

Technische Universität München  
Zentrum Mathematik  
HVB-Stiftungsinstitut für Finanzmathematik

# **Varianz-optimales Hedging in affinen Volatilitätsmodellen**

Arnd Philipp Pauwels

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Mathematik der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)

genehmigten Dissertation.

Vorsitzende: Univ.-Prof. Dr. Claudia Klüppelberg  
Prüfer der Dissertation: 1. Univ.-Prof. Dr. Jan Kallsen  
2. Dr. Thorsten Rheinländer, Lecturer an der  
London School of Economics / U.K.

Die Dissertation wurde am 17.01.2007 bei der Technischen Universität eingereicht und durch die Fakultät für Mathematik am 30.03.2007 angenommen.



# Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird das Problem des varianz-optimalen Hedgens in einem allgemeinen zeitstetigen affinen stochastischen Volatilitätsmodell gelöst, unter der Annahme, dass der Preisprozess des Basisguts ein lokal quadratisch integrierbares Martingal ist. Stochastische Volatilitätsmodelle sind in den vergangenen Jahren sehr populär geworden. Untersucht man historische Zeitreihen von Aktienkursrenditen, beobachtet man sogenannte stilisierte Merkmale, wie zum Beispiel semi-schwere Tails, Volatilitäts-Cluster und den Leverage-Effekt. Stochastische Volatilitätsmodelle bilden diese stilisierten Merkmale angemessen ab und sind empirisch evidenter als Modelle ohne stochastische Volatilität. Da die stochastischen Volatilitätsmodelle einen unvollständigen Markt implizieren, können zufällige Auszahlungen in der Regel nicht perfekt repliziert werden. Ein klassischer Ausweg besteht darin, den erwarteten quadratischen Hedgefehler zu minimieren. Mathematisch gesprochen muss also im  $L^2$  die Orthogonalprojektion des abzusichernden Derivats auf den konvexen und abgeschlossenen Unterraum der replizierbaren Auszahlungen ermittelt werden. Im allgemeinen affinen Volatilitätsmodell werden die optimale Hedgingstrategie, bestehend aus Anfangskapital und Handelsstrategie, und die Varianz des zugehörigen Hedgefehlers semiexplizit bestimmt. Die Darstellung ermöglicht es, die gesuchten Größen effizient numerisch zu berechnen. Das allgemeine affine Volatilitätsmodell umfasst unter anderem das klassische stochastische Volatilitätsmodell von Heston (1993) und die Lévy-getriebenen stochastischen Volatilitätsmodelle, die Barndorff-Nielsen & Shephard (2001b) vorgeschlagen haben. Ebenfalls zur Klasse der affinen Modelle gehören die etwas allgemeineren stochastischen Volatilitätsmodelle, die auf zeittransformierten Lévy-Prozessen basieren, man vergleiche hierzu die Arbeit von Carr et al. (2003), in welcher der Subordinator entweder die Gestalt eines integrierten Cox-Ingersoll-Ross-Prozesses oder eines integrierten Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses besitzt. Die allgemeinen Formeln für den optimalen Hedge und den minimalen erwarteten quadratischen Hedgefehler werden auf das integrierte OU-Zeittransformationsmodell und das integrierte CIR-Zeittransformationsmodell spezialisiert. Insbesondere werden die Voraussetzungen der allgemeinen Resultate in Annahmen übersetzt, die nur von den Modellparametern abhängen und die leicht hinsichtlich ihrer Gültigkeit überprüft werden können. Zwei numerische Beispiele dokumentieren die Anwendbarkeit der Methodik zur Lösung des Hedgeproblems. In beiden Beispielen werden das NIG-Gamma-OU-Modell, das NIG-CIR-Modell, das exponentielle NIG-Lévy-Modell und das Black-Scholes-Modell miteinander verglichen, im ersten Beispiel anhand eines hypothetischen Beispielparametersatzes und im zweiten Beispiel anhand von an Marktpreise

kalibrierten Modellparametern, man vergleiche diesbezüglich insbesondere die Kapitel 6 und 7 in Schoutens (2003). Das erste Beispiel verdeutlicht, dass das optimale Anfangskapital und die optimale Handelsstrategie in allen Modellen sehr ähnlich sind, dass jedoch die minimalen erwarteten quadratischen Hedgefehler stärker variieren, auch dann, wenn man hierbei das Black-Scholes-Modell, das aufgrund der Vollständigkeit natürlich einen Hedgefehler von Null aufweist, ausklammert. Das deutet darauf hin, dass modellunabhängig die optimale Strategie näherungsweise durch die Black-Scholes-Strategie gegeben ist, wohingegen bei der Auswertung des Hedgefehlers die Wahl des Modells größere Bedeutung besitzt. Das zweite Beispiel illustriert, dass das statistische Preismaß, das aus der Kalibrierung der Modelle an Marktpreise resultiert, nur bedingt geeignet ist zum quadratischen Hedgen, da es zu weit von dem physikalischen Maß entfernt sein kann. Das Beispiel suggeriert, dass die Lösung des Hedgeproblems in der risikoneutralen Welt die Lösung des Hedgeproblems in der wirklichen Welt nur in unzureichendem Maße approximiert. Interessante Fragestellungen, die diese Arbeit aufwirft und die zum Teil Gegenstand aktueller Forschung sind, sind zum einen das parametrische Schätzen zeitstetiger affiner Volatilitätsmodelle (mit Sprüngen) unter dem physikalischen Maß, man vergleiche hierzu beispielsweise die Arbeiten von Singleton (2001) und Bates (2006), und zum anderen der Aspekt, inwieweit sich das Problem des Varianz-optimalen Hedgens im allgemeinen affinen Volatilitätsmodell lösen lässt, wenn man die Annahme, dass der Preisprozess des Underlyings ein lokal quadratisch integrierbares Martingal ist, fallen lässt, man vergleiche hierzu die Arbeit von Černý & Kallsen (2005).

# Abstract

In this dissertation variance-optimal hedging is considered in a general affine stochastic volatility model in a continuous-time framework. It is assumed that the underlying price follows a locally square-integrable martingale. In recent years stochastic volatility models have attracted great attention. Analyzing stock return distributions, one observes so-called stylized facts as for example semi-heavy tails, volatility clustering, and the leverage effect. Stochastic volatility models reflect these stylized facts adequately, empirically they are more evident than models without stochastic volatility. Since stochastic volatility models imply an incomplete market it is typically not possible to replicate a contingent claim perfectly. A classical way out is to minimize the mean squared hedging error. Mathematically spoken, in the Hilbert space  $L^2$  it is necessary to calculate the orthogonal projection of the derivative security onto the convex and closed subset of payoffs which can be replicated in a perfect way. In the general affine stochastic volatility model the optimal hedge (i.e. the optimal endowment and the optimal trading strategy) and the associated hedging error are determined semi-explicitly. The representation of the solution allows for efficient numerical computation. The general affine framework includes the classical Heston model, cf. Heston (1993), and the Lévy-driven stochastic volatility models put forward in Barndorff-Nielsen & Shephard (2001b). The affine class also contains the more general volatility models which are based on time-changed Lévy processes as proposed in Carr et al. (2003), where the subordinator corresponds to either an integrated Cox-Ingersoll-Ross (CIR) process or an integrated Ornstein-Uhlenbeck (OU) process. The general formulae for the optimal hedge and the minimal mean squared hedging error are specialized in the integrated OU respectively CIR time change models. In particular the general prerequisites are carried over into conditions which only depend on the model parameters and which can be easily checked. Two numerical examples illustrate the use of the method of solving the hedging problem. In both examples the NIG-Gamma-OU model, the NIG-CIR model, the exponential NIG Lévy model, and the classical Black-Scholes model are compared. In the first example a hypothetical set of parameters is assumed, whereas the parameters in the second example stem from calibration, cf. chapter 6 and 7 in Schoutens (2003). The first example indicates that the optimal hedge is similar in the four models but that the minimal mean squared hedging error differs more strongly even if the Black-Scholes model is neglected where the hedging error is naturally zero due to market completeness. This suggests that independent of the model the optimal strategy is given by the Black-Scholes strategy, whereas in view of analyzing the hedging error the choice of the model plays a more important role. The

second example illustrates that the statistical price measure is suitable for quadratic hedging only to a limited extent as it can be too far away from the physical measure. This example suggests that the solution of the hedging problem in the risk neutral world is an inadequate approximation of the solution in the real world. There are some interesting questions which are posed by this dissertation and which are partially subject to current research. One issue is the parametric estimation of continuous-time affine stochastic volatility models (with jumps) under the physical measure, cf. Singleton (2001) and Bates (2006) for instance. Another query is the solution of the variance-optimal hedging problem in the general affine stochastic volatility model if one drops the assumption that the underlying price follows a locally square-integrable martingale, cf. Černý & Kallsen (2005).

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Ziel der Arbeit . . . . .	1
1.2	Der Ansatz von Hubalek et al. (2006) . . . . .	25
1.3	Der Ansatz von Cont et al. (2005) . . . . .	31
1.4	Affine stochastische Volatilitätsmodelle . . . . .	37
1.4.1	Das Modell von Heston (1993) . . . . .	39
1.4.2	Das Modell von Bates (1996) . . . . .	40
1.4.3	Das Modell von Barndorff-Nielsen & Shephard (2001b) . . . . .	41
1.4.4	Die Modelle von Carr et al. (2003) . . . . .	45
1.5	Aufbau der Arbeit . . . . .	48
<b>2</b>	<b>Semimartingalcharakteristikenkalkül</b>	<b>53</b>
2.1	Kompensatoren . . . . .	53
2.2	Semimartingalcharakteristiken . . . . .	59
2.3	Charakteristikenkalkül . . . . .	63
<b>3</b>	<b>Darstellung des varianz-optimalen Hedges in Integralform in einem allgemeinen affinen stochastischen Volatilitätsmodell</b>	<b>67</b>
3.1	Das allgemeine affine stochastische Volatilitätsmodell . . . . .	67
3.2	Integraldarstellung der optimalen Lösung . . . . .	75
<b>4</b>	<b>Varianz-optimales Hedging in stochastischen Volatilitätsmodellen mit zeittransformierten Lévy-Prozessen</b>	<b>99</b>
4.1	Integrierte OU-Zeittransformationsmodelle . . . . .	100
4.2	Integrierte CIR-Zeittransformationsmodelle . . . . .	121
4.3	Numerische Illustration . . . . .	148
<b>5</b>	<b>Ausblick</b>	<b>163</b>
	<b>Schlusswort</b>	<b>167</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>169</b>
	<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>179</b>



# Kapitel 1

## Einleitung

*Mein Sohn, sey mit Lust bei den Geschäften am Tage, aber mache nur solche, daß wir bey Nacht ruhig schlafen können.* (Thomas Mann, Buddenbrooks)

### 1.1 Ziel der Arbeit

Der Händler risikobehafteter und risikoloser Wertpapiere verfolgt die Intention, bei gegebener Markterwartung ein für sich optimales Verhältnis von Ertrag und Risiko herzustellen. Neben den gegenwärtigen Wertpapierkursen, die er dem Markt entnimmt, sind dabei für ihn zukünftige Preise, die seiner Markterwartung entsprechen, und Kennzahlen, die das Risiko seiner Marktposition wiedergeben, wesentlich. Auf der Grundlage dieser Informationen trifft der Händler seine Kauf- und Verkaufsentscheidungen. Um den Fluss zukünftiger Zahlungsströme der Finanzmarktinstrumente adäquat abzubilden, benötigt der Händler ein möglichst realitätsnahes, stochastisches Modell, das bei aller Komplexität es noch erlaubt, möglichst analytische oder zumindest noch numerische Berechnungen durchführen zu können. Als Beispiel betrachte man den Stillhalter einer Call-Option, der zum heutigen Zeitpunkt für den Verkauf der Option eine Prämie erhält, dafür aber im Gegenzug zum Fälligkeitstermin das Basisgut zum vereinbarten Basispreis an den Käufer der Option liefern muss, wenn dieser die Option ausübt. Dieses Geschäft stellt ein Risiko für den Stillhalter dar, da der Preis des Basisguts zum Fälligkeitstermin viel höher sein kann als der vereinbarte Basispreis. Somit stellen sich dem Optionsverkäufer drei wichtige Fragen, wenn er seine Markterwartung durch Annahme eines stochastischen Marktmodells zum Ausdruck gebracht hat:

1. Welche Prämie soll er heute für den Verkauf der Option verlangen?
2. Wie soll er die Prämie am Markt bis zum Fälligkeitstermin am besten reinvestieren, so dass er zum Fälligkeitstermin seiner Verpflichtung, das Basisgut zu liefern, nachkommen kann und gleichzeitig das Verlustrisiko minimiert?
3. Wie groß ist das verbleibende minimale Risiko, wenn er die für sich optimale Handelsstrategie am Markt umsetzt?

Bei der ersten Frage geht es um die Bewertung der Option, wohingegen sich die anderen beiden Fragen mit der Absicherung, dem sogenannten *Hedging* der Option auf der Grundlage des Basisguts beschäftigen. Optionen sind ein typisches Beispiel für *Derivate* (lat. *derivare* ableiten). Ein Derivat ist, grob gesprochen, ein Handelsgut, dessen Preis jederzeit eindeutig durch gegenwärtige bzw. vergangene Preise von einem oder mehreren Basisgütern festgelegt ist, vgl. Hull (1993), Kapitel 1. Ein Basisgut (auch als *Underlying* bezeichnet) ist dabei dadurch charakterisiert, dass der Preis nicht durch Preise anderer Güter eindeutig bestimmt ist. Beispiele für Basisgüter sind unter anderem Aktien und Anleihen. Seien  $T < \infty$  ein endlicher Zeithorizont und  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, P)$  ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum. Zur Vereinfachung gelte  $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ . Im Folgenden wird von einem vereinfachten Markt ausgegangen, der sich aus einer Anleihe mit Preisprozess  $S^0 = (S_t^0)_{t \in [0, T]}$  und einem weiteren beliebigen Basisgut mit Preisprozess  $S^1 = (S_t^1)_{t \in [0, T]}$  zusammensetzt. Für den Moment sei  $S = (S^0, S^1)$  ein beliebiges  $\mathbb{R}^2$ -wertiges Semimartingal (vgl. Jacod & Shiryaev (2003), Definition I.4.21), wobei  $S^0$  und  $S^1$  strikt positiv angenommen werden mit  $S_0^0 = 1$ . Die Anleihe fungiere als *Numeraire* (Bezugsgröße). Anstatt die Kurse der Wertpapiere in einer bestimmten Währung auszudrücken, werden diese als Vielfache des Numeraires angegeben, indem alle Wertpapiere mit dem Numeraire diskontiert werden. Der Markt  $\hat{S} = \left( \frac{S^0}{S^0}, \frac{S^1}{S^0} \right) = \left( 1, \hat{S}^1 \right)$  wird auch *normiert* genannt, vgl. hierzu auch Harrison & Kreps (1979), Abschnitt 7. Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass Notation und mathematische Begrifflichkeiten in der gesamten Arbeit auf die Monographie von Jacod & Shiryaev (2003) zurückgehen.

**Definition 1.1** Eine **Handelsstrategie**  $\vartheta = (\vartheta^0, \vartheta^1)$  (auf obigem Markt  $S$ ), auch **Portfolio** genannt, ist ein  $\mathbb{R}^2$ -wertiger vorhersehbarer Prozess. Der **Wertprozess**  $PV(\vartheta)$  des Portfolios  $\vartheta$  wird definiert durch

$$PV(\vartheta) = \vartheta^0 S^0 + \vartheta^1 S^1. \quad (1.1)$$

Die Handelsstrategie wird **selbstfinanzierend** genannt, falls  $\vartheta \in L(S)$  und

$$PV(\vartheta) = PV(\vartheta)_0 + \vartheta \cdot S \quad (1.2)$$

gelten. Dabei gibt  $L(X)$  für ein  $\mathbb{R}^d$ -wertiges Semimartingal  $X$  die Menge der nach  $X$  integrierbaren Prozesse an, und  $Y \cdot X := \int_0^\cdot Y_t dX_t$  bezeichnet für  $Y \in L(X)$  das stochastische Integral von  $Y$  bezüglich  $X$  (vgl. Jacod & Shiryaev (2003), Definition III.6.17).

Man beachte, dass  $\vartheta \in L(S)$  nicht die Existenz von  $\vartheta^i \cdot S^i$ ,  $i \in \{0, 1\}$  impliziert. Unter der zusätzlichen Voraussetzung, dass  $\vartheta$  lokal beschränkt ist, hätte man die Existenz der Einzelintegrale, und es würde  $\vartheta \cdot S = \vartheta^0 \cdot S^0 + \vartheta^1 \cdot S^1$  gelten, vgl. Jacod & Shiryaev (2003), III.6.1. Die Handelsstrategie gibt über die Zeit die Stückzahlen der im Portfolio des Händlers befindlichen Wertpapiere des Marktes an. Die Vorhersehbarkeit der Handelsstrategie drückt aus, dass der Händler die Preisentwicklung der risikobehafteten Wertpapiere nicht vorhersehen kann und die Entscheidung, zu kaufen bzw. zu verkaufen, aber vorher treffen muss. Die Selbstfinanzierungsbedingung besagt, dass Wertänderungen der Handelsstrategie nur mit Kursänderungen der Wertpapiere des Marktes erklärbar sind, dem Portfolio werden weder monetäre Mittel hinzugefügt noch entnommen.

**Proposition 1.2** Eine Handelsstrategie ist genau dann selbstfinanzierend, wenn  $\vartheta \in L(\hat{S})$  und

$$\widehat{\text{PV}}(\vartheta) = \widehat{\text{PV}}(\vartheta)_0 + \vartheta \cdot \hat{S} \quad (1.3)$$

gelten, wobei  $\widehat{\text{PV}}(\vartheta)$  den diskontierten Wertprozess angibt, d.h.  $\widehat{\text{PV}}(\vartheta) = (S^0)^{-1} \text{PV}(\vartheta)$ .

BEWEIS. Siehe Goll & Kallsen (2000), Proposition 2.1.  $\square$

**Lemma 1.3** Gegeben sei eine Handelsstrategie  $\vartheta$  auf obigem Markt  $S$ . Es gilt

$$\vartheta \in L(\hat{S}) \Leftrightarrow \vartheta^1 \in L(\hat{S}^1). \quad (1.4)$$

In dieser Situation ist  $\vartheta \cdot \hat{S} = \vartheta^1 \cdot \hat{S}^1$ .

BEWEIS.  $\Rightarrow$ : Sei  $\vartheta \in L(\hat{S})$ . Gemäß Kallsen (2003), Lemma 2.2, existieren ein Semimartingal  $Z$  und eine aufsteigende Folge vorhersehbarer Mengen  $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit der Eigenschaft, dass  $D_n \uparrow \Omega \times \mathbb{R}_+$  für  $n \rightarrow \infty$  (bis auf Evaneszenz),  $\vartheta 1_{D_n}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  beschränkt ist und

$$Z_0 1_{D_n}(0) + 1_{D_n} \cdot Z = (\vartheta 1_{D_n}) \cdot X$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt, wobei  $1_{D_n}(0)(\omega) := 1_{D_n}((\omega, 0))$  ist. Insbesondere ist also  $\vartheta^1 1_{D_n}$  beschränkt für alle  $n \in \mathbb{N}$ , und mit Jacod & Shiryaev (2003), III.6.1, erhält man wegen  $(\vartheta^0 1_{D_n}) \cdot 1 = 0$ , dass

$$(\vartheta^1 1_{D_n}) \cdot \hat{S}^1 = ((\vartheta^0, \vartheta^1) 1_{D_n}) \cdot (1, \hat{S}^1) = Z_0 1_{D_n}(0) + 1_{D_n} \cdot Z.$$

Somit liefert Kallsen (2003), Lemma 2.2, dass  $\vartheta^1 \in L(\hat{S}^1)$  gilt. Ferner folgt damit

$$\vartheta^1 \cdot \hat{S}^1 = Z = (\vartheta^0, \vartheta^1) \cdot (1, \hat{S}^1).$$

$\Leftarrow$ : Wegen  $\vartheta^0 \in L(1)$  und  $\vartheta^1 \in L(\hat{S}^1)$  existieren Semimartingale  $Z$  und  $Z'$  sowie aufsteigende Folgen vorhersehbarer Mengen  $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(D'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit

1.  $D_n \uparrow \Omega \times \mathbb{R}_+$  und  $D'_n \uparrow \Omega \times \mathbb{R}_+$  (bis auf Evaneszenz),
2.  $\vartheta^0 1_{D_n}$  und  $\vartheta^1 1_{D'_n}$  sind beschränkt für alle  $n \in \mathbb{N}$ ,
3.  $(\vartheta^0 1_{D_n}) \cdot 1 = Z_0 1_{D_n}(0) + 1_{D_n} \cdot Z$  und  $(\vartheta^1 1_{D'_n}) \cdot \hat{S}^1 = Z'_0 1_{D'_n}(0) + 1_{D'_n} \cdot Z'$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Man beachte, dass  $Z = 0$  und  $Z' = \vartheta^1 \cdot \hat{S}^1$  gelten. Setzt man  $\tilde{D}_n := D_n \cap D'_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , so erhält man bis auf Evaneszenz  $\tilde{D}_n \uparrow \Omega \times \mathbb{R}_+$ . Ferner sind  $\tilde{D}_n$  vorhersehbar und  $(\vartheta^0, \vartheta^1) 1_{\tilde{D}_n}$  beschränkt für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Unter Beachtung von Jacod & Shiryaev (2003), III.6.1 und I.4.37, ergibt sich damit außerdem

$$((\vartheta^0, \vartheta^1) 1_{\tilde{D}_n}) \cdot (1, \hat{S}^1) = (\vartheta^1 1_{\tilde{D}_n}) \cdot \hat{S}^1 = 1_{\tilde{D}_n} \cdot Z.$$

Wegen (1) existiert eine Menge  $D'$  mit  $D'_n \uparrow D'$ , so dass  $(\Omega \times \mathbb{R}_+) \setminus D'$  evaneszent ist. Aufgrund von

$$\{\omega \in \Omega : (\omega, 0) \notin D'\} \subseteq \{\omega \in \Omega : \exists t \in \mathbb{R}_+ : (\omega, t) \in (\Omega \times \mathbb{R}_+) \setminus D'\}$$

gilt somit  $1_{D'}(0) = 1$   $P$ -f.s. Das heißt, dass für  $P$ -f.a.  $\omega \in \Omega$  ein  $N(\omega) \in \mathbb{N}$  existiert mit  $1_{D'_n}((\omega, 0)) = 1$  für alle  $n \geq N(\omega)$ . Wegen  $Z'_0 1_{D'_n}(0) = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  impliziert dies  $Z'_0 = 0$   $P$ -f.s. und

$$((\vartheta^0, \vartheta^1)1_{\tilde{D}_n}) \cdot (1, \hat{S}^1) = Z'_0 1_{\tilde{D}_n}(0) + 1_{\tilde{D}_n} \cdot Z'.$$

Kallsen (2003), Lemma 2.2, besagt dann  $\vartheta \in L(\hat{S})$ . □

Jede selbstfinanzierende Handelsstrategie ist vollständig festgelegt durch ein Anfangskapital  $v_0 \in \mathbb{R}$  und die Strategie  $\vartheta^1$ , wie viel Stück des risikobehafteten Basisguts der Händler zu welchem Zeitpunkt in seinem Portfolio hat.

**Lemma 1.4** *Für jeden vorhersehbaren Prozess  $\vartheta^1 \in L(\hat{S}^1)$  und jedes  $v_0 \in \mathbb{R}$  existiert ein eindeutiger vorhersehbarer Prozess  $\vartheta^0$  derart, dass  $\vartheta = (\vartheta^0, \vartheta^1)$  auf dem Markt  $S$  selbstfinanzierend ist mit  $PV(\vartheta)_0 = v_0$ .*

BEWEIS. Man setze  $\vartheta^0 := \widehat{PV}(\vartheta)_0 + \vartheta^1 \cdot \hat{S}^1 - \vartheta^1 \hat{S}^1$ . Wegen  $\Delta(\vartheta^1 \cdot \hat{S}^1) = \vartheta^1 \Delta \hat{S}^1$ , vergleiche Jacod & Shiryaev (2003), III.6.19(e), gilt  $\vartheta^1 \cdot \hat{S}^1 - \vartheta^1 \hat{S}^1 = \vartheta^1 \cdot \hat{S}^1_- - \vartheta^1 \hat{S}^1_-$ , was die Vorhersehbarkeit von  $\vartheta^0$  impliziert, vergleiche Jacod & Shiryaev (2003), Proposition I.2.6. Gemäß Lemma 1.3 ist  $\vartheta \in L(\hat{S})$ , und es gilt

$$\widehat{PV}(\vartheta) = \vartheta^0 + \vartheta^1 \hat{S}^1 = \widehat{PV}(\vartheta)_0 + \vartheta^1 \cdot \hat{S}^1 = \widehat{PV}(\vartheta)_0 + \vartheta \cdot \hat{S},$$

das heißt  $\vartheta$  ist selbstfinanzierend, siehe Proposition 1.2. Aufgrund der Annahme  $S_0^0 = 1$  gilt  $\widehat{PV}(\vartheta)_0 = PV(\vartheta)_0$ , und aus der Forderung  $PV(\vartheta)_0 = v_0$  resultiert die Eindeutigkeit des Prozesses  $\vartheta^0$ . □

Die folgende Motivation orientiert sich in Teilen an dem Übersichtsartikel von Schweizer (2001) zum Thema des quadratischen Hedgens. Im Folgenden werden nur Derivate mit Auszahlungen der Form  $H = f(S_T^1)$  betrachtet, wobei angenommen sei, dass  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  messbar ist. Das bekannteste Beispiel für ein solches Derivat ist die europäische Call-Option mit Basispreis  $K > 0$ , die als Auszahlungsfunktion  $f(x) = \max\{x - K, 0\}$  aufweist. Grob gesprochen, heißt ein Derivat *duplizierbar*, falls es eine selbstfinanzierende Handelsstrategie  $\vartheta$  gibt mit  $PV(\vartheta)_T = H$ . Um eine exakte Definition der Duplizierbarkeit zu geben, muss man noch technische Integrierbar- und Zulässigkeitsbedingungen an  $\vartheta$  und Integrierbarkeitsbedingungen an  $H$  stellen, was aber für den Moment der Motivierung zurückgestellt werden soll (gleiches gilt für die folgenden Begriffsdefinitionen). Der vorliegende Markt wird *vollständig* genannt, falls jedes Derivat (mit beschränkter diskontierter Auszahlung  $\hat{H} = (S_T^0)^{-1}H$ ) duplizierbar ist. Falls der Eintritt in eine Handelsstrategie heute nichts kostet und die Strategie am Endzeitpunkt  $T$  einen quasi sicheren Gewinn abwirft, spricht man

von einer Arbitragegelegenheit auf dem Finanzmarkt. In der Praxis kommt Arbitrage nur temporär und in geringem Umfang vor, da Arbitrageure durch geschicktes Handeln den mit der Arbitrage verbundenen Gewinn realisieren und damit die Arbitragegelegenheit eliminieren. Somit erscheint es plausibel, dass man zur Abbildung eines Finanzmarktes Modelle verwendet, die Arbitragefreiheit implizieren. Genauer definiert man: Eine Handelsstrategie  $\vartheta$  heißt *Arbitrage*, falls  $PV(\vartheta)_0 = 0$ ,  $PV(\vartheta)_T \geq 0$  *P-f.s.* und  $P\{PV(\vartheta)_T > 0\} > 0$  gelten. Ein Markt wird *arbitragefrei* genannt, falls keine Arbitragestrategie existiert. Falls es also auf einem solchen arbitragefreien Markt eine duplizierende Handelsstrategie  $\vartheta$  für das Derivat mit Auszahlung  $H$  gibt, so ist es plausibel, dass der Preis des Derivats mit dem Wert  $PV(\vartheta)_0$  der duplizierenden Strategie zum Zeitpunkt 0 übereinstimmen muss. Das ist der zentrale Grundgedanke von Black & Scholes (1973) sowie von Merton (1973) bei der Herleitung der klassischen Black-Scholes-Formel zur Bewertung eines europäischen Calls (auf ein risikobehaftetes Basisgut) auf einem Finanzmarkt, bei dem die Anleihe dem Prozess  $S_t^0 = e^{rt}$  folgt, wobei  $r \in \mathbb{R}$  den risikolosen Zins angibt, und der Preisprozess des risikobehafteten Basisguts durch eine geometrische Brownsche Bewegung gegeben ist. Dieses Marktmodell von Black und Scholes geht auf Osborne (1959) und Samuelson (1965) zurück, die zur Aktienkursmodellierung die Brownsche Bewegung, die auch negative Werte annehmen kann und von Bachelier (1900) zur Modellierung des Zufalls von Aktienkursbewegungen vorgeschlagen wurde, durch den nichtnegativen Prozess der geometrischen Brownschen Bewegung

$$S_t^1 = S_0^1 \exp(\mu t + \sigma W_t) \quad (1.5)$$

mit Konstanten  $S_0^1 > 0$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma \neq 0$  und einer Standard-Brownschen Bewegung  $W$  ersetzt haben. Dahinter verbirgt sich die Idee, dass Preisveränderungen eher multiplikativer als additiver Natur sind. Das Marktmodell von Black und Scholes ist nicht nur arbitragefrei, sondern auch vollständig, was eine präferenzfreie, eindeutige Bewertung von Derivaten ermöglicht, jedes Derivat kann perfekt, das heißt ohne Restrisiko, gehedgt werden. Die mathematisch exakte Problemformulierung, deren Lösung und der Zusammenhang zur Martingaltheorie wurden von Harrison & Kreps (1979) und Harrison & Pliska (1981) erarbeitet.

Das Marktmodell von Black und Scholes und die dazugehörige Optionspreisformel sind sehr populär geworden, was neben der Möglichkeit zur präferenzfreien Bewertung von Derivaten vor allem auf die leichte Handhabbarkeit zurückzuführen ist. Wird hier wie eingangs wieder der Stillhalter einer Call-Option betrachtet, so wird seine erste Frage nach der Optionsprämie  $v_0^*$  durch die Formel von Black & Scholes (1973) beantwortet:

$$v_0^* = V_0, \quad (1.6)$$

wobei  $V = (V_t)_{t \in [0, T]}$  den Preisprozess der Call-Option angibt,

$$V_t = S_t^1 N(d_t^1) - e^{-r(T-t)} K N(d_t^2), \quad (1.7)$$

$N$  die Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung bezeichnet und  $d^1, d^2$  gegeben sind durch

$$d_t^1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t^1}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad \text{und} \quad d_t^2 = d_t^1 - \sigma\sqrt{T-t}. \quad (1.8)$$

Alle erforderlichen Informationen in Form der Inputgrößen der Optionspreisformel sind mit Ausnahme des konstant angenommenen stetigen Zinses  $r$  und der *Volatilität*  $\sigma$  direkt beobachtbar. Dabei lässt sich die Volatilität relativ gut aus historischen Finanzdaten schätzen. Zudem ist die Optionspreisformel leicht numerisch auszuwerten. Die Antwort auf die zweite Frage des Stillhalters wird durch den sogenannten *Delta-Hedge* gegeben, siehe zum Beispiel Hull (1993), Abschnitt 13.5. Das Delta eines Derivats gibt die Änderungsrate des Derivatpreises in Bezug auf den Preis des Basisguts an. Wie man mittels eines Itô-Arguments sieht, vgl. z.B. Lamberton & Lapeyre (2000), Abschnitt 4.3.3, ist  $\vartheta = ((\vartheta_t^0, \vartheta_t^1))_{t \in [0, T]}$  mit

$$\vartheta_t = \left(-e^{-rT}KN(d_t^2), N(d_t^1)\right) \quad (1.9)$$

die (eindeutige) Duplikationsstrategie der Call-Option. Dabei ist  $\vartheta^1$  gerade das Delta des Calls. Da die Durchführung der Handelsstrategie  $\vartheta$  eine perfekte Absicherung der verkauften Call-Option impliziert, kann die dritte Frage dahingehend leicht beantwortet werden, dass das Risiko des Stillhalters im Fall der Absicherung Null beträgt. Das ist gerade die Vollständigkeit des Marktmodells von Black und Scholes. Mathematisch korrespondiert das zum *Martingaldarstellungssatz*:

**Satz 1.5** *Seien  $W$  eine  $\mathbb{R}^d$ -wertige Standard-Brownsche Bewegung und  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  die von  $W$  erzeugte Filtrierung. Dann existiert zu jedem lokalen Martingal  $M = (M_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  bezüglich  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  ein Prozess  $\vartheta \in L(W)$  mit*

$$M = M_0 + \vartheta \cdot W \quad P\text{-f.s.} \quad (1.10)$$

BEWEIS. Vgl. Korn & Korn (2001), Korollar 53, Kapitel 2. □

Anstelle der Standard-Brownschen Bewegung gilt ein solcher Darstellungssatz nur für wenige andere Prozesse. Dritschel & Protter (1999) bemerken, dass die einzigen Lévy-Prozesse, für die ein solcher Satz gilt, die Brownsche Bewegung und der kompenzierte Poisson-Prozess sind.

Leider stimmt das Black-Scholes-Modell nur in unzureichendem Maße mit der Realität überein. Cont (2001) hat einen sehr guten Überblick gegeben über sogenannte *stilisierte empirische Merkmale* von Finanzzeitreihen. Das sind statistische Eigenschaften, die man unabhängig vom Erhebungszeitraum für eine Vielzahl von Instrumenten und Märkten in Renditezeitreihen beobachten und nachweisen kann. Untersucht man die im Marktmodell von Black und Scholes abgebildeten Renditen des risikobehafteten Basisguts hinsichtlich dieser stilisierten empirischen Merkmale, die die tatsächlichen Markttrenditen aufweisen,

so erkennt man die Notwendigkeit, komplexere Aktienkursmodelle als das von Black und Scholes zu verwenden. Mandelbrot (1963) und Fama (1965) haben bereits früh festgestellt, dass die Annahme, die Log-Renditen seien normalverteilt, zurückgewiesen werden muss. Die Verteilung der Marktrenditen weist eine signifikante negative Schiefe auf, es gibt eine Asymmetrie hinsichtlich Verlusten und Gewinnen, wohingegen die Normalverteilung symmetrisch ist. Außerdem ist die Verteilung der Marktdaten eher leptokurtisch, d.h. es konzentrieren sich mehr Beobachtungen um den Mittelwert, und die Ausprägungen in den Tails sind ebenfalls zahlreicher als bei einer Normalverteilung. Die Normalverteilung unterschätzt das Auftreten extremer Ereignisse und damit mit dem Auftreten sehr hoher Gewinne oder Verluste das Risiko des Investors. Dies ist einer der Hauptgründe, warum man Aktienkursmodelle mit Sprüngen eingeführt hat. Die von Mandelbrot (1963) vorgeschlagenen Modelle auf der Grundlage von  $\alpha$ -stabilen Prozessen mit endlichem ersten Moment müssen aber auch zurückgewiesen werden, da diese nicht einmal endliche zweite Momente implizieren, was auf zu schwere Tails zurückzuführen ist. Empirische Untersuchungen haben gezeigt, dass die Verteilung der Marktrenditen semi-schwere Tails besitzt, vgl. Schoutens (2003), Abschnitt 4.1.2. Ein weiterer Kritikpunkt am Black-Scholes-Modell ist die konstante Volatilität. Betrachtet man historische Volatilitäten, das sind annualisierte Standardabweichungen täglicher Log-Renditen, bezogen auf das jeweils letzte vergangene Jahr, so erkennt man, dass die Volatilität über die Zeit stochastisch fluktuiert, vgl. unter anderem Heston (1993), Bates (1996) oder Barndorff-Nielsen & Shephard (2001b). In Schoutens (2003), Abschnitt 4.2, wird zudem bemerkt, dass die Zeitreihe der historischen Volatilitäten ein *Mean-Reverting-Verhalten* aufweist, die Werte der Zeitreihe werden immer wieder zum Mittelwert zurückgezogen. Ferner werden dort *Volatilitäts-Cluster* konstatiert, Perioden mit großer Varianz in den Renditen folgen eher Perioden mit ebenfalls großer Renditevarianz, und entsprechend gibt es Perioden mit sehr niedriger Varianz, denen auch eher Perioden mit kleiner Varianz folgen. Statistisch äußert sich dies in einer signifikant positiven Autokorrelation absoluter oder quadrierter Renditen, siehe zum Beispiel Engle (1982) und Barndorff-Nielsen & Shephard (2001b). Ein drittes empirisches Merkmal von Finanzzeitreihen ist der sogenannte *Leverage-Effekt*. Der Leverage-Effekt beschreibt die negative Korrelation von Preisänderungen des Underlyings und Änderungen der Volatilität. Am Markt kann oftmals beobachtet werden, dass ein Kurssprung nach unten bzw. ein drastischer Kursabfall mit einem Anstieg der Volatilität einhergehen. Gehen einige Händler aufgrund schlechter Börsen Nachrichten verstärkt aus einem Marktsegment heraus, so sinken die entsprechenden Kurse, infolgedessen andere Händler, die zunächst noch abgewartet haben, auch beginnen, zu verkaufen, so dass die Kurse weiter sinken und gleichzeitig die Handelstätigkeit und damit die Volatilität ansteigen. Da eine Börsenorder oft an einen Mindest- oder Höchstkurs geknüpft ist, wird dieses Phänomen noch verstärkt. Abgesehen von den stilisierten empirischen Merkmalen führt Schoutens (2003) als weiteren Kritikpunkt an dem Modell von Black und Scholes noch den schlechten Fit der Marktpreise der Optionen an. Hier muss man allerdings einwenden, dass es von vornherein klar ist, dass ein Modell mit nur einem Parameter die Marktpreise natürlich nicht besser treffen kann als beispielsweise ein Modell mit vier oder

fünf Parametern, so wie es oft der Fall bei Modellen mit Sprüngen ist. Abschließend sei aber auch noch kurz auf den Aspekt der *impliziten Volatilität* eingegangen. Darunter versteht man diejenige Volatilität, die man in die Black-Scholes-Formel einsetzen muss, damit der Black-Scholes-Preis mit dem Marktpreis der Option mit Basispreis  $K$  und Fälligkeit  $T$  übereinstimmt. Wäre der Black-Scholes-Ansatz korrekt, müssten die implizite Volatilität und die Volatilität des Marktes gleich sein. Da eine zentrale Prämisse des Modells besagt, dass die Volatilität konstant sei, müsste der Graph der Funktion der impliziten Volatilität in Abhängigkeit von Fälligkeit und Moneyness (das ist der Quotient aus Basispreis und aktuellem Underlyingkurs und damit ein Maß dafür, inwieweit eine Option im Geld ist) eine konstante Fläche bilden. Es gibt jedoch viele empirische Arbeiten, siehe zum Beispiel Rubinstein (1985), die belegen, dass die implizite Volatilität als solche Funktion signifikant von einer konstanten Fläche abweicht. Bei konstanter Fälligkeit weist die implizite Volatilität in Abhängigkeit der Moneyness einen konvexen Verlauf auf. Dieser wird auch als *Volatilitäts-Smile* bzw. als *Skew-Effekt* bezeichnet. Bei sehr kurzen Optionsfristen ist der Skew-Effekt besonders stark ausgeprägt, was auf eine Fehlbewertung durch die Black-Scholes-Formel vor allem bei recht kurzen Laufzeiten hindeutet.

Um einen besseren Fit der Verteilung der Marktrenditen zu erhalten, haben eine Vielzahl von Finanzmathematikern Modelle vorgeschlagen, bei denen die Rendite nicht durch eine Brownsche Bewegung mit Drift abgebildet wird (wie im Black-Scholes-Modell), sondern durch einen Lévy-Prozess. Das ist ein Prozess, der, wie die Brownsche Bewegung auch, stationäre und unabhängige Zuwächse hat, der aber als endlich-dimensionale Randverteilungen allgemeinere und flexiblere Verteilungen aufweisen kann als die Normalverteilung. Dabei sind diese aber, wie die Normalverteilung auch, aus der Klasse der unendlich teilbaren Verteilungen. Die Zufallsvariable  $Z_t$  der Log-Rendite zu einem beliebigen Zeitpunkt  $t$  lässt sich also in Verteilung für jedes  $n \in \mathbb{N}$  als Summe von  $n$  unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen schreiben. Das ist äquivalent dazu, dass  $Z_t$  schwacher Limes von Partialsummen unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen ist, was so gedeutet werden kann, dass Preisänderungen das Ergebnis zahlreicher (kleiner) Schocks der Wirtschaftswelt und der Finanzmärkte sind. Beispiele für unendlich teilbare Verteilungen, die zu exponentiellen Lévy-Modellen in der Finanzmathematik geführt haben, sind unter anderem Varianz-Gamma-Verteilungen, vgl. Madan & Seneta (1990), als Oberklasse davon die CGMY-Verteilungen, vgl. Carr et al. (2002), normal-inverse Gaußverteilungen, vgl. Barndorff-Nielsen (1995), als Oberklasse davon die verallgemeinerten hyperbolischen Verteilungen, vgl. Prause (1999), Eberlein & Prause (2002) und Eberlein & v. Hammerstein (2004), und Meixner-Verteilungen, vgl. Schoutens (2001). Einen guten Überblick über exponentielle Lévy-Marktmodelle findet man bei Schoutens (2003), zur Motivation solcher Modelle sei z.B. auf Geman (2002) und für die Theorie der Lévy-Prozesse sei unter anderem auf Sato (1999) und Jacod & Shiryaev (2003), Abschnitt II.4, verwiesen. Geman (2002) weist auf die Notwendigkeit hin, Prozesse mit Sprüngen und etwaiger Diffusionskomponente zu betrachten, um Verteilungen zu erhalten, die genügend stark von der Normalverteilung

abweichen. Dabei bevorzugt sie jedoch reine Sprungprozesse, da diese Voraussetzung für einen endlichen quadratischen Variationsprozess sind, der wiederum besser geeignet sei, reale Aktienkurse abzubilden. Doch berücksichtigen all diese exponentiellen Lévy-Modelle nicht, dass die Volatilität sich über die Zeit stochastisch ändert und zur Clusterbildung neigt. Ferner kann der Leverage-Effekt nicht abgebildet werden. Daher werden in dieser Arbeit *stochastische Volatilitätsmodelle* mit Sprüngen für den Preisprozess  $S^1$  herangezogen, da diese nach aktuellem Stand der Forschung die stilisierten empirischen Merkmale von Finanzzeitreihen am wirklichkeitsgetreuesten widerspiegeln. Carr et al. (2003) bemerken die Notwendigkeit, sowohl Prozesse mit Sprüngen zu betrachten als auch die Volatilität stochastisch zu modellieren, da Sprünge Optionspreise mit kurzer Laufzeit und stochastische Volatilität Optionspreise mit längerer Laufzeit besser reflektieren würden. Darüber hinaus gehen wir wie im Black-Scholes-Modell idealisierend von einem konstanten Zinssatz  $r \in \mathbb{R}$  aus, und für den Rest der Arbeit sei der Preisprozess  $S^0 = (S_t^0)_{t \in \mathbb{R}_+}$  der risikolosen Anleihe gegeben durch  $S_t^0 = e^{rt}$ . Ein solcher Markt ist in der Regel *unvollständig*, das heißt, dass eine duplizierende Handelsstrategie in der Regel nicht existiert. Und nun stellen sich wieder die eingangs aufgeworfenen Fragen des Stillhalters einer Call-Option, wenn er seine Markterwartung durch das unvollständige Marktmodell  $(S^0, S^1)$  zum Ausdruck gebracht hat.

Es besteht insofern weiterhin die Möglichkeit, einen präferenzfreien Ansatz zu verfolgen, als man das Intervall möglicher Derivatpreise bestimmt, die Arbitragefreiheit auf dem Markt implizieren, der neben den Basisgütern auch das Derivat als handelbares Gut umfasst. Das ist die Grundlage für das sogenannte *Superhedging*, bei dem der Hedger jederzeit sicher sein möchte, dass er zu keinem Zeitpunkt dem Risiko ausgesetzt ist, monetären Verlust zu erleiden, und somit eine Strategie wählt, deren Endwert fast sicher größer ist als die Auszahlung des Derivats. Um eine solche Strategie eingehen zu können, benötigt man als Startkapital mindestens den höchsten Preis aus dem Intervall möglicher Derivatpreise, vgl. El Karoui & Quenez (1995). Die selbstfinanzierende Strategie, deren Eintrittskosten heute gerade diesem oberen Derivatpreis entsprechen und deren Endwert größer oder gleich der Auszahlung des Derivats ist, wird auch billigste Superhedgingstrategie genannt. Hubalek et al. (2006) weisen darauf hin, dass in vielen realistischen Marktmodellen bei der Absicherung von klassischen Call-Optionen nur triviale Superhedgingstrategien der Form existieren, dass man eine so hohe Optionsprämie verlangt, dass man sich heute das Basisgut dafür kaufen kann, und dass man danach bis zur Fälligkeit der Option nicht mehr handelt. Eberlein & Jacod (1997) haben zum Beispiel gezeigt, dass das Intervall der möglichen Call-Optionspreise in exponentiellen Lévy-Modellen gerade dem maximalen Intervall  $((S_0^1 - e^{-rT}K)^+, S_0^1)$  entspricht, in dem alle Preise, unabhängig vom Modell, aus Arbitragegründen liegen müssen. Hier wäre also nur eine solche triviale Superhedgingstrategie denkbar. Das Konzept des Superhedgings erscheint somit als zu extrem und nicht praktikabel. Delta-Hedging erscheint in unvollständigen Märkten auch nicht durchführbar, da es im Wesentlichen auf der Änderungsrate des Derivatpreises in Bezug auf den Preis des Basisguts beruht, es aber keinen eindeutigen Derivatpreis gibt. Man sollte ferner anmer-

ken, dass die perfekte Absicherung eines Derivats durch eine solche Delta-Hedgingstrategie nur dann gewährleistet ist, wenn die Preisprozesse stetig sind, andernfalls gibt es selbst in vollständigen Märkten keine Delta-Hedgingstrategie, die duplizierend ist. Man betrachte hierzu beispielsweise das Marktmodell von Jeanblanc & Privault (2002). Die geometrische Brownsche Bewegung (1.5) im Black-Scholes-Modell ist Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$dS_t^1 = \left( \mu + \frac{1}{2}\sigma^2 \right) S_t^1 dt + \sigma S_t^1 dW_t. \quad (1.11)$$

Jeanblanc & Privault (2002) erweitern dieses Modell nun dahingehend, dass sie die Brownsche Bewegung  $W$  in dieser stochastischen Differentialgleichung durch ein Martingal ersetzen, das sich, grob gesprochen, in Abhängigkeit eines Regimewechsels aus einem Brownschen Anteil oder einem kompensierten Poisson-Prozess zusammensetzt. Dieses Marktmodell ist vollständig, aber die Duplikationsstrategie in Bezug auf einen europäischen Call ist von der Delta-Hedgingstrategie verschieden, wenn der risikolose Zins als deterministisch angenommen wird und das Regime vorherrscht, in welchem die Poisson-Komponente für den Zufall im Aktienkursprozess verantwortlich ist, vgl. Jeanblanc & Privault (2002), Abschnitt 6.3. Dies erscheint plausibel, da die Duplikationsstrategie wie im Marktmodell von Black und Scholes mit Hilfe der Itô-Formel hergeleitet wird, hier jedoch aufgrund der Sprünge weitere Terme in der Darstellung des Preisprozesses der Option als Funktion der Zeit und des Underlyings hinzukommen. Hätte man zumindest einen plausiblen Selektionsmechanismus, der einen den persönlichen Präferenzen entsprechenden Preis auswählen würde aus der Menge der möglichen Derivatpreise, so wäre zwar ein Delta-Hedging-Ansatz denkbar, aber es wäre nicht klar, dass dieser zu einer im gewissen Sinn bestmöglichen Absicherung führt.

In den vergangenen Jahren wurden in der Literatur zahlreiche subjektive Kriterien eingeführt, bezüglich derer Absicherungsstrategien und Optionspreise in unvollständigen Märkten ermittelt werden können. Ein möglicher Ansatz besteht darin, Nutzenfunktionen einzuführen und über die Menge aller Portfolios mit variablen Positionen im Underlying und fester Position im Derivat den erwarteten Nutzen von Konsum oder Endvermögen (vgl. zum Beispiel Föllmer & Leukert (2000) oder Kallsen (1998)) bzw. im lokalen Sinne den erwarteten Nutzen von Gewinnen über infinitesimal kleine Zeitintervalle (vgl. Kallsen (1999)) zu maximieren. Ein anderer, weit verbreiteter Ansatz besteht darin, das Risiko quadratisch zu messen und dieses über zulässige Handelsstrategien zu minimieren. Diese Methode des *quadratischen Hedgens* kann als Spezialfall des Nutzenmaximierungsansatzes aufgefasst werden, wenn man dort quadratische Nutzenfunktionen betrachtet. Man unterscheidet hierbei zwischen den Ansätzen, (*lokal*) *risikominimierend* respektive *varianz-optimal* zu hedgen. Betrachtet man im unvollständigen Markt  $S = (S^0, S^1)$  ein nicht duplizierbares Derivat mit Auszahlung  $H$ , so existiert keine selbstfinanzierende Strategie, deren Wertprozess am Fälligkeitstermin mit  $H$  übereinstimmt. Aufgrund der konkreten Wahl von  $S^0$  genügt es im Folgenden, wenn man für die Strategiekomponente  $\vartheta^0$  der risikolosen Anleihe fordert, dass diese anstelle von vorhersehbar lediglich gut-messbar ist. Das Integral  $\vartheta^0 \cdot S^0$  wird als

Lebesgue-Stieltjes-Integral aufgefasst, vgl. Jacod & Shiryaev (2003), I.3.4.

Beim risikominimierenden Ansatz wird die Forderung einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie aufgegeben, dafür muss der Endwert des Wertprozesses der Strategie mit der Auszahlung des Derivats übereinstimmen. Dies kann stets durch die Wahl von  $\vartheta^0$  erreicht werden. Eine einfache Strategie wäre z.B.  $\vartheta = (\vartheta^0, \vartheta^1)$  mit

$$\vartheta_t^1 = 0 \quad \text{und} \quad \vartheta_t^0 = ((S_T^0)^{-1}H) 1_{\{t=T\}} \quad (1.12)$$

für alle  $t \in [0, T]$ . Man beachte, dass  $\vartheta^0$  adaptiert und càdlàg, also insbesondere gutmessbar ist. Solche Strategien sind in der Regel nicht mehr selbstfinanzierend. Die zur perfekten Absicherung fehlenden Beträge werden von außen zugeschossen. Diese Zuschüsse können als Kosten aufgefasst werden. Allgemein definiert man den (kumulierten) Kostenprozess  $C = (C_t)_{t \in [0, T]}$  als Abweichung von der Selbstfinanziertheit der Strategie, d.h.  $C(\vartheta)_t = \text{PV}(\vartheta)_t - \vartheta \cdot S_t$ . Das kann man sich so vorstellen: der Investor möchte zum Zeitpunkt  $t$  ein Portfolio, bestehend aus  $\vartheta_t^0$  risikolosen Anleihen und  $\vartheta_t^1$  Stück des risikobehafteten Basisguts, eingehen. Dazu benötigt er zunächst ein Anfangskapital  $v_0 \in \mathbb{R}$ , das auch den Anfangskosten  $C_0 = \text{PV}(\vartheta)_0$  entspricht. Das Anfangskapital wird benutzt, um auf dem Markt durch Handel Gewinne zu erzielen. Werden keine weiteren finanziellen Zuschüsse von außen benötigt, um sich zum Zeitpunkt  $t$  von den durch Handel bis dahin erwirtschafteten Gewinnen das Portfolio zu kaufen, und gibt es gleichzeitig keine Möglichkeit, Überschüsse zu konsumieren, so ist die Handelsstrategie selbstfinanzierend, andernfalls entsprechen die zusätzlich erforderlichen Einlagen von außen zuzüglich der Anfangskosten respektive die zum Konsum zur Verfügung stehenden Überschüsse abzüglich der Anfangskosten den kumulierten Kosten zum Zeitpunkt  $t$ . Man beachte, dass im Fall der Überschüsse die Kosten negativ sind. Es erscheint plausibel, eine Strategie mit kleinem Kostenprozess als gute Strategie zu bezeichnen. Föllmer & Sondermann (1986) waren die ersten, die das Risiko einer Strategie quadratisch gemessen haben. Dabei haben sie unterstellt, dass  $S^1$  ein  $P$ -Martingal ist. Der Risikoprozess  $R(\vartheta)$  wird definiert durch

$$R(\vartheta)_t = E_P [(C(\vartheta)_T - C(\vartheta)_t)^2 | \mathcal{F}_t]. \quad (1.13)$$

Der Risikoprozess  $R(\vartheta)_t$  zum Zeitpunkt  $t$  gibt die erwarteten quadrierten Kosten an, die zwischen dem Zeitpunkt  $t$  und dem Fälligkeitstermin  $T$  anfallen, wenn man den Wissensstand zum Zeitpunkt  $t$  besitzt. Wenn die Auszahlung  $H$  des Derivats perfekt duplizierbar wäre, gäbe es eine selbstfinanzierende Strategie mit  $\text{PV}(\vartheta)_T = H$ . Dann wäre  $C_t = C_0$  für alle  $t \in [0, T]$ , und der Risikoprozess wäre identisch Null. Aufgrund des quadratischen Ansatzes müssen einige Integrierbarkeitsbedingungen an den Preisprozess  $S^1$ , die Strategie, deren Wertprozess und die Auszahlung des Derivats gestellt werden.

**Konvention 1.6** Alle Preisprozesse im Rahmen dieser Arbeit seien bezüglich der deterministischen Stoppzeit  $T$  gestoppte Prozesse. Anstelle von  $S^T$  wird vereinfachend  $S$  geschrieben. Dies trägt der Annahme eines endlichen Zeithorizonts Rechnung, erlaubt es aber die Sätze über stochastische Prozesse mit Indexmenge  $\mathbb{R}_+$  anzuwenden. Man beachte, dass die

wichtigsten Klassen von stochastischen Prozessen, z.B. Martingale, lokale Martingale, quadratisch integrierbare Martingale, vorhersehbare Prozesse, adaptierte wachsende Prozesse, adaptierte Prozesse von endlicher Variation, integrierbare wachsende Prozesse, Prozesse von integrierbarer Variation usw. stabil unter Stoppen sind.

Im Wesentlichen muss gefordert werden, dass  $H$  quadratisch  $P$ -integrierbar ist,  $S^1$  ein lokal quadratisch integrierbares  $P$ -Martingal ist und dass bezüglich der Strategie für das risikobehaftete Basisgut  $\vartheta^1 \in L^2(S^1)$  gilt, was neben der Vorhersehbarkeit von  $\vartheta^1$  gemäß obiger Konvention

$$E_P \left[ (\vartheta^1)^2 \cdot \langle S^1, S^1 \rangle_T \right] < \infty$$

bedeutet. Die Strategie  $\vartheta^0$  für die risikolose Anlage sei gut-messbar und derart, dass der Wertprozess  $PV(\vartheta)$  rechtsseitig stetige Pfade hat. Ferner sei  $PV(\vartheta)_t$  ebenfalls quadratisch  $P$ -integrierbar für alle  $t \in [0, T]$ . Föllmer & Sondermann (1986) nennen eine Strategie  $\vartheta$  *zulässig*, falls sie obige Voraussetzungen und  $PV(\vartheta)_T = H$   $P$ -f.s. erfüllt. Die Idee der Risikominimierung besteht nun darin, den Risikoprozess  $R(\vartheta)$  über alle zulässigen Strategien im folgenden Sinne zu minimieren:

**Definition 1.7** Eine zulässige Strategie  $\vartheta$  heißt **risikominimierend**, falls

$$R(\vartheta)_t \leq R(\tilde{\vartheta})_t \quad P\text{-f.s.} \quad (1.14)$$

für alle zulässigen Fortsetzungen  $\tilde{\vartheta}$  von  $\vartheta$  zum Zeitpunkt  $t$  für alle  $0 \leq t < T$  gilt. Dabei wird  $\tilde{\vartheta}$  **zulässige Fortsetzung von  $\vartheta$  zum Zeitpunkt  $t$**  genannt, falls  $\tilde{\vartheta}$  zulässig ist mit  $\tilde{\vartheta}_s = \vartheta_s$  für alle  $0 \leq s < t$ .

Jede selbstfinanzierende zulässige Handelsstrategie ist offensichtlich risikominimierend. In der Situation eines nicht-duplizierbaren Derivats kann eine gute zulässige Strategie dadurch gekennzeichnet werden, dass diese über die Zeit durchschnittlich nicht weit von einer selbstfinanzierenden Strategie entfernt ist. Eine Strategie  $\vartheta$  wird *im Mittel selbstfinanzierend* genannt, falls der zugehörige Kostenprozess  $C(\vartheta)$  ein Martingal ist. Und in der Tat gilt, dass eine risikominimierende Strategie im Mittel selbstfinanzierend ist, vgl. Föllmer & Sondermann (1986), Lemma 2. Es bezeichne  $V$  den Wertprozess des nicht-duplizierbaren Derivats mit Auszahlung  $H$ , d.h.  $V_t = E_P[H | \mathcal{F}_t]$  für alle  $t \in [0, T]$ . Wegen  $H \in L^2(P)$  ist  $V \in \mathcal{H}^2$ , d.h. der Preisprozess  $V$  des Derivats ist ein quadratisch integrierbares Martingal, siehe Jacod & Shiryaev (2003), Satz I.1.42. Da  $\{\vartheta^1 \cdot S^1 : \vartheta^1 \in L^2(S^1)\}$  ein abgeschlossener konvexer Unterraum des Hilbertraums  $\mathcal{H}^2$  ist, existiert die Orthogonalprojektion  $\vartheta^H \cdot S^1$  von  $V - V_0 \in \mathcal{H}^2$  auf diesen Unterraum. Das entspricht gerade der *Galtchouk-Kunita-Watanabe-Zerlegung* (GKW-Zerlegung)  $(\vartheta^H, L^H) \in L^2(S^1) \times \mathcal{H}^2$  von  $V \in \mathcal{H}^2$  bezüglich  $S^1 \in \mathcal{H}_{\text{loc}}^2$ :

$$V = V_0 + \vartheta^H \cdot S^1 + L^H = E_P[H] + \vartheta^H \cdot S^1 + L^H, \quad (1.15)$$

wobei  $L^H$  orthogonal zu  $S^1$  ist (in dem Sinne, dass  $L^H S^1$  ein lokales Martingal ist) und  $L_0^H = 0$  gilt, vgl. Kunita & Watanabe (1967). Die Bezeichnung  $(\vartheta^H, L^H)$  resultiert daher,

dass  $V$  hier das von  $H$  erzeugte Martingal ist. Der Prozess  $R^H$ , definiert durch

$$R_t^H = E_P \left[ (L_T^H - L_t^H)^2 \mid \mathcal{F}_t \right], \quad t \in [0, T], \quad (1.16)$$

wird als *inhärenter Risikoprozess* des Derivats mit Auszahlung  $H$  bezeichnet. Insbesondere wird durch  $R_0^H = E_P \left[ (L_T^H)^2 \right]$  das *inhärente Risiko* des Derivats definiert. Föllmer & Sondermann (1986) betrachten ohne Beschränkung der Allgemeinheit das Problem der Risikominimierung auf dem normierten Markt  $\hat{S} = \left( 1, \frac{S^1}{S^0} \right)$  und geben dafür die Struktur der Lösung an.

**Satz 1.8** *Gegeben seien der normierte Markt  $\hat{S}$  mit  $\hat{S}^1 \in \mathcal{H}_{\text{loc}}^2$  und ein Derivat mit zufälliger Auszahlung  $\hat{H} \in L^2(P)$ . Dann existiert eine eindeutige zulässige, risikominimierende Strategie  $\vartheta^*$ . Diese ist von der Form*

$$\vartheta^* = ((\vartheta^*)^0, (\vartheta^*)^1) = \left( \hat{V} - \vartheta^{\hat{H}} \hat{S}^1, \vartheta^{\hat{H}} \right), \quad (1.17)$$

wobei  $\hat{V}$  definiert ist durch  $\hat{V}_t = E_P[\hat{H} \mid \mathcal{F}_t]$ , und  $(\vartheta^{\hat{H}}, L^{\hat{H}})$  die GKW-Zerlegung von  $\hat{V}$  bezüglich  $\hat{S}^1$  angibt. Der Risikoprozess der risikominimierenden Strategie  $\vartheta^*$  entspricht gerade dem inhärenten Risikoprozess, d.h.

$$R(\vartheta^*)_t = R_t^{\hat{H}} = E_P \left[ \left( L_T^{\hat{H}} - L_t^{\hat{H}} \right)^2 \mid \mathcal{F}_t \right]. \quad (1.18)$$

Insbesondere ist das Risiko der risikominimierenden Strategie zum heutigen Zeitpunkt  $t = 0$  durch das inhärente Risiko  $R_0^{\hat{H}} = E_P \left[ \left( L_T^{\hat{H}} \right)^2 \right]$  des Derivats gegeben.

BEWEIS. Siehe Föllmer & Sondermann (1986), Satz 2. □

In der allgemeinen Situation, in der  $S^1$  (bzw.  $\hat{S}^1$ ) kein lokales  $P$ -Martingal, sondern lediglich ein Semimartingal ist, existiert für ein Derivat mit zufälliger Auszahlung  $H$  (bzw.  $\hat{H}$ ) im allgemeinen keine risikominimierende Strategie  $\vartheta$  mit  $V(\vartheta)_T = H$  (bzw.  $\hat{V}(\vartheta)_T = \hat{H}$ )  $P$ -f.s., vgl. Schweizer (2001). Proposition 3.1. Schweizer (2001) begründet dies mit einem Kompatibilitätsproblem: Zum Zeitpunkt  $t$  wird das Restrisiko  $R(\vartheta)_t$  über alle zulässigen Fortsetzungen von  $\vartheta$  zum Zeitpunkt  $t$  minimiert, was zum Zeitpunkt  $t$  eine optimale Fortsetzung auf  $[t, T]$  liefert. Betrachtet man nun den Zeitpunkt  $s < t$  und minimiert das Restrisiko  $R(\vartheta)_s$  über alle zulässigen Fortsetzungen von  $\vartheta$  zum Zeitpunkt  $s$ , so erhält man eine zum Zeitpunkt  $s$  optimale Fortsetzung auf  $[s, T] \supset [t, T]$ , die unter Umständen der zum Zeitpunkt  $t$  optimalen Fortsetzung auf  $[t, T]$  widerspricht. Die Martingaleigenschaft von  $S^1$  (bzw. von  $\hat{S}^1$ ) scheint gerade zu gewährleisten, dass dieses Kompatibilitätsproblem nicht auftritt. Schweizer (1991) hat den risikominimierenden Ansatz auf den allgemeinen Semimartingalfall erweitert, indem er das Kriterium der Risikominimierung durch ein Kriterium *lokaler Risikominimierung* ersetzt hat. Unter der Voraussetzung gewisser Strukturannahmen hinsichtlich des Preisprozesses  $S^1$  des Underlyings ist für die Lösung dieses Problems die *Föllmer-Schweizer-Zerlegung* grundlegend (vgl. Föllmer & Schweizer (1991)),

die im Martingalfall mit der GWK-Zerlegung zusammenfällt, allerdings im Gegensatz zur GWK-Zerlegung nicht immer existieren muss (vgl. z.B. Monat & Stricker (1995)). Falls der Preisprozess des Underlyings zusätzlich stetig ist, kann die Föllmer-Schweizer-Zerlegung unter  $P$  als GWK-Zerlegung unter einem bestimmten äquivalenten Martingalmaß (dem sogenannten *minimalen äquivalenten lokalen Martingalmaß*) berechnet werden.

Beim Ansatz varianz-optimalen Hedgens beharrt man im Gegensatz zum risikominimierenden Ansatz darauf, dass die Handelsstrategie selbstfinanzierend ist, d.h. dass weder monetäre Mittel von außen zugeschossen noch entnommen werden. Dafür erlaubt man, dass der Endwert  $PV(\vartheta)_T$  der Strategie  $\vartheta$  von der Auszahlung des Derivats  $H$  abweicht. Das Ziel besteht darin, den erwarteten quadratischen Fehlbetrag

$$E_P[(H - PV(\vartheta)_T)^2]$$

zu minimieren. Der Ansatz, das Risiko des Fehlbetrages quadratisch zu messen, ist in der Literatur weit verbreitet: Bouleau & Lamberton (1989) stellen z.B. diese Zielfunktion auf, wobei sie annehmen, dass der Preisprozess  $S^1$  des Underlyings einem Martingal folgt und gleichzeitig eine Funktion eines Markow-Prozesses darstellt. Duffie & Richardson (1991) betrachten einen Finanzmarkt, auf welchem ein Händler eine zukünftige Verbindlichkeit in ein risikobehaftetes Handelsgut eingeht. Gleichzeitig besteht die Möglichkeit an diesem Markt, Futures-Kontrakte auf ein weiteres risikobehaftetes Handelsgut stetig zu handeln, dessen Log-Renditen mit den Log-Renditen des anderen Handelsgutes korreliert sind. Zur Beantwortung der Frage nach der optimalen Absicherung der eingegangenen Verbindlichkeit hinsichtlich des einen Handelsgutes durch den stetigen Handel mit den Futures-Kontrakten auf das andere Handelsgut finden ebenfalls quadratische Zielfunktionen Anwendung. Schweizer (1994) hedgt ebenfalls quadratisch, wobei er die allgemeine Situation betrachtet, in der der Preisprozess  $S^1$  des Underlyings ein Spezialsemimartingal ist. Das Kriterium, den erwarteten quadratischen Fehlbetrag  $E_P[(H - PV(\vartheta)_T)^2]$  zu minimieren, ist ökonomisch nicht unumstritten, da es Verluste und Gewinne gleichermaßen bestraft. Bertsimas et al. (2001) begründen die quadratische Zielfunktion so, dass ein Kunde, der bei einem Börsenhändler eine Auskunft nach einer Preisquotierung eines Derivats einholt, bis zu dem Zeitpunkt, zu dem er Bid- und Ask-Preise erfährt, nicht weiß, ob er eine Kauf- oder Verkaufsposition eingehen soll. In diesem Fall sei eine asymmetrische Zielfunktion ungeeignet, da ein positiver Hedgefehler einer Kaufposition einem negativen Hedgefehler einer Verkaufsposition entspräche. Dem ist aber entgegenzuhalten, dass der Investor erst dann eine Absicherungsstrategie bestimmt, nachdem er eine gewisse Position eingegangen ist. Der Hauptgrund für die Verwendung eines quadratischen Kriteriums liegt daher eher in der semianalytischen bzw. numerischen Lös- und Handhabbarkeit des resultierenden Hedgingproblems. Ferner ist quadratisches Hedging linear, d.h. die Hedgingstrategie von hundert Optionen erhält man aus der Hedgingstrategie von einer einzelnen Option, indem man jede Position der Strategie ver Hundertfacht. Dies stimmt mit der gängigen Praxis an den Finanzmärkten überein, vgl. Cont et al. (2005). Ein weiterer Aspekt, der für das Arbeiten mit quadratischen Zielfunktionen spricht, ist die Tatsache, dass das resultierende Hedgerisiko

als Näherung aufgefasst werden kann für Risiken, die mit realistischeren Zielfunktionen einhergehen.

**Annahme 1.9** Im Rahmen dieser Arbeit sei unterstellt, dass der diskontierte Preisprozess  $\hat{S}^1$  des Underlyings einem lokal quadratisch integrierbaren Martingal folgt, das heißt, dass  $\hat{S}^1 \in \mathcal{H}_{\text{loc}}^2$  gilt.

**Bemerkung 1.10** Zur Diskussion obiger Annahme nehme man hier beispielhaft an, dass der diskontierte Preisprozess  $\hat{S}^1$  des Underlyings durch eine geometrische Brownsche Bewegung  $\hat{S}^1 = \hat{S}_0^1 \exp(\mu I + \sigma W)$  gegeben ist, wobei  $I$  den Identitätsprozess und  $W$  eine Standard-Brownsche Bewegung bezeichnen.  $\hat{S}^1$  ist genau dann ein lokales Martingal, wenn  $\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 = 0$  gilt, da  $\hat{S}^1$  ein Spezialsemimartingal ist mit kanonischer Zerlegung

$$\hat{S}^1 = \hat{S}_0^1 + M + A \quad \text{mit} \quad M = \sigma \hat{S}^1 \cdot W \quad \text{und} \quad A = \left( \mu + \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \hat{S}^1 \cdot I.$$

Hinsichtlich der Zuwächse der Log-Renditen  $Z_t = \ln \left( \frac{\hat{S}_t^1}{\hat{S}_0^1} \right)$  gilt

$$\frac{Z_{t+s} - Z_t}{s} \sim \mathcal{N} \left( \mu, \frac{\sigma^2}{s} \right), \quad s > 0, \quad t \geq 0.$$

Vor diesem Hintergrund kann ein zweiseitiger Gaußtest zum Signifikanzniveau 20 % zum Prüfen der Nullhypothese  $H_0: \mu = -\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2$  gegen die alternative Hypothese  $H_1: \mu \neq -\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2$  durchgeführt werden. Hierbei gibt  $\hat{\sigma}$  die auf der Grundlage des jeweils betrachteten Datensatzes geschätzte empirische Volatilität an. Als Datenstichprobe werden die täglichen Schlusskurse des DAX (Performance-Index) im Zeitraum 13.05.1996 - 12.05.2006 (Quelle: [www.markt-daten.de](http://www.markt-daten.de)) verwendet. Weitere Stichproben werden generiert, indem man diese Daten in fünf disjunkte Blöcke unterteilt, die jeweils zwei zusammenhängende Jahre des DAX umfassen. Als konstanter Zins wird der jeweils zu Beginn des Erhebungszeitraums gültige 3-Monate EURIBOR herangezogen. Bei den Quotierungen vor Einführung des EURIBOR am 01.01.1999 handelt es sich um „zurückgerechnete Kursdaten auf Basis der eingeführten Bedingungen des EURIBOR“ (nach Auskunft der market maker Software AG, Quelle: [www.handelsblatt.com](http://www.handelsblatt.com)). Tabelle 1.1 zeigt, dass in der Mehrheit der Fälle die Nullhypothese, dass der diskontierte DAX ein lokales Martingal ist, statistisch nicht verworfen werden kann. Betrachtet man zudem den gesamten Zeitraum von 10 Jahren, so kann die Nullhypothese ebenfalls nicht abgelehnt werden. Ökonomisch ist es allerdings nicht plausibel, dass die erwartete Rendite einer risikobehafteten Geldanlage exakt genauso hoch ist wie die der risikolosen Geldanlage, da jeder Investor für zusätzlich eingegangenes Risiko einen Risikoaufschlag in Form einer positiven Risikoprämie verlangt. Dies spricht dafür, diskontierte Preisprozesse risikobehafteter Geldanlagen nicht als Martingale, sondern als Semimartingale mit Drift zu modellieren. Aber ähnlich wie bei Föllmer & Sondermann (1986) wird in dieser Arbeit im Zusammenhang mit dem Problem varianz-optimalen Hedgens vereinfachend davon ausgegangen, dass der diskontierte Preisprozess des risikobehafteten Basisguts einem lokalen Martingal folgt. Diese Strukturannahme erlaubt es nämlich in einem ersten

Erhebungszeitraum	Erwartete Rendite $\hat{\mu} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2$	$p$ -Wert	Entscheidung
13.05.1996 - 12.05.1998	37,53 %	1,24 %	$H_0$ ablehnen
13.05.1998 - 12.05.2000	15,30 %	42,93 %	$H_0$ nicht ablehnen
15.05.2000 - 14.05.2002	-18,87 %	30,12 %	$H_0$ nicht ablehnen
15.05.2002 - 14.05.2004	-11,61 %	64,63 %	$H_0$ nicht ablehnen
17.05.2004 - 12.05.2006	21,47 %	2,06 %	$H_0$ ablehnen
13.05.1996 - 12.05.2006	8,71 %	28,44 %	$H_0$ nicht ablehnen

Tabelle 1.1: Muss die Hypothese, dass der diskontierte DAX ein lokales Martingal ist, zu einem Signifikanzniveau von 20 % verworfen werden?

Schritt, das Problem des varianz-optimalen Hedgens sehr explizit in einer sehr allgemeinen Klasse von Underlyingpreisprozessen derart zu lösen, dass eine effiziente numerische Auswertbarkeit gegeben ist. Die Verallgemeinerung des hier noch näher zu spezifizierenden Problems auf den Semimartingalfall von Schweizer (1994), der dort die Struktur der allgemeinen Lösung bestimmt hat, ist Gegenstand aktueller Forschung, die wesentliche Ideen dieser Arbeit mit verwendet, allerdings auch noch eine Vielzahl weiterer Methoden benötigt, die über den Rahmen dieser Arbeit hinausgehen. Im Semimartingalfall, in dem die Preisprozesse stetige Pfade haben, wird ein Teil der Lösung (der reine Hedgekoeffizient), ähnlich wie beim lokal risikominimierenden Hedgeansatz, auf die Bestimmung der GWK-Zerlegung des Preisprozesses des zu hedgenden Derivats unter einem anderen Maß (unter dem sogenannten *varianz-optimalen Martingalmaß*) zurückgeführt, vgl. Rheinländer & Schweizer (1997). Dabei ist der Preisprozess als dasjenige Martingal definiert, das unter dem varianz-optimalen Martingalmaß von der zufälligen Auszahlung des zu hedgenden Derivats erzeugt wird. Bei dem Maßwechsel geht allerdings die Struktur der Preisprozesse verloren, die im Martingalfall das semiexplizite Lösen des Problems varianz-optimalen Hedgens erlaubt. Eine ähnliche Problematik tritt im Semimartingalfall von Schweizer (1994) auf, in dem die Preisprozesse nicht stetig sein müssen, aber einen deterministischen erweiterten Erwartungswert-Varianz-Tradeoff-Prozess (EVT-Prozess) aufweisen. Dass dennoch eine Verallgemeinerung auf den Semimartingalfall möglich ist, wird in Černý & Kallsen (2005) aufgezeigt, die die allgemeine Struktur der Lösung des Problems varianz-optimalen Hedgens im Semimartingalfall erarbeitet haben, wobei die Preisprozesse unstetige Trajektorien aufweisen, der erweiterte EVT-Prozess aber nicht deterministisch sein muss. In welcher Allgemeinheit der Preisprozesse sich dann aber das hier gestellte Problem noch lösen lässt, ist derzeit eine noch offene Frage. Abschließend sei angemerkt, dass die Annahme 1.9 impliziert, dass das physikalische Maß  $P$  zur Menge der äquivalenten lokalen Martingalmaße gehört, was bedeutet, dass es keine „ $L^2$ -free-lunches“ im Sinne von Černý & Kallsen (2005), Annahme 2.1, gibt.  $\square$

Aufgrund der Annahme eines deterministischen Zinssatzes gilt

$$\begin{aligned} & \min \left\{ E_P \left[ (\text{PV}(\vartheta)_T - H)^2 \right] : \vartheta \text{ selbstfinanzierend} \right\} \\ &= (S_T^0)^2 \min \left\{ E_P \left[ \left( \widehat{\text{PV}}(\vartheta)_T - \widehat{H} \right)^2 \right] : \vartheta \text{ selbstfinanzierend} \right\}. \end{aligned}$$

Wendet man Proposition 1.2 und Lemma 1.3 an, so erhält man

$$\begin{aligned} & \min \left\{ E_P \left[ (\text{PV}(\vartheta)_T - H)^2 \right] : \vartheta \text{ selbstfinanzierend} \right\} \\ = & (S_T^0)^2 \min \left\{ E_P \left[ \left( \widehat{\text{PV}}(\vartheta)_0 + \vartheta^1 \cdot \hat{S}_T^1 - \hat{H} \right)^2 \right] : \vartheta \text{ selbstfinanzierend} \right\}. \end{aligned}$$

Wegen Lemma 1.4 gilt dann aber

$$\begin{aligned} & \min \left\{ E_P \left[ (\text{PV}(\vartheta)_T - H)^2 \right] : \vartheta \text{ selbstfinanzierend} \right\} \\ = & (S_T^0)^2 \min \left\{ E_P \left[ \left( v_0 + \vartheta^1 \cdot \hat{S}_T^1 - \hat{H} \right)^2 \right] : v_0 \in \mathbb{R}, \vartheta^1 \in L(\hat{S}^1) \right\}. \quad (1.19) \end{aligned}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann also angenommen werden, dass die Preisprozesse des Marktes und die zufällige Auszahlung des abzusichernden Derivats in diskontierter Form vorliegen, in anderen Worten wird  $r = 0$  vorausgesetzt. Da die Selbstfinanzierungsbedingung der Strategie es erlaubt, über das Anfangskapital und die Strategiekomponente des risikobehafteten Basisguts zu optimieren anstatt über beide Komponenten der Handelsstrategie, wird im weiteren Verlauf der Arbeit darauf verzichtet,  $\vartheta^0$  mitzuführen, da dieses direkt aus  $v_0$  und  $\vartheta^1$  errechnet werden kann.

**Notation.** Zur Vereinfachung der Notation werden ab sofort die Strategiekomponente des risikobehafteten Handelsgutes  $\vartheta^1$  mit  $\vartheta$  und der (normierte) Preisprozess  $S^1$  mit  $S$  bezeichnet.

Im Folgenden bezeichne  $\Theta$  die Zulässigkeitsmenge der Strategien  $\vartheta$ . Die Festlegung der Strategiemenge ist im Allgemeinen in stetiger Zeit ein diffiziler Punkt, vgl. Harrison & Kreps (1979), insbesondere dort die Abschnitte 3 und 6. Wird sie zu klein gewählt, sind bereits gängige und weit verbreitete Hedgingstrategien, wie zum Beispiel die Duplikationsstrategie einer europäischen Call-Option im Black-Scholes-Modell, nicht zulässig. Wird die Zulässigkeitsmenge andererseits zu groß gewählt, enthält diese bereits in einfachen Marktmodellen, wie zum Beispiel dem Marktmodell von Black und Scholes, Arbitragestrategien. In der Formulierung des Problems varianz-optimalen Hedgens in Form von (1.19) ist die Zulässigkeitsmenge  $\Theta$  gerade  $L(S)$ . Analog zu Verdopplungsstrategien im Zeitdiskreten gibt es dann aber in einigen zeitstetigen Modellen mit endlichem Handelshorizont Arbitragestrategien. Man vergleiche hierzu Kapitel 1, Beispiel 2.3 in Karatzas & Shreve (1998). Modelliert man beispielhaft den Preisprozess des risikobehafteten Basisguts als stochastisches Exponential einer Standard-Brownschen Bewegung, d.h.  $S = \mathcal{E}(W)$ , so liefert die Strategie aus Karatzas & Shreve (1998) eine Arbitrage in dem hier vorliegenden speziellen Black-Scholes-Modell, indem man die Strategie durch  $S$  dividiert.  $L(S)$  ist also als Zulässigkeitsmenge zu groß.

**Definition 1.11** Ein  $\mathbb{R}$ -wertiger Prozess  $\vartheta = (\vartheta_t)_{t \in [0, T]}$  heißt **einfach**, falls er von der Form

$$\vartheta_t = \sum_{i=1}^n Y_i 1_{\llbracket \tau_i, \tau_{i+1} \rrbracket}(\cdot, t) \quad (1.20)$$

ist, wobei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\tau_1 \leq \dots \leq \tau_{n+1}$  Stoppzeiten und  $Y_i$  beschränkte  $\mathcal{F}_{\tau_i}$ -messbare Zufallsvariablen für  $i = 1, \dots, n$  bezeichnen.

Da in der realen Welt im Zeitintervall  $[0, T]$  nur endlich oft gehandelt werden kann, wäre es plausibel, als Zulässigkeitsmenge  $\Theta$  gerade die Menge  $\Theta^e$  der einfachen Prozesse zu verwenden. Diese Zulässigkeitsmenge ist allerdings in obigem Sinn zu klein, da z.B. die wohlbekanntere Duplikationsstrategie einer europäischen Call-Option im Black-Scholes-Modell nicht darin enthalten ist. Ziel ist es daher, eine Zulässigkeitsmenge zu finden, die solche Benchmark-Strategien enthält, keine Arbitragestrategien umfasst und deren Elemente aber in einem gewissen Sinn nicht weit von einfachen Strategien entfernt sind. Die Idee von Černý & Kallsen (2005), vgl. dort Abschnitt 2.1, besteht darin, den Abschluss der einfachen Strategien (in einem gewissen  $L^2(P)$ -Sinne) als Zulässigkeitsmenge zu betrachten. Der Grundgedanke beim varianz-optimalen Hedging entspricht der Approximation der zufälligen Auszahlung  $H$  in  $L^2(P)$  durch das Endvermögen  $v_0 + \vartheta \cdot S_T$ , das man erzielt, indem man ausgehend von dem Anfangskapital  $v_0 \in \mathbb{R}$  das risikobehaftete Basisgut stetig handelt. Eine zufällige Auszahlung wird *darstellbar durch einfache Strategien* genannt, falls diese Auszahlung zu der Menge  $G^e := \{\vartheta \cdot S_T : \vartheta \in \Theta^e\}$  gehört, und sie heißt *darstellbar*, falls die Auszahlung Element der Menge  $\overline{G} := \overline{G^e}$  ist, wobei  $\overline{G^e}$  den  $L^2(P)$ -Abschluss von  $G^e$  bezeichnet.

**Definition 1.12** Ein Prozess  $\vartheta \in L(S)$  heißt **zulässige Strategie**, falls eine Folge  $(\vartheta^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  einfacher Strategien existiert mit

$$\begin{aligned} \vartheta^{(n)} \cdot S_t &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \vartheta \cdot S_t \quad \forall t \in [0, T], \\ \vartheta^{(n)} \cdot S_T &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2(P)} \vartheta \cdot S_T. \end{aligned}$$

Dabei stehen  $\xrightarrow{P}$  und  $\xrightarrow{L^2(P)}$  für stochastische Konvergenz bzw. Konvergenz im  $L^2$ -Sinne. Ferner definiert man die Menge der zulässigen Strategien  $\overline{\Theta} := \{\vartheta \in L(S) : \vartheta \text{ zulässig}\}$ .

Gemäß Černý & Kallsen (2005), Lemma 2.4, kann jede zufällige Auszahlung aus dem Abschluss der durch einfache Strategien darstellbaren zufälligen Auszahlungen durch das Endvermögen  $\vartheta \cdot S_T$  einer zulässigen Strategie  $\vartheta$  ausgedrückt werden, und umgekehrt ist das Endvermögen  $\vartheta \cdot S_T$  einer zulässigen Strategie  $\vartheta$  Element der Menge  $\overline{G}$  der darstellbaren Auszahlungen, d.h.  $\{\vartheta \cdot S_T : \vartheta \in \overline{\Theta}\} = \overline{G}$ . In diesem Sinne sind die zulässigen Strategien nicht weit von den einfachen Strategien entfernt. Man beachte, dass  $\{\vartheta \cdot S_T : \vartheta \in \overline{\Theta}\}$  abgeschlossen ist. Schweizer (1994) verwendet im Nichtmartingalfall  $\{\vartheta \in L(S) : \vartheta \cdot S \in \mathcal{S}^2\}$  als Zulässigkeitsmenge, wobei  $\mathcal{S}^2$  die Klasse der quadratisch integrierbaren Semimartingale bezeichnet, zur Begriffsklärung vgl. Černý & Kallsen (2005), Definition A.1. Die Lösung des Problems varianz-optimalen Hedgens fußt wesentlich auf der Bestimmung eindeutig existierender Orthogonalprojektionen zufälliger Auszahlungen auf die Menge von Endvermögen zulässiger Strategien, dafür ist die Abgeschlossenheit der Menge der Endvermögen der zulässigen Strategien  $\vartheta \in \overline{\Theta}$  zentral. Die Menge der Endvermögen der zulässigen Strategien von Schweizer (1994) im Nichtmartingalfall ist nicht notwendigerweise abgeschlossen, vgl. Monat & Stricker (1995). Für hinreichende und notwendige Bedingungen

hinsichtlich der Abgeschlossenheit dieser Menge sei auf Delbaen et al. (1997) verwiesen. Im vorliegenden Martingalfall  $S \in \mathcal{H}_{\text{loc}}^2$  gilt allerdings, dass die Zulässigkeitsmenge von Schweizer (1994) mit  $L^2(S)$  (das ist die Menge aller vorhersehbaren Prozesse  $\vartheta$ , für die  $\vartheta \cdot \langle S, S \rangle$  integrierbar ist im Sinne von Jacod & Shiryaev (2003), Definition I.3.6) übereinstimmt, vgl. Schweizer (1994), Lemma 2. In der vorliegenden Arbeit wird als Zulässigkeitsmenge  $\Theta = L^2(S)$  verwendet. Die Menge der Endvermögen der Strategien  $\vartheta \in L^2(S)$  ist nicht nur abgeschlossen, sie stimmt auch mit dem Abschluss der Menge der durch einfache Strategien darstellbaren zufälligen Auszahlungen überein.

**Proposition 1.13** *Im Martingalfall  $S \in \mathcal{H}_{\text{loc}}^2$  gilt  $\overline{\Theta} = L^2(S)$ .*

BEWEIS. Gemäß Černý & Kallsen (2005), Korollar 2.9, ist  $L^2(S) \subseteq \overline{\Theta}$ . Da  $P$  nach Voraussetzung ein äquivalentes lokales Martingalmaß ist, gilt umgekehrt für ein  $\vartheta \in \overline{\Theta}$ , dass  $\vartheta \in L(S)$  und  $\vartheta \cdot S_T \in L^2(P)$  sind und dass  $\vartheta \cdot S$  ein  $P$ -Martingal ist, vgl. Černý & Kallsen (2005), Korollar 2.5. Da der Handelshorizont  $T$  endlich ist, gilt unter Beachtung von Konvention 1.6, dass das Martingal  $\vartheta \cdot S$  gleichgradig integrierbar ist und  $\vartheta \cdot S_\infty \in L^2(P)$  als Endwert hat. Satz I.1.42 in Jacod & Shiryaev (2003) liefert  $\vartheta \cdot S \in \mathcal{H}^2$ . Der Preisprozess  $S \in \mathcal{H}_{\text{loc}}^2$  ist insbesondere ein Spezialsemimartingal. Damit ergibt sich aus  $\vartheta \in L(S)$  und unter Verwendung von Jacod & Shiryaev (2003), Definition III.6.17, dass  $\vartheta \in L_{\text{loc}}^2(S)$  ist. Satz I.4.40, Jacod & Shiryaev (2003), liefert abschließend  $\vartheta \in L^2(S)$ .  $\square$

**Bemerkung 1.14** Die Zulässigkeitsmenge  $\Theta = L^2(S)$  enthält keine Arbitrage. Sei  $\vartheta \in \Theta$  mit  $\text{PV}(\vartheta)_0 = 0$ . Dann gilt  $\text{PV}(\vartheta) \in \mathcal{H}^2$ . Angenommen, es gelten  $\text{PV}(\vartheta)_T \geq 0$   $P$ -f.s. und  $P\{\text{PV}(\vartheta)_T > 0\} > 0$ . Aus  $\text{PV}(\vartheta)_T \geq 0$   $P$ -f.s. folgt  $\text{PV}(\vartheta)_T = 0$   $P$ -f.s. wegen  $E_P[\text{PV}(\vartheta)_T] = 0$ . Dies ist aber ein Widerspruch zu  $P\{\text{PV}(\vartheta)_T > 0\} > 0$ .

Analog zu (1.19) kann auch bei Verwendung der Zulässigkeitsmenge  $L^2(S)$  ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, dass der Zins  $r = 0$  ist. In der in (1.19) gültigen Notation kann man

$$\begin{aligned} & \min \left\{ E_P \left[ (\text{PV}(\vartheta)_T - H)^2 \right] : \vartheta \text{ selbstfinanzierend}, \vartheta^1 \in L^2(\hat{S}^1) \right\} \\ &= (S_T^0)^2 \min \left\{ E_P \left[ \left( v_0 + \vartheta^1 \cdot \hat{S}_T^1 - \hat{H} \right)^2 \right] : v_0 \in \mathbb{R}, \vartheta^1 \in L^2(\hat{S}^1) \right\} \end{aligned} \quad (1.21)$$

zeigen. Somit kann das Problem des varianz-optimalen Hedgens, das in dieser Arbeit betrachtet wird, exakt formuliert werden:

**Definition 1.15** Sei  $H \in L^2(P)$  die zufällige Auszahlung eines Derivats. Das **Problem des varianz-optimalen Hedgens** ist definiert durch

$$\min_{v_0 \in \mathbb{R}, \vartheta \in \Theta} E_P \left[ (v_0 + \vartheta \cdot S_T - H)^2 \right], \quad (1.22)$$

wobei  $\Theta = L^2(S)$  die Zulässigkeitsmenge angibt. Weiterhin definiere man

$$(v_0^*, \vartheta^*) := \arg \min_{v_0 \in \mathbb{R}, \vartheta \in \Theta} E_P \left[ (v_0 + \vartheta \cdot S_T - H)^2 \right]. \quad (1.23)$$

Hierbei bezeichnen  $v_0^*$  das **varianz-optimale Anfangskapital** und  $\vartheta^*$  die **varianz-optimale Handelsstrategie**. Der **minimale erwartete quadratische Hedgefehler** ist definiert durch  $E_P [(v_0^* + \vartheta^* \cdot S_T - H)^2]$ .

Im vorliegenden Martingalfall ist die Struktur der allgemeinen Lösung des Problems varianz-optimales Hedgens wie beim risikominimierenden Hedgeansatz durch die GWK-Zerlegung des Preisprozesses  $V$  des Derivats, definiert durch  $V_t = E_P[H|\mathcal{F}_t]$ ,  $t \in [0, T]$ , gegeben, vgl. Föllmer & Sondermann (1986) und Schweizer (1994), Theorem 3 und Korollar 10:

$$v_0^* = E_P[H], \quad \vartheta^* = \vartheta^H \quad \text{und} \quad E_P [(v_0^* + \vartheta^* \cdot S_T - H)^2] = E_P [(L_T^H)^2], \quad (1.24)$$

wobei

$$V = V_0 + \vartheta^H \cdot S + L^H = E_P[H] + \vartheta^H \cdot S + L^H \quad (1.25)$$

die GWK-Zerlegung von  $V$  bezüglich des Underlyingpreisprozesses  $S$  bezeichnet. Aufgrund der Orthogonalität von  $S$  und  $L^H$  gilt  $\vartheta^H \cdot \langle S, S \rangle = \langle V, S \rangle$ . Symbolisch schreibt man auch

$$\vartheta_t^H = \frac{d\langle V, S \rangle_t}{d\langle S, S \rangle_t}, \quad t \in [0, T]. \quad (1.26)$$

Da  $t \mapsto \langle S, S \rangle_t$  rechtsseitig stetig und monoton wachsend ist, kann  $\langle S, S \rangle$  pfadweise mit einem Maß identifiziert werden. Interpretiert man, grob gesprochen, den Ausdruck  $\langle V, S \rangle$  als signiertes Maß, so könnte man  $\vartheta^H$  als eine Art Radon-Nikodym-Dichte auffassen. Eine alternative Charakterisierung der Struktur der optimalen Lösung des Problems varianz-optimales Hedgens geben Bouleau & Lamberton (1989) an. In ihrer Arbeit gehen sie ebenfalls davon aus, dass die zufällige Auszahlung von der Form  $H = f(S_T)$  ist für eine messbare Funktion  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ . Ferner wird angenommen, dass der Preisprozess des Underlyings ein Martingal ist und zusätzlich die Struktur  $S_t = G(t, Z_t)$  besitzt, wobei  $Z = (Z_t)_{t \in [0, T]}$  einen *rechten Markow-Prozess* (zur Terminologie vgl. Gettoor (1975), Kapitel 9, dort insbesondere die Annahmen HD1 und HD2 sowie die Bezeichnung 9.7) mit Zustandsraum  $(E, \mathcal{E})$ , kanonischer Filtrierung  $(\mathcal{G}_t)_{t \in [0, T]}$ , Übergangshalbgruppe  $(P_t)_{t \in [0, T]}$  und Startverteilungen  $P^x$ ,  $x \in E$ , bezeichnet, und  $G$  im eingeschränkten Definitionsbereich des *erweiterten infinitesimalen Generators*  $\mathcal{A}$  (im Sinne von Bouleau (1981)) von  $(I, Z)$  liegt, wobei  $I$  hier für den Identitätsprozess steht. Die Einschränkung des Definitionsbereiches, die Bouleau & Lamberton (1989) vornehmen, besteht darin, dass zusätzlich zu den üblichen Bedingungen (vgl. Bouleau (1981), Definition I.1) gelten muss, dass der Prozess

$$C^G := G(I, Z) - G(I_0, Z_0) - \int_0^\cdot (\mathcal{A}G)(I_s, Z_s) ds$$

bezüglich  $((\mathcal{G}_t^x)_{t \in [0, T]}, P^x)$  lokal quadratisch integrierbar ist für alle  $x \in E$ , wobei

$$\mathcal{G}_t^x := \mathcal{G}_t^{\varepsilon^x} := \sigma(\mathcal{G}_t^* \cup \{G \in \mathcal{G}^x : P^x(G) = 0\}),$$

$\mathcal{G}^x$  die  $P^x$ -Vervollständigung von  $\mathcal{G}^*$ ,  $\mathcal{G}_t^* := \bigvee_{s \leq t} \{Z_s^{-1}(B) : B \in \mathcal{E}^*\}$ ,  $\mathcal{G}^* := \bigvee_{t \in [0, T]} \mathcal{G}_t^*$  und

$\mathcal{E}^*$  die  $\sigma$ -Algebra der universell messbaren Mengen auf  $(E, \mathcal{E})$  (vgl. Blumenthal & Gettoor

(1968), Abschnitt 0.1) seien. Genauer gesprochen sei  $S$  für jede Startverteilung  $P^x$ ,  $x \in E$ , ein  $(P^x, (\mathcal{G}_t)_{t \in [0, T]})$ -Martingal. Außerdem gelte  $P_T \tilde{f}^2(x) < \infty$  für alle  $x \in E$ , wobei  $\tilde{f}$  definiert ist durch  $\tilde{f}(x) = f(G(T, x))$ ,  $x \in E$ . Der Preisprozess  $V^x = (V_t^x)_{t \in [0, T]}$  des Derivats mit Auszahlung  $H$  ist zu jedem  $x \in E$  gegeben durch

$$V_t^x := E_{P^x} \left[ \tilde{f}(Z_T) | \mathcal{G}_t \right] = F(t, Z_t) \quad \text{mit} \quad F(t, x) := P_{T-t} \tilde{f}(x) = \int_E \tilde{f}(y) P_{T-t}(x, dy).$$

Das zentrale mathematische Objekt, das hier zur Charakterisierung herangezogen wird, ist der *Carré-du-Champ-Operator*  $\Gamma$ . Zu dem Markow-Prozess  $Z$  existiert genau dann der Carré-du-Champ-Operator, wenn der Definitionsbereich des erweiterten infinitesimalen Generators  $\tilde{\mathcal{A}}$  von  $Z$  eine Algebra ist. Gemäß HD1, Gettoor (1975), Kapitel 9, existiert zu jedem Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu$  auf  $(E, \mathcal{E}^*)$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $P^\mu$  auf  $(\Omega, \mathcal{G}^*)$ , so dass  $(Z, (\mathcal{G}_t^*)_{t \in [0, T]}, P^\mu)$  ein Markow-Prozess ist mit Übergangshalbgruppe  $(P_t)_{t \in [0, T]}$  und mit  $P^\mu(Z_0^{-1}(B)) = \mu(B)$  für alle  $B \in \mathcal{E}^*$ . Zur Startverteilung  $\mu$  definiert man  $\mathcal{G}^\mu$  als  $P^\mu$ -Vervollständigung von  $\mathcal{G}^*$  und  $\mathcal{G}_t^\mu := \sigma(\mathcal{G}_t^* \cup \{G \in \mathcal{G}^\mu : P^\mu(G) = 0\})$ . Die Existenz des Carré-du-Champ-Operators von  $Z$  ist auch äquivalent dazu, dass für jede Startverteilung  $\mu$  alle quadratisch integrierbaren Martingale bezüglich der Filtrierung  $(\mathcal{G}_t^\mu)_{t \in [0, T]}$  Spitzklammerprozesse besitzen, die absolut stetig bezüglich des Lebesgue-Maßes sind, vgl. Meyer (1976b), Theorem 1. Sei  $g$  Element des eingeschränkten Definitionsbereichs des erweiterten infinitesimalen Generators  $\tilde{\mathcal{A}}$  von  $Z$ , so dass der Prozess  $C^g = g(Z) - g(Z_0) - \int_0^\cdot \tilde{\mathcal{A}}g(Z_s) ds$  für jedes  $x \in E$  ein bezüglich  $((\mathcal{G}_t^x)_{t \in [0, T]}, P^x)$  lokal quadratisch integrierbares Martingal ist. Für den Fall, dass zu  $Z$  der Carré-du-Champ-Operator  $\Gamma$  existiert, ist die Lebesgue-Dichte des Maßes  $\langle C^g, C^g \rangle$  gerade  $\Gamma(g, g)(Z)$ , wobei  $\Gamma(g, g) = \tilde{\mathcal{A}}g^2 - 2g\tilde{\mathcal{A}}g$  gilt, vgl. Proposition 4 in Bouleau & Lamberton (1989). Für Elemente  $g, h$  des eingeschränkten Definitionsbereichs des erweiterten infinitesimalen Generators  $\tilde{\mathcal{A}}$  von  $Z$  erhält man durch Polarisierung (vgl. Jacod & Shiryaev (2003), Formel I.4.3)  $\Gamma(g, h) = \tilde{\mathcal{A}}(gh) - g\tilde{\mathcal{A}}h - h\tilde{\mathcal{A}}g$ . Existiert der Carré-du-Champ-Operator zum Markow-Prozess  $Z$  mit Generator  $\tilde{\mathcal{A}}$ , so existiert dieser auch zum Markow-Prozess  $(I, Z)$  mit Generator  $\mathcal{A}$ , vgl. Meyer (1976a). Aufgrund der Annahme  $P_T \tilde{f}^2(x) < \infty$  für alle  $x \in E$  ist der Preisprozess  $V_t^x = F(t, Z_t)$  für jeden Startwert  $x \in E$  ein quadratisch integrierbares Martingal, infolgedessen  $F$  zum eingeschränkten Definitionsbereich des erweiterten infinitesimalen Generators  $\mathcal{A}$  von  $(I, Z)$  gehört. Damit lässt sich die Struktur der allgemeinen Lösung des Problems varianz-optimalen Hedgens unter jeder Startverteilung  $P^x$  charakterisieren durch

$$v_0^* = E_{P^x}[\tilde{f}(Z_T)], \quad \vartheta_t^* = \frac{\Gamma(F, G)(t, Z_{t-})}{\Gamma(G, G)(t, Z_{t-})}, \quad t \in [0, T], \quad (1.27)$$

und

$$\begin{aligned} E_{P^x} [(v_0^* + \vartheta^* \cdot S_T - H)^2] &= E_{P^x} [(L_T^H)^2] = E_{P^x} [\langle L^H, L^H \rangle_T] \\ &= E_{P^x} \left[ \int_0^T \left[ \Gamma(F, F) - \frac{\Gamma(F, G)^2}{\Gamma(G, G)} \right] (s, Z_s) ds \right] \end{aligned} \quad (1.28)$$

mit  $L_t^H = F(t, Z_t) - F(0, Z_0) - \vartheta^* \cdot S_t$ ,  $t \in [0, T]$ , vgl. Bouleau & Lamberton (1989), Theorem 8. Eine weitere Charakterisierung der varianz-optimalen Handelsstrategie wird in

Jacod et al. (2000) gegeben, vgl. dort Satz 2.4. Es wird von einem quasi-linksstetigen, starken Markow-Prozess  $Z$  auf  $(\Omega, \mathcal{G}, (\mathcal{G}_t)_{t \in [0, T]}, P^x)$  mit Halbgruppe  $(P_t)_{t \in [0, T]}$  ausgegangen, wobei  $P^x$  die Startverteilung mit  $P^x\{Z_0 = x\} = 1$  angibt,  $(\mathcal{G}_t)_{t \in [0, T]}$  die kanonische Filtrierung bezeichnet und  $\mathcal{G} = \bigvee_{t \in [0, T]} \mathcal{G}_t$  gilt. Zwecks Vereinfachung der Darstellung sei  $Z$  reellwertig. Ferner sei  $Z$  unter jedem  $P^x$  ein Semimartingal mit Sprungmaß  $\mu$  und Charakteristik  $(B(h), C, \nu)$  zu einer beliebigen Abschneidefunktion  $h$ . Die Charakteristik ist unabhängig vom Startpunkt  $x$ . Genauer gesprochen gilt sogar aufgrund der angenommenen Markow'schen Struktur, dass ein stetiger, im Sinne von Çinlar et al. (1980), Definition 3.16, additiver Prozess  $A \in \mathcal{V}^+$  existiert mit

$$B(h)_t = \int_0^t b(Z_{s-}; h) dA_s, \quad C_t = \int_0^t c(Z_{s-}) dA_s \quad (1.29)$$

und

$$\nu(\omega, [0, t] \times G) = \int_{[0, t]} F(Z_{s-}(\omega), G) dA_s(\omega) \quad (1.30)$$

für alle  $G \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , wobei  $b$  eine  $\mathbb{R}$ -wertige  $\mathcal{B}(\mathbb{R}) - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -messbare Funktion,  $c$  eine  $\mathbb{R}_+$ -wertige  $\mathcal{B}(\mathbb{R}) - \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ -messbare Funktion und  $F$  einen Übergangskern von  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  nach  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  mit  $F(x, \{0\}) = 0$  und  $\int_{\mathbb{R}} (1 \wedge y^2) F(x, dy) < \infty$  bezeichnen, man vergleiche hierzu auch Çinlar et al. (1980), Theorem 6.27. In den meisten praktischen Anwendungen kann  $A_t = t$  gewählt werden. Zu jeder beliebigen Startverteilung  $m$ , die auf  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  lebt, gehört ein Maß  $P^m$  auf  $\mathcal{G}$  (bzw. auf  $\mathcal{G}^*$ , definiert wie oben), das gegeben ist durch  $P^m = \int P^x m(dx)$ . Jacod et al. (2000) nehmen an, dass die zufällige Auszahlung des Derivats von der Form  $H = f(Z_T)$  ist, wobei zu vorgegebener Startverteilung  $m$  gelte, dass  $f(Z_T) \in L^2(P^m)$  ist, und die Abbildung  $g$ , definiert durch  $g(t, z) := P_t f(z)$ , in  $C^{1,2}((0, \infty) \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$  liegt, d.h.  $g$  stetig differenzierbar in  $t$  und zweimal stetig differenzierbar in  $z$  ist. Ferner sei  $f$  Borel-messbar. Jacod et al. (2000) modellieren dann den Preisprozess  $S$  des Underlyings als lokal quadratisch integrierbares Martingal der Form

$$S_t = S_0 + \gamma \cdot Z_t^c + \tilde{\gamma} * (\mu - \nu)_t, \quad (1.31)$$

wobei  $\mu$  das Maß der Sprünge von  $Z$  angibt,  $*$  die stochastische Integration nach Zufallsmaßen symbolisiert (hier nach dem kompensierten Zufallsmaß  $\mu - \nu$ ),  $\gamma$  und  $\tilde{\gamma}$  vorhersehbare Funktionen auf  $\Omega \times \mathbb{R}_+$  bzw.  $\Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$  sind und

$$\int_0^t a_s dA_s < \infty$$

für alle  $t \leq T$  gelte mit  $a_s = c(Z_{s-}) \gamma_s^2 + \int \tilde{\gamma}(s, z)^2 F(Z_{s-}, dz)$ ,  $s \in [0, T]$ . Unter dieser Bedingung ist  $S$  bezüglich jeder Startverteilung  $P^m$  ein wohldefiniertes, lokal quadratisch integrierbares Martingal mit vorhersehbarer quadratischer Variation

$$\langle S, S \rangle_t = \int_0^t a_s dA_s, \quad t \in [0, T]. \quad (1.32)$$

Die varianz-optimale Handelsstrategie ist dann für alle  $t \in [0, T]$  von der Form

$$\begin{aligned} \vartheta_t^* &= \frac{1}{a_t} \left( \gamma_t^c(Z_{t-}) D_2 g(T-t, Z_{t-}) \right. \\ &\quad \left. + \int \tilde{\gamma}(t, z) (g(T-t, Z_{t-} + z) - g(T-t, Z_{t-})) F(Z_{t-}, dz) \right), \quad (1.33) \end{aligned}$$

wobei  $D_2 g$  die partielle Ableitung erster Ordnung von  $g$  nach der zweiten Veränderlichen bezeichnet. Man beachte, dass die optimale Strategie nicht von der Startwahrscheinlichkeit  $m$  abhängt, sofern die Voraussetzung  $f(Z_T) \in L^2(P^m)$  erfüllt ist. Der Beweis der Darstellung (1.33) fußt wesentlich, wie auch die Herleitung der allgemeinen Struktur der optimalen Hedgingstrategie (1.27) in der Arbeit von Bouleau & Lamberton (1989), auf der GKW-Zerlegung des Preisprozesses des zugrunde liegenden Derivats, insbesondere auf der allgemeinen Struktur (1.26) der varianz-optimale Handelsstrategie. Beide Arbeiten gehen von einer Markow'schen Struktur aus. Drücken Bouleau & Lamberton (1989) ihre Ergebnisse mit Hilfe des Carré-du-Champ-Operators aus, so verwenden Jacod et al. (2000) Semimartingalcharakteristiken zur Beschreibung ihrer Resultate. Allen Lösungsstrukturen ist gemein, dass der Preisprozess des Derivats eingeht, der oftmals nicht explizit bekannt ist. Dies ist aber vonnöten, wenn man z.B. in (1.26)  $d\langle V, S \rangle$  berechnen will. Der Carré-du-Champ-Operator  $\Gamma(F, G)(t, Z_{t-})$  in (1.27) lässt sich zwar mittels numerischer Differentiation und numerischer Integration berechnen, allerdings wird dann der numerische Aufwand zur Bestimmung des minimalen erwarteten quadratischen Hedgefehlers (1.28) derart hoch, dass der Ansatz nicht praktikabel erscheint. Wenn man in Jacod et al. (2000) die optimale Handelsstrategie und den minimalen erwarteten quadratischen Hedgefehler in Form von Zahlen bestimmen will, muss man zeit- und rechenintensive Simulationstechniken und Monte-Carlo-Methoden einsetzen. An dieser Stelle sei auch eine Arbeit von Benth et al. (2003) erwähnt, die das Problem des quadratischen Hedgens im Martingalfall in einem Lévy-getriebenen Markt mit Hilfe von *Malliavin-Ableitungen* angehen. Man erhält zwar in diesem Rahmen explizite Ausdrücke für die varianz-optimale Hedgingstrategie, in Spezialfällen sogar für den minimalen erwarteten quadratischen Hedgefehler, allerdings ausgedrückt in Termen von Malliavin-Ableitungen, die numerisch nicht gut ausgewertet werden können. Die **zentrale Fragestellung dieser Arbeit** lautet nun wie folgt: Viele Marktpreismodelle mit stochastischer Volatilität sind im Sinne von Duffie et al. (2003) *affin*. Klassische Beispiele sind das Modell von Heston (1993), das stochastische Volatilitätsmodell von Barndorff-Nielsen & Shephard (2001b), bei dem die quadrierte Volatilität durch einen Lévy-getriebenen Ornstein-Uhlenbeck-Prozess abgebildet wird, oder die stochastischen Volatilitätsmodelle auf der Grundlage zeittransformierter Lévy-Prozesse von Carr et al. (2003). Affine Modelle sind in der Finanzmathematik von großer Bedeutung, da die affine Struktur die analytische Handhabbarkeit gewährleistet. Wenn man für den Preisprozess  $S$  des Underlyings ein *affines* stochastisches Volatilitätsmodell unterstellt, ist der Preisprozess des Derivats im Allgemeinen explizit nicht bekannt. Wie kann man nun in solchen Modellen, die sowohl Sprünge in der Volatilität und im Preisprozess des Underlyings erlauben als auch den Leverage-Effekt mit abbilden, unter der Annahme, dass der

Preisprozess  $S$  des Underlyings einem lokal quadratisch integrierbaren Martingal folgt, für Derivate mit zufälliger Auszahlung der Form  $H = f(S_T)$  semiexplizite Formeln für die Lösung des Problems varianz-optimalen Hedgens, d.h. für das varianz-optimale Anfangskapital, die varianz-optimale Handelsstrategie und den minimalen erwarteten quadratischen Hedgefehler finden, so dass eine numerische Auswertung mit vergleichsweise einfachen Mitteln möglich erscheint? Durch die Struktur der zufälligen Auszahlung des Derivats sind amerikanische und allgemein pfadabhängige Produkte aus der vorliegenden Untersuchung ausgeklammert. Das varianz-optimale Anfangskapital  $v_0^*$  kann in der gegebenen Situation als Preis der Derivats zum heutigen Zeitpunkt aufgefasst werden, wenn man das subjektive Kriterium des quadratischen Hedgens heranzieht. Man beachte aber, dass beim Hedging die Frage der Bewertung nicht im Vordergrund steht. Man erhält die (subjektive) Preisinformation eher als eine Art Nebenprodukt.

Einen sehr guten Überblick über die allgemeine Theorie des quadratischen Hedgings, sowohl für den lokal-risikominimierenden als auch für den varianz-optimalen Ansatz, liefern Pham (2000) und Schweizer (2001). Dort wird die allgemeine Lösung im Semimartingalfall charakterisiert, wenn die Preisprozesse des Underlyings stetig sind bzw. einen deterministischen EVT-Prozess aufweisen. Zudem findet man zahlreiche, weitere Arbeiten, die sich mit dem Thema auseinandersetzen. Exemplarisch seien die Arbeiten von Schweizer (1994), Schweizer (1996), Monat & Stricker (1995), Rheinländer & Schweizer (1997), Gouriéroux et al. (1998), Pham et al. (1998), Laurent & Pham (1999) und Hou & Karatzas (2004) genannt. Den unstetigen Fall mit beliebigem EVT-Prozess haben dann in jüngerer Zeit Arai (2005) und Černý & Kallsen (2005) behandelt und gelöst, Teilergebnisse findet man zudem bei Arai (2004) und Lim (2004, 2005). Im Zusammenhang mit unstetigen Marktmodellen soll auch die Arbeit von Grünewald (1998) Erwähnung finden, die das Problem des varianz-optimalen Hedgens im Modell von Merton (1976) gelöst hat. Der EVT-Prozess ist deterministisch, infolgedessen das varianz-optimale Martingalmaß und das minimale signierte Martingalmaß übereinstimmen. Da der Preisprozess (im Nichtmartingalfall als Familie bedingter Erwartungswerte der zufälligen Auszahlung unter dem varianz-optimalen Martingalmaß definiert, wobei der Begriff Preisprozess hier im erweiterten Sinne zu verstehen ist, da aufgrund der Signiertheit des Maßes negative Werte möglich sind) einer Reihe gewichteter Black-Scholes-Preise entspricht, können die entsprechenden vorhersehbaren quadratischen Kovariationen zur Berechnung des reinen Hedgekoeffizienten, vgl. Gleichung (1.3) in Černý & Kallsen (2005) im Nichtmartingalfall und Gleichung (1.26) in der vorliegenden Arbeit im Martingalfall, explizit bestimmt werden. In der Situation, dass der Preisprozess des Underlyings *stetig* ist, haben sich bereits einige Artikel mit varianz-optimalem Hedging in stochastischen Volatilitätsmodellen beschäftigt, z.B. Laurent & Pham (1999), als Beispiele werden dort die Modelle von Hull & White (1987), Stein & Stein (1991) und von Heston (1993) betrachtet, Biagini et al. (2000), Biagini & Guasoni (2002) und Hobson (2004). Doch liegt der Schwerpunkt der Bemühungen dort auf der Bestimmung des varianz-optimalen Martingalmaßes bzw. des entsprechenden Anpassungsprozesses, um die varianz-optimale Han-

delsstrategie in Feedback-Form zu charakterisieren, vgl. Rheinländer & Schweizer (1997). Im Martingalfall fällt diese Feedback-Form aber in sich zusammen und reduziert sich zu (1.26), so dass das Problem, einen dazu äquivalenten Ausdruck zu finden, der sich numerisch leicht auswerten lässt, vollständig verschieden ist von den Problemen, die in den oben genannten Artikeln behandelt werden. Heath et al. (2001) vergleichen Hedgingstrategien des lokal-risikominimierenden und des varianz-optimalen Ansatzes in einer Klasse von stetigen stochastischen Volatilitätsmodellen, die u.a. das Modell von Stein & Stein (1991) ohne Korrelation und das Modell von Heston (1993) mit Korrelation mit einschließt. Die Ergebnisse beruhen auf PDE-Methoden (z.B. auf der Finite-Differenzen-Methode auf der Grundlage des Crank-Nicholson-Schemas) und Simulationstechniken. Bertsimas et al. (2001) verwenden ebenfalls PDE-Methoden und Argumente dynamischer Programmierung, um varianz-optimale Strategien in diversen Situationen, z.B. in einem Sprung-Diffusions-Modell bzw. in einem stetigen stochastischen Volatilitätsmodell, zu berechnen. Im Gegensatz zu Hobson (2004), der das varianz-optimale Martingalmaß im Heston-Modell bestimmt hat, geben Černý & Kallsen (2006) auch semiexplizite Formeln für die varianz-optimale Handelsstrategie und den minimalen erwarteten quadratischen Hedgefehler im Semimartingalfall an, der den Martingalfall als Spezialfall beinhaltet. Allerdings werden diese Formeln dort nicht technisch exakt und rigoros hergeleitet. Hubalek & Sgarra (2005) betrachten in der risikoneutralen Welt das Problem des varianz-optimalen Hedgens im stochastischen Volatilitätsmodell von Barndorff-Nielsen & Shephard (2001b), das Sprünge in der Volatilität aufweist. Hauptbestandteil ihrer Formeln ist ein Integral bezüglich des Lévy-Maßes des Lévy-Treibers des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses, der die Volatilität modelliert. Im Integrand taucht der Optionspreis als Funktion der Zeit, des Underlyingpreises und der quadrierten Volatilität auf. In Abhängigkeit der Integrationsvariablen muss diese Funktion, die nicht explizit bekannt ist, numerisch ausgewertet werden, damit das Integral und damit die varianz-optimale Handelsstrategie berechnet werden können. Etwas ausführlicher soll nun auf zwei Arbeiten eingegangen werden, die der zentralen Fragestellung am nächsten kommen.

## 1.2 Der Ansatz von Hubalek et al. (2006)

Hubalek et al. (2006) haben im allgemeinen Semimartingalfall in einem Aktienkursmodell, in welchem der Aktienkurs als geometrischer Lévy-Prozess abgebildet wird, Integraldarstellungen für das varianz-optimale Anfangskapital, die varianz-optimale Handelsstrategie und den minimalen erwarteten quadratischen Hedgefehler hergeleitet, die mittels klassischer Integrationsmethoden einfach und effizient ausgewertet werden können. Der Prozess  $S = (S_t)_{t \in [0, T]}$  des Kurses einer dividendenlosen Aktie wird modelliert mittels

$$S_t = S_0 \exp\{Z_t\}, \quad (1.34)$$

wobei  $Z = (Z_t)_{t \in [0, T]}$  ein Lévy-Prozess ist,  $S_0 > 0$  konstant angenommen wird und  $E_P[S_1^2] = S_0^2 E_P[e^{2Z_1}] < \infty$  gelte. Die Forderung zweiter Momente ist aufgrund der quadratischen Zielfunktion des zugrunde liegenden Hedgeproblems vonnöten. Die Verteilung

von  $Z$  ist bereits durch die Verteilung von  $Z_1$  eindeutig festgelegt, welche unendlich teilbar ist und mit Hilfe des Lévy-Khintchine-Tripels  $(b^Z(h), c^Z, F^Z)$  von  $Z$  ausgedrückt werden kann, wobei  $h$  eine beliebige Abschneidefunktion angibt. Die zugehörige kumulantenerzeugende Funktion  $\psi^Z$ , definiert als stetige,  $\mathbb{C}$ -wertige Abbildung mit

$$E_P[e^{uZ_t}] = \exp\{t\psi^Z(u)\}, \quad t \geq 0,$$

ist von der Form

$$\psi^Z(u) = ub^Z(h) + \frac{1}{2}u^2c^Z + \int_{\mathbb{R}} (e^{ux} - 1 - uh(x)) F^Z(dx), \quad (1.35)$$

vgl. z.B. Jacod & Shiryaev (2003), Korollar II.4.19. Der Definitionsbereich  $U$  von  $\psi^Z$  ist gegeben durch

$$U = \left\{ u \in \mathbb{C} : E_P[e^{\operatorname{Re}(u)Z_1}] < \infty \right\} = \left\{ u \in \mathbb{C} : \int_{|x|>1} e^{\operatorname{Re}(u)x} F^Z(dx) < \infty \right\},$$

vgl. Sato (1999), Theorem 25.17. Aufgrund der Bedingung endlicher zweiter exponentieller Momente des Lévy-Prozesses  $Z$  gilt  $U \supseteq \{u \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re}(u) \leq 2\}$ . Obwohl Hubalek et al. (2006) das Problem sogar im allgemeinen Semimartingalfall gelöst haben, soll hier nur der Martingalfall aufgezeigt werden, um die Vergleichbarkeit zu geben mit dem Problem quadratischen Hedgens in den affinen stochastischen Volatilitätsmodellen, das ebenfalls nur im Martingalfall untersucht wird. Daher wird hier, in Ergänzung zu Hubalek et al. (2006), die folgende Einschränkung gemacht.

**Annahme 1.16** Es gelte die Martingalbedingung

$$\psi^Z(1) = 0. \quad (1.36)$$

**Proposition 1.17** *Unter den Annahmen 1.16 und  $E_P[S_1^2] < \infty$  ist  $S$  ein quadratisch integrierbares Martingal.*

BEWEIS. Da  $Z$  unabhängige, stationäre Zuwächse hat, gilt  $E_P[S_t | \mathcal{F}_s] = S_s e^{(t-s)\psi^Z(1)}$  für  $t \geq s$ . Wegen  $\psi^Z(1) = 0$  folgt, dass  $S$  ein Martingal ist. Die Behauptung ergibt sich dann mittels

$$\sup_{t \in [0, T]} E_P[S_t^2] = S_0^2 \sup_{t \in [0, T]} e^{t\psi^Z(2)} \leq S_0^2 \left(1 \vee e^{T\psi^Z(2)}\right) < \infty.$$

□

Um den degenerierten Fall, dass  $S$  deterministisch ist, auszuschließen, fordert man darüber hinaus

$$\psi^Z(2) \neq 0. \quad (1.37)$$

Der degenerierte Fall entspricht aufgrund der Martingalbedingung (1.36) der Situation, dass  $Z_t = 0$   $P$ -f.s. für alle  $t \in [0, T]$  gilt. Ebenfalls aufgrund der Martingalbedingung (1.36)

stimmt die Menge  $\Theta$  der zulässigen Handelsstrategien von Hubalek et al. (2006) mit der in dieser Arbeit verwendeten Zulässigkeitsmenge  $L^2(S)$  überein. Bezüglich der Auszahlung des zu hedgenden Derivats wird angenommen, dass sie von der Form  $H = f(S_T)$  sei, wobei  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  eine messbare Abbildung ist. Die zentrale Idee besteht nun darin, abgesehen davon, die Struktur des Lévy-Modells auszunutzen, das Derivat linear in, in einem gewissen Sinne, einfachere Derivate zu zerlegen, für die das Problem des varianz-optimalen Hedgens explizit gelöst werden kann. Ein wichtiges technisches Hilfsmittel sind dabei die *bilaterale Laplace-Transformierte* der in der Form  $f(e^x)$  modifizierten Auszahlungsfunktion und die *Inversionsformel der Laplace-Transformation*.

**Definition 1.18** Sei  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  eine messbare Funktion. Die **bilaterale Laplace-Transformierte**  $\tilde{g}$  von  $g$  ist definiert durch

$$\tilde{g}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-zx} dx \quad (1.38)$$

für alle  $z \in \mathbb{C}$ , für die das Integral existiert.

Die Theorie der Laplace-Transformation findet man zum Beispiel bei Doetsch (1971). Hier sei nur das folgende Resultat zur Umkehrung der Laplace-Transformation wiedergegeben.

**Satz 1.19** *Es sei angenommen, dass die Laplace-Transformierte  $\tilde{g}(R)$  für  $R \in \mathbb{R}$  existiert. Dann gelten:*

1. Falls  $v \mapsto \tilde{g}(R + iv)$  integrierbar ist, ist die Abbildung  $x \mapsto g(x)$  stetig, und

$$g(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{R-i\infty}^{R+i\infty} \tilde{g}(z) e^{zx} dz, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.39)$$

2. Falls  $g$  auf jedem kompakten Intervall von endlicher Variation ist, ist

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} (g(x + \varepsilon) + g(x - \varepsilon)) = \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{R-ic}^{R+ic} \tilde{g}(z) e^{zx} dz, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.40)$$

BEWEIS. Vgl. Hubalek et al. (2006), Satz A.3. □

**Annahme 1.20** Die Auszahlungsfunktion  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  des zu hedgenden Derivats besitze die Integraldarstellung

$$f(s) = \int_{\mathcal{S}_f} s^z \Pi(dz), \quad (1.41)$$

wobei  $\Pi$  ein endliches, komplexes Maß auf dem Streifen

$$\mathcal{S}_f := \{z \in \mathbb{C} : R' \leq \operatorname{Re}(z) \leq R\}$$

sei und  $R, R'$  beliebig gewählt seien im Definitionsbereich der bilateralen Laplace-Transformierten  $\tilde{f}_e$  von  $f \circ \exp$ , definiert durch

$$\tilde{f}_e(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(e^x) e^{-zx} dx$$

für alle  $z \in \mathbb{C}$ , so dass das Integral existiert. Das Maß  $\Pi$  ist also durch das zu hedgende Derivat festgelegt. In den meisten Anwendungen kann  $R = R'$  gewählt werden. Dann legt das Maß  $\Pi$  nur Masse auf die Gerade  $R + i\mathbb{R}$ . Falls  $v \mapsto \tilde{f}_e(R + iv)$  integrierbar ist, liefert Satz 1.19

$$f(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{R-i\infty}^{R+i\infty} s^z \tilde{f}_e(z) dz \quad (1.42)$$

für  $s > 0$ . In diesem Fall ist das Maß  $\Pi$  gegeben durch

$$\Pi(dz) = \frac{1}{2\pi i} \tilde{f}_e(z) dz, \quad (1.43)$$

und die zufällige Auszahlung  $H$  lässt sich linear in der Form

$$H = f(S_T) = \int_{R-i\infty}^{R+i\infty} S_T^z \Pi(dz) \quad (1.44)$$

zerlegen. Betrachtet man zum Beispiel einen europäischen Standard-Call mit Ausübungspreis  $K$ , so gilt

$$\tilde{f}_e(z) = \frac{K^{1-z}}{z(1-z)} \quad (1.45)$$

mit  $R > 1$  in (1.42), vgl. Hubalek et al. (2006), Lemma 4.1. Die Integraldarstellung der Auszahlungsfunktion eines europäischen Standard-Puts mit Ausübungspreis  $K$  ist ebenfalls durch (1.42) mit  $\tilde{f}_e$  wie in (1.45) gegeben, allerdings muss in diesem Fall  $R < 0$  sein. Die Idee, die zufällige Auszahlung, grob gesprochen, als Linearkombination komplexwertiger Potenzen des Underlyings zum Fälligkeitstermin zu schreiben, wurde im Kontext der Optionsbewertung bereits von Carr & Madan (1999), Raible (2000) und Lewis (2001) verwendet. Mit Ausnahme von Raible (2000) wird dort nicht mit der Laplace-, sondern mit der Fourier-Transformation gearbeitet. Das Vorgehen wird entsprechend auch als *Fourier-Methode* bezeichnet. Bereits vor Carr & Madan (1999) wurde diese zur Optionsbewertung in speziellen stochastischen Volatilitätsmodellen eingesetzt, wie zum Beispiel bei Stein & Stein (1991) und Heston (1993), man vgl. auch Ball & Roma (1994). Die Integraldarstellung (1.41) existiert zwar nicht immer, vgl. Cramér (1939) für welche Klasse von Funktionen eine solche Darstellung möglich ist, aber für praktisch alle europäischen Standardoptionen kann sie angegeben werden. In Raible (2000), Kapitel 3, und Hubalek et al. (2006), Abschnitt 4, findet man weitere, zahlreiche Beispiele.

Die komplexwertigen Potenzen  $H(z) = S_T^z$  des Preises des Underlyings zur Fälligkeit in (1.41) können als komplexwertige Auszahlungen imaginärer Derivate aufgefasst werden. Ein Grund, warum diese Derivate einfacher sind als das ursprüngliche Derivat, besteht darin, dass man den Preisprozess  $V(z) = (V(z)_t)_{t \in [0, T]}$  eines solchen Derivats explizit kennt:

$$V(z)_t := E_P[H(z) | \mathcal{F}_t] = e^{(T-t)\psi^Z(z)} S_t^z, \quad z \in \mathcal{S}_f. \quad (1.46)$$

Damit  $H(z)$  für alle  $z \in \mathcal{S}_f$  quadratisch gehedgt werden kann, fordern Hubalek et al. (2006) zudem die folgenden Momente:

$$E_P[e^{2R'Z_1}] < \infty \quad \text{und} \quad E_P[e^{2RZ_1}] < \infty. \quad (1.47)$$

Der zweite Grund, warum die imaginären Derivate einfacher sind, ist der, dass die GKW-Zerlegung explizit bestimmt werden kann. Allgemein ist die Lösung des Problems quadratischen Hedgens im Wesentlichen durch die *Föllmer-Schweizer-Zerlegung* (FS-Zerlegung) im Semimartingalfall bzw. durch die *GKW-Zerlegung* im Martingalfall bestimmt, vgl. Schweizer (1994), Satz 3 und Korollar 10. Die FS-Zerlegung existiert nicht immer, aber in der vorliegenden Situation, in der das Underlying durch einen geometrischen Lévy-Prozess modelliert wird, ist der EVT-Prozess deterministisch, stetig und beschränkt, so dass die Existenz der FS-Zerlegung gewährleistet ist, vgl. Schweizer (1994), Satz 15. Im Martingalfall ist der EVT-Prozess Null, und die FS-Zerlegung stimmt mit der GKW-Zerlegung überein. Hubalek et al. (2006) haben das Hedgeproblem zunächst in diskreter Zeit untersucht. Dort existiert die FS-Zerlegung immer. Schweizer (1995) hat eine Rückwärtsrekursion zur Bestimmung der FS-Zerlegung angegeben, die allerdings im vorliegenden Modell nicht zu geschlossenen Formeln führt. Hubalek et al. (2006) geben die FS-Zerlegung direkt an. Sie beweisen zwar, dass ihr Kandidat tatsächlich der FS-Zerlegung entspricht, doch wird keine konstruktive Methode angegeben, wie sie auf die Zerlegung gekommen sind. Eine Möglichkeit könnte die gewesen sein, dass sie die Terme in der Rückwärtsrekursion analysiert und darin eine gewisse Struktur erkannt haben könnten, woraufhin die geschlossene Lösung erraten worden wäre. Allerdings wird betont, dass die Rückwärtsrekursion nicht verwendet worden sei, so dass die Herkunft des Kandidaten für die FS-Zerlegung unklar bleibt. Die Zerlegung wird dann auf jeden Fall verwendet, um die explizite Lösung des Hedgeproblems in diskreter Zeit für die einfachen Derivate zu generieren. Eine intuitive Grenzwertüberlegung führt dann zu den Resultaten in stetiger Zeit. Genau genommen wird aus der diskreten FS-Zerlegung durch die Grenzwertüberlegung ein Kandidat für die FS-Zerlegung in stetiger Zeit gewonnen. Dieser wird verifiziert und benutzt, um explizite Formeln für den varianz-optimalen Hedge der einfachen Derivate herzuleiten. Aufgrund der Linearität der FS-Zerlegung in Bezug auf das Derivat und aufgrund der Linearität des Integrals, d.h. aufgrund der linearen Dekomposition des ursprünglichen Derivats erhält man einen kanonischen Kandidaten für den varianz-optimalen Hedge des ursprünglichen Derivats, indem man die explizite Lösung für die einfachen Derivate bezüglich des Maßes  $\Pi$ , vgl. Annahme 1.20, integriert, was, grob gesprochen, einer Linearkombination der expliziten Lösungen für die einfachen Derivate entspricht. Da das Maß  $\Pi$  durch das zu hedgende Derivat festgelegt und somit bekannt ist und die Integranden explizite Gestalt haben, können die Integraldarstellungen der optimalen Lösung sehr effizient numerisch bestimmt werden. Anfangskapital und Handelsstrategie entsprechen jeweils einem Einfachintegral, wohingegen beim minimalen erwarteten quadratischen Hedgefehler ein Doppelintegral ausgewertet werden muss. Die genauen Ergebnisse lesen sich im Martingalfall wie folgt:

**Satz 1.21** *Das varianz-optimale Anfangskapital  $v_0^*$  und die varianz-optimale Handelsstrategie  $\vartheta^* = (\vartheta_t^*)_{t \in [0, T]}$  sind gegeben durch*

$$v_0^* = \int_{S_f} S_0^z e^{T\psi^Z(z)} \Pi(dz), \quad (1.48)$$

$$\vartheta_t^* = \int_{\mathcal{S}_f} S_{t-}^{z-1} e^{(T-t)\psi^Z(z)} \frac{\psi^Z(z+1) - \psi^Z(z)}{\psi^Z(2)} \Pi(dz), \quad t \in [0, T]. \quad (1.49)$$

Dabei ist das optimale Anfangskapital eindeutig, wohingegen die optimale Handelsstrategie nur bis auf  $P \otimes \lambda$ -Nullmengen eindeutig ist. Hier bezeichnet  $\lambda$  das Lebesgue-Maß. Der minimale erwartete quadratische Hedgefehler ist von der Gestalt

$$J_0 = \int_{\mathcal{S}_f} \int_{\mathcal{S}_f} J(z_1, z_2) \Pi(dz_1) \Pi(dz_2), \quad (1.50)$$

wobei

$$J(z_1, z_2) = \begin{cases} S_0^{z_1+z_2} g_1(z_1, z_2) g_2(z_1, z_2), & \text{falls } g_0(z_1, z_2) \neq 0, \\ S_0^{z_1+z_2} g_1(z_1, z_2) g_3(z_1, z_2), & \text{falls } g_0(z_1, z_2) = 0, \end{cases}$$

und

$$\begin{aligned} g_0(z_1, z_2) &= \psi^Z(z_1 + z_2) - \psi^Z(z_1) - \psi^Z(z_2), \\ g_1(z_1, z_2) &= g_0(z_1, z_2) - \frac{(\psi^Z(z_1 + 1) - \psi^Z(z_1))(\psi^Z(z_2 + 1) - \psi^Z(z_2))}{\psi^Z(2)}, \\ g_2(z_1, z_2) &= \frac{\exp\{T\psi^Z(z_1 + z_2)\} - \exp\{T(\psi^Z(z_1) + \psi^Z(z_2))\}}{g_0(z_1, z_2)}, \\ g_3(z_1, z_2) &= \exp\{T\psi^Z(z_1 + z_2)\}T. \end{aligned}$$

BEWEIS. Vgl. Hubalek et al. (2006), Sätze 3.3 und 3.4.  $\square$

Man beachte, dass die Integranden mit Hilfe der kumulantenerzeugenden Funktion  $\psi^Z$  des Lévy-Prozesses  $Z$  ausgedrückt sind. Dies ist numerisch von Vorteil, da für die meisten Lévy-Prozesse die kumulantenerzeugende Funktion in geschlossener Form vorliegt, so dass eine numerische Berechnung der Integrale nach dem Maß  $\Pi$  effizient durchgeführt werden kann. Es muss nicht bei jeder Auswertung von  $\psi^Z$  das Integral nach dem Maß der Sprünge in (1.35) numerisch bestimmt werden. Im Rahmen dieser Arbeit ist es das Ziel, beim vorliegenden Problem quadratischen Hedgens in affinen stochastischen Volatilitätsmodellen ähnlich explizite Lösungsformeln herzuleiten wie Hubalek et al. (2006) in exponentiellen Lévy-Modellen. Der Ansatz von Hubalek et al. (2006) ist insofern allgemeiner, als der Preisprozess des Underlyings als (Spezial-) Semimartingal modelliert wird. Dafür ist die Klasse der affinen stochastischen Volatilitätsmodelle, die in dieser Arbeit im Martingalfall betrachtet wird, viel größer als die Modellklasse der geometrischen Lévy-Prozesse. Die affinen stochastischen Volatilitätsmodelle enthalten die Modellklasse der geometrischen Lévy-Prozesse, in der die Volatilität konstant ist, als einfachen Spezialfall. Die Arbeit von Hubalek et al. (2006) ist weder eine Ober- noch umgekehrt eine Teilmenge der vorliegenden Arbeit. Die Idee, das zu hedgende Derivat linear in einfacher zu hedgende Derivate zu zerlegen, wird auf die Situation, in einem allgemeinen affinen stochastischen Volatilitätsmodell quadratisch zu hedgen, übertragen. Die affine Struktur wird eine solche Übertragung ermöglichen. Im Gegensatz zu Hubalek et al. (2006), bei denen die Herleitung, nicht die Verifikation, der FS-Zerlegung unklar bleibt, wird in dieser Arbeit auf der Grundlage

von Semimartingalcharakteristiken eine konstruktive Methode zur Berechnung der GWK-Zerlegung vorgestellt.

### 1.3 Der Ansatz von Cont et al. (2005)

Die zweite Arbeit, die hier ausführlicher besprochen werden soll, ist der numerische Ansatz von Cont et al. (2005) auf der Grundlage *partieller Integro-Differentialgleichungen*. Hier wird die Situation betrachtet, dass die zufällige Auszahlung  $H$ , die nicht notwendigerweise von der Form  $f(S_T)$  sein muss, für die jedoch auch  $H \in \mathcal{F}_T$  und  $E_P[H^2] < \infty$  gelte, mittels  $m \in \mathbb{N}$  Handelsgütern, nicht notwendigerweise Basisgütern, im quadratischen Sinne abgesichert werden soll. Dabei wird ebenfalls der Martingalfall betrachtet.  $P$  sei das risikoneutrale Preismaß, das durch Kalibrieren an Marktpreise von Optionen festgelegt sei. Zudem seien  $\bar{Z}$  ein  $\mathbb{R}^d$ -wertiges Semimartingal mit integraler Charakteristik  $(B^{\bar{Z}}, C^{\bar{Z}}, \nu^{\bar{Z}})$  und Sprungmaß  $\mu^{\bar{Z}}$  sowie  $W$  eine  $\mathbb{R}^d$ -wertige Brownsche Bewegung. Die Filtrierung  $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$  sei die von der Brownschen Bewegung  $W$  und dem Sprungmaß  $\mu^{\bar{Z}}$  erzeugte, vervollständigte Filtrierung. Der Preisprozess  $S = (S^1, \dots, S^m) = ((S_t^1, \dots, S_t^m))_{t \in [0, T]}$  der  $m$  Handelsgüter sei von der Gestalt:

$$S_t = S_0 + \sigma \cdot W_t + \gamma * \left( \mu^{\bar{Z}} - \nu^{\bar{Z}} \right)_t, \quad (1.51)$$

wobei  $\sigma : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{m \times d}$  und  $\gamma : \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$  adaptiert und càglàd seien, vgl. auch die Preisdynamik (1.31) in der Arbeit von Jacod et al. (2000).

**Beispiel 1.22** Man betrachte beispielhaft in der Situation  $d = 1$  ein eindimensionales exponentielles Lévy-Modell für den Preisprozess des Underlyings  $S$ , d.h.  $S = (S_t)_{t \in [0, T]}$  sei gegeben durch  $S_t = S_0 e^{Z_t}$ ,  $t \in [0, T]$ , wobei  $Z$  ein Lévy-Prozess mit Tripel  $(b^Z, c^Z, F^Z)$  sei. Das Maß der Sprünge von  $Z$  wird mit  $\mu^Z$  bezeichnet, und  $\nu^Z$  gibt den Kompensator von  $\mu^Z$  an. Die kumulantenerzeugende Funktion  $\psi^Z$  erfülle die Martingalbedingung  $\psi^Z(1) = 0$ . Ferner gelte die für das quadratische Hedgen notwendige Momentenbedingung  $E_P[S_1^2] < \infty$ , welche äquivalent zu  $\int_{|x| > 1} e^{2x} F^Z(dx) < \infty$  ist. Dann ist die Dynamik von  $S$  von der Form (1.51), und  $S$  ist ein quadratisch integrierbares Martingal:

$$S_t = S_0 + \int_0^t \sqrt{c^Z} S_{s-} dW_s + \int_{[0, t] \times \mathbb{R}} (e^z - 1) S_{s-} (\mu^Z - \nu^Z)(d(s, z)). \quad (1.52)$$

Dies lässt sich beweisen, indem man auf  $x \mapsto e^x$  und  $Z$  die Itô-Formel anwendet,  $Z$  gemäß der Lévy-Itô-Dekomposition zerlegt und die Martingalbedingung  $\psi^Z(1) = 0$  ausnutzt. Das vorliegende exponentielle Lévy-Modell ist ein Beispiel für eine *Markow'sche Sprungdiffusion*. Diese ist definiert als eindeutige starke Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$S_t = S_0 + \int_0^t \sigma(s, S_{s-}) dW_s + \int_{[0, t] \times \mathbb{R}^d} \gamma(s, z, S_{s-}) (\mu^{\bar{Z}} - \nu^{\bar{Z}})(d(s, z)), \quad (1.53)$$

wobei  $\sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m \times d}$  und  $\gamma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  deterministische Funktionen seien, die die Lipschitz- und Wachstumsbedingungen in Satz III.2.32, Jacod & Shiryaev

(2003), erfüllen. Der Satz III.2.32 garantiert unter diesen Annahmen die Existenz und Eindeutigkeit der starken Lösung.  $\square$

Weiter wird angenommen, dass der Preisprozess  $V = (V_t)_{t \in [0, T]}$  des Derivats, definiert durch  $V_t = E_P[H | \mathcal{F}_t]$ , die Dynamik

$$V_t = V_0 + \tilde{\sigma} \cdot W_{t \wedge \tau} + \tilde{\gamma} * \left( \mu^{\bar{Z}} - \nu^{\bar{Z}} \right)_{t \wedge \tau} \quad (1.54)$$

hat, wobei  $\tilde{\sigma} : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^d$  und  $\tilde{\gamma} : \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  adaptiert und càglàd seien und  $\tau$  eine Stoppzeit bezeichne, die bei *pfadabhängigen* Derivaten, wie zum Beispiel Barriereoptionen, das unter Umständen zufällige Terminieren des Kontrakts abbildet. Damit die stochastischen Integrale und Integralprozesse existieren und quadratisch integrierbare Martingale darstellen, werden weitere technische Regularitätsbedingungen an die Prozesse  $\sigma$ ,  $\tilde{\sigma}$ ,  $\gamma$  und  $\tilde{\gamma}$  gestellt, vgl. hierzu in Cont et al. (2005) die Bedingungen (ii) und (iii) in Abschnitt 2.1. Diese werden von der Markow'schen Sprungdiffusion (1.53) automatisch erfüllt, so dass diese ein quadratisch integrierbares Martingal darstellt.

**Beispiel 1.23** Man betrachte nun eine zufällige Auszahlung der Form  $H = f(S_T)$ , wobei die Auszahlungsfunktion messbar sei und  $E_P[f(S_T)^2] < \infty$  erfülle. Wenn der Preisprozess des Underlyings  $S$  durch eine Markow'sche Sprungdiffusion (1.53) gegeben ist, ist der Preis  $V_t$  des europäischen Derivats mit Auszahlung  $H$  und Fälligkeit  $T$  eine deterministische Funktion  $g$  der Zeit  $t$  und des Preises  $S_t$  des Underlyings, d.h.

$$V_t = E_P[f(S_T) | \mathcal{F}_t] = g(t, S_t), \quad (1.55)$$

wobei  $g$  definiert ist durch  $g(t, x) = E_P[f(S_T^{(t,x)})]$  und  $S_T^{(t,x)}$  den Kurs des Underlyings zum Zeitpunkt  $T$  angibt, wenn der Kurs zum Zeitpunkt  $t$  gerade  $x$  betragen hat. Setzt man voraus, dass  $g$  hinreichend glatt ist, so dass man die Itô-Formel auf  $g$  und  $(I, S)$  anwenden kann, wobei  $I$  den Identitätsprozess bezeichnet, so erhält man eine Zerlegung von  $V_t$  in stochastische Integrale, die entweder lokale Martingale sind oder vorhersehbare Ausdrücke von endlicher Variation. Da  $V$  ein Martingal ist, vgl. (1.55), müssen die vorhersehbaren Ausdrücke von endlicher Variation ebenfalls lokale Martingale sein, infolgedessen diese Terme Null sind, vgl. Jacod & Shiryaev (2003), Korollar I.3.16. So ergibt sich die Martingaldarstellung

$$\begin{aligned} V_t &= V_0 + \int_0^t \sigma(s, S_{s-}) D_2 g(s, S_{s-}) dW_s \\ &\quad + \int_{[0, t] \times \mathbb{R}^d} (g(s, S_{s-} + \gamma(s, z, S_{s-})) - g(s, S_{s-})) (\mu^{\bar{Z}} - \nu^{\bar{Z}})(d(s, z)), \end{aligned} \quad (1.56)$$

was strukturell der allgemein angenommenen Dynamik (1.54) entspricht. Im Hinblick auf die Annahme, dass  $g$  hinreichend glatt sei, ist die obige Herleitung von (1.56) heuristischer Natur. Cont et al. (2005) geben in der Situation der vorliegenden europäischen, zufälligen Auszahlung Voraussetzungen in Ausdrücken der Modellparameter und der Auszahlungsfunktion an, die überprüfbar sind und einen rigorosen Beweis erlauben, vgl. dort die Propositionen 2 und 3. Die Situation, in der eine solche Martingaldarstellung für eine asiatische Option gesucht wird, wird durch Einführung eines Hilfsprozesses auf den Fall der

europäischen Option übertragen. Zudem werden dort in Proposition 4 Regularitätsbedingungen angegeben, die im Fall von Barriereoptionen die Herleitung einer solchen Martingaldarstellung erlauben.  $\square$

Cont et al. (2005) geben eine allgemeine varianz-optimale Hedgingstrategie an, wobei die Zulässigkeitsmenge  $\Theta$  der Strategien gegeben sei durch

$$\Theta = \{\vartheta : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ vorhersehbar} : \vartheta \cdot S \in \mathcal{H}^2\}. \quad (1.57)$$

Diese stimmt im Wesentlichen mit der in dieser Arbeit verwendeten Zulässigkeitsmenge  $L^2(S)$  überein, bedenkt man, dass  $\vartheta \in L(S)$  sein sollte und dass für  $\vartheta \in L^2_{\text{loc}}(S)$  gerade  $\vartheta \cdot S \in \mathcal{H}^2$  genau dann gilt, wenn  $\vartheta \in L^2(S)$  ist, vgl. Jacod & Shiryaev (2003), Theorem I.4.40.

**Proposition 1.24** *Der  $m$ -dimensionale Underlying-Preisprozess  $S$  und der Preisprozess  $V$  des zu hedgenden Derivats seien durch die Dynamiken (1.51) und (1.54) gegeben. Ferner seien die Regularitätsbedingungen erfüllt, so dass  $S$  und  $V$  quadratisch integrierbare Martingale sind. Falls die  $m \times m$ -Matrizen  $M_t$ ,  $t \in [0, T]$ , mit Komponenten in  $\mathbb{R}$ , definiert durch*

$$M_t = \sigma_t \sigma_t^\top + \int_{\mathbb{R}^d} \gamma(z)_t \gamma(z)_t^\top F^{\bar{Z}}(dz),$$

*$P$ -fast sicher nichtsingulär sind, ist die varianz-optimale Hedgingstrategie*

$$(v_0^*, \vartheta^*) = \arg \min_{(v_0, \vartheta) \in \mathbb{R} \times \Theta} E_P [(H - v_0 - \vartheta \cdot S_T)^2]$$

*gegeben durch*

$$v_0^* = E_P[H] = V_0, \quad (1.58)$$

$$\vartheta_t^* = M_t^{-1} \left( \sigma_t \tilde{\sigma}_t + \int_{\mathbb{R}^d} \gamma(z)_t \tilde{\gamma}(z)_t F^{\bar{Z}}(dz) \right) 1_{[0, \tau]}(t), \quad t \in [0, T]. \quad (1.59)$$

BEWEIS. Vgl. Cont et al. (2005), Proposition 1.  $\square$

Betrachtet man nun beispielhaft erneut den eindimensionalen exponentiellen Lévy-Markt aus Beispiel 1.22 und eine europäische Option mit zufälliger Auszahlung  $H = f(S_T)$  aus Beispiel 1.23, so liefert Proposition 1.24 die varianz-optimale Hedgingstrategie in der Situation, dass die Option durch das Underlying abgesichert werden soll. Definiert man  $Z_t^x := x + Z_t$  und  $\tilde{f}(z) := f(e^z)$ , so gilt aufgrund der stationären Zuwächse von  $Z$ , dass

$$g(t, x) := E_P[f(S_T^{(t, x)})] = E_P[\tilde{f}(Z_{T-t}^{\ln(x)})]. \quad (1.60)$$

Erfüllen die modifizierte Auszahlungsfunktion  $\tilde{f}$  und die Modellparameter die Voraussetzungen der Propositionen 2 oder 3 in Cont et al. (2005), erhält man durch Einsetzen der Dynamiken (1.52) und (1.56) (hier mit  $\sigma(t, x) = \sqrt{c^Z} x$  und  $\gamma(t, z, x) = (e^z - 1)x$ ) in

Formel (1.59) die varianz-optimale Handelsstrategie im eindimensionalen, exponentiellen Lévy-Modell für  $t \in [0, T]$  in der Form

$$\vartheta_t^* = \frac{c^Z D_2 g(t, S_{t-}) + \frac{1}{S_{t-}} \int_{\mathbb{R}} (e^z - 1) (g(t, S_{t-} e^z) - g(t, S_{t-})) F^Z(dz)}{c^Z + \int_{\mathbb{R}} (e^z - 1)^2 F^Z(dz)}. \quad (1.61)$$

Springt der Renditeprozess  $Z$  nicht, stimmt die varianz-optimale Handelsstrategie mit der klassischen Delta-Hedgingstrategie überein. Der Optionspreis, aufgefasst als Funktion der Zeit und der Underlyingpreise, kann allgemein in Modellen mit Sprüngen als Viskositätslösung (vgl. hierzu Cont & Tankov (2004), Abschnitt 12.2.4) einer parabolischen Integro-Differentialgleichung beschrieben werden. Diese wird numerisch mittels der Methode finiter Differenzen auf einem Gitter der Variablen Zeit und Underlyingpreis bestimmt. Somit können auch Ableitungen und Integrale der Optionspreise numerisch berechnet werden, so dass die optimale Handelsstrategie, zum Beispiel in der Form (1.61) im exponentiellen Lévy-Modell, ausgewertet werden kann. Hinsichtlich der numerischen Details, wie zum Beispiel verwendeter Algorithmus oder theoretische Untersuchungen von Konsistenz, Stabilität und Konvergenz und Fehlerabschätzungen, sei auf die Arbeiten von Cont & Voltchkova (2005) und Cont et al. (2006) verwiesen. Da die Preisinformation des zu hedgenden Derivats vollständig auf dem zugrunde liegenden Gitter berechnet wird, ist es möglich, den minimalen erwarteten quadratischen Hedgefehler zu simulieren. Dennoch ist der Aufwand im Vergleich zur numerischen Auswertung von Integralen sehr hoch. Durch das Hinzufügen zusätzlicher, nicht handelbarer Faktoren, kann der allgemeine Modellrahmen dahingehend erweitert werden, dass z.B. stochastische Volatilität mit abgebildet werden kann. Für  $\tilde{m} \in \mathbb{N}$  werden diese nicht handelbaren Faktoren durch einen  $\mathbb{R}^{\tilde{m}}$ -wertigen Prozess  $\check{S}$  modelliert, so dass der erweiterte Zustandsprozess  $(S, \check{S})$  Markowsch ist:

$$\begin{aligned} S_t &= S_0 + \int_0^t \sigma(s, S_{s-}, \check{S}_{s-}) dW_s + \int_{[0,t] \times \mathbb{R}^d} \gamma(s, z, S_{s-}, \check{S}_{s-}) (\mu^{\check{Z}} - \nu^{\check{Z}})(d(s, z)), \\ \check{S}_t &= \check{S}_0 + \int_0^t \check{\delta}(s, S_{s-}, \check{S}_{s-}) ds + \int_0^t \check{\sigma}(s, S_{s-}, \check{S}_{s-}) dW_s \\ &\quad + \int_{[0,t] \times \{z \in \mathbb{R}^d: \|z\| \leq 1\}} \check{\gamma}(s, z, S_{s-}, \check{S}_{s-}) (\mu^{\check{Z}} - \nu^{\check{Z}})(d(s, z)) \\ &\quad + \int_{[0,t] \times \{z \in \mathbb{R}^d: \|z\| > 1\}} \check{\gamma}(s, z, S_{s-}, \check{S}_{s-}) \mu^{\check{Z}}(d(s, z)). \end{aligned}$$

Da die Faktoren nicht handelbar sind, muss  $\check{S}$  nicht notwendigerweise ein Martingal sein.

**Beispiel 1.25** Beispielhaft betrachte man das Volatilitätsmodell von Barndorff-Nielsen & Shephard (2001b). In diesem ist der Renditeprozess  $Z$  dem im Black-Scholes-Modell sehr ähnlich. Allerdings wird die Volatilität stochastisch modelliert. Die quadrierte Volatilität  $y$  wird durch einen Lévy-getriebenen Ornstein-Uhlenbeck-Prozess abgebildet:

$$Z_t = \int_0^t (\xi + \delta y_{s-}) ds + \int_0^t \sqrt{y_{s-}} dW_s + \varrho z_t, \quad (1.62)$$

$$y_t = y_0 - \lambda \int_0^t y_{s-} ds + z_t, \quad (1.63)$$

wobei  $\lambda, y_0 > 0, \varrho \leq 0, \xi$  und  $\delta$  Konstanten sind,  $W$  einen  $\mathbb{R}$ -wertigen Standard-Wiener-Prozess bezeichnet und  $z$  einen Subordinator, d.h. einen Lévy-Prozess ohne Brownschen Anteil, mit nichtnegativer Drift und ausschließlich positiven Sprüngen. Zwischen den positiven Sprüngen beobachtet man ein exponentielles Vergessen dieser Impulse. Da der Subordinator automatisch unabhängig von dem Standard-Wiener-Prozess ist, wird der Leverage-Effekt über den Term  $\varrho z_t$  modelliert. Der Renditeprozess springt also nur dann, wenn die Volatilität springt. Im Martingalfall müssen  $\xi = -\psi^z(\varrho)$  und  $\delta = -\frac{1}{2}$  gelten. Analog zu Beispiel 1.22 deduziert man die Dynamik des Underlyingpreisprozesses  $S = S_0 e^Z$  in der Form

$$S_t = S_0 + \int_0^t \sqrt{y_{s-}} S_{s-} dW_s + \int_{[0,t] \times \mathbb{R}_+} (e^{\varrho x} - 1) S_{s-} (\mu^z - \nu^z)(d(s, x)). \quad (1.64)$$

Die Voraussetzung

$$\int_1^\infty \exp \left\{ \left( 2\varrho + \frac{1}{\lambda} \right) x \right\} F^z(dx) < \infty$$

ist hinreichend dafür, dass der Preisprozess  $S$  des Underlyings im Martingalfall quadratisch integrierbar ist. Man betrachte nun erneut die Situation, dass eine europäische Standardoption, deren Underlying einen Preisprozess aufweist, der durch das Modell von Barndorff-Nielsen & Shephard (2001b) spezifiziert ist, durch Handeln mit dem Underlying abgesichert werden soll. Aufgrund der Markow'schen Struktur des Prozesses  $(S, y)$  ist der Preis  $V_t$  der Option mit Auszahlungsfunktion  $f$  und Fälligkeit  $T$  eine deterministische Funktion  $\tilde{g}$  der Zeit  $t$ , des Underlyingpreises  $S_t$  und der quadrierten Volatilität  $y_t$ :

$$V_t = E_P[f(S_T) | \mathcal{F}_t] = \tilde{g}(t, S_t, y_t). \quad (1.65)$$

Da  $V$  ein Martingal ist, kann man sich, wie oben in der Situation exponentieller Lévy-Modelle, mittels eines Itô-Arguments unter Vernachlässigung von Differenzierbarkeits- und Integrierbarkeitsbedingungen überlegen, dass die Dynamik von  $V$  hier gegeben ist durch

$$\begin{aligned} V_t &= V_0 + \int_0^t \sqrt{y_{s-}} S_{s-} D_2 \tilde{g}(s, S_{s-}, y_{s-}) dW_s \\ &\quad + \int_{[0,t] \times \mathbb{R}_+} (\tilde{g}(s, S_{s-} e^{\varrho x}, y_{s-} + x) - \tilde{g}(s, S_{s-}, y_{s-})) (\mu^z - \nu^z)(d(s, x)) \end{aligned} \quad (1.66)$$

Mit Proposition 1.24 folgt dann die varianz-optimale Handelsstrategie:

$$\begin{aligned} \vartheta_t^* &= \frac{1}{y_{t-} + \int_0^\infty (e^{\varrho x} - 1)^2 F^z(dx)} \left( y_{t-} D_2 \tilde{g}(t, S_{t-}, y_{t-}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{S_{t-}} \int_0^\infty (e^{\varrho x} - 1) (\tilde{g}(t, S_{t-} e^{\varrho x}, y_{t-} + x) - \tilde{g}(t, S_{t-}, y_{t-})) F^z(dx) \right). \end{aligned} \quad (1.67)$$

Hierbei wird die Funktion  $\tilde{g}$  numerisch auf einem dreidimensionalen Gitter der Zeit sowie der verschiedenen Underlyingpreise und Werte der quadrierten Volatilität als Lösung einer partiellen Integro-Differentialgleichung mittels der Methode finiter Differenzen bestimmt, so dass auch Ableitungen von und Integrale über  $\tilde{g}$  und damit auch die optimale Strategie numerisch ausgewertet werden können.  $\square$

Im Gegensatz zu den anderen Arbeiten über quadratisches Hedging erlaubt der Ansatz von Cont et al. (2005) die Absicherung pfadabhängiger Optionen, wie zum Beispiel Barriereoptionen oder asiatische Optionen, was darauf zurückzuführen ist, dass die Preisprozesse der zu hedgenden Instrumente von vornherein numerisch bestimmt werden. Der Ansatz der vorliegenden Arbeit ist dagegen auf eine Integraldarstellung des Preisprozesses des zu hedgenden Instruments angewiesen, die jedoch für allgemeine pfadabhängige Optionen nicht existiert, vgl. Annahme 1.20. Dafür sind die Lösungsformeln hier expliziter und die Numerik wird nur im Nachhinein rudimentär zum Auswerten von Integralen benötigt. Insbesondere bei der optimalen Handelsstrategie wird dieser Unterschied offensichtlich: in der vorliegenden Arbeit muss lediglich ein Integral über eine in geschlossener Form vorliegende Funktion bestimmt werden. Dies ist zwar meist nur numerisch möglich, ist aber wesentlich einfacher als die Auswertung der entsprechenden Formel von Cont et al. (2005), bei der ebenfalls ein Integral numerisch bestimmt werden muss, bei dem aber der Integrand an jeder Stützstelle der numerischen Integration seinerseits numerisch auf der Grundlage einer diskretisierten partiellen Integro-Differentialgleichung ermittelt werden muss. Ferner muss dort eine Ableitung einer nur numerisch vorliegenden Funktion numerisch berechnet werden. Können Cont et al. (2005) den minimalen erwarteten quadratischen Hedgefehler lediglich durch Simulation quantifizieren, so wird in der vorliegenden Arbeit eine semiexplizite Darstellung dieser Größe in Form eines Mehrfachintegrals angegeben. Eine Besonderheit von Cont et al. (2005) liegt noch darin, dass zur Absicherung nicht nur das Underlying herangezogen werden kann, sondern auch ein Portfolio handelbarer Finanzgüter, das einen Preisprozess der Form (1.51) aufweist. Cont et al. (2005) bemerken, dass gerade beim quadratischen Hedgen exotischer Optionen, aber auch in der Situation zu hedgender Standardoptionen, das Risiko durch Absicherungsstrategien, die allein auf dem Underlying beruhen, nicht sonderlich stark reduziert werden könne, wohingegen das Hedgen mit europäischen Standardoptionen, die die gleiche Laufzeit haben wie die zu hedgende Option, in Kombination mit den Basisgütern zu einem wesentlich geringeren Restrisiko führe. Man sollte aber auch anmerken, dass durch Aufnahme weiterer Handelsgüter sich der unvollständige Markt immer stärker einem vollständigen Markt annähert, infolgedessen der Hedgefehler natürlich entsprechend kleiner wird. Zusammenfassend lässt sich sagen, dass der Ansatz von Cont et al. (2005) anwendbar ist auf die affinen stochastischen Volatilitätsmodelle, die im Rahmen der vorliegenden Arbeit vor dem Hintergrund des Problems quadratischen Hedgens behandelt werden. Deren Arbeit ist insofern allgemeiner, als auch pfadabhängige Optionen gehedgt werden können und dies nicht allein mittels des Underlyings, sondern auch mit weiteren Handelsgütern, wie zum Beispiel Standardoptionen. Dass dies möglich ist, liegt daran, dass von vornherein mehr Numerik investiert wird - die Preisprozesse der zu hedgenden Derivate sind nur numerisch als Lösung einer diskretisierten partiellen Integro-Differentialgleichung im Rechner verfügbar. Die vorliegende Arbeit zielt aber auf möglichst explizite Lösungsformeln, die effizienter ausgewertet werden können, investiert dafür mehr in die Stochastik als in die Numerik. Im Gegensatz zu Cont et al. (2005), die den Hedgefehler nur simulieren können, wird hier eine Integraldarstellung für den minimalen erwarteten quadratischen

Hedgefehler hergeleitet. Beide Ansätze führen zwar am Ende zu den gewünschten Zahlen, jedoch methodisch auf sehr unterschiedlichen Wegen, wobei der Vorteil der semiexpliziten Lösungsformeln in dieser Arbeit darin besteht, dass die numerische Auswertung einfacher und schneller verläuft, insbesondere bei der varianz-optimalen Handelsstrategie, aber auch beim minimalen erwarteten quadratischen Hedgefehler, für den in dieser Arbeit überhaupt eine Formel angegeben wird, wohingegen Cont et al. (2005) diesen nur durch Simulation bestimmen können.

Im nächsten Schritt werden die unterschiedlichen Möglichkeiten aufgezeigt, die Volatilität in einem zeitstetigen Modell stochastisch zu modellieren. Es werden einige bekannte Beispiele für stochastische Volatilitätsmodelle vorgestellt, wobei festgestellt wird, dass diese alle, in einem noch zu definierenden Sinn, vgl. hierzu an dieser Stelle Duffie et al. (2003), affin sind. Grob gesprochen, werden die Modelle affin genannt, wenn die gemeinsame bedingte charakteristische Funktion von Log-Rendite und quadrierter Volatilität exponentiell affin ist in Log-Rendite und quadrierter Volatilität, ausgewertet zu dem Zeitpunkt, auf den bedingt wird, oder wenn die Komponenten der gemeinsamen integralen Charakteristik der Log-Rendite und der quadrierten Volatilität affin in der integrierten, quadrierten Volatilität sind. Die affine Struktur garantiert, dass man eine Lösung für das Hedgeproblem in Integralform finden kann, wobei die Integranden in den meisten Fällen in geschlossener Form vorliegen.

## 1.4 Affine stochastische Volatilitätsmodelle

Bei der einleitenden Diskussion der Vor- und Nachteile des Black-Scholes-Modells ist bereits auf die Notwendigkeit hingewiesen worden, die Volatilität stochastisch zu modellieren. Cont & Tankov (2004), Kapitel 15, weisen übrigens darauf hin, dass nicht das starke Schwanken der quadratischen Variation historischer Kursdaten Indiz für das Vorhandensein stochastischer Volatilität ist, da dieses Phänomen bereits allein mit dem Vorhandensein von Sprüngen erklärt werden könne. Der Hauptgrund für die Einführung von stochastischer Volatilität sei die Abhängigkeitsstruktur in den Zuwächsen der Kursdaten. Die Volatilität kann als ein Maß für die Marktaktivität aufgefasst werden. Diese ist wiederum entweder messbar in Form der über die Zeit schwankenden Größe der Kursänderungen oder in Form der Geschwindigkeit der Kursänderungen, d.h. der Anzahl der abgeschlossenen Handelskontrakte pro Zeiteinheit. Somit ergibt sich eine grobe Einteilung stochastischer Volatilitätsmodelle in zwei Klassen. Wenn nicht explizit etwas anderes gesagt wird, sind alle Prozesse in den folgenden Modellen eindimensional zu verstehen.

Zur ersten Klasse gehören die Modelle, bei denen, ausgehend vom Black-Scholes-Modell, in welchem die Log-Rendite Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$dZ_t = \left( \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t \quad (1.68)$$

ist, der Volatilitätsparameter  $\sigma$  durch eine zusätzliche, zufällige Einflussgröße stochastisch als Prozess modelliert wird. Damit die Drift des Underlyingpreisprozesses ebenfalls vom Niveau der stochastischen Volatilität abhängen kann, wird die stochastische Differentialgleichung (1.68) manchmal noch um einen weiteren Parameter  $\delta \in \mathbb{R}$  erweitert:

$$dZ_t = (\mu + \delta\sigma^2) dt + \sigma dW_t. \quad (1.69)$$

Im Rahmen des vorliegenden Martingalfalls ist dieser Parameter jedoch stets a priori eindeutig festgelegt. Wird der Volatilitätsparameter nicht mittels einer zusätzlichen stochastischen Einflussgröße spezifiziert, sondern als Funktion vergangener Renditen, erhält man die sogenannten ARCH-Modelle (ARCH steht für *autoregressive conditional heteroscedasticity*), vgl. Engle (1982), und als Erweiterung davon die GARCH-Modelle (GARCH steht für *generalized ARCH*), vgl. Bollerslev (1986), aus der Ökonometrie. Diese begegnen, wie die klassischen stochastischen Volatilitätsmodelle auch, der Kritik am Black-Scholes-Modell, indem sie zum Beispiel Volatilitäts-Cluster abbilden und Verteilungen der Renditen implizieren, die semi-schwere Tails aufweisen. Der Leverage-Effekt wird dahingehend in sehr extremer Form berücksichtigt, dass Änderungen in der Volatilität allein durch Änderungen des Underlyingpreises hervorgerufen werden. Da die ARCH- und GARCH-Modelle zeitdiskret sind, werden sie im Rahmen dieser Arbeit ausgeklammert. Eine zeitstetige Erweiterung eines GARCH(1,1)-Modells wird von Klüppelberg et al. (2004) vorgeschlagen, allerdings weist diese Erweiterung nicht die für diese Arbeit grundlegende affine Struktur auf. Kallsen & Taqqu (1998) betrachten ebenfalls zeitstetige Erweiterungen von ARCH- und GARCH-Modellen, die allerdings vollständig sind, und geben darin Optionspreise und replizierende Handelsstrategien an. Das erste klassische stochastische Volatilitätsmodell ist von Hull & White (1987) entwickelt worden. Dort wird der Volatilitätsparameter  $\sigma$ , auch als *lokale Volatilität* bezeichnet, in (1.68) durch  $\sigma_t = \sqrt{y_t}$  ersetzt, wobei die quadrierte (lokale) Volatilität  $y = (y_t)_{t \in [0, T]}$  mittels einer geometrischen Brownschen Bewegung modelliert wird:

$$dy_t = \kappa y_t dt + \alpha y_t d\widetilde{W}_t. \quad (1.70)$$

Dabei sind  $\kappa \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \geq 0$  konstant, und  $\widetilde{W}$  steht für eine Standard-Brownsche Bewegung, die mit  $W$  konstant korreliert sei. Die geometrische Brownsche Bewegung ist zwar positiv, weist aber kein *Mean-Reverting-Verhalten* auf. Das Mean-Reverting-Verhalten führt im Allgemeinen zu realistischen Eigenschaften der impliziten Volatilität als Funktion über die Zeit. Zudem ist dieses Modell nicht affin in  $(y, Z)$ , infolgedessen es im weiteren Verlauf nicht weiter betrachtet wird. Um das Modell analytisch handhaben zu können, müssen Hull & White (1987) voraussetzen, dass der Marktpreis des Risikos der Volatilität Null ist, d.h. dass das Volatilitätsrisiko ausschließlich spezifisch ist. Hull & White (1987) geben dann in der Situation, dass die quadrierte Volatilität und der Prozess der Log-Renditen unkorreliert sind, eine Preisformel für eine europäische Call-Option an. Der Call-Optionspreis entspricht dem Black-Scholes-Preis des Calls, gemittelt über die quadrierten Volatilitäten. Stein & Stein (1991) ersetzen den Volatilitätsparameter in (1.68) durch einen Gauss'schen Ornstein-Uhlenbeck-Prozess  $\sigma = (\sigma_t)_{t \in [0, T]}$ :

$$d\sigma_t = \kappa(\eta - \sigma_t)dt + \alpha d\widetilde{W}_t. \quad (1.71)$$

Dabei sind die lokale Volatilität  $\alpha \geq 0$  des Volatilitätsprozesses, die *Mean-Reversion-Rate*  $\kappa > 0$ , diese steht für die Geschwindigkeit, wie schnell der Prozess zum *Mean-Reversion-Niveau*  $\eta$  zurückgezogen wird, und das *Mean-Reversion-Niveau*  $\eta \geq 0$  konstant. Das *Mean-Reversion-Niveau* ist das Langzeitmittel von  $\sigma_t$ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E_P[\sigma_t] = \eta. \quad (1.72)$$

Die Brownschen Bewegungen  $W$  und  $\tilde{W}$  können zudem konstant korreliert sein mit Korrelation  $\rho$ , wovon Stein & Stein (1991) ursprünglich aber nicht ausgehen. Im Gegensatz zum Ansatz von Hull & White (1987) weist zwar hier der lokale Volatilitätsprozess ein *Mean-Reverting-Verhalten* auf, dafür kann die lokale Volatilität negativ werden, was bisweilen als Nachteil angesehen wird, vgl. z.B. Cont & Tankov (2004), Abschnitt 15.1, obwohl die lokale Volatilität nicht als Standardabweichung zu verstehen ist, wenn sie nicht als deterministischer Prozess modelliert wird. Kritisch anzumerken ist, dass das Modell von Stein & Stein (1991) nicht affin in  $(\sigma^2, Z)$  ist. Kallsen (2006) weist aber darauf hin, dass eine affine Struktur in  $(\sigma, \sigma^2, Z)$  vorliegt. Dennoch fällt das Modell von Stein & Stein (1991) nicht in den allgemeinen Rahmen affiner stochastischer Volatilitätsmodelle, der in der vorliegenden Arbeit betrachtet wird. Stein & Stein (1991) leiten im unkorrelierten Fall mit Hilfe der Inversionsformel für Fouriertransformierte eine explizite Formel für die Verteilung des Underlyingkurses zu einem bestimmten zukünftigen Zeitpunkt, bedingt auf den heutigen Informationsstand, her. Explizit bedeutet hier geschlossen bis auf ein eindimensionales Integral. Diese bedingte Verteilung wird benutzt, um europäische Optionen zu bewerten. Im Folgenden werden drei Modelle vorgestellt, die im Sinne dieser Arbeit affin sind und zur ersten Klasse stochastischer Volatilitätsmodelle gehören, bei denen der Volatilitätsparameter  $\sigma$  in (1.68) durch einen stochastischen Volatilitätsprozess ersetzt wird.

### 1.4.1 Das Modell von Heston (1993)

Im Modell von Heston (1993) wird der quadrierte Volatilitätsprozess  $y = (y_t)_{t \in [0, T]}$  durch eine Quadratwurzel-Diffusion abgebildet:

$$Z_t = \int_0^t (\mu + \delta y_s) ds + \int_0^t \sqrt{y_s} dW_s, \quad (1.73)$$

$$dy_t = \kappa(\eta - y_t)dt + \alpha\sqrt{y_t}d\tilde{W}_t. \quad (1.74)$$

Dabei sei der Startwert  $y_0 > 0$ , und  $\kappa, \eta > 0$ ,  $\alpha \geq 0$  sowie  $\mu, \delta \in \mathbb{R}$  bezeichnen Konstanten. Und wie in den obigen Modellen weisen die Standard-Wiener-Prozesse  $W$  und  $\tilde{W}$  eine konstante Korrelation  $\rho$  auf, wodurch der Leverage-Effekt berücksichtigt wird. Im Gegensatz zu den Modellen von Hull & White (1987) und Stein & Stein (1991) ist der Volatilitätsprozess *mean-reverting* und nichtnegativ. Falls  $2\kappa\eta \geq \alpha^2$  gilt, ist der Volatilitätsprozess sogar strikt positiv. Andernfalls wird  $y$  gelegentlich Null, doch zu diesen kritischen Zeitpunkten reduziert sich die Dynamik (1.74) auf die positive Drift  $\kappa\eta dt$ , so dass der Prozess sofort wieder ins Positive gezogen wird. Hinsichtlich der Existenz und Eindeutigkeit der

stochastischen Differentialgleichung (1.74) betrachte man Ikeda & Watanabe (1989), Beispiel IV.8.2. Zudem sei auf Cox et al. (1985) verwiesen, die die Quadratwurzel-Diffusion als erste in die Finanzmathematik zur Modellierung von *Short-Rates* eingeführt haben. Die Quadratwurzel-Diffusion wird daher auch synonym als CIR-Prozess bezeichnet. Die affine Struktur erlaubt es Heston (1993), im Rahmen dieses stochastischen Volatilitätsmodells mit Hilfe der Fourier-Methode explizite Preisformeln für europäische Optionen herzuleiten, deren Auswertung einer eindimensionalen Integration bedürfen. Insbesondere können so implizite Volatilitäten bestimmt werden. Eine weitere wichtige Eigenschaft des vorliegenden Modells ist die, dass weder der Renditeprozess noch der Volatilitätsprozess Sprünge besitzen. In Cont & Tankov (2004), Abschnitt 15.2, wird darauf hingewiesen, dass aufgrund der Stetigkeit das Modell von Heston (1993) nicht in der Lage ist, hinreichende Variabilität und Asymmetrie in den kurzfristigen Renditen zu erzeugen, so dass der Skew-Effekt bezüglich der entsprechenden kurzfristigen impliziten Volatilitäten nicht ausreichend erklärt werden kann. Die stochastische Volatilität wirkt erst nach einer gewissen Zeit. Um die Struktur der impliziten Volatilitäten im kurzfristigen Bereich besser erklären zu können, sollten daher Sprünge mit in das Modell einbezogen werden. Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass Modellaspekte, wie z.B. implizite Volatilitäten, eigentlich die Welt unter einem Preismaß, nicht unter dem physikalischen Maß betreffen. Da aber der Preisprozess des Basisguts unter dem physikalischen Maß ein (lokales) Martingal darstellt, kann das physikalische Maß als (subjektives) Preismaß aufgefasst werden, auch wenn nicht klar ist, dass dieses mit dem Marktmaß übereinstimmt. Daher werden bei der Diskussion der Modelle auch Aspekte diskutiert, die im engeren Sinne nicht der physikalischen Welt zugehörig sind.

## 1.4.2 Das Modell von Bates (1996)

Bates (1996) erweitert das Modell von Heston (1993) dahingehend, dass er dem Renditeprozess einen zusammengesetzten Poisson-Prozess  $z$  der Form

$$z_t = \sum_{k=1}^{N_t} X_k \quad (1.75)$$

additiv hinzufügt:

$$Z_t = \int_0^t (\mu + \delta y_s) ds + \int_0^t \sqrt{y_s} dW_s + z_t, \quad (1.76)$$

$$dy_t = \kappa(\eta - y_t)dt + \alpha\sqrt{y_t}d\widetilde{W}_t, \quad (1.77)$$

wobei  $N$  ein Poisson-Prozess mit Intensität  $a$  ist und  $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  für eine Folge unabhängiger, identisch mit Erwartungswert  $\chi$  und Varianz  $\xi^2$  normalverteilter Zufallsvariablen steht. Die Sprunghöhen von  $z$ , bedingt auf das Ereignis, dass tatsächlich ein Sprung vorliegt, sind also mit diesen Parametern normalverteilt. Da  $z$  ein reiner Sprungprozess ist, ist  $z$  automatisch unabhängig von den Standard-Wiener-Prozessen  $W$  und  $\widetilde{W}$ . Das Lévy-Khintchine-Tripel

des zusammengesetzten Poisson-Prozesses  $z$  ist gegeben durch

$$\partial z = \left( \int_{\mathbb{R}} h(x) F^z(dx), 0, F^z \right) \text{ mit } F^z(dx) = \frac{a}{\sqrt{2\pi\xi^2}} \exp \left\{ -\frac{(x-\chi)^2}{2\xi^2} \right\} dx. \quad (1.78)$$

Das Modell von Bates (1996) kann auch als Verallgemeinerung des Sprung-Diffusions-Modells von Merton (1976) aufgefasst werden. Es erweitert das Modell von Merton (1976) nämlich gerade um die stochastische Volatilität in Form eines CIR-Prozesses. Analog zu Heston (1993) leiten Cont & Tankov (2004), Abschnitt 15.2, die charakteristische Funktion von  $Z_t = \ln \left( \frac{S_t}{S_0} \right)$  in geschlossener Form her, was aufgrund der affinen Struktur des Modells möglich ist. Somit kann die Fourier-Methode von Carr & Madan (1999) benutzt werden, um Optionspreise zu bestimmen. Cont & Tankov (2004), Abschnitt 15.2., betonen, dass die Sprünge des zusammengesetzten Poisson-Prozesses die Struktur der impliziten Volatilitäten der kurzlebigen Optionen erklären können, wohingegen die stochastische Volatilität und der durch die Korrelation der Standard-Wiener-Prozesse mitberücksichtigte Leverage-Effekt zu einer realistischen impliziten Volatilitätsstruktur der länger laufenden Optionen führen. Da der zusammengesetzte Poisson-Prozess und der stochastische Volatilitätsprozess unabhängig sind, besteht die Möglichkeit, die Sprünge des Modells an die Preise der Optionen mit kurzer Laufzeit und davon unabhängig die Parameter der stochastischen Volatilität und den Korrelationsparameter an die Preise der Optionen mit längerer Laufzeit anzupassen. Diese Art zu kalibrieren, ist zwar nicht optimal, führt aber zu plausiblen und realistischen Parametern, wohingegen eine simultane Kalibrierung aller Parameter mittels einer *Kleinste-Quadrate-Methode* mit einer nicht konvexen Zielfunktion einhergeht, so dass man unter Umständen in einem lokalen Minimum mit unrealistischen und extremen Parametern terminiert.

### 1.4.3 Das Modell von Barndorff-Nielsen & Shephard (2001b)

Barndorff-Nielsen & Shephard (2001b) schlagen ein Modell vor, bei dem der quadrierte stochastische Volatilitätsprozess Sprünge aufweist. Anstelle eines CIR-Prozesses verwenden sie einen Lévy-getriebenen Ornstein-Uhlenbeck-Prozess zur Modellierung der quadrierten stochastischen Volatilität:

$$Z_t = \int_0^t (\mu + \delta y_{s-}) ds + \int_0^t \sqrt{y_{s-}} dW_s + \varrho z_t, \quad (1.79)$$

$$dy_t = \kappa(\eta - y_{t-})dt + dz_t. \quad (1.80)$$

Dabei sind  $\kappa > 0$ ,  $\eta \geq 0$  und  $\mu, \delta, \varrho$  reelle Konstanten,  $y_0$  ein positiver Startwert und  $z$  ein Lévy-Prozess ohne Brownschen Anteil, mit nichtnegativer Drift und positiven Sprüngen, vgl. auch Beispiel 1.25. Das Lévy-Khintchine-Tripel des Lévy-Treibers  $z$  ist von der Form  $\partial z = (\kappa \tilde{b}^z(h), 0, \kappa \tilde{F}^z)$ . Der Subordinator  $z$  ist also automatisch unabhängig von dem Standard-Wiener-Prozess  $W$ , infolgedessen der Leverage-Effekt mittels des Terms  $\varrho z_t$  in (1.79) abgebildet wird. Der Parameter  $\kappa$  ist aus Gründen notationeller Kompatibilität zu Barndorff-Nielsen & Shephard (2001b) in die Charakteristik von  $z$  eingeführt worden. Diese model-

lieren nämlich  $dz_{\kappa t}$  anstelle von  $dz_t$  in (1.80) mit  $\partial z = (\tilde{b}^z(h), 0, \tilde{F}^z)$ , da dann die Randverteilung des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses  $y$  nicht von dem Parameter  $\kappa$  beeinflusst wird, sofern  $y$  stationär ist. Dann liegen die Dynamik und die Verteilung der quadrierten Volatilität  $y$  getrennt parametrisiert vor, was mehr Flexibilität durch die Wahl der Parameter impliziert. Mithilfe der Regel der partiellen Integration zeigt man, dass

$$y_t = (1 - e^{-\kappa t}) \eta + e^{-\kappa t} y_0 + \int_0^t e^{-\kappa(t-s)} dz_s \quad (1.81)$$

Lösung der stochastischen Differentialgleichung (1.80) ist. Wegen  $y_0 > 0$  ist der Volatilitätsprozess stets positiv. Zur Existenz eines stationären Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses der Form (1.81) mit gegebener *selbst-zerlegbarer*, eindimensionaler Randverteilung sei auf Barndorff-Nielsen & Shephard (2001b), Satz 1, und auf Schoutens (2003), Bemerkung 5.2, verwiesen. Da  $\bar{z} = (\bar{z}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , definiert durch  $\bar{z}_t := z_t + \kappa \eta t$  ein Lévy-Prozess mit Tripel  $(\kappa(\tilde{b}^z(h) + \eta), 0, \kappa \tilde{F}^z)$  ist, kann Gleichung (1.80) zur Modellierung der quadrierten Volatilität ohne Beschränkung der Allgemeinheit durch

$$dy_t = -\kappa y_t dt + dz_t. \quad (1.82)$$

ersetzt werden.

**Definition 1.26** Sei  $m$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem  $\mathbb{R}^d$ . Es wird **selbst-zerlegbar** genannt, falls zu jedem  $c > 1$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $m_c$  existiert mit

$$\widehat{m}(u) = \widehat{m}(c^{-1}u) \widehat{m}_c(u), \quad u \in \mathbb{R}^d, \quad (1.83)$$

wobei  $\widehat{m}$  und  $\widehat{m}_c$  die Fouriertransformierten von  $m$  bzw.  $m_c$  bezeichnen.

Man beachte, dass jede selbst-zerlegbare Verteilung auch *unendlich teilbar* ist, vgl. Sato (1999), Proposition 15.5. Zu jedem Lévy-Khintchine-Tripel existiert eine unendlich teilbare Verteilung, und umgekehrt. Der nächste Satz liefert hinreichende und notwendige Bedingungen dafür, wann eine unendlich teilbare Verteilung selbst-zerlegbar ist.

**Satz 1.27** Sei  $F$  das Lévy-Maß einer unendlich teilbaren Verteilung  $m$  auf  $\mathbb{R}$ . Dann sind äquivalent:

- (i)  $m$  ist selbst-zerlegbar.
- (ii) Die Funktionen  $\mathbb{R}_+ \ni s \mapsto F((-\infty, -e^s])$ ,  $\mathbb{R}_+ \ni s \mapsto F([e^s, \infty))$  sind konvex.
- (iii) Das Lévy-Maß  $F$  hat eine Lévy-Dichte  $\varphi$ , d.h.  $F(dx) = \varphi(x)dx$ , derart, dass die Abbildung  $x \mapsto |x|\varphi(x)$  auf  $(-\infty, 0)$  wachsend und auf  $(0, \infty)$  fallend ist.

Falls  $\varphi$  differenzierbar ist, kann die notwendige und hinreichende Bedingung (ii) auch in der Form

$$\varphi(x) + x D_1 \varphi(x) \leq 0, \quad x \neq 0, \quad (1.84)$$

geschrieben werden, wobei  $D_1$  den Ableitungsoperator bezeichnet.

BEWEIS. Vgl. Barndorff-Nielsen & Shephard (2001a), Satz 4.1.  $\square$

Dieser Satz ist insofern wichtig, als zu einer gegebenen eindimensionalen Verteilung  $\mathcal{D}$  genau dann ein stationärer Ornstein-Uhlenbeck-Prozess (OU-Prozess) der Form (1.81) existiert mit eindimensionaler Randverteilung  $\mathcal{D}$ , wenn  $\mathcal{D}$  selbst-zerlegbar ist. Ein solcher Prozess wird dann auch als  $\mathcal{D}$ -OU-Prozess bezeichnet. Die Stationarität von  $y$  besagt hier, dass  $y_t$  für jedes  $t > 0$  die Verteilung  $\mathcal{D}$  besitzt, sofern  $y_0$  gemäß  $\mathcal{D}$  verteilt ist. Da im Rahmen dieser Arbeit  $\mathcal{F}_0$  als trivial angenommen wird, schwächt sich die Stationarität dahingehend ab, dass  $y_t$  in Verteilung für  $t$  gegen Unendlich gegen  $\mathcal{D}$  geht. Bezeichnet  $\psi^{\mathcal{D}}$  die kumulantenerzeugende Funktion der selbst-zerlegbaren Verteilung  $\mathcal{D}$ , definiert durch

$$\int_0^\infty e^{ux} \mathcal{D}(dx) = e^{\psi^{\mathcal{D}}(u)},$$

so liefert

$$\psi^{\tilde{z}}(u) = uD_1\psi^{\mathcal{D}}(u) \quad (1.85)$$

den Zusammenhang zur kumulantenerzeugenden Funktion des modifizierten Subordinators  $\tilde{z} := \kappa^{-1}z$ . Ist die Dichte  $\varphi^{\mathcal{D}}$  des Lévy-Maßes der selbst-zerlegbaren Verteilung  $\mathcal{D}$  differenzierbar, ist das Lévy-Maß des modifizierten Subordinators  $\tilde{z}$  gegeben durch

$$F^{\tilde{z}}(dx) = \tilde{F}^z(dx) = -\varphi^{\mathcal{D}}(x) - xD_1\varphi^{\mathcal{D}}(x), \quad (1.86)$$

vgl. Barndorff-Nielsen & Shephard (2001b), Abschnitte 2.1 und 2.2. Da das stochastische Volatilitätsmodell von Barndorff-Nielsen & Shephard (2001b) ebenfalls affin ist, kann man erneut die charakteristische Funktion der Log-Renditen  $Z_t = \ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right)$  explizit berechnen und damit mittels der Fourier-Methode von Carr & Madan (1999) Optionspreise bestimmen. Cont & Tankov (2004), Beispiel 15.2, weisen auf die zentrale Rolle des Korrelationskoeffizienten  $\rho$  im Modell von Barndorff-Nielsen & Shephard (2001b) hin. Der Renditeprozess springt nur dann, wenn der quadrierte Volatilitätsprozess einen Sprung aufweist. Diese Sprünge werden mit dem Parameter  $\rho$  skaliert, infolgedessen dieser die Intensität des *Smile-Effekts* festlegt. Gleichzeitig beschreibt er die Korrelation zwischen Rendite- und quadriertem Volatilitätsprozess, die die Asymmetrie des *Smiles*, d.h. den sogenannten *Skew-Effekt* für alle Laufzeiten festlegt. Entweder sind also die *Smiles* stark ausgeprägt und gleichzeitig sehr asymmetrisch (im Fall  $\rho \neq 0$ ) oder die *Smiles* sind äußerst flach und symmetrisch (im Fall  $\rho = 0$ ). Durch diese eingeschränkte Flexibilität bei der Kalibrierung von Sprüngen und Volatilität erzeugt man lediglich nicht hinreichend realistische implizite Volatilitätsstrukturen. Barndorff-Nielsen & Shephard (2001b) haben einen ähnlichen Effekt hinsichtlich der Autokorrelationsstruktur der Volatilität festgestellt. Diese wird nur unzureichend von einem einzelnen OU-Prozess wiedergegeben. Die Idee ist daher, für unterschiedliche Laufzeiten unterschiedliche OU-Prozesse heranzuziehen und diese als Bestandteil des Renditeprozesses linear zu kombinieren. Dies führt zu dem sogenannten *Superpositionsmodell*

von Barndorff-Nielsen & Shephard (2001b):

$$Z_t = \int_0^t (\mu + \delta y_{s-}) ds + \int_0^t \sqrt{y_{s-}} dW_s + \sum_{k=1}^n \varrho_k z_t^{(k)}, \quad (1.87)$$

$$y_t = \sum_{k=1}^n \alpha_k y_t^{(k)}, \quad (1.88)$$

$$dy_t^{(k)} = \kappa_k (\eta_k - y_{t-}^{(k)}) dt + dz_t^{(k)}, k = 1, \dots, n, \quad (1.89)$$

mit Konstanten  $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \eta_1, \dots, \eta_n \geq 0, \kappa_1, \dots, \kappa_n > 0, \mu, \delta$  und  $\varrho_1, \dots, \varrho_n$ , einem Standard-Wiener-Prozess  $W$  und einem  $\mathbb{R}_+^n$ -wertigen Lévy-Prozess  $z = (z^{(1)}, \dots, z^{(n)})$ , dessen Komponenten unabhängige Subordinator sind. Gemäß Kallsen (2006) ist das Superpositionsmodell affin in  $(y^{(1)}, \dots, y^{(n)}, y, Z)$ . Das in Kapitel 3.1 folgende allgemeine affine stochastische Volatilitätsmodell kann dahingehend erweitert werden, dass auch das Superpositionsmodell ein Spezialfall davon ist. Das läuft darauf hinaus, dort die Dimension des quadrierten Volatilitätsprozesses  $y$  zu erhöhen. Aus Gründen der Einfachheit und Klarheit soll aber in dieser Arbeit darauf verzichtet werden. Es werden nur affine stochastische Volatilitätsmodelle mit eindimensionaler Volatilität betrachtet.

Im nächsten Abschnitt sollen nun noch Vertreter der zweiten Klasse von affinen stochastischen Volatilitätsmodellen vorgestellt werden, bei denen die Marktaktivität in Form der Geschwindigkeit von Kursänderungen gemessen wird. Der wesentliche Gedanke ist, die Zeit stochastisch zu transformieren. In Zeiten hoher Volatilität und Marktaktivität läuft die Zeit schneller, in Zeiten niedriger Volatilität entsprechend langsamer. Monroe (1978) hat gezeigt, dass jedes Semimartingal als Brownsche Bewegung (unter Umständen auf einem entsprechend erweiterten Wahrscheinlichkeitsraum definiert) geschrieben werden kann, die zu einer zufällig transformierten Zeit ausgewertet wird. Die transformierte Zeit wird auch als *Handelszeit* aufgefasst. Anstatt die Zeit in Form von kalendarischen Zeiteinheiten zu erfassen, wird sie in Form des kumulierten Transaktionsvolumens gemessen, vgl. Clark (1973). Geman & Ané (1996) haben in einer empirischen Studie anhand des S&P 500-Futures-Index nachweisen können, dass die Eine-Minute-Renditen in höchstem Maße nicht-normal sind, wohingegen die pro Handelseinheit gemessenen Renditen normalverteilt sind. Schoutens (2003), Kapitel 7, motiviert die Zeittransformation im Kontext von stochastischen Volatilitätsmodellen mit der Skalierungseigenschaft der Brownschen Bewegung: Wenn  $W$  eine Brownsche Bewegung ist, dann ist auch  $\widetilde{W} = (\widetilde{W}_t)_{t \geq 0}$ , definiert durch  $\widetilde{W}_t = cW_{t/c^2}$ , für jedes  $c \neq 0$  eine Brownsche Bewegung, d.h. Änderungen in der Skalierung können auch durch Änderungen in der Zeit ausgedrückt werden. Für konstantes  $\sigma \neq 0$  könnte man also in Verteilung statt  $\sigma \widetilde{W}_t$  auch  $W_{\int_0^t \sigma^2 ds}$  schreiben. Überträgt man diese Tautologie formal ungenau auf die Situation, in der der konstante Volatilitätsparameter  $\sigma$  durch einen stochastischen Volatilitätsprozess der Form  $\sqrt{y}$  ersetzt wird, so entsprechen stochastische Änderungen der Volatilität einer stochastischen Transformation der Zeit.

### 1.4.4 Die Modelle von Carr et al. (2003)

Carr et al. (2003) gehen von Modellen aus, bei denen der Underlyingpreisprozess in der risikoneutralen Welt von der Form  $S = S_0 \exp\{Z\}$  ist, wobei  $Z$  ein Lévy-Prozess ist, der nur aus Sprüngen besteht. Der Fit der impliziten Volatilitäten bei fester Fälligkeit ist akzeptabel, wohingegen dieser bei variabler Fälligkeit aufgrund der des Lévy-Prozess-Modells immanenten Homogenität unzureichend ist. Carr et al. (2003) verfolgen daher das Ziel, diese Art von Lévy-Modellen so zu erweitern, dass die zeitliche Inhomogenität der impliziten Volatilitäten besser abgebildet wird. Gleichzeitig sollen diese Modelle die u.a. von Engle (1982), Heston (1993), Bates (1996) und Barndorff-Nielsen & Shephard (2001b) empirisch nachgewiesenen Volatilitätscluster und stochastische Volatilität berücksichtigen. Hier muss angemerkt werden, dass Carr et al. (2003) Argumente der risikoneutralen Welt und Argumente der wirklichen Welt miteinander vermengen. Wie in der vorliegenden Einleitung kann diese Vermengung dahingehend im weiteren Sinne bereinigt werden, dass man annimmt, dass  $S$  unter  $P$  ein (lokales) Martingal ist, vgl. Annahme 1.9, und  $P$  als subjektives Preismaß fungiert (obwohl nicht klar ist, dass dieses mit dem Marktmaß übereinstimmt). Cont & Tankov (2004), Abschnitt 15.5, bemerken, dass bei Modellen mit Lévy-Prozessen mit endlicher Aktivität es realistischer sei, wenn man den Lévy-Prozess um eine Diffusionskomponente erweitert. Im Folgenden wird daher von Lévy-Prozessen mit Sprüngen und optionaler Diffusionskomponente ausgegangen. Die kalendarische Zeit zeichnet sich dadurch aus, dass sie stetig voranschreitet. Modelliert man nun die Handelszeit  $Y = (Y_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  in Form einer Zeittransformation, so sollte diese ebenfalls diese Eigenschaften besitzen. Eine Möglichkeit, dies zu gewährleisten, besteht darin, die Handelszeit als Zeitintegral eines positiven stochastischen Prozesses abzubilden:

$$Y_t = \int_0^t y_{s-} ds. \quad (1.90)$$

Dabei sind der CIR-Prozess (1.74) und der Lévy-getriebene OU-Prozess (1.80) zwei kanonische Kandidaten zur Modellierung von  $y$ , da diese fast sicher strikt positiv sind. Fasst man  $Y$  als kumuliertes Handelsvolumen auf, gemessen in Transaktionen, so kann  $y$  als Handelsintensität bzw. momentane Handelsaktivität, gemessen in Transaktionen pro kalendarischer Zeiteinheit, interpretiert werden. Durch die zufällige Zeittransformation wird die Volatilität stochastisch abgebildet. Zudem werden Volatilitätscluster aufgrund der Mean-Reverting-Eigenschaft des Handelsintensitätsprozesses wiedergegeben. Das integrierte CIR-Zeittransformationsmodell von Carr et al. (2003) ist gegeben durch

$$Z_t = X_{Y_t} + \varrho(y_t - y_0) + \mu t, \quad (1.91)$$

$$dY_t = y_t dt, \quad (1.92)$$

$$dy_t = \kappa(\eta - y_t)dt + \alpha\sqrt{y_t}dW_t, \quad (1.93)$$

wobei  $y_0, \kappa, \eta > 0$ ,  $\alpha \geq 0$  und  $\mu, \varrho \in \mathbb{R}$  als konstant angenommen werden. Über den Lévy-Prozess  $X$ , der unabhängig vom Standard-Wiener-Prozess  $W$  sei, werden Sprünge im Aktienkursverlauf erklärt. Da der Lévy-Prozess  $X$  und der Standard-Wiener-Prozess  $W$

auf unterschiedlichen Zeitskalen leben, kann der Leverage-Effekt nicht dadurch abgebildet werden, dass man  $X$  und  $W$  abhängig modelliert. Daher führt man in der Modellierung der Log-Rendite  $Z_t$  den Term  $\varrho(y_t - y_0)$  ein. Das integrierte CIR-Zeittransformationsmodell kann als Verallgemeinerung des Modells von Heston (1993) aufgefasst werden, wie man später sehen wird. Wählt man  $X$  als Wiener-Prozess mit entsprechender Drift und Diffusionskomponente, erhält man die Dynamik des Modells von Heston (1993) bis auf eine Reskalierung der quadrierten Volatilität  $y$ . Alternativ kann der Handelsintensitätsprozess auch mittels eines Lévy-getriebenen OU-Prozesses (1.80) abgebildet werden, was dem integrierten OU-Zeittransformationsmodell entspricht:

$$Z_t = X_{Y_t} + \varrho z_t + \mu t, \quad (1.94)$$

$$dY_t = y_{t-} dt, \quad (1.95)$$

$$dy_t = -\kappa y_{t-} dt + dz_t, \quad (1.96)$$

wobei der Subordinator  $z$  mit Tripel  $(\kappa \tilde{b}^z(h), 0, \kappa \tilde{F}^z)$  unabhängig vom Lévy-Prozess  $X$  sei, und  $\mu$ ,  $\kappa$  und  $\varrho$  reelle Konstanten bezeichnen. Der Term  $\varrho z_t$  bildet den Leverage-Effekt ab. Wie im integrierten CIR-Zeittransformationsmodell wird diesbezüglich ein solcher zusätzlicher Ausdruck benötigt, da die Lévy-Prozesse  $X$  und  $z$  auf unterschiedlichen Zeitskalen leben. Wählt man hier  $X$  als Brownsche Bewegung mit geeigneter Drift und Diffusionskomponente, so reduziert sich die Dynamik des integrierten OU-Zeittransformationsmodells auf die Dynamik des Modells von Barndorff-Nielsen & Shephard (2001b). Man beachte, dass die Abhängigkeitsstruktur von Kursänderungen und Änderungen in der Volatilität sehr speziell ist im vorliegenden Modell: ein Sprung  $\Delta z_t$  in der Handelsaktivität führt exakt zu einer Änderung der Log-Rendite  $Z_t$  in Höhe von  $\varrho \Delta z_t$ . Kallsen (2006), vgl. Abschnitt 4.7, hat das Modell dahingehend verallgemeinert, dass die Höhe der Änderung der Log-Rendite bei einem Sprung der Handelsaktivität variabler und der Leverage somit flexibler ist. Die Idee ist, einen dritten Lévy-Prozess  $\tilde{X}$  einzuführen derart, dass  $X$ ,  $\tilde{X}$  und  $z$  unabhängig sind, den Lévy-Prozess  $\tilde{X}$  mittels  $z$  zu subordinieren im Sinne von Bochner (1949), vgl. diesbezüglich auch Sato (1999), Kapitel 6, und den Leverage-Term  $\varrho z$  durch den subordinierten Prozess  $\tilde{X}_z$ , der wieder ein Lévy-Prozess ist, zu ersetzen:

$$Z_t = X_{Y_t} + \tilde{X}_{z_t} + \mu t, \quad (1.97)$$

$$dY_t = y_{t-} dt, \quad (1.98)$$

$$dy_t = \kappa(\eta - y_{t-}) dt + dz_t, \quad (1.99)$$

wobei  $\kappa, \eta > 0$  und  $\mu \in \mathbb{R}$  Konstanten bezeichnen. Hierbei wird angenommen, dass der Subordinator  $z$  Summe seiner Sprünge ist, d.h. dass das Lévy-Khintchine-Tripel von  $z$  von der Form  $(\kappa \tilde{b}^z(h), 0, \kappa \tilde{F}^z)$  ist mit  $\tilde{b}^z(h) = \int_{\mathbb{R}_+} h(x) \tilde{F}^z(dx)$ . Der Lévy-Prozess  $\tilde{X}_z$  ändert sich zwar nur dann, wenn sich  $z$  verändert, doch ist die Höhe der Inkremente  $\tilde{X}_{z_t} - \tilde{X}_{z_s}$  nicht notwendigerweise perfekt korreliert mit der Höhe der Inkremente  $z_t - z_s$  für  $0 \leq s < t$ . Die

Korrelation der Inkremente ist gegeben durch

$$\begin{aligned} & \text{kor}_P[\tilde{X}_{z_t} - \tilde{X}_{z_s}, z_t - z_s] \\ = & \text{kor}_P[\tilde{X}_{z_{t-s}}, z_{t-s}] = \frac{E_P[\tilde{X}_1] \sqrt{\text{var}_P[z_1]}}{\sqrt{E_P^2[\tilde{X}_1] \text{var}_P[z_1] + \text{var}_P[\tilde{X}_1] E_P[z_1]}}, \end{aligned} \quad (1.100)$$

wobei  $\tilde{X}_1, z_1 \in L^2$  unterstellt wird. Der Spezialfall  $\tilde{X}_t = \rho t, t \geq 0$ , entspricht dabei wieder dem klassischen integrierten OU-Zeittransformationsmodell, in dem  $\tilde{X}_{z_t} - \tilde{X}_{z_s}$  und  $z_t - z_s$  perfekt korreliert sind. Im Folgenden wird nur noch die Variante mit dem flexiblen Leverageterm  $\tilde{X}_{z_t}$  betrachtet, welche im Rahmen dieser Arbeit als integriertes OU-Zeittransformationsmodell bezeichnet wird. Man beachte, dass in Gleichung (1.99) die Einführung des Mean-Reverting-Niveaus  $\eta$  Sinn macht, da die zugehörige Drift aufgrund der Einschränkung, dass der Subordinator Summe seiner Sprünge ist, nicht Bestandteil des Subordinators sein kann. Das Modell (1.97) - (1.99) ist somit eine echte Verallgemeinerung der ursprünglichen Version (1.94) - (1.96) von Carr et al. (2003). In der Praxis ist lediglich der Preisprozess beobachtbar, so dass es plausibel ist, dass die zugrunde liegende Filtrierung vom Preisprozess  $S$  bzw. äquivalent dazu von dem Prozess der Log-Renditen  $Z$  erzeugt wird. Aufgrund der Stetigkeit der Zeittransformation  $Y$  ist es möglich, die kumulierte Handelszeit  $Y$  und die Handelsaktivität  $y$  vom Pfad der Log-Renditen  $Z$  zu rekonstruieren, falls der Lévy-Prozess  $X$  nicht gerade ein zusammengesetzter Poisson-Prozess ist, d.h. die Handelsaktivität, die Entsprechung der quadrierten Volatilität, ist an die kanonische Filtrierung des Prozesses der Log-Renditen  $Z$  adaptiert, vgl. Winkel (2001), Satz 1, und Kallsen (2006), Abschnitt 4.8. Sowohl in den allgemeinen Zeittransformationsmodellen, bei denen der Lévy-Prozess  $X$  nicht näher spezifiziert wird, als auch im allgemeinen affinen stochastischen Volatilitätsmodell wird man jedoch später fordern müssen, dass die Filtrierung von der Handelsaktivität  $y$  und den Log-Renditen  $Z$  erzeugt wird. Da die betrachteten Zeittransformationsmodelle affin sind und man in diesen die charakteristische Funktion der Log-Renditen explizit bestimmen kann, können auch hier mittels der Fourier-Methode Optionspreise berechnet werden. Cont & Tankov (2004), Abschnitt 15.5, bemerken, dass die Verteilung der kumulierten Handelszeit im integrierten CIR-Zeittransformationsmodell der im integrierten OU-Zeittransformationsmodell sehr ähnlich ist, wenn der OU- und der CIR-Prozess die gleiche Korrelationsstruktur und die gleiche stationäre Verteilung aufweisen. Der CIR-Prozess besitzt eine Gamma-Verteilung als stationäre Verteilung (im abgeschwächten Sinne, dass  $y_t$  in Verteilung für  $t$  gegen Unendlich gegen eine Gamma-Verteilung geht, vgl. Cont & Tankov (2004), Abschnitt 15.1.2), so dass der entsprechende OU-Prozess ein Gamma-OU-Prozess sein sollte. Die Ähnlichkeit der Verteilungen der kumulierten Handelszeiten ist insofern bemerkenswert, als die Trajektorien des CIR-Prozesses und des Gamma-OU-Prozesses sehr verschieden sind. Aufgrund der ähnlichen Verteilungen der kumulierten Handelszeiten ähneln sich die impliziten Volatilitätsstrukturen im integrierten CIR-Zeittransformationsmodell und im entsprechenden integrierten OU-Zeittransformationsmodell. Eine Frage wird also auch sein, ob es, im Gegensatz zur Optionsbewertung, beim varianz-optimalen Hedging sehr wohl einen Unterschied macht, ob man die Han-

delsintensität mittels eines CIR-Prozesses oder mittels eines OU-Prozesses modelliert. Die Zeittransformationsmodelle scheinen auf jeden Fall flexibler und allgemeiner zu sein als die meisten stochastischen Volatilitätsmodelle der ersten Kategorie, bei denen der konstante Volatilitätsparameter im Black-Scholes-Modell durch einen stochastischen Prozess ersetzt wird. Die Zeittransformationsmodelle umfassen beispielsweise die affinen Modelle von Heston (1993) und Barndorff-Nielsen & Shephard (2001b) als Spezialfälle.

Nachdem nun die wichtigsten Beispiele für affine stochastische Volatilitätsmodelle vorgestellt wurden, die den Modellrahmen der Arbeit bilden, in welchem das Problem des varianz-optimalen Hedgens einer möglichst expliziten, numerisch leicht auswertbaren Lösung zugeführt werden soll, wird im letzten Abschnitt dieses Kapitels das gedankliche Gerüst der Arbeit kurz skizziert.

## 1.5 Aufbau der Arbeit

*Semimartingalcharakteristiken* sind aus dreierlei Gründen für die vorliegende Arbeit wesentlich. Sie fungieren als Beschreibungswerkzeug zur Definition des allgemeinen affinen stochastischen Volatilitätsmodells und können in einem speziellen Modell zu dem Zweck herangezogen werden, zu entscheiden, ob dieses spezielle Modell affin ist. Zudem erweisen sich die Charakteristiken als äußerst nützlich bei der Berechnung von Spitzklammerprozessen, die wiederum zentral zur Bestimmung der GKW-Zerlegung und damit zur Lösung des Problems varianz-optimalen Hedgens im Martingalfall sind, vgl. (1.24) - (1.26).

In **Kapitel 2** werden die wichtigsten Definitionen und Sätze bezüglich Semimartingalcharakteristiken zusammengestellt. Zur Definition der Semimartingalcharakteristik ist der Begriff des *Kompensators* grundlegend. Allgemein und grob gesprochen ist der Kompensator eines Prozesses zunächst etwas, das vorhersehbar ist und das die nicht notwendigerweise positive Abweichung dieses Prozesses von einem lokalen Martingal angibt. So ein Objekt muss nicht zwingend für jeden Prozess existieren. Es werden zunächst die eindeutig existierenden Kompensatoren von Spezialsemimartingalen definiert. Zudem wird ein Kompensatorbegriff für bestimmte Zufallsmaße eingeführt. Auf dieser Grundlage wird für jedes Semimartingal die bis auf  $P$ -Nullmengen eindeutig existierende *integrale Semimartingalcharakteristik* definiert. Im Anschluss daran wird auf eine Version dieser Charakteristik eingegangen, die jedoch im Allgemeinen nicht eindeutig ist. Ist die integrale Charakteristik absolut stetig, was in den meisten Anwendungen der Fall ist, so existiert aber eine solche bis auf  $P \otimes \lambda$ -Nullmengen eindeutige Version, welche als *differentielle Semimartingalcharakteristik* bezeichnet wird. Diese Bezeichnung geht auf Kallsen (2006) zurück, vgl. dort Abschnitt 2. Äquivalente Charakterisierungen integraler und differentieller Charakteristiken werden angegeben. Diese suggerieren, dass differentielle Semimartingalcharakteristiken dahingehend eine Art Verallgemeinerung von Lévy-Khintchine-Tripeln sind, dass diese zusätzlich zufällig und zeitabhängig sind. Das Lévy-Khintchine-Tripel ist in der Tat gerade

die differentielle Charakteristik des entsprechenden Lévy-Prozesses, und ein Semimartingal ist genau dann ein Lévy-Prozess, wenn das Semimartingal eine deterministische und zeitlich konstante differentielle Charakteristik besitzt, wobei diese dann dem Lévy-Khintchine-Tripel entspricht. In diesem Sinne kann die differentielle Charakteristik eines beliebigen Semimartingals (mit absolut stetiger integraler Charakteristik) als lokales Lévy-Khintchine-Tripel aufgefasst werden. Kallsen (2006) weist auf den analogen Zusammenhang zwischen Ableitungen linearer und beliebiger deterministischer Funktionen hin. Ein weiterer zentraler Satz wird angeführt, der die Verbindung zwischen Spitzklammerprozessen der Komponenten des lokal quadratisch integrierbaren lokalen Martingalanteils eines  $d$ -dimensionalen lokal quadratisch integrierbaren Semimartingals und der integralen Charakteristik dieses Semimartingals herstellt.

Die Klasse der Semimartingale ist stabil unter zahlreichen Transformationen. Besonders relevant sind dabei in dieser Arbeit die Transformationen mittels  $C^2$ -Abbildungen und stochastischer Integration sowie Zeittransformationen. Ferner zu nennen, aber in dieser Arbeit nicht von vordergründigem Interesse, sind die Transformationen mittels absolut stetiger Maßwechsel, Stoppen und Lokalisieren. Es werden Regeln angegeben, welche Gestalt die differentielle Charakteristiken der transformierten Semimartingale besitzen. Diese Klasse von Rechenregeln bildet den sogenannten *Semimartingalcharakteristikenkalkül*. Die Rechenregel, die die Charakteristik eines Semimartingals angibt, das aus einer Semimartingaltransformation mittels einer  $C^2$ -Abbildung hervorgeht, korrespondiert zu einer Itô-Formel auf der Ebene von Charakteristiken. Die zentralen Prozesse in dieser Arbeit sind der quadrierte Volatilitätsprozess  $y$  und der Log-Rendite-Prozess  $Z$  des Underlyings. Man beachte, dass der Preisprozess  $V$  des zu hedgenden Derivats einer Linearkombination von Preisprozessen einfacher Derivate (im Sinne von Abschnitt 1.2) entspricht. Die Auszahlung eines einfachen Derivats ist definitionsgemäß eine komplexe Potenz des Underlyingkurses zur Fälligkeit, d.h. die  $\mathbb{C}$ -wertige Auszahlungsfunktion hat die Gestalt  $f(x) = x^z$ ,  $z \in \mathbb{C}$ . Die Auszahlungsstruktur ist gerade dergestalt, dass der zugehörige Preisprozess  $V(z)$  zu jedem Zeitpunkt einer verallgemeinerten bedingten charakteristischen Funktion der Log-Rendite an der Stelle  $z$  entspricht. Aufgrund der affinen Struktur des zugrunde liegenden stochastischen Volatilitätsmodells kann diese bedingte charakteristische Funktion analytisch berechnet werden. Der resultierende Preisprozess  $V(z)$  ist eine deterministische  $C^2$ -Funktion der quadrierten Volatilität  $y$  und der Log-Rendite  $Z$ , infolgedessen auch hier die Prozesse  $y$  und  $Z$  wesentlich sind. Wie man anhand der Beispiele affiner Volatilitätsmodelle in Abschnitt 1.4 sehen kann, sind der quadrierte Volatilitätsprozess  $y$  und der Log-Rendite-Prozess  $Z$  Transformationen von Lévy-Prozessen. Man beachte dabei, dass der Identitätsprozess auch ein Lévy-Prozess ist. Die differentielle Charakteristiken von Lévy-Prozessen, das sind gerade die Lévy-Khintchine-Tripel, sind in der Regel bekannt. Diese Charakteristiken sind zudem von besonders einfacher Gestalt, da sie deterministisch sind und nicht von der Zeit abhängen. Ausgehend von diesen einfachen Charakteristiken kann die gemeinsame Charakteristik von  $y$  und  $Z$  mittels des Semimartingalcharakteristikenkalküls berechnet werden. Dies ist bei der Überprüfung, ob ein Modell affin ist, von großer Relevanz.

In **Kapitel 3** wird in Form der gemeinsamen absolut stetigen integralen Charakteristik von quadrierter Volatilität  $y$  und Log-Rendite  $Z$  das *allgemeine affine stochastische Volatilitätsmodell* eingeführt, das sowohl den Leverage-Effekt mitberücksichtigt als auch Sprünge im Preisprozess des Underlyings und in der Volatilität zulässt. Ebenso schließt das allgemeine Modell die Mean-Reverting-Eigenschaft der Volatilität mit ein, die für das Abbilden von Volatilitätsclustern bedeutsam ist. Die differentielle Charakteristik des affinen Modells wird durch zwei Lévy-Khintchine-Tripel  $\mathbb{R}^2$ -wertiger Lévy-Prozesse erzeugt. Aufgrund der affinen Struktur kann die *gemeinsame bedingte charakteristische Funktion von quadrierter Volatilität und Log-Rendite* angegeben werden, die eine exponentiell affine Gestalt in quadrierter Volatilität und Log-Rendite besitzt und die bestimmt werden kann, indem ein System verallgemeinerter Riccati-Differentialgleichungen gelöst wird. In diesem Zusammenhang sei auf Duffie et al. (2003) verwiesen, die die allgemeine Theorie affiner stochastischer Prozesse entwickelt und deren Bedeutung in der Finanzmathematik aufgezeigt haben. Filipović (2005) hat diese Theorie noch dahingehend erweitert, dass die Parameter der affinen Struktur von der Zeit abhängen dürfen. Diese Verallgemeinerung wird jedoch in der vorliegenden Arbeit nicht benötigt. Im Anschluss an die Bestimmung der gemeinsamen bedingten charakteristischen Funktion von quadrierter Volatilität und Log-Rendite wird ein System von Prämissen aufgestellt, unter denen das Problem des varianz-optimalen Hedgens (1.22) gelöst werden kann. Abgesehen von der Voraussetzung, dass die Auszahlungsfunktion eine Integraldarstellung der Form (1.41) hat, vgl. Annahme 1.20, werden im Wesentlichen Regularitätsbedingungen an die Lösungen der verallgemeinerten Riccati-Differentialgleichungen gestellt und Integrierbarkeitsbedingungen bezüglich der Lévy-Maße gefordert, die Bestandteile des Kompensators des Maßes der Sprünge von quadrierter Volatilität und Log-Rendite sind. Ferner benötigt man Bedingungen hinsichtlich der charakteristischen Exponenten der Lévy-Prozesse, die die differentielle Charakteristik des Modells erzeugen, um zu gewährleisten, dass der Preisprozess des Underlyings ein lokales Martingal ist. Unter Verwendung der Integraldarstellung der Auszahlungsfunktion und der geforderten Regularitätsbedingungen hinsichtlich der Lösungen der verallgemeinerten Riccati-Differentialgleichungen wird gezeigt, dass der Preisprozess des betrachteten Derivats, grob gesprochen, ebenfalls eine Linearkombination der Preisprozesse der einfacheren Derivate im Sinne von Abschnitt 1.2 ist. Außerdem wird bewiesen, dass alle diese Preisprozesse quadratisch integrierbare Martingale sind.

In einem zweiten Abschnitt werden zunächst die zentralen Sätze formuliert, die die *Lösung des Problems varianz-optimalen Hedgens* im allgemeinen affinen stochastischen Volatilitätsmodell beinhalten. Sowohl für die *varianz-optimale Hedgingstrategie* als auch für den *minimalen erwarteten quadratischen Hedgefehler* wird eine Integraldarstellung hergeleitet, die eine effiziente Auswertung mittels numerischer Integration ermöglicht. Grundlegend für die Lösung des Problems varianz-optimalen Hedgens im vorliegenden Martingalfall ist die *GKW-Zerlegung* des Preisprozesses des zu hedgenden Derivats, vgl. Satz 3 und Theorem 10 in Schweizer (1994). Die Herleitung der varianz-optimalen Hedgingstrategie

unterteilt sich in zwei große Teile. Im ersten Teil wird das Problem für ein einzelnes einfaches Derivat mit Auszahlungsfunktion  $f(x) = x^z$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , betrachtet. Da der Underlyingkurs  $S$  und der Preisprozess  $V(z)$  des einfachen Derivats deterministische  $C^2$ -Funktionen der quadrierten Volatilität und der Log-Rendite sind, kann der Itô-Kalkül für Semimartingalcharakteristiken verwendet werden, um die gemeinsame differentielle Charakteristik des Underlyingkurses  $S$  und des Preisprozesses  $V(z)$  des einfachen Derivats zu bestimmen. Damit können die Spitzklammerprozesse  $\langle S, S \rangle$  und  $\langle V(z), S \rangle$  ermittelt werden, was der Schlüssel zur GWK-Zerlegung von  $V(z)$  bezüglich  $S$  ist. Die Bezeichnung eines einfachen Derivats rührt also daher, dass in diesem Fall die GWK-Zerlegung des Preisprozesses explizit bestimmt werden kann. Im zweiten Teil des Beweises konstruiert man aus der GWK-Zerlegung von  $V(z)$  die GWK-Zerlegung des Preisprozesses  $V$  des ursprünglich betrachteten Derivats. Da  $V$  grob gesprochen eine Linearkombination der einfachen Preisprozesse  $V(z)$  ist und die GWK-Zerlegung einer Orthogonalprojektion entspricht, was ebenfalls eine lineare Operation ist, liegt es nahe, dass die GWK-Zerlegung von  $V$  gerade eine solche Linearkombination der GWK-Zerlegungen von  $V(z)$  für verschiedene  $z \in \mathbb{C}$  ist. Die Herleitung des minimalen erwarteten quadratischen Hedgefehlers, die ebenfalls wesentlich auf der linearen Zerlegung des zu hedgenden Derivats und der affinen Struktur des allgemeinen Volatilitätsmodells fußt, beschließt das Kapitel.

In **Kapitel 4** wird das Problem des varianz-optimalen Hedgens in den allgemeinen und flexiblen Zeittransformationsmodellen von Carr et al. (2003) analysiert, vgl. Abschnitt 1.4.4. Mittels des Semimartingalcharakteristikenkalküls wird die gemeinsame Charakteristik von Handelsaktivität  $y$  und Log-Rendite  $Z$  im integrierten OU-Zeittransformationsmodell und im integrierten CIR-Zeittransformationsmodell berechnet. Dabei ist zu beachten, dass aufgrund der Zeittransformation unterschiedliche Zeitskalen existieren. Hier gilt es, die Filtrierungen sauber zu definieren. Es wird gezeigt, dass die zeittransformierte Filtrierung gerade die kanonische Filtrierung der Handelsaktivität  $y$  und der Log-Rendite  $Z$  ist. Anhand der gemeinsamen Charakteristik von Handelsaktivität  $y$  und Log-Rendite  $Z$  in den Zeittransformationsmodellen erkennt man, dass diese Spezialfälle des allgemeinen affinen stochastischen Volatilitätsmodells sind, das in Kapitel 3 eingeführt worden ist. Durch Spezialisierung der allgemeinen Resultate in Kapitel 3 erhält man somit die Integraldarstellungen der varianz-optimalen Hedgingstrategie und des minimalen erwarteten quadratischen Hedgefehlers im integrierten OU-Zeittransformationsmodell und im integrierten CIR-Zeittransformationsmodell. Insbesondere werden die Lévy-Khintchine-Tripel des allgemeinen Modells bestimmt und das korrespondierende System der verallgemeinerten Riccati-Differentialgleichungen gelöst. Dabei werden die allgemeinen Voraussetzungen derart auf die spezielle Modellsituation übertragen, dass alle Annahmen in Form der Modellparameter ausgedrückt werden, wobei die Zunahme an Konkretheit auf der Modellebene dazu genutzt wird, die Komplexität der Prämissen zu reduzieren. Die resultierenden Voraussetzungen sind allesamt dergestalt, dass sie einfach überprüft werden können. In einem letzten Abschnitt werden zwei numerische Beispiele betrachtet, die verdeutlichen, wie leicht die theoretisch deduzierten For-

meln für den varianz-optimalen Hedge und den dazugehörigen Fehler ausgewertet werden können. Zu diesem Zweck werden die integrierten OU- und CIR-Zeittransformationsmodelle weiter spezifiziert. Im Kontext der numerischen Beispiele wird vereinfachend angenommen, dass die Leverage-Terme in den stochastischen Volatilitätsmodellen Null sind. Als Benchmark fungieren zum einen das klassische *Black-Scholes-Modell* und zum anderen das *exponentielle normal-invers-Gaußsche Lévy-Modell* (das *exponentielle NIG-Lévy-Modell*). Der Lévy-Prozess  $X$  in den Modellgleichungen (1.91) und (1.97) wird somit auch in Form eines NIG-Prozesses spezifiziert. Das resultierende integrierte CIR-Zeittransformationsmodell wird kurz als *NIG-CIR-Modell* bezeichnet. Da der CIR-Prozess als stationäre Verteilung eine Gamma-Verteilung besitzt, wählt man im integrierten OU-Zeittransformationsmodell die Handelsaktivität in Form eines Gamma-OU-Prozesses (mit  $\eta = 0$  in (1.99)), um eine Vergleichbarkeit zu gewährleisten. Das entsprechende Modell wird *NIG-Gamma-OU-Modell* genannt. Das Problem des Schätzens der Parameter in solchen Modellen soll nicht Gegenstand dieser Arbeit sein. Im ersten Beispiel geben wir uns einen hypothetischen Parametersatz für das NIG-Gamma-OU-Modell vor. Die übrigen Parameter in den anderen drei Modellen werden dann so bestimmt, dass die Modelle möglichst gut miteinander vergleichbar sind. Zu einer europäischen Call-Option mit vorgegebener Fälligkeit und vorgegebenem Basispreis werden in Abhängigkeit des heutigen Underlyingkurses  $S_0$  die Kurven des varianz-optimalen Anfangskapitals und die Kurven des varianz-optimalen Anfangshedges (das ist der optimale Hedge zum Zeitpunkt Null) in den verschiedenen Modellen gezeichnet und gegenübergestellt. Am Beispiel einer am Geld notierenden Call-Option werden in den verschiedenen Modellen die minimalen erwarteten quadratischen Hedgefehler sowie die zugehörigen Standardabweichungen berechnet, die jeweils zum Anfangskapital, das als varianz-optimaler Optionspreis interpretiert wird, und zu der Standardabweichung, die mit der ungedeckten Position einhergeht, in Relation gesetzt werden. Die ungedeckte Position entspricht der Strategie, die Optionsprämie zu kassieren und dann bis zur Fälligkeit abzuwarten, ohne mit dem Underlying zu handeln. Im zweiten Beispiel betrachten wir die vier genannten Modelle in der risikoneutralen Welt. Die Parameter werden dort durch Kalibrieren an eine Menge aktueller Marktpreise von diversen Optionen mit verschiedenen Fälligkeiten und Basiskursen mittels der Kleinste-Quadrate-Methode bestimmt, hinsichtlich der Parameter in den kalibrierten Modellen vgl. Schoutens (2003), die Tabellen 6.3, 7.3 und die Abbildung 4.4. Da das Problem des varianz-optimalen Hedgens jedoch unter dem physikalischen Maß und nicht unter dem statistischen Martingalmaß zu lösen ist, kann die in der risikoneutralen Welt ermittelte Lösung nur als Näherung an die Lösung unter dem physikalischen Maß angesehen werden, wobei zu diskutieren ist, wie gut diese Näherung ist, d.h. wie weit das physikalische Maß und das statistische Martingalmaß voneinander entfernt liegen.

In **Kapitel 5** werden kurz einige interessante Fragestellungen dargelegt, die die vorliegende Arbeit aufwirft und die zum Teil bereits Gegenstand aktueller Forschungsarbeiten sind. Ferner werden Möglichkeiten aufgezeigt, den vorgestellten Ansatz des quadratischen Hedgens in affinen Volatilitätsmodellen zu erweitern respektive zu modifizieren.

# Kapitel 2

## Semimartingalcharakteristikenkalkül

An dieser Stelle sei nochmals daran erinnert, dass nicht erklärte Bezeichnungen und Begrifflichkeiten wie in der Monographie von Jacod & Shiryaev (2003) verwendet werden. Gegeben sei der filtrierte Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, P)$ .

### 2.1 Kompensatoren

Einleitend soll eine Übersicht gegeben werden über die wichtigsten Prozessklassen, die hier verwendet werden.

**Notation.**  $\mathcal{M}$  ist die Klasse der **gleichgradig integrierbaren Martingale**. Mit  $\mathcal{H}^2$  wird die Klasse der **quadratisch integrierbaren Martingale** bezeichnet. Diese umfasst alle Martingale  $X$  mit  $\sup\{E_P[X_t^2] : t \in \mathbb{R}_+\} < \infty$ . Ferner definiert man:

1.  $\mathcal{V}^+$  ist die Klasse der monoton wachsenden,  $\mathbb{R}$ -wertigen, adaptierten und in Null startenden càdlàg-Prozesse. Kurz wird sie auch Klasse der **adaptierten wachsenden Prozesse** genannt.
2.  $\mathcal{V}$  definiert die Klasse der  $\mathbb{R}$ -wertigen, adaptierten und in Null startenden càdlàg-Prozesse von endlicher Variation. Sie wird als Klasse der **adaptierten Prozesse von endlicher Variation** bezeichnet.
3. Für adaptierte wachsende Prozesse kann man die *terminale Variable* eines Prozesses  $A = (A_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  definieren:

$$A_\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} A_t. \quad (2.1)$$

Diese nimmt Werte in  $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$  an.  $\mathcal{A}^+ := \{A \in \mathcal{V}^+ : E_P[A_\infty] < \infty\}$  definiert die Klasse der **integrierbaren wachsenden Prozesse**.

4. Für  $A \in \mathcal{V}$  definiert man den *Variationsprozess*  $(\text{Var}(A)_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  durch

$$\text{Var}(A)_t(\omega) := V_0^t(A(\omega)), \quad (2.2)$$

wobei  $V_a^b(g) := \sup\{\sum_{k=1}^n |g(t_k) - g(t_{k-1})| : n \in \mathbb{N}, a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = b\}$  die *Totalvariation* von  $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  auf  $[a, b]$  angibt. Die Klasse der **Prozesse von integrierbarer Variation** wird definiert durch

$$\mathcal{A} := \{A \in \mathcal{V} : E_P[\text{Var}(A)_\infty] < \infty\}. \quad (2.3)$$

Mit  $\mathcal{C}_{\text{loc}}$  wird die **lokalierte Klasse** der Prozessklasse  $\mathcal{C}$  bezeichnet.

Der einfachste zu definierende Kompensator ist der eines Spezialsemimartingals. Dieser entspricht gerade dem vorhersehbaren Anteil von endlicher Variation.

**Definition 2.1** 1. Ein **Semimartingal** ist ein Prozess  $X$ , der in der Form

$$X = X_0 + M + A \quad (2.4)$$

zerlegt werden kann, wobei  $X_0$  endlich und  $\mathcal{F}_0$ -messbar,  $M \in \mathcal{M}_{\text{loc}}$  mit  $M_0 = 0$  und  $A \in \mathcal{V}$  sind. Die Klasse der Semimartingale wird durch  $\mathcal{S}$  symbolisiert.

2. Ein **Spezialsemimartingal** ist ein Semimartingal, in dessen Zerlegung (2.4)  $A$  zusätzlich vorhersehbar ist. Die Klasse der Spezialsemimartingale wird durch  $\mathcal{S}_p$  symbolisiert.

Man beachte, dass die Definition eines Semimartingals  $X$  bereits impliziert, dass  $X$  ein adaptierter càdlàg-Prozess ist. Die Zerlegung 2.4 eines Semimartingals ist im Allgemeinen nicht eindeutig. Die Zerlegung eines Spezialsemimartingals  $X$  der Form

$$X = X_0 + M + A \quad \text{mit } M \in \mathcal{M}_{\text{loc}}, M_0 = 0 \text{ und einem vorhersehbaren } A \in \mathcal{V} \quad (2.5)$$

ist dagegen bis auf Ununterscheidbarkeit eindeutig, vgl. Korollar I.3.16 in Jacod & Shiryaev (2003).

**Definition 2.2** Sei  $X \in \mathcal{S}_p$ . Die Zerlegung (2.5) heißt auch **kanonische Zerlegung** von  $X$ . Der Prozess  $A$  in (2.5) wird **Kompensator** von  $X$  genannt, in Zeichen  $X^p := A$ .

**Bemerkung 2.3** Falls  $X$  ein Semimartingal ist und  $|\Delta X| \leq a$  für ein  $a \in \mathbb{R}_+$  erfüllt, ist  $X$  bereits ein Spezialsemimartingal, vgl. Jacod & Shiryaev (2003), Lemma I.4.24.

In der Literatur findet man oft zunächst nur die Definition des Kompensators für Prozesse von lokal integrierbarer Variation.

**Satz 2.4** Sei  $X \in \mathcal{A}_{\text{loc}}$ . Dann existieren bis auf Ununterscheidbarkeit ein eindeutiger Prozess  $M \in \mathcal{M}_{\text{loc}}$  und ein eindeutiger vorhersehbarer Prozess  $A \in \mathcal{A}_{\text{loc}}$  dergestalt, dass  $X = M + A$  gilt.

BEWEIS. Siehe Jacod & Shiryaev (2003), Satz I.3.18. □

**Definition 2.5** Sei  $X \in \mathcal{A}_{\text{loc}}$ . Der eindeutig existierende vorhersehbare Prozess  $A$  in Satz 2.4 heißt **Kompensator** bzw. **duale vorhersehbare Projektion** von  $X$ . Symbolisch schreibt man  $X^p := A$ .

Proposition I.4.23, Jacod & Shiryaev (2003), impliziert, dass  $\mathcal{A}_{\text{loc}} \subseteq \mathcal{S}_p$  gilt. Somit stellt sich die Frage, ob Definition 2.2 und Definition 2.5 eventuell im Widerspruch stehen. Mit Hilfe von Jacod & Shiryaev (2003), Korollar I.3.16, sieht man aber, dass der Kompensator des Prozesses  $X \in \mathcal{A}_{\text{loc}} \subseteq \mathcal{S}_p$  im Sinne von Definition 2.2 mit dem Kompensator des Prozesses  $X \in \mathcal{A}_{\text{loc}} \subseteq \mathcal{S}_p$  im Sinne von Definition 2.5 übereinstimmt. Zur Definition der vorhersehbaren quadratischen Kovariation wird zunächst die Definition der quadratischen Kovariation benötigt. Die Regel der partiellen Integration, die man aus der deterministischen Analysis kennt, gilt im Kontext stochastischer Integration so nicht mehr. Es gibt aber in der stochastischen Analysis eine Entsprechung:

**Definition 2.6** Die **quadratische Kovariation** zweier Semimartingale  $X$  und  $Y$  ist definiert als der Prozess

$$[X, Y] := XY - X_0Y_0 - X_- \cdot Y - Y_- \cdot X. \quad (2.6)$$

Im Fall  $X = Y$  spricht man auch von **quadratischer Variation**. Die Gleichung (2.6) wird **Regel der partiellen Integration** genannt.

Die Bezeichnung der quadratischen Variation geht darauf zurück, dass  $\sup_{s \leq t} |S_s^{(n)} - [X, Y]_s|$  für  $n$  gegen Unendlich stochastisch gegen Null geht für alle  $t \in \mathbb{R}_+$ , wobei  $S^{(n)}$  definiert ist durch

$$S_t^{(n)} := \sum_{i=1}^{\infty} \left( X_{t_i^{(n)} \wedge t} - X_{t_{i-1}^{(n)} \wedge t} \right) \left( Y_{t_i^{(n)} \wedge t} - Y_{t_{i-1}^{(n)} \wedge t} \right), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (2.7)$$

mit  $0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < t_2^{(n)} < \dots$ ,  $\lim_{m \rightarrow \infty} t_m^{(n)} = \infty$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{i \in \mathbb{N}} |t_{i+1}^{(n)} - t_i^{(n)}| = 0$ , vgl. Jacod & Shiryaev (2003), Satz I.4.47.

**Definition 2.7** Seien  $X, Y \in \mathcal{S}$  derart, dass  $[X, Y] \in \mathcal{S}_p$  gilt. Dann heißt der Kompensator von  $[X, Y]$  **vorhersehbare quadratische Kovariation** bzw. **Spitzklammerprozess** von  $X$  und  $Y$ . Symbolisch schreibt man  $\langle X, Y \rangle := [X, Y]^p$ . Für  $X = Y$  spricht man entsprechend von der **vorhersehbaren quadratischen Variation**.

Gemäß Satz I.4.47(b), Jacod & Shiryaev (2003), ist  $[X, Y] \in \mathcal{V}$  für  $X, Y \in \mathcal{S}$ . Proposition I.4.23, Jacod & Shiryaev (2003), liefert dann, dass  $[X, Y] \in \mathcal{S}_p$  dann und nur dann gilt, wenn  $[X, Y] \in \mathcal{A}_{\text{loc}}$  ist. Für  $X, Y \in \mathcal{H}_{\text{loc}}^2$  hat man  $[X, Y] \in \mathcal{A}_{\text{loc}}$  und  $XY - [X, Y] \in \mathcal{M}_{\text{loc}}$ , vgl. Proposition I.4.50(a) und (b), Jacod & Shiryaev (2003). Daraus folgt:

$$XY - \langle X, Y \rangle \in \mathcal{M}_{\text{loc}} \quad \text{für alle } X, Y \in \mathcal{H}_{\text{loc}}^2. \quad (2.8)$$

Damit ist die vorliegende Definition der vorhersehbaren quadratischen Kovariation mit der in Jacod & Shiryaev (2003), Paragraph I.4a, kompatibel. Die wichtigsten Eigenschaften im Rahmen dieser Arbeit sind:

**Proposition 2.8** 1.  $X, Y \in \mathcal{H}^2 \Rightarrow \langle X, Y \rangle \in \mathcal{A}$  und  $XY - \langle X, Y \rangle \in \mathcal{M}$ .

2.  $X \in \mathcal{H}_{\text{loc}}^2 \Rightarrow \langle X, X \rangle \in \mathcal{V}^+$ .

3.  $X, Y \in \mathcal{H}_{\text{loc}}^2 \Rightarrow \langle X, Y \rangle = \langle X - X_0, Y - Y_0 \rangle$ .

BEWEIS. Siehe Jacod & Shiryaev (2003), Satz I.4.2. □

**Bemerkung 2.9** Quadratisch integrierbare Martingale können eindeutig mittels ihrer terminalen Variable, die eine  $L^2$ -Zufallsvariable ist, identifiziert werden, und umgekehrt, vgl. Jacod & Shiryaev (2003), Satz I.1.42. Aufgrund der Linearität der bedingten Erwartung existiert ein Isomorphismus  $\mathcal{H}^2 \ni M \mapsto M_\infty \in L^2$ . Man beachte, dass durch

$$(M, N)_{H^2} := E_P[M_\infty N_\infty], \quad (2.9)$$

$$\|M\|_{H^2} := \sqrt{(M, M)_{H^2}} = \|M_\infty\|_{L^2} \quad (2.10)$$

ein Skalarprodukt und eine Norm auf  $\mathcal{H}^2$  definiert werden. Dabei bezeichnet  $\|\cdot\|_{L^2}$  die  $L^2$ -Norm. Da  $L^2$  ein Hilbertraum ist, vgl. z.B. Jacod & Protter (2003), Satz 22.3, wird durch diese Festlegung von Skalarprodukt und Norm  $\mathcal{H}^2$  ebenfalls zu einem Hilbertraum und der Isomorphismus zu einer Isometrie. Das Skalarprodukt kann mittels des Spitzklammerprozesses ausgedrückt werden:

$$(M, N)_{H^2} = E_P[\langle M, N \rangle_\infty] + E_P[M_0 N_0], \quad (2.11)$$

vgl. Jacod & Shiryaev (2003), I.4.6.

**Definition 2.10** 1. Seien  $M, N \in \mathcal{M}_{\text{loc}}$ . Die lokalen Martingale  $M$  und  $N$  werden **orthogonal** genannt, falls  $MN \in \mathcal{M}_{\text{loc}}$  ist.

2. Der Prozess  $M \in \mathcal{M}_{\text{loc}}$  heißt **rein unstetiges lokales Martingal**, falls  $M$  orthogonal zu allen stetigen lokalen Martingalen ist und  $M_0 = 0$  gilt.

Die Bezeichnung im ersten Teil dieser Definition geht darauf zurück, dass für quadratisch integrierbare Martingale  $M$  und  $N$  die Orthogonalität im Sinne von Definition 2.10 dazu äquivalent ist, dass  $\langle M, N \rangle = 0$  gilt, was wiederum dazu äquivalent ist, dass für jede Stoppzeit  $\tau$  die quadratisch integrierbaren Martingale  $M^\tau$  und  $N - N_0$  orthogonal im Hilbertraum  $\mathcal{H}^2$  sind, vgl. Jacod & Shiryaev (2003), Proposition I.4.15. Die erste Äquivalenz gilt bereits für  $M, N \in \mathcal{H}_{\text{loc}}^2$ .

**Satz 2.11** Jeder Prozess  $M \in \mathcal{M}_{\text{loc}}$  lässt sich eindeutig (bis auf Ununterscheidbarkeit) zerlegen in der Form

$$M = M_0 + M^c + M^d, \quad (2.12)$$

wobei  $M^c \in \mathcal{M}_{\text{loc}}$  stetig ist,  $M_0^c = 0$  gilt und  $M^d$  ein rein unstetiges lokales Martingal ist.

BEWEIS. Siehe Jacod & Shiryaev (2003), Satz I.4.18.  $\square$

Der Prozess  $M^c$  wird auch *stetiger Teil* von  $M \in \mathcal{M}_{\text{loc}}$  genannt und der Prozess  $M^d$  *rein unstetiger Teil*. Man beachte, dass rein unstetig nicht bedeutet, dass der Prozess Summe seiner Sprünge ist. Man betrachte dazu zum Beispiel einen kompensierten Poisson-Prozess. Da dieser zugleich Martingal und von endlicher Variation ist, ist dieser ein rein unstetiges Martingal, vgl. Jacod & Shiryaev (2003), Lemma I.4.14, ändert seine Werte aber nicht nur durch Sprünge. Der kompensierte Poisson-Prozess ist auch ein gutes Beispiel für ein Semimartingal, dessen Zerlegung nicht eindeutig ist.

**Bemerkung 2.12** Sei  $X \in \mathcal{S}$  mit einer Zerlegung der Form (2.4). Der stetige Teil von  $M$  ist dann unabhängig von der Zerlegung. Für zwei Zerlegungen  $X = X_0 + M + A = X_0 + \tilde{M} + \tilde{A}$  gilt nämlich  $M^c - \tilde{M}^c = (\tilde{A} - A)^c = 0$ , da  $\tilde{A} - A \in \mathcal{M}_{\text{loc}} \cap \mathcal{V}$  und damit rein unstetig ist gemäß Jacod & Shiryaev (2003), Lemma 4.14.

**Definition 2.13** Das lokale Martingal  $M^c$  in der Bemerkung 2.12 heißt **stetiger Martingalanteil** von  $X \in \mathcal{S}$ . Symbolisch schreibt man  $X^c := M^c$ .

**Bemerkung 2.14** Falls  $M \in \mathcal{M}_{\text{loc}}$  derart ist, dass  $M_0 \in L^2$  gilt und der Prozess  $\Delta M$  lokal beschränkt ist, ist  $M$  ein lokal quadratisch integrierbares Martingal, vgl. Jacod & Shiryaev (2003), I.4.1.

Die Definition des Kompensatorbegriffes im Kontext von Zufallsmaßen ist ein wenig schwieriger.

**Definition 2.15** Ein **Zufallsmaß**  $\mu$  auf  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$  ist eine Familie  $(\mu(\omega))_{\omega \in \Omega}$  nichtnegativer Maße auf  $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ , die der Bedingung  $\mu(\omega, \{0\} \times \mathbb{R}^d) = 0$  für alle  $\omega \in \Omega$  genügen.

Auf  $\tilde{\Omega} := \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$  werden die  $\sigma$ -Algebra  $\tilde{\mathcal{O}} := \mathcal{O} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  der gut-messbaren Mengen und die  $\sigma$ -Algebra  $\tilde{\mathcal{P}} := \mathcal{P} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  der vorhersehbaren Mengen in  $\tilde{\Omega}$  definiert. Eine  $\tilde{\mathcal{O}}$ -messbare Funktion  $W : \tilde{\Omega} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  heißt *gut-messbare Funktion*. Dabei ist  $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$  die Zweipunkt kompaktifizierung von  $\mathbb{R}$ . Entsprechend wird eine  $\tilde{\mathcal{P}}$ -messbare numerische Funktion  $W$  auf  $\tilde{\Omega}$  *vorhersehbare Funktion* genannt. Wichtiger Bestandteil der Definition eines Kompensators von Zufallsmaßen ist der *Integralprozess*.

**Definition 2.16** Für ein Zufallsmaß  $\mu$  und eine gut-messbare Funktion  $W : \tilde{\Omega} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  ist der **Integralprozess**  $W * \mu = (W * \mu_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  definiert durch

$$W * \mu_t(\omega) := \begin{cases} \int_{[0,t] \times \mathbb{R}^d} W(\omega, s, x) \mu(\omega, d(s, x)), & \text{falls das Integral absolut konvergent ist,} \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Um das Sprungsverhalten eines Semimartingals näher charakterisieren zu können, ist man an einem Maß interessiert, das die Sprünge eines Semimartingals von einer bestimmten Größenordnung innerhalb eines bestimmten Zeitraumes zählt. Da dieser Zählvorgang pfadabhängig ist, handelt es sich um ein Zufallsmaß. Zudem ist das Maß ganzzahlig. Allgemeiner und genauer definiert man *ganzzahlige Zufallsmaße* wie folgt:

- Definition 2.17**
1. Ein Zufallsmaß  $\mu$  heißt **gut-messbar**, falls der Integralprozess  $W * \mu$  für jede gut-messbare numerische Funktion  $W$  auf  $\tilde{\Omega}$  gut-messbar ist. Analog definiert man ein **vorhersehbares Zufallsmaß**.
  2. Ein gut-messbares Zufallsmaß  $\mu$  heißt  **$\tilde{\mathcal{P}}$ - $\sigma$ -endlich**, falls es eine Folge  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$   $\tilde{\mathcal{P}}$ -messbarer, gegen  $\tilde{\Omega}$  aufsteigender Mengen gibt mit  $1_{A_n} * \mu \in \mathcal{A}^+$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .
  3. Ein Zufallsmaß  $\mu$  heißt **ganzzahlig**, falls es gut-messbar und  $\tilde{\mathcal{P}}$ - $\sigma$ -endlich ist sowie die Bedingungen  $\mu(\omega, \{t\} \times \mathbb{R}^d) \leq 1$  für alle  $(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+$  und  $\mu(\omega, A) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  für alle  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  und alle  $\omega \in \Omega$  erfüllt.

Das wichtigste, bereits oben angedeutete Beispiel für ein ganzzahliges Zufallsmaß ist das Maß der Sprünge eines Semimartingals, vgl. Jacod & Shiryaev (2003), Proposition II.1.16. Ein Prozess  $X = (X^1, \dots, X^d)$  ist ein  $\mathbb{R}^d$ -wertiges Semimartingal, falls die Komponenten  $X^i, i \in \{1, \dots, d\}$ ,  $\mathbb{R}$ -wertige Semimartingale sind.

**Definition 2.18** Sei  $X$  ein  $\mathbb{R}^d$ -wertiges Semimartingal. Das **Maß der Sprünge**  $\mu^X$  von  $X$  ist definiert durch

$$\mu^X(\omega, [0, t] \times G) := \sum_{s \in \mathbb{R}_+} 1_{\{\Delta X_s(\omega) \neq 0\}} \varepsilon_{(s, \Delta X_s(\omega))}([0, t] \times G) \quad (2.13)$$

für alle  $t \geq 0$  und alle  $G \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ , wobei  $\varepsilon$  das Dirac-Maß symbolisiert.

Man beachte, dass die Summe in Gleichung (2.13) nur über abzählbar viele  $s \in \mathbb{R}_+$  läuft, da  $X$  càdlàg ist, d.h. da  $t \mapsto X_t(\omega)$  als càdlàg-Funktion nur abzählbar oft springt. Es gilt

$$\mu^X(\omega, [0, t] \times G) = |\{s \in [0, t] : \Delta X_s(\omega) \in G \setminus \{0\}\}|. \quad (2.14)$$

Satz 2.4 gilt auch für  $\mathcal{A}_{\text{loc}}^+$  statt  $\mathcal{A}_{\text{loc}}$ , vgl. Jacod & Shiryaev (2003), Satz I.3.17. In Analogie dazu sollen nun Kompensatoren von Zufallsmaßen eingeführt werden.

**Satz 2.19** Sei  $\mu$  ein gut-messbares,  $\tilde{\mathcal{P}}$ - $\sigma$ -endliches Zufallsmaß.

1. Dann existiert ein bis auf eine  $P$ -Nullmenge eindeutiges vorhersehbares Zufallsmaß  $\mu^p$  mit der Eigenschaft, dass

$$E_P[W * \mu_\infty^p] = E_P[W * \mu_\infty] \quad (2.15)$$

für jede nichtnegative, vorhersehbare numerische Funktion  $W$  auf  $\tilde{\Omega}$  gilt.

2. Ferner existiert ein vorhersehbarer Prozess  $A \in \mathcal{A}^+$  und ein Kern  $F$  von  $(\Omega \times \mathbb{R}_+, \mathcal{P})$  nach  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$  mit

$$\mu^p(\omega, [0, t] \times G) = \int_0^t F(\omega, s, G) dA_s(\omega) \quad (2.16)$$

für  $\omega \in \Omega, t \in \mathbb{R}_+$  und  $G \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ .

BEWEIS. Siehe Jacod & Shiryaev (2003), Satz II.1.8.  $\square$

**Definition 2.20** Das Zufallsmaß  $\mu^p$  in Satz 2.19 heißt **Kompensator** bzw. **duale vorhersehbare Projektion** von  $\mu$ . Falls  $\mu$  das Maß der Sprünge eines Semimartingals  $X$  ist, d.h.  $\mu = \mu^X$ , definiert man  $\nu^X := \mu^p$ .

**Bemerkung 2.21** Der Kompensator  $\mu^p$  von  $\mu$  ist eindeutig dadurch charakterisiert, dass für alle vorhersehbaren numerischen Funktionen  $W$  auf  $\tilde{\Omega}$  mit  $|W| * \mu \in \mathcal{A}_{loc}^+$  gilt, dass  $|W| * \mu^p \in \mathcal{A}_{loc}^+$  ist und

$$(W * \mu)^p = W * \mu^p \quad (2.17)$$

im Sinne von Definition 2.5 für  $\mathcal{A}_{loc}^+$  statt  $\mathcal{A}_{loc}$  Gültigkeit besitzt. Vgl. ebenfalls Jacod & Shiryaev (2003), Satz II.1.8. Man beachte, dass es eine Entsprechung dieser Identität auch für die stochastische Integration nach Prozessen gibt:

$$(H \cdot X)^p = H \cdot X^p, \quad (2.18)$$

falls  $X \in \mathcal{A}_{loc}$  und  $H$  ein vorhersehbarer Prozess sind derart, dass  $H \cdot X \in \mathcal{A}_{loc}$  gilt, vgl. Jacod & Shiryaev (2003), Satz I.3.18.

## 2.2 Semimartingalcharakteristiken

Im Rahmen dieses Abschnitts sei  $X$  ein  $\mathbb{R}^d$ -wertiges Semimartingal auf der stochastischen Basis  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, P)$ .

**Definition 2.22** Eine Funktion  $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  wird **Abschneidefunktion** genannt, falls  $h$  beschränkt ist und in einer Umgebung von Null der Identität  $h(x) = x$  genügt.

Im Folgenden sei  $h$  eine beliebige, aber fest gewählte Abschneidefunktion. Zu  $X$  definiere man die Hilfsprozesse

$$\bar{X}(h) := \sum_{s \leq \cdot} (\Delta X_s - h(\Delta X_s)) = (x - h(x)) * \mu^X, \quad (2.19)$$

$$X(h) := X - \bar{X}(h), \quad (2.20)$$

wobei  $\mu^X$  das Maß der Sprünge von  $X$  bezeichnet. Grob gesprochen entspricht  $\bar{X}(h)$  der Summe der großen Sprünge, da  $h$  in einer Umgebung von Null gerade die Identität ist und  $\Delta X_s - h(\Delta X_s)$  somit Null wird für hinreichend kleine Sprünge. Der Prozess der Sprünge des um die großen Sprünge von  $X$  bereinigten Semimartingals  $X(h)$  ist gegeben durch

$$\Delta X(h) = \Delta X - (\Delta X - h(\Delta X)) = h(\Delta X). \quad (2.21)$$

Aufgrund der Beschränktheit von  $h$  liefert Bemerkung 2.3, dass  $X(h)$  ein Spezialsemimartingal ist. Mithilfe der Kompensatoren, die in Abschnitt 2.1 behandelt worden sind, kann nun die *integrale Semimartingalcharakteristik* von  $X$  definiert werden.

**Definition 2.23** Für das  $\mathbb{R}^d$ -wertige Semimartingal  $X$  definiere man  $B^X(h)$ ,  $C^X$  und  $\nu^X$  wie folgt:

1. Für  $i \in \{1, \dots, d\}$  ist  $(B^X)^i(h)$  der Kompensator des Spezialsemimartingals  $X^i(h)$ .
2. Für  $i, j \in \{1, \dots, d\}$  ist  $(C^X)^{i,j} := \langle X^{i,c}, X^{j,c} \rangle$ , wobei  $X^{i,c}$  den stetigen Martingalanteil von  $X^i$  symbolisiert.
3.  $\nu^X$  ist der Kompensator des Maßes der Sprünge  $\mu^X$  von  $X$ .

Das Tripel  $(B^X(h), C^X, \nu^X)$  heißt **integrale Semimartingalcharakteristik** von  $X$ .

Man beachte, dass die Spitzklammerprozesse in Definition 2.23 wohldefiniert sind, vgl. Bemerkung 2.14. Die Größen  $B^X(h)$ ,  $C^X$  und  $\nu^X$  sind gemäß Definition allesamt vorhersehbar und bis auf  $P$ -Nullmengen eindeutig. Nur  $B^X$  hängt von der Wahl der Abschneidefunktion ab. Ist  $\tilde{h}$  eine weitere Abschneidefunktion, so gilt

$$B^X(\tilde{h}) = B^X(h) + (\tilde{h}(x) - h(x)) * \nu^X, \quad (2.22)$$

vgl. II.2.25 in Jacod & Shiryaev (2003). Falls  $X$  stetig ist, gilt  $\nu^X = 0$ , da das Maß der Sprünge dann Null ist. Das vorhersehbare Zufallsmaß  $\nu^X$  hat Eigenschaften, die den Eigenschaften eines Lévy-Maßes ähnlich sind. Es gilt nämlich  $\nu^X(\omega, [0, t] \times \{0\}) = 0$  für alle  $\omega \in \Omega$  und alle  $t \in \mathbb{R}_+$ , vgl. II.2.15, Jacod & Shiryaev (2003). Und ferner kann man  $(\|x\|^2 \wedge 1) * \nu^X \in \mathcal{V}$  zeigen, vgl. II.2.13 und I.3.9 in Jacod & Shiryaev (2003). Inwieweit Semimartingalcharakteristiken verallgemeinerte Lévy-Khintchine-Tripel sind, wird später noch deutlicher. Zunächst der wichtige

**Satz 2.24** Sei  $(B^X(h), C^X, \nu^X)$  die integrale Charakteristik von  $X$ . Dann existiert eine Version  $(b^X(h), c^X, F^X, A)$  dieser Charakteristik dergestalt, dass

$$(B^X)^i(h) = (b^X)^i(h) \cdot A, \quad (C^X)^{i,j} = (c^X)^{i,j} \cdot A, \quad (2.23)$$

$$\nu^X(\omega, [0, t] \times G) = \int_0^t F^X(\omega, s, G) dA_s(\omega) \quad (2.24)$$

gelten für  $\omega \in \Omega$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$  und  $G \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ ,  $i, j \in \{1, \dots, d\}$ , wobei  $A \in \mathcal{V}^+$  vorhersehbar,  $b^X(h)$  ein vorhersehbarer,  $\mathbb{R}^d$ -wertiger Prozess mit  $(b^X)^i(h) \in L(A)$  für  $i \in \{1, \dots, d\}$ ,  $c^X$  ein vorhersehbarer Prozess mit Werten in der Menge der symmetrischen, positiv semidefiniten  $d \times d$ -Matrizen derart, dass  $(c^X)^{i,j} \in L(A)$  für  $i, j \in \{1, \dots, d\}$ , und  $F^X$  ein Kern von  $(\Omega \times \mathbb{R}_+, \mathcal{P})$  nach  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$  mit

$$F^X(\omega, t, \{0\}) = 0 \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}^d} (\|x\|^2 \wedge 1) F^X(\omega, t, dx) < \infty, \quad \omega \in \Omega, t \in \mathbb{R}_+, \quad (2.25)$$

sind.

BEWEIS. Siehe Jacod & Shiryaev (2003), Proposition II.2.9. Man beachte, dass  $A \in \mathcal{A}_{\text{loc}}^+ \Leftrightarrow A \in \mathcal{V}^+$  gilt, wenn  $A$  vorhersehbar ist.  $\square$

Die Version  $(b^X(h), c^X, F^X, A)$  ist nicht eindeutig. Anstelle von  $(b^X(h), c^X, F^X, A)$  könnte man zum Beispiel ja auch  $(2b^X(h), 2c^X, 2F^X, \frac{1}{2}A)$  wählen. In den meisten Anwendungen ist die integrale Charakteristik absolut stetig, das heißt, dass  $A_t = t$  gewählt werden kann. Die zu  $A_t = t$  gehörende Version  $(b^X(h), c^X, F^X)$  ist bis auf  $P \otimes \lambda$ -Nullmengen eindeutig, wobei  $\lambda$  das Lebesgue-Maß symbolisiert. Vergleiche hierzu Kallsen (2006).

**Definition 2.25** Die zu  $A_t = t$  bis auf  $P \otimes \lambda$ -Nullmengen eindeutig existierende Version  $(b^X(h), c^X, F^X)$  aus Satz 2.24 heißt **differentielle Semimartingalcharakteristik** von  $X$ . Symbolisch schreibt man  $\partial X = (b^X(h), c^X, F^X)$ .

Da die Charakteristiken im Wesentlichen über Kompensatoren definiert sind, verwundert es nicht, dass diese äquivalent über eine lokale Martingaleigenschaft charakterisiert werden können, was Relevanz besitzt, wenn man beispielsweise einen Kandidaten für eine Charakteristik hat und prüfen möchte, ob dieser tatsächlich der Charakteristik entspricht.

**Satz 2.26** Seien  $b$  ein vorhersehbarer  $\mathbb{R}^d$ -wertiger Prozess mit  $b^i \in L(I)$  für  $i \in \{1, \dots, d\}$ ,  $c$  ein vorhersehbarer  $\mathbb{R}^{d \times d}$ -wertiger Prozess mit Werten in der Menge der symmetrischen, positiv semidefiniten Matrizen und mit  $c^{i,j} \in L(I)$  für  $i, j \in \{1, \dots, d\}$  und  $F$  ein Kern von  $(\Omega \times \mathbb{R}_+, \mathcal{P})$  nach  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$  mit der Eigenschaft (2.25), wobei  $I$  den Identitätsprozess bezeichnet. Dann und nur dann gilt  $\partial X = (b, c, F)$ , wenn Real- und Imaginärteil des  $\mathbb{C}$ -wertigen Prozesses

$$\exp\{ir^\top X\} - \int_0^\cdot \exp\{ir^\top X_{t-}\} \tilde{\psi}(r)_t dt$$

für jedes  $r \in \mathbb{R}^d$  lokale Martingale sind, wobei

$$\tilde{\psi}(r)_t := ir^\top b_t - \frac{1}{2} r^\top c_t r + \int_{\mathbb{R}^d} \left( e^{ir^\top x} - 1 - ir^\top h(x) \right) F_t(dx), \quad r \in \mathbb{R}^d, \quad (2.26)$$

den Lévy-Exponent von  $(b, c, F)(\omega, t)$  bezeichnet.

BEWEIS. Siehe Jacod & Shiryaev (2003), Satz II.2.42.  $\square$

Der Satz suggeriert, dass die differentielle Semimartingalcharakteristik ein lokales Lévy-Khintchine-Tripel ist. Grob gesprochen, verhält sich ein Semimartingal mit differentielle Charakteristik  $(b, c, F)$  zum Zeitpunkt  $t$  lokal wie ein Lévy-Prozess mit Lévy-Khintchine-Tripel  $(b, c, F)(\omega, t)$ , vgl. Kallsen (2006). Der nächste Satz bekräftigt diese Aussage dahingehend, dass  $\tilde{\psi}$  eine Art verallgemeinerter Lévy-Exponent ist.

**Satz 2.27** Seien  $I$  der Identitätsprozess und  $\tilde{\psi}(r)$ ,  $r \in \mathbb{R}^d$ , sowie  $b$ ,  $c$  und  $F$  definiert wie in Satz 2.26. Es gelte, dass  $\tilde{\psi}(r) \cdot I$  ausnahmslos keine Sprünge der Größe  $-1$  hat. Dann sind äquivalent:

- (i) Das Semimartingal  $X$  hat die differentielle Charakteristik  $\partial X = (b, c, F)$ .

(ii) Für alle  $r \in \mathbb{R}^d$  sind Real- und Imaginärteil des Prozesses  $e^{ir^\top X} / \mathcal{E}(\tilde{\psi}(r) \cdot I)$  lokale Martingale.

Dabei bezeichnet  $\mathcal{E}(\tilde{\psi}(r) \cdot I)$  das stochastische Exponential von  $\tilde{\psi}(r) \cdot I$ .

BEWEIS. Siehe Jacod & Shiryaev (2003), Korollar II.2.48.  $\square$

Falls  $L$  für einen  $\mathbb{R}^d$ -wertigen Lévy-Prozess mit Lévy-Khintchine-Tripel  $(b^L, c^L, F^L)$  und Lévy-Exponent  $\tilde{\psi}^L$  steht, so gilt aufgrund der unabhängigen, stationären Zuwächse von  $L$ , dass Real- und Imaginärteil des  $\mathbb{C}$ -wertigen Prozesses  $e^{ir^\top L} / e^{I\tilde{\psi}^L(r)}$  Martingale sind. Satz 2.27 ist somit die Entsprechung dieses Sachverhalts in der Welt der Semimartingale. Unter welchen Umständen ein Semimartingal ein Lévy-Prozess ist, besagt der folgende Satz:

**Satz 2.28** Ein  $\mathbb{R}^d$ -wertiges Semimartingal  $X$  mit  $X_0 = 0$  ist genau dann ein Lévy-Prozess, wenn die integrale Charakteristik von  $X$  absolut stetig ist und die differentielle Charakteristik  $\partial X = (b^X(h), c^X, F^X)$  von  $X$  nicht von  $(\omega, t)$  abhängt. In diesem Fall stimmt  $\partial X$  mit dem Lévy-Khintchine-Tripel überein.

BEWEIS. Siehe Jacod & Shiryaev (2003), Korollar II.4.19.  $\square$

Wie bereits angedeutet, können Semimartingalcharakteristiken dazu benutzt werden, Spitzklammerprozesse zu berechnen. Dieser für die vorliegende Arbeit sehr bedeutsame Zusammenhang soll am Ende dieses Abschnitts kurz betrachtet werden.

**Definition 2.29** Ein  $\mathbb{R}^d$ -wertiges Semimartingal  $X$  heißt **lokal quadratisch integrierbar**, falls  $X$  ein Spezialsemimartingal mit kanonischer Zerlegung  $X = X_0 + M + A$  ist, wobei  $M^i \in \mathcal{H}_{\text{loc}}^2$  gilt für alle  $i \in \{1, \dots, d\}$ .

**Satz 2.30** Sei  $X$  ein  $\mathbb{R}^d$ -wertiges Semimartingal mit integraler Semimartingalcharakteristik  $(B^X(h), C^X, \nu^X)$ .  $X$  ist genau dann ein lokal quadratisch integrierbares Semimartingal, wenn  $\|x\|^2 * \nu^X \in \mathcal{A}_{\text{loc}}$  gilt. Ist  $X = X_0 + M + A$  die kanonische Zerlegung von  $X$ , kann in diesem Fall der Spitzklammerprozess  $\langle M^i, M^j \rangle$  für  $i, j \in \{1, \dots, d\}$  wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned} \langle M^i, M^j \rangle_t &= (C^X)_t^{i,j} + \int_{[0,t] \times \mathbb{R}^d} x^i x^j \nu^X(d(s, x^1, \dots, x^d)) \\ &\quad - \sum_{s \leq t} \int_{\{s\} \times \mathbb{R}^d} x^i \nu^X(d(r, x^1, \dots, x^d)) \int_{\{s\} \times \mathbb{R}^d} x^j \nu^X(d(r, x^1, \dots, x^d)), \end{aligned}$$

wobei  $t \in \mathbb{R}_+$  ist. Falls  $(B^X(h), C^X, \nu^X)$  absolut stetig ist, vereinfacht sich die Berechnung:

$$\langle M^i, M^j \rangle_t = \int_0^t (c^X)_s^{i,j} ds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} x^i x^j F_s^X(d(x^1, \dots, x^d)) ds, \quad (2.27)$$

wobei  $t \in \mathbb{R}_+$  ist und  $(b^X(h), c^X, F^X)$  die differentielle Charakteristik von  $X$  angibt.

BEWEIS. Siehe Jacod & Shiryaev (2003), Proposition II.2.29.  $\square$

## 2.3 Charakteristikenkalkül

Viele Semimartingale lassen sich als Transformation von Lévy-Prozessen oder anderen elementaren Grundbausteinen von Prozessen, von denen man die Charakteristik explizit kennt, auffassen. Da aber auch der Identitätsprozess und der Wiener-Prozess Lévy-Prozesse sind, sind Lévy-Prozesse vermutlich sogar die atomaren Bausteine von Prozessen schlechthin hinsichtlich der Zusammensetzung vieler Semimartingale, die in der Anwendung Relevanz besitzen. Als Transformationen kommen beispielsweise  $C^2$ -Funktionen, stochastische Integration oder endliche, absolut stetige Zeittransformationen in Frage. Kennt man die differentielle Charakteristik eines Semimartingals und transformiert man dieses mittels eines der genannten Instrumente, so weiß man auf der einen Seite, dass das transformierte Semimartingal wieder ein Semimartingal ist, und auf der anderen Seite existieren Regeln, die die differentielle Semimartingalcharakteristik des transformierten Semimartingals liefern. Diese Regeln sind vergleichbar mit den Differentiationsregeln der deterministischen Analysis.

Aus der Itô-Formel resultiert die folgende Proposition, die einer Itô-Formel auf der Ebene von Charakteristiken entspricht.

**Proposition 2.31** *Sei  $X$  ein  $\mathbb{R}^d$ -wertiges Semimartingal mit differentieller Charakteristik  $\partial X = (b, c, F)$ . Ferner sei  $g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  zweimal stetig differenzierbar auf einer offenen Teilmenge  $U \subset \mathbb{R}^d$  derart, dass  $X, X_-$   $U$ -wertig sind. Dann besitzt das  $\mathbb{R}^n$ -wertige Semimartingal  $g(X)$  die differentielle Charakteristik  $\partial(g(X)) = (\tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{F})$ , gegeben durch*

$$\begin{aligned} \tilde{b}_t^i &= \sum_{k=1}^d D_k g^i(X_{t-}) b_t^k + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^d D_{k,l} g^i(X_{t-}) c_t^{k,l} \\ &\quad + \int \left( \tilde{h}^i(g(X_{t-} + x) - g(X_{t-})) - \sum_{k=1}^d D_k g^i(X_{t-}) h^k(x) \right) F_t(dx), \\ \tilde{c}_t^{i,j} &= \sum_{k,l=1}^d D_k g^i(X_{t-}) c_t^{k,l} D_l g^j(X_{t-}), \\ \tilde{F}_t(G) &= \int 1_G(g(X_{t-} + x) - g(X_{t-})) F_t(dx) \quad \forall G \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \quad \text{mit} \quad 0 \notin G, \end{aligned}$$

$i, j \in \{1, \dots, n\}$ . Dabei bezeichnen  $D_k$  etc. die partiellen Ableitungen sowie  $h$  und  $\tilde{h}$  zwei beliebige Abschneidefunktionen auf  $\mathbb{R}^d$  bzw.  $\mathbb{R}^n$ .

BEWEIS. Siehe Goll & Kallsen (2000), Korollar A.6. □

Semimartingale bilden die größtmögliche Klasse von Integratoren, bezüglich der man vorhersehbare, lokal beschränkte Prozesse integrieren kann, vgl. z.B. Bichteler (1981), Satz 7.6. Gemäß Satz III.6.19(b), Jacod & Shiryaev (2003), ist das stochastische Integral  $H \cdot X$  ein Semimartingal, wenn  $X$  ein  $\mathbb{R}^d$ -wertiges Semimartingal und  $H$  ein  $\mathbb{R}^{n \times d}$ -wertiger vorhersehbarer Prozess mit  $H \in L(X)$  sind. Die Charakteristik dieses stochastischen Integrals liefert die folgende Proposition.

**Proposition 2.32** Sei  $X$  ein  $\mathbb{R}^d$ -wertiges Semimartingal und  $H$  ein  $\mathbb{R}^{n \times d}$ -wertiger vorhersehbarer Prozess mit  $H^j \in L(X)$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Falls die differentielle Charakteristik des Semimartingals  $X$  gegeben ist durch  $\partial X = (b, c, F)$ , ist die differentielle Charakteristik  $\partial(H \cdot X) = (\tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{F})$  des  $\mathbb{R}^n$ -wertigen stochastischen Integrals  $H \cdot X := (H^j \cdot X)_{j=1, \dots, n}$  von der Gestalt

$$\begin{aligned}\tilde{b}_t &= H_t b_t + \int \left( \tilde{h}(H_t x) - H_t h(x) \right) F_t(dx), \\ \tilde{c}_t &= H_t c_t H_t^\top, \\ \tilde{F}_t(G) &= \int 1_G(H_t x) F_t(dx) \quad \forall G \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \quad \text{mit} \quad 0 \notin G.\end{aligned}$$

Hierbei geben  $h$  und  $\tilde{h}$  zwei beliebige Abschneidefunktionen auf  $\mathbb{R}^d$  bzw.  $\mathbb{R}^n$  an.

BEWEIS. Siehe Jacod & Shiryaev (2003), Proposition IX.5.3, und Kallsen & Shiryaev (2002b), Lemma 3.  $\square$

Als nächstes soll der Begriff der Zeittransformation, der bereits in Abschnitt 1.4.4 verwendet worden ist, mathematisch präzisiert werden. Gegeben seien die stochastischen Basen  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, P)$  und  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{G}_u)_{u \in \mathbb{R}_+}, P)$

**Definition 2.33** Eine **endliche, stetige Zeittransformation** ist ein stetiger,  $\mathbb{R}_+$ -wertiger Prozess  $(Y_t)_{t \in \mathbb{R}_+} \in \mathcal{V}^+$  auf  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, P)$  derart, dass  $Y_t$  bezüglich  $(\mathcal{G}_u)_{u \in \mathbb{R}_+}$  Stoppzeit ist für alle  $t \in \mathbb{R}_+$ . Die **zeittransformierte Filtrierung**  $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  ist definiert durch  $\tilde{\mathcal{F}}_t := \mathcal{G}_{Y_t}$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ . Dabei gibt  $\mathcal{G}_{Y_t}$  die  $\sigma$ -Algebra der  $Y_t$ -Vergangenheit an. Für einen Prozess  $X = (X_u)_{u \in \mathbb{R}_+}$  auf  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{G}_u)_{u \in \mathbb{R}_+}, P)$  definiert man den **zeittransformierten Prozess**  $(\tilde{X}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  auf  $(\Omega, \mathcal{F}, (\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, P)$  durch  $\tilde{X}_t := X_{Y_t}$ .

Dass die zeittransformierte Filtrierung  $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  tatsächlich eine Filtrierung ist, findet man zum Beispiel bei Jacod (1979), Abschnitt 10.1. Jacod (1979) zeigt zudem, dass wenn  $X$  ein Semimartingal bezüglich  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{G}_u)_{u \in \mathbb{R}_+}, P)$  ist, ist das zeittransformierte Semimartingal  $(\tilde{X}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , definiert durch  $\tilde{X}_t := X_{Y_t}$ , ein Semimartingal bezüglich  $(\Omega, \mathcal{F}, (\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, P)$ , vgl. Korollar 10.12 dort. Wie die differentielle Charakteristik des zeittransformierten Semimartingals im Fall einer *endlichen, absolut stetigen Zeittransformation* aussieht - das ist ein Spezialfall der endlichen, stetigen Zeittransformation, bei der die Zeittransformation von der Form  $Y_t = \int_0^t \dot{Y}_s ds$  ist mit nichtnegativer Ableitung  $\dot{Y}_t$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$  - besagt die folgende Proposition.

**Proposition 2.34** Seien  $X = (X_u)_{u \in \mathbb{R}_+}$  ein  $\mathbb{R}^d$ -wertiges Semimartingal bezüglich  $(\mathcal{G}_u)_{u \in \mathbb{R}_+}$  mit differentiemer Charakteristik  $\partial X = (b, c, F)$  und  $Y = (Y_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  eine endliche, absolut stetige Zeittransformation, die bezüglich  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  adaptiert und bezüglich  $(\mathcal{G}_u)_{u \in \mathbb{R}_+}$  Stoppzeit ist. Dann ist der zeittransformierte Prozess  $(\tilde{X}_t)_{t \in \mathbb{R}_+} := ((X \circ Y)_t)_{t \in \mathbb{R}_+} := (X_{Y_t})_{t \in \mathbb{R}_+}$  ein Semimartingal bezüglich der zeittransformierten Filtrierung  $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t \in \mathbb{R}_+} := (\mathcal{G}_{Y_t})_{t \in \mathbb{R}_+}$  und

besitzt eine differentielle Charakteristik  $\partial\tilde{X} = (\tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{F})$ , die gegeben ist durch

$$\begin{aligned}\tilde{b}_t &= b_{Y_{t-}} \dot{Y}_{t-}, \\ \tilde{c}_t &= c_{Y_{t-}} \dot{Y}_{t-}, \\ \tilde{F}_t(G) &= F_{Y_{t-}}(G) \dot{Y}_{t-} \quad \forall G \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).\end{aligned}$$

BEWEIS. Siehe Kallsen & Shiryaev (2002b), Lemma 5. □

Abschließend soll noch eine Rechenregel für die differentielle Charakteristik eines, im Sinne von Bochner (1949), subordinierten Lévy-Prozesses angegeben werden. Die Subordination kann auch als eine Art Zeittransformation aufgefasst werden, bei der die transformierte Zeit aufgrund der Monotonie des Subordinators ebenfalls nur vorwärts läuft. Allerdings kann der Verlauf der transformierten Zeit Sprünge aufweisen, da der Subordinator nicht stetig ist. Als *intrinsisch* wird ein Lévy-Prozess bezeichnet, wenn dieser ein Prozess mit stationären und unabhängigen Zuwächsen bezüglich der eigenen natürlichen Filtrierung ist. Bemerkenswert ist, dass ein subordinierter Lévy-Prozess wieder ein Lévy-Prozess ist, wie man anhand der konstanten differentiellen Charakteristik erkennt:

**Proposition 2.35** Sei  $z = (z_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  ein Subordinator ohne Drift, d.h. ein  $\mathbb{R}_+$ -wertiger, monoton wachsender Lévy-Prozess mit differentieller Charakteristik  $(b^z(\tilde{h}), 0, F^z)$  dergestalt, dass  $b^z(\tilde{h}) = \int_{\mathbb{R}_+} \tilde{h}(x) F^z(dx)$  gilt. Ferner sei  $L = (L_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  ein  $\mathbb{R}^d$ -wertiger Lévy-Prozess mit Lévy-Khintchine-Tripel  $(b^L(h), c^L, F^L)$ . Es wird angenommen, dass der Lévy-Prozess  $L$  unabhängig von dem Subordinator  $z$  ist. Dann ist der Prozess  $\tilde{L} = (\tilde{L}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , definiert durch

$$\tilde{L}_t(\omega) := L_{z_t(\omega)}(\omega), \quad \omega \in \Omega, t \in \mathbb{R}_+,$$

ein Lévy-Prozess auf  $\mathbb{R}^d$  mit Lévy-Khintchine-Tripel  $(b^{\tilde{L}}(h), c^{\tilde{L}}, F^{\tilde{L}})$  der Form

$$\begin{aligned}b^{\tilde{L}}(h) &= \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^d} h(x) P^{L_s}(dx) F^z(ds), \\ c^{\tilde{L}} &= 0, \\ F^{\tilde{L}}(G) &= \int_{\mathbb{R}_+} P^{L_s}(G) F^z(ds) \quad \forall G \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \quad \text{mit} \quad 0 \notin G.\end{aligned}$$

Dabei bezeichnen  $\tilde{h}$  und  $h$  zwei beliebige Abschneidefunktionen auf  $\mathbb{R}$  bzw.  $\mathbb{R}^d$ . Alle Lévy-Prozesse sind im intrinsischen Sinne zu verstehen.

BEWEIS. Das ist ein Spezialfall von Satz 30.1 in der Monographie von Sato (1999). □



# Kapitel 3

## Darstellung des varianz-optimalen Hedges in Integralform in einem allgemeinen affinen stochastischen Volatilitätsmodell

In diesem Kapitel wird zunächst das allgemeine affine stochastische Volatilitätsmodell aufgestellt. Ferner werden die Voraussetzungen dargelegt, die zur Lösung des Problems varianz-optimalen Hedgens, vgl. Definition 1.15, vonnöten sind. In einem zweiten Schritt wird das Problem des varianz-optimalen Hedgens in diesem allgemeinen Rahmen semiexplizit, d.h. in numerisch gut handhabbarer Form gelöst.

### 3.1 Das allgemeine affine stochastische Volatilitätsmodell

Im *allgemeinen affinen stochastischen Volatilitätsmodell* ist der Preisprozess des Basisguts von der Form  $S = S_0 \exp\{Z\}$ . Implizit gelte also  $Z_0 = 0$ . Es sei daran erinnert, dass die  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{F}_0$  als trivial angenommen wird und  $T$  den endlichen Handelshorizont bezeichnet. Im Folgenden wird einheitlich von quadrierter stochastischer Volatilität gesprochen, auch wenn es sich unter Umständen um die eng verwandte Handelsintensität im Sinne von Abschnitt 1.4.4 handelt. Ferner wird vorausgesetzt, dass die Log-Rendite  $Z$  ein  $\mathbb{R}$ -wertiges und die quadrierte stochastische Volatilität  $y$  ein  $\mathbb{R}_+$ -wertiges Semimartingal auf der stochastischen Basis  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, P)$  seien. Das Semimartingal  $(y, Z)$  sei durch die gemeinsame, absolut stetige integrale Semimartingalcharakteristik  $(B^{y,Z}, C^{y,Z}, \nu^{y,Z})$  spezifiziert:

$$B_t^{y,Z} = \int_0^t (\beta_{(0)} + \beta_{(1)} y_{s-}) ds, \quad (3.1)$$

$$C_t^{y,Z} = \int_0^t (\gamma_{(0)} + \gamma_{(1)} y_{s-}) ds, \quad (3.2)$$

$$\nu^{y,Z}([0, t] \times G) = \int_0^t (\varphi_{(0)}(G) + \varphi_{(1)}(G) y_{s-}) ds \quad (3.3)$$

für alle  $G \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$  und für  $t \in [0, T]$ , wobei  $(\beta_{(j)}, \gamma_{(j)}, \varphi_{(j)})$ ,  $j \in \{0, 1\}$ , Lévy-Khintchine-Tripel auf  $\mathbb{R}^2$  sind. Es wird angenommen, dass diese Lévy-Khintchine-Tripel im Sinne von Definition 2.6, Duffie et al. (2003), zulässig sind:

- $\gamma_{(0)}^{1,1} = 0$ . Da  $\gamma_{(0)}$  symmetrisch und positiv semidefinit ist, müssen  $\gamma_{(0)}^{1,2} = \gamma_{(0)}^{2,1} = 0$  und  $\gamma_{(0)}^{2,2} \in \mathbb{R}_+$  gelten.
- $\varphi_{(0)}((\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})^c) = \varphi_{(1)}((\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})^c) = 0$ , d.h.  $\varphi_{(j)}$ ,  $j \in \{0, 1\}$ , sind Lévy-Maße auf  $D := \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ .
- $\beta_{(0)}^1 - \int_D h_1(x) \varphi_{(0)}(dx) \geq 0$ .
- Das Lévy-Maß  $\varphi_{(0)}$  erfülle die Integrierbarkeitsbedingung

$$\int_D h_1(x) \varphi_{(0)}(dx) < \infty. \quad (3.4)$$

Dabei bezeichnet  $h = (h_1, h_2)$  eine beliebige Abschneidefunktion auf  $\mathbb{R}^2$ , zum Beispiel  $h(x_1, x_2) := (\tilde{h}(x_1), \tilde{h}(x_2))$  mit einer eindimensionalen Abschneidefunktion  $\tilde{h}$  der Form

$$\tilde{h}(x_k) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x_k = 0, \\ (1 \wedge |x_k|) \frac{x_k}{|x_k|} & \text{sonst,} \end{cases} \quad (3.5)$$

$k \in \{1, 2\}$ . Das durch die Gleichungen (3.1) - (3.3) spezifizierte Modell heißt *allgemeines affines stochastisches Volatilitätsmodell*, falls die Parameter zulässig sind. Die Zulässigkeitsbedingungen gewährleisten unter anderem, dass  $\gamma_{(0)} + \gamma_{(1)}y_{t-}$  positiv semidefinit und  $\varphi_{(0)}(G) + \varphi_{(1)}(G)y_{t-}$  positiv sind für alle  $t \in [0, T]$  und für alle  $G \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ . Da  $(y, Z)$   $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ -wertig angenommen wurde, muss auch die Drift eingeschränkt werden. Falls  $y$  zu einem Zeitpunkt Null wird, muss die Drift garantieren, dass  $y$  in das Innere von  $\mathbb{R}_+$  zurückgezogen wird, d.h. dass  $y$  nicht negativ werden kann. Man vergleiche hierzu auch Duffie et al. (2003), Kapitel 2. Die Freiheitsgrade in Form der zulässigen Tripel  $(\beta_{(j)}, \gamma_{(j)}, \varphi_{(j)})$ ,  $j \in \{0, 1\}$ , dokumentieren die Möglichkeiten, affin zu modellieren. Dabei ist die Vielfalt an Volatilitätsmodellen, die in den affinen Rahmen gehören, bemerkenswert, vgl. Abschnitt 1.4. Daher rührt die Bezeichnung des vorliegenden Modells (3.1) - (3.3) als allgemeines affines stochastisches Volatilitätsmodell. Das die Volatilitätscluster abbildende *Mean-Reverting-Verhalten* kann über die Driftkomponente (3.1) modelliert werden. Der *Leverage-Effekt* kann über die Abhängigkeitsstruktur von quadrierter Volatilität  $y$  und Log-Rendite  $Z$  abgebildet werden, zum Beispiel über die gemeinsame vorhersehbare quadratische Kovariationsmatrix oder über den Kompensator der Sprünge von  $(y, Z)$ . Ferner erlaubt das allgemeine Modell natürlich auch Sprünge, die mittels der Lévy-Maße  $\varphi_{(0)}$  und  $\varphi_{(1)}$  Berücksichtigung finden.

**Bemerkung 3.1** Man betrachte das Martingalproblem im Sinne von Definition 2.8, Kallsen (2006), bezüglich der Startverteilung  $\varepsilon_{(y_0,0)}$  und bezüglich  $(b, c, F)$  mit

$$\begin{aligned} b_t(\omega) &= \beta_{(0)} + \beta_{(1)}y_{t-}(\omega) + \beta_{(2)}Z_{t-}(\omega), \\ c_t(\omega) &= \gamma_{(0)} + \gamma_{(1)}y_{t-}(\omega) + \gamma_{(2)}Z_{t-}(\omega), \\ F_t(\omega, G) &= \varphi_{(0)}(G) + \varphi_{(1)}(G)y_{t-}(\omega) + \varphi_{(2)}(G)Z_{t-}(\omega), \end{aligned}$$

$G \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ ,  $t \in [0, T]$  und  $\omega \in \Omega$ , wobei  $(\beta_{(2)}, \gamma_{(2)}, \varphi_{(2)}) = (0, 0, 0)$  gelte. Als Hilfsmenge führt man den Quader  $\mathcal{Q}$  der Form

$$\mathcal{Q} := \{\zeta \in D : |\zeta_k| \leq 1, k \in \{1, 2\}\} \quad (3.6)$$

ein. Falls neben den Zulässigkeitsbedingungen die Integrierbarkeitsbedingung

$$\int_{D \setminus \mathcal{Q}} x_1 \varphi_{(1)}(d(x_1, x_2)) < \infty \quad (3.7)$$

erfüllt ist, besitzt dieses Martingalproblem eine Lösung  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, P, (y, Z))$ , wobei das Semimartingal  $(y, Z)$   $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ -wertig ist und  $\partial(y, Z) := (b^{y,Z}, c^{y,Z}, F^{y,Z}) = (b, c, F)$  als differentielle Charakteristik besitzt. Die Eindeutigkeit der Lösung ist in dem Sinne gegeben, dass die Verteilung von  $(y, Z)$  eindeutig bestimmt ist, vgl. Kallsen (2006), Satz 3.2. Die Bedingung (3.7) garantiert, dass der stochastische Prozess  $(y, Z)$  nicht in endlicher Zeit explodieren kann, infolgedessen  $(y, Z)$  ein Semimartingal im eigentlichen Sinne, d.h. im Sinne von Definition 2.1 ist, wo das Semimartingal  $\mathbb{R}$ -wertig, nicht  $\bar{\mathbb{R}}$ -wertig definiert wird, vgl. die Arbeit von Kallsen (2006). Würde der Lösungsprozess in endlicher Zeit explodieren, wäre dieser zudem auch nicht càdlàg.

Als nächstes sollen zwei einfache Beispielm Modelle in Form ihrer Charakteristiken betrachtet werden, die Spezialfälle des allgemeinen affinen stochastischen Volatilitätsmodells sind. Weitere Beispiele werden ausführlich in Kapitel 4 untersucht.

**Beispiel 3.2** 1. Das erste Beispiel ist das Modell, in dem der Preis des Underlyings durch einen *geometrischen Lévy-Prozess* gegeben ist, d.h. in der Form  $S = S_0 \exp\{Z\}$ , wobei  $Z$  die differentielle Charakteristik  $(b^Z, c^Z, F^Z)$  besitzt, und die Volatilität konstant ist. Dies entspricht einem affinen Modell der Gestalt

$$\beta_{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ b^Z \end{pmatrix}, \quad \gamma_{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c^Z \end{pmatrix}, \quad \varphi_{(0)}(G) = \int_{\mathbb{R}} 1_G(0, x) F^Z(dx) \quad \forall G \in \mathcal{B}(D),$$

$$(\beta_{(1)}, \gamma_{(1)}, \varphi_{(1)}) = (0, 0, 0).$$

Diese Art von Modellen haben Hubalek et al. (2006) für den Preisprozess des Underlyings im Rahmen ihrer Analyse des Problems varianz-optimalen Hedgens verwendet, vgl. Abschnitt 1.2.

2. Das zweite Beispiel ist das Modell von Bates (1996), das ein um Sprünge erweitertes Modell von Heston (1993) bzw. ein um stochastische Volatilität erweitertes Modell von Merton (1976) darstellt, vgl. Abschnitt 1.4.2. Das Modell von Bates (1996) ist ein affines stochastisches Volatilitätsmodell der Gestalt

$$\beta_{(0)} = \begin{pmatrix} \kappa\eta \\ \mu + b^z(\tilde{h}) \end{pmatrix}, \quad \gamma_{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_{(0)}(G) = \int_{\mathbb{R}} 1_G(0, x) F^z(dx) \quad \forall G \in \mathcal{B}(D),$$

$$(\beta_{(1)}, \gamma_{(1)}, \varphi_{(1)}) = \left( \begin{pmatrix} -\kappa \\ \delta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha^2 & \rho\alpha \\ \rho\alpha & 1 \end{pmatrix}, 0 \right).$$

Dabei sind  $z$  ein zusammengesetzter Poisson-Prozess, dessen differentielle Charakteristik in (1.78) gegeben ist, und  $\tilde{h}$  eine beliebige  $\mathbb{R}$ -wertige Abschneidefunktion.

Mittels der Lévy-Khintchine-Formel, vgl. z.B. Sato (1999), Satz 8.1, korrespondieren die Lévy-Khintchine-Tripel  $(\beta_{(j)}, \gamma_{(j)}, \varphi_{(j)})$ ,  $j \in \{0, 1\}$ , zu den kumulantenenerzeugenden Funktionen

$$\psi_j(u) = u^\top \beta_{(j)} + \frac{1}{2} u^\top \gamma_{(j)} u + \int_D \left( e^{u^\top x} - 1 - u^\top h(x) \right) \varphi_{(j)}(dx), \quad (3.8)$$

deren Definitionsbereiche gegeben sind durch

$$U_j = \left\{ u \in \mathbb{C}^2 : \int_{D \setminus \mathcal{Q}} \exp\{\operatorname{Re}(u)^\top x\} \varphi_{(j)}(dx) < \infty \right\}, \quad j \in \{0, 1\}, \quad (3.9)$$

vgl. Sato (1999), Satz 25.17. Aufgrund der affinen Struktur des allgemeinen stochastischen Volatilitätsmodells kann die *gemeinsame bedingte charakteristische Funktion* der quadrierten Volatilität  $y$  und der Log-Rendite  $Z$  des Underlyings in analytischer Form angegeben werden.

**Proposition 3.3** *Die Verteilung des  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ -wertigen Semimartingals  $(y, Z)$  ist eindeutig durch die bedingte charakteristische Funktion*

$$E_P \left[ e^{u_1 y_{t+s} + u_2 Z_{t+s}} \mid \mathcal{F}_t \right] = \exp\{\Phi_0(s, u_1, u_2) + \Phi_1(s, u_1, u_2) y_t + u_2 Z_t\}, \quad (3.10)$$

$u \in i\mathbb{R}^2$ , charakterisiert, wobei die Abbildungen  $\Phi_0, \Phi_1 : \mathbb{R}_+ \times (\mathbb{C}_- \times i\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}_-$  das folgende System verallgemeinerter Riccati-Differentialgleichungen

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi_0(t, u_1, u_2) = \psi_0(\Phi_1(t, u_1, u_2), u_2), \quad \Phi_0(0, u_1, u_2) = 0, \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi_1(t, u_1, u_2) = \psi_1(\Phi_1(t, u_1, u_2), u_2), \quad \Phi_1(0, u_1, u_2) = u_1, \quad (3.12)$$

lösen. Hierbei ist  $\mathbb{C}_-$  definiert durch  $\mathbb{C}_- := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \leq 0\}$ .

BEWEIS. Das ist ein Spezialfall von Kallsen (2006), Satz 3.2. Bezüglich der eindeutigen Charakterisierung der Verteilung von  $(y, Z)$  durch die bedingte charakteristische Funktion (3.10) vergleiche man auch Kallsen (2006), Korollar 3.3, wo die charakteristischen Funktionen der endlichdimensionalen Randverteilungen von  $(y, Z)$  gefolgert werden.  $\square$

**Bemerkung 3.4** Um  $\Phi_0$  zu bestimmen, muss man lediglich die rechte Seite der Differentialgleichung in (3.11) integrieren:

$$\Phi_0(t, u_1, u_2) = \int_0^t \psi_0(\Phi_1(s, u_1, u_2), u_2) ds. \quad (3.13)$$

**Annahme 3.5** Wie in der Arbeit von Hubalek et al. (2006) wird angenommen, dass die Auszahlungsfunktion  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  des zu hedgenden Derivats die Integraldarstellung

$$f(s) = \int_{\mathcal{S}_f} s^z \Pi(dz), \quad (3.14)$$

besitzt, wobei  $\Pi$  ein endliches, komplexes Maß auf dem Streifen

$$\mathcal{S}_f := \{z \in \mathbb{C} : R' \leq \operatorname{Re}(z) \leq R\} \quad (3.15)$$

ist und  $R, R'$  beliebig gewählt sind im Definitionsbereich der bilateralen Laplace-Transformierten  $\tilde{f}_e$  von  $f \circ \exp$ , definiert durch

$$\tilde{f}_e(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(e^x) e^{-zx} dx$$

für alle  $z \in \mathbb{C}$ , so dass das Integral existiert. Die verwendete Symbolik  $\mathcal{S}_f$  kann dahingehend gerechtfertigt werden, dass der vertikale Streifen  $\mathcal{S}_f$  von der Auszahlungsfunktion  $f$  abhängt, da die Parameter  $R'$  und  $R$  nur im Definitionsbereich der bilateralen Laplace-Transformierten der Abbildung  $x \mapsto f(e^x)$  gewählt werden können. Das komplexe Maß  $\Pi$  ist zwar ebenfalls von der Auszahlungsfunktion  $f$  des zu hedgenden Derivats abhängig, vgl. Annahme 1.20, jedoch wird hier die Abhängigkeit aus praktischen Erwägungen notationell unterdrückt. Hinsichtlich einer anschaulichen Deutung der Integraldarstellung 3.14 der Auszahlungsfunktion sei auf die Annahme 1.20 verwiesen. Wie bereits dort erwähnt, ist die Voraussetzung nicht sehr restriktiv, da für die meisten europäischen Derivate eine solche Integraldarstellung der Auszahlungsfunktion angegeben werden kann.

**Annahme 3.6** Darüber hinaus werden Regularitätsbedingungen bezüglich der Lösungen der verallgemeinerten Riccati-Differentialgleichungen (3.11) und (3.12) benötigt.

1. Es wird angenommen, dass die Abbildungen  $(u_1, u_2) \mapsto \Phi_0(t, u_1, u_2), \Phi_1(t, u_1, u_2)$  eine analytische Fortsetzung auf  $\mathcal{S} := \{v \in \mathbb{C}^2 : \operatorname{Re}(v) \in \mathcal{V}_\varepsilon(0)\}$  für ein  $\varepsilon > 0$  und für alle  $t \in [0, T]$  besitzen, wobei  $\mathcal{V}_\varepsilon(a)$  für  $a \in \mathbb{R}_+$  und  $\varepsilon > 0$  definiert ist durch

$$\mathcal{V}_\varepsilon(a) := (-\infty, (M_0 \vee 0) + \varepsilon) \times ((2R' \wedge 0) - \varepsilon, (2R \vee a) + \varepsilon)$$

mit  $M_0 := \sup\{\Phi_1(T - t, 0, r) : r \in [2R' \wedge 0, 2R \vee 0], t \in [0, T]\}$ .

2. Die Funktionen  $\Phi_0$  und  $\Phi_1$  sowie die partiellen Ableitungen  $D_2\Phi_0$  und  $D_2\Phi_1$  seien für ein  $\varepsilon > 0$  stetig auf  $[0, T] \times \mathcal{S}$ .

3. Die Abbildung  $t \mapsto \Phi_1(t, 0, z)$  sei auf  $[0, T]$  für alle  $z \in \mathcal{S}_f$  zweimal stetig differenzierbar.

**Bemerkung 3.7** Mit Duffie et al. (2003), Satz 2.16(ii), folgt aus Annahme 3.6(1)

$$E_P [e^{u_1 y_{t+s} + u_2 Z_{t+s}} | \mathcal{F}_t] = \exp\{\Phi_0(s, u_1, u_2) + \Phi_1(s, u_1, u_2)y_t + u_2 Z_t\} \quad (3.16)$$

für alle  $u \in \mathcal{S}$ . Man beachte, dass  $\Phi_j(t, u_1, u_2)$  reellwertig ist für  $u \in \mathbb{R}^2 \cap \mathcal{S}$ ,  $j \in \{0, 1\}$ .

**Annahme 3.8** Damit sowohl die eigentlichen europäischen Derivate als auch die imaginären einfachen Derivate (vgl. hierzu Abschnitt 1.2) quadratisch gehedgt werden können, muss die Existenz exponentieller Momente der Lévy-Maße  $\varphi_{(0)}$  und  $\varphi_{(1)}$  gefordert werden:

$$\int_{D \setminus \mathcal{Q}} e^{u^\top x} \varphi_{(j)}(dx) < \infty \quad \forall u \in \mathcal{V}_\varepsilon(2) \quad \text{für ein } \varepsilon > 0, \quad j \in \{0, 1\}. \quad (3.17)$$

Man beachte diesbezüglich auch die Definitionsbereiche (3.9) der kumulantenerzeugenden Funktionen  $\psi_0$  und  $\psi_1$ . Die Existenz dieser exponentiellen Momente gewährleistet insbesondere, dass die Lévy-Exponenten  $\psi_0$  und  $\psi_1$  auf  $\mathcal{S}$  analytisch sind, vgl. Duffie et al. (2003), Lemma 5.3.

**Bemerkung 3.9** Affine Prozesse, die in endlicher Zeit nicht explodieren, werden in Duffie et al. (2003) auch *konservativ* genannt. Ein im Vergleich zur Bedingung (3.7) schwächeres hinreichendes Kriterium findet man in Duffie et al. (2003), Proposition 9.1. Dort wird auch eine notwendige Bedingung angegeben. Annahme 3.8 impliziert in der Situation von Bemerkung 3.1 bereits die Gültigkeit der Integrierbarkeitsbedingung (3.7):

$$\int_{D \setminus \mathcal{Q}} x_1 \varphi_{(1)}(d(x_1, x_2)) \leq \frac{1}{\tilde{\varepsilon}} \int_{D \setminus \mathcal{Q}} e^{\tilde{\varepsilon} x_1} \varphi_{(1)}(d(x_1, x_2)) < \infty$$

für ein  $\tilde{\varepsilon}$  mit  $0 < \tilde{\varepsilon} < \varepsilon$ , d.h. Annahme 3.8 garantiert auch, dass der affine Prozess  $(y, Z)$  in jedem Fall konservativ ist.

**Bemerkung 3.10** Gemäß Bemerkung 3.4 ist  $\Phi_0(t, 0, z) = \int_0^t \psi_0(\Phi_1(s, 0, z), z) ds$ . Mithilfe von  $\operatorname{Re}(\Phi_1(t, 0, z)) \leq \Phi_1(t, 0, \operatorname{Re}(z))$  zeigt man  $(\Phi_1(t, 0, z), z) \in \mathcal{S}$  für alle  $t \in [0, T]$  und  $z \in \mathcal{S}_f$ . Wegen Annahme 3.8 ist die kumulantenerzeugende Funktion  $\psi_0$  auf  $\mathcal{S}$  analytisch. Daraus folgt mit Annahme 3.6(3), dass die Abbildung  $t \mapsto \Phi_0(t, 0, z)$  auf  $[0, T]$  für alle  $z \in \mathcal{S}_f$  zweimal stetig differenzierbar ist.

**Annahme 3.11** Um sicherzustellen, dass der Preisprozess  $S$  des Underlyings ein lokal quadratisch integrierbares Martingal ist, werden die sogenannten (lokalen) *Martingalbedingungen* vorausgesetzt:

$$\psi_0(0, 1) = \psi_1(0, 1) = 0. \quad (3.18)$$

**Proposition 3.12** Falls die Annahmen 3.8 und 3.11 gelten, ist  $S \in \mathcal{H}_{\text{loc}}^2$ .

BEWEIS. Durch Projektion auf die zweite Komponente erhält man die differentielle Charakteristik der Log-Rendite  $Z$  aus der Ausgangscharakteristik (3.1) - (3.3) mittels Proposition 2.31 in der Gestalt:

$$\begin{aligned} b^Z &= \beta_{(0)}^2 + \beta_{(1)}^2 y_-, \\ c^Z &= \gamma_{(0)}^{2,2} + \gamma_{(1)}^{2,2} y_-, \\ F^Z(G) &= \int_D 1_G(x_2) \varphi_{(0)}(dx) + \int_D 1_G(x_2) \varphi_{(1)}(dx) y_- \end{aligned}$$

für alle  $G \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  mit  $0 \notin G$ . Da  $S, S_-$  positive Semimartingale sind, existiert der stochastische Logarithmus  $X := \mathcal{L}(S) = \frac{1}{S_-} \cdot S$ , vgl. Kallsen & Shiryaev (2002a), Lemma 2.2. Mithilfe der Propositionen 2.31 und 2.32 berechnet man die erste und dritte Komponente der differentiiellen Charakteristik des stochastischen Logarithmus:

$$\begin{aligned} b^X &= b^Z + \frac{1}{2} c^Z + \int_{\mathbb{R}} \left( \tilde{h}(e^x - 1) - \tilde{h}(x) \right) F^Z(dx), \\ F^X(G) &= \int_{\mathbb{R}} 1_G(e^x - 1) F^Z(dx) \end{aligned}$$

für alle  $G \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  mit  $0 \notin G$ . Aufgrund der Existenz der exponentiellen Momente der Lévy-Maße  $\varphi_{(0)}, \varphi_{(1)}$ , vgl. Annahme 3.8, ist der Integralprozess

$$(e^x - 1)^2 * \nu^Z = \left( \int_D (e^{x_2} - 1)^2 \varphi_{(0)}(dx) \right) I + \left( \int_D (e^{x_2} - 1)^2 \varphi_{(1)}(dx) \right) y \cdot I$$

ein adaptierter Prozess von endlicher Variation. Hier bezeichnet  $I$  den Identitätsprozess und  $\nu^Z$  den Kompensator des Maßes der Sprünge von  $Z$ . Da  $(e^x - 1)^2 * \nu^Z$  stetig und adaptiert und damit vorhersehbar ist, ist der Integralprozess  $x^2 * \nu^X = (e^x - 1)^2 * \nu^Z$  ein adaptierter Prozess von lokal integrierbarer Variation, vgl. Jacod & Shiryaev (2003), Lemma I.3.10. Daraus folgt, dass  $X$  ein lokal quadratisch integrierbares Semimartingal mit kanonischer Zerlegung  $X = M^X + A^X$  ist, wobei  $M^X \in \mathcal{H}_{\text{loc}}^2$  und  $A^X = b^X \cdot I + (x - \tilde{h}(x)) * \nu^X$  gelten, vgl. Satz 2.30. Mit Annahme 3.11 ergibt sich

$$A^X = \left( b^Z + \frac{1}{2} c^Z + \int_{\mathbb{R}} (e^x - 1 - \tilde{h}(x)) F^Z(dx) \right) \cdot I = 0.$$

Folglich gilt  $X \in \mathcal{H}_{\text{loc}}^2$ , woraus  $S = S_0 \mathcal{E}(X) \in \mathcal{H}_{\text{loc}}^2$  resultiert, da  $\mathcal{E}(X)_-$  vorhersehbar und lokal beschränkt ist, vgl. Jacod & Shiryaev (2003), Satz I.4.40.  $\square$

**Bemerkung 3.13** Aufgrund der Konvention 1.6, dass der Preisprozess  $S$  des Underlyings ein bezüglich der deterministischen Stoppzeit  $T$  gestoppter Prozess ist, entspricht die dem Problem varianz-optimalen Hedgens, vgl. Definition 1.15, zugrunde liegende Zulässigkeitsmenge  $\Theta := L^2(S)$  der Menge

$$\Theta = \{ \vartheta \text{ vorhersehbarer Prozess} : E_P[|\vartheta|^2 \cdot \langle S, S \rangle_T] < \infty \}. \quad (3.19)$$

Falls  $\vartheta$   $\mathbb{C}$ -wertig ist, gilt  $\vartheta \in \Theta$  genau dann, wenn Real- und Imaginärteil von  $\vartheta$  Element der Zulässigkeitsmenge sind. Dies ist wiederum äquivalent dazu, dass der Betrag von  $\vartheta$  Element der Zulässigkeitsmenge ist. In diesem Sinne kann  $\Theta$  in der Gestalt (3.19) als Menge  $\mathbb{C}$ -wertiger vorhersehbarer Prozesse aufgefasst werden. Man beachte

$$\vartheta \cdot S \in \mathcal{H}^2 \quad \forall \vartheta \in \Theta. \quad (3.20)$$

Das folgt unmittelbar mit Jacod & Shiryaev (2003), Satz I.4.40, aus Proposition 3.12.

**Annahme 3.14** Um den degenerierten Fall auszuschließen, dass  $Z$  ein Lévy-Prozess ist mit  $Z_t = 0$   $P$ -f.s. für alle  $t \in [0, T]$ , fordert man

$$\psi_0(0, 2) \neq 0 \quad \text{oder} \quad \psi_1(0, 2) \neq 0. \quad (3.21)$$

**Proposition 3.15** Der Preisprozess  $V = (V_t)_{t \in [0, T]}$  des zu hedgenden europäischen Derivats, definiert durch  $V_t := E_P[H | \mathcal{F}_t]$ ,  $t \in [0, T]$ , besitzt eine Integraldarstellung der Form

$$V_t = \int_{\mathcal{S}_f} V(z)_t \Pi(dz), \quad t \in [0, T], \quad (3.22)$$

wobei  $V(z) = (V(z)_t)_{t \in [0, T]}$  den Preisprozess der komplexwertigen zufälligen Auszahlung  $H(z) = S_T^z$  angibt, d.h.  $V(z)_t := E_P[H(z) | \mathcal{F}_t]$  für  $t \in [0, T]$  und  $z \in \mathcal{S}_f$ .

BEWEIS. Mithilfe von Bemerkung 3.7 erhält man die Abschätzung

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{S}_f} E_P[|V(z)_t|] |\Pi|(dz) &\leq \int_{\mathcal{S}_f} E_P[e^{\operatorname{Re}(z) \ln S_T}] |\Pi|(dz) \\ &\leq \left( E_P[e^{R \ln S_T}] + E_P[e^{R \ln S_T}] \right) |\Pi|(\mathcal{S}_f) < \infty. \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet  $|\Pi|$  das zu  $\Pi$  gehörende *Totalvariationsmaß* im Sinne von Abschnitt 6.1 in Rudin (1987). Da  $\Pi$  endlich ist auf  $\mathcal{S}_f$ , gilt  $|\Pi|(\mathcal{S}_f) < \infty$ . Analog zeigt man die Gültigkeit der Abschätzung

$$\int_{\mathcal{S}_f} E_P[|S_T^z|] |\Pi|(dz) < \infty.$$

Unter Berücksichtigung dieser beiden Abschätzungen liefert eine zweimalige Anwendung des Satzes von Fubini

$$E_P \left[ \int_{\mathcal{S}_f} E_P[S_T^z | \mathcal{F}_t] \Pi(dz) 1_C \right] = E_P \left[ \int_{\mathcal{S}_f} S_T^z \Pi(dz) 1_C \right] \quad \forall C \in \mathcal{F}_t.$$

Daraus folgt die Behauptung mit Annahme 3.5:

$$V_t = E_P \left[ \int_{\mathcal{S}_f} S_T^z \Pi(dz) \middle| \mathcal{F}_t \right] = \int_{\mathcal{S}_f} E_P[S_T^z | \mathcal{F}_t] \Pi(dz) = \int_{\mathcal{S}_f} V(z)_t \Pi(dz).$$

□

**Proposition 3.16** *Der Preisprozess  $V$  des zu hedgenden europäischen Derivats ist ein quadratisch integrierbares Martingal, d.h.  $V \in \mathcal{H}^2$ . Ferner gilt  $V(z) \in \mathcal{H}^2$  für alle  $z \in \mathcal{S}_f$ . Insbesondere ist  $H$  eine  $\mathcal{F}_T$ -messbare Zufallsvariable in  $L^2(P)$ .*

BEWEIS.  $H(z) = S_T^z$  ist eine  $\mathcal{F}_T$ -messbare Zufallsvariable. Wegen Bemerkung 3.7 gilt

$$E_P[|H(z)|^2] \leq \exp\{2(R' \vee R)|\ln S_0|\} \left( E_P[e^{2R'Z_T}] + E_P[e^{2RZ_T}] \right) < \infty \quad \forall z \in \mathcal{S}_f.$$

Mit Satz I.1.42, Jacod & Shiryaev (2003), schließt man auf  $V(z) \in \mathcal{H}^2$ . Entsprechend hat man  $E_P[|H|^2] < \infty$  zu zeigen, um  $V \in \mathcal{H}^2$  zu beweisen. Die Höldersche Ungleichung, vgl. Satz 3.5 in Rudin (1987), und erneut Bemerkung 3.7 liefern die Abschätzung

$$\begin{aligned} E_P[|H|^2] &\leq E_P \left[ \left( \int_{\mathcal{S}_f} |H(z)| |\Pi|(dz) \right)^2 \right] \leq |\Pi|(\mathcal{S}_f) E_P \left[ \int_{\mathcal{S}_f} |H(z)|^2 |\Pi|(dz) \right] \\ &\leq |\Pi|^2(\mathcal{S}_f) \exp\{2(R' \vee R)|\ln S_0|\} \left( E_P[e^{2R'Z_T}] + E_P[e^{2RZ_T}] \right) < \infty. \end{aligned}$$

Gemäß Annahme 3.5 ist  $H = f(S_T)$ , wobei  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  eine messbare Funktion ist. Folglich ist  $H$  eine  $\mathcal{F}_T$ -messbare Zufallsvariable in  $L^2(P)$ .  $\square$

## 3.2 Integraldarstellung der optimalen Lösung

Zunächst werden die zentralen Sätze dieser Arbeit dargelegt, die die Lösung des Problems varianz-optimalen Hedgens, vgl. Definition 1.15, unter den Annahmen in Abschnitt 3.1 beinhalten. Die Integralstruktur der varianz-optimalen Hedgingstrategie und des zugehörigen minimalen erwarteten quadratischen Hedgefehlers geht auf die Integraldarstellung der Auszahlungsfunktion des zu hedgenden europäischen Derivats zurück, vgl. Annahme 3.5. Das kann grob gesprochen darauf zurückgeführt werden, dass die Lösung des Problems varianz-optimalen Hedgens die Orthogonalprojektion der nicht duplizierbaren zufälligen Auszahlung  $H$  auf  $\{v_0 + \vartheta \cdot S_T : v_0 \in \mathbb{R}, \vartheta \in \Theta\}$  im  $L^2$ -Sinne darstellt und die Orthogonalprojektion einer linearen Operation entspricht.

**Satz 3.17** *Das varianz-optimale Anfangskapital  $v_0^*$  und die varianz-optimale Handelsstrategie  $\vartheta^*$  sind gegeben durch*

$$v_0^* = \int_{\mathcal{S}_f} V(z)_0 \Pi(dz), \quad (3.23)$$

$$\vartheta_t^* = \int_{\mathcal{S}_f} \frac{V(z)_{t-} \kappa_0(t, z) + \kappa_1(t, z) y_{t-}}{S_{t-} \delta_0 + \delta_1 y_{t-}} \Pi(dz), \quad (3.24)$$

wobei der Prozess  $V(z)$  von der Form

$$V(z)_t = S_t^z \exp\{\Phi_0(T-t, 0, z) + \Phi_1(T-t, 0, z) y_t\}, \quad z \in \mathcal{S}_f, \quad (3.25)$$

ist. Die Funktionen  $\Phi_0, \Phi_1 : [0, T] \times \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$  sind die analytisch fortgesetzten Lösungen des Systems verallgemeinerter Riccati-Differentialgleichungen (3.11) und (3.12). Die Konstanten  $\delta_0, \delta_1$  und die Funktionen  $\kappa_0, \kappa_1 : [0, T] \times \mathcal{S}_f \rightarrow \mathbb{C}$  sind definiert durch

$$\kappa_j(t, z) := \psi_j(\Phi_1(T-t, 0, z), z+1) - \psi_j(\Phi_1(T-t, 0, z), z), \quad (3.26)$$

$$\delta_j := \psi_j(0, 2), \quad j \in \{0, 1\}. \quad (3.27)$$

Das optimale Anfangskapital  $v_0^*$  ist eindeutig. Die optimale Handelsstrategie  $\vartheta^*$  ist dagegen nur  $P \otimes \lambda$ -f.s. eindeutig bestimmt. Hier bezeichnet  $\lambda$  das Lebesgue-Maß.

Wie in der Arbeit von Hubalek et al. (2006) erwähnt, ist die varianz-optimale Handelsstrategie  $\vartheta^*$  in (3.24) auch die Lösung des modifizierten Hedgeproblems

$$\min_{\vartheta \in \Theta} E_P [(v_0 + G_T(\vartheta) - H)^2], \quad (3.28)$$

bei dem das Anfangskapital  $v_0$  a priori fest vorgegeben ist.

**Satz 3.18** *Der minimale erwartete quadratische Hedgefehler kann wie folgt berechnet werden:*

$$\begin{aligned} J_0 &:= E_P [(v_0^* + G_T(\vartheta^*) - H)^2] \\ &= \begin{cases} \int_{\mathcal{S}_f} \int_{\mathcal{S}_f} \int_0^T J_1(t, z_1, z_2) dt \Pi(dz_1) \Pi(dz_2), & \text{falls } \delta_0 \neq 0, \delta_1 \neq 0, \\ \int_{\mathcal{S}_f} \int_{\mathcal{S}_f} \int_0^T J_2(t, z_1, z_2) dt \Pi(dz_1) \Pi(dz_2), & \text{falls } \delta_0 = 0, \\ \int_{\mathcal{S}_f} \int_{\mathcal{S}_f} \int_0^T J_3(t, z_1, z_2) dt \Pi(dz_1) \Pi(dz_2), & \text{falls } \delta_1 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Die Integrale über  $\mathcal{S}_f$  sind hier im Sinne des Cauchy'schen Hauptwertes zu verstehen. Die Integranden  $J_k : [0, T] \times \mathcal{S}_f^2 \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $k \in \{1, 2, 3\}$ , sind gegeben durch

$$\begin{aligned} J_1(t, z_1, z_2) &= e^{\xi_0} S_0^{z_1+z_2} \left[ \exp\{\Phi_0(t, \xi_1, z_1+z_2) + \Phi_1(t, \xi_1, z_1+z_2)y_0\} \left( \frac{\eta_2}{\delta_1} \{D_2\Phi_0(t, \xi_1, z_1+z_2) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + D_2\Phi_1(t, \xi_1, z_1+z_2)y_0\} + \frac{\eta_1\delta_1 - \eta_2\delta_0}{\delta_1^2} \right) + \frac{\eta_0\delta_1^2 - \eta_1\delta_0\delta_1 + \eta_2\delta_0^2}{\delta_1^3} e^{-\frac{\xi_0}{\delta_1}\xi_1} \right. \\ &\quad \left. \times \int_0^1 \left( \frac{\delta_1}{\delta_0} + \xi_1 s \right) e^{\frac{\xi_0}{\delta_1}\xi_1 s + \Phi_0\left(t, \frac{\delta_1}{\delta_0} \ln(s) + \xi_1 s, z_1+z_2\right) + \Phi_1\left(t, \frac{\delta_1}{\delta_0} \ln(s) + \xi_1 s, z_1+z_2\right)y_0} ds \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_2(t, z_1, z_2) &= \frac{\eta_2}{\delta_1} e^{\xi_0} S_0^{z_1+z_2} \exp\left\{\Phi_0(t, \xi_1, z_1+z_2) + \Phi_1(t, \xi_1, z_1+z_2)y_0\right\} \\ &\quad \times \left[ D_2\Phi_0(t, \xi_1, z_1+z_2) + D_2\Phi_1(t, \xi_1, z_1+z_2)y_0 \right] \quad \text{und} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_3(t, z_1, z_2) &= \frac{1}{\delta_0} e^{\xi_0} S_0^{z_1+z_2} \exp\left\{\Phi_0(t, \xi_1, z_1+z_2) + \Phi_1(t, \xi_1, z_1+z_2)y_0\right\} \\ &\quad \times \left[ \eta_0 + \eta_1 (D_2\Phi_0(t, \xi_1, z_1+z_2) + D_2\Phi_1(t, \xi_1, z_1+z_2)y_0) \right]. \end{aligned}$$

Die Konstanten  $\delta_0, \delta_1$  sind definiert wie in der Gleichung (3.27). Die verbleibenden Größen sind erklärt durch

$$\begin{aligned}
\eta_0 &= \eta_0(t, z_1, z_2) = \delta_0 \alpha_0(t, z_1, z_2) - \kappa_0(t, z_1) \kappa_0(t, z_2), \\
\eta_1 &= \eta_1(t, z_1, z_2) \\
&= \delta_0 \alpha_1(t, z_1, z_2) + \delta_1 \alpha_0(t, z_1, z_2) - \kappa_1(t, z_1) \kappa_0(t, z_2) - \kappa_1(t, z_2) \kappa_0(t, z_1), \\
\eta_2 &= \eta_2(t, z_1, z_2) = \delta_1 \alpha_1(t, z_1, z_2) - \kappa_1(t, z_1) \kappa_1(t, z_2), \\
\alpha_j &= \alpha_j(t, z_1, z_2) \\
&= \psi_j(\xi_1(t, z_1, z_2), z_1 + z_2) - \psi_j(\Phi_1(T - t, 0, z_1), z_1) - \psi_j(\Phi_1(T - t, 0, z_2), z_2), \\
\xi_j &= \xi_j(t, z_1, z_2) = \Phi_j(T - t, 0, z_1) + \Phi_j(T - t, 0, z_2), \quad j \in \{0, 1\},
\end{aligned}$$

wobei die Funktionen  $\kappa_0, \kappa_1$  gegeben sind wie in Gleichung (3.26). Um die Notation nicht zu überfrachten, sind die Argumente der Funktionen in den obigen Formeln unterdrückt worden. Die Funktionen  $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \alpha_j$  und  $\xi_j, j \in \{0, 1\}$ , sind definiert auf  $[0, T] \times \mathcal{S}_f^2$ .

Die Hauptbestandteile der Integranden des varianz-optimalen Anfangskapitals, der optimalen Handelsstrategie und des minimalen erwarteten quadratischen Hedgefehlers sind die Lösungen der verallgemeinerten Riccati-Differentialgleichungen (3.11) und (3.12) sowie die Lévy-Exponenten  $\psi_0$  und  $\psi_1$ . In den meisten affinen stochastischen Volatilitätsmodellen der Literatur liegen die Lösungen der verallgemeinerten Riccati-Differentialgleichungen und die Lévy-Exponenten in geschlossener Form vor. Bedenkt man, dass das Maß  $\Pi$  oftmals von der Gestalt

$$\Pi(dz) = \frac{1}{2\pi i} \tilde{f}_e(z) dz \quad (3.29)$$

ist, vgl. die Annahmen 3.5 und 1.20, erscheint es somit plausibel, dass die Integraldarstellungen eine effiziente numerische Auswertung ermöglichen. In Kapitel 4 werden numerische Beispiele betrachtet. Alles was dafür vonnöten sein wird, sind die differentiellen Charakteristiken der quadrierten Volatilität und der Log-Rendite in affiner Form sowie die entsprechenden Modellparameter. Zur Struktur des minimalen erwarteten quadratischen Hedgefehlers lässt sich sagen, dass die Anzahl der Integrale mit der Komplexität des Modells einhergeht. Befindet man sich in der Situation von Beispiel 3.2(1), wo die Log-Rendite durch einen Lévy-Prozess abgebildet wird und die Volatilität konstant ist, muss zur Berechnung der minimalen Varianz des Hedgefehlers aufgrund der zeitlichen Homogenität des Modells lediglich ein Doppelintegral numerisch ausgewertet werden. Liegt hingegen ein stochastisches Volatilitätsmodell vor, lässt sich das Zeitintegral aufgrund der zeitlichen Inhomogenität des Modells bereits nicht mehr geschlossen lösen. In einem affinen Volatilitätsmodell, bei dem der Leverage-Effekt nicht berücksichtigt wird, ist zur Auswertung des minimalen erwarteten quadratischen Hedgefehlers eine dreidimensionale Integration erforderlich. Die höchste Modellkomplexität besitzt ein affines Volatilitätsmodell mit Leverage-Effekt. Der Leverage-Effekt kann die Dimension der Integration auf vier erhöhen. Ein Beispiel für ein Modell, bei dem eine vierdimensionale numerische Integration vonnöten ist, ist das integrierte OU-Zeittransformationsmodell (1.97) - (1.99), man sei diesbezüglich auf Abschnitt

4.1 verwiesen. Dahingegen ist das integrierte CIR-Zeittransformationsmodell (1.91) - (1.93) ein Repräsentant für ein stochastisches Volatilitätsmodell mit Leverage-Effekt, in welchem zur Auswertung des minimalen erwarteten quadratischen Hedgefehlers nur ein dreidimensionales Integral numerisch berechnet werden muss, siehe Abschnitt 4.2. Es sei ferner darauf hingewiesen, dass die optimale Handelsstrategie zum Zeitpunkt  $t$  vom Niveau der quadrierten Volatilität  $y_{t-}$  abhängt. In diesem Zusammenhang ist es bedeutsam, dass man die Volatilität, obwohl nicht direkt am Markt beobachtbar, aus Marktdaten ableiten kann, vergleiche Satz 1 in Winkel (2001) und die Schlussbemerkung in Abschnitt 4.8 in Kallsen (2006).

**Bemerkung 3.19** 1. Spezialisiert man die Formeln in den Sätzen 3.17 und 3.18 auf die Situation eines geometrischen Lévy-Modells, vgl. Beispiel 3.2(1), so erhält man gerade die Resultate von Hubalek et al. (2006) im Martingalfall, vgl. Satz 1.21. Die kumulantenerzeugenden Funktionen  $\psi_0$  und  $\psi_1$  sind gegeben durch

$$\psi_0(u_1, u_2) = \psi^Z(u_2) \quad \text{und} \quad \psi_1(u_1, u_2) = 0,$$

wobei  $\psi^Z$  die kumulantenerzeugende Funktion des Lévy-Prozesses  $Z$  angibt. Die Lösungen der (verallgemeinerten) Riccati-Differentialgleichungen (3.11) und (3.12) sind dann von der einfachen Form

$$\Phi_0(t, u_1, u_2) = t\psi^Z(u_2) \quad \text{und} \quad \Phi_1(t, u_1, u_2) = u_1.$$

2. Da in der Folge das stochastische Volatilitätsmodell von Bates (1996) im Gegensatz zu den anderen erwähnten affinen Modellen nicht weiter betrachtet wird, sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass die Sätze 3.17 und 3.18 die Lösung des Problems varianz-optimales Hedgens im Modell von Bates (1996) angesichts dessen affiner Struktur, vgl. Beispiel 3.2(2), als Spezialfall enthalten.

Das zentrale mathematische Objekt in den folgenden Beweisen ist, wie bereits erwähnt, die Galtchouk-Kunita-Watanabe-Zerlegung (GKW-Zerlegung), vgl. hierzu Kunita & Watanabe (1967), Galtchouk (1976) und Ansel & Stricker (1993).

**Definition 3.20** Das Paar  $(\vartheta, L) \in \Theta \times \mathcal{H}^2$  heißt **Galtchouk-Kunita-Watanabe-Zerlegung** von  $V \in \mathcal{H}^2$  bezüglich  $S \in \mathcal{H}_{\text{loc}}^2$ , falls  $V = V_0 + \vartheta \cdot S + L$  gilt, wobei  $L$  orthogonal zu  $S$  ist im Sinne von Definition 2.10(1) mit  $L_0 = 0$ . Die Definition hat auch Gültigkeit, wenn  $V$ ,  $\vartheta$  und  $L$   $\mathbb{C}$ -wertig sind.

**Bemerkung 3.21** Für alle  $V \in \mathcal{H}^2$  und alle  $S \in \mathcal{H}_{\text{loc}}^2$  existiert eine solche GKW-Zerlegung, vgl. Ansel & Stricker (1993). Sei  $(\vartheta, L)$  die GKW-Zerlegung von  $V \in \mathcal{H}^2$  bezüglich  $S \in \mathcal{H}_{\text{loc}}^2$ . Aus  $\langle L, S \rangle = 0$  folgt

$$\langle V, S \rangle = \langle V_0 + \vartheta \cdot S + L, S \rangle = \vartheta \cdot \langle S, S \rangle.$$

Symbolisch schreibt man auch

$$\vartheta = \frac{d\langle V, S \rangle}{d\langle S, S \rangle}. \quad (3.30)$$

Die GWK-Zerlegung ist im folgenden Sinne eindeutig: falls  $(\vartheta, L)$  und  $(\tilde{\vartheta}, \tilde{L})$  GWK-Zerlegungen von  $V \in \mathcal{H}^2$  bezüglich  $S \in \mathcal{H}_{\text{loc}}^2$  sind, so gelten  $\vartheta \cdot S = \tilde{\vartheta} \cdot S$  und  $L = \tilde{L}$  bis auf Ununterscheidbarkeit.

Anhand von Satz 3 und Korollar 10 in der Arbeit von Schweizer (1994) erkennt man den engen Zusammenhang der GWK-Zerlegung des Preisprozesses des zu hedgenden Derivats und der Lösung des Problems varianz-optimalen Hedgens im Martingalfall. Grob gesprochen wird in einem ersten Schritt das Problem des varianz-optimalen Hedgens, vgl. Definition 1.15, in der Situation der imaginären,  $\mathbb{C}$ -wertigen zufälligen Auszahlungen  $H(z) = S_T^z$  gelöst. Etwas genauer formuliert kann aufgrund der einfachen Struktur von  $H(z)$  die GWK-Zerlegung des Preisprozesses  $V(z)$  bezüglich des Underlyingkurses  $S$  exakt bestimmt werden.

**Lemma 3.22** *Das Paar  $(\vartheta^*(z), L(z))$ , definiert durch*

$$\vartheta^*(z)_t := \frac{V(z)_{t-} \kappa_0(t, z) + \kappa_1(t, z) y_{t-}}{S_{t-} \delta_0 + \delta_1 y_{t-}}, \quad (3.31)$$

$$L(z) := V(z) - V(z)_0 - \vartheta^*(z) \cdot S, \quad (3.32)$$

stellt die GWK-Zerlegung des Preisprozesses  $V(z)$  des einfachen Derivats bezüglich des Preisprozesses  $S$  des Underlyings dar. Hierbei sind  $\kappa_j(t, z)$  und  $\delta_j$ ,  $j \in \{1, 2\}$ , gegeben wie in Satz 3.17 in den Gleichungen (3.26) und (3.27). Der Preisprozess  $V(z)$  ist von der Form (3.25).

BEWEIS. Durch Anwendung der Itô-Formel für Semimartingalcharakteristiken, vgl. Proposition 2.31, auf  $g(x_1, x_2) = S_0 \exp\{x_2\}$  und  $\partial(y, Z)$  resultieren aus (3.1) - (3.3)

$$\begin{aligned} c_t^S &= S_{t-}^2 \left( \gamma_{(0)}^{2,2} + \gamma_{(1)}^{2,2} y_{t-} \right) \quad \text{und} \\ F_t^S(G) &= \int_D 1_G(S_{t-}(e^{x_2} - 1)) \varphi_{(0)}(dx) + \int_D 1_G(S_{t-}(e^{x_2} - 1)) \varphi_{(1)}(dx) y_{t-} \end{aligned}$$

für alle  $G \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  mit  $0 \notin G$ . Mithilfe von Satz 2.30 erhält man die vorhersehbare quadratische Variation des Preisprozesses des Underlyings in der Form

$$\langle S, S \rangle_t = \int_0^t \left( c_s^S + \int_{\mathbb{R}} x^2 F_s^S(dx) \right) ds = \int_0^t S_s^2 (\delta_0 + \delta_1 y_s) ds \quad (3.33)$$

unter Berücksichtigung von

$$\gamma_{(j)}^{2,2} + \int_D (e^{x_2} - 1)^2 \varphi_{(j)}(dx) = \psi_j(0, 2) - 2\psi_j(0, 1) = \psi_j(0, 2) = \delta_j,$$

$j \in \{0, 1\}$ , vgl. Annahme 3.11. Aus der Charakteristik  $\partial(y, Z)$  erhält man unmittelbar die Charakteristik von  $(I, y, Z)$ , wobei  $I$  den Identitätsprozess angibt. Bemerkung 3.7 impliziert die Gültigkeit von Gleichung (3.25). Eine erneute Anwendung des Itô-Kalküls 2.31 auf

$$g(t, x_1, x_2) = \left( \begin{array}{c} S_0^z \exp\{\Phi_0(T - t, 0, z) + \Phi_1(T - t, 0, z)x_1 + zx_2\} \\ S_0 \exp\{x_2\} \end{array} \right)$$

und  $\partial(I, y, Z)$  liefert  $\partial(V(z), S)$  unter Beachtung von Bemerkung 3.7, Annahme 3.6(3) und Bemerkung 3.10. Daraus folgt mit Satz 2.30, dass

$$\begin{aligned} \langle V(z), S \rangle_t &= \int_0^t \left( (c^{V(z), S})_s^{2,1} + \int_{\mathbb{R}^2} x_1 x_2 F_s^{V(z), S}(d(x_1, x_2)) \right) ds \\ &= \int_0^t V(z)_s S_s (\kappa_0(s, z) + \kappa_1(s, z) y_s) ds \end{aligned} \quad (3.34)$$

gilt, wobei  $\kappa_0$  und  $\kappa_1$  definiert sind wie in Gleichung (3.26). Der kanonische Kandidat für  $\vartheta^*(z)$  in der GKW-Zerlegung von  $V(z) \in \mathcal{H}^2$  bezüglich  $S \in \mathcal{H}_{\text{loc}}^2$  ist dadurch charakterisiert, dass  $\vartheta^*(z) \cdot \langle S, S \rangle_t = \langle V(z), S \rangle_t$  für alle  $t \in [0, T]$  gilt. Daraus folgert man

$$\vartheta^*(z)_t = \frac{V(z)_{t-} \kappa_0(t, z) + \kappa_1(t, z) y_{t-}}{S_{t-} \delta_0 + \delta_1 y_{t-}} \quad P \otimes \lambda\text{-f.s.}$$

Man definiert nun  $L(z) := V(z) - V(z)_0 - \vartheta^*(z) \cdot S$ . Für den Beweis, dass  $(\vartheta^*(z), L(z))$  tatsächlich die GKW-Zerlegung von  $V(z)$  bezüglich  $S$  ist, muss zunächst gezeigt werden, dass  $\vartheta^*(z) \in \Theta$  gilt. Man beachte, dass  $\vartheta^*(z)$  wohldefiniert ist, da die Konstanten  $\delta_0, \delta_1$  und der Prozess  $y_-$   $\mathbb{R}_+$ -wertig und der Prozess  $S$  positiv sind. Dabei bedenke man, dass wegen Annahme 3.14  $\delta_0 > 0$  oder  $\delta_1 > 0$  sind und dass  $\delta_j = 0$  impliziert, dass  $\kappa_j(t, z) = 0$  gilt für  $j \in \{0, 1\}$ . Die Annahmen 3.6 und 3.8 beinhalten in Verbindung mit Lemma 5.3 in Duffie et al. (2003), dass die deterministischen Abbildungen

$$[0, T] \times \mathcal{S}_f \ni (t, z) \mapsto \kappa_1(t, z), \kappa_2(t, z), \Phi_0(T - t, 0, z), \Phi_1(T - t, 0, z)$$

stetig sind. Daraus folgt für festes  $z \in \mathcal{S}_f$ , dass  $\vartheta^*(z)$  vorhersehbar ist, da die Prozesse  $S_-$  und  $V(z)_-$  vorhersehbar sind, vgl. Proposition I.2.6 in Jacod & Shiryaev (2003). Gemäß der Propositionen 3.12 und 3.16 sind  $V(z) \in \mathcal{H}^2$  und  $S \in \mathcal{H}_{\text{loc}}^2$ , infolgedessen eine GKW-Zerlegung  $(\tilde{\vartheta}(z), \tilde{L}(z))$  von  $V(z)$  bezüglich  $S$  existiert. Somit erhält man

$$\vartheta^*(z) \cdot \langle S, S \rangle = \langle V(z), S \rangle = \tilde{\vartheta}(z) \cdot \langle S, S \rangle.$$

Unter Berücksichtigung von Gleichung (3.33) ergibt sich  $\vartheta^*(z) = \tilde{\vartheta}(z) P \otimes \lambda\text{-f.s.}$  und damit

$$E_P [|\vartheta^*(z)|^2 \cdot \langle S, S \rangle_T] = E_P [|\tilde{\vartheta}(z)|^2 \cdot \langle S, S \rangle_T] < \infty,$$

da  $\tilde{\vartheta}(z) \in \Theta$ , d.h.  $\vartheta^*(z) \in \Theta$ . Darüber hinaus gilt  $L(z) \in \mathcal{H}^2$ , vgl. Bemerkung 3.13, und man beobachtet

$$\langle L(z), S \rangle = \langle V(z), S \rangle - \vartheta^*(z) \cdot \langle S, S \rangle = 0,$$

was den Beweis beschließt.  $\square$

In einem zweiten Schritt konstruiert man die GKW-Zerlegung des Preisprozesses  $V$  des eigentlichen Derivats bezüglich des Preisprozesses  $S$  des Underlyings mit Hilfe der GKW-Zerlegung des Preisprozesses  $V(z)$  des *einfachen Derivats* bezüglich des Preisprozesses  $S$  des Underlyings. Dies geschieht auf recht natürliche Art und Weise unter Ausnutzung der Linearität von Integral und Orthogonalprojektion. Zunächst werden allerdings einige technische Abschätzungen benötigt.

**Lemma 3.23** *Die Abschätzung*

$$0 \leq \int_0^T E_P [1_{\{t < \tau_n \wedge T\}} |V(z)_t|^2 (\alpha_0(t, z, \bar{z}) + \alpha_1(t, z, \bar{z}) y_t)] dt \leq c(n) < \infty \quad (3.35)$$

gilt gleichmäßig für alle  $z \in \mathcal{S}_f$  für eine positive Konstante  $c(n)$ , die lediglich von  $n \in \mathbb{N}^*$  abhängt, und für eine Stoppzeit

$$\tau_n := \inf\{t > 0 : y_t \in B_n\} \wedge \inf\{t > 0 : S_t \in B_n\}, \quad (3.36)$$

wobei  $B_n := (0, \frac{1}{n}) \cup (n, \infty)$  und  $n \in \mathbb{N}^*$  sind. Die Funktionen  $\alpha_0$  und  $\alpha_1$  sind definiert wie in Satz 3.18.

BEWEIS. Da  $y$  und  $S$  adaptierte càdlàg-Prozesse sind, ist  $\tau_n$  für jedes  $n \in \mathbb{N}^*$  eine Stoppzeit, vgl. Jacod & Shiryaev (2003), Proposition I.1.28. Es ist  $|\ln S_t| \leq \ln n$  für alle  $t < \tau_n \wedge T$ . Somit gilt  $1_{\{t < \tau_n \wedge T\}} e^{\operatorname{Re}(z) \ln S_t} \leq n^{\bar{R}}$  für alle  $z \in \mathcal{S}_f$ , wobei  $\bar{R} := \max\{|R'|, |R|\}$ . Aufgrund von

$$\Phi_1(t, \bar{z}_1, \bar{z}_2) = \overline{\Phi_1(t, z_1, z_2)} \quad \text{und} \quad \psi_j(\bar{z}_1, \bar{z}_2) = \overline{\psi_j(z_1, z_2)}$$

beobachtet man

$$\begin{aligned} \alpha_j(t, z, \bar{z}) &= \psi_j(2\operatorname{Re}(\Phi_1(T-t, 0, z)), 2\operatorname{Re}(z)) - 2\operatorname{Re}(\psi_j(\Phi_1(T-t, 0, z), z)) \\ &\geq \left( \operatorname{Re}(\Phi_1(T-t, 0, z)), \operatorname{Re}(z) \right) \gamma_{(j)} \left( \operatorname{Re}(\Phi_1(T-t, 0, z)), \operatorname{Re}(z) \right)^\top \\ &\quad + \left( \operatorname{Im}(\Phi_1(T-t, 0, z)), \operatorname{Im}(z) \right) \gamma_{(j)} \left( \operatorname{Im}(\Phi_1(T-t, 0, z)), \operatorname{Im}(z) \right)^\top \\ &\quad + \int_D \left( e^{\operatorname{Re}(\Phi_1(T-t, 0, z)x_1 + \operatorname{Re}(z)x_2)} - 1 \right)^2 \varphi_{(j)}(dx) \geq 0, \end{aligned}$$

weil  $\gamma_{(j)}$  positiv semidefinit ist und  $\varphi_{(j)}$  ein Lévy-Maß verkörpert für  $j \in \{0, 1\}$ . Unter Berücksichtigung der Definition der Stoppzeit  $\tau_n$ , vgl. Gleichung (3.36), resultiert daraus die Abschätzung

$$\begin{aligned} K_1(z) &:= \int_0^T E_P \left[ 1_{\{t < \tau_n \wedge T\}} 1_{\{\operatorname{Re}(\Phi_1(T-t, 0, z)) \leq 0\}} e^{2\operatorname{Re}(\Phi_0(T-t, 0, z)) + 2\operatorname{Re}(\Phi_1(T-t, 0, z)) y_t} S_t^{2\operatorname{Re}(z)} \right. \\ &\quad \left. \times (\alpha_0(t, z, \bar{z}) + \alpha_1(t, z, \bar{z}) y_t) \right] dt \\ &\leq \int_0^T e^{2\operatorname{Re}(\Phi_0(T-t, 0, z)) + \frac{2}{n}\operatorname{Re}(\Phi_1(T-t, 0, z))} n^{2\bar{R}+2} \left[ \psi_0(2\operatorname{Re}(\Phi_1(T-t, 0, z)), 2\operatorname{Re}(z)) \right. \\ &\quad \left. - 2\operatorname{Re}(\psi_0(\Phi_1(T-t, 0, z), z)) + \frac{1}{n} \left( \psi_1(2\operatorname{Re}(\Phi_1(T-t, 0, z)), 2\operatorname{Re}(z)) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2\operatorname{Re}(\psi_1(\Phi_1(T-t, 0, z), z)) \right) \right] dt. \end{aligned}$$

Unter Verwendung der Integralgleichungen

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\Phi_0(T-t, 0, z)) &= \int_0^{T-t} \operatorname{Re}(\psi_0(\Phi_1(s, 0, z), z)) ds, \\ \operatorname{Re}(\Phi_1(T-t, 0, z)) &= \int_0^{T-t} \operatorname{Re}(\psi_1(\Phi_1(s, 0, z), z)) ds, \end{aligned}$$

vgl. die verallgemeinerten Riccati-Differentialgleichungen (3.11) und (3.12), erhält man

$$\begin{aligned}
 K_1(z) \leq & n^{2\bar{R}+2} \left[ \int_0^T \left| e^{2\operatorname{Re}(\Phi_0(T-t,0,z)) + \frac{2}{n}\operatorname{Re}(\Phi_1(T-t,0,z))} \psi_0(2\operatorname{Re}(\Phi_1(T-t,0,z)), 2\operatorname{Re}(z)) \right| dt \right. \\
 & + \frac{1}{n} \int_0^T \left| e^{2\operatorname{Re}(\Phi_0(T-t,0,z)) + \frac{2}{n}\operatorname{Re}(\Phi_1(T-t,0,z))} \psi_1(2\operatorname{Re}(\Phi_1(T-t,0,z)), 2\operatorname{Re}(z)) \right| dt \\
 & + \left| \int_0^T \frac{\partial}{\partial t} \left( 2\operatorname{Re}(\Phi_0(T-t,0,z)) + \frac{2}{n}\operatorname{Re}(\Phi_1(T-t,0,z)) \right) \right. \\
 & \left. \left. \times e^{2\operatorname{Re}(\Phi_0(T-t,0,z)) + \frac{2}{n}\operatorname{Re}(\Phi_1(T-t,0,z))} dt \right] \equiv n^{2\bar{R}+2} \left( K_2(z) + \frac{1}{n}K_3(z) + |K_4(z)| \right).
 \end{aligned}$$

Aufgrund von Gleichung (3.16) und der Jensen'schen Ungleichung gilt

$$2\operatorname{Re}(\Phi_j(t, 0, z)) \leq \Phi_j(t, 0, 2\operatorname{Re}(z))$$

für alle  $(t, z) \in [0, T] \times \mathcal{S}_f$ . Mit der Stetigkeit der Abbildungen  $\Phi_0$  und  $\Phi_1$ , vgl. Annahme 3.6(2), kann damit  $|K_4(z)|$  wie folgt abgeschätzt werden:

$$\begin{aligned}
 |K_4(z)| &= \left| 1 - \exp \left\{ 2\operatorname{Re}(\Phi_0(T, 0, z)) + \frac{2}{n}\operatorname{Re}(\Phi_1(T, 0, z)) \right\} \right| \\
 &\leq 1 + \exp \left\{ \Phi_0(T, 0, 2\operatorname{Re}(z)) + \frac{1}{n}\Phi_1(T, 0, 2\operatorname{Re}(z)) \right\} \leq c_1(n),
 \end{aligned}$$

wobei  $c_1(n)$  eine endliche, positive Konstante ist, die nur von  $n$  abhängt. Ebenfalls aus Stetigkeitsgründen existieren Konstanten  $c_2, c_3 > 0$  derart, dass

$g(t, z) := 2\operatorname{Re}(\Phi_1(T-t, 0, z)) \leq \Phi_1(T-t, 0, 2\operatorname{Re}(z)) \leq c_2$  und  $2\operatorname{Re}(\Phi_0(T-t, 0, z)) \leq c_3$  gelten. Unter Berücksichtigung der Struktur (3.8) der Lévy-Exponenten  $\psi_j$  ist

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{1}{n} e^{\frac{1}{n}g(t,z)} \psi_j(g(t, z), 2\operatorname{Re}(z)) \right| \\
 & \leq \left[ \frac{2}{n} \left( |\beta_{(j)}^2| + \bar{R}|\gamma_{(j)}^{2,2}| \right) \bar{R} + \left( |\beta_{(j)}^1| + 2\bar{R}|\gamma_{(j)}^{1,2}| \right) |g_n(t, z)| + \frac{n}{2} |\gamma_{(j)}^{1,1}| |g_n(t, z)|^2 \right] e^{g_n(t,z)} \\
 & \quad + \frac{1}{n} e^{g_n(t,z)} \int_D \left| e^{g(t,z)x_1 + 2\operatorname{Re}(z)x_2} - 1 - g(t, z)\tilde{h}(x_1) - 2\operatorname{Re}(z)\tilde{h}(x_2) \right| \varphi_{(j)}(dx),
 \end{aligned}$$

wobei  $g_n : [0, T] \times \mathcal{S}_f \rightarrow \mathbb{R}$  definiert ist durch  $g_n(t, z) := \frac{1}{n}g(t, z)$  und  $j \in \{0, 1\}$ . Es existieren positive Konstanten  $c_4(n), c_5(n)$  und  $c_6(n)$  dergestalt, dass die Abschätzungen

$$\begin{aligned}
 \exp\{g_n(t, z)\} &\leq \exp\left\{\frac{c_2}{n}\right\} =: c_4(n), \\
 \exp\{g_n(t, z)\}|g_n(t, z)| &\leq 1_{\{g_n(t,z) \geq 0\}} \frac{c_2}{n} c_4(n) + 1_{\{g_n(t,z) < 0\}} \frac{-g_n(t, z)}{1 - g_n(t, z)} \\
 &\leq \frac{c_2}{n} c_4(n) + 1 =: c_5(n) \quad \text{und} \\
 \exp\{g_n(t, z)\}|g_n(t, z)|^2 &\leq 1_{\{g_n(t,z) \geq 0\}} \left(\frac{c_2}{n}\right)^2 c_4(n) + 1_{\{g_n(t,z) < 0\}} \frac{(g_n(t, z))^2}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-g_n(t,z))^k}{k!}} \\
 &\leq \left(\frac{c_2}{n}\right)^2 c_4(n) + 2 =: c_6(n)
 \end{aligned}$$

Gültigkeit besitzen. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{n} e^{g_n(t,z)} \int_D \left| e^{g(t,z)x_1 + 2\operatorname{Re}(z)x_2} - 1 - g(t,z)\tilde{h}(x_1) - 2\operatorname{Re}(z)\tilde{h}(x_2) \right| \varphi_{(j)}(dx) \\
& \leq \frac{1}{n} e^{g_n(t,z)} \left[ \int_{D \setminus \mathcal{Q}} e^{M_0 x_1 + 2R x_2} \varphi_{(j)}(dx) + \int_{D \setminus \mathcal{Q}} e^{M_0 x_1 + 2R' x_2} \varphi_{(j)}(dx) \right. \\
& \quad \left. + (1 + 2\bar{R} + |g(t,z)|) \varphi_{(j)}(D \setminus \mathcal{Q}) \right] + \frac{1}{n} e^{g_n(t,z)} \int_{\mathcal{Q}} \left| e^{g(t,z)x_1 + 2\operatorname{Re}(z)x_2} \right. \\
& \quad \left. - 1 - g(t,z)x_1 - 2\operatorname{Re}(z)x_2 \right| \varphi_{(j)}(dx),
\end{aligned}$$

wobei  $M_0$  definiert ist wie in Annahme 3.6(1).  $\varphi_{(j)}$  verkörpert ein Lévy-Maß. Infolgedessen ist  $c_7 := \varphi_{(j)}(D \setminus \mathcal{Q})$  positiv und endlich. Die ersten zwei Integrale auf der rechten Seite der obigen Ungleichung entsprechen angesichts von Annahme 3.8 endlichen Konstanten  $c_8, c_9 > 0$ . Da  $g(t,z)x_1 + 2\operatorname{Re}(z)x_2 \leq c_2 + 2\bar{R}$  für alle  $(x_1, x_2) \in \mathcal{Q}$  gilt, kann man

$$\begin{aligned}
& \left| e^{g(t,z)x_1 + 2\operatorname{Re}(z)x_2} - 1 - g(t,z)x_1 - 2\operatorname{Re}(z)x_2 \right| \\
& \leq \max \left\{ 1, \frac{1}{2} + \frac{e^{c_2 + 2\bar{R}}}{(c_2 + 2\bar{R})^2} \right\} (g(t,z)x_1 + 2\operatorname{Re}(z)x_2)^2 \\
& \leq c_{10} \left( (g(t,z))^2 + 4\bar{R}^2 \right) (x_1^2 + x_2^2)
\end{aligned}$$

für alle  $(x_1, x_2) \in \mathcal{Q}$  zeigen, wobei  $c_{10}$  eine positive Konstante darstellt. Da  $\varphi_{(j)}$  ein Lévy-Maß ist, ist  $c_{11} := \int_{\mathcal{Q}} (x_1^2 + x_2^2) \varphi_{(j)}(dx)$  positiv und endlich. Damit erhält man

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{n} e^{g_n(t,z)} \int_D \left| e^{g(t,z)x_1 + 2\operatorname{Re}(z)x_2} - 1 - g(t,z)\tilde{h}(x_1) - 2\operatorname{Re}(z)\tilde{h}(x_2) \right| \varphi_{(j)}(dx) \\
& \leq \frac{c_4(n)}{n} \left( (1 + 2\rho) c_7 + c_8 + c_9 \right) + c_5(n) c_7 + \left( n c_6(n) + 4 \frac{c_4(n)}{n} \rho^2 \right) c_{10} c_{11} =: c_{12}(n),
\end{aligned}$$

wobei  $c_{12}(n)$  endlich ist. Daraus schließt man, dass es eine positive Konstante  $c_{13}(n)$  gibt mit

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{n} e^{\frac{1}{n} g(t,z)} \psi_j(g(t,z), 2\operatorname{Re}(z)) \right| \\
& \leq \frac{2}{n} \left( |\beta_{(j)}^2| + \bar{R} |\gamma_{(j)}^{2,2}| \right) \bar{R} c_4(n) + \left( |\beta_{(j)}^1| + 2\bar{R} |\gamma_{(j)}^{1,2}| \right) c_5(n) + \frac{n}{2} |\gamma_{(j)}^{1,1}| c_6(n) + c_{12}(n) \\
& \leq c_{13}(n) < \infty
\end{aligned}$$

für alle  $(t, z) \in [0, T] \times \mathcal{S}_f, j \in \{0, 1\}$ . Daraus wiederum folgen die Abschätzungen

$$K_2(z) \leq n e^{c_3} c_{13}(n) T \quad \text{und} \quad \frac{1}{n} K_3(z) \leq e^{c_3} c_{13}(n) T.$$

Abschließend ergibt sich

$$0 \leq K_1(z) \leq n^{2\rho+2} [e^{c_3} c_{13}(n)(n+1)T + c_1(n)] =: c_{14}(n) < \infty \quad (3.37)$$

für alle  $z \in \mathcal{S}_f$  und alle  $n \in \mathbb{N}^*$ . In Analogie dazu zeigt man, dass eine endliche, positive Konstante  $c_{15}(n)$  existiert, die nur von  $n$  abhängt, und bezüglich der

$$K_5(z) := \int_0^T E_P \left[ \mathbf{1}_{\{t < \tau_n \wedge T\}} \mathbf{1}_{\{\operatorname{Re}(\Phi_1(T-t, 0, z)) > 0\}} e^{2\operatorname{Re}(\Phi_0(T-t, 0, z)) + 2\operatorname{Re}(\Phi_1(T-t, 0, z))y_t} S_t^{2\operatorname{Re}(z)} \right. \\ \left. \times (\alpha_0(t, z, \bar{z}) + \alpha_1(t, z, \bar{z})y_t) \right] dt \leq c_{15}(n) < \infty \quad (3.38)$$

für alle  $z \in \mathcal{S}_f$  und alle  $n \in \mathbb{N}^*$  gilt. Aus den Abschätzungen (3.37) und (3.38) resultiert die Behauptung, da

$$|V(z)_t|^2 = S_t^{2\operatorname{Re}(z)} \exp\{2\operatorname{Re}(\Phi_0(T-t, 0, z)) + 2\operatorname{Re}(\Phi_1(T-t, 0, z))y_t\}$$

in Anbetracht von Proposition 3.3 und Bemerkung 3.7 gilt.  $\square$

**Korollar 3.24** *Unter Verwendung der Notation von Lemma 3.23 besitzen die folgenden Abschätzungen*

$$E_P \left[ \left( \int_{\mathcal{S}_f} |\vartheta^*(z)|^2 |\Pi|(dz) \right) \cdot \langle S, S \rangle_T^{\tau_n} \right] < \infty, \quad (3.39)$$

$$\int_{\mathcal{S}_f} E_P[\langle L(z), \overline{L(z)} \rangle_T^{\tau_n}] |\Pi|(dz) < \infty \quad (3.40)$$

*Gültigkeit.*

BEWEIS. Mittels der Gleichungen (3.31) und (3.33) erhält man

$$K := E_P \left[ \left( \int_{\mathcal{S}_f} |\vartheta^*(z)|^2 |\Pi|(dz) \right) \cdot \langle S, S \rangle_T^{\tau_n} \right] \\ = E_P \left[ \int_0^{\tau_n \wedge T} \int_{\mathcal{S}_f} |V(z)_t|^2 \frac{|\kappa_0(t, z) + \kappa_1(t, z)y_t|^2}{\delta_0 + \delta_1 y_t} |\Pi|(dz) dt \right].$$

Analog zur Berechnung der vorhersehbaren quadratischen Kovariation (3.34) bestimmt man mittels Proposition 2.31 und Satz 2.30 die vorhersehbare quadratische Kovariation

$$\langle V(z_1), V(z_2) \rangle_t = \int_0^t V(z_1)_s V(z_2)_s [\alpha_0(s, z_1, z_2) + \alpha_1(s, z_1, z_2)y_s] ds \quad (3.41)$$

für  $z_1, z_2 \in \mathcal{S}_f$  und  $t \in [0, T]$ . Aufgrund der Gleichungen (3.33) und (3.34) gilt

$$\vartheta^*(z_2) \cdot \langle V(z_1), S \rangle_t = \vartheta^*(z_1) \cdot \langle S, V(z_2) \rangle_t = (\vartheta^*(z_1)\vartheta^*(z_2)) \cdot \langle S, S \rangle_t \\ = \int_0^t V(z_1)_s V(z_2)_s \frac{(\kappa_0(s, z_1) + \kappa_1(s, z_1)y_s)(\kappa_0(s, z_2) + \kappa_1(s, z_2)y_s)}{\delta_0 + \delta_1 y_s} ds.$$

Die Zufallsvariable  $L(z)_t$  gibt den Fehlbetrag der (imaginären) optimalen Hedgingstrategie  $\vartheta^*(z)$  zum Zeitpunkt  $t$  an. In diesem Sinne kann  $L(z)$  auch als (imaginärer) Hedgefehlerprozess angesehen werden. Es sei daran erinnert, dass der Hedgefehlerprozess  $L(z)$  definiert ist durch

$$L(z) := V(z) - V(z)_0 - \vartheta^*(z) \cdot S.$$

Folglich ist der Spitzklammerprozess der Hedgefehlerprozesse  $L(z_1)$  und  $L(z_2)$  gegeben durch

$$\langle L(z_1), L(z_2) \rangle_t = \int_0^t V(z_1)_s V(z_2)_s \left[ \alpha_0(s, z_1, z_2) + \alpha_1(s, z_1, z_2) y_s \frac{(\kappa_0(s, z_1) + \kappa_1(s, z_1) y_s)(\kappa_0(s, z_2) + \kappa_1(s, z_2) y_s)}{\delta_0 + \delta_1 y_s} \right] ds \quad (3.42)$$

für  $z_1, z_2 \in \mathcal{S}_f$  und  $t \in [0, T]$ . Es ist  $\langle L(z), \overline{L(z)} \rangle = \langle L(z), L(\bar{z}) \rangle \in \mathcal{V}^+$ , d.h. der Prozess  $\langle L(z), \overline{L(z)} \rangle$  ist insbesondere monoton wachsend. Daraus folgt

$$0 \leq \frac{|\kappa_0(t, z) + \kappa_1(t, z) y_t|^2}{\delta_0 + \delta_1 y_t} \leq \alpha_0(t, z, \bar{z}) + \alpha_1(t, z, \bar{z}) y_t \quad (3.43)$$

für  $\lambda$ -f.a.  $t \in [0, T]$ , da  $\kappa_j(t, \bar{z}) = \overline{\kappa_j(t, z)}$  gilt für  $j \in \{0, 1\}$ . Mithilfe des Satzes von Fubini erhält man damit

$$K \leq \int_{\mathcal{S}_f} \int_0^T E_P \left[ 1_{\{t < \tau_n \wedge T\}} |V(z)_t|^2 (\alpha_0(t, z, \bar{z}) + \alpha_1(t, z, \bar{z}) y_t) \right] dt |\Pi|(dz). \quad (3.44)$$

Da  $\Pi$  ein endliches Maß auf  $\mathcal{S}_f$  ist, folgt die Abschätzung (3.39) mit Lemma 3.23. Angesichts der Gleichung (3.42) und der Ungleichung (3.43) gilt

$$\langle L(z), \overline{L(z)} \rangle_T^{\tau_n} \leq \int_0^{\tau_n \wedge T} |V(z)_t|^2 (\alpha_0(t, z, \bar{z}) + \alpha_1(t, z, \bar{z}) y_t) dt. \quad (3.45)$$

Somit resultiert die Abschätzung (3.40) ebenfalls aus Lemma 3.23.  $\square$

**Lemma 3.25** *Die GKW-Zerlegung des Preisprozesses  $V$  des zu hedgenden Derivats bezüglich des Preisprozesses  $S$  des Underlyings ist gegeben durch  $(\vartheta^*, L)$ , wobei*

$$\vartheta^* := \int_{\mathcal{S}_f} \vartheta^*(z) \Pi(dz), \quad (3.46)$$

$$L := \int_{\mathcal{S}_f} L(z) \Pi(dz) \quad (3.47)$$

reellwertige Prozesse sind.

BEWEIS. Die Abbildungen  $(t, z) \mapsto \Phi_j(T - t, 0, z)$ ,  $\kappa_j(t, z)$ ,  $j \in \{0, 1\}$ , sind stetig und damit  $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{S}_f)$ - $\mathcal{B}(\mathbb{C})$ -messbar. Daraus folgt, dass die Abbildungen

$$(\omega, t, z) \mapsto \Phi_j(T - t, 0, z), \quad \kappa_j(t, z), \quad j \in \{0, 1\},$$

$\mathcal{F}_0 \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{S}_f)$ - $\mathcal{B}(\mathbb{C})$ -messbar sind, wobei  $\mathcal{F}_0$  die triviale  $\sigma$ -Algebra ist. Wegen  $\mathcal{F}_0 \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \subseteq \mathcal{P}$  sind letztere Abbildungen auch  $\mathcal{P} \otimes \mathcal{B}(\mathcal{S}_f)$ - $\mathcal{B}(\mathbb{C})$ -messbar. Die Prozesse  $S_-$  und  $y_-$  sind vorhersehbar, infolgedessen die Abbildungen  $(\omega, t, z) \mapsto S_{t-}(\omega)$ ,  $y_{t-}(\omega)$   $\mathcal{P} \otimes \mathcal{B}(\mathcal{S}_f)$ - $\mathcal{B}(\mathbb{C})$ -messbar sind. Folglich ist  $(\omega, t, z) \mapsto \vartheta^*(z)_t(\omega)$  als Komposition messbarer Abbildungen, vgl. die Formeln (3.31) und (3.25),  $\mathcal{P} \otimes \mathcal{B}(\mathcal{S}_f)$ - $\mathcal{B}(\mathbb{C})$ -messbar.

Zerlegt man  $\vartheta^*(z)$  in Real- und Imaginärteil und  $\Pi$  in die signierten Maße  $\Pi^{\text{Re}}$  und  $\Pi^{\text{Im}}$ , definiert durch  $\Pi^{\text{Re}}(G) := \text{Re}(\Pi(G))$  und  $\Pi^{\text{Im}}(G) := \text{Im}(\Pi(G))$  für alle  $G \in \mathcal{B}(\mathcal{S}_f)$ , und die signierten Maße  $\Pi^{\text{Re}}$  und  $\Pi^{\text{Im}}$  wiederum gemäß der Hahn-Jordan-Zerlegung in die positiven und negativen Variationen  $(\Pi^{\text{Re}})^+$ ,  $(\Pi^{\text{Re}})^-$ ,  $(\Pi^{\text{Im}})^+$  und  $(\Pi^{\text{Im}})^-$ , so erhält man mit dem Satz von Fubini, dass  $\vartheta^*$  vorhersehbar ist. Für  $n \in \mathbb{N}^*$  definiert man die Stoppzeit  $\tau_n$  wie in Lemma 3.23, vgl. Gleichung (3.36). Ferner definiere man den Prozess  $A = (A_t)_{t \in [0, T]}$  wie folgt:

$$A_t := \int_0^t (\vartheta_s^*)^2 d\langle S, S \rangle_s, \quad t \in [0, T].$$

Mittels der Hölder'schen Ungleichung und Abschätzung (3.39) in Korollar 3.24 erhält man

$$\begin{aligned} E_P[A_{T \wedge \tau_n}] &\leq E_P \left[ \int_0^{T \wedge \tau_n} \left( \int_{\mathcal{S}_f} |\vartheta^*(z)_s| |\Pi|(dz) \right)^2 d\langle S, S \rangle_s \right] \\ &\leq |\Pi|(\mathcal{S}_f) E_P \left[ \left( \int_{\mathcal{S}_f} |\vartheta^*(z)|^2 |\Pi|(dz) \right) \cdot \langle S, S \rangle_T^{\tau_n} \right] < \infty. \end{aligned}$$

Da  $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  eine lokalisierende Folge ist, gilt also  $\vartheta^* \in L_{\text{loc}}^2(S)$ . Lemma 3.22 impliziert  $SL(z) \in \mathcal{M}_{\text{loc}}$  für alle  $z \in \mathcal{S}_f$ . Da  $S \in \mathcal{H}_{\text{loc}}^2$  ist, existiert eine lokalisierende Folge  $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  mit  $S^{\sigma_n} \in \mathcal{H}^2$ . Da  $L(z) \in \mathcal{H}^2$  ist, vgl. ebenfalls Lemma 3.22, ergibt sich mit Jacod & Shiryaev (2003), Satz I.4.2, dass  $(SL(z))^{\sigma_n} \in \mathcal{M}$  gilt. Man definiert  $\tilde{\tau}_n := \tau_n \wedge \sigma_n$ . Da  $\langle L(z), L(\bar{z}) \rangle$  ein adaptierter wachsender Prozess ist, kann für jede beliebige Stoppzeit  $\tau$  mittels der Jensen'schen Ungleichung

$$(E_P[|L(z)_t^\tau|])^2 \leq E_P[|L(z)_t^\tau|^2] \leq E_P[\langle L(z), \overline{L(\bar{z})} \rangle_t^\tau], \quad t \in [0, T], \quad (3.48)$$

gezeigt werden. Man beachte, dass die Aussage von Lemma 3.23 auch dann gültig bleibt, wenn man  $\tau_n$  durch  $\tilde{\tau}_n$  ersetzt. Da  $S^{\tilde{\tau}_n} \in \mathcal{H}^2$  ist, gilt

$$K := \sqrt{\sup \left\{ E_P \left[ (S_t^{\tilde{\tau}_n})^2 \right] : t \in [0, T] \right\}} < \infty.$$

Damit ergibt sich mit der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung in Verbindung mit den Ungleichungen (3.48) und (3.45) die Abschätzung

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{S}_f} E_P \left[ \left| (S_t^{\tilde{\tau}_n} L(z)_t^{\tilde{\tau}_n} - S_s^{\tilde{\tau}_n} L(z)_s^{\tilde{\tau}_n}) 1_G \right| |\Pi|(dz) \right] \\ &\leq \int_{\mathcal{S}_f} (E_P [ |S_t^{\tilde{\tau}_n} L(z)_t^{\tilde{\tau}_n} | ] + E_P [ |S_s^{\tilde{\tau}_n} L(z)_s^{\tilde{\tau}_n} | ]) |\Pi|(dz) \\ &\leq 2K \int_{\mathcal{S}_f} \left( \int_0^T E_P [ 1_{\{t < \tilde{\tau}_n \wedge T\}} |V(z)_t|^2 (\alpha_0(t, z, \bar{z}) + \alpha_1(t, z, \bar{z}) y_t) ] dt \right)^{\frac{1}{2}} |\Pi|(dz) < \infty \end{aligned}$$

für  $G \in \mathcal{F}_s$  und  $s \leq t$ . Der Satz von Fubini liefert dann

$$E_P \left[ (S_t^{\tilde{\tau}_n} L_t^{\tilde{\tau}_n} - S_s^{\tilde{\tau}_n} L_s^{\tilde{\tau}_n}) 1_G \right] = \int_{\mathcal{S}_f} E_P \left[ (S_t^{\tilde{\tau}_n} L(z)_t^{\tilde{\tau}_n} - S_s^{\tilde{\tau}_n} L(z)_s^{\tilde{\tau}_n}) 1_G \right] |\Pi|(dz) = 0.$$

Ergo sind  $S$  und  $L$  orthogonal, das heißt, dass  $SL \in \mathcal{M}_{\text{loc}}$  ist. In völliger Analogie zu diesem Fubini-Argument beweist man  $L^{\tau_n} \in \mathcal{M}$  unter Berücksichtigung von  $L(z) \in \mathcal{H}^2$  für alle  $z \in \mathcal{S}_f$  und der Tatsache, dass  $\mathcal{H}^2$  stabil unter Stoppen ist. Darüber hinaus resultiert aus den Ungleichungen (3.40) in Korollar 3.24 und (3.48) die Abschätzung

$$\sup_{t \in [0, T]} E_P[(L_t^{\tau_n})^2] \leq |\Pi|(\mathcal{S}_f) \int_{\mathcal{S}_f} E_P[\langle L(z), \overline{L(z)} \rangle_T^{\tau_n}] |\Pi|(dz) < \infty,$$

infolgedessen  $L \in \mathcal{H}_{\text{loc}}^2$  ist. Offensichtlich startet  $L$  in Null. Aus Proposition 3.15 und Lemma 3.22 ist

$$V = V_0 + \int_{\mathcal{S}_f} (\vartheta^*(z) \cdot S) \Pi(dz) + L \quad (3.49)$$

bekannt. Das Integral  $\int_{\mathcal{S}_f} (\vartheta^*(z) \cdot S) \Pi(dz)$  kann linear in Integrale der Form

$$\int_{\mathcal{S}_f} (g_j(z) \cdot S) \nu_l(dz)$$

zerlegt werden, wobei

$$\begin{aligned} \nu_l &\in \{(\Pi^{\text{Re}})^+, (\Pi^{\text{Re}})^-, (\Pi^{\text{Im}})^+, (\Pi^{\text{Im}})^-\}, \quad l \in \{1, \dots, 4\}, \\ g_j(z) &\in \{\text{Re}(\vartheta^*(z)), \text{Im}(\vartheta^*(z))\}, \quad j \in \{1, 2\}, \end{aligned}$$

sind. Die Abbildung  $(\omega, t, z) \mapsto g_j(\omega, t, z) \equiv g_j(z)$  ist  $\mathcal{P} \otimes \mathcal{B}(\mathcal{S}_f) - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -messbar, da  $z \mapsto \text{Re}(z), \text{Im}(z)$  stetige Funktionen sind. Daraus folgt die Vorhersehbarkeit von  $g_j(z)$  für festes  $z \in \mathcal{S}_f$ . Des Weiteren folgert man aus Lemma 3.23

$$\begin{aligned} E_P[(g_j(z))^2 \cdot \langle S, S \rangle_T^{\tau_n}] &\leq E_P[|\vartheta^*(z)|^2 \cdot \langle S, S \rangle_T^{\tau_n}] \\ &\leq \int_0^T E_P[1_{\{t < \tau_n \wedge T\}} |V(z)_t|^2 (\alpha_0(t, z, \bar{z}) + \alpha_1(t, z, \bar{z}) y_t)] dt < \infty, \end{aligned}$$

d.h.  $g_j(z) \in L_{\text{loc}}^2(S)$ . Unter Berücksichtigung von  $S \in \mathcal{H}_{\text{loc}}^2$  und Definition III.6.12 in Jacod & Shiryaev (2003) folgt damit  $g_j(z) \in L_{\text{loc}}^2(S - S_0) \cap L^0(0)$ , d.h.  $g_j(z) \in L(S)$ , vgl. auch Definition III.6.17 in Jacod & Shiryaev (2003). Protter (1992), vgl. das Korollar zu Satz IV.44, besagt dann, dass eine  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{S}_f) - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -messbare f.s.-càdlàg-Version von  $g_j(z) \cdot S$  existiert. Ferner resultiert aus dem Satz von Fubini die Vorhersehbarkeit von  $\int_{\mathcal{S}_f} (g_j(z))^2 \nu_l(dz)$ . Die Abschätzung (3.39) in Korollar 3.24 liefert

$$E_P \left[ \left( \int_{\mathcal{S}_f} (g_j(z))^2 \nu_l(dz) \right) \cdot \langle S, S \rangle_T^{\tau_n} \right] \leq E_P \left[ \left( \int_{\mathcal{S}_f} |\vartheta^*(z)|^2 |\Pi|(dz) \right) \cdot \langle S, S \rangle_T^{\tau_n} \right] < \infty.$$

Analog zu  $g_j(z) \in L(S)$  schließt man daraus

$$\left( \int_{\mathcal{S}_f} (g_j(z))^2 \nu_l(dz) \right)^{\frac{1}{2}} \in L(S).$$

Damit ist nun der Satz von Fubini für stochastische Integrale anwendbar, vgl. Protter (1992), Satz IV.46:

$$\int_{S_f} (g_j(z) \cdot S) \nu_l(dz) = \left( \int_{S_f} g_j(z) \nu_l(dz) \right) \cdot S, \quad j \in \{1, 2\}, \quad l \in \{1, \dots, 4\}.$$

In Verbindung mit Gleichung (3.49) folgt daraus

$$V = V_0 + \left( \int_{S_f} \vartheta^*(z) \Pi(dz) \right) \cdot S + L = V_0 + \vartheta^* \cdot S + L. \quad (3.50)$$

Zuvor ist bereits  $(\vartheta^*, L) \in L_{\text{loc}}^2(S) \times \mathcal{H}_{\text{loc}}^2$  gezeigt worden mit  $L_0 = 0$  und  $SL \in \mathcal{M}_{\text{loc}}$ . Die Orthogonalität von  $L$  und  $S$  ist äquivalent zu  $\langle L, S \rangle = 0$ . Mit Gleichung (3.50) erhält man damit  $\langle V, S \rangle = \vartheta^* \cdot \langle S, S \rangle$ . Da  $(V, S) \in \mathcal{H}^2 \times \mathcal{H}_{\text{loc}}^2$  ist, existiert eine GKW-Zerlegung  $(\tilde{\vartheta}, \tilde{L}) \in \Theta \times \mathcal{H}^2$  des Preisprozesses  $V$  des zu hedgenden Derivats bezüglich des Preisprozesses  $S$  des Underlyings. Insbesondere gilt  $\langle V, S \rangle = \tilde{\vartheta} \cdot \langle S, S \rangle$ . Wie im Beweis von Lemma 3.22 folgert man  $\vartheta^* = \tilde{\vartheta} P \otimes \lambda$ -f.s. und  $\vartheta^* \in \Theta$ . Damit ist aber auch  $L \in \mathcal{H}^2$ , man vgl. hierzu Gleichung (3.50), Bemerkung 3.13 und Proposition 3.16. Abschließend beobachtet man

$$\langle \tilde{L} - L, \tilde{L} - L \rangle = (\tilde{\vartheta} - \vartheta^*) \cdot \langle \tilde{L} - L, S \rangle = 0, \quad (3.51)$$

was bis auf Ununterscheidbarkeit  $L = \tilde{L}$  zeigt, vgl. Jacod & Shiryaev (2003), Proposition I.4.13. Folglich ist  $(\vartheta^*, L)$  die GKW-Zerlegung des Preisprozesses  $V$  des zu hedgenden Derivats bezüglich des Preisprozesses  $S$  des Underlyings, und die Prozesse  $\vartheta^*$  und  $L$  sind reellwertig.  $\square$

**BEWEIS VON SATZ 3.17.** Lemma 3.25 besagt gerade in Kombination mit Satz 3 und Korollar 10 in Schweizer (1994), dass  $(V_0, \vartheta^*)$  die Lösung des Problems varianz-optimales Hedgens bezüglich der zufälligen Auszahlung  $H$  darstellt. Das betrachtete Hedgeproblem stimmt mit dem folgenden Approximationsproblem im Hilbertraum  $L^2(P)$  überein:

$$\min_{\tilde{\vartheta} \in \{v_0 + \vartheta \cdot S_T : v_0 \in \mathbb{R}, \vartheta \in \Theta\}} \|\tilde{\vartheta} - H\|_{L^2(P)}^2.$$

Dabei ist die Menge  $\{v_0 + \vartheta \cdot S_T : v_0 \in \mathbb{R}, \vartheta \in \Theta\}$  konvex und abgeschlossen in  $L^2(P)$ , vgl. Monat & Stricker (1995), Satz 4.1 und Bemerkung 4.2. Daraus folgt:

$$v_0^* = \tilde{v}_0 \quad \text{und} \quad \vartheta^* \cdot S_T = \tilde{\vartheta} \cdot S_T \quad P\text{-f.s.}$$

für zwei Lösungen  $(v_0^*, \vartheta^*)$  und  $(\tilde{v}_0, \tilde{\vartheta})$  des Problems quadratischen Hedgens, vgl. Heuser (1986), Satz 21.1. Wegen  $\vartheta \cdot S \in \mathcal{H}^2$  für alle  $\vartheta \in \Theta$  gilt  $\vartheta^* \cdot S = \tilde{\vartheta} \cdot S$  und damit

$$\begin{aligned} 0 &= E_P \left[ \left\langle \left( \vartheta^* - \tilde{\vartheta} \right) \cdot S, \left( \vartheta^* - \tilde{\vartheta} \right) \cdot S \right\rangle_T \right] \\ &= E_P \left[ \int_0^T S_{t-}^2 (\delta_0 + \delta_1 y_{t-}) \left( \vartheta_t^* - \tilde{\vartheta}_t \right)^2 dt \right], \end{aligned}$$

was  $\vartheta^* = \tilde{\vartheta} P \otimes \lambda$ -f.s. impliziert.  $\square$

Im nächsten Schritt wird die Integraldarstellung des minimalen erwarteten quadratischen Hedgefehlers bewiesen, der als Risiko der Varianz-optimalen Hedgingstrategie aufgefasst werden kann. Es sei daran erinnert, dass die Zufallsvariable  $L_t$  den Fehlbetrag der optimalen Hedgingstrategie  $\vartheta^*$  zum Zeitpunkt  $t$  angibt und dass in diesem Sinne  $L$  auch als Hedgefehlerprozess angesehen werden kann. Der Hedgefehlerprozess  $L$  ist ein in Null startendes quadratisch integrierbares Martingal, infolgedessen der minimale erwartete quadratische Hedgefehler als Erwartungswert der vorhersehbaren quadratischen Variation  $\langle L, L \rangle$  des Hedgefehlerprozesses  $L$  ausgedrückt werden kann. Aufgrund der Integraldarstellung des Derivats kann diese vorhersehbare quadratische Variation als Doppelintegral über Spitzklammerprozesse von Hedgefehlerprozessen einfacher Derivate mit möglicherweise verschiedenen Auszahlungsprofilen geschrieben werden. Unter Verwendung des Semimartingalcharakteristikenkalküls lassen sich diese Spitzklammerprozesse explizit als Integrale der Zeit berechnen. Um den außen stehenden Erwartungswert durch das Doppelintegral und das Zeitintegral nach innen ziehen zu können, muss ein Fubini-Argument verwendet werden. Bei der angenommenen Integraldarstellung des Derivats ist der Integrationsbereich  $\mathcal{S}_f$  in der Gaußschen Ebene in imaginärer Richtung unbeschränkt, was hier im Allgemeinen eine Verletzung der Integrierbarkeitsvoraussetzung des Satzes von Fubini nach sich zieht. Daher betrachtet man Derivate mit abgeschnittenen Auszahlungsfunktionen, die bei der Integraldarstellung mit einem kompakten Integrationsbereich korrespondieren und die zur Approximation des ursprünglichen Derivats herangezogen werden können.

BEWEIS VON SATZ 3.18. Man betrachte die *abgeschnittene Auszahlungsfunktion*

$$f^k(s) := \int_{\mathcal{S}_f} s^z \Pi^k(dz),$$

wobei  $k \in \mathbb{R}_+$ ,  $\Pi^k(G) := \Pi(\mathcal{S}_f^k \cap G)$  für alle  $G \in \mathcal{B}(\mathcal{S}_f)$  und

$$\mathcal{S}_f^k := \{z \in \mathbb{C} : R' \leq \operatorname{Re}(z) \leq R, |\operatorname{Im}(z)| \leq k\}.$$

$H^k = f^k(S_T)$  gibt die zugehörige zufällige Auszahlung an. Man beachte, dass  $\mathcal{S}_f^k \subseteq \mathcal{S}_f$  abgeschlossen und damit Element von  $\mathcal{B}(\mathcal{S}_f)$  ist und dass  $\Pi^k$  ein endliches komplexes Maß auf  $(\mathcal{S}_f, \mathcal{B}(\mathcal{S}_f))$  darstellt. Der Preisprozess der zufälligen Auszahlung  $H^k$  ist gegeben durch

$$V^k := E_P[H^k | \mathcal{F}_t] = \int_{\mathcal{S}_f} V(z) \Pi^k(dz) = \int_{\mathcal{S}_f^k} V(z) \Pi(dz),$$

vgl. Proposition 3.15. Mit majorisierter Konvergenz ergibt sich  $V_t^k(\omega) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} V_t(\omega)$  für alle  $\omega \in \Omega$  und alle  $t \in [0, T]$ . Mittels der Hölder'schen Ungleichung erhält man die Abschätzung

$$\begin{aligned} |V_T^k - V_T|^2 &\leq \left( \int_{\mathcal{S}_f^k} |V(z)_T| |\Pi|(dz) \right)^2 \leq \left( \int_{\mathcal{S}_f} |V(z)_T| \Pi(dz) \right)^2 \\ &\leq |\Pi|(\mathcal{S}_f) \int_{\mathcal{S}_f} |V(z)_T|^2 |\Pi|(dz) \leq (|\Pi|(\mathcal{S}_f))^2 \left( e^{2R \ln S_T} + e^{2R' \ln S_T} \right). \end{aligned}$$

Die rechte Seite dieser Ungleichungskette ist in Anbetracht von Annahme 3.6(1) integrierbar bezüglich  $P$ . Daher liefert wiederum der Satz von der majorisierten Konvergenz

$$H^k = V_T^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{L^2} V_T = H.$$

Wendet man Proposition 3.16 auf das Derivat mit zufälliger Auszahlung  $H^k$  an, so erhält man  $V^k \in \mathcal{H}^2$ . Lemma 3.25 besagt dann, dass  $((\vartheta^k)^*, L^k)$ , definiert durch

$$(\vartheta^k)^* := \int_{\mathcal{S}_f} \vartheta^*(z) \Pi^k(dz) \quad \text{und} \quad L^k := \int_{\mathcal{S}_f} L(z) \Pi^k(dz),$$

die GKW-Zerlegung von  $V^k$  bezüglich  $S$  darstellt. Daraus folgt mit Monat & Stricker (1995), Satz 3.8, dass  $L_T^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{L^2} L_T$  gilt, was

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E_P[(L_T^k)^2] = E_P[L_T^2] \quad (3.52)$$

impliziert. Da  $L^k \in \mathcal{H}^2$  ist, folgt  $(L^k)^2 - \langle L^k, L^k \rangle \in \mathcal{M}$ , vgl. Jacod & Shiryaev (2003), Satz I.4.2. Mit  $L_0^k = 0$  ergibt sich damit

$$E_P[L_T^2] = \lim_{k \rightarrow \infty} E_P[\langle L^k, L^k \rangle_T]. \quad (3.53)$$

Zur Beendigung des Beweises von Satz 3.18 ist das folgende Lemma von zentraler Bedeutung. Dieses Lemma beinhaltet eine Integraldarstellung der vorhersehbaren quadratischen Variation des Hedgefehlerprozesses  $L^k$ , der mit der in Bezug auf das abgeschnittene Derivat varianz-optimale Handelsstrategie  $(\vartheta^k)^*$  einhergeht. Dabei ist der Integrand gerade der Spitzklammerprozess der Hedgefehlerprozesse  $L(z_1)$  und  $L(z_2)$  mit  $z_1, z_2 \in \mathcal{S}_f$ . Dieser Spitzklammerprozess kann in Form eines Zeitintegrals berechnet werden, vgl. Gleichung (3.42). Der Beweis von Satz 3.18 kann dann im Anschluss des Lemmas mittels einer zweifachen Anwendung des Satzes von Fubini und durch Berechnung der resultierenden Erwartungswerte vervollständigt werden. Bei der Berechnung der Erwartungswerte wird wesentlich die affine Struktur des stochastischen Volatilitätsmodells (3.1) - (3.3) ausgenutzt.

**Lemma 3.26** *Im Fall des Derivats mit abgeschnittener zufälliger Auszahlung  $H^k$  ist die vorhersehbare quadratische Variation des Hedgefehlerprozesses  $L^k$  von der Form*

$$\langle L^k, L^k \rangle = \int_{\mathcal{S}_f} \int_{\mathcal{S}_f} \langle L(z_1), L(z_2) \rangle \Pi^k(dz_1) \Pi^k(dz_2), \quad (3.54)$$

wobei sich der Spitzklammerprozess  $\langle L(z_1), L(z_2) \rangle$  gemäß Gleichung (3.42) berechnen lässt.

BEWEIS. Sei  $\tau_n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , die in Lemma 3.23 definierte Stoppzeit. Unter Verwendung der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung erhält man die Abschätzung

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathcal{S}_f} \int_{\mathcal{S}_f} E_P \left[ \left| L(z_1)_t^{\tau_n} L(z_2)_t^{\tau_n} - L(z_1)_s^{\tau_n} L(z_2)_s^{\tau_n} - \langle L(z_1), L(z_2) \rangle_t^{\tau_n} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \langle L(z_1), L(z_2) \rangle_s^{\tau_n} \right| \right] |\Pi^k|(dz_1) |\Pi^k|(dz_2) \\
\leq & \int_{\mathcal{S}_f} \int_{\mathcal{S}_f} \underbrace{\left[ (E_P[|L(z_1)_t^{\tau_n}|^2] E_P[|L(z_2)_t^{\tau_n}|^2])^{\frac{1}{2}} + (E_P[|L(z_1)_s^{\tau_n}|^2] E_P[|L(z_2)_s^{\tau_n}|^2])^{\frac{1}{2}} \right]}_{(I)} \\
& \underbrace{\left[ \left( (\operatorname{Re} \langle L(z_1), L(z_2) \rangle_t^{\tau_n})^2 + (\operatorname{Im} \langle L(z_1), L(z_2) \rangle_t^{\tau_n})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]}_{(II)} \\
& \underbrace{\left[ \left( (\operatorname{Re} \langle L(z_1), L(z_2) \rangle_s^{\tau_n})^2 + (\operatorname{Im} \langle L(z_1), L(z_2) \rangle_s^{\tau_n})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]}_{(III)} |\Pi^k|(dz_1) |\Pi^k|(dz_2).
\end{aligned}$$

Mittels Ungleichung (3.48) kann der Ausdruck (I) abgeschätzt werden durch

$$\begin{aligned}
& (E_P[|L(z_1)_t^{\tau_n}|^2] E_P[|L(z_2)_t^{\tau_n}|^2])^{\frac{1}{2}} + (E_P[|L(z_1)_s^{\tau_n}|^2] E_P[|L(z_2)_s^{\tau_n}|^2])^{\frac{1}{2}} \\
\leq & 2 \left( E_P \left[ \langle L(z_1), \overline{L(z_1)} \rangle_T^{\tau_n} \right] E_P \left[ \langle L(z_2), \overline{L(z_2)} \rangle_T^{\tau_n} \right] \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.55)
\end{aligned}$$

Man beachte, dass wegen der Eindeutigkeit des Spitzklammerprozesses, vgl. Definition 2.7,

$$\begin{aligned}
\pm \operatorname{Re} \langle L(z_1), L(z_2) \rangle &= \frac{1}{2} \left( \langle L(z_1) \pm L(\overline{z_2}), \overline{L(z_1) \pm L(\overline{z_2})} \rangle \right. \\
&\quad \left. - \langle L(z_1), \overline{L(z_1)} \rangle - \langle L(z_2), \overline{L(z_2)} \rangle \right) \quad (3.56)
\end{aligned}$$

gilt. Da  $\langle L(z_1) - L(\overline{z_2}), \overline{L(z_1) - L(\overline{z_2})} \rangle$  ein nichtnegativer und wachsender Prozess ist, folgt damit

$$\langle L(z_1) + L(\overline{z_2}), \overline{L(z_1) + L(\overline{z_2})} \rangle \leq 2 \left( \langle L(z_1), \overline{L(z_1)} \rangle + \langle L(z_2), \overline{L(z_2)} \rangle \right). \quad (3.57)$$

Die Terme (II) und (III) können nun wie folgt abgeschätzt werden: Mittels der Gleichung (3.56) und der Ungleichung (3.57) folgert man

$$|\operatorname{Re} \langle L(z_1), L(z_2) \rangle_t^{\tau_n}| \leq \frac{3}{2} \left( \langle L(z_1), \overline{L(z_1)} \rangle_t^{\tau_n} + \langle L(z_2), \overline{L(z_2)} \rangle_t^{\tau_n} \right). \quad (3.58)$$

Analog zu Gleichung (3.56) und Ungleichung (3.57) beobachtet man

$$\begin{aligned}
\pm \operatorname{Im} \langle L(z_1), L(z_2) \rangle &= \frac{1}{2} \left( \langle L(z_1) \pm iL(\overline{z_2}), \overline{L(z_1) \pm iL(\overline{z_2})} \rangle \right. \\
&\quad \left. - \langle L(z_1), \overline{L(z_1)} \rangle - \langle L(z_2), \overline{L(z_2)} \rangle \right), \quad (3.59)
\end{aligned}$$

$$\langle L(z_1) + iL(\overline{z_2}), \overline{L(z_1) + iL(\overline{z_2})} \rangle \leq 2 \left( \langle L(z_1), \overline{L(z_1)} \rangle + \langle L(z_2), \overline{L(z_2)} \rangle \right). \quad (3.60)$$

Somit gilt auch

$$|\operatorname{Im}\langle L(z_1), L(z_2) \rangle_t^{\tau_n}| \leq \frac{3}{2} \left( \langle L(z_1), \overline{L(z_1)} \rangle_t^{\tau_n} + \langle L(z_2), \overline{L(z_2)} \rangle_t^{\tau_n} \right). \quad (3.61)$$

Zusammen ergeben die Ungleichungen (3.58) und (3.61) die Abschätzung

$$\begin{aligned} & E_P \left[ \left( (\operatorname{Re}\langle L(z_1), L(z_2) \rangle_t^{\tau_n})^2 + (\operatorname{Im}\langle L(z_1), L(z_2) \rangle_t^{\tau_n})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\ & + E_P \left[ \left( (\operatorname{Re}\langle L(z_1), L(z_2) \rangle_s^{\tau_n})^2 + (\operatorname{Im}\langle L(z_1), L(z_2) \rangle_s^{\tau_n})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\ & \leq 6 \left( E_P[\langle L(z_1), \overline{L(z_1)} \rangle_T^{\tau_n}] + E_P[\langle L(z_2), \overline{L(z_2)} \rangle_T^{\tau_n}] \right). \end{aligned}$$

Unter Verwendung der Hölder'schen Ungleichung und Korollar 3.24, angewendet auf das komplexe Maß  $\Pi^k$ , folgt daraus und aus Ungleichung (3.55), dass

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{S}_f} \int_{\mathcal{S}_f} E_P \left[ \left| L(z_1)_t^{\tau_n} L(z_2)_t^{\tau_n} - L(z_1)_s^{\tau_n} L(z_2)_s^{\tau_n} - \langle L(z_1), L(z_2) \rangle_t^{\tau_n} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \langle L(z_1), L(z_2) \rangle_s^{\tau_n} \right| |\Pi^k|(dz_1) |\Pi^k|(dz_2) \right] \\ & \leq 14 |\Pi|(\mathcal{S}_f^k) \int_{\mathcal{S}_f} E_P[\langle L(z), \overline{L(z)} \rangle_T^{\tau_n}] |\Pi^k|(dz) < \infty \end{aligned}$$

ist. Damit liefert der Satz von Fubini

$$\begin{aligned} & E_P \left[ \left( (L^k)_t^{\tau_n} \right)^2 - \left( (L^k)_s^{\tau_n} \right)^2 - \int_{\mathcal{S}_f} \int_{\mathcal{S}_f} \langle L(z_1), L(z_2) \rangle_t^{\tau_n} \Pi^k(dz_1) \Pi^k(dz_2) \right. \\ & \quad \left. + \int_{\mathcal{S}_f} \int_{\mathcal{S}_f} \langle L(z_1), L(z_2) \rangle_s^{\tau_n} \Pi^k(dz_1) \Pi^k(dz_2) \right) 1_G \Big] \\ & = \int_{\mathcal{S}_f} \int_{\mathcal{S}_f} E_P \left[ \left( (L(z_1)_t^{\tau_n} L(z_2)_t^{\tau_n} - \langle L(z_1), L(z_2) \rangle_t^{\tau_n} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - (L(z_1)_s^{\tau_n} L(z_2)_s^{\tau_n} - \langle L(z_1), L(z_2) \rangle_s^{\tau_n}) \right) 1_G \right] \Pi^k(dz_1) \Pi^k(dz_2) = 0 \end{aligned}$$

für  $G \in \mathcal{F}_s$  und  $s \leq t$ , weil  $(L(z_1)L(z_2))^{\tau_n} - \langle L(z_1), L(z_2) \rangle^{\tau_n} \in \mathcal{M}$  gilt. Folglich ist  $(L^k)^2 - \int_{\mathcal{S}_f} \int_{\mathcal{S}_f} \langle L(z_1), L(z_2) \rangle \Pi^k(dz_1) \Pi^k(dz_2) \in \mathcal{M}_{\text{loc}}$ . Man sei daran erinnert, dass

$$\begin{aligned} \langle L(z_1), L(z_2) \rangle_t(\omega) & = \int_0^t e^{\Phi_0(T-s,0,z_1) + \Phi_0(T-s,0,z_2) + (\Phi_1(T-s,0,z_1) + \Phi_1(T-s,0,z_2))y_{s-}(\omega)} \\ & \quad \times e^{(z_1+z_2) \ln S_{s-}(\omega)} \left[ \alpha_0(s, z_1, z_2) + \alpha_1(s, z_1, z_2)y_{s-}(\omega) \right. \\ & \quad \left. - \frac{(\kappa_0(s, z_1) + \kappa_1(s, z_1)y_{s-}(\omega)) (\kappa_0(s, z_2) + \kappa_1(s, z_2)y_{s-}(\omega))}{\delta_0 + \delta_1 y_{s-}(\omega)} \right] ds \\ & \equiv \int_0^t g(\omega, s, z_1, z_2) ds \end{aligned}$$

gilt, vgl. die Gleichungen (3.42) und (3.25). Aufgrund der Annahmen 3.6(2) und 3.8 sowie aufgrund von Lemma 5.3 in Duffie et al. (2003) sind die Abbildungen  $\Phi_0$ ,  $\Phi_1$ ,  $\kappa_0$ ,  $\kappa_1$ ,  $\alpha_0$

und  $\alpha_1$  stetig, infolgedessen diese, als Funktionen in den Variablen  $s$ ,  $z_1$ , und  $z_2$  aufgefasst,  $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{B}^2(\mathcal{S}_f) - \mathcal{B}(\mathbb{C})$ -messbar sind. Wegen  $\mathcal{F}_0 \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \subset \mathcal{P}$  sind  $\Phi_0, \Phi_1, \kappa_0, \kappa_1, \alpha_0$  und  $\alpha_1$ , aufgefasst als Abbildungen in  $\omega, s, z_1$  und  $z_2$ ,  $\mathcal{P} \otimes \mathcal{B}^2(\mathcal{S}_f) - \mathcal{B}(\mathbb{C})$ -messbar. Die Prozesse  $y_-$  und  $S_-$  sind  $\mathcal{P}$ -messbar. Ergo ist der Integrand  $g$   $\mathcal{P} \otimes \mathcal{B}^2(\mathcal{S}_f) - \mathcal{B}(\mathbb{C})$ -messbar.

**Lemma 3.27** Sei  $(\omega, s, z_1, z_2) \mapsto g(\omega, s, z_1, z_2)$  eine  $\mathcal{P} \otimes \mathcal{B}^2(\mathbb{C}) - \mathcal{B}(\mathbb{C})$ -messbare Abbildung. Dann ist die Abbildung  $(\omega, t, z_1, z_2) \mapsto \int_0^t g(\omega, s, z_1, z_2) ds$  auch  $\mathcal{P} \otimes \mathcal{B}^2(\mathbb{C}) - \mathcal{B}(\mathbb{C})$ -messbar.

BEWEIS. Zunächst sei angenommen, dass  $g$  die Gestalt  $g(\omega, s, z_1, z_2) := 1_A(\omega, s)1_B(z_1, z_2)$  besitzt, wobei  $A \in \mathcal{P}$  und  $B \in \mathcal{B}^2(\mathbb{C})$  sind. Da  $1_A$  progressiv messbar ist, liefert der Satz von Fubini die  $\mathcal{F}_t - \mathcal{B}(\mathbb{C})$ -Messbarkeit von  $X_t(\omega) := \int_0^t 1_A(\omega, s) ds$ , das heißt, dass  $X$  adaptiert ist. Aufgrund der Stetigkeit von  $X$  ist  $X$  somit vorhersehbar. Folglich sind  $X$  und  $1_B$   $\mathcal{P} \otimes \mathcal{B}^2(\mathbb{C}) - \mathcal{B}(\mathbb{C})$ -messbar, und die Behauptung ist für eine derart strukturierte Abbildung  $g$  gezeigt. Offensichtlich ist  $\mathcal{E} := \{A \times B : A \in \mathcal{P}, B \in \mathcal{B}^2(\mathbb{C})\}$  ein Erzeuger von  $\mathcal{P} \otimes \mathcal{B}^2(\mathbb{C})$ , der schnittstabil ist. Mittels eines Dynkin-Arguments folgt die Behauptung für alle Abbildungen  $g$  der Form  $g(\omega, s, z_1, z_2) := 1_C(\omega, s, z_1, z_2)$ , wobei  $C \in \mathcal{P} \otimes \mathcal{B}^2(\mathbb{C})$  ist. Die allgemeine Behauptung resultiert dann mit algebraischer Induktion (Zerlegung von Real- und Imaginärteil einer beliebigen  $\mathcal{P} \otimes \mathcal{B}^2(\mathbb{C}) - \mathcal{B}(\mathbb{C})$ -messbaren Abbildung in Positiv- und Negativteil und Argumentation mittels monotoner Konvergenz unter Berücksichtigung von Satz 11.6 in Bauer (1974)).  $\square$

Damit kann der Beweis von Lemma 3.26 fortgesetzt werden. Lemma 3.27 liefert die  $\mathcal{P} \otimes \mathcal{B}^2(\mathcal{S}_f) - \mathcal{B}(\mathbb{C})$ -Messbarkeit von  $\langle L(z_1), L(z_2) \rangle$ . Zerlegt man das komplexe Maß  $\Pi^k$  unter Verwendung der Hahn-Jordan-Dekomposition in die  $\mathbb{R}_+$ -wertigen Maße  $((\Pi^k)^{\text{Re}})^+$ ,  $((\Pi^k)^{\text{Re}})^-$ ,  $((\Pi^k)^{\text{Im}})^+$  und  $((\Pi^k)^{\text{Im}})^-$ , das heißt

$$\Pi^k(G) = ((\Pi^k)^{\text{Re}})^+(G) - ((\Pi^k)^{\text{Re}})^-(G) + i((\Pi^k)^{\text{Im}})^+(G) - i((\Pi^k)^{\text{Im}})^-(G)$$

für alle  $G \in \mathcal{B}(\mathcal{S}_f)$ , so schließt man mit dem Satz von Fubini auf die Vorhersehbarkeit des Prozesses  $\int_{\mathcal{S}_f} \int_{\mathcal{S}_f} \langle L(z_1), L(z_2) \rangle \Pi^k(dz_1) \Pi^k(dz_2)$ . Real- und Imaginärteil dieses vorhersehbaren Prozesses können linear zerlegt werden in Doppelintegrale der Form

$$\int_{\mathcal{S}_f} \int_{\mathcal{S}_f} \text{Re} \langle L(z_1), L(z_2) \rangle \nu_j(dz_1) \nu_l(dz_2) \quad \text{oder} \quad \int_{\mathcal{S}_f} \int_{\mathcal{S}_f} \text{Im} \langle L(z_1), L(z_2) \rangle \nu_j(dz_1) \nu_l(dz_2),$$

wobei  $j, l \in \{1, \dots, 4\}$  sowie  $\nu_1 := ((\Pi^k)^{\text{Re}})^+$ ,  $\nu_2 := ((\Pi^k)^{\text{Re}})^-$ ,  $\nu_3 := ((\Pi^k)^{\text{Im}})^+$  und  $\nu_4 := ((\Pi^k)^{\text{Im}})^-$  sind. Mithilfe von Gleichung (3.56) erhält man

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{S}_f} \int_{\mathcal{S}_f} \text{Re} \langle L(z_1), L(z_2) \rangle \nu_j(dz_1) \nu_l(dz_2) \equiv \frac{1}{2} A^1 - \frac{1}{2} A^2 \\ & = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{S}_f} \int_{\mathcal{S}_f} \langle L(z_1) + L(\bar{z}_2), \overline{L(z_1) + L(\bar{z}_2)} \rangle \nu_j(dz_1) \nu_l(dz_2) \\ & \quad - \frac{1}{2} \left[ \nu_l(\mathcal{S}_f) \int_{\mathcal{S}_f} \langle L(z), \overline{L(z)} \rangle \nu_j(dz) + \nu_j(\mathcal{S}_f) \int_{\mathcal{S}_f} \langle L(z), \overline{L(z)} \rangle \nu_l(dz) \right]. \end{aligned}$$

Aus Ungleichung (3.57) ist unmittelbar ersichtlich, dass  $A_t^1 \leq 2A_t^2$  für alle  $t \in [0, T]$  gilt. Aufgrund von  $\nu_j(G) \leq |\Pi^k|(G)$  für alle  $G \in \mathcal{B}(\mathcal{S}_f)$  und alle  $j \in \{1, \dots, 4\}$ , vgl. Elstrodt (1996), Kapitel VII, Paragraph 1, und wegen  $\langle L(z), \overline{L(z)} \rangle \in \mathcal{V}^+$  beobachtet man ferner

$$A_t^2 \leq 2|\Pi|(\mathcal{S}_f) \int_{\mathcal{S}_f} \langle L(z), \overline{L(z)} \rangle_T |\Pi^k|(dz)$$

für alle  $t \in [0, T]$ , da wegen der Minimaleigenschaft von  $|\Pi^k|$  gilt, dass  $|\Pi^k|(G) \leq |\Pi|(G)$  für alle  $G \in \mathcal{B}(\mathcal{S}_f)$  ist, vgl. den Abschnitt über Totalvariation in Kapitel 6 der Monographie von Rudin (1987), und da  $\mathcal{S}_f^k \subseteq \mathcal{S}_f$  gilt. Die Abbildungen  $t \mapsto A_t^1, A_t^2$  sind monoton wachsend, da diese Integrale adaptierter wachsender Prozesse nach positiven Maßen darstellen. Wendet man Korollar 3.24 erneut auf das komplexe Maß  $\Pi^k$  an, so erhält man zudem

$$E_P[(A_t^1)^{\tau_n}] \leq 2E_P[(A_t^2)^{\tau_n}] \leq 4|\Pi|(\mathcal{S}_f) \int_{\mathcal{S}_f} E_P \left[ \langle L(z), \overline{L(z)} \rangle_T^{\tau_n} \right] |\Pi^k|(dz) < \infty.$$

Daraus folgt, dass  $A^1, A^2 \in \mathcal{V}^+$  sind, da die lokalisierte Klasse der adaptierten wachsenden Prozesse mit  $\mathcal{V}^+$  übereinstimmt. Somit ist  $\int_{\mathcal{S}_f} \int_{\mathcal{S}_f} \operatorname{Re} \langle L(z_1), L(z_2) \rangle \nu_j(dz_1) \in \mathcal{V}$ . Analog zeigt man, dass  $\int_{\mathcal{S}_f} \int_{\mathcal{S}_f} \operatorname{Im} \langle L(z_1), L(z_2) \rangle \nu_j(dz_1) \in \mathcal{V}$  gilt. Zusammenfassend bedeutet dies, dass der komplexwertige Prozess  $\int_{\mathcal{S}_f} \int_{\mathcal{S}_f} \langle L(z_1), L(z_2) \rangle \Pi^k(dz_1) \Pi^k(dz_2)$  wohldefiniert, vorhersehbar und von endlicher Variation ist. Daraus folgt

$$\langle L^k, L^k \rangle = \int_{\mathcal{S}_f} \int_{\mathcal{S}_f} \langle L(z_1), L(z_2) \rangle \Pi^k(dz_1) \Pi^k(dz_2)$$

wegen  $(L^k)^2 - \int_{\mathcal{S}_f} \int_{\mathcal{S}_f} \langle L(z_1), L(z_2) \rangle \Pi^k(dz_1) \Pi^k(dz_2) \in \mathcal{M}_{\text{loc}}$ . □

Somit kann der Beweis von Satz 3.18 fortgeführt werden. Aus Gleichung (3.53) resultiert mit Lemma 3.26 die Gültigkeit von

$$E_P[L_T^2] = \lim_{k \rightarrow \infty} E_P \left[ \int_{\mathcal{S}_f^k} \int_{\mathcal{S}_f^k} \langle L(z_1), L(z_2) \rangle_T \Pi(dz_1) \Pi(dz_2) \right]. \quad (3.62)$$

Es genügt, den Fall  $\delta_0, \delta_1 \neq 0$  zu zeigen. Der Beweis der Spezialfälle  $\delta_0 = 0$  bzw.  $\delta_1 = 0$  kann erübrigt werden, da die erforderlichen Argumente eine echte Teilmenge der Argumentation sind, die für den Fall  $\delta_0, \delta_1 \neq 0$  vonnöten ist. Mittels der Ungleichungen (3.58) und (3.61) erhält man

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{S}_f^k} \int_{\mathcal{S}_f^k} E_P[|\langle L(z_1), L(z_2) \rangle_T|] |\Pi|(dz_1) |\Pi|(dz_2) \\ & \leq \int_{\mathcal{S}_f^k} \int_{\mathcal{S}_f^k} E_P[|\operatorname{Re} \langle L(z_1), L(z_2) \rangle_T| + |\operatorname{Im} \langle L(z_1), L(z_2) \rangle_T|] |\Pi|(dz_1) |\Pi|(dz_2) \\ & \leq 6|\Pi|(\mathcal{S}_f^k) \int_{\mathcal{S}_f^k} E_P[\langle L(z), \overline{L(z)} \rangle_T] |\Pi|(dz). \end{aligned} \quad (3.63)$$

Man beachte, dass  $\langle X, \overline{X} \rangle$  für jedes  $\mathbb{C}$ -wertige quadratisch integrierbare Martingal  $X$  (d.h. für jeden  $\mathbb{C}$ -wertigen Prozess  $X$  mit  $\operatorname{Re}(X), \operatorname{Im}(X) \in \mathcal{H}^2$ ) ein integrierbarer wachsender Prozess ist, d.h., dass  $\langle X, \overline{X} \rangle \in \mathcal{A}^+$  gilt. Daraus ergibt sich mittels der Gleichungen (3.56) und (3.59) unter Verwendung des Satzes von Fubini und unter Berücksichtigung von Gleichung (3.42) die Gültigkeit von

$$E_P[\langle L(z_1), L(z_2) \rangle_T] = \int_0^T \left( \frac{\eta_2}{\delta_1} E_P[V(z_1)_t V(z_2)_t y_t] + \frac{\eta_1 \delta_1 - \eta_2 \delta_0}{\delta_1^2} E_P[V(z_1)_t V(z_2)_t] + \frac{\eta_0 \delta_1^2 - \eta_1 \delta_0 \delta_1 + \eta_2 \delta_0^2}{\delta_1^2} E_P \left[ \frac{V(z_1)_t V(z_2)_t}{\delta_0 + \delta_1 y_t} \right] \right) dt, \quad (3.64)$$

wobei  $\eta_0, \eta_1$  und  $\eta_2$ , von  $t, z_1$  und  $z_2$  abhängig, definiert sind wie in der Behauptung. Aufgrund von Annahme 3.6(1) und Bemerkung 3.7 lässt sich  $E_P[V(z_1)_t V(z_2)_t]$  wie folgt berechnen:

$$E_P[V(z_1)_t V(z_2)_t] = e^{\xi_0} S_0^{z_1+z_2} \exp\{\Phi_0(t, \xi_1, z_1 + z_2) + \Phi_1(t, \xi_1, z_1 + z_2) y_0\}, \quad (3.65)$$

wobei  $\xi_0$  und  $\xi_1$ , von  $t, z_1$  und  $z_2$  abhängig, definiert sind wie in der Behauptung. Man definiere nun die Abbildungen  $g_0$  und  $g_1 : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$  durch

$$\begin{aligned} (x_1, x_2) &\mapsto g_0(x_1, x_2) := \exp\{x_1 y_t + x_2 Z_t\}, \\ (x_1, x_2) &\mapsto g_1(x_1, x_2) := E_P[g_0(x_1, x_2)]. \end{aligned}$$

Ferner bezeichne  $B(\xi_1, \tilde{\varepsilon}) := \{z \in \mathbb{C} : |z - \xi_1| < \tilde{\varepsilon}\}$  eine offene Kugel mit Zentrum  $\xi_1$  und Radius  $\tilde{\varepsilon}$ . Dabei sei  $0 < 2\tilde{\varepsilon} < \varepsilon$  für ein beliebig kleines, fest gewähltes  $\varepsilon$  in Annahme 3.6. Man beachte, dass  $\xi_1 := \xi_1(t, z_1, z_2)$  für festes  $(t, z_1, z_2) \in [0, T] \times \mathcal{S}_f^2$  eine komplexe Zahl ist. Wegen  $\operatorname{Re}(\xi_1(t, z_1, z_2)) \leq \frac{1}{2}(\Phi_1(T-t, 0, 2\operatorname{Re}(z_1)) + \Phi_1(T-t, 0, 2\operatorname{Re}(z_2))) \leq M_0$  gilt

$$\begin{aligned} &\tilde{\varepsilon} \sup \{|D_1 g_0(\xi, z_1 + z_2)| : \xi \in B(\xi_1, \tilde{\varepsilon})\} \\ &\leq \sup \{e^{(\tilde{\varepsilon} + \operatorname{Re}(\xi))y_t + (\operatorname{Re}(z_1) + \operatorname{Re}(z_2))Z_t} : \xi \in B(\xi_1, \tilde{\varepsilon})\} \\ &\leq e^{(M_0 + 2\tilde{\varepsilon})y_t} \left( e^{2RZ_t} + e^{2R'Z_t} \right). \end{aligned}$$

Die rechte Seite ist bezüglich  $P$  integrierbar, vgl. Annahme 3.6 und Bemerkung 3.7. Falls  $|h|$  hinreichend klein ist, ist

$$\left| \frac{g_0(\xi_1 + h, z_1 + z_2) - g_0(\xi_1, z_1 + z_2)}{h} \right| \leq \tilde{\varepsilon} + \sup \{|D_1 g_0(\xi, z_1 + z_2)| : \xi \in B(\xi_1, \tilde{\varepsilon})\},$$

vgl. Kapitel 1, Paragraph 1.1, in Remmert (1992). Daraus folgt mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz:

$$\begin{aligned} E_P[V(z_1)_t V(z_2)_t y_t] &= e^{\xi_0} S_0^{z_1+z_2} E_P[D_1 g_0(\xi_1, z_1 + z_2)] = e^{\xi_0} S_0^{z_1+z_2} D_1 g_1(\xi_1, z_1 + z_2) \\ &= E_P[V(z_1)_t V(z_2)_t] (D_2 \Phi_0(t, \xi_1, z_1 + z_2) + D_2 \Phi_1(t, \xi_1, z_1 + z_2) y_0). \end{aligned} \quad (3.66)$$

Des Weiteren gilt, vgl. Satz II.2.1 in Fischer & Lieb (1994),

$$\frac{e^{\xi_1 \left( y_t + \frac{\delta_0}{\delta_1} \right)}}{y_t + \frac{\delta_0}{\delta_1}} = \int_{\Gamma} e^{z \left( y_t + \frac{\delta_0}{\delta_1} \right)} dz = \int_0^1 \left( \frac{\delta_1}{\delta_0} + \xi_1 s \right) \exp \left\{ \left( \frac{\delta_1}{\delta_0} \ln(s) + \xi_1 s \right) y_t + \frac{\delta_0}{\delta_1} \xi_1 s \right\} ds,$$

wobei  $\Gamma = \left\{ \frac{\delta_1}{\delta_0} \ln(s) + \xi_1 s : s \in (0, 1] \right\}$  ist. Damit erhält man

$$\begin{aligned} & E_P \left[ \frac{V(z_1)_t V(z_2)_t}{\delta_0 + \delta_1 y_t} \right] \\ &= e^{\xi_0 S_0^{z_1+z_2}} \frac{e^{-\frac{\delta_0}{\delta_1} \xi_1}}{\delta_1} \left( \frac{\delta_1}{\delta_0} E_P \left[ \int_0^1 \exp \left\{ \left( \frac{\delta_1}{\delta_0} \ln(s) + \xi_1 s \right) y_t + \frac{\delta_0}{\delta_1} \xi_1 s + (z_1 + z_2) Z_t \right\} ds \right] \right. \\ & \quad \left. + \xi_1 E_P \left[ \int_0^1 s \exp \left\{ \left( \frac{\delta_1}{\delta_0} \ln(s) + \xi_1 s \right) y_t + \frac{\delta_0}{\delta_1} \xi_1 s + (z_1 + z_2) Z_t \right\} ds \right] \right). \end{aligned}$$

Wegen  $\delta_0, \delta_1 > 0$  und aufgrund der Nichtnegativität von  $y_t$  ergibt sich für alle  $s \in (0, 1]$  die Abschätzung

$$\left| s e^{\left( \frac{\delta_1}{\delta_0} \ln(s) + \xi_1 s \right) y_t + \frac{\delta_0}{\delta_1} \xi_1 s + (z_1 + z_2) Z_t} \right| \leq e^{\frac{\delta_0}{\delta_1} (M_0 \vee 0)} \left( e^{(M_0 \vee 0) y_t + 2R Z_t} + e^{(M_0 \vee 0) y_t + 2R' Z_t} \right).$$

Anhand von Annahme 3.6 und Bemerkung 3.7 erkennt man, dass die rechte Seite dieser Ungleichung bezüglich  $P$  integrierbar ist. Unter erneuter Berücksichtigung von Bemerkung 3.7 resultiert somit aus dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned} E_P \left[ \frac{V(z_1)_t V(z_2)_t}{\delta_0 + \delta_1 y_t} \right] &= e^{\xi_0 S_0^{z_1+z_2}} \frac{e^{-\frac{\delta_0}{\delta_1} \xi_1}}{\delta_1} \int_0^1 \left( \frac{\delta_1}{\delta_0} + \xi_1 s \right) e^{\frac{\delta_0}{\delta_1} \xi_1 s} \\ & \quad \times e^{\Phi_0 \left( t, \frac{\delta_1}{\delta_0} \ln(s) + \xi_1 s, z_1 + z_2 \right) + \Phi_1 \left( t, \frac{\delta_1}{\delta_0} \ln(s) + \xi_1 s, z_1 + z_2 \right) y_0} ds. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Mithilfe der Stetigkeit der Abbildungen  $\Phi_0, \Phi_1, D_2 \Phi_0$  und  $D_2 \Phi_1$  auf dem Kompaktum  $[0, T] \times \mathcal{S}_f^k$ , vgl. Annahme 3.6(2), schließt man auf

$$\begin{aligned} E_P [|V(z)_t|^2] &\leq e^{\Phi_0(T-t, 0, 2\operatorname{Re}(z))} \left( S_0^{2R} e^{\Phi_0(t, M_0 \vee 0, 2R) + \Phi_1(t, M_0 \vee 0, 2R) y_0} \right. \\ & \quad \left. + S_0^{2R'} e^{\Phi_0(t, M_0 \vee 0, 2R') + \Phi_1(t, M_0 \vee 0, 2R') y_0} \right) \leq c_1, \\ E_P [|V(z)_t|^2 y_t] &\leq c_1 |D_2 \Phi_0(t, 2\operatorname{Re}(\Phi_1(T-t, 0, z)), 2\operatorname{Re}(z)) \\ & \quad + D_2 \Phi_1(t, 2\operatorname{Re}(\Phi_1(T-t, 0, z)), 2\operatorname{Re}(z)) y_0| \leq c_2(k) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & E_P \left[ \frac{|V(z)_t|^2}{\delta_0 + \delta_1 y_t} \right] \\ &\leq e^{2\operatorname{Re}(\Phi_0(T-t, 0, z))} \left( S_0^{2R} + S_0^{2R'} \right) \frac{e^{\frac{\delta_0}{\delta_1} |2\operatorname{Re}(\Phi_1(T-t, 0, z))|}}{\delta_1} \left( \frac{\delta_1}{\delta_0} + (M_0 \vee 0) \right) e^{\frac{\delta_0}{\delta_1} (M_0 \vee 0)} \\ & \quad \times \left( e^{\Phi_0(t, M_0 \vee 0, 2R) + \Phi_1(t, M_0 \vee 0, 2R) y_0} + e^{\Phi_0(t, M_0 \vee 0, 2R') + \Phi_1(t, M_0 \vee 0, 2R') y_0} \right) \leq c_3(k) \end{aligned}$$

für alle  $(t, z) \in [0, T] \times \mathcal{S}_f^k$ , wobei  $c_1, c_2(k)$  und  $c_3(k)$  positive Konstanten sind. Die letzteren beiden hängen möglicherweise von  $k$  ab, nicht aber von  $t$  oder  $z$ . Folglich erhält man die Abschätzung

$$\begin{aligned} E_P[\langle L(z), \overline{L(z)} \rangle_T] &\leq \int_0^T \left( |\eta_2(t, z, \bar{z})| \frac{c_2(k)}{\delta_1} + (\delta_1 |\eta_1(t, z, \bar{z})| + \delta_0 |\eta_2(t, z, \bar{z})|) \frac{c_1}{\delta_1^2} \right. \\ &\quad \left. + (\delta_1^2 |\eta_0(t, z, \bar{z})| + \delta_0 \delta_1 |\eta_1(t, z, \bar{z})| + \delta_0^2 |\eta_2(t, z, \bar{z})|) \frac{c_3(k)}{\delta_1^2} \right) dt \\ &\leq T c_4(k) \end{aligned}$$

für alle  $z \in \mathcal{S}_f^k$  und eine positive Konstante  $c_4(k)$ , die nur von  $k$  abhängt, da die Abbildungen

$$(t, z) \mapsto \eta_0(t, z, \bar{z}), \eta_1(t, z, \bar{z}), \eta_2(t, z, \bar{z})$$

auf  $[0, T] \times \mathcal{S}_f^k$  stetig sind, vgl. die Annahmen 3.6 und 3.8. Mit Ungleichung (3.63) folgt daraus

$$\int_{\mathcal{S}_f^k} \int_{\mathcal{S}_f^k} E_P[|\langle L(z_1), L(z_2) \rangle_T|] |\Pi|(dz_1) |\Pi|(dz_2) \leq 6 (|\Pi|(\mathcal{S}_f^k))^2 T c_4(k) < \infty,$$

infolgedessen der Satz von Fubini anwendbar ist und unter Berücksichtigung von Gleichung (3.62) abschließend

$$E_P[L_T^2] = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{S}_f^k} \int_{\mathcal{S}_f^k} E_P[\langle L(z_1), L(z_2) \rangle_T] \Pi(dz_1) \Pi(dz_2) \quad (3.68)$$

liefert. Die Behauptung folgt unmittelbar aus den Gleichungen (3.64) - (3.67). Die Integrale, die man in Gleichung (3.68) im Grenzwert erhält, sind also im Sinne des Cauchy'schen Hauptwertes aufzufassen.  $\square$



# Kapitel 4

## Varianz-optimales Hedging in stochastischen Volatilitätsmodellen mit zeittransformierten Lévy-Prozessen

Nachdem in Kapitel 3 das Problem des varianz-optimalen Hedgens im allgemeinen affinen stochastischen Volatilitätsmodell einer semiexpliziten Lösung zugeführt worden ist, sollen die allgemeinen Resultate in diesem Kapitel auf die stochastischen Volatilitätsmodelle auf der Grundlage zeittransformierter Lévy-Prozesse von Carr et al. (2003), vgl. Abschnitt 1.4.4, spezialisiert werden. Zunächst wird bewiesen, dass die stochastischen Volatilitätsmodelle von Carr et al. (2003) affin sind. Anschließend werden die zentralen Integralformeln für den varianz-optimalen Hedge und den minimalen erwarteten quadratischen Hedgefehler in Form der konkreten Modellgrößen ausgedrückt. Ein wesentlicher Teil der Arbeit wird dahingehend investiert, die allgemeinen Voraussetzungen auf die vorliegende Modellspezifikation zu übertragen, mit dem Ziel, dass die nur von den Modellparametern abhängenden Bedingungen in möglichst einfacher Form vorliegen, d.h. leicht überprüfbar sind. In einem letzten Abschnitt werden dann diese Modelle noch einmal spezialisiert durch die Festlegung bis dahin nicht spezifizierter Lévy-Prozesse und durch die Vorgabe der Modellparameter, so dass die Formeln numerisch umgesetzt werden können. Hinsichtlich der Modellparameter wird zum einen ein hypothetischer Beispielparametersatz herangezogen und zum anderen ein Parametersatz, der auf der Kalibrierung von Optionspreisen beruht, vgl. Schoutens (2003), Tabelle 7.3. Der letztere Ansatz ist dabei so zu verstehen, dass man unter dem risikoneutralen Maß quadratisch hedgt. Da man jedoch in der wirklichen Welt handelt und man das damit einhergehende Risiko nur in der wirklichen Welt sinnvoll deuten kann, sollte man eigentlich den Hedge und den dazugehörigen Fehler unter dem physikalischen Maß berechnen. In diesem Beispiel auf der Basis kalibrierter Parameter soll daher unter anderem die Frage untersucht werden, wie weit die beiden Maße numerisch voneinander entfernt liegen, d.h. wie gut die Lösung unter dem risikoneutralen Maß die Lösung unter dem physikalischen Maß approximiert. Unabhängig von dieser Frage dokumentieren beide Beispiele die gute numerische Handhabbarkeit der Formeln für den varianz-optimalen Hedge und den entspre-

chenden minimalen erwarteten quadratischen Hedgefehler, die in den Sätzen 3.17 und 3.18 angegeben worden sind. Es sei daran erinnert, dass die Handelsintensität sowohl durch eine Quadratwurzel-Diffusion als auch durch einen OU-Prozess, der durch einen Subordinator getrieben wird, modelliert werden kann. Im ersten Abschnitt werden die stochastischen Zeittransformationsmodelle auf der Basis von OU-Prozessen untersucht, man betrachte hierzu das Modell (1.97) - (1.99). Hinsichtlich der Notation in diesem Kapitel sei darauf hingewiesen, dass die kumulantenerzeugende Funktion eines  $\mathbb{R}^d$ -wertigen Lévy-Prozesses  $L$ , wie im eindimensionalen Fall in Abschnitt 1.2, mit  $\psi^L$  bezeichnet wird. Sie ist von der Form

$$\psi^L(u) = u^\top b^L + \frac{1}{2} u^\top c^L u + \int_{\mathbb{R}^d} \left( e^{u^\top x} - 1 - u^\top h(x) \right) F^L(dx),$$

wobei  $(b^L, c^L, F^L)$  das Lévy-Khintchine-Tripel von  $L$  angibt und  $h$  für eine Abschneidefunktion auf dem  $\mathbb{R}^d$  steht. Der Definitionsbereich  $U$  von  $\psi^L$  ist gegeben durch

$$U = \left\{ u \in \mathbb{C}^d : \int_{\|x\|>1} e^{\operatorname{Re}(u)^\top x} F^L(dx) < \infty \right\}.$$

## 4.1 Integrierte OU-Zeittransformationsmodelle

Zunächst soll gezeigt werden, dass das integrierte OU-Zeittransformationsmodell (1.97) - (1.99) affin ist. Dazu werden einige technische Hilfsaussagen benötigt. Die Menge

$$\mathbb{D}(\mathbb{R}^d) := \{ \alpha : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^d : \alpha \text{ ist càdlàg} \}$$

der  $\mathbb{R}^d$ -wertigen càdlàg-Funktionen auf  $\mathbb{R}_+$  wird als *Skorokhod-Raum* bezeichnet. Darüber hinaus ist  $\pi_t : \mathbb{D}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}^d$ , definiert durch  $\pi_t(\alpha) := \alpha_t$ , für  $t \in \mathbb{R}_+$  die Projektionsabbildung. Mittels der durch die Projektionen erzeugten  $\sigma$ -Algebren  $\mathcal{D}_t^0(\mathbb{R}^d) := \sigma(\pi_s : s \leq t)$  definiert man

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) := \sigma\left(\bigcup_{t \in \mathbb{R}_+} \mathcal{D}_t^0(\mathbb{R}^d)\right) \quad \text{und} \quad \mathcal{D}_t(\mathbb{R}^d) := \bigcap_{s>t} \mathcal{D}_s^0(\mathbb{R}^d),$$

$t \in \mathbb{R}_+$ .  $(\mathcal{D}_t(\mathbb{R}^d))_{t \in \mathbb{R}_+}$  ist dann eine Filtrierung auf  $(\mathbb{D}(\mathbb{R}^d), \mathcal{D}(\mathbb{R}^d))$ , vgl. Jacod & Shiryaev (2003), Definition VI.1.1. Im Fall  $d = 1$  schreibt man manchmal auch einfach  $\mathbb{D}$ ,  $\mathcal{D}$  und  $(\mathcal{D}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  anstelle von  $\mathbb{D}(\mathbb{R})$ ,  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  und  $(\mathcal{D}_t(\mathbb{R}))_{t \in \mathbb{R}_+}$ .

### Lemma 4.1 Die Abbildung

$$\mathbb{D}(\mathbb{R}^d) \times \mathbb{D}(\mathbb{R}) \times \mathbb{D}(\mathbb{R}^{d'}) \ni (\alpha, \beta, \gamma) \mapsto 1_A(\beta, \gamma) 1_{\{\Delta \alpha_{g(\beta, \gamma)} \neq 0\}} \in \mathbb{R}_+$$

ist  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{D}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{D}(\mathbb{R}^{d'}) - \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ -messbar für alle  $A \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{D}(\mathbb{R}^{d'})$ , wobei  $g : \mathbb{D}(\mathbb{R}) \times \mathbb{D}(\mathbb{R}^{d'}) \rightarrow \mathbb{R}_+$  definiert ist durch

$$g(\beta, \gamma) := \int_0^{\tilde{\Gamma}_n(\gamma)} \beta_s^+ ds$$

und  $(\tilde{\Gamma}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Stoppzeiten bezüglich  $(\mathcal{D}(\mathbb{R}^{d'}))_{t \geq 0}$  bezeichnet.  $\beta^+ := \beta \vee 0$  steht für den Positivteil von  $\beta$ .

BEWEIS. Man beachte, dass

$$g(\beta, \gamma) = \int_0^\infty 1_{[0, \infty)}(\tilde{\Gamma}_n(\gamma) - s) \beta_s^+ ds.$$

gilt. Da  $\tilde{\Gamma}_n$  Stoppzeit bezüglich  $(\mathcal{D}(\mathbb{R}^{d'}))_{t \geq 0}$  ist, gilt  $\{\gamma \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^{d'}) : \tilde{\Gamma}_n(\gamma) \leq t\} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{d'})$  für alle  $t \geq 0$ . Daraus folgt, dass die Abbildung  $\gamma \mapsto \tilde{\Gamma}_n(\gamma)$   $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{d'}) - \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ -messbar ist. Somit resultiert die  $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{D}(\mathbb{R}^{d'}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) - \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ -Messbarkeit der Funktion  $(\beta, \gamma, s) \mapsto 1_{[0, \infty)}(\tilde{\Gamma}_n(\gamma) - s)$ .  $\beta^+$  ist càdlàg. Aufgrund der Konstruktion von  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  ist  $\beta \mapsto \beta_t^+$   $\mathcal{D}(\mathbb{R}) - \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ -messbar für alle  $t \geq 0$ , d.h.  $\beta^+$  ist adaptiert an  $(\mathcal{D}(\mathbb{R}))_{t \geq 0}$ . Damit folgt auch die  $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{D}(\mathbb{R}^{d'}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) - \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ -Messbarkeit von  $(\beta, \gamma, s) \mapsto \beta_s^+$ . Der Satz von Fubini liefert dann die  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{D}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{D}(\mathbb{R}^{d'}) - \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ -Messbarkeit der Abbildung  $(\alpha, \beta, \gamma) \mapsto g(\beta, \gamma)$ . Da  $\alpha$  càdlàg und adaptiert an  $(\mathcal{D}(\mathbb{R}^d))_{t \geq 0}$  ist, ist  $\Delta\alpha$  progressiv messbar bezüglich  $(\mathcal{D}(\mathbb{R}^d))_{t \geq 0}$ , vgl. Jacod & Shiryaev (2003), Korollar I.1.25. D.h.  $\mathbb{D}(\mathbb{R}^d) \times \mathbb{R}_+ \ni (\alpha, s) \mapsto \Delta\alpha_s \in \mathbb{R}$  ist  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -messbar. Damit ergibt sich die  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{D}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{D}(\mathbb{R}^{d'}) - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -Messbarkeit von  $(\alpha, \beta, \gamma) \mapsto \Delta\alpha_{g(\beta, \gamma)}$ . Mittels

$$1_{\{\Delta\alpha_{g(\beta, \gamma)} \neq 0\}} = 1_{(0, \infty)}(\Delta\alpha_{g(\beta, \gamma)}) + 1_{(-\infty, 0)}(\Delta\alpha_{g(\beta, \gamma)})$$

folgt die Behauptung unter Berücksichtigung von  $A \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{D}(\mathbb{R}^{d'})$ .  $\square$

**Proposition 4.2** *Man betrachte den  $\mathbb{R}^d$ -wertigen Lévy-Prozess  $L = (L_u)_{u \in \mathbb{R}_+}$  bezüglich einer Filtrierung  $(\mathcal{G}_u)_{u \in \mathbb{R}_+}$  mit differentieller Charakteristik  $\partial L = (b, c, F)$ . Ferner sei  $Y$  eine endliche, absolut stetige Zeittransformation bezüglich einer Filtrierung  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  derart, dass  $Y_t$  für jedes  $t \in \mathbb{R}_+$  Stoppzeit bezüglich  $(\mathcal{G}_u)_{u \in \mathbb{R}_+}$  und  $\dot{Y}$  càdlàg sind. Zudem bezeichne  $\tilde{L} = (\tilde{L}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  einen  $\mathbb{R}^d$ -wertigen Lévy-Prozess bezüglich der Filtrierung  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  mit differentieller Charakteristik  $\partial \tilde{L} = (\tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{F})$ . Es wird angenommen, dass die Prozesse  $L$  und  $(Y, \tilde{L})$  unabhängig sind. Falls der zeittransformierte Prozess  $(L_{Y_t})_{t \in \mathbb{R}_+}$  ein Semimartingal bezüglich  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  ist, ist  $(\hat{L})_{t \in \mathbb{R}_+} := ((L_{Y_t}, \tilde{L}_t))_{t \in \mathbb{R}_+}$  ebenfalls ein Semimartingal bezüglich  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ . Wenn zusätzlich  $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{G}_{Y_t}$  für alle  $t \in \mathbb{R}_+$  gilt, hat der Kompensator des Zufallsmaßes der Sprünge von  $\hat{L}$  bezüglich  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  die Gestalt*

$$\nu^{\hat{L}}([0, t] \times G) = \int_{\mathbb{R}^{d'}} 1_G(0, x') \tilde{F}(dx') t + \int_{\mathbb{R}^d} 1_G(x, 0) F(dx) Y_t \quad (4.1)$$

für alle  $G \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d+d'})$ .

Dieses Resultat ist durchaus anschaulich, da die Prozesse  $L_Y$  und  $\tilde{L}$  aufgrund der Unabhängigkeit zu keinem Zeitpunkt (bis auf einer  $P$ -Nullmenge) gemeinsam springen. Der rigorose Beweis erfordert hingegen leider etwas technischen Aufwand.

BEWEIS. Dass  $\hat{L}$  ein Semimartingal bezüglich  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  ist, falls  $(L_{Y_t})_{t \in \mathbb{R}_+}$  ein Semimartingal bezüglich  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  ist, ist aufgrund der komponentenweisen Definition des mehrdimensionalen Semimartingals klar. Da  $\hat{L}$  als Semimartingal bezüglich  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  càdlàg und adaptiert ist, definiert

$$\mu^{\hat{L}}(\omega; dt, dx) = \sum_{s \geq 0} 1_{\{\Delta \hat{L}_s(\omega) \neq 0\}} \varepsilon_{(s, \Delta \hat{L}_s(\omega))}(dt, dx)$$

ein ganzzahliges Zufallsmaß auf  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{d+d'}$ , vgl. Definition 2.18 und Jacod & Shiryaev (2003), Proposition II.1.16. Gemäß Satz 2.19 existiert der Kompensator  $\nu^{\hat{L}}$  von  $\mu^{\hat{L}}$   $P$ -f.s. eindeutig. Der Kompensator ist als dasjenige vorhersehbare Zufallsmaß charakterisiert, welches die Gleichung

$$E_P[W * \nu_\infty^{\hat{L}}] = E_P[W * \mu_\infty^{\hat{L}}] \quad (4.2)$$

für jede nichtnegative  $\mathcal{P} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d+d'})$ -messbare Funktion  $W$  auf  $\Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{d+d'}$  erfüllt, vgl. Satz 2.19. Aufgrund des Satzes von der monotonen Konvergenz und eines Dynkin-Arguments ( $\mathcal{E} := \{C \times K : C \in \mathcal{P}, K \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d+d'})\}$ ) ist ein schnittstabiler Erzeuger von  $\mathcal{P} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d+d'})$  und Teilmenge des Dynkin-Systems  $\{G \in \mathcal{P} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d+d'}) : E_P[1_G * \nu_\infty^{\hat{L}}] = E_P[1_G * \mu_\infty^{\hat{L}}]\}$  genügt es, die Gültigkeit der Gleichung (4.2) für  $\nu^{\hat{L}}$ , definiert in Gleichung (4.1), für eine beliebige Funktion der Form

$$W(\omega, s, x) := 1_{C \times K}((\omega, s), x) \quad \text{mit } C \in \mathcal{P}, K \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d+d'})$$

zu beweisen. Die Menge  $K \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d+d'})$  kann wie folgt disjunkt zerlegt werden:

$$\begin{aligned} K &= (K \cap ((\mathbb{R}^d \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R}^{d'} \setminus \{0\}))) \dot{\cup} (K \cap (\{0\} \times \{0\})) \\ &\quad \dot{\cup} (K \cap ((\mathbb{R}^d \setminus \{0\}) \times \{0\})) \dot{\cup} (K \cap (\{0\} \times (\mathbb{R}^{d'} \setminus \{0\}))) \\ &= K_1 \dot{\cup} K_2 \dot{\cup} K_3 \dot{\cup} K_4. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Man beachte dabei

$$\begin{aligned} K_1 &= \begin{cases} \emptyset, & \text{falls } K = \{0\} \times \{0\}, \\ A_1 \times B_1 & \text{mit } 0 \notin A_1 \text{ und } 0 \notin B_1 \text{ sonst,} \end{cases} \\ K_2 &= \begin{cases} \{0\} \times \{0\}, & \text{falls } (0, 0) \in K, \\ \emptyset & \text{sonst,} \end{cases} \\ K_3 &= \begin{cases} \emptyset, & \text{falls } K \subseteq \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d'} : x_2 \neq 0\} \cup (\{0\} \times \{0\}), \\ (A_2 \times \mathbb{R}^{d'}) \setminus (A_2 \times (\mathbb{R}^{d'} \setminus \{0\})) & \text{mit } 0 \notin A_2 \text{ sonst,} \end{cases} \\ K_4 &= \begin{cases} \emptyset, & \text{falls } K \subseteq \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d'} : x_1 \neq 0\} \cup (\{0\} \times \{0\}), \\ (\mathbb{R}^d \times B_2) \setminus ((\mathbb{R}^d \setminus \{0\}) \times B_2) & \text{mit } 0 \notin B_2 \text{ sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Nun wird Gleichung (4.2) in den vier relevanten Fällen untersucht. Dabei gelte  $C \in \mathcal{P}$ .

(i)  $W(\omega, s, x) = 1_{C \times \{0\} \times \{0\}}((\omega, s), x)$

Da  $\mathcal{P} \subset \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$  gilt, beobachtet man bezüglich des  $\omega$ -Schnitts  $C_\omega$  der Menge  $C$ , definiert durch  $C_\omega := \{s \in \mathbb{R}_+ : (\omega, s) \in C\}$ , dass  $C_\omega \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$  ist für alle  $\omega \in \Omega$ . Offensichtlich gilt

$$\begin{aligned} W * \mu_\infty^{\hat{L}}(\omega) &= \mu^{\hat{L}}(\omega; C_\omega \times (\{0\} \times \{0\})) \\ &= \left| \{s \in C_\omega : \Delta \hat{L}_s(\omega) \in (\{0\} \times \{0\}) \setminus \{(0, 0)\}\} \right| = 0. \end{aligned}$$

Auf der anderen Seite ist

$$\begin{aligned} W * \nu_\infty^{\hat{L}}(\omega) &= \nu^{\hat{L}}(\omega; C_\omega \times (\{0\} \times \{0\})) \\ &= \int_{C_\omega} \left( \int_{\mathbb{R}^{d'}} 1_{\{0\} \times \{0\}}(0, x') \tilde{F}(dx') + \int_{\mathbb{R}^d} 1_{\{0\} \times \{0\}}(x, 0) F(dx) \dot{Y}_s(\omega) \right) ds = 0, \end{aligned}$$

da  $F$  und  $\tilde{F}$  Lévy-Maße sind.

(ii)  $W(\omega, s, x) = 1_{C \times A \times \mathbb{R}^{d'}}((\omega, s), x)$  mit  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  und  $0 \notin A$

Da die Abbildung  $(\omega, s, x) \mapsto 1_{C \times A}((\omega, s), x)$  vorhersehbar ist,  $0 \notin A$  gilt und  $\nu^{L_Y}$  den Kompensator des Maßes  $\mu^{L_Y}$  der Sprünge von  $L_Y$  darstellt, erhält man

$$E_P[W * \mu_\infty^{\hat{L}}] = E_P[1_{C \times A} * \mu_\infty^{L_Y}] = E_P[1_{C \times A} * \nu_\infty^{L_Y}].$$

Gemäß Proposition 2.34 ist der zeittransformierte Prozess  $L_Y$  ein Semimartingal bezüglich  $(\mathcal{G}_{Y_t})_{t \in \mathbb{R}_+}$  mit differentieller Charakteristik  $\partial L_Y = (b\dot{Y}_-, c\dot{Y}_-, F\dot{Y}_-)$ . Da  $Y$  an  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  adaptiert ist, ist auch  $\dot{Y}$  an  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  adaptiert. Daraus folgt mit der Voraussetzung, dass  $\dot{Y}$  càdlàg ist, die Vorhersehbarkeit von  $\dot{Y}_-$  bezüglich  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , vgl. Jacod & Shiryaev (2003), Proposition I.2.6. Darüber hinaus beachte man, dass  $L_Y$  als Semimartingal bezüglich  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  an  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  adaptiert ist. Somit liefert Satz 2.26 unter Berücksichtigung der Voraussetzung  $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{G}_{Y_t}$  für alle  $t \in \mathbb{R}_+$ , dass der zeittransformierte Prozess  $L_Y$  auch bezüglich  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  die differentielle Charakteristik  $\partial L_Y = (b\dot{Y}_-, c\dot{Y}_-, F\dot{Y}_-)$  besitzt. Somit erhält man

$$\nu^{L_Y}([0, t] \times A) = F(A)Y_t$$

bezüglich  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ . Daraus resultiert

$$\begin{aligned} W * \nu_\infty^{\hat{L}}(\omega) &= \nu^{\hat{L}}(\omega; C_\omega \times A \times \mathbb{R}^{d'}) \\ &= \int_{C_\omega} \left( \int_{\mathbb{R}^{d'}} 1_{A \times \mathbb{R}^{d'}}(0, x') \tilde{F}(dx') + \int_{\mathbb{R}^d} 1_{A \times \mathbb{R}^{d'}}(x, 0) F(dx) \dot{Y}_s(\omega) \right) ds \\ &= \nu^{L_Y}(\omega; C_\omega \times A) = 1_{C \times A} * \nu_\infty^{L_Y}(\omega) \end{aligned}$$

unter Berücksichtigung von  $0 \notin A$ . Somit gilt  $E_P[W * \mu_\infty^{\hat{L}}] = E_P[W * \nu_\infty^{\hat{L}}]$ .

(iii)  $W(\omega, s, x) = 1_{C \times \mathbb{R}^d \times B}((\omega, s), x)$  mit  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d'})$  und  $0 \notin B$

Hier zeigt man die Gültigkeit der Gleichung (4.2) in völliger Analogie zum zweiten Fall.

(iv)  $W(\omega, s, x) = 1_{C \times A \times B}((\omega, s), x)$  mit  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ ,  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d'})$ ,  $0 \notin A$  und  $0 \notin B$

Aufgrund von  $0 \notin A$  und  $0 \notin B$  gilt

$$W * \nu_\infty^{\hat{L}}(\omega) = \int_{C_\omega} \left( \int_{\mathbb{R}^{d'}} 1_{A \times B}(0, x') \tilde{F}(dx') + \int_{\mathbb{R}^d} 1_{A \times B}(x, 0) F(dx) \dot{Y}_s(\omega) \right) ds = 0.$$

Mithilfe der Darstellung (2.14) des Zufallsmaßes  $\mu^{\hat{L}}$  ergibt sich die Abschätzung

$$\begin{aligned}
0 &\leq E_P[W * \mu_\infty^{\hat{L}}] \\
&= \int_\Omega \left| \{s \in C_\omega : \Delta(L_{Y_s(\omega)}(\omega), \tilde{L}_s(\omega)) \in (A \times B) \setminus \{0\}\} \right| P(d\omega) \\
&\leq \int_\Omega \left| \{s \in \mathbb{R}_+ : \Delta(L_{Y_s(\omega)}(\omega), \tilde{L}_s(\omega)) \in (\mathbb{R}^d \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\})\} \right| P(d\omega) \\
&= \int_\Omega \sum_{s \in \mathbb{R}_+} 1_{\{\Delta L_{Y_s(\omega)}(\omega) \neq 0\}} 1_{\{\Delta \tilde{L}_s(\omega) \neq 0\}} P(d\omega).
\end{aligned}$$

Auf dem Skorokhod-Raum  $(\mathbb{D}(\mathbb{R}^d), \mathcal{D}(\mathbb{R}^d), (\mathcal{D}_t(\mathbb{R}^d))_{t \in \mathbb{R}_+})$  kann der Lévy-Prozess  $(\tilde{L}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  mittels des kanonischen Prozesses  $\mathbb{D}(\mathbb{R}^d) \times \mathbb{R}_+ \ni (\gamma, t) \mapsto \gamma_t \in \mathbb{R}$  identifiziert werden. Gemäß Jacod & Shiryaev (2003), Proposition I.1.32, existiert bezüglich der Menge  $\{(\gamma, s) \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^d) \times \mathbb{R}_+ : \Delta \gamma_s \neq 0\}$  der Sprünge von  $\tilde{L}$  eine ausschöpfende Folge von Stoppzeiten  $(\tilde{\Gamma}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ , d.h.

$$\{(\gamma, s) \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^d) \times \mathbb{R}_+ : \Delta \gamma_s \neq 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} [\tilde{\Gamma}_n],$$

wobei  $[\tilde{\Gamma}_n] := \{(\gamma, s) \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^d) \times \mathbb{R}_+ : s = \tilde{\Gamma}_n(\gamma)\}$  den Graph der Stoppzeit  $\tilde{\Gamma}_n$  bezeichnet. Durch  $\Gamma_n(\omega) := \tilde{\Gamma}_n(\tilde{L}(\omega))$  erhält man die entsprechende ausschöpfende Folge von Stoppzeiten  $(\Gamma_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  für die Menge  $\{(\omega, s) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ : \Delta \tilde{L}_s(\omega) \neq 0\}$ . Daraus folgt mit der Abschätzung (4.4) und dem Satz von der monotonen Konvergenz:

$$\begin{aligned}
0 \leq E_P[W * \mu_\infty^{\hat{L}}] &\leq \int_\Omega \sum_{s \in \mathbb{R}_+} 1_{\{\Delta L_{Y_s(\omega)}(\omega) \neq 0\}} \sum_{n \in \mathbb{N}^*} 1_{\{s = \Gamma_n(\omega)\}} P(d\omega) \\
&= E_P \left[ E_P \left[ \sum_{n \in \mathbb{N}^*} 1_{\{\Delta L_{Y_{\Gamma_n}} \neq 0\}} \mid \sigma(\dot{Y}, \tilde{L}) \right] \right] \\
&= E_P \left[ \sum_{n \in \mathbb{N}^*} E_P \left[ 1_{\{\Delta L_{Y_{\Gamma_n}} \neq 0\}} \mid \sigma(\dot{Y}, \tilde{L}) \right] \right]. \tag{4.4}
\end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung von Lemma 4.1 ergibt sich aus der Unabhängigkeit von  $L$  und  $(\dot{Y}, \tilde{L})$ , dass

$$\begin{aligned}
E_P \left[ 1_A 1_{\{\Delta L_{Y_{\Gamma_n}} \neq 0\}} \right] &= E_P \left[ 1_{\tilde{A}}(\dot{Y}, \tilde{L}) 1_{\{\Delta L_{Y_{\Gamma_n}} \neq 0\}} \right] \\
&= \int_{\mathbb{D}(\mathbb{R}^d) \times \mathbb{D}(\mathbb{R}) \times \mathbb{D}(\mathbb{R}^d)} 1_{\tilde{A}}(\beta, \gamma) 1_{\{\Delta \alpha_{g(\beta, \gamma)} \neq 0\}} P^{(L, \dot{Y}, \tilde{L})}(d(\alpha, \beta, \gamma)) \\
&= \int_{\mathbb{D}(\mathbb{R}) \times \mathbb{D}(\mathbb{R}^d)} 1_{\tilde{A}}(\beta, \gamma) P\{\Delta L_{g(\beta, \gamma)} \neq 0\} P^{(\dot{Y}, \tilde{L})}(d(\beta, \gamma))
\end{aligned}$$

für  $A = (\dot{Y}, \tilde{L})^{-1}(\tilde{A})$  mit  $\tilde{A} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$  gilt, wobei die Abbildung  $g$  definiert ist wie in Lemma 4.1. Nun ist aber  $P\{\Delta L_{g(\beta, \gamma)} \neq 0\} = 0$ , vgl. z.B. Applebaum (2004), Lemma 2.3.2, oder Jacod & Shiryaev (2003), II.4.3. Somit gilt also

$$E_P[W * \mu_\infty^{\hat{L}}] = 0 = E_P[W * \nu_\infty^{\hat{L}}]$$

aufgrund der Abschätzung (4.4).

Aus dieser Fallunterscheidung und der disjunkten Zerlegung (4.3) der Menge  $K \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d+d'})$  folgt hinsichtlich des Kandidaten  $\nu^{\hat{L}}$ , definiert in Gleichung (4.1), die Gültigkeit von Gleichung (4.2) für jede nichtnegative  $\mathcal{P} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d+d'})$ -messbare Funktion  $W$  auf  $\Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{d+d'}$ . Es bleibt zu zeigen, dass der Kandidat  $\nu^{\hat{L}}$  ein vorhersehbares Zufallsmaß ist. Da  $F$  und  $\tilde{F}$  Lévy-Maße sind,  $Y$  einen nichtnegativen Prozess darstellt und

$$\nu^{\hat{L}}(\omega, \{0\} \times (\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d'})) = \int_{\{0\}} \left( \tilde{F}(\mathbb{R}^{d'}) + F(\mathbb{R}^d) \dot{Y}_s(\omega) \right) ds = 0$$

gilt, ist  $\nu^{\hat{L}}$  ein Zufallsmaß, vgl. Definition 2.15. Sei  $W$  eine bezüglich  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  vorhersehbare Funktion auf  $\Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{d+d'}$ . Aus der Definition von  $\nu^{\hat{L}}$ , vgl. Gleichung (4.1), resultiert

$$W * \nu_t^{\hat{L}} = W_1 * \nu_t^{\tilde{L}} + W_2 * \nu_t^{LY}$$

mit  $W_1(\omega, s, x') := W(\omega, s, (0, x'))$  und  $W_2(\omega, s, x) := W(\omega, s, (x, 0))$ . Da  $W_1$  und  $W_2$   $\mathcal{P} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d'})$ - bzw.  $\mathcal{P} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ -messbar sind bezüglich der Filtrierung  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  und  $\nu^{\tilde{L}}$  und  $\nu^{LY}$  bezüglich dieser Filtrierung duale vorhersehbare Projektionen von  $\mu^{\tilde{L}}$  bzw.  $\mu^{LY}$  sind, folgt die Behauptung.  $\square$

**Proposition 4.3** *Gegeben sei die stochastische Basis  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, P)$ , wobei die Filtrierung definiert sei durch  $\mathcal{F}_t := \bigcap_{s>t} \sigma(Z_q, y_q : q \leq s)$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ . Dann ist das integrierte OU-Zeittransformationsmodell (1.97) - (1.99) ein affines stochastisches Volatilitätsmodell. Die differentielle Charakteristik  $\partial(y, Z)$  ist gegeben durch  $b^{(y,Z)} = \beta_{(0)} + \beta_{(1)}y_-$ ,  $c^{(y,Z)} = \gamma_{(0)} + \gamma_{(1)}y_-$  und  $F^{(y,Z)}(G) = \varphi_{(0)}(G) + \varphi_{(1)}(G)y_-$  mit*

$$\begin{aligned} \beta_{(0)} &= \left( \int_0^\infty E_P[\tilde{h}(\tilde{X}_s)] F^z(ds) + \mu \right), & \gamma_{(0)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \varphi_{(0)}(G) &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} 1_G(s, \tilde{x}) P^{\tilde{X}_s}(d\tilde{x}) F^z(ds), \\ \beta_{(1)} &= \begin{pmatrix} -\kappa \\ b^X(\tilde{h}) \end{pmatrix}, & \gamma_{(1)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c^X \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \varphi_{(1)}(G) = \int_{\mathbb{R}} 1_G(0, x) F^X(dx) \end{aligned}$$

für alle  $G \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$  mit  $0 \notin G$ , wobei  $\tilde{h}$  für eine beliebige  $\mathbb{R}$ -wertige Abschneidefunktion steht.

**BEWEIS.** Es bezeichne  $I = (I_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  den Identitätsprozess, d.h.  $I_t = t$  für alle  $t \in \mathbb{R}_+$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird  $\tilde{h}(x) := x 1_{\{|x| \leq 1\}}$  als eindimensionale und  $\tilde{h}^{(d)}(x_1, \dots, x_d) := (\tilde{h}(x_1), \dots, \tilde{h}(x_d))$  als  $d$ -dimensionale Abschneidefunktion im Rahmen dieses Beweises angenommen. Das Lévy-Khintchine-Tripel des intrinsischen Lévy-Prozesses  $(\tilde{X}, I)$  ist gegeben durch

$$\partial(\tilde{X}, I) = \left( \begin{pmatrix} b^{\tilde{X}}(\tilde{h}) \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c^{\tilde{X}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, F^{(\tilde{X}, I)} \right)$$

mit  $F^{(\tilde{X}, I)}(G) = \int_{\mathbb{R}} 1_G(x, 0) F^{\tilde{X}}(dx)$  für alle  $G \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ . Dies ist z.B. eine leichte Folgerung von Proposition 4.2. Unter Berücksichtigung der Tatsache, dass der Subordinator  $z$  keine Drift besitzt, liefert Proposition 2.35, dass  $(\tilde{X}_z, z)$  ein Lévy-Prozess ist bezüglich der Filtrierung  $(\widehat{\mathcal{F}}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , definiert durch  $\widehat{\mathcal{F}}_t := \bigcap_{s>t} \sigma(\tilde{X}_{z_r}, z_r : r \leq s)$ , mit Tripel

$$\partial(\tilde{X}_z, z) = \left( \left( \kappa \int_0^\infty E_P[\tilde{h}(\tilde{X}_s)] \tilde{F}^z(ds) \right), \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, F^{(\tilde{X}_z, z)} \right), \quad (4.5)$$

wobei  $F^{(\tilde{X}_z, z)}(G) = \kappa \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} 1_G(\tilde{x}, s) P^{\tilde{X}_s}(d\tilde{x}) \tilde{F}^z(ds)$  für alle  $G \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$  mit  $0 \notin G$  ist. Man beachte, dass aufgrund der Subordinatoreigenschaft  $\int_0^\infty (1 \wedge s) \tilde{F}^z(ds) < \infty$  und aufgrund von Sato (1999), Lemma 30.3, eine Konstante  $c > 0$  existiert mit

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |E_P[\tilde{h}(\tilde{X}_s)]| \tilde{F}^z(ds) &\leq \int_0^1 |E_P[1_{\{|\tilde{X}_s| \leq 1\}} \tilde{X}_s]| \tilde{F}^z(ds) + \tilde{F}^z((1, \infty)) \\ &\leq c \int_0^1 s \tilde{F}^z(ds) + \tilde{F}^z((1, \infty)) < \infty. \end{aligned}$$

Da der Subordinator  $z$  ein Lévy-Prozess bezüglich der Filtrierung  $(\widehat{\mathcal{F}}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  ist, sind die quadrierte stochastische Volatilität  $y$  und die integrierte quadrierte stochastische Volatilität  $Y$  Semimartingale bezüglich  $(\widehat{\mathcal{F}}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ . Wegen  $y_0 > 0$  ist  $y$  strikt positiv, infolgedessen  $t \mapsto Y_t(\omega)$  streng monoton wächst. Somit ist diese Abbildung auf  $\mathbb{R}_+$  invertierbar, und man kann den Umkehrprozess  $U = (U_r)_{r \in \mathbb{R}_+}$  definieren mit  $U_{Y_t(\omega)}(\omega) = t$  und  $Y_{U_r(\omega)}(\omega) = r$ . Da  $Y$  an  $(\widehat{\mathcal{F}}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  adaptiert ist, gilt

$$\{U_r \leq t\} = \{r \leq Y_t\} \in \widehat{\mathcal{F}}_t \quad \forall t \in \mathbb{R}_+,$$

d.h.  $U_r$  ist bezüglich  $(\widehat{\mathcal{F}}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  Stoppzeit für jedes  $r \in \mathbb{R}_+$ . Gemäß Jacod (1979), Korollar 10.12, ist  $(\tilde{X}_{z_{U_r}})_{r \in \mathbb{R}_+}$  ein Semimartingal bezüglich  $(\widehat{\mathcal{F}}_{U_r})_{r \in \mathbb{R}_+}$ . Bezüglich der Handelszeit  $r$  definiert man die Filtrierung  $(\mathcal{G}_r)_{r \in \mathbb{R}_+}$  durch

$$\mathcal{G}_r := \bigcap_{l>r} \sigma(X_k, \tilde{X}_{z_{U_k}}, U_k : k \leq l), \quad r \in \mathbb{R}_+. \quad (4.6)$$

Ferner definiert man die  $\sigma$ -Algebren  $\mathcal{G}_r^X$  und  $\mathcal{G}_\infty^{\tilde{X}_{zU}, U}$  mittels

$$\mathcal{G}_r^X := \bigcap_{l>r} \sigma(X_k : k \leq l) \quad \text{und} \quad \mathcal{G}_\infty^{\tilde{X}_{zU}, U} := \sigma(\tilde{X}_{z_{U_k}}, U_k : k \geq 0)$$

für  $r \in \mathbb{R}_+$ . Da  $X$ ,  $\tilde{X}$  und  $z$  unabhängig sind und  $X$  unabhängige Zuwächse besitzt, sind  $\sigma(X_{s+r+\varepsilon} - X_{r+\varepsilon})$ ,  $\mathcal{G}_{r+\varepsilon}^X$  und  $\mathcal{G}_\infty^{\tilde{X}_{zU}, U}$  für  $s, \varepsilon > 0$  unabhängig. Mit  $\mathcal{G}_{r+\varepsilon}^X \supseteq \sigma(X_k : k \leq r+\varepsilon)$  und Bauer (1974), Korollar 30.5, ergibt sich die Unabhängigkeit von  $\sigma(X_{s+r+\varepsilon} - X_{r+\varepsilon})$  und  $\sigma(\sigma(X_k : k \leq r+\varepsilon) \cup \mathcal{G}_\infty^{\tilde{X}_{zU}, U})$ . Man kann zeigen, dass

$$\mathcal{G}_r \subseteq \sigma(\sigma(X_k : k \leq r+\varepsilon) \cup \mathcal{G}_\infty^{\tilde{X}_{zU}, U})$$

gilt, was die Unabhängigkeit von  $\sigma(X_{s+r+\varepsilon} - X_{r+\varepsilon})$  und  $\mathcal{G}_r$  für  $s, \varepsilon > 0$  impliziert. Diese ist äquivalent zu  $P^{X_{s+r+\varepsilon} - X_{r+\varepsilon} | \mathcal{G}_r} = P^{X_{s+r+\varepsilon} - X_{r+\varepsilon}}$ . Unter Ausnutzung der càdlàg-Eigenschaft von  $X$  folgt mit majorisierter Konvergenz und dem Eindeutigkeitssatz für Fouriertransformierte  $P^{X_{s+r} - X_r | \mathcal{G}_r} = P^{X_{s+r} - X_r}$ , was gleichbedeutend ist mit der Unabhängigkeit von  $\sigma(X_{s+r} - X_r)$  und  $\mathcal{G}_r$ . Wegen  $\mathcal{G}_r^X \subseteq \mathcal{G}_r$  für alle  $r \in \mathbb{R}_+$  ist  $X$  auch an  $(\mathcal{G}_r)_{r \in \mathbb{R}_+}$  adaptiert, infolgedessen  $X$  auch Lévy-Prozess bezüglich  $(\mathcal{G}_r)_{r \in \mathbb{R}_+}$  ist. Satz 2.27 liefert, dass das Tripel von  $X$  auch bezüglich  $(\mathcal{G}_r)_{r \in \mathbb{R}_+}$  gegeben ist durch  $\partial X = (b^X(\tilde{h}), c^X, F^X)$ .

Wegen  $\{Y_t \leq r\} = \{t \leq U_r\} \in \sigma(X_k, \tilde{X}_{z_{U_k}}, U_k : k \leq r) \subseteq \mathcal{G}_r$  für alle  $r \in \mathbb{R}_+$  ist  $Y_t$  für jedes  $t \geq 0$  Stoppzeit bezüglich  $(\mathcal{G}_r)_{r \in \mathbb{R}_+}$ . Gemäß Proposition 2.34 ist der zeittransformierte Prozess  $(X_{Y_t})_{t \in \mathbb{R}_+}$  ein Semimartingal bezüglich der Filtrierung  $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , gegeben durch  $\tilde{\mathcal{F}}_t = \mathcal{G}_{Y_t}$  für  $t \in \mathbb{R}_+$ , mit differentieller Charakteristik  $\partial X_Y = (b^X(\tilde{h})y_-, c^X y_-, F^X y_-)$ .

Zwischenbehauptung: Es gilt  $\tilde{\mathcal{F}}_t = \tilde{\mathcal{F}}_t := \bigcap_{s>t} \sigma(X_{Y_q}, \tilde{X}_{z_q}, z_q : q \leq s)$  für  $t \in \mathbb{R}_+$ .

Zwischenbeweis:

„ $\supseteq$ “: Da  $\tilde{X}_{z_U}$  an  $(\mathcal{G}_r)_{r \in \mathbb{R}_+}$  adaptiert ist, ist  $\tilde{X}_z = \tilde{X}_{z_{U_Y}}$  an  $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  adaptiert. Aufgrund der Nichtnegativität von  $Y$  gilt  $\{Y_t \leq r'\} = \emptyset$  für alle  $r' < 0$ . Da zudem  $Y_t$  für jedes  $t \in \mathbb{R}_+$  Stoppzeit bezüglich  $(\mathcal{G}_r)_{r \in \mathbb{R}_+}$  ist, gilt

$$\{Y_t \leq r'\} \cap \{Y_t \leq r\} = \{Y_t \leq r' \wedge r\} \in \mathcal{G}_{r' \wedge r} \subseteq \mathcal{G}_r \quad \Rightarrow \quad \{Y_t \leq r'\} \in \tilde{\mathcal{F}}_t$$

für alle  $r' \geq 0$ , d.h.  $Y$  ist adaptiert an  $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ . Damit sind auch  $y$  und  $z$  an  $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  adaptiert. Und da darüber hinaus  $X_Y$  ebenfalls an  $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  adaptiert ist, folgt

$$\sigma(X_{Y_q}, \tilde{X}_{z_q}, z_q : q \leq s) \subseteq \tilde{\mathcal{F}}_s$$

für alle  $s > t$ , was  $\tilde{\mathcal{F}}_t \subseteq \tilde{\mathcal{F}}_t$  impliziert.

„ $\subseteq$ “:  $U_r$  ist für jedes  $r \in \mathbb{R}_+$  Stoppzeit bezüglich  $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ .  $(\tilde{\mathcal{G}}_r)_{r \in \mathbb{R}_+}$ , definiert durch  $\tilde{\mathcal{G}}_r = \tilde{\mathcal{F}}_{U_r}$ ,  $r \in \mathbb{R}_+$ , ist dann gemäß Jacod (1979), Abschnitt 10.1, eine Filtrierung. Da  $U_r$  Stoppzeit bezüglich  $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  ist, ist  $U$  adaptiert an  $(\tilde{\mathcal{G}}_r)_{r \in \mathbb{R}_+}$ . Wegen der Adaptiertheit von  $X_Y$  und  $\tilde{X}_z$  an  $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  sind  $X = X_{Y_U}$  und  $\tilde{X}_{z_U}$  ebenfalls adaptiert an  $(\tilde{\mathcal{G}}_r)_{r \in \mathbb{R}_+}$ . Damit zeigt man die Inklusion  $\mathcal{G}_r \subseteq \tilde{\mathcal{G}}_r$  für alle  $r \in \mathbb{R}_+$ . Man beachte, dass  $Y_t$  für alle  $t \in \mathbb{R}_+$  Stoppzeit bezüglich  $(\tilde{\mathcal{G}}_r)_{r \in \mathbb{R}_+}$  ist. Sei nun  $G \in \tilde{\mathcal{G}}_{Y_t}$ , d.h.  $G \cap \{Y_t \leq r \leq Y_{t'}\} \in \tilde{\mathcal{F}}_{t'}$  für alle  $t' \in \mathbb{R}_+$  und alle  $r \in \mathbb{R}_+$ . Daraus folgt

$$G \cap \left( \bigcup_{l \in \mathbb{Q}_+} \{Y_t \leq l \leq Y_{t+\frac{1}{m}}\} \right) \in \tilde{\mathcal{F}}_{t+\frac{1}{m}} \quad \forall m \in \mathbb{N}^*.$$

Da  $t \mapsto Y_t(\omega)$  streng monoton wachsend ist, existiert zu jedem  $\omega \in \Omega$  ein  $l \in \mathbb{Q}_+$  mit  $Y_t(\omega) \leq l \leq Y_{t+\frac{1}{m}}(\omega)$ . Somit gilt  $G \in \bigcap_{m=1}^{\infty} \tilde{\mathcal{F}}_{t+\frac{1}{m}} = \tilde{\mathcal{F}}_t$ , d.h.  $\tilde{\mathcal{G}}_{Y_t} \subseteq \tilde{\mathcal{F}}_t$  für alle  $t \in \mathbb{R}_+$ .

Abschließend betrachte man ein  $G \in \tilde{\mathcal{F}}_t = \mathcal{G}_{Y_t}$ . Wegen  $\mathcal{G}_r \subseteq \tilde{\mathcal{G}}_r$  ist  $G \cap \{Y_t \leq r\} \in \tilde{\mathcal{G}}_r$ , d.h.  $G \in \tilde{\mathcal{G}}_{Y_t}$ . Da aber  $\tilde{\mathcal{G}}_{Y_t} \subseteq \tilde{\mathcal{F}}_t$  gilt, folgt  $\tilde{\mathcal{F}}_t \subseteq \tilde{\mathcal{F}}_t$  für alle  $t \in \mathbb{R}_+$ .  $\square$  (Zwischenbeweis)

Man beachte, dass  $\widehat{\mathcal{F}}_t \subseteq \tilde{\mathcal{F}}_t$  für alle  $t \in \mathbb{R}_+$  gilt. Analog zu dem Beweis, dass  $X$  ein Lévy-Prozess bezüglich  $(\mathcal{G}_r)_{r \in \mathbb{R}_+}$  ist, zeigt man, dass  $(\tilde{X}_z, z)$  auch ein Lévy-Prozess bezüglich  $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  ist mit Tripel (4.5), vgl. Satz 2.27. Insbesondere sind  $z$  ein Lévy-Prozess sowie  $y$  und  $Y$  Semimartingale bezüglich  $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , vgl. die Modellgleichungen (1.98) und (1.99). Da  $y$  càdlàg ist,  $\tilde{\mathcal{F}}_t = \tilde{\mathcal{F}}_t$  für  $t \in \mathbb{R}_+$  gilt sowie  $X_Y$  ein Semimartingal und  $(\tilde{X}_z, z, I)$  einen Lévy-Prozess bezüglich  $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  darstellen, liefert Proposition 4.2, dass  $(X_Y, \tilde{X}_z, z, I)$  ein Semimartingal bezüglich  $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  ist mit differentieller Charakteristik

$$\partial(X_Y, \tilde{X}_z, z, I) = \left( \begin{pmatrix} b^X(\tilde{h})y_- \\ \kappa \int_0^\infty E_P[\tilde{h}(\tilde{X}_s)] \tilde{F}^z(ds) \\ \kappa \tilde{b}^z(\tilde{h}) \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c^X y_- & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, F^{(X_Y, \tilde{X}_z, z, I)} \right),$$

wobei

$$F^{(X_Y, \tilde{X}_z, z, I)}(G) = \kappa \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} 1_G(0, \tilde{x}, s, 0) P^{\tilde{X}_s}(d\tilde{x}) \tilde{F}^z(ds) + \int_{\mathbb{R}} 1_G(x, 0, 0, 0) F^X(dx) y_-$$

ist für alle  $G \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^4)$  mit  $0 \notin G$ . Da  $Z$  und  $y$  an  $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  adaptiert sind, gilt  $\tilde{\mathcal{F}}_t \subseteq \tilde{\mathcal{F}}_t$  für alle  $t \in \mathbb{R}_+$ . Mithilfe von Satz 2.26 sieht man, dass die differentielle Charakteristik  $\partial(X_Y, \tilde{X}_z, z, I)$  bezüglich  $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  mit der differentiellen Charakteristik  $\partial(X_Y, \tilde{X}_z, z, I)$  bezüglich  $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  übereinstimmt.

Man beachte, dass

$$\sum_{s \leq t} \Delta Z_s 1_{\{\Delta z_s \neq 0\}} = \sum_{s \leq t} \Delta X_{Y_s} 1_{\{\Delta z_s \neq 0\}} + \sum_{s \leq t} \Delta \tilde{X}_{z_s} 1_{\{\Delta z_s \neq 0\}} = \sum_{s \leq t} \Delta X_{Y_s} 1_{\{\Delta z_s \neq 0\}} + \tilde{X}_{z_t}$$

gilt, da  $\tilde{X}_z$  seine Werte nur durch Sprünge ändert und ein Sprung von  $\tilde{X}_z$  hinreichend ist für einen Sprung von  $z$ . Man definiert die Funktion  $W(\omega, t, x_1, x_2) := 1_{G^*}(x_1, x_2)$  für  $(\omega, t, x_1, x_2) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2$  mit  $G^* := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \neq 0 \wedge x_2 \neq 0\}$ . Unter Verwendung von

$$F^{(X_Y, z)}(G^*) = \kappa \int_0^\infty 1_{G^*}(0, s) \tilde{F}^z(ds) + \int_{\mathbb{R}} 1_{G^*}(x, 0) F^X(dx) y_-$$

und der Kompensatoreigenschaft (2.15) erhält man

$$0 = E_P \left[ W * \nu_t^{(X_Y, z)} \right] = E_P \left[ W * \mu_t^{(X_Y, z)} \right] = E_P \left[ \sum_{s \leq t} 1_{G^*}(\Delta X_{Y_s}, \Delta z_s) \right],$$

woraus  $\Delta X_{Y_s} = 0$  oder  $\Delta z_s = 0$  für alle  $s \leq t$  folgt und damit  $\tilde{X}_{z_t} = \sum_{s \leq t} \Delta Z_s 1_{\{\Delta z_s \neq 0\}}$ .

Somit sind  $X_Y$ ,  $\tilde{X}_z$  und  $z$  adaptiert an  $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , was wiederum  $\tilde{\mathcal{F}}_t \subseteq \tilde{\mathcal{F}}_t$  für alle  $t \in \mathbb{R}_+$

impliziert. Insgesamt hat man also  $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t \in \mathbb{R}_+} = (\bar{\mathcal{F}}_t)_{t \in \mathbb{R}_+} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ .

Nun definiert man den Prozess  $\tilde{y} = e^{\kappa I} \cdot z$ . Die differentielle Charakteristik von

$$\begin{pmatrix} X_Y \\ \tilde{X}_z \\ z \\ I \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & e^{\kappa I} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_Y \\ \tilde{X}_z \\ z \\ I \end{pmatrix}$$

bezüglich der Filtrierung  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  erhält man mittels Proposition 2.32 in der Form

$$b^{(X_Y, \tilde{X}_z, z, I, \tilde{y})} = \begin{pmatrix} b^X(\tilde{h})y_- \\ \kappa \int_0^\infty E_P[\tilde{h}(\tilde{X}_s)] \tilde{F}^z(ds) \\ \kappa \tilde{b}^z(\tilde{h}) \\ 1 \\ \kappa \int_0^\infty \tilde{h}(e^{\kappa I} s) \tilde{F}^z(ds) \end{pmatrix}, \quad c^{(X_Y, \tilde{X}_z, z, I, \tilde{y})} = \begin{pmatrix} c^X y_- & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} F^{(X_Y, \tilde{X}_z, z, I, \tilde{y})}(G) &= \kappa \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} 1_G(0, \tilde{x}, s, 0, e^{\kappa I} s) P^{\tilde{X}_s}(d\tilde{x}) \tilde{F}^z(ds) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} 1_G(x, 0, 0, 0, 0) F^X(dx) y_- \end{aligned}$$

für alle  $G \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^5)$  mit  $0 \notin G$ . Abschließend liefert die Itô-Formel für Charakteristiken, vgl. Proposition 2.31, angewendet auf

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \begin{pmatrix} \eta + e^{-\kappa x_4}(y_0 - \eta + x_5) \\ x_1 + x_2 + \mu x_4 \end{pmatrix}$$

und  $\partial(X_Y, \tilde{X}_z, z, I, \tilde{y})$  unter Berücksichtigung der Gleichungen (1.97) und (1.81), dass  $(y, Z)$  ein Semimartingal bezüglich  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  ist mit differentielle Charakteristik

$$\partial(y, Z) = \left( \begin{pmatrix} \kappa(\eta + \tilde{b}^z(\tilde{h}) - y_-) \\ b^X(\tilde{h})y_- + \kappa \int_0^\infty E_P[\tilde{h}(\tilde{X}_s)] \tilde{F}^z(ds) + \mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c^X y_- \end{pmatrix}, F^{(y, Z)} \right),$$

wobei

$$F^{(y, Z)}(G) = \kappa \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} 1_G(s, \tilde{x}) P^{\tilde{X}_s}(d\tilde{x}) \tilde{F}^z(ds) + \int_{\mathbb{R}} 1_G(0, x) F^X(dx) y_-$$

ist für alle  $G \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$  mit  $0 \notin G$ . Daraus resultieren die Tripel  $(\beta_{(0)}, \gamma_{(0)}, \varphi_{(0)})$  und  $(\beta_{(1)}, \gamma_{(1)}, \varphi_{(1)})$ , wie behauptet. Bleibt zu zeigen, dass die Tripel im Sinne von Duffie et al. (2003), Definition 2.6, zulässig sind. Die Zulässigkeit gilt aber aufgrund von

$$\beta_{(0)}^1 - \int_D \tilde{h}(x_1) \varphi_{(0)}(dx) = \kappa \eta \geq 0 \quad \text{und} \quad \int_D \tilde{h}(x_1) \varphi_{(0)}(dx) = \int_0^1 s F^z(ds) < \infty,$$

wobei die letzte Abschätzung in Anbetracht der Subordinatoreigenschaft von  $z$  Gültigkeit besitzt.  $\square$

**Bemerkung 4.4** Wählt man im integrierten OU-Zeittransformationsmodell (1.97) - (1.99)  $X$  als Wiener-Prozess mit Tripel  $(\delta, 1, 0)$  und  $\tilde{X}$  deterministisch in der Form  $\tilde{X}_t = \varrho t$ , so erhält man die Charakteristik, die der Dynamik des stochastischen Volatilitätsmodells (1.79), (1.80) von Barndorff-Nielsen & Shephard (2001b) entspricht. Die Charakteristik  $\partial(y, Z)$  im Modell von Barndorff-Nielsen & Shephard (2001b) kann wie folgt berechnet werden: Die Gleichungen (1.79) und (1.80) fasst man vektoriell in der Form

$$\begin{pmatrix} y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & \kappa(\eta - y_-) & 0 \\ \varrho & \mu + \delta y_- & \sqrt{y_-} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z \\ I \\ W \end{pmatrix}$$

zusammen, wobei  $I$  für den Identitätsprozess steht. Da die Charakteristiken von Prozessen nicht von dessen Startwerten abhängen, kann der erste Summand auf der rechten Seite vernachlässigt werden. Auf den zweiten Summanden wendet man dann Proposition 2.32 an. Dazu benötigt man die Charakteristik

$$\partial(z, I, W) = \left( \begin{pmatrix} b^z(\tilde{h}) \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, F^{(z, I, W)} \right),$$

wobei  $F^{(z, I, W)}(G) = \int_0^\infty 1_G(s, 0, 0) F^z(ds)$  ist für alle  $G \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^3)$  mit  $0 \notin G$  und  $\tilde{h}$  wieder eine beliebige  $\mathbb{R}$ -wertige Abschneidefunktion darstellt. Drift- und Diffusionskomponente von  $\partial(z, I, W)$  sind trivial, den Kompensator des Maßes der Sprünge erhält man z.B. mithilfe von Proposition 4.2. Man beachte, dass im allgemeinen integrierten OU-Zeittransformationsmodell (1.97) - (1.99) der Ausdruck  $\tilde{X}_z$  zur Modellierung des Leverage-Effekts verwendet wird. Ein Sprung des Prozesses  $\tilde{X}_z$  führt zu einem Sprung in der Log-Rendite und zieht einen (nicht perfekt korrelierten) Sprung in der Volatilität nach sich. Bedenkt man die Rekonstruierbarkeit der Volatilität aus dem Pfad der Log-Renditen unter gewissen Voraussetzungen, so dass die Filtrierung nur von dem Prozess der Log-Renditen erzeugt wird, vgl. Abschnitt 4.8 in Kallsen (2006), so ist für die Beobachtbarkeit von  $\tilde{X}_z$  die Annahme, dass der Subordinator keine Drift hat, von Bedeutung. Der Leverage-Effekt wird ausschließlich über den Zusammenhang der Sprünge der Prozesse  $\tilde{X}_z$  und  $z$  abgebildet. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann jedes BNS-Modell in der Form (1.79), (1.80) geschrieben werden, wobei der Subordinator  $z$  keine Drift hat. Diese kann nämlich immer in der quadrierten Volatilität über das *Mean-Reverting-Niveau*  $\eta$  und in der Log-Rendite über den Driftparameter  $\mu$  kompensiert werden. Insgesamt liefert also Proposition 4.3 die affine Struktur des BNS-Modells als Spezialfall der affinen Struktur des integrierten OU-Zeittransformationsmodells:

$$\beta_{(0)} = \left( \int_0^\infty \tilde{h}(\varrho s) F^z(ds) + \mu \right), \quad \gamma_{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \varphi_{(0)}(G) = \int_0^\infty 1_G(s, \varrho s) F^z(ds)$$

für alle  $G \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$  sowie

$$(\beta_{(1)}, \gamma_{(1)}, \varphi_{(1)}) = \left( \begin{pmatrix} -\kappa \\ \delta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 0 \right).$$

Nun kann die Lösung des Problems varianz-optimalen Hedgens im integrierten OU-Zeittransformationsmodell als Folge der Sätze 3.17 und 3.18 formuliert werden.

**Satz 4.5** *Gegeben seien die stochastische Basis  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_t, P)$ , definiert wie in Proposition 4.3, und das integrierte OU-Zeittransformationsmodell (1.97) - (1.99). Dann können das varianz-optimale Anfangskapital  $v_0^*$  und die varianz-optimale Handelsstrategie  $\vartheta^*$  in der Form*

$$v_0^* = \int_{S_f} V(u)_0 \Pi(du), \quad (4.7)$$

$$\vartheta_t^* = \int_{S_f} \frac{V(u)_{t-} \kappa_0(t, u) + \kappa_1(t, u) y_{t-}}{S_{t-} \delta_0 + \delta_1 y_{t-}} \Pi(du) \quad (4.8)$$

bestimmt werden, wobei

$$V(u)_t = S_t^u \exp\{\Phi_0(T-t, 0, u) + \Phi_1(T-t, 0, u) y_t\}, \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \Phi_0(t, u_1, u_2) &= \eta(1 - e^{-\kappa t}) u_1 + \eta \psi^X(u_2) \left( t - \frac{1 - e^{-\kappa t}}{\kappa} \right) + \mu t u_2 \\ &\quad + \int_0^t \psi^z(q(s, u_1, u_2)) ds, \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$q(t, u_1, u_2) = \Phi_1(t, u_1, u_2) + \psi^{\tilde{X}}(u_2), \quad (4.11)$$

$$\Phi_1(t, u_1, u_2) = e^{-\kappa t} u_1 + \frac{1}{\kappa} (1 - e^{-\kappa t}) \psi^X(u_2), \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} \kappa_0(t, u) &= \psi^z(\Phi_1(T-t, 0, u) + \psi^{\tilde{X}}(u+1)) - \psi^z(\Phi_1(T-t, 0, u) + \psi^{\tilde{X}}(u)) \\ &\quad - \psi^z(\psi^{\tilde{X}}(1)), \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\kappa_1(t, u) = \psi^X(u+1) - \psi^X(u), \quad (4.14)$$

$$\delta_0 = \psi^z(\psi^{\tilde{X}}(2)) - 2\psi^z(\psi^{\tilde{X}}(1)) \quad \text{und} \quad \delta_1 = \psi^X(2) \quad (4.15)$$

sind, falls die folgenden Annahmen erfüllt sind:

$$\int_{|x|>1} e^{((2R' \wedge 0) - \varepsilon)x} F^X(dx) < \infty \quad \text{und} \quad \int_{|x|>1} e^{((2R \vee 2) + \varepsilon)x} F^X(dx) < \infty, \quad (4.16)$$

$$\int_{|x|>1} e^{((2R' \wedge 0) - \varepsilon)x} F^{\tilde{X}}(dx) < \infty \quad \text{und} \quad \int_{|x|>1} e^{((2R \vee 2) + \varepsilon)x} F^{\tilde{X}}(dx) < \infty, \quad (4.17)$$

$$\int_1^\infty e^{(M_0 + M_1 + M_2 + \varepsilon)s} F^z(ds) < \infty, \quad (4.18)$$

$$\mu = -\psi^z(\psi^{\tilde{X}}(1)) \quad \text{und} \quad \psi^X(1) = 0, \quad (4.19)$$

$$\mu \neq -\frac{1}{2} \psi^z(\psi^{\tilde{X}}(2)) \quad \text{oder} \quad \psi^X(2) \neq 0 \quad (4.20)$$

für ein beliebig klein fixiertes  $\varepsilon > 0$  und

$$M_0 = \frac{1}{\kappa} (1 - e^{-\kappa T}) \max \{ \psi^X(2R \vee 0), \psi^X(2R' \wedge 0) \},$$

$$M_1 = \frac{1}{\kappa} (1 - e^{-\kappa T}) \max \{ \psi^X((2R \vee 0) + \tilde{\varepsilon}), \psi^X((2R' \wedge 0) - \tilde{\varepsilon}) \},$$

$$M_2 = \max \left\{ \psi^{\tilde{X}}((2R \vee 2) + \tilde{\varepsilon}), \psi^{\tilde{X}}((2R' \wedge 0) - \tilde{\varepsilon}) \right\},$$

wobei  $\tilde{\varepsilon}$  derart festgelegt ist, dass  $0 < \tilde{\varepsilon} < \varepsilon$  gilt. In dieser Situation kann der minimale erwartete quadratische Hedgefehler wie in Satz 3.18 berechnet werden mit

$$\psi_0(u_1, u_2) = \kappa\eta u_1 + \mu u_2 + \psi^z \left( u_1 + \psi^{\tilde{X}}(u_2) \right), \quad (4.21)$$

$$\psi_1(u_1, u_2) = -\kappa u_1 + \psi^X(u_2), \quad (4.22)$$

$$D_2\Phi_0(t, u_1, u_2) = \int_0^t (D_1\psi^z)(q(s, u_1, u_2)) e^{-\kappa s} ds + \eta (1 - e^{-\kappa t}), \quad (4.23)$$

$$D_2\Phi_1(t, u_1, u_2) = e^{-\kappa t} \quad (4.24)$$

und mit den Funktionen und Variablen in (4.10) - (4.15).

**Bemerkung 4.6** Die Voraussetzung (4.20) stellt sicher, dass der degenerierte Fall  $Z_t = 0$  P-f.s. für alle  $t \in [0, T]$  im vorliegenden integrierten OU-Zeittransformationsmodell nicht eintritt, vgl. Annahme 3.14. Die Bedingung (4.19) korrespondiert zu der (lokalen) Martingalbedingung (3.18) und gewährleistet somit lediglich den Martingalfall. Die übrigen Voraussetzungen (4.16) - (4.18) sind Integrierbarkeitsbedingungen, die mit der Existenz exponentieller Momente der Lévy-Prozesse  $X$ ,  $\tilde{X}$  und  $z$  einhergehen. Diese garantieren die Lösbarkeit des Problems quadratischen Hedgens im integrierten OU-Zeittransformationsmodell, man vgl. diesbezüglich vor allem die Annahmen 3.6 und 3.8 im allgemeinen affinen Modell. Bei vielen Spezifikationen der Lévy-Prozesse  $X$ ,  $\tilde{X}$  und  $z$  müssen die Integrale in den Voraussetzungen (4.16) - (4.18) gar nicht berechnet werden, um entscheiden zu können, ob diese Voraussetzungen erfüllt sind. Oftmals kann diese Entscheidung direkt anhand der Parameter der Lévy-Prozesse getroffen werden. Zudem sei angemerkt, dass Bedingung (4.17) nur dann zum Tragen kommt, wenn im integrierten OU-Zeittransformationsmodell der Leverage-Effekt mitberücksichtigt wird. Falls die Lévy-Prozesse  $X$  und  $\tilde{X}$  stetig sind, sind die Bedingungen (4.16) und (4.17) trivialerweise erfüllt.

Zum Beweis des Satzes 4.5 wird das folgende Lemma benötigt.

**Lemma 4.7** *Es sei  $L$  ein reellwertiger Lévy-Prozess. Die kumulantenerzeugende Funktion  $\psi^L : \{u \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(u) \in (a, b)\} \rightarrow \mathbb{C}$  ist analytisch, falls*

$$\int_{|x|>1} e^{rx} F^L(dx) < \infty \quad \forall r \in (a, b) \quad (4.25)$$

*gilt, wobei  $a, b$  reelle Konstanten sind mit  $a < 0 < b$ .*

**BEWEIS.** Bedingung (4.25) impliziert, dass die Abbildung

$$\mathcal{S} := \{u \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(u) \in (a, b)\} \ni u \mapsto \varphi^L(u) := E_P[e^{uL_1}] \in \mathbb{C}$$

wohldefiniert ist. In Anbetracht von Lemma A.2 in Duffie et al. (2003) ist  $\varphi^L$  analytisch. Da  $\varphi^L(u) \neq 0$  gilt für alle  $u \in \mathcal{S}$  und  $\mathcal{S}$  offen und konvex ist, existiert eine analytische Funktion  $g : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\varphi^L(u) = e^{g(u)}$  für alle  $u \in \mathcal{S}$ , vgl. Fischer & Lieb (1994), Satz V.1.4. Für ein festes  $k \in \mathbb{Z}$  gilt  $g(0) = 2k\pi i$ . Nun definiert man die Abbildung  $\tilde{g} : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$  durch

$\tilde{g}(u) := g(u) - 2k\pi i$ . Die Funktion  $\tilde{g}$  ist analytisch und insbesondere stetig. Des Weiteren beobachtet man  $\tilde{g}(0) = 0$  und

$$\varphi^L(u) = e^{\tilde{g}(u)} = e^{\psi^L(u)},$$

d.h.  $\psi^L(u) - \tilde{g}(u) \in 2\pi i\mathbb{Z}$  für alle  $u \in \mathcal{S}$ . Unter Berücksichtigung von Bedingung (4.25) folgt die Stetigkeit von  $\psi^L$  mit majorisierter Konvergenz. Ergo ist  $\psi^L(u) - \tilde{g}(u)$  konstant. Wegen  $\psi^L(0) = \tilde{g}(0) = 0$  gilt  $\psi^L(u) = \tilde{g}(u)$  für alle  $u \in \mathcal{S}$ , woraus sich die Behauptung ergibt.  $\square$

**Bemerkung 4.8** Bei den meisten in der Praxis üblichen Spezifikationen der quadrierten stochastischen Volatilität  $y$  im integrierten OU-Zeittransformationsmodell können die Integrale in den Gleichungen (4.10) und (4.23) explizit gelöst werden. Die Berechnung des Integrals in (4.23) kann in der Anwendung sogar erübrigt werden, da man dort zur Bestimmung von  $D_2\Phi_0$  den expliziten Ausdruck für das Integral in (4.10) direkt ableiten kann. In der allgemeinen Situation von Satz 4.5 kann die Ableitung  $D_2\Phi_0$  leider nicht konkreter geschrieben werden.

1. Falls  $y$  ein Gamma-OU-Prozess ist, entspricht die stationäre Verteilung von  $y$  einer Gamma-Verteilung mit positiven Parametern  $a, b$ . Hier sei angenommen, dass  $\eta = 0$  ist. Dann ist die kumulantenerzeugende Funktion des zugehörigen Subordinators  $z$  gegeben durch  $\psi^z(u) = \frac{\kappa a u}{b-u}$ , und

$$\frac{F^z(dx)}{dx} = \kappa a b e^{-bx} 1_{\{x>0\}}$$

steht für die Dichte des Lévy-Maßes  $F^z$ , vgl. Schoutens (2003), Abschnitt 5.5.1. Da  $\psi^z$  zu einer analytischen Funktion auf  $\{v \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(v) < b\}$  fortgesetzt werden kann, kann man aus der Momentenbedingung (4.18) die Gültigkeit der Ungleichung

$$M_0 + M_1 + M_2 + \varepsilon < b \tag{4.26}$$

folgern. Umgekehrt resultiert aus der Gültigkeit der Ungleichung (4.26), dass die Momentenbedingung (4.18) erfüllt ist. Hier liegt also ein Beispiel vor, bei dem die Gültigkeit der Integrierbarkeitsbedingung (4.18) direkt anhand der Parameter der Lévy-Prozesse  $X$  und  $\tilde{X}$  sowie anhand des Parameters  $b$  des Subordinators  $z$  entschieden werden kann, ohne dass das Integral in (4.18) berechnet werden muss. Die Funktion  $q$  sei definiert wie in Gleichung (4.11). Dann gilt

$$\int_0^t \psi^z(q(s, u_1, u_2)) ds = \begin{cases} \frac{a}{b-k_2(u_2)} (b(1\varphi)(t, u_1, u_2) + \kappa k_2(u_2)t) & , \text{ falls } b \neq k_2(u_2), \\ -a \left( \frac{b}{k_1(u_1, u_2)} (e^{\kappa t} - 1) + \kappa t \right) & , \text{ falls } b = k_2(u_2), \end{cases}$$

mit  $k_1(u_1, u_2) = u_1 - \frac{\psi^X(u_2)}{\kappa}$  und  $k_2(u_2) = \frac{\psi^X(u_2)}{\kappa} + \psi^{\tilde{X}}(u_2)$ . Bevor die Abbildung  $1\varphi$  erklärt wird, beachte man, dass angesichts von Ungleichung (4.26) die Bedingung

$b = k_2(u_2)$  hinreichend ist für  $k_1(u_1, u_2) \neq 0$ . Die Abbildung  $t \mapsto (l\varphi)(t, u_1, u_2)$  bezeichnet den *ausgezeichneten Logarithmus* von

$$[0, T] \ni t \mapsto \varphi(t, u_1, u_2) := \frac{b - q(t, u_1, u_2)}{b - k_1(u_1, u_2) - k_2(u_2)} \in \mathbb{C}$$

im Sinne von Sato (1999), Lemma 7.6, d.h.  $l\varphi$  ist die eindeutige stetige Funktion mit  $(l\varphi)(0) = 0$  und  $\exp((l\varphi)(t, u_1, u_2)) = \varphi(t, u_1, u_2)$ . Aus Ungleichung (4.26) folgt, dass  $\varphi$  weder Singularitäten noch Nullstellen auf  $[0, T] \times \mathcal{S}$  besitzt, wobei  $\mathcal{S}$  definiert ist durch

$$\mathcal{S} := \{v \in \mathbb{C}^2 : \operatorname{Re}(v) \in (-\infty, M_0 + \tilde{\varepsilon}) \times ((2R' \wedge 0) - \tilde{\varepsilon}, (2R \vee 0) + \tilde{\varepsilon})\}. \quad (4.27)$$

Ferner beobachtet man, dass  $\mathcal{S} \ni (u_1, u_2) \mapsto \int_0^t \psi^z(q(s, u_1, u_2)) ds \in \mathbb{C}$  analytisch und  $[0, T] \times \mathcal{S} \ni (t, u_1, u_2) \mapsto \int_0^t \psi^z(q(s, u_1, u_2)) ds \in \mathbb{C}$  stetig sind unter den Voraussetzungen von Satz 4.5. Man sei diesbezüglich auf den Beweis von Satz 4.5 verwiesen. Die Ableitung  $D_2\Phi_0$ , vgl. Formel (4.23), ist hier von der folgenden konkreten Gestalt:

$$D_2\Phi_0(t, u_1, u_2) = \frac{ab(1 - e^{-\kappa t})}{(b - u_1 - \psi^{\tilde{X}}(u_2))(b - \Phi_1(t, u_1, u_2) - \psi^{\tilde{X}}(u_2))}. \quad (4.28)$$

2. Falls  $y$  ein IG-OU-Prozess ist, ist  $y_t$  invers-Gaußsch-verteilt mit positiven Parametern  $a, b$  für alle  $t > 0$ , sofern  $y_0$  invers-Gaußsch-verteilt ist. Hier sei ebenfalls  $\eta = 0$  angenommen. Dann ist die kumulantenerzeugende Funktion des Subordinators  $z$  von der Form  $\psi^z(u) = \frac{\kappa a u}{\sqrt{b^2 - 2u}}$ . Darüber hinaus gibt

$$\frac{F^z(dx)}{dx} = \frac{\kappa a}{2\sqrt{2\pi x}} \left( \frac{1}{x} + b^2 \right) \exp\left(-\frac{1}{2}b^2 x\right) 1_{\{x>0\}}$$

die Dichte des Lévy-Maßes  $F^z$  an, vgl. Schoutens (2003), Abschnitt 5.5.2.  $\psi^z$  kann analytisch auf  $\{v \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(v) < \frac{1}{2}b^2\}$  fortgesetzt werden. Die Momentenbedingung (4.18) impliziert somit

$$M_0 + M_1 + M_2 + \varepsilon < \frac{1}{2}b^2. \quad (4.29)$$

Da die Momentenbedingung (4.18) auch notwendig ist für die Ungleichung (4.29), kann hier die Gültigkeit der Voraussetzung (4.18) ebenfalls entschieden werden, ohne das Integral in (4.18) auszuwerten. Darüber hinaus erhält man

$$\int_0^t \psi^z(q(s, u_1, u_2)) ds = \begin{cases} C_1(t, u_1, u_2) & , \text{ falls } b^2 \neq 2k_2(u_2) \text{ und } k_1(u_1, u_2) \neq 0, \\ C_2(t, u_1, u_2) & , \text{ falls } b^2 = 2k_2(u_2), \\ C_3(t, u_1, u_2) & , \text{ falls } k_1(u_1, u_2) = 0, \end{cases}$$

wobei  $k_1, k_2$  definiert sind wie in (1) und

$$\begin{aligned} C_1(t, u_1, u_2) &:= a \left[ \frac{k_2(u_2)}{B(u_2)} ((l\varphi)(t, u_1, u_2) + \kappa t) + A(t, u_1, u_2) - A(0, u_1, u_2) \right], \\ C_2(t, u_1, u_2) &:= \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{-k_1(u_1, u_2)}} \left[ k_1(u_1, u_2) \left(1 - e^{-\frac{1}{2}\kappa t}\right) + k_2(u_2) \left(e^{\frac{1}{2}\kappa t} - 1\right) \right], \\ C_3(t, u_1, u_2) &:= \frac{\kappa a k_2(u_2) t}{B(u_2)}. \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung von Ungleichung (4.29) gilt, dass  $b^2 = 2k_2(u_2)$  hinreichend ist für  $k_1(u_1, u_2) \neq 0$ . Ferner sind hier  $A$  und  $B$  definiert mittels

$$\begin{aligned} A(t, u_1, u_2) &:= (b^2 - 2q(t, u_1, u_2))^{\frac{1}{2}}, \\ B(u_2) &:= (b^2 - 2k_2(u_2))^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

und  $t \mapsto (l\varphi)(t, u_1, u_2)$  steht für den *ausgezeichneten Logarithmus* (im Sinne von Sato (1999), Lemma 7.6) der Abbildung  $\varphi : [0, T] \rightarrow \mathbb{C}$ , definiert durch

$$\begin{aligned} \varphi(t; u_1, u_2) &:= \frac{[B(u_2)(B(u_2) - A(0, u_1, u_2)) - k_1(u_1, u_2)]}{k_1^2(u_1, u_2)} \\ &\quad \times [B(u_2)(A(t, u_1, u_2) + B(u_2)) - e^{-\kappa t} k_1(u_1, u_2)] \end{aligned}$$

für festes  $(u_1, u_2) \in \mathcal{S}$ , wobei  $\mathcal{S}$  wie in Gleichung (4.27) gegeben ist. Wegen Ungleichung (4.29),  $k_1(u_1, u_2) \neq 0$  und  $b^2 \neq 2k_2(u_2)$  besitzt die Funktion  $\varphi$  keine Nullstellen auf  $[0, T]$ . Des Weiteren gilt  $\varphi(0; u_1, u_2) = 1$ . Es bleibt zu zeigen, dass  $[0, T] \ni t \mapsto A(t, u_1, u_2)$  wohldefiniert und stetig ist. Zu diesem Zweck seien die folgenden Mengen eingeführt:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1 &:= \{v \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(v) < M_0 + \tilde{\varepsilon}\}, \\ \mathcal{S}_2 &:= \{v \in \mathbb{C} : (2R' \wedge 0) - \tilde{\varepsilon} < \operatorname{Re}(v) < (2R \vee 2) + \tilde{\varepsilon}\}. \end{aligned}$$

Die Funktion  $g : \mathcal{S} \mapsto \mathbb{C}$  sei definiert durch  $g(u_1, u_2) := b^2 - 2(k_1(u_1, u_2) + k_2(u_2))$ . Für festes  $u_1 \in \mathcal{S}_1$  sei  $g_1 : \mathcal{S}_2 \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben durch  $g_1(u_2) := g(u_1, u_2)$ . Aufgrund von Ungleichung (4.29) beobachtet man  $g_1(u_2) \neq 0$  auf  $\mathcal{S}_2$ , insbesondere gilt  $g_1(0) \neq 0$ . Somit ist  $\tilde{g}_1(u_2) := \frac{g_1(u_2)}{g_1(0)}$  wohldefiniert und besitzt keine Nullstellen auf  $\mathcal{S}_2$ . Unter Beachtung der Momentenbedingung (4.17) schließt man mit Lemma 4.7, dass  $\tilde{g}_1$  analytisch ist. Satz V.1.4 in Fischer & Lieb (1994) liefert die eindeutige Existenz einer analytischen Funktion  $f_1$  mit  $f_1(0) = 0$  und  $\tilde{g}_1(u_2) = \exp\{f_1(u_2)\}$  für alle  $u_2 \in \mathcal{S}_2$ . Mittels analoger Argumente zeigt man, dass es eine eindeutige analytische Funktion  $f_2$  gibt mit  $f_2(0) = 0$  und  $g_2(u_1) := b^2 - 2u_1 = b^2 \exp\{f_2(u_1)\}$  für alle  $u_1 \in \mathcal{S}_1$ . Somit kann die Funktion  $g$  auf  $\mathcal{S}$  in der Form  $g(u_1, u_2) = b^2 \exp\{f_1(u_2) + f_2(u_1)\}$  dargestellt werden. Man beachte, dass  $g$  analytisch auf  $\mathcal{S}$  ist, vgl. Hörmander (1966), Satz 2.2.8. Wegen  $g(u_1, u_2) \neq 0$  auf  $\mathcal{S}$  ist die Funktion  $g_0(t; u_1, u_2) := \frac{b^2 - 2q(t, u_1, u_2)}{g(u_1, u_2)}$  wohldefiniert auf  $[0, T]$  für festes  $(u_1, u_2) \in \mathcal{S}$ . Lemma 7.6 in Sato (1999) behauptet dann, dass eine eindeutige stetige Funktion  $f_0$  existiert mit  $f_0(0; u_1, u_2) = 0$  und  $g_0(t; u_1, u_2) = \exp\{f_0(t; u_1, u_2)\}$ ,  $t \in [0, T]$ . Deshalb ist also die Abbildung

$$[0, T] \ni t \mapsto A(t, u_1, u_2) = b \exp \left\{ \frac{1}{2} (f_0(t; u_1, u_2) + f_1(u_2) + f_2(u_1)) \right\}$$

wohldefiniert und stetig. Mithilfe einer erneuten Anwendung von Satz V.1.4 in Fischer & Lieb (1994) zeigt man analog, dass die Abbildung  $u_2 \mapsto B(u_2)$  wohldefiniert ist auf  $\mathcal{S}_2 \cap \{v \in \mathbb{C} : b^2 \neq k_2(u_2)\}$ . Zudem beachte man, dass die Gleichung

$(-k_1(u_1, u_2))^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}A(0, u_1, u_2)$  Gültigkeit besitzt, falls  $b^2 = 2k_2(u_2)$  ist, und dass  $(b^2 - 2k_2(u_2))^{\frac{1}{2}} = A(0, u_1, u_2)$  gilt, falls  $k_1(u_1, u_2) = 0$  ist. Damit sind alle vorkommenden komplexwertigen Wurzeln wohldefiniert. Wie in der Situation des Gamma-OU-Prozesses sei darauf hingewiesen, dass die Abbildung

$$\mathcal{S} \ni (u_1, u_2) \mapsto \int_0^t \psi^z(q(s, u_1, u_2)) ds \in \mathbb{C}$$

analytisch ist und dass die Abbildung

$$[0, T] \times \mathcal{S} \ni (t, u_1, u_2) \mapsto \int_0^t \psi^z(q(s, u_1, u_2)) ds \in \mathbb{C}$$

stetig ist unter den Annahmen von Satz 4.5. Unter anderem wird dies im allgemeinen Fall im folgenden Beweis gezeigt. Die explizite Formel für die Ableitung  $D_2\Phi_0$  soll an dieser Stelle erübrigt werden, da diese sehr kompliziert ist und im weiteren Verlauf der Arbeit nicht benötigt wird.

**BEWEIS VON SATZ 4.5.** Zu den Lévy-Khintchine-Tripeln  $(\beta_j, \gamma^{(j)}, \varphi^{(j)})$ ,  $j \in \{0, 1\}$ , vgl. Proposition 4.3, korrespondieren die kumulantenerzeugenden Funktionen  $\psi_j$ ,  $j \in \{0, 1\}$ . Diese sind auf den Mengen  $U_j$ ,  $j \in \{0, 1\}$ , gegeben durch

$$\begin{aligned} \psi_0(u_1, u_2) &= \kappa\eta u_1 + \mu u_2 + \psi^z\left(u_1 + \psi^{\tilde{X}}(u_2)\right), \\ \psi_1(u_1, u_2) &= -\kappa u_1 + \psi^X(u_2), \end{aligned}$$

wobei  $U_0$  und  $U_1$  definiert sind durch

$$\begin{aligned} U_0 &:= \{u \in \mathbb{C}^2 : \operatorname{Re}(u_1) < M_0 + \tilde{\varepsilon}, (2R' \wedge 0) - \tilde{\varepsilon} < \operatorname{Re}(u_2) < (2R \vee 2) + \tilde{\varepsilon}\} \quad \text{und} \\ U_1 &:= \{u \in \mathbb{C}^2 : (2R' \wedge 0) - \tilde{\varepsilon} < \operatorname{Re}(u_2) < (2R \vee 2) + \tilde{\varepsilon}\}. \end{aligned}$$

Dabei ist  $M_0$  zunächst eine beliebige nichtnegative Konstante unter der Nebenbedingung, dass die Momentenbedingung  $\int_1^\infty e^{(M_0 + M_2 + \tilde{\varepsilon})s} F^z(ds) < \infty$  erfüllt ist. Im weiteren Verlauf des Beweises wird  $M_0$  noch festgelegt.

In einem ersten Schritt wird das System verallgemeinerter Riccati-Differentialgleichungen (3.11) und (3.12), vgl. Proposition 3.3, gelöst:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Phi_1(t, u_1, u_2) &= -\kappa \Phi_1(t, u_1, u_2) + \psi^X(u_2), \\ \frac{\partial}{\partial t} \Phi_0(t, u_1, u_2) &= \kappa\eta \Phi_1(t, u_1, u_2) + \mu u_2 + \psi^z(\Phi_1(t, u_1, u_2) + \psi^{\tilde{X}}(u_2)) \end{aligned}$$

mit Anfangswerten  $\Phi_1(0, u_1, u_2) = u_1$  und  $\Phi_0(0, u_1, u_2) = 0$ . Die erste Differentialgleichung ist linear und die zweite kann mittels Integration der rechten Seite gelöst werden. Somit folgen die Funktionen  $\Phi_0, \Phi_1 : [0, T] \times (\mathbb{C}_- \times i\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}_-$  unmittelbar, wie in den

Gleichungen (4.10) und (4.12) behauptet.

In Anbetracht der Integrierbarkeitsbedingung (4.16) und von Lemma 4.7 kann die Abbildung

$$i\mathbb{R} \ni u \mapsto \Phi_1(t, 0, u) \in \mathbb{C}_-$$

stetig fortgesetzt werden auf  $\{u \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(u) \in ((2R' \wedge 0) - \varepsilon, (2R \vee 0) + \varepsilon)\}$  für jedes  $t \in [0, T]$ , wobei  $\varepsilon > 0$  beliebig klein fixiert sei in den Voraussetzungen (4.16) - (4.18), so dass

$$\Phi_1(t, 0, u) = \frac{1}{\kappa}(1 - e^{-\kappa t})\psi^X(u)$$

für alle  $(t, u) \in [0, T] \times \{u \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(u) \in ((2R' \wedge 0) - \varepsilon, (2R \vee 0) + \varepsilon)\}$  gilt. Da die Abbildung  $t \mapsto \frac{1}{\kappa}(1 - e^{-\kappa(T-t)})$  streng monoton fällt auf  $[0, T]$  und die Abbildung  $u \mapsto \psi^X(u)$  auf  $(2R' \wedge 0, 2R \vee 0)$  konvex ist, vgl. Sato (1999), Lemma 26.4, gilt

$$\begin{aligned} M_0 &:= \sup\{\Phi_1(T-t, 0, r) : r \in [2R' \wedge 0, 2R \vee 0], t \in [0, T]\} \\ &= \max\left\{\frac{1}{\kappa}\psi^X(2R' \wedge 0)(1 - e^{-\kappa T}), \frac{1}{\kappa}\psi^X(2R \vee 0)(1 - e^{-\kappa T})\right\} \geq 0. \end{aligned}$$

Nun kann die Menge  $\mathcal{S} := \{v \in \mathbb{C}^2 : \operatorname{Re}(v) \in \mathcal{V}_{\tilde{\varepsilon}}(0)\}$  definiert werden, wobei

$$\mathcal{V}_{\tilde{\varepsilon}}(a) := (-\infty, M_0 + \tilde{\varepsilon}) \times ((2R' \wedge 0) - \tilde{\varepsilon}, (2R \vee a) + \tilde{\varepsilon}),$$

$a \in \mathbb{R}_+$  und  $0 < \tilde{\varepsilon} < \varepsilon$  sind. Anhand von Annahme (4.16) und Lemma 4.7 sieht man, dass die Abbildung

$$\mathbb{C}_- \times i\mathbb{R} \ni (u_1, u_2) \mapsto \Phi_1(t, u_1, u_2) \in \mathbb{C}_-$$

analytisch fortgesetzt werden kann auf  $\mathcal{S}$  für jedes  $t \in [0, T]$ . Darüber hinaus ist sofort ersichtlich, dass  $(t, u_1, u_2) \mapsto \Phi_1(t, u_1, u_2)$  und  $(t, u_1, u_2) \mapsto D_2\Phi_1(t, u_1, u_2) = e^{-\kappa t}$  stetig sind auf  $[0, T] \times \mathcal{S}$ . Zudem ist die Abbildung  $t \mapsto \Phi_1(t, 0, z)$  auf  $[0, T]$  für alle  $z \in \mathcal{S}_f$  zweimal stetig differenzierbar.

Aufgrund der Annahmen (4.16) und (4.17) sowie wegen Lemma 4.7 ist die Abbildung

$$\mathcal{S} \ni (u_1, u_2) \mapsto q(s, u_1, u_2) \in \mathbb{C},$$

definiert wie in Gleichung (4.11), analytisch für jedes feste  $s \in [0, T]$ . Weil  $\psi^X$  und  $\psi^{\tilde{X}}$  Lévy-Exponenten sind, gelten

$$\operatorname{Re}(\psi^X(u)) \leq \psi^X(\operatorname{Re}(u)) \quad \text{und} \quad \operatorname{Re}(\psi^{\tilde{X}}(u)) \leq \psi^{\tilde{X}}(\operatorname{Re}(u))$$

für alle  $u \in \{v \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(v) \in ((2R' \wedge 0) - \varepsilon, (2R \vee 2) + \varepsilon)\}$  unter Berücksichtigung der Momentenbedingungen (4.16) und (4.17). Unter Ausnutzung der Konvexität von  $\psi^X$  und  $\psi^{\tilde{X}}$  erhält man  $\operatorname{Re}(q(s, u_1, u_2)) < M_0 + M_1 + M_2 + \varepsilon$  für alle  $(s, u_1, u_2) \in [0, T] \times \mathcal{S}$ . Dies impliziert

$$q([0, T] \times \mathcal{S}) \subseteq \mathcal{A} := \{v \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(v) < M_0 + M_1 + M_2 + \varepsilon\}.$$

Wegen Annahme (4.18) ist der Lévy-Exponent  $\psi^z$  analytisch auf  $\mathcal{A}$ . Insgesamt liefert Dieudonné (1972), Proposition 9.3.2, dass die Abbildung

$$\mathcal{S} \ni (u_1, u_2) \mapsto g(u_1, u_2) := \psi^z(q(s, u_1, u_2)) \in \mathbb{C}$$

analytisch ist für jedes  $s \in [0, t]$ ,  $t \in [0, T]$ . Man beachte, dass die Abbildungen

$$\begin{aligned} (s, u_1, u_2) &\mapsto \tilde{g}(s, u_1, u_2) := \psi^z(q(s, u_1, u_2)), \\ (s, u_1, u_2) &\mapsto D_2 \tilde{g}(s, u_1, u_2) = D_1 \psi^z(q(s, u_1, u_2)) e^{-\kappa s}, \\ (s, u_1, u_2) &\mapsto D_3 \tilde{g}(s, u_1, u_2) = D_1 \psi^z(q(s, u_1, u_2)) \left( \frac{1 - e^{-\kappa s}}{\kappa} D_1 \psi^X(u_2) + D_1 \psi^{\tilde{X}}(u_2) \right) \end{aligned}$$

stetig sind auf  $[0, t] \times \mathcal{S}$  für jedes  $t \in [0, T]$ . Mithilfe von Dieudonné (1972), Abschnitt 9.10, folgert man, dass

$$(u_1, u_2) \mapsto \int_0^t \psi^z(q(s, u_1, u_2)) ds$$

analytisch ist auf  $\mathcal{S}$  für jedes  $t \in [0, T]$ . Daraus resultiert mit Annahme (4.16) und Lemma 4.7, dass

$$\mathbb{C}_- \times i\mathbb{R} \ni (u_1, u_2) \mapsto \Phi_0(t, u_1, u_2) \in \mathbb{C}_-$$

analytisch fortgesetzt werden kann auf  $\mathcal{S}$  für jedes  $t \in [0, T]$ .

Im nächsten Schritt definiert man die Abbildung  $G$  mittels

$$\{v \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(v) < M_0 + \tilde{\varepsilon}\} \ni u_1 \mapsto G(u_1) := \int_0^t \psi^z(q(s, u_1, u_2)) ds \in \mathbb{C}$$

für festes  $t \in [0, T]$  und  $u_2 \in \{v \in \mathbb{C} : (2R' \wedge 0) - \tilde{\varepsilon} < \operatorname{Re}(v) < (2R \vee 0) + \tilde{\varepsilon}\}$ . Für ein festes  $u \in \{v \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(v) < M_0 + \tilde{\varepsilon}\}$  existiert eine reelle Konstante  $r > 0$  derart, dass

$$\overline{B(u, r)} \subset \{v \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(v) < M_0 + \tilde{\varepsilon}\}$$

gilt, wobei  $B(u, r) := \{v \in \mathbb{C} : |v - u| < r\}$  die offene Kugel mit Zentrum  $u$  und Radius  $r$  bezeichnet und  $\overline{B(u, r)}$  den Abschluss dieser Menge symbolisiert. Da  $(s, u_1) \mapsto \psi^z(q(s, u_1, u_2))$  stetig ist auf der kompakten Menge  $[0, t] \times \overline{B(u, r)}$ , existiert eine Konstante  $k > 0$  mit

$$|\psi^z(q(s, u_1, u_2))| \leq k$$

für alle  $(s, u_1) \in [0, t] \times B(u, r)$ . Ferner ist  $u_1 \mapsto \psi^z(q(s, u_1, u_2))$  analytisch auf  $B(u, r)$  für alle  $s \in [0, t]$ . Der Holomorphiesatz, vgl. Königsberger (1997), Abschnitt 8.4 liefert, dass die Abbildung  $G$ , eingeschränkt auf  $B(u, r)$ , analytisch ist, und es gilt

$$D_1 G(u_1) = \int_0^t D_1 \psi^z(q(s, u_1, u_2)) e^{-\kappa s} ds, \quad u_1 \in B(u, r). \quad (4.30)$$

Somit ergibt sich  $D_2 \Phi_0(t, u_1, u_2)$ , wie in Gleichung (4.23) behauptet.

Als nächstes muss gezeigt werden, dass  $\Phi_0$  und  $D_2\Phi_0$  stetig auf  $[0, T] \times \mathcal{S}$  sind. Die Funktion  $\Phi_0$  kann in der Form

$$\Phi_0(t, u_1, u_2) = \eta(1 - e^{-\kappa t})u_1 + \eta\psi^X(u_2) \left( t - \frac{1 - e^{-\kappa t}}{\kappa} \right) + \mu t u_2 + \int_0^T J(s, t, u_1, u_2) ds$$

mit  $J(s, t, u_1, u_2) := 1_{[0, t]}(s)\psi^z(q(s, u_1, u_2))$  geschrieben werden. Man beachte, dass die Funktion  $(t, u_1, u_2) \mapsto \psi^z(q(s, u_1, u_2))$  stetig ist auf  $[0, T] \times \mathcal{S}$  für alle  $s \in [0, T]$ . Somit ist die Abbildung  $(t, u_1, u_2) \mapsto J(s, t, u_1, u_2)$  stetig in jedem Punkt  $(t^*, u^*, v^*) \in [0, T] \times \mathcal{S}$  für  $\lambda$ -f.a.  $s \in [0, T]$ , d.h.

$$\int_0^T J(s, t^*, u^*, v^*) ds = \int_0^T \lim_{n \rightarrow \infty} J(s, t_n, u_n, v_n) ds \quad (4.31)$$

für alle Folgen  $((t_n, u_n, v_n))_{n \in \mathbb{N}} \subset [0, T] \times \mathcal{S}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} (t_n, u_n, v_n) = (t^*, u^*, v^*)$  für einen beliebigen Punkt  $(t^*, u^*, v^*) \in [0, T] \times \mathcal{S}$ . Weil der Subordinator  $z$  keine Drift besitzt, ist  $\psi^z(u) = \int_0^\infty (e^{ux} - 1) F^z(dx)$ , und man erhält die Abschätzung

$$|J(s, t_n, u_n, v_n)| \leq |q(s, u_n, v_n)| e^{|\operatorname{Re}(q(s, u_n, v_n))|} c_1 + \int_1^\infty e^{\operatorname{Re}(q(s, u_n, v_n))x} F^z(dx) + c_2 \quad (4.32)$$

mit  $c_1 := \int_0^1 x F^z(dx) < \infty$  und  $c_2 := F^z([1, \infty)) < \infty$ . Des Weiteren gibt es einen Index  $N \in \mathbb{N}$  mit den folgenden Eigenschaften:

1. es existiert eine Konstante  $c_3 > 0$  mit  $|u_n| \leq c_3$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $\operatorname{Re}(u_n) < M_0 + \tilde{\varepsilon}$  für alle  $n > N$ ,
2.  $(2R' \wedge 0) - \tilde{\varepsilon} < \operatorname{Re}(v_n) < (2R \vee 0) + \tilde{\varepsilon}$  für alle  $n > N$ ,
3. es existiert eine Konstante  $r > 0$  mit

$$\begin{aligned} (2R' \wedge 0) - \tilde{\varepsilon} < \operatorname{Re}(v^*) - r &\leq \operatorname{Re}(v_n) \leq \operatorname{Re}(v^*) + r < (2R \vee 0) + \tilde{\varepsilon}, \\ \operatorname{Im}(v^*) - r &\leq \operatorname{Im}(v_n) \leq \operatorname{Im}(v^*) + r \end{aligned}$$

für alle  $n > N$  und somit gibt es Konstanten  $c_4, c_5 > 0$  mit

$$|\psi^X(v_n)| \leq c_4 \quad \text{und} \quad |\psi^{\tilde{X}}(v_n)| \leq c_5 \quad \text{für alle } n > N,$$

weil  $\psi^X, \psi^{\tilde{X}}$  stetig sind auf  $\{v \in \mathbb{C} : (2R' \wedge 0) - \tilde{\varepsilon} < \operatorname{Re}(v) < (2R \vee 0) + \tilde{\varepsilon}\}$ .

Daraus folgt die Abschätzung  $\operatorname{Re}(q(s, u_n, v_n)) < M_0 + M_1 + M_2 + \tilde{\varepsilon}$  für alle  $n > N$  und die Existenz einer reellen Konstante  $c_6 > 0$  mit

$$|\operatorname{Re}(q(s, u_n, v_n))| \leq |q(s, u_n, v_n)| \leq c_6$$

für alle  $n > N$ . Unter Berücksichtigung der Abschätzung (4.32) und der Momentenbedingung (4.18) folgert man, dass  $|J(s, t_n, u_n, v_n)|$  beschränkt ist für alle  $s \in [0, T]$  und für

alle  $n > N$ . Mit majorisierter Konvergenz ergibt sich daraus mit Gleichung (4.31), dass  $(t, u_1, u_2) \mapsto \int_0^T J(s, t, u_1, u_2) ds$  stetig ist auf  $[0, T] \times \mathcal{S}$ , was die Stetigkeit von  $\Phi_0$  auf  $[0, T] \times \mathcal{S}$  nach sich zieht, berücksichtigt man Annahme (4.16) und erneut Lemma 4.7. Darüber hinaus existiert eine positive Konstante  $r$  mit  $\operatorname{Re}(u) + r < M_0 + M_1 + M_2 + \varepsilon$  für  $u \in \mathcal{A}$  derart, dass

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty |xe^{ux}| F^z(dx) \\ & \leq \int_0^1 x(e^{\operatorname{Re}(u)x} - 1) F^z(dx) + \int_0^1 x F^z(dx) + \frac{1}{r} \int_1^\infty e^{(\operatorname{Re}(u)+r)x} F^z(dx) \\ & \leq (Me^M + 1) \int_0^1 x F^z(dx) + \frac{1}{r} \int_1^\infty e^{Mx} F^z(dx) < \infty \end{aligned} \quad (4.33)$$

gilt mit  $M := M_0 + M_1 + M_2 + \varepsilon$ , da  $z$  Subordinator ist. Mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz ergibt sich folglich  $D_1\psi^z(u) = \int_0^\infty xe^{ux} F^z(dx)$  und somit

$$D_2\Phi_0(t, u_1, u_2) = \eta(1 - e^{-\kappa t}) + \int_0^T \tilde{J}(s, t, u_1, u_2) ds$$

mit  $\tilde{J}(s, t, u_1, u_2) = 1_{[0,t]}(s) \int_0^\infty xe^{q(s, u_1, u_2)x} F^z(dx) e^{-\kappa s}$ . In völliger Analogie zum Beweis der Stetigkeit von  $\Phi_0$  auf  $[0, T] \times \mathcal{S}$  resultiert die Stetigkeit von  $D_2\Phi_0$  auf  $[0, T] \times \mathcal{S}$  in Anbetracht der Abschätzung (4.33).

Im Hinblick auf die Anwendbarkeit der Sätze 3.17 und 3.18 ist bisher lediglich gezeigt worden, dass Annahme 3.6 erfüllt ist. Bezüglich  $r \in \{(2R' \wedge 0) - \tilde{\varepsilon}, (2R \vee 2) + \tilde{\varepsilon}\}$  definiert man nun das Esscher-transformierte Wahrscheinlichkeitsmaß  $P_r \stackrel{\text{loc}}{\sim} P$ . Das Wahrscheinlichkeitsmaß  $P_r$  ist gegeben durch den Dichteprozess

$$\left. \frac{dP_r}{dP} \right|_{\mathcal{F}_s} = \exp\{r\tilde{X}_s - s\psi^{\tilde{X}}(r)\}, \quad s > 0.$$

Gemäß Raible (2000), Proposition 1.8, ist  $\tilde{X}$  auch bezüglich des neuen Wahrscheinlichkeitsmaßes  $P_r$  ein Lévy-Prozess. Mit Sato (1999), Lemma 30.3, folgert man, dass es eine positive Konstante  $c$  gibt mit

$$\int_{|\tilde{x}|>1} e^{r\tilde{x}} P^{\tilde{X}_s}(d\tilde{x}) = e^{s\psi^{\tilde{X}}(r)} P_r\{|\tilde{X}_s| > 1\} \leq e^{s\psi^{\tilde{X}}(r)} cs \leq (1 \vee e^{\psi^{\tilde{X}}(r)}) cs$$

für alle  $s \in [0, 1]$ . Somit existiert eine positive Konstante  $\tilde{c}$  mit

$$\int_{|\tilde{x}|>1} e^{u_2\tilde{x}} P^{\tilde{X}_s}(d\tilde{x}) \leq \int_{|\tilde{x}|>1} \left( e^{((2R' \wedge 0) - \tilde{\varepsilon})\tilde{x}} + e^{((2R \vee 2) + \tilde{\varepsilon})\tilde{x}} \right) P^{\tilde{X}_s}(d\tilde{x}) \leq \tilde{c}s \quad (4.34)$$

für alle  $s \in [0, 1]$  und für alle  $u_2 \in ((2R' \wedge 0) - \tilde{\varepsilon}, (2R \vee 2) + \tilde{\varepsilon})$ . Es sei an die Definition (3.6) des Quaders  $\mathcal{Q}$  erinnert. Unter Verwendung von Proposition 4.3, der Momentenbedingung

(4.18), der Ungleichung (4.34) und der Subordinatoreigenschaft von  $z$  erhält man

$$\begin{aligned} & \int_{D \setminus \mathcal{Q}} e^{u_1 x_1 + u_2 x_2} \varphi_{(0)}(d(x_1, x_2)) \\ &= \int_1^\infty e^{(u_1 + \psi^{\tilde{X}}(u_2))s} F^z(ds) + \int_0^1 e^{u_1 s} \left( \int_{|\tilde{x}| > 1} e^{u_2 \tilde{x}} P^{\tilde{X}_s}(d\tilde{x}) \right) F^z(ds) \\ &\leq \int_1^\infty e^{(M_0 + M_1 + M_2 + \tilde{\varepsilon})s} F^z(ds) + e^{M_0 + \tilde{\varepsilon}} \int_0^1 \tilde{c}s F^z(ds) < \infty \end{aligned}$$

für alle  $(u_1, u_2) \in \mathcal{V}_{\tilde{\varepsilon}}(2)$ , da  $\psi^{\tilde{X}}$  konvex ist auf  $((2R' \wedge 0) - \tilde{\varepsilon}, (2R \vee 2) + \tilde{\varepsilon})$  und stetig auf  $[(2R' \wedge 0) - \tilde{\varepsilon}, (2R \vee 2) + \tilde{\varepsilon}]$ . Zudem liefern Proposition 4.3 und die Integrierbarkeitsvoraussetzung (4.16) die Gültigkeit der Abschätzung

$$\int_{D \setminus \mathcal{Q}} e^{u_1 x_1 + u_2 x_2} \varphi_{(1)}(d(x_1, x_2)) = \int_{|x| > 1} e^{u_2 x} F^X(dx) < \infty$$

für alle  $(u_1, u_2) \in \mathcal{V}_{\tilde{\varepsilon}}(2)$ . Damit ist auch Annahme 3.8 erfüllt. Die (lokalen) *Martingalbedingungen*, vgl. Annahme 3.11, gelten angesichts der Voraussetzung (4.19). Voraussetzung (4.20) schließt den degenerierten Fall  $Z_t = 0$   $P$ -f.s. für alle  $t \in [0, T]$  aus, vgl. Annahme 3.14. Aufgrund der affinen Struktur des integrierten OU-Zeittransformationsmodells, vgl. Proposition 4.3, folgt die Behauptung aus den Sätzen 3.17 und 3.18.  $\square$

## 4.2 Integrierte CIR-Zeittransformationsmodelle

Als zweites Beispiel für ein affines stochastisches Volatilitätsmodell soll in diesem Abschnitt das integrierte CIR-Zeittransformationsmodell (1.91)-(1.93) im Hinblick auf das Problem des varianz-optimalen Hedgens betrachtet werden. In diesem Abschnitt wird dabei zusätzlich angenommen, dass die Volatilität der quadrierten Volatilität  $\alpha \neq 0$  ist, um den Spezialfall eines deterministischen Volatilitätsprozesses auszuklammern. Es sei angemerkt, dass dieser Spezialfall gemäß Definition ebenfalls zu den affinen stochastischen Volatilitätsmodellen gehört. Folglich ist die Lösung des Problems varianz-optimalen Hedgens in diesem degenerierten Fall ebenfalls durch die Sätze 3.17 und 3.18 gegeben. Um jedoch unübersichtliche Fallunterscheidungen zu vermeiden, konzentrieren wir uns im vorliegenden Abschnitt auf den interessanten Fall  $\alpha > 0$ . Zunächst wird gezeigt, dass das Modell (1.91)-(1.93) affin ist. Dieser Beweis erfordert in Analogie zu dem Nachweis, dass das integrierte OU-Zeittransformationsmodell affin ist, einige technische Messbarkeitsaussagen. Man beachte, dass die càdlàg-Funktion  $\alpha$  im folgenden Lemma nichts mit dem Volatilitätsparameter  $\alpha$  der quadrierten Volatilität  $y$  zu tun hat.

**Lemma 4.9** 1. Die Abbildung  $\mathbb{D}^2 \ni (\alpha, \beta) \mapsto g_1(\alpha, \beta) := \alpha \int_0^{t \wedge \beta_s^+} \beta_s^+ ds \in \mathbb{D}$  ist  $\mathcal{D}^2 - \mathcal{D}$ -messbar für alle  $t \geq 0$ .

2. Die Abbildung  $\mathbb{D}^2 \ni (\alpha, \beta) \mapsto g_2(\alpha, \beta) := \alpha \int_0^{t \wedge \tilde{\tau}_n(\beta)} \beta_s^+ ds \in \mathbb{R}$  ist  $\mathcal{D}^2 - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -messbar für alle  $t \geq 0$ , wobei  $(\tilde{\tau}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Stoppzeiten bezüglich  $(\mathcal{D})_{t \geq 0}$  angibt.

BEWEIS.

1. Da  $\beta \mapsto \beta_s$   $\mathcal{D} - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -messbar ist für alle  $s \geq 0$  und  $\beta$  càdlàg ist, ist  $\beta^+$  progressiv messbar bezüglich  $(\mathcal{D})_{t \geq 0}$ . Aus dem gleichen Grund ist  $\alpha$  progressiv messbar bezüglich  $(\mathcal{D})_{t \geq 0}$ , d.h.  $\mathbb{D} \times \mathbb{R}_+ \ni (\alpha, s) \mapsto \alpha_s$  ist  $\mathcal{D} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -messbar. Mithilfe des Satzes von Fubini erhält man, dass

$$\mathbb{D}^2 \ni (\alpha, \beta) \mapsto \left( \alpha, \int_0^{t \wedge r} \beta_s^+ ds \right) \mapsto \alpha_{\int_0^{t \wedge r} \beta_s^+ ds} \in \mathbb{R}$$

$\mathcal{D}^2 - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -messbar ist für jedes beliebige  $r > 0$ . Daraus folgt

$$\begin{aligned} g_1^{-1}(\pi_r^{-1}(B)) &= \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{D}^2 : \alpha_{\int_0^{t \wedge r} \beta_s^+ ds} \in \pi_r^{-1}(B)\} \\ &= \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{D}^2 : \alpha_{\int_0^{t \wedge r} \beta_s^+ ds} \in B\} \in \mathcal{D}^2 \end{aligned}$$

für alle  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ . Da  $\mathcal{D}$  erzeugt wird durch  $\{\pi_r^{-1}(B) : r \in \mathbb{R}_+, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ , resultiert die Behauptung.

2. Zunächst sei angemerkt, dass  $\{\beta \in \mathbb{D} : \tilde{\tau}_n(\beta) \leq t\} \in \mathcal{D}$  für alle  $t \geq 0$  gilt, da  $\tilde{\tau}_n$  eine Stoppzeit bezüglich  $(\mathcal{D})_{t \geq 0}$  ist. Somit ist

$$\mathbb{D} \times \mathbb{R}_+ \ni (\beta, s) \mapsto \tilde{\tau}_n(\beta) \in \mathbb{R}_+$$

$\mathcal{D} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) - \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ -messbar. Des Weiteren ergibt sich wie im ersten Teil des Beweises die  $\mathcal{D} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) - \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ -Messbarkeit von  $\mathbb{D} \times \mathbb{R}_+ \ni (\beta, s) \mapsto \beta_s^+ \in \mathbb{R}_+$ . Damit liefert der Satz von Fubini, dass

$$\mathbb{D}^2 \ni (\alpha, \beta) \mapsto \int_0^t 1_{[0, \infty)}(\tilde{\tau}_n(\beta) - s) \beta_s^+ ds = \int_0^{t \wedge \tilde{\tau}_n(\beta)} \beta_s^+ ds \in \mathbb{R}_+$$

$\mathcal{D}^2 - \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ -messbar ist. Wie im ersten Teil des Beweises schließt man darauf, dass

$$\mathbb{D}^2 \ni (\alpha, \beta) \mapsto \left( \alpha, \int_0^{t \wedge \tilde{\tau}_n(\beta)} \beta_s^+ ds \right) \mapsto \alpha_{\int_0^{t \wedge \tilde{\tau}_n(\beta)} \beta_s^+ ds} \in \mathbb{R}$$

$\mathcal{D}^2 - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -messbar ist. □

**Lemma 4.10** Seien  $X$  ein  $\mathbb{R}$ -wertiger Lévy-Prozess bezüglich der kanonischen Filtrierung  $(\mathcal{G}_r^X)_{r \in \mathbb{R}_+}$ , definiert durch  $\mathcal{G}_r^X := \bigcap_{l > r} \sigma(X_k : k \leq l)$ ,  $r \in \mathbb{R}_+$ , mit Tripel  $(b, c, F)$  und

$W$  ein Standard-Wiener-Prozess bezüglich der kanonischen Filtrierung  $(\widehat{\mathcal{F}}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , gegeben durch  $\widehat{\mathcal{F}}_t := \bigcap_{s > t} \sigma(W_q : q \leq s)$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ . Es wird angenommen, dass die durch eine Quadratwurzel-Diffusion  $y = (y_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  spezifizierte endliche, absolut stetige Zeittransformation  $Y = (Y_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , welche also für  $t \in \mathbb{R}_+$  von der Form

$$Y_t = \int_0^t y_s ds \quad \text{und} \quad dy_t = \kappa(\eta - y_t)dt + \alpha \sqrt{y_t} dW_t$$

ist, wobei  $\kappa, \eta, \alpha > 0$  reelle Konstanten sind, unabhängig von dem Lévy-Prozess  $X$  sei. Dann sind der zeittransformierte Prozess  $X_Y$  ein Semimartingal und der Prozess  $(X_Y)^c y^c$  ein lokales Martingal bezüglich der Filtrierung  $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , definiert durch

$$\tilde{\mathcal{F}}_t := \bigcap_{s>t} \sigma(X_{Y_q}, Y_q : q \leq s), \quad t \geq 0,$$

d.h. es gilt  $\langle (X_Y)^c, y^c \rangle = 0$  bezüglich  $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ .

Da der Lévy-Prozess  $X$  unabhängig von der Zeittransformation  $Y$  ist, dies impliziert die Unabhängigkeit des Lévy-Prozesses  $X$  und des CIR-Prozesses  $y$ , erscheint die Gültigkeit der Gleichung  $\langle (X_Y)^c, y^c \rangle = 0$  plausibel. Der exakte Beweis erfordert allerdings einige technische Argumente.

BEWEIS. Gemäß Ikeda & Watanabe (1989), Beispiel IV.8.2, vgl. dort auch Definition IV.1.6, sind  $y$  und  $Y$  Semimartingale bezüglich der Filtrierung  $(\widehat{\mathcal{F}}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ . Da  $\kappa, \eta > 0$  sind und  $y_0 > 0$  gilt, ist  $y_t \geq 0$  für alle  $t \in \mathbb{R}_+$  fast sicher. Wenn  $y_t$  Null wird, wird der Prozess durch die positive Drift  $\kappa\eta dt$  sofort wieder ins Positive gezogen, infolgedessen  $t \mapsto Y_t(\omega)$  für  $P$ -fast alle  $\omega \in \Omega$  streng monoton wächst. Wie im Beweis von Proposition 4.3 kann somit der Umkehrprozess  $U = (U_r)_{r \in \mathbb{R}_+}$  mit  $Y_{U_r(\omega)}(\omega) = r$  und  $U_{Y_t(\omega)}(\omega) = t$  definiert werden. Die Filtrierung  $(\mathcal{G}_r)_{r \in \mathbb{R}_+}$  der Handelszeit wird dann modelliert durch

$$\mathcal{G}_r := \bigcap_{l>r} \sigma(X_k, U_k : k \leq l), \quad r \in \mathbb{R}_+. \quad (4.35)$$

Wie im Beweis von Proposition 4.3 sieht man, dass  $X$  auch Lévy-Prozess bezüglich  $(\mathcal{G}_r)_{r \in \mathbb{R}_+}$  ist. Aufgrund der Adaptiertheit von  $U$  bezüglich  $(\mathcal{G}_r)_{r \in \mathbb{R}_+}$  ist  $Y_t$  für jedes  $t \in \mathbb{R}_+$  Stoppzeit bezüglich  $(\mathcal{G}_r)_{r \in \mathbb{R}_+}$ . Jacod (1979), Korollar 10.12, liefert, dass  $X_Y$  ein Semimartingal bezüglich  $(\mathcal{G}_{Y_t})_{t \in \mathbb{R}_+}$  ist. In erneuter Analogie zum Beweis von Proposition 4.3 zeigt man  $\tilde{\mathcal{F}}_t = \mathcal{G}_{Y_t}$  für alle  $t \in \mathbb{R}_+$ . Der zeittransformierte Prozess  $X_Y$  ist also ein Semimartingal bezüglich  $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ . Wegen

$$y_t = \lim_{q \uparrow 0} \frac{1}{q} (Y_{t+q} - Y_t) \quad (4.36)$$

ist  $y$  an die Filtrierung  $(\mathcal{F}_t^Y)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , definiert durch  $\mathcal{F}_t^Y := \bigcap_{s>t} \sigma(Y_q : q \leq s)$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ , adaptiert. Aus der stochastischen Differentialgleichung (1.93), die den CIR-Prozess definiert, resultiert

$$\left( \frac{1}{\alpha \sqrt{y}} \right) \cdot y_t = \left( \frac{\kappa(\eta - y)}{\alpha \sqrt{y}} \right) \cdot I_t + W_t,$$

wobei  $I$  für den Identitätsprozess steht. Unter Berücksichtigung der Vorhersehbarkeit von  $y$  und des Satzes von Fubini ist  $W$  somit ebenfalls an  $(\mathcal{F}_t^Y)_{t \in \mathbb{R}_+}$  adaptiert. Daraus folgt die Inklusion

$$\sigma(W_q : q \leq s) \subseteq \sigma(Y_q : q \leq s) \subseteq \sigma(X_{Y_q}, Y_q : q \leq s) \quad (4.37)$$

für alle  $s > t$ , was  $\widehat{\mathcal{F}}_t \subseteq \tilde{\mathcal{F}}_t$  für alle  $t \in \mathbb{R}_+$  impliziert. Analog zum Beweis, dass  $X$  auch Lévy-Prozess bezüglich  $(\mathcal{G}_r)_{r \in \mathbb{R}_+}$  ist, zeigt man, dass  $W$  auch ein Standard-Wiener-Prozess

(im Sinne von Jacod & Shiryaev (2003), Definition I.4.9, vgl. aber dort auch Definition II.4.1) bezüglich  $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  ist. Gemäß Ikeda & Watanabe (1989), Beispiel IV.8.2 und Definition IV.1.6, sind dann  $y$  und  $Y$  auch Semimartingale bezüglich  $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ .

Man beachte, dass  $(\mathcal{F}_t^y)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , definiert durch  $\mathcal{F}_t^y := \bigcap_{s>t} \sigma(y_q : q \leq s)$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ , mit  $(\mathcal{F}_t^Y)_{t \in \mathbb{R}_+}$  übereinstimmt. Man erkennt dies auf der einen Seite anhand von Gleichung (4.36) und auf der anderen Seite mittels der Vorhersehbarkeit von  $y$  und des Satzes von Fubini. Man definiert

$$\tau_n := \inf\{t \geq 0 : |y_t^c| > n\} \wedge \inf\{t \geq 0 : |Y_t| > n\} \quad (4.38)$$

für  $n \in \mathbb{N}$ . Wegen

$$y_t^c = \int_0^t \sigma \sqrt{y_s} dW_s = y_t - y_0 - \kappa \eta t - \kappa Y_t$$

ist der stetige Martingalanteil  $y^c$  adaptiert an  $(\mathcal{F}_t^Y)_{t \in \mathbb{R}_+}$ . Aufgrund der Stetigkeit von  $y^c$  ist somit  $\inf\{t \geq 0 : |y_t^c| > n\}$  Stoppzeit bezüglich  $(\mathcal{F}_t^Y)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , vgl. Jacod & Shiryaev (2003), Proposition I.1.28. Da  $Y$  stetig und natürlich an  $(\mathcal{F}_t^Y)_{t \in \mathbb{R}_+}$  adaptiert ist, ist  $\tau_n$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$  Stoppzeit bezüglich  $(\mathcal{F}_t^Y)_{t \in \mathbb{R}_+}$ . Aufgrund der Inklusion (4.37) ist  $\tau_n$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$  auch Stoppzeit bezüglich  $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ .

Der gestoppte Prozess  $(y^c)^{\tau_n}$  ist ein lokales Martingal bezüglich  $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , weil  $\mathcal{M}_{\text{loc}}$  stabil unter Stoppen ist, vgl. Jacod & Shiryaev (2003), Satz I.1.42 und Lemma I.1.35. Unter Beachtung der Konstruktion (4.38) der Stoppzeit  $\tau_n$  und unter Verwendung der Stetigkeit von  $y^c$  zeigt man die Gültigkeit der Abschätzung  $|y_{\tau_n \wedge \tau}^c| \leq n$  für alle Stoppzeiten  $\tau$ . Daraus folgt die gleichgradige Integrierbarkeit von  $\{(y^c)_{\tau}^{\tau_n} : \tau \text{ endliche Stoppzeit}\}$ , was definitivisch gleichbedeutend damit ist, dass der gestoppte Prozess  $(y^c)^{\tau_n}$  ein Prozess von Klasse  $(D)$  ist. Gemäß Jacod & Shiryaev (2003), Proposition I.1.47, ist  $(y^c)^{\tau_n}$  ein gleichgradig integrierbares Martingal bezüglich  $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ .

Sei  $0 \leq t_1 < t_2 < \infty$ . Aufgrund der Stetigkeit ist  $(X_Y)^c$  bezüglich  $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  gut-messbar. Daraus ergibt sich mit Jacod & Shiryaev (2003), Proposition I.1.21, die  $\tilde{\mathcal{F}}_{t \wedge \tau_n}$ -Messbarkeit von  $((X_Y)^c)_t^{\tau_n}$  für alle  $t \in \mathbb{R}_+$ . Somit ist  $(X_Y)_{t_1 \wedge \tau_n}^c$  bezüglich  $\tilde{\mathcal{F}}_{t_1}$  messbar, vgl. Métivier (1982), Proposition 5.3. Der stetige Martingalanteil  $y^c$  ist stetig und adaptiert an  $(\mathcal{F}_t^Y)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , insbesondere also gut-messbar bezüglich  $(\mathcal{F}_t^Y)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , infolgedessen  $y_{t_2 \wedge \tau_n}^c$  analog zur obigen Überlegung  $\mathcal{F}_{t_2}^Y$ -messbar ist. Wegen  $\mathcal{F}_{t_2}^Y \subseteq \mathcal{F}_{\infty}^Y \subseteq \mathcal{F}_{\infty}^Y \vee \tilde{\mathcal{F}}_{t_1}$  resultiert die  $(\mathcal{F}_{\infty}^Y \vee \tilde{\mathcal{F}}_{t_1})$ -Messbarkeit von  $y_{t_2 \wedge \tau_n}^c$ . Insgesamt erhält man damit

$$\begin{aligned} & E_P \left[ (X_Y)_{t_2 \wedge \tau_n}^c y_{t_2 \wedge \tau_n}^c \mid \tilde{\mathcal{F}}_{t_1} \right] \\ &= E_P \left[ E_P \left[ (X_Y)_{t_2 \wedge \tau_n}^c - (X_Y)_{t_1 \wedge \tau_n}^c \mid \mathcal{F}_{\infty}^Y \vee \tilde{\mathcal{F}}_{t_1} \right] y_{t_2 \wedge \tau_n}^c \mid \tilde{\mathcal{F}}_{t_1} \right] + (X_Y)_{t_1 \wedge \tau_n}^c y_{t_1 \wedge \tau_n}^c. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Jacod (1979), Satz 10.17, besagt, dass  $(X_Y)^c = (X^c)_Y$  gilt. In Anbetracht der Definitionen der integralen und differentiellen Semimartingalcharakteristik, vgl. die Definitionen 2.23

und 2.25, ist  $\langle X^c, X^c \rangle_t = ct$ . Gemäß Jacod & Shiryaev (2003), Satz II.4.4, ist  $X^c$  ein Wiener-Prozess mit differentieller Charakteristik  $\partial X^c = (0, c, 0)$ . Angesichts von Jacod & Shiryaev (2003), Korollar II.4.19, ist  $X^c$  ein Prozess mit stationären und unabhängigen Zuwächsen, d.h. es gilt  $X_t^c \stackrel{d}{=} \widetilde{W}_t \sim \mathcal{N}(0, ct)$  für einen Wiener-Prozess  $\widetilde{W}$  mit Charakteristik  $\partial \widetilde{W} = (0, c, 0)$ , wobei  $\mathcal{N}(0, ct)$  die Normalverteilung mit Mittelwert 0 und Varianz  $ct$  bezeichnet. Somit ist also nun zu zeigen:

$$E_P \left[ (X_Y)_{t_2 \wedge \tau_n}^c - (X_Y)_{t_1 \wedge \tau_n}^c \middle| \mathcal{F}_\infty^Y \vee \bar{\mathcal{F}}_{t_1} \right] = E_P \left[ \widetilde{W}_{Y_{t_2 \wedge \tau_n}} - \widetilde{W}_{Y_{t_1 \wedge \tau_n}} \middle| \mathcal{F}_\infty^Y \vee \bar{\mathcal{F}}_{t_1} \right] = 0.$$

Auf dem Skorokhod-Raum  $(\mathbb{D}, \mathcal{D}, (\mathcal{D}_t)_{t \in \mathbb{R}_+})$  kann der CIR-Prozess  $y$  mittels des kanonischen Prozesses  $\mathbb{D} \times \mathbb{R}_+ \ni (\beta, t) \mapsto \beta_t \in \mathbb{R}$  identifiziert werden. Hier entspricht

$$\beta \mapsto \tilde{\tau}_n(\beta) = \inf \{ t \geq 0 : |\beta_t^c| > n \} \wedge \inf \left\{ t \geq 0 : \left| \int_0^t \beta_s^+ ds \right| > n \right\}$$

mit  $\beta_s^+ = \beta_s \vee 0$  und  $\beta_t^c := \beta_t - \beta_0 - \kappa \eta t - \kappa \int_0^t \beta_s ds$  der Stoppzeit  $\omega \mapsto \tau_n(\omega)$  aus Gleichung (4.38). Da  $|\beta^c|$  càdlàg und an  $(\mathcal{D})_{t \geq 0}$  adaptiert ist, liefert Proposition I.1.28 in Jacod & Shiryaev (2003), dass  $\beta \mapsto \inf \{ t \geq 0 : |\beta_t^c| > n \}$  eine Stoppzeit bezüglich  $(\mathcal{D})_{t \geq 0}$  ist. Unter Beachtung von Bemerkung I.1.26 in Jacod & Shiryaev (2003) ist  $\beta^+$  gut-messbar, infolgedessen der Satz von Fubini die Adaptiertheit von  $\int_0^t \beta_s^+ ds$  bezüglich  $(\mathcal{D})_{t \geq 0}$  ergibt. Aufgrund der Stetigkeit des Integrals erhält man mit Proposition I.1.28, Jacod & Shiryaev (2003), dass  $\beta \mapsto \tilde{\tau}_n(\beta)$  Stoppzeit bezüglich  $(\mathcal{D})_{t \geq 0}$  ist. Unter Berücksichtigung von Lemma 4.9 und aufgrund der Unabhängigkeit von  $y$  und  $(\widetilde{W}, X)$  gilt

$$\begin{aligned} & P \left\{ y \in A_1, X_Y^{t_1 + \frac{1}{2k}} \in A_2, \widetilde{W}_{Y_{t_2 \wedge \tau_n}} - \widetilde{W}_{Y_{(t_1 + \frac{1}{k}) \wedge \tau_n}} \in A_3 \right\} \\ &= \int_{\mathbb{D}^3} 1_{A_1 \times A_2 \times A_3} \left( \beta, \gamma \int_0^{(t_1 + \frac{1}{2k}) \wedge \tilde{\tau}_n(\beta)} \beta_s^+ ds, \alpha \int_0^{t_2 \wedge \tilde{\tau}_n(\beta)} \beta_s^+ ds - \alpha \int_0^{(t_1 + \frac{1}{k}) \wedge \tilde{\tau}_n(\beta)} \beta_s^+ ds \right) \\ & \quad P^{(\widetilde{W}, y, X)}(d(\alpha, \beta, \gamma)) \\ &= \int_{A_1} \int_{\mathbb{D}^2} 1_{A_2 \times A_3} \left( \left( \gamma \int_0^{\cdot} \beta_s^+ ds \right)^{t_1 + \frac{1}{2k}}, g(\alpha, \beta) \right) P^{(\widetilde{W}, X)}(d(\alpha, \gamma)) P^y(d\beta) \end{aligned}$$

für  $A_1, A_2 \in \mathcal{D}$ ,  $A_3 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  und für ein festes  $k \in \mathbb{N}$ , wobei  $g$  definiert ist durch

$$g(\alpha, \beta) := \alpha \int_0^{t_2 \wedge \tilde{\tau}_n(\beta)} \beta_s^+ ds - \alpha \int_0^{(t_1 + \frac{1}{k}) \wedge \tilde{\tau}_n(\beta)} \beta_s^+ ds.$$

Man beachte, dass der Prozess  $N := \left( \widetilde{W} \int_0^{\cdot} \beta_s^+ ds, X \int_0^{\cdot} \beta_s^+ ds \right)$  unabhängig von dem

Prozess  $\tilde{N} := \left( \widetilde{W} - \widetilde{W} \int_0^{\cdot} \beta_s^+ ds, X - X \int_0^{\cdot} \beta_s^+ ds \right)$  ist. Ergo ist  $P^{(\widetilde{W}, X)} = P^N * P^{\tilde{N}}$ ,

wobei  $*$  hier für das Faltungsprodukt steht. Folglich ergibt sich

$$\begin{aligned} & P \left\{ y \in A_1, X_Y^{t_1 + \frac{1}{2k}} \in A_2, \widetilde{W}_{Y_{t_2 \wedge \tau_n}} - \widetilde{W}_{Y_{(t_1 + \frac{1}{k}) \wedge \tau_n}} \in A_3 \right\} \\ &= \int_{A_1} \int_{\mathbb{D}^2} \int_{\mathbb{D}^2} 1_{A_2 \times A_3} \left( (\gamma' + \gamma'') \int_0^{\cdot} \beta_s^+ ds, g(\alpha' + \alpha'', \beta) \right) P^N(d(\alpha', \gamma')) \\ & \quad P^{\tilde{N}}(d(\alpha'', \gamma'')) P^y(d\beta). \end{aligned}$$

Ferner beobachtet man, dass

$$\left( X - X \int_0^{t_1 + \frac{1}{2k}} \beta_s^+ ds \right)_{\int_0^{(t_1 + \frac{1}{2k}) \wedge \cdot} \beta_s^+ ds} = 0$$

und

$$\left( \widetilde{W} \int_0^{t_1 + \frac{1}{2k}} \beta_s^+ ds \right)_{\int_0^{t_2 \wedge \tilde{\tau}_n(\beta)} \beta_s^+ ds} - \left( \widetilde{W} \int_0^{t_1 + \frac{1}{k}} \beta_s^+ ds \right)_{\int_0^{(t_1 + \frac{1}{k}) \wedge \tilde{\tau}_n(\beta)} \beta_s^+ ds} = 0$$

für hinreichend großes  $k \in \mathbb{N}$  mit  $t_1 + \frac{1}{2k} < t_2$  gelten. Daraus folgt

$$\begin{aligned} & P \left\{ y \in A_1, X_Y^{t_1 + \frac{1}{2k}} \in A_2, \widetilde{W}_{Y_{t_2 \wedge \tau_n}} - \widetilde{W}_{Y_{(t_1 + \frac{1}{k}) \wedge \tau_n}} \in A_3 \right\} \\ &= \int_{A_1} \int_{\mathbb{D}^2} 1_{A_2} \left( (\gamma')_{\int_0^{t_1 + \frac{1}{2k}} \beta_s^+ ds} \right) P^N(d(\alpha', \gamma')) \int_{\mathbb{D}^2} 1_{A_3}(g(\alpha'', \beta)) P^{\tilde{N}}(d(\alpha'', \gamma'')) P^y(d\beta). \end{aligned}$$

Das innere Integral nach der Verteilung von  $\tilde{N}$  kann wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{D}^2} 1_{A_3}(g(\alpha'', \beta)) P^{\tilde{N}}(d(\alpha'', \gamma'')) \\ &= \int_{\Omega} 1_{A_3} \left( \widetilde{W}_{\int_0^{t_2 \wedge \tilde{\tau}_n(\beta)} \beta_s^+ ds}(\omega) - \widetilde{W}_{\int_0^{(t_1 + \frac{1}{k}) \wedge \tilde{\tau}_n(\beta)} \beta_s^+ ds}(\omega) \right) P(d\omega) \\ &= \mathcal{N} \left( 0, c \int_{(t_1 + \frac{1}{k}) \wedge \tilde{\tau}_n(\beta)}^{t_2 \wedge \tilde{\tau}_n(\beta)} \beta_s^+ ds \right) (A_3). \end{aligned}$$

Da  $y$  und  $X$  nach Voraussetzung unabhängig sind, erhält man

$$\begin{aligned} & P \left\{ y \in A_1, X_Y^{t_1 + \frac{1}{2k}} \in A_2, \widetilde{W}_{Y_{t_2 \wedge \tau_n}} - \widetilde{W}_{Y_{(t_1 + \frac{1}{k}) \wedge \tau_n}} \in A_3 \right\} \\ &= \int_{A_1 \times A_2} \mathcal{N} \left( 0, c \int_{(t_1 + \frac{1}{k}) \wedge \tilde{\tau}_n(\beta)}^{t_2 \wedge \tilde{\tau}_n(\beta)} \beta_s^+ ds \right) (A_3) P^{(y, X_Y^{t_1 + \frac{1}{2k}})}(d(\beta, \gamma^k)). \end{aligned}$$

Diese Gleichung entspricht einer Radon-Nikodym-Gleichung vom Typ (1.6.60) in Witting (1985). Auf der einen Seite ist der Integrand eine Verteilung auf  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  für jedes  $\beta \in \mathbb{D}$  und auf der anderen Seite ist dieser  $\mathcal{D} - \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ -messbar für jedes  $A_3 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , da

$$\mathbb{D} \ni \beta \mapsto \int_{(t_1 + \frac{1}{k}) \wedge \tilde{\tau}_n(\beta)}^{t_2 \wedge \tilde{\tau}_n(\beta)} \beta_s^+ ds = \int_0^{t_2 \wedge \tilde{\tau}_n(\beta)} \beta_s^+ ds - \int_0^{(t_1 + \frac{1}{k}) \wedge \tilde{\tau}_n(\beta)} \beta_s^+ ds \in \mathbb{R}_+$$

$\mathcal{D} - \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ -messbar ist, wie man im zweiten Teil des Beweises von Lemma 4.9 gesehen hat.

Somit ist die reguläre bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilung von  $\widetilde{W}_{Y_{t_2 \wedge \tau_n}} - \widetilde{W}_{Y_{(t_1 + \frac{1}{k}) \wedge \tau_n}}$

unter der Hypothese, dass  $y = \beta$  und  $X_Y^{t_1 + \frac{1}{2k}} = \gamma^k$  gelten, bezüglich  $P$  gegeben durch

$$P \left. \widetilde{W}_{Y_{t_2 \wedge \tau_n}} - \widetilde{W}_{Y_{(t_1 + \frac{1}{k}) \wedge \tau_n}} \right|_{y=\beta, X_Y^{t_1 + \frac{1}{2k}} = \gamma^k} = \mathcal{N} \left( 0, c \int_{(t_1 + \frac{1}{k}) \wedge \tilde{\tau}_n(\beta)}^{t_2 \wedge \tilde{\tau}_n(\beta)} \beta_s^+ ds \right).$$

Man beachte, dass  $\bar{\mathcal{F}}_t = \bigcap_{s>t} \sigma(X_{Y_q}, y_q : q \leq s)$  und

$$\bar{\mathcal{F}}_{t_1} \subseteq \sigma\left(Y_{Y_q}, y_q : q \leq t_1 + \frac{1}{2k}\right) =: \mathcal{F}_\infty^{X_Y^{t_1 + \frac{1}{2k}}, y^{t_1 + \frac{1}{2k}}} =: \sigma\left(X_Y^{t_1 + \frac{1}{2k}}, y^{t_1 + \frac{1}{2k}}\right)$$

gelten. Unter Berücksichtigung von  $\mathcal{F}_\infty^y \vee \bar{\mathcal{F}}_{t_1} \subseteq \mathcal{F}_\infty^y \vee \sigma\left(X_Y^{t_1 + \frac{1}{2k}}, y^{t_1 + \frac{1}{2k}}\right)$  liefern die Glättungseigenschaft der bedingten Erwartung und eine Anwendung des Faktorisierungslemmas

$$\begin{aligned} & E_P \left[ \widetilde{W}_{Y_{t_2 \wedge \tau_n}} - \widetilde{W}_{Y_{(t_1 + \frac{1}{k}) \wedge \tau_n}} \middle| \mathcal{F}_\infty^y \vee \bar{\mathcal{F}}_{t_1} \right] \\ &= E_P \left[ E_P \left[ \widetilde{W}_{Y_{t_2 \wedge \tau_n}} - \widetilde{W}_{Y_{(t_1 + \frac{1}{k}) \wedge \tau_n}} \middle| \mathcal{F}_\infty^y \vee \sigma\left(X_Y^{t_1 + \frac{1}{2k}}, y^{t_1 + \frac{1}{2k}}\right) \right] \middle| \mathcal{F}_\infty^y \vee \bar{\mathcal{F}}_{t_1} \right] \\ &= E_P \left[ \int_{\mathbb{R}} x P^{\widetilde{W}_{Y_{t_2 \wedge \tau_n}} - \widetilde{W}_{Y_{(t_1 + \frac{1}{k}) \wedge \tau_n}} \middle| y = \beta, X_Y^{t_1 + \frac{1}{2k}} = \gamma^k} (dx) \middle| \mathcal{F}_\infty^y \vee \bar{\mathcal{F}}_{t_1} \right] = 0. \quad (4.40) \end{aligned}$$

Aufgrund der Konstruktion (4.38) der Stoppzeit  $\tau_n$  gilt  $Y_{t \wedge \tau_n} \leq Y_{\tau_n} \leq n$  für alle  $t \geq 0$ . Damit zeigt man  $|\widetilde{W}_{Y_{t_2 \wedge \tau_n}}| \vee |\widetilde{W}_{Y_{(t_1 + \frac{1}{k}) \wedge \tau_n}}| \leq \sup_{0 \leq s \leq n} |\widetilde{W}_s|$ . Daraus resultieren

$$\left| \widetilde{W}_{Y_{t_2 \wedge \tau_n}} - \widetilde{W}_{Y_{(t_1 + \frac{1}{k}) \wedge \tau_n}} \right| \leq 2 \sup_{0 \leq s \leq n} |\widetilde{W}_s|$$

für alle  $k \in \mathbb{N}$  und

$$\left( E_P \left[ \sup_{0 \leq s \leq n} |\widetilde{W}_s| \right] \right)^2 \leq E_P \left[ \left( \sup_{0 \leq s \leq n} |\widetilde{W}_s| \right)^2 \right] \leq 4 E_P \left[ \widetilde{W}_n^2 \right] = 4cn < \infty \quad (4.41)$$

unter Verwendung der Ungleichungen von Jensen und Doob. Mit majorisierter Konvergenz ergibt sich

$$\begin{aligned} & E_P \left[ \widetilde{W}_{Y_{t_2 \wedge \tau_n}} - \widetilde{W}_{Y_{t_1 \wedge \tau_n}} \middle| \mathcal{F}_\infty^y \vee \bar{\mathcal{F}}_{t_1} \right] \\ &= E_P \left[ \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \widetilde{W}_{Y_{t_2 \wedge \tau_n}} - \widetilde{W}_{Y_{(t_1 + \frac{1}{k}) \wedge \tau_n}} \right) \middle| \mathcal{F}_\infty^y \vee \bar{\mathcal{F}}_{t_1} \right] \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} E_P \left[ \widetilde{W}_{Y_{t_2 \wedge \tau_n}} - \widetilde{W}_{Y_{(t_1 + \frac{1}{k}) \wedge \tau_n}} \middle| \mathcal{F}_\infty^y \vee \bar{\mathcal{F}}_{t_1} \right] = 0 \end{aligned}$$

aus Gleichung (4.40). Nun folgt die lokale Martingaleigenschaft von  $(X_Y)^c y^c$  bezüglich  $(\bar{\mathcal{F}}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  aus Gleichung (4.39), da  $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine aufsteigende Folge von Stoppzeiten ist mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = \infty$ . Abschließend beobachtet man

$$E_P \left[ |((X_Y)^c)_t^{\tau_n} (y^c)_t^{\tau_n}| \right] \leq n E_P \left[ \left| \widetilde{W}_{Y_{t \wedge \tau_n}} \right| \right] \leq n E_P \left[ \sup_{0 \leq s \leq n} |\widetilde{W}_s| \right] < \infty$$

für alle  $t \geq 0$ , vgl. Abschätzung (4.41). Da  $(X_Y)^c$  und  $y^c$  stetige lokale Martingale bezüglich  $(\bar{\mathcal{F}}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  sind, ist  $(X_Y)^c y^c$  stetig und bezüglich  $(\bar{\mathcal{F}}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  adaptiert, was den Beweis abschließt.  $\square$

**Proposition 4.11** Gegeben sei die stochastische Basis  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, P)$ , wobei die Filtrierung definiert sei durch  $\mathcal{F}_t = \bigcap_{s>t} \sigma(Z_q, y_q : q \leq s)$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ . Dann ist das integrierte CIR-Zeittransformationsmodell (1.91) - (1.93) ein affines stochastisches Volatilitätsmodell. Die differentielle Charakteristik  $\partial(y, Z)$  ist gegeben durch  $b^{(y,Z)} = \beta_{(0)} + \beta_{(1)}y$ ,  $c^{(y,Z)} = \gamma_{(0)} + \gamma_{(1)}y$  und  $F^{(y,Z)}(G) = \varphi_{(0)}(G) + \varphi_{(1)}(G)y$  mit

$$(\beta_{(0)}, \gamma_{(0)}, \varphi_{(0)}) = \left( \begin{pmatrix} \kappa\eta \\ \rho\kappa\eta + \mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, 0 \right),$$

$$\beta_{(1)} = \begin{pmatrix} -\kappa \\ b^X(\tilde{h}) - \rho\kappa \end{pmatrix}, \quad \gamma_{(1)} = \begin{pmatrix} \alpha^2 & \rho\alpha^2 \\ \rho\alpha^2 & \rho^2\alpha^2 + c^X \end{pmatrix}, \quad \varphi_{(1)}(G) = \int_{\mathbb{R}} 1_G(0, x) F^X(dx)$$

für alle  $G \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$  mit  $0 \notin G$ .

BEWEIS. Die Quadratwurzel-Diffusion  $y$  ist ein stetiges Spezialsemimartingal, vgl. Bemerkung 2.3, bezüglich der in Lemma 4.10 definierten Filtrierung  $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  mit kanonischer Zerlegung  $y = y_0 + M^y + A^y$ , wobei  $M_t^y = \int_0^t \alpha \sqrt{y_s} dW_s$  und  $A_t^y = \int_0^t \kappa(\eta - y_s) ds$  sind. Somit ist die differentielle Charakteristik von  $y$  von der Gestalt  $\partial y = (\kappa(\eta - y), \alpha^2 y, 0)$ . Im Beweis von Lemma 4.10 hat man bereits gesehen, dass der Prozess  $W$ , der die Quadratwurzel-Diffusion  $y$  treibt, ein Standard-Wiener-Prozess bezüglich der Filtrierung  $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  ist, welche mit  $(\mathcal{F}_t)_t$ , definiert durch  $\mathcal{F}_t := \bigcap_{s>t} \sigma(X_{Y_q}, y_q : q \leq s)$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ , übereinstimmt, da  $y$  und  $Y$  sowohl bezüglich  $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  als auch bezüglich  $(\mathcal{F}_t)_t$  adaptiert sind. Und weil die Prozesse  $Z$ ,  $X_Y$  und  $y$  sowohl an  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  als auch an  $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_t$  adaptiert sind, gilt  $\mathcal{F}_t = \tilde{\mathcal{F}}_t$  für alle  $t \in \mathbb{R}_+$ , mit dem Resultat, dass  $W$  ein Standard-Wiener-Prozess bezüglich  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  ist. Folglich stellt  $y$  ein Spezialsemimartingal bezüglich  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  dar mit differentiemer Charakteristik  $\partial y = (\kappa(\eta - y), \alpha^2 y, 0)$ . Zudem ergibt sich in Verbindung mit Lemma 4.10, dass der zeittransformierte Prozess  $X_Y$  ein Semimartingal bezüglich  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  ist. Wegen  $\mathcal{F}_t = \tilde{\mathcal{F}}_t = \mathcal{G}_{Y_t}$  für alle  $t \in \mathbb{R}_+$ , wobei  $(\mathcal{G}_r)_{r \in \mathbb{R}_+}$  definiert ist wie in Gleichung (4.35) im Beweis von Lemma 4.10, hat die differentielle Charakteristik von  $X_Y$  bezüglich  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  die Gestalt  $\partial X_Y = (b^X(\tilde{h})y, c^X y, F^X y)$ , vgl. Proposition 2.34. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit werden die gleichen ein- und  $d$ -dimensionalen Abschneidefunktionen wie im Beweis von Proposition 4.3 verwendet. Mithilfe von Lemma 4.10 erhält man bezüglich  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  die differentielle Charakteristik

$$\partial(y, X_Y, I) = \left( \begin{pmatrix} \kappa(\eta - y) \\ b^X(\tilde{h})y \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha^2 y & 0 & 0 \\ 0 & c^X y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, F^{(y, X_Y, I)} \right)$$

mit  $F^{(y, X_Y, I)}(G) = \int_{\mathbb{R}} 1_G(0, x, 0) F^X(dx)y$  für alle  $G \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^3)$  mit  $0 \notin G$ . Wendet man den Itô-Kalkül für Charakteristiken, vgl. Proposition 2.31, auf die Funktion

$$g(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 + \rho(x_1 - y_0) + \mu x_3 \end{pmatrix}$$

und die Charakteristik  $\partial(y, X_Y, I)$  an, so ergibt sich abschließend, dass  $(y, Z)$  ein Semimartingal bezüglich  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  ist mit differentieller Charakteristik

$$\partial(y, Z) = \left( \begin{pmatrix} \kappa\eta - \kappa y \\ \varrho\kappa\eta + \mu + (b^X(\tilde{h}) - \varrho\kappa)y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha^2 y & \varrho\alpha^2 y \\ \varrho\alpha^2 y & (\varrho^2\alpha^2 + c^X)y \end{pmatrix}, F^{(y,Z)} \right),$$

wobei  $F^{(y,Z)}(G) = \int_{\mathbb{R}} 1_G(0, x) F^X(dx)y$  ist für alle  $G \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$  mit  $0 \notin G$ . Daraus resultieren die Lévy-Khintchine-Tripel  $(\beta_{(0)}, \gamma_{(0)}, \varphi_{(0)})$  und  $(\beta_{(1)}, \gamma_{(1)}, \varphi_{(1)})$ , wie behauptet. Wegen  $\kappa\eta \geq 0$  und  $\varphi_{(0)} = 0$  sind die Tripel im Sinne von Duffie et al. (2003), Definition 2.6, zulässig.  $\square$

**Bemerkung 4.12** Wie bereits erwähnt, kann die Dynamik des Modells von Heston (1993) als Spezialfall der Dynamik des integrierten CIR-Zeittransformationsmodells (1.91) - (1.93) aufgefasst werden. Wählt man im integrierten CIR-Zeittransformationsmodell den Lévy-Prozess  $X$  als Wiener-Prozess mit Charakteristik  $\partial X = (\delta\alpha^2 + \varrho\kappa, (1 - \varrho^2)\alpha^2, 0)$  und den Driftparameter  $\mu$  in der Form  $\mu = \tilde{\mu} - \varrho\kappa\eta$ , wobei  $\tilde{\mu}, \delta \in \mathbb{R}$  und  $\varrho \in (-1, 1)$  seien, so erhält man die gemeinsame Charakteristik von quadrierter Volatilität und Log-Rendite in der Gestalt

$$\partial(y, Z) = \left( \begin{pmatrix} \kappa(\eta - y) \\ \tilde{\mu} + \delta\alpha^2 y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha^2 y & \varrho\alpha^2 y \\ \varrho\alpha^2 y & \alpha^2 y \end{pmatrix}, 0 \right). \quad (4.42)$$

Diese Charakteristik entspricht der im Modell von Heston (1993), wobei die quadrierte Volatilität  $y$  zur Modellierung der Log-Rendite  $Z$  mit  $\alpha^2$  reskaliert wird:

$$\begin{aligned} Z_t &= \int_0^t (\tilde{\mu} + \delta\alpha^2 y_s) ds + \int_0^t \alpha\sqrt{y_s} d\widetilde{W}_s, \\ dy_t &= \kappa(\eta - y_t)dt + \alpha\sqrt{y_t}dW_t \end{aligned}$$

mit Standard-Wiener-Prozessen  $\widetilde{W}$  und  $W$ , die eine konstante Korrelation  $\varrho$  aufweisen, man vergleiche z.B. die Arbeit von Kallsen (2006), Abschnitt 4.2.

Das zentrale Ergebnis dieses Abschnitts beinhaltet die Lösung des Problems varianz-optimalen Hedgens im integrierten CIR-Zeittransformationsmodell. Vor dem Hintergrund von Proposition 4.11 sind die Integraldarstellungen der varianz-optimalen Hedgingstrategie und des minimalen erwarteten quadratischen Hedgefehlers eine Folgerung der Sätze 3.17 und 3.18. Dahingegen ist die Übertragung der allgemeinen Voraussetzungen auf das konkrete Modell recht aufwendig.

**Satz 4.13** *Gegeben seien die stochastische Basis  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, P)$ , definiert wie in Proposition 4.11, und das integrierte CIR-Zeittransformationsmodell (1.91) - (1.93) mit  $\alpha > 0$ . Dann können das varianz-optimale Anfangskapital  $v_0^*$  und die varianz-optimale Handelsstrategie  $\vartheta^*$  mittels*

$$v_0^* = \int_{S_f} V(u)_0 \Pi(du), \quad (4.43)$$

$$\vartheta_t^* = \int_{S_f} \frac{V(u)_{t-} \kappa_1(t, u)}{S_{t-} \delta_1} \Pi(du) \quad (4.44)$$

berechnet werden mit

$$V(u)_t = S_t^u \exp\{\Phi_0(T-t, 0, u) + \Phi_1(T-t, 0, u)y_t\}, \quad (4.45)$$

$$\Phi_0(t, u_1, u_2) = \frac{\kappa\eta}{\alpha^2} (2(l\varphi)(t, u_1, u_2) + (\gamma(u_2) - l(u_1, u_2))t) + \kappa\eta u_1 t, \quad (4.46)$$

$$\Phi_1(t, u_1, u_2) = \frac{(\gamma^2(u_2) - l^2(u_1, u_2))(1 - e^{\gamma(u_2)t})}{\alpha^2((l(u_1, u_2) - \gamma(u_2))(1 - e^{\gamma(u_2)t}) + 2\gamma(u_2))} + u_1, \quad (4.47)$$

$$\begin{aligned} (l\varphi)(t, u_1, u_2) &= \int_0^t \frac{D_1\varphi(s, u_1, u_2)}{\varphi(s, u_1, u_2)} ds \\ &= \int_0^t \frac{\gamma(u_2)(l(u_1, u_2) - \gamma(u_2))}{(l(u_1, u_2) + \gamma(u_2))(e^{-\gamma(u_2)s} - 1) + 2\gamma(u_2)} ds, \end{aligned} \quad (4.48)$$

$$\varphi(t, u_1, u_2) = \frac{2\gamma(u_2)e^{-\gamma(u_2)t}}{(l(u_1, u_2) + \gamma(u_2))(e^{-\gamma(u_2)t} - 1) + 2\gamma(u_2)}, \quad (4.49)$$

$$l(u_1, u_2) = \alpha^2 u_1 + \varrho \alpha^2 u_2 - \kappa, \quad (4.50)$$

$$\gamma(u_2) = \sqrt{\kappa^2 - 2\alpha^2 \psi^X(u_2)}, \quad (4.51)$$

$$\kappa_1(t, u) = \varrho \alpha^2 (\Phi_1(T-t, 0, u) + \varrho u) + \psi^X(u+1) - \psi^X(u) - \psi^X(1), \quad (4.52)$$

$$\delta_1 = \psi^X(2) - 2\psi^X(1) + \varrho^2 \alpha^2, \quad (4.53)$$

falls die folgenden Voraussetzungen erfüllt sind:

$$\int_{|x|>1} e^{((2R' \wedge 0) - \varepsilon)x} F^X(dx) < \infty \quad \text{und} \quad \int_{|x|>1} e^{((2R \vee 2) + \varepsilon)x} F^X(dx) < \infty, \quad (4.54)$$

$$T < \tau^*(2R) \quad \text{mit} \quad \tau^*(r) := \begin{cases} \infty & , \text{ falls } \Delta(r) \leq 0, \\ \frac{1}{\gamma(r)} \ln \left( \frac{\tilde{\Delta}(r)}{\Delta(r)} \right) & , \text{ falls } \Delta(r) > 0, \end{cases} \quad (4.55)$$

$$\tilde{\Delta}(r) := l(0, r) + \gamma(r) \quad \text{und} \quad \Delta(r) := l(0, r) - \gamma(r), \quad (4.56)$$

wobei  $r \in ((2R' \wedge 0) - \tilde{\varepsilon}, (2R \vee 2) + \tilde{\varepsilon})$  ist, und

$$M_0 < M_2, \quad (4.57)$$

$$M_1 < \frac{\kappa^2}{2\alpha^2}, \quad (4.58)$$

$$\mu = -\varrho\kappa\eta \quad \text{und} \quad \psi^X(1) = \varrho \left( \kappa - \frac{1}{2}\varrho\alpha^2 \right), \quad (4.59)$$

$$\psi^X(2) \neq 2\varrho(\kappa - \varrho\alpha^2) \quad (4.60)$$

für ein beliebig klein fixiertes  $\varepsilon > 0$  und für  $\tilde{\varepsilon}$  mit  $\varepsilon > \tilde{\varepsilon} > 0$  und

$$M_0 = \max\{\Phi_1(T, 0, 2R' \wedge 0), \Phi_1(T, 0, 2R \vee 0), 0\}, \quad (4.61)$$

$$M_1 = \max\{\psi^X((2R' \wedge 0) - \tilde{\varepsilon}), \psi^X((2R \vee 2) + \tilde{\varepsilon})\}, \quad (4.62)$$

$$M_2 = \min\{g((2R' \wedge 0) - \tilde{\varepsilon}), g((2R \vee 0) + \tilde{\varepsilon})\}, \quad (4.63)$$

wobei  $\bar{\varepsilon}$  dergestalt ist, dass  $\varepsilon > \tilde{\varepsilon} > \bar{\varepsilon} > 0$  gilt, und die Funktion  $g$  definiert ist durch

$$g(r) := \frac{1}{\alpha^2} \left[ \gamma(r) \coth \left( \frac{1}{2} \gamma(r) T \right) + \kappa \right] - \varrho r, \quad (4.64)$$

$r \in ((2R' \wedge 0) - \bar{\varepsilon}, (2R \vee 2) + \tilde{\varepsilon})$ . Darüber hinaus ist der minimale erwartete quadratische Hedgefehler unter diesen Annahmen gegeben durch

$$J_0 = \int_{\mathcal{S}_f} \int_{\mathcal{S}_f} \int_0^T I(t, u_1, u_2) dt \Pi(du_1) \Pi(du_2) \quad (4.65)$$

mit

$$\begin{aligned} I(t, u_1, u_2) &= \frac{w}{\delta_1} e^{\xi_0} S_0^{u_1+u_2} \exp \{ \Phi_0(t, \xi_1, u_1 + u_2) + \Phi_1(t, \xi_1, u_1 + u_2) y_0 \} \\ &\quad \times [D_2 \Phi_0(t, \xi_1, u_1 + u_2) + D_2 \Phi_1(t, \xi_1, u_1 + u_2) y_0], \end{aligned} \quad (4.66)$$

$$D_2 \Phi_0(t, u_1, u_2) = \frac{2\kappa\eta \sinh \left( \frac{1}{2} \gamma(u_2) t \right)}{\gamma(u_2) \cosh \left( \frac{1}{2} \gamma(u_2) t \right) - l(u_1, u_2) \sinh \left( \frac{1}{2} \gamma(u_2) t \right)}, \quad (4.67)$$

$$D_2 \Phi_1(t, u_1, u_2) = \frac{4\gamma^2(u_2) e^{\gamma(u_2)t}}{\left( (l(u_1, u_2) - \gamma(u_2)) (1 - e^{\gamma(u_2)t}) + 2\gamma(u_2) \right)^2}, \quad (4.68)$$

$$w(t, u_1, u_2) = \delta_1 v(t, u_1, u_2) - \kappa_1(t, u_1) \kappa_1(t, u_2) \equiv w, \quad (4.69)$$

$$\begin{aligned} v(t, u_1, u_2) &= \alpha^2 (\Phi_1(T - t, 0, u_1) + \varrho u_1) (\Phi_1(T - t, 0, u_2) + \varrho u_2) \\ &\quad + \psi^X(u_1 + u_2) - \psi^X(u_1) - \psi^X(u_2), \end{aligned} \quad (4.70)$$

$$\xi_j(t, u_1, u_2) = \Phi_j(T - t, 0, u_1) + \Phi_j(T - t, 0, u_2) \equiv \xi_j, \quad j \in \{0, 1\}. \quad (4.71)$$

Die Integrale über  $\mathcal{S}_f$  in  $J_0$  sind im Sinne des Cauchy'schen Hauptwertes zu verstehen. Zur Vereinfachung der Notation sind die Argumente der Funktionen  $w$  und  $\xi_j$ ,  $j \in \{0, 1\}$ , in Formel (4.66) unterdrückt worden.

**Bemerkung 4.14** 1. Analog zu den Bedingungen (4.19) und (4.20) im integrierten OU-Zeittransformationsmodell stellt Bedingung (4.59) den Martingalfall im integrierten CIR-Zeittransformationsmodell sicher und schließt Bedingung (4.60) den degenerierten Fall  $Z_t = 0$   $P$ -f.s. für alle  $t \in [0, T]$  aus. Die Integrierbarkeitsbedingung (4.54) entspricht den Integrierbarkeitsvoraussetzungen (4.16) - (4.18) im integrierten OU-Zeittransformationsmodell, siehe auch Bemerkung 4.6. Im integrierten CIR-Zeittransformationsmodell ist die Integrierbarkeitsbedingung (4.54) allerdings allein nicht hinreichend für die Lösbarkeit des Problems varianz-optimalen Hedgens. Darüber hinaus muss unter anderem der Handelshorizont eingeschränkt werden, vgl. Annahme (4.55). Diese Voraussetzung gewährleistet zunächst die Existenz der Riccati-Lösung  $[0, T] \ni t \mapsto \Phi_1(t, 0, u)$  für alle  $u \in [2R' \wedge 0, 2R \vee 0]$ . Diese ist Grundvoraussetzung dafür, dass die Lösungen  $\Phi_0$  und  $\Phi_1$  der Riccati-Differentialgleichungen (3.11) und (3.12) die Regularitätsbedingungen erfüllen, vgl. Annahme 3.6 im allgemeinen affinen Modell, die neben den Integrierbarkeitsbedingungen, vgl. Annahme 3.8 im allgemeinen affinen Modell, hinreichend sind für die Lösbarkeit des Problems

varianz-optimalen Hedgens. Man beachte, dass die Bedingung (4.55) im vorliegenden integrierten CIR-Zeittransformationsmodell trivialerweise erfüllt ist, wenn der Leverage-Parameter  $\varrho$  nichtpositiv ist respektive europäische Derivate gehedgt werden, die mit einem Parameter  $R \leq \frac{1}{2}$  einhergehen, wie zum Beispiel ein europäischer Put. Eine weitere Grundvoraussetzung dafür, dass  $\Phi_0$  und  $\Phi_1$  die Regularitätsbedingungen erfüllen, besteht darin, dass  $\Phi_0$  und  $\Phi_1$  keine Singularitäten aufweisen. Dies wird durch die Bedingung (4.57) sichergestellt, die sehr leicht überprüft werden kann, da bei gegebenen Parametern lediglich die beiden Zahlen  $M_0$  und  $M_2$  miteinander verglichen werden müssen. Ein wesentlicher Bestandteil der Funktionen  $\Phi_0$  und  $\Phi_1$  ist die Abbildung  $\gamma$ . Damit diese wohldefiniert und analytisch ist, müssen die exponentiellen Momente des Lévy-Prozesses  $X$  der Größenordnung nach beschränkt werden, vgl. Annahme (4.58). Diese Annahme ist genauso leicht überprüfbar wie Annahme (4.57).

2. Man beachte, dass die Funktion  $\mathbb{l}\varphi$  ein bestimmter Logarithmus der  $\mathbb{C}$ -wertigen Funktion  $\varphi$  ist. Die Integraldarstellung (4.48) stellt den richtigen Zweig des komplexen Logarithmus sicher. Bei dem richtigen Zweig handelt es sich um den stetigen Logarithmus, der in Null den Funktionswert Null hat. Da der komplexe Logarithmus bis auf Vielfache von  $2\pi i$  eindeutig ist, genügt es, das Integral in (4.48) numerisch sehr grob, beispielsweise mit der Simpson-Regel, auszuwerten. Die grobe Näherung reicht aus, um die Abweichung vom ersten Hauptzweig des Logarithmus von  $\varphi$  in Vielfachen von  $2\pi i$  zu bestimmen. Somit ist das Integral in (4.48) quasi explizit bekannt. Die weiteren Ausführungen in dieser Bemerkung zeigen, dass  $\mathbb{l}\varphi$ , aufgefasst als Abbildung der Zeit, gerade der ausgezeichnete Logarithmus von  $\varphi$  im Sinne von Sato (1999), Lemma 7.6, ist. Die Funktion  $[0, T] \ni t \mapsto \tilde{\varphi}(t) := \varphi(t, u_1, u_2) \in \mathbb{C}$  besitzt für festes  $(u_1, u_2) \in \mathcal{S}$  die folgenden Eigenschaften:

- (a)  $\tilde{\varphi}(0) = 1$ .
- (b)  $\tilde{\varphi}(t) \neq 0$  für alle  $t \in [0, T]$ .
- (c)  $\tilde{\varphi}$  ist stetig auf  $[0, T]$  wegen (4.55), (4.57), (4.58). Der entscheidende Punkt ist hierbei, dass der Nenner von  $\tilde{\varphi}$  keine Nullstellen hat. Hinsichtlich Details sei auf den später folgenden Beweis von Satz 4.13 verwiesen.

Aus Lemma 7.6 in Sato (1999) resultiert die Existenz des *ausgezeichneten Logarithmus* von  $\tilde{\varphi}$ , d.h. es gibt eine eindeutige stetige Funktion  $q : [0, T] \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $q(0) = 0$  und  $\exp\{q(t)\} = \tilde{\varphi}(t)$  für alle  $t \in [0, T]$ . Des Weiteren definiert man die Abbildung  $\tilde{\mathbb{l}}\varphi : [0, T] \rightarrow \mathbb{C}$  mittels  $(\tilde{\mathbb{l}}\varphi)(t) := (\mathbb{l}\varphi)(t, u_1, u_2)$  für festes  $(u_1, u_2) \in \mathcal{S}$ . Man kann zeigen:

- (a')  $(\tilde{\mathbb{l}}\varphi)(0) = 0$ .
- (b')  $t \mapsto (\tilde{\mathbb{l}}\varphi)(t)$  ist stetig differenzierbar auf  $[0, T]$  wegen (4.55), (4.57), (4.58).

(c') Sowohl  $t \mapsto \exp\{\tilde{l}\varphi(t)\}$  als auch  $t \mapsto \tilde{\varphi}(t)$  lösen das Anfangswertproblem

$$D_1 x(t) = x(t) \frac{D_1 \tilde{\varphi}(t)}{\tilde{\varphi}(t)}, \quad x(0) = 1.$$

Da  $t \mapsto \frac{D_1 \tilde{\varphi}(t)}{\tilde{\varphi}(t)}$  auf  $[0, T]$  stetig ist, ist die Funktion  $G(t, x) = x \frac{D_1 \tilde{\varphi}(t)}{\tilde{\varphi}(t)}$  Lipschitz-stetig in  $x$ . Der Eindeigkeitsatz von Picard-Lindelöf, vgl. z.B. Königsberger (1997), Abschnitt 4.2, liefert

$$\exp\{\tilde{l}\varphi(t)\} = \tilde{\varphi}(t) \quad \text{für alle } t \in [0, T]. \quad (4.72)$$

Folglich erhält man  $q = \tilde{l}\varphi$ , d.h.  $\tilde{l}\varphi$  ist der *ausgezeichnete Logarithmus* von  $\tilde{\varphi}$ .

Zum Beweis des Satzes 4.13 werden einige technische Hilfsaussagen benötigt.

**Lemma 4.15** Die Abbildung  $u_2 \mapsto \gamma(u_2) := \sqrt{\kappa^2 - 2\alpha^2 \psi^X(u_2)}$ , vgl. Gleichung (4.51), ist wohldefiniert und analytisch auf

$$\mathcal{S}_2 := \{v \in \mathbb{C} : (2R' \wedge 0) - \tilde{\varepsilon} < \operatorname{Re}(v) < (2R \vee 2) + \tilde{\varepsilon}\}.$$

BEWEIS. Man definiere die Funktion  $\mathcal{S}_2 \ni u_2 \mapsto d(u_2) := 1 - \frac{2\alpha^2}{\kappa^2} \psi^X(u_2) \in \mathbb{C}$ . Aufgrund von Annahme (4.54) und Lemma 4.7 ist  $d$  analytisch auf  $\mathcal{S}_2$ . Weil  $\psi^X$  auf dem Intervall  $((2R' \wedge 0) - \tilde{\varepsilon}, (2R \vee 2) + \tilde{\varepsilon})$  konvex ist, vgl. Sato (1999), Lemma 26.4, impliziert Annahme (4.58), dass  $1 - \frac{2\alpha^2}{\kappa^2} \operatorname{Re}(\psi^X(u_2)) > 0$  für alle  $u_2 \in \mathcal{S}_2$  gilt. Insbesondere ist also  $d(u_2) \neq 0$  für alle  $u_2 \in \mathcal{S}_2$ . Da  $d(0) = 1$  gilt und  $\mathcal{S}_2$  einfach zusammenhängend ist, liefert Satz V.1.4 in Fischer & Lieb (1994) die eindeutige Existenz einer analytischen Funktion  $q : \mathcal{S}_2 \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $q(0) = 0$  und  $d(u_2) = \exp\{q(u_2)\}$  für alle  $u_2 \in \mathcal{S}_2$ . Somit ist  $u_2 \mapsto \gamma(u_2) = \kappa \exp\{\frac{1}{2}q(u_2)\}$ , wie behauptet, wohldefiniert und analytisch auf  $\mathcal{S}_2$ , man vergleiche Fischer & Lieb (1994), Abschnitt V.2.  $\square$

**Lemma 4.16** Man betrachte die Familie von Anfangswertproblemen

$$\frac{\partial}{\partial t} x(t, u) = G(x(t, u), u), \quad x(0, u) = 0, \quad (4.73)$$

$u \in I$ , wobei angenommen wird, dass  $G : \mathbb{R} \times I \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal stetig differenzierbar und konvex ist und dass  $I \subset \mathbb{R}$  ein kompaktes Intervall darstellt. Für ein  $T > 0$  und für alle  $u \in I$  sei  $t \mapsto x(t, u)$  Lösung des Anfangswertproblems (4.73), die auf  $[0, T]$  existiere, und für die gelte:

$$|x(t, u)| \leq s \quad \forall (t, u) \in [0, T] \times I \quad (4.74)$$

für eine Konstante  $s > 0$ . Dann ist die Abbildung  $I \ni u \mapsto x(t, u) \in \mathbb{R}$  konvex für alle  $t \in [0, T]$ .

**Bemerkung 4.17** Für festes  $u \in I$  ist die Lösung  $[0, T] \ni t \mapsto x(t, u)$  des Anfangswertproblems (4.73) eindeutig, da  $(x, u) \mapsto G(x, u)$  lokal Lipschitz-stetig bezüglich  $x$  ist, vgl. Walter (1976), Satz 6.VII. Man beachte, dass  $G$  nicht von  $t$  abhängt, infolgedessen die Abhängigkeit der rechten Seite der Differentialgleichung in (4.73) von  $t$  ausschließlich durch  $x(t, u)$  gegeben ist.

BEWEIS VON LEMMA 4.16. Man betrachte ein beliebiges, aber festes  $t^* \in [0, T]$ . Ferner wähle man ein  $M > s$  und definiere

$$\tilde{G}(x, u) := \begin{cases} G(x, u) & , \text{ falls } -M \leq x \leq M, \\ m_1(x + M) + G(-M, u) & , \text{ falls } x < -M, \\ m_2(x - M) + G(M, u) & , \text{ falls } x > M \end{cases}$$

mit  $m_1 := \min\{D_1G(-M, u) : u \in I\}$  und  $m_2 := \max\{D_1G(M, u) : u \in I\}$ . Man kann zeigen, dass  $\tilde{G} : \mathbb{R} \times I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig ist und dass  $x \mapsto \tilde{G}(x, u)$  für alle  $u \in I$  auf  $\mathbb{R}$  Lipschitz-stetig ist, wobei die Lipschitz-Konstante  $L$  nicht von  $u$  abhängt. Damit resultiert aus Satz 6.I in Walter (1976), dass das Anfangswertproblem

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{x}(t, u) = \tilde{G}(\tilde{x}(t, u), u), \quad \tilde{x}(0, u) = 0 \quad (4.75)$$

für festes  $u \in I$  eine eindeutige Lösung  $t \mapsto \tilde{x}(t, u)$  auf  $[0, T]$  hat. Es bezeichne  $x$  die eindeutige Lösung des ursprünglichen Anfangswertproblems (4.73) für  $u \in I$  auf  $[0, T]$ . Dann erhält man mit der Hilfe von  $|x(u, t)| \leq s < M$  für alle  $(t, u) \in [0, T] \times I$ , dass

$$\frac{\partial}{\partial t} x(t, u) = G(x(t, u), u) = \tilde{G}(x(t, u), u), \quad x(0, u) = 0,$$

gilt, d.h.  $x$  ist auch die eindeutige Lösung des modifizierten Anfangswertproblems (4.75) für  $u \in I$  auf  $[0, T]$ . Zu dem Anfangswertproblem (4.75) definiert man die *Euler-Iterierten*

$$\chi_{\nu, 2^k}(u) := \chi_{\nu-1, 2^k}(u) + h\tilde{G}(\chi_{\nu-1, 2^k}(u), u), \quad \nu = 1, \dots, 2^k, \quad \chi_{0, 2^k}(u) := 0, \quad (4.76)$$

$$t_\nu := t_{\nu-1} + h = \nu h, \quad \nu = 1, \dots, 2^k, \quad t_0 := 0 \quad (4.77)$$

mit Schrittweite  $h := t^*2^{-k}$ . Für alle  $k \in \mathbb{N}$  ist die Euler-Iterierte  $\chi_{2^k, 2^k}(u)$  eine Approximation für  $x(t^*, u)$ . Man definiert die Approximationsfehler  $e_{\nu, 2^k}(u) := \chi_{\nu, 2^k}(u) - x(t_\nu, u)$  und  $e_k(u) := e_{2^k, 2^k}(u)$ . Unter Verwendung des Mittelwertsatzes erhält man die Fehlerabschätzung

$$\begin{aligned} |e_{\nu, 2^k}(u)| &\leq |e_{\nu-1, 2^k}(u)| + h \left| \tilde{G}(\chi_{\nu-1, 2^k}(u), u) - \tilde{G}(x(t_{\nu-1}, u), u) \right| \\ &\quad + h \left| \tilde{G}(x(t_{\nu-1}, u), u) - \tilde{G}(x(t_{\nu-1} + \xi h, u), u) \right|, \end{aligned}$$

wobei  $\xi \in (0, 1)$  eine Konstante ist. Unter Berücksichtigung der Tatsache, dass  $\tilde{G}$  bezüglich der ersten Komponente Lipschitz-stetig ist, liefert eine erneute Anwendung des Mittelwertsatzes

$$|e_{\nu, 2^k}(u)| \leq |e_{\nu-1, 2^k}(u)| (1 + hL) + \xi L \tilde{L} h^2,$$

wobei  $L$  die Lipschitz-Konstante von  $x \mapsto \tilde{G}(x, u)$  bezeichnet und  $\tilde{L}$  gegeben ist durch  $\tilde{L} := \max\{|G(x(t, u), u)| : (t, u) \in [0, T] \times I\}$ . Das Maximum  $\tilde{L}$  existiert, da  $|x(t, u)| \leq s$  für alle  $(t, u) \in [0, T] \times I$  gilt und  $G$  auf der kompakten Menge  $[-s, s] \times I$  stetig ist. Mit

Lemma 9.1 in Schwarz (1997) ergibt sich  $|e_{\nu,2^k}(u)| \leq (e^{TL} - 1)\xi\tilde{L}h$  für alle  $\nu \in \{1, \dots, 2^k\}$ . Wegen  $|e_{0,2^k}(u)| = 0$  gilt

$$\max\{|e_{\nu,2^k}(u)| : \nu \in \{0, \dots, 2^k\}\} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

gleichmäßig auf  $I$  unter Beachtung von  $\lim_{k \rightarrow \infty} t^*2^{-k} = 0$ . Daraus folgt zum einen, dass

$$\chi_{2^k,2^k}(u) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x(t^*, u) \quad \text{gleichmäßig auf } I \quad (4.78)$$

gilt, und zum anderen, dass ein Index  $\tilde{k} \in \mathbb{N}$  existiert mit

$$|\chi_{\nu,2^k}(u)| \leq 1 + s \quad \text{für alle } u \in I \text{ und alle } \nu \in \{0, \dots, 2^k\} \quad (4.79)$$

für alle  $k > \tilde{k}$ . Mittels Induktion über  $\nu$  zeigt man, dass  $u \mapsto \chi_{\nu,2^k}(u)$  auf  $I$  stetig ist für alle  $\nu \in \{0, \dots, 2^k\}$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Folglich gibt es endlich viele positive Zahlen  $s_{0,1}, s_{1,1}, \dots, s_{2^{\tilde{k}},2^{\tilde{k}}}$  mit

$$|\chi_{\nu,2^j}(u)| \leq s_{\nu,2^j} \quad \forall u \in I \quad \forall \nu \in \{0, \dots, 2^j\} \quad \forall j \in \{0, \dots, \tilde{k}\}.$$

Mit (4.79) folgert man daraus, dass

$$|\chi_{\nu,2^k}(u)| \leq \max\{s_{0,1}, s_{1,1}, \dots, s_{2^{\tilde{k}},2^{\tilde{k}}}, 1 + s\} =: m \equiv m(t^*) \quad (4.80)$$

für alle  $u \in I$ , für alle  $\nu \in \{0, \dots, 2^k\}$  und für alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt. Nun fixiert man  $M$  derart, dass  $M \geq m > s$  ist. Man beachte, dass  $\tilde{G}$  nun von  $t^*$  abhängt, dass aber alle bisherigen Aussagen gültig bleiben. Wegen  $M \geq m$  und (4.80) gilt

$$\chi_{\nu,2^k}(u) = y_{\nu-1,2^k}(u) + hG(\chi_{\nu-1,2^k}(u), u) \quad \forall \nu \in \{1, \dots, 2^k\} \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (4.81)$$

Da  $G$  zweimal stetig differenzierbar ist auf  $\mathbb{R} \times I$ , ist  $u \mapsto \chi_{\nu,2^k}(u)$  zweimal stetig differenzierbar auf  $I$  für alle  $\nu \in \{0, \dots, 2^k\}$  und für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Man erhält

$$\begin{aligned} D_1^2 \chi_{\nu,2^k}(u) &= D_1^2 \chi_{\nu-1,2^k}(u) (1 + h(D_1 G)(\chi_{\nu-1,2^k}(u), u)) \\ &\quad + (D_1 \chi_{\nu-1,2^k}(u), 1) \text{Hess}(G)(\chi_{\nu-1,2^k}(u), u) (D_1 \chi_{\nu-1,2^k}(u), 1)^\top, \end{aligned} \quad (4.82)$$

wobei  $\text{Hess}(G)$  die *Hesse-Matrix* von  $G$  bezeichnet. Offensichtlich ist  $u \mapsto \chi_{0,2^k}(u) = 0$  konvex auf  $I$ . Man nehme an, dass  $u \mapsto \chi_{\nu-1,2^k}(u)$  konvex auf  $I$  ist für ein  $\nu \geq 1$ . Dann gilt  $D_1^2 \chi_{\nu-1,2^k}(u) \geq 0$  für alle  $u \in \text{int}(I)$ , wobei  $\text{int}(I)$  für das Innere von  $I$  steht. Da  $G$  konvex ist, ist die Hesse-Matrix von  $G$  positiv semidefinit. Somit ist der zweite Summand der rechten Seite in (4.82) nichtnegativ. Wegen (4.80) gilt die Inklusion  $\chi_{\nu-1,2^k}(I) \subseteq [-M, M]$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Da  $D_1 G$  auf  $[-M, M] \times I$  stetig ist, existiert eine Konstante  $\tilde{M} > 0$  mit der Eigenschaft, dass

$$|(D_1 G)(\chi_{\nu-1,2^k}(u), u)| \leq \tilde{M} \quad \forall u \in I \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

ist. Es sei darauf hingewiesen, dass  $\widetilde{M}$  nicht von  $k$ , sondern lediglich von  $M$  und damit von  $t^*$  abhängt. Daher gibt es einen Index  $\bar{k} \in \mathbb{N}$  mit

$$1 + 2^{-k} t^* (D_1 G)(\chi_{\nu-1, 2^k}(u), u) \geq 0 \quad \forall u \in I \quad \forall \nu \in \{1, \dots, 2^k\} \quad \forall k \geq \bar{k}.$$

Unter Berücksichtigung von (4.82) folgert man, dass die Euler-Iterierten für hinreichend feine Gitter, d.h. für hinreichend große  $k$ , konvex sind. Mithilfe von (4.78) erhält man daraus abschließend

$$\begin{aligned} x(t^*, (1-p)u + pv) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \chi_{2^k, 2^k}((1-p)u + pv) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \chi_{2^{k+\bar{k}}, 2^{k+\bar{k}}}((1-p)u + pv) \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} ((1-p)\chi_{2^{k+\bar{k}}, 2^{k+\bar{k}}}(u) + p\chi_{2^{k+\bar{k}}, 2^{k+\bar{k}}}(v)) \\ &= (1-p)x(t^*, u) + px(t^*, v) \end{aligned}$$

für beliebige  $u, v \in I$  und für  $p \in (0, 1)$ , was aufgrund der Beliebigkeit von  $t^* \in [0, T]$  die Behauptung impliziert.  $\square$

**Lemma 4.18** *Es gelten die Bezeichnungen von Satz 4.13. Insbesondere seien die Bedingungen (4.54), (4.58) und (4.59) erfüllt. Falls  $T < \tau^*(2R)$  gilt, vgl. Annahme (4.55), existiert  $[0, T] \ni t \mapsto \Phi_1(t, 0, u) \in \mathbb{R}$  für alle  $u \in [2R' \wedge 0, 2R \vee 0]$  und löst die Riccati-Differentialgleichung*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Phi_1(t, 0, u) &= \frac{1}{2} \alpha^2 \Phi_1^2(t, 0, u) + (\varrho \alpha^2 u - \kappa) \Phi_1(t, 0, u) - \varrho \kappa u \\ &\quad + \frac{1}{2} \varrho^2 \alpha^2 u^2 + \psi^X(u) \end{aligned}$$

mit Anfangswertbedingung  $\Phi_1(0, 0, u) = 0$ .

BEWEIS. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien  $R' \leq 0$  und  $R \geq 0$  angenommen. Im Fall  $R = R' = 0$  sind  $[2R' \wedge 0, 2R \vee 0] = \{0\}$  und  $\Phi_1(t, 0, 0) = 0$ , infolgedessen die Behauptung trivial ist. Im Folgenden sei also  $(R', R) \neq (0, 0)$ . Wie in Lemma 4.15 definiert man  $\mathcal{S}_2 := \{v \in \mathbb{C} : (2R' \wedge 0) - \tilde{\varepsilon} < \operatorname{Re}(v) < (2R \vee 0) + \tilde{\varepsilon}\}$ . Die Funktion  $u \mapsto q(u) := \psi^X(u) + \frac{1}{2} \varrho^2 \alpha^2 u^2 - \kappa \varrho u$  ist auf  $\mathcal{S}_2 \cap \mathbb{R}$  aufgrund der Momentenbedingung (4.54) und wegen Lemma 4.7 definiert und hat genau zwei Nullstellen, nämlich  $u = 0$  bzw.  $u = 1$ . Man beachte diesbezüglich, dass  $D_1^2 q(u) > 0$  ist für alle  $u \in \mathcal{S}_2 \cap \mathbb{R}$  unter Berücksichtigung von Sato (1999), Lemma 26.4, und dass  $\psi^X(1) = \varrho(\kappa - \frac{1}{2} \varrho \alpha^2)$  gilt angesichts der Martingalbedingung (4.59). Es sei daran erinnert, dass  $\Delta(u)$  definiert ist durch  $\Delta(u) = \varrho \alpha^2 u - \kappa - \sqrt{\kappa^2 - 2\alpha^2 \psi^X(u)}$ . Man beobachtet

$$(\varrho \alpha^2 u - \kappa)^2 = \kappa^2 - 2\alpha^2 \psi^X(u) \Leftrightarrow q(u) = 0. \quad (4.83)$$

Daraus schließt man, dass  $\Delta$ , eingeschränkt auf  $I := [2R', 2R]$ , höchstens eine Nullstelle besitzt. Genauer gilt:

1. falls  $\kappa > \varrho\alpha^2$  ist, ist  $\Delta(u) < 0$  für alle  $u \in I$ ,
2. falls  $\kappa \leq \varrho\alpha^2$  ist, sind  $\Delta(1) = 0$ ,  $\Delta(u) < 0$  für alle  $u \in [2R', 1)$  und  $\Delta(u) > 0$  für alle  $u \in (1, 2R]$ , vorausgesetzt, dass  $R > \frac{1}{2}$  ist. Im Fall  $R \leq \frac{1}{2}$  gilt  $\Delta(u) \leq 0$  für alle  $u \in I$ .

Falls  $\varrho \leq 0$  gilt, ist  $\tau^*(u) = \infty$  für alle  $u \in I$ . Im Folgenden wird unterstellt, dass  $\varrho > 0$ ,  $R > \frac{1}{2}$  und  $\varrho\alpha^2 - \kappa \geq 0$  sind. Angesichts der Definition (4.55) von  $\tau^*(u)$  weiß man dann

$$\tau^*(u) = \begin{cases} \infty & , \text{ falls } 2R' \leq u \leq 1, \\ \frac{1}{\gamma(u)} \ln \left( \frac{\tilde{\Delta}(u)}{\Delta(u)} \right) & , \text{ falls } 1 < u \leq 2R, \end{cases} \quad (4.84)$$

wobei  $\tilde{\Delta}(u) = \varrho\alpha^2 u - \kappa + \sqrt{\kappa^2 - 2\alpha^2\psi^X(u)}$  ist. Als nächstes soll  $D_1\tau^*(u) \leq 0$  für alle  $u \in (1, 2R]$  gezeigt werden. Wegen  $\gamma(u) > 0$  gilt

$$\tilde{\Delta}(u) > \varrho\alpha^2 u - \kappa > \Delta(u) > 0 \quad \text{für alle } u \in (1, 2R]. \quad (4.85)$$

Für  $u \in (1, 2R]$  kann  $\tau^*(u)$  in der Gestalt

$$\tau^*(u) = G(A(u), B(u)) \quad (4.86)$$

geschrieben werden mit

$$G(x_1, x_2) := \frac{1}{\sqrt{x_2^2 - 2\alpha^2 x_1}} \ln \left( \frac{x_2 + \sqrt{x_2^2 - 2\alpha^2 x_1}}{x_2 - \sqrt{x_2^2 - 2\alpha^2 x_1}} \right), \quad (4.87)$$

$$A(u) := \psi^X(u) + \frac{1}{2}\varrho^2\alpha^2 u^2 - \varrho\kappa u \quad \text{und} \quad (4.88)$$

$$B(u) := \varrho\alpha^2 u - \kappa. \quad (4.89)$$

Falls  $0 < \sqrt{x_2^2 - 2\alpha^2 x_1} < x_2$  gilt, können die partiellen Ableitungen erster Ordnung von  $G$  wie folgt berechnet werden:

$$D_1 G(x_1, x_2) = -\frac{\alpha^2}{x_2^2 \sqrt{x_2^2 - 2\alpha^2 x_1}} (k(x_1, x_2))^{-2} \int_0^{k(x_1, x_2)} \left( \frac{2r}{1-r^2} \right)^2 dr, \quad (4.90)$$

$$D_2 G(x_1, x_2) = -\frac{2}{x_2^2 - 2\alpha^2 x_1} (k(x_1, x_2))^{-1} \int_0^{k(x_1, x_2)} \frac{1}{r^{-2} - 1} dr \quad (4.91)$$

mit

$$k(x_1, x_2) := \frac{\sqrt{x_2^2 - 2\alpha^2 x_1}}{x_2}.$$

Man beachte, dass in der Situation  $0 < k(x_1, x_2) < 1$  gilt. Mithilfe der Ungleichungskette (4.85) und  $B^2(u) - 2\alpha^2 A(u) = \gamma^2(u)$  sieht man  $(D_1 G)(A(u), B(u)) \leq 0$  und  $(D_2 G)(A(u), B(u)) \leq 0$  für  $u \in (1, 2R]$ , vgl. Černý & Kallsen (2006), Lemma 6.2. Unter Berücksichtigung der Martingalbedingung (4.59) bestimmt man

$$\psi^X(u) = \varrho\left(\kappa - \frac{1}{2}\varrho\alpha^2\right)u + \frac{1}{2}c^X(u^2 - u) + \int_{\mathbb{R}} (e^{ux} - ue^x + u - 1) F^X(dx), \quad (4.92)$$

$$D_1\psi^X(u) = \varrho\left(\kappa - \frac{1}{2}\varrho\alpha^2\right) + \frac{1}{2}c^X(2u - 1) + \int_{\mathbb{R}} (xe^{ux} - e^x + 1) F^X(dx). \quad (4.93)$$

Man definiere  $p(u, x) := xe^{ux} - e^x + 1$ . Wegen  $e^x - x - 1 \geq 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  ist  $p(1, x) \geq 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Aufgrund von  $D_1 p(u, x) = x^2 e^{ux} \geq 0$  für alle  $(u, x) \in I \times \mathbb{R}$  gilt somit  $p(u, x) \geq p(1, x) \geq 0$  für alle  $u \in (1, 2R]$  und für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Daraus folgt

$$D_1 A(u) = \varrho^2 \alpha^2 \left( u - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} c^X (2u - 1) + \int_{\mathbb{R}} p(u, x) F^X(dx) \geq 0$$

für alle  $u \in (1, 2R]$ . Des Weiteren ist  $D_1 B(u) = \varrho \alpha^2 - \kappa \geq 0$  für alle  $u \in (1, 2R]$ . Ergo gilt

$$D_1 \tau^*(u) = (D_1 G)(A(u), B(u)) D_1 A(u) + (D_2 G)(A(u), B(u)) D_1 B(u) \leq 0$$

für alle  $u \in (1, 2R]$ . Man hat also gezeigt, dass die Abbildung  $u \mapsto \tau^*(u)$  auf  $(1, 2R]$  monoton fällt. Mit anderen Worten gilt somit  $\tau^*(u) \geq \tau^*(2R)$  für alle  $u \in I$ . Daraus resultiert abschließend die Behauptung unter Berücksichtigung der Annahme  $T < \tau^*(2R)$  und unter Verwendung der Lemmata 6.1 und 6.2 in Černý & Kallsen (2006).  $\square$

Wie bereits die Lemmata 4.16 und 4.18 besitzen auch die beiden folgenden Hilfssätze dahingehend Bedeutung, dass die Lösungen  $\Phi_0$  und  $\Phi_1$  der Riccati-Differentialgleichungen den Regularitätsannahmen genügen. Im allgemeinen affinen stochastischen Volatilitätsmodell hat man gefordert, dass die Lösungen auf bestimmten Bereichen unter anderem stetig sind und sich analytisch fortsetzen lassen. In diesem Zusammenhang ist wesentlich, dass die Lösungen auf den entsprechenden Bereichen keine Singularitäten aufweisen.

**Lemma 4.19** Sei  $m \in \mathbb{N}^*$ . Dann gelten die folgenden Systeme von Ungleichungen:

$$2^{-(4m-2k)} \sum_{\nu=0}^{m-k+r} b_{\nu,k}^{(1)} \geq 2^{-2m} \sum_{\nu=0}^r b_{\nu,m}^{(1)}, \quad r = 0, \dots, m, \quad k = 0, \dots, m-1, \quad (4.94)$$

$$2^{-(4m-2k-1)} \sum_{\nu=0}^{m-k-1+r} b_{\nu,k}^{(2)} \geq 2^{-2m} \sum_{\nu=0}^r b_{\nu,m}^{(1)}, \quad r = 0, \dots, m, \quad k = 0, \dots, m-1, \quad (4.95)$$

$$2^{-(4m-2k)} \sum_{\nu=r}^{2m-k} b_{\nu,k}^{(1)} \geq 2^{-2m} \sum_{\nu=r+k-m}^m b_{\nu,m}^{(1)}, \quad r = 0, \dots, 2m-k \quad (4.96)$$

für  $k = m+1, \dots, 2m$ , und

$$2^{-(4m-2k-1)} \sum_{\nu=r}^{2m-k-1} b_{\nu,k}^{(2)} \geq 2^{-2m} \sum_{\nu=r+k+1-m}^m b_{\nu,m}^{(1)}, \quad r = 0, \dots, 2m-k-1 \quad (4.97)$$

für  $k = m, \dots, 2m-1$  mit Binomialkoeffizienten

$$b_{\nu,k}^{(1)} := \binom{4m-2k+1}{2\nu} \quad \text{und} \quad b_{\nu,k}^{(2)} := \binom{4m-2k}{2\nu+1}. \quad (4.98)$$

**BEWEIS.** Zunächst führt man für  $0 \leq k < m$  die folgenden Mengen ein:

$$I_1 := \{1, \dots, 2m-2k\}, \quad I_2 := \{2m-2k+1, \dots, 4m-2k\} \quad \text{und} \quad I := I_1 \cup I_2,$$

$J_0 := \{J \subseteq I : |J| \leq 2m - 2k + 2r\}$ ,  $J_1 := \{J \subseteq I_1\}$  und  $J_2 := \{J \subseteq I_2 : |J| \leq 2r\}$  für ein festes  $r \in \{0, \dots, m\}$ . Die Kardinalitäten der Mengen  $J_0$ ,  $J_1$  und  $J_2$  sind gegeben durch

$$\begin{aligned} |J_0| &= \sum_{\nu=0}^{2m-2k+2r} \binom{4m-2k}{\nu} = \sum_{\nu=0}^{m-k+r} b_{\nu,k}^{(1)}, \\ |J_1| &= 2^{2m-2k}, \\ |J_2| &= \sum_{\nu=0}^{2r} \binom{2m}{\nu} = \sum_{\nu=0}^r b_{\nu,m}^{(1)}. \end{aligned}$$

Die Abbildung  $\zeta_1 : J_1 \times J_2 \rightarrow J_0$ ,  $(A_1, A_2) \mapsto \zeta_1(A_1, A_2) := A_1 \dot{\cup} A_2$  ist injektiv, und es gilt

$$|\zeta_1(A_1, A_2)| = |A_1| + |A_2| \leq 2m - 2k + 2r,$$

d.h. es gilt  $\zeta_1(A_1, A_2) \in J_0$ . Somit ist  $|J_1 \times J_2| = |J_1||J_2| \leq |J_0|$ , und die Ungleichungen (4.94) sind gültig. In einem zweiten Schritt definiert man für  $m < k \leq 2m$  die Mengen

$$I_1 := \{1, \dots, 2k - 2m\}, \quad I_2 := \begin{cases} \{2k - 2m + 1, \dots, 2m\} & , \text{ falls } m < k < 2m, \\ \emptyset & , \text{ falls } k = 2m, \end{cases}$$

$$I := I_1 \cup I_2,$$

$$J_0 := \{J \subseteq I : 2r + 2k - 2m - 1 \leq |J| \leq 2m\}, \quad J_1 := \{J \subseteq I_1\} \text{ und}$$

$$J_2 := \{J \subseteq I_2 : (2r - 1) \vee 0 \leq |J| \leq 4m - 2k\}$$

für ein festes  $r \in \{0, \dots, 2m - k\}$ . Man beachte

$$\begin{aligned} |J_0| &= \sum_{\nu=2r+2k-2m-1}^{2m} \binom{2m}{\nu} = \sum_{\nu=r+k-m}^m b_{\nu,m}^{(1)}, \\ |J_1| &= 2^{2k-2m}, \\ |J_2| &= \sum_{\nu=(2r-1) \vee 0}^{4m-2k} \binom{4m-2k}{\nu} = \sum_{\nu=r}^{2m-k} b_{\nu,k}^{(1)}. \end{aligned}$$

Die Abbildung  $\zeta_2 : J_0 \rightarrow J_1 \times J_2$ ,  $A \mapsto \zeta_2(A) := (A \cap I_1, A \cap I_2)$  ist injektiv. Offensichtlich gilt  $A \cap I_1 \in J_1$ . Darüber hinaus beobachtet man

$$(2r - 1) \vee 0 \leq |A \cap I_2| \leq (2m) \wedge (4m - 2k) = 4m - 2k$$

aufgrund von  $m < k$ ,  $|A| \geq 2r + 2k - 2m - 1$  und  $|I_1| = 2k - 2m$ , d.h.  $\zeta_2(A) \in J_1 \times J_2$ . Folglich erhält man  $|J_0| \leq |J_1||J_2|$ , was äquivalent zu (4.96) ist. Unter Berücksichtigung von

$$\sum_{\nu=0}^{\mu} \binom{n}{2\nu} = \sum_{\nu=0}^{2\mu} \binom{n-1}{\nu} \quad \text{und} \quad \sum_{\nu=0}^{\mu} \binom{n}{2\nu+1} = \sum_{\nu=0}^{2\mu+1} \binom{n-1}{\nu},$$

$\mu, n \in \mathbb{N}$ , können die Ungleichungen (4.95) und (4.97) analog bewiesen werden.  $\square$

**Lemma 4.20** *Es gelten die Bezeichnungen und Annahmen von Satz 4.13. Zur Vereinfachung der Notation führt man die folgenden Größen ein:*

$$x_+ := \sqrt{\frac{1}{2}(a+b)} \quad \text{und} \quad x_- := \sqrt{\frac{1}{2}(a-b)} \quad (4.99)$$

mit

$$a := \left| 1 - \frac{2\alpha^2}{\kappa^2} \psi^X(r+is) \right| \quad \text{und} \quad b := 1 - \frac{2\alpha^2}{\kappa^2} \operatorname{Re}(\psi^X(r+is)), \quad (4.100)$$

für festes  $(r, s) \in ((2R' \wedge 0) - \tilde{\varepsilon}, (2R \vee 2) + \tilde{\varepsilon}) \times \mathbb{R}$ . Ferner definiert man  $c := \gamma(r)$ . Dann besitzt die Ungleichung

$$\kappa (\cosh(ct) - 1) (x_+ \sinh(\kappa x_+ t) + x_- \sin(\kappa x_- t)) \geq c \sinh(ct) (\cosh(\kappa x_+ t) - \cos(\kappa x_- t))$$

Gültigkeit für alle  $t \in [0, T]$ .

**BEWEIS.** Unter Verwendung der Potenzreihenentwicklungen der Funktionen  $x \mapsto \cosh(x)$ ,  $\sinh(x)$ ,  $\cos(x)$ ,  $\sin(x)$  erhält man

$$q(t) - \tilde{q}(t) = \sum_{j=2}^{\infty} \varrho_j \frac{t^{2j+1}}{(2j+1)!}, \quad (4.101)$$

wobei die Funktionen  $q$ ,  $\tilde{q}$  und die Koeffizienten  $\varrho_j$ ,  $j \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ , definiert sind durch

$$\begin{aligned} q(t) &:= \kappa (\cosh(ct) - 1) (x_+ \sinh(\kappa x_+ t) + x_- \sin(\kappa x_- t)), \\ \tilde{q}(t) &:= c \sinh(ct) (\cosh(\kappa x_+ t) - \cos(\kappa x_- t)) \end{aligned}$$

und

$$\varrho_j = \sum_{k=0}^{j-1} c^{2k+2} [(\kappa x_+)^{2j-2k} - (-1)^{j-k} (\kappa x_-)^{2j-2k}] \left[ \binom{2j+1}{2k+2} - \binom{2j+1}{2k+1} \right]. \quad (4.102)$$

Die Differenz  $q(t) - \tilde{q}(t)$  zerlegt man wie folgt:

$$\begin{aligned} q(t) - \tilde{q}(t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \varrho_{4m+1} \frac{t^{8m+3}}{(8m+3)!} + \sum_{m=0}^{\infty} \varrho_{4m+3} \frac{t^{8m+7}}{(8m+7)!} \\ &\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \varrho_{4m} \frac{t^{8m+1}}{(8m+1)!} + \sum_{m=0}^{\infty} \varrho_{4m+2} \frac{t^{8m+5}}{(8m+5)!}. \end{aligned}$$

Ziel ist es, die Nichtnegativität der Koeffizienten  $\varrho_{4m+1}$ ,  $\varrho_{4m+3}$ ,  $\varrho_{4m}$  und  $\varrho_{4m+2}$  zu zeigen. Mithilfe von

$$\begin{aligned} x_+^{2n} + x_-^{2n} &= \begin{cases} 2^{1-2m} \sum_{j=0}^m \binom{2m}{2j} a^{2m-2j} b^{2j} & , \text{ falls } n = 2m, \\ 2^{-2m} \sum_{j=0}^m \binom{2m+1}{2j} a^{2m-2j+1} b^{2j} & , \text{ falls } n = 2m+1, \end{cases} \\ x_+^{2n} - x_-^{2n} &= \begin{cases} 2^{1-2m} \sum_{j=0}^{m-1} \binom{2m}{2j+1} a^{2m-2j-1} b^{2j+1} & , \text{ falls } n = 2m, \\ 2^{-2m} \sum_{j=0}^m \binom{2m+1}{2j+1} a^{2m-2j} b^{2j+1} & , \text{ falls } n = 2m+1, \end{cases} \end{aligned}$$

$m \in \mathbb{N}^*$ , kann der Koeffizient  $\varrho_{4m+1}$  ausgedrückt werden in der Form

$$\begin{aligned} \varrho_{4m+1} &= \sum_{k=0}^m \alpha_k^{(1)} c^{4k+2} \kappa^{8m-4k+2} \psi_k^{(1)} + \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k^{(2)} c^{4k+4} \kappa^{8m-4k} \psi_k^{(2)} \\ &\quad - \sum_{k=m+1}^{2m} (-\alpha_k^{(1)}) c^{4k+2} \kappa^{8m-4k+2} \psi_k^{(1)} - \sum_{k=m}^{2m-1} (-\alpha_k^{(2)}) c^{4k+4} \kappa^{8m-4k} \psi_k^{(2)} \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \psi_k^{(1)} &= 2^{-(4m-2k)} \sum_{\nu=0}^{2m-k} \binom{4m-2k+1}{2\nu} a^{4m-2k-2\nu+1} b^{2\nu}, \\ \psi_k^{(2)} &= 2^{-(4m-2k-1)} \sum_{\nu=0}^{2m-k-1} \binom{4m-2k}{2\nu+1} a^{4m-2k-2\nu-1} b^{2\nu+1}, \\ \alpha_k^{(1)} &= \binom{8m+3}{4k+2} - \binom{8m+3}{4k+1} \quad \begin{cases} \geq 0 & , \text{ falls } 0 \leq k \leq m, \\ \leq 0 & , \text{ falls } m+1 \leq k \leq 2m, \end{cases} \\ \alpha_k^{(2)} &= \binom{8m+3}{4k+4} - \binom{8m+3}{4k+3} \quad \begin{cases} \geq 0 & , \text{ falls } 0 \leq k \leq m-1, \\ \leq 0 & , \text{ falls } m \leq k \leq 2m-1. \end{cases} \end{aligned}$$

Man beachte, dass

$$\sum_{k=0}^{2m} \alpha_k^{(1)} + \sum_{k=0}^{2m-1} \alpha_k^{(2)} = 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}^* \quad (4.103)$$

gilt. Darüber hinaus beobachtet man

$$0 < c^2 \leq \kappa^2 b \leq \kappa^2 a. \quad (4.104)$$

Die Ausdrücke mit positivem Vorzeichen in  $\varrho_{4m+1}$  sollen nun mittels der Ungleichungskette (4.104) wie folgt abgeschätzt werden:

$$c^{4k+2} \kappa^{8m-4k+2} \psi_k^{(1)} \geq (\kappa c)^{4m+2} \psi_m^{(1)}, \quad k = 0, \dots, m-1, \quad (4.105)$$

$$c^{4k+4} \kappa^{8m-4k} \psi_k^{(2)} \geq (\kappa c)^{4m+2} \psi_m^{(1)}, \quad k = 0, \dots, m-1. \quad (4.106)$$

Bezüglich der Terme mit negativem Vorzeichen in  $\varrho_{4m+1}$  soll die Gültigkeit der Ungleichungen

$$c^{4k+2} \kappa^{8m-4k+2} \psi_k^{(1)} \leq (\kappa c)^{4m+2} \psi_m^{(1)}, \quad k = m+1, \dots, 2m, \quad (4.107)$$

$$c^{4k+4} \kappa^{8m-4k} \psi_k^{(2)} \leq (\kappa c)^{4m+2} \psi_m^{(1)}, \quad k = m, \dots, 2m-1, \quad (4.108)$$

gezeigt werden. Hierbei ist die entscheidende Frage, welche Potenz der rechten Seite einer Ungleichung des Ungleichungssystems (4.105) - (4.108) durch welche Potenz der jeweils entsprechenden linken Seite abschätzbar ist. Man betrachte zum Beispiel einen Repräsentanten der Ungleichungen vom Typ (4.105). Mittels der Ungleichungskette (4.104) ist der Ausdruck  $(\kappa c)^{4m+2} a^{2m+1}$  abschätzbar durch die Terme

$$c^{4k+2} \kappa^{8m-4k+2} a^{4m-2k+1}, \dots, c^{4k+2} \kappa^{8m-4k+2} a^{2m+1} b^{2m-2k},$$

der Ausdruck  $(\kappa c)^{4m+2} a^{2m-1} b^2$  durch die Terme

$$c^{4k+2} \kappa^{8m-4k+2} a^{4m-2k+1}, \dots, c^{4k+2} \kappa^{8m-4k+2} a^{2m+1} b^{2m-2k}, c^{4k+2} \kappa^{8m-4k+2} a^{2m-1} b^{2m-2k+2}$$

und so weiter. Abschließend ist der Ausdruck  $(\kappa c)^{4m+2} ab^{2m}$  durch die Terme

$$c^{4k+2} \kappa^{8m-4k+2} a^{4m-2k+1}, \dots, c^{4k+2} \kappa^{8m-4k+2} a^{2m-1} b^{2m-2k+2}, \dots, ab^{4m-2k}$$

abschätzbar. Dies liefert die Menge der Bedingungen (4.94) - (4.97), vgl. Lemma 4.19, die garantieren, dass hinreichend viele Potenzen der richtigen Größenordnung für die Gültigkeit des Ungleichungssystems (4.105) - (4.108) vorhanden sind. Aber Lemma 4.19 besagt gerade, dass diese Bedingungen stets erfüllt sind. Unter Berücksichtigung von (4.103) folgt daraus die gewünschte Abschätzung

$$\varrho_{4m+1} \geq (\kappa c)^{4m+2} \psi_m^{(1)} \left( \sum_{k=0}^{2m} \alpha_k^{(1)} + \sum_{k=0}^{2m-1} \alpha_k^{(2)} \right) = 0$$

für alle  $m \in \mathbb{N}^*$ . Analog zeigt man  $\varrho_{4m} \geq 0$  für alle  $m \in \mathbb{N}^*$  und  $\varrho_{4m+2}, \varrho_{4m+3} \geq 0$  für alle  $m \in \mathbb{N}$ , was den Beweis beschließt.  $\square$

**BEWEIS VON SATZ 4.13.** Zu den Lévy-Khintchine-Tripeln  $(\beta_{(j)}, \gamma_{(j)}, \varphi_{(j)})$ , vgl. Proposition 4.11, gehören die kumulantenerzeugenden Funktionen  $\psi_j, j \in \{0, 1\}$ . Unter Berücksichtigung der (lokalen) Martingalbedingung (4.59) ergibt sich

$$\begin{aligned} \psi_0(u_1, u_2) &= \kappa \eta u_1, \\ \psi_1(u_1, u_2) &= \frac{1}{2} \alpha^2 u_1^2 + (\varrho \alpha^2 u_2 - \kappa) u_1 - \varrho \kappa u_2 + \frac{1}{2} \varrho^2 \alpha^2 u_2^2 + \psi^X(u_2), \end{aligned}$$

wobei  $\psi_0$  auf  $\mathbb{C}^2$  existiert und  $\psi_1$  auf  $\{u \in \mathbb{C}^2 : (2R' \wedge 0) - \tilde{\varepsilon} < \operatorname{Re}(u_2) < (2R \vee 2) + \tilde{\varepsilon}\}$ . Wie im Beweis von Satz 4.5 löst man in einem ersten Schritt das System verallgemeinerter Riccati-Differentialgleichungen (3.11) und (3.12), vgl. Proposition 3.3:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Phi_1(t, u_1, u_2) &= \frac{1}{2} \alpha^2 \Phi_1^2(t, u_1, u_2) + (\varrho \alpha^2 u_2 - \kappa) \Phi_1(t, u_1, u_2) - \varrho \kappa u_2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \varrho^2 \alpha^2 u_2^2 + \psi^X(u_2), \\ \frac{\partial}{\partial t} \Phi_0(t, u_1, u_2) &= \kappa \eta \Phi_1(t, u_1, u_2) \end{aligned}$$

mit Anfangswerten  $\Phi_1(0, u_1, u_2) = u_1$  und  $\Phi_0(0, u_1, u_2) = 0$ . Die erste Differentialgleichung ist eine klassische Riccati-Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten (in  $t$ ). Die zweite Differentialgleichung kann durch Integration der rechten Seite gelöst werden. Somit erhält man  $\Phi_0, \Phi_1 : [0, T] \times (\mathbb{C}_- \times i\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}_-$ , wie in den Gleichungen (4.46) und (4.47) behauptet.

Aufgrund von Annahme (4.55) folgt mit Lemma 4.18, dass  $t \mapsto \Phi_1(t, 0, u)$  auf  $[0, T]$  existiert für alle  $u \in [2R' \wedge 0, 2R \vee 0]$ . Darüber hinaus existiert dann auch

$$(t, u) \mapsto D_1 \Phi_1(t, 0, u) = \frac{1}{\alpha^2} (l^2(0, u) - \gamma^2(u)) \frac{2\gamma^2(u)te^{\gamma(u)t}}{((l(0, u) - \gamma(u))(1 - e^{\gamma(u)t}) + 2\gamma(u))^2}$$

auf  $[0, T] \times [2R' \wedge 0, 2R \vee 0]$ . Man beachte, dass

$$\text{sign}(D_1 \Phi_1(t, 0, u)) = \text{sign}(l^2(0, u) - \gamma^2(u))$$

nicht von  $t$  abhängt. Ergo ist die Abbildung  $t \mapsto \Phi_1(t, 0, u)$  für alle  $u \in [2R' \wedge 0, 2R \vee 0]$  auf  $[0, T]$  monoton. Daraus folgt

$$\Phi_1(T - t, 0, u) \leq \Phi_1(0, 0, u) \vee \Phi_1(T, 0, u) = \Phi_1(T, 0, u) \vee 0 \quad \forall t \in [0, T] \quad (4.109)$$

für ein beliebiges, aber festes  $u \in [2R' \wedge 0, 2R \vee 0]$ . Nun definiert man  $x(t, u) := \Phi_1(t, 0, u)$  und

$$G(x, u) := \frac{1}{2}\alpha^2 x^2 + (\varrho\alpha^2 u - \kappa)x - \varrho\kappa u + \frac{1}{2}\varrho^2\alpha^2 u^2 + \psi^X(u).$$

Die Funktion  $G$  ist zweimal stetig differenzierbar auf  $\mathbb{R} \times [2R' \wedge 0, 2R \vee 0]$  und konvex. Ferner gilt unter Berücksichtigung von Annahme (4.55) und Lemma 4.18, dass  $x(t, u) = \frac{N^x(t, u)}{D^x(t, u)}$  auf  $[0, T] \times [2R' \wedge 0, 2R \vee 0]$  existiert und das Anfangswertproblem

$$\frac{\partial}{\partial t} x(t, u) = G(x(t, u), u), \quad x(0, u) = 0$$

löst, wobei  $N^x(t, u)$  und  $D^x(t, u)$  von der Gestalt

$$N^x(t, u) = \Delta(u)\tilde{\Delta}(u) (e^{\gamma(u)t} - 1) \quad \text{und} \quad D^x(t, u) = \tilde{\Delta}(u) - \Delta(u)e^{\gamma(u)t}$$

sind. Wegen Annahme (4.55) ist  $t \leq T < \tau^*(2R) \leq \tau^*(u)$  für alle  $u \in [2R' \wedge 0, 2R \vee 0]$ , infolgedessen  $D^x(t, u) > 0$  für alle  $(t, u) \in [0, T] \times [2R' \wedge 0, 2R \vee 0]$  gilt. Da  $(t, u) \mapsto x(t, u)$  stetig ist, existiert eine Konstante  $k > 0$  mit

$$|x(t, u)| \leq k \quad \text{für alle } (t, u) \in [0, T] \times [2R' \wedge 0, 2R \vee 0].$$

Somit kann Lemma 4.16 angewendet werden, und  $u \mapsto x(T, u) = \Phi_1(T, 0, u)$  ist konvex auf dem kompakten Intervall  $[2R' \wedge 0, 2R \vee 0]$ . Angesichts von Ungleichung (4.109) folgert man daraus

$$\Phi_1(T - t, 0, u) \leq \Phi_1(T, 0, 2R' \wedge 0) \vee \Phi_1(T, 0, 2R \vee 0) \vee 0$$

für alle  $(t, u) \in [0, T] \times [2R' \wedge 0, 2R \vee 0]$  und damit

$$\begin{aligned} M_0 &:= \sup\{\Phi_1(T - t, 0, u) : u \in [2R' \wedge 0, 2R \vee 0], t \in [0, T]\} \\ &= \max\{\Phi_1(T, 0, 2R' \wedge 0), \Phi_1(T, 0, 2R \vee 0), 0\}. \end{aligned} \quad (4.110)$$

In einem nächsten Schritt definiert man die Menge  $\mathcal{S} := \{v \in \mathbb{C}^2 : \operatorname{Re}(v) \in \mathcal{V}_{\bar{\varepsilon}}(0)\}$ , wobei

$$\mathcal{V}_{\bar{\varepsilon}}(a) := (-\infty, M_0 + \bar{\varepsilon}) \times ((2R' \wedge 0) - \bar{\varepsilon}, (2R \vee a) + \bar{\varepsilon}),$$

$a \in \mathbb{R}_+$  und  $0 < \bar{\varepsilon} < \tilde{\varepsilon} < \varepsilon$  sind. Man untersucht den Nenner  $D^{\Phi_1}$  von  $\Phi_1$ , der von der Form

$$D^{\Phi_1}(t, u_1, u_2) := \alpha^2 ((l(u_1, u_2) - \gamma(u_2))(1 - e^{\gamma(u_2)t}) + 2\gamma(u_2)) \quad (4.111)$$

ist und auf  $[0, T] \times \mathcal{S}$  existiert. Falls  $\sinh(\frac{1}{2}\gamma(u_2)t) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\gamma(u_2)t \in \pi i\mathbb{Z}$  gilt, ist

$$\gamma(u_2) \cosh\left(\frac{1}{2}\gamma(u_2)t\right) \neq l(u_1, u_2) \sinh\left(\frac{1}{2}\gamma(u_2)t\right),$$

d.h.  $D^{\Phi_1}(t, u_1, u_2) \neq 0$  für alle  $(t, u_1, u_2) \in \{(s, v_1, v_2) \in [0, T] \times \mathcal{S} : \sinh(\frac{1}{2}\gamma(v_2)s) = 0\}$ . Somit ist die Kurve der Singularitäten von  $\Phi_1$ , das ist die Kurve der Nullstellen von  $D^{\Phi_1}$ , gegeben durch

$$u_1 = \frac{1}{\alpha^2} \gamma(u_2) \coth\left(\frac{1}{2}\gamma(u_2)t\right) + \frac{\kappa}{\alpha^2} - \varrho u_2. \quad (4.112)$$

Da die Imaginärteile der Elemente der Menge  $\mathcal{S}$  unbeschränkt sind, existieren immer Punkte  $(u_1, u_2) \in \mathcal{S}$  mit

$$\operatorname{Im}(u_1) = \operatorname{Im}\left(\frac{1}{\alpha^2} \gamma(u_2) \coth\left(\frac{1}{2}\gamma(u_2)t\right) + \frac{\kappa}{\alpha^2} - \varrho u_2\right).$$

Daher müssen Bedingungen, die Singularitäten von  $\Phi_1$  ausschließen sollen, auf den Realteil der Kurve der Singularitäten abzielen. Man definiert nun die Funktion  $\tilde{g}$  durch

$$\tilde{g}(r, s, t) := \frac{1}{\alpha^2} \operatorname{Re}\left[\gamma(r + is) \coth\left(\frac{1}{2}\gamma(r + is)t\right)\right] + \frac{\kappa}{\alpha^2} - \varrho r \quad (4.113)$$

auf  $((2R' \wedge 0) - \tilde{\varepsilon}, (2R \vee 2) + \tilde{\varepsilon}) \times \mathbb{R} \times [0, T]$ . In Anbetracht von  $u_2 = r + is$  ergibt sich

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left(\frac{1}{\alpha^2} \gamma(u_2) \coth\left(\frac{1}{2}\gamma(u_2)t\right) + \frac{\kappa}{\alpha^2} - \varrho u_2\right) &= \tilde{g}(r, s, t) \\ &= \frac{\kappa}{2\alpha^2} \frac{L_+(r + is) \sinh(\kappa L_+(r + is)t) + L_-(r + is) \sin(\kappa L_-(r + is)t)}{\sinh^2\left(\frac{1}{2}\kappa L_+(r + is)t\right) + \sin^2\left(\frac{1}{2}\kappa L_-(r + is)t\right)} + \frac{\kappa}{\alpha^2} - \varrho r \end{aligned}$$

mit

$$L_{\pm}(r + is) := \left[\frac{1}{2} \left( \left| 1 - \frac{2\alpha^2}{\kappa^2} \psi^X(r + is) \right| \pm \left( 1 - \frac{2\alpha^2}{\kappa^2} \operatorname{Re}(\psi^X(r + is)) \right) \right)\right]^{\frac{1}{2}},$$

$(r, s, t) \in ((2R' \wedge 0) - \tilde{\varepsilon}, (2R \vee 2) + \tilde{\varepsilon}) \times \mathbb{R} \times [0, T]$ , vgl. Remmert (1992), Abschnitt 0.1.3. Wegen  $L_+(r) = \frac{\gamma(r)}{\kappa}$  und  $L_-(r) = 0$  erhält man

$$\tilde{g}(r, 0, t) = \frac{1}{2\alpha^2} \frac{\gamma(r) \sinh(\gamma(r)t)}{\sinh^2\left(\frac{1}{2}\gamma(r)t\right)} + \frac{\kappa}{\alpha^2} - \varrho r.$$

Daraus folgert man mit Lemma 4.20, dass

$$\tilde{g}(r, s, t) \geq \tilde{g}(r, 0, t) \quad \forall (r, s, t) \in ((2R' \wedge 0) - \bar{\varepsilon}, (2R \vee 0) + \bar{\varepsilon}) \times \mathbb{R} \times [0, T]$$

gilt, wobei man

$$\begin{aligned} \sinh^2\left(\frac{1}{2}\gamma(r)t\right) &= \frac{1}{2}(\cosh(\gamma(r)t) - 1), \\ \sinh^2\left(\frac{1}{2}\kappa x_+ t\right) + \sin^2\left(\frac{1}{2}\kappa x_- t\right) &= \frac{1}{2}(\cosh(\kappa x_+ t) - \cos(\kappa x_- t)) \end{aligned}$$

verwendet hat mit  $x_+ := L_+(r + is)$  und  $x_- := L_-(r + is)$ . Aufgrund von

$$D_3 \tilde{g}(r, 0, t) = -\frac{\gamma^2(r)}{2\sigma^2 \sinh^2\left(\frac{1}{2}\gamma(r)t\right)} < 0$$

für alle  $(r, t) \in ((2R' \wedge 0) - \bar{\varepsilon}, (2R \vee 0) + \bar{\varepsilon}) \times [0, T]$  resultiert

$$\tilde{g}(r, s, t) \geq \tilde{g}(r, 0, T) \quad \forall (r, s, t) \in ((2R' \wedge 0) - \bar{\varepsilon}, (2R \vee 0) + \bar{\varepsilon}) \times \mathbb{R} \times [0, T].$$

Man beachte, dass  $\tilde{g}(r, 0, T) = g(r)$  ist, vgl. (4.64). Darüber hinaus berechnet man

$$(D_1^2 \tilde{g})(r, 0, T) = \frac{2q_1(r)(\gamma(r)T - \sinh(\gamma(r)T)) + 2q_2(r)q_3(r)}{4\gamma^3(r) \sinh^4\left(\frac{1}{2}\gamma(r)T\right)}$$

mit

$$\begin{aligned} q_1(r) &= \sinh^2\left(\frac{1}{2}\gamma(r)T\right) D_1^2(\psi^X(r)) \gamma^2(r) > 0, \\ q_2(r) &= \sinh^2\left(\frac{1}{2}\gamma(r)T\right) \sigma^2 (D_1 \psi^X(r))^2 \geq 0, \\ \tilde{q}_3(x) &= x \coth\left(\frac{x}{2}\right) (x - \sinh(x)) + x \cosh(x) - \sinh(x), \\ q_3(r) &= \tilde{q}_3(\gamma(r)T). \end{aligned}$$

Man beachte, dass  $\tilde{q}_3(x) \leq 0$  für alle  $x \geq 0$  dann und nur dann gilt, wenn

$$\tilde{q}_4(x) := x^2 - x \tanh\left(\frac{x}{2}\right) - \tanh\left(\frac{x}{2}\right) \sinh(x) \leq 0 \quad \forall x \geq 0$$

ist. Da  $\tilde{q}_4(0) = D_1 \tilde{q}_4(0) = 0$  und

$$D_1((\cosh(x) + 1)D_1 \tilde{q}_4(x)) = 2 \sinh(x)(x - \sinh(x)) \leq 0 \quad \forall x \geq 0$$

sind, gilt  $(D_1^2 \tilde{g})(r, 0, T) < 0$ , d.h.  $r \mapsto \tilde{g}(r, 0, T)$  ist konkav auf  $((2R' \wedge 0) - \bar{\varepsilon}, (2R \vee 0) + \bar{\varepsilon})$ .

Unter Berücksichtigung von  $\tilde{g}(r, 0, T) = g(r)$  impliziert das

$$\begin{aligned} \tilde{g}(r, s, t) &\geq \tilde{g}((2R' \wedge 0) - \bar{\varepsilon}, 0, T) \wedge \tilde{g}((2R \vee 0) + \bar{\varepsilon}, 0, T) \\ &= g((2R' \wedge 0) - \bar{\varepsilon}) \wedge g((2R \vee 0) + \bar{\varepsilon}) =: M_2 \end{aligned} \quad (4.114)$$

für alle  $(r, s, t) \in ((2R' \wedge 0) - \bar{\varepsilon}, (2R \vee 0) + \bar{\varepsilon}) \times \mathbb{R} \times [0, T]$ . Aus Annahme (4.57) folgt, dass man ein  $\bar{\varepsilon}$  finden kann mit  $\varepsilon > \tilde{\varepsilon} > \bar{\varepsilon} > 0$  derart, dass  $M_0 + \bar{\varepsilon} \leq M_2$  ist. Dies bedeutet, dass  $D^{\Phi_1}$  nullstellenfrei ist, d.h.  $(t, u_1, u_2) \mapsto \Phi_1(t, u_1, u_2)$  besitzt keine Singularitäten auf  $[0, T] \times \mathcal{S}$ . Folglich kann  $\mathbb{C}_- \times i\mathbb{R} \ni (u_1, u_2) \mapsto \Phi_1(t, u_1, u_2) \in \mathbb{C}_-$  unter Berücksichtigung von Lemma 4.15 für jedes  $t \in [0, T]$  auf  $\mathcal{S}$  analytisch fortgesetzt werden. Man beachte, dass  $D^{\Phi_1}(t, u_1, u_2) = 0$  hinreichend ist für

$$N^{\Phi_1}(t, u_1, u_2) := (\gamma^2(u_2) - l^2(u_1, u_2)) (1 - e^{\gamma(u_2)t}) + u_1 D^{\Phi_1}(t, u_1, u_2) \neq 0,$$

d.h.  $\Phi_1$  besitzt ausschließlich nicht-hebbare Singularitäten und Bedingung (4.57) schließt diese nicht-hebbaren Singularitäten aus. Aufgrund der Tatsache, dass der Nenner von  $\Phi_1$  nullstellenfrei ist, ist  $\Phi_1$  auf  $[0, T] \times \mathcal{S}$  stetig und nach  $u_1$  partiell differenzierbar. Die Ableitung  $D_2\Phi_1(t, u_1, u_2)$  ergibt sich, wie in Gleichung (4.68) behauptet. Da der Nenner von  $D_2\Phi_1(t, u_1, u_2)$  gerade  $(D^{\Phi_1}(t, u_1, u_2))^2$  entspricht, hat  $(t, u_1, u_2) \mapsto D_2\Phi_1(t, u_1, u_2)$  keine Singularitäten auf  $[0, T] \times \mathcal{S}$  und ist folglich dort stetig. Zudem ist  $t \mapsto \Phi_1(t, 0, z)$  auf  $[0, T]$  für alle  $z \in \mathcal{S}_f$  zweimal stetig differenzierbar.

Die Funktion  $\Phi_0$  kann in der Form

$$\Phi_0(t, u_1, u_2) = \frac{\kappa\eta}{\alpha^2} \left( 2 \int_0^t I_{1\varphi}(s, u_1, u_2) ds + (\gamma(u_2) - l(u_1, u_2))t \right) + \kappa\eta u_1 t$$

geschrieben werden mit

$$I_{1\varphi}(s, u_1, u_2) = \frac{\gamma(u_2) (l(u_1, u_2) - \gamma(u_2))}{(l(u_1, u_2) + \gamma(u_2)) (e^{-\gamma(u_2)s} - 1) + 2\gamma(u_2)}.$$

Es bezeichne  $D^{I_{1\varphi}}$  den Nenner von  $I_{1\varphi}$ . Es gilt  $D^{\Phi_1}(t, u_1, u_2) = 0 \Leftrightarrow D^{I_{1\varphi}}(t, u_1, u_2) = 0$ . In Anbetracht von Annahme (4.57) ist die Abbildung  $(s, u_1, u_2) \mapsto I_{1\varphi}(s, u_1, u_2)$  auf  $[0, t] \times \mathcal{S}$  stetig und die Abbildung  $(u_1, u_2) \mapsto I_{1\varphi}(s, u_1, u_2)$  auf  $\mathcal{S}$  analytisch für alle  $s \in [0, t]$ . Aus dem gleichen Grund sind die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} D_2 I_{1\varphi}(s, u_1, u_2) &= \frac{2\alpha^2 \gamma^2(u_2) e^{-\gamma(u_2)s}}{((l(u_1, u_2) + \gamma(u_2)) (e^{-\gamma(u_2)s} - 1) + 2\gamma(u_2))^2}, \\ D_3 I_{1\varphi}(s, u_1, u_2) &= \frac{N(s, u_1, u_2) + \tilde{N}(s, u_1, u_2)}{((l(u_1, u_2) + \gamma(u_2)) (e^{-\gamma(u_2)s} - 1) + 2\gamma(u_2))^2}, \end{aligned}$$

stetig auf  $[0, t] \times \mathcal{S}$ , wobei

$$\begin{aligned} N(s, u_1, u_2) &= D_1 \gamma(u_2) (\gamma^2(u_2) - l^2(u_1, u_2)) [(s\gamma(u_2) + 1)e^{-\gamma(u_2)s} - 1], \\ \tilde{N}(s, u_1, u_2) &= 2\gamma(u_2) (e^{-\gamma(u_2)s} - 1) (\lambda\sigma^2 \gamma(u_2) - D_1 \gamma(u_2) l(u_1, u_2)) \\ &\quad + 2\gamma^2(u_2) (\lambda\sigma^2 - D_1 \gamma(u_2)) \end{aligned}$$

sind. Mit Dieudonné (1972), Abschnitt 9.10, folgert man, dass die Abbildung

$$(u_1, u_2) \mapsto (l\varphi)(t, u_1, u_2) = \int_0^t I_{1\varphi}(s, u_1, u_2) ds$$

für alle  $t \in [0, T]$  auf  $\mathcal{S}$  analytisch ist. Somit kann die Abbildung

$$\mathbb{C}_- \times i\mathbb{R} \ni (u_1, u_2) \mapsto \Phi_0(t, u_1, u_2) \in \mathbb{C}_-$$

für alle  $t \in [0, T]$  auf  $\mathcal{S}$  analytisch fortgesetzt werden. Man beachte, dass  $D^{I_\varphi}(t, u_1, u_2) = 0$  hinreichend dafür ist, dass der Nenner  $N^{I_\varphi}(t, u_1, u_2) := \gamma(u_2)(l(u_1, u_2) - \gamma(u_2))$  nicht verschwindet, d.h. Annahme (4.57) schließt hier ebenfalls nur nicht-hebbare Singularitäten von  $I_\varphi$  aus, andere Singularitäten existieren nicht.

Da  $I_\varphi$  keine Singularitäten auf  $[0, T] \times \mathcal{S}$  besitzt, resultiert aus dem Holomorphiesatz, vgl. Königsberger (1997), Abschnitt 8.4, dass die Abbildung

$$B(u, r) \ni u_1 \mapsto \int_0^t I_\varphi(s, u_1, u_2) ds \in \mathbb{C}$$

für alle  $(t, u_2) \in [0, T] \times \{v \in \mathbb{C} : (2R' \wedge 0) - \bar{\varepsilon} < \operatorname{Re}(v) < (2R \vee 0) + \bar{\varepsilon}\}$  analytisch ist und dass

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u_1} \int_0^t I_\varphi(s, u_1, u_2) ds &= \int_0^t D_2 I_\varphi(s, u_1, u_2) ds \\ &= \int_0^t \frac{2\alpha^2 \gamma^2(u_2) e^{-\gamma(u_2)s}}{[(l(u_1, u_2) + \gamma(u_2))(e^{-\gamma(u_2)s} - 1) + 2\gamma(u_2)]^2} ds \end{aligned}$$

gilt für ein  $r > 0$  mit  $\overline{B(u, r)} \subset \{v \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(v) < M_0 + \bar{\varepsilon}\}$  und festem  $u \in \{v \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(v) < M_0 + \bar{\varepsilon}\}$ , analog zum Beweis von Satz 4.5. Dabei gibt  $B(u, r)$  eine offene Kugel mit Zentrum  $u$  und Radius  $r$  an, und  $\overline{B(u, r)}$  bezeichnet deren Abschluss. Somit erhält man

$$\begin{aligned} D_2 \Phi_0(t, u_1, u_2) &= \kappa \eta \gamma^2(u_2) \int_0^t \frac{ds}{[\gamma(u_2) \cosh(\frac{1}{2}\gamma(u_2)s) - l(u_1, u_2) \sinh(\frac{1}{2}\gamma(u_2)s)]^2} \\ &= \frac{2\kappa \eta \sinh(\frac{1}{2}\gamma(u_2)t)}{\gamma(u_2) \cosh(\frac{1}{2}\gamma(u_2)t) - l(u_1, u_2) \sinh(\frac{1}{2}\gamma(u_2)t)}. \end{aligned}$$

Wegen  $D_2 \Phi_0(t, u_1, u_2) = 0 \Leftrightarrow D^{\Phi_1}(t, u_1, u_2) = 0$  impliziert Annahme (4.57) die Stetigkeit der Abbildung  $(t, u_1, u_2) \mapsto D_2 \Phi_0(t, u_1, u_2)$  auf  $[0, T] \times \mathcal{S}$ .

Die Funktion  $\Phi_0$  kann geschrieben werden in der Gestalt

$$\Phi_0(t, u_1, u_2) = \kappa \eta \int_0^T J(s, t, u_1, u_2) ds$$

mit  $J(s, t, u_1, u_2) := 1_{[0, t]}(s) \Phi_1(s, u_1, u_2)$ . Da  $\Phi_1$  auf  $[0, T] \times \mathcal{S}$  stetig ist, ist die Abbildung  $(t, u_1, u_2) \mapsto J(s, t, u_1, u_2)$  für  $\lambda$ -f.a.  $s \in [0, T]$  stetig in  $(t^*, u^*, v^*)$ , d.h.

$$\int_0^t J(s, t^*, u^*, v^*) ds = \int_0^t \lim_{n \rightarrow \infty} J(s, t_n, u_n, v_n) ds \quad (4.115)$$

für alle Folgen  $((t_n, u_n, v_n))_{n \in \mathbb{N}} \subset [0, T] \times \mathcal{S}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} (t_n, u_n, v_n) = (t^*, u^*, v^*)$  für einen beliebigen Punkt  $(t^*, u^*, v^*) \in [0, T] \times \mathcal{S}$ . Wegen  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n, v_n) = (u^*, v^*)$  existieren Konstanten  $r_1, r_2 > 0$  und ein Index  $n^* \in \mathbb{N}$  derart, dass

$$(u_n, v_n) \in \overline{B(u^*, r_1)} \times \overline{B(v^*, r_2)} \subset \mathcal{S} \quad \forall n > n^*$$

gilt. Unter erneuter Berücksichtigung der Stetigkeit von  $\Phi_1$  auf  $[0, T] \times \mathcal{S}$  resultiert daraus, dass  $|J(s, t_n, u_n, v_n)|$  beschränkt ist für alle  $s \in [0, T]$  und für all  $n > n^*$ . Mit majorisierter Konvergenz und (4.115) erhält man somit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_0(t_n, u_n, v_n) = \Phi_0(t^*, u^*, v^*)$ , d.h.  $\Phi_0$  ist ebenfalls stetig auf  $[0, T] \times \mathcal{S}$ .

Insgesamt hat man also gezeigt, dass Annahme 3.6 erfüllt ist. Angesichts von  $\varphi_{(0)} = 0$  und

$$\int_{|x|>1} e^{u_2 x} F^X(dx) < \infty \quad \forall u_2 \in ((2R' \wedge 0) - \bar{\varepsilon}, (2R \vee 2) + \bar{\varepsilon}),$$

vgl. Voraussetzung (4.54), besitzt Annahme 3.8 ebenfalls Gültigkeit. Die (lokale) Martingalbedingung, vgl. Annahme 3.11, gilt aufgrund von Voraussetzung (4.59). Bedingung (4.60) schließt den degenerierten Fall  $Z_t = 0$   $P$ -f.s. für alle  $t \in [0, T]$  aus, vgl. Annahme 3.14. Unter Verwendung von Proposition 4.11 folgt die Behauptung abschließend aus den Sätzen 3.17 und 3.18.  $\square$

### 4.3 Numerische Illustration

In diesem abschließenden Abschnitt sollen zwei konkrete Beispiele betrachtet werden, die die Anwendbarkeit der Sätze 3.17 und 3.18 im Allgemeinen und der Sätze 4.5 und 4.13 im Speziellen im Hinblick auf das Problem des varianz-optimalen Hedgens dokumentieren sollen. In beiden Beispielen ist eine europäische Call-Option mit Basispreis  $K = 100$  und Fälligkeit  $T = 0.25$  Jahren Gegenstand der Untersuchung. Alle folgenden Parameter sind per annum angegeben. Die Auszahlung der Call-Option besitzt die folgende Integraldarstellung:

$$H = f(S_T) = \max\{S_T - K, 0\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{R+i\mathbb{R}} S_T^z \frac{K^{1-z}}{z(z-1)} dz, \quad (4.116)$$

wobei  $R > 1$  beliebig gewählt werden kann, vgl. z.B. Lemma 4.1 in Hubalek et al. (2006). In den folgenden Beispielen 4.21 und 4.22 gelte  $R = R' = 1.1$ . Es werden jeweils vier Modelle miteinander verglichen: zwei stochastische Volatilitätsmodelle auf der Grundlage zeittransformierter Lévy-Prozesse (das *NIG-Gamma-OU-Modell* und das *NIG-CIR-Modell*, beide *ohne Leverage*), das *exponentielle NIG-Lévy-Modell* und das *Black-Scholes-Modell*.

1. Das *NIG-Gamma-OU-Modell* ohne Leverage ist gegeben durch

$$S_t = S_0 e^{X_{Y_t}}, \quad Y_t = \int_0^t y_{s-} ds, \quad dy_t = -\kappa y_{t-} dt + dz_t, \quad (4.117)$$

wobei  $X$  ein normal-invers-Gaußscher Prozess (NIG-Prozess) mit Parametern  $\tilde{\alpha} > 0$ ,  $\tilde{\beta} \in (-\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha})$ ,  $\tilde{\delta} > 0$  und  $\tilde{\mu} \in \mathbb{R}$  ist und  $y$  ein Gamma-OU-Prozess. Die stationäre Verteilung von  $y$  ist eine Gamma-Verteilung mit Parametern  $a, b > 0$ . Man beachte, dass die Parameter  $\mu$  und  $\eta$  des allgemeinen integrierten OU-Zeittransformationsmodells (1.97) - (1.99) hier Null sind. Die Nichtberücksichtigung des Leverage-Effekts kommt darin zum Ausdruck, dass der Lévy-Prozess  $\tilde{X}$  in (1.97) hier gerade der Nullprozess ist. Die kumulantenerzeugende Funktion des NIG-Prozesses  $X$  liegt in geschlossener Form vor, wobei der Parameter  $\tilde{\mu}$  derart festgelegt ist, dass  $\psi^X(1) = 0$  gilt, d.h.

$$\tilde{\mu} = \tilde{\delta} \left( \sqrt{\tilde{\alpha}^2 - (\tilde{\beta} + 1)^2} - \sqrt{\tilde{\alpha}^2 - \tilde{\beta}^2} \right)$$

und

$$\psi^X(u) = \tilde{\delta} \left( \left( \sqrt{\tilde{\alpha}^2 - (\tilde{\beta} + 1)^2} - \sqrt{\tilde{\alpha}^2 - \tilde{\beta}^2} \right) u + \sqrt{\tilde{\alpha}^2 - \tilde{\beta}^2} - \sqrt{\tilde{\alpha}^2 - (\tilde{\beta} + u)^2} \right),$$

vgl. Raible (2000), die Anhänge A.1 & A.2. Gemäß Richter (1966), Abschnitt V.6(c), besitzt der NIG-Prozess  $X$  alle exponentiellen Momente der Größenordnung zwischen  $-\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}$  und  $\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}$ . Die kumulantenerzeugende Funktion des Subordinators  $z$ , der den quadrierten Volatilitätsprozess  $y$  treibt, ist von der Form

$$\psi^z(u) = \frac{\kappa a u}{b - u},$$

vgl. Schoutens (2003), Abschnitt 5.5.1. Das NIG-Gamma-OU-Modell (4.117) gehört zu der Klasse der integrierten OU-Zeittransformationsmodelle. Die affine Charakteristik  $\partial(y, X_Y)$  wird vollständig beschrieben durch

$$\begin{aligned} \beta_{(0)} &= \begin{pmatrix} b^z(\tilde{h}) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_{(0)}(G) = \int_0^\infty 1_G(s, 0) F^z(ds), \\ \beta_{(1)} &= \begin{pmatrix} -\kappa \\ b^X(\tilde{h}) \end{pmatrix}, \quad \gamma_{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_{(1)}(G) = \int_{-\infty}^\infty 1_G(0, x) F^X(dx) \end{aligned}$$

für alle  $G \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$  mit  $0 \notin G$ , vgl. Proposition 4.3. Bezüglich der Abschneidefunktion  $\tilde{h}(x) = x 1_{\{|x| \leq 1\}}$  ist das Lévy-Khintchine-Tripel  $\partial X = (b^X(\tilde{h}), 0, F^X)$  des NIG-Prozesses  $X$  gegeben durch

$$\begin{aligned} b^X(\tilde{h}) &= \tilde{\delta} \left( \sqrt{\tilde{\alpha}^2 - (\tilde{\beta} + 1)^2} - \sqrt{\tilde{\alpha}^2 - \tilde{\beta}^2} \right) + \frac{2\tilde{\alpha}\tilde{\delta}}{\pi} \int_0^1 \sinh(\tilde{\beta}x) K_1(\tilde{\alpha}|x|) dx, \\ \frac{F^X(dx)}{dx} &= \frac{\tilde{\alpha}\tilde{\delta}}{\pi} \frac{K_1(\tilde{\alpha}|x|) e^{\tilde{\beta}x}}{|x|}, \end{aligned}$$

wobei  $K_1(u) = \int_0^\infty \cosh(t) e^{-u \cosh(t)} dt$ ,  $\operatorname{Re}(u) > 0$ , die modifizierte Bessel-Funktion dritter Art mit Parameter 1 bezeichnet, vgl. Barndorff-Nielsen (1998). Im Hinblick auf die Integraldarstellung der modifizierten Bessel-Funktion dritter Art sei auf Watson

(1966), Kapitel 6, verwiesen. Unter Verwendung der gleichen Abschneidefunktion  $\tilde{h}$  besitzt der Subordinator  $z$  das Lévy-Khintchine-Tripel  $\partial z = (b^z(\tilde{h}), 0, F^z)$ , wobei

$$b^z(\tilde{h}) = \frac{\kappa a}{b} (1 - e^{-b(1+b)}) \quad \text{und} \quad \frac{F^z(dx)}{dx} = \kappa a b e^{-bx} 1_{\{x>0\}}$$

sind, vgl. Schoutens (2003), Abschnitt 5.5.1. Neben den kumulantenerzeugenden Funktionen

$$\psi_0(u_1, u_2) = \psi^z(u_1) \quad \text{und} \quad \psi_1(u_1, u_2) = -\kappa u_1 + \psi^X(u_2)$$

sind zur Auswertung der varianz-optimalen Hedgingstrategie und des minimalen erwarteten quadratischen Hedgefehlers die Lösungen der (verallgemeinerten) Riccati-Differentialgleichungen (3.11) und (3.12) wesentlich:

$$\begin{aligned} \Phi_1(t, u_1, u_2) &= e^{-\kappa t} u_1 + \frac{1}{\kappa} (1 - e^{-\kappa t}) \psi^X(u_2), \\ \Phi_0(t, u_1, u_2) &= \int_0^t \psi^z(\Phi_1(s, u_1, u_2)) ds. \end{aligned}$$

Man beachte, dass  $\Phi_0(t, u_1, u_2)$  in geschlossener Form vorliegt, vgl. Gleichung (4.28) in Bemerkung 4.8 und Gleichung (4.10). Die Voraussetzungen aus Satz 4.5 lesen sich im vorliegenden NIG-Gamma-OU-Modell ohne Leverage wie folgt: Es gebe Zahlen  $\varepsilon$  und  $\tilde{\varepsilon}$  mit  $0 < \tilde{\varepsilon} < \varepsilon$ , so dass

$$-\tilde{\alpha} - \tilde{\beta} < (2R' \wedge 0) - \varepsilon \quad \text{und} \quad (2R \vee 2) + \varepsilon < \tilde{\alpha} - \tilde{\beta}, \quad (4.118)$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\kappa} (1 - e^{-\kappa T}) \left[ \max \{ \psi^X(2R \vee 0), \psi^X(2R' \wedge 0) \} \right. \\ &\left. + \max \{ \psi^X((2R \vee 0) + \tilde{\varepsilon}), \psi^X((2R' \wedge 0) - \tilde{\varepsilon}) \} \right] + \varepsilon < b \end{aligned} \quad (4.119)$$

für  $R' \leq R$  gelten. In der Situation einer zu hedgenden europäischen Call-Option bedeutet dies hier: Es gebe Zahlen  $\varepsilon$  und  $\tilde{\varepsilon}$  mit  $0 < \tilde{\varepsilon} < \varepsilon$ , so dass

$$-\tilde{\alpha} - \tilde{\beta} < -\varepsilon \quad \text{und} \quad 2R + \varepsilon < \tilde{\alpha} - \tilde{\beta}, \quad (4.120)$$

$$\frac{1}{\kappa} (1 - e^{-\kappa T}) \left[ \psi^X(2R) + \max \{ \psi^X(2R + \tilde{\varepsilon}), \psi^X(-\tilde{\varepsilon}) \} \right] + \varepsilon < b \quad (4.121)$$

für  $R = R' > 1$  gelten. Die Martingalbedingung (4.19) ist aufgrund der obigen Festlegung des Parameters  $\tilde{\mu}$  erfüllt (man beachte, dass  $\mu = 0$  und  $\tilde{X}$  der Nullprozess sind). Wegen der strengen Konvexität von  $\psi^X$  auf  $(-\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}, \tilde{\alpha} - \tilde{\beta})$ , man beachte  $\tilde{\delta} > 0$ , und aufgrund von  $\psi^X(0) = \psi^X(1) = 0$  impliziert Bedingung (4.120), dass  $\psi^X(2) \neq 0$  gilt, infolgedessen Bedingung (4.20), die den degenerierten Fall ausschließt, erfüllt ist. Die Bedingung (4.120) korrespondiert zur Integrierbarkeitsvoraussetzung (4.16), man vergleiche hierzu Raible (2000), die Anhänge A.1 und A.2, und Richter (1966), Abschnitt V.6(c). Die Bedingung (4.17) ist trivialerweise erfüllt, da aufgrund des nicht berücksichtigten Leverage-Effekts  $\tilde{X}_t = 0$  für alle  $t \in [0, T]$  ist. Die Bedingung (4.121) entspricht der Ungleichung (4.26) in Bemerkung (4.8), die hier äquivalent ist zur Integrierbarkeitsbedingung (4.18).

2. Das *NIG-CIR-Modell* ohne Leverage ist definiert durch

$$S_t = S_0 e^{X_{Y_t}}, \quad Y_t = \int_0^t y_s ds, \quad dy_t = \kappa(\eta - y_{t-})dt + \alpha\sqrt{y_t}dW_t, \quad (4.122)$$

wobei  $W$  für einen Standard-Wiener-Prozess steht und  $X$  einen NIG-Prozess bezeichnet mit Parametern  $\tilde{\alpha} > 0$ ,  $\tilde{\beta} \in (-\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha})$ ,  $\tilde{\delta} > 0$  und  $\tilde{\mu} \in \mathbb{R}$ . Man beachte, dass die Parameter  $\varrho$ ,  $\mu$  und  $\eta$  des allgemeinen integrierten CIR-Zeittransformationsmodells (1.91) - (1.93) hier Null sind. Wie im NIG-Gamma-OU-Modell wird der Parameter  $\tilde{\mu}$  so gewählt, dass  $\psi^X(1) = 0$  gilt. Die stationäre Verteilung des CIR-Prozesses ist ebenfalls eine Gamma-Verteilung mit Parametern  $\tilde{a} = \frac{2\kappa\eta}{\alpha^2}$  und  $\tilde{b} = \frac{2\kappa}{\alpha^2}$ , d.h.  $y_t$  besitzt für jedes  $t \geq 0$  die charakteristische Funktion

$$E_P [e^{iuy_t}] = \left(1 - \frac{iu}{\tilde{b}}\right)^{-\tilde{a}},$$

vgl. Cont & Tankov (2004), Abschnitt 15.1.2. Das NIG-CIR-Modell (4.122) ist ein Spezialfall des integrierten CIR-Zeittransformationsmodells:

$$(\beta_{(0)}, \gamma_{(0)}, \varphi_{(0)}) = \left( \begin{pmatrix} \kappa\eta \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, 0 \right),$$

$$\beta_{(1)} = \begin{pmatrix} -\kappa \\ b^X(\tilde{h}) \end{pmatrix}, \quad \gamma_{(1)} = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_{(1)}(G) = \int_{-\infty}^{\infty} 1_G(0, x) F^X(dx)$$

für alle  $G \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$  mit  $0 \notin G$ , vgl. Proposition 4.11. Mit  $\varrho = 0$  liefert Satz 4.13 alle relevanten Informationen zur Berechnung der varianz-optimalen Hedgingstrategie und des minimalen erwarteten quadratischen Hedgefehlers. Die Voraussetzungen aus Satz 4.13 sind im vorliegenden NIG-CIR-Modell ohne Leverage von der folgenden Gestalt: Es gebe Zahlen  $\varepsilon$ ,  $\tilde{\varepsilon}$  und  $\bar{\varepsilon}$  mit  $\varepsilon > \tilde{\varepsilon} > \bar{\varepsilon} > 0$  derart, dass die Bedingungen

$$-\tilde{\alpha} - \tilde{\beta} < (2R' \wedge 0) - \varepsilon \quad \text{und} \quad (2R \vee 2) + \varepsilon < \tilde{\alpha} - \tilde{\beta}, \quad (4.123)$$

$$\begin{aligned} & \max \{ \Phi_1(T, 0, 2R' \wedge 0), \Phi_1(T, 0, 2R \vee 0), 0 \} \\ & < \min \{ g((2R' \wedge 0) - \bar{\varepsilon}), g((2R \vee 0) + \bar{\varepsilon}) \}, \end{aligned} \quad (4.124)$$

$$\max \{ \psi^X((2R' \wedge 0) - \tilde{\varepsilon}), \psi^X((2R \vee 2) + \tilde{\varepsilon}) \} < \frac{\kappa^2}{2\alpha^2} \quad (4.125)$$

für  $R' \leq R$  gelten, wobei  $\Phi_1(T, 0, r)$  von der Gestalt

$$\Phi_1(T, 0, r) = \frac{2\psi^X(r) (1 - e^{\gamma(r)T})}{\kappa(1 - e^{\gamma(r)T}) - \gamma(r)(1 + e^{\gamma(r)T})}$$

ist für alle  $r \in \mathbb{R}$  mit  $(2R' \wedge 0) - \bar{\varepsilon} < r < (2R \vee 0) + \bar{\varepsilon}$  und  $g(r)$  definiert ist durch

$$g(r) := \frac{1}{\alpha^2} \left( \gamma(r) \coth \left( \frac{1}{2} \gamma(r) T \right) + \kappa \right)$$

für alle  $r \in \mathbb{R}$  mit  $(2R' \wedge 0) - \tilde{\varepsilon} < r < (2R \vee 2) + \tilde{\varepsilon}$ , vgl. (4.64) mit  $\varrho = 0$ . Dabei ist die Funktion  $\gamma$  definiert wie in Gleichung (4.51). In der Situation einer zu hedgenden europäischen Call-Option vereinfachen sich die Voraussetzungen (4.123) - (4.125) wie folgt: Es gebe Zahlen  $\varepsilon$ ,  $\tilde{\varepsilon}$  und  $\bar{\varepsilon}$  mit  $\varepsilon > \tilde{\varepsilon} > \bar{\varepsilon} > 0$  derart, dass die Bedingungen

$$-\tilde{\alpha} - \tilde{\beta} < -\varepsilon \quad \text{und} \quad 2R + \varepsilon < \tilde{\alpha} - \tilde{\beta}, \quad (4.126)$$

$$\Phi_1(T, 0, 2R) < \min \{g(-\bar{\varepsilon}), g(2R + \bar{\varepsilon})\}, \quad (4.127)$$

$$\max \{\psi^X(-\tilde{\varepsilon}), \psi^X(2R + \tilde{\varepsilon})\} < \frac{\kappa^2}{2\alpha^2} \quad (4.128)$$

für  $R = R' > 1$  gelten. Der Parameter  $\tilde{\mu}$  ist gerade so festgelegt worden, dass die Martingalbedingung (4.59) erfüllt ist (man beachte dabei  $\mu = \varrho = 0$ ). Und wie in (1) folgert man hier  $\psi^X(2) \neq 0$  mithilfe von Bedingung (4.126), infolgedessen Bedingung (4.60), die den degenerierten Fall ausschließt, Gültigkeit besitzt. Es sei noch darauf hingewiesen, dass die Handelszeitrestriktion (4.55) trivialerweise erfüllt ist, da der Leverage-Parameter  $\varrho = 0$  ist, vgl. den Beweis von Lemma 4.18.

3. Das *exponentielle NIG-Lévy-Modell* ist gegeben durch

$$S_t = S_0 e^{X_t}, \quad (4.129)$$

wobei  $X$  ein NIG-Prozess ist mit Parametern  $\tilde{\alpha} > 0$ ,  $\tilde{\beta} \in (-\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha})$ ,  $\tilde{\delta} > 0$  und  $\tilde{\mu} \in \mathbb{R}$ . Wie in den obigen Modellen fixiert man  $\tilde{\mu}$  derart, dass  $\psi^X(1) = 0$  gilt. Das exponentielle NIG-Lévy-Modell (4.129) ist gemäß Beispiel 3.2 ein affines Modell:

$$\beta_{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ b^X(\tilde{h}) \end{pmatrix}, \quad \gamma_{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_{(0)}(G) = \int_{-\infty}^{\infty} 1_G(0, x) F^X(dx),$$

$$(\beta_{(1)}, \gamma_{(1)}, \varphi_{(1)}) = (0, 0, 0)$$

für alle  $G \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$  mit  $0 \notin G$ . Wie in Bemerkung 3.19 erwähnt, liefert hier Satz 1.21 als Spezialfall der Sätze 3.17 und 3.18 die Lösung des Problems varianz-optimalen Hedgens. Dabei muss lediglich die Voraussetzung überprüft werden, dass ein  $\varepsilon > 0$  existiert mit

$$-\tilde{\alpha} - \tilde{\beta} < (2R' \wedge 0) - \varepsilon \quad \text{und} \quad (2R \vee 2) + \varepsilon < \tilde{\alpha} - \tilde{\beta} \quad (4.130)$$

für  $R' \leq R$ . In der Situation einer zu hedgenden europäischen Call-Option ist hier also

$$-\tilde{\alpha} - \tilde{\beta} < -\varepsilon \quad \text{und} \quad 2R + \varepsilon < \tilde{\alpha} - \tilde{\beta} \quad (4.131)$$

für ein  $\varepsilon > 0$  für  $R = R' > 1$  zu zeigen.

4. Das klassische *Black-Scholes-Modell*

$$S_t = S_0 \mathcal{E}(\sigma W)_t = S_0 e^{X_t} \quad (4.132)$$

mit  $X_t = -\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W_t$  und einem Standard-Wiener-Prozess  $W$  ist ebenfalls ein Spezialfall von Beispiel 3.2:

$$(\beta_{(0)}, \gamma_{(0)}, \varphi_{(0)}) = \left( \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}\sigma^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix}, 0 \right), \quad (\beta_{(1)}, \gamma_{(1)}, \varphi_{(1)}) = (0, 0, 0),$$

infolgedessen auch hier Satz 1.21 die Lösung des Problems varianz-optimalen Hedgens impliziert. Dabei ist die kumulantenerzeugende Funktion von  $X$  von der Form

$$\psi^X(u) = \frac{1}{2}\sigma^2(u^2 - u).$$

Wegen  $\psi^X(1) = 0$  liegt der Martingalfall vor. Da  $\psi^X$  eine ganze Funktion ist, d.h. da alle exponentiellen Momente des Prozesses  $X$  existieren, sind hier keine weiteren Voraussetzungen zu überprüfen.

In einem ersten Beispiel werden die Modelle unter dem physikalischen Maß betrachtet. Beispielfhaft wird ein hypothetischer Parametersatz für das NIG-Gamma-OU-Modell vorgegeben. Passend dazu wird dasjenige NIG-CIR-Modell gewählt, bei welchem der NIG-Prozess und die Mean-Reversion-Rate mit denen im NIG-Gamma-OU-Modell übereinstimmen und die stationäre Verteilung des CIR-Prozesses gleich der stationären Verteilung des Gamma-OU-Prozesses ist. Zudem starte der CIR-Prozess im Erwartungswert dieser stationären Verteilung. Die Parameter im exponentiellen NIG-Lévy-Modell werden derart gewählt, dass die Standardabweichung

$$(E_P [(E_{t,\Delta} - E_P[E_{t,\Delta}])^2])^{1/2}, \quad (4.133)$$

die Schiefe

$$\frac{E_P [(E_{t,\Delta} - E_P[E_{t,\Delta}])^3]}{(E_P [(E_{t,\Delta} - E_P[E_{t,\Delta}])^2])^{3/2}} \quad (4.134)$$

und die standardisierte Kurtosis

$$\frac{E_P [(E_{t,\Delta} - E_P[E_{t,\Delta}])^4]}{(E_P [(E_{t,\Delta} - E_P[E_{t,\Delta}])^2])^2} \quad (4.135)$$

der Eintages-Log-Renditen  $E_{t,\Delta} := Z_{t+\Delta} - Z_t = \ln\left(\frac{S_{t+\Delta}}{S_t}\right)$  (d.h. für  $\Delta = \frac{1}{270}$ ) mit den entsprechenden Größen im NIG-Gamma-OU-Modell übereinstimmen. Entsprechend verfährt man bei der Festlegung des Volatilitätsparameters im Black-Scholes-Modell, wobei dort nur die Standardabweichung in Übereinstimmung gebracht wird. Im Vordergrund der Untersuchung stehen die Fragestellungen, wie unterschiedlich das varianz-optimale Anfangskapital, die varianz-optimale Handelsstrategie und der minimale erwartete quadratische Hedgefehler sind und inwieweit es tatsächlich einen Unterschied macht, wenn man die Zeittransformation desselben Lévy-Prozesses anstatt mittels eines Gamma-OU-Prozesses mittels eines entsprechenden CIR-Prozesses modelliert. Cont & Tankov (2004) haben bezüglich letzterer Frage im Kontext der Optionsbewertung keine signifikanten Unterschiede feststellen können, man vgl. dort Abschnitt 15.5. Begründet wird dies damit, dass sich die Verteilungen

der integrierten quadrierten Volatilitäten sehr stark ähneln. Dies lässt die Vermutung entstehen, dass die Lösungen des Problems varianz-optimalen Hedgens im NIG-Gamma-OU- und im NIG-CIR-Modell ähnlich sein werden.

**Beispiel 4.21** Die Parameter im NIG-Gamma-OU-Modell seien wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha} &= 120, & \tilde{\beta} &= -30.21, & \tilde{\delta} &= 1, \\ \kappa &= 2.9706, & a &= 6.7879, & b &= 0.9377, & y_0 &= 7.2391.\end{aligned}$$

Es sei angemerkt, dass der Parameter  $\tilde{\delta}$  ohne Beschränkung der Allgemeinheit stets auf eins normiert werden kann, da dieser der einzige zeitabhängige Parameter des NIG-Prozesses ist. Eine Normierung von  $\tilde{\delta}$  führt zu einer Reskalierung der Zeit, im vorliegenden Zeittransformationsmodell der Handelszeit. Diese Reskalierung hat wiederum angesichts der Skalierungseigenschaft der Gamma-Verteilung eine Anpassung der Parameter und des Startwertes des Gamma-Prozesses zur Folge, vgl. Bemerkung 7.1 in Schoutens (2003). Durch Einsetzen obiger Parameter in die Bedingungen (4.120) und (4.121) verifiziert man, dass die Annahmen von Satz 4.5 Gültigkeit besitzen. Somit kann Satz 4.5 angewendet werden, um das Problem des varianz-optimalen Hedgens zu lösen. Aus der Forderung, dass die stationären Verteilungen der quadrierten Volatilitätsprozesse im NIG-Gamma-OU-Modell und im NIG-CIR-Modell übereinstimmen sollen, resultieren die Gleichungen

$$\alpha^2 = \frac{2\kappa}{b} \quad \text{und} \quad \eta = \frac{a}{b}, \quad (4.136)$$

vgl. Cont & Tankov (2004), Abschnitt 15.1.2. Der Erwartungswert der stationären Verteilung von  $y$  ist gerade  $\eta = \frac{a}{b}$ . Die Mean-Reversion-Rate des CIR-Prozesses entspreche der Rate, wie schnell der Gamma-OU-Prozess einen Sprung vergisst. Übernimmt man zudem die Parameter des NIG-Prozesses, so erhält man im NIG-CIR-Modell die folgenden Parameter:

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha} &= 120, & \tilde{\beta} &= -30.21, & \tilde{\delta} &= 1, \\ \kappa &= 2.9706, & \eta &= 7.2391, & \alpha &= 2.5172, & y_0 &= 7.2391.\end{aligned}$$

Hier weist man durch Einsetzen dieser Parameter in die Bedingungen (4.126) - (4.128) nach, dass die Voraussetzungen von Satz 4.13 erfüllt sind, so dass Satz 4.13 zur Lösung des Problems varianz-optimalen Hedgens im NIG-CIR-Modell herangezogen werden kann. Die Standardabweichung der Eintages-Log-Renditen im NIG-Gamma-OU-Modell beträgt 0.0157, die Schiefe  $-0.4314$  und die standardisierte Kurtosis 4.65. Diese Werte entsprechen den empirischen Momenten des DAX im Zeitraum von 1997 - 1999. Mittels der ersten vier Ableitungen der kumulantenerzeugenden Funktion  $\psi^X$  des NIG-Prozesses  $X$  errechnet man Standardabweichung, Schiefe und standardisierte Kurtosis des NIG-Prozesses in Abhängigkeit der Parameter  $\tilde{\alpha}$ ,  $\tilde{\beta}$  und  $\tilde{\delta}$ . Durch Gleichsetzen der theoretischen und empirischen Momente erhält man die Parameter  $\tilde{\alpha}$ ,  $\tilde{\beta}$  und  $\tilde{\delta}$  im exponentiellen NIG-Lévy-Modell:

$$\tilde{\alpha} = 97.4912, \quad \tilde{\beta} = -20.5085 \quad \text{und} \quad \tilde{\delta} = 6.0624.$$

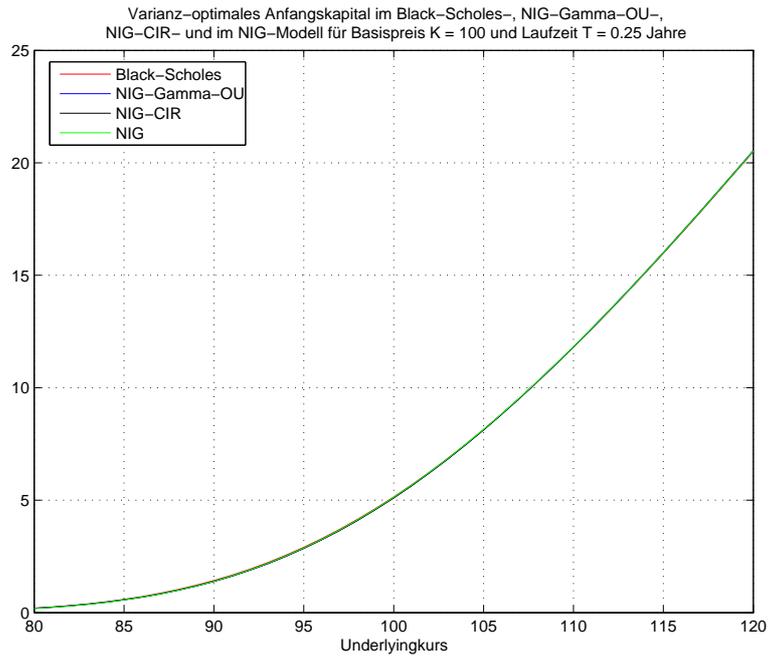


Abbildung 4.1: Varianz-optimales Anfangskapital im Beispiel 4.21

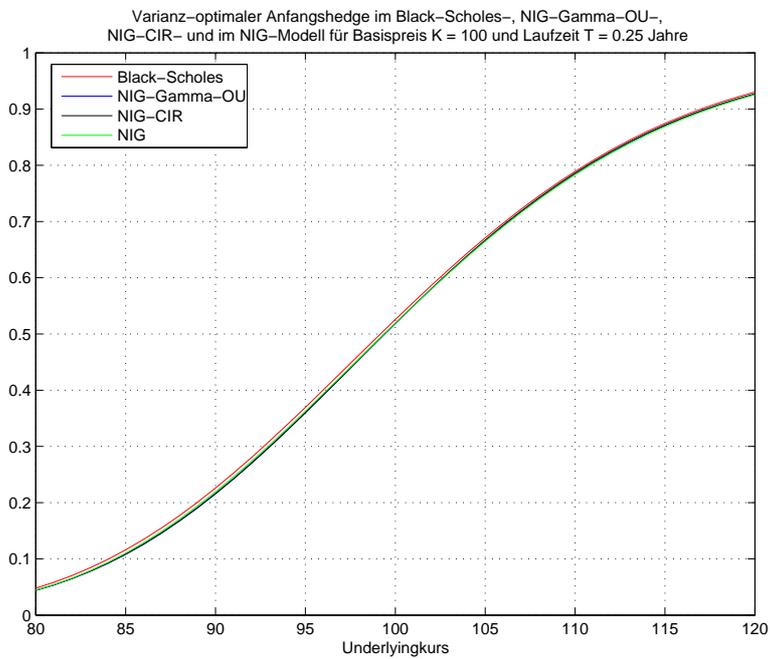


Abbildung 4.2: Varianz-optimaler Anfangshedge im Beispiel 4.21

Erwarteter quadratischer Hedgefehler für eine Call-Option am Geld, $T = 0.25$ Jahre				
Modell	Parameter	Optionspreis	Varianz des Hedgefehlers	
			Optimaler Hedge	Kein Hedge
Black-Scholes	$\sigma = 0.2580$	5.14	0	$66.07 \approx (8.13)^2$
NIG	$\tilde{\alpha} = 97.4912$ $\tilde{\beta} = -20.5085$ $\tilde{\delta} = 6.0624$	5.12	$0.20 \approx (0.45)^2$	$64.45 \approx (8.03)^2$
NIG-Gamma-OU	$\kappa = 2.9706$ $a = 6.7879$ $b = 0.9377$ $\tilde{\alpha} = 120$ $\tilde{\beta} = -30.21$ $\tilde{\delta} = 1$ $y_0 = 7.2391$	5.10	$0.14 \approx (0.37)^2$	$64.86 \approx (8.05)^2$
NIG-CIR	$\kappa = 2.9706$ $\eta = 7.2391$ $\alpha = 2.5172$ $\tilde{\alpha} = 120$ $\tilde{\beta} = -30.21$ $\tilde{\delta} = 1$ $y_0 = 7.2391$	5.10	$0.45 \approx (0.67)^2$	$64.89 \approx (8.06)^2$

Tabelle 4.1: Minimaler erwarteter quadratischer Hedgefehler im Beispiel 4.21

Aufgrund von  $-\tilde{\alpha} - \tilde{\beta} < 0 < 2R = 2.2 < \tilde{\alpha} - \tilde{\beta}$  und  $\psi^X(1) = 0$  ist Satz 1.21 zur Lösung des Problems varianz-optimalen Hedgens im exponentiellen NIG-Lévy-Modell anwendbar. Die Volatilität per annum im Black-Scholes-Modell, die eine Standardabweichung der Eintages-Log-Renditen in Höhe von 0.0157 nach sich zieht, beträgt  $\sigma = 0.258$ . Da auch im Black-Scholes-Modell  $\psi^X(1) = 0$  gilt, ist auch hier Satz 1.21 anwendbar. Die Abbildungen 4.1 und 4.2 zeigen das varianz-optimale Anfangskapital sowie den varianz-optimale Anfangshedge in den vier Modellen in Abhängigkeit des aktuellen Underlyingkurses. Es fällt auf, dass sowohl das optimale Anfangskapital als auch der optimale Anfangshedge in allen vier Modellen nahezu identisch sind. In Abbildung 4.2 ist zudem bemerkenswert, dass die Kurve des varianz-optimale Anfangshedge im Black-Scholes-Modell, der in diesem mit dem Delta-Hedge übereinstimmt, leicht oberhalb der übrigen Kurven verläuft. In Tabelle 4.1 sind die minimalen erwarteten quadratischen Hedgefehler für eine Call-Option, die am Geld notiert, zusammengestellt. Die Standardabweichungen der optimalen Hedgefehler werden in den jeweiligen Modellen in Relation gesetzt zu den optimalen Anfangsausstattungen, die als Optionspreise (im varianz-optimale Sinne) interpretiert werden, und den Standardabweichungen der Hedgefehler der ungedeckten Position, d.h. der Position, bei der nur die Optionsprämie kassiert, diese aber nicht am Kapitalmarkt reinvestiert wird. Der er-

wartete quadratische Hedgefehler der ungedeckten Position errechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned} E_P [(v_0^* - H)^2] &= \text{var}_P[H] = E_P[H^2] - (v_0^*)^2 \\ &= \int_{\mathcal{S}_f} \int_{\mathcal{S}_f} (V(z_1 + z_2)_0 - V(z_1)_0 V(z_2)_0) \Pi(dz_1) \Pi(dz_2). \end{aligned} \quad (4.137)$$

Besonders hervorzuheben ist die Tatsache, dass zwar sowohl das optimale Anfangskapital als auch die optimale Handelsstrategie in allen Modellen sehr ähnlich sind, dass aber gleichzeitig jedes Modell einen sehr unterschiedlichen Grad an Unvollständigkeit impliziert. Bei der Beurteilung des Risikos, welchem man ausgesetzt ist, wenn man die optimale Hedgingstrategie realisiert, unterscheiden sich die vier Modelle in starkem Ausmaß. Die Beobachtung eines eher geringen Modellrisikos im Kontext der varianz-optimalen Hedgingstrategie haben bereits Hubalek et al. (2006) im Nichtmartingalfall bei der Untersuchung des Problems quadratischen Hedgens in reinen exponentiellen Lévy-Modellen gemacht. Dass das Black-Scholes-Modell ein Risiko von Null quantifiziert, verwundert nicht, da im Black-Scholes-Modell alle Derivate perfekt gehedgt werden können, das ist gerade die Vollständigkeit des Black-Scholes-Modells. Geht man allerdings in der Realität davon aus, dass nicht alle Derivate perfekt gehedgt werden können, unterschätzt das Black-Scholes-Modell das dann existierende Hedgerisiko. Man beachte, dass in diesem Beispiel die Hedgefehler der ungedeckten Positionen in allen Modellen nahezu gleich sind. Auffällig ist die starke Abweichung des optimalen Hedgefehlers im NIG-CIR-Modell von dem optimalen Hedgefehler im NIG-Gamma-OU-Modell, wobei optimales Anfangskapital und optimale Handelsstrategie annähernd ununterscheidbar sind. Die allgemeinen Quellen der Unvollständigkeit eines Underlyingmodells können zum einen in den Sprüngen des Underlyingkurses liegen und zum anderen in einer stochastischen Volatilitätskomponente. Die Sprünge des Underlyings werden sowohl im NIG-Gamma-OU-Modell als auch im NIG-CIR-Modell mittels desselben NIG-Prozesses abgebildet. Die quadrierten stochastischen Volatilitätsprozesse besitzen zwar in beiden Modellen die gleiche stationäre Verteilung, allerdings scheint dies nicht hinreichend dafür zu sein, dass auch bereits das Risiko in Form des minimalen erwarteten quadratischen Hedgefehlers identisch ist.  $\square$

Im zweiten Beispiel wird angenommen, dass das Wahrscheinlichkeitsmaß  $P$  dem statistischen Martingalmaß entspricht, das durch Kalibrieren der Modelle an Marktpreise festgelegt ist. Alle betrachteten Modelle seien in der risikoneutralen Welt spezifiziert. Der Vorteil der Modellierung in der risikoneutralen Welt ist der, dass die Märkte die Modellparameter vorgeben. Der Nachteil besteht aber darin, dass das Problem des varianz-optimalen Hedgens unter dem physikalischen Maß zu lösen ist, da das Handelsrisiko nur unter dem physikalischen Maß angemessen zu deuten ist. Die Lösung des Hedgeproblems unter dem statistischen Martingalmaß kann allenfalls als Approximation an die Lösung unter dem physikalischen Maß fungieren. Anhand des folgenden Beispiels soll kurz diskutiert werden, wie weit das statistische und das physikalische Maß auseinander liegen und wie gut die Lösung des Hedgeproblems in der risikoneutralen Welt die tatsächliche Lösung in der wirklichen Welt annähert.

**Beispiel 4.22** Das statistische Martingalmaß  $P$  sei festgelegt durch Kalibrierung der Modellparameter an eine Menge gegebener aktueller Marktpreise diverser S&P 500-Call-Optionen verschiedener Basispreise und Fälligkeiten mittels Kleinster-Quadrate-Methoden. Hinsichtlich der hier zugrunde liegenden Optionspreise sei auf den Anhang C in Schoutens (2003) verwiesen. Im *NIG-Gamma-OU-Modell* erhält man die folgenden Parameter:

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha} &= 29.4722, & \tilde{\beta} &= -15.9048, & \tilde{\delta} &= 1, \\ \kappa &= 0.6252, & a &= 0.4239, & b &= 1.1757, & y_0 &= 0.5071,\end{aligned}$$

vgl. Schoutens (2003), Tabelle 7.3. Wie in Beispiel 4.21 erkennt man anhand der Bedingungen (4.120) und (4.121), dass diese Parameter die Voraussetzungen von Satz 4.5 erfüllen, so dass Satz 4.5 zur Lösung des Problems varianz-optimalen Hedgens in der risikoneutralen Welt angewendet werden kann. Der Tabelle 7.3 in Schoutens (2003) entnimmt man auch die aus der Kalibrierung resultierenden Parameter im *NIG-CIR-Modell*:

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha} &= 18.4815, & \tilde{\beta} &= -4.8412, & \tilde{\delta} &= 1, \\ \kappa &= 0.5391, & \eta &= 0.7377, & \alpha &= 1.2849, & y_0 &= 0.4685.\end{aligned}$$

Diese implizieren die Gültigkeit der Annahmen (4.126) - (4.128), infolgedessen Satz 4.13 anwendbar ist. Die beste Anpassung der Optionspreise im *exponentiellen NIG-Lévy-Modell* an die Marktpreise ergeben die Parameter

$$\tilde{\alpha} = 6.1882, \quad \tilde{\beta} = -3.8941 \quad \text{und} \quad \tilde{\delta} = 0.1622,$$

vgl. Schoutens (2003), Tabelle 6.3. Man beachte, dass diese Parameter Annahme (4.131) erfüllen. Im *Black-Scholes-Modell* wird der beste Fit der Black-Scholes-Preise mit einem Volatilitätsparameter  $\sigma = 0.1812$  erreicht, vgl. Schoutens (2003), Abbildung 4.4. Satz 1.21 liefert sowohl im exponentiellen NIG-Lévy-Modell als auch im Black-Scholes-Modell die Lösung des Problems varianz-optimalen Hedgens in der risikoneutralen Welt. Analog zu den Abbildungen 4.1 und 4.2 zeigen die Abbildungen 4.3 und 4.4 das varianz-optimale Anfangskapital und den varianz-optimale Anfangshedge in den vier Modellen in Abhängigkeit des aktuellen Underlyingkurses. Da das varianz-optimale Anfangskapital mit dem Optionspreis übereinstimmt und die Modelle an die gleichen Optionspreisdaten angepasst worden sind, beobachtet man in Abbildung 4.3, dass sich die Kurven sehr ähneln. Etwas größere Abweichungen von den übrigen Kurven weisen in einem Bereich die Black-Scholes-Kurve und in einem anderen Bereich die NIG-Kurve auf. Die Abbildung 4.4 suggeriert, dass hier der varianz-optimale Anfangshedge modellabhängig ist, die entsprechenden Kurven variieren sehr stark. Besonders auffällig ist die Kurve des exponentiellen NIG-Lévy-Modells. Damit sich in diesem Modell das Underlying wie die Option verhält, der Anfangshedge also nahe eins ist, muss die Option sehr weit im Geld notieren. Zudem ist die Tatsache bemerkenswert, dass wie in Beispiel 4.21 die Kurve des optimalen Anfangshedge im Black-Scholes-Modell fast immer oberhalb der übrigen Kurven verläuft. Im Fall einer am Geld notierenden Option vergleicht Tabelle 4.2 die minimalen erwarteten quadratischen Hedgefehler sowie die

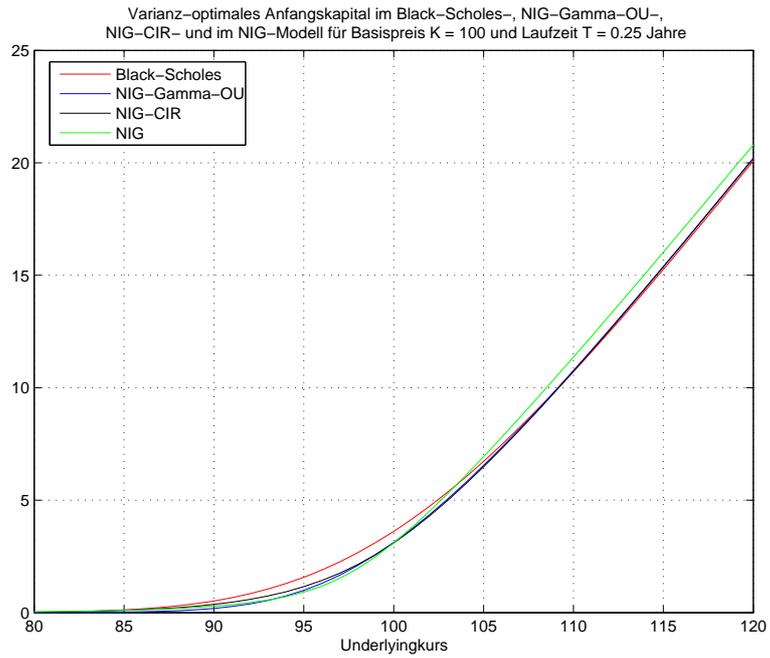


Abbildung 4.3: Varianz-optimales Anfangskapital im Beispiel 4.22

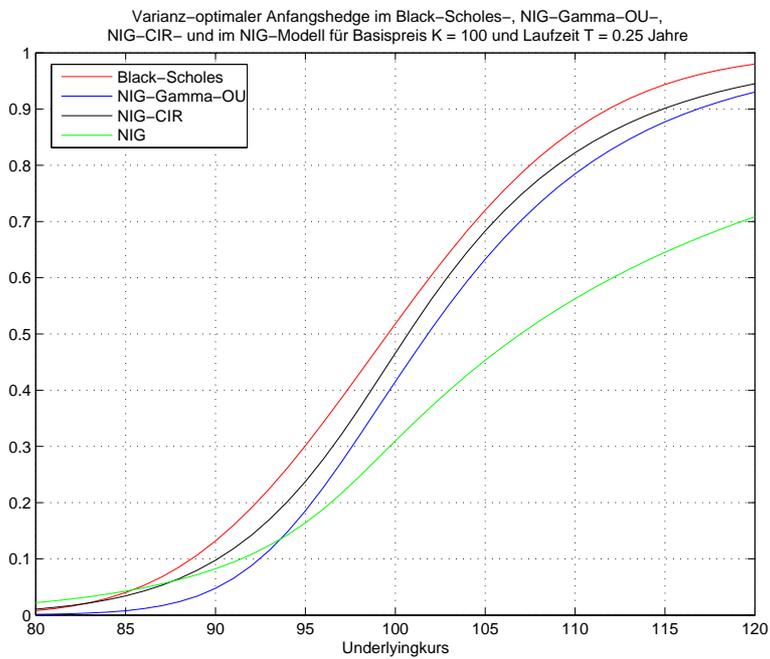


Abbildung 4.4: Varianz-optimaler Anfangshedge im Beispiel 4.22

Erwarteter quadratischer Hedgefehler für eine Call-Option am Geld, $T = 0.25$ Jahre				
Modell	Parameter	Optionspreis	Varianz des Hedgefehlers	
			Optimaler Hedge	Kein Hedge
Black-Scholes	$\sigma = 0.1812$	3.61	0	$31.13 \approx (5.58)^2$
NIG	$\tilde{\alpha} = 6.1882$ $\tilde{\beta} = -3.8941$ $\tilde{\delta} = 0.1622$	3.10	$9.82 \approx (3.13)^2$	$21.20 \approx (4.60)^2$
NIG-Gamma-OU	$\kappa = 0.6252$ $a = 0.4239$ $b = 1.1757$ $\tilde{\alpha} = 29.4722$ $\tilde{\beta} = -15.9048$ $\tilde{\delta} = 1$ $y_0 = 0.5071$	3.12	$2.24 \approx (1.50)^2$	$18.63 \approx (4.32)^2$
NIG-CIR	$\kappa = 0.5391$ $\eta = 0.7377$ $\alpha = 1.2849$ $\tilde{\alpha} = 18.4815$ $\tilde{\beta} = -4.8412$ $\tilde{\delta} = 1$ $y_0 = 0.4685$	3.10	$3.69 \approx (1.92)^2$	$24.86 \approx (4.99)^2$

Tabelle 4.2: Minimaler erwarteter quadratischer Hedgefehler im Beispiel 4.22

zugehörigen Standardabweichungen in den vier Modellen und stellt diese in Beziehung zu den jeweiligen Optionspreisen und den Standardabweichungen der Fehler der ungedeckten Position. Wie in Beispiel 4.21 beobachtet man die Vollständigkeit des Black-Scholes-Modells. Interessant erscheint die Tatsache, dass in beiden Beispielen der Hedgefehler im NIG-CIR-Modell höher ist als im NIG-Gamma-OU-Modell. Dies könnte ein Indiz dafür sein, dass das Maß für das Risiko, das nicht durch Handel beseitigt werden kann und das durch die Zufälligkeit der Volatilitätskomponente hervorgerufen wird, in der Situation, dass die Stochastik sich in einem stetigen Zittern (Modellierung der quadrierten Volatilität als CIR-Prozess) niederschlägt, höher erscheint als in der Situation, in der die Stochastik durch Sprünge (Modellierung der quadrierten Volatilität als Gamma-OU-Prozess) zum Ausdruck kommt. Besonders auffällig ist erneut das exponentielle NIG-Lévy-Modell: Da die Standardabweichung des optimalen Hedgefehlers dort die Größenordnung des entsprechenden Optionspreises hat, erscheint der minimale erwartete quadratische Hedgefehler sehr hoch. Das Vorgehen, die Standardabweichung des Hedgefehlers mit dem Optionspreis zu vergleichen, ist zuvor bereits von Hubalek et al. (2006) praktiziert worden. Dass die Standardabweichung des optimalen Hedgefehlers im exponentiellen NIG-Lévy-Modell tatsächlich sehr hoch ist, wird auch daran deutlich, dass die Standardabweichung des Hedgefehlers der ungedeckten Position nicht viel größer ist. Dieses Entartetsein des exponentiellen NIG-

Lévy-Modells ist voraussichtlich auf die extreme Festlegung des Formparameters  $\tilde{\alpha}$  des NIG-Prozesses zurückzuführen. In welchem Sinne ist der Parameter  $\tilde{\alpha}$  nun extrem? Parameterschätzungen unter dem physikalischen Maß mittels *Maximum-Likelihood-Methoden* liefern typischerweise Formparameter der Größenordnung 75 oder höher in exponentiellen NIG-Lévy-Modellen, vgl. z.B. Rydberg (1997). Somit erscheint der Parameter  $\tilde{\alpha} = 6.1882$  sehr klein, wenn das physikalische Maß und das statistische Preismaß nah beieinander lägen. Man beachte in diesem Zusammenhang auch, dass die Größe des Formparameters  $\tilde{\alpha}$  den Existenzbereich exponentieller Momente des NIG-Prozesses wesentlich mitbestimmt. Ein sehr kleiner Formparameter  $\tilde{\alpha}$  steht für einen NIG-Prozess, der angesichts eines sehr extremen Sprungverhaltens sehr stark von einem Wiener-Prozess verschieden ist. Im NIG-CIR-Modell und im NIG-Gamma-OU-Modell erscheint dieser Formparameter unter der Prämisse, dass das physikalische Maß und das statistische Preismaß ähnlich sind, auch noch zu klein, allerdings wirkt dort anscheinend die stochastische Volatilität dem oben beschriebenen Phänomen entgegen und schwächt dieses ab. Insgesamt sind die Abbildungen 4.3 und 4.4 sowie die Tabelle 4.2 ein Indiz dafür, dass das statistische Martingalmaß zu weit vom physikalischen Maß entfernt ist, infolgedessen es nur bedingt zum quadratischen Hedgen (im approximativen Sinne) geeignet erscheint.  $\square$

Die Beispiele 4.21 und 4.22 dokumentieren in jedem Fall die gute numerische Handhabbarkeit der Integraldarstellungen des varianz-optimalen Anfangskapitals, der varianz-optimalen Handelsstrategie und des minimalen erwarteten quadratischen Hedgefehlers, welche in Kapitel 3 im allgemeinen affinen stochastischen Volatilitätsmodell hergeleitet worden sind. Ferner hat man gesehen, dass die Voraussetzungen, die in den Sätzen 4.5 und 4.13 auf die konkrete Situation des integrierten OU-Zeittransformationsmodells bzw. des integrierten CIR-Zeittransformationsmodells übertragen worden sind, leicht nachzuprüfen sind. Liegt ein konkretes affines Volatilitätsmodell in der Gestalt der unter dem physikalischen Maß geschätzten Modellparameter sowie der gemeinsamen Semimartingalcharakteristik der quadrierten Volatilität  $y$  und der Log-Rendite  $Z$  vor, ermöglicht die vorliegende Arbeit die Bestimmung der Lösung des Problems varianz-optimalen Hedgens in semiexpliziter, d.h. in numerisch gut handhabbarer Form, unter der Annahme, dass der Preisprozess des Underlyings einem lokal quadratisch integrierbaren Martingal folgt.



# Kapitel 5

## Ausblick

Aus der vorliegenden Arbeit lassen sich einige interessante Fragestellungen ableiten, die zum Teil bereits Gegenstand aktueller Forschung sind.

Zur Auswertung der Integraldarstellung der Lösung des Problems varianz-optimalen Hedgens müssen die affinen Volatilitätsmodelle in Form ihrer Parameter festgelegt sein. Reflektieren die Modelle die Dynamik der Log-Rendite und der Volatilität in der risikoneutralen Welt, so können die Parameter mittels Kalibrierung an Marktpreise von Derivaten bestimmt werden. Schoutens (2003), vgl. dort die Abschnitte 7.3 und 7.4, hat anhand von Marktpreisen von Call-Optionen auf den Aktienindex S&P 500 mit verschiedenen Fälligkeiten und Basispreisen diverse affine Volatilitätsmodelle kalibriert, vgl. hierzu auch Beispiel 4.22. Der Versuch, die Parameter so zu wählen, dass die Marktpreise und die theoretischen Preise, die man aufgrund der affinen Struktur und der damit in den meisten Fällen explizit bekannten charakteristischen Funktion der Log-Rendite numerisch effizient berechnen kann, möglichst gut übereinstimmen, mündet darin, dass Preisprozesse mit extremen Pfadeigenschaften resultieren. Diese Beobachtung haben auch Schoutens et al. (2005) gemacht, die exotische Optionen in exponentiellen Lévy-Modellen bewertet haben, die anhand von Marktpreisen von Standardoptionen kalibriert worden sind. Man hat dort ein hohes Modellrisiko konstatiert, welches man ja auch im Kontext der varianz-optimalen Handelsstrategie und des zugehörigen Hedgefehlers in Beispiel 4.22 gesehen hat. Beispiel 4.22 suggeriert, dass das physikalische Maß und das risikoneutrale Maß eher weiter auseinander liegen. In diesem Fall erscheint es angemessener zu sein, im Kontext des quadratischen Hedgens die Dynamik der Log-Rendite und der Volatilität unter dem physikalischen Maß zu modellieren. Legen die Modelle die Dynamik der Log-Rendite und der Volatilität in der wirklichen Welt fest, bieten sich aufgrund der analytischen Form der charakteristischen Funktionen in affinen Modellen Momentenschätzer zur Festlegung der Parameter an. Exemplarisch sei in diesem Kontext die Arbeit von Singleton (2001) genannt. Bates (2006) hat zur Bestimmung der Parameter latenter affiner Prozesse einen Schätzer auf der Grundlage der filtrationsbasierten Maximum-Likelihood-Methode vorgeschlagen. Anhand eines Datensatzes täglicher Aktienkursrenditen konstatiert er deutlich verschiedene Schätzungen im Vergleich zur effizienten

Momenten-Methode. Der Ansatz von Bates (2006) kann unter anderem dazu verwendet werden, die stochastischen Volatilitätsmodelle, die auf zeittransformierten Lévy-Prozessen basieren, vgl. Carr et al. (2003), zu schätzen.

Das Problem quadratischen Hedgens ist in dieser Arbeit unter der Prämisse gelöst worden, dass der Preisprozess ein lokal quadratisch integrierbares Martingal ist. Da diese Annahme eher aus vereinfachenden und technischen Gründen getroffen worden ist, diese aber nicht unbedingt wirklichkeitskonform erscheint, stellt sich die Frage, inwieweit sich das Problem quadratischen Hedgens in affinen Volatilitätsmodellen im Nichtmartingalfall lösen lässt, wenn man also die Driftrestriktion relaxiert. Wenn man die klassischen Ansätze von Schweizer (1994) und Rheinländer & Schweizer (1997) verfolgt, ist man auf die Fälle eingeschränkt, in denen der erweiterte Erwartungswert-Varianz-Tradeoff-Prozess deterministisch ist bzw. die Preisprozesse stetig sind. Bei beiden Ansätzen tritt zudem das Problem auf, dass die affine Struktur, die zum expliziteren Lösen des Problems varianz-optimalen Hedgens erforderlich ist, nicht erhalten bleibt. Rheinländer & Schweizer (1997) betrachten in ihrer Arbeit die Situation, in denen die Preisprozesse stetig sind, und führen die Berechnung des reinen Hedgekoeffizienten auf die Bestimmung einer GWK-Zerlegung des Preisprozesses des zu hedgenden Derivats unter dem varianz-optimalen Martingalmaß zurück. Betrachtet man in diesem Rahmen affine Modelle unter dem physikalischen Maß, geht jedoch bei dem erforderlichen Maßwechsel die affine Struktur verloren, so dass die Methoden auf der Grundlage des Semimartingalcharakteristikenkalküls, die in der vorliegenden Arbeit verwendet worden sind, nicht angewendet werden können. Schweizer (1994) untersucht die Situation, in der der erweiterte Erwartungswert-Varianz-Tradeoff-Prozess deterministisch ist. In diesem Fall kann der pure Hedgekoeffizient ähnlich wie in Gleichung (1.26) bestimmt werden, wobei die Spitzklammerprozesse unter dem physikalischen Maß zu berechnen sind, der Preisprozess des zu hedgenden Derivats aber dem Martingal entspricht, das unter dem minimalen signierten Martingalmaß von der zufälligen Auszahlung erzeugt wird, vgl. hierzu z.B. Černý & Kallsen (2005), Kapitel 1. Hierbei ist die Bezeichnung Preisprozess im weiteren Sinne zu verstehen, da dieser negative Werte annehmen kann. Hier besteht das Problem darin, dass, ausgehend von einem affinen Modell unter dem physikalischen Maß, der resultierende Preisprozess des Derivats nicht mehr affin sein muss. In der Arbeit von Černý & Kallsen (2005) wird ein sogenannter Opportunitätsprozess und das darüber definierte opportunitätsneutrale Maß, das im Allgemeinen kein Martingalmaß darstellt, eingeführt, mit dessen Hilfe die Autoren die Lösung des allgemeinen Problems quadratischen Hedgens auch in Modellen charakterisieren können, in denen die Preisprozesse unstetige Trajektorien aufweisen, der Erwartungswert-Varianz-Tradeoff-Prozess jedoch nicht unbedingt deterministisch sein muss. Die Bestimmung des reinen Hedgekoeffizienten erfolgt über eine Prozess-Variante der Föllmer-Schweizer-Zerlegung der zu hedgenden zufälligen Auszahlung bezüglich des opportunitätsneutralen Maßes. Bei dem Prozess, der zerlegt wird, handelt es sich um den Preisprozess des Derivats, der im Nichtmartingalfall als das von der zufälligen Auszahlung bezüglich des varianz-optimalen Martingalmaßes erzeugte Martingal definiert ist. Das

Problem des varianz-optimalen Hedgens unter dem physikalischen Maß kann somit als Problem lokal-risikominimierenden Hedgens unter dem opportunitätsneutralen Maß aufgefasst werden, das minimale signierte Martingalmaß bezüglich des opportunitätsneutralen Maßes stimmt mit dem varianz-optimalen Martingalmaß bezüglich des physikalischen Maßes überein. Die Ergebnisse von Černý & Kallsen (2005) sind konsistent mit denen von Schweizer (1994) im Fall eines deterministischen erweiterten Erwartungswert-Varianz-Tradeoff-Prozesses und mit denen von Rheinländer & Schweizer (1997) im Fall, dass die Preisprozesse in Form stetiger Semimartingale vorliegen. Die Anwendung des Ansatzes von Černý & Kallsen (2005) auf das Problem quadratischen Hedgens in affinen Volatilitätsmodellen im Nichtmartingalfall ist Gegenstand aktueller Forschungsarbeiten. In den Fällen, in denen die affine Struktur bei den erforderlichen Maßwechseln erhalten bleibt, können die in der vorliegenden Arbeit vorgestellten Methoden zur Bestimmung von Charakteristiken affiner Prozesse und zur Berechnung von Spitzklammerprozessen verwendet werden.

Quadratisches Hedging korrespondiert zum Nutzenmaximierungsansatz mit quadratischer Nutzenfunktion. Neuere Ansätze beschäftigen sich mit dem Hedgeproblem im Nichtmartingalfall, das mit exponentiellen Nutzenfunktionen und Nutzenfunktionen in der Form beliebiger Potenzfunktionen einhergehen, man vergleiche hierzu die Arbeiten von Mania & Schweizer (2005) und von Kramkov & Sîrbu (2006). In diesem Zusammenhang ist die Bestimmung von GWK-Zerlegungen von Preisprozessen bezüglich eines bestimmten Martingalmaßes relevant. Diesbezüglich kann im Rahmen affiner Modelle der in der vorliegenden Arbeit dargelegte Ansatz zur Berechnung der GWK-Zerlegung von Preisprozessen Anwendung finden.

Des Weiteren können einige Problemerkweiterungen und -modifikationen betrachtet werden. Da in der wirklichen Welt nur zu diskreten Zeitpunkten gehandelt wird, wäre es von Interesse, die Lösung des Problems varianz-optimalen Hedgens in zeitdiskreten affinen Volatilitätsmodellen zu kennen. Hubalek et al. (2006) haben das Problem quadratischen Hedgens in exponentiellen Lévy-Modellen sowohl in stetiger als auch in diskreter Zeit (im Nichtmartingalfall) gelöst, vgl. dort Abschnitt 2 für die zeitdiskrete Betrachtung. Da die Idee, wie man das Hedgeproblem in zeitstetigen affinen Volatilitätsmodellen (im Martingalfall) semiexplizit lösen kann, wesentlich auf der Arbeit von Hubalek et al. (2006) fußt, liegt es nahe, deren zeitdiskrete Betrachtung ebenfalls auf das allgemeine affine Volatilitätsmodell im Martingalfall zu übertragen. Dabei ist jedoch zu berücksichtigen, dass die gemeinsame Charakteristik der diskreten quadrierten Volatilität und der diskreten Log-Rendite nicht bekannt ist. Allerdings kennt man aufgrund der affinen Struktur die (bedingte) charakteristische Funktion der Verteilung, die die Übergänge der Zustände von quadrierter Volatilität und Log-Rendite von einem Zeitpunkt in den anderen beschreibt. Damit sind neben dem Preisprozess  $S$  auch die Preisprozesse  $V(z)$  der einfachen Derivate bekannt, so dass die entsprechenden diskreten vorhersehbaren quadratischen Kovariationen berechnet werden können. Wie in Hubalek et al. (2006) und wie in der vorliegenden Arbeit lassen sich somit die varianz-optimale Hed-

gingstrategie des zu hedgenden Derivats und der zugehörige Hedgefehler gemäß der linearen Zerlegung des Derivats linear aus den entsprechenden Größen im Kontext einfacher Derivate zusammensetzen. Eine weitere Problemmodifikation ist an die Arbeit von Cont et al. (2005) angelehnt, wo zufällige Auszahlungen nicht nur mit dem Underlying quadratisch gehedgt werden, sondern zum Beispiel auch mit Standardoptionen oder anderen Instrumenten. Als letzter Punkt soll noch auf die Möglichkeit hingewiesen werden, ein mehrdimensionales affines Volatilitätsmodell zu betrachten. Dabei wäre es vor allem von Bedeutung, einen mehrdimensionalen Volatilitätsprozess zuzulassen, um beispielsweise im Modell von Barndorff-Nielsen & Shephard (2001b) mit Superposition, vgl. Abschnitt 1.4.3, quadratisch hedgen zu können. Barndorff-Nielsen & Shephard (2001b) begründen den mehrdimensionalen Volatilitätsprozess mit einer realistischeren Autokorrelationsstruktur, die durch kürzer-, mittel- und längerfristig wirkende Volatilitätskomponenten erzeugt werden könne.

Abschließend sei nochmals darauf hingewiesen, dass der Semimartingalcharakteristikenkalkül ein sehr nützliches Werkzeug der stochastischen Analysis darstellt. Erst dieser Kalkül hat in der vorliegenden Arbeit die Möglichkeit eröffnet, das Problem des varianz-optimalen Hedgens in einem allgemeinen eindimensionalen affinen Volatilitätsmodell, das als zweidimensionale Semimartingalcharakteristik aufgefasst werden kann, semiexplizit zu lösen. Die Arbeit hat gezeigt, dass die affine Modellstruktur insofern den richtigen Modellrahmen für die praktische Anwendung des quadratischen Hedgens bildet, als dass alle Lösungsformeln dieses Problems, d.h. die Formeln für das varianz-optimale Anfangskapital, die varianz-optimale Handelsstrategie und den minimalen erwarteten quadratischen Hedgefehler numerisch gut handhabbar sind.

# Schlusswort

*Keine Schuld ist dringender als die, Dank zu sagen.* (Cicero)

Am Ende einer langen Arbeit überwiegen bei mir drei Empfindungen: unmittelbar die Erschöpfung, dann - mit ein wenig Abstand betrachtet - die Freude und zwar nicht nur diejenige über den Abschluss der Arbeit, sondern vor allem die, die sich beim Entstehen der Arbeit nicht trotz, sondern aufgrund aller Probleme und Aufgaben, die es zu lösen galt, eingestellt hat, und nachhaltig die Dankbarkeit. Mir ist bewusst, dass es der Quadratur des Kreises entspricht, als nicht gänzlich freier Mensch aufrichtig Dank zu sagen, ohne Gefahr zu laufen, als jemand missverstanden zu werden, der sich lediglich opportunistisch verhält. Aber mein Wunsch, den Menschen Dank zu sagen, die mich im fachlichen Kontext der Arbeit unterstützt haben, veranlasst mich, dieses Risiko einzugehen. In erster Linie danke ich Herrn Professor Jan Kallsen, der intensive Gespräche mit mir geführt hat, aus denen das Thema der vorliegenden Arbeit hervorgegangen ist, der mir jederzeit die Möglichkeit gab, Probleme aller Art ausführlich zu erörtern, und von dem ich sehr viel lernen durfte, nicht zuletzt aufgrund seiner Fähigkeit, sehr komplizierte Sachverhalte sehr anschaulich zu vermitteln. Ich danke ihm dafür, dass er mich im wahrsten Sinne des Wortes als Doktorvater gefordert und gefördert hat. Des Weiteren danke ich Herrn Professor Rudi Zagst, der mich in die Finanzmathematik eingeführt hat und der mir die Relevanz finanzmathematischer Methoden in der Praxis aufgezeigt hat. Zudem danke ich Herrn Professor Zagst und Herrn Professor Kallsen dafür, dass ich die Möglichkeit hatte, an vielen Konferenzen teilzunehmen, um über meine Arbeit vortragen zu können, wodurch ich wiederum viele Anregungen mitnehmen konnte. Ich danke Herrn Professor Damir Filipović für eine Diskussion über analytische Fortsetzbarkeit von Lösungen verallgemeinerter Riccati-Differentialgleichungen. Ferner bedanke ich mich bei meinen Kollegen Herrn Richard Vierthauer und Herrn Johannes Muhle-Karbe für die zahlreichen Diskussionen, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.



# Literaturverzeichnis

- Ansel, J. P. & Stricker, C. (1993). Décomposition de Kunita-Watanabe. In *Séminaire de Probabilités, XXVII*, volume 1557 of *Lecture Notes in Math.* (pp. 30–32). Berlin: Springer.
- Applebaum, D. (2004). *Lévy processes and stochastic calculus*, volume 93 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Arai, T. (2004). Minimal martingale measures for jump diffusion processes. *J. Appl. Probab.*, 41(1), 263–270.
- Arai, T. (2005). An extension of mean-variance hedging to the discontinuous case. *Finance & Stochastics*, 9, 129–139.
- Bachelier, L. (1900). Théorie de la spéculation. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)*, 17, 21–86.
- Ball, C. & Roma, A. (1994). Stochastic volatility option pricing. *Journal of Financial & Quantitative Analysis*, 29, 589–607.
- Barndorff-Nielsen, O. E. (1995). Normal inverse Gaussian distributions and the modeling of stock returns. Research Report no. 300, Department of Theoretical Statistics, Aarhus University.
- Barndorff-Nielsen, O. E. (1998). Processes of normal inverse Gaussian type. *Finance Stoch.*, 2(1), 41–68.
- Barndorff-Nielsen, O. E. & Shephard, N. (2001a). Modelling by Lévy processes for financial econometrics. In *Lévy processes* (pp. 283–318). Boston, MA: Birkhäuser Boston.
- Barndorff-Nielsen, O. E. & Shephard, N. (2001b). Non-Gaussian Ornstein-Uhlenbeck-based models and some of their uses in financial economics. *J. R. Stat. Soc. Ser. B Stat. Methodol.*, 63(2), 167–241.
- Bates, D. (1996). Jumps and stochastic volatility: exchange rate processes implicit in Deutschemark options. *The Review of Financial Studies*, 9(1), 69–107.
- Bates, D. (2006). Maximum likelihood estimation of latent affine processes. *The Review of Financial Studies*, 19(3), 909–965.

- Bauer, H. (1974). *Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie*. Walter de Gruyter, Berlin-New York. 2. Auflage, de Gruyter Lehrbuch.
- Benth, F. E., Di Nunno, G., Løkka, A., Øksendal, B., & Proske, F. (2003). Explicit representation of the minimal variance portfolio in markets driven by Lévy processes. *Math. Finance*, 13(1), 55–72. Conference on Applications of Malliavin Calculus in Finance (Rocquencourt, 2001).
- Bertsimas, D., Kogan, L., & Lo, A. (2001). Hedging derivative securities and incomplete markets: An e-arbitrage approach. *Operations Research*, 49(3), 372–397.
- Biagini, F. & Guasoni, P. (2002). Mean-variance hedging with random volatility jumps. *Stochastic Anal. Appl.*, 20(3), 471–494.
- Biagini, F., Guasoni, P., & Pratelli, M. (2000). Mean-variance hedging for stochastic volatility models. *Math. Finance*, 10(2), 109–123. INFORMS Applied Probability Conference (Ulm, 1999).
- Bichteler, K. (1981). Stochastic integration and  $L^p$ -theory of semimartingales. *Ann. Probab.*, 9(1), 49–89.
- Black, F. & Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81, 637–654.
- Blumenthal, R. M. & Gettoor, R. K. (1968). *Markov processes and potential theory*. Pure and Applied Mathematics, Vol. 29. New York: Academic Press.
- Bochner, S. (1949). Diffusion equation and stochastic processes. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, 35, 368–370.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity. *Journal of Econometrics*, 31(3), 307–327.
- Bouleau, N. (1981). Propriétés d'invariance du domaine du générateur infinitésimal étendu d'un processus de Markov. In *Seminar on Probability, XV (Univ. Strasbourg, Strasbourg, 1979/1980) (French)*, volume 850 of *Lecture Notes in Math.* (pp. 167–188). Berlin: Springer.
- Bouleau, N. & Lambertson, D. (1989). Residual risks and hedging strategies in Markovian markets. *Stochastic Process. Appl.*, 33(1), 131–150.
- Carr, P., Geman, H., Madan, D. B., & Yor, M. (2002). The fine structure of asset returns: an empirical investigation. *Journal of Business*, 75, 305–332.
- Carr, P., Geman, H., Madan, D. B., & Yor, M. (2003). Stochastic volatility for Lévy processes. *Math. Finance*, 13(3), 345–382.

- Carr, P. & Madan, D. (1999). Option valuation using the fast Fourier transform. *The Journal of Computational Finance*, 2, 61–73.
- Černý, A. & Kallsen, J. (2005). On the structure of general mean-variance hedging strategies. Preprint.
- Černý, A. & Kallsen, J. (2006). Mean-variance hedging and optimal investment in Heston's model with correlation. Preprint.
- Çınlar, E., Jacod, J., Protter, P., & Sharpe, M. J. (1980). Semimartingales and Markov processes. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 54(2), 161–219.
- Clark, P. (1973). A subordinated stochastic process model with finite variance for speculative prices. *Econometrica*, 41, 135–156.
- Cont, R. (2001). Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues. *Quantitative Finance*, 1, 223–236.
- Cont, R. & Tankov, P. (2004). *Financial modelling with jump processes*. Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics Series. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL.
- Cont, R., Tankov, P., & Voltchkova, E. (2005). Hedging with options in models with jumps. Preprint.
- Cont, R., Tankov, P., & Voltchkova, E. (2006). Hedging options in presence of jumps. Preprint.
- Cont, R. & Voltchkova, E. (2005). A finite difference scheme for option pricing in jump diffusion and exponential Lévy models. *SIAM J. Numer. Anal.*, 43(4), 1596–1626 (electronic).
- Cox, J. C., Ingersoll, Jr., J. E., & Ross, S. A. (1985). A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*, 53(2), 385–407.
- Cramér, H. (1939). On the representation of a function by certain Fourier integrals. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 46, 191–201.
- Delbaen, F., Monat, P., Schachermayer, W., Schweizer, M., & Stricker, C. (1997). Weighted norm inequalities and hedging in incomplete markets. *Finance and Stochastics*, 1, 181–227.
- Dieudonné, J. (1972). *Grundzüge der modernen Analysis*. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. Zweite berichtete Auflage, Übersetzung aus dem Englischen von Ludwig Boll und Klaus Matthes.

- Doetsch, G. (1971). *Handbuch der Laplace-Transformation. Band I: Theorie der Laplace-Transformation*. Basel: Birkhäuser Verlag. Verbessertes Nachdruck der ersten Auflage 1950, Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften. Mathematische Reihe, Band 14.
- Dritschel, M. & Protter, P. (1999). Complete markets with discontinuous security price. *Finance and Stochastics*, 3(2), 203–214.
- Duffie, D., Filipović, D., & Schachermayer, W. (2003). Affine processes and applications in finance. *Ann. Appl. Probab.*, 13(3), 984–1053.
- Duffie, D. & Richardson, H. R. (1991). Mean-variance hedging in continuous time. *Ann. Appl. Probab.*, 1(1), 1–15.
- Eberlein, E. & Jacod, J. (1997). On the range of options prices. *Finance & Stochastics*, 1(2), 131–140.
- Eberlein, E. & Prause, K. (2002). The generalized hyperbolic model: financial derivatives and risk measures. In *Mathematical finance—Bachelier Congress, 2000 (Paris)*, Springer Finance (pp. 245–267). Berlin: Springer.
- Eberlein, E. & v. Hammerstein, E. A. (2004). Generalized hyperbolic and inverse Gaussian distributions: limiting cases and approximation of processes. In *Seminar on Stochastic Analysis, Random Fields and Applications IV*, volume 58 of *Progr. Probab.* (pp. 221–264). Basel: Birkhäuser.
- El Karoui, N. & Quenez, M. (1995). Dynamic programming and pricing of contingent claims in an incomplete market. *SIAM J. Control Optim.*, 33(1), 29–66.
- Elstrodt, J. (1996). *Maß- und Integrationstheorie*. Berlin / Heidelberg: Springer-Verlag.
- Engle, R. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica*, 50(4), 987–1008.
- Fama, E. (1965). The behaviour of stock market prices. *Journal of Business*, 38, 34–105.
- Filipović, D. (2005). Time-inhomogeneous affine processes. *Stochastic Process. Appl.*, 115(4), 639–659.
- Fischer, W. & Lieb, I. (1994). *Funktionentheorie*. Vieweg Studium: Aufbaukurs Mathematik [Vieweg Studies: Mathematics Course]. Braunschweig / Wiesbaden: Friedr. Vieweg & Sohn.
- Föllmer, H. & Leukert, P. (2000). Efficient hedging: cost versus shortfall risk. *Finance Stoch.*, 4(2), 117–146.

- Föllmer, H. & Schweizer, M. (1991). Hedging of contingent claims under incomplete information. In *Applied stochastic analysis (London, 1989)*, volume 5 of *Stochastics Monogr.* (pp. 389–414). New York: Gordon and Breach.
- Föllmer, H. & Sondermann, D. (1986). Hedging of nonredundant contingent claims. In *Contributions to mathematical economics* (pp. 205–223). Amsterdam: North-Holland.
- Galtchouk, L. I. (1976). Représentation des martingales engendrées par un processus à accroissements indépendants (cas des martingales de carré intégrable). *Ann. Inst. H. Poincaré Sect. B (N.S.)*, 12(3), 199–211.
- Geman, H. (2002). Pure jump Lévy processes for asset price modelling. *Journal of Banking and Finance*, 26, 1297–1316.
- Geman, H. & Ané, T. (1996). Stochastic subordination. *Risk*, 9, 145–149.
- Gettoor, R. K. (1975). *Markov processes: Ray processes and right processes*. Berlin: Springer-Verlag. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 440.
- Goll, T. & Kallsen, J. (2000). Optimal portfolios for logarithmic utility. *Stochastic Process. Appl.*, 89(1), 31–48.
- Gourieroux, C., Laurent, J. P., & Pham, H. (1998). Mean-variance hedging and numéraire. *Math. Finance*, 8(3), 179–200.
- Grünewald, B. (1998). *Absicherungsstrategien für Optionen bei Kurssprüngen*. Deutscher Universitäts-Verlag.
- Harrison, J. M. & Kreps, D. M. (1979). Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets. *J. Econom. Theory*, 20(3), 381–408.
- Harrison, J. M. & Pliska, S. R. (1981). Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading. *Stochastic Process. Appl.*, 11(3), 215–260.
- Heath, D., Platen, E., & Schweizer, M. (2001). A comparison of two quadratic approaches to hedging in incomplete markets. *Math. Finance*, 11(4), 385–413.
- Heston, S. (1993). A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *The Review of Financial Studies*, 6(2), 327–343.
- Heuser, H. (1986). *Funktionalanalysis*. Stuttgart: B.G. Teubner. Zweite Auflage.
- Hobson, D. (2004). Stochastic volatility models, correlation, and the  $q$ -optimal measure. *Math. Finance*, 14(4), 537–556.
- Hörmander, L. (1966). *An introduction to complex analysis in several variables*. D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N.J.-Toronto, Ont.-London.

- Hou, C. & Karatzas, I. (2004). Least-squares approximation of random variables by stochastic integrals. In *Stochastic analysis and related topics in Kyoto*, volume 41 of *Adv. Stud. Pure Math.* (pp. 141–166). Tokyo: Math. Soc. Japan.
- Hubalek, F., Krawczyk, L., & Kallsen, J. (2006). Variance-optimal hedging for processes with stationary independent increments. *The Annals of Applied Probability*, 16, 853–885.
- Hubalek, F. & Sgarra, C. (2005). Quadratic hedging for BNS models. Preprint.
- Hull, J. (1993). *Options, Futures, and other derivative securities*. Simon & Schuster Company Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall International, Inc., second edition.
- Hull, J. & White, A. (1987). The pricing of options on assets with stochastic volatilities. *Journal of Finance*, 42, 281–300.
- Ikeda, N. & Watanabe, S. (1989). *Stochastic differential equations and diffusion processes*. Kodansha Ltd. Tokyo: North-Holland, second edition.
- Jacod, J. (1979). *Calcul stochastique et problèmes de martingales*, volume 714 of *Lecture Notes in Mathematics*. Berlin: Springer.
- Jacod, J., Méléard, S., & Protter, P. (2000). Explicit form and robustness of martingale representations. *Ann. Probab.*, 28(4), 1747–1780.
- Jacod, J. & Protter, P. (2003). *Probability essentials*. Universitext. Berlin: Springer-Verlag, second edition.
- Jacod, J. & Shiryaev, A. N. (2003). *Limit theorems for stochastic processes*, volume 288 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Berlin: Springer-Verlag, second edition.
- Jeanblanc, M. & Privault, N. (2002). A complete market model with Poisson and Brownian components. In *Seminar on Stochastic Analysis, Random Fields and Applications, III (Ascona, 1999)*, volume 52 of *Progr. Probab.* (pp. 189–204). Basel: Birkhäuser.
- Kallsen, J. (1998). Duality links between portfolio optimization and derivative pricing. Technical Report 40, Mathematische Fakultät Universität Freiburg.
- Kallsen, J. (1999). A utility maximization approach to hedging in incomplete markets. *Math. Methods Oper. Res.*, 50(2), 321–338. Financial optimization.
- Kallsen, J. (2003).  $\sigma$ -localization and  $\sigma$ -martingales. *Teor. Veroyatnost. i Primenen.*, 48(1), 177–188.
- Kallsen, J. (2006). A didactic note on affine stochastic volatility models. In *From stochastic calculus to mathematical finance* (pp. 343–368). Berlin: Springer.

- Kallsen, J. & Shiryaev, A. N. (2002a). The cumulant process and Esscher's change of measure. *Finance Stoch.*, 6(4), 397–428.
- Kallsen, J. & Shiryaev, A. N. (2002b). Time change representation of stochastic integrals. *Theory of probability and its applications*, 46, 522–528.
- Kallsen, J. & Taqqu, M. S. (1998). Option pricing in ARCH-type models. *Math. Finance*, 8(1), 13–26.
- Karatzas, I. & Shreve, S. E. (1998). *Methods of mathematical finance*, volume 39 of *Applications of Mathematics (New York)*. New York: Springer-Verlag.
- Klüppelberg, C., Lindner, A., & Maller, R. (2004). A continuous-time GARCH process driven by a Lévy process: stationarity and second-order behaviour. *J. Appl. Probab.*, 41(3), 601–622.
- Königsberger, K. (1997). *Analysis. 2*. Springer-Lehrbuch. [Springer Textbook]. Berlin: Springer-Verlag.
- Korn, R. & Korn, E. (2001). *Optionsbewertung und Portfolio-Optimierung*. Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn. *Moderne Methoden der Finanzmathematik*. [Modern methods in financial mathematics].
- Kramkov, D. & Sîrbu, M. (2006). Asymptotic analysis of utility based hedging strategies for a small number of contingent claims. Preprint.
- Kunita, H. & Watanabe, S. (1967). On square integrable martingales. *Nagoya Math. J.*, 30, 209–245.
- Lamberton, D. & Lapeyre, B. (2000). *Introduction to stochastic calculus applied to finance*. Boca Raton: Chapman & Hall / CRC, first, reprinted edition. Translated from the 1991 French original by Nicolas Rabeau and François Mantion.
- Laurent, J. P. & Pham, H. (1999). Dynamic programming and mean-variance hedging. *Finance Stoch.*, 3(1), 83–110.
- Lewis, A. (2001). A simple option formula for general jump-diffusion and other exponential Lévy processes. Available from <http://www.optioncity.net>.
- Lim, A. E. B. (2004). Quadratic hedging and mean-variance portfolio selection with random parameters in an incomplete market. *Math. Oper. Res.*, 29(1), 132–161.
- Lim, A. E. B. (2005). Mean-variance hedging when there are jumps. *SIAM J. Control Optim.*, 44(5), 1893–1922 (electronic).
- Madan, D. & Seneta, E. (1990). The VG model for share market returns. *Journal of Business*, 63, 511–524.

- Mandelbrot, B. (1963). The variation of certain speculative prices. *Journal of Business*, 36, 394–419.
- Mania, M. & Schweizer, M. (2005). Dynamic exponential utility indifference valuation. *Ann. Appl. Probab.*, 15(3), 2113–2143.
- Merton, R. C. (1973). Theory of rational option pricing. *Bell J. Econom. and Management Sci.*, 4, 141–183.
- Merton, R. C. (1976). Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *Journal of Financial Economics*, 3, 125–144.
- Métivier, M. (1982). *Semimartingales*, volume 2 of *de Gruyter Studies in Mathematics*. Berlin: Walter de Gruyter & Co. A course on stochastic processes.
- Meyer, P. A. (1976a). Correction aux “Inégalités de Littlewood-Paley. II. L’opérateur carré du champ”. In *Séminaire de Probabilités, X (Première partie, Univ. Strasbourg, Strasbourg, année universitaire 1974/1975)* (pp. 162–163. Lecture Notes in Math., Vol. 511). Berlin: Springer.
- Meyer, P. A. (1976b). Démonstration probabiliste de certaines inégalités de Littlewood-Paley. II. L’opérateur carré du champ. In *Séminaire de Probabilités, X (Première partie, Univ. Strasbourg, Strasbourg, année universitaire 1974/1975)* (pp. 142–161. Lecture Notes in Math., Vol. 511). Berlin: Springer.
- Monat, P. & Stricker, C. (1995). Föllmer-Schweizer decomposition and mean-variance hedging for general claims. *Ann. Probab.*, 23(2), 605–628.
- Monroe, I. (1978). Processes that can be embedded in Brownian motion. *Ann. Probability*, 6(1), 42–56.
- Osborne, M. F. M. (1959). Brownian motion in the stock market. *Operations Res.*, 7, 145–173.
- Pham, H. (2000). On quadratic hedging in continuous time. *Math. Methods Oper. Res.*, 51(2), 315–339.
- Pham, H., Rheinländer, T., & Schweizer, M. (1998). Mean-variance hedging for continuous processes: new proofs and examples. *Finance Stoch.*, 2(2), 173–198.
- Prause, K. (1999). *The generalized hyperbolic model: estimation, financial derivatives, and risk measures*. Dissertation Universität Freiburg i. Br.
- Protter, P. (1992). *Stochastic integration and differential equations*. Berlin: Springer-Verlag, second edition.
- Raible, S. (2000). *Lévy Processes in Finance: Theory, Numerics, and Empirical Facts*. Dissertation Universität Freiburg i. Br.

- Remmert, R. (1992). *Funktionentheorie. I*, volume 5 of *Grundwissen Mathematik [Basic Knowledge in Mathematics]*. Berlin: Springer-Verlag.
- Rheinländer, T. & Schweizer, M. (1997). On  $L^2$ -projections on a space of stochastic integrals. *Ann. Probab.*, 25(4), 1810–1831.
- Richter, H. (1966). *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Zweite neubearbeitete Auflage. Die Grundlagen der Mathematischen Wissenschaften, Band 86. Berlin: Springer-Verlag.
- Rubinstein, M. (1985). Nonparametric tests of alternative option pricing models using all reported trades and quotes on the 30 most active CBOE option classes from August 23, 1976 through August 31, 1978. *Journal of Finance*, 40(2), 455–480.
- Rudin, W. (1987). *Real and complex analysis*. New York: McGraw-Hill Book Co., third edition.
- Rydberg, T. H. (1997). The normal inverse Gaussian Lévy process: simulation and approximation. *Comm. Statist. Stochastic Models*, 13(4), 887–910.
- Samuelson, P. (1965). Rational theory of warrant pricing. *Industrial Management Review*, 6, 13–32.
- Sato, K.-i. (1999). *Lévy processes and infinitely divisible distributions*, volume 68 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press. Übersetzt vom japanischen Original 1990, vom Autor überarbeitet.
- Schoutens, W. (2001). The Meixner process in finance. EURANDOM Report 2001-002, EURANDOM, Eindhoven.
- Schoutens, W. (2003). *Lévy processes in finance*. Wiley Series in Probability and Statistics. The Atrium, Southern Gate, Chichester, West Sussex: John Wiley & Sons Ltd.
- Schoutens, W., Simons, E., & Tistaert, J. (2005). Model risk for exotic and moment derivatives. In *Exotic Option Pricing and Advanced Lévy Models* (pp. 67–98). Chichester: John Wiley & Sons.
- Schwarz, H. R. (1997). *Numerische Mathematik*. Stuttgart: B. G. Teubner. 4. Auflage, mit einem Beitrag von Jörg Waldvogel.
- Schweizer, M. (1991). Option hedging for semimartingales. *Stochastic Process. Appl.*, 37(2), 339–363.
- Schweizer, M. (1994). Approximating random variables by stochastic integrals. *Ann. Probab.*, 22(3), 1536–1575.
- Schweizer, M. (1995). Variance-optimal hedging in discrete time. *Math. Oper. Res.*, 20(1), 1–32.

- Schweizer, M. (1996). Approximation pricing and the variance-optimal martingale measure. *Ann. Probab.*, 24(1), 206–236.
- Schweizer, M. (2001). A guided tour through quadratic hedging approaches. In *Option pricing, interest rates and risk management*, Handb. Math. Finance (pp. 538–574). Cambridge: Cambridge Univ. Press.
- Singleton, K. J. (2001). Estimation of affine asset pricing models using the empirical characteristic function. *J. Econometrics*, 102(1), 111–141.
- Stein, E. & Stein, J. (1991). Stock price distributions with stochastic volatility: an analytic approach. *Rev. Financial Stud.*, 4, 727–752.
- Walter, W. (1976). *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Berlin: Springer-Verlag. Eine Einführung, zweite korrigierte Auflage, Heidelberger Taschenbücher, Band 110.
- Watson, G. N. (1966). *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*. Cambridge, England: Cambridge University Press. Zweite Auflage.
- Winkel, M. (2001). The recovery problem for time-changed Lévy processes. Research Report 2001-37, Maphysto.
- Witting, H. (1985). *Mathematische Statistik I*. Stuttgart: B.G. Teubner.

# Symbolverzeichnis

$\mathbb{N}, \mathbb{N}^*$	$\{0, 1, 2, 3, \dots\}, \{1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{Z}$	$-\mathbb{N}^* \cup \mathbb{N} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
$\mathbb{R}, \mathbb{R}_+, \overline{\mathbb{R}}$	$(-\infty, \infty), [0, \infty), \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$
$\mathbb{Q}, \mathbb{Q}_+$	$\{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}, \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+$
$\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^d$	der euklidische bzw. unitäre $d$ -dimensionale Raum
$D$	$\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$
$\mathbb{R}^{m \times n}$	Menge der $m \times n$ -Matrizen mit $\mathbb{R}$ -wertigen Einträgen
$A^\top$	die Transponierte einer Matrix $A$
$\mathbb{C}, \mathbb{C}_-$	$\{a + ib : a, b \in \mathbb{R}\}, \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \leq 0\}$
$\Pi,  \Pi $	komplexes Maß, das durch das zu hedgende Derivat festgelegt ist, und das entsprechende Totalvariationsmaß
$\Pi^{\operatorname{Re}}, \Pi^{\operatorname{Im}}$	Real- und Imaginärteil des komplexen Maßes $\Pi$ , definiert durch $\Pi^{\operatorname{Re}}(\cdot) = \operatorname{Re}(\Pi(\cdot))$ und $\Pi^{\operatorname{Im}}(\cdot) = \operatorname{Im}(\Pi(\cdot))$
$\mu^+, \mu^-$	positive und negative Variation eines signierten Maßes $\mu$
$\hat{\mu}$	Fouriertransformierte eines Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mu$
$\varepsilon_x$	Dirac-Maß im Punkt $x \in \mathbb{R}^d$
$\lambda$	Lebesgue-Maß
$\mathcal{N}(a, b)$	Normalverteilung mit Mittelwert $a$ und Varianz $b$
$P$	Wahrscheinlichkeitsmaß
$\mathcal{F}, \mathcal{G}$	$\sigma$ -Algebren
$\mathcal{F}_\tau$	$\sigma$ -Algebra der $\tau$ -Vergangenheit für eine Stoppzeit $\tau$
$(\Omega, \mathcal{F}, P)$	Wahrscheinlichkeitsraum
$(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, (\mathcal{G}_u)_{u \in \mathbb{R}_+}$	Filtrierungen
$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, P)$	filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum
$E_P[X], \operatorname{var}_P[X]$	Erwartungswert, Varianz einer Zufallsvariable $X$ unter $P$
$\operatorname{kor}_P[X, Y]$	Korrelation der Zufallsvariablen $X, Y$ unter $P$
$E_P[X \mathcal{G}]$	bedingter Erwartungswert von $X$ gegeben $\mathcal{G}$ unter $P$
$P^X$	Verteilung der Zufallsvariable $X$ unter $P$
$P^{X \mathcal{G}}$	reguläre bedingte Verteilung von $X$ gegeben $\mathcal{G}$ unter $P$
$\mathcal{L}^2(P)$	$\{X : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : X \text{ messbar}, E_P[X^2] < \infty\}$
$L^2(P)$	Quotientenraum, definiert durch $\mathcal{L}^2(P)/\{X : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : X \text{ messbar}, X = 0 \text{ } P\text{-f.s.}\}$

$\ X\ _{L^2(P)}$	$(E_P[\tilde{X}^2])^{1/2}$ , wobei $\mathcal{L}^2(P) \ni \tilde{X} \mapsto X \in L^2(P)$ die kanonische Abbildung bezeichnet
$\xrightarrow{P}$	stochastische Konvergenz
$\xrightarrow{L^2}$	Konvergenz im $L^2$ -Sinne
$\mathcal{F}^P$	$P$ -Vervollständigung der $\sigma$ -Algebra $\mathcal{F}$
$\mathcal{F}^*$	$\sigma$ -Algebra der universell messbaren Mengen
$\Gamma$	Carré-du-Champ-Operator, man beachte aber in Abweichung davon den Beweis von Satz 3.18
$A, \tilde{A}$	erweiterte infinitesimale Generatoren
$(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$	Markow'sche Übergangshalbgruppe
$P^x$	Startverteilung eines Markow-Prozesses $X$ , d.h. $P^x\{X_0 = x\} = 1$
$\mu_1 \otimes \mu_2$	Produktmaß der $\sigma$ -endlichen Maße $\mu_1, \mu_2$
$\mu_1 * \mu_2$	Faltungsprodukt der Wahrscheinlichkeitsmaße $\mu_1, \mu_2$
$\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$	Produkt- $\sigma$ -Algebra der $\sigma$ -Algebren $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$
$\mathcal{F} \vee \mathcal{G}$	$\sigma(\mathcal{F} \cup \mathcal{G})$
$\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$	Borel'sche $\sigma$ -Algebren auf $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}_+$
$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mathcal{B}(\mathbb{C})$	Borel'sche $\sigma$ -Algebren auf $\mathbb{R}^d$ bzw. $\mathbb{C}$
$\sigma(\mathcal{E}), \sigma(X_i : i \in I)$	die von $\mathcal{E}$ bzw. $\{X_i : i \in I\}$ erzeugte $\sigma$ -Algebra
$\mathcal{P}$	$\sigma$ -Algebra der vorhersehbaren Mengen
$\mathcal{O}$	$\sigma$ -Algebra der gut-messbaren Mengen
$\tilde{\mathcal{P}}, \tilde{\mathcal{O}}$	$\mathcal{P} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mathcal{O} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$
$\mathbb{D}(\mathbb{R}^d)$	Skorokhod-Raum $\{\alpha : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^d : \alpha \text{ ist càdlàg}\}$
$\pi_t$	Projektionsabbildung, d.h. $\pi_t(\alpha) := \alpha_t$ für $\alpha \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^d)$
$\mathcal{D}_t^0(\mathbb{R}^d)$	$\sigma(\pi_s : s \leq t)$
$\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$	$\sigma\left(\bigcup_{t \in \mathbb{R}_+} \mathcal{D}_t^0(\mathbb{R}^d)\right)$
$\mathcal{D}_t(\mathbb{R}^d)$	$\bigcap_{s > t} \mathcal{D}_s^0(\mathbb{R}^d)$
f.s. f.ü.	fast sicher, fast überall
$ z $	Betrag von $z \in \mathbb{C}$
$\bar{z}$	die zu $z \in \mathbb{C}$ komplex konjugierte Zahl
$\text{Re}(z), \text{Im}(z)$	Real- und Imaginärteil von $z \in \mathbb{C}$
$x \mapsto \text{sign}(x)$	Signumfunktion
$\ x\ $	euklidische Norm von $x \in \mathbb{R}^d$
$x \wedge y, x \vee y$	$\min(x, y), \max(x, y)$ für $x, y \in \mathbb{R}$
$x^+$	$x \vee 0$
$\binom{m}{n}$	Binomialkoeffizient für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \geq n$
$B(u, r)$	offene Kugel mit Zentrum $u$ und Radius $r$
$A^c$	Komplement der Menge $A$
$\text{int}(A)$	Inneres der Menge $A$

$\bar{A}$	Abschluss der Menge $A$
$ A $	Kardinalität einer endlichen Menge $A$
$1_A$	Indikatorfunktion der Menge $A$
$A_1 \dot{\cup} A_2$	disjunkte Vereinigung der Mengen $A_1$ und $A_2$
$A_1 \times A_2$	kartesisches Produkt der Mengen $A_1$ und $A_2$
$D_i g, \frac{\partial g}{\partial x_i}$	partielle Ableitungen 1. Ordnung von $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$
$D_{i,j} g, \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}$	partielle Ableitungen 2. Ordnung von $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$
$\text{Hess}(g)$	Hesse-Matrix der Funktion $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$
$D_1 g, D_1^2 g$	erste und zweite Ableitung der Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$g _A$	Einschränkung der Funktion $g$ auf die Menge $A$
$\min g, \min A$	Minimum der Funktion $g$ , Minimum der Menge $A$
$\arg \min_{x \in A} g$	Minimalstelle der Funktion $g _A$
$\mathcal{S}, \mathcal{S}_p$	Klasse der Semimartingale bzw. Spezialsemimartingale
$\mathcal{S}^2$	Klasse der quadratisch integrierbaren Semimartingale
$X^p$	Kompensator von $X \in \mathcal{S}_p$
$\mathcal{M}$	Klasse der gleichgradig integrierbaren Martingale
$\mathcal{H}^2$	Klasse der quadratisch integrierbaren Martingale
$\ M\ _{H^2}$	$\ M_\infty\ _{L^2(P)}$ für $M \in \mathcal{H}^2$
$\mathcal{V}^+$	Klasse der adaptierten wachsenden Prozesse
$\mathcal{V}$	Klasse der adaptierten Prozesse von endlicher Variation
$\mathcal{A}^+$	Klasse der integrierbaren wachsenden Prozesse
$\text{Var}(A)$	Variationsprozess von $A \in \mathcal{V}$
$\mathcal{A}$	Klasse der Prozesse von integrierbarer Variation
$\mathcal{C}_{\text{loc}}$	lokalisierte Klasse der Prozessklasse $\mathcal{C}$
$L(X)$	Menge der nach $X \in \mathcal{S}$ integrierbaren Prozesse
$Y \cdot X$	$\int_0^\cdot Y_s dX_s$ , stochastisches Integral von $Y \in L(X)$ nach $X \in \mathcal{S}$
$\mathcal{E}(X)$	stochastisches Exponential von $X \in \mathcal{S}$
$X^c$	stetiger Martingalanteil von $X \in \mathcal{S}$
$[X, Y]$	quadratische Kovariation von $X, Y \in \mathcal{S}$
$\langle X, Y \rangle$	vorhersehbare quadratische Kovariation von $X, Y \in \mathcal{S}$ mit $[X, Y] \in \mathcal{S}_p$
$L^2(X)$	$\{K \text{ vorhersehbarer Prozess} : K^2 \cdot \langle X, X \rangle \in \mathcal{A}^+\}$
$L_{\text{loc}}^2(X)$	$\{K \text{ vorhersehbarer Prozess} : K^2 \cdot \langle X, X \rangle \in \mathcal{A}_{\text{loc}}^+\}$
$X_{t-}$	$\lim_{s \uparrow t} X_s := \lim_{s \rightarrow t, s < t} X_s$
$\Delta X_t$	$X_t - X_{t-}$ , man beachte aber in Abweichung davon Satz 4.13 und Lemma 4.18
$X_Y$	zeittransformierter Prozess
$(\mathcal{G}_{Y_t})_{t \in \mathbb{R}_+}$	zeittransformierte Filtrierung
$X^\tau$	bezüglich $\tau$ gestoppter Prozess $X$ , d.h. $X_t^\tau = X_{\tau \wedge t}$
$[[\tau, \tilde{\tau}], [\tau, \tilde{\tau}]$ usw.	stochastische Intervalle von $\tau, \tilde{\tau}$

$[\tau]$	Graph der Stoppzeit $\tau$ , d.h. $[\tau, \tau]$
$\mu^X$	Maß der Sprünge von $X \in \mathcal{S}$
$\mu^p$	Kompensator eines gut-messbaren, $\tilde{\mathcal{P}}$ - $\sigma$ -endlichen Zufallsmaßes $\mu$
$\nu^X$	Kompensator des Maßes der Sprünge $\mu^X$
$W * \mu$	Integralprozess für eine $\tilde{\mathcal{P}}$ -messbare Funktion $W$ und ein Zufallsmaß $\mu$
$W * (\mu^X - \nu^X)$	Integralprozess für eine $\tilde{\mathcal{P}}$ -messbare Funktion $W$ und das kompenzierte Zufallsmaß $\mu^X - \nu^X$
$h, \tilde{h}$	Abschneidefunktionen
$(B^X(h), C^X, \nu^X)$	integrale Semimartingalcharakteristik von $X \in \mathcal{S}$
$\partial X = (b^X(h), c^X, F^X)$	differentielle Semimartingalcharakteristik von $X \in \mathcal{S}$ im Fall einer absolut stetigen integralen Charakteristik von $X$
$(b^L(h), c^L, F^L)$	Lévy-Khintchine-Tripel des Lévy-Prozesses $L$
$\psi^L$	(verallgemeinerter) Lévy-Exponent von $L$ , d.h.
$\psi^L(u)$	$u^\top b^L + \frac{1}{2} u^\top c^L u + \int_{\mathbb{R}^d} (e^{u^\top x} - 1 - u^\top h(x)) F^L(dx)$
$T$	endlicher Handelshorizont
$H$	zufällige Auszahlung eines Derivats
$f$	Auszahlungsfunktion eines Derivats
$V$	Preisprozess eines Derivats
$S$	Preisprozess eines Underlyings
$Z$	Log-Rendite-Prozess eines Underlyings
$y$	stochastischer Prozess zur Modellierung der quadrierten Volatilität
$v_0$	Anfangskapital
$\Theta$	Menge der zulässigen Handelsstrategien
$\vartheta$	Handelsstrategie
$PV(\vartheta)$	Wertprozess der Handelsstrategie $\vartheta$
$\mathcal{S}_f$	$\{z \in \mathbb{C} : R' \leq \operatorname{Re}(z) \leq R\}$ , vertikaler Streifen in der Gauß'schen Zahlenebene
$H(z)$	$S_T^z$ für $z \in \mathcal{S}_f$ , Auszahlung eines einfachen Derivats
$V(z)$	Preisprozess eines einfachen Derivats für $z \in \mathcal{S}_f$
$\mathcal{S}_f^k$	$\{z \in \mathbb{C} : R' \leq \operatorname{Re}(z) \leq R,  \operatorname{Im}(z)  \leq k\}$ , abgeschnittener vertikaler Streifen in der Gauß'schen Zahlenebene
$f^k(s)$	$\int_{\mathcal{S}_f^k} s^z \Pi(dz)$ , Auszahlungsfunktion eines abgeschnittenen Derivats an der Stelle $s \in \mathbb{R}_+$
$H^k$	$f^k(S_T)$ , Auszahlung eines abgeschnittenen Derivats
$V^k$	Preisprozess eines abgeschnittenen Derivats
EVT-Prozess	Erwartungswert-Varianz-Tradeoff-Prozess