

Technische Universität München

ZENTRUM MATHEMATIK

**Ein praxisgeeigneter Ansatz stetiger
Ausscheideintensitäten in der
Personenversicherung**

Diplomarbeit

von

Martin Bauer

Themenstellerin: Prof. Dr. Claudia Klüppelberg

Betreuer Dr. Thilo Meyer-Brandis

Dr. Aristid Neuburger

Abgabetermin: 01. November 2006

Hiermit erkläre ich, dass ich die Diplomarbeit selbstständig angefertigt und nur die angegebenen Quellen verwendet habe.

München, den 01. November 2006

Danksagung

Diese Diplomarbeit ist in Zusammenarbeit mit dem Lehrstuhl für Mathematische Statistik der Technischen Universität München und dem Bereich betriebliche Altersversorgung der Lebensversicherung von 1871 im Zeitraum von Mai 2006 bis Oktober 2006 entstanden.

Ich möchte mich sehr bei Fr. Klüppelberg für die Betreuung meiner Diplomarbeit bedanken. Sie hat mich mit kritischen Fragen und konstruktiven Anregungen während der gesamten Zeit begleitet. Ebenso wurde ich von Hr. Meyer-Brandis hervorragend betreut. Meine Fragen wurden stets zeitnah und sehr gut beantwortet. Die Unterstützung seitens der Technischen Universität München war sehr wertvoll für die Erstellung meiner Diplomarbeit.

Ausserdem möchte ich mich beim Bereich betriebliche Altersversorgung der Lebensversicherung von 1871 bedanken. Dort wurde mir ermöglicht meine Diplomarbeit im Unternehmen zu schreiben. Mein besonderer Dank dabei gilt Hr. Ferstl, der mich immer wieder auch auf die praktischen Anforderungen hingewiesen hat.

Des weiteren gilt mein Dank Hr. Neuburger, der mich während meiner gesamten Diplomarbeit betreut hat und mir immer wieder wichtige Hinweise und interessante Anregungen geliefert hat.

Bei Hr. Nyqvist von der Alten Leipziger bedanke ich mich für die Anregungen, die zu diesem interessanten Thema geführt haben.

Und zu guter Letzt möchte ich mich herzlich bei meiner Familie für die Unterstützung meines Mathematikstudiums bedanken. Besonderer Dank gilt meiner Freundin Silvia, die mich in den zurückliegenden Monaten immer besonders unterstützt hat.

München, 01. November 2006

Martin Bauer

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Grundlagen der Personenversicherung	3
2.1	Einfaches Ausscheidemodell	3
2.1.1	Modellanforderungen	4
2.1.2	Das einfache Modell einer x -jährigen Person	6
2.1.3	Stationaritätsbedingung	7
2.2	Zusammengesetztes Ausscheidemodell	11
2.2.1	Latente Ausfallzeiten	12
2.2.2	Abhängige und unabhängige Ausscheidewahrscheinlichkeiten	16
2.2.3	Stationaritätsbedingung	17
3	Zeitdiskrete Modellierung	19
3.1	Einfaches Modell in diskreter Zeit	19
3.2	Zusammengesetztes Modell in diskreter Zeit	21
3.3	Notation der Richttafeln	22
3.4	Barwerte, Prämien, Reserven	25
3.4.1	Barwerte laufender Renten	27
3.4.2	Anwartschaftsbarwerte eines Alters- bzw. Invalidenrentners auf Witwenrente	27
3.4.3	Anwartschaftsbarwerte eines Aktiven	28
3.4.4	Anwartschaftsbarwerte eines Aktiven auf Witwenrente	28
3.4.5	Prämienbarwert	29
3.4.6	Reserven	30
3.5	Kommutationswerte	30
4	Zeitstetige Modellierung	33
4.1	Markovprozesse in der Personenversicherung	33
4.2	Leistungen	35
4.3	Barwerte und Reserven	37
4.4	Prämien	40
4.5	Einfaches Modell	41
4.5.1	Reserve	41
4.5.2	Thiele'sche Differentialgleichung	42
4.6	Zusammengesetztes Modell	45

4.6.1	Reserve	46
4.6.2	Thiele'sche Differentialgleichung	48
4.7	Prämienzerlegung	51
4.8	Richttafelmodell	53
4.8.1	Notation der Richttafeln	56
5	Diskussion	57
6	Numerische Umsetzung	59
6.1	Einleitung	59
6.2	Interpolation	59
6.3	Numerische Lösung der Thiele'schen Differentialgleichung	61
6.4	Weitere Hilfsmittel	61
6.4.1	Zeit	61
6.4.2	Zinssätze	62
6.4.3	Zahlungen	62
6.4.4	Heubeck Richttafeln	63
6.5	Implementierung	64
6.5.1	Stetiges und diskretes Modell	64
6.6	Ergebnisse	65
6.6.1	Erwartete Effekte	65
6.6.2	Barwerte	66
6.6.3	Prämien	69
6.6.4	Gebrochene Dauern	70
6.6.5	Extremfälle	70
6.6.6	Kollektiv	71
6.6.7	Verlauf der Pensionsrückstellungen	72
7	Ausblick	73
8	Anhang	75
8.1	Markovtheorie	75
8.1.1	Der zeitstetige Markovprozess	75
8.1.2	Chapman-Kolmogorov-Gleichung	76
8.1.3	Die Kolmogorov Differentialgleichungen	79
8.2	Symbolverzeichnis	81
8.3	Musterbestand	82

Kapitel 1

Einleitung

In der Mathematik der Personenversicherung gibt es traditionell zwei konkurrierende Ansätze. Zum einen gibt es die zeitdiskrete Modellierung, auf der anderen Seite steht die zeitkontinuierliche. Wir werden in dieser Arbeit beide Ansätze darstellen und die jeweiligen Vor- und Nachteile herausarbeiten.

Des Weiteren werden wir das zeitkontinuierliche Modell an die Anforderungen der Praxis anpassen und dieses auch implementieren.

Wir betrachten einleitend ein Beispiel: Ein Versicherungsunternehmen schließt mit einer versicherten Person einen Versicherungsvertrag ab. Dieser heißt Police. Darin werden zum Zeitpunkt des Vertragsabschlusses zukünftige Zahlungen festgelegt. Die Zahlungen können zum Zeitpunkt des Vertragsbeginns unsicher bezüglich des Zeitpunkts und der Höhe sein.

Vor Beginn des Vertragsverhältnisses steht auf Seiten des Versicherungsunternehmens eine sogenannte Risikoprüfung an. Daran werden die persönlichen Risiken der versicherten Person bewertet. Hierbei wird häufig eine Gesundheitsprüfung vorgenommen. Darüberhinaus werden auch der Beruf und/oder Hobbies der versicherten Person bewertet.

Wir betrachten einen Versicherungsvertrag, der die Zahlung von Altersrenten, Invalidenrenten und Witwenrenten enthält. Dabei bedeutet die Bezeichnung Renten Zahlungen, die laufend z.B. jeweils am 1. eines Monats auftreten.

Als Zustand bezeichnen wir, ob die versicherte Person lebt, invalide ist oder ob sie verstorben ist.

Die versicherte Person ist zu Beginn der Versicherung im Zustand lebend und sie ist nicht invalide. Es wird vereinbart, dass ab Erreichen des Renteneintrittsalters z (z.B. 65 Jahre) eine Altersrente ausgezahlt werden soll.

Falls die versicherte Person vor dem Renteneintrittsalter z invalide wird, erhält sie bis zum Alter z eine Invalidenrente ausgezahlt. Ab Alter z wird auch die Altersrente bezahlt.

Falls die versicherte Person stirbt wird vom Todeszeitpunkt an bis zum Tod des Ehepartners an diesen eine Witwenrente ausgezahlt.

Das Versicherungsunternehmen verlangt von der versicherten Person zur Deckung dieser Verpflichtungen sogenannte Prämien. Diese muss die versicherte Person ab dem Versicherungsbeginn an das Versicherungsunternehmen bezahlen, solange sie keine Rentenzahlun-

gen erhält. Die Prämien werden also höchstens bis zum Alter z bezahlt. Wir nennen die Zeit vor den Rentenzahlungen Anwartschaft.

Aus den Prämien bildet das Versicherungsunternehmen Reserven. Diese werden zur Deckung zukünftiger Zahlungsverpflichtungen angelegt. Nachdem die Zahlungsverpflichtungen dem Zufall unterliegen, wird ein mathematisches Modell benötigt, mit dem dieser modelliert werden kann.

Wir führen in dieser Arbeit in das Richttafelmodell ein. Dieses wird in der Praxis zur Modellierung von Pensionszusagen in der betrieblichen Altersversorgung verwendet. Darin sind die erlaubten Zustände wie im genannten Beispiel. Die Berechnung der Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen den Zuständen geschieht mit Hilfe der Tabellen, in denen zeitdiskrete, statisch aufbereitete Wahrscheinlichkeiten abgelegt sind, mit denen die weitere Berechnung vorgenommen wird.

In dieser Arbeit betrachten wir aus Sicht der Versicherung, wenn nicht anders angegeben, nur einen Vertrag mit einer Person.

Wir werden in der Berechnung sehr häufig das sogenannte Erwartungswertprinzip benutzen. Voraussetzung dafür ist, dass bei einem Versicherungsunternehmen sehr viele Personen versichert sind. Jede dieser Personen stellt ein finanzielles Risiko für die Versicherung dar. Nach dem Gesetz der großen Zahlen konvergiert das arithmetische Mittel der Risiken gegen den Erwartungswert. Aufgrund dessen werden wir für die Berechnung der Reserve den Erwartungswert benutzen.

Wir unterstellen in dieser Arbeit durchgängig, dass die versicherte Person männlich und die Hinterbliebene weiblich ist. Die entwickelten Formeln lassen sich analog auf eine weibliche versicherte Person mit männlichem Hinterbliebenen anwenden.

In dieser Arbeit sprechen wir oft vom zeitstetigen Modell bzw. vom zeitkontinuierlichen Modell. Beide Bezeichnungen sind als gleichwertig zu betrachten.

Kapitel 2

Grundlagen der Personenversicherung

Zur Modellierung einer Versicherung benötigen wir einerseits ein Modell der Risiken, die die Versicherungsleistung(en) bestimmen.

Den biometrischen Teil wollen wir hier nicht weiter ausführen. Darin gehen insbesondere statistische Beobachtungen zum Ausscheide- und Sterbeverhalten einer Bevölkerungsgruppe ein. Wir werden stattdessen die vorhandenen Sterbetafeln und -wahrscheinlichkeiten verwenden.

Auch die finanzmathematische Betrachtung wird nicht weiter vertieft. In der theoretischen Abhandlung werden wir einen nichtkonstanten, jedoch deterministischen Zinssatz voraussetzen.

In der praktischen Anwendung werden wir einen konstanten stetigen Zinssatz verwenden. Dies ist in vielen Bereichen der Berechnungen gesetzlich festgelegt. So rechnen beispielsweise Lebensversicherungen zur Zeit mit einem Garantiezins in Höhe von 2,75 %. Die Vorschriften dazu sind in §65 Abs. 1 Nr. 1a VAG geregelt. In der betrieblichen Altersversorgung müssen Pensionsrückstellungen nach § 6a Abs. 3 Nr. 3 EStG mit einem Rechnungszins in Höhe von 6% berechnet werden.

Wir wollen im folgenden Abschnitt insbesondere auf die versicherungstechnische Ebene eingehen.

In der Lebensversicherung muss modelliert werden, wie lange die Versicherten leben und/oder wie sich ihr Zustand ändert. Wir betrachten zuerst das einfache Modell. Wir halten uns fast durchgängig an die Struktur und Notation aus [9].

2.1 Einfaches Ausscheidemodell

Wir betrachten ein Kollektiv (z.B. Einwohner eines Landes, Mitglieder in einem Versicherungsbestand) von Personen. Es ist ganz natürlich, dass die Mitglieder zufällig aus dem Kollektiv ausscheiden. Deshalb modellieren wir die Verbleibensdauer einer neugeborenen Person mit der nichtnegativen reellen Zufallsvariable auf einem geeigneten Wahrschein-

lichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P) .

Definition 2.1 *Modell*

(i) (*Verbleibensdauer/Restlebensdauer*) Die reelle, nichtnegative Zufallsvariable $T_0 \geq 0$ mit Werten aus \mathbb{R}_0^+ auf (Ω, \mathcal{A}, P) gibt die Verbleibensdauer/Restlebensdauer einer neugeborenen Person an.

(ii) (*Ausscheidewahrscheinlichkeit*) Die Verteilungsfunktion von T_0 wird mit F_0 bezeichnet. Es ist

$$F_0(t) := P(T_0 \leq t) =: {}_tq_0 \quad t \in \mathbb{R}_0^+$$

die Wahrscheinlichkeit eines Neugeborenen bis zum Zeitpunkt t auszuschneiden.

(iii) (*Überlebensfunktion*) Wir definieren die Überlebensfunktion

$$S_0(t) = 1 - F_0(t) = P(T_0 > t) =: {}_tp_0 \quad t \in \mathbb{R}_0^+$$

die die Wahrscheinlichkeit angibt mit der eine neugeborene Person bis zum Zeitpunkt t nicht ausscheidet, also diesen überlebt.

(iv) (*Höchstalter*) Wir definieren mit

$$\omega_0 := F^{-1}(1) \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\} \quad (2.1)$$

das rechnerische Höchstalter für eine neugeborene Person.

Die Bezeichnungen ${}_tp_0$ und ${}_tq_0$ werden wir später im Modell der Richttafeln wiederfinden. Sie seien hier der Vollständigkeit halber aufgeführt.

Wir betrachten im folgenden die Anforderung und Voraussetzungen an das Ausscheidemodell.

2.1.1 Modellanforderungen

Wir fordern, dass die Verteilungsfunktion F_0 - und auch die Überlebensfunktion S_0 - Lebesgue-stetig ist. Das bedeutet insbesondere, dass sie atomfrei ist und dass sie eine stetige Dichte f_0 besitzt.

Definition 2.2 *Dichte*

Es sei

$$f_0(t) = \begin{cases} \frac{d}{dt}F_0(t) = -\frac{d}{dt}S_0(t) & \text{stetig auf } [0, \omega_0] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die Dichte der Restlebensdauer T_0 .

$$F_0(t) = \int_0^t f_0(s)ds \quad t \in \mathbb{R}_0^+$$

Beim Arbeiten mit nichtnegativen Zufallsvariablen, die eine (Über-)Lebensdauer modellieren, ist es zweckmäßig, nicht nur mit der Dichte f_0 , die schließlich die Lebesgue-Ableitung von $-S_0$ ist, sondern mit der Lebesgue-Ableitung von $-\log S_0$ zu arbeiten. Dazu fordern wir die Existenz der Ausscheideintensität.

Definition 2.3 *Ausscheideintensität*

(i) *(Ausscheideintensität)*

$$\mu_0(t) := \frac{d}{dt} (-\log S_0(t)) = \frac{f_0(t)}{S_0(t)} \quad t \in \mathbb{R}_0^+ \quad (2.2)$$

wird als *Ausscheideintensität* (engl. *force of mortality*, oder *hazard-rate*) bezeichnet.

(ii) *(Kumulierte Ausscheideintensität)*

$$\Lambda_0(t) := \int_0^t \mu_0(s) ds \quad t \in \mathbb{R}_0^+$$

wird als *kumulierte Ausscheideintensität* bezeichnet.

Die Ausscheideintensität nach (2.2) ist für alle $t \in \mathbb{R}_0^+ : S_0(t) > 0$ wohldefiniert. Sie ist des weiteren stetig. Diese Eigenschaft überträgt sich aus der Stetigkeit von $S_0(t)$ und $f_0(t)$.

Bemerkung 2.4 *Ausscheideintensität und -wahrscheinlichkeit*

(i) *In kleinen Zeitintervallen dt gilt:*

$$\mu_0(t)dt = \frac{f_0(t)dt}{S_0(t)} = \frac{P(t < T_0 \leq t + dt) + o(dt)}{P(T_0 > t)} \approx P(T_0 \leq t + dt | T_0 > t) \quad (2.3)$$

Wir können also die Ausscheideintensität $\mu_0(t)$ als relative Momentansterblichkeit in t betrachten. Es ist die Sterbewahrscheinlichkeit zur Zeit t , unter der Bedingung, dass die Person bis t überlebt hat. Sie ist jedoch nicht mit der Ausscheidewahrscheinlichkeit $P(T_0 < t)$ zu verwechseln. Schließlich ist $\mu_0(t) \in \mathbb{R}_0^+$.

(ii) *Nachdem aus der Atomfreiheit folgt, dass $S_0(0) = 1$ gilt, erhalten wir durch Integration für alle $t \in [0, \omega_0]$*

$$\mu_0(t) = \frac{d}{dt} (-\log S_0(t)) \iff e^{-\int_0^t \mu_0(s) ds} = S_0(t) = {}_t p_0$$

Es gilt:

$$\Lambda_0(t) = \int_0^t \mu_0(s) ds = \int_0^t -\frac{d}{dt} \log S_0(t) dt \iff S_0(t) = e^{-\Lambda_0(t)}$$

2.1.2 Das einfache Modell einer x -jährigen Person

Nun haben wir ein Modell für den Lebensverlauf einer neugeborenen Person dargestellt. Um den Lebensverlauf einer lebenden Person mit Alter x zu modellieren, führen wir wieder eine nichtnegative reelle Zufallsvariable auf einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P) ein.

Definition 2.5 Modell

(i) (Verbleibensdauer/Restlebensdauer einer x -jährigen Person) Wir modellieren die Verbleibensdauer/Restlebensdauer einer x -jährigen Person, wobei $x \in \mathbb{R}_0^+$, mit der reellen nichtnegativen Zufallsvariable $T_x \geq 0$, die Werte aus \mathbb{R}_0^+ annimmt auf dem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P)

(ii) (Ausscheidewahrscheinlichkeit einer x -jährigen Person) Wir bezeichnen die Verteilungsfunktion von T_x mit F_x :

$$F_x(t) := P(T_x \leq t) =: {}_tq_x \quad t \in \mathbb{R}_0^+$$

Sie gibt die Ausscheidewahrscheinlichkeit bis zum Zeitpunkt t eines x -jährigen an.

(iii) (Überlebensfunktion einer x -jährigen Person) Die Überlebenswahrscheinlichkeit einer x -jährigen Person sei:

$$S_x(t) = 1 - F_x(t) = P(T_x > t) =: {}_tp_x$$

(iv) (Höchstalter) Das rechnerische Höchstalter einer x -jährigen Person bezeichnen wir mit

$$\omega_x := x + F_x^{-1}(1) \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$$

(v) (Ausscheideintensität) Wir fordern die Existenz der Ausscheideintensität

$$\mu_x(t) := \frac{d}{dt} (-\log S_x(t)) = \frac{f_x(t)}{S_x(t)} \quad t \in \mathbb{R}_0^+$$

(vi) (Kumulierte Ausscheideintensität)

$$\Lambda_x(t) := \int_0^t \mu_x(s) ds \quad t \in \mathbb{R}_0^+$$

bezeichnet die kumulierte Ausscheideintensität.

Die Aussagen aus Bemerkung 2.4 gelten analog. Insbesondere gilt die Exponentialformel

$$F_x(t) = 1 - \exp(-\Lambda_x(t)) = 1 - \exp\left(-\int_0^t \mu_x(s) ds\right) \quad (2.4)$$

Wir haben nun für verschiedenalte Personen jeweils eine Beschreibung der Restlebensdauer definiert. Um einen Zusammenhang der Verteilungsfunktionen F_x für verschiedene x zu erhalten, benötigen wir nun die Stationaritätsbedingung wie folgt:

2.1.3 Stationaritätsbedingung

Definition 2.6 *Stationaritätsbedingung*

$$P(T_{x+s} > t) = P(T_x > s + t \mid T_x > s), \quad s, t, x \geq 0 \quad (2.5)$$

Lemma 2.7 *Zur Stationaritätsbedingung (2.5) ist äquivalent:*

$$P(T_x > t) = P(T_0 > x + t \mid T_0 > x), \quad t, x \geq 0$$

Beweis:

Wir setzen in (2.5) $s = x$, $x = 0$ und $t = t$ ein und erhalten:

$$P(T_{0+x} > t) = P(T_0 > x + t \mid T_0 > x), \quad t, x \geq 0$$

□

Dadurch vereinfacht sich die Berechnung stark, da sich die Verteilung von T_x von der Verteilung von T_0 nur durch die Bedingung, das Alter x erreicht zu haben unterscheidet. Wir können die Lebensdauerverteilung eines x -jährigen aus der eines Neugeborenen ableiten.

Die Stationaritätsbedingung bedeutet, dass sich die Verteilung der zukünftigen Lebensdauer eines s -jährigen von der eines Neugeborenen nur durch die Bedingung, das Alter s erreicht zu haben, unterscheidet. Insbesondere sehen wir das bei der zweiten Gleichung. Es gehen keine Zusatzinformationen wie z.B. eine Risikoprüfung mit ein. Das bedeutet, dass das Kollektiv stationär ist. Die Vorstellung dazu ist, dass jährlich eine Kohorte gleicher Stärke nachwächst und alle das gleiche Ausscheideverhalten aufweisen.

Die Konsequenzen dieser Bedingung werden in vielen Büchern zur Lebensversicherungsmathematik verwendet, ohne die Stationaritätsbedingung (2.5) explizit zu nennen. Sie sind in folgendem Lemma zusammengefasst.

Lemma 2.8 *Für $s, t, x \geq 0$ gelten:*

$$(i) \quad {}_{s+t}p_x = {}_s p_x {}_t p_{x+s}$$

$$(ii) \quad {}_{s+t}q_x - {}_s q_x = {}_s p_x {}_t q_{x+s}$$

Beweis:

(i)

$$\begin{aligned} {}_{s+t}p_x &= P(T_x > s + t) = P((T_x > s + t), (T_x > s)) \\ &= P(T_x > s)P(T_x > s + t \mid T_x > s) = {}_s p_x {}_t p_{x+s} \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} {}_{s+t}q_x - {}_s q_x &= P(T_x \leq s + t) - P(T_x \leq s) = P(s < T_x \leq s + t) \\ &= P(T_x > s)(1 - P(T_x > s + t \mid T_x > s)) = {}_s p_x {}_t q_{x+s} \end{aligned}$$

□

Wir erhalten folgenden Zusammenhang

Satz 2.9 *Es sind äquivalent:*

(i) *Die Stationaritätsbedingung (2.5)*

(ii) *Es gilt*

$$\omega_x = \begin{cases} \omega_0, & x < \omega_0 \\ x, & x \geq \omega_0 \end{cases}$$

und

$$\Lambda_x(t) = \Lambda_0(x+t) - \Lambda_0(x), \quad x+t \leq \omega_0, \quad x < \omega_0.$$

(iii) *Es gilt*

$$\mu_x(s) = \mu_0(x+s), \quad x < \omega_0$$

Beweis:

Der Beweis orientiert sich an [9].

(i) \Rightarrow (ii) Sei $x \geq \omega_0$. Aus (2.5) und (2.1) folgt, dass $P(T_x > 0) = 0$ also $\omega_x = x$. Ist andererseits $x < \omega_0$, so gelten für alle $t \geq x$ aus (2.5) folgende Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} \omega_x = x + F_x^{-1}(1) > t &\iff P(T_x > t - x) > 0 &\iff P(T_0 > t \mid T_0 > x) > 0 \\ &\iff P(T_0 > t) > 0 &\iff t < F_0^{-1}(1) = \omega_0 \end{aligned}$$

Also gilt $x + F_x^{-1}(1) = \omega_0$

Für $t, x \geq 0, x+t \leq \omega_0$ und $x < \omega_0$ gilt wegen der Exponentialdarstellung aus Bemerkung 2.4:

$$P(T_0 > x+t \mid T_0 > x) = \frac{\exp(-\Lambda_0(x+t))}{\exp(-\Lambda_0(x))}$$

und

$$P(T_x > t) = \exp(-\Lambda_x(t))$$

Aus der Stationaritätsbedingung (2.5) folgt:

$$\exp(-\Lambda_0(x+t) + \Lambda_0(x)) = \exp(-\Lambda_x(t))$$

und durch Logarithmieren folgt die Behauptung:

$$\Lambda_x(t) = \Lambda_0(x+t) - \Lambda_0(x)$$

(ii) \Rightarrow (i) Seien $x, s, t \geq 0$ und $x + s + t \geq \omega_0$. Es ist also

$$t \geq F_{x+s}^{-1}(1) = \begin{cases} \omega_0 - x - s, & x + s < \omega_0 \\ 0, & x + s \geq \omega_0 \end{cases}$$

und

$$s + t \geq F_x^{-1}(1) = \begin{cases} \omega_0 - x, & x < \omega_0 \\ 0, & x \geq \omega_0 \end{cases}$$

Es folgt $P(T_{x+s} \leq t) = 1$ und $P(T_x \leq s + t) = 1$, also ist die Stationaritätsbedingung mit $0 = P(T_{x+s} > t) = P(T_x > s + t \mid T_x > s)$ erfüllt.

Seien andererseits $x + s + t < \omega_0$. Wegen der Exponentialformel aus Bemerkung 2.4 muss $\Lambda_x(s + t) < \infty$ gelten. Dann folgt wiederum

$$\begin{aligned} P(T_x > s + t \mid T_x > s) &= \exp((-\Lambda_x(s + t) - \Lambda_x(s))) \\ &= \exp((-\Lambda_0(x + s + t) - \Lambda_0(x + s))) \\ &= \exp(-\Lambda x + s(t)) \\ &= P(T_{x+s} > t) \end{aligned}$$

(ii) \Rightarrow (iii)

$$\Lambda_x(t) = \Lambda_0(x + t) - \Lambda_0(x), \quad x + t \leq \omega_0, \quad x < \omega_0$$

ist gleichbedeutend mit

$$\int_0^t \mu_x(\tau) d\tau = \int_x^{x+t} \mu_0(\tau) d\tau = \int_0^t \mu_0(x + \tau) d\tau, \quad x + t \leq \omega_0, \quad x < \omega_0$$

das wiederum ist äquivalent zu

$$\mu_x(s) = \mu_0(x + s), \quad x < \omega_0$$

(iii) \Rightarrow (ii)

Hier ist nur zu zeigen, dass $x + F_x^{-1}(1) = \omega_0$, falls $x < \omega_0$. Sei hierzu $x < \omega_0$ und $t \geq x$. Es ist

$$\int_0^{t-x} \mu_x(\tau) d\tau = \int_x^t \mu_x(\sigma - x) d\sigma = \int_x^t \mu_0(\sigma) d\sigma$$

Mit $\Lambda_0(x) = \int_0^x \mu_0(\tau) d\tau < \infty$ folgt also:

$$x + F_x^{-1}(1) > t \iff \int_0^{t-x} \mu_x(\tau) d\tau < \infty \iff \int_0^t \mu_0(\tau) d\tau < \infty \iff \omega_0 > t.$$

Der Rest folgt sofort mit Integration.

□

Bemerkung 2.10 *Selektions- und Generationentafeln*

- (i) Die Stationaritätsbedingung (2.5) bedeutet, dass die Ausscheideintensität nur vom erreichten Alter abhängt, nicht aber davon, wie es erreicht wurde. Insbesondere wird nicht berücksichtigt, wie weit der Versicherungsbeginn und eine eventuelle Gesundheitsprüfung zurückliegt. Das resultierende Phänomen wird Selektion genannt.

Es kommt daher, dass eine Person ihr eigenes, subjektives Gesundheitsempfinden in die Entscheidung eine Versicherung abzuschließen einfließen lässt. So würde z.B. eine schwerkranke Person niemals eine langfristige Rentenversicherung abschließen, da ihre persönliche Wahrscheinlichkeit, das nötige Alter zu erreichen gering ist. In den Selektionssterbetafeln wird diesem Umstand Rechnung getragen. Wir werden aber darauf nicht weiter eingehen.

- (ii) Tatsächlich ist auch die Annahme, dass sich die Sterblichkeit nicht ändert natürlich problematisch (säkulare Sterblichkeitsabnahme wegen z.B. medizinischem und sozialem Fortschritt). Deshalb können wir noch sogenannte Generationensterbetafeln einführen. Hier gibt es für ein festes Geburtsjahr τ Schätzwerte für die Ausscheidewahrscheinlichkeit q_x^τ einer in τ geborenen Person, die das Alter x erreicht hat. Nun ist die Stationaritätsbedingung nicht mehr für alle Personen gültig, sondern jeweils nur für Personen des gleichen Geburtsjahrgangs. Das allgemeingültige ω_0 wird hier zu ω_0^τ .

In diesem Modell wird für jeden Geburtsjahrgang ein eigenes Λ_0^τ bzw. μ_0^τ definiert. Um das zu vermeiden kann näherungsweise eine sogenannte Projektivität angewendet werden. Hier wird von einem Grundjahrgang (z.B. 1950) ausgehend die Sterbewahrscheinlichkeit der anderen Jahrgänge abgeleitet (projiziert).

Eine genaue Beschreibung der Selektions- und Generationssterbetafeln findet sich in [9].

Wir werden in dieser Arbeit durchgehend mit den einfacheren, sogenannten „Periodensterblichkeiten“ arbeiten. Sämtliche Formeln lassen sich ohne größeren Aufwand auch auf Selektions- und Generationentafeln anwenden.

In unserem Fall der Periodensterbetafeln benötigen wir nur ein μ_0 bzw. ein Λ_0 .

Insgesamt bezeichnen wir nun (T_x) als einfaches Ausscheidemodell. Die Bezeichnung „einfach“ gilt, weil es nur eine Ausscheideursache (meistens Tod) gibt.

Bemerkung 2.11 *Lebenserwartung*

Wir erhalten mit

$$\bar{e}_x := E(T_x) = \int_0^\infty S_x(t) dt = \int_0^\infty {}_t p_x dt$$

die vollständige Lebenserwartung.

2.2 Zusammengesetztes Ausscheidemodell

In der Realität gibt es nicht nur eine Ausscheideursache wie z.B. „Tod“. Wir betrachten auch Ursachen wie Invalidität, Tod mit Hinterlassung einer Witwe sowie Unfalltod; und auch der Eintritt ins Rentenalter kann als Ausscheideursache modelliert werden.

Wir betrachten nun die Menge der möglichen Ausscheideursachen $U := \{1, \dots, m\}$. Es wird vorausgesetzt, dass die Ausscheideursachen wechselseitig exklusiv sind, so dass also jeweils nur eine Ursache zum Ausscheiden führt.

Bei dieser Betrachtung müssen wir also zusätzlich zur Zufallsvariable T_x , die die Restlebensdauer, also den Ausscheidezeitpunkt modelliert, noch die Ausscheideursache modellieren. Dies geschieht mit der Zufallsvariable $J_x \in U$. J_x ist wieder auf einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P) definiert und nimmt Werte aus U an.

Definition 2.12 (*Ausscheideursache*) Die Zufallsvariable J_x gibt an, welche Ursache Grund des Ausscheidens aus dem Kollektiv ist.

Die gemeinsame Verteilung von T_x und J_x ist gegeben durch

$$F_{x,j}(t) = P(T_x \leq t, J_x = j)$$

$F_{x,j}$ ist eine substochastische Wahrscheinlichkeitsverteilung. Es gilt $F_{x,j}(\min(\omega_0, \infty)) < 1$. Falls Gleichheit gelten würde, würde die Ursache j mit Wahrscheinlichkeit 1 zum Ausscheiden führen. Somit wären andere Ausscheideursachen ausgeschlossen.

Definition 2.13 (*Abhängige Ausscheidewahrscheinlichkeiten*) Wir definieren die sogenannten abhängigen bzw. partiellen Ausscheidewahrscheinlichkeiten:

$${}_tq_x^{(j)} := F_{x,j}(t) \quad t \geq 0, j \in U$$

und

$${}_tp_x^{(j)} := 1 - {}_tq_x^{(j)} \quad t \geq 0, j \in U$$

Bemerkung 2.14 *Abhängige Wahrscheinlichkeiten*

Der Begriff *abhängig* darf nicht mit *stochastisch abhängig* verwechselt werden. In unserem Zusammenhang bedeutet *abhängig*, dass das Ereignis j die alleinige Ausscheideursache ist. Also ist j als erstes vor allen anderen Ursachen eingetreten. Diese Bezeichnung geht auf Karup zurück und ist in der Literatur bis heute gebräuchlich, siehe auch [9].

Die t -jährige totale Ausscheidewahrscheinlichkeit und Verteilung ergibt sich zu

$$F_x(t) := \sum_{j \in U} F_{x,j}(t)$$

$${}_tq_x := F_x(t) = \sum_{j \in U} {}_tq_x^{(j)}$$

Nachdem ${}_tq_x$ die Wahrscheinlichkeit angibt, dass bis zum Zeitpunkt t ausgeschieden wird, wissen wir, dass mindestens eine Ausscheideursache eingetreten ist. Weiter wissen wir, dass nur die als erstes eintretende Ursache tatsächlich zum Ausscheiden führt. Also erhalten wir insgesamt: ${}_tq_x = \sum_{j \in U} {}_tq_x^{(j)}$. Wir sehen hier insbesondere, dass es für unsere Betrachtung unerheblich ist, was nach dem Eintritt der ersten Ausscheideursache passiert.

Definition 2.15 *Ausscheideintensitäten*

(i) *(Ausscheideintensität)* Wir bezeichnen mit

$$\mu_{x,j}(t) := \frac{f_{x,j}(t)}{1 - F_x(t)} \quad t \in \mathbb{R}_0^+$$

die *Ausscheideintensität der Ursache j* .

(ii) *(kumulierte Ausscheideintensität)* Die *kumulierten Ausscheideintensitäten* werden definiert durch

$$\Lambda_{x,j}(t) = \int_{[0,t]} \frac{1}{1 - F_x(s)} dF_{x,j}(s) \quad t \in \mathbb{R}_0^+$$

Die kumulierte Ausscheideintensität lässt sich auch in folgender Form schreiben:

$$\Lambda_{x,j}(t) = \int_0^t \mu_{x,j}(\tau) d\tau = \int_{[0,t]} \frac{f_{x,j}(s) ds}{S_x(s)} \quad t \in \mathbb{R}_0^+$$

Mit dem Argument von oben gilt auch für die Dichten

$$f_x(t) = \sum_{j \in U} f_{x,j}(t) \quad t \in \mathbb{R}_0^+$$

und für die Ausscheideintensitäten

$$\mu_x(t) = \sum_{j \in U} \mu_{x,j}(t) \quad t \in \mathbb{R}_0^+ \quad (2.6)$$

Wir bezeichnen nun (T_x, J_x) als Ausscheidemodell mit mehreren Ausscheideursachen oder auch als zusammengesetztes Ausscheidemodell.

2.2.1 Latente Ausfallzeiten

Wir haben im zusammengesetzten Ausscheidemodell bisher die abhängigen Ausscheidewahrscheinlichkeiten betrachtet. Diese sind jeweils die gemeinsamen Verteilungen der Zufallsvariablen T_x und J_x . Wir werden nun ein Modell einführen, das mit nur einer Zufallsvariable arbeitet.

Wir betrachten das Modell der latenten Ausfallzeiten. Wir stellen uns für jede Ausscheideursache stochastisch unabhängige Lebensuhren vor. Diejenige Lebensuhr, die zuerst stoppt, liefert den Ausscheidezeitpunkt und die Ursache.

Insgesamt bezeichnen wir die Lebensuhren als latente Ausfallzeiten $T_j, j \in U$. Stochastisch sind die latenten Ausfallzeiten Stoppzeiten eines stochastischen Prozesses.

Alle Ausfallzeiten T_j sind unabhängig und (T_j) ist ein Ausscheidemodell mit jeweils nur einer Ausscheideursache.

Definition 2.16 *Wir definieren die Lebensspanne \mathcal{L}_x*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_x &:= \{t \in [0, \infty) \mid F_x(t-0) < 1\} \\ &= [0, \omega_x - x)\end{aligned}$$

Das ist die Lebensspanne die einem x -jährigen noch verbleibt. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein x -jähriger ein Alter außerhalb dieser Spanne erreicht beträgt 0. Also erstreckt sich \mathcal{L}_x von 0 bis zum rechten Endpunkt der Verteilung.

Definition 2.17 *Eine Darstellung des Ausscheidemodells mittels unabhängiger latenter Ausfallzeiten ist ein System stochastisch unabhängiger $[0, \infty]$ -wertiger Zufallsvariablen $T_j, j \in U$. Für Ausscheideursache j beschreibt T_j die alleinige Wirkung dieser (und nur dieser) Ursache innerhalb der Lebensspanne.*

Das Ziel dieser Darstellung ist dann zu zeigen, dass

$$\Lambda_{T_j}(t) = \Lambda_{x,j}(t) \quad t \in \mathcal{L}_x$$

gilt.

Die Betrachtung der Lebensspanne ist auch sinnvoll, da mit Eintreten einer Ausscheideursache keine andere Ursache mehr beobachtet werden kann. Also: wenn die erste Uhr abgelaufen ist, sind die anderen Uhren auch nicht mehr beobachtbar.

Beispiel 1 *Wir betrachten ein Modell mit den Ausscheideursachen Invalidität und Tod. Wenn die Person invalide wird - also die Uhr „Invalidität“ abläuft - wird das System angehalten. Nun wird ein neues „Uhrensystem“ gestartet, in dem dann nur noch eine Ausscheideursache (Tod) vorkommt. Die Ausscheidewahrscheinlichkeit (Sterbewahrscheinlichkeit) der invaliden Person ist in der Regel höher als die der gesunden Person. Diesen Umstand können wir mit Hilfe des neuen „Uhrensystems“ problemlos abbilden.*

Wir wollen nun den Zusammenhang zwischen dem Ausscheidemodell (T_x, J_x) und den Ausscheidemodellen (T_j) darstellen. Dazu benötigen wir den folgenden Satz. Dieser ist unter unseren Annahmen und Voraussetzungen einfacher als in seiner ursprünglichen Form. Die ursprüngliche Form und die nötigen Beweise finden sich in Satz 3.23 in [9]

Satz 2.18 *Satz von Karup-Loewy*

Wir betrachten ein Ausscheidemodell (T_x, J_x) mit m Ausscheideursachen, rechnerischem Höchstalter ω_x und Lebensspanne \mathcal{L}_x . Dann gelten:

(i) Es existiert eine Darstellung des Ausscheidemodells mittels unabhängiger latenter Ausfallzeiten

(ii) Die Verteilungsfunktion F_{T_j} ist eindeutig bestimmt durch

$$1 - F_{T_j}(t) = \exp(-\Lambda_{x,j}(t))$$

(iii) Ist $T = \bigwedge_j T_j$, dann ist die "stoppende Lebensuhr" $J_x \in U$ fast sicher wohldefiniert und es gilt für alle $j \in U$:

$$P(T \leq t, J_x = j) = F_{x,j}(t)$$

(iv) Ist $\omega_x = \infty$ und $\Lambda_{x,j}(\infty) = \infty$, dann kann T_j endlich gewählt werden. Mit $\omega_x < \infty$ gilt das für alle latenten Ausfallzeiten

(v) Für die Ausscheideintensitäten gilt

$$\mu_{T_j}(t) = \mu_{x,j}(t)$$

Beweis:

Der Beweis dieses Satzes beruht auf dem Beweis in [9]. Dort ist er aber in größerer Allgemeinheit, die wir nicht benötigen.

(i) Analog zur Exponentialformel (2.4) definieren wir für $j \in U$ und $t \in \mathcal{L}_x$

$$F_j(t) := 1 - \exp(-\Lambda_{x,j}(t)) \tag{2.7}$$

Falls $\omega_x = \infty$ ist, dann stimmt $\Lambda_{x,j}$ mit Λ_j überein.

Falls $\omega_x < \infty$ und $\Lambda_{x,j}(\omega_x - x) = \infty$, so gilt $\Lambda_x(\omega_x - x) = \infty$. In diesem Fall sei

$$F_j(t) := 1, \quad t \geq \omega_x - x$$

Das gilt auch für den linksseitigen Grenzwert $t \rightarrow \omega_x - x$.

Für die kumulative Ausscheideintensität Λ_j von F_j gilt also nun:

$$\Lambda_j(t) = \Lambda_{x,j}(t), \quad t \leq \omega_x - x$$

und damit sind die Verteilungen der latenten Ausfallzeiten und die Verteilungen in (T_x, J_x) gleich.

- (ii) Folgt aus $\Lambda_{T_j}(t) = \Lambda_{x,j}(t)$, $t \in \mathcal{L}_x$ und der Exponentialformel (2.7).
- (iii) Seien Λ die kumulative Ausscheideintensität von T und F die zugehörige Verteilungsfunktion. Es ist

$$\Lambda(t) = \sum_{j \in U} \Lambda_{T_j}(t) = \sum_{j \in U} \Lambda_{x,j}(t) = \Lambda_x(t), \quad t \in \mathcal{L}$$

und deshalb $F(t) = F_x(t)$, $t \geq 0$. Sei

$$\Lambda_j : t \mapsto \int_{[0,t]} \frac{1}{1 - F(\tau)} P(T \in d\tau, J = j), \quad j \in U$$

die kumulative partielle Ausscheideintensität von (T, J) . Wir sehen:

$$\Lambda_j(t) = \Lambda_{T_j}(t) = \Lambda_{x,j}(t), \quad t \in \mathcal{L}_x.$$

Aus der Definition von Λ_j und $\Lambda_{x,j}$ erhalten wir:

$$P(T \leq t, J = j) = \int_{[0,t]} (1 - F(s)) d\Lambda_j(s)$$

$$F_{x,j} = \int_{[0,t]} (1 - F(s)) d\Lambda_{x,j}(s)$$

- (iv) Ist $\omega_x = \infty$ und $\Lambda_{x,j} = \infty$, so zeigt sich mit Hilfe der Exponentialdarstellung $F_j(t) := 1 - \exp(-\Lambda_{x,j}(t))$, dass $F_j(\infty) = 1$ ist. Also ist F_j stochastisch. Wenn $\omega_x < \infty$, so sind alle Verteilungsfunktionen F_j wegen (i) stochastisch.
- (v) Aus $\Lambda_{T_j}(t) = \Lambda_{x,j}(t)$, $t \in \mathcal{L}_x$ folgt

$$\int_0^t \mu_{x,j}(\tau) d\tau = \int_0^t \mu_{T_j}(\tau) d\tau, \quad t \in \mathcal{L}_x \quad (2.8)$$

□

Bemerkung 2.19 *Interpretation des Satzes von Karup-Loewy*

- (i) *Es gibt immer eine Darstellung des Ausscheidemodells mit Hilfe der latenten Ausfallzeiten*
- (ii) *Die Verteilungsfunktionen sind eindeutig.*
- (iii) *Es gibt also keine Mehrfachübergänge. Es tritt immer nur eine Ursache zu einem Zeitpunkt ein. Und die Verteilung von (T_X, J_X) (Ausscheidemodell) und (T, J) (stoppende Lebensuhr = Auslöser) stimmt überein.*
- (iv) *Bei endlichem Höchstalter sind alle Ausfallzeiten endlich.*

(v) Die Ausscheideintensitäten μ der latenten Ausfallzeiten stimmen mit denen im Ausscheidemodell überein.

Definition 2.20 *Unabhängige Ausscheidewahrscheinlichkeiten*

Sei (T_x, J_x) ein zusammengesetztes Ausscheidemodell und $(T_j)_{j \in U}$ eine Darstellung mittels latenter Ausfallzeiten. Dann sind die unabhängigen Ausscheidewahrscheinlichkeiten wie folgt definiert:

$${}^u p_x^j := 1 - {}^u q_x^j := P(T_j > t) = \exp(-\Lambda_{x,j}(t)) \quad (2.9)$$

2.2.2 Abhängige und unabhängige Ausscheidewahrscheinlichkeiten

Wir haben nun zwei verschiedene Modellierungen kennengelernt: zum einen haben wir die abhängigen Ausscheidewahrscheinlichkeiten und zum anderen die unabhängigen Ausscheidewahrscheinlichkeiten, die durch die latenten Ausfallzeiten hergeleitet wurden.

Die abhängigen Ausscheidewahrscheinlichkeiten haben wir in Bemerkung 2.14 interpretiert. Die unabhängigen Ausscheidewahrscheinlichkeiten hingegen beschreiben nach (2.9) die alleinige Wirkung der Ursache j , unabhängig davon, wie die übrigen Ausscheideursachen wirken.

Der Satz von Karup-Loewy erlaubt einen Zusammenhang zwischen abhängigen und unabhängigen Ausscheidewahrscheinlichkeiten.

Bemerkung 2.21 *Zusammenhang unabhängiger und abhängiger Ausscheidewahrscheinlichkeiten.*

Wir wissen bereits, dass für die abhängigen Ausscheidewahrscheinlichkeiten gilt:

$${}_t q_x = \sum_{j \in U} {}_t q_x^{(j)}$$

Wir wissen, dass die ${}^u p_x^j$ nach (2.9) stochastisch unabhängig sind. Genauso das Gegenereignis ${}^u q_x^j$. Also gilt nun für die unabhängigen Ausscheidewahrscheinlichkeiten und die gesamte Ausscheidewahrscheinlichkeit:

$$1 - {}_t q_x = \prod_{j=1}^m (1 - {}^u q_x^{(j)})$$

Gelegentlich wird deshalb von einem additiven bzw. multiplikativen Modell bei mehreren Ausscheideursachen gesprochen.

Für die später folgenden Berechnungen sind die abhängigen Ausscheidewahrscheinlichkeiten nötig, da hier nur diejenige Ausscheideursache von Bedeutung ist, die tatsächlich als erstes eintritt. Die unabhängigen hingegen sind das Ergebnis statistischer Schätzungen der Ausscheidewahrscheinlichkeiten. Dazu betrachten wir folgendes Beispiel.

Beispiel 2 *Schätzung der Ausscheidewahrscheinlichkeit*

Wir betrachten ein Personenkollektiv. Darin sind zum ersten Zeitpunkt genau B_1 lebende Personen. Zu einem späteren Zeitpunkt sind nun B_2 lebende Personen im Kollektiv vorhanden.

Die einfachste Schätzung der Ausscheidewahrscheinlichkeit ist nun:

$$q = \frac{B_1 - B_2}{B_1}$$

Wenn wir aber auch Bestandsveränderungen wie beispielsweise Geburten und Migration zulassen, dann scheidet diese einfache Methode.

Deshalb können wir beispielsweise folgende Methode zur Schätzung der Ausscheidewahrscheinlichkeiten verwenden. Hierbei müssen wir zusätzlich noch beobachten, wieviele Personen wegen Ursache j innerhalb des Beobachtungszeitraums ausscheiden. Wir bezeichnen diese Größe mit T^j .

$$q = \frac{2T^j}{B_1 + B_2 + T^j}$$

Dabei geht in die Berechnung nur die Größe des Kollektivs zu Beginn und zum Ende des Beobachtungszeitraums ein und die Anzahl der wegen j ausgeschiedenen Personen. Es ist also unerheblich, welche genauen Auswirkungen andere Ausscheideursachen auf das Kollektiv haben.

Bemerkung 2.22 *Berechnung der Ausscheidewahrscheinlichkeiten*

Es ist bei der Auswahl der Methode immer wichtig, welche Betrachtung wir vornehmen wollen. Es gibt also keine allgemein beste Methode. Oft werden die Werte nach der Berechnung noch geglättet, um extreme Ereignisse nicht überzubewerten.

2.2.3 Stationaritätsbedingung

Im Modell (T_x, J_x) fordern wir auch wieder eine Stationaritätsbedingung (Verträglichkeitsbedingung). Diese hat folgende Gestalt:

Definition 2.23 *Stationaritätsbedingung im zusammengesetzten Modell*

Im zusammengesetztem Modell (T_x, J_x) fordern wir

$$P(T_{x+s} > t, J_{x+s} = j) = P(T_x > s + t, J_x = j \mid T_x > s) \quad s, t, x \geq 0, j \in U \quad (2.10)$$

Wir sehen, dass analog zum einfachen Modell, die Ausscheidewahrscheinlichkeit einer bestimmten Ursache j eines s -jährigen sich von der eines Neugeborenen nur durch die

Bedingung, das Alter s erreicht zu haben, unterscheidet. Dadurch benötigen wir wieder nur eine Ausscheidewahrscheinlichkeit $F_j(t)$ pro Ursache.

Auch hier besteht wieder die Möglichkeit der Generationensterbetafeln, bei denen die Wahrscheinlichkeiten pro Geburtsjahrgang tabelliert sind. Genauso kann man wieder die Projektivität einführen, um diese näherungsweise zu berechnen. Ebenso gibt es auch für verschiedene Ausscheideursachen die in Bemerkung 2.10 angesprochenen Selektionssterbetafeln. Ausführliche Beschreibungen dazu sind in [10]. Wir wollen aber weiterhin bei den einfacheren Periodensterbetafeln bleiben.

Mit den bisher entwickelten Methoden können wir die Ausscheidewahrscheinlichkeiten bzw. -intensitäten schätzen und damit auch Berechnungen anstellen. Im einfachen Fall ist das Modell (T_x) zur Modellierung einer Lebensversicherung völlig ausreichend. Auch das zusammengesetzte Modell mit mehreren Ausscheideursachen können wir mit Hilfe der bisher dargestellten Theorie berechnen. Im zusammengesetzten Modell wird aber die bisherige Theorie schnell unhandlich und unübersichtlich. Um dieses Problem zu lösen werden wir auf die Theorie stochastischer Prozesse zurückgreifen. Damit lässt sich das Ausscheideverhalten elegant darstellen.

Kapitel 3

Zeitdiskrete Modellierung

Wir werden zunächst den Status-Quo in der Personenversicherung genauer untersuchen. Aus historischer Sicht wurde zuerst ein Rechenmodell benötigt, das sich mit einfachen numerischen Methoden durchführen lässt. Es waren Berechnungsmethoden nötig, die ohne die Hilfe von Computern durchgeführt werden konnten. Dazu wurden in den Anfängen Tabellen mit Hilfsgrößen angelegt, mit denen die Berechnungen per Hand durchgeführt werden konnten. Auch heute rechnen nahezu alle Versicherungsunternehmen noch mit dieser Methode. Die Notation richtet sich nach [10].

3.1 Einfaches Modell in diskreter Zeit

Wir werden nun zuerst wieder das einfache Modell betrachten. Dazu benötigen wir als erstes eine Diskretisierung der Lebensdauer.

Definition 3.1 *Ganzzahlig gestutzte Lebensdauer*

Es seien

$$K_x := \lfloor T_x \rfloor = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot 1_{k < T_x \leq k+1}, \quad x \in \mathbb{N}$$

die Zufallsvariable „ganzzahlig gestutzte zukünftige Lebensdauer einer Person des Alters x “ und

$$R_x := T_x - K_x$$

der erlebte Bruchteil des Todesjahres.

Wir betrachten insbesondere die Verteilung der K_x . Dazu benötigen wir folgende Definition

Definition 3.2 *Einjährige Wahrscheinlichkeiten**Einjährige Ausscheidewahrscheinlichkeiten*

$$q_x := P(T_x \leq 1) \quad x \in \mathbb{N}_0$$

*Wahrscheinlichkeit eines heute x -jährigen bis zum Alter $x+1$ auszuscheiden.**Einjährige Überlebenswahrscheinlichkeiten*

$$p_x := 1 - q_x = P(T_x > 1) \quad x \in \mathbb{N}_0$$

*Wahrscheinlichkeit eines x -jährigen, das Alter $x+1$ zu erreichen.***Bemerkung 3.3** *Mehrjährige Wahrscheinlichkeiten**Aus den einjährigen Wahrscheinlichkeiten lassen sich die mehrjährigen berechnen:*

$${}_l p_x := P(T_x > l) = \prod_{j=0}^{l-1} p_{x+j} \quad x, l \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } \prod_{j=0}^{-1} \cdot := 1$$

$${}_l q_x := P(T_x \leq l) = \sum_{j=0}^{l-1} q_{x+j} \cdot {}_j p_x \quad x, l \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } \sum_{j=0}^{-1} \cdot := 0$$

Wir haben damit die diskrete, ganzjährige Verteilung der gestutzten zukünftigen Lebensdauer K_x bestimmt. Offen ist nun noch, wie die unterjährigen Ausscheidezeiten (Todeszeitpunkte) innerhalb des Jahres verteilt sind. Um diese möglichst einfach zu berechnen fordern wir das folgende Axiom:

Axiom 3.4 *Axiom der Gleichverteilung**Die Austrittszeitpunkte sind innerhalb des Jahres gleichverteilt:*

$$R_x \sim U(0, 1)$$

Daraus folgt für den Erwartungswert $E(R_x) = 1/2$. Demnach finden Übergänge erwartungsgemäß immer zur Jahresmitte statt. Die Jahresmitte wird nun bezüglich des Geburtstags berechnet.

Damit gilt für $0 \leq s \leq 1$:

$${}_s q_x = s \cdot q_x$$

$${}_s p_x = s \cdot p_x$$

Mit der Verteilung von K_x und R_x haben wir eine Näherung für die echte Lebensdauer-Verteilung T_x .

Wir haben jetzt noch das Problem, dass die Versicherung meistens nicht am Geburtstag der versicherten Person beginnt. Jedoch sind die Ausscheidewahrscheinlichkeiten q_x tabelliert für $x \in \mathbb{N}$. Um dieses Problem zu umgehen betrachten wir die zwei folgenden Methoden.

Bemerkung 3.5 *Alter*

(i) (*Versicherungstechnisches Alter*) Wir wählen das Alter, das dem Stichtag (*Versicherungsbeginn*) am nächsten ist.

Beispiel: Wir betrachten eine Versicherung mit Stichtag 01.01.06 und eine versicherte Person, die am 14.02.76 geboren ist. Das versicherungstechnische Alter ist in diesem Fall: $x = 30$. Wenn wir eine Person betrachten, die am 01.09.76 geboren ist, liefert das Verfahren $x = 29$.

Diese Methode wird beispielsweise bei der Rückstellungsberechnung in der betrieblichen Altersversorgung genutzt.

(ii) Ein einfacheres Verfahren ist, das Alter zum 31.12. im Jahr des Stichtags zu wählen.

Beispiel: Bei Stichtag 01.06.06 und Geburtstag 03.10.76 wird $x = 30$ gewählt. Dieses Verfahren ist bei vielen Lebensversicherungen üblich. Alternativ wird auch häufig das Alter am Stichtag gewählt. Das führt für einen am 01.02.76 geborenen bei Stichtag 31.01.06 auf das Alter $x = 29$, obwohl diese Person fast 30 ist.

3.2 Zusammengesetztes Modell in diskreter Zeit

Im zusammengesetzten Modell betrachten wir die gleichen Zufallsvariablen wie in Kapitel 2. Es geht also insbesondere wieder um die Verteilung der T_j . Um diese zu diskretisieren gehen wir wie im einfachen Modell vor und stützen sie auf ganzzahlige Werte.

Es folgt: $K_j := \lfloor T_j \rfloor$ und $R_j = T_j - K_j$. Das Axiom der Gleichverteilung wird nun für jede Zufallsvariable R_j gefordert. Damit erfolgt jeder Übergang erwartungsgemäß zur Jahresmitte.

Wir wollen uns diese Forderung anhand eines Beispiel etwas genauer ansehen und die daraus folgenden Konsequenzen betrachten.

Beispiel 3 *Wir betrachten eine Person aus der Gesamtheit der Aktiven, die innerhalb eines Jahres invalide wird und noch im gleichen Jahr stirbt. Sei also*

Z_1 : Zeitpunkt der Invalidität

Z_2 : Zeitpunkt des Todes (im gleichen Jahr)

Nach Voraussetzung sind beide Zufallsgrößen gleichverteilt.

Ausserdem gilt: $Z_1 \leq Z_2$ f.s., d.h. der Zeitpunkt der Invalidität liegt vor dem Todeszeitpunkt.

Ganz allgemein gilt: Wenn X und Y zwei reellwertige Zufallsvariablen mit identischer Verteilung sind und $X \leq Y$ f.s. gilt, dann ist: $X = Y$ f.s..

Wenn wir $X = Z_1$ und $Y = Z_2$ einsetzen, dann folgt $Z_1 = Z_2$ f.s..

Dieses Phänomen wird Doppelübergang genannt. Wir sehen also, dass wegen des Axioms der Gleichverteilung der Zeitpunkt des Eintritts der Invalidität und der Todeszeitpunkt zusammenfallen.

Bemerkung 3.6 *Es gibt auch noch die Möglichkeit der Mehrfachübergänge mit Zufallsvariablen Z_1, \dots, Z_n mit $n \geq 2$. Analog zum Beispiel folgt hier $Z_1 = \dots = Z_n$ f.s..*

Zur Erinnerung: Nach Karup-Loewy finden Übergänge fast sicher nicht gleichzeitig statt. Die Doppel- und Mehrfachübergänge wirken sich darüber hinaus auch in der Barwertberechnung aus. Es wird keine Reserve für die Invalidität gebildet. Da diese nur über den Zeitraum 0 auftreten würde.

3.3 Notation der Richttafeln

Wir betrachten im Folgenden ein zeitdiskretes Ausscheidemodell mit mehreren Ausscheidursachen. Das Modell hat folgende Form:

Definition 3.7 *Modell der Richttafeln*

Die Richttafeln haben folgende Zustände:

- a: aktiv*
- i: invalide*
- A: Altersrentner*
- ℓ: Tod ohne Hinterlassung einer Witwe*
- w: Tod mit Hinterlassung einer Witwe*
- t: Tod der Witwe*

Es gibt nur einen Anfangszustand:

$$A = \{a\}$$

Es gibt zwei Schlusszustände:

$$S = \{\ell, t\}$$

In manchen Fällen werden Aktive und Invaliden noch zum sogenannten Gesamtbestand zusammengefasst. Im erweiterten Modell wird der Zustand Aktiv unterteilt in interne Anwärter und externe Anwärter (Fluktuierende).

Wir betrachten als nächstes alle möglichen Übergänge. Als Voraussetzung gilt die sogenannte Zwillingsfreiheit. Das bedeutet, dass nur jeweils eine Ursache zum Ausscheiden führt. Also schließen sich die Ausscheidursachen gegenseitig aus. Des weiteren gibt es keine Zyklen, d.h. keine Übergänge von einer Nebengesamtheit (z.B. Invalide) zurück in die Hauptgesamtheit (Aktive).

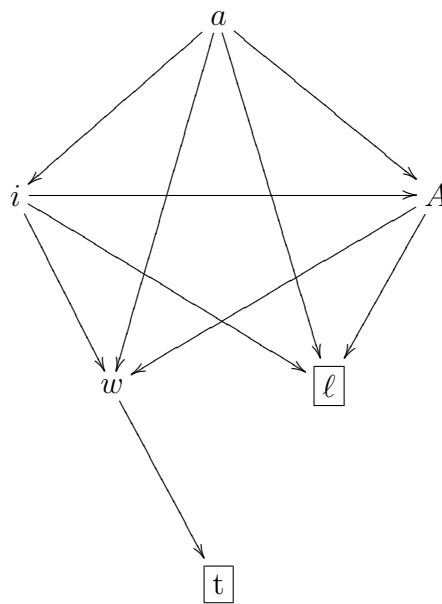


Abbildung 3.1: Richttafelmodell

Ganz allgemein bezeichnen wir nun mit $q_x^{(i)}$ die Wahrscheinlichkeit einer x -jährigen Person innerhalb eines Jahres wegen Ursache (i) auszuseiden. Zur Vermeidung der (i) -Schreibweise führen wir folgende symbolische Notationen für die Übergänge ein:

Definition 3.8 *Notation*

Die Notation geschieht nach dem Schema:

$$\text{Dauer} \text{Hauptsymbol} \overset{\text{Übergang}}{\text{Alter, Geschlecht}} \quad (3.1)$$

Das Hauptsymbol hat folgende Ausprägungen:

q symbolisiert das Ausscheiden wegen Tod

i symbolisiert das Ausscheiden wegen Invalidität

p symbolisiert den Verbleib im Zustand, oder den Übergang zwischen zwei Zuständen

Das Symbol für das Alter wird mit x und mit y angegeben, wobei x das Alter einer männlichen Person ist und y das einer weiblichen. Ferner gibt es noch die Funktion $y(x)$, die das Alter der Ehefrau eines x -jährigen Mannes angibt. Analog gibt es auch noch $x(y)$.

Das Symbol für den Übergang kann aus 1 bis 3 Buchstaben bestehen. Der erste gibt immer den Ausgangszustand an. Falls vorhanden, gibt der letzte den Endzustand an, sofern dieser nicht durch das Hauptsymbol klar ist (z.B. i führt zu Invalidität). Der mittlere

Buchstabe wiederum symbolisiert den Übergang über einen Zwischenzustand. Das kann z.B. ein Übergang von aktiv zuerst nach invalide und dann nach Witwe sein. Bei den Übergangssymbolen gibt es eine Ausnahme: Der Übergang weg vom Zustand aktive wird oft mit aa bezeichnet.

Die Dauer gibt lediglich den Betrachtungszeitraum an. Falls diese nicht vorhanden ist, wird immer 1 Jahr betrachtet.

Des weiteren benötigen wir noch die Wahrscheinlichkeit, dass ein Mann des Alters x bei Tod verheiratet ist. Diese bezeichnen wir mit h_x .

Als Illustration können wir die folgenden Grafiken betrachten:

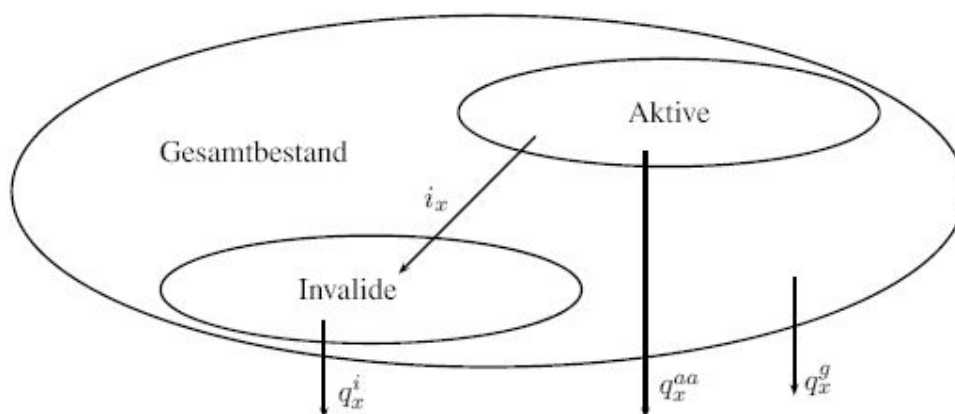


Abbildung 3.2: Ausscheidewahrscheinlichkeiten

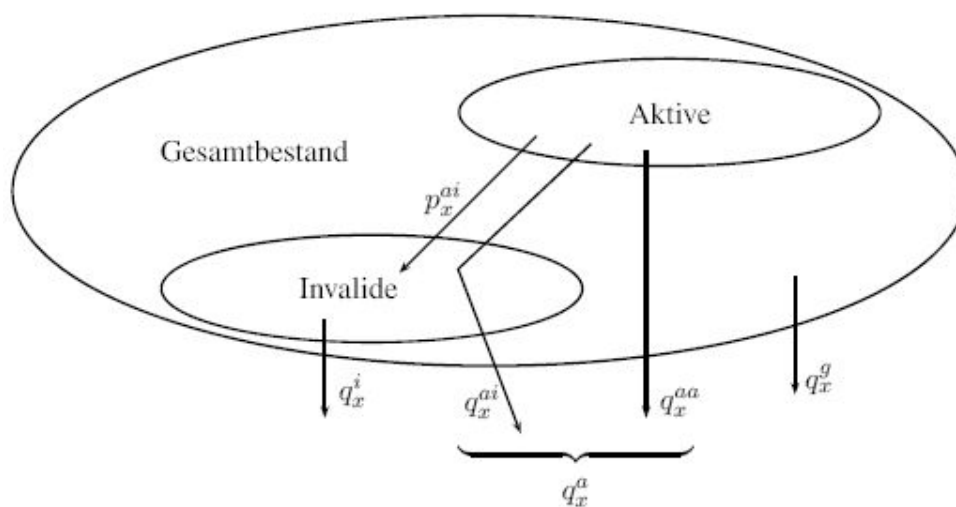


Abbildung 3.3: Übergänge

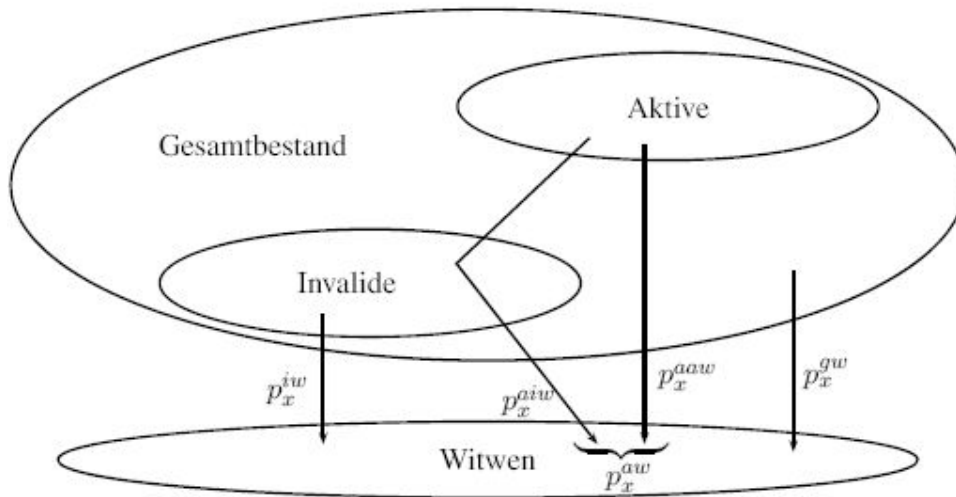


Abbildung 3.4: Übergänge zum Witwenbestand

Der Übergang in den Witwenbestand beruht nicht nur auf der Wahrscheinlichkeit, dass die versicherte Person in einem bestimmten Jahr verstirbt, sondern auch darauf, dass die Person verheiratet ist, und dass die Ehefrau das nächste Jahr erlebt. Exemplarisch betrachten wir nun den Übergang von Aktiv direkt in den Witwenbestand

$$p_x^{aaw} = q_x^a \cdot h_x \cdot {}_{1/2}p_{y(x)+1/2}$$

Wir wissen, dass nach dem Axiom der Todeszeitpunkt erwartungsgemäß zur Jahresmitte erfolgt. Mit Wahrscheinlichkeit h_x ist die Person in diesem Zeitpunkt verheiratet. Das Alter der Ehefrau ist mit $y(x)$ gegeben. Nachdem die Ehefrau nur die zweite Jahreshälfte überleben muss benötigen wir eine Darstellung für ${}_{1/2}p_{y(x)+1/2}$.

Wir folgern aus dem Axiom 3.4:

$$p_x = s p_x \cdot (1-s) p_{x+s} \iff (1-s) p_{x+s} = \frac{p_x}{s p_x} = \frac{1 - q_x}{1 - s \cdot q_x}$$

und, wenn wir für $s = 1/2$ einsetzen folgt:

$$\begin{aligned} {}_{1/2}p_{x+1/2} &= \frac{1 - q_x}{1 - q_x/2} \\ {}_{1/2}q_{x+1/2} &= \frac{1/2 \cdot q_x}{1 - q_x/2} \end{aligned}$$

Für Details und genaue Ausführungen sei an dieser Stelle an [10] verwiesen.

3.4 Barwerte, Prämien, Reserven

Wir werden nun noch die allgemeinen Formeln des diskreten Modells zeigen.

Wir setzen dazu zwei weitere Axiome voraus:

Axiom 3.9 *Axiome der Richttafeln*

Neben dem Axiom der Gleichverteilung 3.4 gelten ausserdem:

Axiom 2: Die Verzinsung erfolgt linear am Ende eines Jahres. Somit werden keine unterjährigen Zinseszinsseffekte berücksichtigt:

$$v^s := \frac{1}{1 + s \cdot i} \quad 0 < s < 1$$

Axiom 3: Die Zahlung der Renten erfolgt deterministisch am Beginn des Zahlungsabschnitts. Die Zahlung erfolgt z.B. immer am Jahresanfang und nicht unmittelbar nach dem die Rente auslösenden Ereignis.

Definition 3.10 *Wir führen folgende Bezeichnungen ein*

x *Alter der Person zum Versicherungsbeginn (siehe auch Beispiel 3.5)*

z *Pensionierungsalter*

i *Zinssatz*

a *versicherungsmathematischer Barwert einer Zahlung*

Wir bezeichnen mit Barwert immer den abdiskontierten Erwartungswert einer Zahlung.

Vorüberlegungen:

- 1) Wir betrachten eine einmalige Zahlung L , die nach dem Ablauf von $l \in \mathbb{N}$ Jahren fällig wird, falls die Person bis dahin noch im Bestand ist. Als Barwert zum Zeitpunkt 0 ergibt sich mit $v = \frac{1}{1+i}$, wobei i der diskrete Zinssatz ist:

$$a := v^l \cdot {}_l p_x \cdot L$$

- 2) Wir betrachten laufende Renten. Das sind Renten, die schon bezahlt werden. Ein Beispiel dafür sind Invalidenrenten für eine invalide Person, die zum Betrachtungszeitpunkt schon invalide ist.
- 3) Wir betrachten aufgeschobene Rente. Das sind Renten, die zum Betrachtungszeitpunkt noch nicht fällig sind. Als Beispiel haben wir eine Altersrente, die noch nicht bezahlt wird, da die Person das Rentenalter noch nicht erreicht hat. Wir bezeichnen den Barwert einer aufgeschobenen Rente als Anwartschaftsbarwert.
- 4) Wir betrachten im folgenden immer vorschüssige Renten vom Jahresbetrag 1. Das bedeutet, die Renten werden immer am ersten Tag eines Jahres in einer Rate der Höhe 1 bezahlt. Für die Barwertberechnung von Renten der Höhe $\neq 1$ multiplizieren wir die Barwerte mit der Rentenhöhe.

Mit diesen Überlegungen und den Axiomen erhalten wir die Darstellung der folgenden Barwerte. Ausführliche Beschreibungen finden sich in [10]

3.4.1 Barwerte laufender Renten

Zunächst betrachten wir laufende Renten und die dafür nötigen Barwerte.

- Altersrente (AR)

$$a_x^r = \sum_{l \geq 0} {}_l p_x^r \cdot v^l$$

- Witwenrente (WR)

$$a_y^w = \sum_{l \geq 0} {}_l p_y^w \cdot v^l$$

- Invalidenrente (IR) abgekürzt

$$a_x^{i(z)} = \sum_{l=0}^{z-x-1} {}_l p_x^i \cdot v^l$$

- Invalidenrente (IR) lebenslang

$$a_x^i = a_x^{i(z)} + {}_{z-x} p_x^i \cdot v^{z-x} \cdot a_z^r$$

3.4.2 Anwartschaftsbarwerte eines Alters- bzw. Invalidenrentners auf Witwenrente

- Altersrentner

$$a_x^{rw} = \sum_{l \geq 0} {}_l p_x^r \cdot v^l \cdot q_{x+l}^r \cdot h_{x+l} \cdot v^{1/2} \cdot a_{y(x+l)+1/2}^w$$

- Invalidenrentner

$$a_x^{iw} = \sum_{l=0}^{z-x-1} {}_l p_x^i \cdot v^l \cdot q_{x+l}^i \cdot h_{x+l} \cdot v^{1/2} \cdot a_{y(x+l)+1/2}^w + {}_{z-x} p_x^i \cdot v^{z-x} \cdot a_z^{rw}$$

mit

$$\begin{aligned} a_{y+1/2}^w &= {}_{1/2} p_{y+1/2}^w \cdot v^{1/2} \cdot a_{y+1}^w \\ {}_{1/2} p_{y+1/2}^w &= \frac{1 - q_y^w}{1 - q_y^w/2} \end{aligned}$$

3.4.3 Anwartschaftbarwerte eines Aktiven

- auf Altersrente (AR)

$${}_{z-x}a_x^{aA} = {}_{z-x}p_x^a \cdot v^{z-x} \cdot a_z^r$$

- auf Invalidenrente (IR) abgekürzt

$$a_x^{ai(z)} = \sum_{l=0}^{z-x-1} {}_l p_x^a \cdot v^l \cdot i_{x+l} \cdot v^{1/2} \cdot a_{x+l+1/2}^{i(z)}$$

mit

$$a_{x+1/2}^{i(z)} = {}_{1/2}p_{x+1/2}^i \cdot v^{1/2} \cdot a_{x+1}^{i(z)}$$

- auf Invalidenrente (IR) lebenslang

$$a_x^{ai} = \sum_{l=0}^{z-x-1} {}_l p_x^a \cdot v^l \cdot i_{x+l} \cdot v^{1/2} \cdot a_{x+l+1/2}^i$$

mit

$$a_{x+1/2}^i = {}_{1/2}p_{x+1/2}^i \cdot v^{1/2} \cdot a_{x+1}^i$$

- auf AR und lebenslängliche IR

$$a_x^{aiA} = a_x^{ai} + a_x^{aA}$$

3.4.4 Anwartschaftsbarwerte eines Aktiven auf Witwenrente

- bei Tod als Aktiver:

$$\tilde{a}_x^{aaw} = \sum_{l=0}^{z-x-1} {}_l p_x^a \cdot v^l \cdot q_{x+l}^{aa} \cdot h_{x+l} \cdot v^{1/2} \cdot a_{y(x+l)+1/2}^w$$

- bei Tod als AR:

$$a_x^{aAw} = {}_{z-x}p_x^a \cdot v^{z-x} \cdot a_z^{rw}$$

- bei Tod als Aktiver oder AR:

$$a_x^{aaw} = \tilde{a}_x^{aaw} + a_x^{aAw}$$

- bei Tod als IR:

$$a_x^{aiw} = \sum_{l=0}^{z-x-1} i p_x^a \cdot v^l \cdot i_{x+l} \cdot v^{1/2} \cdot a_{x+l+1/2}^{iw}$$

mit

$$a_{x+1/2}^{iw} = {}_{1/2}p_{x+1/2}^i \cdot v^{1/2} \cdot a_{x+1}^{iw} + {}_{1/2}q_{x+1/2}^i \cdot h_x \cdot a_{y(x)+1/2}^w$$

- Anwartschaftsbarwert eines Aktiven auf WR

$$a_x^{aw} = a_x^{aaw} + a_x^{aiw}$$

Dadurch ergibt sich als gesamter Anwartschaftsbarwert eines x -jährigen:

$$a_x = {}_{z-x}a_x^{aA} + a_x^{ai(z)} + a_x^{aw}$$

3.4.5 Prämienbarwert

Auch hier betrachten wir vorschüssige Prämien der Höhe 1. Wir bezeichnen den versicherungsmathematischen Barwert der Prämien eines x -Jährigen, wobei die Prämien bis Alter z bezahlt werden mit $a_{x:z-x}^a$. Die Höhe des Prämienbarwerts berechnet sich wie folgt:

$$a_{x:z-x}^a := \sum_{k=0}^{z-x-1} v^k \cdot {}_k p_x^a$$

Dieser Barwert wird oft als Aktivenrente bezeichnet, da er eine ähnliche Struktur aufweist wie a_x^r .

Um die tatsächlich nötige Prämie für eine Versicherung zu berechnen benötigen wir noch das Äquivalenzprinzip.

Definition 3.11 *Äquivalenzprinzip*

Zum Zeitpunkt des Versicherungsbeginns haben Prämienbarwert und Leistungsbarwert die gleiche Höhe.

Damit berechnen wir die jährliche, konstante und vorschüssige Prämie wie folgt:

$$\pi := \frac{a_x}{a_{x:z-x}^a}$$

3.4.6 Reserven

Ein Versicherungsunternehmen muss zur Deckung der zukünftigen Leistungen Reserven bilden. In den Reserven müssen die erwarteten Leistungen und die erwarteten zukünftigen Prämien berücksichtigt werden. Wir wissen bereits, dass nach dem Äquivalenzprinzip die Reserve zum Zeitpunkt des Versicherungsbeginns den Wert Null haben muss.

Definition 3.12 *Reserve*

Die Reserve wird folgendermaßen definiert:

$$V(x) := a_x - a_{x:\overline{z-x}|}^a \quad (3.2)$$

Bemerkung 3.13 *Pensionsrückstellungen in der betrieblichen Altersversorgung*

In der betrieblichen Altersversorgung besteht die Möglichkeit, dass ein Arbeitgeber seinem Arbeitnehmer Leistungen zusagt. Diese können aus Altersrenten, Invalidenrenten und Witwenrenten bestehen. Der Arbeitgeber muss in dieser Situation Pensionsrückstellungen bilden. Diese entsprechen sinnvollerweise der Reserve, die ein Versicherungsunternehmen für die gleichen Leistungen bilden muss. Die Pensionsrückstellungen werden in der Bilanz des Arbeitgebers gewinnmindernd berücksichtigt. Dazu schreibt das Einkommensteuergesetz die Verwendung des sogenannten Teilwerts vor (§ 6a EStG), der nach (3.2) berechnet wird.

Bemerkung 3.14 *Rechnerisches Höchstalter*

Wir setzen für die Berechnung das rechnerische Höchstalter ω auf 115 Jahre fest. Vergleiche dazu auch ω_0 in Kapitel 2. Damit lassen sich die vorgestellten Formeln direkt implementieren.

Weitere Details und ausführliche Beweise finden sich beispielsweise in [10].

3.5 Kommutationswerte

Die vorgestellten Berechnungen lassen sich auch noch anders darstellen. Wir betrachten hier beispielhaft den Barwert einer laufenden Altersrente a_x^r .

Dazu definieren wir die Kommutationswerte

Definition 3.15 *Kommutationswerte*

$$N_x^r := \sum_{l \geq 0} D_{x+l}^r \quad (3.3)$$

$$D_x^r := \ell_x^r \cdot v_x \quad (3.4)$$

mit

$${}_l p_x^r = \frac{\ell_{x+l}^r}{\ell_x^r}$$

Bemerkung 3.16 Die Größe ℓ_x^r gibt die Anzahl der lebenden Altersrentner vom Alter x an. Daraus folgt, dass D_x^r die diskontierte Anzahl der lebenden Altersrentner ist. Diese Größe hat keine Aussagekraft und lässt sich nicht interpretieren. Wir sehen also, dass die Kommutationswerte nur Hilfsgrößen sind.

Mit den Kommutationswerten (3.3) und (3.4) können wir den Barwert der laufenden Altersrente auch so darstellen:

$$a_x^r = \frac{N_x^r}{D_x^r} \quad (3.5)$$

Den Anwartschaftsbarwert auf Altersrente können wir dann so berechnen:

$${}_{z-x}a_x^{aA} = \frac{D_z^a}{D_x^a} \cdot a_x^r \quad (3.6)$$

wobei D_x^a analog zu D_x^r definiert wird mit. Es wird lediglich ℓ_x^r zu ℓ_x^a , der Anzahl der lebenden Aktiven.

Nun können wir bei festem Zinssatz von z.B. 6 % die Kommutationswerte N_x^r , D_x^r und D_x^a berechnen. Diese legen wir in Tabellen ab und dann lassen sich Barwerte mit sehr geringem numerischen Aufwand ermitteln. Vor allem deshalb wurden diese Hilfsgrößen eingeführt.

Auch alle anderen Barwerte und Anwartschaftsbarwerte lassen sich mit Hilfe von Kommutationswerten berechnen. Dazu werden ähnliche Definitionen wie (3.3) und (3.4) benötigt. Diese werden wiederum in Tabellen abgelegt und mit Formeln analog zu (3.5) und (3.6) werden die Barwerte berechnet. Ausführlichere Beschreibungen finden sich beispielsweise in [5].

In heutigen Berechnungen spielen sie nur noch eine untergeordnete Rolle. Wir werden die deutlich flexibleren Barwertformeln aus den Abschnitten (3.4.2) bis (3.4.5) verwenden. Kommutationswerte sind nur für stark vereinheitlichte Berechnungen geeignet.

Kapitel 4

Zeitstetige Modellierung

Die Zufallskomponente eines Lebensversicherungsvertrags besteht darin, dass eine Person zwischen endlich vielen Zuständen zu endlich vielen zufälligen Zeitpunkten wechselt. Wenn wir den Zustandsverlauf über die Zeit betrachten und durch eine Funktion $X(t)$ darstellen können wir das als stochastischen Prozess modellieren.

Wir werden den Zustandsverlauf einer versicherten Person mit einem Markovprozess modellieren. Hierbei ist für die bedingte Verteilung des zukünftigen Prozessverlaufs gegeben die Historie bis zum Zeitpunkt s nur der Zustand zum Zeitpunkt s entscheidend. Dies ist eine ganz ähnliche Situation, wie die in der Stationaritätsbedingung (2.5).

Wir modellieren den Zustandsverlauf einer Person in der Personenversicherung mit Hilfe von Markovprozessen. Die dazu benötigte Theorie zeitstetiger Markovprozesse ist im Anhang (Kapitel 8) dargestellt. Tiefergehende Theorie zu Markovprozessen findet sich beispielsweise in [13].

4.1 Markovprozesse in der Personenversicherung

Wir wollen nun die Theorie der Markovprozesse auf die Personenversicherung übertragen.

Definition 4.1 *Modell*

Es sei $(X_t)_{t \geq 0}$ ein Markovprozess, der Werte auf einem diskreten, abzählbaren Zustandsraum \mathcal{S} annimmt. Weiter sei $p_{gk}(s, t) = P(X_s = g \mid X_t = k)$ mit $s \geq t$, $s, t \in \mathbb{R}_0^+$ und $g, k \in \mathcal{S}$ die Übergangswahrscheinlichkeit und $\mu_{gk}(t)$ die Übergangsintensität von Zustand g nach k .

Der Zustandsraum \mathcal{S} modelliert alle Zustände, in denen eine versicherte Person sein kann. Damit wird der Zustandsverlauf einer versicherten Person durch den Markovprozess X_t modelliert.

Wir haben in Kapitel 2 die Ausscheidewahrscheinlichkeiten und -intensitäten der versicherten Person dargestellt. Diese werden nun durch die Übergangswahrscheinlichkeiten

und -intensitäten des Markovprozesses repräsentiert. Der Markovprozess besitzt die Übergangintensitäten

$$\begin{aligned}\mu_{gk}(t) &= \lim_{h \searrow 0} \frac{p_{gk}(t, t+h)}{h} = \lim_{h \searrow 0} \frac{P(X_{t+h} = k \mid X_t = g)}{h} \\ \mu_{gk}(t)h &= P(X_{t+h} = k \mid X_t = g) + o(h)\end{aligned}$$

Die Ausscheideintensität im Ausscheidemodell ist nach Kapitel 2 gegeben durch

$$\begin{aligned}\mu_{x,j}(t) &= \frac{f_{x,j}(t)}{1 - F_x(t)} \\ \mu_{x,j}(t)dt &= P(T_{x,j} \leq t + dt \mid T_x > t) + o(dt)\end{aligned}$$

Wenn wir den Zustand g nun als „lebend“ betrachten, ergibt sich $X_t = g \iff T_x > t$. Und wenn wir das Ausscheiden aus Ursache j mit dem Zustand k des Markovprozesses identifizieren, so erhalten wir $X_s = k \iff T_{x,j} \leq s$. Wir sehen, dass sich die Ausscheideintensitäten und die Übergangintensitäten eindeutig entsprechen.

Dazu betrachten wir beispielhaft den zum Richttafelmodell gehörenden Markovprozess:

Beispiel 4 Richttafelmodell

Im praxisrelevanten Fall der Richttafeln haben die Räume folgende Gestalt:

$$\mathcal{S} := \{a, i, A, \ell, w, t\}$$

- a : aktiv
- i : invalide
- A : Altersrentner
- ℓ : Tod ohne Hinterlassung einer Witwe
- w : Tod mit Hinterlassung einer Witwe
- t : Tod der Witwe

Es gibt nur einen Anfangszustand:

$$A = \{a\}$$

Es gibt zwei absorbierende Schlusszustände:

$$S = \{\ell, t\}$$

Und die Menge der erlaubten Übergänge hat folgende Gestalt:

$$\ddot{U} = \{(a, i), (a, A), (a, \ell), (a, w), (i, A), (i, \ell), (i, w), (A, \ell), (A, w), (w, t)\}$$

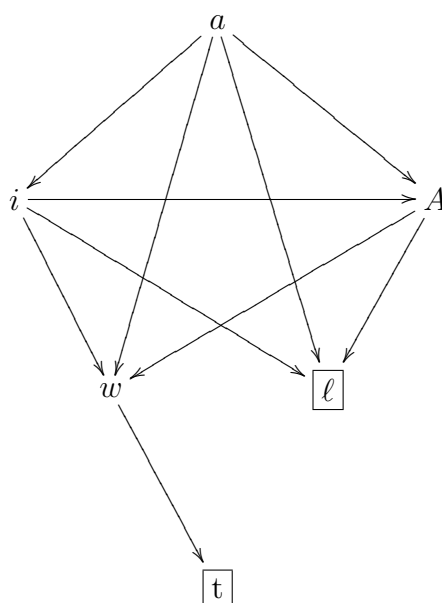


Abbildung 4.1: Richttafelmodell

Dieses Modell berücksichtigt keine Reaktivierungen. Es gibt also keinen Übergang von i zurück nach a . Das hat zur Folge, dass auch keine Zyklen ($a \rightleftarrows i$) auftreten können.

Wir betrachten nun eine Versicherung, die im Zeitpunkt 0 beginnt und für einen begrenzten Zeitraum von $n \in \mathbb{R}_0^+$ Jahren läuft. Der stochastische Prozess $(X_t)_{t \geq 0}$ beschreibt zu jedem Zeitpunkt t den Zustand der versicherten Person. Aufgefasst als Funktion von $[0, n] \rightarrow \mathcal{S}$ mit Startpunkt $X_0 = a$ ist der Prozess zu jeder Zeit in genau einem Zustand und hat auch nur endlich viele Sprünge zwischen den Zuständen.

Mit den im Anhang vorgestellten Formeln, insbesondere der Kolmogorov-Differentialgleichung lassen sich zeitstetige Markovprozesse in der Personenversicherung anwenden.

Wir haben die Formeln für Barwerte und Prämien im diskreten Modell schon kennengelernt. Wir wollen im Folgenden ähnliche Formeln auch für das zeitstetige Modell herleiten.

Nachdem wir in den ersten Kapiteln die Verteilung der Sterblichkeit und anderer Ausscheideursachen modelliert haben können wir nun mit Hilfe der entwickelten Theorie weiterarbeiten.

4.2 Leistungen

Wir betrachten eine Versicherung mit Zustandsverlauf, der durch einen Markovprozess dargestellt wird. Grundsätzlich gibt es zwei Arten von Versicherungsleistungen, die zufällig auftreten:

- 1) Übergangsleistungen. Diese werden immer dann fällig, wenn sich der Zustand der versicherten Person ändert. Klassisches Beispiel ist eine Todesfallsumme bei einer Lebensversicherung.
- 2) Verbleibensleistungen. Diese sind zu bezahlen solange die Person in einem bestimmten Zustand verbleibt. Beispiel dazu ist die Invalidenrente. Ebenso lässt sich ein laufender Beitrag (Prämie) als negative Verbleibensleistung betrachten.

Des weiteren gibt es noch die Möglichkeit vertraglich vereinbarter fester Zahlungen, die bei Erreichen des Endalters fällig werden. Der einzige für uns wichtige Fall hierzu ist die Erlebensfallsumme, die die Versicherung bezahlt, wenn die Person das vorher definierte Endalter (z.B. 65) erreicht.

Definition 4.2 *Leistungen und Prämien*

Es seien $j, k \in \mathcal{S}$ und $s, t \in \mathbb{R}_0^+$, $s \leq t$

- 1) (*Übergangsleistung*) Wir bezeichnen Übergangsleistungen, die für den Zustandswechsel von j nach k zur Zeit t fällig werden mit

$$b_{jk}(t)$$

Diese Zahlungen treten jeweils nur genau einmal auf.

- 2) (*Verbleibensleistung*) Für den Verbleib in Zustand j bezeichnen wir die stetigen Verbleibenszahlungen mit Rate

$$b_j(t)$$

Wir erhalten für den Verbleib in Zustand j von Zeitpunkt s bis t insgesamt

$$\int_s^t b_j(\tau) d\tau$$

- 3) (*Prämie*) Wir definieren die stetige Prämie mit Rate

$$\pi(t)$$

Analog der Verbleibensleistung und erhalten als gesamte Prämienzahlung während s bis t

$$\int_s^t \pi(\tau) d\tau$$

4.3 Barwerte und Reserven

Um die zugesagten zukünftigen Leistungen zum heutigen Zeitpunkt bewerten zu können benötigen wir deren Barwert. Darin gehen einerseits Zins- und Zinseszinsseffekte sowie auch das Ausscheideverhalten ein.

Die Zinsstruktur modellieren wir mit einem stetigen Zinssatz mit Rate $r(t)$. Das bedeutet, dass der Diskontfaktor zum Zeitpunkt s bezüglich Zeitpunkt t folgende Gestalt hat:

$$v(s, t) := e^{-\int_s^t r(\tau) d\tau}, 0 \leq s < t$$

Falls $r(t) \equiv r \forall t$, ist ergibt sich

$$v(s, t) = e^{-r(t-s)}, 0 \leq s < t$$

Damit hat eine zum Zeitpunkt t fällig werdende sichere Zahlung in Höhe von L zum Zeitpunkt s den Wert

$$v(s, t)L = e^{-\int_s^t r(\tau) d\tau} \cdot L$$

In unserem Kontext sind die Zahlungen nicht sicher, sondern unterliegen dem Zufall. Wir können die Zahlung L , und auch alle für uns relevanten Zahlungen, durch eine Bernoulli-Zufallsvariable modellieren. Mit Wahrscheinlichkeit p tritt die Zahlung ein, und mit Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p$ tritt die Zahlung nicht ein.

Wir werden nun den Erwartungswert davon berechnen. Also haben wir insgesamt den sogenannten versicherungsmathematischen Barwert:

$$a(s) := E(v(s, t)L) = v(s, t) \cdot p \cdot L \quad (4.1)$$

Ein Versicherungsunternehmen muss zur Deckung zukünftiger Zahlungsverpflichtungen Reserven bilden.

Definition 4.3 *Reserve*

Wir definieren die Reserve

$$V : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}; t \mapsto V(t)$$

Der Wert von $V(t)$ beschreibt zu jedem Zeitpunkt t die Höhe der Reserve, die das Versicherungsunternehmen zur Deckung zukünftiger Zahlungsverpflichtungen rechnermäßig aufbauen muss.

Diese Reserve beinhaltet einerseits die erwarteten Leistungen, die wir mit dem versicherungsmathematischen Barwert (4.1) darstellen. Durch den Barwert der Leistungen wird die Reserve erhöht. Andererseits verlangt ein Versicherungsunternehmen von seinen Kunden Prämien. Auch diese sind in vielen Fällen zufällig. Die zukünftigen Prämien werden in der Reserve auch berücksichtigt.

Für die Höhe der Reserve verwenden wir das Erwartungswertprinzip:

$$V(t) = a(t) - E \left(\int_t^\infty \pi(\tau) d\tau \right) \quad (4.2)$$

Wir betrachten zuerst nur die versicherungsmathematischen Barwerte der Leistungen, also $a(t)$.

Wir betrachten nun 4 Beispiele, die für einen Lebensversicherungsvertrag wichtig sind. In allen 4 Beispielen sind wir im einfachen Ausscheidemodell mit einer Ursache. Dabei sei a der Zustand aktiv und t der Zustand tot.

Beispiel 5 Erlebensfallsumme

Wir betrachten eine reine Erlebensfallversicherung, die nach einem festen Zeitraum von n Jahren die Summe $b(n)$ an die jetzt x -jährige Person auszahlt, falls sie noch lebt. Der Barwert der Zahlung ist (bei einem vorausgesetzten stetigen Zins mit Rate $r(t)$) zum jetzigen Zeitpunkt t :

$$v(t, n)b(n) = e^{-\int_t^n r(s)ds} \cdot b(n), 0 \leq t < n$$

Der erwartete (versicherungsmathematische) Barwert ist nun

$$a_1(t) = E(v(t, n)b(n)) = e^{-\int_t^n r(s)ds} \cdot b(n) \cdot p_{aa}(t, n), 0 \leq t < n \quad (4.3)$$

Beispiel 6 Todesfallsumme

Bei einer reinen Todesfall- oder Risikolebensversicherung betrachten wir den Fall, dass die Versicherung die Summe von $b(t)$ an die Hinterbliebenen der versicherten Person auszahlt, falls die versicherte Person in $t \in [0, n]$ verstirbt.

Falls wir jetzt in Zeitpunkt t sind und die Person in s verstirbt, dann gilt für den Barwert

$$v(t, s)b(s) \quad t < s$$

Mit Wahrscheinlichkeit $\mu_{at}(s)dt$ verstirbt die Person in $(s, s+dt]$ nach (2.3). Sie muss aber auch von t bis zum Zeitpunkt s überleben. Somit ergibt sich für den erwarteten Barwert in jedem kleinen Zeitintervall dt :

$$v(t, s) \cdot b(s) \cdot \mu_{at}(s)dt \cdot p_{aa}(t, s) \quad t < s$$

Wir betrachten nun den infinitesimalen Fall und integrieren über alle möglichen Todeszeitpunkte $s \in [t, n]$ und erhalten damit

$$a_2(t) = \int_t^n v(t, s) \cdot \mu_{at}(s) \cdot p_{aa}(t, s) \cdot b(s)ds, 0 \leq t < n$$

Beispiel 7 *Laufende Rente*

Wir betrachten nun eine Rentenzahlung, die vom Zeitpunkt t bis zum Ausscheiden zum Zeitpunkt s die stetige Rente mit Rate $b(\tau)$ auszahlt.

Der Barwert für die Zahlung in s zum Bewertungszeitpunkt t ist in kleinem Zeitintervall dt :

$$v(t, s) \cdot b(s) dt \quad t < s$$

und der erwartete Barwert dieser Zahlung ist dann

$$v(t, s) \cdot p_{aa}(t, s) \cdot b(s) dt \quad t < s$$

daraus ergibt sich mit Integration über alle möglichen Zeitpunkte von t bis ∞

$$a_3(t) = \int_t^{\infty} v(t, s) \cdot p_{aa}(t, s) \cdot b(s) ds \quad 0 \leq t \quad (4.4)$$

Beachte, dass in den meisten praxisrelevanten Fällen ein endliches rechnerisches Höchstalter ω (vgl. Kapitel 2) existiert. Damit können wir dann die obere Grenze des Integrals endlich wählen. Es gibt auch noch die Möglichkeit eines deterministischen Endalters. Hierbei wird vertraglich eine maximale Laufzeit vereinbart. Als Beispiel hierfür kann man eine Invaliditätsversicherung nennen, die bis zum 65. Lebensjahr eine Invalidenrente bezahlt.

Beispiel 8 *Aufgeschobene Rente*

Nun betrachten wir noch den Fall der aufgeschobenen Rente. Darunter fallen alle Rentenzahlungen, die zum jetzigen Zeitpunkt noch nicht begonnen haben. Diese können zufällig ausgelöst werden (Invalidenrenten) oder auch deterministisch beginnen (Altersrente).

Wir berechnen dafür jeweils den Barwert bzw. die Reserve $V_k(t)$ zum Startzeitpunkt der Rente. Wobei t entweder der vertraglich geregelte Beginn oder der zufällige Zeitpunkt des Renteneintritts ist. Dann betrachten wir die Rente als Auszahlung einer Erlebensfallleistung zum Startzeitpunkt der Rente.

Es ergibt sich im Falle der Altersrente eine Erlebensfallsumme in Höhe des Rentenbarwerts zum Renteneintrittsalter. Sei der Zeitpunkt des Renteneintrittsalters mit z bezeichnet, dann folgt für den versicherungsmathematischen Barwert des Rentenbarwerts zur Zeit t analog zu (4.3) und (4.4)

$$a_4(t) = v(t, z) p_{aa}(t, z) a_3(z) = e^{-\int_t^z r(s) ds} \cdot p_{aa}(t, z) \cdot \int_z^{\omega} v(t, s) p_{aa}(t, s) b(s) ds$$

Somit haben wir mit Hilfe des Erwartungswertprinzips eine Möglichkeit gefunden, mit der wir Barwerte und Reserven berechnen können.

Bemerkung 4.4 *Rechnungsgrundlagen 1. Ordnung*

Wir haben bisher alle Betrachtungen zur Berechnung der Reserven immer mit Hilfe des Erwartungswertprinzips gemacht. Die Ruintheorie (siehe auch [6]) lehrt uns, dass der reine Erwartungswert als Reserve alleine nicht ausreichend ist. Um diesem Umstand Rechnung zu tragen, werden wir im folgenden immer Rechnungsgrundlagen erster Ordnung verwenden. Dabei werden die reinen statistischen Ausscheidewahrscheinlichkeiten mit Sicherheitszuschlägen versehen. Dadurch erhalten wir dann mit dem Erwartungswertprinzip eine etwas höhere Reserve. Die von uns verwendeten Sterblichkeiten entsprechen also nicht den wahren Sterblichkeiten.

4.4 Prämien

Die beschriebenen Reserven baut das Versicherungsunternehmen mit den von den Kunden bezahlten Prämien auf.

Definition 4.5 *Prämien und Prämienbarwerte*

1) (*Prämie*) Wir definieren mit

$$\pi : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+; t \mapsto \pi(t), t \geq 0$$

die Rate der stetigen Prämienzahlung zur Zeit t .

2) (*Prämienbarwert*) Wir definieren den Prämienbarwert der zukünftigen Prämien zur Zeit t als

$$\Pi(t) := \int_t^\infty v(t, s)\pi(s)ds, t \geq 0$$

3) (*Erwarteter Prämienbarwert*) Der erwartete Prämienbarwert ist definiert durch

$$E(\Pi(t)) = \int_t^\infty v(t, s)\pi(s)p_{aa}(t, s)ds, t \geq 0$$

Um die Prämien zu berechnen liegt allen Versicherungsarten das folgende Prinzip zugrunde:

Definition 4.6 *Äquivalenzprinzip*

Das Äquivalenzprinzip der Versicherung fordert, dass bei Versicherungsbeginn der erwartete Barwert der Prämien und der der Leistungen gleich hoch sind.

Der einfachste Fall ist nun die sogenannte Einmalprämie, die der Versicherte am Versicherungsbeginn entrichtet. Diese hat nach dem Äquivalenzprinzip die Höhe $a(0)$. Im Falle laufender Prämien muss nun wiederum der erwartete, abdiskontierte Barwert der Prämien die Höhe $a(0)$ zum Zeitpunkt 0 haben. Wir berechnen den Prämienbarwert mit Hilfe der Formel (4.4) aus Beispiel 3. Dabei betrachten wir die Prämienzahlung als negative laufende Rente. Und damit berechnen wir dann die Höhe der benötigten laufenden Prämie.

Beispiel 9 *Einmalprämie*

Wir betrachten eine Versicherung mit Leistungsbarwert zum Zeitpunkt 0 in Höhe von $a(0)$. Es ergibt sich als einmalige Prämie zum Zeitpunkt 0

$$\pi(0) = a(0)$$

Beispiel 10 *Laufende Prämie*

Wir betrachten nun eine Versicherung mit Leistungsbarwert in Höhe von $a(0)$. Nun betrachten wir eine laufende konstante Prämie. Die Höhe der laufenden Prämie wird mit dem Äquivalenzprinzip festgelegt:

$$E(\Pi(0)) = \int_0^\infty v(0, s)\pi(s)p(0, s)ds \stackrel{!}{=} a(0)$$

Auch die Kombination von beiden Prämienarten ist möglich, dann gilt $\pi(0) < a(0)$.

4.5 Einfaches Modell

Wir betrachten im Folgenden das einfache Ausscheidemodell mit der einzigen Ausscheidursache „Tod“.

4.5.1 Reserve

Annahme 4.1 Voraussetzungen

Die Versicherte Person ist bei Versicherungsbeginn $x \in \mathbb{R}_0^+$ Jahre alt.

Die Versicherung läuft über $n \in \mathbb{R}^+$ Jahre.

Die Versicherungsleistung besteht aus einer Todesfalleistung $b(t)$, die bei Eintritt des Todes zur Zeit $t \in (0, n)$ fällig wird und einer Erlebensfalleistung $b(n)$, die fällig wird, falls die versicherte Person den Zeitpunkt n erlebt.

Die Prämien bestehen aus einer Einmalprämie zum Zeitpunkt 0 in Höhe von $\pi(0)$ und einer laufenden Prämie, die stetig mit Rate $\pi(t)$ bezahlt wird, solange die Person lebt.

Die Zinsen seien stetig mit Rate $r(t)$.

Es bezeichne $\mu(t)$ die Ausscheideintensität in t und $p(s, t)$, $s \leq t$ die Überlebenswahrscheinlichkeit von s bis t .

Im Zeitpunkt 0 ist der erwartete Barwert aller Leistungen abzüglich der Prämien gegeben durch

$$\int_0^n e^{-\int_0^\tau r(s)ds} p(0, \tau) \{ \mu(x + \tau)b(\tau) - \pi(\tau) \} d\tau + b(n)e^{-\int_0^n r(s)ds} p(0, n)$$

Diese Darstellung ergibt sich aus einer Kombination der Barwertformeln in den Beispielen 5, 6 und 10.

Das Äquivalenzprinzip fordert, dass dieser Wert die Höhe 0 haben soll, da zum Zeitpunkt 0 die erwarteten Barwerte der Prämien und der Leistungen gleich hoch sein müssen. Damit haben wir eine Bedingung für $\pi(0)$.

Zu jedem Zeitpunkt $t \geq 0$ gilt folgende Definition

Definition 4.7 *Prospektive Reserve*

Die prospektive Reserve wird für ein Anfangsalter x , eine feste Laufzeit n und $t \in [0, n]$ festgelegt durch

$$V(t) = \int_t^n \underbrace{e^{-\int_t^\tau r(s)ds}}_I p(t, \tau) \underbrace{\{\mu(\tau)b(\tau) - \pi(\tau)\}}_{II} d\tau + \underbrace{b(n)e^{-\int_t^n r(s)ds}}_{IV} p(t, n) \quad (4.5)$$

Bemerkung 4.8 *Anschauung*

Die prospektive Reserve hat ihren Namen aus der Tatsache, dass man bei dieser Betrachtung vom Zeitpunkt t in die Zukunft sieht. Wir betrachten also alle zukünftigen Zahlungen von t bis n . Dabei steckt in (I) der Diskontfaktor und die Wahrscheinlichkeit bis τ zu überleben. In (II) steckt die Zahlung beim Ausscheiden in τ . In (III) ist die Prämienzahlung. Und schließlich steckt in (IV) die abdiskontierte Erlebensfallzahlung zusammen mit der Wahrscheinlichkeit diese zu erhalten.

Bemerkung 4.9 *Retrospektive Reserve*

Im Gegensatz dazu gibt es auch noch die retrospektive Formel. Diese hat die Form:

$$V(t) = e^{\int_0^t (r(s) + \mu(x+s))ds} \pi(0) + \int_0^t e^{\int_\tau^t (r(s) + \mu(x+s))ds} (\pi(\tau) - \mu(x + \tau)b(\tau)) d\tau, 0 < t \leq n$$

Unter der Voraussetzung, dass $V(0) = 0$ und $V(n) = 0$ ist die prospektive und die retrospektive Reserve zu jedem Zeitpunkt gleich hoch. Details und Interpretationen dazu finden sich z.B. in [12]. Wir benötigen nur die prospektive Darstellung.

4.5.2 Thiele'sche Differentialgleichung

Wir werden uns jetzt mit der zeitlichen Dynamik der Reserve beschäftigen. Dazu müssen wir zuerst noch den zugehörigen Markovprozess als Hilfsgröße bemühen. Dieser hat genau 2 Zustände (aktiv, tot) und nur einen Übergang mit Übergangsintensität μ . Wir verwenden die Theorie der Markovprozesse, weil wir mit den beschriebenen Formeln elegant arbeiten können.

Der benötigte Markovprozess arbeitet also auf folgendem Zustandsraum:

$$\text{Aktiv} \xrightarrow{\mu} \text{Tot}$$

Abbildung 4.2: Einfaches Modell

$p(s, t)$, $s \leq t$ ist die Wahrscheinlichkeit in $[s, t]$ ununterbrochen im Zustand aktiv zu bleiben.

Dann gilt für die Veränderung der Reserve folgender Satz

Satz 4.10 *Thiele'sche Differentialgleichung im einfachen Ausscheidemodell*

Für festen Endzeitpunkt n gilt

$$\frac{d}{dt}V(t) = (r(t) + \mu(x+t))V(t) + \pi(t) - \mu(x+t)b(t), t > 0 \quad (4.6)$$

mit der Randbedingung $V(n) = b(n)$

Beweis:

Der Beweis ist an die Beweise aus [9] und [12] angelehnt.

Die Kolmogorov Differentialgleichung (8.5) liefert

$$\frac{d}{dt}p(t, n) = \mu(t)p(t, n) \quad (4.7)$$

Der Übersichtlichkeit halber zerlegen wir die Reserve (4.5) in die beiden Summanden und betrachten diese getrennt.

Es gilt für die Ableitung des ersten Summanden von (4.5) mit der Kettenregel und (4.7)

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\int_t^n e^{-\int_t^\tau r(s)ds} p(t, \tau) \{ \mu(\tau)b(\tau) - \pi(\tau) \} d\tau \right) \\ = & -e^{-\int_t^t r(s)ds} p(t, t) (\mu(t)b(t) - \pi(t)) \\ & + \int_t^n \frac{d}{dt} \left(e^{-\int_t^\tau r(s)ds} p(t, \tau) \{ \mu(\tau)b(\tau) - \pi(\tau) \} \right) d\tau \\ = & (\pi(t) - \mu(t)b(t)) \\ & + \int_t^n \left(e^{-\int_t^\tau r(s)ds} r(t) p(t, \tau) + e^{-\int_t^\tau r(s)ds} p(t, \tau) \mu(t) \right) \{ \mu(\tau)b(\tau) - \pi(\tau) \} \\ = & (\pi(t) - \mu(t)b(t)) \\ & + \int_t^n e^{-\int_t^\tau r(s)ds} p(t, \tau) \{ \mu(\tau)b(\tau) - \pi(\tau) \} d\tau (r(t) + \mu(t)) \end{aligned}$$

Für die Ableitung des zweiten Summanden in (4.5) gilt mit der Produktregel und (4.7):

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(b(n) e^{-\int_t^n r(s)ds} p(t, n) \right) \\ = & b(n) \left(\frac{d}{dt} e^{-\int_t^n r(s)ds} p(t, n) + e^{-\int_t^n r(s)ds} \frac{d}{dt} p(t, n) \right) \\ = & b(n) e^{-\int_t^n r(s)ds} p(t, n) (r(t) + \mu(t)) \end{aligned}$$

Schließlich folgt durch Addition

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}V(t) = \\ & \pi(t) - \mu(t)b(t) \\ & + \left[\int_t^n e^{-\int_t^\tau r(s)ds} p(t, \tau) \{ \mu(\tau)b(\tau) - \pi(\tau) \} d\tau + b(n) e^{-\int_t^n r(s)ds} p(t, n) \right] (r(t) + \mu(t)) \\ = & \pi(t) - \mu(t)b(t) + V(t) (r(t) + \mu(t)) \end{aligned}$$

□

Damit haben wir eine Beschreibung der Änderung der Reserve zu jedem Zeitpunkt t . Wir können das folgendermaßen interpretieren: Die Reserve wird erhöht durch die Zinsen $r(t)V(t)$, durch das „Erbe“ der Ausgeschiedenen $\mu(x+t)V(t)$ und durch die Prämien $\pi(t)$. Davon sind dann noch die erwarteten Leistungen $\mu(x+t)b(t)$ abzuziehen. Die Randbedingung ist $V(n) = b(n)$. Unter dem Äquivalenzprinzip gilt auch noch $V(0) = \pi(0)$.

Mit Hilfe dieser Gleichung lassen sich im einfachen Ausscheidemodell die Reserven und Prämien zu jedem Zeitpunkt berechnen.

Bemerkung 4.11 *Berechnung mit der Thiele'schen Differentialgleichung*

Die numerische Berechnung der Reserve und der Prämie mit Hilfe der Thiele'schen Differentialgleichung geschieht nach dem Schema:

- 1) Randbedingung für $V(n)$ aufstellen. Leistungen definieren und Prämien vorerst nullsetzen.
- 2) Numerische Lösung der Differentialgleichung liefert $V(0)$
- 3) Mit dem Äquivalenzprinzip wird die laufende Prämie und/oder die Einmalprämie berechnet.

Genauer wird in Kapitel 6 herausgearbeitet.

Damit können wir alle Reserven und Prämien zu jedem beliebigen Zeitpunkt berechnen. Grundsätzlich können wir die Thiele'sche Differentialgleichung analytisch lösen, in der Praxis werden wir aber numerische Verfahren anwenden. Siehe dazu Kapitel 6.

Beispiel 11 *Risikolebensversicherung*

Wir betrachten eine Risikolebensversicherung, die der versicherten Person den Betrag $b(t)$ auszahlt, falls diese vor Ablauf des Zeitpunkts n verstirbt. Es wird im Zeitpunkt 0 eine Einmalprämie $\pi(0)$ fällig. Weitere Zahlungen treten nicht auf. Wir haben also folgende Situation:

$$\text{Aktiv} \xrightarrow{\mu} \text{Tot}$$

Abbildung 4.3: Risikolebensversicherung

Die Randbedingung am Versicherungsende ist $V(n) = 0$. Daraus berechnen wir durch Lösen der Thiele'schen Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}V(t) = (r(t) + \mu(x+t))V(t) - \mu(x+t)b(t)$$

die Reserve bis zum Zeitpunkt 0 und erhalten $V(0)$. Wegen der Äquivalenzbedingung gilt für die Prämie $\pi(0) = V(0)$.

Wir betrachten nun noch ein weiteres Beispiel der Personenversicherung.

Beispiel 12 *Laufende Rentenversicherung*

Wir betrachten eine Rentenversicherung, die eine stetige Rente in Höhe von $b(t)$ auszahlt, solange die Person lebt. Wir betrachten die Rente $b(t)$ wie eine negative Prämie.

$$\text{Rentner} \xrightarrow{\mu} \text{Tot}$$

Abbildung 4.4: Laufende Rentenversicherung

Die Randbedingung ist diesmal $V(\infty) = 0$. Aus Kapitel 2 wissen wir, dass ein rechnerisches Höchstalter ω existiert. Deshalb reduziert sich die Randbedingung wie folgt: $V(\omega - x) = 0$

Die Thiele'sche Differentialgleichung hat nun folgende Form:

$$\frac{d}{dt}V(t) = (r(t) + \mu(x + t))V(t) - b(t)$$

Hier berechnen wir wieder bis zum Zeitpunkt 0 zurück und erhalten die Einmalprämie dieser Versicherung.

4.6 Zusammengesetztes Modell

Nach dem einfachen Modell wenden wir uns nun wieder dem zusammengesetzten Modell zu. Analog zu Kapitel 2 betrachten wir wieder verschiedene wechselseitig exklusive Zustände in denen sich die versicherte Person befinden kann. Wir haben schon gesehen, dass sich die Zustände und der Wechsel zwischen den Zuständen durch einen Markovprozess $X(t)$ in stetiger Zeit darstellen lässt. Wir betrachten nun einen Zustandsraum und Übergänge, die keine Reaktivierungen zulassen wie wir ihn schon aus Abbildung 4.1 kennen.

Wir benötigen alle Leistungen und Prämien aus Definition 4.2 und fassen diese zu einem Zahlungsstrom zusammen.

Definition 4.12 *Zahlungsstrom*

Der Zahlungsstrom einer Versicherung ist definiert als:

$$B(t) := \sum_{j \in U} b_j(t) + \sum_{j \in U} \sum_{k \neq j \in U} b_{jk}(t), t \geq 0$$

Prämien in Zustand j werden als negative Verbleibensleistungen $b_j(t)$ berücksichtigt

4.6.1 Reserve

Wir werden wieder die Reserve betrachten, die ein Versicherungsunternehmen zur Deckung aller zugesagten Ansprüche benötigt. Wir modellieren den Zustandsverlauf einer versicherten Person mit einem Markovprozess $X(t)$, wie er in Abschnitt 4.1 beschrieben ist. Wir benötigen im Weiteren noch die zu $X(t)$ und zum Zeitpunkt t gehörige σ -Algebra $\mathcal{A}(t)$.

Genauso wie im einfachen Modell benutzen wir das Erwartungswertprinzip.

Definition 4.13 Reserve

Das prospektive Deckungskapital (Reserve) eines Versicherungsleistungsprozesses zur Zeit $s \geq 0$ bezüglich der σ -Algebra $(\mathcal{A}(t))_{t \geq 0}$ ist gegeben durch:

$$V(s) := E\left(\int_s^\infty B(t)dt \mid \mathcal{A}(s)\right)$$

Zu einem Zeitpunkt s ist die σ -Algebra $\mathcal{A}(s)$ durch die Historie von $X(t)$ gegeben. Wir wissen aus der Markoveigenschaft (8.1), dass die Verteilung des Prozesses nicht von ganz $\mathcal{A}(s)$ sondern nur vom Zustand $X(s)$ abhängt. Deshalb definieren wir die zustandsweise Reserve.

Definition 4.14 Zustandsweise Reserve

Das prospektive Deckungskapital (Reserve) eines Versicherungsleistungsprozesses zur Zeit $s \geq 0$ in Zustand j ist gegeben durch:

$$V_j(s) := E\left(\int_s^\infty B(t)dt \mid X_s = j\right)$$

Wir betrachten nun eine Versicherung mit Zahlungsstrom $B(\cdot)$, wobei die versicherte Person zu einem festen Zeitpunkt t im Zustand j ist.

Definition 4.15 Für $s \geq 0$ seien folgende Werte definiert:

L_j sei eine Erlebensfallzahlung in Zustand j .

$b_j(t)$ sei die stetige Zahlung (Verbleibensleistung), die in Zustand j fließt (Rente-Prämie)

$b_{jk}(t)$ sei die Übergangszahlung (Todesfalleistung) bei Zustandswechsel von j nach k in t

Die Versicherung laufe insgesamt von Zeitpunkt 0 bis $n \in \mathbb{R}$.

Der Zinssatz $r(t)$ sei stetig und deterministisch.

Wir haben den Diskontfaktor $v(s, t) = e^{-\int_s^t r(s)ds}$

Die Übergangswahrscheinlichkeiten und Intensitäten sind analog zu Kapitel 2.

Wir bezeichnen mit $\mu_j(t) := \sum_{k \neq j} \mu_{jk}(t)$ die Gesamtausscheideintensität aus Zustand j .

Wir überlegen uns nun, welche Fälle Einfluss auf die Reserve haben; wobei $j \neq k$ gilt:

- 1) Zustand ändert sich nach t nie. Die Erlebensfallsumme wird fällig.
- 2) Zustand ändert sich nach t nie. Laufende Zahlungen $b_j(s)$, $s \geq t$ werden fällig.
- 3) Zustand ändert sich in einem Zeitpunkt s von j nach k . Es werden Übergangszahlungen $b_{jk}(s)$ fällig.
- 4) Zustand ändert sich in einem Zeitpunkt s von j nach k . Es werden anschließend weitere, eventuell auch laufende, Zahlungen fällig. Diese haben ihrerseits eine Reserve $V_k(t)$.

Bemerkung 4.16 *Reserven der Folgezustände*

Die Reserve V_j beinhaltet nach Punkt 4 alle anderen Reserven V_k . Die Reserven V_k haben die gleiche Struktur, wie V_j . Wegen dem Ausschluss von Reaktivierungen ist V_j in keinem der V_k enthalten.

Ausgehend davon überlegen wir nun, wie sich diese Fälle auf die Reserve auswirken.

- 1) Der erwartete Barwert der Erlebensfallsumme ist analog zu Beispiel 5

$$V_{j1}(t) = L_j v(t, n) p_{jj}(t, n)$$

- 2) Der erwartete Barwert der laufenden Zahlungen ist analog zu Beispiel 7

$$V_{j2}(t) = \int_t^n v(t, s) p_{jj}(t, s) b_j(s) ds$$

- 3) Der erwartete Barwert der Übergangszahlungen ist analog zu Beispiel 6

$$V_{j3}(t) = \sum_{k \neq j} \int_t^n v(t, s) p_{jj}(t, s) \mu_{jk}(s) b_{jk}(s) ds$$

- 4) Der erwartete Barwert bei Übergängen mit anschließenden Zahlungen (Barwert V_k)

$$V_{j4}(t) = \sum_{k \neq j} \int_t^n v(t, s) p_{jj}(t, s) \mu_{jk}(s) (V_k(s)) ds$$

Insgesamt liefert diese Überlegung für die gesamte Reserve in Zustand j :

$$\begin{aligned} V_j(t) &:= V_{j1}(t) + V_{j2}(t) + V_{j3}(t) + V_{j4}(t) \\ &= L_j v(t, n) p_{jj}(t, n) \\ &\quad + \int_t^n v(t, s) p_{jj}(t, s) b(s) ds \\ &\quad + \sum_{k \neq j} \int_t^n v(t, s) p_{jj}(t, s) \mu_{jk}(s) b_{jk}(s) ds \\ &\quad + \sum_{k \neq j} \int_t^n v(t, s) p_{jj}(t, s) \mu_{jk}(s) (V_k(s)) ds \end{aligned} \tag{4.8}$$

Oftmals wird die Darstellung nach (4.8) als Definitionsformel der prospektiven Reserve bezeichnet.

4.6.2 Thiele'sche Differentialgleichung

Wir haben eine Darstellung der Reserve zu jedem Zeitpunkt und für jeden möglichen Zustand gefunden. Diese Darstellung ist für die Berechnung aber ungeeignet, da in ihr sowohl die zweidimensionalen Übergangswahrscheinlichkeiten als auch die eindimensionalen Übergangsintensitäten vorkommen. Vor allem die Übergangswahrscheinlichkeiten p_{jk} sind in den meisten Fällen weder analytisch noch numerisch darstellbar. Zur Lösung dieses Problems werden wir nun die zeitliche Dynamik der Reserve studieren. Ähnlich dem einfachen Modell ergibt sich die Thiele'sche Differentialgleichung im zusammengesetzten Modell.

Satz 4.17 *Thiele'sche Differentialgleichung im zusammengesetzten Modell*

Es gilt bei festem Endzeitpunkt $n \in \mathbb{R}_0^+$ für die Reserve:

$$\frac{d}{dt}V_j(t) = (r(t) + \mu_j(t))V_j(t) - \sum_{k \neq j} \mu_{jk}V_k(t) - b_j(t) - \sum_{k \neq j} b_{jk}(t)\mu_{jk}(t)$$

mit Randbedingungen $V_j(n) = L_j$

Beweis:

Der Beweis ist an [9] und [12] angelehnt, wobei wir noch einige Hilfsmittel benötigen:

Es gilt für eine stetig differenzierbare Funktion $f(t)$:

$$\frac{d}{dt} \int_t^n f(t, s) ds = -f(t, t) + \int_t^n \frac{d}{dt} f(t, s) ds$$

Die Kolmogorov-Differentialgleichung (8.5) liefert:

$$\frac{d}{dt} p_{jj}(t, n) = \mu_j(t) p_{jj}(t, n) - \sum_{g \neq j} \mu_{jg}(t) p_{gj}(t, n)$$

wobei wir beachten müssen, dass für alle $p_{gj}(t, n) \equiv 0$ gilt, da wir keine Reaktivierung zulassen. Also folgt:

$$\frac{d}{dt} p_{jj}(t, n) = \mu_j(t) p_{jj}(t, n) \tag{4.9}$$

ausserdem gilt:

$$\frac{d}{dt} v(t, n) = e^{-\int_t^n r(s) ds} \frac{d}{dt} \left(- \int_t^n r(s) ds \right) = v(t, n) r(t) \tag{4.10}$$

Wir wissen nun noch, dass gilt:

$$\begin{aligned} v(t, t) &= 1 \\ p_{jj}(t, t) &= 1 \end{aligned}$$

Der Übersichtlichkeit halber betrachten wir die vier Teile der Reserve separat.

1.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}V_{j1}(t) &= \frac{d}{dt}(L_j v(t, n)p_{jj}(t, n)) \\
&= L_j \left(\frac{d}{dt}v(t, n) \cdot p_{jj}(t, n) + v(t, n) \cdot \frac{d}{dt}p_{jj}(t, n) \right) \\
&\stackrel{(4.9),(4.10)}{=} L_j (v(t, n)r(t)p_{jj}(t, n) + v(t, n)\mu_j(t)p_{jj}(t, n)) \\
&= (r(t) + \mu_j(t))L_j v(t, n)p_{jj}(t, n) \\
&= (r(t) + \mu_j(t))V_{j1}(t)
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}V_{j2}(t) &= \frac{d}{dt} \int_t^n v(t, s)p_{jj}(t, s)b_j(s)ds \\
&= -v(t, t)p_{jj}(t, t)b_j(t) + \int_t^n \frac{d}{dt}(v(t, s)p_{jj}(t, s)b_j(s)) ds \\
&\stackrel{(4.9),(4.10)}{=} -b_j(t) + \int_t^n (v(t, s)r(t)p_{jj}(t, s) + v(t, s)\mu_j(t)p_{jj}(t, s)) b_j(s)ds \\
&= -b_j(t) + \int_t^n v(t, s)p_{jj}(t, s)b_j(s) (r(t) + \mu_j(t)) ds \\
&= -b_j(t) + V_{j2}(t) (r(t) + \mu_j(t))
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}V_{j3}(t) &= \frac{d}{dt} \sum_{k \neq j} \int_t^n v(t, s)p_{jj}(t, s)\mu_{jk}(s)b_{jk}(s)ds \\
&= \sum_{k \neq j} -v(t, t)p_{jj}(t, t)\mu_{jk}(t)b_{jk}(t) \\
&\quad + \sum_{k \neq j} \int_t^n \frac{d}{dt}(v(t, s)p_{jj}(t, s)\mu_{jk}(s)b_{jk}(s)) ds \\
&= - \sum_{k \neq j} \mu_{jk}(t)b_{jk}(t) \\
&\quad + \sum_{k \neq j} \int_t^n \frac{d}{dt}(v(t, s)p_{jj}(t, s)) \mu_{jk}(s)b_{jk}(s)ds \\
&\stackrel{(4.9),(4.10)}{=} - \sum_{k \neq j} \mu_{jk}(t)b_{jk}(t) \\
&\quad + \sum_{k \neq j} \int_t^n (v(t, s)r(t)p_{jj}(t, s) + v(t, s)\mu_j(t)p_{jj}(t, s)) \mu_{jk}(s)b_{jk}(s)ds \\
&= - \sum_{k \neq j} \mu_{jk}(t)b_{jk}(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k \neq j} \int_t^n (v(t, s) p_{jj}(t, s) \mu_{jk}(s) b_{jk}(s)) (r(t) + \mu_j(t)) ds \\
= & - \sum_{k \neq j} \mu_{jk}(t) b_{jk}(t) + V_{j3}(t) (r(t) + \mu_j(t))
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} V_{j4}(t) & = \frac{d}{dt} \sum_{k \neq j} \int_t^n v(t, s) p_{jj}(t, s) \mu_{jk}(s) V_k(s) ds \\
& = \sum_{k \neq j} -v(t, t) p_{jj}(t, t) \mu_{jk}(t) V_k(t) \\
& \quad + \sum_{k \neq j} \int_t^n \frac{d}{dt} (v(t, s) p_{jj}(t, s) \mu_{jk}(s) V_k(s)) ds \\
& = - \sum_{k \neq j} \mu_{jk}(t) V_k(t) \\
& \quad + \sum_{k \neq j} \int_t^n \frac{d}{dt} (v(t, s) p_{jj}(t, s)) \mu_{jk}(s) V_k(s) ds \\
& \stackrel{(4.9), (4.10)}{=} - \sum_{k \neq j} \mu_{jk}(t) V_k(t) \\
& \quad + \sum_{k \neq j} \int_t^n (v(t, s) r(t) p_{jj}(t, s) + v(t, s) \mu_j(t) p_{jj}(t, s)) \mu_{jk}(s) V_k(s) ds \\
& = - \sum_{k \neq j} \mu_{jk}(t) V_k(t) \\
& \quad + \sum_{k \neq j} \int_t^n (v(t, s) p_{jj}(t, s) \mu_{jk}(s) V_k(s)) (r(t) + \mu_j(t)) ds \\
& = - \sum_{k \neq j} \mu_{jk}(t) V_k(t) + V_{j4}(t) (r(t) + \mu_j(t))
\end{aligned}$$

Nun folgt aus 1., 2., 3. und 4.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} V_j(t) & = \frac{d}{dt} (V_{j1}(t) + V_{j2}(t) + V_{j3}(t) + V_{j4}(t)) \\
& = (r(t) + \mu_j(t)) (V_{j1}(t) + V_{j2}(t) + V_{j3}(t) + V_{j4}(t)) \\
& \quad - b_j(t) - \sum_{k \neq j} \mu_{jk}(t) b_{jk}(t) - \sum_{k \neq j} \mu_{jk}(t) V_k(t) \\
& = (r(t) + \mu_j(t)) V_j(t) - \sum_{k \neq j} \mu_{jk} V_k(t) - b_j(t) - \sum_{k \neq j} b_{jk}(t) \mu_{jk}(t)
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 4.18 *Interpretation*

Hierbei gilt ähnlich dem einfachen Modell: Die Reserve wird durch Zinsen und das „Erbe“ der Ausgeschiedenen erhöht. Der Übergang in einen Zustand k löst eine Sofortzahlung b_{jk} und auch eine eigene Reserve V_k aus. Schließlich steckt noch in b_j die Zahlung im Zustand j (Rente abzüglich Prämie). Die Randbedingung am Ende der Versicherung ist $V_j(n) = L_j$.

Wie zuvor schon erhalten wir mit dem Äquivalenzprinzip $V_j(0) = -b_j(0)$ eine Bedingung für die Prämienzahlung.

Dieses System von Differentialgleichungen lässt sich nun wie folgt lösen: Wir starten mit dem Zeitpunkt n und setzen alle Reserven $V_k(n), k \neq j$ in diesem Zeitpunkt auf 0. Wegen der Erlebensfallzahlung gilt $V_j(n) = L_j$. Dann lösen wir sukzessive die Differentialgleichungen zeitlich rückwärts. Wir können eine analytische Lösung der Differentialgleichung berechnen, in der Praxis werden wir jedoch eine numerische Lösung benutzen.

Insgesamt werden die Reserven durch die Anfangsbedingung und durch die Thiele'sche Differentialgleichung eindeutig festgelegt.

Bemerkung 4.19 *Reaktivierung*

Wir haben vorausgesetzt, dass keine Reaktivierung - invalide Person wird wieder aktiv - vorkommen können. Um eine Reaktivierung zu modellieren können wir das Modell wie folgt erweitern: Dazu führen wir zusätzlich die Zustände a' (reaktiviert) und i' (Invalide nach Reaktivierung) ein.

Wir erhalten so wieder ein Modell ohne formale Reaktivierung und ohne resultierende Zyklen. Wir können mit diesem Vorgehen analog auch noch weitere Reaktivierungen berücksichtigen. In der Anwendung werden wir aber das übersichtlichere Modell ohne Reaktivierung(en) benutzen.

4.7 Prämienzerlegung

Wir können die gesamte Prämienzahlungen in einen Sparanteil und einen Risikoanteil aufspalten. Dazu betrachten wir zuerst das einfache Modell mit Erlebensfall- und Todesfallzahlung. Es ist naheliegend, dass ein Teil der Prämie zur Deckung des Todesfallrisikos benötigt wird und ein zweiter Teil zum Kapitalaufbau verwendet wird. Wir formen die Thiele'sche Differentialgleichung deshalb um:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(t) &= (r(t) + \mu(x+t))V(t) + \pi(t) - \mu(x+t)b(t) \\ \Leftrightarrow \pi(t) &= \underbrace{\left(\frac{d}{dt}V(t) - r(t)V(t)\right)}_{\pi^s(t)} + \underbrace{(\mu(x+t)b(t) - \mu(x+t)V(t))}_{\pi^r(t)} \end{aligned}$$

Damit haben wir einerseits die Sparprämie $\pi^s(t)$, die für den Kapitalaufbau sorgt und die Risikoprämie $\pi^r(t)$, die die Risiken abdeckt.

Auch im zusammengesetzten Modell ist diese Zerlegung möglich, wobei wir eine Risikoprämie für jeden Zustand k erhalten. Mit $\mu_j = \sum_{k \neq j} \mu_{jk}$ und der Vorstellung, dass die Prämie nur in Zustand j bezahlt wird gilt $-b_j = \pi$ und dann folgt aus der Thiele'schen Differentialgleichung.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V_j(t) &= (r(t) + \mu_j(t))V_j(t) - \sum_{k \neq j} \mu_{jk}V_k(t) + \pi(t) - \sum_{k \neq j} b_{jk}(t)\mu_{jk}(t) \\ \Leftrightarrow \pi(t) &= \underbrace{\left(\frac{d}{dt}V_j(t) - r(t)V_j(t) \right)}_{\pi^s(t)} + \sum_{k \neq j} \underbrace{\mu_{jk}(t) (b_{jk}(t) + V_k(t) - V_j(t))}_{\pi^{r(k)}(t)} \end{aligned}$$

Wir haben also wieder einen Sparanteil $\pi^s(t)$ und einen Risikoanteil für jeden Zustand bzw. jedes Risiko $\pi^{r(k)}(t)$.

4.8 Richttafelmodell

Wir wollen nun die entwickelten Methoden auf die Praxis anwenden. Dazu betrachten wir nun wieder das in Definition 3.7 eingeführte Modell der Richttafeln. Wir übernehmen davon lediglich den Zustandsraum und die möglichen Übergänge. Ausserdem werden wir die Bezeichnung der Barwerte und der Ausscheidewahrscheinlichkeiten fortführen. Die Modellierung der Zeit wird aber stetig bleiben. Als zusätzliche Notation führen wir die Übergangsintensitäten ein:

Mögliche Zustände sind: aktiv, invalide, Altersrentner, Witwenrentner, Tod und Tod der Witwe.

Mit den Übergängen wie folgt:

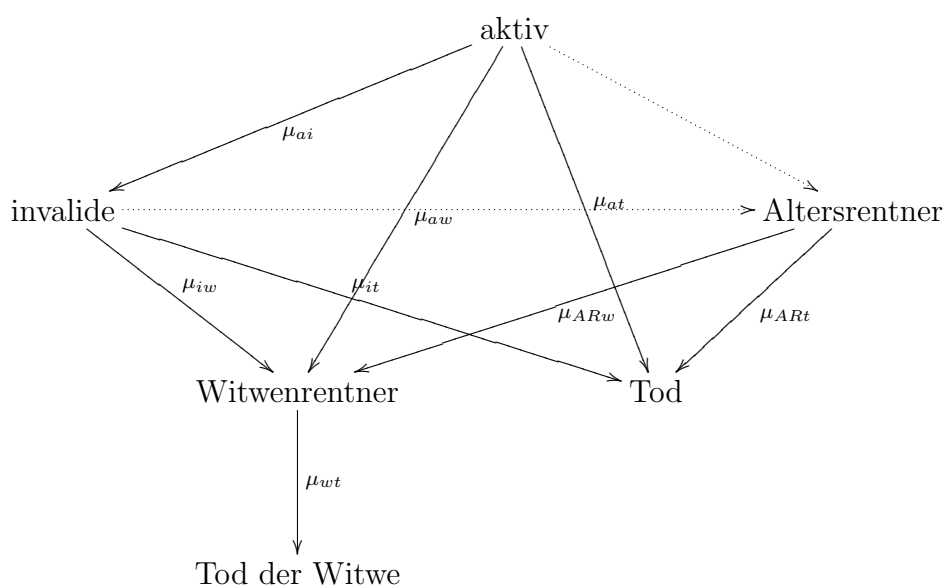


Abbildung 4.5: Richttafelmodell mit Übergangsintensitäten

Der Übergang zum Altersrentner erfolgt nicht zufällig, sondern mit Wahrscheinlichkeit 1, wenn die versicherte Person das Pensionsalter z erreicht. Deshalb betrachten wir ein vereinfachtes Modell, das die Modellierung bis zum Pensionsalter z vorsieht:

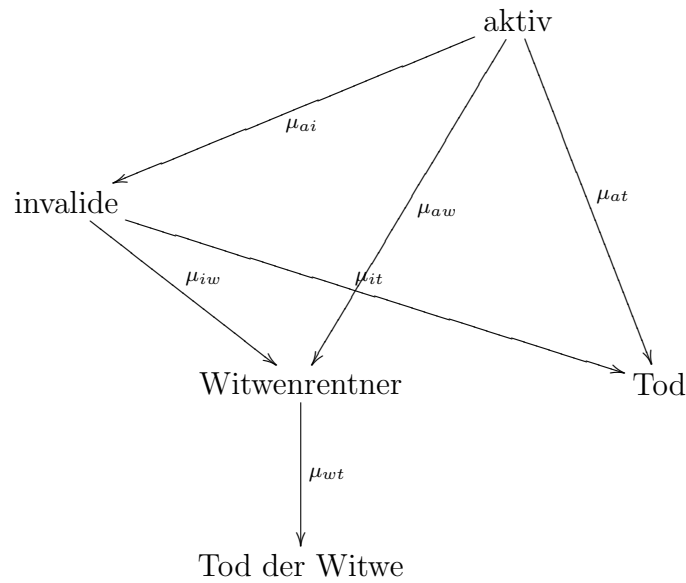


Abbildung 4.6: Anwartschaft

Zum Zeitpunkt des Renteneintritts im Alter z ist das Modell beendet. Gleichzeitig beginnt ein neues Modell, das folgende Übergänge zulässt:

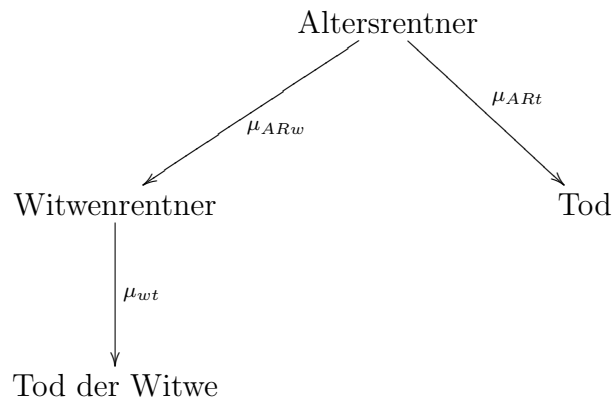


Abbildung 4.7: AR

Wir berechnen dann die Reserve $V_{AR}(z)$ zum Renteneintritt aus Abbildung 4.7 und betrachten diese als fiktive Erlebensfallzahlung in Abbildung 4.6.

Die Thiele'schen Differentialgleichung hat die Form:

$$\frac{d}{dt}V_{aa}(t) = (r(t) + \mu_{at}(t) + \mu_{ai}(t) + \mu_{aw}(t))V_{aa}(t) + \pi_{aa}(t) - \mu_{ai}V_i(t) - \mu_{aw}V_w(t) \quad (4.11)$$

$$\frac{d}{dt}V_i(t) = (r(t) + \mu_{it}(t) + \mu_{iw}(t))V_i(t) - b_i(t) - \mu_{iw}V_w(t) \quad (4.12)$$

$$\frac{d}{dt}V_w(t) = (r(t) + \mu_{wt}(t))V_w(t) - b_w(t) \quad (4.13)$$

und den Randbedingungen:

$$V_{aa}(n) = V_{AR}(0)$$

$$V_i(n) = V_{AR}(0) \quad (4.14)$$

$$V_w(\omega) = 0$$

Wir betrachten hier nur den Fall der abgekürzten Invalidenrente. Unsere versicherte Person erhält im Fall der Invalidität nur bis zum Renteneintrittsalter die Invalidenrente. Anschließend erhält er die Altersrente. Wenn wir eine lebenslange Invalidenrente modellieren wollen, dann gilt statt (4.14) $V_i(\omega) = 0$.

Wegen dem Äquivalenzprinzip muss gelten:

$$V_i(0) = 0$$

Für die Reserve nach Abbildung 4.7 erhalten wir unter Beachtung, dass das Eintrittsalter nun z ist:

$$\frac{d}{dt}V_{AR} = (r(t) + \mu_{ARt}(t) + \mu_{ARw}(t))V_{AR}(t) - b_{AR}(t) - \mu_{ARw}V_w(t) \quad (4.15)$$

und die Randbedingung

$$V_{AR}(\omega) = 0$$

und für den Barwert der Witwenrente gilt wieder

$$\frac{d}{dt}V_w(t) = (r(t) + \mu_{wt}(t))V_w(t) - b_w(t)$$

mit

$$V_w(\omega) = 0$$

Bemerkung 4.20 *Interpretation*

Wir berechnen nun zuerst den Barwert der Altersrente mit Hilfe von (4.15). Dieser Wert $V_{AR}(0)$ wird nun als Erlebensfallsumme zum Rentenbeginn (Zeitpunkt z) im Modell aus Abbildung 4.6 eingesetzt. Nun haben wir ein Modell mit den Zuständen *Aktiv*, *Invalide*,

Witwe und Tod, das im Erlebensfall eine „virtuelle“ Erlebensfallsumme von $V_{AR}(0)$ auszahlt. Dieses Modell lässt sich mit (4.11), (4.12) und (4.13) lösen. Wir gehen dabei wieder zeitlich rückwärts vor und erhalten so die Reserve für alle Zustände zu jedem Zeitpunkt. Im Anschluss können wir wieder die Höhe der laufenden Prämie(n) hochrechnen. Dies geschieht analog zu den Ausführungen in Bemerkung 4.11.

4.8.1 Notation der Richttafeln

Wir wollen nun die beschriebenen Formeln noch in der Notation der Richttafeln analog zu Kapitel 4 darstellen. Es ergeben sich die folgende Entsprechungen

$$\begin{aligned} V_i(x) &\hat{=} a_x^{i(z)} \\ V_w(x) &\hat{=} a_y^w \\ V_{AR}(x) &\hat{=} a_x^r + a_x^{rw}, \quad x \geq z \\ V_{aa}(x) &\hat{=} {}_{z-x}a_x^{aA} + a_x^{ai(z)} + a_x^{aw} \end{aligned}$$

Hier sind nur die Barwerte der laufenden Renten und der gesamte Anwartschaftsbarwert eines Aktiven dargestellt. Auch alle anderen Barwerte der Richttafeln lassen sich mit Hilfe der Thiele'schen Differentialgleichung und dem vorgestellten Modell darstellen. Für unsere Anwendung sind diese jedoch nicht nötig.

Kapitel 5

Diskussion

Wir haben nun zwei verschiedene Varianten kennengelernt, mit denen Personenversicherungen modelliert und berechnet werden können. Aus theoretischer Sicht ist das zeitstetige Modell vorzuziehen. Es lassen sich damit zu jedem Alter und jeder Zeit sämtliche relevanten Werte berechnen. Wir haben gesehen, dass man mit Methoden der Markovtheorie elegante Modelle bilden kann. In der Praxis hingegen hat sich zuerst das zeitdiskrete Modell durchgesetzt. Bis heute ist fast ausschließlich das zeitdiskrete Modell in Gebrauch.

Die Gründe dafür sind vielfältig. Zum ersten war aus historischer Sicht ein Modell nötig, das sich mit einfachsten numerischen Mitteln berechnen lässt. Wir haben das mit Hilfe der Kommutationszahlen gesehen und festgestellt, dass sich mit solchen Hilfsgrößen eine Versicherung praktisch ohne elektronische Hilfsmittel berechnen lässt.

Des Weiteren erhalten wir im zeitdiskreten Fall die sogenannten Sterbetafeln mit endlich vielen Einträgen (z.B. bis zum Alter 115). Wir benötigen für jede Ausscheideursache auch nur genau eine Sterbetafel, die wir aus einer Tabelle ablesen können.

Wenn wir nun in der zeitlichen Entwicklung voranschreiten, dann ist als nächstes die Berechnung mit Hilfe der Barwertformeln (3.4.2) bis (3.4.5) möglich. Hierbei kommen ausschließlich Summen vor, die sich rekursiv berechnen lassen.

Ein weiterer großer Vorteil ist die Verteilung des Todeszeitpunkts innerhalb eines Jahres. Hierfür haben wir Axiom 3.4 vorausgesetzt. Die Folge daraus ist ${}_s q_x = s q_x, 0 \leq s \leq 1$. Wir benötigen also keine statistische Betrachtung der Ausscheidezeitpunkte. Dies ist auch im Hinblick darauf gut geeignet, weil wir aus den Volkszählungen nur jährliche Daten bekommen. Üblicherweise ist nur die Anzahl der insgesamt während eines Jahres gestorbenen Personen und deren Alter verfügbar.

Diese Gründe und die historische Entwicklung führen dazu, dass in der Praxis fast nur das zeitdiskrete Modell Verwendung findet.

In den Lehrbüchern wird auch das zeitkontinuierliche Modell immer wieder eingeführt. Dieses ist erst mal von theoretischem Interesse. Es hat aber auch klare praktische Vorteile. So finden im zeitdiskreten Modell Mehrfachübergänge rechnermäßig gleichzeitig statt. Dies ist im diskreten kein Problem, da in diesem Fall auch keine Zahlungen auftreten. In der Realität ist dieser Umstand aber nicht erklärbar. Das stetige Modell hingegen liefert

keine Mehrfachübergänge.

Ein weiterer großer Schwachpunkt der diskreten Modellierung sind gebrochene Dauern. Wir haben schon festgestellt, dass wir nur Versicherungen brechnen können, deren Laufzeit ganzjährig ist. Dies ist vor allem bei Rentenversicherungen problematisch, da die erste Altersrente häufig nach dem 65. Geburtstag fällig wird. Wenn nun der Versicherungsbeginn ungünstig liegt, dann werden die Zahlungen aus der Versicherung bis zu 11 Monate zu spät frei. Seit kurzem werden von vielen Versicherungen auch Produkte angeboten, deren Laufzeit nur noch ganze Monate sind. Damit kann man dieses Problem zwar teilweise umgehen, jedoch nicht lösen. Ausserdem werden in der Praxis nur Versicherungen gehandelt, die am 1. eines Monats beginnen. Im zeitstetigen Modell ist der Versicherungsbeginn und das Versicherungsende völlig frei.

Das zweite Problem, dass sich aus dem Versicherungsbeginn ergibt, ist die Modellierung des Eintrittsalters. Das Problem ist immer wieder, dass der Versicherungsbeginn und der Geburtstag nur in den seltensten Fällen übereinstimmt. Wir haben verschiedene Lösungsmöglichkeiten kennengelernt. So haben wir beispielsweise das versicherungstechnische Alter in Beispiel 3.5 eingeführt. Dabei kommt es jedoch oft vor, dass wir ein rechnungsmäßiges Alter verwenden müssen, das die Person am Stichtag noch gar nicht erreicht hat. Dies bedarf immer wieder Erklärungen. Im zeitstetigen Modell ist das Alter der versicherten Person eine reelle Zahl und deshalb besteht die Problematik des Eintrittsalters nicht. Genauso erhalten wir im stetigen Modell die Ausscheidewahrscheinlichkeiten, die wirklich zum entsprechenden Alter gehören.

Ein weiteres Problem der zeitdiskreten Modellierung ist, dass die ganzjährigen Ausscheidewahrscheinlichkeiten q_x Unstetigkeiten aufweisen. Diese Sprünge in der Sterblichkeit sind nicht beobachtbar, ergeben sich aber zwangsläufig aus der Diskretisierung der Daten.

Auch die Modellierung der Zinsstruktur wird vielen Anforderungen nicht gerecht. Im diskreten Modell wird mit einem über die gesamte Laufzeit konstanten Zins gearbeitet. Besser wäre natürlich eine Differenzierung in kurz- und langfristige Zinsen, die sich in der Realität deutlich unterscheiden können. Eine deterministische, nichtkonstante Zinskurve lässt sich in unserem stetigen Modell sofort anwenden.

Wir werden nun wegen der genannten Gründe das zeitstetige Modell aufgreifen und praxisgeeignet anpassen. So werden wir die Notation der Richttafeln weitestgehend übernehmen.

Kapitel 6

Numerische Umsetzung

6.1 Einleitung

Wir haben in den Kapiteln 3 und 4 Theorien entwickelt, mit der sich Personenversicherungen mathematisch darstellen lassen. Des weiteren sind wir mit den Formeln aus Abschnitt 3.4 und 4.6 in der Lage auch den zeitlichen Verlauf der Reserven und der Prämien darzustellen.

Die entwickelten Formeln sollen nun noch zur Anwendung gebracht werden. Das erste Problem, das sich stellt ist, woher wir die Verteilungsfunktion(en) F bzw S und die Übergangintensitäten μ erhalten.

Wir werden im Folgenden die bestehenden Richttafeln von Dr. Klaus Heubeck aus [5] verwenden. In diesen sind ganzjährig gestutzte, bedingte Wahrscheinlichkeiten tabelliert. Um daraus eine zeitstetige Wahrscheinlichkeit zu gewinnen können wir mit einer Interpolation arbeiten. Wir interpolieren hier mit Spline-Interpolationspolynomen der Ordnung 3. Das bedeutet, dass wir stückweise Polynome vom Grad 3 erhalten werden. Diese sind für die Anwendung gut geeignet, da sie sich sehr leicht und auch numerisch stabil differenzieren und integrieren lassen. Ausserdem genügt es für die technische Umsetzung, wenn wir die Koeffizienten der Polynome einmal berechnen und in einer Tabelle ablegen.

6.2 Interpolation

Wir können aus den Richttafeln die Werte der Verteilungsfunktion F_x berechnen. Diese liegen dann an den diskreten Stützstellen $0, 1, 2, \dots, \omega$ vor. Für die Anwendung der stetigen Formeln benötigen wir auch die Ausscheidewahrscheinlichkeiten und -intensitäten in stetiger Form.

Deshalb führen wir eine Interpolation der diskreten Werte mit kubischen Splines durch. Dabei suchen wir für gegebene Stützstellen x_1, \dots, x_n mit Funktionswerten y_1, \dots, y_n jeweils stückweise (von x_i bis x_{i+1}) Polynome dritten Grades, die durch die Punkte (x_i, y_i) und (x_{i+1}, y_{i+1}) gehen und C^2 -Übergänge haben. Wir verwenden die natürlichen Randbedingungen $f''(x_1) = f''(x_n) = 0$. Details zu diesem Verfahren finden sich in der einschlägigen

Numerik-Literatur wie z.B. [3].

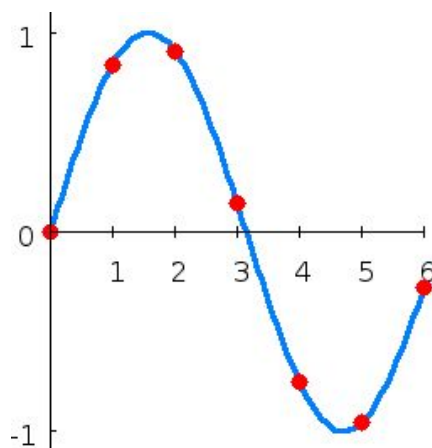


Abbildung 6.1: Splineinterpolation

Es gibt noch ein Problem mit der Spline-Interpolation. Die Verteilungsfunktion F_x ist monoton steigend. Dies gilt auch für die diskreten Werte der Verteilungsfunktion. Ein Interpolationspolynom 3. Grades ist im Allgemeinen nicht auf jedem Intervall monoton steigend. Ein klassisches Gegenbeispiel dazu ist die kubische Splineinterpolation gemäß Abbildung 6.2. Die Datenpunkte sind monoton steigend. Wie man deutlich sieht sind die Splines nicht monoton. So hat die Ableitung des Interpolationspolynoms an der Stelle $x = 9$ den Wert $-0,086$, ist also bei $x = 9$ monoton fallend.

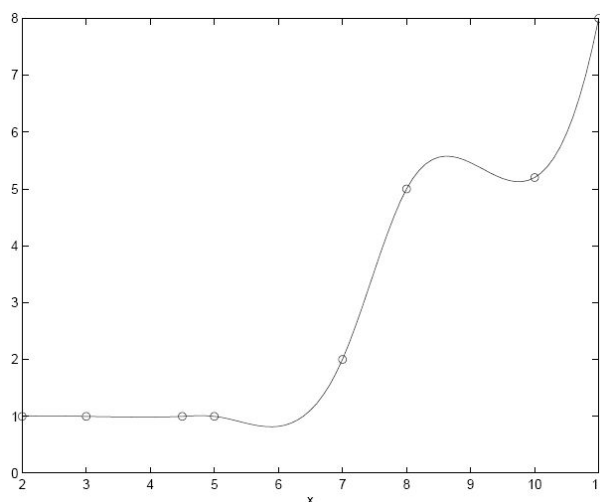


Abbildung 6.2: Monotonie

Details dazu finden sich z.B. in [15]

Um dieses Problem zu verhindern müssen wir in der Berechnung der Splines die Bedingung stellen, dass die Monotonie erhalten wird. Bei der Interpolation der Richttafeln stellt sich aber heraus, dass die Interpolationspolynome stückweise monoton steigend sind. Dies muss jedoch bei jeder Tafel gesondert überprüft werden.

Bei den von uns verwendeten Heubeck-Richttafeln und den daraus abgeleiteten Verteilungsfunktionen bleibt die Monotonie erhalten. Die Datenpunkte der Verteilungsfunktionen sind hinreichend gutartig, sodass unsere Splines überall monoton steigend sind.

Mit der Interpolation von F_x erhalten wir auch die Überlebensfunktion S_x sowie die Ausscheideintensität μ_x mit dem Zusammenhang nach (2.4), wobei sich die Dichte f_x von F_x mit den Polynomen 3. Grades leicht berechnen lässt.

Damit haben wir für jeden beliebigen Zeitpunkt die Ausscheideintensität berechnet. Diese Ergebnisse können wir dann in die weitere Berechnung der Thiele'schen Differentialgleichung einfließen lassen.

6.3 Numerische Lösung der Thiele'schen Differentialgleichung

Wir haben in Kapitel 5 die Thiele'sche Differentialgleichung im einfachen und im zusammengesetzten Modell hergeleitet. Mit ihrer Hilfe lassen sich alle nötigen Berechnungen für eine Personenversicherung durchführen. Wir benötigen für die Anwendung ein numerisches Verfahren zur Lösung der Differentialgleichung. Nachdem wir eine gewöhnliche Differentialgleichung haben, bei der die rechte Seite glatt ist, sind keine Unstetigkeitsstellen vorhanden, da alle Ausscheideintensitäten stetig differenzierbar sind.

Deshalb werden wir auf ein Runge-Kutta Lösungsverfahren der Ordnung 4 zurückgreifen. Wir verwenden bereits fertig implementierte Verfahren mit Schrittweitensteuerung nach Fehlberg. Für Details sei auf [2] verwiesen.

6.4 Weitere Hilfsmittel

6.4.1 Zeit

Wir haben in der Theorie der Übergangswahrscheinlichkeiten und der Reserven immer mit dem Eintrittsalter x gearbeitet. Dieses wird aus dem Geburtsdatum und dem Versicherungsbeginn gewonnen. Insgesamt müssen wir uns überlegen, wie wir die Zeit zwischen zwei Zeitpunkten $[t_1, t_2]$ berechnen und mit einer Referenzperiode (1 Jahr) bewerten.

Wir orientieren uns an der Daycount Convention act/act . Dabei wird sowohl für das Intervall $[t_1, t_2]$ als auch für die Referenzperiode die aktuelle Anzahl der Tage berücksichtigt. In normalen Jahren teilen wir die Anzahl der Tage also durch 365, und in Schaltjahren durch 366. Details dazu finden sich z.B. in [17]

Wir berechnen auch die Versicherungsdauer nach der Daycount Convention act/act .

Die Altersberechnung im diskreten Modell, die in Bemerkung 3.5 angesprochen wurde, werden wir nach dem einfachen Verfahren vornehmen. Wir verwenden also immer das ganzzahlig abgerundete Alter der Person am Stichtag.

6.4.2 Zinssätze

Ein weiteres Problem stellen in der Realität die stetigen Zinssätze dar. Wenn wir ein Bankkonto eröffnen, das unser Kapital K mit einem Zinssatz von r_d verzinst geschieht das immer zu diskreten Zeitpunkten. Meistens erhalten wir die Zinsgutschrift am Ende eines Jahres. Das bedeutet, wir erhalten einmal im Jahr den Betrag $K \cdot r_d$ gutgeschrieben.

In der Theorie rechnen wir jedoch mit stetigen Zinszahlungen, erhalten also kontinuierlich die Zinsgutschrift. Wir wissen, dass sich unser Kapital K , das mit dem stetigen Zinssatz r_s verzinst wird nach einem Jahr auf den Betrag von $K \cdot e^{r_s}$ erhöht hat.

Aus diesen Überlegungen schließen wir, dass der Zusammenhang zwischen stetigen und diskreten Zinsen folgendermaßen aussieht:

$$\begin{aligned} r_s &= \ln(1 + r_d) \\ r_d &= e^{r_s} - 1 \end{aligned}$$

6.4.3 Zahlungen

Wir haben in unseren Formeln auch mit stetigen Zahlungen gearbeitet. So war z.B. die laufende Prämienzahlung und auch die Rentenzahlung immer zeitstetig. In der Realität existiert wiederum nur eine Zahlung zu festen diskreten Zeitpunkten. Eine monatliche Versicherungsprämie wird üblicherweise am 1. Tag jedes Monats fällig. Genauso werden auch Rentenzahlungen nur an bestimmten Zeitpunkten durchgeführt.

Im Falle stetiger Zahlungen $b_s(t)$ gilt für die Gesamtzahlung B_s in einem Zeitraum $[t_1, t_2]$:

$$B_s = \int_{t_1}^{t_2} b_s(t)v(t)dt$$

falls die Zahlung $b_s(t)$ und der Zinssatz $r(t)$ konstant sind gilt mit

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{-r(t)t} dt = \frac{1}{-r(s)} (e^{-r(s)t_2} - e^{-r(s)t_1})$$

die Darstellung

$$B_s = b_s(t) \frac{1}{-r(s)} (e^{-r(s)t_2} - e^{-r(s)t_1})$$

Falls der Zinssatz $r(s) \equiv 0$ ist, dann gilt sogar

$$B_s = b_s(t)(t_2 - t_1)$$

Im diskreten Fall gilt mit Zahlungen $b_d(t)$, die nur an den Zahlzeitpunkten ungleich 0 sind:

$$B_d = \sum_{t \in [t_1, t_2]} b_d(t)$$

Diese beiden Überlegungen liefern uns den Zusammenhang mit Hilfe von $B_s = B_d$:
Für konstante Zahlungen und Nullzinsen gilt also beispielsweise

$$b_s(t) = \sum_{t \in [t_1, t_2]} b_d(t)/(t_2 - t_1)$$

Die übrigen Zusammenhänge ergeben sich durch Einsetzen.

Für uns ist vor allem die Situation der jährlichen Zahlungen (Renten, Prämien) wichtig. Dabei ist der Zeitraum genau 1 Jahr und es gibt eine diskrete Zahlung $b_d(t)$. Wir sehen, dass bei konstanter stetiger Zahlung gilt:

$$b_s(t) = b_d(t)$$

6.4.4 Heubeck Richttafeln

Um unsere Berechnung letztendlich durchzuführen benötigen wir noch die statistischen Ausscheidewahrscheinlichkeiten. Wir werden die Richttafeln von Dr. Klaus Heubeck verwenden. Siehe dazu auch [5].

Die Heubeck Richttafeln sind Periodentafeln. Das bedeutet, dass die Stationaritätsbedingung in der Form (2.5) Verwendung findet. In den Richttafeln sind jeweils nach Geschlecht getrennt folgende Werte tabelliert.

Für eine männliche versicherte Person:

q_x^a Einjährige Sterbewahrscheinlichkeit der männlichen Aktiven

i_x Einjährige Invalidisierungswahrscheinlichkeit der männlichen Aktiven

q_x^i Einjährige Sterbewahrscheinlichkeit der männlichen Invaliden

q_x^g Einjährige Sterbewahrscheinlichkeit des männlichen Gesamtbestands

$y(x)$ Wahrscheinliches Alter der Ehefrau bei Tod des Mannes im Alter x

h_x Wahrscheinlichkeit, dass ein Mann bei Tod verheiratet ist

q_x^w Einjährige Sterbewahrscheinlichkeit der männlichen Hinterbliebenen

q_x^r Einjährige Sterbewahrscheinlichkeit der männlichen Altersrentner

Wobei die q_x^r und die q_x^g für $x \geq 65$ gleich sind. Deshalb werden wir die q_x^r nicht explizit anwenden.

Für eine weibliche versicherte Person:

q_y^a Einjährige Sterbewahrscheinlichkeit der weiblichen Aktiven

i_y Einjährige Invalidisierungswahrscheinlichkeit der weiblichen Aktiven

q_y^i Einjährige Sterbewahrscheinlichkeit der weiblichen Invaliden

q_y^g Einjährige Sterbewahrscheinlichkeit des weiblichen Gesamtbestands

$x(y)$ Wahrscheinliches Alter des Ehemannes bei Tod der Frau im Alter x

h_y Wahrscheinlichkeit, dass eine Frau bei Tod verheiratet ist

q_y^w Einjährige Sterbewahrscheinlichkeit der weiblichen Hinterbliebenen

q_y^r Einjährige Sterbewahrscheinlichkeit der weiblichen Altersrentner

Wir müssen in der Anwendung auch beachten, dass die Heubeck-Richttafeln, mit denen wir arbeiten, von einem maximalen Arbeitsendalter von 75 Jahren ausgehen. Darüberhinaus existieren keine Werte für q_x^a , q_y^a , i_x , i_y , q_x^i und q_y^i .

Des weiteren müssen wir uns überlegen, wie wir die Witwenrente behandeln. Es gibt grundsätzlich einen kollektiven und einen individuellen Ansatz. Beim Kollektiven wählt man die statistische Wahrscheinlichkeit, dass eine Person bei Tod verheiratet ist und das statistische Alter des Ehepartners. Wir rechnen also ohne Kenntnis des Geburtsdatums des Ehepartners. Im Gegensatz dazu benötigt man bei der individuellen Methode das Geburtsdatum des Ehepartners. Wir unterstellen auch, dass die Ehe während der gesamten Laufzeit besteht. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Witwenrente bezahlt werden muss hängt dann nur vom Überleben des Ehepartners bis zum Todeszeitpunkt der versicherten Person ab.

6.5 Implementierung

Mit den genannten Hilfsmitteln werden wir die Berechnung durchführen. Die Berechnung ist durchgehend in Borland Delphi umgesetzt. Die Programmiersprache, die hauptsächlich auf Pascal basiert ist sehr gut lesbar und die Eingabe und Ausgabe läuft größtenteils automatisch ab. Auch die benötigten numerischen Routinen zur Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen sind in [14] vorhanden. Diese ist ursprünglich für Pascal entwickelt worden lässt sich aber problemlos in Delphi einsetzen.

6.5.1 Stetiges und diskretes Modell

Wir werden zuerst das zeitstetige Modell implementieren. Wir werden die Thiele'sche Differentialgleichung zur Berechnung der Reserven und Prämien benutzen. Die Ausscheidintensitäten erhalten wir aus der Spline-Interpolation in Abschnitt 6.2.

Wir gehen dabei nach dem folgenden Schema zur Berechnung der laufenden, konstanten Prämie vor:

1. Berechnung von $V(0) =: V_1$, wobei $\pi \equiv 0$
2. Berechnung von $V(0) =: V_2$, wobei $\pi \equiv 1$
3. $\pi = \frac{V_1}{|V_1 - V_2|}$, falls $V_1 \neq V_2$

Somit erhalten wir die nötige laufende, konstante Prämie π . Einmalprämien und nicht-konstante Prämien lassen wir unberücksichtigt.

Um das entwickelte zeitstetige Modell zu überprüfen und die Vor- und Nachteile genauer darzustellen implementieren wir auch die Berechnung des diskreten Modells. Wir berechnen hierbei den Leistungsbarwert mit Hilfe der Formel (3.4.4). Aus Vereinfachungsgründen unterstellen wir grundsätzlich eine abgekürzte Invalidenrente. Des weiteren beschränken wir das Renteneintrittsalter auf 75 Jahre. Für höhere Rentenalter liefern die Heubeck-Richttafeln keine statistischen Werte. Ausserdem hängt der Anspruch auf Altersrente nur vom Erreichen des Renteneintrittsalters ab. Somit erhalten wir für die Ausscheidewahrscheinlichkeit eines Altersrentners q_x^r , die des Gesamtbestandes q_x^n . Eine detaillierte Beschreibung findet sich in [5].

6.6 Ergebnisse

Wir haben nun zwei verschiedene Berechnungsmodelle für Personenversicherungen kennengelernt und auch die praktische Implementierung abgehandelt. Nun ist es an der Zeit, die Ergebnisse dieser Berechnung zu betrachten. Wir wollen verschiedene Fälle jeweils mit der zeitstetigen und der diskreten Berechnung durchführen und die Ergebnisse vergleichen.

Beachte, dass wir in der diskreten Berechnung sämtliche Altersberechnungen folgendermaßen vornehmen. Wir betrachten das ganzzahlige Alter am Tag des Stichtages.

Des weiteren betrachten wir ausschließlich Versicherungen, bei denen $\pi_i(t) \equiv 0$ ist. Es wird also im Invaliditätsfall keine Prämie mehr bezahlt. Auch, wenn keine Invalidenrente zugesagt ist, werden im Invaliditätsfall keine Prämien fällig.

6.6.1 Erwartete Effekte

Wir wollen uns zuerst überlegen, welche Effekte im Vergleich des zeitdiskreten und zeitstetigen Modells auftreten können. Wir betrachten dazu die Ergebnisse des diskreten Modells als Status quo und beschreiben die Änderung, die im stetigen entstehen.

Zuerst sehen wir uns die Prämienzahlung genauer an. Im Diskreten werden die Prämien jeweils zu Beginn eines Versicherungsjahres vorschüssig bezahlt. Insbesondere entstehen hier zwei wesentliche Unterschiede zum Stetigen. Zum einen liefert die vorschüssige Prämie Zinseffekte, da das Kapital während des ganzen Versicherungsjahres schon vorhanden ist. Zum anderen ist auch im Ausscheidejahr (Todesjahr) die gesamte Prämie bezahlt. Im Stetigen wird nur solange die Prämie bezahlt, bis die Person ausscheidet.

Als nächstes betrachten wir die Leistungen der Versicherung. Die Leistung (Rente) kann deterministisch zum Renteneintritt oder stochastisch zum Ausscheidezeitpunkt fällig werden. Im deterministischen Fall haben wir keinen Unterschied zwischen beiden Modellen, da beide die Leistung zum vereinbarten Termin erbringen. Im stochastischen Fall hingegen liefert das stetige Modell sofort eine Leistung. Im diskreten Modell hingegen wird die Leistung erst zum nächsten Stichtag fällig. Umgekehrt wird bei stochastischem Ende der Versicherungsleistung im stetigen Modell die Leistung nur bis zum Ausscheidezeitpunkt

bezahlt während im Diskreten die Leistung einmal jährlich vorschüssig fällig wird.

Ein weiterer Unterschied besteht in der Modellierung der Sterblichkeit. Wir benötigen im Stetigen die Ausscheideintensitäten. Diese gewinnen wir aus den diskreten Ausscheidewahrscheinlichkeiten mit Hilfe der Splineinterpolation. Dabei gehen in einem gegebenen Jahr x die Ausscheidewahrscheinlichkeiten der Jahre $x - 1$ und $x + 1$ mit ein. Wir erhalten am Anfang unseres Betrachtungszeitraums also eine etwas kleinere Sterblichkeit als im Diskreten Modell. Dies gleicht sich am Ende des Betrachtungszeitraums wieder aus. Die Endwerte der Sterblichkeit werden nun aber noch abdiskontiert, wodurch der Effekt der Anfangswerte überwiegt.

Ein ganz wichtiger Effekt ist auch noch die Modellierung des exakten Versicherungsendes. Im stetigen Modell können wir ein gegebenes Endalter genau berechnen. Im Diskreten läuft unsere Versicherung immer entweder zu kurz: wir haben also für einen bestimmten Zeitraum keinen Versicherungsschutz, oder aber sie läuft zu lange und wir berechnen Versicherungsschutz für einen Zeitraum, der nicht nötig wäre.

Bei Laufzeiten kleiner einem Jahr ergeben sich höhere Prämien als der Barwert. Das ist zwar verwunderlich, aber korrekt, weil die tatsächlich gezahlte Prämie $\int_{t_0}^{t_1} \pi(s) ds$ ist und $t_1 - t_0 < 1$.

6.6.2 Barwerte

Wir betrachten in den folgenden beispielhaften Fällen jeweils einen Zinssatz von 0%. Dadurch erreichen wir, dass nur die Effekte der zeitstetigen bzw. -diskreten Modellierung des Ausscheideverhaltens eine Rolle spielen.

Wir werden zuerst die Barwerte einzelner Renten untersuchen. Beachte, dass im zeitdiskreten Fall alle Renten jeweils vorschüssig zum Stichtag in einer Jahresrente ausbezahlt werden.

Der denkbar einfachste Fall ist eine reine Altersrente in Höhe von 10000 EUR jährlich. Wir erhalten folgende Barwerte zum Renteneintrittsalter 65:

Geschlecht	Barwert stetig	Barwert diskret	Abweichung
Mann	158.599,39	170.497,09	+ 7,50 %
Frau	202.061,54	214.910,29	+ 6,36 %

Tabelle 6.1: Laufende AR

Wir stellen fest, dass der Barwert der diskreten Berechnung jeweils der Höhere ist. Dieses Ergebnis ist erwartungsgemäß, da wir im diskreten die Rente vorschüssig auszahlen. Insbesondere im Jahr des Todes erhält die versicherte Person die volle Rente. Das stetige Modell hingegen zahlt die Rente nur bis zum Todeszeitpunkt.

Nun werden wir den Barwert einer Witwenrentenanwartschaft auf Witwenrente in Höhe von 10000 EUR jährlich zum Alter 65 betrachten.

Geschlecht	Barwert stetig	Barwert diskret	Abweichung
Mann	107.887,83	98.279,21	- 8,90 %
Frau	10.878,94	10.704,45	- 1,60 %

Tabelle 6.2: WR Anwartschaft mit 65

Wir sehen sofort zwei Effekte. Zum einen ist der Barwert bei Frauen sehr viel geringer als bei Männern. Das liegt daran, dass Frauen statistisch fast 6 Jahre länger leben und deshalb die Wahrscheinlichkeit einer Witwenrente sehr viel kleiner ist als die einer Witwenrente. Zum anderen sind die stetigen Barwerte höher als die diskreten. In diesem Fall wirkt die Zahlungsweise anders. Die hinterbliebene Person erhält im stetigen Modell sofort nach dem Todeszeitpunkt der versicherten Person die Witwenrente. Im Diskreten hingegen wird die Zahlung erst zum nächsten Stichtag fällig und wir berücksichtigen die Wahrscheinlichkeit, dass die hinterbliebene Person diesen Stichtag erlebt. Dadurch wird der diskrete Barwert kleiner als der stetige. Andererseits müssen wir beachten, dass die vorschüssige Rente im Todesjahr der hinterbliebenen Person einen Effekt analog zu 6.1 hervorruft. Dies erhöht den diskreten Barwert im Vergleich zum stetigen. Nun wissen wir schon, dass Männer erheblich früher sterben als Frauen. Deshalb ist der Erhöhungseffekt bei männlichen Hinterbliebenen sehr viel stärker ausgeprägt als bei weiblichen.

Als nächstes betrachten wir den Barwert zum Rentenalter 65 einer Altersrente in Höhe von 10000 EUR jährlich mit kollektiver Witwenrente in Höhe von 10000 EUR.

Geschlecht	Barwert stetig	Barwert diskret	Abweichung
Mann	266.487,21	268.776,30	+0,86 %
Frau	212.940,48	225.614,74	+5,95 %

Tabelle 6.3: Laufende AR und WR

Wir sehen im kombinierten Fall der Alters- und Witwenrente, dass die Effekte aus Tabelle 6.1 überwiegen.

Weitere Barwerte zum Rentenalter gibt es nicht. Wir betrachten jetzt aufgeschobene Anwartschaftsbarwerte. Von nun an ist der Geburtstag der versicherten Person immer 01.01.1976 und der Versicherungsbeginn am 01.01.2006. Die versicherte Person ist also exakt 30 Jahre alt. Dadurch vermeiden wir Effekte, die aus unterjährigen Versicherungslaufzeiten entstehen. Diese betrachten wir später.

Geschlecht	Barwert stetig	Barwert diskret	Abweichung
Mann	72.102,16	77.668,20	+7,72 %
Frau	111.556,63	123.063,86	+10,32 %

Tabelle 6.4: Anwartschaft auf AR

Wir sehen auch hier wieder den deutlichen Unterschied zwischen Männern und Frauen. Darin geht ein, dass die Barwerte zum Rentenalter bei Frauen höher sind, aber auch, dass Männer eine höhere Sterblichkeit in der Anwartschaftsphase haben. Dies wirkt wie

ein zusätzlicher Diskont. Die relative Abweichung zwischen stetigem und diskretem Barwert ist im Gegensatz zu Tabelle 6.1 sogar noch verstärkt. Dies liegt daran, dass in die Berechnung der Sterblichkeit im stetigen Fall Splines verwendet wurden. Dadurch werden in jungen Jahren die Sterblichkeiten tendenziell niedriger modelliert. In höheren Jahren gleicht sich das wieder aus. In unserem Fall spielen die höheren Jahre jedoch keine Rolle. Als nächstes wollen wir eine Anwartschaft unserer 30-jährigen Person auf Invalidenrente in Höhe von 10000 EUR betrachten

Geschlecht	Barwert stetig	Barwert diskret	Abweichung
Mann	27.124,33	23.445,56	-13,56 %
Frau	27.531,95	23.548,98	-14,47 %

Tabelle 6.5: Anwartschaft auf IR

Wir sehen hier deutliche Abweichungen zwischen den stetigen und den diskreten Barwerten. Diese lassen sich aber erklären. Im stetigen Fall wird im Invaliditätsfall sofort die Invalidenrente bezahlt. Im diskreten Fall wird diese erst zum nächsten Stichtag fällig. In beiden Fällen erlebt die Person wahrscheinlich das Endalter 65. Deshalb wird die letzte Rentenzahlung sowohl im Stetigen als auch im diskreten Fall in voller Höhe fällig. Wir haben also nur die erste Invalidenrente, die nur im Stetigen gezahlt wird. Ausserdem haben wir wieder die Sterblichkeit (des Invaliden), die im Stetigen etwas kleiner ist als im Diskreten.

Die letzte Anwartschaft ist die auf Witwenrente.

Geschlecht	Barwert stetig	Barwert diskret	Abweichung
Mann	90.523,52	118.916,28	+31,37 %
Frau	15.925,78	19.829,28	+24,51 %

Tabelle 6.6: Anwartschaft auf WR

In diesem Fall erhalten wir die größten Abweichungen zwischen dem stetigen und dem diskreten Modell. In diesem Fall verstärken sich die bisher angesprochenen Effekte alle gegenseitig, sodass wir so starke Abweichungen bekommen. Dieser Fall taucht in der Praxis nicht auf, da wir dann immer mit Rechnungszins rechnen und dadurch die Abweichungen stark abnehmen.

Wir werden nun noch einen für die Praxis sehr wichtigen Fall behandeln. Dies sind die Pensionsrückstellungen, die zum Versicherungsbeginn dem Barwert der Anwartschaft auf Alters-, Invaliden- und Witwenrente entspricht. In der Praxis wird dieser mit einem diskreten Zinssatz von 6% berechnet. Im stetigen erhalten wir einen Zinssatz in Höhe von $\ln(1,06) = 5,83\%$. Ausserdem ist die Höhe der Alters- und Invalidenrente jeweils 10000 EUR und die Witwenrente beträgt 6000 EUR. Wir erhalten bei unserer 30-jährigen Person folgende Barwerte:

Geschlecht	Barwert stetig	Barwert diskret	Abweichung
Mann	15.677,80	15.777,79	+0,64 %
Frau	15.564,44	15.371,30	-1,24 %

Tabelle 6.7: Pensionsrückstellungen zum Versicherungsbeginn

Geschlecht	Barwert stetig	Barwert diskret	Abweichung
Mann	119.224,47	122.044,32	+2,37 %
Frau	118.110,47	121.981,20	+3,28 %

Tabelle 6.8: Pensionsrückstellungen zum Alter 65

Wie erwartet sind auch die Pensionsrückstellungen im Diskreten etwas höher als im Stetigen. Wir sehen in diesem kombinierten Fall aller Rentenarten und unter Beachtung eines Diskontsatzes, dass sich die Effekte insgesamt etwas abschwächen. Wir erhalten aber dennoch eine deutliche Abweichung. Insbesondere zum Renteneintritt ist die Abweichung bei beiden Geschlechtern in etwa gleich hoch.

6.6.3 Prämien

Wir wollen nun auch noch die Prämien berechnen, die für unsere Versicherung nötig sind. Wir setzen wie immer voraus, dass die Prämie laufend bezahlt wird. Im Diskreten wird sie jährlich vorschüssig fällig. Die Prämien haben eine konstante Höhe während der gesamten Laufzeit.

Wir betrachten nun wieder die Pensionsrückstellungen wie in Tabelle 6.8. Zunächst berechnen wir die Barwerte und die nötigen Prämien mit einem Zinssatz von 0 %:

Geschlecht	Prämie stetig	Prämie diskret	Abweichung
Mann	4.991,01	5.524,23	+10,68 %
Frau	4.721,66	4.964,88	+5,15 %

Tabelle 6.9: Prämien

Wir sehen wieder einen deutlichen Unterschied. Im stetigen Fall müssen wir sowohl bei Männern als auch bei Frauen insgesamt einen geringeren Barwert erreichen. Die Effekte aus der Tatsache, dass im Diskreten die Prämien vorschüssig bezahlt werden - insbesondere falls die Person verstirbt - werden vom geringeren zu erreichenden Barwert dominiert.

Wir betrachten nun noch die Prämien für die Pensionsrückstellungen, mit vorausgesetztem jährlichen Zinssatz von 6 %.

Geschlecht	Prämie stetig	Prämie diskret	Abweichung
Mann	1.151,58	1.085,60	-5,73 %
Frau	1.131,58	1.047,26	-7,45 %

Tabelle 6.10: Prämien mit 6 % Zins

In diesem Fall sind die Prämien nach diskreter Berechnung geringer. Hier macht sich der Effekt der unterjährigen Verzinsung deutlich bemerkbar. Im Diskreten erfolgen die Zahlungen jeweils zu Beginn eines Jahres und werden ab dann verzinst. Im Stetigen dagegen erfolgen die Zahlungen zeitkontinuierlich und müssen deshalb höher sein. Ausserdem ist im Stetigen der Effekt, dass die Person ausscheiden kann und somit im Ausscheidejahr nur bis zum Ausscheidezeitpunkt Prämien bezahlt.

6.6.4 Gebrochene Dauern

Wir wollen im Folgenden untersuchen, welche Effekte sich ergeben, wenn die Versicherungsdauer nicht ganzzahlig ist. In der Realität ist das sehr häufig der Fall, dass die Versicherung beispielsweise bis zum 65. Geburtstag der versicherten Person läuft. In den seltensten Fällen ist der Versicherungsbeginn auch der Geburtstag der versicherten Person. Somit erhalten wir eine nicht ganzzahlige Laufzeit. Das diskrete Modell lässt aber nur ganzzahlige Laufzeiten zu. Somit erhalten wir im Diskreten eine Versicherung, die nicht zum gewünschten Versicherungsende abläuft, sondern bis zu 11 Monate zu früh oder zu spät. In den letzten Jahren haben einige Versicherungsunternehmen ihr Berechnungsmodell auch zu einem monatlichen Modell erweitert, sodass die Abweichung kleiner als ein Monat ist. Das löst aber nicht das prinzipielle Problem der ganzzahligen Laufzeit.

Wir wollen uns zuerst eine Rentenversicherung ansehen, die der versicherten Person ab Erreichen des Alters 65 eine Altersrente in Höhe von 10000 EUR auszahlt. Wir betrachten eine Person, die am 01.07.1975 geboren ist und als Versicherungsbeginn den 01.01.2006. Im Stetigen ist diese Person $30 \frac{1}{2}$ Jahre alt, im Diskreten dagegen nur 30 Jahre. Die Barwerte zum Alter 65 sind genauso hoch wie in Abbildung 6.1. Zum Versicherungsbeginn erhalten wir

Geschlecht	Barwert stetig	Barwert diskret	Abweichung
Mann	72.116,52	77.668,20	+7,70 %
Frau	111.579,64	123.063,86	+10,29 %

Tabelle 6.11: Anwartschaft auf AR

Die Abweichungen zu 6.11 sind gering, die stetigen Barwerte sind aber erwartungsgemäß etwas kleiner. Es tritt aber hier ein weiterer, nicht gemessener Effekt auf. Das stetige Modell berechnet die Rente ab dem tatsächlichen 65. Geburtstag. Das diskrete Modell hingegen zahlt erst am 01.01.2041 die erste Rente aus. In diesem Zeitpunkt ist unsere Person schon $65 \frac{1}{2}$ alt.

6.6.5 Extremfälle

Wir wollen nun noch einige Extremfälle betrachten.

Als erstes betrachten wir eine Anwartschaft auf Altersrente in Höhe von 10000 EUR, wobei die Versicherung eine Woche vor dem 65. Geburtstag beginnt. Die Barwerte zum Versicherungsbeginn sind wie folgt:

Geschlecht	Barwert stetig	Barwert diskret	Abweichung
Mann	158.309,51	150.578,94	-4,88 %
Frau	201.785,00	198.377,24	-1,69 %

Tabelle 6.12: Anwartschaft auf AR

In der stetigen Modellierung muss der Barwert aus Tabelle 6.1 in nur einer Woche bereitstehen und die Person kann auch nur während dieser Woche ausscheiden. Im Diskreten steht die Person ein ganzes Jahr unter Risiko. Deshalb sind die Stetigen Barwerte hier kleiner.

Als nächstes betrachten wir eine Anwartschaft auf Invalidenrente in Höhe von 10000 EUR, wobei die Versicherung eine Woche vor dem 65. Geburtstag beginnt. Die Barwerte zum Versicherungsbeginn sind wie folgt:

Geschlecht	Barwert stetig	Barwert diskret	Abweichung
Mann	0,14	0,00	-100 %
Frau	0,11	0,00	-100 %

Tabelle 6.13: Anwartschaft auf IR

Die Ergebnisse sind völlig erwartungsgemäß, da im Diskreten Modell die Invalidenrente erst zum nächsten Geburtstag bezahlt wird. Dann ist die Person aber schon 65 Jahre alt und erhält keine Invalidenrente mehr.

6.6.6 Kollektiv

Wir wollen abschließend noch einen größeren Bestand betrachten. Unser Musterbestand besteht aus 562 Person, die zwischen dem 25.12.1938 und dem 10.04.1986 geboren sind. Jede Person hat einen individuellen Versicherungsbeginn sowie eigene Rentenhöhen. Die Details zu allen Personen finden sich im Anhang.

	Barwert Versicherungsbeginn	Barwert mit 65
Abweichung	-2,49 %	2,54 %

Tabelle 6.14: Kollektiv

Wir sehen also, dass die Barwerte zum Versicherungsbeginn im stetigen Modell größer sind. Zum Renteneintrittsalter 65 jedoch sind die Barwerte im stetigen Modell wieder kleiner. Der Barwert zum Renteneintritt ist in diesem Fall der wichtigere, da dieser als Reserve aufgebaut werden muss. Dieses Verhalten werden wir im nächsten Beispiel noch deutlicher sehen.

Der beobachtete Effekt scheint mit 2,54 % zwar gering, aber in Deutschland existieren derzeit Pensionsrückstellungen in einer gesamten Höhe von 221,7 Mrd. EUR. Es wäre also ein enormes Potential von über 5 Mrd. EUR gegeben.

6.6.7 Verlauf der Pensionsrückstellungen

Wir wollen uns abschließend noch den zeitlichen Verlauf der Pensionsrückstellungen ansehen. Die Berechnungsergebnisse ergeben sich aus folgender Grafik:

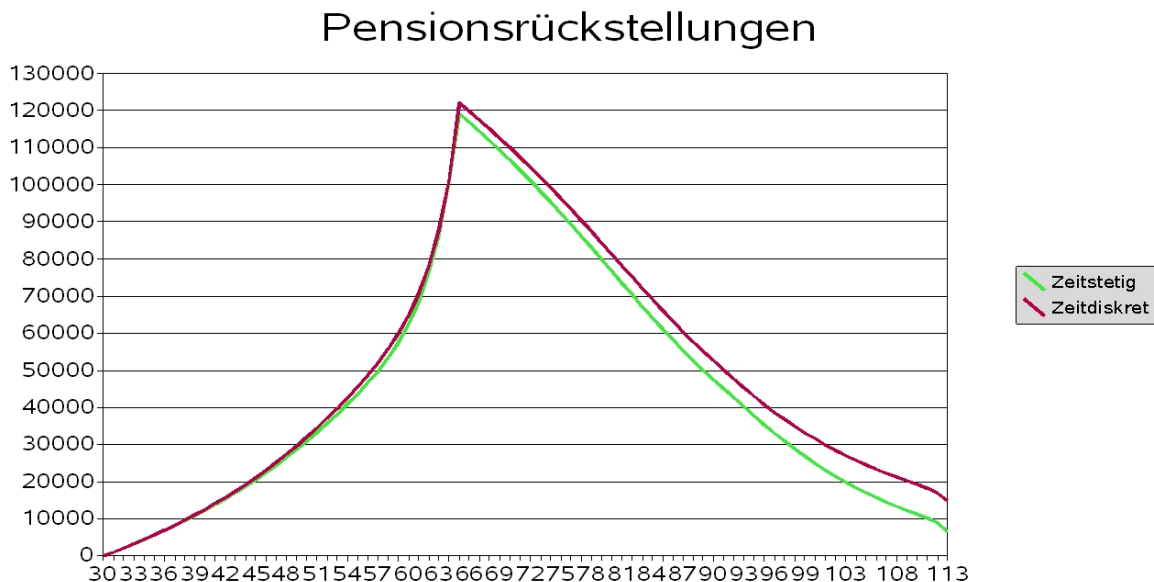


Abbildung 6.3: Pensionsrückstellungen

Wir stellen fest, dass der grundsätzliche Verlauf der beiden Kurven gleich ist. Dabei sind die stetigen Pensionsrückstellungen immer etwas kleiner als die Diskreten. Dieser zwar kleine, aber deutliche Effekt hätte erhebliche Auswirkungen auf die Rückstellungen betrieblicher Altersversorgungen. Wir haben eine prozentuale Abweichung von durchschnittlich 2,83 % in der Anwartschaftsphase und 15,52 % in der Rentenphase. Es ist zu sehen, dass die stetigen Barwerte im Vergleich zu den diskreten immer kleiner werden. Besonders in der Rentenphase ist dieser Effekt deutlich spürbar.

Bemerkung 6.1 *Finanzierbarkeit*

Wir stellen fest, dass bei der Berechnung mit dem stetigen Modell die Barwerte insgesamt kleiner werden als im diskreten Modell. In der Praxis stellt sich noch das Problem der Finanzierbarkeit, da der berechnete Barwert unter Umständen nicht ausreicht um die zugesagten Leistungen zu erbringen. Heute ist es so, dass ein nach den Richttafeln berechneter Barwert zu gering ist, um die zugehörige Versicherung zu finanzieren. Dieser Umstand spricht gegen eine Berechnungsmethode, bei der die Barwerte noch kleiner werden. Das Problem liegt jedoch vor allem im Rechnungszins. Bei der Berechnung nach §6a EStG wird ein Rechnungszins von 6% vorgeschrieben. In der Realität ist dieser Zinssatz in den letzten Jahren nicht erreichbar gewesen. Die Tatsache, dass die Barwerte zu klein sind, liegt also weniger an der Berechnungsmethode als an den zugrunde gelegten Parametern.

Kapitel 7

Ausblick

Wir haben in dieser Arbeit die Formeln des Richttafelmodells gezeigt und das zeitstetige Analogon dazu hergeleitet und implementiert. Die ersten Schritte in der praktischen Anwendung sind somit getan.

Wir haben durchgängig mit Rechnungsgrundlagen 1. Ordnung gearbeitet. Dabei ist wie in Bemerkung 4.4 dargestellt das Erwartungswertprinzip mit Sicherheitszuschlägen verwendet. Alternativ können wir auch Rechnungsgrundlagen 2. Ordnung betrachten. Dabei wird nicht nur der Erwartungswert, also das erste Moment, sondern auch die Varianz, das 2. Moment, der Reserve berücksichtigt.

Ausserdem wäre es möglich die Modellierung der Zinsstruktur nicht nur wie im Richttafelmodell mit konstanten Zinsen, sondern mit deterministischen Zinssätzen durchzuführen. Wir können also eine typische Zinskurve, mit niedrigen kurzfristigen Zinsen und höheren langfristigen Zinsen, implementieren. Diese lassen sich ohne Probleme direkt in der Thiele'schen Differentialgleichung einsetzen. Grundsätzlich könnten wir auch noch die Modellierung stochastischer Zinsen betrachten. Damit ließen sich dann auch moderne Kapitalmarktinstrumente berücksichtigen und bewerten. Dies würde aber den Rahmen dieser Diplomarbeit sprengen.

Mit Hilfe der Rechnungsgrundlagen und stochastischen Zinsen ist es möglich, Berechnungen durchzuführen, die die Vorschriften von Solvency II berücksichtigen. Dabei wird nach europäischen Vorschriften das Risiko einer Anlage, welches häufig durch die Varianz modelliert wird, mathematisch bewertet.

Zur Zeit müssen sich alle Versicherungsunternehmen mit der Problematik aus Solvency II befassen. In den skandinavischen Ländern wird unter anderem deshalb schon ein zeitstetiges Modell verwendet. In Deutschland ist dies bislang noch nicht der Fall.

Kapitel 8

Anhang

8.1 Markovtheorie

Der folgende Abschnitt ist ein Auszug aus der Theorie der Markovprozesse. Sie ist angelehnt an [13].

8.1.1 Der zeitstetige Markovprozess

Wir betrachten einen zeitstetigen stochastischen Prozess $(X_t)_{t \geq 0}$. Für einen Markovprozess benötigen wir folgende Größen

Definition 8.1 *Prozess in stetiger Zeit*

Sei \mathcal{S} ein endlicher Zustandsraum und $J := \{(y, z) \in \mathcal{S}^2 \mid y \neq z\}$ der zugehörige Übergangsraum. Wir bezeichnen die Menge der zulässigen Übergänge mit $\ddot{U} \subset J$.

Dann ist der Zustandsverlauf eine nichtkonstante, rechtsseitig stetige Abbildung $[0, \infty) \ni t \mapsto x_t \in \mathcal{S}$, die auf beschränkten Intervallen höchstens endlich viele Sprünge hat.

Ausserdem wird noch die Menge der Anfangszustände eingeschränkt: $A \subset \mathcal{S}$. A ist meist sogar einelementig.

Und schließlich wird noch die Menge der Schlußzustände eingeschränkt: $S \subset \mathcal{S}$. Ein Schlußzustand heißt absorbierend, wenn dieser nicht mehr verlassen werden kann.

In unserem Fall ist der Zustandsraum endlich. Also ist der stochastische Prozess durch die Wahrscheinlichkeiten der elementaren Ereignisse festgelegt.

Definition 8.2 *Filtration*

Eine Filtration \mathcal{F} ist eine aufsteigende Familie von σ -Algebren \mathcal{A}_t mit $\mathcal{A}_t \in \mathcal{F}$ und $\mathcal{A}_s \subset \mathcal{A}_t$ für alle $0 \leq s < t < \infty$. Der Prozess $(X_t)_{t \geq 0}$ heißt an \mathcal{F} adaptiert, wenn jedes X_t messbar ist bezüglich \mathcal{A}_t für alle $t \geq 0$.

Definition 8.3 *Markovprozess*

Der stochastische Prozess $(X_t)_{t \geq 0}$ sei an die Filtration \mathcal{F} adaptiert. Der Prozess $(X_t)_{t \geq 0}$ mit Zustandsraum \mathcal{S} und zugeordneter Borel- σ -Algebra $\mathcal{B}(\mathcal{S})$ besitzt die Markov-Eigenschaft, wenn für alle $0 \leq s \leq t$ und alle $B \in \mathcal{B}(\mathcal{S})$ gilt:

$$P(X_t \in B \mid \mathcal{A}_s) = P(X_t \in B \mid X_s) \quad (8.1)$$

Dieser Prozess wird als Markov-Prozess bezeichnet.

Siehe dazu auch [13].

Bemerkung 8.4 *Wir modellieren die Information über den Verlauf des Prozesses mit Hilfe der Filtration. Also hängt die Verteilung des Prozesses nicht von der gesamten σ -algebra \mathcal{A}_t bis t ab, sondern nur vom Zustand des Prozesses in t . Ein Markovprozess „vergisst“ also seine Vergangenheit.*

Das bedeutet, dass der Prozess durch die einfachen Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p_{jk}(s, t) := P(X_t = k \mid X_s = j), \quad 0 \leq s \leq t, (j, k) \in \mathcal{S}^2$$

bestimmt ist.

Diese werden nun noch zur Übergangsmatrix zusammengefasst.:

$$p(s, t) := (p_{jk}(s, t))_{(j,k) \in \mathcal{S}^2}$$

Wir sehen also, dass die Verteilung des Prozesses X_t nur vom Zustand zur Zeit t abhängt, nicht aber von der Vergangenheit vor t .

8.1.2 Chapman-Kolmogorov-Gleichung

Wir wollen uns nun überlegen, wie die Wahrscheinlichkeit aussieht, innerhalb einer gegebenen Zeitspanne von einem bestimmten Zustand in einen anderen zu wechseln. Die Wahrscheinlichkeit dazu gibt folgender Satz an:

Satz 8.5 *Chapman-Kolmogorov-Gleichung*

Für ein festes $t \in [0, n]$ sind die Ereignisse $\{X_t = j\}, j \in \mathcal{S}$ disjunkt und $\bigcup_{j \in \mathcal{S}} \{X_t = j\}$ ist das fast sichere Ereignis. Es folgt, dass

$$\begin{aligned} P(X_u = k \mid X_s = i) &= \sum_{j \in \mathcal{S}} P(X_t = j, X_u = k \mid X_s = i) \\ &= \sum_{j \in \mathcal{S}} P(X_t = j \mid X_s = i) P(X_u = k \mid X_s = i, X_t = j) \end{aligned}$$

Wenn X ein Markovprozess ist und $0 \leq s \leq t \leq u$, dann folgt die Chapman-Kolmogorov-Gleichung

$$p_{ik}(s, u) = \sum_{j \in \mathcal{S}} p_{ij}(s, t) p_{jk}(t, u) \quad (8.2)$$

Beweis:

1. $P(X_u = k \mid X_s = i)$ stellt die Wahrscheinlichkeit dar, dass der Prozess zur Zeit s in i ist und zur Zeit u in k ist. Der Prozess kann zwischendrin in alle anderen Zustände gesprungen sein. Daraus ergibt sich

$$P(X_u = k \mid X_s = i) = \sum_{j \in \mathcal{S}} P(X_t = j, X_u = k \mid X_s = i)$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned} & \sum_{j \in \mathcal{S}} P(X_t = j, X_u = k \mid X_s = i) \\ &= \sum_{j \in \mathcal{S}} \frac{P(X_t = j, X_u = k, X_s = i)}{P(X_s = i)} \\ &= \sum_{j \in \mathcal{S}} \frac{P(X_t = j, X_s = i)}{P(X_s = i)} \cdot \frac{P(X_u = k, X_s = i, X_t = j)}{P(X_s = i, X_t = j)} \\ &= \sum_{j \in \mathcal{S}} P(X_t = j \mid X_s = i) P(X_u = k \mid X_s = i, X_t = j) \end{aligned}$$

2. Sei der Prozess ein Markovprozess und sei $0 \leq s \leq t \leq u$ sowie $X_s = i$ gegeben. Es gilt trivialerweise $P(X_t = j \mid X_s = i) = p_{ij}(s, t)$ und wegen der Markoveigenschaft $P(X_u = k \mid X_s = i, X_t = j) = P(X_u = k \mid X_t = j) = p_{jk}(t, u)$. In die Gleichung eingesetzt folgt unmittelbar die Chapman-Kolmogorov-Gleichung. \square

Die Beschreibung des Prozesses X_t hängt nun nur noch von den Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{jk}(s, t)$ ab.

Definition 8.6 Übergangsintensität

Wir definieren die Übergangsintensität von Zustand j nach k mit

$$\mu_{jk}(t) = \lim_{h \searrow 0} \frac{p_{jk}(t, t+h)}{h} \quad (8.3)$$

Wir setzen voraus, dass die Übergangsintensität für alle $j \neq k \in \mathcal{S}$ existiert und dass diese zumindest stückweise stetig sind. Des weiteren sollen sie überall rechtstetig sein.

Definition 8.7 Gesamte Übergangsintensität

Wir definieren die gesamte Übergangsintensität von Zustand j mit

$$\mu_j(t) = \sum_{k \neq j} \mu_{jk}(t) \quad (8.4)$$

Wir sehen, dass $\mu_j(t)$ die Ausscheideintensität in alle anderen Zustände $k \neq j$ beschreibt.

Definition 8.8 *Kumulierte Übergangsintensität*

Wir definieren weiter die kumulative Intensität als

$$q_{jk}(s, t) = \int_s^t \mu_{jk}(\tau) d\tau$$

$$q_{jj}(s, t) = - \int_s^t \mu_j(\tau) d\tau$$

und fassen diese auch in der kumulativen Intensitätsmatrix zusammen:

$$q(s, t) := (q_{jk}(s, t))_{(j,k) \in \mathcal{S}^2}$$

Bemerkung 8.9 Die Übergangsintensität kann auch so geschrieben werden:

$$p_{jk}(t, t + dt) = \mu_{jk}(t)dt + o(dt),$$

Wir sehen hier eine deutliche Analogie zu den Ausscheideintensitäten aus Kapitel 2.

Es gilt folgender Hilfssatz:

Lemma 8.10 Sei $(X_t)_{t \geq 0}$ ein Markovprozess mit Zustandsraum \mathcal{S} und $j \in \mathcal{S}$ mit $P(X_s = j) > 0$ Dann gelten

- 1) $q_{jk}(s, t) + q_{kl}(t, u) = q_{jl}(s, u), \quad s \leq t \leq u, k, l \in \mathcal{S}$
- 2) $q_{jk}(s, s) = 0, \quad k \in \mathcal{S},$
- 3) $\lim_{t \searrow s} q_{jk}(s, t) = 0, \quad k \in \mathcal{S},$
- 4) $q_{jk}(s, t) \geq 0, \quad q_{jj}(s, t) \leq 0, \quad s \leq t, k \neq j$
- 5) $\sum_{k \neq j} q_{jk}(s, t) = -q_{jj}(s, t), \quad s \leq t$
- 6) $q_{kk}(t-, t) \geq -1, \quad t > 0, k \in \mathcal{S}, P(X_{t-} = k) > 0$
- 7) $(q_{kk}(t-, t) = -1 \Rightarrow q_{kk}(t-, \tau) = -1, \tau \geq t), \quad t > 0, k \in \mathcal{S}, P(X_{t-} = k) > 0$

Beweis:

(1) gilt wegen

$$\begin{aligned} q_{jk}(s, t) + q_{jk}(t, u) &= \int_s^t \mu_{jk}(\tau) d\tau + \int_t^u \mu_{jk}(\tau) d\tau \\ &= \int_s^u \mu_{jk}(\tau) d\tau = q_{jk}(s, u) \end{aligned}$$

(2) gilt wegen $\int_s^s \mu(\tau) d\tau = 0$

(3) folgt wegen der Rechtsstetigkeit und (2)

(4) trivial

(5) trivial

(6) und (7) gilt allgemein für kumulative Ausscheideintensitäten.

Details finden sich z.B. in [13] und in [9]

□

8.1.3 Die Kolmogorov Differentialgleichungen

Die Übergangswahrscheinlichkeiten sind zweidimensionale Funktionen der Zeit und im nichttrivialen Fall ist es nahezu unmöglich diese anzugeben. Die Intensitäten dagegen sind eindimensionale Funktionen, die leichter darstellbar sind und mit denen sich die Übergangswahrscheinlichkeiten darstellen lassen.

Satz 8.11 *Kolmogorov-Rückwärtsgleichung*

$$\frac{d}{dt}p_{jk}(t, u) = \mu_j(t)p_{jk}(t, u) - \sum_{g:g \neq j} \mu_{jg}(t)p_{gk}(t, u) \quad (8.5)$$

Beweis:

Für ein kleines $h > 0$ liefert die Chapman-Kolmogorov-Gleichung (8.2):

$$p_{jk}(t, u) = \sum_{g \neq j \in \mathcal{S}} p_{jg}(t, t+h)p_{gk}(t+h, u) + p_{jj}(t, t+h)p_{jk}(t+h, u)$$

Subtrahieren von $p_{jk}(t+h, u)$ und anschließend Multiplikation mit -1

$$p_{jk}(t+h, u) - p_{jk}(t, u) = - \sum_{g \neq j \in \mathcal{S}} p_{jg}(t, t+h)p_{gk}(t+h, u) + (1 - p_{jj}(t, t+h))p_{jk}(t+h, u)$$

und Division durch h liefert

$$\frac{p_{jk}(t+h, u) - p_{jk}(t, u)}{h} = - \sum_{g \neq j \in \mathcal{S}} \frac{p_{jg}(t, t+h)}{h} p_{gk}(t+h, u) + \frac{(1 - p_{jj}(t, t+h))}{h} p_{jk}(t+h, u)$$

Nachdem die Intensitäten zumindest stückweise stetig sind können wir den Grenzübergang $h \rightarrow 0$ durchführen. Wir erhalten mit (8.4) und (8.3)

$$\frac{d}{dt}p_{jk}(t, u) = \mu_j(t)p_{jk}(t, u) - \sum_{g:g \neq j} \mu_{jg}(t)p_{gk}(t, u)$$

□

Diese Gleichung bestimmt bei gegebenem k und u die Funktionen $p_{j,k}(t, u)$ eindeutig, wenn wir noch die Bedingung

$$p_{jk}(u, u) = \delta_{jk}$$

fordern. Dabei ist δ das Kronecker- δ .

Neben der Rückwärtsgleichung gibt es auch noch die Vorwärtsgleichung:

$$\frac{d}{dt}p_{ij}(s, t) = \sum_{g:g \neq j} p_{ig}(s, t)\mu_{gj}(t) - p_{ij}(s, t)\mu_j(t)$$

Der Beweis der Vorwärtsgleichung findet sich in [13].

Für festes i und s liefert auch diese Differentialgleichung eindeutig die Funktion $p_{ij}(s, t)$ mit der Bedingung

$$p_{ij}(s, s) = \delta_{ij}$$

Insgesamt haben wir also eine Möglichkeit, mit der wir die Übergangswahrscheinlichkeiten mit Hilfe der Übergangsintensitäten darstellen können.

Beispiel 13 *Markovprozess in der Personenversicherung*

Wir betrachten als Beispiel einen Prozess mit 3 möglichen Zuständen $\mathcal{S} = \{a = \text{aktiv}, i = \text{invalid}, d = \text{tot}\}$ und den Übergängen und Intensitäten gemäß folgender Grafik.

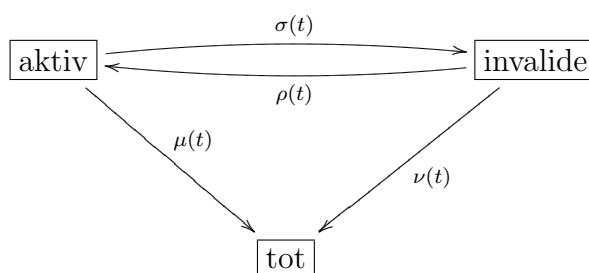


Abbildung 8.1: Markovprozesse in der Personenversicherung

Die Kolmogorov-Differentialgleichungen sind nun:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} p_{aa}(s, t) &= p_{ai}(s, t) \rho(t) - p_{aa}(s, t) (\mu(t) + \sigma(t)) \\ \frac{d}{dt} p_{ai}(s, t) &= p_{aa}(s, t) \sigma(t) - p_{ai}(s, t) (\nu(t) + \rho(t)) \end{aligned}$$

Die Gleichung für $p_{ad}(s, t)$ ergibt sich aus den anderen beiden, da sich alle drei zu 1 summieren müssen.

Die Anfangsbedingungen werden zu:

$$\begin{aligned} p_{aa}(s, s) &= 1 \\ p_{ai}(s, s) &= 0 \end{aligned}$$

8.2 Symbolverzeichnis

Wir verwenden folgende Symbole:

$a(t)$ versicherungsmathematischer Barwert

$b(t)$ Zahlung

f Dichte der Verteilungsfunktion

F Verteilungsfunktion

L Erlebensfallzahlung

$p(s, t)$ Überlebenswahrscheinlichkeit

$p_{jk}(s, t)$ Übergangswahrscheinlichkeit

$q(s, t)$ Ausscheidewahrscheinlichkeit

$r(t)$ jährlicher Zinssatz

S Überlebensfunktion

T Restlebensdauer

$U(0, 1)$ Gleichverteilung auf $[0, 1]$

$v(s, t)$ Diskontfaktor

$V(t)$ Reserve

$X(t)$ stochastischer Prozess

\mathbb{R}_0^+ $[0, \infty]$

\mathbb{R}^+ $(0, \infty]$

\wedge Minimum

$\Lambda(t)$ kumulierte Ausscheideintensität

$\mu(t)$ Ausscheideintensität bzw. Übergangsintensität

$\pi(t)$ Prämie

$\Pi(t)$ Prämienbarwert

ω rechnerisches Höchstalter

8.3 Musterbestand

Geburtsdatum	Geschlecht	Beginn	Renteneintritt	AR	IR	WR
10.03.47	w	01.08.61	65	4988,88	4988,88	2993,33
25.02.62	m	17.03.86	65	1967,76	1967,76	1180,66
22.02.59	w	01.10.79	65	2921,64	2921,64	1752,98
01.07.61	w	17.09.79	65	2956,44	2956,44	1773,86
08.05.55	m	01.09.70	65	3855,6	3855,6	2313,36
15.09.41	m	19.03.81	65	2564,64	2564,64	1538,78
13.08.60	m	01.04.82	65	2534,64	2534,64	1520,78
18.02.48	w	01.03.70	65	2130,84	2130,84	1278,5
23.08.47	m	12.09.66	65	2857,32	2857,32	1714,39
08.02.64	w	01.02.82	65	6699,6	6699,6	4019,76
20.12.47	w	01.01.80	65	2827,44	2827,44	1696,46
14.05.63	m	06.07.87	65	1777,08	1777,08	1066,25
24.11.48	w	01.09.63	65	4752	4752	2851,2
06.12.46	m	08.04.74	65	3190,32	3190,32	1914,19
10.03.65	m	01.02.89	65	1778,28	1778,28	1066,97
01.09.59	w	01.06.77	65	3402,96	3402,96	2041,78
23.11.63	m	01.09.78	65	2837,88	2837,88	1702,73
19.12.47	m	12.03.82	65	2822,28	2822,28	1693,37
02.10.49	m	04.06.74	65	3746,04	3746,04	2247,62
25.06.45	m	13.08.71	65	3868,08	3868,08	2320,85
25.02.46	w	01.04.88	65	1679,52	1679,52	1007,71
06.09.63	m	23.01.89	65	1447,92	1447,92	868,75
28.04.51	m	02.01.74	65	1941	1941	1164,6
11.04.52	w	02.03.81	65	1714,2	1714,2	1028,52
29.12.40	w	23.02.76	65	1904,28	1904,28	1142,57
16.03.47	m	30.07.62	65	4147,92	4147,92	2488,75
31.03.50	m	01.09.68	65	2785,44	2785,44	1671,26
11.04.49	w	05.07.74	65	1913,04	1913,04	1147,82
28.01.50	m	01.10.77	65	1494,36	1494,36	896,62
08.08.47	m	08.08.74	65	2243,88	2243,88	1346,33
22.01.54	w	01.09.68	65	2950,44	2950,44	1770,26
02.01.51	w	06.03.78	65	2382,24	2382,24	1429,34
31.05.45	m	01.04.71	65	2509,44	2509,44	1505,66
27.12.49	m	05.07.71	65	2266,56	2266,56	1359,94
18.02.41	m	29.09.69	65	1662	1662	997,2
10.12.45	m	15.12.68	65	4141,68	4141,68	2485,01
17.11.57	m	05.11.84	65	1778,88	1778,88	1067,33
06.07.54	w	01.10.72	65	2913,96	2913,96	1748,38
01.01.62	m	25.01.79	65	2698,44	2698,44	1619,06

Tabelle 8.1: Musterbestand

Geburtsdatum	Geschlecht	Beginn	Renteneintritt	AR	IR	WR
12.10.51	m	25.08.73	65	3246,84	3246,84	1948,1
28.08.45	m	30.11.77	65	2889,84	2889,84	1733,9
01.07.40	m	09.03.72	65	3239,76	3239,76	1943,86
05.08.44	m	28.04.77	65	2331,96	2331,96	1399,18
01.07.41	m	08.04.76	65	2648,28	2648,28	1588,97
06.02.47	m	19.11.79	65	1960,44	1960,44	1176,26
22.12.52	m	06.09.80	65	1790,88	1790,88	1074,53
01.07.48	m	09.09.78	65	2219,52	2219,52	1331,71
01.07.51	m	29.04.81	65	1804,8	1804,8	1082,88
05.12.40	m	20.08.74	65	2807,4	2807,4	1684,44
05.05.48	m	24.09.80	65	1815,24	1815,24	1089,14
12.06.48	m	09.04.74	65	2571,84	2571,84	1543,1
11.11.48	m	08.10.73	65	1735,92	1735,92	1041,55
09.02.48	m	31.01.83	65	1657,8	1657,8	994,68
01.07.42	m	10.09.80	65	1858,68	1858,68	1115,21
01.07.48	m	08.01.76	65	2438,76	2438,76	1463,26
07.01.42	m	01.01.75	65	2761,2	2761,2	1656,72
13.01.47	m	16.02.81	65	1905,24	1905,24	1143,14
25.06.52	m	15.10.73	65	2663,28	2663,28	1597,97
10.09.49	m	19.11.74	65	2757,36	2757,36	1654,42
07.04.52	m	26.02.80	65	1878,12	1878,12	1126,87
20.05.49	w	08.10.73	65	1714,44	1714,44	1028,66
22.08.48	w	27.07.69	65	2153,4	2153,4	1292,04
23.03.48	m	21.11.77	65	2313,24	2313,24	1387,94
18.05.47	m	15.01.76	65	2517	2517	1510,2
25.12.38	m	19.01.78	65	2332,32	2332,32	1399,39
01.12.44	m	27.12.77	65	2258,04	2258,04	1354,82
01.07.50	m	21.07.79	65	2024,88	2024,88	1214,93
03.03.46	m	01.04.74	65	2728,56	2728,56	1637,14
25.05.55	m	17.09.81	65	1588,2	1588,2	952,92
20.04.43	w	21.02.83	65	1614,36	1614,36	968,62
06.02.43	m	01.11.77	65	2401,68	2401,68	1441,01
24.06.41	m	04.11.80	65	1923,72	1923,72	1154,23
05.01.44	w	01.01.65	65	2033,16	2033,16	1219,9
31.12.44	m	27.06.79	65	2137,32	2137,32	1282,39
01.07.50	m	26.01.81	65	1673,28	1673,28	1003,97
05.06.53	m	21.07.80	65	1782,72	1782,72	1069,63
09.03.47	m	20.07.81	65	1805,52	1805,52	1083,31
10.04.86	m	01.09.01	65	66960	66960	40176

Tabelle 8.2: Musterbestand

Geburtsdatum	Geschlecht	Beginn	Renteneintritt	AR	IR	WR
29.07.68	w	26.08.85	65	334800	334800	200880
05.03.63	w	01.05.97	65	47160	47160	28296
26.08.70	m	03.07.95	65	59640	59640	35784
23.04.68	w	29.11.99	65	47160	47160	28296
09.11.51	m	26.09.88	65	237600	237600	142560
11.11.54	m	05.04.88	65	47160	47160	28296
14.07.62	w	14.07.80	65	66960	66960	40176
11.02.51	w	15.06.75	65	298200	298200	178920
16.09.69	m	11.11.91	65	59640	59640	35784
11.06.50	m	18.06.90	65	39600	39600	23760
20.09.53	m	11.01.78	65	178920	178920	107352
18.08.57	m	02.07.90	65	47160	47160	28296
19.07.72	m	20.11.00	65	2280	2280	1368
10.04.58	m	12.03.93	65	47160	47160	28296
19.12.81	m	06.11.00	65	66960	66960	40176
14.04.48	m	14.04.48	65	334800	334800	200880
15.11.58	m	03.04.95	65	39600	39600	23760
01.04.74	m	24.01.96	65	59640	59640	35784
28.11.52	m	04.09.67	65	66960	66960	40176
31.05.70	m	15.02.93	65	59640	59640	35784
13.02.67	m	01.09.84	65	66960	66960	40176
03.11.52	m	11.03.93	65	36840	36840	22104
11.01.66	m	04.05.84	65	27600	27600	16560
24.05.55	w	30.03.93	65	39600	39600	23760
28.12.62	m	18.03.93	65	47160	47160	28296
19.10.62	m	26.09.88	65	53040	53040	31824
01.01.66	m	01.02.01	65	2160	2160	1296
25.05.71	m	15.02.93	65	59640	59640	35784
17.07.64	m	20.01.92	65	53040	53040	31824
13.06.74	m	01.09.89	65	66960	66960	40176
07.04.63	m	01.09.78	65	66960	66960	40176
21.01.73	m	15.07.91	65	66960	66960	40176
02.04.67	m	06.02.89	65	59640	59640	35784
10.05.51	m	24.11.81	65	53040	53040	31824
20.02.73	w	14.01.02	65	53040	53040	31824
08.12.64	m	01.09.80	65	66960	66960	40176
12.05.50	w	14.07.69	65	66960	66960	40176
29.05.56	m	13.09.88	65	47160	47160	28296
04.01.50	m	18.02.81	65	47160	47160	28296

Tabelle 8.3: Musterbestand

Geburtsdatum	Geschlecht	Beginn	Renteneintritt	AR	IR	WR
30.10.59	m	03.01.01	65	36840	36840	22104
20.03.70	m	01.03.89	65	66960	66960	40176
01.10.56	m	01.04.92	65	39600	39600	23760
29.07.53	m	16.03.93	65	39600	39600	23760
01.07.76	m	01.09.92	65	66960	66960	40176
01.07.73	m	23.02.90	65	66960	66960	40176
05.05.58	m	18.11.88	65	53040	53040	31824
24.04.66	m	01.09.81	65	6699,6	6699,6	4019,76
13.03.47	m	01.08.61	65	6699,6	6699,6	4019,76
24.05.61	m	01.07.85	65	5964	5964	3578,4
10.04.66	m	01.02.91	65	5964	5964	3578,4
07.01.53	w	19.01.94	65	3681,6	3681,6	2208,96
19.02.42	m	03.03.80	65	3374,64	3374,64	2024,78
23.09.68	m	25.02.91	65	5964	5964	3578,4
18.01.63	w	01.10.91	65	5301,6	5301,6	3180,96
29.03.60	m	01.09.75	65	6699,6	6699,6	4019,76
13.11.67	m	01.09.83	65	6699,6	6699,6	4019,76
24.09.65	m	01.09.80	65	6699,6	6699,6	4019,76
25.09.64	m	24.04.01	65	3963,6	3963,6	2378,16
19.11.44	m	20.11.59	65	5906,76	5906,76	3544,06
13.12.58	m	01.08.90	65	4712,4	4712,4	2827,44
07.02.61	w	26.05.92	65	4712,4	4712,4	2827,44
17.06.79	m	01.09.94	65	6699,6	6699,6	4019,76
20.06.85	m	01.09.00	65	6699,6	6699,6	4019,76
21.10.51	m	05.09.66	65	6699,6	6699,6	4019,76
27.12.71	m	05.03.01	65	234,84	234,84	140,9
10.07.63	m	16.03.93	65	5301,6	5301,6	3180,96
14.03.69	m	03.06.91	65	5964	5964	3578,4
04.02.67	m	13.08.90	65	5964	5964	3578,4
05.09.66	m	14.01.89	65	5964	5964	3578,4
26.03.57	m	01.05.78	65	5964	5964	3578,4
17.12.78	m	01.11.99	65	5964	5964	3578,4
03.01.72	m	30.03.01	65	5301,6	5301,6	3180,96
10.08.76	m	02.09.91	65	6699,6	6699,6	4019,76
29.04.59	m	16.03.93	65	4712,4	4712,4	2827,44
01.01.57	m	18.09.72	65	6699,6	6699,6	4019,76
13.08.48	m	03.11.77	65	5301,6	5301,6	3180,96
24.06.60	m	20.07.76	65	6699,6	6699,6	4019,76
04.04.60	m	19.03.86	65	5301,6	5301,6	3180,96

Tabelle 8.4: Musterbestand

Geburtsdatum	Geschlecht	Beginn	Renteneintritt	AR	IR	WR
05.03.56	m	03.06.88	65	4712,4	4712,4	2827,44
23.12.72	m	15.01.01	65	5301,6	5301,6	3180,96
15.04.62	m	02.01.01	65	3963,6	3963,6	2378,16
08.11.60	m	06.04.92	65	1789,08	1789,08	1073,45
09.04.68	m	05.11.90	65	5964	5964	3578,4
26.04.73	m	01.09.88	65	6699,6	6699,6	4019,76
04.08.71	m	13.04.93	65	5964	5964	3578,4
29.06.79	m	15.01.01	65	5964	5964	3578,4
18.06.63	m	05.03.90	65	5301,6	5301,6	3180,96
03.09.69	m	29.06.93	65	5964	5964	3578,4
09.10.66	m	09.10.66	65	6699,6	6699,6	4019,76
20.06.72	m	23.06.93	65	5964	5964	3578,4
21.12.62	w	01.09.78	65	6699,6	6699,6	4019,76
02.08.57	m	01.09.72	65	6699,6	6699,6	4019,76
16.04.60	m	15.04.96	65	3963,6	3963,6	2378,16
18.11.58	m	02.09.74	65	6699,6	6699,6	4019,76
01.09.67	m	01.09.82	65	6699,6	6699,6	4019,76
15.05.76	m	02.09.91	65	6699,6	6699,6	4019,76
22.07.62	m	01.09.77	65	6699,6	6699,6	4019,76
15.04.63	m	22.01.01	65	3963,6	3963,6	2378,16
20.08.70	m	11.08.00	65	5301,6	5301,6	3180,96
27.12.78	m	01.08.01	65	5964	5964	3578,4
08.05.67	m	04.03.94	65	5301,6	5301,6	3180,96
08.05.67	m	01.09.82	65	6699,6	6699,6	4019,76
03.11.67	m	01.03.92	65	5964	5964	3578,4
26.06.61	m	02.05.01	65	3963,6	3963,6	2378,16
29.01.64	m	13.03.93	65	5301,6	5301,6	3180,96
12.08.74	w	05.04.93	65	6699,6	6699,6	4019,76
19.10.54	m	14.03.77	65	5964	5964	3578,4
15.11.79	m	18.10.00	65	281,88	281,88	169,13
26.05.80	m	29.06.98	65	6699,6	6699,6	4019,76
01.01.77	m	01.09.92	65	6699,6	6699,6	4019,76
07.11.70	m	01.09.86	65	6699,6	6699,6	4019,76
22.03.46	m	15.12.72	65	5301,6	5301,6	3180,96
19.02.58	m	06.10.86	65	5301,6	5301,6	3180,96
08.10.73	m	01.10.95	65	5964	5964	3578,4
01.09.62	m	25.09.89	65	5301,6	5301,6	3180,96
13.01.65	m	12.03.84	65	6699,6	6699,6	4019,76
30.09.71	m	01.09.87	65	6699,6	6699,6	4019,76

Tabelle 8.5: Musterbestand

Geburtsdatum	Geschlecht	Beginn	Renteneintritt	AR	IR	WR
08.05.71	m	01.09.86	65	6699,6	6699,6	4019,76
07.09.56	m	25.11.91	65	4712,4	4712,4	2827,44
21.03.78	w	01.12.99	65	5964	5964	3578,4
30.03.56	w	30.01.91	65	4712,4	4712,4	2827,44
07.06.60	m	15.07.91	65	4712,4	4712,4	2827,44
01.04.65	m	09.03.87	65	5964	5964	3578,4
23.01.77	m	01.09.92	65	6699,6	6699,6	4019,76
28.01.58	m	07.04.83	65	5964	5964	3578,4
02.09.63	m	01.09.78	65	6699,6	6699,6	4019,76
20.12.72	m	15.08.98	65	5301,6	5301,6	3180,96
30.07.64	m	22.03.93	65	5301,6	5301,6	3180,96
06.12.66	m	01.09.82	65	6699,6	6699,6	4019,76
14.11.72	m	01.09.95	65	931,08	931,08	558,65
29.08.61	m	01.04.82	65	5964	5964	3578,4
27.03.67	m	01.09.82	65	6699,6	6699,6	4019,76
20.11.56	m	09.10.91	65	4712,4	4712,4	2827,44
20.02.65	m	30.11.00	65	4712,4	4712,4	2827,44
19.12.82	m	05.12.00	65	6699,6	6699,6	4019,76
13.04.63	m	25.02.91	65	5301,6	5301,6	3180,96
26.02.59	w	02.01.96	65	3963,6	3963,6	2378,16
15.06.69	m	22.01.01	65	258,48	258,48	155,09
24.06.66	m	09.01.89	65	5964	5964	3578,4
28.04.76	w	01.09.92	65	6699,6	6699,6	4019,76
30.08.47	w	02.01.01	65	2650,8	2650,8	1590,48
05.10.65	m	17.04.00	65	4712,4	4712,4	2827,44
31.01.52	w	03.07.78	65	5301,6	5301,6	3180,96
02.07.70	m	03.04.94	65	5964	5964	3578,4
28.03.47	m	01.08.61	65	6699,6	6699,6	4019,76
19.06.81	m	01.09.01	65	6699,6	6699,6	4019,76
21.11.66	m	15.07.91	65	5964	5964	3578,4
03.10.57	m	15.02.93	65	3963,6	3963,6	2378,16
20.06.49	m	01.03.94	65	3681,6	3681,6	2208,96
20.10.69	m	01.09.85	65	2263,56	2263,56	1358,14
21.09.79	m	12.10.00	65	5964	5964	3578,4
02.06.66	m	01.02.01	65	4712,4	4712,4	2827,44
15.09.66	m	16.09.84	65	6699,6	6699,6	4019,76
28.01.57	m	03.09.90	65	4712,4	4712,4	2827,44
02.02.51	m	04.10.00	65	3092,4	3092,4	1855,44
13.06.66	m	15.03.93	65	5301,6	5301,6	3180,96

Tabelle 8.6: Musterbestand

Geburtsdatum	Geschlecht	Beginn	Renteneintritt	AR	IR	WR
22.12.52	w	16.03.93	65	3681,6	3681,6	2208,96
10.04.67	m	01.09.82	65	6699,6	6699,6	4019,76
10.08.67	m	01.02.93	65	5301,6	5301,6	3180,96
21.09.44	m	11.03.93	65	3092,4	3092,4	1855,44
25.06.57	m	17.04.00	65	3681,6	3681,6	2208,96
06.06.61	m	01.10.91	65	5301,6	5301,6	3180,96
17.03.66	w	05.06.97	65	4712,4	4712,4	2827,44
03.02.67	m	01.09.82	65	6699,6	6699,6	4019,76
24.07.83	m	01.09.00	65	6699,6	6699,6	4019,76
12.08.43	w	22.04.57	65	6297,24	6297,24	3778,34
30.04.52	w	26.04.82	65	5301,6	5301,6	3180,96
20.11.57	m	27.12.93	65	3963,6	3963,6	2378,16
05.10.65	m	01.09.80	65	6699,6	6699,6	4019,76
19.07.66	w	21.05.85	65	6699,6	6699,6	4019,76
22.07.59	m	01.10.81	65	5964	5964	3578,4
26.11.65	m	01.09.81	65	6699,6	6699,6	4019,76
03.05.71	m	01.04.94	65	5964	5964	3578,4
17.01.62	w	02.04.01	65	3963,6	3963,6	2378,16
22.06.59	m	02.04.01	65	3681,6	3681,6	2208,96
10.04.51	w	18.09.89	65	3963,6	3963,6	2378,16
03.11.55	m	25.11.99	65	3681,6	3681,6	2208,96
02.08.74	m	01.07.96	65	5964	5964	3578,4
03.10.58	m	20.06.83	65	5964	5964	3578,4
02.03.55	m	02.11.90	65	4712,4	4712,4	2827,44
05.01.60	m	01.09.75	65	4017,48	4017,48	2410,49
21.07.64	m	18.03.93	65	5301,6	5301,6	3180,96
01.08.76	m	01.09.93	65	6699,6	6699,6	4019,76
06.05.68	m	09.08.86	65	6699,6	6699,6	4019,76
07.03.50	m	30.01.89	65	2373,12	2373,12	1423,87
16.11.62	w	01.02.93	65	4712,4	4712,4	2827,44
15.01.49	m	05.08.63	65	6699,6	6699,6	4019,76
19.01.64	m	14.06.85	65	5964	5964	3578,4
15.07.73	m	01.09.89	65	6699,6	6699,6	4019,76
14.08.73	m	01.09.89	65	6699,6	6699,6	4019,76
05.09.68	m	06.04.92	65	5964	5964	3578,4
28.05.68	m	28.06.93	65	5964	5964	3578,4
22.08.57	m	29.06.00	65	3681,6	3681,6	2208,96
04.12.69	m	02.08.93	65	5964	5964	3578,4
09.06.82	m	01.09.97	65	6699,6	6699,6	4019,76

Tabelle 8.7: Musterbestand

Geburtsdatum	Geschlecht	Beginn	Renteneintritt	AR	IR	WR
18.07.45	m	12.03.93	65	1665,12	1665,12	999,07
01.01.82	w	12.01.00	65	403,92	403,92	242,35
30.09.56	m	25.09.00	65	3681,6	3681,6	2208,96
15.02.48	w	04.05.92	65	3681,6	3681,6	2208,96
08.04.74	m	02.07.01	65	5301,6	5301,6	3180,96
03.05.80	w	01.09.95	65	6699,6	6699,6	4019,76
05.04.51	m	03.06.91	65	3963,6	3963,6	2378,16
21.05.63	m	02.07.84	65	5964	5964	3578,4
01.08.81	m	01.09.97	65	6699,6	6699,6	4019,76
20.02.58	m	17.10.88	65	5301,6	5301,6	3180,96
01.01.59	m	10.06.97	65	3963,6	3963,6	2378,16
08.03.82	m	01.09.01	65	6699,6	6699,6	4019,76
16.01.79	m	02.04.01	65	5964	5964	3578,4
14.02.58	m	02.05.77	65	6699,6	6699,6	4019,76
02.03.61	w	17.11.83	65	5964	5964	3578,4
23.03.70	w	25.04.00	65	5301,6	5301,6	3180,96
29.01.58	m	21.08.80	65	5964	5964	3578,4
21.03.69	m	01.09.84	65	6699,6	6699,6	4019,76
07.03.71	m	02.11.92	65	5964	5964	3578,4
16.01.47	m	24.06.64	65	5444,16	5444,16	3266,5
14.09.73	w	21.08.89	65	6699,6	6699,6	4019,76
16.08.68	m	01.09.83	65	6699,6	6699,6	4019,76
13.05.70	m	24.11.88	65	6699,6	6699,6	4019,76
05.07.52	m	12.03.01	65	3092,4	3092,4	1855,44
25.01.59	m	03.02.92	65	4712,4	4712,4	2827,44
05.11.63	w	06.11.00	65	3963,6	3963,6	2378,16
06.04.54	w	15.09.69	65	4807,92	4807,92	2884,75
14.01.57	m	01.10.90	65	4712,4	4712,4	2827,44
30.05.44	m	02.03.92	65	3092,4	3092,4	1855,44
18.07.68	m	04.05.92	65	5964	5964	3578,4
12.01.69	m	11.03.93	65	5964	5964	3578,4
05.07.77	m	01.09.93	65	6699,6	6699,6	4019,76
25.08.57	m	18.09.72	65	6699,6	6699,6	4019,76
12.08.57	w	01.08.72	65	6699,6	6699,6	4019,76
25.04.61	m	05.06.86	65	5964	5964	3578,4
05.08.85	m	01.09.01	65	6699,6	6699,6	4019,76
22.02.68	m	22.08.88	65	6699,6	6699,6	4019,76
30.06.56	m	08.01.01	65	195,36	195,36	117,22
18.12.66	w	24.06.85	65	6699,6	6699,6	4019,76

Tabelle 8.8: Musterbestand

Geburtsdatum	Geschlecht	Beginn	Renteneintritt	AR	IR	WR
17.09.69	m	01.09.85	65	2324,4	2324,4	1394,64
28.03.62	m	11.03.93	65	4712,4	4712,4	2827,44
03.09.71	m	01.09.86	65	6699,6	6699,6	4019,76
27.05.65	m	23.02.87	65	5964	5964	3578,4
21.11.62	m	15.02.93	65	4712,4	4712,4	2827,44
14.09.82	m	11.02.02	65	6699,6	6699,6	4019,76
26.06.50	m	13.09.93	65	3681,6	3681,6	2208,96
02.04.81	m	11.02.02	65	5964	5964	3578,4
13.04.52	w	05.06.97	65	3681,6	3681,6	2208,96
11.08.70	w	24.02.88	65	6699,6	6699,6	4019,76
31.01.62	m	01.09.77	65	6699,6	6699,6	4019,76
11.09.67	m	01.09.84	65	6699,6	6699,6	4019,76
16.05.70	m	12.03.01	65	4712,4	4712,4	2827,44
28.07.83	m	01.09.99	65	6699,6	6699,6	4019,76
24.02.84	m	01.09.99	65	6699,6	6699,6	4019,76
30.04.53	m	15.02.93	65	3963,6	3963,6	2378,16
31.07.57	m	26.04.91	65	4712,4	4712,4	2827,44
05.08.84	m	01.09.00	65	6699,6	6699,6	4019,76
11.06.75	w	01.09.92	65	6699,6	6699,6	4019,76
28.07.46	w	01.08.60	65	6699,6	6699,6	4019,76
06.03.52	m	04.01.71	65	6699,6	6699,6	4019,76
20.09.51	m	15.02.93	65	2003,4	2003,4	1202,04
24.11.51	w	30.06.93	65	3681,6	3681,6	2208,96
03.04.70	m	14.02.94	65	5964	5964	3578,4
25.02.65	m	13.11.00	65	4712,4	4712,4	2827,44
02.05.72	m	01.09.87	65	6699,6	6699,6	4019,76
27.12.48	w	19.05.75	65	5301,6	5301,6	3180,96
16.05.49	m	16.08.73	65	4622,4	4622,4	2773,44
03.05.58	w	20.08.73	65	6699,6	6699,6	4019,76
12.01.75	m	22.05.00	65	5964	5964	3578,4
03.03.58	m	01.03.93	65	4712,4	4712,4	2827,44
26.10.63	w	01.09.78	65	6699,6	6699,6	4019,76
26.04.63	m	16.05.89	65	2168,28	2168,28	1300,97
22.02.79	m	01.09.94	65	6699,6	6699,6	4019,76
19.03.81	m	01.09.98	65	564,12	564,12	338,47
17.05.70	w	02.09.85	65	6699,6	6699,6	4019,76
12.07.61	m	15.02.93	65	4712,4	4712,4	2827,44
15.03.50	m	26.03.01	65	2650,8	2650,8	1590,48
03.03.61	w	01.12.99	65	3963,6	3963,6	2378,16

Tabelle 8.9: Musterbestand

Geburtsdatum	Geschlecht	Beginn	Renteneintritt	AR	IR	WR
23.01.77	m	06.04.99	65	5964	5964	3578,4
07.05.70	m	07.06.93	65	5964	5964	3578,4
09.03.42	m	21.03.93	65	2145,84	2145,84	1287,5
02.04.60	m	02.01.90	65	5301,6	5301,6	3180,96
07.06.62	m	01.09.78	65	6699,6	6699,6	4019,76
01.05.68	m	01.02.00	65	4712,4	4712,4	2827,44
04.06.53	m	08.01.01	65	3092,4	3092,4	1855,44
25.07.63	m	01.09.79	65	6699,6	6699,6	4019,76
07.09.67	m	04.09.89	65	5964	5964	3578,4
17.05.83	m	01.09.99	65	6699,6	6699,6	4019,76
29.06.62	m	09.02.87	65	5964	5964	3578,4
22.03.83	m	01.09.98	65	507,6	507,6	304,56
08.04.68	m	01.09.83	65	6699,6	6699,6	4019,76
08.06.58	m	03.07.00	65	3681,6	3681,6	2208,96
11.01.52	m	24.01.94	65	3681,6	3681,6	2208,96
24.06.46	m	28.06.93	65	3092,4	3092,4	1855,44
27.05.62	w	01.09.77	65	3383,52	3383,52	2030,11
03.05.50	m	01.07.76	65	5301,6	5301,6	3180,96
16.04.57	m	05.05.81	65	5964	5964	3578,4
14.05.49	m	27.03.93	65	3681,6	3681,6	2208,96
27.08.72	m	01.09.88	65	6699,6	6699,6	4019,76
04.01.49	w	01.08.94	65	3681,6	3681,6	2208,96
12.03.68	m	01.10.92	65	5964	5964	3578,4
05.04.75	m	02.09.91	65	6699,6	6699,6	4019,76
12.10.54	m	20.03.86	65	2677,8	2677,8	1606,68
14.11.68	m	02.02.87	65	6699,6	6699,6	4019,76
15.12.59	m	03.06.85	65	5301,6	5301,6	3180,96
28.05.53	m	11.03.93	65	3963,6	3963,6	2378,16
11.02.68	m	03.02.92	65	5964	5964	3578,4
16.06.54	m	10.12.90	65	3963,6	3963,6	2378,16
02.02.46	m	16.03.93	65	3092,4	3092,4	1855,44
26.04.76	m	02.09.91	65	6699,6	6699,6	4019,76
28.06.69	m	02.10.89	65	6699,6	6699,6	4019,76
05.08.82	m	01.09.97	65	6699,6	6699,6	4019,76
05.03.84	m	01.09.00	65	6699,6	6699,6	4019,76
07.05.58	m	05.04.83	65	5964	5964	3578,4
15.02.67	m	20.03.86	65	6699,6	6699,6	4019,76
23.09.68	m	10.10.86	65	6699,6	6699,6	4019,76
27.06.65	m	16.02.94	65	5301,6	5301,6	3180,96

Tabelle 8.10: Musterbestand

Geburtsdatum	Geschlecht	Beginn	Renteneintritt	AR	IR	WR
12.09.62	m	01.09.77	65	6699,6	6699,6	4019,76
25.09.40	m	17.04.61	65	5807,4	5807,4	3484,44
02.12.41	m	18.03.93	65	2650,8	2650,8	1590,48
21.01.40	m	01.09.59	65	6662,64	6662,64	3997,58
13.11.67	m	01.09.83	65	6699,6	6699,6	4019,76
19.06.74	m	01.09.89	65	6699,6	6699,6	4019,76
10.01.53	w	01.09.68	65	6699,6	6699,6	4019,76
18.09.83	m	01.02.01	65	6699,6	6699,6	4019,76
01.06.73	m	01.07.00	65	5301,6	5301,6	3180,96
06.02.55	m	15.04.91	65	3963,6	3963,6	2378,16
04.09.64	m	01.02.00	65	3963,6	3963,6	2378,16
17.03.75	w	01.09.90	65	6699,6	6699,6	4019,76
11.01.51	m	01.09.70	65	6699,6	6699,6	4019,76
06.02.72	w	01.09.99	65	5301,6	5301,6	3180,96
19.04.83	w	01.09.99	65	6699,6	6699,6	4019,76
02.06.60	m	15.07.83	65	5964	5964	3578,4
30.10.58	w	01.09.74	65	6699,6	6699,6	4019,76
29.11.67	m	01.03.99	65	4712,4	4712,4	2827,44
19.03.51	m	01.07.80	65	5301,6	5301,6	3180,96
06.12.55	w	01.09.71	65	6699,6	6699,6	4019,76
17.09.65	w	01.11.89	65	1886,52	1886,52	1131,91
08.09.49	w	08.10.90	65	3681,6	3681,6	2208,96
18.08.78	w	01.05.00	65	5964	5964	3578,4
29.08.75	w	01.09.98	65	5964	5964	3578,4
05.10.60	m	01.09.76	65	6699,6	6699,6	4019,76
05.07.69	w	01.09.85	65	6699,6	6699,6	4019,76
17.08.71	m	01.09.99	65	5301,6	5301,6	3180,96
29.04.84	w	01.09.01	65	6699,6	6699,6	4019,76
08.08.72	w	01.09.87	65	6699,6	6699,6	4019,76
01.10.64	w	01.09.79	65	6699,6	6699,6	4019,76
13.10.80	w	01.09.99	65	424,08	424,08	254,45
20.06.63	w	01.09.78	65	6699,6	6699,6	4019,76
10.03.49	m	15.11.73	65	5964	5964	3578,4
28.03.59	m	02.09.74	65	6699,6	6699,6	4019,76
25.07.54	m	19.08.68	65	6699,6	6699,6	4019,76
08.06.79	m	25.07.00	65	5964	5964	3578,4
24.10.76	w	01.09.96	65	6699,6	6699,6	4019,76
04.04.55	w	01.10.77	65	5964	5964	3578,4
10.05.64	w	01.09.80	65	6699,6	6699,6	4019,76

Tabelle 8.11: Musterbestand

Geburtsdatum	Geschlecht	Beginn	Renteneintritt	AR	IR	WR
12.08.43	m	15.10.82	65	3963,6	3963,6	2378,16
29.10.48	m	30.04.73	65	5964	5964	3578,4
03.04.67	m	01.09.83	65	6699,6	6699,6	4019,76
06.08.51	w	01.03.78	65	5301,6	5301,6	3180,96
04.12.63	m	01.03.89	65	1778,28	1778,28	1066,97
03.12.69	w	15.04.91	65	5964	5964	3578,4
14.06.44	m	01.09.72	65	5301,6	5301,6	3180,96
14.06.72	w	01.09.93	65	5964	5964	3578,4
01.03.49	m	02.09.63	65	5317,68	5317,68	3190,61
25.04.69	m	01.09.85	65	6699,6	6699,6	4019,76
09.12.60	m	01.08.97	65	3963,6	3963,6	2378,16
19.08.55	w	01.09.70	65	6699,6	6699,6	4019,76
03.06.64	m	02.01.96	65	4712,4	4712,4	2827,44
25.11.62	m	01.09.78	65	6699,6	6699,6	4019,76
03.11.54	m	07.03.71	65	6699,6	6699,6	4019,76
05.08.63	m	01.04.92	65	5301,6	5301,6	3180,96
20.12.54	m	01.09.70	65	6699,6	6699,6	4019,76
08.05.48	m	03.03.69	65	5964	5964	3578,4
17.07.75	w	01.09.90	65	6699,6	6699,6	4019,76
31.03.69	w	01.09.86	65	6699,6	6699,6	4019,76
22.11.48	w	01.08.62	65	6699,6	6699,6	4019,76
07.02.64	m	01.12.99	65	4712,4	4712,4	2827,44
12.09.67	m	01.09.84	65	6699,6	6699,6	4019,76
25.11.55	m	26.05.73	65	4113,84	4113,84	2468,3
19.10.53	m	26.01.76	65	3662,16	3662,16	2197,3
08.03.51	m	15.09.80	65	3260,64	3260,64	1956,38
10.04.60	m	16.05.78	65	3510,48	3510,48	2106,29
07.06.69	m	03.05.99	65	478,56	478,56	287,14
01.03.76	m	01.06.01	65	187,56	187,56	112,54
23.05.52	m	17.07.69	65	4645,32	4645,32	2787,19
21.10.46	m	06.11.67	65	4673,88	4673,88	2804,33
20.06.71	m	02.05.88	65	1962,24	1962,24	1177,34
11.01.57	m	18.09.79	65	3216,84	3216,84	1930,1
07.10.64	m	05.09.83	65	2762,28	2762,28	1657,37
05.07.59	m	04.09.78	65	3483,84	3483,84	2090,3
06.05.76	m	14.07.94	65	1144,44	1144,44	686,66
16.10.74	m	06.08.01	65	115,8	115,8	69,48
28.05.66	m	01.11.88	65	1917,84	1917,84	1150,7
24.03.61	m	26.06.79	65	3308,04	3308,04	1984,82

Tabelle 8.12: Musterbestand

Geburtsdatum	Geschlecht	Beginn	Renteneintritt	AR	IR	WR
23.09.59	m	18.09.80	65	2959,44	2959,44	1775,66
22.04.51	m	17.02.86	65	2564,52	2564,52	1538,71
19.03.50	m	05.01.76	65	3609,6	3609,6	2165,76
14.11.56	m	10.07.89	65	1894,68	1894,68	1136,81
03.10.62	m	25.05.81	65	3055,08	3055,08	1833,05
02.07.62	m	18.05.87	65	2251,92	2251,92	1351,15
01.02.58	m	25.04.91	65	1665,36	1665,36	999,22
16.06.64	m	20.06.94	65	1224,36	1224,36	734,62
21.04.47	m	09.12.66	65	5258,64	5258,64	3155,18
25.08.65	m	20.08.90	65	1776,72	1776,72	1066,03
18.08.49	w	16.02.73	65	4227,48	4227,48	2536,49
10.04.59	w	18.06.75	65	3715,68	3715,68	2229,41
15.02.66	w	03.02.92	65	1416	1416	849,6
17.01.56	m	20.05.85	65	2551,68	2551,68	1531,01
09.11.60	m	22.01.81	65	2893,32	2893,32	1735,99
21.01.54	m	02.01.90	65	1708,44	1708,44	1025,06
23.01.60	m	13.08.90	65	1835,64	1835,64	1101,38
12.05.43	m	18.01.61	65	6015,48	6015,48	3609,29
10.01.55	m	03.11.86	65	2356,2	2356,2	1413,72
01.06.62	m	01.06.81	65	3070,68	3070,68	1842,41
01.04.71	m	04.10.89	65	1836,96	1836,96	1102,18
01.01.63	m	01.02.90	65	1736,16	1736,16	1041,7
03.02.59	m	12.12.77	65	3567,48	3567,48	2140,49
16.10.74	w	16.07.01	65	103,92	103,92	62,35
04.06.51	m	22.02.72	65	4091,88	4091,88	2455,13
12.11.62	m	07.09.78	65	3247,56	3247,56	1948,54
21.01.60	m	14.06.82	65	5964	5964	3578,4
09.07.49	m	22.03.65	65	5058,6	5058,6	3035,16
10.10.57	m	13.06.89	65	1849,56	1849,56	1109,74
09.02.44	m	20.06.70	65	4467,48	4467,48	2680,49
19.02.78	m	04.01.00	65	346,08	346,08	207,65
04.07.55	m	12.04.72	65	4200,24	4200,24	2520,14
25.02.48	m	16.09.85	65	2457,72	2457,72	1474,63
18.07.64	m	10.07.89	65	1938,24	1938,24	1162,94
23.01.63	m	01.02.92	65	1685,16	1685,16	1011,1
05.11.59	m	11.10.82	65	2799	2799	1679,4
03.09.48	m	31.07.78	65	3668,4	3668,4	2201,04
09.07.54	m	05.07.82	65	2853,84	2853,84	1712,3
18.08.60	m	02.06.89	65	5301,6	5301,6	3180,96

Tabelle 8.13: Musterbestand

Geburtsdatum	Geschlecht	Beginn	Renteneintritt	AR	IR	WR
14.06.52	m	28.05.68	65	4731,84	4731,84	2839,1
01.08.46	m	30.06.75	65	3970,08	3970,08	2382,05
20.04.75	m	04.07.00	65	287,52	287,52	172,51
03.06.63	m	09.06.81	65	3029,04	3029,04	1817,42
31.05.59	m	04.07.88	65	2145,24	2145,24	1287,14
27.08.51	m	01.09.01	65	224,64	224,64	134,78
10.01.53	m	22.08.80	65	3105,36	3105,36	1863,22
07.01.58	m	04.01.88	65	2196,36	2196,36	1317,82
30.10.75	m	01.06.01	65	89,88	89,88	53,93
19.05.60	m	14.05.81	65	2869,08	2869,08	1721,45
08.04.51	m	25.10.73	65	4034,52	4034,52	2420,71
15.11.47	m	02.02.66	65	5218,8	5218,8	3131,28
01.09.55	m	05.02.79	65	3358,44	3358,44	2015,06
30.09.54	m	20.05.85	65	2344,8	2344,8	1406,88
02.02.46	m	17.04.78	65	3480,48	3480,48	2088,29
03.10.77	m	01.09.93	65	6699,6	6699,6	4019,76
18.11.51	m	02.07.90	65	1806,24	1806,24	1083,74
06.01.56	m	01.08.98	65	643,2	643,2	385,92
25.07.55	m	04.05.92	65	1430,64	1430,64	858,38
17.09.46	m	17.04.74	65	4038,24	4038,24	2422,94
18.08.52	m	14.09.82	65	3011,4	3011,4	1806,84
14.05.58	m	06.06.88	65	2138,4	2138,4	1283,04
15.05.69	m	01.07.92	65	1425,6	1425,6	855,36
01.08.70	m	05.06.90	65	1792,32	1792,32	1075,39
18.10.56	m	20.12.72	65	4070,04	4070,04	2442,02
04.09.67	m	05.11.84	65	2474,4	2474,4	1484,64
01.05.70	m	01.08.88	65	1994,4	1994,4	1196,64
22.08.47	m	02.01.72	65	4616,88	4616,88	2770,13
01.02.62	m	08.01.80	65	3213,48	3213,48	1928,09
06.07.59	m	01.07.80	65	3015,84	3015,84	1809,5
08.01.81	m	01.09.98	65	542,52	542,52	325,51
05.09.59	m	05.04.83	65	2820	2820	1692
27.08.60	m	02.06.86	65	2210,88	2210,88	1326,53
22.04.61	w	16.05.77	65	3481,08	3481,08	2088,65
13.01.55	m	01.03.82	65	2849,28	2849,28	1709,57
17.06.51	m	01.01.89	65	2011,92	2011,92	1207,15
20.01.59	m	16.02.83	65	2854,44	2854,44	1712,66
21.11.50	m	01.02.79	65	3426,24	3426,24	2055,74
03.08.62	m	01.10.85	65	2376,12	2376,12	1425,67

Tabelle 8.14: Musterbestand

Geburtsdatum	Geschlecht	Beginn	Renteneintritt	AR	IR	WR
16.05.66	w	02.08.82	65	2760	2760	1656
12.01.66	m	13.08.90	65	1746,12	1746,12	1047,67
19.11.46	m	01.07.74	65	4011,72	4011,72	2407,03
03.06.76	w	03.08.92	65	1360,44	1360,44	816,26
02.06.76	w	01.09.01	65	112,56	112,56	67,54
11.07.45	w	01.07.69	65	5964	5964	3578,4
06.08.61	m	17.01.89	65	5301,6	5301,6	3180,96
08.06.64	m	01.09.80	65	6699,6	6699,6	4019,76
14.01.56	w	01.03.02	65	82,08	82,08	49,25
18.03.71	m	22.01.01	65	5301,6	5301,6	3180,96
03.03.65	w	03.07.01	65	3963,6	3963,6	2378,16
20.10.77	w	16.08.00	65	5964	5964	3578,4
15.01.71	w	11.02.02	65	4712,4	4712,4	2827,44
21.12.65	w	23.01.02	65	57,12	57,12	34,27
16.12.46	m	11.11.74	65	3967,32	3967,32	2380,39
27.12.46	m	01.11.01	65	175,2	175,2	105,12

Tabelle 8.15: Musterbestand

Literaturverzeichnis

- [1] aba. *aba - Statistikreihe 2006*. aba, 2006.
- [2] Deuffhard/Bornemann. *Numerische Mathematik II*. Walter de Gruyter, 2002.
- [3] Deuffhard/Hohmann. *Numerische Mathematik I*. Walter de Gruyter, 2002.
- [4] H. U. Gerber. *Life Insurance Mathematics*. Springer, 3 edition, 1997.
- [5] K. Heubeck. *Richttafeln 1998*. Heubeck-Richttafeln-GmbH, 1998.
- [6] C. Klüppelberg. *Skript: Risikotheorie*. Klüppelberg, 2003.
- [7] M. Koller. *Stochastische Modelle in der Lebensversicherung*. Springer, 1 edition, 2000.
- [8] Volpi L. and Foxes Team. XNumbers.XLA - Multi-Precision Floating Point Computing and Numerical Methods for EXCEL V.5.0. <http://digilander.libero.it/foxes/>, 2006.
- [9] H. Milbrodt and M. Helbig. *Mathematische Methoden der Personenversicherung*. Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1 edition, 1999.
- [10] E. Neuburger. *Skript zur Mathematik der Pensionsversicherung*. Neuburger, 2006.
- [11] R. Norberg. Reserves in life an pension insurance. *Scand. Actuarial. J*, pages 3–24, 1991.
- [12] R. Norberg. *Risk and Stochastics in Life Insurance*. Norberg, 2003.
- [13] J. R. Norris. *Markov Chains*. Cambridge University Press, 1 edition, 1997.
- [14] S. Sadov, Y. Sadov, and M. Kondrat'eva. RKStrob - Runge-Kutta-Fehlberg integrator. <http://www.math.mun.ca/~sergey/Software/Pascal/RungeKutta/rkstrob.htm>, 1996.
- [15] B. Simeon. *Skript: Numerische Mathematik I*. Simeon, 2002.
- [16] Wikipedia. Homepage der freien Enzyklopedie Wikipedia. www.wikipedia.de [Stand: 20.10.2006].
- [17] R. Zagst. *Skript: Fixed Income Markets*. Zagst, 2005.