

Technische Universität München  
Zentrum Mathematik

# Optimale Steuerung redundanter Roboter auf Mannigfaltigkeiten – Strukturanalyse und numerische Realisierung

Sylvia Breun

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Mathematik der Technischen  
Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr. M. Brokate  
Prüfer der Dissertation: 1. Priv.-Doz. Dr. R. Callies  
2. Univ.-Prof. Dr. P. Rentrop  
3. Univ.-Prof. Dr. H. J. Oberle,  
Universität Hamburg (schriftliche Beurteilung)

Die Dissertation wurde am 26.04.2007 bei der Technischen Universität eingereicht  
und durch die Fakultät für Mathematik am 23.11.2007 angenommen.



# Vorwort

An dieser Stelle möchte ich mich bei einigen Personen bedanken, die sehr zum Gelingen der vorliegenden Arbeit beigetragen haben. Allen voran ist mein Betreuer Herr Priv.-Doz. Dr. R. Callies zu nennen, der meiner Arbeit stets großes Interesse entgegen gebracht hat und mir viele wertvolle Hinweise geben konnte. Auch Herrn Prof. Dr. P. Rentrop möchte ich für seine Unterstützung danken.

Des Weiteren möchte ich es nicht versäumen, meine Kollegen am Lehrstuhl für Numerische Mathematik zu erwähnen, mit denen ich viele anregende Diskussionen geführt habe, und die mir nicht nur bei fachlichen Problemen mit Rat und Tat zur Seite standen.

Besonders bedanken möchte ich mich bei meinem Bruder Peter und bei meinen Freundinnen und Kletterpartnerinnen Daniela Calinski und Catherine Avak. Sie haben mir vor allem in der Abschlussphase der Arbeit mit Korrekturen und Anmerkungen sehr geholfen. Martin Böckenfeld hat das Bild in Abb. 5.1 für mich erstellt. Auch dafür möchte ich mich herzlich bedanken.

Ganz wichtig war für mich auch der Rückhalt meiner Familie und meiner Freunde. Deshalb möchte ich die Gelegenheit nutzen und den Menschen danken, die mich in allen Höhen und Tiefen der letzten Jahre begleitet haben.

Garching, im April 2007

Sylvia Breun



# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>1 Mehrkörpersysteme</b>	<b>4</b>
1.1 Bewegungsgleichungen aus der Starrkörperdynamik . . . . .	4
1.2 Differential-algebraische Systeme . . . . .	6
1.3 Modellierung mehrgelenkiger Roboter . . . . .	10
<b>2 Optimalsteuerung</b>	<b>17</b>
2.1 Grundaufgabe mit Steuerbeschränkungen . . . . .	17
2.2 Bang-Bang- und singuläre Steuerung . . . . .	22
2.3 Zustandsbeschränkungen . . . . .	23
2.4 Numerische Lösung von Optimalsteuerungsproblemen . . . . .	26
2.5 Optimale Steuerung differential-algebraischer Systeme . . . . .	30
<b>3 Transformationstechniken für die optimale Robotersteuerung</b>	<b>33</b>
3.1 Optimale Robotersteuerung in der Literatur . . . . .	34
3.2 Charakterisierung der Bewegungsgleichungen . . . . .	36
3.3 Bewegungsgleichungen in Minimalform . . . . .	38
3.4 Neuformulierung der Optimalsteuerungsaufgabe . . . . .	42
<b>4 Strukturanalyse optimaler Robotersteuerungen</b>	<b>46</b>
4.1 Energieoptimale Steuerung . . . . .	47
4.2 Zeitoptimale Steuerung . . . . .	51

<b>5 Numerische Ergebnisse</b>	<b>61</b>
5.1 Optimalsteuerungsaufgabe mit redundantem 4-Achs-Roboter . . . . .	62
5.2 Transformation in Minimalkoordinaten . . . . .	65
5.3 Zeitoptimale Lösung . . . . .	66
5.4 Energieoptimale Lösung . . . . .	72
<b>A Abbildungen zum Beispiel aus Kapitel 5.3</b>	<b>75</b>
<b>B Abbildungen zum Beispiel aus Kapitel 5.4</b>	<b>77</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>79</b>

# Einleitung

In vielen Bereichen der Industrie und Forschung sind Roboter heute unverzichtbar geworden. Mobile Roboter, die mit einer großen Anzahl von Sensoren ausgestattet sind, erkunden fremde oder unzugängliche Umgebungen und finden auch im Dienstleistungssektor, z.B. als Serviceroboter, Anwendung. Zu den vielfältigen Einsatzmöglichkeiten von Industrierobotern (Bsp. s. Abb. 1) zählen unter anderem Schweißen, Lackieren und Montieren von Bauteilen in der Fertigung. Um die Kapazitäten solcher Industrieroboter möglichst gut auszunutzen und eine hohe Produktivität zu erreichen, werden die einzelnen Bewegungsabläufe optimiert. Dies führt auf Optimalsteuerungsprobleme, wobei in der Literatur zwischen Punkt-zu-Punkt-Bewegungen und Bewegungen entlang einer vorgegebenen Bahn unterschieden wird. Letztere erfordern die Behandlung differential-algebraischer Systeme mit differentiellem Index 3.

In der vorliegenden Arbeit werden Bewegungsabläufe auf beliebigen Untermanigfaltigkeiten des Gelenkraums eines Industrieroboters untersucht, was Bewegungen entlang einer vorgegebenen Bahn und Punkt-zu-Punkt-Bewegungen einschließt. Es wird ein neuer Ansatz zur Behandlung dieser Optimalsteuerungsprobleme entwickelt, der auf der Transformation in eine problemangepasste, lokale Minimalform basiert (Kapitel 3). Er ermöglicht eine einheitliche theoretische und numerische Behandlung der genannten Robotersteuerungsaufgaben einschließlich nicht-autonomer Probleme. Die Grundlage für eine numerische Lösung bildet eine genaue Analyse der Lösungsstruktur, die exemplarisch für energie- und zeitoptimale Steuerungen durchgeführt wird (Kapitel 4).

Mathematisch von besonderem Interesse sind dabei zeitoptimale Steuerungen redundanter Roboter. Die Schwierigkeiten bei deren Berechnung resultieren neben den auftretenden Bang-Bang-Strukturen und möglichen singulären Steuerungen auch aus dem Vorhandensein mehrerer unabhängiger Steuervariablen. Nach der Transformation in Minimalkoordinaten



Abbildung 1: Industrieroboter (Bildquelle: [105]).

ten liegen für diese Variablen verkoppelte Beschränkungen vor, von denen zu jedem Zeitpunkt mindestens eine aktiv ist. Daher können für die Steuervariablen keine unabhängigen Steuergesetze formuliert werden, und die Schaltstruktur lässt sich mit den bekannten Techniken aus der Optimalsteuerungstheorie nicht ermitteln.

Bisher gelang die Berechnung der Steuerung in diesem Fall nur mit direkten Verfahren, die durch Diskretisierung das unendlichdimensionale Optimalsteuerungsproblem auf ein großes, endlichdimensionales Optimierungsproblem zurückführen. Charakter und Struktur des Optimalsteuerungsproblems gehen dabei weitgehend verloren. Vereinzelt werden Techniken der Variationsrechnung eingesetzt, allerdings nur, um vorhandene Näherungslösungen für die Steuerungen schrittweise zu verbessern. Indirekte Verfahren, welche notwendige Bedingungen aus der Optimalsteuerungstheorie auswerten und anschließend ein Mehrpunkt-Randwertproblem lösen, können Ergebnisse mit höherer Genauigkeit liefern. Allerdings bedarf es dafür einer genauen Kenntnis der Schaltstruktur.

Durch die Darstellung der optimalen Steuerung als Lösung eines linearen Optimierungsproblems wird in der vorliegenden Arbeit die Berechnung zeitoptimaler Steuerungen für redundante Roboter auch mit indirekten Verfahren möglich gemacht. Die Analyse der Lösungsstruktur basiert hierbei auf der Kombination der Optimalsteuerungstheorie mit der Theorie der linearen Optimierung und liefert detaillierte Aussagen über die aktiven Beschränkungen zu jedem Zeitpunkt.

Am Beispiel eines vierachsigen Roboters wird die numerische Realisierung über einen indirekten Ansatz für zeit- und energieminimale Trajektorien demonstriert (Kapitel 5). Dabei werden für diese Problemklasse erstmals auch Zustandsbeschränkungen exakt berücksichtigt. Zur genauen und effizienten Auswertung der adjungierten Differentialgleichungen werden rekursive Algorithmen eingesetzt. Die Lösung des zugehörigen Mehrpunkt-Randwertproblems erfolgt mit der Mehrzielmethode JANUS [19].

In **Kapitel 1** der vorliegenden Arbeit werden verschiedene Darstellungsformen der Bewegungsgleichungen starrer Mehrkörpersysteme diskutiert, wobei besonders auf deren differential-algebraischen Charakter eingegangen wird. Mehrgelenkige Industrieroboter lassen sich als starre Mehrkörpersysteme mit Baumstruktur modellieren. Für sie wird zur Herleitung und Auswertung der Bewegungsgleichungen ein rekursiver Algorithmus vorgestellt.

**Kapitel 2** gibt einen Überblick über die Optimalsteuerungstheorie und numerische Verfahren zum Lösen von Optimalsteuerungsproblemen.

Für die angesprochene Klasse von Steuerungsaufgaben in der Robotik wird in **Kapitel 3** nach einer Untersuchung der Bewegungsgleichungen eine, auf einer Transformation in Minimalkoordinaten basierende, einheitliche Formulierung erzielt.

Die Analyse der Lösungsstruktur ist Inhalt von **Kapitel 4**. Bei energieoptimalen Bahnen wird die Berechnung der Steuerung auf das Lösen linearer Gleichungssysteme zurückgeführt. Im Falle zeitoptimaler Bahnen werden zunächst Aussagen über



die Anzahl aktiver Beschränkungen bewiesen. Weitere Struktureigenschaften werden aus der Darstellung der optimalen Steuerung als Lösung eines linearen Minimierungsproblems abgeleitet.

In **Kapitel 5** werden für einen kinematisch redundanten 4-Achs-Roboter mit vorgegebener Bahn für den Endeffektor zeit- und energieoptimale Steuerungen über einen indirekten Ansatz berechnet. Beim Aufstellen des zugehörigen Mehrpunkt-Randwertproblems wird besonders auf die Übergangsbedingungen an Schaltpunkten und bei aktiven Zustandsbeschränkungen eingegangen. Daneben werden einige Aspekte zur numerischen Realisierung angesprochen. Eine Diskussion der Ergebnisse, die alle theoretisch vorhergesagten Struktureigenschaften aufweisen, schließt das Kapitel ab.

# Kapitel 1

## Mehrkörpersysteme

Zur Beschreibung von mechanischen Systemen, wie z.B. Fahrzeugen oder Robotern, wird häufig die *Methode der Mehrkörpersysteme* eingesetzt. Ein Mehrkörpersystem besteht dabei aus endlich vielen massebehafteten Körpern, die starr oder elastisch sein können, und untereinander durch als masselos angenommene Verbindungselemente in Wechselwirkung stehen. Solche Verbindungselemente sind zum einen Kraftelemente, wie Federn oder Dämpfer, zum anderen starre Kopplungen oder Gelenke, welche die Anzahl der Freiheitsgrade reduzieren und Zwangskräfte hervorrufen.

Diese Arbeit befasst sich ausschließlich mit *starr*en mechanischen Mehrkörpersystemen. Deren Bewegung wird, je nach Wahl der Koordinaten und der Struktur des Systems, durch gewöhnliche Differentialgleichungen oder differential-algebraische Gleichungen beschrieben. Werden einzelne Körper als elastisch angenommen, gelangt man zur Klasse der *flexiblen* Mehrkörpersysteme. Zur Formulierung der Bewegungsgleichungen sei hierfür beispielsweise auf [11] oder [88] verwiesen.

In diesem Kapitel werden die verschiedenen Darstellungsformen der Bewegungsgleichungen starrer Mehrkörpersysteme vorgestellt und diskutiert, wobei besonders auf die Problematik der differential-algebraischen Gleichungen eingegangen wird. Um die Bewegungsgleichungen aufzustellen, wird für mehrachsige serielle Roboter eine rekursive Modellierung betrachtet, die vorteilhaft für die spätere Behandlung mit den Methoden der optimalen Steuerung ist.

### 1.1 Bewegungsgleichungen aus der Starrkörperdynamik

In der Regel unterliegt ein mechanisches Mehrkörpersystem Zwangsbedingungen, die sich aus der Kopplung der einzelnen Teilkörper durch Gelenke oder andere Verbindungselemente ergeben. Man unterscheidet dabei zwischen *holonomen* und *nichtholonomen* sowie zwischen *skleronomen* und *rheonomen* Zwangsbedingungen. Holono-

me Zwangsbedingungen hängen nur von den Lagekoordinaten ab, während nichtholonome Zwangsbedingungen auch von den Geschwindigkeiten abhängen und nicht durch elementare Integration in holonome Bindungen überführt werden können. Außerdem bezeichnet man Bindungsgleichungen als rheonom oder skleronom, je nachdem ob die Zeit explizit darin vorkommt oder nicht.

Ein einzelner, im Raum frei beweglicher, starrer Körper hat sechs Bewegungsfreiheitsgrade: drei rotatorische und drei translatorische. Lage und Orientierung bezüglich eines beliebigen Koordinatensystems werden durch die Angabe von sechs Lagekoordinaten eindeutig festgelegt. Durch das Auftreten von Zwangsbedingungen wird die Bewegungsfreiheit der Teilkörper eines Mehrkörpersystems jedoch eingeschränkt. Für die Anzahl der Bewegungsfreiheitsgrade  $n_f$  eines Systems von  $N$  starren Körpern gilt daher stets  $n_f \leq 6N$ . Einen Satz von  $n_f$  voneinander unabhängigen Koordinaten, welche die Lage des Systems eindeutig beschreiben, nennt man *Minimalkoordinaten* oder auch *verallgemeinerte* oder *generalisierte Koordinaten*. Sie stellen die kleinstmögliche Zahl von Koordinaten dar, mit denen man das System vollständig beschreiben kann. Von ihnen werden die Zwangsbedingungen automatisch erfüllt und die Bewegung des Mehrkörpersystems wird durch ein *System gewöhnlicher Differentialgleichungen* der folgenden Form beschrieben:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (1.1)$$

mit den von der Zeit  $t$  abhängigen verallgemeinerten Lagekoordinaten  $\mathbf{q}(t) \in \mathbb{R}^{n_f}$ , den Geschwindigkeiten  $\dot{\mathbf{q}}(t) \in \mathbb{R}^{n_f}$ , den Beschleunigungen  $\ddot{\mathbf{q}}(t) \in \mathbb{R}^{n_f}$ , der Massenmatrix  $\mathbf{M}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n_f \times n_f}$  und dem Vektor der eingepprägten und äußeren Kräfte  $\mathbf{f}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n_f}$ .

Die Beschreibung eines Systems kann auch mit  $n_p > n_f$  redundanten Koordinaten erfolgen. Noch nicht automatisch erfüllte Zwangsbedingungen müssen dann in Form von zusätzlichen Nebenbedingungen berücksichtigt werden. Aus holonom-skleronomen Zwangsbedingungen ergeben sich algebraische Nebenbedingungen der Form

$$\mathbf{g}(\mathbf{p}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n_\lambda}$$

mit den redundanten Lagekoordinaten  $\mathbf{p}(t) \in \mathbb{R}^{n_p}$  und  $n_\lambda < n_p$ . Damit bilden die Bewegungsgleichungen ein *differential-algebraisches Gleichungssystem*, in dem zusätzlich die *Zwangsmatrix*  $\mathbf{G}(\mathbf{p}) := \partial \mathbf{g}(\mathbf{p}) / \partial \mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n_\lambda \times n_p}$  mittels *Lagrangemultiplikatoren*  $\bar{\boldsymbol{\lambda}}(t) \in \mathbb{R}^{n_\lambda}$  angekoppelt wird:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{M}}(\mathbf{p})\ddot{\mathbf{p}} &= \bar{\mathbf{f}}(t, \mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}) - \mathbf{G}^T(\mathbf{p})\bar{\boldsymbol{\lambda}} \\ \mathbf{g}(\mathbf{p}) &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (1.2)$$

mit  $\mathbf{p}(t), \dot{\mathbf{p}}(t), \ddot{\mathbf{p}}(t) \in \mathbb{R}^{n_p}$ ,  $\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{p}) \in \mathbb{R}^{n_p \times n_p}$  und  $\bar{\mathbf{f}}(t, \mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}) \in \mathbb{R}^{n_p}$ . Die Zusatzglieder  $\mathbf{G}^T(\mathbf{p})\bar{\boldsymbol{\lambda}}$  repräsentieren dabei die infolge der holonom-skleronomen Zwangsbedingungen  $\mathbf{g}(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$  entstehenden Zwangskräfte. Durch die Zwangsbedingungen selbst wird eine Mannigfaltigkeit definiert, auf der sich das System frei bewegen kann. Für die Anzahl der Freiheitsgrade gilt  $n_f = n_p - n_\lambda$ .

Auf nichtholonome und rheonome Zwangsbedingungen soll in dieser Arbeit nicht weiter eingegangen werden. Wie die Bewegungsgleichungen in diesen Fällen zu erweitern sind, wird beispielsweise in [81] beschrieben.

Die Herleitung der Bewegungsgleichungen erfolgt aus den Prinzipien der Mechanik. Auf die hierfür zur Verfügung stehenden Formalismen wird in Kapitel 1.3 näher eingegangen. Sie führen alle zu äquivalenten Ergebnissen mit der gleichen Grundstruktur. Die Darstellung (1.2) bezeichnet man als *Deskriptorform*, die Darstellung (1.1) als *Minimal-* oder *Zustandsform* der Bewegungsgleichungen.

In der Deskriptorform sind die  $n_p$  Lagekoordinaten  $\mathbf{p}$  redundant. Aufgrund der  $n_\lambda$  Zwangsbedingungen besitzt das System nur noch  $n_f = n_p - n_\lambda$  Freiheitsgrade. Die Zustandsform geht dagegen von einer Beschreibung des Systems in Minimalkoordinaten aus, welche die Zwangsbedingungen bereits automatisch erfüllen. Sie birgt weniger numerische Schwierigkeiten, da keine algebraischen Nebenbedingungen mehr auftreten. Für komplizierte Systeme, insbesondere solche mit kinematisch geschlossenen Schleifen, ist es aber zum Teil äußerst schwierig und oft nur lokal möglich, Minimalkoordinaten zu finden. Daher wird auch häufig die Deskriptorform verwendet. Vor allem für Simulationsprogramme, in denen die Bewegungsgleichungen automatisch generiert werden, ist sie von großer Bedeutung.

## 1.2 Differential-algebraische Systeme

Die Bewegungsgleichungen in Deskriptorform (1.2) bilden ein differential-algebraisches Gleichungssystem. Sie unterscheiden sich in wesentlichen Eigenschaften von den gewöhnlichen Differentialgleichungen der Zustandsform (1.1), sowohl was die theoretische, als auch was die numerische Behandlung angeht.

Für einen Überblick über den Stand der Forschung bei differential-algebraischen Gleichungen siehe [12, 47, 48, 49, 65]. Als Beispiele für Arbeiten, die sich speziell mit der numerischen Integration mechanischer Mehrkörpersysteme befassen, seien [38, 80, 91, 92] genannt. Im Folgenden soll anhand des Indexbegriffs die Problematik differential-algebraischer Gleichungen in der Mehrkörperdynamik dargestellt werden.

### 1.2.1 Indexdefinitionen

Zur Klassifizierung von differential-algebraischen Gleichungen dient der Begriff des *Index*. Er charakterisiert den Unterschied zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung und die damit verbundenen Schwierigkeiten bei der Lösung. Je kleiner der Index, desto ähnlicher ist die differential-algebraische Gleichung einer gewöhnlichen Differentialgleichung und desto unproblematischer ist die numerische Behandlung. In der Literatur gibt es eine Vielzahl von verschiedenen Indexdefinitionen. Die derzeit am weitesten verbreiteten Konzepte, der *differentielle Index* [24, 42, 43] und

der *Störungsindex* [48] werden im Folgenden vorgestellt. Dazu wird das allgemeine Differentialgleichungssystem

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{F} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}, \quad (1.3)$$

mit möglicherweise singulärer Funktionalmatrix  $\partial \mathbf{F} / \partial \dot{\mathbf{x}}$  betrachtet.

**Definition 1.1 (Differenzieller Index)** *Der differentielle Index  $k_d$  des Systems (1.3) ist die kleinste Zahl  $j$ , für die das Gleichungssystem*

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) &= \mathbf{0} \\ \frac{d\mathbf{F}}{dt}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}) &= \mathbf{0} \\ &\vdots \\ \frac{d^j \mathbf{F}}{dt^j}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \dots, \mathbf{x}^{(j+1)}) &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

*eindeutig nach  $\dot{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x})$  aufgelöst werden kann.*

Der differentielle Index ist also die minimale Anzahl an Differentiationen, die benötigt werden, um (1.3) in ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem zu überführen. Nach obiger Definition haben gewöhnliche Differentialgleichungen den Index  $k_d = 0$ .

Bei einem *semi-expliziten* differential-algebraischen System

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{F}_1(t, \mathbf{z}, \mathbf{y}), & \mathbf{F}_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n_z} \times \mathbb{R}^{n_y} &\rightarrow \mathbb{R}^{n_y}, \\ \mathbf{0} &= \mathbf{F}_2(t, \mathbf{z}, \mathbf{y}), & \mathbf{F}_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n_z} \times \mathbb{R}^{n_y} &\rightarrow \mathbb{R}^{n_z}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

kann man zwischen *algebraischen Variablen*  $\mathbf{z}$ , deren Ableitungen in (1.4) nicht auftreten, und *differentiellen Variablen*  $\mathbf{y}$  trennen. Zur Indexbestimmung genügt es hier, den algebraischen Teil  $\mathbf{F}_2(t, \mathbf{z}, \mathbf{y})$  zu differenzieren.

Einen alternativen Zugang bietet der Störungsindex, welcher die Empfindlichkeit der Lösungen von (1.3) gegenüber kleinen Störungen misst.

**Definition 1.2 (Störungsindex)** *Das System (1.3) hat entlang einer Lösung  $\mathbf{x}(t)$  im Intervall  $[t_0, t_1]$  den Störungsindex  $k_s \geq 1$ , falls  $k_s$  die kleinste Zahl ist, für die jede Lösung  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  des gestörten Systems*

$$\mathbf{F}(t, \hat{\mathbf{x}}, \dot{\hat{\mathbf{x}}}) = \boldsymbol{\delta}(t)$$

*eine Abschätzung der Form*

$$\|\hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t)\| \leq C \left( \|\hat{\mathbf{x}}(t_0) - \mathbf{x}(t_0)\| + \max_{t_0 \leq \tilde{t} \leq t} \|\boldsymbol{\delta}(\tilde{t})\| + \dots + \max_{t_0 \leq \tilde{t} \leq t} \|\boldsymbol{\delta}^{(k_s-1)}(\tilde{t})\| \right)$$

erfüllt, wann immer der Ausdruck auf der rechten Seite hinreichend klein ist.  $C$  ist dabei eine Konstante, die unabhängig von der Störung  $\boldsymbol{\delta}(t)$  ist und nur von  $\mathbf{F}$  und der Länge des Intervalls abhängt. Das System (1.3) hat den Störungsindex  $k_s = 0$ , falls folgende Abschätzung gilt:

$$\|\hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t)\| \leq C \left( \|\hat{\mathbf{x}}(t_0) - \mathbf{x}(t_0)\| + \max_{t_0 \leq \tilde{t} \leq t} \left\| \int_{t_0}^{\tilde{t}} \boldsymbol{\delta}(\tau) d\tau \right\| \right).$$

Die letzte Abschätzung charakterisiert das Verhalten gewöhnlicher Differentialgleichungen unter kleinen Störungen. Bei differential-algebraischen Gleichungen von höherem Index gehen in die Abschätzung auch Ableitungen der Störung ein. Das bedeutet, dass kleine, vor allem hochfrequente Störungen verstärkt werden. Derartige Störungen sind bei numerischen Rechnungen in Form von Rundungs- oder Diskretisierungsfehlern unvermeidbar. Daher ergeben sich zum Teil erhebliche Schwierigkeiten bei der numerischen Behandlung differential-algebraischer Systeme vom Index  $k_s \geq 2$ . Diese Probleme sind *schlecht gestellt*.

**Bemerkung:** Bei einem semi-expliziten System (1.4) sind der differentielle Index und der Störungsindex gleich [42, 48].

## 1.2.2 Charakterisierung der Deskriptorform mechanischer Mehrkörpersysteme

Nach Einführung der *Geschwindigkeitsvariablen*  $\mathbf{v}(t) := \dot{\mathbf{p}}(t)$  und Transformation in ein System erster Ordnung hat die Deskriptorform (1.2) eines mechanischen Mehrkörpersystems folgende Gestalt:

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{v} \quad (1.5)$$

$$\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{p})\dot{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{f}}(t, \mathbf{p}, \mathbf{v}) - \mathbf{G}^T(\mathbf{p})\bar{\boldsymbol{\lambda}} \quad (1.6)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{p}) = \mathbf{0} \quad (1.7)$$

Dabei werde vorausgesetzt, dass

- die Massenmatrix  $\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{p})$  regulär ist,
- die Matrix  $\mathbf{G}(\mathbf{p})$  vollen Rang hat, d.h. nichtredundante Zwangsbedingungen vorliegen.

Unter diesen Voraussetzungen ist (1.5)–(1.7) ein semi-explizites differential-algebraisches Gleichungssystem mit den algebraischen Variablen  $\bar{\boldsymbol{\lambda}}$  und den differentiellen Variablen  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{v}$ . Um den differentiellen Index zu bestimmen, wird der algebraische Teil (1.7) nach der Zeit  $t$  abgeleitet. Dies führt auf die Geschwindigkeitsnebenbedingungen

$$\mathbf{0} = \frac{d}{dt}\mathbf{g}(\mathbf{p}) = \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}}\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{G}(\mathbf{p})\mathbf{v}. \quad (1.8)$$

Erneutes Differenzieren liefert die Beschleunigungsnebenbedingungen

$$\mathbf{0} = \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{g}(\mathbf{p}) = \mathbf{G}(\mathbf{p}) \dot{\mathbf{v}} + \dot{\mathbf{G}}(\mathbf{p}, \mathbf{v}) \mathbf{v}$$

mit der Matrix  $\dot{\mathbf{G}}(\mathbf{p}, \mathbf{v}) := \frac{d}{dt} \mathbf{G}(\mathbf{p})$ . Durch Einsetzen von  $\dot{\mathbf{v}}$  aus Gleichung (1.6) erhält man daraus Bedingungen für die Lagrangemultiplikatoren  $\bar{\boldsymbol{\lambda}}$ :

$$\mathbf{0} = \mathbf{G}(\mathbf{p}) \bar{\mathbf{M}}^{-1}(\mathbf{p}) \bar{\mathbf{f}}(t, \mathbf{p}, \mathbf{v}) - \mathbf{G}(\mathbf{p}) \bar{\mathbf{M}}^{-1}(\mathbf{p}) \mathbf{G}^T(\mathbf{p}) \bar{\boldsymbol{\lambda}} + \dot{\mathbf{G}}(\mathbf{p}, \mathbf{v}) \mathbf{v}. \quad (1.9)$$

Da die Matrix  $\mathbf{G}(\mathbf{p}) \bar{\mathbf{M}}^{-1}(\mathbf{p}) \mathbf{G}^T(\mathbf{p})$  nach obigen Voraussetzungen regulär ist, lässt sich (1.9) eindeutig nach  $\bar{\boldsymbol{\lambda}}$  auflösen und eine weitere Differentiation liefert schließlich Differentialgleichungen für die algebraischen Variablen  $\bar{\boldsymbol{\lambda}}$ . Die Deskriptorform (1.5)–(1.7) wurde also mit drei Differentiationsschritten in ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem überführt, d.h. sie hat den differentiellen Index 3.

Die Lösungen des so gewonnenen Differentialgleichungssystems stimmen aber nicht automatisch mit den Lösungen des differential-algebraischen Systems (1.5)–(1.7) überein. Um das zu garantieren, müssen Anfangswerte  $\mathbf{p}_0 := \mathbf{p}(t_0)$ ,  $\mathbf{v}_0 := \mathbf{v}(t_0)$ ,  $\bar{\boldsymbol{\lambda}}_0 := \bar{\boldsymbol{\lambda}}(t_0)$  zusätzlich zu den  $n_\lambda$  Lagenebenbedingungen (1.7) auch noch die  $2n_\lambda$  *verborgenen Nebenbedingungen* (1.8) und (1.9) erfüllen:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \mathbf{g}(\mathbf{p}_0), \\ \mathbf{0} &= \mathbf{G}(\mathbf{p}_0) \mathbf{v}_0, \\ \mathbf{0} &= \mathbf{G}(\mathbf{p}_0) \bar{\mathbf{M}}^{-1}(\mathbf{p}_0) \bar{\mathbf{f}}(t_0, \mathbf{p}_0, \mathbf{v}_0) - \mathbf{G}(\mathbf{p}_0) \bar{\mathbf{M}}^{-1}(\mathbf{p}_0) \mathbf{G}^T(\mathbf{p}_0) \bar{\boldsymbol{\lambda}}_0 + \dot{\mathbf{G}}(\mathbf{p}_0, \mathbf{v}_0) \mathbf{v}_0. \end{aligned}$$

Man spricht in diesem Fall von *konsistenten Anfangswerten*. Von den  $2n_p + n_\lambda$  Anfangswerten  $\mathbf{p}_0$ ,  $\mathbf{v}_0$ ,  $\bar{\boldsymbol{\lambda}}_0$  sind dann nur noch  $2n_p - 2n_\lambda$  frei wählbar. Das entspricht genau der Anzahl frei wählbarer Anfangswerte einer entsprechenden Zustandsform mit den  $n_p - n_\lambda$  Minimalkoordinaten  $\mathbf{q}$  und den  $n_p - n_\lambda$  Geschwindigkeiten  $\dot{\mathbf{q}}$ . Für Aussagen zur Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen kann nun auf die Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen zurückgegriffen werden.

Da es sich bei (1.5)–(1.7) um ein semi-explizites differential-algebraisches System handelt, ist der Störungsindex gleich dem differentiellen Index. Mechanische Mehrkörpersysteme in Deskriptorform haben also den Störungsindex 3 und sind damit schlecht gestellte Probleme. Nach [1] geht die zweite Ableitung einer Störung nur in die Abschätzungen für die Lagrangemultiplikatoren  $\bar{\boldsymbol{\lambda}}$  ein. Das bedeutet, dass diese besonders sensibel reagieren, wenn kleine, aber hochfrequente Störungen auftreten.

Der hohe Index der Bewegungsgleichungen in Deskriptorform bereitet große Schwierigkeiten bei der Anwendung numerischer Integrationsverfahren, wie auch bei der optimalen Steuerung derartiger Systeme. Sofern der Übergang zu Minimalkoordinaten möglich ist, können diese Schwierigkeiten durch eine Transformation in Zustandsform reduziert werden. Der Preis dafür ist oftmals das Zerstören systemspezifischer Strukturen und eine höhere Nichtlinearität, durch die sich die Bewegungsgleichungen in Zustandsform auszeichnen.



## 1.3 Modellierung mehrgelenkiger Roboter

Das Aufstellen der Bewegungsgleichungen ist für große Systeme sehr aufwändig und kaum noch von Hand durchzuführen. Inzwischen existiert jedoch eine große Vielfalt von Rechenprogrammen zur Gleichungsgenerierung, welche die Herleitung entweder symbolisch oder numerisch vollziehen. Beispiele dafür finden sich in [83]. Die meisten dieser Algorithmen basieren auf den *Lagrangegleichungen* oder dem *Newton-Euler-Formalismus*. Beide Verfahren werden im Folgenden kurz vorgestellt, wobei der Newton-Euler-Formalismus in einer auf mehrgelenkige, serielle Roboterstrukturen zugeschnittenen, rekursiven Formulierung angegeben wird. Für eine ausführliche Darstellung der Vorgehensweisen zur Gleichungsgenerierung sei beispielsweise auf [52] oder [81] verwiesen. Methoden zur Modellbildung und Herleitung der Bewegungsgleichungen speziell in der Robotik finden sich unter anderem in [29, 79, 94].

Vor dem Aufstellen der Bewegungsgleichungen steht noch die Wahl geeigneter Koordinaten zur Beschreibung des Systems. Für Mehrkörpersysteme mit Baumstruktur lässt sich stets ein globaler Satz von Minimalkoordinaten finden. Diese angenehme Eigenschaft haben auch Standard-Industrieroboter. Hier verwendet man häufig *Relativ-* oder *Gelenkkoordinaten*, die eine Formulierung der Bewegungsgleichungen in Zustandsform ermöglichen.

### 1.3.1 Relativkoordinaten

Ein Standard-Industrieroboter stellt ein starres mechanisches Mehrkörpersystem mit Baumstruktur dar. Er kann als eine offene, unverzweigte Kette von Roboterarmen betrachtet werden, die durch Dreh- oder Schubgelenke miteinander verbunden sind. Abb. 1.1 zeigt eine Beispielkonfiguration mit sechs rotatorischen Freiheitsgraden. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit habe ein Gelenk jeweils nur einen Bewegungsfreiheitsgrad. Die Anzahl der Gelenke, die dann der Anzahl der beweglichen Arme entspricht, sei  $N$ . Gelenke mit  $m_f > 1$  Freiheitsgraden können durch  $m_f$  Gelenke mit einem Freiheitsgrad, die durch Arme der Länge Null verbunden sind, modelliert werden. Damit ist in der folgenden Diskussion auch die Behandlung mobiler Roboter mit eingeschlossen.

Zunächst werden die beweglichen Roboterarme, ebenso wie die Gelenke, ausgehend von der Basis fortlaufend nummeriert und jedem Arm  $i$  wird ein körperfestes Koordinatensystem  $S_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) zugeordnet. Dieses ist so zu wählen, dass der Ursprung von  $S_i$  im Gelenk  $i$  liegt und die  $z$ -Achse mit der Gelenkachse zusammenfällt (vgl. Abb. 1.2).  $S_0$  bezeichne das raumfeste Inertialsystem und  $S_{N+1}$  das Koordinatensystem des Endeffektors. Transformationen zwischen den einzelnen Koordinatensystemen lassen sich mit Hilfe von Rotationsmatrizen und Translationsvektoren beschreiben. Eine Rotationsmatrix  ${}^{(i)}\mathbf{R}_{(i+1)} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  ( $i = 0, \dots, N$ ) gibt dabei die Drehung des Koordinatensystems  $S_{i+1}$  relativ zum Koordinatensystem  $S_i$  an, während der Translationsvektor  ${}^{(i)}\mathbf{t}_{(i+1)} \in \mathbb{R}^3$  ( $i = 0, \dots, N$ ) der Vektor vom



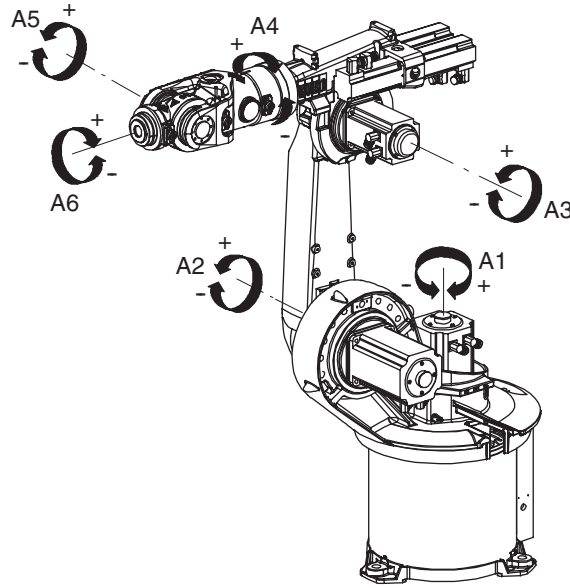


Abbildung 1.1: Beispiel eines Industrieroboters mit sechs Freiheitsgraden.

Ursprung von  $S_i$  zum Ursprung von  $S_{i+1}$  ist und somit die Verschiebung von  $S_{i+1}$  relativ zu  $S_i$  angibt. Es gilt dann folgende Transformationsformel:

$${}^{\langle i \rangle} \mathbf{r} = {}^{\langle i \rangle} \mathbf{R}_{\langle i+1 \rangle} {}^{\langle i+1 \rangle} \mathbf{r} + {}^{\langle i \rangle} \mathbf{t}_{\langle i+1 \rangle}, \quad (1.10)$$

wobei  ${}^{\langle i \rangle} \mathbf{r}$  und  ${}^{\langle i+1 \rangle} \mathbf{r}$  denselben Vektor bezeichnen, mit dem Unterschied, dass  ${}^{\langle i \rangle} \mathbf{r}$  im Koordinatensystem  $S_i$  und  ${}^{\langle i+1 \rangle} \mathbf{r}$  im Koordinatensystem  $S_{i+1}$  dargestellt wird. Der obere Index  $\langle i \rangle$  bezeichnet hier jeweils das Koordinatensystem, in dem der Vektor dargestellt ist. Da es sich bei Rotationsmatrizen um orthogonale Matrizen handelt, gilt außerdem

$${}^{\langle i+1 \rangle} \mathbf{R}_{\langle i \rangle} = {}^{\langle i \rangle} \mathbf{R}_{\langle i+1 \rangle}^{-1} = {}^{\langle i \rangle} \mathbf{R}_{\langle i+1 \rangle}^T.$$

Nun werden den durch die Rotations- und Translationsbewegungen der Gelenke in natürlicher Weise vorgegebenen Freiheitsgraden Koordinaten  $q_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) zugeordnet. Im Falle eines Drehgelenks ist  $q_i$  also der eingestellte Achswinkel und im Falle eines Schubgelenks die ausgefahrene Distanz (Abb 1.2). Diese *Gelenkkordinaten* repräsentieren einen minimalen Satz von Koordinaten, durch den die Lage des Roboters eindeutig bestimmt ist. Mit ihnen kann die Bewegung eines Roboterarmes  $i$  relativ zum Arm  $i - 1$  beschrieben werden. Ist das Gelenk  $i$  ein Drehgelenk, so ist die Rotationsmatrix  ${}^{\langle i-1 \rangle} \mathbf{R}_{\langle i \rangle}$  abhängig von der Koordinate  $q_i$ , während der Translationsvektor  ${}^{\langle i-1 \rangle} \mathbf{t}_{\langle i \rangle}$  konstant bleibt. Dagegen ist bei einem Schubgelenk  ${}^{\langle i-1 \rangle} \mathbf{R}_{\langle i \rangle}$  konstant und  ${}^{\langle i-1 \rangle} \mathbf{t}_{\langle i \rangle}$  abhängig von  $q_i$ .

Die Position des Endeffektors bezüglich des Inertialsystems  $S_0$  ergibt sich schließlich mit (1.10) in Abhängigkeit von den Gelenkkordinaten  $\mathbf{q} := (q_1, \dots, q_N)^T$  zu

$$\mathbf{r}(\mathbf{q}) = {}^{\langle 0 \rangle} \mathbf{R}_{\langle 1 \rangle} \left( \dots \left( {}^{\langle N-1 \rangle} \mathbf{R}_{\langle N \rangle} {}^{\langle N \rangle} \mathbf{t}_{\langle N+1 \rangle} + {}^{\langle N-1 \rangle} \mathbf{t}_{\langle N \rangle} \right) + \dots \right) + {}^{\langle 0 \rangle} \mathbf{t}_{\langle 1 \rangle}. \quad (1.11)$$

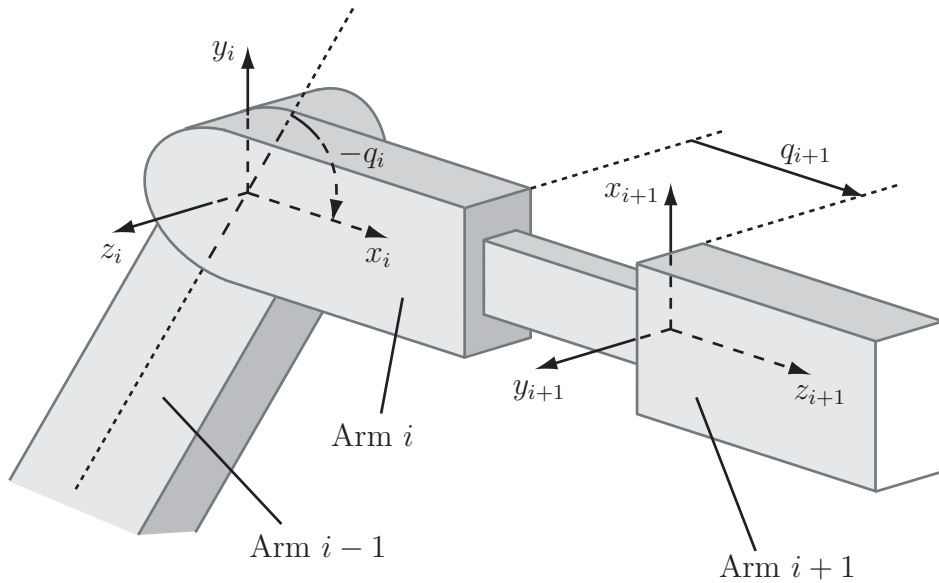


Abbildung 1.2: Wahl der Koordinatensysteme und der Gelenkkoordinaten.

Das Problem, die Position (und bei mehr als drei Achsen auch die Orientierung) des Endeffektors in kartesischen Koordinaten in Abhängigkeit von den einstellbaren Gelenkkoordinaten zu bestimmen, wird auch als *Vorwärtskinematik*, *direkte Kinematik* oder *Vorwärtslösung* bezeichnet. Das inverse Problem, die Bestimmung der Gelenkkoordinaten zu einer gegebenen Position (und ggf. Orientierung) des Endeffektors, nennt man *inverse Kinematik* oder *Rückwärtslösung*.

Sofern  $\mathbf{r}(\mathbf{q})$  nicht in geschlossener Form vorliegt, gewinnt man aus (1.11) eine Rekursionsformel zur numerischen Auswertung. In Kapitel 5 werden auch Ableitungen von  $\mathbf{r}(\mathbf{q})$  nach den Variablen  $q_i$  benötigt. Deren Berechnung ist ebenfalls rekursiv möglich und gestaltet sich sehr einfach, da jede Koordinate  $q_i$  entweder nur in der Rotationsmatrix  ${}^{(i-1)}\mathbf{R}_{(i)}$  oder im Translationsvektor  ${}^{(i-1)}\mathbf{t}_{(i)}$  vorkommt.

**Bemerkung:** Um die Übergänge zwischen den Koordinatensystemen zu beschreiben, wird in der Roboterkinematik häufig die sogenannte *Denavit-Hartenberg-Notation* [30] eingesetzt. Sie erfasst Translation und Rotation zusammen und gibt die Lage und Orientierung eines Roboterarmes relativ zu einem benachbarten Arm über vier genau spezifizierte Parameter an. Aus diesen Denavit-Hartenberg-Parametern lässt sich ebenfalls ein Satz von Minimalkoordinaten extrahieren, der bei entsprechender Wahl der Koordinatensysteme mit den hier beschriebenen Gelenkkoordinaten übereinstimmt.

### 1.3.2 Herleitung der Bewegungsgleichungen

Wird ein Mehrkörpersystem unter holonom-skleronomen Zwangsbedingungen mit den redundanten Koordinaten  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n_p}$  beschrieben, so kann die Bewegung mit den

*Lagrangegleichungen 1. Art* angegeben werden:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{p}}} \bar{K}(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}) \right) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \bar{K}(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}) = \bar{\mathbf{Q}}^T(t, \mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}) - \bar{\boldsymbol{\lambda}}^T \mathbf{G}(\mathbf{p}) \quad (1.12)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$$

mit den verallgemeinerten Kräften  $\bar{\mathbf{Q}}(t, \mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}) \in \mathbb{R}^{n_p}$  und der kinetischen Energie  $\bar{K}(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}) \in \mathbb{R}$  des Gesamtsystems. Die Zwangsbedingungen werden durch algebraische Gleichungen  $\mathbf{g}(\mathbf{p}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n_\lambda}$  ausgedrückt und die sich daraus ergebenden Zwangskräfte werden durch Ankoppeln der Zwangsmatrix  $\mathbf{G}(\mathbf{p}) \in \mathbb{R}^{n_\lambda \times n_p}$  mittels Lagrangemultiplikatoren  $\bar{\boldsymbol{\lambda}} \in \mathbb{R}^{n_\lambda}$  berücksichtigt. Ausdifferenzieren und Transponieren von (1.12) führt zu den Bewegungsgleichungen in Deskriptorform (1.2) mit der symmetrischen Massenmatrix

$$\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{p}) := \frac{\partial^2}{\partial \dot{\mathbf{p}}^2} \bar{K}(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}})$$

und dem Vektor der eingprägten und äußeren Kräfte

$$\bar{\mathbf{f}}(t, \mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}) := \bar{\mathbf{Q}}(t, \mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}) - \left( \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{p} \partial \dot{\mathbf{p}}} \bar{K}(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}) \right) \dot{\mathbf{p}} + \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \bar{K}(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}) \right)^T.$$

Liegt eine Beschreibung des Systems in Minimalkoordinaten  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{n_f}$  vor, so erhält man entsprechend die Bewegungsgleichungen in Zustandsform (1.1) aus den *Lagrangegleichungen 2. Art*:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{Q}^T(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$$

mit den verallgemeinerten Kräften  $\mathbf{Q}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n_f}$  und der kinetischen Energie  $K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}$ .

Eine andere Möglichkeit, die Bewegungsgleichungen eines Mehrkörpersystems zu generieren, liefert der *Newton-Euler-Formalismus*. Im Gegensatz zu den Lagrangegleichungen, in denen das Mehrkörpersystem als Ganzes behandelt wird, werden beim Newton-Euler-Formalismus nacheinander Gleichungen für die Bewegung der einzelnen Teilkörper aufgestellt. Verbindungen der Teilkörper mit Gelenken werden jeweils durch Kopplungskräfte und -momente in den Gleichungen benachbarter Teilkörper realisiert. Daraus ergibt sich direkt die Möglichkeit einer rekursiven Auswertung. Zudem kann die im vorherigen Abschnitt beschriebene grundsätzliche Struktur von Industrierobotern ausgenutzt werden, um einen für beliebige Roboterkonfigurationen einheitlichen Algorithmus anzugeben. Dazu werden nachstehende Bezeichnungen für  $i = 1, \dots, N$  eingeführt:

- $\boldsymbol{\omega}_i$ : Winkelgeschwindigkeit von Arm  $i$ ,
- $\dot{\boldsymbol{\omega}}_i$ : Winkelbeschleunigung von Arm  $i$ ,
- $\mathbf{a}_i$ : lineare Beschleunigung des Gelenks  $i$ ,
- $\mathbf{a}_{C_i}$ : lineare Beschleunigung des Schwerpunkts von Arm  $i$ ,
- $\mathbf{F}_{C_i}$ : Vektor der Kräfte im Schwerpunkt von Arm  $i$ ,
- $\mathbf{N}_{C_i}$ : Vektor der Momente im Schwerpunkt von Arm  $i$ ,
- $\mathbf{F}_i$ : Vektor der Kräfte im Gelenk  $i$ ,

- $\mathbf{N}_i$ : Vektor der Momente im Gelenk  $i$ ,  
 $m_i$ : Masse von Arm  $i$ ,  
 $\mathbf{t}_{C_i}$ : Schwerpunkt von Arm  $i$ ,  
 $\mathbf{I}_i$ : Hauptträgheitstensor von Arm  $i$ , bezogen auf ein Koordinatensystem, dessen Ursprung im Schwerpunkt von Arm  $i$  liegt und das die gleiche Orientierung wie das Koordinatensystem  $S_i$  hat,  
 $T_i$ : Antriebsmoment im Gelenk  $i$ , falls es sich um ein Drehgelenk handelt bzw. Antriebskraft im Gelenk  $i$ , falls es sich um ein Schubgelenk handelt,  
 $\hat{\delta}_i$ :  $\hat{\delta}_i = \begin{cases} 1 & \text{für ein translatorisches Gelenk } i, \\ 0 & \text{für ein rotatorisches Gelenk } i, \end{cases}$   
 $\mathbf{e}_z$ :  $\mathbf{e}_z := (0, 0, 1)^T$ .

Diese Bezeichnungen werden ergänzt um  $\boldsymbol{\omega}_0, \dot{\boldsymbol{\omega}}_0, \mathbf{a}_0$ , die die Winkelgeschwindigkeit, Winkelbeschleunigung und lineare Beschleunigung der Roboterbasis bezeichnen, und um die äußeren Kräfte und Momente  $\mathbf{F}_{N+1}, \mathbf{N}_{N+1}$ , die auf den Endeffektor wirken. Des Weiteren gelten die Bezeichnungen und Konventionen aus Kapitel 1.3.1.

Der Algorithmus berechnet nun für einen  $N$ -gelenkigen Roboter in zwei Schritten die Antriebskräfte bzw. -momente  $\mathbf{T} := (T_1, \dots, T_N)^T$ , die in den Gelenken aufgebracht werden müssen, um eine bestimmte Bewegung  $\mathbf{q}(t)$  zu bewirken. In Abhängigkeit von  $q_i, \dot{q}_i$  und  $\ddot{q}_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) werden zuerst die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der einzelnen Arme rekursiv von Arm 1 bis Arm  $N$  bestimmt und auf jeden Arm die Newton-Euler-Gleichungen angewendet. In einer zweiten Rekursion werden dann rückwärts von Arm  $N$  bis Arm 1 die Kopplungskräfte und -momente sowie die Antriebskräfte bzw. -momente in den jeweiligen Gelenken ermittelt.

### Rekursiver Newton-Euler-Algorithmus

1. Vorwärtsrekursion:

$$\text{Startwerte: } \langle^0\rangle\boldsymbol{\omega}_0, \langle^0\rangle\dot{\boldsymbol{\omega}}_0, \langle^0\rangle\mathbf{a}_0$$

$$\text{Rekursion: } i : 1 \rightarrow N$$

$$\begin{aligned}
 \langle^i\rangle\boldsymbol{\omega}_i &= \langle^i\rangle\mathbf{R}_{\langle i-1\rangle} \langle^{i-1}\rangle\boldsymbol{\omega}_{i-1} + (1 - \hat{\delta}_i)\dot{q}_i\mathbf{e}_z \\
 \langle^i\rangle\dot{\boldsymbol{\omega}}_i &= \langle^i\rangle\mathbf{R}_{\langle i-1\rangle} \langle^{i-1}\rangle\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1} + \\
 &\quad (1 - \hat{\delta}_i) \left( \langle^i\rangle\mathbf{R}_{\langle i-1\rangle} \langle^{i-1}\rangle\boldsymbol{\omega}_{i-1} \right) \times \dot{q}_i\mathbf{e}_z + \ddot{q}_i\mathbf{e}_z \\
 \langle^i\rangle\mathbf{a}_i &= \langle^i\rangle\mathbf{R}_{\langle i-1\rangle} \left( \langle^{i-1}\rangle\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1} \times \langle^{i-1}\rangle\mathbf{t}_{\langle i\rangle} + \right. \\
 &\quad \left. \langle^{i-1}\rangle\boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \left( \langle^{i-1}\rangle\boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \langle^{i-1}\rangle\mathbf{t}_{\langle i\rangle} \right) + \langle^{i-1}\rangle\mathbf{a}_{i-1} \right) + \\
 &\quad \hat{\delta}_i \left( 2 \langle^i\rangle\boldsymbol{\omega}_i \times \dot{q}_i\mathbf{e}_z + \ddot{q}_i\mathbf{e}_z \right) \\
 \langle^i\rangle\mathbf{a}_{C_i} &= \langle^i\rangle\dot{\boldsymbol{\omega}}_i \times \langle^i\rangle\mathbf{t}_{C_i} + \langle^i\rangle\boldsymbol{\omega}_i \times \left( \langle^i\rangle\boldsymbol{\omega}_i \times \langle^i\rangle\mathbf{t}_{C_i} \right) + \langle^i\rangle\mathbf{a}_i \\
 \langle^i\rangle\mathbf{F}_{C_i} &= m_i \langle^i\rangle\mathbf{a}_{C_i} \\
 \langle^i\rangle\mathbf{N}_{C_i} &= \mathbf{I}_i \langle^i\rangle\dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \langle^i\rangle\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{I}_i \langle^i\rangle\boldsymbol{\omega}_i
 \end{aligned}$$

2. Rückwärtsrekursion:

$$\text{Startwerte: } \quad \langle N+1 \rangle \mathbf{F}_{N+1}, \langle N+1 \rangle \mathbf{N}_{N+1}$$

$$\text{Rekursion: } \quad i : N \rightarrow 1$$

$$\begin{aligned} \langle i \rangle \mathbf{F}_i &= \langle i \rangle \mathbf{R}_{\langle i+1 \rangle} \langle i+1 \rangle \mathbf{F}_{i+1} + \langle i \rangle \mathbf{F}_{C_i} \\ \langle i \rangle \mathbf{N}_i &= \langle i \rangle \mathbf{N}_{C_i} + \langle i \rangle \mathbf{R}_{\langle i+1 \rangle} \langle i+1 \rangle \mathbf{N}_{i+1} + \langle i \rangle \mathbf{t}_{C_i} \times \langle i \rangle \mathbf{F}_{C_i} + \\ &\quad \langle i \rangle \mathbf{t}_{\langle i+1 \rangle} \times \langle i \rangle \mathbf{R}_{\langle i+1 \rangle} \langle i+1 \rangle \mathbf{F}_{i+1} \end{aligned}$$

$$T_i = (1 - \hat{\delta}_i) \mathbf{e}_z^T \langle i \rangle \mathbf{N}_i + \hat{\delta}_i \mathbf{e}_z^T \langle i \rangle \mathbf{F}_i$$

Die Bewegungsgleichungen des Roboters, die sich daraus ergeben, haben in kompakter Schreibweise folgende Struktur:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{k}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{T} \quad (1.13)$$

mit der Massenmatrix  $\mathbf{M}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ , die in diesem Fall symmetrisch und positiv definit ist, und dem Vektor  $\mathbf{k}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^N$ , der die von Zentrifugal-, Coriolis- und Gravitationskräften herrührenden Terme enthält. Auf die Berücksichtigung weiterer externer Kräfte und Momente wurde aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichtet. Sie können durch wenige zusätzliche Terme problemlos in die Rekursion eingefügt werden [23]. Mit

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) := \mathbf{T}(t) - \mathbf{k}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$$

erhält man aus (1.13) die Bewegungsgleichungen in Zustandsform (1.1).

**Bemerkung:** Die Wirkung der Schwerkraft kann am einfachsten berücksichtigt werden, indem zur Beschleunigung der Basis  ${}^{(0)}\mathbf{a}_0$  der Gravitationsvektor  $(0, 0, g)^T$  mit der Erdbeschleunigung  $g$  addiert wird. Eine Beschleunigung um  $g$  nach oben erzeugt nämlich für die Roboterarme den selben Effekt, wie es auch die Schwerkraft täte.

Ist man an Bewegungsgleichungen in geschlossener Form und dem funktionalen Zusammenhang zwischen den Antriebsgrößen  $\mathbf{T}$  und den Gelenkkoordinaten  $\mathbf{q}$  interessiert, so ist die Anwendung der Lagrangegleichungen empfehlenswert. Der Newton-Euler-Algorithmus bietet sich an, hinsichtlich der Frage, welche Funktion  $\mathbf{T}(t)$  eine bestimmte Roboterbewegung  $\mathbf{q}(t)$  erzeugt. Dieses entspricht genau der Problemstellung, die bei der optimalen Steuerung von Robotern verfolgt wird. Ein weiterer Vorteil des Newton-Euler-Algorithmus für den Einsatz bei Optimalsteuerungsaufgaben zeigt sich beim Berechnen der Ableitungen  $\partial T_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) / \partial q_j$  und  $\partial T_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) / \partial \dot{q}_j$  ( $i, j = 1, \dots, N$ ), welche bei der Anwendung indirekter Verfahren zur Lösung des Optimalsteuerungsproblems (vgl. Kapitel 2.4) sehr genau vorliegen müssen. Indem man die Rekursionsgleichungen nach  $q_j$  bzw.  $\dot{q}_j$  differenziert, gewinnt man jeweils eine neue Rekursion für die entsprechende Ableitung von  $\mathbf{T}$  [3, 58, 71, 72, 93].

Analog lassen sich auch höhere Ableitungen ermitteln [23]. Durch geschickte Kombination der verschiedenen Rekursionen können nun mit einem erweiterten Algorithmus, unter Ausnutzung der Struktur der Gleichungen und Wiederverwendung bereits berechneter Größen, simultan zu den Antriebsgrößen  $\mathbf{T}$ , auch deren Ableitungen effizient und mit hoher Genauigkeit bestimmt werden. Der Aufwand dafür ist deutlich niedriger, als bei einer Berechnung der Ableitungen mittels numerischer Differentiation, die zudem weniger genaue Ergebnisse liefert [23].

# Kapitel 2

## Optimalsteuerung

Das Bestimmen optimaler Bewegungsabläufe von dynamischen Systemen, wie den in Kapitel 1 beschriebenen mechanischen Mehrkörpersystemen, führt auf *Optimalsteuerungsprobleme*. Übliche Zielfunktionale in der Robotik sind unter anderem der Energieverbrauch oder die Gesamtzeit der Bewegung, die es zu minimieren gilt. Die Bewegungsgleichungen des Systems treten dabei als Nebenbedingungen auf. Zusätzlich sind Anfangs-, End- und Innere-Punkt-Bedingungen sowie in realistischen Anwendungen auch Beschränkungen von Steuer- und Zustandsgrößen zu berücksichtigen.

Der Schwerpunkt dieses Kapitels liegt auf der optimalen Steuerung von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen. Hierfür wird zunächst ein allgemeines Optimalsteuerungsproblem formuliert und dessen theoretische Behandlung unter Einbeziehung von Steuer- und Zustandsbeschränkungen erläutert. Anschließend folgt ein Überblick über numerische Verfahren zum Lösen von Optimalsteuerungsaufgaben und eine kurze Beschreibung der Mehrzielmethode, die auch für die Berechnungen in Kapitel 5 eingesetzt wird. Zum Abschluss wird auf einige Aspekte zur optimalen Steuerung differential-algebraischer Systeme eingegangen und der Zusammenhang mit Problemen, die bei der Behandlung von Zustandsbeschränkungen oder singulären Steuerungen auftreten, aufgezeigt.

### 2.1 Grundaufgabe mit Steuerbeschränkungen

Ein wesentlicher Bestandteil der Theorie der optimalen Steuerung ist die Herleitung von *notwendigen Bedingungen* für eine optimale Lösung. In der Literatur finden sich auch hinreichende Bedingungen, deren Anwendung in der Praxis aber oft schwierig ist. Daher beschränkt sich diese Arbeit an der Stelle auf eine Zusammenstellung von notwendigen Bedingungen für eine Lösung eines allgemeinen Optimalsteuerungsproblems. Zunächst werden nur Steuerbeschränkungen bzw. gemischte Steuer- und Zustandsbeschränkungen berücksichtigt, reine Zustandsbeschränkungen kommen in

Kapitel 2.3 hinzu. Eine ausführliche Darstellung mit Beweisen der im Folgenden zusammengefassten Ergebnisse findet man beispielsweise in [5, 16, 54].

Betrachtet werde das folgende Optimalsteuerungsproblem:

$$I(\mathbf{u}) := \varphi(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt \rightarrow \min \quad (2.1)$$

unter Berücksichtigung der *Differentialgleichungen*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), \quad (2.2)$$

der *Randbedingungen*

$$\begin{aligned} x_i(t_0) &= x_{i0}, & i \in \mathcal{J}_0 \subseteq \mathcal{J} &:= \{1, \dots, n\}, \\ x_i(t_f) &= x_{if}, & i \in \mathcal{J}_f \subseteq \mathcal{J}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

der *Übergangsbedingungen an inneren Punkten*  $t_j \in ]t_0, t_f[$ :

$$\boldsymbol{\psi}_j(\mathbf{x}(t_j^+), \mathbf{x}(t_j^-), t_j) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n_{\psi,j}}, \quad j = 1, \dots, n_P, \quad (2.4)$$

und der *gemischten Steuer- und Zustandsbeschränkungen*

$$\phi_k(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \leq 0, \quad k = 1, \dots, n_\phi. \quad (2.5)$$

Darin sei  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$  der Vektor der *Zustandsvariablen*,  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m)^T$  der Vektor der *Steuervariablen*,  $t_0$  die Startzeit,  $t_f$  die Endzeit des betrachteten Zeitintervalls und  $t_0 < t_1 < \dots < t_{n_P} < t_f$ . Die Funktion  $\mathbf{u} : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^m$  sei stückweise stetig,  $\mathbf{x} : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $\phi_k : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ( $k = 1, \dots, n_\phi$ ) seien stückweise stetig differenzierbar und  $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\boldsymbol{\psi}_j : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\psi,j}}$  ( $j = 1, \dots, n_P$ ) seien einmal stetig differenzierbar. Der rechtsseitige Grenzwert der Funktion  $\mathbf{x}$  am Punkt  $t_j$  werde abgekürzt durch  $\mathbf{x}(t_j^+)$ , entsprechend bezeichne  $\mathbf{x}(t_j^-)$  den linksseitigen Grenzwert. Für die Beschränkungen (2.5) gelte außerdem die folgende *Regularitätsbedingung* entlang der optimalen Lösung:

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial \mathbf{u}} & \phi_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_{n_\phi}}{\partial \mathbf{u}} & 0 & \cdots & \phi_{n_\phi} \end{pmatrix} = n_\phi. \quad (2.6)$$

### Definition 2.1

- Eine Steuerbeschränkung  $\phi_k \leq 0$  heißt *aktiv*, wenn  $\phi_k = 0$  gilt.
- Ein Intervall  $[t_a, t_b] \subset [t_0, t_f]$ ,  $t_a < t_b$ , auf dem die Steuerbeschränkung aktiv ist, heißt *Randstück* der Steuerbeschränkung.
- Ein Intervall, auf dem keine Steuerbeschränkung aktiv ist, nennt man ein *freies Teilstück*.



Die Regularitätsbedingung bedeutet also, dass die Gradienten der aktiven Steuerbeschränkungen  $\partial\phi_k/\partial\mathbf{u}$  ( $k \in \{1, \dots, n_\phi\}$ ) linear unabhängig sein müssen. Dadurch wird auch sichergestellt, dass die Funktionen  $\phi_k$  ( $k = 1, \dots, n_\phi$ ) explizit von  $\mathbf{u}$  abhängen, es sich also um echte Steuerbeschränkungen und nicht um reine Zustandsbeschränkungen handelt. Des Weiteren wird angenommen, dass die optimale Lösung nur endlich viele Randstücke besitzt. Nach Einführung der *Hamiltonfunktion*

$$H(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), \boldsymbol{\mu}(t), t) := L(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \boldsymbol{\lambda}^T(t) \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \boldsymbol{\mu}^T(t) \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \quad (2.7)$$

mit stückweise stetig differenzierbaren *adjungierten Variablen*  $\boldsymbol{\lambda} : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T$ , stückweise stetigen *Multiplikatorfunktionen*  $\boldsymbol{\mu} : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^{n_\phi}$ ,  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_{n_\phi})^T$  und dem Vektor der Steuerbeschränkungen  $\boldsymbol{\phi} := (\phi_1, \dots, \phi_{n_\phi})^T$  sowie  $\Psi := \varphi + \sum_{j=1}^{n_P} \boldsymbol{\varrho}_j^T \boldsymbol{\psi}_j$  mit konstanten Lagrangemultiplikatoren  $\boldsymbol{\varrho}_j \in \mathbb{R}^{n_{\psi,j}}$  lauten die notwendigen Bedingungen für eine optimale Lösung wie folgt:

- *adjungierte Differentialgleichungen:*

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}^T(t) = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \quad (2.8)$$

- *Optimalitätsbedingung:*

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{0}^T \quad (2.9)$$

- *Legendre-Clebsch-Bedingung* im Fall inaktiver Beschränkungen:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{u}^2} \quad \text{positiv semidefinit} \quad (2.10)$$

- *Vorzeichenbedingungen:*

$$\mu_k(t) \begin{cases} = 0, & \text{falls } \phi_k < 0, \\ \geq 0, & \text{falls } \phi_k = 0, \end{cases} \quad k = 1, \dots, n_\phi \quad (2.11)$$

- *Übergangsbedingungen* an den inneren Punkten  $t_j$  ( $j = 1, \dots, n_P$ ):

$$\boldsymbol{\lambda}^T(t_j^-) = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}(t_j^-)} = \boldsymbol{\varrho}_j^T \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_j}{\partial \mathbf{x}(t_j^-)} \quad (2.12)$$

$$\boldsymbol{\lambda}^T(t_j^+) = -\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}(t_j^+)} = -\boldsymbol{\varrho}_j^T \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_j}{\partial \mathbf{x}(t_j^+)} \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t_j} + H|_{t_j^-} - H|_{t_j^+} = 0 \quad (2.14)$$

- *Transversalitätsbedingungen:*

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_i(t_0)} + \lambda_i \right) \Big|_{t=t_0} = 0, \quad i \in \mathcal{J} \setminus \mathcal{J}_0 \quad (2.15)$$

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_i(t_f)} - \lambda_i \right) \Big|_{t=t_f} = 0, \quad i \in \mathcal{J} \setminus \mathcal{J}_f \quad (2.16)$$

- Bedingung, falls die Endzeit  $t_f$  frei ist:

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial t_f} + H \right) \Big|_{t=t_f} = 0 \quad (2.17)$$

Die Startzeit  $t_0$  sei stets fest vorgegeben. Außerdem müssen die Nebenbedingungen (2.2)–(2.5) von einer optimalen Lösung erfüllt werden.

Die Bedingungen (2.9) und (2.10) sind notwendig für ein lokales Minimum der Hamiltonfunktion. Sie entsprechen dem *Pontryaginschen Minimumprinzip*, welches besagt, dass die optimale Steuerung  $\mathbf{u}^*$  die Hamiltonfunktion minimiert:

$$\mathbf{u}^*(t) = \arg \min_{\mathbf{u} \in U(\mathbf{x}^*(t), t)} H^0(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}(t), t),$$

wobei  $U(\mathbf{x}, t) := \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m \mid \phi_k(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \leq 0, k = 1, \dots, n_\phi\}$  die Menge der *zulässigen Steuerungen* und  $H^0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, t) := L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$  die *unbeschränkte Hamiltonfunktion* bezeichne.

### Bemerkungen:

- *Verallgemeinerung der Aufgabenstellung:*

Die Aufgabenstellung lässt sich noch verallgemeinern, etwa durch beliebige Rand- oder Innere-Punkt-Bedingungen

$$\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_1^-), \mathbf{x}(t_1^+), \dots, \mathbf{x}(t_{n_P}^-), \mathbf{x}(t_{n_P}^+), \mathbf{x}(t_f), t_0, t_1, \dots, t_{n_P}, t_f) = \mathbf{0}$$

oder der Abhängigkeit des Zielfunktional von Größen an inneren Punkten, d.h.

$$\varphi \rightarrow \tilde{\varphi}(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_1^-), \mathbf{x}(t_1^+), \dots, \mathbf{x}(t_{n_P}^-), \mathbf{x}(t_{n_P}^+), \mathbf{x}(t_f), t_0, t_1, \dots, t_{n_P}, t_f).$$

Für diese Fälle müssen die Bedingungen (2.12)–(2.17) entsprechend angepasst werden, siehe z.B. [16].

- *Autonome Steuerungsprobleme:*

Ein autonomes Optimalsteuerungsproblem hängt nicht explizit von der Zeit  $t$  ab. Insbesondere ist auch die Hamiltonfunktion  $H$  nicht explizit von  $t$  abhängig. Somit muss sie konstant sein, denn es gilt:

$$\dot{H} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} + \underbrace{\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \dot{\mathbf{u}}}_{=0} + \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \dot{\boldsymbol{\lambda}} + \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\mu}} \dot{\boldsymbol{\mu}} + \underbrace{H_t}_{=0} = -\dot{\boldsymbol{\lambda}}^T \dot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{x}}^T \dot{\boldsymbol{\lambda}} + \underbrace{\boldsymbol{\phi}^T \dot{\boldsymbol{\mu}}}_{=0} = 0$$

$$\Rightarrow H = \text{const.}$$

Ist die Endzeit  $t_f$  frei, so folgt aus (2.17):

$$H|_{t=t_f} = -\frac{\partial \varphi}{\partial t_f} \Big|_{t=t_f} =: c_f,$$

also

$$H \equiv c_f \quad \forall t \in [t_0, t_f]$$

für autonome Steuerungsprobleme. Diese Eigenschaft ist besonders bei der numerischen Durchführung sehr nützlich. Auf ihre Gültigkeit ist bei dem gefundenen Ergebnis unbedingt zu achten. Dieser sogenannte *Hamiltonfunktionstest* ist eine der wichtigsten Kontrollen, bevor eine Lösung als solche akzeptiert werden kann. Aus diesem Grund ist es sinnvoll, das Optimalsteuerungsproblem vor den numerischen Berechnungen in ein autonomes Problem zu transformieren. Dies ist stets möglich, indem eine neue Zustandsvariable  $x_{n+1}$  und eine neue unabhängige Variable  $\zeta$  eingeführt werden:

$$x_{n+1} := t,$$

$$x'_{n+1} = \frac{dx_{n+1}}{d\zeta} = 1,$$

$$x_{n+1}(\zeta_0) = t_0, \quad x_{n+1}(\zeta_f) = t_f.$$

Durch diese Transformation wird das Optimalsteuerungsproblem um eine Zustandsvariable, und damit auch um eine adjungierte Variable, erweitert. Die neue unabhängige Variable  $\zeta$  tritt nun nicht mehr explizit auf.

- *Transformation von freier Endzeit auf feste Endzeit:*

Es empfiehlt sich, Probleme mit freier Endzeit in Probleme mit fester Endzeit zu transformieren, da diese numerisch besser behandelt werden können. Am einfachsten ist es, das Integrationsintervall  $[t_0, t_f]$  auf das Intervall  $[0, 1]$  zu normieren. Dazu wird eine neue unabhängige Variable  $\xi$  eingeführt:

$$\begin{aligned} \xi &:= \frac{t - t_0}{t_f - t_0}, \quad \xi \in [0, 1] \\ \Rightarrow \frac{dt}{d\xi} &= (t_f - t_0). \end{aligned}$$

Beim Übergang von  $t$  nach  $\xi$  müssen die rechten Seiten der Differentialgleichungen mit dem Faktor  $(t_f - t_0)$  multipliziert werden. Außerdem wird zur Berechnung von  $t_f$  eine triviale Differentialgleichung mit der zugehörigen Randbedingung (2.17) hinzugenommen:

$$x_{n+1} := t_f, \quad \dot{x}_{n+1} = 0.$$

## 2.2 Bang-Bang- und singuläre Steuerung

Zu den kompliziertesten Optimalsteuerungsproblemen gehören solche, in denen die Steuerung sowohl im Zielfunktional als auch in den Bewegungsgleichungen nur linear vorkommt. Die Schwierigkeiten werden dadurch hervorgerufen, dass für die Steuervariablen sogenannte *singuläre Extremalenbögen* auftreten können. Bei linearen Optimalsteuerungsproblemen ist nämlich insbesondere auch die Hamiltonfunktion linear in der Steuerung  $\mathbf{u}$  und die Matrix  $\partial^2 H / \partial \mathbf{u}^2$  somit singulär. Die Optimalitätsbedingung  $\partial H / \partial \mathbf{u} = \mathbf{0}^T$  lässt sich dann nicht nach der Steuerung  $\mathbf{u}$  auflösen, da der Gradient nicht mehr von  $\mathbf{u}$  abhängt. Zum Bestimmen der optimalen Steuerung muss man in diesem Fall also einen anderen Weg beschreiten.

Die Behandlung singulärer Optimalsteuerungsaufgaben wird unter anderem in [4, 16, 74] ausführlich beschrieben. Um die Vorgehensweise zu erläutern wird im Folgenden eine skalare Steuervariable  $u$  mit Beschränkungen der speziellen Form

$$\phi_{min}(\mathbf{x}(t), t) \leq u(t) \leq \phi_{max}(\mathbf{x}(t), t) \quad (2.18)$$

betrachtet. Die Funktionen  $\phi_{min}, \phi_{max} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  seien stückweise stetig differenzierbar und es gelte

$$-\infty < \phi_{min}(\mathbf{x}(t), t) < \phi_{max}(\mathbf{x}(t), t) < \infty \quad \forall t \in [t_0, t_f].$$

Die Hamiltonfunktion sei linear in der Steuerung  $u$  und habe folgende Gestalt:

$$\tilde{H}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), t) := \tilde{f}_1(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), t) + \tilde{f}_2(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), t) u(t).$$

Die Steuerbeschränkungen (2.18) werden nun nicht mittels Multiplikatorfunktionen  $\boldsymbol{\mu}$  an die Hamiltonfunktion angekoppelt. Stattdessen wird die beschränkte Steuergröße  $u$  in eine unbeschränkte Steuergröße  $\alpha$  transformiert, beispielsweise durch

$$u = \phi_{min} + (\phi_{max} - \phi_{min}) \sin^2(\alpha).$$

Aus dem Pontryaginschen Minimumprinzip ( $\partial \tilde{H} / \partial \alpha = 0$ ,  $\partial^2 \tilde{H} / \partial \alpha^2 \geq 0$ ) ergibt sich dann für  $\partial \tilde{H} / \partial u \neq 0$  die optimale Steuerung zu

$$u(t) = \begin{cases} \phi_{min}, & \text{falls } \frac{\partial \tilde{H}}{\partial u} > 0, \\ \phi_{max}, & \text{falls } \frac{\partial \tilde{H}}{\partial u} < 0. \end{cases}$$

Eine solche Steuerung heißt *Bang-Bang-Steuerung*. Die Funktion  $S := \partial \tilde{H} / \partial u = \tilde{f}_2$  nennt man auch *Schaltfunktion*. Gilt  $S = 0$  an einem isolierten Punkt  $t_j \in [t_0, t_f]$ , so ist dies ein *Schaltpunkt* der Steuerung zwischen  $\phi_{min}$  und  $\phi_{max}$ .

Gilt dagegen  $S \equiv 0$  auf einem ganzen Intervall  $[t_1, t_2] \subset ]t_0, t_f[$  mit  $t_1 < t_2$ , so spricht man von einer *singulären Steuerung*. Wie bereits erwähnt, kann  $u$  aus  $S = 0$  nicht bestimmt werden. Da aber  $S \equiv 0 \forall t \in [t_1, t_2]$ , so muss auch gelten:

$$\frac{d^r}{dt^r} S = 0, \quad r = 1, 2, \dots \quad \forall t \in [t_1, t_2].$$

Bezeichne  $r'$  das kleinste  $r$ , für das  $\frac{d^r}{dt^r} S$  die Steuervariable  $u$  explizit enthält, also

$$\frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{d^{r'}}{dt^{r'}} S \right) \neq 0,$$

so erhält man  $u(t)$  für  $t \in [t_1, t_2]$  aus

$$\frac{d^{r'}}{dt^{r'}} S = 0.$$

Man kann zeigen, dass  $r'$  stets gerade ist, d.h.  $r' = 2q$ ,  $q \in \mathbb{N}$ , wobei  $q$  als die *Ordnung der singulären Steuerung* definiert wird [61]. Zudem ist als weitere notwendige Bedingung für eine optimale Lösung die *verallgemeinerte Legendre-Clebsch-Bedingung* zu erfüllen [61]:

$$(-1)^q \frac{\partial}{\partial u} \left[ \frac{d^{2q}}{dt^{2q}} \left( \frac{\partial \tilde{H}}{\partial u} \right) \right] \geq 0.$$

**Bemerkung:** Es gibt bisher keine allgemeinen Aussagen über Existenz und Anzahl der auftretenden singulären Extremalenbögen. Auch ist  $q < \infty$  *nicht* gesichert.

## 2.3 Zustandsbeschränkungen

Betrachtet werde wieder das allgemeine Optimalsteuerungsproblem (2.1)–(2.5), nun mit der zusätzlichen reinen *Zustandsbeschränkung*

$$h(\mathbf{x}(t), t) \leq 0,$$

wobei  $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stückweise  $(p+1)$ -mal stetig differenzierbar sei (vgl. Def. 2.2).

**Definition 2.2 (Ordnung einer Zustandsbeschränkung)** Die Funktionen  $h^k$ ,  $k = 1, \dots, p$  seien wie folgt rekursiv definiert:

$$\begin{aligned} h^0 &:= h &= h(\mathbf{x}, t), \\ h^1 &:= \dot{h} &= \frac{\partial h(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \frac{\partial h(\mathbf{x}, t)}{\partial t}, \\ h^2 &:= \dot{h}^1 &= \frac{\partial h^1(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \frac{\partial h^1(\mathbf{x}, t)}{\partial t}, \\ &&\vdots \\ h^p &:= \dot{h}^{p-1} &= \frac{\partial h^{p-1}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \frac{\partial h^{p-1}(\mathbf{x}, t)}{\partial t}. \end{aligned}$$

Ist

$$\frac{\partial h^k}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{0}^T \quad \text{für } 0 \leq k \leq p-1, \quad \frac{\partial h^p}{\partial \mathbf{u}} \neq \mathbf{0}^T,$$

dann hat die Zustandsbeschränkung  $h \leq 0$  die Ordnung  $p$ .

**Definition 2.3**

- Die Zustandsbeschränkung  $h \leq 0$  heißt aktiv, wenn  $h = 0$  gilt.
- Ein Intervall  $[t_{auf}, t_{ab}] \subset ]t_0, t_f[$ ,  $t_{auf} < t_{ab}$ , auf dem die Zustandsbeschränkung aktiv ist, heißt Randstück der Zustandsbeschränkung. Der Punkt  $t_{auf}$  heißt Aufsprungpunkt, der Punkt  $t_{ab}$  Absprungpunkt des Randstücks  $[t_{auf}, t_{ab}]$ .
- Ist die Zustandsbeschränkung nur an einem isolierten Punkt  $t_k \in ]t_0, t_f[$  aktiv, so nennt man diesen Kontaktpunkt. Ein Kontaktpunkt heißt Berührungspunkt, wenn dort zusätzlich zu  $h = 0$  auch  $h^1 = 0$  gilt.
- Die Punkte  $t_{auf}$ ,  $t_{ab}$  und  $t_k$  werden auch Verbindungspunkte genannt.
- Ein Intervall, auf dem die Zustandsbeschränkung nicht aktiv ist, heißt freies Teilstück.

Wie in der Definition bereits angedeutet, wird vorausgesetzt, dass die Zustandsbeschränkung nur im Inneren des Intervalls  $[t_0, t_f]$  aktiv wird. Außerdem wird angenommen, dass nur endlich viele Verbindungspunkte auftreten. Um auf eine unübersichtliche Indizierung verzichten zu können, wird im Folgenden nur eine skalare Zustandsbeschränkung der Ordnung eins betrachtet. Für die Behandlung mehrerer Zustandsbeschränkungen und Zustandsbeschränkungen höherer Ordnung sei auf den Übersichtsartikel [51] verwiesen.

Mittels der Multiplikatorfunktion  $\nu : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$  wird nun  $h^1$  an die Hamiltonfunktion angekoppelt:

$$\begin{aligned} \bar{H}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), \boldsymbol{\mu}(t), \nu(t), t) &:= \\ H(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), \boldsymbol{\mu}(t), t) + \nu(t)h^1(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t). \end{aligned}$$

Des Weiteren gelte entlang der optimalen Lösung die *verschärfte Regularitätsbedingung*:

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial \mathbf{u}} & \phi_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_{n_\phi}}{\partial \mathbf{u}} & 0 & \cdots & \phi_{n_\phi} & 0 \\ \frac{\partial h^1}{\partial \mathbf{u}} & 0 & \cdots & 0 & h^1 \end{pmatrix} = n_\phi + 1. \quad (2.19)$$

Eine optimale Lösung muss dann die folgenden notwendigen Bedingungen erfüllen [15, 51, 64]:

- (2.8)–(2.17) mit  $\bar{H}$  statt  $H$
- Vorzeichenbedingungen:

$$\left. \begin{aligned} \nu(t) &= 0, & \text{falls } h < 0 \\ \nu(t) &\geq 0 \\ \dot{\nu}(t) &\leq 0 \end{aligned} \right\}, \quad \text{falls } h = 0 \quad (2.20)$$

- an Aufsprungpunkten  $t_{auf}$ :

$$\boldsymbol{\lambda}^T(t_{auf}^-) = \boldsymbol{\lambda}^T(t_{auf}^+) + \eta_{auf} \left. \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \right|_{t=t_{auf}} \quad (2.21)$$

$$\bar{H}|_{t=t_{auf}^-} = \bar{H}|_{t=t_{auf}^+} - \eta_{auf} \left. \frac{\partial h}{\partial t} \right|_{t=t_{auf}} \quad (2.22)$$

$$\eta_{auf} \geq 0 \quad (2.23)$$

$$\eta_{auf} \geq \nu(t_{auf}^+) \quad (2.24)$$

$$h|_{t=t_{auf}} = 0 \quad (2.25)$$

- an Absprungpunkten  $t_{ab}$ :

$$\boldsymbol{\lambda}^T(t_{ab}^-) = \boldsymbol{\lambda}^T(t_{ab}^+) \quad (2.26)$$

$$\bar{H}|_{t=t_{ab}^-} = \bar{H}|_{t=t_{ab}^+} \quad (2.27)$$

- an Kontaktpunkten  $t_k$ :

$$\boldsymbol{\lambda}^T(t_k^-) = \boldsymbol{\lambda}^T(t_k^+) + \eta_k \left. \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \right|_{t=t_k} \quad (2.28)$$

$$\bar{H}|_{t=t_k^-} = \bar{H}|_{t=t_k^+} - \eta_k \left. \frac{\partial h}{\partial t} \right|_{t=t_k} \quad (2.29)$$

$$\eta_k \geq 0 \quad (2.30)$$

$$h|_{t=t_k} = 0 \quad (2.31)$$

An Aufsprung- oder Kontaktpunkten können die adjungierten Variablen und die Hamiltonfunktion Sprünge aufweisen, während sie an Absprungpunkten stetig sind. Dabei sind  $\eta_{auf}$  bzw.  $\eta_k$  konstante Sprungparameter. Alternativ lassen sich auch Sprungbedingungen an Absprungpunkten formulieren. Dann wird die Stetigkeit von  $\boldsymbol{\lambda}$  und  $\bar{H}$  an den Aufsprungpunkten gefordert [51]. Im autonomen Fall ist die Hamiltonfunktion an allen Verbindungspunkten stetig, auch wenn die adjungierten Variablen dort springen dürfen. Die Eigenschaft, dass die Hamiltonfunktion für autonome Steuerungsprobleme konstant ist, wird dadurch also nicht verletzt.

In [51] wird ausdrücklich darauf hingewiesen, dass die dort angegebenen notwendigen Bedingungen für ein allgemeines Optimalsteuerungsproblem mit Steuer- und Zustandsbeschränkungen nicht vollständig bewiesen sind. Das betrifft insbesondere die Gültigkeit der Bedingungen (2.23), (2.24) bzw. (2.30), wenn gleichzeitig gemischte Steuer- und Zustandsbeschränkungen aktiv werden, sowie die Existenz verschiedener Multiplikatorfunktionen, einschließlich der von  $\nu(t)$ , die nur angenommen wird, aber nicht immer a priori begründet werden kann. Tatsächlich gibt es Beispiele, in denen die angesprochenen Fälle eintreten und nicht alle der in diesem Abschnitt angegebenen Bedingungen erfüllt werden können, obwohl eine optimale Lösung existiert (siehe auch Kapitel 2.5).

Die hier beschriebene Methode,  $h^1$  an die Hamiltonfunktion anzukoppeln, wird als *indirektes Ankoppeln* bezeichnet. Es ist ebenfalls möglich, die Funktion  $h$  direkt an die Hamiltonfunktion anzukoppeln, was als *direktes Ankoppeln* bezeichnet wird. Auch dafür lassen sich zu (2.20)–(2.31) äquivalente Bedingungen für eine optimale Lösung angeben [51, 57]. Die adjungierten Variablen, Multiplikatorfunktionen und Sprungparameter aus den beiden Verfahren können ineinander umgerechnet werden [57, 64].

Ein weiterer Ansatz zur Behandlung von Zustandsbeschränkungen, der auch auf singuläre Steuerungen übertragbar ist, ist die abschnittsweise *Transformation in Minimalkoordinaten* [21, 27, 28]. Entlang eines Randstücks wird die Zustandsbeschränkung nach einer Zustandsvariable aufgelöst und diese in den Differentialgleichungen und evtl. Steuerbeschränkungen durch den so gewonnenen Ausdruck ersetzt. Daraus ergibt sich dann ein neues, nicht zustandsbeschränktes Optimalsteuerungsproblem mit abschnittsweise definierten Differentialgleichungen und abschnittsweise unterschiedlicher Dimension des Zustandsvektors.

## 2.4 Numerische Lösung von Optimalsteuerungsproblemen

Die notwendigen Bedingungen aus Kapitel 2.1 bis 2.3, denen eine Lösung eines Optimalsteuerungsproblems genügen muss, führen im Allgemeinen auf ein Mehrpunkt-Randwertproblem für die Zustands- und adjungierten Variablen, welches zum Beispiel mit der im Folgenden beschriebenen Mehrzielmethode numerisch gelöst werden kann. Bei den Anwendungsbeispielen in Kapitel 5 wird auf diese Weise vorgegangen. Daneben gibt es aber noch weitere Ansätze zur numerischen Lösung von Optimalsteuerungsproblemen, von denen einige in diesem Abschnitt genannt werden sollen, vgl. auch die Übersichtsartikel [7, 8, 77, 82].

### 2.4.1 Überblick über numerische Verfahren

Bei der Einteilung der numerischen Verfahren unterscheidet man im Wesentlichen zwischen zwei Verfahrensklassen, den *direkten* und den *indirekten Verfahren*.

Bei direkten Verfahren wird das Optimalsteuerungsproblem durch Diskretisierung der Steuervariablen (*direkte Schießverfahren*) bzw. der Steuer- und der Zustandsvariablen (*direkte Kollokationsverfahren*) in ein großes, endlich-dimensionales, nichtlineares Optimierungsproblem überführt, welches mit Standardalgorithmen, wie Verfahren der sequentiellen quadratischen Programmierung [46, 84, 85] oder Innere-Punkt-Methoden [97, 101, 102], gelöst wird. Die Bewegungsdifferentialgleichungen werden bei direkten Schießverfahren durch numerische Integration erfüllt. Beispiele dafür sind [10, 17, 53, 63]. Direkte Kollokationsverfahren verwenden Kollokation, um die Bewegungsdifferentialgleichungen zu erfüllen, wie etwa [7, 50, 98]. Die not-



wendigen Bedingungen aus der Optimalsteuerungstheorie gehen in diese Verfahren nicht explizit ein. Einige Algorithmen liefern jedoch zusätzlich Schätzungen der adjungierten Variablen [17, 98].

Im Gegensatz zu direkten Verfahren greifen indirekte Verfahren explizit auf die notwendigen Bedingungen aus der Theorie der Optimalsteuerung zurück. *Gradientenverfahren* berechnen die optimale Steuerung aus einem Minimierungsproblem der Hamiltonfunktion unter den Nebenbedingungen eines Randwertproblems. Beispiele für diese Methoden finden sich bei [16, 70]. Eine andere Möglichkeit besteht darin, die Steuervariablen und Multiplikatorfunktionen analytisch oder numerisch aus der Optimalitätsbedingung, den aktiven Steuer- und Zustandsbeschränkungen oder im Fall von linearen Steuerungsproblemen gemäß Kapitel 2.2 zu bestimmen und anschließend ein Mehrpunkt-Randwertproblem für die Zustands- und adjungierten Variablen zu lösen. Die verschiedenen Vorzeichenbedingungen werden a posteriori überprüft und dienen der Elimination von nicht optimalen Lösungen. Dieser Ansatz soll, wie eingangs erwähnt, in dieser Arbeit Anwendung finden. Ein wichtiges Verfahren zur Lösung von Mehrpunkt-Randwertproblemen ist die *Mehrzielmethode*, auch *Mehrfachschießverfahren* genannt. Sie wird im folgenden Abschnitt noch genauer beschrieben. Auf ihr beruhen auch die zur Lösung von Optimalsteuerungsaufgaben entwickelten Algorithmen BOUNDSOL und OPTSOL [18], DLOPTR [31, 32], BOUNDSO [74], VBDSO [62], sowie MUMUS [55, 56] und seine Weiterentwicklung JANUS [19].

Indirekte Verfahren haben den Nachteil, dass für ihre Anwendung ein großes Maß an Vorarbeit geleistet werden muss. Beispielsweise müssen die adjungierten Differentialgleichungen vom Anwender bereitgestellt werden. Dazu ist Vorwissen über die Optimalsteuerungstheorie erforderlich. Ebenso werden Kenntnisse über die Schaltstruktur der Steuerung benötigt und es müssen gute Schätzwerte für die Zustands- und die adjungierten Variablen vorliegen, um eine Konvergenz des Verfahrens zu ermöglichen. Der Vorteil ist eine sehr hohe Genauigkeit der Ergebnisse, weswegen diese häufig als Referenzlösungen dienen. Zudem können bei den letztgenannten Problemen *Homotopietechniken* [18, 96] Abhilfe schaffen. Im Vergleich zu indirekten Verfahren ist bei direkten Verfahren wesentlich weniger Vorarbeit zu leisten. Durch die Diskretisierung der Steuer- und evtl. auch der Zustandsvariablen ist das Ergebnis jedoch von geringerer Genauigkeit.

Sogenannte *hybride Methoden* [99] nutzen die Vorteile beider Verfahren. Das Optimalsteuerungsproblem wird dabei zunächst mit einem direkten Kollokationsverfahren gelöst, welches zugleich eine Schätzung der adjungierten Variablen und der Schaltstruktur liefert. Anschließend wird das Ergebnis mit Hilfe eines indirekten Mehrzielalgorithmus verfeinert.

## 2.4.2 Mehrzielmethode

Die Mehrzielmethode ist geeignet, um *Mehrpunkt-Randwertprobleme* der folgenden Art zu lösen:

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(t), t) = \begin{cases} \mathbf{f}_0(\mathbf{y}(t), t) & \text{für } t_0 \stackrel{\leq}{=} t \stackrel{<}{=} \tilde{t}_1, \\ \mathbf{f}_i(\mathbf{y}(t), t) & \text{für } \tilde{t}_i \stackrel{<}{=} t \stackrel{\leq}{=} \tilde{t}_{i+1}, \quad i = 1, \dots, \gamma - 1, \\ \mathbf{f}_\gamma(\mathbf{y}(t), t) & \text{für } \tilde{t}_\gamma \stackrel{<}{=} t \stackrel{\leq}{=} t_f, \end{cases} \quad (2.32)$$

mit den Übergangsbedingungen (Schalt- und Sprungbedingungen) an den Schaltpunkten  $\tilde{t}_i$ :

$$\mathbf{w}_i(\mathbf{y}(\tilde{t}_i^+), \mathbf{y}(\tilde{t}_i^-), \tilde{t}_i) = \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, \gamma, \quad (2.33)$$

und den Randbedingungen

$$\mathbf{w}_{\gamma+1}(\mathbf{y}(t_0), \mathbf{y}(t_f), t_f) = \mathbf{0}. \quad (2.34)$$

Eine genaue Beschreibung der Mehrzielmethode wird beispielsweise in [33, 96] angegeben. Darin finden sich auch alternative Verfahren zum Lösen von Mehrpunkt-Randwertproblemen. Um numerische Schwierigkeiten, die beim einfachen Schießverfahren [33, 96] für große Intervalle  $[t_0, t_f]$  auftreten, zu umgehen, unterteilt man beim Mehrfachschießverfahren das Intervall durch geeignete Stützpunkte  $\sigma_i$ :

$$t_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_\rho < t_f.$$

An diesen muss die Lösung  $\mathbf{y}(t)$  stetig sein, und es sind die folgenden Übergangsbedingungen zu erfüllen:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(\sigma_i^+) - \mathbf{y}(\sigma_i^-) &= \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, \rho, \\ \sigma_i - \sigma_i^* &= 0, \quad \sigma_i^* \text{ gegebene Stützpunkte.} \end{aligned}$$

Fasst man die Schaltpunkte, Stützpunkte und Randpunkte zu einer Menge von verallgemeinerten Schaltpunkten zusammen:

$$\{t_1, \dots, t_k\} := \{t_0, t_f\} \cup \{\tilde{t}_1, \dots, \tilde{t}_\gamma\} \cup \{\sigma_1, \dots, \sigma_\rho\},$$

$$t_0 = t_1 < t_2 < \dots < t_k = t_f,$$

so führt dies zu einem erweiterten Mehrpunkt-Randwertproblem, welches dieselbe Lösung besitzt wie das ursprüngliche Mehrpunkt-Randwertproblem (2.32)–(2.34):

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(t), t) = \mathbf{f}_i(\mathbf{y}(t), t) \quad \text{für } t_i \stackrel{<}{=} t \stackrel{\leq}{=} t_{i+1}, \quad i = 1, \dots, k - 1, \quad (2.35)$$

$$\mathbf{w}_i(\mathbf{y}(t_i^+), \mathbf{y}(t_i^-), t_i) = \mathbf{0}, \quad i = 2, \dots, k - 1, \quad (2.36)$$

$$\mathbf{w}_k(\mathbf{y}(t_1^+), \mathbf{y}(t_k^-), t_k) = \mathbf{0}. \quad (2.37)$$

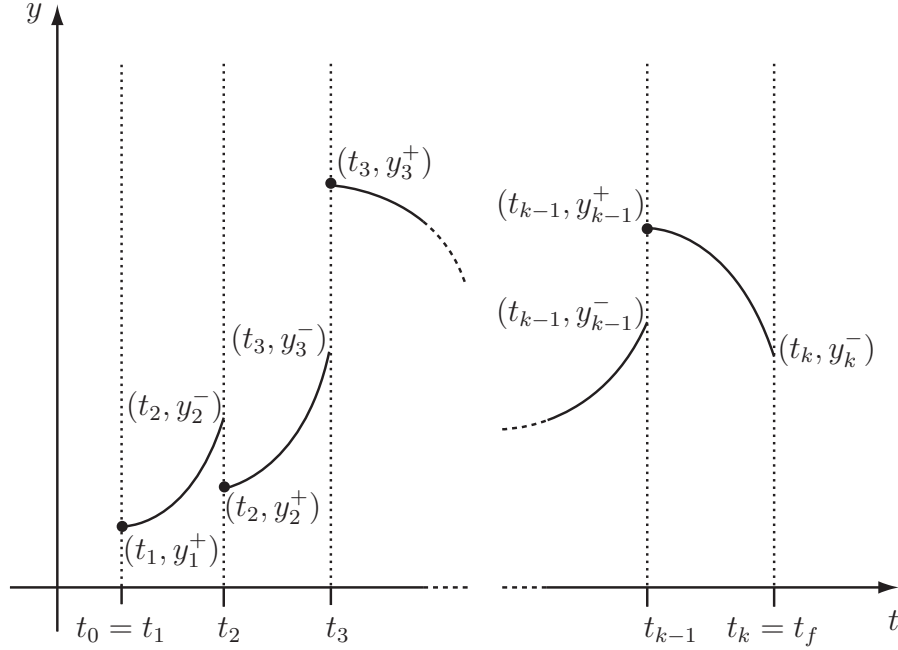


Abbildung 2.1: Lösungen der Anfangswertprobleme auf den Teilintervallen bei der Mehrzielmethode (hier im eindimensionalen Fall  $y \in \mathbb{R}$ ).

Der Anfangspunkt  $t_1$  wird als fest angenommen. Die übrigen Schaltpunkte  $t_2, \dots, t_k$ , sowie die Werte  $\mathbf{y}_i^+ := \mathbf{y}(t_i^+)$  ( $i = 1, \dots, k-1$ ) der Lösung an den Zwischenpunkten, werden nun gleichzeitig iterativ berechnet, sodass (2.35)–(2.37) erfüllt sind. Bezeichne dazu

$$\mathbf{y}_i^- := \mathbf{y}(t_i^-) =: \mathbf{y}(t_i; t_{i-1}, \mathbf{y}_{i-1}^+) \quad (2.38)$$

die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(t), t), \quad \mathbf{y}(t_{i-1}) = \mathbf{y}_{i-1}^+ \quad (2.39)$$

am Punkt  $t_i$  ( $i = 2, \dots, k$ ), vgl. Abb. 2.1. Die Lösung für den Vektor

$$\mathbf{z} := (\mathbf{y}_1^+, t_k, \mathbf{y}_2^+, t_2, \dots, \mathbf{y}_{k-1}^+, t_{k-1})^T$$

ergibt sich dann nach Einsetzen von (2.38) in (2.36) und (2.37) aus dem nichtlinearen Gleichungssystem

$$\mathbf{W}(\mathbf{z}) := \begin{pmatrix} \mathbf{w}_k(\mathbf{y}_1^+, \mathbf{y}(t_k; t_{k-1}, \mathbf{y}_{k-1}^+), t_k) \\ \mathbf{w}_2(\mathbf{y}_2^+, \mathbf{y}(t_2; t_1, \mathbf{y}_1^+), t_2) \\ \vdots \\ \mathbf{w}_{k-1}(\mathbf{y}_{k-1}^+, \mathbf{y}(t_{k-1}; t_{k-2}, \mathbf{y}_{k-2}^+), t_{k-1}) \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \quad (2.40)$$

Dieses kann nun mit dem Newton-Verfahren [34, 95] gelöst werden, wozu eine Schätzung der Lösungswerte als Startwert  $\mathbf{z}^{(0)}$  der Iteration benötigt wird. Damit das

Verfahren auch bei schlechten Startwerten noch konvergiert, verwendet man in der Praxis ein modifiziertes Newton-Verfahren (vgl. [18, 31, 34, 95]) mit der Iterationsvorschrift

$$\mathbf{z}^{(j+1)} = \mathbf{z}^{(j)} - \vartheta D\mathbf{W}(\mathbf{z}^{(j)})^{-1} \mathbf{W}(\mathbf{z}^{(j)}), \quad \vartheta \in ]0, 1],$$

wobei die Wahl von  $\vartheta$  auf unterschiedliche Weise erfolgen kann. In dem Programm JANUS [19], welches für die numerischen Berechnungen in dieser Arbeit eingesetzt wird, wird der Relaxationsfaktor  $\vartheta$  nach einer Strategie aus [32] ermittelt. In jedem Iterationsschritt müssen die  $k - 1$  Anfangswertprobleme (2.39) gelöst werden. Mit deren Ergebnissen kann anschließend  $\mathbf{W}(\mathbf{z}^{(j)})$  gemäß (2.40) ausgewertet werden. Die Jacobimatrix  $D\mathbf{W}(\mathbf{z}^{(j)})$  ersetzt man durch eine Approximation  $\Delta\mathbf{W}(\mathbf{z}^{(j)})$  durch Differenzenquotienten. Unter bestimmten Voraussetzungen wird im Programm JANUS auf die vollständige Neuberechnung der Matrix  $\Delta\mathbf{W}(\mathbf{z}^{(j)})$  verzichtet und stattdessen ein strukturerhaltendes Broyden-Rang-1-Verfahren [86] zum Anpassen der Matrix im nächsten Iterationsschritt angewendet. Dies verringert die erforderliche Rechenzeit erheblich. Beim anschließenden Lösen des linearen Gleichungssystems

$$\Delta\mathbf{W}(\mathbf{z}^{(j)}) \Delta\mathbf{z}^{(j)} = -\mathbf{W}(\mathbf{z}^{(j)})$$

kann ausgenützt werden, dass die Matrix  $\Delta\mathbf{W}(\mathbf{z}^{(j)})$  nur dünn besetzt ist. Zuletzt setzt man noch

$$\mathbf{z}^{(j+1)} = \mathbf{z}^{(j)} + \vartheta \Delta\mathbf{z}^{(j)}.$$

Details der Implementierung entnehme man [19, 56]. Die gesamte Lösung  $\mathbf{y}(t)$  erhält man abschließend durch numerische Integration der  $k - 1$  Anfangswertprobleme (2.39) und Verknüpfung der Teillösungen.

## 2.5 Optimale Steuerung differential-algebraischer Systeme

Die optimale Steuerung allgemeiner differential-algebraischer Systeme ist derzeit noch Gegenstand der Forschung. Index-1-Systeme können bereits gut behandelt werden, während die theoretische und numerische Behandlung von Systemen mit höherem Index bisher nur begrenzt möglich ist. Es fehlen zum einen notwendige Bedingungen in Form eines Minimumprinzips, zum anderen geeignete numerische Verfahren. Zur Klassifizierung der Systeme wird sich in diesem Abschnitt stets auf den differentiellen Index bezogen.

Notwendige Bedingungen für die Lösung eines Optimalsteuerungsproblems mit differential-algebraischen Nebenbedingungen vom Index eins in semi-expliziter Form ohne Steuer- und Zustandsbeschränkungen findet man in [36]. Implizite Steuerungsprobleme werden in [35] behandelt. In [37] werden die Ergebnisse aus [36] erweitert für den Fall, dass zusätzlich gemischte Steuer- und Zustandsbeschränkungen auftreten. Die Regularitätsbedingung (2.6) wird darin durch schwächere Voraussetzungen ersetzt, wodurch die Behandlung einiger Systeme von höherem In-

dex mit eingeschlossen wird. Weitere notwendige Bedingungen in Form eines lokalen Minimumprinzips für die optimale Steuerung semi-expliziter Index-2-Systeme werden in [45] angegeben. Daneben gibt es notwendige Bedingungen für Lösungen von Optimalsteuerungsproblemen mit spezieller Struktur, wie z.B. in [2], wo ein quadratisches Zielfunktional und lineare differential-algebraische Nebenbedingungen betrachtet werden. Aussagen zur optimalen Steuerung von Systemen mit beliebigem Index und beliebiger Struktur fehlen aber bisher. Dadurch ist die Anwendbarkeit indirekter Verfahren stark eingeschränkt. Sie wird außerdem begrenzt durch die Möglichkeiten der numerischen Verfahren zur Lösung der differential-algebraischen (Mehrpunkt-)Randwertprobleme, die sich aus den notwendigen Bedingungen ergeben. Für ihre Anwendbarkeit wird in der Regel ein maximaler Index von zwei und/oder eine spezielle Struktur des Systems vorausgesetzt. Als Beispiele seien [66, 87] genannt.

Es wurden auch direkte Verfahren zur optimalen Steuerung differential-algebraischer Systeme entwickelt, wie beispielsweise [44, 76]. Doch für diese müssen ebenfalls die zuletzt genannten Einschränkungen an Index und Struktur der behandelbaren Systeme gemacht werden.

Ein anderer Ansatz für semi-explizite differential-algebraische Systeme ist die Interpretation der algebraischen Gleichungen als aktive Steuer- oder Zustandsbeschränkungen. Durch Ankoppeln dieser Gleichungen mittels Lagrangemultiplikatoren an die Hamiltonfunktion kann auf die bekannte Optimalsteuerungstheorie zurückgegriffen werden (vgl. Kapitel 2.3). Das setzt jedoch die (nicht immer gesicherte) Existenz entsprechender Lagrangemultiplikatoren voraus. In [20] werden Voraussetzungen dafür angegeben. Es wird ein Beispiel aus [2] aufgegriffen, in dem diese Voraussetzungen nicht erfüllt sind und zwar eine Lösung existiert, aber keine zugehörigen Lagrangemultiplikatoren. Der Ansatz über die erweiterte Hamiltonfunktion kann also nicht immer einen Ausweg liefern.

Umgekehrt wird damit eine Problematik bei der Behandlung von Zustandsbeschränkungen verdeutlicht. Hier stellt sich dieselbe Frage nach der Existenz der Multiplikatorfunktionen und die Aussagen in [20] lassen sich übertragen. Des Weiteren darf der differential-algebraische Charakter eines Systems bei aktiven Zustandsbeschränkungen nicht unberücksichtigt bleiben. Um dies zu erläutern, werde das folgende gewöhnliche Differentialgleichungssystem mit einer algebraischen Nebenbedingung betrachtet:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), u(t), t), \quad (2.41)$$

$$0 = g(\mathbf{x}(t), u(t), t). \quad (2.42)$$

Die differentiellen Variablen  $\mathbf{x}$  repräsentieren darin die Zustandsgrößen und die algebraische Variable  $u$  die Steuergröße eines Optimalsteuerungsproblems. Die algebraische Gleichung (2.42) kann als aktive Steuer- oder Zustandsbeschränkung interpretiert werden. Falls  $\partial g / \partial u \neq 0$ , so kann Gleichung (2.42) nach  $u$  aufgelöst werden. In (2.41) eingesetzt entspricht das einer Transformation in Minimalkoordinaten. Anders ist die Situation, falls mit (2.42) eine reine Zustandsbeschränkung der Ordnung  $p$

vorliegt. Dann kann (2.42) erst nach  $p$ -maliger Differentiation nach  $u$  aufgelöst werden, was eine Indexreduktion bewirkt. Ohne eine gleichzeitige Transformation der Zustandsgrößen, die auch die Gleichung (2.42) und deren erste  $p - 1$  Ableitungen berücksichtigt, kann dieses Vorgehen zu Problemen bei der anschließenden numerischen Integration führen. Analog lässt sich beim Auftreten singulärer Steuerungen argumentieren. In diesem Fall ist (2.42) durch  $S = 0$  zu ersetzen (vgl. Kapitel 2.2). Der Schwierigkeitsgrad des Problems erhöht sich zusätzlich, wenn mehrere Steuervariablen vorkommen. Detailliertere Aussagen dazu werden in [27] gemacht.

Abschließend lässt sich zusammenfassen, dass die Behandlung von singulären Steuerungen und Zustandsbeschränkungen eng mit der Behandlung differential-algebraischer Systeme verknüpft ist. Sowohl die Theorie als auch numerische Verfahren für diese Klasse von Optimalsteuerungsproblemen sind noch in der Entwicklung und derzeit nur auf spezielle Systeme, im Allgemeinen vom Index  $\leq 2$ , anwendbar. Sofern möglich, ist daher ein Übergang zu Minimalkoordinaten, wie am Ende von Kapitel 2.3 angesprochen, häufig der vielversprechendere Ansatz, insbesondere dann, wenn die algebraischen Gleichungen auf dem gesamten Zeitintervall gültig sind und somit eine abschnittsweise Definition der Differentialgleichungen und die Formulierung von Übergangsbedingungen nicht erforderlich sind.

# Kapitel 3

## Transformationstechniken für die optimale Robotersteuerung

In diesem Kapitel wird nun eine bestimmte Klasse von Optimalsteuerungsproblemen betrachtet. Die zu steuernden Systeme sind Industrieroboter, deren freie Bewegung auf eine Untermannigfaltigkeit des Gelenkraums eingeschränkt ist. Häufigstes Beispiel in der Literatur ist eine im Arbeits- oder Gelenkraum vorgegebene Bahn für den Endeffektor. Zusammen mit den Gleichungen, welche die Mannigfaltigkeit der freien Bewegung definieren, ergeben die Bewegungsgleichungen des Roboters hierbei ein differential-algebraisches System mit differentiellem Index 3.

Als kinematisch redundant werden Roboter bezeichnet, die mehr Freiheitsgrade besitzen als das zu bearbeitende Objekt [26], oder als für die Ausführung einer Aufgabe nötig wäre [104]. Sie sind dadurch vielseitiger und können noch zusätzliche Anforderungen, wie etwa Kollisionsvermeidung, erfüllen. Mit zunehmender Zahl der Freiheitsgrade erhöht sich aber auch die Anzahl der unabhängig voneinander wählbaren Steuerungen. Diese ist, neben der Struktur der Steuer- und Zustandsbeschränkungen, kennzeichnend für die Schwierigkeiten bei der optimalen Steuerung derartiger Systeme.

Im Folgenden wird ein neuer Ansatz vorgestellt, mit dem eine einheitliche theoretische und numerische Behandlung von Optimalsteuerungsproblemen für (redundante) Roboterbewegungen auf Mannigfaltigkeiten möglich wird. Den Kern bildet eine strukturausnutzende Transformation des Problems in speziell gewählte Minimalkoordinaten und die Definition neuer, unabhängiger Steuervariablen, mit dem Ziel, die algebraischen Gleichungen zu eliminieren und die Struktur der Steuerung zu vereinfachen. Auf diese Weise wird der Schwierigkeitsgrad einer numerischen Lösung deutlich reduziert. Das Vorgehen ist eine Verallgemeinerung der Transformation in [9], wobei die hier beschriebene Technik unabhängig von der Anzahl und Art der Gelenke, der Form und Dimension der Bewegungsmannigfaltigkeit, dem Zielfunktional sowie der Anzahl und Struktur von Steuer- oder Zustandsbeschränkungen ist. Sie ist damit für die in den nächsten Kapiteln behandelte Klasse von Optimalsteuerungs-



problemen universell einsetzbar und insbesondere auch für kinematisch redundante Roboter geeignet.

Es wird nun zunächst ein Überblick über den Stand der Literatur gegeben. Anschließend werden die Bewegungsgleichungen des Roboters analysiert und in eine Minimalform transformiert. Nach der Definition geeigneter Steuervariablen werden auch die restlichen Gleichungen und Ungleichungen aus der Aufgabenstellung transformiert und das Optimalsteuerungsproblem schließlich neu formuliert.

### 3.1 Optimale Robotersteuerung in der Literatur

Als Beispiel für Roboterbewegungen auf Mannigfaltigkeiten wird in der Literatur meist eine vorgegebene Bahn für den Endeffektor betrachtet. Diese kann sowohl in kartesischen Koordinaten, als auch im Gelenkraum des Roboters definiert sein. Des Weiteren wird bei dieser Aufgabenstellung zwischen redundanten und nicht-redundanten Robotern unterschieden.

Bei nicht-redundanten Robotern ist das Problem der inversen Kinematik, d.h. das Bestimmen der Gelenkkordinaten zu einer in kartesischen Koordinaten gegebenen Position (und ggf. Orientierung) des Endeffektors, außer bei singulären Roboterkonfigurationen lokal eindeutig lösbar. Ist die Bahn für den Endeffektor vorgegeben, besitzt das System nur noch einen Bewegungsfreiheitsgrad und kann mit einer unabhängigen Steuervariable optimal gesteuert werden.

Für diesen Aufgabentyp werden in [9, 78, 90] Algorithmen zur Berechnung zeitoptimaler Steuerungen entwickelt, welche auf a priori getroffenen Annahmen für die Steuerungsstruktur basieren. Nach einer Transformation des Problems in Bahnkoordinaten, werden für dessen Lösung Standard-Integrationsverfahren eingesetzt. Da diese Methoden die Bereitstellung von Strukturinformation voraussetzen, ist ihre Anwendung auf den Spezialfall zeitoptimaler Bahnen ohne komplizierte Zustandsbeschränkungen begrenzt.

Dieselbe Aufgabenstellung mit einem gemischten Zeit-Energie-Zielfunktional wird in [89] untersucht. Auch hier wird das Problem in Bahnkoordinaten transformiert. Als einzige Steuervariable dient die Beschleunigung entlang der vorgegebenen Bahn. Aus den notwendigen Bedingungen für eine optimale Lösung ergibt sich ein Zweipunkt-Randwertproblem. Mit Hilfe des Pontryaginschen Minimumprinzips wird gezeigt, dass die Steuerung stetig ist. Implementiert wird die Methode für einen ebenen 2-Achs-Roboter.

Ein ähnlicher Ansatz wird in [67, 68] für die Steuerung eines 3-Achs-Roboters verfolgt. Für ein autonomes Problem wird die  $L^2$ -Norm der Steuergrößen minimiert. Anders als in [89] bleiben dabei die ursprünglichen Steuervariablen unverändert. Wie in [9] werden die Bogenlänge der vorgegebenen Bahn und ihre erste zeitliche Ableitung als neue Zustandsvariablen eingeführt. Die adjungierten Differentialgleichungen werden analytisch hergeleitet, wobei die partiellen Ableitungen darin durch



finite Differenzen approximiert werden. Für das gleiche Problem werden auch zeitoptimale Lösungen mit einer Zustandsbeschränkung erster Ordnung berechnet. In diesem Fall wird die Struktur der Steuerung ähnlich wie in [9] ermittelt, nur dass hier die ursprünglichen Steuervariablen beibehalten werden. Adjungierte Variablen werden bei dieser Rechnung nicht mit einbezogen, sondern nur a posteriori für Tests benutzt. Ohne Beweis wird die Lösungsstrategie auf einfache nicht-autonome Probleme erweitert. Die zugehörigen Mehrpunkt-Randwertprobleme werden mit der Mehrzielmethode gelöst.

In [14] werden zeitoptimale Trajektorien für einen 3-Achs-Roboter mit vorgegebener geometrischer Bahn untersucht. Die Berechnung der optimalen Steuerung erfolgt hier aus den notwendigen Bedingungen für eine optimale Lösung, wobei die gesamte mathematische Information über das Problem, einschließlich der adjungierten Variablen mit einbezogen wird. Daraus werden auch Aussagen über die Struktureigenschaften der Steuerung abgeleitet. A priori zu treffende Annahmen für die Steuerungsstruktur werden durch Homotopietechniken ersetzt. Neben den Beschränkungen, die sich aus der vorgegebenen Bahn für den Endeffektor ergeben, werden zusätzliche Zustandsbeschränkungen, wie maximal erlaubte Winkelgeschwindigkeiten, berücksichtigt.

Von deutlich höherem Schwierigkeitsgrad sind die oben beschriebenen Optimalsteuerungsprobleme bei redundante Robotern. Das Problem der inversen Kinematik hat dann unendlich viele Lösungen, und eine Variable ist zur Steuerung des Systems im Allgemeinen nicht ausreichend. Falls mehrere unabhängige Steuervariablen vorhanden sind, liegen für diese meist verkoppelte Beschränkungen vor.

Autonome Optimalsteuerungsprobleme für kinematisch redundante Roboter werden in [73] behandelt. Die Zielfunktionale sind Integrale über Linearkombinationen aus den Quadraten der Steuervariablen und Funktionen der Zustandsvariablen. Spezielle Anwendungen sind das Umfahren von Hindernissen oder eine Bahnplanung, bei der auf die Beweglichkeit des Roboters geachtet wird [103]. Es wird ein Projektionsansatz gewählt, bei dem neue, unbeschränkte Steuervariablen auf die ursprünglichen Steuerungen projiziert werden, um die Bewegung auf der Mannigfaltigkeit zu garantieren. Steuerbeschränkungen werden nicht eingeführt. Die vorgestellten numerischen Beispiele behandeln nur ein kinematisches Problem für einen 7-Achs-Roboter, der eine kurze gerade Strecke mit konstanter Geschwindigkeit und fester Orientierung des Endeffektors abfahren soll. Diese Spezifikationen reduzieren den Schwierigkeitsgrad des tatsächlich zu lösenden Problems erheblich, da nur noch eine unabhängige Steuervariable zu betrachten ist.

Der Ansatz aus [73] wird in [104] um Gelenkwinkelbeschränkungen erweitert. In diesem Fall sind die Beschränkungen erster Ordnung, da nur das kinematische Modell betrachtet wird. Zur Behandlung der Zustandsbeschränkungen werden Bedingungen hergeleitet, die ähnlich zu denen in [57] sind, wobei Sprung- und Schaltbedingungen fehlen. Details zum numerischen Verfahren, mit dem das zugehörige Zweipunkt-Randwertproblem gelöst wird, werden nicht angegeben.

Zeitoptimale Steuerungen redundanter Roboter werden in [41] untersucht. Neben einem Beweis zur Struktur der Lösung autonomer Probleme, wird ein Beispiel für einen ebenen 3-Achs-Roboter präsentiert. Das eingesetzte Lösungsverfahren basiert auf der Variation des Zielfunktional um eine vorhandene Näherungslösung, die iterativ verbessert wird [39, 40]. Steuer- und Zustandsbeschränkungen werden diskretisiert, was zu einer moderaten Genauigkeit der Ergebnisse führt.

Im Folgenden wird ein neuer Ansatz vorgestellt, bei dem allgemeine Optimalsteuerungsprobleme für Roboterbewegungen auf Mannigfaltigkeiten zunächst in Minimalkoordinaten transformiert werden. Damit wird die Lösung dieser Probleme mit einem indirekten Ansatz vorbereitet. Durch die Auswertung notwendiger Bedingungen aus der Optimalsteuerungstheorie und das Lösen des entstehenden Mehrpunkt-Randwertproblems mit einem Mehrzielverfahren können anschließend Lösungen mit hoher Genauigkeit für verschiedene Zielfunktionale berechnet werden (siehe Kapitel 5). Der Ansatz umfasst die Behandlung redundanter und nicht-redundanter Roboter und ist sowohl auf autonome, als auch auf nicht-autonome Probleme anwendbar. Punkt-zu-Punkt-Bewegungen sind ebenfalls mit eingeschlossen. Eine Übersicht über die Literatur dieser Problemklasse findet sich unter anderem in [22, 26].

## 3.2 Charakterisierung der Bewegungsgleichungen

Die Schwierigkeiten, die bei der Steuerung eines Roboters aufgrund der Einschränkung der Bewegungsmöglichkeiten auf eine Untermannigfaltigkeit des Gelenkraums auftreten, zeigen sich bei einer Analyse der Bewegungsgleichungen. Diese setzen sich aus den Differentialgleichungen der uneingeschränkten Bewegung und den Gleichungen, welche die Bewegungsmannigfaltigkeit definieren, zusammen und bilden somit ein differential-algebraisches System, das im Folgenden untersucht wird.

Nach (1.13) lauten die Bewegungsgleichungen für einen  $N$ -gelenkigen Roboter ohne weitere Zwangsbedingungen:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{k}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{T} \quad (3.1)$$

mit  $\mathbf{q}, \mathbf{T}, \mathbf{k}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^N$  und  $\mathbf{M}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ . Die Massenmatrix  $\mathbf{M}(\mathbf{q})$  ist symmetrisch und positiv definit und damit invertierbar. Mit der Einführung der Geschwindigkeitsvariablen  $\mathbf{v} := \dot{\mathbf{q}}$  erhält man das folgende System erster Ordnung:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{v}, \quad (3.2)$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{k}(\mathbf{q}, \mathbf{v}) = \mathbf{T}. \quad (3.3)$$

*Zustandsgrößen* dieses Systems sind  $\mathbf{q}$  und  $\mathbf{v}$ , als *Steuergrößen* dienen die Antriebsmomente  $\mathbf{T}$ .

Soll die Bewegung des Roboters auf eine Untermannigfaltigkeit des Gelenkraums eingeschränkt werden, so müssen die Differentialgleichungen (3.2) und (3.3) um

zusätzliche algebraische Gleichungen, welche die Mannigfaltigkeit der freien Bewegung definieren, ergänzt werden. Diese lassen sich in der folgenden allgemeinen Form darstellen:

$$\hat{\mathbf{r}}(\mathbf{s}, \mathbf{q}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n_r} \quad (3.4)$$

mit Parametern  $\mathbf{s}(t) = (s_1(t), \dots, s_{n_s}(t))^T \in \mathbb{R}^{n_s}$  und  $0 \leq n_s \leq n_r \leq N$ . Die Funktion  $\hat{\mathbf{r}} : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^{n_s} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{n_r}$  sei stückweise dreimal stetig differenzierbar und erfülle folgende Voraussetzung:

**Voraussetzung 3.1 (Regularität)** *Auf ganz  $\mathcal{D}$  haben die beiden Jacobimatrizen  $\mathbf{J}_s(\mathbf{s}, \mathbf{q}) := \partial \hat{\mathbf{r}}(\mathbf{s}, \mathbf{q}) / \partial \mathbf{s} \in \mathbb{R}^{n_r \times n_s}$  und  $\mathbf{J}_q(\mathbf{s}, \mathbf{q}) := \partial \hat{\mathbf{r}}(\mathbf{s}, \mathbf{q}) / \partial \mathbf{q} \in \mathbb{R}^{n_r \times N}$  jeweils maximalen Rang, d.h.*

$$\text{Rang}(\mathbf{J}_s(\mathbf{s}, \mathbf{q})) = n_s \quad \text{und} \quad \text{Rang}(\mathbf{J}_q(\mathbf{s}, \mathbf{q})) = n_r \quad \forall (\mathbf{s}, \mathbf{q}) \in \mathcal{D}.$$

Die Gleichungen (3.2)–(3.4) bilden nun ein differential-algebraisches System mit den differentiellen Variablen  $\mathbf{q}, \mathbf{v}$  und den algebraischen Variablen  $\mathbf{s}, \mathbf{T}$ . Um den differentiellen Index dieses Systems zu bestimmen, werden die algebraischen Gleichungen (3.4) nach der Zeit  $t$  abgeleitet:

$$\mathbf{0} = \frac{d\hat{\mathbf{r}}(\mathbf{s}, \mathbf{q})}{dt} = \mathbf{J}_s(\mathbf{s}, \mathbf{q})\dot{\mathbf{s}} + \mathbf{J}_q(\mathbf{s}, \mathbf{q})\mathbf{v}. \quad (3.5)$$

Wegen  $\text{Rang}(\mathbf{J}_s(\mathbf{s}, \mathbf{q})) = n_s$ , können daraus  $n_s$  Gleichungen extrahiert werden, die sich eindeutig nach  $\dot{\mathbf{s}}(\mathbf{s}, \mathbf{q}, \mathbf{v})$  auflösen lassen. Um auch für  $\mathbf{T}$  gewöhnliche Differentialgleichungen zu erhalten, sind weitere Differentiationen nötig. Mit  $\dot{\mathbf{J}}_s(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}}, \mathbf{q}, \mathbf{v}) := \frac{d}{dt}\mathbf{J}_s(\mathbf{s}, \mathbf{q})$  und  $\dot{\mathbf{J}}_q(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}}, \mathbf{q}, \mathbf{v}) := \frac{d}{dt}\mathbf{J}_q(\mathbf{s}, \mathbf{q})$  folgt aus (3.5):

$$\mathbf{0} = \frac{d^2\hat{\mathbf{r}}(\mathbf{s}, \mathbf{q})}{dt^2} = \dot{\mathbf{J}}_s(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}}, \mathbf{q}, \mathbf{v})\dot{\mathbf{s}} + \mathbf{J}_s(\mathbf{s}, \mathbf{q})\ddot{\mathbf{s}} + \dot{\mathbf{J}}_q(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}}, \mathbf{q}, \mathbf{v})\mathbf{v} + \mathbf{J}_q(\mathbf{s}, \mathbf{q})\dot{\mathbf{v}}. \quad (3.6)$$

Nach Einsetzen von  $\dot{\mathbf{s}}$  aus (3.5) und  $\dot{\mathbf{v}}$  aus (3.3) erhält man Bedingungen für die Antriebsmomente  $\mathbf{T}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \dot{\mathbf{J}}_s(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}}(\mathbf{s}, \mathbf{q}, \mathbf{v}), \mathbf{q}, \mathbf{v})\dot{\mathbf{s}}(\mathbf{s}, \mathbf{q}, \mathbf{v}) + \mathbf{J}_s(\mathbf{s}, \mathbf{q})\ddot{\mathbf{s}} + \\ &\quad \dot{\mathbf{J}}_q(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}}(\mathbf{s}, \mathbf{q}, \mathbf{v}), \mathbf{q}, \mathbf{v})\mathbf{v} + \mathbf{J}_q(\mathbf{s}, \mathbf{q})\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q})(\mathbf{T} - \mathbf{k}(\mathbf{q}, \mathbf{v})) \\ \Leftrightarrow &\quad \underbrace{(\mathbf{J}_s(\mathbf{s}, \mathbf{q}), \mathbf{J}_q(\mathbf{s}, \mathbf{q})\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}))}_{=: \mathbf{A}(\mathbf{s}, \mathbf{q})} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{s}} \\ \mathbf{T} \end{pmatrix} = \mathbf{J}_q(\mathbf{s}, \mathbf{q})\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{k}(\mathbf{q}, \mathbf{v}) - \\ &\quad \dot{\mathbf{J}}_q(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}}(\mathbf{s}, \mathbf{q}, \mathbf{v}), \mathbf{q}, \mathbf{v})\mathbf{v} - \dot{\mathbf{J}}_s(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}}(\mathbf{s}, \mathbf{q}, \mathbf{v}), \mathbf{q}, \mathbf{v})\dot{\mathbf{s}}(\mathbf{s}, \mathbf{q}, \mathbf{v}). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Die Matrix  $\mathbf{A}(\mathbf{s}, \mathbf{q})$  hat nach Voraussetzung 3.1 den maximalen Rang  $n_r$  und ihre ersten  $n_s$  Spalten sind linear unabhängig. Daher kann in (3.7) eindeutig nach  $\ddot{\mathbf{s}}$  und nach  $n_r - n_s$  Komponenten von  $\mathbf{T}$ , insgesamt also nach  $n_r$  Komponenten des

Vektors  $(\ddot{\mathbf{s}}^T, \mathbf{T}^T)^T$ , aufgelöst werden. Erneutes Ableiten liefert schließlich Differentialgleichungen für  $n_r - n_s$  Komponenten von  $\mathbf{T}$ . Die restlichen  $N - n_r + n_s$  Antriebsmomente sind die verbleibenden unabhängigen Steuergrößen. Sind sie gegeben, so sind durch die Bewegungsgleichungen (3.2)–(3.4) alle übrigen Größen bestimmt. Da dreimaliges Differenzieren nötig war, um (3.2)–(3.4) in gewöhnliche Differentialgleichungen zu überführen, hat das System den differentiellen Index 3.

Der hohe Index ist aber nicht die einzige Schwierigkeit bei der optimalen Steuerung dieses Systems. So lässt sich a priori nicht festlegen, welche Komponenten der Steuerung  $\mathbf{T}$  unabhängig voneinander gewählt werden können, und es ist auch möglich, dass diese innerhalb des Intervalls  $[t_0, t_f]$  wechseln. Hinzu kommen Steuer- und Zustandsbeschränkungen, was schließlich zu einer äußerst komplizierten Schaltstruktur der Steuerung führt, die sich kaum vorhersagen lässt.

Um eine optimale Steuerung dennoch möglich zu machen, werden im folgenden Abschnitt Minimalkoordinaten und neue Steuervariablen eingeführt, durch die die Aufgabenstellung vereinfacht und eine klare Struktur erreicht wird.

### 3.3 Bewegungsgleichungen in Minimalform

Durch die Einschränkung der Roboterbewegung mittels Gleichung (3.4) auf eine  $(N - n_r + n_s)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des Gelenkraums verbleiben dem System nur noch  $N - n_r + n_s$  Bewegungsfreiheitsgrade, womit dessen Beschreibung bereits mit  $N - n_r + n_s$  Koordinaten möglich ist. Im Allgemeinen lässt sich für diese Aufgabenstellung kein globaler Satz von Minimalkoordinaten finden. Da stetige Lösungen für  $\mathbf{q}(t)$  gesucht werden und durch die Vorgabe von Anfangs- bzw. Randwerten der Ast der Mannigfaltigkeit, auf dem die Lösung verläuft, festgelegt wird, ist für die numerische Lösung jedoch eine problemangepasste, lokale Minimalform ausreichend.

Um aus  $s_j$  ( $j = 1, \dots, n_s$ ) und  $q_i$  ( $i = 1, \dots, N$ )  $N - n_r + n_s$  Minimalkoordinaten extrahieren zu können, die das System lokal eindeutig beschreiben, genügt die lokale Auflösbarkeit von (3.4) nach  $n_r$  Variablen. Mit Voraussetzung 3.1 ist garantiert, dass (3.4) auf ganz  $\mathcal{D}$  nach irgendwelchen, aber nicht notwendigerweise überall den gleichen  $n_r$  Variablen aufgelöst werden kann. Um auf weitere Koordinatentransformationen verzichten und einheitliche Minimalkoordinaten verwenden zu können, wird daher für  $\hat{\mathbf{r}}(\mathbf{s}, \mathbf{q})$  die folgende stärkere Voraussetzung gefordert:

**Voraussetzung 3.2 (Verschärfte Regularität)** Die in Voraussetzung 3.1 definierte Jacobimatrix  $\mathbf{J}_q(\mathbf{s}, \mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n_r \times N}$  besitze eine Untermatrix  $\mathbf{J}_G(\mathbf{s}, \mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r}$ , für die gilt:

$$\text{Rang}(\mathbf{J}_G(\mathbf{s}, \mathbf{q})) = n_r \quad \forall (\mathbf{s}, \mathbf{q}) \in \mathcal{D}.$$

**Bemerkung:** Für die Ziele, die mit der angestrebten Transformation in Minimalkoordinaten verfolgt werden, ist es ausreichend, die Regularität von  $\mathbf{J}_G(\mathbf{s}, \mathbf{q})$  in einer

Umgebung der optimalen Lösung zu fordern. Da diese a priori nicht bekannt ist, sollte die Menge  $\mathcal{D}$ , im Sinne einer praktischen Anwendbarkeit, aber so groß wie möglich gewählt werden.

Es kann ohne Einschränkung definiert werden:

$$\mathbf{J}_G(\mathbf{s}, \mathbf{q}) := \left( \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial q_{n_r}} \right) \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r}. \quad (3.8)$$

Eventuell ist dafür eine Umnummerierung der Gelenkkordinaten  $q_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) erforderlich. Aus Voraussetzung 3.2 und dem Satz über implizite Funktionen folgt lokal auf  $\mathcal{D}$  die Auflösbarkeit von (3.4) nach  $\mathbf{q}_G(\mathbf{s}, \mathbf{q}_R)$ , wobei  $\mathbf{q}_G := (q_1, \dots, q_{n_r})^T$  und  $\mathbf{q}_R := (q_{n_r+1}, \dots, q_N)^T$ . Somit wird das System durch die  $N - n_r + n_s$  Variablen  $\mathbf{s}$  und  $\mathbf{q}_R$  lokal eindeutig beschrieben und die Bewegungsgleichungen lassen sich mit ihnen in eine für die Aufgabenstellung geeignete Minimalform transformieren.

Um diese Minimalform zu erhalten, müssen in den Bewegungsgleichungen neben  $\mathbf{q}_G$  auch die Ableitungen  $\dot{\mathbf{q}}_G$  und  $\ddot{\mathbf{q}}_G$  durch Ausdrücke in Abhängigkeit von  $\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}}, \ddot{\mathbf{s}}$  und  $\mathbf{q}_R, \dot{\mathbf{q}}_R, \ddot{\mathbf{q}}_R$  ersetzt werden. Falls analytisch nicht möglich oder zu aufwändig, kann  $\mathbf{q}_G(\mathbf{s}, \mathbf{q}_R)$  aus (3.4) zu jedem Zeitpunkt numerisch, z.B. mit dem Newton-Verfahren, sehr genau berechnet werden. Die Ausdrücke für  $\dot{\mathbf{q}}_G$  und  $\ddot{\mathbf{q}}_G$  gewinnt man aus den Ableitungen von (3.4) nach der Zeit  $t$ . Analog zu (3.8) wird definiert:

$$\mathbf{J}_R(\mathbf{s}, \mathbf{q}) := \left( \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial q_{n_r+1}}, \dots, \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial q_N} \right) \in \mathbb{R}^{n_r \times (N - n_r)}.$$

Damit lässt sich (3.5) schreiben als

$$\mathbf{0} = \mathbf{J}_s(\mathbf{s}, \mathbf{q})\dot{\mathbf{s}} + \mathbf{J}_G(\mathbf{s}, \mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}_G + \mathbf{J}_R(\mathbf{s}, \mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}_R.$$

Da  $\mathbf{J}_G(\mathbf{s}, \mathbf{q})$  nach Voraussetzung 3.2 invertierbar ist, folgt daraus:

$$\dot{\mathbf{q}}_G(\mathbf{s}, \mathbf{q}_R, \dot{\mathbf{s}}, \dot{\mathbf{q}}_R) = -\mathbf{J}_G^{-1}(\mathbf{s}, \mathbf{q}) [\mathbf{J}_s(\mathbf{s}, \mathbf{q})\dot{\mathbf{s}} + \mathbf{J}_R(\mathbf{s}, \mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}_R], \quad (3.9)$$

wobei für  $\mathbf{q}_G$  in  $\mathbf{q}$  jeweils  $\mathbf{q}_G(\mathbf{s}, \mathbf{q}_R)$  einzusetzen ist. Entsprechend ergibt sich aus (3.6):

$$\mathbf{0} = \dot{\mathbf{J}}_s(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}}, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{s}} + \mathbf{J}_s(\mathbf{s}, \mathbf{q})\ddot{\mathbf{s}} + \dot{\mathbf{J}}_q(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}}, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}_G(\mathbf{s}, \mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_G + \mathbf{J}_R(\mathbf{s}, \mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_R,$$

und daraus:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}}_G(\mathbf{s}, \mathbf{q}_R, \dot{\mathbf{s}}, \dot{\mathbf{q}}_R, \ddot{\mathbf{s}}, \ddot{\mathbf{q}}_R) = \\ -\mathbf{J}_G^{-1}(\mathbf{s}, \mathbf{q}) \left[ \dot{\mathbf{J}}_s(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}}, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{s}} + \mathbf{J}_s(\mathbf{s}, \mathbf{q})\ddot{\mathbf{s}} + \dot{\mathbf{J}}_q(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}}, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}_R(\mathbf{s}, \mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_R \right], \end{aligned} \quad (3.10)$$

wobei wieder  $\mathbf{q}_G$  durch  $\mathbf{q}_G(\mathbf{s}, \mathbf{q}_R)$ , und  $\dot{\mathbf{q}}_G$  durch (3.9) zu ersetzen ist.

Eine Darstellung der Bewegungsgleichungen mit den Minimalkoordinaten  $\mathbf{s}$  und  $\mathbf{q}_R$  erhält man jetzt durch Einsetzen von (3.9), (3.10) und  $\mathbf{q}_G(\mathbf{s}, \mathbf{q}_R)$  aus (3.4) in (3.1):

$$\mathbf{B}(\mathbf{s}, \mathbf{q}_R) \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{s}} \\ \ddot{\mathbf{q}}_R \end{pmatrix} + \mathbf{c}(\mathbf{s}, \mathbf{q}_R, \dot{\mathbf{s}}, \dot{\mathbf{q}}_R) = \mathbf{T} \quad (3.11)$$

mit

$$\mathbf{B}(\mathbf{s}, \mathbf{q}_R) := \mathbf{M}(\mathbf{q}) \left( \begin{array}{c|c} -\mathbf{J}_G^{-1} \mathbf{J}_s & -\mathbf{J}_G^{-1} \mathbf{J}_R \\ \hline \mathbf{0}^{(N-n_r) \times n_s} & \mathcal{E}^{(N-n_r) \times (N-n_r)} \end{array} \right) \in \mathbb{R}^{N \times (N-n_r+n_s)}, \quad (3.12)$$

$$\mathbf{c}(\mathbf{s}, \mathbf{q}_R, \dot{\mathbf{s}}, \dot{\mathbf{q}}_R) := \mathbf{M}(\mathbf{q}) \left( \begin{array}{c} -\mathbf{J}_G^{-1} (\dot{\mathbf{J}}_s \dot{\mathbf{s}} + \dot{\mathbf{J}}_q \dot{\mathbf{q}}) \\ \mathbf{0}^{(N-n_r) \times 1} \end{array} \right) + \mathbf{k}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^N. \quad (3.13)$$

Dabei bezeichne  $\mathcal{E}$  eine Einheitsmatrix und  $\mathbf{0}$  eine Nullmatrix der angegebenen Dimension.

Die algebraischen Gleichungen (3.4) werden in (3.11) automatisch berücksichtigt. Allerdings ist das System in dieser Form überbestimmt. Es können nur  $N - n_r + n_s$  Komponenten von  $\mathbf{T}$  unabhängig voneinander gewählt werden. Die restlichen  $n_r - n_s$  Komponenten sind so zu bestimmen, dass (3.11) eine Lösung besitzt. Deshalb ist die Steuerung des Systems mit den Antriebsmomenten  $\mathbf{T}$  unvorteilhaft. Besser geeignet sind die Beschleunigungen

$$\mathbf{u} := (\ddot{\mathbf{s}}^T, \ddot{\mathbf{q}}_R^T)^T \in \mathbb{R}^{N-n_r+n_s} \quad (3.14)$$

als *neue Steuervariablen*, da sie alle unabhängig voneinander sind und bei der optimalen Steuerung des Systems ein deutlich einfacheres Verhalten zeigen. Mit ihnen ergeben sich für die *neuen Zustandsvariablen*

$$\mathbf{x} := (\mathbf{x}_1^T, \mathbf{x}_2^T)^T \in \mathbb{R}^{2(N-n_r+n_s)} \text{ mit } \mathbf{x}_1 := (\mathbf{s}^T, \mathbf{q}_R^T)^T, \mathbf{x}_2 := (\dot{\mathbf{s}}^T, \dot{\mathbf{q}}_R^T)^T \quad (3.15)$$

die Differentialgleichungen

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}_2, \quad (3.16)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{u}. \quad (3.17)$$

Durch die vorangegangenen Transformationen wurde das Index-3-System (3.2)–(3.4) mit unübersichtlicher Schaltstruktur in das klar und einfach strukturierte System gewöhnlicher Differentialgleichungen (3.16), (3.17) überführt. Nach dessen Lösung erfolgt die Rücktransformation der Steuervariablen gemäß (3.11) durch

$$\mathbf{T} = \mathbf{B}(\mathbf{x}_1) \mathbf{u} + \mathbf{c}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), \quad (3.18)$$

und die ursprünglichen Zustandsvariablen ergeben sich aus  $\mathbf{x}$ , (3.9) und als Lösung von (3.4).

### Bemerkungen:

- *Anwendungsbereich der Transformation:*

Das beschriebene Vorgehen zur Wahl der Minimalkoordinaten und die anschließende Transformation der Bewegungsgleichungen sind unabhängig davon, ob es sich um einen kinematisch redundanten Roboter handelt, oder nicht. Es ist außerdem  $n_r = N$  oder  $n_s = 0$  zugelassen. In diesen Fällen besteht der

Vektor der Minimalkoordinaten  $\mathbf{x}_1$  ausschließlich aus den Parametern  $\mathbf{s}$  oder den unabhängigen Gelenkkoordinaten  $\mathbf{q}_R$ . Gilt sowohl  $n_s = 0$  als auch  $n_r = N$ , so ist  $\mathbf{q}(t)$  mit Voraussetzung 3.1 bereits aus den algebraischen Nebenbedingungen (3.4) eindeutig bestimmt und kann nicht weiter optimiert werden.

- *Punkt-zu-Punkt-Bewegungen:*

Gilt  $n_s = n_r$  und Voraussetzung 3.1, dann ist  $\mathbf{s}(t)$  durch (3.4) eindeutig bestimmt. Die algebraischen Nebenbedingungen sind damit von den gewöhnlichen Differentialgleichungen (3.1) entkoppelt und müssen bei der optimalen Steuerung nicht betrachtet werden, was der Aufgabenstellung einer Punkt-zu-Punkt-Bewegung entspricht. Diese ist in dem beschriebenen Formalismus mit eingeschlossen, da sich (3.1) mit  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{q}$ ,  $\mathbf{x}_2 = \dot{\mathbf{q}}$ ,  $\mathbf{u} = \ddot{\mathbf{q}}$ ,  $\mathbf{B}(\mathbf{x}_1) = \mathbf{M}(\mathbf{q})$  und  $\mathbf{c}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \mathbf{k}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  ebenfalls in die Form (3.16)–(3.18) transformieren lässt.

- *Nicht-autonome Bewegungsgleichungen:*

Auch für nicht-autonome Bewegungsgleichungen

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}, t)\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{k}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{T} \quad (3.19)$$

$$\hat{\mathbf{r}}(\mathbf{s}, \mathbf{q}, t) = \mathbf{0} \quad (3.20)$$

können  $\mathbf{s}$  und  $\mathbf{q}_R$  als Minimalkoordinaten gewählt werden, sofern die Voraussetzungen 3.1 und 3.2 erfüllt sind, wobei nun  $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^{n_s} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ . Die Transformation der Bewegungsgleichungen erfolgt analog zum autonomen Fall mit  $\mathbf{q}_G(\mathbf{s}, \mathbf{q}_R, t)$  aus (3.20) und

$$\dot{\mathbf{q}}_G(\mathbf{s}, \mathbf{q}_R, \dot{\mathbf{s}}, \dot{\mathbf{q}}_R, t) = -\mathbf{J}_G^{-1}(\mathbf{s}, \mathbf{q}, t) \left[ \mathbf{J}_s(\mathbf{s}, \mathbf{q}, t)\dot{\mathbf{s}} + \mathbf{J}_R(\mathbf{s}, \mathbf{q}, t)\dot{\mathbf{q}}_R + \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}(\mathbf{s}, \mathbf{q}, t)}{\partial t} \right],$$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}}_G(\mathbf{s}, \mathbf{q}_R, \dot{\mathbf{s}}, \dot{\mathbf{q}}_R, \ddot{\mathbf{s}}, \ddot{\mathbf{q}}_R, t) = & -\mathbf{J}_G^{-1}(\mathbf{s}, \mathbf{q}, t) \left[ \dot{\mathbf{J}}_s(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}}, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)\dot{\mathbf{s}} + \right. \\ & \mathbf{J}_s(\mathbf{s}, \mathbf{q}, t)\ddot{\mathbf{s}} + \dot{\mathbf{J}}_q(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}}, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}_R(\mathbf{s}, \mathbf{q}, t)\ddot{\mathbf{q}}_R + \\ & \left. \frac{\partial \mathbf{J}_s(\mathbf{s}, \mathbf{q}, t)}{\partial t}\dot{\mathbf{s}} + \frac{\partial \mathbf{J}_q(\mathbf{s}, \mathbf{q}, t)}{\partial t}\dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{r}}(\mathbf{s}, \mathbf{q}, t)}{\partial t^2} \right]. \end{aligned}$$

Es gelten dann (3.14)–(3.17) unverändert und anstelle von (3.18) ergibt sich die nicht-autonome Gleichung

$$\mathbf{T} = \mathbf{B}(\mathbf{x}_1, t)\mathbf{u} + \mathbf{c}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t)$$

mit  $\mathbf{B}(\mathbf{x}_1, t)$  analog zu (3.12) und

$$\mathbf{c}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) = \mathbf{M}(\mathbf{q}, t) \begin{pmatrix} -\mathbf{J}_G^{-1} \left( \mathbf{J}_s \dot{\mathbf{s}} + \mathbf{J}_q \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{J}_s}{\partial t} \dot{\mathbf{s}} + \frac{\partial \mathbf{J}_q}{\partial t} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{r}}}{\partial t^2} \right) \\ \mathbf{0}^{(N-n_r) \times 1} \end{pmatrix} + \mathbf{k}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t).$$



### 3.4 Neuformulierung der Optimalsteuerungsaufgabe

Mathematisch kann die Aufgabe, einen Roboter auf einer Mannigfaltigkeit unter Steuer- und Zustandsbeschränkungen optimal zu steuern, mit den Steuergrößen  $\mathbf{T}$  und den Zustandsgrößen  $\mathbf{q}, \mathbf{v}$  in Anlehnung an die Optimalsteuerungsprobleme aus Kapitel 2 wie folgt formuliert werden:

$$\hat{I}(\mathbf{T}) := \hat{\varphi}(\mathbf{q}(t_0), \mathbf{v}(t_0), \mathbf{q}(t_f), \mathbf{v}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \hat{L}(\mathbf{q}(t), \mathbf{v}(t), \mathbf{T}(t), t) dt \rightarrow \min \quad (3.21)$$

unter Berücksichtigung der Bewegungsgleichungen

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{v}(t), \quad (3.22)$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}(t))\dot{\mathbf{v}}(t) + \mathbf{k}(\mathbf{q}(t), \mathbf{v}(t)) = \mathbf{T}(t), \quad (3.23)$$

$$\hat{\mathbf{r}}(\mathbf{s}(t), \mathbf{q}(t)) = \mathbf{0}, \quad (3.24)$$

der Randbedingungen

$$q_i(t_0) = q_{i0}, \quad i \in \hat{\mathcal{J}}_{01} \subseteq \hat{\mathcal{J}} := \{1, \dots, N\}, \quad (3.25)$$

$$v_i(t_0) = v_{i0}, \quad i \in \hat{\mathcal{J}}_{02} \subseteq \hat{\mathcal{J}}, \quad (3.26)$$

$$q_i(t_f) = q_{if}, \quad i \in \hat{\mathcal{J}}_{f1} \subseteq \hat{\mathcal{J}}, \quad (3.27)$$

$$v_i(t_f) = v_{if}, \quad i \in \hat{\mathcal{J}}_{f2} \subseteq \hat{\mathcal{J}}, \quad (3.28)$$

der Übergangsbedingungen an inneren Punkten  $t_j$ :

$$\hat{\boldsymbol{\psi}}_j(\mathbf{q}(t_j^+), \mathbf{v}(t_j^+), \mathbf{q}(t_j^-), \mathbf{v}(t_j^-), t_j) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n_{\psi,j}}, \quad j = 1, \dots, n_P, \quad (3.29)$$

der Steuerbeschränkungen

$$\hat{\phi}_k(\mathbf{q}(t), \mathbf{v}(t), \mathbf{T}(t), t) \leq 0, \quad k = 1, \dots, n_\phi, \quad (3.30)$$

der Zustandsbeschränkungen

$$\hat{h}_l(\mathbf{q}(t), \mathbf{v}(t), t) \leq 0, \quad l = 1, \dots, n_h, \quad (3.31)$$

und der Parameterbeschränkungen

$$s_i(t) \geq s_{i0}, \quad i \in \tilde{\mathcal{J}}_0 \subseteq \tilde{\mathcal{J}} := \{1, \dots, n_s\}, \quad (3.32)$$

$$s_i(t) \leq s_{if}, \quad i \in \tilde{\mathcal{J}}_f \subseteq \tilde{\mathcal{J}}. \quad (3.33)$$

Die Existenz einer (physikalischen) Lösung wird im Folgenden angenommen. Voraussetzung dafür ist eine ausreichende Dimensionierung des Roboters, sodass die Steuer- und Zustandsbeschränkungen erfüllt werden können. Beispielsweise sind dem



Gewicht und der Größe der Roboterarme angepasste, hinreichend große maximale Antriebsmomente erforderlich. Neben den dynamischen Beschränkungen müssen auch die geometrischen Bedingungen wohlgestellt sein. Das beinhaltet unter anderem die Definition einer nicht leeren Bewegungsmannigfaltigkeit und die Konsistenz der Rand- und Übergangsbedingungen mit (3.24).

Nach Anwendung der Transformationen aus dem letzten Abschnitt auf das gesamte Optimalsteuerungsproblem, d.h. Einsetzen von  $\mathbf{q}_G(\mathbf{s}, \mathbf{q}_R)$  aus (3.4), (3.9) für  $\dot{\mathbf{q}}_G$  und (3.10) für  $\ddot{\mathbf{q}}_G$ , lässt sich die Aufgabe mit den Zustandsvariablen  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  ( $n = 2(N - n_r + n_s)$ ) aus (3.15) und den Steuervariablen  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$  ( $m = N - n_r + n_s$ ) aus (3.14) neu formulieren:

$$I(\mathbf{u}) := \varphi(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt \rightarrow \min \quad (3.34)$$

unter Berücksichtigung der Differentialgleichungen

$$\dot{\mathbf{x}}_1(t) = \mathbf{x}_2(t), \quad (3.35)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2(t) = \mathbf{u}(t), \quad (3.36)$$

der Randbedingungen

$$x_i(t_0) = x_{i0}, \quad i \in \mathcal{J}_0 \subseteq \mathcal{J} := \{1, \dots, n\}, \quad (3.37)$$

$$x_i(t_f) = x_{if}, \quad i \in \mathcal{J}_f \subseteq \mathcal{J}, \quad (3.38)$$

der Übergangsbedingungen an inneren Punkten  $t_j$ :

$$\boldsymbol{\psi}_j(\mathbf{x}(t_j^+), \mathbf{x}(t_j^-), t_j) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n_{\psi,j}}, \quad j = 1, \dots, n_P, \quad (3.39)$$

der Steuerbeschränkungen

$$\phi_k(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \leq 0, \quad k = 1, \dots, n_\phi, \quad (3.40)$$

und der Zustandsbeschränkungen

$$h_l(\mathbf{x}(t), t) \leq 0, \quad l = 1, \dots, n_h, \quad (3.41)$$

$$s_{i0} - x_i(t) \leq 0, \quad i \in \tilde{\mathcal{J}}_0, \quad (3.42)$$

$$x_i(t) - s_{if} \leq 0, \quad i \in \tilde{\mathcal{J}}_f. \quad (3.43)$$

Dieses zu (3.21)–(3.33) äquivalente Optimalsteuerungsproblem ist wohlgestellt und weist eine klare Struktur auf. Die algebraischen Gleichungsnebenbedingungen wurden eliminiert, wodurch nun eine Behandlung mit den in Kapitel 2 vorgestellten Methoden der Optimalsteuerung möglich ist. Allerdings ist zu bedenken, dass sich die Vereinfachung der Aufgabenstellung nur auf die Struktur der Steuerung und der Bewegungsgleichungen bezieht. Bei der Transformation des Zielfunktional und der Steuer- und Zustandsbeschränkungen können höchst nichtlineare und aufwändig

auszuwertende Terme entstehen. Dennoch lohnt sich die Transformation, da durch sie die optimale Steuerung des Systems mit den heute zur Verfügung stehenden Mitteln überhaupt erst möglich wird. Eine effiziente und hochgenaue numerische Realisierung gelingt unter anderem durch den Einsatz rekursiver Formalismen. Die Existenz zulässiger Lösungen, d.h. Funktionen  $\mathbf{x}(t)$  und  $\mathbf{u}(t)$ , die den Nebenbedingungen (3.35)–(3.43) genügen, ist bei realen Anwendungen im Allgemeinen gewährleistet. Für die theoretischen Überlegungen im nächsten Kapitel werde sie vorausgesetzt:

**Voraussetzung 3.3 (Existenz zulässiger Steuerungen)** *Die Menge der zulässigen Steuer- und Zustandsfunktionen*

$$\mathcal{R} := \left\{ (\mathbf{x}^T(t), \mathbf{u}^T(t))^T \in \mathbb{R}^{n+m} \mid (3.35)\text{--}(3.43) \text{ sind } \forall t \in [t_0, t_f] \text{ erfüllt} \right\}$$

sei nicht leer.

Bevor sich nun das nächste Kapitel der Lösung des Optimalsteuerungsproblems widmet, soll anhand der Beschränkungen

$$\tau_{i,\min} \leq T_i \leq \tau_{i,\max}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.44)$$

mit den konstanten Schranken  $\tau_{i,\min}, \tau_{i,\max}$  ( $i = 1, \dots, N$ ) veranschaulicht werden, wie sich die Transformation auf Steuer- oder Zustandsbeschränkungen auswirkt.

Der Zusammenhang zwischen den Antriebsmomenten  $\mathbf{T}$  und den neuen Steuer- und Zustandsvariablen  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{x}$  ist in (3.18) gegeben. Eingesetzt in (3.44) folgt daraus mit  $\boldsymbol{\tau}_{\min} := (\tau_{1,\min}, \dots, \tau_{N,\min})^T$  und  $\boldsymbol{\tau}_{\max} := (\tau_{1,\max}, \dots, \tau_{N,\max})^T$ :

$$\boldsymbol{\tau}_{\min} \leq \mathbf{B}(\mathbf{x}_1)\mathbf{u} + \mathbf{c}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \leq \boldsymbol{\tau}_{\max} \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \mathbf{B}(\mathbf{x}_1)\mathbf{u} \leq \boldsymbol{\tau}_{\max} - \mathbf{c}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), \\ & -\mathbf{B}(\mathbf{x}_1)\mathbf{u} \leq -\boldsymbol{\tau}_{\min} + \mathbf{c}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), \end{aligned} \quad (3.46)$$

wobei die Ungleichungen in (3.45) und (3.46) komponentenweise zu verstehen sind. Während die Antriebsmomente  $\mathbf{T}$  nur durch Konstanten nach oben und unten beschränkt waren, müssen nach der Transformation die gemischten Steuer- und Zustandsbeschränkungen (3.46) erfüllt werden, die zwar nach wie vor linear in den Steuerungen sind, aber höchst nichtlinear von den Zustandsgrößen abhängen. Hinzu kommt, dass die Matrix  $\mathbf{B}(\mathbf{x}_1)$  Nullzeilen enthalten kann. In einem solchen Fall werden die entsprechenden Ungleichungen in (3.46) zu reinen Zustandsbeschränkungen. Dieses Beispiel zeigt, dass sich die Schwierigkeiten bei der optimalen Steuerung durch die Transformation von den Bewegungsgleichungen zu den Steuer- und Zustandsbeschränkungen verlagern. Wie mit letzteren umgegangen werden kann, wird im nächsten Kapitel beschrieben.

Mit der Behandlung von (3.34)–(3.43) wird eine allgemeine Klasse von Steuerungsproblemen in der Robotik abgedeckt. Die optimale Steuerung von Robotern auf

beliebigen Untermannigfaltigkeiten des Gelenkraums, sowie Punkt-zu-Punkt-Bewegungen sind darin enthalten und auch bei nicht-autonomen Bewegungsgleichungen kann die Steuerungsaufgabe in die Form (3.34)–(3.43) transformiert werden. Die Aussagen des nächsten Kapitels beziehen sich damit ebenfalls auf die gesamte angesprochenen Klasse von Optimalsteuerungsproblemen.

# Kapitel 4

## Strukturanalyse optimaler Robotersteuerungen

Nachdem im vorangegangenen Kapitel für eine große Klasse von Steuerungsaufgaben in der Robotik eine einheitliche Formulierung in Minimalkoordinaten erzielt wurde, wird die Aufmerksamkeit nun auf die Lösung dieser Optimalsteuerungsprobleme gerichtet. In Kapitel 5 erfolgt die numerische Realisierung mit einem indirekten Mehrzielverfahren. Das Mehrpunkt-Randwertproblem für die Zustands- und adjungierten Variablen  $\mathbf{x}$  und  $\boldsymbol{\lambda}$  ergibt sich hierfür aus (3.35)–(3.39) und den notwendigen Bedingungen (2.8) und (2.12)–(2.17), denen eine optimale Lösung genügen muss. Bei der numerischen Lösung dieses Mehrpunkt-Randwertproblems müssen die Steuervariablen  $\mathbf{u}$  sowie die Multiplikatorfunktionen  $\boldsymbol{\mu}$  und  $\boldsymbol{\nu}$ , mit denen die Steuer- und Zustandsbeschränkungen an die Hamiltonfunktion angekoppelt werden, zu jedem Zeitpunkt analytisch oder numerisch in Abhängigkeit von  $\mathbf{x}$  und  $\boldsymbol{\lambda}$  bestimmt werden. Damit befasst sich dieses Kapitel, wobei ein nichtlineares Auftreten der Steuervariablen in den Beschränkungen ausgeschlossen wird.

**Annahme 4.1 (Linearität der Steuerbeschränkungen)** *Es gelte*

$$\phi(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \Phi(\mathbf{x}, t)\mathbf{u} - \phi_0(\mathbf{x}, t)$$

mit  $\Phi(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{n_\phi \times m}$  und  $\phi_0(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{n_\phi}$ , d.h. die Beschränkungen  $\phi_k(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \leq 0$  ( $k = 1, \dots, n_\phi$ ) sind linear in den Steuervariablen  $u_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ).

Diese Annahme ist bei der hier behandelten Problemklasse gerechtfertigt, da die Steuerbeschränkungen (3.40) aus Beschränkungen der Antriebsmomente  $T_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) resultieren, die in der Regel unabhängig voneinander und linear formuliert werden können. Bei der Transformation bleibt die Linearität in den Steuergrößen erhalten (vgl. (3.18)), weswegen dann auch in den Steuerbeschränkungen (3.40) die Steuervariablen  $u_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ) nur linear auftreten.

Das Vorgehen zur Berechnung der optimalen Steuerung im Fall eines nichtlinearen Zielfunktional wird im Folgenden anhand energieoptimaler Trajektorien demons-

triert. Dabei wird gezeigt, dass unter den bisherigen Voraussetzungen und der Annahme linearer Steuerbeschränkungen (die trotzdem nichtlinear von den Zustandsvariablen abhängen dürfen) die Steuervariablen durch die notwendigen Bedingungen für eine Lösung stets eindeutig als Lösung linearer Gleichungssysteme bestimmt sind.

Als Beispiel für Zielfunktionale, in denen die Steuerung höchstens linear auftritt, werden zeitoptimale Bahnen betrachtet. Das Bestimmen der optimalen Steuerung ist hier aufgrund der auftretenden Bang-Bang-Strukturen und möglicher singulärer Extremalenbögen deutlich schwieriger als im nichtlinearen Fall. Eine Analyse der Lösungsstruktur bildet die Basis für die Berechnung der Steuervariablen. Sie führt über die Darstellung der optimalen Steuerung als Lösung eines beschränkten linearen Optimierungsproblems und liefert detaillierte Aussagen über die aktiven Beschränkungen zu jedem Zeitpunkt. Damit wird für diese Aufgabenstellung erstmals auch die Behandlung von miteinander verkoppelten linearen Steuerbeschränkungen möglich.

## 4.1 Energieoptimale Steuerung

Ein mögliches Zielfunktional zur Berechnung energieoptimaler Bahnen ist

$$\hat{I}(\mathbf{T}) = \int_{t_0}^{t_f} \frac{\mathbf{T}^T \mathbf{T}}{\|\boldsymbol{\tau}_{min}\|^2 + \|\boldsymbol{\tau}_{max}\|^2} dt$$

mit  $\boldsymbol{\tau}_{min}$  und  $\boldsymbol{\tau}_{max}$  wie in (3.45). Einsetzen von  $\bar{\tau} := \|\boldsymbol{\tau}_{min}\|^2 + \|\boldsymbol{\tau}_{max}\|^2 > 0$  und (3.18) ergibt das transformierte Zielfunktional

$$I(\mathbf{u}) = \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{\bar{\tau}} \left[ \mathbf{u}^T \mathbf{B}^T(\mathbf{x}_1) \mathbf{B}(\mathbf{x}_1) \mathbf{u} + 2\mathbf{c}^T(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \mathbf{B}(\mathbf{x}_1) \mathbf{u} + \mathbf{c}^T(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \mathbf{c}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \right] dt. \quad (4.1)$$

**Lemma 4.1** Für alle  $\mathbf{x}_1 \in \tilde{\mathcal{D}} := \{ \mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^{N-n_r+n_s} \mid (\mathbf{s}(\mathbf{x}_1), \mathbf{q}(\mathbf{x}_1)) \in \mathcal{D} \}$  ist die Matrix  $\mathbf{B}^T(\mathbf{x}_1) \mathbf{B}(\mathbf{x}_1)$  positiv definit.

**Beweis:** Mit der Matrix

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}_1) := \left( \begin{array}{c|c} -\mathbf{J}_G^{-1} \mathbf{J}_s & -\mathbf{J}_G^{-1} \mathbf{J}_R \\ \hline \mathbf{0}^{(N-n_r) \times n_s} & \boldsymbol{\varepsilon}^{(N-n_r) \times (N-n_r)} \end{array} \right) \in \mathbb{R}^{N \times (N-n_r+n_s)}$$

folgt für  $\mathbf{x}_1 \in \tilde{\mathcal{D}}$  aus (3.12):  $\mathbf{B}(\mathbf{x}_1) = \mathbf{M}(\mathbf{q}(\mathbf{x}_1)) \mathbf{C}(\mathbf{x}_1)$

$$\Rightarrow \mathbf{B}^T(\mathbf{x}_1) \mathbf{B}(\mathbf{x}_1) = \mathbf{C}^T(\mathbf{x}_1) \mathbf{M}^T(\mathbf{q}(\mathbf{x}_1)) \mathbf{M}(\mathbf{q}(\mathbf{x}_1)) \mathbf{C}(\mathbf{x}_1). \quad (4.2)$$

Die Massenmatrix des Roboters  $\mathbf{M}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$  ist für alle  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^N$  symmetrisch und positiv definit (vgl. Kapitel 1.3). Daher existieren zu jedem  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^N$  eine orthogonale Matrix  $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  und eine Diagonalmatrix  $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_N) \in \mathbb{R}^{N \times N}$  mit den Eigenwerten  $\tilde{\lambda}_i > 0$  ( $i = 1, \dots, N$ ) von  $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ , sodass  $\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \mathbf{S}^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{S}$ .

$$\Rightarrow \mathbf{M}^T(\mathbf{q})\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \mathbf{S}^T \mathbf{\Lambda}^T \underbrace{\mathbf{S}\mathbf{S}^T}_{=\mathbf{E}} \mathbf{\Lambda} \mathbf{S} = \mathbf{S}^T \mathbf{\Lambda}^2 \mathbf{S}.$$

$\Rightarrow$  Die Eigenwerte der symmetrischen Matrix  $\mathbf{M}^T(\mathbf{q})\mathbf{M}(\mathbf{q})$  sind  $\tilde{\lambda}_i^2 > 0$  ( $i = 1, \dots, N$ ).

$\Rightarrow \mathbf{M}^T(\mathbf{q})\mathbf{M}(\mathbf{q})$  ist für alle  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^N$  positiv definit.

$$\Rightarrow \mathbf{y}^T \mathbf{M}^T(\mathbf{q}(\mathbf{x}_1))\mathbf{M}(\mathbf{q}(\mathbf{x}_1))\mathbf{y} > 0 \quad \forall \mathbf{x}_1 \in \tilde{\mathcal{D}} \text{ und } \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N \setminus \{\mathbf{0}\}. \quad (4.3)$$

Aus den Voraussetzungen 3.1 und 3.2 folgt:

$$\begin{aligned} & \text{Rang}(\mathbf{C}(\mathbf{x}_1)) = N - n_r + n_s \quad \forall \mathbf{x}_1 \in \tilde{\mathcal{D}}. \\ \Rightarrow & \mathbf{C}(\mathbf{x}_1)\mathbf{z} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^N, \text{ falls } \mathbf{z} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{N-n_r+n_s}. \\ \stackrel{(4.3)}{\Rightarrow} & \mathbf{z}^T \mathbf{C}^T(\mathbf{x}_1)\mathbf{M}^T(\mathbf{q}(\mathbf{x}_1))\mathbf{M}(\mathbf{q}(\mathbf{x}_1))\mathbf{C}(\mathbf{x}_1)\mathbf{z} > 0 \quad \forall \mathbf{x}_1 \in \tilde{\mathcal{D}} \text{ und} \\ & \mathbf{z} \in \mathbb{R}^{N-n_r+n_s} \setminus \{\mathbf{0}\}. \\ \stackrel{(4.2)}{\Rightarrow} & \mathbf{B}^T(\mathbf{x}_1)\mathbf{B}(\mathbf{x}_1) \text{ ist für alle } \mathbf{x}_1 \in \tilde{\mathcal{D}} \text{ positiv definit.} \quad \square \end{aligned}$$

Bleiben die Zustandsbeschränkungen (3.41)–(3.43) zunächst unberücksichtigt, ergibt sich nach (2.7) die Hamiltonfunktion für das transformierte Optimalsteuerungsproblem (4.1), (3.35)–(3.40) zu

$$\begin{aligned} H = & \frac{1}{\bar{\tau}} \left[ \mathbf{u}^T \mathbf{B}^T(\mathbf{x}_1)\mathbf{B}(\mathbf{x}_1)\mathbf{u} + 2\mathbf{c}^T(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)\mathbf{B}(\mathbf{x}_1)\mathbf{u} + \mathbf{c}^T(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)\mathbf{c}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \right] + \\ & \boldsymbol{\lambda}_1^T \mathbf{x}_2 + \boldsymbol{\lambda}_2^T \mathbf{u} + \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \end{aligned}$$

wobei  $\boldsymbol{\lambda} = (\boldsymbol{\lambda}_1^T, \boldsymbol{\lambda}_2^T)^T$  mit  $\boldsymbol{\lambda}_1 := (\lambda_1, \dots, \lambda_{n/2})^T$ ,  $\boldsymbol{\lambda}_2 := (\lambda_{n/2+1}, \dots, \lambda_n)^T$  und  $n = 2(N - n_r + n_s)$ . Bei der Berechnung der Steuerung ist nun noch zu unterscheiden, ob Steuerbeschränkungen aktiv sind, oder nicht. Im Folgenden bezeichne  $m_\phi$  die Anzahl aktiver Steuerbeschränkungen und  $\mathcal{J}_\phi := \{k(1), \dots, k(m_\phi)\} \subseteq \{1, \dots, n_\phi\}$  die Indexmenge der aktiven Steuerbeschränkungen. Des Weiteren sei  $\tilde{\boldsymbol{\phi}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \in \mathbb{R}^{m_\phi}$  definiert durch  $\tilde{\phi}_j(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) := \phi_{k(j)}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$  ( $j = 1, \dots, m_\phi$ ). Nach Annahme 4.1 ist  $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$  linear in der Steuerung  $\mathbf{u}$ . Somit ist auch  $\tilde{\boldsymbol{\phi}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$  linear in  $\mathbf{u}$  und es gilt

$$\tilde{\boldsymbol{\phi}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \tilde{\boldsymbol{\Phi}}(\mathbf{x}, t)\mathbf{u} - \tilde{\boldsymbol{\phi}}_0(\mathbf{x}, t)$$

mit  $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{m_\phi \times m}$  und  $\tilde{\boldsymbol{\phi}}_0(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{m_\phi}$ .

**1. Fall:**  $m_\phi = 0$ :

Hier gilt nach (2.11):  $\mu_k = 0$  ( $k = 1, \dots, n_\phi$ ), und die Optimalitätsbedingung (2.9) lautet

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = \frac{1}{\bar{\tau}} \left[ 2\mathbf{u}^T \mathbf{B}^T(\mathbf{x}_1)\mathbf{B}(\mathbf{x}_1) + 2\mathbf{c}^T(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)\mathbf{B}(\mathbf{x}_1) \right] + \boldsymbol{\lambda}_2^T = \mathbf{0}^T.$$

Aus Lemma 4.1 folgt die Invertierbarkeit von  $\mathbf{B}^T(\mathbf{x}_1)\mathbf{B}(\mathbf{x}_1)$  und damit

$$\mathbf{u} = - [\mathbf{B}^T(\mathbf{x}_1)\mathbf{B}(\mathbf{x}_1)]^{-1} \left[ \mathbf{B}^T(\mathbf{x}_1)\mathbf{c}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \frac{\bar{\tau}}{2}\boldsymbol{\lambda}_2 \right].$$

Wegen  $\bar{\tau} > 0$  und Lemma 4.1 ist die Matrix

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{u}^2} = \frac{2}{\bar{\tau}} \mathbf{B}^T(\mathbf{x}_1)\mathbf{B}(\mathbf{x}_1)$$

für alle  $\mathbf{x}_1 \in \tilde{\mathcal{D}}$  positiv definit und die Legendre-Clebsch-Bedingung (2.10) somit stets erfüllt.

**2. Fall:**  $0 < m_\phi < m$ :

Hier gilt  $\phi_k(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = 0$  ( $k \in \mathcal{J}_\phi$ ) bzw.

$$\tilde{\phi}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \tilde{\Phi}(\mathbf{x}, t)\mathbf{u} - \tilde{\phi}_0(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{m_\phi}. \quad (4.4)$$

Daraus lassen sich, die Gültigkeit der Regularitätsbedingung (2.6) vorausgesetzt,  $m_\phi$  Komponenten der Steuerung  $\mathbf{u}$  bestimmen. Die restlichen Komponenten von  $\mathbf{u}$  sowie die  $m_\phi$  Multiplikatorfunktionen  $\mu_k$  ( $k \in \mathcal{J}_\phi$ ), zusammengefasst im Vektor  $\tilde{\boldsymbol{\mu}} \in \mathbb{R}^{m_\phi}$ , sind aus der Optimalitätsbedingung (2.9) zu ermitteln:

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = \frac{1}{\bar{\tau}} [2\mathbf{u}^T \mathbf{B}^T(\mathbf{x}_1)\mathbf{B}(\mathbf{x}_1) + 2\mathbf{c}^T(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)\mathbf{B}(\mathbf{x}_1)] + \boldsymbol{\lambda}_2^T + \tilde{\boldsymbol{\mu}}^T \tilde{\Phi}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}^T. \quad (4.5)$$

Zum Beweis der eindeutigen Auflösbarkeit nach den gesuchten Größen betrachte man die Matrix

$$\mathbf{J}_{u,\mu} := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{u}^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{u} \partial \tilde{\boldsymbol{\mu}}} \\ \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \mathbf{u}} & \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{\boldsymbol{\mu}}} \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{c|c} \frac{2}{\bar{\tau}} \mathbf{B}^T \mathbf{B} & \tilde{\Phi}^T \\ \hline \tilde{\Phi} & \mathbf{0}^{m_\phi \times m_\phi} \end{array} \right).$$

Für die Determinante dieser Matrix gilt:

$$\det(\mathbf{J}_{u,\mu}) = \det\left(\frac{2}{\bar{\tau}} \mathbf{B}^T \mathbf{B}\right) \det\left(-\tilde{\Phi} \left(\frac{2}{\bar{\tau}} \mathbf{B}^T \mathbf{B}\right)^{-1} \tilde{\Phi}^T\right).$$

Da  $\bar{\tau} > 0$ , ist nach Lemma 4.1 die Matrix  $\frac{2}{\bar{\tau}} \mathbf{B}^T \mathbf{B}$  für alle  $\mathbf{x}_1 \in \tilde{\mathcal{D}}$  positiv definit. Analog zum Beweis von Lemma 4.1 folgt mit der Regularitätsbedingung (2.6) entlang der optimalen Lösung auch die positive Definitheit von  $\tilde{\Phi} \left(\frac{2}{\bar{\tau}} \mathbf{B}^T \mathbf{B}\right)^{-1} \tilde{\Phi}^T$ . Damit gilt entlang der optimalen Lösung

$$\det(\mathbf{J}_{u,\mu}) \neq 0,$$

d.h. die Gleichungen (4.4) und (4.5) lassen sich nach dem Satz über implizite Funktionen lokal eindeutig nach  $\mathbf{u}$  und  $\tilde{\boldsymbol{\mu}}$  auflösen, bzw. das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}}\right)^T \\ \tilde{\phi} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{J}_{u,\mu} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \tilde{\boldsymbol{\mu}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{\lambda}_2 - \frac{2}{\bar{\tau}} \mathbf{B}^T \mathbf{c} \\ \tilde{\phi}_0 \end{pmatrix}$$

ist eindeutig lösbar. Für die Multiplikatorfunktionen der inaktiven Steuerbeschränkungen gilt nach (2.11):

$$\mu_k = 0, \quad k \in \{1, \dots, n_\phi\} \setminus \mathcal{J}_\phi.$$

Die Vorzeichenbedingungen in (2.11) sind a posteriori zu prüfen.

**3. Fall:**  $m_\phi = m$ :

In diesem Fall sind alle Steuervariablen aus den aktiven Steuerbeschränkungen bereits eindeutig bestimmt. Die Matrix  $\partial\check{\phi}/\partial\mathbf{u} = \check{\Phi}$  ist quadratisch und wegen (2.6) invertierbar. Die Multiplikatorfunktionen der aktiven Steuerbeschränkungen  $\tilde{\boldsymbol{\mu}} \in \mathbb{R}^m$  erhält man dann eindeutig aus der Optimalitätsbedingung (2.9):

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} &= \frac{1}{\tau} [2\mathbf{u}^T \mathbf{B}^T(\mathbf{x}_1) \mathbf{B}(\mathbf{x}_1) + 2\mathbf{c}^T(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \mathbf{B}(\mathbf{x}_1)] + \boldsymbol{\lambda}_2^T + \tilde{\boldsymbol{\mu}}^T \check{\Phi}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}^T \\ \Leftrightarrow \tilde{\boldsymbol{\mu}} &= -\check{\Phi}^{-T}(\mathbf{x}, t) \left[ \frac{1}{\tau} [2\mathbf{B}^T(\mathbf{x}_1) \mathbf{B}(\mathbf{x}_1) \mathbf{u} + 2\mathbf{B}^T(\mathbf{x}_1) \mathbf{c}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)] + \boldsymbol{\lambda}_2 \right]. \end{aligned}$$

Für die restlichen Multiplikatorfunktionen gilt nach (2.11):

$$\mu_k = 0, \quad k \in \{1, \dots, n_\phi\} \setminus \mathcal{J}_\phi.$$

Die Vorzeichenbedingungen in (2.11) sind a posteriori zu prüfen.

In allen drei Fällen sind die Steuervariablen  $\mathbf{u}$  und die Multiplikatorfunktionen  $\boldsymbol{\mu}$  eindeutig bestimmt und als Lösung von linearen Gleichungssystemen zu berechnen. Der Fall, dass mehr als  $m$  Steuerbeschränkungen gleichzeitig aktiv sind, wird durch die Regularitätsbedingung (2.6) ausgeschlossen. Die Schaltstruktur der Steuerung, d.h. welche der Beschränkungen zu welchem Zeitpunkt jeweils aktiv sind, kann numerisch wie folgt ermittelt werden: Ausgehend vom unbeschränkten Optimalsteuerungsproblem werden in mehreren Homotopieschritten die Beschränkungen nach und nach dazugenommen, bis schließlich alle erfüllt sind. Die Schaltstruktur ergibt sich dabei automatisch. Beim Wechsel von aktiven Steuerbeschränkungen ist an den Schaltpunkten die Stetigkeit aller Zustands- und adjungierten Variablen sowie die Stetigkeit der Hamiltonfunktion zu fordern.

Wird eine Zustandsbeschränkung  $h(\mathbf{x}, t) \leq 0$  der Ordnung  $p$  aktiv, so wird die Gleichung  $h^p(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = 0$  zur Berechnung der Steuerungen hinzugenommen und mit der Multiplikatorfunktion  $\nu$  an die Hamiltonfunktion angekoppelt. Wegen

$$h^p(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \frac{d}{dt} h^{p-1}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial h^{p-1}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}_1} \mathbf{x}_2 + \underbrace{\frac{\partial h^{p-1}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}_2}}_{\neq \mathbf{0}^T} \mathbf{u} + \frac{\partial h^{p-1}(\mathbf{x}, t)}{\partial t}$$



ist die Funktion  $h^p(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$  stets linear in den Steuervariablen. Wird entlang der optimalen Lösung die verschärfte Regularitätsbedingung

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial \mathbf{u}} & \phi_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_{n_\phi}}{\partial \mathbf{u}} & 0 & \cdots & \phi_{n_\phi} & 0 \\ \frac{\partial h^p}{\partial \mathbf{u}} & 0 & \cdots & 0 & h^p \end{pmatrix} = n_\phi + 1 \quad (4.6)$$

gefordert (vgl. (2.19) für  $p = 1$ ), dann erfolgt die Berechnung von  $\mathbf{u}$ ,  $\boldsymbol{\mu}$  und  $\nu$  analog zur Berechnung von  $\mathbf{u}$  und  $\boldsymbol{\mu}$  im Fall inaktiver Zustandsbeschränkungen unter zusätzlicher Berücksichtigung der Vorzeichenbedingungen (2.20). Die Übergangsbedingungen an Aufsprung-, Absprung- und Kontaktpunkten entnehme man Kapitel 2.3 und der darin angegebenen Literatur. Zur Behandlung der Zustandsbeschränkung ist auch eine abschnittsweise Transformation in Minimalkoordinaten möglich. Die Linearität der verbleibenden Beschränkungen und der Bewegungsgleichungen bezüglich der Steuervariablen wird dadurch nicht zerstört und das Vorgehen zur Berechnung der Steuerung bleibt unverändert.

## 4.2 Zeitoptimale Steuerung

Das Zielfunktional zur Berechnung zeitoptimaler Bahnen kann folgendermaßen formuliert werden:

$$I(\mathbf{u}) = \hat{I}(\mathbf{T}) = t_f = \varphi. \quad (4.7)$$

Es gelten weiterhin die Bezeichnungen aus Kapitel 4.1. Die unbeschränkte Hamiltonfunktion für das Optimalsteuerungsproblem (4.7), (3.35)–(3.40) lautet dann (vgl. (2.7)):

$$H^0 = \boldsymbol{\lambda}_1^T \mathbf{x}_2 + \boldsymbol{\lambda}_2^T \mathbf{u}.$$

Sie ist linear in der Steuerung  $\mathbf{u}$ , weswegen diese nicht direkt aus der Optimalitätsbedingung (2.9) bestimmt werden kann. Bang-Bang- und singuläre Steuerungen sind möglich. Das Vorhandensein von Steuerbeschränkungen ist hierbei entscheidend, um unbeschränkte Werte der Steuerung, d.h. Impulssteuerungen, auszuschließen [16].

**Voraussetzung 4.1 (Beschränktheit zulässiger Steuerungen)** *Es sei für jedes zulässige Paar  $(\mathbf{x}^T(t), \mathbf{u}^T(t))^T \in \mathcal{R}$  (vgl. Voraussetzung 3.3) die Steuerung  $\mathbf{u}(t)$  auf  $[t_0, t_f]$  beschränkt.*

**Bemerkung:** Bei der in diesem Kapitel betrachteten Klasse von Optimalsteuerungsproblemen repräsentieren die Steuergrößen  $\mathbf{u}$  Beschleunigungen. Deren Beschränktheit ergibt sich daher direkt aus den natürlichen Beschränkungen des Systems, welche in die Aufgabenstellung eingehen.

Im Folgenden wird zunächst die Frage nach der Anzahl aktiver Beschränkungen entlang der zeitoptimalen Lösung behandelt. Die zugehörigen Beweise sind für eine große Klasse von Optimalsteuerungsaufgaben in der Robotik einschließlich nicht-autonomer und zustandsbeschränkter Probleme gültig und stellen eine Verallgemeinerung der Ergebnisse in [25, 41, 69] dar.

Da die Steuerung  $\mathbf{u}$  nicht nur in der unbeschränkten Hamiltonfunktion  $H^0$ , sondern mit Annahme 4.1 auch in den Steuerbeschränkungen nur linear auftritt, lässt sich die Analyse der zeitoptimalen Steuerung nach dem Pontryaginschen Minimumprinzip auf die Analyse eines linearen Optimierungsproblems zurückführen. Dieses lineare Optimierungsproblem wird im Anschluss an eine Zusammenstellung von Definitionen und Ergebnissen aus der linearen Optimierung betrachtet. Daraus werden weitere Aussagen über die Lösung des Optimalsteuerungsproblems (4.7), (3.35)–(3.40) abgeleitet, die zugleich die Basis für eine numerische Berechnung der Steuerung bilden.

### 4.2.1 Anzahl aktiver Beschränkungen

In [25] wird bewiesen, dass bei zeitoptimalen Punkt-zu-Punkt-Bewegungen eines  $N$ -achsigen Roboters mit Beschränkungen der Form (3.44) immer mindestens eine Beschränkung aktiv, d.h. eine Antriebsgröße gesättigt ist. Eine ähnliche Aussage liefert [69] für allgemeine Robotersysteme, deren Bahn im Gelenkraum vorgegeben ist, was der Bewegung auf einer eindimensionalen Untermannigfaltigkeit des Gelenkraums entspricht. Das folgende Lemma verallgemeinert diese Ergebnisse für Roboterbewegungen auf beliebigen Untermannigfaltigkeiten des Gelenkraums. Da jede der Beschränkungen (3.40)–(3.43) zu einer der Beschränkungen (3.30)–(3.33) korrespondiert, wird sich direkt auf die transformierte Form der Optimalsteuerungsaufgabe (4.7), (3.35)–(3.40) bezogen. Dabei sind nicht nur Beschränkungen der Form (3.44), sondern beliebige Steuer- und Zustandsbeschränkungen zugelassen. Der Beweis schließt zudem den Fall nicht-autonomer Bewegungsgleichungen (3.19), (3.20) ein.

**Lemma 4.2** *Es gelte Voraussetzung 4.1 für das Optimalsteuerungsproblem (4.7), (3.35)–(3.40). Falls für dieses Problem eine optimale Lösung mit  $t_f < \infty$  existiert, dann ist entlang der optimalen Lösung immer mindestens eine Steuer- oder Zustandsbeschränkung aktiv.*

**Beweis:** Aus der Annahme inaktiver Beschränkungen auf einem Intervall  $[t_1, t_2] \subset ]t_0, t_f[$ ,  $t_1 < t_2$ , folgt:

$$H = H^0 = \boldsymbol{\lambda}_1^T \mathbf{x}_2 + \boldsymbol{\lambda}_2^T \mathbf{u} \quad \text{für } t \in [t_1, t_2], \quad (4.8)$$

und aus den notwendigen Bedingungen (2.8) und (2.9) für eine optimale Lösung von (4.7), (3.35)–(3.40) ergibt sich

$$\left. \begin{array}{l} \dot{\lambda}_1 = \mathbf{0} \\ \dot{\lambda}_2 = -\lambda_1 \\ \mathbf{0} = \left( \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \right)^T = \lambda_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \mathbf{0} \quad \forall t \in [t_1, t_2]. \quad (4.9)$$

Da  $\mathbf{u}$  nach Voraussetzung 4.1 auf  $[t_0, t_f]$  nur beschränkte Werte annimmt, ist wegen (3.36) und  $t_f < \infty$  auch  $\mathbf{x}_2$  auf  $[t_0, t_f]$  beschränkt, und für die Hamiltonfunktion (4.8) gilt mit (4.9):

$$H = 0 \quad \forall t \in [t_1, t_2]. \quad (4.10)$$

Die Hamiltonfunktion in (4.8) hängt nicht explizit von der Zeit  $t$  ab. Folglich ist sie auf  $[t_0, t_f]$  konstant (vgl. Kapitel 2.1). Ihr Wert ergibt sich aus der notwendigen Bedingung (2.17):

$$\begin{aligned} 0 &= \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t_f} + H \right) \Big|_{t=t_f} = (1 + H) \Big|_{t=t_f} \\ &\Rightarrow H \Big|_{t=t_f} = -1 \\ &\Rightarrow H = -1 \quad \forall t \in [t_0, t_f]. \end{aligned}$$

Dies steht aber im Widerspruch zu (4.10). Daher war die Annahme inaktiver Beschränkungen falsch. Entlang der optimalen Lösung muss also immer mindestens eine Steuer- oder Zustandsbeschränkung aktiv sein.  $\square$

**Bemerkung:** Die Aussage von Lemma 4.2 bezieht sich sowohl auf Steuer- als auch auf Zustandsbeschränkungen. Entlang der optimalen Lösung muss nicht zwingend immer mindestens eine Steuerbeschränkung aus (3.44) aktiv sein. Im Falle aktiver Zustandsbeschränkungen kann es auch Intervalle geben, in denen keine der Antriebsgrößen gesättigt ist. Ein Beispiel dafür findet sich in [14].

**Korollar zu Lemma 4.2:** *Gilt für das Optimalsteuerungsproblem (4.7), (3.35)–(3.40) Voraussetzung 4.1 und  $m = N - n_r + n_s = 1$ , dann tritt, sofern eine optimale Lösung mit  $t_f < \infty$  existiert, entlang dieser keine singuläre Steuerung auf.*

**Bemerkung:** Ein Beispiel für das Auftreten von singulären Steuerungen bei  $m > 1$  findet sich in [75].

Eine Aussage über die maximale Anzahl aktiver Beschränkungen liefert das folgende Lemma:

**Lemma 4.3** *Erfüllen die Beschränkungen des Optimalsteuerungsproblems (4.7), (3.35)–(3.40) die Regularitätsbedingung (2.6) bzw. (4.6), dann sind entlang der optimalen Lösung zu jedem Zeitpunkt höchstens  $N - n_r + n_s$  von ihnen aktiv.*

**Beweis:** Für die Anzahl  $m$  der Steuervariablen des transformierten Optimalsteuerungsproblems (4.7), (3.35)–(3.40) gilt  $m = N - n_r + n_s$ . Daraus folgt unmittelbar die Aussage von Lemma 4.3.  $\square$

In [41] werden  $N$ -gelenkige Roboter behandelt, für die eine Bahn im Arbeitsraum als parametrisierte Kurve durch  $n_r$  Gleichungen mit einem Bahnparameter festgelegt ist und reguläre Beschränkungen der Form (3.44) vorliegen. Es wird bewiesen, dass dann höchstens  $N - n_r + 1$  Beschränkungen aktiv bzw. Antriebsgrößen gesättigt sind. Dieses Ergebnis ist konsistent mit Lemma 4.3. Die Aussage von Lemma 4.3 ist wie bei Lemma 4.2 für eine größere Klasse von Optimalsteuerungsproblemen gültig, da sie sich auf die transformierte Form (4.7), (3.35)–(3.40) bezieht, in die jede Steuerungsaufgabe (4.7), (3.22)–(3.33), auch mit nicht-autonomen Bewegungsgleichungen, überführt werden kann.

## 4.2.2 Grundlagen der linearen Optimierung

In diesem Abschnitt werden einige für die Strukturanalyse zeitoptimaler Steuerungen benötigte Definitionen und Sätze aus der linearen Optimierung zusammengestellt. Einen Überblick über Methoden der linearen Optimierung geben beispielsweise [6, 59, 60]. Darin finden sich auch die Beweise der im Folgenden angegebenen Ergebnisse sowie Algorithmen zur numerischen Lösung linearer Optimierungsprobleme, wie etwa die *Simplexmethode*.

Betrachtet werde das folgende *lineare Optimierungsproblem* in Standardform:

$$\min\{\mathbf{w}^T \mathbf{y} \mid \mathbf{A} \mathbf{y} \leq \mathbf{b}\} \quad \text{bzw.} \quad (4.11)$$

$$\min\{\mathbf{w}^T \mathbf{y} \mid \mathbf{a}_j^T \mathbf{y} \leq b_j, j = 1, \dots, n_b\}, \quad (4.12)$$

wobei  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n_d}$  den Vektor der Variablen und  $\mathbf{w} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n_d}$  den Gradienten der *Zielfunktion*  $\mathbf{w}^T \mathbf{y}$  bezeichnet. Die Ungleichung in (4.11) gilt komponentenweise. Darin ist  $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_{n_b})^T \in \mathbb{R}^{n_b}$  und  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n_b})^T \in \mathbb{R}^{n_b \times n_d}$ . Die Ungleichung  $\mathbf{a}_j^T \mathbf{y} \leq b_j$  heißt die *j-te Nebenbedingung* und  $\mathbf{a}_j$  ihr Gradient.

**Definition 4.1** Die *j-te Nebenbedingung* heißt in  $\mathbf{y}$

- inaktiv, wenn  $\mathbf{a}_j^T \mathbf{y} < b_j$ ,
- aktiv, wenn  $\mathbf{a}_j^T \mathbf{y} = b_j$ ,
- verletzt, wenn  $\mathbf{a}_j^T \mathbf{y} > b_j$ .

Das *Polyeder*

$$\mathcal{P} := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n_d} \mid \mathbf{A} \mathbf{y} \leq \mathbf{b}\}$$

heißt die Menge der *zulässigen Lösungen* oder *zulässiger Bereich* von (4.11). Es ist *abgeschlossen* und als Schnitt von Halbräumen *konvex*.

**Definition 4.2 (Optimale Lösung)** Ein Punkt  $\mathbf{y}_0$  heißt optimale Lösung des linearen Optimierungsproblems (4.11) bzw. (4.12) oder kurz optimal, wenn  $\mathbf{y}_0 \in \mathcal{P}$  und  $\mathbf{w}^T \mathbf{y}_0 \leq \mathbf{w}^T \mathbf{y}$  für alle  $\mathbf{y} \in \mathcal{P}$  gilt.

**Satz 4.1** *Wenn das lineare Optimierungsproblem (4.11) eine optimale Lösung besitzt, tritt sie auf dem Rand des zulässigen Bereichs  $\mathcal{P}$  auf.*

**Beweis:** Sei  $\mathbf{y}_0$  eine optimale Lösung, die im Inneren des zulässigen Bereichs  $\mathcal{P}$  liegt. Dann gibt es ein  $\varepsilon > 0$ , sodass  $\mathbf{y} := \mathbf{y}_0 - \varepsilon \mathbf{w} \in \mathcal{P}$ .

$$\Rightarrow \mathbf{w}^T \mathbf{y} = \mathbf{w}^T \mathbf{y}_0 - \underbrace{\varepsilon \mathbf{w}^T \mathbf{w}}_{>0} < \mathbf{w}^T \mathbf{y}_0.$$

Dies ist ein Widerspruch zur Optimalität von  $\mathbf{y}_0$ . Falls eine optimale Lösung existiert, muss diese also auf dem Rand von  $\mathcal{P}$  liegen.  $\square$

**Definition 4.3 (Ecke eines Polyeders)** *Ein Punkt  $\mathbf{y}_0 \in \mathcal{P}$  heißt Ecke des Polyeders  $\mathcal{P}$ , wenn dort  $n_d$  Nebenbedingungen mit linear unabhängigen Gradienten aktiv sind. Eine Ecke heißt nichtentartet, wenn in ihr genau  $n_d$  Nebenbedingungen aktiv sind. Sie heißt entartet, wenn in ihr mehr als  $n_d$  Nebenbedingungen aktiv sind.*

**Satz 4.2** *Ist  $\mathcal{P} \neq \emptyset$  beschränkt, dann besitzt  $\mathcal{P}$  Ecken.*

**Definition 4.4 (Extremalpunkt)** *Ein Punkt  $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$  heißt Extremalpunkt einer konvexen Menge  $\mathcal{M}$ , falls mit  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathcal{M}$  und  $0 < \vartheta < 1$  aus  $\mathbf{p} = \vartheta \mathbf{y}_1 + (1 - \vartheta) \mathbf{y}_2$  stets  $\mathbf{p} = \mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_2$  folgt.*

Anschaulich besagt die Definition eines Extremalpunktes  $\mathbf{p}$ , dass  $\mathbf{p}$  sich nicht als echte Konvexkombination (mit  $\vartheta \neq 1$  und  $\vartheta \neq 0$ ) verschiedener Punkte  $\mathbf{y}_1$  und  $\mathbf{y}_2$  in  $\mathcal{M}$  darstellen lässt.

**Satz 4.3** *Die Extremalpunkte eines Polyeders sind genau dessen Ecken.*

**Definition 4.5 (Seitenfläche eines Polyeders)** *Eine Teilmenge  $\mathcal{F}$  von  $\mathcal{P}$ , die sich als Schnitt von Hyperebenen  $\mathcal{H}_j := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n_d} \mid \mathbf{a}_j^T \mathbf{y} = b_j\}$  ( $j \in \{1, \dots, n_b\}$ ) ergibt, heißt Seitenfläche des Polyeders  $\mathcal{P}$ .*

Nach dieser Definition sind die 0-dimensionalen Seitenflächen eines Polyeders gerade seine Ecken. Die 1-dimensionalen Seitenflächen heißen auch *Kanten* von  $\mathcal{P}$ .

**Definition 4.6 (Benachbarte Ecken)** *Zwei Ecken eines Polyeders  $\mathcal{P}$  heißen benachbart, wenn sie durch eine Kante von  $\mathcal{P}$  verbunden sind.*

**Definition 4.7 (Extremalmenge)** *Eine konvexe Teilmenge  $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{M}$  einer konvexen Menge  $\mathcal{M}$  heißt Extremalmenge von  $\mathcal{M}$ , falls aus  $\mathbf{p} \in \mathcal{K}$ ,  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathcal{M}$ ,  $0 < \vartheta < 1$  und  $\mathbf{p} = \vartheta \mathbf{y}_1 + (1 - \vartheta) \mathbf{y}_2$  stets folgt  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathcal{K}$ .*

Nach Definition 4.4 sind die Extrempunkte von  $\mathcal{M}$  gerade ihre 0-dimensionalen Extrempunkte.  $\mathcal{M}$  selbst ist Extrempunktmenge von  $\mathcal{M}$  maximaler Dimension.

**Satz 4.4** *Die Extrempunkte des Polyeders  $\mathcal{P}$  sind, neben  $\mathcal{P}$  selbst, gerade seine Seitenflächen.*

**Satz 4.5** *Wenn das lineare Optimierungsproblem (4.11) optimale Lösungen besitzt, ist die Menge der optimalen Lösungen eine Extrempunktmenge des Polyeders  $\mathcal{P}$  der zulässigen Lösungen von (4.11).*

**Korollar zu Satz 4.5:** *Besitzt das lineare Optimierungsproblem (4.11) optimale Lösungen und hat der zulässige Bereich  $\mathcal{P}$  Ecken, dann ist mindestens eine davon eine optimale Lösung. Besitzt das lineare Optimierungsproblem (4.11) eine eindeutige optimale Lösung, dann ist diese eine Ecke des zulässigen Bereichs  $\mathcal{P}$ .*

**Satz 4.6 (Existenz optimaler Lösungen)** *Eine optimale Lösung für (4.11) existiert genau dann, wenn der zulässige Bereich  $\mathcal{P}$  nicht leer und die Zielfunktion  $\mathbf{w}^T \mathbf{y}$  auf  $\mathcal{P}$  nach unten beschränkt ist.*

**Satz 4.7 (Kuhn-Tucker-Bedingungen)** *Der Vektor  $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^{n_a}$  ist eine optimale Lösung von (4.11) genau dann, wenn ein Vektor  $\mathbf{z}_0 \in \mathbb{R}^{n_b}$  existiert, der zusammen mit  $\mathbf{y}_0$  die Kuhn-Tucker-Bedingungen erfüllt:*

$$\mathbf{A}\mathbf{y}_0 \leq \mathbf{b} \quad (\text{primale Zulässigkeit})$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{z}_0 = -\mathbf{w}, \mathbf{z}_0 \geq \mathbf{0} \quad (\text{duale Zulässigkeit})$$

$$\mathbf{z}_0^T (\mathbf{A}\mathbf{y}_0 - \mathbf{b}) = 0 \quad (\text{Komplementarität})$$

**Definition 4.8 (Strikte Komplementarität)** *Der Punkt  $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^{n_a}$  heißt strikt komplementär, wenn gilt:*

$$\mathbf{a}_j^T \mathbf{y}_0 = b_j \Rightarrow (\mathbf{z}_0)_j > 0, \quad j = 1, \dots, n_b.$$

**Satz 4.8 (Eindeutigkeit der optimalen Lösung)** *Der Punkt  $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^{n_a}$  sei optimale Lösung des linearen Optimierungsproblems (4.11). Ferner sei  $\mathbf{y}_0$  nichtentartete Ecke von  $\mathcal{P}$  und strikt komplementär. Dann ist  $\mathbf{y}_0$  einzige optimale Lösung dieses Problems.*

### 4.2.3 Struktur der zeitoptimalen Lösung

Aus Lemma 4.2 folgt, dass entlang der optimalen Lösung des Optimalsteuerungsproblems (4.7), (3.35)–(3.43) bis auf endlich viele Punkte  $\partial H^0 / \partial \mathbf{u} = \boldsymbol{\lambda}_2^T \neq \mathbf{0}^T$  gilt.

Die Punkte  $t_s$  mit  $\boldsymbol{\lambda}_2(t_s) = \mathbf{0}$  gehören zu den Schaltpunkten der Steuerung, an denen die aktiven Beschränkungen wechseln. Ohne Berücksichtigung von Zustandsbeschränkungen ist dann zu jedem Zeitpunkt  $t \in [t_0, t_f] \setminus \{t_s | \boldsymbol{\lambda}_2(t_s) = \mathbf{0}\}$  durch

$$\min\{\boldsymbol{\lambda}_2^T \mathbf{u} | \boldsymbol{\Phi} \mathbf{u} \leq \phi_0\} \quad (4.13)$$

ein lineares Optimierungsproblem definiert, unter dessen Lösungen sich nach dem Pontryaginschen Minimumprinzip notwendigerweise die optimale Lösung von (4.7), (3.35)–(3.40) befinden muss. Wird auf einem Intervall eine Zustandsbeschränkung  $h(\mathbf{x}, t) \leq 0$   $p$ -ter Ordnung aktiv, so gilt dort

$$h^p(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \underbrace{\frac{\partial h^{p-1}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial h^{p-1}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}_1} \mathbf{x}_2}_{=:-b_h(\mathbf{x}, t)} + \underbrace{\frac{\partial h^{p-1}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}_2}}_{=:\mathbf{a}_h^T(\mathbf{x}, t)} \mathbf{u} = 0,$$

und (4.13) ist zu ersetzen durch

$$\min\{\boldsymbol{\lambda}_2^T \mathbf{u} | \boldsymbol{\Phi} \mathbf{u} \leq \phi_0, \mathbf{a}_h^T \mathbf{u} = b_h\}. \quad (4.14)$$

Das Vorgehen bei mehreren aktiven Zustandsbeschränkungen ist analog. Im Folgenden wird aber der Übersichtlichkeit halber höchstens eine aktive Zustandsbeschränkung betrachtet.

Die Kuhn-Tucker-Bedingungen (Satz 4.7) zum linearen Optimierungsproblem (4.13) lauten

$$\boldsymbol{\Phi} \mathbf{u} \leq \phi_0, \quad (4.15)$$

$$\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\mu} = -\boldsymbol{\lambda}_2, \quad \boldsymbol{\mu} \geq \mathbf{0}, \quad (4.16)$$

$$\boldsymbol{\mu}^T (\boldsymbol{\Phi} \mathbf{u} - \phi_0) = 0. \quad (4.17)$$

Mit Annahme 4.1 und der Hamiltonfunktion

$$H = \boldsymbol{\lambda}_1^T \mathbf{x}_2 + \boldsymbol{\lambda}_2^T \mathbf{u} + \boldsymbol{\mu}^T (\boldsymbol{\Phi} \mathbf{u} - \phi_0)$$

entsprechen (4.15)–(4.17) genau den notwendigen Bedingungen (3.40), (2.9) und (2.11) für eine optimale Lösung von (4.7), (3.35)–(3.40). Aus Satz 4.7 folgt dann die Äquivalenz von (3.40), (2.9) und (2.11) mit der Lösung des linearen Optimierungsproblems (4.13).

Im Falle einer aktiven Zustandsbeschränkung kann (4.14) in die Standardform (4.11) gebracht werden, indem die Gleichung  $\mathbf{a}_h^T \mathbf{u} = b_h$  durch die beiden Ungleichungen  $\mathbf{a}_h^T \mathbf{u} \leq b_h$  und  $-\mathbf{a}_h^T \mathbf{u} \leq -b_h$  ersetzt wird. Mit der Hamiltonfunktion

$$H = \boldsymbol{\lambda}_1^T \mathbf{x}_2 + \boldsymbol{\lambda}_2^T \mathbf{u} + \boldsymbol{\mu}^T (\boldsymbol{\Phi} \mathbf{u} - \phi_0) + \nu (\mathbf{a}_h^T \mathbf{u} - b_h)$$

und Satz 4.7 folgt dann die Äquivalenz von (3.40)–(3.43), (2.9) (2.11) mit der Lösung des linearen Optimierungsproblems (4.14), wobei in Satz 4.7  $\mathbf{A} = (\boldsymbol{\Phi}^T, \mathbf{a}_h, -\mathbf{a}_h)^T$ ,  $\mathbf{b} = (\phi_0^T, b_h, -b_h)^T$ ,  $\boldsymbol{\mu}_k = (z_0)_k$  ( $k = 1, \dots, n_\phi$ ) und  $\nu = (z_0)_{n_\phi+1} - (z_0)_{n_\phi+2}$  zu setzen sind. Lediglich die Vorzeichenbedingungen (2.20) sind noch a posteriori zu prüfen.



Das lineare Optimierungsproblem (4.13) bzw. (4.14) kann nun benutzt werden, um weitere Aussagen über die Schaltstruktur der optimalen Steuerung von (4.7), (3.35)–(3.43) und Vorgehensweisen für ihre Berechnung abzuleiten. Die Lösung des linearen Optimierungsproblems liefert nämlich nicht nur zu jedem Zeitpunkt Kandidaten für die optimale Steuerung, sondern auch die Information, welche Beschränkungen zu diesem Zeitpunkt aktiv sind. Diese Strukturinformation kann aus der alleinigen Auswertung der notwendigen Bedingungen aus Kapitel 2 nicht gewonnen werden. Da nach Lemma 4.2 eine zeitoptimale Lösung ohne Beschränkungen nicht möglich ist, kann die Schaltstruktur auch nicht wie bei energieoptimalen Lösungen aus der unbeschränkten Steuerung durch schrittweises Hinzunehmen der Beschränkungen ermittelt werden. Die Darstellung der notwendigen Bedingungen für eine optimale Lösung in Form eines linearen Optimierungsproblems stellt somit einen entscheidenden Schritt zum Bestimmen der Schaltstruktur und zur Berechnung der zeitoptimalen Lösung dar.

Während der in Kapitel 2.2 beschriebene Ansatz zur Berechnung der Steuerung bei linearer Hamiltonfunktion nur dann auf mehrere Steuervariablen übertragbar ist, falls entkoppelte Steuerbeschränkungen in der Form

$$\phi_{i,min}(\mathbf{x}(t), t) \leq u_i(t) \leq \phi_{i,max}(\mathbf{x}(t), t), \quad i = 1, \dots, m$$

vorliegen, ermöglicht die Darstellung der optimalen Steuerung als Lösung eines linearen Optimierungsproblems auch die Behandlung miteinander verkoppelter linearer Beschränkungen, wie beispielsweise (3.46). Erst damit kann die Schaltstruktur für das transformierte Problem (4.7), (3.35)–(3.43) bestimmt und die Steuerung aus den notwendigen Bedingungen der Optimalsteuerungstheorie berechnet werden.

Im Folgenden wird nun beschrieben, wie ausgehend von der Lösung des linearen Optimierungsproblems (4.13) bzw. (4.14) zu jedem Zeitpunkt die optimale Steuerung für das Problem (4.7), (3.35)–(3.43) bestimmt werden kann. Die Existenz optimaler Lösungen von (4.13) bzw. (4.14) folgt mit Satz 4.6 aus den Voraussetzungen 3.3 und 4.1. Hier wird nochmals deutlich, dass dafür die Existenz zulässiger Lösungen alleine nicht ausreicht. Zusätzlich ist die Beschränktheit des zulässigen Bereichs erforderlich. Satz 4.1 bestätigt die Aussage von Lemma 4.2: Optimale Lösungen von (4.13) bzw. (4.14) befinden sich stets auf dem Rand des zulässigen Bereichs, d.h. es ist immer mindestens eine Beschränkung aktiv.

Zunächst wird davon ausgegangen, dass keine Zustandsbeschränkung aktiv ist, und es wird das lineare Optimierungsproblem (4.13) betrachtet. Der zulässige Bereich von (4.13) werde mit  $\mathcal{P}_\phi$  bezeichnet. Verfahren wie die Simplexmethode berechnen dann unter den genannten Voraussetzungen stets eine optimale Lösung  $\mathbf{u}_0$ , wobei folgende Fälle zu unterscheiden sind:

**1. Fall:**  $\mathbf{u}_0$  ist nichtentartete Ecke von  $\mathcal{P}_\phi$  und strikt komplementär:

Nach Satz 4.8 ist  $\mathbf{u}_0$  in diesem Fall eindeutige Lösung von (4.13) und damit bereits die gesuchte optimale Steuerung. Da in  $\mathbf{u}_0$  genau  $m$  linear unabhängige Steuerbeschränkungen aktiv sind, sind die Multiplikatorfunktionen  $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^{n_\phi}$  aus (4.16) und (4.17) ebenfalls eindeutig bestimmt.



**2. Fall:**  $\mathbf{u}_0$  ist nichtentartete Ecke von  $\mathcal{P}_\phi$  und nicht strikt komplementär:

In diesem Fall ist  $\mathbf{u}_0$  nicht die einzige optimale Lösung von (4.13). Doch die zugehörigen Multiplikatorfunktionen  $\boldsymbol{\mu}$  sind wie im 1. Fall aus (4.16) und (4.17) eindeutig bestimmt. An ihnen lässt sich die Indexmenge der zwingend aktiven Steuerbeschränkungen ablesen:

$$\mathcal{J}_\phi = \{i \mid \mu_i > 0\}.$$

Da  $\mathbf{u}_0$  nicht strikt komplementär ist, gilt dabei

$$|\mathcal{J}_\phi| = m_\phi < m.$$

Jeder Punkt  $\mathbf{u}$  der Seitenfläche

$$\mathcal{F} = \{\mathbf{u} \in \mathcal{P}_\phi \mid \phi_i = 0, i \in \mathcal{J}_\phi\}$$

des Polyeders  $\mathcal{P}_\phi$  ist dann optimale Lösung von (4.13) und erfüllt zusammen mit  $\boldsymbol{\mu}$  die Kuhn-Tucker-Bedingungen (4.15)–(4.17). Um unter diesen Lösungen die gesuchte optimale Steuerung für das Optimalsteuerungsproblem (4.7), (3.35)–(3.40) zu bestimmen, sind weiter Überlegungen erforderlich. Dafür bezeichne wie in Kapitel 4.1  $\tilde{\boldsymbol{\phi}} = \tilde{\boldsymbol{\Phi}}\mathbf{u} - \tilde{\boldsymbol{\phi}}_0 \in \mathbb{R}^{m_\phi}$  den Vektor der aktiven Steuerbeschränkungen und  $\tilde{\boldsymbol{\mu}} \in \mathbb{R}^{m_\phi}$  den Vektor der zugehörigen Multiplikatorfunktionen. Dann ergibt sich aus der Optimalitätsbedingung (2.9) bzw. aus (4.16):

$$\boldsymbol{\lambda}_2 + \tilde{\boldsymbol{\Phi}}^T(\mathbf{x}, t)\tilde{\boldsymbol{\mu}} = \mathbf{0}. \quad (4.18)$$

Da es sich bei  $\mathbf{u}_0$  um eine nichtentartete Ecke von  $\mathcal{P}_\phi$  handelt, gibt es Untermatrizen  $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_b(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{m_\phi \times m_\phi}$  und  $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_s(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{(m-m_\phi) \times m_\phi}$  von  $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}^T(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{m \times m_\phi}$ , sodass  $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_b(\mathbf{x}, t)$  regulär ist und (4.18) äquivalent ist zu

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\lambda}_b + \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_b(\mathbf{x}, t)\tilde{\boldsymbol{\mu}} &= \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{\lambda}_s + \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_s(\mathbf{x}, t)\tilde{\boldsymbol{\mu}} &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

wobei  $\boldsymbol{\lambda}_b \in \mathbb{R}^{m_\phi}$  und  $\boldsymbol{\lambda}_s \in \mathbb{R}^{m-m_\phi}$  aus den entsprechenden Komponenten von  $\boldsymbol{\lambda}_2 \in \mathbb{R}^m$  bestehen. Elimination von  $\tilde{\boldsymbol{\mu}}$  ergibt schließlich

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, t) := \boldsymbol{\lambda}_s - \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_s(\mathbf{x}, t) \left( \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_b(\mathbf{x}, t) \right)^{-1} \boldsymbol{\lambda}_b = \mathbf{0}$$

mit  $\mathbf{S} = (S_1, \dots, S_{m-m_\phi})^T$ . Tritt dieser Fall an einem isolierten Punkt  $t_s \in ]t_0, t_f[$  auf, so ist  $t_s$  ein Schaltpunkt der Steuerung von  $\mathbf{u}(t_s^-)$  nach  $\mathbf{u}(t_s^+)$ . Gilt dagegen  $\mathbf{S} = \mathbf{0}$  auf einem ganzen Intervall  $[t_1, t_2] \subset ]t_0, t_f[$  mit  $t_1 < t_2$ , dann liegt eine *singuläre Steuerung* im Sinne von Kapitel 2.2 vor. Zur Berechnung der optimalen Steuerung werden die Gleichungen  $\tilde{\phi}_j = 0$  ( $j = 1, \dots, m_\phi$ ) der aktiven Steuerbeschränkungen um die Gleichungen  $d^{2q}S_i/dt^{2q} = 0$  ( $i = 1, \dots, m - m_\phi$ ) ergänzt. Die eindeutige Auflösbarkeit dieser Gleichungen nach der Steuerung  $\mathbf{u}$  und  $q < \infty$  ( $i = 1, \dots, m - m_\phi$ ) können dabei allerdings nicht garantiert werden. Auch *chattering control*, d.h. beliebig schnelles Hin- und Herschalten zwischen zwei Steuerungen, ist möglich.

**3. Fall:**  $\mathbf{u}_0$  ist entartete Ecke von  $\mathcal{P}_\phi$ ; es gibt eine benachbarte optimale Ecke  $\bar{\mathbf{u}}_0$ :

Ist  $\bar{\mathbf{u}}_0$  nichtentartet, so trifft nach Satz 4.8 für  $\bar{\mathbf{u}}_0$  der 2. Fall zu. Falls  $\bar{\mathbf{u}}_0$  ebenfalls eine entartete Ecke ist, betrachte man  $m-1$  linear unabhängige Beschränkungen, die sowohl in  $\mathbf{u}_0$ , als auch in  $\bar{\mathbf{u}}_0$  aktiv sind, ergänzt um eine weitere, dazu unabhängige, in  $\mathbf{u}_0$  oder  $\bar{\mathbf{u}}_0$  aktive Beschränkung, und fahre dann wie im 2. Fall fort. Die restlichen Beschränkungen sind dabei für eine optimale Lösung nicht zwingend aktiv.

**4. Fall:**  $\mathbf{u}_0$  ist entartete Ecke von  $\mathcal{P}_\phi$ ; es gibt keine benachbarte optimale Ecke  $\bar{\mathbf{u}}_0$ :

In diesem Fall ist  $\mathbf{u}_0$  eindeutige optimale Lösung von (4.13). Denn  $\mathcal{P}_\phi$  ist nach Voraussetzung 4.1 beschränkt. Gäbe es noch weitere optimale Lösungen, dann gäbe es folglich auch eine, ebenfalls optimale benachbarte Ecke von  $\mathbf{u}_0$ . Somit ist  $\mathbf{u}_0$  die gesuchte optimale Steuerung. Allerdings wird dabei die Regularitätsbedingung (2.6) verletzt, deren Gültigkeit in der Optimalsteuerungstheorie stets vorausgesetzt wird. Dennoch kann der Fall in der Praxis auftreten, was an dieser Stelle aber nicht allgemein ausgeführt wird. Für die Behandlung solcher Situationen in konkreten Beispielen siehe etwa [14] und Kapitel 5.

**5. Fall:**  $\mathbf{u}_0$  ist keine Ecke von  $\mathcal{P}_\phi$ :

Da  $\mathcal{P}_\phi$  nach Satz 4.2 mit den Voraussetzungen 3.3 und 4.1 Ecken besitzt, gibt es nach dem Korollar zu Satz 4.5 auch eine optimale Ecke  $\bar{\mathbf{u}}_0$  von  $\mathcal{P}_\phi$ . Diese kann ausgehend von  $\mathbf{u}_0$  in wenigen Schritten gefunden werden. Danach ist mit  $\bar{\mathbf{u}}_0$  wie im 2. oder 3. Fall fortzufahren.

Ausgehend von der nicht zustandsbeschränkten optimalen Lösung können mittels Homotopieverfahren anschließend auch die Intervalle aktiver Zustandsbeschränkungen ermittelt werden. Dort ist dann (4.13) durch (4.14) zu ersetzen. Die Gleichungsnebenbedingung  $\mathbf{a}_h^T \mathbf{u} = b_h$  ist äquivalent zu den zwei Ungleichungsnebenbedingungen  $\mathbf{a}_h^T \mathbf{u} \leq b_h$  und  $-\mathbf{a}_h^T \mathbf{u} \leq -b_h$ , wobei nur eine von beiden berücksichtigt werden muss, da hier bereits bekannt ist, dass diese auch aktiv wird. Damit gelten die obigen 5 Fälle entsprechend auch bei aktiven Zustandsbeschränkungen. Alternativ können auf Randstücken von Zustandsbeschränkungen auch Minimalkoordinaten verwendet und (4.13) für das transformierte Problem neu formuliert werden. Für die Übergangsbedingungen an den Schaltpunkten sei auf Kapitel 2 verwiesen.

Durch die Darstellung der zeitoptimalen Steuerung als Lösung eines linearen Minimierungsproblems, ist deren Berechnung also auch dann möglich, wenn nicht nur entkoppelte, sondern beliebige lineare Beschränkungen vorliegen. Für die Lösung des linearen Minimierungsproblems stehen etablierte numerische Verfahren, wie etwa die Simplexmethode, zur Verfügung. Darüber hinaus liefert die Theorie der linearen Optimierung eine Klassifizierung dieser Lösung, die in Verbindung mit der Optimalsteuerungstheorie die theoretische Grundlage für die numerische Berechnung der zeitoptimalen Steuerung darstellt.

# Kapitel 5

## Numerische Ergebnisse

Mit dem in Kapitel 3 und 4 entwickelten Ansatz ist es nun auch mit indirekten Verfahren möglich, redundante Roboter zeitoptimal zu steuern. Als Beispiel dafür wird im Folgenden ein 4-achsiger Roboter (Abb. 5.1) mit einer im 3-dimensionalen Arbeitsraum vorgegebenen Bahn für den Endeffektor betrachtet [13]. Nach der Transformation des Optimalsteuerungsproblems in Minimalkoordinaten verbleiben zwei Stellvariablen, für die verkoppelte Beschränkungen vorliegen. Zusätzlich werden Zustandsbeschränkungen erster Ordnung berücksichtigt. Die numerische Lösung des zugehörigen Mehrpunkt-Randwertproblems erfolgt mit der Mehrzielmethode JANUS [19], wobei für die Auswertung der adjungierten Differentialgleichungen rekursive Algorithmen zum Einsatz kommen.

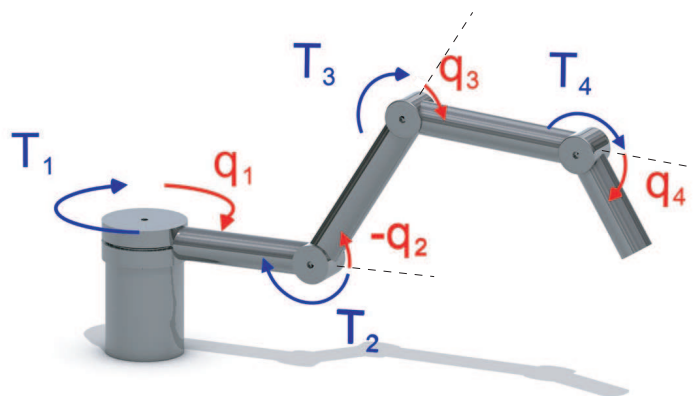


Abbildung 5.1: Schematische Darstellung des betrachteten 4-Achs-Roboters.

Die Ergebnisse der zeitoptimalen Steuerung werden anschließend noch um eine energieoptimale Lösung mit vorgegebener Bewegungsdauer ergänzt. Erst mit Kenntnis der minimalen Bewegungsdauer ist dabei eine sinnvolle Vorgabe der Endzeit der Bewegung möglich. Sie wird in dem hier vorgestellten Beispiel um 15% höher als die minimale Endzeit gewählt. An die Stelle eines gemischten Zeit-Energie-Zielfunktional tritt somit eine zweistufige Optimierung, mit der sich die Abweichung von der mi-

nimalen Endzeit genau festlegen lässt. Dieses Vorgehen wird beispielsweise auch in [98, 100] zur Berechnung optimaler Punkt-zu-Punkt-Bewegungen durchgeführt.

## 5.1 Optimalsteuerungsaufgabe mit redundantem 4-Achs-Roboter

Für das folgende Beispiel wird ein 4-achsiger Roboter vom Typ wie in Abb. 5.1 betrachtet. Die geometrischen Abmessungen entnehme man Abb. 5.2 und Tabelle 5.1. Zur Definition der Koordinatensysteme und der Gelenkkkoordinaten siehe Abb. 5.1 und Abb. 5.2 (vgl. auch Kapitel 1.3). Die dynamischen Größen sind in Tabelle 5.2 aufgelistet. Dabei bezeichnen für den  $i$ -ten Roboterarm  $m_i$  die Masse,  $t_{C_x,i}$ ,  $t_{C_y,i}$ ,  $t_{C_z,i}$  die  $x$ -,  $y$ -,  $z$ -Koordinaten des Massenschwerpunkts bezüglich des armfesten Koordinatensystems  $S_i$  und  $I_{xx,i}$ ,  $I_{yy,i}$ ,  $I_{zz,i}$  die Hauptträgheitsmomente in  $x$ -,  $y$ -,  $z$ -Richtung. Außerdem führt der Roboter eine 10kg schwere Nutzlast mit, deren Massenschwerpunkt im Ursprung von  $S_4$  angenommen wird. Die Hauptträgheitsmomente der Nutzlast sind in Tabelle 5.3 angegeben.

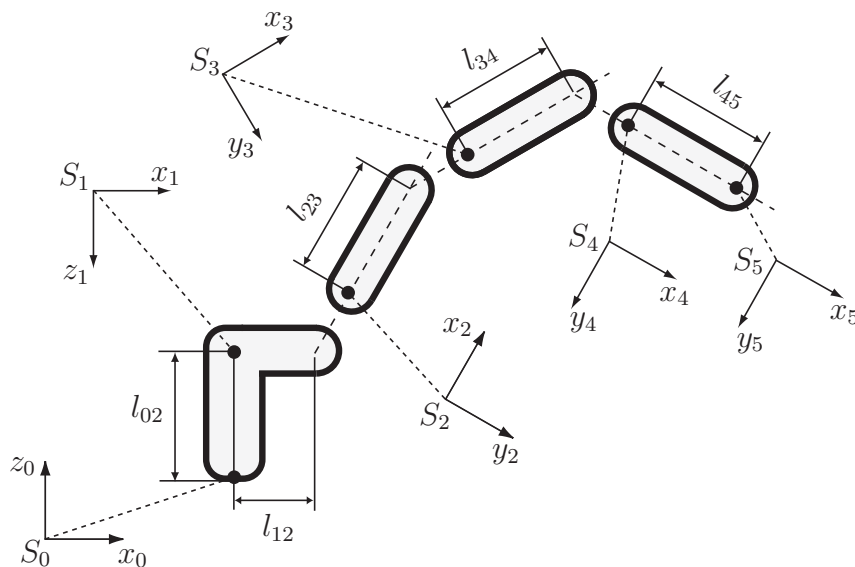


Abbildung 5.2: Skizze der Dimensionen des 4-Achs-Roboters (Explosionsdarstellung) und Definition der Koordinatensysteme.

$l_{02}$ [m]	$l_{12}$ [m]	$l_{23}$ [m]	$l_{34}$ [m]	$l_{45}$ [m]
0.7	0.4	0.9	1.0	0.8

Tabelle 5.1: Dimensionen des 4-Achs-Roboters.

$i$	$m_i$ [kg]	$t_{C_x,i}$ [m]	$t_{C_y,i}$ [m]	$t_{C_z,i}$ [m]	$I_{xx,i}$ [kg m <sup>2</sup> ]	$I_{yy,i}$ [kg m <sup>2</sup> ]	$I_{zz,i}$ [kg m <sup>2</sup> ]
1	40	0.15	0	0	0.3	2.5	2.5
2	40	0.45	0	0	0.15	3	3
3	40	0.5	0	0	0.15	3.5	3.5
4	30	0.4	0	0	0.12	2.8	2.8

Tabelle 5.2: Dynamische Größen der Roboterarme.

$I_{xx}$ [kg m <sup>2</sup> ]	$I_{yy}$ [kg m <sup>2</sup> ]	$I_{zz}$ [kg m <sup>2</sup> ]
0.02	0.02	0.02

Tabelle 5.3: Hauptträgheitsmomente der Nutzlast.

Der Roboter soll mit seinem Endeffektor eine bestimmte Bahn im Arbeitsraum abfahren, die als parametrisierte Kurve  $\tilde{\mathbf{r}}(s) \in \mathbb{R}^3$  mit dem Bahnparameter  $s \in [0, 1]$  gegeben ist. In diesem Beispiel ist die Bahn als *Bézier-Kurve* vom Grad 5 formuliert:

$$\tilde{\mathbf{r}}(s) = \sum_{i=0}^5 \mathbf{b}_i B_i^5(s),$$

wobei  $B_i^5(s)$  ( $i = 0, \dots, 5$ ) die *Bernsteinpolynome* vom Grad 5 und  $\mathbf{b}_i$  ( $i = 0, \dots, 5$ ) die *Bézier-Punkte* aus Tabelle 5.4 sind. Abb. 5.1 zeigt diese Bézier-Kurve, die hier die Bahn für den Endeffektor beschreibt.

$\mathbf{b}_0$	$\mathbf{b}_1$	$\mathbf{b}_2$	$\mathbf{b}_3$	$\mathbf{b}_4$	$\mathbf{b}_5$
$\begin{pmatrix} 1.7 \\ 0.0 \\ 1.7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.6 \\ 0.4 \\ 1.9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.5 \\ 0.8 \\ 2.1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.8 \\ 1.0 \\ 2.1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.4 \\ 1.1 \\ 2.3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0 \\ 1.2 \\ 2.5 \end{pmatrix}$

Tabelle 5.4: Bézier-Punkte der vorgegebenen Bézier-Kurve für den Endeffektor.

Mit der Position des Endeffektors  $\mathbf{r}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^3$  aus (1.11) bezüglich des Inertialsystems  $S_0$  ist dann die Mannigfaltigkeit der freien Bewegung im Gelenkraum definiert durch

$$\hat{\mathbf{r}}(s, \mathbf{q}) = \mathbf{r}(\mathbf{q}) - \tilde{\mathbf{r}}(s) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^3. \quad (5.1)$$

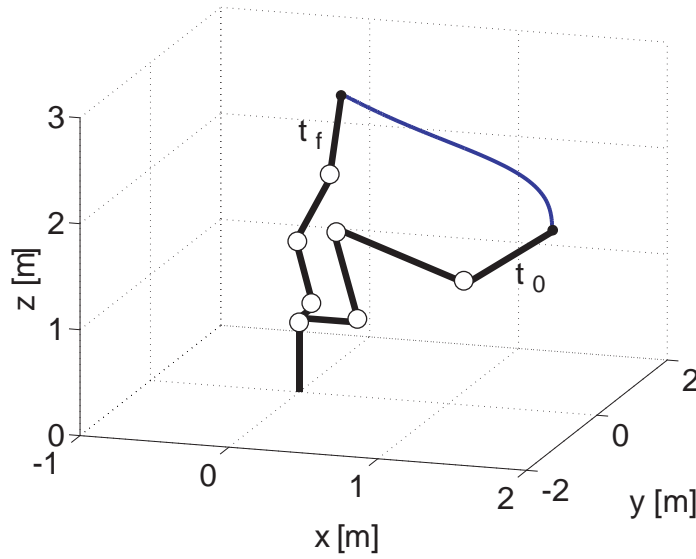


Abbildung 5.3: Die vorgegebene Bahn für den Endeffektor.

Die Startkonfiguration des Roboters am Anfang der Bahn bei  $t_0 = 0$  ist vorgegeben:

$$q_1(0) = 0^\circ, \quad q_2(0) = -100,02^\circ, \quad q_3(0) = 126,94^\circ, \quad q_4(0) = -72^\circ. \quad (5.2)$$

Die Werte  $q_1(0)$  und  $q_4(0)$  sind exakt angegeben,  $q_2(0)$  und  $q_3(0)$  sind gerundet. Sie sind so festgelegt, dass sie zusammen mit  $s(0) = 0$  Gleichung (5.1) erfüllen. Die Roboterkonfiguration am Bahnende ist frei wählbar, solange sie mit (5.1) konsistent ist. Sie wird bei der optimalen Steuerung des Roboters optimal bestimmt.

Zu Beginn und am Ende der Bahn soll sich der Roboter in Ruhe befinden, d.h. alle Geschwindigkeiten sind Null:

$$\dot{q}_i(0) = \dot{q}_i(t_f) = 0 \text{ }^\circ/\text{s}, \quad i = 1, \dots, 4. \quad (5.3)$$

Die Antriebsmomente sind beschränkt durch

$$\tau_{i,min} \leq T_i \leq \tau_{i,max}, \quad i = 1, \dots, 4, \quad (5.4)$$

mit

$$\begin{aligned} \tau_{1,max} &= -\tau_{1,min} = 2500 \text{ Nm}, \\ \tau_{2,max} &= -\tau_{2,min} = 2000 \text{ Nm}, \\ \tau_{3,max} &= -\tau_{3,min} = 1000 \text{ Nm}, \\ \tau_{4,max} &= -\tau_{4,min} = 500 \text{ Nm}. \end{aligned}$$

Für die Winkelgeschwindigkeiten liegen Beschränkungen der folgenden Form vor:

$$|\dot{q}_i| \leq \omega_i, \quad i = 1, \dots, 4, \quad (5.5)$$

mit  $\omega_i = 265 \text{ }^\circ/\text{s}$  ( $i = 1, \dots, 4$ ).

## 5.2 Transformation in Minimalkoordinaten

Für die Aufgabenstellung aus Kapitel 5.1 können  $s$  und  $q_4$  als Minimalkoordinaten gewählt werden. Mit den Bezeichnungen aus Kapitel 3 gilt  $N = 4$ ,  $n_r = 3$  und  $n_s = 1$ . Dann ist  $\mathbf{q}_G = (q_1, q_2, q_3)^T$  und  $q_R = q_4$ . Die Regularität der Matrix  $\mathbf{J}_G$  wird während der Rechnung überprüft und ist für dieses Beispiel in einer Umgebung der optimalen Lösung gewährleistet. Wäre dies nicht der Fall, könnte beispielsweise mit Einführung einer geeigneten Zustandsbeschränkung zweiter Ordnung die Redundanz des Roboters dazu ausgenutzt werden, um singuläre Konfigurationen zu vermeiden. Des Weiteren kann bereits bei der Bahnplanung berücksichtigt werden, dass Bahnpunkte, die sich auf dem Rand des Arbeitsraumes, z.B. mit  $q_3 = q_4 = 0$ , oder über der Roboterbasis, d.h.  $x_0 = y_0 = 0$ , befinden, zu singulären Konfigurationen führen.

Die gewählte Bézier-Kurve  $\tilde{\mathbf{r}}(s)$  ist regulär parametrisiert, d.h. es gilt

$$\frac{d\tilde{\mathbf{r}}(s)}{ds} \neq \mathbf{0} \quad \forall s \in [0, 1].$$

Damit sind die Voraussetzungen 3.1 und 3.2 in diesem Beispiel erfüllt, und das Optimalsteuerungsproblem lässt sich mit  $\mathbf{x} = (s, q_4, \dot{s}, \dot{q}_4)^T$  und  $\mathbf{u} = (\ddot{s}, \ddot{q}_4)^T$  wie folgt formulieren:

$$I_1(\mathbf{u}) = t_f \rightarrow \min \quad \text{bzw.} \quad (5.6)$$

$$I_2(\mathbf{u}) = \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{\bar{\tau}} [\mathbf{u}^T \mathbf{B}^T(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{u} + 2\mathbf{c}^T(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{u} + \mathbf{c}^T(\mathbf{x}) \mathbf{c}(\mathbf{x})] dt \rightarrow \min \quad (5.7)$$

unter Berücksichtigung von

$$\dot{x}_1 = x_3, \quad \dot{x}_2 = x_4, \quad \dot{x}_3 = u_1, \quad \dot{x}_4 = u_2, \quad (5.8)$$

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = -72, \quad x_3(0) = 0, \quad x_4(0) = 0, \quad (5.9)$$

$$x_1(t_f) = 1, \quad x_3(t_f) = 0, \quad x_4(t_f) = 0, \quad (5.10)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{u} - \tau_{max} + \mathbf{c}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}, \quad (5.11)$$

$$-\mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{u} + \tau_{min} - \mathbf{c}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}, \quad (5.12)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_G(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\omega}_G \leq \mathbf{0}, \quad (5.13)$$

$$-\dot{\mathbf{q}}_G(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\omega}_G \leq \mathbf{0}, \quad (5.14)$$

$$x_4 - \omega_4 \leq 0, \quad (5.15)$$

$$-x_4 - \omega_4 \leq 0, \quad (5.16)$$

wobei die Beschränkungen (5.11) und (5.12) wie in (3.44)–(3.46) durch Transformation von (5.4) entstehen. Sie genügen der Annahme 4.1 und sind linear bezüglich der Steuervariablen, allerdings über die Matrix  $\mathbf{B}(\mathbf{x})$  miteinander verkoppelt. Die Beschränkungen (5.13)–(5.16) gehen mit  $\dot{\mathbf{q}}_G(\mathbf{x})$  aus (3.9) und  $\boldsymbol{\omega}_G := (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$

aus (5.5) hervor. Die Randbedingungen (5.9) und (5.10) sind lokal äquivalent zu (5.2) und (5.3).

Bei zeitoptimaler Steuerung muss der Bereich der zulässigen Steuerungen beschränkt sein, um Impulssteuerungen auszuschließen (Voraussetzung 4.1). Diese Voraussetzung ist hier erfüllt, da das durch (5.11), (5.12) definierte Polyeder beschränkt ist.

**Lemma 5.1** *Das durch (5.11) und (5.12) definierte Polyeder*

$$\mathcal{P}_B(\mathbf{x}) := \{ \mathbf{u} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u} \leq \boldsymbol{\tau}_{max} - \mathbf{c}(\mathbf{x}), -\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u} \leq -\boldsymbol{\tau}_{min} + \mathbf{c}(\mathbf{x}) \}$$

*ist für alle zulässigen  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$  beschränkt.*

**Beweis:** Es werde angenommen, dass  $\mathcal{P}_B(\mathbf{x})$  nicht beschränkt ist. Da  $\mathcal{P}_B(\mathbf{x})$  konvex ist, existieren dann Vektoren  $\mathbf{a}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$  mit  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ , so dass

$$\bar{\mathbf{u}} := \mathbf{a} + \gamma \mathbf{v} \in \mathcal{P}_B(\mathbf{x}) \quad \forall \gamma > 0. \quad (5.17)$$

Damit gilt:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x})\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{c}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{a} + \gamma \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{v} + \mathbf{c}(\mathbf{x}).$$

Die Voraussetzungen 3.1 und 3.2 sind hier erfüllt. Daher hat die Matrix  $\mathbf{B}(\mathbf{x})$  für alle zulässigen  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$  den maximalen Rang  $N - n_r + n_s = 2$ . Zusammen mit  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$  folgt daraus:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{v} \neq \mathbf{0}.$$

Dann gibt es ein  $\gamma^* > 0$ , so dass für mindestens ein  $i \in \{1, \dots, 4\}$  gilt:

$$\begin{aligned} (\mathbf{B}(\mathbf{x})\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{c}(\mathbf{x}))_i > \tau_{i,max} \quad \vee \quad (\mathbf{B}(\mathbf{x})\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{c}(\mathbf{x}))_i < \tau_{i,min} \quad \forall \gamma > \gamma^* \\ \Rightarrow \bar{\mathbf{u}} \notin \mathcal{P}_B(\mathbf{x}) \quad \forall \gamma > \gamma^*. \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch zu (5.17). Die Annahme der Unbeschränktheit von  $\mathcal{P}_B(\mathbf{x})$  war also falsch.  $\square$

Zur numerischen Berechnung der optimalen Steuerung wird in den folgenden Abschnitten für die beiden Zielfunktionale  $I_1(\mathbf{u})$  und  $I_2(\mathbf{u})$  die Theorie aus Kapitel 4 umgesetzt. Das Mehrpunkt-Randwertproblem für die Zustands- und adjungierten Variablen wird aus den in Kapitel 2 angegebenen notwendigen Bedingungen hergeleitet und dann mit der Mehrzielmethode gelöst. Die Ergebnisse der zeitoptimalen Bewegung finden sich in Kapitel 5.3 und Anhang A, die der energieoptimalen Bewegung in Kapitel 5.4 und Anhang B.

### 5.3 Zeitoptimale Lösung

Für das transformierte Optimalsteuerungsproblem (5.6), (5.8)–(5.16) wird zunächst das Mehrpunkt-Randwertproblem der Zustands- und adjungierten Variablen aufgestellt, wobei besonders auf die Übergangsbedingungen an Schaltpunkten der Steuerung und Kontaktpunkten von Zustandsbeschränkungen mit verletzter Regularitätsbedingung eingegangen wird. Es folgen einige Bemerkungen zur numerischen Realisierung und schließlich die Präsentation der Ergebnisse.



### 5.3.1 Mehrpunkt-Randwertproblem

Bezeichne  $B_{jk}(\mathbf{x})$  das Element in der  $j$ -ten Zeile und  $k$ -ten Spalte der Matrix  $\mathbf{B}(\mathbf{x})$  und  $c_j(\mathbf{x})$  die  $j$ -te Komponente des Vektors  $\mathbf{c}(\mathbf{x})$ . Dann lautet die Hamiltonfunktion für das Optimalsteuerungsproblem (5.6), (5.8)–(5.16):

$$H_1 = \lambda_1 x_3 + \lambda_2 x_4 + \lambda_3 u_1 + \lambda_4 u_2 \quad (5.18)$$

$$+ \sum_{j=1}^4 \mu_j (B_{j1}(\mathbf{x})u_1 + B_{j2}(\mathbf{x})u_2 - \tau_{j,max} + c_j(\mathbf{x})) \quad (5.19)$$

$$- \sum_{j=1}^4 \mu_{j+4} (B_{j1}(\mathbf{x})u_1 + B_{j2}(\mathbf{x})u_2 - \tau_{j,min} + c_j(\mathbf{x})) \quad (5.20)$$

$$+ \sum_{j=1}^3 \nu_j \ddot{q}_j(\mathbf{x}, \mathbf{u}) - \sum_{j=1}^3 \nu_{j+3} \ddot{q}_j(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \nu_7 u_2 - \nu_8 u_2. \quad (5.21)$$

Entlang der optimalen Lösung tritt in diesem Beispiel für keine aktive Beschränkung der Sonderfall  $B_{j1}(\mathbf{x}) = B_{j2}(\mathbf{x}) = 0$  ( $j \in \{1, \dots, 4\}$ ) ein. Mit (5.11), (5.12) liegen also echte Steuerbeschränkungen vor. Auch der Sonderfall  $\partial(d(\dot{q}_i(\mathbf{x}) - \omega_i)/dt)/\partial \mathbf{u} = \partial \ddot{q}_i(\mathbf{x}, \mathbf{u})/\partial \mathbf{u} = \mathbf{0}^T$  ( $i \in \{1, 2, 3\}$ ) muss hier nicht betrachtet werden. Damit sind (5.13)–(5.16) jeweils Zustandsbeschränkungen erster Ordnung, die indirekt an die Hamiltonfunktion angekoppelt werden (vgl. Kapitel 2.3).

Die Differentialgleichungen für die Zustandsvariablen  $\mathbf{x}$  und die adjungierten Variablen  $\boldsymbol{\lambda}$  ergeben sich aus (5.8) und (2.8) für  $i = 1, 2$  zu

$$\dot{x}_i = x_{i+2}, \quad (5.22)$$

$$\dot{x}_{i+2} = u_i, \quad (5.23)$$

$$\dot{\lambda}_i = \sum_{j=1}^4 \left( \frac{\partial B_{j1}}{\partial x_i} u_1 + \frac{\partial B_{j2}}{\partial x_i} u_2 + \frac{\partial c_j}{\partial x_i} \right) (\mu_{j+4} - \mu_j) + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \ddot{q}_j}{\partial x_i} (\nu_{j+3} - \nu_j), \quad (5.24)$$

$$\dot{\lambda}_{i+2} = -\lambda_i + \sum_{j=1}^4 \frac{\partial c_j}{\partial x_{i+2}} (\mu_{j+4} - \mu_j) + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \ddot{q}_j}{\partial x_{i+2}} (\nu_{j+3} - \nu_j). \quad (5.25)$$

Die Randbedingungen setzen sich aus (5.9), (2.16) und (2.17) zusammen:

$$x_1(0) = 0, \quad x_1(t_f) = 1, \quad (5.26)$$

$$x_2(0) = -72, \quad \lambda_2(t_f) = 0, \quad (5.27)$$

$$x_3(0) = 0, \quad x_3(t_f) = 0, \quad (5.28)$$

$$x_4(0) = 0, \quad x_4(t_f) = 0, \quad (5.29)$$

$$H_1|_{t=t_f} = -1. \quad (5.30)$$

An Schaltpunkten  $t_S$  der Steuerung sind die folgenden Übergangsbedingungen zu erfüllen:

$$x_i(t_S^-) = x_i(t_S^+), \quad i = 1, \dots, 4, \quad (5.31)$$

$$\lambda_i(t_S^-) = \lambda_i(t_S^+), \quad i = 1, \dots, 4, \quad (5.32)$$

$$H_1|_{t=t_S^-} = H_1|_{t=t_S^+}. \quad (5.33)$$

In dem vorliegenden Beispiel sind an einigen Punkten gleichzeitig drei Steuerbeschränkungen aktiv (siehe auch Kapitel 5.3.2). Somit ist dort die Regularitätsbedingung (2.6) verletzt. Dies entspricht dem Fall 4 aus Kapitel 4.2.3. Das lineare Optimierungsproblem zur Berechnung der optimalen Steuerung hat eine eindeutige Lösung in einer entarteten Ecke des zulässigen Bereichs. Hier tritt dieser Fall aber nur in isolierten Punkten  $t_R$  ein, an denen zugleich die aktiven Steuerbeschränkungen wechseln. Abb. 5.4 zeigt schematisch die Veränderung des zulässigen Steuerbereichs und der optimalen Steuerung  $\mathbf{u}_0$  in einer Umgebung von  $t = t_R$ . Dabei ist im Gegensatz zu den restlichen Schaltpunkten die Steuerung  $\mathbf{u}_0$  stetig in  $t = t_R$ . Trotzdem können diese Punkte wie gewöhnliche Schaltpunkte mit den Übergangsbedingungen (5.31)–(5.33) behandelt werden.

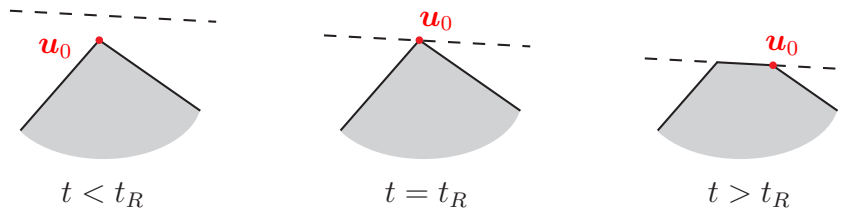


Abbildung 5.4: Schaltpunkt mit verletzter Regularitätsbedingung.

Bei der Formulierung der Übergangsbedingungen an Aufsprung-, Absprung- und Kontaktpunkten von Zustandsbeschränkungen wird sich auf die Punkte beschränkt, die in diesem Beispiel auftreten. Für die erste Zeile der Zustandsbeschränkung (5.14) liegt ein Kontaktpunkt vor, (5.15) besitzt zwei Randstücke (siehe auch Kapitel 5.3.2). Die restlichen Zustandsbeschränkungen werden nicht aktiv.

Die Übergangsbedingungen an Aufsprungpunkten  $t_{auf}$  von (5.15) lauten mit

$$h_7(\mathbf{x}) := x_4 - \omega_4 \leq 0$$

nach Kapitel 2.3:

$$x_i(t_{auf}^-) = x_i(t_{auf}^+), \quad i = 1, \dots, 4, \quad (5.34)$$

$$\lambda_j(t_{auf}^-) = \lambda_j(t_{auf}^+), \quad j = 1, 2, 3, \quad (5.35)$$

$$\lambda_4(t_{auf}^-) = \lambda_4(t_{auf}^+) + \eta_{auf}, \quad (5.36)$$

$$H_1|_{t=t_{auf}^-} = H_1|_{t=t_{auf}^+}, \quad (5.37)$$

$$x_4(t_{auf}) = \omega_4. \quad (5.38)$$

Folgende Ungleichungsnebenbedingungen für den Sprungparameter  $\eta_{auf}$  sind a posteriori zu verifizieren:

$$\eta_{auf} \geq 0, \quad (5.39)$$

$$\eta_{auf} \geq \nu_7 (t_{auf}^+). \quad (5.40)$$

An Absprungpunkten von (5.15) müssen (5.31)–(5.33) erfüllt werden.

Für den Kontaktpunkt  $t_K$  der Zustandsbeschränkung

$$h_4(\mathbf{x}) := -\dot{q}_1(\mathbf{x}(t_K)) - \omega_1 \leq 0 \quad (5.41)$$

können die Bedingungen aus Kapitel 2.3 nicht herangezogen werden, da in  $t_K$  die verschärfte Regularitätsbedingung (2.19) verletzt ist. Neben (5.41) sind in  $t = t_K$  noch zwei weitere Steuerbeschränkungen aktiv (siehe Kapitel 5.3.2). Die aktive Zustandsbeschränkung lässt sich aber auch als Innere-Punkt-Bedingung der Form (2.4) interpretieren. Dann ergeben sich mit

$$\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}(t_K^+), \mathbf{x}(t_K^-), t_K) = \begin{pmatrix} -\dot{q}_1(\mathbf{x}(t_K^-)) - \omega_1 \\ \mathbf{x}(t_K^-) - \mathbf{x}(t_K^+) \end{pmatrix} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^5 \quad (5.42)$$

aus (2.12)–(2.14) weitere Übergangsbedingungen:

$$H_1|_{t=t_K^-} = H_1|_{t=t_K^+} \quad (5.43)$$

$$\begin{aligned} \lambda_i(t_K^-) &= -\varrho_1 \frac{\partial \dot{q}_1(\mathbf{x}(t_K^-))}{\partial x_i(t_K^-)} + \varrho_{i+1}, & i &= 1, \dots, 4 \\ \lambda_i(t_K^+) &= \varrho_{i+1}, & i &= 1, \dots, 4 \\ \Rightarrow \lambda_i(t_K^-) &= \lambda_i(t_K^+) - \varrho_1 \frac{\partial \dot{q}_1(\mathbf{x}(t_K^-))}{\partial x_i(t_K^-)}, & i &= 1, \dots, 4. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Mit dem Sprungparameter  $\varrho_1$  sind (5.42)–(5.44) die resultierenden Übergangsbedingungen bei  $t = t_K$ . Sie entsprechen bis auf eine Vorzeichenbedingung für  $\varrho_1$  den Bedingungen (2.28)–(2.31) für Kontaktpunkte von Zustandsbeschränkungen.

Die numerische Lösung des Mehrpunkt-Randwertproblems (5.22)–(5.38) und (5.42)–(5.44) erfolgt mit der Mehrzielmethode JANUS [19]. Hierfür wird das Integrationsintervall  $[0, t_f]$ , wie in Kapitel 2.1 beschrieben, auf das Intervall  $[0, 1]$  normiert. Zur Berechnung der Sprungparameter  $\eta_{auf}$  und  $\varrho_1$  werden weitere triviale Differentialgleichungen hinzugenommen.

Um die Steuerung  $\mathbf{u}$  und die Multiplikatorfunktionen  $\boldsymbol{\mu}$  und  $\boldsymbol{\nu}$  zu jedem Zeitpunkt zu bestimmen, wird, wie in Kapitel 4.2 beschrieben, vorgegangen. Zur Berechnung der Winkel  $\mathbf{q}_G$  in Abhängigkeit von  $s$  und  $q_4$  aus (5.1) wird ein gedämpftes Newton-Verfahren eingesetzt. Die Massenmatrix  $\mathbf{M}(\mathbf{q})$  und der Vektor  $\mathbf{k}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  aus den Bewegungsgleichungen sowie deren Ableitungen werden mit dem rekursiven Newton-Euler-Algorithmus ausgewertet (vgl. Kapitel 1.3). Auch  $\mathbf{r}(\mathbf{q})$  und seine Ableitungen

werden, wie in Kapitel 1.3 angedeutet, rekursiv berechnet. Zur effizienten und stabilen Auswertung der Bézier-Kurve  $\tilde{\mathbf{r}}(s)$  dient der *Algorithmus von de Casteljau* [34]. Darauf aufbauend steht nun eine rekursive Formulierung der rechten Seiten der adjungierten Differentialgleichungen zur Verfügung, in der insbesondere auch die benötigten Ableitungen sehr genau und effizient berechnet werden können. Siehe hierzu auch [22, 23].

Die Mehrzielmethode liefert schließlich die Lösung des Mehrpunkt-Randwertproblems an den Rand- und Schaltpunkten  $\xi_i \in [0, 1]$ . Weitere Zwischenwerte werden durch Lösen von Anfangswertproblemen auf den Intervallen  $[\xi_i, \xi_{i+1}[$  mit einem expliziten *Runge-Kutta-Verfahren* [33, 96] berechnet. Die Ergebnisse zeigt der folgende Abschnitt.

### 5.3.2 Ergebnisse

Für das transformierte Optimalsteuerungsproblem (5.6), (5.8)–(5.16) ergibt sich eine minimale Endzeit der Bewegung von

$$t_f = 0.60999 \text{ s.}$$

Die beiden Steuergrößen  $u_1$  und  $u_2$  repräsentieren die Beschleunigung des Endeffektors entlang der vorgegebenen Bahn und die Winkelbeschleunigung der vierten Achse. Abb 5.5 zeigt ihren Verlauf über der normierten Zeit  $\xi := t/t_f \in [0, 1]$ . Die Schaltpunkte sind in Tabelle 5.5 aufgelistet.

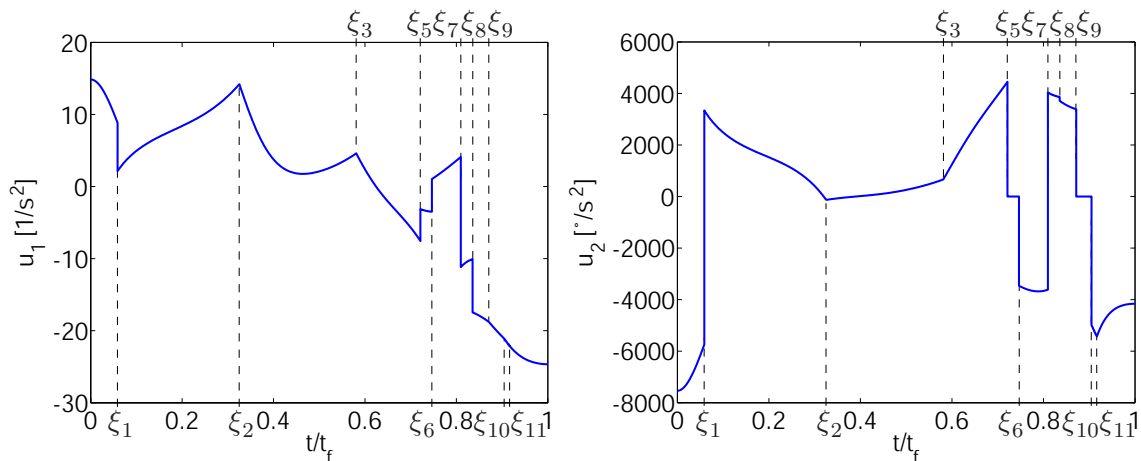


Abbildung 5.5: Verlauf der zeitoptimalen Steuergrößen.

Durch Rücktransformation der Steuer- und Zustandsgrößen ergeben sich die Antriebsmomente  $T_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) und die Winkelgeschwindigkeiten  $\dot{q}_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) in Abb. 5.6. Sie repräsentieren die gemischten Steuer- und Zustandsbeschränkungen (5.11) und (5.12), bzw. die reinen Zustandsbeschränkungen (5.13)–(5.16). Abbildungen weiterer Größen aus der Optimalsteuerungsaufgabe finden sich in Anhang A.

$\xi_1$	=	0.05884	$\xi_5$	=	0.72137	$\xi_9$	=	0.87156
$\xi_2$	=	0.32525	$\xi_6$	=	0.74642	$\xi_{10}$	=	0.90499
$\xi_3$	=	0.58097	$\xi_7$	=	0.80963	$\xi_{11}$	=	0.91670
$\xi_4$	=	0.67745	$\xi_8$	=	0.83547			

Tabelle 5.5: Schaltpunkte der zeitoptimalen Steuerung.

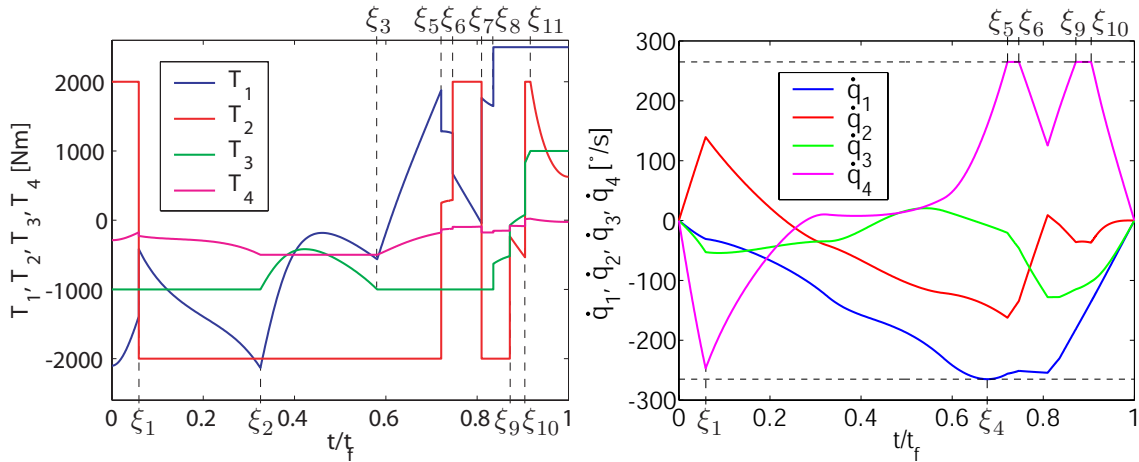


Abbildung 5.6: Zeitoptimale Antriebsmomente und Winkelgeschwindigkeiten.

$\xi_4$  ist ein Kontaktpunkt der Zustandsbeschränkung (5.41). Gleichzeitig sind dort zwei Antriebsmomente gesättigt, d.h. zusätzlich zwei gemischte Steuer- und Zustandsbeschränkungen aktiv. Dies ist eine Verletzung der verschärften Regularitätsbedingung (2.19). Für diesen Punkt wurden in Kapitel 5.3.1 Übergangsbedingungen hergeleitet. Die Intervalle  $[\xi_5, \xi_6]$  und  $[\xi_9, \xi_{10}]$  sind Randstücke der Zustandsbeschränkung (5.15). Auf diesen Intervallen ist zusätzlich jeweils eine gemischte Steuer- und Zustandsbeschränkung aus (5.11) oder (5.12) aktiv, was einem gesättigten Antriebsmoment entspricht. Mit Ausnahme der Punkte  $\xi_2$ ,  $\xi_3$  und  $\xi_{11}$  sind ansonsten immer genau zwei Antriebsmomente gesättigt. Dies bestätigt die Aussagen von Lemma 4.2 und Lemma 4.3.

Des Weiteren lässt sich beobachten, dass ein Sprung in den Steuergrößen zu einem Wechsel in den aktiven Steuerbeschränkungen korrespondiert. Das bedeutet, dass sich die Lösung des zugehörigen linearen Optimierungsproblems von einer Ecke zu einer benachbarten Ecke des zulässigen Bereichs für die Steuerungen bewegt. An den Punkten  $\xi_2$ ,  $\xi_3$  und  $\xi_{11}$  tritt die in Abb. 5.4 dargestellte Situation ein. Die aktiven Steuerbeschränkungen wechseln dort mit einem stetigen Übergang der Steuervariablen.

Die Vorzeichenbedingungen (2.11), (2.20), (5.39) und (5.40) für die Multiplikatorfunktionen  $\mu$  und  $\nu$  sowie den Sprungparameter  $\eta_{auf}$  sind erfüllt. Einen weiteren

empfindlichen Test für die Korrektheit der Lösung stellt die Hamiltonfunktion bereit. Sie muss konstant sein, da es sich hier um ein autonomes Problem handelt. In diesem Beispiel ist das mit einer relativen Genauigkeit von  $TOL < 10^{-10}$  erfüllt (siehe Abb. A.3 in Anhang A). Diese Toleranz ist zugleich eine ungefähre Schätzung für die relative Genauigkeit der gesamten Lösung.

## 5.4 Energieoptimale Lösung

Ergänzend zu der zeitoptimalen Lösung wird noch eine energieoptimale Lösung berechnet. Die Endzeit der Bewegung wird dabei fest vorgegeben und in diesem Beispiel um 15% höher als die in Kapitel 5.3 berechnete minimale Endzeit gewählt. Sie ergibt sich damit zu

$$t_f = 0.70149 \text{ s.}$$

Mit dem Zielfunktional  $I_2(\mathbf{u})$  lautet die Hamiltonfunktion für das Optimalsteuerungsproblem (5.7)–(5.16):

$$H_2 = \frac{1}{\tau} \underbrace{[\mathbf{u}^T \mathbf{B}^T(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{u} + 2\mathbf{c}^T(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{u} + \mathbf{c}^T(\mathbf{x}) \mathbf{c}(\mathbf{x})]}_{=: L_2(\mathbf{x}, \mathbf{u})} + H_1,$$

wobei  $H_1$  die Hamiltonfunktion aus (5.18)–(5.21) ist. Die Sonderfälle  $B_{j1}(\mathbf{x}) = B_{j2}(\mathbf{x}) = 0$  ( $j \in \{1, \dots, 4\}$ ) und  $\partial \ddot{q}_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}) / \partial \mathbf{u} = \mathbf{0}^T$  ( $i \in \{1, 2, 3\}$ ) treten auch in diesem Beispiel nicht ein. Für die adjungierten Differentialgleichungen folgt dann ( $i=1,2$ ):

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_i &= -\frac{\partial L_2}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^4 \left( \frac{\partial B_{j1}}{\partial x_i} u_1 + \frac{\partial B_{j2}}{\partial x_i} u_2 + \frac{\partial c_j}{\partial x_i} \right) (\mu_{j+4} - \mu_j) + \\ &\quad \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \ddot{q}_j}{\partial x_i} (\nu_{j+3} - \nu_j), \end{aligned} \quad (5.45)$$

$$\dot{\lambda}_{i+2} = -\frac{\partial L_2}{\partial x_{i+2}} - \lambda_i + \sum_{j=1}^4 \frac{\partial c_j}{\partial x_{i+2}} (\mu_{j+4} - \mu_j) + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \ddot{q}_j}{\partial x_{i+2}} (\nu_{j+3} - \nu_j). \quad (5.46)$$

Dazu kommen die Differentialgleichungen ( $i=1,2$ )

$$\dot{x}_i = x_{i+2}, \quad (5.47)$$

$$\dot{x}_{i+2} = u_i \quad (5.48)$$

mit den Randbedingungen

$$x_1(0) = 0, \quad x_1(t_f) = 1, \quad (5.49)$$

$$x_2(0) = -72, \quad \lambda_2(t_f) = 0, \quad (5.50)$$

$$x_3(0) = 0, \quad x_3(t_f) = 0, \quad (5.51)$$

$$x_4(0) = 0, \quad x_4(t_f) = 0, \quad (5.52)$$

$$t_f = 0.70149. \quad (5.53)$$

In diesem Beispiel treten nur freie Teilstücke und Randstücke der Beschränkung

$$g_7(\mathbf{x}, \mathbf{u}) := -B_{31}(\mathbf{x})u_1 - B_{32}(\mathbf{x})u_2 - c_3(\mathbf{x}) \leq -\tau_{3,min} \quad (5.54)$$

auf. Die Übergangsbedingungen für Punkte  $t_a$ , in denen (5.54) aktiv wird, lauten

$$x_i(t_a^-) = x_i(t_a^+), \quad i = 1, \dots, 4, \quad (5.55)$$

$$\lambda_i(t_a^-) = \lambda_i(t_a^+), \quad i = 1, \dots, 4, \quad (5.56)$$

$$g_7|_{t=t_a^-} = 0. \quad (5.57)$$

Für die Punkte  $t_b$ , in denen (5.54) wieder inaktiv wird, ergeben sich entsprechend die folgenden Übergangsbedingungen:

$$x_i(t_b^-) = x_i(t_b^+), \quad i = 1, \dots, 4, \quad (5.58)$$

$$\lambda_i(t_b^-) = \lambda_i(t_b^+), \quad i = 1, \dots, 4, \quad (5.59)$$

$$g_7|_{t=t_b^+} = 0. \quad (5.60)$$

Steuerung und Multiplikatorfunktionen werden, wie in Kapitel 4.1 beschrieben, bestimmt. Das Mehrpunkt-Randwertproblem (5.45)–(5.53), (5.55)–(5.60) wird mit der Mehrzielmethode JANUS [19] gelöst, woraus sich der in Abb. 5.7 dargestellte Verlauf für die Steuervariablen ergibt. In Tabelle 5.6 sind die zugehörigen Schaltpunkte zusammengefasst. Die Rücktransformation liefert die Ergebnisse für die Antriebsmomente  $T_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) und die Winkelgeschwindigkeiten  $\dot{q}_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) (Abb. 5.8).

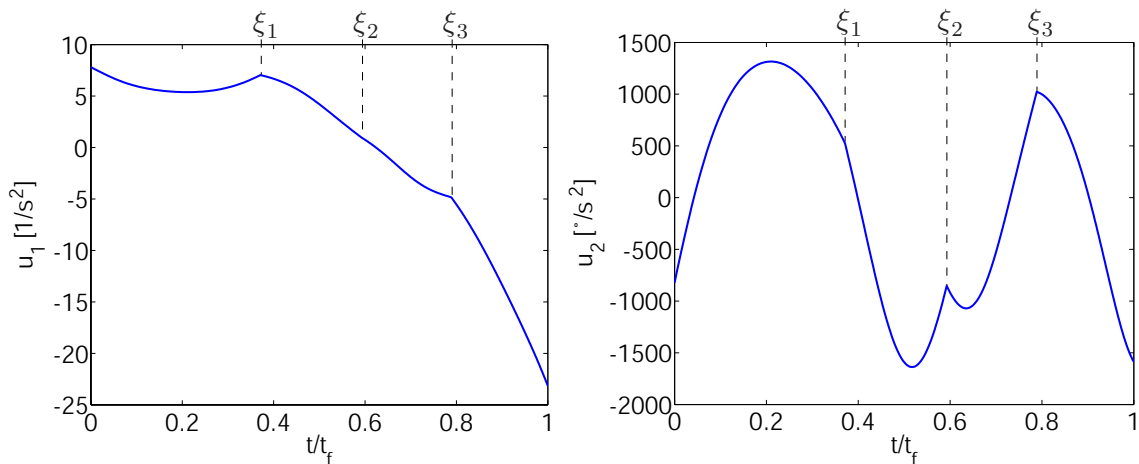


Abbildung 5.7: Verlauf der energieoptimalen Steuergrößen.

Diese Lösung enthält nun auch Intervalle, in denen keine Beschränkung aktiv ist, was bei der zeitoptimalen Lösung laut Lemma 4.2 nicht möglich gewesen wäre.

---


$$\xi_1 = 0.37100 \quad \xi_2 = 0.59262 \quad \xi_3 = 0.78866$$


---

Tabelle 5.6: Schaltpunkte der energieoptimalen Steuerung.

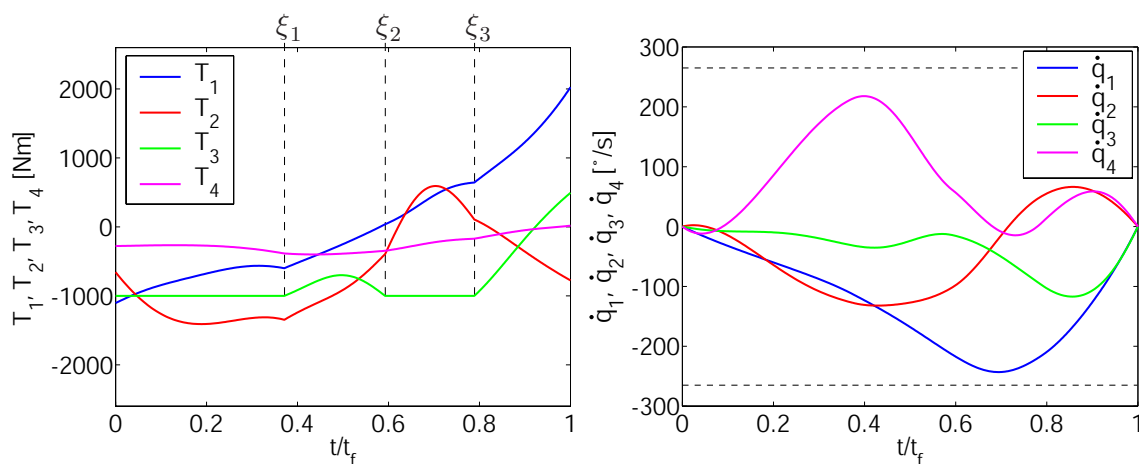


Abbildung 5.8: Energieoptimale Antriebsmomente und Winkelgeschwindigkeiten.

Darüberhinaus ist die Lösung deutlich glatter als im zeitoptimalen Fall. In Anhang B finden sich Abbildungen weiterer Größen aus der Optimalsteuerungsaufgabe. Die Multiplikatorfunktionen sind bis auf  $\mu_7$  alle identisch Null. Die Vorzeichenbedingung für  $\mu_7$  muss a posteriori verifiziert werden. Sie ist hier erfüllt. Die Hamiltonfunktion ist mit einer relativen Genauigkeit von  $TOL < 10^{-10}$  konstant (siehe Abb. B.3 in Anhang B), was die hohe Genauigkeit der gesamten Lösung widerspiegelt.



# Anhang A

## Abbildungen zum Beispiel aus Kapitel 5.3

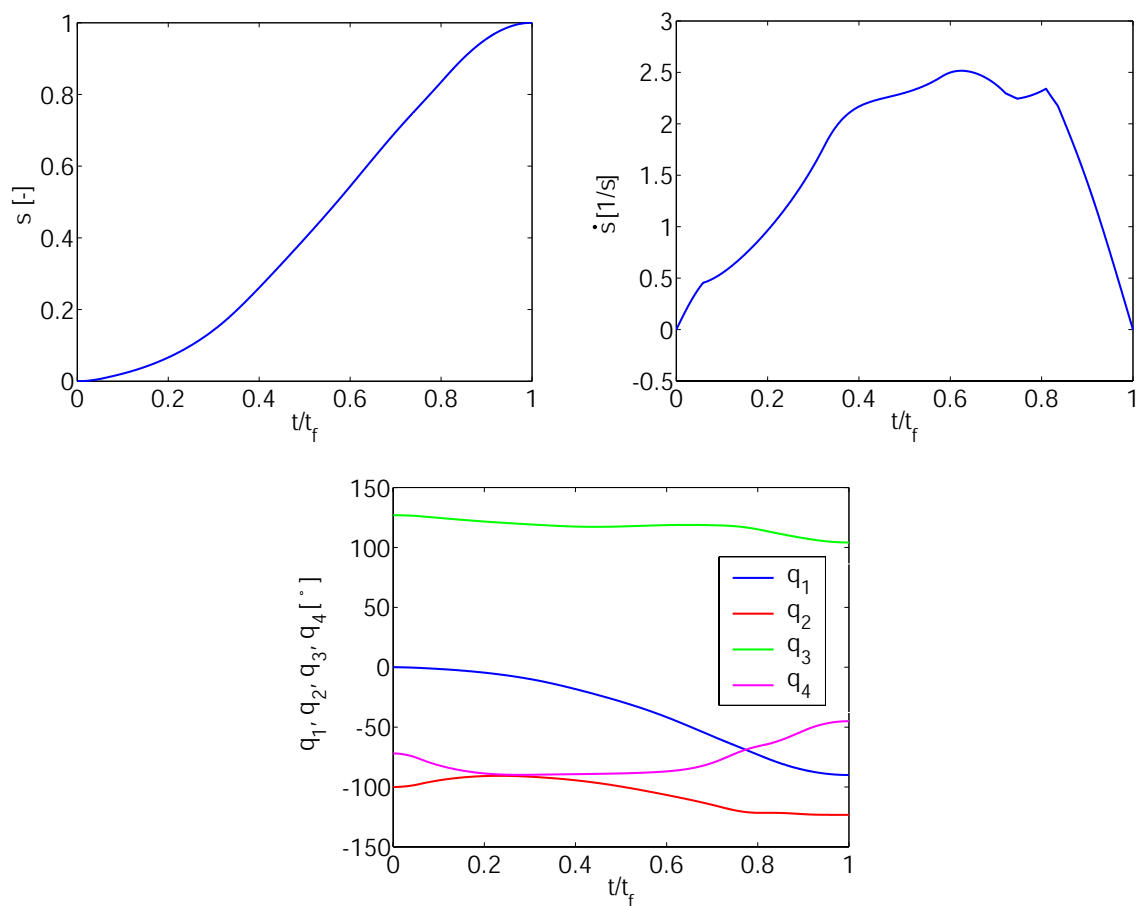


Abbildung A.1: Optimaler Verlauf des Bahnparameters  $s$ , der Bahngeschwindigkeit  $\dot{s}$  und der Achswinkel  $q_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ).

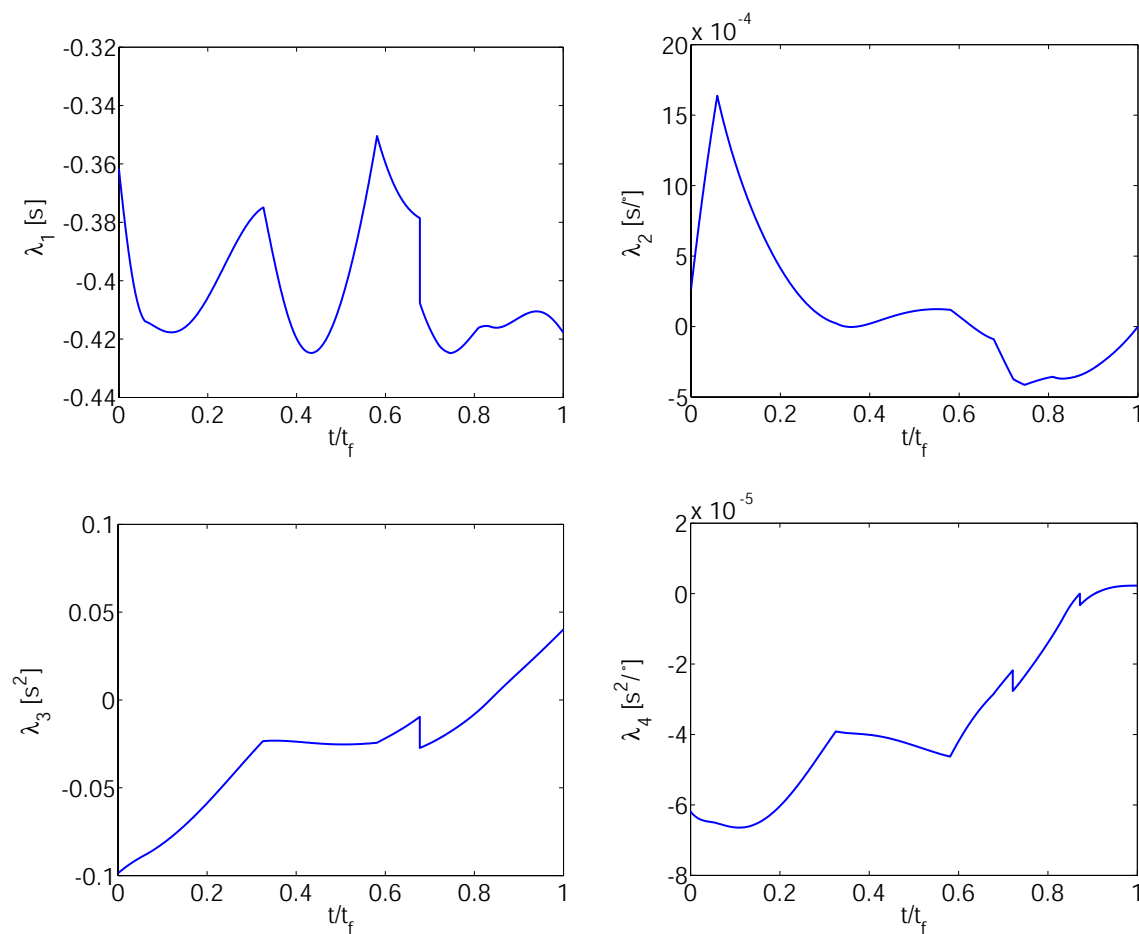


Abbildung A.2: Optimaler Verlauf der adjungierten Variablen  $\lambda_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ).

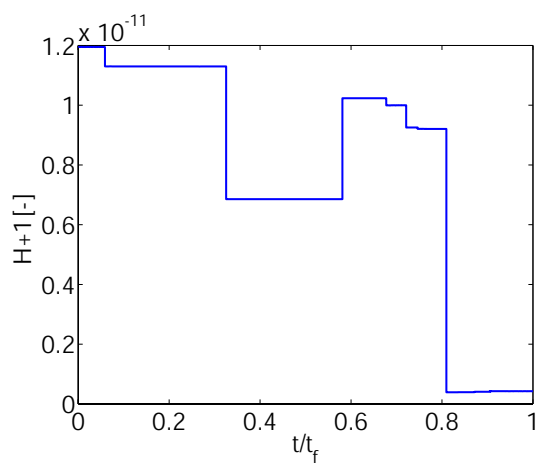


Abbildung A.3: Die Hamiltonfunktion  $H$  muss in diesem Beispiel konstant  $-1$  sein. Wegen der besseren Anschaulichkeit wird  $H + 1$  dargestellt.

# Anhang B

## Abbildungen zum Beispiel aus Kapitel 5.4

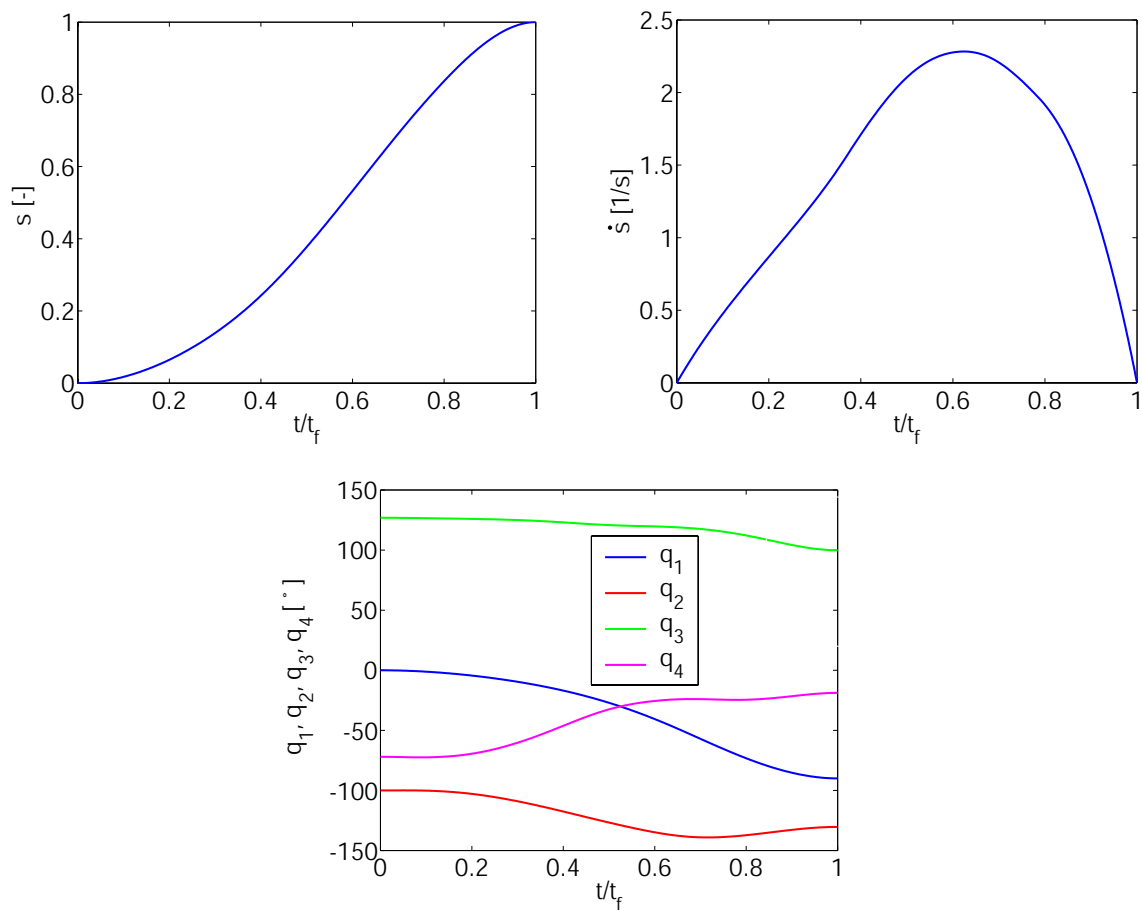


Abbildung B.1: Optimaler Verlauf des Bahnparameters  $s$ , der Bahngeschwindigkeit  $\dot{s}$  und der Achswinkel  $q_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ).

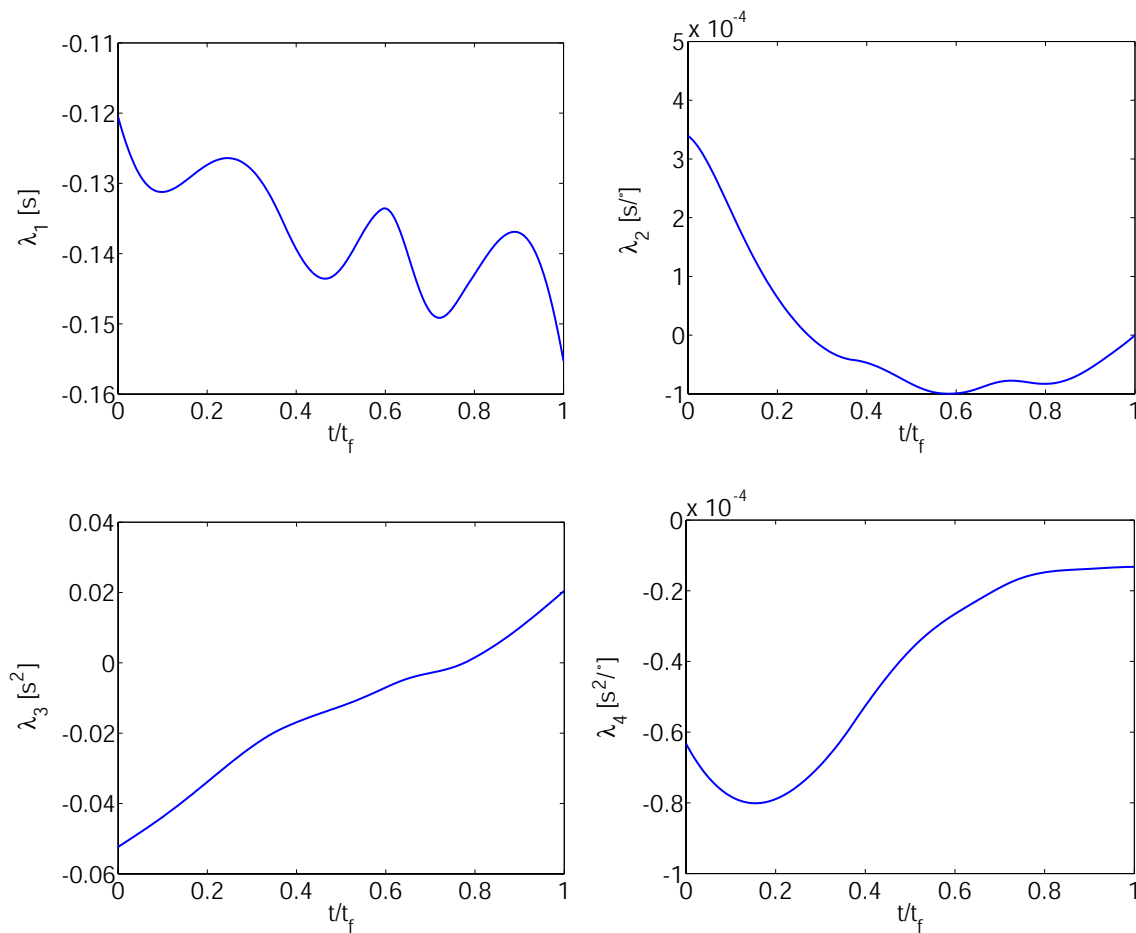


Abbildung B.2: Optimaler Verlauf der adjungierten Variablen  $\lambda_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ).

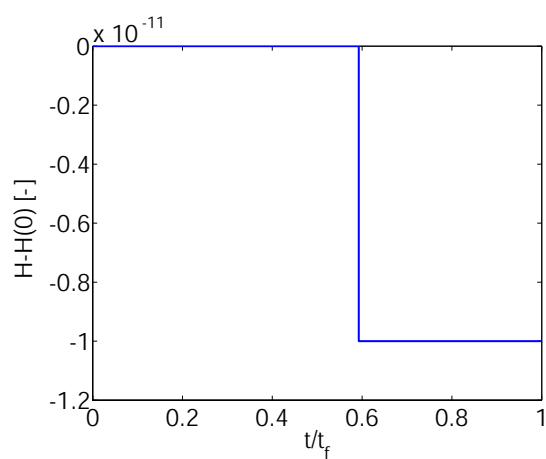


Abbildung B.3: Die Hamiltonfunktion  $H$  muss in diesem Beispiel konstant sein. Wegen der besseren Anschaulichkeit wird  $H - H(0)$  dargestellt.

# Literaturverzeichnis

- [1] M. ARNOLD, *A perturbation analysis for the dynamical simulation of mechanical multibody systems*, Appl. Numer. Math., Vol. 18, (1995), S. 37–56.
- [2] A. BACKES, *A necessary optimality condition for the linear-quadratic DAE control problem*, Preprint P-03-16, Humboldt-Universität zu Berlin, 2003.
- [3] C. A. BALAFOUTIS, P. MISRA UND R. V. PATEL, *Recursive evaluation of linearized dynamic robot models*, IEEE Journal of Robotics and Automation, Vol. 2, (1986), S. 146–155.
- [4] D. J. BELL UND D. H. JACOBSON, *Singular Optimal Control Problems*, Academic Press, 1975.
- [5] L. D. BERKOVITZ, *Variational methods in problems of control and programming*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 3, (1961), S. 145–169.
- [6] M. J. BEST UND K. RITTER, *Linear Programming*, Prentice-Hall, 1985.
- [7] J. T. BETTS, *Issues in the direct transcription of optimal control problems to sparse nonlinear programs*, in: Computational Optimal Control, R. Bulirsch und D. Kraft, Hrsg., Band 115 in International Series of Numerical Mathematics, Birkhäuser, 1994, S. 3–17.
- [8] J. T. BETTS, *Survey of numerical methods for trajectory optimization*, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 21, (1998), S. 193–207.
- [9] J. E. BOBROW, S. DUBOWSKY UND J. GIBSON, *Time-optimal control of robotic manipulators along specified paths*, International Journal of Robotics Research, Vol. 4, (1985), S. 3–17.
- [10] H. G. BOCK UND K. J. PLITT, *A multiple shooting algorithm for direct solution of optimal control problems*, in: Proceedings of the 9th IFAC World Congress, 1984, S. 242–247.
- [11] H. BREMER UND F. PFEIFFER, *Elastische Mehrkörpersysteme*, Teubner, 1992.

- 
- [12] K. BRENNAN, S. CAMPBELL UND L. PETZOLD, *Numerical Solution of Initial-Value Problems in Differential-Algebraic Equations*, SIAM, 2. Aufl., 1996.
- [13] S. BREUN UND R. CALLIES, *Time-optimal motion of redundant robotic systems on manifolds*. Eingereicht bei OCA.
- [14] S. BREUN UND R. CALLIES, *Modeling and optimal control of multiple constrained manipulator motion on manifolds*, in: Proceedings of the 5th MATHMOD Vienna, I. Troch und F. Breitenecker, Hrsg., ARGESIM Report no. 30, 2006.
- [15] A. E. BRYSON, W. F. DENHAM UND S. E. DREYFUS, *Optimal programming problems with inequality constraints I: Necessary conditions for extremal solutions*, AIAA Journal, Vol. 1, (1963), S. 2544–2550.
- [16] A. E. BRYSON UND Y.-C. HO, *Applied Optimal Control*, Revised Printing, Hemisphere Publishing Corp., 1975.
- [17] C. BÜSKENS, *Optimierungsmethoden und Sensitivitätsanalyse für optimale Steuerprozesse mit Steuer- und Zustands-Beschränkungen*, Dissertation, Universität Münster, 1998.
- [18] R. BULIRSCH, *Die Mehrzielmethode zur numerischen Lösung von nichtlinearen Randwertproblemen und Aufgaben der optimalen Steuerung*. Report der Carl-Cranz-Gesellschaft e.V., Oberpfaffenhofen, 1971.
- [19] R. CALLIES, *Entwurfsoptimierung und optimale Steuerung. Differential-algebraische Systeme, Mehrgitter-Mehrzielansätze und numerische Realisierung*. Habilitationsschrift, Technische Universität München, 2000.
- [20] R. CALLIES, *Some aspects of the optimal control of nonlinear differential-algebraic equations*, Oberwolfach Reports, Vol. 3, (2006), S. 1095–1097.
- [21] R. CALLIES UND R. BULIRSCH, *3D-trajectory optimization of a single-stage VTVL-system*, Paper AIAA-1996-3903, San Diego, 1996.
- [22] R. CALLIES UND P. RENTROP, *Optimal control of rigid-link manipulators by indirect methods*. Eingereicht bei GAMM-Mitteilungen.
- [23] R. CALLIES UND T. SCHENK, *Recursive modelling of optimal control problems for multi-link manipulators*, Preprint TUM-NUM13, Technische Universität München, 2005.
- [24] S. L. CAMPBELL UND C. W. GEAR, *The index of general nonlinear DAEs*, Numer. Math., Vol. 72, (1995), S. 173–196.
- [25] Y. CHEN UND A. A. DESROCHERS, *A proof of the structure of the minimum-time control law of robotic manipulators using a hamiltonian formulation*, IEEE Transactions on Robotics and Automation, Vol. 6, (1990), S. 388–393.

- [26] F. L. CHERNUSKO, *Optimization in control of robots*, in: Computational Optimal Control, R. Bulirsch und D. Kraft, Hrsg., Band 115 in International Series of Numerical Mathematics, Birkhäuser, 1994, S. 19–28.
- [27] K. CHUDEJ, *Effiziente Lösung zustandsbeschränkter Optimalsteuerungsaufgaben*. Habilitationsschrift, Universität Bayreuth, 2001.
- [28] K. CHUDEJ UND M. GÜNTHER, *Global state space approach for the efficient numerical solution of state-constrained trajectory optimization problems*, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 103, (1999), S. 75–93.
- [29] J. J. CRAIG, *Introduction to Robotics*, Pearson Prentice Hall, 3. Aufl., 2005.
- [30] J. DENAVIT UND R. HARTENBERG, *A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices*, ASME J. Appl. Mech., (1955), S. 215–221.
- [31] P. DEUFLHARD, *A modified newton method for the solution of ill-conditioned systems of nonlinear equations with application to multiple shooting*, Numer. Math., Vol. 22, (1974), S. 289–315.
- [32] P. DEUFLHARD, *A relaxation strategy for the modified newton method*, in: Optimization and Optimal Control, R. Bulirsch, W. Oettli und J. Stoer, Hrsg., Lecture Notes in Mathematics 477, Springer, 1975, S. 59–73.
- [33] P. DEUFLHARD UND F. BORNEMANN, *Numerische Mathematik II*, Walter de Gruyter, 2. Aufl., 2002.
- [34] P. DEUFLHARD UND A. HOHMANN, *Numerische Mathematik I*, Walter de Gruyter, 3. Aufl., 2002.
- [35] E. N. DEVDARIANI UND Y. S. LEDYAEV, *Maximum principle for implicit control systems*, Appl. Math. Optim., Vol. 40, (1999), S. 79–103.
- [36] M. DO R. DE PINHO UND R. B. VINTER, *Necessary conditions for optimal control problems involving nonlinear differential algebraic equations*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 212, (1997), S. 493–516.
- [37] M. DO R. DE PINHO, R. B. VINTER UND H. ZHENG, *A maximum principle for optimal control problems with mixed constraints*, IMA Journal of Mathematical Control and Information, Vol. 18, (2001), S. 189–205.
- [38] E. EICH-SOELLNER UND C. FÜHRER, *Numerical Methods in Multibody Dynamics*, Teubner, 1998.
- [39] M. GALICKI, *Optimal control of redundant robots*, in: Proceedings of the 11th IFAC World Congress, 1990, S. 167–171.
- [40] M. GALICKI, *The planning of robotic optimal motions in the presence of obstacles*, International Journal of Robotics Research, Vol. 17, (1998), S. 248–259.

- 
- [41] M. GALICKI, *Time-optimal controls of kinematically redundant manipulators with geometric constraints*, IEEE Transactions on Robotics and Automation, Vol. 16, (2000), S. 89–93.
- [42] C. W. GEAR, *Differential-algebraic equations, indices, and integral algebraic equations*, SIAM J. Numer. Anal., Vol. 27, (1990), S. 1527–1534.
- [43] C. W. GEAR UND L. R. PETZOLD, *ODE methods for the solution of differential algebraic systems*, SIAM J. Numer. Anal., Vol. 21, (1984), S. 716–728.
- [44] M. GERDTS, *Direct shooting method for the numerical solution of higher-index DAE optimal control problems*, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 117, (2003), S. 267–294.
- [45] M. GERDTS, *Local minimum principle for optimal control problems subject to differential-algebraic equations of index two*, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 130, (2006), S. 441–460.
- [46] P. E. GILL, W. MURRAY, M. A. SAUNDERS UND M. H. WRIGHT, *User's guide for NPSOL (Version 4.0)*, Tech. Report SOL 86-2, Department of Operations Research, Stanford University (California, USA), 1986.
- [47] E. GRIEPENTROG UND R. MÄRZ, *Differential-Algebraic Equations and Their Numerical Treatment*, Texte zur Mathematik, Band 88, Teubner, 1986.
- [48] E. HAIRER, C. LUBICH UND M. ROCHE, *The Numerical Solution of Differential-Algebraic Systems by Runge-Kutta Methods*, Lecture Notes in Mathematics Vol. 1409, Springer, 1989.
- [49] E. HAIRER UND G. WANNER, *Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential-Algebraic Problems*, Springer, 2. Aufl., 1996.
- [50] C. R. HARGRAVES UND S. W. PARIS, *Direct trajectory optimization using nonlinear programming and collocation*, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 10, (1987), S. 338–342.
- [51] R. F. HARTL, S. P. SETHI UND R. G. VICKSON, *A survey of the maximum principles for optimal control problems with state constraints*, SIAM Review, Vol. 37, (1995), S. 181–218.
- [52] E. HAUG, *Computer-Aided Kinematics and Dynamics of Mechanical Systems: Basic Methods*, Allyn & Bacon, 1989.
- [53] A. HEIM UND O. VON STRYK, *Dokumentation of PAREST – A multiple shooting code for optimization problems in differential-algebraic equations*, Report TUM-M9616, Fakultät für Mathematik, Technische Universität München, 1996.
- [54] M. R. HESTENES, *Calculus of Variations and Optimal Control Theory*, John Wiley & Sons, 1966.



- [55] P. HILTMANN, *Numerische Lösung von Mehrpunkt-Randwertproblemen und Aufgaben der optimalen Steuerung mit Steuerfunktionen über endlichdimensionalen Räumen*, Dissertation, Technische Universität München, 1990.
- [56] P. HILTMANN, K. CHUDEJ UND M. BREITNER, *Eine modifizierte Mehrzielmethode zur Lösung von Mehrpunkt-Randwertproblemen — Benutzeranleitung*. Sonderforschungsbereich 255: Transatmosphärische Flugsysteme, Report No. 14, Lehrstuhl für Höhere und Numerische Mathematik, Technische Universität München, 1993.
- [57] D. H. JACOBSON, M. M. LELE UND J. L. SPEYER, *New necessary conditions of optimality for control problems with state-variable inequality constraints*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 35, (1971), S. 255–284.
- [58] A. JAIN UND G. RODRIGUEZ, *Linearization of manipulator dynamics using spatial operators*, IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics, Vol. 23, (1993), S. 239–248.
- [59] F. JARRE UND J. STOER, *Optimierung*, Springer, 2004.
- [60] D. JUNGnickel, *Optimierungsmethoden*, Springer, 1999.
- [61] H. J. KELLEY, R. E. KOPP UND H. G. MOYER, *Singular extremals*, in: Topics in Optimization, G. Leitmann, Hrsg., Academic Press, 1967, S. 63–101.
- [62] M. KIEHL, *Vektorisierung der Mehrzielmethode zur Lösung von Mehrpunkt-Randwertproblemen und Aufgaben der optimalen Steuerung*, Dissertation, Technische Universität München, 1989.
- [63] D. KRAFT, *TOMP – FORTRAN Modules for Optimal Control Calculations*. Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 8, Nr. 254, VDI-Verlag, 1991.
- [64] E. KREINDLER, *Additional necessary conditions for optimal control with state-variable inequality constraints*, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 38, (1982), S. 241–250.
- [65] P. KUNKEL UND V. MEHRMANN, *Differential-Algebraic Equations: Analysis and Numerical Solution*, EMS Textbooks in Mathematics, 2006.
- [66] R. LAMOUR, *A shooting method for fully implicit index-2 differential algebraic equations*, SIAM J. Sci. Comput., Vol. 18, (1997), S. 94–114.
- [67] U. LEINER, *Control of a robotic manipulator on a prescribed path subject to optimization conditions and additional constraints*, in: Proceedings of the Conference on Optimal Control and Variational Calculus, R. Bulirsch, A. Miele, J. Stoer und K. H. Well, Hrsg., Band 95 in Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer, 1987, S. 239–243.

- [68] U. LEINER, *Optimale Steuerung eines Roboterarms auf Bahnen unter autonomen und nichtautonomen Nebenbedingungen*, Dissertation, Technische Universität München, 1989.
- [69] J. M. MCCARTHY UND J. E. BOBROW, *The number of saturated actuators and constraint forces during time-optimal movement of a general robotic system*, IEEE Transactions on Robotics and Automation, Vol. 8, (1992), S. 407–409.
- [70] A. MIELE, *Gradient algorithms for the optimization of dynamic systems*, in: Control and Dynamic Systems, Vol. 16, C. T. Leondes, Hrsg., Academic Press, 1980, S. 1–52.
- [71] J. J. MURRAY UND D. JOHNSON, *The linearized dynamic robot model: Efficient computation and practical applications*, in: Proceedings of the 28th IEEE Conference on Decision and Control, Tampa, USA, 1989, S. 1659–1664.
- [72] J. J. MURRAY UND C. P. NEUMAN, *Linearization and sensitivity models of the Newton-Euler dynamic robot model*, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, Vol. 108, (1986), S. 272–276.
- [73] Y. NAKAMURA UND H. HANAFUSA, *Optimal redundancy control of robot manipulators*, International Journal of Robotics Research, Vol. 6, (1987), S. 32–42.
- [74] H. J. OBERLE, *Numerische Berechnung optimaler Steuerungen von Heizung und Kühlung für ein realistisches Sonnenhausmodell*. Habilitationsschrift, Technische Universität München, 1982.
- [75] H. J. OBERLE, *Numerical computation of singular control functions for a two-link robot arm*, in: Proceedings of the Conference on Optimal Control and Variational Calculus, R. Bulirsch, A. Miele, J. Stoer und K. H. Well, Hrsg., Band 95 in Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer, 1987, S. 244–253.
- [76] C. C. PANTELIDES, R. W. H. SARGENT UND V. S. VASSILIADIS, *Optimal control of multistage systems described by high-index differential-algebraic equations*, in: Computational Optimal Control, R. Bulirsch und D. Kraft, Hrsg., Band 115 in International Series of Numerical Mathematics, Birkhäuser, 1994, S. 177–191.
- [77] H. J. PESCH, *Solving optimal control and pursuit-evasion game problems of high complexity*, in: Computational Optimal Control, R. Bulirsch und D. Kraft, Hrsg., Band 115 in International Series of Numerical Mathematics, Birkhäuser, 1994, S. 43–61.
- [78] F. PFEIFFER UND R. JOHANNI, *A concept for manipulator trajectory planning*, IEEE Journal of Robotics and Automation, Vol. RA-3, (1987), S. 115–123.

- [79] F. PFEIFFER UND E. REITHMEIER, *Roboterdynamik*, B.G. Teubner, 1987.
- [80] P. J. RABIER UND W. C. RHEINBOLDT, *On the numerical solution of the Euler-Lagrange equations*, SIAM J. Numer. Anal., Vol. 32, (1995), S. 318–329.
- [81] R. E. ROBERSON UND R. SCHWERTASSEK, *Dynamics of Multibody Systems*, Springer, 1988.
- [82] R. W. H. SARGENT, *Optimal control*, Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol. 124, (2000), S. 361–371.
- [83] W. SCHIEHLEN, Hrsg., *Multibody Systems Handbook*, Springer, 1990.
- [84] K. SCHITTKOWSKI, *The nonlinear programming method of Wilson, Han and Powell with an augmented Lagrangian type line search function. Part 1: Convergence analysis*, Numer. Math., Vol. 38, (1981), S. 83–114.
- [85] K. SCHITTKOWSKI, *The nonlinear programming method of Wilson, Han and Powell with an augmented Lagrangian type line search function. Part 2: An efficient implementation with linear least squares subproblems*, Numer. Math., Vol. 38, (1981), S. 115–127.
- [86] L. K. SCHUBERT, *Modification of a quasi-Newton method for nonlinear equations with a sparse Jacobian*, Math. Comp., Vol. 24, (1970), S. 27–30.
- [87] V. H. SCHULZ, H. G. BOCK UND M. C. STEINBACH, *Exploiting invariants in the numerical solution of multipoint boundary value problems for DAEs*, SIAM J. Sci. Comput., Vol. 19, (1998), S. 440–467.
- [88] R. SCHWERTASSEK UND O. WALLRAPP, *Dynamik flexibler Mehrkörpersysteme*, Vieweg, 1999.
- [89] Z. SHILLER, *Time-energy optimal control of articulated systems with geometric path constraints*, ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, Vol. 118, (1996), S. 139–143.
- [90] K. G. SHIN UND N. D. MCKAY, *Minimum-time control of robotic manipulators with geometric path constraints*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-30, (1985), S. 531–541.
- [91] B. SIMEON, *Numerische Integration mechanischer Mehrkörpersysteme: Projektierende Deskriptorformen, Algorithmen und Rechenprogramme*. Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 20, Nr. 130, VDI-Verlag, 1994.
- [92] B. SIMEON, C. FÜHRER UND P. RENTROP, *Differential-algebraic equations in vehicle system dynamics*, Surv. Math. Ind., Vol. 1, (1991), S. 1–37.
- [93] G. A. SOHL UND J. E. BOBROW, *A recursive multibody dynamics and sensitivity algorithm for branched kinematic chains*, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, Vol. 123, (2001), S. 391–399.

- 
- [94] M. W. SPONG UND M. VIDYASAGAR, *Robot Dynamics and Control*, John Wiley & Sons, 1989.
- [95] J. STOER, *Numerische Mathematik 1*, Springer, 8. Aufl., 1999.
- [96] J. STOER UND R. BULIRSCH, *Numerische Mathematik 2*, Springer, 4. Aufl., 2000.
- [97] M. ULBRICH, S. ULBRICH UND L. N. VICENTE, *A globally convergent primal-dual interior-point filter method for nonlinear programming*, Mathematical Programming, Vol. 100, (2004), S. 379–410.
- [98] O. VON STRYK, *Numerische Lösung optimaler Steuerungsprobleme: Diskretisierung, Parameteroptimierung und Berechnung der adjungierten Variablen*, Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 8, Nr. 441, VDI-Verlag, 1995.
- [99] O. VON STRYK UND R. BULIRSCH, *Direct and indirect methods for trajectory optimization*, Annals of Operations Research, Vol. 37, (1992), S. 357–373.
- [100] O. VON STRYK UND M. SCHLEMMER, *Optimal control of the industrial robot manutec r3*, in: Computational Optimal Control, R. Bulirsch und D. Kraft, Hrsg., Band 115 in International Series of Numerical Mathematics, Birkhäuser, 1994, S. 367–382.
- [101] A. WÄCHTER, *An Interior Point Algorithm for Large-Scale Nonlinear Optimization with Applications in Process Engineering*, Dissertation, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, PA, USA, 2002.
- [102] A. WÄCHTER UND L. T. BIEGLER, *On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming*, Mathematical Programming, Vol. 106, (2006), S. 25–57.
- [103] T. YOSHIKAWA, *Analysis and control of robot manipulators with redundancy*, in: Robotics Research, M. Brady und R. Paul, Hrsg., MIT Press, 1984, S. 737–747.
- [104] Z.-L. ZHOU UND C. C. NGUYEN, *Globally optimal trajectory planning for redundant manipulators using state space augmentation method*, Journal of Intelligent and Robotic Systems, Vol. 19, (1997), S. 105–117.
- [105] [http://de.wikipedia.org/wiki/Bild:Industrial\\_Robot\\_.jpg](http://de.wikipedia.org/wiki/Bild:Industrial_Robot_.jpg) am 20.4.2007