tailbereich aus den empirischen \mathbf{VFn} der einzelnen \mathbf{ZVn} , im oberen Tailbereich durch die gefittete \mathbf{VFn} aus (3.47). Für die zu untersuchenden Daten der Swap Sätze können nach Kapitel 2.3 die positiven bzw. negativen Tagesdifferenzen im mittleren Tailbereich

jeweils mit der Exponentialverteilung modelliert werden mit dem **MLE** $(\overline{X}_n^\pm)^{-1}$ für den Parameter λ der Verteilung $\mathbf{exp}(\lambda)$. Die geschätzte gemeinsame Verteilung der Tagesdifferenzen der Swap Sätze ist

$$\widehat{\mathbb{P}}\{X \leq x\} = \widehat{\mathbb{P}}\{X < 0\}e^{\widehat{\lambda}_- x^-} + \widehat{\mathbb{P}}\{X \geq 0\} \left(1 - e^{-\widehat{\lambda}_+ x^+}\right), \quad (4.10)$$

wobei $\widehat{\lambda}_- = -\overline{X}^-$ und $\widehat{\lambda}_+ = \overline{X}^+$ die **MLE** der Parameter λ sind, dem Parameter der **VF** $\mathbf{exp}(\lambda)$, jeweils für die negativen und positiven Differenzen.

Gesucht wird jetzt ein Schätzer für $\overline{\lambda}_U$ von S und T , den zur Fréchetverteilung Φ_1 transformierten **ZVn** X und Y :

$$\overline{\lambda}_U = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{2 \ln \mathbb{P}\{S > s\}}{\ln \mathbb{P}\{S > s, T > s\}} - 1.$$

In Bruun&Tawn [2] wurde ausgearbeitet, daß unter schwachen Bedingungen gilt,

$$\mathbb{P}\{S > s, T > s\} = \mathcal{L}(s)s^{-1/\eta}, \quad \text{für } s \rightarrow \infty, \quad (4.11)$$

wobei $0 < \eta \leq 1$ eine Konstante ist und $\mathcal{L} \in \mathcal{R}_0$. Folglich gilt wegen (4.9) und (4.11)

$$\begin{aligned} \overline{\lambda}_U &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{2 \ln \mathbb{P}\{S > s\}}{\ln \mathbb{P}\{S > s, T > s\}} - 1 \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{-2 \ln s}{\ln \mathcal{L}(s) - \frac{1}{\eta} \ln s} - 1 \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} 2\eta \frac{\ln s}{\ln s - \eta \ln \mathcal{L}(s)} - 1 \\ &= 2\eta - 1. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Wenn $\overline{\lambda}_U = 1$ (entspricht $\eta = 1$), dann ist

$$\begin{aligned} \lambda_U &= \lim_{s \rightarrow \infty} \mathbb{P}\{T > s | S > s\} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}\{S > s, T > s\}}{\mathbb{P}\{S > s\}} \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{L}(s) \end{aligned} \quad (4.13)$$

Damit ergeben sich mit Schätzern für η und $\lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{L}(s)$ Schätzer für $\overline{\lambda}_U$ und λ_U . Definiere nun $Z = \min\{S, T\}$. Dann gilt mit (4.11)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{Z > z\} &= \mathbb{P}\{\min(S, T) > z\} = \mathbb{P}\{S > z, T > z\} \\ &= \mathcal{L}(z)z^{-1/\eta} = cz^{-1/\eta}, \quad \text{für } z > u, \end{aligned} \quad (4.14)$$

für eine hohe Schwelle u . Hier wird wieder angenommen, die langsam variierende Funktion $\mathcal{L} \in \mathcal{R}_0$ verhalte sich asymptotisch konstant. Aus dieser Darstellung und der univariaten Tail Darstellung (4.6) folgt, η ist der Tailindex der univariaten \mathbf{ZV} Z und kann mit dem Hillschätzer $\widehat{\xi}$ aus Gleichung (4.7), reduziert auf das Intervall $(0, 1]$, geschätzt werden. Der zugehörige Skalierungsparameter c wird ebenfalls mit (4.7) mittels \widehat{c} geschätzt. Unter der Annahme von unabhängigen Beobachtungen von Z ergibt sich der Schätzer von $\overline{\lambda_U}$ mit

$$\begin{aligned}\widehat{\lambda_U} &= \frac{2}{n_u} \left(\sum_{j=1}^{n_u} \ln \frac{z_{(j)}}{u} \right) - 1, \\ \text{var} \left(\widehat{\lambda_U} \right) &= \left(\widehat{\lambda_U} + 1 \right)^2 / n_u.\end{aligned}\tag{4.15}$$

Wenn $\widehat{\lambda_U}$ signifikant kleiner ist als 1, z.B. für $\widehat{\lambda_U} + 1.96\sqrt{\text{var}\widehat{\lambda_U}} < 1$ (für asymptotische Normalität des Hillschätzers siehe Theorem 3.36), dann werden die Variablen als asymptotisch unabhängig angesehen und es wird $\lambda_U = 0$ gewählt. Wenn es keinen Anhaltspunkt gibt um $\overline{\lambda_U} = 1$ zu verwerfen, wird λ_U unter der Annahme $\overline{\lambda_U} = \eta = 1$ geschätzt. Mit dem Hillschätzer \widehat{c} aus (4.7) ergibt sich der Schätzer von λ_U mit

$$\begin{aligned}\widehat{\lambda_U} &= un_u/n, \\ \text{var} \left(\widehat{\lambda_U} \right) &= u^2 n_u (n - n_u) / n^3.\end{aligned}\tag{4.16}$$

Da gilt,

$$\begin{aligned}\lambda_{L;(X,Y)} &= \lim_{u \searrow 0} \mathbb{P} \{ Y < G_Y^{-1}(u) | X < F_X^{-1}(u) \} \\ &= \lim_{u \searrow 0} \mathbb{P} \{ -Y > G_{-Y}^{-1}(1-u) | -X > F_{-X}^{-1}(1-u) \} \\ &= \lambda_{U;(-X,-Y)},\end{aligned}$$

können folglich für die Schätzung der lower Tail dependence λ_L die Schätzer $\widehat{\lambda_U}$ bzw. $\widehat{\lambda_U}$ des Zufallsvektors $(-X, -Y)$ verwendet werden. Um die Verlustwahrscheinlichkeit eines Portfolios für grosse Verluste abschätzen zu können, wird je nach Zusammensetzung des Portfolios die upper oder die lower Tail dependence benötigt. Der Hillschätzer stellt sich allerdings hier als unbrauchbar heraus, da er verzerrt ist. Aus diesem Grund wird - wie in der univariaten Extremwertanalyse - der **MLE** verwendet (siehe Abschnitt 3.2.4), um $\overline{\lambda_U}$ zu schätzen. Da in *EVIS* der Schätzer \widehat{c} für $\mathcal{L}(z)$ nicht implementiert ist, wird der in (4.16) angegebenen Schätzer \widehat{c} benutzt; allerdings verläuft der Schätzer in einigen Fällen nicht horizontal, sondern steigt mit abnehmender Anzahl der Ausreisser n_u stark an. Da

$\widehat{\lambda}_U$ die Abhängigkeit in den Tails schätzen soll, macht es Sinn, von den Schätzern nur diejenigen zu betrachten, die mit *wenigen* Ausreißern berechnet wurden, siehe (4.17). Zunächst sind in Abbildung 4.2 und 4.3 je zwei Swap Sätze gegeneinander geplottet – in Abbildung 4.2 die Tagesdifferenzen der 30 Tages EUR Swap Sätze gegen alle anderen EUR Swap Sätze und in Abbildung 4.3 die Tagesdifferenzen der 5 Jahres EUR Swap Sätze gegen die restlichen EUR Swap Sätze; die Linie in den Plots entspricht der Quantilwinkelhalbierenden (hier ist das jeweils die Regressionsgerade der empirischen \mathbf{VF}_n). An den Plots ist zu erkennen, was intuitiv vermutet wurde: Die Tailabhängigkeit zwischen zwei Swap Sätzen ist umso grösser, je weniger weit die Laufzeiten auseinander liegen und die Abhängigkeit zwischen zwei Swap Sätzen ist umso kleiner, je weiter die Laufzeiten auseinander liegen. Ebenfalls lassen sich geringere Abhängigkeiten zwischen zwei Swap Sätzen mit kürzeren, nahe beieinanderliegenden Laufzeiten beobachten, als zwischen zwei Swap Sätzen mit längeren, nahe beieinanderliegenden Laufzeiten.

In den Abbildungen 4.4 bis 4.7 sind die Schätzer für $\overline{\lambda}_U$ und λ_U der 30 Tages EUR Swap Sätze bzw. der 5 Jahres EUR Swap Sätze gegenüber den restlichen Swap Sätzen geplottet. Die Hypothese $\overline{\lambda}_U = 1$ kann in keinem der Plots verworfen werden (Abbildung 4.4 und 4.6) – allerdings sind die Schätzer $\widehat{\lambda}_U$ von zwei Swap Sätzen mit sehr verschiedenen Laufzeiten kleiner, als bei ähnlich langer Laufzeit. Die Schätzer $\widehat{\lambda}_U$ (Abbildung 4.5 und 4.7) sind schwieriger zu interpretieren, da bei Swap Sätzen mit ähnlichen Laufzeiten die Schätzer verzerrt sind und nicht eindeutig ist, welcher Wert gewählt werden soll. Da die Abhängigkeiten im ganz rechten Tail benötigt werden, sind die Schätzer im rechten Bereich der Plots die geeigneteren. Analog dazu sind in den Abbildungen 4.8 bis 4.11 die Schätzer für die lower Tail dependence Parameter geplottet, mit den gleichen Beobachtungen, wie bei den upper Tail dependence Schätzern.

Zum Schluß folgt in den Tabellen 4.1 und 4.2 eine vollständige Liste der upper und lower Tail dependence Parameter der EUR Swap Sätze. Bei den Plots für $\widehat{\lambda}_U$ bzw. $\widehat{\lambda}_L$ (Abbildung 4.5, 4.7 bzw. 4.9, 4.11) stellt sich wegen der Verzerrtheit der Schätzer die Frage, welcher Wert gewählt werden soll. Aus **ME**-Plots von $Z = \min\{S, T\}$, ergeben sich keine weiteren Hinweise, welcher Wert nun geeignet ist. In (4.16) wird der Schätzer $(\widehat{\lambda}_U)_N$ von λ_U in Abhängigkeit der Anzahl der $N = n_u$ Beobachtungen der \mathbf{ZV} $Z > u$ berechnet. Um einen relativ robusten Wert zu erhalten, verwenden wir als Schätzer für λ_U das

$$\widehat{\lambda}_U = \frac{1}{\text{card}\{N : 0.07n < N < 0.13n\}} \sum_{0.07n < N < 0.13n} (\widehat{\lambda}_U)_N, \quad (4.17)$$

den Mittelwert der Schätzer $(\widehat{\lambda}_U)_N$, wobei die Anzahl der Ausreisser N zwischen 7% und 13% der Stichprobenlänge n ist.

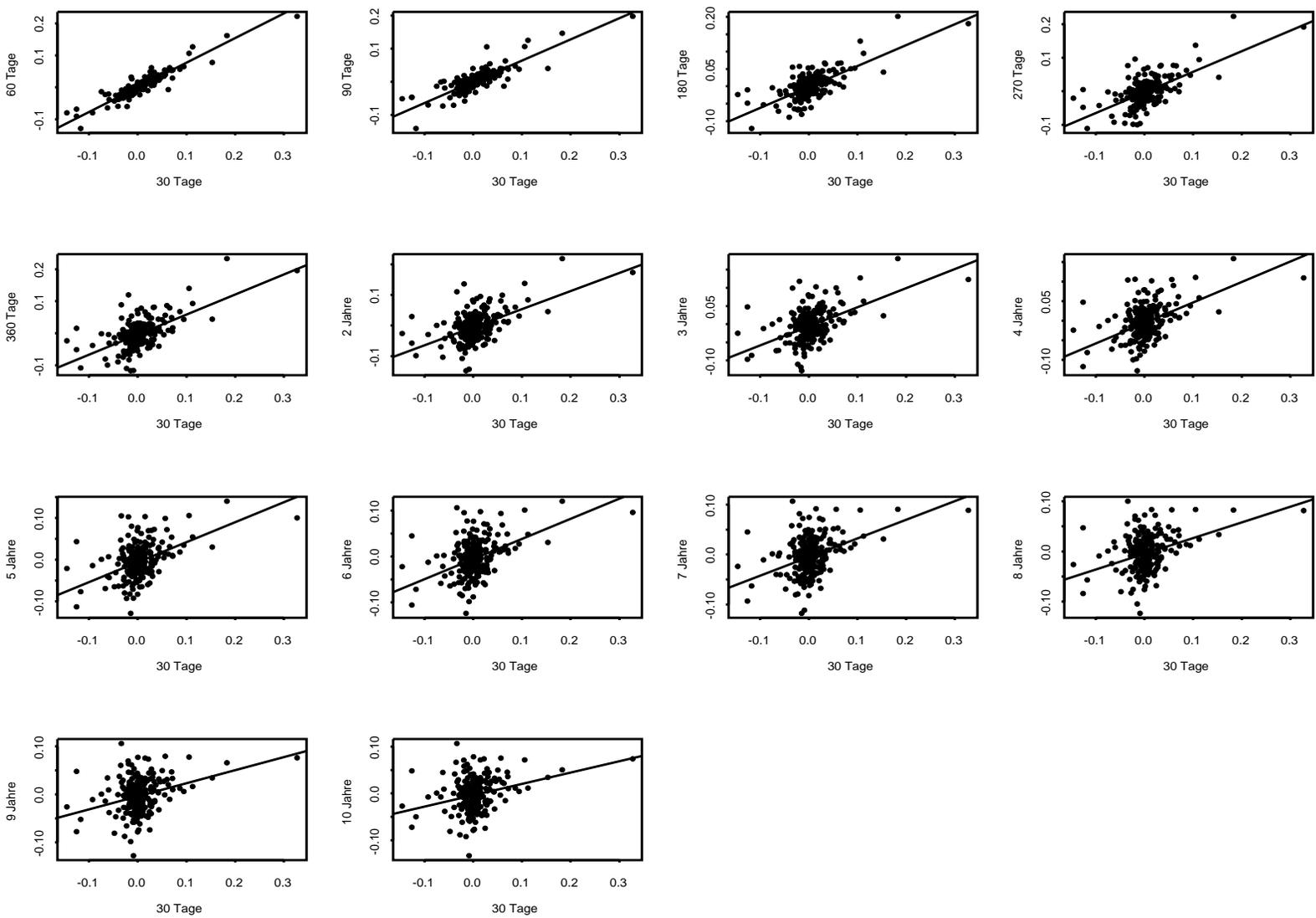


Abbildung 4.2: Plots der 30 Tages EUR Swap Sätze gegen die restlichen EUR Swap Sätze.

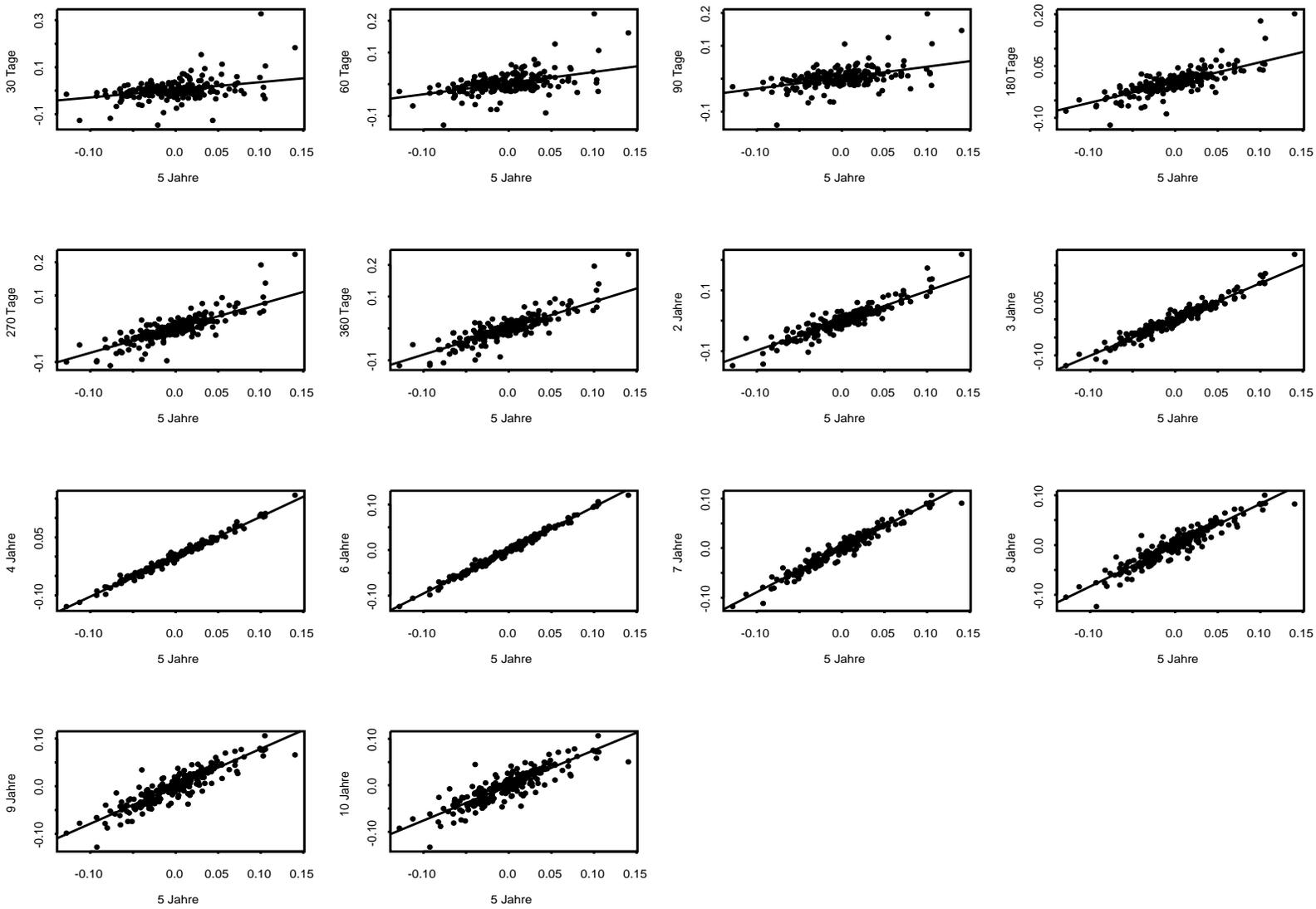


Abbildung 4.3: Plots der 5 Jahres EUR Swap Sätze gegen die restlichen EUR Swap Sätze.

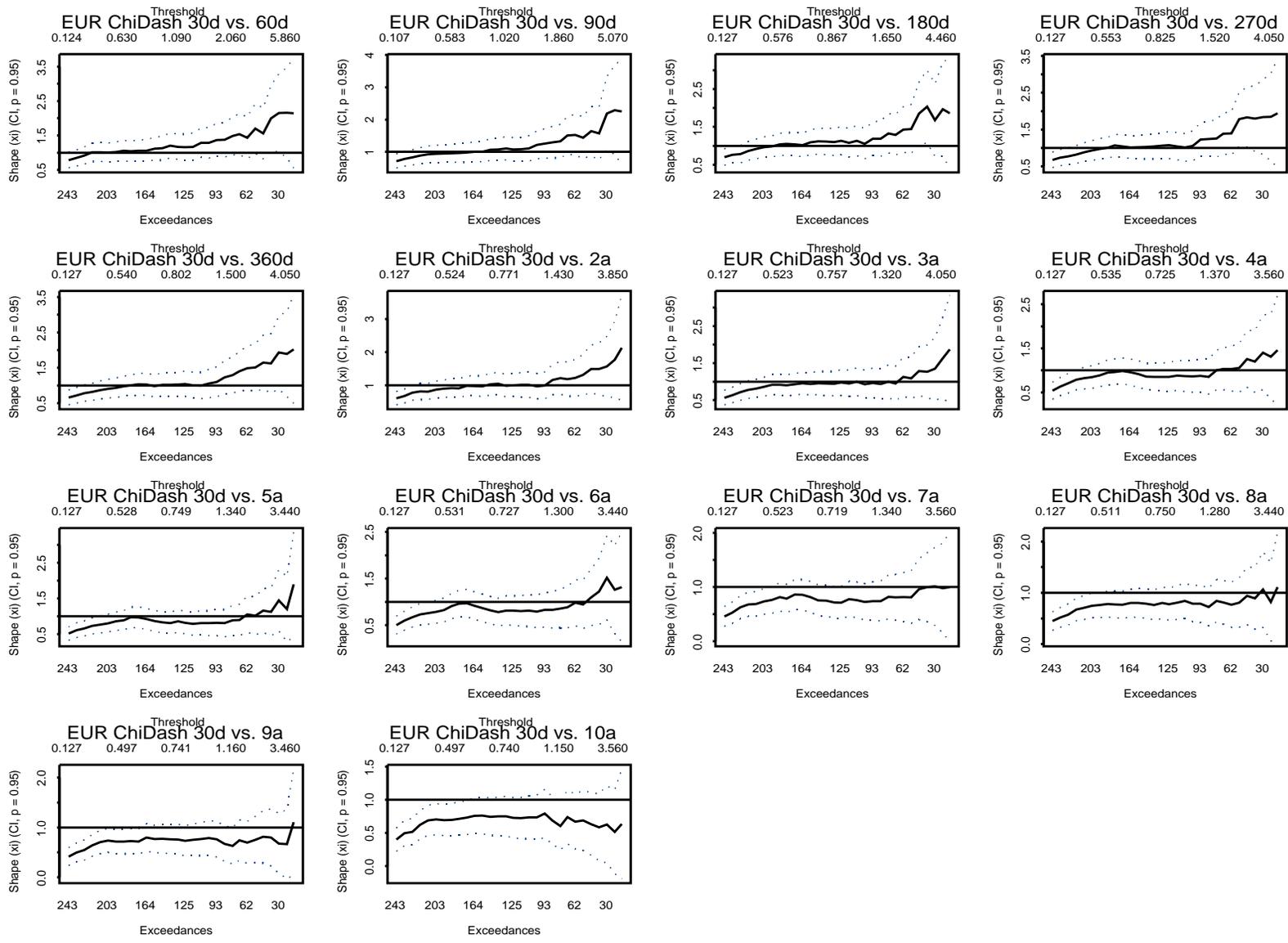


Abbildung 4.4: Schätzer für $\overline{\chi_V}$ zwischen den 30 Tages EUR Swap Sätzen und den anderen Swap Sätzen.

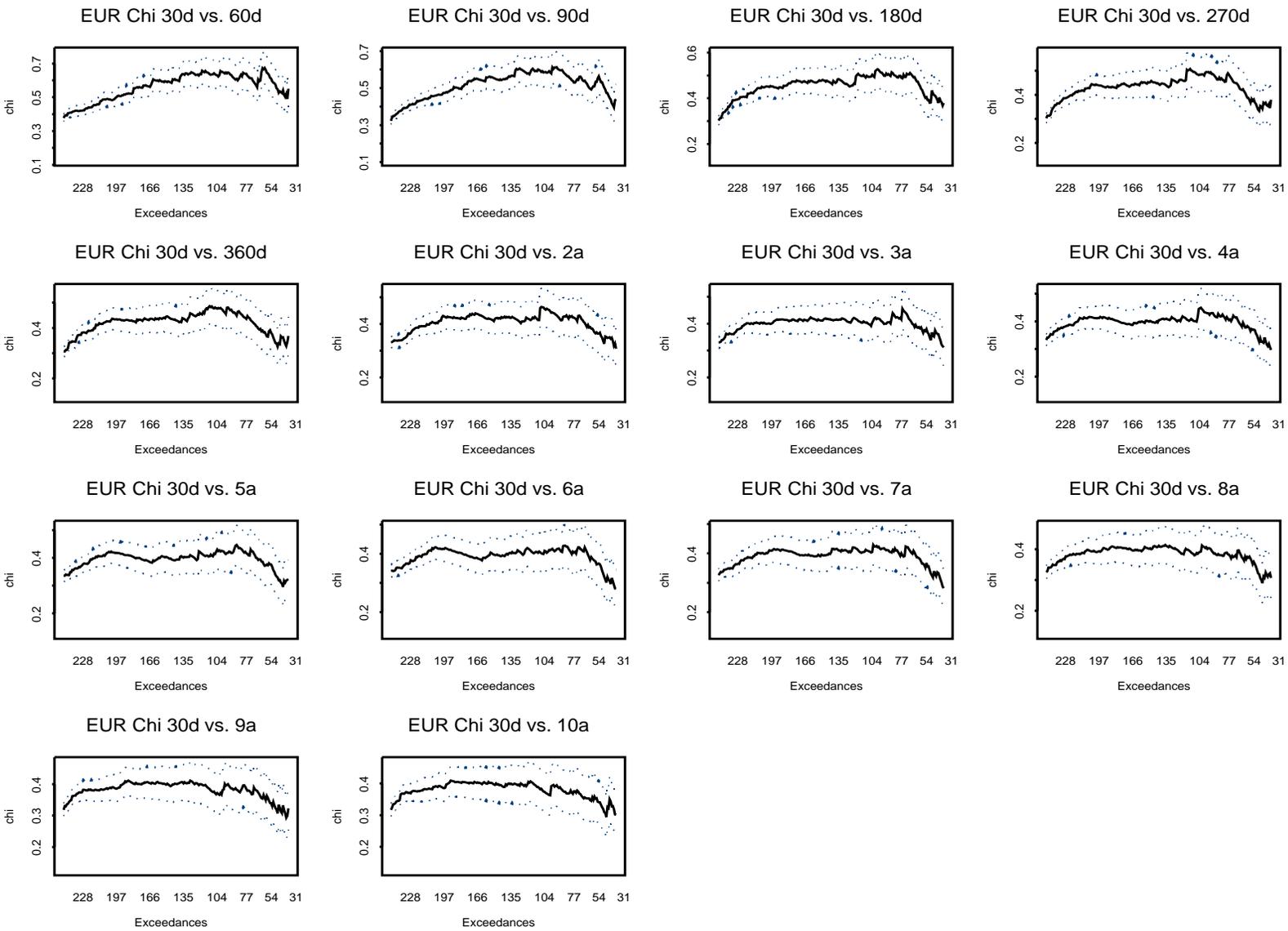


Abbildung 4.5: Schätzer für χ_U zwischen den 30 Tages EUR Swap Sätzen und den anderen Swap Sätzen.

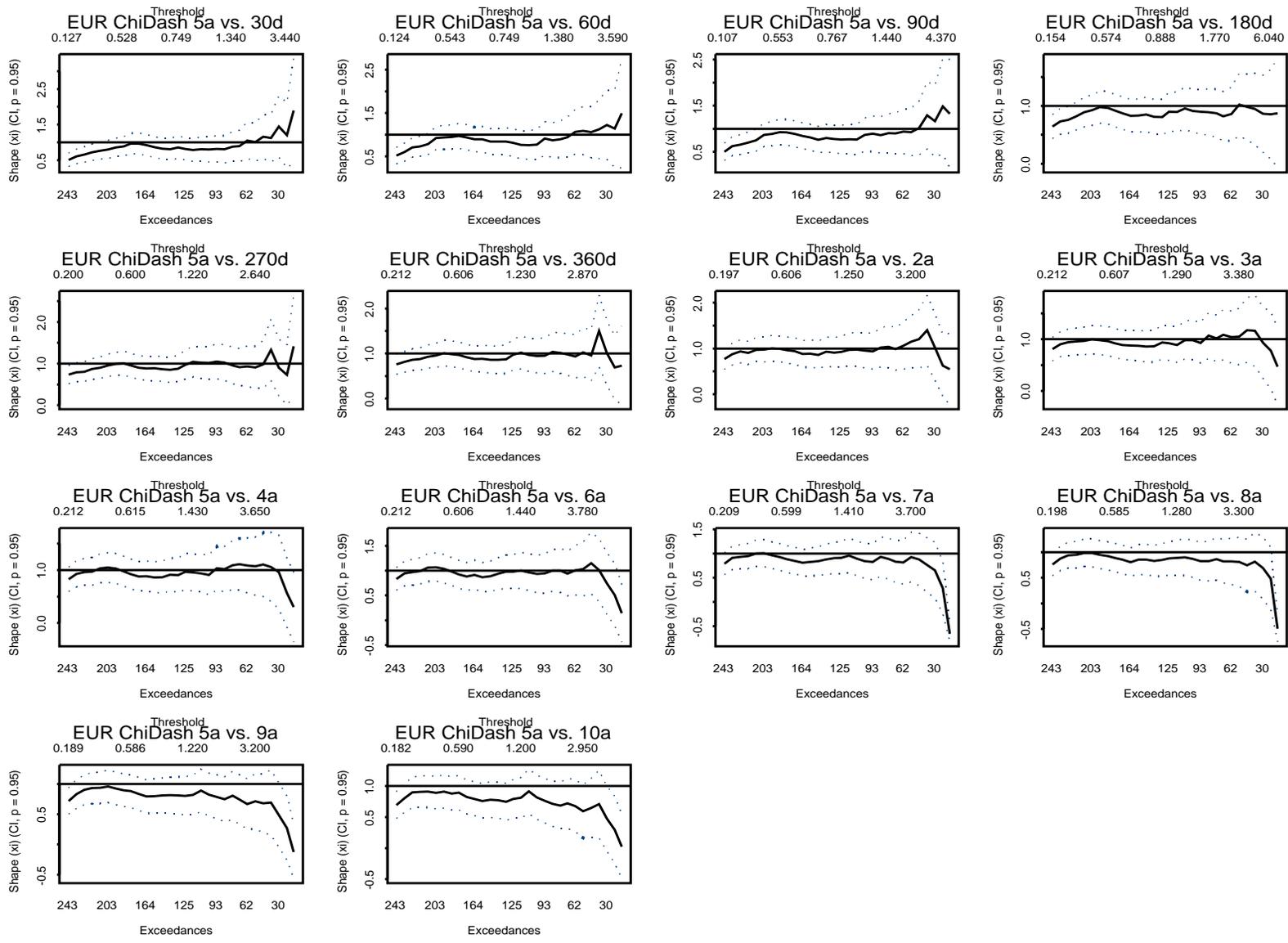


Abbildung 4.6: Schätzer für \overline{NV} zwischen den 5 Jahres EUR Swap Sätzen und den anderen Swap Sätzen.

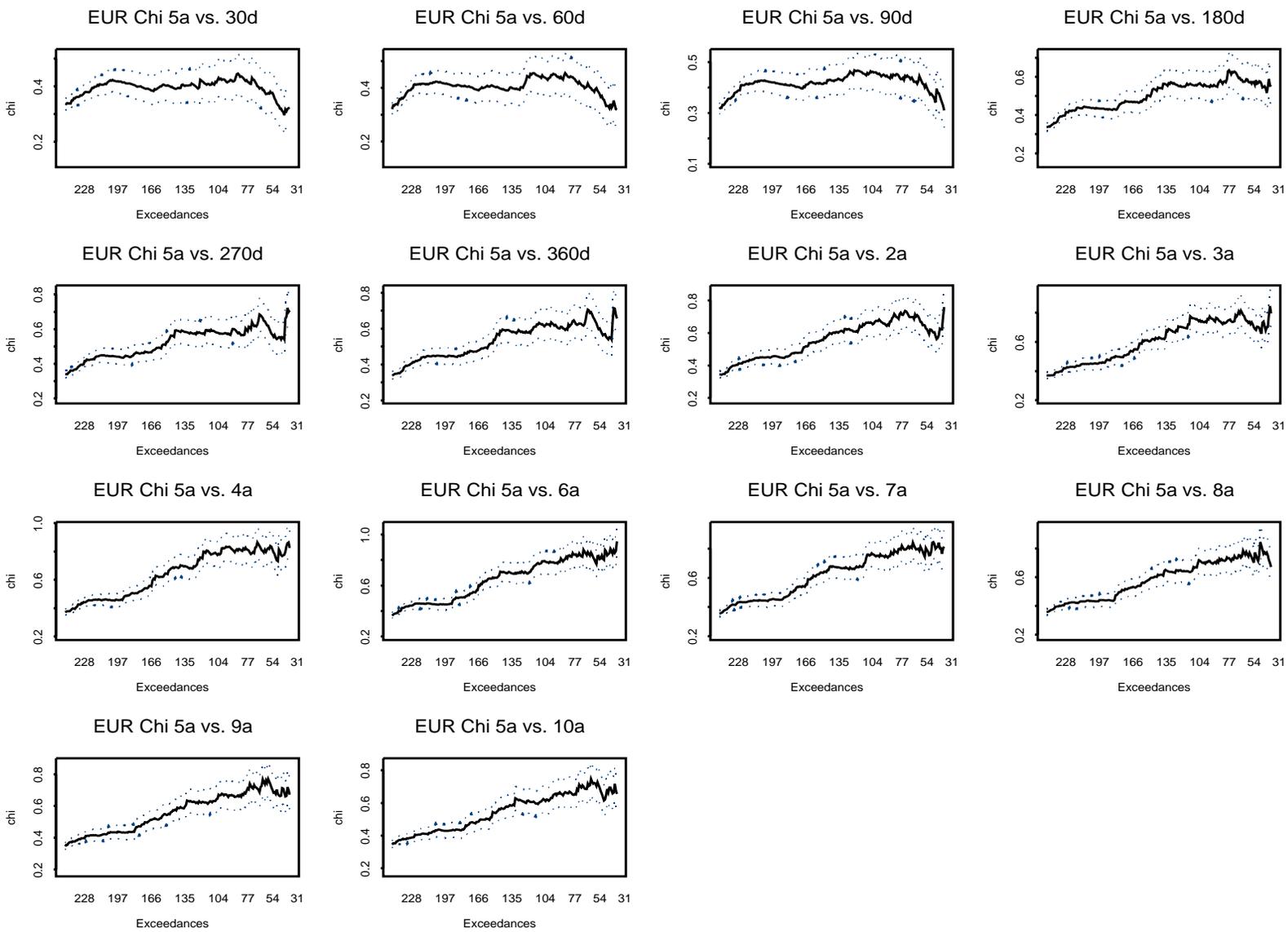


Abbildung 4.7: Schätzer für λ_U zwischen den 5 Jahres EUR Swap Sätzen und den andere Swap Sätzen.

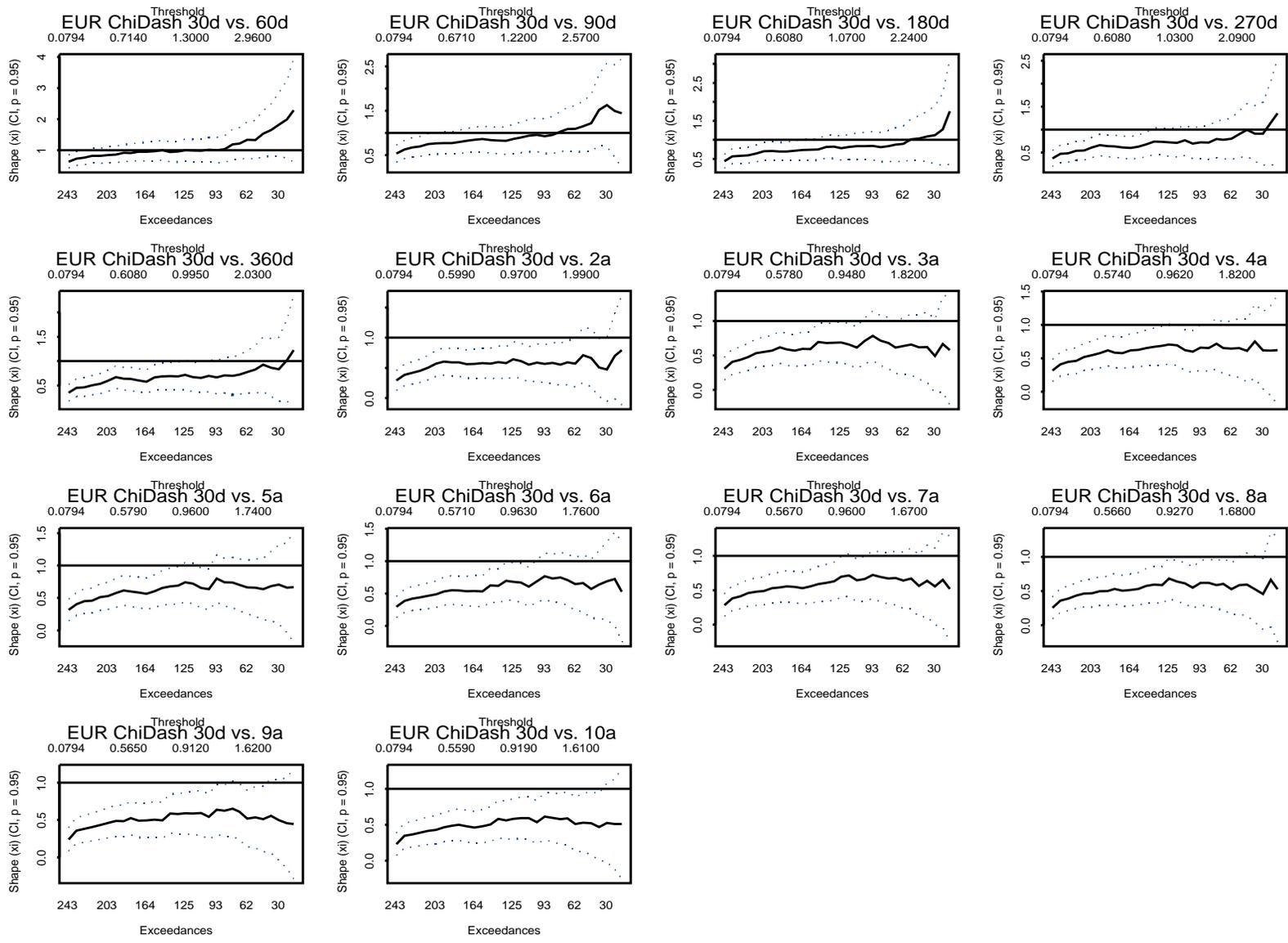


Abbildung 4.8: Lower Tail dependence Schätzer für $\underline{\Lambda}_L$ zwischen den 30 Tages EUR Swap Sätzen und den anderen Swap Sätzen.

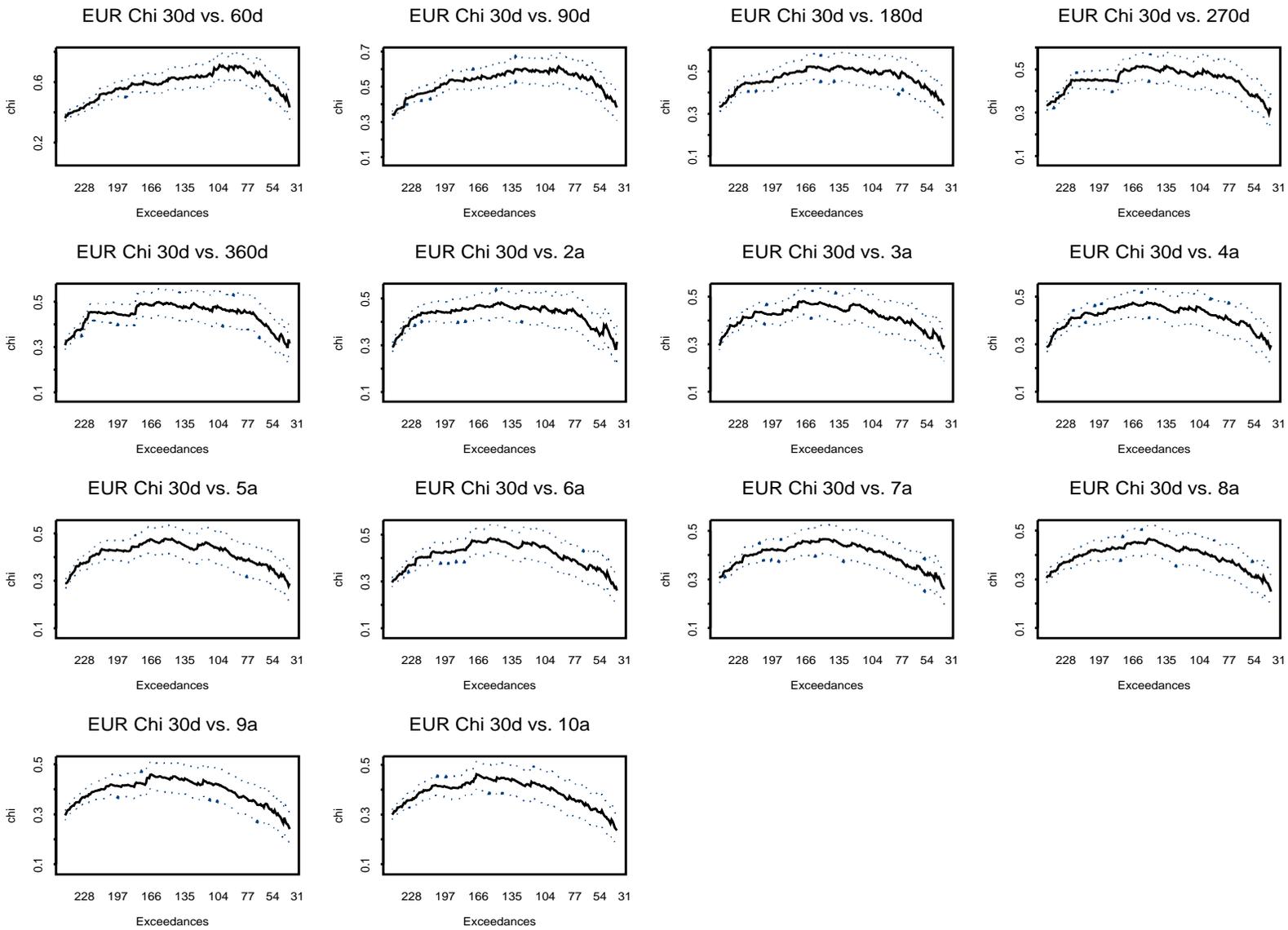


Abbildung 4.9: Lower Tail dependence Schätzer für λ_L zwischen den 30 Tages EUR Swap Sätzen und den anderen Swap Sätzen.

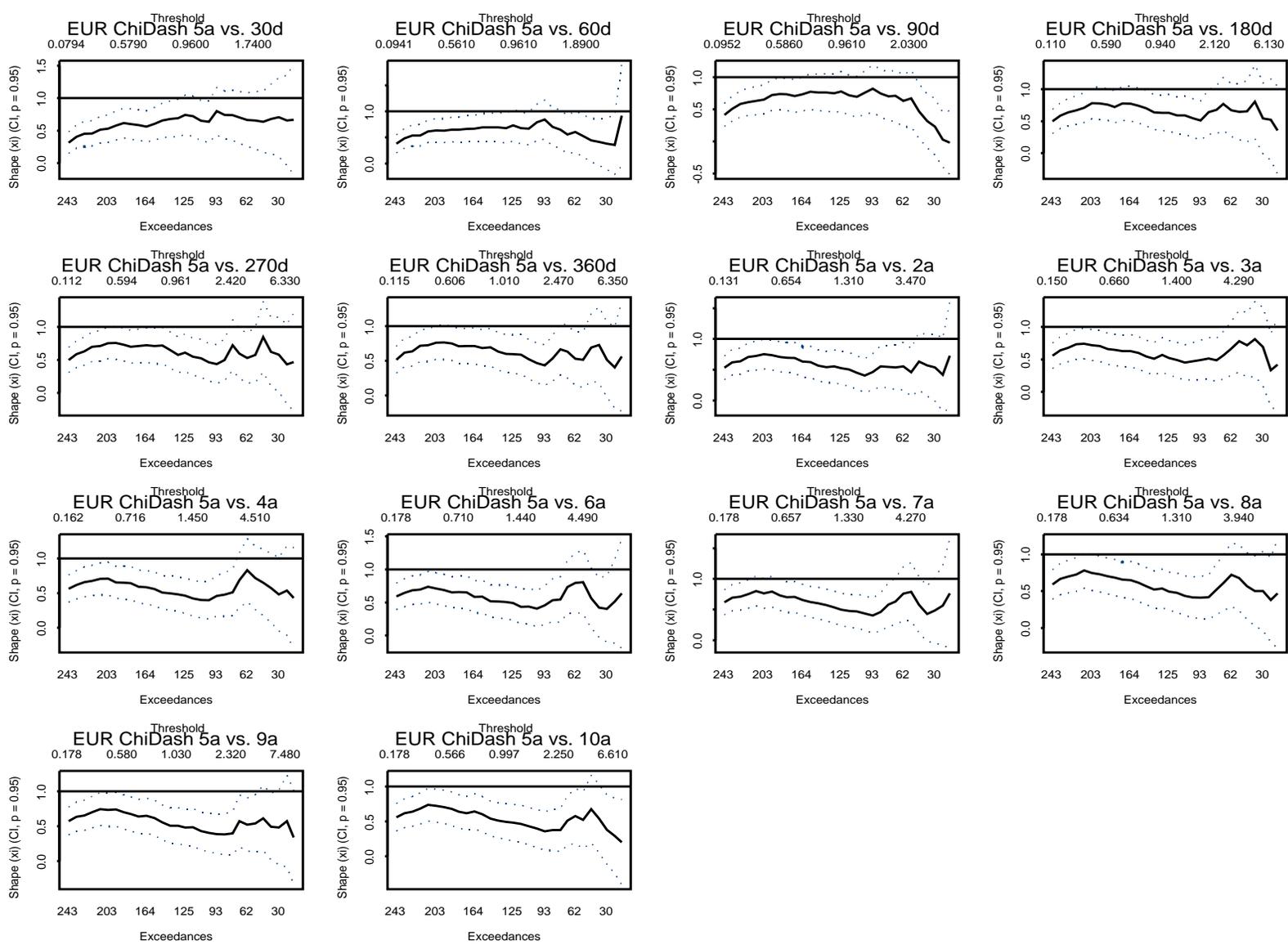


Abbildung 4.10: Lower Tail dependence Schätzer für $\bar{\lambda}_L$ zwischen den 5 Jahres EUR Swap Sätzen und den anderen Swap Sätzen.

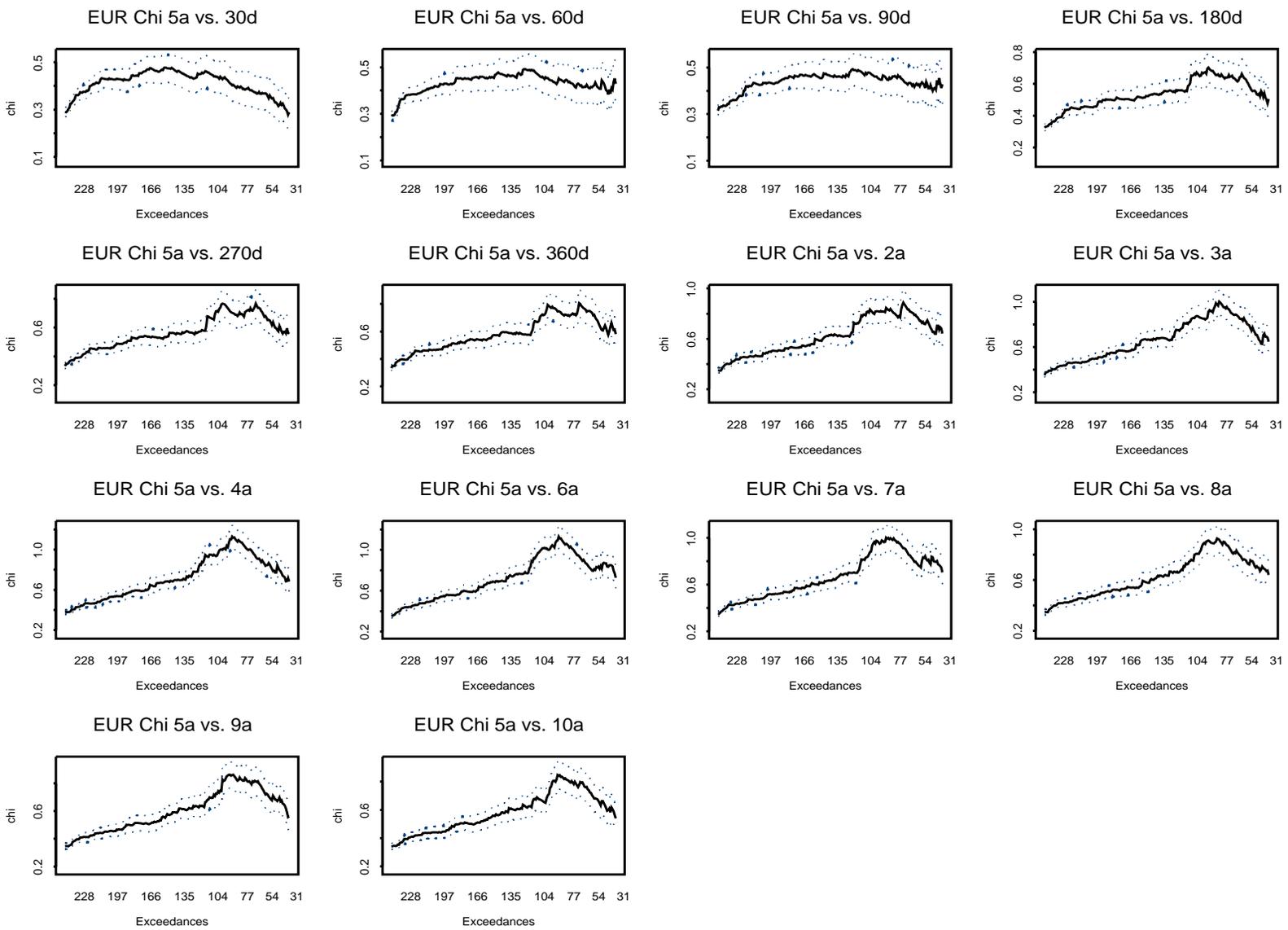


Abbildung 4.11: Lower Tail dependence Schätzer für λ_L zwischen den 5 Jahres EUR Swap Sätzen und den anderen Swap Sätzen.

	30d	60d	90d	180d	270d	360d	2a	3a	4a	5a	6a	7a	8a	9a	10a
30d	1	.63	.52	.46	.40	.39	.38	.39	.38	.38	.39	.38	.37	.36	.35
60d	.63	1	.60	.48	.42	.42	.41	.40	.40	.40	.40	.40	.38	.36	.36
90d	.52	.60	1	.50	.45	.45	.45	.44	.43	.42	.41	.40	.38	.37	.36
180d	.46	.48	.50	1	.74	.69	.65	.64	.57	.58	.56	.54	.51	.50	.48
270d	.40	.42	.45	.74	1	.71	.68	.67	.62	.63	.61	.58	.52	.50	.48
360d	.39	.42	.45	.69	.71	1	.71	.69	.63	.65	.62	.60	.54	.51	.50
2a	.38	.41	.45	.65	.68	.71	1	.72	.66	.67	.64	.63	.60	.58	.56
3a	.39	.40	.44	.64	.67	.69	.72	1	.80	.76	.72	.70	.64	.63	.60
4a	.38	.40	.43	.57	.62	.63	.66	.80	1	.82	.79	.75	.70	.67	.65
5a	.38	.40	.42	.58	.63	.65	.67	.76	.82	1	.83	.80	.75	.73	.71
6a	.39	.40	.41	.56	.61	.62	.64	.72	.79	.83	1	.86	.81	.78	.75
7a	.38	.40	.40	.54	.58	.60	.63	.70	.75	.80	.86	1	.87	.84	.80
8a	.37	.38	.38	.51	.52	.54	.60	.64	.70	.75	.81	.87	1	.93	.89
9a	.36	.36	.37	.50	.50	.51	.58	.63	.67	.73	.78	.84	.93	1	.94
10a	.35	.36	.36	.48	.48	.50	.56	.60	.65	.71	.75	.80	.89	.94	1

Tabelle 4.1: Upper Tail dependence Parameter der EUR Swap Sätze.

	30d	60d	90d	180d	270d	360d	2a	3a	4a	5a	6a	7a	8a	9a	10a
30d	1	.62	.53	.44	.40	.40	.38	.37	.38	.36	.36	.34	.33	.33	.32
60d	.62	1	.66	.51	.47	.45	.44	.42	.43	.42	.42	.40	.39	.39	.38
90d	.53	.66	1	.51	.48	.46	.47	.44	.44	.43	.43	.41	.40	.39	.39
180d	.44	.51	.51	1	.73	.70	.66	.63	.61	.62	.61	.59	.56	.53	.52
270d	.40	.47	.48	.73	1	.80	.76	.72	.70	.69	.67	.64	.59	.56	.55
360d	.40	.45	.46	.70	.80	1	.83	.77	.75	.73	.70	.65	.60	.57	.56
2a	.38	.44	.47	.66	.76	.83	1	.84	.80	.77	.73	.69	.63	.60	.58
3a	.37	.42	.44	.63	.72	.77	.84	1	.87	.83	.77	.72	.69	.66	.64
4a	.38	.43	.44	.61	.70	.75	.80	.87	1	.87	.81	.78	.76	.73	.71
5a	.36	.42	.43	.62	.69	.73	.77	.83	.87	1	.84	.80	.77	.74	.72
6a	.36	.42	.43	.61	.67	.70	.73	.77	.81	.84	1	.86	.83	.80	.78
7a	.34	.40	.41	.59	.64	.65	.69	.72	.78	.80	.86	1	.91	.88	.84
8a	.33	.39	.40	.56	.59	.60	.63	.69	.76	.77	.83	.91	1	.94	.90
9a	.33	.39	.39	.53	.56	.57	.60	.66	.73	.74	.80	.88	.94	1	.97
10a	.32	.38	.39	.52	.55	.56	.58	.64	.71	.72	.78	.84	.90	.97	1

Tabelle 4.2: Lower Tail dependence Parameter der EUR Swap Sätze.

Kapitel 5

Multivariate Extremwerttheorie

Dieses Kapitel erläutert den Hintergrund der multivariaten Extremwerttheorie und gibt eine Zusammenfassung der Eigenschaften, die eine multivariate Extremwertverteilung (**MEVF**) erfüllen muß. Seien für $n, m \in \mathbb{N}$

$$\left(\begin{array}{c} X_{1,1} \\ \vdots \\ X_{1,m} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} X_{2,1} \\ \vdots \\ X_{2,m} \end{array} \right), \dots, \left(\begin{array}{c} X_{n,1} \\ \vdots \\ X_{n,m} \end{array} \right) \stackrel{\text{iid}}{\sim} F,$$

d.h. **iid** Zufallsvektoren mit **VF** F und seien $M_{j,n} = \max_{1 \leq i \leq n} X_{i,j}$ die komponentenweisen Maxima:

$$\begin{aligned} M_{1,n} &= \max \{X_{1,1}, \dots, X_{n,1}\}, \\ M_{2,n} &= \max \{X_{1,2}, \dots, X_{n,2}\}, \\ &\vdots = \vdots \\ M_{m,n} &= \max \{X_{1,m}, \dots, X_{n,m}\}. \end{aligned}$$

Die **MEVF**n erhält man als Grenzverteilungen von

$$\left(\begin{array}{c} (M_{1,n} - a_{1,n})/b_{1,n} \\ \vdots \\ (M_{m,n} - a_{m,n})/b_{m,n} \end{array} \right), \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Wenn die Grenz**VF** existiert, müssen alle univariaten Rand**VF**n in der **GEV**-Familie liegen. So kann die multivariate Grenzverteilung geschrieben werden als

$$C [H(z_1; \gamma_1), \dots, H(z_m; \gamma_m)],$$

mit $H(z_j; \gamma_j)$ als **GEV VF**n und C als multivariate Copula. Zunächst eine univariate Eigenschaft für die Extremwertverteilung von transformierten **ZV**n:

Lemma 5.1 *Seien*

$$X_1, X_2, \dots \stackrel{\text{iid}}{\sim} F,$$

und seien

$$\alpha(X_1) = X_1^*, \alpha(X_2) = X_2^*, \dots \stackrel{\text{iid}}{\sim} F^*,$$

mit α streng monoton steigend. Seien

$$M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\} \text{ und } M_n^* = \max\{X_1^*, \dots, X_n^*\}.$$

Es gelte

$$\mathbb{P} \left\{ \frac{M_n - a_n}{b_n} \leq z \right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} H(z) \text{ und } \mathbb{P} \left\{ \frac{M_n^* - a_n^*}{b_n^*} \leq z^* \right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} H^*(z^*),$$

wobei H und H^* Extremwertverteilungen sind. Wegen der Definition $X_i^* = \alpha(X_i)$ gilt

$$\mathbb{P} \left\{ \frac{M_n^* - a_n^*}{b_n^*} \leq z^* \right\} = \mathbb{P} \left\{ M_n \leq \alpha^{-1}(a_n^* + b_n^* z^*) \right\} = \mathbb{P} \left\{ \frac{M_n - a_n}{b_n} \leq \frac{\alpha^{-1}(a_n^* + b_n^* z^*) - a_n}{b_n} \right\},$$

folglich existiert der Limes

$$s(z^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha^{-1}(a_n^* + b_n^* z^*) - a_n}{b_n}.$$

Dann gilt $H^*(z^*) = H(s(z^*))$. □

Nun kommen wir zurück zu der multivariaten Darstellung von $(M_{1,n}, \dots, M_{m,n})^T$ als Vektor der komponentenweisen Maxima der **iid** Zufallsvektoren $(X_{i,1}, \dots, X_{i,m})$ mit **VF** F .

Wir nehmen an, daß

$$\begin{aligned} G(\mathbf{z}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_{1,n} + b_{1,n}z_1, \dots, a_{m,n} + b_{m,n}z_m) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \{ M_{1,n} \leq a_{1,n} + b_{1,n}z_1, \dots, M_{m,n} \leq a_{m,n} + b_{m,n}z_m \} \\ &= C(H(z_1; \gamma_1), \dots, H(z_m; \gamma_m)), \end{aligned} \tag{5.1}$$

mit Copula C . Seien α_j streng monoton steigende Transformationen der $X_{i,j}$, $j = 1, \dots, m$, und seien $X_{i,j}^*$ sowie $M_{j,n}^*$ die mit α_j transformierten $X_{i,j}$ sowie $M_{j,n}$. Angenommen, die Transformationen haben die Eigenschaft, daß $(M_n^* - a_n^*)/b_n^*$ für $n \rightarrow \infty$ in Verteilung konvergiert. Wir definieren

$$\begin{aligned} G^*(\mathbf{z}^*) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \{ M_{1,n}^* \leq a_{1,n}^* + b_{1,n}^* z_1^*, \dots, M_{m,n}^* \leq a_{m,n}^* + b_{m,n}^* z_m^* \} \\ &= C^*(H(z_1^*; \gamma_1^*), \dots, H(z_m^*; \gamma_m^*)), \end{aligned}$$

für eine Copula C^* . Mit Lemma 5.1 folgt

$$\begin{aligned} G^*(\mathbf{z}^*) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left\{ [M_{j,n} - a_{j,n}] / b_{j,n} \leq [\alpha_j^{-1} (a_{j,n}^* + b_{j,n}^* z_j^*) - a_{j,n}] / b_{j,n}, \forall j = 1, \dots, m \right\} \\ &= C [H(s_1(z_1^*); \gamma_1), \dots, H(s_m(z_m^*); \gamma_m)], \end{aligned}$$

für Funktionen s_1, \dots, s_m . Folglich gilt

$$H[s_j(z_j^*); \gamma_j] = H(z_j^*; \gamma_j^*), \quad j = 1, \dots, m \text{ und } C = C^*.$$

Im folgenden werden einige Bedingungen für **MEVF** Copula sowie die Beziehung zwischen **MEVF** Copula und **MSMVE** Verteilungen angegeben.

Definition 5.2 (min-stabile multivariate Exponentialverteilung) Sei \mathbf{X} ein multivariater Zufallsvektor der Dimension m mit Überlebensfunktion G und seien $X_i \sim \mathbf{exp}(\nu_i)$, $\nu_i > 0$, $i = 1, \dots, m$. \mathbf{X} (oder G) heißt min-stabil multivariat exponentialverteilt (**MSMVE**), wenn für alle $\mathbf{w} \in (0, \infty)^m$

$$\min \left\{ \frac{X_1}{w_1}, \dots, \frac{X_m}{w_m} \right\} = \frac{X_1}{w_1} \wedge \dots \wedge \frac{X_m}{w_m}$$

exponentialverteilt ist. □

Gelte nun (5.1) und sei $k \in \mathbb{N}$. Dann erfüllen die Folgen $a_{j,n}$, $b_{j,n}$, $j = 1, \dots, m$,

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \{ M_{1,kn} \leq a_{1,n} + b_{1,n} z_1, \dots, M_{m,kn} \leq a_{m,n} + b_{m,n} z_m \} \\ &= G^k(z_1, \dots, z_m) = C^k [H(z_1; \gamma_1), \dots, H(z_m, \gamma_m)]. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Ebenfalls gilt

$$\begin{aligned} &\mathbb{P} \{ M_{1,kn} \leq a_{1,n} + b_{1,n} z_1, \dots, M_{m,kn} \leq a_{m,n} + b_{m,n} z_m \} \\ &= \mathbb{P} \left\{ (b_{j,kn}^{-1} [M_{j,kn} - a_{j,kn}] \leq b_{j,kn}^{-1} [a_{j,n} + b_{j,n} z_j - a_{j,kn}]), \quad j = 1, \dots, m \right\} \\ &\rightarrow G \left[\lim_{n \rightarrow \infty} (b_{j,kn}^{-1} [a_{j,n} + b_{j,n} z_j - a_{j,kn}]), \quad j = 1, \dots, m \right] \\ &= G [\sigma_1^{-1}(z_1 - \mu_1), \dots, \sigma_m^{-1}(z_m - \mu_m)] \\ &= C \{ H[\sigma_1^{-1}(z_1 - \mu_1); \gamma_1], \dots, H[\sigma_m^{-1}(z_m - \mu_m); \gamma_m] \}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

für Konstanten μ_j , σ_j und $\mathbb{P} \{ M_{j,kn} \leq a_{j,n} + b_{j,n} z_j \} \rightarrow H^k(z_j; \gamma_j)$, $j = 1, \dots, m$. Somit gilt

$$G^k(\mathbf{z}) = C^* [H^k(z_1; \gamma_1), \dots, H^k(z_m; \gamma_m)], \quad (5.4)$$

mit Copula C^* . Aus der univariaten Extremwerttheorie folgt

$$H^k(z_j; \gamma_j) = H\left(\frac{z_j - \mu_j}{\sigma_j}; \gamma_j\right), \quad j = 1, \dots, m,$$

somit ist $C = C^*$. Sei nun $u_j = H(z_j, \gamma_j)$, dann folgt aus den Gleichungen (5.2) bis (5.4)

$$C^k(u_1, \dots, u_m) = C(u_1^k, \dots, u_m^k), \quad k = 1, 2, \dots$$

oder

$$C(u_1^{1/r}, \dots, u_m^{1/r}) = C^{1/r}(u_1, \dots, u_m), \quad k = 1, 2, \dots$$

Zusammen ergibt das

$$C^{k/r}(u_1, \dots, u_m) = C^k(u_1^{1/r}, \dots, u_m^{1/r}) = C(u_1^{k/r}, \dots, u_m^{k/r}),$$

für alle positiven $k, r \in \mathbb{N}$. Weil \mathbb{Q}_+ dicht liegt in \mathbb{R}_+ , kann obige Formel erweitert werden zu

$$C(u_1^t, \dots, u_m^t) = C^t(u_1, \dots, u_m) = C^t(\mathbf{u}) \quad \forall t > 0.$$

Sei $D(\mathbf{y}) = C(e^{-y_1}, \dots, e^{-y_m})$ eine multivariate **VF** mit **exp(1)** verteilten Überlebens-Rand**VF**n. Dann gilt

$$D(t\mathbf{y}) = C(e^{-ty_1}, \dots, e^{-ty_m}) = C^t(e^{-y_1}, \dots, e^{-y_m}) = D^t(\mathbf{y}).$$

Folglich erfüllt $A = -\ln D$ die Gleichung $A(t\mathbf{y}) = tA(\mathbf{y})$; dies impliziert, D ist eine **MSM-VE** Überlebensfunktion. Somit sind **MEVF**n, mit zu **exp(1)** transformierten Überlebens-Rand**VF**n, **MSMVE** Überlebensfunktionen:

Theorem 5.3 *Sei G eine **MSMVE** Überlebensfunktion. Dann ist $A = -\ln G$ homogen von Ordnung 1, d.h. $A(t\mathbf{x}) = tA(\mathbf{x})$ für alle $t > 0$ und $\mathbf{x} \in (0, \infty)^m$. Wenn umgekehrt G eine multivariat exponentialverteilte Überlebensfunktion und $-\ln G$ homogen von Ordnung 1 ist, dann ist G **MSMVE**. \square*

Definition 5.4 (Extremcopula) *Vor dem Hintergrund von Theorem 5.3 heißt eine Copula C Extremcopula, wenn*

$$C(u_1^t, \dots, u_m^t) = C^t(u_1, \dots, u_m), \quad \forall t > 0, \quad (u_1, \dots, u_m) \in [0, 1]^m.$$

\square

Weitere Eigenschaften der Klasse der **MSMVE** Verteilungen sind in Joe [9], S.174ff zu finden.

Das nächste Ergebnis zeigt die Gleichheit der Tail dependence Parameter λ zweier **ZVn** und der Tail dependence ihrer bivariaten Extremwertverteilung; diese Gleichheit gilt auch für die bivariaten Ränder einer multivariaten Copula.

Theorem 5.5 *Sei C eine bivariate Copula und $F(x_1, x_2) = C[1 - e^{-x_1}, 1 - e^{-x_2}]$. Weiterhin gelte $\lim_{u \nearrow 1} \overline{C}(u, u)/(1 - u) = \lambda \in (0, 1]$ und*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(x_1 + \ln n, x_2 + \ln n) = H(x_1, x_2) = \exp\{-\eta(x_1, x_2)\}$$

mit univariaten Rändern $\exp\{-e^{-x_1}\}$ bzw. $\exp\{-e^{-x_2}\}$. Sei wegen Korollar 4.11 (und $(\exp\{-e^{-\cdot}\})^{-1} = -\ln[-\ln(\cdot)]$)

$$C^*(u_1, u_2) = H(-\ln[-\ln u_1], -\ln[-\ln u_2]).$$

Dann gilt

$$\lim_{u \nearrow 1} \frac{\overline{C}^*(u, u)}{1 - u} = \lambda.$$

□

Theorem 5.6 *Seien $(M_{1,n}, \dots, M_{m,n})$, $n \in \mathbb{N}$, Vektoren der komponentenweisen Maxima von iid Zufallsvektoren $(X_{i,1}, \dots, X_{i,m})$, $i = 1, \dots, n$, mit **VF** F und*

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_{1,n} + b_{1,n}z_1, \dots, a_{m,n} + b_{m,n}z_m) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\{M_{1,n} \leq a_{1,n} + b_{1,n}z_1, \dots, M_{m,n} \leq a_{m,n} + b_{m,n}z_m\} \\ &= H(\mathbf{z}). \end{aligned}$$

Angenommen, die Limiten

$$r_S(z_j, j \in S) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \overline{F}_S(a_{j,n} + b_{j,n}z_j, j \in S)$$

seien endlich für alle $S \in \mathcal{S}_m = \{S : S \subset \{1, \dots, m\}\}$. Wenn

$$\exp\left\{\sum_{S \in \mathcal{S}_m} (-1)^{\text{card}(S)} r_S(z_j, j \in S)\right\}$$

eine nichtdegenerierte **VF** ist, dann ist sie gleich H .

□

Kapitel 6

Konstruktion einer Copula

Im vorherigen Kapitel wurden einige Eigenschaften ermittelt, die eine Copula erfüllen muß, um geeignet für die multivariate Extremwertanalyse zu sein. In Kapitel 3 wurden die univariaten RandVF \mathbf{n} ermittelt, die Tail dependence Parameter in Abschnitt 4.2 geschätzt. Mit Sklars Theorem 4.10 wird jetzt noch eine passende Extremcopula gesucht ($C(\mathbf{y}^t) = C^t(\mathbf{y})$), mit der entsprechenden Tail dependence als Abhängigkeitsstruktur. Nützlich ist die Eigenschaft der Homogenität, da so grosse Quantile mittels kleineren (für die genug Daten vorliegen, um gut gefittet zu werden) abgeschätzt werden können. Wegen Bemerkung 4.22 müssen die lower Tail dependence Parameter der Überlebenscopula \hat{C} mit den upper Tail dependence Parametern von Copula C übereinstimmen. Es existieren $\frac{1}{2}m(m-1)$ bivariate Randverteilungen, also je $\frac{1}{2}m(m-1)$ Parameter $\lambda_{U;ij}$ und $\lambda_{L;ij}$ für $i < j$. Momentan sind nur Copula bekannt mit $\frac{1}{2}m(m-1) + 1$ Parametern. Es wird also eine Copula benötigt, die in den oberen Tails mit den Abhängigkeiten der *wahren* Verteilung gut übereinstimmt und eine Copula für die unteren Tails. Auf eine passende Abhängigkeitsstruktur im mittleren Bereich der Verteilung kann verzichtet werden, da für extreme Ereignisse dieser Bereich der Verteilung nicht benötigt wird. Allerdings stimmt bei gleicher upper Tail dependence zwischen den Daten und der gewählten Verteilung meist auch die obere Hälfte des mittleren Tailbereiches der Verteilung mit der Verteilung der Daten recht gut überein (siehe Abbildung 4.1). Im folgenden werden einige Techniken zur Konstruktion einer Copula beschrieben und Beispiele mit den passenden Eigenschaften angegeben.

Definition 6.1 (Laplace Transformierte) Sei M die univariate VF einer strikt positiven ZV mit $M(0) = 0$. Dann heißt

$$\phi(s) = \int_0^\infty e^{-s\omega} ds M(\omega), \quad s \geq 0$$

die Laplace Transformierte (**LT**) von M . Im folgenden bezieht sich eine **LT** immer auf eine strikt positive **ZV**. \square

Für eine beliebige univariate **VF** F existiert eine eindeutige **VF** G , so daß

$$F(x) = \int_0^\infty G^\alpha(x) dM(\alpha) = \int_0^\infty e^{-[\ln G(x)]\alpha} dM(\alpha) = \phi[-\ln G(x)], \quad x \in \mathbb{R}, \quad (6.1)$$

oder umgeschrieben $G = \exp\{-\phi^{-1}(F)\}$. Für Überlebensfunktionen existiert eine ähnliche Beziehung:

$$\bar{F}(x) = \int_0^\infty \bar{H}^\alpha(x) dM(\alpha) = \phi[-\ln(\bar{H}(x))],$$

wenn $\bar{H} = \exp\{-\phi^{-1}(\bar{F})\}$. Als nächstes betrachten wir die Klasse $\mathcal{F}(F_1, F_2)$ von bivariaten Verteilungen mit den Rand**VF**n F_1 und F_2 :

Definition 6.2 (Archimedische Copula) Für $j = 1, 2$ sei $G_j = \exp\{-\phi^{-1}(F_j)\}$. Dann ist die folgende **VF** eine **VF** in $\mathcal{F}(F_1, F_2)$,

$$\int_0^\infty G_1^\alpha G_2^\alpha dM(\alpha) = \phi(-\ln G_1 - \ln G_2) = \phi[\phi^{-1}(F_1) + \phi^{-1}(F_2)]. \quad (6.2)$$

Die zugehörige Copula ist (zu erhalten wenn $F_1, F_2 \sim \mathbf{U}(0, 1)$)

$$C(u_1, u_2) = \phi[\phi^{-1}(u_1) + \phi^{-1}(u_2)] \quad (6.3)$$

und wird als Archimedische Copula bezeichnet. Eine einfache multivariate Erweiterung lautet

$$C(\mathbf{u}) = \phi\left[\sum_{j=1}^m \phi^{-1}(u_j)\right]. \quad (6.4)$$

\square

Beispiel 6.3 (Gumbel Copula) In (6.3) wird die *positiv stabile LT* gewählt,

$$\phi_\theta(x) = \exp\{-x^{1/\theta}\}, \quad \phi_\theta^{-1}(x) = (-\ln x)^\theta, \quad x \geq 0, \quad \theta \geq 1.$$

Folglich ist die zugehörige bivariate archimedische Copula

$$C(u_1, u_2) = \phi_\theta[\phi_\theta^{-1}(u_1) + \phi_\theta^{-1}(u_2)] = \exp\left\{-\left[(-\ln u_1)^\theta + (-\ln u_2)^\theta\right]^{1/\theta}\right\}.$$

Die Gumbel Copula hat die upper Tail dependence $\lambda_U = 2 - 2^{1/\theta}$ und die lower Tail dependence $\lambda_L = 0$. \square

Beispiel 6.4 (Kimeldorf & Sampson Copula) In (6.3) wird die *Gamma LT* gewählt,

$$\psi_\delta(x) = (1+x)^{-1/\delta}, \quad \psi_\delta^{-1}(x) = x^{-\delta} - 1, \quad x \geq 0, \quad \delta \geq 0.$$

Die zugehörige Copula lautet somit

$$C(u_1, u_2) = \psi_\delta [\psi_\delta^{-1}(u_1) + \psi_\delta^{-1}(u_2)] = (u_1^{-\delta} + u_2^{-\delta} - 1)^{-1/\delta}.$$

Die *Kimeldorf & Sampson Copula* hat upper Tail dependence $\lambda_U = 0$ und die lower Tail dependence $\lambda_L = 2^{-1/\delta}$. \square

Die multivariate Archimedische Copula (6.4) ist permutationssymmetrisch in ihren m Komponenten und ist damit die **VF** von austauschbaren $\mathbf{U}(0, 1)$ **ZVn**. Für eine allgemeinere Abhängigkeitsstruktur gibt es Erweiterungen – geschrieben als Copula – der Form

$$C(\mathbf{u}) = \int_0^\infty K [\exp \{-\alpha \phi^{-1}(u_1)\}, \dots, \exp \{-\alpha \phi^{-1}(u_m)\}] dM(\alpha), \quad (6.5)$$

$$C(\mathbf{u}) = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty K [G_1^{\alpha_1}(u_1), \dots, G_m^{\alpha_m}(u_m)] M_m(d\alpha_1, \dots, d\alpha_m), \quad (6.6)$$

für eine multivariate Copula K , $G_j(u_j) = \exp \{-\phi_j^{-1}(u_j)\}$ und einer multivariaten **VF** M_m , deren j -te univariate Randverteilung die **LT** ϕ_j hat, $j = 1, \dots, m$.

Für eine univariate **VF** F sind alle positiven Potenzen F^γ , $\gamma > 0$, wieder **VF**n. Im multivariaten Fall muß das nicht stimmen. Für eine m -variate **VF** F ist i.a. F^γ eine **VF** für alle $\gamma \geq m - 1$.

Definition 6.5 (max-unendlich teilbare m -variate VF) Sei F eine m -dimensionale **VF**. Wenn F^γ eine **VF** ist für alle $\gamma > 0$, dann heißt F max-unendlich teilbar (**max – id**). Das bedeutet, wenn F **max-id** ist und $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_m) \sim F$, dann ist $F^{1/n}$ eine **VF** $\forall n \in \mathbb{N}$. Wenn $(X_{i,1}, \dots, X_{i,m}) \stackrel{\text{iid}}{\sim} F^{1/n}$ für $i = 1, \dots, n$, dann gilt

$$\mathbf{X} \stackrel{d}{=} \left(\max_{i=1..n} \{X_{i,1}\}, \dots, \max_{i=1..n} \{X_{i,m}\} \right).$$

\square

Für Bedingungen, damit **VF**n **max-id** sind, siehe Joe [9]. Sei M die **VF** einer strikt positiven **ZV** und sei ψ ihre **LT**. Eine Erweiterung von (6.2) ist

$$F(\mathbf{x}) = \int_0^\infty H^\alpha(\mathbf{x}) dM(\alpha) = \psi(-\ln H(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m, \quad (6.7)$$

wobei H eine **max-id** m -variate **VF** ist. Es werden Fälle von (6.7) gesucht, die zu parametrischen Familien von multivariaten Copula führen, mit

- geschlossener Darstellung,
- flexibler Abhängigkeitsstruktur und
- partieller Abgeschlossenheit bezüglich Rändern.

Gegeben seien die bivariaten **max-id** Copula K_{ij} mit $1 \leq i < j \leq m$ und die univariaten **VF**n H_1, \dots, H_m . Seien $\nu_i \geq 0$, für $i = 1, \dots, m$. Folglich ist

$$\prod_{1 \leq i < j \leq m} K_{ij}^\alpha(H_i(x_i), H_j(x_j)) \prod_{i=1}^m H_i^{\nu_i \alpha}(x_i), \quad (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m,$$

eine **VF** $\forall \alpha > 0$, somit eine **max-id** m -variate **VF** und geeignet für (6.7). Sei M die **VF** einer strikt positiven **ZV** und sei ψ ihre **LT**. Wir betrachten

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \prod_{1 \leq i < j \leq m} K_{ij}^\alpha(H_i, H_j) \prod_{i=1}^m H_i^{\nu_i \alpha} dM(\alpha) \\ &= \psi \left(- \sum_{1 \leq i < j \leq m} \ln K_{ij}(H_i, H_j) - \sum_{i=1}^m \nu_i \ln H_i \right), \end{aligned} \quad (6.8)$$

mit $\nu_i \geq 0$. Im folgenden seien die **max-id** Copula K_{ij} in (6.8) aus einer bestimmten Copula Familie mit gewünschten Eigenschaften (z.B. Tail dependence, siehe Abschnitt 4.2). Die univariaten Rand**VF**n in (6.8) sind

$$F_i = \psi [-(\nu_i + m - 1) \ln H_i], \quad i = 1, \dots, m. \quad (6.9)$$

Wenn die univariaten **VF**n H_i in (6.8) gewählt werden, mit

$$H_i(u_i) = \exp \{ -(\nu_i + m - 1) \psi^{-1}(u_i) \}, \quad (6.10)$$

dann gilt für die univariaten Rand**VF**n (6.9), $F_i \sim \mathbf{U}(0, 1)$, und (6.8) ist somit eine Copula. Seien jetzt $p_i = (\nu_i + m - 1)^{-1}$ und H_i gewählt, wie in (6.10), dann ergibt sich die Copula

$$C(\mathbf{u}) = \psi \left\{ - \sum_{1 \leq i < j \leq m} \ln K_{i,j} \left[e^{-p_i \psi^{-1}(u_i)}, e^{-p_j \psi^{-1}(u_j)} \right] + \sum_{i=1}^m \nu_i p_i \psi^{-1}(u_i) \right\}. \quad (6.11)$$

Beispiel 6.6 (Copula Familie MM1) Wähle in (6.11) die Gumbel Copula

$$K_{ij}(u_i, u_j) = \exp \left\{ - [(-\ln u_i)^{\delta_{ij}} + (-\ln u_j)^{\delta_{ij}}]^{1/\delta_{ij}} \right\},$$

mit Parameter δ_{ij} für K_{ij} und die positiv stabile **LT**

$$\psi(x) = \exp \{ -x^{1/\theta} \}, \quad \psi^{-1}(x) = (-\ln x)^\theta$$

mit Parameter θ für ψ (siehe Beispiel 6.3). Das Resultat ist die Familie von Extremcopula mit $\theta \geq 1$ und $\delta_{ij} \geq 1$ für $i < j$:

$$C(u_1, \dots, u_m) = \exp \left\{ - \left[\sum_{1 \leq i < j \leq m} \left([p_i(-\ln u_i)^\theta]^{\delta_{ij}} + [p_j(-\ln u_j)^\theta]^{\delta_{ij}} \right)^{\frac{1}{\delta_{ij}}} + \sum_{i=1}^m \nu_i p_i (-\ln u_i)^\theta \right]^{\frac{1}{\theta}} \right\}. \quad (6.12)$$

Ihre bivariaten RandVF \mathbf{n} sind

$$C_{ij}(u_i, u_j) = \exp \left\{ - \left[\left([p_i(-\ln u_i)^\theta]^{\delta_{ij}} + [p_j(-\ln u_j)^\theta]^{\delta_{ij}} \right)^{\frac{1}{\delta_{ij}}} + (1-p_i)(-\ln u_i)^\theta + (1-p_j)(-\ln u_j)^\theta \right]^{\frac{1}{\theta}} \right\}.$$

Die lower Tail dependence $\lambda_{L;ij}$ ist 0 und die upper Tail dependence ist

$$\lambda_{U;ij} = 2 - \left[\left(p_i^{\delta_{ij}} + p_j^{\delta_{ij}} \right)^{\frac{1}{\delta_{ij}}} + (\nu_i + m - 2)p_i + (\nu_j + m - 2)p_j \right]^{1/\theta}.$$

Die upper Tail dependence ist steigend in δ_{ij} und θ . \square

Die **MM1** Copula besitzt zwar für alle bivariaten RandVF \mathbf{n} einen eigenen Parameter δ_{ij} für die upper Tail dependence, allerdings ist die Abhängigkeitsstruktur für *hochdimensionale* Modelle oft nicht allgemein genug, da die upper Tail dependence Parameter in einem zu kleinen Intervall liegen. Es ist auch i.a. schwierig, hochdimensionale Modelle zu fiten, da zu wenige Daten pro Parameter zur Verfügung stehen. Es folgen einige Ergebnisse zu dem Problem der zu kleinen Abhängigkeitsstruktur:

Sei im folgenden $p_i = p = \text{const}$ für $\nu_i = \nu \geq 0$. Folglich gilt $p \in (0, (m-1)^{-1}]$. Da die upper Tail dependence mit $\delta_{ij} \in [1, \infty)$ wächst, gilt für die grösste bzw. kleinste upper Tail dependence

$$\lambda_{ij} = 2 - [p2^{1/\delta_{ij}} + 2(1-p)]^{1/\theta} \begin{cases} \delta_{ij} \rightarrow 1 & 2 - 2^{1/\theta} \in [0, 1), \\ \delta_{ij} \rightarrow \infty & 2 - (2-p)^{1/\theta} \in [p, 1). \end{cases}$$

Lemma 6.7 *Der Unterschied zwischen grösster und kleinster upper Tail dependence in **MM1** für $\nu_i = \nu = \text{const}$ beträgt*

$$\Delta = 2^{1/\theta} - (2-p)^{1/\theta},$$

und den maximalen Unterschied zwischen grösster und kleinster upper Tail dependence erhält man für für minimales θ und maximales p (folglich $\nu_i = \nu = 0$). \square

Die zweite Behauptung in Lemma 6.7 gilt, da die Ableitung von Δ nach $\theta \in [1, \infty)$ negativ ist,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \Delta &= \frac{\partial}{\partial \theta} (2^{1/\theta} - (2-p)^{1/\theta}) \\ &= \frac{1}{\theta^2} \left(\ln(2-p) \exp \left\{ \frac{1}{\theta} \ln(2-p) \right\} - \ln 2 \exp \left\{ \frac{1}{\theta} \ln 2 \right\} \right) \\ &< 0. \end{aligned}$$

Die upper Tail dependence λ ist für $p_i = p = (m-1)^{-1}$

$$\begin{aligned} \lambda_{ij} &= 2 - [p2^{1/\delta_{ij}} + 2(1-p)]^{1/\theta}, \text{ bzw.} \\ \delta_{ij} &= \frac{\ln(2)}{\ln[(2-\lambda_{ij})^\theta - 2(1-p)] - \ln p} \geq 1. \end{aligned}$$

Damit $\delta_{ij} \geq 1$ gilt, muß

$$\begin{aligned} \ln 2 \geq \ln[(2-\lambda_{ij})^\theta - 2(1-p)] - \ln p &\Rightarrow \theta \leq \frac{\ln 2}{\ln(2-\lambda_{ij})} \text{ und} \\ \ln[(2-\lambda_{ij})^\theta - 2(1-p)] - \ln p > 0 &\Rightarrow \theta > \frac{\ln(2-p)}{\ln(2-\lambda_{ij})} \\ &\Rightarrow \theta \in \left(\frac{\ln(2-p)}{\ln(2-\lambda_{ij})}, \frac{\ln 2}{\ln(2-\lambda_{ij})} \right] \end{aligned}$$

erfüllt sein. Die Darstellung von **MM1** lautet damit

$$\begin{aligned} C(u_1, \dots, u_m) &= \\ &= \exp \left\{ - \left[\sum_{1 \leq i < j \leq m} \left(\{p(-\ln u_i)^\theta\}^{\delta_{ij}} + \{p(-\ln u_j)^\theta\}^{\delta_{ij}} \right)^{\frac{1}{\delta_{ij}}} \right]^{1/\theta} \right\} = \\ &= \exp \left\{ -p^{1/\theta} \left[\sum_{1 \leq i < j \leq m} \left(\{-\ln u_i\}^{\theta\delta_{ij}} + \{-\ln u_j\}^{\theta\delta_{ij}} \right)^{\frac{1}{\delta_{ij}}} \right]^{1/\theta} \right\}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Die bivariaten Rand**VF**n sind dann

$$\begin{aligned} C_{ij}(u_i, u_j) &= \\ &= \exp \left\{ -p^{\frac{1}{\theta}} \left[\left(\{-\ln u_i\}^{\theta\delta_{ij}} + \{-\ln u_j\}^{\theta\delta_{ij}} \right)^{\frac{1}{\delta_{ij}}} + (m-2) \left(\{-\ln u_i\}^\theta + \{-\ln u_j\}^\theta \right) \right]^{\frac{1}{\theta}} \right\}. \end{aligned}$$

m	3	3	3	3	3	3	3
λ_{\max}	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.99
θ	1.01	1.21	1.55	2.23	4.26	8.32	40.8
δ	57.21	138.89	192.85	208.02	415.59	492.81	454.70
θ_{\max}	1.70	2.06	2.64	3.80	7.27	14.20	69.66
θ_{\min}	1	1.20	1.54	2.22	4.25	8.31	40.74
Δ	0.49	0.37	0.26	0.16	0.076	0.036	0.0071
λ_{\min}	0.014	0.23	0.44	0.64	0.83	0.92	0.983

Tabelle 6.1: Beispiel im trivariaten Fall für die Schranken bei gegebenem λ_{\max} .

In Tabelle 6.1 stehen für den trivariaten Fall bei Wahl der maximalen upper Tail dependence λ_{\max} die Berechnungen für die Schranken θ_{\max} und θ_{\min} , sowie bei gewähltem θ die Berechnungen für Δ – dem maximalen Unterschied zwischen grösster und kleinster upper Tail dependence – und die mögliche kleinste upper Tail dependence λ_{\min} .

Die Copula Familie **MM1** ist in Joe [9] zu finden, sie ist dort die Familie mit der allgemeinsten Abhängigkeitsstruktur für **MEVF n** . Trotzdem reicht in der Praxis die Abhängigkeitsstruktur meist nur für $m \leq 4$, bei sehr hoher upper Tail dependence oft nur für den bivariaten Fall aus. Um die Copula auf einen höherdimensionalen Fall zu erweitern, bietet sich die Gumbel-Copula an in Verbindung mit zwei m_1 – bzw. m_2 –variaten **MM1**–Copula C_1 und C_2 , die erweiterte **MM1**–Copula (**MM1E**):

$$\mathbf{MM1E}(u_1, \dots, u_{m_1}, u_{m_1+1}, \dots, u_{m_1+m_2})$$

$$= \exp \left\{ - \left[(-\ln \{\mathbf{MM1}_1(u_1, \dots, u_{m_1})\})^\eta + (-\ln \{\mathbf{MM1}_2(u_{m_1+1}, \dots, u_{m_1+m_2})\})^\eta \right]^{\frac{1}{\eta}} \right\},$$

mit $\phi(x) = \exp\{-x^{1/\eta}\}$ bzw $\phi^{-1}(x) = (-\ln x)^\eta$:

$$\mathbf{MM1E}(u_1, \dots, u_{m_1+m_2}) = \tag{6.14}$$

$$= \exp \left\{ - \left[p_1^{\frac{1}{\theta_1}} \left[\sum_{1 \leq i < j \leq m_1} \left(\{-\ln u_i\}^{\theta_1 \delta_{1;ij}} + \{-\ln u_j\}^{\theta_1 \delta_{1;ij}} \right)^{\frac{1}{\delta_{1;ij}}} \right]^{\frac{1}{\theta_1}} \right]^\eta + \left[p_2^{\frac{1}{\theta_2}} \left[\sum_{1 \leq i < j \leq m_2} \left(\{-\ln u_{m_1+i}\}^{\theta_2 \delta_{2;ij}} + \{-\ln u_{m_1+j}\}^{\theta_2 \delta_{2;ij}} \right)^{\frac{1}{\delta_{2;ij}}} \right]^{\frac{1}{\theta_2}} \right]^\eta \right]^{\frac{1}{\eta}} \right\}.$$

Da die Gumbel-Copula eine Extremcopula ist, gilt $\mathbf{MM1E}(\mathbf{u}^t) = \mathbf{MM1E}^t(\mathbf{u}) \forall t > 0$, folglich ist **MM1E** ebenfalls eine Extremcopula. Die upper Tail dependence zwischen X_i ,

mit $i \in \{1, \dots, m_1\}$ und X_j , mit $j \in \{m_1 + 1, \dots, m_1 + m_2\}$, beträgt dann

$$\lambda_{ij} = 2 - 2^{1/\eta} \text{ bzw. } \eta = \frac{\ln 2}{\ln(2 - \lambda_{ij})}. \quad (6.15)$$

Da die λ_{ij} zwischen beiden Gruppen nicht alle gleich sind, stellt sich die Frage nach der optimalen Wahl von η , z.B. könnte der **MLE** bestimmt werden

$$\hat{\eta} = \operatorname{argmax} \left\{ \sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{\partial^{m_1+m_2} \mathbf{MM1E}(u_1, \dots, u_{m_1+m_2}; \eta)}{\partial u_1 \cdots \partial u_{m_1+m_2}} \Big|_{u_j = X_{(j,i)}; j=1, \dots, m_1+m_2} \right); \eta \geq 1 \right\}.$$

Allerdings wird dazu die Dichte der **MM1E**-Copula benötigt. Für $m_1 + m_2 = 6$ und 200 Datensätzen (u_1, \dots, u_6) benötigt die **MLE**-Berechnung mehrere Gigabyte Speicherbedarf. Ein naiver Schätzer für η wäre das arithmetische Mittel der λ_{ij} ,

$$\bar{\lambda}_U = \frac{1}{m_1 m_2} \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=m_1+1}^{m_1+m_2} \lambda_{ij}.$$

Man erwartet einen guten Schätzer vor allem, wenn die λ_{ij} nahe beieinander liegen. Schwierig wird die Wahl von $\hat{\eta}$, wenn die upper Tail dependence Parameter λ_{ij} , die mittels $\hat{\eta}$ repräsentiert werden sollen, in einem zu grossen Intervall liegen. Im nächsten Beispiel wird eine Copula mit lower Tail dependence vorgestellt:

Beispiel 6.8 (Copula Familie MM2) Wir wählen in (6.11) die *Galambos* Copula,

$$K_{ij}(u_i, u_j) = u_i u_j \exp \left\{ \left[(-\ln u_i)^{-\delta_{ij}} + (-\ln u_j)^{-\delta_{ij}} \right]^{-1/\delta_{ij}} \right\},$$

mit Parameter δ_{ij} für K_{ij} und die *Gamma LT*

$$\psi(x) = (1+x)^{-1/\theta}, \quad \psi^{-1}(x) = x^{-\theta} - 1$$

mit Parameter θ für ψ . Das Resultat ist die Familie von Copula mit $\theta > 0$ und $\delta_{ij} > 0$ für $i < j$ und $p_i = (\nu_i - m - 1)^{-1}$ für $\nu_i \geq 0$:

$$\begin{aligned} & C(u_1, \dots, u_m) \quad (6.16) \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^m u_i^{-\theta} - (m-1) - \sum_{1 \leq i < j \leq m} \left[(p_i \{u_i^{-\theta} - 1\})^{-\delta_{ij}} + (p_j \{u_j^{-\theta} - 1\})^{-\delta_{ij}} \right]^{-1/\delta_{ij}} \right\}^{-1/\theta}. \end{aligned}$$

Die bivariaten Ränder sind

$$\begin{aligned} & C_{ij}(u_i, u_j) \\ &= \left\{ u_i^{-\theta} + u_j^{-\theta} - 1 - \left[(p_i \{u_i^{-\theta} - 1\})^{-\delta_{ij}} + (p_j \{u_j^{-\theta} - 1\})^{-\delta_{ij}} \right]^{-1/\delta_{ij}} \right\}^{-1/\theta}. \end{aligned}$$

Diese Copula hat sowohl upper als auch lower Tail dependence. Mit der Approximation $p_i(u_i^{-\theta} - 1) \approx p_i\theta(1 - u_i)$ für $u_i \rightarrow 1$ und $i = 1, \dots, m$ berechnen sich die upper Tail dependence Parameter

$$\lambda_{U;ij} = \left(p_i^{-\delta_{ij}} + p_j^{-\delta_{ij}} \right)^{-1/\delta_{ij}},$$

und die lower Tail dependence Parameter

$$\lambda_{L;ij} = \left[2 - \left(p_i^{-\delta_{ij}} + p_j^{-\delta_{ij}} \right)^{-1/\delta_{ij}} \right]^{-1/\theta}.$$

□

Wie im Fall **MM1** wird $p_i = p = \text{const}$ für $\nu_i = \nu \geq 0$ gewählt. Da die lower Tail dependence mit $\delta_{ij} \in (0, \infty)$ wächst, gilt für die grösste bzw. kleinste lower Tail dependence

$$\lambda_{L;ij} = [2 - p2^{-1/\delta_{ij}}]^{-1/\theta} \begin{cases} \delta_{ij} \rightarrow 0 & 2^{-1/\theta}, \\ \delta_{ij} \rightarrow \infty & (2 - p)^{-1/\theta}. \end{cases}$$

Lemma 6.9 *Der Unterschied zwischen grösster und kleinster lower Tail dependence in der **MM2** Copula für $\nu_i = \nu = \text{const}$ beträgt*

$$\Delta = (2 - p)^{-1/\theta} - 2^{-1/\theta},$$

den maximalen Unterschied zwischen grösster und kleinster lower Tail dependence erhält man für θ möglichst nahe bei

$$\theta_{\text{opt}} = \frac{\ln 2 - \ln(2 - p)}{\ln \ln 2 - \ln \ln(2 - p)},$$

und $p = (m - 1)^{-1}$ maximal gewählt (folglich $\nu_i = \nu = 0$). □

Die zweite Behauptung in Lemma 6.9 folgt aus der Ableitung von Δ nach $\theta \in [1, \infty)$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \Delta &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left((2 - p)^{-1/\theta} - 2^{-1/\theta} \right) \\ &= \frac{1}{\theta^2} \left(\ln(2 - p) \exp \left\{ -\frac{1}{\theta} \ln(2 - p) \right\} - \ln 2 \exp \left\{ -\frac{1}{\theta} \ln 2 \right\} \right) \\ &\leq 0, \quad \text{für } \theta \leq \frac{\ln 2 - \ln(2 - p)}{\ln \ln 2 - \ln \ln(2 - p)}. \end{aligned}$$

Die lower Tail dependence ist, für $p_i = p = \text{const}$,

$$\lambda_{L;ij} = [2 - p2^{-1/\delta_{ij}}]^{-1/\theta}, \quad \text{bzw. } \delta_{ij} = \frac{-\ln 2}{\ln(2 - \lambda_{L;ij}^{-\theta}) - \ln p}.$$

m	3	3	3	3	3	3	3
$\lambda_{L;\max}$	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.99
θ	0.59	0.8	1.14	1.82	3.85	7.91	40.4
δ	65.71	71.84	201.4	351.7	1336	871.9	406.0
θ_{\min}	0.585	0.794	1.137	1.818	3.849	7.905	40.35
θ_{\max}	1	1.356	1.943	3.106	6.578	13.51	68.96
θ_{opt}	0.537	0.537	0.537	0.537	0.537	0.537	0.537
Δ	0.194	0.181	0.156	0.117	0.0648	0.0339	0.00702
$\lambda_{L;\min}$	0.309	0.421	0.545	0.684	0.836	0.917	0.983

Tabelle 6.2: Beispiel im trivariaten Fall für die Schranken bei gegebenem $\lambda_{L;\max}$.

Damit $\delta_{ij} > 0$ gilt, muß

$$\begin{aligned} \ln(2 - \lambda_{L;ij}^{-\theta}) - \ln p < 0 &\Rightarrow \theta > \frac{-\ln(2-p)}{\ln \lambda_{L;ij}} \text{ und} \\ 2 - \lambda_{L;ij}^{-\theta} > 0 &\Rightarrow \theta < \frac{-\ln 2}{\ln \lambda_{L;ij}} \\ &\Rightarrow \theta \in \left(\frac{-\ln(2-p)}{\ln \lambda_{L;ij}}, \frac{-\ln 2}{\ln \lambda_{L;ij}} \right) \end{aligned}$$

erfüllt sein. Die Darstellung von **MM2** lautet damit

$$\begin{aligned} &C(u_1, \dots, u_m) \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^m u_i^{-\theta} - (m-1) - p \sum_{1 \leq i < j \leq m} \left[\{u_i^{-\theta} - 1\}^{-\delta_{ij}} + \{u_j^{-\theta} - 1\}^{-\delta_{ij}} \right]^{-1/\delta_{ij}} \right\}^{-1/\theta}. \end{aligned}$$

Die bivariaten Ränder sind

$$\begin{aligned} &C_{ij}(u_i, u_j) \\ &= \left\{ u_i^{-\theta} + u_j^{-\theta} - 1 - p \left[\{u_i^{-\theta} - 1\}^{-\delta_{ij}} + \{u_j^{-\theta} - 1\}^{-\delta_{ij}} \right]^{-1/\delta_{ij}} \right\}^{-1/\theta}. \end{aligned}$$

In Tabelle 6.2 stehen für den trivariaten Fall bei Wahl der maximalen lower Tail dependence $\lambda_{L;\max}$ die Berechnungen für das optimale θ_{opt} , die Schranken θ_{\max} und θ_{\min} , sowie bei gewähltem θ die Berechnungen für Δ – dem maximalen Unterschied zwischen grösster und kleinster lower Tail dependence – und die mögliche kleinste lower Tail dependence $\lambda_{L;\min}$. Entsprechend dem Fall **MM1** können auch in diesem Fall zwei **MM2**–Copula

mittels einer **LT** verknüpft werden. Um die Eigenschaft der lower Tail dependence beizubehalten wird die Gamma-**LT** benützt,

$$\psi(x) = (1+x)^{-1/\eta} \text{ bzw. } \psi^{-1}(x) = x^{-\eta} - 1.$$

Das Ergebnis ist die erweiterte **MM2**-Copula (**MM2E**):

$$\begin{aligned} & \mathbf{MM2E}(u_1, \dots, u_{m_1}, u_{m_1+1}, \dots, u_{m_1+m_2}) \\ &= \left[(\mathbf{MM2}_1(u_1, \dots, u_{m_1}))^{-\eta} + (\mathbf{MM2}_2(u_{m_1+1}, \dots, u_{m_1+m_2}))^{-\eta} - 1 \right]^{-1/\eta}. \end{aligned}$$

Eingesetzt ergibt dies

$$\begin{aligned} \mathbf{MM2E}(u_1, \dots, u_{m_1}, u_{m_1+1}, \dots, u_{m_1+m_2}) &= \left\{ -1 + \right. & (6.17) \\ &+ \left[\sum_{i=1}^{m_1} u_i^{-\theta_1} - (m_1-1) - p_1 \sum_{1 \leq i < j \leq m_1} \left[\{u_i^{-\theta_1} - 1\}^{-\delta_{1;ij}} + \{u_j^{-\theta_1} - 1\}^{-\delta_{1;ij}} \right]^{-\frac{1}{\delta_{1;ij}}} \right]^{\frac{\eta}{\theta_1}} \\ &+ \left. \left[\sum_{i=1}^{m_2} u_{m_1+i}^{-\theta_2} - (m_2-1) - p_2 \sum_{1 \leq i < j \leq m_2} \left[\{u_{m_1+i}^{-\theta_2} - 1\}^{-\delta_{2;ij}} + \{u_{m_1+j}^{-\theta_2} - 1\}^{-\delta_{2;ij}} \right]^{-\frac{1}{\delta_{2;ij}}} \right]^{\frac{\eta}{\theta_2}} \right\}^{-\frac{1}{\eta}}. \end{aligned}$$

Die lower Tail dependence zwischen X_i , mit $i \in \{1, \dots, m_1\}$ und X_j , mit $j \in \{m_1 + 1, \dots, m_1 + m_2\}$, beträgt dann

$$\lambda_{L;ij} = 2^{-1/\eta} \text{ bzw. } \eta = \frac{-\ln 2}{\ln \lambda_{L;ij}}.$$

Entsprechend dem Fall **MM1E** ist das Problem hier, daß für einen **MLE**-Schätzer die Darstellung der Dichte der **MM2E**-Copula zu aufwendig ist. Wenn die $\lambda_{L;ij}$ zwischen den beiden Gruppen ($i \in \{1, \dots, m_1\}$ und $j \in \{m_1 + 1, \dots, m_1 + m_2\}$) nicht zu unterschiedlich sind, kann hier ebenfalls das arithmetische Mittel

$$\bar{\lambda}_L = \frac{1}{m_1 m_2} \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=m_1+1}^{m_1+m_2} \lambda_{L;ij}$$

verwendet werden.

Passende Copula für die Daten

Es wird eine Extremwertverteilung für die Daten der Swap Sätze gesucht. Die Parameter der univariaten **EVFn** sind bereits geschätzt, nach Theorem 5.3 und Definition 5.4 wird

jetzt noch eine Extremcopula benötigt, die die Abhängigkeitsstruktur der Daten gut beschreibt. Mit Theorem 5.5 folgt, daß die Extremcopula der Swap Sätze die gleichen Tail dependence Parameter hat, wie die Copula der **VF** der Swap Sätze. In Kapitel 7 werden Schranken zur Abschätzung der Verlustwahrscheinlichkeit bestimmt. Dazu wird eine Copula und dessen Überlebenscopula benötigt. Nach Bemerkung 4.22 sind die upper Tail dependence Parameter einer Copula C gleich den lower Tail dependence Parametern von \widehat{C} , der Überlebenscopula von C (siehe Definition 4.12). Mit **MM1E** und **MM2E** sind zwei Copula bekannt mit der Eigenschaft von upper bzw. lower Tail dependence. Je nach Zusammensetzung des Portfolios stellt sich ein Verlust ein, wenn die Tagesdifferenzen der Swap Sätze positiv oder negativ sind. Somit müssen die Tail dependence Parameter der Copula, je nach Zusammensetzung des Portfolios, den upper oder lower Tail dependence Parametern der Swap Sätze entsprechen.

Die Copula **MM2E** ist keine Extremcopula, da aber aus der univariaten Extremwertanalyse (Kapitel 3) Verteilungen bekannt sind, die die Swap Sätze gut beschreiben (siehe Abbildungen 3.16-3.19) – alternativ kann auch die zusammengesetzte Exponentialverteilung verwendet werden – und die **MM2E** Copula die Tail dependence Eigenschaft aufweist, ist die **MM2E** Copula geeignet, um als Überlebenscopula die Daten in den entsprechenden Tails zu beschreiben.

In Lemma 6.7 und 6.9 wurde auf das Problem hingewiesen, daß die Tail dependence Parameter in einem eingeschränkten Intervall liegen. Die **MM1E**– und **MM2E**–Copula können nicht die Abhängigkeitsstruktur von allen EUR Swap Sätzen darstellen. Wenn nicht die Swap Sätze von allen Laufzeiten im Portfolio vorhanden sind, ist es möglich, daß beide Copula die notwendige Abhängigkeitsstruktur zwischen den EUR Swap Sätzen darstellen können. Ein weiteres Problem taucht allerdings auf, wenn im Portfolio zusätzlich noch Swap Sätze von anderen Währungen vorhanden sind, deren Abhängigkeiten untereinander simuliert werden müssen.

Als Beispiel sind in den Tabellen 6.3 und 6.4 mögliche Gruppen gebildet und die Parameter δ_{ij} der **MM1**–Copula für positive Änderungen der Tagesdifferenzen und die Parameter $\delta_{L;ij}$ der **MM2**–Copula für negative Änderungen der Tagesdifferenzen sowie deren Parameter θ angegeben. In den Tabellen 6.5 und 6.6 sind die Parameter η der **MM1E**– bzw. **MM2E**–Copula zwischen den einzelnen Gruppen angegeben; die upper bzw. lower Tail dependence Parameter sind aus den Tabellen 4.1 und 4.2 gewählt. Wenn zwei Gruppen mit den beiden erweiterten **MM**–Copula verbunden werden, stellt sich die Frage, wie gut kann der Parameter η die Abhängigkeitsstruktur zwischen beiden Gruppen darstellen? Sollte z.B. die upper Tail dependence der positiven Änderungen der

Tagesdifferenzen zwischen den Gruppen $30d - 90d$ und $9a - 10a$ modelliert werden, so liegen die einzelnen λ_{ij} zwischen beiden Gruppen in einem Intervall von $(0.3509, 0.3656)$ ($\bar{\lambda}_U = 0.3601$), die **MM1E**-Copula mit dem Parameter $\hat{\eta} = \ln 2 / \ln(2 - \bar{\lambda}_U) = 1.4013$ kann in diesem Fall die Abhängigkeit zwischen den beiden Gruppen sehr gut darstellen. Versucht man im Gegensatz dazu die lower Tail dependence der negativen Änderungen der Tagesdifferenzen zwischen den Gruppen $180d - 360d$ und $2a - 4a$ zu modellieren, so liegen die $\lambda_{L;ij}$ zwischen den beiden Gruppen in einem Intervall von $(0.6126, 0.8251)$ ($\bar{\lambda}_L = 0.7135$), die Abhängigkeitsstruktur zwischen beiden Gruppen wird mit dem Parameter $\hat{\eta} = -\ln 2 / \ln \bar{\lambda}_L = 2.053$ in der **MM2E**-Copula nur mäßig gut modelliert.

(i) Gruppe $30d - 90d$, $\theta = 1.3$:	δ_{ij}	30d	60d	90d	
	30d		31.09	2.48	
	60d			7.89	
(ii) Gruppe $180d - 2a$, $\theta = 2.21$:	δ_{ij}	180d	270d	360d	2a
	180d		127.18	1.90	1.17
	270d			3.10	1.62
	360d				2.66
(iii) Gruppe $3a - 5a$, $\theta = 2.48$:	δ_{ij}	3a	4a	5a	
	3a		4.40	1.97	
	4a			192.76	
(iv) Gruppe $6a - 8a$, $\theta = 3.36$:	δ_{ij}	6a	7a	8a	
	6a		6.16	1.45	
	7a			177.71	
(v) Gruppe $9a - 10a$, $\theta = 1.00$:	δ_{ij}	9a	10a		
	9a		11.63		

Tabelle 6.3: Parameter δ_{ij} für **MM1** Copula mit upper Tail dependence der EUR Swap Sätze.

(i) Gruppe 30d – 90d, $\theta = 0.97$:	δ_{ij}	30d	60d	90d
	30d		3.43	0.59
	60d			226.60
(ii) Gruppe 180d – 2a, $\theta = 1.82$:	δ_{ij}	180d	270d	360d
	180d		0.81	0.45
	270d			676.66
(iii) Gruppe 2a – 4a, $\theta = 2.87$:	δ_{ij}	2a	3a	4a
	2a		2.10	0.49
	3a			186.06
(iv) Gruppe 5a – 7a, $\theta = 2.77$:	δ_{ij}	6a	7a	8a
	5a		2.10	0.63
	6a			180.73
(v) Gruppe 9a – 10a, $\theta = 1.00$:	δ_{ij}	9a	10a	
	9a		24.34	

Tabelle 6.4: Parameter δ_{ij} für **MM2** Copula mit lower Tail dependence der EUR Swap Sätze.

η	180d-2a	3a-5a	6a-8a	9a-10a
30d-90d	1.543814948	1.480915563	1.455963127	1.401318896
180d-2a		2.280102947	1.972602661	1.750252324
3a-5a			3.012921946	2.395273387
6a-8a				4.438354975

Tabelle 6.5: Parameter η zwischen den **MM1**–Gruppen aus Tabelle 6.3 für die **MM1E**-Copula.

η	180d-360d	2a-4a	5a-7a	8a	9a-10a
30d-90d	0.887476928	0.796005389	0.747904209	0.703756037	0.689405979
180d-360d		2.053253252	1.641081515	1.294600844	1.151506512
2a-4a			2.692339884	1.891496533	1.628035843
5a-7a				3.818883682	2.977218682
8a					8.81408984

Tabelle 6.6: Parameter η zwischen den **MM2**–Gruppen aus Tabelle 6.4 für die **MM2E**-Copula.

Kapitel 7

Abschätzung der Portfolio-Verlustwahrscheinlichkeit

In den vorherigen Kapiteln wurden die Grundlagen gelegt, um die Wahrscheinlichkeit eines extremen multivariaten Ereignisses zu schätzen. Im folgenden interessiert die Verlustwahrscheinlichkeit des Portfolios, für dessen Komponenten die multivariate Extremwertverteilung (siehe Abschnitt 5) bekannt ist. Die Abschätzung der Schranken im bivariaten Fall stützt auf PRT [11].

7.1 Schranken für $\mathbb{P}(\sum a_i X_i > k)$

7.1.1 Bivariater Fall

Wir betrachten den Wert eines Portfolios an zwei aufeinanderfolgenden Tagen $t - 1$ und t , bestehend aus einer Linearkombination von zwei Komponenten

$$aX_{t-1} + (1 - a)Y_{t-1} \text{ bzw. } aX_t + (1 - a)Y_t, \text{ für } 0 \leq a \leq 1.$$

Der Gewinn/Verlust des Portfolios vom Tag $t - 1$ auf den Tag t sei bezeichnet mit

$$aX + (1 - a)Y = (aX_t + (1 - a)Y_t) - (aX_{t-1} + (1 - a)Y_{t-1}),$$

wobei die Extremwertverteilung der Tagesdifferenzen $(X, Y)^T$ bekannt ist. Gesucht ist jetzt die Wahrscheinlichkeit für grosse Verluste k ,

$$\mathbb{P}\{aX + (1 - a)Y > k\}.$$

Sei nun (x, y) so, daß $ax + (1 - a)y = k$, d.h. $(x, y) = (x, \frac{k-ax}{1-a})$. Dann gilt

$$\mathbb{P}\{X > x, Y > y\} = \mathbb{P}\{aX > ax, (1-a)Y > k - ax\} \leq \mathbb{P}\{aX + (1-a)Y > k\}$$

und

$$\begin{aligned} 1 - \mathbb{P}\{X \leq x, Y \leq y\} &= 1 - \mathbb{P}\{aX \leq ax, (1-a)Y \leq k - ax\} \\ &\geq 1 - \mathbb{P}\{aX + (1-a)Y \leq k\} = \mathbb{P}\{aX + (1-a)Y > k\}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich eine Abschätzung der Verlustwahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}\{X > x, Y > y\} \leq \mathbb{P}\{aX + (1-a)Y > k\} \leq 1 - \mathbb{P}\{X \leq x, Y \leq y\}. \quad (7.1)$$

Eine graphische Veranschaulichung der Abschätzung der Verlustwahrscheinlichkeit ist in Abbildung 7.1 zu finden. Ein geeigneter Punkt $(x, y) = (x, \frac{k-ax}{1-a})$, der obige Ungleichung (7.1) in vielen Fällen *gut* erfüllt, ist derjenige mit der grössten gemeinsamen Dichte. Allerdings ist es im allgemeinen Fall schwierig, diesen Punkt zu approximieren. Bei positiver Abhängigkeit in den Tails sind die Dichten entlang gleicher Quantile am grössten, es wird also ein Punkt gesucht mit gleichen univariaten Quantilen:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ (k - ax)/(1 - a) \end{pmatrix} \text{ mit } \mathbb{P}\{X > x\} = \mathbb{P}\{Y > y\}; \quad (7.2)$$

dieser Punkt sei bezeichnet mit (x^*, y^*) . Aus der univariaten Extremwerttheorie folgt mit Theorem 3.9 die Tail-Wahrscheinlichkeit für eine **ZV** mit Fréchet Tail und der Annahme $\mathcal{L}(z) \rightarrow c = \text{const}$, $\mathbb{P}\{X > x\} = c_X x^{-1/\xi_X}$ und $\mathbb{P}\{Y > y\} = c_Y y^{-1/\xi_Y}$; somit gilt für $x > u_X$ und $y > u_Y$ mit ausreichend grossen Schwellen u_X und u_Y

$$y \approx \left(\frac{c_Y}{c_X}\right)^{\xi_Y} x^{\xi_Y/\xi_X}.$$

Damit kann der Punkt $(x^*, y^*)^T$ numerisch approximiert werden:

$$\begin{aligned} y^* &= \frac{k - ax^*}{1 - a} \text{ und } y^* = \left(\frac{c_Y}{c_X}\right)^{\xi_Y} (x^*)^{\xi_Y/\xi_X} \\ \Rightarrow (1 - a) \left(\frac{c_Y}{c_X}\right)^{\xi_Y} (x^*)^{\xi_Y/\xi_X} + ax^* - k &= 0. \end{aligned}$$

Beispiel 7.1 Im folgenden soll die Verlustwahrscheinlichkeit von einem bivariaten Portfolio $\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}Y$ für den Verlust $k = \frac{1}{2}F_X^{\leftarrow}(0.98) + \frac{1}{2}G_Y^{\leftarrow}(0.98) =: \frac{1}{2}(x^* + y^*)$ abgeschätzt werden. Die obere Schranke $1 - \mathbb{P}\{X < x^*, Y < y^*\} = 1 - C_\theta(0.98, 0.98)$ wird mit der

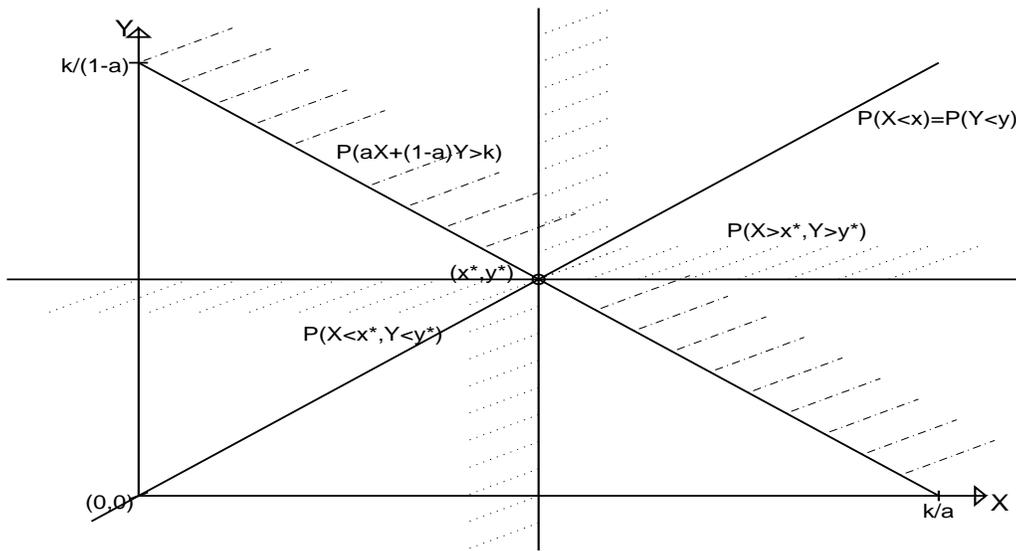


Abbildung 7.1: Abschätzung von $\mathbb{P}\{aX + (1-a)Y > k\}$ mit *optimaler* (x^*, y^*) gemäß (7.1).

Gumbel-Copula (upper Tail dependence erforderlich) berechnet und die untere Schranke $\mathbb{P}\{X > x^*, Y > y^*\} = \hat{C}_\delta(0.02, 0.02)$ wird mit der Kimeldorf&Sampson-Copula berechnet (lower Tail dependence erforderlich). Die Quantilschätzung für F_X^\leftarrow und G_Y^\leftarrow erfolgt mit der, auf der **GPD**-Approximation basierenden, in *EVIS* implementierten Funktion *quant*. Als Vergleich zu den Schranken wird dann noch mittels **GPD**-Fit die Tailfunktion $\bar{F}_{\frac{1}{2}(X+Y)}$ des Portfolios, basierend auf der Stichprobe $(\frac{1}{2}(X_i + Y_i))_{i=1, \dots, n}$ für das Quantil k geschätzt.

- Zunächst wird mit X der Verlust des 30 Tages EUR Swap Satz und mit Y der Verlust des 5 Jahres EUR Swap Satz betrachtet. Die geschätzte Tail dependence beträgt in diesem Fall $\hat{\lambda}_L = 0.36319$ (siehe Tabelle 4.2), für die Gumbel-Copula ergibt sich damit der Parameter $\hat{\theta} = 1.40669$, für die Kimeldorf&Sampson-Copula der Parameter $\hat{\delta} = 0.68437$. Die geschätzten univariaten 98%-Quantile sind $x^* = 0.074$, für X , und $y^* = 0.0855$, für Y . Damit beträgt der Verlust $k = 0.07975$ und die Abschätzung der Verlustwahrscheinlichkeit ergibt sich zu

$$0.0076447 \leq \mathbb{P}\left\{\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}Y > 0.0795\right\} \leq 0.032528 .$$

Der **GPD**-Schätzer für die Verlustwahrscheinlichkeit beträgt $\widehat{F}_{\frac{1}{2}(X+Y)}(0.07975) = 0.0102$, liegt also im Intervall $[0.0076447, 0.032528]$. Die einzelnen Abschätzungen sind in Abbildung 7.2 zu sehen.

- Nun wird mit X der Verlust des 4 Jahres EUR Swap Satz und mit Y der Verlust des 5 Jahres EUR Swap Satz betrachtet. Die Tail dependence beträgt in diesem Fall $\widehat{\lambda}_L = 0.86734$ (siehe Tabelle 4.2), für die Gumbel-Copula ergibt sich damit der Parameter $\widehat{\theta} = 5.56435$, für die Kimeldorf&Sampson-Copula der Parameter $\widehat{\delta} = 4.87018$. Die geschätzten univariaten 98%-Quantile sind $x^* = 0.086$, für X , und $y^* = 0.0855$, für Y . Damit beträgt der Verlust $k = 0.08575$ und die Abschätzung der Verlustwahrscheinlichkeit ergibt sich zu

$$0.017346 \leq \mathbb{P} \left\{ \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}Y > 0.08575 \right\} \leq 0.022623 .$$

Der **GPD**-Schätzer für die Verlustwahrscheinlichkeit beträgt $\widehat{F}_{\frac{1}{2}(X+Y)}(0.08575) = 0.0175$, liegt also im Intervall $[0.017346, 0.022623]$ – allerdings wesentlich näher an der unteren Schranke, als im Fall mit der geringeren Tail dependence. Die einzelnen Abschätzungen sind in Abbildung 7.3 zu sehen.

□

Abschätzung bei *short* Positionen

Gesucht ist jetzt die Wahrscheinlichkeit für grosse Verluste k , wobei Y *short* ist,

$$\mathbb{P} \{ aX + bY > k \}, \quad a > 0, \quad b < 0.$$

Ebenfalls ist jetzt (x, y) so, daß $ax + by = k$, d.h. $(x, y) = (x, \frac{k-ax}{b})$. Dann gilt die Abschätzung (entsprechend zu (7.1))

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\{Y < y\} - \mathbb{P}\{X < x, Y < y\} \stackrel{b \leq 0}{=} \mathbb{P}\{X > x, \text{sgn}(b)Y > \text{sgn}(b)y\} \\ & \leq \mathbb{P}\{aX + (1-a)Y > k\} \\ & \leq 1 - \mathbb{P}\{X < x, \text{sgn}(b)Y < \text{sgn}(b)y\} \stackrel{b \leq 0}{=} 1 - \mathbb{P}\{X \leq x\} + \mathbb{P}\{X \leq x, Y \leq y\}. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Die Ungleichung (7.3) ist allerdings nicht sehr nützlich: Die linke Seite der Ungleichung wird für grosse k sehr klein, die rechte Seite hingegen läuft bei grossem k gegen 1. Somit enthält (7.3) nur sehr wenige Informationen und müsste erweitert werden, um die Verlustwahrscheinlichkeit von einem Portfolio *brauchbar* abschätzen zu können. In Abbildung 7.4

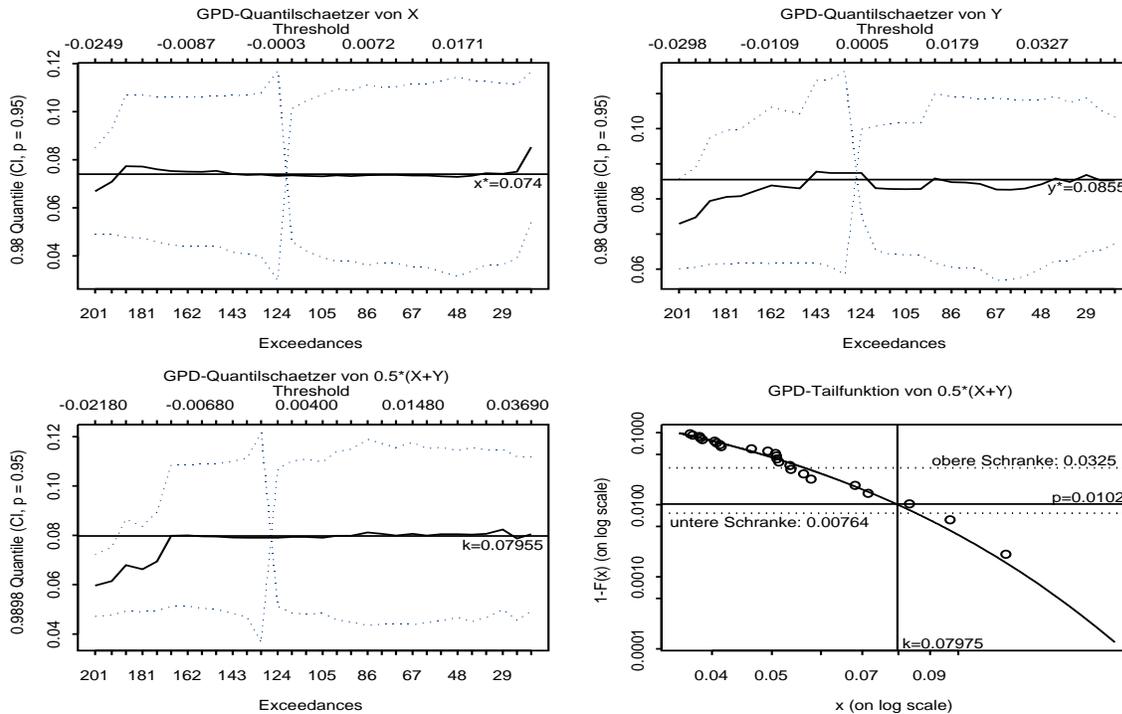


Abbildung 7.2: Quantil- und Verlustschätzungen für X als 30 Tages und Y als 5 Jahres EUR Swap Satz.

Oben links: 98%-**GPD**-Quantilschätzer für X gleich dem Verlust des 30 Tages EUR Swap Satz.

Oben rechts: 98%-**GPD**-Quantilschätzer für Y gleich dem Verlust des 5 Jahres EUR Swap Satz.

Unten links: 98%-**GPD**-Quantilschätzer für den Verlust des Portfolios $\frac{1}{2}(X + Y)$.

Unten rechts: **GPD**-Tailfunktion $\bar{F}_{\frac{1}{2}(X+Y)}$ vom Verlust des Portfolios $\frac{1}{2}(X + Y)$.

ist die Abschätzung der bivariaten Verlustwahrscheinlichkeit graphisch skizziert, für die *long* Position X (entspricht $a > 0$) und die *short* Position Y (entspricht $b < 0$).

Das Problem bei der *brauchbaren* Abschätzung der Verlustwahrscheinlichkeit im bivariaten Portfolio mit einer *short* und einer *long* Position liegt daran, daß die Quantilwinkelhalbierende (der Ort, an dem $\mathbb{P}\{X \leq x\} = \mathbb{P}\{Y \leq y\}$ gilt; wegen derselben Verteilungsklasse ist das in diesem Fall eine Gerade) und die Gerade $\{aX + bY = k\}$ beide eine positive Steigung haben: Um eine gute Abschätzung zu erhalten, wird ein Punkt benötigt, für den eine der Mengen

$$\{X < x^*, Y < y^*\}, \{X > x^*, Y < y^*\}, \{X < x^*, Y > y^*\} \text{ oder } \{X > x^*, Y > y^*\}$$

ganz im positiven Halbraum $\{aX + bY > k\}$ und eine andere dieser Mengen ganz im negativen Halbraum $\{aX + bY < k\}$ liegt und die beiden Mengen möglichst viel *Masse*

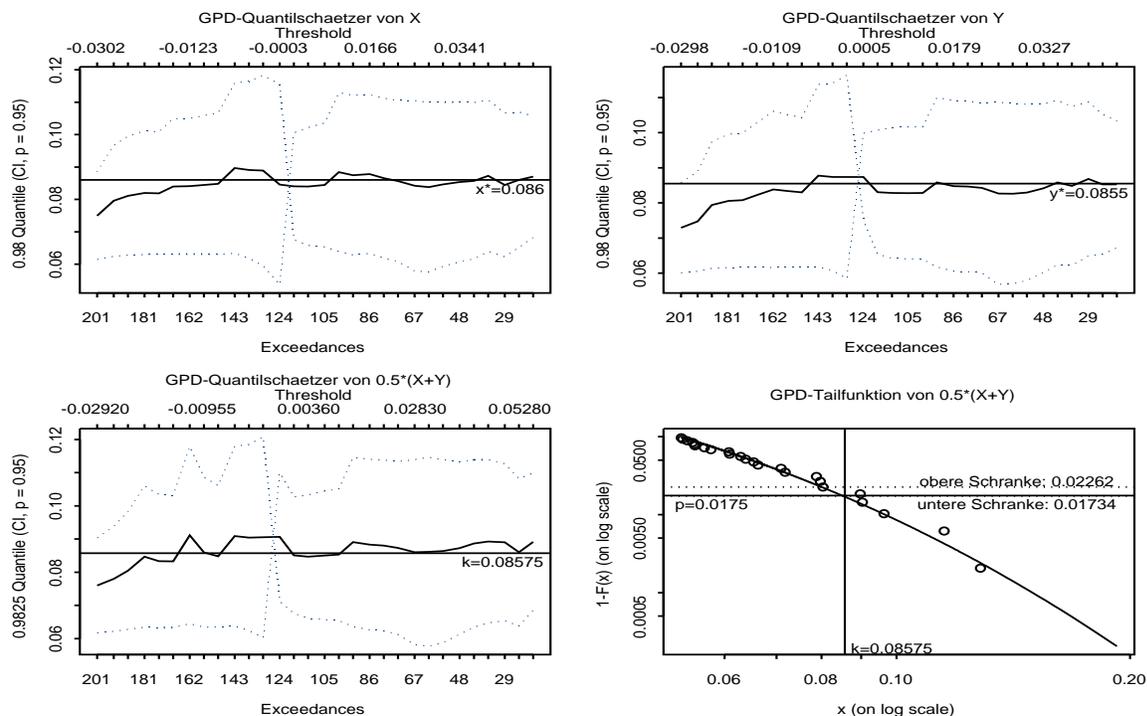


Abbildung 7.3: Quantil- und Verlustschätzungen für X als 4 Jahres und Y als 5 Jahres EUR Swap Satz.

Oben links: 98%-**GPD**-Quantilschätzer für X gleich dem Verlust des 4 Jahres EUR Swap Satz.

Oben rechts: 98%-**GPD**-Quantilschätzer für Y gleich dem Verlust des 5 Jahres EUR Swap Satz.

Unten links: 98%-**GPD**-Quantilschätzer für den Verlust des Portfolios $\frac{1}{2}(X + Y)$.

Unten rechts: **GPD**-Tailfunktion $\bar{F}_{\frac{1}{2}(X+Y)}$ vom Verlust des Portfolios $\frac{1}{2}(X + Y)$.

enthalten. Der Hauptteil der *Masse* streut wegen positiver Abhängigkeit um die Quantilwinkelhalbierende (siehe z.B. Abbildung 4.2 und 4.3). Somit steckt in den Mengen $\{X \leq x^*, Y \leq y^*\}$ die meiste Masse, in denen die Quantilwinkelhalbierende verläuft. Wenn nun auch die Gerade $\{aX + bY = k\}$ positive Steigung besitzt, dann gibt es keine der Mengen $\{X \leq x^*, Y \leq y^*\}$, die in einem der Halbräume $aX + bY \leq k$ liegt und durch die die Quantilwinkelhalbierende verläuft. Somit werden alle dieser Schätzungen unbrauchbar.

7.1.2 Multivariater Fall

Im folgenden wird die bivariate Abschätzung auf den multivariaten Fall erweitert. Für ein Portfolio, bestehend aus einer Linearkombination des m -variaten Zufallsvektors der

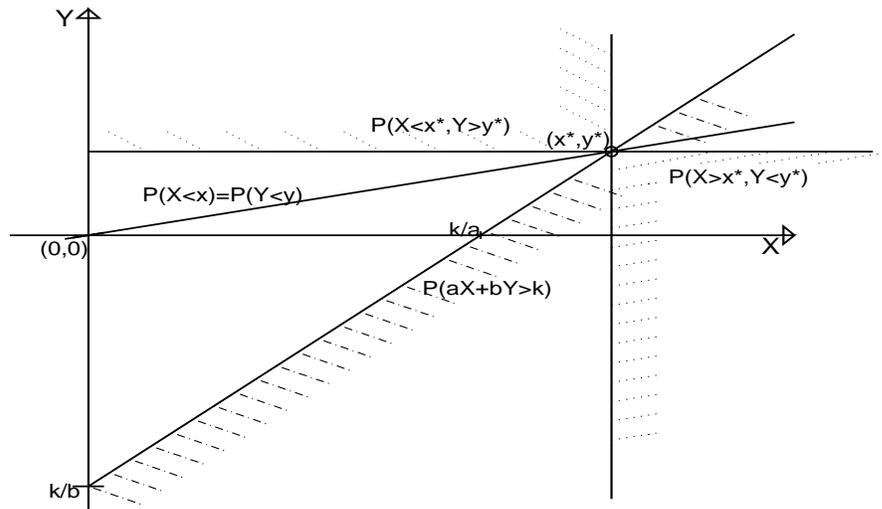


Abbildung 7.4: Abschätzung von $\mathbb{P}\{aX + bY > k\}$ mit *optimalem* (x^*, y^*) gemäß (7.3) und $a > 0$, sowie $b < 0$.

Tagesdifferenzen (X_1, \dots, X_m) (wobei auch *short* Positionen zulässig sind ($a_i \in \mathbb{R} \forall i$)) wird eine Abschätzung der Gewinn/Verlust-Wahrscheinlichkeit gesucht

$$\mathbb{P} \left\{ \sum_{i=1}^m a_i X_i > k \right\}.$$

Dazu wird der Vektor $(x_1, \dots, x_m)^T$ gesucht, mit $\sum_{i=1}^m a_i x_i = k$ und $\sum_{i=1}^m a_i = A$ mit $a_i \in \mathbb{R} \forall i$. x_1, \dots, x_{m-1} wird frei gewählt und

$$x_m = \frac{k - \sum_{i=1}^{m-1} a_i x_i}{a_m}$$

gesetzt. Jetzt werden – wie im bivariaten Fall – die x_i benötigt, die gleichen univariaten Quantilen entsprechen. Es gelte $c_j x_j^{-1/\xi_j} = \mathbb{P}\{X_j > x_j\} = \mathbb{P}\{X_i > x_i\} = c_i x_i^{-1/\xi_i} \forall i, j$; folglich ist

$$x_j = \left(\frac{c_j}{c_1} \right)^{\xi_j} x_1^{\xi_j/\xi_1}.$$

Damit ergibt sich das Gleichungssystem, das ebenfalls numerisch approximiert werden kann:

$$x_m^* = \frac{k - \sum_{i=1}^{m-1} a_i x_i^*}{a_m}$$

$$\begin{aligned}
x_2^* &= \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{\xi_2} (x_1^*)^{\xi_2/\xi_1} \\
&\vdots = \vdots \\
x_m^* &= \left(\frac{c_m}{c_1}\right)^{\xi_m} (x_1^*)^{\xi_m/\xi_1}
\end{aligned} \tag{7.4}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^m a_i \left(\frac{c_i}{c_1} (x_1^*)^{\frac{1}{\xi_1}}\right)^{\xi_i} - k = 0. \tag{7.5}$$

Da sich bei der eindimensionalen Datenanalyse der Daten die Exponentialverteilung als brauchbar herausgestellt hat (siehe Abschnitt 2.3), haben die Tails die Form (o.E. sei $x_j > 0$)

$$\mathbb{P}\{X_j > x_j\} = 1 - \left(\widehat{\mathbb{P}}\{X < 0\} + \widehat{\mathbb{P}}\{X \geq 0\} \left[1 - e^{-\widehat{\lambda}_{+,j}x_j}\right]\right) = e^{-\lambda_{+,j}x_j},$$

folglich gilt $x_j = \frac{\lambda_{+,1}}{\lambda_{+,j}}x_1$ und das jetzt explizit lösbare Gleichungssystem lautet

$$\begin{aligned}
x_m^* &= \frac{k - \sum_{i=1}^{m-1} a_i x_i^*}{a_m} \\
x_2^* &= \frac{\lambda_{+,1}}{\lambda_{+,2}} x_1^* \\
&\vdots = \vdots \\
x_m^* &= \frac{\lambda_{+,1}}{\lambda_{+,m}} x_1^* \\
\Rightarrow x_j^* &= \frac{k}{\lambda_{+,j} \sum_{i=1}^m \frac{a_i}{\lambda_{+,i}}}.
\end{aligned}$$

Entsprechend zu (7.3) sind auch hier $a_i < 0$ und $a_j > 0$ zulässig, in einem Portfolio sind meistens *short* und *long* Positionen vorhanden. Mit dem Vektor $(x_1^*, \dots, x_m^*)^T$ wird dann die Verlustwahrscheinlichkeit des Portfolios abgeschätzt mit

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\{\text{sgn}(a_1)X_1 > \text{sgn}(a_1)x_1^*, \dots, \text{sgn}(a_m)X_m > \text{sgn}(a_m)x_m^*\} \\
&\leq \mathbb{P}\left\{\sum_{i=1}^m a_i X_i > k\right\} \\
&\leq 1 - \mathbb{P}\{\text{sgn}(a_1)X_1 < \text{sgn}(a_1)x_1^*, \dots, \text{sgn}(a_m)X_m < \text{sgn}(a_m)x_m^*\}.
\end{aligned} \tag{7.6}$$

Sei o.E. $a_1 < 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\{\text{sgn}(a_1)X_1 > \text{sgn}(a_1)x_1^*, \dots, \text{sgn}(a_m)X_m > \text{sgn}(a_m)x_m^*\} \\
&= \mathbb{P}\{\text{sgn}(a_2)X_2 > \text{sgn}(a_2)x_2^*, \dots, \text{sgn}(a_m)X_m > \text{sgn}(a_m)x_m^*\} \\
&\quad - \mathbb{P}\{X_1 > x_1^*, \text{sgn}(a_2)X_2 > \text{sgn}(a_2)x_2^*, \dots, \text{sgn}(a_m)X_m > \text{sgn}(a_m)x_m^*\}.
\end{aligned} \tag{7.7}$$

Wenn noch weitere *short* Positionen vorhanden sind, kann

$$\mathbb{P}\{\text{sgn}(a_1)X_1 > \text{sgn}(a_1)x_1^*, \dots, \text{sgn}(a_m)X_m > \text{sgn}(a_m)x_m^*\} \quad (7.8)$$

mittels weiterer Anwendung von (7.7) berechnet werden. Die für (7.8) benötigten Überlebenswahrscheinlichkeiten werden dann mit der Überlebenscopula \widehat{C} dargestellt (siehe Definition 4.12). Mit Bemerkung 4.22 folgt, daß \widehat{C} eine Copula ist, mit $\lambda_{L;ij}^{\widehat{C}} = \lambda_{U;ij}^C \quad \forall i < j$ und C ist die Copula von (X_1, \dots, X_m) . Für die Rand \mathbf{VFn} von (X_1, \dots, X_m) , die für (7.8) benötigt werden, gilt ebenfalls die Gleichheit $\lambda_{L;ij}^{\widehat{C}_R} = \lambda_{U;ij}^{C_R} \quad \forall i < j$, wobei C_R die Copula einer Rand \mathbf{VF} von (X_1, \dots, X_m) ist und \widehat{C}_R ist die Überlebenscopula von C_R .

Die rechte Seite der Ungleichung (7.6) kann bei *short* Positionen entsprechend zu (7.7) bestimmt werden. Sei o.E. $a_1 < 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & 1 - \mathbb{P}\{\text{sgn}(a_1)X_1 < \text{sgn}(a_1)x_1^*, \dots, \text{sgn}(a_m)X_m < \text{sgn}(a_m)x_m^*\} \\ = & 1 - \mathbb{P}\{\text{sgn}(a_2)X_2 < \text{sgn}(a_2)x_2^*, \dots, \text{sgn}(a_m)X_m < \text{sgn}(a_m)x_m^*\} \\ & + \mathbb{P}\{X_1 < x_1^*, \text{sgn}(a_2)X_2 < \text{sgn}(a_2)x_2^*, \dots, \text{sgn}(a_m)X_m < \text{sgn}(a_m)x_m^*\}. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Für weitere *short* Positionen wird (7.9) auf

$$\mathbb{P}\{\text{sgn}(a_1)X_1 < \text{sgn}(a_1)x_1^*, \dots, \text{sgn}(a_m)X_m < \text{sgn}(a_m)x_m^*\} \quad (7.10)$$

weiter angewendet. Die für (7.10) benötigten Rand \mathbf{VFn} werden dann mittels einer Copula C mit der in Tabelle 4.1 geschätzten upper Tail dependence als Abhängigkeitsmaß. Für die aus Gleichung (7.4) bestimmten x_j^* sei

$$u^* = \mathbb{P}\{X_j < x_j^*\} \text{ sowie } \bar{u}^* = \mathbb{P}\{X_j > x_j^*\}.$$

Damit können (7.8) und (7.10) abgeschätzt werden mittels

$$C_R(u^*, \dots, u^*) \text{ und } \widehat{C}_R(\bar{u}^*, \dots, \bar{u}^*),$$

wobei die C_R bzw. \widehat{C}_R die für die Berechnung von (7.8) und (7.10) benötigten Rand-Copula bzw. Rand-Überlebenscopula von C bzw. \widehat{C} sind. Für C kann die Extremcopula **MM1E** (siehe (6.14)) und für \widehat{C} die Copula **MM2E** (siehe (6.17)) verwendet werden.

Beispiel 7.2 Sei $a_m < 0$ und $a_i > 0$, für $i = 1, \dots, m-1$ und seinen C_k die k -variater Ränder von C ,

$$C_k(u_1, \dots, u_k) = C(u_1, \dots, u_k, 1, \dots, 1), \text{ für } k = 2, \dots, m-1.$$

Mit (7.9) und $u^* = \mathbb{P}\{X_j < x_j^*\}$ gilt dann

$$\begin{aligned} & 1 - \mathbb{P}\{\operatorname{sgn}(a_1)X_1 < \operatorname{sgn}(a_1)x_1^*, \dots, \operatorname{sgn}(a_m)X_m < \operatorname{sgn}(a_m)x_m^*\} \\ &= 1 - C_{m-1}(u^*, \dots, u^*) + C(u^*, \dots, u^*). \end{aligned}$$

□

Allerdings wird auch im multivariaten Fall die Abschätzung unbrauchbar, wenn im Portfolio *short* und *long* Positionen vorhanden sind. Die Begründung ist analog zum bivariaten Fall: Keine der Mengen

$$\{X_1 \leq x_1^*, \dots, X_m \leq x_m^*\},$$

die vollständig in einem der Halbräume $\{a^T X \leq k\}$ liegen, können den Teil der $(m-1)$ -Hyperebene

$$\{(x_1, \dots, x_m) : \mathbb{P}\{X_1 \leq x_1\} = \dots = \mathbb{P}\{X_m \leq x_m\}\},$$

der im entsprechenden Halbraum liegt, vollständig enthalten.

7.2 Generierung von Zufallsvektoren für eine spezielle Copula

Eine Variante zur Abschätzung des Verlustquantils von einem Portfolio

$$\sum_{i=1}^m a_i X_i = \mathbf{a}^T \mathbf{X}$$

besteht in der Simulation von N Zufallsvektoren mit der gleichen gemeinsamen Verteilung wie die der Tagesdifferenzen

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} X_{1,1} \\ \vdots \\ X_{1,m} \end{pmatrix}, \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} X_{2,1} \\ \vdots \\ X_{2,m} \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{X}_N = \begin{pmatrix} X_{N,1} \\ \vdots \\ X_{N,m} \end{pmatrix}.$$

Die Ordnungsstatistik sei

$$\mathbf{X}_{(N,N)}, \dots, \mathbf{X}_{(2,N)}, \mathbf{X}_{(1,N)},$$

mit

$$\mathbf{a}^T \mathbf{X}_{(N,N)} \leq \dots \leq \mathbf{a}^T \mathbf{X}_{(i,N)} \leq \dots \leq \mathbf{a}^T \mathbf{X}_{(1,N)}.$$

Ein Schätzer für das Verlustquantil k_α des Portfolios zum Niveau $\alpha = \frac{i-1}{N}$ ist somit

$$\widehat{k}_{\frac{i}{N}} = \mathbf{a}^T \mathbf{X}_{(i,N)} \Rightarrow \widehat{\mathbb{P}} \left\{ \mathbf{a}^T \mathbf{X} > \widehat{k}_{\frac{i}{N}} \right\} = \frac{i-1}{N}.$$

Gelte im folgenden für die Abhängigkeitsstruktur des Zufallsvektors

$$(X_1, \dots, X_m)^T \sim C,$$

für die m -variante Copula C . Weiterhin seien die k -variante Ränder von C bezeichnet mit

$$C_k(u_1, \dots, u_k) = C(u_1, \dots, u_k, 1, \dots, 1) \text{ für } k = 2, \dots, m-1,$$

und $C_1(u_1) = u_1$ sowie $C_m(u_1, \dots, u_m) = C(u_1, \dots, u_m)$. Die U_1, \dots, U_m haben die gemeinsame **VF** C . Die bedingte Verteilung von U_k gegeben U_1, \dots, U_{k-1} sei

$$\begin{aligned} C_k(q_k | q_1, \dots, q_{k-1}) &= \mathbb{P} \{ U_k \leq q_k | U_1 = q_1, \dots, U_{k-1} = q_{k-1} \} \\ &= \frac{\partial^{k-1} C_k(u_1, \dots, u_k)}{\partial u_1 \cdots \partial u_{k-1}} \bigg|_{(q_1, \dots, q_k)} \bigg/ \frac{\partial^{k-1} C_{k-1}(u_1, \dots, u_{k-1})}{\partial u_1 \cdots \partial u_{k-1}} \bigg|_{(q_1, \dots, q_k)}. \end{aligned}$$

Seien $Q_1, \dots, Q_m \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathbf{U}(0, 1)$, dann gilt

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ C_2^{-1}(Q_2 | Q_1) \\ \vdots \\ C_m^{-1}(Q_m | Q_1, C_2^{-1}(Q_2 | Q_1), \dots) \end{pmatrix} \sim C.$$

Damit generiert der nachfolgende Algorithmus Zufallsvektoren $(u_1, \dots, u_m)^T$ von der Copula C :

Algorithmus

- Simuliere $u_1, q_2, \dots, q_m \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathbf{U}(0, 1)$
- Finde u_2 mit $q_2 = C_2(u_2 | u_1)$
- \vdots
- Finde u_m mit $q_m = C_m(u_m | u_1, \dots, u_{m-1})$ □

Die Extremcopula **MM1E** ist gefittet für die oberen Tailbereiche der Verteilung der Daten. Entsprechend werden mit **MM2E** Zufallsvektoren generiert, die im unteren Tailbereich mit der Verteilung der Daten übereinstimmen.

Schwierig wird die Durchführung für grössere Dimensionen, da die benötigten partiellen Ableitungen beider Copula keine geschlossene Darstellung besitzen. Zum Beispiel benötigt im Fall $m = 6$ die Darstellung von $C_6(q_6|q_1, \dots, q_5)$ mehr als 100 Megabyte Speicherplatz und der Algorithmus ist damit ungeeignet, um in *brauchbarer* Zeit **ZVn** mit der Verteilung der **MM1E**- bzw. **MM2E**-Copula zu generieren. Eine Alternative zur Simulation von **ZVn** bietet sich an, wenn eine grössere Gruppenbildung möglich ist: Rekursiv werden die einzelnen **ZVn** mit einer Gumbel-Copula $C^{(i)}(u_1, u_2) = \exp \left\{ - \left[(-\ln u_1)^{\theta_i} + (-\ln u_2)^{\theta_i} \right]^{1/\theta_i} \right\}$ verknüpft,

$$C_m(u_1, \dots, u_m) = C^{(m)}(C_{m-1}(u_1, \dots, u_{m-1}), u_m), \text{ und } C_1(u_1, u_2) = C^{(1)}(u_1, u_2). \quad (7.11)$$

Damit wird die Abhängigkeit zwischen den Gruppen u_1, \dots, u_{m-1} und u_m mit dem Parameter θ_m modelliert. Daran erkennt man auch das Problem für dieses Modell, da nur $m-1$ Abhängigkeitsparameter existieren. Wenn dieses Verfahren angewendet wird, dann sollte eine *grössere* Gruppierung für die **ZVn** möglich sein. Somit ist diese Alternative ungeeignet, um die Abhängigkeiten der Swap Sätze zu modellieren. Allerdings gestaltet sich die Simulation von **ZVn** mit dieser rekursiven Gumbelverteilung einfacher, siehe ELM [7].

Zusammenfassung

Das Problem, das in dieser Arbeit gelöst werden sollte lautet, bestimme das Risiko eines Portfolios aus Zinsswapsätzen unter Berücksichtigung der Abhängigkeiten zwischen den einzelnen Swap Sätzen; Risikomaß soll der **VaR** sein.

Dieses Problem wird in der Praxis so gelöst, daß eine multivariate Normalverteilung gefittet wird. Das hat den Vorteil, daß die Abhängigkeit alleine durch die Kovarianzmatrix modelliert wird. Die notwendige Matrixalgebra führt heute jeder Computer so durch, daß das Problem in angemessener Zeit zu lösen ist. Des weiteren kann die Verteilung jedes linearen Portfolios so dargestellt werden, daß eine **VaR** Schätzung einfach durchzuführen ist.

Problematisch ist die Modellannahme allerdings in zweifacher Hinsicht. Die Tails der Normalverteilung fallen zu schnell gegen Null ab, so daß gerade extreme Risiken unterschätzt werden. Dieses Problem hat man in der Praxis so gelöst, daß man logarithmische Differenzen betrachtet, was dann zu einem lognormalen Modell führt. Die zweite Problematik betrifft die Modellierung der Abhängigkeit durch die Korrelation, die nicht zwangsläufig Informationen über extreme Abhängigkeiten enthält oder bei nichtlinearen Abhängigkeiten völlig ungeeignet ist. Als Abhängigkeitsmaß mißt sie nicht die Abhängigkeit im extremen Bereich. Der Interpretation des **VaR** als Maß für extremes Risiko entspräche eher ein Abhängigkeitsmaß, das eben auch die Abhängigkeit im extremen Bereich mißt. Die extremen Abhängigkeiten werden relevant, wenn extreme Portfolioverluste für extreme Änderungen der Komponenten auftreten.

In dieser Arbeit habe ich versucht, Methoden der Extremwerttheorie zur Risikoabschätzung auf ein solches Portfolio anzuwenden. Einen einfachen Ansatz zur Risikomessung bietet die univariate Extremwerttheorie an, indem die Zeitreihe $(P_i)_{i=1,\dots,n} = \left(\sum_{j=1}^m a_j X_{i,j} \right)_{i=1,\dots,n}$ des Portfolios als einzige Risikoquelle angenommen wird. Der **VaR** kann dann mittels **GPD**-Approximation bestimmt werden (siehe auch Beispiel 7.1). Dieser Ansatz funktioniert, ist aber unbefriedigend, da die Abhängigkeiten nicht modelliert werden.

In dieser Arbeit wurde versucht, eine Copula zu finden, mit der Tail dependence als Abhängigkeitsmaß. In Anlehnung an die Korrelationsmatrix im Normalverteilungsmodell wurde eine Tail dependence Matrix aus den Daten geschätzt (siehe Tabelle 4.1 und 4.2), die die Abhängigkeit jeder bivariaten Randverteilung modelliert. Ideal wäre nun ein multivariates Modell, das genau diese bivariaten Randverteilungen besitzt. Aus den Möglichkeiten, multivariate Modelle zu formulieren, haben wir die Form einer Copula gewählt, was in letzter Zeit recht populär geworden ist; siehe z.B. ELM [7]. Solche Modelle existieren, besitzen aber viel zu viele Parameter, um einen vernünftigen Fit durchzuführen. Der übliche und naheliegende Ausweg aus diesem Dilemma besteht in einer geeigneten Gruppierung der Daten. Bei einem genauen Studium der zur Verfügung stehenden Copula und der geschätzten Tail dependence Matrix kam eigentlich nur das **MM1** bzw. **MM2** Modell in Frage, siehe Beispiel 6.6 und 6.8 (bzw. die erweiterten Modelle **MM1E** und **MM2E**, siehe (6.14) und (6.17)). Dieses Modell haben wir an die zur Verfügung stehende Daten angepasst. Für eine **VaR** Schätzung werden in der Literatur zwei Möglichkeiten erwähnt: Schranken und Simulation. Wir stellen hier kurz die Probleme beider Methoden dar.

Für eine Simulation besitzt die geschätzte Verteilung nach wie vor relativ viele Parameter, d.h. eine hohe Dimension. Davon hängt aber die Komplexität des Simulationsverfahrens ab, siehe Abschnitt 7.2. Es gibt bisher kein adäquates Simulationsverfahren, das in einer vernünftigen Zeit das Simulationsproblem löst und den **VaR** schätzt. Modelle, die einfacher zu simulieren sind, verlangen eine völlig andere Struktur der Tail dependence Matrix. Ein Beispiel ist die Erweiterung der Gumbel Copula ((7.11) sowie Beispiel 4.21), diesem Modell entspricht eine Tail dependence Matrix, die gleiche Eintragungen in jeder Spalte der Matrix besitzt (außer auf der Diagonalen).

Schranken für den Tail eines linearen Portfolios gebildet aus zwei Produkten werden in (7.1) angegeben. Aus der Definition der Tail dependence folgt für grosse Quantile $u \rightarrow 1$, daß $C(u, u) \approx (1-u)\lambda_U + 2u - 1$ bzw. für kleine Quantile $u \rightarrow 0$, daß $C(u, u) \approx u\lambda_L$ gilt. Die Schranken hängen also nur von den Randverteilungen und der Tail dependence ab; d.h. sie haben den Vorteil, daß sie nicht vom gewählten Copula Modell abhängen. Die Schranken sind relativ genau für eine grosse positive Abhängigkeit (Tail dependence), siehe Abbildung 7.3. Man kann diese Schranken auf höher dimensionale Portfolios verallgemeinern, was in Abschnitt 7.1.2 gemacht wurde. Im Fall grosser positiver Tail dependence kann man wieder gute Schranken finden. Für den Fall von geringer Abhängigkeit oder einem Portfolio mit *short* und *long* Positionen sind diese Schranken allerdings zu ungenau.

Zusammenfassend ist zu sagen, daß mit dieser Arbeit der Status Quo der Forschung in

Richtung multivariater Extremwerttheorie in Verbindung mit Copula dargestellt wurde. Das gestellte Problem ist meines Erachtens damit keineswegs adäquat gelöst. Es sind aber viele interessante Fragestellungen aufgetreten und ich würde es begrüßen, an diesen Problemen weiterarbeiten zu können.

Abkürzungsverzeichnis

$(\cdot)^+$	$(\cdot)^+ = \max\{0, (\cdot)\}$.
$(\cdot)^-$	$(\cdot)^- = \min\{(\cdot), 0\}$.
$(\cdot)^*$	$(\cdot)^* = \ln(\max\{1, (\cdot)\})$.
acf	Autokovarianzfunktion.
acr	Autokorrelationsfunktion.
AN $(\mu_n, \frac{1}{n}V)$	asymptotisch Normalverteilt, $\bar{X}_n \sim \mathbf{AN}(\mu_n, \frac{1}{n}V) :\Leftrightarrow \frac{\bar{X}_n - \mu_n}{\sqrt{\frac{1}{n}V}} \xrightarrow{d} \mathbf{N}(0, 1)$.
$\text{card}(M)$	Mächtigkeit der Menge M .
$\text{Dom}(f)$	Definitionsmenge der Funktion f .
EVF	Standard Extremwert VF (Φ_α , Ψ_α und Λ).
Φ_α	Fréchet- VF : $\Phi_\alpha(x) = \exp\{-x^{-\alpha}\}1_{\mathbb{R}^+}(x)$, für $\alpha > 0$.
Ψ_α	Weibull- VF : $\Psi_\alpha(x) = \exp\{-(-x)^\alpha\}1_{\mathbb{R}^-}(x) + 1_{\mathbb{R}^+}(x)$, für $\alpha > 0$.
Λ	Gumbel- VF : $\Lambda(x) = \exp\{-e^{-x}\}$, für $x \in \mathbb{R}$.
F^{\leftarrow}	Quantilfunktion der VF F : $F^{\leftarrow}(t) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq t\}$.
GEV	Verallgemeinerte EVF .
GPD	Verallgemeinerte Pareto VF .
iid	unabhängig identisch verteilt.
$\alpha\%$ – KI (a, b)	Das Konfidenzintervall $[a, b]$ zum Konfidenzniveau $\alpha\%$.
LT	Laplace Transformierte.
MDA (H)	Maximaler Anziehungsbereich der EVF H .
MEVF	Multivariate Extremwertverteilungsfunktion.
MLE	Maximum Likelihood Schätzer.
MSMVE	min stabil multivariat exponentialverteilt.
$\mathbf{N}(\mu, \sigma)$	Normalverteilung mit Erwartungswert μ und Varianz σ .
\mathcal{R}_0	Menge der langsam variierenden Funktionen (siehe Definition 3.7).
$\text{Ran}(f)$	Zielmenge der Funktion f .
$\mathbf{U}(a, b)$	Gleichverteilung auf dem Intervall (a, b) .
VaR	Value at Risk.
VF	Verteilungsfunktion.
ZV	Zufallsvariable.

Literaturverzeichnis

- [1] Brockwell, P.J. and Davis, R.A. (1996) *Time Series: Theory and Methods*. Springer, New York.
- [2] Bruun, J.T. and Tawn, J.A. (1998) *Comparison of approaches for estimation the probability of coastal flooding*. Applied Statistics, **47**, 405-423.
- [3] Chambers, J.M. (1977) *Computational Methods for Data Analysis*. Wiley, New York.
- [4] Coles, S. (1999) *Extreme value theory and applications*.
- [5] Dekkers, A.L.M. und Haan, L. de (1989) *On the Estimation of the extremevalue index and large quantil estimation*. Ann. Statist. **17**, 1795-1832.
- [6] Embrechts, P., Klüppelberg, C. und Mikosch, T. (1997) *Modelling Extremal Events*. Springer, New York.
- [7] Embrechts, Lindskog und McNeill, (2001) *Modelling Dependence with Copulas*. ETH Zürich.
- [8] Haan, L. de (1970) *On Regular Variation and Its Applications to Weak Convergence of Sample Extremes*. CWI Tract **32**, Amsterdam.
- [9] Joe, H. (1997) *Multivariate Models and Dependence Concepts*. Chapman&Hall, London.
- [10] Pickands, J. III (1975) *Statistical inference using extreme order statistics*. Ann. Statist. **3**, 119-131.
- [11] Poon, S. Rockinger, M. und Tawn, J. (2001) *New Extreme-Value Dependence Measures and Finance Applications*. Lancaster University, Lancaster, LA1 4YF, U.K.
- [12] Resnick, S.I. (1987) *Extreme Values, Regular Variations and Point Processes*. Springer, New York.

Abbildungsverzeichnis

1.1	Zeitreihen der Tagesdifferenzen der EUR Swap Sätze.	6
1.2	Histogramm der Tagesdifferenzen der EUR Swap Sätze.	7
2.1	acr Analyse der Tagesdifferenzen der EUR Swap Sätze.	15
2.2	acr Analyse der Absolutbeträge der Tagesdifferenzen der EUR Swap Sätze.	16
2.3	acr Analyse der quadrierten Tagesdifferenzen der EUR Swap Sätze.	17
2.4	Gleitender Mittelwert der positiven Tagesdifferenzen der EUR Swap Sätze.	18
2.5	Gleitender Mittelwert der negativen Tagesdifferenzen der EUR Swap Sätze.	19
2.6	Beispiel QQ -Plots von ZVn gegen die Exponentialverteilung.	20
2.7	Beispiel QQ -Plots von ZVn gegen die Normalverteilung.	20
2.8	QQ -Plots der positiven Tagesdifferenzen der EUR Swap Sätze gegen die exp - Verteilung.	21
2.9	QQ -Plots der negativen Tagesdifferenzen der EUR Swap Sätze gegen die exp - Verteilung.	22
3.1	Dichten der Standard EVFn Λ , Φ_1 und Ψ_1	25
3.2	30 empirische ME -Plots von je 1000 simulierten exp ZVn	42
3.3	ME -Plots der positiven Tagesdifferenzen der EUR Swap Sätze.	54
3.4	ME -Plots der negativen Tagesdifferenzen der EUR Swap Sätze.	55
3.5	Ratio Funktion von 1000 simulierten exp-ZVn	56
3.6	Ratio Funktion der 30 Tages EUR Swap Sätze.	56
3.7	Ratio Funktion der 360 Tages EUR Swap Sätze.	57
3.8	Ratio Funktion der 3 Jahres EUR Swap Sätze.	57
3.9	Ratio Funktion der 8 Jahres EUR Swap Sätze.	58
3.10	Hill-Plot von 1000 simulierten exp(1) ZVn	58
3.11	Hill-Plots der positiven Tagesdifferenzen der EUR Swap Sätze.	59
3.12	Hill-Plots der negativen Tagesdifferenzen der EUR Swap Sätze.	60
3.13	MLE von ξ von 1000 simulierten exp(1) ZVn	61

3.14	MLE von ξ der positiven Tagesdifferenzen der EUR Swap Sätze.	62
3.15	MLE -Schätzer von ξ der negativen Tagesdifferenzen der EUR Swap Sätze.	63
3.16	GPD -Fit der 30 Tages EUR Swap Sätze, links für die positiven und rechts für die negativen Differenzen. Oben: Fit für $F_u(x - u)$. Mitte: Tail-Fit für $\overline{F}(x + u)$. Unten: 99%-Quantilschätzer.	64
3.17	GPD -Fit der 360 Tages EUR Swap Sätze.	65
3.18	GPD -Fit der 3 Jahres EUR Swap Sätze.	65
3.19	GPD -Fit der 8 Jahres EUR Swap Sätze.	66
4.1	Simulierte ZVn von 3 Verteilungen mit identischen Rand VFn $\mathbf{N}(0, 1)$, gleicher Korrelation $\rho = 0.85$, aber unterschiedlichen Abhängigkeitsstrukturen. Links: Gumbel-Copula $C_\theta(u, v) = \exp\{-[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{1/\theta}\}$ mit $\theta = 3$. Mitte: Kimeldorf-Copula $C_\delta(u, v) = (u^{-\delta} + v^{-\delta} - 1)^{-1/\delta}$ mit $\delta = 5$. Rechts: Bivariate Normalverteilung mit $\rho = 0.85$	73
4.2	Plots der 30 Tages EUR Swap Sätze gegen die restlichen EUR Swap Sätze.	81
4.3	Plots der 5 Jahres EUR Swap Sätze gegen die restlichen EUR Swap Sätze.	82
4.4	Schätzer für $\overline{\lambda}_U$ zwischen den 30 Tages EUR Swap Sätzen und den anderen Swap Sätzen.	83
4.5	Schätzer für λ_U zwischen den 30 Tages EUR Swap Sätzen und den anderen Swap Sätzen.	84
4.6	Schätzer für $\overline{\lambda}_U$ zwischen den 5 Jahres EUR Swap Sätzen und den anderen Swap Sätzen.	85
4.7	Schätzer für λ_U zwischen den 5 Jahres EUR Swap Sätzen und den andere Swap Sätzen.	86
4.8	Lower Tail dependence Schätzer für $\overline{\lambda}_L$ zwischen den 30 Tages EUR Swap Sätzen und den anderen Swap Sätzen.	87
4.9	Lower Tail dependence Schätzer für λ_L zwischen den 30 Tages EUR Swap Sätzen und den anderen Swap Sätzen.	88
4.10	Lower Tail dependence Schätzer für $\overline{\lambda}_L$ zwischen den 5 Jahres EUR Swap Sätzen und den anderen Swap Sätzen.	89
4.11	Lower Tail dependence Schätzer für λ_L zwischen den 5 Jahres EUR Swap Sätzen und den anderen Swap Sätzen.	90
7.1	Abschätzung von $\mathbb{P}\{aX + (1 - a)Y > k\}$ mit <i>optimalem</i> (x^*, y^*) gemäß (7.1).	113

7.2	Quantil- und Verlustschätzungen für X als 30 Tages und Y als 5 Jahres EUR Swap Satz.	
	Oben links: 98%- GPD -Quantilschätzer für X gleich dem Verlust des 30 Tages EUR Swap Satz.	
	Oben rechts: 98%- GPD -Quantilschätzer für Y gleich dem Verlust des 5 Jahres EUR Swap Satz.	
	Unten links: 98%- GPD -Quantilschätzer für den Verlust des Portfolios $\frac{1}{2}(X+Y)$.	
	Unten rechts: GPD -Tailfunktion $\bar{F}_{\frac{1}{2}(X+Y)}$ vom Verlust des Portfolios $\frac{1}{2}(X+Y)$.	115
7.3	Quantil- und Verlustschätzungen für X als 4 Jahres und Y als 5 Jahres EUR Swap Satz.	
	Oben links: 98%- GPD -Quantilschätzer für X gleich dem Verlust des 4 Jahres EUR Swap Satz.	
	Oben rechts: 98%- GPD -Quantilschätzer für Y gleich dem Verlust des 5 Jahres EUR Swap Satz.	
	Unten links: 98%- GPD -Quantilschätzer für den Verlust des Portfolios $\frac{1}{2}(X+Y)$.	
	Unten rechts: GPD -Tailfunktion $\bar{F}_{\frac{1}{2}(X+Y)}$ vom Verlust des Portfolios $\frac{1}{2}(X+Y)$.	116
7.4	Abschätzung von $\mathbb{P}\{aX + bY > k\}$ mit <i>optimaler</i> (x^*, y^*) gemäß (7.3) und $a > 0$, sowie $b < 0$.	117

Tabellenverzeichnis

2.1	Schätzer des Parameters λ der exp -Verteilung jeweils für die positiven und negativen Tagesdifferenzen der EUR Swap Sätze sowie die relativen Häufigkeiten einer positiven bzw. negativen Änderung.	14
3.1	Mittlere Exzess Funktionen für einige Standardverteilungen. Asymptotik gilt für $u \rightarrow \infty$	41
4.1	Upper Tail dependence Parameter der EUR Swap Sätze.	91
4.2	Lower Tail dependence Parameter der EUR Swap Sätze.	91
6.1	Beispiel im trivariaten Fall für die Schranken bei gegebenem λ_{\max}	103
6.2	Beispiel im trivariaten Fall für die Schranken bei gegebenem $\lambda_{L;\max}$	106
6.3	Parameter δ_{ij} für MM1 Copula mit upper Tail dependence der EUR Swap Sätze.109	
6.4	Parameter δ_{ij} für MM2 Copula mit lower Tail dependence der EUR Swap Sätze.110	
6.5	Parameter η zwischen den MM1 -Gruppen aus Tabelle 6.3 für die MM1E -Copula.	110
6.6	Parameter η zwischen den MM2 -Gruppen aus Tabelle 6.4 für die MM2E -Copula.110	