

Technische Universität München

ZENTRUM MATHEMATIK

**Eine gruppierte elliptische Copula
und ihre Anwendung im
Kreditrisikomanagement**

Diplomarbeit

von

Christian Schwarz

Themenstellerin: Prof. Dr. C. Klüppelberg

Betreuer: Dipl. math. Krassimir Kostadinov

Abgabetermin: 15.01.2005

Hiermit erkläre ich, dass ich die Diplomarbeit selbstständig angefertigt und nur die angegebenen Quellen verwendet habe.

Garching, den 15. Januar 2005

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Die Aufgabe	1
1.2	Kreditrisiko	3
1.3	Daten	3
1.4	Struktur der Arbeit	4
2	Datenanalyse	10
2.1	Testmethoden zur Untersuchung von Daten auf ihre iid Eigenschaft	10
2.1.1	Test auf Unkorreliertheit	11
2.1.2	Test auf identische Verteilung	12
2.2	Anwendung der Testmethoden auf die monatlichen Log>Returns der Equity-Indizes	12
2.3	Verteilungsanalyse	30
3	Copulae und Abhängigkeitsmaße	62
3.1	Copulae	62
3.2	Abhängigkeitsmaße und deren Schätzer	65
3.2.1	Korrelation	66
3.2.2	Kendall's Tau	66
3.2.3	Schätzer für Kendall's Tau	67
3.2.4	Tail Dependence	71
3.2.5	Schätzer für die Tail-Dependence	73
4	Multivariate Extremwerttheorie	92
4.1	Multivariate Extremwertverteilungen	92
4.2	Charakterisierung multivariater Extremwertverteilungen	93
4.3	Maximaler Anziehungsbereich der multivariaten Extremwertverteilungen	96
4.4	Schätzer für das Exponentenmaß	98
4.4.1	Schätzer für die Tail-Dependence	99
5	Sphärische und Elliptische Verteilungen	100
5.1	Sphärische Verteilungen	101
5.1.1	Tail-Dependence für sphärische Verteilungen	102
5.2	Elliptische Verteilungen	104
5.2.1	Korrelation für elliptische Verteilungen	108

5.2.2	Kendall's Tau für elliptische Verteilungen	108
5.2.3	Tail-Dependence für elliptische Verteilungen	109
6	Das Modell	121
6.1	Beschreibung des Problems	121
6.2	Allgemeines latente Variablen Modell	123
6.3	Modellierung der individuellen Ausfallwahrscheinlichkeiten	125
6.4	Modellierung der Abhängigkeitsstruktur	135
6.4.1	Abhängigkeitsmodellierung mit Gauß-Copula	136
6.4.2	Abhängigkeitsmodellierung mit t-Copula	136
6.4.3	Abhängigkeitsmodellierung mit gruppierter t-Copula	137
7	Kalibrierung	139
7.1	Schätzen der Parameter ν_1, \dots, ν_L	141
7.1.1	Maximum Likelihood Methode	141
7.1.2	Momenten-Methode unter Verwendung von Kendall's Tau	142
7.1.3	Kleinste-Quadrate Schätzer vom Tailindex α	144
7.2	Schätzen der Korrelationsmatrix ρ	156
8	Simulation des Portfolioverlustes	170
8.1	Algorithmus	170
8.2	Beispiel	171
9	Zusammenfassung	175
A	Abkürzungen und Nummerierung der Equity-Indizes	177
B	Univariate Extremwerttheorie	180
B.1	Der Satz von Fisher-Tippett	180
B.2	Maximaler Anziehungsbereich von H_ζ	181
B.2.1	MDA für die Fréchet Verteilung $\Phi_\alpha(x) = \exp\{-x^{-\alpha}\}$	184
B.2.2	MDA für die Weibull Verteilung $\Psi_\alpha(x) = \exp\{-(-x)^\alpha\}$	185
B.2.3	MDA für die Gumbel Verteilung $\Lambda(x) = \exp\{-e^{-x}\}$	186
B.3	Die verallgemeinerte Pareto Verteilung	188
B.4	Statistische Verfahren für extreme Ereignisse	190
B.4.1	Die mittlere Exzessfunktion	190
B.5	Schätzen des Formparameters ζ von H_ζ	200
B.5.1	Pickands Schätzer	200
B.5.2	Hill Schätzer	202
B.5.3	Die POT-Methode	215
B.5.4	Maximum Likelihood Schätzer	216

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Die Aufgabe

Folgendes lehnt an Bluhm et al. [4], Seite 51 f., an.

1983 einigten sich die Bankenaufsichtsbehörden der sieben größten Industrienationen (G7) auf Regeln zur Bankenregulierung, die auch in nationale Regulierungsgesetze implementiert werden sollten. Da die nationalen Regulierer diese Themen diskutierten, nachdem sie von der *Bank of International Settlement* dazu eingeladen worden waren, und diese in Basel gelegen ist, heißen diese Regeln seitdem *The Basel Capital Accord*.

Die bekannteste Regel davon ist die sogenannte *8-Prozent Regel*. Aufgrund dieser Regel müssen Banken beweisen können, dass ihr Reservekapital mindestens 8 Prozent ihres risikogewichteten Vermögens (Risk Weighted Assets RWA) ausmacht. Diese Regel bedeutet, dass die Basis zur Berechnung des Reservekapitals hauptsächlich durch die Höhe des verliehenen Kapitals an die Kunden der Bank bestimmt wird. Das RWA wurde durch ein einfaches Gewichtungsschema berechnet. Einfach gesagt, wurde für Kredite an eine Regierungseinrichtung ein Risikogewicht von 0% veranschlagt, da man davon ausgeht, dass die größten Industrienationen ihren finanziellen Verbindlichkeiten nachkommen werden. Das Risikogewicht für Forderungen an OEZD-Banken wurde auf 20% festgesetzt und in Bezug auf Anleihen von Unternehmen einigte sich das Komitee auf ein Risikogewicht von 100%, egal ob die emitierende Firma eine risikoreiche oder /-arme ist. Das RWA wird dann berechnet durch Addition aller risikogewichteten Forderungen und ergibt ein Regulierungskapital von $8\% \times \text{RWA}$.

Die Hauptschwäche dieses Reservekapitalabkommens war, dass es keinen Unterschied zwischen Schuldner verschiedener Bonität machte. In den letzten Jahren haben einige Veränderungen dieses Abkommens stattgefunden, um unter anderem diese Schwäche zu beseitigen. Bluhm et al. [4], S. 51 f., zeigen einige wichtige Änderungen bis heute auf. Seit 1997 dürfen Banken sogenannte *spezifische Risikomodelle* benutzen, so dass in Frage kommende Finanzinstrumente nicht mehr unter die 8%-Regel fallen. Allerdings benutzen die meisten Banken zu diesem Zeitpunkt schon anspruchsvollere Modelle zur internen Messung von Kredit- und speziell Ausfallrisiko. Diese Modelle unterscheiden sich ziemlich von den *spezifischen Risikomodelle* des Basel Komitees zur Bankenaufsicht und arbeiten mit einer Verlustverteilung eines ganzen Portfolios von Forderungen.

Ein endgültiges Abkommen des Basel Komitees existiert noch nicht und es bedarf noch

einiger Veränderungen um die Risikomodelle, die in fast allen Banken auf der Welt implementiert sind, erfassen zu können.

In dieser Arbeit wird ein allgemeines Kreditrisikomodell eingeführt, wie es die Firmen KMV und CreditMetrics propagieren. Durch das Spezifizieren des Modells gelangen wir zu drei unterschiedlichen Modellen, die wir erst kalibrieren und dann anhand verschiedener Risikomaße unterscheiden.

Häufig verwendete Maße für das Risiko sind *Value at Risk* (VaR) und *Expected Shortfall* (ES). Der VaR ist ein hohes q -Quantil der Verlustverteilung eines Portfolios und somit ein hoher Verlust, der nur mit einer sehr geringen Wahrscheinlichkeit überschritten werden kann. Der ES ist der erwartete Verlust eines Portfolios unter der Bedingung, dass ein hohes q -Quantil der Verlustverteilung überschritten wird. Für VaR und ES sind im Kreditrisikomanagement q -Werte von 99% und 99.9% üblich.

Die univariate Extremwerttheorie bietet Möglichkeiten um Aussagen über sehr hohe Quantile von Verlustverteilungen der einzelnen Portfoliokomponenten machen zu können.

Um einen hohen Verlust des Gesamtportfolios zu erleben, genügt es im Allgemeinen nicht, dass nur ein einzelner Kredit ausfällt, dazu ist der gleichzeitige Ausfall von mehreren Krediten nötig. In unserem allgemeinen Model, in dem gemeinsame Risikofaktoren die treibende Kraft sind, müssen mehrere Risikofaktoren stark negativ sein, damit viele Kredite ausfallgefährdet sind. Daher ist es besonders wichtig, die Abhängigkeiten der extremen Werte der Risikofaktoren adäquat zu modellieren.

Mit der Tail-Dependence, die in Kapitel 3.2.4 eingeführt wird, ist ein Maß gegeben, das die Abhängigkeit von extremen Ereignissen für abhängige Zufallsvariablen misst. Im bivariaten Fall misst man mit ihr die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zufallsvariable einen extremen Wert annimmt, unter der Bedingung, dass die andere Zufallsvariable ebenfalls eine extreme Realisierung hat.

In der Praxis sind Modelle, die auf einer Normal- oder Lognormalverteilungsannahme beruhen, weit verbreitet. Dies liegt daran, dass diese Modelle einfach aufgebaut und leicht auf Rechnern implementierbar sind. Allerdings ist die Abhängigkeitsstruktur dieser Modelle allein durch die Korrelation beschrieben, und somit zu einfach, um extreme Abhängigkeiten zu erfassen.

Einen Ausweg bietet das Konzept der Copulae, da man mit ihnen im Prinzip jegliche Abhängigkeitsstruktur modellieren kann. Allerdings wächst die Komplexität dabei stark mit der Dimension und es ist schwierig und aufwändig die meisten dieser Verfahren zu implementieren.

Die t-Copula und die gruppierte t-Copula, die in Kapitel 5 eingeführt werden, sind Copulavertreter, für die diese Probleme handhabbar sind. Daher werden wir diese als Alternative zur Gaußcopula (Copula der Normalverteilung) in dieser Arbeit dazu verwenden um die Abhängigkeitsstruktur der gemeinsamen Risikofaktoren zu modellieren.

1.2 Kreditrisiko

Eine Vielzahl von Finanzinstrumenten unterliegt dem Kreditrisiko. Im Prinzip entsteht für einen Geldgeber immer dann Kredit bzw. Ausfallrisiko, wenn die Wahrscheinlichkeit, dass der Schuldner zum Fälligkeitszeitpunkt des Finanzinstrumentes mindestens einen Teil des geliehenen Geldes nicht mehr zurückzahlen kann, größer als Null ist. Dies ist die Definition von Ausfallrisiko. Kreditrisiko beinhaltet jenes und das Risiko, dass sich oben angesprochene Wahrscheinlichkeit ändert.

1.3 Daten

Rund um die Welt werden Aktien zu Equity-Indizes zusammengefasst. Prominente Vertreter sind der DAX oder der Dow Jones. Diese sollen unter anderem als Indikatoren für einen Wirtschaftszweig dienen. So gibt der DAX zum Beispiel Auskunft darüber wie es im Allgemeinen um die 30 größten deutschen Unternehmen bestellt ist. Heutzutage gibt es für fast jeden Wirtschaftszweig und fast alle Länder Equity-Indizes. In dieser Arbeit verwenden wir 92 Equity-Indizes, die zu acht verschiedenen Ländern gehören und innerhalb jedes Landes nach Industrien differenziert sind. Diese wurden 10 Jahre von 1992 bis 2002 beobachtet, so dass wir für jeden Index eine Zeitreihe von 121 Monatswerten zur Verfügung haben. Wir haben also die Zeitreihen

$$X_t^i \quad t = 1, \dots, 121, \quad i = 1, \dots, 92$$

Den Datensatz verdanken wir der Vermittlung durch Filip Lindskog.

Wir bedanken uns bei der SwissRe für die Überlassung der Daten.

Grundlage unserer Arbeit ist der Aufsatz Daul et. al. [12]. Die Autoren dieser Veröffentlichung haben den Datensatz von dem Datenzulieferer *DataStreamTM* erhalten.

Bemerkung 1.3.1. *Wir werden in der Folge die Equity-Indizes nicht mit ihren vollständigen Namen, sondern mit ihren Kürzeln aus dem System von DataStreamTM bezeichnen. Beispiele für solche Abkürzungen sind BANKSUS oder AUTOSBD. Diese stehen für den Bankensektor in den USA bzw. für den Automobilindustriesektor in Deutschland. Außerdem werden die Indizes von 1 bis 92 numeriert. Beides, Abkürzungen und Numerierung sind in der Liste im Anhang A für jeden der Indizes zu finden.*

In dieser Arbeit nehmen wir an, dass die gemeinsamen Risikofaktoren unseres Modells die Abhängigkeitsstruktur des Marktes widerspiegeln. Da die Equity-Indizes stark unterschiedliche Werte aufweisen, hier Beispiele für die Maxima des 22. und dritten Equity-Index:

$$\max_{1 \leq t \leq 120} X_t^{22} = 20517, \quad \max_{1 \leq t \leq 120} X_t^3 = 506 \quad (1.1)$$

sind sie nur schwer vergleichbar. Außerdem sind die Zeitreihen nicht unabhängig, was man an der großen Autokorrelation für sehr viele Lags in den Abbildungen 1.1 bis 1.4 sehen kann (Definition der Autokorrelationsfunktion folgt im nächsten Kapitel), sodass wir sie folgendermaßen umwandeln:

$$R_{ti} = \ln \frac{X_{t+1}^i}{X_t^i}, \quad i = 1, \dots, 92. \quad (1.2)$$

Die $(R_{ti})_{1 \leq t \leq 120}$ sind also 120 Realisierungen der Log>Returns des Equity-Index Nummer i zwischen dem 10.1.1992 und dem 10.12.2001. In der klassischen Finanzmathematik nimmt man an, dass die R_{ti} normalverteilt sind. In Kapitel 2.3 werden wir zu dem Schluss kommen, dass sie wohl eher einer Laplaceverteilung genügen. Wir betrachten die Zeitreihen $(R_{ti})_{1 \leq t \leq 120}$ als Stichproben der Länge 120 aus einem stochastischen Prozess.

1.4 Struktur der Arbeit

Das Ziel dieser Arbeit ist es, die durch unterschiedliche Spezifikationen eines allgemeinen Modells entstehenden drei Kreditrisikomodelle hinsichtlich ihrer durch eine Simulation geschätzten Portfolioverlustverteilungen zu vergleichen. Dabei interessieren wir uns ausschließlich für den äußersten Rand der Portfolioverlustverteilung, wo große Verluste stattfinden.

Um dieses Verfahren schließlich in Kapitel 8 umsetzen zu können, werden in den vorangehenden Kapiteln die dafür nötigen Grundlagen vorgestellt.

Zuerst wird in Kapitel 2 überprüft, ob die iid Annahme für die Zeitreihen der Log>Returns nicht verworfen werden kann. Geeignete Tests verwerfen diese Hypothese nicht. Weiterhin nehmen wir an, dass die Log>Returns zweiseitig exponential verteilt sind und ermitteln ihre Parameter.

In Kapitel B wird die univariate Extremwerttheorie vorgestellt. Durch eine an den Daten durchgeführte Extremwertanalyse erhärtet sich der Verdacht der exponential verteilten Tails der Log>Returns. Außerdem werden Begrifflichkeiten und Methoden vorgestellt, die in den vorherigen Kapiteln von Nöten sein werden. Um den am Kreditrisikomodell interessierten Leser nicht zu lange aufzuhalten, wurde dieses Kapitel in den Anhang gestellt.

Durch das Konzept der Copulae, das in Kapitel 3.1 vorgestellt wird, ist es möglich, die Abhängigkeitsstruktur der Log>Returns getrennt von ihren Randverteilungen zu betrachten. Der zentrale Satz dieses Kapitels, ist der Satz von Sklar. In Kapitel 3.2 werden Abhängigkeitsmaße wie die lineare Korrelation, Kendall's Tau und die Tail-Dependence eingeführt. Kendall's Tau und die Tail-Dependence sind Copulaeigenschaften. Schätzer für beide Abhängigkeitsmaße sind ebenfalls in diesem Kapitel zu finden.

Kapitel 4 ist eine Erweiterung der univariaten Extremwerttheorie auf den multivariaten Fall. Im letzten Teil dieses Kapitels wird ein alternativer Schätzer der Tail-Dependence geliefert.

Die drei Modelle, die aus dem allgemeinen Kreditrisikomodell entstehen, ergeben sich durch eine Spezifikation der Copula, die für die Log>Returns der Equity-Indizes angenommen wird. In allen drei Fällen lassen wir elliptische oder gruppierte elliptische Copulae zu. Elliptische Copulae gehören zu elliptischen Verteilungen, die in Kapitel 5 vorgestellt werden. Gewisse, möglicherweise mehrdimensionale Ränder von gruppierten elliptischen

Copulae, sind elliptische Copulae. Der Spezialfall der gruppierten t-Copula wird ebenfalls in diesem Kapitel vorgestellt.

Elliptische Verteilungen entstehen aus den, in diesem Kapitel zuerst betrachteten, sphärischen Verteilungen durch eine Koordinatentransformation. Für sphärische und elliptische Verteilungen wird festgestellt, dass im Falle von regulär variierenden Zufallsvektoren der Index der regulären Variation im Verhältnis mit der Tail-Dependence und Kendall's Tau, bzw. der linearen Korrelation steht.

Das allgemeine Kreditrisikomodell wird in Kapitel 6 eingeführt. Zusätzlich beschreiben wir einige Verfahren zur Gewinnung der individuellen Ausfallwahrscheinlichkeiten von Unternehmen. Am Ende des Kapitels werden dann die bereits mehrfach angesprochenen Spezifikationen, die zu den drei unterschiedlichen Modellen führen, vorgestellt.

Die zur Parametrisierung der drei verschiedenen Modelle notwendigen Schätzwerte der Parameter werden in Kapitel 7 aus den Daten berechnet. Dabei werden mehrere Verfahren verwendet. Eines davon ist neu und stammt aus Kostadinov [28]. Für dieses Verfahren werden sowohl Behauptungen aufgestellt und bewiesen, als auch eine Simulationsstudie betrieben, mittels derer die Qualität des neuen Verfahrens begutachtet wird. Letztendlich wird die neue Methode benutzt um einen Copulaparameter zu schätzen, für den durch ein Bootstrap Verfahren auch Konfidenzgrenzen angegeben werden können.

Der Vergleich der drei unterschiedlichen Modelle erfolgt dann in Kapitel 8 anhand von Risikomaßen wie dem VaR und dem ES. Dabei treffen wir auf erhebliche Unterschiede.

Die Zusammenfassung der Ergebnisse und ein Ausblick sind in Kapitel 9 zu finden.

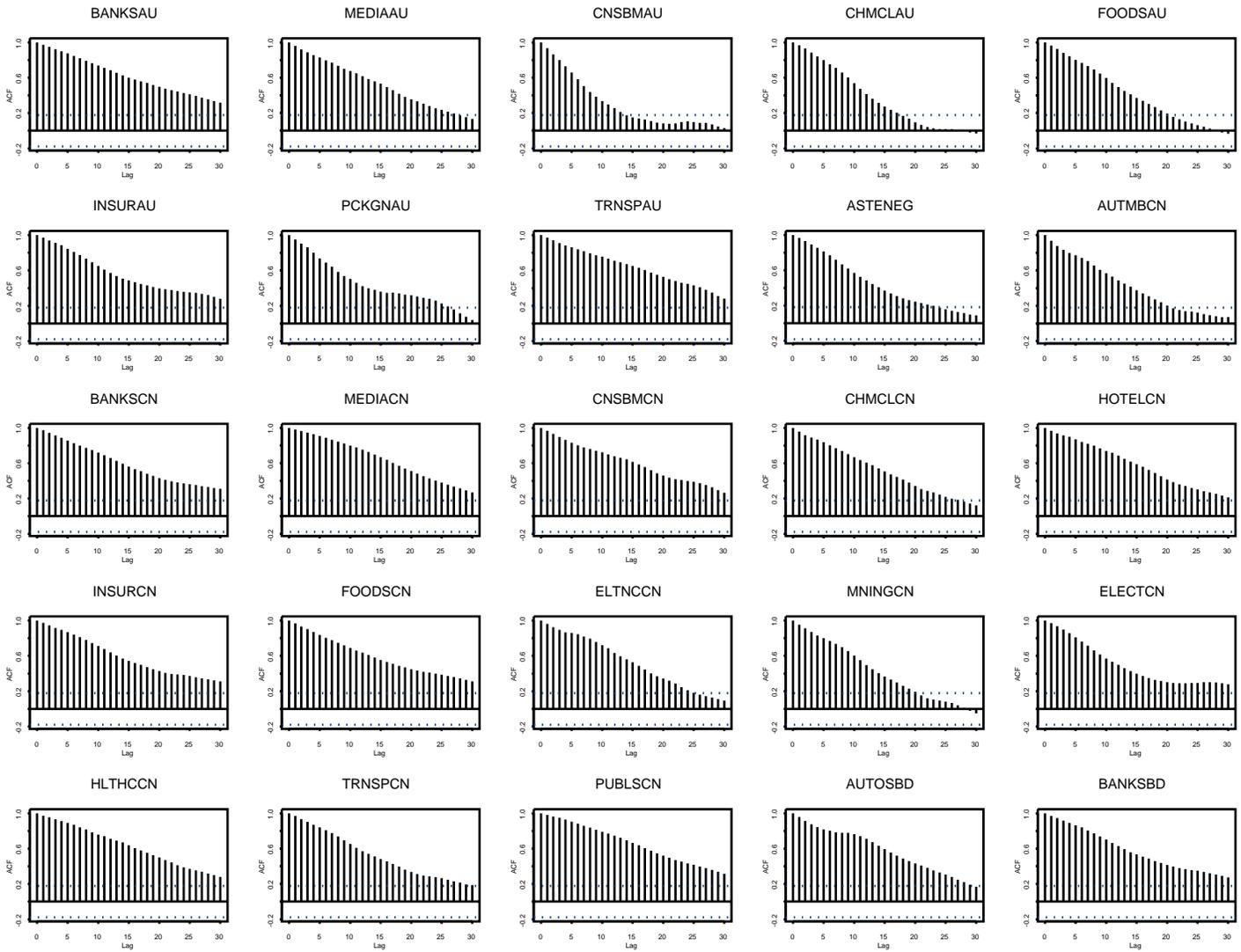


Abbildung 1.1: acf Analyse der Equity-Indizes

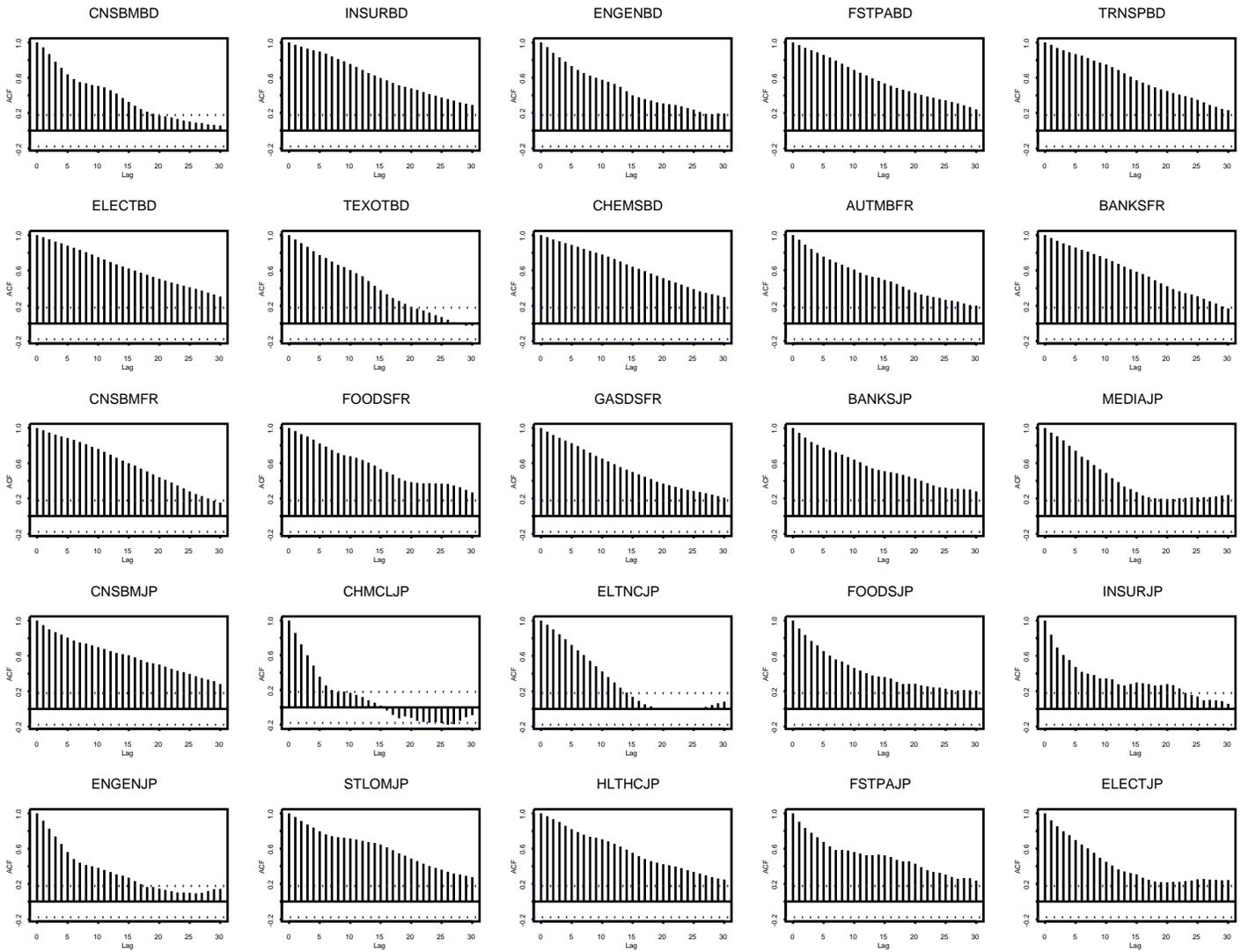


Abbildung 1.2: acf Analyse der Equity-Indizes

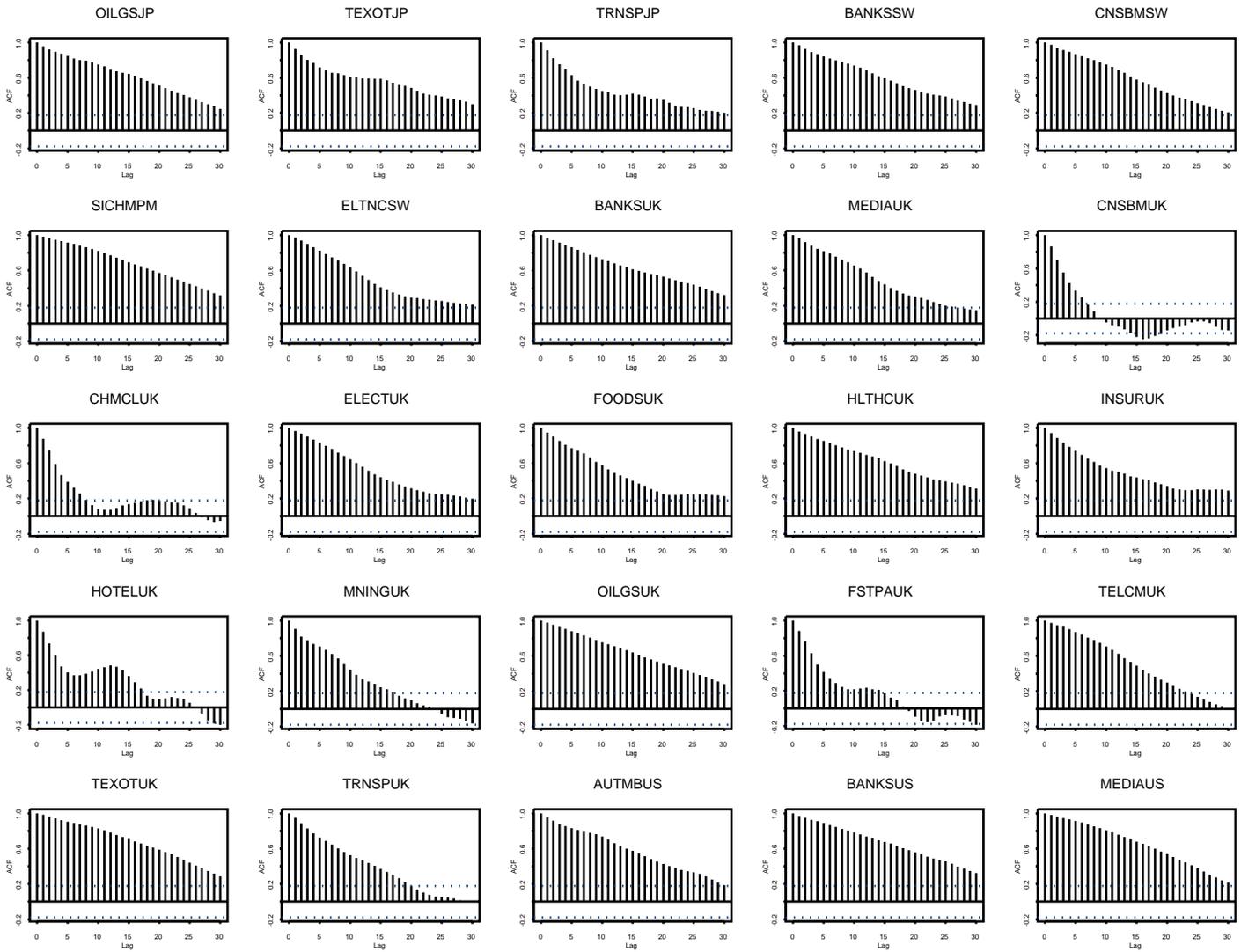


Abbildung 1.3: acf Analyse der Equity-Indizes

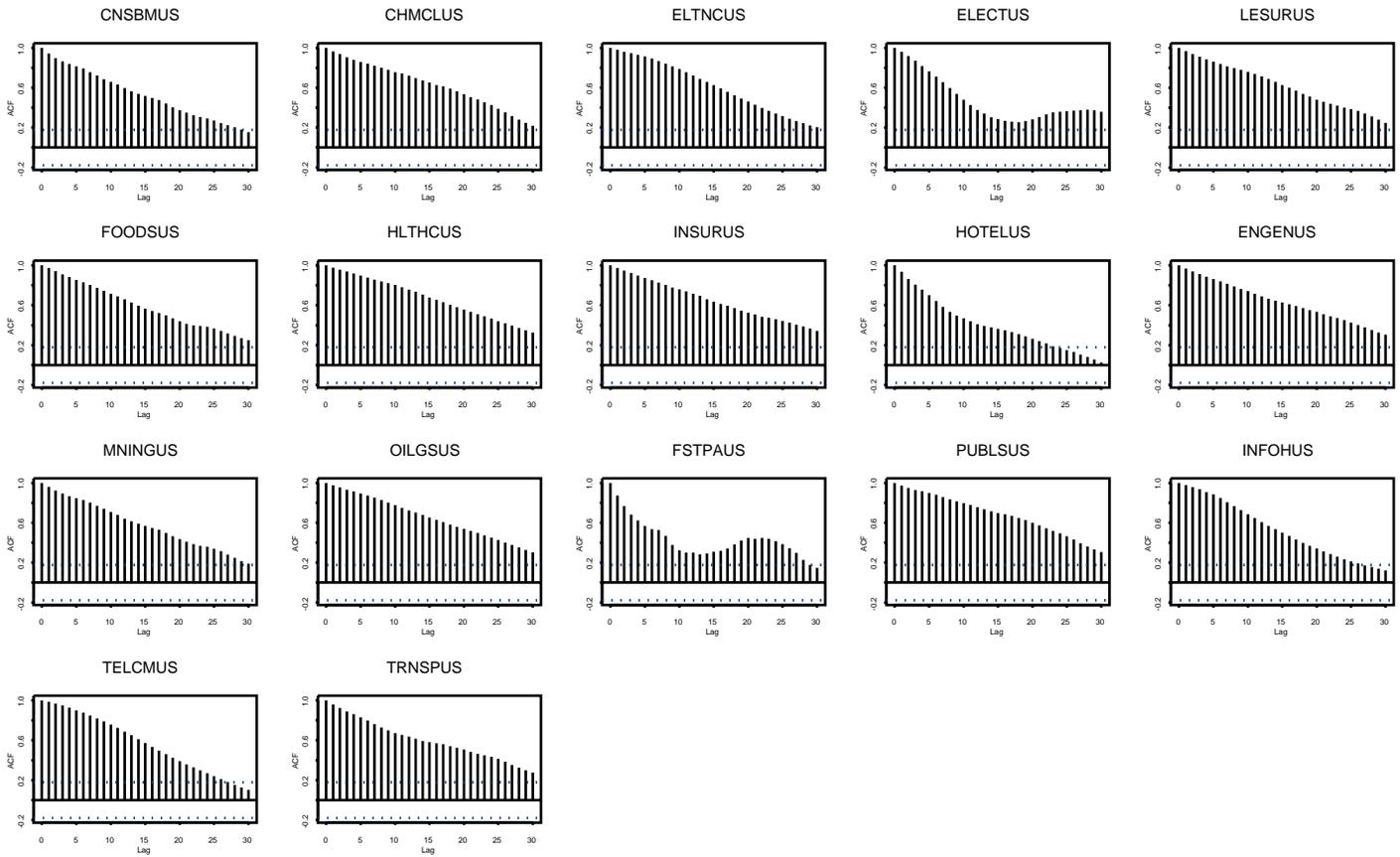


Abbildung 1.4: acf Analyse der Equity-Indizes

Kapitel 2

Datenanalyse

Bei vielen statistischen Analyseverfahren wird vorausgesetzt, dass der zugrunde liegende Datensatz die iid Eigenschaft besitzt. Unsere Daten sind Log>Returns von Equity-Indizes, die nach Ländern und Sektoren sortiert sind. Ob diese Daten iid sind wird nun statistisch getestet. Sollte sich herausstellen, dass eine zeitliche Abhängigkeit innerhalb der Zeitreihen besteht, so kann man die später verwendeten Analyseverfahren auf allgemeinere Modelle, die zeitliche Abhängigkeiten erlauben, ausdehnen. Nachdem die Annahmen, dass die Daten identisch und unabhängig verteilt sind, getestet wurden, werden noch Aussagen über ihre eindimensionalen Randverteilungen gemacht.

2.1 Testmethoden zur Untersuchung von Daten auf ihre iid Eigenschaft

Sei X_1, \dots, X_n ein Stichprobe der Länge $n \in \mathbb{N}$ der Zeitreihe $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$.

Definition 2.1.1 (Autokovarianzfunktion (acf) von (X_t)). Sei $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ ein stochastischer Prozess mit $\text{var}(X_t) < \infty \forall t \in \mathbb{Z}$. Dann heißt

$$\gamma_X(s, t) = \text{cov}(X_s, X_t) = E[(X_s - EX_s)(X_t - EX_t)], \quad s, t \in \mathbb{Z},$$

Autokovarianzfunktion (acf) von $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$.

Definition 2.1.2 (Strenge Stationarität). Ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ heißt streng stationär, wenn die gemeinsamen Verteilungen von $(X_{t_1}, \dots, X_{t_k})^T$ und $(X_{t_1+h}, \dots, X_{t_k+h})^T$ gleich sind, für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $t_1, \dots, t_k, h \in \mathbb{Z}$.

Definition 2.1.3 (Schwache Stationarität). Ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ heißt schwach stationär, falls

1. $E|X_t|^2 < \infty, \forall t \in \mathbb{Z}$,
2. $EX_t = \mu, \forall t \in \mathbb{Z}$,
3. $\gamma_X(s, t) = \gamma_X(s + h, t + h), \forall s, t, h \in \mathbb{Z}$.

Bemerkung 2.1.4. Für einen schwach stationären Prozess $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ gilt

$$\gamma_X(s, t) = \gamma_X(t - s, 0), \quad s, t \in \mathbb{Z}.$$

Daher definiert man die Autokovarianzfunktion γ_X des schwach stationären Prozesses $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$

$$\gamma_X(h) := \gamma_X(h, 0) = \text{cov}(X_h, X_0), \quad \forall h \in \mathbb{Z}.$$

$\gamma_X(h)$ heißt die Autokovarianz des Prozesses X zum Lag h .

Definition 2.1.5 (Empirische acf). Ein Schätzer der Autokovarianzfunktion ist die sogenannte empirische oder Stichprobenautokovarianzfunktion von X_1, \dots, X_n , die definiert ist durch

$$\hat{\gamma}_X(k) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-k} (X_{j+k} - \bar{X})(X_j - \bar{X}), \quad 0 \leq k \leq n, \quad \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

Definition 2.1.6 (Autokorrelationsfunktion (acr) und empirische acr). Für einen schwach stationären Prozess $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ ist die Autokorrelationsfunktion ρ_X definiert durch

$$\rho_X(h) := \frac{\gamma_X(h)}{\gamma_X(0)}.$$

Die empirische oder Stichprobenautokorrelationsfunktion von der Stichprobe X_1, \dots, X_n ist definiert durch

$$\hat{\rho}_X(k) := \frac{\hat{\gamma}_X(k)}{\hat{\gamma}_X(0)}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

Den Index X von γ_X , $\hat{\gamma}_X$, ρ_X und $\hat{\rho}_X$ kann man weglassen sofern aus dem Zusammenhang klar ist um welchen Prozess es sich handelt.

2.1.1 Test auf Unkorreliertheit

Für einen Test auf Unkorreliertheit einer Stichprobe X_1, \dots, X_n ist folgendes Lemma hilfreich:

Lemma 2.1.7. Sei $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ iid mit Erwartungswert 0 und Varianz σ . Dann gilt $\rho(h) = 0 \forall h \neq 0$. Seien die Vektoren der acr und der empirischen acr Funktion bezeichnet mit

$$\underline{\rho}(h) = (\rho(1), \dots, \rho(h))^T \quad \text{und} \quad \underline{\hat{\rho}}(h) = (\hat{\rho}(1), \dots, \hat{\rho}(h))^T.$$

Dann gilt

$$\sqrt{n}(\underline{\hat{\rho}}(h) - \underline{\rho}(h)) \xrightarrow{d} (N_1, \dots, N_h)^T \quad \text{mit} \quad N_i \sim N(0, 1) \quad \text{iid}, \quad i = 1, \dots, h. \quad (2.1)$$

Bemerkung 2.1.8. Der Beweis für 2.1 steht in Brockwell und Davis [5], Abschnitt 7.3. Das Lemma basiert auf einem Spezialfall der Formel von Bartlett.

Nach Lemma 2.1.7 gilt also: $\hat{\rho}(1), \dots, \hat{\rho}(h) \sim AN(0, \frac{1}{n})$ iid, wobei AN die asymptotische

Normalverteilung ist. Für große n hat jeder einzelne Schätzer $\hat{\rho}(i)$, $i = 1, \dots, h$, das 95%-Konfidenzintervall (KI) $(-1.96/\sqrt{n}, 1.96/\sqrt{n})$. Da aber

$$P(\hat{\rho}(1) \in KI, \dots, \hat{\rho}(h) \in KI) \approx \prod_{i=1}^h P(\hat{\rho}(i) \in KI) = (0.95)^h \ll 0.95$$

sollten einige Schätzwerte $\hat{\rho}(i)$ außerhalb von KI noch nicht zur Ablehnung der Nullhypothese $H_0 : (X_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ unkorreliert führen.

Man beachte, dass der Schätzer $\hat{\rho}(h)$ schlecht wird für h nahe bei n , da dann nur sehr wenige Paare (X_t, X_{t+h}) zur Verfügung stehen. Für akzeptable Ergebnisse ist $n \geq 50$ und $h \leq 0.25n$ eine Faustregel.

Da die iid Eigenschaft im allgemeinen schwer zu schätzen ist, testet man nicht nur die X_i , sondern auch deren Transformationen, wie zum Beispiel ihre Absolutbeträge $|X_i|$ und ihre Quadrate X_i^2 auf Unkorreliertheit. Wenn auch bei diesen die Unkorreliertheit nicht abgelehnt werden kann, nimmt man, an die Daten seien iid.

2.1.2 Test auf identische Verteilung

Um zu testen ob die Daten X_i von der gleichen Verteilung F stammen, verwendet man den gleitenden Mittelwert

$$\bar{X}_{i,m} = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} X_{i+j}.$$

Dieser ist ein Schätzer für den Erwartungswert der Verteilung. Wenn sich die Verteilung nicht ändert, dann sollte sich bei ausreichender Datenfülle auch der gleitende Mittelwert nicht zu stark ändern. Der Test, ob der gleitende Mittelwert sich ändert, funktioniert graphisch: zuerst werden die Daten geplottet. Danach wird der gleitende Mittelwert eingefügt. Sollte sich $\bar{X}_{i,m}$ zu stark ändern, so ist dies ein Hinweis darauf, dass die Verteilung der Daten sich in diesem Zeitraum auch geändert hat. Entscheidend dabei ist, dass die Länge m der verwendeten Datenpunkte im passenden Verhältniss zur Stichprobenlänge n gewählt wird. Wählt man m zu klein, so fluktuiert der $\bar{X}_{i,m}$ -Plot zu stark (für $m = 1$ ist er ein Plot der ursprünglichen Stichprobe). Eine zu große Wahl von m führt zu einem Plot, der nicht genügend Informationen bietet. Die Funktion “lowess” in S-Plus hat als Ausgabewert 2 Vektoren. Der eine sind die Abszissenwerte und der andere die Ordinatenwerte eines Diagramms, das einen robusten Schätzer des gleitenden Mittelwertes zeigt. Da wir nur sehr wenige Daten pro Zeitreihe zur Verfügung haben, ist der Test auf Veränderung des Mittelwertes die einzige Möglichkeit statistisch zu testen ob sich die Verteilung der Daten verändert.

2.2 Anwendung der Testmethoden auf die monatlichen Log>Returns der Equity-Indizes

Abbildungen 2.1 bis 2.4 zeigen das Ergebnis des Tests auf Unkorreliertheit mit der empirischen Autokorrelationsfunktion angewandt auf die monatlichen Log>Returns der Equity-

Indizes. Durch die beiden horizontal gestrichelten Linien in den einzelnen Graphen ist das 95 % KI gekennzeichnet. In einigen wenigen Fällen sind Überschreitungen dieser Konfidenzgrenzen zu sehen. Das genügt aber noch nicht um die iid Hypothese zu verwerfen. Die Abbildungen 2.5 bis 2.8 und 2.9 bis 2.12 zeigen die acf Tests mit den Absolutbeträgen und den Quadraten der Log>Returns der Indizes. Auch hier sind schwache Abhängigkeiten zu sehen. Allerdings sind dies in den meisten Fällen nur sehr wenige. Bei den Indizes ELTNCCN und TELCMUK treten bei den Absolutbeträgen und den Quadraten der Log>Returns große Autokorrelationen bei vielen Lags auf. Bei diesen beiden Indizes ist also die iid Annahme problematisch. Generell findet man bei allen Indizes bei den Absolutbeträgen mehr Abhängigkeiten als bei den Log>Returns selbst und ihren Quadraten.

Beim Betrachten des Plots mit dem gleitenden Mittelwert $\bar{X}_{i,m}$ (Abbildungen 2.13-2.16) wird untersucht, ob sich die Verteilung der Log>Returns über die Zeit ändert. Da die Schwankungen in $\bar{X}_{i,m}$ aber für alle Log>Returns zu schwach sind, ergeben sich keine Hinweise auf eine Veränderung der Verteilung der Log>Returns.

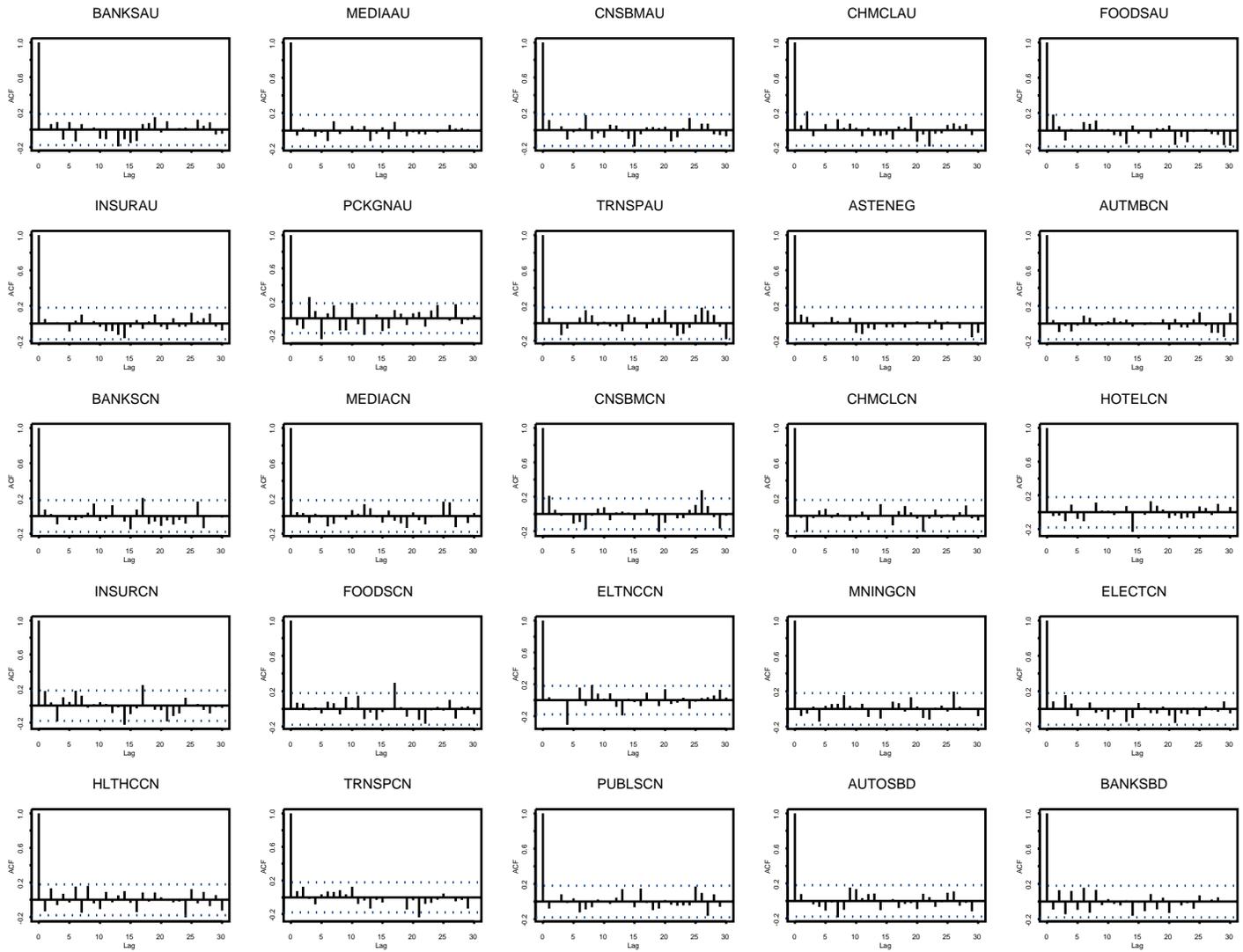


Abbildung 2.1: acf Analyse der Log>Returns der Equity-Indizes

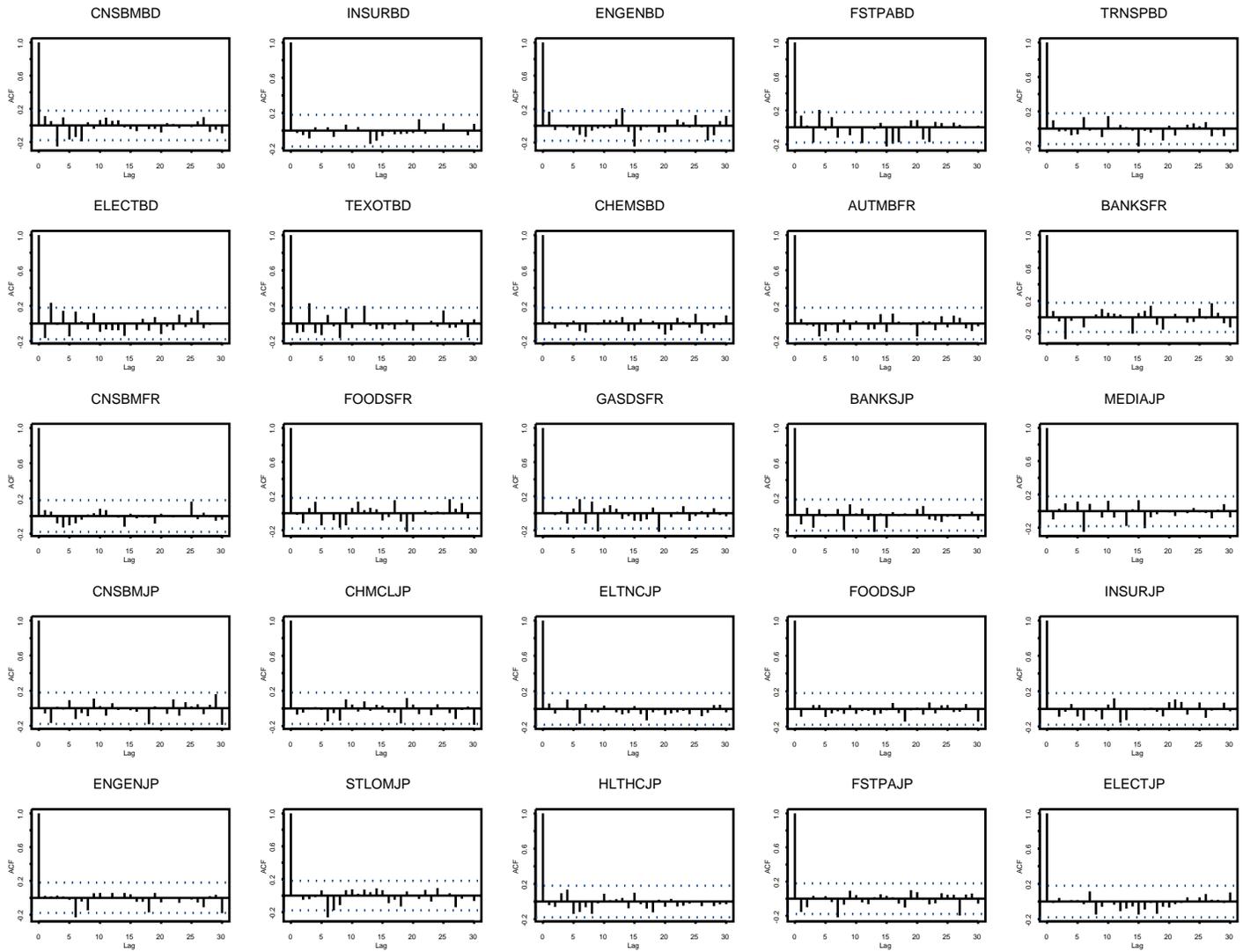


Abbildung 2.2: acf Analyse der Log>Returns der Equity-Indizes

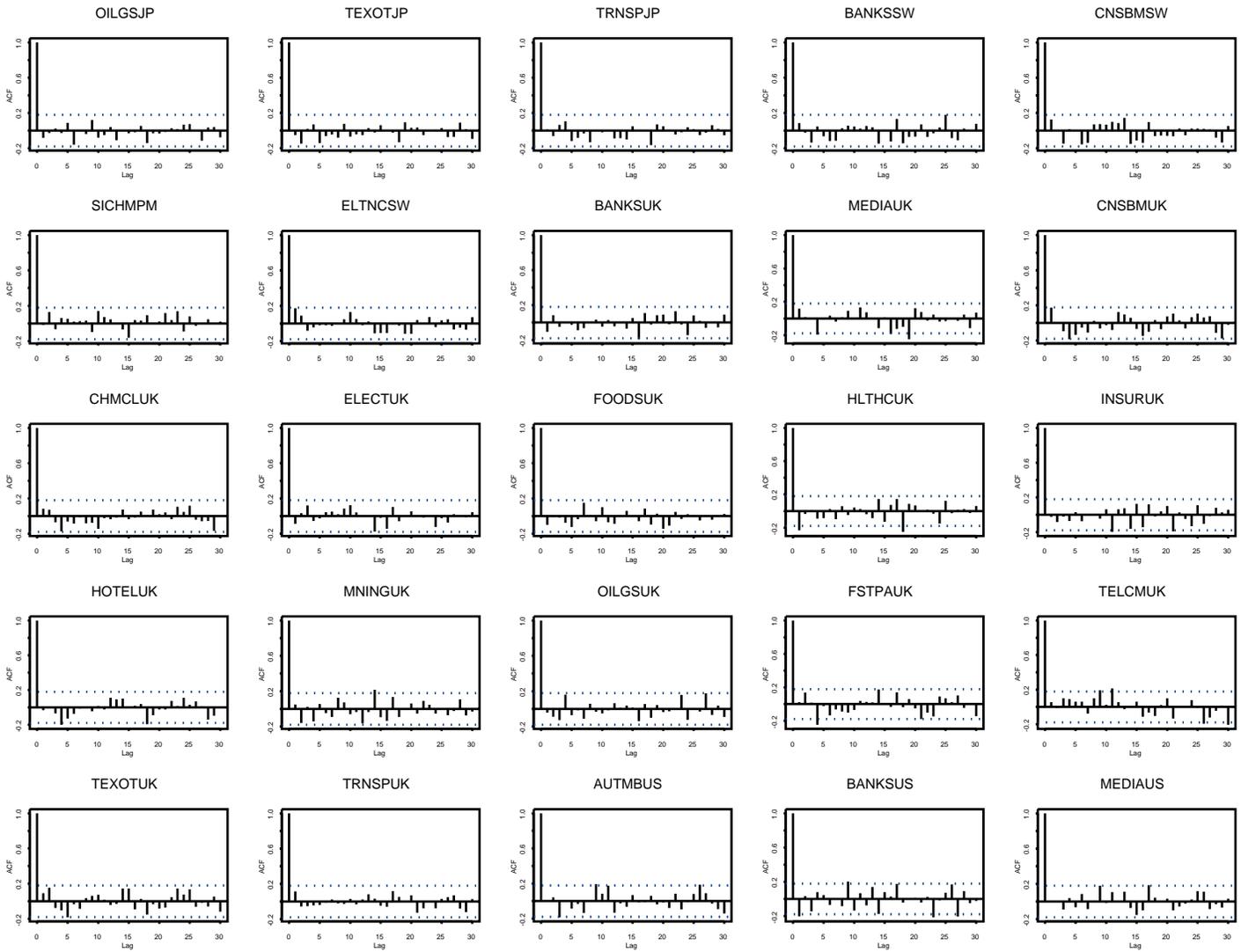


Abbildung 2.3: acf Analyse der Log>Returns der Equity-Indizes

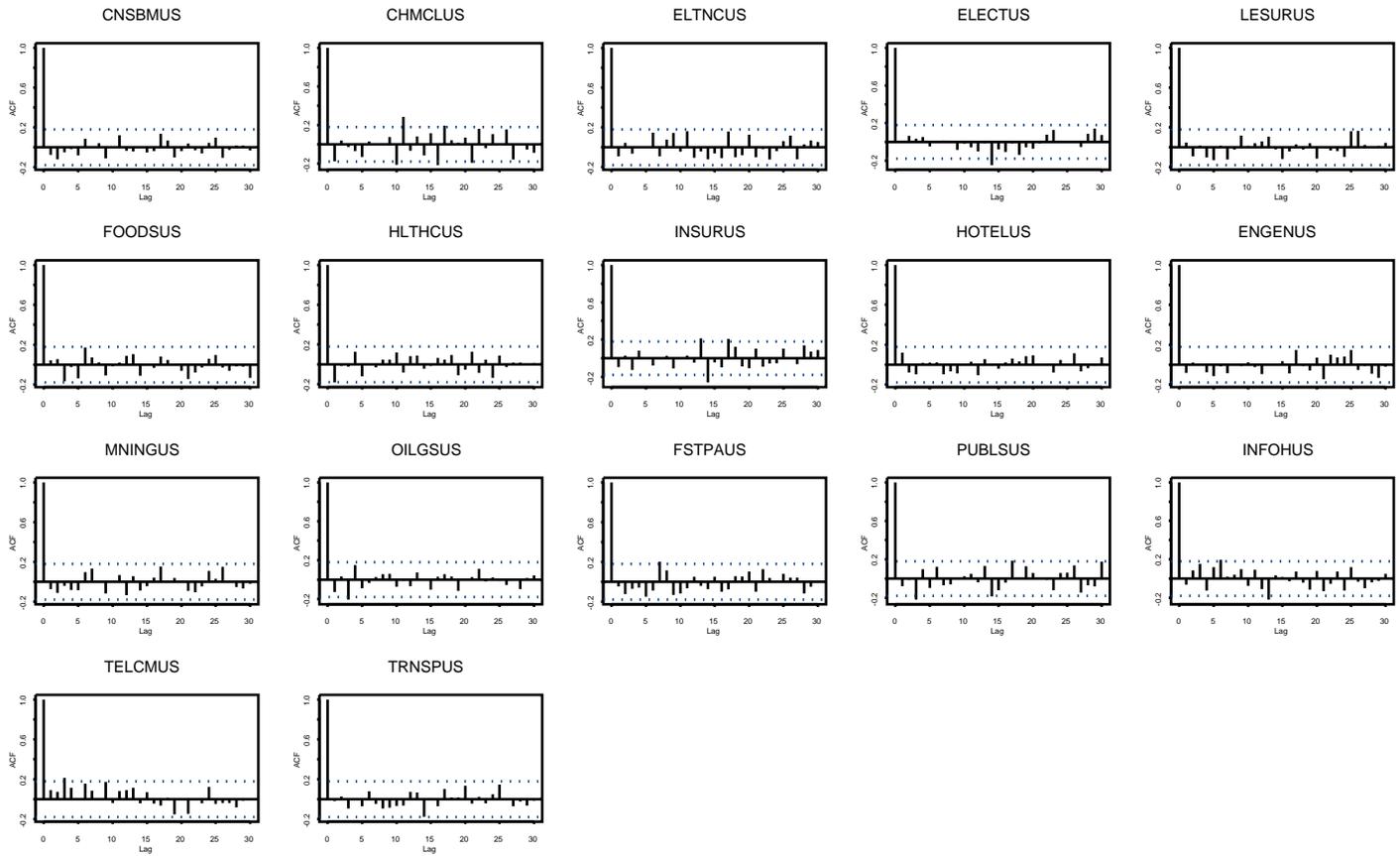


Abbildung 2.4: acf Analyse der Log>Returns der Equity-Indizes

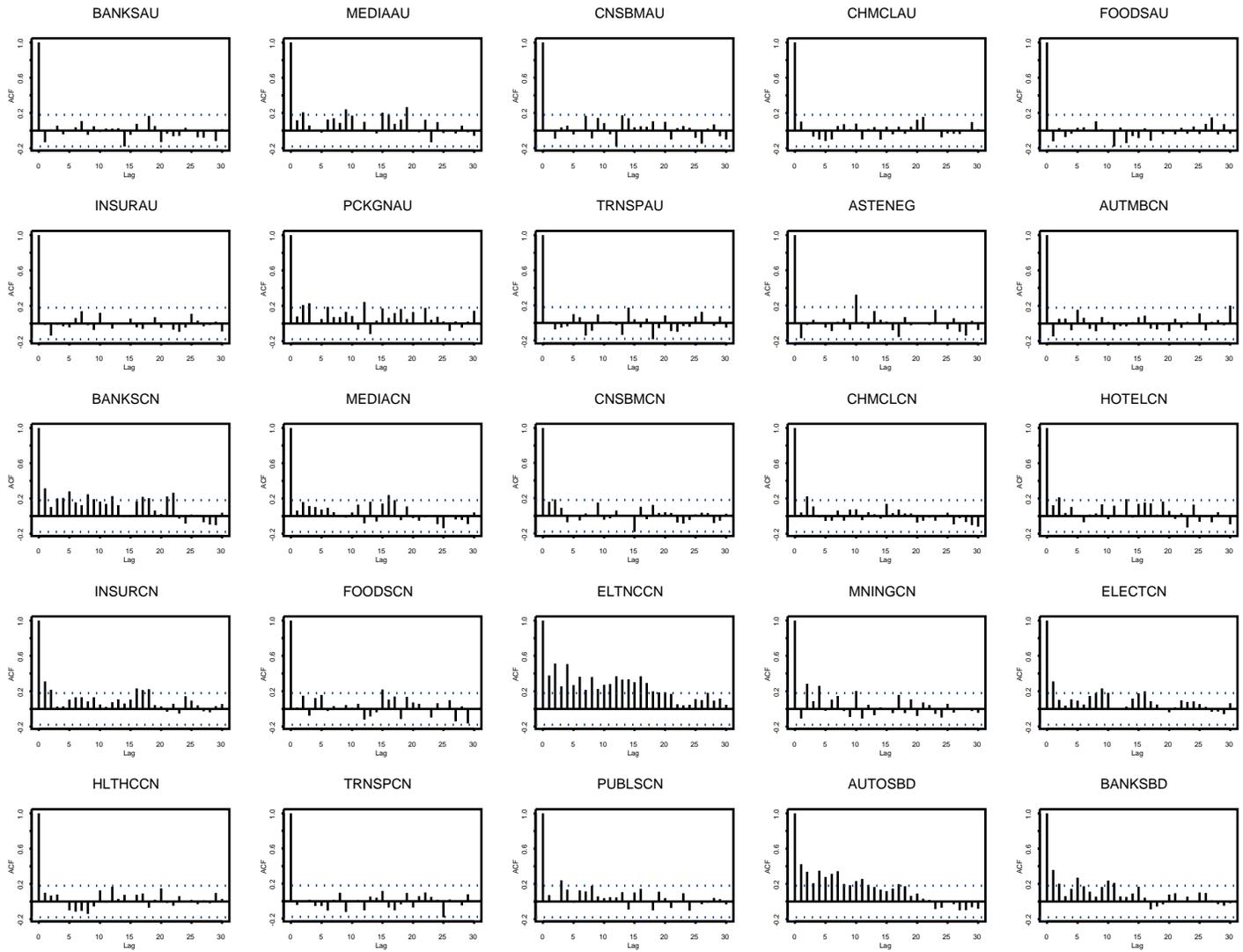


Abbildung 2.5: acf Analyse der Absolutbeträge der Log>Returns der Equity-Indizes

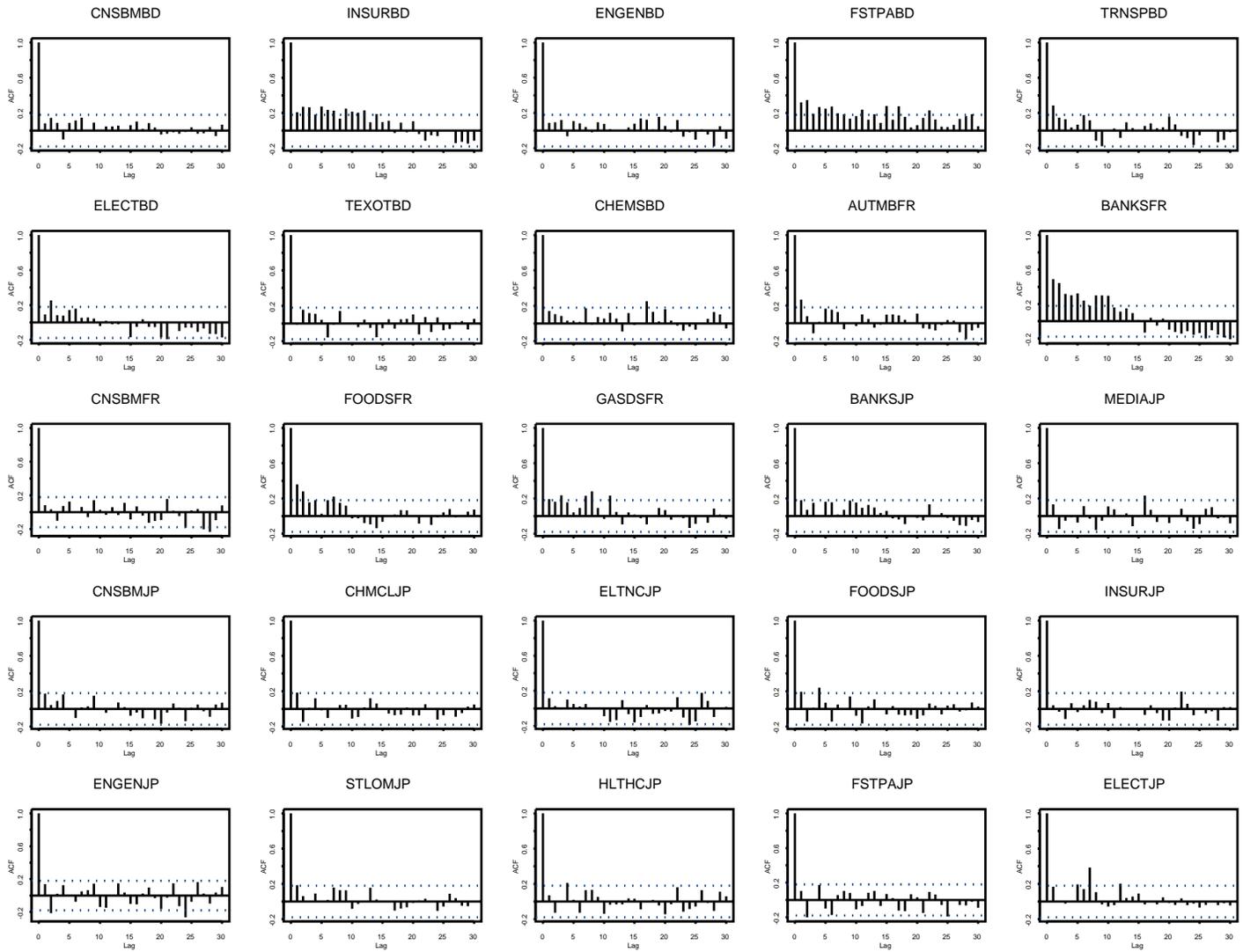


Abbildung 2.6: acf Analyse der Absolutbeträge der Log>Returns der Equity-Indizes

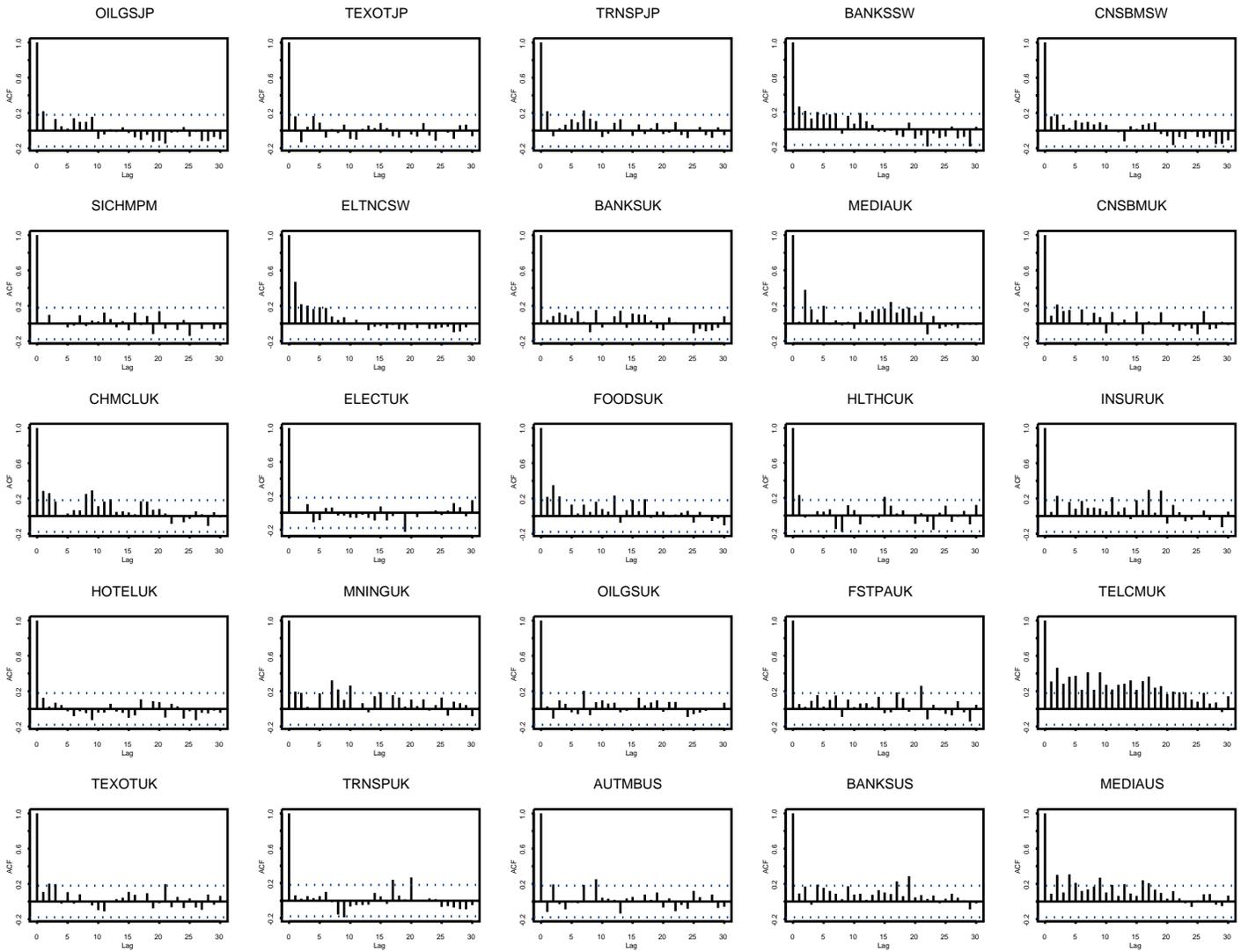


Abbildung 2.7: acf Analyse der Absolutbeträge der Log-Returns der Equity-Indizes

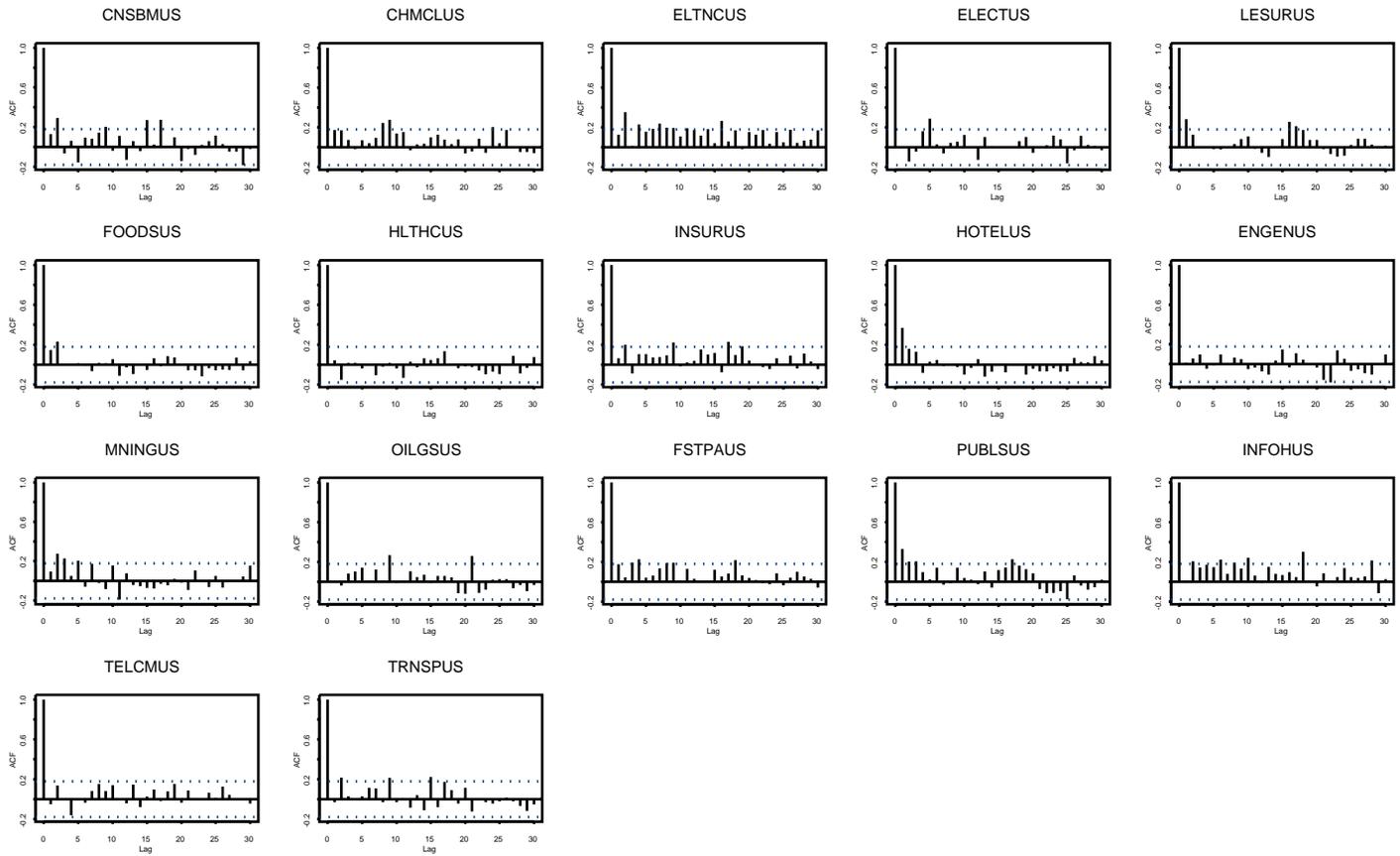


Abbildung 2.8: acf Analyse der Absolutbeträge der Log>Returns der Equity-Indizes

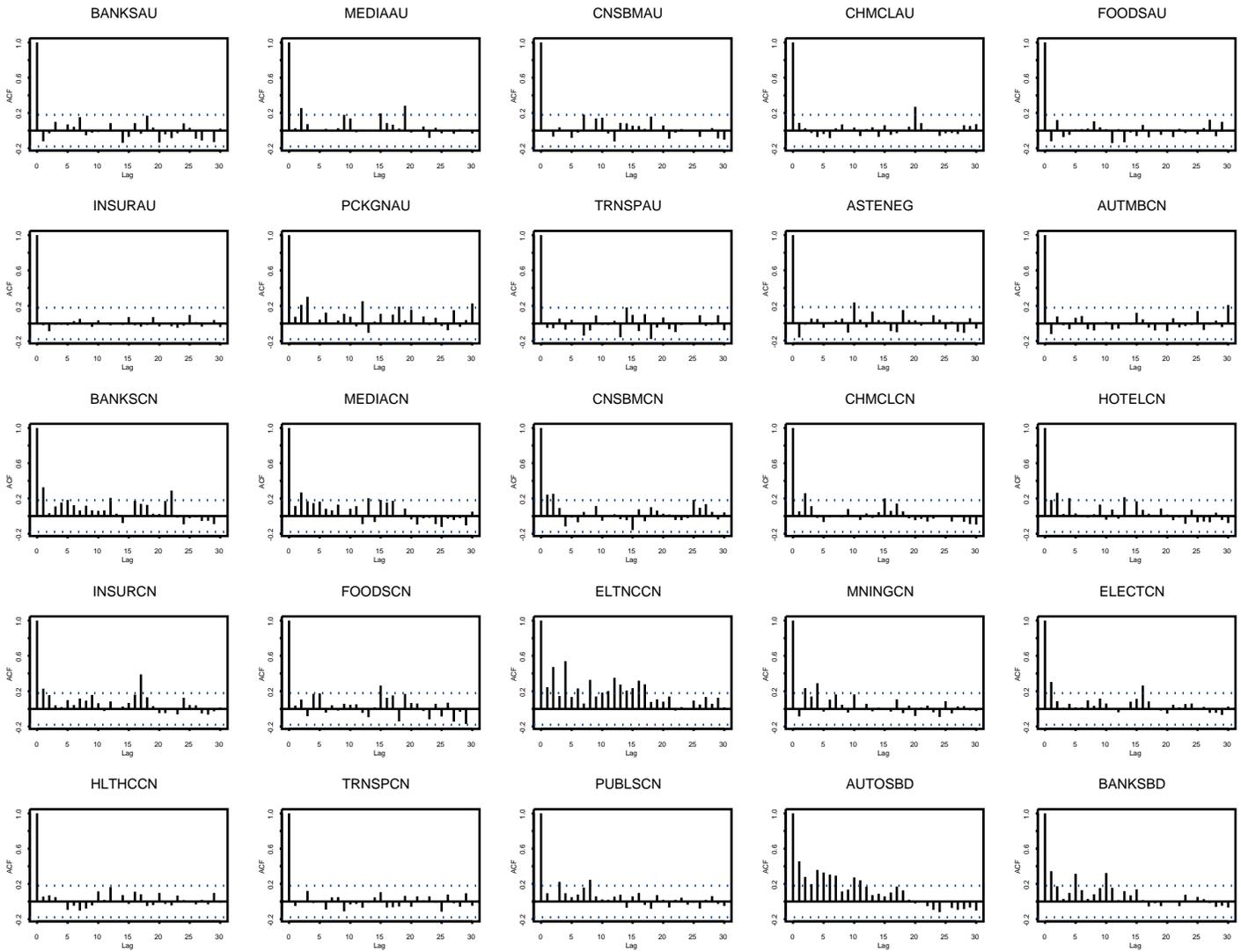


Abbildung 2.9: acf Analyse der quadrierten Log>Returns der Equity-Indizes

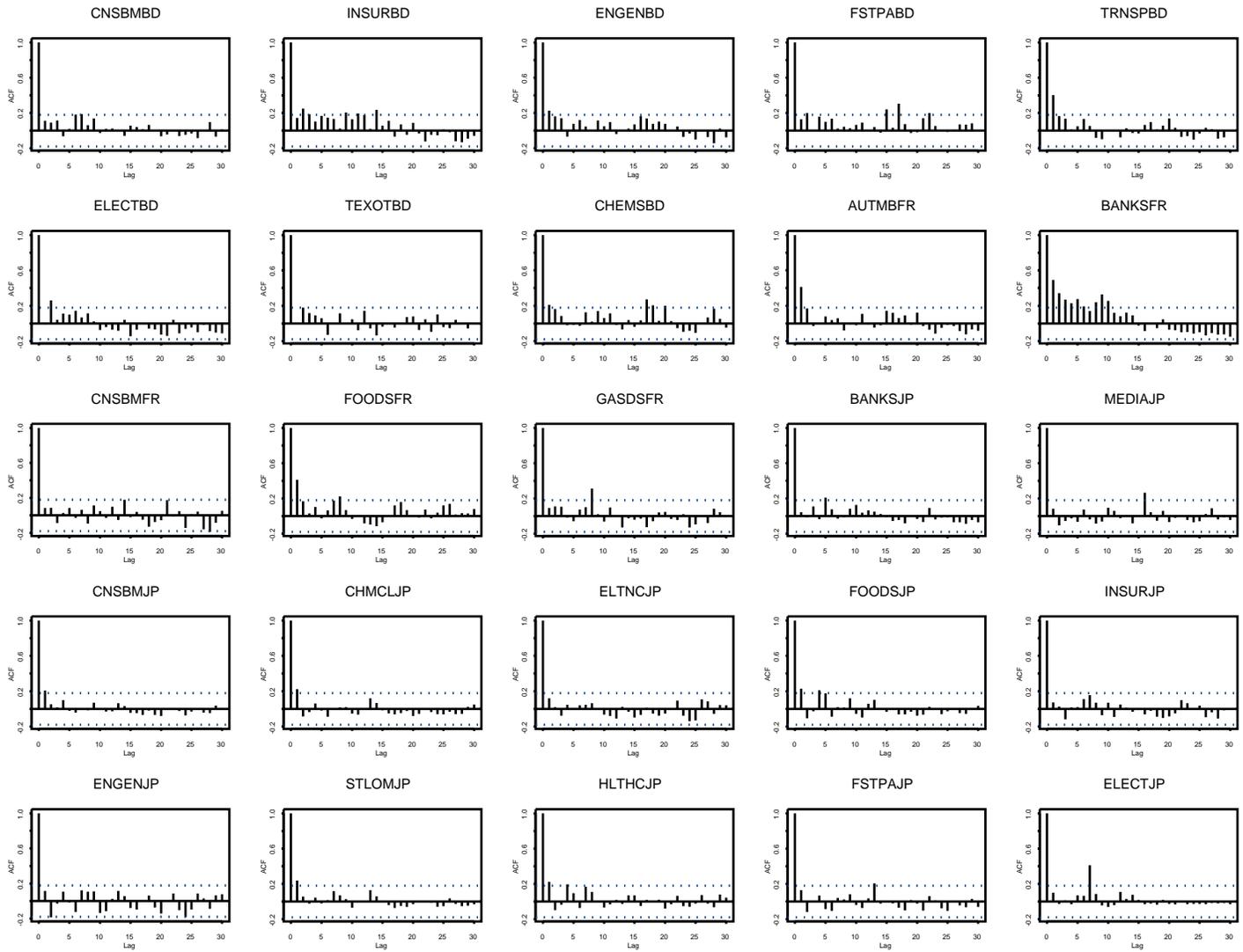


Abbildung 2.10: acf Analyse der quadrierten Log>Returns der Equity-Indizes

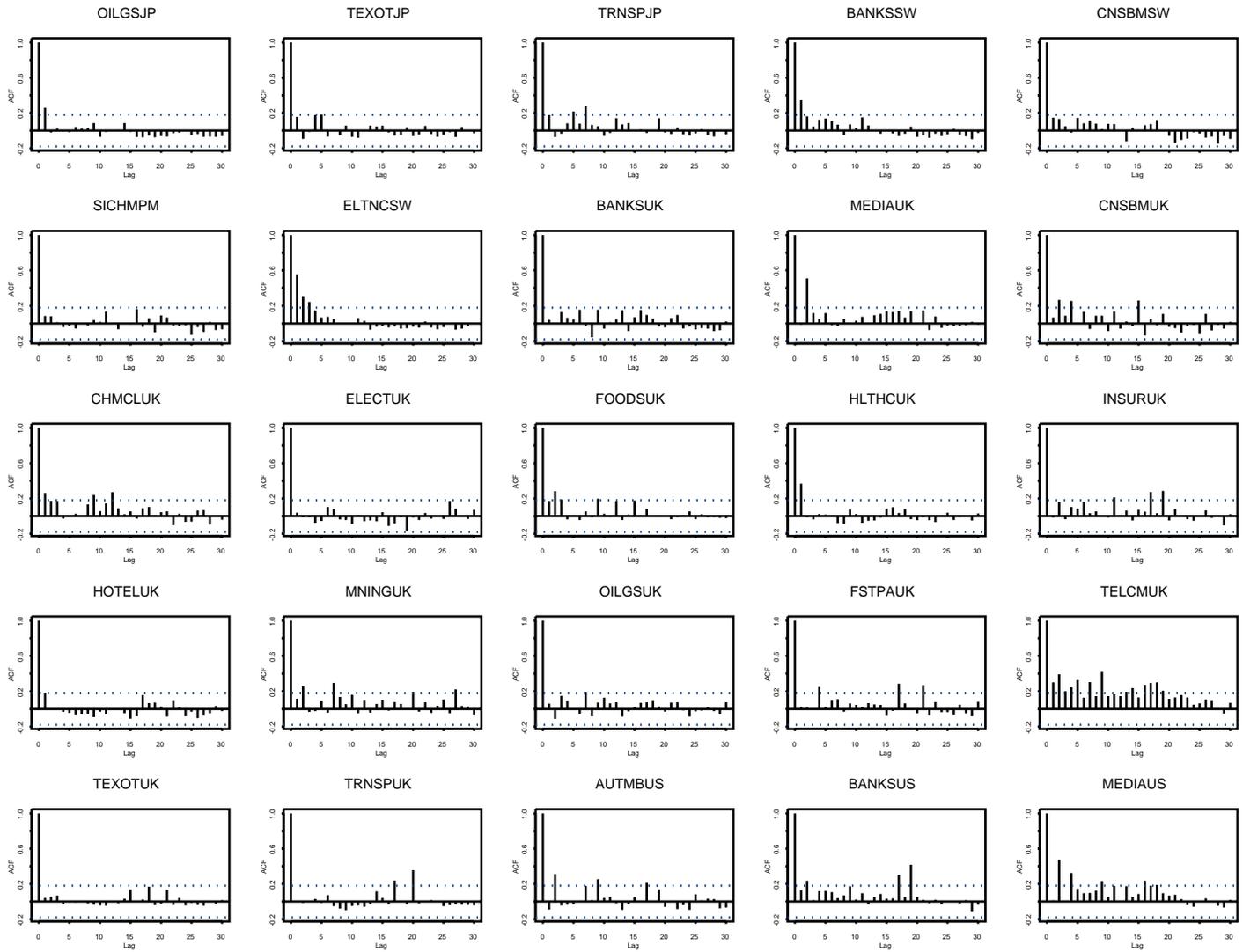


Abbildung 2.11: acf Analyse der quadrierten Log>Returns der Equity-Indizes

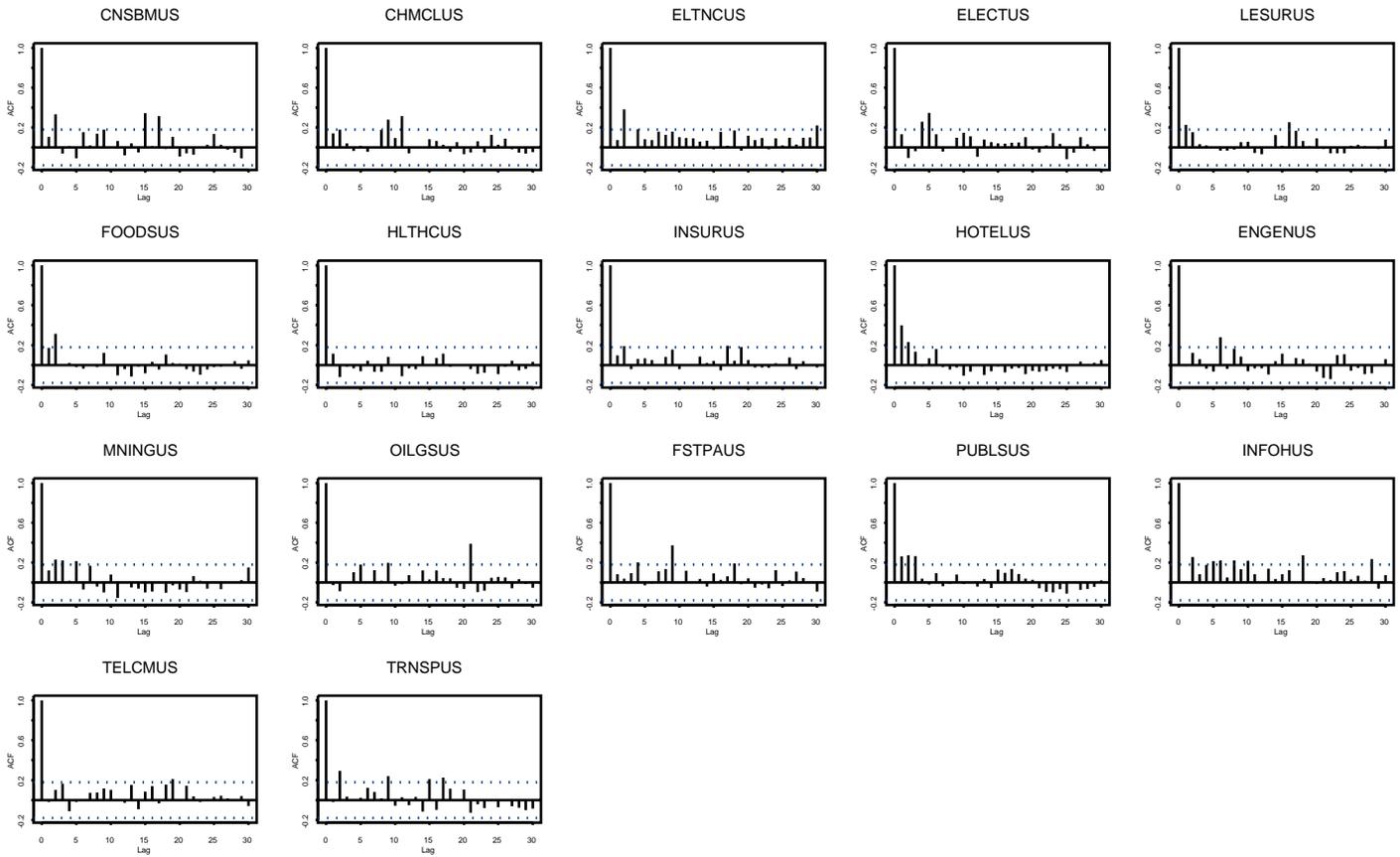


Abbildung 2.12: acf Analyse der quadrierten Log>Returns der Equity-Indizes

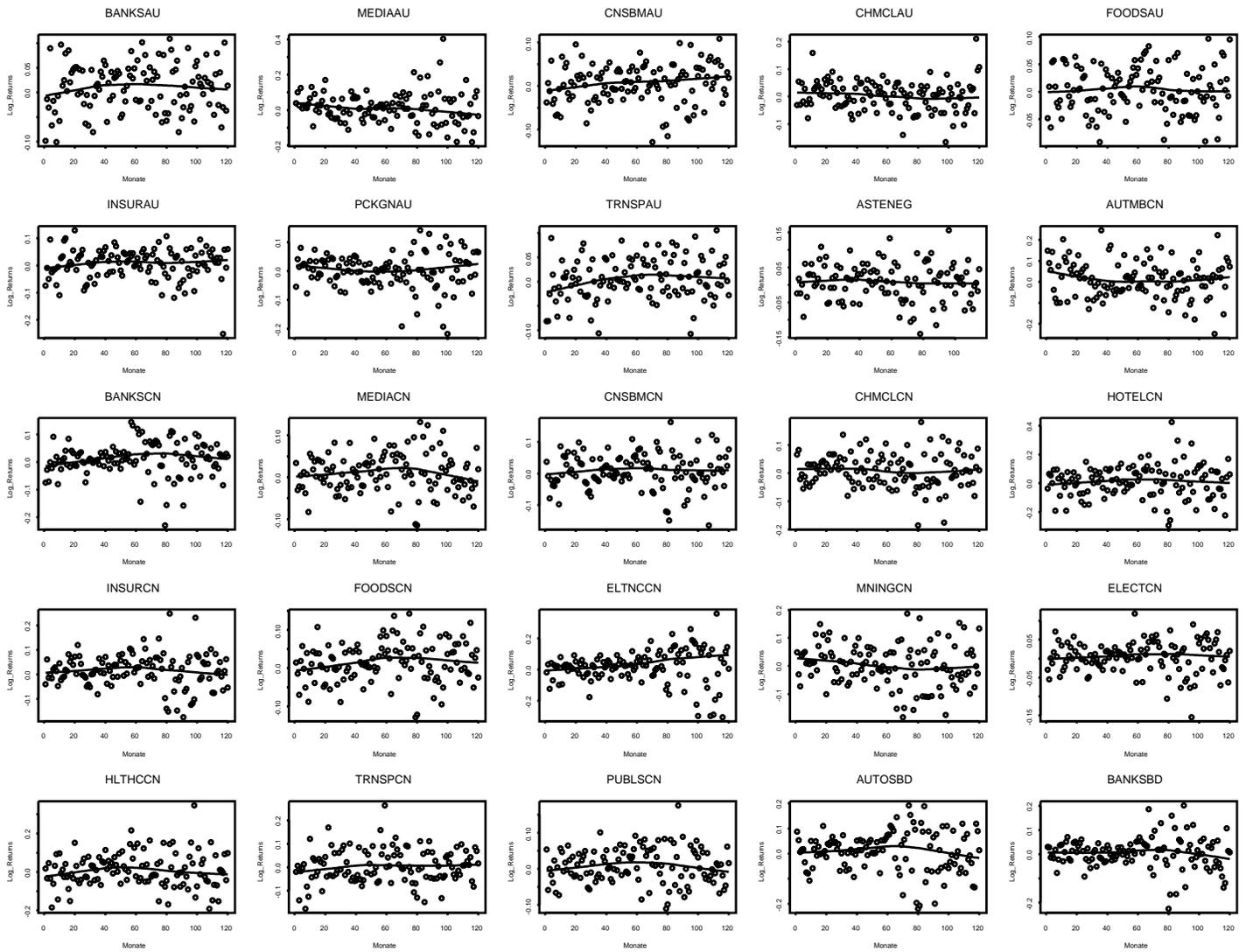


Abbildung 2.13: Gleitender Mittelwert der Log-Returns der Equity-Indizes

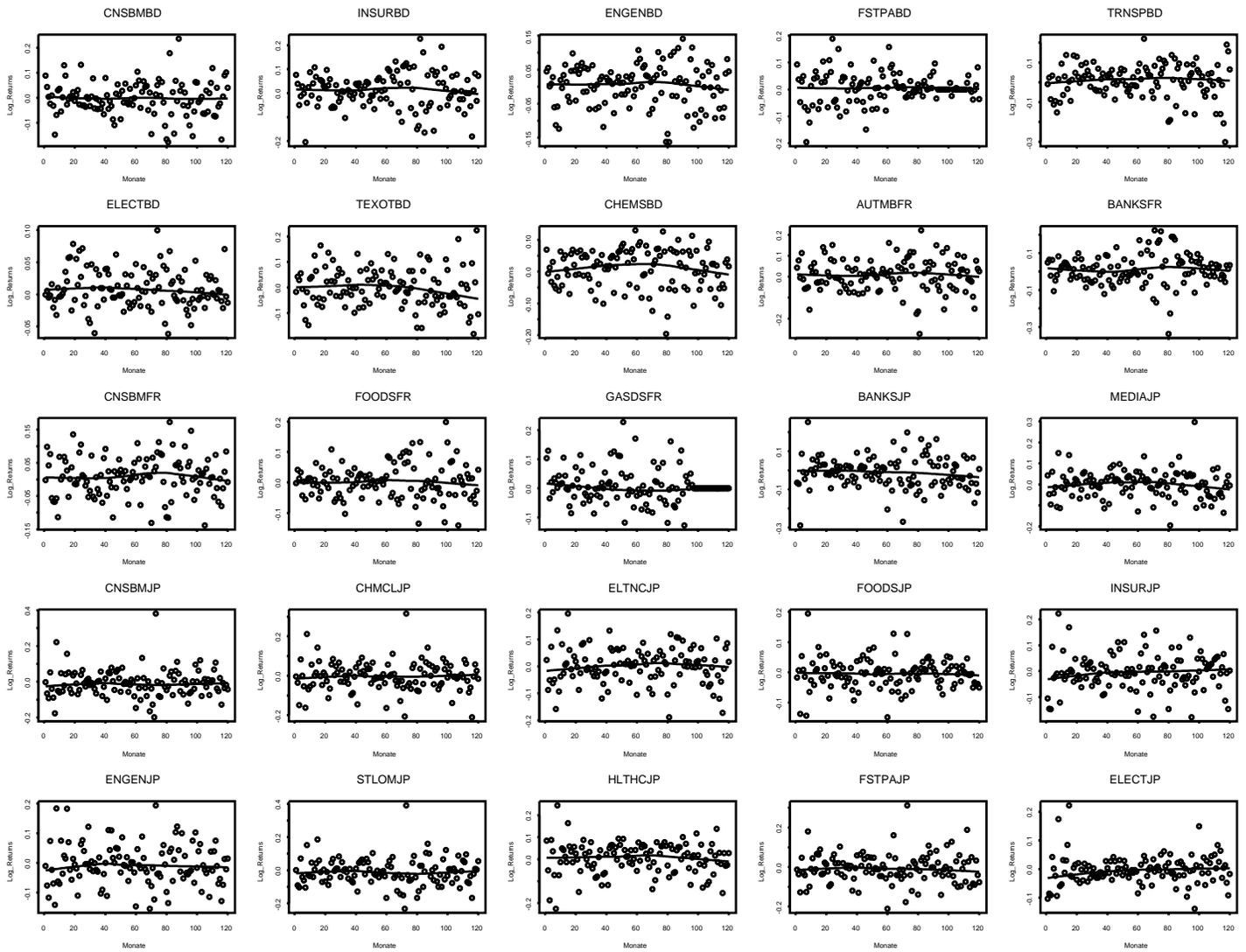


Abbildung 2.14: Gleitender Mittelwert der Log-Returns der Equity-Indizes

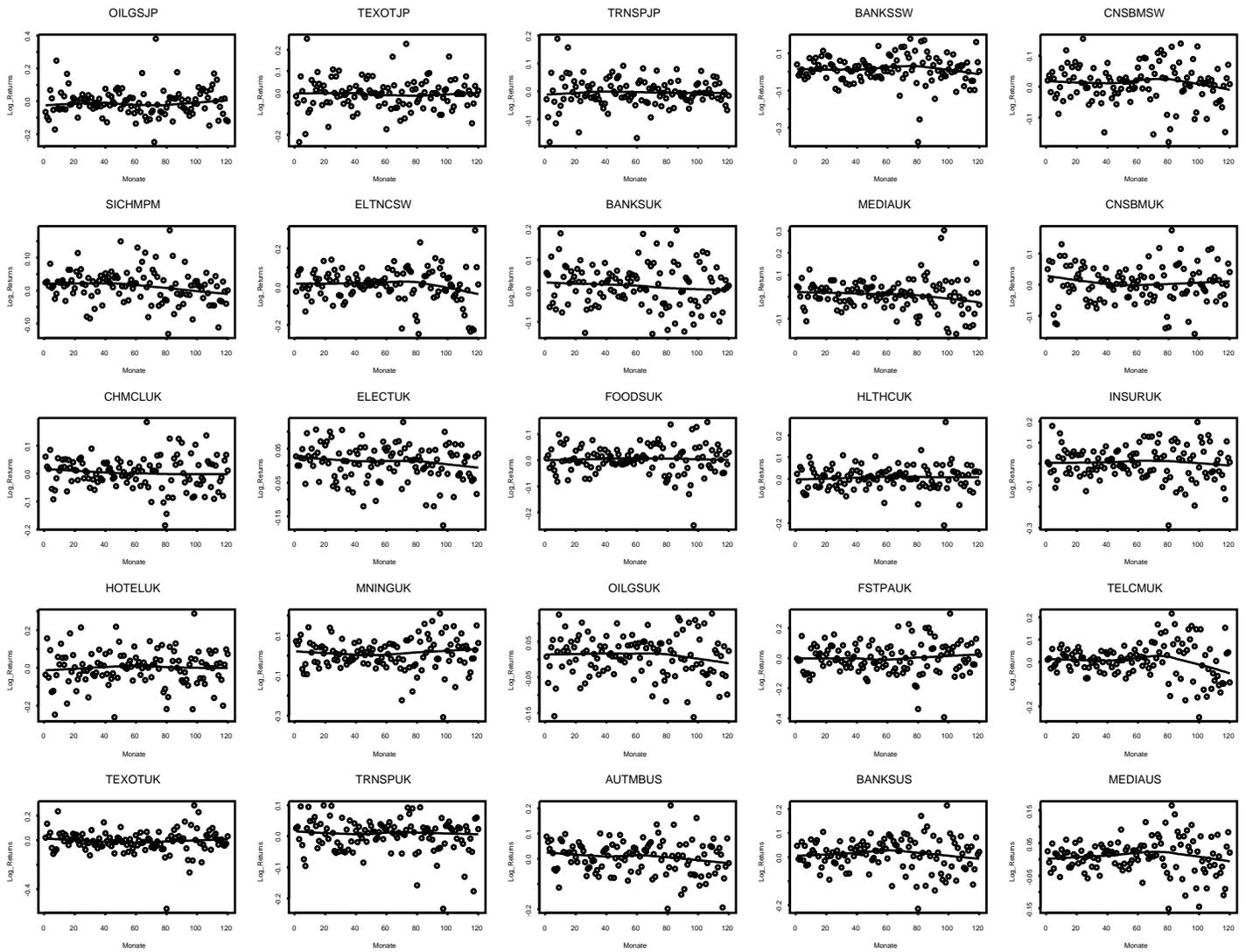


Abbildung 2.15: Gleitender Mittelwert der Log-Returns der Equity-Indizes

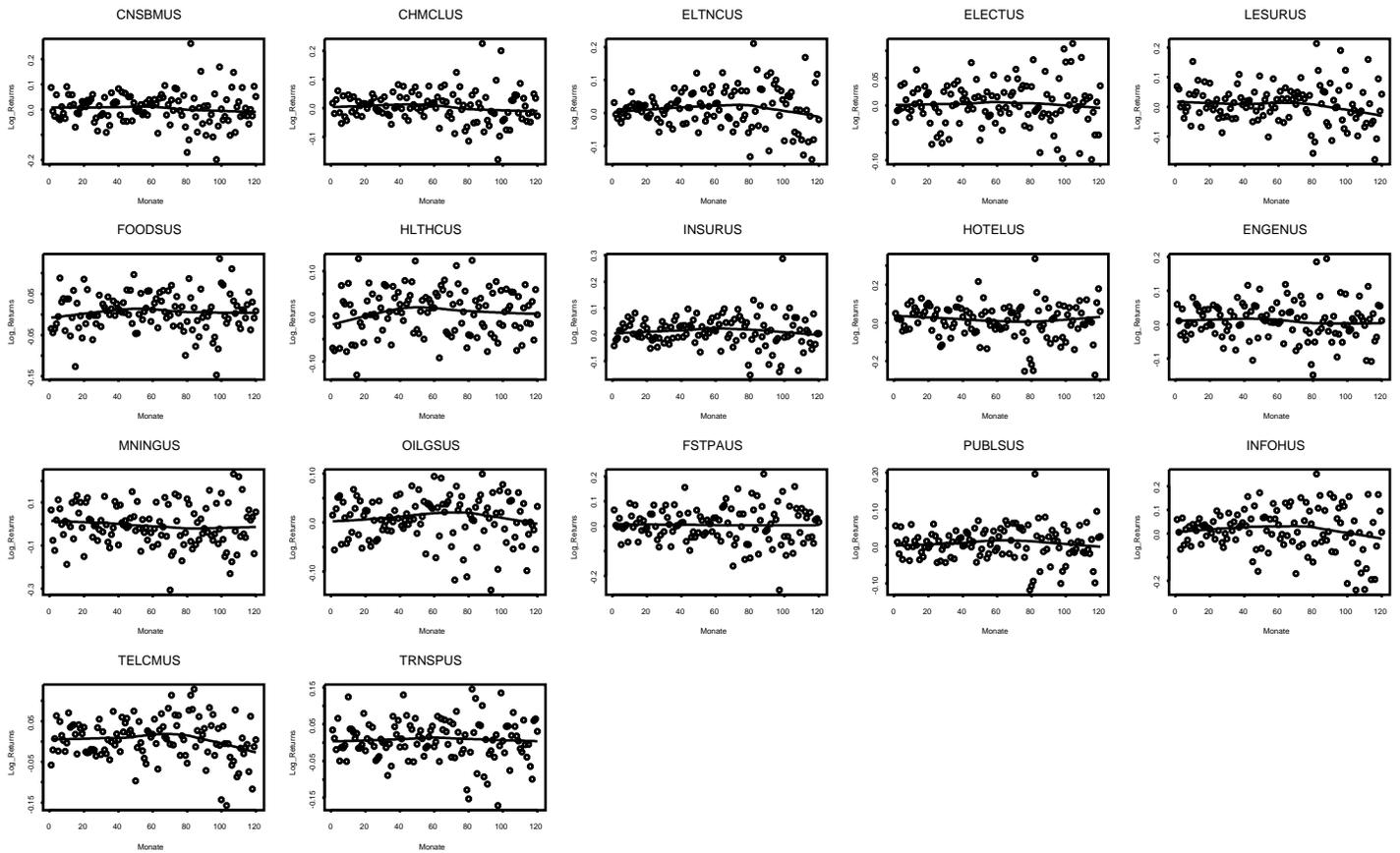


Abbildung 2.16: Gleitender Mittelwert der Log>Returns der Equity-Indizes

2.3 Verteilungsanalyse

In diesem Unterkapitel sind wir auf der Suche nach einer geeigneten Randverteilung für die Log>Returns der einzelnen Equity-Indizes. Da man die Kursverläufe von Aktien wegen der Optionpreismodelle von Black & Scholes [3] oft durch geometrisch Brownsche Bewegungen modelliert, scheint auch diese Wahl für Equity-Indizes eine natürliche zu sein. Die Log>Returns, die durch Logarithmieren und darauf folgendes Differenzen Bilden entstehen, müssten nach diesem Modell normalverteilt sein. Dass dies nicht notwendigerweise zu befriedigenden Ergebnissen führen muss (speziell an den Rändern der Verteilung), wird man im folgenden Kapitel sehen.

Definition 2.3.1 (Verallgemeinerte Inverse). Für eine Funktion F wird

$$F^\leftarrow(s) := \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq s\}, \quad s \in \mathbb{R}, \quad (2.2)$$

als die verallgemeinerte Inverse bezeichnet. Für Verteilungsfunktionen F heißt F^\leftarrow auch Quantilsfunktion.

Quantil-Quantil Plots oder kurz QQ-Plots sind ein geeignetes graphisches Verfahren um eine Verteilungsklasse für eine gegebene iid Stichprobe zu verifizieren oder zu falsifizieren: Seien X_1, \dots, X_n iid mit Verteilungsfunktion F . Die empirische Verteilungsfunktion F_n ist dann definiert durch

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \text{card}\{i : X_i \leq x, \quad i = 1, \dots, n\} \quad (2.3)$$

Wenn F stetig ist, gilt:

$$P(F(X) \leq a) = P(X \leq F^\leftarrow(a)) = F(F^\leftarrow(a)) = a \quad \Rightarrow F(X) \sim U(0, 1).$$

Im folgenden sei $U_i = F(X_i)$. Für die Ordnungsstatistik $X_{n,n} \leq \dots \leq X_{1,n}$ gilt dann:

$$X_{1,n} \geq X_{2,n} \geq \dots \geq X_{n,n} \Leftrightarrow U_{1,n} \geq U_{2,n} \geq \dots \geq U_{n,n},$$

und somit

$$(F(X_{k,n}))_{k=1,\dots,n} \stackrel{d}{=} (U_{k,n})_{k=1,\dots,n}$$

Daraus folgt

$$E[F(X_{k,n})] = \frac{n - k + 1}{n + 1}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Sei nun F_n die empirische Verteilungsfunktion der Stichprobe X_1, \dots, X_n . Dann gilt

$$F_n(X_{k,n}) = \frac{n - k + 1}{n}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Der QQ-Plot ist der Graph

$$\left\{ \left[X_{k,n}, F^\leftarrow \left(\frac{n - k + 1}{n + 1} \right) \right] : k = 1, \dots, n \right\}.$$

Dieser sollte nach dem Satz von Glivenko-Cantelli (siehe z.B EKM [15], Seite 62)

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| \xrightarrow{\text{f.s.}} 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty,$$

unter der Bedingung, dass die Daten X_i iid mit Verteilungsfunktion F sind, asymptotisch linear verlaufen.

Meistens wird man die Daten X_1, \dots, X_n gegen eine Lage-Skalierungs Verteilungsklasse $F((\cdot - \mu)/\psi)$ testen, wobei in manchen Fällen μ der Erwartungswert und ψ die Standardabweichung von X ist, wie zum Beispiel bei der Normalverteilung. Wenn die richtige Verteilungsklasse gewählt wurde ist der QQ-Plot linear mit Steigung ψ und Achsenabschnitt μ . Beide können zum Beispiel mit der linearen Regression einfach geschätzt werden. Nun folgen Eigenschaften des QQ-Plots, die sich bei der Datenanalyse als nützlich erweisen werden. Weitere Eigenschaften findet man in Chambers [8]:

1. (Vergleich von Verteilungen) Wenn die Daten Zufallszahlen von der Referenzverteilung sind, sollte der Plot der Identität gleichen. Wenn die Daten von einer linearen Transformation der Verteilung stammen, sollte der Graph linear sein.
2. (Lage und Skalierung) Eine lineare Transformation der Verteilung ändert den Plot um dieselbe Transformation. Daher kann man unter der Annahme, die Daten stammen von der Referenzverteilung, Lage und Skalierung graphisch (durch Steigung und Achsenabschnitt) schätzen.
3. (Ausreisser) Wenn einer oder wenige Datenpunkte durch grobe Fehler verunreinigt sind, oder aus irgendeinem anderen Grund wesentlich von den anderen Datenpunkten, die mehr oder weniger von der Referenzverteilung stammen, abweichen, so sind die Ausreisser im Plot sehr leicht zu erkennen.
4. (Form) Aus der Gestalt des Plots kann man einige Unterschiede in der Verteilungsart der Daten und der Referenzverteilung absehen. Wenn zum Beispiel die Referenzverteilung schwerere Tails als die Daten besitzt (wenn sehr große Werte für die Referenzverteilung wahrscheinlicher sind als für die Daten), dann wird sich der Plot links nach unten drehen und/oder rechts nach oben. Im Fall von leichteren Tails der Referenzverteilung im Vergleich zu den Daten dreht sich der Plot links nach oben und/oder rechts nach unten.

In der Folge werden einige Beispiele von QQ-Plots gezeigt. Abbildung 2.17 zeigt vier verschiedene QQ-Plots. Dabei wurden jeweils 100 von vier verschiedenen Verteilungen simulierte Zufallszahlen gegen die Quantile der Normalverteilung geplottet. In der Abbildung 2.18 kann man QQ-Plots von den simulierten Daten gegen die Quantile der Standardexponentialverteilung sehen. In beiden Fällen wurden nur eine geringe Anzahl von Daten erzeugt, da der zur Verfügung stehende Datensatz der Equity Indizes auch nur Daten aus 120 Zeitpunkten enthält. Aus den beiden Bildern sind die oben diskutierten Eigenschaften eines QQ-Plots leicht ersichtlich. Die Exponentialverteilung hat ein schwereres rechtes Tail als die Normalverteilung. Die t-Verteilung und speziell die t_3 -Verteilung hat schwerere Tails als die Normalverteilung. Gegenüber der Exponentialverteilung hat die Normalverteilung dünnere Tails, und die GPD(0.3) ein fetteres rechtes Tail.

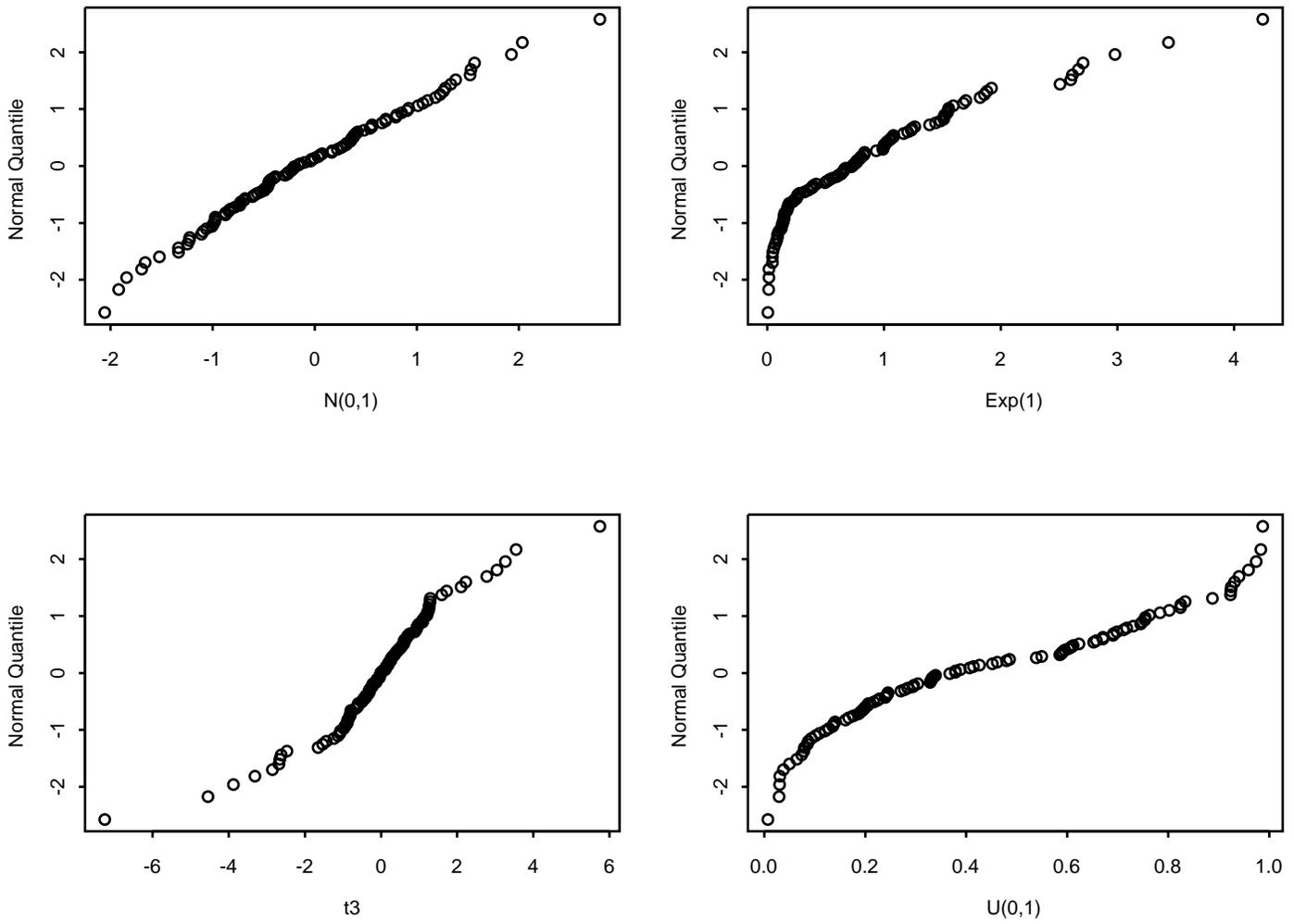


Abbildung 2.17: Beispiel QQ-Plots von simulierten Zufallszahlen gegen die Normalverteilung

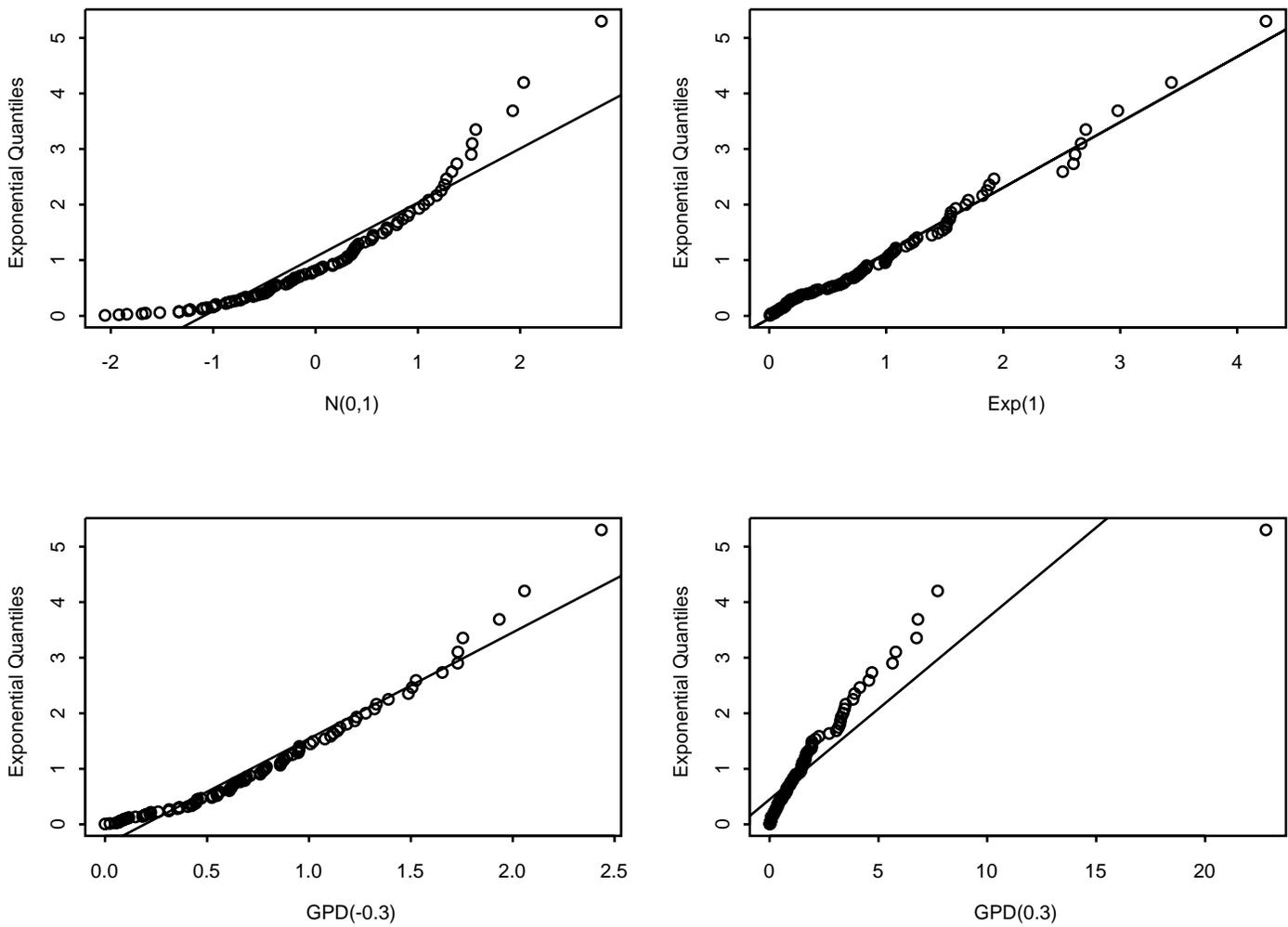


Abbildung 2.18: Beispiel QQ-Plots von simulierten Zufallszahlen gegen die Standardexponentialverteilung

Bei der QQ-Plot Analyse der Log>Returns der 92 Equity-Indizes, die in den Abbildungen 2.19 bis 2.22 dokumentiert ist, erhält man den Eindruck, dass die Normalverteilung eine gute Wahl für die eindimensionalen Randverteilungen der Log>Returns ist. Dies geht konform mit der Annahme, dass die Equity-Indizes durch eine geometrisch Brownsche Bewegung modelliert werden. Allerdings kann man bei näherer Betrachtung erkennen, dass sich die QQ-Plots von vielen Indizes links nach oben, und/oder rechts nach unten drehen. Dies ist ein Indiz dafür, dass die Daten der Log>Returns von einer Verteilung stammen, die fette Tails als die Normalverteilung besitzt.

Die Histogramme der Log>Returns, die in den Abbildungen 2.23 bis 2.26 zu sehen sind, weisen oft eine nicht symmetrische Form auf. Dies ist ein Fakt der ebenfalls gegen die Normalverteilung spricht. Histogramme bei denen eine links-Schiefe sichtbar ist, sind zum Beispiel die von den Log>Returns der Equity-Indizes: CHEMSBD und HLTHCJP.

Um der Asymmetrie der Histogramme Rechnung zu tragen werden die Log>Returns der Equity-Indizes in positive und negative Beobachtungen aufgeteilt. Nun können positive und negative Log>Returns getrennt von einander untersucht werden. Als erstes werden für beide QQ-Plots inspiziert. Die Abbildungen 2.27 bis 2.34 zeigen QQ-Plots der beobachteten positiven und negativen Log>Returns gegen die Quantile der Exponentialverteilung. Da diese Plots schon fast linear verlaufen liegt es nahe, die Beobachtungen der Log>Returns ebenfalls gegen die Quantile einer verallgemeinerten Pareto Verteilung (GPD) aufzutragen. Die Verteilungsfunktion G_ζ einer GPD ist definiert durch

$$G_\zeta(x) = \begin{cases} (1 + \zeta x)^{-1/\zeta}, & \text{wenn } \zeta \neq 0, \\ e^{-x}, & \text{wenn } \zeta = 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

In Kapitel B.5.4 wird auf das Anpassen einer GPD an die Daten über einer (hohen) Schwelle u näher eingegangen. Hier wird die GPD an alle positiven und negativen Log>Returns angepasst. Das Vorgehen entspricht dem aus Kapitel B.5.4 mit Schwelle $u = 0$.

In den Abbildungen 2.35 bis 2.42 findet man die QQ-Plots der beobachteten positiven und negativen Log>Returns gegen die Quantile einer an die Daten angepassten GPD. Diese lassen die Annahme zu, dass die Daten verallgemeinert Pareto verteilt sind.

Zunächst nehmen wir an, dass bei der GPD für den Parameter $\zeta \neq 0$ gilt. Außerdem wählen wir $\nu = 0$. In der Tabelle 2.1 findet man die Schätzwerte für ζ und β für die US-Indizes. Offensichtlich sind die Werte von $\hat{\zeta}$ ziemlich nahe an Null.

Die Schätzer für ζ liegen fast immer unter Null. Da man im Risikomanagement oft lieber einen konservativen Weg geht und Risiken eher über- anstatt unterschätzt, und die Exponentialverteilung ($\zeta = 0$) einen schwereren Tail als die GPD mit $\zeta < 0$ (endlicher Träger!) hat, nehmen wir im Fall der Log>Returns mit negativen $\hat{\zeta}$ eine Exponentialverteilung an. Bei den Schätzern $\hat{\zeta} > 0$ ist der Schätzwert so klein, dass die Null immer im 95%-Konfidenzbereich des Schätzers liegt. Somit kann die Hypothese: $\zeta = 0$ auch in diesen Fällen nicht verworfen werden, so dass wir für alle Log>Returns eine Exponentialverteilung annehmen können. Die Exponentialverteilung hängt noch von dem Parameter

λ ab, der durch den ML-Schätzer

$$\hat{\lambda}^+ = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_i^+ \right)^{-1} \quad (2.5)$$

bzw.

$$\hat{\lambda}^- = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_i^- \right)^{-1} \quad (2.6)$$

geschätzt wird. Dabei sind die R_i^+ die Beobachtungen der positiven und R_i^- die Beobachtungen der negativen Log>Returns der Equity-Indizes. Die Schätzwerte $\hat{\lambda}^+$ bzw. $\hat{\lambda}^-$ sind für die US-Indizes in der Tabelle 2.2 zusammengetragen. Da diese Schätzwerte alle sehr groß sind, würde man auch Modelle mit leichteren Tails akzeptieren.

Schlussendlich werden die einzelnen Verteilungsfunktionen der Log>Returns zusammengesetzt gemäß:

$$P(R \leq r) = P(R < 0)P(R \leq r | r < 0) + P(R \geq 0)P(R \leq r | r \geq 0). \quad (2.7)$$

Die Wahrscheinlichkeiten $P(R < 0)$ und $P(R > 0)$ werden durch die relativen Häufigkeiten von $R_i < 0$ und $R_i > 0$ $i = 1, \dots, 120$ geschätzt. Für die Wahrscheinlichkeiten $P(R \leq r | r \geq 0)$ und $P(R \leq r | r < 0)$ wird die Exponentialverteilung mit den geschätzten Parametern als Schätzer verwendet.

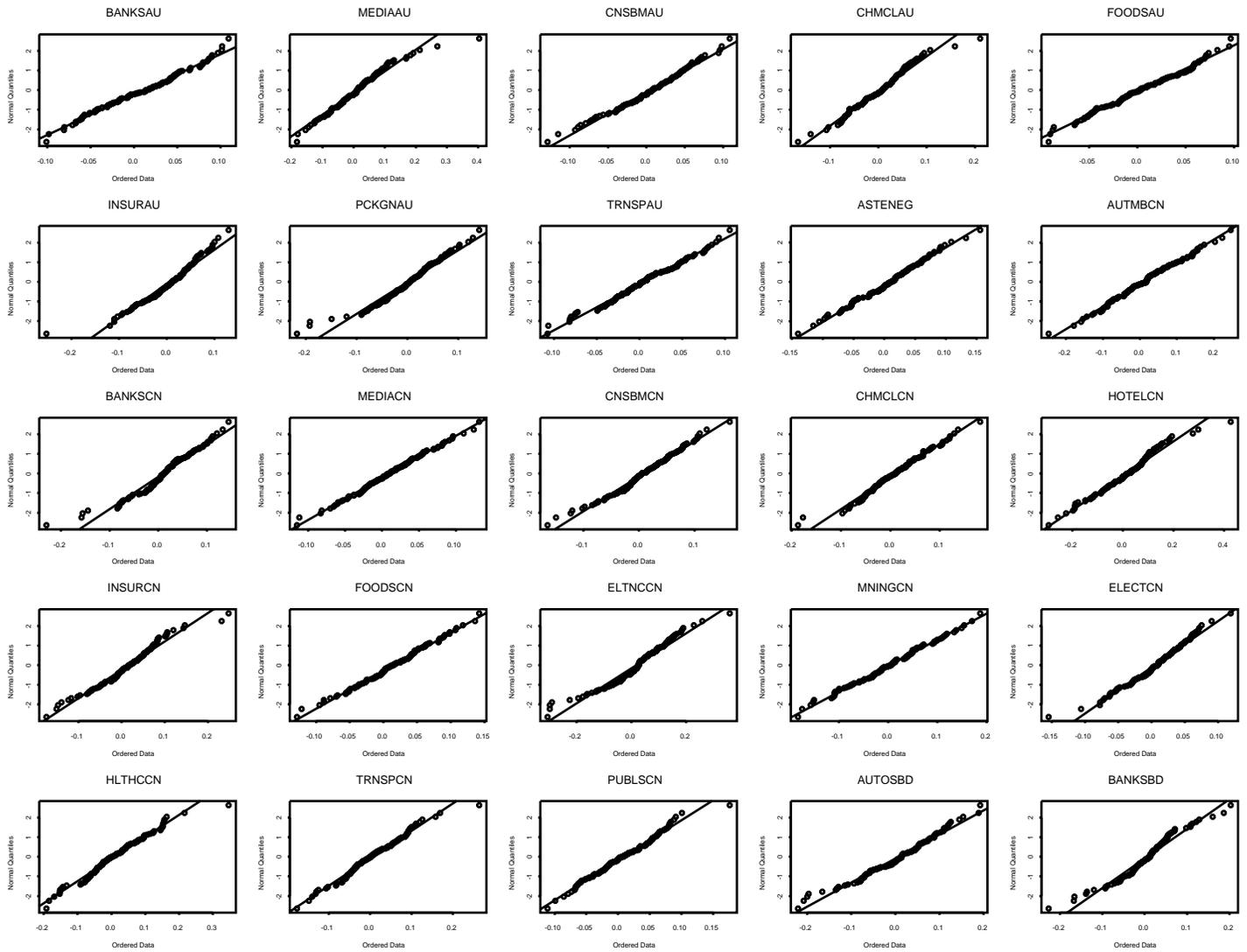


Abbildung 2.19: QQ-Plots der Log>Returns der Equity-Indizes gegen die Normalverteilung

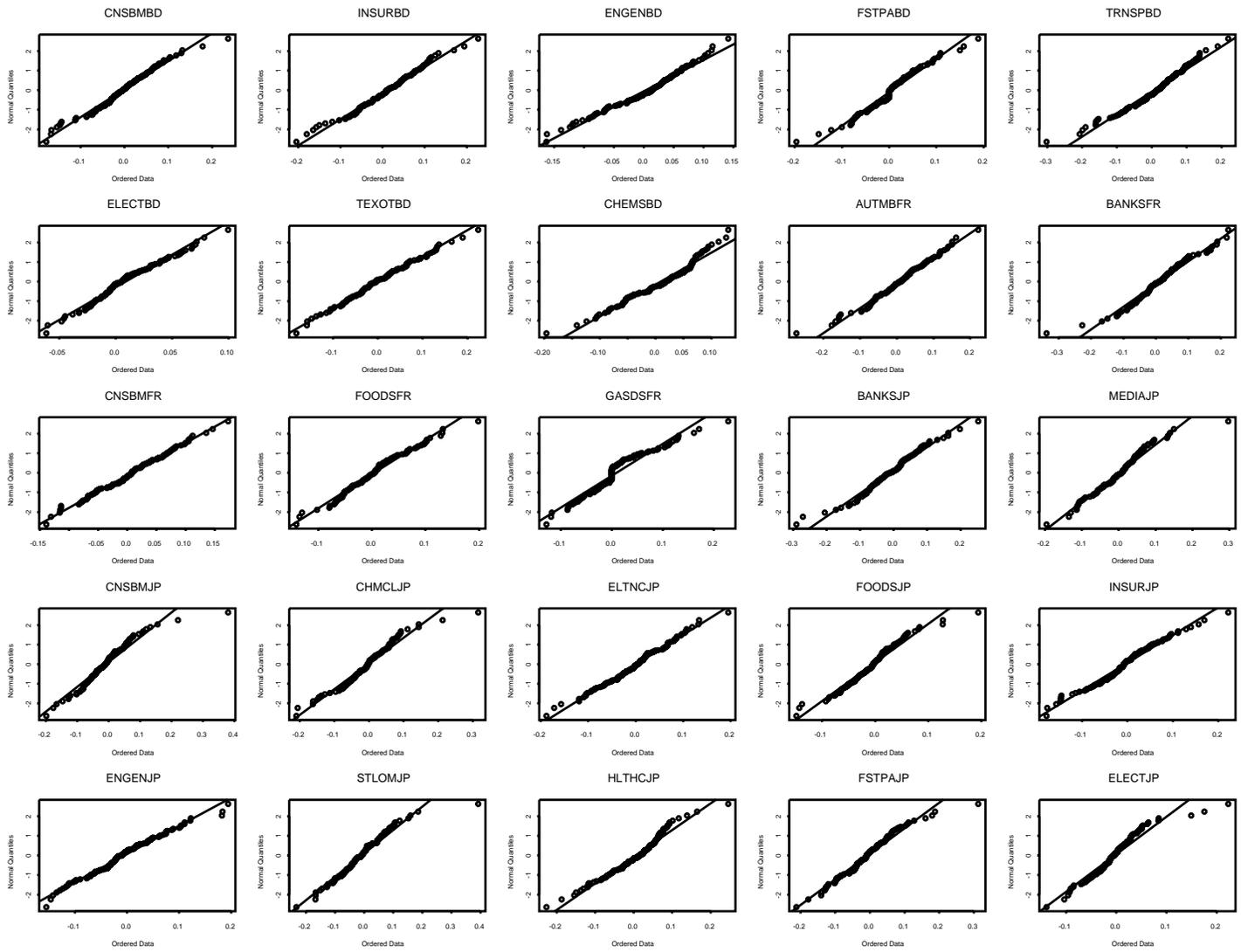


Abbildung 2.20: QQ-Plots der Log>Returns der Equity-Indizes gegen die Normalverteilung

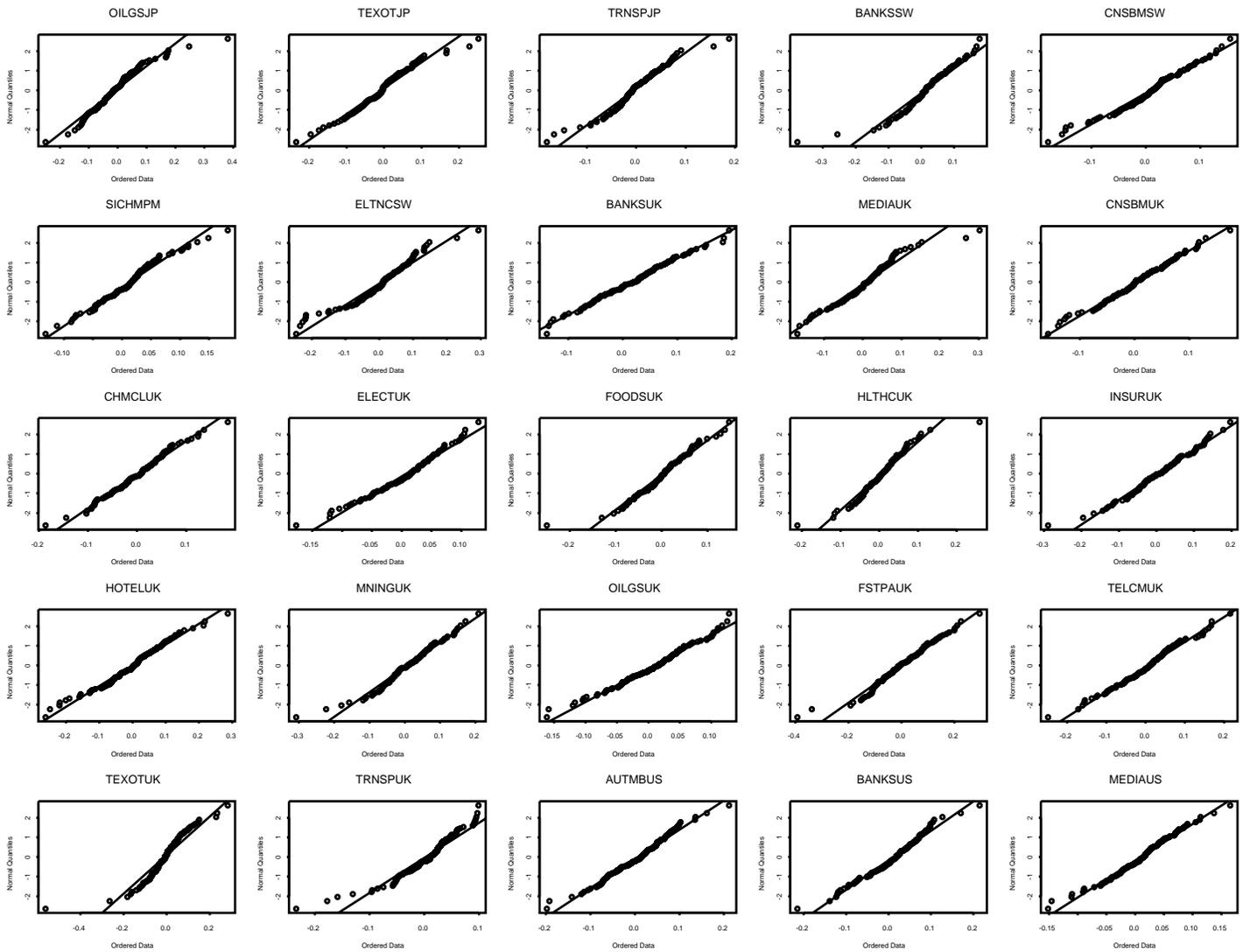


Abbildung 2.21: QQ-Plots der Log-Returns der Equity-Indizes gegen die Normalverteilung

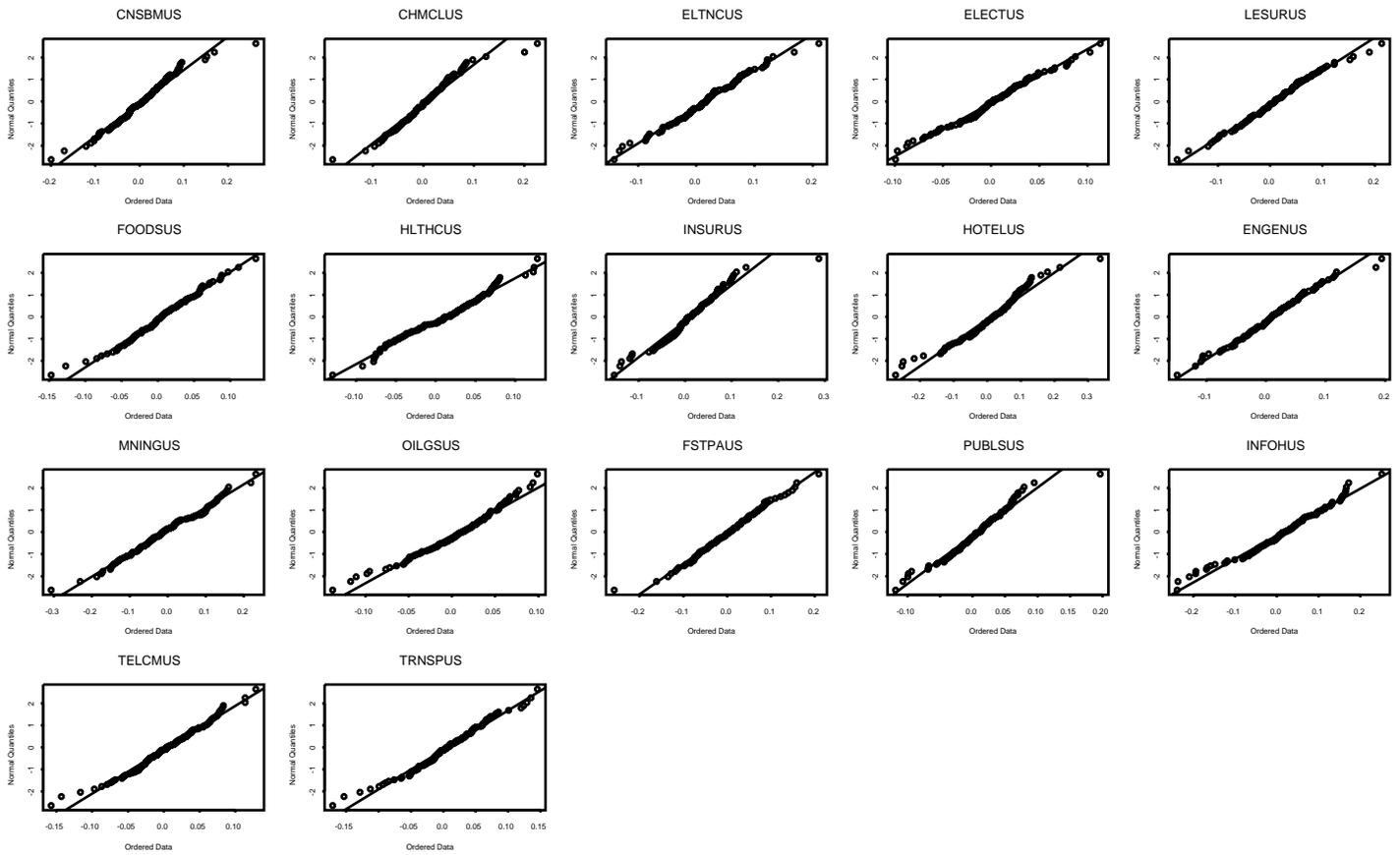


Abbildung 2.22: QQ-Plots der Log-Returns der Equity-Indizes gegen die Normalverteilung

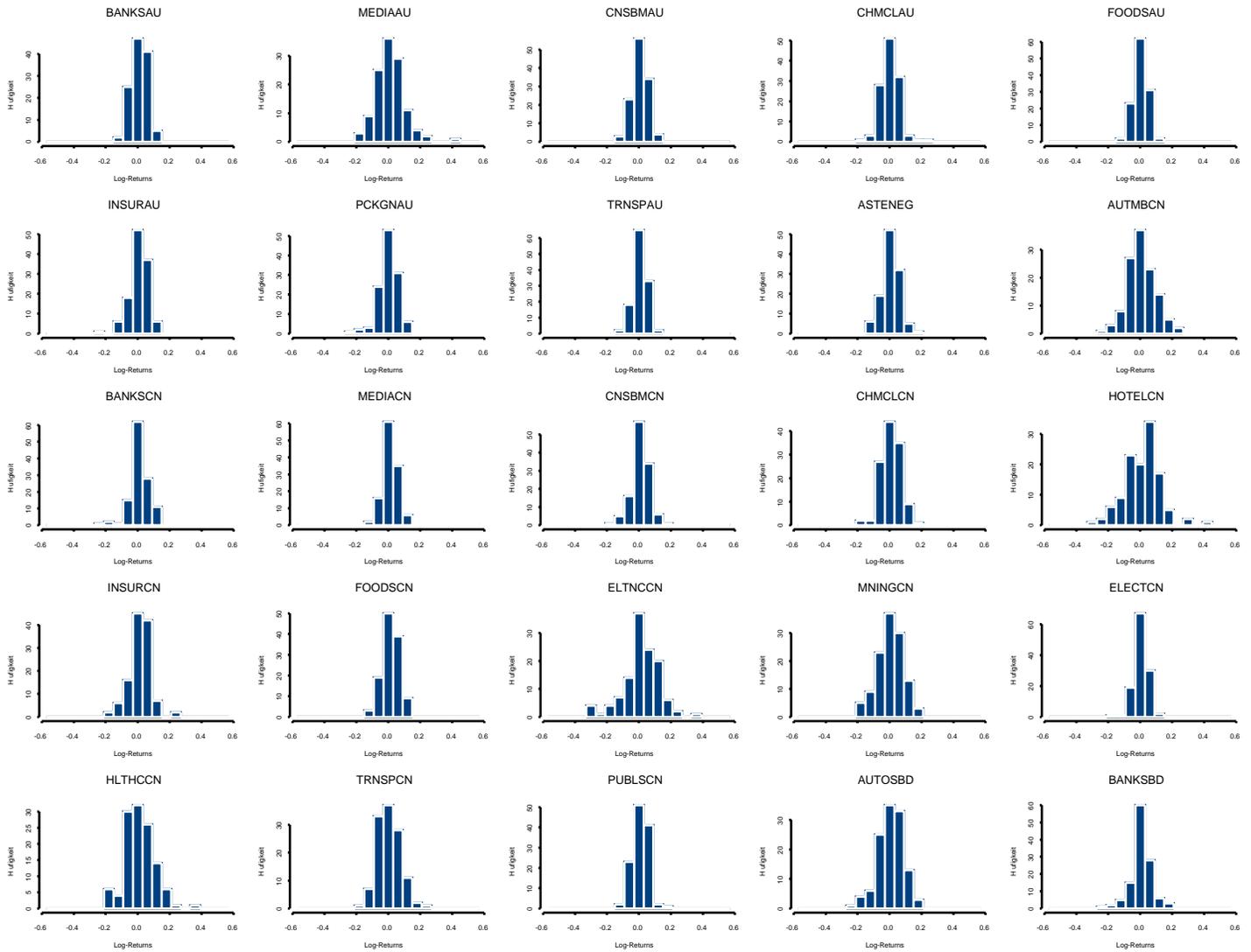


Abbildung 2.23: Histogramme der Log-Returns der Equity-Indizes

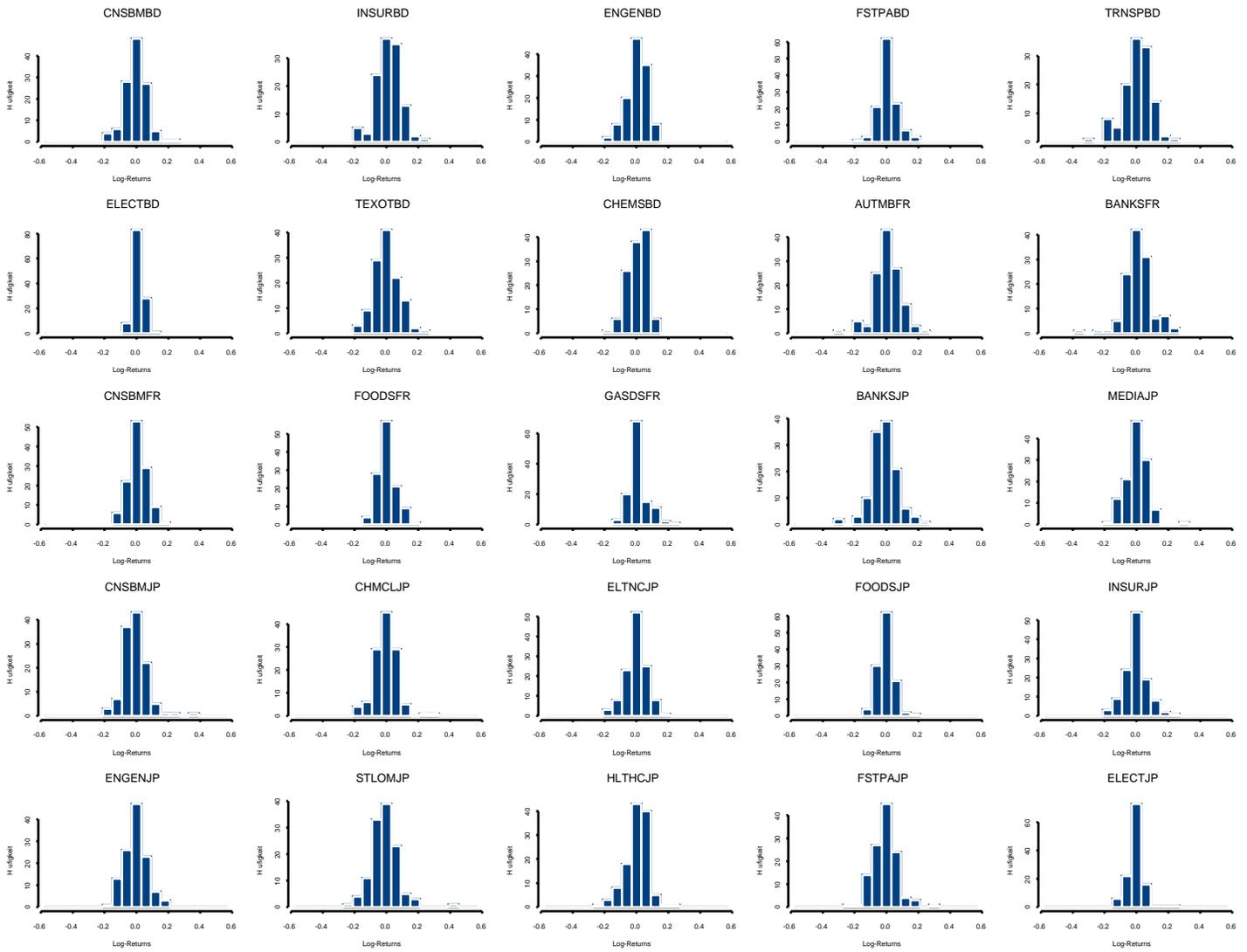


Abbildung 2.24: Histogramme der Log-Returns der Equity-Indizes

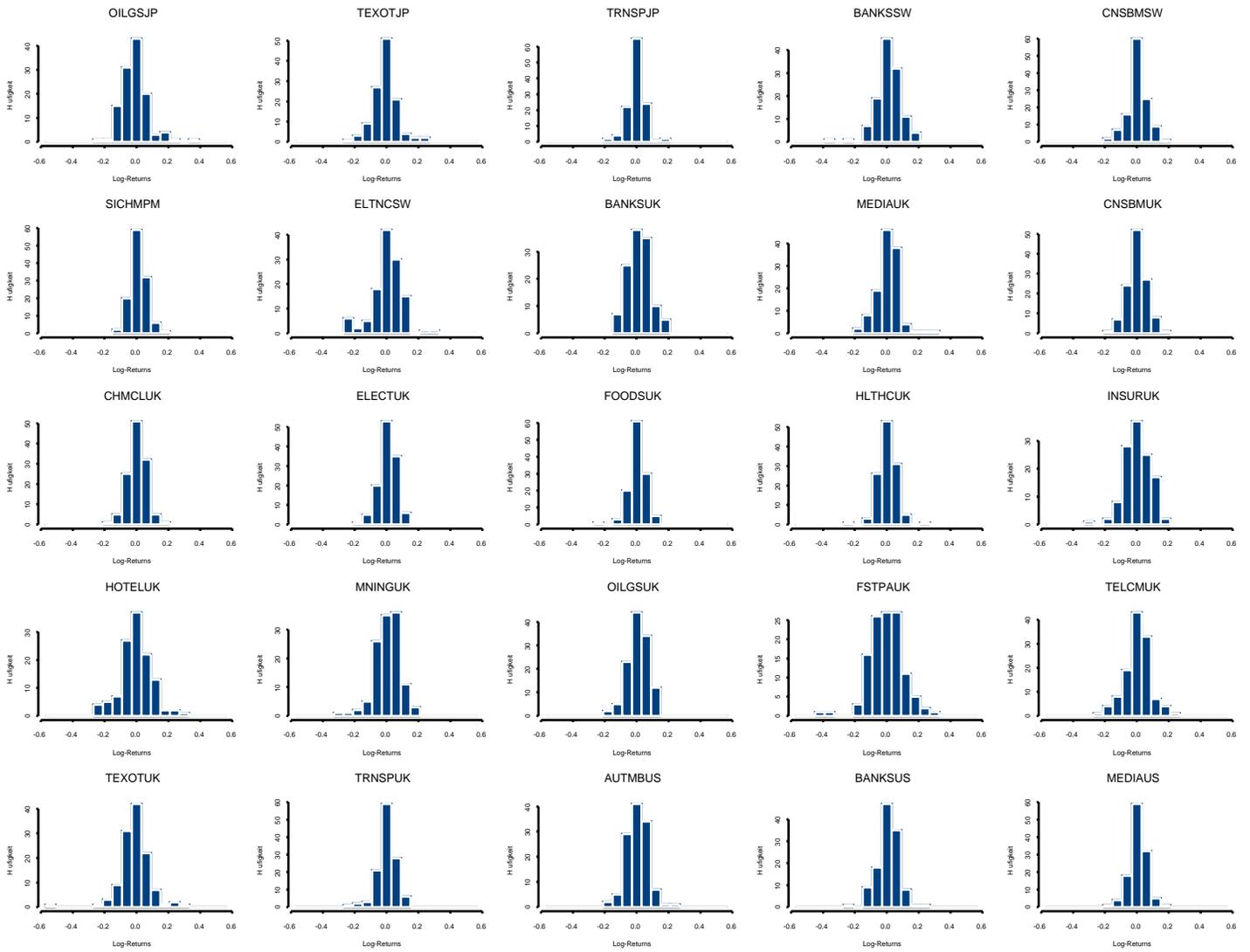


Abbildung 2.25: Histogramme der Log-Returns der Equity-Indizes

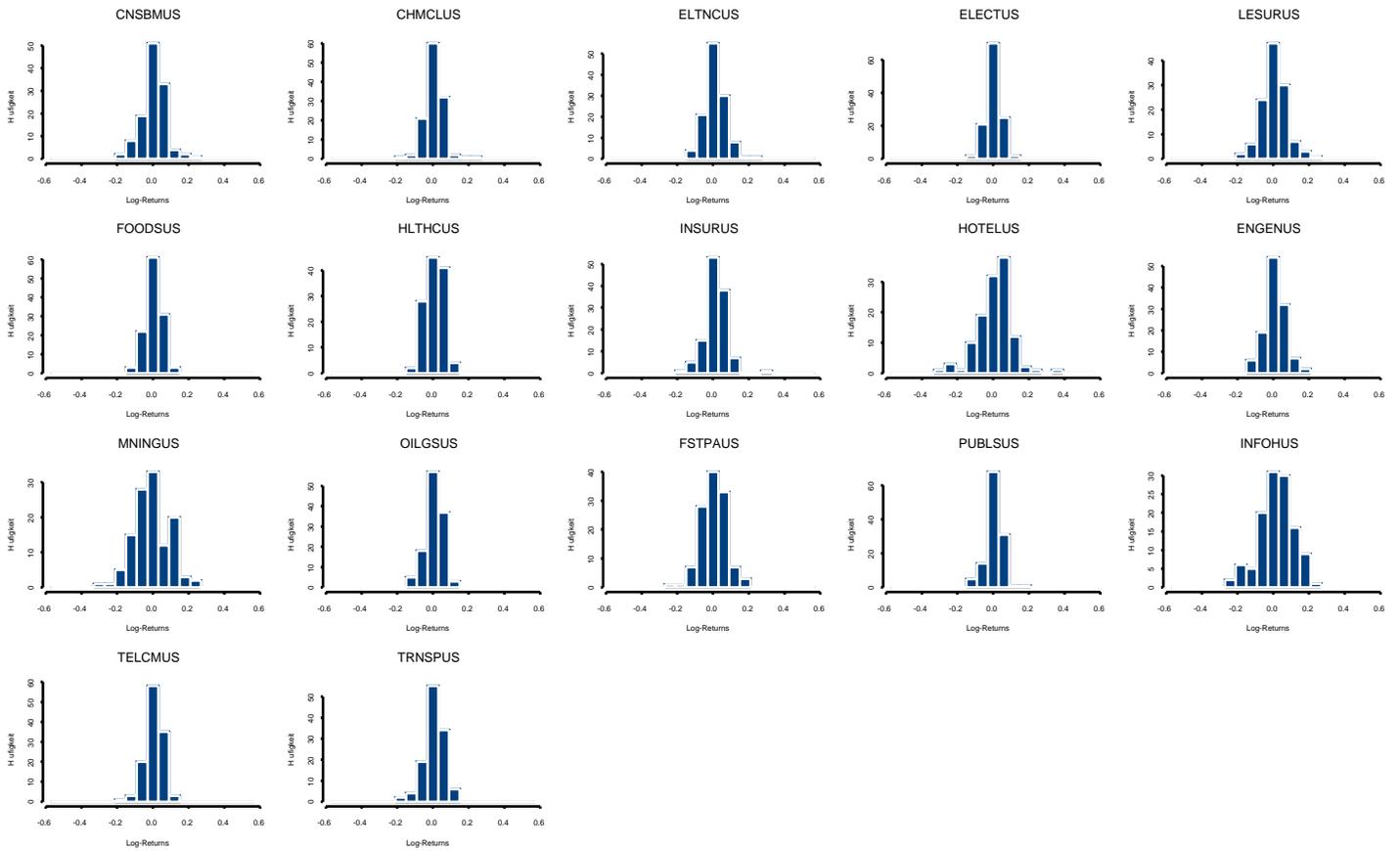


Abbildung 2.26: Histogramme der Log>Returns der Equity-Indizes

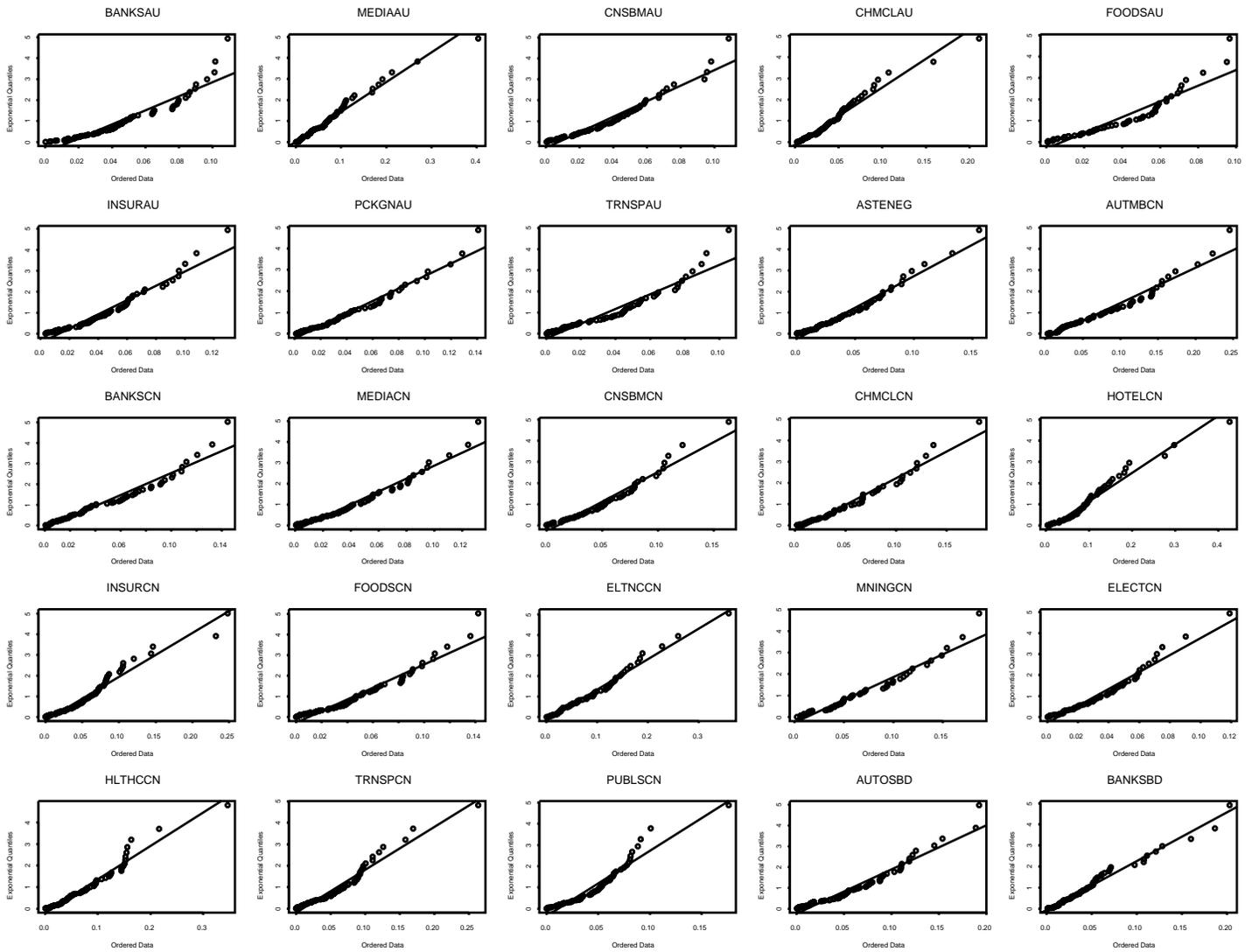


Abbildung 2.27: QQ-Plots der positiven Log>Returns gegen die Exponentialverteilung

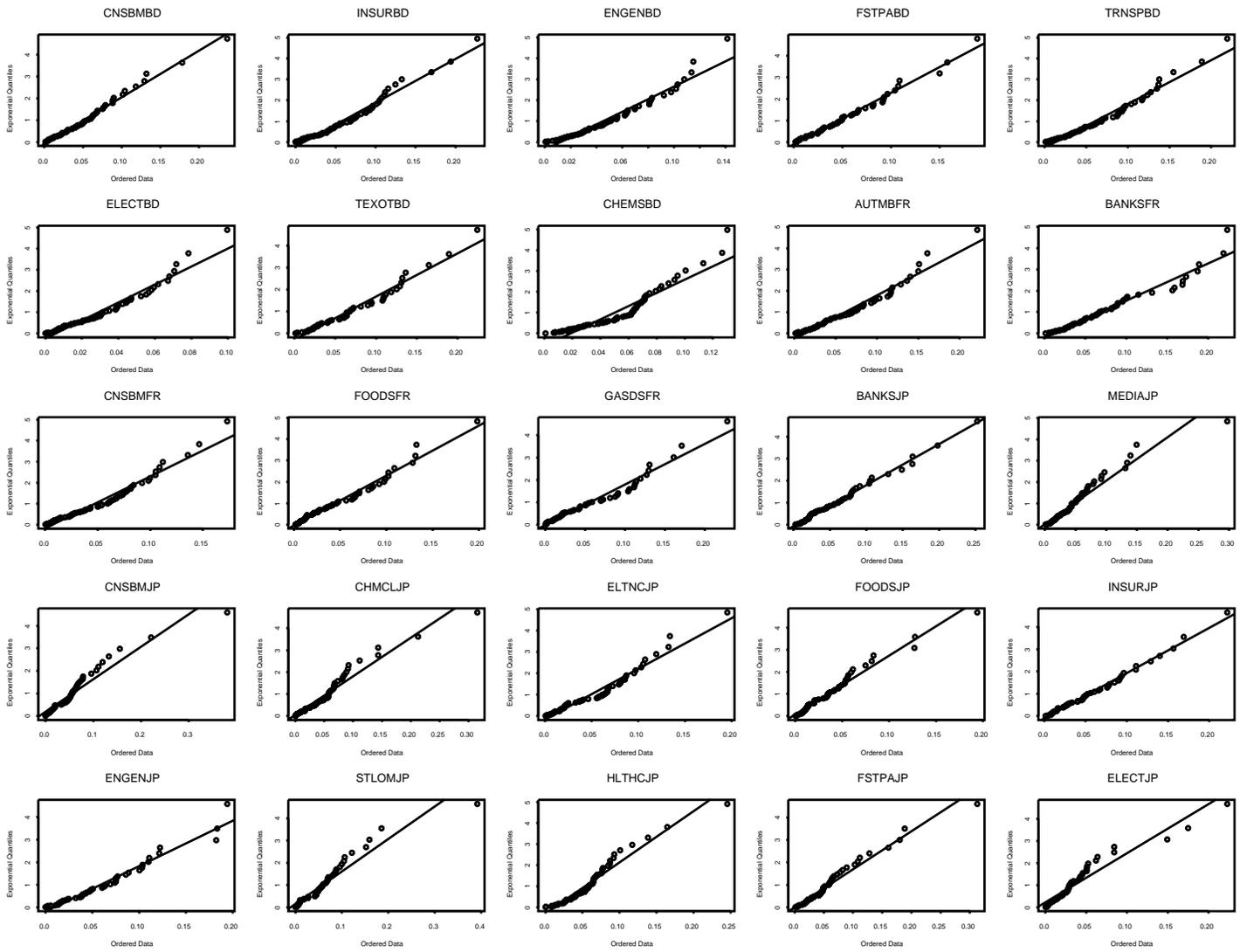


Abbildung 2.28: QQ-Plots der positiven Log-Returns gegen die Exponentialverteilung

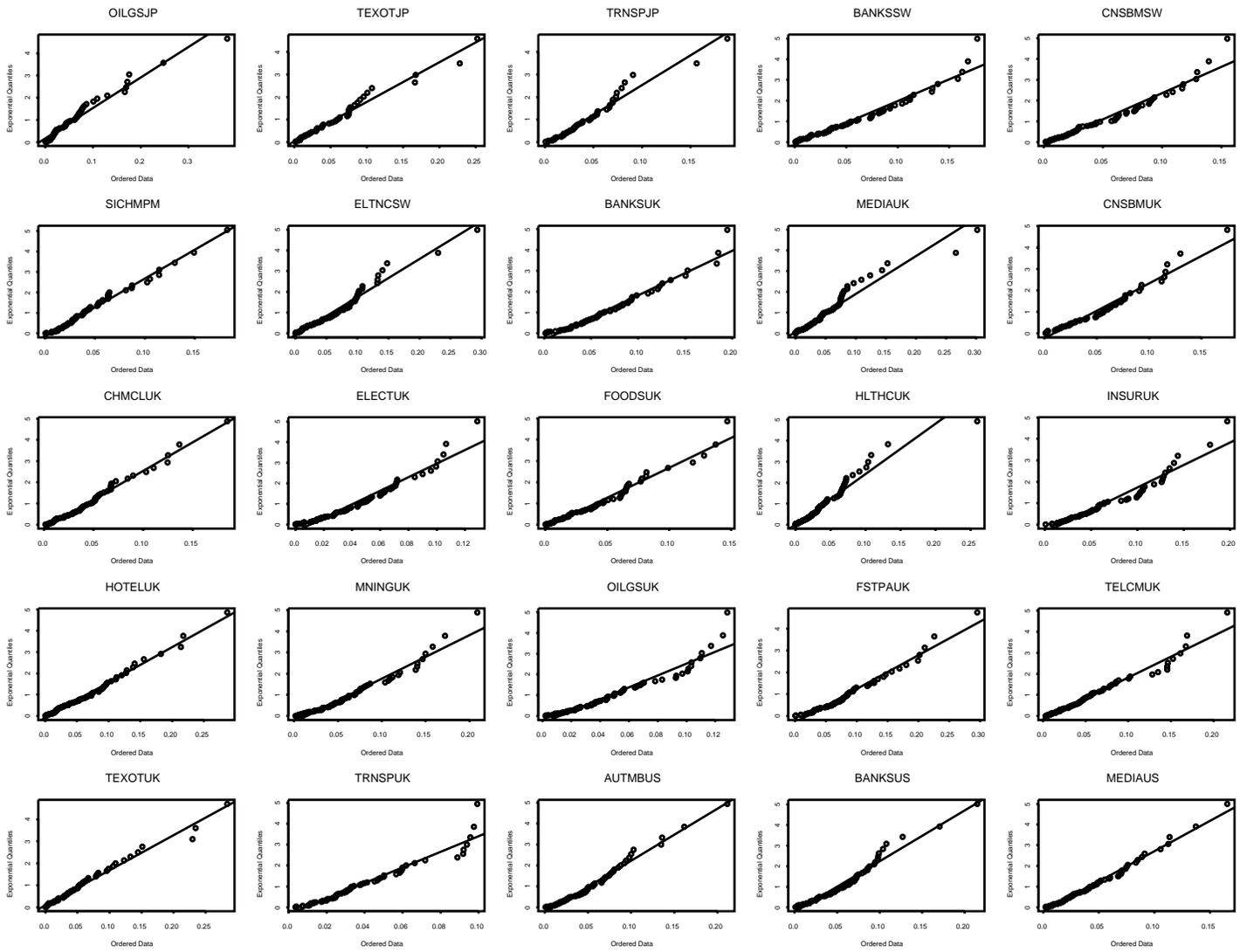


Abbildung 2.29: QQ-Plots der positiven Log-Returns gegen die Exponentialverteilung

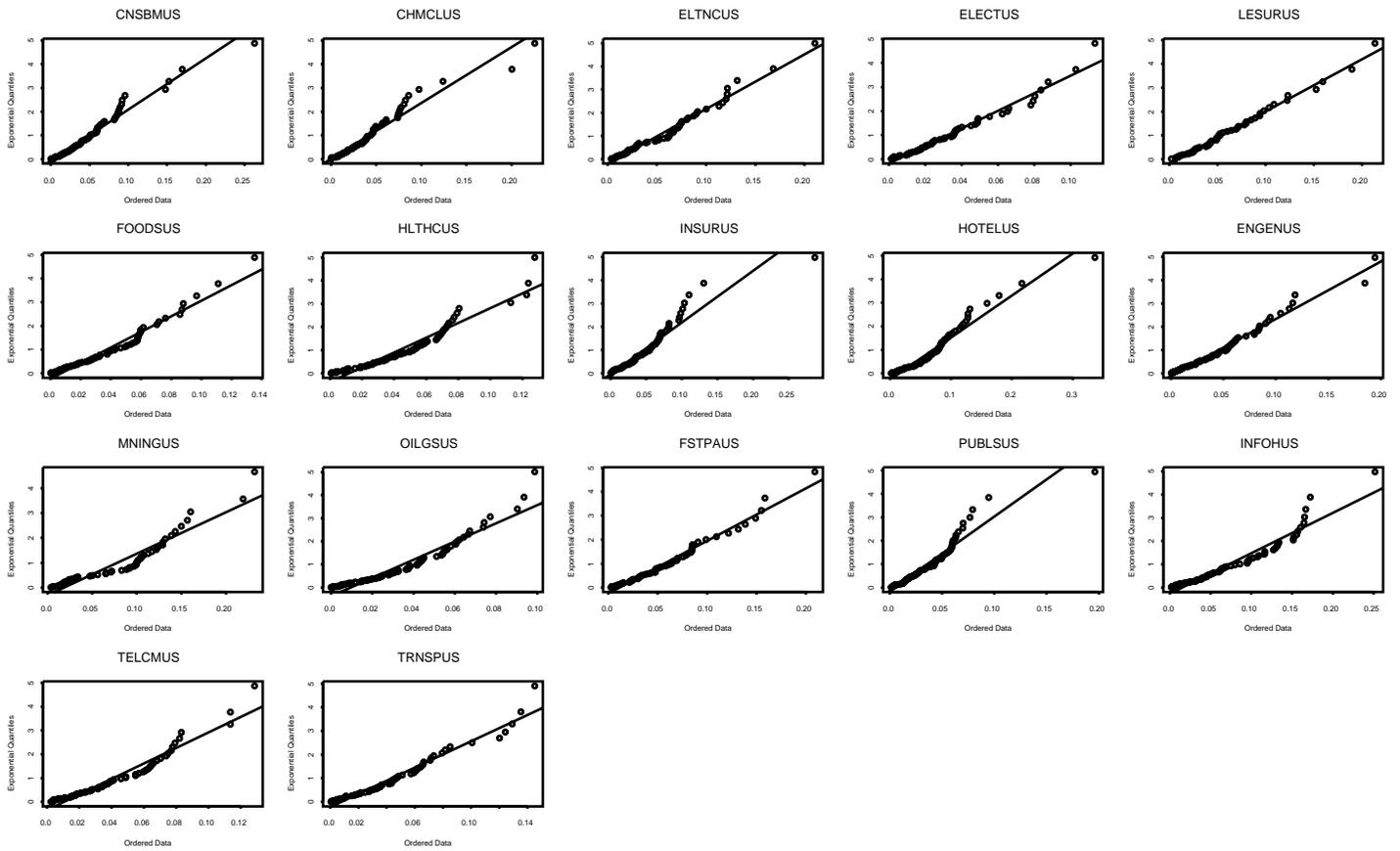


Abbildung 2.30: QQ-Plots der positiven Log-Returns gegen die Exponentialverteilung

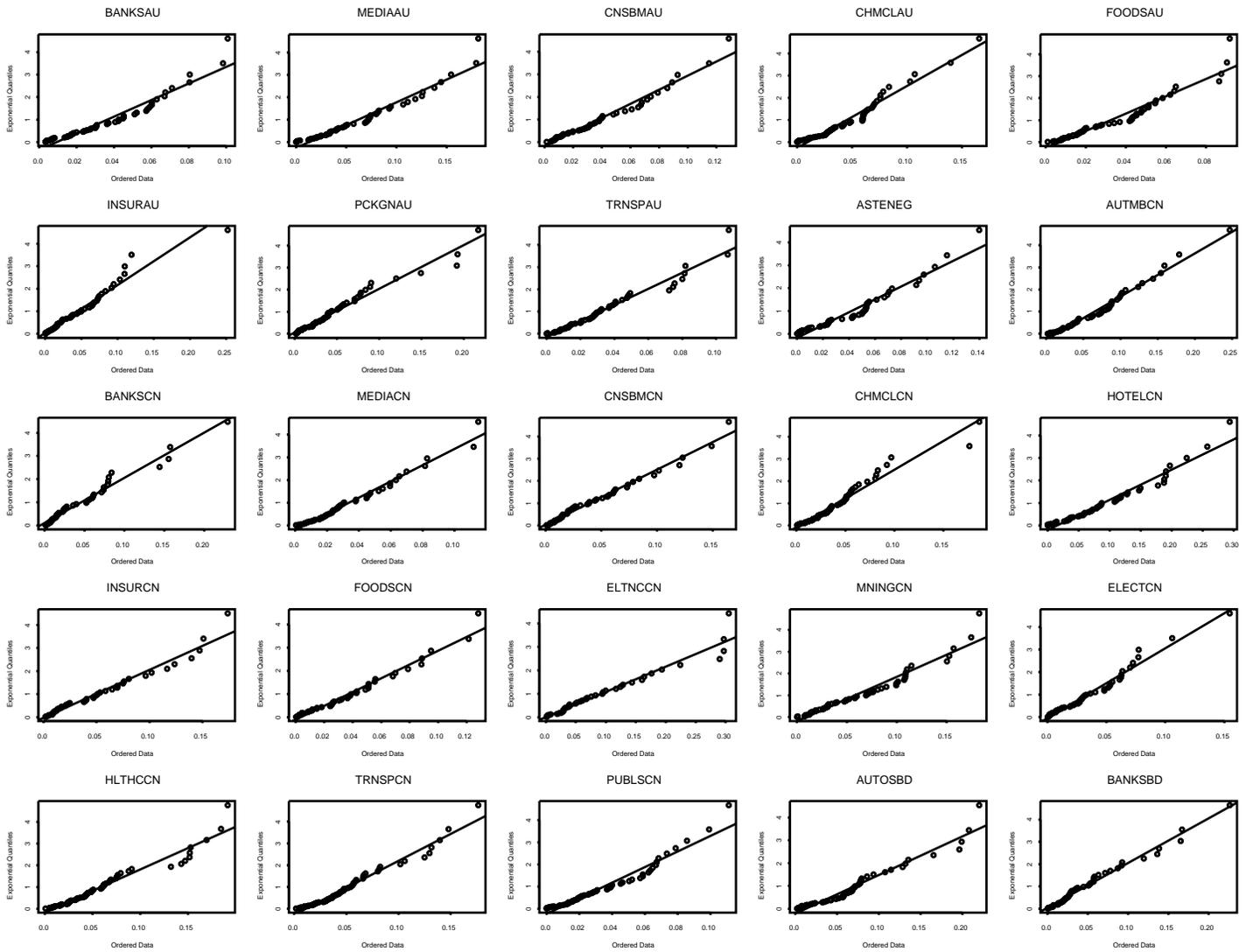


Abbildung 2.31: QQ-Plots der negativen Log-Returns gegen die Exponentialverteilung

Codes	positiv			negativ		
	$\hat{\zeta}$	$\hat{\beta}$	rel. Häufigkeit	$\hat{\zeta}$	$\hat{\beta}$	rel. Häufigkeit
AUTMBUS	-0.164	0.053	0.583	-0.244	0.069	0.417
BANKSUS	-0.178	0.055	0.633	-0.225	0.068	0.367
MEDIAUS	-0.22	0.05	0.617	-0.152	0.047	0.383
CNSBMUS	-0.079	0.053	0.55	-0.17	0.057	0.45
CHMCLUS	-0.029	0.043	0.55	-0.112	0.042	0.45
ELTNCUS	-0.206	0.061	0.617	-0.243	0.053	0.383
ELECTUS	-0.264	0.041	0.517	-0.182	0.035	0.483
LESERUS	-0.194	0.064	0.542	-0.163	0.053	0.458
FOODSUS	-0.28	0.047	0.55	-0.058	0.034	0.45
HLTHCUS	-0.361	0.049	0.617	-0.246	0.033	0.383
INSURUS	-0.057	0.049	0.6	-0.022	0.04	0.4
HOTELUS	-0.122	0.072	0.575	-0.03	0.072	0.425
ENGENUS	-0.15	0.052	0.6	-0.234	0.051	0.4
MNINGUS	-0.427	0.11	0.442	-0.203	0.088	0.558
OILGSUS	-0.446	0.041	0.625	-0.254	0.05	0.375
FSTPAUS	-0.263	0.071	0.525	-0.131	0.061	0.475
PUBLSUS	-0.094	0.038	0.583	-0.1	0.035	0.417
INFOHUS	-0.329	0.095	0.608	-0.227	0.091	0.392
TELCMUS	-0.361	0.05	0.542	-0.082	0.039	0.458
TRNSPUS	-0.303	0.057	0.558	-0.068	0.043	0.442

Tabelle 2.1: Geschätzte Parameter für die an die Log>Returns der US-Indizes angepassten GPD's. Die dritte bzw. sechste Spalte geben an, mit welcher relativen Häufigkeit positive bzw. negative Werte für die Log>Returns auftreten.

Codes	$\hat{\lambda}^+$	positiv	$\hat{\lambda}^-$	negativ
		rel. Häufigkeit		rel. Häufigkeit
AUTMBUS	33.98	0.583	43.17	0.417
BANKSUS	31.65	0.633	48.95	0.367
MEDIAUS	39.13	0.617	64.13	0.383
CNSBMUS	36.78	0.55	45.87	0.45
CHMCLUS	43.48	0.55	58.89	0.45
ELTNCUS	31.94	0.617	61.62	0.383
ELECTUS	60.12	0.517	70.59	0.483
LESERUS	34.27	0.542	48.39	0.458
FOODSUS	49.01	0.55	68.53	0.45
HLTHCUS	37.75	0.617	60.22	0.383
INSURUS	35.82	0.6	63.16	0.4
HOTELUS	24.79	0.575	33.7	0.425
ENGENUS	36.48	0.6	60.89	0.4
MNINGUS	29.09	0.442	24.37	0.558
OILGSUS	45.95	0.625	67.66	0.375
FSTPAUS	33.8	0.525	38.73	0.475
PUBLSUS	48.1	0.583	75.65	0.417
INFOHUS	22.76	0.608	34.55	0.392
TELCMUS	45.04	0.542	60.07	0.458
TRNSPUS	41	0.558	56.07	0.442

Tabelle 2.2: Geschätzte Parameter für die an die Log>Returns der US-Indizes angepassten Exponentialverteilungen. Die zweite bzw. vierte Spalte geben an, mit welcher relativen Häufigkeit positive bzw. negative Werte für die Log>Returns auftreten.

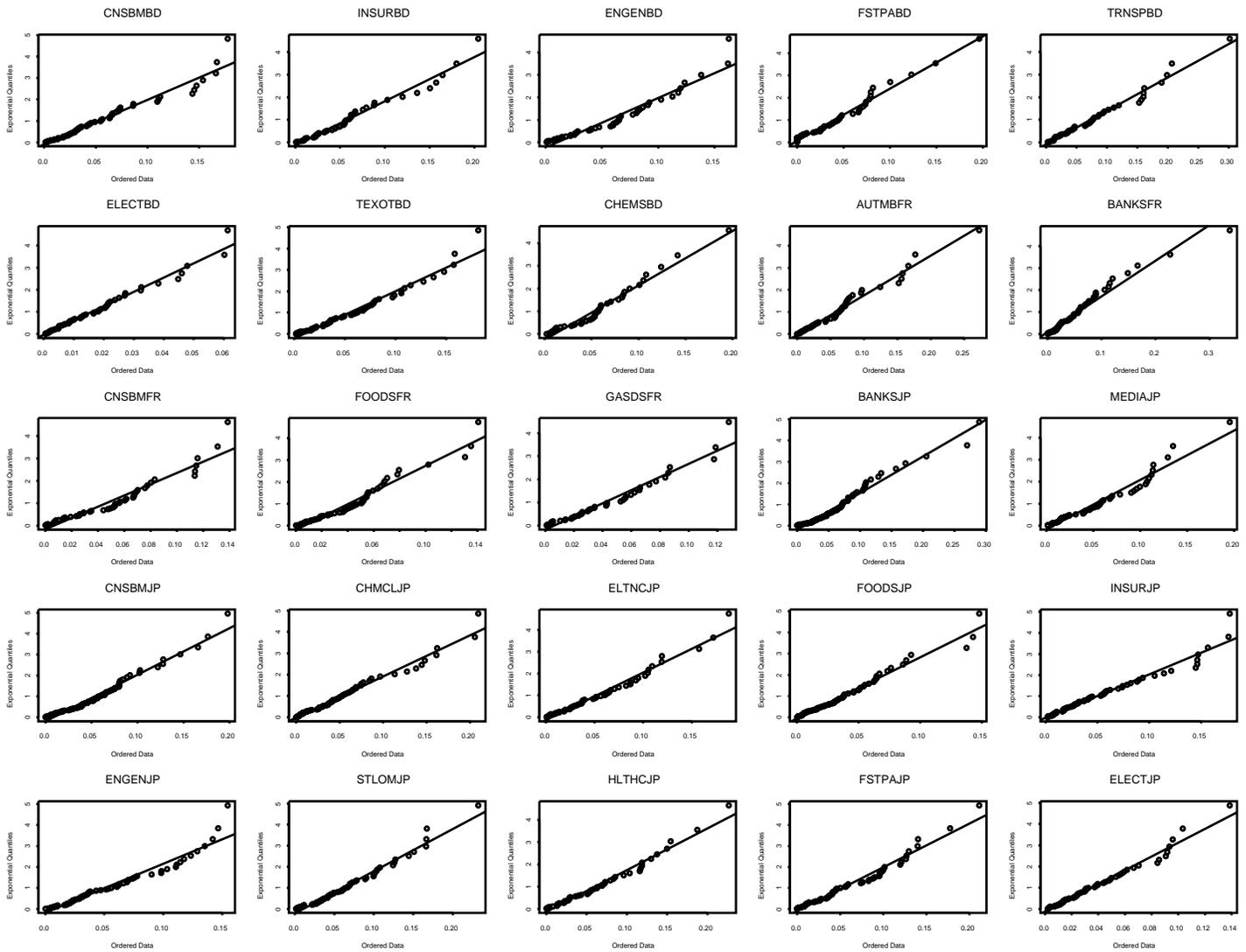


Abbildung 2.32: QQ-Plots der negativen Log-Returns gegen die Exponentialverteilung

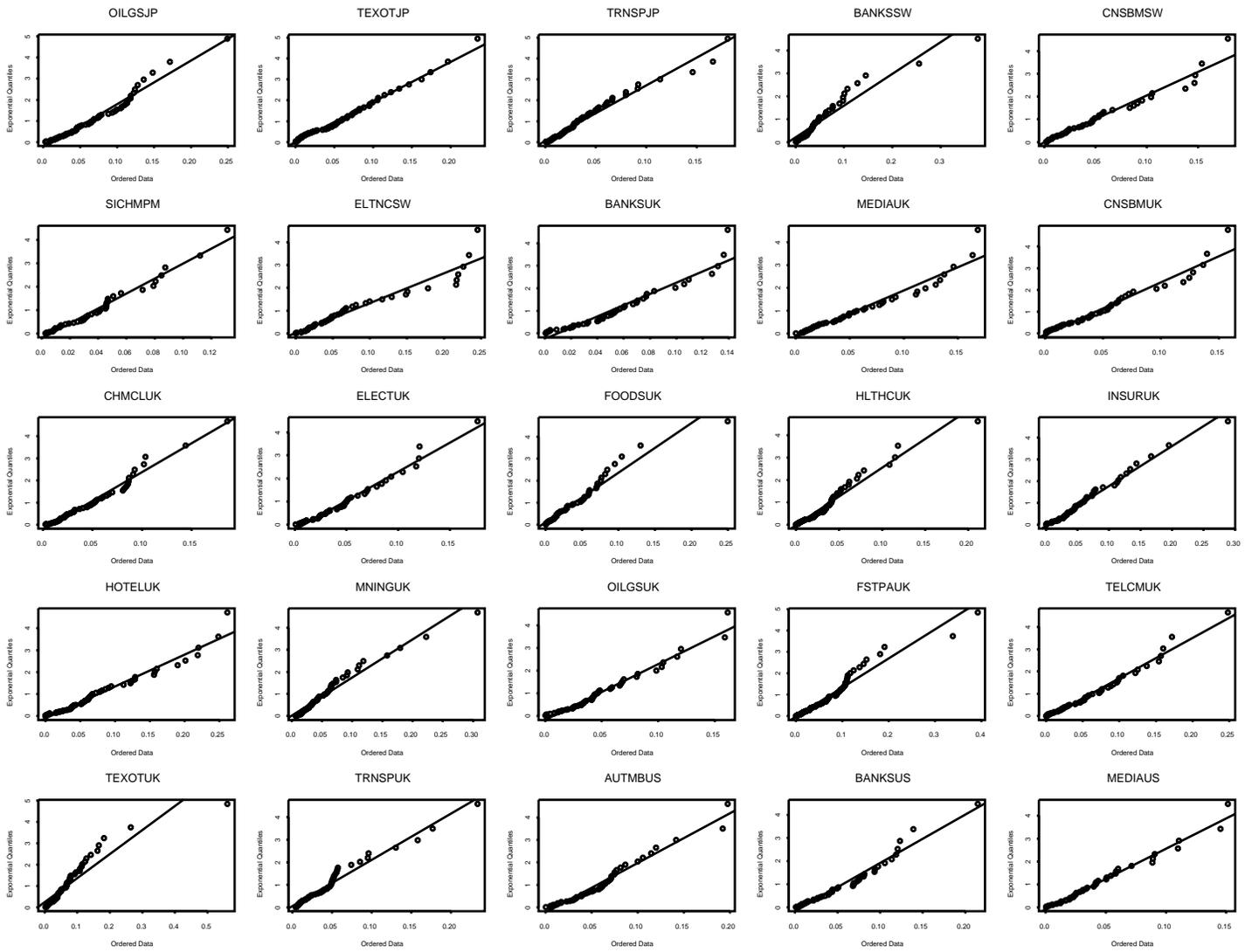


Abbildung 2.33: QQ-Plots der negativen Log-Returns gegen die Exponentialverteilung

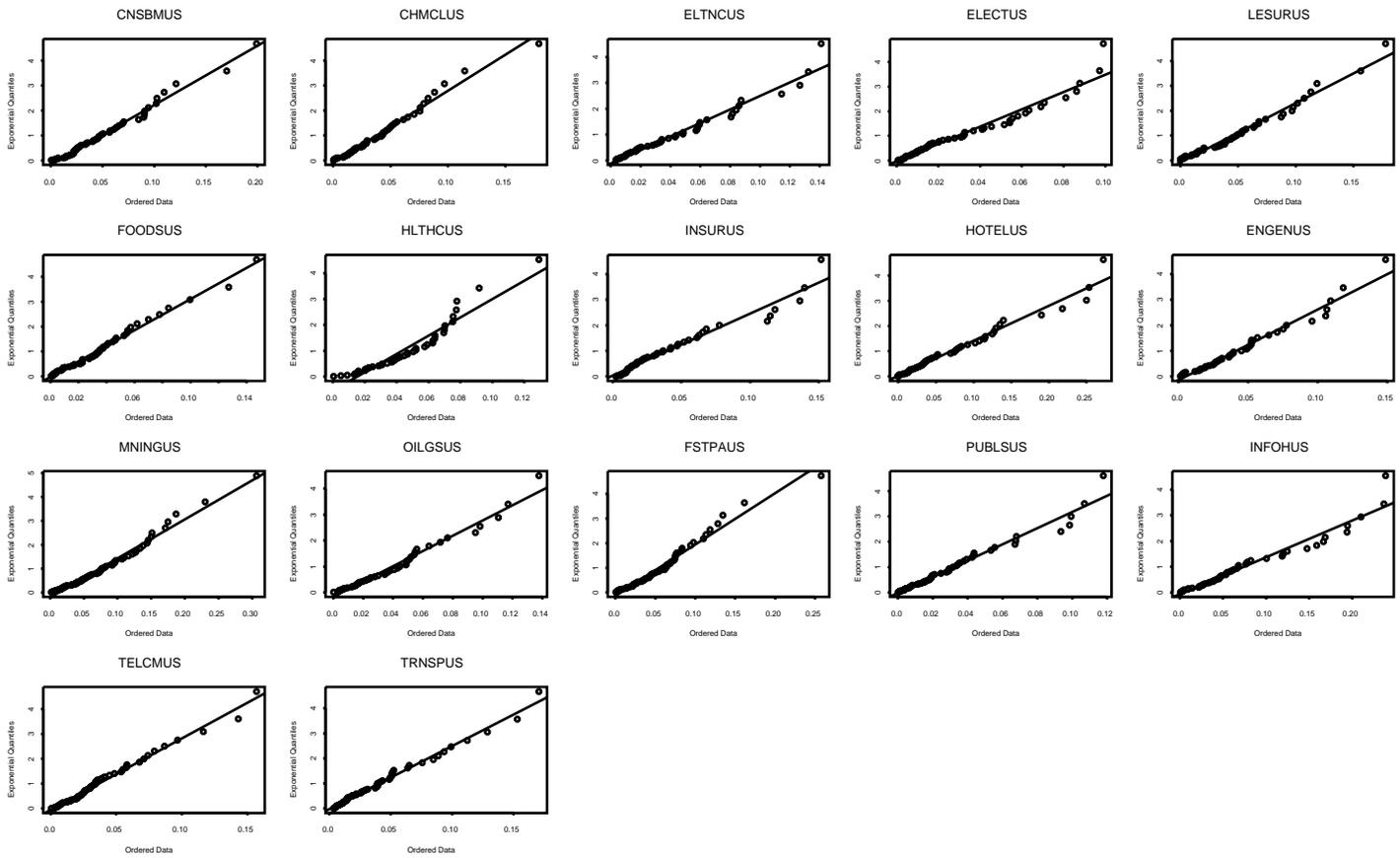


Abbildung 2.34: QQ-Plots der negativen Log-Returns gegen die Exponentialverteilung

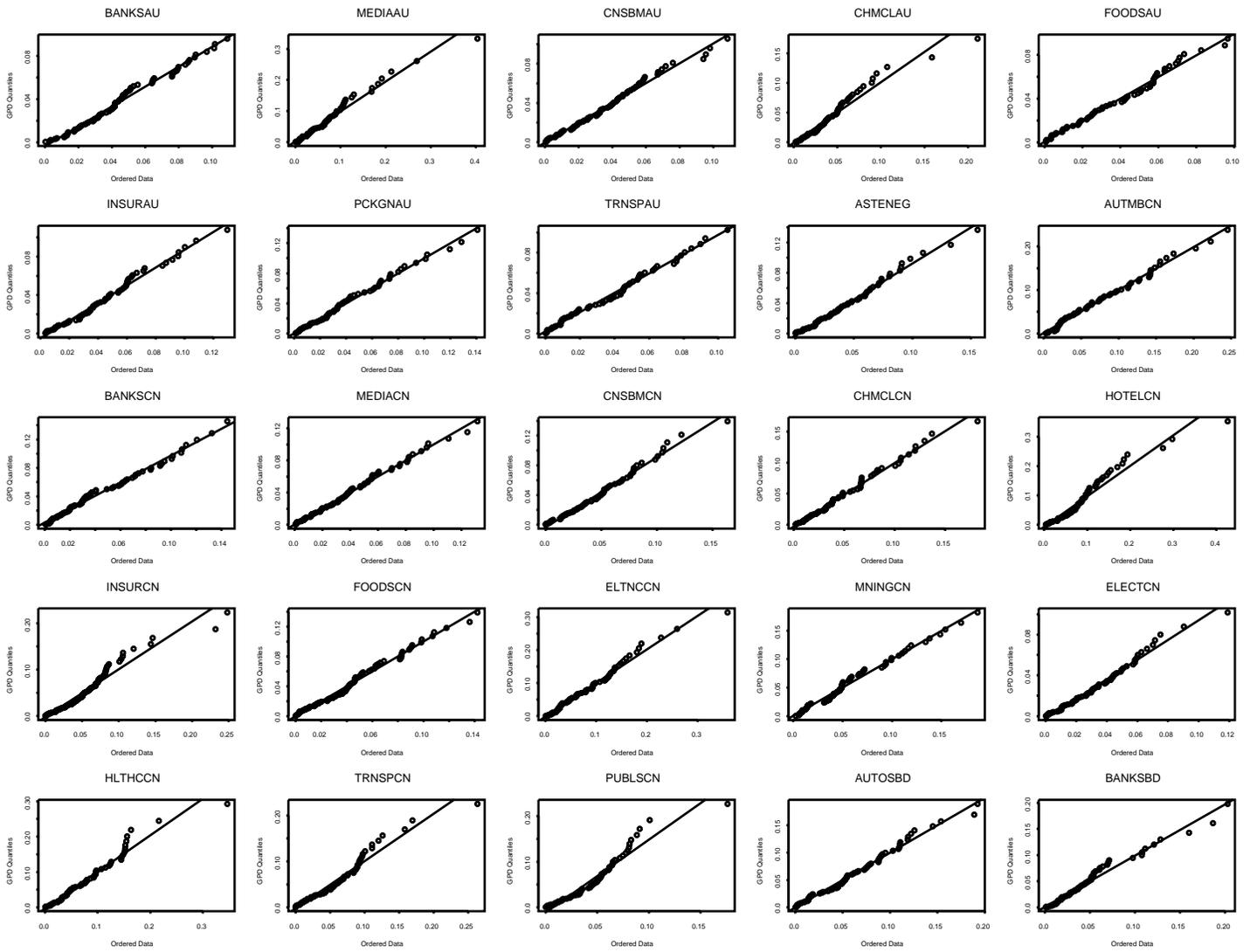


Abbildung 2.35: QQ-Plots der positiven Log-Returns gegen die angepassten GPD's

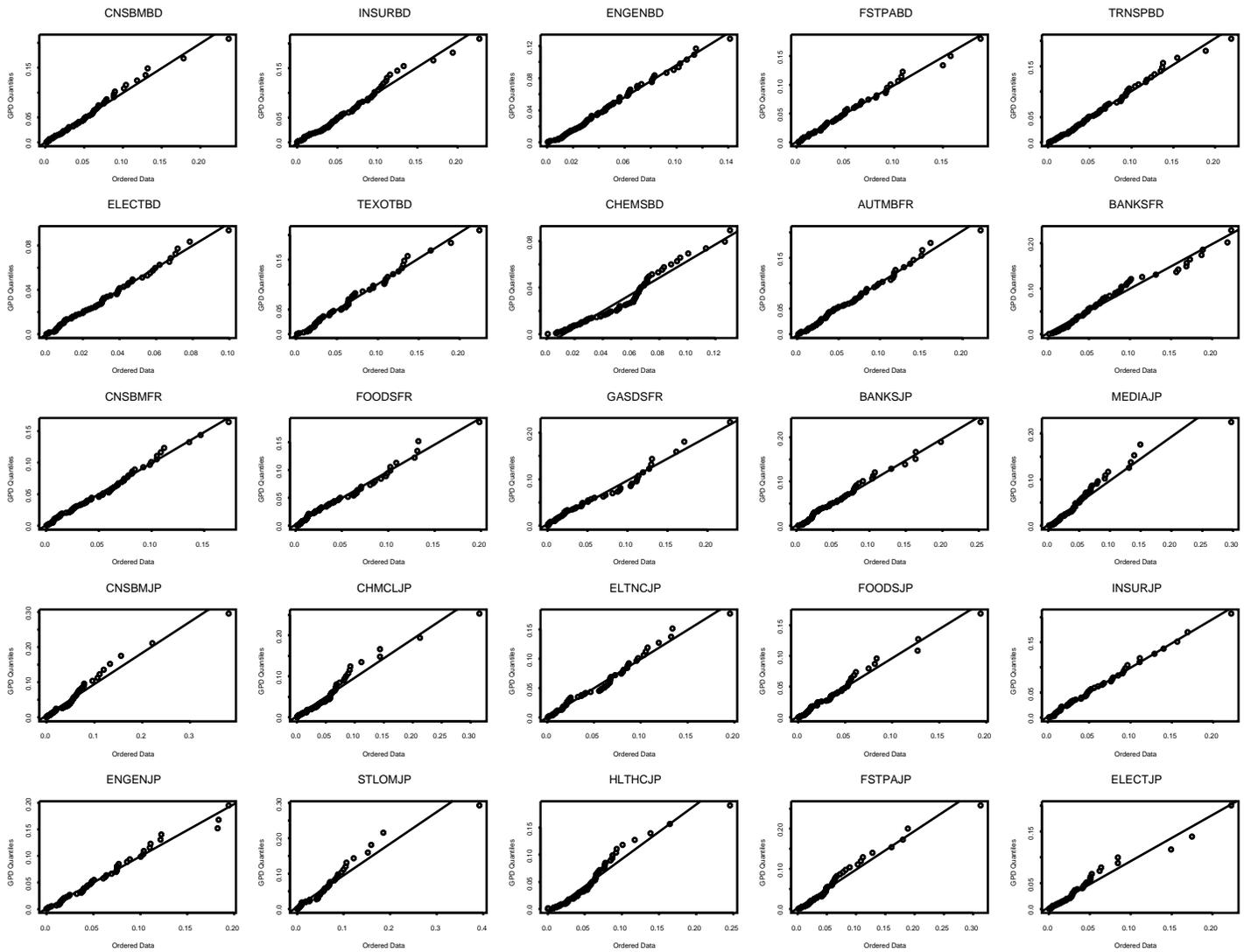


Abbildung 2.36: QQ-Plots der positiven Log-Returns gegen die angepassten GPD's

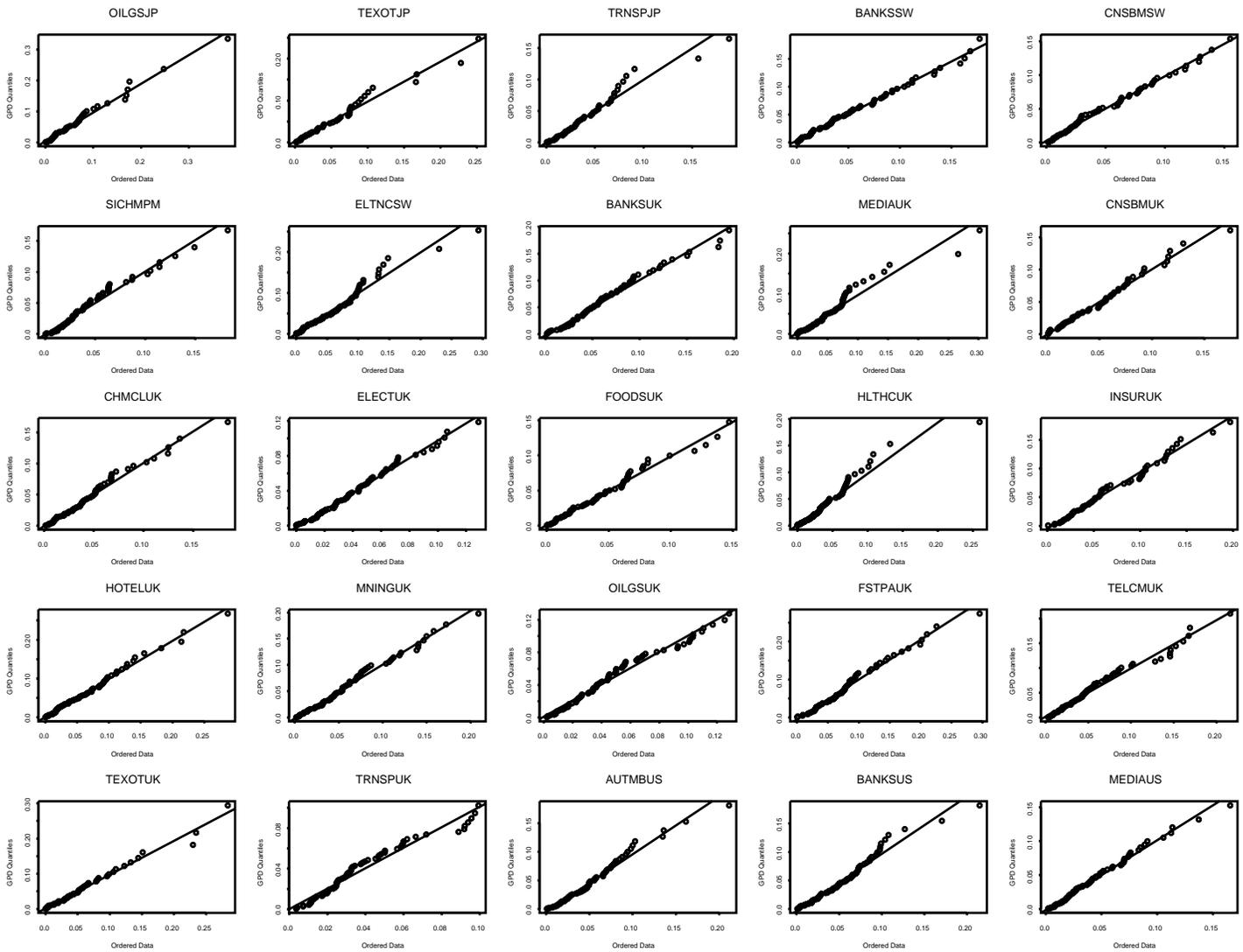


Abbildung 2.37: QQ-Plots der positiven Log-Returns gegen die angepassten GPD's

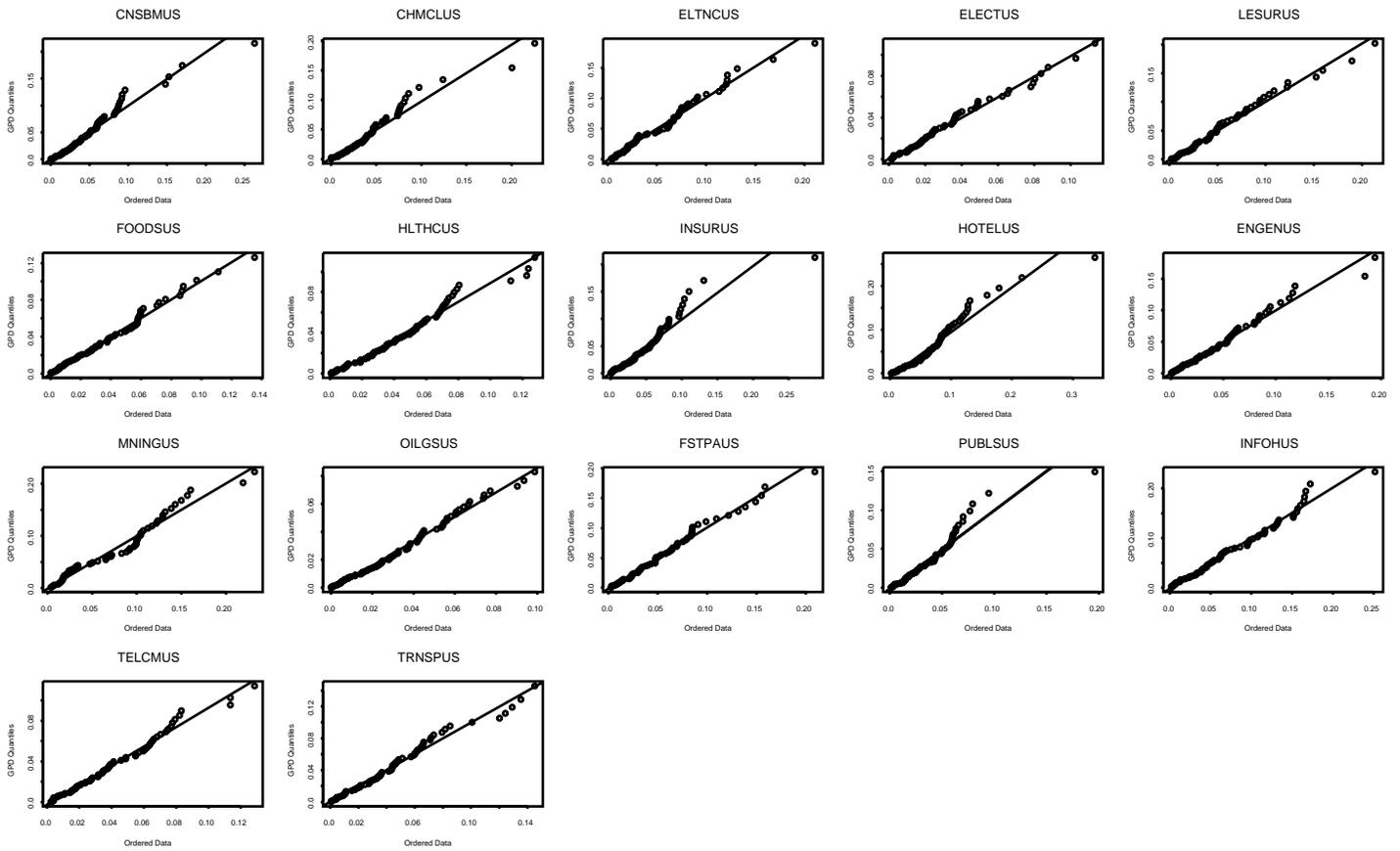


Abbildung 2.38: QQ-Plots der positiven Log-Returns gegen die angepassten GPD's

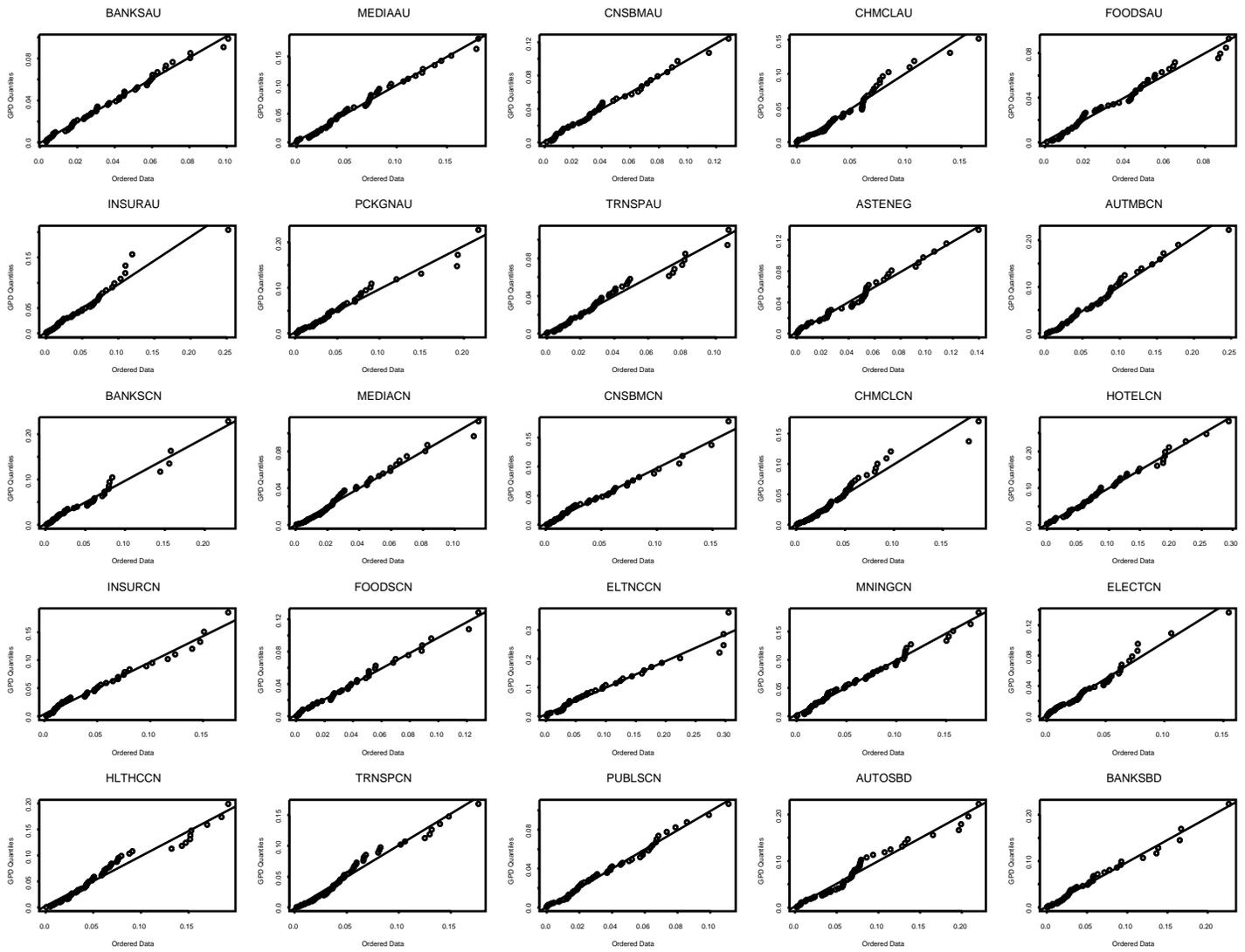


Abbildung 2.39: QQ-Plots der negativen Log-Returns gegen die angepassten GPD's

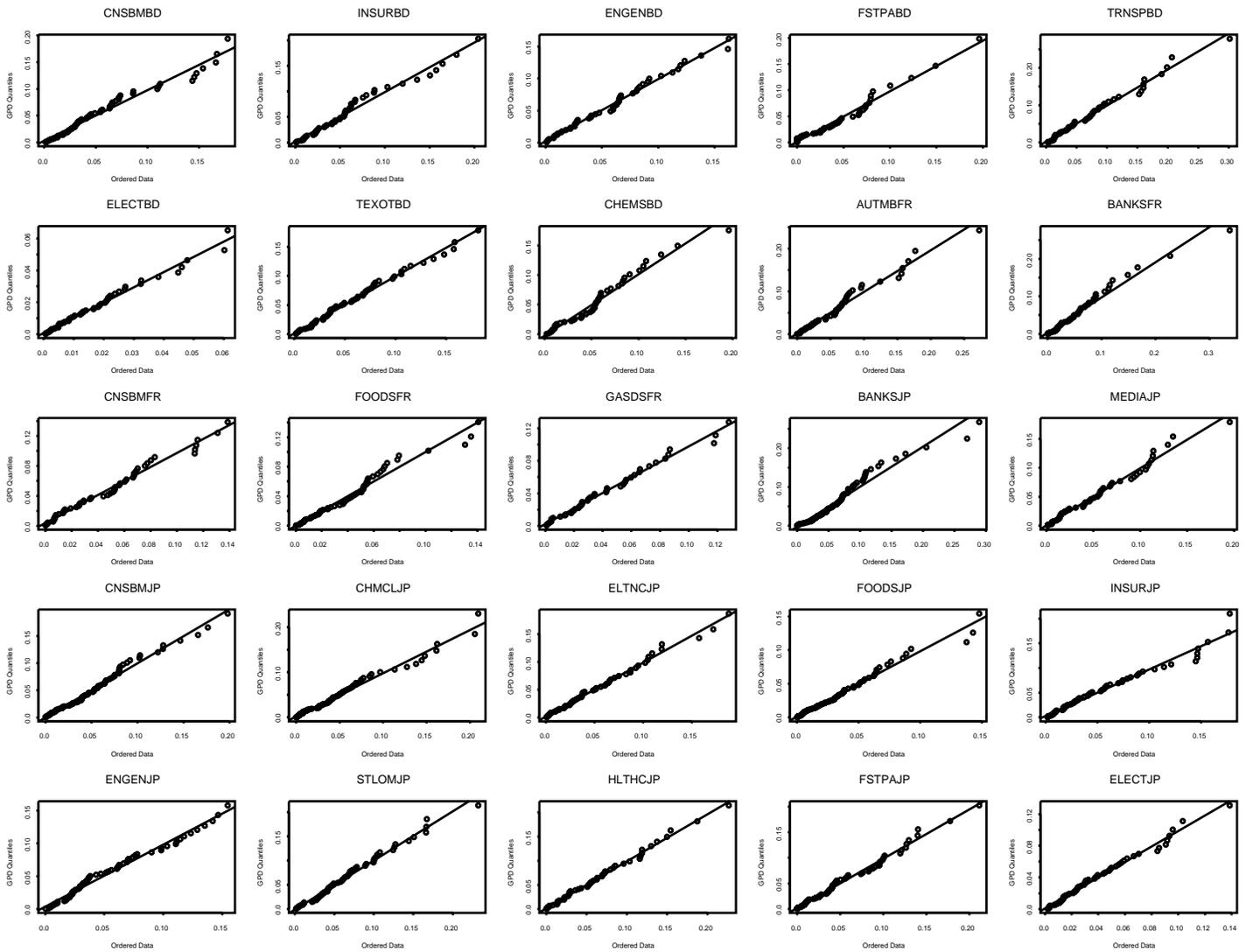


Abbildung 2.40: QQ-Plots der negativen Log-Returns gegen die angepassten GPD's

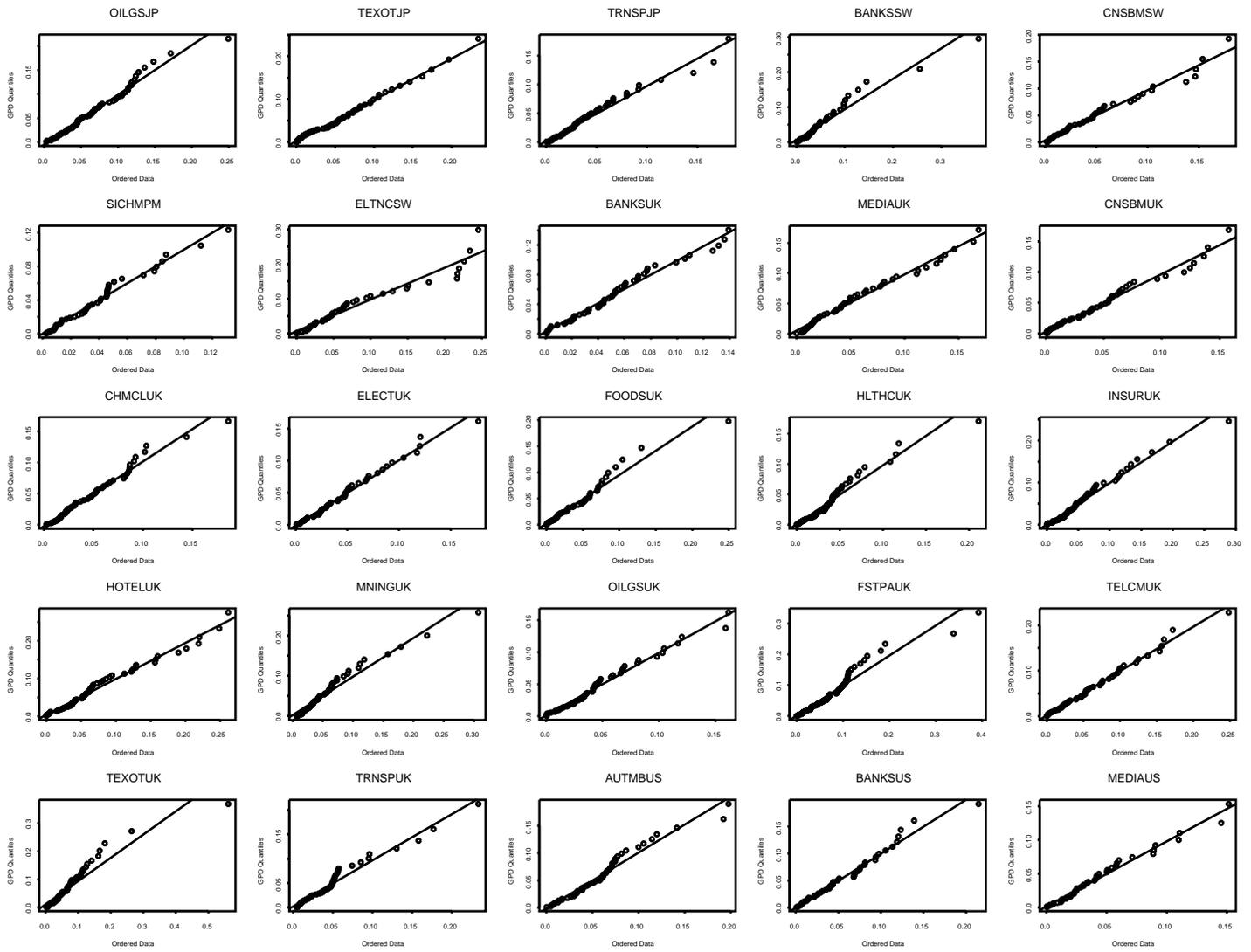


Abbildung 2.41: QQ-Plots der negativen Log-Returns gegen die angepassten GPD's

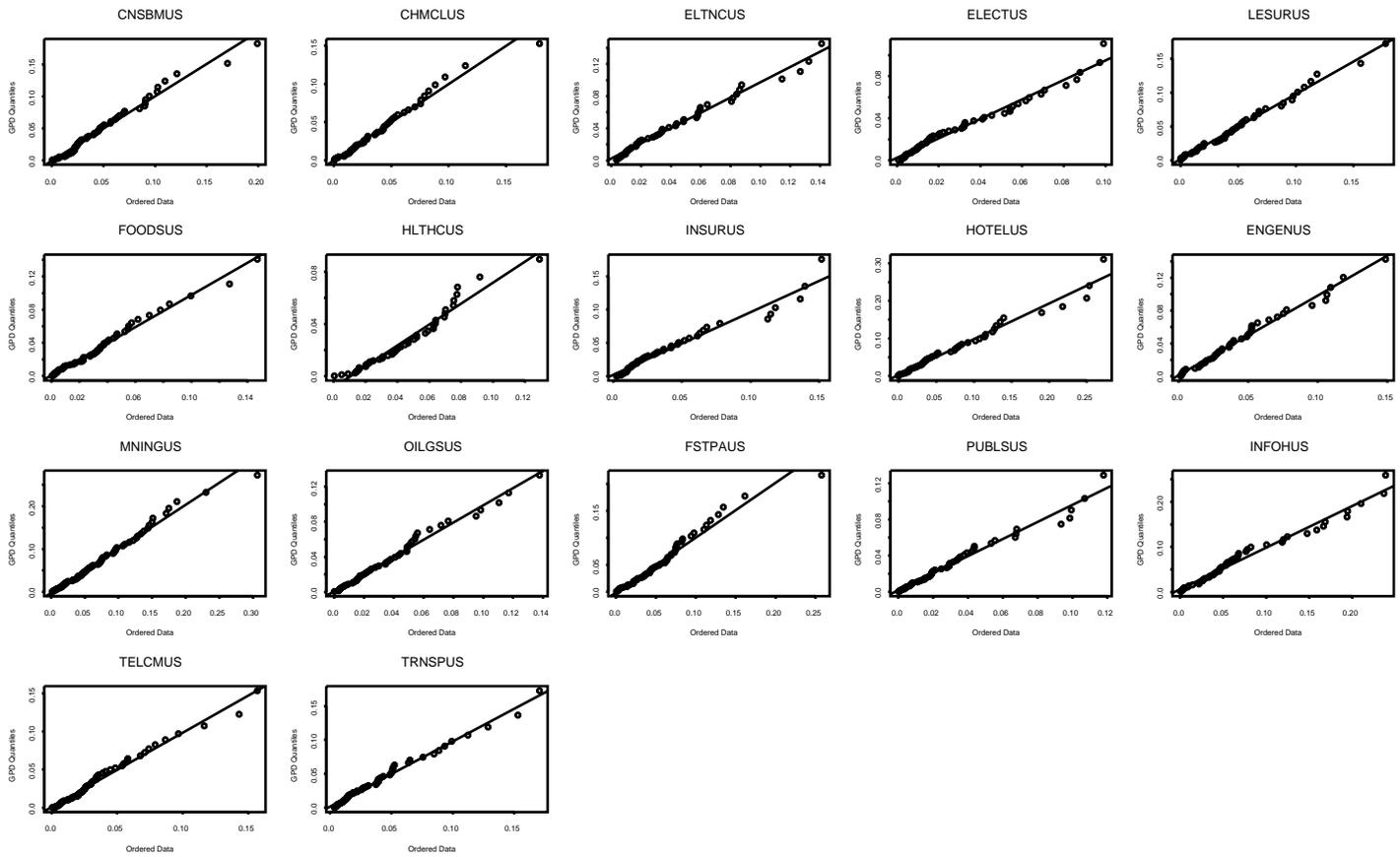


Abbildung 2.42: QQ-Plots der negativen Log-Returns gegen die angepassten GPD's

Kapitel 3

Copulae und Abhängigkeitsmaße

Die Abhängigkeitsstruktur eines Zufallsvektors X kann durch Copulae beschrieben werden. Die Definition und einige wichtige Eigenschaften von Copulae werden nun vorgestellt. Da es sich hier immer noch um ein einleitendes Kapitel handelt, wird auf Beweise verzichtet. Diese sind in Embrechts, Lindskog und McNeil [16] zu finden, woran sich dieser Abschnitt stark anlehnt.

3.1 Copulae

Definition 3.1.1 (H-Volumen). Seien S_1, \dots, S_m nichtleere Teilmengen von $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$. Sei H eine reelle Funktion von m Variablen so, dass $\text{Dom}H = S_1 \times \dots \times S_m$ und für $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ ($a_k \leq b_k \forall k$) sei $B = [\mathbf{a}, \mathbf{b}] (= [a_1, b_1] \times \dots \times [a_m, b_m])$ ein m -Quader, dessen Ecken in $\text{Dom}H$ liegen. Dann ist das H -Volumen von B definiert durch

$$V_H(B) = \sum_{c \in B} \text{sgn}(c) H(c), \quad (3.1)$$

wobei die Summe über alle Ecken c von B genommen wird, und $\text{sgn}(c)$ definiert ist durch

$$\text{sgn}(c) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \text{card}\{k : c_k = a_k, k = 1, \dots, m\} \text{ gerade} \\ -1, & \text{wenn } \text{card}\{k : c_k = a_k, k = 1, \dots, m\} \text{ ungerade.} \end{cases} \quad (3.2)$$

Definition 3.1.2 (m-steigend). Eine reelle Funktion H von m Variablen heißt m -steigend, wenn $V_H(B) \geq 0$ für alle m -Quader deren Ecken in $\text{Dom}H$ liegen.

Definition 3.1.3 (geerdete Funktion H , Ränder von H). Sei $\text{Dom}H = S_1 \times \dots \times S_m$, $S_i \subset \overline{\mathbb{R}} \forall i$ der Definitionsbereich einer reellen Funktion H , wobei jedes S_k ein kleinstes Element a_k hat. H heißt geerdet, wenn $H(\mathbf{t}) = 0$ für alle $\mathbf{t} \in \text{Dom}H$ mit $t_k = a_k$ für mindestens ein k . Wenn alle S_k nichtleer sind und größte Elemente b_k haben, dann hat H Ränder und die eindimensionalen Ränder von H sind die Funktionen H_k mit $\text{Dom}H_k = S_k$ und für alle $x \in S_k$ ist

$$H_k(x) = H(b_1, \dots, b_{k-1}, x, b_{k+1}, \dots, b_m). \quad (3.3)$$

Höherdimensionale Ränder sind entsprechend definiert. Eindimensionale Ränder heißen Ränder.

Lemma 3.1.4. Seien S_1, \dots, S_m nichtleere Teilmengen von $\overline{\mathbb{R}}$ und sei H eine geordnete m -steigende Funktion mit Definitionsbereich $\text{Dom}H = S_1 \times \dots \times S_m$. Dann ist H steigend in jedem Argument, das heißt wenn

$$(t_1, \dots, t_{k-1}, x, t_{k+1}, \dots, t_m), (t_1, \dots, t_{k-1}, y, t_{k+1}, \dots, t_m) \in \text{Dom}H \quad \text{und} \quad x \leq y, \quad (3.4)$$

dann gilt

$$H(t_1, \dots, t_{k-1}, x, t_{k+1}, \dots, t_m) \leq H(t_1, \dots, t_{k-1}, y, t_{k+1}, \dots, t_m). \quad (3.5)$$

Lemma 3.1.5. Seien S_1, \dots, S_m nichtleere Teilmengen von $\overline{\mathbb{R}}$. Sei außerdem H eine geordnete m -steigende Funktion mit Definitionsbereich $\text{Dom}H = S_1 \times \dots \times S_m$ und Rändern H_k . Wenn $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)^T$ und $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)^T$ beliebige Punkte in $\text{Dom}H$ sind, dann gilt

$$|H(\mathbf{x}) - H(\mathbf{y})| \leq \sum_{k=1}^m |H_k(x_k) - H_k(y_k)|. \quad (3.6)$$

Definition 3.1.6 (m-dimensionale Verteilungsfunktion). Eine m -dimensionale Verteilungsfunktion ist eine Funktion H mit Definitionsbereich $\overline{\mathbb{R}}^m$, die geordnet ist und m -steigend ist, und für die gilt $H(\infty, \dots, \infty) = 1$.

Aus Lemma 3.1.4 folgt, dass die Ränder einer m -dimensionalen Verteilungsfunktion wieder Verteilungsfunktionen sind, die wir mit F_1, \dots, F_m bezeichnen.

Definition 3.1.7 (Copula). Eine m -dimensionale Copula (m -Copula) ist eine Funktion C mit Definitionsbereich $[0, 1]^m$, für die gilt

1. C ist geordnet und m -steigend
2. C hat Ränder C_k , $k = 1, \dots, m$, für die gilt: $C_k(u) = u$ für alle $u \in [0, 1]$.

Bemerkung 3.1.8. 1. Man beachte dass für jede m -Copula mit $m \geq 3$ jeder k -dimensionale Rand von C eine k -Copula ist, $k \leq m$.

2. Äquivalent zur Definition 3.1.7 ist eine m -Copula eine Funktion $C : [0, 1]^m \rightarrow [0, 1]$ mit folgenden Eigenschaften:

- (a) Für alle $\mathbf{u} \in [0, 1]^m$ ist $C(\mathbf{u}) = 0$ wenn mindestens eine Koordinate von \mathbf{u} gleich 0 ist, und $C(\mathbf{u}) = u_k$, wenn alle Koordinaten von \mathbf{u} gleich 1 sind, außer u_k .
- (b) Für alle \mathbf{a} und \mathbf{b} in $[0, 1]^m$ mit $a_i \leq b_i \forall i$ ist $V_C([\mathbf{a}, \mathbf{b}]) \geq 0$.

3. Nachdem eine Copula eine gemeinsame Verteilungsfunktion auf $[0, 1]^m$ ist, induziert eine Copula C ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $[0, 1]^m$ mittels

$$V_c([0, u_1] \times \dots \times [0, u_m]) = C(u_1, \dots, u_m). \quad (3.7)$$

4. Aus Definition 3.1.7 folgt, dass eine Copula C eine Verteilungsfunktion auf $[0, 1]^m$ ist, deren Ränder gleichverteilt sind auf $[0, 1]$.

Der folgende Satz folgt direkt aus Lemma 3.1.5.

Satz 3.1.9. *Sei C eine m -Copula. Dann gilt für alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in [0, 1]^m$*

$$|C(\mathbf{v}) - C(\mathbf{u})| \leq \sum_{k=1}^m |v_k - u_k|. \quad (3.8)$$

Daraus folgt, dass C gleichmäßig stetig ist auf $[0, 1]^m$.

Der folgende Satz ist der Dreh- und Angelpunkt aller Copulae betreffenden Überlegungen.

Satz 3.1.10 (Satz von Sklar). *Sei H eine m -dimensionale Verteilungsfunktion mit den Randverteilungsfunktionen F_1, \dots, F_m . Dann existiert eine m -Copula C , so dass für alle $x \in \mathbb{R}^m$ gilt*

$$H(x_1, \dots, x_m) = C(F_1(x_1), \dots, F_m(x_m)). \quad (3.9)$$

Wenn alle F_1, \dots, F_m stetig sind, dann ist C eindeutig. Andernfalls ist C eindeutig bestimmt auf $\text{Ran}F_1 \times \dots \times \text{Ran}F_m$, wobei $\text{Ran}F$ der Wertebereich von F ist. Im umgekehrten Fall ist die in 3.9 definierte Funktion H eine m -dimensionale Verteilungsfunktion mit Randverteilungsfunktionen F_1, \dots, F_m , wenn C eine m -Copula ist und F_1, \dots, F_m eindimensionale Verteilungsfunktionen sind.

Aus dem Satz von Sklar kann man sehen, dass man für stetige multivariate Verteilungsfunktionen die eindimensionalen Randverteilungen und die multivariate Abhängigkeitsstruktur trennen kann, und die Letztere durch eine Copula repräsentiert wird.

Korollar 3.1.11. *Sei H eine m -dimensionale Verteilungsfunktion mit Rändern F_1, \dots, F_m und Copula C (C erfülle (3.9)). Dann gilt für jedes $u \in [0, 1]^m$*

$$C(u_1, \dots, u_m) = H(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_m^{-1}(u_m)). \quad (3.10)$$

Definition 3.1.12 (Überlebenscopula). *Sei H eine m -dimensionale Verteilungsfunktion mit Copula C und Rändern F_1, \dots, F_m ,*

$$P(X_1 \leq x_1, \dots, X_m \leq x_m) = H(x_1, \dots, x_m) = C(F_1(x_1), \dots, F_m(x_m)). \quad (3.11)$$

Die gemeinsame Überlebensfunktion \overline{H} ist dann gegeben durch

$$P(X_1 > x_1, \dots, X_m > x_m) = \overline{H}(x_1, \dots, x_m). \quad (3.12)$$

Dann ist die Überlebenscopula \widehat{C} definiert als

$$P(X_1 > x_1, \dots, X_m > x_m) = \overline{H}(x_1, \dots, x_m) =: \widehat{C}(\overline{F}_1(x_1), \dots, \overline{F}_m(x_m)). \quad (3.13)$$

Bemerkung 3.1.13. 1. Die Überlebenscopula \widehat{C} ist eine Copula:

Sei $T(u) = 1 - u$, $u \in (0, 1)$, eine streng monoton fallende Transformation. Somit ist $T(U_i) \sim U(0, 1)$, für $U_i \sim U(0, 1)$, $i = 1, \dots, m$ und es gilt:

$$\begin{aligned} \widehat{C}_{U_1, \dots, U_m}(u_1, \dots, u_m) &= P(U_1 > 1 - u_1, \dots, U_m > 1 - u_m) \\ &= P(T(U_1) < u_1, \dots, T(U_m) < u_m) \\ &= C_{T(U_1), \dots, T(U_m)}(u_1, \dots, u_m). \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung

□.

2. Im bivariaten Fall hat die Überlebenscopula $\widehat{C}(u, v)$ folgende Form

$$\widehat{C}(u, v) = u + v - 1 + C(1 - u, 1 - v) \quad u, v \in [0, 1]. \quad (3.14)$$

Satz 3.1.14. Sei $(X_1, \dots, X_m)^T$ ein Vektor von stetigen Zufallsvariablen mit Copula C , dann sind X_1, \dots, X_m genau dann unabhängig wenn $C = \Pi^m$ gilt, wobei $\Pi^m(u_1, \dots, u_m) = u_1 \cdots u_m$.

Eine bequeme Tatsache ist, dass für streng monotone Transformationen der Zufallsvariablen, die Copula entweder invariant ist, oder sich in einer einfachen Art und Weise ändert. Man beachte, dass für eine stetige Zufallsvariable X und eine streng monotone Funktion T , deren Definitionsbereich den Wertebereich $\text{Ran}X$ von X enthält, auch die Zufallsvariable $T(X)$ stetig ist.

Satz 3.1.15. Sei $(X_1, \dots, X_m)^T$ ein Vektor von stetigen Zufallsvariablen mit Copula C . Wenn T_i auf $\text{Ran}X_i$ streng monoton steigende Funktionen sind für $i = 1, \dots, m$, dann hat auch der Vektor $(T_1(X_1), \dots, T_m(X_m))^T$ Copula C .

Satz 3.1.16. Sei $(X_1, \dots, X_m)^T$ ein Vektor von stetigen Zufallsvariablen mit Copula C_{X_1, \dots, X_m} . Seien T_i auf $\text{Ran}X_i$ streng monotone Funktionen für $i = 1, \dots, m$ und $C_{T_1(X_1), \dots, T_m(X_m)}$ die Copula von $(T_1(X_1), \dots, T_m(X_m))^T$. Außerdem sei T_k streng monoton fallend für ein k , $1 \leq k \leq m$ (ohne Einschränkung sei $k=1$). Dann gilt

$$\begin{aligned} C_{T_1(X_1), \dots, T_m(X_m)}(u_1, u_1, \dots, u_m) &= C_{T_2(X_2), \dots, T_m(X_m)}(u_2, \dots, u_m) \\ &\quad - C_{X_1, T_2(X_2), \dots, T_m(X_m)}(1 - u_1, u_2, \dots, u_m) \end{aligned}$$

Beispiel 3.1.17 (Bivariater Fall). Sei T_1 streng monoton fallend und T_2 streng monoton steigend. Dann ist

$$\begin{aligned} C_{T_1(X_1), T_2(X_2)}(u_1, u_2) &= u_2 - C_{X_1, T_2(X_2)}(1 - u_1, u_2) \\ &= u_2 - C_{X_1, X_2}(1 - u_1, u_2). \end{aligned}$$

Wenn nun T_1 und T_2 streng monoton fallend sind gilt

$$\begin{aligned} C_{T_1(X_1), T_2(X_2)}(u_1, u_2) &= u_2 - C_{X_1, T_2(X_2)}(1 - u_1, u_2) \\ &= u_2 - (1 - u_1 - C_{X_1, X_2}(1 - u_1, 1 - u_2)) \\ &= u_1 + u_2 - 1 + C_{X_1, X_2}(1 - u_1, 1 - u_2). \end{aligned}$$

Also ist die Copula $C_{T_1(X_1), T_2(X_2)}$ von $(T_1(X_1), T_2(X_2))^T$ in diesem Fall gleichzeitig auch die Überlebenscopula \widehat{C} von (X_1, X_2) .

3.2 Abhängigkeitsmaße und deren Schätzer

Copulae sind ein probates Mittel um Abhängigkeiten zwischen Zufallsvariablen zu modellieren. Nach Satz 3.1.15 sind Copulaeigenschaften invariant gegenüber streng monoton steigenden Transformationen der zugrundeliegenden Zufallsvariablen. In der Praxis wird die lineare Korrelation meistens als Maß für die Abhängigkeit benutzt. Da sie aber kein Copula-bezogenes Abhängigkeitsmaß ist, kann sie oft irreführend sein und sollte nicht das Maß der Wahl sein. Zuerst wird nun die lineare Korrelation definiert, danach werden einige ihrer Eigenschaften aufgeführt, und dann gehen wir zu Copula-bezogenen Abhängigkeitsmaßen über.

3.2.1 Korrelation

Definition 3.2.1 (Lineare Korrelation). Seien X und Y zwei Zufallsvariablen mit $\text{var}X, \text{var}Y < \infty$. Der lineare Korrelationskoeffizient von X und Y ist dann

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{var}X} \sqrt{\text{var}Y}} \in [-1, 1]. \quad (3.15)$$

Die lineare Korrelation ist ein Maß für lineare Abhängigkeit. Es gilt $|\rho(X, Y)| = 1$ genau dann, wenn $Y \stackrel{f.s.}{=} aX + b$ mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}$. Außerdem ist die lineare Korrelation invariant gegenüber streng monoton steigenden **linearen** Transformationen. Ihr großer Vorteil ist ihre Einfachheit. Ein Nachteil ist, dass nichtlineare Zusammenhänge, auch wenn sie sehr stark sind, im Allgemeinen nicht erfasst werden. Der für diese Arbeit entscheidende Nachteil der linearen Korrelation als Abhängigkeitsmaß wird in der Abbildung 3.1 verdeutlicht. Hier werden 1000 Realisierungen von 2-dimensionalen simulierten Zufallsvektoren gegeneinander geplottet. In der linken Abbildung handelt es sich um einen bivariat normalverteilten, in der rechten um einen bivariat t_4 -verteilten Zufallsvektor. In beiden Fällen ist der Koeffizient der linearen Korrelation zwischen den beiden Komponenten $\rho_{12} = 0.8$. Dennoch kann man unterschiedliche Abhängigkeitsstrukturen erkennen. Im linken Bild liegt im Vergleich zum rechten eine schwächere Abhängigkeit sowohl im äußersten oberen als auch im extremen unteren Tail vor (beachte verschiedene Größenordnungen der Achsen). Das heißt, dass die lineare Korrelation hier und auch in den meisten anderen Fällen keine Aussage über die Abhängigkeit im äußeren Bereich der Verteilung machen kann. Diese Abhängigkeit ist aber beim Beschreiben extremer Ereignisse von besonderem Interesse.

3.2.2 Kendall's Tau

Kendall's Tau mißt den Grad des monotonen Zusammenhangs zwischen zwei Zufallsvariablen, indem die Korrelation zwischen den Rängen von Stichproben der Zufallsvariablen gemessen wird.

Definition 3.2.2 (Kendall's Tau). Für den Zufallsvektor $(X, Y)^T$ ist Kendall's Tau definiert durch

$$\tau(X, Y) := P \left[(X - \tilde{X})(Y - \tilde{Y}) > 0 \right] - P \left[(X - \tilde{X})(Y - \tilde{Y}) < 0 \right], \quad (3.16)$$

wobei $(\tilde{X}, \tilde{Y})^T$ und $(X, Y)^T$ unabhängig und identisch verteilt sind.

Einfache Regeln sind:

$$\tau(X, Y) = 1 \Leftrightarrow X = T_+(Y), \quad (3.17)$$

wenn T_+ eine streng monoton steigende Transformation ist, und

$$\tau(X, Y) = -1 \Leftrightarrow X = T_-(Y), \quad (3.18)$$

wenn T_- streng monoton fällt.

Satz 3.2.3 (Nelsen [34], Seite 127). Sei $(X, Y)^T$ ein Vektor von stetigen Zufallsvariablen mit Copula C . Dann ist Kendall's Tau gegeben durch

$$\tau(X, Y) = 4 \int \int_{[0,1]^2} C(u, v) \, dC(u, v) - 1 \tag{3.19}$$

Beweis: siehe Nelsen [34] Seite 127.

Man beachte, dass dann für $U, V \sim U(0, 1)$ und $(U, V)^T \sim C$ gilt $\tau(X, Y) = 4E[C(U, V)] - 1$. Kendall's Tau ist also eine Eigenschaft der Copula des Zufallsvektors, und ist somit auch invariant gegenüber streng monoton steigenden Transformationen. Deshalb haben die Randverteilungen von X und Y keinen Einfluss auf τ .

3.2.3 Schätzer für Kendall's Tau

Seien $(X_i, Y_i), (X_j, Y_j)$ unabhängige Paare von Zufallsvektoren, und:

$$p_c := P[(X_j - X_i)(Y_j - Y_i) > 0] \quad p_d := P[(X_j - X_i)(Y_j - Y_i) < 0]$$

dann ist Kendall's Tau nach Gibbons [22] gegeben als:

$$\tau := p_c - p_d$$

Seien nun $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ n Beobachtungen von der bivariaten Verteilung von (X_i, Y_i) und

$$A_{ij} = \text{sgn}(X_j - X_i) \text{sgn}(Y_j - Y_i)$$

mit der üblichen Definition der sgn Funktion

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x > 0 \\ 0 & \text{wenn } x = 0 \\ -1 & \text{wenn } x < 0 \end{cases} \tag{3.20}$$

Dann nimmt A_{ij} die Werte a_{ij} an mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } (X_j - X_i)(Y_j - Y_i) > 0 \\ -1 & \text{wenn } (X_j - X_i)(Y_j - Y_i) < 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die marginale Wahrscheinlichkeitsfunktion dieser Variablen ist demzufolge:

$$f_{A_{ij}}(a_{ij}) = \begin{cases} p_c & \text{wenn } a_{ij} = 1 \\ p_d & \text{wenn } a_{ij} = -1 \\ 1 - p_c - p_d & \text{wenn } a_{ij} = 0 \end{cases}$$

Der Erwartungswert ist dann:

$$E(A_{ij}) = 1p_c + (-1)p_d = p_c - p_d = \tau$$

Da offensichtlich $a_{ij} = a_{ji}$ für $1 \leq i, j \leq n$ und $a_{ii} = 0$ für $1 \leq i \leq n$, muss man nur $\binom{n}{2}$ Mengen von Paaren betrachten. Ein erwartungstreuer und schwach konsistenter Schätzer

für τ , der unabhängig von der Art der bivariaten Verteilung ist (stetig oder diskret), ist somit

$$T = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \frac{A_{ij}}{\binom{n}{2}} = 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \frac{A_{ij}}{n(n-1)} \quad (3.21)$$

Beweis für schwache Konsistenz siehe Gibbons [22].

In der Abbildung 3.1 folgt eine Tabelle mit den Schätzwerten für die Koeffizienten von Kendall's Tau für 17 US-Indizes

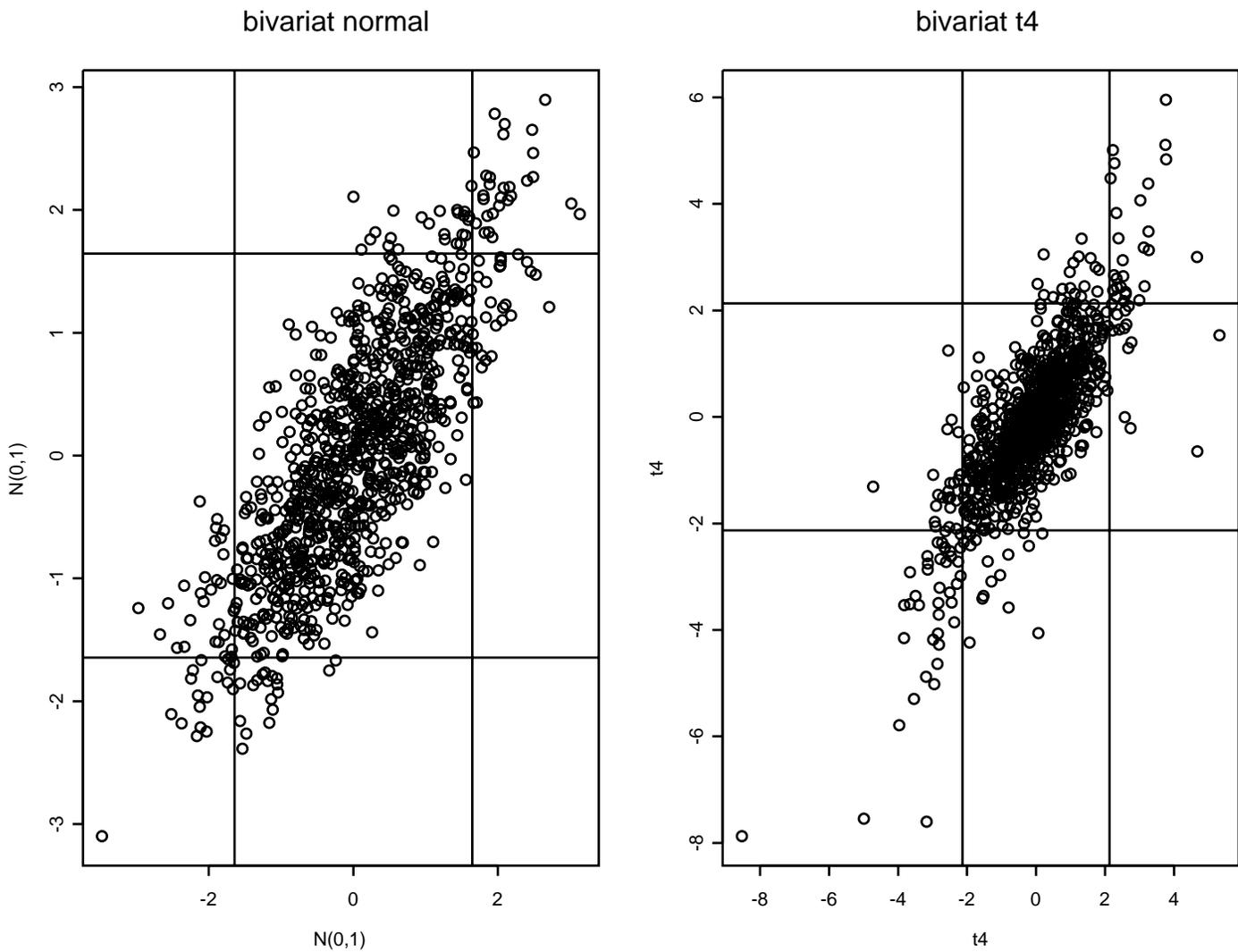


Abbildung 3.1: 1000 Simulierte Zufallszahlen von 2 Verteilungen mit gleicher Korrelation $\rho = 0.8$ aber unterschiedlichen Abhängigkeitsstrukturen.

Links: Bivariate Normalverteilung mit $\rho = 0.8$

Rechts: Bivariate t_4 -Verteilung mit $\rho = 0.8$

τ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
AUTMB	1	0.33	0.36	0.49	0.44	0.34	0.11	0.31	0.07	0.21	0.24	0.37	0.48	0.07	0.19	0.44	0.37
BANKS	0.33	1	0.48	0.32	0.33	0.41	0.15	0.38	0.31	0.28	0.51	0.27	0.33	0.02	0.13	0.3	0.5
MEDIA	0.36	0.48	1	0.4	0.32	0.52	0.05	0.51	0.21	0.33	0.35	0.38	0.41	-0.01	0.11	0.32	0.65
CNSBM	0.49	0.32	0.4	1	0.46	0.36	0.11	0.34	0.19	0.32	0.39	0.37	0.56	0.05	0.15	0.45	0.42
CHMCL	0.44	0.33	0.32	0.46	1	0.31	0.09	0.27	0.25	0.28	0.29	0.27	0.49	0.11	0.21	0.49	0.36
ELTNC	0.34	0.41	0.52	0.36	0.31	1	0.06	0.43	0.12	0.34	0.35	0.35	0.41	0	0.19	0.29	0.46
ELECT	0.11	0.15	0.05	0.11	0.09	0.06	1	0.07	0.28	0.08	0.23	0.07	0.03	0.03	0.14	0.07	0.11
LESUR	0.31	0.38	0.51	0.34	0.27	0.43	0.07	1	0.13	0.27	0.28	0.47	0.37	-0.08	0.1	0.25	0.44
FOODS	0.07	0.31	0.21	0.19	0.25	0.12	0.28	0.13	1	0.38	0.33	0.11	0.19	0.03	0.08	0.21	0.33
HLTHC	0.21	0.28	0.33	0.32	0.28	0.34	0.08	0.27	0.38	1	0.4	0.2	0.29	-0.06	0.1	0.27	0.34
INSUR	0.24	0.51	0.35	0.39	0.29	0.35	0.23	0.28	0.33	0.4	1	0.17	0.28	-0.05	0.19	0.24	0.36
HOTEL	0.37	0.27	0.38	0.37	0.27	0.35	0.07	0.47	0.11	0.2	0.17	1	0.38	-0.03	0.03	0.31	0.37
ENGEN	0.48	0.33	0.41	0.56	0.49	0.41	0.03	0.37	0.19	0.29	0.28	0.38	1	0.11	0.2	0.48	0.44
MNING	0.07	0.02	-0.01	0.05	0.11	0	0.03	-0.08	0.03	-0.06	-0.05	-0.03	0.11	1	0.13	0.11	0.04
OILGS	0.19	0.13	0.11	0.15	0.21	0.19	0.14	0.1	0.08	0.1	0.19	0.03	0.2	0.13	1	0.19	0.09
FSTPA	0.44	0.3	0.32	0.45	0.49	0.29	0.07	0.25	0.21	0.27	0.24	0.31	0.48	0.11	0.19	1	0.35
PUBLS	0.37	0.5	0.65	0.42	0.36	0.46	0.11	0.44	0.33	0.34	0.36	0.37	0.44	0.04	0.09	0.35	1

Tabelle 3.1: Matrix der Koeffizienten von Kendall's Tau zwischen den ersten 17 US Indizes

3.2.4 Tail Dependence

Das Konzept der Tail-Dependence bezieht sich auf die Stärke der Abhängigkeit im oberen rechten Quadranten bzw. unteren linken Quadranten der bivariaten Verteilung. Daher ist es relevant beim Untersuchen von Abhängigkeiten von extremen Ereignissen.

Nun bezeichne F_i^{\leftarrow} die verallgemeinerte Inverse der Randverteilungsfunktion F_i , die wie in (2.2) definiert ist..

Definition 3.2.4 (Tail Dependence). Seien X, Y zwei stetig verteilte Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktionen F_1 und F_2 . Wenn

$$\lambda_U := \lim_{u \nearrow 1} P(X > F_1^{\leftarrow}(u) | Y > F_2^{\leftarrow}(u))$$

existiert und $\lambda_U > 0$ oder $\lambda_U = 0$, heißen X, Y asymptotisch abhängig bzw. unabhängig im oberen Tail. Wenn

$$\lambda_L := \lim_{u \searrow 0} P(X < F_1^{\leftarrow}(u) | Y < F_2^{\leftarrow}(u))$$

existiert und $\lambda_L > 0$ oder $\lambda_L = 0$, heißen X, Y asymptotisch abhängig bzw. unabhängig im unteren Tail. λ_U, λ_L heißen Koeffizienten der upper bzw. lower Tail Dependence.

Wegen

$$P(X > F_1^{\leftarrow}(u) | Y > F_2^{\leftarrow}(u)) = \frac{1 - P(X \leq F_1^{\leftarrow}(u)) - P(Y \leq F_2^{\leftarrow}(u)) + P(X \leq F_1^{\leftarrow}(u), Y \leq F_2^{\leftarrow}(u))}{1 - P(Y \leq F_2^{\leftarrow}(u))}$$

gibt es eine äquivalente Darstellung der Tail Dependence:

Definition 3.2.5. Wenn für die bivariate Copula C

$$\lambda_U = \lim_{u \nearrow 1} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u}$$

existiert, so hat C upper Tail-Dependence für $\lambda_U \in (0, 1]$ und upper Tail-Independence für $\lambda_U = 0$. Wenn für die Copula C

$$\lambda_L = \lim_{u \searrow 0} C(u, u)/u$$

existiert, dann hat C lower Tail-Dependence für $\lambda_L \in (0, 1]$ bzw. lower Tail-Independence für $\lambda_L = 0$.

Bemerkung 3.2.6. Daraus folgt, dass die Tail Dependence allein durch die Copula bestimmt ist, und nicht von den Randverteilungen abhängt. Daraus folgt weiterhin, dass sich die Eigenschaft der Invarianz bezüglich streng monoton wachsender Transformationen von der Copula auf die Tail Dependence überträgt.

Bemerkung 3.2.7. Die Überlebenscopula \widehat{C} von zwei Zufallsvariablen mit Copula C ist nach Definition 3.1.12

$$\widehat{C}(u, v) = u + v - 1 + C(1 - u, 1 - v). \quad (3.22)$$

Also gilt

$$\lambda_U^C = \lim_{u \nearrow 1} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u} = \lim_{u \nearrow 1} \frac{\widehat{C}(1 - u, 1 - u)}{1 - u} = \lim_{u \searrow 0} \frac{\widehat{C}(u, u)}{u} = \lambda_L^{\widehat{C}}. \quad (3.23)$$

Somit ist also der Koeffizient der upper Tail-Dependence von C gleich dem Koeffizienten der lower Tail-Dependence von \widehat{C} , und die umgekehrte Richtung gilt ebenfalls.

Im multivariaten Fall gilt: $(X_1, \dots, X_m)^T$ habe die Copula C

$$P(X_1 \leq x_1, \dots, X_m \leq x_m) = F(x_1, \dots, x_m) = C(F_1(x_1), \dots, F_m(x_m)), \quad (3.24)$$

und die Überlebenscopula \widehat{C}

$$P(X_1 > x_1, \dots, X_m > x_m) = \overline{F}(x_1, \dots, x_m) = \widehat{C}(\overline{F}_1(x_1), \dots, \overline{F}_m(x_m)).$$

Da für die Berechnung der Tail-Dependence Koeffizienten die bivariaten Ränder der Copula verwendet werden und folgende Beziehung gilt

$$\widehat{C}(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1, u_j, 1, \dots, 1) = u_i + u_j - 1 + C(1, \dots, 1, 1 - u_i, 1, \dots, 1, 1 - u_j, 1, \dots, 1), \quad (3.25)$$

gilt für die upper Tail-Dependence Indizes $\lambda_{U,ij}^C$ von C und die lower Tail-Dependence Indizes $\lambda_{L,ij}^{\widehat{C}}$ von \widehat{C} Gleichheit:

$$\lambda_{U,ij}^C = \lambda_{L,ij}^{\widehat{C}} \quad \forall i, j. \quad (3.26)$$

Aus Bemerkung 3.1.13 wissen wir, dass \widehat{C} eine Copula ist. Also kann man die gemeinsame Überlebensfunktion \overline{F} für große Quantile mit einer Copula \widehat{C} darstellen, für die 3.26 erfüllt ist.

Alternative Berechnung von λ_U

Aus

$$\begin{aligned} P[V > u | U > u] &= \frac{P[U > u, V > u]}{P[U > u]} \\ &= \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u} = 2 - \frac{1 - C(u, u)}{1 - u} \\ &\sim 2 - \frac{\ln C(u, u)}{\ln u}, \quad \text{für } u \nearrow 1. \end{aligned}$$

folgt, dass man λ_U auch als Grenzwert einer asymptotisch äquivalenten Funktion darstellen kann. Dabei bedeutet $a(x) \sim b(x)$ für $x \rightarrow x_0$, dass $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a(x)}{b(x)} = 1$. Sei $\lambda_U(u)$ definiert als

$$\lambda_U(u) := 2 - \frac{\ln P[U < u, V < u]}{\ln P[U < u]}, \quad u \in [0, 1], \quad (3.27)$$

wobei $(X, Y)^T$ zu $(U, V)^T$ transformiert wurde. Folglich gilt

$$\lambda_U = \lim_{u \nearrow 1} \lambda_U(u). \quad (3.28)$$

Für unabhängige Vektoren gilt $\lambda_U(u) = 0$

Asymptotische Unabhängigkeit bedeutet aber nicht vollständige Unabhängigkeit. Die bivariate Normalverteilung hat z.B. für alle Korrelationen $\rho \neq 0$ die upper Tail Dependence $\lambda_U = 0$, obwohl in den endlichen Tailbereichen durchaus Abhängigkeiten zu erkennen sind. Dies kann man in dem linken Bild der Abbildung 3.1 sehen. Dort sind die Komponenten einer bivariaten Normalverteilung mit $\rho = 0.8$ gegeneinander geplottet. Durch die horizontalen und vertikalen Linien sind die eindimensionalen 0.05 und 0.95-Quantile eingezeichnet. Obwohl einige Realisierungen in die dadurch entstehenden rechten oberen und linken unteren Quadranten fallen, und somit eine Abhängigkeit existiert, gilt im Fall der bivariaten Normalverteilung $\lambda_U = 0$. Deswegen wird nun ein weiteres Abhängigkeitsmaß $\bar{\lambda}_U$ eingeführt, das dieser Nachteile von λ_U und λ_L entbehrt und ein Maß für den Grad der asymptotischen Abhängigkeit ist.

Abhängigkeitsmaß $\bar{\lambda}_U$

In der Klasse der asymptotisch unabhängigen Verteilungen gilt $\lambda_U = 0$. Daher enthält das Maß λ_U hier keine Information über den Grad der Abhängigkeit kurz vor dem rechten Endpunkt der Verteilung. Extreme Quantile werden immer für $u < 1$ geschätzt, dort kann trotz $\lambda_U = 0$ dennoch nahe 1 Abhängigkeit bestehen. Um diese Abhängigkeit zu messen wird ein neues Abhängigkeitsmaß $\bar{\lambda}_U$ eingeführt:

$$\bar{\lambda}_U(u) := \frac{2 \ln P\{U > u\}}{\ln P\{U > u, V > u\}} - 1 = \frac{2 \ln(1 - u)}{\ln \bar{C}(u, u)} - 1, \quad u \in [0, 1]$$

mit $U, V \sim U[0,1]$ und $\bar{\lambda}_U(u) \in (-1,1]$ für alle $u \in [0,1]$. $\bar{\lambda}_U$ ist dann der Grenzwert:

$$\bar{\lambda}_U := \lim_{u \nearrow 1} \bar{\lambda}_U(u) \in [-1, 1].$$

Im Gegensatz zu asymptotisch abhängigen Zufallsvariablen bei denen immer $\bar{\lambda}_U = 1$ gilt, zeigt sich die Nützlichkeit dieses Maßes bei asymptotisch unabhängigen Variablen, bei denen $\bar{\lambda}_U$ mit der Stärke der Abhängigkeit wächst. Für unabhängige Variablen gilt $\bar{\lambda}_U(u) = 0 \quad \forall u \in [0, 1]$, also auch $\bar{\lambda}_U = 0$. Wenn X, Y bivariat normalverteilt sind mit Korrelationskoeffizienten ρ , dann ist $\bar{\lambda}_U = \rho$, $\bar{\lambda}_U(u)$ konvergiert also gegen ρ . $\bar{\lambda}_U$ ist ein Maß für die Abhängigkeit kurz vor $u = 1$

3.2.5 Schätzer für die Tail-Dependence

Der nun folgende Schätzer stammt aus der Arbeit von Kuhn [29] und geht auf Poon, Rockinger und Tawn [35] zurück.

Da die Tail-Dependence eine Copula-Eigenschaft ist, ist sie unabhängig von den Randverteilungen der betrachteten Zufallsvariablen (siehe Bemerkung 3.2.6).

Zur Konstruktion des Schätzers werden zuerst die beiden Zufallsvariablen, für die die Tail Dependence geschätzt werden soll, auf Standard-Fréchet Zufallsvariablen transformiert. Danach kann gezeigt werden, dass die gemeinsame Verteilungsfunktion der beiden Zufallsvariablen Fréchet-Tails hat. Hierauf kann man dann mit dem Hillschätzer (siehe Definition B.5.4) einen Schätzer für die Tail Dependence bestimmen.

Aus der univariaten Extremwerttheorie folgt, für eine Zufallsvariable Z mit Fréchet-Tail ($\zeta > 0$), dass der Tail der Zufallsvariable über einer hohen Schwelle u approximiert werden kann durch

$$P\{Z > z\} = \mathcal{L}(z)z^{-1/\zeta} \quad \text{für } z > u \quad \text{und } \mathcal{L} \in \mathcal{R}_0 \quad (3.29)$$

Aus Mangel an Informationen wird die langsam variierende Funktion \mathcal{L} als konstant für alle $z > u$ betrachtet, $\mathcal{L} = c$.

Sei $S = -1/\ln(F_X(X))$, wobei F_X die Verteilungsfunktion der Zufallsvariable X ist. Dann gilt

$$P\left\{\frac{-1}{\ln F_X(X)} > x\right\} = P\{F_X(X) > \exp\{-1/x\}\} = 1 - \exp\{-1/x\}$$

also hat S die Einheits Fréchetverteilung Φ_1 . Nun wird der Zufallsvektor (X, Y) in den Zufallsvektor (S, T) mit Einheits-Fréchet Randverteilungsfunktionen transformiert:

$$S = -1/\ln(F_X(X)) \quad \text{und} \quad T = -1/\ln(F_Y(Y)),$$

wobei $F_X(X)$ bzw. $F_Y(Y)$ die Randverteilungsfunktionen der Zufallsvariablen X und Y sind. Also gilt:

$$P\{S > s\} = P\{T > s\} \sim s^{-1} \quad \text{für } s \rightarrow \infty.$$

Zusätzlich hat (S, T) dieselbe Abhängigkeitsstruktur wie (X, Y) , da $-1/\ln F(\cdot)$ streng monoton steigend ist. Nun sucht man nach einem Schätzer für $\bar{\lambda}_U$ von S und T :

$$\bar{\lambda}_U = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{2 \ln P\{S > s\}}{\ln P\{S > s, T > s\}} - 1$$

In Bruun und Tawn [7] wird gezeigt, dass unter schwachen Bedingungen

$$P\{S > s, T > s\} = \mathcal{L}(s)s^{-1/\eta}, \quad \text{für } s \rightarrow \infty,$$

gilt, wobei $0 < \eta \leq 1$ konstant ist und $\mathcal{L} \in \mathcal{R}_0$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\bar{\lambda}_U &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{2 \ln P\{S > s\}}{\ln P\{S > s, T > s\}} - 1 \\
&= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{-2 \ln s}{\ln \mathcal{L}(s) - 1/\eta \ln s} - 1 \\
&= \lim_{s \rightarrow \infty} 2\eta \frac{\ln s}{\ln s - \eta \ln \mathcal{L}(s)} - 1 \\
&= 2\eta - 1
\end{aligned}$$

Wenn $\bar{\lambda}_U = 1$ (also $\eta = 1$), dann ist

$$\lambda_U = \lim_{s \rightarrow \infty} P\{T > s | S > s\} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{P\{S > s, T > s\}}{P\{S > s\}} = \lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{L}(s)$$

Man kann also Schätzer für η und $\lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{L}(s)$ berechnen und daraus Schätzer für $\bar{\lambda}_U$ und λ_U entwickeln.

Sei nun $Z = \min\{S, T\}$, dann gilt

$$P\{Z > z\} = P\{\min(S, T) > z\} = P\{S > z, T > z\} \quad (3.30)$$

$$= \mathcal{L}(z)z^{-1/\eta} = cz^{-1/\eta}, \quad \text{für } z > u, \quad (3.31)$$

für eine hohe Schwelle u . Abermals wird angenommen, dass sich die langsam variierende Funktion $\mathcal{L} \in \mathcal{R}_0$ asymptotisch konstant verhält. Aus 3.31 und der univariaten Tail Darstellung 3.29 folgt, η ist der Tailindex der univariaten Zufallsvariable Z und kann mit dem Hillsschätzer (siehe Definition B.5.4) eingeschränkt auf das Intervall $(0,1]$ geschätzt werden.

$$\hat{\eta} = \frac{1}{n_u} \sum_{j=1}^{n_u} \ln z_{(j)}. \quad (3.32)$$

Dabei sind $z_{(n_u)} < \dots < z_{(1)}$ die n_u Beobachtungen von $Z > u$

Der zugehörige Skalierungsparameter c wird ebenfalls mit dem Hillsschätzer geschätzt.

$$\hat{c} = \frac{n_u}{n} u^{1/\hat{\eta}} \quad (3.33)$$

Unter der Annahme von unabhängigen Beobachtungen von Z ergibt sich der Schätzer von $\bar{\lambda}_U$ mit

$$\hat{\bar{\lambda}}_U = 2/n_u \left(\sum_{j=1}^{n_u} \ln \frac{z_{(j)}}{u} \right) - 1 \quad (3.34)$$

$$\text{var}(\hat{\bar{\lambda}}_U) = \left(\hat{\bar{\lambda}}_U + 1 \right)^2 / n_u. \quad (3.35)$$

wobei $z_{n_u} < z_{n_u-1} < \dots < z_1$ wieder die n_u Beobachtungen der Zufallsvariable $Z > u$ sind.

Liegt nun 1 nicht im Konfidenzintervall, z.B. $\left[\widehat{\bar{\lambda}}_U - 1.96 \sqrt{\text{var}(\widehat{\bar{\lambda}}_U)}, \widehat{\bar{\lambda}}_U + 1.96 \sqrt{\text{var}(\widehat{\bar{\lambda}}_U)} \right]$ (siehe asymptotische Normalität des Hillschätzers in Satz B.5.5), so kann die Hypothese $\bar{\lambda}_U = 1$ verworfen werden und S und T werden als asymptotisch unabhängig angesehen, also $\lambda_U = 0$. Liegt dagegen 1 im Konfidenzintervall, kann also die Hypothese $\bar{\lambda}_U = 1$ nicht verworfen werden, dann setzt man $\bar{\lambda}_U = 1 = \eta$ und als Schätzer von λ_U ergibt sich mit (3.33):

$$\widehat{\lambda}_U = un_u/n, \quad (3.36)$$

$$\text{var}(\widehat{\lambda}_U) = u^2 n_u (n - n_u) / n^3. \quad (3.37)$$

Desweiteren gilt

$$\begin{aligned} \lambda_L(X, Y) &= \lim_{u \searrow 0} P\{Y < F_Y^{\leftarrow}(u) | X < F_X^{\leftarrow}(u)\} \\ &= \lim_{u \searrow 0} P\{-Y > F_{-Y}^{\leftarrow}(1-u) | -X > F_{-X}^{\leftarrow}(1-u)\} \\ &= \lambda_U(-X, -Y) \end{aligned}$$

und somit können für die Schätzung der lower Tail Dependence λ_L die Schätzer $\widehat{\bar{\lambda}}_U$ bzw. $\widehat{\lambda}_U$ des Zufallsvektors $(-X, -Y)$ benutzt werden.

Um $\bar{\lambda}_U$ in der Praxis zu schätzen, kann man zum Beispiel den Hill-Plot von $\widehat{\eta} = \frac{\widehat{\bar{\lambda}}_U + 1}{2}$ betrachten und dann aufgrund der Graphik entscheiden, ob die Hypothese $\eta = 1$ (was gleichbedeutend mit $\bar{\lambda}_U = 1$ bzw. $\bar{\lambda}_L = 1$ ist) verworfen werden kann oder nicht. In der Abbildung 3.8 wird dieses Verfahren auf die Log>Returns einiger US-Indizes (genauer gesagt, wird $\bar{\lambda}_U$ zwischen AUTMBUS und den darauf folgenden 16 US-Indizes geschätzt) angewandt. Um die Entscheidung für oder gegen die Hypothese zu untermauern kann man zum Beispiel noch die ML-Plots von $\widehat{\eta}$ betrachten und anhand dieser Graphik weitere Erkenntnisse erlangen. Dieses Vorgehen wird in Abbildung 3.9 auf die Log>Returns derselben US-Indizes angewandt. Wenn man eine Entscheidung in Bezug auf die Hypothesen $\bar{\lambda}_{U,ij}$ getroffen hat, kann man dann noch in den Fällen in denen die Hypothese nicht verworfen werden konnte den Schätzer für λ_U benutzen. Dieser steht allerdings nicht in EVIS [32] zur Verfügung und wird hier für verschiedene Schwellen u mittels (3.36) berechnet. Da der vorliegende Datensatz aus den Log>Returns von 92 Equity-Indizes besteht, müßten also zur Schätzung von allen $\bar{\lambda}_{U,ij}$ $92 \times 91/2 = 4186$ Hill-Plots und eventuell nochmal so viele ML-Plots begutachtet werden. Eine durchaus anspruchsvolle Aufgabe. Da außerdem eine Entscheidung ausschließlich durch Betrachten von ein oder zwei Plots in manchen Fällen ziemlich ungenau sein kann wurde zum Schätzen der Parameter $\bar{\lambda}_{U,ij}$ in dieser Arbeit ein Automatismus verwendet. Dazu wurde für jedes Paar von Equity-Indizes die obere Konfidenzgrenze upb vom Schätzer $\widehat{\bar{\lambda}}_U$ mittels (3.35) und $upb = \widehat{\bar{\lambda}}_U + 1.96(\text{var}\widehat{\bar{\lambda}}_U)^{1/2}$ für mehrere Schwellen u berechnet. Dabei handelte es sich um Schwellen u die so hoch waren, dass nur 7-13% der Realisierungen der Zufallsvariable Z darüber lagen. Aus den verschiedenen Werten für upb wurde dann ein Mittelwert berechnet. In dem Fall, dass dieser Mittelwert unter Eins lag, wurde dann die Hypothese $\bar{\lambda}_U = 1$ für dieses Paar von Equity-Indizes verworfen. In den anderen Fällen wurde ähnlich wie für $\bar{\lambda}_U$ ein Schleife

gestartet, die für jedes Paar von Indizes, für die die Hypothese nicht verworfen wurde, einen Schätzer für λ_U berechnet. Dabei wurde nach (3.36) der Schätzer $(\hat{\lambda}_U)_N$, der von der Anzahl der Überschreitungen $N = n_U$ der Zufallsvariable Z von der Schwelle u abhängt, berechnet. Dann wurde wieder ein Mittelwert über diese Schätzer gebildet, wobei über die $(\hat{\lambda}_U)_N$ gemittelt wurde, deren Anzahl N wieder zwischen 7 und 13% lagen:

$$\hat{\lambda}_U = \frac{1}{\text{card}\{N : 0.07n < N < 0.13n\}} \sum_{0.07n < N < 0.13n} (\hat{\lambda}_U)_N. \quad (3.38)$$

In den Abbildungen 3.2 bis 3.4 werden nun zunächst die Log>Returns von einigen Equity-Indizes gegeneinander geplottet. Dabei zeigt das Bild 3.2 die Log>Returns vom Index BANKSUS gegen die Log>Returns der restlichen Bankenindizes. In Abbildung 3.3 sieht man dann die Log>Returns vom Index AUTOSBD gegen einige andere deutsche Indizes. Dasselbe findet man in Abbildung 3.4 anstelle von AUTOSBD mit BANKSBD. Die Linie in den Plots entspricht der Regressionsgeraden. Bei den Bankenindizes vermutet man anhand dieser Bilder eine Tailabhängigkeit, die bei dem Paar BANKSUS und BANKSUK besonders stark zu sein scheint. Diese Vermutung stützt sich darauf, dass die Ausreißer der Log>Returns des einen Index oft mit denen des anderen zusammenfallen. Auch die Plots gegen AUTOSBD lassen die Vermutung der Tailabhängigkeit zu. Hier ist zum Beispiel das Paar ENGENBD und AUTOSBD sehr auffällig. Um diesen Verdacht noch zu erhärten werden in den Abbildungen 3.5 bis 3.7 anstelle der Log>Returns die Ränge der Log>Returns derselben Indizes gegeneinander geplottet. Wenn man diese Diagramme genau betrachtet, erkennt man in der Nähe der Winkelhalbierenden, insbesondere unten links und oben rechts eine deutliche Häufung von Punkten. Ein Beispiel in dem man diese Gestalt besonders gut erkennen kann, ist das Bild des Paares BANKSBD und INSURBD. Aber auch bei den anderen Paaren von Indizes ist dieses Aussehen sichtbar. Der Schluss den man daraus zieht, ist, dass ein positiver Zusammenhang zwischen den extremen Werten der Equity-Indizes besteht: hohe Werte des Log>Returns eines Index gehen mit hohen Werten des Log>Returns des anderen Index einher; und für niedrige Werte gilt dasselbe. In den Abbildungen 3.8 und 3.9 sieht man wie bereits oben erwähnt die Hill- und ML-Plots für den Schätzer $\hat{\eta}$, der über die Beziehung $\hat{\eta} = \frac{\hat{\lambda}_U+1}{2}$ die Stärke der Abhängigkeit zwischen zwei Log>Returns schätzt. In diesen Bildern wird η für die Log>Returns zwischen AUTOMBUS und den folgenden 16 US-Indizes geschätzt. In der Abbildung 3.10 folgt dann der Schätzer für λ_U . Obwohl durch die vorangegangenen Diagramme bereits $\hat{\lambda}_U$ zwischen MNINGUS und AUTOMBUS gleich null festgesetzt wurde sieht man hier noch den Plot für $\hat{\lambda}_U$ zwischen diesen beiden. In der Tabelle 3.2 kann man die gewonnenen Schätzwerte $\hat{\lambda}_U$ zwischen Log>Returns von 17 US-Indizes sehen. In der ersten Spalte findet man Ergebnisse, die man anhand der vorangegangenen Plots gut nachvollziehen kann. Analog dazu findet man in den Abbildungen 3.11 und 3.12 die Hill- und ML-schätzer für $\eta = \frac{\bar{\lambda}_L+1}{2}$ und in der Abbildung 3.13 den Schätzer der lower Tail-Dependence für die gleichen US-Indizes. Wiederum sind auch die $\hat{\lambda}_{L,ij}$ geplottet, deren Wert schon durch die vorhergehenden Überlegungen als Null feststand. Abschließend sind auch wieder die geschätzten lower Tail-Dependence Parameter für die besagten 17 US-Indizes in der Tabelle 3.3 zusammengefasst.

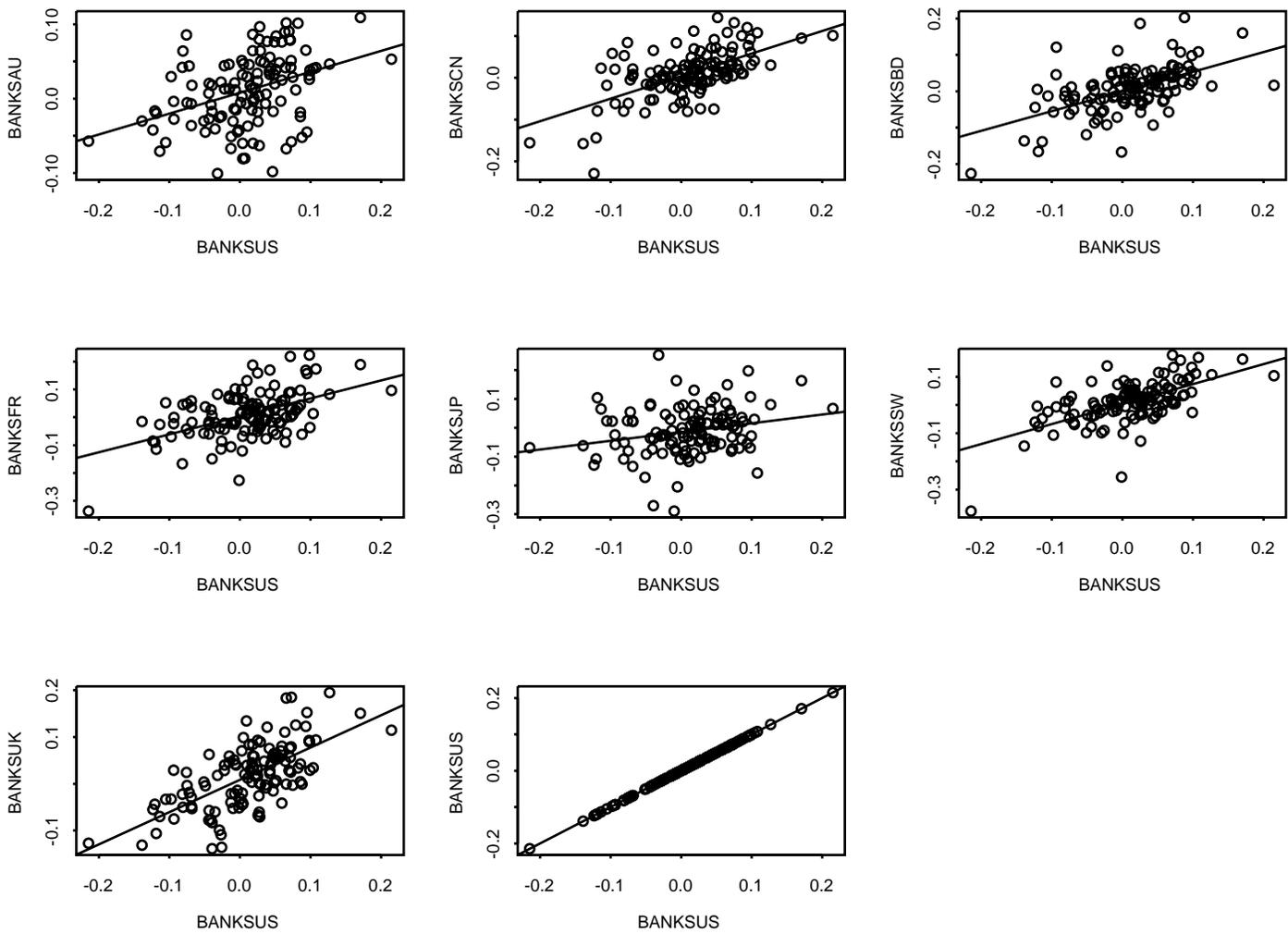


Abbildung 3.2: Plots der Log>Returns von BANKSUS gegen die Log>Returns der anderen Bankenindizes. Die Linie ist die Regressionsgerade.

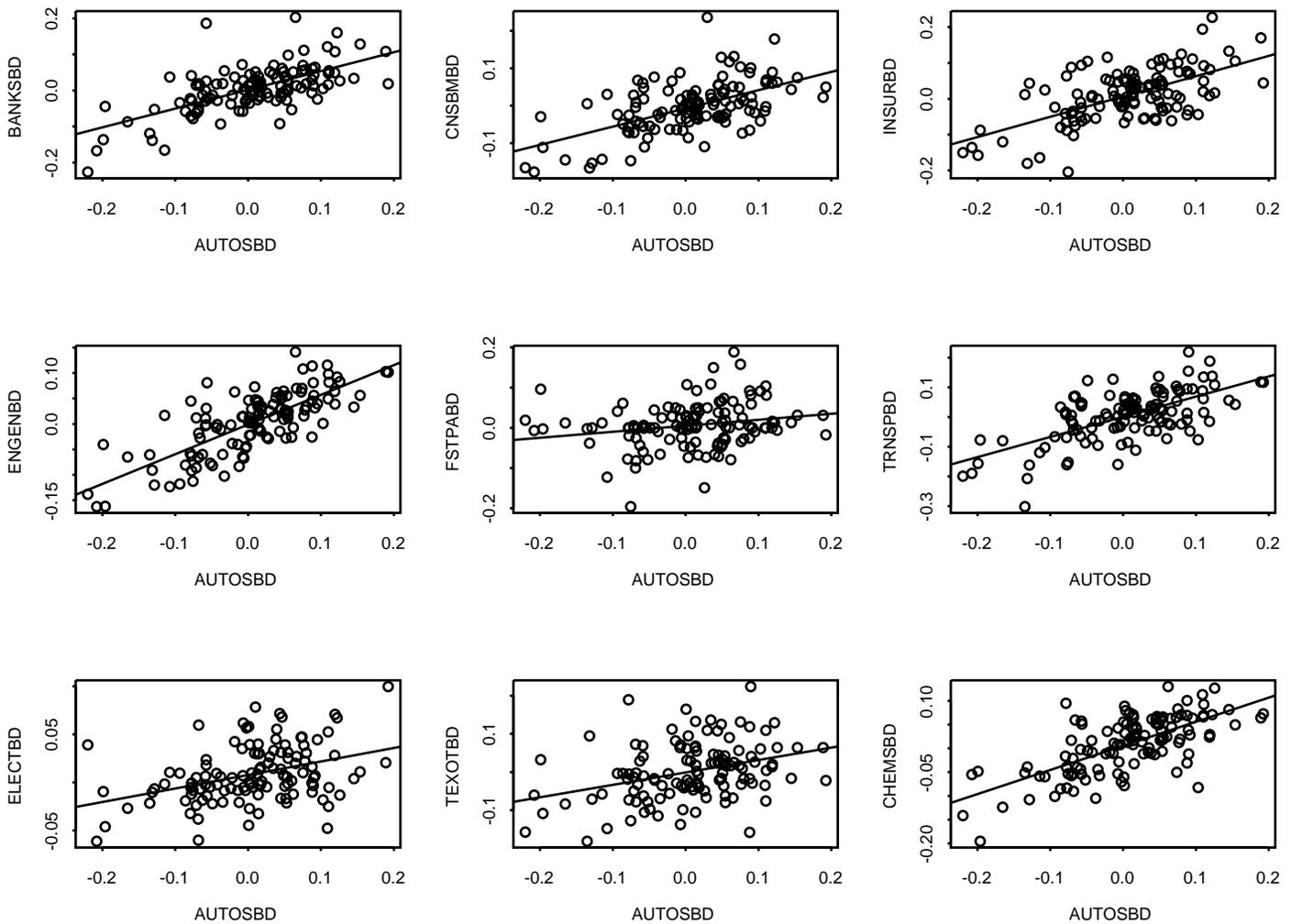


Abbildung 3.3: Plots der Log>Returns von AUTOSBD gegen die Log>Returns der anderen deutschen Indizes. Die Linie ist die Regressionsgerade.

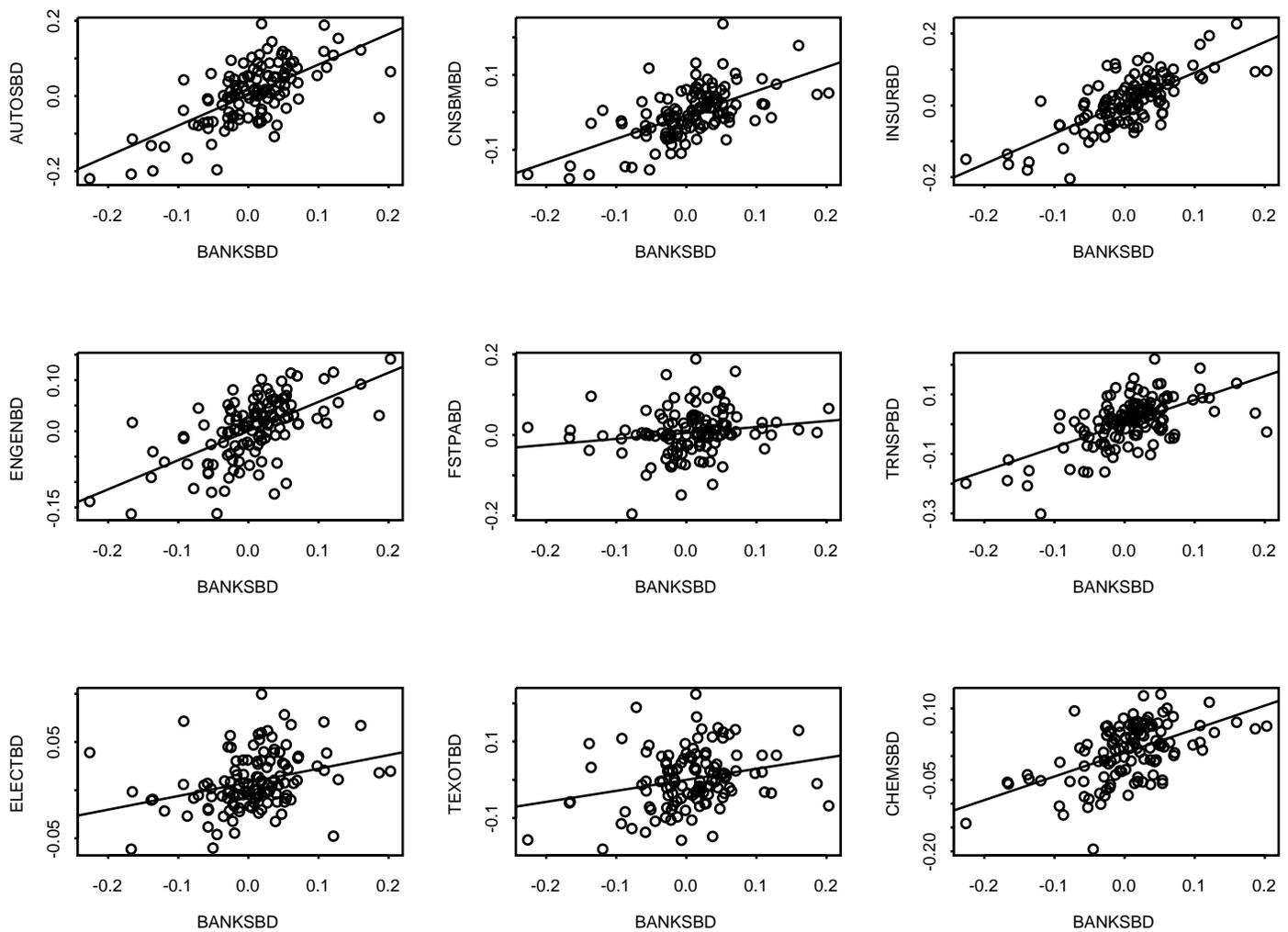


Abbildung 3.4: Plots der Log>Returns von BANKSBD gegen die Log>Returns der anderen deutschen Indizes. Die Linie ist die Regressionsgerade.

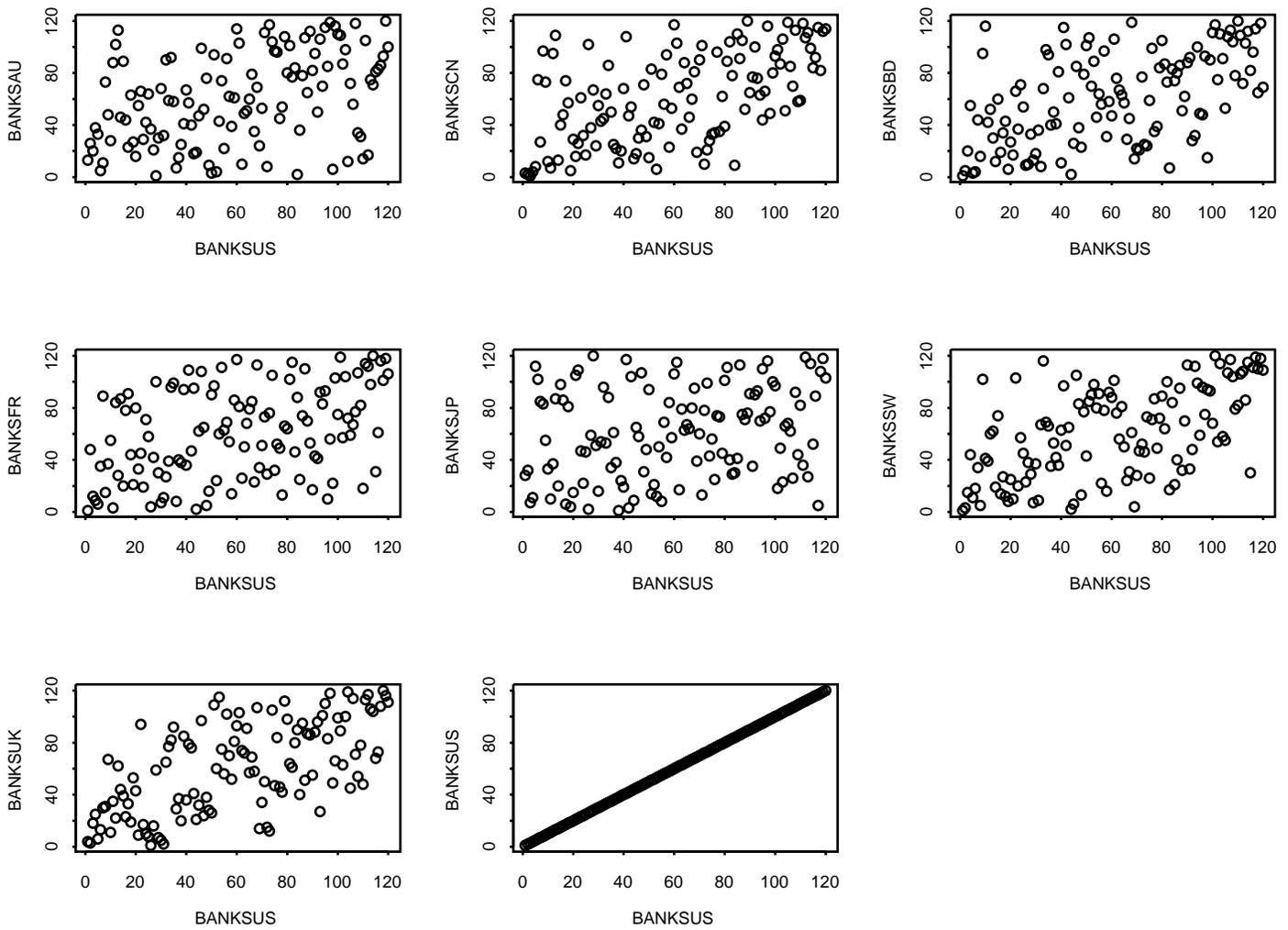


Abbildung 3.5: Plots der Ränge der Log>Returns von BANKSUS gegen die Ränge der Log>Returns der anderen Bankenindizes

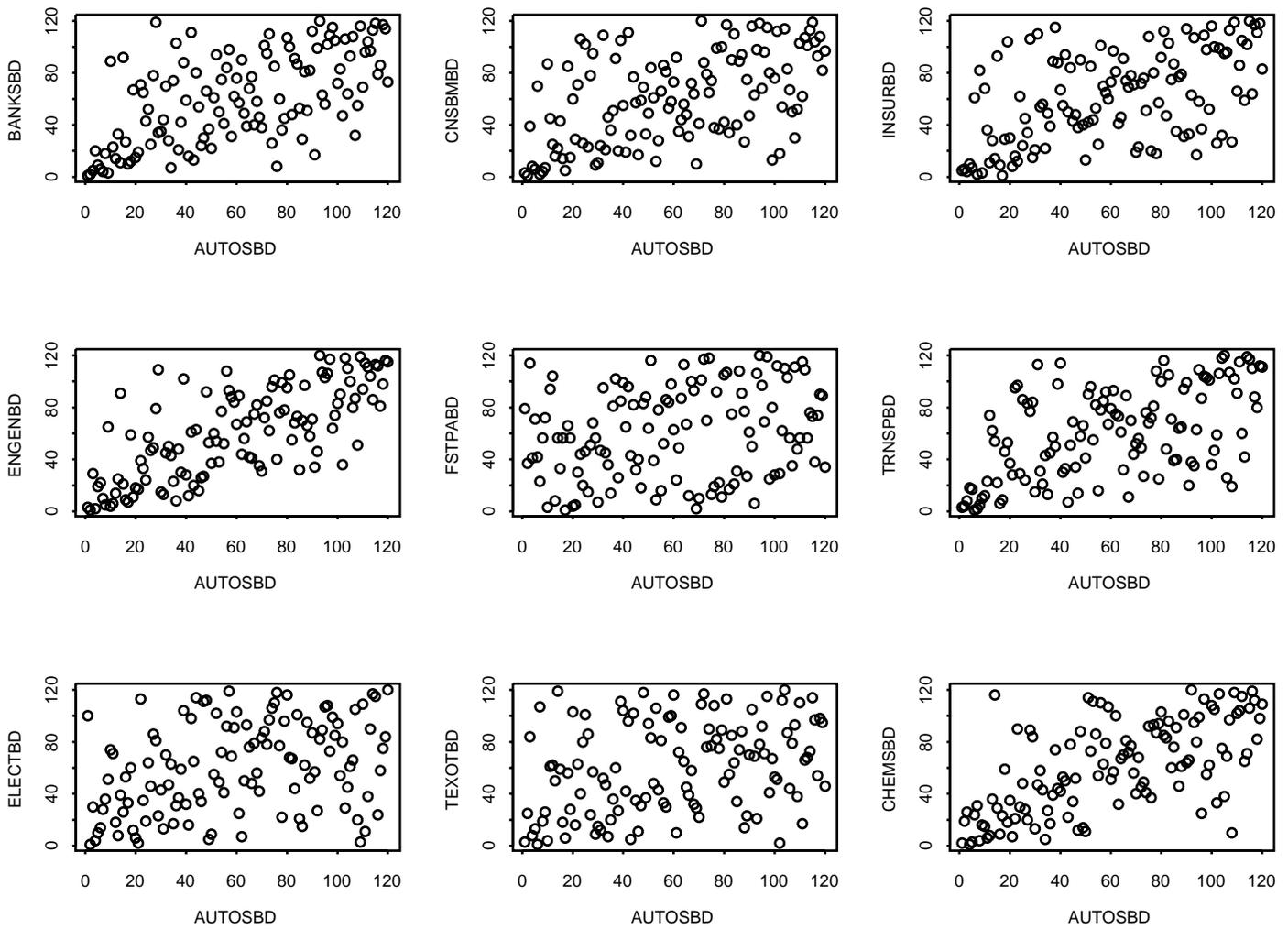


Abbildung 3.6: Plots der Ränge der Log>Returns von AUTOSBD gegen die Ränge der Log>Returns der anderen deutschen Indizes

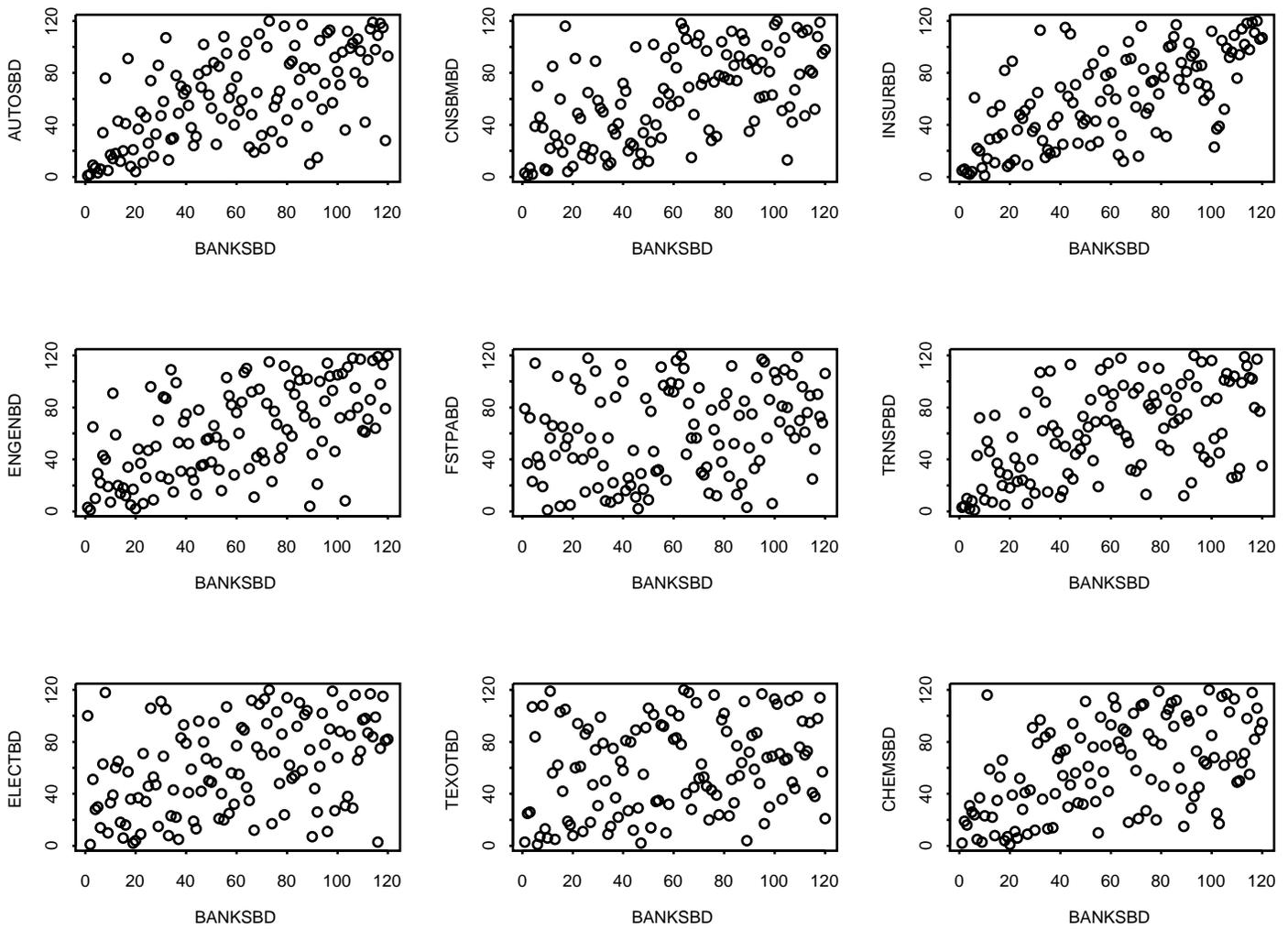


Abbildung 3.7: Plots der Ränge der Log>Returns von BANKSBD gegen die Ränge der Log>Returns der anderen deutschen Indizes

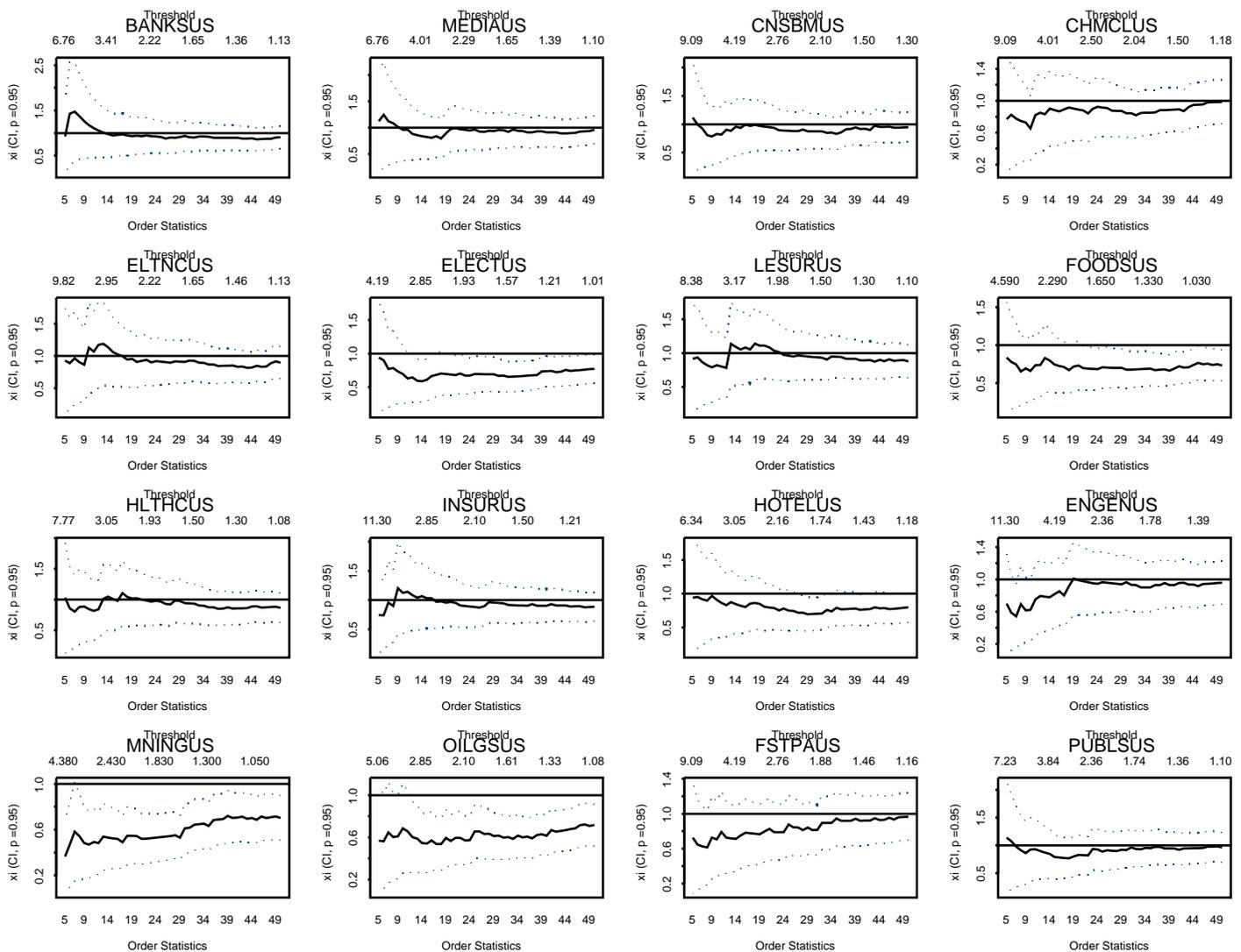


Abbildung 3.8: Hill-Schätzer für $\eta = (\bar{\lambda}_U + 1)/2$ zwischen den Log>Returns von AUTOM-BUS und den Log>Returns der 16 folgenden US-Indizes

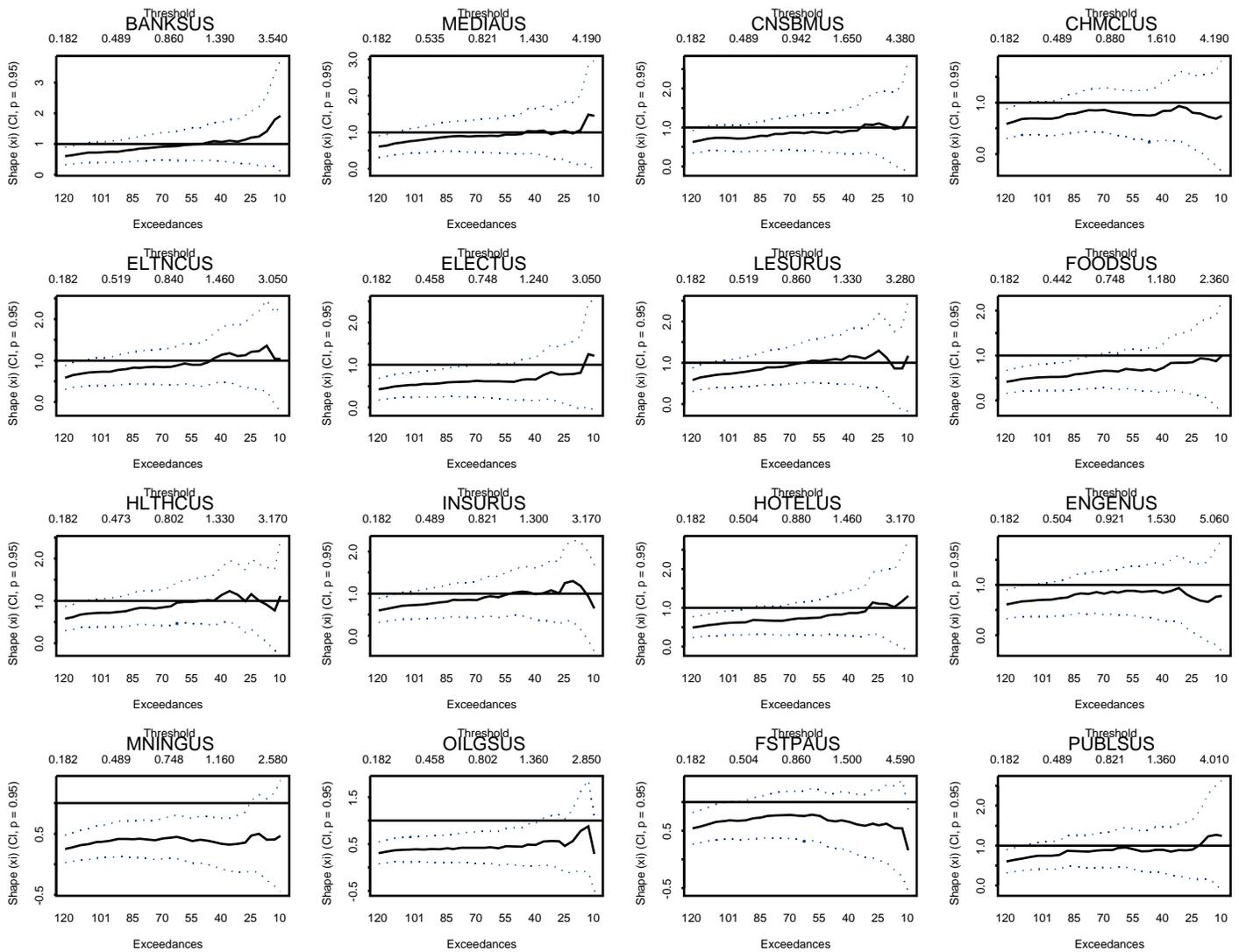


Abbildung 3.9: ML-Schätzer für $\eta = (\bar{\lambda}_U + 1)/2$ zwischen den Log>Returns von AUTOM-BUS und den Log>Returns der 16 folgenden US-Indizes

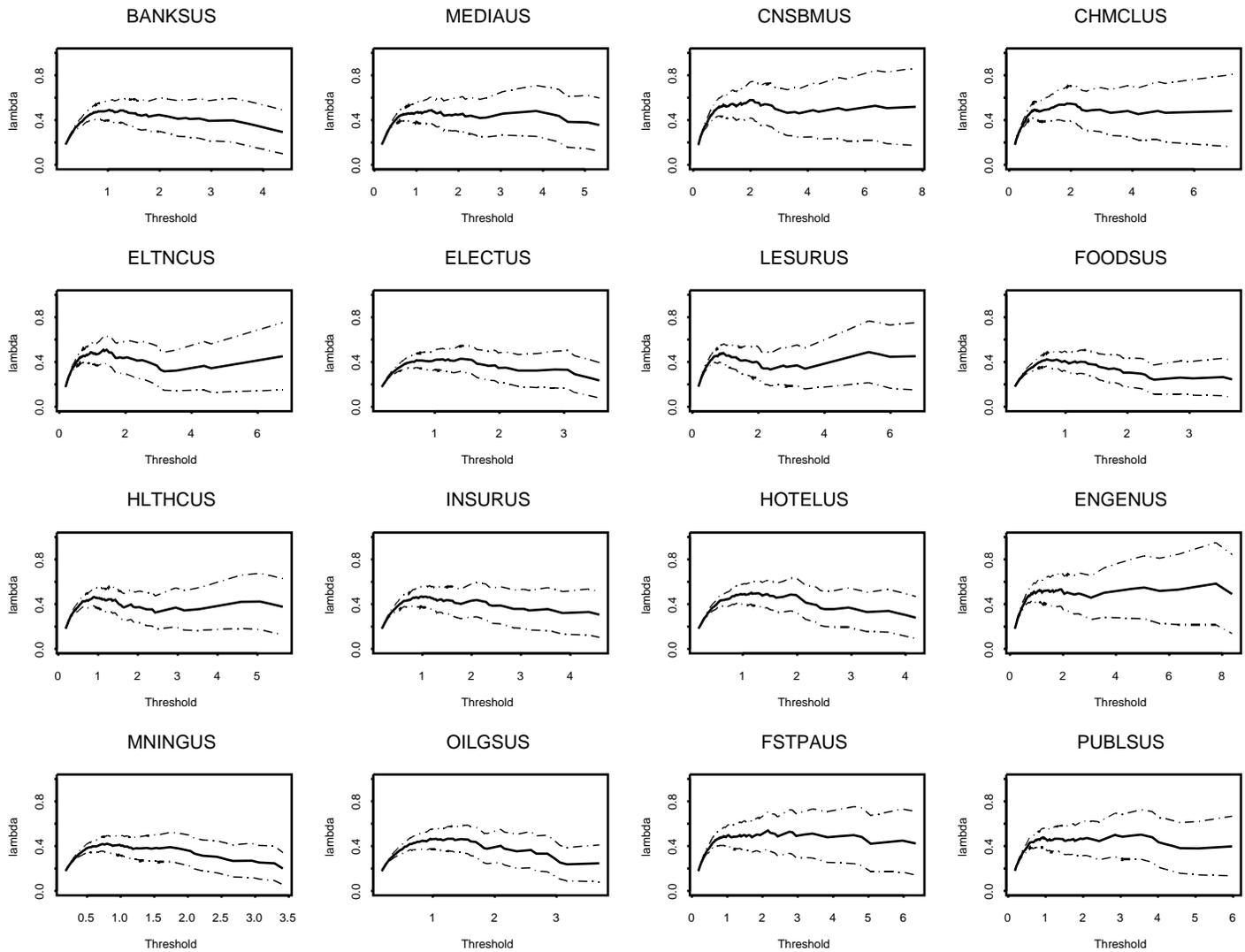


Abbildung 3.10: Hill-Schätzer für λ_U zwischen den Log>Returns von AUTOMBUS und den Log>Returns der 16 folgenden US-Indizes

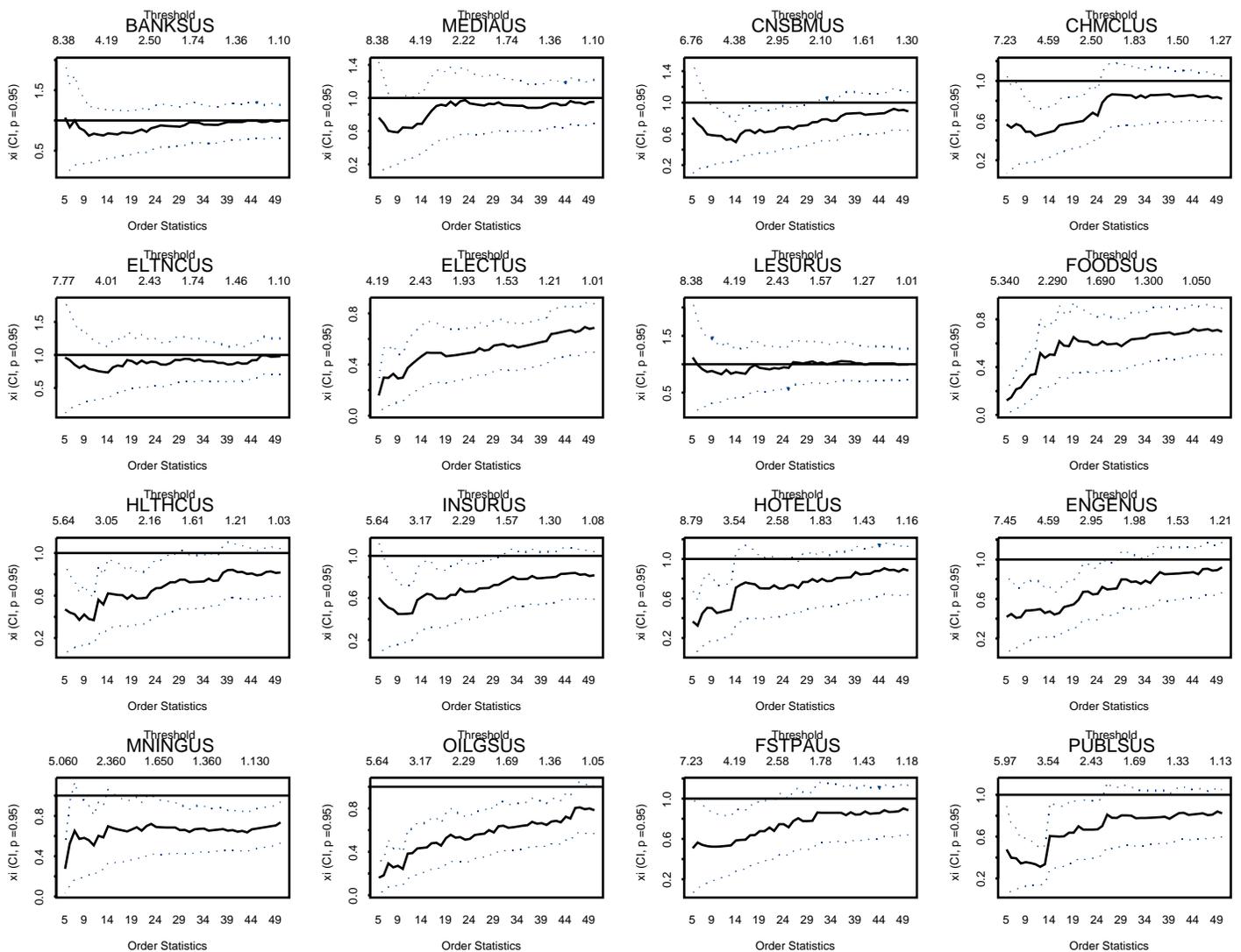


Abbildung 3.11: Hill-Schätzer für $\eta = (\bar{\lambda}_L + 1)/2$ zwischen den Log>Returns von AUTOM-BUS und den Log>Returns der 16 folgenden US-Indizes

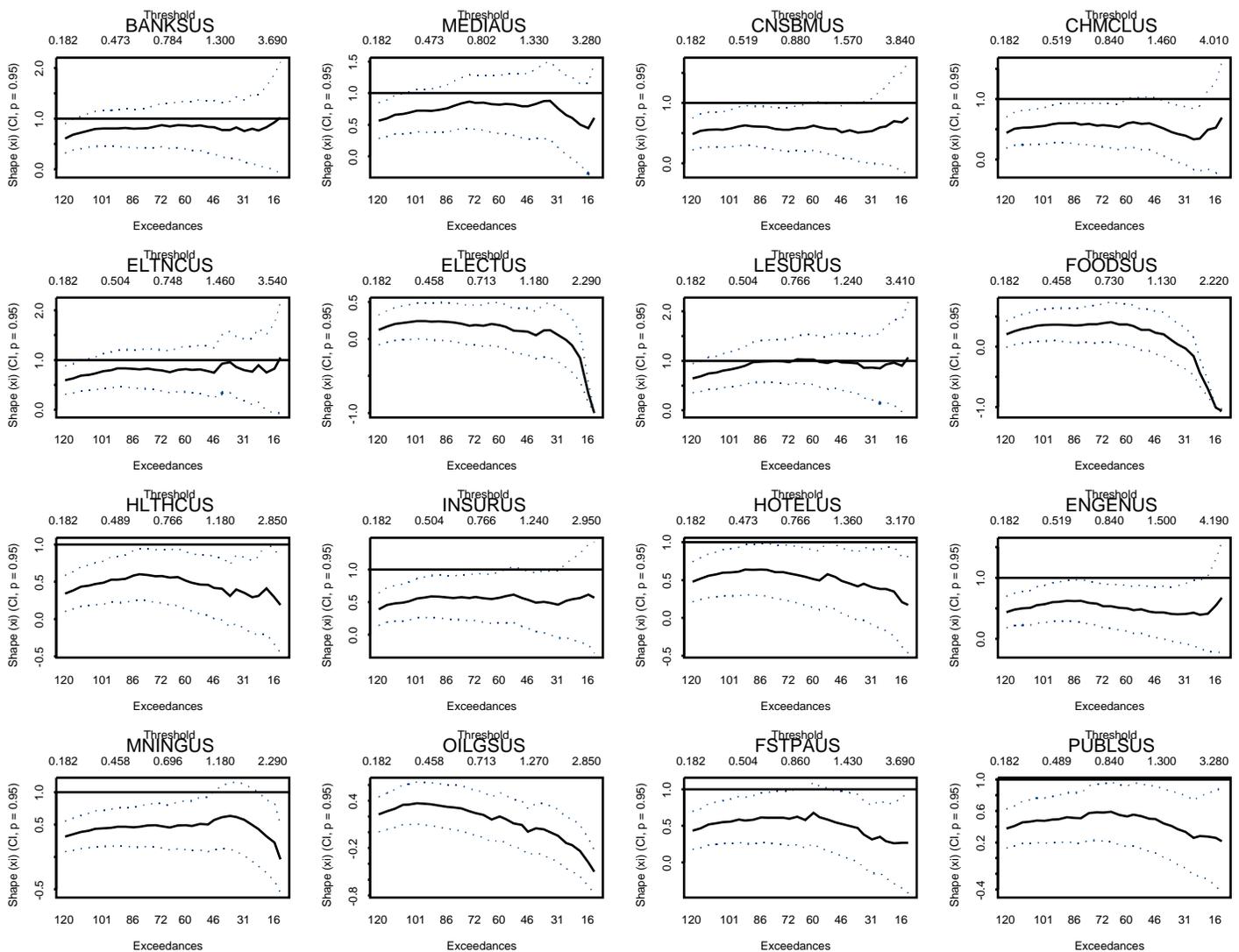


Abbildung 3.12: ML-Schätzer für $\eta = (\bar{\lambda}_L + 1)/2$ zwischen den Log>Returns von AUTOM-BUS und den Log>Returns der 16 folgenden US-Indizes

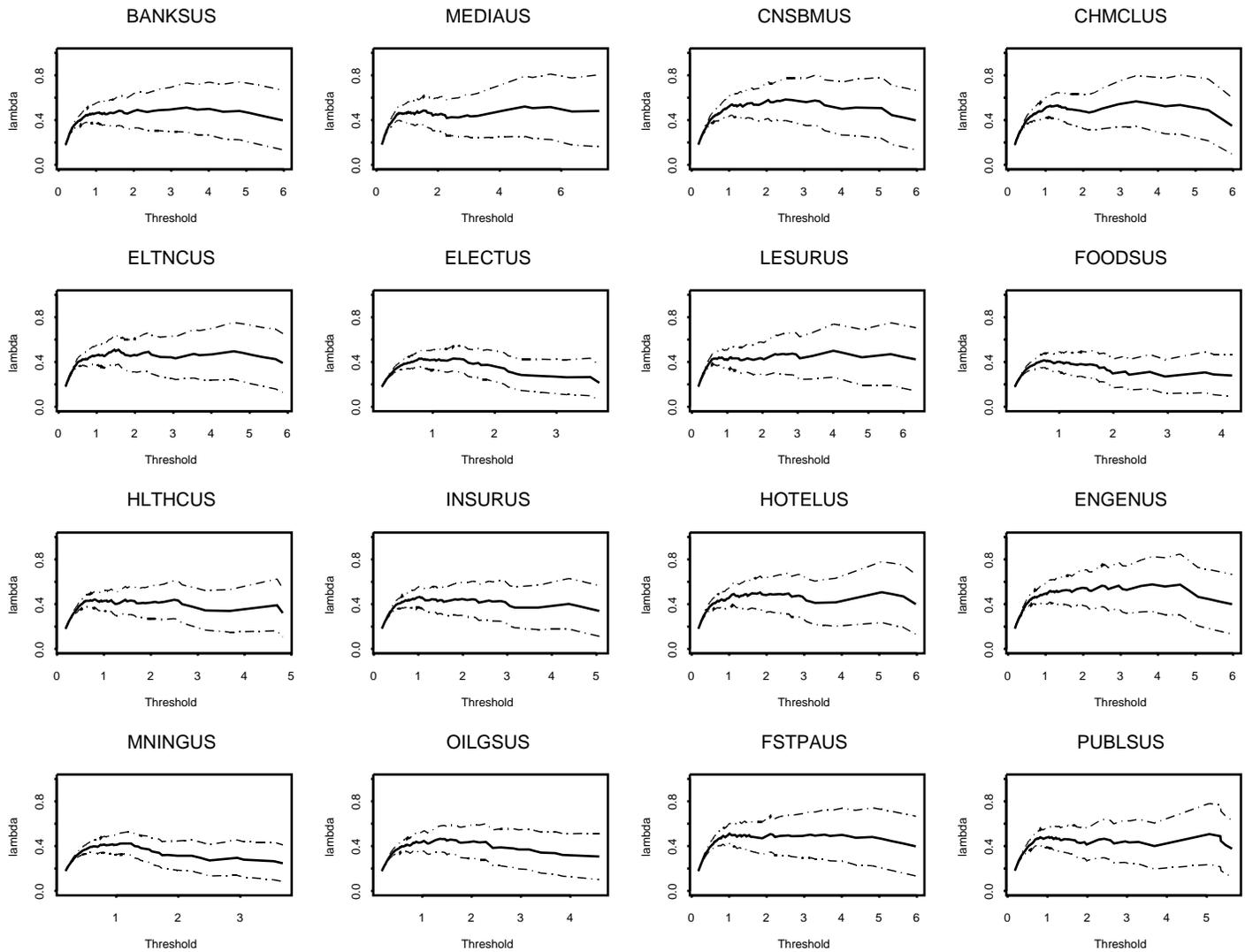


Abbildung 3.13: Hill-Schätzer für λ_L zwischen den Log>Returns von AUTOMBUS und den Log>Returns der 16 folgenden US-Indizes

λ_U	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
AUTMB	1	0.36	0.43	0.49	0.46	0.34	0.3	0.4	0.26	0.38	0.34	0.34	0.54	0	0.29	0.47	0.42
BANKS	0.36	1	0.39	0.32	0.39	0.39	0.33	0.42	0.34	0.31	0.48	0.29	0.32	0	0	0.35	0.45
MEDIA	0.43	0.39	1	0.4	0	0.48	0	0.4	0	0.38	0.4	0.35	0.42	0	0	0	0.47
CNSBM	0.49	0.32	0.4	1	0.39	0.37	0.28	0.35	0.3	0.4	0.39	0.38	0.53	0.26	0.28	0.46	0.42
CHMCL	0.46	0.39	0	0.39	1	0.4	0.28	0.37	0.31	0.35	0.35	0	0.49	0.26	0.29	0.51	0
ELTNC	0.34	0.39	0.48	0.37	0.4	1	0	0.41	0	0.36	0.38	0.3	0.38	0	0	0.34	0.42
ELECT	0.3	0.33	0	0.28	0.28	0	1	0	0.35	0	0.3	0	0.23	0	0.27	0.29	0.25
LESUR	0.4	0.42	0.4	0.35	0.37	0.41	0	1	0	0.3	0.38	0.44	0.45	0	0	0.37	0.35
FOODS	0.26	0.34	0	0.3	0.31	0	0.35	0	1	0.35	0.35	0.29	0.3	0	0.24	0.33	0.37
HLTHC	0.38	0.31	0.38	0.4	0.35	0.36	0	0.3	0.35	1	0.34	0.37	0.41	0.22	0	0.39	0.39
INSUR	0.34	0.48	0.4	0.39	0.35	0.38	0.3	0.38	0.35	0.34	1	0.3	0.37	0	0.28	0.4	0.38
HOTEL	0.34	0.29	0.35	0.38	0	0.3	0	0.44	0.29	0.37	0.3	1	0.4	0	0	0	0.34
ENGEN	0.54	0.32	0.42	0.53	0.49	0.38	0.23	0.45	0.3	0.41	0.37	0.4	1	0.28	0.29	0.5	0.49
MNING	0	0	0	0.26	0.26	0	0	0	0	0.22	0	0	0.28	1	0.29	0	0
OILGS	0.29	0	0	0.28	0.29	0	0.27	0	0.24	0	0.28	0	0.29	0.29	1	0.28	0
FSTPA	0.47	0.35	0	0.46	0.51	0.34	0.29	0.37	0.33	0.39	0.4	0	0.5	0	0.28	1	0.41
PUBLS	0.42	0.45	0.47	0.42	0	0.42	0.25	0.35	0.37	0.39	0.38	0.34	0.49	0	0	0.41	1

Tabelle 3.2: Matrix der upper Tail-Dependence Koeffizienten zwischen den ersten 17 US Indices. Die Nullen kommen zustande, wenn die obere Konfidenzgrenze von $\hat{\lambda}_U$ unter 1 liegt und somit $\hat{\lambda}_U$ gleich 0 gesetzt wird.

λ_L	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
AUTMB	1	0.46	0.5	0.47	0	0.46	0	0.47	0	0	0	0.45	0	0.28	0	0	0
BANKS	0.46	1	0.47	0.42	0.44	0	0.29	0.44	0.38	0	0	0.41	0.42	0	0	0.37	0
MEDIA	0.5	0.47	1	0.45	0	0	0	0	0	0	0.36	0	0	0	0	0	0
CNSBM	0.47	0.42	0.45	1	0.42	0	0	0.44	0.31	0	0.49	0.49	0	0	0	0.44	0.44
CHMCL	0	0.44	0	0.42	1	0	0	0	0.33	0	0.37	0.31	0	0.31	0.36	0.45	0.41
ELTNC	0.46	0	0	0	0	1	0	0.53	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ELECT	0	0.29	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0.28	0
LESUR	0.47	0.44	0	0.44	0	0.53	0	1	0	0	0.4	0.46	0	0	0	0	0.48
FOODS	0	0.38	0	0.31	0.33	0	0	0	1	0	0.37	0	0	0	0.28	0.36	0
HLTHC	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
INSUR	0	0	0.36	0.49	0.37	0	0	0.4	0.37	0	1	0.36	0.39	0	0	0.36	0.39
HOTEL	0.45	0.41	0	0.49	0.31	0	0	0.46	0	0	0.36	1	0	0	0	0.38	0.51
ENGEN	0	0.42	0	0	0	0	0	0	0	0	0.39	0	1	0	0.36	0	0
MNING	0.28	0	0	0	0.31	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0.32	0.32	0
OILGS	0	0	0	0	0.36	0	0	0	0.28	0	0	0	0.36	0.32	1	0.38	0.32
FSTPA	0	0.37	0	0.44	0.45	0	0.28	0	0.36	0	0.36	0.38	0	0.32	0.38	1	0
PUBLS	0	0	0	0.44	0.41	0	0	0.48	0	0	0.39	0.51	0	0	0.32	0	1

Tabelle 3.3: Matrix der lower Tail-Dependence Koeffizienten zwischen den ersten 17 US Indices. Die Nullen kommen zustande, wenn die obere Konfidenzgrenze von $\hat{\lambda}_L$ unter 1 liegt und somit $\hat{\lambda}_L$ gleich 0 gesetzt wird.

Kapitel 4

Multivariate Extremwerttheorie

Im folgenden Kapitel wird versucht die Ergebnisse der univariaten Extremwerttheorie auf den multivariaten Fall auszudehnen. Wir versuchen nur einen kurzen Einblick zu verschaffen, der es ermöglichen soll, spätere Ergebnisse im Kapitel 5 nachzuvollziehen. Desweiteren wird auf den Grundlagen dieses Kapitels aufbauend ein neuer Schätzer für die Tail-Dependence konstruiert, der von Wendin [40] stammt. Die Feinheiten der Theorie über multivariate Extrema entnehme man Resnick [36], Kapitel 5, an dessen Buch sich dieses Kapitel stark orientiert.

4.1 Multivariate Extremwertverteilungen

Wir betrachten nun Extrema von multivariaten Daten. Seien $\{\mathbf{X}_n, n \geq 1\}$ iid Zufallsvektoren im \mathbb{R}^m , $m \geq 2$ mit Verteilungsfunktion F . In Komponenten geschrieben:

$$\left(\begin{array}{c} X_{1,1} \\ \dots \\ X_{m,1} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} X_{1,2} \\ \dots \\ X_{m,2} \end{array} \right), \dots, \left(\begin{array}{c} X_{1,n} \\ \dots \\ X_{m,n} \end{array} \right) \sim F, \quad iid. \quad (4.1)$$

Die Maxima $M_{1,n}, \dots, M_{m,n}$ werden komponentenweise berechnet:

$$M_{1,n} = \max_{1 \leq i \leq n} \{X_{1,i}\}, \quad (4.2)$$

$$M_{2,n} = \max_{1 \leq i \leq n} \{X_{2,i}\}, \quad (4.3)$$

$$\vdots = \vdots \quad (4.4)$$

$$M_{m,n} = \max_{1 \leq i \leq n} \{X_{m,i}\}. \quad (4.5)$$

Angenommen für alle Komponenten existieren die univariaten Extremwertverteilungen G_i mit Normalisierungsfolgen $d_{i,n}, c_{i,n}$, $1 \leq i \leq m$ und $n \in \mathbb{N}$. Also

$$\frac{M_{i,n} - d_{i,n}}{c_{i,n}} \xrightarrow{P} G_i, \quad n \rightarrow \infty, \quad 1 \leq i \leq m. \quad (4.6)$$

Wenn die multivariate Extremwertverteilung G existiert, dann ist sie die Grenzverteilung von

$$\left(\frac{M_{1,n} - d_{1,n}}{c_{1,n}}, \dots, \frac{M_{m,n} - d_{m,n}}{c_{m,n}} \right)^T \quad \text{für } n \rightarrow \infty. \quad (4.7)$$

Also

$$\begin{aligned} G(\mathbf{z}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(M_{i,n} \leq d_{i,n} + c_{i,n}z_i, i = 1, \dots, m) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(d_{1,n} + c_{1,n}z_1, \dots, d_{m,n} + c_{m,n}z_m). \end{aligned}$$

Wenn dieser Grenzwert existiert schreibt man wie im univariaten Fall $F \in \text{MDA}(G)$.

4.2 Charakterisierung multivariater Extremwertverteilungen

Definition 4.2.1 (max-id). Die Verteilungsfunktion F auf \mathbb{R}^m heißt *max-infinitely divisible (max-id)*, wenn für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Verteilungsfunktion F_n auf \mathbb{R}^m existiert, so dass

$$F_n^n = F. \tag{4.8}$$

Eine m -dimensionale Verteilungsfunktion F ist also *max-id* genau dann, wenn alle ihre n -ten Wurzeln $F^{1/n}$ wieder Verteilungsfunktionen sind. Ein Zufallsvektor mit *max-id* Verteilungsfunktion wird auch *max-id* genannt.

Etlliche Eigenschaften der *max-id* Verteilungen sind in Resnick [36], Seite 253, zu finden.

Nun bedarf es einiger Notationen:

Der Zustandsraum E , der in diesem Kapitel benutzt wird, sei ein separabler, vollständiger metrischer Raum. Für eine Menge $B \subset E$ seien B° , \overline{B} und $\partial B = \overline{B} \setminus B^\circ$ ihr Inneres, ihr Abschluss und ihr Rand. Wir sagen $B \subset E$ ist *relativ kompakt*, wenn ihr Abschluss \overline{B} kompakt ist. Kompakte Mengen sind immer relativ kompakt. \mathbb{R}^m , $m \geq 1$ ist weder kompakt noch relativ kompakt. Die kompakten Mengen im \mathbb{R}^m sind abgeschlossen und beschränkt. $S^{m-1} := \{x \in \mathbb{R}^m : |x| = 1\}$ ist eine kompakte Menge im \mathbb{R}^m .

Sei $\mathcal{B}(E)$ die Borel σ -Algebra auf E . Ein auf $\mathcal{B}(E)$ definiertes Maß heißt *Radonmaß*, wenn es auf allen relativ kompakten Mengen endlich ist. Weiterhin seien definiert

$$\begin{aligned} C_K^+(E) & \text{ Die Klasse der stetigen Funktionen } f : E \rightarrow \mathbb{R}_+ = [0, \infty) \text{ mit kompaktem Träger} \\ M_+(E) & \text{ Die Klasse der nichtnegativen Radonmaße auf } (E, \mathcal{B}(E)). \end{aligned} \tag{4.9}$$

Ein Exponentenmaß μ ist ein Radon-Maß, welches die folgenden Bedingungen erfüllt:

1. Das Maß μ hat keine Masse auf Punkten, für die eine Komponente ∞ ist, $\mu([0, \infty]^m \setminus [0, \infty)^m) = 0$
2. Entweder ist $\mathbf{l} > -\infty$, oder aus $\mathbf{x} \geq \mathbf{l}$ und $x_i = -\infty$, für ein $i \in \{1, \dots, m\}$, folgt $\mu([-\infty, \mathbf{x}]^C) = \infty$

Dabei bezeichnet $[\cdot]^C$ das Komplement von $[\cdot]$.

Satz 4.2.2. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (i) F ist *max-id*

(ii) Für ein $\mathbf{l} \in [-\infty, \infty)^m$ existiert ein Exponentenmaß μ auf $E := [\mathbf{l}, \infty] \setminus \{\mathbf{l}\}$, so dass

$$F(\mathbf{x}) = \begin{cases} \exp\{-\mu([\mathbf{l}, \mathbf{x}]^C)\} & \mathbf{x} \geq \mathbf{l} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (4.10)$$

Definition 4.2.3 (max-stable). Eine m -dimensionale Verteilungsfunktion $G : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ heißt max-stable, genau dann, wenn für alle $t > 0$ Funktionen $c_i(t) > 0$, $d_i(t)$ existieren, so dass

$$G^t(\mathbf{x}) = G(c_1(t)x_1 + d_1(t), \dots, c_m(t)x_m + d_m(t)). \quad (4.11)$$

Aus 4.11 ist klar, dass G^t für $t > 0$ eine Verteilungsfunktion ist, und somit folgt, dass jede max-stable Verteilungsfunktion auch max-id ist.

Satz 4.2.4. Die Klasse der multivariaten Extremwertverteilungen entspricht genau der Klasse der max-stable Verteilungsfunktionen mit nicht degenerierten Randverteilungen.

Beweis: siehe Resnick [36] Seite 264.

Die Charakterisierung der Klasse der m -dimensionalen Extremwertverteilungen geht also mit der Charakterisierung der Klasse der max-stable Verteilungen einher.

Um max-stable Verteilungen mit nichtdegenerierten Randverteilungen zu beschreiben, ist es eine große Hilfe zuerst die Randverteilungen zu standardisieren. Die Wahl der Randverteilungen ist beliebig. Wir transformieren die $X_i \sim F_i$, $1, \dots, m$, dem Buch von Resnick [36], Seite 265 ff., folgend, auf Standard Pareto Verteilungen.

Proposition 4.2.5. 1. Sei G eine m -dimensionale Verteilungsfunktion mit stetigen Randverteilungen G_i , $i = 1, \dots, m$. Seien ψ_i für $i = 1, \dots, m$ folgendermaßen definiert:

$$\psi_i(x) = (1/(-\log G_i))^\leftarrow(x), \quad x > 0 \quad (4.12)$$

und

$$G_*(\mathbf{x}) = G(\psi_1(x_1), \dots, \psi_m(x_m)), \quad \mathbf{x} \geq 0 \quad (4.13)$$

die entsprechende Verteilungsfunktion mit Einheits Fréchet Randverteilungen. Dann ist G genau dann eine m -dimensionale Extremwertverteilung, wenn G_* eine Extremwertverteilung ist.

2. Seien $U_i = 1/(1-F_i)$, $1 \leq i \leq m$ und F_* die Verteilungsfunktion von $(U_1(X_1), \dots, U_m(X_m))$, so dass

$$F_*(\mathbf{x}) = F(U_1^\leftarrow(x_1), \dots, U_m^\leftarrow(x_m)). \quad (4.14)$$

Wenn $F \in \text{MDA}(G)$, dann ist auch $F_* \in \text{MDA}(G_*)$ und es gilt:

$$F_*^n(n\mathbf{x}) \rightarrow G_*(\mathbf{x}), \quad n \rightarrow \infty. \quad (4.15)$$

Wenn umgekehrt 4.15 gilt, die Randverteilungen G_i von G univariate Extremwertverteilungen sind und G_* nichtdegenerierte Randverteilungen hat, dann ist auch $F \in \text{MDA}(G)$.

Angenommen 4.15 gilt, dann wird 4.11 für G_* zu

$$G_*^t(\mathbf{t}\mathbf{x}) = G_*(\mathbf{x}), \quad t > 0. \quad (4.16)$$

Da G_* max-id ist, gibt es ein Exponentenmaß μ_* . Da die Randverteilungen $G_{*,i}$ von G_* alle identisch Einheits Fréchet verteilt sind, ist ihr Träger $[0, \infty)$ und somit ist die Wahl $\mathbf{l} = \mathbf{0}$ in Satz 4.2.2 passend. Nun kann man 4.16 in eine Homogenitätseigenschaft von μ_* übersetzen:

$$\mu_*([\mathbf{0}, \mathbf{x}]^C) = t\mu_*([\mathbf{0}, \mathbf{t}\mathbf{x}]^C) = t\mu_*(t[\mathbf{0}, \mathbf{x}]^C), \quad \forall t > 0, \mathbf{x} > \mathbf{0}. \quad (4.17)$$

wobei $tB = \{tb : b \in B\}$ für eine Borelmenge $B \subset E$. Für festes $t > 0$ kann Gleichung 4.17 auf beliebige Quader in E erweitert werden, und gilt somit auf einem Erzeugendensystem von $\mathcal{B}(E)$. Demnach folgt:

$$\mu_*(B) = t\mu_*(tB), \quad \forall B \in \mathcal{B}(E). \quad (4.18)$$

Somit sind 4.16 und 4.18 equivalent.

Nun wähle man eine Norm auf \mathbb{R}^m . Nachdem alle Normen auf \mathbb{R}^m topologisch äquivalent sind ist die spezifische Wahl unwesentlich. Da das Exponentenmaß keine Masse auf $[\mathbf{0}, \infty) \setminus [\mathbf{0}, \infty)$ hat, können wir so tun als ob diese Norm auf ganz $E := \overline{\mathbb{R}^m}$ definiert wäre. Nun definieren wir die Einheitssphäre $S^{m-1} = \{x \in \mathbb{R}^m : |x| = 1\}$, wobei $|\cdot|$ die gewählte Norm darstellt.

Für Borelmengen $A \in S^{m-1}$ ist durch

$$S(A) := \mu_* \left(\left\{ x : |x| > 1, \frac{x}{|x|} \in A \right\} \right) \quad (4.19)$$

ein Maß auf S^{m-1} definiert. Da μ_* auf kompakten Mengen endlich ist, ist auch S endlich auf S^{m-1} . Aufgrund der in 4.18 beschriebenen Homogenität von μ_* gilt für $r > 0$:

$$\begin{aligned} \mu_* (\{y \in E : |y| > r, |y|^{-1}y \in A\}) &= \frac{1}{r} \mu_* (\{x \in E : |x| > 1, |x|^{-1}x \in A\}) \\ &= \frac{1}{r} S(A). \end{aligned}$$

Daher ist μ_* für die Koordinaten $\left(|x|, \frac{x}{|x|}\right)$ ein Produktmaß. Anders gesagt, wenn $T : E \rightarrow ((0, \infty] \times S^{m-1})$ mit $T(x) = (|x|, x/|x|)$, dann ist die Dichte des Maßes $\mu_* \circ T^{-1}$ ein Produkt:

$$\mu_* \circ T^{-1}(dr, d\mathbf{a}) = \frac{1}{r^2} S(d\mathbf{a}). \quad (4.20)$$

Für $\mathbf{x} \in E$ kann dann aus 4.20 gezeigt werden, dass

$$\mu_*([\mathbf{0}, \mathbf{x}]^C) = \int_{S^{m-1}} \max_{1, \dots, m} \left\{ \frac{a_i}{x_i} \right\} S(d\mathbf{a}). \quad (4.21)$$

Nun können wir die max-stable Verteilungsfunktionen und somit die multivariaten Extremwertverteilungen so wie in Satz 4.2.2 charakterisieren.

Satz 4.2.6. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

1. Die Verteilungsfunktion G_* ist eine m -dimensionale Extremwertverteilung mit Einheits Fréchet Randverteilungen.
2. Es existiert ein endliches Maß S auf S^{m-1} mit

$$\int_{S^{m-1}} a_i S(d\mathbf{a}) = 1, \quad 1 \leq i \leq m, \quad (4.22)$$

so dass für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$

$$G_*(\mathbf{x}) = \exp \left(- \int_{S^{m-1}} \max_{i=1, \dots, m} \left\{ \frac{a_i}{x_i} \right\} S(d\mathbf{a}) \right). \quad (4.23)$$

4.3 Maximaler Anziehungsbereich der multivariaten Extremwertverteilungen

Wie im univariaten Fall ist auch im Mehrdimensionalen die Eigenschaft der regulären Variation sehr nützlich beim Beschreiben des Maximalen Anziehungsbereichs einer Extremwertverteilung.

Sei $K \subset \mathbb{R}^m$ ein Kegel:

$$\mathbf{x} \in K \Leftrightarrow t\mathbf{x} \in K \quad \forall t > 0 \quad \wedge \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in K \Rightarrow \lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y} \in K \quad \forall \lambda \in [0, 1], \quad (4.24)$$

in dem der Einsvektor $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)^T$ enthalten ist: $\mathbf{1} \in K$.

Definition 4.3.1 (Multivariate reguläre Variation). Eine meßbare Funktion $H : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ heißt (multivariat) regulär variierend auf K mit Grenzfunktion g , wenn

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{h(t\mathbf{x})}{h(t\mathbf{1})} = g(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in K. \quad (4.25)$$

Ist $\mathbf{x} \in K$ fest, so gilt für $s > 0$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{h(ts\mathbf{x})}{h(t\mathbf{x})} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{h(ts\mathbf{x})}{h(t\mathbf{1})}}{\frac{h(t\mathbf{x})}{h(t\mathbf{1})}} = \frac{g(s\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})}. \quad (4.26)$$

Für $\mathbf{x} \in K$ fest ist $h(t\mathbf{x})$ eine Funktion von t , die gemäß Proposition 0.4 in Resnick [36] regulär variierend ist, so dass ein $\alpha \in \mathbb{R}$ existiert mit $h(t\mathbf{x}) \in \mathcal{R}_\alpha$ und

$$\frac{g(s\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} = s^\alpha. \quad (4.27)$$

In Resnick [36] Kapitel 5.4 wird gezeigt, dass der Wert von α nicht von \mathbf{x} abhängt. Daraus folgt, dass g homogen vom Grad α ist, das heißt

$$g(s\mathbf{x}) = s^\alpha g(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m, \quad s > 0. \quad (4.28)$$

Proposition 4.3.2. *Sei wieder wie in Proposition 4.2.5 für $i = 1, \dots, m$*

$$\psi_i(x) = (1/(-\log G_i))^\leftarrow(x), \quad x > 0 \quad (4.29)$$

und

$$G_*(\mathbf{x}) = G(\psi_1(x_1), \dots, \psi_m(x_m)), \quad \mathbf{x} \geq 0 \quad (4.30)$$

eine multivariate Extremwertverteilung mit Einheits Fréchet Randverteilungen.

Weiterhin seien für eine Verteilungsfunktion F und ihre Ränder $F_i: U_i = 1/(1 - F_i)$, $1 \leq i \leq m$ und F_* die Verteilungsfunktion von $(U_1(X_1), \dots, U_m(X_m))$, so dass

$$F_*(\mathbf{x}) = F(U_1^\leftarrow(x_1), \dots, U_m^\leftarrow(x_m)), \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{1}. \quad (4.31)$$

Dann gelten:

- (i) Die Funktion F_* liegt im maximalen Anziehungsbereich von G_* , $F_* \in \text{MDA}(G_*)$, genau dann, wenn $1 - F_*$ regulär auf $(0, \infty)^m$ variiert mit Grenzfunktion $-\log G_*(\mathbf{x})/(-\log G_*(\mathbf{1}))$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - F_*(t\mathbf{x})}{1 - F_*(t\mathbf{1})} = \frac{-\log G_*(\mathbf{x})}{-\log G_*(\mathbf{1})}, \quad \forall \mathbf{x} > \mathbf{0}. \quad (4.32)$$

- (ii) Die Funktion F liegt im maximalen Anziehungsbereich von G , $F \in \text{MDA}(G)$, genau dann, wenn $F_i \in \text{MDA}(G_i)$, $i = 1, \dots, m$ und $F_* \in \text{MDA}(G_*)$.

Satz 4.3.3. *Seien F, F_*, G, G_* wie in Proposition 4.2.5 und μ_* wie in Satz 4.2.6. Sei $\mathbf{X}_* \in [1, \infty)^m$ ein Zufallsvektor mit Verteilungsfunktion F_* . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

- (i) Die Funktion F_* liegt im maximalen Anziehungsbereich von G_* , $F_* \in \text{MDA}(G_*)$.

- (ii) Es gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - F_*(t\mathbf{x})}{1 - F_*(t\mathbf{1})} = \frac{-\log G_*(\mathbf{x})}{-\log G_*(\mathbf{1})} = \frac{\mu_*([\mathbf{0}, \mathbf{x}]^C)}{\mu_*([\mathbf{0}, \mathbf{1}]^C)}, \quad \forall \mathbf{x} > \mathbf{0}. \quad (4.33)$$

- (iii) Es gilt

$$nF_*(n\cdot) = nP\left(\frac{1}{n}\mathbf{X}_* \in \cdot\right) \xrightarrow{v} \mu_*(\cdot) \quad \text{auf } E. \quad (4.34)$$

Dabei bedeutet \xrightarrow{v} vage Konvergenz:

Definition 4.3.4 (vage Konvergenz). Für $\mu, \mu_1, \mu_2, \dots \in M_+(E)$ konvergiert die Folge $\{\mu\}_{n \in \mathbb{N}}$ vage gegen ein Maß μ , geschrieben $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$, wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f d\mu_n = \int_E f d\mu \quad (4.35)$$

für alle $f \in C_K^*(E)$, also alle nicht-negativen stetigen Funktionen mit kompaktem Träger. Siehe Wendin [40], Seite 58.

Nun folgt eine äquivalente Definition von multivariater regulärer Variation eines Zufallsvektors die aus Wendin [40], Seite 10, entnommen ist:

Definition 4.3.5 (Multivariate Reguläre Variation). Sei $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^m$ ein Zufallsvektor mit unbeschränktem Träger. X ist regulär variierend mit Index α , wenn es eine Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $0 < a_n \uparrow \infty$ und ein Exponentenmaß μ gibt, so dass für $n \rightarrow \infty$ gilt:

$$nP\{a_n^{-1}\mathbf{X} \in \cdot\} \xrightarrow{v} \mu(\cdot) \quad \text{auf } \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^m \setminus \{0\}). \quad (4.36)$$

Wenn letzteres gilt existiert ein $\alpha > 0$ so dass $\mu(tB) = t^{-\alpha}\mu(B)$ für alle $t > 0$ und alle relativ kompakten Mengen $B \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^m \setminus \{0\})$ mit $\mu(\partial B) = 0$.

Korollar 4.3.6. Sei \mathbf{X} ein m -dimensionaler Zufallsvektor mit Verteilungsfunktion F .

1. Wenn F regulär variiert mit Grenzfunktion $W(\mathbf{s}\mathbf{x}) = s^{-\alpha}W(\mathbf{x})$, $t, \alpha > 0$, $\mathbf{x} > \mathbf{0}$, wenn also gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - F(t\mathbf{x})}{1 - F(t\mathbf{1})} = W(\mathbf{x}) > 0, \quad \mathbf{x} > \mathbf{0}, \quad (4.37)$$

dann gilt $F \in \text{MDA}(G)$ und $G(\mathbf{x}) = \exp(-W(\mathbf{x}))$.

2. Wenn \mathbf{X} regulär variierend ist gemäß Definition 4.3.5, dann ist $F \in \text{MDA}(G)$, und $G(\mathbf{x}) = \exp(-\mu([-\infty, \mathbf{x}]^C))$.

4.4 Schätzer für das Exponentenmaß

In dem vorangegangenen Abschnitt wurde die Rolle des Exponentenmaßes μ für multivariate Extremwertverteilungen herausgestellt.

Das Ziel dieses Kapitels ist es einen schwach konsistenten Schätzer $\hat{\mu}_n$ dieses Exponentenmaßes μ zu finden.

Sei nun $H(x) = P(|\mathbf{X}| \leq x)$.

Definition 4.4.1. Eine passende Wahl für a_n aus Definition 4.3.5 ist

$$a_n = H^{\leftarrow}(1 - 1/n) =: \overline{H}^{\leftarrow}(1/n). \quad (4.38)$$

Da in der Realität $\overline{H}^{\leftarrow}$ nicht bekannt ist, wird es durch seine empirische Version $\overline{H}_n^{\leftarrow}$ geschätzt.

Nun definieren wir einen Schätzer für das Exponentenmaß μ und behaupten gleichzeitig dessen Konsistenz:

Satz 4.4.2. Sei $\{k_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge für die gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = \infty$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n/n = 0$, dann gilt für $n \rightarrow \infty$

$$\hat{\mu}_n(\cdot) := \frac{1}{k_n} \sum_{i=1}^n 1_{X_i/\overline{H}_n^{\leftarrow}(k_n/n)}(\cdot) \xrightarrow{s} \mu(\cdot) \quad \text{im } M_+(\overline{\mathbb{R}}^m \setminus \{0\}). \quad (4.39)$$

wobei \xrightarrow{s} schwache Konvergenz bezeichnet und $M_+(\overline{\mathbb{R}}^m \setminus \{0\})$ wieder die Klasse der nicht negativen Radon Maße auf $\overline{\mathbb{R}}^m \setminus \{0\}$ ist.

Beweis: Siehe Wendin [40] Seite 17.

Definition 4.4.3 (schwache Konvergenz). Seien P, P_1, P_2, \dots Wahrscheinlichkeitsmaße auf E . Man sagt, dass die Folge $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ schwach gegen P konvergiert, in Zeichen $P_n \xrightarrow{s} P$, wenn für alle beschränkten, stetigen und reellwertigen Funktionen f

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f dP_n = \int_E f dP. \quad (4.40)$$

Wenn X, X_1, X_2, \dots Zufallsvariablen auf E mit Verteilungsfunktionen F, F_1, F_2, \dots sind, dann gilt $X_n \xrightarrow{d} X$ ist äquivalent zu $F_n \xrightarrow{s} F$.

4.4.1 Schätzer für die Tail-Dependence

In diesem Abschnitt wird versucht eine Alternative zum in der Praxis häufig verwendeten, aber nicht notwendiger Weise gute Performance liefernden Hill Schätzer für die Tail Dependence auszuarbeiten. Dieser neue Schätzer für die Tail Dependence soll dann genauso wenig wie der Hill Schätzer allein betrachtet und als einziger Anhaltspunkt für den wahren Wert dienen, sondern viel mehr in Verbindung mit dem Hill Schätzer gemeinsam (im optimalen Fall) ähnliche Werte veranschlagen.

Dieser neue Schätzer stammt aus Wendin [40], Seite 22, und baut auf dem Schätzer für das Exponentenmaß μ auf.

Aus der in Wendin [40] Seite 21, 22 ausgearbeiteten Theorie über spill-over Wahrscheinlichkeiten, ergibt sich ein Schätzer für die Tail Dependence von regulär variierenden Zufallsvektoren

$$\hat{\lambda}_{U,n} = \frac{\hat{\mu}_n(\{(s, t) | s > 1/\sqrt{2}, t > 1/\sqrt{2}\})}{\hat{\mu}_n(\{(s, t) | s > 1/\sqrt{2}\})}.$$

Da $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) \in S^1$ findet die Schätzung auf den unbegrenzten Quadraten mit unterer linker Ecke auf dem Einheitskreis statt. Wegen der Skalierungseigenschaft von μ darf diese Ecke in jedem Punkt auf der Winkelhalbierenden liegen. Sie sollte allerdings so gewählt werden, dass einerseits genügend Punkte zur Schätzung zur Verfügung stehen, andererseits sollte sie auch nicht zu nah am Mittelpunkt der Verteilung liegen, da wir sonst nicht extreme Punkte zählen, die nicht der Skalierungseigenschaft von μ unterliegen.

Leider ist dieser Schätzer nur für regulär variierende Vektoren relevant, so dass er nicht auf unsere Daten anwendbar ist.

Kapitel 5

Sphärische und Elliptische Verteilungen

Die meisten bekannten Kreditrisikomodelle sind Faktormodelle, deren systematische Risikokomponente im eindimensionalen Fall normalverteilt ist und im mehrdimensionalen Fall durch eine multivariate Normalverteilung modelliert wird. Dies hat den Vorteil, dass nur wenige Parameter geschätzt werden müssen und dies recht einfach von statten geht. Somit sind Modelle mit normalverteilten Faktoren leicht handhabbar. Allerdings kann die Normalverteilung wichtige Eigenschaften, die man in der Kreditrisikomodellierung antrifft, nicht abbilden. Die wichtigsten Unzulänglichkeiten der Normalverteilung sind die dünnen Tails und die Unabhängigkeit von extremen Ereignissen, die man durch die Tail-Dependence misst. Um diese Probleme zu bewältigen werden hier die Elliptischen Verteilungen eingeführt, die die Normalverteilung beinhalten. Viele nützliche Eigenschaften der Normalverteilung übertragen sich auf diese Klasse von Verteilungen. Da in dieser Diplomarbeit die Abhängigkeiten von extremen Ereignissen große Aufmerksamkeit erhalten, wird besonders auf den Zusammenhang zwischen der Tail-Dependence Eigenschaft eines elliptisch verteilten Zufallsvektors und der Eigenschaft der regulären Variation seiner erzeugenden Variablen eingegangen.

Zunächst werden die sphärischen Verteilungen eingeführt, die eine Unterklasse der elliptischen Verteilungen bilden. Nachdem für diese die wichtigsten Ergebnisse formuliert wurden, werden die Resultate auf die elliptischen Verteilungen übertragen.

Dieses Kapitel lehnt sich stark an das Buch von Fang, Kotz und Ng [19] und die Dissertation von Schmidt [38] an.

Definition 5.0.4 (Charakteristische Funktion). *Die charakteristische Funktion $\phi_X(s) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{C}$ einer m -dimensionalen Zufallsvariablen X ist definiert als:*

$$\phi_X(s) := E[\exp(is^T X)], \quad s \in \mathbb{R}^m.$$

5.1 Spärische Verteilungen

Definition 5.1.1 (Spärische Verteilung). Ein m -dimensionaler Zufallsvektor X hat eine sphärische Verteilung, wenn für jede orthogonale Matrix $O \in \mathbb{R}^{m \times m}$ gilt:

$$X \stackrel{d}{=} OX. \quad (5.1)$$

In Fang et. al. [19] wird gezeigt, dass X genau dann zur Klasse der sphärischen Verteilungen gehört, wenn seine charakteristische Funktion $\phi_m(s)$, $s \in \mathbb{R}^m$, die Form

$$\phi_m(s) = \Phi_m(s^T s), \quad \Phi_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (5.2)$$

hat. Daher wird die Klasse der m -dimensionalen sphärischen Verteilungen die durch ein Φ_m induziert werden mit $S_m(\Phi)$ bezeichnet. Man nennt Φ_m den charakteristischen Generator von X . Wenn es aus dem Kontext ersichtlich ist wird der Index m weggelassen.

Neben der obigen Charakterisierung von sphärischen Verteilungen wurde auch eine stochastische Darstellung hergeleitet. Dazu wird zunächst die Menge der charakteristischen Generatoren m -dimensionaler sphärischer Verteilungen betrachtet:

$$\Omega_m := \{\Phi_m : \Phi_m(s^T s) \text{ ist eine } m\text{-dimensionale charakteristische Funktion}\}. \quad (5.3)$$

Satz 5.1.2. Sei X sphärisch verteilt mit charakteristischen Generator $\Phi_m \in \Omega_m$, dann hat X die Darstellung

$$X \stackrel{d}{=} R_m U^{(m)}, \quad (5.4)$$

wobei die Zufallsvariable $R_m \geq 0$ unabhängig von dem m -dimensionalen Zufallsvektor $U^{(m)}$ ist, der gleichverteilt ist auf der m -dimensionalen Einheitskugel $S_2^{m-1} = \{x \in \mathbb{R}^m : \|x\|_2 = 1\} \subset \mathbb{R}^m$.

Der Beweis für diesen Satz ist zum Beispiel in Fang, Kotz und Ng [19], Seite 29 f., zu finden.

Definition 5.1.3 (Erzeugende Zufallsvariable). Sei $X \in S_m(\Phi)$. In der Notation (5.4) heißt R_m die erzeugende Zufallsvariable von X . Ihre Verteilungsfunktion F_{R_m} wird erzeugende Verteilungsfunktion genannt.

Lemma 5.1.4. Für $1 \leq k \leq m$ sei $(X^{(k)}, X^{(m-k)})$ eine Zerlegung von $X \stackrel{d}{=} R_m U^{(m)} \in S_m(\Phi)$ mit $X^{(k)} \in \mathbb{R}^k$ und $X^{(m-k)} \in \mathbb{R}^{m-k}$. Dann gilt

$$X^{(k)} \in S_k(\Phi) \quad \text{und} \quad X^{(m-k)} \in S_{m-k}(\Phi). \quad (5.5)$$

Außerdem gilt

$$(X^{(k)}, X^{(m-k)})^T \stackrel{d}{=} (R_m D_1 U^{(k)}, R_m D_2 U^{(m-k)})^T, \quad (5.6)$$

wobei $(D_1)^2$ Beta $(\frac{k}{2}, \frac{m-k}{2})$ verteilt ist und $(D_2)^2 = 1 - (D_1)^2$. Desweiteren sind $U^{(k)}, U^{(m-k)}$ und $((D_1)^2, (D_2)^2)^T$ unabhängige Zufallsvektoren.

Einen Beweis dieses Lemmas findet man in Fang et. al. [19], Seite 33 f..

Bemerkung 5.1.5. *Eigenschaft 5.5 und die Symmetrie von charakteristischen Funktionen von sphärischen Verteilungen implizieren, dass alle Teilvektoren $X^{(k)}$, $1 \leq k \leq m$, von m -dimensionalen sphärisch verteilten Zufallsvektoren X wieder sphärisch verteilt sind und zwar mit demselben charakteristischen Generator.*

Aus 5.6 folgt, dass sich alle Randverteilungen gleicher Dimension entsprechen. Daher gilt für die eindimensionalen Randverteilungen F_i , $1 \leq i \leq m$:

$$F_1(x) = F_i(x), \quad i = 1, \dots, m, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (5.7)$$

Das folgende Lemma beschreibt die Beziehung zwischen einem Teilvektor eines sphärisch verteilten Zufallsvektors und seiner generierenden Zufallsvariablen.

Sei $X \in S_m(\Phi)$ und $X^{(k)} \in S_k(\Phi)$, $1 \leq k \leq m$, der dazugehörige Teilvektor. Sei außerdem R_k , $1 \leq k \leq m$, die erzeugende Zufallsvariable von X_k :

$$X_k \stackrel{d}{=} R_k U^{(k)}. \quad (5.8)$$

Lemma 5.1.6. *Wenn $X \in S_m(\Phi)$ und $X^{(k)} \in S_k(\Phi)$ die erzeugenden Zufallsvariablen R_m und R_k haben, dann gilt*

$$R_k = R_m B_k \quad (5.9)$$

wobei die Zufallsvariable B_k unabhängig von R_m ist und $0 \leq B_k \leq 1$. Für $1 \leq k < m$ gilt B_k^2 ist $\text{Beta}(\frac{k}{2}, \frac{m-k}{2})$ verteilt. Für $k = m$ ist $B_k \equiv 1$.

In den Abbildungen 5.1 - 5.3 sieht man die Dichten dreier 2- dimensionaler sphärischer Zufallsvektoren.

Bemerkung 5.1.7. *Mit Satz 5.1.2 ist intuitiv klar wie man sphärisch verteilte Zufallsvektoren simulieren kann. Allerdings kann man die Verteilungsfunktion von sphärischen Verteilungen nur in seltenen Fällen explizit angeben. Die Integrale die dabei berechnet werden müssen, können meist nur numerisch gelöst werden. Dies kann im Allgemeinen sehr aufwändig sein.*

Definition 5.1.8 (sphärische Copula). *Die Copula einer sphärischen Verteilung nennt man sphärische Copula.*

Da man die Verteilungsfunktionen von sphärisch verteilten Zufallsvektoren in den meisten Fällen nicht explizit angeben kann, besteht auch keine Möglichkeit mit Hilfe des Satzes von Sklar eine geschlossene Form der Copula analytisch herzuleiten.

5.1.1 Tail-Dependence für sphärische Verteilungen

Eine unmittelbare Konsequenz von Lemma 5.1.6 ist, dass eine erzeugende Variable R_m mit regulär variierendem Tail impliziert, dass auch die erzeugenden Variablen R_k , $1 \leq k \leq m$ der k -dimensionalen Teilvektoren regulär variierende Tails mit demselben Index haben:

Proposition 5.1.9. *Seien F_{R_m} und F_{R_k} die Verteilungsfunktionen der generierenden Variablen R_m und R_k die zu den Zufallsvektor $X \in S_m(\Phi)$ bzw. zu einem Teilvektor $X^{(k)} \in S_k(\Phi)$, $1 \leq k \leq m$, gehören. Wenn F_{R_m} einen regulär variierenden Tail besitzt, das heißt, dass $\overline{F}_{R_m} \in \mathcal{R}_{-\alpha}$ $\alpha > 0$, dann ist \overline{F}_{R_k} regulär variierend mit demselben Index, also $\overline{F}_{R_k} \in \mathcal{R}_{-\alpha}$.*

Einen Beweis hierzu findet man in Schmidt [38], Seite 35.

Bemerkung 5.1.10. *Auf ähnliche Weise kann man zeigen, dass die Dichte f_{R_k} $1 \leq k \leq m$, die zu F_{R_k} gehört regulär variierend mit Index $-\alpha-1$ ist, das heißt, dass $f_{R_k} \in \mathcal{R}_{-\alpha-1}$, $\alpha > 0$, wenn die Dichte f_{R_m} von F_{R_m} regulär variierend mit demselben Index ist, also $f_{R_m} \in \mathcal{R}_{-\alpha-1}$, $\alpha > 0$.*

Definition 5.1.11 (Taubersche Bedingung). *Man sagt, eine meßbare Funktion $h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ erfüllt die Taubersche Bedingung, wenn gilt*

$$\lim_{\eta \rightarrow 1^+} \liminf_{x \rightarrow \infty} \inf_{t \in [1, \eta]} (h(tx) - h(x)) \geq 0. \quad (5.10)$$

Bemerkung 5.1.12. *Die obige Bedingung ist äquivalent zu der Bedingung, dass h eine langsam fallende Funktion ist (siehe Bingham, Goldie und Teugels [1]).*

Mit der Tauberschen Bedingung folgt die Gegenrichtung von Proposition 5.1.9

Proposition 5.1.13. *Seien F_{R_m} und F_{R_k} die Verteilungsfunktionen der generierenden Variablen R_m und R_k die zu den Zufallsvektor $X \in S_m(\Phi)$ bzw. zu einem Teilvektor $X^{(k)} \in S_k(\Phi)$, $1 \leq k \leq m$, gehören. Wenn für ein k , $k \in \{1, \dots, m\}$, F_{R_k} einen regulär variierenden Tail besitzt, das heißt, dass $\overline{F}_{R_k} \in \mathcal{R}_{-\alpha}$, $\alpha > 0$, und wenn $x^\alpha \overline{F}_{R_m}$ die Taubersche Bedingung erfüllt, dann ist auch \overline{F}_{R_m} regulär variierend mit demselben Index, also $\overline{F}_{R_m} \in \mathcal{R}_{-\alpha}$.*

Bemerkung 5.1.14. *Ob man die Taubersche Bedingung in Proposition 5.1.13 wegfällen lassen kann ist bisher nicht bekannt (siehe Schmidt [38], Seite 38). Allerdings ist sie nicht sehr einschränkend, da sie von vielen Funktionen erfüllt wird, zum Beispiel von den stetig differenzierbaren Verteilungsfunktionen.*

Proposition 5.1.15. *Sei $X \stackrel{d}{=} R_m U^{(m)} \in S_m(\Phi)$. Angenommen die Verteilungsfunktion F_{R_m} hat einen regulär variierenden Tail, also $\overline{F}_{R_m} \in \mathcal{R}_{-\alpha}$, $\alpha > 0$, dann sind auch die Überlebensfunktionen $\overline{F}_1 = \overline{F}_i$, $1 \leq i \leq m$ der univariaten Randverteilungen von X regulär variierend mit demselben Index.*

Wenn $X \in S_m(\Phi)$ eine Dichte besitzt, dann hat diese nach der Definition der sphärischen Verteilungen 5.1.1 folgende Form:

$$g(x^T x), \quad g : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \quad \text{meßbar.} \quad (5.11)$$

Definition 5.1.16 (Dichtegenerator). *Wenn $X \in S_m(\Phi)$ eine Dichte $g(x^T x)$ besitzt, dann heißt g der Dichtegenerator von X und wir schreiben $X \in S_m(g)$.*

Der Dichtegenerator einer sphärischen Verteilung steht in Beziehung zu der Dichte seiner erzeugenden Variable.

Lemma 5.1.17. *Der Zufallsvektor $X \stackrel{d}{=} R_m U^{(m)} \in S_m(\Phi)$ besitzt einen Dichtegenerator g genau dann, wenn R_m eine Dichte f_{R_m} besitzt. Die beiden Dichten hängen folgendermaßen zusammen:*

$$f_{R_m}(r) = \frac{2\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2})} r^{m-1} g(r^2), \quad r \geq 0. \quad (5.12)$$

Unmittelbar daraus folgt:

Proposition 5.1.18. *Der Zufallsvektor $X \stackrel{d}{=} R_m U^{(m)} \in S_m(\Phi)$ hat einen regulär variierenden Dichtegenerator $g \in \mathcal{R}_{(-\alpha-m)/2}$, $\alpha > 0$, genau dann, wenn R_m eine regulär variierende Dichte $f_{R_m} \in \mathcal{R}_{-\alpha-1}$, $\alpha > 0$ hat.*

Satz 5.1.19. *Sei $X \stackrel{d}{=} R_m U^{(m)} \in S_m(\Phi)$, $m \geq 2$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

1. R_m ist regulär variierend mit Index $-\alpha > 0$.
2. X ist regulär variierend mit Index $-\alpha > 0$.
3. Alle bivariaten Randverteilungen von X haben die Tail-Dependence Eigenschaft.

In dem Beweis für Satz 5.1.19, der in Hult und Lindskog [26] zu finden ist, wird auch eine Formel für die Tail-Dependence hergeleitet. Die Tail-Dependence ist wegen der Symmetrie der sphärischen Verteilung für alle bivariaten Randverteilungen gleich. Außerdem ist die upper Tail-Dependence hier wegen der Radialsymmetrie der sphärischen Verteilungen gleich der lower Tail-Dependence.

Satz 5.1.20. *Die Tail-Dependence λ ist für sphärische Verteilungen:*

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^{1/\sqrt{2}} \overline{F}_{R_2}\left(\frac{x}{u}\right) \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du}{\int_0^1 \overline{F}_{R_2}\left(\frac{x}{u}\right) \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du} = \frac{\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{u^\alpha}{\sqrt{1-u^2}} du}{\int_0^1 \frac{u^\alpha}{\sqrt{1-u^2}} du} \in (0, 1], \quad (5.13)$$

wobei \overline{F}_{R_2} die Überlebensfunktion von R_2 und $-\alpha$ der Index der regulären Variation von R_2 ist.

5.2 Elliptische Verteilungen

Nachdem der Zusammenhang zwischen regulärer Variation und der Tail-Dependence im Fall von sphärischen Verteilungen aufgezeigt wurde, wird nun versucht die erhaltenen Ergebnisse auf elliptische Verteilungen auszudehnen.

Definition 5.2.1 (Elliptische Verteilung). *Man sagt, ein m -dimensionaler Zufallsvektor X ist elliptisch verteilt mit den Parametern $\mu \in \mathbb{R}^m$ und $\Sigma^{m \times m}$, wenn gilt:*

$$X \stackrel{d}{=} \mu + A^T Y. \quad (5.14)$$

Dabei ist $Y \in S_k(\Phi)$, $k \leq m$ ein k -dimensionaler sphärisch verteilter Zufallsvektor, $A \in \mathbb{R}^{k \times m}$ mit $A^T A = \Sigma$, $\text{rang}(\Sigma) = k$. Mit $E_m(\Sigma, \Phi, \mu)$ wird die Familie aller m -dimensionalen elliptisch verteilten Zufallsvektoren mit den Parametern Σ und μ und dem charakteristischen Generator Φ bezeichnet.

Entsprechend der stochastischen Darstellung von sphärischen Verteilungen, kann man jeden m -dimensionalen elliptisch verteilten Zufallsvektor $X \in E_m(\Sigma, \Phi, \mu)$ mit Parametern μ und positiv semidefiniter Matrix Σ , $\text{rang}(\Sigma) = k$, $k \leq m$ darstellen durch

$$X \stackrel{d}{=} \mu + R_k A^T U^{(k)}, \quad (5.15)$$

wobei $A^T A = \Sigma$ und die Zufallsvariable $R_k \geq 0$ unabhängig von dem k -dimensionalen Zufallsvektor $U^{(k)}$ ist. Weiterhin bezeichnet $U^{(k)}$ einen Zufallsvektor der gleichmäßig auf der Einheitssphäre S_2^{k-1} im \mathbb{R}^k verteilt ist.

Eine äquivalente Definition der elliptischen Verteilungen benutzt die charakteristische Funktion

Lemma 5.2.2. *Sei X ein m -dimensionaler Zufallsvektor und $\Sigma^{m \times m}$ eine positiv semidefinite Matrix. Wenn für ein $\mu \in \mathbb{R}^m$ $X - \mu$ eine charakteristische Funktion der Form*

$$\phi_{X-\mu}(t) = \Phi(t^T \Sigma t), \quad \Phi: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R} \quad (5.16)$$

hat, dann heißt X elliptisch verteilt mit den Parametern Σ , μ und Φ .

Der nächste Satz zeigt, dass jede Linearkombination von elliptischen Zufallsvariablen wieder elliptisch verteilt ist.

Satz 5.2.3. *Sei $X \sim E_m(\Sigma, \Phi, \mu)$ mit $\text{rang}(\Sigma) = k$, B ist eine $m \times n$ Matrix und v ist ein $n \times 1$ Vektor, dann gilt*

$$v + B^T X \sim E_n(B^T \Sigma B, \Phi, v + B^T \mu) \quad (5.17)$$

Der Beweis folgt direkt durch die stochastische Darstellung der Linearkombination. Seien nun X, μ, Σ wie folgt zerlegt:

$$X = \begin{pmatrix} X^{(1)} \\ X^{(2)} \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} \mu^{(1)} \\ \mu^{(2)} \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}, \quad (5.18)$$

wobei $X^{(1)}$ und $\mu^{(1)}$ n -dimensionale Vektoren und Σ_{11} eine $n \times n$ Matrix ist. Das folgende Korollar liefert die marginalen Verteilungen, die wiederum elliptisch sind.

Korollar 5.2.4. *Sei $X \sim E_m(\Sigma, \Phi, \mu)$, dann ist $X^{(1)} \sim E_n(\Sigma_{11}, \Phi, \mu^{(1)})$ und $X^{(2)} \sim E_{m-n}(\Sigma_{22}, \Phi, \mu^{(2)})$.*

Beispiel 5.2.5. *Sei $X \sim E(\mu, \Sigma, g)$ also $X \stackrel{d}{=} \mu + A^T Y$ mit $Y \in S_k(g)$, mit Dichtegenerator g der Form*

$$g(u) = C_m u^{N-1} \exp(-ru^s), \quad r, s > 0, 2N + m > 2, \quad (5.19)$$

wobei C_m eine normalisierende Konstante ist. Dann sagt man X hat eine symmetrische Kotz Verteilung. Die Normalverteilung ist in dieser Familie von Verteilungen enthalten und die Standardnormalverteilung ergibt sich für die Werte $N=1=s=2r$.

Die multivariate Normalverteilung ist also eine elliptische Verteilung.

Beispiel 5.2.6. *Sei wieder $X \sim E(\mu, \Sigma, g)$. Wenn der Dichtegenerator g die Form*

$$g(t) = C_m (1 + t/n)^{-N}, \quad N > m/2, \quad n > 0 \quad (5.20)$$

hat, dann sagt man X ist symmetrisch Pearson Typ VII verteilt. Wie man sehen kann variiert X dann regulär mit Index $-N$. Die Multivariate t -Verteilung ist mit dem Spezialfall $N = \frac{n+m}{2}$ in dieser Familie enthalten.

Also ist auch die mehrdimensionale t -Verteilung eine elliptische Verteilung.

Die Abbildungen 5.4- 5.6 zeigen die Dichten von 2-dimensionalen elliptischen Zufallsvariablen. Die erzeugende Zufallsvariable hat einmal eine Standardexponential- und zweimal eine GPD(0.5) Verteilung. Die Varianzen sind jedesmal gleich; die Korrelation wechselt von 0.7 zu 0.9.

Definition 5.2.7 (elliptische Copula). *Die Copula einer elliptischen Verteilung nennt man elliptische Copula.*

Genauso wie bei den sphärischen Verteilungen kann man die elliptischen Verteilungsfunktionen nur selten analytisch berechnen. Daher kann man die Copula einer elliptischen Verteilung auch nur in einzelnen Fällen explizit angeben. Einer dieser Fälle, in denen man die Copula analytisch berechnen kann, ist der der Gaußcopula.

Beispiel 5.2.8 (Gaußcopula). *Seien $N_{\boldsymbol{\rho}}^m$ die gemeinsame Verteilungsfunktion der m -variaten Standardnormalverteilung mit linearer Korrelationsmatrix $\boldsymbol{\rho}$ und N_1^{-1} die Quantilfunktion der univariaten Standardnormalverteilung. Dann ist die Copula der m -variaten Normalverteilung mit Korrelationsmatrix $\boldsymbol{\rho}$ gegeben durch*

$$C_{\boldsymbol{\rho}}^{Ga}(\mathbf{u}) = N_{\boldsymbol{\rho}}^m(N_1^{-1}(u_1), \dots, N_1^{-1}(u_m)). \quad (5.21)$$

Copulae dieser Form nennt man auch Gaußcopulae. Im bivariaten Fall kann man die Copula schreiben als

$$C_{\boldsymbol{\rho}}^{Ga}(u, v) = \int_{-\infty}^{N_1^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{N_1^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi(1 - \rho_{12}^2)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{s^2 - 2\rho_{12}st + t^2}{2(1 - \rho_{12}^2)}\right\} ds dt. \quad (5.22)$$

Dabei ist ρ_{12} der lineare Korrelationskoeffizient der entsprechenden bivariaten Normalverteilung.

Ein weiterer Fall, in dem man die Copula analytisch berechnen kann ist der der t -Copula.

Beispiel 5.2.9 (t -Copula). *Wir beginnen mit der stochastischen Darstellung eines m -dimensional t -verteilten Zufallsvektors Y .*

Seien $Z \sim N_m(\mathbf{0}, \Sigma)$ und $R = \sqrt{\nu}/\sqrt{S}$, mit $S \sim \chi_{\nu}^2$ (eine Chi-Quadrat verteilte Zufallsvariable mit ν Freiheitsgraden) unabhängig. Dann hat der \mathbb{R}^m -wertige Zufallsvektor X , mit

$$X = RZ \quad (5.23)$$

eine zentrierte t -Verteilung $t_{\nu, \boldsymbol{\rho}}^m$ mit ν Freiheitsgraden. Nach Sklars Satz 3.1.10 ist die Copula von X dann gegeben durch

$$C_{\nu, \boldsymbol{\rho}}^t(\mathbf{u}) = t_{\nu, \boldsymbol{\rho}}^m(t_{\nu}^{-1}(u_1), \dots, t_{\nu}^{-1}(u_m)), \quad (5.24)$$

wobei $\rho_{ij} = \Sigma_{ij}/\sqrt{\Sigma_{ii}\Sigma_{jj}}$ für $i, j \in \{1, \dots, m\}$, und $t_{\nu, \boldsymbol{\rho}}^m$ die Verteilungsfunktion von $\sqrt{\nu}Z/\sqrt{S}$ ist, mit $S \sim \chi_{\nu}^2$ und $Z \sim N_m(\mathbf{0}, \boldsymbol{\rho})$ unabhängig (also eine multivariate t -Verteilungsfunktion), und t_{ν} die univariate Randverteilung von $t_{\nu, \boldsymbol{\rho}}^m$ ist (also eine ein-dimensionale t -Verteilung mit ν Freiheitsgraden).

Im bivariaten Fall kann man die Copula schreiben als

$$C_{\nu, \rho}^t(u, v) = \int_{-\infty}^{t_\nu^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{t_\nu^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi(1-\rho_{12}^2)^{1/2}} \left\{ 1 + \frac{s^2 - 2\rho_{12}st + t^2}{\nu(1-\rho_{12}^2)} \right\}^{-(\nu+2)/2} ds dt. \quad (5.25)$$

Man beachte das ρ_{12} einfach nur der lineare Korrelationskoeffizient der entsprechenden bivariaten t_ν -Verteilung ist, wenn $\nu > 2$.

Die Dichte der t -Copula ist gegeben durch

$$c_{\nu, \rho}^t(u_1, \dots, u_m) = \frac{1}{\sqrt{\det \rho}} \frac{\Gamma(\frac{\nu+m}{2})\Gamma(\frac{\nu}{2})^{m-1} \prod_{i=1}^m (1 + \frac{x_i^2}{\nu})^{\frac{\nu+1}{2}}}{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})^m (1 + \frac{x^T \rho^{-1} x}{\nu})^{\frac{\nu+m}{2}}}, \quad (5.26)$$

wobei $x_k = t_\nu^{-1}(u_k)$.

Beispiele für Dichten von t -Copulae sind in den Abbildungen 5.7 bis 5.9 zu finden.

Seien nun H_1, \dots, H_m beliebige stetige, streng monoton steigende Verteilungsfunktionen und X gegeben wie in 5.23 wobei Σ eine Korrelationsmatrix sei. Dann hat

$$Y = (H_1^{-1}(t_\nu(X_1)), \dots, H_m^{-1}(t_\nu(X_m)))^T \quad (5.27)$$

eine $t_{\nu, \Sigma}$ -Copula und univariate Randverteilungen H_1, \dots, H_m . Man nennt dann die Verteilung von Y eine meta- t Verteilung (siehe Fang, Fang, und Kotz 2002 [18]). Man beachte, dass Y genau dann eine t -Verteilung hat, wenn H_1, \dots, H_m eindimensionale t_ν -Verteilungsfunktionen sind.

Eine gruppierte t -Copula ist keine elliptische Copula. Da aber einzelne Teilvektoren eines Vektors mit gruppierter t -Copula jeweils t -Copulae haben, wird auch diese Copula schon hier eingeführt.

Beispiel 5.2.10 (Gruppierte t -Copula). Seien $Z \sim N_J(\mathbf{0}, \rho)$ mit einer beliebigen Korrelationsmatrix ρ und $U \sim U(0, 1)$ unabhängig. Außerdem sei mit G_ν die Verteilungsfunktion von $\sqrt{\nu/S}$, mit $S \sim \chi_\nu^2$ bezeichnet. $\{1, \dots, J\}$ sei in L Untergruppen der Größen s_1, \dots, s_L aufgeteilt. Sei $R_l = G_\nu^{-1}(U)$ für $l = 1, \dots, L$. Wenn

$$X = (R_1 Z_1, \dots, R_1 Z_{s_1}, R_2 Z_{s_1+1}, \dots, R_2 Z_{s_1+s_2}, \dots, R_L Z_{s_1+\dots+s_{L-1}+1}, \dots, R_L Z_J)^T, \quad (5.28)$$

dann hat der Zufallsvektor $(X_1, \dots, X_{s_1})^T$ eine s_1 -dimensionale t -Verteilung mit ν_1 Freiheitsgraden, und für $l = 1, \dots, L-1$ hat der Zufallsvektor $(X_{s_1+\dots, s_l+1}, \dots, X_{s_1+\dots, s_{l+1}})^T$ eine s_{l+1} -dimensionale t -Verteilung mit ν_{l+1} Freiheitsgraden. Zuletzt sei noch mit F_k^X die Verteilungsfunktion der X_k , $1 \leq k \leq J$ bezeichnet, und H_1, \dots, H_J beliebige stetige streng monoton steigende Verteilungsfunktionen. Dann ist

$$Y = (H_1^{-1}(F_1^X(X_1)), \dots, H_J^{-1}(F_J^X(X_J)))^T \quad (5.29)$$

eine Verallgemeinerung des meta- t Modells 5.27, die verschiedene Freiheitsgradparameter für verschiedene Untergruppen des Vektors Y zulässt. Die Copula von Y wird gruppierte

t-Copula genannt. Man beachte, dass für $L = 1$ und $\nu_1 = \nu$ Y eine meta- t Verteilung hat, und für zusätzlich $m = J$ und $\Sigma = \boldsymbol{\rho}$ sogar gleich in Verteilung ist wie (5.27).

Man kann die gruppierte t -Copula in einer ähnlichen Form wie 5.25 ausdrücken. Allerdings glauben wir, dass man die Eigenschaften der gruppierten t -Copula am besten anhand 7.1 und der obigen stochastischen Darstellung verstehen kann. Außerdem bedarf es zur Kalibrierung der gruppierten t -Copula (siehe Kapitel 7), und zur Simulation davon nicht des expliziten Copulaausdrucks.

5.2.1 Korrelation für elliptische Verteilungen

Wie allgemein bekannt ist, kann man die Momente einer Verteilung, gesetzt sie existieren, mit Hilfe ihrer charakteristischen Funktion berechnen. Für das zweite Moment gilt:

$$E[X^T X] = - \left(\frac{\partial^2}{\partial t_i \partial t_j} \phi_X(0) \right)_{i,j=1,\dots,m}. \quad (5.30)$$

Als Konsequenz bestimmt der charakteristische Generator Φ_X die Kovarianz eines elliptisch verteilten Zufallsvektors.

Bekanntlich lässt sich die Kovarianzmatrix zerlegen:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \cdots & \Sigma_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \Sigma_{m1} & \cdots & \Sigma_{mm} \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

$$= \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_m) \begin{bmatrix} \rho_{11} & \cdots & \rho_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \rho_{m1} & \cdots & \rho_{mm} \end{bmatrix} \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_m) \quad (5.32)$$

$$= \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_m) \Sigma_\rho \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_m), \quad (5.33)$$

wobei $\text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$ eine Diagonalmatrix mit den Einträgen $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ bezeichnet, und

$$\sigma_i := \sqrt{\Sigma_{ii}}, \quad 1, \dots, m. \quad (5.34)$$

Die Einträge ρ_{ij} der Korrelationsmatrix Σ_ρ sind definiert durch:

$$\rho_{ij} := \frac{\Sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}, \quad i, j = 1, \dots, m. \quad (5.35)$$

5.2.2 Kendall's Tau für elliptische Verteilungen

Das folgende Ergebnis war für normalverteilte Zufallsvektoren schon bekannt und konnte von Lindskog, McNeil und Schmock [31] auf elliptische Verteilungen ausgedehnt werden.

Satz 5.2.11 (Lindskog, McNeil und Schmock, 2001). Sei $X \in E_m(\Sigma, \Phi, 0)$ elliptisch verteilt. Für je zwei Komponenten X_i, X_j ist Kendall's Tau:

$$\tau(X_i, X_j) = \tau_{ij} = \frac{2}{\pi} \arcsin \rho_{ij}. \quad (5.36)$$

Wichtig an diesem Resultat ist, dass Kendalls τ weder vom charakteristischen Generator noch von der Form der Verteilung abhängt. Einzig und allein die Korrelation ρ_{ij} ist Ausschlag gebend.

5.2.3 Tail-Dependence für elliptische Verteilungen

Elliptische Verteilungen entstehen durch eine Koordinatentransformation aus den sphärischen Verteilungen. Daher erwartet man, dass hier ähnliches für die Tail-Dependence gilt. Das Vorgehen ist nun das gleiche wie bei den sphärischen Verteilungen. Zunächst wird das Lemma 5.1.6 auf elliptische Verteilungen verallgemeinert:

Lemma 5.2.12. Sei X nicht degeneriert.

1. Wenn $X \in E_m(\Sigma, \Phi, \mu)$ und $X \in E_m(\Sigma_1, \Phi_1, \mu_1)$, dann existiert eine Konstante $c > 0$ so, das

$$\mu_1 = \mu, \quad \Sigma_1 = c\Sigma, \quad \Phi_1(\cdot) = \Phi(c^{-1}\cdot). \quad (5.37)$$

2. Wenn $X \stackrel{d}{=} \mu + R_k A^T U^{(k)} \stackrel{d}{=} \mu^* + R_{k^*} A^{*T} U^{(k^*)}$, mit $k^* \leq k \leq m$, dann existiert eine Konstante $c > 0$ so, dass

$$\mu^* = \mu, \quad A^{*T} A^* = c A^T A, \quad R_{k^*} \stackrel{d}{=} c^{-1/2} R_k B, \quad (5.38)$$

wobei $B \geq 0$ unabhängig von R_k ist und $B^2 \sim \text{Beta}(\frac{1}{2}k^*, \frac{1}{2}(k - k^*))$, wenn $k > k^*$ und $B \equiv 1$ sonst.

Dieses Lemma zeigt, dass μ, Σ und Φ nur dann eindeutig bestimmt sind, wenn man noch zusätzlich eine Normierungsbedingung wie $|\Sigma| = 1$, oder ähnliches fordert.

Lemma 5.2.13. Sei $X \in E_m(\Sigma, \Phi, \mu)$ mit stochastischer Darstellung $X \stackrel{d}{=} \mu + A^T Y$ $Y \in S_k(\Phi)$, $1 \leq k \leq m$, $A \in \mathbb{R}^{k \times m}$ und $A^T A = \Sigma$. Wenn $\hat{A} \in \mathbb{R}^{k \times m}$ mit $\hat{A}^T \hat{A} = \Sigma$, dann gilt $X \stackrel{d}{=} \mu + \hat{A}^T Y$.

Beweis:

$$E e^{it^T A^T X} = E e^{i(tA)^T X} = \Phi((At)^T (At)) = \Phi(t\Sigma t) = \Phi((\hat{A}t)^T (\hat{A}t)) = E e^{it^T \hat{A}^T X} \quad (5.39)$$

Der Satz über die Eindeutigkeit der charakteristischen Funktion liefert das Ergebnis. \square

Aus

$$\text{Cov}(X) = \text{Cov}(R_k A^T U^{(k)}) = E(R_k^2) A^T \text{Cov}(U^{(k)}) A \quad (5.40)$$

folgt mit

$$\text{Cov}(U^{(k)}) = \frac{\text{diag}(1, \dots, 1)}{k} \quad (5.41)$$

für die Kovarianz von X

$$\text{Cov}(X) = \Sigma \frac{E(R_k^2)}{\text{rang}(\Sigma)}. \quad (5.42)$$

Deshalb gilt:

Korollar 5.2.14. Sei $X \stackrel{d}{=} \mu + R_k A^T U^{(k)} \sim E_m(\Sigma, \Phi, \mu)$. Wenn $E(R_k^2) < \infty$, dann existiert immer eine Darstellung

$$\text{Cov}(X) = \Sigma. \quad (5.43)$$

das heißt, es gilt $X \sim E_m(\text{Cov}(X), \phi(\frac{\text{rang}(\Sigma)}{E(R_k^2)}, \mu))$.

Satz 5.2.15. Sei $X \in E_m(\Sigma, \Phi, \mu)$ $m \geq 2$ mit $\Sigma_{ii} > 0$, $1 \leq i \leq m$, $|\rho_{ij}| < 1$ für alle $i \neq j$ und stochastischer Darstellung $X \stackrel{d}{=} \mu + A^T Y \stackrel{d}{=} \mu + R_m A^T U^{(m)}$. Dann gelten:

1. R_m ist regulär variierend mit Index $-\alpha$.
2. X ist regulär variierend mit Index $-\alpha$.
3. Alle bivariaten Randverteilungen von X haben die Tail-Dependence Eigenschaft.

Elliptische Verteilungen sind symmetrisch, daher ist der Index $-\alpha$ der regulären Variation des rechten Tails \bar{F}_i gleich dem des linken Tails F_i .

Satz 5.2.16. Sei $X \in E_m(\Sigma, \Phi, \mu)$ ein elliptisch verteilter Zufallsvektor mit regulär variierenden Tails mit Index $-\alpha$, $\alpha > 0$. Für zwei Komponenten X_i, X_j lautet der Koeffizient der Tail-Dependence

$$\lambda(\alpha, \rho_{ij}) = \frac{\int_0^{f(\rho_{ij})} \frac{u^\alpha}{\sqrt{1-u^2}} du}{\int_0^1 \frac{u^\alpha}{\sqrt{1-u^2}} du}, \quad \alpha > 0, \quad f(\rho_{ij}) = \sqrt{\frac{1 + \rho_{ij}}{2}}. \quad (5.44)$$

Der Beweis ist in Schmidt [38], Seite 50 f. zu finden.

Bemerkung 5.2.17. Der Index der regulären Variation $-\alpha$ ist eine Eigenschaft der Familie der elliptischen Verteilungen, aus der die Copula stammt. Die Tail-Dependence und Kendall's Tau sind Copulaparameter. Nach dem Satz von Sklar ist es möglich, mittels einer gegebenen Copula neue multivariate Verteilungen mit beliebigen Randverteilungen, aber gleicher Abhängigkeitsstruktur zu konstruieren. Für diese Verteilungen ist $-\alpha$ nicht mehr der Index der regulären Variation der univariaten Randverteilungen, sondern ein Copulaparameter.

Durch eine Substitution $u = \cos v$ in 5.44 erhält man für den Koeffizienten der Tail-Dependence

$$\lambda(\alpha, \rho_{ij}) = \frac{\int_{g(\rho_{ij})}^{\frac{\pi}{2}} \cos^\alpha v dv}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^\alpha v dv}, \quad \alpha > 0, \quad g(\rho_{ij}) = \arccos \sqrt{\frac{1 + \rho_{ij}}{2}}. \quad (5.45)$$

Nach Satz 5.2.11 gilt

$$\tau(X_i, X_j) = \frac{2}{\pi} \arcsin \rho_{ij}. \quad (5.46)$$

Mit $\rho_{ij} = \sin(\frac{\pi}{2}\tau_{ij})$ folgt dann:

$$\lambda(\alpha, \tau_{ij}) = \frac{\int_{h(\tau_{ij})}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\alpha} v \, dv}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\alpha} v \, dv}, \quad \alpha > 0, \quad h(\tau_{ij}) = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1 - \tau_{ij}}{2} \right). \quad (5.47)$$

Bemerkung 5.2.18. Die Tail-Dependence einer bivariaten Randverteilung eines elliptisch verteilten Zufallsvektors wird also eindeutig durch den Index der regulären Variation $-\alpha$ und durch den Korrelationskoeffizienten oder Kendall's Tau von dem entsprechenden Komponenten bestimmt.

Beispiel 5.2.19. Sei \mathbf{X} m -dimensional t -Verteilt mit Erwartungswert $\mathbf{0}$, Kovarianzmatrix \mathbf{I}_m und ν Freiheitsgraden. \mathbf{X} hat also folgende stochastische Darstellung:

$$\mathbf{X} = \sqrt{\frac{\nu}{S^2}} Z \quad (5.48)$$

mit $Z \sim N_m(\mathbf{0}, \mathbf{I}_m)$ unabhängig von $S^2 \sim \chi_{\nu}^2$. Das kann man mit Hilfe der stochastischen Darstellung von normalverteilten Zufallsvektoren umschreiben in:

$$\mathbf{X} = \sqrt{\frac{\nu}{S^2}} \sqrt{T^2} U^{(m)} = R_m U^{(m)}, \quad (5.49)$$

wobei $T^2 \sim \chi_m^2$ unabhängig von den anderen Variablen ist. Somit hat R_m/\sqrt{m} eine F -Verteilung mit Freiheitsgraden m und ν . Da χ_{ν} regulär variierend bei 0 mit Index ν ist, ist \bar{F}_{R_m} regulär variierend bei ∞ mit Index $-\nu$. Somit ist nach Satz 5.2.15 auch \mathbf{X} regulär variierend mit Index $-\nu$. Bei Student- t -verteilten Zufallsvariablen entspricht also die Anzahl der Freiheitsgrade ν dem negativen des Index der regulären Variation, also $\nu = \alpha$. Desweiteren kann man 5.44 im Falle einer t -Copula vereinfachen zu $(\bar{t}_{\nu+1}(x) = 1 - t_{\nu+1}(x))$:

$$\lambda(\nu, \rho_{ij}) = 2\bar{t}_{\nu+1}(\sqrt{\nu+1}\sqrt{1-\rho_{ij}}/\sqrt{1+\rho_{ij}}) > 0, \quad (5.50)$$

im Gegensatz zur Gauß-Copula, für die $\lambda = 0$ gilt (Beweis: siehe Embrechts, McNeil und Straumann [17]). Aus dem obigen Ausdruck ist auch ersichtlich, dass die Tail-Dependence steigend in ρ_{ij} ist, und wie man vermuten würde, da die t -Verteilung für $\nu \rightarrow \infty$ gegen die Normalverteilung konvergiert, fallend in ν ist. Außerdem konvergiert die Tail-Dependence für $\rho_{ij} < 1$ gegen null für $\nu \rightarrow \infty$.

Dieses Beispiel ist leicht auf den Fall einer m -dimensionalen t -Verteilung mit Erwartungswert μ und Kovarianzmatrix $\Sigma = AA^T$ mit $\text{rank}(A) = m$ ausdehnbar. Das Ergebnis bleibt das Gleiche: Sowohl R_m als auch \mathbf{X} sind wieder regulär variierend bei ∞ mit Index $-\nu$ und die bivariaten Randverteilungen haben die Tail-Dependence Eigenschaft.

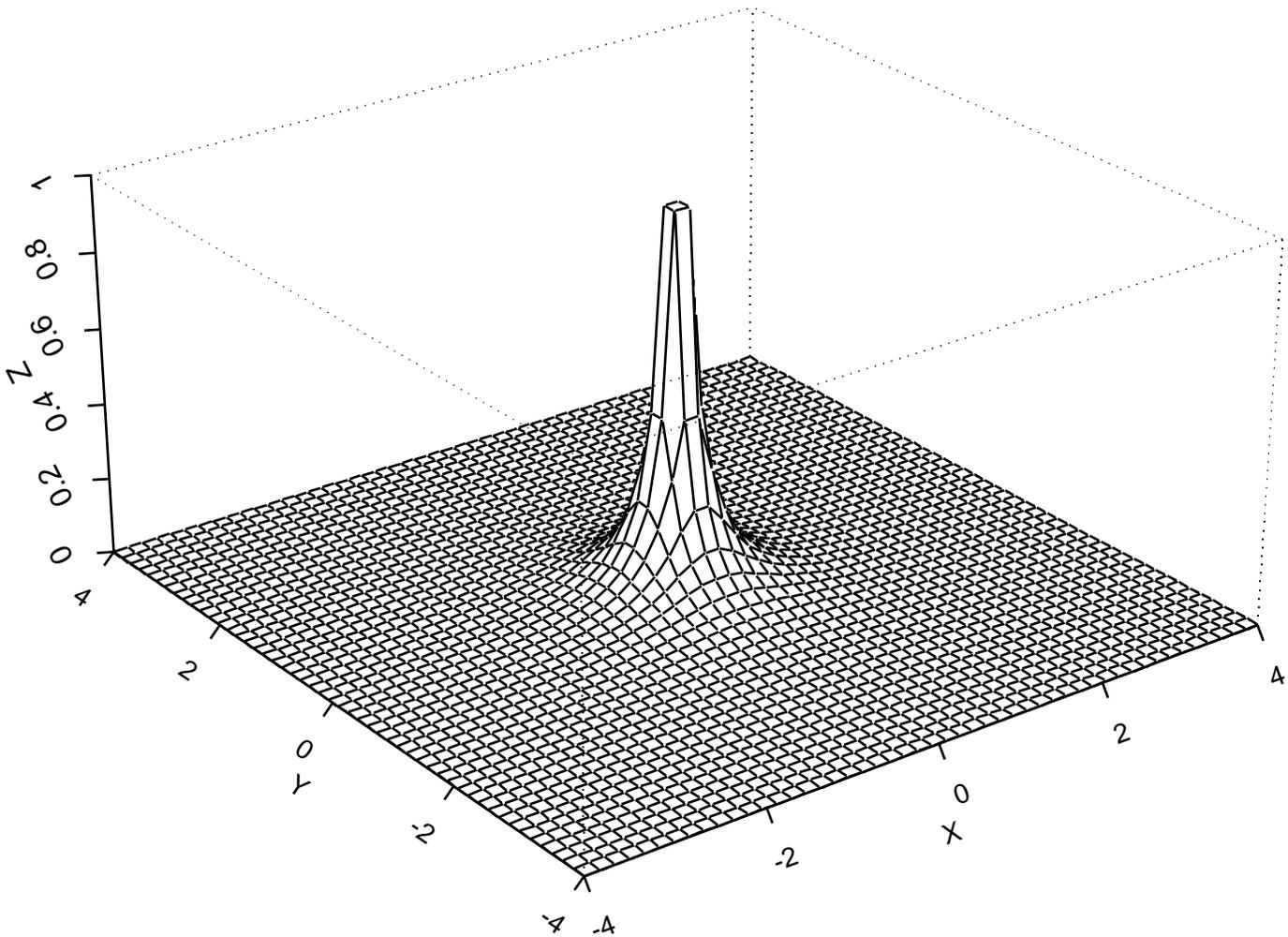


Abbildung 5.1: Dichte einer 2-dimensionalen sphärischen Verteilung, deren erzeugende Zufallsvariable eine $\exp(1)$ Verteilung hat

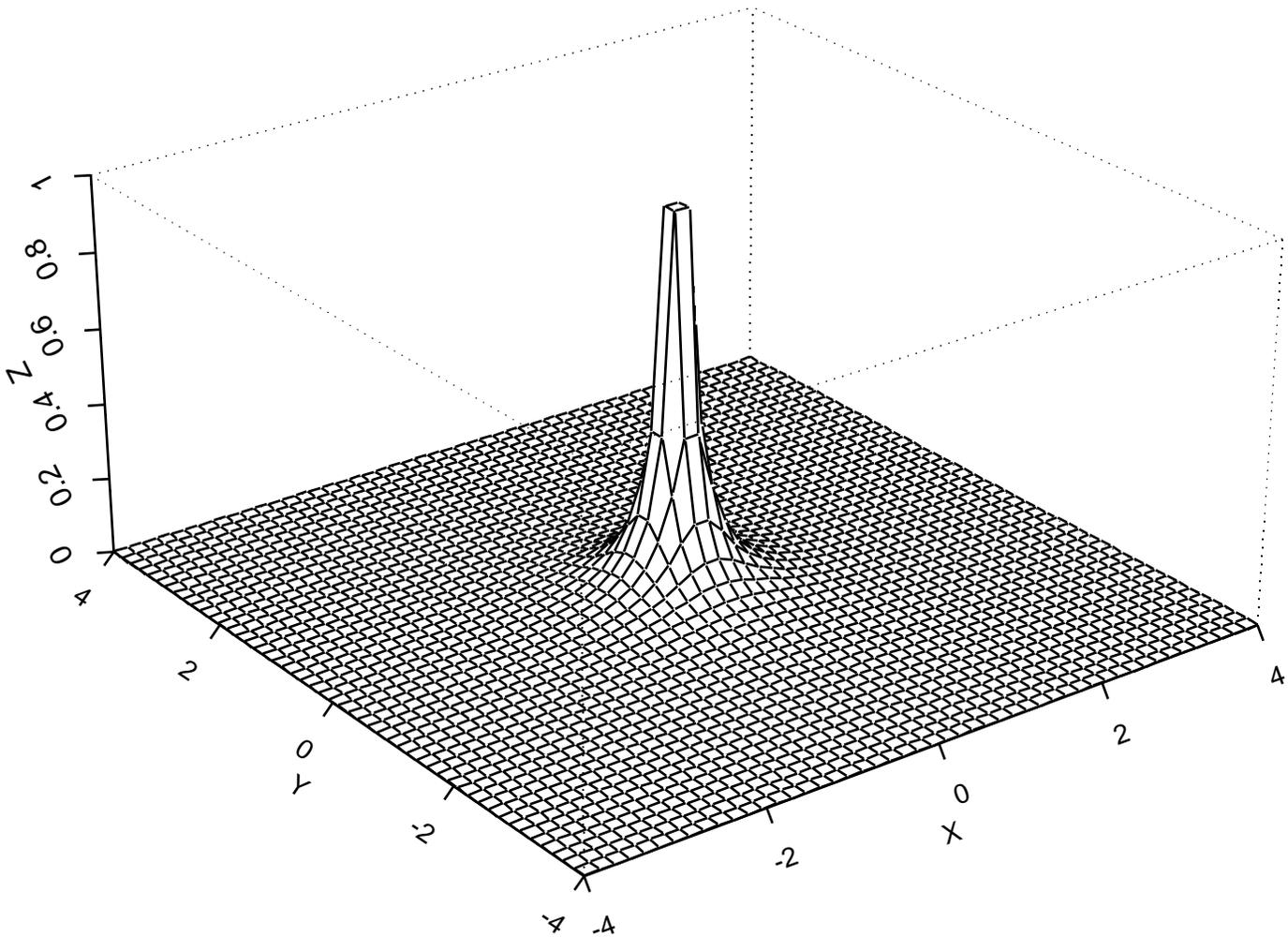


Abbildung 5.2: Dichte einer 2-dimensionalen sphärischen Verteilung, deren erzeugende Zufallsvariable eine $GPD(0.5)$ Verteilung hat

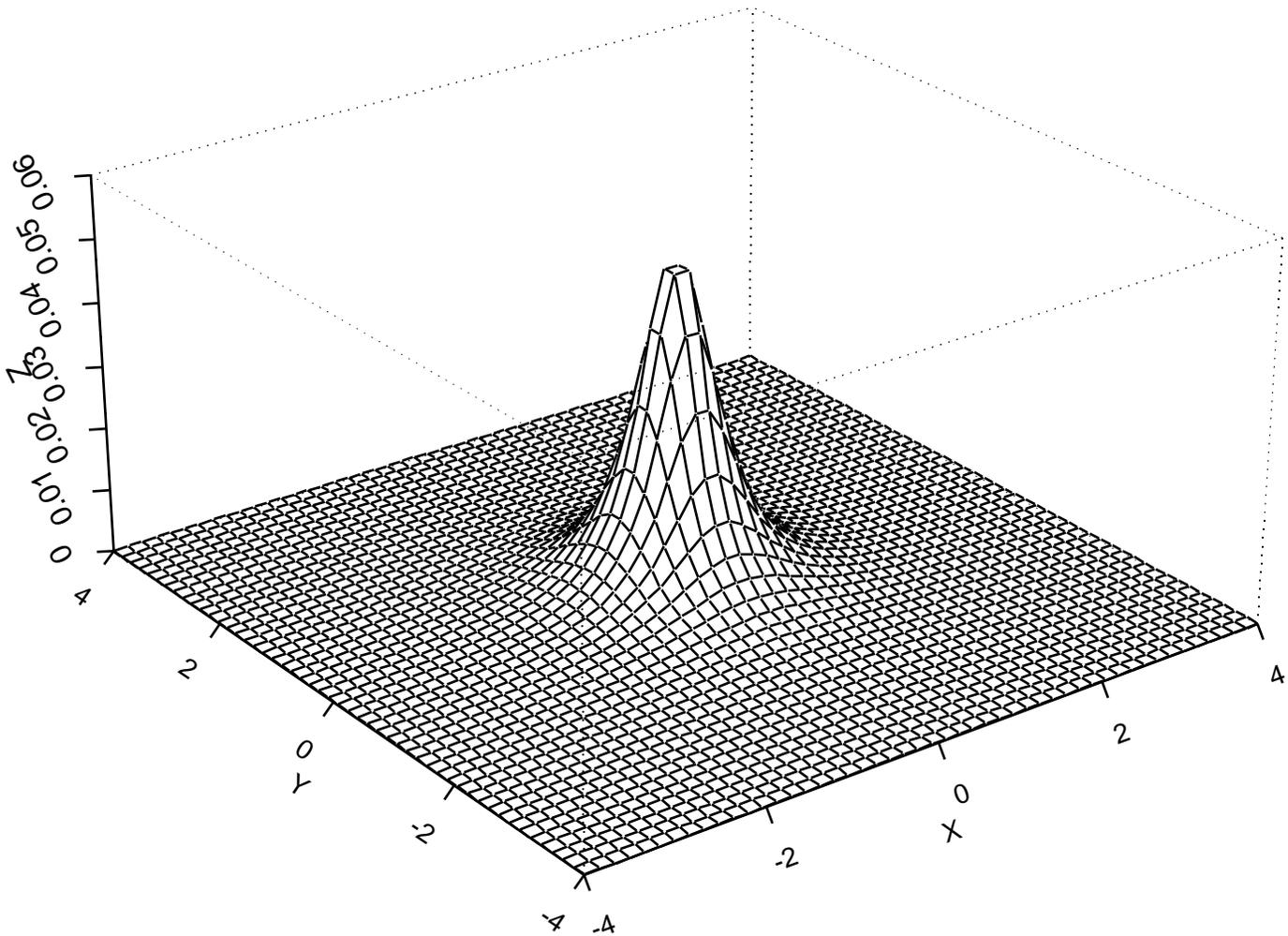


Abbildung 5.3: Dichte einer 2-dimensionalen sphärischen Verteilung, deren erzeugende Zufallsvariable eine GPD(3) Verteilung hat

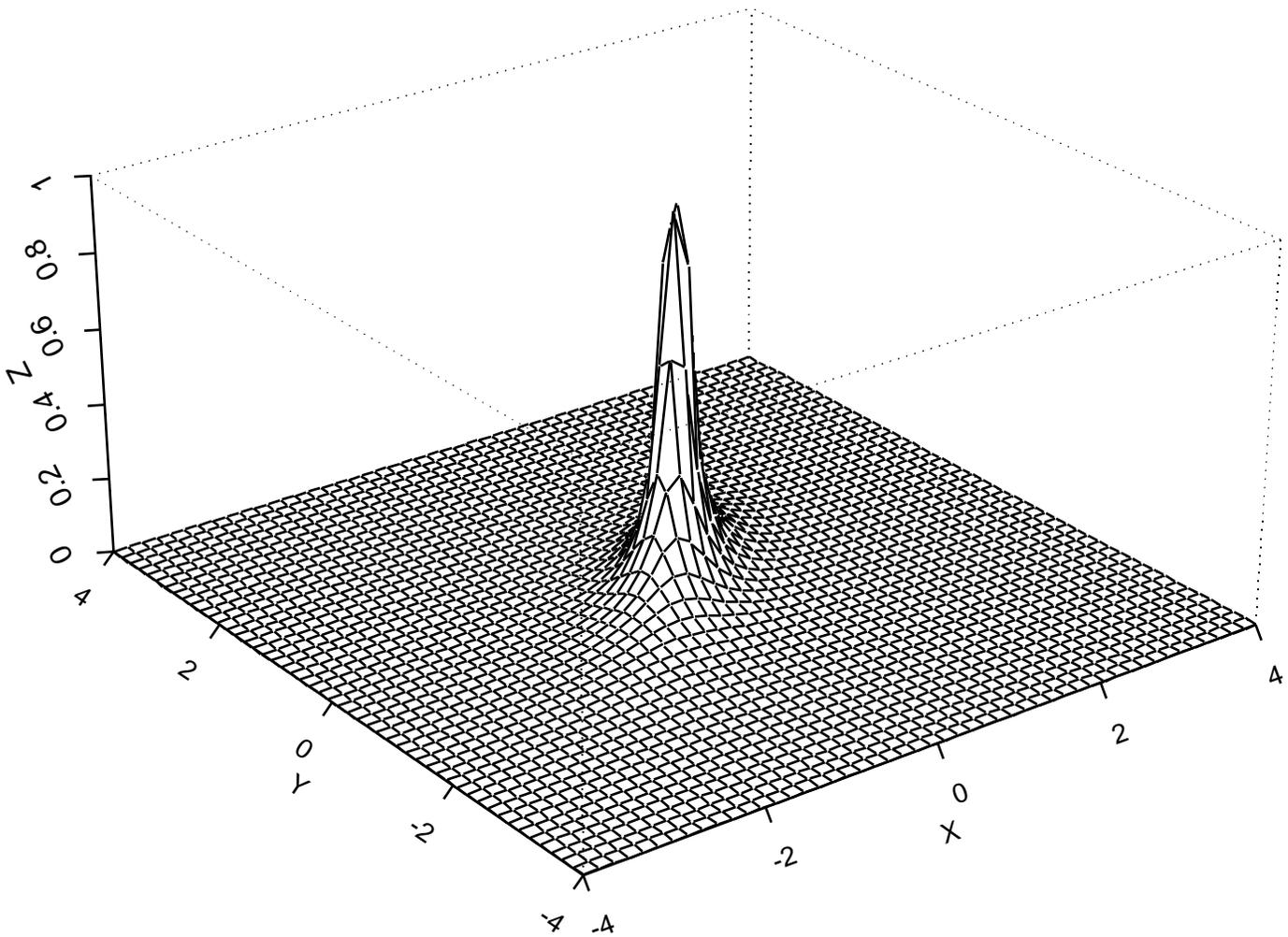


Abbildung 5.4: Dichte einer 2-dimensionalen elliptischen Verteilung, $R_k \sim \exp(1)$ $\sigma_1 = \sigma_2 = 1, \rho = 0.7$

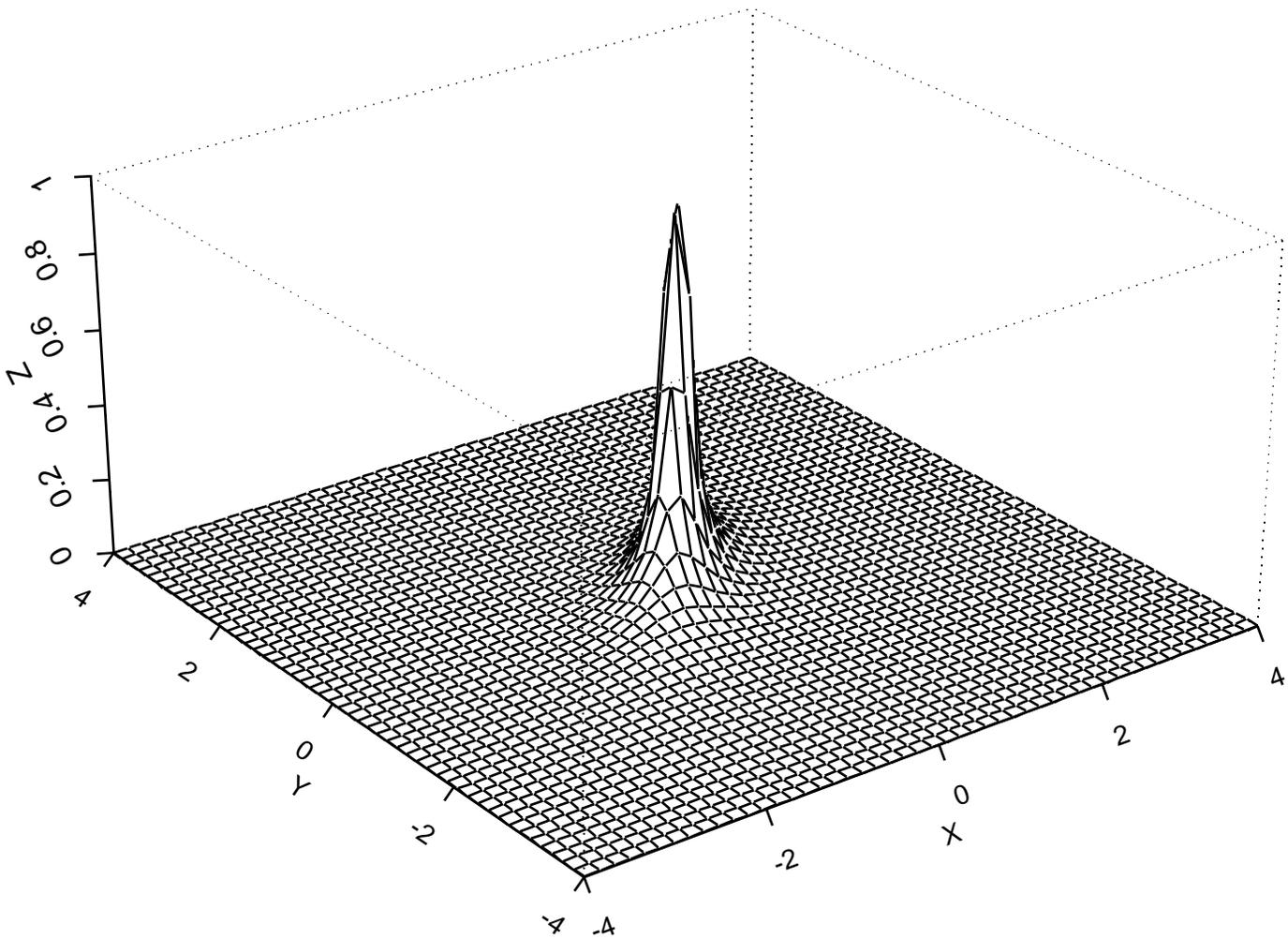


Abbildung 5.5: Dichte einer 2-dimensionalen elliptischen Verteilung, $R_k \sim GPD(0.5)$
 $\sigma_1 = \sigma_2 = 1, \rho = 0.7$

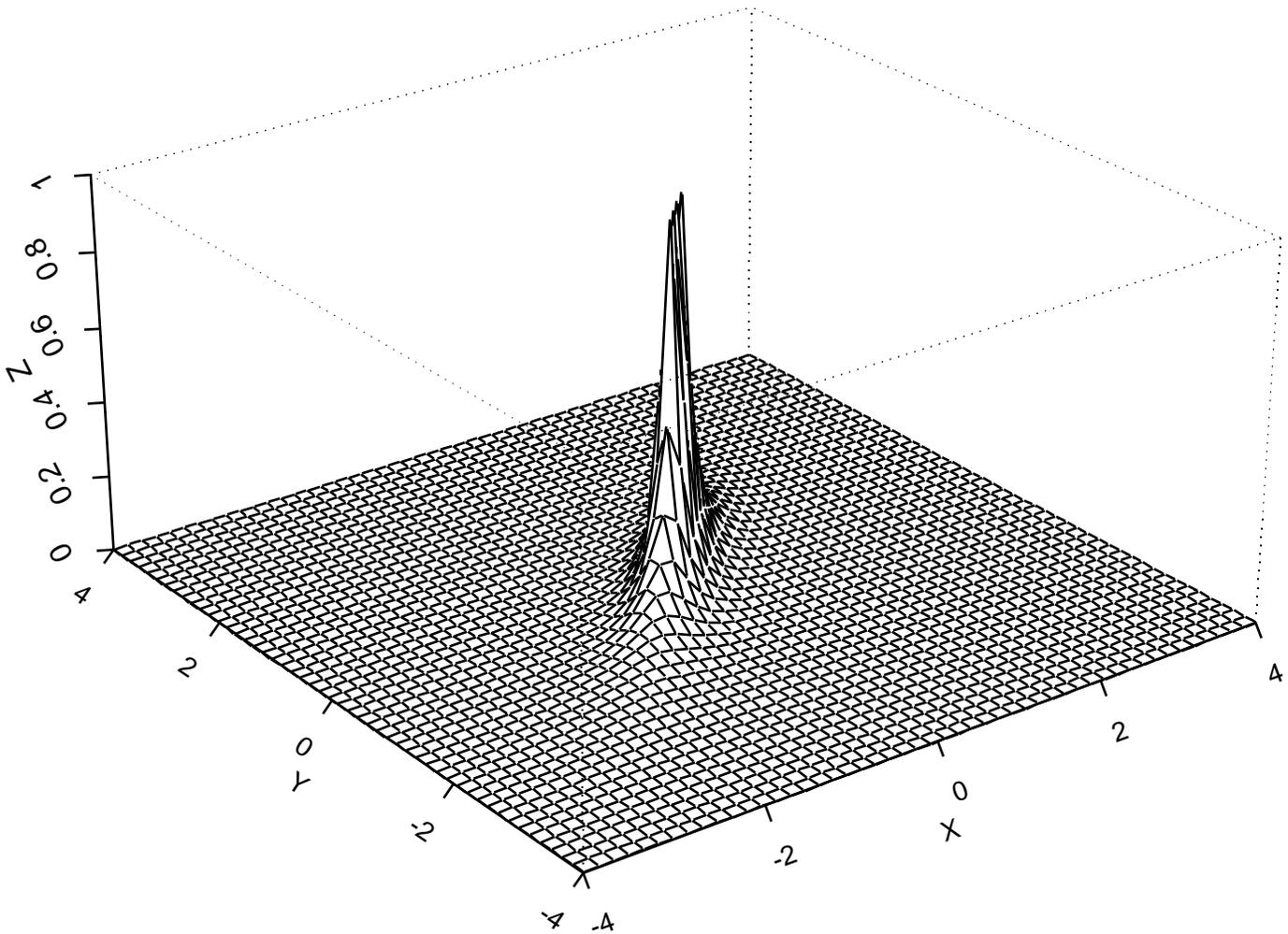


Abbildung 5.6: Dichte einer 2-dimensionalen elliptischen Verteilung, $R_k \sim GPD(0.5)$
 $\sigma_1 = \sigma_2 = 1, \rho = 0.9$

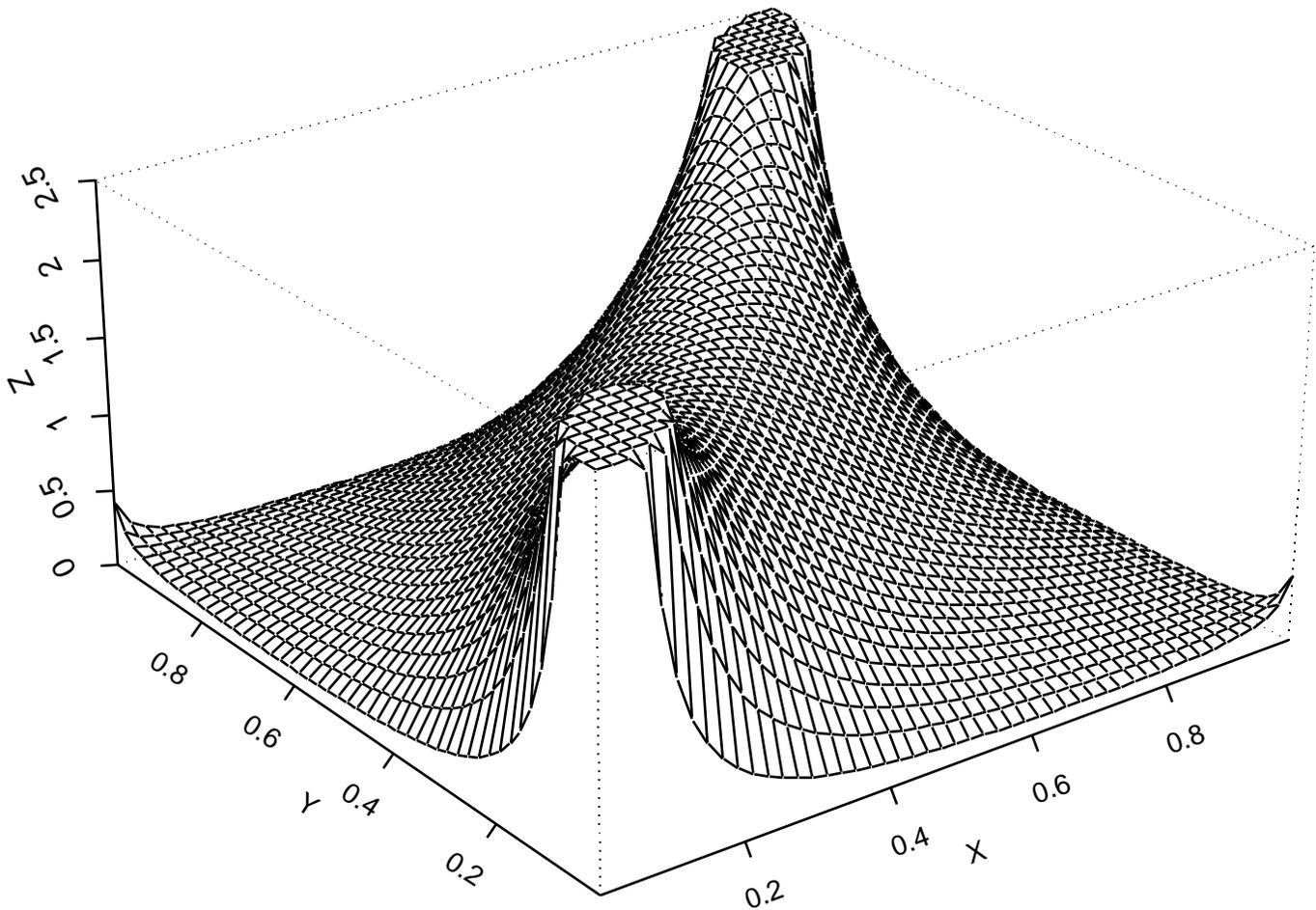


Abbildung 5.7: Dichte einer 2-dimensionalen t-Copula, $\nu = 3$, $\rho_{12} = 0.7$

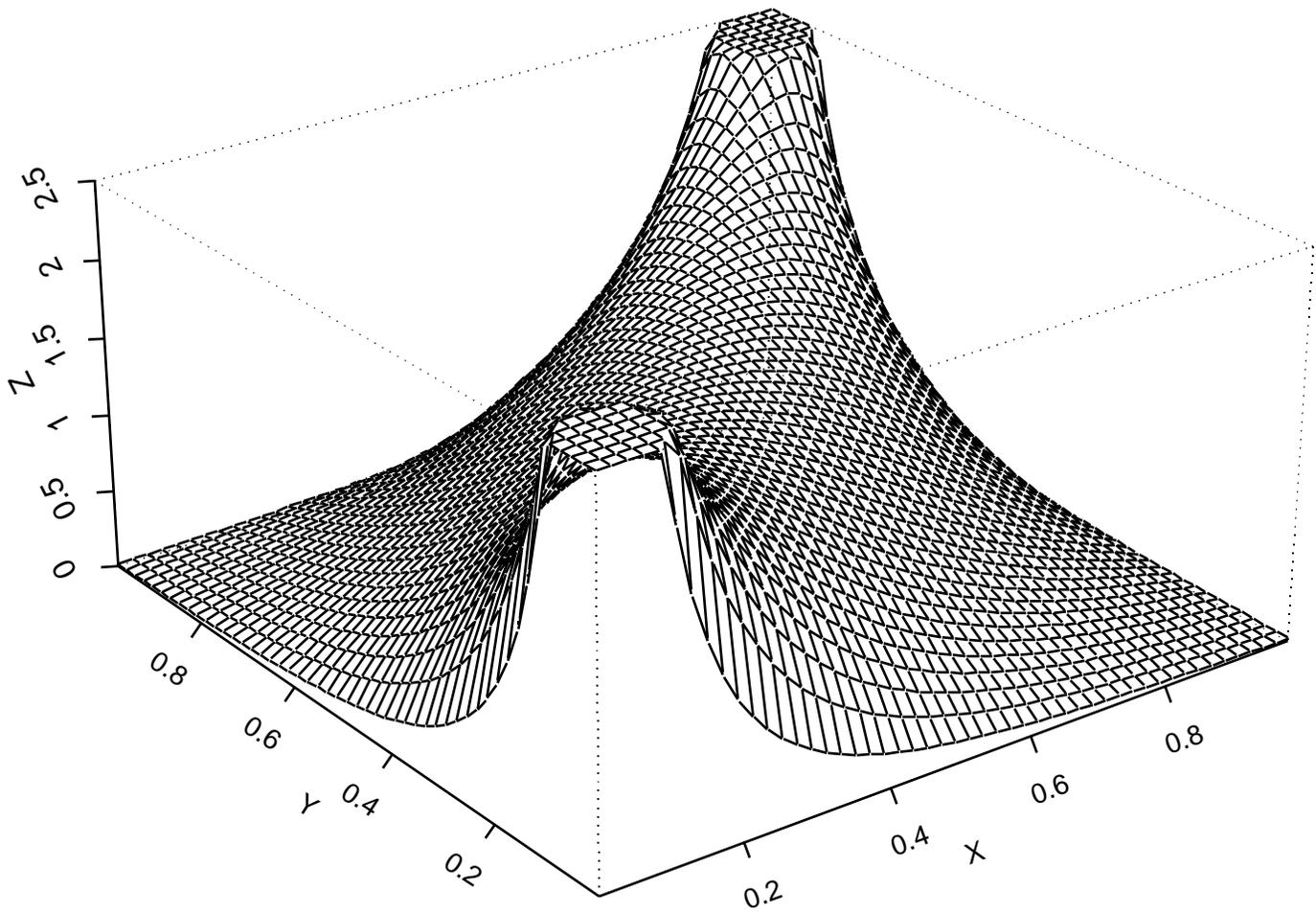


Abbildung 5.8: Dichte einer 2-dimensionalen t-Copula, $\nu = 10$, $\rho_{12} = 0.7$

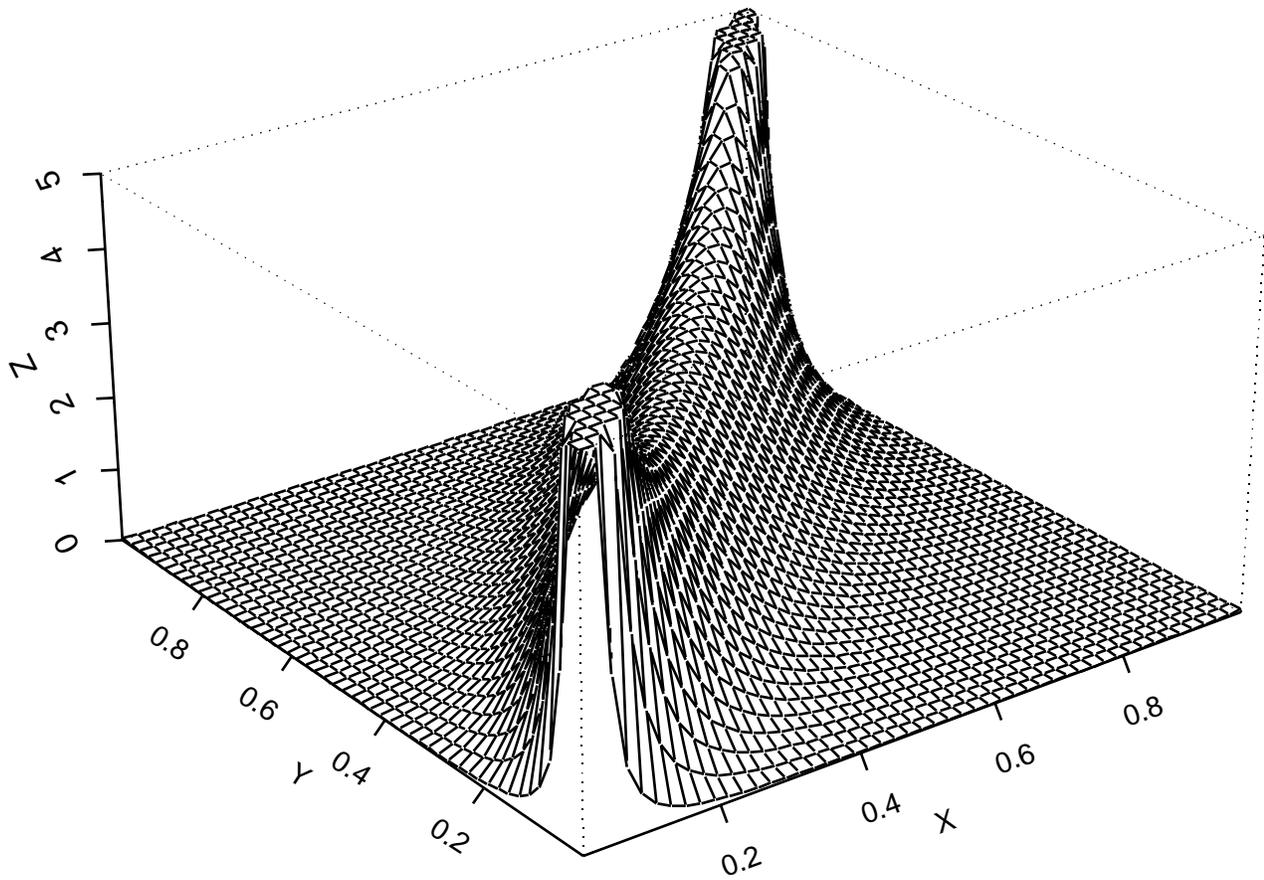


Abbildung 5.9: Dichte einer 2-dimensionalen t-Copula, $\nu = 3$, $\rho_{12} = 0.9$

Kapitel 6

Das Modell

6.1 Beschreibung des Problems

Die folgenden Aussagen stammen aus den Aufsätzen von Crosbie [9] und Couhy, Galai und Mark [10].

Ausfallrisiko ist die Unsicherheit, ob ein Unternehmen seine Schulden bezahlen und seinen Verbindlichkeiten nachkommen kann. Vor dem Ausfall besteht keine Möglichkeit eindeutig zwischen Firmen, die ausfallen werden und welchen, die nicht ausfallen werden, zu unterscheiden. Wir können höchstens Abschätzungen für die Wahrscheinlichkeit eines Ausfalls angeben. Aus diesem Grund müssen Firmen grundsätzlich einen Aufschlag, den sogenannten Spread, zusätzlich zu dem risikolosen Zinssatz bezahlen, der proportional zu ihrer Ausfallwahrscheinlichkeit ist. Auf diese Weise erhalten Geldgeber eine Risikoprämie dafür, dass sie sich dieser Unsicherheit aussetzen.

Der Verlust, den ein Kreditgeber im Falle eines Ausfalls erleidet ist normalerweise signifikant und wird maßgeblich durch die Einzelheiten des speziellen Vertrages oder Darlehens bestimmt. Die durchschnittlichen Verlustraten im Falle eines Ausfalls sind zum Beispiel für Senior Secured Bonds (sehr gut besicherte Anleihen), Subordinated Bonds (untergeordnete Anleihen) und Junior Subordinated Bonds (schwach besicherte Anleihen) 46.20%, 67.26% bzw. 82.91% (siehe Tabelle 6.1).

Ausfallklauseln in Schuldverschreibungen garantieren normalerweise, dass die Ausfallwahrscheinlichkeiten für alle Klassen von Verbindlichkeiten einer Firma gleich sind. So legt die Ausfallwahrscheinlichkeit einer Firma die Ausfallwahrscheinlichkeit all ihrer Verbindlichkeiten und Kredite fest. Allerdings kann der Verlust im Falle eines Ausfalls zwischen den verschiedenen Klassen von Verbindlichkeiten stark je nach ihrer Art schwanken (Anlageform, Sicherheiten, Vorrangigkeit etc.).

Obwohl es grundsätzlich eher eine unkluge Investitionsstrategie ist sich starken Marktrisikokonzentrationen auszusetzen, kann man dennoch in einigen Fällen durch hohe Erträge davon profitieren. Da allerdings seit den frühen 70ern starke Gründe gegen diese Art von Anlageverhalten spechen, werden die Mehrheit der Anlageinvestitionen heutzutage in diversifizierten Portfolios gemanaget. Im Gegensatz zu marktrisikobehafteten Wertpapieren wie Aktien haben ausfallrisikobehaftete Wertpapiere nur ein sehr geringes Zuwachspotenzial, und so ist das Argument für eine weitläufige Diversifizierung im Fall von Ausfallrisiken noch zwingender. Das begrenzte Zuwachspotenzial von Spreads bedeutet, dass ein Anle-

Seniority Class	Mittelwert in %	Standardabweichung in %
Senior Secured	46.20	26.86
Senior Unsecured	48.87	25.45
Senior Subordinated	61.48	23.81
Subordinated	67.26	20.18
Junior Subordinated	82.91	10.90

Tabelle 6.1: Durchschnittliche Verlustraten im Falle eines Ausfalls von verschieden gut besicherten Anleihen. Quelle: Crouhy et al [10].

ger auf keinen Fall für die Aufnahme von starken Ausfallrisikokonzentrationen belohnt werden kann. Wie auch andere seltene Ereignisse, die mit hohen Kosten verbunden sind, kann auch Ausfallrisiko nur in einem Portfolio effektiv gemanaget werden.

Nicht nur die Kenntnis der Ausfallwahrscheinlichkeit und des Verlustes im Falle eines Ausfalls sind entscheidende Größen im Portfoliomanagement von Ausfallrisiken; auch das Messen von Ausfallabhängigkeiten zwischen den einzelnen Schuldner ist unerlässlich. Ausfallabhängigkeiten geben den Grad an, zu dem die Ausfälle der verschiedenen Schuldner im Portfolio untereinander zusammenhängen. Die Kreditrisikokomponenten die auftreten sind demnach:

1. Einzelrisiken

Verlust im Falle eines Ausfalls (Loss Given Default) ist die prozentuale Höhe des Verlustes, der in dem Fall auftritt, dass die Gegenseite oder der Schuldner ausfällt.

Bonitätsänderungsrisiko (Migration Risk) ist die Unsicherheit in Bezug auf die Änderung der Ausfallwahrscheinlichkeit und der damit einhergehenden Änderung des Wertes des Schuldtitels.

Exposure at Default ist der zum Ausfallzeitpunkt bereits an den Kreditnehmer ausgezahlte Betrag.

2. Portfoliorisiko

Ausfallabhängigkeiten messen den Grad zu dem die Ausfallrisiken der einzelnen Gegenseiten und Schuldner gegenseitig zusammenhängen.

In dem Fall, dass man nicht nur die Zustände “Ausfall” und “Nichtausfall” sondern verschiedene Ratingklassen zulässt, kann man den Loss Given Default auch in einen Loss Given Rating umwandeln, und diesen unter einem Wahrscheinlichkeitsmaß berechnen, das die zuvorige Bestimmung der Ratingklasse bedingt. In unserem Modell werden wir uns erst einmal auf einen “Ausfall”-“Nichtausfall”-Zustandsraum beschränken und den Loss Given Default nur im Falle eines Ausfalls des Unternehmens berechnen. Die Modellierung des Loss Given Default steht oft im Schatten der Berechnung der Ausfallwahrscheinlichkeit. So gibt es eine Vielzahl von Arten wie man Ausfallwahrscheinlichkeiten berechnen kann, aber nur eine eher übersichtliche Anzahl von Veröffentlichungen beschäftigt sich mit

dem LGD. Eine genaue Beschreibung des LGD halte ich für mindestens genauso wichtig wie die der Ausfallwahrscheinlichkeit. Die gängigste Methode den LGD zu modellieren, ist die mittleren historischen LGD's zu berechnen. Dies ist allerdings viel zu stark vereinfacht, da der LGD in der Realität nicht nur für verschiedene betrachtete Zeithorizonte unterschiedlich hoch ist, sondern noch von einigen anderen Faktoren abhängt. Beispiele für solche Faktoren sind:

1. Art der Schuldverschreibung (z.B. Kredit, Hypothek, Bond, Vorzugsaktie)
2. Besicherungsgrad (Seniority Grade) (z.B. Senior Secured, Junior Insecured, Subordinated)
3. Firmenspezifische Kapitalstruktur des Schuldners (Leverage)
4. Industriespezifische Faktoren (Konkurrenz, Wachstum der Branche)
5. Makroökonomische Faktoren (Abschnitt im Wirtschaftszyklus)

Ein näheres Beschreiben von Modellen, die diese Faktoren berücksichtigen, würde hier zu weit führen, so dass der Leser auf die Literatur verwiesen sei (z.B. Gupton und Stein [23])

Da wir uns auf einen Zustandsraum beschränken, der nur die Zustände "Ausfallen" und "Nichtausfallen" enthält, wird hier das Bonitätsänderungsrisiko vernachlässigt. Wenn man sich für die großen Quantile der Verlustverteilung eines Portfolios interessiert, ist dies keine besonders restriktive Einschränkung, da sehr hohe Verluste des Portfolios nur durch mehrere Ausfälle von Schuldner und nicht durch Migrationen innerhalb der Ratingklassen generiert werden. Der extreme Tail der Portfolioverlustverteilung wird also nicht verändert.

Ob das Exposure at Default (EAD), also die an die Gegenseite ausgezahlte Summe, eine Zufallsvariable ist, hängt davon ab, ob das betreffende Kreditinstrument ein Kreditderivat ist, und ob der risikolose Zins stochastisch modelliert wird. Wenn der risikolose Zinssatz konstant ist, ist auch das EAD konstant (siehe Finger [20]).

6.2 Allgemeines latente Variablen Modell

In allen nun folgenden Modellen betrachten wir ein Portfolio von K Schuldner und einen festen Zeithorizont T . Wir beschränken uns auf $T=1$ Monat. T kann freilich auch beliebig anders gewählt werden. Desweiteren nehmen wir an, dass zum Zeitpunkt $t=0$ keiner der Schuldner bereits ausgefallen ist.

Ein latente Variablen Modell ist nach Frey, McNeil, Nyfeler [21] folgendermaßen definiert.

Definition 6.2.1 (Latente Variablen Modell). Seien $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_K)^T$ ein Zufallsvektor mit stetigen Randverteilungen $F_k(x) = P(r_k \leq x)$, $k = 1, \dots, K$, der die latenten

Variablen zum Zeitpunkt T repräsentiert, und $(c_1, \dots, c_K)^T$ ein Vektor von deterministischen, sogenannten Ausfallgrenzen. Wir nennen $(r_k, c_k)_{1 \leq k \leq K}$ ein latente Variablen Modell für den Ausfallindikatorvektor $I = (I_1, \dots, I_K)^T$ genau dann, wenn

$$I_k = 1 \Leftrightarrow r_k \leq c_k \quad \forall k \in \{1, \dots, K\} \quad (6.1)$$

Das allgemeine Kreditrisikomodell sieht so aus:

Sei (Ω, \mathcal{F}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum. Das Portfolio bestehe aus K Schuldnern. Für $k = 1, \dots, K$ seien

$I_k = 1_{r_k \leq c_k}$	die Indikatorvariable von Schuldner k zum Zeitpunkt T
$L_k : (\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow ([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]))$	der Loss Given Default von Schuldner k (in Prozent)
$E_k : (\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$	das Exposure von Schuldner k

Der Gesamtverlust eines Portfolios von K Krediten ist dann definiert durch:

$$L^{(K)} := \sum_{k=1}^K E_k L_k I_k \quad (6.2)$$

mit $r_k : (\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$, $1 \leq k \leq K$. Dabei sind \mathcal{B} die Borel- σ -Algebra auf \mathbb{R} , und $\mathcal{B}([0, 1])$ die Borel- σ -Algebra auf $[0, 1]$. Außerdem gilt: E_k , L_k und I_k sind unabhängig für alle $k \in \{1, \dots, K\}$, L_k und L_l sind unabhängig für alle $k, l \in \{1, \dots, K\}$ und E_k und E_l sind ebenfalls unabhängig für alle $k, l \in \{1, \dots, K\}$.

Interpretation: r_k , $k = 1, \dots, K$, ist der normalisierte (Erwartungswert 0, Standardabweichung 1) Vermögensreturn von Schuldner k . Wenn dieser zum Zeitpunkt T unter eine kritische Schranke $c_k \in \mathbb{R}$ fällt, dann nimmt die Indikatorvariable I_k den Wert 1 an, und signalisiert somit, dass der Schuldner k ausgefallen ist. Die kritischen Schranken c_k , $1 \leq k \leq K$ sind, nachdem die individuellen Ausfallwahrscheinlichkeiten p_k bereits feststehen, durch folgende Beziehung einfach herzuleiten:

$$p_k = P(I_k = 1) = P(r_k \leq c_k) = F_k(c_k) \quad 1 \leq k \leq K \quad (6.3)$$

wobei F_k die Verteilungsfunktion von r_k , $1 \leq k \leq K$ ist. Somit gilt $c_k = F_k^{-1}(p_k)$, $1 \leq k \leq K$.

Folgende Definition der Äquivalenz von latenten Variablen Modellen stammt aus Frey, McNeil, Nyfeler [21].

Definition 6.2.2 (Äquivalenz von latenten Variablen Modellen). Seien $(r_k, c_k)_{1 \leq k \leq K}$ und $(\tilde{r}_k, \tilde{c}_k)_{1 \leq k \leq K}$ zwei latente Variablen Modelle, die die Ausfallindikatorvektoren I und \tilde{I} generieren. Die Modelle heißen äquivalent, wenn $I \stackrel{d}{=} \tilde{I}$.

Das heißt zwei Modelle sind äquivalent, wenn sie genau die gleiche Ausfallindikatorverteilung erzeugen, was gleichbedeutend damit ist, dass die Verteilungen der Anzahl der Ausfälle im Portfolio gleich sind.

Eine hinreichende Bedingung dafür, dass zwei latente Variablen Modelle äquivalent sind, ist, dass die individuellen Ausfallwahrscheinlichkeiten in beiden Modellen gleich sind, und dass die Copulae der latenten Variablen gleich sind. Formal geschrieben:

Proposition 6.2.3. *Seien $(r_k, c_k)_{1 \leq k \leq K}$ und $(\tilde{r}_k, \tilde{c}_k)_{1 \leq k \leq K}$ zwei latente Variablen Modelle, die die Ausfallindikatorvektoren I und \tilde{I} generieren. Die Modelle sind äquivalent, wenn*

1. $P(r_k \leq c_k) = P(\tilde{r}_k \leq \tilde{c}_k)$, $1 \leq k \leq K$.
2. $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_K)^T$ und $\tilde{\mathbf{r}} = (\tilde{r}_1, \dots, \tilde{r}_K)^T$ haben dieselbe Copula.

Beweis: siehe Frey et. al. [21].

Wenn die p_k 's bereits bestimmt sind, ist ein Modell durch des Festlegen auf eine Copula hinreichend beschrieben. In Kapitel 6.4 werden wir drei verschiedene Copulae zu diesem Zweck verwenden.

6.3 Modellierung der individuellen Ausfallwahrscheinlichkeiten

Ein Ausfall ist ein trügerisch seltenes Ereignis. Eine durchschnittliche Firma hat eine Ausfallwahrscheinlichkeit von ungefähr 2% pro Jahr. Allerdings gibt es beträchtliche Schwankungen bezüglich der Ausfallwahrscheinlichkeiten von Unternehmen. So fällt zum Beispiel ein Unternehmen mit einem Aaa Rating nur ungefähr in 5 von 100000 Fällen innerhalb eines Jahres aus. Eine A3-geratete Firma dagegen schon in 105 von 100000 Fällen. Eine Vereinundzwanzigfachung! Und eine Firma mit einem B3 Rating hat sogar eine Ausfallwahrscheinlichkeit von 10%. Also ungefähr eine 2000-fach höhere Wahrscheinlichkeit als das Aaa-Unternehmen (siehe Tabelle 6.2).

Für das Bestimmen der Ausfallwahrscheinlichkeit eines Schuldners gibt es verschiedene Ansätze.

Ein Verfahren, das von JP Morgan stammt, benutzt die gemittelten historischen Übergangshäufigkeiten die von Rating Agenturen für jede Ratingklasse berechnet werden. So wird nicht nur die Wahrscheinlichkeit eines Ausfalls einer Firma aus einer bestimmten Ratingklasse durch die gemittelten historischen Ausfallraten gleichgerateter Unternehmen geschätzt, sondern auch die Wahrscheinlichkeit aus einer bestimmten Ratingklasse in eine andere überzugehen. Die zentrale Komponente des Kredit VaR Modells von JP Morgan ist die Übergangsmatrix, deren Einträge die geschätzten Wahrscheinlichkeiten sind, innerhalb eines Zeithorizontes von einer Kreditqualitätsklasse in eine andere überzugehen. Dabei ist nicht entscheidend ob ein externes Ratingsystem (Standard & Poor's, Moody's etc.) oder ein internes verwendet wird.

Dieses Verfahren bringt zwar wenig mathematischen Aufwand mit sich, ist aber wirtschaftlich nicht vertretbar. So ist die Annahme die Ausfallwahrscheinlichkeit eines Unternehmens könnte durch die mittlere historische Ausfallwahrscheinlichkeit gleich gerateter Unternehmen gut geschätzt werden, nicht haltbar. Da Kredite innerhalb einer Rating Klasse nicht notwendig homogen sind, ist diese Annahme eher fragwürdig. So können sich Unternehmen innerhalb einer Ratingklasse hinsichtlich einer Reihe von Kriterien unterscheiden, die entscheidend für die individuellen Ausfallwahrscheinlichkeiten sind. Beispiele für solche Kriterien sind

1. Das Rating, das das Unternehmen in der Zeitperiode vor der aktuellen hatte.

Rating	Ausfallwahrscheinlichkeit
Aaa	0.005 %
Aa1	0.008 %
Aa2	0.014 %
Aa3	0.023 %
A1	0.038 %
A2	0.063 %
A3	0.105 %
Baa1	0.174 %
Baa2	0.289 %
Baa3	0.480 %
Ba1	0.797 %
Ba2	1.324 %
Ba3	2.200 %
B1	3.654 %
B2	6.070 %
B3	10.083 %

Tabelle 6.2: Kalibrierung von Moody's Ratings auf Ausfallwahrscheinlichkeiten. Quelle: Bluhm et al. [4], Seite 25.

2. Die Anzahl der Zeitperioden, die das Unternehmen schon im aktuellen Rating verharret.
3. Die Tatsache, ob ein Unternehmen auf einer sogenannten Watchlist steht, das heißt, ob es gerade unter Beobachtung einer oder mehrerer Ratingagenturen steht.

In den letzten Jahren sind einige Veröffentlichungen erschienen, die versuchen, Modelle aufzustellen, in die diese Kriterien mit eingehen. Eine genaue Beschreibung dieser Modelle würde auch hier zu weit führen. Deshalb sei der Leser nur auf die Aufsätze von Lando und Skodeberg [30], Kavvathas [27], und Hamilton und Cantor [24] verwiesen.

Ein anderes Verfahren, das von KMV stammt, beruht auf dem Vermögenswertmodell (AVM) dessen Grundlage die Veröffentlichungen von Merton [33] und von Black and Scholes [3] sind. Im Folgenden lehnen wir uns an das dritte Kapitel von Bluhm et al. [4] an.

Da in diesem Abschnitt die Optionspreistheorie eine große Rolle spielt, werden nun erst einmal ein paar Worte über Calls und Puts verloren. Eine genaue Erklärung ist zum Beispiel in Hull [25] zu finden.

Die grundsätzliche Annahme, die in der Optionspreistheorie gemacht wird, ist die der Arbitragefreiheit. Dabei bedeutet Arbitrage die Möglichkeit einen risikolosen Gewinn machen zu können. Im folgenden beschränken wir uns auf eine sogenannte standard Black-Scholes-Welt. Das bedeutet das wir uns auf folgende Annahmen festlegen:

1. Aktienkurse folgen geometrisch Brownschen Bewegungen mit konstanter Drift μ und

konstanter Volatilität σ .

2. Leerverkäufe, also das Verkaufen eines Wertpapiers ohne es zu besitzen, sind erlaubt.
3. Transaktionskosten und Steuern werden vernachlässigt.
4. Es gibt keine Dividendenzahlungen
5. Die No-Arbitrage Bedingung ist erfüllt.
6. Die Wertpapiere können zu jedem (stetigen) Zeitpunkt gehandelt werden.
7. Es gibt ein risikoloses Wertpapier, wie zum Beispiel einen risikolosen Bond, das in beliebigen Mengen gekauft und verkauft werden kann, und nach Investition von x_0 Geldeinheiten heute nach t Zeiteinheiten einen Wert von $x_0 e^{rt}$ hat, wobei $r > 0$ der risikolose Zins ist.
8. Der risikolose Zinssatz r ist konstant und unabhängig von der Fälligkeit der Finanzinstrumente.

Diese Annahmen können auch durch andere, kompliziertere Annahmen ersetzt werden. Entscheidend ist nur, dass wir uns auf eine gewisse Art Finanzmarkt festlegen, so dass wir Preise für Derivate berechnen können.

Um zu zeigen wie man anhand des No-Arbitrage Prinzips Bewertungen von Finanzinstrumenten vornimmt, stellen wir folgende Proposition vor:

Proposition 6.3.1. *Seien $(A_t)_{t \geq 0}$ und $(B_t)_{t \geq 0}$ die Werte von zwei verschiedenen Wertpapieren mit $A_T = B_T$ zur Zeit $T > 0$. Dann sind die Werte der beiden Wertpapiere auch heute zum Zeitpunkt 0 gleich, wenn das No-Arbitrage Prinzip erfüllt ist.*

Der Beweis ist in Bluhm et al. [4] zu finden.

Nun führen wir zusätzlich zu dem risikolosen Bond noch ein risikobehaftetes Wertpapier ein, dessen Wert durch einen stochastischen Prozess $A = (A_t)_{t \geq 0}$ gegeben ist. Wir nehmen an, dass A sich wie eine geometrisch Brownsche Bewegung (gBm) verhält. Das bedeutet, dass der Wertpapierpreisprozess die Lösung folgender stochastischen Differenzialgleichung ist

$$A_t - A_0 = \mu_A \int_0^t A_s ds + \sigma_A \int_0^t A_s dB_s \quad (t \geq 0), \quad (6.4)$$

wobei $\mu_A > 0$ die Drift von A , $\sigma_A > 0$ die Volatilität von A und $(B_s)_{s \geq 0}$ eine standard Brownsche Bewegung ist. Durch Anwendung der Itô Formel erhält man

$$A_t = A_0 \exp \left(\left(\mu_A - \frac{1}{2} \sigma_A^2 \right) t + \sigma_A B_t \right) \quad (t \geq 0). \quad (6.5)$$

Nun kommen wir zu Optionen. Eine Europäische Option ist ein Vertrag, der von einem Optionsschreiber aufgesetzt wird, und der dem Optionskäufer das Recht aber nicht die Pflicht gibt, ein bestimmtes Wertpapier zu einem vorher bestimmten Zeitpunkt und Preis kaufen oder verkaufen zu können. Der Zeitpunkt, zu dem die Option ausgeübt werden kann heißt Fälligkeit. Der vorher bestimmte Preis, zu dem die Option ausgeübt werden

kann heißt Strike Preis.

Es gibt zwei grundlegende Arten von Optionen: Calls und Puts. Ein Call gibt dem Optionshalter das Recht das zugrundeliegende Wertpapier zum Strike Preis zu kaufen, während ein Put dem Optionshalter das Recht garantiert das Underlying zum Strike Preis verkaufen zu können. Wenn die Option nur zum Fälligkeitstermin ausübbar ist, wird der Vertrag eine Europäische Option genannt. Wenn sie zu jedem Zeitpunkt bis zur Fälligkeit ausgeübt werden kann wird sie Amerikanische Option genannt. Eine weitere Terminologie die benutzt wird, ist die der long und short Positionen. Wenn jemand ein Wertpapier kaufen möchte, das er nicht besitzt, so ist er gegenwärtig short in diesem Wertpapier möchte aber long gehen. Grundsätzlich gibt es bei jeder Option zwei Seiten. Der Investor, der die Option kauft geht long in dieser Option, während der Optionsschreiber, der die Option verkauft, short in diese Position geht.

In allen Fällen erhält der Optionsschreiber bei Eingehen des Vertrages Geld aus dem Verkauf der Option. Allerdings geht er damit die mögliche Verpflichtung ein zum Fälligkeitszeitpunkt Zahlungen zu leisten. Die Frage die sich jeder Optionskäufer stellen muss, ist die, ob es sich lohnt, die Möglichkeit zu haben ein Wertpapier zu einem späteren Zeitpunkt verkaufen oder kaufen zu können, dafür jetzt aber einen Preis zahlen zu müssen. Diese Frage ist die zentrale Frage bei der Optionsbewertung.

Nehmen wir an, das Underlying eines Europäischen Calls habe eine Preisentwicklung $(A_t)_{t \geq 0}$, die sich wie eine geometrisch Brownsche Bewegung verhält, und der Strike Preis der Call Option sei F . Zum Fälligkeitszeitpunkt kann man zwischen zwei Szenarien unterscheiden.

1. Der Fall $A_T > F$

In diesem Fall wird der Optionshalter die Option ausüben, da er so ein Wertpapier bekommen kann das A_T wert ist, er aber nur F bezahlen muss. Er wird einen Nettogewinn in diesem Geschäft machen, wenn der bezahlte Preis C_0 des Calls niedriger war, als die Differenz $A_T - F$.

2. Der Fall $A_T \leq F$

Wenn das Wertpapier auf dem Markt einen Preis hat, der kleiner oder gleich dem Strike Preis ist, so wird der Optionshalter die Option nicht ausüben. In diesem Fall bringt ihm der Vertrag keinen Vorteil, und der Preis der Option ist sein Verlust.

Man kann beide Fälle in einer Payoff Funktion der Option zusammenfassen, welche im Fall eines Europäischen Calls mit Strike F gegeben ist durch

$$\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad A_T \mapsto \pi(A_T) = \max(A_T - F, 0). \quad (6.6)$$

Insgesamt kann man vier verschiedene Positionen im Optionshandel mit Call und Puts eingehen: Long Call, Short Call, Long Put und Short Put. Tabelle 6.3 fasst die Positionen zusammen und gibt die jeweilige Payoff Funktion an. Dabei sieht man, dass für einen bestimmten Typ von Option der Payoff des Verkäufers genau der negative Payoff des Käufers ist.

Es ist wichtig zu erwähnen, dass long Positionen ein begrenztes downside Risiko haben, da der schlimmste Fall für den Käufer ist, dass der Kaufpreis der Option ganz verloren

	Long	Short
Call	$\max(A_T - F, 0)$	$\min(F - A_T, 0)$
Put	$\max(F - A_T, 0)$	$\min(A_T - F, 0)$

Tabelle 6.3: Payoff Funktionen von den vier verschiedenen Optionspositionen

geht. Die gute Nachricht für Optionskäufer ist, dass sie ein unbegrenztes upside Potential haben. Dem entsprechend haben Optionsschreiber ein unbegrenztes downside Risiko. Außerdem ist der beste Fall für den Optionsverkäufer, dass der Optionskäufer die Option nicht ausübt. In diesem Fall ist der netto Gewinn, den der Optionsschreiber macht, der Preis, der am Anfang für die Option bezahlt wurde.

Es gibt folgenden Zusammenhang zwischen Europäischen Calls und Puts.

Proposition 6.3.2 (Put-Call Parität). *Seien C_0 und P_0 die Preise eines Europäischen Calls bzw. Puts mit Strike F , Fälligkeit T , und Underlying A . Der risikolose Zins sei r . Dann gilt*

$$C_0 + Fe^{-rT} = P_0 + A_0. \quad (6.7)$$

Diese Formel heißt Put-Call Parität.

Der Beweis ist zum Beispiel in Bluhm et al. [4] zu finden.

1973 haben Fischer Black und Myron Scholes [3] eine erste analytische Lösung für die Bewertung von Optionen gefunden. Ihre Methode basiert auf der Konstruktion eines risikolosen Portfolios aus Calls und Aktien und der Anwendung des No-Arbitrage Prinzips. Dadurch konnten sie eine analytische Preisformel für Europäische Call Optionen auf Aktien herleiten. Diese Preisformel hängt von fünf Parametern ab:

1. Der Aktien- oder Wertpapierpreis von heute A_0 ,
2. die Volatilität σ_A des Underlyings A ,
3. der Strike Preis F der Option,
4. die verbleibende Zeit bis zur Fälligkeit der Option
5. und der risikolose Zinssatz $r > 0$.

Ein entscheidendes Konzept das zu den Bewertungsformeln von Optionen führt, ist das der risikoneutralen Bewertung. In einem vollständigen Finanzmarkt, in dem das No-Arbitrage Prinzip erfüllt ist, sind die Arbitrage Preise von meßbaren Zufallsvariablen (Contingent Claims) genau die diskontierten erwarteten Cash-Flows unter dem risikolosen Martingal Maß: Für ein Contingent Claim mit Preisprozess A_t , eine Filtration $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$, den risikolosen Zinssatz r und ein risikoneutrales Martingalmaß Q gilt

$$E_Q[e^{-r(T-t)} A_T | \mathcal{F}_t] = A_t. \quad (6.8)$$

Eine genaue Einführung in die finanzmathematische Welt der risikoneutralen Bewertung liefert das Buch von Bingham & Kiesel [2].

Die Preisformel für einen Europäischen Call ist nach Black und Scholes gegeben durch:

Proposition 6.3.3. *Der Black Scholes Preis einer Europäischen Call Option mit Parametern (A_0, σ_A, F, T, r) ist gegeben durch*

$$A_0\Phi(d_1) - e^{-rT}F\Phi(d_2), \quad (6.9)$$

wobei

$$d_1 = \frac{\log(A_0/F) + (r + \sigma_A^2/2)T}{\sigma_A\sqrt{T}}, \quad (6.10)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_A\sqrt{T}. \quad (6.11)$$

Dabei ist Φ wie immer die kumulative standard Normalverteilungsfunktion. Im Folgenden schreiben wir für diesen Preis $C_0(A_0, \sigma_A, F, T, r)$.

Einen Beweis findet man zum Beispiel in Zagst [41].

Durch Anwendung der Put-Call Parität folgt die Preisformel für Europäische Puts:

Proposition 6.3.4. *Der Black Scholes Preis einer Europäischen Put Option mit Parametern (A_0, σ_A, F, T, r) ist gegeben durch*

$$e^{-rT}F\Phi(-d_2) - A_0\Phi(-d_1), \quad (6.12)$$

wobei d_1 und d_2 wieder genauso definiert sind wie für die Calloption. Im Folgenden schreiben wir für diesen Preis $P_0(A_0, \sigma_A, F, T, r)$.

Nun führen wir das klassische Vermögenswertmodell (AVM) von Merton [33] ein. Wir nehmen an, dass alle auftretenden Zufallsvariablen auf einem gemeinsamen, filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_{t \geq 0}, P)$ definiert sind. Zusätzlich werden einige typische wirtschaftliche Annahmen getroffen. Zum Beispiel nehmen wir an, dass alle Wertpapiere in beliebiger Stückelung gehandelt werden können, und dass es keine Steuern und keine aus Bankrotts entstehenden Kosten gibt. Weiterhin nehmen wir an, dass das No-Arbitrage Prinzip erfüllt ist.

Angenommen wir betrachten eine Firma mit risikobehafteten Vermögen, so dass ihr Vermögenswertprozess $(A_t)_{t \geq 0}$ einer gBm folgt. Die grundlegende Annahme ist nun, dass die Firma eine sehr einfache Kapitalstruktur aufweist, nämlich die einer Schuldverschreibung und eines einzigen Eigenkapitalinstrumentes. In diesem Fall kann man also schreiben

$$A_0 = E_0 + D_0, \quad (6.13)$$

wobei $(E_t)_{t \geq 0}$ eine gBm ist, die die Entwicklung des Eigenkapitals beschreibt, und $(D_t)_{t \geq 0}$ ein stochastischer Prozess ist, der den Marktpreis der Schuldverschreibung der Firma beschreibt. Von dieser Schuldverschreibung nimmt man an, dass sie ein Auszahlungsprofil wie eine Nullkuponanleihe (Zero Coupon Bond) mit Fälligkeit T und zinsbereinigtem Nominal F hat. Mit zinsbereinigt meinen wir, dass F bereits aufgelaufene Zinsen enthält, deren Höhe von dem Grad des Risikos des leihenden Unternehmens abhängt. Das Zahlungsprofil der Schuldverschreibung ist dann ganz einfach zu beschreiben: Die Kapitalgeber bezahlen zum Zeitpunkt $t = 0$ ein Nominal D_0 an die Firma und zum Zeitpunkt $t = T$ erhalten sie von der Firma einen Betrag in Höhe von F , wobei F das Nominal D_0 und

die gerade erwähnten Zinszahlungen, die als Entschädigung für das im Zuge dieses Kontraktes eingegangene Kreditrisiko dienen, enthält. Aus dem Blickwinkel der Kapitalgeber entsteht Kreditrisiko genau dann, wenn

$$P[A_T < F] > 0, \quad (6.14)$$

was bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeit positiv ist, dass der Vermögenswert des leihenden Unternehmens zum Zeitpunkt der Fälligkeit der Schuldverschreibung nicht ausreicht um die Zahlung F an die Kapitalgeber zu leisten. Im Falle, dass diese Ausfallwahrscheinlichkeit größer als 0 ist, kann man unmittelbar schließen, dass

$$D_0 < Fe^{-rT}, \quad (6.15)$$

wobei r der risikolose Zinssatz ist. Diese Ungleichung muss gelten, da die Kapitalgeber eine Entschädigung dafür wollen, dass sie ein Kredit- bzw Ausfallrisiko eingehen. Solch eine Risikoprämie kann implizit eingefordert werden, indem der Betrag F mit einem höherem Zinssatz als dem risikolosen Zinssatz abgezinst wird. Die Auszahlung an Fremdkapital an den Schuldner zum Zeitpunkt $t = 0$ wird dann umso kleiner sein, je größer die Wahrscheinlichkeit eines Ausfalls des leihenden Unternehmens ist.

Eine beliebte Strategie von Fremdkapitalgebern (zum Beispiel kreditgewährenden Banken) ist der Versuch des Neutralisierens des Kreditrisikos durch den Kauf einer Kreditversicherung. In diesem Fall ist eine erfolgreiche Hedging Strategie ein passendes Derivat zu kaufen. Zu diesem Zweck gehen Fremdkapitalgeber eine long Position in einen Put auf A mit Strike Preis F und Fälligkeit T ein. Tabelle 6.4 zeigt, dass der Kauf einer Put Option Schutz vor dem Ausfallrisiko des leihenden Unternehmens bietet, da zum Zeitpunkt der Fälligkeit die Auszahlung an den Kapitalgeber in jedem Fall F beträgt, egal ob das leihende Unternehmen ausfällt oder nicht.

	Vermögenswert	Cash Flow der Fremdkapitalgeber	Auszahlungen an die Fremdkapitalgeber
$t = 0$	A_0	$-D_0$ (Geld verleihen)	$-D_0 - P_0$
		$-P_0$ (Kaufen des Put)	
$t = T$	$A_T < F$	A_T (Recovery)	F
		$F - A_T$ (Ausüben des Put)	
$t = T$	$A_T \geq F$	F (Erhalten des Nominals)	F
		0	

Tabelle 6.4: Schutz vor Ausfallrisiko durch eine passende Put Option

Somit wird das Kreditrisiko des Kredites neutralisiert und vollständig gehedged. Mit anderen Worten: Der Kauf der Put Option transformiert den risikobehafteten Kredit in eine risikolose Anleihe, mit Nominal F . Daraus kann man eine wichtige Schlussfolgerung ziehen: Wenn man den Hedge miteinbezieht, besteht das Portfolio der Kreditgeber aus einem Put und einer Anleihe. Der Wert dieses Portfolios zum Zeitpunkt $t = 0$ ist $D_0 + P_0(A_0, \sigma_A, F, T, r)$. Die riskolose Auszahlung dieses Portfolios zum Zeitpunkt $t = T$ beträgt

F. Da wir annehmen, dass das No-Arbitrage Prinzip gilt, muss man um den Barwert dieser Auszahlung zu erhalten, diese mit dem risikolosen Zinssatz r abdiskontieren. Das bedeutet

$$D_0 + P_0(A_0, \sigma_A, F, T, r) = Fe^{-rT}, \quad (6.16)$$

so dass für den Barwert des Fremdkapitals gilt

$$D_0 = Fe^{-rT} - P_0(A_0, \sigma_A, F, T, r), \quad (6.17)$$

Satz 6.3.5 (Optionstheoretische Interpretation von Fremdkapital). *Aus Sicht des Unternehmens kann das Fremdkapital durch eine long Position in einen Europäischen Put beschrieben werden. Aus Sicht der Fremdkapitalgeber kann das geliehene Kapital als short Position in eine Europäische Put Option beschrieben werden.*

Der Beweis ist wieder in Bluhm et al. [4], Seite 136, zu finden.

Nun haben wir also eine Interpretation in Form von Optionen für eine der Komponenten der Kapitalstruktur eines Unternehmens gefunden. Auch die andere Komponente, nämlich Eigenkapital, kann in einen optionstheoretischen Ansatz eingefasst werden: Die Eigenkapitalgeber oder Aktieneigentümer der Firma haben das Recht die Firma aufzulösen, sprich die Fremdkapitalgeber auszuzahlen, und das verbleibende Geld aufzuteilen. Sagen wir, die Eigenkapitalgeber entscheiden sich die Firma zum Fälligkeitszeitpunkt $t = T$ der Schuldverschreibung aufzulösen. Dann gibt es zwei mögliche Szenarios

1. $A_T < F$:

In diesem Fall fällt die Firma aus, da der Vermögenswert zum Fälligkeitszeitpunkt nicht ausreicht, um die Fremdkapitalgeber ganz auszubezahlen. Es gibt also keine Gelder die unter den Eigenkapitalgebern der Firma aufgeteilt werden können, so dass deren Auszahlung gleich Null ist.

2. $A_T \geq F$:

In diesem Fall bleibt den Eigenkapitalgebern nach Bezahlung der Schulden ein Nettoprofit von $A_T - F$.

Wenn man beide Fälle zusammenfasst, sieht man, dass die Auszahlung an die Eigenkapitalgeber $\max(A_T - F, 0)$ ist, was auch die Auszahlungsstruktur eines Europäischen Calls auf A mit Strike Preis F und Fälligkeitszeitpunkt T ist (siehe Tabelle 6.3). Nach Proposition 6.3.1 ist dann also der Barwert des Eigenkapitals gegeben durch

$$E_0 = C_0(A_0, \sigma_A, F, T, r). \quad (6.18)$$

Man kann also zusammenfassen:

Satz 6.3.6 (Optionstheoretische Interpretation von Eigenkapital). *Aus Sicht des Unternehmens kann Eigenkapital beschrieben werden durch eine short Position in eine Europäische Call Option. Auf der anderen Seite ist Eigenkapital aus Sicht der Eigenkapitalgeber eine long Position in eine Europäische Call Option auf den Vermögenswert des Unternehmens.*

Das allgemeine Problem mit Vermögenswertmodellen (AVM) ist, dass Vermögenswertprozesse in der Realität nicht beobachtbar sind. Was man dagegen jeden Tag beobachten kann sind Eigenkapitalwerte. Die große Frage ist also wie man Vermögenswerte aus Marktdaten wie Eigenkapitalwerten berechnen kann. Dies ist zugegebenermaßen eine sehr schwierige Frage. Wir zeigen nun wie der klassische Ansatz von Merton [33] aussieht. Dieser löst das Problem aber nur prinzipiell. In der Praxis werden andere Ansätze gewählt, die uns aber zu weit vom eigentlichen Thema entfernen, und somit aus Gründen der Übersichtlichkeit ausgelassen werden müssen.

Der klassische Ansatz funktioniert so: Der Eigenkapitalprozess einer an der Börse notierten Firma ist am Markt beobachtbar und ist gegeben durch ihre Marktkapitalisierung. Diese ist definiert durch

$$[\text{Anzahl der Aktien}] \times [\text{Wert einer Aktie}]. \quad (6.19)$$

Außerdem kann man die Volatilität σ_E des Eigenkapitalprozesses der Firma aus den Werten des Eigenkapitalprozesses schätzen. Zusätzlich können wir den Buchwert der Verbindlichkeiten der Firma erhalten. Aus diesen drei Quellen,

1. Eigenkapitalwert der Firma,
2. geschätzte Volatilität des Eigenkapitalprozesses der Firma, und
3. Buchwert F der Verbindlichkeiten der Firma

wollen wir nun auf den Vermögenswertprozess $(A_t)_{t \geq 0}$ schließen.

Nehmen wir also wieder an, dass die Firma eine einfache wie oben beschriebene Kapitalstruktur aufweist. Aus Satz 6.3.6 wissen wir bereits, dass das Eigenkapital der Firma als Call Option auf das Vermögen der Firma betrachtet werden kann, wobei der Schreiber der Option die Firma selbst ist, und der Käufer der Option die Eigenkapitalgeber sind. Der Strike Preis dieser Option wird festgelegt durch den Buchwert der Verbindlichkeiten der Firma, und die Fälligkeit wird auf den betrachteten Planungshorizont, zum Beispiel ein Monat, festgesetzt. Nach (6.18) liefert diese optionstheoretische Interpretation von Eigenkapital folgenden funktionalen Zusammenhang

$$E_t = C_t(A_t, \sigma_A, F, (T - t), r) \quad (t \in [0, T]). \quad (6.20)$$

Nach dem Satz über implizite Funktionen kann dieser Zusammenhang lokal invertiert werden, um (6.20) nach A_t aufzulösen. Demnach kann also der Vermögenswert der Firma als Funktion von Eigenkapital, den Parametern F, t, T, r und der Vermögenswertvolatilität berechnet werden. Nachdem aber wie bereits erwähnt der Vermögenswert nicht beobachtbar ist, ist auch dessen Volatilität nicht beobachtbar. Man muss also erst die Vermögenswertvolatilität bestimmen, bevor man aus (6.20) A_t herleiten kann.

Nun bedarf es einiger Resultate aus der stochastischen Analysis, die als bekannt vorausgesetzt werden. Seien wieder alle Zufallsvariablen und stochastischen Prozesse auf dem gleichen passenden Wahrscheinlichkeitsraum definiert.

Man erinnere sich daran, dass wir angenommen haben, dass sich der Vermögenswertprozess $(A_t)_{t \geq 0}$ wie eine geometrisch Brownsche Bewegung verhält, was bedeutet, dass A die folgende stochastische Differentialgleichung erfüllt:

$$A_t - A_0 = \int_0^t \mu_A A_s ds + \int_0^t \sigma_A A_s dB_s. \quad (6.21)$$

Dem Ansatz von Merton [33] folgend nehmen wir an, dass der Eigenkapitalprozess $(E_t)_{t \geq 0}$ folgende stochastische Differentialgleichung erfüllt:

$$E_t - E_0 = \int_0^t \mu_E E_s ds + \int_0^t \sigma_E E_s dB_s. \quad (6.22)$$

Das ist gleichbedeutend mit

$$dE_t = \mu_E E_t dt + \sigma_E E_t dB_t. \quad (6.23)$$

Anwendung von Itô's Lemma auf die Funktion

$$f(t, A_t) = C_t(A_t, \sigma_A, F, (T - t), r) \quad (6.24)$$

liefert

$$dE_t = dC_t(A_t, \sigma_A, F, (T - t), r) = df(t, A_t) \quad (6.25)$$

$$= \left(f_1(t, A_t) + f_2(t, A_t) \mu_A A_t + \frac{1}{2} f_{22}(t, A_t) \sigma_A^2 A_t^2 \right) dt + f_2(t, A_t) \sigma_A A_t dB_t, \quad (6.26)$$

wobei f_1 die erste partielle Ableitung nach der ersten Komponente von f , f_2 die erste partielle Ableitung nach der zweiten Komponente und f_{22} die zweite partielle Ableitung nach der zweiten Komponente bezeichnet.

Da für Itô Prozesse wie A_t und E_t , Drift μ und Volatilität σ eindeutig sind ergibt der Vergleich der Volatilitätsterme von (6.23) und (6.26)

$$\sigma_E E_t = f_2(t, A_t) \sigma_A A_t \quad (6.27)$$

Auflösen der Gleichung (6.27) nach σ_A und Einsetzen in 6.20 liefert dann σ_A und A_t für $t \in [0, T]$.

Nachdem nun klar ist wie man den Wert und die Standardabweichung des Vermögenswertes schätzt, zeigen wir wie man die individuellen Ausfallwahrscheinlichkeiten schätzen kann. Die Firma KMV propagiert nach Crosbie [9] folgenden Weg:

1. Schätze den Wert A_t und die Standardabweichung σ_A des Vermögenswertes nach oben beschriebenem Verfahren.
2. Berechne die sogenannte Distance-to-default. Die Distance-to-default wird aus dem im vorangegangenen Schritt geschätzten Vermögenswert A_t , Vermögensvolatilität σ_A und Buchwert der Verbindlichkeiten F berechnet.

$$\left[\begin{array}{c} \text{Distance} \\ \text{to-default} \end{array} \right] = \frac{A_t - F}{A_t \sigma_A} \quad (6.28)$$

3. Schätze die Ausfallwahrscheinlichkeit. KMV hat über viele Jahre hinweg für jedes Unternehmen die Distance-to-default berechnet und dann beobachtet, ob das entsprechende Unternehmen in einem bestimmten Zeitfenster ausgefallen ist oder nicht. So ist ein riesiger Datensatz entstanden, der jedem Distance-to-default Niveau eine relative Häufigkeit der Ausfälle von Unternehmen mit dieser Distance-to-default zuordnet. Durch diese Zuordnung schätzt KMV die individuellen Ausfallwahrscheinlichkeiten.

6.4 Modellierung der Abhängigkeitsstruktur

Alle nun folgenden Zufallsvariablen und /-vektoren seien wieder auf dem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) definiert. Wir verwenden nun das allgemeine latente Variablen Modell aus Kapitel 6.2. Nach Proposition 6.2.3 ist zur Beschreibung des Modells die Festlegung auf eine bestimmte Copula für die latenten Variablen hinreichend, da wir davon ausgehen, dass für ein fest gewähltes Portfolio die individuellen Ausfallwahrscheinlichkeiten $p_k = P(r_k \leq c_k)$, $K = 1 \dots, K$, bereits nach dem gerade beschriebenen Verfahren von KMV bestimmt sind. Im Folgenden werden wir die latenten Variablen r_k , $k \in \{1, \dots, K\}$, die als normalisierte Vermögenserträge modelliert werden

$$r = \frac{\ln(A_T/A_0) - (\mu_A - (\sigma_A^2/2))T}{\sigma_A \sqrt{T}},$$

aber als latente Variablen nicht beobachtbar sind, in eine Markt- und eine idiosynkratische Komponente zerlegen. Da der Markt als Abstraktum nicht beobachtbar ist, nehmen wir an, er bewege sich wie eine streng monoton wachsende Transformation einer Reihe von Log>Returns Y von Equity-Indizes. Hierfür verwenden wir den Datensatz der 92 Equity-Indizes, die nach Ländern und Industrien unterscheidbar sind. Somit hat er dieselbe Copula wie die Log>Returns Y der betrachteten Indizes. Da wir annehmen, dass die idiosynkratischen Komponenten von den r_k 's sowohl untereinander, als auch von der Marktkomponente unabhängig sind, ist die Copula der r_k 's eindeutig festgelegt, und damit das Modell hinreichend beschrieben.

Formal sieht das folgendermaßen aus:

$$r_k = \sqrt{\beta_k} w_k^T Y + \sqrt{1 - \beta_k} s_k Z_k \quad (6.29)$$

Dabei sind die $Z_1, \dots, Z_K \sim N(0, 1)$ iid und unabhängig von Y , für dessen eindimensionale Ränder $Y_i \sim N(0, 1)$, $i \in \{1, \dots, m\}$, mit m gleich Anzahl der Equity-Indizes, gilt. Diese Festlegung der Randverteilung der latenten Variablen Y und Z_1, \dots, Z_K stellt, nach Proposition 6.2.3, keine Einschränkung dar. Außerdem sei $s_k^2 = \text{Var}(r_k) = w_k^T \text{Cov}(Y) w_k = w_k^T \Sigma w_k$ die Varianz des Vermögensertrags r_k . Somit ist β_k $1 \leq k \leq K$ der Bestimmtheitskoeffizient des systematischen Risikos von Unternehmen k ; er gibt also ähnlich wie das β im Capital Asset Pricing Model (zum Beispiel in Sharpe [39]) an, wie groß der Teil der Varianz des normalisierten Vermögensertrages r_k ist, der durch die Varianz der gemeinsamen Risikofaktoren Y_i , $i = 1, \dots, m$ erklärt wird:

$$\text{Var}(r_k) = \beta_k w_k^T \text{Cov}(Y) w_k + (1 - \beta_k) s_k^2 \text{Var}(Z_k) = \beta_k s_k^2 + (1 - \beta_k) s_k^2 \quad (6.30)$$

Das entscheidende Kriterium hinsichtlich dessen sich die nun folgenden drei Modelle unterscheiden, ist die Copula des systematischen Risikofaktors Y .

6.4.1 Abhängigkeitsmodellierung mit Gauß-Copula

In diesem Modell wird die Abhängigkeitsstruktur von Y durch eine Gaußcopula beschrieben. In Beispiel 5.2.8 ist die Gaußcopula beschrieben. Y ist also m -dimensional normalverteilt mit Erwartungswert $\mathbf{0}$ und Varianz-Kovarianz-Matrix $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times m}$.

Da in diesem Modell jedes r_k , $1 \leq k \leq K$, eine Linearkombination von normalverteilten Zufallsvariablen ist, ist es auch normalverteilt, und zwar mit Erwartungswert $\mu = 0$ und Varianz $s_k^2 = w_k^T \Sigma w_k$. Somit ist die Copula der r_k 's auch die Gaußcopula. Daraus folgt, dass dieses Modell äquivalent zu denen von KMV und CreditMetrics ist (wenn die individuellen Ausfallwahrscheinlichkeiten alle gleich sind!), da beide Firmen auch normal verteilte latente Variablen benutzen. Mit

$$p_k = P(r_k \leq c_k) = P(r_k/s_k \leq c_k/s_k) = N_1(c_k/s_k), \quad 1 \leq k \leq K, \quad (6.31)$$

folgt

$$c_k = N_1^{-1}(p_k)s_k, \quad 1 \leq k \leq K, \quad (6.32)$$

wobei N_1 die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist. Und es gilt

$$E[(r_k/s_k)(r_l/s_l)] = \frac{1}{s_k} \frac{1}{s_l} E[r_k r_l] = \frac{\sqrt{\beta_k} \sqrt{\beta_l} w_k^T \Sigma w_l}{s_k s_l} \quad 1 \leq k, l \leq K. \quad (6.33)$$

Da $r_k/s_k \sim N(0, 1)$, $1 \leq k \leq K$, gilt für die gemeinsame Ausfallwahrscheinlichkeit für zwei Schuldner $k, l \in \{1, \dots, K\}$:

$$P(I_k = 1, I_l = 1) = P(r_k \leq c_k, r_l \leq c_l) \quad (6.34)$$

$$= P(r_k/s_k \leq c_k/s_k, r_l/s_l \leq c_l/s_l) \quad (6.35)$$

$$= N_2(c_k/s_k, c_l/s_l, \frac{\sqrt{\beta_k} \sqrt{\beta_l} w_k^T \Sigma w_l}{s_k s_l}), \quad (6.36)$$

wobei $N_2(x, y, \rho)$ die Verteilungsfunktion der standard bivariaten Normalverteilung ist. Daraus folgt für die Ausfallkorrelation $\rho_{D,kl}$ von zwei Schuldnern k, l

$$\rho_{D,kl} := \frac{E(I_k I_l) - E(I_k)E(I_l)}{\text{Var}(I_k)\text{Var}(I_l)} = \frac{P(I_k = 1, I_l = 1) - p_k p_l}{\sqrt{p_k(1-p_k)}\sqrt{p_l(1-p_l)}}. \quad (6.37)$$

Leider lässt dieses Modell nur eine lineare Abhängigkeitsstruktur zwischen den Equity-Indizes zu. In den folgenden Modellen versuchen wir durch Modellannahmen, die weiter gefasst sind, aber dieses Modell als Spezialfall beinhalten, der tatsächlichen Abhängigkeitsstruktur der Y_i , $1 \leq i \leq m$ gerecht zu werden.

6.4.2 Abhängigkeitsmodellierung mit t-Copula

Der Nachteil des vorangegangenen Modells war die Annahme, der systematische Risikofaktor Y habe eine Gaußcopula, denn das Problem der Gaußcopula ist, dass sie die extremen

Abhängigkeiten der Log>Returns nicht erfassen kann, da das entsprechende Maß, die Tail-Dependence, für die Normalverteilung Null ist.

In diesem Modell wird eine t-Copula für Y verwendet (siehe Beispiel 5.2.9). Diese hat im Gegensatz zur Gauß-Copula die Tail-Dependence Eigenschaft, und kann die im Datensatz vorgefundenen und in Kapitel 3.2.4 dokumentierten extremen Abhängigkeiten besser erfassen.

In diesem Modell sind die r_k 's Linearkombinationen von den Y_i 's und dem Z_k . Alle diese Zufallsvariablen haben normalverteilte Ränder. Allerdings haben die Y_i , $i = 1, \dots, 92$, eine t-Copula, so dass die Verteilungsfunktion F_k von r_k unbekannt ist. Daher muss man mit Schätzern \widehat{F}_k von F_k , $1 \leq k \leq K$ arbeiten um die c_k 's durch Schätzwerte \widehat{c}_k zu ersetzen:

$$\widehat{c}_k := \widehat{F}_k^{-1}(p_k) \quad 1 \leq k \leq K. \quad (6.38)$$

Um die t-Copula genau festzulegen, müssen noch die Korrelationsmatrix ρ und der Freiheitsgrad ν geschätzt werden, was in Kapitel 7 passieren wird.

6.4.3 Abhängigkeitsmodellierung mit gruppierter t-Copula

Die in diesem Modell verwendete gruppierte t-Copula wurde in Beispiel 5.2.10 beschrieben.

Der Datensatz der Equity-Indizes besteht aus 92 Indizes, die aus 8 verschiedenen Ländern stammen. Es kann also sein, dass verschiedene Ländergruppen auch verschiedene Abhängigkeitsstrukturen aufweisen. Somit besteht die Möglichkeit, dass das t-Copula Modell, das nur von einem einzigen globalen Freiheitsgrad ausgeht zu einfach ist, um die Abhängigkeiten zwischen allen Indizes zu beschreiben.

Um die Einführung eines flexibleren Modells rechtfertigen, ist es sinnvoll zu fordern, dass die folgenden Voraussetzungen erfüllt sind:

1. Das erweiterte Modell sollte das t-Copula Modell als Spezialfall beinhalten, und
2. Die Kalibrierung des erweiterten Modells und die Simulation davon sollte nicht schwieriger sein als für das t-Copula Modell.

Wie man bereits in Kapitel 5 gesehen hat, ist die t-Copula ein Spezialfall der gruppierten t-Copula, so dass die erste Forderung für die gruppierte t-Copula erfüllt wäre.

Die Simulation von Zufallsvariablen mit der gruppierten-t Copula als Verteilung ist nicht schwieriger als die Simulation aus den vorangegangenen Verteilungen der systematischen Risikofaktoren:

1. Ziehe unabhängig voneinander einen Zufallsvektor Z aus einer m -dimensionalen (m ist Anzahl der Equity-Indizes), standardisierten Normalverteilung mit Korrelationsmatrix ρ , und eine Zufallsvariable U aus einer Gleichverteilung auf $[0, 1]$.

2. Erhalte R_1, \dots, R_L durch $R_l = G_{\nu_l}^{-1}(U)$ für $l = 1, \dots, L$. Mittels

$$Y = (R_1 Z_1, \dots, R_1 Z_{s_1}, R_2 Z_{s_1+1}, \dots, R_2 Z_{s_1+s_2}, \dots, R_L Z_{s_1+\dots+s_{L-1}+1}, \dots, R_L Z_J)^T, \quad (6.39)$$

erhält man einen Vektor $(Y_1, \dots, Y_J)^T$ mit gruppierter t-Verteilung.

3. Letztendlich ist

$$(t_{\nu_1}(Y_1), \dots, t_{\nu_1}(Y_{s_1}), t_{\nu_2}(Y_{s_1+1}), \dots, t_{\nu_2}(Y_{s_1+s_2}), \dots, t_{\nu_L}(Y_J))^T \quad (6.40)$$

ein Vektor mit der gruppierten t-Copula als Verteilung.

Somit wäre auch die zweite Forderung für die gruppierte t-Copula erfüllt.

Wir haben im Datensatz der Log>Returns der Equity-Indizes Abhängigkeiten der extremen Realisierungen geschätzt, die größer als Null waren (siehe zum Beispiel Tabelle 3.2). Somit ist das Modell mit einer Abhängigkeitsmodellierung mittels einer Gaußcopula unpassend. Außerdem vermuten wir, dass die Abhängigkeitsstruktur zwischen Equity-Indizes einer Ländergruppe nicht für alle Ländergruppen gleich ist. Daher unterteilen wir auch im Modell die Indizes in Gruppen von Ländern, und beschreiben die Abhängigkeitsstruktur von Y durch eine gruppierte t-Copula.

Auch in diesem Modell sind die r_k 's Linearkombinationen von den Y_i 's und dem Z_k . Alle diese Zufallsvariablen haben normalverteilte Ränder. Allerdings haben die Y_i , $i = 1, \dots, 92$, eine gruppierte t-Copula, so dass die Verteilungsfunktion F_k von r_k auch hier unbekannt ist. Daher muss man wieder mit Schätzern \widehat{F}_k von F_k , $1 \leq k \leq K$, arbeiten um die c_k 's durch Schätzwerte \widehat{c}_k zu ersetzen:

$$\widehat{c}_k := \widehat{F}_k^{-1}(p_k) \quad 1 \leq k \leq K. \quad (6.41)$$

Um die gruppierte t-Copula genau festzulegen, müssen noch deren Parameter ρ und ν_1, \dots, ν_L geschätzt werden, was ebenfalls in Kapitel 7 passieren wird. Da sich beim Kalibrieren mittels verschiedener Verfahren die Werte ν_1, \dots, ν_L immer merklich unterscheiden, scheint das Modell mit der gruppierten Copula das Beste zu sein. Ein Argument für eine t-Copula wäre gewesen, wenn die Schätzwerte $\widehat{\nu}_1, \dots, \widehat{\nu}_L$ alle nahezu gleich gewesen wären, und ein Argument für die Gaußcopula wäre gewesen, wenn diese Schätzwerte sehr groß gewesen wären. In der Realität waren sie aber sehr klein und verschieden. Ob die ν_1, \dots, ν_L signifikant verschieden sind könnte ein statistischer Test zeigen. Bei einem solchen hieße die Nullhypothese $H_0: \nu_1 = \dots = \nu_L$ und die Alternative H_1 : mindestens 2 ν aus $\nu_1 = \dots = \nu_L$ sind verschieden. Ein solcher Test würde aber über den Rahmen dieser Diplomarbeit gehen. Da der Aufwand für das gruppierte t-Copulamodell kaum größer ist als für die anderen beiden Modelle, ist dieses das Modell der Wahl.

Kapitel 7

Kalibrierung

In diesem Kapitel stellen wir verschiedene Methoden vor, mittels derer man die Parameter ν_1, \dots, ν_L und $\boldsymbol{\rho}$ des gruppierte t-Copula-Modells schätzen kann. Nun wiederholen wir kurz die Definition einer gruppierten Copula:

Seien $Z \sim N_J(\mathbf{0}, \boldsymbol{\rho})$ mit einer beliebigen Korrelationsmatrix $\boldsymbol{\rho}$ und $U \sim U(0, 1)$ unabhängig. Außerdem sei mit G_ν die Verteilungsfunktion von $\sqrt{\nu/S}$, mit $S \sim \chi_\nu^2$ bezeichnet. $\{1, \dots, J\}$ sei in L Untergruppen der Größen s_1, \dots, s_L aufgeteilt. Es gilt also $s_1 + \dots + s_L = J$. Sei $R_l = G_{\nu_l}^{-1}(U)$ für $l = 1, \dots, L$. Wenn

$$X = (R_1 Z_1, \dots, R_1 Z_{s_1}, R_2 Z_{s_1+1}, \dots, R_2 Z_{s_1+s_2}, \dots, R_L Z_{s_1+\dots+s_{L-1}+1}, \dots, R_L Z_J)^T, \quad (7.1)$$

dann hat der Zufallsvektor X eine gruppierte t -Verteilung $gt_{\boldsymbol{\rho}; \nu_1, \dots, \nu_L}$ mit Parametern ν_1, \dots, ν_L und $\boldsymbol{\rho}$. Nach dem Satz von Sklar 3.1.10 ist die gruppierte t-Copula dann gegeben durch

$$C_{\boldsymbol{\rho}; \nu_1, \dots, \nu_L}^{gt}(\mathbf{u}) = gt_{\boldsymbol{\rho}; \nu_1, \dots, \nu_L}(t_{\nu_1}^{-1}(u_1), \dots, t_{\nu_1}^{-1}(u_{s_1}), t_{\nu_2}^{-1}(u_{s_1+1}), \dots, t_{\nu_2}^{-1}(u_{s_2}), \dots, t_{\nu_L}^{-1}(u_J)). \quad (7.2)$$

Um die Parameter ν_1, \dots, ν_L und $\boldsymbol{\rho}$ des gruppierte t-Copula-Modells schätzen zu können, muss man erst die Daten auf die $U(0,1)$ -Skala transformieren. Dies passiert, indem man zunächst die unbekannt Randverteilungen schätzt und dann die Wahrscheinlichkeits-Integral-Transformation anwendet. Bei uns besteht der Datensatz aus 120 Beobachtungen von Log>Returns von 92 verschiedenen Equity-Indizes. Seien die Daten also in einer 120×92 -Matrix $R = (R_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 120 \\ 1 \leq j \leq 92}}$ gespeichert. In unserem Modell nehmen wir an, dass R die 120 Realisierungen einer 92-dimensionalen Verteilung seien, die beliebige Randverteilungen und eine gruppierte t-Copula hat.

Das Schätzen der Randverteilungen kann man auf drei verschiedene Arten bewerkstelligen:

1. Anpassen parametrischer Verteilungen an die einzelnen Randverteilungen (parametrisches Verfahren),
2. Nichtparametrische Schätzung der Randverteilungen durch empirische Verteilungsfunktionen (nichtparametrisches Verfahren),
3. Kombination von parametrischen und nichtparametrischen Methoden (semiparametrisches Verfahren).

Dabei ist eine falsche Kalibrierung der Randverteilungen fatal, da die Daten in einem solchen Fall nicht auf die $U(0,1)$ -Skala transformiert werden. Wenn man diese nicht auf $U(0,1)$ transformierten Daten dann zur Schätzung der Copulaparameter verwendet, erhält man falsche Werte und somit ein falsches multivariates Modell.

Die Güte des ersten Verfahrens hängt in der Praxis offensichtlich stark davon ab, ob man **geeignete** parametrische Modelle für die Randverteilungen findet. Dies gestaltet sich schwieriger wenn die Randverteilungen schwere Tails und oder Schiefe aufweisen. Klassische parametrische Schätzverfahren kalibrieren allerdings nur das Zentrum der Verteilung, nicht die Tails. Daul et al. [12] verwenden eine Normalverteilung als parametrisches Modell für die Logreturns. Die Histogramme der Log-Returns (Abbildungen 2.23 bis 2.26) weisen aber teilweise eine Schiefe auf, was die Normalverteilung für das parametrische Modell als fragwürdig erscheinen lässt.

Die zweite Methode benutzt die empirischen Verteilungsfunktionen zur Schätzung der Randverteilungen.

Die empirische Verteilungsfunktion der j -ten Randverteilung ist

$$\widehat{F}_j(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n 1_{\{R_{i,j} \leq x\}}, \quad 1 \leq j \leq 92. \quad (7.3)$$

Und die pseudo-Realisierungen der gruppierten t-Copula sind dann Vektoren $\widehat{U}_1, \dots, \widehat{U}_{120}$ mit $\widehat{U}_i \in \mathbb{R}^{92}$, $1 \leq i \leq 120$, und

$$\widehat{U}_i = (\widehat{U}_{i,1}, \dots, \widehat{U}_{i,92})^T = (\widehat{F}_1(R_{i,1}), \dots, \widehat{F}_{92}(R_{i,92}))^T. \quad (7.4)$$

Da die Randverteilungsschätzer \widehat{F}_j aus den original Daten durch alle univariaten Realisierungen $R_{1,j}, \dots, R_{120,j}$ konstruiert werden, sind die pseudo-Realisierungen \widehat{U}_i abhängig, selbst dann, wenn die originalen Datenvektoren $R_{1,1 \leq j \leq 92}, \dots, R_{120,1 \leq j \leq 92}$ iid sind. Man beachte außerdem, dass durch das dividieren durch $n+1$ in den empirischen Verteilungsfunktionen, die pseudo-Realisierungen nicht auf den Rand des Einheitswürfels $[0, 1]^{92}$ fallen können. Da wir nur 120 Datenpunkte zur Verfügung haben, führt das nichtparametrische Verfahren nicht zu befriedigenden Ergebnissen.

Eine Kombination aus den parametrischen und nichtparametrischen Ansätzen kann man entwickeln, indem man wie in Kapitel B.5.4 beschrieben die Tails der univariaten Randverteilungen durch verallgemeinerte Paretoverteilungen modelliert, und den mittleren Teil der Randverteilungen durch die empirischen Verteilungsfunktionen approximiert. Da durch die Extremwerttheorie auch für wenige Datenpunkte gute Schätzer für die Tails zur Verfügung stehen, sind semiparametrische Verfahren bei geringer Datenfülle besonders geeignet. Daher wurde das semiparametrische Verfahren in dieser Arbeit verwendet:

Dabei wurden die Tails der eindimensionalen Randverteilungen mittels einer GPD approximiert, deren Parameter gemäß (B.68), (B.69) und (B.75) festgelegt wurden. Das Anpassen der Daten, die eine bestimmte Schwelle u überschreiten, an eine GPD ist im Programmpaket EVIS [32] von Alexander McNeil durch die Funktion "GPD" implementiert. In Tabelle 7.13 findet man die Werte der Schätzer für die Parameter ζ , ν , β und u für die rechten Tails der eindimensionalen Verteilungen aller 92 Equity-Indizes. In Tabelle 7.14 stehen die entsprechenden Werte für die linken Tails.

7.1 Schätzen der Parameter ν_1, \dots, ν_L

Zuerst stellen wir nun Verfahren vor, anhand derer man Schätzwerte für ν_1, \dots, ν_L erhält. Beim ersten schätzt man gleichzeitig auch Teile der Korrelationsmatrix $\boldsymbol{\rho}$. Dieses Verfahren ist aber in der Praxis eher ungeeignet. Bei den anderen Verfahren schätzt man ν_1, \dots, ν_L getrennt von $\boldsymbol{\rho}$. Ein Schätzer für $\boldsymbol{\rho}$ ist in Kapitel 7.2 zu finden

7.1.1 Maximum Likelihood Methode

Seien wie in Kapitel 6 s_1, \dots, s_L wieder die Gruppengrößen und ν_1, \dots, ν_L die Anzahl der Freiheitsgrade der einzelnen Equity-Indexgruppen. Desweiteren seien mit $\boldsymbol{\rho}_l \in \mathbb{R}^{s_l \times s_l}$, $1 \leq l \leq L$ die Korrelationsmatrizen der einzelnen Gruppen bezeichnet. Diese sind also als quadratische Blöcke in der Gesamtkorrelationsmatrix $\boldsymbol{\rho}$ enthalten.

Unserem Modell entsprechend, sind dann $(R_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 120 \\ s_0 + \dots + s_{l-1} + 1 \leq j \leq s_0 + \dots + s_l}}$ für $s_0 = 0$ und $l = 1, \dots, L$ jeweils 120 Realisierungen einer meta-t-Verteilung (Verteilung mit t-Copula und beliebigen Randverteilungen). Die nach dem oben beschriebenen Verfahren erhaltenen $(\widehat{U}_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 120 \\ s_0 + \dots + s_{l-1} + 1 \leq j \leq s_0 + \dots + s_l}}$ $l = 1, \dots, L$ sind dann jeweils 120 pseudo-Realisierungen der t-Copula $C_{\nu_l, \boldsymbol{\rho}_l}^t$, $l = 1, \dots, L$, mit

$$C_{\nu_l, \boldsymbol{\rho}_l}^t(\mathbf{u}) = t_{\nu_l, \boldsymbol{\rho}_l}^{s_l}(t_{\nu_l}^{-1}(u_1), \dots, t_{\nu_l}^{-1}(u_{s_l})). \quad (7.5)$$

Somit können wir für jedes $l = 1, \dots, L$ die Parameter ν_l und $\boldsymbol{\rho}_l$ durch die Maximum Likelihood Methode schätzen. Sei nun $l \in \{1, \dots, L\}$ fest gewählt. Die Schätzer $\widehat{\nu}_l$ und $\widehat{\boldsymbol{\rho}}_l$ erhält man dann durch maximieren von

$$\log L(\nu_l, \boldsymbol{\rho}_l; \widehat{\mathbf{U}}_{s_0 + \dots + s_{l-1} + 1, \dots, s_0 + \dots + s_l}) = \sum_{i=1}^{120} \log c_{\nu_l, \boldsymbol{\rho}_l}^t(\widehat{U}_{i, s_0 + \dots + s_{l-1} + 1, \dots, s_0 + \dots + s_l}) \quad (7.6)$$

bezüglich ν_l und $\boldsymbol{\rho}_l$, wobei $c_{\nu_l, \boldsymbol{\rho}_l}^t$ die Dichte der t-Copula

$$c_{\nu_l, \boldsymbol{\rho}_l}^t(u_1, \dots, u_{s_l}) = \frac{1}{\sqrt{\det \boldsymbol{\rho}_l}} \frac{\Gamma(\frac{\nu_l + s_l}{2}) \Gamma(\frac{\nu_l}{2})^{s_l - 1}}{\Gamma(\frac{\nu_l + 1}{2})^{s_l}} \frac{\prod_{i=1}^{s_l} (1 + \frac{x_i^2}{\nu_l})^{\frac{\nu_l + 1}{2}}}{(1 + \frac{x^T \boldsymbol{\rho}_l^{-1} x}{\nu_l})^{\frac{\nu_l + s_l}{2}}}, \quad \mathbf{u} \in [0, 1]^{s_l}, \quad (7.7)$$

mit $x_k = t_{\nu_l}^{-1}(u_k)$, bezeichnet.

Das Maximieren wird in höheren Dimensionen immer aufwändiger, da man über den Raum der Korrelationsmatrizen $\boldsymbol{\rho}_l$ maximieren muss. Da Korrelationsmatrizen symmetrisch sind und auf ihren Hauptdiagonalen Einsen stehen, genügt es über die Einträge oberhalb der Hauptdiagonalen zu maximieren. Somit bleiben aber immer noch für eine $s_l \times s_l$ Matrix $s_l(s_l - 1)/2$ Matrizeneinträge, plus die Anzahl der Freiheitsgrade ν_l als Variablen, über die maximiert werden muss. Zusätzlich zu der Nichtlinearität der Zielfunktion, kommen als weitere Erschwerniss die verschiedenen, teilweise nichtlinearen, Nebenbedingungen: Die Matrix $\boldsymbol{\rho}_l$, muss positiv definit sein, und für ihre Einträge $\rho_{l,ij}$ muss gelten $-1 \leq \rho_{l,ij} \leq 1$, $1 \leq i, j \leq s_j$. Zuletzt muss auch noch gelten $\nu \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Das Optimierungsproblem lautet also:

$$\max_{\substack{\nu_l \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \\ -1 \leq \rho_{l,ij} \leq 1, 1 \leq i, j \leq s_j \\ \det(\boldsymbol{\rho}_l) > 0}} \log L(\nu_l, \boldsymbol{\rho}_l; \widehat{\mathbf{U}}_{s_0 + \dots + s_{l-1} + 1, \dots, s_0 + \dots + s_l}) \quad (7.8)$$

Zu der Nichtlinearität der Optimierungsaufgabe und ihrer hohen Dimension kommen zusätzlich noch numerische Probleme. Bei näherem Betrachten der t -Copula Dichte erkennt man, dass $\log c_{\nu_l, \rho_l}^t \rightarrow \infty$ für $\det(\rho_l) \rightarrow 0$. Typische Verfahren zur Lösung von nicht-linearen Optimierungsproblemen sind Penalty- oder Barrieralgorithmen. Diese würden ungeachtet der Nebenbedingung $\det(\rho_l) > 0$ in Richtung einer singulären Matrix ρ_l suchen, und versuchen die Nebenbedingung gegen Ende zu erfüllen. Dabei kommt es aber schon vorher zu dem Problem, dass in c_{ν_l, ρ_l}^t auch die Inverse der Matrix ρ_l berechnet werden muss, was ein sehr schlecht konditioniertes Problem ist, wenn der kleinste Eigenwert λ_{\min} von ρ_l gegen 0 geht.

Dieses Problem wurde gelöst, indem $\det(\rho_l)$ in c_{ν_l, ρ_l}^t (siehe 7.7) durch $\max(\epsilon, \det(\rho_l))$, $\epsilon > 0$ ersetzt wurde:

$$c_{\nu_l, \rho_l}^{t*}(u_1, \dots, u_{s_l}) := \frac{1}{\sqrt{\max(\epsilon, \det \rho_l)}} \frac{\Gamma(\frac{\nu_l + s_l}{2}) \Gamma(\frac{\nu_l}{2})^{s_l - 1}}{\Gamma(\frac{\nu_l + 1}{2})^{s_l}} \frac{\prod_{i=1}^{s_l} (1 + \frac{x_i^2}{\nu_l})^{\frac{\nu_l + 1}{2}}}{(1 + \frac{x^T \rho_l^{-1} x}{\nu_l})^{\frac{\nu_l + s_l}{2}}}, \quad \mathbf{u} \in [0, 1]^{s_l}, \quad (7.9)$$

mit $x_k = t_{\nu_l}^{-1}(u_k)$. Mit

$$\log L^*(\nu_l, \rho_l; \widehat{\mathbf{U}}_{s_0 + \dots + s_{l-1} + 1, \dots, s_0 + \dots + s_l}) := \sum_{i=1}^{120} \log c_{\nu_l, \rho_l}^{t*}(\widehat{U}_{i, s_0 + \dots + s_{l-1} + 1, \dots, s_0 + \dots + s_l}) \quad (7.10)$$

lautet dann das neue Optimierungsproblem:

$$\max_{\substack{\nu_l \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \\ -1 \leq \rho_{l,ij} \leq 1, 1 \leq i, j \leq s_l \\ \det(\rho_l) > 0}} \log L^*(\nu_l, \rho_l; \widehat{\mathbf{U}}_{s_0 + \dots + s_{l-1} + 1, \dots, s_0 + \dots + s_l}) \quad (7.11)$$

Auf diese neue Maximierungsaufgabe ist die Funktion “fmincon” aus der Optimization Toolbox von Matlab anwendbar, mit Hilfe derer zumindest für die Gruppe der Schweizer Equity-Indizes das Optimierungsproblem gelöst werden konnte. Die erhaltenen Werte sieht man in Tabelle 7.2. Da aber der “Fluch der Dimension” für die anderen Equity-Indexgruppen zu groß wird (die Schweizer Equity-Indexgruppe besteht nur aus 4 Elementen, die anderen Gruppen aus teilweise 15 und 20 Elementen, siehe Tabelle 7.3 dritte Spalte für alle Gruppengrößen), ist in der Praxis das nun folgende Verfahren relevant.

7.1.2 Momenten-Methode unter Verwendung von Kendall’s Tau

Eine einfache Methode um die Korrelationsmatrix ρ_l , $l \in \{1, \dots, L\}$, die die t -Copula C_{ν_l, ρ_l}^t , $l \in \{1, \dots, L\}$, teilweise parametrisiert, zu schätzen basiert auf Kendall’s Tau und wurde in Demarta und McNeil [14] und Lindskog et al. [31] vorgeschlagen. Das Verfahren besteht daraus, für jede bivariate Randverteilung der Copula einen Schätzer von Kendall’s Tau zu berechnen, und dann die bereits in Satz 5.2.11 eingeführte Beziehung

$$\tau_{l,ij} = \frac{2}{\pi} \arcsin \rho_{l,ij}, \quad i, j = 1, \dots, s_l \quad (7.12)$$

zu benutzen, um einen Schätzwert für das relevante Element von ρ_l herzuleiten. Ein Schätzer für Kendall’s Tau wurde bereits in Kapitel 3.2.3 vorgestellt. Sei also $\widehat{\tau}_{l,ij}$ der

Schätzer von Kendall's Tau für die Indizes $i, j \in \{1, \dots, s_l\}$. Ein Schätzer für $\rho_{l,ij}$ ist dann gegeben durch $\sin(\frac{\pi}{2}\widehat{\tau}_{l,ij})$. Dies ist dann ein Momenten-Schätzer, da der hier verwendete Schätzer $\widehat{\tau}$ von Kendall's Tau ein Momenten-Schätzer ist.

Um einen Schätzer der Korrelationsmatrix ρ_l zu erhalten, kann man die paarweisen Schätzer $\widehat{\tau}_{l,ij}$ von Kendall's Tau für alle bivariaten Randverteilungen zu einer geschätzten Kendall's Tau Matrix $\widehat{\tau}_l$ gemäß $(\widehat{\tau}_l)_{ij} = \widehat{\tau}_{l,ij}$, $i, j \in \{1, \dots, s_l\}$ zusammenfassen, und dann den Schätzer von ρ_l konstruieren durch $\widehat{\rho}_l = \sin(\frac{\pi}{2}\widehat{\tau}_l)$. Allerdings gibt es keine Garantie dafür, dass diese komponentenweise Transformation der geschätzten Kendall's Tau Matrix eine positiv definite Matrix ergibt. Sollte die geschätzte Korrelationsmatrix $\widehat{\rho}_l$ nicht positiv definit sein, so kann man sie zum Beispiel mit der Eigenwertmethode von Rousseeuw&Molenberghs [37] in eine positiv definite Matrix $\widehat{\rho}_{l,PD}$ verwandeln.

Diese Methode funktioniert folgendermaßen:

Eine Korrelationsmatrix $R \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ist symmetrisch und positiv semidefinit und kann somit geschrieben werden als

$$R = PDP^T, \quad (7.13)$$

wobei D eine Diagonalmatrix ist, deren Einträge die nichtnegativen Eigenwerte von R sind, und P eine Orthogonalmatrix ($PP^T = P^TP = I_p$) ist, deren Spalten die entsprechenden Eigenvektoren sind. Wenn R strikt positiv definit ist, sind auch alle ihre Eigenwerte positiv.

Wenn R symmetrisch aber nicht positiv semidefinit ist, gilt (7.13) weiterhin, allerdings sind dann einige Eigenwerte negativ. Normalerweise haben die negativen Eigenwerte nur kleine Absolutbeträge. Wenn man nun eine positiv semidefinite Matrix erhalten will, kann man einfach die negativen Eigenwerte durch 0 ersetzen. Soll die Ergebnismatrix positiv definit sein, so muss man die negativen Eigenwerte durch kleine positive Zahlen $\epsilon > 0$ ersetzen. In beiden Fällen wird D durch D' ersetzt, und man berechnet $R' = PD'P^T$. Nun haben wir das Problem, dass die Diagonalelemente von R' nicht notwendigerweise gleich 1 sind. Daher transformieren wir R' zu $\widetilde{R} = D_1R'D_1$, wobei D_1 eine Diagonalmatrix mit den Einträgen $1/\sqrt{R'_{ii}}$, ($i = 1, \dots, p$) ist. Somit ist \widetilde{R} die gesuchte symmetrisch positiv definite Matrix mit Einsen auf der Hauptdiagonale.

Die Eigenwert-Eigenvektor Zerlegung aus (7.13) kann mit der Funktion "eigen" in S-plus berechnet werden. Dabei muss man sich aber noch versichern, dass die Eigenvektoren orthogonal sind. Eigenvektoren die zu verschiedenen Eigenwerten gehören sind automatisch orthogonal. Eine Menge von Eigenvektoren, die zum gleichen Eigenwert gehören werden durch Eigenvektoren ersetzt, die durch ein Gram-Schmidt Orthogonalisierungsverfahren berechnet werden.

Die einfachste Art den verbleibenden Parameter ν_l zu schätzen, ist eine Plug-in Methode, bei der das im vorangegangenen Kapitel vorgestellte Maximum-Likelihood-Verfahren benutzt wird, wobei nun der Parameter ρ_l durch den geschätzten Parameter $\widehat{\rho}_l$ ersetzt wird. In Tabelle 7.3 findet man die Schätzwerte $\widehat{\nu}_1, \dots, \widehat{\nu}_8$ in der siebten Spalte. Für ν_6 , den Freiheitsgrad der Schweizer Indexgruppe, stellt man fest, dass er sowohl im Plug-in Verfahren, als auch im numerischen Optimierungsverfahren den Wert 8 annimmt (siehe Tabelle 7.3 siebte Spalte und Tabelle 7.2 letzte Zeile). In der vierten Spalte stehen die Schätzwerte die Daul et al. [12] mittels der gleichen Methode geschätzt haben.

Die Unterschiede zwischen den beiden Schätzwerten sind dadurch zu erklären, dass ver-

schiedene Verfahren zur Berechnung der Pseudo-Copularealisierungen \widehat{U}_i , $1 \leq i \leq 120$ verwendet wurden. Wenn man die Pseudo-Copularealisierungen durch eine Wahrscheinlichkeits-Integral-Transformation erhält, bei der man eine angepasste Normalverteilung, das heißt eine Normalverteilung mit Erwartungswert 0 und einer aus den Daten geschätzten Standardabweichung verwendet, ergeben sich Werte für $\widehat{\nu}_1, \dots, \widehat{\nu}_8$, die in Tabelle 7.3 in der fünften Spalte stehen. Diese weichen nur im Fall der deutschen Equity-Indizes von denen ab, die Daul et al. [12] erhalten haben. Die Werte der geschätzten Standardabweichungen sind in Tabelle 7.5 zu finden.

Wenn man bei der Transformation auf $U(0,1)$ eine Normalverteilung verwendet bei der auch die Erwartungswerte an die Daten angepasst sind, das heißt, dass die Erwartungswerte durch die entsprechenden Mittelwerte geschätzt werden, so ergeben sich bei der Plug-in Methode teilweise andere Werte für die $\widehat{\nu}_1, \dots, \widehat{\nu}_8$. Diese sind in Tabelle 7.3 in der sechsten Spalte zu sehen. Die Werte der geschätzten Erwartungswerte sind in Tabelle 7.6 zu finden.

7.1.3 Kleinste-Quadrate Schätzer vom Tailindex α

Eine weitere Methode zum Schätzen der Parameter ν_1, \dots, ν_L benutzt das Verhältnis von Tail-Dependence, Kendall's Tau und dem Tailindex α im Fall von elliptischen Verteilungen und Verteilungen mit elliptischer Copula.

Wie wir bereits aus Satz 5.2.15 wissen, gilt in einem Modell mit einem elliptisch verteilten Zufallsvektor $X \sim E_m(\Sigma, \Phi, \mu)$, dass X regulär variierend ist mit Index $-\alpha$: $X \in \mathcal{R}_{-\alpha}(\mathbb{R}^m)$ genau dann, wenn seine erzeugende Variable auch regulär variierend ist mit dem gleichen Index: $R_m \in \mathcal{R}_{-\alpha}(\mathbb{R}_+)$. Desweiteren gilt: Aus $R_k \in \mathcal{R}_{-\alpha}(\mathbb{R}_+)$ folgt $R_l \in \mathcal{R}_{-\alpha}(\mathbb{R}_+)$ für R_k und R_l generierende Variablen von k und l dimensionalen Teilvektoren von X und $1 \leq k \leq l \leq m$. Außerdem sind die univariaten Randverteilungen eines elliptischen regulär variierenden Zufallsvektors ebenfalls regulär variierend mit dem gleichen Index. Man kann also bei einem elliptisch verteilten Zufallsvektor den Tailindex der regulären Variation der zugrunde liegenden Randverteilungen schätzen und daraus den Tailindex der mehrdimensionalen regulären Variation des Gesamtvektors bestimmen.

Wenn nun X aber nicht elliptisch verteilt ist, sondern nur eine elliptische Copula mit beliebigen, nicht zu dieser Copula gehörenden, Randverteilungen hat, so ist α nicht mehr der Absolutbetrag des gemeinsamen Index der regulären Variation, sondern ein Copulaparameter.

In unserem gruppierte t-Copula Kreditrisikomodell haben bestimmte Teilvektoren des systematischen Risikofaktors Y eine t-Copula. t-Copulae gehören gemäß Kapitel 5 zur Familie der elliptischen Copulae. Außerdem ist der Absolutbetrag des Index der regulären Variation eines mehrdimensional t-verteilten Zufallsvektors gleich der Anzahl seiner Freiheitsgrade. Es gilt also $|\alpha| = \nu$. Wir können folglich für jede einzelne Gruppe von Equity-Indizes deren Copulaparameter α_l , $1 \leq l \leq L$, schätzen, und dadurch Werte für ν_1, \dots, ν_L erhalten. Um den neuen Schätzer $\widehat{\alpha}$ im folgenden definieren zu können, bedarf es der bereits nach Bemerkung 5.2.17 eingeführten Beziehung (5.47) zwischen Tail-Dependence λ , Kendall's τ und α .

Sei X ein Zufallsvektor mit beliebigen Randverteilungen und einer Copula von einer elliptischen Verteilung $E_m(\Sigma, \Phi, \mu)$ mit positiv definiten Matrix Σ und regulär variierenden

Tails mit Index $-\alpha$. Dann gilt

$$\lambda(\alpha, \tau_{ij}) = \frac{\int_{h(\tau_{ij})}^{\frac{\pi}{2}} \cos^\alpha v \, dv}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^\alpha v \, dv}, \quad \alpha > 0, \quad h(\tau_{ij}) = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1 - \tau_{ij}}{2} \right). \quad (7.14)$$

Folgende Proposition stammt aus Kostadinov [28]

Proposition 7.1.1. *Sei X ein Zufallsvektor mit beliebigen Randverteilungen und einer Copula von einer elliptischen Verteilung $E_m(\mu, \Sigma, \phi)$ mit positiv definiten Matrix Σ und regulär variierenden Tails mit Index $-\alpha$. Desweiteren seien $\hat{\lambda}$ und $\hat{\tau}$ Matrizen mit den Einträgen $\hat{\lambda}_{ij}$ und $\hat{\tau}_{ij}$, den Schätzern der paarweisen Koeffizienten der Tail Dependence und von Kendall's Tau. Dann hat die Funktion*

$$F(\alpha, \hat{\lambda}, \hat{\tau}) := \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m (\hat{\lambda}_{ij} - \lambda(\alpha, \hat{\tau}_{ij}))^2$$

folgende Eigenschaften:

- (1.) $0 \leq F(\alpha, \hat{\lambda}, \hat{\tau}) \leq \binom{m}{2} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}_+, -1 \leq \hat{\tau}_{ij} \leq 1, f.s., 0 \leq \hat{\lambda}_{ij} \leq 1 f.s., 1 \leq i, j \leq m.$
- (2.) $F(\alpha, \hat{\lambda}, \hat{\tau})$ ist stetig in allen drei Variablen.
- (3.) $\frac{\partial}{\partial \alpha} \lambda(\alpha, \hat{\tau}_{ij}) < 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+, \hat{\tau}_{ij} \neq \{-1, 1\} f.s., 1 \leq i, j \leq m.$
- (4.) $\arg \min_{\alpha \in \mathbb{R}^+} F(\alpha, \hat{\lambda}, \hat{\tau})$ existiert für $\hat{\tau}_{ij} \neq \{-1, 1\} f.s., 0 < \hat{\lambda}_{ij} \leq \frac{1+\hat{\tau}_{ij}}{2} f.s., 1 \leq i, j \leq m.$
- (5.) $F(\cdot, \lambda, \tau)$ ist quasikonvex und $\arg \min_{\alpha \in \mathbb{R}^+} F(\alpha, \hat{\lambda}, \hat{\tau})$ ist eindeutig für $\hat{\tau}_{ij} \neq \{-1, 1\} f.s., 0 < \hat{\lambda}_{ij} \leq \frac{1+\hat{\tau}_{ij}}{2} f.s., 1 \leq i, j \leq m.$

Beweis:

- (1.) $0 \leq F(\alpha, \hat{\lambda}, \hat{\tau}) \leq \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m (\pm 1)^2 = \binom{m}{2}.$
- (2.) Seien α und $\hat{\lambda}$ fest. Die Funktion $F(\alpha, \hat{\lambda}, \cdot)$ ist stetig an der Stelle $\hat{\tau}^0 := (\hat{\tau}_{ij}^0)_{1 \leq i, j \leq m}$, wenn $\hat{\tau}^0$ zum Definitionsbereich der Funktion gehört, wenn für Folgen $\hat{\tau}_{ij}^n \rightarrow \hat{\tau}_{ij}^0, 1 \leq i, j \leq m$ folgender Grenzwert existiert und es gilt

$$\lim_{\hat{\tau}_{ij}^n \rightarrow \hat{\tau}_{ij}^0, \forall i, j} F(\alpha, \hat{\lambda}, (\hat{\tau}_{ij}^n)_{1 \leq i, j \leq m}) = F(\alpha, \hat{\lambda}, \hat{\tau}^0). \quad (7.15)$$

Die Funktion $F(\alpha, \hat{\lambda}, \cdot)$ ist stetig auf dem Gebiet der Matrizen $\hat{\tau}$, mit $-1 \leq \hat{\tau}_{ij} \leq 1, \forall 1 \leq i, j \leq m$, wenn sie an all diesen Stellen stetig ist.

Seien nun $\hat{\tau}^0 := (\hat{\tau}_{ij}^0)_{1 \leq i, j \leq m}$ eine beliebige Matrix mit $-1 \leq \hat{\tau}_{ij}^0 \leq 1, \forall 1 \leq i, j \leq m$, und $\hat{\tau}_{ij}^n \rightarrow \hat{\tau}_{ij}^0 \quad \forall i, j$ konvergente Folgen, dann gilt

$$h(\hat{\tau}_{ij}^n) \rightarrow h(\hat{\tau}_{ij}^0) \quad \forall i, j \quad (7.16)$$

da h aus der Definition von $\lambda(\alpha, \tau_{ij})$ stetig ist. Da die Stammfunktion von $\cos^\alpha(\cdot)$ stetig ist folgt, dass $\lambda(\alpha, \hat{\tau}_{ij})$ stetig in $\hat{\tau}_{ij}$ ist. Also gilt

$$\lambda(\alpha, \hat{\tau}_{ij}^n) \rightarrow \lambda(\alpha, \hat{\tau}_{ij}^0) \quad \forall i, j \tag{7.17}$$

und somit

$$\lim_{\hat{\tau}_{ij}^n \rightarrow \hat{\tau}_{ij}^0, \forall i, j} F(\alpha, \hat{\lambda}, (\hat{\tau}_{ij}^n)_{1 \leq i, j \leq m}) = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m (\hat{\lambda}_{ij} - \lim_{\hat{\tau}_{ij}^n \rightarrow \hat{\tau}_{ij}^0} \lambda(\alpha, \hat{\tau}_{ij}^n))^2 = F(\alpha, \hat{\lambda}, \hat{\tau}^0). \tag{7.18}$$

Somit ist $F(\alpha, \hat{\lambda}, \cdot)$ stetig auf dem Gebiet der Matrizen $\hat{\tau}$, mit $-1 \leq \hat{\tau}_{ij} \leq 1$, $1 \leq i, j \leq m$.

Stetigkeit von $F(\alpha, \cdot, \hat{\tau})$ auf dem Gebiet der Matrizen $\hat{\lambda}$, mit $0 \leq \hat{\lambda}_{ij} \leq 1$, $1 \leq i, j \leq m$ folgt analog.

Stetigkeit von $F(\cdot, \lambda, \hat{\tau})$ auf \mathbb{R}^+ folgt aus der Differenzierbarkeit nach α . Diese folgt aus der Differenzierbarkeit von $\lambda(\alpha, \hat{\tau}_{ij})$ nach α . Letzteres wird nun bewiesen.

(3.) Differenzieren von $\lambda(\alpha, \hat{\tau}_{ij})$ nach α liefert mit $x := h(\hat{\tau}_{ij})$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} \lambda(\alpha, \hat{\tau}_{ij}) &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\int_x^{\pi/2} \cos^\alpha(v) dv}{\int_0^{\pi/2} \cos^\alpha(v) dv} \\ &= \frac{\int_x^{\pi/2} \log(\cos v) \cos^\alpha(v) dv \int_0^{\pi/2} \cos^\alpha(v) dv}{\left(\int_0^{\pi/2} \cos^\alpha(v) dv\right)^2} \\ &\quad - \frac{\int_0^{\pi/2} \log(\cos v) \cos^\alpha(v) dv \int_x^{\pi/2} \cos^\alpha(v) dv}{\left(\int_0^{\pi/2} \cos^\alpha(v) dv\right)^2} \\ &=: \frac{Z(x)}{N} \end{aligned}$$

Man sieht sofort:

- (a) $N > 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$
- (b) $Z(0) = Z(\frac{\pi}{2}) = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

Sei nun α beliebig aber fest. Zu zeigen bleibt: $Z(x) < 0$ für $0 < x < \frac{\pi}{2}$ was gleichbedeutend mit ist $Z(x) < 0$ für $-1 < \hat{\tau}_{ij} < 1$. Dazu wird $Z(x)$ nach x differenziert:

$$\begin{aligned} Z'(x) &= -\log(\cos x) \cos^\alpha(x) \int_0^{\pi/2} \cos^\alpha(v) dv + \cos^\alpha(x) \int_0^{\pi/2} \log(\cos v) \cos^\alpha(v) dv \\ &= \cos^\alpha(x) \left(-\log(\cos(x)) \int_0^{\pi/2} \cos^\alpha(v) dv + \int_0^{\pi/2} \log(\cos v) \cos^\alpha(v) dv \right) \\ &=: C(x) \cos^\alpha(x) \end{aligned}$$

Man beachte dass

$$C(0) = \int_0^{\pi/2} \log(\cos v) \cos^\alpha(v) dv < 0 \quad (7.19)$$

und dass

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} C(x) = \infty. \quad (7.20)$$

Desweiteren ist C stetig und streng monoton steigend in x auf $(0, \pi/2)$. Nach dem Zwischenwertsatz existiert genau ein y , $0 < y < \pi/2$ so, dass $C(y)=0$. Außerdem gilt $Z'(x) = C(x) \cos^\alpha(x) < 0 \forall x \in (0, y)$ und $Z'(x) = C(x) \cos^\alpha(x) > 0 \forall x \in (y, \pi/2)$. Damit folgt, dass $Z(x)$ streng monoton fallend für $x \in (0, y)$ ist (also Werte zwischen $Z(0) = 0$ und $Z(y) < 0$ annimmt) und streng monoton steigend für $x \in (y, \pi/2)$ ist (also Werte zwischen $Z(y) < 0$ und $Z(\frac{\pi}{2}) = 0$ annimmt). Daraus folgt, dass $Z(x) < 0 \forall \alpha \in \mathbb{R}^+$, $0 < x < \pi/2$.

(4.) Es gilt für $\hat{\tau}_{ij} \in (-1, 1)$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \lambda(\alpha, \hat{\tau}_{ij}) = \frac{\frac{\pi}{2} - h(\hat{\tau}_{ij})}{\frac{\pi}{2} - 0} = \frac{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}(1 - \hat{\tau}_{ij})}{\frac{\pi}{2} - 0} = \frac{1 + \hat{\tau}_{ij}}{2} > \hat{\lambda}_{ij} \quad \text{f.s.} \quad (7.21)$$

Seien $x := h(\hat{\tau}_{ij})$ und $0 < \epsilon < x$. Da $\cos^\alpha t$ für alle $\alpha > 0$ streng monoton fallend in t ist, gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda(\alpha, \hat{\tau}_{ij})} &= \frac{\int_0^{\pi/2} \cos^\alpha t dt}{\int_x^{\pi/2} \cos^\alpha t dt} \\ &= \frac{\int_0^\epsilon \cos^\alpha t dt}{\int_x^{\pi/2} \cos^\alpha t dt} + \frac{\int_\epsilon^{\pi/2} \cos^\alpha t dt}{\int_x^{\pi/2} \cos^\alpha t dt} \\ &\geq \frac{\epsilon \cos^\alpha \epsilon}{(\frac{\pi}{2} - x) \cos^\alpha x} + 1. \end{aligned}$$

Da $(\frac{\cos^\alpha \epsilon}{\cos^\alpha x}) \rightarrow \infty$ für $\alpha \rightarrow \infty$ erhalten wir

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \lambda(\alpha, \hat{\tau}_{ij}) = 0 < \hat{\lambda}_{ij} \quad \text{f.s.} \quad (7.22)$$

Somit gibt es für alle $1 \leq i, j \leq m$ eine eindeutige Lösung von

$$\lambda(\alpha, \hat{\tau}_{ij}) = \hat{\lambda}_{ij} \quad (7.23)$$

welche wir mit $\alpha_{ij} > 0$ bezeichnen. sei

$$\alpha_{max} = \max_{1 \leq i, j \leq m} \alpha_{ij}. \quad (7.24)$$

Da $\lambda(\alpha, \hat{\tau}_{ij})$ streng monoton fallend in α für $\hat{\tau} \neq \{-1, 1\}$ ist, gilt für alle $\alpha > \alpha_{max}$, dass

$$\lambda(\alpha, \hat{\tau}_{ij}) - \hat{\lambda}_{ij} < \lambda(\alpha_{max}, \hat{\tau}_{ij}) - \hat{\lambda}_{ij} \leq \lambda(\alpha_{ij}, \hat{\tau}_{ij}) - \hat{\lambda}_{ij} = 0, \quad (7.25)$$

so dass

$$|\lambda(\alpha, \hat{\tau}_{ij}) - \hat{\lambda}_{ij}| > |\lambda(\alpha_{max}, \hat{\tau}_{ij}) - \hat{\lambda}_{ij}|, \quad (7.26)$$

und

$$F(\alpha, \hat{\lambda}, \hat{\tau}) > F(\alpha_{max}, \hat{\lambda}, \hat{\tau}), \quad \forall \alpha > \alpha_{max}. \quad (7.27)$$

Analog gilt für alle $\alpha < \alpha_{min}$

$$F(\alpha, \hat{\lambda}, \hat{\tau}) > F(\alpha_{min}, \hat{\lambda}, \hat{\tau}). \quad (7.28)$$

Daher gilt

$$\arg \min_{\alpha \in \mathbb{R}^+} F(\alpha, \hat{\lambda}, \hat{\tau}) = \alpha_{min} = \alpha_{max} \quad (7.29)$$

oder $F(\cdot, \hat{\lambda}, \hat{\tau})$ ist beschränkt auf dem kompakten Intervall $[\alpha_{min}, \alpha_{max}]$, so dass $F(\cdot, \hat{\lambda}, \hat{\tau})$ nach dem Satz von Weierstrass sein Minimum annimmt.

(5.) Sei die Funktion $G : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ definiert durch

$$G(\alpha) := \sum_{i>j} (\lambda(\alpha, \hat{\tau}_{ij}) - \hat{\lambda}_{ij})^2 = \sum_{i=1}^n h_i^2(\alpha) \quad (7.30)$$

wobei $n = m(m-1)/2$ und m die Dimension von X ist.

Seien $\alpha_1 \neq \alpha_2$ zwei lokale Minimalstellen von G . Man definiere

$$H(\alpha, w) := \sum_{i=1}^n w_i h_i(\alpha) \quad (7.31)$$

wobei $w = (w_1, \dots, w_n)^T$ ein deterministischer Vektor mit positiven Komponenten ist.

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass $\alpha_1 < \alpha_2$. Dann folgt mit der strengen Monotonie von $h_i(\cdot)$, $1 \leq i \leq n$, dass $h_i(\alpha_1) > h_i(\alpha_2)$, für $i = 1, \dots, n$ gilt. Da α_2 Minimalstelle von $G(\alpha)$ ist, folgt

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} h_i(\alpha_2) \right) h_i(\alpha_2) = 0 \quad (7.32)$$

Da $\frac{\partial}{\partial \alpha} h_i(\alpha_2) < 0$ für $i = 1, \dots, n$, kann man zwei Fälle unterscheiden:

(i) $h_i(\alpha_2) = 0$ für $i = 1, \dots, n$. Daraus folgt $h_i(\alpha_1) > 0$ für $i = 1, \dots, n$. Somit

$$G'(\alpha_1) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} h_i(\alpha_2) \right) h_i(\alpha_2) < 0, \quad (7.33)$$

im Widerspruch zur Annahme, dass α_1 lokale Minimalstelle von G ist.

- (ii) Es existiert mindestens ein $j \in \{1, \dots, n\}$ so, dass $h_j(\alpha_2) > 0$. Für dieses $j \in \{1, \dots, n\}$ gilt außerdem $h_j(\alpha_1) > h_j(\alpha_2) > 0$, so dass $R(w_j) := w_j h_j(\alpha_1) - w_j h_j(\alpha_2)$ für alle positiven w_j eine positive und in w_j streng monoton steigende Funktion ist. Das heißt man kann immer einen Vektor $w \in \mathbb{R}^n$ finden, so dass

$$H(\alpha_1, w) > H(\alpha_2, w) \quad (7.34)$$

indem die j -te Komponente von w hinreichend groß gewählt wird.

Sei nun $\epsilon > 0$ mit $\alpha_2 - \alpha_1 > \epsilon$. Da $\alpha < \alpha_2 \forall \alpha \in [\alpha_1 - \epsilon, \alpha_1 + \epsilon]$, kann man ein $w \in \mathbb{R}^n$ finden, so dass

$$H(\alpha, w) > H(\alpha_2, w) \quad (7.35)$$

für alle $\alpha_1 - \epsilon < \alpha < \alpha_1 + \epsilon$. Dieses $w \in \mathbb{R}^n$ sei nun fest.

Nun definieren wir die Funktion $I : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$I(\alpha) := \begin{cases} (1 - Q(\alpha))G(\alpha) + Q(\alpha)H(\alpha, w) & \alpha_1 - \epsilon < \alpha \leq \alpha_1 + \epsilon \\ H(\alpha, w) & \alpha > \alpha_1 + \epsilon \end{cases} \quad (7.36)$$

wobei

$$Q(\alpha) := 2 \left(\frac{\alpha - \alpha_1}{\epsilon} \right)^4 - \left(\frac{\alpha - \alpha_1}{\epsilon} \right)^8 \quad (7.37)$$

Man beachte, dass $I(\alpha)$ auf dem ganzen Definitionsbereich stetig ist, da alle auftretenden Funktionen Q , G und H stetig sind, und $Q(\alpha_1 + \epsilon) = 1$.

Für $\alpha < \alpha_1 + \epsilon$ ist die erste Ableitung von I gegeben durch

$$I'(\alpha) = Q'(\alpha)(H(\alpha, w) - G(\alpha)) + (1 - Q(\alpha))G'(\alpha) + Q(\alpha)H'(\alpha, w) \quad (7.38)$$

Nachdem $Q'(\alpha_1 + \epsilon) = 0$ gilt, ist $I(\alpha)$ auch differenzierbar auf dem ganzen Definitionsbereich. Man beachte außerdem, dass α_1 eine Minimalstelle von I ist, da $I'(\alpha_1) = G'(\alpha_1) = 0$ und

$$I''(\alpha) = Q''(\alpha)(H(\alpha, w) - G(\alpha)) + 2Q'(\alpha)(H'(\alpha, w) - G'(\alpha)) + Q(\alpha)H''(\alpha, w) + (1 - Q(\alpha))G''(\alpha)$$

so dass $I''(\alpha_1) = G''(\alpha_1) > 0$ nach Voraussetzung. Daraus folgt, dass, für ein hinreichend kleines ϵ , $I(\alpha)$ steigend ist für $\alpha_1 < \alpha < \alpha_1 + \epsilon$.

Auf der anderen Seite wissen wir, dass nach 7.35

$$I(\alpha_1 + \epsilon) = H(\alpha_1 + \epsilon, w) > H(\alpha_2, w) = I(\alpha_2) \quad (7.39)$$

so, dass ein $\alpha_3 \in (\alpha_1 + \epsilon, \alpha_2)$ existieren muss mit $I'(\alpha_3) = 0$. Daraus folgt

$$\sum_{i=1}^n w_i \frac{\partial}{\partial \alpha} h_i(\alpha_3) = 0 \quad (7.40)$$

was im Widerspruch zum streng monotonen Fallen von $h_i(\alpha)$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ steht. Somit führt die Annahme es gäbe mehr als eine lokale Minimalstelle von G zum Widerspruch. Damit ist bewiesen, dass G nur eine Minimalstelle hat; G ist also quasikonvex. Somit folgt die Behauptung.

□

Korollar 7.1.2. *Aus Proposition 7.1.1 (4.) und (5.) folgt, dass der nachfolgend definierte Schätzer $\hat{\alpha}$ von α wohldefiniert ist für $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $\hat{\tau}_{ij} \notin \{-1, 1\}$ und $0 < \hat{\lambda}_{ij} \leq 1$ für alle $1 \leq i, j \leq m$.*

$$\hat{\alpha} := \arg \min_{\alpha \in \mathbb{R}^+} F(\alpha, \hat{\lambda}, \hat{\tau}) = \arg \min_{\alpha \in \mathbb{R}^+} \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m (\hat{\lambda}_{ij} - \lambda(\alpha, \hat{\tau}_{ij}))^2 \quad (7.41)$$

Da dieser Schätzer nur von den Schätzwerten von λ und τ abhängt, und diese unabhängig von den Randverteilungen sind, ist auch $\hat{\alpha}$ unabhängig von den Randverteilungen. $\hat{\alpha}$ ist also ein Schätzer des Copulaparameters α .

Definition 7.1.3. *Seien nun die Matrizen S und $\hat{S} \in \mathbb{R}^{2m \times m}$ folgendermaßen definiert:*

$$S := \begin{pmatrix} \tau \\ \lambda \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \hat{S} := \begin{pmatrix} \hat{\tau} \\ \hat{\lambda} \end{pmatrix} \quad (7.42)$$

Der Raum $\mathbb{R}^{2m \times m}$ ist zusammen mit der üblichen Matrizenaddition ein Vektorraum über \mathbb{R} . Die Supremumsnorm

$$\|Z\|_{\infty} := \max_{\substack{1 \leq i \leq 2m \\ 1 \leq j \leq m}} |Z_{ij}|, \quad Z \in \mathbb{R}^{2m \times m} \quad (7.43)$$

ist eine Norm auf diesem Vektorraum, so dass $(\mathbb{R}^{2m \times m}, \|\cdot\|_{\infty})$ ein normierter Raum ist.

Proposition 7.1.4. *Seien $\tau_{ij}^n \neq \{-1, 1\}$ und $0 < \lambda_{ij}^n \leq \frac{1+\tau_{ij}^n}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Außerdem gelte $\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} \lambda^n \\ \tau^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \tau \end{pmatrix}$ mit $\tau_{ij} \neq \{-1, 1\}$ und $0 < \lambda_{ij} \leq \frac{1+\tau_{ij}^n}{2}$. Dann gilt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \arg \min_{\alpha > 0} F(\alpha, \lambda^n, \tau^n) = \arg \min_{\alpha > 0} F(\alpha, \lambda, \tau) \quad (7.44)$$

Beweis:

Seien

$$F_n(\alpha) := F(\alpha, \lambda^n, \tau^n), \quad (7.45)$$

und

$$F(\alpha) := F(\alpha, \lambda, \tau). \quad (7.46)$$

Dann existiert

$$\alpha_n = \arg \min_{\alpha > 0} F_n(\alpha) \quad (7.47)$$

und ist eindeutig nach 7.1.1 (4.) und (5.). Ebenfalls nach 7.1.1 (4.) und (5.), existiert

$$\alpha_T = \arg \min_{\alpha > 0} F(\alpha) \quad (7.48)$$

und ist eindeutig. Angenommen $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \tilde{\alpha} \neq \alpha_T$. Dann gilt:

$$F_n(\alpha_n) - F_n(\alpha_T) \leq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (7.49)$$

und aus der Stetigkeit von $F(\alpha, \lambda, \tau)$ in λ und τ folgt $\forall \alpha > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (F_n(\alpha) - F_n(\alpha_T)) = F(\alpha) - F(\alpha_T) \quad (7.50)$$

so, dass wegen der Stetigkeit von $F(\alpha, \lambda, \tau)$ in α gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(\alpha_n) - F_n(\alpha_T) = F(\tilde{\alpha}) - F(\alpha_T) > 0 \quad (7.51)$$

was ein Widerspruch zu (7.49) ist. Somit gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha_T, \quad (7.52)$$

was gleichbedeutend ist mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \arg \min_{\alpha > 0} F(\alpha, \lambda^n, \tau^n) = \arg \min_{\alpha > 0} F(\alpha, \lambda, \tau) \quad (7.53)$$

□

Satz 7.1.5. *Sei X ein Zufallsvektor mit beliebigen Randverteilungen und einer Copula einer elliptischen Verteilung $E_m(\Sigma, \Phi, \mu)$ mit positiv definiten Matrix Σ und regulär variierenden Tails mit Index $-\alpha_T$. Seien außerdem $\hat{\tau}_{ij} \notin \{-1, 1\}$ und $0 < \hat{\lambda}_{ij} \leq \frac{1+\hat{\tau}_{ij}}{2}$ für alle $1 \leq i, j \leq m$ schwach konsistente Schätzer von Kendall's Tau und der Tail-Dependence für alle bivariaten Randverteilungen. Dann gilt*

$$\hat{\alpha} \xrightarrow{P} \alpha_T$$

Beweis:

Seien $\lambda, \tau \in \mathbb{R}^{m \times m}$ und $\hat{\lambda}, \hat{\tau} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ Matrizen, deren Einträge die wahren bzw. geschätzten Werte von der Tail Dependence und Kendall's Tau aller bivariaten Randverteilungen von X sind. Diese Schätzwerte sind nach Voraussetzung schwach konsistent, also

$$\hat{\lambda}_{ij} \xrightarrow{P} \lambda_{ij} \quad \forall i, j \quad (7.54)$$

und

$$\hat{\tau}_{ij} \xrightarrow{P} \tau_{ij} \quad \forall i, j \quad (7.55)$$

Die in den vorangegangenen Kapiteln vorgestellten Schätzer von Kendall's Tau und Tail-Dependence erfüllen diese Bedingung unter gewissen Voraussetzungen.

Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Dann gilt für $k \in \{1, \dots, 2m\}$ und $l \in \{1, \dots, m\}$ so, dass

$$\max_{\substack{1 \leq i \leq 2m \\ 1 \leq j \leq m}} |\hat{S}_{ij} - S_{ij}| = |\hat{S}_{kl} - S_{kl}|, \quad (7.56)$$

mit 7.54, 7.55 und 7.42, dass

$$\begin{aligned} P \left(\left\| \begin{pmatrix} \hat{\tau} \\ \hat{\lambda} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tau \\ \lambda \end{pmatrix} \right\|_{\infty} > \epsilon \right) &= P \left(\|\hat{S} - S\|_{\infty} > \epsilon \right) \\ &= P \left(\max_{\substack{1 \leq i \leq 2m \\ 1 \leq j \leq m}} |\hat{S}_{ij} - S_{ij}| > \epsilon \right) = P(|\hat{S}_{kl} - S_{kl}| > \epsilon) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Das heißt, $\begin{pmatrix} \hat{\lambda} \\ \hat{\tau} \end{pmatrix}$ konvergiert schwach gegen $\begin{pmatrix} \lambda \\ \tau \end{pmatrix}$ unter der Supremumsnorm. Da alle Normen auf $\mathbb{R}^{2m \times m}$ topologisch äquivalent sind, impliziert Konvergenz in einer Norm auch Konvergenz in allen anderen. Daraus folgt, dass $\begin{pmatrix} \hat{\lambda} \\ \hat{\tau} \end{pmatrix}$ auch in allen anderen Normen schwach gegen $\begin{pmatrix} \lambda \\ \tau \end{pmatrix}$ konvergiert.

Daraus folgt mit Proposition 7.1.4, dass

$$\hat{\alpha} := \arg \min_{\alpha \in \mathbb{R}^+} F(\alpha, \hat{\lambda}, \hat{\tau}) \xrightarrow{P} \arg \min_{\alpha \in \mathbb{R}^+} F(\alpha, \lambda, \tau).$$

Da $F(\alpha, \lambda, \tau) \geq 0$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $F(\alpha_T, \lambda, \tau) = 0$ und $F(\cdot, \lambda, \tau)$ nach 7.1.1 (5.) quasikonvex ist, gilt

$$\alpha_T = \arg \min_{\alpha \in \mathbb{R}} F(\alpha, \lambda, \tau)$$

und somit folgt die Behauptung □

Eigenschaften des Schätzers $\hat{\alpha}$:

Da die Funktion $F(\cdot, \hat{\lambda}, \hat{\tau})$ nach 7.1.1 (5.) quasikonvex ist, ist im Falle eines diskreten Wertebereichs, $\alpha_T \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ (z.B Student-t Verteilung) das optimale α entweder $\lfloor \hat{\alpha} \rfloor$ oder $\lfloor \hat{\alpha} \rfloor + 1$. Die Entscheidung zwischen diesen beiden muss dann durch Vergleich der Werte der Funktion F an beiden α Stellen erfolgen. Dabei kann theoretisch sogar der Fall von gleichen Werten für die beiden α Werte auftreten. In einem solchen Fall entscheidet dann ein Bernoulliexperiment darüber welcher Wert letztendlich genommen wird.

Im Falle eines Normalverteilten Zufallsvektors ist die Verteilung zwar elliptisch, aber nicht regulär variierend und somit sind nicht alle Voraussetzungen aus Korollar 7.1.2 erfüllt. Bei normal verteilten Zufallsvektoren ist ein intuitives Argument für die Verwendung des Schätzers $\hat{\alpha}$ folgendes:

Sei $X \sim N(\mu, \Sigma)$ multivariat normalverteilt, mit Erwartungswert μ und Kovarianzmatrix Σ . Desweiteren gelte für die Korrelationskoeffizienten $\rho_{ij} \notin \{-1, 1\}$ für alle $1 \leq i, j \leq m$. Dann folgt mit $\tau_{ij} = 2/\pi \arcsin(\rho_{ij})$, dass $\tau_{ij} \notin \{-1, 1\}$ für alle $1 \leq i, j \leq m$. Weiterhin gilt $\lambda_{ij} = 0 \forall i, j$ und $\hat{\lambda} \xrightarrow{P} \mathbf{0}$, wobei $\mathbf{0}$ eine Nullmatrix ist. Also gilt:

$$F(\alpha, \hat{\lambda}, \hat{\tau}) \xrightarrow{P} F(\alpha, \mathbf{0}, \tau) = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m \lambda(\alpha, \tau_{ij})^2$$

und letzteres ist streng monoton fallend in α so, dass

$$\hat{\alpha} = \arg \min_{\alpha \in \mathbb{R}} F(\alpha, \hat{\lambda}, \hat{\tau}) \xrightarrow{P} \arg \min_{\alpha \in \mathbb{R}} F(\alpha, 0, \tau) = \infty$$

Das heißt im Fall von normal verteilten Zufallsvektoren gilt $\hat{\alpha} \xrightarrow{P} \infty$ was intuitiv einleuchtend, ist da für $X \sim N(\mu, \Sigma)$ gilt: $X \in \mathcal{R}_{-\infty}$ (Definition von $\mathcal{R}_{-\infty}$ siehe Definition B.2.9).

Simulationsstudie:

Nun prüfen wir die Performance des Schätzers $\hat{\alpha}$ anhand einer Simulationsstudie, bei der wir in folgenden Schritten vorgehen:

- (1.) Ziehung eines dreidimensionalen t -verteilten Zufallsvektors X mit Kovarianzmatrix $\boldsymbol{\rho}$, mit $\rho_{12} = 0.5$, $\rho_{13} = 0.6$, und $\rho_{23} = 0.7$, und vier Freiheitsgraden.
- (2.) Anwendung einer eindimensionalen t -Verteilungsfunktion mit 4 Freiheitsgraden auf alle drei Komponenten von X ergibt eine Realisierung eines Zufallsvektors C , dessen Verteilung eine t -Copula mit 4 Freiheitsgraden ist.
- (3.) Anwendung von Quantilfunktionen:
 - (i) Standardnormalverteilung auf die erste Komponente,
 - (ii) t -Verteilung mit 7 Freiheitsgraden auf die zweite Komponente,
 - (iii) Standard Log-Normalverteilung auf die dritte Komponente.
- (4) 1000 Wiederholungen von (1.) bis (3.) ergeben 1000 Realisierungen eines Zufallsvektors Z mit t -Copula und den drei verschiedenen Randverteilungen.
- (5.) Schätzung
 - (a) von Kendall's Tau gemäß (3.21),
 - (b) der Korrelationskoeffizienten gemäß $\rho = \sin(\frac{\pi}{2}\tau)$,
 - (c) der Tail-Dependence Koeffizienten gemäß (3.34) und (3.36)
 für alle drei Paare von Komponenten von Z .
- (6.) Schätzung von $\hat{\alpha}$ gemäß (7.41), dessen wahrer Wert $\alpha = \nu = 4$ ist.
- (7.) Da wir nun einen Wert für α und τ_{ij} , $1 \leq i, j, \leq 3$ besitzen ergibt sich durch (7.14) ein impliziter Wert für λ_{ij} , $1 \leq i, j, \leq 3$. Dieser werde berechnet.
- (8.) 1000 Wiederholungen von (1.) bis (7.) um die Qualität der Schätzer zu begutachten.

In Tabelle 7.7 findet man die Zusammenfassung der Ergebnisse. In allen nun folgenden Zeichnungen stellt die gepunktete Linie den wahren Wert des entsprechenden Schätzers dar. Abbildung 7.1 zeigt die geglätteten Histogramme der Korrelationskoeffizienten für die drei Indexpaare: (1,2), (1,3) und (2,3). Abbildung 7.2 zeigt die geglätteten Histogramme der geschätzten Tail-Dependence-Koeffizienten für alle drei Indexpaare. Die gestrichelte Linie in Abbildung 7.2 beschreibt die geglätteten Histogramme der in (7.) geschätzten impliziten Tail-Dependence-Koeffizienten für alle drei Indexpaare. In Abbildung 7.3 ist das geglättete Histogramm von $\hat{\alpha}$ zu sehen. Es weist eine leichte Linksschiefe auf.

Schätzung von $\hat{\alpha}$ für den Datensatz der Equity-Indizes

Nachdem nun der Schätzer $\hat{\alpha}$ aus (7.41) definiert ist und seine Güte für simulierte Daten untersucht wurde, setzen wir ihn auf unseren Datensatz der 92 Equity-Indizes an. Da wir annehmen, dass der systematische Risikofaktor Y eine gruppierte t -Copula

besitzt, haben bestimmte Teilvektoren von Y eine t -Copula. Das bedeutet aber, dass im Modell upper und lower Tail-Dependence für alle bivariaten Randverteilungen innerhalb einer Gruppe gleich sind ($\lambda_U = \lambda_L$). Die Schätzwerte $\hat{\lambda}_L$ und $\hat{\lambda}_U$ aus Kapitel 3.2.4 sind allerdings nicht für alle Paare (Y_i, Y_j) , mit i und j innerhalb einer Ländergruppe gleich, wie man zum Beispiel an den Tabellen 3.2 und 3.3 für die ersten 17 US Indizes sehen kann. Dies kann einerseits daran liegen, dass die Annahme einer symmetrischen Copula für die einzelnen Gruppen unzulänglich ist, oder einfach daran, dass $\hat{\lambda}_L$ und $\hat{\lambda}_U$ nur *Schätzer* von λ_L und λ_U sind. Da der Hill-Schätzer von λ unter gewissen Bedingungen (siehe B.5.5) asymptotisch normal verteilt ist, könnte man einen Test machen, der prüft, ob die Werte λ_L und λ_U signifikant verschieden sind. Mit 120 Datenpunkten ist der Datensatz aber nicht umfangreich genug um asymptotische Aussagen zuzulassen.

In Tabelle 7.3 findet man in der achten Spalte die Schätzwerte $\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_L$, für die $\hat{\lambda}_L$ als Tail-Dependence Schätzer verwendet wurde, und in der neunten die entsprechenden Werte für $\hat{\lambda}_U$. Beide sind nur auf die erste Stelle nach dem Komma gerundet. Das macht Sinn, da wir nur an ganzzahligen Werten für $\hat{\alpha} = \hat{\nu}$ interessiert sind. Werte für $\hat{\nu}$ kann man also einfach durch Runden auf die nächstliegende ganze Zahl, oder nach dem in “Eigenschaften von $\hat{\alpha}$ ” beschriebenen Verfahren erhalten, bei dem der “wahrscheinlichere” Wert von $\lfloor \hat{\alpha} \rfloor$ oder $\lfloor \hat{\alpha} \rfloor + 1$ genommen wird. In dieser Arbeit wurde die zweite Methode benutzt. Die Schätzwerte $\hat{\nu}_1, \dots, \hat{\nu}_L$ stehen für $\hat{\lambda}_L$ in der achten Spalte der Tabelle 7.3 nach dem Pfeil, und die für $\hat{\lambda}_U$ in der neunten Spalte nach dem Pfeil.

Der Grund, warum die Schätzer in diesem Verfahren niedrigere Werte liefern als in der ML-Methode, ist, dass in diesem Verfahren im Gegensatz zur ML-Methode die Abhängigkeit extremer Ereignisse, die durch die Tail-Dependence gemessen wird, berücksichtigt wird. Da wir uns insbesondere für die Wahrscheinlichkeiten sehr hoher Verluste des Kreditportfolios interessieren, und diese maßgeblich von den Abhängigkeiten extremer Realisierungen der systematischen Risikofaktoren beeinflusst werden, scheint das neue Verfahren zur Schätzung der ν_1, \dots, ν_L angebrachter zu sein, da es eben diese extremen Abhängigkeiten berücksichtigt.

Da wir uns für hohe Verluste des Kreditportfolios interessieren, und diese durch gemeinsame, stark negative Werte der systematischen Risikofaktoren entstehen, werden wir für die weiteren Berechnungen die $\hat{\alpha}$ -Werte heranziehen, für die $\hat{\lambda}_L$ als Tail-Dependence Schätzer verwendet wurde.

Bootstrap

Folgendes lehnt an die Vorlesung Computational Statistics [11] an.

Es gibt parametrische und nichtparametrische Bootstrapverfahren. Angenommen man hat einen Datensatz von n Beobachtungen $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ und möchte die Qualität eines Schätzers $\hat{\theta}(\mathbf{x})$, der abhängig von den Daten \mathbf{x} ist, prüfen, dann kann man hierzu ein Bootstrapverfahren heranziehen. Dazu muss man zunächst B unabhängige Bootstrap Stichproben $\mathbf{x}^{*1}, \dots, \mathbf{x}^{*B}$ generieren, die jeweils aus n Beobachtungen bestehen. Im nicht-parametrischen Fall zieht man die \mathbf{x}^{*b} , $b = 1, \dots, B$ jeweils mit Zurücklegen aus den \mathbf{x} . Im parametrischen Fall werden die \mathbf{x}^{*b} , $b = 1, \dots, B$ aus einer Verteilung gezogen, die eine parametrische Schätzung der Populationsverteilung ist. Diese Schätzung basiert auf einer parametrischen Modellannahme für die Daten \mathbf{x} . In beiden Verfahren, parametrischem

und nichtparametrischem Bootstrap, wird danach identisch fortgefahren. Als nächstes berechnet man die sogenannten Bootstrap Replications $\widehat{\theta}(\mathbf{x}^{(*b)})$, $b = 1, \dots, B$. Nun kann man die Güte des Schätzers $\widehat{\theta}$ zum Beispiel durch den Schätzer \widehat{std}_B seiner Standardabweichung prüfen. \widehat{std}_B ist definiert als die Stichprobenstandardabweichung der Bootstrap Replications $\widehat{\theta}(\mathbf{x}^{(*b)})$, $b = 1, \dots, B$:

$$\widehat{std}_B := \frac{\sqrt{\sum_{b=1}^B (\widehat{\theta}(\mathbf{x}^{(*b)}) - \bar{\theta})^2}}{B - 1} \tag{7.57}$$

mit

$$\bar{\theta} := \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \widehat{\theta}(\mathbf{x}^{(*b)}) \tag{7.58}$$

Neben \widehat{std}_B können auch noch Schätzer für den Bias und für die Konfidenzintervalle des Schätzers $\widehat{\theta}$ durch ein Bootstrapverfahren berechnet werden.

Nun wenden wir ein parametrisches Bootstrap Verfahren an, um die Qualität der Schätzer $\widehat{\alpha}_1, \dots, \widehat{\alpha}_L$ zu prüfen. Bei uns ist $n=120$, und wir verwenden 1000 Bootstrap Replications $\widehat{\alpha}_1^{(*b)}, \dots, \widehat{\alpha}_L^{(*b)}$, $b = 1, \dots, 1000$. Es werden also 1000 mal 120 Realisierungen der 92-dimensionalen gruppierten Copula gezogen. Hierauf werden für alle 1000 Wiederholungen aus den 120 Beobachtungen sowohl Kendall's Tau als auch die Tail-Dependence für die Indexpaare einer Gruppe geschätzt. Aus diesen werden dann $\widehat{\alpha}_1, \dots, \widehat{\alpha}_L$ gemäß (7.41) geschätzt. Anhand dieser Werte lassen sich dann statistische Kennzahlen wie Erwartungswert, Bias, Standardabweichung und Konfidenzintervalle der Schätzer $\widehat{\alpha}_1, \dots, \widehat{\alpha}_L$ schätzen. In Tabelle 7.1 findet man eben diese Größen für die 8 Gruppen von Länder-Indizes. Wie man sehen kann liegt der Bias immer zwischen 0 und 1. Außerdem ist die Standardabweichung für die Länder-Gruppen am größten, die die kleinsten Gruppengröße s_l haben (Schweiz und Frankreich)

	Mittelwert	Schätzwerte $\widehat{\alpha}$	Bias	Standardabweichung	90%-KI
α_{AUS}	5.3530	6	0.6470	1.0700	[3.762, 7.306]
α_{CAN}	5.4199	5	0.4199	0.8110	[4.079, 6.730]
α_{GER}	4.0637	4	0.0637	0.6651	[3.022, 5.170]
α_{FRA}	5.9394	5	0.9394	2.9059	[3.258, 9.256]
α_{JPN}	1.8776	2	0.1224	0.0177	[1.367, 2.417]
α_{CH}	4.8901	5	0.1099	2.0408	[2.661, 7.890]
α_{UK}	3.9541	4	0.0459	0.3781	[3.340, 4.575]
α_{US}	5.9475	6	0.0525	0.8165	[4.575, 7.237]

Tabelle 7.1: Ergebnisse des parametrischen Bootstrap Verfahrens für die $\widehat{\alpha}$'s der Ländergruppen. Die Schätzwerte $\widehat{\alpha}$ in der dritten Spalte stammen aus der achten Spalte von Tabelle 7.3

7.2 Schätzen der Korrelationsmatrix ρ

Nachdem die ν_1, \dots, ν_L geschätzt wurden, fehlt zur vollständigen Parametrisierung der gruppierten t-Copula (7.2) noch eine Schätzung der Korrelationsmatrix ρ aller 92 Equity-Indizes. Da die gruppierte t-Copula keine elliptische Copula ist, gilt für die systematischen Risikofaktoren Y hier leider nicht mehr die Beziehung:

$$\tau(Y_i, Y_j) = \frac{2}{\pi} \arcsin \rho(Y_i, Y_j). \quad (7.59)$$

Wie in (5.28) und (5.29) bereits beschrieben, gilt für eine Komponente Y_i eines Zufallsvektors Y mit gruppiertem t-Copula

$$Y_i = H_i^{-1}(F_i^X(X_i)) = H_i^{-1}(F_i^X(R_k Z_i)) = H_i^{-1}(F_i^X(G_{\nu_k}^{-1}(U)Z_i)) \quad 1 \leq i \leq 92 \quad (7.60)$$

wobei H_i die eindimensionale Randverteilung von Y_i ist, F_i^X die eindimensionale Randverteilung von X_i , $R_l \stackrel{d}{=} \sqrt{\frac{\nu_l}{S}} \sim G_{\nu_l}$, $l \in \{1, \dots, L\}$, l die Nummer der Gruppe in der i liegt, mit $S \sim \chi_{\nu_l}^2$, $(Z_1, \dots, Z_{92})^T \sim N_{92}(\mathbf{0}, \rho)$ und $U \sim U[0, 1]$ unabhängig.

Da Kendall's Tau invariant unter streng monoton steigenden Transformationen ist, gilt

$$\tau(Y_i, Y_j) = \tau(R_l Z_i, R_k Z_j) = \tau(G_{\nu_k}^{-1}(U)Z_i, G_{\nu_l}^{-1}(U)Z_j) \quad i, j \in \{1, \dots, 92\}, k, l \in \{1, \dots, 8\} \quad (7.61)$$

wobei k und l die Nummern der Gruppen sind, in denen i und j liegen. Auf Seite 6 von Daul et. al. [12] findet man folgende Darstellung von Kendall's Tau für einen etwas allgemeineren Fall.

Proposition 7.2.1. *Seien $Z \sim N_2(\mathbf{0}, \Sigma)$ und U eine fast sicher positive Zufallsvariable und $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ so, dass $f_1(x), f_2(x) > 0$, für $x > 0$. Dann gilt*

$$\tau(f_1(U)Z_1, f_2(U)Z_2) = \frac{2}{\pi} E(\arcsin(\rho_{12} \psi(f_1(U), f_2(U), f_1(\tilde{U}), f_2(\tilde{U})))), \quad (7.62)$$

wobei U, \tilde{U} iid und unabhängig von Z , $\rho_{12} = \Sigma_{12} / \sqrt{\Sigma_{11}\Sigma_{22}}$ und

$$\psi(f_1(u), f_2(u), f_1(\tilde{u}), f_2(\tilde{u})) = \frac{f_1(u)f_2(u) + f_1(\tilde{u})f_2(\tilde{u})}{\sqrt{(f_1^2(u) + f_1^2(\tilde{u}))(f_2^2(u) + f_2^2(\tilde{u}))}} \quad (7.63)$$

Beweis:

Seien Z und $\tilde{Z} \sim N_2(\mathbf{0}, \Sigma)$ iid. Für deterministische Werte $u, \tilde{u} > 0$ ist

$$\begin{pmatrix} f_1(u)Z_1 \\ f_2(u)Z_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f_1(\tilde{u})\tilde{Z}_1 \\ f_2(\tilde{u})\tilde{Z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(u) & 0 & -f_1(\tilde{u}) & 0 \\ 0 & f_2(u) & 0 & -f_2(\tilde{u}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \tilde{Z}_1 \\ \tilde{Z}_2 \end{pmatrix}, \quad (7.64)$$

und $(Z_1, Z_2, \tilde{Z}_1, \tilde{Z}_2)^T$ ist multivariat normalverteilt. Daraus folgt, dass

$$\begin{pmatrix} f_1(u)Z_1 \\ f_2(u)Z_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f_1(\tilde{u})\tilde{Z}_1 \\ f_2(\tilde{u})\tilde{Z}_2 \end{pmatrix} \stackrel{d}{=} \begin{pmatrix} \hat{Z}_1(u, \tilde{u}) \\ \hat{Z}_2(u, \tilde{u}) \end{pmatrix} = \hat{Z}(u, \tilde{u}) \quad (7.65)$$

wobei $\widehat{Z}(u, \tilde{u}) \sim N_2(\mathbf{0}, \Sigma^{(u, \tilde{u})})$ mit

$$\Sigma^{(u, \tilde{u})} = \begin{pmatrix} \Sigma_{11}(f_1^2(u) + f_1^2(\tilde{u})) & \Sigma_{12}(f_1(u)f_2(u) + f_1(\tilde{u})f_2(\tilde{u})) \\ \Sigma_{12}(f_1(u)f_2(u) + f_1(\tilde{u})f_2(\tilde{u})) & \Sigma_{22}(f_2^2(u) + f_2^2(\tilde{u})) \end{pmatrix} \quad (7.66)$$

Daraus folgt, dass $\widehat{Z}(u, \tilde{u})$ einen linearen Korrelationskoeffizienten $\rho_{12}\psi(f_1(u), f_2(u), f_1(\tilde{u}), f_2(\tilde{u}))$ hat. Nun können wir Kendall's Tau für $(f_1(U)Z_1, f_2(U)Z_2)^T$ berechnen:

$$\begin{aligned} \tau(f_1(U)Z_1, f_2(U)Z_2) &= P[(f_1(U)Z_1 - f_1(\tilde{U})\tilde{Z}_1)(f_2(U)Z_2 - f_2(\tilde{U})\tilde{Z}_2) > 0] - \\ &\quad - P[(f_1(U)Z_1 - f_1(\tilde{U})\tilde{Z}_1)(f_2(U)Z_2 - f_2(\tilde{U})\tilde{Z}_2) < 0] \\ &= 2P[(f_1(U)Z_1 - f_1(\tilde{U})\tilde{Z}_1)(f_2(U)Z_2 - f_2(\tilde{U})\tilde{Z}_2) > 0] - 1 \\ &= 2E[P[(f_1(U)Z_1 - f_1(\tilde{U})\tilde{Z}_1)(f_2(U)Z_2 - f_2(\tilde{U})\tilde{Z}_2) > 0 | (U, \tilde{U})]] - 1 \\ &= 2 \int \int P[(f_1(u)Z_1 - f_1(\tilde{u})\tilde{Z}_1)(f_2(u)Z_2 - f_2(\tilde{u})\tilde{Z}_2) > 0] dF_U(u) dF_U(\tilde{u}) - 1 \\ &= 2 \int \int P[\widehat{Z}_1(u, \tilde{u})\widehat{Z}_2(u, \tilde{u}) > 0] dF_U(u) dF_U(\tilde{u}) - 1 \\ &= 2 \int \int \frac{\tau(\widehat{Z}_1(u, \tilde{u}), \widehat{Z}_2(u, \tilde{u})) + 1}{2} dF_U(u) dF_U(\tilde{u}) - 1 \\ &= 2 \int \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin(\rho_{12}\psi(f_1(u), f_2(u), f_1(\tilde{u}), f_2(\tilde{u}))) \right) dF_U(u) dF_U(\tilde{u}) - 1 \\ &= \frac{2}{\pi} E[\arcsin(\rho_{12}\psi(f_1(U), f_2(U), f_1(\tilde{U}), f_2(\tilde{U})))]. \end{aligned}$$

Dabei wurde von der zweiten zur dritten Zeile benutzt, dass $f_1(U), f_2(U) > 0$ fast sicher und dass die Normalverteilung symmetrisch um 0 ist. Von der vierten zur fünften Zeile wurde benutzt, dass U und \tilde{U} iid sind, und von der siebten zur achten Zeile, dass die Beziehung $\tau = \frac{2}{\pi} \arcsin \rho$ für multivariat normal verteilte Zufallsvektoren gültig ist. \square

Da es aber kaum möglich ist, anhand dieser Relation aus einem Schätzer für τ einen Schätzer für ρ für alle Paare von Equity-Indizes zu konstruieren, behilft man sich der Approximation

$$\tau(Y_i, Y_j) \approx \frac{2}{\pi} \arcsin \rho(Y_i, Y_j), \quad (7.67)$$

deren Güte wir nun durch eine Simulationsstudie überprüfen werden. Dazu schätzen wir mittels einer Monte-Carlo-Simulation den Fehler, den wir durch die obige Approximation machen. In der Schreibweise wie in Proposition 7.2.1 simulieren wir

$$\frac{2}{\pi} \arcsin \rho - \frac{2}{\pi} E(\arcsin(\rho\psi(f_1(U), f_2(U), f_1(\tilde{U}), f_2(\tilde{U}))))$$

jeweils für $\rho = 0.25$, $\rho = 0.5$, $\rho = 0.75$, $\rho = 0.9$ und $\rho = 1$ 10000 mal. Dabei sind f_1 und f_2 definiert durch:

$$f_1(u) := G_{\nu_1}^{-1}(u) \quad \text{und} \quad f_2(u) := G_{\nu_2}^{-1}(u), u \in [0, 1], \quad (7.68)$$

und $U, \tilde{U} \sim U(0, 1)$ iid. Die Werte für ν_1 und ν_2 wählen wir in dem Bereich, in dem auch die Werte für $\hat{\nu}_1, \dots, \hat{\nu}_8$ im Falle des kleinste-Quadrate-Schätzers liegen (siehe Tabelle 7.3 letzte zwei Spalten nach dem Pfeil)

Das Ergebnis findet man in den Tabellen 7.8 bis 7.12. Da mit dem Absolutbetrag von ρ auch der Absolutbetrag des Fehlers der Approximation steigt, sind also in der letzten Tabelle 7.12 die “worst case” Szenarien zu finden. Weiterhin steigt der Fehler der Approximation wegen der arcsin-Funktion nichtlinear in $|\rho|$. Das sieht man auch an den Werten in den Tabellen: Die Zunahme des Fehlers durch eine Vergrößerung des Korrelationskoeffizienten ρ von 0.5 zu 0.75 ist sehr klein; die Zunahme des Fehlers durch den Übergang von $\rho = 0.75$ zu $\rho = 1$ ist dagegen sehr viel größer. Man beachte außerdem, dass der Fehler symmetrisch in ρ ist: Die entsprechenden Werte für negative Korrelationen erhält man aus Symmetriegründen einfach durch Vertauschen des Vorzeichens der Werte aus den Tabellen 7.8 bis 7.12. Außerdem lassen die Tabellen vermuten, dass für $\rho \rightarrow 0$ auch der Fehler der Approximation gegen Null geht. Dies ist analytisch einfach nachzuweisen, da $\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{2}{\pi} \arcsin \rho - \frac{2}{\pi} E(\arcsin(\rho\psi(f_1(U), f_2(U), f_1(\tilde{U}), f_2(\tilde{U})))) = 0 - 0 = 0$. Die gerade beschriebenen Ergebnisse sind auch in Abbildung 7.4 zu sehen. Hier wurde $\nu_1 = 4$ festgehalten und der Fehler der Approximation wurde für Werte von $\nu_2 = 1, \dots, 16$ und $\rho = 0, \dots, 1$ berechnet und geplottet. Wie bereits oben erwähnt, ist der Fehler der Approximation für negative Korrelationskoeffizienten einfach das Negative des Fehlerwerts für positive Korrelation, so dass wir uns auf $\rho \in [0, 1]$ beschränken können.

Wir haben festgestellt, dass unsere Schätzer der linearen Korrelationskoeffizienten alle kleiner als 0.925 sind. Das bedeutet zwar nicht, dass die tatsächlichen Korrelationen alle kleiner 0.925 sind, allerdings lässt diese Tatsache mit Blick auf die Simulationsstudie die Vermutung zu, dass die Approximation (7.67) gerechtfertigt ist.

Daul et. al. [12] haben bei einer ähnlichen Simulationsstudie entsprechende Werte erhalten.

Sollte die Matrix der geschätzten paarweisen Korrelationen $\hat{\rho}$ nicht positiv definit sein, so kann man auch hier die Eigenwertmethode von Rousseeuw&Molenberghs [37] (siehe 7.13 und Text dazu) anwenden um eine positiv definite Matrix zu erhalten die sehr “nahe” an der geschätzten Matrix ρ liegt.

$\hat{\rho}_6$			
1.0000	0.6382	0.6251	0.4846
0.6382	1.0000	0.4423	0.6258
0.6251	0.4423	1.0000	0.4051
0.4846	0.6258	0.4051	1.0000
$\hat{\nu}_6 = 8$			

Tabelle 7.2: ML-Schätzwerte $\hat{\rho}_6$ und $\hat{\nu}_6$ für die Schweizer Equity-Indizes.

Grpnr	Gr	Grsizes s_l	ν					
			Daul et. al.	MoMe1	Mome2	MoMe3	λ_L	λ_U
1	AUS	9	15	15	14	12	6.0 \rightarrow 6	5.4 \rightarrow 5
2	CAN	14	24	24	24	16	4.5 \rightarrow 5	3.9 \rightarrow 4
3	GER	10	65	41	30	20	3.7 \rightarrow 4	3.7 \rightarrow 4
4	FRA	5	67	67	61	60	5.3 \rightarrow 5	2.1 \rightarrow 2
5	JPN	15	14	14	14	7	2.3 \rightarrow 2	1.9 \rightarrow 2
6	CH	4	19	19	15	8	5.2 \rightarrow 5	2.0 \rightarrow 2
7	UK	15	17	17	17	14	3.9 \rightarrow 4	4.4 \rightarrow 4
8	US	20	21	21	21	13	6.3 \rightarrow 6	2.7 \rightarrow 3
	ALL	92	29	14	15	13	4	4

Tabelle 7.3: Erklärung siehe Tabelle 7.4

1. Spalte: Nummer der Equity-Indixgruppe, $L = 8$ Gruppen.
 2. Spalte: Land der Equity-Indixgruppe.
 3. Spalte: Gruppengröße s_l der Equity-Indixgruppe.
 4. Spalte: Schätzwerte $\hat{\nu}_1, \dots, \hat{\nu}_8$ mittels der Momenten-Methode von Daul et al.
 5. Spalte: Schätzwerte $\hat{\nu}_1, \dots, \hat{\nu}_8$ mittels der Momenten-Methode, bei vorheriger Transformation auf $U(0, 1)$ mittels einer angepassten Normalverteilung, bei der der Erwartungswert 0 und die Standardabweichung aus den Daten geschätzt ist.
 6. Spalte: Schätzwerte $\hat{\nu}_1, \dots, \hat{\nu}_8$ mittels der Momenten-Methode, bei vorheriger Transformation auf $U(0, 1)$ mittels einer angepassten Normalverteilung, bei der Erwartungswert und Standardabweichung aus den Daten geschätzt sind.
 7. Spalte: Schätzwerte $\hat{\nu}_1, \dots, \hat{\nu}_8$ mittels der Momenten-Methode, bei vorheriger Transformation auf $U(0, 1)$ mittels des semiparametrischen Verfahrens.
 8. Spalte: Schätzwerte $\hat{\nu}_1, \dots, \hat{\nu}_8$ mittels kleinster Quadratmethode unter Verwendung von λ_L .
 9. Spalte: Schätzwerte $\hat{\nu}_1, \dots, \hat{\nu}_8$ mittels kleinster Quadratmethode unter Verwendung von λ_U .
- Letzte Zeile: Entsprechende Werte für nur eine Gruppe $L = 1$

Tabelle 7.4: Erklärung von Tabelle 7.3

1-23	24-46	47-69	70-92
0.048	0.080	0.081	0.078
0.088	0.064	0.072	0.094
0.045	0.069	0.075	0.054
0.056	0.074	0.050	0.066
0.042	0.062	0.084	0.066
0.056	0.057	0.074	0.053
0.060	0.086	0.053	0.065
0.043	0.030	0.076	0.055
0.053	0.075	0.062	0.060
0.087	0.060	0.050	0.041
0.059	0.078	0.089	0.065
0.046	0.084	0.069	0.046
0.056	0.060	0.072	0.051
0.060	0.057	0.060	0.059
0.112	0.059	0.058	0.092
0.068	0.083	0.054	0.057
0.052	0.067	0.055	0.095
0.109	0.076	0.055	0.045
0.075	0.074	0.078	0.071
0.042	0.066	0.094	0.045
0.087	0.050	0.078	0.093
0.071	0.070	0.058	0.050
0.049	0.069	0.104	0.055

Tabelle 7.5: Geschätzte Standardabweichungen der Log>Returns der Equity-Indizes. Da nicht alle 92 Werte untereinander passten, wurden vier Spalten mit jeweils 23 Zeilen generiert. In der ersten Spalte stehen die ersten 23, in der zweiten die zweiten 23, in der dritten die nächsten 23 und in der letzten Spalte die letzten 23 Stichprobenstandardabweichungen

1-23	24-46	47-69	70-92
0.011	0.007	-0.009	0.006
0.014	0.005	0.004	-0.010
0.005	-0.004	-0.006	0.002
0.003	0.011	-0.003	0.006
0.004	0.003	-0.008	0.011
0.006	0.006	-0.008	0.010
0.001	0.006	-0.004	0.005
0.006	0.009	0.011	0.006
0.008	0.001	0.009	0.015
0.011	0.009	0.013	0.002
0.010	0.007	0.007	0.009
0.010	0.011	0.016	0.006
0.008	0.008	0.009	0.010
0.009	0.004	0.004	0.012
0.013	0.009	0.003	0.011
0.016	-0.011	0.008	0.011
0.015	0.001	0.004	-0.007
0.018	-0.009	0.007	0.007
0.003	-0.003	0.006	0.004
0.004	0.001	-0.001	0.008
0.010	-0.004	0.009	0.015
0.006	-0.005	0.009	0.006
0.008	-0.006	0.000	0.007

Tabelle 7.6: Mittelwerte der Log>Returns der Equity-Indizes. Da nicht alle 92 Werte untereinander passten, wurden vier Spalten mit jeweils 23 Zeilen generiert. In der ersten Spalte stehen die ersten 23, in der zweiten die zweiten 23, in der dritten die nächsten 23 und in der letzten Spalte die letzten 23 Mittelwerte

	Mittelwert	wahrer Wert	Bias	Standardabweichung	90%-KI
$\hat{\alpha}$	3.3255	4	0.6745	1.4551	[0.985, 5.805]
$\hat{\rho}_{12}$	0.4984	0.5	0.0016	0.0282	[0.4513, 0.5429]
$\hat{\rho}_{13}$	0.5989	0.6	0.0011	0.0254	[0.5547, 0.6383]
ρ_{23}	0.7000	0.7	0.0000	0.0200	[0.6661, 0.7319]
$\hat{\lambda}_{12}$	0.3142	0.2532	0.0610	0.1007	[0.1927, 0.4985]
$\hat{\lambda}_{13}$	0.3719	0.3144	0.0575	0.1179	[0.2256, 0.5955]
$\hat{\lambda}_{23}$	0.4412	0.3907	0.0505	0.1458	[0.2628, 0.7005]

Tabelle 7.7: Simulationsstudie: 1000-malige Berechnung von $\hat{\alpha}$, der Korrelationskoeffizienten und der Tail-Dependence für die Komponentenpaare (1,2), (1,3) und (2,3) ergibt empirische Schätzer für Erwartungswert, Bias, Standardabweichung und Konfidenzintervalle der jeweiligen Schätzer.

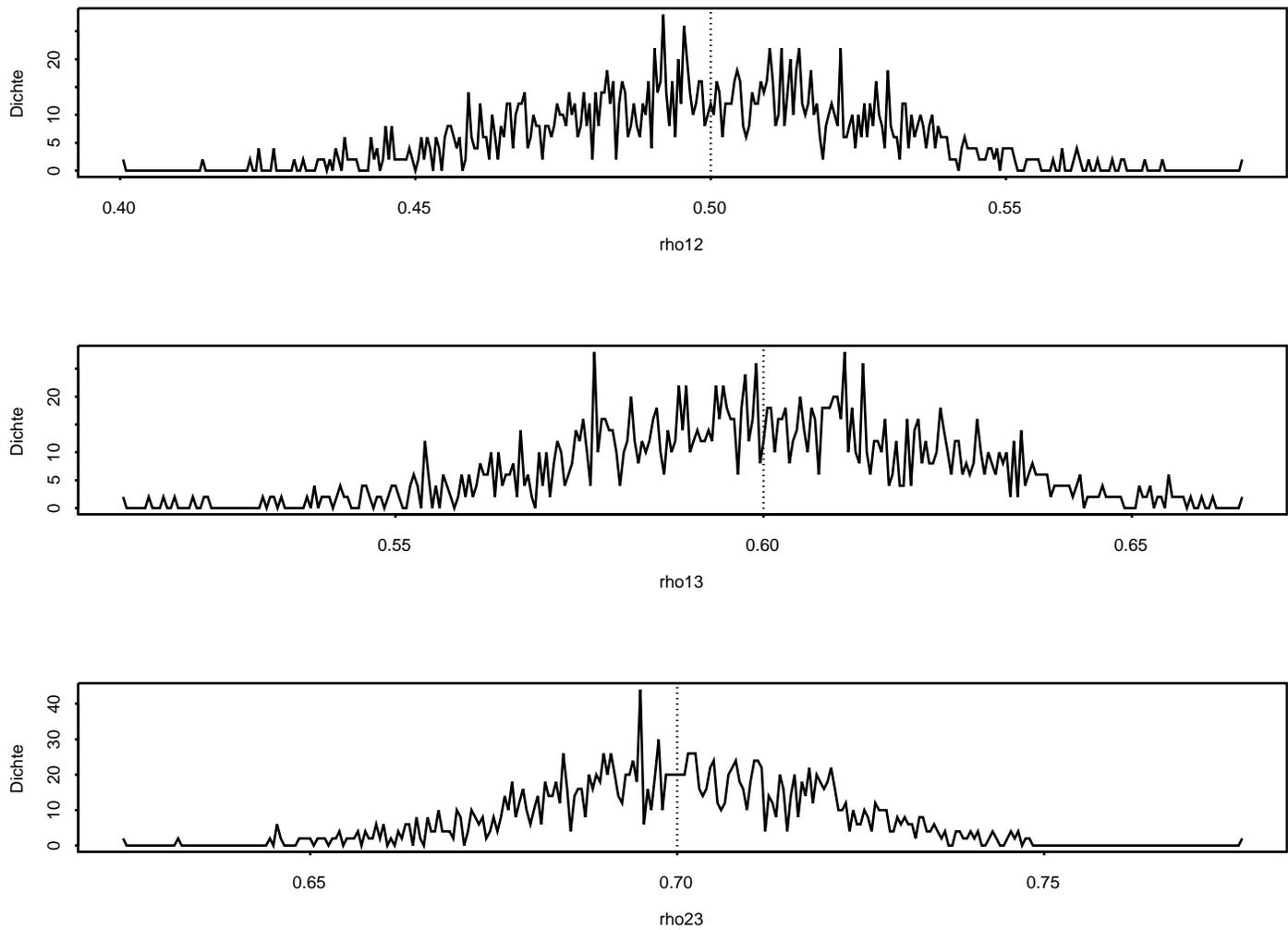


Abbildung 7.1: Geglättete Histogramme der Korrelationskoeffizienten für alle drei Paare von Indizes

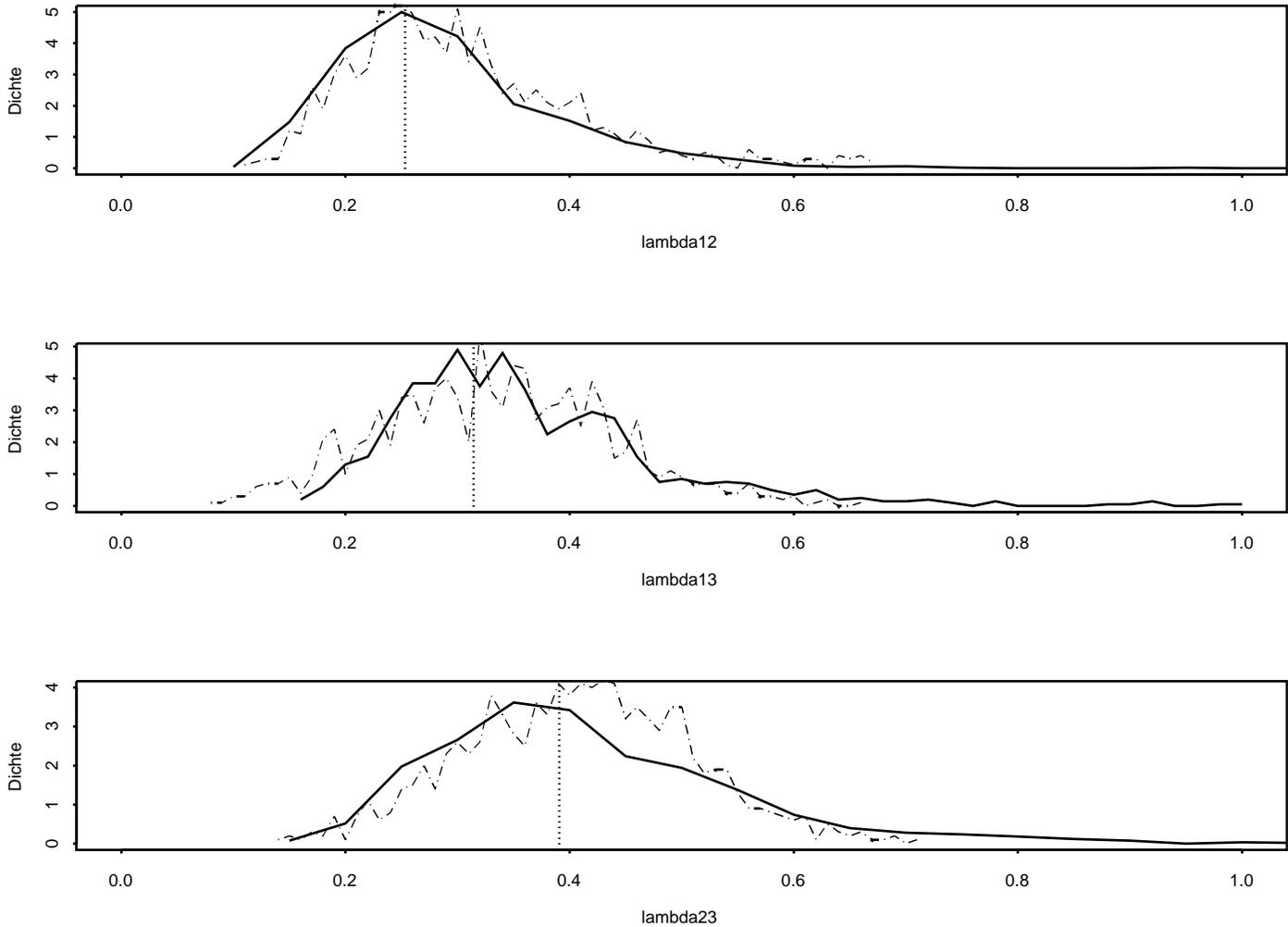
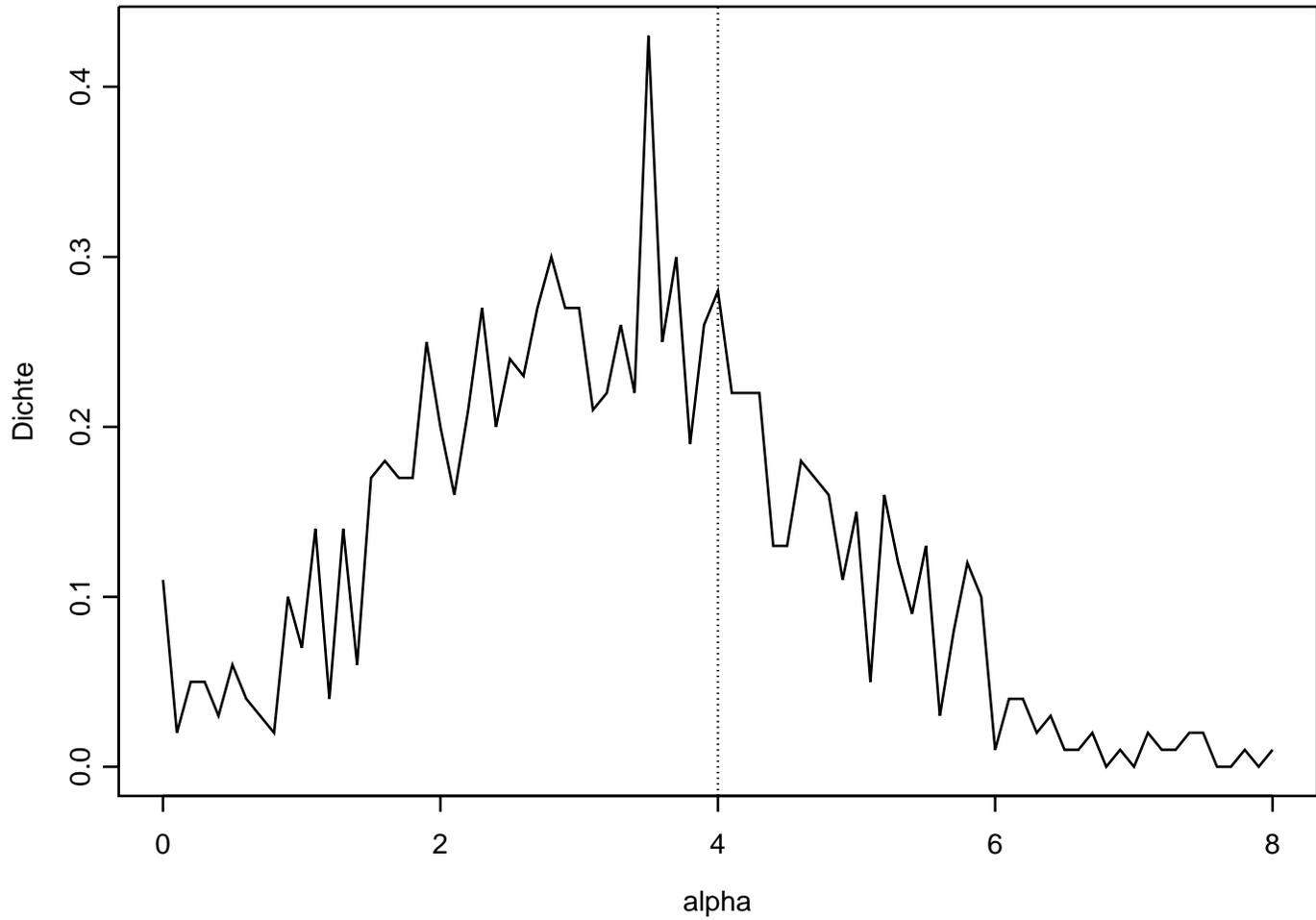


Abbildung 7.2: Geglättete Histogramme der Tail-Dependence für alle drei Paare von Indizes. Die gestrichelte Linie beschreibt die implizite Tail-Dependence, die in (7.) der Simulationsstudie erklärt wurde.

Abbildung 7.3: Geglättetes Histogramm von $\hat{\alpha}$

$\rho = 0.25$	$\nu_1 = 2$	$\nu_1 = 3$	$\nu_1 = 4$	$\nu_1 = 5$	$\nu_1 = 6$
$\nu_2 = 2$	0	0.3	0.77	1.23	1.64
$\nu_2 = 3$	0.3	0	0.11	0.32	0.55
$\nu_2 = 4$	0.77	0.11	0	0.05	0.17
$\nu_2 = 5$	1.23	0.32	0.05	0	0.03
$\nu_2 = 6$	1.64	0.55	0.17	0.03	0

Tabelle 7.8: Simulation von $\frac{2}{\pi} \arcsin \rho - \frac{2}{\pi} E(\arcsin(\rho\psi(f_1(U), f_2(U), f_1(\tilde{U}), f_2(\tilde{U}))))$ für $\rho = 0.25$, basierend auf 10000 unabhängigen Realisierungen von $U, \tilde{U} \sim U(0, 1)$. Man beachte, dass die Werte der Tabelle noch mit 10^{-3} multipliziert werden müssen.

$\rho = 0.5$	$\nu_1 = 2$	$\nu_1 = 3$	$\nu_1 = 4$	$\nu_1 = 5$	$\nu_1 = 6$
$\nu_2 = 2$	0	0.66	1.72	2.74	3.65
$\nu_2 = 3$	0.66	0	0.25	0.72	1.23
$\nu_2 = 4$	1.72	0.25	0	0.12	0.37
$\nu_2 = 5$	2.74	0.72	0.12	0	0.07
$\nu_2 = 6$	3.65	1.23	0.37	0.07	0

Tabelle 7.9: Simulation von $\frac{2}{\pi} \arcsin \rho - \frac{2}{\pi} E(\arcsin(\rho\psi(f_1(U), f_2(U), f_1(\tilde{U}), f_2(\tilde{U}))))$ für $\rho = 0.5$, basierend auf 10000 unabhängigen Realisierungen von $U, \tilde{U} \sim U(0, 1)$. Man beachte, dass die Werte der Tabelle noch mit 10^{-3} multipliziert werden müssen.

$\rho = 0.75$	$\nu_1 = 2$	$\nu_1 = 3$	$\nu_1 = 4$	$\nu_1 = 5$	$\nu_1 = 6$
$\nu_2 = 2$	0	1.29	3.37	5.35	7.11
$\nu_2 = 3$	1.29	0	0.5	1.42	2.41
$\nu_2 = 4$	3.37	0.5	0	0.24	0.73
$\nu_2 = 5$	5.35	1.42	0.24	0	0.13
$\nu_2 = 6$	7.11	2.41	0.73	0.13	0

Tabelle 7.10: Simulation von $\frac{2}{\pi} \arcsin \rho - \frac{2}{\pi} E(\arcsin(\rho\psi(f_1(U), f_2(U), f_1(\tilde{U}), f_2(\tilde{U}))))$ für $\rho = 0.75$, basierend auf 10000 unabhängigen Realisierungen von $U, \tilde{U} \sim U(0, 1)$. Man beachte, dass die Werte der Tabelle noch mit 10^{-3} multipliziert werden müssen.

$\rho = 0.9$	$\nu_1 = 2$	$\nu_1 = 3$	$\nu_1 = 4$	$\nu_1 = 5$	$\nu_1 = 6$
$\nu_2 = 2$	0	2.34	6.05	9.56	12.6
$\nu_2 = 3$	2.34	0	0.90	2.57	4.34
$\nu_2 = 4$	6.05	0.90	0	0.43	1.32
$\nu_2 = 5$	9.56	2.57	0.43	0	0.24
$\nu_2 = 6$	12.6	4.34	1.32	0.24	0

Tabelle 7.11: Simulation von $\frac{2}{\pi} \arcsin \rho - \frac{2}{\pi} E(\arcsin(\rho \psi(f_1(U), f_2(U), f_1(\tilde{U}), f_2(\tilde{U}))))$ für $\rho = 0.9$, basierend auf 10000 unabhängigen Realisierungen von $U, \tilde{U} \sim U(0, 1)$. Man beachte, dass die Werte der Tabelle noch mit 10^{-3} multipliziert werden müssen.

$\rho = 1$	$\nu_1 = 2$	$\nu_1 = 3$	$\nu_1 = 4$	$\nu_1 = 5$	$\nu_1 = 6$
$\nu_2 = 2$	0	33.1	53.2	67	77.2
$\nu_2 = 3$	33.1	0	20.1	33.9	44
$\nu_2 = 4$	53.2	20.1	0	13.8	23.9
$\nu_2 = 5$	67	33.9	13.8	0	10.2
$\nu_2 = 6$	77.2	44	23.9	10.2	0

Tabelle 7.12: Simulation von $\frac{2}{\pi} \arcsin \rho - \frac{2}{\pi} E(\arcsin(\rho \psi(f_1(U), f_2(U), f_1(\tilde{U}), f_2(\tilde{U}))))$ für $\rho = 1.0$, basierend auf 10000 unabhängigen Realisierungen von $U, \tilde{U} \sim U(0, 1)$. Man beachte, dass die Werte der Tabelle noch mit 10^{-3} multipliziert werden müssen.

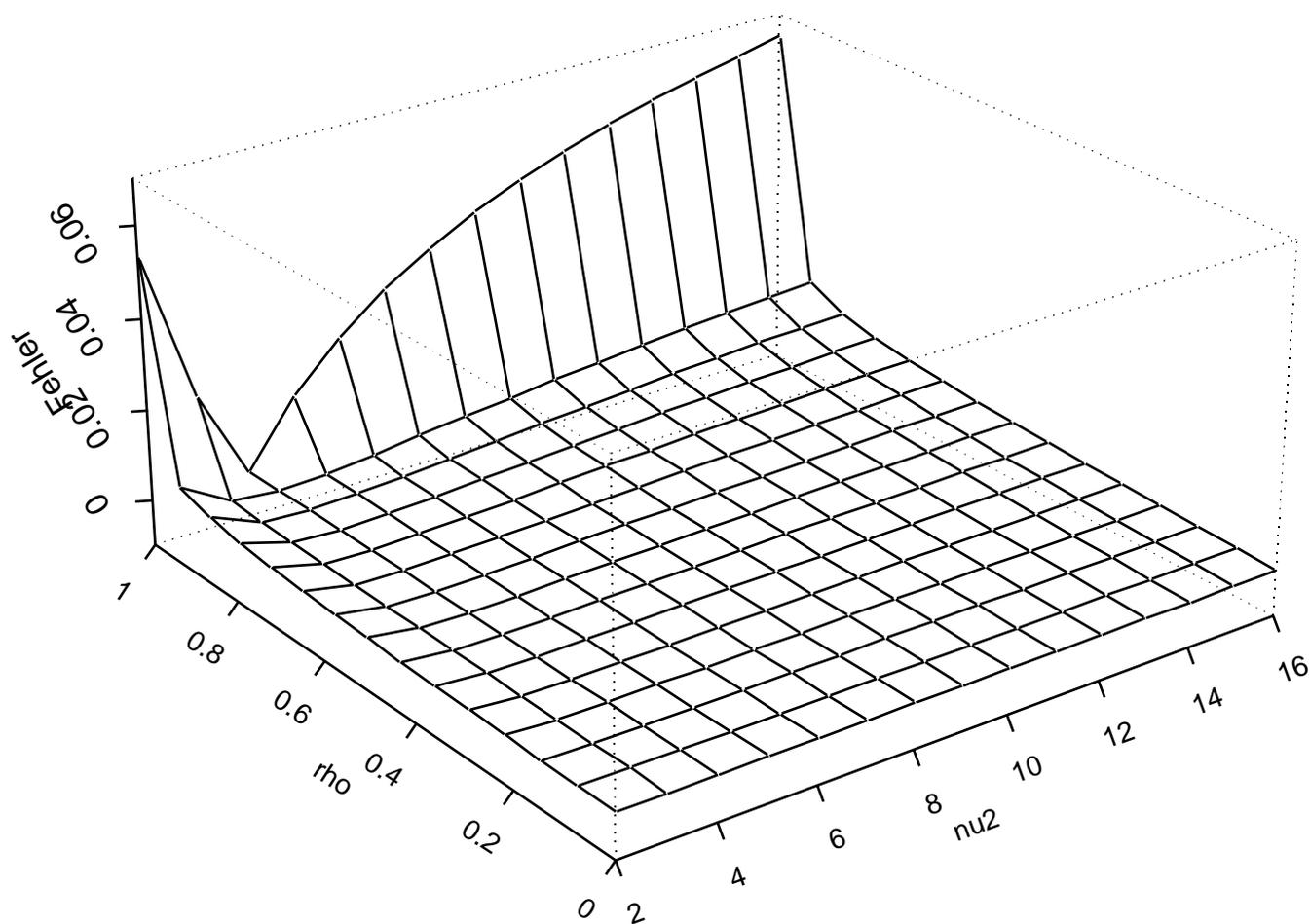


Abbildung 7.4: 3D-Plot der simulierten Differenz $\frac{2}{\pi} \arcsin \rho - \frac{2}{\pi} E(\arcsin(\rho \psi(f_1(U), f_2(U), f_1(\tilde{U}), f_2(\tilde{U}))))$ basierend auf 10000 unabhängigen Realisierungen von $U, \tilde{U} \sim U(0, 1)$, für $\nu_1 = 4$, $\nu_2 = 2, \dots, 16$ und $\rho = 0, \dots, 1$.

ζ	-0.73	0.11	-0.72	0.2	-0.38	-0.54	-0.64	-0.61	-0.01	-0.37	-0.57	-0.61	-0.06	-0.34	0.06
$\hat{\nu}$	-0.07	-0.03	-0.18	0.01	-0.02	-0.12	-0.2	-0.09	0.01	-0.08	-0.1	-0.14	0.01	-0.08	-0.04
$\hat{\beta}$	0.13	0.05	0.21	0.02	0.05	0.14	0.22	0.12	0.03	0.14	0.14	0.17	0.03	0.1	0.07
u	0.08	0.11	0.06	0.06	0.06	0.06	0.07	0.05	0.08	0.13	0.08	0.07	0.08	0.08	0.12
ζ	0.27	-0.33	0.1	-0.58	-0.03	0.15	0.57	0.1	-0.16	-0.68	0.06	0.11	-0.56	-0.31	-0.34
$\hat{\nu}$	0.02	-0.02	0.03	-0.17	0.01	0.05	0.07	0.02	0	-0.49	-0.01	0.03	-0.13	-0.1	-0.1
$\hat{\beta}$	0.02	0.06	0.04	0.21	0.02	0.03	0.01	0.02	0.05	0.47	0.03	0.03	0.15	0.11	0.12
u	0.08	0.08	0.14	0.1	0.05	0.12	0.09	0.07	0.1	0.06	0.08	0.1	0.07	0.07	0.1
ζ	-0.33	0.09	-0.22	-0.21	-0.83	-0.28	-0.1	-0.24	-0.23	0.22	0.28	0.22	-0.04	0.62	-0.24
$\hat{\nu}$	-0.03	0.05	0	-0.03	-0.45	-0.04	-0.01	-0.07	-0.13	0	-0.02	-0.01	0.01	0.03	-0.1
$\hat{\beta}$	0.05	0.02	0.04	0.07	0.56	0.07	0.05	0.09	0.12	0.02	0.03	0.03	0.03	0	0.1
u	0.04	0.11	0.07	0.1	0.09	0.08	0.08	0.09	0.08	0.07	0.07	0.07	0.08	0.05	0.08
ζ	-0.14	0.4	0.43	-0.04	0.61	0.01	0.42	0.08	-0.75	-0.76	-0.44	0.47	-0.78	0.61	-0.16
$\hat{\nu}$	-0.04	0.02	0.04	-0.1	0.02	-0.11	0.03	-0.02	-0.23	-0.27	-0.19	0.06	-0.35	0.04	-0.02
$\hat{\beta}$	0.06	0.01	0.01	0.08	0.01	0.08	0.01	0.03	0.31	0.33	0.18	0.01	0.43	0.01	0.05
u	0.07	0.08	0.08	0.07	0.05	0.08	0.08	0.05	0.08	0.08	0.06	0.1	0.09	0.08	0.08
ζ	-0.1	-0.51	-0.6	0.54	-0.28	-0.18	-0.38	-0.9	-0.27	-0.61	-0.25	-0.9	0.07	0.38	-0.19
$\hat{\nu}$	-0.03	-0.08	-0.2	0.04	-0.02	-0.09	-0.08	-0.2	-0.1	-0.29	-0.19	-0.13	0.01	0.06	-0.03
$\hat{\beta}$	0.05	0.11	0.21	0.01	0.07	0.1	0.12	0.29	0.13	0.31	0.16	0.21	0.03	0.01	0.06
u	0.07	0.07	0.06	0.07	0.11	0.1	0.11	0.05	0.13	0.08	0.08	0.04	0.08	0.09	0.07
ζ	0.75	0.15	-0.24	-0.57	-0.3	-0.23	0.37	0.22	0.21	0.12	-0.07	-0.69	-0.37	0.5	-0.09
$\hat{\nu}$	0.06	-0.01	-0.07	-0.12	-0.11	-0.03	0.05	0.01	0.03	0.02	0.02	-0.11	-0.13	0.06	0.04
$\hat{\beta}$	0	0.03	0.09	0.14	0.12	0.05	0.01	0.02	0.03	0.02	0.04	0.15	0.14	0	0.04
u	0.08	0.06	0.08	0.04	0.08	0.06	0.07	0.07	0.1	0.08	0.12	0.06	0.08	0.08	0.13
ζ	-0.18	-0.61													
$\hat{\nu}$	0	-0.16													
$\hat{\beta}$	0.04	0.19													
u	0.07	0.06													

Tabelle 7.13: Parameter ζ , ν , β des GPD-Fitting-Programms für die rechten Tails aller eindimensionalen Randverteilungen der Equity-Indizes. u ist die Schwelle, die überschritten werden muss, damit der Tail der Verteilung erreicht wird. Da es sich um 92 Equity-Indizes handelt, konnten die Werte eines jeden Parameters nicht für alle Indizes in die gleiche Zeile. Daher wurde hier alle 15 Spalten ein Zeilenumbruch gemacht, so dass zum Beispiel das ζ vom 16ten Index in der 5ten Zeile in der ersten Spalte steht.

$\hat{\zeta}$	-0.13	-0.34	-0.47	0.11	-0.02	0.21	0.36	-0.59	-0.53	-0.18	0.13	-0.42	-0.48	0.25	-0.61
$\hat{\nu}$	-0.97	-1.05	-1.11	-0.99	-0.98	-0.99	-0.99	-1.13	-1.15	-1.04	-1	-1.08	-1.17	-0.97	-1.42
$\hat{\beta}$	0.02	0.1	0.12	0.02	0.02	0.02	0.01	0.15	0.17	0.09	0.03	0.1	0.18	0.02	0.44
u	-0.92	-0.92	-0.94	-0.94	-0.95	-0.94	-0.93	-0.95	-0.92	-0.87	-0.92	-0.93	-0.92	-0.92	-0.88
$\hat{\zeta}$	-0.79	-0.43	-0.63	-0.67	0.17	-0.71	-0.82	-0.1	-0.76	-0.45	-0.77	-0.72	-0.63	0.39	-0.39
$\hat{\nu}$	-1.48	-1.08	-1.42	-1.23	-0.98	-1.25	-1.54	-0.98	-1.45	-1.31	-1.29	-1.45	-1.2	-0.96	-1.28
$\hat{\beta}$	0.53	0.11	0.5	0.28	0.01	0.34	0.61	0.02	0.52	0.26	0.36	0.5	0.23	0.01	0.25
u	-0.92	-0.92	-0.91	-0.9	-0.95	-0.91	-0.91	-0.93	-0.91	-0.94	-0.94	-0.91	-0.93	-0.93	-0.9
$\hat{\zeta}$	-0.49	-0.74	-0.17	-0.22	0.16	-0.67	0.03	-0.42	0.46	-0.04	-0.67	-0.6	-0.19	0.16	-0.65
$\hat{\nu}$	-1.05	-1.33	-1.06	-1.13	-1	-1.17	-0.99	-1.05	-0.97	-1	-1.39	-1.3	-1.04	-1	-1.2
$\hat{\beta}$	0.07	0.39	0.07	0.13	0.04	0.21	0.03	0.1	0.01	0.03	0.39	0.32	0.06	0.02	0.25
u	-0.96	-0.91	-0.93	-0.9	-0.9	-0.92	-0.93	-0.91	-0.92	-0.93	-0.93	-0.93	-0.92	-0.95	-0.95
$\hat{\zeta}$	-0.71	-0.27	-0.46	-0.22	-0.43	0.19	-0.24	-0.1	0.24	-0.9	-0.26	-0.8	-0.74	-0.88	-0.82
$\hat{\nu}$	-1.16	-1.1	-1.24	-1.07	-1.12	-0.97	-1.1	-1.07	-1	-1.66	-1.05	-1.45	-1.17	-1.4	-1.4
$\hat{\beta}$	0.22	0.1	0.22	0.07	0.11	0.02	0.1	0.06	0.03	0.78	0.07	0.58	0.26	0.52	0.46
u	-0.95	-0.92	-0.92	-0.93	-0.95	-0.92	-0.92	-0.95	-0.9	-0.92	-0.94	-0.93	-0.92	-0.93	-0.93
$\hat{\zeta}$	-0.07	-0.3	0.26	0.1	-0.18	-0.73	0.01	-0.51	0.92	-0.19	0.36	0.08	-0.08	-0.13	-0.74
$\hat{\nu}$	-1.02	-1.1	-0.98	-1.01	-1.11	-1.46	-1.04	-1.17	-0.89	-1.07	-1.01	-1.05	-1.04	-1.03	-1.4
$\hat{\beta}$	0.04	0.1	0.02	0.03	0.11	0.54	0.06	0.19	0	0.09	0.02	0.04	0.05	0.06	0.43
u	-0.93	-0.93	-0.94	-0.93	-0.89	-0.92	-0.89	-0.92	-0.87	-0.91	-0.92	-0.94	-0.92	-0.91	-0.93
$\hat{\zeta}$	-0.19	-0.07	-0.49	-0.79	-0.4	-0.08	0.2	-0.71	-0.76	-0.58	0.1	-0.45	0.03	-0.68	-0.6
$\hat{\nu}$	-1.06	-1.03	-1.11	-1.16	-1.13	-1.03	-0.95	-1.3	-1.68	-1.21	-0.97	-1.14	-1.01	-1.2	-1.24
$\hat{\beta}$	0.08	0.04	0.14	0.21	0.14	0.04	0.01	0.34	0.73	0.23	0.03	0.14	0.04	0.23	0.33
u	-0.92	-0.94	-0.92	-0.97	-0.92	-0.94	-0.93	-0.93	-0.9	-0.92	-0.88	-0.94	-0.92	-0.95	-0.9
$\hat{\zeta}$	-0.2	-0.65													
$\hat{\nu}$	-1.06	-1.37													
$\hat{\beta}$	0.07	0.37													
u	-0.93	-0.93													

Tabelle 7.14: Parameter ζ , ν , β des GPD-Fitting-Programms für die linken Tails aller eindimensionalen Randverteilungen der Equity-Indizes. u ist die Schwelle, die überschritten werden muss, damit der Tail der Verteilung erreicht wird. Da es sich um 92 Equity-Indizes handelt, konnten die Werte eines jeden Parameters nicht für alle Indizes in die gleiche Zeile. Daher wurde hier alle 15 Spalten ein Zeilenumbruch gemacht, so dass zum Beispiel das ζ vom 16ten Index in der 5ten Zeile in der ersten Spalte steht.

Kapitel 8

Simulation des Portfolioverlustes

8.1 Algorithmus

Das entscheidende Kriterium hinsichtlich dessen sich die nun folgenden drei Modelle unterscheiden, ist die Copula des systematischen Risikofaktors Y .

Nachdem das Modell durch die Festlegung der Copula für die latenten Variablen hinreichend bestimmt ist, kann man die Verteilung des Portfolioverlustes $L^{(K)}$ durch eine Monte Carlo Simulation folgendermaßen schätzen:

1. Berechnung oder Schätzung der kritischen Grenzen c_k , bzw. \hat{c}_k für alle Ausfallwahrscheinlichkeiten p_k , $1 \leq k \leq K$.
2. Simulation der Risikofaktoren Y_i , $1 \leq i \leq m$, aus einer Verteilung mit $N(0, 1)$ Rändern und einer vom jeweiligen Modell abhängigen Copula.
3. Simulation des bedingten Ausfallindikators $I_k(Y) = 1_{[r_k \leq c_k | Y]} \in \{0, 1\}$ für jede Schuldnerpartei k aus einer Bernoulli Verteilung mit Parameter $Q_k(Y)$, bzw. $\hat{Q}_k(Y)$, wobei $Q_k(Y)$ die bedingte Wahrscheinlichkeit ist, dass Schuldner k ausfällt, gegeben die Risikofaktoren Y :

$$Q_k(Y) := P(r_k \leq c_k | Y) = \Phi \left(\frac{c_k - \sqrt{\beta_k} w_k^T Y}{\sqrt{1 - \beta_k} \sqrt{w_k^T Cov(Y) w_k}} \right), \quad 1 \leq k \leq K, \quad (8.1)$$

und $\hat{Q}_k(Y)$ der Schätzer von $Q_k(Y)$ ist, der durch Plug-in von \hat{c}_k entsteht. Da die Z_k , $1 \leq k \leq K$, alle iid sind, sind die Ausfälle aller Schuldner bedingt unabhängig, gegeben Y .

4. Berechnung des Portfolioverlustes $L^{(K)}(Y) = \sum_{k=1}^K I_k(Y) L_k E_k$ für das Szenario Y .
5. Schätzung der Verteilung des Portfolioverlustes durch ziehen von n Szenarios Y .

Ein schneller zu berechnender Algorithmus, der ohne das Schätzen der c_k auskommt funktioniert so:

1. Simulation der Risikofaktoren Y_i , $1 \leq i \leq m$, von der im Modell festgelegten Verteilung

2. Simulation der idiosynkratischen Risikofaktoren Z_k , $1 \leq k \leq K$, aus unabhängigen Standard Normalverteilungen.
3. Berechnung von $r_k = \sqrt{\beta_k} w_k^T Y + \sqrt{1 - \beta_k} s_k Z_k$ für alle $k \in \{1, \dots, K\}$
4. n-malige Wiederholung der Prozedur
5. Für alle $k \in \{1, \dots, K\}$: Auswahl der $p_k \times n$ kleinsten r_k 's. Für diese gilt $I_k(Y) = 1$ und sonst $I_k(Y) = 0$
6. Berechnung des Portfolioverlustes $L^{(K)}(Y) = \sum_{k=1}^K I_k(Y) L_k E_k$ für das Szenario Y .
7. Schätzung der Verteilung des Portfolioverlustes durch alle Szenarios $L^{(K)}(Y)$.

Für beide Algorithmen bedarf es der Simulation der gemeinsamen Risikofaktoren Y_i , $1 \leq i \leq m$ aus der im Modell festgelegten Verteilung. Diese funktioniert für die gruppierte t-Copula folgendermaßen:

1. Ziehe unabhängig voneinander einen m-dimensionalen normal verteilten Zufallsvektor X mit Erwartungswert 0, Einheitsvarianz und linearer Korrelationsmatrix ρ und eine Zufallsvariable U von der Gleichverteilung auf $(0, 1)$.
2. Sei mit G_ν die Verteilungsfunktion von $\sqrt{\nu/S}$, mit $S \sim \chi_\nu^2$ bezeichnet. Erhalte R_1, \dots, R_L durch $R_l = G_{\nu_l}^{-1}(U)$ für $l = 1, \dots, L$. Mit

$$W = (R_1 X_1, \dots, R_1 X_{s_1}, R_2 X_{s_1+1}, \dots, R_2 X_{s_1+s_2}, \dots, R_L X_m)^T \quad (8.2)$$

ist dann W eine Realisierung eines Zufallsvektors mit gruppierter t-Verteilung.

3. Schließlich ist

$$(t_{\nu_1}(W_1), \dots, t_{\nu_1}(W_{s_1}), t_{\nu_2}(W_{s_1+1}), \dots, t_{\nu_2}(W_{s_1+s_2}), \dots, t_{\nu_L}(W_m))^T \quad (8.3)$$

eine Realisierung eines Zufallsvektors, dessen Verteilung die gruppierten t-Copula ist.

Wie von den anderen beiden Verteilungen simuliert wird ist nun offensichtlich.

8.2 Beispiel

In diesem Kapitel schätzen wir für jedes, der in Kapitel 6 vorgestellten Modelle, den Portfoliogesamtverlust durch Simulation. Danach können wir Risikomaße berechnen und die Modelle hinsichtlich dieser unterscheiden. In der Praxis werden oft die Risikomaße Expected Shortfall und Value at Risk verwendet.

Um die Simulation starten zu können müssen wir noch einige Parameter aus dem allgemeinen Modell festlegen:

Wir betrachten ein international diversifiziertes Kreditportfolio mit $K = 200$ Schuldern, die alle die gleiche, unbedingte Ausfallwahrscheinlichkeit $p_k = 0.01$, $1 \leq k \leq 200$ haben.

Alle Schuldner stammen aus einem bestimmten Land, und seien geographisch so verteilt, dass jeweils 25 Obliger aus einem der acht Länder kommen, für die eine Equity-Index Zeitreihe zur Verfügung steht.

Die Bestimmtheitskoeffizienten β_k , $1 \leq k \leq 200$, die für jede Schuldnerpartei angeben wie groß der Teil der Varianz der normalisierten Log>Returns ist, der durch die Risikofaktoren erklärt werden kann, werden hier aus einer Gleichverteilung auf $(0.2, 0.6)$ gezogen, was gewöhnliche Werte in der Kreditrisikomodellierung sind (siehe Daul et al. [12]).

Außerdem legen wir die Gewichtsvektoren w_k , $1 \leq k \leq 200$ nun so fest, dass jede Schuldnerpartei k durch 2 Equity-Indizes $i_1(k)$ und $i_2(k)$ aus ihrem jeweiligen Land beschrieben wird. Die Indexnummern $i_1(k)$ und $i_2(k)$ werden zufällig aus einer Gleichverteilung über die Indexnummern des jeweiligen Landes gezogen. Die Gewichte $w_k^{i_1(k)}$ und $w_k^{i_2(k)}$ für die Indizes $i_1(k)$ und $i_2(k)$ werden dann folgendermaßen erzeugt: Die $i_1(k)$ -te Komponente von w_k wird aus einer Gleichverteilung auf $(0, 1)$ gezogen und die $i_2(k)$ -te Komponente wird gleich $1 - w_k^{i_1(k)}$ gesetzt. In der Praxis werden die w_k 's eher durch eine ökonometrische oder finanzorientierte Analyse als durch statistische Methoden geschätzt.

Nun legen wir uns hinsichtlich der Modellierung des LGD und des EAD fest:

Der LGD wird in unseren Modellen durch eine standard Gleichverteilung beschrieben: $L_k \sim U(0, 1)$, $1 \leq k \leq K$. Außerdem ist L_k unabhängig von allen E_k , I_k und L_l für alle $k, l \in \{1, \dots, K\}$.

Da der risikolose Zinssatz hier als konstant angenommen wird, und wir uns auf Portfolios ohne Derivate beschränken, setzen wir den EAD für jede Schuldnerpartei auf 1000 EUR fest. Diese Einschränkungen haben keinen Einfluß auf die Form des extremen Tails der Portfolioverlustverteilung und sind somit akzeptabel.

Wir verwenden für jedes der drei Modelle $n = 500000$ Simulationsiterationen um den Portfolioverlust zu schätzen. In Kapitel 7 haben wir, wie in Tabelle 7.3 zu sehen ist, für verschiedene Schätzverfahren verschiedene Werte für die ν_1, \dots, ν_8 und den globalen Freiheitsgrad ν der t-Copula erhalten. Da wir uns für extreme Verluste des Kreditportfolios interessieren, und diese auftreten, wenn die latenten Variablen gemeinsam sehr klein werden, verwenden wir die Schätzwerte aus der vorletzten Spalte von 7.3, also diejenigen, für die die lower Tail-Dependence in die Schätzer mit eingeht.

Nun sind alle Parameter festgelegt. Somit kann nun die Simulation gestartet werden. In Tabelle 8.1 sind einige Risikomaße für die drei verschiedenen Modelle berechnet worden. Dabei steht jeweils in der ersten Zeile der berechnete Wert für jedes Risikomaß, und in der zweiten die Abweichung zum Modell mit der Gaußcopula. Man sieht sofort, dass das Modell mit t-Copula sehr ähnliche Werte liefert wie das Modell mit der gruppierten t-Copula. Das liegt daran, dass die Werte ν_1, \dots, ν_8 alle sehr nahe an dem Schätzwert für den globalen Freiheitsgrad ν für die t-Copula liegen. Was ebenfalls sofort auffällt, ist, dass das Modell mit der Gaußcopula in fast allen Fällen sehr viel kleinere Werte für die Riskomaße liefert, als die beiden anderen Modelle. Die Unterschiede sind bei sehr hohen Quantilen wie 99% und 99.9% für Expected Shortfall und Value at Risk gravierend: 99.9% Value at Risk Abweichung von t-Copula zu Gaußcopula: 80.1% und zur gruppierten t-Copula 74.0 %

Da diese Quantile diejenigen sind, die im Kreditrisikomanagement am meisten verwendet werden, zeigt diese Tabelle schonungslos die Schwächen eines Modells mit Gaußcopula auf. Um die Wahrscheinlichkeiten von extremen Verlusten des Portfolios nicht zu

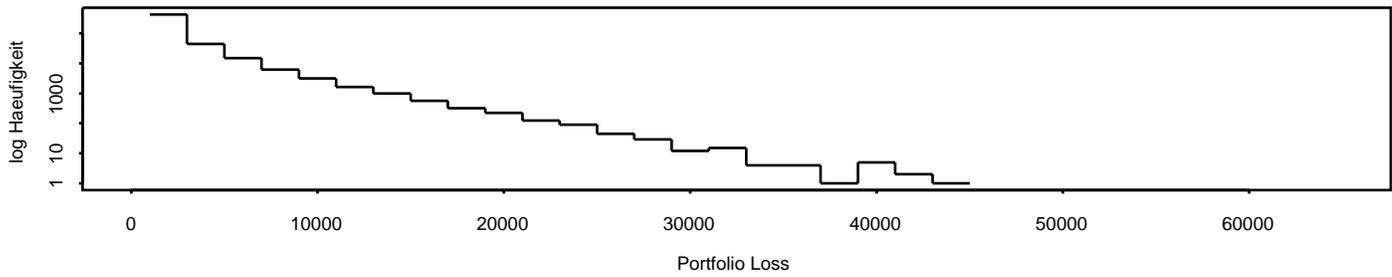
unterschätzen, ist es also ratsam das Modell mit der t-Copula zu verwenden. Wenn man eine große Menge von Risikofaktoren modellieren will, gibt es die gruppierte t-Copula eine flexiblere Möglichkeit dies zu tun.

	Gaußcopula	t-Copula	Gruppierte t-Copula
Maximaler Wert	55194.1	69656.5	69533.0
Abweichung zu Gauß		26.2%	26.0%
Standardabweichung	1916.65	2791.51	2716.45
Abweichung zu Gauß		45.6%	41.7%
95 % Quantil	4325.20	4454.86	4460.97
Abweichung zu Gauß		3.0%	3.1%
99 % Quantil	9262.64	13501.5	13149.9
Abweichung zu Gauß		45.8%	42.0%
99.9 % Quantil	18442.5	33215.6	32083.4
Abweichung zu Gauß		80.1%	74.0%
95% Expected Shortfall	7441.29	10243.3	10019.4
Abweichung zu Gauß		37.7%	34.7%
99% Expected Shortfall	13159.3	21834.3	21081.2
Abweichung zu Gauß		65.9%	60.2%
99.9% Expected Shortfall	22627.6	41083.2	39769.8
Abweichung zu Gauß		81.6%	75.8%

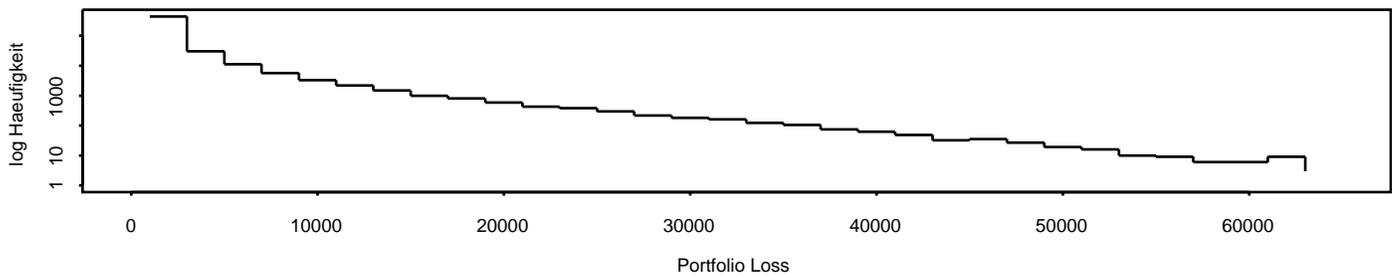
Tabelle 8.1: Vergleich des simulierten Portfolioverlusts der drei verschiedenen Modelle durch Risikomaße und Kennzahlen

In Abbildung 8.1 sind die Histogramme des simulierten Portfolioverlustes für die drei Modelle mit Gaußcopula, t-Copula und gruppierter t-Copula zu sehen. Dabei hat die y-Achse eine Log-Skalierung. Wie man gut erkennen kann, hat die Verlustverteilung für das Modell mit der Gaußcopula einen wesentlich leichteren Tail als die beiden anderen Verlustverteilungen, die sich sehr ähnlich sehen. Unsere Schlussfolgerungen werden also bestätigt.

Gausscopula



t-copula



Gruppierte t-copula

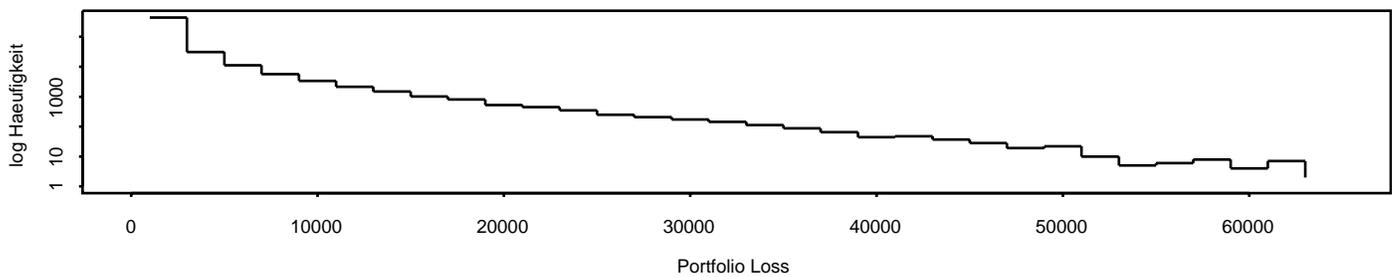


Abbildung 8.1: Histogramme des simulierten Portfolioverlustes für die drei Modelle mit Gaußcopula, t-Copula und gruppierter t-Copula. Beachte: die y-Achse hat eine Log-Skalierung.

Kapitel 9

Zusammenfassung

Ziel dieser Arbeit war es, ein neues Kreditrisikomodell, unter Berücksichtigung der Abhängigkeitsstruktur der Schuldner durch eine gruppierte elliptische Copula, aufzustellen und dieses mit dem in der Praxis verwendeten Modell zu vergleichen. Zum Vergleich der beiden Modelle wurde noch ein drittes herangezogen, das die Abhängigkeitsstruktur der Schuldner durch eine elliptische Copula beschreibt und das ein Spezialfall des Modells mit der gruppierten elliptischen Copula ist.

Die in der Praxis verwendeten Modelle, wie zum Beispiel die von KMV und Credit-Metrics, charakterisieren die Abhängigkeitsstruktur der Schuldner eines Portfolios durch die Abhängigkeiten eines mehrdimensional normal verteilten gemeinsamen Risikofaktorvektors. Dabei ist, wenn die individuellen Ausfallwahrscheinlichkeiten jedes einzelnen Schuldners bereits feststehen, nur relevant, dass die Abhängigkeiten der Obliger durch eine Gaußcopula beschrieben werden. Die univariaten Randverteilungen sind irrelevant. Die Annahme einer Gaußcopula hat den Vorteil, dass sie allein durch die Korrelationsmatrix parametrisierbar ist und somit leicht zu kalibrieren und zu simulieren ist. Der große Nachteil ist, dass Abhängigkeiten von extremen Ereignissen vernachlässigt werden, da die lineare Korrelation nicht imstande ist diese zu erfassen. Da aber nur durch gemeinsame extreme Realisierungen der Risikofaktoren sehr hohe Portfolioverluste entstehen können, ist die Messung und Modellierung der Abhängigkeiten extremer Ereignisse unabdingbar. Ein entsprechendes Maß hierfür ist die Tail-Dependence, die für bivariate Zufallsvektoren die Wahrscheinlichkeit extremer Realisierungen der einen Zufallsvariablen unter der Bedingung einer extremen Realisierung der anderen Zufallsvariablen misst.

In dieser Arbeit wurde versucht die Abhängigkeitsstruktur der gemeinsamen Risikofaktoren einmal durch eine t-Copula und ein anderes Mal durch eine gruppierte t-Copula zu modellieren. Der Vorteil dieser beiden Copulae ist, dass ihre bivariaten Ränder die Eigenschaft der Tail-Dependence haben. Somit können mit diesen beiden Copula die extremen Abhängigkeiten der gemeinsamen Risikofaktoren adäquat modelliert werden. Zusätzlich steigt der Aufwand des Kalibrierens und Simulierens beim Übergang von der Gaußcopula zu den beiden anderen Copulae nur mäßig. Dies ist eine nicht zu unterschätzende Eigenschaft, die nicht hoch genug eingestuft werden kann.

Zum Kalibrieren der beiden neuen Modelle wurden verschiedene Methoden angewandt. Eine davon ist unseres Wissens nach in der Literatur noch nicht behandelt worden. Bis jetzt wurden t -Copulae und gruppierte t -Copulae durch Schätzer für die Korrelationsmatrix und ML-Schätzer für die Freiheitsgrade ν bzw. ν_1, \dots, ν_L parametrisiert. In der von uns vorgeschlagenen Methode gehen nun auch die Korrelationsmatrix bzw. die Kendall's τ -Matrix und die Matrix der Tail-Dependence in das Schätzverfahren für die ν bzw. ν_1, \dots, ν_L mit ein.

Bei der in Kapitel 8 durchgeführten Simulation der drei Modelle ergaben sich die erwarteten Ergebnisse. Die geschätzte Portfolioverlustverteilung für das Modell mit der Gaußcopula hat einen wesentlich dünneren Tail als die beiden anderen Verlustverteilungen. Zwischen den beiden anderen Modellen ist der Unterschied der Tails der Verlustverteilungen minimal. Das liegt natürlich daran, dass die geschätzten Freiheitsgrade ν und ν_1, \dots, ν_L alle sehr nahe beieinander liegen. Das Modell mit der gruppierten t -Copula hat zwar einen leicht dünneren Tail als das Modell mit der t -Copula, es beinhaltet jenes aber auch als Spezialfall. Da das Gaußcopulamodell auch ein Spezialfall des t -Copula-Modells ist, ist das Modell mit der gruppierten t -Copula dasjenige, das die größten Freiheiten bietet. Da außerdem der Aufwand beim Übergang vom t -Copulamodell zum gruppierte t -Copulamodell nur minimal steigt, ist letzteres das Modell der Wahl.

Zusammenfassend kann man sagen, dass mit dieser Arbeit gelungen ist, ein allgemeines Kreditrisikomodell zu entwickeln, das einerseits die in der Praxis verwendeten Modelle beinhaltet, auf der anderen Seite im Gegensatz zu diesen auch erlaubt die extremen Abhängigkeiten der gemeinsamen Risikofaktoren zu berücksichtigen.

Möglichkeiten dieses Modell auch noch zu verbessern gibt es einige. So könnte man zum Beispiel wie in Kapitel 6.2 kurz angesprochen, anstatt eines "Ausfall"- "Nicht Ausfall"- Zustandsraumes der Schuldner einen Raum betrachten, der Ratings als Zustände zulässt. Dies würde zwar an dem extremen Tail der Portfolioverlustverteilung nichts ändern, allerdings würde der "Bauch" der Verlustverteilung dadurch der Realität noch besser angepasst.

Eine weitere Verbesserung wäre wenn man von t -Copulae und gruppierten t -Copulae zu allgemeineren elliptischen und gruppierten elliptischen Copulae übergehen würde, indem man zulassen würde, dass die Freiheitsgradparameter ν bzw. ν_1, \dots, ν_L reelle Werte annehmen dürfen.

Ich würde es begrüßen an diesen und anderen Fragestellungen weiter arbeiten zu können.

Anhang A

Abkürzungen und Nummerierung der Equity-Indizes

Nummer	Index	Abkürzung
1	AUSTRALIA - DS BANKS	BANKSAU
2	AUSTRALIA - DS MEDIA&PHOTOGRA.	MEDIAAU
3	AUSTRALIA - DS CONS.&BLDG MAT.	CNSBMAU
4	AUSTRALIA - DS CHEMICALS	CHMCLAU
5	AUSTRALIA - DS FOOD PRDR./PRCR.	FOODSAU
6	AUSTRALIA - DS INSURANCE	INSURAU
7	AUSTRALIA - DS 'DEAD'PACKAGING	PCKGNAU
8	AUSTRALIA - DS TRANSPORT	TRNSPAU
9	ASX ENERGY 'DEAD' - PRICE INDEX	ASTENEG
10	CANADA - DS AUTO & PARTS	AUTMBCN
11	CANADA - DS BANKS	BANKSCN
12	CANADA - DS MEDIA&PHOTOGRA.	MEDIACN
13	CANADA - DS CONS.&BLDG MAT.	CNSBMCN
14	CANADA - DS CHEMICALS	CHMCLCN
15	CANADA - DS HOTELS	HOTELCN
16	CANADA - DS INSURANCE	INSURCN
17	CANADA - DS FOOD PRDR./PRCR.	FOODSCN
18	CANADA - DS ELECTR. EQUIP.	ELTNCCN
19	CANADA - DS MINING	MNINGCN
20	CANADA - DS ELECTRICITY	ELECTCN
21	CANADA - DS HEALTH	HLTHCCN
22	CANADA - DS TRANSPORT	TRNSPCN
23	CANADA - DS PUBLISH.&PRINT.	PUBLSCN
24	GERMANY - DS AUTOMOBILE	AUTOSBD
25	GERMANY - DS BANKS	BANKSBD
26	GERMANY - DS CONS.&BLDG MAT.	CNSBMBD
27	GERMANY - DS INSURANCE	INSURBD
28	GERMANY - DS ENG.&MACHINERY	ENGENBD

ANHANG A. ABKÜRZUNGEN UND NUMMERIERUNG DER EQUITY-INDIZES178

29	GERMANY - DS FORESTRY&PAPER	FSTPABD
30	GERMANY - DS TRANSPORT	TRNSPBD
31	GERMANY - DS ELECTRICITY	ELECTBD
32	GERMANY - DS 'DEAD'TEXTILES&L	TEXOTBD
33	GERMANY - DS CHEMS. COMMODITY	CHEMSBD
34	FRANCE - DS AUTO & PARTS	AUTMBFR
35	FRANCE - DS BANKS	BANKSFR
36	FRANCE - DS CONS.&BLDG MAT.	CNSBMFR
37	FRANCE - DS FOOD PRDR./PRCR.	FOODSFR
38	FRANCE - DS GAS DISTR.(DEAD)	GASDSFR
39	JAPAN - DS BANKS	BANKSJP
40	JAPAN - DS MEDIA&PHOTOGRA.	MEDIAJP
41	JAPAN - DS CONS.&BLDG MAT.	CNSBMJP
42	JAPAN - DS CHEMICALS	CHMCLJP
43	JAPAN - DS ELECTR. EQUIP.	ELTNCJP
44	JAPAN - DS FOOD PRDR./PRCR.	FOODSJP
45	JAPAN - DS INSURANCE	INSURJP
46	JAPAN - DS ENG.&MACHINERY	ENGENJP
47	JAPAN - DS STEEL&OTH.METALS	STLOMJP
48	JAPAN - DS HEALTH	HLTHCJP
49	JAPAN - DS FORESTRY&PAPER	FSTPAJP
50	JAPAN - DS ELECTRICITY	ELECTJP
51	JAPAN - DS OIL & GAS	OILGSJP
52	JAPAN - DS TEXTILES&LEATHER	TEXOTJP
53	JAPAN - DS TRANSPORT	TRNSPJP
54	SWITZ - DS BANKS	BANKSSW
55	SWITZ - DS CONS.&BLDG MAT.	CNSBMSW
56	SWISSINDEX CHEMICALS & PHARMA - PRICE INDEX	SICHMPM
57	SWITZ - DS ELECTR. EQUIP.	ELTNC SW
58	UK - DS BANKS	BANKSUK
59	UK - DS MEDIA&PHOTOGRA.	MEDIAUK
60	UK - DS CONS.&BLDG MAT.	CNSBMUK
61	UK - DS CHEMICALS	CHMCLUK
62	UK - DS ELECTRICITY	ELECTUK
63	UK - DS FOOD PRDR./PRCR.	FOODSUK
64	UK - DS HEALTH	HLTHCUK
65	UK - DS INSURANCE	INSURUK
66	UK - DS HOTELS	HOTELUK
67	UK - DS MINING	MNINGUK
68	UK - DS OIL & GAS	OILGSUK
69	UK - DS FORESTRY&PAPER	FSTPAUK
70	UK - DS TELECOM SERVICES	TELCMUK
71	UK - DS TEXTILES&LEATHER	TEXOTUK
72	UK - DS TRANSPORT	TRNSPUK
73	US - DS AUTO & PARTS	AUTMBUS

ANHANG A. ABKÜRZUNGEN UND NUMMERIERUNG DER EQUITY-INDIZES179

74	US - DS BANKS	BANKSUS
75	US - DS MEDIA&PHOTOGRA.	MEDIAUS
76	US - DS CONS.&BLDG MAT.	CNSBMUS
77	US - DS CHEMICALS	CHMCLUS
78	US - DS ELECTR. EQUIP.	ELTNCUS
79	US - DS ELECTRICITY	ELECTUS
80	US - DS LEIS.,ENT.&HOTEL	LESURUS
81	US - DS FOOD PRDR./PRCR.	FOODSUS
82	US - DS HEALTH	HLTHCUS
83	US - DS INSURANCE	INSURUS
84	US - DS HOTELS	HOTELUS
85	US - DS ENG.&MACHINERY	ENGENUS
86	US - DS MINING	MNINGUS
87	US - DS OIL & GAS	OILGSUS
88	US - DS FORESTRY&PAPER	FSTPAUS
89	US - DS PUBLISH.&PRINT.	PUBLSUS
90	US - DS INF.TECHN.HARDW.	INFOHUS
91	US - DS TELECOM SERVICES	TELCMUS
92	US - DS TRANSPORT	TRNSPUS

Anhang B

Univariate Extremwerttheorie

B.1 Der Satz von Fisher-Tippett

Der Satz von Fisher-Tippett ist die zentrale Aussage in der Extremwerttheorie, und gibt die Form der möglichen Grenzverteilungen von zentrierten und normierten Maxima an. Es gibt (bis auf affine Transformationen) drei Familien von möglichen Grenzverteilungen und diese werden Extremwertverteilungen (EWWn) genannt.

Sei $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ eine Folge von iid nicht degenerierten Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F und X_1, \dots, X_n eine Stichprobe vom Umfang n . Es werden zunächst die Stichprobenmaxima betrachtet:

$$M_1 = X_1, \quad M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}, \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Die Aussagen des Satzes lassen sich mittels

$$\min_{i=1, \dots, n} \{X_i\} = - \max_{i=1, \dots, n} \{-X_i\}$$

auch auf Minima übertragen.

Im Folgenden wird der Begriff der Überlebens- oder Tailfunktion

$$\bar{F}(x) = P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - F(x)$$

einer Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F oft verwendet. Häufig wird $\bar{F}(x)$ auch einfach Tail der Verteilung F genannt.

Nachdem die X_t iid sind, ist die Verteilung der M_n einfach:

$$P(M_n \leq x) = F^n(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Der rechte Endpunkt einer Verteilung F ist definiert als:

$$x_F := \sup\{x \in \mathbb{R} : F(x) < 1\}.$$

Daraus folgt:

$$P(M_n \leq x) = F^n(x) \rightarrow 0, \quad \forall x < x_F, \quad n \rightarrow \infty$$

$$P(M_n \leq x) = 1, \quad \forall x \geq x_F, \quad \text{falls } x_F < \infty$$

Also gilt, dass $M_n \xrightarrow{P} x_F$, für $n \rightarrow \infty$ und $x_F \leq \infty$. Da die Folge M_n nicht fallend in n ist, gilt sogar

$$M_n \xrightarrow{\text{f.s.}} x_F, \quad n \rightarrow \infty.$$

Bessere Aussagen lassen sich machen über zentrierte und normalisierte Maxima:

Satz B.1.1 (Fischer-Tippett). *Sei $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ eine Folge von iid Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F . Wenn Folgen $c_n > 0$, $d_n \in \mathbb{R}$ existieren so, dass für das Maximum M_n einer Stichprobe des Umfangs n gilt:*

$$\frac{M_n - d_n}{c_n} \xrightarrow{P} H \quad \text{für } n \rightarrow \infty,$$

wobei H eine nichtdegenerierte Verteilungsfunktion ist, dann hat H die Form

$$H_\zeta(x) = \begin{cases} \exp(-(1 + \zeta x)^{-1/\zeta}), & \zeta \neq 0, \\ \exp(-\exp(-x)), & \zeta = 0. \end{cases}$$

Die Verteilungsfunktion H heißt verallgemeinerte Extremwertverteilung GEV. Diese Darstellung wird Jenkinson-von Mises Darstellung genannt. Der Fall $\zeta = 0$ wird als Grenzwert für $\zeta \rightarrow 0$ aufgefasst. Die drei möglichen Fälle $\zeta < 0$, $\zeta > 0$ bzw. $\zeta = 0$ heißen Weibull, Fréchet und Gumbel Verteilungen. Es ergeben sich für x Wertebereiche:

$$\begin{aligned} \text{Fréchet} : & \quad x > -\zeta^{-1}, \quad \text{für } \zeta > 0 \\ \text{Weibull} : & \quad x < -\zeta^{-1}, \quad \text{für } \zeta < 0 \\ \text{Gumbel} : & \quad x \in \mathbb{R}, \quad \text{für } \zeta = 0. \end{aligned}$$

Einen Beweis dieses Satzes findet man z.B. in Resnick [36], Proposition 0.3.

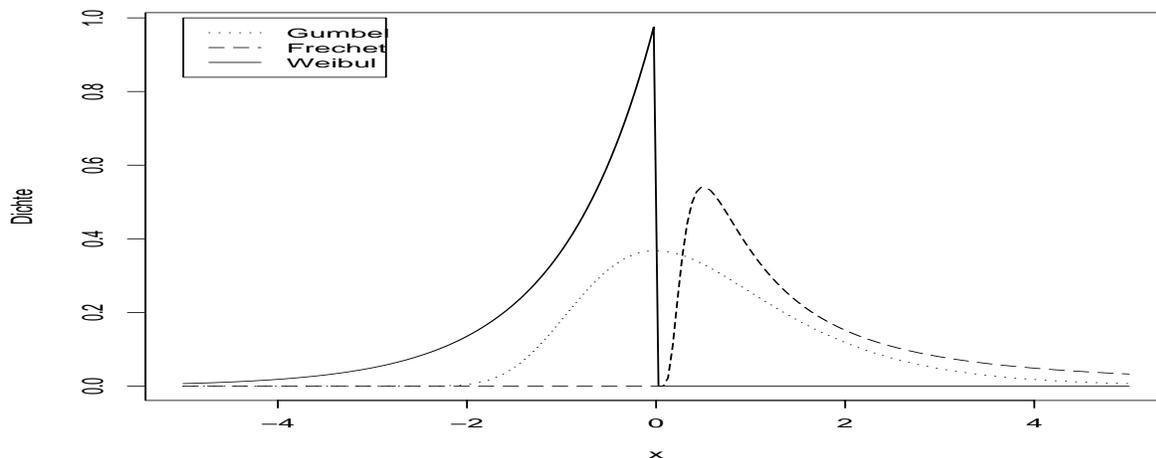
Bemerkung B.1.2. *Für $\zeta = \alpha^{-1} > 0$, $\zeta = -\alpha^{-1} < 0$ bzw. $\zeta = 0$ werden die drei Standard Extremwertverteilungsfunktionen mit Φ_α , Ψ_α , Λ bezeichnet:*

$$\begin{aligned} \text{Fréchet} : \quad \Phi_\alpha(x) &= \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \exp(-x^{-\alpha}), & x > 0 \end{cases}, \quad \text{für } \alpha > 0. \\ \text{Weibull} : \quad \Psi_\alpha(x) &= \begin{cases} \exp(-(-x)^\alpha), & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}, \quad \text{für } \alpha > 0. \\ \text{Gumbel} : \quad \Lambda(x) &= \exp(-\exp(-x)), \quad \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Die Dichten der drei Standard EWWn zeigt Abbildung B.1.

B.2 Maximaler Anziehungsbereich von H_ζ

Nun wird der Begriff des maximalen Anziehungsbereichs eingeführt. Danach werden die Anziehungsbereiche der drei Typen von EWWn charakterisiert. Ein ähnliches Vorgehen findet man in Kuhn [29] und Brommundt [6], die die Theorie aus EKM [15] aufbereiten.


 Abbildung B.1: Dichten der Standard EWWn Λ , Φ_1 und Ψ_1

Definition B.2.1 (Maximaler Anziehungsbereich). *Existieren für eine Folge $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ normierende Folgen $d_n \in \mathbb{R}$, $c_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$ so, dass die Bedingungen aus Satz B.1.1 erfüllt sind, dann sagt man, die Zufallsvariablen X_n bzw. ihre Verteilungsfunktion F liegen im maximalen Anziehungsbereich der Extremwertverteilung H_ζ . Der maximale Anziehungsbereich von H_ζ wird mit $MDA(H_\zeta)$ (Maximum Domain of Attraction) bezeichnet. Man schreibt kurz $X \in MDA(H_\zeta)$ bzw. $F \in MDA(H_\zeta)$.*

Nun stellen sich mehrere Fragen:

Zum Ersten: Welche Bedingungen muss eine Verteilungsfunktion, bei gegebener Extremwertverteilung H erfüllen, damit die normierten Maxima M_n schwach gegen H konvergieren.

Zum Zweiten: Wie sind die Folgen $c_n > 0$ und $d_n \in \mathbb{R}$ zu wählen, damit $c_n^{-1}(M_n - d_n) \xrightarrow{d} H$ gilt.

Und zum Dritten: Bewirken unterschiedliche normierende Folgen Konvergenz zu unterschiedlichen Grenzverteilungen. Letzteres kann gleich beantwortet werden:

Satz B.2.2 (Konvergenz zu Verteilungstypen). *Seien A , B , A_1 , A_2, \dots Zufallsvariablen und $b_n > 0$, $\beta_n > 0$ und $a_n, \alpha_n \in \mathbb{R}$ normierende Folgen. Falls*

$$b_n^{-1}(A_n - a_n) \xrightarrow{d} A, \quad n \rightarrow \infty, \quad (\text{B.1})$$

dann gilt

$$\beta_n^{-1}(A_n - \alpha_n) \xrightarrow{d} B, \quad n \rightarrow \infty, \quad (\text{B.2})$$

genau dann, wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{\beta_n} = b \in [0, \infty), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - \alpha_n}{\beta_n} = a \in \mathbb{R}. \quad (\text{B.3})$$

Wenn die Gleichung (B.2) gilt, dann ist $B \stackrel{d}{=} bA + a$, und a, b sind eindeutig. Ferner ist B nicht-degeneriert genau dann, wenn $b > 0$, und dann gehören A und B dem gleichen

Verteilungstyp an. Aus B.3 folgt, dass a_n und b_n bis auf eine asymptotische Relation eindeutig sind.

Die Antwort auf die dritte Frage ist also: Unterschiedliche Folgen führen nicht zur Konvergenz zu verschiedenen Grenzverteilungen.

Da die Extremwertverteilungen stetig auf \mathbb{R} sind, ist die Bedingung aus Satz B.1.1 äquivalent zu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(M_n \leq c_n x + d_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(c_n x + d_n) = H_\zeta(x), x \in \mathbb{R}. \quad (\text{B.4})$$

Proposition B.2.3. Für $\tau \in [0, \infty]$ und einer Folge $(u_n) \in \mathbb{R}$ ist folgendes äquivalent:

$$n\bar{F}(u_n) \rightarrow \tau, \quad (\text{B.5})$$

$$P(M_n \leq u_n) \rightarrow e^{-\tau}. \quad (\text{B.6})$$

Zusammen mit B.4 liefert diese Proposition eine erste Charakterisierung des maximalen Anziehungsbereichs.

Satz B.2.4 (Charakterisierung des $\text{MDA}(H_\zeta)$). Die Zufallsvariable X mit Verteilungsfunktion F gehört genau dann zum maximalen Anziehungsbereich der Extremwertverteilung H_ζ , wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\bar{F}(c_n x + d_n) = -\ln(H_\zeta(x)), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (\text{B.7})$$

Im Fall $H_\zeta(x) = 0$ wird die rechte Seite als ∞ aufgefasst.

Mit der Eigenschaft der regulären Variation von Verteilungsfunktionen kann man den maximalen Anziehungsbereich von Extremwertverteilungen bestimmen. Im Fall von Fréchet- und Weibullextremwertverteilungen ist man damit sehr erfolgreich. Die Charakterisierung des maximalen Anziehungsbereichs der Gumbelverteilung Λ stellt sich als aufwändiger heraus.

Definition B.2.5 (Langsame Variation). Eine positive, Lebesgue-messbare Funktion \mathcal{L} auf $(0, \infty)$ heißt langsam variierend in ∞ , wenn gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{L}(tx)}{\mathcal{L}(x)} = 1, \quad \forall t > 0. \quad (\text{B.8})$$

Mit \mathcal{R}_0 bezeichnet man die Menge aller langsam variierenden Funktionen; man schreibt $\mathcal{L} \in \mathcal{R}_0$.

Beispiel B.2.6. Da für alle $t > 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(tx)}{\ln(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(t) + \ln(x)}{\ln(x)} = 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(t)}{\ln(x)} = 1, \quad (\text{B.9})$$

ist $\ln(x)$ langsam variierend bei ∞ . Außerdem sind konstante Funktionen und Funktionen die gegen einen positiven Grenzwert konvergieren langsam variierend.

Definition B.2.7 (Reguläre Variation). Eine positive, Lebesgue-meßbare Funktion h auf $(0, \infty)$ heißt regulär variierend in ∞ mit Index $\alpha \in \mathbb{R}$, wenn

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(tx)}{h(x)} = t^\alpha, \quad \forall t > 0. \tag{B.10}$$

Mit \mathcal{R}_α bezeichnet man die Menge der regulär variierenden Funktionen; man schreibt $h \in \mathcal{R}_\alpha$.

Beispiel B.2.8. Die Potenzen x^α sind regulär variierende Funktionen bei ∞ mit Index α . Endliche Summen solcher Potenzen sind regulär variierend bei ∞ mit einem Index der gleich dem größten der Exponenten ist.

Definition B.2.9 (Rapide Variation). Eine positive, Lebesgue-meßbare Funktion h auf $(0, \infty)$ heißt rapide variierend mit Index $-\infty$ (man schreibt $h \in \mathcal{R}_{-\infty}$) wenn

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(tx)}{h(x)} = \begin{cases} 0 & \text{wenn } t > 1 \\ \infty & \text{wenn } 0 < t < 1. \end{cases} \tag{B.11}$$

Beispiel B.2.10. Ein Beispiel für eine rapide variierende Funktion ist e^{-x} .

Definition B.2.11 (Tailäquivalenz). Zwei Verteilungsfunktionen F, G mit gleichem rechten Endpunkt $x_F = x_G$ heißen Tail-äquivalent, wenn

$$\lim_{x \nearrow x_F} \frac{\overline{F}(x)}{\overline{G}(x)} = c \tag{B.12}$$

für c konstant, $0 < c < \infty$.

Bemerkung B.2.12. Man kann zeigen: Jeder maximale Anziehungsbereich ist abgeschlossen bezüglich der Tailäquivalenz, das heißt, dass alle tailäquivalenten Verteilungsfunktionen zum maximalen Anziehungsbereich der selben Extremwertverteilung H gehören. Desweiteren kann man für beliebige tailäquivalente Verteilungsfunktionen die selben normierenden Folgen c_n, d_n wählen.

B.2.1 MDA für die Fréchet Verteilung $\Phi_\alpha(x) = \exp\{-x^{-\alpha}\}$

Nun wird der maximale Anziehungsbereich der Fréchet Verteilung charakterisiert. Durch Taylor-Entwicklung erhält man

$$\overline{\Phi}_\alpha(x) = 1 - \Phi_\alpha(x) = 1 - \exp\{-x^{-\alpha}\} \sim x^{-\alpha}, \quad x \rightarrow \infty,$$

das heißt, dass der Φ_α -Tail wie eine Potenzfunktion fällt. Aber wie weit kann man sich von einem Potenz-Tail entfernen und trotzdem in $\text{MDA}(\Phi_\alpha)$ bleiben? Es läßt sich zeigen, dass der $\text{MDA}(\Phi_\alpha)$ aus den Verteilungsfunktionen F besteht, deren rechter Tail regulär variiert mit Index α . Die normierenden Folgen können folgendermaßen gewählt werden: $d_n = 0 \forall n$ und die c_n über die Quantilfunktion:

$$c_n = F^{-}(1 - n^{-1}) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq 1 - n^{-1}\} \tag{B.13}$$

$$= \inf\{x \in \mathbb{R} : (1/\overline{F})(x) \geq n\} \tag{B.14}$$

$$= (1/\overline{F})^{-}(n). \tag{B.15}$$

Satz B.2.13 (MDA(Φ_α)). *Die Verteilungsfunktion F gehört zum maximalen Anziehungsbereich von Φ_α , $\alpha > 0$, genau dann, wenn $\bar{F}(x) = x^{-\alpha}\mathcal{L}(x)$ für $\mathcal{L} \in \mathcal{R}_0$ gilt. Wenn $F \in \text{MDA}(\Phi_\alpha)$, dann gilt*

$$c_n^{-1}M_n \xrightarrow{d} \Phi_\alpha, \quad n \rightarrow \infty, \tag{B.16}$$

wobei c_n gemäß B.15 gewählt werden kann.

Man beachte, dass dieses Ergebnis einen unendlichen rechten Endpunkt $x_F = \infty$ für jede Verteilungsfunktion $F \in \text{MDA}(\Phi_\alpha)$ impliziert. Desweiteren bilden die $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine regulär variierende Folge, genauer gesagt, $c_n = n^{1/\alpha}\mathcal{L}_1(n)$ für eine langsam variierende Funktion $\mathcal{L}_1 \in \mathcal{R}_0$. Die Klasse der Verteilungsfunktionen $F \in \text{MDA}(\Phi_\alpha)$ hat sehr schwere Tails, in dem Sinne, dass $E(X^+)^\delta = \infty$ für $\delta > \alpha$ und $X^+ = \max\{0, X\}$. Deswegen können sie geeignete Verteilungen sein um große Versicherungsforderungen oder große Änderungen von Preisen oder log>Returns zu modellieren. Eine leicht überprüfbare Bedingung für die Dichte einer Verteilung, ob letztere zu einem MDA(H) gehört, fand von Mises:

Korollar B.2.14 (Von Mises Bedingung). *Sei F eine absolut stetige VF mit Dichte f , die die Bedingung*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xf(x)}{\bar{F}(x)} = \alpha > 0 \tag{B.17}$$

erfüllt. Dann gilt $F \in \text{MDA}(\Phi_\alpha)$.

Man kann zeigen, dass jede Verteilungsfunktion $F \in \text{MDA}(\Phi_\alpha)$ tailäquivalent ist zu einer absolut stetigen Verteilungsfunktion, die B.17 erfüllt. Da jeder MDA abgeschlossen ist bezüglich der Tailäquivalenz, gilt

Satz B.2.15. *MDA(Φ_α) besteht aus den die von Mises Bedingung (B.17) erfüllenden Verteilungsfunktionen und deren Tail-äquivalenten Verteilungsfunktionen.*

Beispiele für regulär variierende Verteilungsfunktionen F und damit $F \in \text{MDA}(\Phi_\alpha)$ sind die Pareto und die Cauchy Verteilungen.

B.2.2 MDA für die Weibull Verteilung $\Psi_\alpha(x) = \exp\{-(-x)^\alpha\}$

Nun wird der maximale Anziehungsbereich MDA(Ψ_α), $\alpha > 0$, der Weibull Verteilung charakterisiert. Für alle Verteilungsfunktionen $F \in \text{MDA}(\Psi_\alpha)$ gilt $x_F < \infty$. Da eine enge Beziehung zwischen Ψ_α und Φ_α besteht, nämlich:

$$\Psi_\alpha(-x^{-1}) = \Phi_\alpha(x), \quad x > 0, \tag{B.18}$$

erwartet man auch eine enge Verwandtschaft zwischen MDA(Ψ_α) und MDA(Φ_α). Diese wird im folgenden Satz bestätigt:

Satz B.2.16 (MDA(Ψ_α)). *Die Verteilungsfunktion F gehört zum MDA(Ψ_α) für $\alpha > 0$ genau dann, wenn $x_F < \infty$ und $\bar{F}(x_F - x^{-1}) = x^{-\alpha}\mathcal{L}(x)$ für $\mathcal{L} \in \mathcal{R}_0$. Wenn $F \in \text{MDA}(\Psi_\alpha)$, dann gilt*

$$c_n^{-1}(M_n - x_F) \xrightarrow{d} \Psi_\alpha, \quad n \rightarrow \infty, \tag{B.19}$$

wobei man die normierenden Folgen $c_n = x_F - F^\leftarrow(1 - n^{-1})$ und $d_n = x_F$ wählen kann.

Mit der Beziehung (B.18) kann ein ähnliches Korollar wie Korollar B.2.14 aufgestellt werden:

Korollar B.2.17 (Von Mises Bedingung). *Sei F eine absolut stetige Verteilungsfunktion mit einer auf einem endlichen Intervall (z, x_F) positiven Dichte f . Wenn*

$$\lim_{x \rightarrow x_F} \frac{(x_F - x)f(x)}{\overline{F}(x)} = \alpha > 0, \quad (\text{B.20})$$

dann ist $F \in \text{MDA}(\Psi_\alpha)$.

Mit den gleichen Argumenten wie oben kann man zusammenfassen:

Satz B.2.18. *$\text{MDA}(\Psi_\alpha)$ besteht aus den die von Mises Bedingung (B.20) erfüllenden Verteilungsfunktionen und deren tailäquivalenten Verteilungsfunktionen.*

Ein Beispiel für eine Verteilungsfunktion $F \in \text{MDA}(\Psi_1)$ ist die Gleichverteilung $U(0, 1)$ auf $(0, 1)$. Ein Beispiel für $F \in \text{MDA}(\Psi_\alpha)$ ist die Betaverteilung.

B.2.3 MDA für die Gumbel Verteilung $\Lambda(x) = \exp\{-e^{-x}\}$

Eine große Menge von Verteilungen liegt im maximalen Anziehungsbereich der Gumbelverteilung Λ . Allerdings ist es schwieriger den $\text{MDA}(\Lambda)$ zu charakterisieren, da dazu das Konzept der regulären Variation nicht ausreicht. Die Taylor Entwicklung von $\overline{\Lambda}$ zeigt:

$$1 - \Lambda(x) \sim e^{-x}, \quad x \rightarrow \infty,$$

so, dass $\overline{\Lambda}(x)$ exponentiell fällt. Nun fragt man sich wie weit man sich vom exponentiellen Tail entfernen kann, und sich dennoch noch in $\text{MDA}(\Lambda)$ befindet. Es stellt sich heraus, dass sowohl Verteilungsfunktionen mit mäßig schweren Tails wie die Lognormal Verteilungsfunktion als auch welche mit leichten Tails, wie die Normalverteilung in $\text{MDA}(\Lambda)$ enthalten sind. Außerdem sind sowohl endliche als auch unendliche rechte Endpunkte möglich. Ein möglicher Weg den $\text{MDA}(\Lambda)$ zu beschreiben geht über von Mises Funktionen. Da zwar von Mises Funktionen im $\text{MDA}(\Lambda)$ enthalten sind, diese Eigenschaft von F aber nicht notwendig ist für $F \in \text{MDA}(\Lambda)$ wird hier ein etwas anderer Weg eingeschlagen:

Satz B.2.19 (Darstellung 1 von $\text{MDA}(\Lambda)$). *Die Verteilungsfunktion F mit rechtem Endpunkt $x_F \leq \infty$ gehört zum $\text{MDA}(\Lambda)$ genau dann, wenn es ein $z < x_F$ gibt, so dass \overline{F} nachfolgende Darstellung hat,*

$$\overline{F}(x) = c(x) \exp \left\{ - \int_z^x \frac{g(t)}{a(t)} dt \right\}, \quad z < x < x_F. \quad (\text{B.21})$$

Wobei c und g meßbare Funktionen sind, die für $x \nearrow x_F$ die Bedingungen $c(x) \rightarrow c > 0$ und $g(x) \rightarrow 1$ erfüllen. Die Funktion $a(t)$ ist positiv und absolut stetig (bzgl. des Lebesgue

Maßes) und ihre Dichte $a'(x)$ erfüllt $\lim_{x \nearrow x_F} a'(x) = 0$. Für F mit der Darstellung (B.21) kann man die normierenden Folgen wie folgt wählen:

$$d_n = F^{\leftarrow}(1 - n^{-1}) \quad \text{und} \quad c_n = a(d_n)$$

Eine mögliche Wahl von a wäre

$$a(x) = \int_x^{x_F} \frac{\overline{F}(t)}{\overline{F}(x)} dt, \quad x < x_F. \quad (\text{B.22})$$

Obige Darstellung ist nicht eindeutig, weil es einen Trade-Off zwischen den Funktionen c und g gibt. Es gibt noch eine weitere Beschreibung des $\text{MDA}(\Lambda)$:

Satz B.2.20 (Darstellung 2 von $\text{MDA}(\Lambda)$). Die Verteilungsfunktion F mit $x_F \leq \infty$ gehört zum $\text{MDA}(\Lambda)$ genau dann, wenn eine positive Funktion \tilde{a} existiert, die

$$\lim_{x \nearrow x_F} \frac{\overline{F}(x + t\tilde{a}(x))}{\overline{F}(x)} = e^{-t}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (\text{B.23})$$

erfüllt. Eine mögliche Wahl ist mit $\tilde{a} \equiv a$ aus (B.22) gegeben.

Eine nützliche Eigenschaft der Verteilungsfunktionen $F \in \text{MDA}(\Lambda)$ mit $x_F = \infty$ ist, dass $F \in \mathcal{R}_{-\infty}$ und $E[X^+]^\delta < \infty$, $\forall \delta > 0$ gilt.

Nun kehren wir wieder zur Jenkinson-von Mises Darstellung der drei Standard EWWn zurück:

$$H_\zeta(x) = \begin{cases} \exp(-(1 + \zeta x)^{-1/\zeta}) & , \quad \zeta \neq 0, \\ \exp(-\exp(-x)) & , \quad \zeta = 0. \end{cases}$$

wobei $1 + \zeta x > 0$ erfüllt sein muß. Daher ist der Träger von H_ζ :

$$x > -\zeta^{-1}, \quad \text{für} \quad \zeta > 0, \quad (\text{B.24})$$

$$x < -\zeta^{-1}, \quad \text{für} \quad \zeta < 0, \quad (\text{B.25})$$

$$x \in \mathbb{R}, \quad \text{für} \quad \zeta = 0 \quad (\text{B.26})$$

H_ζ ist die Standard Verallgemeinerte Extremwertverteilung (GEV). Wenn man das Argument x von oben durch $(x - \mu)/\psi$ mit $\mu \in \mathbb{R}$ und $\psi > 0$ ersetzt, erhält man die entsprechende Lage-Skalierungs Familie $H_{\zeta;\mu;\psi}$. Dann muß man auch den Träger entsprechend ändern.

Der nun folgende Satz liefert fundamentale Aussagen über den maximalen Anziehungsbereich. Statistische Verfahren die in Kapitel B.5.1 erläutert werden, basieren darauf. Vorher wird noch eine Funktion U definiert:

$$U(t) := F^{\leftarrow}(1 - t^{-1}), \quad t > 0.$$

Satz B.2.21 (Darstellung des $\text{MDA}(H_\zeta)$). Für $\zeta \in \mathbb{R}$ sind die drei folgenden Aussagen äquivalent:

1. $F \in \text{MDA}(H_\zeta)$.

2. Es existiert eine positive meßbare Funktion $a(\cdot)$, so dass für $1 + \zeta x > 0$ gilt

$$\lim_{u \nearrow x_F} \frac{\bar{F}(u + xa(u))}{\bar{F}(u)} = \begin{cases} (1 + \zeta x)^{-1/\zeta}, & \text{wenn } \zeta \neq 0, \\ e^{-x}, & \text{wenn } \zeta = 0. \end{cases} \quad (\text{B.27})$$

3. Für $x, y > 0$ und $y \neq 1$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{U(sx) - U(s)}{U(sy) - U(s)} = \begin{cases} \frac{x^\zeta - 1}{y^\zeta - 1}, & \text{wenn } \zeta \neq 0, \\ \frac{\ln(x)}{\ln(y)}, & \text{wenn } \zeta = 0. \end{cases} \quad (\text{B.28})$$

B.3 Die verallgemeinerte Pareto Verteilung

Es gibt eine interessante Interpretation von Bedingung (B.27). Sei X eine Zufallsvariable mit der Verteilungsfunktion $F \in \text{MDA}(H_\zeta)$, dann kann man (B.27) umformulieren zu:

$$\lim_{u \nearrow x_F} P\left(\frac{X - u}{a(u)} > x \mid X > u\right) = \begin{cases} (1 + \zeta x)^{-1/\zeta}, & \text{wenn } \zeta \neq 0, \\ e^{-x}, & \text{wenn } \zeta = 0. \end{cases} \quad (\text{B.29})$$

Also liefert (B.29) eine Approximation der Verteilung für die skalierten Exzesse über einer hohen Schwelle u . Ein passender Skalierungsfaktor ist $a(u)$. Man wird sehen, dass diese Darstellung sehr wichtig für viele Anwendungen ist. Eine genaue Definition für den Begriff Exzess folgt erst jetzt:

Definition B.3.1 (Exzess Verteilungsfunktion, mittlere Exzessfunktion). Sei X eine Zufallsvariable mit rechtem Endpunkt $x_F \leq \infty$. Für ein festes $u < x_F$ heißt

$$F_u(x) = P(X - u \leq x \mid X > u), \quad x \geq 0, \quad (\text{B.30})$$

die Exzess-Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X (oder der Verteilungsfunktion F) über der Schwelle u . Die Funktion

$$e(u) = E(X - u \mid X > u) \quad (\text{B.31})$$

heißt mittlere Exzessfunktion von X .

Die verallgemeinerte Pareto Verteilung (GPD), die schon in Abschnitt 2.3 angewandt wurde, spielt in der univariaten Extremwerttheorie eine wichtige Rolle. Sie hängt eng mit den Extremwertverteilungen zusammen und ist definiert durch:

Definition B.3.2 (Die verallgemeinerte Pareto Verteilung (GPD)). Die Verteilungsfunktion G_ζ sei definiert durch

$$G_\zeta(x) = \begin{cases} (1 + \zeta x)^{-1/\zeta}, & \text{wenn } \zeta \neq 0, \\ e^{-x}, & \text{wenn } \zeta = 0, \end{cases} \quad (\text{B.32})$$

wobei

$$\begin{aligned} & x \geq 0, & \text{wenn } \zeta \geq 0, \\ 0 \leq x \leq -\frac{1}{\zeta} & \text{wenn } \zeta < 0. \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

G_ζ heißt Standard Verallgemeinerte Pareto Verteilung (GPD). Es kann die dazu verwandte Lage-Skalierungs Familie $G_{\zeta;\nu;\beta}$ eingeführt werden, indem das Argument x durch $(x-\nu)/\beta$ für $\nu \in \mathbb{R}$ und $\beta > 0$ ersetzt wird. Dann muß man auch den Träger entsprechend anpassen. Man nennt $G_{\zeta;\nu;\beta}$ ebenfalls GPD.

Wie im Satz von Fisher-Tippett wird der Fall $\zeta = 0$ als Grenzwert aufgefasst. Man schreibt $G_{\zeta;\beta}$ oder $GPD(\zeta, \beta)$ anstelle von $G_{\zeta;0;\beta}$. Der Definitionsbereich $D(\zeta, \beta)$ ändert sich dann zu:

$$D(\zeta, \beta) = \begin{cases} [0, \infty), & \text{wenn } \zeta \geq 0, \\ \left[0, -\frac{\beta}{\zeta}\right], & \text{wenn } \zeta < 0. \end{cases} \quad (\text{B.34})$$

Nun folgen einige wichtige Eigenschaften der verallgemeinerten Pareto Verteilung:

Satz B.3.3 (Eigenschaften der GPD). 1. Sei $X \sim G_{\zeta;\beta}$. Dann ist $E(X) < \infty$ genau dann, wenn $\zeta < 1$. Für $\zeta < 1$ gilt außerdem

$$E \left[\left(1 + \frac{\zeta}{\beta} X \right)^{-r} \right] = \frac{1}{1 + \zeta r}, \quad \text{wenn } r > -\frac{1}{\zeta}. \quad (\text{B.35})$$

2. Für alle $\zeta \in \mathbb{R}$, gilt $F \in \text{MDA}(H_\zeta)$ genau dann, wenn

$$\lim_{u \nearrow x_F} \sup_{0 < x < x_F - u} |F_u(x) - G_{\zeta;\beta(u)}(x)| = 0. \quad (\text{B.36})$$

für eine positive Funktion β .

3. Seien $x_1, x_2 \in D(\zeta, \beta)$. Dann gilt

$$\frac{\overline{G}_{\zeta;\beta}(x_1 + x_2)}{\overline{G}_{\zeta;\beta}(x_1)} = \overline{G}_{\zeta;\beta + \zeta x_1}(x_2). \quad (\text{B.37})$$

4. Sei $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$ und unabhängig von der iid Folge $(X_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim G_{\zeta;\beta}$. Sei $M_N = \max_{i=1, \dots, N} \{X_i\}$. Dann gilt

$$P(M_N \leq x) = \exp \left(-\lambda \left(1 + \zeta \frac{x}{\beta} \right)^{-\frac{1}{\zeta}} \right) = H_\zeta \left(\frac{(x - \mu)}{\psi} \right), \quad (\text{B.38})$$

mit $\mu = \beta \zeta^{-1}(\lambda^\zeta - 1)$ und $\psi = \beta \lambda^\zeta$. Im Fall $\zeta = 0$ reduziert sich die Gleichung zu

$$P(M_N \leq x) = \exp \left\{ -e^{-\frac{(x - \beta \ln \lambda)}{\beta}} \right\}. \quad (\text{B.39})$$

5. Sei $X \sim G_{\zeta;\beta}$ und $\zeta < 1$. Dann gilt für ein Schwelle $u < x_F$,

$$e(u) = E[X - u | X > u] = \frac{\beta + \zeta u}{1 - \zeta}, \quad \beta + u\zeta > 0. \quad (\text{B.40})$$

Bemerkung B.3.4. 1. Der vorangegangene Satz fasst einige Eigenschaften Der GPD zusammen, die ihren essentiellen Status innerhalb der statistischen Analyse von Extrema rechtfertigen.

2. Die Eigenschaft (3.) kann man auch anders formulieren: Die Klasse der GPD Verteilungsfunktionen ist abgeschlossen bezüglich eines Wechsels der Schwelle. Die linke Seite der Gleichung B.37 ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass die zugrundeliegende Zufallsvariable größer ist als $x_1 + x_2$, unter der Bedingung, dass sie die Schwelle x_1 überschreitet. Die rechte Seite der Gleichung behauptet dann, dass diese Wahrscheinlichkeit ebenfalls vom verallgemeinerten Pareto Typ ist.
3. Die Eigenschaft (2.) empfiehlt die GPD als passende Approximation der Exzessverteilungsfunktion F_u für große u . Dieses Ergebnis kann man umformulieren zu: Für eine Funktion β die man anhand der Daten schätzen muss, gilt:

$$\bar{F}_u = P(X - u > x | X > u) \approx \bar{G}_{\zeta; \beta(u)}(x), \quad x > 0. \quad (\text{B.41})$$

wobei u ausreichend groß sein muss. Außerdem folgt aus (2.), wenn $F \in \text{MDA}(H_{\zeta_H})$ und $F \sim G_{\zeta_G; \beta}$, dann gilt $\zeta_H = \zeta_G$.

4. Die Eigenschaften (2.) und (5.) zusammen geben einem ein praktisches graphisches Hilfsmittel an die Hand um die Schwelle u so hoch zu wählen, dass eine Approximation der Exzessverteilungsfunktion F_u durch eine GPD gerechtfertigt ist: Gegeben sei eine iid Stichprobe X_1, \dots, X_n , konstruiere die empirische mittlere Exzessfunktion $e_n(u)$ als eine Stichprobenversion der mittleren Exzessfunktion $e(u)$. Da wir aus (5.) wissen, dass die mittlere Exzessfunktion $e(u)$ von einer GPD linear ist, muss man nach einem Bereich von u suchen, in dem der Graph von $e_n(u)$ annähernd linear ist. Für solche u ist dann die Approximation von F_u durch eine GPD sinnvoll.

Zusammenfassend kann man sagen:

Satz B.3.5. Die GEVn H_ζ , $\zeta \in \mathbb{R}$, sind die Grenzverteilungen von normierten Maxima. Die GPD $G_{\zeta; \beta}$, $\zeta \in \mathbb{R}$ und $\beta > 0$, sind die Grenzverteilungen von skalierten Exzessen.

B.4 Statistische Verfahren für extreme Ereignisse

In den folgenden Kapiteln führen wir statistische Methoden ein, mit denen man die Extremwertverteilung einer iid Stichprobe ermitteln kann.

In Kapitel 2.3 haben wir bereits an den QQ-Plots gesehen, dass die Log>Returns der Equity-Indizes eine Verteilung haben, die fette Tails als die Normalverteilung haben.

B.4.1 Die mittlere Exzessfunktion

In Definition B.3.1 haben wir bereits die mittlere Exzess Funktion $e(u) = E(X - u | X > u)$ eingeführt. Mit Hilfe der empirischen Version dieser Funktion kann man einen Test für das Tailverhalten einer Verteilung konstruieren. Seien X_1, \dots, X_n iid mit Verteilungsfunktion

F. Wenn nun $\Delta_n(u) = \{i : X_i > u, i = 1, \dots, n\}$ die Indexmenge der Exzesse bezeichnet, dann ist die empirische Exzess Funktion

$$e_n(u) = \frac{1}{\overline{F}_n(u)} \int_u^\infty \overline{F}_n(y) dy = \frac{1}{\text{card}(\Delta_n(u))} \sum_{i \in \Delta_n(u)} (X_i - u), \quad u \geq 0, \quad (\text{B.42})$$

mit der Konvention $0/0 = 0$.

Der Graph

$$\{(X_{k,n}, e_n(X_{k,n})) : k = 1, \dots, n\} \quad (\text{B.43})$$

wird mittlerer Exzess Plot (ME-Plot) genannt. Durch einen ME-Plot kann man feststellen, ob die untersuchte Verteilung eher schwere oder leichte Tails besitzt. Für die Exponentialverteilung $\exp(\lambda)$ gilt $e_{\exp(\lambda)}(u) = \lambda^{-1}$, das heißt, dass der ME-Plot horizontal verläuft. Bei Verteilungen mit schwereren Tails strebt der ME-Plot gegen unendlich, bei Verteilungen mit leichteren Tails gegen Null. Für eine Pareto-Verteilung ist $e(u)$ linear. Die ME-Plots der anderen Verteilungen mit fetten Tails liegen zwischen den Graphen der Exponential- und der Paretoverteilung. Da die Exponentialverteilung im maximalen Anziehungsbereich der Gumbelverteilung liegt, kann man anhand des ME-Plots entscheiden in welchem maximalen Anziehungsbereich die Verteilung liegt.

Beim Übergang zur empirischen Version $e_n(u)$ ergibt sich ein Problem. Es gibt für große u nur eine geringe Anzahl an Stichproben X_i die u überschreiten. Daher reagiert der Graph für große Werte von u sehr sensibel auf Schwankungen in X_i . Daran liegt es auch, dass die ME-Plots von simulierten Zufallsvariablen meistens eine andere Gestalt haben als die theoretisch Richtigen. Oft kann man aber zumindest anhand des ME-Plots entscheiden ob die Zufallsvariable schwere oder leichte Tails hat.

In den Abbildungen B.2-B.9 folgen die ME-Plots der positiven und negativen Log>Returns der Equity-Indizes. Von den ME-Plots der negativen Log>Returns sind die meisten fallend, einige andere wie zum Beispiel die von den Indizes BANKSFR, BANKSSW oder TEXOTUK verlaufen steigend und wieder andere wie die von ELECTJP oder MEDIAUS haben einen flachen Verlauf. Bei den ME-Plots der positiven Log>Returns stellt sich ein sehr ähnliches Verhalten heraus. Die meisten Plots sind fallend, und die Indizes für die ein steigender Verlauf sichtbar ist, sind zum Beispiele CNSBMJP, OILGSJP oder ELECTJP. Durch Vergleich mit den Schätzern $\hat{\zeta}$ aus dem Kapitel 2.3 kann man feststellen, dass positive Werte von ζ mit steigenden ME-Plots und negative Werte von ζ sehr oft mit fallenden ME-Plots einhergehen. Dies bestätigt die Annahme, dass die Randverteilungen der Log>Returns verallgemeinert Pareto verteilt sind.

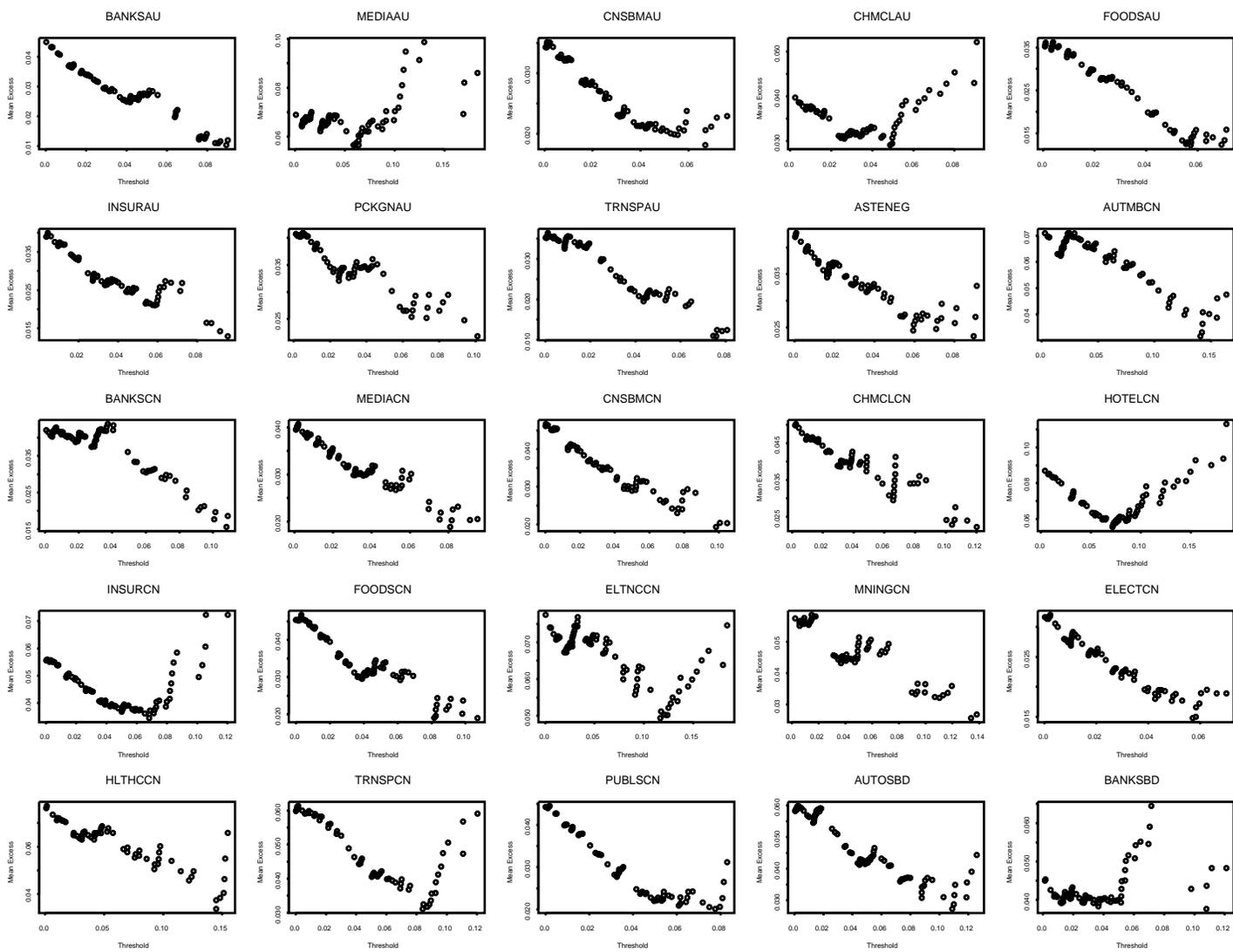


Abbildung B.2: ME-Plots von den positiven Log-Returns der Equity-Indizes

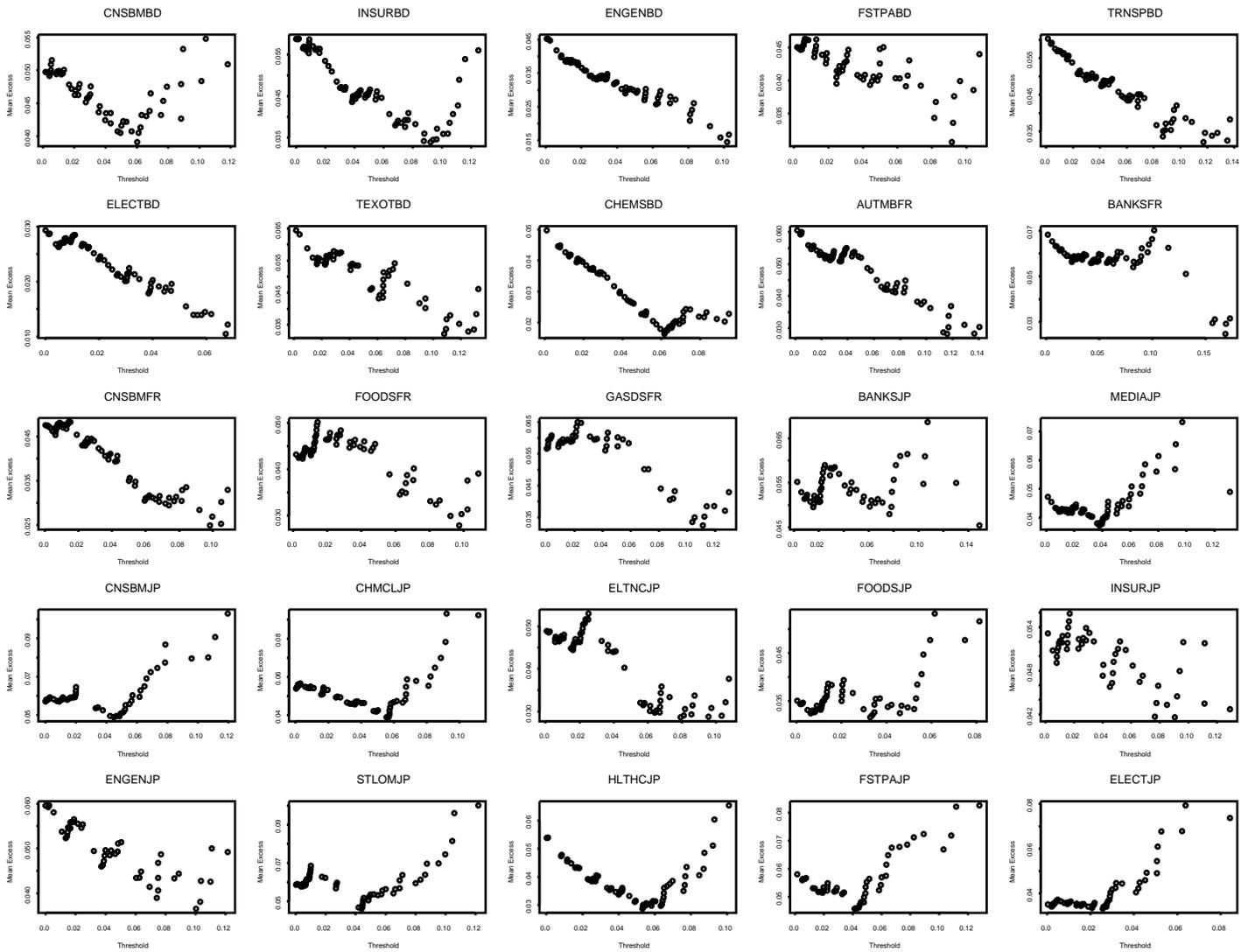


Abbildung B.3: ME-Plots von den positiven Log-Returns der Equity-Indizes

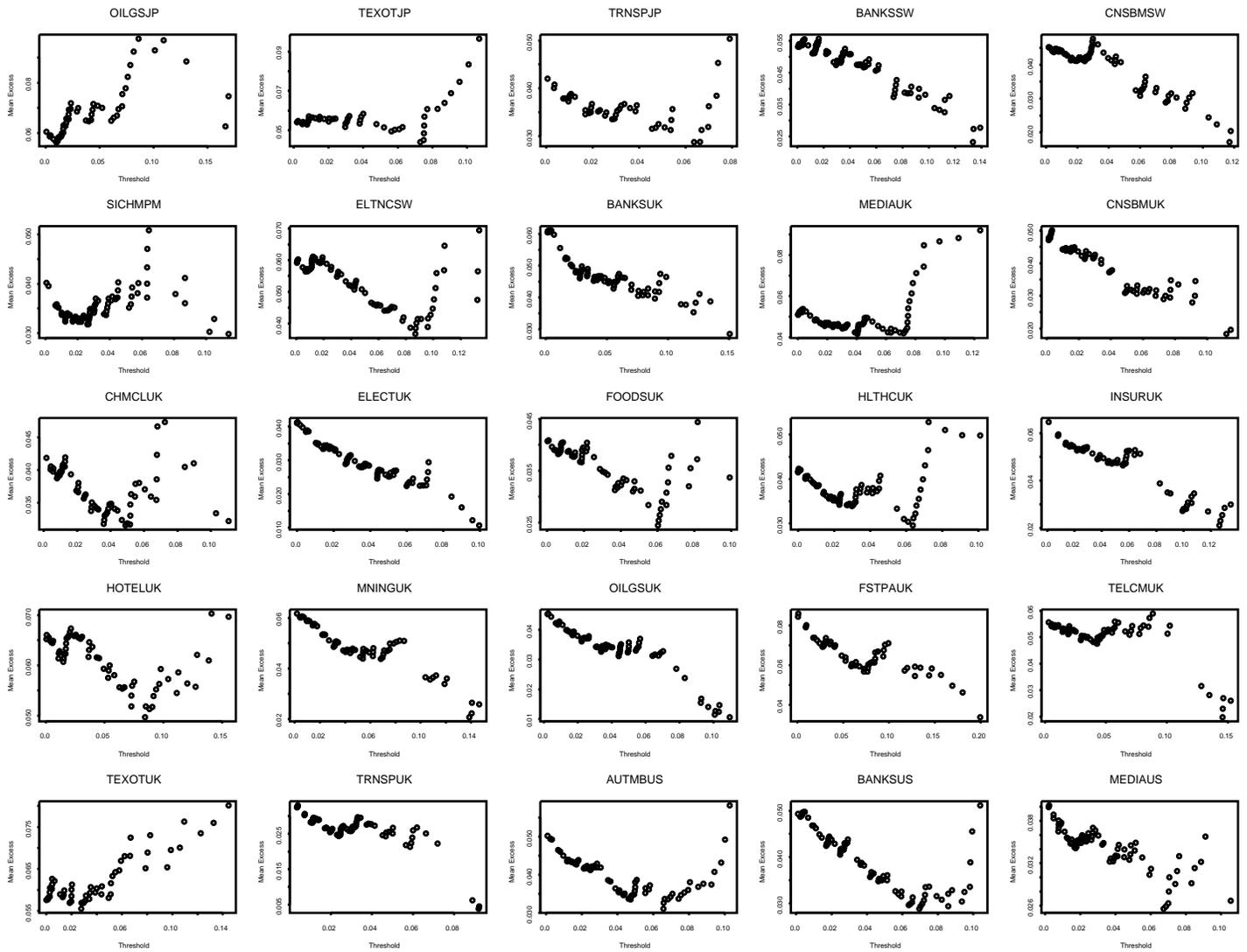


Abbildung B.4: ME-Plots von den positiven Log-Returns der Equity-Indizes

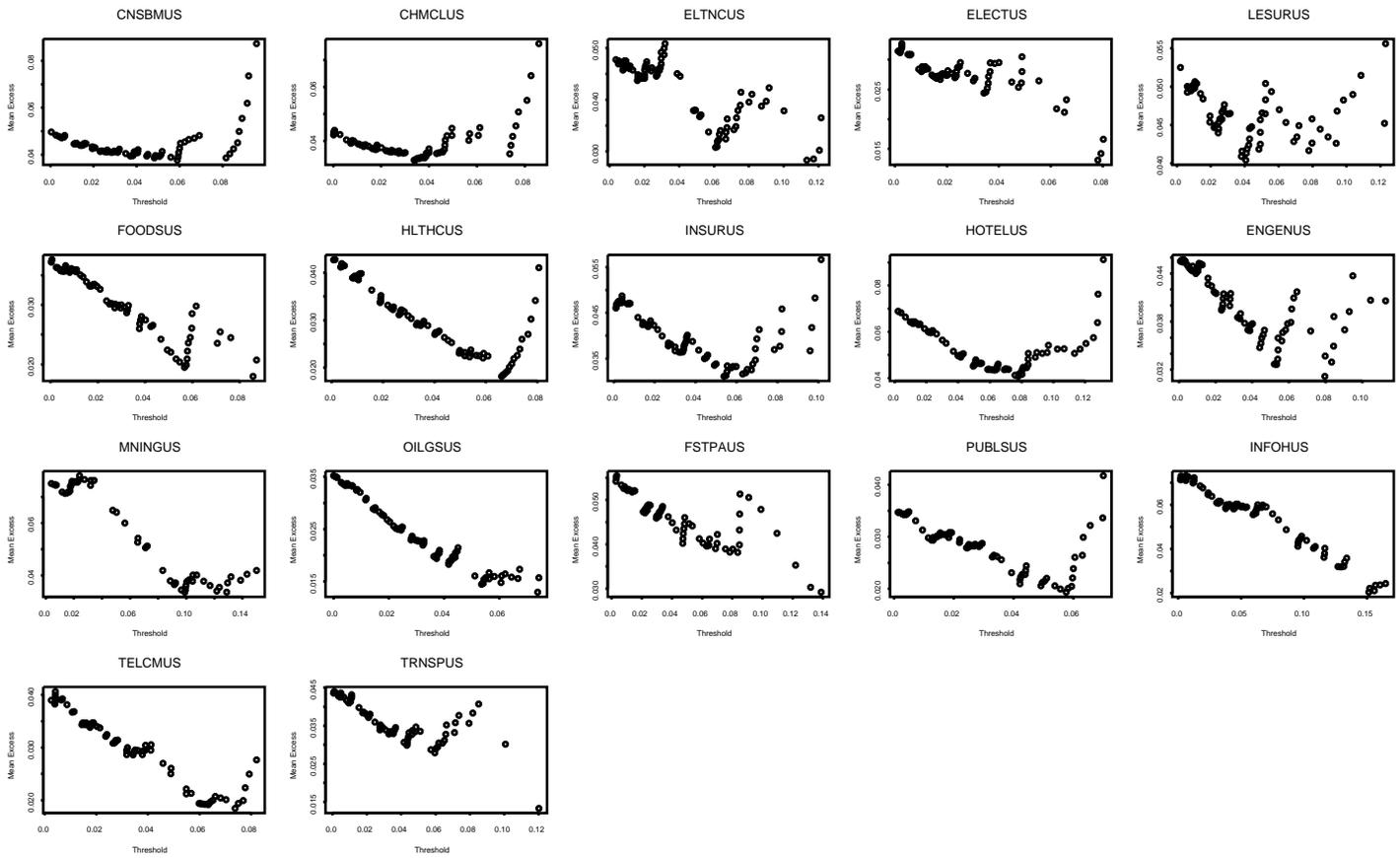


Abbildung B.5: ME-Plots von den positiven Log-Returns der Equity-Indizes

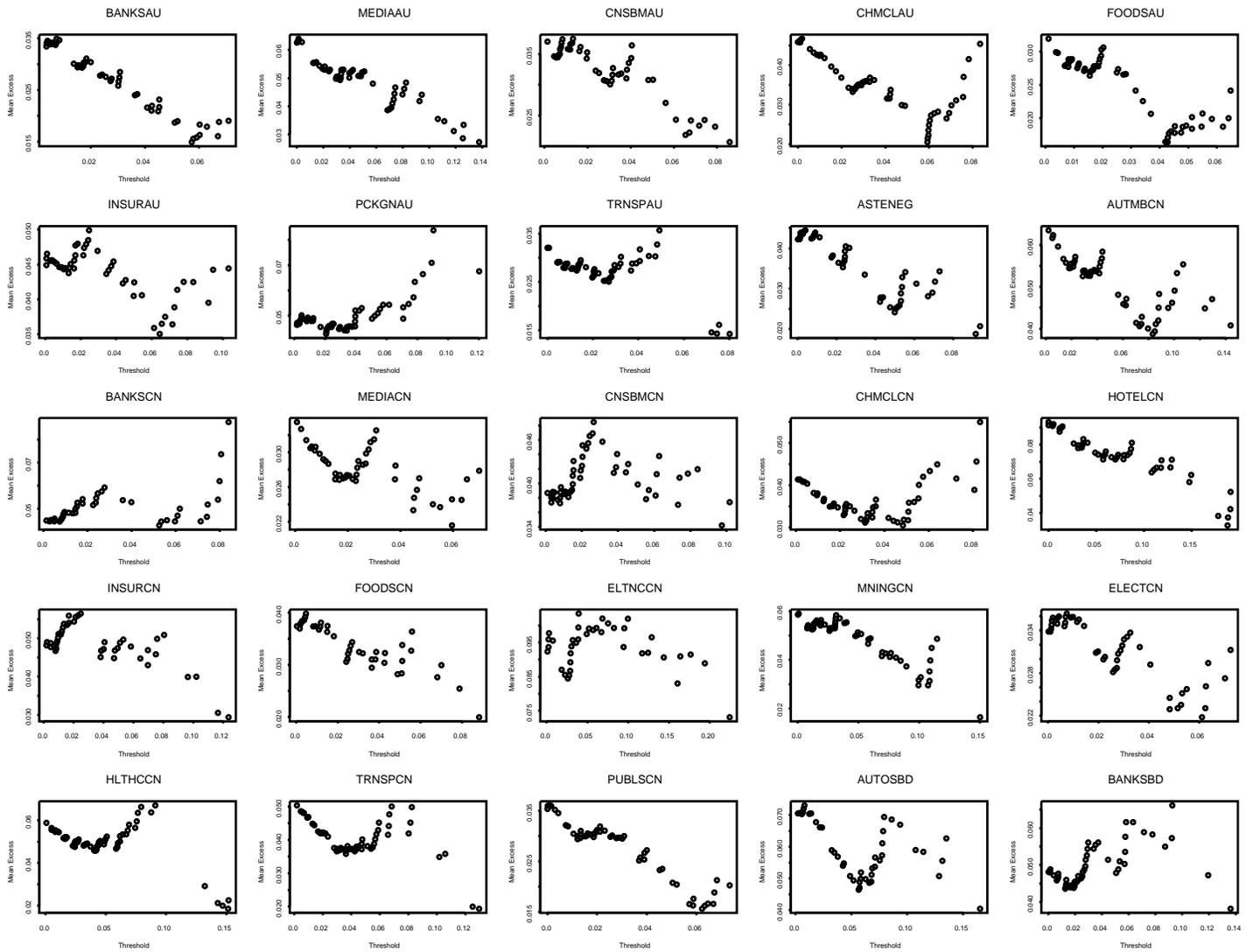


Abbildung B.6: ME-Plots von den negativen Log>Returns der Equity-Indizes

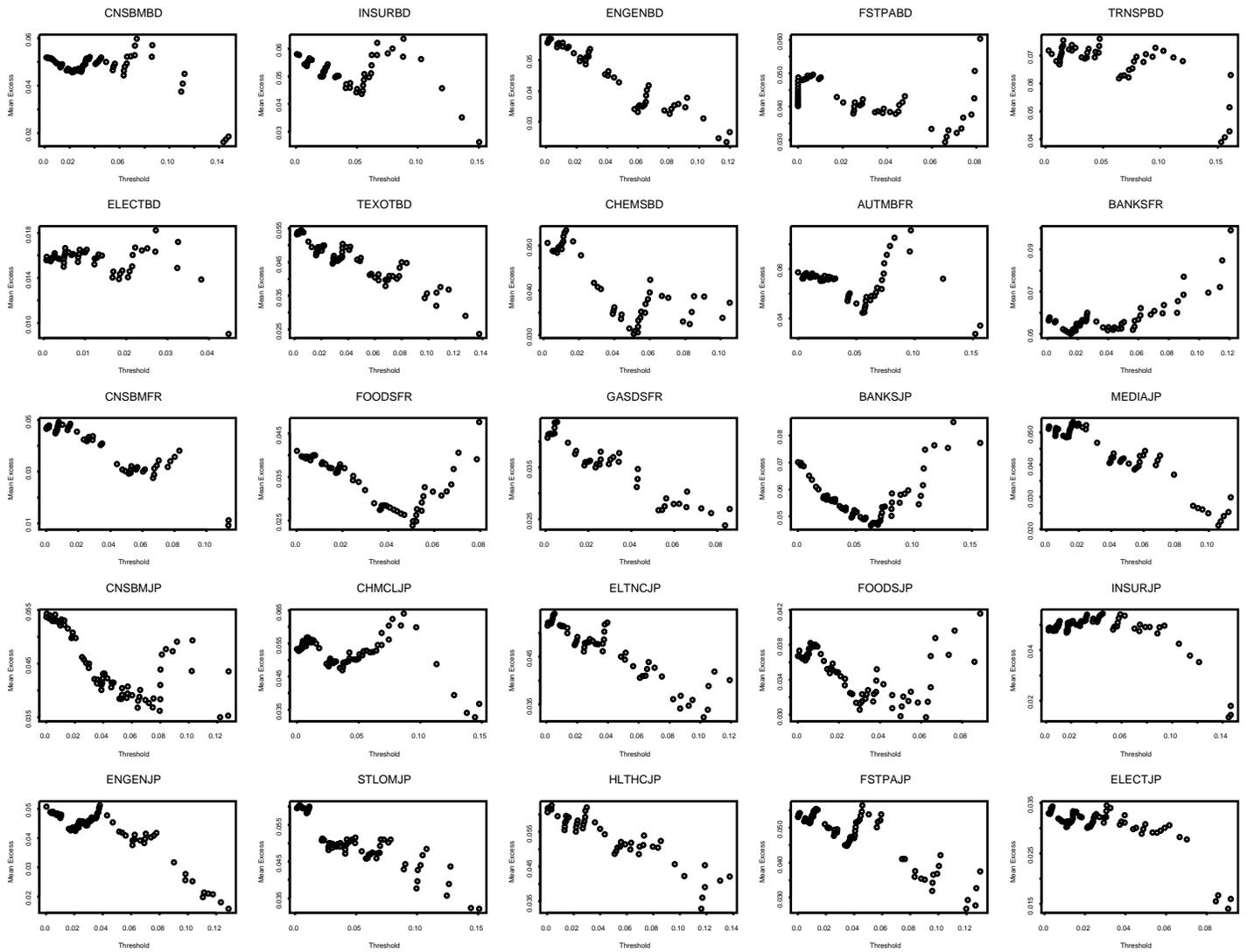


Abbildung B.7: ME-Plots von den negativen Log>Returns der Equity-Indizes

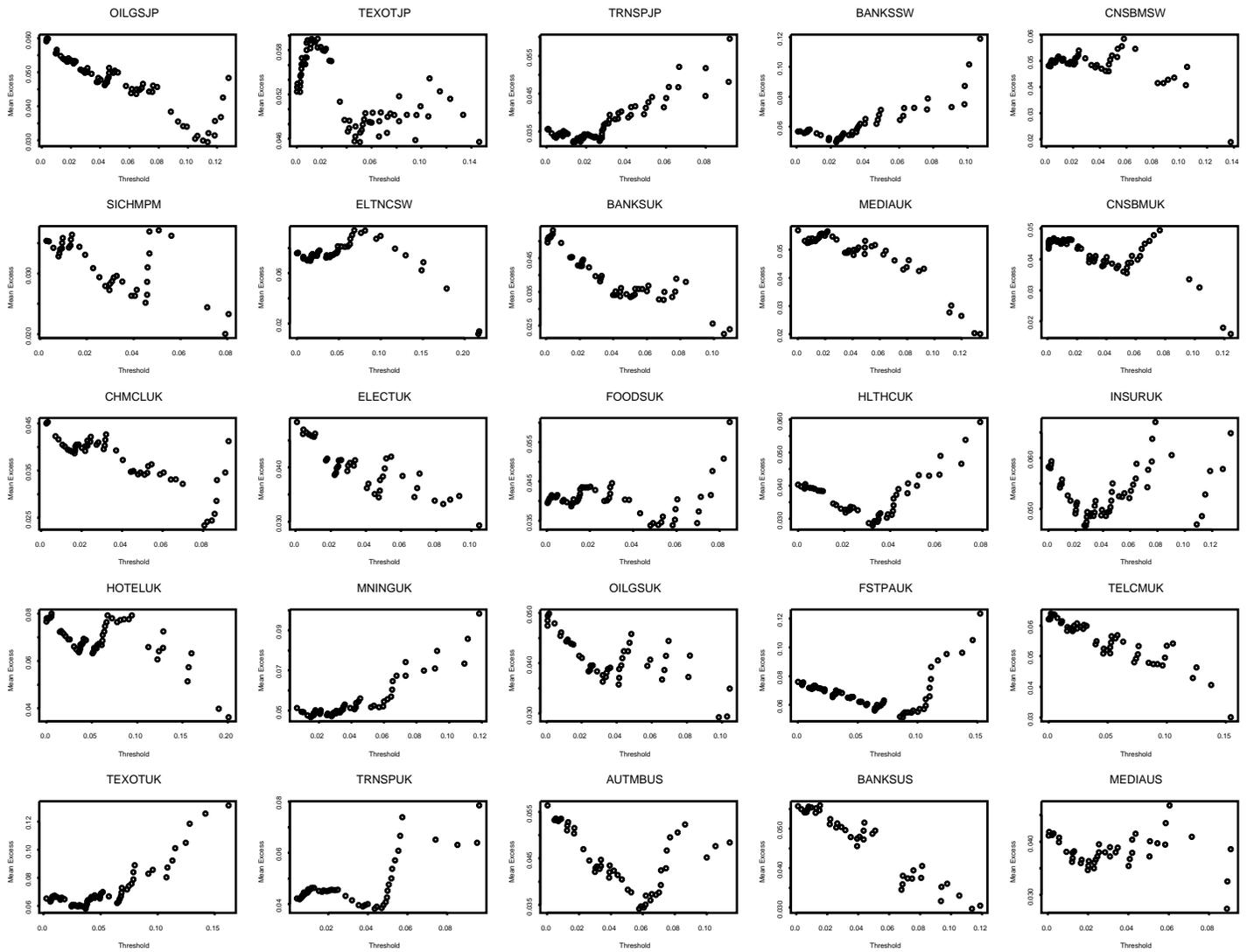


Abbildung B.8: ME-Plots von den negativen Log>Returns der Equity-Indizes

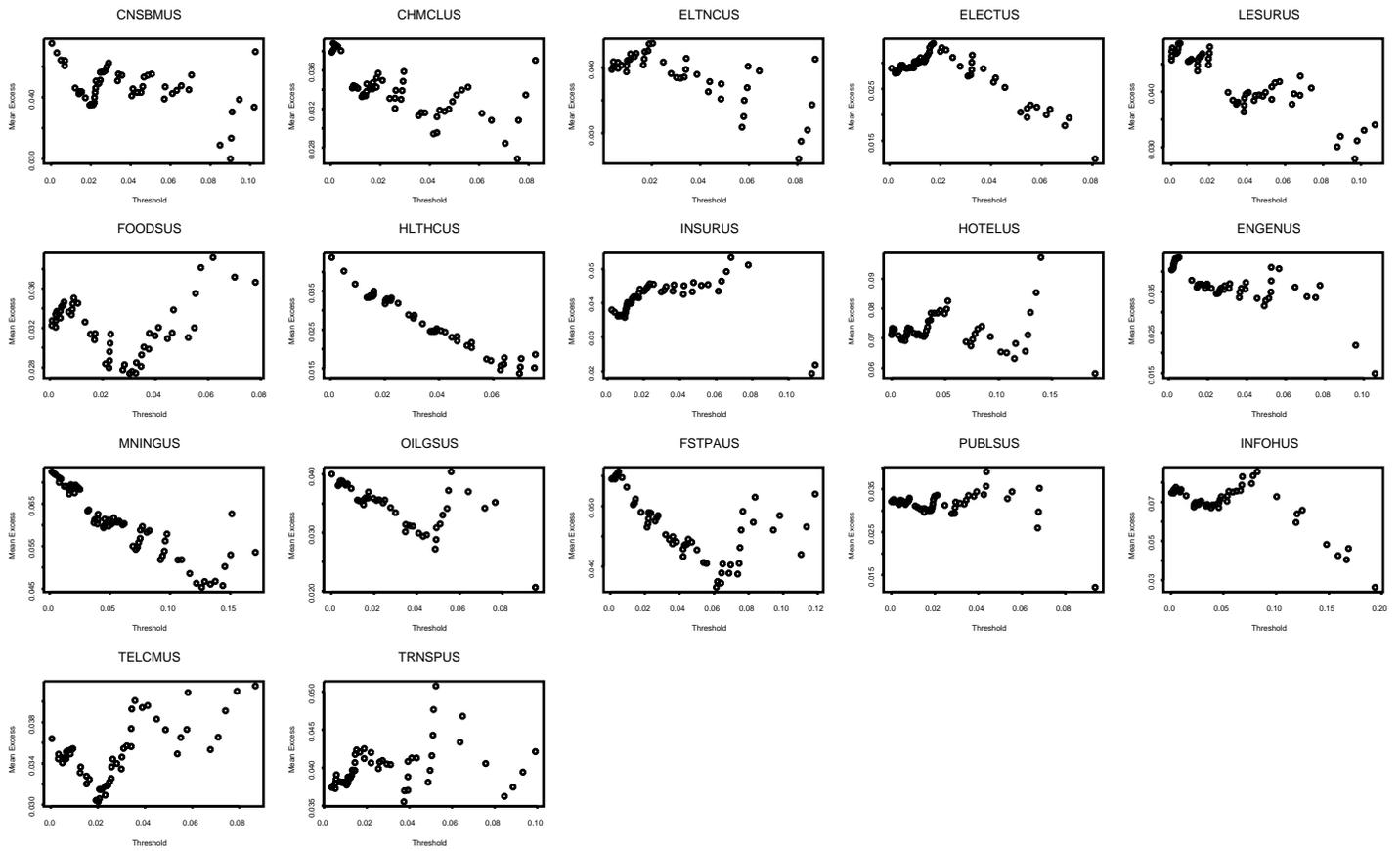


Abbildung B.9: ME-Plots von den negativen Log>Returns der Equity-Indizes

B.5 Schätzen des Formparameters ζ von H_ζ

In diesem Kapitel liegt unser Augenmerk darauf den Parameter ζ der GEV $H_\zeta = \exp\{-(1 + \zeta x)^{-1/\zeta}\}$ zu schätzen. Dafür benötigt man eine Stichprobe X_1, \dots, X_n iid $\sim F \in \text{MDA}(H_\zeta)$. Eine solche sei gegeben. Nach Satz B.2.4 ist $F \in \text{MDA}(H_\zeta)$ äquivalent zu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\bar{F}(c_n x + d_n) = -\ln(H_\zeta(x)), \quad (\text{B.44})$$

wenn c_n, d_n passend gewählt werden und x im Definitionsbereich von H_ζ liegt. Also gilt mit $u = c_n x + d_n$:

$$n\bar{F}(u) \approx \left(1 + \zeta \frac{u - d_n}{c_n}\right)^{\frac{1}{\zeta}}. \quad (\text{B.45})$$

Wenn man schon im Besitz von geeigneten Schätzern $\hat{\zeta}, \hat{c}_n, \hat{d}_n$ von ζ, c_n bzw. d_n ist, dann ist für große u ein Tail-Schätzer gegeben durch:

$$\widehat{\bar{F}}(u) = \frac{1}{n} \left(1 + \hat{\zeta} \frac{u - \hat{d}_n}{\hat{c}_n}\right)^{\frac{1}{\hat{\zeta}}}. \quad (\text{B.46})$$

Da die verallgemeinerte Extremwertverteilung das Verhalten von Zufallsvariablen in den Tails beschreibt, sollte man die Schätzung der ζ, c_n und d_n nur beschränkt auf die Ordnungsstatistik der k größten Werte $X_{k,n} \leq \dots \leq X_{1,n}$ der Stichprobe vornehmen. Man muss dann darauf achten, dass k folgende Eigenschaften erfüllt:

1. $k(n) \rightarrow \infty$, um eine kleine Varianz zu erhalten muss die obere Ordnungsstatistik groß sein, dennoch
2. $\frac{n}{k(n)} \rightarrow \infty$, damit nur die Tails in die Schätzung eingehen.

Bemerkung B.5.1. *In der Praxis ist es so, dass n gegeben ist und man k variieren kann. Dann wird graphisch untersucht welcher Wert für k am besten ist, oder wie sich der Schätzer als Funktion von sich änderndem k verhält.*

B.5.1 Pickands Schätzer

Sei wieder $U(t) = F^\leftarrow(1 - t^{-1})$. Wie wir bereits aus Satz B.2.21 wissen, ist $F \in \text{MDA}(H_\zeta)$ äquivalent zu

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{U(2t) - U(t)}{U(t) - U(t/2)} = \frac{2^\zeta - 1}{1 - 2^{-\zeta}} = 2^\zeta, \quad \text{mit } \zeta \neq 0. \quad (\text{B.47})$$

Diese Formel behält auch ihre Richtigkeit wenn man zu positiven Funktionen $c(t)$ mit $\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = 2$ übergeht:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{U(c(t)t) - U(t)}{U(t) - U(t/c(t))} = 2^\zeta. \quad (\text{B.48})$$

Sei nun

$$V_{n,n} \leq \dots \leq V_{1,n}$$

die Ordnungsstatistik von einer iid Stichprobe V_1, \dots, V_n mit gewöhnlicher Pareto Verteilungsfunktion $F_V(x) = 1 - x^{-1}$, $x \geq 1$. Dann folgt, dass

$$(X_{k,n})_{k=1, \dots, n} \stackrel{d}{=} (U(V_{k,n}))_{k=1, \dots, n},$$

wobei $X_{k,n}$ die Ordnungsstatistik der Stichprobe X_1, \dots, X_n iid $\sim F$ ist. Man beachte, dass $V_{k,n}$ das empirische $(1 - \frac{k}{n})$ -Quantil von F_V ist. Damit kann man für $k = k(n) \rightarrow \infty$ und $k/n \rightarrow 0$ zeigen

$$\frac{k}{n} V_{k,n} \xrightarrow{P} 1, \quad n \rightarrow \infty.$$

Um genau zu sein

$$V_{k,n} \xrightarrow{P} \infty \quad \text{und} \quad \frac{V_{2k,n}}{V_{k,n}} \xrightarrow{P} \frac{1}{2}, \quad \text{für} \quad n \rightarrow \infty.$$

Zusammen mit Gleichung (B.48) ergibt sich

$$\frac{U(V_{k,n}) - U(V_{2k,n})}{U(V_{2k,n}) - U(V_{4k,n})} \xrightarrow{P} 2^\zeta, \quad n \rightarrow \infty,$$

Durch obiges motiviert, wird nun der Pickands Schätzer definiert:

Definition B.5.2 (Pickands Schätzer $\widehat{\zeta}_{k,n}^{(P)}$ für $\zeta \in \mathbb{R}$).

$$\widehat{\zeta}_{k,n}^{(P)} := \frac{1}{\ln 2} \ln \frac{X_{k,n} - X_{2k,n}}{X_{2k,n} - X_{4k,n}}. \tag{B.49}$$

Nun folgen einige Eigenschaften dieses Schätzers

Satz B.5.3 (Eigenschaften des Pickands-Schätzers). *Sei $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ eine Folge von iid Zufallsvariablen mit einer Verteilungsfunktion $F \in \text{MDA}(H_\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{R}$. Dann hat der Pickands Schätzer $\widehat{\zeta}^{(P)} := \widehat{\zeta}_{k,n}^{(P)}$ folgende Eigenschaften:*

1. (schwache Konsistenz) Wenn $k = k(n) \rightarrow \infty$ und $\frac{k}{n} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$, dann gilt

$$\widehat{\zeta}_{k(n),n}^{(P)} \xrightarrow{P} \zeta, \quad n \rightarrow \infty. \tag{B.50}$$

2. (Starke Konsistenz) Wenn $\frac{k}{\ln \ln n} \rightarrow \infty$ und $\frac{k}{n} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$, dann gilt

$$\widehat{\zeta}_{k(n),n}^{(P)} \xrightarrow{\text{f.s.}} \zeta, \quad n \rightarrow \infty. \tag{B.51}$$

3. (Asymptotische Normalität) Unter weiteren Bedingungen an k und F (siehe Dekkers und de Haan [13], S.1799) gilt

$$\sqrt{k} \left(\widehat{\zeta}^{(P)} - \zeta \right) \xrightarrow{d} N(0, v(\zeta)), \quad \text{mit} \quad v(\zeta) = \frac{\zeta^2 (2^{2\zeta+1} + 1)}{(2(2^\zeta - 1) \ln 2)^2}. \tag{B.52}$$

Auf diesem Schätzer basierend kann man Quantil und Tail-Schätzer konstruieren und dazu entsprechende Konfidenzintervalle angeben.

Im allgemeinen betrachtet man bei der Analyse der Daten einen sogenannten Pickands Plot

$$\left\{ \left(k, \widehat{\zeta}_{k,n}^{(P)} \right) : k = 1, \dots, n \right\}. \tag{B.53}$$

Eine gute Wahl für k ist dann ein Bereich von kleinen k , in dem der Plot ungefähr horizontal verläuft. Den Plot zu interpretieren ist allerdings schwierig und es existiert auch keine eindeutig beste Wahl für k .

B.5.2 Hill Schätzer

Der Hill Schätzer schätzt den Parameter ζ der verallgemeinerten Extremwertverteilung GEV $H_\zeta(x) = \exp\{-(1 + \zeta x)^{-1/\zeta}\}$, im Fall von $\zeta = 1/\alpha > 0$. Dann ist die Extremwertverteilung die Fréchetverteilung Φ_α .

Seien also X_1, \dots, X_n iid mit VF $F \in \text{MDA}(\Phi_\alpha)$, $\alpha > 0$. Dann gilt $\overline{F}(x) = x^{-\alpha}\mathcal{L}(x)$, $x > 0$, mit $\mathcal{L} \in \mathcal{R}_0$. Man kann zeigen, dass $E|X|^p = \infty$ gilt, wenn $X \in \text{MDA}(\Phi_\alpha)$ und $p > \alpha > 0$.

Nun sei zuerst einmal angenommen, dass

$$P(X > x) = \overline{F}(x) = x^{-\alpha}, \quad x \geq 1, \quad \alpha > 0.$$

Dann gilt folglich für $Y = \ln X$, dass $P(Y > y) = \exp\{-\alpha y\}$, für $y \geq 0$. Also ist $Y \sim \exp(\alpha)$ und der MLE $\widehat{\alpha}$ von α ist gegeben durch

$$\widehat{\alpha}_n = \overline{Y}_n^{-1} = \left(1/n \sum_{j=1}^n \ln X_j \right)^{-1} = \left(1/n \sum_{j=1}^n \ln X_{j,n} \right)^{-1}.$$

Da nicht mehr Informationen über F gegeben sind, wird im Sinne von $F \in \text{MDA}(\Phi_\alpha)$ mit $\mathcal{L} \in \mathcal{R}_0$ angenommen,

$$\overline{F}(x) = x^{-\alpha}\mathcal{L}(x) \approx Cx^{-\alpha}, \quad x \geq u > 0,$$

für $\mathcal{L} \approx C = \text{const}$ und eine bekannte Schwelle u . Wenn letzteres als vollständig beschrieben angenommen wird ($C = u^\alpha$), erhält man den MLE von α mit

$$\widehat{\alpha}_n = \left(1/n \sum_{j=1}^n \ln (X_{j,n}/u) \right)^{-1} = \left(1/n \sum_{j=1}^n \ln X_{j,n} - \ln u \right)^{-1}.$$

Da man meistens nicht die genauen parametrischen Details weiß, aber immerhin, dass $F \in \text{MDA}(\Phi_\alpha)$, nimmt man nur an, dass $\overline{F}(x) = Cx^{-\alpha}$ für $x \geq u > 0$. Sei außerdem

$$K = \text{card}\{i : X_{i,n} > u, i = 1, \dots, n\}.$$

Bedingt auf das Ereignis $\{K = k\}$ reduziert sich die ML Schätzung von α und C dazu, die gemeinsame Dichte von $(X_{k,n}, \dots, X_{1,n})$ zu maximieren. In EKM [15] Theorem 4.1.3 findet man

$$f_{X_{k,n}, \dots, X_{1,n}}(x_k, \dots, x_1) = \frac{n!}{(n-k)!} (1 - Cx_k^{-\alpha})^{n-k} C^k \alpha^k \prod_{i=1}^k x_i^{-(\alpha+1)}, \quad u < x_k < \dots < x_1.$$

Einfache Rechnung liefert die bedingten MLE's und daraus folgt dann der Hill Schätzer:

Definition B.5.4 (Hill Schätzer). Für die iid Stichprobe $X_1, \dots, X_n \sim F \in \text{MDA}(\Phi_\alpha)$ mit $\bar{F}(x) = Cx^{-\alpha}$ für $x > u$ lautet der Hill Schätzer

$$\hat{\alpha}_{k,n}^{(H)} := \left(1/k \sum_{j=1}^k \ln(X_{j,n}/X_{k,n}) \right)^{-1} = \left(1/k \sum_{j=1}^k \ln X_{j,n} - \ln X_{k,n} \right)^{-1}.$$

Und die Konstante C wird geschätzt durch

$$\hat{C}_{k,n} := \frac{k}{n} X_{k,n}^{\hat{\alpha}_{k,n}^{(H)}}.$$

wobei $k(n) \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$ und $k(n)/n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ gelten müssen.

Satz B.5.5 (Eigenschaften des Hill Schätzers). Sei (X_n) streng stationäre Zeitreihe mit marginaler VF F , für die gilt

$$\bar{F}(x) = P(X > x) = x^{-\alpha} \mathcal{L}(x), \quad x > 0,$$

mit $\alpha > 0$ und $\mathcal{L} \in \mathcal{R}_0$.

Sei $\hat{\alpha}^{(H)} = \hat{\alpha}_{k,n}^{(H)}$ der Hill Schätzer, dann gilt:

1. (schwache Konsistenz) Seien (X_n) iid oder schwach abhängig oder ein linearer Prozess. Wenn $k \rightarrow \infty$ und $k/n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$, dann gilt

$$\hat{\alpha}^{(H)} \xrightarrow{P} \alpha.$$

2. (Starke Konsistenz) Wenn (X_n) eine iid Folge ist und wenn $k/n \rightarrow 0$ und $k/\ln \ln n \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$, dann gilt

$$\hat{\alpha}^{(H)} \xrightarrow{\text{f.s.}} \alpha.$$

3. (Asymptotische Normalität) Wenn (X_n) eine iid Folge ist und weitere Bedingungen für k und F erfüllt sind, dann gilt

$$\sqrt{k}(\hat{\alpha}^{(H)} - \alpha) \xrightarrow{d} N(0, \alpha^2).$$

Bemerkung B.5.6. 1. Auch die Schätzung des Parameters ζ mittels des Hillschätzers basiert wie die Schätzung mittels des Pickands Schätzers auf einer graphischen Analyse. Hier benutzt man einen sogenannten Hill Plot

$$\left\{ \left(k, \hat{\alpha}_{k,n}^{(H)} \right) : k = 2, \dots, n \right\}, \quad (\text{B.54})$$

um das optimale k zu finden.

2. Bei der asymptotischen Normalität des Hillschätzers ist ein Trade-Off zwischen Varianz und Bias möglich, der von der Wahl von k und der meist unbekanntem langsam variierenden Funktion $\mathcal{L} \in \mathcal{R}_0$ abhängt. Wie aus der Formel ersichtlich sinkt die Varianz mit steigendem k allerdings kann bei zu großen k ein Bias auftreten, was in EKM näher erläutert wird.

In Abbildung B.10 sieht man den Hill-Plot von simulierten GPD(0.3) Zufallsvariablen. Am linken Rand für 15 Überschreitungen X_i von u kommt der Schätzer dem tatsächlichen Wert 0.3 sehr nahe. Im Gegensatz dazu ist der Hill-Plot von den simulierten GPD(-0.3) verteilten Zufallszahlen (Abbildung B.11) nicht aussagefähig. Die Voraussetzung $\zeta > 0$ ist hier nicht erfüllt, und es ist fraglich was der Hillschätzer hier eigentlich schätzt. Also liefert der Hillschätzer ohne Kenntniss der Verteilung keine verwertbaren Ergebnisse. Zum Vergleich mit den Daten ist der Plot trotzdem interessant.

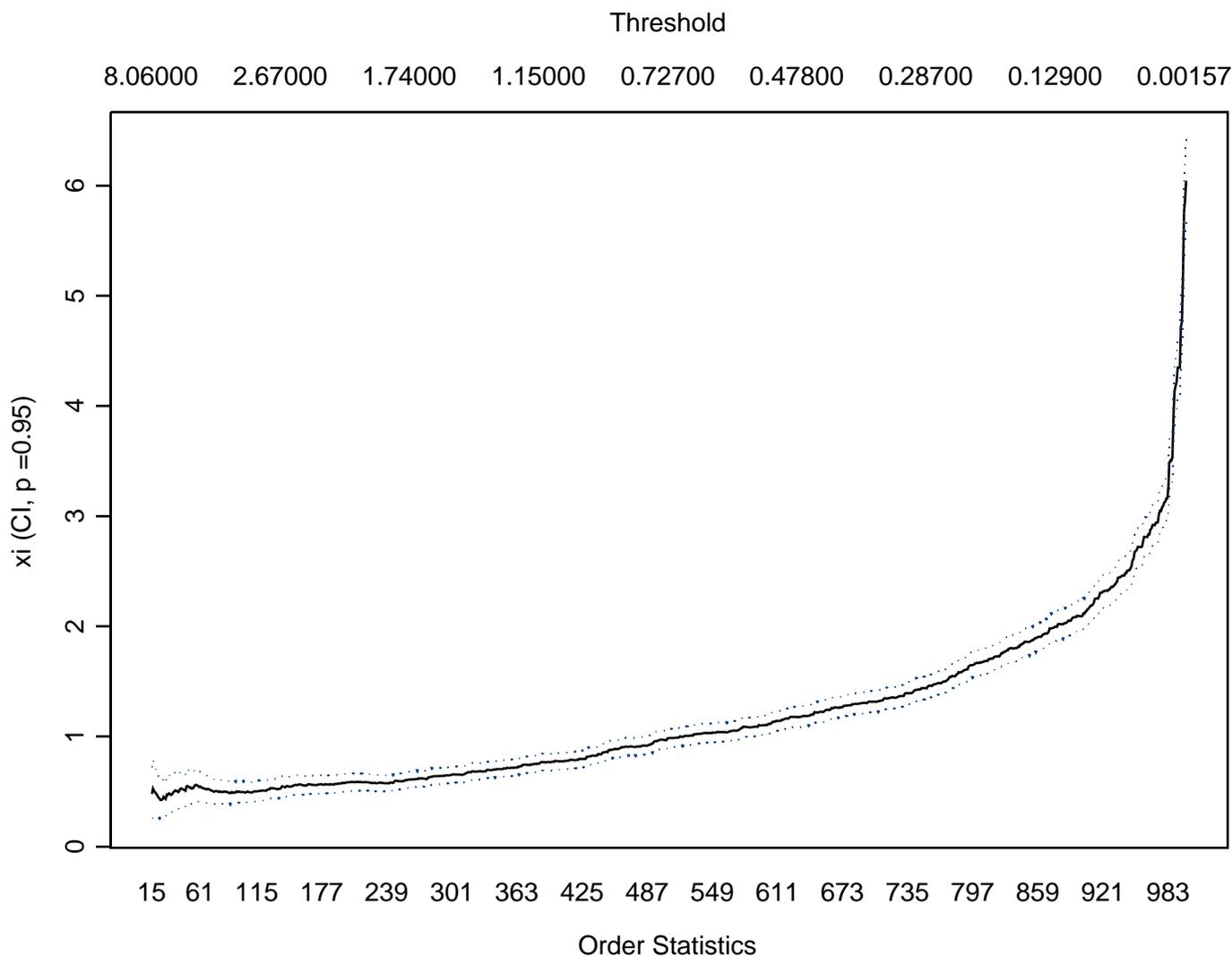


Abbildung B.10: Hill-Plot von 1000 simulierten GPD(0.3) verteilten Zufallszahlen. Auf der unteren Abszisse sind die Anzahl der Überschreitungen und auf der oberen Abszisse die dazugehörigen Schranken u aufgetragen. Die Ordinate gibt den Hillschätzer $\zeta = \alpha^{-1}$ an.

In den Abbildungen B.12 bis B.19 sind die Hill-Plots der positiven und negativen Log>Returns der Equity-Indizes gezeichnet. Auf der unteren Abszisse sind die Anzahl

der Überschreitungen und auf der oberen Abszisse die dazugehörigen Schranken u aufgetragen. Die Ordinate gibt den Hillschätzer $\zeta = \alpha^{-1}$ an. Die Plots sehen denen der simulierten GPD verteilten Zufallszahlen alle sehr ähnlich. Zumindest in den Fällen, in denen wir schon ein positives ζ für die GPD der Randverteilung vermuten, liefert der Hill-Plot brauchbare Ergebnisse. Allerdings sollten diese noch mit anderen Schätzmethoden verglichen werden.

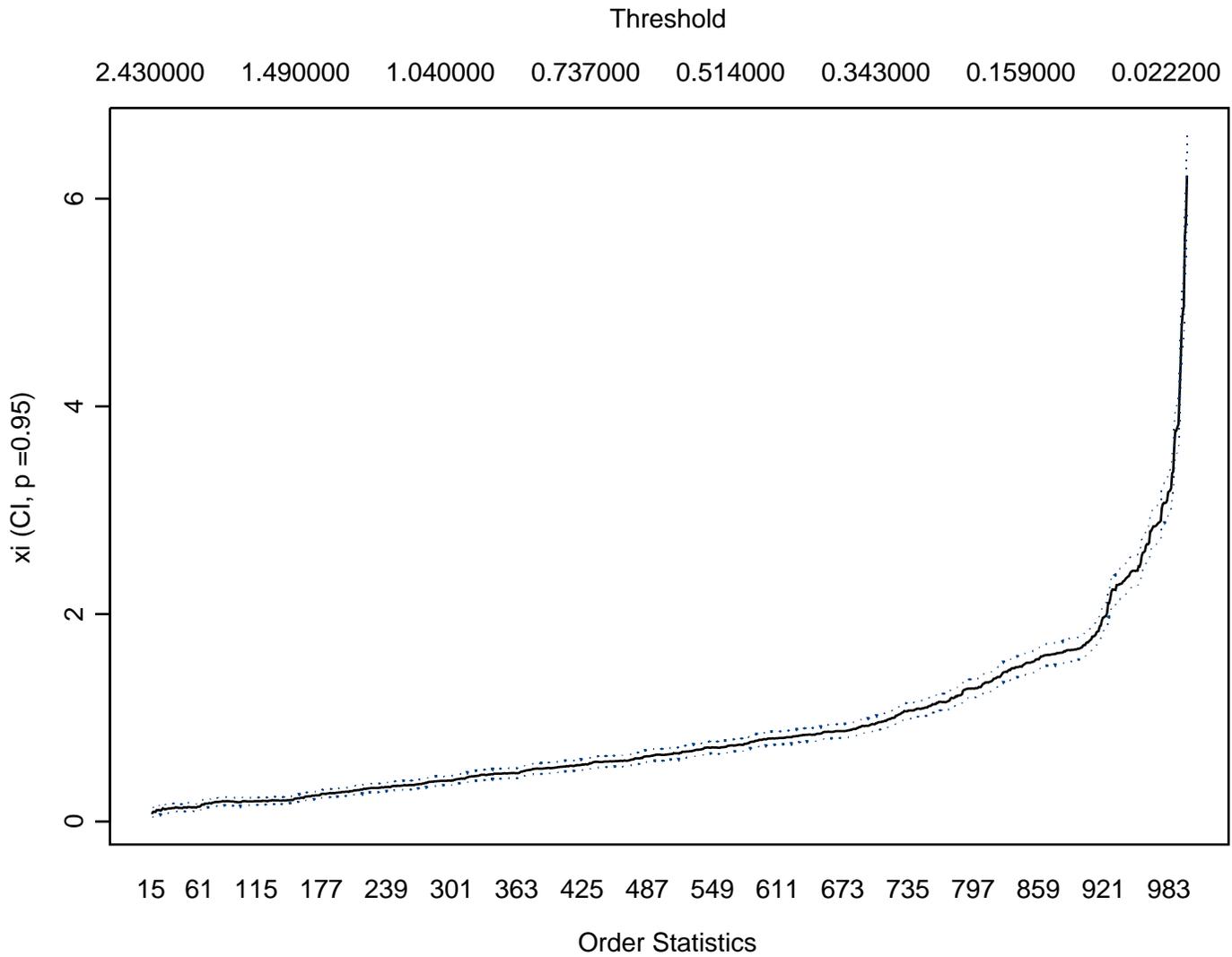


Abbildung B.11: Hill-Plot von 1000 simulierten GPD(-0.3) verteilten Zufallszahlen. Auf der unteren Abszisse sind die Anzahl der Überschreitungen und auf der oberen Abszisse die dazugehörigen Schranken u aufgetragen. Die Ordinate gibt den Hillschätzer $\zeta = \alpha^{-1}$ an.

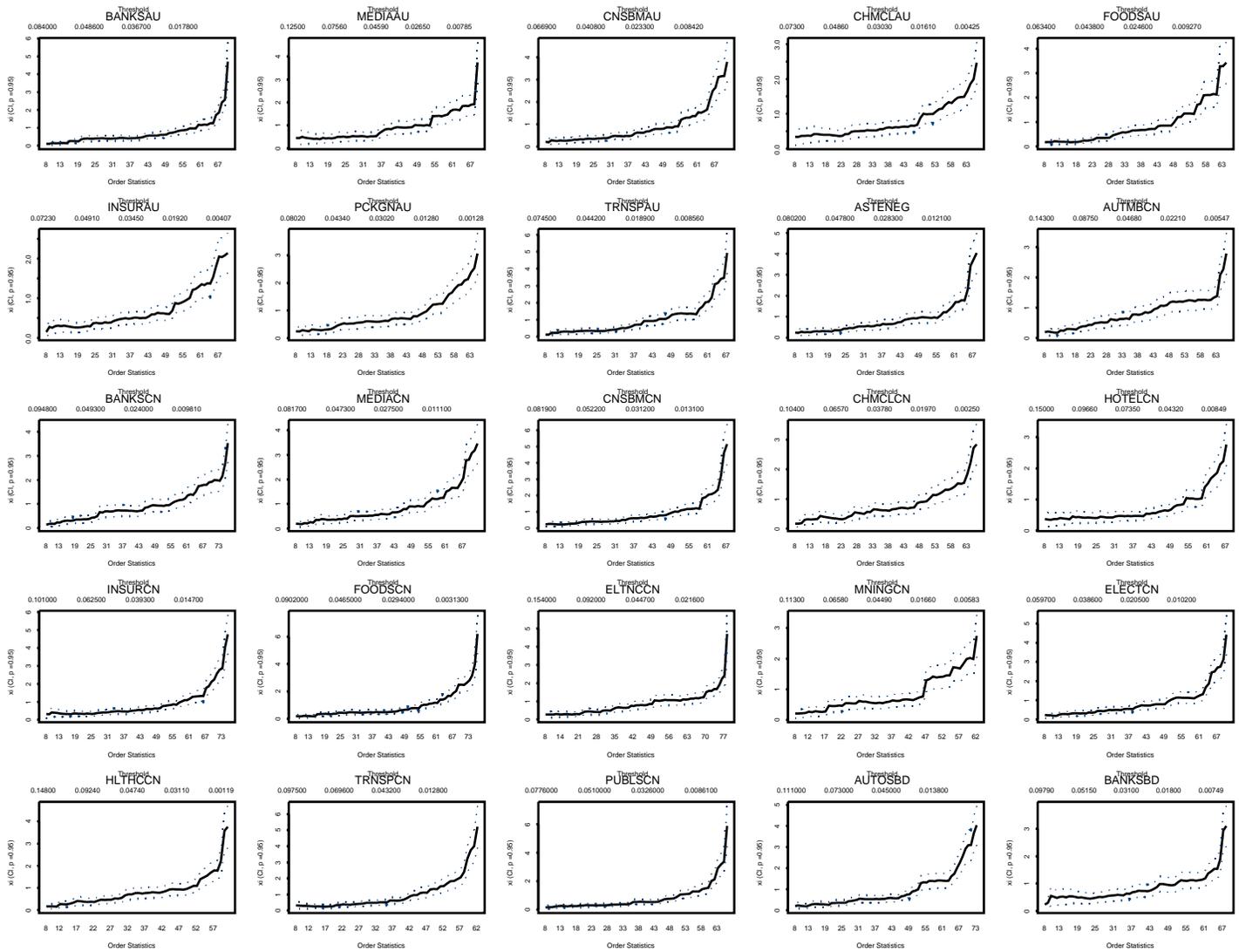


Abbildung B.12: Hill-Plots von den positiven Log>Returns der Equity-Indizes

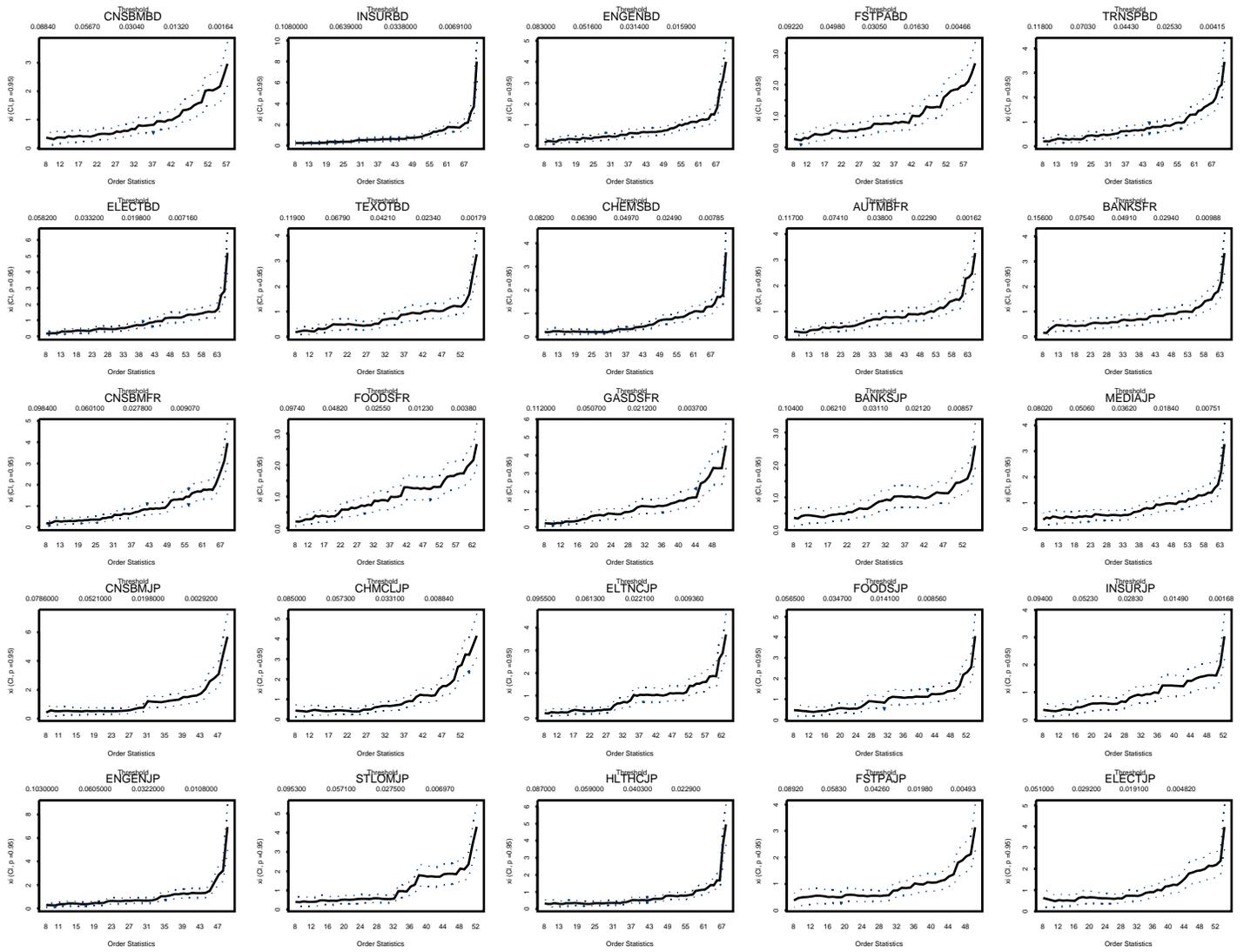


Abbildung B.13: Hill-Plots von den positiven Log-Returns der Equity-Indizes

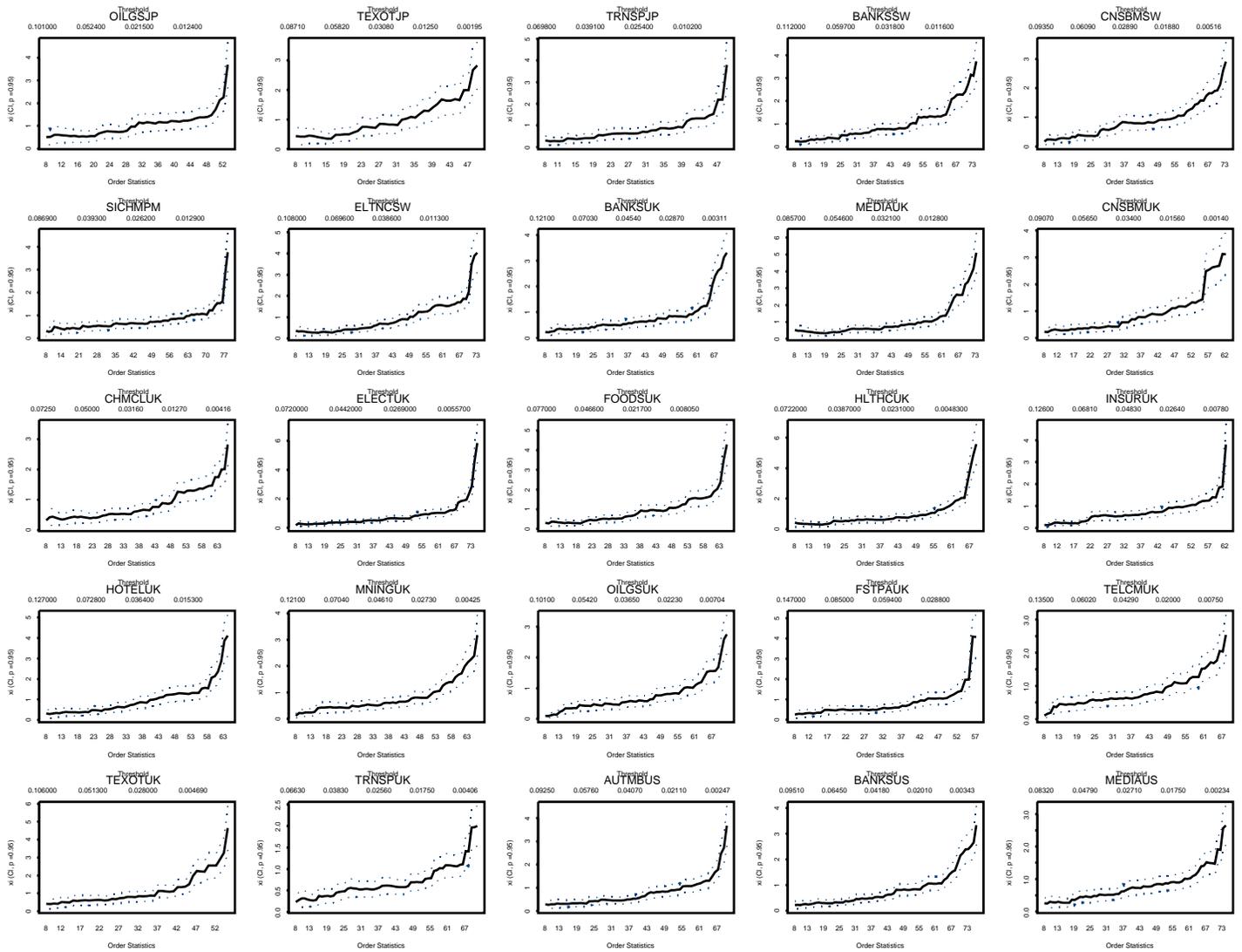


Abbildung B.14: Hill-Plots von den positiven Log-Returns der Equity-Indizes

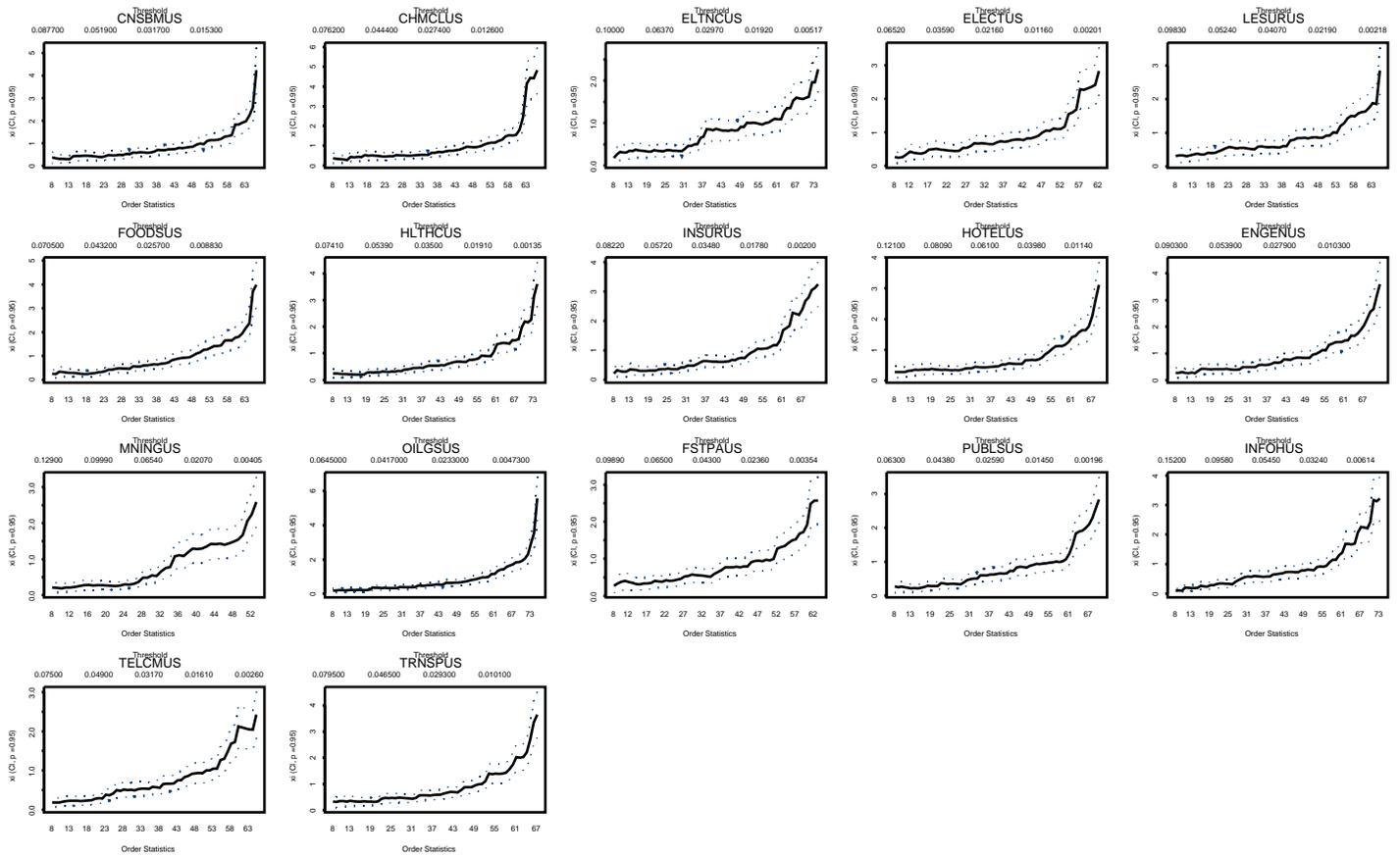


Abbildung B.15: Hill-Plots von den positiven Log-Returns der Equity-Indizes

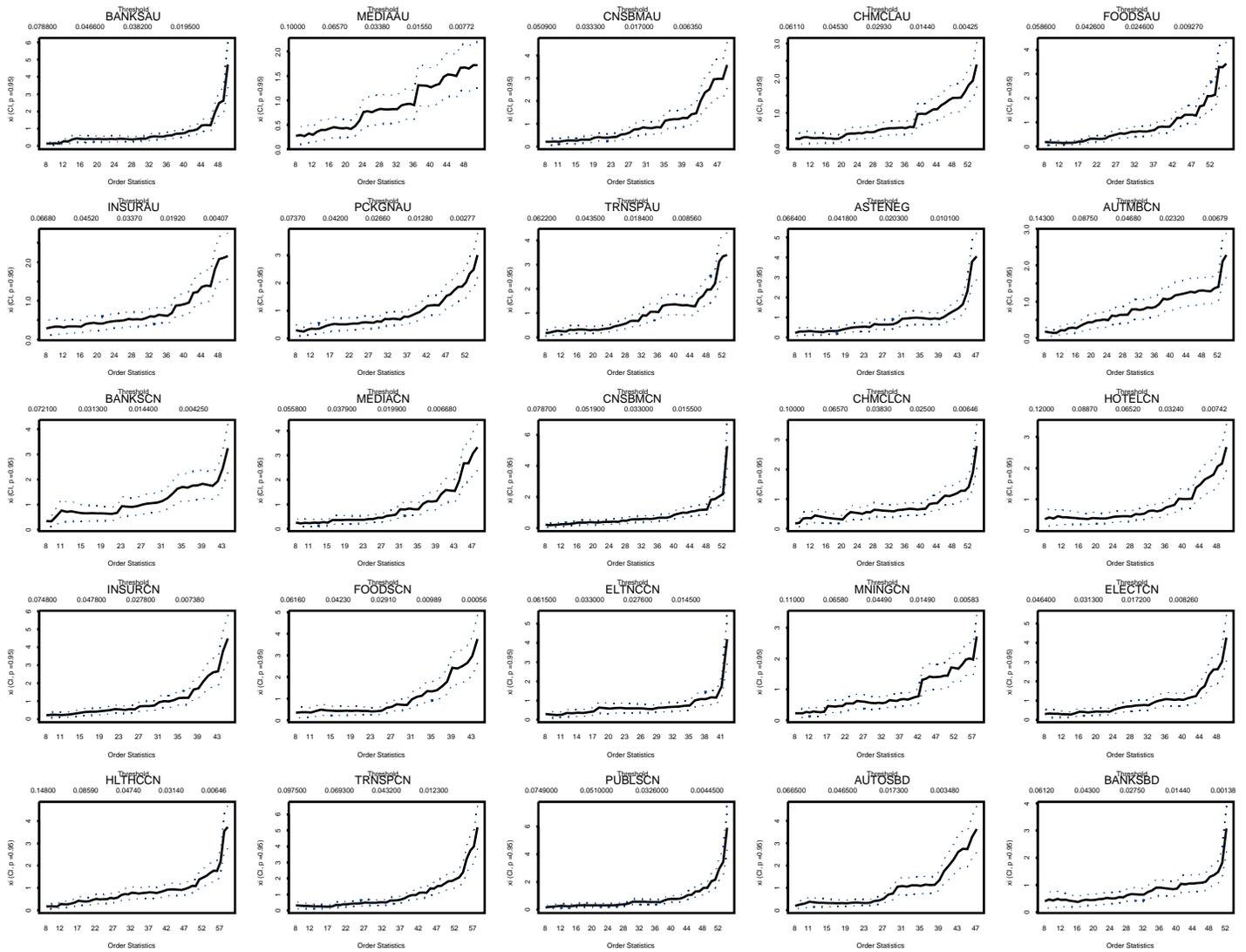


Abbildung B.16: Hill-Plots von den negativen Log>Returns der Equity-Indizes

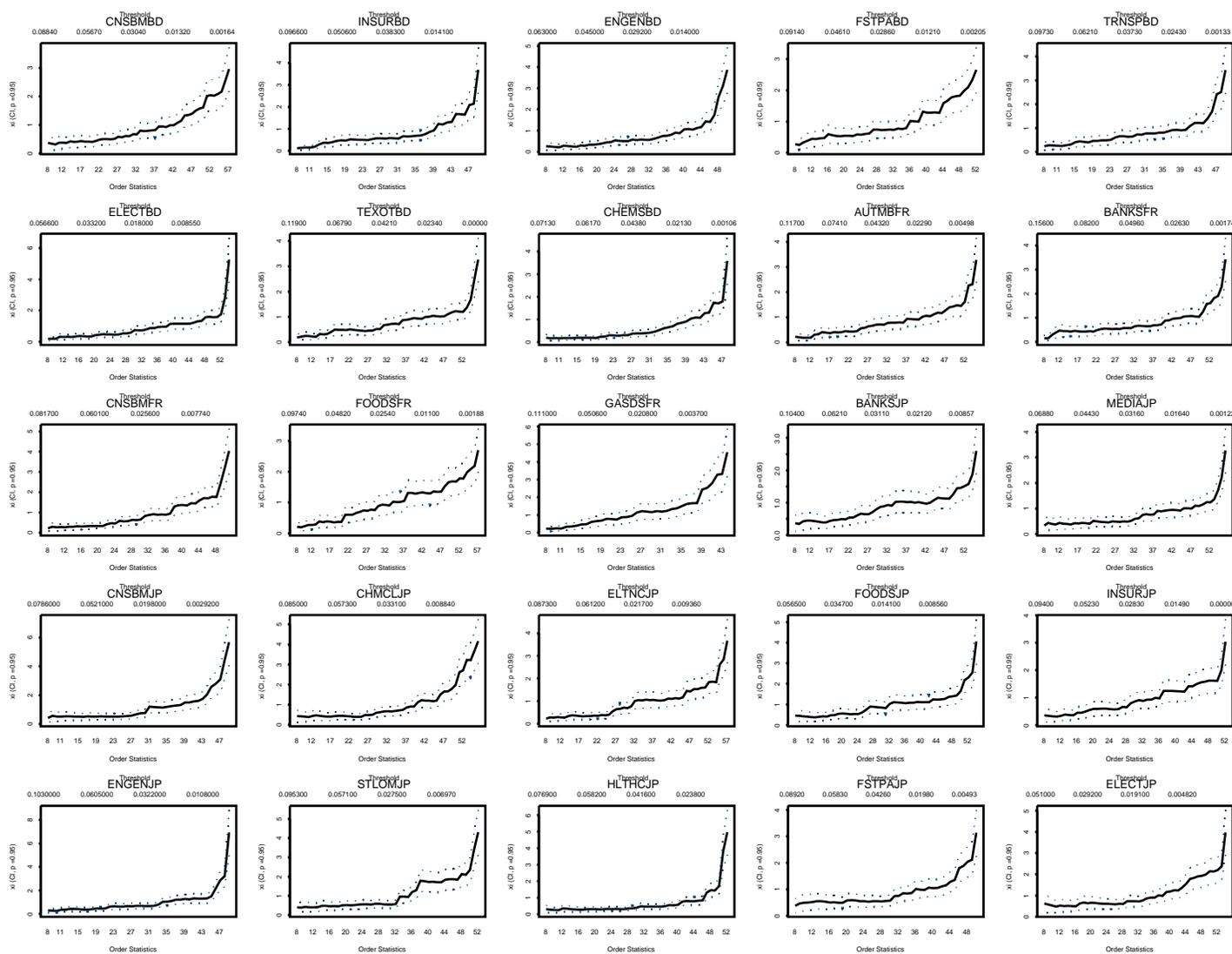


Abbildung B.17: Hill-Plots von den negativen Log>Returns der Equity-Indizes

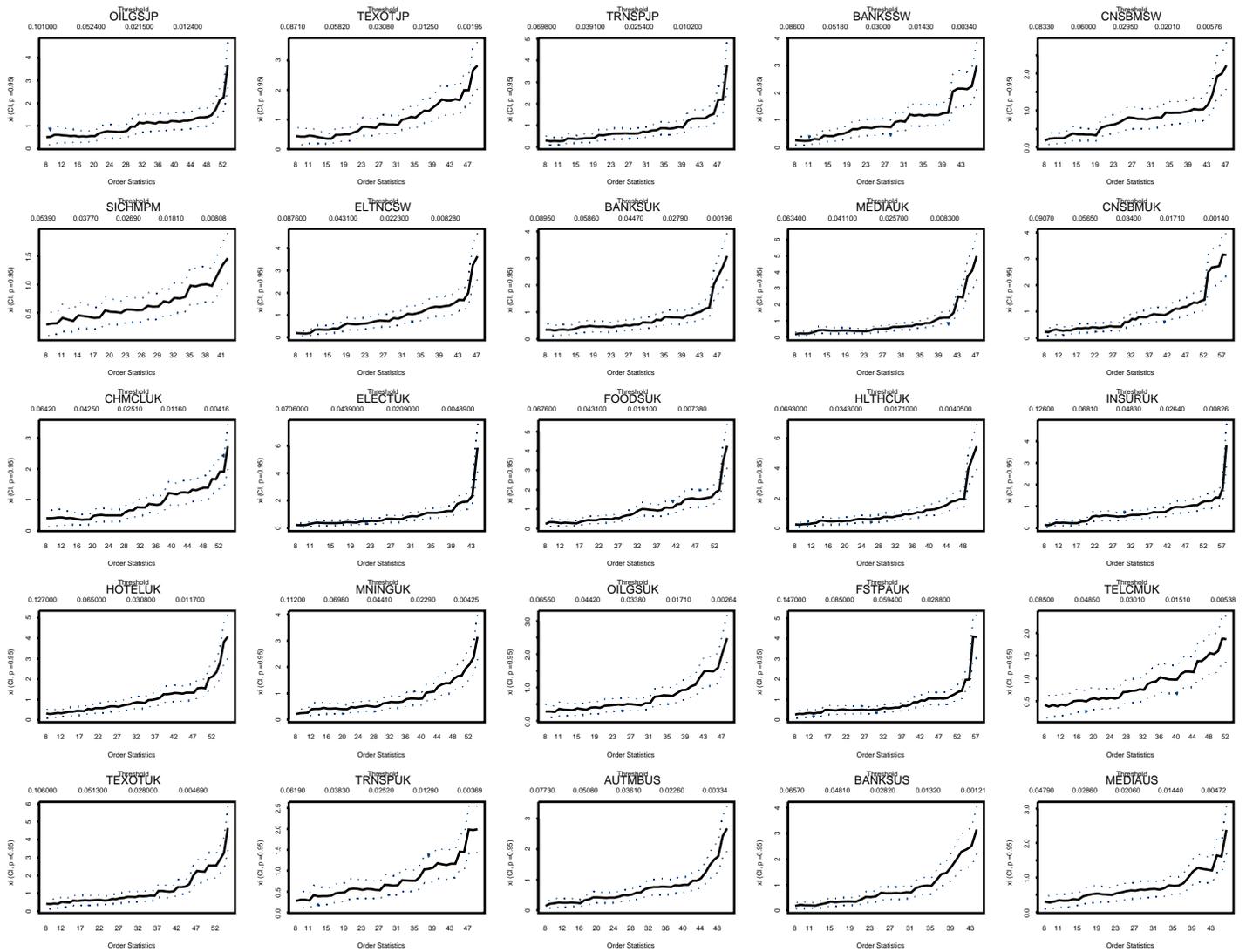


Abbildung B.18: Hill-Plots von den negativen Log>Returns der Equity-Indizes

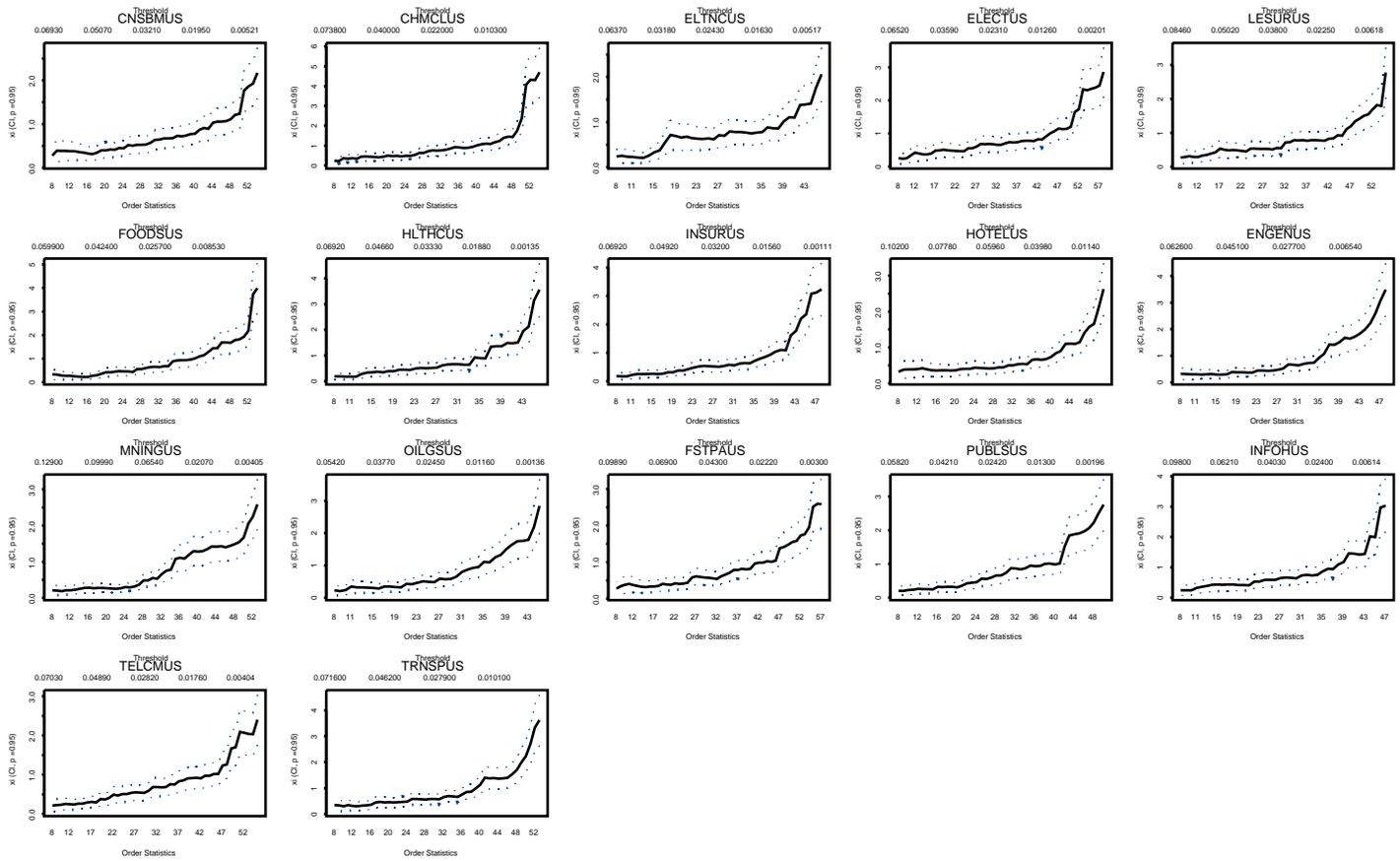


Abbildung B.19: Hill-Plots von den negativen Log>Returns der Equity-Indizes

B.5.3 Die POT-Methode

Eine weitere Methode um den Parameter ζ einer verallgemeinerten Extremwertverteilung zu schätzen, basiert auf der Annahme die iid Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n seien oberhalb einer (hohen) Schwelle näherungsweise Pareto verteilt.

Seien X_1, \dots, X_n iid mit der Verteilungsfunktion $F \in \text{MDA}(H_\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{R}$. Mit n_u bezeichne man die Anzahl der Werte der Stichprobe, die größer sind als eine (hohe) Schwelle u :

$$n_u := \text{card}\{i : X_i > u, i = 1, \dots, n\}. \quad (\text{B.55})$$

$X_{i(n_u)}$ sind nun die X_i die größer sind als u . Die Zufallsvariablen $Y_j = X_{i(n_u)} - u$, $j = 1, \dots, n_u$ bilden den Exzess von X über der Schranke u . Nun gilt

$$F_u(y) = P(X - u \leq y | X > u) = P(Y \leq y | X > u), \quad y \geq 0. \quad (\text{B.56})$$

Daraus kann man ableiten

$$\bar{F}_u(y) = P(X - u > y | X > u) = \frac{\bar{F}(u + y)}{\bar{F}(u)}, \quad (\text{B.57})$$

so dass

$$\bar{F}(u + y) = \bar{F}(u)\bar{F}_u(y) \quad (\text{B.58})$$

gilt. Aus Satz B.3.3 kennen wir bereits die Eigenschaft

$$\lim_{u \nearrow x_F} \sup_{0 < x < x_F - u} |F_u(x) - G_{\zeta; \beta(u)}(x)| = 0. \quad (\text{B.59})$$

für eine geeignete Funktion $\beta(u)$. Daher kann man \bar{F}_u für große u abschätzen:

$$\bar{F}_u(y) \approx \bar{G}_{\zeta; \beta(u)}(y). \quad (\text{B.60})$$

Wenn nun $\bar{F}_u(y)$ und $\bar{F}(y)$ einzeln geschätzt werden, liefert die Gleichung (B.58) eine Möglichkeit Quantile von F zu schätzen. Mit dieser Methode können große Quantile am Rand oder außerhalb der Stichprobe geschätzt werden. Hierbei muss darauf geachtet werden, dass zwar die Schwelle u ausreichend groß gewählt wird damit die Approximation gut ist, auf der anderen Seite aber noch genug Daten zur Verfügung stehen damit man die Tailfunktion $\bar{F}(y)$ durch ihre empirische Version

$$\widehat{\bar{F}}(u) = \bar{F}_n(u) = \frac{1}{n} \text{card}\{i : X_i > u, \quad i = 1, \dots, n\} = \frac{n_u}{n} \quad (\text{B.61})$$

gut schätzen kann. Ein Schätzer für \bar{F}_u bietet sich nach (B.60) durch

$$\widehat{\bar{F}}_u(y) = \bar{G}_{\hat{\zeta}; \hat{\beta}}(y) \quad (\text{B.62})$$

an. Dafür müssen allerdings erst einmal Schätzer $\hat{\zeta}$ und $\hat{\beta}$ vorhanden sein. Ein Schätzer für $\bar{F}(u + y)$ ist dann

$$\widehat{\bar{F}}(u + y) = \frac{n_u}{n} \left(1 + \hat{\zeta} \frac{y}{\hat{\beta}} \right)^{-1/\hat{\zeta}}, \quad (\text{B.63})$$

und für das p -Quantil von F

$$\hat{x}_p = u + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\zeta}} \left[\left(\frac{n}{n_u} (1 - p) \right)^{-\hat{\zeta}} - 1 \right]. \quad (\text{B.64})$$

B.5.4 Maximum Likelihood Schätzer

Zunächst nehme man an, dass die Daten $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ iid mit Verteilungsfunktion F sind, genauer gesagt mit GPD mit Parametern ζ und β . Ihre Dichte f ist dann

$$f(x) = \frac{1}{\beta} \left(1 + \zeta \frac{x}{\beta}\right)^{-1/\zeta-1}, \quad x \in D(\zeta, \beta). \quad (\text{B.65})$$

wobei $D(\zeta, \beta)$ wie in (B.34) definiert ist. Daraus ergibt sich die Log-Likelihood-Funktion

$$l((\zeta, \beta); \mathbf{X}) = -n \ln \beta - \left(\frac{1}{\zeta} + 1\right) \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \frac{\zeta}{\beta} X_i\right), \quad X_i \in D(\zeta, \beta). \quad (\text{B.66})$$

Nach ζ und β differenziert und gleich 0 gesetzt ergeben sich Gleichungen die für $\zeta > \frac{1}{2}$ numerisch gut gelöst werden können. Dies ergibt dann Schätzer $\hat{\zeta}_n, \hat{\beta}_n$ für die man sogar zeigen kann:

$$\sqrt{n} \left(\hat{\zeta}_n - \zeta, \frac{\hat{\beta}_n}{\beta} - 1 \right)^T \xrightarrow{d} N(0, M^{-1}), \quad n \rightarrow \infty, \quad (\text{B.67})$$

wobei

$$M^{-1} = (1 + \zeta) \begin{pmatrix} 1 + \zeta & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

und $N(\mu, \Sigma)$ die bivariate Normalverteilung ist.

In der Realität gilt zwar $X_1, \dots, X_n \sim G_{\zeta, \beta}$ nicht, aber nach (B.60) gilt approximativ, dass Y_1, \dots, Y_{n_u} GPD hat und dass n_u unabhängig von den Y_j ist, solange nur u groß genug gewählt wird. Daraus resultiert eine bedingte Log-Likelihood Gleichung, die nach einer Reparametrisierung $(\zeta, \beta) \rightarrow (\zeta, \tau)$, mit $\tau = -\zeta/\beta$ folgende Lösung liefert:

$$\hat{\zeta} = \hat{\zeta}(\tau) = n_u^{-1} \sum_{i=1}^{n_u} \ln(1 - \tau Y_i), \quad (\text{B.68})$$

und τ erfüllt die Gleichung

$$h(\tau) := \frac{1}{\tau} + \frac{1}{n_u} \left(\frac{1}{\hat{\zeta}(\tau)} + 1 \right) \sum_{i=1}^{n_u} \frac{Y_i}{1 - \tau Y_i} = 0. \quad (\text{B.69})$$

Die Funktion $h(\tau)$ ist auf $(-\infty, \max\{Y_1, \dots, Y_n\})$ definiert und stetig bei 0.

In den Abbildungen B.20 und B.21 wurde der MLE des Parameters ζ von 1000 simulierten GPD(-0.3) und GPD(0.3) verteilten Zufallszahlen für verschieden hohe Schwellen u geplottet. Die Schätzer liegen in beiden Fällen sehr nahe an den tatsächlichen Werten $-1/3$ bzw $1/3$. Je größer die Schwelle u wird, das heißt, je weniger Stichproben zur Verfügung stehen, desto mehr schwankt der Schätzer. Im MLE-Plot für die simulierten GPD(-0.3) Zufallszahlen steigt der Graph zum rechten Rand hin stark an. Hierfür gibt es außer der wachsenden Varianz für steigende Schwellen u keinen offensichtlichen Grund.

In den Abbildungen B.22 bis B.29 folgen die MLE-Plots der positiven und negativen Log>Returns der Equity-Indizes. Bei der Mehrheit dieser Plots findet man einen nahezu

konstant verlaufenden Graphen, der zum rechten Rand hin zu schwanken beginnt. Die meisten dieser geplotteten ML Schätzer für ζ liegen über den ganzen u -Bereich unter 0, wobei die 0 aber etliche Male im 95%-Konfidenzintervall liegt. Die MLE-Plots, die fast auf dem ganzen u -Bereich positiv sind gehen einher mit den Indizes für die ein positives $\widehat{\zeta}$ in Kapitel 2.3 geschätzt wurde. Einige der Graphen fallen zum rechten Rand hin stark ab; eine Tatsache die man anhand der QQ-Plots der entsprechenden Log>Returns nicht erklären kann.

Durch die statistischen Methoden der Extremwerttheorie scheint die Annahme passend zu sein, dass die positiven und negativen Log>Returns eine verallgemeinerte Pareto Verteilung haben. Wie auch schon in Kapitel 2.3 sind die Schätzwerte $\widehat{\zeta}$ meistens kleiner null, und in den wenigen Fällen, in denen $\widehat{\zeta} > 0$ gilt, liegt die Null immer im 95%-Konfidenzintervall des Schätzers. Somit wird unsere Annahme aus Kapitel 2.3, dass die positiven und negativen Log>Returns exponential verteilt sind noch bestätigt.

Schätzer für β und ν

Den Parameter β kann man ebenfalls über eine Log-Likelihood Funktion schätzen. Dafür benötigen wir aber die gerade gemachten Verteilungsannahmen.

Nimmt man an, dass die Daten eine verallgemeinerte Pareto Verteilung haben, so wird $\widehat{\zeta}$ in die Funktion h aus (B.69) eingesetzt und $\widehat{\beta}$ aus $h(-\widehat{\zeta}/\widehat{\beta})$ berechnet. Nimmt man eine Exponentialverteilung an, so ergibt sich aus deren Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\beta} \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right) \quad (\text{B.70})$$

die Log-Likelihood-Funktion

$$l(\beta; Y) = -n_u \ln \beta - \frac{1}{\beta} \sum_{j=1}^{n_u} Y_j. \quad (\text{B.71})$$

Um diese zu minimieren, wird eine Nullstelle der 1. Ableitung gesucht:

$$l'(\beta; Y) = -\frac{n_u}{\beta} + \frac{1}{\beta^2} \sum_{j=1}^{n_u} Y_j = 0. \quad (\text{B.72})$$

Als Schätzer für β ergibt sich:

$$\widehat{\beta} = \frac{1}{n_u} \sum_{j=1}^{n_u} Y_j =: \bar{Y}. \quad (\text{B.73})$$

Nimmt man an, dass $\zeta \neq 0$, so folgt entsprechend aus

$$\widehat{F}(u + y) = \frac{n_u}{n} \left(1 + \widehat{\zeta} \frac{y}{\widehat{\beta}}\right)^{-1/\widehat{\zeta}} \quad (\text{B.74})$$

mit $z = y + u$

$$\begin{aligned}
 \widehat{F}(z) &= 1 - \left(\left(\frac{n_u}{n} \right)^{-\widehat{\zeta}} \left(1 + \widehat{\zeta} \frac{z - u}{\widehat{\beta}} \right) \right)^{-1/\widehat{\zeta}} \\
 &= 1 - \left(1 - \frac{\left(\frac{n_u}{n} \right)^{\widehat{\zeta}} - 1}{\left(\frac{n_u}{n} \right)^{\widehat{\zeta}}} + \frac{\widehat{\zeta}}{\widehat{\beta}} \left(\frac{n_u}{n} \right)^{\widehat{\zeta}} (z - u) \right) \\
 &= 1 - \left(1 + \widehat{\zeta} \frac{z - u - \frac{\widehat{\beta}}{\widehat{\zeta}} \left(\left(\frac{n_u}{n} \right)^{\widehat{\zeta}} - 1 \right)}{\widehat{\beta} \left(\frac{n_u}{n} \right)^{\widehat{\zeta}}} \right)^{-1/\widehat{\zeta}} \\
 &= 1 - \left(1 + \widehat{\zeta} \frac{z - \widehat{\nu}}{\widehat{\beta}'} \right)^{1/\widehat{\zeta}}.
 \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt

$$\widehat{\nu} := u + \frac{\widehat{\beta}}{\widehat{\zeta}} \left(\left(\frac{n_u}{n} \right)^{\widehat{\zeta}} - 1 \right) \quad \text{und} \quad \widehat{\beta}' := \widehat{\beta} \left(\frac{n_u}{n} \right)^{\widehat{\zeta}} \tag{B.75}$$

eingesetzt wurden. Diese sind dann die Schätzer für die Parameter ν und β der verallgemeinerten Pareto Verteilung.

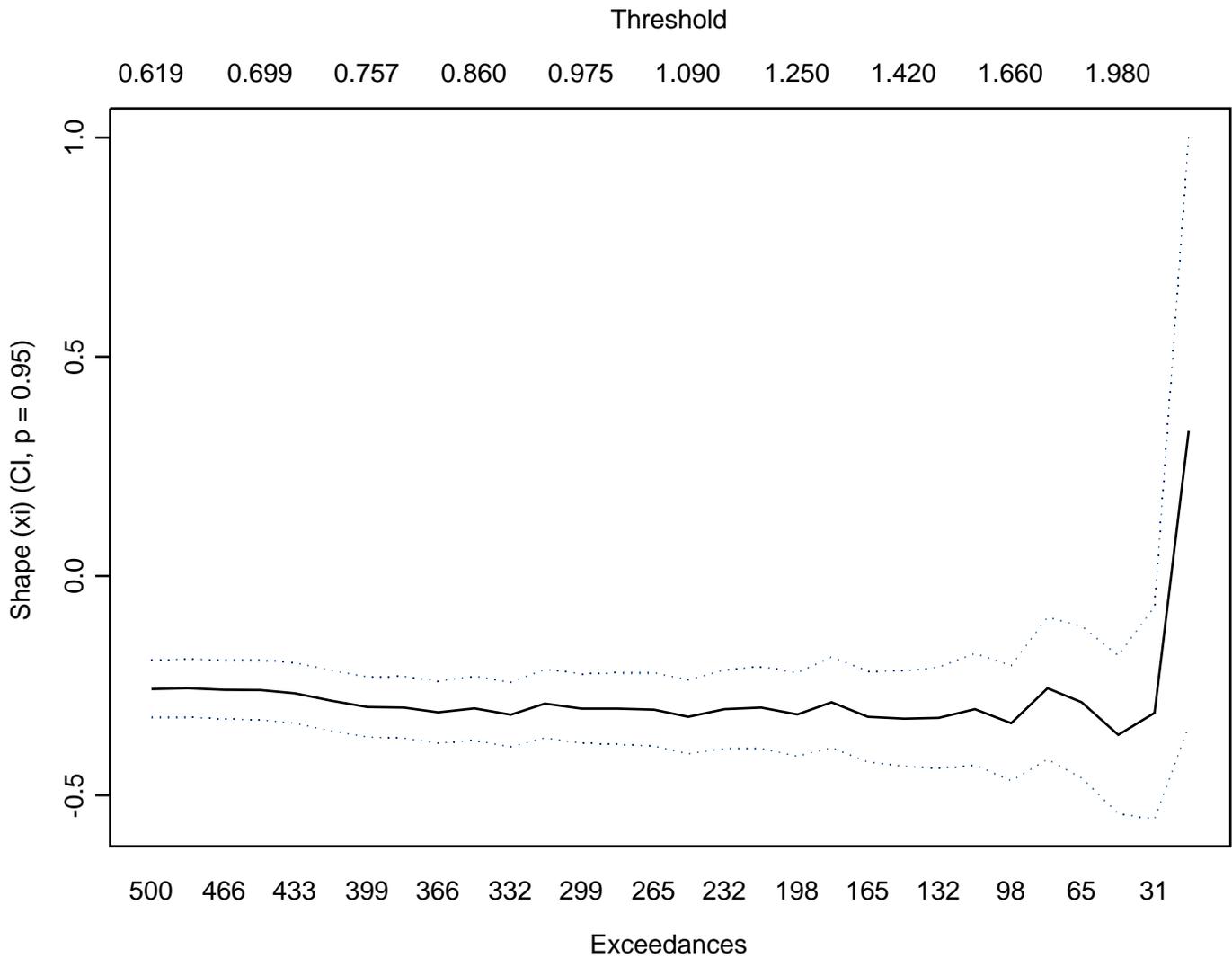


Abbildung B.20: MLE-Schätzer des Parameters ζ für 1000 simulierte GPD(-0.3) verteilte Zufallszahlen

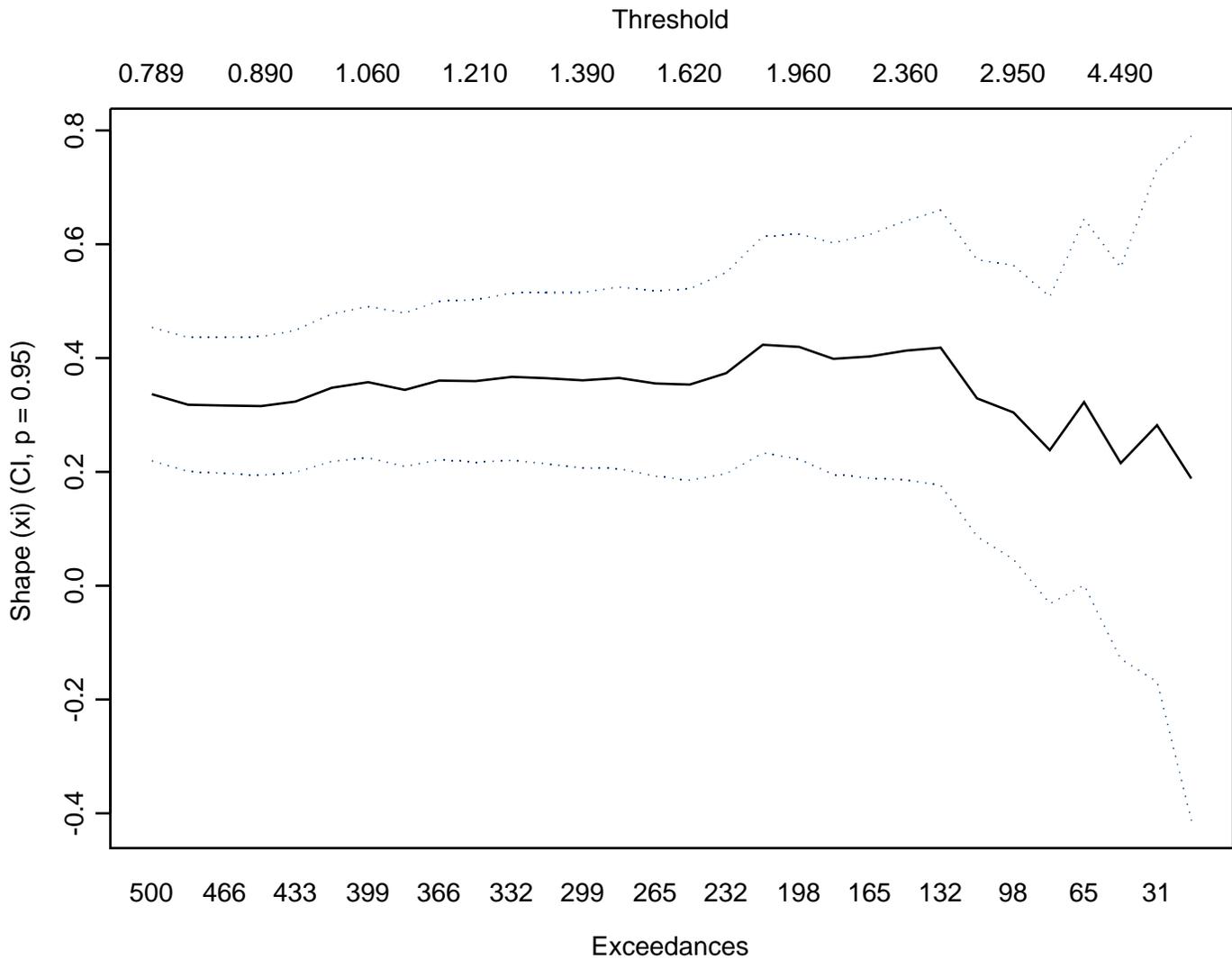


Abbildung B.21: MLE-Schätzer des Parameters ζ für 1000 simulierte GPD(0.3) verteilte Zufallszahlen

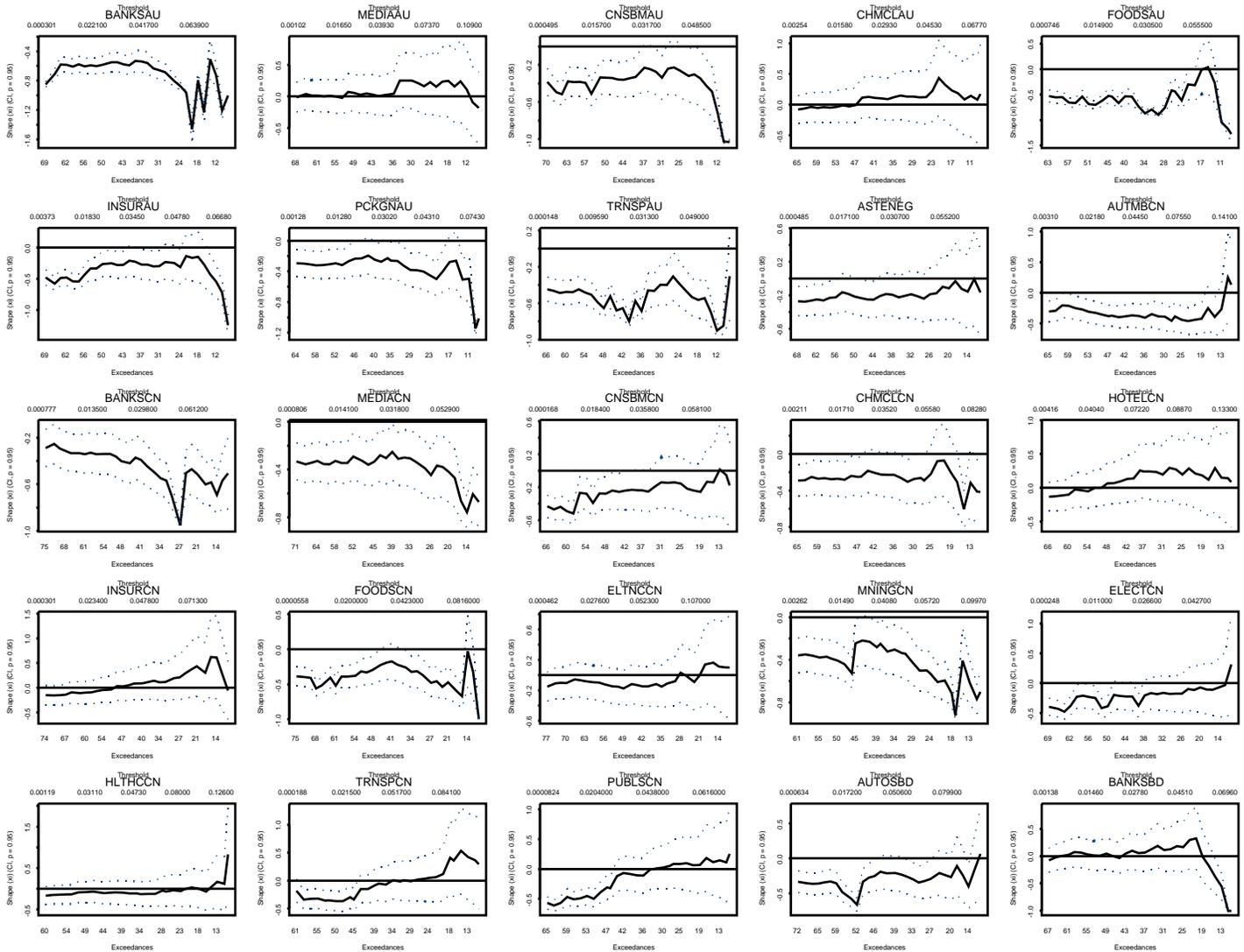


Abbildung B.22: ML-Schätzer des Parameters ζ für die positiven Log>Returns der Equity-Indizes

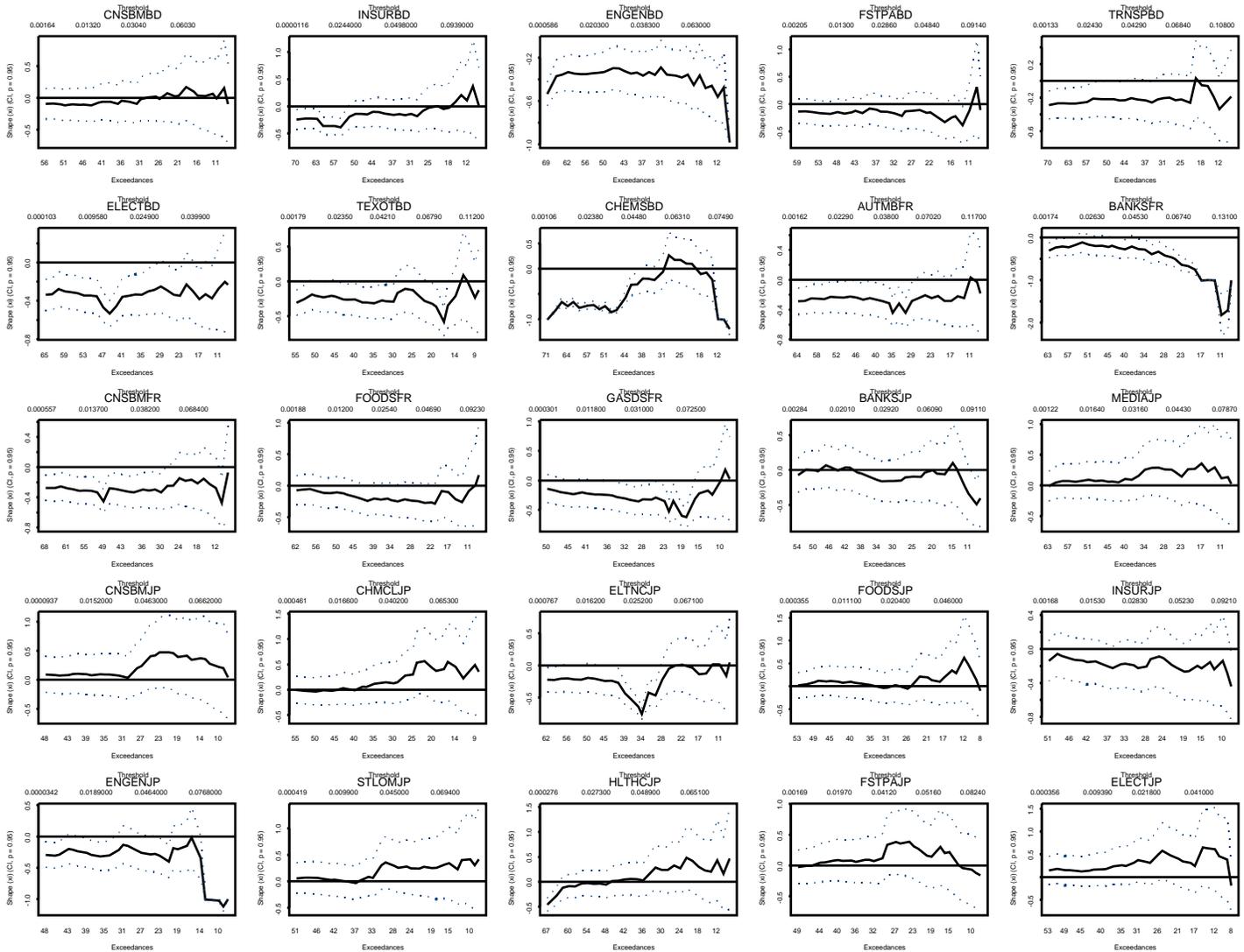


Abbildung B.23: ML-Schätzer des Parameters ζ für die positiven Log>Returns der Equity-Indizes

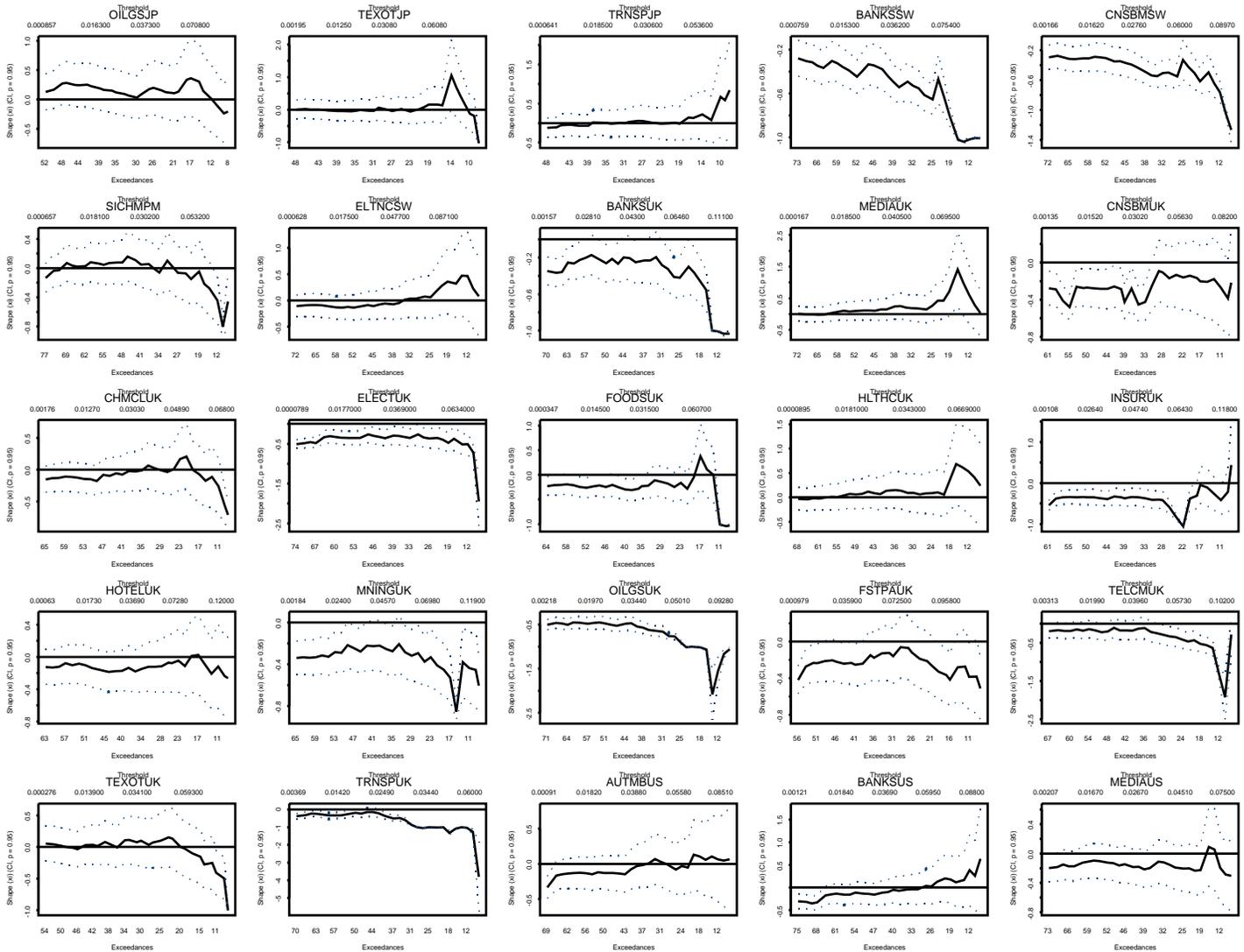


Abbildung B.24: ML-Schätzer des Parameters ζ für die positiven Log>Returns der Equity-Indizes

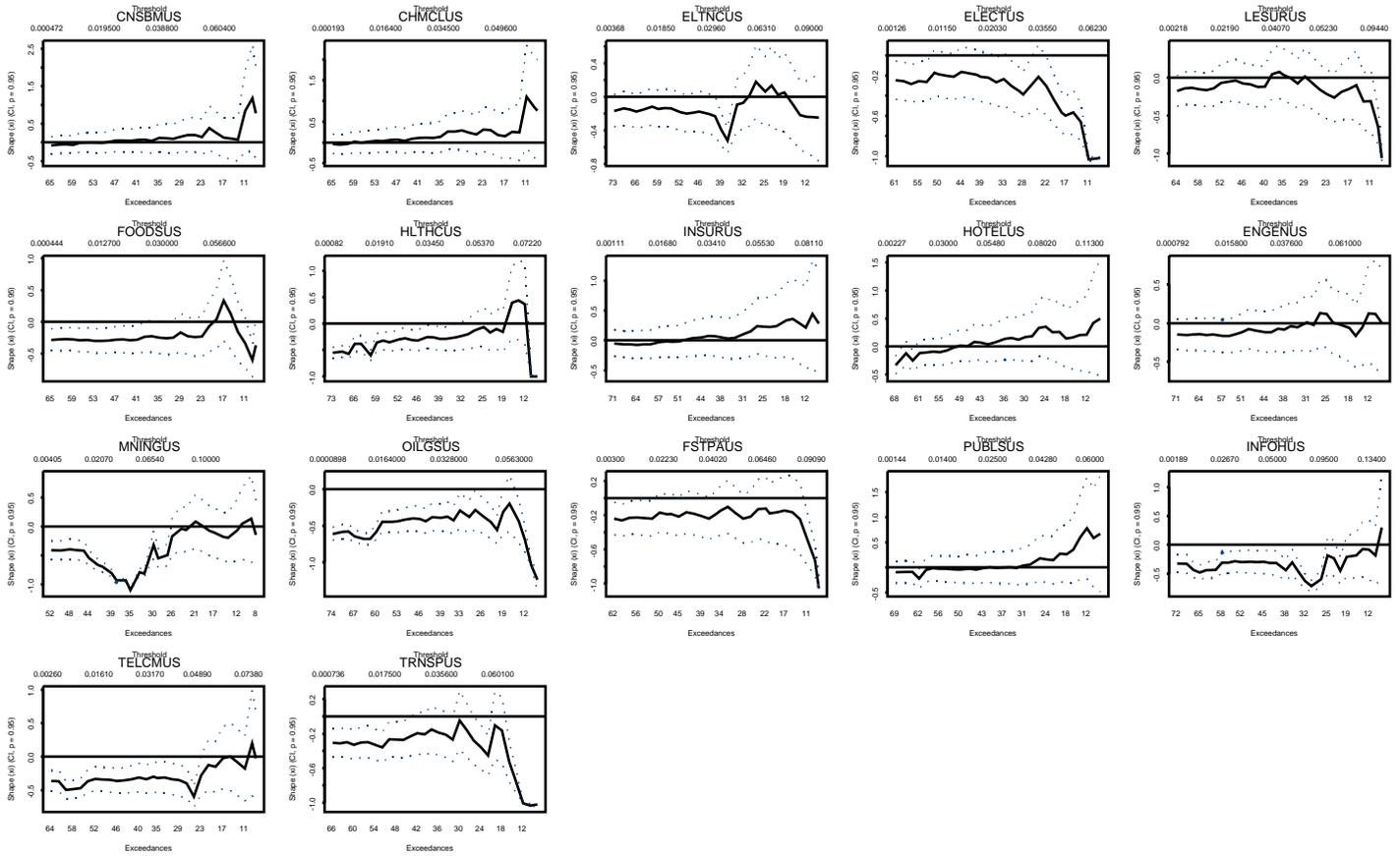


Abbildung B.25: ML-Schätzer des Parameters ζ für die positiven Log>Returns der Equity-Indizes

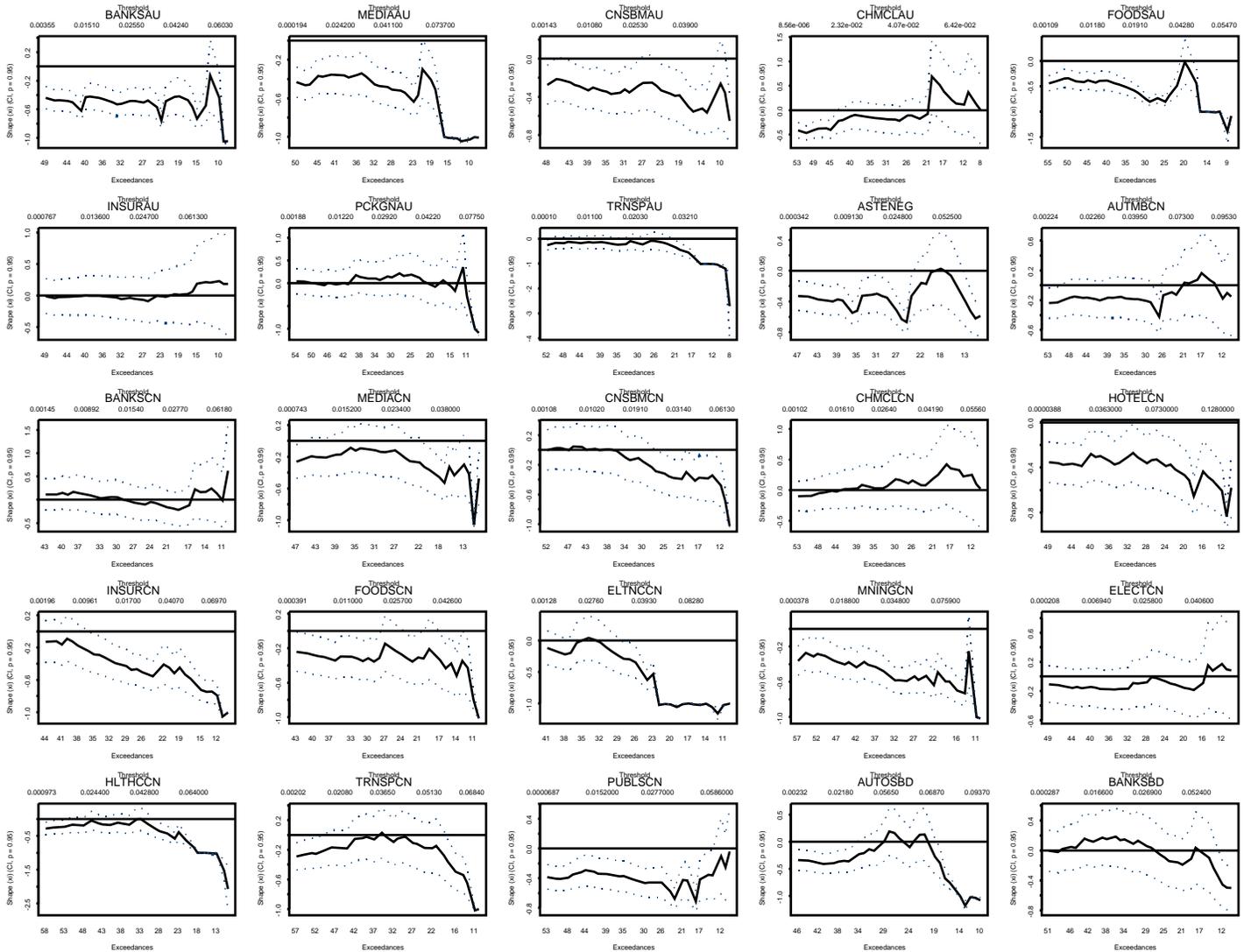


Abbildung B.26: ML-Schätzer des Parameters ζ für die negativen Log>Returns der Equity-Indizes

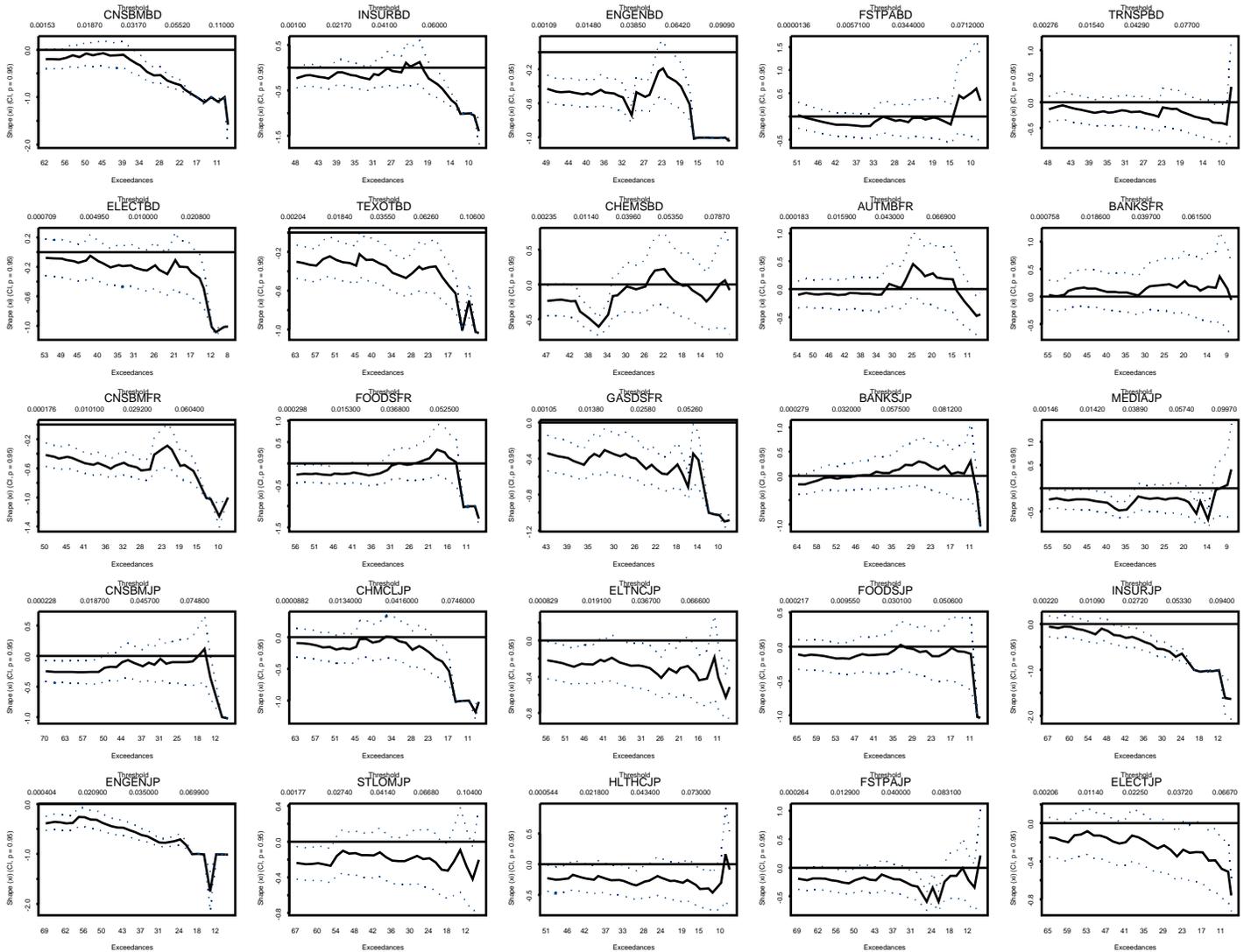


Abbildung B.27: ML-Schätzer des Parameters ζ für die negativen Log>Returns der Equity-Indizes

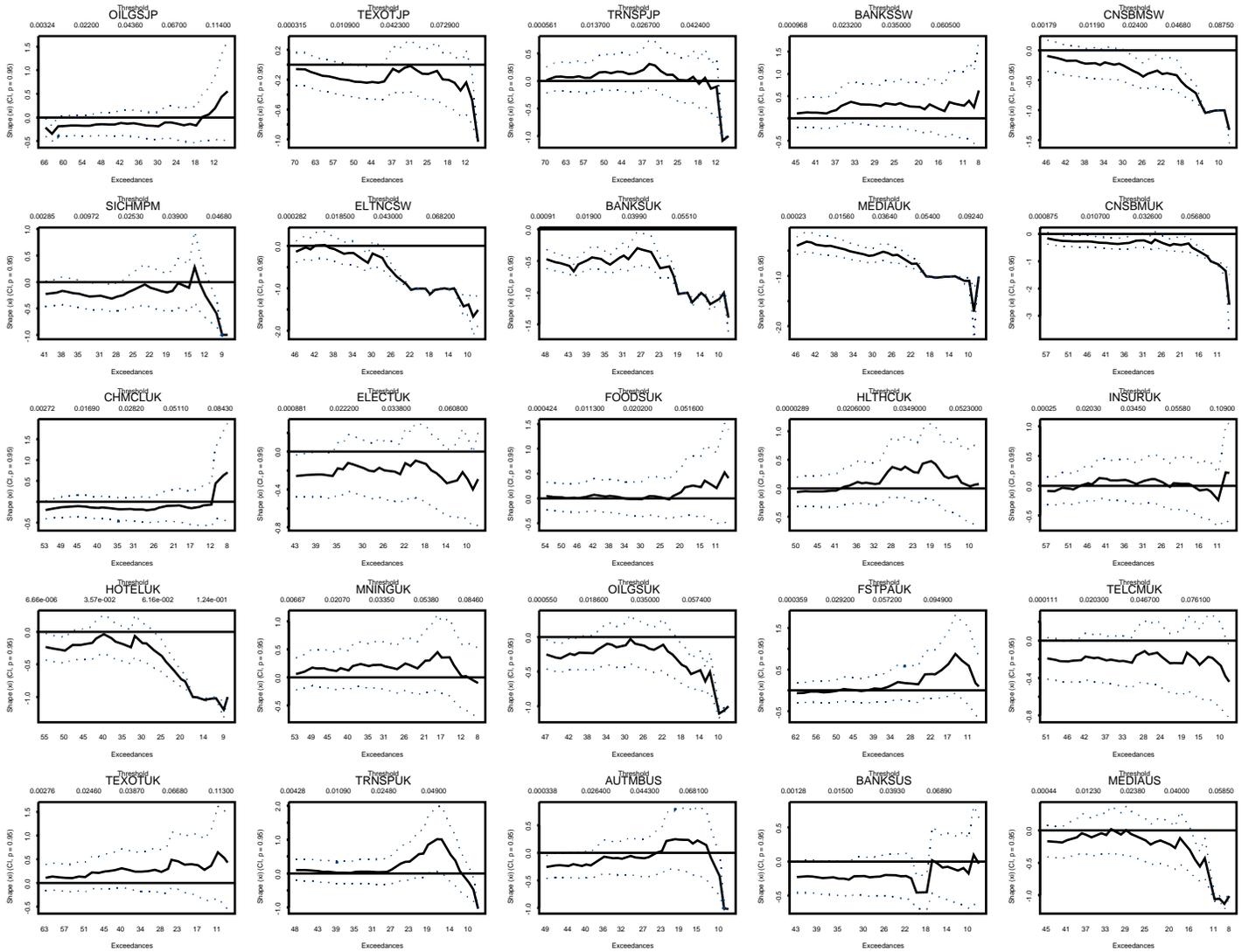


Abbildung B.28: ML-Schätzer des Parameters ζ für die negativen Log>Returns der Equity-Indizes

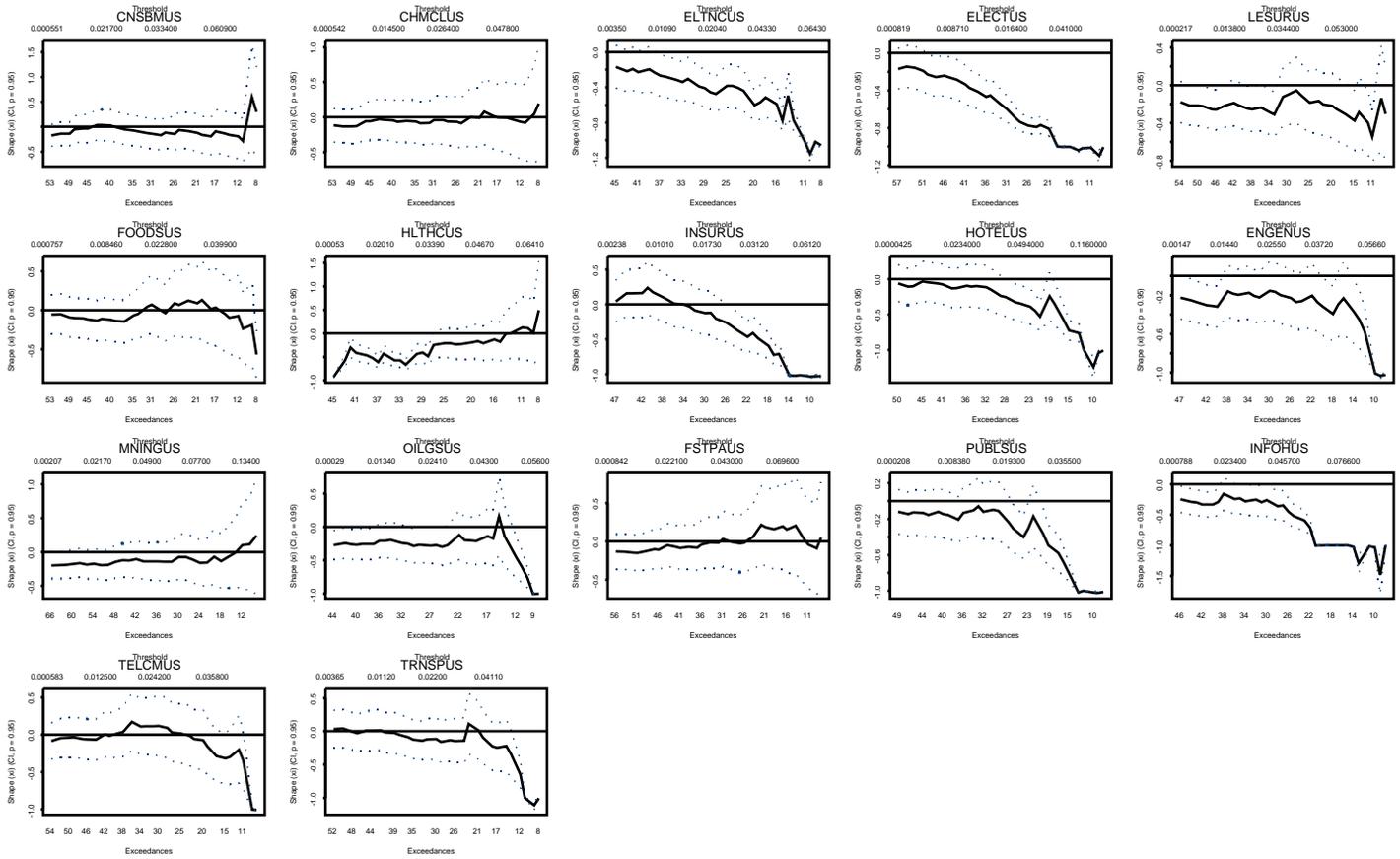


Abbildung B.29: ML-Schätzer des Parameters ζ für die negativen Log>Returns der Equity-Indizes

Literaturverzeichnis

- [1] Bingham, N.H., Goldie, C.M., Teugels, J.L. (1987) *Regular Variation vol. 27 of Encyclopedia of Mathematics and its Applications* Cambridge University Press, Cambridge.
- [2] Bingham, N.H., Kiesel, R. (1998) *Risk-Neutral Valuation: Pricing and Hedging Financial Derivatives*. Springer.
- [3] Black, F. Scholes, M. (1973) *The pricing of options and corporate liabilities*. Journal of Political Economy, (81), 637-654.
- [4] Bluhm, C. Overbeck, L. Wagner, C. (2003) *An Introduction to Credit Risk Modeling*. Chapman & Hall/CRC, London.
- [5] Brockwell, P.J. and Davis, R.A. (1991) *Time Series: Theory and Methods*. Springer, New York.
- [6] Brommundt, B. (2003) *Value at Risk Schätzung mit Hilfe elliptischer Copulae*, Diplomarbeit am Zentrum Mathematik der TU München. <http://www-m4.ma.tum.de/Diplarb/>
- [7] Bruun, J.T. and Tawn, J.A. (1998) *Comparison of approaches for estimation the probability of coastal flooding*. Applied Statistics, 47, 405-423.
- [8] Chambers, J.M. (1977) *Computational Methods for Data Analysis*. Wiley, New York.
- [9] Crosbie, P. (1999) *Modeling default risk*. KMV Corporation, <http://www.kmv.com>.
- [10] Crouhy, M., Galai, D., Mark, R. (2000) *A comparative analysis of current credit risk models*, Journal of Banking & Finance 24, 59-117.
- [11] Czado, C. (Wintersemester 2002/03) Vorlesung *Computational Statistics* an der Technischen Universität München.
- [12] Daul, S., De Giorgi, E., Lindskog, F., McNeil, A.J. (2003) *The grouped t-copula with an application to credit risk*. RISK 16, 73-76.
- [13] Deckers, A.L.M., de Haan, L. (1989) *On the Estimation of the Extreme Value Index and Large Quantile Estimation*, Ann. Stat. 17, 1795-1832.

- [14] Demarta, S., McNeil, A.J. (2004) *the t copula and related copulas* Preprint <http://www.math.ethz.ch/mcneil>.
- [15] Embrechts, P., Klüppelberg, C., Mikosch, T. (1997) *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*, Springer, Berlin.
- [16] Embrechts, P., Lindskog, F., McNeil, A. (2001) *Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management*, in Handbook of heavy tailed distributions in finance, edited by Rachev ST, published by Elsevier/North-Holland, Amsterdam.
- [17] Embrechts, P., McNeil, A., Straumann, D. (2002) *Correlation and Dependence in Risk Management: Properties and Pitfalls*, Risk Management: Value at Risk and Beyond, ed. by M. Dempster, pp. 176-223. Cambridge University Press, Cambridge.
- [18] Fang, H.B., Fang, K., Kotz, S. (2002) *The Meta-elliptical Distributions with Given Marginals* Journal of Multivariate Analysis, 82(1), 1-16.
- [19] Fang, K.T., Kotz, S., Ng, K.W. (1990) *Symmetric Multivariate and Related Distributions* Monographs of Statistics and Applied Probability 36, Chapman & Hall, London.
- [20] Finger, C.C. (2000) *Toward a better estimation of wrong-way credit exposure* The RiskMetrics Group Working paper 99-05 riskmetrics.com
- [21] Frey, R., McNeil, A.J., Nyfeler, M. (2001) *Copulas and credit models* RISK, 14(10), 111-114.
- [22] Gibbons, J. D. (1993) *Nonparametric measures of association*, Sage Publications, Newbury Park.
- [23] Gupton, G.M., Stein, R.M. (2002) *LosscalcTM: Model for predicting Loss Given Default (LGD)*, DefaultRisk.com
- [24] Hamilton, D., Cantor, R. (2004) *Rating Transitions and Defaults conditional Watchlist, Outlook and Rating History*. Special comment, Moody's Investors service, New York.
- [25] Hull, J. C. (2000) *Options, Futures, and Other Derivatives*. Prentice Hall, 4th edition.
- [26] Hult, H., Lindskog, F. (2001) *Multivariate Extremes, Aggregation and Dependence in Elliptical Distributions*, <http://www.risklab.ch/Papers.html>
- [27] Kavvathas, D. (2000) *Estimating Credit Rating Transition Probabilities for Corporate Bonds*. Social Science Research Network Electronic Library, <http://www.ssrn.com>.
- [28] Kostadinov, K. (2004) *Non-parametric estimation of elliptical copula with application to credit risk*. In preparation.
- [29] Kuhn, G. (2001) *Multivariate Value at Risk Schätzung von Zins swap Sätzen*. Diplomarbeit am Zentrum Mathematik der TU München. <http://www-m4.ma.tum.de/Diplarb/>

- [30] Lando D, Skodeberg, T.M. (2002) *Analyzing rating transitions and rating drift with continuous observations*. Journal of Banking and Finance 26, 2002, S. 423 to 444
- [31] Lindskog, F., McNeil, A., Schmock, U. (2002) *Kendall's Tau for Elliptical Distributions*. <http://www.math.ethz.ch/mcneil>.
- [32] McNeil, A. (2002) *Software for Extreme Values in S-PLUS: EVIS*. <http://www.math.ethz.ch/mcneil/software.html>
- [33] Merton, R. (1974) *On the pricing of corporate debt: the risk structure of interest rates*. Journal of Finance, 29, 449-470
- [34] Nelsen, R. (1999) *An Introduction to Copulas*. Springer, New York.
- [35] Poon, S., Rockinger, M., Tawn, J. (2001) *New Extreme-Value Dependence Measures and Finance Applications*. Lancaster University, Lancaster, LA1 4YF, U.K.
- [36] Resnick, S.I (1987) *Extreme Values, Regular Variation and Point Processes*. Springer, New York.
- [37] Rousseeuw, P., Molenberghs, G. (1993) *Transformation of Non Positive Semidefinite Correlation Matrices*. Communications in Statistics - Theory and Methods, 22(4), 965-984.
- [38] Schmidt, R. (2003) *Dependencies of Extreme Events in Finance: Modelling, Statistics, and Data Analysis*. Dissertation an der Universität Ulm Abteilung Zahlentheorie/Wahrscheinlichkeitstheorie an der Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften. <http://stats.lse.ac.uk/schmidt/publications.html>
- [39] Sharpe, W.F. (1970) *Portfolio Theory and Capital Markets*. McGraw-Hill.
- [40] Wendin, J. (2002) *Estimation of the Spectral Measure and the Tail Dependence Coefficient for Regularly Varying Random Vectors*. Dissertation an der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich.
- [41] Zagst, R. (2002) *Interest Rate Management*. Springer, Berlin.

Abbildungsverzeichnis

1.1	acr Analyse der Equity-Indizes	6
1.2	acr Analyse der Equity-Indizes	7
1.3	acr Analyse der Equity-Indizes	8
1.4	acr Analyse der Equity-Indizes	9
2.1	acr Analyse der Log>Returns der Equity-Indizes	14
2.2	acr Analyse der Log>Returns der Equity-Indizes	15
2.3	acr Analyse der Log>Returns der Equity-Indizes	16
2.4	acr Analyse der Log>Returns der Equity-Indizes	17
2.5	acr Analyse der Absolutbeträge der Log>Returns der Equity-Indizes	18
2.6	acr Analyse der Absolutbeträge der Log>Returns der Equity-Indizes	19
2.7	acr Analyse der Absolutbeträge der Log>Returns der Equity-Indizes	20
2.8	acr Analyse der Absolutbeträge der Log>Returns der Equity-Indizes	21
2.9	acr Analyse der quadrierten Log>Returns der Equity-Indizes	22
2.10	acr Analyse der quadrierten Log>Returns der Equity-Indizes	23
2.11	acr Analyse der quadrierten Log>Returns der Equity-Indizes	24
2.12	acr Analyse der quadrierten Log>Returns der Equity-Indizes	25
2.13	Gleitender Mittelwert der Log>Returns der Equity-Indizes	26
2.14	Gleitender Mittelwert der Log>Returns der Equity-Indizes	27
2.15	Gleitender Mittelwert der Log>Returns der Equity-Indizes	28
2.16	Gleitender Mittelwert der Log>Returns der Equity-Indizes	29
2.17	Beispiel QQ-Plots von simulierten Zufallszahlen gegen die Normalverteilung	32
2.18	Beispiel QQ-Plots von simulierten Zufallszahlen gegen die Standardexponentialverteilung	33
2.19	QQ-Plots der Log>Returns der Equity-Indizes gegen die Normalverteilung .	36
2.20	QQ-Plots der Log>Returns der Equity-Indizes gegen die Normalverteilung .	37
2.21	QQ-Plots der Log>Returns der Equity-Indizes gegen die Normalverteilung .	38
2.22	QQ-Plots der Log>Returns der Equity-Indizes gegen die Normalverteilung .	39
2.23	Histogramme der Log>Returns der Equity-Indizes	40
2.24	Histogramme der Log>Returns der Equity-Indizes	41
2.25	Histogramme der Log>Returns der Equity-Indizes	42
2.26	Histogramme der Log>Returns der Equity-Indizes	43
2.27	QQ-Plots der positiven Log>Returns gegen die Exponentialverteilung	44
2.28	QQ-Plots der positiven Log>Returns gegen die Exponentialverteilung	45
2.29	QQ-Plots der positiven Log>Returns gegen die Exponentialverteilung	46

2.30	QQ-Plots der positiven Log>Returns gegen die Exponentialverteilung . . .	47
2.31	QQ-Plots der negativen Log>Returns gegen die Exponentialverteilung . . .	48
2.32	QQ-Plots der negativen Log>Returns gegen die Exponentialverteilung . . .	51
2.33	QQ-Plots der negativen Log>Returns gegen die Exponentialverteilung . . .	52
2.34	QQ-Plots der negativen Log>Returns gegen die Exponentialverteilung . . .	53
2.35	QQ-Plots der positiven Log>Returns gegen die angepassten GPD's	54
2.36	QQ-Plots der positiven Log>Returns gegen die angepassten GPD's	55
2.37	QQ-Plots der positiven Log>Returns gegen die angepassten GPD's	56
2.38	QQ-Plots der positiven Log>Returns gegen die angepassten GPD's	57
2.39	QQ-Plots der negativen Log>Returns gegen die angepassten GPD's	58
2.40	QQ-Plots der negativen Log>Returns gegen die angepassten GPD's	59
2.41	QQ-Plots der negativen Log>Returns gegen die angepassten GPD's	60
2.42	QQ-Plots der negativen Log>Returns gegen die angepassten GPD's	61
3.1	1000 Simulierte Zufallszahlen von 2 Verteilungen mit gleicher Korrelation $\rho = 0.8$ aber unterschiedlichen Abhängigkeitsstrukturen. Links: Bivariate Normalverteilung mit $\rho = 0.8$ Rechts: Bivariate t_4 -Verteilung mit $\rho = 0.8$	69
3.2	Plots der Log>Returns von BANKSUS gegen die Log>Returns der anderen Bankenindizes. Die Linie ist die Regressionsgerade.	78
3.3	Plots der Log>Returns von AUTOSBD gegen die Log>Returns der anderen deutschen Indizes. Die Linie ist die Regressionsgerade.	79
3.4	Plots der Log>Returns von BANKSBD gegen die Log>Returns der anderen deutschen Indizes. Die Linie ist die Regressionsgerade.	80
3.5	Plots der Ränge der Log>Returns von BANKSUS gegen die Ränge der Log- Returns der anderen Bankenindizes	81
3.6	Plots der Ränge der Log>Returns von AUTOSBD gegen die Ränge der Log>Returns der anderen deutschen Indizes	82
3.7	Plots der Ränge der Log>Returns von BANKSBD gegen die Ränge der Log>Returns der anderen deutschen Indizes	83
3.8	Hill-Schätzer für $\eta = (\bar{\lambda}_U + 1)/2$ zwischen den Log>Returns von AUTOM- BUS und den Log>Returns der 16 folgenden US-Indizes	84
3.9	ML-Schätzer für $\eta = (\bar{\lambda}_U + 1)/2$ zwischen den Log>Returns von AUTOM- BUS und den Log>Returns der 16 folgenden US-Indizes	85
3.10	Hill-Schätzer für λ_U zwischen den Log>Returns von AUTOMBUS und den Log>Returns der 16 folgenden US-Indizes	86
3.11	Hill-Schätzer für $\eta = (\bar{\lambda}_L + 1)/2$ zwischen den Log>Returns von AUTOM- BUS und den Log>Returns der 16 folgenden US-Indizes	87
3.12	ML-Schätzer für $\eta = (\bar{\lambda}_L + 1)/2$ zwischen den Log>Returns von AUTOM- BUS und den Log>Returns der 16 folgenden US-Indizes	88
3.13	Hill-Schätzer für λ_L zwischen den Log>Returns von AUTOMBUS und den Log>Returns der 16 folgenden US-Indizes	89
5.1	Dichte einer 2-dimensionalen sphärischen Verteilung, deren erzeugende Zu- fallsvariable eine $\exp(1)$ Verteilung hat	112

5.2 Dichte einer 2-dimensionalen sphärischen Verteilung, deren erzeugende Zufallsvariable eine GPD(0.5) Verteilung hat 113

5.3 Dichte einer 2-dimensionalen sphärischen Verteilung, deren erzeugende Zufallsvariable eine GPD(3) Verteilung hat 114

5.4 Dichte einer 2-dimensionalen elliptischen Verteilung, $R_k \sim \exp(1)$ $\sigma_1 = \sigma_2 = 1, \rho = 0.7$ 115

5.5 Dichte einer 2-dimensionalen elliptischen Verteilung, $R_k \sim GPD(0.5)$ $\sigma_1 = \sigma_2 = 1, \rho = 0.7$ 116

5.6 Dichte einer 2-dimensionalen elliptischen Verteilung, $R_k \sim GPD(0.5)$ $\sigma_1 = \sigma_2 = 1, \rho = 0.9$ 117

5.7 Dichte einer 2-dimensionalen t-Copula, $\nu = 3, \rho_{12} = 0.7$ 118

5.8 Dichte einer 2-dimensionalen t-Copula, $\nu = 10, \rho_{12} = 0.7$ 119

5.9 Dichte einer 2-dimensionalen t-Copula, $\nu = 3, \rho_{12} = 0.9$ 120

7.1 Geglättete Histogramme der Korrelationskoeffizienten für alle drei Paare von Indizes 162

7.2 Geglättete Histogramme der Tail-Dependence für alle drei Paare von Indizes. Die gestrichelte Linie beschreibt die implizite Tail-Dependence, die in (7.) der Simulationsstudie erklärt wurde. 163

7.3 Geglättetes Histogramm von $\hat{\alpha}$ 164

7.4 3D-Plot der simulierten Differenz $\frac{2}{\pi} \arcsin \rho - \frac{2}{\pi} E(\arcsin(\rho \psi(f_1(U), f_2(U), f_1(\tilde{U}), f_2(\tilde{U}))))$ basierend auf 10000 unabhängigen Realisierungen von $U, \tilde{U} \sim U(0, 1)$, für $\nu_1 = 4, \nu_2 = 2, \dots, 16$ und $\rho = 0, \dots, 1$ 167

8.1 Histogramme des simulierten Portfolioverlustes für die drei Modelle mit Gaußcopula, t-Copula und gruppierter t-Copula. Beachte: die y-Achse hat eine Log-Skalierung. 174

B.1 Dichten der Standard EWVn Λ, Φ_1 und Ψ_1 182

B.2 ME-Plots von den positiven Log>Returns der Equity-Indizes 192

B.3 ME-Plots von den positiven Log>Returns der Equity-Indizes 193

B.4 ME-Plots von den positiven Log>Returns der Equity-Indizes 194

B.5 ME-Plots von den positiven Log>Returns der Equity-Indizes 195

B.6 ME-Plots von den negativen Log>Returns der Equity-Indizes 196

B.7 ME-Plots von den negativen Log>Returns der Equity-Indizes 197

B.8 ME-Plots von den negativen Log>Returns der Equity-Indizes 198

B.9 ME-Plots von den negativen Log>Returns der Equity-Indizes 199

B.10 Hill-Plot von 1000 simulierten GPD(0.3) verteilten Zufallszahlen. Auf der unteren Abszisse sind die Anzahl der Überschreitungen und auf der oberen Abszisse die dazugehörigen Schranken u aufgetragen. Die Ordinate gibt den Hillschätzer $\zeta = \alpha^{-1}$ an. 204

B.11 Hill-Plot von 1000 simulierten GPD(-0.3) verteilten Zufallszahlen. Auf der unteren Abszisse sind die Anzahl der Überschreitungen und auf der oberen Abszisse die dazugehörigen Schranken u aufgetragen. Die Ordinate gibt den Hillschätzer $\zeta = \alpha^{-1}$ an. 206

B.12 Hill-Plots von den positiven Log>Returns der Equity-Indizes 207

B.13 Hill-Plots von den positiven Log>Returns der Equity-Indizes 208

B.14 Hill-Plots von den positiven Log>Returns der Equity-Indizes 209

B.15 Hill-Plots von den positiven Log>Returns der Equity-Indizes 210

B.16 Hill-Plots von den negativen Log>Returns der Equity-Indizes 211

B.17 Hill-Plots von den negativen Log>Returns der Equity-Indizes 212

B.18 Hill-Plots von den negativen Log>Returns der Equity-Indizes 213

B.19 Hill-Plots von den negativen Log>Returns der Equity-Indizes 214

B.20 MLE-Schätzer des Parameters ζ für 1000 simulierte GPD(-0.3) verteilte
Zufallszahlen 219

B.21 MLE-Schätzer des Parameters ζ für 1000 simulierte GPD(0.3) verteilte
Zufallszahlen 220

B.22 ML-Schätzer des Parameters ζ für die positiven Log>Returns der Equity-
Indizes 221

B.23 ML-Schätzer des Parameters ζ für die positiven Log>Returns der Equity-
Indizes 222

B.24 ML-Schätzer des Parameters ζ für die positiven Log>Returns der Equity-
Indizes 223

B.25 ML-Schätzer des Parameters ζ für die positiven Log>Returns der Equity-
Indizes 224

B.26 ML-Schätzer des Parameters ζ für die negativen Log>Returns der Equity-
Indizes 225

B.27 ML-Schätzer des Parameters ζ für die negativen Log>Returns der Equity-
Indizes 226

B.28 ML-Schätzer des Parameters ζ für die negativen Log>Returns der Equity-
Indizes 227

B.29 ML-Schätzer des Parameters ζ für die negativen Log>Returns der Equity-
Indizes 228

Tabellenverzeichnis

2.1	Geschätzte Parameter für die an die Log>Returns der US-Indizes angepassten GPD's. Die dritte bzw. sechste Spalte geben an, mit welcher relativen Häufigkeit positive bzw. negative Werte für die Log>Returns auftreten.	49
2.2	Geschätzte Parameter für die an die Log>Returns der US-Indizes angepassten Exponentialverteilungen. Die zweite bzw. vierte Spalte geben an, mit welcher relativen Häufigkeit positive bzw. negative Werte für die Log>Returns auftreten.	50
3.1	Matrix der Koeffizienten von Kendall's Tau zwischen den ersten 17 US Indizes	70
3.2	Matrix der upper Tail-Dependence Koeffizienten zwischen den ersten 17 US Indizes. Die Nullen kommen zustande, wenn die obere Konfidenzgrenze von $\hat{\lambda}_U$ unter 1 liegt und somit $\hat{\lambda}_U$ gleich 0 gesetzt wird.	90
3.3	Matrix der lower Tail-Dependence Koeffizienten zwischen den ersten 17 US Indizes. Die Nullen kommen zustande, wenn die obere Konfidenzgrenze von $\hat{\lambda}_L$ unter 1 liegt und somit $\hat{\lambda}_L$ gleich 0 gesetzt wird.	91
6.1	Durchschnittliche Verlustraten im Falle eines Ausfalls von verschiedenen gut besicherten Anleihen. Quelle: Crouhy et al [10].	122
6.2	Kalibrierung von Moody's Ratings auf Ausfallwahrscheinlichkeiten. Quelle: Bluhm et al. [4], Seite 25.	126
6.3	Payoff Funktionen von den vier verschiedenen Optionspositionen	129
6.4	Schutz vor Ausfallrisiko durch eine passende Put Option	131
7.1	Ergebnisse des parametrischen Bootstrap Verfahrens für die $\hat{\alpha}$'s der Ländergruppen. Die Schätzwerte $\hat{\alpha}$ in der dritten Spalte stammen aus der achten Spalte von Tabelle 7.3	155
7.2	ML-Schätzwerte $\hat{\rho}_6$ und $\hat{\nu}_6$ für die Schweizer Equity-Indizes.	158
7.3	Erklärung siehe Tabelle 7.4	159
7.4	Erklärung von Tabelle 7.3	159
7.5	Geschätzte Standardabweichungen der Log>Returns der Equity-Indizes. Da nicht alle 92 Werte untereinander passten, wurden vier Spalten mit jeweils 23 Zeilen generiert. In der ersten Spalte stehen die ersten 23, in der zweiten die zweiten 23, in der dritten die nächsten 23 und in der letzten Spalte die letzten 23 Stichprobenstandardabweichungen	160

- 7.6 Mittelwerte der Log>Returns der Equity-Indizes. Da nicht alle 92 Werte untereinander passten, wurden vier Spalten mit jeweils 23 Zeilen generiert. In der ersten Spalte stehen die ersten 23, in der zweiten die zweiten 23, in der dritten die nächsten 23 und in der letzten Spalte die letzten 23 Mittelwerte 161
- 7.7 Simulationsstudie: 1000-malige Berechnung von $\hat{\alpha}$, der Korrelationskoeffizienten und der Tail-Dependence für die Komponentenpaare (1,2), (1,3) und (2,3) ergibt empirische Schätzer für Erwartungswert, Bias, Standardabweichung und Konfidenzintervalle der jeweiligen Schätzer. 161
- 7.8 Simulation von $\frac{2}{\pi} \arcsin \rho - \frac{2}{\pi} E(\arcsin(\rho \psi(f_1(U), f_2(U), f_1(\tilde{U}), f_2(\tilde{U}))))$ für $\rho = 0.25$, basierend auf 10000 unabhängigen Realisierungen von $U, \tilde{U} \sim U(0, 1)$. Man beachte, dass die Werte der Tabelle noch mit 10^{-3} multipliziert werden müssen. 165
- 7.9 Simulation von $\frac{2}{\pi} \arcsin \rho - \frac{2}{\pi} E(\arcsin(\rho \psi(f_1(U), f_2(U), f_1(\tilde{U}), f_2(\tilde{U}))))$ für $\rho = 0.5$, basierend auf 10000 unabhängigen Realisierungen von $U, \tilde{U} \sim U(0, 1)$. Man beachte, dass die Werte der Tabelle noch mit 10^{-3} multipliziert werden müssen. 165
- 7.10 Simulation von $\frac{2}{\pi} \arcsin \rho - \frac{2}{\pi} E(\arcsin(\rho \psi(f_1(U), f_2(U), f_1(\tilde{U}), f_2(\tilde{U}))))$ für $\rho = 0.75$, basierend auf 10000 unabhängigen Realisierungen von $U, \tilde{U} \sim U(0, 1)$. Man beachte, dass die Werte der Tabelle noch mit 10^{-3} multipliziert werden müssen. 165
- 7.11 Simulation von $\frac{2}{\pi} \arcsin \rho - \frac{2}{\pi} E(\arcsin(\rho \psi(f_1(U), f_2(U), f_1(\tilde{U}), f_2(\tilde{U}))))$ für $\rho = 0.9$, basierend auf 10000 unabhängigen Realisierungen von $U, \tilde{U} \sim U(0, 1)$. Man beachte, dass die Werte der Tabelle noch mit 10^{-3} multipliziert werden müssen. 166
- 7.12 Simulation von $\frac{2}{\pi} \arcsin \rho - \frac{2}{\pi} E(\arcsin(\rho \psi(f_1(U), f_2(U), f_1(\tilde{U}), f_2(\tilde{U}))))$ für $\rho = 1.0$, basierend auf 10000 unabhängigen Realisierungen von $U, \tilde{U} \sim U(0, 1)$. Man beachte, dass die Werte der Tabelle noch mit 10^{-3} multipliziert werden müssen. 166
- 7.13 Parameter ζ, ν, β des GPD-Fitting-Programms für die rechten Tails aller eindimensionalen Randverteilungen der Equity-Indizes. u ist die Schwelle, die überschritten werden muss, damit der Tail der Verteilung erreicht wird. Da es sich um 92 Equity-Indizes handelt, konnten die Werte eines jeden Parameters nicht für alle Indizes in die gleiche Zeile. Daher wurde hier alle 15 Spalten ein Zeilenumbruch gemacht, so dass zum Beispiel das ζ vom 16ten Index in der 5ten Zeile in der ersten Spalte steht. 168
- 7.14 Parameter ζ, ν, β des GPD-Fitting-Programms für die linken Tails aller eindimensionalen Randverteilungen der Equity-Indizes. u ist die Schwelle, die überschritten werden muss, damit der Tail der Verteilung erreicht wird. Da es sich um 92 Equity-Indizes handelt, konnten die Werte eines jeden Parameters nicht für alle Indizes in die gleiche Zeile. Daher wurde hier alle 15 Spalten ein Zeilenumbruch gemacht, so dass zum Beispiel das ζ vom 16ten Index in der 5ten Zeile in der ersten Spalte steht. 169

8.1 Vergleich des simulierten Portfolioverlusts der drei verschiedenen Modelle
durch Risikomaße und Kennzahlen 173