

Technische Universität München

ZENTRUM MATHEMATIK

**Optimales Investment  
einer Versicherung**

Diplomarbeit

von

Roland Christoph Seydel

Themensteller: Prof. Dr. Martin Brokate  
Prof. Dr. Claudia Klüppelberg  
Betreuer: Prof. Dr. Martin Brokate  
Radostina Kostadinova  
Abgabetermin: 5. November 2004

Hiermit erkläre ich, dass ich die Diplomarbeit selbständig angefertigt und nur die angegebenen Quellen verwendet habe.

München, 5. November 2004

# Danksagung

Besonders danken möchte ich

- Herrn Prof. Brokate für seine weiterführenden und sehr brauchbaren Hinweise sowie für seine exzellenten Vorlesungen;
- Frau Prof. Klüppelberg für ihre immer kompetente und effiziente Hilfe und freundliche Art, sowie für ihre Bereitschaft, sich von mir verbrochene Diplomarbeitsfragmente anzuschauen;
- Tina Kostadinova für ihre Geduld mit meiner immer währenden Kritik und Rechthaberei;
- dem gesamten Lehrstuhl M6 für seine angenehme Arbeitsatmosphäre, insbesondere Jan-Christoph Wehrstedt, Hans Schnabel und Götz Grammel;
- meinem Mitdiplomanden und zukünftigen *Associate Lecturer* Mathias Jais für viele anregende Diskussionen;
- der TU München für die hervorragenden Arbeitsbedingungen,
- sowie meinen Freunden und besonders meiner Familie für die immer währende Unterstützung (und für's Korrekturlesen ;-).

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Zur Risikotheorie einer Versicherung</b>	<b>2</b>
1.1	Aus der Praxis . . . . .	2
1.2	Das klassische Modell . . . . .	3
1.2.1	Resultate im Modell von Cramér/Lundberg . . . . .	4
1.2.2	Das klassische Modell mit Investment . . . . .	4
1.3	Value at Risk . . . . .	4
1.3.1	VaR in der Versicherung . . . . .	5
1.3.2	Modellierungsfehler . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Grundlagen aus der Stochastik</b>	<b>7</b>
2.1	Stochastische Prozesse . . . . .	7
2.2	Lévy-Prozesse . . . . .	9
2.3	Stochastische Integration . . . . .	13
2.3.1	Stochastische Integrale . . . . .	14
2.3.2	Die quadratische Variation . . . . .	15
2.3.3	Die Itô-Formel . . . . .	16
2.4	Stochastische Differentialgleichungen (SDE) . . . . .	17
2.4.1	Existenz und Eindeutigkeit . . . . .	17
2.4.2	Das stochastische Exponential . . . . .	17
2.5	Der Generator . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Modell</b>	<b>20</b>
3.1	Das Modell . . . . .	20
3.2	Verifikation des Modells über SDE . . . . .	21
3.2.1	Parameter von $L_\theta$ . . . . .	22
3.2.2	Stochastische Differentialgleichung für $U_\theta$ . . . . .	24

3.3	Lösungsmethoden . . . . .	25
3.4	Stochastische Prozesse und PDE . . . . .	26
3.5	Herleitung der partiellen Integro-Differentialgleichung (PIDE) . . . . .	27
3.5.1	PIDE für $H_Q(x, t)$ . . . . .	27
3.5.2	Konvergenz von $A_3(s)$ . . . . .	30
3.5.3	PIDE für $H_U(x, t)$ . . . . .	34
<b>4</b>	<b>Theorie partieller Differentialgleichungen (PDE)</b>	<b>35</b>
4.1	Vorbemerkungen . . . . .	35
4.1.1	Notation . . . . .	35
4.1.2	Definition, Typeinteilung . . . . .	36
4.1.3	Lösungsbegriffe . . . . .	37
4.2	Sobolevräume I . . . . .	38
4.3	Elliptische PDE . . . . .	39
4.4	Parabolische PDE . . . . .	40
4.4.1	Bochner-Integral, Evolutionstripel . . . . .	40
4.4.2	Existenz und Eindeutigkeit . . . . .	41
4.5	Sobolevräume II . . . . .	42
4.5.1	Gewichtete Sobolevräume . . . . .	42
4.5.2	Der Hilbertraum $H_{x^2+1}^1$ . . . . .	43
<b>5</b>	<b>Existenz und Eindeutigkeit</b>	<b>45</b>
5.1	Formulierung des Problems . . . . .	45
5.2	Ansatz mit Mitteln der Stochastik . . . . .	46
5.2.1	Existenz einer klassischen Lösung: Malliavin-Kalkül . . . . .	46
5.2.2	Eindeutigkeit – ein Maximumprinzip . . . . .	50
5.3	Existenz und Eindeutigkeit einer schwachen Lösung . . . . .	53
5.3.1	Dirichlet-Randbedingungen . . . . .	54
5.3.2	Elliptisiertes Problem ohne Faltungsterm . . . . .	54
5.3.3	Elliptisiertes Problem mit Faltungsterm . . . . .	57
5.3.4	Lösung des degeneriert-parabolischen Problems . . . . .	59
5.3.5	Offene Fragen . . . . .	61
5.4	Lokalisierung . . . . .	62
5.4.1	Existenz und Eindeutigkeit . . . . .	62

5.4.2	Eine probabilistische Abschätzung für den Lokalisierungsfehler . . .	63
<b>6</b>	<b>Numerische Lösung</b>	<b>65</b>
6.1	Vorarbeiten . . . . .	65
6.2	Numerische Lösung der PIDE . . . . .	67
6.2.1	Ausgangs-Verfahren . . . . .	68
6.2.2	Stabilitäts-/Geschwindigkeitserwägungen . . . . .	71
6.2.3	Verfahren zweiter Ordnung in der Zeit . . . . .	72
6.3	Verifikation mit Monte-Carlo-Simulation . . . . .	73
6.3.1	Konvergenz der MC-Simulation . . . . .	73
6.3.2	Herleitung unserer MC-Simulation . . . . .	74
6.4	Vergleich der Verfahren . . . . .	75
6.4.1	Fall ohne Markt . . . . .	75
6.4.2	Fall mit Markt . . . . .	76
6.5	Optimierung . . . . .	79
<b>7</b>	<b>Resümee und Ausblick</b>	<b>82</b>
<b>A</b>	<b>Ausgewählte Quelltexte</b>	<b>85</b>
<b>B</b>	<b>Notationen und Abkürzungen</b>	<b>94</b>

# Einleitende Hinweise für den Leser

**Zum Inhalt der Arbeit:** Diese Diplomarbeit befasst sich mit der Untersuchung des Risikos einer Versicherung, unter der Annahme, dass sie sowohl das klassische Versicherungsgeschäft betreibt, als auch am Kapitalmarkt investieren kann. Dort kann die Versicherung entweder in eine risikolose Anlage investieren, oder in einen Aktienmarkt, der durch einen exponentiellen Lévy-Prozess modelliert wird.

Ziel der Arbeit ist es, eine optimale (d.h. gewinnmaximale bei beschränktem Risiko) Aufteilung zwischen Investment am Aktienmarkt und in die risikolose Anlage zu bestimmen. Dazu leiten wir eine partielle Integro-Differentialgleichung (PIDE) her, deren Lösung wir im Folgenden theoretisch untersuchen. Über die numerische Lösung mittels eines Finite-Differenzen-Verfahrens (das mithilfe einer Monte-Carlo-Simulation verifiziert wird) gelangen wir schließlich zur Optimierung.

**Zum Aufbau der Arbeit:** Im ersten Kapitel findet sich eine Einführung in Aspekte der mathematische Risikotheorie einer Versicherung. Hier wird auch genauer die Motivation für unser zu Grunde gelegtes Modell besprochen. Das zweite bzw. vierte Kapitel stellt eine Art Referenz für alle verwendeten Resultate aus den Gebieten Stochastik bzw. Theorie partieller Differentialgleichungen dar. Sie können im Falle von ausreichenden Vorkenntnissen beim ersten Lesen ausgelassen werden.

Im Modellierungs-Kapitel 3 untersuchen wir unser Modell mathematisch und leiten die partielle Integro-Differentialgleichung her, mit deren Lösung wir uns in den dann folgenden Kapiteln beschäftigen: Das Theorie-Kapitel 5 untersucht Existenz, Eindeutigkeit und Regularität von (klassischen wie schwachen) Lösungen, und das Praxis-Kapitel 6 unternimmt die konkrete numerische Lösung der PIDE und die Berechnung einer optimalen Strategie. Kapitel 7 zieht ein abschließendes Resümee und bietet einen Ausblick.

**Zu den Voraussetzungen:** Die gesamte Arbeit sollte mit guten Kenntnissen aus einem Grundstudium Mathematik, angereichert um Funktionalanalysis und Stochastische Prozesse, verständlich sein. Einzelne Teile sind auch mit weniger Vorkenntnissen zu verstehen – die wichtigsten Begriffe aus den beiden letztgenannten Fachgebieten werden im Verlauf der Arbeit kurz eingeführt. Bemerkungen führen häufig ein wenig tiefer in das jeweilige Gebiet.

**Zur Notation:** Einen Großteil der Notation führen wir in den einleitenden Kapiteln 2 und 4 ein. Zur besseren Übersicht findet sich im Anhang ein Notationsverzeichnis.

# Kapitel 1

## Zur Risikotheorie einer Versicherung

Dieses Kapitel stellt eine kurze (möglichst elementare) Einführung in die mathematische Risikotheorie einer Versicherung und ihre hier relevanten Aspekte dar; wir motivieren unseren verwendeten Ansatz.

### 1.1 Aus der Praxis

Die Wahrscheinlichkeit eines Ruins spielt überall in der Wirtschaft eine Rolle beim Treffen von Entscheidungen. Immer will auch das Risiko einer Entscheidung mit bedacht werden. Allerdings stehen diese Überlegungen in einem klassischen Industrieunternehmen nicht immer im Mittelpunkt. Geschäftliche Risiken müssen eingegangen werden, um Profite zu erwirtschaften.

Die geschäftlichen Risiken einer Entscheidung in einem Industrieunternehmen sind mit derart vielen Unwägbarkeiten behaftet, dass die Entwicklung eines mathematischen Modells für die Ruinwahrscheinlichkeit dort eher für Heiterkeit als für Interesse sorgen würde. Mit anderen Worten: Wenn sich die neue E-Klasse wider Erwarten nicht verkauft, dann sind alle ex ante angestellten mathematischen Risikoüberlegungen Makulatur. Die Bilanz mag risikotechnisch noch so ausgewogen sein, die Hauptrisiken tauchen nicht in der Bilanz auf.

Anders gestaltet sich das bei einem Versicherungsunternehmen: Hier werden Kontrakte auf Jahre hinaus abgeschlossen und in der Regel nicht kurzfristig gekündigt. Schadenfälle der Vergangenheit erlauben eine großangelegte statistische Untersuchung und Hinweise auf eine mathematische Modellierung. Also ist die Geschäftsentwicklung bei einer Versicherung in gewissem Rahmen vorhersehbar.

Insbesondere aber ist das Geschäftsgebaren einer Versicherung naturgemäß eher konservativ. Einerseits ist das bedingt durch regulatorische Erfordernisse. Andererseits ist es eines der wichtigsten Geschäftsziele, möglichst solvent zu bleiben: ein möglicher Kunde ist daran interessiert, dass die (im Gegensatz zu einem Industrieunternehmen *vorher*) gezahlten Prämien im Versicherungsfall auch eine Schadensleistung zur Folge haben. Hat die Versicherung nicht die entsprechende Sicherheit anzubieten, wird der Kunde eher abgeschreckt.



In verschärftem Maße gilt dies für die Rückversicherung großer Schadenfälle.

Wir konzentrieren uns daher in der folgenden Darstellung auf den Fall einer Versicherung.

## 1.2 Das klassische Modell

Zurückgehend auf die Arbeiten von Cramér und Lundberg bis zur Mitte des zwanzigsten Jahrhunderts, sieht das klassische Risiko-Modell für eine Versicherung wie folgt aus:

Ein Versicherungsunternehmen hat zum Zeitpunkt  $t = 0$  eine Anfangsrisikoreserve von  $u$  und erhält eine konstante Prämieinzahlung von  $c$  pro Zeiteinheit. Daraus muss es zufällig eintretende Schadenfälle begleichen: zufällig, was die Höhe angeht, und auch zufällig, was den Zeitpunkt angeht (nach weiteren  $E_i$  Zeit tritt der  $i$ -te Schaden  $Y_i$  auf, wo die  $Y_i, E_i$  jeweils unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen sind). Die Zufallsvariable  $N(t) = \max\{n : \sum_{i=1}^n E_i \leq t\}$  gibt an, wie viele Schadenfälle bis  $t$  aufgetreten sind. Für den Risiko-Reserveprozess  $U(t) = \text{Anfangskapital} + \text{Prämieinnahmen} - \text{Versicherungsfälle}$  gilt dann also:

$$U(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i, \quad t \geq 0 \quad (1.1)$$

Genauer und mathematischer formuliert:  $(N(t))_{t \geq 0}$  wird als ein Poisson-Prozess angenommen, mit Intensität  $\lambda$ , d.h. pro Zeiteinheit werden gerade  $\lambda$  Schäden erwartet.

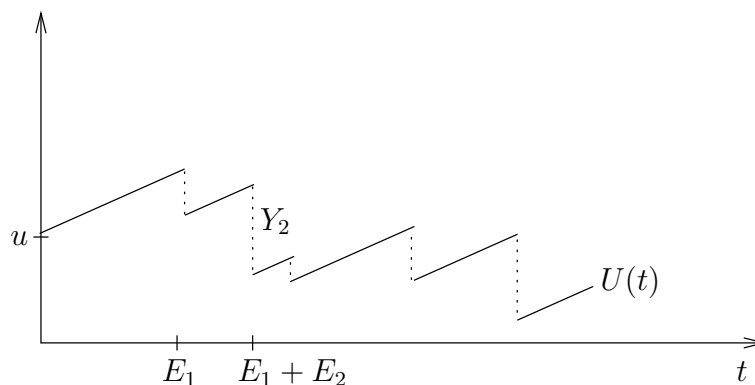


Abbildung 1.1: Beispiel-Risikoprozess  $R$  einer Versicherung

Dieses Modell stellt allerdings nur für den Nichtlebenbereich (also die Schadensversicherung) ein sinnvolles Modell dar: Nach Art und Zeitpunkt der Auszahlungen ist eine Lebensversicherung ganz anders strukturiert.

Als Maß für das Risiko wird in der mathematischen Risikotheorie für gewöhnlich die unendliche Ruinwahrscheinlichkeit in Abhängigkeit vom Anfangsvermögen  $u$  verwendet.

$$\psi(u) = P(\text{Vers. geht irgendwann Bankrott}) = P(U(t) < 0 \text{ für ein } t > 0) \quad (1.2)$$

### 1.2.1 Resultate im Modell von Cramér/Lundberg

Cramér, Lundberg und andere fanden heraus, dass die Ruinwahrscheinlichkeit für *small claims* (d.h. für Schadenverteilungen, bei denen große Schäden eine sehr kleine Wahrscheinlichkeit haben, genauer: der Tail exponentiell abnimmt) durch Exponentialfunktionen beschränkt ist:

$$\psi(u) \leq C_+ e^{-\rho u}, \quad \psi(u) \geq C_- e^{-\rho u}, \quad \forall u \quad (1.3)$$

für geeignet gewählte Konstanten  $C_+$ ,  $C_-$ , sowie  $\rho > 0$ , das von den Parametern des Problems  $c$ ,  $\lambda$  und der Laplace-Transformierten der Verteilungsfunktion der Schäden abhängt. Ein weiteres Resultat ist, dass  $\psi$  mit steigendem Anfangsvermögen  $u$  asymptotisch exponentiell abnimmt:

$$\psi(u) \sim C e^{-\rho u}, \quad u \rightarrow \infty \quad (1.4)$$

### 1.2.2 Das klassische Modell mit Investment

Besonders in letzter Zeit rückt eine andere Komponente zunehmend in den Mittelpunkt der Forschung in der Risikothorie: das Investment des Versicherungsvermögens am Kapitalmarkt. Ausgelöst wurde dies (zumindest in Deutschland) durch die zunehmende Betonung des *shareholder value* und die daraus resultierende Tendenz zur Auflösung oder besseren Nutzung stiller Reserven der Versicherungsunternehmen.

Eine der ersten Veröffentlichungen hierzu ist Hipp und Plum [25] (2000). Mit Methoden der stochastischen Kontrolltheorie berechnen sie den optimalen Investmentprozess (abhängig von der Zeit). Es zeigt sich, dass durch geeignete Anlage am Kapitalmarkt die Ruinwahrscheinlichkeit verringert werden kann. Dabei zeichnet ihre Methode aus, dass sie nicht nur für *small claims* funktioniert.

Einen etwas anderen Ansatz verfolgen Gaier et al. [19]. Eng angelehnt an die Methoden für das Modell ohne Investment (also unter Verwendung der Martingaltheorie) weisen sie für den *small claims*-Fall wiederum exponentielle Schranken und Asymptotik nach. Weitere Resultate auf dem Gebiet finden sich in Grandits [24], Hipp und Schmidli [27].

## 1.3 Value at Risk

Der Begriff des *Value at Risk* (VaR) stellt ein besonders in der Bankenbranche vielgenutztes Risikomaß dar. Im Prinzip ist der VaR dabei nichts anderes als ein Quantil, also zu einem bestimmten Niveau  $\alpha \in (0, 1)$  der Verlust, der mit einer Wahrscheinlichkeit von  $1 - \alpha$  nicht überschritten wird:

$$\text{VaR}(X, \alpha) := \inf\{x \in \mathbb{R} : P(X > x) \leq \alpha\}$$

Welche Zufallsvariable  $X$  verwendet wird, ist dabei der Fantasie des Risikomanagers überlassen: Üblich sind 1- bzw. 10-Tage-VaR (d.h.  $X$  misst die Summe der Verluste innerhalb

von 1 bzw. 10 Tagen), letzterer ist mittlerweile von den Aufsichtsbehörden zur Pflicht gemacht worden. Auch das Niveau  $\alpha$  wird von Bank zu Bank verschieden gewählt,  $\alpha = 0.01$  ist eine übliche Größe.

Der Reiz des VaR besteht darin, in einer einzigen Zahl das momentane Risiko der Bank abgebildet zu haben.

**Bemerkung 1.1** *In einigen Definitionen des VaR wird von der Zufallsvariable  $X$  noch sein Erwartungswert abgezogen. Allerdings ist der Unterschied für kurze Zeiträume nicht wesentlich.*

### 1.3.1 VaR in der Versicherung

Wie bereits oben erwähnt, hat die Versicherung ein sehr langfristiges, vergleichsweise träges und auf Sicherheit bedachtes Geschäft, das eigentliche Versicherungsgeschäft. Diesem Geschäft wird in der mathematischen Risikothorie hauptsächlich durch die Untersuchung der Ruinwahrscheinlichkeit Rechnung getragen.

Wird jetzt zusätzlich das Investment des Versicherungsunternehmens mit einbezogen, so haben wir gesehen, dass die klassische Risikothorie auf diesen Fall ausgeweitet werden kann.

Nun ist der Kapitalmarkt aber eher schnelllebig, und also scheint die Untersuchung der Ruinwahrscheinlichkeit (zumal der unendlichen) weniger angebracht. Außerdem haben Versicherungen in der Regel so große Reserven, dass der Fall eines Ruins rein hypothetisch scheint.

In der vorliegenden Arbeit, basierend auf Ideen von Klüppelberg und Kostadinova [39], Klüppelberg et al. [40], soll daher ein neuer Ansatz untersucht werden: Die Verwendung des VaR als Risikomaß und darauf basierende Optimierung des Investments am Kapitalmarkt. (Eine genauere Darstellung des verwendeten Modells findet sich in Kapitel 3.)

In der mathematischen Risikothorie für Versicherungen ist dieser Ansatz vergleichsweise neu. Nicht dagegen in der Versicherung selbst, wo mithilfe von Monte-Carlo-Simulationen am Computer bereits seit Jahren Risiko-Quantile ausgerechnet werden. Das zeigt die Relevanz unseres Themas für die Praxis.

Allerdings ist die Monte-Carlo-Simulation rechnerisch derart aufwändig (und die Zielfunktion natürlich nicht explizit gegeben), dass eine Optimierung nur schwer möglich ist. Auch hier kann unsere vorgestellte Methode hilfreich sein.

### 1.3.2 Modellierungsfehler

Bekanntlich gibt es kein Modell ohne Fehler. So hat auch unser Modell (neben den üblichen) einen größeren Modellierungsfehler, der eben darin begründet liegt, dass die Versicherung relativ kurzfristig am Kapitalmarkt und langfristig auf der Versicherungsseite agiert:

*Mit dem VaR wird das Risiko einer Versicherung systematisch unterschätzt.*

Angenommen, wir berechnen den VaR bis zum Zeitpunkt  $T$ , d.h. wir betrachten den Netto-Verlust, der am Ende von  $T$  aufgetreten ist. Das Problem ist nun, dass auch vor dem Zeitpunkt  $T$  Ruin eintreten kann, und zwar mit positiver Wahrscheinlichkeit. Denn es ist deutlich wahrscheinlicher, dass der Prozess *irgendwann* im Zeitraum unter die 0 sinkt, als das der Prozess *nur zum Zeitpunkt  $T$*  negativ ist.

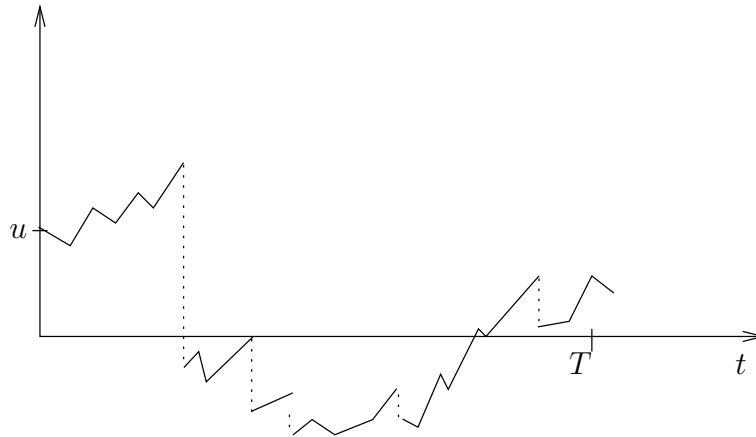


Abbildung 1.2: Ein Beispiel-Pfad für Unterschätzung des Risikos durch VaR

Um das einzusehen, betrachte man Abbildung 1.2. Pfade können unter 0 gehen, und trotzdem am Ende positiv sein. Bei einem einigermaßen realistischen Modell sollte allerdings 0 ein absorbierender Zustand sein, da eine ruinierte Versicherung ja Konkurs anmelden muss, und daher ihr Geschäft nicht weiter betreiben kann.

Natürlich ist dieser Fehler hauptsächlich bei größerem  $T$  relevant, dagegen ist er auf kurzen Zeiträumen (also auch für Banken) vernachlässigbar. Allerdings wird der Fehler desto bedeutender, je näher wir uns dem Ruin nähern, also je größer die Wahrscheinlichkeit ist, bis  $T$  in den Ruin zu gehen.

Eine mögliche Abhilfe für das Modellierungsproblem erkennt man direkt aus der Problembeschreibung: Man könnte die Pfade des Risikoprozesses in der (zufälligen) Ruinzeit stoppen, also eben 0 zu einem absorbierenden Zustand machen. Für die vorliegende Arbeit soll dieser Modellierungsaspekt allerdings keine Rolle spielen; es bleibt eine Aufgabe für nachfolgende Arbeiten, das Modell dahingehend zu verfeinern.

# Kapitel 2

## Grundlagen aus der Stochastik

Dieses Kapitel ist eine kurze Einführung in die Theorie der stochastischen Prozesse, mit Schwerpunkt auf Lévy-Prozessen, stochastischer Integration und stochastischen Differentialgleichungen (SDE). Erläuterung der Notation und für diese Diplomarbeit relevante Resultate stehen dabei im Vordergrund.

Für eine ausführlichere, gut lesbare Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie sei dem geneigten Leser Jacod und Protter [31] ans Herz gelegt. Das erste Kapitel in Bass [3] stellt in knapper analytischer Form auch weitergehende Resultate vor. Die Standardreferenz Bauer [5] ist zwar sehr abstrakt, dafür aber umso umfangreicher.

### 2.1 Stochastische Prozesse

Unter einem *Wahrscheinlichkeitsraum*  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  verstehen wir eine Menge  $\Omega$ , eine  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{F}$  darauf und ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $P$ . Im Folgenden gehen wir immer davon aus, dass ein Wahrscheinlichkeitsraum gegeben ist. Gilt eine Aussage auf einer (messbaren) Menge  $A$  mit  $P(A) = 1$ , so schreiben wir dafür  $P$ -f.s. ( $P$ -fast sicher).

Eine *Zufallsvariable* (ZV) ist eine  $\mathcal{F}$ -messbare Abbildung von  $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Hat eine ZV  $X$  eine Verteilung  $F_X$ , so schreiben wir dafür  $X \sim F_X$ ; haben zwei ZV  $X, Y$  die gleiche Verteilung, schreiben wir  $X \stackrel{d}{=} Y$ . Für zwei unabhängige, identisch verteilte ZV  $X, Y$  sagen wir,  $X$  und  $Y$  sind iid ZV.

Die *charakteristische Funktion*  $\varphi$  einer ZV  $X$  legt die Verteilung einer ZV eindeutig fest,  $\varphi_X(u) := \widehat{X}(u) := \mathbb{E}e^{iuX}$  für  $u \in \mathbb{R}$ .

Ein *stochastischer Prozess*  $X = (X_t)_{t \in I}$  ist eine Familie von Zufallsvariablen  $X_t$ . Dabei kann  $I$  eine beliebige Indexmenge sein, in der vorliegenden Arbeit ist immer  $I = \mathbb{R}_0^+$  (zeitstetiger stochastischer Prozess). Für festes  $\omega$  bezeichnen wir  $(X_t(\omega))_{t \in I}$  als Pfad eines stochastischen Prozesses (wir verlangen, dass  $t \mapsto X_t(\omega)$  messbar für alle  $\omega$ ). Teilweise schreiben wir statt  $X_t$  auch  $X(t)$ .

Eine *Filtrierung* ist eine aufsteigende Familie von Unter- $\sigma$ -Algebren  $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$  von  $\mathcal{F}$ .  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in I}, P)$  bezeichnen wir als *filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum*. Auch ihn werden wir

immer stillschweigend voraussetzen. Wir verlangen dabei die üblichen Bedingungen:  $\mathcal{F}$  sei  $P$ -vollständig (also alle Teilmengen von  $P$ -Nullmengen in  $\mathcal{F}$  sind wieder in  $\mathcal{F}$ ),  $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$  sei rechtsseitig stetig, und jedes  $\mathcal{F}_t$  enthalte alle Nullmengen von  $\mathcal{F}$ .

Ein Prozess  $X$  heißt *adaptiert* bzgl. einer Filtrierung, wenn  $X_t$   $\mathcal{F}_t$ -messbar ist für alle  $t$ . Die *natürliche Filtrierung* von  $X$  ist die kleinste Filtrierung, bzgl. derer  $X$  adaptiert ist – also jene, die von  $X$  erzeugt wird.

Die *Brownsche Bewegung* ist vielleicht der berühmteste stochastische Prozess. Sie beginnt in 0, hat unabhängige stationäre normalverteilte Zuwächse und fast alle Pfade sind stetig. (Wir werden im Folgenden immer von einer stetigen Version der Brownschen Bewegung ausgehen.) Die Standard-Brownsche-Bewegung (Wiener Prozess) bezeichnen wir mit  $W$ : Es gilt  $W_t \sim N(0, t)$ , normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz  $t$ . Also ist eine Brownsche Bewegung  $B$  gerade  $B = \sigma W$  für ein  $\sigma > 0$ .

Eine Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  heißt von *endlicher Variation auf  $[a, b]$* , falls für jede Folge  $\pi_n$  von Partitionen von  $[a, b]$ , deren Feinheit gegen 0 geht,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{t_k, t_{k+1} \in \pi_n} |f(t_{k+1}) - f(t_k)| < \infty \quad (2.1)$$

**Proposition 2.1** *Fast alle Pfade der Brownschen Bewegung sind von unendlicher Variation auf Kompakta.*

Der *Poisson-Prozess*  $N$  beginnt ebenfalls in 0 und hat unabhängige, stationäre Zuwächse. Er ist ein Sprungprozess mit Sprüngen der Höhe 1. Es gilt  $N(t) \sim Poi(\lambda t)$ . Mit  $\lambda$  bezeichnen wir die Intensität des Poisson-Prozesses. Die Abstände zwischen den Sprungzeitpunkten (Zwischenankunftszeiten) sind iid exponentialverteilt mit Parameter  $\lambda$ .

Ein *zusammengesetzter Poisson-Prozess* erlaubt zufällige Sprunghöhen (die iid und auch unabhängig von den Sprungzeitpunkten sind). Er ist also von der Form  $\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$  – den Risikoprozess als Beispiel haben wir bereits gesehen.

Als weitere Verallgemeinerung betrachten wir die Klasse der Lévy-Prozesse (siehe Abschnitt 2.2). Allen diesen Prozessen gemeinsam ist die sogenannte *Markov-Eigenschaft*, die besagt, dass die Entwicklung eines Prozesses in der Zukunft nicht von der Vergangenheit abhängt.

Zwei sehr wichtige Eigenschaften des Poisson-Prozesses sind die folgenden, die wir ausgiebig benutzen werden:

**Proposition 2.2 (Ordnungsstatistikeigenschaft des Poisson-Prozesses)** *Sei  $N$  ein Poisson-Prozess. Dann gilt für die Sprungzeiten  $T_j$ ,*

$$((T_1, \dots, T_n) | N(t) = n) \stackrel{d}{=} (U_{(1)}, \dots, U_{(n)}),$$

wobei  $(U_{(1)}, \dots, U_{(n)})$  die geordnete Stichprobe von  $n$  iid-gleichverteilten ZV ist.

**Proposition 2.3 (lokales Verhalten des Poisson-Prozesses)**  *$N$  sei ein stochastischer Prozess mit unabhängigen stationären Zuwächsen und  $N(0) = 0$  (=Lévy-Prozess). Dann sind äquivalent:*

(i)  $N$  ist ein Poisson-Prozess mit Parameter  $\lambda$

(ii) für alle  $t \geq 0$  gilt für  $h \rightarrow 0, h > 0$ :

$$\begin{aligned} P(N(t+h) - N(t) = 1) &= \lambda h + o(h) \\ P(N(t+h) - N(t) > 1) &= o(h) \end{aligned}$$

Außerdem gilt in diesem Fall:  $P(N(t+h) - N(t) = 0) = 1 - \lambda h + o(h)$ .

**Beweis:** Nur (i)  $\Rightarrow$  (ii): Die Zwischenankunftszeiten eines Poisson-Prozesses sind exponentialverteilt. Daher gilt für  $t = 0$  mit Taylorentwicklung

$$P(\text{„in } (t, t+h] \text{ tritt kein Sprung auf“}) = \int_h^\infty \lambda \exp(-\lambda t) dt = \exp(-\lambda h) = 1 - \frac{\lambda h}{1} + o(h)$$

(Den Fall eines Sprungs zeigt man analog unter Verwendung der Markov-Eigenschaft oder Homogenität des Poisson-Prozesses.)  $\square$

## 2.2 Lévy-Prozesse

Die Klasse der Lévy-Prozesse enthält sowohl Brownsche Bewegungen als auch (zusammengesetzte) Poisson-Prozesse. Für Lévy-Prozesse gibt es hochinteressante theoretische Resultate, aber auch vielfältige praktische Anwendungen: So modelliert man beispielsweise einen Aktienmarkt mit Sprüngen häufig mit einem exponentiellen Lévy-Prozess.

Insbesondere für den Zusammenhang mit unendlich teilbaren Verteilungen, der ein wichtiger Baustein der Theorie ist, sei auf die einschlägige Literatur verwiesen: Sato [61].

Alle hier dargestellten Resultate sind analog auf den mehrdimensionalen Fall übertragbar (auch in den folgenden Abschnitten).

**Definition 2.4** Ein  $\mathbb{R}$ -wertiger stochastischer Prozess  $L$  heißt Lévy-Prozess, falls

- (i)  $L_0 = 0$  P-f.s.,
- (ii) er unabhängige Zuwächse hat, also  $L_t - L_s$  für  $t > s$  ist unabhängig von  $\sigma((L_r)_{r \leq s})$
- (iii) er stationäre Zuwächse hat, d.h. die Verteilung von  $L_t - L_s$  hängt nur von  $t - s$  ab
- (iv) er stetig in Wahrscheinlichkeit ist, d.h.  $\forall \varepsilon > 0: \lim_{s \rightarrow t} P(|L_s - L_t| \geq \varepsilon) \rightarrow 0$
- (v) er càdlàg Pfade hat, d.h. die Pfade sind continu à droite avec limites à gauche, rechtsseitig stetig mit linksseitigen Grenzwerten

**Bemerkung 2.1** In der üblichen Definition eines Lévy-Prozesses findet sich Voraussetzung (v) nicht. Man kann aber zeigen, dass ein Lévy-Prozess P-f.s. càdlàg ist, ja sogar die càdlàg Version bis auf Ununterscheidbarkeit eindeutig definiert ist.

**Satz 2.5 (charakteristischer Exponent, Lévy-Chintschin-Darstellung)** Sei  $L$  ein Lévy-Prozess. Dann existiert eine Funktion  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  (der charakteristische Exponent) mit

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\exp(iuL_t)] &= e^{t\psi(u)} \quad \text{für } t \geq 0, u \in \mathbb{R}, \\ \psi(u) &= i\gamma u - \frac{1}{2}u^2\sigma^2 + \int e^{iux} - 1 - iux1_{|x|\leq 1} \nu(dx), \end{aligned}$$

wobei  $\gamma \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma > 0$  und  $\nu$  ein Maß ist (das sogenannte Lévy-Maß) mit  $\int |x|^2 \wedge 1 \nu(dx) < \infty$  und  $\nu(\{0\}) = 0$ .

Das Tripel  $(\gamma, \sigma^2, \nu)$ , das sogenannte Lévy-Chintschin-Tripel, ist für einen gegebenen Lévy-Prozess eindeutig, und für jedes Tripel mit obigen Eigenschaften existiert ein Lévy-Prozess, dessen Verteilung eindeutig definiert ist.

Also ist ein Lévy-Prozess in seinen uns interessierenden Eigenschaften durch das Tripel  $(\gamma, \sigma^2, \nu)$  eindeutig festgelegt. Wir schreiben in Zukunft „ $L$  sei ein Lévy-Prozess mit Tripel  $(\gamma, \sigma^2, \nu)$ “ oder kurz  $L \sim (\gamma, \sigma^2, \nu)$ .

Im Folgenden wird häufig der Term  $\Delta L(t)$  benutzt: Für festes  $\omega$  ist  $\Delta L(t, \omega) := L(t, \omega) - L(t-, \omega)$  der Sprung zum Zeitpunkt  $t$ .  $L(t-)$  bezeichnet dabei den pfadweise linksseitigen Grenzwert in  $t$ .

**Satz 2.6 (Lévy-Itô-Zerlegung)** Sei  $L \sim (\gamma, \sigma^2, \nu)$ . Dann lässt sich  $L$  zerlegen als

$$L_t = \gamma t + \sigma W_t + \sum_{0 < s \leq t} \Delta L_s 1_{|\Delta L_s| > 1} + \int_0^t \int_{|x| \leq 1} x(M(dx, ds) - \nu(dx)ds),$$

wobei  $M_\omega(A) := \#(\{t, \Delta L(t, \omega) \in A\})$  für Borelmengen  $A$  aus  $[0, \infty) \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

**Bemerkung 2.2**  $M = M_\omega$  ist ein sogenanntes Poisson-Zufallsmaß (also ein Maß, das vom Zufall abhängt),  $M(dx, ds) - \nu(dx)ds$  steht für das sogenannte kompensierte Poisson-Zufallsmaß. Es ist so gewählt, dass  $\int_0^t \int f(x, s)(M(dx, ds) - \nu(dx)ds)$  gerade ein Martingal ist für jede Funktion  $f$ , für die  $\int_0^t \int |f(x, s)|\nu(dx)ds$  existiert. Einzelheiten finden sich z.B. in Sato [61], S. 120 oder Cont und Tankov [10], S. 57.

Dabei kann das Lévy-Maß durchaus auch unendlich sein, also  $\nu(\mathbb{R}) = \infty$ , oder sogar  $\int_{|x| \leq 1} |x|\nu(dx) = \infty$ . Leider können wir einige unserer Resultate in Kapitel 3 nicht für allgemeine Lévy-Prozesse beweisen. Daher benötigen wir zwei Einschränkungen, die im Folgenden theoretisch untermauert werden:

**Proposition 2.7 (Cont und Tankov [10], Prop. 3.9)** Sei  $L \sim (\gamma, 0, \nu)$ . Dann gilt  $\int_{|x| \leq 1} |x|\nu(dx) < \infty$  genau dann, wenn  $L$  von endlicher Variation ist (siehe (2.1)). In diesem Fall gilt:

$$L(t) = \gamma_0 t + \sum_{0 < s \leq t} \Delta L(s), \quad t \geq 0 \tag{2.2}$$

mit  $\gamma_0 := \gamma - \int_{|x| \leq 1} x\nu(dx)$ .



**Bemerkung 2.3** Die Proposition besagt im Prinzip nichts anderes, als dass das Integral  $\int_0^t \int_{|x| \leq 1} x\nu(dx)ds < \infty$ , die Kompensation in der Lévy-Itô-Zerlegung also nicht mehr nötig ist.

**Korollar 2.8** Sei  $L \sim (\gamma, \sigma^2, \nu)$ , es gelte  $\int_{|x| \leq 1} |x|\nu(dx) < \infty$ . Dann hat  $L$  die Darstellung ( $\gamma_0$  wie vorhin)

$$L(t) = \gamma_0 t + \sigma W(t) + \sum_{0 < s \leq t} \Delta L(s), \quad t \geq 0 \quad (2.3)$$

**Beweis:** Sei  $\sigma W$  die Brownsche Bewegung aus der Lévy-Itô-Zerlegung. Dann ist  $\bar{L} := L - \sigma W$  von endlicher Variation. Das Ergebnis folgt also mit der letzten Proposition.  $\square$

Nun zeigen wir, dass die Summe in (2.3) gerade ein zusammengesetzter Poisson-Prozess ist, falls  $\nu(\mathbb{R}) < \infty$ .

Die Definition eines (zusammengesetzten) Poisson-Prozesses haben wir bereits kennen gelernt. Eine äquivalente Definition ist für  $\lambda > 0$  und  $F$  eine Verteilung auf  $\mathbb{R}$  mit  $F(\{0\}) = 0$  (vgl. Sato [61], Def. 4.2):

Ein Lévy-Prozess  $X$  heißt zusammengesetzter Poisson-Prozess, wenn  $X_t$  für  $t > 0$  die charakteristische Funktion  $\mathbb{E}e^{iuX_t} = \exp(t\lambda(\hat{F}(u) - 1))$ ,  $u \in \mathbb{R}$  besitzt.

Dabei ist  $\lambda$  die Intensität des Poisson-Prozesses, und  $F$  die Sprungverteilung. Mit dieser Definition folgt

**Proposition 2.9** Ein Lévy-Prozess  $L \sim (\gamma, \sigma^2, \nu)$  ist genau dann eine Summe von Driftterm, (möglicherweise degenerierter) Brownscher Bewegung und zusammengesetztem Poisson-Prozess, wenn  $0 < \nu(\mathbb{R}) < \infty$ .

**Bemerkung 2.4** Für  $\sigma > 0$  bezeichnen wir einen solchen Prozess auch als jump diffusion-Prozess.

**Beweis:** Nach der Lévy-Chintschin-Darstellung ist für  $L \sim (\gamma, \sigma^2, \nu)$  der charakteristische Exponent

$$\psi(u) = i\gamma u - \frac{1}{2}u^2\sigma^2 + \int e^{iux} - 1 - iux1_{|x| \leq 1}\nu(dx).$$

„ $\Leftarrow$ “ Sei nun  $0 < \nu(\mathbb{R}) < \infty$ . Mit der Lévy-Itô-Zerlegung gilt  $\gamma_0 \cdot \sim (\gamma_0, 0, 0)$  und  $\sigma W \sim (0, \sigma^2, 0)$  ( $\gamma_0 := \gamma - \int_{|x| \leq 1} x\nu(dx)$ ). Wegen Unabhängigkeit gilt dann

$$\begin{aligned} \varphi_{X-\gamma_0-\sigma W}(u) &= \varphi_X(u)\varphi_{-\gamma_0 \cdot}(u)\varphi_{-\sigma W}(u) \\ &= \exp(t(\psi_X(u) + \psi_{-\gamma_0 \cdot}(u) + \psi_{-\sigma W}(u))) \\ &= \exp\left(t\left(iu \int_{|x| \leq 1} x\nu(dx) + \int e^{iux} - 1 - iux1_{|x| \leq 1}\nu(dx)\right)\right) \\ &= \exp\left(t\left(\int e^{iux} - 1 \nu(dx)\right)\right) \end{aligned}$$

Nun ist mit  $\lambda := \nu(\mathbb{R})$

$$\int e^{iux} - 1 \nu(dx) = \lambda \left( \frac{\widehat{\nu}(u)}{\lambda} - 1 \right)$$

wo  $\widehat{\nu}(u) = \int e^{iux} \nu(dx)$  die Fouriertransformierte des Maßes  $\nu$  ist. Nun zeigen wir, dass  $\widehat{\nu}(u)/\lambda$  die charakteristische Funktion einer Verteilung ist. Nach dem Satz von Bochner (z.B. Sato [61], S.8) ist dafür hinreichend:  $\widehat{\nu}(0)/\lambda = 1$ ,  $\widehat{\nu}(u)/\lambda$  stetig in 0,  $\widehat{\nu}(u)/\lambda$  nichtnegativ definit. Alle drei Bedingungen sind offensichtlich erfüllt.

„ $\Rightarrow$ “ Wäre  $\nu(\mathbb{R}) = \infty$ , so wäre (falls gleichzeitig  $\int_{|x| \leq 1} |x| \nu(dx) < \infty$ ) diese Normierung unmöglich. Wenn schon  $\int_{|x| \leq 1} |x| \nu(dx) = \infty$ , dann ist eine Summendarstellung ohnehin unmöglich.

□

**Bemerkung 2.5** Die Bedingung  $\nu(\mathbb{R}) > 0$  können wir vernachlässigen, wenn wir erlauben, dass der Poisson-Prozess-Anteil fehlt. (Ein zusammengesetzter Poisson-Prozess kann nach Definition nicht 0 sein, Driftterm und degenerierte Brownsche Bewegung dagegen schon.)

**Bemerkung 2.6** Die Bedingung  $\nu(\mathbb{R}) < \infty$  ist nicht äquivalent zu  $\int_{|x| \leq 1} |x| \nu(dx) < \infty$ . Man nehme ein Maß  $\nu$  definiert durch  $\nu(A) := \int_A f(x) dx$  mit (siehe Abb. 2.1)

$$f(x) := \begin{cases} |x|^{-1.5} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Man sieht leicht, dass das Maß  $\nu$   $\sigma$ -endlich ist, und daher nach einer allgemeinen Version des Satzes von Radon-Nikodým  $f$  tatsächlich die Dichte von  $\nu$  bzgl. des Lebesgue-Maßes ist. Für  $\nu$  gilt daher

$$\int_{|x| \leq 1} |x| \nu(dx) = \int_{|x| \leq 1} |x| |x|^{-1.5} dx < \infty, \quad \nu(|x| \leq 1) = \infty, \quad \nu(|x| > 1) < \infty$$

Damit sind die zusätzliche Bedingung  $\int |x|^2 \wedge 1 \nu(dx) < \infty$  aus der Lévy-Chintschin-Darstellung, sowie  $\int_{|x| \leq 1} |x| \nu(dx) < \infty$  erfüllt (also definiert  $(0, 0, \nu)$  einen Lévy-Prozess), aber  $\nu(\mathbb{R}) = \infty$ .

**Proposition 2.10 (Momente beim Lévy-Maß)** Für  $L \sim (\gamma, \sigma^2, \nu)$  gelten folgende Aussagen:

- (i)  $L$  hat endliches Moment  $k$ -ter Ordnung  $\Leftrightarrow \int_{|x| > 1} |x|^k \nu(dx) < \infty$ . (Im Fall  $k = 1$  ist dann  $\mathbb{E}L_t = t \left( \gamma + \int_{|x| > 1} x \nu(dx) \right)$ .)

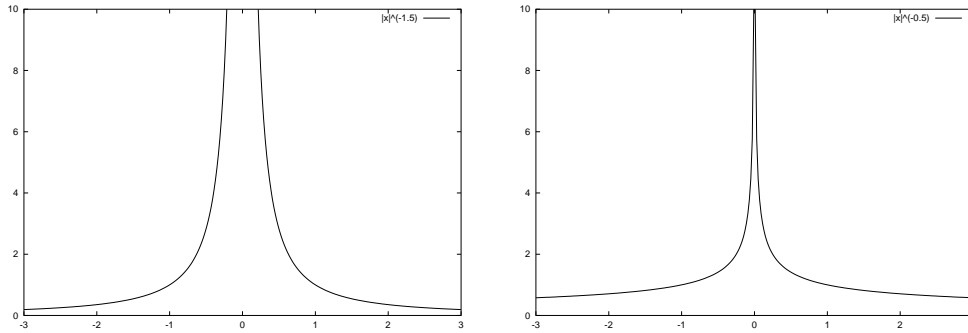


Abbildung 2.1: Dichte des Lévy-Maßes aus Bemerkung 2.6, rechts multipliziert mit  $|x|$

(ii)  $L$  hat endliches exponentielles Moment  $\Leftrightarrow \int_{|x|>1} \exp(x)\nu(dx) < \infty$ . In diesem Fall ist

$$\mathbb{E}[\exp L(t)] = \exp \left[ t \left( \gamma + \frac{1}{2}\sigma^2 + \int (\exp(x) - 1 - x1_{|x|\leq 1})\nu(dx) \right) \right]$$

(iii) für jedes Lévy-Maß gilt:  $\int_{|x|\leq 1} |x|^2\nu(dx) < \infty$  und  $\nu(\mathbb{R} \setminus [-1, 1]) < \infty$

**Beweis:** (iii) folgt direkt aus der Lévy-Itô-Zerlegung (Satz 2.6). (i) findet sich etwa in Sato [61], Kapitel 25. (ii) folgt aus der Lévy-Chintschin-Darstellung.  $\square$

**Proposition 2.11 (Sato [61], Prop. 11.10)** Sei  $L \sim (\gamma, \sigma^2, \nu)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , dann ist  $aL \sim (\gamma_a, \sigma_a^2, \nu_a)$ :

$$\begin{aligned} \gamma_a &= a\gamma + \int ax(1_{|ax|\leq 1} - 1_{|x|\leq 1})\nu(dx) \\ \sigma_a^2 &= a^2\sigma^2 \\ \nu_a(A) &= \nu(\{x \in \mathbb{R} : ax \in A\}), \quad A \in \mathcal{B} \end{aligned}$$

### 2.3 Stochastische Integration

Die stochastische Integration hat das Ziel, ein Integral mit einem stochastischen Prozess als Integrator zu definieren. Im Vergleich zur klassischen (auch Lebesgue-Stieltjes)-Integration tauchen allerdings hierbei einige Probleme auf:

- Nicht jeder stochastische Prozess induziert ein Maß (da er i.A. f.s. nicht monoton ist)
- Einige stochastische Prozesse (z.B. die Brownsche Bewegung) sind von unendlicher Variation auf jedem kompakten Intervall, d.h. das Integral kann nicht als klassisches Lebesgue-Stieltjes-Integral definiert werden

- Die Messbarkeit/Adaptiertheit der stochastischen Prozesse muss in die Überlegungen mit einbezogen werden

Als generelle Referenz sei auf Protter [57] verwiesen, dessen Darstellung wir hier folgen. Einige der zitierten Resultate finden sich lediglich in Jacod und Shiryaev [32]. Eine gut lesbare, wenngleich auf den stetigen Fall beschränkte Einführung mit Anwendungen geben Øksendal [52] und Evans [16].

Auch in diesem Abschnitt können alle Resultate analog mehrdimensional formuliert werden.

### 2.3.1 Stochastische Integrale

Es zeigt sich, dass die größte Klasse, auf der ein stochastisches Integral sinnvoll definiert werden kann, die Klasse der sog. *Semimartingale* ist. Sie ist ein Vektorraum und stabil unter (eben dieser stochastischen) Integration.

Ein adaptierter, càdlàg Prozess  $Y$  ist ein *Semimartingal*, wenn er eine Zerlegung hat in einen konstanten Term, ein lokales Martingal (also einen Prozess mit insbesondere gleichbleibender Erwartung) und einen Prozess von endlicher Variation. Für Details vgl. Protter [57], die für uns wichtige Eigenschaft ist:

*Jeder Lévy-Prozess ist ein Semimartingal.* Das heißt, alle Resultate, die wir für Semimartingale formulieren, gelten auch für Lévy-Prozesse. (Dies wird tatsächlich plausibel durch die Lévy-Itô-Zerlegung, wenn man weiß, dass die Brownsche Bewegung ein lokales Martingal ist.)

Das stochastische Integral (das selbst wieder ein Semimartingal ist)

$$J_X(H) := H \cdot X := \int H_s dX_s$$

für ein beliebiges Semimartingal  $X$ , sowie  $H$  adaptiert und càglàd (also linksstetig mit rechtsseitigen Grenzwerten) ergibt sich nach Protter [57] durch eine Approximation über einfache Funktionen:

Sei  $\mathbb{S}$  der Raum der einfachen (also auf zufälligen Intervallen stückweise konstanten), vorhersehbaren Prozesse,  $\mathbb{L}$  der Raum der adaptierten Prozesse mit càglàd Pfaden (also  $\mathbb{S} \subset \mathbb{L}$ ),  $\mathbb{D}$  der Raum der adaptierten Prozesse mit càdlàg Pfaden. Wir definieren auf  $\mathbb{L}$  und  $\mathbb{D}$  eine geeignete Metrik *ucp* (uniformly on compacts in probability). Wir definieren analog zum Lebesgue-Integral nun das Integral über  $\mathbb{S}$  bzgl. einem Integrator  $X \in \mathbb{D}$  als Summe:

$$J_X(H) := H_0 X_0 + \sum_{i=1}^n H_i (X^{T_{i+1}} - X^{T_i}),$$

( $X^{T_i}$  heißt, dass der Prozess in  $T_i$  gestoppt wird, also ab  $T_i$  konstant ist) also  $J_X : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{D}$  linear und  $H \in \mathbb{S}$  der Form

$$H = H_0 1_{\{0\}} + \sum_{i=1}^n H_i 1_{(T_i, T_{i+1}]}$$

Wir weisen nach:  $\mathbb{S}$  ist dicht in  $(\mathbb{L}, ucp)$  sowie  $(\mathbb{D}, ucp)$  ist ein vollständiger metrischer Raum.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S} & \subset & \mathbb{L} \\ J_X \downarrow & \swarrow & \\ \mathbb{D} & & \end{array} \tag{2.4}$$

Nach Definition ist  $J_X$  linear, wir zeigen außerdem, dass  $J_X$  für ein Semimartingal sogar stetig bzgl. der  $ucp$ -Metrik ist. Nachdem Semimartingale ja adaptiert und càdlàg sind, können wir nun ein bekanntes Resultat aus der Funktionalanalysis anwenden, und das Integral für  $H \in \mathbb{L}$  mit einem Semimartingal als Integrator ergibt sich als (eindeutige) lineare Fortsetzung vom dichten Unterraum  $\mathbb{S}$  auf ganz  $\mathbb{L}$ .

Leicht ersehen wir aus der Definition, dass  $X \mapsto J_X(H)$  ebenfalls linear ist.

Wir verwenden in Zukunft die Schreibweise  $\int_0^t H_s dX_s := \int_{[0,t]} H_s dX_s = H_0 X_0 + \int_{(0,t]} H_s dX_s$  und  $\int_{0+}^t H_s dX_s := \int_{(0,t]} H_s dX_s$ .

**Bemerkung 2.7 (endliche Variation)** *Mit einem schönen Argument zeigt Protter [57], dass das Lebesgue-Stieltjes-Integral nur bzgl. einer Funktion von endlicher Variation existiert: Sei  $f$  eine rechtsstetige (skalare) Funktion auf  $[0, 1]$ ,  $\pi_n$  eine sich verfeinernde Partition wie in (2.1). Sei  $T_n : C[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $T_n(h) := \sum_{t_k, t_{k+1} \in \pi_n} h(t_k)(f(t_{k+1}) - f(t_k))$ . Für festes  $n$  können wir ein stetiges  $h$  mit  $\|h\|_\infty = 1$  so wählen, dass*

$$T_n(h) = \sum_{t_k, t_{k+1} \in \pi_n} |f(t_{k+1}) - f(t_k)|$$

*Die Operatornorm ( $C[0, 1]$  und  $\mathbb{R}$  mit den üblichen Normen ausgestattet) ist daher  $\|T_n\| \geq \sum_{t_k, t_{k+1} \in \pi_n} |f(t_{k+1}) - f(t_k)|$ . Existiert nun der Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(h) \forall h \in C[0, 1]$  (das Lebesgue-Stieltjes-Integral), so gilt  $\sup_n \|T_n(h)\| < \infty \forall h \in C[0, 1]$  und mit dem Satz von Banach-Steinhaus folgt  $\sup_n \|T_n\| < \infty$ , somit  $f$  von endlicher Variation.*

### 2.3.2 Die quadratische Variation

**Definition 2.12 (Quadratische (Ko-)Variation)** *Es seien  $X, Y$  zwei Semimartingale. Dann ist die quadratische Kovariation  $[X, Y]$  definiert als*

$$[X, Y] = XY - X_- \cdot Y - Y_- \cdot X \tag{2.5}$$

$[X, X]$  bezeichnen wir als quadratische Variation.

Wir führen an dieser Stelle eine Schreibweise ein: Für  $A = c + B_- \cdot C$  bzw.  $A_t = c + \int_0^t B_{s-} dC_s$  schreiben wir  $dA_t = B_{t-} dC_t, A_0 = c$ . Intuitiv ist  $dA_t$  genau die inkrementelle Änderung von  $A$  in  $t$ .

**Lemma 2.13** *Es gilt für Semimartingale  $X, Y, K$ :*

- (i)  $[X, Y]$  ist bilinear und symmetrisch
- (ii)  $[X, Y - Y_0] = [X, Y] - X_0 Y_0$
- (iii) *Regel der partiellen Integration:*  $d(X_t Y_t) = X_{t-} dY_t + Y_{t-} dX_t + d[X, Y]_t$
- (iv)  $[X, Y]_t = X_0 Y_0 + \sum_{0 < s \leq t} \Delta X_s \Delta Y_s$ , falls  $X$  von endlicher Variation
- (v)  $[K \cdot X, Y] = K \cdot [X, Y]$ , falls  $K$  càglàd
- (vi)  $[X, Y] = X_0 Y_0$ , falls  $Y$  von endlicher Variation, und  $X$  oder  $Y$  stetig

**Beweis:** (iv): siehe Protter [57], Th. II.28, (v): siehe Protter [57] Th. II.29., (vi): siehe Jacod und Shiryaev [32], I.4.45 ff  
 (i), (ii), (iii): Folgt direkt aus Definition mit der Differentialschreibweise. □

**Definition 2.14**  $[X, X]^c$  bezeichne den (pfadweise genommenen) stetigen Anteil von  $[X, X]$ .

### 2.3.3 Die Itô-Formel

Die Itô-Formel ist eines der wichtigsten Hilfsmittel der stochastischen Integration und Analysis. Für  $X_t = t$  erkennen wir darin den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung wieder.

**Satz 2.15 (Itô-Formel, Lemma von Itô)** *Sei  $X$  ein Semimartingal und  $f \in C^2(\mathbb{R})$ . Dann ist auch  $f(X)$  wieder ein Semimartingal, und es gilt:*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_{0+}^t f'(X_{s-}) dX_s + \frac{1}{2} \int_{0+}^t f''(X_{s-}) d[X, X]_s^c + \sum_{0 < s \leq t} \{f(X_s) - f(X_{s-}) - f'(X_{s-}) \Delta X_s\}$$

**Korollar 2.16 (Itô-Formel für die Brownsche Bewegung)** *Sei  $X$  ein stetiges Semimartingal, es gelte  $dX_t = a(X_t)dt + b(X_t)dW_t$ , sowie  $f \in C^2(\mathbb{R})$ . Dann ist auch  $f(X)$  wieder ein Semimartingal, und es gilt:*

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d[X, X]_s & (2.6) \\ &= f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) a(X_s) ds + \int_0^t f'(X_s) b(X_s) dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) b^2(X_s) ds \end{aligned}$$

**Beweis:** Die erste Gleichheit folgt direkt aus der allgemeinen Itô-Formel. Die zweite Gleichheit gilt mit der Assoziativität der stochastischen Integration (Protter [57], Th. II.19) und der 2-dimensionalen Itô-Formel (hier wird einfach über die Integrale mit den entsprechenden partiellen Ableitungen summiert): Für  $G$  stetig gilt dann

$$G \cdot X = G \cdot \left( \begin{pmatrix} a(X) \\ b(X) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cdot \\ W \end{pmatrix} \right) = \left( G \begin{pmatrix} a(X) \\ b(X) \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} \cdot \\ W \end{pmatrix}.$$

□

In Differentialnotation geschrieben wird aus (2.6)

$$\begin{aligned} d(f(X_t)) &= f'(X_t)dX_t + f''(X_t)d[X, X]_t \\ &= \left( f'(X_s)a(X_s) + \frac{1}{2}f''(X_s)b^2(X_s) \right) ds + f'(X_s)b(X_s)dW_s \end{aligned}$$

## 2.4 Stochastische Differentialgleichungen (SDE)

Eine Stochastische Differentialgleichung (SDE) ist eine Gleichung der Form

$$dX_t = f(X_{t-})dZ_t, \quad X_0 = x, \tag{2.7}$$

wobei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  messbar, und  $X, Z$  Semimartingale sind. SDE basieren also auf dem stochastischen Integralbegriff des letzten Abschnitts. Eigentlich müsste man sie eher stochastische Integralgleichungen nennen – die Differentialnotation ist ja nur eine symbolische Notation für

$$X = x + f(X_-) \cdot Z = x + \int_0^t f(X_{s-})dZ_s.$$

### 2.4.1 Existenz und Eindeutigkeit

Analog zum deterministischen Fall kann man Existenz und Eindeutigkeit mit einer Lipschitz-Bedingung erreichen. Der folgende Satz ist anwendbar für die meisten Anwendungsprobleme:

**Satz 2.17 (Existenz und Eindeutigkeit der Lösung einer SDE)** *Sei  $Z$  ein Semimartingal, sei  $x \in \mathbb{R}$  und  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  Lipschitz-stetig. Dann hat (2.7) eine eindeutige Lösung.*

**Beweis:** Siehe Protter [57], Th. V.7

□

### 2.4.2 Das stochastische Exponential

Hier betrachten wir eine besonders einfache SDE mit eindeutiger Lösung: Als stochastisches Exponential von  $Z$ , geschrieben  $\mathcal{E}(Z)$ , bezeichnen wir die Lösung von

$$X = 1 + X_- \cdot Z, \quad \text{oder} \quad dX_t = X_{t-}dZ_t, \quad X_0 = 1 \tag{2.8}$$

Für die Lösung gibt es eine explizite Formel, die wir hier aber nicht benötigen – sie findet sich z.B. in Protter [57], Kap. II.8.

**Lemma 2.18** *Es gilt für Semimartingale  $X, Y$ :*

$$(i) \mathcal{E}(X)\mathcal{E}(Y) = \mathcal{E}(X + Y + [X, Y]), \text{ falls } X_0 = Y_0 = 0$$

$$(ii) d[\mathcal{E}(X), Y] = \mathcal{E}(X)_- d[X, Y]$$

**Beweis:** (i): siehe Protter [57], Th. II.38.

Wir beweisen (ii): Es gilt mit Lemma 2.13 (ii) und der Definition des stochastischen Exponentials  $d[\mathcal{E}(X), Y]_t = d[\mathcal{E}(X)_- \cdot X, Y]_t$ . Da  $\mathcal{E}(X)_-$  càglàd ist, gilt wieder mit Lemma 2.13

$$d[\mathcal{E}(X)_- \cdot X, Y]_t = d\{\mathcal{E}(X)_- \cdot [X, Y]\}_t = \mathcal{E}(X)_- d[X, Y]_t$$

□

**Proposition 2.19 (Goll und Kallsen [23])** (i) *Sei  $L$  ein reeller Lévy-Prozess mit charakteristischem Tripel  $(\gamma, \sigma^2, \nu)$ . Dann existiert ein LP  $\widehat{L}$  mit  $\exp(L) = \mathcal{E}(\widehat{L})$  mit Tripel  $(\widehat{\gamma}, \widehat{\sigma}^2, \widehat{\nu})$*

$$\begin{aligned} \widehat{\gamma} &= \gamma + \frac{\sigma^2}{2} + \int (e^x - 1)1_{|e^x - 1| \leq 1} - x1_{|x| \leq 1} \nu(dx) \\ \widehat{\sigma}^2 &= \sigma^2 \\ \widehat{\nu}(A) &= \nu(\{x \in \mathbb{R} : e^x - 1 \in A\}), \quad A \in \mathcal{B} \end{aligned}$$

(ii) *Sei  $\widehat{L}$  ein reeller Lévy-Prozess mit charakteristischem Tripel  $(\widehat{\gamma}, \widehat{\sigma}^2, \widehat{\nu})$ . Es sei  $\mathcal{E}(\widehat{L})$  positiv. Dann existiert ein LP  $L$  mit  $\exp(L) = \mathcal{E}(\widehat{L})$  mit Tripel  $(\gamma, \sigma^2, \nu)$*

$$\begin{aligned} \gamma &= \widehat{\gamma} - \frac{\widehat{\sigma}^2}{2} + \int \log(1+x)1_{|\log(1+x)| \leq 1} - x1_{|x| \leq 1} \widehat{\nu}(dx) \\ \sigma^2 &= \widehat{\sigma}^2 \\ \nu(A) &= \widehat{\nu}(\{x \in \mathbb{R} : \log(1+x) \in A\}), \quad A \in \mathcal{B} \end{aligned}$$

Da das Tripel einen Lévy-Prozess eindeutig bestimmt, stehen  $L$  und  $\widehat{L}$  (mit  $\mathcal{E}(\widehat{L}) > 0$ ) in einer 1-1-Beziehung.

## 2.5 Der Generator

Für die Klasse der Markov-Prozesse kann man den (*infinitesimalen*) Generator definieren. Wir werden ihm bei der Herleitung der PIDE und bei der Darstellung der Beziehungen zwischen stochastischen Prozessen und PDE begegnen. Dies wird erklärlich durch die Form der folgenden Definition:



Sei  $(X_t)_{t \geq 0}$  ein Markov-Prozess (also z.B. ein Lévy-Prozess). Dann bezeichnen wir mit  $\mathcal{A}$ ,

$$\mathcal{A}f(x) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}f(X_t) - f(X_0)}{t}, \quad \text{falls der Grenzwert existiert,}$$

den Generator von  $X$ . Die Menge der Funktionen  $f$ , für die der Grenzwert rechts existiert, bezeichnen wir mit  $D(\mathcal{A})$  (für *domain*).

**Bemerkung 2.8** *Abstrakter kann man den Generator eines Markov-Prozesses auch als Generator einer geeigneten Halbgruppe  $(P_t)_{t \geq 0}$ ,  $P_t f := \mathbb{E}^x f(X_t)$  definieren (und erkennt die große Ähnlichkeit mit der Halbgruppentheorie in der Theorie partieller Differentialgleichungen). Die Halbgruppeneigenschaft  $P_{t+s}f = P_t P_s f \forall f$  entspricht gerade der Markov-Eigenschaft.*

*Im Rahmen der Markov-Feller-Prozesse eröffnen die Generatoren ein faszinierendes Teilgebiet der Stochastischen Analysis.*

Weitere Erläuterungen und Anwendungen finden sich z.B. in Øksendal [52] oder Fleming und Rishel [18].

# Kapitel 3

## Modell

### 3.1 Das Modell

Wir betrachten eine Versicherung, die auf der einen Seite Prämien mit der Rate  $c$  einnimmt und dafür Schäden ausgleichen muss (klassisches Risikomodell einer Versicherung, vgl. Kapitel 1): Die Schäden  $S$  folgen also dem zusammengesetzten Poisson-Prozess

$$S(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} Y_j, \quad t \geq 0.$$

Auf der anderen Seite hat die Versicherung die Möglichkeit, ihr Geld in zwei verschiedene Anlagen zu investieren: eine risikolose mit konstantem Zinssatz  $\delta$ , und eine risikobehaftete, die einem exponentiellen Lévy-Prozess folgt. Die Preisprozesse  $X_0$  bzw.  $X_1$  lauten also wie folgt:

$$X_0(t) := e^{\delta t}, \quad X_1(t) := e^{L(t)}, \quad t \geq 0, \quad (3.1)$$

wo  $L$  ein Lévy-Prozess mit charakteristischem Tripel  $(\gamma, \sigma^2, \nu)$  ist. Alle oben angeführten zufälligen Elemente seien unabhängig.

Mit dem Parameter  $\theta \in [0, 1]$  wollen wir die beiden Anlagen mischen. Wie wir dann den mit  $\theta$  gemischten Preisprozess  $X_\theta = \exp(L_\theta)$  erhalten, ist Thema des nächsten Abschnittes.

**Bemerkung 3.1** *Die Voraussetzung  $\theta \leq 1$  bedeutet, dass Investment auf Kredit verboten ist – wir benötigen sie, damit der gemischte Preisprozess in der Herleitung positiv ist und damit als Exponential dargestellt werden kann.  $\theta \geq 0$  bedeutet, dass der Versicherung riskante Leerverkäufe verboten sind.*

Nun möchten wir das Vermögen des Versicherungsunternehmens betrachten, allerdings kann man die Formel nicht einfach als Summe notieren: Denn da z.B. gleiche Zahlungseingänge an unterschiedlichen Zeitpunkten auch zu unterschiedlichen Marktpreisen investiert werden, ist ihr Wert in  $T$  unterschiedlich.

Mit etwas Erfahrung in Differentialgleichungen wird allerdings die folgende Definition des *integrierten Risikoprozesses*  $U_\theta$  plausibel (in Abhängigkeit vom Investmentparameter  $\theta$ ; die Definition werden wir später verifizieren):

$$\begin{aligned} U_\theta(t) &:= ue^{L_\theta(t)} + ce^{L_\theta(t)} \int_0^t e^{-L_\theta(v)} dv - e^{L_\theta(t)} \sum_{j=1}^{N(t)} Y_j e^{-L_\theta(T_j)} \\ &= ue^{L_\theta(t)} + \int_{0+}^t e^{L_\theta(t)-L_\theta(v)} (cdv - dS(v)), \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

sowie des *Nettoverlustes* nur im Versicherungsgeschäft (durch den Markt beeinflusst)  $Q_\theta$ :

$$Q_\theta(t) := \int_{0+}^t e^{L_\theta(t)-L_\theta(v)} (dS(v) - cdv) = ue^{L_\theta(t)} - U_\theta(t), \quad t \geq 0 \quad (3.3)$$

Ziel unseres Modells ist es, das erwartete Vermögen am Ende eines vorgegebenen Planungshorizontes  $T$  zu maximieren unter einer Restriktion des Risikos ( $C > 0$  als Risikoschranke):

$$\max_{\theta \in [0,1]} \mathbb{E}U_\theta(T) \quad \text{s.t.} \quad \text{VaR}(Q_\theta(T), \alpha) \leq C \quad (3.4)$$

Während wir den Erwartungswert und die Varianz (also das Risikomaß im Sinn von Markovitz) zumindest teilweise aus Eigenschaften der Lévy-Prozesse erhalten (siehe Klüppelberg und Kostadinova [39]), ist der VaR als Risikomaß aufgrund seiner Definition als Quantil nur einsetzbar, wenn wir die Verteilung von  $U_\theta(T)$  bzw.  $Q_\theta(T)$  kennen.

Das Ziel ist es daher, diese Verteilung zu bestimmen.

Das bedeutet auch: Prinzipiell ließe sich mit der hier vorgestellten Methode aber auch jedes andere Risikomaß verwenden, das direkt aus der Verteilung errechenbar ist. Da dies aber mit der selben Methode funktioniert, werden wir uns auf den oben dargestellten Fall beschränken.

Damit der Erwartungswert von  $U_\theta(T)$  existiert und damit das Optimierungsproblem (3.4) sinnvoll gestellt ist, kann man folgende Bedingung stellen (wir benötigen sie in diesem Kapitel nicht):

**Bedingung 3.1**  $L_\theta(t)$  besitze für  $t > 0$  das exponentielle Moment, die Schäden  $Y_j$  haben endliche Erwartung.

## 3.2 Verifikation des Modells über SDE

Für eine mathematisch exakte Argumentation ist es notwendig, die Formeln aus dem ersten Abschnitt über stochastische Differentialgleichungen herzuleiten. Insbesondere erhalten wir nur über SDE die Koeffizienten für  $L_\theta$ .

Die naheliegende Strategie, einfach die Mischung  $L_\theta$  als Linearkombination aus  $\delta t$  und  $L$  zu betrachten, funktioniert leider nicht. Dies hängt mit den zusätzlichen (Itô-)Termen bei der stochastischen Integration zusammen, wie wir später sehen werden.

Wir gehen daher wie folgt vor: Zuerst finden wir den Prozess  $\widehat{L}$ , so dass  $\mathcal{E}(\widehat{L})_t = \exp(L(t))$ . In der Darstellung von  $\widehat{L}$  als SDE mischen wir dann die Anlagen und erhalten  $\widehat{L}_\theta$ . Wieder über die Definition  $\mathcal{E}(\widehat{L}_\theta)_t = \exp(L_\theta(t))$  erhalten wir nun  $L_\theta$ .

### 3.2.1 Parameter von $L_\theta$

Sei  $\widehat{L}$  definiert durch  $\mathcal{E}(\widehat{L})_t = \exp(L(t))$  (die Definition ist eindeutig nach Prop. 2.19). Mit der Itô-Formel gilt

$$\begin{aligned} \exp(L(t)) &= 1 + \int_{0+}^t \exp(L(s-))dL(s) + \frac{1}{2} \int_{0+}^t \exp(L(s-))d[L, L]_s^c \\ &\quad + \sum_{0 < s \leq t} \{ \exp(L(s)) - \exp(L(s-)) - \exp(L(s-))\Delta L(s) \}. \end{aligned}$$

Da nach Definition des stochastischen Exponentials  $d(\exp(L(t))) = \exp(L(t-))d\widehat{L}(t)$  gilt, ist

$$d\widehat{L}(t) = dL(t) + \frac{1}{2}\sigma^2 dt + \exp(\Delta L(t)) - 1 - \Delta L(t) \quad (3.5)$$

Mit anderen Worten: die Sprünge  $\Delta L(t)$  von  $L$  werden ersetzt durch die Sprünge  $\exp(\Delta L(t)) - 1$ , und es wird ein Itô-Term  $\frac{1}{2}\sigma^2 dt$  hinzuaddiert.

$\widehat{L}_\theta$  ist definiert als Lösung von

$$d\widehat{L}_\theta(t) := (1 - \theta)\delta dt + \theta d\widehat{L}(t), \quad \widehat{L}_\theta(0) = 0 \quad (3.6)$$

Um  $L_\theta$  zu bestimmen, interessieren wir uns für den Investment-Prozess  $X_\theta = \exp(L_\theta)$  (also die Entwicklung einer Einheit der Anlagen der Versicherung). Also ist  $X_\theta$  als Lösung der folgenden SDE definiert:

$$dX_\theta(t) = X_\theta(t-)d\widehat{L}_\theta(t), \quad X_\theta(0) = 1 \quad \text{oder} \quad X_\theta := \mathcal{E}(\widehat{L}_\theta) \quad (3.7)$$

Es gilt (da  $[(1 - \theta)\delta \cdot, \theta\widehat{L}] = 0$ )

$$\begin{aligned} X_\theta(t) &\stackrel{def}{=} \mathcal{E}((1 - \theta)\delta \cdot + \theta\widehat{L}(\cdot))_t \\ &= \mathcal{E}((1 - \theta)\delta \cdot)_t \mathcal{E}(\theta\widehat{L})_t \text{ mit Lemmata 2.18 (i) und 2.13 (vi)} \\ &= \exp((1 - \theta)\delta t) \mathcal{E}(\theta\widehat{L})_t. \end{aligned}$$

Wir möchten nun  $L_\theta$  bestimmen, so dass  $\exp(L_\theta(t)) = \mathcal{E}(\widehat{L}_\theta)_t \stackrel{def}{=} X_\theta(t)$  nach (3.7). Obige Gleichheit zeigt uns, dass es genügt, den Prozess  $Y$  zu finden, der  $\exp(Y(t)) = \mathcal{E}(\theta\widehat{L})_t$  erfüllt.

Mit der Bezeichnung  $\ell(x) := \log(1 + \theta(e^x - 1))$  gilt folgendes Lemma, das in allgemeinerer Form in Emmer und Klüppelberg [15] zu finden ist:

**Lemma 3.1** *Der Prozess  $L_\theta$  definiert durch  $\mathcal{E}(\widehat{L}_\theta)_t = \exp(L_\theta(t))$  ist ein Lévy-Prozess mit Tripel  $(\gamma_\theta, \sigma_\theta^2, \nu_\theta)$*

$$\begin{aligned} \gamma_\theta &= (1 - \theta)\delta + \theta \left( \gamma + \frac{\sigma^2}{2} \right) - \frac{\theta^2 \sigma^2}{2} + \int \ell(x) 1_{|\ell(x)| \leq 1} - \theta x 1_{|x| \leq 1} \nu(dx) \\ \sigma_\theta^2 &= \theta^2 \sigma^2 \\ \nu_\theta(A) &= \nu(\{x \in \mathbb{R} : \ell(x) \in A\}), \quad A \in \mathcal{B} \end{aligned}$$

**Beweis:** Berechne das Tripel für  $\theta \widehat{L}$  (mit Prop. 2.11). Nachdem  $\mathcal{E}(\widehat{L}) > 0$  ist auch  $\mathcal{E}(\theta \widehat{L}) > 0$ :  $\theta \in [0, 1]$  sorgt dafür, dass (bei festem  $\omega$ )  $\mathcal{E}(\theta \widehat{L})(\omega) > 0$  sich weniger weit vom gemeinsamen Anfangswert fortbewegt als  $\mathcal{E}(\widehat{L})(\omega)$ . Wende nun Proposition 2.19 (ii) an und addiere den Driftterm  $(1 - \theta)\delta$  zu  $\gamma_\theta$ .  $\square$

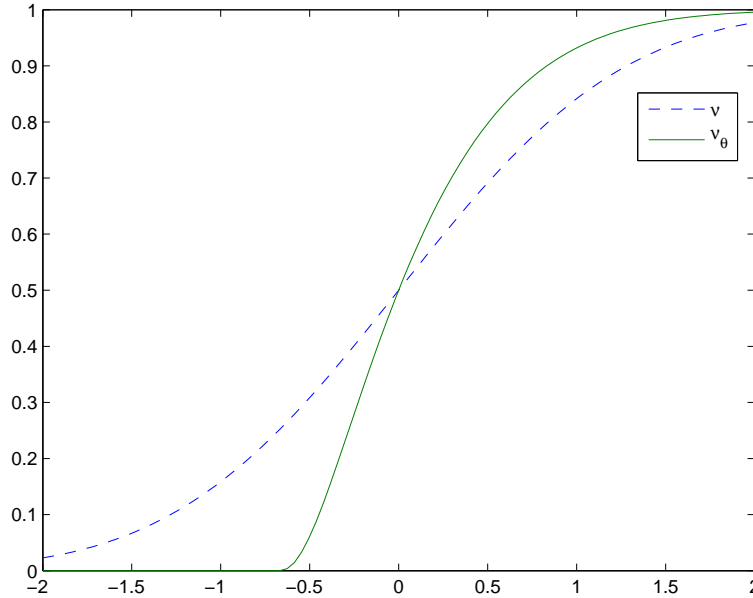


Abbildung 3.1: Verteilung von  $\nu_\theta$  im Vergleich zu  $\nu$  für  $\theta = 0.5$ , wenn  $\nu$  (bis auf Konstante) standard-normalverteilt ist. ( $\nu/\nu(\mathbb{R})$  ist gerade die Verteilung der Sprünge von  $L$ , siehe dazu vor und im Beweis von Prop. 2.9.) Man sieht, dass größere negative Sprünge abgeschnitten werden

Setzen wir voraus, dass  $\int_{|x| \leq 1} |x| \nu(dx) < \infty$ , so gilt auch  $\int_{|x| \leq 1} |x| \nu_\theta(dx) < \infty$  ( $L_\theta$  ohne den Diffusionsanteil ist offensichtlich von endlicher Variation). Dann haben wir mit der Definition  $\gamma_\theta^0 := \gamma_\theta - \int_{|x| \leq 1} x \nu_\theta(dx)$  die Darstellung für  $L_\theta$  von

$$L_\theta(t) = \gamma_\theta^0 t + \sigma_\theta W(t) + \sum_{0 < s \leq t} \Delta L_\theta(s) \tag{3.8}$$

### 3.2.2 Stochastische Differentialgleichung für $U_\theta$

Um zu zeigen, dass unsere Definition eines *integrierten Risiko-Prozesses* Sinn macht, leiten wir die stochastische Differentialgleichung her, die als Lösung  $U_\theta(t)$  ergibt.

Die intuitive Herangehensweise wäre selbstverständlich, zuerst die stochastische Differentialgleichung aufzustellen, allerdings wäre dann die Lösung in einer unnötig komplizierten Form.

Wir betrachten also erneut

$$U_\theta(t) = u \exp(L_\theta(t)) + \exp(L_\theta(t)) \int_{0+}^t \exp(-L_\theta(v))(cdv - dS(v)). \quad (3.9)$$

**Lemma 3.2** *Es seien  $X$  bzw.  $Y$  zwei unabhängige Lévy-Prozesse, sei  $Y$  von endlicher Variation. Dann ist  $[X, Y]$  konstant  $P$ -f.s.*

**Beweis:** Nach Lemma 2.13 gilt

$$[X, Y]_t = X_0 Y_0 + \sum_{0 < s \leq t} \Delta X_s \Delta Y_s$$

Die Sprungzeiten von  $X$  und  $Y$  sind fast sicher unterschiedlich. (Man betrachtet dafür den zweidimensionalen Lévy-Prozess  $(X, Y)$  und seine Lévy-Chintschin-Darstellung und stellt fest, dass Sprünge nur in Richtung der Koordinatenachsen auftauchen, siehe z.B. Cont und Tankov [10], Th. 5.3.). Also ist  $[X, Y]_t = X_0 Y_0$ .  $\square$

**Satz 3.3**  *$U_\theta$  wie oben definiert ist eindeutige Lösung der stochastischen Differentialgleichung*

$$dU_\theta(t) = cdt - dS(t) + U_\theta(t-)d\widehat{L}_\theta(t), \quad U_\theta(0) = u \quad (3.10)$$

**Beweis:** Zuerst stellen wir fest, dass

$$\int_{0+}^t \exp(-L_\theta(v))(cdv - dS(v)) = \int_{0+}^t \exp(-L_\theta(v-))(cdv - dS(v))$$

Für den ersten (Lebesgue-)Integrator gilt das, da sich  $L_\theta(\cdot)$  und  $L_\theta(\cdot-)$  höchstens auf einer Lebesgue-Nullmenge unterscheiden (da Lévy-Prozesse càdlàg sind). Für den zweiten Integrator kann man das Integral als Summe darstellen, und die Behauptung folgt, da  $S$  und  $L_\theta$   $P$ -f.s. keine gleichzeitigen Sprünge haben.

Mit der Regel der partiellen Integration gilt daher (siehe Lemma 2.13)

$$\begin{aligned} dU_\theta(t) &= d(u \exp(L_\theta(t)) + d(\exp(L_\theta(t))) \int_{0+}^{t-} \exp(-L_\theta(v-))(cdv - dS(v)) \\ &\quad + \exp(L_\theta(t-)) \exp(-L_\theta(t-))(cdt - dS(t)) \\ &\quad + d \left[ \exp(L_\theta(\cdot)), \int_{0+}^{\cdot} \exp(-L_\theta(v-))(cdv - dS(v)) \right]_t \\ &= cdt - dS(t) + d(\exp(L_\theta(t))) \left\{ u + \int_{0+}^{t-} \exp(-L_\theta(v-))(cdv - dS(v)) \right\} + A, \end{aligned}$$

wobei  $A$  der Kovariationsterm ist. Für  $A$  gilt

$$\begin{aligned}
 A &= \exp(-L_\theta(t-))d[\exp(L_\theta(\cdot)), c \cdot -S(\cdot)]_t && \text{mit Lemma 2.13 (v)} \\
 &= \exp(-L_\theta(t-))d[\mathcal{E}(\widehat{L}_\theta), c \cdot -S]_t \\
 &= \underbrace{\exp(-L_\theta(t-))\mathcal{E}(\widehat{L}_\theta)_{t-}}_{=1}d[\widehat{L}_\theta, c \cdot -S]_t && \text{mit Lemma 2.18 (ii)} \\
 &= -d[\widehat{L}_\theta, S]_t && \text{mit Lemma 2.13 (iv)}
 \end{aligned}$$

Also gilt mit Lemma 3.2  $A = 0$ , da ein zusammengesetzter Poisson-Prozess von endlicher Variation ist. Insgesamt erhalten wir also

$$\begin{aligned}
 dU_\theta(t) &= cdt - dS(t) + \frac{d(\exp(L_\theta(t)))}{\exp(L_\theta(t-))}U_\theta(t-) \\
 &= cdt - dS(t) + U_\theta(t-)d\widehat{L}_\theta(t)
 \end{aligned}$$

Die Voraussetzungen des Satzes 2.17 über Existenz und Eindeutigkeit sind offensichtlich erfüllt. □

### 3.3 Lösungsmethoden

Wir möchten die Verteilung, oder falls existent, Dichte von  $Q_\theta(t)$  oder von  $U_\theta(t)$  bestimmen für ein  $t > 0$ . Welche Möglichkeiten bestehen dafür?

**Transformationssatz** Man könnte Darstellung (3.2) verwenden, um direkt die Dichte mittels des Transformationssatzes für Dichten auszurechnen. Falls dies möglich sein sollte (immerhin sind alle Terme abhängig, und ein Integral von Zufallsvariablen muss nicht unbedingt wieder eine Dichte besitzen), so wäre dies sehr aufwändig und in der Praxis zu rechenintensiv.

**Fouriertransformation** Die Fouriertransformation oder charakteristische Funktion bestimmt die Verteilung einer Zufallsvariablen eindeutig. Für Lévy-Prozesse kennen wir außerdem eine Darstellung der Fouriertransformation, die Lévy-Chintschin-Darstellung. Bezeichnen wir mit  $\mathcal{G}$  die Fouriertransformation, die zur charakteristischen Funktion  $\varphi_X$  führt,

$$\varphi_X(\xi) = (\mathcal{G}f_X)(\xi) := \int e^{i\xi t} f_X(t)dt,$$

so bildet die Inverse  $\mathcal{G}^{-1}$  die charakteristische Funktion auf die Dichte  $f_X$  zurück ab (offensichtlich sind  $\varphi_X, f_X \in \mathcal{L}^1$ ):

$$f_X(x) = (\mathcal{G}^{-1}\varphi_X)(x) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-ixt} \varphi_X(t)dt.$$

Also könnte man prinzipiell (etwa über die Fast Fourier Transform) die Dichte bestimmen, wenn man die charakteristische Funktion kennt. Allerdings kennen wir diese in unserem Fall (siehe Klüppelberg und Kostadinova [39]) nicht explizit, sondern nur über die Momente.

**PIDE** Die Verteilung mithilfe einer aus der stochastischen Formulierung hergeleiteten partiellen Integro-Differentialgleichung (PIDE) bestimmen. Diesen Ansatz verfolgen wir in unserer Arbeit.

**Monte-Carlo-Simulation** Wie in allen praktischen Fragen ist auch hier die Simulation verschiedener Zufallspfade am Computer eine gangbare Alternative, die – je nach verwendeter Methode – jedoch für eine hinreichende Genauigkeit sehr rechenintensiv sein kann. Wir werden damit die Resultate der PIDE überprüfen.

### 3.4 Stochastische Prozesse und PDE

Um die dann folgende Herleitung der PIDE etwas zu motivieren, machen wir einen kurzen Ausflug in die Zusammenhänge von stochastischen Prozessen und PDE. Dabei spielt der Generator eines stochastischen Prozesses eine zentrale Rolle (siehe Abschnitt 2.5).

Wir betrachten dazu die Standard-Brownsche Bewegung  $W$  und definieren für diesen Abschnitt  $u(x, t) := P(W(t) > x)$ . Nun wissen wir, dass die Brownsche Bewegung unabhängige, gleichverteilte Zuwächse hat. Wir bezeichnen mit  $\bar{W}(s) := W(t + s) - W(t)$  für  $s \geq 0$  die Zuwächse nach einem festen Zeitpunkt  $t$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \partial_t u(x, t) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} (P(W(t + s) > x) - P(W(t) > x)) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} (P(W(t) + \bar{W}(s) > x) - P(W(t) > x)) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} (\mathbb{E}u(x - \bar{W}(s), t) - u(x, t)) = \frac{1}{2} \partial_{xx} u(x, t), \end{aligned}$$

letzteres, da der Generator der Brownschen Bewegung  $\frac{1}{2}\Delta$  ist. Ferner wissen wir, dass die Brownsche Bewegung  $W_t \sim N(0, t)$ . Das bedeutet, dass  $u$  unendlich oft differenzierbar und beschränkt ist, insbesondere gilt für  $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2})$

$$\partial_x u(x, t) = -\varphi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \frac{1}{\sqrt{t}}, \quad \partial_{xx} u(x, t) = -\varphi'\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \frac{1}{t} = \frac{x}{\sqrt{t}} \frac{1}{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right) = 2\partial_t u(x, t)$$

Wir sehen also, dass wir mit unserer Technik soeben eine beschränkte  $C^\infty$ -Lösung für das parabolische Anfangswertproblem (Diffusionsgleichung)

$$\begin{aligned} \partial_t u - \frac{1}{2} \partial_{xx} u &= 0 && \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ u(x, 0) &= 1_{\{x < 0\}} \end{aligned}$$

gefunden haben.



Allgemeiner gilt (nach Bass [4]), dass die Lösung  $u$  eines (degeneriert-)parabolischen Problems

$$\partial_t u = Au \text{ in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \quad u(\cdot, 0) = f \tag{3.11}$$

zumindest für  $f \in C_0^2(\mathbb{R})$  gerade  $u(x, t) = \mathbb{E}^x f(X_t)$  ist. Dabei drückt  $\mathbb{E}^x$  aus, dass  $X_0 = x$ , und  $X_t$  die zum Differentialoperator  $A$  assoziierte Diffusion ist (d.h.  $A$  ist der Generator von  $X_t$ ). Auch wenn die Herleitung es eigentlich nicht erlaubt, setzen wir einmal  $f := 1_{(-\infty, 0)}$  und finden darin unser Beispiel wieder:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \mathbb{E}^x 1_{(-\infty, 0)}(X_t) = \int_{\Omega} 1_{(-\infty, 0)}(X_t) dP^x = \int_{\Omega} 1_{\{\omega: (X_t)(\omega) < 0\}} dP^x = P^x(X_t < 0) \\ &= P(W_t + x < 0) = P(-W_t > x) = P(W_t > x), \end{aligned}$$

letzteres aufgrund der Symmetrie der Brownschen Bewegung.

Eine weitere Verallgemeinerung von (3.11) durch Hinzufügen eines Termes  $cu$  für ein  $c \in C(\mathbb{R})$  führt auf die berühmte *Feynman-Kac-Formel* (siehe z.B. Øksendal [52], S. 135).

Dies lässt erkennen, dass auch die Stochastik für die Theorie partieller Differentialgleichungen hilfreich sein kann. Mathematischer Erkenntnisgewinn ist keine Einbahnstraße! Eine ganze Klasse von PDE lässt sich auch über stochastische Prozesse lösen und analysieren. Eine sehr schöne Einführung hierzu gibt Bass [3].

## 3.5 Herleitung der partiellen Integro-Differentialgleichung (PIDE)

### 3.5.1 PIDE für $H_Q(x, t)$

Wir erinnern an

$$Q_\theta(t) := \int_{0+}^t e^{L_\theta(t) - L_\theta(v)} (dS(v) - cdv)$$

und definieren neu

$$H_Q(x, t) := P(Q_\theta(t) > x). \tag{3.12}$$

Wir betrachten für unseren Prozess  $Q_\theta$  ein kleines Zeitintervall  $(t, t + s]$  und leiten eine Differentialgleichung her für

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{P(Q_\theta(t + s) > x) - P(Q_\theta(t) > x)}{s} \tag{3.13}$$

Im Intervall treten lokal mit verschiedenen Wahrscheinlichkeiten verschiedene Ereignisse ein (siehe Prop. 2.3): Für kleines  $s$  tritt mit Wahrscheinlichkeit  $1 - \lambda s + o(s)$  kein Schaden ein, mit Wahrscheinlichkeit  $\lambda s + o(s)$  genau ein Schaden, mit  $o(s)$  mehr als ein Schaden.

Diese verknüpfen wir mit dem Satz über die totale Wahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned}
 P(Q_\theta(t+s) > x) &= (1 - \lambda s) \underbrace{P(Q_\theta(t+s) > x | N(t+s) = N(t))}_{=:A} \\
 &\quad + \lambda s \underbrace{P(Q_\theta(t+s) > x | N(t+s) = N(t) + 1)}_{=:B} + o(s) \quad (3.14)
 \end{aligned}$$

Dabei haben wir die Wahrscheinlichkeiten teilweise nach oben abgeschätzt und benutzt, dass aus  $f(s) \leq o(s)$   $f(s) = o(s)$  folgt.

Im Folgenden nutzen wir die Unabhängigkeit der Zuwächse eines Lévy-Prozesses. Wir setzen dafür für  $v \geq 0$   $\bar{L}_\theta(v) := L_\theta(t+v) - L_\theta(t)$  (wir starten unseren Prozess neu in  $t$  und betrachten den Zuwachs nach  $t$ , siehe Abb. 3.2). Offensichtlich ist  $(\bar{L}_\theta(r))_{r \geq 0}$  unabhängig von  $\mathcal{F}_t := \sigma((X_s)_{s \leq t})$  und eine identische Kopie von  $L_\theta$ .

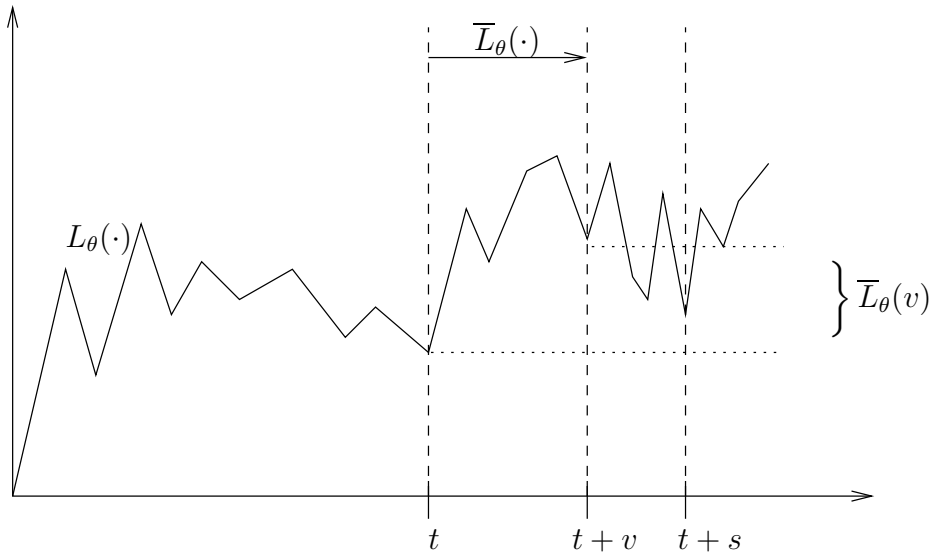


Abbildung 3.2: Die Inkremente von  $\bar{L}_\theta$

Es gilt mit den obigen Definitionen

$$\begin{aligned}
 Q_\theta(t+s) &= \int_{0+}^t e^{L_\theta(t+s) - L_\theta(v)} (dS(v) - cdv) + \int_{t+}^{t+s} e^{L_\theta(t+s) - L_\theta(v)} (dS(v) - cdv) \\
 &= e^{\bar{L}_\theta(s)} \int_{0+}^t e^{L_\theta(t) - L_\theta(v)} (dS(v) - cdv) + \int_{t+}^{t+s} e^{\bar{L}_\theta(s) + L_\theta(t) - L_\theta(v)} (dS(v) - cdv) \\
 &= e^{\bar{L}_\theta(s)} Q_\theta(t) + \int_{0+}^s e^{\bar{L}_\theta(s) - \bar{L}_\theta(u)} (d\bar{S}(u) - cdv), \quad (3.15)
 \end{aligned}$$

wobei wir am Ende ausgenutzt haben, dass für  $v \in [t, t+s]$   $L_\theta(t) - L_\theta(v) = -\bar{L}_\theta(v-t)$  und  $u = v-t$  substituiert haben ( $\bar{S}$  ist definiert als  $\bar{S}(w) := S(t+w) - S(t)$ , die Schäden im Intervall  $(t, t+w]$ ).

Demnach gilt für den Fall, dass kein Sprung eintritt, also  $\bar{S}(s) = 0$ ,

$$A = P(Q_\theta(t+s) > x | N(t+s) = N(t)) = P\left(e^{\bar{L}_\theta(s)} \left[ Q_\theta(t) - c \int_0^s e^{-\bar{L}_\theta(v)} dv \right] > x\right),$$

wobei die letzte Gleichheit nur dank der Unabhängigkeit von  $\bar{L}_\theta$  und  $\mathcal{F}_t$  ( $Q_\theta(t)$  ist  $\mathcal{F}_t$ -messbar) gefahrlos benutzt werden kann.

Für den Fall genau eines Schadens  $Y$  im Intervall  $(t, t+s]$  gilt mit (3.15) und der Definition  $\bar{N}(s) := N(t+s) - N(t)$  mit den Sprungzeiten  $\bar{T}_j := T_{N(t)+j} - t$ :

$$\begin{aligned} B &= P(Q_\theta(t+s) > x | N(t+s) = N(t) + 1) \\ &= P\left(e^{\bar{L}_\theta(s)} \left[ Q_\theta(t) + e^{-\bar{L}_\theta(\bar{T}_1)} Y - c \int_0^s e^{-\bar{L}_\theta(v)} dv \right] > x | N(t+s) = N(t) + 1\right) \\ &= P\left(e^{\bar{L}_\theta(s)} \left[ Q_\theta(t) + e^{-\bar{L}_\theta(U_1)} Y - c \int_0^s e^{-\bar{L}_\theta(v)} dv \right] > x\right), \quad U_1 \sim U[0, s] \end{aligned}$$

Letzteres gilt mit der Ordnungsstatistikeigenschaft des Poisson-Prozesses:  $\bar{N}$  ist unabhängig von  $\mathcal{F}_t$ . Dann gilt wegen der Ordnungsstatistikeigenschaft  $\bar{T}_1 |_{\bar{N}(s)=1} \stackrel{d}{=} U[0, s]$ .

Also haben wir insgesamt

$$\begin{aligned} &\frac{P(Q_\theta(t+s) > x) - P(Q_\theta(t) > x)}{s} \\ &= \frac{o(s)}{s} + \lambda P\left(e^{\bar{L}_\theta(s)} \left[ Q_\theta(t) + Y e^{-\bar{L}_\theta(U_1)} - c \int_0^s e^{-\bar{L}_\theta(v)} dv \right] > x\right) \\ &\quad - \lambda P\left(e^{\bar{L}_\theta(s)} \left[ Q_\theta(t) - c \int_0^s e^{-\bar{L}_\theta(v)} dv \right] > x\right) \\ &\quad + \frac{1}{s} \left[ P\left(e^{\bar{L}_\theta(s)} \left[ Q_\theta(t) - c \int_0^s e^{-\bar{L}_\theta(v)} dv \right] > x\right) - P(Q_\theta(t) > x) \right] \quad (3.16) \\ &=: \frac{o(s)}{s} + A_1(s) - A_2(s) + A_3(s) \quad (3.17) \end{aligned}$$

**Annahme 3.1**  $Q_\theta(t)$  besitze für  $t > 0$  eine Dichte,  $Y$  ebenfalls.

Nun gilt:

- $\lim_{s \rightarrow 0} A_1(s) = \lambda P(Q_\theta(t) + Y > x)$ : Nachdem ein Lévy-Prozess stochastisch stetig ist, gilt  $\bar{L}_\theta(s) \xrightarrow{p} 0$  für  $s \rightarrow 0$ . Ebenso  $U_1 \xrightarrow{P-f.s.} 0$  für  $s \rightarrow 0$ . Da aus den beiden festgestellten Konvergenzarten Konvergenz in Verteilung folgt, gilt die Behauptung mit Annahme 3.1.
- $\lim_{s \rightarrow 0} A_2(s) = \lambda P(Q_\theta(t) > x)$ : analog

**Annahme 3.2** Der Grenzwert  $\lim_{s \rightarrow 0} A_3(s)$  existiere.

Damit schreibt sich die Gleichung (3.16) um zur PIDE:

$$\partial_t H_Q(x, t) = \lambda[\mathbb{E}H_Q(x - Y, t) - H_Q(x, t)] + \lim_{s \rightarrow 0} A_3(s) \quad (3.18)$$

Die Anfangswertbedingung ist

$$H_Q(x, 0) = 1_{(-\infty, 0)}(x) \quad \forall x, \quad \text{da } Q_\theta(0) = 0 \quad (3.19)$$

Die Konvergenz von  $A_3(s)$  muss etwas genauer untersucht werden.

### 3.5.2 Konvergenz von $A_3(s)$

#### Brownsche Bewegung

Zuerst betrachten wir den Spezialfall einer Brownschen Bewegung mit Drift, also  $L \sim (\gamma, \sigma^2, 0)$  oder  $L_\theta(t) = \gamma_\theta t + \sigma_\theta W_t$  mit den Parametern aus Lemma 3.1 für die Standard-Brownsche Bewegung  $W$ .

Wir wollen den Grenzwert von  $A_3(s)$  mithilfe des Generators eines Markov-Prozesses berechnen. Dafür definieren wir uns

$$X_s := xe^{-\bar{L}_\theta(s)} + c \int_0^s e^{-\bar{L}_\theta(v)} dv, \quad s \geq 0. \quad (3.20)$$

Da nun  $P\left(e^{\bar{L}_\theta(s)} \left[Q_\theta(t) - c \int_0^s e^{-\bar{L}_\theta(v)} dv\right] > x\right) = \mathbb{E}H_Q(X_s, t)$ , gilt

$$\lim_{s \rightarrow 0} A_3(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}H_Q(X_s, t) - H_Q(x, t)}{s} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A}_x H(x, t), \quad (3.21)$$

falls der Grenzwert auf der rechten Seite existiert.

Wir haben also unser Problem darauf reduziert, den Generator von  $X_s$  zu berechnen.

**Satz 3.4** Sei  $f \in C^2(\mathbb{R})$  und beschränkt,  $X$  und  $\bar{L}_\theta$  wie oben definiert. Dann hat der Generator die Form

$$\mathcal{A}f(x) = \left(-x\gamma_\theta + \frac{x}{2}\sigma_\theta^2 + c\right) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}x^2\sigma_\theta^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad (3.22)$$

**Beweis:** Setze zuerst  $K(t) := \alpha t + \beta W_t := -\bar{L}_\theta(t)$ . Wir wenden mehrere Male die Itô-Formel an. Zuerst auf  $f(X_s)$ :

$$f(X_s) = f(x) + \int_0^s f'(X_v) dX_v + \frac{1}{2} \int_0^s f''(X_v) d[X, X]_v$$

Ebenfalls mit Itô kann man zeigen, dass  $dX_v = (x\alpha + \frac{x}{2}\beta^2 + c)e^{K(v)} dv + x\beta e^{K(v)} dW_v$ . Also ist

$$\begin{aligned} f(X_s) - f(x) &= (x\alpha + \frac{x}{2}\beta^2 + c) \int_0^s f'(X_v) e^{K(v)} dv + x\beta \int_0^s f'(X_v) e^{K(v)} dW_v \\ &\quad + \frac{1}{2}x^2\beta^2 \int_0^s f''(X_v) e^{2K(v)} dv \end{aligned} \quad (3.23)$$

Durch Erwartungswertbildung fällt das Itô-Integral bzgl. der Brownschen Bewegung heraus. Nun teilen wir durch  $s$  und analysieren den ersten Term. Wir behaupten: Wegen der Stetigkeit von  $f'$  gilt  $\frac{1}{s}\mathbb{E}\int_0^s f'(X_v)e^{K(v)}dv \rightarrow f'(x)$ . Das zeigen wir folgendermaßen: Wir wissen, dass die Brownsche Bewegung ( $P$ -f.s.) stetig ist. Nachdem  $f'$  ebenfalls stetig ist, gibt es für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $s > 0$  mit

$$\max_{v \in [0, s]} |f'(X_v)e^{K(v)} - f'(x)e^{K(0)}| < \varepsilon \quad P\text{-f.s.}$$

Wir stellen fest, dass aufgrund der Beschränktheit von  $f$  die rechte Seite von (3.23) für jedes  $s$  wohldefiniert ist. Wir können also ohne Gefahr folgern, dass

$$\begin{aligned} \left| \mathbb{E} \left[ \frac{1}{s} \int_0^s f'(X_v)e^{K(v)}dv \right] - f'(x) \right| &= \left| \mathbb{E} \left[ \frac{1}{s} \int_0^s f'(X_v)e^{K(v)} - f'(x)e^{K(0)}dv \right] \right| \\ &\leq \mathbb{E} \left[ \frac{1}{s} \int_0^s \max_{v \in [0, s]} |f'(X_v)e^{K(v)} - f'(x)e^{K(0)}| dv \right] < \varepsilon \end{aligned}$$

Analog funktioniert das für den letzten Teil von (3.23). Insgesamt gilt also

$$\mathcal{A}f(x) = \left( x\alpha + \frac{x}{2}\beta^2 + c \right) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}x^2\beta^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.$$

□

Nachdem  $H_Q$  aufgrund der Definition als Tail einer Wahrscheinlichkeitsverteilung ohnehin beschränkt ist, brauchen wir nur noch die

**Annahme 3.3**  $Q_\theta(t)$  besitze für  $t > 0$  eine einfach stetig differenzierbare Dichte, d.h.  $H_Q(\cdot, t) \in C^2(\mathbb{R})$ .

Insgesamt ergibt sich also die PIDE

$$\begin{aligned} \partial_t H_Q(x, t) - \left( -x\gamma_\theta + \frac{x}{2}\sigma_\theta^2 + c \right) \partial_x H_Q(x, t) - \frac{1}{2}x^2\sigma_\theta^2 \partial_{xx} H_Q(x, t) \\ = \lambda[\mathbb{E}H_Q(x - Y, t) - H_Q(x, t)] \end{aligned} \quad (3.24)$$

### Zusammengesetzter Poisson-Prozess

Wie im letzten Abschnitt verwenden wir erneut den Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit. Insgesamt ist die Argumentation ähnlich wie dort, wir halten unsere Erläuterungen daher knapp. Sei  $L$  ein zusammengesetzter Poisson-Prozess mit Drift, d.h.  $L \sim (\gamma, 0, \nu)$  mit  $\nu(\mathbb{R}) < \infty$ .

Also gilt mit den Bezeichnungen aus Lemma 3.1  $L_\theta \sim (\gamma_\theta, 0, \nu_\theta)$  oder  $L_\theta(t) = \gamma_\theta^0 t + \sum_{j=1}^{M(t)} Z_j$ . Dabei habe der Poisson-Prozess  $M$  die Intensität  $\eta_\theta$  und die  $Z_j$  seien iid Zufallsvariablen. Die Sprungzeiten nennen wir  $S_j$ . (Der Übersichtlichkeit halber verzichten wir auf die Indizes  $\theta$ .)

Ebenfalls zur besseren Übersichtlichkeit setzen wir  $K(t, s) := e^{\bar{L}_\theta(s)} \left[ Q_\theta(t) - c \int_0^s e^{-\bar{L}_\theta(v)} dv \right]$ .  
Damit gilt:

$$\begin{aligned}
A_3(s) &= \frac{1}{s} [(1 - \eta s)P(K(t, s) > x | M(t + s) = M(t)) \\
&\quad + \eta s P(K(t, s) > x | M(t + s) = M(t) + 1) + o(s) - P(Q_\theta(t) > x)] \\
&= \underbrace{\eta P(K(t, s) > x | M(t + s) = M(t) + 1)}_{=:A(s)} - \underbrace{\eta P(K(t, s) > x | M(t + s) = M(t))}_{=:B(s)} \\
&\quad + \frac{1}{s} \underbrace{[P(K(t, s) > x | M(t + s) = M(t)) - P(Q_\theta(t) > x)]}_{=:C(s)} + o(s)
\end{aligned}$$

**Annahme 3.4**  $Q_\theta(t)$  habe für  $t > 0$  eine Dichte, die  $Z_j$  ebenfalls.

$A(s)$  Es gilt wieder mit der Ordnungsstatistikeigenschaft  $S_{M(t)+1} - t |_{M(t+s)=M(t)+1} \stackrel{d}{=} U_2 \sim U([0, s])$ . Also gilt, da mit  $M(t + s) = M(t) + 1$  auch  $\bar{M}(s) = \bar{M}(0) + 1$  für den zu  $\bar{L}_\theta$  gehörenden Poisson-Prozess ( $Z$  bezeichne den aufgetretenen Marktsprung):

$$A(s) = \eta P \left( e^{\gamma_\theta^0 s + Z} \left[ Q_\theta(t) - c \int_0^{U_2} e^{-\gamma_\theta^0 v} dv - c \int_{U_2}^s e^{-\gamma_\theta^0 v - Z} dv \right] > x \right)$$

Also gilt mit unserer Annahme 3.4 die Konvergenz der Wahrscheinlichkeiten  $A(s) \xrightarrow{s \rightarrow 0} \eta P(Q_\theta(t) e^Z > x)$

$B(s)$  Hier gilt  $\bar{M}(s) = \bar{M}(0) = 0$ , daher

$$B(s) = \eta P \left( e^{\gamma_\theta^0 s} \left[ Q_\theta(t) - c \int_0^s e^{-\gamma_\theta^0 v} dv \right] > x \right)$$

und damit  $B(s) \xrightarrow{s \rightarrow 0} \eta P(Q_\theta(t) > x)$ .

$C(s)$   $H_Q(x, t) = P(Q_\theta(t) > x)$  ist differenzierbar nach  $x$  nach Annahme 3.4 (die Ableitung ist die negative Dichte). Wir setzen  $g(s) := x e^{-\gamma_\theta^0 s} + c/\gamma_\theta^0(1 - e^{-\gamma_\theta^0 s})$ , sowie  $G(s, t) := H_Q(g(s), t)$ . Dann

$$\begin{aligned}
\lim_{s \rightarrow 0} C(s) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \left[ \frac{1}{\eta} B(s) - P(Q_\theta(t) > x) \right] \\
&= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \left[ P \left( Q_\theta(t) > x e^{-\gamma_\theta^0 s} + c/\gamma_\theta^0(1 - e^{-\gamma_\theta^0 s}) \right) - P(Q_\theta(t) > x) \right] \\
&= \frac{d}{ds} G(s, t) |_{s=0} = \partial_x H_Q(x, t) g'(s) |_{s=0} \\
&= (c - \gamma_\theta^0 x) \partial_x H_Q(x, t)
\end{aligned}$$

Also ergibt sich

$$\lim_{s \rightarrow 0} A_3(s) = \eta \mathbb{E} H_Q(x e^{-Z}, t) - \eta H_Q(x, t) + (c - \gamma_\theta^0 x) \partial_x H_Q(x, t).$$

Insgesamt ergibt sich also die PIDE:

$$\partial_t H_Q(x, t) - (c - \gamma_\theta^0 x) \partial_x H_Q(x, t) = \eta [\mathbb{E} H_Q(x e^{-Z}, t) - H_Q(x, t)] + \lambda [\mathbb{E} H_Q(x - Y, t) - H_Q(x, t)] \quad (3.25)$$

**Lévy-Prozess mit  $\nu(\mathbb{R}) < \infty$** 

Nun verwenden wir die beiden gerade bewiesenen Resultate und betrachten einen Lévy-Prozess, der sich als Summe aus Brownscher Bewegung mit Drift und einem zusammengesetzten Poisson-Prozess ergibt (auch bekannt als *jump diffusion* Prozess). Fassen wir also einmal alle Annahmen zusammen, die wir für diesen Fall brauchen:

**Annahme 3.5** (i) Unser Lévy-Prozess  $L \sim (\gamma, \sigma^2, \nu)$  habe ein endliches Lévy-Maß  $\nu$ , also mit den Bezeichnungen von Lemma 3.1  $L_\theta \sim (\gamma_\theta, \sigma_\theta, \nu_\theta)$  oder  $L_\theta(t) := \gamma_\theta^0 t + \sigma_\theta^2 W_t + \sum_{j=1}^{M(t)} Z_j$ . Dabei habe der Poisson-Prozess  $M$  erneut die Intensität  $\eta_\theta$  und die  $Z_j$  seien iid absolutstetige Zufallsvariablen. Die (Markt-)Sprungzeiten nennen wir  $S_j$ . (Wieder haben wir Indizes  $\theta$  weggelassen.)

(ii)  $Q_\theta$  besitze für  $t > 0$  eine einfach stetig differenzierbare Dichte, also  $H_Q(\cdot, t) \in C^2(\mathbb{R})$ . Die (Schaden-)Sprungzeiten  $Y_j$  besitzen ebenfalls eine Dichte.

Wir folgen nun exakt dem Vorgehen wie für den zusammengesetzten Poisson-Prozess: Wir wenden zuerst den Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit an, bezeichnen dann die Terme wieder mit  $A(s)$ ,  $B(s)$ ,  $C(s)$ . Bei der Untersuchung der Konvergenzaussagen für  $A(s)$  und  $B(s)$  fällt auf, dass sie fast genauso verwendet werden können (mit  $\bar{W}(v) := W(t+v) - W(t)$ ):

$$\begin{aligned} A(s) &= \eta_\theta P \left( e^{\gamma_\theta^0 s + \sigma_\theta \bar{W}_s + Z} \left[ Q_\theta(t) - c \int_0^{U_2} e^{-\gamma_\theta^0 v - \sigma_\theta \bar{W}_v} dv - c \int_{U_2}^s e^{-\gamma_\theta^0 v - \sigma_\theta \bar{W}_v - Z} dv \right] > x \right) \\ B(s) &= \eta_\theta P \left( e^{\gamma_\theta^0 s + \sigma_\theta \bar{W}_s} \left[ Q_\theta(t) - c \int_0^s e^{-\gamma_\theta^0 v - \sigma_\theta \bar{W}_v} dv \right] > x \right) \end{aligned}$$

An den Konvergenzaussagen für  $A(s)$  und  $B(s)$  ändert sich offensichtlich nichts: Auch die Brownsche Bewegung ist stetig in Wahrscheinlichkeit, daher kann die Argumentation des vorherigen Abschnittes verwendet werden.

Für  $C(s)$  verfahren wir nun analog zum Spezialfall der Brownschen Bewegung

$$X_s := x e^{-\gamma_\theta^0 s - \sigma_\theta \bar{W}_s} + c \int_0^s e^{-\gamma_\theta^0 v - \sigma_\theta \bar{W}_v} dv$$

Im Beweis von Satz 3.4 setzen wir nun  $K(t) := \alpha t + \beta W_t := -\gamma_\theta^0 t - \sigma_\theta \bar{W}_t$ , und es ergibt sich

$$\lim_{s \rightarrow 0} C(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}H_Q(X_s, t) - H_Q(x, t)}{s} = \left( -x\gamma_\theta^0 + \frac{x}{2}\sigma_\theta^2 + c \right) \partial_x H_Q(x, t) + \frac{1}{2}x^2\sigma_\theta^2 \partial_{xx} H_Q(x, t) \quad (3.26)$$

Die allgemeine Differentialgleichung lautet daher wie folgt:

$$\begin{aligned} \partial_t H_Q(x, t) - \left( -x\gamma_\theta^0 + \frac{x}{2}\sigma_\theta^2 + c \right) \partial_x H_Q(x, t) - \frac{1}{2}x^2\sigma_\theta^2 \partial_{xx} H_Q(x, t) \\ = \eta[\mathbb{E}H_Q(xe^{-Z}, t) - H_Q(x, t)] + \lambda[\mathbb{E}H_Q(x - Y, t) - H_Q(x, t)] \end{aligned} \quad (3.27)$$

Die beiden vorher betrachteten Fälle ergeben sich glücklicherweise als Spezialfall.

**Bemerkung 3.2** *Wünschenswert wäre es, für einen allgemeinen Lévy-Prozess ohne die einschränkenden Bedingungen eine Formel zu erhalten. Wie die Art der Herleitung zeigt, ist dies allerdings zumindest mit der hier verwendeten Methode nicht möglich (etwa ist die verwendete Eigenschaft in (3.25) für den Poisson-Prozess charakteristisch).*

### 3.5.3 PIDE für $H_U(x, t)$

Wir erinnern an

$$U_\theta(t) := ue^{L_\theta(t)} + \int_{0+}^t e^{L_\theta(t)-L_\theta(v)}(cdv - dS(v))$$

und definieren analog

$$H_U(x, t) := P(-U_\theta(t) > x) \quad (3.28)$$

In ganz genau derselben Weise kommt man auf die Differentialgleichung für  $H_U(x, t)$ :

$$\begin{aligned} & \frac{P(-U_\theta(t+s) > x) - P(-U_\theta(t) > x)}{s} \\ &= \frac{o(s)}{s} + \lambda P \left( e^{\bar{L}_\theta(s)} \left[ -U_\theta(t) + Y e^{-\bar{L}_\theta(U_1)} - c \int_0^s e^{-\bar{L}_\theta(v)} dv \right] > x \right) \\ & \quad - \lambda P \left( e^{\bar{L}_\theta(s)} \left[ -U_\theta(t) - c \int_0^s e^{-\bar{L}_\theta(v)} dv \right] > x \right) \\ & \quad + \frac{1}{s} \left[ P \left( e^{\bar{L}_\theta(s)} \left[ -U_\theta(t) - c \int_0^s e^{-\bar{L}_\theta(v)} dv \right] > x \right) - P(-U_\theta(t) > x) \right] \end{aligned}$$

**Brownsche Bewegung:** Grenzübergang ergibt

$$\begin{aligned} & \partial_t H_U(x, t) - \left( -x\gamma_\theta + \frac{x}{2}\sigma_\theta^2 + c \right) \partial_x H_U(x, t) - \frac{1}{2}x^2\sigma_\theta^2\partial_{xx}H_U(x, t) \\ & = \lambda[\mathbb{E}H_U(x - Y, t) - H_U(x, t)] \end{aligned} \quad (3.29)$$

**Zusammengesetzter Poisson-Prozess:** Grenzübergang ergibt

$$\partial_t H_U(x, t) - (c - \gamma_\theta^0 x) \partial_x H_U(x, t) = \eta[\mathbb{E}H_U(xe^{-Z}, t) - H_U(x, t)] + \lambda[\mathbb{E}H_U(x - Y, t) - H_U(x, t)] \quad (3.30)$$

**Lévy-Prozess mit  $\nu(\mathbb{R}) < \infty$ :** Grenzübergang ergibt

$$\begin{aligned} & \partial_t H_U(x, t) - \left( -x\gamma_\theta^0 + \frac{x}{2}\sigma_\theta^2 + c \right) \partial_x H_U(x, t) - \frac{1}{2}x^2\sigma_\theta^2\partial_{xx}H(x, t) \\ & = \eta[\mathbb{E}H_U(xe^{-Z}, t) - H_U(x, t)] + \lambda[\mathbb{E}H_U(x - Y, t) - H_U(x, t)] \end{aligned} \quad (3.31)$$

Obige Differentialgleichungen sind überraschenderweise identisch zu denen für  $H_Q(x, t)$ . Der einzige Unterschied liegt in der Anfangswertbedingung

$$H_U(x, 0) = 1_{(-\infty, -u)}(x) \quad \forall x, \quad \text{da } -U_\theta(0) = -u \quad (3.32)$$

Nachdem beide Probleme dieselbe Struktur haben, werden wir in den folgenden Kapiteln häufig nur noch von  $H$  sprechen.



# Kapitel 4

## Theorie partieller Differentialgleichungen (PDE)

In diesem Kapitel stellen wir einige ausgewählte Resultate der Theorie partieller Differentialgleichungen vor, die wir für die Behandlung der PIDE in Kapitel 5 benötigen.

Sätze und Notation übernehmen wir größtenteils unverändert aus Brokate [8], Brokate [9]. Sie finden sich allerdings so oder ähnlich in fast jedem Lehrbuch über partielle Differentialgleichungen, beispielsweise in Evans [17], Renardy und Rogers [60], oder Wloka [66], die auch als Referenzen dienen können.

Zum Verstehen der Resultate braucht man häufig eine solide Basis in Funktionalanalysis, die beispielsweise Werner [65] liefert.

### 4.1 Vorbemerkungen

#### 4.1.1 Notation

Im Gegensatz zu den vorangegangenen Kapiteln steht  $\Omega$  (falls nicht explizit anders definiert) ab hier immer für ein Gebiet (d.h. eine offene zusammenhängende Menge) in einem reellen Vektorraum  $\mathbb{R}^d$ .  $d$  steht im Folgenden immer für die Raumdimension.

Falls nicht explizit anders definiert, ist  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$  ein Multiindex:  $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot \xi_d^{\alpha_d}$ ,  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$ .

Der Standardglättungskern  $\eta_\varepsilon$  für  $\varepsilon > 0$  dient dazu, Funktionen durch Faltung zu glätten. Wir definieren ihn für  $x \in \mathbb{R}^d$  wie folgt:

$$\eta_1(x) := \alpha \exp(-(1 - |x|^2)^{-1}) 1_{|x| < 1},$$

wobei  $\alpha \in \mathbb{R}$  so, dass  $\int_{\mathbb{R}^d} \eta_1(x) dx = 1$ . Es sei  $\eta_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^d} \eta_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ . Es gilt  $\eta_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  (d.h. unendlich oft differenzierbar mit kompaktem Träger), der Träger  $\text{supp}(\eta_\varepsilon) = K(0, \varepsilon)$ ,  $\int_{\mathbb{R}^d} \eta_\varepsilon(x) dx = 1$ .

Sei  $V$  normierter Raum. Dann bezeichnet  $V^*$  seinen Dualraum, d.h. den Banachraum der linearen stetigen Abbildungen  $v^* : V \rightarrow \mathbb{R}$ .

Eine Ableitung von  $u$  nach  $t$  schreiben wir  $\partial_t u = u_t$ , und wenn  $u$  nur von einer Variable abhängt, auch  $u'(t)$ . Ableitungen höherer Ordnung schreiben wir  $\partial_i \partial_j u = u_{x_j x_i} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}$ . Ist klar, dass  $u$  eine Funktion ist, so lassen wir in einem Integral  $\int u(x) dx$  das  $x$  als Argument häufig weg, um die Übersichtlichkeit zu erhöhen.

Wenn wir Funktionen  $f$  auf  $\mathbb{R}$  definieren und dann auf  $\mathbb{R} \times (0, T)$  verwenden, so seien die Funktionen konstant auf  $(0, T)$ .

### 4.1.2 Definition, Typeinteilung

Eine partielle Differentialgleichung (PDE) ist eine Differentialgleichung, in der unterschiedliche partielle Ableitungen vorkommen. Für viele Anwendungsprobleme genügt es, lineare PDE zweiter Ordnung zu betrachten (linear heißt hier: linear in den Unbekannten):

$$-\sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x) \partial_i \partial_j u(x) + \sum_{i=1}^d b_i(x) \partial_i u(x) + c(x)u(x) = f(x)$$

Wir betrachten die PDE immer auf einem Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ . D.h.  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  messbar, und  $a_{ij}, b_i, c, f$  ebenfalls ( $1 \leq i, j \leq d$ ). Den Bereich für die Indizes werden wir häufig weglassen; er erschließt sich aus dem betrachteten Raum. Die  $x$  sind ebenfalls unnötiger Ballast, so dass wir die alternative Formulierung erhalten:

$$-\sum_{i,j} a_{ij} \partial_i \partial_j u + \sum_i b_i \partial_i u + cu = f \tag{4.1}$$

Auch wenn  $a_{ij}, b_i, c$  Funktionen sind, bezeichnen wir sie gerne als *Koeffizienten* der PDE bzw. des Differentialoperators  $L := \sum_{i,j} a_{ij} \partial_i \partial_j + \sum_i b_i \partial_i + c$ . Auch in dieser Notation sind die  $x$  bei den Koeffizienten hinzuzudenken, und die  $u$  bei den Ableitungen und bei  $c$ .

**Definition 4.1** *Man unterscheidet drei wichtige Typen von PDE anhand der Matrix  $A(x) := (a_{ij}(x))_{i,j}$ :*

Elliptische PDE:  $A(x)$  ist für jedes  $x \in \Omega$  positiv definit oder negativ definit.

Parabolische PDE:  $A(x)$  ist für jedes  $x$  singular.

Hyperbolische PDE:  $A(x)$  hat genau einen Eigenwert, der ein anderes Vorzeichen als alle anderen Eigenwerte hat.

Die Definitionen sind offensichtlich disjunkt, wenn auch nicht vollständig.

Wir beschäftigen uns näher mit parabolischen PDE der Form

$$\partial_t u - \sum_{i,j} a_{ij} \partial_i \partial_j u + \sum_i b_i \partial_i u + cu = f \tag{4.2}$$

wobei wir statt  $x \in \mathbb{R}^d$  ( $d \geq 2$ ) nun  $(x, t) \in \mathbb{R}^{d+1}$  ( $d \geq 1$ ) schreiben. Dementsprechend betrachten wir (4.2) auf einem Gebiet  $\Omega \times (0, T)$  für ein  $T > 0$ . Das  $t$  steht für die Zeit, eine solche parabolische PDE ist eine Evolutionsgleichung über die Zeit.

Unter einem *degeneriert-parabolischen* Problem verstehen wir ein parabolisches Problem, bei dem der elliptische Teil möglicherweise degeneriert (d.h.  $A(x)$  wird nur als positiv semidefinit vorausgesetzt). In der Literatur werden dafür teilweise auch die Begriffe *schwach parabolisch*, *mit semi-elliptischem Teil* oder *mit degenerierendem elliptischen Teil* verwendet.

Damit man die Differentialgleichungen (4.1) bzw. (4.2) lösen kann, braucht man in aller Regel noch eine Randbedingung auf  $\partial\Omega$  bzw.  $\partial\Omega \times (0, T) \cup \Omega \times \{0\}$ . Ist  $\Omega = \mathbb{R}$  und hat folglich  $\Omega$  keinen Rand, so sprechen wir bei (4.2) zusammen mit der Anfangsbedingung analog zu den gewöhnlichen Differentialgleichungen von einer reinen Anfangswertaufgabe oder einem Cauchy-Problem.

### 4.1.3 Lösungsbegriffe

Beim Konzept der *klassischen Lösung* einer Differentialgleichung möchte man eine Lösung bestimmen, die bestimmte Differenzierbarkeitsbedingungen erfüllt, also für eine PDE zweiter Ordnung  $\in C^2(\Omega)$  ist.

Allerdings stieß man sehr schnell an die Grenzen der klassischen Theorie, nachdem man festgestellt hatte, dass einige PDE gar keine klassische Lösung haben. Auch macht es teilweise physikalisch durchaus Sinn, eine nicht differenzierbare Lösung zu suchen.

So kam man zum Konzept der *schwachen Lösung*. Hier setzt man Differenzierbarkeit im klassischen Sinne eben nicht voraus und kommt damit zu Lösungen, wo die klassische Theorie versagt.

Da man möchte, dass eine starke (klassische) Lösung auch möglichst eine schwache ist, verwendet man für die Konstruktion eines schwachen Lösungsbegriffes eine (Differenzierbarkeits-)Eigenschaft einer klassischen Lösung, die allerdings nicht charakteristisch ist. Diese Eigenschaft wird nun als definierend für die schwache Lösung gesetzt.

Außerdem möchte man, dass jede schwache Lösung, die hinreichende Differenzierbarkeitsbedingungen erfüllt, auch immer eine klassische ist.

Wir verwenden in dieser Arbeit das gebräuchliche Konzept der schwachen *Lösung im variationellen Sinne*. Die Idee der variationellen Lösung besteht in der Verwendung einer schwachen Ableitung. Jede stetig differenzierbare Funktion  $u$  erfüllt mit partieller Integration

$$\int_{\Omega} u'(x)\varphi(x)dx = - \int_{\Omega} u(x)\varphi'(x)dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

Erfüllt  $u$  diese Gleichung (ohne die Voraussetzung  $u \in C^1(\Omega)$ ), so sagen wir,  $u$  ist *einfach schwach differenzierbar*.

In letzter Konsequenz führt das zur Einführung der *Sobolevräume*, der Banachräume der schwach differenzierbaren Funktionen.

Wenn wir im Folgenden von *schwacher Lösung* sprechen, meinen wir immer eine Lösung im variationellen Sinne.

## 4.2 Sobolevräume I

Ist

$$\int_{\Omega} w \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \partial^{\alpha} \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega),$$

so bezeichnen wir  $w$  als schwache  $\alpha$ -te Ableitung von  $v$  und schreiben dafür  $w = \partial^{\alpha} v$ . Den Sobolevraum  $k$ -ter Ordnung  $H^k(\Omega)$  definieren wir für  $k \in \mathbb{N}$  wie folgt:

$$H^k(\Omega) = \{v : v \in L^2(\Omega), \partial^{\alpha} v \in L^2(\Omega) \forall |\alpha| \leq k\}$$

**Bemerkung 4.1** *Sobolevräume können auch für  $L^p$ -Räume mit  $p \neq 2$  definiert werden, dies bringt aber für lineare PDE keinen entscheidenden Vorteil.*

Die oben definierten Sobolevräume sind Hilberträume zusammen mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle_{H^k} := \sum_{|\alpha| \leq k} \langle \partial^{\alpha} u, \partial^{\alpha} v \rangle_{L^2}$$

und der dadurch induzierten Norm  $\|u\|_{H^k} := \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^{\alpha} u\|_{L^2}^2 \right)^{1/2}$ . (Wobei hier immer  $\|\cdot\|_{L^2} = \|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$  ist.)

Offensichtlich ist  $C_0^{\infty}(\Omega) \subset H^k(\Omega)$ . Wir definieren uns den Sobolevraum  $H_0^k(\Omega)$  als Abschluss von  $C_0^{\infty}(\Omega)$  in der  $H^k$ -Norm:  $H_0^k(\Omega) := \overline{C_0^{\infty}(\Omega)}$ . Er ist ebenfalls ein Hilbertraum. (Dieser Raum spielt eine wichtige Rolle bei der Behandlung von elliptischen Randwertproblemen mit 0-Randbedingungen.) Im Allgemeinen ist  $H_0^k(\Omega) \neq H^k(\Omega)$ . Es gibt jedoch eine wichtige Ausnahme:

**Proposition 4.2** *Es gilt  $H_0^k(\mathbb{R}^d) = H^k(\mathbb{R}^d)$ , d.h.  $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^d)$  ist dicht in  $H^k(\mathbb{R}^d)$ .*

**Beweis:** Es ist  $C^{\infty}(\mathbb{R}^d) \cap H^k(\mathbb{R}^d)$  dicht in  $H^k(\mathbb{R}^d)$ . (Für den Nachweis glättet man  $v \in H^k(\Omega)$  mit dem Standardglättungskern  $\eta_{\varepsilon}$  und zeigt die Konvergenz für  $\varepsilon \rightarrow 0$ .)

Es bleibt noch zu zeigen: Die Dichtheit von  $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^d)$  in  $C^{\infty}(\mathbb{R}^d) \cap H^k(\mathbb{R}^d)$ . Für Details siehe Brokate [8], Kap. 7 und 9.  $\square$

Für  $k = 0$  bzw.  $L^2(\mathbb{R}^d)$  gilt die Aussage der Proposition ebenfalls, mit gleichem Beweis.

Ein wichtiges Hilfsmittel, wenn man die Regularität von Lösungen nachweisen will, ist der folgende Satz, der sagt, wann aus schwacher Differenzierbarkeit starke Differenzierbarkeit folgt:

**Satz 4.3 (Sobolevscher Einbettungssatz)** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  offen, seien  $m, k \in \mathbb{N}_0$  mit  $m > k + d/2$ . Ist  $f \in H^m(\Omega)$ , so ist  $f \in C^k(\Omega)$ . (Wobei man einen geeigneten Vertreter aus der Äquivalenzklasse  $f$  auswählt.)*

**Beweis:** Siehe z.B. Werner [65], S. 190  $\square$

Insbesondere gilt für  $d = 1$ :  $H^m(\Omega) \subset C^{m-1}(\Omega)$ .

### 4.3 Elliptische PDE

Wir betrachten in diesem Abschnitt zuerst elliptische Probleme der Form

$$Lu = f \text{ in } \Omega \subset \mathbb{R}^d, \quad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega,$$

wobei der Differentialoperator  $L$  gegeben ist durch  $Lu = \sum_{i,j} a_{i,j} \partial_i \partial_j u + \sum_i b_i \partial_i u + cu$ .

Wir möchten an einer einfachen elliptischen PDE motivieren, wie man die Theorie der Sobolevräume bzw. der schwachen Lösungen anwenden kann. Gegeben sei das sogenannte Dirichlet-Problem für ein beschränktes Gebiet  $\Omega$ :

$$-\Delta u = f \text{ in } \Omega \subset \mathbb{R}^d, \quad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega \tag{4.3}$$

Wir suchen hier nur schwach differenzierbare Lösungen. Also wird (4.3) zu folgendem variationellen Problem: Finde ein  $u \in H^1(\Omega)$ , sodass

$$\text{„} \int_{\Omega} -\Delta u \varphi dx \text{“} = \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle dx = \int_{\Omega} f \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

Für  $u \in C^2(\Omega)$  ist die erste Gleichheit Ergebnis partieller Integration. Für  $u \in H^2(\Omega)$  entspricht die erste Gleichheit einfach der Definition der schwachen Ableitung. (Die eigentliche Rechtfertigung erhält diese Herleitung, da damit eine schwache Lösung, die genügend oft (stark) differenzierbar ist, auch eine klassische Lösung ist (vgl. Lemma 4.5).)

Was noch fehlt, sind die Randbedingungen. In diesem Fall erhalten wir die 0-Randbedingungen, indem wir die Lösung in  $H_0^1(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}$  suchen. (Dies hat den Vorteil, dass sich einige Aussagen von  $C_0^\infty(\Omega)$  durch die Dichtheit auf  $H_0^1(\Omega)$  übertragen lassen.)

Wir definieren nun  $a(u, v) := \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle dx$  und  $F(v) := \int_{\Omega} f v dx$  auf  $H_0^1(\Omega)$ . Nach der *Ungleichung von Poincaré und Friedrichs* gilt  $a(v, v) = \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \geq c \int_{\Omega} |v|^2 dx$  für ein  $c > 0$ , und offensichtlich ist  $F$  linear und stetig. Da  $a$  außerdem eine symmetrische stetige Bilinearform ist (d.h.  $|a(u, v)| \leq C \|u\| \|v\| \quad \forall u, v \in V$  für ein  $C > 0$ ) definiert  $a$  ein Skalarprodukt und  $\sqrt{a(v, v)}$  eine zur  $H_0^1(\Omega)$ -Norm äquivalente Norm. Also ist  $(H_0^1(\Omega), a)$  ein Hilbertraum und nach dem Darstellungssatz von Fréchet-Riesz (Funktionalanalysis) hat die Gleichung

$$a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

genau eine Lösung in  $H_0^1(\Omega)$ .

Allgemeiner gilt für  $a$  nicht symmetrisch folgender Satz:

**Satz 4.4 (Lax-Milgram)** *Sei  $V$  Banachraum, sei  $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Bilinearform, und es gelte  $a(v, v) \geq c \|v\|^2$  für ein  $c > 0$ . Außerdem sei  $F : V \rightarrow \mathbb{R}$  linear und stetig. Dann hat*

$$a(u, v) = F(v)$$

*genau eine Lösung  $u \in V$ .*

Mit diesem abstrakten Satz ist man nicht mehr an bestimmte Räume gebunden. Wir sind also keineswegs auf die bis jetzt definierten Sobolevräume beschränkt. Der Banachraum müsste noch nicht einmal mit Differentialgleichungen zu tun haben.

## 4.4 Parabolische PDE

Wir betrachten in diesem Abschnitt für  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  und  $T > 0$  parabolische Probleme der Form

$$u_t + Lu = f \text{ in } \Omega \times (0, T), \quad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega \times (0, T), \quad u = g \text{ auf } \Omega \times \{0\} \quad (4.4)$$

wobei der Differentialoperator  $L$  gegeben ist durch  $Lu = -\sum_{i,j} a_{ij} \partial_i \partial_j u + \sum_i b_i \partial_i u + cu$ .

Schon die Schreibweise eines parabolischen Problems (mit  $(x, t)$  anstelle  $x$ ) lässt erahnen, dass wir die Theorie der elliptischen PDE auch für parabolische PDE ausnutzen können.

Die Idee dabei ist, dass wir die Funktionen  $u(x, t)$  etwas anders auffassen, nämlich als  $u(t)(x)$ . Das heißt,  $u(t)$  ist eine Funktion für alle  $t \in [0, T]$ . Wir suchen für das parabolische Problem eine Lösung  $u$  mit  $u(t)$  in einem Sobolevraum  $S$  für alle  $t$ .  $u$  ist dann eine Funktion  $\in L^2(0, T; S)$ , d.h.  $u : [0, T] \rightarrow S$  ist „ $L^2$ -integrierbar“, und  $u(t) \in S$ . Dafür müssen wir aber zuerst noch dem Begriff  $L^2$ -integrierbar für diese Art von Funktionen Sinn verleihen:

### 4.4.1 Bochner-Integral, Evolutionstripel

Sei  $X$  ein Banachraum. Wir definieren das *Bochner-Integral* auf einem kompakten Intervall  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  für ein  $u : [a, b] \rightarrow X$  geeignet *Bochner-messbar*. (Was das genau heißt und mehr Details, findet sich etwa in Wloka [66], Brokate [9].) Die Konstruktion des Integrals erfolgt wie in der klassischen Lebesgue-Integrationstheorie über einfache Funktionen. Analog gelten Resultate wie der Satz von Lebesgue auch für das Bochner-Integral.

Das Bochner-Integral existiert, falls  $u$  Bochner-messbar und  $t \mapsto \|u(t)\|$  auf  $[a, b]$  integrierbar ist. Es gilt dabei

$$\left\| \int_a^b u(t) dt \right\|_X \leq \int_a^b \|u(t)\|_X dt.$$

Der Raum  $L^2(a, b; X)$  ist nun also definiert als

$$L^2(a, b; X) := \{u : [a, b] \rightarrow X \text{ Bochner-messbar und } \int_a^b \|u(t)\|_X^2 dt < \infty\},$$

wobei  $u$  eigentlich (wie in der klassischen Lebesgue-Integrationstheorie) eine Äquivalenzklasse darstellt. Für  $X$  Hilbertraum ist  $L^2(a, b; X)$  auch ein Hilbertraum, und zwar mit dem Skalarprodukt  $\langle u, v \rangle = \int_a^b \langle u(t), v(t) \rangle_X dt$  und der dadurch induzierten Norm  $\|u\|_{L^2(a, b; X)} := \left( \int_a^b \|u(t)\|_X^2 dt \right)^{1/2}$ .

**Lemma 4.5** Sei  $V$  separabler Banachraum,  $w \in L^2(0, T; V^*)$ . Gilt

$$\int_0^T \varphi(t) w(t) dt = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(0, T),$$

so ist  $w = 0$  fast überall.

Wir verwenden die Notation  $\langle v^*, v \rangle_V := v^*(v)$  (das sogenannte Dualitätsprodukt) für  $v^* \in V^*$ ,  $v \in V$ .

**Proposition 4.6 (Evolutionstripel)** *Sei  $H$  ein Hilbertraum und  $V$  ein reflexiver Banachraum über  $\mathbb{R}$ , sei  $j : V \rightarrow H$  linear stetig und injektiv, sei  $j(V)$  dicht in  $H$ . Dann wird durch*

$$\langle j^*(h), v \rangle_V = \langle h, j(v) \rangle_H$$

eine lineare, stetige und injektive Abbildung  $j^* : V \rightarrow V^*$  mit  $\|j^*\| \leq \|j\|$  definiert.

Wir nennen wie in Prop. 4.6 definierte Funktionen und Räume  $V \xrightarrow{j} H \xrightarrow{j^*} V^*$  ein *Evolutionstripel* oder *Gelfandtripel*.

Es zeigt sich, dass die Ableitung nach der Zeit  $u'$  mithilfe des Evolutionstripels sinnvoll als Element des Raumes  $L^2(0, T; V^*)$  aufgefasst werden kann:

Wir definieren für ein  $u \in L^2(0, T; V)$  die schwache Zeitableitung:  $w$  in  $L^2(0, T; V^*)$  heißt schwache Zeitableitung von  $u$ , wenn

$$\int_0^T w(t)\varphi(t)dt = - \int_0^T j^*(j(u(t)))\varphi'(t)dt \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(0, T).$$

Es gilt für ein Evolutionstripel  $V \xrightarrow{j} H \xrightarrow{j^*} V^*$  folgendes naheliegende Lemma:

**Lemma 4.7 (Äquivalente Definition der schwachen Zeitableitung)** *Es sei  $u \in L^2(0, T; V)$ ,  $w \in L^2(0, T; V^*)$ . Dann ist  $w$  genau dann schwache Ableitung von  $u$ , wenn gilt:*

$$\int_0^T \langle j(u(t)), j(v) \rangle_H \varphi'(t) dt = - \int_0^T \langle w(t), v \rangle_V \varphi(t) dt \quad \forall v \in V, \varphi \in C_0^\infty(0, T).$$

#### 4.4.2 Existenz und Eindeutigkeit

Nun möchten wir eine variationelle Formulierung herleiten für (4.4).  $Lu$  behandeln wir analog zum elliptischen Fall und erhalten eine Bilinearform  $a$ .

Insgesamt erhalten wir für  $(F(t))(v) := \int_\Omega f(x, t)v(x)dx$  das abstrakt gestellte Problem:

$$\langle u'(t), v \rangle_V + a(u(t), v; t) = \langle F(t), v \rangle_V \quad \forall v \in V \quad (4.5)$$

$$u(0) = u_0 \quad (4.6)$$

Wir treffen folgende Annahmen:

(A1)  $V \xrightarrow{j} H \xrightarrow{j^*} V^*$  ist ein Evolutionstripel,  $V$  ein separabler Banachraum mit  $\dim(V) = \infty$ .

(A2)  $a : V \times V \times (0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  ist für jedes  $t \in (0, T]$  eine Bilinearform, und es gibt  $c_a, c_h, C_a > 0$  mit

$$\begin{aligned} a(v, v; t) &\geq c_a \|v\|_V^2 - c_h \|j(v)\|_H^2, & \forall v \in V, t \in (0, T] \\ |a(v, w; t)| &\leq C_a \|v\| \|w\|, & \forall v, w \in V, t \in (0, T]. \end{aligned}$$

Die Abbildungen  $t \mapsto a(v, w; t)$  sind messbar  $\forall v, w \in V$ .

(A3)  $u_0 \in H, F \in L^2(0, T; V^*)$ .

**Satz 4.8 (Existenz und Eindeutigkeit)** *Unter den Annahmen (A1)-(A3) hat das Anfangswertproblem (4.5), (4.6) eine eindeutige schwache Lösung  $u \in W := \{u : u \in L^2(0, T; V), u' \in L^2(0, T; V^*)\}$ , und diese Lösung erfüllt die sogenannten energy estimates:*

$$\max_{t \in [0, T]} \|j(u(t))\|_H + \|u\|_{L^2(0, T; V)} + \|u'\|_{L^2(0, T; V^*)} \leq C(\|u_0\|_H + \|F\|_{L^2(0, T; V^*)})$$

für ein Konstante  $C > 0$  unabhängig von  $u_0, F$ .

Eine solches  $C$  muss auf alle Fälle  $C \geq \text{const} \cdot \frac{1}{c_a}$  erfüllen.

**Beweis:** Existenz mithilfe einer Approximation über endlich-dimensionale Räume (die sogenannte Galerkin-Approximation), Eindeutigkeit folgt sofort nach der Herleitung der *energy estimates*. Siehe z.B. Brokate [9] Evans [17]  $\square$

Man beachte, dass die Startbedingung trotz Definition auf einer Lebesgue-Nullmenge wohldefiniert ist, da  $W \subset C(0, T; V)$  (siehe z.B. Gajewski et al. [20]).

## 4.5 Sobolevräume II

### 4.5.1 Gewichtete Sobolevräume

Bei manchen Problemen kann es eine schwache Lösung geben, auch wenn die klassischen Sobolevräume nicht anwendbar sind. Dies ist unter anderem dann der Fall, wenn

- das Gebiet  $\Omega$  unbeschränkt ist, die Randbedingungen also Bedingungen für  $|x| \rightarrow \infty$  sind, die man nicht durch einen  $H_0^1$ -Raum darstellen kann (u.a. sogenannte Außenraumaufgaben)
- Koeffizienten eine Singularität haben oder eine Degeneriertheit (d.h. der führende Koeffizient wird 0, die Elliptizität geht hier also verloren)

Hier können gewichtete Sobolevräume helfen. Die Idee ist dabei grob gesagt, dass wir (wie beim Beispiel in Abschnitt 4.3) versuchen, eine Äquivalenz zwischen der Bilinearform  $a(v, v)$  und der Sobolevnorm herzustellen.



Das Ziel bei der Verwendung von Sobolevräumen ist primär die Abschwächung der Differenzierbarkeitsbedingung, die bei ungewichteten Sobolevräumen verlangte Quadratin-tegrierbarkeit für Lösungen ist nur ein Nebenprodukt – also macht die Einführung von gewichteten Sobolevräumen auch vor diesem Hintergrund Sinn.

Viele Aussagen (zum Beispiel Einbettungssätze) können auch für gewichtete Sobolevräume bewiesen werden. Siehe hierzu etwa das Buch von Kufner [43].

Wir definieren zuerst den mit einer Funktion  $w \in L^1_{loc}(\Omega)$  gewichteten  $L^2$ -Raum:

$$L^2_w(\Omega) := \{u : uw^{1/2} \in L^2(\Omega)\}$$

mit Norm  $\|u\|_{L^2_w} := \|uw^{1/2}\|_{L^2}$ . Für eine Familie von Gewichtsfunktionen  $w = (w_\alpha)$  (für  $\alpha$  Multiindizes),  $w_\alpha \in L^1_{loc}(\Omega)$  und  $w_\alpha \geq 0 \forall \alpha$  definieren wir nun den gewichteten Sobolevraum

$$H^1_w(\Omega) := \{u : \partial^\alpha u \in L^2_{w_\alpha}(\Omega) \forall |\alpha| \leq 1\}. \quad (4.7)$$

Offensichtlich definiert  $\|u\|_{H^1_w} := \left( \sum_{|\alpha| \leq 1} \|\partial^\alpha u\|_{L^2_{w_\alpha}}^2 \right)^{1/2}$  eine Norm auf  $H^1_w(\Omega)$ . Sind die Gewichtsfunktionen  $w_\alpha \forall \alpha$  gleich (das ist im Folgenden immer der Fall), so schreiben wir die Gewichtsfunktion nur einmal als Index.

**Bemerkung 4.2**  $w \in L^1_{loc}(\Omega)$  fordern wir, damit die Definition der schwachen Ableitung hierfür Sinn macht – nur dann ist das Integral mit Funktionen  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$  definiert, also für eine zu bestimmende Lösung  $u \in L^2(\Omega)$  ist  $uw$  als reguläre Distribution auffassbar und damit die schwache Ableitung sinnvoll definiert.

Offensichtlich bringt es keinen Vorteil, einen gewichteten Raum mit einer nach oben wie unten beschränkten Gewichtsfunktion zu definieren; hier sind die Normen äquivalent zum ungewichteten Raum.

Die Definition der gewichteten Sobolevräume ist sinnvoll, wie folgende Resultate zeigen:

**Proposition 4.9 (Vollständigkeit)** *Der wie oben definierte Raum  $H^1_w(\Omega)$  ist zusammen mit dem Skalarprodukt*

$$\langle u, v \rangle_{H^1_w} := \sum_{|\alpha| \leq 1} \langle \partial^\alpha uw^{1/2}, \partial^\alpha vw^{1/2} \rangle_{L^2}$$

ein Hilbertraum.

**Beweis:** Vollständigkeit: Siehe Kufner und Opic [44], Theorem 1.11. □

### 4.5.2 Der Hilbertraum $H^1_{x^2+1}$

Für unsere Ausführungen in Kapitel 5 stellt sich die Wahl der Gewichtsfunktion  $w(x) = x^2 + 1$  als sinnvoll heraus. Offensichtlich ist  $w \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ . Genauso gilt  $C_0^\infty(\mathbb{R}) \subset H^1_{x^2+1}(\mathbb{R})$

Aus dem letzten Unterabschnitt wissen wir, dass  $H^1_{x^2+1}(\mathbb{R})$  ein Banachraum ist. Es bleibt die Dichtheit der  $C_0^\infty(\mathbb{R})$  zu zeigen:

**Proposition 4.10 (Dichtheit der  $C_0^\infty(\mathbb{R})$ )** Es gilt  $\overline{C_0^\infty(\mathbb{R})} = H_{x^2+1}^1(\mathbb{R})$  in der  $H_{x^2+1}^1$ -Norm.

**Beweis:** Analog zu klassischen Sobolevräumen. □

**Lemma 4.11 (Aussagen zu  $L_{x^2+1}^2$ )** Es gilt:

$$(i) \quad \|u\|_{L^2} \leq \|u\|_{L_{x^2+1}^2}$$

$$(ii) \quad \|u\|_{L^1} \leq C \|u\|_{L_{x^2+1}^2}$$

**Beweis:** (i), da  $1 \leq 1 + x^2$

(ii), da mit Hölder  $\int |u| dx \leq \left(\int |u|^2(1+x^2) dx\right)^{1/2} \left(\int (1+x^2)^{-1} dx\right)^{1/2} < \infty$  □

# Kapitel 5

## Existenz und Eindeutigkeit

In diesem Kapitel soll es darum gehen, Existenz und Eindeutigkeit sowie Regularität einer Lösung der hergeleiteten PIDE nachzuweisen. Hierbei bedienen wir uns sowohl Mitteln aus der Stochastik (Malliavin-Kalkül) als auch – weniger überraschend – Mitteln aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen.

Zuerst jedoch einige Vorbemerkungen: Wenn die Bedingungen, die wir zur Herleitung der PIDE vorausgesetzt haben, nicht erfüllt sind, dann hat die PIDE möglicherweise nichts mit dem Ausgangsproblem zu tun.

Wir haben angenommen, dass  $H(\cdot, t) \in C^2(\mathbb{R})$ . Stellen wir nun fest, dass die PIDE eine eindeutige Lösung hat, die sogar genügend oft stetig differenzierbar (also zweimal in  $x$  und einmal in  $t$ ) und beschränkt ist, dann muss diese Lösung trotzdem nicht unbedingt etwas mit dem Ausgangsproblem zu tun haben.

Das heißt: Wie gut auch immer hier die Untersuchung der PIDE gelingt, ob sie mit dem Modell zu tun hat, kann letztlich nur bei der Modellierung selbst mithilfe der Stochastik beantwortet werden.

Für die numerische Untersuchung der PIDE allerdings (wenn man sie losgelöst von der Herleitung betrachtet) machen Aussagen über Existenz, Eindeutigkeit und Regularität mit Mitteln der Analysis durchaus Sinn.

### 5.1 Formulierung des Problems

Wir verzichten in diesem Kapitel darauf, die für die Herleitung verwendeten Voraussetzungen erneut zu erwähnen (natürlich mit Ausnahme des Abschnitts über das Malliavin-Kalkül). Wir untersuchen auf  $\Omega_T = \mathbb{R} \times (0, T)$  für  $T > 0$  folgendes aus einem *jump diffusion*-Prozess entstandene Problem:

$$\begin{aligned} (\lambda + \eta)u(x, t) + \partial_t u(x, t) + b(x)\partial_x u(x, t) - a(x)\partial_{xx} u(x, t) \\ = \eta \int f_Z(z)u(xe^{-z}, t)dz + \lambda \int f_Y(y)u(x - y, t)dy, \end{aligned}$$

wobei  $a(x) := ax^2 := \frac{1}{2}x^2\sigma_\theta^2$  und  $b(x) := bx - c := x\gamma_\theta^0 - \frac{x}{2}\sigma_\theta^2 - c$ .  $f_Y$  bezeichnet die Dichte eines Schadenssprunges, und  $f_Z = f_\theta$  bezeichnet die Dichte eines Sprungs von  $L_\theta$ . Die Anfangswertbedingung lautet hier für  $u = H_Q$ :

$$u(x, 0) = 1_{(-\infty, 0)}(x)$$

Definieren wir

$$Lu(x, t) := -a(x)\partial_{xx}u(x, t) + b(x)\partial_xu(x, t) + (\lambda + \eta)u(x, t),$$

so erhalten wir für  $T > 0$  folgendes Problem:

$$\partial_t u + Lu = \eta f_Z *^e u + \lambda f_Y *_x u \quad \text{in } \mathbb{R} \times (0, T), \quad u(\cdot, 0) = 1_{(-\infty, 0)}. \quad (5.1)$$

$f_Y$  sei dabei dabei durch 0 auf  $(-\infty, 0)$  fortgesetzt.  $*_x$  bezeichne die Faltung im Ort,  $*^e$  bezeichne die andere Faltung.

Aus dieser Darstellung ersehen wir, dass es sich um eine (degeneriert-)parabolische partielle Differentialgleichung mit Faltungstermen im Ort handelt. Dabei ist die PDE in der Form eines Cauchy-Problems, d.h. eines reinen Anfangswertproblems gegeben.

Daraus ergeben sich folgende Eigenschaften der PIDE, die für die Untersuchung von Existenz und Eindeutigkeit einer schwachen Lösung von großer Bedeutung sind:

**Nichtlokalität.** Wie bereits erwähnt, handelt es sich um ein reines Anfangswertproblem auf dem kompletten Raum  $\Omega = \mathbb{R}$ , und nicht um ein Anfangsrandwertproblem auf beschränktem  $\Omega$ . Außerdem verarbeiten die Faltungsterme nicht nur lokale Werte von  $u$ , sondern für festes  $t$  Werte aus ganz  $\Omega = \mathbb{R}$ .

**Degeneriertheit.** Der Operator  $L$  ist ein schwach-elliptischer Differentialoperator: in  $x = 0$  verliert er seine Elliptizität. Der  $*^e$ -Term ist ebenfalls in  $x = 0$  besonders: Da  $f_Z$  eine Dichte ist, ist  $f_Z *^e u(0, t) = u(0, t)$ . Ansonsten haben wir es dort immer mit einem echten Integral zu tun.

**Randwerte.** Für ein Anfangswertproblem brauchen wir keine Randwerte. Jedoch ergeben sich für  $|x| \rightarrow \infty$  folgende Grenzwerte aus der Definition  $u(x, t) = P(Q_\theta(t) > x)$ :  $u(-\infty, t) = 1$ ,  $u(\infty, t) = 0 \forall t$ . Das bedeutet insbesondere, dass unser Problem in der gegebenen Form nur als  $L^\infty$ -Problem auffassbar ist.

**Sonstige Eigenschaften.** Unmittelbar aus der Herleitung folgt ebenfalls  $u \in [0, 1]$ , sowie  $\partial_x u \leq 0$ .

## 5.2 Ansatz mit Mitteln der Stochastik

### 5.2.1 Existenz einer klassischen Lösung: Malliavin-Kalkül

#### Malliavin-Kalkül

Analog zur Regularitätstheorie bei PDE entwickelte Paul Malliavin Mitte des 20. Jahrhunderts für SDE eine Methode, die sich unter anderem mit der Frage beschäftigt:

Gegeben eine stochastische Differentialgleichung  $dX_t = a(X_t)dt + b(X_t)dW_t$ , welche Voraussetzungen müssen die Funktionen  $a$  und  $b$  erfüllen, damit  $X_t$  für  $t > 0$  eine möglichst oft differenzierbare Dichte besitzt?

Nach dem „Erfinder“ nennt man seine Methode *Malliavin-Kalkül* oder auch *Stochastische Variationsrechnung*.

Einen guten Überblick über das Malliavin-Kalkül für stetige SDE gibt Nualart [51]. In den achtziger Jahren des 20. Jahrhunderts wurde das Malliavin-Kalkül auf SDE mit Sprüngen ausgedehnt, maßgebend ist hierbei die Arbeit von Bichteler et al. [6].

Da wir die Resultate aus Bichteler et al. [6] ohnehin nicht beweisen werden, können wir auf die Einführung der komplizierten Notation verzichten. Wir stellen das Hauptresultat daher nur in abgewandelter Form und im Eindimensionalen vor:

Wir betrachten die Lösung  $X$  der SDE

$$X_t = x + \int_0^t a(X_{s-})ds + \int_0^t b(X_{s-})dW_s + \int_0^t \int_E c(X_{s-}, z)\tilde{\mu}(dz, ds), \quad (5.2)$$

wobei  $\mu(dz, ds) = \mu(dz, ds)(\omega)$  ein Poisson-Zufallsmaß auf  $E \times [0, T]$  ist ( $E \subset \mathbb{R}^2$  messbar),  $\bar{\mu}(dz, ds) = ds \otimes G(dz)$  (mit  $G$  einem positiven  $\sigma$ -endlichen Maß auf  $(E, \mathcal{B}^2 \cap E)$ ) sein Intensitätsmaß, und demzufolge  $\tilde{\mu}(dz, ds) := \mu(dz, ds) - \bar{\mu}(dz, ds)$  das kompensierte Poisson-Zufallsmaß. (Nähere Erläuterungen zu Poisson-Zufallsmaßen finden sich z.B. in Cont und Tankov [10], S. 55. Die Integration bzgl. Poisson-Zufallsmaßen ist für eine größere Klasse von Prozessen als bei der klassischen stochastischen Integration möglich, siehe Jacod und Shiryaev [32], S. 71.)

Die zufälligen Elemente  $W, \mu$  seien unabhängig. Wir treffen außerdem folgende Annahmen:

(A1)  $a$  und  $b$  seien  $q$ -mal differenzierbar mit beschränkten Ableitungen.  $c$  sei  $\mathcal{B} \times \mathcal{B}^2 \cap E$ -messbar;  $c(\cdot, z)$  sei  $q$ -mal differenzierbar, und

$$c(0, \cdot) \in \bigcap_{1 < p < \infty} L^p(E, G) \quad \sup_x |\partial_x^n c(x, \cdot)| \in \bigcap_{1 < p < \infty} L^p(E, G) \quad \forall 1 \leq n \leq q$$

(A2) Es gebe eine Konstante  $\zeta > 0$  mit  $|1 + u\partial_x c(x, z)| \geq \zeta$  für alle  $u \in [0, 1], x \in \mathbb{R}, z \in E$ .

**Satz 5.1 (Existenz und Differenzierbarkeit der Dichte der Lösung einer SDE)**

Sei  $r \in \mathbb{N}$ . Es gelte (A1) für  $q = 2r + 4 + 6$  und (A2). Dann besitzt die Zufallsvariable  $X_t$  für jedes  $t \in (0, T]$  eine Dichte  $f_t$ , und die Abbildung  $(s, y) \mapsto f_s(y)$  ist  $\in C^r((0, T] \times \mathbb{R})$ .

**Beweis:** Siehe Bichteler et al. [6], Theorem 2-29 (i). □

**Anwendung auf unser Problem**

Im Modellierungskapitel 3 hatten wir gesehen, dass das Versicherungsvermögen  $U_\theta$  die Lösung folgender SDE ist:

$$dU_\theta(t) = cdt - dS(t) + U_\theta(t-)\widehat{dL}_\theta(t), \quad U_\theta(0) = u, \quad (5.3)$$

$Q_\theta(t)$  war definiert als

$$Q_\theta(t) := ue^{L_\theta(t)} - U_\theta(t). \quad (5.4)$$

Wir möchten nun nachweisen, dass

$$H_Q(x, t) := P(Q_\theta(t) > x)$$

für  $t > 0$  unendlich oft differenzierbar nach  $x$  ist, oder – äquivalent dazu – dass  $Q_\theta(t)$  absolutstetig ist und seine Dichte  $\in C^\infty(\mathbb{R})$  ist (beim Beweis erhalten wir sogar ein stärkeres Ergebnis für  $H_U$ ). Leider brauchen wir dafür relativ einschränkende Voraussetzungen unter anderem an die Momente. Wir erinnern daran, dass das  $p$ -te Moment eines Lévy-Prozesses  $L \sim (\mu, \sigma^2, \nu)$  (für einen festen Zeitpunkt) genau dann existiert, falls  $\int_{|x|>1} |x|^p \nu(dx) < \infty$ . (In diesem Falle gilt auch  $\int_{|x|>1} |x|^p \nu_\theta(dx) < \infty$ , da  $\nu_\theta(\mathbb{R} \setminus [-1, 1]) \leq \nu(\mathbb{R} \setminus [-1, 1])$ .)

**Satz 5.2** *Alle Momente von  $L(1)$  (und damit von  $\widehat{L}_\theta(1)$ ) seien existent, ebenso die von  $S(1)$ . Das Lévy-Maß von  $L$  (und damit von  $\widehat{L}_\theta$ ) sei außerdem endlich. Ebenso gelte  $\sigma > 0$ ,  $\theta \in (0, 1)$ . Dann ist  $H_U \in C^\infty(\mathbb{R} \times (0, T])$ .*

**Beweis:** Durch Anwendung von Satz 5.1.

1. Formen wir zuerst die SDE für  $U_\theta$  um: Die Lévy-Itô-Zerlegung sagt uns, dass für geeignete  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\widehat{L}_\theta(t) = \alpha t + \beta W_t + \sum_{0 < s \leq t} \Delta \widehat{L}_\theta(s) 1_{|\Delta \widehat{L}_\theta(s)| > 1} + \int_0^t \int_{|z| \leq 1} z (M_\theta(dz, ds) - \nu_\theta(dz) ds)$$

wobei  $M_\theta(A) = \#(\{t, \Delta \widehat{L}_\theta(t, \omega) \in A\})$  für Borelmengen  $A$  aus  $[0, \infty) \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$  das Poisson-Zufallsmaß für den Sprungteil ist. Weiter ist  $\nu_\theta$  das Lévy-Maß von  $\widehat{L}_\theta$  (also  $M_\theta(dz, ds) - \nu_\theta(dz) ds$  das kompensierte Poisson-Zufallsmaß). Wir wollen  $\widehat{L}_\theta$  in die Form von Satz 5.1 bringen. Nach kurzer Überlegung ist einsichtig:  $\sum_{0 < s \leq t} \Delta \widehat{L}_\theta(s) 1_A(\Delta \widehat{L}_\theta(s)) = \int_0^t \int_A z M_\theta(dz, ds) \forall A \in \mathcal{B}$  (das Maß  $M_\theta$  inkrementiert das Integral genau dann mit  $\Delta \widehat{L}_\theta(s)$ , wenn in  $s$  ein Sprung auftritt). Also gilt mit unserer Voraussetzung (mit  $\tilde{\alpha}$  bezeichnen wir wieder den entstehenden  $t$ -Term)

$$\begin{aligned} \widehat{L}_\theta(t) &= \alpha t + \beta W_t + t \int_{|z| > 1} z \nu_\theta(dz) - t \int_{|z| > 1} z \nu_\theta(dz) + \int_0^t \int_{|z| > 1} z M_\theta(dz, ds) \\ &\quad + \int_0^t \int_{|z| \leq 1} z (M_\theta(dz, ds) - \nu_\theta(dz) ds) \\ &= \tilde{\alpha} t + \beta W_t + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} z (M_\theta(dz, ds) - \nu_\theta(dz) ds) \end{aligned}$$

Analog können wir schreiben

$$S_t = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} z M_S(dz, ds)$$

Mithin mit den kompensierten Poisson-Zufallsmaßen  $\widetilde{M}_\theta$ ,  $\widetilde{M}_S$  und  $\widetilde{c} := c - \int_{\mathbb{R}} z \nu_S(dz)$

$$U_\theta(t) = u + \int_0^t (\widetilde{\alpha} U_\theta(s-) + \widetilde{c}) ds + \int_0^t \beta U_\theta(s-) dW_s \\ + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} U_\theta(s-) z \widetilde{M}_\theta(dz, ds) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} -z \widetilde{M}_S(dz, ds)$$

2. Wählen wir nun als  $\widetilde{\mu}$  das Produktmaß der beiden kompensierten Poisson-Zufallsmaße  $\widetilde{M}_\theta$  und  $\widetilde{M}_S$  (das geht wegen der Unabhängigkeit von  $L$  und  $S$ ), so können wir direkt Satz 5.1 anwenden. Ganz exakt folgt das, indem wir den kompensierten Sprungteil von  $\widehat{L}_\theta$ ,  $\widetilde{L}_\theta := \widehat{L}_\theta - \widetilde{\alpha} \cdot -\beta W$  und  $S$  als einen zweidimensionalen Lévy-Prozess (also mit unabhängigen Komponenten) schreiben. Die Lévy-Itô-Zerlegung im  $\mathbb{R}^2$  liefert uns dann

$$\begin{pmatrix} \widetilde{L}_\theta \\ S \end{pmatrix} = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \widetilde{\mu}(d(z_1, z_2), ds)$$

Wir setzen also in (5.2)  $a(x) := \widetilde{\alpha}x + \widetilde{c}$ ,  $b(x) := \beta x$ ,  $c(x, z) := xz_1 - z_2$  und möchten die Annahmen (A1), (A2) überprüfen:

(A2): Für die Sprünge von  $\widehat{L}(t)$  gilt (vgl. Abschnitt 3.2)  $\Delta \widehat{L}(t) = \exp(\Delta L(t)) - 1 > -1$ , also  $\Delta \widehat{L}_\theta(t) > -\theta$ . Nach Voraussetzung können wir also anstelle  $E = \mathbb{R}^2$  auch  $E := (-\theta, \infty) \times \mathbb{R}$  wählen. Damit ist (A2) mit  $\zeta = 1 - \theta$  erfüllt.

(A1): Die  $L^p$ -Voraussetzungen in (A1) sind die einzigen nicht offensichtlich erfüllten. Da  $\nu_S(\mathbb{R}) < \infty$  und  $\nu_\theta(\mathbb{R}) < \infty$ , gilt für  $1 < p < \infty$  und nach dem Satz von Fubini:

$$\int_{|z|>1} |z|^p \nu_S(dz) < \infty \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^2} |-z_2|^p \nu(dz) < \infty \Leftrightarrow c(0, \cdot) \in L^p(E, \nu) \\ \int_{|z|>1} |z|^p \nu_\theta(dz) < \infty \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^2} |z_1|^p \nu(dz) < \infty \Leftrightarrow \sup_x |\partial_x^n c(x, \cdot)| \in L^p(E, \nu) \forall n \geq 1$$

Nun wenden wir Satz 5.1 an, damit haben wir die gewünschte Differenzierbarkeit der Dichte von  $U_\theta(t)$  gezeigt.

3. Nun ist also  $\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} H_U(x, t)$  stetig (und  $\partial_t H_U(x, t)$  und  $\partial_x H_U(x, t)$  existieren, ersteres dank Herleitung in Kapitel 3), und damit  $\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} H_U(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} H_U(x, t)$ . Also ist  $\partial_t H_U(x, t)$  stetig. Wiederholte Anwendung dieses Arguments zeigt das Ergebnis.  $\square$

**Korollar 5.3** *Es gelten die Voraussetzungen von Satz 5.2. Dann ist  $H_Q(\cdot, t) \in C^\infty(\mathbb{R})$  für alle  $t > 0$ .*

**Beweis:** 1. Wir behaupten:  $\exp(L_\theta(t))$  hat eine  $C^\infty$ -Dichte. Denn  $\sigma_\theta = \sigma\theta > 0$ , und also ist der Diffusionsanteil des Lévy-Prozesses  $L_\theta$  positiv. Da der Diffusionsanteil unabhängig zu den anderen Teilen aufaddiert wird, ergibt sich die Verteilung von  $L_\theta(t)$  als Faltung von einer Normalverteilung und einer anderen Verteilung und ist damit absolutstetig und hat eine  $C^\infty$ -Dichte (vgl. Sato [61], S. 177). Also hat mit dem Transformationssatz für Dichten auch  $\exp(L_\theta(t))$  eine Dichte.

2.  $U_\theta(t)$  und  $\exp(L_\theta(t))$  stehen aufgrund der Existenz des Schadenterms offensichtlich nicht in einem funktionalen Zusammenhang. Also hat  $(U_\theta(t), \exp(L_\theta(t)))$  eine gemeinsame Dichte, und wieder folgt aus dem Transformationssatz für Dichten, dass  $Q_\theta(t) = ue^{L_\theta(t)} - U_\theta(t)$  eine  $C^\infty$ -Dichte hat.  $\square$

**Bemerkung 5.1** *Es gibt auch andere hinreichende Bedingungen für die Existenz einer  $C^\infty$ -Dichte unseres Lévy-Prozesses  $L_\theta(1)$  im Fall  $\sigma\theta = 0$  (siehe Sato [61], S. 190). Da diese aber unendlich viele Sprünge auf kompakten Intervallen voraussetzen, und damit den Fall  $\nu(\mathbb{R}) < \infty$  ausschließen, macht ihre Verwendung hier keinen Sinn.*

**Bemerkung 5.2** *Ohne die Existenz von Schadenssprüngen und mit zusätzlich  $c = 0$  wäre tatsächlich  $H_Q(\cdot, t) = 1_{(-\infty, 0)} \forall t \in [0, T]$ . In diesem Falle besteht eben jener funktionale Zusammenhang zwischen  $U_\theta(t)$  und  $\exp(L_\theta(t))$ .*

Für  $\theta = 1$  können wir Satz 5.2 nicht beweisen. Wir müssen hierfür stattdessen den Grenzwert  $\theta \uparrow 1$  betrachten.

Nun haben wir unter bestimmten Voraussetzungen die unendliche Differenzierbarkeit von  $H_Q$  nach  $x$  gezeigt. Fordern wir zusätzlich, dass  $Y, Z$  eine Dichte haben, so ersehen wir aus Kapitel 3, dass in diesem Fall alle Voraussetzungen der Herleitung der PIDE (3.27) erfüllt sind. Insbesondere folgt, dass dann auch die erste Ableitung nach  $t$  existiert. Also haben wir den Nachweis einer (fast) klassischen, nach  $x$  unendlich oft differenzierbaren Lösung der PIDE erbracht.

Für den Fall  $H = H_U$  haben wir (wieder falls  $Y, Z$  eine Dichte haben) sogar die Existenz einer in allen Argumenten auf  $(0, T] \times \mathbb{R}$  unendlich oft differenzierbaren Lösung gezeigt.

### 5.2.2 Eindeutigkeit – ein Maximumprinzip

Wir betrachten das Problem

$$\partial_t u = Lu + \lambda f_Y *_x u + \eta f_Z *_e u \tag{5.5}$$

auf  $\Omega_T = \Omega \times (0, T) = \mathbb{R}^d \times (0, T)$  für ein  $T > 0$ . Dabei sind  $\lambda, \eta > 0$ , die Faltungen definiert wie in Abschnitt 5.1:  $(f_Y *_x u)(x, t) = \int_{\mathbb{R}^d} f_Y(y)u(x - y, t)dy$  und  $(f_Z *_e u)(x, t) = \int_{\mathbb{R}^d} f_Z(z)u(e^{-diag(z)}x, t)dy$  mit  $f_Y$  und  $f_Z$  Dichten auf  $\mathbb{R}^d$ . Weiter sei (in teilweiser Abweichung von der bisher verwendeten Notation)

$$-L(x, t)u = - \sum_{i,j} a_{ij}(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_i b_i(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} - c(x, t)u \tag{5.6}$$

für  $x \in \mathbb{R}^d, t \in \mathbb{R}$  ein symmetrischer (schwach) elliptischer Differentialoperator (d.h. die Matrix  $A = (a_{ij})$  ist symmetrisch positiv semidefinit) mit  $c + \lambda + \eta \leq 0$ . (Letzteres können wir bei beschränktem  $c$  o.B.d.A fordern, da die Umformung  $v(x, t) := u(x, t)e^{-\gamma t}$  die Gleichung  $v_t = Lv + \lambda f_Y *_x v + \eta f_Z *_e v - \gamma v$  erfüllt.)



Wir verwenden hier die Notation  $u_x$  für den Gradienten,  $u_{xx}$  für die Jacobimatrix in den Ortsvariablen. Außerdem definieren wir den parabolischen Rand von  $\Omega_T$  durch  $\partial'\Omega_T := \{(x, t) : \bar{\Omega} \times \{0\} \cup \partial\Omega \times (0, T)\}$ . Die Norm  $\|f\|_{\infty, \Omega_T}$  stehe für die Supremumsnorm auf  $\Omega_T$ . Ähnlich wie in Krylov [42] zeigen wir:

**Proposition 5.4 (Maximumprinzip für  $\Omega$  beschränkt)** *Sei  $\Omega$  ein beschränktes Gebiet. Es sei  $u$  eine beschränkte und stetige Funktion in  $\Omega_T$ , deren Ableitungen  $u_x$  und  $u_{xx}$  in  $\Omega_T$  existieren und stetig seien, auch  $u_t$  existiere in  $\Omega_T$ . Es sei  $u$  (nicht notwendig stetig) auf ganz  $\mathbb{R}^d \times [0, T]$  fortgesetzt, so dass  $u \leq 0$  auf  $\mathbb{R}^d \times [0, T] \setminus \bar{\Omega}_T$ . Angenommen,  $Lu - u_t + \lambda f_Y *_x u + \eta f_Z *_e u \geq 0$  in  $\Omega_T$  und  $u \leq 0$  auf  $\partial'\Omega_T$ . Dann gilt  $u \leq 0$  in  $\Omega_T$ .*

**Beweis:** Sei  $\gamma > 0$ ,  $v := u - \frac{\gamma}{T-t}$  auf  $\Omega_T$ . Sei  $z_\gamma = (z_\gamma^x, z_\gamma^t)$  ein Punkt in  $\bar{\Omega}_T$ , an dem  $v$  sein Maximum annimmt. Offensichtlich muss  $z_\gamma \in \Omega_T \cup \partial'\Omega_T$  gelten.

Wir behaupten: Falls  $v(z_\gamma) \geq 0$ , dann  $z_\gamma \notin \Omega_T$ . Denn angenommen,  $v(z_\gamma) \geq 0$  und  $z_\gamma \in \Omega_T$ , dann gilt  $v_{xx}(z_\gamma) \leq 0$ ,  $v_t(z_\gamma) = v_x(z_\gamma) = 0$ , und es ist

$$\begin{aligned} 0 &\leq Lu(z_\gamma) - u_t(z_\gamma) + \lambda(f_Y *_x u)(z_\gamma) + \eta(f_Z *_e u)(z_\gamma) \\ &= Lu(z_\gamma) - \frac{\gamma}{(T - z_\gamma^t)^2} + \lambda \int_{\mathbb{R}^d} f_Y(z_\gamma^x - y)u(y, z_\gamma^t)dy + \eta \int_{\mathbb{R}^d} f_Z(y)u(e^{-\text{diag}(y)}z_\gamma^x, z_\gamma^t)dy \end{aligned} \quad (5.7)$$

da  $u_t(z_\gamma) = v_t(z_\gamma) + \frac{\gamma}{(T-z_\gamma^t)^2} = \frac{\gamma}{(T-z_\gamma^t)^2}$ . Nun gilt in  $z_\gamma \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} = \text{tr}(Av_{xx}) \leq 0$ , da die Spur eines Produktes zweier symmetrisch positiv semidefiniter Matrizen  $\geq 0$  ist (Satz von Fejér). Mithin gilt in  $z_\gamma Lu = Lv + c \frac{\gamma}{T-z_\gamma^t} \leq cv + c \frac{\gamma}{T-z_\gamma^t} = cu$ . Nun wollen wir die Integralterme abschätzen: Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} f_Y(z_\gamma^x - y)v(y, z_\gamma^t)dy &= \int_{\mathbb{R}^d} f_Y(z_\gamma^x - y)v^+(y, z_\gamma^t)dy - \int_{\mathbb{R}^d} f_Y(z_\gamma^x - y)v^-(y, z_\gamma^t)dy \\ &\leq 1 \cdot \|v^+(\cdot, z_\gamma^t)\|_\infty = \sup_{y \in \mathbb{R}^d} v(y, z_\gamma^t) = v(z_\gamma). \end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit gilt dabei, da wir  $u$  auf ganz  $\mathbb{R}^d \times [0, T]$  fortgesetzt haben und auf  $\mathbb{R}^d \times [0, T] \setminus \Omega_T$  daher  $0 \geq u \geq v$  gilt. Addieren wir wieder den (nicht von  $y$  abhängigen) Term  $\frac{\gamma}{T-z_\gamma^t}$  und nehmen die analoge Abschätzung für den anderen Integralterm vor (eine Fallunterscheidung für  $x$  ist hier sinnvoll), so erhalten wir insgesamt aus (5.7)

$$0 \leq -\frac{\gamma}{(T - z_\gamma^t)^2} + (cu)(z_\gamma) + (\lambda + \eta)u(z_\gamma) < 0,$$

da  $c + \lambda + \eta \leq 0$ , ein Widerspruch. Also ist entweder  $v(z_\gamma) < 0$  oder  $z_\gamma \in \partial'\Omega_T$  ( $\Rightarrow v(z_\gamma) \leq 0$ ). Daher ist  $v \leq 0$  in  $\Omega_T$ . Der Grenzübergang  $\gamma \rightarrow 0$  zeigt also  $u \leq 0$  in  $\Omega_T$ .  $\square$

Aus dem Beweis ersehen wir, dass es nicht darauf ankommt, *wie* die Faltung definiert ist, solange sie nur auf dem  $x$ -Argument operiert und die faltende Funktion eine Dichte ist.

Wir erweitern das Resultat auf den unbeschränkten Fall, wobei wir ähnliche Bedingungen stellen:

**Satz 5.5 (Maximumprinzip für  $\Omega$  unbeschränkt)** Sei  $\Omega$  ein (möglicherweise unbeschränktes) Gebiet. Es sei  $u$  eine beschränkte und stetige Funktion in  $\Omega_T$ , deren Ableitungen  $u_x$  und  $u_{xx}$  in  $\Omega_T$  existieren und stetig seien, auch  $u_t$  existiere in  $\Omega_T$ . Es sei  $u$  (nicht notwendig stetig) auf ganz  $\mathbb{R}^d \times [0, T]$  fortgesetzt, so dass  $u \leq 0$  auf  $\mathbb{R}^d \times [0, T] \setminus \overline{\Omega_T}$ . Für die Koeffizienten von  $L$  und die Faltungen fordern wir

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} a(x, t) + \langle x, b(x, t) \rangle &\leq K(1 + |x|^2) \text{ in } \Omega_T \\ \lambda(f_Y * |\cdot|^2)(x) + \eta(f_Z *^e |\cdot|^2)(x) &\leq G(1 + |x|^2) \text{ in } \Omega_T \end{aligned}$$

für  $K, G > 0$ .

Angenommen,  $Lu - u_t + \lambda f_Y *_{x} u + \eta f_Z *^e u \geq 0$  in  $\Omega_T$  und  $u \leq 0$  auf  $\partial'\Omega_T$ . Dann gilt  $u \leq 0$  in  $\Omega_T$ .

Im Falle  $\Omega = \mathbb{R}^d$  ist natürlich  $\partial'\Omega_T = \Omega \times \{0\}$ . Hier sagt die Randbedingung also für  $t > 0$  nichts über das Verhalten von  $u$  für  $|x| \rightarrow \infty$  aus. Eine Aussage darüber folgt allerdings aus dem Beweis dieses Satzes.

**Beweis:** Wir definieren  $v_0 := (1 + |x|^2) \exp(\gamma t)$  für ein noch zu wählendes  $\gamma$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} Lv_0 - v_{0t} + \lambda f_Y *_{x} v_0 + \eta f_Z *^e v_0 \\ = \exp(\gamma t) \left[ \sum_{i,j} a_{ij} 2\delta_{ij} + \sum_i b_i 2x_i + c(1 + |x|^2) \right] \\ - \gamma(1 + |x|^2) \exp(\gamma t) + \exp(\gamma t) [\lambda f_Y * (1 + |\cdot|^2) + \eta f_Z *^e (1 + |\cdot|^2)] \end{aligned}$$

Wählen wir daher  $\gamma := 2K + G$ , dann ist  $Lv_0 - v_{0t} + \lambda f_Y *_{x} v_0 + \eta f_Z *^e v_0 \leq 0$  in  $\Omega_T$  (wobei wir 1 aus den Faltungstermen gezogen und  $c + \lambda + \eta \leq 0$  verwendet haben). Sei  $m := \|u\|_{\infty, \Omega_T}$ ,  $\Omega_{T,R} := [\Omega \cap B(0, R)] \times (0, T)$ . Nun definieren wir  $w_R := u - v_0 m \frac{1}{1+R^2}$ . Für  $|x| = R$  gilt  $w_R = u - m \exp(\gamma t) \leq 0$ , für  $t = 0$  nach Voraussetzung  $w_R = u - \frac{1+|x|^2}{1+R^2} m \exp(\gamma 0) \leq 0$ , also insgesamt  $w_R \leq 0$  auf  $\partial'\Omega_{T,R}$ . Außerdem gilt wegen der Linearität der beiden Faltungsoperationen nach Voraussetzung

$$\begin{aligned} Lw_R - w_{Rt} + \lambda f_Y *_{x} w_R + \eta f_Z *^e w_R \\ = Lu - u_t + \lambda f_Y *_{x} u + \eta f_Z *^e u - (Lv_0 - v_{0t} + \lambda f_Y *_{x} v_0 + \eta f_Z *^e v_0) m \frac{1}{1+R^2} \geq 0 \end{aligned}$$

sogar in  $\Omega_T$ . Wende nun Prop. 5.4 an. Es gilt also  $w_R \leq 0$  in  $\Omega_{T,R}$  und damit  $u \leq v_0 m \frac{1}{1+R^2}$ . Grenzübergang  $R \rightarrow \infty$  zeigt  $u \leq 0$  in  $\Omega_T$ .  $\square$

Die Bedingungen an die Faltungsterme sind für  $d = 1$  erfüllt, falls  $Y$  zweite Momente hat und die Dichte  $f_Z$  der negativen Marktsprünge von  $L_\theta$  relativ schnell exponentiell abfällt:

$$\begin{aligned} (f_Y * |\cdot|^2)(x) &= \int f_Y(y)(x-y)^2 dy = x^2 - 2x\mathbb{E}Y + \mathbb{E}Y^2 \\ (f_Z *^e |\cdot|^2)(x) &= \int f_Z(z)(xe^{-z})^2 dz = x^2 \int f_Z(z)e^{-2z} dz \end{aligned}$$

Da  $f_Z(z) = 0$  für  $z \leq -1$  für alle  $\theta$  (vgl. Abschnitt 3.2), ist letztere Bedingung immer erfüllt.

**Korollar 5.6 (Eindeutigkeit der Lösung)** *Es gelten die Voraussetzungen der ersten beiden Absätze von Satz 5.5. Dann gilt*

$$\|u\|_{\infty, \Omega_T} \leq T \|Lu - u_t + \lambda f_Y *_{x} u + \eta f_Z *^e u\|_{\infty, \Omega_T} + \|u\|_{\infty, \partial' \Omega_T}. \quad (5.8)$$

*Insbesondere gilt also: falls  $u = 0$  auf  $\partial' \Omega_T$  und  $Lu - u_t + \lambda f_Y *_{x} u + \eta f_Z *^e u = 0$  in  $\Omega_T$ , so ist  $u \equiv 0$  in  $\Omega_T$ .*

Aus dem Korollar folgt auch, dass eine klassische Lösung  $u$  von (5.5) stetig vom Anfangswert in  $\mathbb{R}^d \times \{0\}$  abhängig ist.

**Beweis:** Die rechte Seite ist o.B.d.A endlich. Sei  $N_0 := \|Lu - u_t + \lambda f_Y *_{x} u + \eta f_Z *^e u\|_{\infty, \Omega_T}$ ,  $N_1 := \|u\|_{\infty, \partial' \Omega_T}$ . Dann gilt für die Funktion  $v := u - N_1 - N_0 t$  nach Voraussetzung  $v \leq 0$  auf  $\partial' \Omega_T$ , sowie

$$Lv - v_t + \lambda f_Y *_{x} v + \eta f_Z *^e v = Lu - u_t + \lambda f_Y *_{x} u + \eta f_Z *^e u + N_0 - \underbrace{(c + \lambda + \eta)}_{\leq 0} (N_1 + N_0 t) \geq 0.$$

Also ist  $u \leq N_1 T + N_0$ . Mit derselben Methode zeigen wir  $-u \leq N_1 T + N_0$ .  $\square$

Auf Grund ihrer Definition als *tails* einer Verteilung erfüllen unendlich differenzierbare Lösungen der PIDE (5.1) die Voraussetzungen in Satz 5.5 bzgl.  $u$ . Die Koeffizienten des Differentialoperators  $L$  erfüllen ebenfalls die geforderten Voraussetzungen. Für die Dichten  $f_Y$  und  $f_Z$ , die die Schnittmenge der Voraussetzungen aus dem Malliavin-Kalkül (Satz 5.2) und dem Maximumprinzip (Satz 5.5) erfüllen, haben wir also insgesamt

Für  $H = H_U$  besitzt (5.1) genau eine klassische Lösung. Diese Lösung ist unendlich oft differenzierbar im Ort und in der Zeit.

Für  $H = H_Q$  besitzt (5.1) genau eine (fast) klassische Lösung. Diese Lösung ist unendlich oft differenzierbar im Ort, und einmal differenzierbar in der Zeit.

In beiden Fällen erfüllt die Lösung außerdem eine Stabilitätsbedingung (5.8), da in unserem Fall  $c(x, t) \equiv -\lambda - \eta$ .

Wie das Beispiel  $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$  und  $Y \sim \exp(\lambda)$  zeigt, ist oben angesprochene Schnittmenge nichtleer.

## 5.3 Existenz und Eindeutigkeit einer schwachen Lösung

Wir möchten nun Existenz und Eindeutigkeit einer schwachen variationellen Lösung unseres Problems zeigen. Dabei nutzen wir die Resultate der Theorie der parabolischen Differentialgleichungen (siehe Kapitel 4).

Wir stellen noch einmal zwei wesentliche Probleme fest: Die Tatsache, dass unsere Koeffizientenfunktionen  $a(x)$  und  $b(x)$  auf dem betrachteten Raum  $\mathbb{R}$  unbeschränkt sind – dies behandeln wir durch gewichtete Sobolevräume. Zweitens die Tatsache, dass wir es mit einem degeneriert-parabolischen Problem zu tun haben – durch Addition einer Konstante  $\varepsilon > 0$  zu  $a(x)$  erhalten wir die Elliptizität des Differentialoperators  $L$ . Es ergibt sich folgendes Vorgehen:

1. Umformen des Problems in ein Problem mit Dirichlet(= 0)-Randbedingungen durch Subtraktion einer Funktion  $h$ .
2. Finden einer (eindeutigen) schwachen Lösung des mit  $\varepsilon > 0$  „elliptisierten“ Problems
3. Grenzübergang  $\varepsilon \rightarrow 0$  und Übertragen der Lösung auf das degeneriert-parabolische Problem

Der Übersichtlichkeit halber lösen wir zuerst das Problem ohne Integralterme, um dann in einer leichten Verallgemeinerung die Lösung auf den Fall mit Integraltermen zu erweitern.

**Annahme 5.1** *Das  $a$  in  $a(x)$  sei  $> 0$ . (Sonst hätten wir ein Problem erster Ordnung.) Im ganzen Abschnitt seien  $C, C_i > 0$  immer wieder neu passend gewählte Konstanten (die unter Umständen von  $\varepsilon$  abhängen können).*

### 5.3.1 Dirichlet-Randbedingungen

Wir nehmen für den Moment an, zu unserem Problem (5.1) gäbe es eine eindeutige Lösung  $u$ . Wir betrachten die Funktion  $v = u - h$  für ein  $h \in C^\infty(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$  (also  $h$  unabhängig von  $t$ ,  $h(x, t) = h(x, 0) =: h(x) \forall t \geq 0$ ). Sie ist Lösung der PIDE

$$\partial_t v + Lv = \eta f_Z *^e v + \lambda f_Y *^e_x v + (-Lh + \eta f_Z *^e h + \lambda f_Y *^e_x h) \quad v(\cdot, 0) = 1_{(-\infty, 0)} - h \quad (5.9)$$

Es gilt also

$$v \text{ Lösung von (5.9)} \quad \Leftrightarrow \quad u = v + h \text{ Lösung von (5.1)}$$

Wir vermerken, dass  $h$  so gewählt werden kann, dass die Anfangsbedingung  $1_{(-\infty, 0)} - h \in L^2_{x^2+1}(\mathbb{R})$ , gleichzeitig aber  $-Lh + \eta f_Z *^e h + \lambda f_Y *^e_x h \in L^2_{(x^2+1)^{-1}}(\mathbb{R})$ . Beispielsweise kann die Funktion

$$\tilde{h}(x) = \begin{cases} 0 & x \geq 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases}$$

mit dem Standardglättungskern  $\eta_1$  geglättet werden, so dass  $h := \eta_1 * \tilde{h} \in C^\infty(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ . Es ist dann wunschgemäß  $h \in [0, 1]$ , also wegen  $\|f_Y\|_1 = \|f_Z\|_1 = 1$  auch die Faltungsterme beschränkt.

$h$  sei im Folgenden so gewählt wie oben beschrieben. Anstatt  $v$  schreiben wir im Folgenden wieder  $u$ .

### 5.3.2 Elliptisiertes Problem ohne Faltungsterm

Wir betrachten in diesem Unterabschnitt das parabolische Problem

$$\partial_t u + Lu - \varepsilon u_{xx} = f \quad \text{in } \mathbb{R} \times (0, T) \quad u(\cdot, 0) = g. \quad (5.10)$$

Den uniform elliptischen Differentialoperator  $Lu - \varepsilon u_{xx}$  multiplizieren wir mit einer Funktion  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  und integrieren über  $\mathbb{R}$  und anschließend partiell, um die dazu gehörende Bilinearform zu finden:

$$\int_{\mathbb{R}} Lu\varphi dx = \int (ax^2 + \varepsilon)u_x\varphi_x dx + \int (2ax + bx - c)u_x\varphi dx + (\lambda + \eta) \int u\varphi dx$$

Wir definieren also auf  $V := H_{x^2+1}^1(\mathbb{R})$  die Bilinearform

$$A_\varepsilon(u, v) := \int (ax^2 + \varepsilon)u_x v_x dx + \int (2ax + bx - c)u_x v dx + (\lambda + \eta) \int uv dx \quad (5.11)$$

Aus Kapitel 4 wissen wir, dass der gewichtete Sobolevraum  $V = H_{x^2+1}^1(\mathbb{R})$  ein Hilbertraum ist und  $\overline{C_0^\infty(\mathbb{R})} = H_{x^2+1}^1(\mathbb{R})$ . Wir möchten diese Dichtheitseigenschaft ausnutzen, dazu benötigen wir eine Stetigkeitsaussage:

Falls  $A_\varepsilon$  stetig ist, kann es eindeutig vom dichten Unterraum  $C_0^\infty(\mathbb{R})$  zu einer bilinearen Abbildung (also eben unserer oben definierten bzgl. der schwachen Ableitung) auf ganz  $V$  fortgesetzt werden. Also zeigen wir:

**Proposition 5.7 (Stetigkeit der Bilinearform)** *Es gilt für ein  $C_a > 0$*

$$|A_\varepsilon(u, v)| \leq C_a \|u\|_V \|v\|_V, \quad \forall u, v \in V$$

also ist  $A_\varepsilon : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Bilinearform.

**Beweis:** Es ist mit massiver Verwendung der Hölderschen Ungleichung

$$\begin{aligned} |A_\varepsilon(u, v)| &\leq \int |(ax^2 + \varepsilon)^{1/2}u_x(ax^2 + \varepsilon)^{1/2}v_x| dx + \int |(2ax + bx - c)u_x v| dx \\ &\quad + (\lambda + \eta) \int |uv| dx \\ &\leq C_1 \|u_x\|_{L_{x^2+1}^2} \|v_x\|_{L_{x^2+1}^2} + C_2 \|u_x\|_{L_{x^2+1}^2} \|v\|_{L^2} + C_3 \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \\ &\leq C_1 \|u_x\|_{L_{x^2+1}^2} \|v_x\|_{L_{x^2+1}^2} + C_2 \|u_x\|_{L_{x^2+1}^2} \|v\|_{L_{x^2+1}^2} + C_3 \|u\|_{L_{x^2+1}^2} \|v\|_{L_{x^2+1}^2} \\ &\leq C_a \|u\|_V \|v\|_V, \end{aligned}$$

wobei letzteres eine einfache Konsequenz aus  $(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$  ist. □

**Proposition 5.8 (Gårdingsche Ungleichung)** *Es existieren Konstanten  $c_a, c_h > 0$  mit*

$$A_\varepsilon(v, v) \geq c_a \|v\|_V^2 - c_h \|v\|_{L_{x^2+1}^2} \quad \forall v \in V$$

für  $0 < \varepsilon \leq a$ .

**Beweis:** Es gilt für  $\varepsilon \leq a$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon \|v_x\|_{L^2_{x^{2+1}}}^2 &\leq A_\varepsilon(v, v) - \int (2ax + bx - c)v_x v dx - (\lambda + \eta) \int v^2 dx \\ &\leq A_\varepsilon(v, v) + \int |(2ax + bx - c)v_x v| dx + (\lambda + \eta) \|v\|_{L^2}^2 \\ &\leq A_\varepsilon(v, v) + \frac{C\varepsilon_1}{2} \|v_x\|_{L^2_{x^{2+1}}}^2 + \left(\lambda + \eta + \frac{1}{2\varepsilon_1}\right) \|v\|_{L^2_{x^{2+1}}}^2, \quad \varepsilon_1 > 0 \end{aligned}$$

letzteres gilt unter der Verwendung der Ungleichungen  $ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$  und  $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ :

$$\begin{aligned} \int |(2ax + bx - c)v_x v| dx &= \int \sqrt{\varepsilon_1} |(2ax + bx - c)| |v_x| \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} |v| dx \\ &\leq \int \frac{\varepsilon_1}{2} v_x^2 (2ax + bx - c)^2 + \frac{1}{2\varepsilon_1} v^2 dx \\ &\leq \frac{C\varepsilon_1}{2} \|v_x\|_{L^2_{x^{2+1}}}^2 + \frac{1}{2\varepsilon_1} \|v\|_{L^2_{x^{2+1}}}^2 \end{aligned}$$

für ein frei wählbares  $\varepsilon_1 > 0$ . Insgesamt also

$$\begin{aligned} A_\varepsilon(v, v) &\geq \left(\varepsilon - \frac{C\varepsilon_1}{2}\right) \|v_x\|_{L^2_{x^{2+1}}}^2 - \left(\lambda + \eta + \frac{1}{2\varepsilon_1}\right) \|v\|_{L^2_{x^{2+1}}}^2 \\ &= \left(\varepsilon - \frac{C\varepsilon_1}{2}\right) \|v\|_V^2 - \left(\varepsilon - \frac{C\varepsilon_1}{2} + \lambda + \eta + \frac{1}{2\varepsilon_1}\right) \|v\|_{L^2_{x^{2+1}}}^2 \end{aligned}$$

nach Definition der  $V$ -Norm. Mit  $\varepsilon_1$  klein genug folgt die Behauptung.  $\square$

Die beiden letzten Propositionen zeigen, dass  $A_\varepsilon$   $V$ -koerziv im Sinne von Wloka [66] ist. Offensichtlich würde der Beweis der Gårding'schen Ungleichung nicht für  $\varepsilon = 0$  funktionieren. In der Tat sagt der Satz von Gårding genau das aus: Für die Sobolevräume  $H_0^1(\Omega)$  und beschränktes Gebiet  $\Omega$  ist die starke Elliptizität (Definition ähnlich zur uniformen) notwendig und hinreichend für die  $H_0^1(\Omega)$ -Koerzivität. (Für eine genauere Formulierung siehe z.B. Wloka [66], S. 282.)

Wir erinnern an die Definition  $W := \{u : u \in L^2(0, T; V), u' \in L^2(0, T; V^*)\}$  aus Satz 4.8 und die abstrakte Formulierung unseres parabolischen Problems für  $(F(t))(v) := \int_{\mathbb{R}} f(x, t)v(x)dx$ :

$$\langle u'(t), v \rangle_V + A_\varepsilon(u(t), v; t) = \langle F(t), v \rangle_V \quad \forall v \in V \quad (5.12)$$

$$u(0) = g \quad (5.13)$$

**Satz 5.9** *Das Problem (5.10) hat für  $g \in L^2_{x^{2+1}}(\mathbb{R})$  und  $f \in L^2_{(x^{2+1})^{-1}}(\mathbb{R})$  genau eine schwache Lösung  $u \in W$ .*

**Beweis:** Wir wollen Satz 4.8 anwenden. Überprüfen wir daher die Voraussetzungen: Nach Prop. 5.7 und Prop. 5.8 ist  $A_\varepsilon$  stetig und erfüllt eine Gårdingsche Ungleichung.

Wählen wir nun das Evolutionstriplet: Sei  $H := L^2_{x^2+1}(\mathbb{R})$ ,  $j : V \rightarrow H$  die identische Einbettung, also  $j(v) := v$ . Offensichtlich ist  $j$  linear, stetig und injektiv, sowie  $j(V)$  dicht in  $H$  wegen der Dichteigenschaften von  $C_0^\infty(\mathbb{R})$ .  $V$  ist ein Hilbertraum, also reflexiv. Also haben wir (mit  $j^*$  wie in Abschnitt 4.4) durch  $V \xrightarrow{j} H \xrightarrow{j^*} V^*$  ein Evolutionstriplet definiert.

Nun gilt bekanntermaßen für allgemeine messbare Funktionen  $u, v$

$$\left| \int uv dx \right| \leq \int |uv| dx \leq \left( \int |u|^2 dx \right)^{1/2} \left( \int |v|^2 dx \right)^{1/2}$$

und damit wegen der Positivität auch  $|\int uv dx|^2 \leq \int |u|^2 dx \cdot \int |v|^2 dx$ . Also gilt auch für die durch  $(F(t))(v) := \int_{\mathbb{R}} f(x, t)v(x) dx$  definierte Funktion  $F$

$$\begin{aligned} |(F(t))(v)|^2 &= \left| \int_{\mathbb{R}} (x^2 + 1)^{-1/2} f(x, t)v(x)(x^2 + 1)^{1/2} dx \right|^2 \\ &\leq \int \frac{1}{x^2 + 1} |f(x, t)|^2 dx \cdot \int (x^2 + 1) |v(x)|^2 dx \\ &= \int \frac{1}{x^2 + 1} |f(x, t)|^2 dx \cdot \|v\|_H^2, \end{aligned}$$

folglich wegen  $\|v\|_H \leq \|v\|_V$

$$\|F\|_{L^2(0, T; V^*)}^2 \stackrel{def}{=} \int_0^T \|F(t)\|_{V^*}^2 dt \leq \int_0^T \int \frac{1}{x^2 + 1} |f(x, t)|^2 dx dt,$$

also da in unserem Fall  $f$  nicht von  $t$  abhängt,  $F \in L^2(0, T; V^*)$ . □

Also haben wir die eindeutige (schwache) Lösbarkeit unseres Problems (5.10) für ein wie im Abschnitt 5.3.1 geeignet gewähltes  $h$  gezeigt.

### 5.3.3 Elliptisiertes Problem mit Faltungsterm

Wir betrachten in diesem Unterabschnitt das parabolische Problem mit Faltungstermen

$$\partial_t u + Lu - \varepsilon u_{xx} = \eta f_Z *^e u + \lambda f_Y *^x u + f \quad \text{in } \mathbb{R} \times (0, T) \quad u(\cdot, 0) = g. \quad (5.14)$$

Wir werden dabei die Ergebnisse des letzten Unterabschnittes erweitern. Analog zu dort ergibt sich die Bilinearform

$$\begin{aligned} B_\varepsilon(u, v) &:= A_\varepsilon(u, v) + M(u, v) \\ &:= \int (ax^2 + \varepsilon) u_x v_x dx + \int (2ax + bx - c) u_x v dx + (\lambda + \eta) \int uv dx \\ &\quad - \int \left( \int f_Y(y) u(x - y) dy \right) v dx - \int \left( \int f_Z(z) u(xe^{-z}) dz \right) v dx \end{aligned}$$

**Proposition 5.10 (Stetigkeit der Bilinearform)** Falls  $\int f_Z(z)e^z dz < \infty$ , so gilt für ein  $C_a > 0$

$$|B_\varepsilon(u, v)| \leq C_a \|u\|_V \|v\|_V, \quad \forall u, v \in V$$

also ist  $B_\varepsilon : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Bilinearform.

**Beweis:** Wir wissen bereits  $A_\varepsilon(u, v) \leq C \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall u, v \in V$ . Zeigen wir also dasselbe für  $M(u, v)$ :

Es gilt mit der Hölderschen Ungleichung

$$|M(u, v)| \leq \|v\|_{L^2} \left( \int \left( \int f_Y(y) u(x-y) dy \right)^2 dx \right)^{1/2} + \|v\|_{L^2} \left( \int \left( \int f_Z(z) u(xe^{-z}) dz \right)^2 dx \right)^{1/2}.$$

Nun gilt für den ersten Integralterm mit der Jensenschen Ungleichung (da  $|\cdot|^2$  konvex und  $f_Y$  eine Dichte) und dem Satz von Fubini:

$$\begin{aligned} \int \left( \int f_Y(y) u(x-y) dy \right)^2 dx &\leq \int \int f_Y(y) u^2(x-y) dy dx \\ &= \int f_Y(y) \left( \int u^2(x-y) dx \right) dy \stackrel{b=x-y}{=} \int f_Y(y) \left( \int u^2(b) db \right) dz \\ &= \|u\|_{L^2}^2 \cdot 1 \end{aligned}$$

Für den zweiten Integralterm gilt analog

$$\begin{aligned} \int \left( \int f_Z(z) u(xe^{-z}) dz \right)^2 dx &\leq \int \int f_Z(z) u^2(xe^{-z}) dz dx = \int f_Z(z) \left( \int u^2(xe^{-z}) dx \right) dz \\ &\stackrel{b=xe^{-z}}{\leq} \int f_Z(z) e^z \left( \int u^2(b) db \right) dz = \|u\|_{L^2}^2 \cdot \int f_Z(z) e^z dz \end{aligned}$$

Also haben wir insgesamt mit Lemma 4.11

$$|M(u, v)| \leq C \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq C \|u\|_{L^2_{x^2+1}} \|v\|_{L^2_{x^2+1}}$$

und damit sofort  $|B_\varepsilon(u, v)| \leq C_a \|u\|_V \|v\|_V$ . □

**Proposition 5.11 (Gårdingsche Ungleichung)** Falls  $\int f_Z(z)e^z dz < \infty$ , so existieren Konstanten  $c_a, c_h > 0$  mit

$$B_\varepsilon(v, v) \geq c_a \|v\|_V^2 - c_h \|v\|_{L^2_{x^2+1}} \quad \forall v \in V$$

für  $0 < \varepsilon \leq a$ .

**Beweis:** Im letzten Beweis haben wir gesehen, dass  $|M(v, v)| \leq C_1 \|v\|_{L^2_{x^2+1}}^2$ . Nun gilt wie im Beweis von Prop. 5.8, dass

$$\begin{aligned} \varepsilon \|v_x\|_{L^2_{x^2+1}} &\leq A_\varepsilon(v, v) + \frac{C\varepsilon_1}{2} \|v_x\|_{L^2_{x^2+1}}^2 + \left( \lambda + \eta + \frac{1}{2\varepsilon_1} \right) \|v\|_{L^2_{x^2+1}}^2, \quad \varepsilon_1 > 0 \\ &\leq B_\varepsilon(v, v) + \frac{C\varepsilon_1}{2} \|v_x\|_{L^2_{x^2+1}}^2 + \left( \lambda + \eta + \frac{1}{2\varepsilon_1} \right) \|v\|_{L^2_{x^2+1}}^2 + |M(v, v)|, \end{aligned}$$



daher

$$B_\varepsilon(v, v) \geq \left( \varepsilon - \frac{C\varepsilon_1}{2} \right) \|v_x\|_V^2 - \left( \varepsilon - \frac{C\varepsilon_1}{2} + \lambda + \eta + \frac{1}{2\varepsilon_1} + C_1 \right) \|v\|_{L^2_{x^2+1}}^2,$$

und für  $\varepsilon_1$  klein genug folgt die Behauptung.  $\square$

**Satz 5.12** Falls  $\int f_Z(z)e^z dz < \infty$ , so hat (5.14) für  $g \in L^2_{x^2+1}(\mathbb{R})$  und  $f \in L^2_{(x^2+1)^{-1}}(\mathbb{R})$  eine eindeutige schwache Lösung  $u \in W$ .

**Beweis:** Identischer Beweis wie in Satz 5.9, nur für die Bilinearform  $B_\varepsilon$ .  $\square$

### 5.3.4 Lösung des degeneriert-parabolischen Problems

Wir betrachten in diesem Unterabschnitt das degeneriert-parabolische Problem mit Faltungstermen

$$\partial_t u + Lu = \eta f_Z *^e u + \lambda f_Y *^x u + f \quad \text{in } \mathbb{R} \times (0, T) \quad u(\cdot, 0) = g. \quad (5.15)$$

und zeigen die Konvergenz der Lösungen  $u_\varepsilon$  der mit  $\varepsilon > 0$  elliptisierten Probleme. Unser Ansatz funktioniert dabei analog wie die Galerkin-Methode zur Herleitung von Satz 4.8.

**Annahme 5.2 (Uniforme Beschränktheit der Lösung)** Es gelte  $\|u_\varepsilon\|_{L^2(0,T;V)} \leq C$  für eine Konstante  $C > 0$  unabhängig von  $\varepsilon$ .

**Bemerkung 5.3** Leider ist die von den energy estimates mitgelieferte Abschätzung von  $\varepsilon$  abhängig: Die Konstante  $C(C_a, c_a, c_h)$  aus Satz 4.8 konvergiert gegen  $\infty$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$ , denn für unser  $c_a$  gilt dann  $c_a \leq \varepsilon \rightarrow 0$ . Wie man allerdings anhand des Beweises von Satz 4.8 leicht sehen kann, folgt aus der uniformen Beschränktheit von  $u_\varepsilon$  auch die entsprechende uniforme Beschränktheit von  $u'_\varepsilon$  in der  $L^2(0, T; V^*)$ -Norm (vgl. dazu die Beweise in Evans [17], Thm. 7.1.2 oder Brokate [9], Lemma 3.16 bzw. Thm. 3.19).

**Satz 5.13 (Existenz)** Es gelte Annahme 5.2. Falls  $\int f_Z(z)e^z dz < \infty$ , so hat (5.15) für  $g \in L^2_{x^2+1}(\mathbb{R})$  und  $f \in L^2_{(x^2+1)^{-1}}(\mathbb{R})$  eine schwache Lösung  $u \in W$ .

**Beweis:** Für die  $u_\varepsilon$  mit  $0 < \varepsilon \leq a$  gilt  $\forall v \in V, \varphi \in C_0^\infty(0, T)$

$$\int_0^T \langle u'_\varepsilon(t), v \rangle_V \varphi(t) dt + \int_0^T B_\varepsilon(u_\varepsilon(t), v) \varphi(t) dt = \int_0^T \langle F(t), v \rangle_V \varphi(t) dt \quad (5.16)$$

Sei  $v \in V$  und  $\varphi \in C_0^\infty(0, T)$  fest gewählt. Nach Annahme 5.2 sind  $u_\varepsilon$  in der  $L^2(0, T; V)$ - und  $u'_\varepsilon$  in der  $L^2(0, T; V^*)$ -Norm beschränkt (unabhängig von  $\varepsilon$ ). Aus der Funktionalanalysis folgt daher, dass es eine (Teil-)Folge  $u_{\varepsilon_n}$  gibt mit  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  und ein  $u$  mit  $u \in L^2(0, T; V)$  und  $u' \in L^2(0, T; V^*)$  gibt mit

$$\begin{aligned} u_{\varepsilon_n} &\rightharpoonup u && \text{in } L^2(0, T; V) \\ u'_{\varepsilon_n} &\rightharpoonup u' && \text{in } L^2(0, T; V^*) \end{aligned}$$

(Eine leichte Übung unter Verwendung der schwachen Zeitableitung zeigt, dass der Grenzwert unten  $u'$  sein muss, siehe am Ende des Beweises.) Alle  $u_{\varepsilon_n}$  sind schwache Lösungen des elliptisierten Problems. Wir zeigen nun für den Grenzwert, dass er schwache Lösung von (5.15) ist.

1. Wir behaupten: Die für  $z \in L^2(0, T; V^*)$  durch  $z \mapsto \int_0^T \langle z(t), v \rangle_V \varphi(t) dt$  definierte Abbildung ist  $\in (L^2(0, T; V^*))^*$ . In der Tat gilt mit Hölder

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \langle z(t), v \rangle_V \varphi(t) dt \right| &\leq \int_0^T \|z(t)\|_{V^*} \|v\|_V \|\varphi\|_\infty dt \\ &\leq \|v\|_V \|\varphi\|_\infty \sqrt{T} \|z\|_{L^2(0, T; V^*)} \end{aligned}$$

2. Wir betrachten  $\tilde{B}_\varepsilon(u, v) := \int (ax^2 + \varepsilon)u_x v_x dx$  sowie  $\hat{B}(u, v) := B_\varepsilon(u, v) - \tilde{B}_\varepsilon(u, v)$ . Genauso wie unter 1. folgt, dass die durch  $z \mapsto \int_0^T \hat{B}(z(t), v) \varphi(t) dt$  definierte Abbildung  $\in (L^2(0, T; V))^*$  ist: es gilt

$$\left| \int_0^T \hat{B}(z(t), v) \varphi(t) dt \right| \leq \|v\|_V \|\varphi\|_\infty C \sqrt{T} \|z\|_{L^2(0, T; V^*)}$$

3. Genauso gilt: Die durch  $z \mapsto \int_0^T \tilde{B}_\varepsilon(z(t), v) \varphi(t) dt$  für festes  $\varepsilon$  definierte Abbildung  $T_\varepsilon$  ist  $\in (L^2(0, T; V))^*$ . Es gilt sogar mehr:  $\|T_\varepsilon - T_0\|_{V^*} \leq C\varepsilon \|v\|_V \|\varphi\|_\infty$  (also  $T_\varepsilon \rightarrow T_0$ ), denn

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^T \tilde{B}_\varepsilon(z(t), v) \varphi(t) dt - \int_0^T \tilde{B}_0(z(t), v) \varphi(t) dt \right| \leq \|\varphi\|_\infty \int_0^T \left| \tilde{B}_\varepsilon(z(t), v) - \tilde{B}_0(z(t), v) \right| dt \\ &\leq \|\varphi\|_\infty \int_0^T \left| \varepsilon \int z(t)_x v_x dx \right| dt \leq \varepsilon \|\varphi\|_\infty \int_0^T \|z(t)_x\|_{L^2} \|v_x\|_{L^2} dt \leq \varepsilon \|\varphi\|_\infty \|v\|_V \sqrt{T} \|z\|_{L^2(0, T; V)} \end{aligned}$$

4. Aus der Funktionalanalysis wissen wir, dass in einem normierten Raum  $X$  die starke Konvergenz von  $(x_n^*)_{n \in \mathbb{N}} \subset X^*$ ,  $x_n^* \rightarrow x^*$ , und die schwache Konvergenz von  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ ,  $x_n \rightharpoonup x$  sogar  $x_n^*(x_n) \rightarrow x^*(x)$  impliziert. Also konvergiert (5.16) für  $\varepsilon = \varepsilon_n$  gegen

$$\int_0^T \langle u'(t), v \rangle_V \varphi(t) dt + \int_0^T B_0(u(t), v) \varphi(t) dt = \int_0^T \langle F(t), v \rangle_V \varphi(t) dt.$$

Da  $v$  und  $\varphi$  beliebig waren, ist  $u$  mit Lemma 4.5 eine schwache Lösung von (5.15).

5. Zeigen wir schließlich, dass der schwache Grenzwert  $w$  aus  $u'_{\varepsilon_n} \rightharpoonup w$  tatsächlich die schwache Zeitableitung von  $u$  ist: Wir wissen aus Lemma 4.7, dass gilt:

$$\int_0^T \langle j(u_{\varepsilon_n}(t)), j(v) \rangle_H \varphi'(t) dt = - \int_0^T \langle u'_{\varepsilon_n}(t), v \rangle_V \varphi(t) dt \quad \forall v \in V, \varphi \in C_0^\infty(0, T). \quad (5.17)$$

Für  $x, y \in V$  gilt  $\langle j(x), j(y) \rangle_H \stackrel{\text{def}}{=} \langle j^*(j(x)), y \rangle_V$ . Da  $j^* \circ j : V \rightarrow V^*$  offensichtlich eine stetige Abbildung ist, ist analog zu den Argumentationen oben die Abbildung  $z \mapsto \int_0^T \langle j(z(t)), j(v) \rangle_H \varphi'(t) dt \in (L^2(0, T; V))^*$ . Oben haben wir bereits gezeigt, dass für  $z \in L^2(0, T; V^*)$  die Abb.  $z \mapsto \int_0^T \langle z(t), v \rangle_V \varphi(t) dt \in (L^2(0, T; V^*))^*$  ist, und daher konvergieren die beiden Seiten in (5.17) für  $n \rightarrow \infty$  und zeigen damit  $w = u'$ .  $\square$

**Satz 5.14 (Eindeutigkeit)** *Unter den Voraussetzungen von Satz 5.13 ist die schwache Lösung sogar eindeutig, und auch hierfür gelten energy estimates.*

**Beweis:** Da die Differenz zweier Lösungen  $u_1 - u_2$  von (5.15) wieder Lösung mit  $f = g = 0$  ist, genügt es zu zeigen, dass jede Lösung  $u$  von (5.15) mit  $f = g = 0$  identisch 0 ist.

Für eine schwach konvergente Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ ,  $x_n \rightharpoonup x$  gilt  $\|x\|_X \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_X$ . Nachdem die *energy estimates* für jedes unserer  $u_{\varepsilon_n}$  (nach Annahme unabhängig von  $\varepsilon_n$ ) gelten, gelten sie folglich auch für ihren schwachen Grenzwert. Also ist

$$\|u\|_{L^2(0,T;V)} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_{\varepsilon_n}\|_{L^2(0,T;V)} \leq C(\|g\|_H + \|F\|_{L^2(0,T;V^*)})$$

und genauso  $\|u'\|_{L^2(0,T;V^*)} \leq C(\|g\|_H + \|F\|_{L^2(0,T;V^*)})$ . □

### 5.3.5 Offene Fragen

Noch ist nicht klar, wie die uniforme Beschränktheit von  $u$  gezeigt werden kann. Folgende Ansätze funktionieren jedenfalls nicht:

- Statt  $H^1_{x^2+1}$  nur  $H^1_{x^2}$  verwenden: Dann wäre die Bilinearform nicht mehr stetig, erstens da  $b$  *affin*-linear ist, und zweitens, da die Bilinearform der Integrale definitiv gerade bzgl. der  $L^2$ -Norm, aber nicht bzgl. der  $L^2_{x^2}$ -Norm stetig ist.
- In der Gårdingschen Ungleichung ist die Konstante  $c_a$  nicht unabhängig von  $\varepsilon$ , es sei denn, es gälte  $\forall f \in L^2_{x^2+1}$ .

$$\int x^2 f^2 dx \geq k \int f^2 dx \tag{5.18}$$

für ein  $k > 0$  (unabhängig von  $\varepsilon$ ). (Das ist aber nicht der Fall, wie in einem einfachen Beispiel schon für  $C^\infty_0$ -Funktionen gezeigt werden kann.) Eine Einschränkung auf die Funktionen, die diese Beziehung (5.18) für ein  $k > 0$  erfüllen, gelingt nicht, da diese keinen Vektorraum bilden und nicht die  $C^\infty_0$ -Funktionen enthalten. Im übrigen wären dann die Normen von  $H^1_{x^2+1}$  und  $H^1_{x^2}$  äquivalent, d.h. dann wären alle Beweise in beiden Normen richtig.

- Obiger Ansatz funktioniert auch für beschränktes Gebiet nicht, da das Problem der Nicht-Äquivalenz der beiden Normen der oben genannten Räume in 0 begründet liegt. (Denn hier degeneriert ja gerade der Differentialoperator  $L$ .)

Folgende Wege könnten zum Ziel führen:

- Die relativ häufig angewandte Methode der Elliptischen Regularisierung (Fichera/Oleřnik/Radkevič) setzt eine längere Einarbeitungszeit voraus, siehe z.B. Oleřnik und Radkevič [54]. Mit diesen Methoden gelingen Resultate für degeneriert-parabolische Probleme, allerdings vorerst nur für beschränkte Koeffizienten (Oleřnik [53]). Ein

zweiter evtl. möglicher Ansatz (Igari [28], [29]) arbeitet mit einer Standardglättungsfunktion (auch dieses Resultat setzt beschränkte Koeffizienten voraus). In jedem Falle müsste man die dortigen Lösungen auf PIDEs erweitern (mit nicht gesicherten Erfolgsaussichten).

- Zu prüfen ist, ob in unserer verwendeten Methode eine andere Abschätzung möglich ist, z.B. anhand einer kompakten Einbettung (Lenhart und Yong [45]), oder durch Beweis der Regularität des elliptisierten Problems, und daraus folgender Abschätzung  $\max_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_V \leq C$ , siehe z.B. Evans [17], S. 403.

## 5.4 Lokalisierung

Wir können die PIDE numerisch nur behandeln, wenn wir das Gebiet lokalisieren auf  $\Omega = (-R, R)$  für ein  $R > 0$  statt  $\Omega = \mathbb{R}$ . Lokalisierung heißt hier, dass wir die Randbedingungen auf  $\mathbb{R} \setminus (-R, R) \times (0, T)$  einsetzen, und nur noch die Lösung auf dem verbleibenden Gebiet  $(-R, R) \times (0, T)$  untersuchen. Anders gesagt, gehen wir etwa für  $u = H_Q$  von der Voraussetzung aus, dass  $Q_\theta(t) \in (-R, R)$  (betrachten also die bedingte Wahrscheinlichkeit auf  $(-R, R)$ ).

### 5.4.1 Existenz und Eindeutigkeit

Aus Abschnitt 5.3 folgt einfach ein Existenz- und Eindeutigkeitsresultat:

Sei  $R > 0$  gegeben. Wir wählen hier  $V := H_0^1((-R, R))$  und wieder  $W := \{u : u \in L^2(0, T; V), u' \in L^2(0, T; V^*)\}$ . Wir wählen die Funktion  $h$  aus Abschnitt 5.3.1 so, dass  $h(-R) = 1$ ,  $h(R) = 0$ . Damit können wir uns auf die Betrachtung folgenden Problems beschränken:

$$\partial_t u + Lu = \eta f_Z *^e u + \lambda f_Y *_{x} u + f \quad \text{in } (-R, R) \times (0, T) \quad u(\cdot, 0) = g, \quad (5.19)$$

für das wir eine Lösung in  $W$  suchen. Auch hier müssen wir wieder den Umweg über das elliptisierte Problem für  $\varepsilon > 0$  gehen:

$$\partial_t u + Lu - \varepsilon u_{xx} = \eta f_Z *^e u + \lambda f_Y *_{x} u + f \quad \text{in } (-R, R) \times (0, T) \quad u(\cdot, 0) = g \quad (5.20)$$

Wir definieren die Bilinearform als Einschränkung auf  $V$  der in Abschnitt 5.3.3 definierten Bilinearform

$$B_\varepsilon^R(u, v) := B_\varepsilon(u, v) \quad \forall u, v \in V = H_0^1((-R, R)),$$

wobei die  $u, v \in H_0^1((-R, R))$  als durch 0 auf  $\mathbb{R}$  fortgesetzt gelten, damit die Integrale sauber definiert sind. ( $B_\varepsilon^R$  ergibt sich also als Fortsetzung vom in  $V$  dichten Unterraum  $C_0^\infty((-R, R))$ .)

Da die Gewichtsfunktion  $w(x) = x^2 + 1$  auf  $(-R, R)$  sowohl nach oben wie nach unten beschränkt ist, ist  $H_{x^2+1}^1((-R, R)) = H^1((-R, R))$ , und die Normen der beiden Räume

sind äquivalent. Eine Untersuchung des Beweishergangs zeigt daher, dass  $B_\varepsilon^R$  tatsächlich stetig ist und eine Gårdingsche Ungleichung für  $V$  erfüllt.

Das Evolutionstripel ist hier  $V \xrightarrow{j} L^2((-R, R)) \xrightarrow{j^*} V^*$ .

Zusammenfassend haben wir also folgenden Satz:

**Korollar 5.15** (5.20) hat für  $f, g \in L^2((-R, R))$  eine eindeutige schwache Lösung  $u \in W$ .

Wir lassen wie in Abschnitt 5.3  $\varepsilon \rightarrow 0$  gehen. Wir sehen wieder durch eine Untersuchung der Beweise der Sätze 5.13, 5.14, dass gilt:

**Korollar 5.16** Es gelte Annahme 5.2. Dann hat (5.19) für  $f, g \in L^2((-R, R))$  eine eindeutige schwache Lösung  $u \in W$ .

## 5.4.2 Eine probabilistische Abschätzung für den Lokalisierungsfehler

Bezeichne  $u(x, t) = P(Q_\theta(t) > x)$  die gesuchte und  $u_R(x, t) := P(Q_\theta(t) > x | Q_\theta(t) \in [-R, R])$  die erhaltene Lösung. (Für den Fall  $u = H_U$  funktioniert die Abschätzung genauso.) Dann gilt

**Proposition 5.17**

$$|u_R(x, t) - u(x, t)| \leq 2 - 2P(Q_\theta(t) \in [-R, R])$$

**Beweis:** Mit den Bezeichnungen  $A := \{\omega : Q_\theta(t) \in [-R, R]\}$  und  $d = d_{t,R} := P(A)$  (o.B.d.A  $d \in (0, 1)$ ) gilt  $u(x, t) = \int 1_{Q_\theta(t) > x} dP = \mathbb{E}1_{Q_\theta(t) > x}$  und genauso  $u_R(x, t) = \frac{1}{d}\mathbb{E}[1_{Q_\theta(t) > x} 1_A]$ . Also gilt

$$\begin{aligned} |u_R(x, t) - u(x, t)| &= \left| \mathbb{E} \left[ 1_{Q_\theta(t) > x} \left( \frac{1}{d} 1_A - 1 \right) \right] \right| \leq 1 \cdot \mathbb{E} \left| \frac{1}{d} 1_A - 1 \right| \\ &= \int \underbrace{\left( \frac{1}{d} 1_A - 1 \right)}_{\geq 0 \ \forall \omega \in A} 1_A dP + \int \underbrace{\left( 1 - \frac{1}{d} 1_A \right)}_{=1 \geq 0 \ \forall \omega \notin A} 1_{A^c} dP \\ &= \int \left( \frac{1}{d} - 1 \right) 1_A dP + 1 \cdot P(A^c) = 2 - 2d. \end{aligned}$$

Dabei haben wir verwendet, dass  $\int |g| dP = \int g^+ dP + \int g^- dP$ . □

Falls das  $p$ -te Moment existiert (dies können wir vor Lösung der Differentialgleichung eigentlich nicht sagen), ist eine weitere Abschätzung mit der Tschebyscheffschen Ungleichung möglich:

$$1 - d = P(Q_\theta(t) \notin [-R, R]) = P(|Q_\theta(t)| > R) \leq \frac{\int |Q_\theta(t)|^p dP}{R^p} \quad (5.21)$$

Das bedeutet, dass der Fehler der auf  $[-R, R]$  betrachteten Lösung sich wie  $R^{-p}$  reduziert.<sup>1</sup>

Die Formel (5.21) liefert uns die Möglichkeit, den numerischen Lokalisierungsfehler grob abzuschätzen, indem wir das  $p$ -te Moment mithilfe der numerisch erzielten Lösung schätzen. Nachdem für die Lösungen  $v$  laut Abschnitt 5.3.4  $v(T) \in L_{x^2+1}^2$  gilt, ist zu erwarten, dass  $v(T)$  für  $|x| \rightarrow \infty$  schneller als  $|x|^{-1.5}$  gegen 0 geht und damit  $v_x(T)$  für  $|x| \rightarrow \infty$  schneller als  $|x|^{-2.5}$  gegen 0 geht. Da die Dichte von  $Q_\theta(T)$  (bis auf Vorzeichen) für große  $x$  genau  $v_x(T)$  entspricht, müsste das erste Moment existieren.

Der Ansatz in der Praxis dürfte eher sein, aus einer Monte-Carlo-Simulation (siehe Abschnitt 6.3) mit wenigen Pfaden den größten absoluten Wert von  $Q_\theta(T)$  plus etwas Sicherheitsabstand als  $R$  zu wählen.

---

<sup>1</sup>Analog funktioniert die Abschätzung für den unwahrscheinlichen Fall, dass in einer Umgebung um 0 die Laplace-Transformierte oder momenterzeugende Funktion von  $Q_\theta(t)$  existiert; in diesem Fall fällt der Fehler exponentiell ab.

# Kapitel 6

## Numerische Lösung

In diesem Kapitel soll es darum gehen, für die hergeleiteten partiellen Integro-Differentialgleichungen (PIDE) numerisch eine Lösung zu bestimmen. Dies erfolgt mit einem Finite-Differenzen-Verfahren.

Für Grundlagen der Numerik verweisen wir auf Quarteroni et al. [58], für Grundlagen der Numerik partieller Differentialgleichungen auf Knabner und Angermann [41]. Eine schön lesbare Einführung zur numerischen Lösung parabolischer PDE findet man in [62].

### 6.1 Vorarbeiten

Es gelte für das gesamte Kapitel:

**Annahme 6.1** *Es sei  $\theta \in (0, 1]$ . Es sei  $L \sim (\gamma, \sigma^2, \nu)$  ein jump diffusion-Prozess, also  $\nu(\mathbb{R}) < \infty$ , und insbesondere  $L(t) = \gamma^0 t + \sigma W(t) + \sum_{0 < s \leq t} \Delta L(s)$  mit  $\gamma^0 := \gamma - \int_{|x| \leq 1} x \nu(dx)$ . Die Schadenssprünge  $Y$  bzw. die Marktsprünge  $Z$  von  $L$  haben eine Dichte  $f_Y$  bzw.  $f$  und treten mit der Intensität  $\lambda$  bzw.  $\eta$  auf.*

Wir untersuchen erneut die PIDE für den jump diffusion-Prozess<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} (\lambda + \eta)H(x, t) + \partial_t H(x, t) + b(x)\partial_x H(x, t) - a(x)\partial_{xx} H(x, t) \\ = \eta \mathbb{E}H(xe^{-Z}, t) + \lambda \mathbb{E}H(x - Y, t), \end{aligned} \quad (6.1)$$

wobei wir wieder definieren

$$b(x) = x\gamma_\theta^0 - \frac{x}{2}\sigma_\theta^2 - c \qquad a(x) = \frac{1}{2}x^2\sigma_\theta^2.$$

---

<sup>1</sup>den Index  $Q$  bzw.  $U$  lassen wir weg, wenn Überlegungen auf  $H_Q$  wie auf  $H_U$  zutreffen

**Bestimmen der Parameter von  $L_\theta$**

Wir möchten nun die dabei verwendeten Parameter  $\gamma_\theta^0$ ,  $\sigma_\theta^2$  und  $G_\theta(b) := \nu_\theta((-\infty, b])$  mithilfe von Lemma 3.1 genauer bestimmen. Sofort angeben können wir

$$\sigma_\theta^2 = \theta^2 \sigma^2. \tag{6.2}$$

Nun betrachten wir die schon in Lemma 3.1 verwendete Funktion

$$\ell : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow (\log(1 - \theta), \infty) \\ x & \mapsto \log(1 + \theta(e^x - 1)) \end{cases}$$

Für  $\theta > 0$  ist sie bijektiv (bei  $\theta = 1$  ersetze man die linke Intervallgrenze  $\log(1 - \theta)$  durch  $\infty$ , hier gilt  $\ell(x) = x$ ), und die Umkehrfunktion ist gegeben durch

$$\ell^{-1}(y) = \log \left( 1 + \frac{1}{\theta}(e^y - 1) \right)$$

Durch einfache Äquivalenzumformungen sieht man daher

$$G_\theta(b) = \nu(\{x : \ell(x) \leq b\}) = \begin{cases} G \left[ \log \left( 1 + \frac{1}{\theta}(e^b - 1) \right) \right] & b > \log(1 - \theta) \\ 0 & b \leq \log(1 - \theta) \end{cases} \tag{6.3}$$

für  $G(b) := \nu((-\infty, b])$ . (Nachdem die halboffenen Mengen ein Erzeuger der Borel- $\sigma$ -Algebra sind, ist  $\nu$  eindeutig durch  $G$  charakterisiert.) Daraus folgt (siehe im Beweis von Prop. 2.9), dass für die Intensität  $\eta$  der Marktsprünge  $\eta = G(\infty) = G_\theta(\infty)$  gilt und daher die Verteilungsfunktion der Sprünge  $F(b) = 1/\eta G(b)$  bzw.  $F_\theta(b) = 1/\eta G_\theta(b)$ .

Die Dichte  $f_\theta$  der Sprünge von  $L_\theta$  ergibt sich also in Abhängigkeit von  $f = F'$  wie folgt:

$$f_\theta(z) = \begin{cases} f \left[ \log \left( 1 + \frac{1}{\theta}(e^z - 1) \right) \right] \frac{e^z}{e^z - 1 + \theta} & z > \log(1 - \theta) \\ 0 & z \leq \log(1 - \theta) \end{cases}$$

Nun betrachten wir  $\gamma_\theta^0$ . Mit Substitution  $y = \ell(x)$  gilt

$$\begin{aligned} & \int \ell(x) 1_{|\ell(x)| \leq 1} - \theta x 1_{|x| \leq 1} \nu(dx) \\ &= \eta \int \ell(x) 1_{|\ell(x)| \leq 1} f(x) dx - \theta \eta \int_{-1}^1 x f(x) dx \\ &= \eta \int_{\log(1-\theta)}^\infty 1_{|y| \leq 1} \frac{e^y}{e^y + \theta - 1} f \left( \log \left( 1 + \frac{1}{\theta}(e^y - 1) \right) \right) y dy - \theta \eta \int_{-1}^1 x f(x) dx \\ &= \eta \int_{|y| \leq 1} y f_\theta(y) dy - \theta \eta \int_{-1}^1 x f(x) dx \end{aligned}$$

Beim Übergang zu  $\gamma_\theta^0$  fällt der erste Integralterm weg, also folgt

$$\gamma_\theta^0 = (1 - \theta)\delta + \theta \left( \gamma + \frac{\sigma^2}{2} \right) - \frac{\theta^2 \sigma^2}{2} - \theta \int_{-1}^1 x dG(x). \tag{6.4}$$



### Umformen der PIDE

Formen wir nun die PIDE (6.1) geeignet um. Mit der Dichte  $f_Y$  der Schäden ist (für  $\theta = 1$  fassen wir  $\frac{x}{1-\theta}$  als  $\infty$  auf)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}H(x - Y, t) &= \int_0^\infty f_Y(y)H(x - y, t)dy = \int_{-\infty}^x f_Y(x - y)H(y, t)dy, \\ \mathbb{E}H(xe^{-Z}, t) &= \int_{\log(1-\theta)}^\infty f_\theta(z)H(xe^{-z}, t)dz \stackrel{y=xe^{-z}}{=} \begin{cases} \int_0^{\frac{x}{1-\theta}} g_x(y)H(y, t)dy & x > 0 \\ H(0, t) & x = 0 \\ \int_{\frac{x}{1-\theta}}^0 -g_x(y)H(y, t)dy & x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

wobei für  $x > 0$  (und damit in der Substitution  $u > 0$ )

$$g_x(y) := f_\theta\left(\log\frac{x}{y}\right) \cdot \frac{1}{y} = \begin{cases} f\left[\log\left(1 + \frac{1}{\theta}\left(\frac{x}{y} - 1\right)\right)\right] \frac{x}{yx - (1-\theta)y^2} & y \in (0, x/(1-\theta)) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Analog für  $x < 0$  die selbe Funktion mit unterschiedlichem Definitionsbereich (das Minus oben vor dem  $g_x$  im Fall  $x < 0$  macht die Dichtefunktion wieder positiv):

$$g_x(y) := f_\theta\left(\log\frac{x}{y}\right) \cdot \frac{1}{y} = \begin{cases} f\left[\log\left(1 + \frac{1}{\theta}\left(\frac{x}{y} - 1\right)\right)\right] \frac{x}{yx - (1-\theta)y^2} & y \in (x/(1-\theta), 0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

**Bemerkung 6.1 (Der Fall  $\theta = 0$ )** Für  $\theta = 0$  wäre  $\ell(x) \equiv 0$  (siehe Lemma 3.1), das heißt alle Marktsprünge von  $L_\theta$  wären Sprünge der Größe 0. Das heißt, es existiert keine Dichte der Sprünge. Dementsprechend wäre

$$\mathbb{E}H(xe^{-Z}) = \mathbb{E}H(xe^{-0}) = H(x, t),$$

und der komplette Marktsprungterm würde aus der PIDE (6.1) herausfallen (das hatten wir auch nicht anders erwartet).

Damit jedoch in der Numerik keine Probleme auftauchen (etwa durch den Versuch, eine nicht existente Dichte auszurechnen), fordern wir hier  $\theta \neq 0$ .

**Bemerkung 6.2** Nach der Herleitung durch Substitution ist das Integral über  $g_x$  für beschränkte Funktionen  $H$  immer wohldefiniert. Allerdings muss bei der praktischen Berechnung des Integrals darauf geachtet werden, dass die Grenze selbst nie eingesetzt wird. Eventuell ist eine variable Schrittweite sinnvoll.

## 6.2 Numerische Lösung der PIDE

Zur Lösung der PIDE (6.1) verwenden wir ein implizites Finite-Differenzen-Verfahren (FD-Verfahren) mit äquidistanter Diskretisierung.

Wir wollen einmal parabolische Probleme als gewöhnliche Differentialgleichungen auffassen: Dazu betrachten wir eine PDE mit einem Differentialoperator  $Lu = -u_{xx}$  und 0-Randbedingungen,

$$u_t = -Lu = u_{xx} \text{ auf } \mathbb{R} \times (0, T) \quad u(\cdot, 0) = u_0. \quad (6.5)$$

Interpretieren wir  $L$  als Abbildungsvorschrift  $f$  auf einem geeignet definierten Funktionenraum  $S$ , so sieht man direkt die Analogie zu  $u'(t) = f(u(t))$ . Nun können wir in  $t$  diskretisieren und erhalten etwa ein explizites Verfahren

$$u^{\nu+1} = u^\nu + h_t \cdot -Lu^\nu, \quad \nu = 0, 1, \dots \quad (6.6)$$

das auch als Euler-Verfahren bekannt ist. Dabei steht der Index  $\nu$  für die Zeit,  $h_t$  für die Zeitdiskretisierung (= Schrittweite). Diskretisieren wir auch  $L$  z.B. durch einen zentrierten Differenzenquotienten und bezeichnen die nun entstehenden Gitterpunkte von  $u$  durch  $u_k^\nu$ , so wird (6.6) zu

$$\frac{u_k^{\nu+1} - u_k^\nu}{h_t} = \frac{u_{k+1}^\nu - u_{k-1}^\nu}{2h_x}, \quad \nu = 0, 1, \dots, \quad k = \dots, -1, 0, 1, \dots \quad (6.7)$$

Genauso kann ein implizites Verfahren hergeleitet werden. Beschränkt man sich auf ein Gebiet  $(-R, R)$ , so erhält man hier eine Folge von zu lösenden Gleichungssystemen mit einer dünnbesetzten Matrix  $E$ :  $Eu^{\nu+1} = u^\nu$ .

Etwas anders sieht die Situation für eine PIDE aus: Hier sorgt der Integralterm im Allgemeinen dafür, dass wir eine relativ gut gefüllte Matrix  $E$  vorfinden. Daher lassen sich übliche effiziente Techniken der Problemlösung bei PDE nicht ohne weiteres übertragen.

### 6.2.1 Ausgangs-Verfahren

Wir führen an dieser Stelle die Schreibweise ein, wie wir sie im Folgenden benutzen: Wir beschränken uns bei der Lösung von (6.1) auf  $(-R, R) \times (0, T)$  für ein  $R > 0$  genügend groß. Die Orts-Schrittweite sei  $h_x := R/k_R$ , die Zeit-Schrittweite  $h_t := T/k_T$  für  $k_R, k_T \in \mathbb{N}$ .

Für die numerische Lösung der PIDE schreiben wir im Folgenden immer  $u$ :  $u_k^\nu := u(x_k, t_\nu)$  sei der am Gitterpunkt  $(x_k, t_\nu)$  ausgewertete Funktionswert von  $u$ ,  $t_\nu = \nu h_t$  ( $\nu = 0, 1, \dots, k_T$ ),  $x_k = -R + kh_x$  ( $k = 0, \dots, 2k_R$ ).

#### Ersetzung der Ableitungen und Integrale

Wir verwenden als Annäherungen an die Ableitungen

$$\begin{aligned} \partial_t u_k^\nu &\longrightarrow \frac{u_k^\nu - u_k^{\nu-1}}{h_t} \\ \partial_x u_k^\nu &\longrightarrow \frac{u_{k+1}^\nu - u_{k-1}^\nu}{2h_x} \\ \partial_{xx} u_k^\nu &\longrightarrow \frac{u_{k+1}^\nu - 2u_k^\nu + u_{k-1}^\nu}{h_x^2}, \end{aligned}$$

und als Annäherungen an die Integrale auf  $(-R, R)$  die zusammengesetzte Trapezregel:

$$\int_{-\infty}^{x_k} f_Y(x_k - y)u^\nu(y)dy \longrightarrow \frac{h_x}{2} \left[ f_Y(x_k - x_0)u_0^\nu + f_Y(0)u_k^\nu + 2 \sum_{l=1}^{k-1} f_Y(x_k - x_l)u_l^\nu \right]$$

$$\int_0^{x_k/(1-\theta)} g_{x_k}(z)u^\nu(z)dz \longrightarrow \frac{h_x}{2} \left[ g_{x_k}(x_{k^*(k)})u_{k^*(k)}^\nu + 2 \sum_{l=k_R+1}^{k^*(k)-1} g_{x_k}(x_l)u_l^\nu \right],$$

wobei letztere Gleichung für  $x_k > 0$  gilt, und  $k^*(k) = k_k^*$  (die obere Integralgrenze) definiert ist durch

$$k^* := \left( k_R + \text{sign}(x_k) \min \left\{ \text{ceil} \left( \frac{|k - k_R|}{1 - \theta} \right) - 1, k_R \right\} \right)_{0 \leq k \leq 2k_R}.$$

(Da die Einsetzung der Grenze 0 im Integral unmöglich ist, haben wir der Stützstelle  $x_{k_R+1}$  doppeltes Gewicht gegeben.) Die Ersetzung für  $x_k < 0$  lautet mit dieser Definition nahezu gleich:

$$\int_{x_k/(1-\theta)}^0 -g_{x_k}(z)u^\nu(z)dz \longrightarrow -\frac{h_x}{2} \left[ g_{x_k}(x_{k^*(k)})u_{k^*(k)}^\nu + 2 \sum_{l=k^*(k)+1}^{k_R-1} g_{x_k}(x_l)u_l^\nu \right],$$

### Lokalisierung (der Integrale)

Wir können die PIDE numerisch nicht auf einem unendlichen Intervall  $\mathbb{R}$  lösen. Daher lokalisieren wir auf  $(-R, R)$  und verwenden auf dem Rand die Randbedingung  $u(-R, \cdot) \equiv 1$  und  $u(R, \cdot) \equiv 0$  (siehe dazu Abschnitt 5.1).

Auch die Integrale müssen lokalisiert werden. Allerdings ist es nicht besonders sinnvoll (wie bis jetzt in den obigen Ersetzungen geschehen), das Integral einfach in  $R$  oder  $-R$  abzuschneiden (also den Rand scharf zu halten). Stattdessen verfolgen wir das Konzept der aufgeweichten Randbedingungen: Wir setzen  $u(x, \cdot) \equiv 0$  für  $x \geq R$  und  $u(x, \cdot) \equiv 1$  für  $x \leq -R$ . Diese Werte verwenden wir, um die Restintegrale abzuschätzen:

Für das Schadenssprungintegral gilt

$$\int_{-\infty}^{-R} f_Y(x - y)u(y, t)dy \approx \bar{F}_Y(x + R)$$

wobei  $\bar{F}_Y = 1 - F_Y$  den *tail* der Verteilung bezeichnet. Für den Fehler dieser Abschätzung gilt ( $u$  ist monoton fallend)

$$\bar{F}_Y(x + R) - \int_{-\infty}^{-R} f_Y(x - y)u(y, t) \leq (1 - u(-R, t))\bar{F}_Y(x + R)$$

Genauso gilt für das Marktsprungintegral bei negativen  $x$ , genauer  $-R > \frac{x}{1-\theta}$  (bei positiven  $x$  mit  $\frac{x}{1-\theta} > R$  fällt aufgrund der Randbedingungen der Restterm einfach weg):

$$\begin{aligned} \int_{\frac{x}{1-\theta}}^{-R} -g_x(y)u(y,t)dy &\approx \int_{\log(1-\theta)}^{\log(-\frac{x}{R})} f_\theta(z)dz = F_\theta\left(\log\left(-\frac{x}{R}\right)\right) \\ &= F\left[\log\left(1 + \frac{1}{\theta}\left(-\frac{x}{R} - 1\right)\right)\right]. \end{aligned}$$

Dabei haben wir auch hier unsere bekannte Substitution  $xe^{-z} = y$  verwendet.

Eine Abschätzung für den gesamten Lokalisierungsfehler haben wir schon in Abschnitt 5.4.2 hergeleitet.

### Erhaltenes Gleichungssystem

Ich betrachte nun  $\tilde{u}^\nu := (u_0^\nu, \dots, u_{2k_R}^\nu)^T$ .  $\tilde{u}$  erfüllt für geeignete  $E, \xi$  folgende Folge von Gleichungssystemen ( $\nu = 0, \dots, k_T - 1$ ):

$$\left( \begin{array}{c|ccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \hline \xi & & E & & \tilde{\xi} \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array} \right) \tilde{u}^{\nu+1} = \tilde{u}^\nu \quad (6.8)$$

Nehmen wir die Randbedingungen aus dem LGS und setzen  $u^\nu := (u_1^\nu, \dots, u_{2k_R-1}^\nu)^T$ , so wird (6.8) zu

$$Eu^{\nu+1} = u^\nu - \xi, \quad (6.9)$$

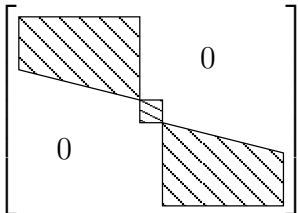
wobei

$E = S + M + T =$  Schadensprungterm + Marktsprungterm + restTerm,

$$\begin{aligned} S &= \frac{-\lambda h_x h_t}{2} \begin{bmatrix} f_Y(0) & & & 0 \\ 2f_Y(h_x) & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 2f_Y(h_x(2k_R - 2)) & \cdots & 2f_Y(h_x) & f_Y(0) \end{bmatrix}, \\ T &= -\frac{h_t}{h_x^2} A \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 & & 0 \\ 1 & -2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & -2 \end{bmatrix} + \frac{h_t}{2h_x} B \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ -1 & 0 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & -1 & 0 \end{bmatrix} + [1 + (\lambda + \eta)h_t]I, \\ \text{wo } A &:= \begin{bmatrix} a(x_1) & & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & & a(x_{2k_R-1}) \end{bmatrix}, \quad B := \begin{bmatrix} b(x_1) & & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & & b(x_{2k_R-1}) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Außerdem ist  $M$  gegeben durch die Elemente

$$M_{kj} = -\eta h_t \begin{cases} h_x g_{x_k}(x_j) & (k > k_R \wedge j \in [k_R + 1, k_k^* - 1]) \vee (k < k_R \wedge j \in [k_k^* + 1, k_R - 1]) \\ \frac{h_x}{2} g_{x_k}(x_j) & k \neq k_R \wedge j = k_k^* \\ 1 & k = j = k_R \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

und daher von der Form  $M =$  

$\xi = \xi_S + \xi_M + \xi_T$  setzt sich zusammen aus den Komponenten

$$\xi_S = -h_T \lambda \left( \frac{h_x}{2} \begin{bmatrix} f_Y(h_x) \\ \vdots \\ f_Y(h_x(2k_R - 1)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{F}_Y(x_1 + R) \\ \vdots \\ \bar{F}_Y(x_{2k_R-1} + R) \end{bmatrix} \right),$$

$$(\xi_M)_k = \begin{cases} -h_T \eta \left\{ -\frac{h_x}{2} g_{x_k}(-R) + F \left[ \log \left( 1 - \frac{1}{\theta} \left( \frac{x_k}{R} + 1 \right) \right) \right] \right\} & k_k^* = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad \text{und}$$

$$\xi_T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \left( -\frac{h_t}{h_x^2} a(x_1) - \frac{h_t}{2h_x} b(x_1) \right).$$

### 6.2.2 Stabilitäts-/Geschwindigkeitserwägungen

*Implizite Verfahren* bei parabolischen PDE haben gegenüber *expliziten* den Vorteil einer unbedingten Stabilität (also einer stetigen Abhängigkeit der numerischen Lösung von den Anfangswerten ohne Zusatzbedingungen an die Diskretisierung). Das gewährleistet, dass sich kleine Rundungsfehler nicht zu stark auswirken.

Die Idee, eine geeignete Funktion  $h$  zu subtrahieren (wie in Abschnitt 5.3.1 verwendet), scheitert daran, dass etwa die im genannten Abschnitt angeführte Beispielfunktion analytisch nicht integrierbar ist und numerisch nur unter extremem Aufwand. Da diese numerische Integration für jeden Wechsel der Diskretisierung und von  $\theta$  neu durchgeführt werden muss, verlangsamt dies das Verfahren erheblich, und die erhaltenen Werte sind auch nicht besser.

Die Folge linearer Gleichungssysteme  $Eu^{\nu+1} = u^\nu - \xi$ , ( $\nu = 0, \dots, k_T - 1$ ) wird üblicherweise mit einer indirekten Methode (wie etwa *conjugate gradient*) unter Verwendung einer *Vorkonditionier-Matrix* gelöst. Für unser Problem mit dichtbesetzten Matrizen erweist sich eine LR-Zerlegung als die schnellere Variante. Diese wird einmal berechnet, und dann in jedem einzelnen Schritt verwendet.

Die Fehler der Ersetzungen der Ableitungen und der Integrale im Ort sind sämtlich (mind.)  $O(h_x^2)$ , der Fehler bei der Zeitableitung ist  $O(h_t)$ . Also ist unser Verfahren erster Ordnung in der Zeit und zweiter Ordnung im Ort (zumindest asymptotisch angesichts der Modifikation im Marktsprungintegral).

Das Standard-Verfahren zweiter Ordnung in der Zeit (das von Crank-Nicolson, eine Mischung von explizitem und implizitem Verfahren) würde in unserem Fall keinen Sinn machen: Das Crank-Nicolson-Verfahren würde die Erzeugung einer zweiten dichtbesetzten Matrix erfordern, und die Lösung der LGS würde erheblich aufwändiger werden. Wir können allerdings eine andere Art von Verfahren zweiter Ordnung verwenden:

### 6.2.3 Verfahren zweiter Ordnung in der Zeit

Hierfür nehmen wir folgende Ersetzung der Zeitableitung vor:

$$\partial_t u_k^\nu \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} 1/h_t (u_k^\nu - u_k^{\nu-1}) & \nu = 1 \\ 1/h_t (\frac{3}{2}u_k^\nu - 2u_k^{\nu-1} + \frac{1}{2}u_k^{\nu-2}) & \nu \geq 2 \end{cases}$$

Die Zeitdiskretisierung für  $\nu \geq 2$  nennt sich BDF2 (backward differentiation formula) und ihr Fehler ist  $O(h_t^2)$ . Wir erhalten für  $\nu \geq 0$  folgendes Verfahren (in symbolischer Notation,  $I$  bezeichnet den Integralterm):

$$u_k^{\nu+2} + \frac{2}{3}h_t(Lu_k^{\nu+2} - Iu_k^{\nu+2}) = \frac{4}{3}u_k^{\nu+1} - \frac{1}{3}u_k^\nu.$$

Durch Vergleich mit (6.9) und den Rechnungen danach sieht man, dass für  $\tilde{E}$ ,  $\tilde{\xi}$  aus der Iterationsvorschrift

$$\tilde{E}u^{\nu+2} = \frac{4}{3}u^{\nu+1} - \frac{1}{3}u^\nu - \tilde{\xi} \quad (6.10)$$

$\tilde{E} = \frac{2}{3}E + \frac{1}{3}I$  und  $\tilde{\xi} = \frac{2}{3}\xi$  gilt. Für das Verfahren mit BDF2 müssen wir also keine neue Matrix, sondern lediglich eine LR-Zerlegung ausrechnen. Insgesamt ergibt sich folgender Algorithmus für  $u = H_Q$ :

```

Initialisiere Matrix  $E$  und Vektor  $\xi$ 
Berechne LR-Zerlegung:  $[L, U] = lu(\tilde{E})$ 
Initialisiere  $u^0 := [1, \dots, 1, 0, 0, \dots, 0]$ 
Löse  $Eu^1 = u^0 - \xi$ 
FOR  $\nu = 2 : k_T$ 
    Löse  $\tilde{E}u^\nu = \frac{4}{3}u^{\nu-1} - \frac{1}{3}u^{\nu-2} - \tilde{\xi}$  mit bekannter LR-Zerlegung
END
```

Auch ein implizites Verfahren für parabolische PDE mit BDF2 ist stabil. Wir können also erwarten (und werden durch die numerischen Ergebnisse darin bestätigt), dass das beschriebene Verfahren auch für PIDE stabil ist.

## 6.3 Verifikation mit Monte-Carlo-Simulation

Die *Monte-Carlo-Simulation* (MC-Simulation) ist eine relativ einfach implementierbare und flexible Technik, SDE numerisch zu “lösen“. Sie macht besonders dann Sinn, wenn es für ein aus der SDE entstehendes Problem keine analytische Lösung gibt oder hochdimensionale Probleme zu lösen sind.

Im Prinzip zieht man dabei nur eine geeignet verteilte Folge von Zufallszahlen. Die Verteilung wird dabei (in Abhängigkeit von einer Schrittweite  $\Delta t$ ) so gewählt, dass sich ein approximativer Pfad des stochastischen Prozesses ergibt, der durch die SDE gegeben ist. Simulieren wir nun mehrere dieser Pfade, so ergibt sich durch Gesetze der großen Zahlen eine Konvergenz.

Ihre Einfachheit macht die MC-Simulation zu einem viel eingesetzten Hilfsmittel in der Finanz- und Versicherungsbranche. Mathematisch anspruchsvoll wird das Verfahren jedoch erst, sobald man die MC-Simulation effizienter gestalten will. Hier finden stochastische Techniken wie Maßwechsel, *stratified sampling*, stochastische Taylorentwicklung etc. Anwendung.

Nachdem wir in unserem Fall nur ein Ergebnis verifizieren möchten, ist die Geschwindigkeit des Verfahrens kein entscheidendes Kriterium. Wir wenden daher keine der Techniken der Beschleunigung an, und gehen damit auch kein Risiko bzgl. der Konvergenz ein.

Für eine genauere Beschreibung von MC-Simulationen für SDE und deren Funktionsweise verweisen wir auf Kloeden und Platen [36] und Cont und Tankov [10], S. 171 ff.

### 6.3.1 Konvergenz der MC-Simulation

Man sagt: Eine MC-Simulation  $\widehat{X}$  (die wir hier als stochastischen Prozess auffassen) der Lösung  $X$  einer SDE konvergiert, wenn für ein  $\gamma > 0$  es geeignete  $K, \delta_0 > 0$  gibt, sodass zum betrachteten End-Zeitpunkt  $T > 0$

$$\mathbb{E}|\widehat{X}_T - X_T| \leq K\delta^\gamma \quad \forall \delta \in (0, \delta_0),$$

also falls  $\widehat{X}_T$  in der  $L^1(\Omega, P)$ -Norm gegen  $X_T$  konvergiert.  $\gamma$  heißt die Konvergenzordnung, die für unser einfaches Euler-Verfahren bei  $\frac{1}{2}$  liegt; also ist unser Verfahren der Ordnung  $O(\sqrt{\Delta t})$ .

Aus der Konvergenz in der  $L^1(\Omega, P)$ -Norm folgt die Konvergenz in Verteilung von  $\widehat{X}_T$  gegen  $X_T$ .

Simulieren wir  $n$  approximative Pfade von  $X$  mit Schrittweite  $\Delta t$ , so erhalten wir aus den einzelnen Beobachtungen  $\stackrel{d}{=} \widehat{X}_T$  eine empirische Verteilungsfunktion. Zumindest falls  $\widehat{X}_T \in L^2(\Omega, P)$ , besagt der Satz von Glivenko-Cantelli, dass die empirische Verteilungsfunktion der Beobachtungen für  $n \rightarrow \infty$   $P$ -f.s. gleichmäßig gegen die tatsächliche Verteilungsfunktion von  $\widehat{X}_T$  konvergiert. Mit dem Zentralen Grenzwertsatz zeigt man die (theoretische) Konvergenzgeschwindigkeit  $\sqrt{n}$ .

In der Praxis braucht man allerdings eine enorm hohe Anzahl an simulierten Pfaden, um die *tails* einigermaßen zuverlässig darzustellen.

### 6.3.2 Herleitung unserer MC-Simulation

Wir verwenden die Darstellung von  $U_\theta(t)$  als SDE aus Kapitel 3:

$$dU_\theta(t) = cdt - dS(t) + U_\theta(t-)d\widehat{L}_\theta(t), \quad U_\theta(0) = u \quad (6.11)$$

Dort haben wir auch hergeleitet, dass

$$\begin{aligned} d\widehat{L}_\theta(t) &= (1 - \theta)\delta dt + \theta d\widehat{L}(t) \\ &= (1 - \theta)\delta dt + \theta \left[ dL(t) + \frac{1}{2}\sigma^2 dt + \exp(\Delta L(t)) - 1 - \Delta L(t) \right] \\ &= \left[ (1 - \theta)\delta + \frac{1}{2}\theta\sigma^2 + \theta\gamma^0 \right] dt + \theta\sigma dW_t + \theta [\exp(\Delta L(t)) - 1], \end{aligned} \quad (6.12)$$

mit der Darstellung  $L(t) = \gamma^0 t + \sigma W(t) + \sum_{0 < s \leq t} \Delta L(s)$  aus Annahme 6.1.

**Bemerkung 6.3** *Unser Markt verhält sich wie ein exponentieller Lévy-Prozess. Für den Fall ohne Sprünge ersehen wir aus obiger Darstellung (siehe z.B. Øksendal [52]), dass der Erwartungswert von  $\exp(L_\theta(t)) = \mathcal{E}(\widehat{L}_\theta)_t$  gerade  $\exp\left[\left((1 - \theta)\delta + \frac{1}{2}\theta\sigma^2 + \theta\gamma^0\right)t\right]$  ist. Für den Fall mit Sprüngen gibt uns Prop. 2.10 die Mittel an die Hand, um den Erwartungswert der MC-Simulation zu überprüfen (immer vorausgesetzt, er existiert).*

Folgender Algorithmus dient ( $k_T = \frac{1}{\Delta t}$  bezeichnet die Zeitstützstellen, also die Diskretisierung des Monte-Carlo-Verfahrens) der Simulation eines Pfades:

```

Initialisiere Marktprozess
  Ziehe  $dB \sim \sqrt{\Delta t}N(0, I_{k_T-1})$ 
  Ziehe Sprungzeitpunkte  $S$ , so dass  $S(i) - S(i-1) \sim \exp(\eta)$ 
  Ziehe Sprunggrößen  $H \sim F_\theta$ , erhalte Inkrementprozess  $dP$ 
Initialisiere Schadenprozess
  Ziehe Sprungzeitpunkte  $S$ , so dass  $S(i) - S(i-1) \sim \exp(\lambda)$ 
  Ziehe Sprunggrößen  $H \sim F_Y$ , erhalte Inkrementprozess  $dY$ 
FOR  $i = 2 : k_T$ 
  Bestimme  $U(i)$  aus  $U(i-1)$  unter Verwendung von  $dB$  durch (6.12)
END
Errechne  $Q_T$  aus  $U(k_T)$ 

```

Entsprechende Hintereinanderausführung ergibt einen Vektor von Ergebnissen für  $Q$ , an dessen empirischer Verteilung wir interessiert sind.

Wir implementieren die MC-Simulation für den Fall  $Z \sim N(0, \mu_M)$  und  $Y \sim \exp(\mu_S)$  für  $\mu_M, \mu_S > 0$ . Da  $Z$  symmetrisch ist, gilt in diesem Falle  $\gamma = \gamma^0$ .



$\alpha$	PIDE-Lösung	PIDE relativ	MC-Simulation	MC-Sim relativ
0.05	-1/10	-4%	-1/10	-4%
0.02	0	0%	-2/10	-4.3%
0.01	-1/10	-1.6%	-3/10	-4.8%
0.001	0	0%	1/10	0.9%
0.0001	0	0%	-6/10	4%

Tabelle 6.1: Unterschied der Quantile zu den theoretischen Quantile (Daten aus Abb. 6.1)

## 6.4 Vergleich der Verfahren

Wir vergleichen in diesem Abschnitt die Genauigkeit der betrachteten Verfahren für  $H = H_Q$ .

### 6.4.1 Fall ohne Markt

Wir untersuchen einen Spezialfall (nämlich den ohne Markt), um die Funktionsfähigkeit unserer beiden Algorithmen zu testen. Im Fall ohne Markt haben wir es mit einer hyperbolischen PDE erster Ordnung mit einem Faltungsterm zu tun:

$$\lambda u(x, t) + \partial_t u(x, t) - c \partial_x u(x, t) = \lambda \int f_Y(y) u(x - y, t) dy, \quad (6.13)$$

Die Herleitung überprüft man relativ leicht anhand der Ausführungen im Modellierungskapitel 3. Wir verzichten hier auf eine Untersuchung von Existenz und Eindeutigkeit.

Der besondere Vorteil dieses Spezialfalls besteht darin, dass die Stochastik hier eine relativ explizite Lösung liefert:

Es gilt  $Q_\theta(t) = Q(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} Y_j - ct$ , wobei  $N(t)$  ein Poisson-Prozess mit Intensität  $\lambda$ , und  $Y_j \sim F_Y$  die iid Schäden. Für die Verteilungsfunktion gilt mit dem Satz über die totale Wahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{j=1}^{N(t)} Y_j \leq x\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} P\left(\sum_{j=1}^{N(t)} Y_j \leq x, N(t) = n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} P\left(\sum_{j=1}^n Y_j \leq x\right) P(N(t) = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} F_Y^{n*}(x) P(N(t) = n), \end{aligned}$$

wobei  $F_Y^{n*}(x)$  die  $n$ -fache Faltung der Verteilungsfunktion  $F_Y$  ist, und  $F_Y^{0*}(x) := 1_{x \geq 0}$ .

Wir untersuchen den Spezialfall  $Y \sim \exp(\mu_S)$  für ein  $\mu_S > 0$ . In diesem Fall ist  $F_Y^{n*}(x)$  sehr leicht angebar, die Summe von  $n \exp(\mu_S)$ -verteilten ZV ist  $\Gamma(n, \mu_S)$ -verteilt. Also

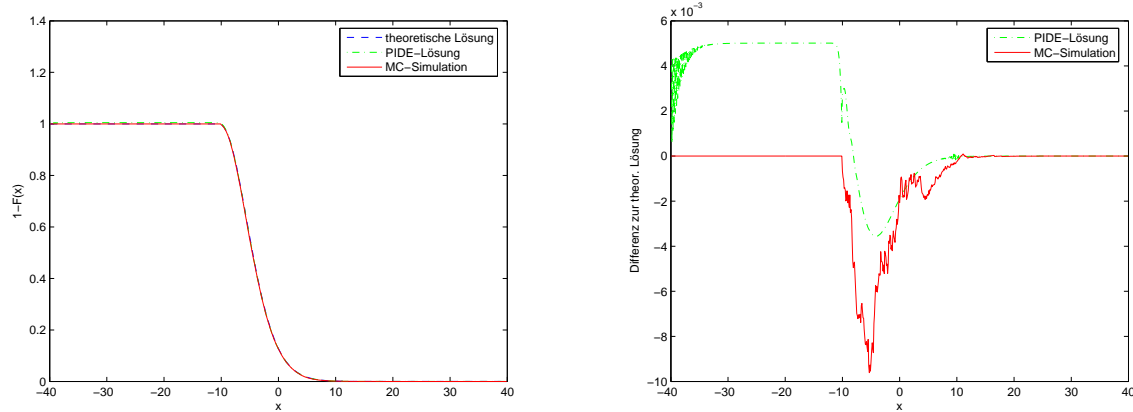


Abbildung 6.1: Fall ohne Markt. Links: der Tail  $H_Q(\cdot, T)$  mit den drei Verfahren berechnet, rechts: die Differenz von PIDE-Lösung und MC-Simulation zur theoretischen Lösung. Die Daten des Beispiels sind:  $c = 10$ ,  $Y \sim \exp(1)$ ,  $\lambda = 6$ ,  $T = 1$ . Das FD-Verfahren verwendet 800  $x$ -Stützstellen und 100  $t$ -Stützstellen, die MC-Simulation die Daten von 40.000 Pfaden mit einer Schrittweite von  $1/1250$

ist in diesem Spezialfall

$$P(Q(t) > x) = 1 - P\left(\sum_{j=1}^{N(t)} Y_j \leq x + ct\right) = 1 - 1_{x+ct \geq 0} e^{-\lambda t} - \sum_{n=1}^{\infty} F_{\Gamma(n, \mu_S)}(x + ct) e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \tag{6.14}$$

Für unseren Vergleich betrachten wir normalverteilte symmetrische Marktsprünge, also  $Z \sim N(0, \mu_M)$  für  $\mu_M > 0$ . Es zeigt sich, dass die Lösung der PIDE der MC-Simulation nicht nur in der Genauigkeit überlegen ist (siehe Abbildungen), sondern bei der verwendeten Diskretisierung auch um den Faktor 10 in der Geschwindigkeit.

Man beachte, dass die tatsächliche Verteilung von  $Q(T)$  nicht absolutstetig ist – wie man aus (6.14) ersieht, tritt in  $x = -cT$  ein Sprung der Größe  $\exp(-\lambda T)$  auf (die unendliche Summe ist absolut konvergente Summe von stetigen Funktionen). Dies ist auch die Erklärung für die kleine Unebenheit in Abb. 6.1. Für größere  $\lambda$  (etwa  $\lambda \geq 10$ ) fällt dieser Fehler kaum auf.

Da wir hauptsächlich an den Quantilen für kleine  $\alpha$  interessiert sind, stört uns der entstandene Fehler für sehr negative  $x$  nicht besonders (er wird übrigens kleiner, je feiner die Diskretisierung ist). Bei zukünftigen Beispielen unternehmen wir aber die Schönheitskorrektur, dass wir in jeder Iteration nur Werte  $\leq 1$  zulassen.

### 6.4.2 Fall mit Markt

Im Fall mit Markt kennen wir keine explizite Formel für die Lösung. Es bleibt daher nur der Vergleich zwischen dem Finite-Differenzen-Verfahren und der MC-Simulation. Auch

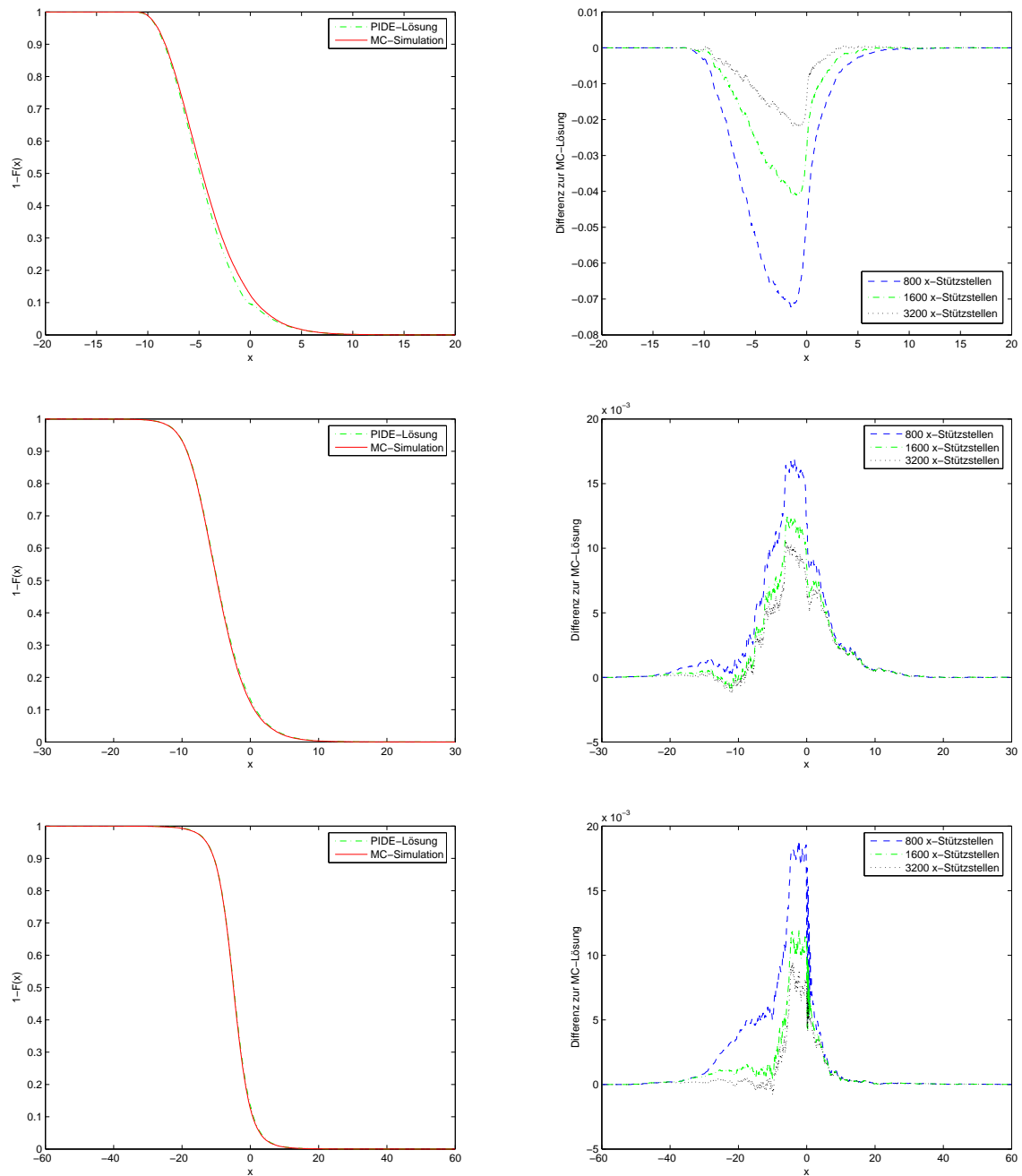


Abbildung 6.2: Fall mit Markt. Links: der Tail  $H_Q(\cdot, T)$  mit (von oben nach unten)  $\theta = 0.1$ ,  $\theta = 0.5$ ,  $\theta = 0.9$  berechnet (1600  $x$ -Stützstellen), rechts: die Differenz von PIDE-Lösung mit verschiedenen Genauigkeiten zur MC-Simulation. Die Daten des Beispiels sind die selben wie in Abb. 6.1, zusätzlich  $\gamma = 0.2$ ,  $\sigma = 0.4$ ,  $Z \sim N(0, 0.3^2)$  und  $\eta = 3$ . Man beachte, dass Fehler links von der 0 für die betrachteten kleinen Quantile unwichtig sind

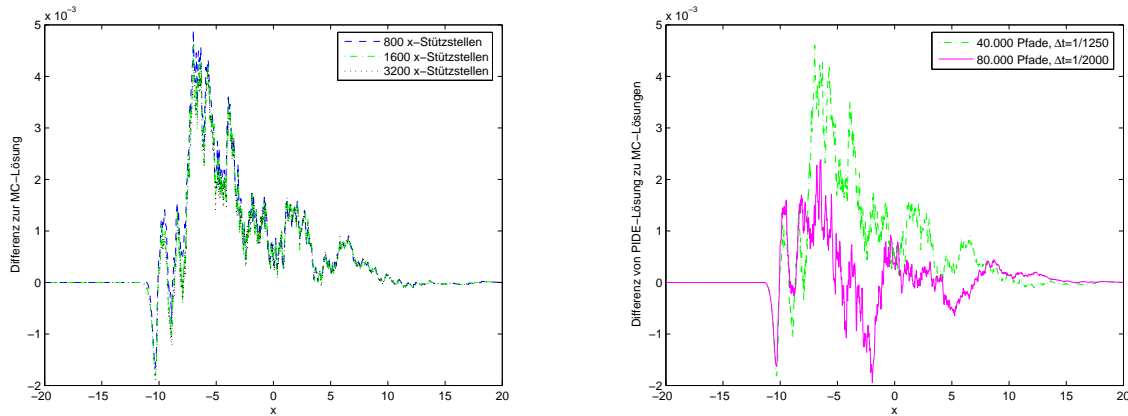


Abbildung 6.3: Fall mit Markt, ohne Marktsprünge. Links: die Differenz der PIDE-Lösung mit verschiedenen Diskretisierungen im Vergleich zur MC-Simulation (40.000 Pfade,  $\Delta t = 1/1250$ ) mit  $\theta = 0.05$ , rechts: die Differenz der PIDE-Lösung (1600  $x$ -Stützstellen) zu zwei unterschiedlichen MC-Simulationen. Die Daten des Beispiels sind die selben wie in Abb. 6.2 außer  $\eta = 0$

hier beschränken wir uns im Vergleich auf den Fall, dass die Schäden exponentialverteilt und die Marktsprünge normalverteilt um die 0 sind.

Wir werden den Unterschied der beiden Verfahren betrachten und können aus dem letzten Unterabschnitt vermuten, dass die MC-Simulation  $H_Q(\cdot, T)$  tendenziell „in der Mitte“ etwas unterschätzt.

Für  $u = H_U$  ist unser Verfahren deutlich genauer als im Fall  $u = H_Q$  (die Fehler für kleine  $\theta$  treten hier kaum auf), außerdem wollen wir aus den Daten nur den Erwartungswert schätzen. Wir verzichten daher auf eine genauere Darstellung der Ergebnisse für  $u = H_U$ .

Je größer  $\lambda$  ist, desto größer ist auch der (positive) Abstand der Lösung zur 1 für kleine  $x$  (hier erzeugt die eingeführte Schönheitskorrektur nichtglatte Lösungen). Man kann das Problem mit einer feineren  $x$ -Diskretisierung bekämpfen, dies führt allerdings für große  $\lambda$  zu einem unverträglich hohen Rechenaufwand.

Bei diesem Problem kann ein  $h$ -Programm wie in Abschnitt 6.2.2 diskutiert Abhilfe schaffen (bei 0-Randwerten tritt das Problem nicht auf).

Die Diskretisierung des Marktsprungintegrals (vgl. Herleitung durch Substitution) ist ein Problem für die Genauigkeit um 0, falls  $\theta$  klein ist oder die Marktsprungverteilung um die 0 konzentriert ist. (Letzteren Fall kann man sinnvoll im Modell ausschließen, wenn man kleine Sprünge durch den stetigen Anteil des Lévy-Prozesses abdeckt.) Ganz offensichtlich treten diese Probleme im Fall eines Marktes ohne Sprünge nicht auf (siehe Abb. 6.3).

## 6.5 Optimierung

Ziel unseres Modells ist es ja, das erwartete Vermögen am Ende eines vorgegebenen Planungshorizontes  $T$  zu maximieren unter einer Restriktion des Risikos ( $C > 0$  als Risikoschranke):

$$\max_{\theta \in [0,1]} \mathbb{E}U_\theta(T) \quad \text{s.t.} \quad \text{VaR}(Q_\theta(T), \alpha) \leq C \quad (6.15)$$

Auch wenn die *numerisch* erzielte Verteilungsfunktion von  $U_\theta(T)$  für jedes  $R > 0$  einen endlichen Erwartungswert haben wird, benötigen wir auch für die theoretische Lösung diese Voraussetzung und fordern daher (vgl. Abschnitt 3.1):

**Annahme 6.2**  $L_\theta(t)$  besitze für  $t > 0$  das exponentielle Moment, die Schäden  $Y_j$  haben endliche Erwartung.

**Bemerkung 6.4** Da wir ja den Erwartungswert maximieren wollen, können wir uns auf die Bedingung

$$\mathbb{E}U_\theta(T) > -\infty \quad (6.16)$$

beschränken. Eine nicht ganz einfach zu klärende Frage ist allerdings, welche Bedingung dafür hinreichend ist, ohne gleich Annahme 6.2 zu fordern.

Ist das Versicherungsvermögen nach unten beschränkt, so ist (6.16) offensichtlich erfüllt. Es würde allerdings auch genügen, wenn  $P(U_\theta(t) \geq -b \forall t \in [0, T])$  für  $b \rightarrow \infty$  schnell genug abfallen würde. Ein Problem in dieser Art kennen wir bereits: es ist nichts anderes als die Untersuchung einer Ruinwahrscheinlichkeit  $P(b + U_\theta(t) < 0$  für ein  $t \in [0, T]$ ) in endlicher Zeit.

### Zielfunktion: Erwartungswert

Um das Optimierungs-Problem zu lösen, könnte man für die Zielfunktion  $\mathbb{E}U_\theta(T)$  auch den stochastisch hergeleiteten Wert in Klüppelberg und Kostadinova [39] nehmen. Diesen Ansatz verfolgen wir in unserer Beispielimplementierung nicht und errechnen den Wert stattdessen aus der Lösung der PIDE für  $H_U$ :

Wir wissen, dass für eine positive ZV  $X \geq 0$  mit endlichem Erwartungswert  $\mathbb{E}X = \int_{\Omega} X dP = \int_0^\infty P(X > x) dx$  gilt. Mit dem gleichen Argument zeigen wir, dass für  $X \in [-R, R]$  (wie wir es aus der Numerik erhalten)

$$\mathbb{E}X = \int_{\Omega} X + R dP - R = \int_0^{2R} P(X + R > x) dx - R = \int_{-R}^R P(X > x) dx - R$$

gilt. (Die Formel würde auch durch partielle Integration folgen.) Damit können wir auf die numerische Ableitung der Verteilungsfunktion von  $U_\theta(T)$  verzichten, denn den Tail  $P(-U_\theta(T) > x)$  von  $-U_\theta(T)$  kennen wir bereits. Es ist dann (wir meinen immer die numerisch erzielten Werte)

$$\mathbb{E}U_\theta(T) = R - \int_{-R}^R P(-U_\theta(T) > x) dx = R - \int_{-R}^R H_U(x, T) dx.$$

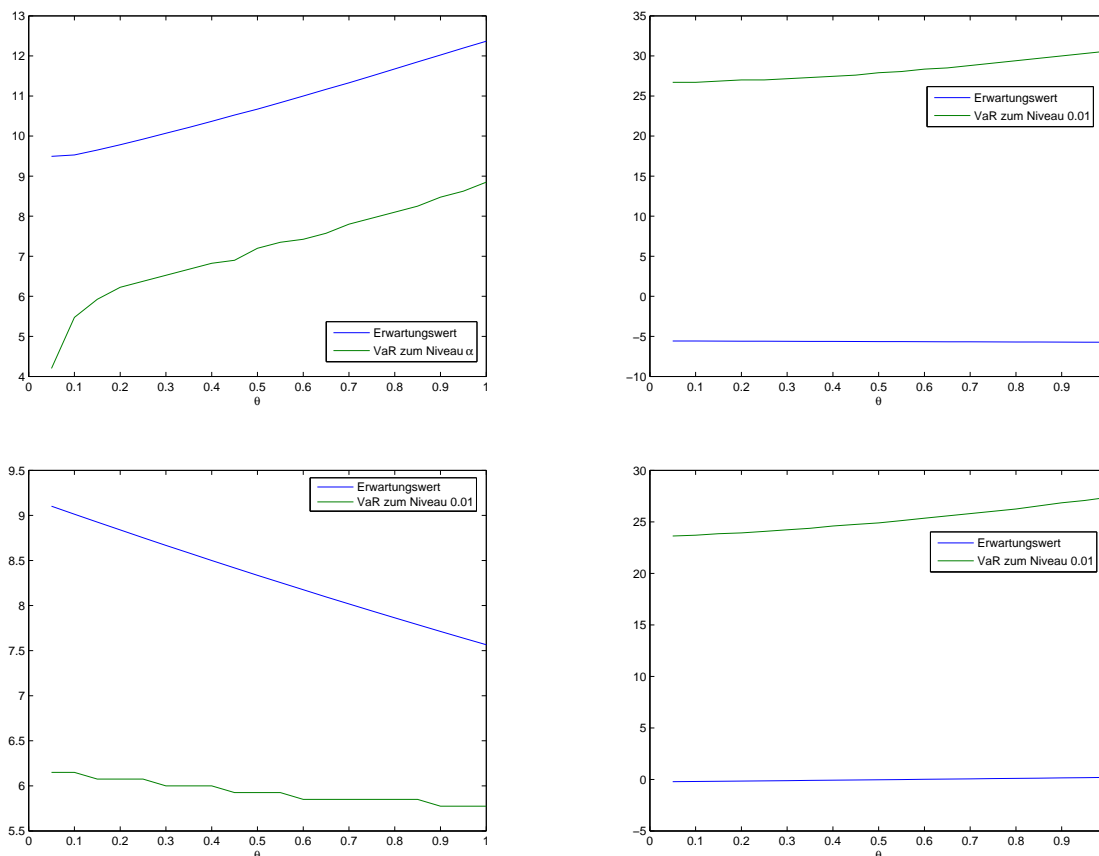


Abbildung 6.4:  $\mathbb{E}U_\theta(T)$  und  $\text{VaR}(Q_\theta(T), 0.01)$  in Abhängigkeit von  $\theta$ . Links oben: Daten aus Abb. 6.2 mit dem Anfangskapital 5. Rechts oben: große Schäden bei geringem Anfangsvermögen, in Abweichung von Abb. 6.2 sind  $\gamma = 0.012$ ,  $\eta = 0$ ,  $c = 6$ ,  $Y \sim \exp(0.5)$ , Anfangskapital = 0.5. Links unten: Bärenmarkt, in Abweichung von Abb. 6.2 sind  $\gamma = -0.3$ ,  $\eta = 0$ , Anfangskapital = 5. Rechts unten: größere Schäden,  $\gamma = 0.15$ ,  $\sigma = 0.3$ ,  $\eta = 0$ ,  $c = 9$ ,  $Y \sim \exp(0.7)$ ,  $\lambda = 10$ , Anfangskapital = 5

### Nebenbedingung: Value-at-Risk

Der VaR liest sich direkt aus dem entsprechenden Quantil von  $H_Q$  ab.

### Optimierungsverfahren

Bei einem Optimierungsverfahren ist aus Effizienzgründen zu beachten, dass die Anzahl der Funktionsauswertungen (d.h. die Anzahl der durchlaufenen FD-Verfahren) möglichst gering sein sollte.

Es ist möglich, den in MATLAB implementierten Optimierungsalgorithmus `fmincon` zu verwenden:

```
options=optimset('Display','iter','LargeScale','off','MaxFunEvals',40,  
    'TolFun',1e-2);  
[x,fval,exitflag,output]=fmincon(@Erw,0.45,[],[],[],[],0.02,1,@VaR,options);
```

Ergebnisse des Optimierungsalgorithmus können aus Abb. 6.4 abgelesen werden. (Die Optimierung führte in allen untersuchten Fällen zum Ziel.) Genauere Werte anzugeben, macht angesichts der Symbolhaftigkeit der verwendeten Parameter und der Dimension 1 des Problems wenig Sinn.

Eine genaue Aussage darüber, ob das Optimierungsproblem 6.15 tatsächlich wohlgestellt ist, also die Anwendung eines Optimierungsalgorithmus Sinn macht, wäre wünschenswert, aber beim derzeitigen Stand können wir keine Aussage darüber treffen.

**Bemerkung 6.5** *Naheliegender Gedanke, dass ein höherer Profit für die Versicherung nur mit einem höheren Risiko zu erreichen ist. Also ist man versucht zu glauben, dass die Versicherung unter der Bedingung*

*Es sei  $u > 0$ ,  $c > 0$ ,  $\delta > 0$ . Es gelte  $\mathbb{E}e^{L(1)} > e^\delta$  (der Aktienmarkt liefere eine höhere durchschnittliche Rendite als die risikolose Anlage).*

*einfach das maximale  $\theta \in [0,1]$  bestimmen muss, so dass die Nebenbedingung gerade noch erfüllt ist. In unserem Modell muss dies allerdings nicht gelten, denn unsere Modell-Versicherung kann überwiegend negatives Vermögen besitzen und wird die zu bezahlenden Zinsen für dieses negative Vermögen möglichst gering halten wollen. Ein (zugegebenermaßen unrealistisches) Beispiel dazu findet man in Abb. 6.4.*

# Kapitel 7

## Resümee und Ausblick

Ziel der vorliegenden Arbeit war die **Optimierung des Investments einer Versicherung** mit numerischen Mitteln. Dabei haben wir als zu maximierende Zielfunktion den Erwartungswert des Versicherungsvermögens  $U_\theta(T)$  zu einem gegebenen Zeitpunkt  $T > 0$  verwendet, und als Nebenbedingung den Value-at-Risk der durch den Markt beeinflussten Versicherungsverluste  $Q_\theta(T)$ . Variable war der Anteil des Versicherungsvermögens  $\theta \in [0, 1]$ , der in einen Aktienmarkt investiert wird. Der Aktienmarkt verhält sich im Modell wie ein exponentieller Lévy-Prozess, das Versicherungsmodell ist das klassische Modell nach Cramér/Lundberg.

Ein großer Teil der Arbeit beschäftigte sich mit der **Herleitung und Untersuchung einer Partiellen Integro-Differentialgleichung (PIDE)**, die es uns erlaubt, die Verteilung des Versicherungsvermögens  $U_\theta(T)$  bzw. der Versicherungsverluste  $Q_\theta(T)$  (und daraus den VaR) zu bestimmen.

Die Herleitung der PIDE erfolgte unter Ausnutzung der Unabhängigkeit der Zuwächse eines Lévy-Prozesses und unter Verwendung der Ordnungsstatistikeigenschaft eines Poisson-Prozesses. Leider mussten wir uns dabei auf den Fall eines *jump diffusion*-Prozesses beschränken.

Vorher mussten wir untersuchen, wie sich der mit  $\theta$  gemischte Marktprozess verhält, und welche Darstellung  $U_\theta(T)$  bzw.  $Q_\theta(T)$  haben.

Wir untersuchten die entstandene (degeneriert-parabolische) PIDE auf zwei Arten: mit Mitteln der Stochastik und mit Mitteln aus der Theorie partieller Differentialgleichungen.

Unter Verwendung von Resultaten des Malliavin-Kalküls konnten wir die **Existenz einer unendlich oft differenzierbaren klassischen Lösung** nachweisen – die Voraussetzungen (Existenz aller Momente des Schadenprozesses und des [nicht-exponentiellen] Marktprozesses) sind allerdings restriktiv.

Ein **Maximumprinzip** vervollständigte die Untersuchung der klassischen Lösbarkeit und lieferte unter eher schwachen Zusatzvoraussetzungen die Eindeutigkeit einer klassischen Lösung.

Indem wir gewichtete Sobolevräume verwandten, konnten wir die **eindeutige schwache Lösbarkeit** der elliptisch regularisierten PIDE nachweisen. Für den Übergang zum



degeneriert-parabolischen Ursprungsproblem stellten wir eine Methode vor, die mit schwacher Konvergenz arbeitet. Allerdings bleibt für die Anwendbarkeit der Methode nach wie vor eine uniforme Norm-Abschätzung zu zeigen.

Als einfache Schlussfolgerung erhielten wir die eindeutige schwache Lösbarkeit der lokalisierten PIDE auf einem beschränkten Gebiet  $(-R, R) \times (0, T)$  und schätzten den Lokalisierungsfehler stochastisch ab.

Den Abschluss der Arbeit bildete ein numerischer Teil. Hier stellten wir ein **Finite-Differenzen-Verfahren** zweiter Ordnung vor, das die Lösung der PIDE approximiert. Wir verglichen diese PIDE-Lösung mit der Lösung aus einer Monte-Carlo-Simulation – im Fall ohne Markt auch mit einer exakten Lösung – und stellten eine befriedigende Genauigkeit und einen erheblichen Geschwindigkeitsvorteil gegenüber der Monte-Carlo-Simulation fest. Zuletzt untersuchten wir noch das **Optimierungsproblem** und gaben einige Beispiele.

## Ausblick

Im Vergleich zu den üblichen Ansätzen der mathematischen Risikotheorie (Stichwort Ruinwahrscheinlichkeit in unendlicher Zeit) ist unser Ansatz relativ praxisnah – auch wenn für die praktische Anwendbarkeit des Verfahrens noch etwas Arbeit hineingesteckt werden müsste (Stichwort effizientere numerische Verfahren und Optimierungsalgorithmen, Kalibrierung der Marktparameter aus statistischen Daten).

Die Untersuchungen über die Existenz und Eindeutigkeit einer schwachen Lösung zeigen: Die Unterscheidung in small oder large claims ist für unser Modell nicht entscheidend, d.h. in der PIDE können prinzipiell extreme Schaden-Verteilungen ebenso eingesetzt werden. Allerdings fehlt hierfür noch die stochastische Rechtfertigung (vgl. Diskussion am Anfang von Kapitel 5). Gerade bei extremen Werten hat die numerische Lösung der PIDE einen enormen Vorteil gegenüber der *straight forward* MC-Simulation.

Relativ problemlos können die Argumente in unserem Verfahren auf den mehrdimensionalen Fall  $\theta \in [0, 1]^d$  übertragen werden – die einzige neu auftretende Schwierigkeit ist die Berechnung des Tripels von  $L_\theta$  (siehe dafür z.B. Emmer und Klüppelberg [15]). Die zu lösende PIDE (die Herleitung funktioniert exakt wie im eindimensionalen Fall) wäre immer noch eine eindimensionale parabolische PIDE, also würde eine numerische Lösung immer noch Sinn machen.

In diesem Falle wären die Ergebnisse einer Optimierung tatsächlich noch etwas interessanter.

Wir heben noch einmal hervor, dass bei der Optimierung im Prinzip jedes Kriterium als Zielfunktion oder Nebenbedingung verwendet werden kann, so lange es nur aus der Verteilung errechnet werden kann.

Auf der Grundlage dieser Diplomarbeit sind eine Vielzahl weiterer Entwicklungsrichtungen denkbar:

**Modell** Erweiterung auf Kontrolle  $\theta = \theta(t)$  (allerdings müsste man dafür das statische Konzept des VaR anpassen).

Außerdem wäre eine Erweiterung in der Herleitung der PIDE auf allgemeine Lévy-Prozesse denkbar (jeder Lévy-Prozess lässt sich als (evtl. unendliche) Summe von *jump diffusion*-Prozessen darstellen). Hier könnte León et al. [46] ein guter Anfangspunkt sein.

**PIDE** Die fehlende uniforme Abschätzung bei der schwachen Lösung zeigen. Die Regularität der schwachen Lösung untersuchen.

**Numerik** Verbesserung des existierenden Finite-Differenzen-Verfahrens, evtl. durch variable Schrittweiten (z.B. in 0). Entwicklung eines Finite-Elemente-Verfahrens. Konvergenz- und Stabilitätsanalyse.

**Optimierung** Entwicklung eines an das Problem angepassten effizienten Optimierungsalgorithmus. Untersuchen der Wohlgestelltheit des Optimierungsproblems.

# Anhang A

## Ausgewählte Quelltexte

Einige wichtige MATLAB-Quelltexte finden sich hier abgedruckt, für die kompletten verwendeten Dateien verweisen wir auf die URL <http://www.fs.tum.de/~seydel/diplomarbeit/>.

### FD-Verfahren

```
function
[x,H1,All,vb]=finitediff(gamma,sigmasq,vert_f,para_f,eta,theta,
    delta,c,vert_fy,para_fy,lambda,R,k_R,T,k_T);

%function [x,H,All,vb]=finitediff(gamma,sigmasq,vert_f,para_f,eta,theta,
% delta,c,vert_fy,para_fy,lambda,R,k_R,T,k_T);
%
% Finite-Differenzen-Verfahren im Fall mit Markt, äquidistante
Diskretisierung,
% BDF2 für Zeitableitung
%
% INPUT: gamma Marktdrift, sigmasq Standardabweichung quadriert, vert_f
% Verteilung der Marktsprünge, para_f Parameter für diese Verteilung,
% eta Intensität der Marktsprünge, theta Investmentanteil in Aktienmarkt,
% delta risikoloser Zinssatz, c Prämienintensität, vert_fy Schadensprung-
% verteilung, para_fy Parameter dazu, lambda Schadenintensität, (-R,R)
% Lösungsintervall, 2*k_R-1 Anzahl der x-Stützstellen, T Endzeitpunkt,
% k_T Anzahl der t-Stützstellen
%
% OUTPUT: x Vektor der Raum-Stützpunkte, H Tailvektor, All FD-Matrix,
% vb FD-Vektor
%
% Roland Seydel, 26.7.04 - 13.10.04

h_t=T/k_T; % Zeitdiskretisierung
```

```

h_x=R/k_R; % x-diskretisierung
xdim=k_R*2-1;
x=(1:xdim)'.*h_x-R; %x-Stützpunkte

%if-Abfragen vorher:
cdfy=strcat(vert_fy,'cdf');
pdfy=strcat(vert_fy,'pdf');
cdf=strcat(vert_f,'cdf');
pdf=strcat(vert_f,'pdf');
%erzeuge cell array für parameter
for i=1:length(para_fy)
    parfy(i)={para_fy(i)};
end
for i=1:length(para_f)
    parf(i)={para_f(i)};
end
function erg=fy(x) %Dichte der Schäden
    erg=feval(pdfy,x,parfy{:});
end
function erg=Fy(x) %VF der Schäden
    erg=feval(cdfy,x,parfy{:});
end
function erg=f(x) %Dichte der Marktsprünge
    erg=feval(pdf,x,parf{:});
end
function erg=F(x) %VF der Marktsprünge
    erg=feval(cdf,x,parf{:});
end

%%%%%%%%% Vorreservieren des Platzes für die großen Matrizen %%%%

%Marktmatrix siehe gleich
S=spalloc(xdim,xdim,round(xdim*(xdim+1)/2)); %nach Gauss, Runden zur
Sicherheit
All=zeros(xdim); L=zeros(xdim); U=zeros(xdim);

%%%%%%%%%%%%%% MARKTPRÜNGE-MATRIX %%%%%%%%%%%%%%%

eintraege=round(1/4*(theta+1)*xdim^2+xdim); %voraussichtliche Anzahl der
Nicht-Null-Einträge (ca. Schätzung)
M=spalloc(xdim,xdim,eintraege); % Marktsprungterm
I=spalloc(xdim,xdim,eintraege); % Indexmatrix: Eintrag \not= 0, wo
Stützstellen sind
clear eintraege

```

```

% Vektor, der mir immer für jedes k sagt, wie weit mein
Marktsprungintegral geht (d.h.  $\approx x_k/(1-\theta)$  )
if theta==1
    factheta=k_R+1; %"unendlich"
else
    factheta=1/(1-theta);
end
%kstar(k_R) ist sowieso 0 und wird auch nicht verwendet
kstar= k_R + sign((1:xdim)'-k_R).* min( floor(abs((1:xdim)'-k_R)*factheta)
-1,k_R);
%statt ceil doch wieder floor, da Rundungsfehler z.B. bei theta=0.3
%Probleme geben
% -1 runtergehen, damit das Integral sicher keine Probleme bereitet
%hiermit habe ich auch Spielraum gewonnen, um den Rest (d.h.  $< -R$ ) des Markt
% sprungintegrals sauber auszurechnen

%Indexmatrix: Entspricht den Gewichten für die Funktion g
for j=1:k_R-1
    I(kstar<j,j)=-1;
    I(kstar==j,j)=-1/2; % falls kstar immer kleiner j ist, dann gibts das
nicht
end
for j=k_R+1:xdim
    I(j<kstar,j)=1;
    I(j==kstar,j)=1/2; % analog oben: tritt u.U. nicht in Aktion
end

y=x; y(y==0)=1; %damit wir durch teilen können; 1 ist willkürlich gewählt
X=y * (1./y)'; %ein Kreuz in der Mitte "stimmt nicht", ist aber kein
problem
Z=repmat(y,1,xdim); %Zähler
N=y*(y')-(1-theta)*repmat((y.*y)',xdim,1); %Nenner

%ich könnte mir für zwei Quadranten die Rechnung sparen und die Matrizen
einfach 0 setzen; dies würde aber erheblichen Mehraufwand bei der
Manipulation der Matrizen und einen komplexeren Quelltext bedeuten ->
nicht sinnvoll

%Funktion g wird hier aufgerufen:
M(I~=0) = (-eta)*h_t*h_x*...
    I(I~=0).*f(reallog(1+(X(I~=0)-1)/theta)).*Z(I~=0)./N(I~=0);
%Funktion g
clear I y X Z N
%Nullteil: (d.h.  $x_k = 0$ )

```

```
M(k_R,k_R)=(-eta)*h_t;
```

```
%%%%%%%%%%%%% SCHADENSPRÜNGE-MATRIX %%%%%%%%%%%%%%
```

```
%Vektor der Funktionswerte von fy
```

```
vfy=[fy(0)/2; fy(x+R)];
```

```
% / 2, damit wir nachher nicht mehr das Geschiess in der Matrix haben
%diese Aktion ist zwar gefährlich, vfy(1) wird aber sonst nie wieder
gebraucht
```

```
Mfy=repmat((vfy(xdim:-1:1))',xdim,1);
```

```
S=spdiags(Mfy*(-h_x)*h_t*lambda, 1-xdim:0, xdim, xdim); %
```

```
Schadensprungterm
```

```
clear Mfy
```

```
%%%%%%%%%%%%% RESTTERME-MATRIX %%%%%%%%%%%%%%
```

```
%%% also u.a. Ableitungen
```

```
%rechne schon mal einige Werte aus, die ich später für die Funktion b
brauche
```

```
intF=quad(@zuint,-1,1);
```

```
function erg=zuint(x)
```

```
    %Hilfsfunktion, die ich von -1 bis 1 integrieren möchte
```

```
    erg=f(x).*x;
```

```
end
```

```
%
```

```
tripel2=sigmasq*theta^2;
```

```
tripel1=(1-theta)*delta + theta *( gamma+sigmasq/2) - tripel2/2 - theta *
eta * intF;
```

```
%
```

```
%ACHTUNG: tripel1 ist gamma^0
```

```
wertb=tripel1-tripel2/2;
```

```
B=spdiags(x.*wertb-c,0,xdim,xdim); %Werte der Funktion b (für erste Abl
nach x)
```

```
%Rechnungen für Funktion a
```

```
werta=-1/2*sigmasq*theta^2;
```

```
A=spdiags(x.^2*werta,0,xdim,xdim); %Werte der Funktion a (für 2. Abl nach
x)
```

```
%ACHTUNG: in DA entspricht das der Funktion -A
```

```

R1=h_t/(2*h_x) * B * (...
    spdiags( repmat([-1 1],xdim,1), [-1 1], xdim, xdim)...
); % Term zur Ableitung nach x
R2=h_t/(h_x^2) * A * (...
    spdiags( repmat([1 -2 1],xdim,1), [-1 0 1], xdim, xdim)...
); % Term zur zweiten Ableitung nach x
R3=spdiags(repmat(1+(lambda+eta)*h_t,xdim,1),0,xdim,xdim);
% Term von Abl. nach t und vom Term ohne Abl

RT = R1 + R2 + R3;
clear R1 R2 R3

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% INSGESAMT ALSO %%%%%%%%%%%%%%%

All = full(S + M + RT);
clear S M RT

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% RESTTERME-VEKTOR %%%%%%%%%%%%%%%

vb1=(-h_x)*h_t*lambda/2*vfy(2:xdim+1); % Überbleibsel vom
Schaden-Sprungterm
vb2=zeros(xdim,1); % Überbleibsel vom Marktsprungterm
vb2(kstar==0) = eta*h_t*h_x/2*g(x(kstar==0),-R,theta,@f); %Minus kürzt
sich raus
vb3=spalloc(xdim,1,1);
vb3(1)= -h_t/(2*h_x)*B(1) + h_t/(h_x^2)*A(1); % Überbleibsel von
Ableitungen nach x
vb4=h_t*lambda*(Fy(x+R) - 1); %Rest der beiden Integrale \not\in [-R,R]
vb4(kstar==0)=vb4(kstar==0)-h_t*eta*F(log(1-1./theta.*(x(kstar==0)./R+1)));

vb= full(vb1 + vb2 + vb3 + vb4);
%vb=0;
clear A B vb1 vb2 vb3 vb4

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% EIGENTLICHER HAUPTDEIL DES PROGRAMMS %%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% jetzt muss ich also meine Iterationen starten und dabei die LGS lösen

[L,U]=lu(All); % LR-Zerlegung, machen wir einmal und verwenden es dann

```

```

[L1,U1]=lu(2/3*A11+1/3*spdiags(repmat(1,xdim,1),0,xdim,xdim));

H0=[ones(k_R-1,1); zeros(k_R,1)]; %Startvektor

% löse LGS A11 H = H0 - vb (einfacher impliziter Schritt)
y= L\ (H0 - vb);
H1= U\y;

for j=2:k_T
    % löse LGS (2/3*A11+1/3*I) H = 4/3 H1 - 1/3 H0 - vb (doppelter Schritt)
    y= L1\ (4/3*H1 - 1/3*H0 - 2/3*vb);
    H0=H1; %alte neue Lösung ist neue alte Lösung ;- )
    H1= U1\y;
    H1(H1>1)=1; %hauptsächlich Schönheitskorrektur
end

end %ende der hauptfunktion

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% SUBFUNCTIONS %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function erg=g(x,u,theta,f)

% Funktion g_x(u) (Dichte für den Marktsprungterm)
% benutzt für finitediff.m
%
% function erg=g(x,u,theta,f)
%
% INPUT: Funktionshandle f für Marktsprungdichte von L

%exception handling: xu> 0? einfach durch realloc

    stelle=reallog(1+(x./u-1)./theta);
    erg=f(stelle).*x./(x-(1-theta).*u)./u;

end

```



**MC-Simulation**

```

function
[U,Q,Markt]=mcsimulation(gamma,sigma,mum,eta,theta,delta,u,c,mus,lambdas,T,k_T);

% function
[U,Q,Markt]=mcsimulation(gamma,sigma,mum,eta,theta,delta,u,c,mus,lambdas,T,k_T);
%
% Simuliert den integrierten Risikoprozess U_\theta
%
%ACHTUNG: Vorsichtig beim INPUT, der Erwartungswert des BM-Teils des Marktes
% ist  $\exp((\gamma + 1/2 \sigma^2)*T)$ 
%
% INPUT:  $\gamma = \gamma^0$ ,  $\sigma$  BM-Term,  $\mu$  Volatilität für die normalverteilten
% Marktsprünge,  $\eta$  Intensität des Marktsprung (comp. Poisson-)Prozesses,
%  $\theta$  Investment-Anteil in Markt-Levy-Prozess,  $\delta$  risikoloser
% Zinssatz,  $u$  Anfangskapital,
%  $c$  Prämienintensität,  $\mu$  Parameter für exp-verteilte Schadenssprünge,
%  $\lambda$  Schadenintensität,  $T$  Endzeitpunkt,  $k_T$  Schritte bis dahin
%
% OUTPUT:  $U = U_\theta(T)$  integrierter Risikoprozess,  $Q = Q_\theta(T)$ ,
% Markt =  $\exp(L_\theta(T))$ 
%
% Roland Seydel, 27.09.04 - 21.10.04

schritte=k_T/T; %brauchen wir das wirklich?
deltat=1/schritte; %alt: delta
Tminus=T-deltat;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% SIMULIEREN DES MARKTPROZESSES
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%Brownsche Inkremente
dB=sqrt(deltat)*randn(k_T-1,1);

%compound Poisson-Prozess P mit normal-verteilten Sprüngen
%
S=[]; i=1; s=-log(rand(1))/eta; %Sprungzeitpunkte
while s<Tminus
    S(i)=s;
    i=i+1;
    s=S(i-1)-log(rand(1))/eta;
end
mspruenge=i-1;

```

```

H=exp(mum*randn(mspruenge,1))-1; %normal-verteilte Sprünge selbst,
transformiert, damit das Modell stimmt
%
dP=zeros(k_T-1,1);
k=floor(S*schritte)+1; %Indexvektor, wo überall Sprünge auftreten
dP(k)=H;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% SIMULIEREN DES SCHADENSPROZESSES
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%compound Poisson-Prozess Y mit exp-verteilten Schäden
%
S=[]; i=1; s=-log(rand(1))/lambdas; %Sprungzeitpunkte
while s<Tminus
    S(i)=s;
    i=i+1;
    s=S(i-1)-log(rand(1))/lambdas;
end
sspruenge=i-1;
H=log(rand(sspruenge,1))/mus; %exp-verteilte Schäden selbst
%
dY=zeros(k_T-1,1);
k=floor(S*schritte)+1; %Indexvektor, wo überall Sprünge auftreten
dY(k)=H;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% SIMULIEREN DES GESAMTPROZESSES
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

U=zeros(1,k_T); U(1)=u;
fac1=1 + deltat*( (1-theta)*delta + theta*sigma^2/2 + theta*gamma );
fac2=theta*sigma;
fac3=theta;
fac4=c*deltat;
dMarkt= repmat(fac1,k_T-1,1) + fac2*dB + fac3*dP;
%norm(dP)
dRest= repmat(fac4,k_T-1,1) + dY;
%Es gibt eine etwas explizitere Formel, die aber auch nur mit if-Schleife
umsetzbar ist....
for i=2:k_T
    U(i)=U(i-1)*dMarkt(i-1) + dRest(i-1);

```

end

Markt=prod(dMarkt);

%Wert  $Q_{\theta}(T)$

$Q=u*Markt-U(k_T)$ ;

%Ich brauch den ganzen Prozess nicht

$U=U(k_T)$ ;

# Anhang B

## Notationen und Abkürzungen

...d.h. über die Kapitel bzw. Abschnitte invariante Bezeichnungen.

### Übliche Notation

$\ \cdot\ _1 = \ \cdot\ _{L^1}$	$L^1$ -Norm
$\stackrel{def}{=} \text{ bzw. } :=$	Definition
$\preceq$	$A \preceq 0$ : $A$ negativ semidefinit
$\wedge$	und
$\vee$	oder
$\cdot$	$a\cdot$ steht für die Abb. $t \mapsto at$ ; stochastischer Integrationspunkt
$\dot{-}$	$L(\dot{-})$ : in jedem Punkt wird der linksseitige Grenzwert genommen
$\widehat{X}$	charakteristische Funktion einer ZV $X$
$\sim$	für LP
$\int$	ohne Integrationsgrenze: $\int = \int_{\mathbb{R}^d}$ für $d$ passend
$1_A$	char. Funktion: 0 in $A^c$ , 1 in $A$
$\alpha$	Multiindex
$\propto$	proportional zu
$\mathcal{B}$	Borel- $\sigma$ -Algebra
$B(a, b)$	offene Kugel in $a$ mit Radius $b$
$\text{ceil}(x)$	Runden von $x$ gegen $+\infty$
$C_0^\infty(\Omega)$	unendlich oft differenzierbare Funktionen mit kompaktem Träger in $\Omega$
$C_b^k$	$k$ -mal stetig differenzierbar mit jeweils beschränkten Ableitungen
$\Gamma(n, \mu)$	Gamma-Verteilung mit Erwartungswert $n/\mu$ und Varianz $n/\mu^2$
$\delta_{ij}$	Kronecker-Symbol, $\delta_{ij} = 1 \Leftrightarrow i = j$ , $\delta_{ij} \in \{0, 1\}$
$\Delta L(t)$	Größe des Sprunges von $L$ in $t$
$\text{diag}(z)$	Diagonalmatrix mit $z$ auf der Diagonale
$\mathcal{E}$	stochastisches Exponential

$\exp(\lambda)$	Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda$ und damit Erwartungswert $1/\lambda$
$(\mathcal{F}_t)$	Filtrierung
$\bar{F}$	Tail einer Verteilung, $\bar{F} = 1 - F$
FD	Finite Differenzen
$H^k(\Omega)$	Sobolevraum der $k$ -mal schwach differenzierbaren Funktionen
$H_0^1(\Omega)$	Abschluss von $C_0^\infty(\Omega)$ in der $H^1$ -Norm
$H_w^1(\Omega)$	mit $w$ gewichteter Sobolevraum erster Ordnung
$\eta_\varepsilon$	Standardglättungskern mit $\text{supp}(\eta_\varepsilon) = K(0, \varepsilon)$
<i>iid</i>	unabhängig identische verteilte ZV
$I$	Einheitsmatrix in der passenden Dimension
$K(a, b)$	abgeschlossene Kugel in $a$ mit Radius $b$
LGS	Lineares Gleichungssystem
$L^p(\mathbb{R}, \mu)$	$L^p$ -Raum auf $\mathbb{R}$ bzgl. des Maßes $\mu$
$L^p(\mathbb{R})$	zur Potenz $p$ integrierbare messbare Funktionen
$L_{loc}^1(\Omega)$	auf jedem Kompaktum in $\Omega$ integrierbare messbare Funktionen
MC	Monte Carlo
$\mathbb{N}$	ganze Zahlen $> 0$
$N(\mu, \sigma^2)$	Normalverteilung mit Erwartungswert $\mu$ und Varianz $\sigma^2$
$o(s)$	$f \in o(s) \Leftrightarrow f(s)/s \rightarrow 0$ für $s \rightarrow 0$
$P$ -f.s.	$P$ -fast sicher
PDE	Partielle Differentialgleichung
PIDE	Partielle Integro-Differentialgleichung
$Poi(\lambda)$	Poissonverteilung mit Parameter $\lambda$
$\mathbb{R}^+$	reelle Zahlen $> 0$
$\mathbb{R}_0^+$	$\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$
SDE	Stochastische Differentialgleichung
s.t.	subject to, also unter den Nebenbedingungen
$\sigma(A)$	$\sigma$ -Algebra erzeugt von $A$
$\varphi$	Testfunktion $\in C_0^\infty(\Omega)$
$\Phi$	Verteilungsfunktion von $N(0, 1)$
$v-$	links ausgewertet, d.h. $L(v-) = \lim_{w \uparrow v} L(w)$
$W(t)$	Standard Brownsche Bewegung
$\Omega$	Wahrscheinlichkeitsmenge; Gebiet
$\Omega_T$	$\Omega \times (0, T)$
ZV	Zufallsvariable

## Spezifische Notation

Bei für diese Diplomarbeit spezifischen Notationen findet sich eine Erläuterung in den entsprechenden Kapiteln.

$a(x)$	Koeffizient der PIDE
$A_\varepsilon$	Bilinearform ohne Integralterm
$b(x)$	Koeffizient der PIDE
$B_\varepsilon$	Bilinearform mit Integralterm
$c$	Prämieinnahmen pro Zeiteinheit
$d$	Raumdimension
$f_Y$	Dichte der Schadenssprünge
$f_Z$	Dichte der Marktsprünge (also von $L_\theta$ )
$H_Q(x, t)$	$P(Q_\theta(t) > x)$
$H_U(x, t)$	$P(-U_\theta(t) > x)$
$H(x, t)$	hier ist egal ob $Q$ oder $U$
$\eta$	Intensität der Marktsprünge
$\theta$	Investmentanteil in den Aktienmarkt
$\lambda$	Intensität der Schadenssprünge
$L$	reiner Markt-Lévy-Prozess; Differentialoperator
$L_\theta$	gemischter Markt-Lévy-Prozess
$Q_\theta(t)$	Nettoverlust im Versicherungsgeschäft
$T_j$	Sprungzeiten eines Poisson-Prozesses
$u$	Anfangsrisikoreserve; Lösung der PIDE
$U(t)$	Reserveprozess einer Versicherung
$U_\theta(t)$	integrierter Risikoprozess
$Y, Y_j$	Schadenhöhen
$Z, Z_j$	Marktsprunghöhen

# Literaturverzeichnis

- [1] D. Applebaum. *Lévy Processes and Stochastic Calculus*, volume 93 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [2] S. Asmussen. *Ruin probabilities*, volume 2 of *Advanced Series on Statistical Science & Applied Probability*. World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 2000.
- [3] R. F. Bass. *Probabilistic techniques in analysis*. Probability and its Applications (New York). Springer-Verlag, New York, 1995.
- [4] R. F. Bass. *Diffusions and elliptic operators*. Probability and its Applications (New York). Springer-Verlag, New York, 1998.
- [5] H. Bauer. *Wahrscheinlichkeitstheorie*. de Gruyter Lehrbuch. [de Gruyter Textbook]. Walter de Gruyter & Co., Berlin, fifth edition, 2002.
- [6] K. Bichteler, J.-B. Gravereaux, und J. Jacod. *Malliavin calculus for processes with jumps*, volume 2 of *Stochastics Monographs*. Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1987.
- [7] M. Brokate. Funktionalanalysis. URL <http://www-m6.ma.tum.de/~brokate/>. Vorlesungsskript, 2002.
- [8] M. Brokate. Theorie partieller Differentialgleichungen 1. URL <http://www-m6.ma.tum.de/~brokate/>. Vorlesungsskript, 2003.
- [9] M. Brokate. Theorie partieller Differentialgleichungen 2. URL <http://www-m6.ma.tum.de/~brokate/>. Vorlesungsskript, 2003.
- [10] R. Cont und P. Tankov. *Financial modelling with jump processes*. Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics Series. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2004.
- [11] R. Cont und E. Voltchkova. A finite difference scheme for option pricing in jump diffusion and exponential Lévy models. URL <http://www.cmap.polytechnique.fr/~rama/papers>. Rapport Interne CMAP Numéro 513, 2003.
- [12] M. Dreher. Lösung entarteter parabolischer Differentialgleichungen mit Hilfe der Rothe-Methode. Master's thesis, Universität Halle-Wittenberg, 1996.

- [13] M. Dreher und V. Pluschke. Local solutions of weakly parabolic semilinear differential equations. *Math. Nachr.*, 200:5–20, 1999.
- [14] W. Eisele und A. P. Knobloch. Value at risk: Tool for managing trading risks. 430, 2000.
- [15] S. Emmer und C. Klüppelberg. Optimal portfolios when stock prices follow an exponential Lévy process. *Finance Stoch.*, 8(1):17–44, 2004.
- [16] L. C. Evans. An introduction to Stochastic Differential Equations. URL <http://math.berkeley.edu/~evans/>. Vorlesungsskript.
- [17] L. C. Evans. *Partial differential equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- [18] W. H. Fleming und R. W. Rishel. *Deterministic and stochastic optimal control*. Springer-Verlag, Berlin, 1975. Applications of Mathematics, No. 1.
- [19] J. Gaier, P. Grandits, und W. Schachermayer. Asymptotic ruin probabilities and optimal investment. *Ann. Appl. Probab.*, 13(3):1054–1076, 2003.
- [20] H. Gajewski, K. Gröger, und K. Zacharias. *Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen*. Akademie-Verlag, Berlin, 1974. Mathematische Lehrbücher und Monographien, II. Abteilung, Mathematische Monographien, Band 38.
- [21] H. U. Gerber. Mathematical fun with ruin theory. *Insurance Math. Econom.*, 7(1): 15–23, 1988.
- [22] P. Glasserman. *Monte Carlo methods in financial engineering*, volume 53 of *Applications of Mathematics (New York)*. Springer-Verlag, New York, 2004. Stochastic Modelling and Applied Probability.
- [23] T. Goll und J. Kallsen. Optimal portfolios for logarithmic utility. *Stochastic Process. Appl.*, 89(1):31–48, 2000.
- [24] P. Grandits. An analogue of the Cramér-Lundberg approximation in the optimal investment case. *Appl. Math. Optim.*, 50(1):1–20, 2004.
- [25] C. Hipp und M. Plum. Optimal investment for insurers. *Insurance Math. Econom.*, 27(2):215–228, 2000.
- [26] C. Hipp und M. Plum. Optimal investment for investors with state dependent income, and for insurers. *Finance Stoch.*, 7(3):299–321, 2003.
- [27] C. Hipp und H. Schmidli. Asymptotics of ruin probabilities for controlled risk processes in the small claims case. 2003.
- [28] K. Igari. Cauchy problem for degenerate parabolic equations. *Proc. Japan Acad.*, 49: 229–232, 1973.



- [29] K. Igari. Degenerate parabolic differential equations. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 9: 493–504, 1973/74.
- [30] N. Jacob und R. L. Schilling. Lévy-type processes and pseudodifferential operators. In *Lévy processes*, pages 139–168. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2001.
- [31] J. Jacod und P. Protter. *Probability essentials*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2003.
- [32] J. Jacod und A. N. Shiryaev. *Limit theorems for stochastic processes*, volume 288 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2003.
- [33] J. Kallsen. Lévy-Prozesse. TU München, Vorlesungsskript, 2003.
- [34] J. Kallsen. Stochastische Analysis. TU München, Vorlesungsskript, 2004.
- [35] I. Karatzas und S. E. Shreve. *Brownian motion and stochastic calculus*, volume 113 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1991.
- [36] P. E. Kloeden und E. Platen. *Numerical solution of stochastic differential equations*, volume 23 of *Applications of Mathematics (New York)*. Springer-Verlag, Berlin, 1999. Corrected third printing.
- [37] T. Kluge. Pricing derivatives in stochastic volatility models using the finite difference method. Master’s thesis, Technische Universität Chemnitz, 2002.
- [38] C. Klüppelberg. Vorlesungsskript Risikotheorie. URL <http://www-m4.ma.tum.de/m4/courses/index.de.html>. 2004.
- [39] C. Klüppelberg und R. Kostadinova. Integrated risk management when the stock prices follow an exponential lévy process. Working paper, 2004.
- [40] C. Klüppelberg, R. Kostadinova, und R. C. Seydel. Optimal investment for insurers using numerical methods. Working paper, 2004.
- [41] P. Knabner und L. Angermann. *Numerik partieller Differentialgleichungen – eine anwendungsorientierte Einführung*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [42] N. V. Krylov. *Lectures on elliptic and parabolic equations in Hölder spaces*, volume 12 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.
- [43] A. Kufner. *Weighted Sobolev spaces*. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons Inc., New York, 1985. Translated from the Czech.
- [44] A. Kufner und B. Opic. How to define reasonably weighted Sobolev spaces. *Comment. Math. Univ. Carolin.*, 25(3):537–554, 1984.
- [45] S. M. Lenhart und J. M. Yong. Optimal control for degenerate parabolic equations with logistic growth. *Nonlinear Anal.*, 25(7):681–698, 1995.

- [46] J. A. León, J. L. Solé, F. Utzet, und J. Vives. On Lévy processes, Malliavin calculus and market models with jumps. *Finance Stoch.*, 6(2):197–225, 2002.
- [47] G. M. Lieberman. *Second order parabolic differential equations*. World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 1996.
- [48] A.-M. Matache, P.-A. Nitsche, und C. Schwab. Wavelet Galerkin pricing of american options on Lévy-driven assets. URL <http://www.risklab.ch>. 2003.
- [49] A.-M. Matache, T. von Petersdorff, und C. Schwab. Fast deterministic pricing of options on Lévy driven assets. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 38(1):37–71, 2004.
- [50] T. Mikosch. *Non-life insurance mathematics*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2004. An introduction with stochastic processes.
- [51] D. Nualart. *The Malliavin calculus and related topics*. Probability and its Applications (New York). Springer-Verlag, New York, 1995.
- [52] B. Øksendal. *Stochastic differential equations*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, fifth edition, 2000. An introduction with applications.
- [53] O. A. Oleĭnik. On the smoothness of solutions of degenerate elliptic and parabolic equations. *Soviet Math. Dokl.*, 163:972–976, 1965.
- [54] O. A. Oleĭnik und E. V. Radkevič. *Second order equations with nonnegative characteristic form*. Plenum Press, New York, 1973. Translated from the Russian by Paul C. Fife.
- [55] C. W. Oosterlee und A. A. Vázquez. Numerical valuation of options with jumps in the underlying. accepted for publication in *Appl. Num. Math.*, 2003.
- [56] P. Picard und C. Lefèvre. On the probability of (non-) ruin in infinite time. *Scand. Actuar. J.*, (2):148–161, 2001.
- [57] P. E. Protter. *Stochastic integration and differential equations*, volume 21 of *Applications of Mathematics (New York)*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2004. Stochastic Modelling and Applied Probability.
- [58] A. Quarteroni, R. Sacco, und F. Saleri. *Numerical mathematics*, volume 37 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2000.
- [59] S. Raible. *Lévy processes in Finance: Theory, Numerics, and Empirical Facts*. PhD thesis, Albert-Ludwigs-Universität Freiburg, 2000.
- [60] M. Renardy und R. C. Rogers. *An introduction to partial differential equations*, volume 13 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 2004.

- [61] K.-I. Sato. *Lévy processes and infinitely divisible distributions*, volume 68 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999. Translated from the 1990 Japanese original, Revised by the author.
- [62] R. Seydel. *Tools for computational finance*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [63] M. E. Taylor. *Partial differential equations. I*, volume 115 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1996. Basic theory.
- [64] M. E. Taylor. *Partial differential equations. III*, volume 117 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1997. Nonlinear equations, Corrected reprint of the 1996 original.
- [65] D. Werner. *Funktionalanalysis*. Springer-Verlag, Berlin, extended edition, 2002.
- [66] J. Wloka. *Partielle Differentialgleichungen. I*. B. G. Teubner, Stuttgart, 1982. Sobolevräume und Randwertaufgaben. [Sobolev spaces and boundary value problems], Mathematische Leitfäden. [Mathematical Textbooks].
- [67] E. Zeidler. *Nonlinear functional analysis and its applications. II/A*. Springer-Verlag, New York, 1990. Linear monotone operators, Translated from the German by the author and Leo F. Boron.
- [68] E. Zeidler. *Nonlinear functional analysis and its applications. II/B*. Springer-Verlag, New York, 1990. Nonlinear monotone operators, Translated from the German by the author and Leo F. Boron.