

Simulation des Varianz-Gamma-Prozesses und numerische Berechnung des Capital-at-Risk

Ulrich Mauthner *

1 Portfoliooptimierung

Ziel der Portfoliooptimierung ist (wie der Name schon sagt), für einen Investor die bestmögliche Verteilung seines Anlagevermögens auf verschiedene Anlagemöglichkeiten (Festgeld bei der Bank, Wertpapiere etc.) zu bestimmen. Dies geschieht, indem man die Kursentwicklungen der einzelnen Aktien als stochastische Prozesse auffaßt, aus diesen mit Hilfe stochastischer Differentialgleichungen die Vermögensentwicklung (abhängig von der Handelsstrategie) herleitet und schliesslich diejenige Handelsstrategie bestimmt, die das (bzgl. Risiko und erwartetem Ertrag) beste Ergebnis erzielt.

1.1 Das allgemeine Modell

Wir gehen davon aus, daß es eine risikolose, festverzinsliche Anlage (z.B. Staatsanleihen) und eine oder mehrere risikobehaftete Anlagemöglichkeiten gibt, deren zugehörige Größen im Folgenden mit 0 bzw. $i = 1, \dots, d$ indiziert werden.

Die Kursentwicklung der risikolosen Anlage ist deterministisch und lautet $P_0(t) = P_0(0) \exp(rt)$, $t \geq 0$, (kontinuierliche Verzinsung mit Zinssatz r), die Kursentwicklungen der übrigen Anlagen betrachten wir als stochastische Prozesse $(P_i(t))_{t \geq 0}$ auf einem mit passender Filterung versehenen W-Raum $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t)_{t \geq 0}, P)$. Um diverse Ergebnisse aus der Theorie der Stochastischen Differentialgleichungen anwenden zu können, verlangen wir, daß die Preisprozesse bzgl. der Filterung adaptiert sind, daß die Filterung rechtsseitig stetig ist ($\bigcap_{s>t} \mathfrak{F}_s = \mathfrak{F}_t \quad \forall t$) und daß \mathfrak{F}_0 alle Nullmengen enthält.

Um den Vermögensprozeß bestimmen zu können, benötigen wir einen weiteren stochastischen Prozeß, die Handelsstrategie $\varphi(t) = (\varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_d(t))$, $t \geq 0$, die angibt, wieviele Anteile (=Nennwert) der jeweiligen Aktie im Portfolio sind. Dieser Prozeß soll

*Center of Mathematical Sciences, Munich University of Technology, D-85747 Garching bei München, Germany, email: ulrich.mauthner@stud.tu-muenchen.de, <http://www.ma.tum.de/stat/>

progressiv messbar sein. (Interpretation: Entscheidungen aufgrund bereits bekannter Aktienentwicklung, exakte Definition vgl. Jörg [5].)

Der Vermögensprozeß ist dann gegeben durch

$$X(t) = \sum_{i=0}^d \varphi_i(t) P_i(t), \quad t \geq 0.$$

Da wir den Wert des Portfolios durch geschicktes Handeln, nicht aber durch zusätzliches Investieren erhöhen wollen, verlangen wir außerdem, daß das Portfolio selbstfinanzierend ist:

$$X(t) = X(0) + \sum_{i=0}^d \int_0^t \varphi(s) dP_i(s), \quad t \geq 0.$$

1.2 Das Ziel

Die Aufgabe besteht zunächst darin, eine optimale Handelsstrategie zu finden. Dies erscheint analytisch kaum möglich, und man beschränkt sich daher auf eine Teilmenge der möglichen Handelsstrategien. Die Beschränkung auf zeitlich konstante Handelsstrategien ist allerdings uninteressant (dies würde ja bedeuten, daß man gar nicht handelt). Man kann aber eine andere Menge an Handelsstrategien, die nicht konstant und dennoch analytisch behandelbar sind, wie folgt erzeugen:

Wir definieren den Portfolioprozess $(\pi(t))_{t \geq 0}$ durch die Komponenten

$$\pi_i(t) = \frac{\varphi_i(t) P_i(t)}{X(t)}, \quad t \geq 0, \quad i = 0, 1, \dots, d$$

d.h. $\pi_i(t)$ gibt den Anteil des (Markt-)wertes der Anlage i am Gesamtwert des Portfolios an. Setzt man diesen als zeitlich konstant an, so ergeben sich i.a. nicht konstante Handelsstrategien.

Die Aufgabe lautet nun: Finde diejenige Portfoliozusammensetzung π , die den Vermögensprozeß zu einem festen Zeitpunkt T optimiert.

1.3 Kriterien für Optimalität

Um das beste π zu finden, benötigt man natürlich noch Kriterien, nach denen wir den Ertrag $X(T)$ bewerten. Üblich sind hierbei zwei Ansätze:

1. Maximiere $\mathbf{E}(X(T))$ bei vorgegebener Risikoschranke oder
2. Minimiere das Risiko bei vorgegebenem Mindest erwartungswert.

Als Risikomaße nehmen wir die Varianz von $X(T)$, den VaR (d.h. das α -Quantil der Verteilung von $X(T)$), oder den CaR, welcher als Differenz des Vermögens bei Investition in die sichere Anlage zum VaR definiert ist.

2 Lévy-Prozesse

2.1 Definition und ein bekanntes Beispiel

Nach üblicher Definition (siehe z.B. Sato [1]) ist ein d -dimensionaler stochastischer Prozeß $X = (X_t)_{t \geq 0}$ ein Lévy-Prozeß, wenn er folgende Bedingungen erfüllt:

1. X ist P -fast sicher rechtsseitig stetig und besitzt linksseitige Grenzwerte, d.h. es existiert ein $\Omega_0 \in \mathfrak{F}$, $P(\Omega_0) = 1$, so dass für alle $\omega \in \Omega_0$ der zugehörige Pfad diese Eigenschaften besitzt.
2. X ist stochastisch stetig, d.h. $X(s) \xrightarrow{P} X(t)$ für $s \rightarrow t$
3. $X(0) = 0$
4. X hat unabhängige und stationäre Zuwächse

Das bekannteste Beispiel für einen Lévy-Prozess ist die Brownsche Bewegung: Bedingungen (3) und (4) werden bereits in der Definition der Brownschen Bewegung verlangt, die anderen beiden folgen daraus, dass ihre Pfade P -fast sicher stetig sind (d.h. es gibt eine Modifikation mit stetigen Pfaden). Ein weiteres Beispiel ist der zusammengesetzte Poissonprozeß (Sprungstellenabstände exp-verteilt, Sprunghöhen iid). Darüberhinaus sind auch Summen unabhängiger Lévy-Prozesse, ihre Vielfachen und Grenzprozesse wieder Lévy-Prozesse.

2.2 Zwei wichtige Strukturresultate

Eine wesentliche Teilklasse der Lévy-Prozesse sind Summen einer deterministischen Komponente, einer Brownschen Bewegung und eines zusammengesetzten Poissonprozesses. Die Klasse der Lévy-Prozesse läßt sich als Verallgemeinerung dieser Prozesse auffassen. Genauer gesagt gilt folgendes für jeden Lévy-Prozess $L = (L(t))_{t \geq 0}$:

- (1) Die charakteristische Funktion von $L(t)$ kann man darstellen als

$$\mathbf{E}(\exp(isL(t))) = \exp(t\Psi(s)), \quad s \in \mathbb{R}^d,$$

mit

$$\Psi(s) = ia'_L s - \frac{1}{2} s' \beta'_L \beta_L s + \int_{\mathbb{R}^d} (e^{is'x} - 1 - is'x \cdot 1_{|x| \leq 1}) \nu_L(dx),$$

wobei $a \in \mathbb{R}^d$, $\beta'_L \beta_L$ eine positiv definite und symmetrische $d \times d$ -Matrix ist, und ν ein Maß ist, das $\nu(\{0\}) = 0$ und $\int_{\mathbb{R}^d} (|x|^2 \wedge 1) \nu(dx) < \infty$ erfüllt (sogenannte Lévy-Khintchine-Darstellung).

(2) Weiterhin entspricht dieser Darstellung der charakteristischen Funktion die Darstellung von L als:

$$L(t) = at + \beta W(t) + \sum_{0 < s \leq t} \Delta L(s) \cdot 1_{\{|\Delta L(s)| > 1\}} + \int_0^t \int_{|x| \leq 1} x(M(dx, ds) - \nu(dx)ds), \quad t \geq 0,$$

wobei für $\omega \in \Omega$ $\Delta L(t, \omega) := L(t, \omega) - L(t-, \omega)$, $t \geq 0$, und $M(B, \omega) = \#\{(t, \Delta L(t, \omega)) \in B\}$ für jede Borelmenge B aus $[0, \infty) \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$.

(3) Falls $\int_{\mathbb{R}^d} |x| \nu(dx) < \infty$, hat L Pfade von endlicher Variation und die Darstellung

$$L(t) = \gamma t + \beta W(t) + \sum_{0 < s \leq t} \Delta L(s), \quad t \geq 0,$$

mit $\gamma = a - \int_{|x| \leq 1} x \nu(dx)$.

3 Lévy-Prozesse in der Portfoliooptimierung

3.1 Das Lévy-Black-Scholes-Modell

Das Modell aus Abschnitt 1 ist sehr allgemein gehalten. Um brauchbare Resultate zu erhalten, müssen wir das Modell konkretisieren, d.h. die Klasse der zu betrachtenden Prozesse einschränken. Wir nehmen daher an, dass die Preisprozesse der Anlagemöglichkeiten $i = 1, \dots, d$ exponentielle Lévy-Prozesse sind und die Abhängigkeit zwischen den risikobehafteten Wertpapieren linear ist, d.h.

$$P_i(t) = p_i \exp \left(b_i t + \sum_{j=1}^d \sigma_{ij} L_j(t) \right), \quad t \geq 0, \quad i = 1, \dots, d.$$

Dabei soll L ein d -dimensionaler Lévy-Prozess mit unabhängigen Komponenten sein, mit σ kann man in dem Modell eine lineare Abhängigkeitsstruktur der einzelnen Anlagen modellieren. Ansonsten gelten weiterhin die Annahmen aus Abschnitt 1.

3.2 Der Vermögensprozess

Da wir die Anlagestrategie nur über die Gleichung $X(t) \cdot \pi_i = \varphi_i(t) \cdot P_i(t)$ kennen, und $X(t)$ ja gerade von der Handelsstrategie abhängt, müssen wir zur Berechnung von $X(t)$ eine stochastische Differentialgleichung (SDE) aufstellen. Da wir φ als selbstfinanzierend vorausgesetzt haben, gilt zunächst:

$$dX(t) = \sum_{i=0}^d \varphi_i(t) \cdot dP_i(t), \quad t \geq 0.$$

Emmer und Klüppelberg [4] nutzen die Tatsache, dass für jedes P_i die SDE gilt

$$dP_i(t) = P_i(t-)(b_i dt + d\hat{L}_i(t)), \quad t \geq 0, \quad P_i(0) = 0,$$

mit $\exp(\sum_{j=1}^d \sigma_{ij} L_j) = \mathcal{E}(\hat{L}_i)$; für die Definition des stochastischen Exponentials vgl. Protter [2]. Zusammengefaßt ergibt sich damit:

$$\begin{aligned} dX(t) &= \sum_{i=0}^d \varphi_i(t) \cdot dP_i(t) \\ &= \varphi_0(t)P_0(t)rdt + \sum_{i=1}^d \varphi_i(t)P_i(t-)(b_i dt + d\hat{L}_i(t)) \\ &= \pi_0 X(t)rdt + \sum_{i=1}^d \pi_i X(t-)(b_i dt + d\hat{L}_i(t)) \\ &= \pi_0 X(t)rdt + X(t-)\left(\sum_{i=1}^d \pi_i b_i dt + \sum_{i=1}^d \pi_i d\hat{L}_i(t)\right) \\ &= \pi_0 X(t)rdt + X(t-)(\pi' b dt + \pi' d\hat{L}(t)). \end{aligned}$$

Dabei ist \hat{L} der stochastische Prozeß, dessen Komponenten \hat{L}_i sind. Die Lösung dieser SDE lautet in kompakter Form:

$$X(t) = X(0) \exp(t \cdot (\pi_0 r + \pi' b)) \mathcal{E}(\pi' \hat{L}(t)), \quad t \geq 0.$$

Mit diesem Ergebnis haben wir nun die SDE formal gelöst, es bleibt aber noch zunächst $(\hat{L}(t))_{t \geq 0}$ aus $(L(t))_{t \geq 0}$ und anschliessend $(\mathcal{E}(\pi' \hat{L}(t)))_{t \geq 0}$ zu bestimmen.

3.3 Die explizite Bestimmung der Lösung

In Emmer und Klüppelberg [4] wird nun gezeigt, daß $(\ln X(t))_{t \geq 0}$ ein Lévy-Prozess ist, dessen charakteristisches Triplet (mit $[\sigma\beta]_i^2 := (\sum_{j=1}^d \sigma_{ij} \beta_{jj})$) wie folgt lautet:

$$\begin{aligned} a_X &= \pi_0 r + \pi'(b + \frac{[\sigma\beta]^2}{2} + \sigma a) - \frac{|\pi' \sigma \beta|^2}{2} \\ &\quad + \int_{\mathbf{R}^d} (\ln(\pi_0 + \pi' e^{\sigma x}) 1_{|\ln(\pi_0 + \pi' e^{\sigma x})| \leq 1} - \pi' \sigma x 1_{|x| \leq 1}) \nu(dx) \\ \beta_X^2 &= |\pi' \sigma \beta|^2, \quad \nu_X(A) = \nu(\{x \in \mathbf{R}^d \mid \ln(\pi_0 + \pi'(e^{\sigma x})) \in A\}) \end{aligned}$$

Mit diesem Ergebnis können wir nun für jeden zugrundegelegten Lévy-Prozeß und jedes π die charakteristische Funktion von $\ln(X(t))$ berechnen und damit bei geeigneten Regularitätsvoraussetzungen auch (über den Zusammenhang zwischen charakteristischer Funktion und momenterzeugender Funktion) dessen Momente. Will man dagegen den CaR als Risikomaß nutzen, so muss man die Quantile von $\ln(X(t))$ berechnen. Da dies meistens analytisch nicht möglich ist, muss man sie numerisch berechnen (z.B. durch Berechnung der Dichte mittels Fouriertransformation)

3.4 Approximation von kleinen Sprüngen

Um die numerische Berechnung zu ermöglichen, wollen wir uns auf den Fall $d = 1$ beschränken. In diesem Fall kann man $\sigma = 1$ wählen (indem man ggf. L geeignet wählt). Ausserdem ist nun π diejenige reelle Zahl zwischen 0 und 1, die den Anteil der risikobehafteten Anlage ausdrückt. In diesem Fall ist der interessierende Prozess $(\ln \mathcal{E}(\pi \mathcal{E}^{-1}(L(t))))_{t \geq 0}$. Will man nun die charakteristische Funktion von $\ln(X(t))$ bestimmen, so trifft man auf folgendes Problem: falls die zu ν_L gehörende Dichte bei 0 eine Singularität besitzt, so bereiten die kleinen Sprünge (bzw. der Integrationsbereich um 0 herum) bei der Auswertung des Integrals in der Lévy-Khintchin-Representation von L Schwierigkeiten, man approximiert sie daher, wenn möglich, durch einen einfacheren Prozess, oft eine Brownsche Bewegung (vgl. Asmussen und Rosinski [6]). Mathematisch exakt gilt folgendes:

Sei L ein beliebiger Lévy-Prozess, sein charakteristisches Tripel wie üblich bezeichnet. Sei weiter $L_\epsilon(t)$ definiert als

$$L_\epsilon(t) = t(a - \int_{\epsilon < |x| \leq 1} x \nu(dx)) + \beta W(t) + \sum_{0 < s \leq t} \Delta L(s) 1_{|\Delta L(s)| \geq \epsilon} \quad .$$

Dann gilt

$$\epsilon^{-1}(L(t) - L_\epsilon(t)) \xrightarrow{D} V(t), \quad \epsilon \rightarrow 0,$$

genau dann, wenn

$$(\pi \epsilon)^{-1}(\ln \mathcal{E}(\pi \mathcal{E}^{-1}(\exp(L(t)))) - \ln \mathcal{E}(\pi \mathcal{E}^{-1}(\exp(L_\epsilon(t)))) \xrightarrow{D} V(t), \quad \epsilon \rightarrow 0.$$

Dabei bedeutet der hier verwendete Konvergenzbegriff, daß

$$\mathbf{E}f(\epsilon^{-1}(L - L_\epsilon)) \rightarrow \mathbf{E}f(V) \tag{3.1}$$

für jede Funktion $f : D[0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, die beschränkt, stetig bzgl. der Supremumsnorm und messbar ist. Insbesondere gilt damit für den gesuchten approximierenden Prozeß:

$$\ln \mathcal{E}(\pi \mathcal{E}^{-1}(\exp(L(t)))) \approx \ln \mathcal{E}(\pi \mathcal{E}^{-1}(\exp(L_\epsilon(t)))) + \pi \epsilon V(t)$$

Die charakteristische Funktion dieses Prozesses kann man nun ebenfalls (in Lévy-Khintchine-Darstellung) bestimmen (s.o.), und sie ist (hoffentlich) numerisch einfacher zu behandeln als die exakte Lösung.

4 Der Varianz-Gamma-Prozess

Wir wollen nun die im vorhergehenden Abschnitt gewonnenen Ergebnisse auf einen speziellen Lévy-Prozeß, den Varianz-Gamma-Prozeß (VG-Prozess) anwenden. Dieser ist durch

$$L(t) = \mu t - \delta \zeta^2(t) + W(\zeta^2(t)), \quad t \geq 0,$$

gegeben, wobei $\mu, \delta \in \mathbf{R}$, und der Lévy-Prozess ζ^2 ist der durch $\zeta^2(1) \sim \Gamma(\xi, \theta)$, $\xi, \theta > 0$ bestimmt. Durch geeignete Wahl der 4 Parameter kann man nun dieses Modell an reale Daten anpassen. Für die Lévy-Khinchine Darstellung gilt

$$\Psi(s) = i\mu s - \xi \ln(1 - is\theta\delta + s^2\frac{\theta}{2}), \quad s \in \mathbf{R}. \quad (4.2)$$

Dies ergibt ein Lévy-Maß mit Dichte

$$f_L(x) = \frac{\nu(dx)}{dx} = \frac{\xi}{|x|} \exp(-\sqrt{\frac{2}{\theta} + \delta^2|x|} - \delta x), \quad x \in \mathbf{R}. \quad (4.3)$$

4.1 Bestimmung des Grenzprozesses

Als charakteristische Funktion von $\epsilon^{-1}(L(1) - L_\epsilon(1))$ ergibt sich (s.o.)

$$\begin{aligned} & \exp\left(\int_{-\epsilon}^{\epsilon} (e^{i\epsilon^{-1}sx} - 1 - i\epsilon^{-1}sx) \frac{\xi}{|x|} \exp(-\sqrt{\frac{2}{\theta} + \delta^2|x|} - \delta x) dx\right) \\ &= \exp\left(\int_{-1}^1 (e^{isx} - 1 - isx) \frac{\xi}{|x|} \exp(\epsilon(-\sqrt{\frac{2}{\theta} + \delta^2|x|} - \delta x)) dx\right) \end{aligned}$$

Das charakteristische Triplet des Prozesses $D_\epsilon(t) := \epsilon^{-1}(L(t) - L_\epsilon(t))$, $t \geq 0$, lautet damit $(0, 0, \nu_\epsilon)$ mit

$$\frac{\nu_\epsilon(dx)}{dx} = \frac{\xi}{|x|} \exp(\epsilon(-\sqrt{\frac{2}{\theta} + \delta^2|x|} - \delta x)) \cdot 1_{|x| \leq 1}.$$

Wie man mit den Mitteln der Analysis zeigt, konvergiert diese Lévydichte für $\epsilon \rightarrow 0$ gegen

$$\exp\left(\int_{-1}^1 (e^{isx} - 1) \frac{\xi}{|x|} dx\right) = \exp\left(\int_0^1 (\cos(sx) - 1) \frac{2\xi}{x} dx\right) = \exp\left(2\xi \int_0^{|s|} (\cos x - 1) \frac{1}{x} dx\right).$$

Es liegt also nahe, den Lévyprozeß V mit eben dieser charakteristischen Funktion als Grenzprozeß zu vermuten. Nach Emmer und Klüppelberg [4] ist es für die behauptete Konvergenz hinreichend zu zeigen, dass für $\epsilon \rightarrow 0$

$$\nu_{D_\epsilon}([x, z]) \rightarrow \nu_V([x, z]), \quad 0 < x < z, \quad \text{und} \quad \int_{|y| < K} y^2 \nu_{D_\epsilon}(dy) \rightarrow \int_{|y| < K} y^2 \nu_V(dy).$$

Dies folgt aber unmittelbar: Beim ersten Term handelt es sich um ein vom Parameter ϵ abhängiges Integral, das eine integrierbare Majorante besitzt (Integrand im Integrationsbereich beschränkt, da Umgebung von 0 ausgeschlossen). Beim zweiten Term handelt es sich ebenfalls um ein parameterabhängiges Integral, das durch die Multiplikation der Dichte mit y^2 keine Singularität mehr aufweist.

4.2 Approximation des Vermögensprozesses

Nach den bisherigen Überlegungen ergibt sich der (angenäherte) logarithmische Vermögensprozeß (ohne deterministischen Anteil) als:

$$\begin{aligned} \ln \mathcal{E}(\pi_1 \mathcal{E}^{-1}(\exp(L(t)))) &\approx \ln \mathcal{E}(\pi_1 \mathcal{E}^{-1}(\exp(L_\epsilon(t)))) + \pi_1 \epsilon V(t) \\ &= \gamma_{\pi_1}^\epsilon t + M_{\pi_1}^\epsilon(t) + \pi_1 \epsilon V(t) \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$=: \tilde{X}(t), \quad t \geq 0. \quad (4.5)$$

Dabei ist $(V(t))_{t \geq 0}$ der Grenzprozess aus Abschnitt 4.1, sowie

$$\begin{aligned} \gamma_{\pi_1}^\epsilon &= \pi_1 \left(\mu + \int_{|x| \leq \epsilon} x \nu(dx) \right) \\ M_{\pi_1}^\epsilon(t) &= \sum_{0 < s \leq t} \ln(1 + \pi_1 (e^{\Delta L(s) 1_{\{|\Delta L(s)| > \epsilon\}}} - 1)), \end{aligned}$$

mit dem Maß ν aus Gleichung (4.3) und den Parametern des Prozesses.

5 Die numerische Berechnung des Quantils

Um das Portfolio unter CaR-Beschränkung zu optimieren, benötigt man nun das Quantil (4.5). Eine exakte Berechnung ist nicht möglich, daher berechnet man die Dichtefunktion von $\tilde{X}(T)$ numerisch für den Planungshorizont $T > 0$. Dazu berechnet man zunächst die charakteristischen Funktionen der letzten beiden Summanden (der erste Summand ist eine exakt berechenbare Konstante), multipliziert diese miteinander und berechnet abschliessend daraus die Wahrscheinlichkeitsdichte von $\tilde{X}(T)$.

5.1 Berechnung von $\gamma_{\pi_1}^\epsilon$

Mit den Abkürzungen $c_1 := -(\sqrt{\frac{2}{\theta} + \delta^2} + \delta)$ und $c_2 := -(\sqrt{\frac{2}{\theta} + \delta^2} - \delta)$ gilt:

$$\begin{aligned} \gamma_{\pi_1}^\epsilon &= \pi_1 \left(\mu + \int_{|x| \leq \epsilon} x \nu(dx) \right) = \pi_1 \left(\mu + \xi \int_0^\epsilon (e^{c_1 x} - e^{c_2 x}) dx \right) \\ &= \pi_1 \left(\mu + \xi \left(\frac{e^{c_1 \epsilon} - 1}{c_1} - \frac{e^{c_2 \epsilon} - 1}{c_2} \right) \right). \end{aligned}$$

Bei der numerischen Berechnung könnte höchstens ein Problem entstehen, nämlich daß bei der direkten Berechnung von c_2 ein hoher relativer Fehler auftritt. (Falls $\frac{2}{\theta}$ nahe an 0 liegt, liegt auch c_2 nahe an 0, der bei der vorherigen Addition entstehende Fehler wird daher zu einem hohen relativen Fehler.) Dies kann man aber umgehen, indem man $c_1 \cdot c_2 = \frac{2}{\theta}$ benutzt (bzw. $c_2 = \frac{2}{\theta c_1}$).

5.2 Approximation der charakteristischen Funktion von $M_{\pi_1}^\epsilon(1)$

Der Prozeß $(M_{\pi_1}^\epsilon(t))_{t \geq 0}$ ist ein reiner Sprungprozeß, der von den Sprüngen $\geq \epsilon$ des ursprünglichen Prozesses L herrührt. Seine Sprungstellen sind (zeitlich) dieselben wie die des ursprünglichen Prozesses, seine Sprunghöhen sind aber $\ln(1 + \pi_1(e^{\Delta L(s)} - 1))$. (Anmerkung: Da ν eingeschränkt auf Sprünge $\geq \epsilon$ ein endliches Maß ist - vgl. Integrierbarkeitsforderung mit $x^2 \wedge 1$ - handelt es sich bei diesen beiden Prozessen um zusammengesetzte Poissonprozesse.) Bezeichnet man mit f_L die Lévy-Dichte des VG-Prozesses (vgl. oben), so ergibt sich nach Emmer und Klüppelberg [4] die charakteristische Funktion von $L(1)$ als:

$$\begin{aligned} \exp\left(\int_{\mathbb{R}} (e^{iux} - 1) \nu_{M_{\pi_1}^\epsilon}(dx)\right) &= \exp\left(\int_{\mathbb{R}} (e^{iux} - 1) f_{M_{\pi_1}^\epsilon}(x) dx\right) \\ &= \exp\left(\int_{\mathbb{R}} (e^{iux} - 1) f_L\left(\ln\left(\frac{e^x - 1}{\pi_1} + 1\right)\right) \frac{e^x}{e^x - (1 - \pi_1)} \cdot 1_{\{x > \ln(1 - \pi_1)\}} \cdot 1_{\{|\ln(\frac{e^x - 1}{\pi_1} + 1)| > \epsilon\}} dx\right). \end{aligned}$$

Im folgenden bezeichnen wir die Funktion

$$f_{M_{\pi_1}^\epsilon}(x) := f_L\left(\ln\left(\frac{e^x - 1}{\pi_1} + 1\right)\right) \frac{e^x}{e^x - (1 - \pi_1)} \cdot 1_{\{x > \ln(1 - \pi_1)\}} \cdot 1_{\{|\ln(\frac{e^x - 1}{\pi_1} + 1)| > \epsilon\}}$$

auch kurz als $f_M(x)$. Schließlich definieren wir noch $g_2(u) := \int_{\mathbb{R}} (e^{iux} - 1) f_{M_{\pi_1}^\epsilon}(x) dx$. Wir wollen nun den Exponenten $g_2(u)$ der charakteristischen Funktion von $L(1)$ mit einer computerverwendbaren Funktion (d.h. einer Stufenfunktion) von u approximieren. Um bei der Berechnung den FFT-Algorithmus nutzen zu können, erscheint folgende Vorgehensweise ratsam:

- (1) Zunächst definieren wir Diskretisierungsfunktionen $u_N(u), x_N(x)$ wie folgt:

$$u_N(u) := \frac{\lfloor u \sqrt{\frac{N}{2\pi}} \rfloor + 0.5}{\sqrt{\frac{N}{2\pi}}}, \quad x_N(x) := \frac{\lfloor x \cdot \sqrt{\frac{N}{2\pi}} \rfloor + 0.5}{\sqrt{\frac{N}{2\pi}}}.$$

- (2) Nun approximieren wir f_M durch eine Stufenfunktion. Die Funktion f_M ist ausserhalb von $(\ln(1 - \pi), \ln(\pi(e^{-\epsilon} - 1) + 1)) \cup (\ln(\pi(e^\epsilon - 1) + 1), \infty)$ gleich 0. Da f_M am linken Ende des ersten Intervalls gegen ∞ strebt (was numerisch Probleme bereitet), setzen wir die Approximation für Werte in $(\ln(1 - \pi); \ln(1 - \pi) + h)$, h geeignet gewählt, gleich 0 und schätzen später den daraus entstandenen Fehler ab. Weiterhin sei

$$A := (\ln(1 - \pi) + h, \ln(\pi(e^{-\epsilon} - 1) + 1)) \cup (\ln(\pi(e^\epsilon - 1) + 1), \infty).$$

Wir definieren also als Approximation für f_M die Treppenfunktion:

$$f_{app}(x) = \begin{cases} f_M(x_N(x)) & |x| \leq m \sqrt{\frac{2\pi}{N}} \text{ und } (x_N(x) - \frac{0.5}{\sqrt{\frac{N}{2\pi}}}, x_N(x) + \frac{0.5}{\sqrt{\frac{N}{2\pi}}}) \subset A, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dabei verwenden wir ein geeignet gewähltes $m \leq \frac{N}{2}$, um später gute Fehlerabschätzungen zu bekommen.

(3) Mit Hilfe von f_{app} ergibt sich nun als Approximation für $g_2(u)$ für $|u| \leq m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}$:

$$g_{2app}(u) = \int_{\mathbb{R}} (e^{iu_N(u)x_N(x)} - 1) f_{app}(x) dx$$

(4) Wir speichern nun (für festes N) die Werte der beiden Approximationsfunktionen im Bereich $|\cdot| \leq \sqrt{\frac{N\pi}{2}}$ mit 2 Vektoren der Länge N nach folgendem Muster (dabei sind je nach Wahl von m ggf. Einträge = 0):

$$g_k = g_{2app} \left(-\sqrt{\frac{N\pi}{2}} + (k + 0.5)\sqrt{\frac{2\pi}{N}} \right), \quad k = 0, \dots, N - 1,$$

$$f_l = f_{app} \left(\sqrt{\frac{N\pi}{2}} - (l + 0.5)\sqrt{\frac{2\pi}{N}} \right), \quad k = 0, \dots, N - 1.$$

Dies ergibt die Gleichung:

$$\begin{aligned} g_k &= g_{2app} \left(-\sqrt{\frac{N\pi}{2}} + (k + 0.5)\sqrt{\frac{2\pi}{N}} \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\exp(i(-\sqrt{\frac{N\pi}{2}} + (k + 0.5)\sqrt{\frac{2\pi}{N}})x_N(x)) - 1 \right) f_{app}(x) dx \\ &= \sum_{l=0}^{N-1} \left(\exp(i(-\sqrt{\frac{N\pi}{2}} + (k + 0.5)\sqrt{\frac{2\pi}{N}})(\sqrt{\frac{N\pi}{2}} - (l + 0.5)\sqrt{\frac{2\pi}{N}})) - 1 \right) \\ &\quad \times f_{app} \left(\sqrt{\frac{N\pi}{2}} - (l + 0.5)\sqrt{\frac{2\pi}{N}} \right) \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{N}} \exp \left(i(-\sqrt{\frac{N\pi}{2}} + (k + 0.5)\sqrt{\frac{2\pi}{N}})(\sqrt{\frac{N\pi}{2}} - 0.5\sqrt{\frac{2\pi}{N}}) \right) \\ &\quad \times \sum_{l=0}^{N-1} \exp(-i(k\sqrt{\frac{2\pi}{N}}l\sqrt{\frac{2\pi}{N}})) (\exp(i(\sqrt{\frac{N\pi}{2}} - 0.5\sqrt{\frac{2\pi}{N}})l\sqrt{\frac{2\pi}{N}})) f_l - \sqrt{\frac{2\pi}{N}} \sum_{l=0}^{N-1} f_l \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{N}} \exp(i(k\frac{N-1}{N}\pi - \frac{N\pi}{2} - \frac{\pi}{2N} + \pi)) \sum_{l=0}^{N-1} e^{-2\pi i(\frac{kl}{N})} \exp(i(\pi l - \frac{\pi l}{N})) f_l - \sqrt{\frac{2\pi}{N}} \sum_{l=0}^{N-1} f_l. \end{aligned}$$

(5) Wählt man $N = 2^n$, $n \geq 2$, so vereinfacht sich dieser Ausdruck weiter zu

$$\sqrt{\frac{2\pi}{N}} (-1)^{(k+1)} e^{-i\pi\frac{k+0.5}{N}} \sum_{l=0}^{N-1} e^{-2\pi i(\frac{kl}{N})} (-1)^l e^{i\frac{\pi l}{N}} f_l - \sqrt{\frac{2\pi}{N}} \sum_{l=0}^{N-1} f_l$$

Diesen Ausdruck kann man nun mittels FFT einfach ausrechnen.

5.3 Approximation der charakteristischen Funktion von $\pi_1 \epsilon V(1)$

Analog zum vorigen Abschnitt definieren wir g_1 mit Hilfe der Gleichung $\exp(g_1(u)) = \mathbf{E} \exp(iu\pi_1 \epsilon V(1))$. Wie aus Abschnitt 4.1 hervorgeht, gilt $g_1(u) = 2\xi \int_0^{|\pi_1 \epsilon u|} (\cos x - 1) \frac{1}{x} dx$.

Wir wollen auch hier für $|u| \leq m\sqrt{2\pi/N}$ die charakteristische Funktion durch eine Stufenfunktion $g_{1app}(u)$ approximieren. Das dabei auszuwertende Integral könnte für Obergrenzen nahe bei 0 numerisch instabil werden. Wir werden daher für Obergrenzen bis 1 den Integranden in eine Potenzreihe entwickeln, diese gliedweise integrieren und bis zu einer bestimmten Ordnung addieren, für höhere Obergrenzen (für den Restbereich) die gewöhnliche Integralapproximation mit Summen verwenden. Da wir hier keine FFT verwenden, können wir die Feinheit auch unabhängig von der Anzahl N der Interpolationspunkte wählen; wir verwenden hier statt der Diskretisierungsfunktion $x_N(x)$ die Funktion $x_{kN}(x)$ mit $k \in \mathbb{N}$. Weiterhin soll die Approximation der charakteristischen Funktion für $|u| > m\sqrt{2\pi/N}$ 0 ergeben; wir setzen daher die Approximation für g_1 in diesem Bereich $-\infty$. Damit ergibt sich folgende Definition:

$$g_{1app}(u) = \begin{cases} \sum_{r=1}^R (-1)^r \frac{(\pi_1 \epsilon u_N(|u|))^{2r}}{2r(2r)!} & \text{falls } \pi_1 \epsilon (u_N(|u|) - 0.5\sqrt{N\pi/2}) \leq 1, \\ \sum_{r=1}^R (-1)^r \frac{(\lceil \frac{1}{\pi_1 \epsilon} \sqrt{\frac{N}{2\pi}} \rceil \sqrt{\frac{2\pi}{N}})^{2r}}{2r(2r)!} + \int_{\lceil \frac{1}{\pi_1 \epsilon} \sqrt{\frac{N}{2\pi}} \rceil \sqrt{\frac{2\pi}{N}} \pi_1 \epsilon}^{u_N(|u|) \pi_1 \epsilon} \frac{\cos(x_{kN}(x)) - 1}{x_{kN}(x)} dx & \text{falls } \pi_1 \epsilon (u_N(|u|) - 0.5\sqrt{\frac{N\pi}{2}}) > 1 \text{ und } u \leq m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}, \\ -\infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zur Berechnung repräsentieren wir auch hier wieder die Stufenfunktion $g_{1app}(u)$ durch einen Vektor g^* der Länge N , wobei gilt:

$$g_k^* = g_{1app} \left(-\sqrt{\frac{N\pi}{2}} + (k + 0.5)\sqrt{\frac{2\pi}{N}} \right)$$

5.4 Approximation von $M_\pi^\epsilon(t) + \pi \epsilon V(t)$

Die Dichte zum Endzeitpunkt T approximieren wir nun, indem wir analog zum Abschnitt über M_ϵ^π eine (umgekehrte) Fouriertransformation durchführen. Die Approximation der charakteristischen Funktion erhält man wie folgt: Für $|u| > m\sqrt{2\pi/N}$ setzt man sie gleich 0, im dazwischenliegenden Bereich setzt man sie gleich der Stufenfunktion $\exp(T(g_{1app}(u) + g_{2app}(u)))$.

5.5 Zusammenfassung des Algorithmus

5.5.1 Approximation der Verteilungsfunktion

Wir berechnen die Approximation $F_{app}(z)$ der Verteilungsfunktion $F(z)$ aus $h_{app}(x)$, indem wir die Stufenfunktion integrieren (=aufsummieren bis zur oberen Integrationsgrenze). Da die Feinheit und Anzahl der Integrationspunkte bei h_{app} gekoppelt sind (wir verwenden FFT), bekommen wir unter Umständen bessere Fehlerabschätzungen, indem wir $h_{app} = 0$ ausserhalb eines bestimmten Intervalls setzen. Wir bekommen daher (mit $m \leq N/2$ geeignet gewählt) folgende Definition (der numerische Algorithmus ist dann unmittelbar klar):

$$F_{app}(z) = \begin{cases} 0 & \text{falls } z < -m\sqrt{\frac{2\pi}{N}} \\ \int_{-m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}}^z h_{app}(x)dx & \text{falls } -m\sqrt{\frac{2\pi}{N}} \leq z \leq m\sqrt{\frac{2\pi}{N}} \\ 1 & \text{falls } z > m\sqrt{\frac{2\pi}{N}} \end{cases}$$

5.5.2 Approximation der Dichte

$$h_{app}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \exp(-iu_N(u)x_N(x))g_{app}(u) & \text{falls } |x| \leq m\sqrt{\frac{2\pi}{N}} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

5.5.3 Approximation der charakteristischen Funktion

$$g_{app}(u) = \begin{cases} \exp(T(g_{1app}(u) + g_{2app}(u))) & \text{falls } |u| \leq m\sqrt{\frac{2\pi}{N}} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

5.5.4 Approximation der beiden Exponentenfunktionen

$$g_{1app}(u) = \begin{cases} \sum_{r=1}^R (-1)^r \frac{(\pi_1 \epsilon u_N(|u|))^{2r}}{2r(2r)!} & \text{falls } \pi_1 \epsilon (u_N(|u|) - 0.5\sqrt{\frac{N\pi}{2}}) \leq 1 \\ \sum_{r=1}^R (-1)^r \frac{(\lceil \frac{1}{\pi_1 \epsilon} \sqrt{\frac{N}{2\pi}} \rceil \sqrt{\frac{2\pi}{N}})^{2r}}{2r(2r)!} + \int_{\lceil \frac{1}{\pi_1 \epsilon} \sqrt{\frac{N}{2\pi}} \rceil \sqrt{\frac{2\pi}{N}} \pi_1 \epsilon}^{u_N(|u|) \pi_1 \epsilon} \frac{\cos(x_{kN}(x)) - 1}{x_{kN}(x)} dx & \text{falls } \pi_1 \epsilon (u_N(|u|) - 0.5\sqrt{\frac{N\pi}{2}}) > 1 \text{ und } u \leq m\sqrt{\frac{2\pi}{N}} \\ -\infty & \text{sonst} \end{cases}$$

$$g_{2app}(u) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} (e^{iu_N(u)x_N(x)} - 1) f_{app}(x) & \text{falls } |u| \leq m\sqrt{\frac{2\pi}{N}} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

5.5.5 Approximation der Lévy-Dichte

$$f_{app}(x) = \begin{cases} f_M(x_N(x)) & \text{falls } |x| \leq m\sqrt{\frac{2\pi}{N}} \quad \text{und} \quad (x_N(x) - \frac{0.5}{\sqrt{\frac{2\pi}{N}}}, x_N(x) + \frac{0.5}{\sqrt{\frac{2\pi}{N}}}) \subset A, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit $A := (\ln(1 - \pi) + h, \ln(\pi(e^{-\epsilon} - 1) + 1)) \cup (\ln(\pi(e^{\epsilon} - 1) + 1), \infty)$. Weiterhin definieren wir noch $B := \{x | (x_N(x) - \frac{0.5}{\sqrt{\frac{2\pi}{N}}}, x_N(x) + \frac{0.5}{\sqrt{\frac{2\pi}{N}}}) \subset A \quad \text{und} \quad |x| \leq m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}\}$. Offenbar ist dann B von der Form $B = (a; b) \cup (c; m\sqrt{\frac{2\pi}{N}})$

6 Fehlerabschätzung zur numerischen Berechnung des Quantils

Die folgenden Sätze werden im Anhang bewiesen (zur Definition der verwendeten Konstanten siehe Abschnitt 5) :

Satz 6.1 (Fehlerabschätzung von F_{app}) *Es gilt:*

$$\begin{aligned} & |F(z) - F_{app}(z)| \\ & \leq \left| 1 - \int_{-m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}}^{m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}} h_{app}(x) dx \right| + 4m\sqrt{\frac{1}{2\pi N}} \sup_{|x| \leq m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}} |h(x) - h_{app}(x)| \end{aligned}$$

Satz 6.2 (Fehlerabschätzung für h_{app})

$$\begin{aligned} & 2\pi |h_{app}(x) - h(x)| \\ & \leq \left(\frac{\pi_1 \epsilon}{2\pi}\right)^{-2\xi T} \frac{2}{2\xi T - 1} \left(m\sqrt{\frac{2\pi}{N}} - 2\frac{2\pi}{\pi_1 \epsilon}\right)^{1-2\xi T} \\ & \quad + m\frac{2\pi}{N} \int_{-m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}}^{m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}} |g_{app}(u)| du \\ & \quad + \sup_{u \in [-m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}; m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}]} \left| 1 - \frac{g(u)}{g_{app}(u)} \right| \int_{-m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}}^{m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}} |g_{app}(u)| du \end{aligned}$$

Satz 6.3 (Fehlerabschätzung für g_{app})

$$\begin{aligned} & \sup_{u \in [-m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}; m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}]} \left| 1 - \frac{g(u)}{g_{app}(u)} \right| \\ & \leq 2T \left(\sup_{u \in [-m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}; m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}]} |g_1(u) - g_{1app}(u)| + \sup_{u \in [-m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}; m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}]} |g_2(u) - g_{2app}(u)| \right) \end{aligned}$$

falls $\sup |g_1(u) - g_{1app}(u)| + \sup |g_2(u) - g_{2app}(u)| \leq 1$

Satz 6.4 (Fehlerabschätzung für g_{1app}) Es gilt mit $x_0 := \lceil \frac{\pi_1 \epsilon}{\sqrt{2\pi/N}} \rceil \frac{\sqrt{2\pi/N}}{\pi_1 \epsilon}$:

$$\sup_{u \in [-m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}; m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}]} |g_1(u) - g_{1app}(u)| \leq \frac{2}{R+1} \frac{x_0^{2(R+1)}}{(2(R+1))!} + \pi_1 \epsilon m \frac{3\pi}{N} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Satz 6.5 (Fehlerabschätzung für g_{2app}) Es gilt:

$$\begin{aligned} & \sup_{u \in [-m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}; m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}]} |g_2(u) - g_{2app}(u)| \\ & \leq \frac{2\pi}{N} \int_{-m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}}^{m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}} |f_{app}(x)| dx \\ & \quad + 2 \cdot (\exp(\sup_{x \in B} |(\ln f)'| \sqrt{\frac{2\pi}{N}}) - 1) \int_B f_{app}(x) dx \\ & \quad + 2 \cdot \left(\frac{\xi}{-\ln(\frac{e^a-1}{\pi_1} + 1)} \frac{e^{-c_2 \ln(\frac{e^a-1}{\pi_1} + 1)}}{-c_2} + \frac{\xi}{\epsilon} \frac{e^{-c_2 \epsilon} - e^{-c_2 \ln(\frac{e^b-1}{\pi_1} + 1)}}{-c_2} \right) \\ & \quad + 2 \cdot \left(\frac{\xi}{\epsilon} \frac{e^{c_1 \ln(\frac{e^c-1}{\pi_1} + 1)} - e^{c_1 \epsilon}}{c_1} + \frac{\xi}{\ln(\frac{e^m \sqrt{\frac{2\pi}{N}} - 1}{\pi_1} + 1)} \frac{e^{c_1 \ln(\frac{e^m \sqrt{\frac{2\pi}{N}} - 1}{\pi_1} + 1)}}{-c_1} \right) \end{aligned}$$

7 Simulation von Pfaden eines VG-Prozesses

7.1 Simulation eines Lévy-Prozesses

Wie direkt (vgl. Abschnitt 2.2) aus der Definition zu sehen ist, sind die aus einem Lévy-Prozess L gebildeten Zufallsvariablen $X_k := L(k \cdot \frac{T}{n}) - L((k-1) \cdot \frac{T}{n})$, $k = 1, 2, \dots, n$, iid mit charakteristischer Funktion $\exp(\frac{T}{n} \cdot \Psi(u))$. Andererseits gilt dann $L(k \cdot \frac{T}{n}) = \sum_{j=1}^k X_j$, d.h. man kann die Pfade des Lévy-Prozesses L mit Hilfe von iid-Zufallsvariablen, deren charakteristische Funktion bekannt ist, auf einem diskreten Gitter simulieren.

7.2 Simulation des VG-Prozesses

Aus Gleichung 4.2 kann man die charakteristische Funktion der Zufallsvariablen X_k direkt bestimmen:

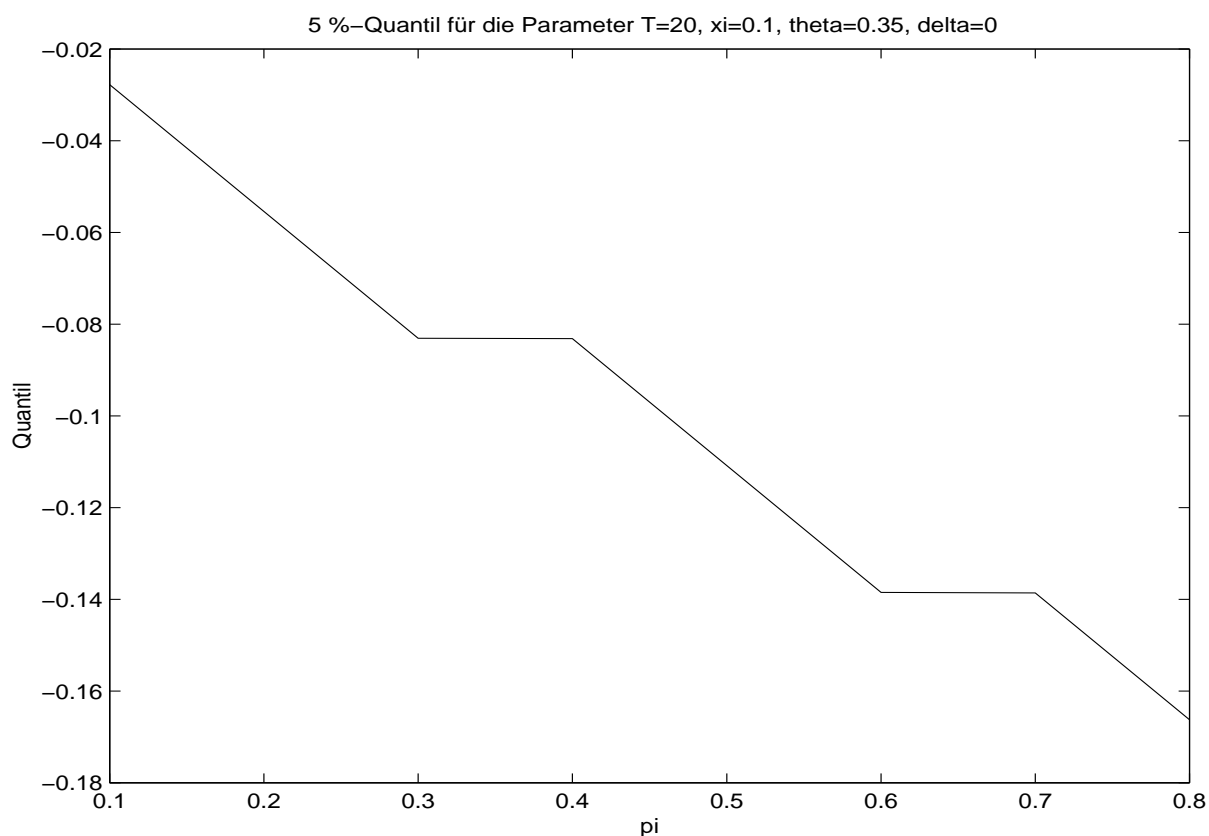
$$\mathbf{E}(X_k) = \exp\left(\frac{T}{n} \cdot (i\mu s - \xi \ln(1 - is\theta\delta + s^2 \frac{\theta}{2}))\right) = \exp\left(i\left(\frac{T}{n}\mu\right)s - \left(\frac{T}{n}\right)\xi \ln(1 - is\theta\delta + s^2 \frac{\theta}{2})\right)$$

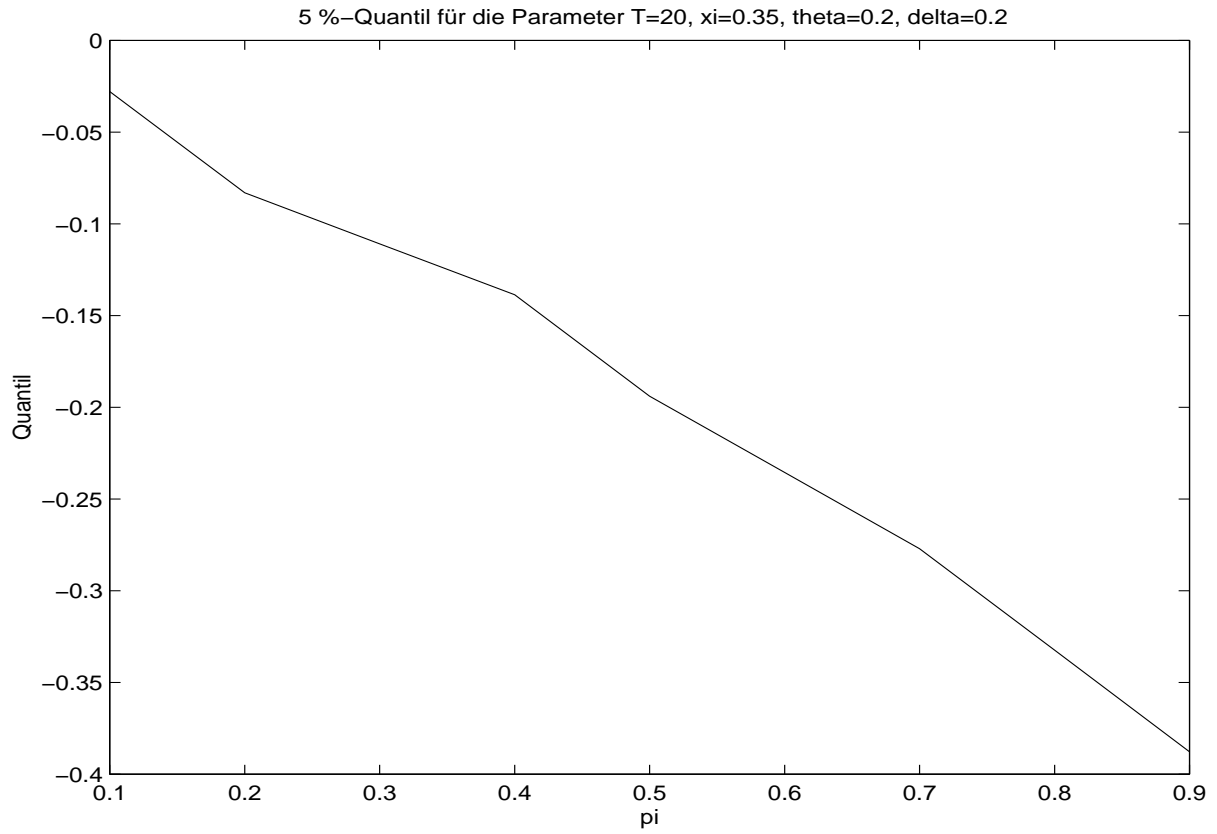
Die Verteilung dieser Zufallsvariablen gehört offenbar zur gleichen Klasse wie die (uns bereits bekannte) Verteilung von $L(1)$, es sind lediglich die Parameter geändert. Es gilt $L(1) \stackrel{d}{=} \mu - \delta\zeta^2 + \zeta\epsilon$ mit $\mu, \delta \in \mathbb{R}$, $\zeta^2 \sim \Gamma(\xi, \theta)$, $\epsilon \sim N(0, 1)$ und somit $X_k \stackrel{d}{=} \frac{T}{n}\mu - \delta\zeta'^2 + \zeta'\epsilon$, $\mu, \delta \in \mathbb{R}$, $\zeta'^2 \sim \Gamma(\frac{T}{n} \cdot \xi, \theta)$, $\epsilon \sim N(0, 1)$.

Somit ist die Simulation von L möglich mit Hilfe von Gamma- und normalverteilten Zufallsvariablen, die in S-Plus standardmäßig zur Verfügung stehen.

8 Ergebnisse

Die folgenden beiden Berechnungen des Quantils von $\pi_1 \epsilon V(T) + M_{\pi_1}^\epsilon(T)$ in Abhängigkeit von $\pi_1 \in [0, 1]$ wurden mit $N = 2^{15}$ Interpolationspunkten durchgeführt:





Einige Realisierungen des VG-Prozesses:

Abbildung 1: 10 Realisierungen eines VG Prozesses mit den Parameterwerten $\xi = 0.2, \delta = 0.1, \theta = 0.35, \mu = -0.03$

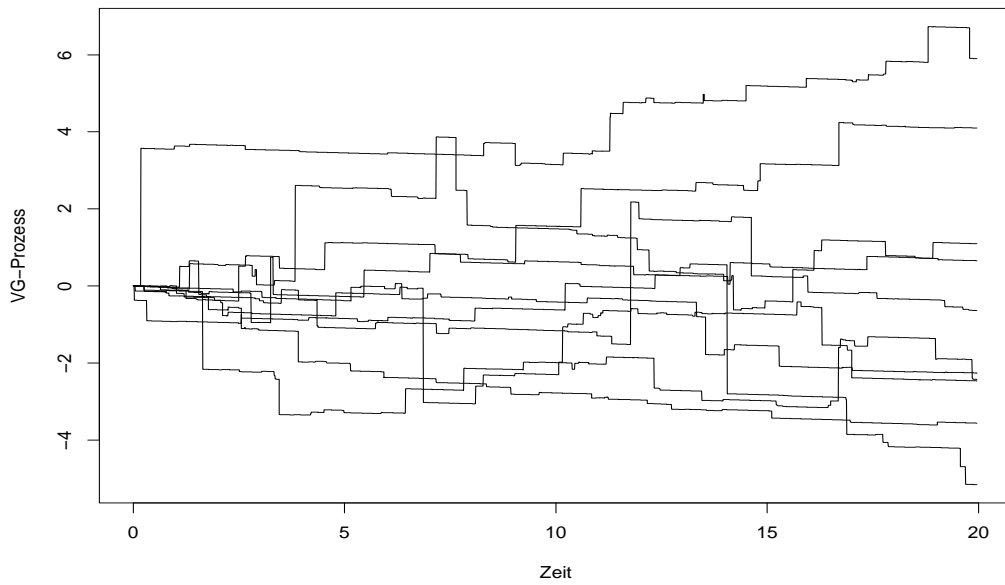
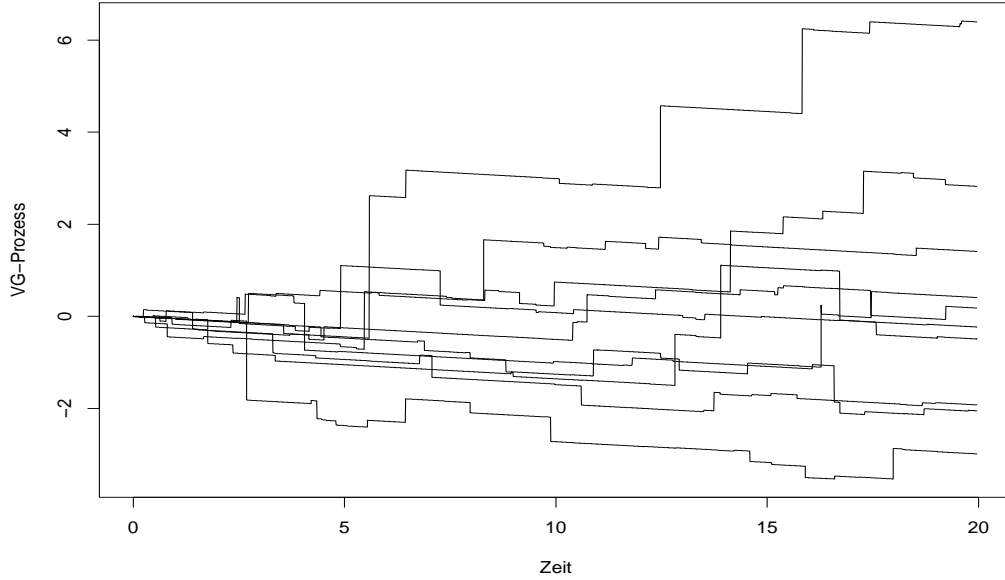


Abbildung 2: 10 Realisierungen eines VG Prozesses mit den Parameterwerten $\xi = 0.1, \delta = 0, \theta = 0.2, \mu = -0.05$



A Beweise zu den angegebenen Fehlerschranken

A.1 Fehler bei der Berechnung von $F_{app}(z)$

Mit der Definition aus Abschnitt 5.5.1 ergibt sich folgende Fehlerabschätzung:

$$\begin{aligned}
 |F(z) - F_{app}(z)| &\leq \left| \int_{-\infty}^{-m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}} h(x) dx \right| + \left| \int_{-m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}}^{m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}} (h(x) - h_{app}(x)) dx \right| \\
 &\leq \left| 1 - \int_{-m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}}^{m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}} h(x) dx \right| + 2m\sqrt{\frac{2\pi}{N}} \sup_{|x| \leq m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}} |h(x) - h_{app}(x)| \\
 &\leq \left| 1 - \int_{-m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}}^{m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}} h_{app}(x) dx \right| + 4m\sqrt{\frac{2\pi}{N}} \sup_{|x| \leq m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}} |h(x) - h_{app}(x)|.
 \end{aligned}$$

Der erste Term fällt direkt bei der numerischen Berechnung an, der zweite wird im nächsten Abschnitt weiter untersucht

A.2 Fehler bei der Berechnung von $h_{app}(x)$

Wieder setzen wir im Algorithmus $g_{app}(u) = 0$ für $|u| \geq m\sqrt{2\pi/N}$. Es gilt dann für $|x| \leq m\sqrt{2\pi/N}$:

$$\begin{aligned}
2\pi|h_{app}(x) - h(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} e^{iu_N(u)x_N(x)} g_{app}(u) du - \int_{\mathbb{R}} e^{iux} g(u) du \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R} \setminus [-m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}; m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}]} |g(u)| du + \int_{-m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}}^{m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}} |e^{iu_N(u)x_N(x)} g_{app}(u) - e^{iux} g(u)| du \\
&\leq \int_{\mathbb{R} \setminus [-m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}; m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}]} |g(u)| du + \int_{-m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}}^{m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}} |e^{iu_N(u)x_N(x)} - e^{iux}| |g_{app}(u)| du \\
&\quad + \int_{-m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}}^{m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}} |g_{app}(u) - g(u)| du \\
&\leq \int_{\mathbb{R} \setminus [-m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}; m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}]} |g(u)| du + \int_{-m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}}^{m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}} |e^{i(u_N(u)x_N(x) - ux)} - 1| |g_{app}(u)| du \\
&\quad + \int_{-m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}}^{m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}} |g_{app}(u) - g(u)| du
\end{aligned}$$

A.2.1 Abschätzung des ersten Summanden

Es gilt (falls $m\sqrt{2\pi/N}\pi_1\epsilon \geq 4\pi$) wegen $Re(\int (e^{iux} - 1)f(x)dx) \leq 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R} \setminus [-m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}; m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}]} |g(u)| du &\leq \int_{m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}}^{\infty} |g(u)| du \\
&\leq \int_{m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}}^{\infty} \exp(2\xi T) \int_0^{u\pi_1\epsilon} (\cos x - 1) \frac{1}{x} dx du \\
&\leq \int_{m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}}^{\infty} \exp(2\xi T) \int_{4\pi}^{\lfloor \frac{u\pi_1\epsilon}{2\pi} \rfloor 2\pi} (\cos x - 1) \frac{1}{x} dx du
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_{m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}}^{\infty} \exp(2\xi T) \sum_{l=2}^{\lfloor \frac{u\pi_1\epsilon}{2\pi} \rfloor - 1} \int_{l2\pi}^{(l+1)2\pi} (\cos x - 1) \frac{1}{x} dx du \\
&\leq \int_{m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}}^{\infty} \exp(2\xi T) \sum_{l=2}^{\lfloor \frac{u\pi_1\epsilon}{2\pi} \rfloor - 1} \int_{l2\pi}^{(l+1)2\pi} (\cos x - 1) \frac{1}{l2\pi} dx du \\
&\leq \int_{m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}}^{\infty} \exp(2\xi T) \sum_{l=2}^{\lfloor \frac{u\pi_1\epsilon}{2\pi} \rfloor - 1} \int_{l2\pi}^{(l+1)2\pi} (-1) \frac{1}{l2\pi} dx du \\
&\leq \int_{m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}}^{\infty} \exp(2\xi T) \sum_{l=2}^{\lfloor \frac{u\pi_1\epsilon}{2\pi} \rfloor - 1} \int_{(l-1)2\pi}^{l2\pi} (-1) \frac{1}{x} dx du \\
&= \int_{m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}}^{\infty} \exp(2\xi T) \int_{2\pi}^{(\lfloor \frac{u\pi_1\epsilon}{2\pi} \rfloor - 1)2\pi} (-1) \frac{1}{x} dx du \\
&\leq \int_{m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}}^{\infty} \exp(2\xi T) \int_{2\pi}^{u\pi_1\epsilon - 2 \cdot 2\pi} (-1) \frac{1}{x} dx du \\
&= \int_{m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}}^{\infty} \exp(-2\xi T \ln(\frac{u\pi_1\epsilon}{2\pi} - 2)) du \\
&= \int_{m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}}^{\infty} (\frac{u\pi_1\epsilon}{2\pi} - 2)^{-2\xi T} du \\
&= \int_{m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}}^{\infty} (\frac{\pi_1\epsilon}{2\pi})^{-2\xi T} (u - 2\frac{2\pi}{\pi_1\epsilon})^{-2\xi T} du \\
&= \left(\frac{\pi_1\epsilon}{2\pi}\right)^{-2\xi T} \frac{1}{2\xi T - 1} \left(m\sqrt{\frac{2\pi}{N}} - 2\frac{2\pi}{\pi_1\epsilon}\right)^{1-2\xi T}.
\end{aligned}$$

Diese Fehlerschranke ist direkt auszurechnen. Offenbar muss also $1 - 2\xi T$ deutlich negativ sein, um eine gute Fehlerschranke zu gewährleisten; wie man leicht zeigen kann, ist für $2\xi T \leq 1$ gar keine klassische Fouriertrafo möglich. In diesem Fall könnte man eventuell Konvergenz durch Einfügen eines normalverteilten Termes erreichen.

A.2.2 Abschätzung des zweiten Summanden

Wir setzen wieder $g_{app} = 0$ außerhalb von $|x| \leq m\sqrt{2\pi/N}$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
& \int_{-m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}}^{m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}} |e^{i(u_N(u)x_N(x)-ux)} - 1| |g_{app}(u)| du \\
& \leq \sup_{u \in [-\sqrt{\frac{N\pi}{2}}; \sqrt{\frac{N\pi}{2}}]} |e^{i(u_N(u)x_N(x)-ux)} - 1| \int_{-m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}}^{m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}} |g_{app}(u)| du \\
& \leq 2\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{N}} m\sqrt{\frac{2\pi}{N}} \int_{-m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}}^{m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}} |g_{app}(u)| du \\
& = m\frac{2\pi}{N} \int_{-m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}}^{m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}} |g_{app}(u)| du
\end{aligned}$$

Dieser Term fällt bei der Berechnung an.

A.2.3 Abschätzung des dritten Summanden

$$\begin{aligned}
\int_{-m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}}^{m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}} |g_{app}(u) - g(u)| du & \leq \int_{-m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}}^{m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}} |g_{app}(u)| \left| 1 - \frac{g(u)}{g_{app}(u)} \right| du \\
& \leq \sup_{u \in [-m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}; m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}]} \left| 1 - \frac{g(u)}{g_{app}(u)} \right| \int_{-m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}}^{m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}} |g_{app}(u)| du.
\end{aligned}$$

Der zweite Faktor fällt wieder bei der Berechnung an, der erste wird im nächsten Abschnitt weiter untersucht.

A.3 Fehler bei der Berechnung von $g_{app}(u)$

$$\begin{aligned}
& \sup_{u \in [-m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}; m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}]} \left| 1 - \frac{g(u)}{g_{app}(u)} \right| \\
& \leq \sup_{u \in [-m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}; m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}]} |1 - \exp(T(g_1(u) + g_2(u) - g_{1app}(u) - g_{2app}(u)))| \\
& \leq 2T \left(\sup_{u \in [-m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}; m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}]} |g_1(u) - g_{1app}(u)| + \sup_{u \in [-m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}; m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}]} |g_2(u) - g_{2app}(u)| \right),
\end{aligned}$$

falls $\sup |g_1(u) - g_{1app}(u)| + \sup |g_2(u) - g_{2app}(u)| \leq 1$ (Restgliedabschätzung der Exponentialfunktion, vgl. Analysis). Diese beiden Terme werden nun weiter untersucht.

A.4 Fehler bei der Berechnung von g_{1app}

Es gilt mit $x_0 := \lceil \frac{\pi_1 \epsilon}{\sqrt{2\pi/N}} \rceil \frac{\sqrt{2\pi/N}}{\pi_1 \epsilon}$:

$$\begin{aligned}
\sup_{u \in [-m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}; m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}]} |g_1(u) - g_{1app}(u)| &\leq \sum_{r=R+1}^{\infty} \frac{x_0^{2r}}{(2r)(2r)!} + \int_1^{\pi_1 \epsilon m \sqrt{\frac{2\pi}{N}}} \left| \frac{\cos x_{kN}(x) - 1}{x_{kN}(x)} - \frac{\cos x - 1}{x} \right| dx \\
&\leq \frac{2}{R+1} \frac{x_0^{2(R+1)}}{(2(R+1))!} + (\pi_1 \epsilon m \sqrt{\frac{2\pi}{N}} - 1) \sup_{x \in [1; \pi_1 \epsilon m \sqrt{\frac{2\pi}{N}}]} \left| \frac{\cos x_{kN}(x) - 1}{x_{kN}(x)} - \frac{\cos x - 1}{x} \right| \\
&\leq \frac{2}{R+1} \frac{x_0^{2(R+1)}}{(2(R+1))!} + (\pi_1 \epsilon m \sqrt{\frac{2\pi}{N}} - 1) \sup_{x \in [1; \pi_1 \epsilon m \sqrt{\frac{2\pi}{N}}]} \left| \frac{\cos x_{kN}(x) - 1}{x_{kN}(x)} - \frac{\cos x - 1}{x} \right| \\
&\leq \frac{2}{R+1} \frac{x_0^{2(R+1)}}{(2(R+1))!} + \pi_1 \epsilon m \sqrt{\frac{2\pi}{N}} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{kN}} \sup_{x \in [1; \pi_1 \epsilon m \sqrt{2\pi/N}]} \left| \left(\frac{\cos x - 1}{x} \right)' \right| \\
&\leq \frac{2}{R+1} \frac{x_0^{2(R+1)}}{(2(R+1))!} + \pi_1 \epsilon m \frac{3\pi}{N} \frac{1}{\sqrt{k}}.
\end{aligned}$$

Diese Terme sind direkt berechenbar

A.5 Fehler bei der Berechnung von $g_{2app}(u)$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
\sup_{u \in [-m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}; m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}]} |g_2(u) - g_{2app}(u)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} (e^{iu_N(u)x_N(x)} - 1) f_{app}(x) dx - \int_{\mathbb{R}} (e^{iux} - 1) f(x) dx \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} |e^{iu_N(u)x_N(x)} - e^{iux}| f_{app}(x) dx + 2 \int_{\mathbb{R}} |f_{app}(x) - f(x)| dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} |e^{iu_N(u)x_N(x)} - e^{iux}| f_{app}(x) dx + 2 \int_B |f_{app}(x) - f(x)| dx + 2 \int_{\mathbb{R} \setminus B} |f_{app}(x) - f(x)| dx
\end{aligned}$$

Dabei ist B die Menge, auf der f_{app} mit Hilfe von f definiert wurde (vgl. Abschnitt 5.5.5). Die drei Summanden werden nun einzeln untersucht.

A.5.1 Erster Summand

Analog zu oben erhält man:

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}} |e^{iu_N(u)x_N(x)} - e^{iux}| f_{app}(x) dx \\
& \leq \int_{-m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}}^{m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}} |e^{i(u_N(u)x_N(x)-ux)} - 1| |f_{app}(x)| dx \\
& \leq \sup_{x \in [-\sqrt{\frac{N\pi}{2}}; \sqrt{\frac{N\pi}{2}}]} |e^{i(u_N(u)x_N(x)-ux)} - 1| \int_{-m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}}^{m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}} |f_{app}(x)| dx \\
& \leq 2\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{N}} m \sqrt{\frac{2\pi}{N}} \int_{-m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}}^{m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}} |f_{app}(x)| dx \\
& = \frac{2\pi}{N} \int_{-m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}}^{m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}} |f_{app}(x)| dx.
\end{aligned}$$

Dieser Term fällt bei der Berechnung an.

A.5.2 Zweiter Summand

Es gilt:

$$\int_B |f_{app}(x) - f(x)| dx \leq (\exp(\sup_{x \in B} |(\ln f)'| \sqrt{\frac{2\pi}{N}}) - 1) \int_B f_{app}(x) dx$$

und weiter für $x > 0$:

$$\begin{aligned}
|(\ln f)'| &= |[\ln \xi - \ln(\ln(\frac{e^x - 1}{\pi_1} + 1)) + c_1 \ln(\frac{e^x - 1}{\pi_1} + 1) + x - \ln(e^x - (1 - \pi_1))]| \\
&= \left| -\frac{e^x}{(\ln(\frac{e^x - 1}{\pi_1} + 1))(\frac{e^x - 1}{\pi_1} + 1)\pi_1} + c_1 \frac{e^x}{e^x - (1 - \pi_1)} + 1 - \frac{e^x}{e^x - (1 - \pi_1)} \right| \\
&\leq \left| \frac{e^x}{e^x - (1 - \pi_1)} \left(\left| \frac{1}{\epsilon} \right| + |c_1| + 1 \right) + 1 \right| \\
&\leq \frac{1}{1 - (1 - \pi_1)(\frac{e^\epsilon - 1}{\pi_1} + 1)} \left(\frac{1}{\epsilon} + |c_1| + 1 \right) + 1
\end{aligned}$$

unabhängig von x . Für $x < 0$ erhält man:

$$|(\ln f)'| = \left| -\frac{e^x}{(-\ln(\frac{e^x - 1}{\pi_1} + 1))(e^x - (1 - \pi_1))} + (-c_2) \frac{e^x}{e^x - (1 - \pi_1)} + 1 - \frac{e^x}{e^x - (1 - \pi_1)} \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left| \frac{e^x}{e^x - (1 - \pi_1)} \right| \left(\frac{1}{\epsilon} + |c_2| + 1 \right) + 1 \\
&\leq \left| \frac{1}{e^{\ln(1-\pi_1)+h} - (1 - \pi_1)} \right| \left(\frac{1}{\epsilon} + |c_2| + 1 \right) + 1.
\end{aligned}$$

A.5.3 Dritter Summand

Auf $\mathbb{R} \setminus B$ ist $f_{app} = 0$; es gilt somit:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R} \setminus B} |f_{app}(x) - f(x)| dx = \int_{\mathbb{R} \setminus B} f(x) dx \\
&= \int_{\ln(1-\pi_1)}^a f(x) dx + \int_b^{\ln(\frac{\epsilon^{-\epsilon}-1}{\pi_1}+1)} f(x) dx + \int_{\ln(\frac{\epsilon^\epsilon-1}{\pi_1}+1)}^c f(x) dx + \int_{m\sqrt{\frac{2\pi}{N}}}^{\infty} f(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\ln(\frac{\epsilon^a-1}{\pi_1}+1)} -\frac{\xi}{x} e^{-c_2 x} dx + \int_{\ln(\frac{\epsilon^b-1}{\pi_1}+1)}^{-\epsilon} -\frac{\xi}{x} e^{-c_2 x} dx + \int_{\epsilon}^{\ln(\frac{\epsilon^c-1}{\pi_1}+1)} \frac{\xi}{x} e^{c_1 x} dx + \int_{\ln(\frac{\epsilon^m \sqrt{\frac{2\pi}{N}} - 1}{\pi_1} + 1)}^{\infty} \frac{\xi}{x} e^{c_1 x} dx \\
&\leq \frac{\xi}{-\ln(\frac{\epsilon^a-1}{\pi_1}+1)} \int_{-\infty}^{\ln(\frac{\epsilon^a-1}{\pi_1}+1)} e^{-c_2 x} dx + \frac{\xi}{\epsilon} \int_{\ln(\frac{\epsilon^b-1}{\pi_1}+1)}^{-\epsilon} e^{-c_2 x} dx + \frac{\xi}{\epsilon} \int_{\epsilon}^{\ln(\frac{\epsilon^c-1}{\pi_1}+1)} e^{c_1 x} dx \\
&\quad + \frac{\xi}{\ln(\frac{\epsilon^m \sqrt{\frac{2\pi}{N}} - 1}{\pi_1} + 1)} \int_{\ln(\frac{\epsilon^m \sqrt{\frac{2\pi}{N}} - 1}{\pi_1} + 1)}^{\infty} e^{c_1 x} dx \\
&\leq \frac{\xi}{-\ln(\frac{\epsilon^a-1}{\pi_1}+1)} \frac{e^{-c_2 \ln(\frac{\epsilon^a-1}{\pi_1}+1)}}{-c_2} + \frac{\xi}{\epsilon} \frac{e^{-c_2 \epsilon} - e^{-c_2 \ln(\frac{\epsilon^b-1}{\pi_1}+1)}}{-c_2} + \frac{\xi}{\epsilon} \frac{e^{c_1 \ln(\frac{\epsilon^c-1}{\pi_1}+1)} - e^{c_1 \epsilon}}{c_1} \\
&\quad + \frac{\xi}{\ln(\frac{\epsilon^m \sqrt{\frac{2\pi}{N}} - 1}{\pi_1} + 1)} \frac{e^{c_1 \ln(\frac{\epsilon^m \sqrt{\frac{2\pi}{N}} - 1}{\pi_1} + 1)}}{-c_1}.
\end{aligned}$$

Dabei fallen a, b, c (vgl. Abschnitt 5.5.5) bei der Berechnung an.

B Implementierung

Die Funktion, die die Lévy-Dichte von M_ϵ^π berechnet:

`fM_function(x, xi, theta, delta, pi1, c1, c2)`

```

{
a_exp(x)/(exp(x)-1+pi1)
b_log((exp(x)-1)/pi1+1)
if(x>0)
{
fMWert_xi/b*exp(c1*b)*a
}
else
{
fMWert_-xi/b*exp(-c2*b)*a
}
return(fMWert)
}

```

Der FFT-Algorithmus:

```

FFT_function(x)
{
falt_x
fneu_rep(0:0,length(x))
i_complex(imaginary=1)
n_log(length(x))/log(2)
if(n-floor(n)==0)
{
for (m in n:1)
{
M_2^(m-1)
e_exp(-2*pi*i/(2^m))
d_1
for (k in 1:2^(m-1))
{
for (r in 0:(2^(n-m)-1))
{
fneu[r*M+k]_falt[r*2*M+k]+falt[r*2*M+k+M]
fneu[(r+2^(n-m))*M+k]_d*(falt[r*2*M+k]-falt[r*2*M+k+M])
}
}
d_e*d
}
falt_fneu

```



```

}
return(fneu/length(x))
}
else
{
return('Laenge von x ist keine Potenz von 2')
}
}

```

Die Quantilberechnung:

```

quantilappr_function(alpha,t,n,m,k,h,R,xi,theta,delta,pi1,epsilon)
{
N_2^n
i_complex(imaginary=1)

source(file='FFT.s')
source(file='fM.s')

happrWert_rep(0:0,N)
gapprWert_rep(0:0,N)
g1apprWert_rep(0:0,N)
fapprWert_rep(0:0,N)
c1_-(sqrt(2/theta+delta^2)+delta)
c2_(2/(c1*theta))

xschrittweite_sqrt(2*pi/N)*pi1*epsilon           ##Berechnung von glapp

k1_min((floor(sqrt(N/(2*pi)))*(1/(pi1*epsilon)))+1),N/2)
print(N/2-k1)
for (l in 1:k1)                                 ##Berechnung mittels
                                                ##Potenzreihe im Bereich bis 1

{
x_(1-0.5)*xschrittweite

```

```

s_0
a_1
b_1
for (r in 1:R)
{
a_-a*(x^2)
b_b*(2*r-1)*2*r
s_s+a/(2*r*b)

}
glapprWert[N/2+1]_s
glapprWert[N/2+1-1]_s
}

x_(k1+0.5)*xschrittweite
s_0
a_1
b_1
for (r in 1:R)
{
a_-a*(x^2)
b_b*(2*r-1)*2*r
s_s+a/(2*r*b)
}
b_b*(2*R+2)*(2*R+1)          ##Bereitstellung der Fakultt fr die
                                ##Fehlerabschtzung weiter unten
for (l in (k1+1):(N/2))      ##Berechnung mittels numerischer
                                ##Integration im Bereich >1, erhhte Feinheit
{
glapprWert[N/2+1]_s
glapprWert[N/2+1-1]_s
for (u in 1:k)
{
x_(l-1+u/k)*xschrittweite
s_s+(cos(x)-1)/x*(xschrittweite/k)
}
}
}

```

```

print('Berechnung von g1 fertig')

xschrittweite_sqrt(2*pi/N)
xmin_xschrittweite*(-N/2)
n1_max(N/2+1-m,floor((log(1-pi1)+h)/xschrittweite)+2+N/2)

    ##Aufstellung des Levy-Dichte-Vektors

n2_max(N/2+1-m,floor(log(pi1*(exp(-epsilon)-1)+1)/xschrittweite)+N/2)
n3_min(N/2+m,floor(log(pi1*(exp(epsilon)-1)+1)/xschrittweite)+N/2+2)
print(c(n1,n2,n3))
fapprintegral_0
for (l in n1:n2)
{
fapprWert[N+1-l]_fM((xmin+(l-0.5)*xschrittweite),xi,theta,delta,pi1,c1,c2)
fapprintegral_fapprintegral+abs(fapprWert[N+1-l])*xschrittweite
}
for (l in n3:(N/2+m))
{
fapprWert[N+1-l]_fM((xmin+(l-0.5)*xschrittweite),xi,theta,delta,pi1,c1,c2)
fapprintegral_fapprintegral+abs(fapprWert[N+1-l])*xschrittweite
}

print('Berechnung von f fertig')

    ##Durchfuehrung der FFT zur Berechnung von g2app

for(l in (N/2+1-m):(N/2+m))
{
fapprWert[l]_fapprWert[l]*((-1)^(l-1))*exp(-i*((l-1)/N)*pi)
}

g2apprWert_FFT(fapprWert)
for (l in 1:N)

```

```

{
g2apprWert[1]_sqrt(2*pi/N)*((-1)^1)*exp(i*((-1+0.5)*pi/N))*N*g2apprWert[1]
  -sqrt(2*pi/N)*s
}

print('Berechnung von g2 fertig')

suplnfstrich_max(1/abs(1-(1-pi1)*((exp(epsilon)-1)/pi1+1))*
(1/epsilon+abs(c1)+1)+1,1/abs(exp(log(1-pi1)+h)-(1-pi1))*(1/epsilon+abs(c2)+1)+1)

grenze1_-sqrt(N*pi/2)+(n1-1)*sqrt(2*pi/N)
grenze2_-sqrt(N*pi/2)+n2*sqrt(2*pi/N)
grenze3_-sqrt(N*pi/2)+(n3-1)*sqrt(2*pi/N)
summand3_xi/log((exp(grenze1)-1)/pi1+1)*1/c2*exp(-c2*log((exp(grenze1)-1)/pi1+1))
  +xi/(epsilon*(-c2))*(exp(-c2*epsilon)-exp(-c2*log((exp(grenze2)-1)/pi1+1)))
summand3_summand3
  +xi/(epsilon*c1)*(exp(c1*log((exp(grenze3)-1)/pi1+1))-exp(c1*epsilon))
  +xi/(-c1)*exp(c1*log((exp(m*sqrt(2*pi/N))-1)/pi1+1))
  /log((exp(m*sqrt(2*pi/N))-1)/pi1+1)
print('summand3=')
print(summand3)
g2apprfehler_(2*pi/N+2*(exp(suplnfstrich*sqrt(2*pi/N))-1))*fapprintegral
  +2*summand3
print('g2apprfehler=')
print(g2apprfehler)
x0_(floor(pi1*epsilon/(sqrt(2*pi/N)))+1)*(sqrt(2*pi/N))/(pi1*epsilon)
g1apprfehler_2/(R+1)*x0^(2*(R+1))/b+pi1*epsilon*m*3*pi/(N*sqrt(k))
print('g1apprfehler=')
print(g1apprfehler)
gapprfehler_2*t*(g1apprfehler+g2apprfehler)
gapprintegral_0

print('Berechnung von g fertig')

```

```

for (l in (N/2+1-m):(N/2+m))      ##Durchfuehrung der umgekehrten FFT zur
                                ##Dichteberechnung
{
gapprWert[l]_(-1)^(l-1)*exp(-i*(l-1)*pi/N)*exp(t*(g1apprWert[l]+g2apprWert[l]))
gapprintegral_gapprintegral+abs(gapprWert[l])*xschrittweite
}
happrWert_sqrt(N/(2*pi))*FFT(gapprWert)

for (l in 1:N)
{
happrWert[l]_Re(happrWert[l]*((-1)^(l))*exp(-i*(l-0.5)*pi/N))
}

happrfehler_2*(pi1*epsilon/(2*pi))^(-2*xi*t)*(1/(2*xi*t-1))
  *(m*sqrt(2*pi/N)-2*2*pi/(pi1*epsilon))^(1-2*xi*t)
  +(m*2*pi/N+gapprfehler)*gapprintegral
print('2. Summand von happrfehler=')
print((m*2*pi/N+gapprfehler)*gapprintegral)
print('happrfehler=')
print(happrfehler)

s_0                                ##Berechnung des Quantils
                                ##aus der Dichte

for(l in (N/2+1-m):(N/2+m))
{
s_s+abs(happrWert[l])*sqrt(2*pi/N)
}

print('Fehlerschranke=')
print(abs(1-s)+4*m*sqrt(1/(N*2*pi))*happrfehler)

s_0
l_0
for (j in (N/2+1-m):(N/2+m))
{
if(s<alpha)

```

```

{
l_j
s_s+happrWert[j]*sqrt(2*pi/N)
}
else
{}
}
quantilapprWert_-sqrt(N*pi/2)+(1-(s-alpha)/happrWert[1])*sqrt(2*pi/N)
return(quantilapprWert)
}

```

Die Simulation der Pfade

```

simulation_function(t,n,xi,delta,theta,mu,zufall)
{
schrittweite_t/n

vg_rep(0:0,(n+1))    ##Bereitstellung des Vektors

muneu_mu*t/n        ##"neue" Parameter
xineu_t/n*xi

set.seed(zufall)
y_rnorm(n,0,1)
v_rgamma(n,xineu,theta)

x_muneu-delta*v+sqrt(v)*y

vg[1]_0
for(k in 2:(n+1))
{
vg[k]_vg[k-1]+x[k-1]
}
plot(rep(0:n,1),vg,type='l')

```

}

Literatur

- [1] Sato, K.I. (1999) *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [2] Protter, P. (1992) *Stochastic Integration and Differential Equations*. Springer, New York.
- [3] Bauer, H. (2002) *Wahrscheinlichkeitstheorie*. De Gruyter, Berlin.
- [4] Emmer, S. and Klüppelberg, C. (2002) Optimal portfolios when stock prices follow an exponential Lévy-process. *Finance & Stochastics*. To appear. Available at {www.ma.tum.de/stat/}
- [5] Jörg, S. (2000) *Portfoliooptimierung unter verschiedenen Marktmodellen*. Bachelor Thesis. Munich University of Technology. Available at {www.ma.tum.de/stat/}
- [6] Asmussen, S. and Rosinski, J. (2001) Approximation of small jumps of Lévy processes with a view towards simulation. *J. Appl. Probab.* **38**, 482-493.