

Institut für Theoretische Physik  
Physik-Department der Technischen Universität München

# Chirale Dynamik und die Physik des $\eta'$ -Mesons

Stefan Wolfgang Wetzel

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Physik der Technischen  
Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

**Doktors der Naturwissenschaften**

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr. Stephan Paul

Prüfer der Dissertation: 1. Univ.-Prof. Dr. Wolfram Weise  
2. Univ.-Prof. Dr. Andrzej J. Buras

Die Dissertation wurde am 18.07.2001 bei der Technischen Universität  
München eingereicht und durch die Fakultät für Physik am 04.10.2001  
angenommen.



# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>1 Chirale <math>SU(3)</math> Dynamik</b>	<b>9</b>
1.1 Konzeption der Lagrangedichte . . . . .	9
1.1.1 Lagrangedichte im Mesonensektor . . . . .	10
1.1.2 Lagrangedichte mit Baryonen . . . . .	13
1.2 Methode der gekoppelten Kanäle . . . . .	18
1.2.1 Meson-Baryon-Streuung . . . . .	18
1.2.2 Meson-Photoproduktion . . . . .	21
1.3 Ergebnisse . . . . .	24
1.3.1 Rückblick: $s$ -Wellenrechnung . . . . .	24
1.3.2 Ergebnisse der Rechnung mit $p$ -Wellen . . . . .	25
1.3.3 Diskussion der Resonanz $S_{11}(1535)$ . . . . .	36
1.3.4 Zusammenfassung . . . . .	38
<b>2 Axiale <math>U(1)</math> Dynamik</b>	<b>41</b>
2.1 Grundlagen der Rechnung . . . . .	41
2.1.1 Lagrangedichte im Mesonensektor . . . . .	41
2.1.2 Lagrangedichte mit Baryonen . . . . .	48
2.1.3 Gekoppelte Kanäle . . . . .	50
2.2 Ergebnisse . . . . .	51
2.2.1 Zusammenfassung . . . . .	59
<b>3 Chirale <math>U(3)</math> Störungstheorie</b>	<b>61</b>
3.1 Lagrangedichte im Mesonensektor . . . . .	61
3.1.1 Identifizierung des Singlettfeldes . . . . .	63

3.2	Infrarotregularisierung . . . . .	68
3.3	Ergebnisse . . . . .	70
3.3.1	Zusammenfassung . . . . .	77
3.4	Diskussion des Abzählschemas . . . . .	78
	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>81</b>
	<b>Anhang</b>	<b>84</b>
	<b>A Lagrangedichten</b>	<b>85</b>
A.1	$SU(3)$ -Lagrangedichte . . . . .	85
A.2	$U(3)$ -Lagrangedichte . . . . .	86
A.2.1	Skalenverhalten . . . . .	86
A.3	Alternative Formulierung . . . . .	89
A.4	Vergleich der Ansätze aus den Kapiteln 2.1.1 und 3.1 . . . . .	90
	<b>B Potentiale</b>	<b>91</b>
B.1	$C_{ij}^{(L\pm)}$ . . . . .	91
B.1.1	$s$ -Welle . . . . .	91
B.1.2	$p$ -Wellen . . . . .	96
B.2	$B_i^{(E^{(L+)})}$ und $B_i^{(M^{(1\pm)})}$ . . . . .	97
	<b>C Explizite Ergebnisse der <math>U(3)</math>-Rechnung</b>	<b>101</b>
C.1	Massen . . . . .	101
C.2	Pseudoskalare Zerfallskonstanten . . . . .	105
C.3	Z-Faktoren . . . . .	107
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>109</b>
	<b>Danksagung</b>	<b>113</b>

# Einleitung

Die Quantenchromodynamik (QCD), die heute allgemein anerkannte Theorie der starken Wechselwirkung von Quarks und Gluonen, kann bei hohen Energien störungstheoretisch behandelt werden. Die Kopplungskonstante ist klein genug, so daß nur relativ wenige Feynman-Diagramme eine Rolle spielen. Die Quarks und Gluonen verhalten sich also wie nahezu freie Teilchen. Diese Eigenschaft nennt man asymptotische Freiheit. Bei niedrigen Energien spielen jedoch für die Beschreibung physikalischer Prozesse durch die Erhöhung der (laufenden) Kopplungskonstante immer mehr Freiheitsgrade eine Rolle. Eine störungstheoretische Behandlung macht keinen Sinn mehr, da der Entwicklungsparameter nicht mehr klein ist. Die Quarks und Gluonen schließen sich hier zu farblosen Zuständen zusammen (Farbsingletts). Man spricht von Confinement. Die so gebildeten effektiven Freiheitsgrade können in einer neuen, einer effektiven Theorie benutzt werden, um die Eigenschaften der Materie in diesem Energiebereich zu beschreiben.

Die chirale Störungstheorie ( $\chi$ PT) ist eine effektive Theorie der QCD bei kleinen Energien ( $\sqrt{s} < \Lambda \approx 1\text{GeV}$ ). In diesem Energiebereich spielen lediglich die leichtesten Quarks (Up, Down und Strange) eine Rolle. Nehmen wir diese als masselos an, so wäre die QCD-Lagrangedichte invariant unter chiralen Symmetrietransformationen, rechts- und linkshändige Quarks entkoppeln. Die vollständige Symmetriegruppe im Flavourraum lautet dann  $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V$ . Aufgrund der axialen Anomalie ist die QCD-Lagrangedichte nicht invariant unter axialen  $U(1)$  Transformationen. Davon wird aber erst später die Rede sein.  $U(1)_V$  steht in Beziehung zur Baryonenzahlerhaltung und soll hier nicht weiter diskutiert werden. Die Symmetrie  $SU(3)_L \times SU(3)_R$  ist spontan zu  $SU(3)_V$  gebrochen. Die Lagrangedichte erfüllt also die chirale Symmetrie, der Grundzustand jedoch nicht. Diese

Tatsache läßt sich an den Hadronspektren ablesen. Wäre die Symmetrie nicht gebrochen, hätte jedes Hadron einen (nahezu) massегleichen Partner entgegengesetzter Parität. Da die chirale Symmetrie also spontan gebrochen ist, existieren mit Goldstones Theorem acht masselose pseudoskalare Bosonen. Diese identifiziert man mit den leichtesten pseudoskalaren Mesonen  $\pi$ ,  $K$  und  $\eta$ . Diese sind nicht masselos. Das spiegelt die Tatsache wieder, daß die chirale Symmetrie durch die Quarkmassen auch explizit gebrochen ist. Die acht Mesonen benutzt man als Freiheitsgrade einer effektiven Theorie, die die Symmetrien der zugrundeliegenden QCD enthält. Insbesondere soll die Lagrangedichte invariant unter chiralen Transformationen sein, damit man die aus der QCD bekannte Symmetriebrechung kontrolliert durchführen kann. Die möglichen Kombinationen der beitragenden Felder werden nach ihren Potenzen in der kleinen Größe  $\frac{q}{\Lambda}$  sortiert, wobei  $q$  der Mesonimpuls und  $\Lambda$  ein Massenskala ist, die eine obere Grenze für die Gültigkeit der effektiven Theorie darstellt. Typischerweise liegt  $\Lambda$  im Bereich zwischen der Masse des leichtesten Vektormesons  $m_\rho \approx 770 \text{ MeV}$  und  $4\pi f \approx 1.2 \text{ GeV}$ , wobei  $f$  die Zerfallskonstante des Pions im chiralen Limes ist. Zustände hoher Masse, wie das Spin- $\frac{1}{2}$ -Baryonoktett, können als schwere Felder der Theorie angefügt werden. Als Überblick über dieses Gebiet kann der Übersichtsartikel [Bern 95] empfohlen werden. Die Konstruktion der Lagrangedichte wird in Kapitel 1.1 beschrieben.

Als effektive Theorie der QCD bei kleinen Energien macht die  $\chi$ PT Prozesse zugänglich, die mit störungstheoretischer QCD nicht beschreibbar wären. Möglich wird das durch das Ersetzen elementarer durch effektive Freiheitsgrade und einen anderen Entwicklungsparameter, der jetzt von den im zu beschreibenden Prozess auftretenden Impulsen abhängt. Bei vielen Prozessen wird es jedoch nötig, an die durch diesen Entwicklungsparameter festgelegten Grenzen der Theorie zu gehen. Um die  $\chi$ PT auch für solche Prozesse, wie zum Beispiel Meson-Baryon-Streuprozesse oder die Meson-Photoproduktion, wie sie in dieser Arbeit betrachtet werden soll, verwenden zu können, wird es notwendig, Rückstreuprozesse bis in alle Ordnungen mit zu berücksichtigen. Ohne diese kann man lediglich erwarten, das Verhalten nahe der Schwelle zu reproduzieren.

Auf experimenteller Seite wurden bereits viele Wirkungsquerschnitte, totale

wie differentielle, sowie einige Polarisationsobservablen für Meson-Baryonstreuung und Meson-Photoproduktion bestimmt. Die für diese Untersuchung interessanten Prozesse sind die pion- und photon-induzierte  $\eta$ - und  $K$ -Produktion. Die entsprechenden experimentellen Daten stammen von MAMI [Krus 95], ELSA [Tran 98, Goer 99] und GRAAL [Scho 95]. In jüngster Zeit wurden auch diverse Polarisationsobservablen bestimmt. Aufgrund des hohen Informationsgehalts ist eine Untersuchung dieser Größen von besonderem Interesse. Weitere Daten für die Reaktion  $\pi^- p \rightarrow \eta n$  werden von der Crystal Ball Kollaboration erwartet [Sadl 97].

Im Rahmen dieser Rechnungen greifen wir auf die Lippmann-Schwinger-Gleichung zurück. Diese aus der quantenmechanischen Streutheorie bekannte Operatorengleichung summiert alle Rückstreuprozesse konsistent auf. Die resultierende S-Matrix ist unitär, was Wahrscheinlichkeitserhaltung garantiert. Man spricht deshalb auch von Unitarisierung. Die Ergebnisse vorangegangener Rechnungen nur mit  $s$ -Wellen [Kais 95, Kais 97] ermutigten zu einer Erweiterung um  $p$ -Wellen, was erstmals auch die Untersuchung winkelabhängiger Größen erlaubt. Die betrachteten experimentellen Daten können mit einer kleinen Anzahl an Parametern gut beschrieben werden. Insbesondere wird der  $\eta N$ -Pion- und Photoproduktionsquerschnitt ohne explizite Einführung einer Resonanz  $S_{11}(1535)$  sehr gut reproduziert. Diese Resonanz wird vielmehr dynamisch erzeugt. Es zeigt sich, daß für etliche Wirkungsquerschnitte  $p$ -Wellen notwendig sind, um die Daten zu reproduzieren. Diese Rechnungen, sowie deren Ergebnisse, findet man in Kapitel 1.

Ein weiteres in diesem Zusammenhang interessantes Thema ist die axiale Anomalie. Eine Anomaly ist ein Prozess, der eine Symmetrie der klassischen Theorie durch Quantisierung bricht. Durch die axiale Anomalie ist der Singlett-Axialvektorstrom der QCD selbst im chiralen Limes verschwindender Quarkmassen keine Erhaltungsgröße. Hier drückt sich die Tatsache aus, daß die geforderte (lokale) Eichinvarianz die axiale  $U(1)$  Symmetrie zerstört. Anders ausgedrückt ist die (eichinvariante) Lagrangedichte der QCD nicht invariant unter axialen  $U(1)$ -Transformationen. Der bei diesen Transformationen auftauchende Term, bis auf einen Vorfaktor die topologische Ladungsdichte, verschwindet auch im chiralen Limes nicht. Dieser Effekt rührt von den Eichfeldern, also den Gluonen, her. Durch Untersuchung der Auswir-

kungen der axialen Anomalie innerhalb einer effektiven Theorie erhält man also einen indirekten Zugang zu gluonischen Freiheitsgraden. Aufgrund der axialen Anomalie hat die QCD mit masselosen Quarks und drei Flavours lediglich acht und nicht neun Goldstonebosonen. Ein entsprechendes neuntes Singlettboson (nennen wir es  $\eta_0$ ) hätte aufgrund der expliziten, anomalen Symmetriebrechung selbst im chiralen Limes eine Masse. Ein Kandidat für dieses pseudoskalare Meson ist das  $\eta'(958)$ . Allerdings mischt der Singlettzustand  $\eta_0$  mit dem Oktettzustand  $\eta_8$  zu den physikalischen Zuständen  $\eta$  und  $\eta'$ . (Wir betrachten keine isospin-verletzenden Prozesse, so daß keine Mischung mit dem  $\pi_0$  auftritt.) Der Mischungswinkel  $\vartheta$  wird derzeit im Bereich  $-20^\circ \leq \vartheta \leq -13^\circ$  gesehen, ist also nicht vernachlässigbar klein.

Der Wirkungsquerschnitt der  $\eta'$ -Photoproduktion wurde bisher in [ABBH 68, AHM 76, Ploe 98] gemessen. Der totale Wirkungsquerschnitt steigt an der Schwelle steil bis auf  $\sim 2\mu b$  und fällt dann schnell wieder ab. Die differenziellen Wirkungsquerschnitte zeigen eine starke Winkelabhängigkeit schon knapp oberhalb der Schwelle. Nach [Ploe 98] können die Daten mit Hilfe jeweils einer  $s$ - und einer  $p$ -Wellenresonanz bei  $\sqrt{s} \approx 1.90 \text{ GeV}$  bzw.  $\sqrt{s} = 2.00 \text{ GeV}$  beschrieben werden. Weitere Daten werden in näherer Zukunft auch vom Jefferson Laboratory erwartet [Ritc 94].

Im Kapitel 2 beziehen wir das  $\eta'$ -Meson im Rahmen einer erweiterten chiralen Störungstheorie in unsere Rechnung mit gekoppelten Kanälen ein. Die Effekte der axialen Anomalie werden nicht nur durch die hohe Masse des  $\eta'$ , sondern auch durch neue Kopplungen berücksichtigt. Die Rechnung wurde bis zur chiralen Ordnung  $\mathcal{O}(q^2)$  mit  $s$ -Wellen durchgeführt. Schon die obige Beschreibung der gemessenen Wirkungsquerschnitte zeigt die eingeschränkte Vorhersagekraft einer reinen  $s$ -Wellenrechnung. Wir beschränken uns deshalb und auch wegen der zu erwartenden Probleme aufgrund der hohen Masse des  $\eta'$ -Mesons auf eine qualitative Analyse.

Wir kamen nun schon öfter auf die hohe Masse des  $\eta'$ -Mesons und die daraus resultierenden Probleme zu sprechen. Ähnlich wie in der Theorie mit Baryonen kann diese Masse dazu führen, daß sich die Entwicklung der chiralen Störungsreihe und die Anzahl der Schleifen eines Diagramms nicht mehr entsprechen, denn jede  $\eta'$ -Schleife trägt einen Faktor  $m_{\eta'}^2$  bei. Eine Entwicklung analog zum Oktett würde einer Entwicklung um "kleine"  $\frac{m_{\eta'}}{\Lambda}$  entsprechen,

wobei jedoch  $m_{\eta} \approx \Lambda$ . Eine solche Entwicklung konvergiert nicht oder nur schlecht. Eine Methode zum Umgang mit diesem Problem liefert die sogenannte Infrarotregularisierung [Tang 96, Bech 99], die bisher nur auf Probleme mit Baryonen angewandt wurde und dort anstelle der Näherung schwerer Baryonen verwendet werden kann. Die Methode bewahrt die Symmetrien der zugrundeliegenden Lagrangedichte und modifiziert lediglich die Schleifenintegrale. Es wurde nun im Rahmen dieser Arbeit versucht, die Methode der Infrarotregularisierung auch im Mesonsektor zu etablieren, wobei die Masse des  $\eta'$  als neue Skala in die Theorie eingeht. Als Test dieses Verfahrens werden im Kapitel 3 die Massen und Zerfallskonstanten der neun leichtesten pseudoskalaren Mesonen in Ein-Schleifen-Näherung berechnet. Wir finden eine bessere Konvergenz der Störungsreihe als in dimensionaler Regularisierung. Das Ergebnis ermutigt, auf diesem Weg weiterzugehen.



# Kapitel 1

## Chirale $SU(3)$ Dynamik

In diesem Kapitel beschreiben wir Meson-Baryon-Streuung und Meson-Photoproduktion im Rahmen der chiralen Störungsrechnung mit schweren Baryonen in niedrigster Ordnung. Alle mesonischen Rückstreuprozesse werden mit Hilfe einer Lippmann-Schwinger-Gleichung aufiteriert. Dieses Vorgehen bezeichnen wir als Methode der gekoppelten Kanäle. In Ordnung  $q^2$  mit  $s$ - und  $p$ -Wellen kann eine sehr gute Übereinstimmung mit allen gemessenen totalen Wirkungsquerschnitten der betrachteten Prozesse erzielt werden. Lediglich in einigen differentiellen Wirkungsquerschnitten und den Polarisationsobservablen ergeben sich Differenzen zu den Daten, die auf höhere Partialwellen zurückgeführt werden können.

### 1.1 Konzeption der Lagrangedichte

Wir beginnen die Formulierung der effektiven Feldtheorie mit der Aufstellung der Lagrangedichte im Mesonensektor. Das daraus erwachsene Verständnis wird helfen, die Erweiterung durch das  $\eta'$ -Meson (Kapitel 2.1 und 3.1) zu vollziehen. In diesem Zug (Abschnitt 1.1.1) wird das Abzählschema für die Mesonfelder eingeführt. Das heißt, daß jedem Teil der Lagrangedichte eine Ordnung des relevanten kleinen Parameters der Theorie zugewiesen wird. Auf diese Weise wird es möglich, endlich viele Terme zu bestimmen, die zur Lagrangedichte bis zu einer bestimmten Ordnung in eben diesem Parameter beitragen. In einem zweiten Schritt (Abschnitt 1.1.2) beschreiben wir die

Erweiterung der relativistischen Theorie durch Einbeziehung von Baryonen, die als Massfelder in die Theorie eingehen. Im Anschluß daran behandeln wir den nichtrelativistischen Grenzfall der Theorie mit schweren Baryonen.

### 1.1.1 Lagrangedichte im Mesonensektor

Ausgehend von der QCD-Lagrangedichte wollen wir die effektive Feldtheorie der acht leichten pseudoskalaren Mesonen ( $\pi$ ,  $K$  und  $\eta$ ), die chirale Störungstheorie, aufstellen. Diese lautet mit externen Feldern für masselose Quarks:

$$\mathcal{L}_{QCD} = \mathcal{L}_{QCD}^{(0)} + \bar{q}\gamma_\mu(v^\mu + \gamma_5 a^\mu)q - \bar{q}(s - i\gamma_5 p)q. \quad (1.1)$$

$\mathcal{L}_{QCD}^0$  beschreibt die Lagrangedichte im Limes verschwindender Quarkmassen. Die externen Quellen  $v_\mu(x)$ ,  $a_\mu(x)$ ,  $s(x)$  und  $p(x)$  sind hermitesche  $3 \times 3$ -Matrizen im Flavourraum und transformieren unter chiraler  $SU(3)_R \times SU(3)_L$  wie folgt:

$$\begin{aligned} s' + ip' &= R(s + ip)L^\dagger, \\ r'_\mu &= Rr_\mu R^\dagger + iR\partial_\mu R^\dagger, \quad l'_\mu = Ll_\mu L^\dagger + iL\partial_\mu L^\dagger, \end{aligned} \quad (1.2)$$

wobei  $r_\mu = v_\mu + a_\mu$ ,  $l_\mu = v_\mu - a_\mu$  und  $R \in SU(3)_R$ ,  $L \in SU(3)_L$ .

Die Lagrangedichte (1.1) ist symmetrisch unter chiralen  $SU(3)_R \times SU(3)_L$  Transformationen. Will man zu massiven Quarks zurückkehren, nimmt man an,  $s(x)$  enthalte die Massenmatrix  $\mathcal{M}$  der Quarks. Dieses  $s(x)$  erlaubt es, später die Symmetriebrechung kontrolliert genau in der Weise einzuführen, wie dies von der QCD-Lagrangedichte vorgegeben wird.

Wie schon erwähnt sind die Freiheitsgrade der effektiven Theorie die acht Goldstone-Bosonen. Sie werden in der matrixwertigen Funktion

$$U(\phi) = \exp \left\{ \frac{i\phi}{f} \right\}, \quad (1.3)$$

mit

$$\phi = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta_8}{\sqrt{6}} & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta_8}{\sqrt{6}} & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\eta_8 \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

zusammengefaßt. Dabei ist  $f$  die Pionzerfallskonstante im chiralen Limes. Es lassen sich nun Kombinationen des Feldes  $U$ , seiner Ableitung  $\partial_\mu U$  und

der externen Felder  $s(x)$ ,  $p(x)$ ,  $v(x)$  and  $a(x)$  bilden, die die Symmetrien der zugrunde liegenden Lagrangedichte aufweisen. Man faßt die Felder dafür bequemerweise auf folgende Art zusammen:

$$\begin{aligned}\chi_{\pm} &= u(\chi^{\dagger}U \pm U^{\dagger}\chi)u^{\dagger}, \\ u_{\mu} &= iu^{\dagger}\nabla_{\mu}Uu^{\dagger}, \\ f_{\mu\nu}^{\pm} &= u^{\dagger}F_{\mu\nu}^R u \pm uF_{\mu\nu}^L u^{\dagger}.\end{aligned}\tag{1.5}$$

Dabei ist  $\chi = 2B_0(s+ip)$ ,  $\nabla_{\mu}U = \partial_{\mu}U - ir_{\mu}U + iUl_{\mu}$  die kovariante Ableitung und

$$\begin{aligned}r_{\mu} &= v_{\mu} + a_{\mu}, \\ l_{\mu} &= v_{\mu} - a_{\mu}, \\ F_{\mu\nu}^L &= \partial_{\mu}l_{\nu} - \partial_{\nu}l_{\mu} - i[l_{\mu}, l_{\nu}], \\ F_{\mu\nu}^R &= \partial_{\mu}r_{\nu} - \partial_{\nu}r_{\mu} - i[r_{\mu}, r_{\nu}].\end{aligned}$$

Außerdem ist  $u^2(x) = U(x)$  mit  $U'(x) = RU(x)L^{\dagger} = u'^2(x)$ . Die Konstante  $B_0$  ist ein Maß für die spontane Symmetriebrechung, wie man noch sehen wird.

Um die Transformationseigenschaften geeignet zusammenzufassen, definieren wir die Matrix  $K \in SU(3)$ :

$$Ru = u'K,$$

deren explizite Form durch

$$K = \sqrt{LU^{\dagger}R^{\dagger}R}\sqrt{U}\tag{1.6}$$

gegeben ist. Unter chiraler  $SU(3)_R \times SU(3)_L$  transformieren die Felder in (1.5) linear in  $K$ :

$$X \rightarrow KXK^{\dagger}.$$

Die Transformation selbst ist aber in hohem Maße nichtlinear, wie man in (1.6) sehen kann.

Aus den Bestandteilen (1.5) setzt man dann Terme zusammen, deren Spur (im Flavourraum) invariant unter chiralen Transformationen ist. Man beachte, daß  $u_{\mu}^{\dagger} = u_{\mu}$ ,  $\chi_{+}^{\dagger} = \chi_{+}$  und  $\chi_{-}^{\dagger} = -\chi_{-}$  ist.

Eine so aufgebaute Theorie hat zunächst unendlich viele Terme. Um nur

endlich viele betrachten zu müssen, führt man ein Abzählchema ein, d.h. man identifiziert eine kleine Größe und sortiert die Terme nach ihrer Ordnung in diesem Parameter. Dieser kleine Parameter ist für die chirale Störungsrechnung  $\frac{q}{\Lambda}$ , also der Impuls  $q$  der Mesonen geteilt durch die relevante Energieskala  $\Lambda \sim 4\pi f \approx 1.2 \text{ GeV}$ . Gegenüber dieser Skala ist der Mesonenimpuls im Bereich, in dem die Theorie gültig sein soll, klein.

Die Felder lassen sich nun nach dem kleinen Impuls  $q$  sortieren:

$$\begin{aligned} U &= \mathcal{O}(1), \\ \partial_\mu U, v_\mu, a_\mu, u_\mu &= \mathcal{O}(q), \\ s, p, \chi_+, \chi_-, f_{\mu\nu}^\pm &= \mathcal{O}(q^2). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Wie man sieht, beginnt die Lagrangedichte mit Termen zweiter Ordnung und hat nur gerade Terme in Potenzen von  $q$ , also

$$\mathcal{L}_\phi = \mathcal{L}_\phi^{(2)} + \mathcal{L}_\phi^{(4)} + \dots \quad (1.8)$$

Wir können nun beginnen die Terme aufzuschreiben. Die Lagrangedichte in zweiter chiraler Ordnung lautet:

$$\mathcal{L}_\phi^{(2)} = \frac{f^2}{4} \langle u_\mu u^\mu + \chi_+ \rangle. \quad (1.9)$$

Die spitzen Klammern  $\langle \dots \rangle$  bezeichnen die Spur über die Flavourmatrizen. Ein Term  $\langle \chi_- \rangle$  tritt nicht auf, da er negative Parität aufweist. Der kinetische Term ist  $\langle u_\mu u^\mu \rangle = \langle \nabla_\mu U^\dagger \nabla^\mu U \rangle$ .  $\langle \chi_+ \rangle$  repräsentiert die Massen der Bosonen durch das skalare Feld  $s(x)$ . Die Lagrangedichte (1.9) beinhaltet zwei Konstanten,  $f$  und  $B_0$ .  $f$  ist die Pionzerfallskonstante im chiralen Limes, wie man anhand der Betrachtung des axialen Vektorstroms leicht sieht. Wie weiter oben schon erwähnt ist  $B_0$  ein Maß für die chirale Symmetriebrechung. Es ist explizit verknüpft mit dem Quarkkondensat  $\langle 0 | \bar{q}q | 0 \rangle = -f^2 B_0 (1 + \mathcal{O}(q))$ . Die Lagrangedichte in vierter chiraler Ordnung lautet:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\phi^{(4)} &= \beta_1 \langle u_\mu u^\mu \rangle \langle u_\nu u^\nu \rangle + \beta_2 \langle u_\mu u_\nu \rangle \langle u^\mu u^\nu \rangle + \beta_3 \langle u_\mu u^\mu u_\nu u^\nu \rangle \\ &\quad - \beta_4 \langle u_\mu u^\mu \rangle \langle \chi_+ \rangle - \beta_5 \langle u_\mu u^\mu \chi_+ \rangle + \beta_6 \langle \chi_+ \rangle^2 + \beta_7 \langle \chi_- \rangle^2 \\ &\quad + \frac{\beta_8}{2} \langle \chi_+^2 + \chi_-^2 \rangle - i\beta_9 \langle u_\mu u_\nu f_{\mu\nu}^{\mu\nu} \rangle + \frac{\beta_{10}}{4} \langle f_{\mu\nu}^{\mu\nu} f_{\mu\nu}^+ - f_{\mu\nu}^{\mu\nu} f_{\mu\nu}^- \rangle \\ &\quad + \frac{\beta_{11}}{2} \langle f_{\mu\nu}^{\mu\nu} f_{\mu\nu}^+ + f_{\mu\nu}^{\mu\nu} f_{\mu\nu}^- \rangle + \frac{\beta_{12}}{4} \langle \chi_+^2 - \chi_-^2 \rangle. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Die Konstanten  $\beta_i$  sind nicht bekannt und bestehen aus einem Teil, der die logarithmischen Divergenzen der Schleifendiagramme der Lagrangedichte zweiter Ordnung kompensiert, und einem, der durch Experimente oder Modellrechnungen bestimmt werden muss. Die Terme mit den Indizes elf und zwölf enthalten die Mesonfelder nicht, sind also physikalisch nicht relevant. Sie wurden nur der Vollständigkeit halber aufgeschrieben, da sie für eine konsistente Renormierung notwendig sind.

Näheres zu diesem Thema findet man im Übersichtsartikel [Bern 95].

### 1.1.2 Lagrangedichte mit Baryonen

Nun soll die effektive Lagrangedichte mit Baryonen konstruiert werden. Dazu fassen wir, analog zu den Mesonen, die acht Baryonen in einer Matrix zusammen:

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\Lambda & \Sigma^+ & p \\ \Sigma^- & -\frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\Lambda & n \\ \Xi^- & \Xi^0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\Lambda \end{pmatrix}.$$

$B$  transformiert, wie alle massiven Felder [Cole 69], linear unter chiralen Transformationen:

$$B \rightarrow KBK^\dagger,$$

wobei die Matrix  $K$  in Gleichung (1.6) gegeben ist. Daß  $K$  die Mesonfelder enthält, trägt dabei der Tatsache Rechnung, daß chirale Transformationen mit der Absorption respektive Emmission der Goldstonebosonen verknüpft sind.

Die kovariante Ableitung der Baryonfelder ist durch

$$D_\mu B = \partial_\mu B + [\Gamma_\mu, B],$$

$$\Gamma_\mu = \frac{1}{2} ([u^\dagger, \partial_\mu u] - iu^\dagger r_\mu u - iul_\mu u^\dagger)$$

definiert. Somit transformiert auch  $D_\mu B$  linear in  $K$ .

Um die Lagrangedichte nun Ordnung für Ordnung aufschreiben zu können, benötigen wir noch das Abzählmuster als Ordnungsprinzip. Als kleine Größe kommt dabei der Viererimpuls nicht in Frage, da er aufgrund der Masse der

Baryonen nicht klein bezüglich irgendeiner chiralen Skala sein kann. Es bietet sich deshalb der Betrag des Dreierimpulses  $p$  als Entwicklungsparameter an, da typische Impulse in der Größenordnung des Impulses externer Mesonen sind. Somit ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mathring{M}, B, \bar{B}, D_\mu B &= \mathcal{O}(1), \\ \bar{B}B, \bar{B}\gamma_\mu B, \bar{B}\gamma_\mu\gamma_5 B, \bar{B}\sigma_{\mu\nu} B, \bar{B}\sigma_{\mu\nu}\gamma_5 B &= \mathcal{O}(1), \\ (i\not{D} - \mathring{M})B, \bar{B}\gamma_5 B &= \mathcal{O}(p). \end{aligned}$$

$\mathring{M}$  ist die mittlere Baryonenmasse im chiralen Limes. Es ist ersichtlich, daß die Lagrangedichte ab Ordnung  $\mathcal{O}(p)$  beginnt. Wir werden uns nur mit Prozessen befassen, die zwei externe Baryonen und keine Baryonschleifen beinhalten. Für solche Prozesse lautet die Lagrangedichte in niedrigster Ordnung:

$$\mathcal{L}_{\phi B}^{(1)} = \langle \bar{B}(i\not{D} - \mathring{M})B \rangle - \frac{D}{2} \langle \bar{B}\gamma_\mu\gamma_5 \{u^\mu, B\} \rangle - \frac{F}{2} \langle \bar{B}\gamma_\mu\gamma_5 [u^\mu, B] \rangle. \quad (1.11)$$

Mit  $\mathring{M}$ ,  $D$  und  $F$  sind insgesamt drei Konstanten in der Theorie, wobei die Summe  $D + F = \mathring{g}_A$  die Stärke der axial-vektoriellen Kopplung an die Baryonen ist. Die physikalische axial-vektorielle Stärke  $g_A = \mathring{g}_A(1 + \mathcal{O}(p^2))$  wurde im Neutronen- $\beta$ -Zerfall gemessen und zu  $g_A \approx 1.267$  bestimmt [PDB 00]. Die Lagrangedichte zweiter Ordnung ist in Anhang A.1 in Gleichung (A.1) gegeben.

Betrachten wir nun das Niederenergieverhalten der effektiven Theorie. Die Lagrangedichte (1.11) muß aufgrund der von Pionschleifen erzeugten Divergenzen um Gegenterme ergänzt werden. Dabei kommt es aufgrund der Renormierung der Koeffizienten  $\mathring{M}$ ,  $D$  und  $F$  zu einem Bruch des chiralen Abzählmodells [Bern 95], d.h. die Gegenterme sind teilweise chiral niedrigerer oder gleicher Ordnung als die zugehörigen Terme der ursprünglichen Lagrangedichte. Schleifendiagramme können also nicht automatisch als Korrekturen höherer Ordnung gerechnet werden. Der Grund dafür liegt in der im chiralen Limes nichtverschwindenden Masse der Baryonen. Um dieses Problem zu lösen, muß man eine neue Entwicklungsskala einführen. In der Praxis sind zwei Vorgehensweisen möglich: Entweder man arbeitet im extrem nichtrelativistischen Limes [Jenk 91], oder man benutzt die sogenannte Infrarotregularisierung [Tang 96]. Die zweite Methode wollen wir auf das

Kapitel 3.2 aufschieben, wo diese Problematik im Zusammenhang mit dem  $\eta'$  nochmals auftaucht.

### Chirale Störungstheorie mit schweren Baryonen

Wir haben gerade herausgestellt, daß die Eins-zu-Eins-Korrespondenz von chiraler und Schleifenentwicklung für die relativistische Theorie mit Baryonen zusammenbricht. Wenn man jedoch mit schweren Baryonen arbeitet, werden die Baryonenimpulse nur relativ zur Ruhemasse beitragen. Dieses Verhältnis kann aber durchaus als klein gelten. Man nimmt also den nicht-relativistischen Limes einer voll relativistischen Theorie und expandiert um das Inverse der Baryonmasse.

Betrachtet man den Impuls eines schweren Baryons, so läßt sich dieser schreiben als  $p_\mu = \dot{M}v_\mu + l_\mu$ , wobei  $v_\mu v^\mu = 1$ ,  $l_\mu$  die kleine Differenz zu Impulsen auf der Massenschale und  $|v_\mu l^\mu| \ll \dot{M}$  ist. Wir konstruieren nun Eigenzustände des Geschwindigkeitsprojektors  $P_v = \frac{1}{2}(1 + \not{v})$  durch:

$$\begin{aligned} H_v &= e^{i\dot{M}v_\mu x^\mu} \frac{1}{2}(1 + \not{v})B, \\ h_v &= e^{i\dot{M}v_\mu x^\mu} \frac{1}{2}(1 - \not{v})B. \end{aligned}$$

Grundsätzlich hängen die Felder  $H$  und  $h$  von der Geschwindigkeit  $v$  ab. Für unsere Zwecke werden wir aber auf eine Etikettierung verzichten.

Die Felder  $H$  und  $h$  spalten die Lagrangedichte in deren On- und Off-Shell-Teile auf. Man behält dann nur die Teile auf der Massenschale, also die Terme in denen nur  $H$  vorkommt. (Mit Hilfe der zu  $h$  proportionalen Terme können dann relativistische Korrekturen systematisch berechnet werden.) Für die Dirac-Lagrangedichte führt diese Prozedur, wenn man im Ruhesystem des Baryons ( $v_\mu = (1, 0, 0, 0)$ ) arbeitet, auf die bekannte nicht-relativistische Reduktion der Spinoren. Die Dirac-Algebra vereinfacht sich durch diese Trans-

formation, und wir schreiben die Bilinearen um:

$$\begin{aligned}
\langle \bar{B}B \rangle &\rightarrow \langle \bar{H}H \rangle, \\
\langle \bar{B}\gamma_\mu B \rangle &\rightarrow \langle v_\mu \bar{H}H \rangle, \\
\langle \bar{B}\gamma_5 B \rangle &\rightarrow 0, \\
\langle \bar{B}\gamma_\mu\gamma_5 B \rangle &\rightarrow 2\langle \bar{H}S_\mu H \rangle, \\
\langle \bar{B}i\sigma_{\mu\nu} B \rangle &\rightarrow 2\langle \bar{H}[S_\mu, S_\nu]H \rangle, \\
\langle \bar{B}\gamma_5\sigma_{\mu\nu} B \rangle &\rightarrow 2i\langle (v_\mu \bar{H}S_\nu H - v_\nu \bar{H}S_\mu H) \rangle.
\end{aligned}$$

Dabei ist  $2S_\mu = i\gamma_5\sigma_{\mu\nu}v^\nu$ .

Indem wir die Felder umbenennen,  $H \rightarrow B$ , schreiben wir die Lagrangedichte in erster chiraler Ordnung mit schweren Baryonen als:

$$\mathcal{L}_{\phi B}^{(1)} = i\langle \bar{B}v_\mu D^\mu B \rangle - D\langle \bar{B}S_\mu\{u^\mu, B\} \rangle - F\langle \bar{B}S_\mu[u^\mu, B] \rangle.$$

In zweiter Ordnung ist sie in Anhang A.1 Gleichung (A.2) gegeben.

In der Rechnung mit gekoppelten Kanälen werden wir die nach Partialwellen zerlegte Lagrangedichte bis zu  $p$ -Wellen benötigen. Für  $s$ -Wellen ergibt sich diese Zerlegung einfach aus folgender Überlegung:  $u_\mu$  ist proportional zum Mesonenimpuls. Betrachtet man nur dessen Komponenten parallel zur Bewegungsrichtung der Baryonen  $v_\mu$ , so erhält man die Beiträge zur  $s$ -Wellen Meson-Baryon-Streuung. Also ersetzt man  $u_\mu \rightarrow v_\mu(v_\nu u^\nu)$  und erhält:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\phi B}^{(1,s)} &= i\langle \bar{B}v_\mu D^\mu B \rangle, \\
\mathcal{L}_{\phi B}^{(2,s)} &= b_D\langle \bar{B}\{\chi_+, B\} \rangle + b_F\langle \bar{B}[\chi_+, B] \rangle + b_0\langle \bar{B}B \rangle\langle \chi_+ \rangle \\
&\quad + 2d_D\langle \bar{B}\{(v_\mu u^\mu)^2, B\} \rangle + 2d_F\langle \bar{B}[(v_\mu u^\mu)^2, B] \rangle \\
&\quad + 2d_0\langle \bar{B}B \rangle\langle (v_\mu u^\mu)^2 \rangle + 2d_1\langle \bar{B}(v_\mu u^\mu) \rangle\langle (v_\mu u^\mu)B \rangle.
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Es fällt direkt ins Auge, daß die Terme proportional zu  $D$  und  $F$  wegfallen. Diese sind Terme proportional zu  $\overset{\circ}{M}^{-1}$  und tauchen deshalb im nicht-relativistischen Limes nicht mehr auf. Hier ist aber  $\overset{\circ}{M}^{-1} = \mathcal{O}(q)$ , weswegen wir mit der relativistischen Lagrangedichte arbeiten, um alle Terme bis  $\mathcal{O}(q^2)$  zu berücksichtigen. Die Ausdrücke werden dann bis zur Ordnung  $\overset{\circ}{M}^{-1}$  aufgeschrieben.

Die Betrachtung der  $p$ -Wellen-Beiträge ist etwas komplizierter, da eine so einfache Regel wie bei den  $s$ -Wellen nicht angegeben werden kann. Im Folgenden arbeiten wir der Einfachheit halber im Ruhesystem des Baryons ( $v_\mu =$

(1, 0, 0, 0) ). Hier können wir aber die Klassen von Termen angeben, die beitragen können, nämlich:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\phi B}^{(2-p)} = & 2g_D \langle \bar{B} \{ \vec{u} \cdot \vec{u}, B \} \rangle + 2g_F \langle \bar{B} [ \vec{u} \cdot \vec{u}, B ] \rangle \\
& + 2g_0 \langle \bar{B} B \rangle \langle \vec{u} \cdot \vec{u} \rangle + 2g_1 \langle \bar{B} \vec{u} \rangle \cdot \langle \vec{u} B \rangle \\
& + 2h_D \langle \bar{B} i \vec{\sigma} \cdot \{ \vec{u} \times \vec{u}, B \} \rangle + 2h_F \langle \bar{B} i \vec{\sigma} \cdot [ \vec{u} \times \vec{u}, B ] \rangle \\
& + 2h_1 \langle \bar{B} i \vec{\sigma} \times \vec{u} \rangle \cdot \langle \vec{u} B \rangle.
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Man beachte, daß die Koeffizienten  $g_i$  **nicht** denen in den Gleichungen (A.1) und (1.12) entsprechen!

Die ersten vier Terme in Gleichung (1.13) entsprechen den  $p$ -Wellen Prozessen ohne Spin-Flip, die letzten drei den Spin-Flip Anteilen. Für die Photo-Produktion benötigen wir noch die Terme, die das Photon an das anomale magnetische Moment der Baryonen koppeln:

$$\mathcal{L}_{\gamma B}^{(2)} = \frac{1}{2M} \langle \bar{B} \vec{\sigma} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) (\kappa_D \{ Q, B \} + \kappa_F [ Q, B ]) \rangle. \tag{1.14}$$

Dabei ist  $\vec{A}$  das elektromagnetische Vektorpotential und  $Q$  die Quarkladungsmatrix  $\frac{1}{3} \text{diag}(2, -1, -1)$ .  $\kappa_D$  und  $\kappa_F$  sind anomale magnetische Momente im chiralen Limes ( $\chi$ -Limit) und wie folgt mit den anomalen magnetischen Momenten der Baryonen verknüpft:

	$\kappa_p$	$\kappa_n$	$\kappa_{\Sigma^+}$	$\kappa_{\Sigma^0}$	$\kappa_{\Lambda}$	$\kappa_{\Lambda\Sigma^0}$
$\chi$ -Limit	$\frac{1}{3}\kappa_D + \kappa_F$	$-\frac{2}{3}\kappa_D$	$\frac{1}{3}\kappa_D + \kappa_F$	$\frac{1}{3}\kappa_D$	$-\frac{1}{3}\kappa_D$	$\frac{1}{\sqrt{3}}\kappa_D$
empirisch	1.79	-1.91	1.46	0.65	-0.61	1.61

Wie man anhand der empirischen Werte in der obigen Tabelle sieht, gibt es nicht unerhebliche Abweichungen vom Limes verschwindender Quarkmassen. Deshalb entschließen wir uns, mit den oben angegebenen Werten zu arbeiten. Dabei übernehmen wir alle anomalen magnetischen Momente, außer  $\kappa_{\Sigma^0}$  und dem Vorzeichen von  $\kappa_{\Lambda\Sigma^0}$ , aus [PDB 00]. Die beiden Ausnahmen sind experimentell nicht bestimmt und werden aus einer Rechnung in  $\chi$ PT [Stein 97] entnommen. Es ergeben sich also keine neuen, noch zu bestimmenden Konstanten in der Meson-Photoproduktion.

Aus der Lagrangedichte verbleiben also 16 zu bestimmende Parameter. Die

Parameter  $b_D$  und  $b_F$  sind gegeben durch die Massendifferenzen der Baryonen:

$$\begin{aligned} M_\Sigma - M_\Lambda &= \frac{16}{3} b_D (m_K^2 - m_\pi^2), \\ M_\Sigma - M_N &= 4(b_D - b_F)(m_K^2 - m_\pi^2), \\ M_\Xi - M_N &= 8b_F(m_K^2 - m_\pi^2). \end{aligned}$$

Durch Verwendung der Massen der geladenen Mesonen erhält man bei Anpassung an die empirischen Werte:  $b_D = 0.066 \text{ GeV}^{-1}$  und  $b_F = -0.213 \text{ GeV}^{-1}$ . Der dritte Parameter der chiralen Symmetriebrechung  $b_0$  ist mit  $\overset{\circ}{M}$ , der Masse der Baryonen im chiralen Limes, verknüpft:

$$M_N = \overset{\circ}{M} - 4m_K^2(b_D - b_F + b_0) - 2m_\pi^2(2b_F + b_0). \quad (1.15)$$

Es verbleiben also noch 13 Parameter aus der Lagrangedichte, nämlich  $\overset{\circ}{M}$ ,  $D$ ,  $d_D$ ,  $d_F$ ,  $d_0$ ,  $d_1$ ,  $g_D$ ,  $g_F$ ,  $g_0$ ,  $g_1$ ,  $h_D$ ,  $h_F$  und  $h_1$ . Diese Parameter werden an eine Vielzahl von Meson-Meson- und Meson-Photoproduktionsdaten angepasst.

## 1.2 Methode der gekoppelten Kanäle

### 1.2.1 Meson-Baryon-Streuung

Eine zentrales Werkzeug in den Kapiteln 1 und 2 ist die Methode der gekoppelten Kanäle. Gemeint ist hiermit die Berücksichtigung aller Rückstreuprozesse, so daß die  $S$ -Matrix unitär bleibt. In unserem Fall wären dies also die Meson-Baryon-Streuprozesse oder die Meson-Photo-Produktion

$$\begin{aligned} |\phi B\rangle_i &\rightarrow |\phi B\rangle_1 \rightarrow \dots \rightarrow |\phi B\rangle_f, \\ |\gamma B\rangle_i &\rightarrow |\phi B\rangle_1 \rightarrow \dots \rightarrow |\phi B\rangle_f. \end{aligned}$$

Aus der quantenmechanischen Streutheorie ist die Lippmann-Schwinger-Gleichung bekannt, welche bei Streuung an einem Potential  $V$  eine Bedingung an die  $T$ -Matrix stellt, sodaß die resultierende  $S$ -Matrix unitär ist:

$$T = V + V \cdot G \cdot T. \quad (1.16)$$

$G$  beschreibt dabei die Propagation im Zwischenzustand. Natürlicherweise ist dies eine Operatorengleichung, deren Lösung im Allgemeinen nicht trivial

ist. Wären die beteiligten Größen lediglich (invertierbare) Matrizen, so wäre die Lösung gegeben durch eine einfache Matrixinversion:

$$T = (1 - V \cdot G)^{-1} V. \quad (1.17)$$

Für unsere Zwecke sollen die Potentiale durch die Born-Streuprozesse beschrieben werden, wobei  $T$ ,  $V$  und  $G$  Matrizen in den verschiedenen Streukanälen sind. Weiterhin wird angenommen, daß das Potential  $V$  und die Streumatrix  $T$  im letzten Teil der Gleichung (1.16) nicht wesentlich von der Integration über die intermediären Impulse beeinflußt werden, sodaß Gleichung (1.17) tatsächlich die Lösung unserer nun separierbar gemachten Lippmann-Schwinger-Gleichung ist.

Im Einzelnen geht man so vor, daß man die Kanäle der starken Wechselwirkung in  $s$ - und  $p$ -Wellenanteile zerlegt. Die daraus resultierende Matrix ist, da die Partialwellen nicht mischen, in Blockmatrizen unterteilt, für welche man jeweils separat eine Lippmann-Schwinger-Gleichung aufschreiben kann:

$$\begin{aligned} T_{ij}^{(0+)} &= V_{ij}^{(0+)} + V_{in}^{(0+)} G_n^{(0)} T_{nj}^{(0+)}, \\ \tilde{T}_{ij}^{(1\pm)} &= V_{ij}^{(1\pm)} + V_{in}^{(1\pm)} G_n^{(1)} \tilde{T}_{nj}^{(1\pm)}, \end{aligned} \quad (1.18)$$

wobei die  $p$ -Wellen  $T$ -Matrix durch  $T_{ij}^{(1\pm)} = k_i \tilde{T}_{ij}^{(1\pm)} k_j$  gegeben ist.  $k_n = \sqrt{E_n^2 - m_n^2}$  ist der Impuls des Mesons im Meson-Baryon-Schwerpunktsystem. Die obere Indizierung der Form  $L\pm$  gibt den Bahndrehimpuls  $L$  und die Ausrichtung des Baryonspins dazu, also " + " für parallel und " - " für antiparallel, an.  $G_n^{(L)}$  ist der Propagator des Zwischenzustands mit Bahndrehimpuls  $L$ . Wie nehmen hier die übliche nicht-relativistische Reduktion des Meson-Baryon-Propagators (siehe z.B. [Eric 88]). (Diese Form entsteht allerdings unter der Annahme, sowohl das Baryon als auch das Meson seien schwer.) Um das resultierende Integral konvergent zu machen, führen wir einen Dipol- bzw. Quadrupolformfaktor ein. Man stelle sich in diesem Zusammenhang das Baryon als ein ausgedehntes Objekt vor, das es ja auch ist. Die Meson-Baryon-Vertizes müssen dann natürlicherweise durch einen

Formfaktor korrigiert werden. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
G_n^{(0)} &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dl \frac{l^2}{k_n^2 - l^2 + i\epsilon} \left( \frac{\alpha_n^2 + k_n^2}{\alpha_n^2 + l^2} \right)^2 \\
&= \frac{k_n^2}{2\alpha_n} - \frac{\alpha_n}{2} - ik_n, \\
G_n^{(1)} &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dl \frac{l^4}{k_n^2 - l^2 + i\epsilon} \left( \frac{\alpha_n^2 + k_n^2}{\alpha_n^2 + l^2} \right)^4 \\
&= \frac{k_n^2 - \alpha_n^2}{16\alpha_n^3} (\alpha_n^4 + 10\alpha_n^2 k_n^2 + k_n^4) - ik_n^3.
\end{aligned} \tag{1.19}$$

Die Reichweiteparameter  $\alpha_i$  werden an experimentelle Daten angepasst.

Die Potentiale  $V_{ij}^{(L\pm)}$  sind gegeben durch:

$$V_{ij}^{(L\pm)} = \frac{\sqrt{M_i M_j}}{4\pi f^2 \sqrt{s}} C_{ij}^{(L\pm)}. \tag{1.20}$$

Man beachte, daß wir hier den  $p$ -Wellenfaktor  $k_i k_j$  konsistent mit (1.18) herausgezogen haben.  $C_{ij}^{(L\pm)}$  ist die relative Kopplungsstärke, die sich aus der Lagrangedichte (1.11), (1.12) und (1.13) berechnet. Die expliziten Ausdrücke sind in Anhang B.1 aufgeführt.

Bisher wurde über die Kanäle explizit noch nichts gesagt. Das soll jetzt nachgeholt werden. In dieser Arbeit beschränken wir uns auf den Bereich mit Strangeness  $S = 0$ . Eine reine  $s$ -Wellenrechnung, die sowohl  $S = 0$ , wie auch  $S = -1$  behandelt, findet man in der vorangegangenen Arbeit [Kais 97]. Wie schon weiter oben erwähnt, kann man die Lippmann-Schwinger-Gleichung getrennt für verschiedene Gesamtdrehimpuls- und Isospinzustände aufschreiben, da die entsprechenden Matrizen blockdiagonal sind. Entsprechend gibt es in unserem Fall 18 Isospinkanäle, wobei nur maximal vier miteinander durch die Lippmann-Schwinger-Gleichung verknüpft sind, nämlich:

	Partialwelle	Isospin	Kanäle
$L\pm$	$\frac{1}{2}$		$ \pi N\rangle,  \eta N\rangle,  K\Lambda\rangle,  K\Sigma\rangle$
	$\frac{3}{2}$		$ \pi N\rangle,  K\Sigma\rangle$

Diese Kanäle werden in der oben angegebenen Reihenfolge in den jeweiligen Partialwellen von eins bis sechs nummeriert. Die Matrixelemente der physikalischen Kanäle, also die der untersuchten Reaktionen, ergeben sich dann aus:

Reaktionskanal	$T$ -Matrixelemente
$\pi^- p \rightarrow \eta n$	$\frac{\sqrt{6}}{3} T_{12}^{(L\pm)}$
$\pi^- p \rightarrow K^0 \Lambda$	$\frac{\sqrt{6}}{3} T_{13}^{(L\pm)}$
$\pi^- p \rightarrow K^0 \Sigma^0$	$\frac{\sqrt{2}}{3} (T_{56}^{(L\pm)} - T_{14}^{(L\pm)})$
$\pi^- p \rightarrow K^+ \Sigma^-$	$\frac{1}{3} (2T_{14}^{(L\mp)} + T_{56}^{(L\mp)})$
$\pi^+ p \rightarrow K^+ \Sigma^+$	$T_{56}^{(L\mp)}$

Der totale und differenzielle Wirkungsquerschnitt berechnet sich gemäß:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\text{tot}} &= 4\pi \frac{k_{\text{out}}}{k_{\text{in}}} \left\{ |T^{(0+)}|^2 + 2 |T^{(1+)}|^2 + |T^{(1-)}|^2 \right\}, \\
\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{k_{\text{out}}}{k_{\text{in}}} \left\{ |T^{(0+)} + z (2T^{(1+)} + T^{(1-)})|^2 \right. \\
&\quad \left. + (1 - z^2) |T^{(1+)} - T^{(1-)}|^2 \right\}. \quad (1.21)
\end{aligned}$$

Dabei ist  $z = \cos \theta$  der Cosinus des Streuwinkels im Schwerpunktsystem.

### 1.2.2 Meson-Photoproduktion

Wir erweitern nun den oben entwickelten Formalismus auf die Meson-Photoproduktion. Wegen der rein elektromagnetischen Wechselwirkung des Photons und deren kleiner Kopplungsstärke erwarten wir keine Photonen im intermediären Zustand, sondern lediglich eine initiale Photonkopplung mit dann aufiterierten Prozessen der starken Wechselwirkung zwischen Mesonen und Baryonen, wie schon im Abschnitt 1.2.1:

$$\begin{aligned}
E_i^{(0+)} &= [(1 - V \cdot G)^{-1}]_{ij} B_{(E^{(0+)})}^j, \\
E_i^{(1+)} &= k_i [(1 - V \cdot G)^{-1}]_{ij} B_{(E^{(1+)})}^j, \\
M_i^{(1\pm)} &= k_i [(1 - V \cdot G)^{-1}]_{ij} B_{(M^{(1\pm)})}^j. \quad (1.22)
\end{aligned}$$

Wir verwenden dabei die Notation für elektrische ( $E^{(L\pm)}$ ) bzw. magnetische ( $M^{(L\pm)}$ ) Multipole mit dem Bahndrehimpuls  $L$  im Endzustand. Das  $\pm$ -Zeichen hinter dem Bahndrehimpuls gibt die Spinrichtung des Baryons relativ zu diesem an. Man macht sich leicht klar, daß für  $L < 2$  elektrische Multipole nur in der Form  $L+$  vorkommen, da anderenfalls ein Spinflip

nötig wäre. Die Kombination  $0+$  hat andererseits keine magnetischen Anteile. Die Photoproduktionspotentiale  $B^{(E^{(L+)})}$  und  $B^{(M^{(1\pm)})}$  wurden aus den Born-Graphen der Lagrangedichte (1.11), (1.12), (1.13) und (1.14) berechnet. Die expliziten Ausdrücke sind in Anhang B.2 zu finden.

Auch hier geben wir die  $T$ -Matrixelemente der physikalischen Photoproduktionsprozesse ausgedrückt durch die Amplituden in der Isospinbasis an:

Reaktionskanal	$T$ -Matrixelemente	
	elektrisch	magnetisch
$\gamma p \rightarrow \eta p$	$E_2^{(L+)}$	$M_2^{(1\pm)}$
$\gamma p \rightarrow K^+ \Lambda$	$E_3^{(L+)}$	$M_3^{(1\pm)}$
$\gamma p \rightarrow K^+ \Sigma^0$	$\frac{1}{\sqrt{3}} \left( \sqrt{2} E_6^{(L+)} + E_4^{(L+)} \right)$	$\frac{1}{\sqrt{3}} \left( \sqrt{2} M_6^{(1\pm)} + M_4^{(1\pm)} \right)$
$\gamma p \rightarrow K^0 \Sigma^+$	$\frac{1}{\sqrt{3}} \left( \sqrt{2} E_4^{(L+)} - E_6^{(L+)} \right)$	$\frac{1}{\sqrt{3}} \left( \sqrt{2} M_4^{(1\pm)} - M_6^{(1\pm)} \right)$

Um einfachere Ausdrücke für die Observablen zu erhalten, führen wir folgende Abkürzungen ein:

$$\begin{aligned} P_1 &= 3E^{(1+)} + M^{(1+)} - M^{(1-)}, \\ P_2 &= 3E^{(1+)} - M^{(1+)} + M^{(1-)}, \\ P_3 &= 2M^{(1+)} + M^{(1-)}. \end{aligned}$$

Für den totalen und differentiellen Wirkungsquerschnitt ergibt sich damit ( $z = \cos \phi$ ):

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{tot}} &= 4\pi \frac{k_{\text{out}}}{k_{\text{in}}} \left\{ |E^{(0+)}|^2 + \frac{1}{3} (|P_1|^2 + |P_2|^2 + |P_3|^2) \right\}, \\ \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{k_{\text{out}}}{k_{\text{in}}} \left\{ |E^{(0+)} + zP_1|^2 + \frac{1}{2}(1-z^2) (|P_2|^2 + |P_3|^2) \right\}. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Von großem Interesse sind auch Polarisationsobservablen. Diese sind in reinen  $s$ -Wellenrechnungen exakt Null. Hier sollen drei dieser Größen betrachtet werden, nämlich die Rückstoßpolarisation, die Target- und die Photonasy-

metrie (in der Näherung mit  $s$ - und  $p$ -Wellen):

$$\begin{aligned}\Pi_r &= \frac{\sqrt{1-z^2} \operatorname{Im} [(E^{(0+)} + zP_1)(P_2 + P_3)^*]}{|E^{(0+)} + zP_1|^2 + \frac{1}{2}(1-z^2)(|P_2|^2 + |P_3|^2)}, \\ A_t &= \frac{\sqrt{1-z^2} \operatorname{Im} [(E^{(0+)} + zP_1)(P_2 - P_3)^*]}{|E^{(0+)} + zP_1|^2 + \frac{1}{2}(1-z^2)(|P_2|^2 + |P_3|^2)}, \\ \Sigma_\gamma &= \frac{(1-z^2)(|P_3|^2 - |P_2|^2)}{|E^{(0+)} + zP_1|^2 + \frac{1}{2}(1-z^2)(|P_2|^2 + |P_3|^2)}.\end{aligned}$$

$\Pi_r$ , die Rückstoßpolarisation, ist die Asymmetrie, die aufgrund der unterschiedlichen Wahrscheinlichkeit entsteht, daß der Baryonenspin im Endzustand parallel oder antiparallel zur Normalen der Streuebene steht. Die Streuebene wird durch die Impulse des einlaufenden Photons und des auslaufenden Mesons aufgespannt. Experimentell ist die Rückstoßpolarisation bei der Kaon-Photoproduktion durch den schwachen Zerfall von  $\Lambda$ ,  $\Sigma^0$  und  $\Sigma^+$  in  $\pi N$  zugänglich, denn darüber hat man einen direkten Zugang zur Händigkeit des Strangequarks.

$A_t$ , die Targetasymmetrie, mißt man an einem polarisierten Protonentarget. Es ergeben sich verschiedene Wahrscheinlichkeiten für Spinstellungen parallel oder antiparallel zur Normalen der Streuebene.

$\Sigma_\gamma$ , die Photonasymmetrie, mißt man mit Hilfe eines linear polarisierten Photonenstrahls. Je nach Spinstellung, parallel oder antiparallel zur Normalen der Streuebene, ergeben sich auch hier unterschiedliche Wahrscheinlichkeiten.

Hier werden nur einfach polarisierte Observablen betrachtet. Die generische Formel für alle, also auch doppelt polarisierte, Asymmetrien lautet:

$$A = \frac{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\uparrow\uparrow} - \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\uparrow\downarrow}}{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\uparrow\uparrow} + \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\uparrow\downarrow}}.$$

Solche Polarisationsobservablen enthalten besonders detaillierte Information über die Dynamik eines Prozesses. Im Gegensatz zum differentiellen Wirkungsquerschnitt, der hauptsächlich die Interferenz der  $s$ - und  $p$ -Wellen wiedergibt, treten bei den Polarisationsobservablen die Interferenzeffekte zwischen den  $p$ -Wellen deutlicher hervor.

## 1.3 Ergebnisse

### 1.3.1 Rückblick: $s$ -Wellenrechnung

In den Veröffentlichungen [Kais 95] und [Kais 97] wurden die  $s$ -Wellenbeiträge, wie in den vorangegangenen Kapiteln ausgeführt, berechnet. Dabei wurden die beiden Strangnessbereiche  $S = 0$  und  $S = -1$  mit dem gleichen Parametersatz bearbeitet. Wir wollen uns hier, wie in dieser Arbeit insgesamt, auf die Beschreibung des  $S = 0$  Sektors beschränken und nur gelegentlich etwas zu den Ergebnissen bei  $S = -1$  anmerken. Die noch experimentell festzulegenden Parameter für die reine  $s$ -Wellenrechnung sind die vier Reichweiteparameter  $\alpha_{\pi N}$ ,  $\alpha_{\eta N}$ ,  $\alpha_{K\Lambda}$  und  $\alpha_{K\Sigma}$  und die Parameter aus der Lagrangedichte  $\mathring{M}$ ,  $D$ ,  $d_D$ ,  $d_F$ ,  $d_0$  und  $d_1$ . Für die Massen der Mesonen und Baryonen und für die axial-vektorielle Kopplungskonstante  $g_A = F + D$  wurden die bekannten experimentellen Werte benutzt. Die folgenden Werte ergaben sich aus der Anpassung an eine Vielzahl von Streudaten. Man beachte, daß darauf verzichtet wurde, zwei weitere Reichweiteparameter im Kanal mit Isospin  $I = \frac{3}{2}$  einzuführen. Stattdessen werden für beide Isospinzustände die gleichen  $\alpha_i$  verwendet. In der Tabelle 1.1 sind alle

**Tabelle 1.1:** Parameter der  $s$ -Wellenrechnung. Die fettgedruckten Zahlen sind Ergebnisse des multidimensionalen Fits.

[GeV]	$m_\pi$	$m_K$	$m_\eta$	$M_N$	$M_\Lambda$	$M_\Sigma$
	0.13957	0.49365	0.54745	0.93827	1.11563	1.19255
[GeV]	$f$	$\mathring{M}$	$\alpha_{\pi N}$	$\alpha_{\eta N}$	$\alpha_{K\Lambda}$	$\alpha_{K\Sigma}$
	0.0924	<b>1.054</b>	<b>0.522</b>	<b>0.665</b>	<b>1.493</b>	<b>0.892</b>
[1]	$g_A$	$D$	$F$			
	1.267	<b>0.782</b>	0.485			
[GeV <sup>-1</sup> ]	$b_D$	$b_F$	$b_0$			
	0.066	-0.213	-0.3036			
[GeV <sup>-1</sup> ]	$d_D$	$d_F$	$d_0$	$d_1$		
	<b>0.3351</b>	<b>-0.4004</b>	<b>-0.9189</b>	<b>-0.0094</b>		

Parameter zusammengefaßt.

Alle Parameter sind von natürlicher Größe. Auch die Reichweiteparameter sind im sinnvollen Bereich von  $0.3 \text{ GeV}$  bis  $1.2 \text{ GeV}$ . Die Baryonenmasse  $\overset{\circ}{M}$  im chiralen Limes ist im Vergleich zu  $\overset{\circ}{M} = (0.77 \pm 0.11) \text{ GeV}$  [Bora 97] etwas groß. Insgesamt ergibt sich eine gute Beschreibung der untersuchten totalen Wirkungsquerschnitte, bis auf Differenzen bei höheren Energien in einigen Kaon-Produktionsquerschnitten, die auf höhere Partialwellen zurückgeführt werden können. Insbesondere ergibt sich eine erstaunlich gute Übereinstimmung mit den Daten beim Eta-Photoproduktionsquerschnitt. Das ist insofern verwunderlich, da der steile Anstieg dieses Wirkungsquerschnitts gewöhnlich auf die Existenz der Resonanz  $S_{11}(1535)$  zurückgeführt wird. Eine solche Resonanz wurde aber in der hier beschriebenen Methode nicht explizit eingeführt. Es konnte gezeigt werden [Kais 95], daß die Isospin  $I = \frac{1}{2}$  Wechselwirkung des  $K\Sigma$ -Systems stark attraktiv ist. Es ergibt sich also das Bild eines quasigebundenen  $K\Sigma$ -Zwischenzustands mit einer starken Kopplung an den  $\eta N$ -Endzustand. So kann man in diesem Formalismus die Resonanz  $S_{11}(1535)$  dynamisch erzeugen. Es sei noch erwähnt, daß das gleiche Vorgehen zur Ausbildung der Strangeness  $S = -1$  Resonanz  $\Lambda(1405)$  führt, was die Interpretation der  $S_{11}(1535)$  als quasigebundenen Zustand stützt.

### 1.3.2 Ergebnisse der Rechnung mit $p$ -Wellen

Nun kommen wir zu den Ergebnissen der Rechnung, wie sie auch in [Caro 00] veröffentlicht wurden. Die Parameter sind in Tabelle 1.2 zusammengefaßt. Der Parameter  $D$  wurde nicht angepaßt, sondern aus der  $s$ -Wellenrechnung [Kais 97] übernommen. Auch hier sind alle Parameter von natürlicher Größe. Im Laufe der Arbeit untersuchten wir auch die Auswirkungen der  $SU(3)$  Symmetriebrechungseffekte in der pseudoskalaren Zerfallskonstante  $f$ . Dafür erlaubten wir  $f$  für die verschiedenen Mesonen zu variieren:  $f_\pi = 92.4 \text{ MeV}$ ,  $f_K = 113.0 \text{ MeV}$  und  $f_\eta = 92.6 \text{ MeV}$  [PDB 00]. Es zeigte sich, daß die resultierenden Veränderungen immer durch eine Readjustierung der Parameter so absorbiert werden können, daß die Ergebnisse zu denen der Ein-Parameter-Rechnung ununterscheidbar sind. Wir arbeiten deshalb nur mit dem in Ta-

**Tabelle 1.2:** Parameter der  $p$ -Wellenrechnung. Die fettgedruckten Zahlen sind Ergebnisse des multidimensionalen Fits.

[GeV]	$m_\pi$	$m_K$	$m_\eta$	$M_N$	$M_\Lambda$	$M_\Sigma$
	0.13957	0.49365	0.54745	0.93827	1.11563	1.19255
[GeV]	$f$	$\overset{\circ}{M}$	$\alpha_{\pi N}$	$\alpha_{\eta N}$	$\alpha_{K\Lambda}$	$\alpha_{K\Sigma}$
	0.0924	<b>0.869</b>	<b>0.480</b>	<b>0.663</b>	<b>1.362</b>	<b>0.785</b>
[1]	$g_A$	$D$	$F$			
	1.267	0.782	0.485			
[1]	$\kappa_p$	$\kappa_n$	$\kappa_{\Sigma^+}$	$\kappa_{\Sigma^0}$	$\kappa_\Lambda$	$\kappa_{\Lambda\Sigma^0}$
	1.79	-1.91	1.46	0.65	-0.61	1.61
[GeV <sup>-1</sup> ]	$b_D$	$b_F$	$b_0$			
	0.066	-0.213	-0.3036			
[GeV <sup>-1</sup> ]	$d_D$	$d_F$	$d_0$	$d_1$		
	<b>0.512</b>	<b>-0.509</b>	<b>-0.996</b>	<b>0.173</b>		
[GeV <sup>-1</sup> ]	$g_D$	$g_F$	$g_0$	$g_1$		
	<b>0.320</b>	<b>0.026</b>	<b>-1.492</b>	<b>1.452</b>		
[GeV <sup>-1</sup> ]	$h_D$	$h_F$	$h_1$			
	<b>0.778</b>	<b>-0.029</b>	<b>0.130</b>			

belle 1.2 angegebenen Wert von  $f = f_\pi = 92.4 \text{ MeV}$ .

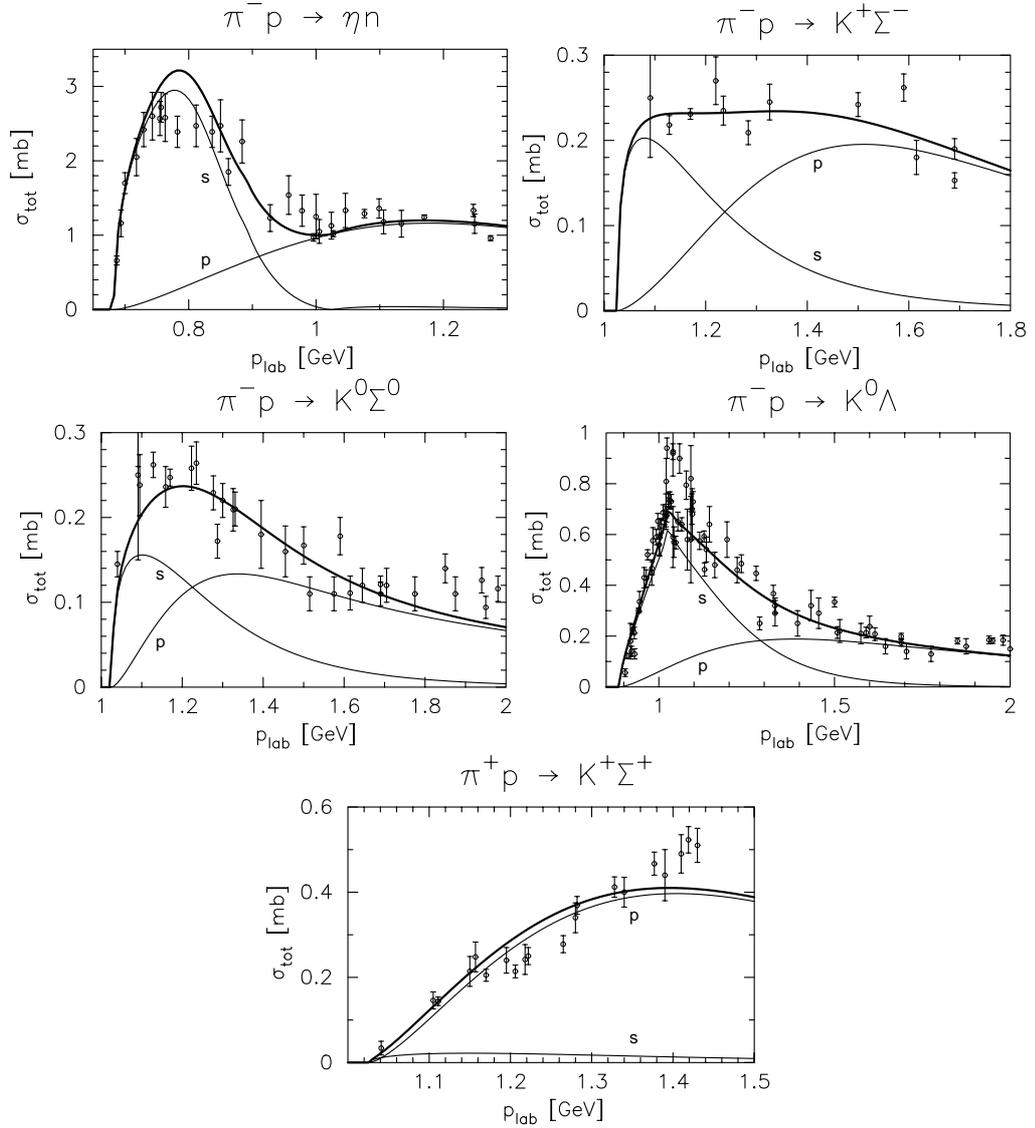
Es wurde den  $p$ -Wellen Reichweiteparametern (siehe Gleichung (1.19)) erlaubt, von denen der  $s$ -Wellen zu differieren. Eine Anpassung aller acht Parameter brachte aber nur eine marginale Verbesserung der Ergebnisse, so daß der Aufwand nicht gerechtfertigt schien. Die durch die  $\alpha_i$  aus Tabelle 1.2 festgelegte Reichweite der Wechselwirkung liegt im Bereich  $3.5 - 10.6 \text{ fm}$ . Es sei noch bemerkt, daß das hier beschriebene Vorgehen nicht geeignet wäre, elastische  $\pi N$ -Streuung in der interessierenden Energieregion ( $\sqrt{s} = 1.07 - 1.5 \text{ GeV}$ ) zu beschreiben. In diesem Reaktionskanal tragen sowohl Partialwellen mit wesentlich höherem Bahndrehimpuls, als auch diverse Nukleonresonanzen bei. Durch explizites Einfügen von Resonanzen könnten wahrscheinlich befriedigende Ergebnisse erzielt werden, allerdings auf Kos-

ten der Parameteranzahl. In dieser Untersuchung entscheiden wir uns deshalb, darauf zu verzichten. Die vernachlässigten Effekte, wie die Beiträge bestimmter Resonanzen oder des  $\pi\pi N$ -Kontinuums, können durchaus die hier betrachteten Prozesse beeinflussen und Ansätze zur Erklärung der Differenzen zu den Daten liefern.

### Totale Wirkungsquerschnitte der Meson-Baryon-Streuung

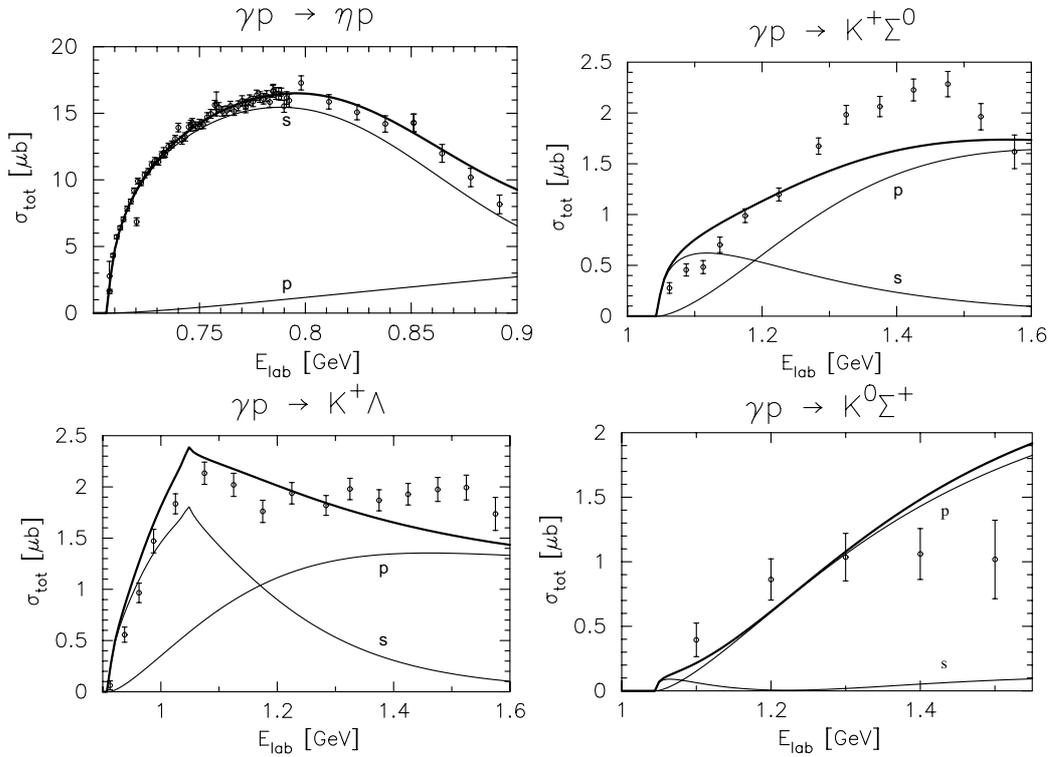
In Abbildung 1.1 sind die Ergebnisse für die totalen Wirkungsquerschnitte der  $\pi$ -induzierten  $\eta$ - und  $K$ -Produktionsprozesse  $\pi^- p \rightarrow \eta n$ ,  $K^+ \Sigma^-$ ,  $K^0 \Sigma^0$ ,  $K^0 \Lambda$  und  $\pi^+ p \rightarrow K^+ \Sigma^+$  dargestellt. Die experimentellen Daten wurden aus [Bald 88] entnommen. Die Übereinstimmung mit den Daten ist durchweg, sogar bei Energien weit oberhalb der jeweiligen Schwelle, sehr gut. Die Beiträge der Partialwellen mit Bahndrehimpuls  $L = 0$  und  $L = 1$  sind separat mit dünneren Linie eingezeichnet.

Der steile Anstieg des  $\pi^- p \rightarrow \eta n$  Wirkungsquerschnitts nahe der Schwelle wird, wie auch in [Kais 97], von den Beiträgen der  $s$ -Welle dominiert. Normalerweise wird dieses Verhalten auf die Nukleonresonanz  $S_{11}(1535)$  zurückgeführt, die zu 30 – 55% [PDB 00] in  $\eta N$  zerfällt. Hier erzeugt die Dynamik der gekoppelten Kanäle einen quasigebundenen  $K\Sigma$ - $K\Lambda$ -Zustand. Im Bereich  $0.9 \text{ GeV} < p_{lab} < 1.3 \text{ GeV}$  übernimmt die  $p$ -Welle die dominante Rolle, während die  $s$ -Welle nahezu verschwindet. Durch Hinzunahme der  $p$ -Wellen ist man nun auch in der Lage, die Prozesse  $\pi^- p \rightarrow K^+ \Sigma^-$ ,  $\pi^- p \rightarrow K^0 \Sigma^0$  und  $\pi^+ p \rightarrow K^+ \Sigma^+$  bis zu Pionimpulsen (im Laborsystem) von  $p_{lab} = 1.8 \text{ GeV}$ ,  $p_{lab} = 1.9 \text{ GeV}$  bzw.  $p_{lab} = 1.4 \text{ GeV}$  zu beschreiben. Bei Ersterem bricht die reine  $s$ -Wellenrechnung bereits bei ca.  $p_{lab} = 1.2 \text{ GeV}$  zusammen. Gleiches gilt für  $\pi^- p \rightarrow K^0 \Sigma^0$ . Bei  $\pi^+ p \rightarrow K^+ \Sigma^+$  ist der  $s$ -Wellenanteil, wie auch in [Kais 97] schon gefunden, sehr klein. Die  $p$ -Wellen dominieren diesen Prozeß, sodaß die  $s$ -Welle schon knapp oberhalb der Schwelle vernachlässigbar klein ist. Das Auffälligste des  $\pi^- p \rightarrow K^0 \Lambda$  Wirkungsquerschnitts ist der ausgeprägte Cusp bei  $p_{lab} = 1.05 \text{ GeV}$  in der  $s$ -Welle, wie er auch schon in [Kais 97] gefunden wurde. Hier öffnet sich der Phasenraum für den  $K\Sigma$ -Kanal und erzeugt die Nicht-Differenzierbarkeit an dieser Stelle. Die experimentellen Daten scheinen diese Erklärung zu stützen, wobei sie, aufgrund der unschar-



**Abbildung 1.1:** Totale Wirkungsquerschnitte der  $\pi$ -induzierten  $\eta$ - und  $K$ -Produktion als Funktion des Pionimpulses im Laborsystem. Die dünnen Linien geben separat die  $s$ - und  $p$ -Wellenbeiträge an. Die experimentellen Daten wurden aus [Bald 88] entnommen.

fen Datenlage gerade in der Spitze des Cusp, eine eindeutige Aussage nicht zulassen.



**Abbildung 1.2:** Totale Wirkungsquerschnitte der  $\eta$ - und  $K$ -Photoproduktion als Funktion der Photonenergie im Laborsystem. Die dünnen Linien geben separat die  $s$ - und  $p$ -Wellenbeiträge an. Die experimentellen Daten wurden aus [Krus 95, Scho 95, Tran 98] und [Goer 99] entnommen.

### Totale Wirkungsquerschnitte der Meson-Photoproduktion

In Abbildung 1.2 zeigen wir die totalen Wirkungsquerschnitte und deren experimentelle Bestimmung der Reaktionen  $\gamma p \rightarrow \eta p$  [Krus 95, Scho 95],  $K^+ \Sigma^0$  [Tran 98],  $K^+ \Lambda$  [Tran 98] und  $K^0 \Sigma^+$  [Goer 99]. Auch hier ist die Übereinstimmung mit den gemessenen Werten über weite Strecken sehr gut. Die  $s$ - und  $p$ -Wellenbeiträge sind wieder mit dünner Linie separat aufgetragen. Besonders gut ist das Ergebnis für den  $\eta$ -Photoproduktionsquerschnitt. Wie auch schon in [Kais 97], ist der steile Anstieg an der Schwelle auf die Produktion eines quasigebundenen  $K\Sigma$ - $K\Lambda$ -Zustands zurückzuführen. Dieser wird durch die Kanalkopplung erzeugt. Es wurde keine explizite Resonanz eingefügt. Die Reaktion  $\gamma p \rightarrow K^+ \Lambda$  zeigt eine deutlichen  $K\Sigma$ -Cusp bei einer

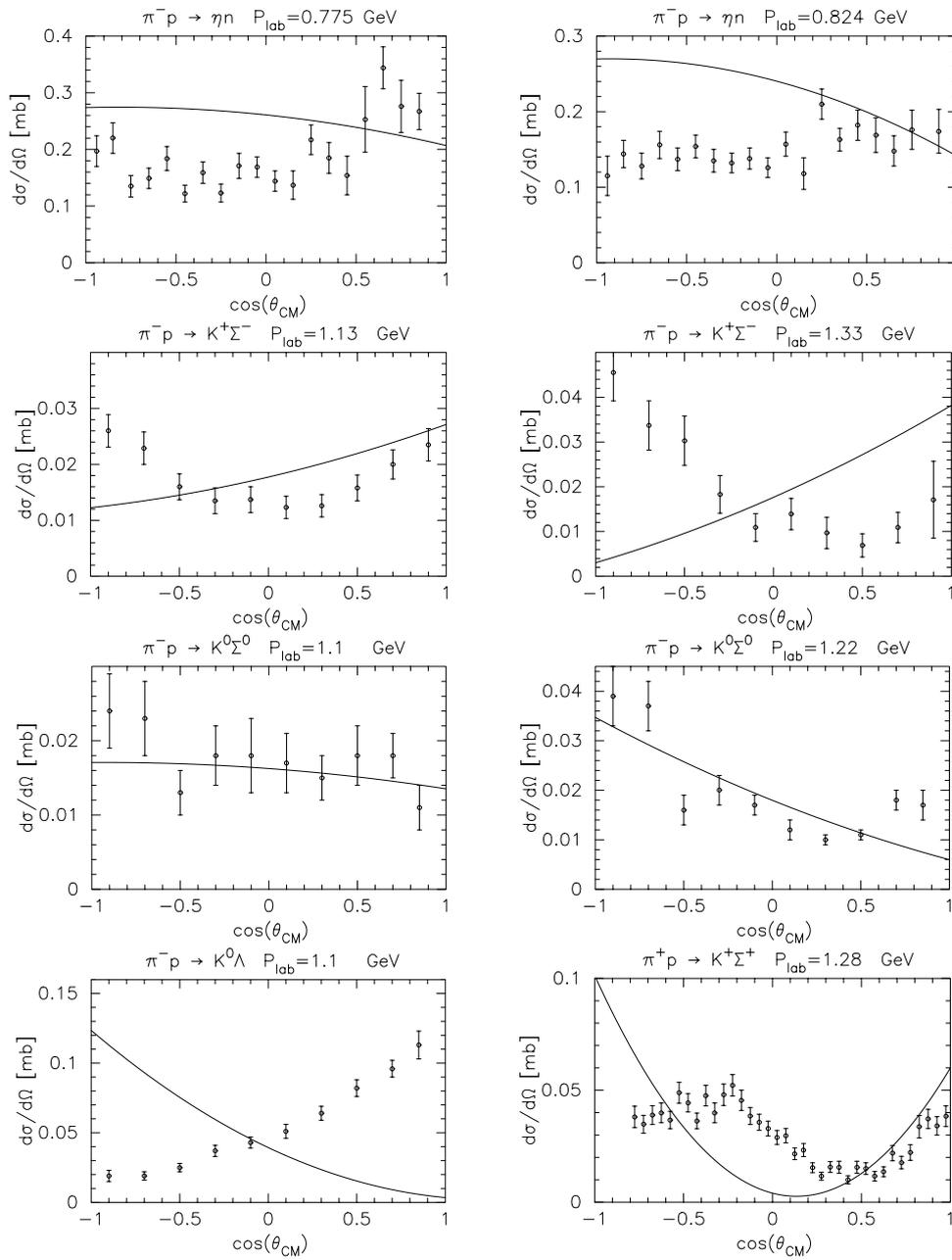
Photonenergie im Laborsystem  $E_{lab} = 1.05 \text{ GeV}$ . Auch hier scheint die Datenlage diese Interpretation zu stützen. Bei Photonenergien  $E_{lab} > 1.2 \text{ GeV}$  dominiert der Beitrag der  $p$ -Wellen. Die  $K\Sigma$ -Produktionsquerschnitte sind nahezu komplett durch  $p$ -Wellen dominiert. Nur nahe der Schwelle macht sich der  $s$ -Wellenbeitrag bemerkbar. Der Wirkungsquerschnitt der Reaktion  $\gamma p \rightarrow K^+\Sigma^0$  wird, wie auch schon in [Kais 97], nahe der Schwelle etwas überschätzt. Die experimentellen Daten zeigen in der Region um  $E_{lab} \approx 1.45 \text{ GeV}$  ( $\sqrt{s} \approx 1.9 \text{ GeV}$ ) eine in dieser Rechnung nicht reproduzierbare Erhöhung. Diese könnte man einer Nukleonresonanz zuschreiben, die an  $K\Sigma$  koppelt. Mit etwas Phantasie kann man auch im  $\gamma p \rightarrow K^+\Lambda$  Wirkungsquerschnitt an dieser Stelle eine Überhöhung feststellen. Unser Ansatz kann diese Beiträge nicht reproduzieren, da auf das Einfügen expliziter Resonanzen verzichtet wurde. Der  $\gamma p \rightarrow K^0\Sigma^+$  Wirkungsquerschnitt kann bis zu einer Photonenergie  $E_{lab} \approx 1.4 \text{ GeV}$  die Daten gut reproduzieren. Oberhalb dieser Schranke werden diese überschätzt. Die  $p$ -Wellen dominieren hierbei auf ganzer Linie und die  $s$ -Wellenbeiträge sind verschwindend gering.

In allen Kaon-Photoproduktionsquerschnitten zeigte es sich außerdem, daß eine Beschreibung der Photoproduktionsquerschnitte ohne die Kopplung des Photons an das anomale magnetische Moment des Baryons ( $\kappa_B = 0$  in Gleichung (1.14)) zu unbefriedigenden Ergebnissen führt. Die anomalen magnetischen Momente geben wichtige Beiträge zu den magnetischen Multipole  $M^{1\pm}$  etwas oberhalb der Schwelle.

Es sei noch auf die Zusammensetzung der Wirkungsquerschnitte aus  $s$ - und  $p$ -Wellen in den Abbildungen 1.1 und 1.2 hingewiesen. In einer Rechnung mit gekoppelten Kanälen beeinflusst jede Änderung einer Reaktion jeden anderen Kanal, sodaß die Entstehung eines solchen Musters nicht trivial ist.

### Differenzielle Wirkungsquerschnitte der Meson-Baryon-Streuung

In Abbildung 1.3 zeigen wir eine Auswahl typischer differenzieller Wirkungsquerschnitte und deren Messungen der Reaktionen  $\pi^-p \rightarrow \eta n$  [Brow 79],  $K^+\Sigma^-$  [Bake 78a],  $K^0\Sigma^0$  [Bake 78b],  $K^0\Lambda$  [Brow 79] und  $\pi^+p \rightarrow K^+\Sigma^+$  [Cand 83]. Die Übereinstimmung ist nicht derart gut wie für die totalen Wirkungsquerschnitte. Dennoch lassen sich schon mit dieser einfachen Ent-



**Abbildung 1.3:** Auswahl differenzieller Wirkungsquerschnitte der  $\pi$ -induzierten  $\eta$ - und  $K$ -Produktion als Funktion des Cosinus des Streuwinkels im Schwerpunktsystem. Die experimentellen Daten wurden aus [Good 69, Bake 78a, Bake 78b, Brow 79] und [Cand 83] entnommen.

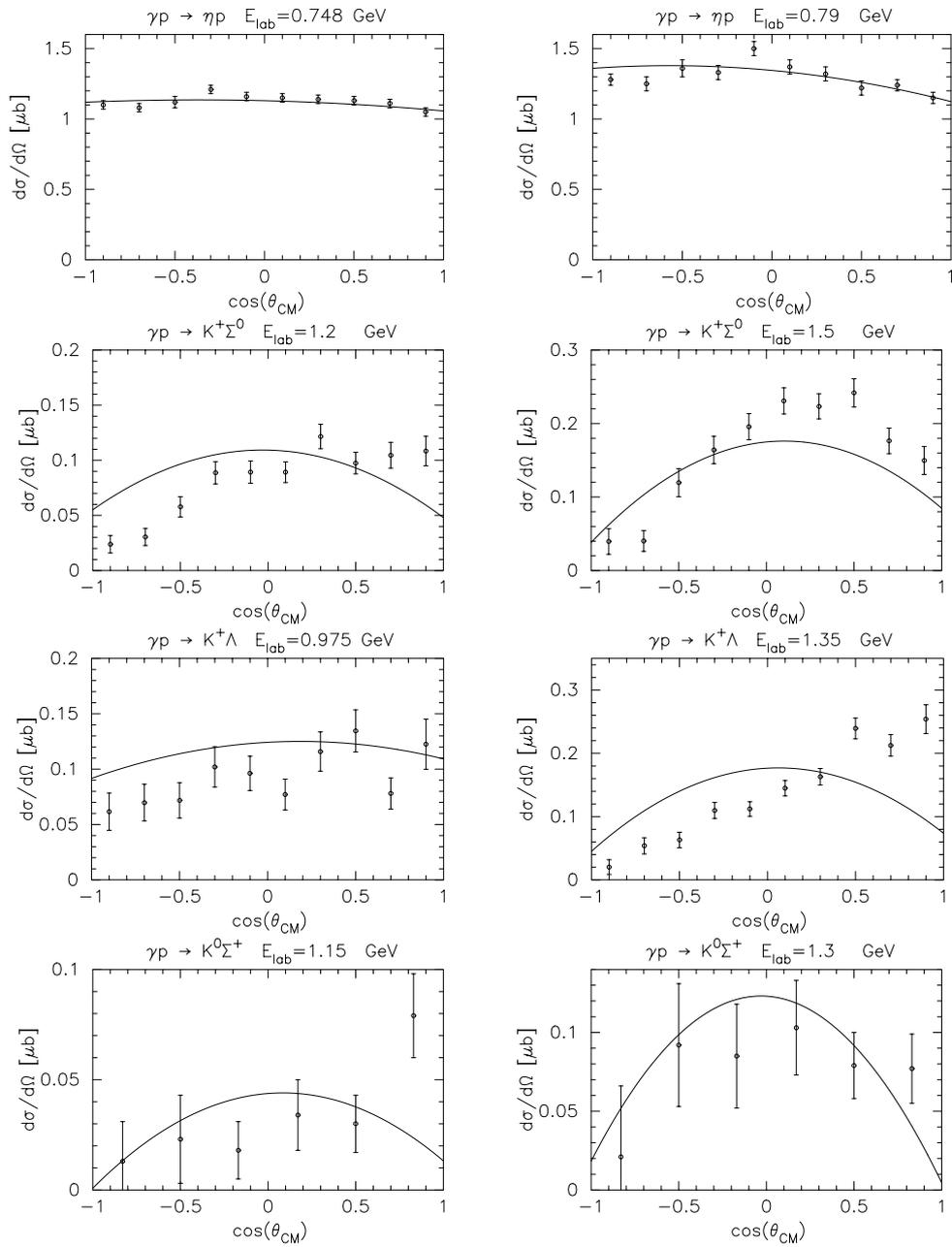
wicklung bis  $\cos^2 \theta$  einige Daten, insbesondere bei niedrigen Energien, gut beschreiben.

Die Reaktion  $\pi^- p \rightarrow \eta n$  wird insgesamt und insbesondere in Vorwärtsrichtung recht gut reproduziert. Allerdings gibt es Abweichungen vom isotropen Verhalten, was auf zu große  $p$ -Wellen hindeutet. Bei  $\pi^- p \rightarrow K^+ \Sigma^-$  findet man eine gute Beschreibung der Daten bei niedrigen Energien. Geht man zu höheren Energien, entwickelt sich die Winkelabhängigkeit genau Gegenteilig zu den Daten. Das bedeutet, daß die Partialwellen die richtige Stärke haben, der Interferenzterm jedoch das falsche Vorzeichen. Das gleiche Verhalten findet man bei  $\pi^- p \rightarrow K^0 \Lambda$ . Vielleicht würde hier das Einfügen der Nukleonresonanz  $S_{11}(1650)$ , die an  $K \Lambda$  (und möglicherweise  $K \Sigma$ ) koppelt, die Lage verbessern. Ein einfaches Hinzufügen zu den Amplituden der Rechnung mit gekoppelten Kanälen brachte jedoch wenig Erfolg, da durch den Fit die  $s$ -Wellenbeiträge aller anderen Kanäle zu stark beeinflußt wurden. Die Reaktion  $\pi^- p \rightarrow K^0 \Sigma^0$  wird im Rahmen der  $p$ -Wellennäherung durchweg gut beschrieben. Der differentielle Wirkungsquerschnitt der Reaktion  $\pi^+ p \rightarrow K^+ \Sigma^+$  weist Strukturen auf, die höhere Partialwellen enthalten. Dennoch wird dieser tendenziell richtig beschrieben.

### Differenzielle Wirkungsquerschnitte der Meson-Photoproduktion

In Abbildung 1.4 zeigen wir eine Auswahl typischer differentieller Wirkungsquerschnitte und deren Messungen der Reaktionen  $\gamma p \rightarrow \eta p$  [Krus 95],  $K^+ \Sigma^0$  [Tran 98],  $K^+ \Lambda$  [Tran 98] und  $K^0 \Sigma^+$  [Goer 99]. Die Übereinstimmung mit den Daten ist hier besser als bei der Meson-Baryon-Streuung.

Für die Reaktion  $\gamma p \rightarrow \eta p$  zeigt das Experiment eine nahezu isotrope Verteilung, die in unserer Rechnung sehr gut reproduziert wird. Die kleinen Abweichungen bei höheren Energien können durch den Interferenzterm einer dominanten  $s$ -Welle mit den kleinen  $p$ -Wellen erklärt werden. Allerdings ist zu beachten, daß ein solcher Effekt auch durch höhere Partialwellen (z.B.  $d$ -Wellen) erzeugt werden könnte, sodaß nicht mit Sicherheit gesagt werden kann, daß die  $p$ -Wellen in diesem Kanal überhaupt beitragen müssen. In den Reaktionen  $\gamma p \rightarrow K^+ \Sigma^0$ ,  $K^+ \Lambda$  und  $K^0 \Sigma^+$  finden wir eine gute Übereinstimmung der Rechnung mit den Messungen bis zu Energien von  $E_\gamma \approx 1.7 \text{ GeV}$ ,



**Abbildung 1.4:** Auswahl differentieller Wirkungsquerschnitte der  $\eta$ - und  $K$ -Photoproduktion als Funktion des Cosinus des Streuwinkels im Schwerpunktsystem. Die experimentellen Daten wurden aus [Krus 95, Tran 98] und [Goer 99] entnommen.

1.4 GeV und 1.4 GeV respektive. Bei höheren Energien scheint das quadratische Verhalten  $\cos^2 \theta$ , insbesondere bei  $\gamma p \rightarrow K^+ \Lambda$ , etwas zu stark ausgeprägt.

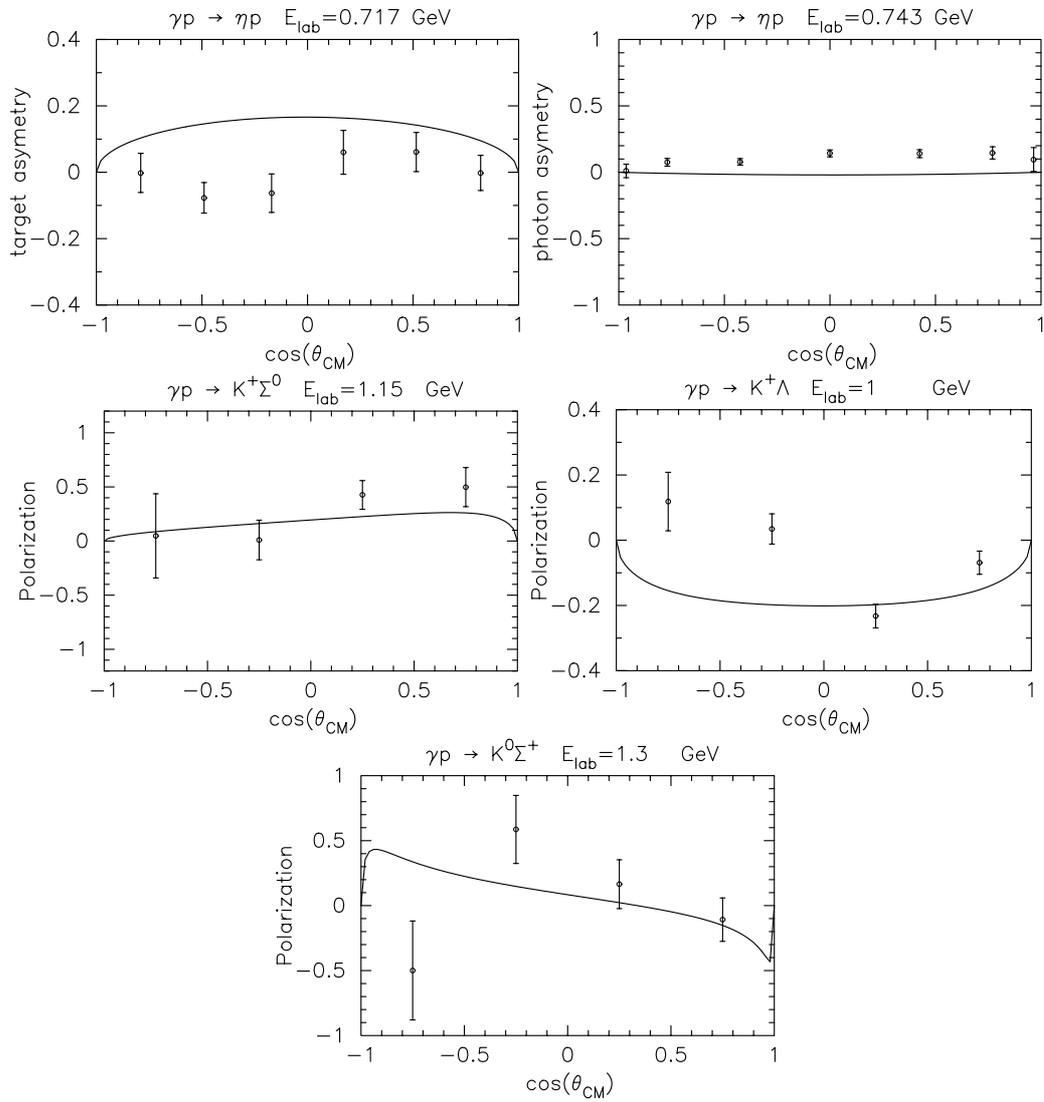
Zusammenfassend finden wir deutlich bessere Winkelverteilungen in der Photoproduktion als bei den  $\pi$ -induzierten Prozessen.

### Polarisationsobservablen der Meson-Photoproduktion

In Abbildung 1.5 sind charakteristische Beispiele der Targetasymmetrie  $A_t$  [Bock 98] und der Photoasymmetrie  $\Sigma_\gamma$  [Ajak 98] der Reaktion  $\gamma p \rightarrow \eta p$  und der Rückstoßpolarisation der Reaktionen  $\gamma p \rightarrow K^+ \Sigma^0$ ,  $K^+ \Lambda$  und  $K^0 \Sigma^+$  [Tran 98, Goer 99] aufgetragen.

Die berechnete Targetasymmetrie der Reaktion  $\gamma p \rightarrow \eta p$  hat positives Vorzeichen und wächst mit zunehmender Photonenergie. Im Gegensatz dazu oszillieren die gemessenen Daten um die Nulllinie. Inklusive der Fehlerbalken ist  $A_t^{(ex)} < 0.2$ . Bei der Photoasymmetrie ergibt sich ein gegenteiliges Bild. Während die Rechnung kleine negative Werte ergibt, sind die experimentellen Werte positiv und wachsen mit der Energie. Prinzipiell sollten diese Messungen mit einer  $s$ - und  $p$ -Wellenrechnung zugänglich sein. Die vorliegende Rechnung scheint aber falsche Real- und Imaginärteile der drei  $p$ -Wellenamplituden  $E_{1+}$  und  $M_{1\pm}$  zu ergeben, wobei das Ergebnis für deren Beträge zufriedenstellend ist. Die Rückstoßpolarisation des Prozesses  $\gamma p \rightarrow K^+ \Sigma^0$  wird von der Rechnung einigermaßen reproduziert, wohingegen die Oszillationen in den Reaktionen  $\gamma p \rightarrow K^+ \Lambda$  und  $K^0 \Sigma^+$  nicht erklärt werden können. Allerdings sind hier auch die experimentellen Fehler groß.

Die Polarisationsobservablen sind, wie schon erwähnt, sehr sensitiv auf das Interferenzmuster der Multipolamplituden. Offensichtlich können diese mit Hilfe unseres Ansatzes nicht zufriedenstellend beschrieben werden. Dieser verwendet die große Menge empirischer Daten als Beschränkung für die zu fixierenden Parameter. Die Diskrepanzen deuten auf die Wichtigkeit anderer dynamischer Effekte, die hier keine Berücksichtigung fanden. Nach unserem Kenntnisstand gibt es, auch fast zwei Jahre nach dem Abschluß dieser Untersuchung, kein Modell mit einer vernünftig kleinen Zahl von Parametern, welches die hier in Betracht gezogene Datenmenge vollständig und in allen



**Abbildung 1.5:** Repräsentative Auftragungen der untersuchten Polarisationsobservablen der  $\eta$ - und  $K$ -Photoproduktion als Funktion des Cosinus des Streuwinkels im Schwerpunktsystem. Die experimentellen Daten wurden aus [Tran 98, Bock 98, Ajak 98] und [Goer 99] entnommen.

Details beschreiben kann.

### 1.3.3 Diskussion der Resonanz $S_{11}(1535)$

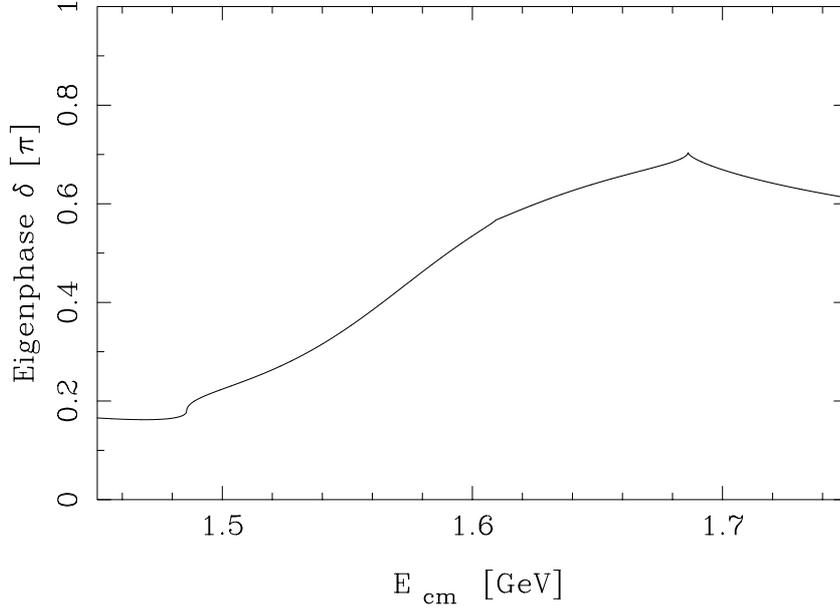
Bevor wir zusammenfassen, soll noch auf den Status der Resonanz  $S_{11}(1535)$  eingegangen werden.

Die totalen Wirkungsquerschnitte der Reaktionen  $\pi^- p \rightarrow \eta n$  und  $\gamma p \rightarrow \eta p$  weisen, wie schon weiter oben herausgestellt, nahe der Schwelle eine Struktur auf, die mit Hilfe der Parametrisierung durch eine Breit-Wigner-Form als Resonanz erklärt werden kann. Laut [PDB 00] liegen Position und Breite in folgenden Bereichen:  $M = 1520 - 1555 \text{ MeV}$  und  $\Gamma = 100 - 250 \text{ MeV}$ . Als beste Werte werden angegeben  $M \approx 1535 \text{ MeV}$  und  $\Gamma \approx 150 \text{ MeV}$ . Die Nähe der  $\eta N$ -Schwelle ( $M_N + m_\eta = 1486 \text{ MeV}$ ) bedingt allerdings einige besondere Eigenschaften. So ist die partielle  $\eta N$ -Zerfallsbreite dieser Resonanz stark energieabhängig. Die resultierende Breit-Wigner-Kurve zeigt deshalb kein typisches Resonanzmaximum.

Es ist anzumerken, daß die Resonanz  $S_{11}(1535)$  in originären Quarkmodellen nicht auftaucht. Auch in phänomenologischen Dispersionsanalysen mit Hilfe von sogenannten Speed-Plots [Höhl 92] zeigt sich keine Resonanz bei  $\sqrt{s} = 1535 \text{ MeV}$ , sondern lediglich ein dominanter  $\eta N$ -Cusp und die nahe gelegene Resonanz  $S_{11}(1650)$ , welche auch stark in  $\eta N$  zerfällt. In einer Rechnung innerhalb eines generalisierten Lee-Modells [Dens 98] wurde gezeigt, daß die Daten der  $\eta$ -Photoproduktion gleich gut reproduzierbar sind, egal ob man mit oder ohne Resonanzen arbeitet. Anstelle einer Resonanz findet man im zweiten Fall nur den signifikanten Beitrag des  $\eta N$ -Cusps.

Im Rahmen der hier präsentierten Untersuchung finden wir, daß die Kanäle  $K\Sigma \leftrightarrow K\Sigma$ ,  $K\Sigma \leftrightarrow K\Lambda$  und  $K\Lambda \leftrightarrow K\Lambda$  stark attraktiv sind. Es ist also möglich, einen quasi-gebundenen, resonanzartigen Zustand mit den Eigenschaften der  $S_{11}(1535)$  zu erzeugen.

In Abbildung 1.6 ist die erste Eigenphase  $\delta$  der Isospin- $\frac{1}{2}$ -S-Matrix gegen die Schwerpunktsenergie des Mesons aufgetragen. Deutlich erkennt man das resonanzartige Verhalten. Wir finden aus dem  $\frac{\pi}{2}$ -Phasendurchgang für die Masse  $M = 1590 \text{ MeV}$  und aus der Steigung für die Breite  $\Gamma = 160 \text{ MeV}$ . Diese Werte weichen nur geringfügig von den Werten der  $s$ -Wellenrechnung [Kais 95, Kais 97] ab und stimmen recht gut mit den experimentellen Werten [PDB 00] überein. Allerdings durchläuft die Phase nicht den gesamten Win-



**Abbildung 1.6:** Eigenphase der  $S$ -Matrix aufgetragen gegen die Energie des Mesons im Schwerpunktsystem. Neben dem nicht vollständigen resonanzartigen Verhalten mit einem  $\frac{\pi}{2}$ -Durchgang bei  $1.59 \text{ GeV}$ , sind auch die Cusp-Effekte der sich öffnenden Kanäle bei etwa  $1.49 \text{ GeV}$  ( $\eta N$ ),  $1.61 \text{ GeV}$  ( $K\Lambda$ ) und  $1.69 \text{ GeV}$  ( $K\Sigma$ ) deutlich zu sehen.

kelbereich von  $\delta = 0$  bis  $\delta = \pi$ . Oberhalb des  $K\Sigma$  Cusps bei  $E_{cm} \approx 1.69 \text{ GeV}$  fällt die Eigenphase zu höheren Energien wieder ab. Unterhalb der  $\eta N$  Schwelle steigt die Phase (hier nur die  $\pi N$  Phase) zu niedrigeren Energien wieder steil an und kommt erst nach überschreiten von  $\delta = \pi$  wieder zurück zu Null.

Anders als bei Strangeness  $S = -1$  [Kais 95], wo die Resonanz  $\Lambda(1405)$  vollständig durch die Dynamik der gekoppelten Kanäle erzeugt werden kann, ist für die  $S_{11}(1535)$  kein absolut eindeutiges Resonanzsignal auszumachen. Andererseits können die experimentellen Daten durch den quasi-gebundenen  $K\Sigma$ - $K\Lambda$ -Zustand ohne explizites Einführen einer Resonanz sehr gut beschrieben werden. Die Natur der  $S_{11}(1535)$  ist damit aber weiterhin nicht vollständig erklärt.

### 1.3.4 Zusammenfassung

Mit dieser Arbeit wurde der in [Kais 95] und [Kais 97] vorgestellte Ansatz, chirale  $SU(3)$  Störungstheorie mit gekoppelten Kanälen, um die  $p$ -Wellenbeiträge erweitert. Eine Vielzahl von Daten für die Pion- und Photon-induzierte Eta- und Kaon-Produktion an Protonen sollte damit beschrieben werden. Die aus den führenden Termen der Meson-Baryon-Lagrangedichte bis zweiter chiraler Ordnung (siehe Gleichungen (1.11), (1.12), (1.13) und (1.14)) gewonnenen  $s$ - und  $p$ -Wellenpotentiale wurden mit Hilfe einer separablen Lippmann-Schwinger-Gleichung (siehe Gleichungen (1.17) und (1.22)) miteinander verknüpft. Alle Zwischenzustände werden dadurch bis in alle Ordnungen aufiteriert. In die Rechnung gehen 16 nicht im Voraus festgelegte Parameter ein, die in einem multidimensionalen Fit an die vielen Daten der Streuexperimente angepasst wurden (siehe Tabelle 1.2). Die restlichen Parameter wurden zuvor mit physikalischen Größen identifiziert oder unterlagen sonstigen Beschränkungen.

Es sei darauf hingewiesen, daß zur Beschreibung der Photoproduktionsprozesse keine zusätzlichen freien Parameter notwendig waren. Die anomalen magnetischen Momente der Baryonen wurden durch ihre empirischen Werte oder durch das Ergebnis einer Rechnung festgelegt. Gerade diese Beiträge liefern dann die nötige Stärke der  $M^{(1\pm)}$ -Multipole und sind damit Voraussetzung für eine zufriedenstellende Beschreibung der  $K$ -Photoproduktionsdaten. Die elastische  $\pi N$ -Streuung kann mit diesem Modell nicht beschrieben werden, da in dieser Reaktion explizite Nukleonresonanzen (in erster Linie  $\Delta(1232)$ ) und das  $\pi\pi N$  Kontinuum eine wichtige Rolle spielen.

Insgesamt ergibt sich eine sehr gute Übereinstimmung mit den totalen Wirkungsquerschnitten der betrachteten Prozesse. Es stellte sich heraus, daß die  $p$ -Wellen eine wichtige Rolle in den  $K$ -Produktionskanälen spielen. Die Differenzen, die sich in der reinen  $s$ -Wellenrechnung noch ergaben, konnten mit Hilfe der  $p$ -Wellen geschlossen werden. Es ergibt sich ein nicht triviales  $s$ - und  $p$ -Wellenmuster. Unsere Ergebnisse zur Resonanz  $S_{11}(1535)$  stützen die Interpretation dieser Resonanz als quasigebundener  $K\Sigma$ - $K\Lambda$ -Zustand. Die differentiellen Wirkungsquerschnitte wurden, außer in einzelnen Kanälen bei höheren Energien, gut reproduziert. Lediglich in den Polarisationsobserva-

ben ergab sich kein zufriedenstellendes Bild. Das Interferenzmuster der Partialwellen wird in dieser Rechnung nicht in allen Details reproduziert. Als mögliche Ursachen kommen nicht explizit eingeführte Resonanzen oder weitere Kanäle in Frage. Als nächster Schritt bietet sich die Implementierung des  $\eta'$  als neuntes pseudoskalares Meson an. Darauf und auf die damit zu lösenden Komplikationen kommen wir in den nächsten Kapiteln zu sprechen.



# Kapitel 2

## Axiale $U(1)$ Dynamik

In diesem Kapitel wird der in den Kapiteln 1.1 und 1.2 vorgestellte Formalismus durch die Einführung des  $\eta'$ -Mesons erweitert [DiVe 80]. Ein weiteres Feld, das Pseudoskalarfeld  $Q$ , parametrisiert die Nicht-Erhaltung des axialen Vektorstroms im Flavour-Singlett-Sektor und ist damit ein Maß für die gluonischen Beiträge zum  $\eta$  und  $\eta'$ .

Eine solche Analyse wird aufgrund der großen  $\eta'$ -Masse vor neue konzeptionelle Probleme gestellt. Die Ergebnisse liefern Anhaltspunkte für die Wahl der in der Theorie neu eingeführten Parameter. Zusätzlich werden durch Variation der Parameter, der Konstanten  $f_s$  und des Massenparameters  $a$ , respektive des Mischungswinkels  $\vartheta$ , Tendenzen, die sich durch die Struktur des Ansatzes ergeben, aufgezeigt, welche auf Beiträge des Feldes  $Q$  in den betrachteten Photoproduktionsprozessen hindeuten. In diesem Stadium haben die Aussagen noch eher qualitativen Charakter. Sie deuten aber auf die Bedeutung und Rolle der Gluodynamik in den Flavour-Singlett-Kanälen hin. Die Ergebnisse wurden in [Bass 01] veröffentlicht.

### 2.1 Grundlagen der Rechnung

#### 2.1.1 Lagrangedichte im Mesonensektor

Wir wollen nun die im Kapitel 1.1.1 konstruierte Lagrangedichte, wie schon in [DiVe 80] ausgeführt, um das Singlett-Meson  $\eta_0$  erweitern. Dazu fügen wir

dem Feld  $U(\phi)$ , Gleichung (1.3), eine Phase, nämlich das Feld  $\eta_0$ , an:

$$U(\phi, \eta_0) = \exp \left\{ \frac{i\phi}{f} + i\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\eta_0}{f_s} \right\}. \quad (2.1)$$

Dabei muß allerdings in  $\phi$  das physikalische Feld  $\eta$  durch  $\eta_8$ , die Oktettkomponente von  $\eta$  und  $\eta'$ , ersetzt werden. Das  $\eta_0$  koppelt über die Zerfallskonstante  $f_s$  an den Axialvektorstrom. Man kann nun analog zum  $SU(3)$ -Sektor vorgehen und definiert die Felder wie in Gleichung (1.5). Mit der Redefinition der Matrix  $K \in U(3)$  wie in Gleichung (1.6) transformieren die Felder  $\chi_+, \chi_-, u_\mu, f_{\mu\nu}^\pm \in U(3)$  wie  $X \rightarrow KXK^\dagger$ . Die effektive Lagrangedichte läßt sich nun einfach bis zur zweiten Ordnung aufschreiben, wobei das Abzähl-schema wie in Gleichung (1.7) erhalten bleibt:

$$\mathcal{L}_\phi^{(2)} = \frac{f^2}{4} (\langle u_\mu u^\mu \rangle + \langle \chi_+ \rangle + b \langle u_\mu \rangle \langle u^\mu \rangle). \quad (2.2)$$

Die neu eingeführte Konstante  $b$  kann man durch geeignete Normierung der kinetischen Energie des Singletts festlegen. Dadurch ergibt sich:

$$b = \frac{f^2 - f_s^2}{3f^2}. \quad (2.3)$$

Mit dieser Konstruktion kann man sich aber nicht begnügen, denn die Auswirkungen der axialen Anomalie sind noch nicht in die Theorie inkorporiert. Insbesondere ist das  $\eta_0$  immer noch ein Goldstoneboson. In der QCD macht sich die axiale Anomalie durch die Nichterhaltung des Singlett-Axialvektorstroms bemerkbar. Die Divergenz dieses Stroms lautet:

$$\partial_\mu A_{(0)}^\mu = 2i\bar{q}m\gamma_5 q + N_f \frac{g^2}{16\pi^2} \text{tr}_c(G_{\mu\nu} \tilde{G}^{\mu\nu}).$$

Dabei ist  $\tilde{G}_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} G^{\alpha\beta}$  und  $\text{tr}_c$  bezeichnet die Spur im Farbraum. Der erste Summand ist zu den Quarkmassen proportional, verschwindet also im chiralen Limes. Das gilt jedoch nicht für den zweiten Teil. Um dieses Verhalten in der effektiven Theorie zu simulieren, definieren wir das pseudoskalare Feld  $Q(x)$ , das der topologischen Ladungsdichte  $\frac{g^2}{16\pi^2} \text{tr}_c(G_{\mu\nu} \tilde{G}^{\mu\nu})$  entsprechen soll. In der chiralen Zählweise ist dieser Term von der Ordnung  $\mathcal{O}(1)$ . (Wir werden

weiter unten zum Eliminieren einiger Terme auf  $N_c^{-1}$ -Argumente zurückgreifen.) Die effektive Lagrangedichte transformiert korrekt (bezüglich QCD) unter axialen  $U(1)$ -Transformationen, wenn man den Term

$$\frac{i}{2}Q\langle\ln U - \ln U^\dagger\rangle$$

hinzufügt. Man beachte, daß  $\langle\ln U - \ln U^\dagger\rangle$  nur die Phase der  $U(3)$ -Matrix  $U$  enthält. Bei axialen  $U(1)$ -Transformationen fügt dieser Term der Lagrangedichte den Term  $-2N_f\alpha Q$  hinzu, wobei  $N_f$  die Anzahl der Flavourefreiheitsgrade und  $\alpha$  der Winkel der axialen  $U(1)$ -Rotation ist. Dieses Verhalten ist dem der QCD-Lagrangedichte analog, da  $Q$  die topologische Ladungsdichte repräsentiert.

Als zweiter Term, der den paritätsverletzenden Teil der QCD Lagrangedichte nachbildet, muß  $-\Theta Q$  mitgenommen werden. Das "Matching" der Konstanten zur QCD erzwingt hier den Vakuumwinkel  $\Theta$  als Koeffizienten. Desweiteren kommen die Terme proportional zu  $\langle\chi_-\rangle$ , multipliziert mit einer ungeraden Potenz des Feldes  $Q$ , hinzu. An alle anderen Terme der Lagrangedichte (2.2) können gerade Potenzen von  $Q$  multipliziert werden. Außerdem tauchen noch Ableitungen von  $Q$  auf. Damit ist die effektive Lagrangedichte bis zu Termen quadratisch in  $Q$  in zweiter chiraler Ordnung gegeben durch:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\phi^{(0+2)} &= \frac{f^2}{4} (\langle u_\mu u^\mu \rangle + \langle \chi_+ \rangle - b \langle u_\mu \rangle \langle u^\mu \rangle) \\ &+ Q \left( \frac{i}{2} \langle \ln U - \ln U^\dagger \rangle - \Theta + iv_1 \langle \chi_- \rangle \right) \\ &+ Q^2 \left( \frac{1}{af_s^2} - v_2 \langle u_\mu u^\mu \rangle - v_3 \langle \chi_+ \rangle - v_4 \langle u_\mu \rangle \langle u^\mu \rangle \right) \\ &+ v_5 \langle u_\mu \rangle \partial^\mu Q + v_6 \partial_\mu Q \partial^\mu Q.\end{aligned}\quad (2.4)$$

Das Feld  $Q$  kann unter Verwendung seiner Bewegungsgleichung aus der Lagrangedichte eliminiert werden. Man erhält in niedrigster Ordnung:

$$Q = -\frac{iaf_s^2}{4} (\langle \ln U - \ln U^\dagger \rangle + 2i\Theta) = \frac{af_s^2}{2} \left( \frac{\sqrt{6}}{f_s} \eta_0 + \Theta \right) \equiv \frac{af_s^2}{2} \bar{\psi}. \quad (2.5)$$

Der Parameter  $a$  nimmt, ähnlich dem  $B_0$  bei der chiralen Symmetriebrechung, die Stellung eines Ordnungsparameters der axialen  $U(1)$ -Symmetriebrechung ein. Im Wesentlichen ist  $a$  das Quadrat der Masse des  $\eta_0$  im chiralen

Limes, wie man noch sehen wird.

Aus Gleichung (2.5) wird klar, daß das Feld  $Q$  im Wesentlichen das Singlettfeld beinhaltet. Wir wollen das überprüfen und leiten die Lagrangedichte (2.4) nach dem Vakuumwinkel  $\Theta$  ab. So erhalten wir das Äquivalent der topologischen Ladungsdichte in der effektiven Theorie. Es ergibt sich:

$$-\frac{g^2}{16\pi^2}\text{tr}_c(G_{\mu\nu}\tilde{G}^{\mu\nu}) \rightarrow -Q + \frac{af_s^2}{2}iv_1\langle\chi_-\rangle - af_s^2Q(v_2\langle u_\mu u^\mu\rangle + v_3\langle\chi_+\rangle + v_4\langle u_\mu\rangle\langle u^\mu\rangle). \quad (2.6)$$

Die topologische Ladungsdichte scheint repräsentiert durch eine unendliche Reihe von Mesonfeldern ungerader Potenzen, mit mindestens einem  $\eta_0$ . Unter Berücksichtigung nur der Terme niedrigster Ordnung, erhalten wir allerdings  $Q$ . Die Konstruktion ist also konsistent.

Es sei an dieser Stelle noch einmal auf die Stellung des Parameters  $a$  hingewiesen. In Gleichung (2.6) ist  $a$  gut als Ordnungsparameter zu erkennen, wobei man beachten muß, daß mit Gleichung (2.5)  $Q$  von der Ordnung  $a$  ist. Interessant ist hierbei die Stellung des  $\langle\chi_-\rangle$ -Terms. Obwohl von höherer chiraler Ordnung, trägt er doch linear im Ordnungsparameter  $a$  zur topologischen Ladungsdichte bei.

Durch das Einsetzen von (2.5) in Gleichung (2.4) erhält man die endgültige Lagrangedichte. Dadurch erhält das  $\eta_0$  im Gegensatz zu den Goldstonebosonen eine Masse sogar im chiralen Limes:

$$-\frac{af_s^2}{4}\bar{\psi}^2 = -\frac{3a}{2}\eta_0^2 + \dots$$

Jetzt sieht man auch, daß die Konstanten  $b$ ,  $v_5$  und  $v_6$  durch die Normierung des kinetischen Terms des Singlettfeldes zusammenhängen:

$$(1 - 3b)f^2 = (1 + 2av_5)f_s^2 - 3a^2v_6f_s^4.$$

Der Einfachheit halber arbeiten die meisten Autoren nur mit den Termen niedrigster Ordnung, in denen  $Q$  auftritt, also  $v_i = 0$ , und bei  $\Theta = 0$ . Damit erhalten wir die Lagrangedichte:

$$\mathcal{L}_\phi^{(0+2)} = \frac{f^2}{4}(\langle u_\mu u^\mu\rangle + \langle\chi_+\rangle - b\langle u_\mu\rangle\langle u^\mu\rangle) - \frac{3a}{2}\eta_0^2.$$

Dieses Vorgehen ist dadurch motiviert, daß  $Q \propto N_c^{-1}$  im Limes unendlich vieler Farbfreiheitsgrade  $N_c \rightarrow \infty$  verschwindet. In diesem Grenzfall verschwindet die axiale Anomalie komplett aus der QCD. Man führt also eine weitere kleine Größe  $N_c^{-1}$  ein und entwickelt die effektive Lagrangedichte danach. Wir nehmen nur die niedrigsten Terme der  $N_c^{-1}$ -Entwicklung proportional zu  $Q$  mit. Damit fallen die Terme proportional zu  $v_2, v_3, v_4$  und  $v_5$  weg, da sie höherer Ordnung sind (Siehe dazu auch [Mano 98]).  $N_c^{-1}$ -Argumente sind allerdings in diesem Zusammenhang problematisch. Zwar verschwinden die axiale Anomalie und damit  $m_{\eta'}$  im Limes  $N_c \rightarrow \infty$ , dennoch ist die physikalische Masse des  $\eta'$  etwa von der Größe der Nukleonmasse, also groß. Außerdem ist  $N_c = 3$  und damit nicht groß. Das Vorgehen ist demnach phänomenologisch nicht zu motivieren. Dennoch entscheiden wir uns für dieses Vorgehen zur Vereinfachung der Lagrangedichte, da ein weiteres Abzählmuster notwendig ist, um nicht unendlich viele Terme mit beliebig hohen Potenzen des Feldes  $Q$ , beziehungsweise Ableitungen von  $Q$ , berücksichtigen zu müssen.

Der letzte Term entfällt, da  $Q$  keinen kinetischen Term haben soll. Man betrachte  $Q$  als Ableitung eines Stroms  $K_\mu$ , des Chern-Simons-Stroms, und entsprechend  $Q^2$  als kinetischen Term desselben. Man entfernt mit diesem Vorgehen die Konstante, die den Unterschied des kinetischen Terms fürs  $\eta_0$  zum Ankopplungsterm des externen axialvektoriellen Feldes ausmacht.

Der Term  $iv_1 Q \langle \chi_- \rangle$  müßte bei korrektem  $N_c^{-1}$ -Zählschema beibehalten werden, da er gleicher Ordnung wie  $\frac{f^2}{4} b \langle u_\mu \rangle \langle u^\mu \rangle$  ist. Wir lassen ihn aber mit Verweis auf das Adler-Bardeen-Theorem [Adle 69] weg. Dieses Theorem sagt aus, daß die Nicht-Erhaltung des axialen Stroms im chiralen Limes in QCD-Störungstheorie schon vollständig durch die Beiträge der Dreiecksdiagramme gegeben ist. Das heißt, der Beitrag niedrigster Ordnung ist auch der einzige. Überträgt man das in die erweiterte  $\chi$ PT, so entfällt der Term  $iv_1 Q \langle \chi_- \rangle$ , da nur die niedrigste Ordnung der chiralen Entwicklung zur topologischen Ladungsdichte  $Q$  beitragen kann (vergleiche Gleichungen (2.5) und (2.6)). Im Nachhinein wurde allerdings klar, daß wegen der Verschiedenheit der beiden Störungsreihen ein Übertragen des Theorems in dieser Weise nicht möglich ist. Terme verschiedenster Ordnung in QCD tragen nämlich bereits zur niedrigsten Ordnung der  $\chi$ PT bei. Wir bleiben zunächst trotzdem bei der damals

gewählten Vorgehensweise.

### Diskussion der Massen und Zerfallskonstanten

Wir wollen kurz auf die Ergebnisse im Mesonsektor zu sprechen kommen. Dafür muß die Mischung der Zustände  $\eta_8$  und  $\eta_0$  in ihre physikalischen Partner  $\eta$  und  $\eta'$  berücksichtigt werden. Bis zu der uns interessierenden Ordnung genügt es hier, mit der gängigen Mischung der Zustände über einen Mischungswinkel zu arbeiten:

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_8 \\ \eta_0 \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Mit einem konsequenteren Abzählmuster wäre diese einfache Parametrisierung nicht sinnvoll, wie in [Beis 01] gezeigt wird. Diese Aspekte werden noch in Kapitel 3.4 zu diskutieren sein.

Zuerst sollen die Massen der Mesonen in niedrigster Ordnung aufgeschrieben werden ( $m_u = m_d = \hat{m}$ ):

$$\begin{aligned} \dot{m}_\pi^2 &= 2B_0 \hat{m}, \\ \dot{m}_K^2 &= B_0(\hat{m} + m_s), \\ \dot{m}_8^2 &= \frac{2}{3}B_0(\hat{m} + 2m_s) = \frac{1}{3}(4\dot{m}_K^2 - \dot{m}_\pi^2), \\ \dot{m}_0^2 &= \frac{2}{3}B_0(2\hat{m} + m_s) \left(\frac{f}{f_s}\right)^2 + 3a = \frac{1}{3}(2\dot{m}_K^2 + \dot{m}_\pi^2) \left(\frac{f}{f_s}\right)^2 + 3a, \\ \dot{m}_{08}^2 &= \frac{\sqrt{2}}{3}B_0(\hat{m} - m_s) \frac{f}{f_s} = -\frac{\sqrt{2}}{3}(\dot{m}_K^2 - \dot{m}_\pi^2) \frac{f}{f_s}, \\ \dot{m}_\eta^2 &= \cos^2 \vartheta \dot{m}_8^2 + \sin^2 \vartheta \dot{m}_0^2 - \sin(2\vartheta) \dot{m}_{08}^2, \\ \dot{m}_{\eta'}^2 &= \sin^2 \vartheta \dot{m}_8^2 + \cos^2 \vartheta \dot{m}_0^2 + \sin(2\vartheta) \dot{m}_{08}^2. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Neben diesen Termen bestimmt die erforderliche Diagonalform der Massennatrix den  $\eta$ - $\eta'$ -Mischterm zu Null:

$$\dot{m}_{\eta\eta'}^2 = 0 = \sin(2\vartheta) \vartheta (\dot{m}_8^2 - \dot{m}_0^2) + 2 \cos(2\vartheta) \dot{m}_{08}^2.$$

Der Mischungswinkel  $\vartheta$  ist in dieser Ordnung durch die Parameter  $B_0$ ,  $\frac{f}{f_s}$ ,  $a$  und die Quarkmassen vollständig bestimmt. Verhielte sich das  $\eta_0$  wie ein

Goldstone-Boson, d.h.  $a = 0$  und  $f_s = f$ , dann wäre  $\tan(2\vartheta) = \sqrt{2}$ , also  $\vartheta \approx 27^\circ$ . Für  $a \rightarrow 0$  gehen wir mit den Massen der geladenen Pionen und Kaonen von  $\dot{m}_8 < \dot{m}_0$  zu  $\dot{m}_8 > \dot{m}_0$ , überqueren also  $|\vartheta| = \frac{\pi}{4}$ . Aufgrund der Singularität im  $\tan 2\vartheta$  an dieser Stelle wechselt der Winkel hier das Vorzeichen. Für  $\vartheta = -20^\circ$  [PDB 00], dem hier verwendeten Winkel, und  $f_s = f$  ergibt sich  $a \approx 0.13 \text{ GeV}^2$ . Betrachtet man  $a$  als Quadrat einer Masse  $\tilde{m}^2 = 3a$ , die die Verschiebung des Massenquadrats des  $\eta_0$  durch die axiale Anomalie beschreibt, so ergibt sich mit diesen Zahlen  $\tilde{m} \approx 0.63 \text{ GeV}$ . Für  $\vartheta = -13^\circ$  [Bram 99] erhält man  $a \approx 0.19 \text{ GeV}^2$  bzw.  $\tilde{m} \approx 0.76 \text{ GeV}$ .

Diagonalisiert man die Massenmatrix (siehe Gleichung (2.8)) ohne einen Mischungswinkel zu verwenden, so erhält man für die Massen von  $\eta$  und  $\eta'$ :

$$\dot{m}_{\eta/\eta'}^2 = \dot{m}_K^2 + \frac{3}{2}a \mp \frac{1}{2}\sqrt{(2\dot{m}_K^2 - 2\dot{m}_\pi^2 - a)^2 + 8a^2} \quad (2.9)$$

und damit

$$\dot{m}_\eta^2 + \dot{m}_{\eta'}^2 = 2\dot{m}_K^2 + 3a.$$

Setzt man die physikalischen Werte  $m_K$ ,  $m_\eta$  und  $m_{\eta'}$  ein, erhält man  $a = 0.24 \text{ GeV}^2$  bzw.  $\tilde{m} = 0.85 \text{ GeV}$ . Äquivalent dazu ist ein Mischungswinkel  $\vartheta \approx -10^\circ$ .

Man beachte, daß  $\dot{m}_\eta$  im chiralen Limes verschwindet,  $\eta$  also ein Goldstone-Boson ist. Es gilt dann  $\eta = \eta_8$  und  $\eta' = \eta_0$ .

Die Zerfallskonstanten  $f_P^{(a)}$  der pseudoskalaren Mesonen  $P = \pi, K, \eta, \eta'$  sind definiert als

$$\langle 0 | A_\mu^{(a)} | P \rangle = \left\langle 0 \left| \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta a_\mu^{(a)}} \right| P \right\rangle \equiv i p_\mu f_P^{(a)}. \quad (2.10)$$

$A_\mu$  ist der Axialvektorstrom und  $a_\mu$  das externe axialvektorielle Feld (siehe Lagrangedichte Gleichung (1.1)). Hier erhält man:

$$\begin{aligned} f_\pi &= f_K = f, \\ f_\eta^{(8)} &= f \cos \vartheta, & f_\eta^{(0)} &= -\sqrt{6} f_s \sin \vartheta, \\ f_{\eta'}^{(8)} &= f \sin \vartheta, & f_{\eta'}^{(0)} &= \sqrt{6} f_s \cos \vartheta, \end{aligned}$$

wobei wir Gleichung (2.3) verwendet haben. Mit der üblichen Reparametrisierung

$$f_\eta^{(8)} = f_8 \cos \vartheta_8, \quad f_\eta^{(0)} = -f_0 \sin \vartheta_0,$$

$$f_{\eta'}^{(8)} = f_8 \sin \vartheta_8, \quad f_{\eta'}^{(0)} = f_0 \cos \vartheta_0 \quad (2.11)$$

erhalten wir die erwarteten Ausdrücke

$$f_8 = f, \quad f_0 = \sqrt{6}f_s$$

für die Zerfallskonstanten des Singletts bzw. Oktetts.

### 2.1.2 Lagrangedichte mit Baryonen

Nun soll der im letzten Kapitel entwickelte Formalismus um das Baryonoktett erweitert werden. Durch die Redefinition der Felder  $U, \chi_+, \chi_-, u_\mu, f_{\mu\nu}^\pm$  ist, bis zur ersten Ordnung, die Lagrangedichte durch Gleichung (1.11) gegeben, jedoch mit einer Erweiterung:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\phi B}^{(1)} = & \langle \bar{B}(i \not{D} - \mathring{M})B \rangle - \frac{D}{2} \langle \bar{B} \gamma_\mu \gamma_5 \{u^\mu, B\} \rangle - \frac{F}{2} \langle \bar{B} \gamma_\mu \gamma_5 [u^\mu, B] \rangle \\ & - \frac{K}{3} \langle \bar{B} \gamma_\mu \gamma_5 B \rangle \langle u^\mu \rangle. \end{aligned}$$

Genauso wie im Mesonsektor ist der Beitrag der axialen Anomalie damit noch nicht inkorporiert. Deshalb greifen wir auf das Feld  $Q$  zurück. Die damit zusätzlich in Betracht kommenden Terme, mit bis zu zwei Feldern  $Q$ , lauten:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}_{\phi B}^{(0+1)} = & Q i w_1 \langle \bar{B} \gamma_5 B \rangle - \frac{\mathcal{G}_{QNN}}{2\mathring{M}} \langle \bar{B} \gamma_\mu \gamma_5 B \rangle \partial^\mu Q \\ & + Q^2 \left( w_2 \langle \bar{B} i \not{D} B \rangle + \frac{\mathcal{C}}{f_s^4} \langle \bar{B} B \rangle + w_3 \langle \bar{B} \gamma_\mu \gamma_5 \{u^\mu, B\} \rangle \right. \\ & \left. + w_4 \langle \bar{B} \gamma_\mu \gamma_5 [u^\mu, B] \rangle + w_5 \langle \bar{B} \gamma_\mu \gamma_5 B \rangle \langle u^\mu \rangle \right). \quad (2.12) \end{aligned}$$

Die schweren Baryonfreiheitsgrade sollten für die Bewegungsgleichung des Feldes  $Q$  keine große Rolle spielen. Diese Beiträge führen lediglich auf Kontaktvertices mit vier Baryonen, was für unsere Betrachtungen nicht relevant ist. Wir setzen daher die Näherung (2.5) in die Lagrangedichte (2.12) ein.

Wir entscheiden uns, nur mit Termen niedrigster Ordnung, die  $Q$  enthalten, in (2.12) zu arbeiten, d.h.  $w_i = 0$ . Es sei angemerkt, daß der Term proportional zu  $w_2$  durch Redefinition der Konstanten  $\mathcal{C}$  immer der nächst höheren Ordnung zugeordnet werden kann. Eine  $N_c^{-1}$ -Argumentation entfernt dann

alle diese Terme, außer den  $w_1$ -Term. Dieser verbleibt, ist aber in der Näherung schwerer Baryonen ohnehin Null. Wir lassen ihn deshalb weg.

Wir wissen, daß  $N_c^{-1}$ -Argumente insbesondere in der Theorie mit Baryonen sehr problematisch sind. Wie in [Jenk 98] dargestellt, tragen für große  $N_c$  auch Baryonen höheren Spins bei. Insbesondere müßte auch das Spin- $\frac{3}{2}$ -Dekuplett berücksichtigt werden. Uns ist bewußt, daß die resultierende Lagrangedichte eine dementsprechend erweiterte Form haben müßte. Dennoch entscheiden wir uns für den oben beschriebenen Weg. Er stellt für uns eine erste und einfache Näherung dar. Damit erhalten wir für  $\Theta = 0$  die Lagrangedichte:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\phi B}^{(0+1)} = & \langle \bar{B}(i \not{D} - \not{M})B \rangle - \frac{D}{2} \langle \bar{B} \gamma_\mu \gamma_5 \{u^\mu, B\} \rangle - \frac{F}{2} \langle \bar{B} \gamma_\mu \gamma_5 [u^\mu, B] \rangle \\ & - \frac{K}{3} \langle \bar{B} \gamma_\mu \gamma_5 B \rangle \langle u^\mu \rangle \\ & - \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\mathcal{G}_{QNN} a f_s}{2M} \langle \bar{B} \gamma_\mu \gamma_5 B \rangle \partial^\mu \eta_0 + \frac{3\mathcal{C}a^2}{2f_s^2} \langle \bar{B} B \rangle \eta_0^2. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Man beachte, daß  $a$  kein Parameter der Meson-Baryon-Lagrangedichte ist und jederzeit durch Redefinition in die Parameter  $\mathcal{G}_{QNN}$  und  $\mathcal{C}$  absorbiert werden könnte. Wir behalten ihn formal dennoch bei, um den Einfluß der axialen Anomalie direkt untersuchen zu können.  $a$  ist nämlich, wie schon in Abschnitt 2.1.1 erläutert, ein Maß der axialen  $U(1)$ -Symmetriebrechung, ähnlich der Größe  $B_0$  für die chirale Symmetrie. Auch  $f_s$  ist kein originärer Parameter der Lagrangedichte mit Baryonen und könnte in  $\mathcal{G}_{QNN}$  und  $\mathcal{C}$  absorbiert werden.

Da wir, wie schon in der  $s$ -Wellenrechnung im  $SU(3)$ -Sektor, bis einschließlich Ordnung  $q^2$  rechnen wollen, müssen wir weitere Terme mit einbeziehen. Wir werden aber, auch aus  $N_c^{-1}$ -Gründen, weiterhin nur die schon genannten niedrigsten Terme mit  $Q$  berücksichtigen. Damit ergibt sich für  $s$ -Wellenprozesse folgende Lagrangedichte in zweiter chiraler Ordnung mit schweren Baryonen (siehe (1.12)):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\phi B}^{(2-s)} = & b_D \langle \bar{B} \{ \chi_+, B \} \rangle + b_F \langle \bar{B} [ \chi_+, B ] \rangle + b_0 \langle \bar{B} B \rangle \langle \chi_+ \rangle \\ & + 2d_D \langle \bar{B} \{ (v_\mu u^\mu)^2, B \} \rangle + 2d_F \langle \bar{B} [ (v_\mu u^\mu)^2, B ] \rangle \\ & + 2d_0 \langle \bar{B} B \rangle \langle (v_\mu u^\mu)^2 \rangle + 2d_1 \langle \bar{B} (v_\mu u^\mu) \rangle \langle (v_\mu u^\mu) B \rangle \\ & + 2d_K \langle \bar{B} B \rangle (v_\mu \langle u^\mu \rangle)^2. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Der einzige neue Term ist der proportional zu  $d_K$ . Es ist direkt ersichtlich, daß dieser in  $SU(3)$  nicht auftauchen kann.

Die Variablen  $b_D$  und  $b_F$  werden wie in Kapitel 1.1.2 an die Massendifferenzen der Baryonen angepasst.  $\mathring{M}$  und  $b_0$  sind auch hier durch Gleichung (1.15) verknüpft. Außerdem ist  $D + F = \mathring{g}_A$ . Es verbleiben damit die Parameter  $\mathring{M}$ ,  $D$ ,  $d_D$ ,  $d_F$ ,  $d_0$  und  $d_1$ , sowie die neuen Parameter  $f_s$ ,  $K$ ,  $\mathcal{G}_{QNN}$ ,  $\mathcal{C}$  und  $d_K$ .  $a$  wird nicht als Parameter betrachtet, nimmt aber zur Untersuchung der Auswirkungen der axialen Anomalie eine Sonderstellung ein. Die Parameter  $K$  und  $\mathcal{G}_{QNN}$  tauchen in unserer Rechnung nur in der Kombination

$$\tilde{K} \equiv K + \mathcal{G}_{QNN} f_s^2 \frac{3a}{4\mathring{M}}$$

auf. Wir wählen also  $\tilde{K}$  als Parameter. Somit müssten die verbleibenden neun Parameter an experimentelle Daten angepasst werden. Wir werden uns aber für ein anderes, später zu erläuterndes Vorgehen entscheiden.

### 2.1.3 Gekoppelte Kanäle

Die Methode der gekoppelten Kanäle, die schon im Kapitel 1 erfolgreich angewendet wurde, soll hier um den  $|\eta'N\rangle$ -Kanal erweitert werden. Das ist einfach möglich, da für  $s$ -Wellen nur die Isospin  $I = \frac{1}{2}$  Matrix um einen Rang zu erhöhen ist. Die entsprechenden Kanäle lauten dann:

Isospin	Kanäle
$\frac{1}{2}$	$ \eta'N\rangle,  \pi N\rangle,  \eta N\rangle,  K\Lambda\rangle,  K\Sigma\rangle$
$\frac{3}{2}$	$ \pi N\rangle,  K\Sigma\rangle$

Dabei laufen die Indizes der Potentiale und Amplituden durch die obigen Kanäle in der angegebenen Reihenfolge von null bis sechs. Ansonsten gelten auch hier die Gleichungen für die Potentiale (Gleichung (1.20)), die Propagation (Gleichung (1.19)), die Lippmann-Schwinger-Gleichung (Gleichung (1.17) und (1.22)) und die Wirkungsquerschnitte (Gleichung (1.21) und (1.23)). Als Propagator  $G_{\eta'}^{(0)}$  des  $\eta'$  wurde die gleiche Konstruktion wie für die acht leichten Mesonen gewählt. Das kann, wegen der großen Masse dieses Teilchen, das Abzählchema zerstören, sodaß sich, ähnlich dem Problem bei schweren Baryonen, die chirale Expansion und die Schleifenentwicklung nicht mehr entsprechen. Eine Lösung dieses Problems war uns zur Zeit

dieses Projekts noch nicht bekannt, weswegen wir diesen Weg wählen. Die Bearbeitung eben dieses Themas verschieben wir auf Kapitel 3.

## 2.2 Ergebnisse zur Photoproduktion von $\eta$ - und $\eta'$ -Mesonen

Wir wollen nun die Ergebnisse der eben beschriebenen Rechnung erörtern. Die zu erwartenden Resultate sind, aufgrund der getroffenen Annahmen und Näherungen, qualitativen Charakters. Für eine quantitative Untersuchung wäre es notwendig, die Probleme aus dem Weg zu räumen, die sich aus der hohen Masse des  $\eta'$  ergeben. Zum Einen wurden die Potentiale (Anhang B) für  $E_\phi \ll \overset{\circ}{M}$  hergeleitet. Das ist für  $\eta$  eine gute Näherung, nicht aber für  $\eta'$ . Desweiteren ist die Masse des  $\eta'$  nahe an der Gültigkeitsschwelle der effektiven Theorie,  $\Lambda \sim 4\pi f \approx 1.2 \text{ GeV}$ . Im Bewußtsein dessen werden wir die neuen Parameter mit Hilfe systematischer Überlegungen festlegen, um sie später variieren zu können.

Wir legen den neuen Reichweiteparameter  $\alpha_{\eta N} = 1.5 \text{ GeV}$  fest. Die Variation im Bereich  $1.0 - 2.0 \text{ GeV}$  zeigte, daß die Ergebnisse der Untersuchung nicht stark von  $\alpha_{\eta N}$  abhängen. Für  $f_s$  wählen wir den Wert der pseudoskalaren Zerfallskonstanten  $f$  des Oktetts. Wir werden  $f_s$  später davon abweichen lassen. Die Parameter  $\mathcal{C}$  und  $d_K$  wurden Null gesetzt, um ihren Einfluß später in einem sinnvollen Bereich zu testen. Für  $d_K$  ist dieser Bereich nicht von vornherein eingeschränkt. Es wird sich aber zeigen, daß sich sinnvolle Ergebnisse nur nahe  $d_K = 0$  ergeben. Der Parameter  $\mathcal{C}$  läßt sich dahingegen über den Beitrag eines niederenergetischen Kontaktterms für die Reaktion  $pp \rightarrow pp\eta'$  [Bass 99b]

$$-\frac{\sqrt{6}a^2}{4mf_s} \mathcal{G}_{QNN} \mathcal{C} \eta_0 \partial_\mu \langle \bar{B} \gamma^\mu \gamma_5 B \rangle \langle \bar{B} B \rangle$$

abschätzen [Mosk 00]. Man erhält  $|\mathcal{C}| \approx 2 \text{ GeV}^{-3}$ . Wir nehmen im Weiteren an, daß  $\mathcal{C}$  im Bereich  $-4$  bis  $+4 \text{ GeV}^{-3}$  liegt. Es sei darauf aufmerksam gemacht, daß  $\mathcal{C}$  Prozesse mit harten, also energiereichen, Gluonen beschreibt. Damit verletzen solche Prozesse die OZI-Regel.  $\mathcal{C}$  beschreibt damit das Maß der Verletzung dieser Regel bei niedrigen Energien.

Für die Abschätzung des letzten neuen Parameters  $\tilde{K}$  betrachten wir die Kopplungsstärke  $g_{\eta_0 NN}$  des  $\eta_0$  ans Nukleon. In unserem Formalismus findet man:

$$g_{\eta_0 NN} = \sqrt{\frac{8}{3}} \frac{\overset{\circ}{M}}{f_s} (D + \tilde{K}).$$

Die Flavour-Singlett Goldberger-Treiman-Relation verknüpft diese Größe mit  $g_A^{(0)}$ , der Stärke der axial-vektoriellen Kopplung des Flavour-Singletts an die Baryonen. In unserer Notation ergibt sich:

$$g_A^{(0)} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{f_s}{\overset{\circ}{M}} \left( g_{\eta_0 NN} - \sqrt{\frac{3}{2}} a f_s \mathcal{G}_{QNN} \right).$$

$g_A^{(0)}$  wurde aus Daten polarisierter tief-inelastischer Streuung [Bass 99a] zu  $g_A^{(0)} \Big|_{pDIS} = 0.2 - 0.35$  bestimmt. Dieses Ergebnis ist in guter Übereinstimmung mit Rechnungen auf dem Gitter [Vieh 99]. In [Clos 93] wurde  $g_A^{(0)} \Big|_{OZI} \approx 0.6$  im OZI-Limes, das heißt ohne gluonische Beiträge, bestimmt. Wir interpretieren die Differenz der beiden Ergebnisse als den "gluonischen" Beitrag  $\mathcal{G}_{QNN}$ . Damit ergibt sich  $\tilde{K} \approx -0.5$ . Für die Bestimmung des in dieser Rechnung redundanten Parameters  $\mathcal{G}_{QNN}$  benötigen wir neben  $\tilde{K}$  und  $f_s = f$  noch den Massenparameter  $a$ . Dieser ist eng mit dem Mischungswinkel  $\vartheta$  verknüpft (siehe Kapitel 2.1.1). Wir benutzen einen Mischungswinkel von  $\vartheta = -20^\circ$  und entsprechend  $a = 0.13 \text{ GeV}^2$ . Daraus ergibt sich  $\mathcal{G}_{QNN} = (143 \pm 39) \text{ GeV}^{-3}$  und damit  $K \approx -0.64$ .

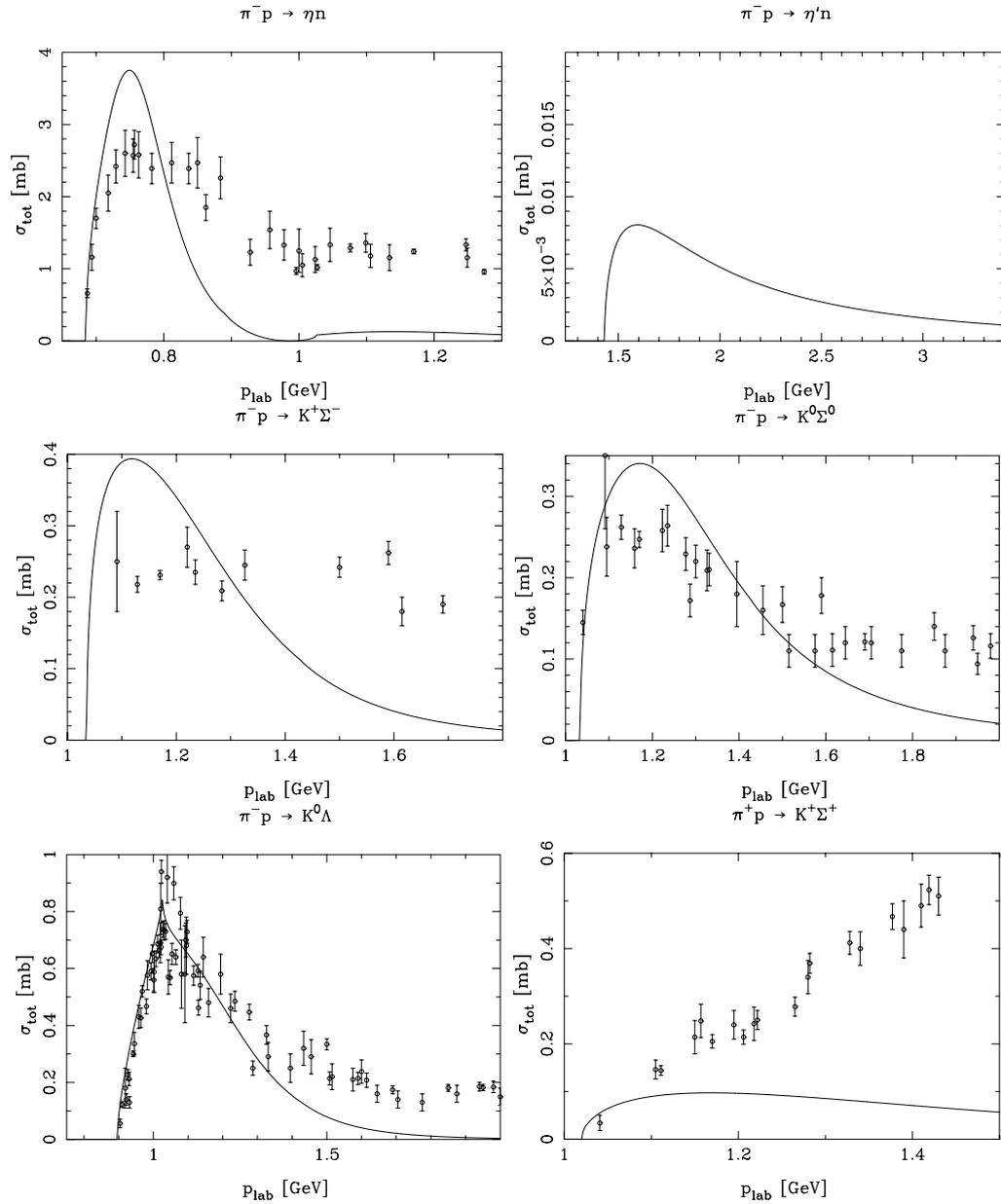
Um die experimentell bestimmten totalen Wirkungsquerschnitte (siehe auch Kapitel 1.3) reproduzieren und gleichzeitig eine Voraussage für den Wirkungsquerschnitt der Reaktion  $\gamma p \rightarrow \eta' p$  treffen zu können, werden die restlichen Parameter, wie im Kapitel 1.3, an die Daten angepaßt. Die sich damit ergebenden Parameter sind in Tabelle 2.1 zusammengefaßt. Sie werden als Ausgangspunkt für die weitere Betrachtung genutzt.

In den Abbildungen 2.1 und 2.2 zeigen wir die in die Anpassung einbezogenen Wirkungsquerschnitte, sowie die Ergebnisse der Rechnung mit gekoppelten Kanälen. Wie wir sehen, sind die Wirkungsquerschnitte mithilfe der s-Wellen, wie in [Kais 97], gut reproduziert. Die auftretenden Differenzen lassen sich durch höhere Partialwellen (siehe Kapitel 1) erklären. Die  $\eta$ -Produktionsquerschnitte weisen nahe der Schwelle den gleichen starken Anstieg auf, der auch schon in Kapitel 1.3 diskutiert wurde. Dieser deutet auf die

**Tabelle 2.1:** Ausgangswerte der Parameter der Rechnung mit gekoppelten Kanälen unter Hinzunahme des  $\eta'$ . Die fettgedruckten Zahlen sind Ergebnisse der Anpassung an die Daten. Wir geben die für die Reproduzierbarkeit der numerischen Ergebnisse notwendigen Nachkommastellen an.

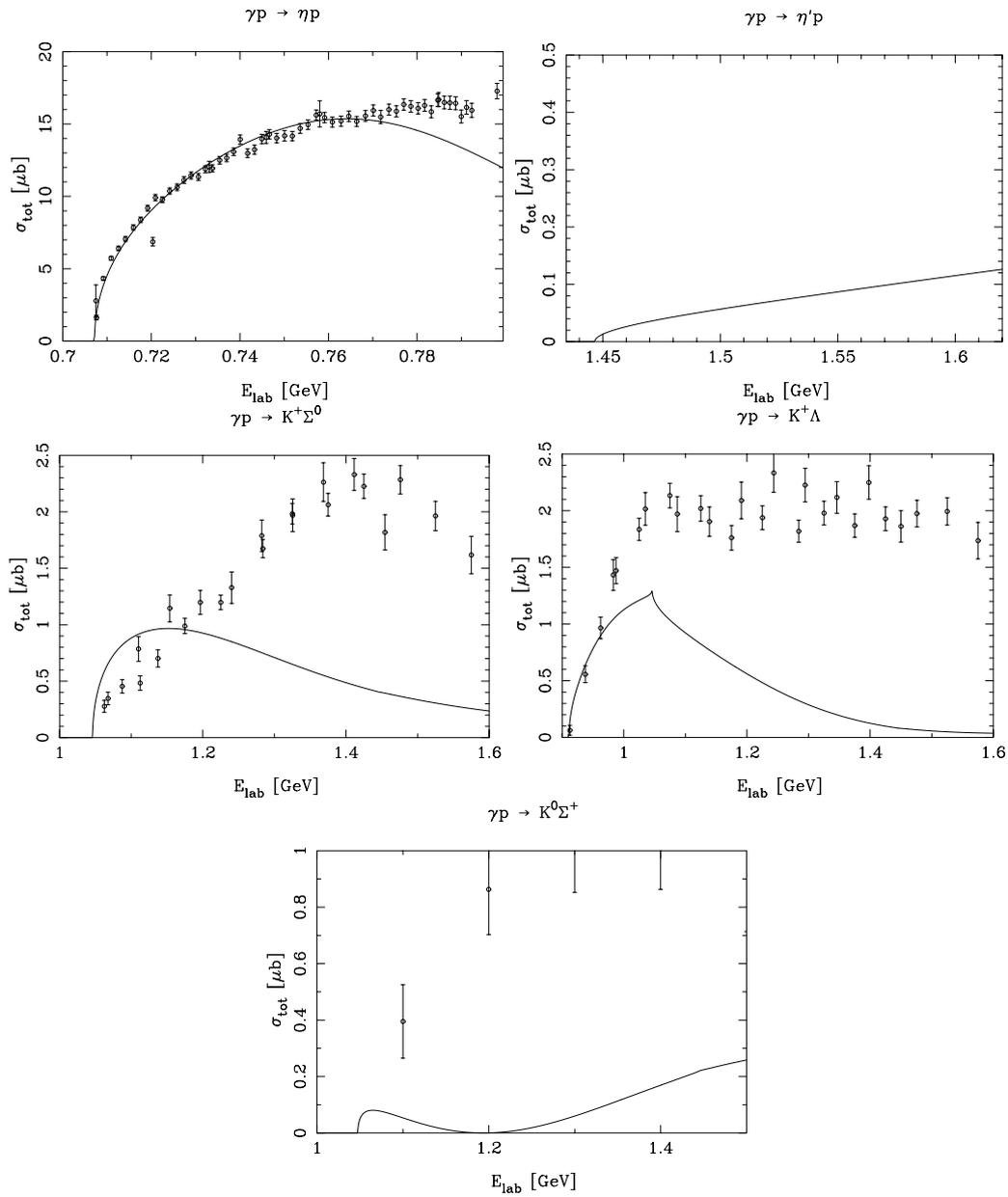
$[GeV^2]$	$\frac{a}{0.1338}$				
$[GeV]$	$\frac{m_\pi}{0.13957}$	$\frac{m_K}{0.49365}$	$\frac{m_\eta}{0.54745}$	$\frac{m_{\eta'}}{0.958}$	
$[GeV]$	$\frac{M_N}{0.93827}$	$\frac{M_\Lambda}{1.11563}$	$\frac{M_\Sigma}{1.19255}$		
$[GeV]$	$\frac{\alpha_{\pi N}}{\mathbf{0.369}}$	$\frac{\alpha_{\eta N}}{\mathbf{0.985}}$	$\frac{\alpha_{K\Lambda}}{\mathbf{1.493}}$	$\frac{\alpha_{K\Sigma}}{\mathbf{0.955}}$	$\frac{\alpha_{\eta' N}}{1.5}$
$[GeV]$	$\frac{f}{0.0924}$	$\frac{f_s}{0.0924}$	$\frac{\mathring{M}}{\mathbf{0.890}}$		
[1]	$\frac{\vartheta}{-0.349}$	$\frac{g_A}{1.267}$	$\frac{D}{\mathbf{0.8}}$	$\frac{F}{0.467}$	$\frac{\tilde{K}}{-0.5}$
$[GeV^{-1}]$	$\frac{b_D}{0.066}$	$\frac{b_F}{-0.213}$	$\frac{b_0}{-0.3036}$		
$[GeV^{-1}]$	$\frac{d_D}{\mathbf{0.45}}$	$\frac{d_F}{\mathbf{-0.45}}$	$\frac{d_0}{\mathbf{-0.9}}$	$\frac{d_1}{\mathbf{0}}$	$\frac{d_K}{0}$
$[GeV^{-3}]$	$\frac{\mathcal{C}}{0}$				

Existenz der Resonanz  $S_{11}(1535)$  hin, die auch hier als quasigebundener  $K\Sigma$ - $K\Lambda$ -Zustand gedeutet wird. Teilweise werden die Daten etwas überschätzt, was jedoch für unsere qualitative Auswertung nicht gravierend ist. Die Cusp-Effekte ( $K\Sigma$ ) in den Prozessen  $\gamma p \rightarrow K^+\Lambda$  und  $\pi^- p \rightarrow K^0\Lambda$  sind deutlich zu sehen. Im  $\pi^- p \rightarrow \eta n$ -Wirkungsquerschnitt ist auch der  $\eta'N$ -Cusp bei  $p_{\text{lab}} \approx 1.02 GeV$  zu sehen, was auf eine starke Korrelation der beiden Kanäle hindeutet. Die  $\eta'$ -Prozesse fallen durch den sehr niedrigen Wirkungsquer-



**Abbildung 2.1:** Totale Wirkungsquerschnitte der  $\pi$ -induzierten  $\eta$ -,  $K$ - und  $\eta'$ -Produktion als Funktion des Pionimpulses im Laborsystem. Die experimentellen Daten wurden aus [Bald 88] entnommen.

schnitt auf. Die Daten der Photoproduktion [ABBH 68, AHHM 76, Ploe 98] werden weit unterschätzt. Es sei aber darauf hingewiesen, daß die Analyse in



**Abbildung 2.2:** Totale Wirkungsquerschnitte der  $\eta$ -,  $K$ - und  $\eta'$ -Photoproduktion als Funktion der Photonenergie im Laborsystem. Die experimentellen Daten wurden aus [Krus 95, Scho 95, Tran 98] und [Goer 99] entnommen.

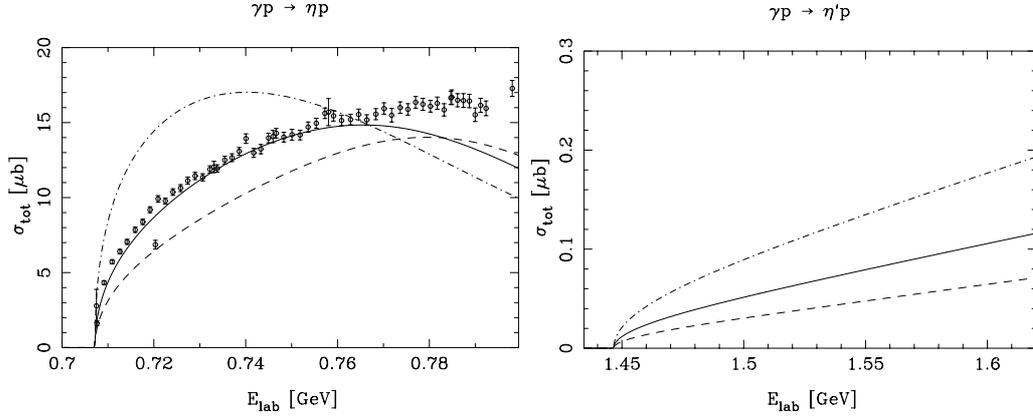
[Ploe 98] zur Beschreibung insbesondere auch der Winkelverteilungen nahe der Schwelle  $p$ -Wellen benötigt.

Wir wenden uns jetzt explizit der  $\eta$ - und  $\eta'$ -Photoproduktion zu, der das Interesse dieser Untersuchung galt. Wir finden eine starke Korrelation zwischen den Kanälen  $\eta N$  und  $\eta' N$ . Die zugehörigen elastischen Potentiale sind repulsiv.  $C_{02}$ , das  $\eta N \leftrightarrow \eta' N$ -Potential, ist attraktiv. Ein Großteil des  $\gamma p \rightarrow \eta' p$ -Wirkungsquerschnitts wird über diesen Weg erzeugt. Den größten Beitrag zu den Wirkungsquerschnitten liefern die Terme proportional zu  $d_i$  der Lagrangedichte zweiter chiraler Ordnung mit schweren Baryonen (siehe Gleichung (2.14)). Die Born-Terme sind demgegenüber sehr klein. Wir beobachten weiterhin, wie zur Ausbildung der  $S_{11}(1535)$  nötig, eine starke Kopplung des Kanals  $\eta N$  an die Kanäle  $K\Sigma$  und  $K\Lambda$ . Das  $\eta' N \leftrightarrow K\Sigma$ -Potential trägt stark zum  $\eta'$ -Photoproduktionsquerschnitt bei. Zusammen mit der Kopplung über das  $\eta N \leftrightarrow \eta' N$ -Potential zeigt sich ein starker Einfluss der Resonanz  $S_{11}(1535)$  auf die  $\eta'$ -Photoproduktion.

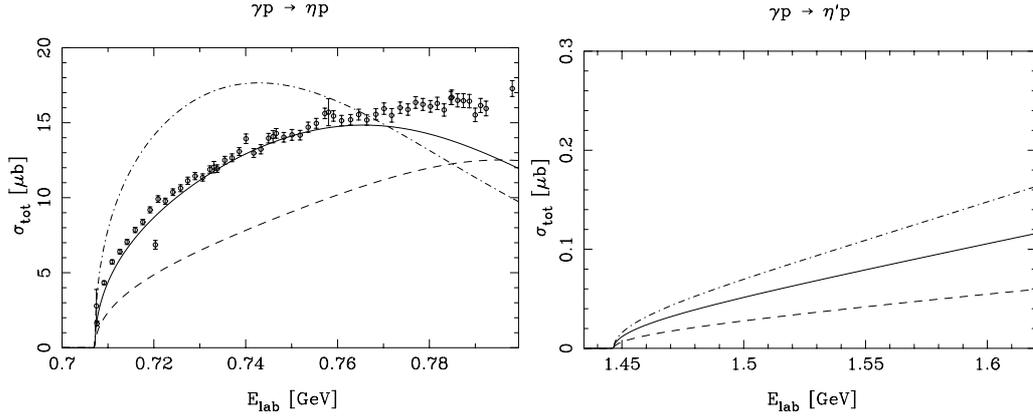
Um die Konsistenz unseres Ansatzes zu überprüfen, führten wir einen Skalierungsparameter  $\lambda$  ein. Alle Mesonmassen wurden mit  $\lambda$  multipliziert. Aus Konsistenzgründen müssen dann auch die Reichweiteparameter mit  $\lambda^2$  skaliert werden. Alle anderen Parameter wurden unverändert gelassen. Unsere qualitativen Ergebnisse konnten auch bei  $\lambda = 0.75$  reproduziert werden, d.h. die Struktur der Resultate veränderte sich nicht.

Nun sollen die Parameter in sinnvollen Bereichen variiert werden. Abbildung 2.3 zeigt die Abhängigkeit der totalen Wirkungsquerschnitte der  $\eta$ - und  $\eta'$ -Photoproduktion vom Parameter  $\mathcal{C}$ , der im Bereich von  $-4$  bis  $+4$  variiert wurde. Gezeigt werden die Ergebnisse für  $\mathcal{C} = -2, 0$  und  $+2$ . Wir beobachten für positive Werte von  $\mathcal{C}$  eine Anhebung des  $\eta$ -Photoproduktionsquerschnittes in der Nähe der Schwelle und eine Verschiebung des Maximums zu kleineren Photonenergien. Es sei hier nochmals darauf aufmerksam gemacht, daß  $\mathcal{C}$  ein Maß für die Verletzung der OZI-Regel ist. Unsere Ergebnisse lassen einen Zusammenhang zwischen der Form der Resonanz  $S_{11}(1535)$  und der Größe eben dieses Parameters erkennen.

Als Nächstes betrachten wir die Variation des Verhältnisses der pseudoskalaren Zerfallskonstanten  $\frac{f_s}{f}$ . Die Abbildung 2.4 zeigt die totalen Wirkungsquerschnitte der  $\eta$ - und  $\eta'$ -Photoproduktion in Abhängigkeit dieses Verhältnisses. Wir finden eine Erhöhung des  $\eta$ -Querschnitts in der Nähe der Schwelle für  $f_s < f$ , ähnlich wie für  $\mathcal{C} > 0$ .

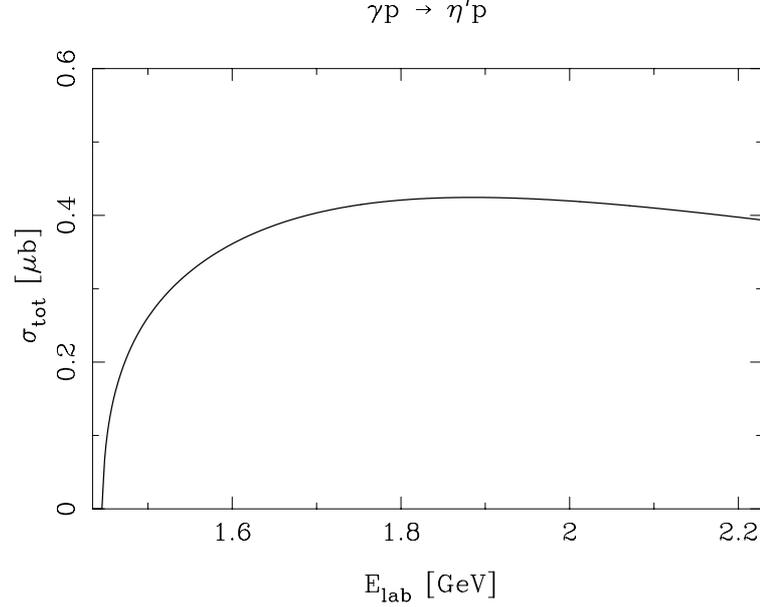


**Abbildung 2.3:** Totale Wirkungsquerschnitte der Reaktionen  $\gamma p \rightarrow \eta p$  und  $\eta' p$  wie in Abbildung 2.2 (durchgezogen) und mit  $C = -2$  (gestrichelt) und  $C = +2$ . (ge-strich-punktet)



**Abbildung 2.4:** Totale Wirkungsquerschnitte der Reaktionen  $\gamma p \rightarrow \eta p$  und  $\eta' p$  wie in Abbildung 2.2 (durchgezogen) und mit  $\frac{f}{f_s} = 1.25$  (gestrichelt) und  $\frac{f}{f_s} = 0.8$ . (ge-strich-punktet)

Nun wollen wir auf den Effekt des Parameters  $d_K$  zu sprechen kommen. Wir finden eine Anhebung des  $\eta'$ -Photoproduktionquerschnitts in der Umgebung der Schwelle in einem kleinen Bereich um  $d_K = -0.035$ . In Abbildung 2.5 zeigen wir genau diesen Fall. Außerhalb dieses Fensters verschwindet dieser Wirkungsquerschnitt schnell. Der sinnvolle Bereich dieses Parameters, der sich aus dieser Untersuchung ergibt, liegt bei  $-0.05 \leq d_K \leq 0.01$ .

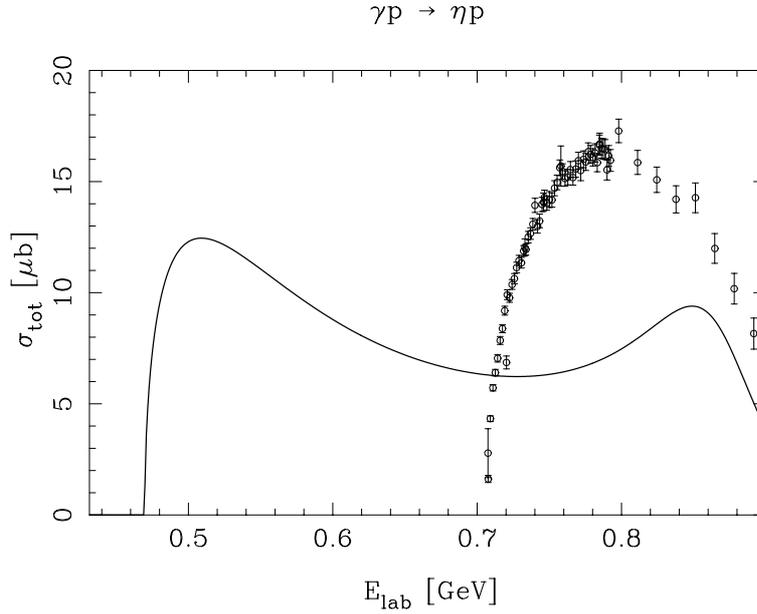


**Abbildung 2.5:** Totale Wirkungsquerschnitte der Reaktion  $\gamma p \rightarrow \eta' p$  für  $d_K = -0.035$ . Die anderen Parameter wurden wie in Tabelle 2.1 belassen.

Wir wollen noch die Auswirkung des anomalen Massenparameters  $a$  untersuchen. Eine Veränderung dieses Parameters wirkt sich direkt auf die Massen  $\dot{m}_\eta$  und  $\dot{m}_{\eta'}$  aus (siehe Gleichung (2.9)). Bisher haben wir für diese die physikalischen Massen der beiden Mesonen eingesetzt, was auf  $a = 0.243 \text{ GeV}^2$  ( $\vartheta = -10^\circ$ ) führt. Für  $\vartheta = -20^\circ$  ( $a = 0.134 \text{ GeV}^2$ ) ergäbe sich aber mit den physikalischen Pion- und Kaonmassen andere Werte für  $\dot{m}_\eta$  und  $\dot{m}_{\eta'}$ . Wir listen beispielhaft einige Werte auf:

$a [\text{GeV}^2]$	$\vartheta [^\circ]$	$\dot{m}_\eta [\text{GeV}]$	$\dot{m}_{\eta'} [\text{GeV}]$
0.243	$-10^\circ$	0.499	0.983
0.134	$-20^\circ$	0.445	0.831
0.083	$-32^\circ$	0.389	0.765

Durch Verkleinerung des Wertes von  $a$  kann man nun die Auswirkung der axialen Anomalie, die mit der Masse des  $\eta_0$  im chiralen Limes zusammenhängt, auf die studierten Prozesse untersuchen. Man muß dazu natürlich die Werte der  $\eta$ - und  $\eta'$ -Masse entsprechend anpassen. In Abbildung 2.6 zeigen wir das Ergebnis für den  $\eta$ -Photoproduktionsquerschnitt. Neben dem



**Abbildung 2.6:** Totale Wirkungsquerschnitte der Reaktion  $\gamma p \rightarrow \eta' p$  für  $a = 0.0833 \text{ GeV}^2$ . Damit ergibt sich auch  $m_\eta = 0.389 \text{ GeV}$  und  $m_{\eta'} = 0.765 \text{ GeV}$ , bzw.  $\vartheta = -32^\circ$ . Die anderen Parameter wurden wie in Tabelle 2.1 belassen.

augenfälligen Effekt der Verschiebung der Schwelle ist die Aufspaltung des  $S_{11}(1535)$ -Maximums in zwei getrennte Maxima zu beobachten. Die Struktur höherer Masse (bei etwa  $E_{\text{lab}} \approx 0.85 \text{ GeV}$ ) wird durch den quasi-gebundenen  $K\Sigma$ -Zustand erzeugt. Das Maximum nahe der Schwelle (bei etwa  $E_{\text{lab}} \approx 0.5 \text{ GeV}$ ) kommt durch die starke Kopplung der Kanäle  $K\Lambda$  und  $\eta N$  über das  $K\Lambda \leftrightarrow \eta N$ -Potential zustande. Auch hier wird nochmals deutlich, daß die Resonanz  $S_{11}(1535)$  in diesem Formalismus über zwei Kanäle, nämlich  $K\Sigma$  und  $K\Lambda$ , als quasigebundener Zustand erzeugt wird.

### 2.2.1 Zusammenfassung

Wir fassen die Ergebnisse wie in [Bass 01] zusammen. Die axiale Anomalie spielt eine wichtige Rolle in der Dynamik der  $\eta$ - und  $\eta'$ -Photoproduktion. Die Massen  $m_\eta$  und  $m_{\eta'}$  werden maßgeblich (zu etwa  $0.3 - 0.4 \text{ GeV}$ ) durch die Anomalieeffekte mitbestimmt. Durch die neu eingeführten Meson-Baryon-

Kopplungsterme in den Lagrangedichten (2.13) und (2.14) wirkt die Anomalie aber auch direkt auf die Meson-Baryon-Wechselwirkung. Beide Effekte spielen in der hier vorgestellten Analyse eine wichtige Rolle. Die Auswertung der Rechnung mit gekoppelten Kanälen deutet auf einen starken Einfluß der OZI-verletzenden Parameters  $\mathcal{C}$  auf die  $\eta$ -Photoproduktion hin. Entsprechend werden gluonische Effekte eine große Rolle für die Struktur der Resonanz  $S_{11}(1535)$  spielen, die auch hier als quasigebundener  $K\Sigma$ - $K\Lambda$ -Zustand interpretiert werden kann. Wegen des qualitativen Charakters der Untersuchung lassen sich keine quantitativ verlässlichen Vorhersagen für den  $\eta'$ -Photoproduktionquerschnitt treffen. Außerdem deutet einiges darauf hin, daß schon knapp oberhalb der Schwelle Beiträge aus höheren Partialwellen wichtig werden. Wie schon erwähnt, wird es für quantitative Aussagen unbedingt notwendig sein, des Problems der großen  $\eta'$ -Masse Herr zu werden. Einen Weg dazu wollen wir im nächsten Kapitel zeigen. Allerdings ist ohne höhere Partialwellenbeiträge auch keine Reproduktion der Daten zu erwarten [Plo 98].

# Kapitel 3

## Chirale $U(3)$ Störungstheorie

In diesem Kapitel beschreiben wir die Möglichkeit, die Probleme, die sich aus der großen Masse des  $\eta'$ -Mesons ergeben, mit Hilfe der Methode der Infrarotregularisierung zu lösen. Dabei nutzen wir aus, daß gerade diese Masse eine neue Skala in das Problem einführt. Damit sind wir nicht mehr auf eine  $N_c^{-1}$  Entwicklung angewiesen.

Die Methode wurde für Baryonen entwickelt [Tang 96, Bech 99]. Es konnte aber gezeigt werden, daß die Infrarotregularisierung auch für das schwere  $\eta'$ -Meson zu einer verbesserten Konvergenz der Störungsreihe führt. Die Ergebnisse wurden in [Bora 01] veröffentlicht.

### 3.1 Lagrangedichte im Mesonensektor

Anders als im Kapitel 2.1.1 benutzen wir hier eine Entwicklung ähnlich der in [Herr 97]. Wir wollen daher die Herleitung der dort angegebenen effektiven  $U(3)_L \times U(3)_R$  Lagrangedichte kurz skizzieren. Es sei darauf hingewiesen, daß dabei keine  $N_c^{-1}$  Argumente verwendet werden.

Die Lagrangedichte der QCD mit externen Feldern lautet:

$$\mathcal{L}_{QCD} = \mathcal{L}_{QCD}^{(0)} + \bar{q}\gamma_\mu(v^\mu + \gamma_5 a^\mu)q - \bar{q}(s - i\gamma_5 p)q - \frac{g^2}{16\pi^2}\Theta \text{tr}_c(G_{\mu\nu}\tilde{G}^{\mu\nu}).$$

Dabei ist  $\tilde{G}_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}G^{\alpha\beta}$ ;  $\text{tr}_c$  bezeichnet die Spur über die Farbindizes.  $\mathcal{L}_{QCD}^{(0)}$  beschreibt die Lagrangedichte im Limes verschwindender Quarkmassen und für  $\Theta = 0$ . Die externen Quellen  $v_\mu(x)$ ,  $a_\mu(x)$ ,  $s(x)$  und  $p(x)$  sind

hermitische  $3 \times 3$  Matrizen im Flavourraum und transformieren unter chiralen  $U(3)_R \times U(3)_L$  Transformationen wie (siehe auch Kapitel 1.1.1):

$$\begin{aligned} s' + ip' &= R(s + ip)L^\dagger, \\ r'_\mu &= Rr_\mu R^\dagger + iR\partial_\mu R^\dagger, \quad l'_\mu = Ll_\mu L^\dagger + iL\partial_\mu L^\dagger, \end{aligned}$$

wobei  $r_\mu = v_\mu + a_\mu$ ,  $l_\mu = v_\mu - a_\mu$  und  $R \in U(3)_R$ ,  $L \in U(3)_L$ . Bei dieser Transformation fügt die axiale Anomalie den Term  $-\frac{g^2}{16\pi^2} 2N_f \alpha(x) \text{tr}_c(G_{\mu\nu} \tilde{G}_{\mu\nu})$  zur Lagrangedichte hinzu, wobei  $N_f$  die Anzahl der Quarkflavours und  $\alpha$  der Winkel der axialen  $U(1)_A$  Rotation ist. Im Folgenden fassen wir den Vakuumwinkel  $\Theta$  als externes Feld  $\Theta(x)$  auf, das sich unter axialen  $U(1)$  Transformationen wie

$$\Theta(x) \rightarrow \Theta'(x) = \Theta(x) + i \ln \det R - i \ln \det L = \Theta(x) - 2N_f \alpha(x) \quad (3.1)$$

transformiert. Damit ist die Lagrangedichte invariant bezüglich lokaler  $U(3)_R \times U(3)_L$  Transformationen. Wir wissen nun außerdem, wie diese Symmetrie in der QCD explizit gebrochen ist. Die Konstruktion unter Zuhilfenahme eines externen Feldes  $\Theta(x)$  ist also analog zu der in  $\chi$ Pt mit dem Feld  $s(x)$  (Kapitel 1.1.1). Der Übergang zur physikalischen Theorie wird durch  $\Theta(x) \rightarrow \Theta$  vollzogen.

Für die Konstruktion der effektiven Lagrangedichte nehmen wir an, daß die so realisierte Symmetrie  $U(3)_R \times U(3)_L$  spontan zu  $U(3)_V$  gebrochen ist. Damit erhalten wir neun Pseudo-Goldstone-Bosonen, die wir mit den pseudoskalaren Mesonen  $\pi$ ,  $K$ ,  $\eta_8$  and  $\eta_0$  identifizieren. Ähnlich wie in Kapitel 2.1 fassen wir diese zusammen als

$$U(\phi, \psi) = \exp \left\{ \frac{i\phi}{f} + \frac{i\psi}{3} \right\},$$

wobei  $f$  die Pionzerfallskonstante im chiralen Limes ist.  $\phi$  ist wie in Gleichung (1.4) definiert, wobei  $\eta$  durch das Oktettfeld  $\eta_8$  zu ersetzen ist. Das Singlett  $\eta_0$  wird durch die Phase  $\psi = -i \ln \det U$  beschrieben. Wir definieren ansonsten unsere beitragenden Felder wie in 2.1.1, bzw. 1.1.1. Um die Lagrangedichte einfach aufschreiben zu können definieren wir das Feld  $\bar{\psi} = \psi + \Theta$  (siehe auch Gleichung (2.5)), das invariant unter  $U(3)_R \times U(3)_L$  Transformationen ist, denn  $\psi \rightarrow \psi' = \psi + 2N_f \alpha$  (siehe Gleichung (3.1)). Die

kovariante Ableitung des Feldes  $\Theta$  ist auch invariant unter diesen Transformationen und wir verwenden diese als Konstruktionselement der Lagrangedichte. Anstelle von  $\nabla_\mu \Theta$  könnte man auch die partielle Ableitung auf  $\bar{\psi}$  verwenden, denn  $\nabla_\mu \bar{\psi} = \partial_\mu \bar{\psi}$  (siehe Anhang A.3). Die allgemeinste Lagrangedichte  $\mathcal{L}(u_\mu, \chi_\pm, f_\pm^{\mu\nu}, \bar{\psi}, \nabla_\mu \Theta, \dots)$  zweiter Ordnung, die bis zu zwei Ableitungen und eine Quarkmassenmatrix enthält, lautet dann:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(0+2)} = & -V_0 + V_1 \langle u_\mu u^\mu \rangle + V_2 \langle \chi_+ \rangle + iV_3 \langle \chi_- \rangle + V_4 \langle u_\mu \rangle \langle u^\mu \rangle \\ & + V_5 \langle u_\mu \rangle \nabla^\mu \Theta + V_6 \nabla_\mu \Theta \nabla^\mu \Theta. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Die Terme vierter Ordnung sind in Anhang A.2 angegeben.

Die Koeffizienten  $V_i$  sind Funktionen der invarianten Größe  $\bar{\psi}$  und können um  $\bar{\psi} = 0$  entwickelt werden. Die Entwicklungskoeffizienten werden mit oberen Indizes nummeriert und klein geschrieben:  $V_i = v_i^{(0)} + v_i^{(1)} \bar{\psi} + \dots$ . Dabei sind alle diese Koeffizienten aus Gründen der Paritätserhaltung gerade in  $\bar{\psi}$ , außer  $V_3$ , welcher ungerade ist.

Einige der in (3.2) angegebenen Terme lassen sich durch geeignete Transformationen entfernen. So kann man zum Beispiel  $V_0$  in die Form  $V_0 = v_0^0 + v_0^2 \bar{\psi}^2$  bringen, also alle Terme höherer Potenzen in  $\psi$  entfernen. Das erreicht man durch die Transformation  $\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} \exp(g(\bar{\psi}))$  mit fixiertem  $\Theta$  und geeignetem  $g(\bar{\psi})$ . Als Alternative dazu könnte man auch  $iV_5 \langle u_\mu \rangle \nabla^\mu \Theta$  mit Hilfe der Transformation  $U \rightarrow \exp(if(\bar{\psi}))U$  entfernen. Beide Transformationen sind miteinander durch  $\psi = -i \ln \det U$  verknüpft, sodaß das gleichzeitige Vereinfachen beider Terme nicht möglich ist. Wir entscheiden uns,  $V_0$  zu vereinfachen.

Durch die Normierung des kinetischen und des Massenterms des Oktetts erhalten wir, wie in  $\chi$ PT,  $v_1^{(0)} = v_2^{(0)} = \frac{f^2}{4}$ .

### 3.1.1 Identifizierung des Singlettfeldes

Wie wir erwähnten, beschreibt die Phase  $\psi = -i \ln \det U$  das Singlettmeson. Wie wir gleich sehen werden, ist  $\psi$  aber abhängig von der QCD-Renormierungsskala, also nicht observabel. Es stellt sich somit die Frage, wie man sinnvollerweise das Feld  $\eta_0$  definiert. Die Auswirkungen der QCD-Renormierungsskala auf die effektive  $U(3)_R \times U(3)_L$  Lagrangedichte wurde

detailliert in [Kais 00] beschrieben.

Schon aus der "klassischen" chiralen Störungstheorie ist uns der Effekt der Skalenabhängigkeit der Quarkmassen bekannt, den wir im Kapitel 1 der Einfachheit halber übergangen hatten. Die Operatoren  $\bar{q}_R^i q_L^k$  werden in der QCD multiplikativ renormiert:

$$\bar{q}_R^i q_L^k \rightarrow Z_{\bar{q}q} \bar{q}_R^i q_L^k.$$

Der Renormierungsfaktor  $Z_{\bar{q}q}$  hängt dabei von der QCD-Skala ab:

$$\frac{\partial \ln Z_{\bar{q}q}}{\partial \ln \mu_{QCD}} = \gamma_{\bar{q}q} = \frac{3(N_c^2 - 1)}{N_c} \left( \frac{g}{4\pi} \right)^2 + \mathcal{O}(g^4).$$

Betrachtet man die externen Felder als Raum-Zeit abhängige Kopplungskonstanten, so kann man die Operatoren in der QCD-Lagrangedichte durch ihre renormierte Form ersetzen, indem man gleichzeitig die externen Felder durch deren renormierte Form

$$s \rightarrow Z_{\bar{q}q}^{-1} s, \quad p \rightarrow Z_{\bar{q}q}^{-1} p$$

ersetzt. Diese Form ergibt sich direkt aus der Betrachtung der Lagrangedichte, welche skaleninvariant sein muss. In der "klassischen"  $\chi$ PT wird diese Skalenabhängigkeit in den externen Feldern  $\chi_{\pm}$  durch  $B_0$  absorbiert. Die implizite Skalenabhängigkeit tritt damit in der  $\chi$ PT nicht mehr explizit in Erscheinung.

In der erweiterten Form der  $\chi$ PT benötigen wir mehr Aufwand, da neben  $\bar{q}_R^i q_L^k$  auch der axial-vektorielle Singlettstrom und die topologische Ladungsdichte  $\frac{g^2}{16\pi^2} \text{tr}_c(G_{\mu\nu} \tilde{G}^{\mu\nu})$  eine (skalenabhängige) Rolle spielen. Letztere ist die zum Vakuumwinkel  $\Theta$  konjugierte Variable.  $\Theta$  spielt aber für die Konstruktion der effektiven Lagrangedichte eine entscheidende Rolle. Die mit  $\Theta$  assoziierte Skalenabhängigkeit ist also von hohem Interesse. (Man beachte, daß  $\Theta$  nicht skalenabhängig ist. Von Interesse ist die Skalenabhängigkeit der konjugierten Variable, der topologischen Ladungsdichte.)

Wir beginnen mit dem axial-vektoriellen Singlettstrom  $A_{\mu}^{(0)} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta a_{\mu}^{(0)}}$ . Dieser Operator ist von der QCD-Renormierungsskala abhängig, da er anomale Dimension trägt [Koda 80]. Wie dieser Operator muß dann auch die zugehörige pseudoskalare Zerfallskonstante  $f_0$  multiplikativ renormiert werden (siehe Gleichung (2.10)):

$$A_{\mu}^{(0)} \rightarrow Z_A A_{\mu}^0, \quad f_{\phi}^{(0)} \rightarrow Z_A f_{\phi}^{(0)}, \quad \phi = \pi^0, \eta, \eta'.$$

Der Renormierungsfaktor  $Z_A$  hängt von der QCD-Skala ab:

$$\frac{\partial \ln Z_A}{\partial \ln \mu_{QCD}} = \gamma_A = \frac{6N_f(N_c^2 - 1)}{N_c} \left( \frac{g}{4\pi} \right)^4 + \mathcal{O}(g^6).$$

Auch hier interpretieren wir die externen Felder als Raum-Zeit abhängige Kopplungskonstanten. Wir arbeiten erst im Limes  $\Theta = 0$ . Damit ist nur das axial-vektorielle Singlettfeld betroffen:

$$\langle a_\mu \rangle \rightarrow Z_a^{-1} \langle a_\mu \rangle.$$

Das Singlettfeld  $\psi$  muß entsprechend auch von der QCD-Skala abhängen, was bei der Betrachtung seiner kovarianten Ableitung  $\nabla_\mu \psi = \partial_\mu \psi - 2\langle a_\mu \rangle$  klar wird. Diese Abhängigkeit stammt von der Zerfallskonstante des Singletts. Es ist also möglich, durch das Einführen einer skalenabhängigen Größe ein observables  $\eta_0$ -Feld zu erhalten.

Für  $\Theta = 0$  könnten wir nun die Skalenabhängigkeit durch Redefinition der Potentiale  $V_i$  aus der Lagrangedichte entfernen (siehe [Bora 01]). Wir wollen hier aber auch den Einfluß der topologischen Ladungsdichte betrachten. Dafür betrachten wir die möglichen invarianten Kombinationen unserer externen Felder mit  $\Theta$ . Wir finden:

$$\begin{aligned} \chi_\Theta^\pm &\equiv \frac{1}{2} \left[ (\chi_+ + \chi_-) e^{-\frac{i}{3}\bar{\psi}} \pm (\chi_+ - \chi_-) e^{\frac{i}{3}\bar{\psi}} \right], \\ \nabla_\mu \Theta &= \partial_\mu \Theta + 2\langle a_\mu \rangle. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Nur in diesen Kombinationen können diese Felder in der Lagrangedichte auftreten. Der erste Term  $\chi_\Theta^\pm$  entspricht der Kombination  $e^{\frac{i}{3}\Theta}(s \pm ip)$  der externen skalaren Felder (siehe [Kais 00]). Wie in Standard- $\chi$ P.T wird hier die Skalenabhängigkeit der Quarkmassen durch den Parameter  $B_0$  kompensiert. Indem wir die Lagrangedichte für  $\Theta = 0$  nach ihren Singlett- und Oktett-komponenten aufspalten, können wir den Ausdruck für  $\Theta \neq 0$  durch die Ersetzungen

$$\begin{aligned} \chi_\pm &\rightarrow \chi_\Theta^\pm, \\ \langle a_\mu \rangle &\rightarrow \frac{1}{2} \nabla_\mu \Theta \end{aligned}$$

direkt angeben. Dabei kennen wir nun das Skalenverhalten der enthaltenen Größen:

$$\begin{aligned}\chi_{\Theta}^{\pm} &\rightarrow \chi_{\Theta}^{\pm}, \\ \nabla_{\mu}\Theta &\rightarrow Z_A^{-1}\nabla_{\mu}\Theta, \\ \nabla_{\mu}\psi &\rightarrow Z_A^{-1}\nabla_{\mu}\psi, \\ \bar{\psi} &\rightarrow Z_A^{-1}\bar{\psi}.\end{aligned}$$

Man beachte, daß das Aufspalten der Lagrangedichte in die Anteile der Singlett- und Oktettmesonen keine große Mühe macht, da  $\hat{u}_{\mu} = u_{\mu} + \frac{1}{3}\nabla_{\mu}\psi$  und  $\chi_{\Theta}^{\pm}$  nur Oktettmesonen enthalten.  $\hat{u}_{\mu}$  steht von nun an für die Oktettkomponenten des Felds  $u_{\mu}$ . Außerdem sei noch angemerkt, daß  $\nabla_{\mu}\psi = \partial_{\mu}\bar{\psi} - \nabla_{\mu}\Theta$ . Die so aus (3.2) gewonnene Lagrangedichte lautet:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & -V_0 + V_1\langle\hat{u}_{\mu}\hat{u}^{\mu}\rangle + \frac{1}{3}(V_1 - 3V_4)\nabla_{\mu}\psi\nabla^{\mu}\psi - V_5\nabla_{\mu}\psi\nabla^{\mu}\Theta + V_6\nabla_{\mu}\Theta\nabla^{\mu}\Theta \\ & + (V_2 + iV_3)e^{\frac{i}{3}\bar{\psi}}\langle\chi_{\Theta}^{+} + \chi_{\Theta}^{-}\rangle + (V_2 - iV_3)e^{-\frac{i}{3}\bar{\psi}}\langle\chi_{\Theta}^{+} - \chi_{\Theta}^{-}\rangle.\end{aligned}\tag{3.4}$$

Das Skalenverhalten der Potentiale  $V_i$ , das für eine Skalenunabhängigkeit der Lagrangedichte notwendig ist, kann nun direkt abgelesen werden. Die entsprechenden Ausdrücke sind in Anhang A.2.1 aufgeführt.

Es sei darauf hingewiesen, daß das Renormierungsverhalten der Phase  $\psi$  nichtlinear ist:

$$\psi \rightarrow Z_A\psi + (Z_A - 1)\Theta.$$

Um ein observables  $\eta_0$ -Feld für  $\Theta \neq 0$  zu bestimmen, genügt es also nicht, eine Größe mit dem richtigen Skalenverhalten finden, die man an  $\psi$  multipliziert. Man muß erst ein Feld finden, das linear renormiert.  $\bar{\psi}$  ist ein solches Feld. Allerdings enthält dieses Feld dann nicht nur die Phase  $\psi$ . Wir finden stattdessen ein Singlettfeld, daß auch vom externen Feld  $\Theta$ , also vom Vakuumwinkel der QCD abhängt. Nun soll die oben genannte skalenabhängige Größe gefunden werden. Diese Größe sollte auch bei  $\Theta = 0$  in der Lagrangedichte auftreten. Der kinetische Teil des Feldes  $\psi$  in der Lagrangedichte 3.4 bietet sich dafür an, denn

$$v_1^{(0)} - 3v_4^{(0)} = \frac{f^2}{4} - 3v_4^{(0)} \rightarrow Z_A^2 \left( \frac{f^2}{4} - 3v_4^{(0)} \right).$$

$v_1^{(0)}$  ist aus dem kinetischen Term des Mesonoktetts bekannt. Man beachte, daß  $f$  nicht skalenabhängig ist. Wir definieren nun unser skalenunabhängiges  $\eta_0$  mit Hilfe dieser Größe:

$$\eta_0 \equiv \sqrt{\lambda} \bar{\psi} \equiv \sqrt{\frac{f^2}{6} - 2v_4^{(0)}} (\psi + \Theta).$$

Die Potentiale  $V_i$  werden entsprechend reskaliert (siehe Anhang A.2.1). Wir behalten die bisherige Benennung bei, sodaß von nun an, solange nicht ausdrücklich auf Anderes hingewiesen wird, mit  $V_i$  immer die reskalierten Potentiale gemeint sind.

Am Schluß stellen wir nun die Frage, welche skalenabhängigen Teile in der Theorie verbleiben. Sowohl die Potentiale  $V_i$  als auch das Singlettfeld  $\eta_0$  sind skalenunabhängig. Betrachten wir also die Konstruktionselemente  $\bar{\psi}$ ,  $\nabla_\mu \psi$  und  $\nabla_\mu \Theta$  der Lagrangedichte, die alle skalenabhängig sind. Wir kompensieren die Skalenabhängigkeit mit einem Faktor  $\sqrt{\lambda}$  und erhalten:

$$\begin{aligned} \sqrt{\lambda} \bar{\psi} &= \eta_0, \\ \sqrt{\lambda} \nabla_\mu \psi &= \nabla_\mu \eta_0 - \sqrt{\lambda} \nabla_\mu \Theta, \\ \sqrt{\lambda} \nabla_\mu \Theta &= \sqrt{\lambda} (\partial_\mu \Theta + 2\langle a_\mu \rangle). \end{aligned}$$

Nun sieht man direkt, daß lediglich die kovariante Ableitung des Vakuuwinkels  $\Theta$  und damit das externe axial-vektorielle Singlettfeld  $\langle a_\mu \rangle$  ihre Skalenabhängigkeit behalten. Für physikalische, also konstante Vakuuwinkel  $\Theta$  erhält man die aus [Bora 01] bekannte Form, in der nur noch  $\langle a_\mu \rangle$  seine Skalenabhängigkeit behält. Daraus folgt unter anderem, daß  $f_0$ , die pseudoskalare Zerfallskonstante des Singletts, nicht observabel sein kann.

Es fällt auf, daß die topologische Ladungsdichte nach dem Vorangegangenen nicht multiplikativ renormiert werden kann. Das entspricht auch den Beobachtungen in der QCD, denn die Divergenz des axialen Singlettstroms

$$\partial_\mu A_{(0)}^\mu = 2i\bar{q}m\gamma_5 q + N_f \frac{g^2}{16\pi^2} \text{tr}_c(G_{\mu\nu} \tilde{G}^{\mu\nu})$$

wird multiplikativ mit  $Z_A$  renormiert, der erste Term der rechten Seite jedoch bedarf keiner Renormierung. Entsprechend muß die topologische Ladungsdichte inhomogen renormiert werden.

Für die weiteren Betrachtungen ist  $\chi = 2B_0\mathcal{M}$  und  $v_\mu = 0$ . Außerdem hat

der Vakuumwinkel  $\Theta$  seinen Zweck erfüllt und wird im Folgenden Null gesetzt, da wir keine CP-verletzenden Prozesse betrachten. Allerdings muss das aus der kovarianten Ableitung  $\nabla_\mu \Theta$  stammende externe Axialvektorfeld  $\langle a_\mu \rangle$  für die Berechnung der pseudoskalaren Zerfallskonstanten weiterhin beibehalten werden. Unser Singlettfeld lautet damit:

$$\eta_0 = \sqrt{\lambda} \psi.$$

Die Entwicklung der Potentiale nach  $\eta_0$  wurde wie folgt gewählt:

$$V_i = v_i^{(0)} + v_i^{(2)} \frac{\eta_0^2}{f^2} + v_i^{(4)} \frac{\eta_0^4}{f^4} + \dots, \quad \text{für } i = 0, 1, 2, 4, 5, 6$$

$$V_3 = v_3^{(1)} \frac{\eta_0}{f} + v_3^{(3)} \frac{\eta_0^3}{f^3} + \dots$$

Aus der Normierung des kinetischen und des Masseterms ergibt sich neben  $v_1^{(0)} = v_2^{(0)} = \frac{f^2}{4}$  nun noch  $v_4^{(0)} = 0$ .

## 3.2 Infrarotregularisierung

Wir haben schon mehrfach erwähnt, daß das Hauptproblem in der Behandlung des  $\eta'$ -Mesons dessen große Masse ist. Insbesondere der Beitrag der  $\eta'$ -Schleifen zu physikalischen Prozessen ist groß, wie sich auch noch zeigen wird. Das chirale Ordnungschema korrespondiert wegen der großen Masse  $m_{\eta'}$  nicht mit der Schleifenentwicklung, denn der Entwicklungsparameter  $\frac{m_{\eta'}}{\Lambda_\chi} \approx 1$  ist nicht klein. Das heißt aber auch, daß die Störungsreihe nicht gut konvergiert.

In [Gass 85, Herr 97, Kais 00] wurde deshalb mit Hilfe einer  $N_c^{-1}$ -Entwicklung das Abzählschema ergänzt. Im Limes unendlich vieler Farbfreiheitsgrade verschwindet die axiale Anomalie und damit auch die Masse des  $\eta'$  im chiralen Limes. Damit ist  $m_{\eta'}$  klein und kann störungstechnisch behandelt werden. In diesem Zählschema sind dann  $\eta'$ -Schleifen mit  $N_c^{-1}$  unterdrückt. Damit erweitert man das chirale Ordnungsschema. Dieses Vorgehen kann aber physikalisch, also durchs Experiment, nicht motiviert werden, denn die  $\eta'$ -Masse ist eben groß.

In Kapitel 1.1.2 sahen wir eine Möglichkeit mit Teilchen großer Masse, dort

den Baryonen, umzugehen. Dabei entwickelt man die Lagrangedichte in ihrem nicht-relativistischen Limes um das Inverse der Baryonmasse. Ein anderer Weg wurde in [Tang 96] und formaler in [Bech 99] vorgestellt. Anstatt die relativistische Meson-Baryon-Lagrangedichte zu entwickeln, modifizieren die Autoren die Schleifenintegrale in einer symmetriebewahrenden Weise. Lorentz- und chirale Invarianz bleiben dabei also explizit erhalten. Die Methode ist ein neues Regularisierungsschema, die sogenannte Infrarotregularisierung. Es ist eine Modifikation der dimensional Regularisierung. Bisher wurde diese nur im Baryonensektor angewandt. Die Aufgabe dieser Arbeit war es, dieses Verfahren auch im Mesonensektor mit dem schweren  $\eta'$  zu etablieren. In unserer Rechnung treten lediglich Tadpole-Diagramme, also Integrale der Form

$$\Delta_\phi = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{i}{k^2 - m_\phi^2 + i\epsilon}$$

auf. Für ein darüber hinausgehende Darstellung der Methode sei auf [Bech 99] verwiesen. Für die Mesonen des Oktetts ergibt sich in dimensionaler Regularisierung:

$$\Delta_\phi = m_\phi^2 \left[ 2L + \frac{1}{16\pi^2} \ln \frac{m_\phi^2}{\mu^2} \right], \quad \phi = \pi, K, \eta$$

Dabei ist  $\mu$  die Regularisierungsskala und

$$L = \frac{\mu^{d-4}}{16\pi^2} \left[ \frac{1}{d-4} - \frac{1}{2} (\ln 4\pi + 1 - \gamma_E) \right],$$

mit  $\gamma_E = 0.5772\dots$  die Euler-Mascheroni-Konstante.

Uns interessiert im Rahmen der erweiterten  $\chi$ PT lediglich die Physik bei kleinen Energien, also der Infrarotbereich. Die uns interessierende Infrarotphysik liegt im Bereich kleiner Integrationsimpulse. Entsprechend entwickeln wir den Integranden in  $\Delta_{\eta'}$  um  $\frac{k^2}{m_{\eta'}^2} = 0$ . Unter der Annahme, die Reihenentwicklung kommutiere mit der Integration, erhalten wir:

$$\Delta_{\eta'} = -i \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{k^2}{m_{\eta'}^2} \right)^i = -i \sum_{i=0}^{\infty} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \left( \frac{k^2}{m_{\eta'}^2} \right)^i = 0,$$

wobei die einzelnen Integrale in dimensionaler Regularisierung ausgewertet wurden. Die Beiträge des  $\eta'$  verschwinden also in Infrarotregularisierung.

Das ist auch einleuchtend, denn im betrachteten Integral sind keine Infrarotanteile mehr enthalten. Geht man nach [Bech 99] formaler vor, sieht man, daß diese Beiträge in die Niederenergiekopplungskonstanten absorbiert werden. Die Masse des  $\eta'$  wurde also als neue Skala des Problems verwendet und der Propagator um  $m_{\eta'}^{-1} = 0$  entwickelt.

Ein analoges Vorgehen läßt sich bei anderen Schleifenintegralen anwenden. Die Infrarotregularisierung kann dann als Partialbruchzerlegung der Propagatoren im Integral verstanden werden, wobei nur die Teile mitgenommen werden, die Infrarotdivergenzen enthalten.

Im Weiteren interessieren uns lediglich die chiralen Logarithmen, da der hochenergetisch divergente Teil von  $\Delta_\phi$  in die Niederenergiekonstanten absorbiert werden kann. Eine entsprechend vollständige Beschreibung der Renormierung der Lagrangedichte bis zur vierten Ordnung in dimensionaler Regularisierung findet man in [Herr 97]. Der Transfer der Ergebnisse auf Infrarotregularisierung kann einfach vollzogen werden, da diese eine Version der dimensional Regularisierung ist. Da uns als Vergleich auch die Ergebnisse in dimensionaler Regularisierung interessieren ergibt sich:

$$\begin{aligned} \Delta_\phi &\rightarrow \frac{m_\phi^2}{16\pi^2} \ln \frac{m_\phi^2}{\mu^2}, & \phi = \pi, K, \eta \\ \Delta_{\eta'} &\rightarrow \begin{cases} \frac{m_{\eta'}^2}{16\pi^2} \ln \frac{m_{\eta'}^2}{\mu^2}, & \text{dimensionale Regularisierung,} \\ 0, & \text{Infrarotregularisierung.} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Hier sieht man schon, daß der Unterschied zwischen den beiden Regularisierungsschemata nicht unerheblich sein kann. In Infrarotregularisierung verschwinden die Beiträge der  $\eta'$ -Schleifen, während sie in dimensionaler Regularisierung proportional zum Quadrat der großen Masse  $m_{\eta'}$  beitragen.

### 3.3 Ergebnisse für Massen und pseudoskalare Zerfallskonstanten

Wir kommen nun zu den in [Bora 01] veröffentlichten Ergebnissen. In niedrigster Ordnung ergeben sich ähnliche Ergebnisse wie in Kapitel 2.1.1. Wir führen auch hier den Mischungswinkel  $\vartheta$  wie in Gleichung (2.7) ein. Damit

ergibt sich für die Massen ( $m_u = m_d = \hat{m}$ , siehe auch Gleichung (2.8)):

$$\begin{aligned}\dot{m}_\pi^2 &= 2B_0\hat{m}, \\ \dot{m}_K^2 &= B_0(\hat{m} + m_s), \\ \dot{m}_8^2 &= \frac{2}{3}B_0(\hat{m} + 2m_s), \\ \dot{m}_0^2 &= \frac{2v_0^{(2)}}{f^2} + B_0(2\hat{m} + m_s) \left( \frac{2}{3} - \frac{8v_2^{(2)}}{f^2} + \frac{16v_3^{(1)}}{\sqrt{6}f^2} \right), \\ \dot{m}_{08}^2 &= B_0(\hat{m} - m_s) \left( \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{8v_3^{(1)}}{\sqrt{3}f^2} \right), \\ \dot{m}_\eta^2 &= \cos^2 \vartheta \dot{m}_8^2 + \sin^2 \vartheta \dot{m}_0^2 - \sin(2\vartheta) \dot{m}_{08}^2, \\ \dot{m}_{\eta'}^2 &= \sin^2 \vartheta \dot{m}_8^2 + \cos^2 \vartheta \dot{m}_0^2 + \sin(2\vartheta) \dot{m}_{08}^2.\end{aligned}$$

Die generalisierte Gell-Mann-Okubo-Massenrelation lautet in diesem Formalismus:

$$\cos^2 \vartheta \dot{m}_\eta^2 + \sin^2 \vartheta \dot{m}_{\eta'}^2 = \dot{m}_8^2 = \frac{1}{3}(4\dot{m}_K^2 - \dot{m}_\pi^2).$$

Damit ergibt sich für den Mischungswinkel  $\vartheta$ :

$$\dot{m}_{\eta\eta'}^2 = 0 = \sin(2\vartheta) (\dot{m}_8^2 - \dot{m}_0^2) + 2 \cos(2\vartheta) \dot{m}_{08}^2.$$

Betrachtet man  $m_{\eta'}$  als groß und entwickelt dementsprechend um  $\dot{m}_0^{-2} = 0$ , so erhält man:

$$\tan 2\vartheta = \frac{2\dot{m}_{08}^2}{\dot{m}_0^2} + \mathcal{O}(q^4).$$

Der Mischungswinkel  $\vartheta$  ist damit von der Ordnung  $\mathcal{O}(q^2)$  und damit in nullter chiraler Ordnung  $\cos \vartheta \sim 1$  und  $\sin \vartheta \sim 0$ . Die Mischung der Zustände ist also klein. Für die Gell-Mann-Okubo-Massenrelation ergibt sich mit den Termen niedrigster Ordnung dieser Entwicklung die gewohnte Form.

Die Zerfallskonstanten ergeben sich mit Definition (2.10) in niedrigster Ordnung zu:

$$\begin{aligned}f_\pi &= f_K = f, \\ f_\eta^{(8)} &= f \cos \vartheta, & f_\eta^{(0)} &= -\sqrt{6\lambda} \left( 1 + \frac{v_5^{(0)}}{6f^2} \right) \sin \vartheta, \\ f_{\eta'}^{(8)} &= f \sin \vartheta, & f_{\eta'}^{(0)} &= \sqrt{6\lambda} \left( 1 + \frac{v_5^{(0)}}{6f^2} \right) \cos \vartheta.\end{aligned}$$

Mit der Reparametrisierung (2.11) ergibt sich:

$$f_8 = f, \quad f_0 = \sqrt{6\lambda} \left( 1 + \frac{v_5^{(0)}}{6f^2} \right).$$

Hier sehen wir nun in aller Deutlichkeit, durch die explizite Abhängigkeit der Singlett-Zerfallskonstanten  $f_0$  von  $\lambda$ , deren Skalenabhängigkeit. Damit ist diese experimentell nicht zugänglich.

Für die Winkel  $\vartheta_8$  und  $\vartheta_0$  ergibt sich in niedrigster Ordnung:

$$\tan \vartheta_8 = \frac{f_{\eta'}^{(8)}}{f_{\eta}^{(8)}} = \tan \vartheta, \quad \tan \vartheta_0 = -\frac{f_{\eta}^{(0)}}{f_{\eta'}^{(0)}} = \tan \vartheta.$$

Beide Winkel sind generell experimentell zugänglich, da sich die Skalenabhängigkeit in  $\vartheta_0$  gerade weghebt. In dieser Ordnung unterscheiden sie sich jedoch noch nicht und stimmen mit dem Mischungswinkel  $\vartheta$  überein. Die Matrixelemente  $\langle 0 | A_{\mu}^{(0)} | \eta \rangle$  und  $\langle 0 | A_{\mu}^{(0)} | \eta' \rangle$  haben also sowohl einen observablen als auch einen nicht-observablen Anteil.

Wir kommen nun zu den Ergebnissen mit bis zu einer Schleife und den dazugehörigen Gegentermen. Für die Massen und Zerfallskonstanten tragen als Schleifendiagramme lediglich die Tadpole-Diagramme bei. Wir rechnen diese sowohl in Infrarot-, als auch in dimensionaler Regularisierung, um die Ergebnisse vergleichen zu können (siehe Gleichung (3.5)). Damit ergibt sich für die Massen die generische Form:

$$m_{\phi}^2 = \dot{m}_{\phi}^2 + C_{\phi}^{ab} \frac{m_a^2 \Delta_b}{f^2} + D_{\phi}^{ab} \frac{m_a^2 m_b^2}{f^2}, \quad (3.6)$$

mit  $\phi = \pi, K, \eta, \eta'$ . Die Koeffizienten  $C_{\phi}^{ab}$  der Schleifendiagramme und  $D_{\phi}^{ab}$  der Gegenterme sind im Anhang C.1 angegeben.

Für die Zerfallskonstanten der pseudoskalaren Mesonen des Oktetts ergibt sich:

$$f_{\phi} = f \left[ 1 + G_{\phi}^a \frac{\Delta_a}{f^2} + H_{\phi}^a \frac{m_a^2}{f^2} \right], \quad (3.7)$$

**Tabelle 3.1:** Abschätzung einiger Niederenergiekonstanten zur numerischen Auswertung der Berechnung der Massen und Zerfallskonstanten des pseudo-skalaren Mesonnonetts. Die Koeffizienten  $v_i^{(0)}$  sind aus Standard- $\chi$ PT und der Normierung der kinetischen Terme bekannt. Die Koeffizienten der Lagrangedichte vierter Ordnung  $\beta_i^{(0)}$  stammen aus [Bijn 95].

$[GeV^2]$	$\frac{v_1^{(0)}}{\frac{f^2}{4}}$	$\frac{v_2^{(0)}}{\frac{f^2}{4}}$	$\frac{v_4^{(0)}}{0}$			
$[10^{-3}]$	$\beta_4^{(0)}$	$\beta_5^{(0)}$	$\beta_6^{(0)}$	$\beta_7^{(0)}$	$\beta_8^{(0)}$	
	-0.3	1.4	-0.2	-0.4	0.9	

mit  $\phi = \pi, K, 8$ . Für das Singlett lautet der Ausdruck etwas anders, da  $f$  durch den skalenabhängigen Faktor  $\sqrt{6\lambda}$  ersetzt werden muß:

$$\begin{aligned}
 f_0 &\equiv \frac{\sqrt{6\lambda}}{f} \bar{f}_0 \\
 &= \sqrt{6\lambda} \left[ 1 + \frac{v_5^{(0)}}{6f^2} + G_0^a \frac{\Delta_a}{f^2} + H_0^a \frac{m_a^2}{f^2} \right]. \quad (3.8)
 \end{aligned}$$

Dabei ist  $\bar{f}_0$  skalenunabhängig. Die Koeffizienten  $G_\phi^a$  und  $H_\phi^a$  sind im Anhang C.2, die entsprechenden Z-Faktoren im Anhang C.3 angegeben.

Wir kommen nun zur numerischen Auswertung der Ergebnisse. Zuerst müssen dafür die Niederenergiekonstanten abgeschätzt werden. In Tabelle 3.1 sind die Werte der von null verschiedenen Koeffizienten aufgelistet. Die Konstanten  $v_i^{(0)}$  sind aus Standard- $\chi$ PT bekannt bzw. stammen aus der richtigen Normierung des kinetischen und des Massenterms. Die weiteren Konstanten zweiter chiraler Ordnung sollen für diese Untersuchung unbestimmt bleiben. Die aufgelisteten phänomenologischen Niederenergiekonstanten vierter chiraler Ordnung  $\beta_i^{(0)}$  sind aus [Bijn 95] entnommen. Die restlichen Konstanten vierter Ordnung sind nach [Ecke 89] gleich null, da der dort benutzte Ansatz sowohl die OZI-Regel bewahrt, als auch paritätserhaltend ist.  $\beta_{17}^{(0)}$ ,  $\beta_{18}^{(0)}$ ,  $\beta_{46}^{(0)}$ ,  $\beta_{47}^{(0)}$  und  $\beta_{53}^{(0)}$  sind jedoch OZI verletzend.  $\beta_{25}^{(1)}$ ,  $\beta_{26}^{(1)}$  und  $\beta_{52}^{(1)}$  sind paritätsverletzend. In [Bijn 95] wurden diese Ergebnisse für  $\mu = m_\rho = 0.77 GeV$  angegeben. Wir nehmen die Abhängigkeit vom Regularisierungspunkt  $\mu$  in

**Tabelle 3.2:** Beiträge zu den Massen in vierter chiraler Ordnung. Die Ergebnisse sind sowohl für dimensionale, als auch für Infrarotregularisierung in der Einheit  $10^{-3} \text{ GeV}^2$  gezeigt. Für die Skala  $\mu$  der chiralen Logarithmen wurden die Werte  $m_\rho$ ,  $m_{\eta'}$  und  $\Lambda_\chi$  verwendet. Die Ergebnisse wurden für den Mischungswinkel  $\vartheta = 0^\circ$  und  $\vartheta = -20^\circ$  ausgewertet. Es wurden nur die Werte aus Tabelle 3.1 verwendet und alle weiteren Niederenergiekonstanten gleich Null gesetzt.

		$m_\phi^2 - \hat{m}_\phi^2$					
		infrarot			dimensional		
$\mu$		$m_\rho$	$m_{\eta'}$	$m_{\Lambda_\chi}$	$m_\rho$	$m_{\eta'}$	$m_{\Lambda_\chi}$
$\vartheta = 0^\circ$	$\pi$	-0.8	-0.5	-0.3	-2.7	-0.5	1.7
	$K$	-0.9	-8.2	-15.7	-24.8	-8.2	8.9
	$\eta$	-13.5	-17.3	-21.2	-44.7	-17.3	10.9
	$\eta'$	-23.5	59.2	96.0	7.0	59.2	113.1
$\vartheta = -20^\circ$	$\pi$	-0.3	0.3	0.9	-1.2	0.3	1.9
	$K$	-3.4	-12.4	-21.6	-27.0	-12.4	2.7
	$\eta$	-164.3	-188.2	-212.8	-195.1	-188.2	-181.1
	$\eta'$	16.4	51.5	87.8	-46.7	51.5	152.8

den Konstanten vierter Ordnung als klein an und verwenden hier, auch aus Bequemlichkeit, für alle  $\mu$  die in Tabelle 3.1 angegebenen Werte für  $\beta_i^{(j)}$ . In Tabelle 3.2 sehen wir die Abhängigkeit der Beiträge vierter chiraler Ordnung von der Skala  $\mu$  der chiralen Logarithmen für die Werte  $\mu = m_\rho = 0.77 \text{ GeV}$ ,  $\mu = m_{\eta'}$  und  $\mu = \Lambda_\chi$ . Die Ergebnisse sind für die Mischungswinkel  $\vartheta = 0^\circ$  und  $\vartheta = -20^\circ$  angegeben. Da wir alle Niederenergiekonstanten  $\beta_i^{(j)}$  vierter Ordnung als skalenunabhängig betrachten, sehen wir hier die aus den chiralen Logarithmen resultierende Skalenabhängigkeit der Massen. Diese sind, wie in Tabelle 3.2 zu sehen, klein. Das impliziert, daß auch die Abhängigkeit der diesen Effekt kompensierenden Konstanten  $\beta_i^{(j)}$  von  $\mu$  klein ist.

In Tabelle 3.3 zeigen wir die Abhängigkeit der Massen von den Niederenergiekonstanten  $v_i^{(j)}$  zweiter chiraler Ordnung, die nicht aus der Standard- $\chi$ PT bekannt sind. Die Tabelle sollte spaltenweise gelesen werden, sodaß zum

**Tabelle 3.3:** *Abhängigkeit der Massen von den unbekanntem Niederenergieparametern  $v_i^{(j)}$  zweiter chiraler Ordnung in der Einheit  $GeV^2$ . Wir verwenden  $\mu = m_\rho$  und einen Mischungswinkel  $\vartheta = -20^\circ$ .*

$m_\phi^2 - \mathring{m}_\phi^2$	infrarot				dimensional			
	$\pi$	$K$	$\eta$	$\eta'$	$\pi$	$K$	$\eta$	$\eta'$
$\propto v_1^{(2)}$	0.2	2.0	13.4	90.1	-2.2	-27.3	-37.1	-129.9
$\propto v_2^{(2)}$	-0.2	-2.0	-16.6	-58.4	2.2	27.3	-28.3	173.8
$\propto v_2^{(4)}$	0	0	2.9	21.8	0	0	39.8	-300.7
$\propto v_3^{(1)}$	0.4	-1.4	-88.5	148.2	-1.0	-31.2	-100.4	53.3
$\propto v_3^{(3)}$	0	0	5.7	8.7	0	0	-11.4	152.2
$\propto v_4^{(2)}$	0	0	-1.7	-26.1	0	0	49.5	556.9

Beispiel die Beiträge vierter Ordnung zur  $\eta'$ -Masse in Infrarotregularisierung (Einheiten  $GeV$ ,  $\vartheta = -20^\circ$ ,  $\mu = m_\rho$ ) gegeben sind durch:

$$m_{\eta'}^2 - \mathring{m}_{\eta'}^2 = 0.0164 + 90.1\bar{v}_1^{(2)} - 58.4\bar{v}_2^{(2)} + 21.8\bar{v}_2^{(4)} \\ + 148.2\bar{v}_3^{(1)} + 8.7\bar{v}_3^{(3)} - 26.1\bar{v}_4^{(2)}.$$

In dimensionaler Regularisierung lautet das entsprechende Ergebnis:

$$m_{\eta'}^2 - \mathring{m}_{\eta'}^2 = -0.0467 - 129.9\bar{v}_1^{(2)} + 173.8\bar{v}_2^{(2)} - 300.7\bar{v}_2^{(4)} \\ + 53.3\bar{v}_3^{(1)} + 152.2\bar{v}_3^{(3)} + 556.9\bar{v}_4^{(2)}.$$

Die erste Zahl gibt jeweils die aus Standard- $\chi$ PT bekannten Beiträge nach Tabelle 3.2 an. Aus den Ergebnissen wird ersichtlich, daß die nichtanalytischen Beiträge der  $\eta'$ -Schleifendiagramme signifikanter in dimensionaler als in Infrarotregularisierung beitragen. Schleifendiagramme mit mehreren  $\eta'$ -Propagatoren korrespondieren in dimensionaler Regularisierung höheren Potenzen in der großen  $\eta'$ -Masse  $m_{\eta'}^2$ . Die Konvergenz der chiralen Entwicklung ist damit zweifelhaft. Dieses kann mithilfe der Infrarotregularisierung umgangen werden. Die Situation ähnelt der bei Baryonen. Wie in [Tang 96, Bech 99] beschrieben, wurde die Infrarotregularisierung erfolgreich auf chirale Störungstheorie mit Baryonen angewendet.

Für die Bestimmung der Zerfallskonstanten gehen wir genauso vor wie für

**Tabelle 3.4:** Beiträge zu den Zerfallskonstanten  $f_\phi$  bis zur vierten chiralen Ordnung in dimensionaler und Infrarotregularisierung. Man beachte, daß nicht  $f_0$  angegeben wird, sonder der skalenunabhängige Teil  $\bar{f}_0$ . Die Zeile beschreibt die Ergebnisse mit nur den Werten der Niederenergiekonstanten aus Tabelle 3.1. Wir verwenden  $\mu = m_\rho$  und einen Mischungswinkel  $\vartheta = -20^\circ$ .

$f_\phi - f$	infrarot				dimensional			
	$\pi$	$K$	8	0	$\pi$	$K$	8	0
$\propto 1$	0.01	0.03	0.04	-0.01	0.01	0.02	0.04	-0.01
$\propto v_1^{(2)}$	-0.38	-0.38	-0.38	-0.38	5.20	5.20	5.20	5.20
$\propto v_4^{(2)}$	0	0	-0.23	1.36	0	0	3.22	18.82
$\propto v_5^{(0)}$	0	0	0	55.30	0	0	0	55.30
$\propto v_5^{(2)}$	0	0	0	-1.13	0	0	0	15.59
$\propto v_1^{(2)} v_5^{(0)}$	0	0	0	261.46	0	0	0	-3606.18
$\propto v_4^{(2)} v_5^{(0)}$	0	0	0	-622.34	0	0	0	8583.55

die Massen. Tabelle 3.4 zeigt analog zur Tabelle 3.3 die Abhängigkeit der pseudoskalaren Zerfallskonstanten von den unbekanntem Niederenergiekonstanten zweiter chiraler Ordnung (Einheiten  $GeV$ ,  $\vartheta = -20^\circ$ ,  $\mu = m_\rho$ ). Die erste Zeile beschreibt den Beitrag der aus Tabelle 3.1 bekannten Niederenergiekonstanten. Es ist zu beachten, daß für das Singlett immer der skalenunabhängige Teil  $\bar{f}_0$  angegeben ist. So ist nach Tabelle 3.4 zum Beispiel  $\bar{f}_0$  in Infrarotregularisierung

$$\begin{aligned} \bar{f}_0 = f &- 0.01 - 0.38v_1^{(2)} + 1.36v_4^{(2)} + 55.30v_5^{(0)} - 1.13v_5^{(2)} \\ &+ 261.46v_1^{(2)}v_5^{(0)} - 622.34v_4^{(2)}v_5^{(0)} \end{aligned}$$

und in dimensionaler Regularisierung

$$\begin{aligned} \bar{f}_0 = f &- 0.01 + 5.20v_1^{(2)} + 18.82v_4^{(2)} + 55.30v_5^{(0)} + 15.59v_5^{(2)} \\ &- 3606.18v_1^{(2)}v_5^{(0)} + 8583.55v_4^{(2)}v_5^{(0)}. \end{aligned}$$

Wie bei den Massen sehen wir auch hier, daß  $\eta'$ -Schleifendiagramme in dimensionaler Regularisierung signifikante Beiträge liefern. Es sei noch auf

die in den Niederenergiekonstanten nichtlinearen Terme hingewiesen. Diese kommen durch die Konstruktion der Zerfallskonstanten  $\bar{f}_0$  in Gleichung (2.11) zustande.

Am Ende möchten wir noch auf die numerischen Werte der Winkel  $\vartheta_8$  und  $\vartheta_0$  eingehen. Um eine Abschätzung zu erhalten, werden wir wiederum die Werte aus Tabelle 3.1 verwenden und alle unbekannt Konstanten null setzen. Es ergibt sich für  $\vartheta = -20^\circ$ :

$$\vartheta_8 = -30.0^\circ, \quad \vartheta_0 = -4.4^\circ.$$

Um eine Abschätzung der Unsicherheit dieses Ergebnisses zu erhalten, werten wir die Rechnung noch für  $\vartheta = -13^\circ$  [Bram 99] aus:

$$\vartheta_8 = -24.1^\circ, \quad \vartheta_0 = 3.2^\circ.$$

### 3.3.1 Zusammenfassung

Als Test für die Qualität der Ergebnisse mit Infrarotregularisierung haben wir die Massen und Zerfallskonstanten der pseudoskalaren Mesonen  $\pi$ ,  $K$ ,  $\eta$  und  $\eta'$  in chiraler  $U(3)$ -Störungstheorie berechnet. Dabei wurden keine  $N_c^{-1}$  Argumente verwendet. Es stellt sich heraus [Kais 00], daß die Niederenergiekonstanten der effektiven Lagrangedichte von der QCD-Skala abhängen. Es ist aber möglich, diese durch Reskalierung der Felder skalenunabhängig zu machen. Der einzige skalenabhängige Teil der Theorie ist dann ein Vorfaktor der kovarianten Ableitung des Vakuumwinkels, der hier als externes Feld betrachtet wird, und damit des externen axialvektoriellen Singlettfeldes  $\langle a_\mu \rangle$ . Bei der Methode der Infrarotregularisierung dient die Masse des  $\eta'$ ,  $m_{\eta'} \approx \Lambda_\chi$ , als neue Skala. Da der  $\eta'$  Tadpole damit keine Infrarotdivergenzen mehr enthält, ist er gleich null. Als Vergleich wurden auch die Ergebnisse mit dimensionaler Regularisierung angegeben.

Es zeigt sich, daß in dimensionaler Regularisierung die Massen und Zerfallskonstanten wesentlich von den  $\eta'$ -Schleifendiagrammen abhängen. Das ist problematisch, da dieses Vorgehen einer Entwicklung um  $\frac{m_{\eta'}}{\Lambda_\chi}$  entspricht. Eine Konvergenz dieser Reihe ist nicht zu erwarten. Das chirale Zählchema wird also hier voraussichtlich zusammenbrechen. In Infrarotregularisierung kann das verhindert werden, da die  $\eta'$ -Tadpole verschwinden. (Das ist eine

Eigenheit dieser Rechnung, in der nur Tadpole-Diagramme beitragen.) Die numerischen Ergebnisse zeigen eben dieses Verhalten deutlich. Da aber die  $\eta'$ -Schleifendiagramme in dimensionaler Regularisierung so stark beitragen, können wir nicht erwarten, daß Beiträge höherer Schleifenordnungen weniger wichtig wären, wie das mit einem funktionierenden Zählschema der Fall sein sollte. In Infrarotregularisierung erhält man hingegen eine wesentlich bessere Konvergenz, wie das auch für Baryonen der Fall ist [Bech 99]. Wir halten deshalb Infrarotregularisierung für ein geeignetes Werkzeug zur Untersuchung der Eigenschaften des  $\eta'$  in chiraler  $U(3)$ -Störungstheorie.

### 3.4 Diskussion des Abzählschemas

Bisher haben wir das Abzählschema der  $\chi$ PT benutzt, d.h. alle Mesonimpulse zählten als chirale Ordnung  $\mathcal{O}(q)$ . Das galt auch für das Singlett  $\bar{\psi}$ . Dieses Vorgehen ist aufgrund der hohen Masse des  $\eta'$  sicherlich fragwürdig. Jeder Singlett-Impuls sollte als Ordnung  $\mathcal{O}(1)$  gewertet werden, da auch dessen Masse nullter Ordnung ist. Man könnte nun also die Felder nach ihren Singlett- und Oktettkomponenten aufspalten und zur Konstruktion der Lagrangedichte folgendes Ordnungsschema verwenden:

$$\begin{aligned}\bar{\psi}, \partial_\mu \bar{\psi}, \partial_\mu \partial_\nu \bar{\psi}, \dots &= \mathcal{O}(1), \\ \hat{u}_\mu, \nabla_\mu \Theta &= \mathcal{O}(q), \\ \chi_\Theta^\pm, f_{\mu\nu}^\pm &= \mathcal{O}(q^2).\end{aligned}$$

Man sieht sofort, daß beliebig viele Ableitungen des Singlettfelds zur gleichen Ordnung beitragen. Es tauchen also neue Schwierigkeiten auf. Als Beispiel schreiben wir die Lagrangedichte für die Berechnung der Masse des  $\eta'$  bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(q^2)$  nach obigem Schema mit bis zu vier Ableitungen auf:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{(0)} &= -C_0 + C_1 \partial_\mu \bar{\psi} \partial^\mu \bar{\psi} + C_2 \partial_\mu \bar{\psi} \partial^\mu \bar{\psi} \partial_\nu \bar{\psi} \partial^\nu \bar{\psi}, \\ \mathcal{L}^{(2)} &= C_3 \langle \hat{u}_\mu \hat{u}^\mu \rangle + C_4 \langle \chi_\Theta^+ \rangle + iC_5 \langle \chi_\Theta^- \rangle \\ &\quad + (C_6 \langle \hat{u}_\mu \hat{u}^\mu \rangle + C_7 \langle \chi_\Theta^+ \rangle + iC_8 \langle \chi_\Theta^- \rangle) \partial_\nu \bar{\psi} \partial^\nu \bar{\psi} \\ &\quad + C_9 \langle \hat{u}_\mu \hat{u}_\nu \rangle \partial^\mu \bar{\psi} \partial^\nu \bar{\psi} + iC_{10} \langle \hat{u}_\mu \hat{u}_\nu \rangle \partial^\mu \partial^\nu \bar{\psi}.\end{aligned}$$

Man sieht, daß bereits in dieser Ordnung Schleifenkorrekturen aus der Lagrangedichte nullter Ordnung mit berücksichtigt werden müssen. Benutzt

man jedoch Infrarotregularisierung fallen diese Beiträge gerade weg, weil das entsprechende Integral verschwindet.

Wollte man wie bisher bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(q^4)$  rechnen, würde auch der Term  $\langle \hat{u}_\mu \hat{u}^\mu \hat{u}_\nu \rangle \partial^\nu \bar{\psi}$  in dritter Ordnung beitragen, also noch vor den Schleifenkorrekturen zu den Massen der Oktettmesonen. Dieser Term zerstört jedoch das Ein-Winkel-Mischungsschema (2.7), worauf schon in [Beis 01] hingewiesen wurde. Der Grund dafür liegt in der damit notwendig werdenden Diagonalisierung des kinetischen Terms der Lagrangedichte. Dieses phänomenologisch motivierte Abzählmuster läßt also nur bis zur zweiten chiralen Ordnung die Mischung der Zustände mit Hilfe nur eines Winkels zu.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß auch das hier vorgeschlagene Abzähl-schema den Beitrag der hohen Masse des  $\eta'$  nur bedingt beschreibt. So ist zum Beispiel der Term  $\langle \hat{u}_\mu \hat{u}_\nu \rangle \partial^\mu \bar{\psi} \partial^\nu \bar{\psi}$  in diesem Zählschema zwar zweiter Ordnung, beinhaltet aber über partielle Integration auch Terme erster und sogar nullter Ordnung. Eine Lösung dieser Uneindeutigkeit ist uns nicht bekannt. Man beachte allerdings, daß die Massen des pseudoskalaren Mesonenoktetts im chiralen Limes verschwinden. Insofern ist das obige Abzähl-schema ( $\hat{u}_\mu = \mathcal{O}(q)$ ) dennoch konsistent.



# Zusammenfassung und Ausblick

Im Kapitel 1 wurden im Rahmen der chiralen Störungsrechnung mit schweren Baryonen Meson-Baryon-Streuprozesse sowie die Meson-Photoproduktion bis zur Ordnung  $q^2$  mit  $p$ -Wellen berechnet und alle Rückstreuprozesse mit Hilfe einer separablen Lippman-Schwinger-Gleichung aufiteriert. Es ergaben sich folgende Ergebnisse:

- Die experimentellen totalen und differentiellen Wirkungsquerschnitte der betrachteten Prozesse konnten sehr gut reproduziert werden. Durch Hinzunahme der  $p$ -Wellenbeiträge konnten die Ergebnisse vorangegangener Rechnungen wesentlich verbessert werden.  $p$ -Wellen erwiesen sich als notwendig zur zufriedenstellenden Beschreibung der Daten insbesondere bei höheren Energien.
- In den betrachteten Polarisationsobservablen ergaben sich Differenzen. Die Beträge der Amplituden werden richtig, die  $p$ -Wellen-Interferenzterme jedoch ungenügend reproduziert.
- Die Resonanz  $S_{11}(1535)$  wird innerhalb dieses Formalismus als quasi-gebundener  $K\Sigma$ - $K\Lambda$ -Zustand dynamisch erzeugt.

Der in Kapitel 1 beschriebene Formalismus wurde in Kapitel 2 um das  $\eta'$ -Meson und damit um die Auswirkungen der axialen Anomalie erweitert. Es sollten die  $\eta$ - und  $\eta'$ -Photoproduktion in  $s$ -Wellennäherung beschrieben werden. Die Ergebnisse werden nachfolgend zusammengefaßt:

- Aufgrund der hohen Masse des  $\eta'$  können nur qualitative Ergebnisse erwartet werden. Durch Anpassen der wenigen Parameter konnten dennoch die Wirkungsquerschnitte etlicher Meson-Baryon-Streu- und

Meson-Photoproduktionsprozesse, außer für das  $\eta'$ -Meson, reproduziert werden. Bei der  $\eta'$ -Photoproduktion spielen schon nahe der Schwelle höhere Partialwellen eine entscheidende Rolle.

- Die axiale Anomalie wirkt sich über die Massen der  $\eta$  und  $\eta'$  Mesonen trivialerweise auf die Wirkungsquerschnitte aus. Zusätzlich führen neue Kopplungsterme zu wesentlichen Effekten.
- OZI-verletzende Effekte deuten auf einen starken Einfluß gluonischer Effekte bei der  $\eta$ -Photoproduktion.
- Auch hier wird die Resonanz  $S_{11}(1535)$  als quasigebundener  $K\Sigma$ - $K\Lambda$ -Zustand dynamisch erzeugt. Dieser ist stark von der OZI-verletzenden Kopplung abhängig.

Als Lösung der Probleme mit der hohen Masse des  $\eta'$  bot sich die sogenannte Infrarotregularisierung an. Diese Masse führt nämlich eine neue Skala in die Theorie ein. Dies ausnutzend, entwickeln wir die Propagatoren um  $m_{\eta'}^{-1}$ . Als Test für diese Vorgehensweise wurden in Kapitel 3 die Massen und Zerfallskonstanten der neun leichtesten Mesonen in chiraler  $U(3)$ -Störungstheorie mit Infrarotregularisierung berechnet. Es ergab sich:

- In dimensionaler Regularisierung spielen die  $\eta'$ -Schleifendiagramme eine wesentliche Rolle. In Infrarotregularisierung fallen diese weg.
- Die chirale Störungsreihe konvergiert in dieser Rechnung sowohl für die Massen als auch für die Zerfallskonstanten besser als in dimensionaler Regularisierung.
- Das chirale Ordnungsschema kann aufgrund der hohen Masse des  $\eta'$  nicht direkt übernommen werden, da dessen Impuls von der Ordnung  $\mathcal{O}(1)$  ist. Damit ergibt sich jedoch auch, daß eine einfache Ein-Winkel-Mischung der Zustände nur bis zur zweiten chiralen Ordnung richtig ist.

Das weitere Vorgehen ist nun klar vorgezeichnet. Mit Hilfe der Infrarotregularisierung kann man die Analyse mit gekoppelten Kanälen wiederholen.

Wir erwarten auch hier eine verbesserte Konvergenz der chiralen Störungsreihe. Da das  $\eta'$  in der Schleife dann kaum beiträgt (behandelt man das  $\eta'$  und die Nukleonen als gleich schwer, so verbleibt ein Beitrag zum Imaginärteil [Goit 01]), entkoppelt dieser von den restlichen Kanälen. Die Werte der  $SU(3)$ -Parameter werden damit nur geringer Änderung bedürfen. Mit dieser Arbeit wurde schon begonnen. Wir benutzen dafür den dispersionstheoretischen Ansatz aus [Olle 01], der im Wesentlichen dem hier beschriebenen Vorgehen entspricht. In nächster Zukunft sind Ergebnisse für Meson-Baryon-Streuung und für Meson-Photoproduktion mit reellen und virtuellen Photonen zu erwarten.



# Anhang A

## Weiterführendes zu den Lagrangedichten

### A.1 $SU(3)$ -Lagrangedichte

Die relativistische Meson-Baryon-Lagrangedichte mit zwei Baryonen in der zweiten chiralen Ordnung lautet:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\phi B}^{(2)} = & b_D \langle \bar{B} \{ \chi_+, B \} \rangle + b_F \langle \bar{B} [ \chi_+, B ] \rangle + b_0 \langle \bar{B} B \rangle \langle \chi_+ \rangle \\ & + 2d_D \langle \bar{B} \{ u_\mu u^\mu, B \} \rangle + 2d_F \langle \bar{B} [ u_\mu u^\mu, B ] \rangle \\ & + 2d_0 \langle \bar{B} B \rangle \langle u_\mu u^\mu \rangle + 2d_1 \langle \bar{B} u_\mu \rangle \langle u^\mu B \rangle \\ & + e_D \langle \bar{B} i \sigma_{\mu\nu} \{ u^\mu u^\nu, B \} \rangle + e_F \langle \bar{B} i \sigma_{\mu\nu} [ u^\mu u^\nu, B ] \rangle \\ & + e_0 \langle \bar{B} i \sigma_{\mu\nu} B \rangle \langle u^\mu u^\nu \rangle + e_1 \langle \bar{B} i \sigma_{\mu\nu} u^\mu \rangle \langle u^\nu B \rangle \\ & + f_D \langle \bar{B} \sigma_{\mu\nu} \{ f_+^{\mu\nu}, B \} \rangle + f_F \langle \bar{B} \sigma_{\mu\nu} [ f_+^{\mu\nu}, B ] \rangle \\ & + g_D \langle \bar{B} i \gamma_\mu \{ u^\mu u^\nu, D_\nu B \} \rangle + g_F \langle \bar{B} i \gamma_\mu [ u^\mu u^\nu, D_\nu B ] \rangle \\ & + g_0 \langle \bar{B} i \gamma_\mu D_\nu B \rangle \langle u^\mu u^\nu \rangle + g_1 \langle \bar{B} i \gamma_\mu u^\mu \rangle \langle u^\nu D_\nu B \rangle.\end{aligned}\tag{A.1}$$

In der Näherung mit schweren Baryonen ergibt sich:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\phi B}^{(2)} = & b_D \langle \bar{B} \{ \chi_+, B \} \rangle + b_F \langle \bar{B} [ \chi_+, B ] \rangle + b_0 \langle \bar{B} B \rangle \langle \chi_+ \rangle \\ & + 2d_D \langle \bar{B} \{ u_\mu u^\mu, B \} \rangle + 2d_F \langle \bar{B} [ u_\mu u^\mu, B ] \rangle \\ & + 2d_0 \langle \bar{B} B \rangle \langle u_\mu u^\mu \rangle + 2d_1 \langle \bar{B} u_\mu \rangle \langle u^\mu B \rangle \\ & + 2e_D \langle \bar{B} [ S_\mu, S_\nu ] \{ u^\mu u^\nu, B \} \rangle + 2e_F \langle \bar{B} [ S_\mu, S_\nu ] [ u^\mu u^\nu, B ] \rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2e_0 \langle \bar{B}[S_\mu, S_\nu]B \rangle \langle u^\mu u^\nu \rangle + 2e_1 \langle \bar{B}[S_\mu, S_\nu]u^\mu \rangle \langle u^\nu B \rangle \\
& - 2f_D \langle \bar{B}i[S_\mu, S_\nu]\{f_+^{\mu\nu}, B\} \rangle - 2f_F \langle \bar{B}i[S_\mu, S_\nu][f_+^{\mu\nu}, B] \rangle \\
& + g_D \langle \bar{B}i\{(v_\mu u^\mu)u^\nu, D_\nu B\} \rangle + g_F \langle \bar{B}i[(v_\mu u^\mu)u^\nu, D_\nu B] \rangle \\
& + g_0 \langle \bar{B}iD_\nu B \rangle \langle (v_\mu u^\mu)u^\nu \rangle + g_1 \langle \bar{B}i(v_\mu u^\mu) \rangle \langle u^\nu D_\nu B \rangle \\
& + g_D \dot{M} \langle \bar{B}\{(v_\mu u^\mu)^2, B\} \rangle + g_F \dot{M} \langle \bar{B}[(v_\mu u^\mu)^2, B] \rangle \\
& + g_0 \dot{M} \langle \bar{B}B \rangle \langle (v_\mu u^\mu)^2 \rangle + g_1 \dot{M} \langle \bar{B}i(v_\mu u^\mu) \rangle \langle (v_\nu u^\nu)B \rangle. \quad (\text{A.2})
\end{aligned}$$

Die letzten vier Terme stellen automatisch sicher, daß die Terme proportional zu  $g_i$  keine  $s$ -Wellen-Beiträge liefern.

## A.2 $U(3)$ -Lagrangedichte

Für die Lagrangedichte vierter chiraler Ordnung geben wir nur die für unsere Rechnung relevanten Terme an:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{(4)} = & -\beta_4 \langle u_\mu u^\mu \rangle \langle \chi_+ \rangle - \beta_5 \langle u_\mu u^\mu \chi_+ \rangle + \beta_6 \langle \chi_+ \rangle^2 + \beta_7 \langle \chi_- \rangle^2 \\
& + \frac{\beta_8}{2} (\langle \chi_+^2 \rangle + \langle \chi_-^2 \rangle) + \frac{\beta_{12}}{4} (\langle \chi_+^2 \rangle - \langle \chi_-^2 \rangle) \\
& - \beta_{17} \langle u_\mu \rangle \langle u^\mu \rangle \langle \chi_+ \rangle + \beta_{18} \langle u_\mu \rangle \langle u^\mu \chi_+ \rangle \\
& + i\beta_{21} \langle u_\mu u^\mu \chi_- \rangle + i\beta_{22} \langle u_\mu u^\mu \rangle \langle \chi_- \rangle \\
& + i\beta_{23} \langle u_\mu \rangle \langle u^\mu \chi_- \rangle + i\beta_{24} \langle u_\mu \rangle \langle u^\mu \rangle \langle \chi_- \rangle \\
& - i\beta_{25} \langle \chi_+ \chi_- \rangle - i\frac{\beta_{26}}{16} \langle \chi_+ \rangle \langle \chi_- \rangle \\
& + \beta_{46} \langle u_\mu \chi_+ \rangle \nabla^\mu \Theta + \beta_{47} \langle u_\mu \rangle \langle \chi_+ \rangle \nabla^\mu \Theta \\
& + i\beta_{48} \langle u_\mu \chi_- \rangle \nabla^\mu \Theta + i\beta_{49} \langle u_\mu \rangle \langle \chi_- \rangle \nabla^\mu \Theta \\
& - \beta_{52} \langle \chi_+ \rangle \partial_\mu \nabla^\mu \Theta + i\beta_{53} \langle \chi_- \rangle \partial_\mu \nabla^\mu \Theta. \quad (\text{A.3})
\end{aligned}$$

Die Koeffizienten  $\beta_i$  sind Funktionen des Feldes  $\bar{\psi}$ . Die Funktionen  $\beta_{21}$ ,  $\beta_{22}$ ,  $\beta_{23}$ ,  $\beta_{24}$ ,  $\beta_{25}$ ,  $\beta_{26}$ ,  $\beta_{48}$ ,  $\beta_{49}$  und  $\beta_{52}$  sind ungerade Funktionen in  $\bar{\psi}$ . Alle Anderen sind gerade Funktionen in  $\bar{\psi}$ .

### A.2.1 Skalenverhalten

Wir geben hier das Skalenverhalten der Potentiale  $V_i$  (siehe Kapitel 3.1) an, das notwendig ist, damit die Lagrangedichte (3.2) bzw. (3.4) skaleninvariant

ist:

$$\begin{aligned}
V_0(x) &\rightarrow V_0(Z_A x), \\
V_1(x) &\rightarrow V_1(Z_A x), \\
(V_2 \pm iV_3)(x) &\rightarrow e^{\pm i\frac{\pi}{3}(Z_A - 1)}(V_2 \pm iV_3)(Z_A x), \\
(V_1 - 3V_4)(x) &\rightarrow Z_A^2(V_1 - 3V_4)(Z_A x), \\
V_5(x) &\rightarrow Z_A^2 V_5(Z_A x), \\
V_6(x) &\rightarrow Z_A^2 V_6(Z_A x).
\end{aligned}$$

Wir reskalieren die Potentiale wie folgt:

$$\begin{aligned}
\bar{V}_0(x) &= V_0\left(\frac{f}{\sqrt{\lambda}}x\right), \\
\bar{V}_1(x) &= V_1\left(\frac{f}{\sqrt{\lambda}}x\right), \\
(\bar{V}_2 \pm i\bar{V}_3)(x) &= e^{\pm i\frac{\pi}{3}\left(\frac{f}{\sqrt{\lambda}} - \sqrt{6}\right)}(V_2 \pm iV_3)\left(\frac{f}{\sqrt{\lambda}}x\right), \\
(\bar{V}_1 - 3\bar{V}_4)(x) &= \frac{f^2}{6\lambda}(V_1 - 3V_4)\left(\frac{f}{\sqrt{\lambda}}x\right), \\
\bar{V}_5(x) &= \frac{f}{\lambda}V_5\left(\frac{f}{\sqrt{\lambda}}x\right), \\
\bar{V}_6(x) &= \frac{1}{\lambda}V_6\left(\frac{f}{\sqrt{\lambda}}x\right).
\end{aligned}$$

Im Weiteren werden wir anstelle  $\bar{V}_i$  immer  $V_i$  schreiben, da wir nur noch die so reskalierten Potentiale verwenden werden.

Die Lagrangdichte (A.3) lautet aufgespalten nach Oktett- und Singlettanteilen:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{(4)} &= -(\beta_4 - i\beta_{22})e^{-\frac{i}{3}\bar{\psi}}\langle\hat{u}_\mu\hat{u}^\mu\rangle\langle\chi_\Theta^+ + \chi_\Theta^- \rangle - (\beta_4 + i\beta_{22})e^{\frac{i}{3}\bar{\psi}}\langle\hat{u}_\mu\hat{u}^\mu\rangle\langle\chi_\Theta^+ - \chi_\Theta^- \rangle \\
&\quad - (\beta_5 - i\beta_{21})e^{-\frac{i}{3}\bar{\psi}}\langle\hat{u}_\mu\hat{u}^\mu(\chi_\Theta^+ + \chi_\Theta^-)\rangle - (\beta_5 + i\beta_{21})e^{\frac{i}{3}\bar{\psi}}\langle\hat{u}_\mu\hat{u}^\mu(\chi_\Theta^+ - \chi_\Theta^-)\rangle \\
&\quad + \frac{1}{3}(2\beta_5 + 3\beta_{18} - 2i\beta_{21} + 3i\beta_{23})e^{-\frac{i}{3}\bar{\psi}}\nabla_\mu\psi\langle u_\mu(\chi_\Theta^+ + \chi_\Theta^-)\rangle \\
&\quad - \frac{1}{3}(2\beta_5 + 3\beta_{18} + 2i\beta_{21} - 3i\beta_{23})e^{\frac{i}{3}\bar{\psi}}\nabla_\mu\psi\langle u_\mu(\chi_\Theta^+ - \chi_\Theta^-)\rangle \\
&\quad + \frac{1}{9}(3\beta_4 + \beta_5 - 9\beta_{17} + 3\beta_{18} - i\beta_{21} - 3i\beta_{22} + 3i\beta_{23} - 9i\beta_{24})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times e^{-\frac{i}{3}\bar{\psi}} \nabla_\mu \psi \nabla^\mu \psi \langle \chi_\Theta^+ + \chi_\Theta^- \rangle \\
& + \frac{1}{9} (3\beta_4 + \beta_5 - 9\beta_{17} + 3\beta_{18} + i\beta_{21} + 3i\beta_{22} - 3i\beta_{23} + 9i\beta_{24}) \\
& \quad \times e^{\frac{i}{3}\bar{\psi}} \nabla_\mu \psi \nabla^\mu \psi \langle \chi_\Theta^+ - \chi_\Theta^- \rangle \\
& + (\beta_6 + \beta_7 + i\beta_{26}) e^{-\frac{2i}{3}\bar{\psi}} \langle \chi_\Theta^+ + \chi_\Theta^- \rangle^2 + (\beta_6 + \beta_7 - i\beta_{26}) e^{\frac{2i}{3}\bar{\psi}} \langle \chi_\Theta^+ - \chi_\Theta^- \rangle^2 \\
& + 2(\beta_6 - \beta_7) \langle \chi_\Theta^+ + \chi_\Theta^- \rangle \langle \chi_\Theta^+ - \chi_\Theta^- \rangle + \beta_{12} \langle (\chi_\Theta^+ + \chi_\Theta^-) (\chi_\Theta^+ - \chi_\Theta^-) \rangle \\
& + (\beta_8 + i\beta_{25}) e^{-\frac{2i}{3}\bar{\psi}} \langle (\chi_\Theta^+ + \chi_\Theta^-) (\chi_\Theta^+ + \chi_\Theta^-) \rangle \\
& + (\beta_8 - i\beta_{25}) e^{\frac{2i}{3}\bar{\psi}} \langle (\chi_\Theta^+ - \chi_\Theta^-) (\chi_\Theta^+ - \chi_\Theta^-) \rangle \\
& - (\beta_{52} - i\beta_{53}) e^{-\frac{i}{3}\bar{\psi}} \partial_\mu \nabla^\mu \theta \langle \chi_\Theta^+ + \chi_\Theta^- \rangle \\
& - (\beta_{52} + i\beta_{53}) e^{\frac{i}{3}\bar{\psi}} \partial_\mu \nabla^\mu \theta \langle \chi_\Theta^+ - \chi_\Theta^- \rangle.
\end{aligned}$$

Damit diese Lagrangedichte skaleninvariant ist, müssen die Potentiale  $\beta_i$  wie folgt skalieren:

$$\begin{aligned}
(\beta_4 \pm i\beta_{22})(x) & \rightarrow (\beta_4 \pm i\beta_{22})(Z_A x) e^{\pm \frac{i}{3}(1-Z_A)x}, \\
(\beta_5 \pm i\beta_{21})(x) & \rightarrow (\beta_5 \pm i\beta_{21})(Z_A x) e^{\pm \frac{i}{3}(1-Z_A)x}, \\
(2\beta_5 + 3\beta_{18} \mp 2i\beta_{21} \pm 3i\beta_{23})(x) & \rightarrow (2\beta_5 + 3\beta_{18} \mp 2i\beta_{21} \pm 3i\beta_{23})(Z_A x) \\
& \quad \times e^{\pm \frac{i}{3}(1-Z_A)x} Z_A, \\
(3\beta_4 + \beta_5 - 9\beta_{17} + 3\beta_{18} \mp i\beta_{21} \\
& \mp 3i\beta_{22} \pm 3i\beta_{23} \mp 9i\beta_{24})(x) & \rightarrow (3\beta_4 + \beta_5 - 9\beta_{17} + 3\beta_{18} \mp i\beta_{21} \\
& \quad \mp 3i\beta_{22} \pm 3i\beta_{23} \mp 9i\beta_{24})(Z_A x) \\
& \quad \times e^{\pm \frac{i}{3}(1-Z_A)x} Z_A^2, \\
(\beta_6 + \beta_7 \pm i\beta_{26})(x) & \rightarrow (\beta_6 + \beta_7 \pm i\beta_{26})(Z_A x) e^{\pm \frac{2i}{3}(1-Z_A)x}, \\
(\beta_6 - \beta_7)(x) & \rightarrow (\beta_6 - \beta_7)(Z_A x), \\
\beta_{12}(x) & \rightarrow \beta_{12}(Z_A x), \\
(\beta_8 \pm i\beta_{25})(x) & \rightarrow (\beta_8 \pm i\beta_{25})(Z_A x) e^{\pm \frac{2i}{3}(1-Z_A)x}, \\
(\beta_{52} \mp i\beta_{53})(x) & \rightarrow (\beta_{52} \mp i\beta_{53})(Z_A x) e^{\pm \frac{i}{3}(1-Z_A)x} Z_A.
\end{aligned}$$

Wir reskalieren diese Potentiale wie folgt:

$$\begin{aligned}
(\bar{\beta}_4 \pm i\bar{\beta}_{22})(x) & = (\beta_4 \pm i\beta_{22})\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right) e^{\mp \frac{i}{3}(\sqrt{6} - \frac{1}{\sqrt{\lambda}})x}, \\
(\bar{\beta}_5 \pm i\bar{\beta}_{21})(x) & = (\beta_5 \pm i\beta_{21})\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right) e^{\mp \frac{i}{3}(\sqrt{6} - \frac{1}{\sqrt{\lambda}})x},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2\bar{\beta}_5 + 3\bar{\beta}_{18} \mp 2i\bar{\beta}_{21} \pm 3i\bar{\beta}_{23})(x) &= (2\beta_5 + 3\beta_{18} \mp 2i\beta_{21} \pm 3i\beta_{23})\left(\frac{f}{\sqrt{\lambda}}x\right) \\
&\quad \times e^{\pm\frac{i}{3}(\sqrt{6}-\frac{f}{\sqrt{\lambda}})x} \frac{f}{\sqrt{6\lambda}}, \\
(3\bar{\beta}_4 + \bar{\beta}_5 - 9\bar{\beta}_{17} + 3\bar{\beta}_{18} \mp i\bar{\beta}_{21} \\
\mp 3i\bar{\beta}_{22} \pm 3i\bar{\beta}_{23} \mp 9i\bar{\beta}_{24})(x) &= (3\beta_4 + \beta_5 - 9\beta_{17} + 3\beta_{18} \mp i\beta_{21} \\
&\quad \mp 3i\beta_{22} \pm 3i\beta_{23} \mp 9i\beta_{24})\left(\frac{f}{\sqrt{\lambda}}x\right) \\
&\quad \times e^{\pm\frac{i}{3}(\sqrt{6}-\frac{f}{\sqrt{\lambda}})x} \frac{f^2}{6\lambda}, \\
(\bar{\beta}_6 + \bar{\beta}_7 + \pm i\bar{\beta}_{26})(x) &= (\beta_6 + \beta_7 \pm i\beta_{26})\left(\frac{f}{\sqrt{\lambda}}x\right) e^{\pm\frac{2i}{3}(\sqrt{6}-\frac{f}{\sqrt{\lambda}})x}, \\
(\bar{\beta}_6 - \bar{\beta}_7)(x) &= (\beta_6 - \beta_7)\left(\frac{f}{\sqrt{\lambda}}x\right), \\
\bar{\beta}_{12}(x) &= \beta_{12}\left(\frac{f}{\sqrt{\lambda}}x\right), \\
(\bar{\beta}_8 \pm i\bar{\beta}_{25})(x) &= (\beta_8 \pm i\beta_{25})\left(\frac{f}{\sqrt{\lambda}}x\right) e^{\pm\frac{2i}{3}(\sqrt{6}-\frac{f}{\sqrt{\lambda}})x}, \\
(\bar{\beta}_{52} \mp i\bar{\beta}_{53})(x) &= (\beta_{52} \mp i\beta_{53})\left(\frac{f}{\sqrt{\lambda}}x\right) e^{\pm\frac{i}{3}(\sqrt{6}-\frac{f}{\sqrt{\lambda}})x} \frac{f}{\sqrt{6\lambda}}.
\end{aligned}$$

Auch hier werden wir von nun anstelle  $\bar{\beta}_i$  immer die Form  $\beta_i$  für die reskalierten Potentiale verwenden.

### A.3 Alternative Formulierung

Die Wahl der Konstruktionselemente der Lagrangedichte in Kapitel 3.1 ist nicht zwingend vorgegeben. Alternativ zu den kovarianten Ableitungen auf das Feld  $\Theta$  könnte man auch partielle Ableitungen auf das invariante Feld  $\bar{\psi}$  benutzen. Dadurch würden Teile des kinetischen Terms des Singlettfeldes zwischen den Termen der Lagrangedichte verschoben. Die Lagrangedichte bis zur zweiten chiralen Ordnung lautet dann:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{(0+2)} &= -A_0 + A_1\langle u_\mu u^\mu \rangle + A_2\langle \chi_+ \rangle + iA_3\langle \chi_- \rangle + A_4\langle u_\mu \rangle\langle u^\mu \rangle \\
&\quad + iA_5\langle u_\mu \rangle\partial^\mu \bar{\psi} + A_6\partial_\mu \bar{\psi}\partial^\mu \bar{\psi}.
\end{aligned}$$

Man kann die Funktionen  $V_i$  und  $A_i$  direkt aufeinander abbilden. Hier ergibt sich bis zweiter chiraler Ordnung:

$$\begin{aligned}
A_4 &= V_4 + V_5 - V_6, \\
A_5 &= V_5 - 2V_6, \\
A_6 &= V_6.
\end{aligned}$$

Alle anderen Funktionen ändern sich nicht. Analog läßt sich das auch in allen weiteren Ordnungen angeben.

## A.4 Vergleich der Ansätze aus den Kapiteln 2.1.1 und 3.1

Ausgehend von den Lagrangedichten (2.4) und (3.2) wollen wir die Konstanten der beiden Ansätze aufeinander abbilden. In [Bora 00] wurde deren Äquivalenz gezeigt. Mit Hilfe der in Anhang A.3 beschriebenen Alternative sieht man das relativ einfach, da (siehe Gleichung (2.5))  $Q = \frac{af_s^2}{2}\bar{\psi}$ . Es ergibt sich:

Kapitel 2.1.1	Kapitel A.3	Kapitel 3.1
$\frac{af_s^2}{4}$	$a_0^{(2)}$	$v_0^{(2)}$
$\frac{f^2}{4}$	$a_1^{(0)}$	$v_1^{(0)}$
$v_2 \frac{a^2 f_s^4}{4}$	$-a_1^{(2)}$	$-v_1^{(2)}$
$\frac{f^2}{4}$	$a_2^{(0)}$	$v_2^{(0)}$
$v_3 \frac{a^2 f_s^4}{4}$	$-a_2^{(2)}$	$-v_2^{(2)}$
$v_1 \frac{af_s^2}{2}$	$a_3^{(1)}$	$v_3^{(1)}$
$\frac{f^2}{4}b$	$a_4^{(0)}$	$v_4^{(0)} + v_5^{(0)} - v_6^{(0)}$
$v_4 \frac{a^2 f_s^4}{4}$	$a_4^{(2)}$	$v_4^{(2)} + v_5^{(2)} - v_6^{(2)}$
$v_5 \frac{af_s^2}{2}$	$a_5^{(0)}$	$v_5^{(0)} - 2v_6^{(0)}$
$v_6 \frac{a^2 f_s^4}{4}$	$a_6^{(0)}$	$v_6^{(0)}$

# Anhang B

## Potentiale

### B.1 $C_{ij}^{(L\pm)}$

#### B.1.1 $s$ -Welle

Wir geben hier die Potentiale  $C_{ij}^{(0+)}$  in der um das  $\eta'$  erweiterten Form an. Die  $SU(3)$ -Variante erhält man einfach für  $\vartheta = 0$  durch Weglassen der Potentiale des  $\eta'N$ -Kanals, also für  $i, j = 0$ .

Es seien zwei Abkürzungen vorangestellt:

$$S_{\phi\phi'} \equiv \frac{E_\phi E_{\phi'}}{2\tilde{M}},$$
$$U_{\phi\phi'} \equiv \frac{1}{3\tilde{M}} \left( 2m_\phi^2 + 2m_{\phi'}^2 + \frac{m_\phi^2 m_{\phi'}^2}{E_\phi E_{\phi'}} - \frac{7}{2} E_\phi E_{\phi'} \right).$$

Die Potentiale lauten:

$$C_{00}^{(0+)} = \left[ \frac{1}{12} (3F - D)^2 \sin^2 \vartheta + \frac{\sqrt{2}}{12} (3F - D)(D + \tilde{K}) \frac{f}{f_s} \sin 2\vartheta \right. \\ \left. + \frac{3}{2} (D + \tilde{K})^2 \left( \frac{f}{f_s} \right)^2 \cos^2 \vartheta \right] (S_{\eta'\eta'} + U_{\eta'\eta'}) \\ - 3\mathcal{C}a^2 \left( \frac{f}{f_s} \right)^2 \cos^2 \vartheta \\ + \left[ \left( d_F - \frac{5}{3} d_D - 2d_0 \right) \sin^2 \vartheta + \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{d_D}{3} - d_F \right) \frac{f}{f_s} \sin 2\vartheta \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \left( -2d_0 - \frac{4}{3}d_D + 24d_K \right) \left( \frac{f}{f_s} \right)^2 \cos^2 \vartheta \Big] E_{\eta'} E_{\eta'} \\
& + \left[ \frac{16}{3}m_K^2(b_D - b_F + b_0) + 2m_\pi^2 \left( \frac{5}{3}b_F - b_D - \frac{2}{3}b_0 \right) \right] \sin^2 \vartheta \\
& + \frac{1}{2} \left[ \frac{\sqrt{2}}{2}m_\pi^2(3b_D - b_F + 4b_0) \right. \\
& \quad \left. + 2\sqrt{2}m_K^2(-b_D + b_F - b_0) \right] \frac{f}{f_s} \sin 2\vartheta \\
& + \frac{4}{3} \left[ m_\pi^2(2b_F + b_0) + 2m_K^2(b_D - b_F + b_0) \right] \left( \frac{f}{f_s} \right)^2 \cos^2 \vartheta, \\
C_{01}^{(0+)} & = \frac{1}{4}(F + D) \left( (3F - D) \sin \vartheta + 2\sqrt{2}(D + \tilde{K}) \cos \vartheta \frac{f}{f_s} \right) (S_{\eta'\pi} + U_{\eta'\pi}) \\
& - (d_D + d_F) \left( \sin \vartheta + \sqrt{2} \cos \vartheta \frac{f}{f_s} \right) E_{\eta'} E_\pi \\
& + m_\pi^2(b_D + b_F) \left( 2 \sin \vartheta + 2\sqrt{2} \cos \vartheta \frac{f}{f_s} \right), \\
C_{02}^{(0+)} & = \left[ \frac{1}{24}(3F - D)^2 \sin 2\vartheta - \frac{\sqrt{2}}{6}(3F - D)(D + \tilde{K}) \frac{f}{f_s} \cos 2\vartheta \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{3}(D + \tilde{K})^2 \left( \frac{f}{f_s} \right)^2 \sin 2\vartheta \right] (S_{\eta'\eta} + U_{\eta'\eta}) \\
& + \frac{3}{2} \mathcal{C} a^2 \left( \frac{f}{f_s} \right)^2 \sin 2\vartheta \\
& + \left[ \frac{1}{2} \left( d_F - \frac{5}{3}d_D - 2d_0 \right) \sin 2\vartheta - \sqrt{2} \left( \frac{d_D}{3} - d_F \right) \frac{f}{f_s} \cos 2\vartheta \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{2} \left( -2d_0 - \frac{4}{3}d_D + 24d_K \right) \left( \frac{f}{f_s} \right)^2 \sin 2\vartheta \right] E_{\eta'} E_\eta \\
& + \frac{1}{2} \left[ \frac{16}{3}m_K^2(b_D - b_F + b_0) + 2m_\pi^2 \left( \frac{5}{3}b_F - b_D - \frac{2}{3}b_0 \right) \right] \sin 2\vartheta \\
& - \left[ \frac{\sqrt{2}}{2}m_\pi^2(3b_D - b_F + 4b_0) \right. \\
& \quad \left. + 2\sqrt{2}m_K^2(-b_D + b_F - b_0) \right] \frac{f}{f_s} \cos 2\vartheta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2}{3} \left[ m_\pi^2 (2b_F + b_0) + 2m_K^2 (b_D - b_F + b_0) \right] \left( \frac{f}{f_s} \right)^2 \sin 2\vartheta, \\
C_{03}^{(0+)} = & \left[ \left( \frac{1}{12} D^2 - \frac{3}{4} F^2 \right) \sin \vartheta - \frac{\sqrt{2}}{6} (3F + D)(D + \tilde{K}) \cos \vartheta \frac{f}{f_s} \right] S_{\eta'K} \\
& + \left[ \frac{1}{2} D \left( F + \frac{1}{3} D \right) \sin \vartheta - \frac{\sqrt{2}}{6} (3F + D)(D + \tilde{K}) \cos \vartheta \frac{f}{f_s} \right] U_{\eta'K} \\
& - \left[ \left( \frac{1}{6} d_D + \frac{1}{2} d_F + d_1 \right) \sin \vartheta - \frac{\sqrt{2}}{3} (d_D + 3d_F) \cos \vartheta \frac{f}{f_s} \right] E_{\eta'} E_K \\
& + (b_D + 3b_F) \left[ \left( \frac{5}{6} m_K^2 - \frac{1}{2} m_\pi^2 \right) \sin \vartheta - \frac{2}{3} \sqrt{2} m_K^2 \cos \vartheta \frac{f}{f_s} \right] \\
& + \frac{3}{8} (E_K + \sin \vartheta E_{\eta'}) + \frac{3}{16\overset{\circ}{M}} [E_K^2 - m_K^2 + \sin \vartheta (E_{\eta'}^2 - m_{\eta'}^2)], \\
C_{04}^{(0+)} = & \left[ \frac{1}{4} (3F - D)(D - F) \sin \vartheta + \frac{1}{\sqrt{2}} (D - F)(D + \tilde{K}) \cos \vartheta \frac{f}{f_s} \right] S_{\eta'K} \\
& + \left[ \frac{1}{2} D(D - F) \sin \vartheta + \frac{1}{\sqrt{2}} (D - F)(D + \tilde{K}) \cos \vartheta \frac{f}{f_s} \right] U_{K\eta} \\
& + (d_D - d_F) \left[ \frac{1}{2} \sin \vartheta - \sqrt{2} \cos \vartheta \frac{f}{f_s} \right] E_{\eta'} E_K \\
& + (b_D - b_F) \left[ \left( \frac{3}{2} m_\pi^2 - \frac{5}{2} m_K^2 \right) \sin \vartheta + 2\sqrt{2} m_K^2 \cos \vartheta \frac{f}{f_s} \right] \\
& + \frac{3}{8} (E_K + \sin \vartheta E_{\eta'}) + \frac{3}{16\overset{\circ}{M}} [E_K^2 - m_K^2 + \sin \vartheta (E_{\eta'}^2 - m_{\eta'}^2)], \\
C_{11}^{(0+)} = & -E_\pi + \frac{1}{2\overset{\circ}{M}} (m_\pi^2 - E_\pi^2) + 2m_\pi^2 (b_D + b_F + 2b_0) \\
& - E_\pi^2 (d_D + d_F + 2d_0) + \frac{g_A^2}{4} (3S_{\pi\pi} - U_{\pi\pi}), \\
C_{12}^{(0+)} = & \frac{1}{4} (F + D) \left( (3F - D) \cos \vartheta \right. \\
& \left. - 2\sqrt{2} (D + \tilde{K}) \sin \vartheta \frac{f}{f_s} \right) (S_{\pi\eta} + U_{\pi\eta}) \\
& - (d_D + d_F) \left( \cos \vartheta - \sqrt{2} \sin \vartheta \frac{f}{f_s} \right) E_\pi E_\eta \\
& + m_\pi^2 (b_D + b_F) \left[ 2 \cos \vartheta - 2\sqrt{2} \sin \vartheta \frac{f}{f_s} \right], \\
C_{13}^{(0+)} = & \frac{3}{8} (E_\pi + E_K) + \frac{3}{16\overset{\circ}{M}} (E_\pi^2 - m_\pi^2 + E_K^2 - m_K^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}(m_K^2 + m_\pi^2)(b_D + 3b_F) + \frac{1}{2}E_\pi E_K(d_D + 3d_F) \\
& -\frac{g_A}{4}(3F + D)S_{\pi K} + \frac{D}{2}(D - F)U_{\pi K}, \\
C_{14}^{(0+)} = & -\frac{1}{8}(E_\pi + E_K) - \frac{1}{16\tilde{M}}(E_\pi^2 - m_\pi^2 + E_K^2 - m_K^2) \\
& + \frac{1}{2}(b_F - b_D)(m_\pi^2 + m_K^2) + \frac{1}{2}E_\pi E_K(d_D - d_F - 2d_1) \\
& + \frac{3}{4}(D^2 - F^2)S_{\pi K} + \left(\frac{DF}{2} - \frac{D^2}{6} - F^2\right)U_{\pi K}, \\
C_{22}^{(0+)} = & \left[ \frac{1}{12}(3F - D)^2 \cos^2 \vartheta - \frac{\sqrt{2}}{12}(3F - D)(D + \tilde{K}) \frac{f}{f_s} \sin 2\vartheta \right. \\
& \left. + \frac{3}{2}(D + \tilde{K})^2 \left(\frac{f}{f_s}\right)^2 \sin^2 \vartheta \right] (S_{\eta\eta} + U_{\eta\eta}) \\
& - 3\mathcal{C}a^2 \left(\frac{f}{f_s}\right)^2 \sin^2 \vartheta \\
& + \left[ \left(d_F - \frac{5}{3}d_D - 2d_0\right) \cos^2 \vartheta - \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{d_D}{3} - d_F\right) \frac{f}{f_s} \sin 2\vartheta \right. \\
& \left. + \left(-2d_0 - \frac{4}{3}d_D + 24d_K\right) \left(\frac{f}{f_s}\right)^2 \sin^2 \vartheta \right] E_\eta E_\eta \\
& + \left[ \frac{16}{3}m_K^2(b_D - b_F + b_0) + 2m_\pi^2\left(\frac{5}{3}b_F - b_D - \frac{2}{3}b_0\right) \right] \cos^2 \vartheta \\
& - \frac{1}{2} \left[ \frac{\sqrt{2}}{2}m_\pi^2(3b_D - b_F + 4b_0) \right. \\
& \left. + 2\sqrt{2}m_K^2(-b_D + b_F - b_0) \right] \frac{f}{f_s} \sin 2\vartheta \\
& + \frac{4}{3} \left[ m_\pi^2(2b_F + b_0) + 2m_K^2(b_D - b_F + b_0) \right] \left(\frac{f}{f_s}\right)^2 \sin^2 \vartheta, \\
C_{23}^{(0+)} = & \left[ \left(\frac{1}{12}D^2 - \frac{3}{4}F^2\right) \cos \vartheta + \frac{\sqrt{2}}{6}(3F + D)(D + \tilde{K}) \sin \vartheta \frac{f}{f_s} \right] S_{\eta K} \\
& + \left[ \frac{1}{2}D \left(F + \frac{1}{3}D\right) \cos \vartheta + \frac{\sqrt{2}}{6}(3F + D)(D + \tilde{K}) \sin \vartheta \frac{f}{f_s} \right] U_{\eta K}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left[ \left( \frac{1}{6}d_D + \frac{1}{2}d_F + d_1 \right) \cos \vartheta + \frac{\sqrt{2}}{3}(d_D + 3d_F) \sin \vartheta \frac{f}{f_s} \right] E_\eta E_K \\
& + (b_D + 3b_F) \left[ \left( \frac{5}{6}m_K^2 - \frac{1}{2}m_\pi^2 \right) \cos \vartheta + \frac{2}{3}\sqrt{2}m_K^2 \sin \vartheta \frac{f}{f_s} \right] \\
& + \frac{3}{8}(E_K + \cos \vartheta E_\eta) + \frac{3}{16\overset{\circ}{M}} [E_K^2 - m_K^2 + \cos \vartheta (E_\eta^2 - m_\eta^2)], \\
C_{24}^{(0+)} & = \left[ \frac{1}{4}(3F - D)(D - F) \cos \vartheta - \frac{1}{\sqrt{2}}(D - F)(D + \tilde{K}) \sin \vartheta \frac{f}{f_s} \right] S_{\eta K} \\
& + \left[ \frac{1}{2}D(D - F) \cos \vartheta - \frac{1}{\sqrt{2}}(D - F)(D + \tilde{K}) \sin \vartheta \frac{f}{f_s} \right] U_{\eta K} \\
& + (d_D - d_F) \left[ \frac{1}{2} \cos \vartheta + \sqrt{2} \sin \vartheta \frac{f}{f_s} \right] E_\eta E_K \\
& + (b_D - b_F) \left[ \left( \frac{3}{2}m_\pi^2 - \frac{5}{2}m_K^2 \right) \cos \vartheta - 2\sqrt{2}m_K^2 \sin \vartheta \frac{f}{f_s} \right] \\
& + \frac{3}{8}(E_K + \cos \vartheta E_\eta) + \frac{3}{16\overset{\circ}{M}} [E_K^2 - m_K^2 + \cos \vartheta (E_\eta^2 - m_\eta^2)], \\
C_{33}^{(0+)} & = \left( \frac{10}{3}b_D + 4b_0 \right) m_K^2 - E_K^2 (2d_0 + \frac{5d_D}{3}) \\
& + \frac{3}{4} \left( F + \frac{D}{3} \right)^2 S_{KK} + \frac{3}{4} \left( F - \frac{D}{3} \right)^2 U_{KK}, \\
C_{34}^{(0+)} & = 2m_K^2 b_D - E_K^2 d_D + \frac{1}{4}(3F + D)(F - D)S_{KK} + \frac{g_A}{4}(3F - D)U_{KK}, \\
C_{44}^{(0+)} & = -E_K - \frac{1}{2\overset{\circ}{M}}(E_K^2 - m_K^2) + 2m_K^2(b_D - 2b_F + 2b_0) \\
& + E_K^2(2d_F - d_D - 2d_0) + \frac{3}{4}(D - F)^2 S_{KK} - \frac{g_A^2}{4}U_{KK}, \\
C_{55}^{(0+)} & = \frac{E_\pi}{2} + \frac{1}{4\overset{\circ}{M}}(E_\pi^2 - m_\pi^2) + 2m_\pi^2(b_D + b_F + 2b_0) \\
& - E_\pi^2(d_D + d_F + 2d_0) + \frac{g_A^2}{2}U_{\pi\pi}, \\
C_{56}^{(0+)} & = \frac{1}{4}(E_\pi + E_K) + \frac{1}{8\overset{\circ}{M}}(E_\pi^2 - m_\pi^2 + E_K^2 - m_K^2) + (m_\pi^2 + m_K^2)(b_D - b_F) \\
& + E_\pi E_K(d_F - d_D - d_1) + \left( \frac{F^2}{2} - DF - \frac{D^2}{6} \right) U_{\pi K}, \\
C_{66}^{(0+)} & = \frac{E_K}{2} + \frac{1}{4\overset{\circ}{M}}(E_K^2 - m_K^2) + 2m_K^2(b_D + b_F + 2b_0) \\
& - E_K^2(d_F + d_D + 2d_0) + \frac{g_A^2}{2}U_{KK}.
\end{aligned}$$

### B.1.2 $p$ -Wellen

Auch hier führen wir eine Abkürzung ein:

$$P_{\phi\phi'} = \frac{1}{6E_\phi E_{\phi'}} \left( E_\phi + E_{\phi'} + \frac{2E_\phi E_{\phi'} + m_\phi^2 + m_{\phi'}^2}{2M} \right).$$

#### $p$ - $\frac{1}{2}$ -Kanäle

$$C_{11}^{(1-)} = -\frac{1}{2M} - \frac{1}{3}(g_D + g_F + 2g_0 + 4h_D + 4h_F) + 2(D + F)^2 P_{\pi\pi},$$

$$C_{12}^{(1-)} = -\frac{1}{3}(g_D + g_F) + (D + F)(3F - D)P_{\pi\eta},$$

$$C_{13}^{(1-)} = \frac{3}{8M} + \frac{1}{6}(g_D + 3g_F + 2h_D + 6h_F) - \frac{1}{4}(D^2 + 14DF + 9F^2)P_{\pi K},$$

$$C_{14}^{(1-)} = -\frac{1}{8M} + \frac{1}{6}(g_D - g_F - 2g_1 + 4h_1 + 2h_D - 2h_F) \\ + \frac{1}{12}(25D^2 + 6DF - 39F^2)P_{\pi K},$$

$$C_{22}^{(1-)} = \frac{1}{9}(3g_F - 5g_D - 6g_0) + \frac{1}{3}(D - 3F)^2 P_{\eta\eta},$$

$$C_{23}^{(1-)} = \frac{3}{8M} + \frac{1}{18}(12h_1 + 6h_D + 18h_F - g_D - 3g_F - 6g_1) \\ + \frac{1}{12}(5D^2 + 6DF - 27F^2)P_{\eta K},$$

$$C_{24}^{(1-)} = \frac{3}{8M} + \frac{1}{6}(g_D - g_F - 6h_D + 6h_F) + \frac{1}{4}(10DF - D^2 - 9F^2)P_{\eta K},$$

$$C_{33}^{(1-)} = -\frac{1}{9}(5g_D + 6g_0 + 6h_D) + \frac{1}{3}(D^2 + 3DF + 9F^2)P_{KK},$$

$$C_{34}^{(1-)} = \frac{1}{3}(2h_D - g_D) + (3F^2 - DF - D^2)P_{KK},$$

$$C_{44}^{(1-)} = -\frac{1}{2M} + \frac{1}{3}(2g_F - g_D - 2g_0 + 2h_D - 4h_F) \\ + (2D^2 - 5DF + 2F^2)P_{KK},$$

$$C_{55}^{(1-)} = \frac{1}{4M} + \frac{1}{3}(2h_D + 2h_F - g_D - g_F - 2g_0) + \frac{1}{2}(D + F)^2 P_{\pi\pi},$$

$$C_{56}^{(1-)} = \frac{1}{4M} + \frac{1}{3}(g_F - g_D - g_1 + 2h_1 - 2h_D + 2h_F) \\ + \frac{1}{6}(3F^2 - 6DF - D^2)P_{\pi K},$$

$$C_{66}^{(1-)} = \frac{1}{4M} + \frac{1}{3}(2h_D + 2h_F - g_D - g_F - 2g_0) + \frac{1}{2}(D + F)^2 P_{KK}.$$

### $p\text{-}\frac{3}{2}$ -Kanäle

$$C_{11}^{(1+)} = \frac{1}{3}(2h_D + 2h_F - g_D - g_F - 2g_0) + \frac{1}{2}(D + F)^2 P_{\pi\pi},$$

$$C_{12}^{(1+)} = -\frac{1}{3}(g_D + g_F) + \frac{1}{2}(D + F)(D - 3F)P_{\pi\eta},$$

$$C_{13}^{(1+)} = \frac{1}{6}(g_D + 3g_F - h_D - 3h_F) + D(F - D)P_{\pi K},$$

$$C_{14}^{(1+)} = \frac{1}{6}(g_D - g_F - 2g_1 - 2h_1 - h_D + h_F) \\ + \frac{1}{3}(D^2 - 3DF + 6F^2)P_{\pi K},$$

$$C_{22}^{(1+)} = \frac{1}{9}(3g_F - 5g_D - 6g_0) - \frac{1}{6}(D - 3F)^2 P_{\eta\eta},$$

$$C_{23}^{(1+)} = -\frac{1}{18}(6h_1 + 3h_D + 9h_F + g_D + 3g_F + 6g_1) - D\left(F + \frac{D}{3}\right)P_{\eta K},$$

$$C_{24}^{(1+)} = \frac{1}{6}(g_D - g_F + 3h_D - 3h_F) + D(F - D)P_{\eta K},$$

$$C_{33}^{(1+)} = \frac{1}{9}(3h_D - 5g_D - 6g_0) - \frac{1}{6}(D - 3F)^2 P_{KK},$$

$$C_{34}^{(1+)} = -\frac{1}{3}(h_D + g_D) + \frac{1}{2}(D + F)(D - 3F)P_{KK},$$

$$C_{44}^{(1+)} = \frac{1}{3}(2g_F - g_D - 2g_0 - h_D + 2h_F) + \frac{1}{2}(D + F)^2 P_{KK},$$

$$C_{55}^{(1+)} = -\frac{1}{3}(h_D + h_F + g_D + g_F + 2g_0) - (D + F)^2 P_{\pi\pi},$$

$$C_{56}^{(1+)} = \frac{1}{3}(g_F - g_D - g_1 - h_1 + h_D - h_F) + \frac{1}{3}(D^2 + 6DF - 3F^2)P_{\pi K},$$

$$C_{66}^{(1+)} = -\frac{1}{3}(h_D + h_F + g_D + g_F + 2g_0) - (D + F)^2 P_{KK}.$$

## B.2 $B_i^{(E^{(L+)})}$ und $B_i^{(M^{(1\pm)})}$

Wir geben hier die Potentiale  $B_i^{(\mathcal{M})}$  mit  $\mathcal{M} \in (E^{(L+)}, M^{(1\pm)})$  in der um das  $\eta'$  erweiterten Form an. Die  $SU(3)$ -Variante erhält man einfach mit  $\vartheta = 0$ .

Der  $\eta_0$ -Kanal (0) ist dann einfach wegzulassen.

$$\begin{aligned}
B_0^{(\mathcal{M})} &= \frac{eM_N}{8\pi f_s \sqrt{3s}} (2D + 2\tilde{K}) \left\{ \cos \vartheta Y_{\eta'}^{(\mathcal{M})}(\kappa_p) - \sin \vartheta Y_{\eta}^{(\mathcal{M})}(\kappa_p) \right\}, \\
B_1^{(\mathcal{M})} &= \frac{eM_N}{8\pi f \sqrt{3s}} (D + F) \left\{ 2X_{\pi}^{(\mathcal{M})}(\kappa_n) + Y_{\pi}^{(\mathcal{M})}(\kappa_p) \right\}, \\
B_2^{(\mathcal{M})} &= \frac{eM_N}{8\pi f \sqrt{3s}} (3F - D) \left\{ \cos \vartheta Y_{\eta}^{(\mathcal{M})}(\kappa_p) + \sin \vartheta Y_{\eta'}^{(\mathcal{M})}(\kappa_p) \right\}, \\
B_3^{(\mathcal{M})} &= \frac{e\sqrt{M_N M_{\Lambda}}}{8\pi f \sqrt{3s}} \left\{ (-D - 3F) X_K^{(\mathcal{M})}(\kappa_{\Lambda}) + (F - D) \frac{\kappa_{\Lambda\Sigma^0} \beta^{(\mathcal{M})}}{2\sqrt{3\dot{M}}} \right\}, \\
B_4^{(\mathcal{M})} &= \frac{e\sqrt{M_N M_{\Sigma}}}{8\pi f \sqrt{3s}} \left\{ (D - F) \left[ X_K^{(\mathcal{M})}(\kappa_{\Sigma^0}) + 2Y_K^{(\mathcal{M})}(\kappa_{\Sigma^+}) \right] \right. \\
&\quad \left. + (D + 3F) \frac{\kappa_{\Lambda\Sigma^0} \beta^{(\mathcal{M})}}{6\sqrt{3\dot{M}}} \right\}, \\
B_5^{(\mathcal{M})} &= \frac{eM_N}{4\pi f \sqrt{6s}} (D + F) \left\{ Y_{\pi}^{(\mathcal{M})}(\kappa_p) - X_{\pi}^{(\mathcal{M})}(\kappa_n) \right\}, \\
B_6^{(\mathcal{M})} &= \frac{e\sqrt{M_N M_{\Sigma}}}{4\pi f \sqrt{6s}} \left\{ (D - F) \left[ X_K^{(\mathcal{M})}(\kappa_{\Sigma^0}) - Y_K^{(\mathcal{M})}(\kappa_{\Sigma^+}) \right] \right. \\
&\quad \left. + (D + 3F) \frac{\kappa_{\Lambda\Sigma^0} \beta^{(\mathcal{M})}}{6\sqrt{3\dot{M}}} \right\}.
\end{aligned}$$

Dabei verwendeten wir die Abkürzungen

$$\begin{aligned}
Y_{\phi}^{(E_{0+})}(\kappa_+) &= -\frac{1}{3\dot{M}} \left( 2E_{\phi} + \frac{m_{\phi}^2}{E_{\phi}} \right), \\
Y_{\phi}^{(E_{1+})}(\kappa_+) &= 0, \\
Y_{\phi}^{(M_{1-})}(\kappa_+) &= -\frac{4 + 3\kappa_p + \kappa_+}{6\dot{M}}, \\
Y_{\phi}^{(M_{1+})}(\kappa_+) &= \frac{1 + \kappa_+}{3\dot{M}}
\end{aligned}$$

für die Photoproduktion neutraler und

$$\begin{aligned}
X_{\phi}^{(E_{0+})}(\kappa_0) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4\dot{M}} \left( 2E_{\phi} + \frac{m_{\phi}^2}{E_{\phi}} \right) + \frac{1}{2E_{\phi}} \left( 1 + \frac{m_{\phi}^2}{2\dot{M}E_{\phi}} \right) L_{\phi}, \\
X_{\phi}^{(E_{1+})}(\kappa_0) &= \frac{1}{12(E_{\phi}^2 - m_{\phi}^2)} \left\{ E_{\phi} - \frac{4m_{\phi}^2}{E_{\phi}} - \frac{m_{\phi}^2}{\dot{M}} \left( 1 + \frac{2m_{\phi}^2}{E_{\phi}^2} \right) \right. \\
&\quad \left. + 3 \left( 1 + \frac{m_{\phi}^2}{\dot{M}E_{\phi}} \right) L_{\phi} \right\},
\end{aligned}$$

$$X_\phi^{(M_{1^-})}(\kappa_0) = \frac{1}{2(E_\phi^2 - m_\phi^2)} \left\{ E_\phi + \frac{m_\phi^2 - E_\phi^2}{3M} (3 + 3\kappa_p + \kappa_0) - L_\phi \right\},$$

$$X_\phi^{(M_{1^+})}(\kappa_0) = \frac{1}{4(E_\phi^2 - m_\phi^2)} \left\{ -E_\phi + \frac{4\kappa_0}{3M} (E_\phi^2 - m_\phi^2) + L_\phi \right\}$$

für die Produktion geladener Mesonen. Dabei ist

$$L_\phi = \frac{m_\phi^2}{\sqrt{E_\phi^2 - m_\phi^2}} \ln \frac{E_\phi + \sqrt{E_\phi^2 - m_\phi^2}}{m_\phi} = \frac{m_\phi^2}{\sqrt{E_\phi^2 - m_\phi^2}} \arccos \frac{E_\phi}{m_\phi}.$$

Desweiteren ist  $\beta^{(E^{(0+)})} = \beta^{(E^{(1+)})} = 0$ ,  $\beta^{(M^{(1^-)})} = 1$  und  $\beta^{(M^{(1+)})} = -2$ .



# Anhang C

## Explizite Ergebnisse der $U(3)$ -Rechnung

### C.1 Massen

In diesem Anhang führen wir die Koeffizienten  $C_\phi^{ab}$  und  $D_\phi^{ab}$  aus der Gleichung (3.6) auf.

$$\begin{aligned} C_\pi^{\pi\pi} &= \frac{1}{2}, \\ C_\pi^{\pi\eta} &= -\frac{1}{6f^2}(f^2 \cos^2 \vartheta - (\sqrt{2}f^2 + 4\sqrt{3}v_3^{(1)}) \sin(2\vartheta) \\ &\quad + 2(f^2 + 12(v_1^{(2)} - v_2^{(2)}) + 4\sqrt{6}v_3^{(1)}) \sin^2 \vartheta), \\ C_\pi^{\pi\eta'} &= -\frac{1}{6f^2}(f^2 \sin^2 \vartheta + (\sqrt{2}f^2 + 4\sqrt{3}v_3^{(1)}) \sin(2\vartheta) \\ &\quad + 2(f^2 + 12(v_1^{(2)} - v_2^{(2)}) + 4\sqrt{6}v_3^{(1)}) \cos^2 \vartheta), \\ C_K^{\pi\eta} &= \frac{\cos \vartheta}{12f^2}(f^2 \cos \vartheta + 2(\sqrt{2}f^2 + 4\sqrt{3}v_3^{(1)}) \sin \vartheta), \\ C_K^{\pi\eta'} &= \frac{\sin \vartheta}{12f^2}(f^2 \sin \vartheta - 2(\sqrt{2}f^2 + 4\sqrt{3}v_3^{(1)}) \cos \vartheta), \\ C_K^{K\eta} &= -\frac{\sin \vartheta}{3f^2}((f^2 + 4(3(v_1^{(2)} - v_2^{(2)}) + \sqrt{6}v_3^{(1)})) \sin \vartheta \\ &\quad + (\sqrt{2}f^2 + 4\sqrt{3}v_3^{(1)}) \cos \vartheta), \\ C_K^{K\eta'} &= -\frac{\cos \vartheta}{3f^2}((f^2 + 4(3(v_1^{(2)} - v_2^{(2)}) + \sqrt{6}v_3^{(1)})) \cos \vartheta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - (\sqrt{2}f^2 + 4\sqrt{3}v_3^{(1)}) \sin \vartheta), \\
C_K^{\eta\eta} &= \frac{\cos^2 \vartheta}{4}, \\
C_K^{\eta'\eta'} &= \frac{\sin^2 \vartheta}{4}, \\
C_\eta^{\pi\pi} &= -\frac{1}{2f^2} (f^2 \cos^2 \vartheta - (\sqrt{2}f^2 + 4\sqrt{3}v_3^{(1)}) \sin(2\vartheta) \\
& \quad + 2(f^2 + 12(v_1^{(2)} - v_2^{(2)}) + 4\sqrt{6}v_3^{(1)}) \sin^2 \vartheta), \\
C_\eta^{\pi K} &= \frac{\cos \vartheta}{3f^2} (f^2 \cos \vartheta + 2(\sqrt{2}f^2 + 4\sqrt{3}v_3^{(1)}) \sin \vartheta), \\
C_\eta^{\pi\eta} &= \frac{1}{18f^2} (7f^2 \cos^4 \vartheta + 2(5\sqrt{2}f^2 + 4\sqrt{3}v_3^{(1)}) \cos^2 \vartheta \sin(2\vartheta) \\
& \quad + 3(f^2 + 4\sqrt{6}v_3^{(1)} - 12v_2^{(2)}) \sin^2(2\vartheta) \\
& \quad + 8(\sqrt{2}(f^2 - 36v_2^{(2)}) + 12\sqrt{3}(v_3^{(1)} - 3v_3^{(3)})) \sin^2 \vartheta \sin(2\vartheta) \\
& \quad - 2(f^2 - 72(v_2^{(2)} - 3v_2^{(4)}) + 8\sqrt{6}(v_3^{(1)} - 9v_3^{(3)})) \sin^4 \vartheta), \\
C_\eta^{\pi\eta'} = C_{\eta'}^{\pi\eta} &= \frac{1}{144f^2} (3(3f^2 + 32v_2^{(2)} - 144v_2^{(4)} + 48\sqrt{6}v_3^{(3)}) \\
& \quad + (7f^2 - 16(18v_2^{(2)} - 27v_2^{(4)} - \sqrt{6}(4v_3^{(1)} - 9v_3^{(3)}))) \cos(4\vartheta) \\
& \quad - 4(\sqrt{2}(f^2 + 144v_2^{(2)}) - 4\sqrt{3}(7v_3^{(1)} - 36v_3^{(3)})) \sin(4\vartheta)), \\
C_\eta^{KK} &= -\frac{4 \sin \vartheta}{3f^2} ((f^2 + 4(3(v_1^{(2)} - v_2^{(2)}) + \sqrt{6}v_3^{(1)})) \sin \vartheta \\
& \quad + (\sqrt{2}f^2 + 4\sqrt{3}v_3^{(1)}) \cos \vartheta), \\
C_\eta^{K\eta} &= -\frac{2}{9f^2} (4f^2 \cos^4 \vartheta + 4(\sqrt{2}f^2 + 4\sqrt{3}v_3^{(1)}) \cos^2 \vartheta \sin(2\vartheta) \\
& \quad + 3(f^2 + 4\sqrt{6}v_3^{(1)} - 12v_2^{(2)}) \sin^2(2\vartheta) \\
& \quad + 2(\sqrt{2}(f^2 - 36v_2^{(2)}) + 12\sqrt{3}(v_3^{(1)} - 3v_3^{(3)})) \sin^2 \vartheta \sin(2\vartheta) \\
& \quad + (f^2 - 8(9(v_2^{(2)} - 3v_2^{(4)}) - \sqrt{6}(v_3^{(1)} - 9v_3^{(3)}))) \sin^4 \vartheta), \\
C_\eta^{K\eta'} = C_{\eta'}^{K\eta} &= -\frac{1}{36f^2} (3(3f^2 - 8(5v_2^{(2)} - 9v_2^{(4)} - \sqrt{6}(v_3^{(1)} - 3v_3^{(3)}))) \\
& \quad + (7f^2 - 8(9v_2^{(2)} + 27v_2^{(4)} - \sqrt{6}(5v_3^{(1)} + 9v_3^{(3)}))) \cos(4\vartheta) \\
& \quad - 4(\sqrt{2}(f^2 + 36v_2^{(2)}) - 4\sqrt{3}(v_3^{(1)} - 9v_3^{(3)})) \sin(4\vartheta)), \\
C_\eta^{\eta K} &= \cos^2 \vartheta, \\
C_\eta^{\eta\eta} &= -\frac{4 \sin^2 \vartheta}{f^2} (2v_1^{(2)} - 3v_4^{(2)} + 3v_4^{(2)} \cos(2\vartheta)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{\eta}^{\eta\eta'} &= C_{\eta'}^{\eta\eta} = -\frac{2\cos^2\vartheta}{f^2}(2v_1^{(2)} - 3v_4^{(2)} + 3v_4^{(2)}\cos(2\vartheta)), \\
C_{\eta}^{\eta'\eta'} &= C_{\eta'}^{\eta'\eta} = -\frac{2\sin^2\vartheta}{f^2}(2v_1^{(2)} - 3v_4^{(2)} - 3v_4^{(2)}\cos(2\vartheta)), \\
C_{\eta'}^{\pi\pi} &= -\frac{1}{2f^2}(f^2\sin^2\vartheta + (\sqrt{2}f^2 + 4\sqrt{3}v_3^{(1)})\sin(2\vartheta) \\
&\quad + 2(f^2 + 4(3v_1^{(2)} - 3v_2^{(2)} + \sqrt{6}v_3^{(1)}))\cos^2\vartheta), \\
C_{\eta'}^{\pi K} &= \frac{\sin\vartheta}{3f^2}(f^2\sin\vartheta - 2(\sqrt{2}f^2 + 4\sqrt{3}v_3^{(1)})\cos\vartheta), \\
C_{\eta'}^{\pi\eta'} &= \frac{1}{18f^2}(7f^2\sin^4\vartheta - 2(5\sqrt{2}f^2 + 4\sqrt{3}v_3^{(1)})\sin^2\vartheta\sin(2\vartheta) \\
&\quad + 3(f^2 + 4\sqrt{3}v_3^{(1)} - 12v_2^{(2)})\sin^2(2\vartheta) \\
&\quad - 8(\sqrt{2}(f^2 - 36v_2^{(2)}) + 12\sqrt{3}(v_3^{(1)} + 3v_3^{(3)}))\cos^2\vartheta\sin(2\vartheta) \\
&\quad - 2(f^2 - 8(9v_2^{(2)} - 27v_2^{(4)} - \sqrt{6}(v_3^{(1)} - 9v_3^{(3)})))\cos^4\vartheta), \\
C_{\eta'}^{KK} &= -\frac{4\cos\vartheta}{3f^2}((f^2 + 4(3v_1^{(2)} - 3v_2^{(2)} + \sqrt{6}v_3^{(1)}))\cos\vartheta \\
&\quad - (\sqrt{2}f^2 + 4\sqrt{3}v_3^{(1)})\sin\vartheta), \\
C_{\eta'}^{K\eta'} &= -\frac{1}{9f^2}(8f^2\sin^4\vartheta - 8(\sqrt{2}f^2 + 4\sqrt{3}v_3^{(1)})\sin^2\vartheta\sin(2\vartheta) \\
&\quad + 6(f^2 + 4\sqrt{6}v_3^{(1)} - 12v_2^{(2)})\sin^2(2\vartheta) \\
&\quad - 4(\sqrt{2}(f^2 - 36v_2^{(2)}) + 12\sqrt{3}(v_3^{(1)} + 3v_3^{(3)}))\cos^2\vartheta\sin(2\vartheta) \\
&\quad + 2(f^2 - 8(9v_2^{(2)} - 27v_2^{(4)} - \sqrt{6}(v_3^{(1)} - 9v_3^{(3)})))\cos^4\vartheta), \\
C_{\eta'}^{\eta'K} &= \sin^2\vartheta, \\
C_{\eta'}^{\eta'\eta'} &= -\frac{4\cos^2\vartheta}{f^2}(2v_1^{(2)} - 3v_4^{(2)} - 3v_4^{(2)}\cos(2\vartheta)).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{\pi}^{\pi\pi} &= -8(\beta_4^{(0)} + \beta_5^{(0)} - 2(\beta_6^{(0)} + \beta_8^{(0)})), \\
D_{\pi}^{\pi K} &= D_{\pi}^{K\pi} = -8(\beta_4^{(0)} - 2\beta_6^{(0)}), \\
D_K^{\pi K} &= D_K^{K\pi} = -4(\beta_4^{(0)} - 2\beta_6^{(0)}), \\
D_K^{KK} &= -8(2\beta_4^{(0)} + \beta_5^{(0)} - 4\beta_6^{(0)} - 2\beta_8^{(0)}), \\
D_{\eta}^{\pi\pi} &= -\frac{2}{3}(8(\beta_6^{(0)} - 8\beta_7^{(0)} - 3\beta_8^{(0)})\cos^2\vartheta \\
&\quad + 8(2\sqrt{2}(\beta_6^{(0)} + \beta_7^{(0)}) - \sqrt{3}\beta_{26}^{(1)})\sin(2\vartheta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - (4(2\beta_6^{(0)} - 3\beta_6^{(2)} + 2\beta_7^{(0)} + 6\beta_8^{(0)}) \\
& \quad - 9(2\beta_8^{(2)} + \beta_{12}^{(2)}) - 4\sqrt{6}(3\beta_{25}^{(1)} + \beta_{26}^{(1)})) \sin^2 \vartheta), \\
D_\eta^{\pi K} = D_\eta^{K\pi} &= \frac{4}{3}(4(\beta_6^{(0)} - 4(2\beta_7^{(0)} + \beta_8^{(0)})) \cos^2 \vartheta \\
& \quad - 2(2\sqrt{2}(\beta_6^{(0)} + \beta_7^{(0)} + 2\beta_8^{(0)}) - \sqrt{3}(2\beta_{25}^{(1)} + \beta_{26}^{(1)})) \sin(2\vartheta) \\
& \quad + (4(2\beta_6^{(0)} - 3\beta_6^{(2)} + 2\beta_7^{(0)} - 2\beta_8^{(0)}) \\
& \quad \quad + 3(2\beta_8^{(2)} + \beta_{12}^{(2)}) + 4\sqrt{6}(\beta_{25}^{(1)} - \beta_{26}^{(1)})) \sin^2 \vartheta), \\
D_\eta^{\pi\eta} = D_\eta^{\eta\pi} &= -\frac{2}{3}(3(2\beta_4^{(0)} - 3\beta_{17}^{(0)} + \beta_{18}^{(0)}) \\
& \quad - (2\beta_5^{(0)} - 9\beta_{17}^{(0)} + 3\beta_{18}^{(0)}) \cos(2\vartheta) \\
& \quad - 2\sqrt{2}(2\beta_5^{(0)} + 3\beta_{18}^{(0)}) \sin(2\vartheta)), \\
D_\eta^{KK} &= \frac{8}{3}(16(\beta_6^{(0)} + \beta_7^{(0)} + \beta_8^{(0)}) \cos^2 \vartheta \\
& \quad + 4(2\sqrt{2}(\beta_6^{(0)} + \beta_7^{(0)} + \beta_8^{(0)}) - \sqrt{3}(\beta_{25}^{(1)} + \beta_{26}^{(1)})) \sin(2\vartheta) \\
& \quad + (4(2\beta_6^{(0)} - 3\beta_6^{(2)} + 2\beta_7^{(0)} + 2\beta_8^{(0)}) \\
& \quad \quad - 3(2\beta_8^{(2)} + \beta_{12}^{(2)}) - 4\sqrt{6}(\beta_{25}^{(1)} + \beta_{26}^{(1)})) \sin^2 \vartheta), \\
D_\eta^{K\eta} = D_\eta^{\eta K} &= -\frac{4}{3}(3(2\beta_4^{(0)} + \beta_5^{(0)} - 3\beta_{17}^{(0)} + \beta_{18}^{(0)}) \\
& \quad + (\beta_5^{(0)} + 9\beta_{17}^{(0)} - 3\beta_{18}^{(0)}) \cos(2\vartheta) \\
& \quad + \sqrt{2}(2\beta_5^{(0)} + 3\beta_{18}^{(0)}) \sin(2\vartheta)), \\
D_{\eta'}^{\pi\pi} &= -\frac{2}{3}(8(\beta_6^{(0)} - 8\beta_7^{(0)} - 3\beta_8^{(0)}) \sin^2 \vartheta \\
& \quad - 8(2\sqrt{2}(\beta_6^{(0)} + \beta_7^{(0)}) - \sqrt{3}\beta_{26}^{(1)}) \sin(2\vartheta) \\
& \quad - (4(2\beta_6^{(0)} - 3\beta_6^{(2)} + 2\beta_7^{(0)} + 6\beta_8^{(0)}) \\
& \quad \quad - 9(2\beta_8^{(2)} + \beta_{12}^{(2)}) - 4\sqrt{6}(3\beta_{25}^{(1)} + \beta_{26}^{(1)})) \cos^2 \vartheta), \\
D_{\eta'}^{\pi K} = D_{\eta'}^{K\pi} &= \frac{4}{3}(4(\beta_6^{(0)} - 4(2\beta_7^{(0)} + \beta_8^{(0)})) \sin^2 \vartheta \\
& \quad + 2(2\sqrt{2}(\beta_6^{(0)} + \beta_7^{(0)} + 2\beta_8^{(0)}) - \sqrt{3}(2\beta_{25}^{(1)} + \beta_{26}^{(1)})) \sin(2\vartheta) \\
& \quad + (4(2\beta_6^{(0)} - 3\beta_6^{(2)} + 2\beta_7^{(0)} - 2\beta_8^{(0)}) + 3(2\beta_8^{(2)} + \beta_{12}^{(2)}) \\
& \quad \quad + 4\sqrt{6}(\beta_{25}^{(1)} - \beta_{26}^{(1)})) \cos^2 \vartheta), \\
D_{\eta'}^{\pi\eta'} = D_{\eta'}^{\eta'\pi} &= -\frac{2}{3}(3(2\beta_4^{(0)} - 3\beta_{17}^{(0)} + \beta_{18}^{(0)}) + (2\beta_5^{(0)} - 9\beta_{17}^{(0)} + 3\beta_{18}^{(0)}) \cos(2\vartheta) \\
& \quad + 2\sqrt{2}(2\beta_5^{(0)} + 3\beta_{18}^{(0)}) \sin(2\vartheta)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{\eta'}^{KK} &= \frac{8}{3}(16(\beta_6^{(0)} + \beta_7^{(0)} + \beta_8^{(0)}) \sin^2 \vartheta \\
&\quad - 4(2\sqrt{2}(\beta_6^{(0)} + \beta_7^{(0)} + \beta_8^{(0)}) - \sqrt{3}(\beta_{25}^{(1)} + \beta_{26}^{(1)})) \sin(2\vartheta) \\
&\quad + (4(2\beta_6^{(0)} - 3\beta_6^{(2)} + 2\beta_7^{(0)} + 2\beta_8^{(0)}) \\
&\quad\quad - 3(2\beta_8^{(2)} + \beta_{12}^{(2)}) - 4\sqrt{6}(\beta_{25}^{(1)} + \beta_{26}^{(1)})) \cos^2 \vartheta), \\
D_{\eta'}^{K\eta'} = D_{\eta'}^{\eta'K} &= -\frac{4}{3}(3(2\beta_4^{(0)} + \beta_5^{(0)} - 3\beta_{17}^{(0)} + \beta_{18}^{(0)}) \\
&\quad - \sqrt{2}(2\beta_5^{(0)} + 3\beta_{18}^{(0)}) \sin(2\vartheta) \\
&\quad - (\beta_5^{(0)} + 9\beta_{17}^{(0)} - 3\beta_{18}^{(0)}) \cos(2\vartheta)).
\end{aligned}$$

## C.2 Pseudoskalare Zerfallskonstanten

In diesem Anhang führen wir die Koeffizienten  $G_\phi^{ab}$  und  $H_\phi^{ab}$  aus den Gleichungen (3.7) und (3.8) auf.

$$\begin{aligned}
G_\pi^\pi &= -1, \\
G_\pi^K &= -\frac{1}{2}, \\
G_\pi^\eta &= \frac{2}{f^2} v_1^{(2)} \sin^2 \vartheta, \\
G_\pi^{\eta'} &= \frac{2}{f^2} v_1^{(2)} \cos^2 \vartheta, \\
G_K^\pi &= -\frac{3}{8}, \\
G_K^K &= -\frac{3}{4}, \\
G_K^\eta &= -\frac{1}{8f^2} (3f^2 \cos^2 \vartheta - 16v_1^{(2)} \sin^2 \vartheta), \\
G_K^{\eta'} &= -\frac{1}{8f^2} (3f^2 \sin^2 \vartheta - 16v_1^{(2)} \cos^2 \vartheta), \\
G_8^K &= -\frac{1}{8} (13 - \cos(4\vartheta)), \\
G_8^\eta &= \frac{\sin^2 \vartheta}{2f^2} (4v_1^{(2)} + 3v_4^{(2)} - 3v_4^{(2)} \cos(4\vartheta)), \\
G_8^{\eta'} &= \frac{\cos^2 \vartheta}{2f^2} (4v_1^{(2)} + 3v_4^{(2)} - 3v_4^{(2)} \cos(4\vartheta)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_0^K &= \frac{\sin^2(2\vartheta)}{4f^2}(f^2 + 6v_5^{(0)}), \\
G_0^\eta &= \frac{\sin^2 \vartheta}{2f^4}(f^2(4v_1^{(2)} - 15v_4^{(2)} + 12v_5^{(2)}) - 6v_5^{(0)}(4v_1^{(2)} - 9v_4^{(2)}) \\
&\quad + 3(f^2 + 6v_5^{(0)})v_4^{(2)} \cos(4\vartheta)), \\
G_0^{\eta'} &= \frac{\cos^2 \vartheta}{2f^4}(f^2(4v_1^{(2)} - 15v_4^{(2)} + 12v_5^{(2)}) - 6v_5^{(0)}(4v_1^{(2)} - 9v_4^{(2)}) \\
&\quad + 3(f^2 + 6v_5^{(0)})v_4^{(2)} \cos(4\vartheta)).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_\pi^\pi &= 4(\beta_4^{(0)} + \beta_5^{(0)}), \\
H_\pi^K &= 8\beta_4^{(0)}, \\
H_K^\pi &= 4\beta_4^{(0)}, \\
H_K^K &= 8\beta_4^{(0)} + 4\beta_4^{(0)}, \\
H_8^\pi &= \frac{1}{3}(3(4\beta_4^{(0)} - 2\beta_5^{(0)} + 3\beta_{17}^{(0)} - \beta_{18}^{(0)}) \\
&\quad + (2\beta_5^{(0)} - 9\beta_{17}^{(0)} + 3\beta_{18}^{(0)}) \cos(4\vartheta) \\
&\quad + 2\sqrt{2}(2\beta_5^{(0)} + 3\beta_{18}^{(0)}) \sin(4\vartheta)), \\
H_8^K &= \frac{2}{3}(3(4\beta_4^{(0)} + 3\beta_5^{(0)} + 3\beta_{17}^{(0)} - \beta_{18}^{(0)}) \\
&\quad - (\beta_5^{(0)} + 9\beta_{17}^{(0)} - 3\beta_{18}^{(0)}) \cos(4\vartheta) \\
&\quad - \sqrt{2}(2\beta_5^{(0)} + 3\beta_{18}^{(0)}) \sin(4\vartheta)), \\
H_0^\pi &= \frac{1}{3f^2}(3f^2(4\beta_4^{(0)} + 2\beta_5^{(0)} - 15\beta_{17}^{(0)} + 5\beta_{18}^{(0)}) \\
&\quad + 4\beta_{46}^{(0)} + 12\beta_{47}^{(0)} - 2\sqrt{6}\beta_{52}^{(1)} + 4\beta_{53}^{(0)}) \\
&\quad - 6v_5^{(0)}(12\beta_4^{(0)} + 2\beta_5^{(0)} - 27\beta_{17}^{(0)} + 9\beta_{18}^{(0)}) \\
&\quad - (f^2 + 6v_5^{(0)})((2\beta_5^{(0)} - 9\beta_{17}^{(0)} + 3\beta_{18}^{(0)}) \cos(4\vartheta) \\
&\quad + 2\sqrt{2}(2\beta_5^{(0)} + 3\beta_{18}^{(0)}) \sin(4\vartheta))), \\
H_0^K &= \frac{2}{3f^2}(3f^2(4\beta_4^{(0)} + \beta_5^{(0)} - 15\beta_{17}^{(0)} + 5\beta_{18}^{(0)}) \\
&\quad + 4\beta_{46}^{(0)} + 12\beta_{47}^{(0)} - 2\sqrt{6}\beta_{52}^{(1)} + 4\beta_{53}^{(0)}) \\
&\quad - 6v_5^{(0)}(12\beta_4^{(0)} + 5\beta_5^{(0)} - 27\beta_{17}^{(0)} + 9\beta_{18}^{(0)}) \\
&\quad + (f^2 + 6v_5^{(0)})((\beta_5^{(0)} + 9\beta_{17}^{(0)} - 3\beta_{18}^{(0)}) \cos(4\vartheta)
\end{aligned}$$

$$+ \sqrt{2}(2\beta_5^{(0)} + 3\beta_{18}^{(0)}) \sin(4\vartheta)).$$

### C.3 Z-Faktoren

Die Z Faktoren sind gegeben durch:

$$Z_\phi = 1 + K_\phi^a \frac{\Delta_a}{f^2} + L_\phi^a \frac{m_a^2}{f^2},$$

mit den Koeffizienten:

$$\begin{aligned} K_\pi^\pi &= \frac{2}{3}, \\ K_\pi^K &= \frac{1}{3}, \\ K_\pi^\eta &= -\frac{4}{f^2} v_1^{(2)} \sin^2 \vartheta, \\ K_\pi^{\eta'} &= -\frac{4}{f^2} v_1^{(2)} \cos^2 \vartheta, \\ K_K^\pi &= \frac{1}{4}, \\ K_K^K &= \frac{1}{2}, \\ K_K^\eta &= \frac{1}{4f^2} (f^2 \cos^2 \vartheta - 16v_1^{(2)} \sin^2 \vartheta), \\ K_K^{\eta'} &= \frac{1}{4f^2} (f^2 \sin^2 \vartheta - 16v_1^{(2)} \cos^2 \vartheta), \\ K_\eta^K &= \cos^2 \vartheta, \\ K_\eta^\eta &= -\frac{2 \sin^2 \vartheta}{f^2} (2v_1^{(2)} - 3v_4^{(2)} + 3v_4^{(2)} \cos(2\vartheta)), \\ K_\eta^{\eta'} &= -\frac{2 \cos^2 \vartheta}{f^2} (2v_1^{(2)} - 3v_4^{(2)} + 3v_4^{(2)} \cos(2\vartheta)), \\ K_{\eta'}^K &= \sin^2 \vartheta, \\ K_{\eta'}^\eta &= -\frac{2 \sin^2 \vartheta}{f^2} (2v_1^{(2)} - 3v_4^{(2)} - 3v_4^{(2)} \cos(2\vartheta)), \\ K_{\eta'}^{\eta'} &= -\frac{2 \cos^2 \vartheta}{f^2} (2v_1^{(2)} - 3v_4^{(2)} - 3v_4^{(2)} \cos(2\vartheta)). \end{aligned}$$

$$L_\pi^\pi = -8(\beta_4^{(0)} + \beta_5^{(0)}),$$

$$\begin{aligned}
L_\pi^K &= -16\beta_4^{(0)}, \\
L_K^\pi &= -8\beta_4^{(0)}, \\
L_K^K &= -8(2\beta_4^{(0)} - \beta_5^{(0)}), \\
L_\eta^\pi &= -\frac{4}{3}(6\beta_4^{(0)} - 9\beta_{17}^{(0)} + 3\beta_{18}^{(0)} - (2\beta_5^{(0)} - 9\beta_{17}^{(0)} + 3\beta_{18}^{(0)}) \cos(2\vartheta) \\
&\quad - 2\sqrt{2}(2\beta_5^{(0)} + 3\beta_{18}^{(0)}) \sin(2\vartheta)), \\
L_\eta^K &= -\frac{8}{3}(3(2\beta_4^{(0)} + \beta_5^{(0)} - 3\beta_{17}^{(0)} + \beta_{18}^{(0)}) + (\beta_5^{(0)} + 9\beta_{17}^{(0)} - 3\beta_{18}^{(0)}) \cos(2\vartheta) \\
&\quad + \sqrt{2}(2\beta_5^{(0)} + 3\beta_{18}^{(0)}) \sin(2\vartheta)), \\
L_{\eta'}^\pi &= -\frac{4}{3}(6\beta_4^{(0)} - 9\beta_{17}^{(0)} + 3\beta_{18}^{(0)} + (2\beta_5^{(0)} - 9\beta_{17}^{(0)} + 3\beta_{18}^{(0)}) \cos(2\vartheta) \\
&\quad + 2\sqrt{2}(2\beta_5^{(0)} + 3\beta_{18}^{(0)}) \sin(2\vartheta)), \\
L_{\eta'}^K &= -\frac{8}{3}(3(2\beta_4^{(0)} + \beta_5^{(0)} - 3\beta_{17}^{(0)} + \beta_{18}^{(0)}) - (\beta_5^{(0)} + 9\beta_{17}^{(0)} - 3\beta_{18}^{(0)}) \cos(2\vartheta) \\
&\quad - \sqrt{2}(2\beta_5^{(0)} + 3\beta_{18}^{(0)}) \sin(2\vartheta)).
\end{aligned}$$

# Literaturverzeichnis

- [ABBH 68] ABBHHM Collaboration, *Phys. Rev.* **175** (1968) 1669
- [AHHM 76] AHHM Collaboration, *Nucl. Phys.* **B 108** (1976) 45
- [Ade 69] S.L. Adler, W.A. Bardeen, *Phys. Rev.* **182** (1969) 1517
- [Ajak 98] J. Ajaka et al., *Phys. Rev. Lett.* **81** (1998) 1797
- [Bake 78a] R.D. Baker et al., *Nucl. Phys.* **B 141** (1978) 29
- [Bake 78b] R.D. Baker et al., *Nucl. Phys.* **B 145** (1978) 402
- [Bald 88] A. Baldini et al., in: *Landolt-Börnstein (Ed.)*, **Vol. 12a**, Springer, Berlin (1988)
- [Bass 99a] S.D. Bass, *Eur. Phys. Jour.* **A 5** (1999) 17
- [Bass 99b] S.D. Bass, *Phys. Lett.* **B 463** (1999) 286
- [Bass 01] S.D. Bass, S. Wetzell, W. Weise, *Nucl. Phys.* **A 686** (2001) 429
- [Bech 99] T. Becher, H. Leutwyler, *Eur. Phys. J.* **C 9** (1999) 643
- [Beis 01] N. Beisert, B. Borasoy, "  $\eta$ - $\eta'$  mixing in  $U(3)$  chiral perturbation theory", hep-ph/0107175
- [Bern 95] V. Bernard, N. Kaiser, U.-G. Meißner, *Int. J. Mod. Phys.* **E 4** (1995) 193
- [Bijn 95] J. Bijnens, G. Ecker, J. Gasser, in *2nd DAPHNE Physics Handbook*, Ed.: L. Maiani, G. Pancheri, N. Paver, (INFN, Frascati, 1995) 125

- [Bock 98] A. Bock et al., *Phys. Rev. Lett.* **81** (1998) 534
- [Bora 97] B. Borasoy, U.G. Meißner, *Ann. Phys. (NY)* **254** (1997) 232
- [Bora 00] B. Borasoy, *Phys. Rev.* **D 61** (2000) 014011
- [Bora 01] B. Borasoy, S. Wetzel, *Phys. Rev.* **D 63** (2001)
- [Bram 99] A. Bramon, R. Escribano, M.D. Scadron, *Eur. Phys. Jour.* **C 7** (1999) 271
- [Brow 79] R.M. Brown et al., *Nucl. Phys.* **B 153** (1979) 89
- [Cand 83] D.J. Candlin et al., *Nucl. Phys.* **B 226** (1983) 1
- [Caro 00] J. Caro Ramon, N. Kaiser, S. Wetzel, W. Weise, *Nucl. Phys.* **A 672** (2000) 249
- [Clos 93] F.E. Close, R.G. Roberts, *Phys. Lett.* **B 316** (1993) 165
- [Cole 69] S. Coleman, J. Wess, B. Zumino, *Phys. Rev* **177** (1969) 2239  
C.G. Callan, S. Coleman, J. Wess, B. Zumino, *Phys. Rev* **177** (1969) 2247
- [Dens 98] J. Denschlag, L. Tiator, D. Drechsel, *Eur. Phys. Jour.* **A 3** (1998) 171
- [DiVe 80] P. Di Vecchia, G. Veneziano, *Nucl. Phys.* **B 171** (1980) 253
- [Ecke 89] G. Ecker, J. Gasser, A. Pich, E. de Rafael *Nucl. Phys.* **B 321** (1989) 311
- [Eric 88] T. Ericson, W. Weise, *Pions and Nuclei*, Oxford University Press (1988)
- [Gass 85] J. Gasser, H. Leutwyler, *Nucl. Phys.* **B 250** (1985) 465
- [Goer 99] S. Goers et al. (SAPHIR Collaboration), *Phys. Lett.* **B 464** (1999) 331
- [Goit 01] J.L. Goity et al., *Phys. Lett.* **B 504** (2001) 21

- [Good 69] M.L. Good, R.R. Kofler, *Phys. Rev.* **183** (1969) 1142
- [Herr 97] P. Herrera-Siklody, J.I. Latorre, P. Pascual, J. Taron, *Nucl. Phys.* **B 497** (1997) 345
- [Höhl 92] G. Höhler, A. Schulte,  *$\pi N$  Newslett.* **7** (1992) 94
- [Jenk 91] E. Jenkins, A.V. Manohar, *Phys. Lett.* **B 255** (1991) 558
- [Jenk 98] E. Jenkins, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **48** (1998) 81
- [Kais 95] N. Kaiser, P.B. Siegel, W.Weise, *Nucl. Phys.* **A 594** (1995) 325  
N. Kaiser, P.B. Siegel, W.Weise, *Phys. Lett.* **B 362** (1995) 23
- [Kais 97] N. Kaiser, T. Waas, W.Weise, *Nucl. Phys.* **A 612** (1997) 297
- [Kais 00] R. Kaiser, H. Leutwyler, *Eur. Phys. Jour.* **C 17** (2000) 623
- [Koda 80] J. Kodaira, *Nucl. Phys.* **B 165** (1980) 129
- [Krus 95] B. Krusche et al., *Phys. Rev. Lett.* **74** (1995) 3736
- [Mano 98] A.V. Manohar, "Large N QCD", *Les Houches Lectures 1997*, hep-ph/9802419
- [Mosk 00] P. Moskal et al., *Phys. Lett.* **B 474** (2000) 416  
P. Moskal et al., *Phys. Rev. Lett.* **80** (1998) 3202
- [Olle 01] J.A. Oller, U.-G. Meißner, *Phys. Lett.* **B 500** (2001) 263
- [PDB 00] Review of Particle Properties, D.E. Groom et al., *Eur. Phys. Jour.* **C15** (2000) 1
- [Ploe 98] R. Plötzke (SAPHIR Collaboration), *Phys. Lett.* **B 444** (1998) 555
- [Ritc 94] B.G. Ritchie et al. CEBAF Experimente E-91-008 und E-94-008
- [Sadl 97] M.E. Sadler (Crystal Ball Collaboration),  *$\pi N$  Newslett.* **13** (1997) 123

- [Scho 95] B. Schoch, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **34** (1995) 43
- [Stein 97] S. Steininger, U.G. Meißner, *Nucl. Phys.* **B 499** (1997) 359
- [Tang 96] H.-B. Tang, "A new approach to chiral perturbation theory for matter fields", hep-ph/9607436;  
P. J. Ellis, H.-B. Tang, *Phys. Rev.* **C 57** (1998) 3356
- [Tran 98] M.Q. Tran et al. (SAPHIR Collaboration), *Phys. Lett.* **B 445** (1998) 20
- [Vieh 99] J. Viehoff et al. (SESAM Collaboration), *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **83** (2000) 259

# Danksagung

An dieser Stelle möchte ich allen danken, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Allen voran sei Prof. Dr. Wolfram Weise für die interessante Themenstellung, die ständige Begleitung und Diskussionsbereitschaft, sowie die wertvolle Auseinandersetzung mit den verschiedenen Versionen des Manuskripts gedankt.

Für gute Zusammenarbeit möchte ich mich bei Dr. habil. Norbert Kaiser, Dr. Steven Bass, Dr. Buğra Borasoy und Niklas Beisert bedanken.

Für das Korrekturlesen der Arbeit bedanke mich bei Ulrich Dürr und Dr. Björn Seitz.

Ich bedanke mich auch bei allen Mitarbeitern des Lehrstuhls T39 für die freundschaftliche Arbeitsatmosphäre.

Meiner Frau Annette danke ich für kontinuierliche Liebe und Fürsorge während der letzten Jahre.