Zentrum Mathematik der Technischen Universität München
Lehrstuhl für Biomathematik
Prof. Dr. R. Lasser

Qualitative Unschärferelationen und Jacobi–Polynome

Georg Fischer

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Mathematik der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender:	Univ.–Prof. Dr. G. Kemper
Prüfer der Dissertation:	1. Univ.–Prof. Dr. R. Lasser
	2. apl. Prof. Dr. R. W. Henrichs
	3. Prof. Dr. Chr. Berg, Universität Kopenhagen, Dänemark

Die Dissertation wurde am 11.01.2005 bei der Technischen Universität München einge–reicht und durch die Fakultät für Mathematik am 27.07.2005 angenommen.

Zusammenfassung

Es bezeichne π das Orthogonalisierungs–Maß der Jacobi–Polynome. Eine Unschärferelation im Zusammenhang mit Jacobi–Polynomen ist die Aussage, daß eine Funktion $f \in L^2(\pi)$, $f \neq 0$ und ihre Jacobi–Transformierte $\mathcal{F}f$ nicht gleichzeitig genau lokalisiert werden können. Eine Qualitative Unschärferelation trifft diese Aussage ohne eine Abschätzung für f oder für $\mathcal{F}f$. Wir sagen, eine Funktion $f \in L^2(\pi)$ wird durch die Borel–Menge $B \subseteq [-1,1]$ lokalisiert, falls gilt: $1_B f = f$. Dementsprechend sagen wir, daß $\mathcal{F}f$ durch die Menge $\Lambda \subseteq \mathbb{N}_0$ lokalisiert wird, falls gilt: $1_\Lambda \mathcal{F}f = \mathcal{F}f$.
Der von uns gewählte Lokalisierungsbegriff führt zu Qualitativen Unschärferelationen in der folgenden Form: $1_B L^2(\pi) \cap \mathcal{F}^{-1} 1_\Lambda \mathcal{F} L^2(\pi) = \{ 0 \}$.
In dieser Arbeit wird gezeigt, daß zu jeder $\Lambda(2)$–Menge Λ eine Konstante $\varepsilon > 0$ existiert, so daß für jede Borel–Menge B mit $\pi(B) \leq \varepsilon$ gilt: $1_B L^2(\pi) \cap \mathcal{F}^{-1} 1_\Lambda \mathcal{F} L^2(\pi) = \{ 0 \}$.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Sei (U, V) ein Paar von abgeschlossenen Untervektorräumen eines Hilbert–Raumes H. Dann ist (U, V) ein Annihilations–Paar auf H, falls gilt:

(1) $U \cap V = \{ 0 \}$.

(2) $U + V$ ist abgeschlossen in H.

In Kapitel 1.1 wird zunächst der Schnittwinkel $\sphericalangle_{(U,V)}$ von U und V definiert. Aufgrund der Cauchy–Schwarz–Ungleichung kann dieser geometrisch sinnvoll erklärt werden. Danach wird gezeigt, daß $\sphericalangle_{(U,V)}$ genau für Annihilations–Paare (U, V) positiv ist.

Sei (U, V) ein Annhilations–Paar auf H. Es bezeichne P_U bzw. P_V die orthogonale Projektion auf U bzw. auf V. In Kapitel 1.2 wird gezeigt, daß zu jedem $(u_0, v_0) \in U \times V$ das Minimierungsproblem

$\|x_0\|_H = \min \{ \|x\|_H : x \in H \}$ unter der Nebenbedingung $(P_U x, P_V x) = (u_0, v_0)$

genau eine Lösung hat.

Sei μ ein positives endliches Maß. In Kapitel 2 wird eine Qualitative Unschärferelation auf $L^1(\mu)$ gezeigt. Es wird vorausgesetzt, daß eine gleichgradig beschränkte Orthogonalbasis $\varphi = \{ \varphi_n : n \in \mathbb{N}_0 \}$ von $L^2(\mu)$ existiert. Dabei heißt die Orthogonalbasis φ gleichgradig beschränkt, falls für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\|\varphi_n\|_\infty \le 1$. Durch die Gewichtsfunktion $h : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$, $h(n) = \|\varphi_n\|_2^{-2}$ wird $\{ h(n)^{\frac{1}{2}} \varphi_n : n \in \mathbb{N}_0 \}$ zu einer Orthonormalbasis von $L^2(\mu)$.

Der Beweis der Qualitativen Unschärferelation erfolgt in zwei Schritten. Zuerst wird aus Kapitel 1.1 gefolgert, daß ein $f \in L^2(\mu)$ mit $1_A f = f$ und $\mu(A)\ h(spec\, f) < 1$ die Nullfunktion ist. Danach wird gezeigt, daß ein $f \in L^1(\mu)$ mit $1_A f = f$ und $\mu(A)\ h(spec\, f) < 1$ aus $L^2(\mu)$ ist.

Die normierten Jacobi–Polynome $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ zum Paramter (α, β) sind orthogonal bzgl. $d\pi(x) = c_{(\alpha,\beta)}\,(1 - x)^\alpha\,(1 + x)^\beta\,1_{]-1,1[}(x)\,dx$. Durch die Normierung $r_n(1) = 1$, $n \in \mathbb{N}_0$ bilden sie eine gleichgradig beschränkte Orthogonalbasis von $L^2(\pi)$.

In [14] hat Gasper eine beschränkte Produktformel für die normierten Jacobi–Polynome gezeigt. Diese führt zur kontinuierlichen Jacobi–Translation. Darauf aufbauend wird in Kapitel 3 die Jacobi–Ableitung auf $L^2(\pi)$ definiert. Es wird ihr Definitionsbereich, ihr Spektrum und ihr Verhalten unter der Jacobi–Transformation untersucht.

In Kapitel 4.1 werden homogene Banach–Räume für normierte Jacobi–Polynome definiert. Das Hauptbeispiel eines homogenen Banach–Raumes ist der $L^1(\pi)$. Es wird zunächst der Eindeutigkeitssatz und das Riemann–Lebesgue Lemma auf die Jacobi–Transformation übertragen. Anschließend wird gezeigt, daß sich eine Funktion aus einem homogenen Banach–Raum durch ihre Jacobi–Koeffizienten rekonstruieren läßt. Am Ende von Kapitel 4.1 werden Beispiele homogener Banach–Räume diskutiert.

Ein homogener Banach–Raum X heißt charakter–invariant, falls für jedes $f \in X$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $r_n f \in X$ und $\|r_n f\|_X \le \|f\|_X$.

In Kapitel 4.2 werden der Wiener–Raum und der Beurling–Raum für normierte Jacobi–Polynome definiert. Es wird zunächst nachgewiesen, daß beide homogene Banach–Räume sind. Danach wird gezeigt, daß der Wiener–Raum der kleinste charakter–invariante homogene Banach–Raum ist. Daraus wird gefolgert, daß der Beurling–Raum nicht charakter–invariant ist.

Zu einer Borel–Menge $B \subseteq [-1,1]$ sei der Untervektorraum $L^2(B,\pi)$ von $L^2(\pi)$ definiert durch $L^2(B,\pi) = \{ f \in L^2(\pi) : 1_B f = f \}$. Dementsprechend sei zu $\Lambda \subseteq \mathbb{N}_0$ der Untervektorraum $L^2_\Lambda(\pi)$ von $L^2(\pi)$ definiert durch $L^2_\Lambda(\pi) = \{ f \in L^2(\pi) : 1_\Lambda \mathcal{F} f = \mathcal{F} f \}$. Eine Menge $\Lambda \subseteq \mathbb{N}_0$ heißt $\Lambda(2)$–Menge, falls gilt: $L^1_\Lambda(\pi) = L^2_\Lambda(\pi)$. In Kapitel 5.1 wird aus Kapitel 1.1 und Kapitel 4.1 gefolgert, daß zu jeder $\Lambda(2)$–Menge Λ eine Konstante $\varepsilon > 0$ existiert, so daß für jede Borel–Menge B mit $\pi(B) \leq \varepsilon$ gilt: $L^2(B,\pi) \cap L^2_\Lambda(\pi) = \{ 0 \}$.
Damit ergibt sich sofort aus der Definition der $\Lambda(2)$–Menge, daß für jede Borel–Menge B mit $\pi(B) \leq \varepsilon$ gilt: $L^1(B,\pi) \cap L^1_\Lambda(\pi) = \{ 0 \}$.
In Kapitel 5.2 wird für den Fall der Tschebyscheff–Polynome erster Art gezeigt, daß jede 2–lakunäre Menge eine $\Lambda(2)$–Menge ist.

Im Anhang sind die Eigenschaften der normierten Jacobi–Polynome zusammengestellt, die in dieser Arbeit verwendet werden.

Das Literaturverzeichnis beendet diese Arbeit.

Mein Dank gilt Herrn Prof. Dr. R. Lasser für die Betreuung dieser Arbeit. Durch seine Hinweise und durch seine eigenen Arbeiten hat er mir stets weitergeholfen.
Diese Arbeit wurde durch ein Promotionsstipendium der TU München finanziell unterstützt.

1 Annihilations–Paare auf Hilbert–Räumen

In diesem Kapitel sei $(H, \| \cdot \|)$ ein Hilbert–Raum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Ist U ein abgeschlossener Untervektorraum von H, so bezeichne $U^\perp$ das orthogonale Komplement von U in H und P_U bezeichne die orthogonale Projektion von H auf U.
Die ∞–Norm $\| \cdot \|_\infty$ auf $H \times H$ sei definiert durch $\|(x,y)\|_\infty = \max\{ \|x\|, \|y\| \}$. Im folgenden wird auf $H \times H$ stets die ∞–Norm betrachtet.

1.1 Positive Schnittwinkel

In diesem Abschnitt wird der Schnittwinkel von abgeschlossenen Untervektorräumen von H untersucht. Im folgenden seien U und V abgeschlossene Untervektorräume von H.

Definition 1.1.1. Zu U und V sei $\sphericalangle_{(U,V)} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ definiert durch

$$\cos \sphericalangle_{(U,V)} = \sup \{ |\langle u, v \rangle| : \ (u,v) \in U \times V \text{ mit } \|(u,v)\|_\infty \leq 1 \}.$$

Die Zahl $\sphericalangle_{(U,V)}$ heißt der Schnittwinkel von U und V.

Bemerkung. Der Schnittwinkel von U und V ist wohldefiniert. Denn für $(u,v) \in U \times V$ mit $\|(u,v)\|_\infty \leq 1$ ergibt sich mit Hilfe der Cauchy–Schwarz–Ungleichung

$$0 \leq |\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \, \|v\| \leq \|(u,v)\|_\infty^2 \leq 1.$$

Folglich erfüllt genau eine Zahl $\sphericalangle_{(U,V)} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ obige Definitionsgleichung.
Unmittelbar aus der Definition des Schnittwinkels von U und V ergibt sich $\sphericalangle_{(V,U)} = \sphericalangle_{(U,V)}$.

Lemma 1.1.2. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(1) $\sphericalangle_{(U,V)} > 0$.
(2) $\|P_U P_V\| < 1$.

Beweis. Nach Definition von $\sphericalangle_{(U,V)}$ ist $\sphericalangle_{(U,V)} \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Folglich genügt es $\cos \sphericalangle_{(U,V)} = \|P_U P_V\|$ zu zeigen.

Als erstes zeigen wir $\cos \sphericalangle_{(U,V)} \leq \|P_U P_V\|$. Für $(u,v) \in U \times V$ mit $\|(u,v)\|_\infty \leq 1$ gilt

$$|\langle u, v \rangle| = |\langle P_U u, P_V v \rangle| = |\langle u, P_U P_V v \rangle|.$$

Mit Hilfe der Cauchy–Schwarz–Ungleichung ergibt sich somit

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \, \|P_U P_V v\| \leq \|P_U P_V\| \, \|u\| \, \|v\| \leq \|P_U P_V\| \, \|(u,v)\|_\infty^2 \leq \|P_U P_V\|.$$

Aus der Definition von $\sphericalangle_{(U,V)}$ folgt damit $\cos \sphericalangle_{(U,V)} \leq \|P_U P_V\|$.

Als zweites zeigen wir $\|P_U P_V\| \le \cos\sphericalangle_{(U,V)}$. Sei $x \in H$ mit $\|x\| \le 1$. Nach dem Darstellungssatz von Riesz ist die Abbildung $H \to H^*$, $y \mapsto \langle \cdot, y\rangle$ bijektiv und isometrisch. Mit [43, S. 98, Korollar III.1.6] ergibt sich somit

$$\|P_U P_V x\| = \sup_{\|y\|\le 1} \{\, |\langle P_U P_V x, y\rangle| \,\} = \sup_{\|y\|\le 1} \{\, |\langle P_V x, P_U y\rangle| \,\}. \tag{1}$$

Sei $y \in H$ mit $\|y\| \le 1$. Dann ist $(P_V x, P_U y) \in V \times U$ mit $\|(P_V x, P_U y)\|_\infty \le \|(x,y)\|_\infty \le 1$. Aus der Definition von $\sphericalangle_{(V,U)}$ folgt damit

$$|\langle P_V x, P_U y\rangle| \le \cos\sphericalangle_{(V,U)} = \cos\sphericalangle_{(U,V)}.$$

Aus (1) ergibt sich damit $\|P_U P_V x\| \le \cos\sphericalangle_{(U,V)}$. Wegen $\|x\| \le 1$ zeigt diese Abschätzung $\|P_U P_V\| \le \cos\sphericalangle_{(U,V)}$. □

Definition 1.1.3. Zu U und V sei $T_{(U,V)} \in L(H)$ definiert durch $T_{(U,V)} = id - P_U P_V$.

Korollar 1.1.4. *Es gilt:* $T_{(V,U)} = T^*_{(U,V)}$.

Beweis. Da P_U, P_V und id selbstadjungiert sind, folgt die Behauptung unmittelbar aus [43, S. 208, Satz V.5.2]. □

Lemma 1.1.5. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(1) $T_{(U,V)}$ *ist in* $L(H)$ *invertierbar.*

(2) $\|P_U P_V\| < 1$.

Beweis. (1) $\Longrightarrow$ (2). Wir zeigen zunächst:

$$\|P_U P_V x\|^2 = \|P_V x\|^2 - \|T_{(U,V)} P_V x\|^2 \text{ für alle } x \in H. \tag{2}$$

Sei $x \in H$. Nach dem Satz von der orthogonalen Projektion läßt sich $P_V x$ schreiben als $P_V x = P_U P_V x \oplus P_{U^\perp} P_V x$. Es gilt

$$\begin{aligned} P_{U^\perp} P_V x &= (id - P_U) P_V x = (P_V - P_U P_V) x = (P_V - P_U P_V^2) x \\ &= (id - P_U P_V) P_V x = T_{(U,V)} P_V x. \end{aligned}$$

Somit gilt $P_V x = P_U P_V x \oplus T_{(U,V)} P_V x$. Mit dem Satz von Pythagoras folgt daraus (2).

Wir zeigen nun $\|P_U P_V\| < 1$. Sei $x \in H$. Da $T_{(U,V)}$ nach Voraussetzung invertierbar ist, gilt $\|T_{(U,V)} P_V x\| \ge \|T^{-1}_{(U,V)}\|^{-1} \|P_V x\|$. Aus (2) ergibt sich damit

$$\begin{aligned} \|P_U P_V x\|^2 &\le \|P_V x\|^2 - \|T^{-1}_{(U,V)}\|^{-2} \|P_V x\|^2 = (1 - \|T^{-1}_{(U,V)}\|^{-2}) \|P_V x\|^2 \\ &\le (1 - \|T^{-1}_{(U,V)}\|^{-2}) \|x\|^2. \end{aligned}$$

Diese Abschätzung zeigt $\|P_U P_V\| \le (1 - \|T^{-1}_{(U,V)}\|^{-2})^{\frac{1}{2}} < 1$.

(2) $\Longrightarrow$ (1). Nach Voraussetzung gilt $\|id - T_{(U,V)}\| = \|P_U P_V\| < 1$. Damit folgt die Behauptung aus [43, S. 56, Satz II.1.11]. □

Korollar 1.1.6. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(1) $\sphericalangle_{(U,V)} > 0$.
(2) $T_{(U,V)}$ *ist invertierbar in* $L(H)$.

Beweis. Die Behauptung folgt sofort aus Lemma (1.1.2) und vorherigem Lemma. □

Definition 1.1.7. Ein Paar (U,V) heißt Annihilations–Paar auf H, falls gilt:

(1) $U \cap V = \{\,0\,\}$.
(2) $U + V$ ist abgeschlossen in H.

Bemerkung. Zur Abkürzung schreiben wir A–Paar für Annihilations–Paar. Offensichtlich ist mit (U,V) auch (V,U) ein A–Paar.

Lemma 1.1.8. *Ist* $T_{(U,V)}$ *invertierbar in* $L(H)$*, so ist* (U,V) *ein A–Paar.*

Beweis. Wir zeigen zunächst:

$$\|(u,v)\|_\infty \le \|T^{-1}_{(U,V)}\|\,\|u+v\| \text{ für alle } (u,v) \in U \times V. \tag{3}$$

Sei $T_{(U,V)}$ invertierbar in $L(H)$ und sei $(u,v) \in U \times V$. Mit Korollar (1.1.4) und [43, S. 208, Satz V.5.2] ergibt sich

$$T_{(V,U)}\,(T^{-1}_{(U,V)})^* = T^*_{(U,V)}\,(T^{-1}_{(U,V)})^* = (T^{-1}_{(U,V)}\,T_{(U,V)})^* = id^* = id = \cdots = (T^{-1}_{(U,V)})^*\,T_{(V,U)}.$$

Diese Gleichung zeigt, daß $T_{(V,U)}$ invertierbar in $L(H)$ ist mit $T^{-1}_{(V,U)} = (T^{-1}_{(U,V)})^*$. Mit [43, S. 208, Satz V.5.2] gilt also

$$\|T^{-1}_{(V,U)}\| = \|(T^{-1}_{(U,V)})^*\| = \|T^{-1}_{(U,V)}\|.$$

Folglich genügt es $\|u\| \le \|T^{-1}_{(U,V)}\|\,\|u+v\|$ zu zeigen.

Wegen $(u,v) \in U \times V$ gilt $(P_U(u+v), P_UP_V(u+v)) = (u + P_Uv, P_UP_Vu + P_Uv)$. Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} T_{(U,V)}u = u - P_UP_Vu &= (u + P_Uv) - (P_UP_Vu + P_Uv) = P_U(u+v) - P_UP_V(u+v) \\ &= P_U(id - P_V)(u+v) = P_UP_{V^\perp}(u+v). \end{aligned}$$

Da $T_{(U,V)}$ nach Voraussetzung invertierbar in $L(H)$ ist, folgt damit

$$\|u\| = \|T^{-1}_{(U,V)}P_UP_{V^\perp}(u+v)\| \le \|T^{-1}_{(U,V)}\|\,\|P_U\|\,\|P_{V^\perp}\|\,\|u+v\| \le \|T^{-1}_{(U,V)}\|\,\|u+v\|.$$

Wir zeigen nun, daß (U,V) ein A–Paar ist. Als erstes zeigen wir $U \cap V = \{\,0\,\}$. Sei $x \in U \cap V$. Dann ist $(x,-x) \in U \times V$. Aus (3) ergibt sich damit

$$\|x\| = \|(x,-x)\|_\infty \le \|T^{-1}_{(U,V)}\|\,\|x-x\| = 0.$$

Diese Abschätzung zeigt $x = 0$. Also gilt $U \cap V = \{\,0\,\}$.

Als zweites zeigen wir, daß $U+V$ abgeschlossen in H ist. Sei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $U+V$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ in H, dann ist $x \in U+V$ zu zeigen. Zu x_n gibt es ein $(u_n, v_n) \in U \times V$ mit $x_n = u_n+v_n$. Als konvergente Folge in H ist $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ insbesondere eine Cauchy–Folge in H. Aus (3) folgt daher, daß $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ bzw. $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Cauchy–Folge in U bzw. in V ist. Als abgeschlossene Untervektorräume von H sind U und V insbesondere vollständig. Daher gibt es ein $(u, v) \in U \times V$ mit $u = \lim_{n\to\infty} u_n$ in H und $v = \lim_{n\to\infty} v_n$ in H. Da die Addition auf einem Hilbertraum stetig ist, ergibt sich somit

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}(u_n + v_n) = \lim_{n\to\infty} u_n + \lim_{n\to\infty} v_n = u + v \in U + V.$$

□

Satz 1.1.9. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(1) $\sphericalangle_{(U,V)} > 0$.
(2) (U, V) *ist ein A–Paar.*

Beweis. (1) $\Longrightarrow$ (2). Die Behauptung folgt sofort aus Korollar (1.1.6) und voherigem Lemma.

(2) $\Longrightarrow$ (1). Im folgenden sei $U \times V$ ausgestattet mit $\|\cdot\|_\infty$.
Der Operator $S : U\times V \to U+V$ sei definiert durch $S(u, v) = u+v$. Wir zeigen zunächst, daß S in $L(U \times V, U + V)$ invertierbar ist.

Für $(u, v) \in U \times V$ gilt

$$\|S(u, v)\| = \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \leq 2\,\|(u, v)\|_\infty.$$

Diese Abschätzung zeigt $S \in L(U \times V, U + V)$.
Sei $(u, v) \in U\times V$ mit $S(u, v) = 0$. Dann gilt $u = -v$. Daher ist $(u, v) \in (U\cap V)\times(U\cap V)$. Da (U, V) nach Voraussetzung ein A–Paar ist, folgt daraus $(u, v) = (0, 0)$. Folglich ist S injektiv. Offensichtlich ist S surjektiv. Insgesamt ist also S ein bijektiver Operator aus $L(U \times V, U + V)$.

Da (U, V) nach Voraussetzung ein A–Paar ist, ist $U+V$ abgeschlossen. Also sind U, V und $U + V$ als abgeschlossene Untervektorräume von H selbst Banach–Räume. Offensichtlich ist mit U und V auch $U \times V$ ein Banach–Raum. Damit ist S nach dem Satz von der stetigen Inversen invertierbar in $L(U \times V, U + V)$. Insbesondere gilt also:

$$\|u + v\| \geq \|S^{-1}\|^{-1}\,\|(u, v)\|_\infty \text{ für alle } (u, v) \in U \times V. \tag{4}$$

Wir zeigen nun $\sphericalangle_{(U,V)} > 0$. Nach Definition von $\sphericalangle_{(U,V)}$ ist $\sphericalangle_{(U,V)} \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Daher genügt es $\cos\sphericalangle_{(U,V)} < 1$ zu zeigen.

Die Konstante γ sei definiert durch $\gamma = 1-\frac{1}{2}\,\|S^{-1}\|^{-2}$. Offensichtlich gilt $\gamma < 1$. Sei $u \in U$ mit $u \neq 0$. Aus (4) ergibt sich

$$\|u\|^2 = \|u + 0\|^2 \geq \|S^{-1}\|^{-2}\,\|(u, 0)\|_\infty^2 = \|S^{-1}\|^{-2}\,\|u\|^2.$$

Wegen $u \neq 0$ folgt aus dieser Abschätzung $\|S^{-1}\|^{-2} \leq 1$. Damit ergibt sich

$$\gamma \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0.$$

Insgesamt gilt also $0 < \gamma < 1$.

Sei $(u, v) \in U \times V$ mit $\|(u, v)\|_\infty \leq 1$ und sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Zu (u, v) gibt es ein $\varphi \in \mathbb{R}$ mit $e^{i\varphi} \langle u, v\rangle = |\langle u, v\rangle|$. Wegen $|e^{i\varphi}| = 1$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt somit

$$\begin{aligned}\|u\|^2 + 2\lambda\,|\langle u, v\rangle| + \lambda^2\,\|v\|^2 &= \|u\|^2 + 2\lambda e^{i\varphi}\,\langle u, v\rangle + \lambda^2\,\|v\|^2\\ &= \|e^{i\varphi}u\|^2 + 2\,\langle e^{i\varphi}u, \lambda v\rangle + \|\lambda v\|^2.\end{aligned}$$

Nach Wahl von φ gilt $\langle e^{i\varphi}u, \lambda v\rangle = \lambda\,|\langle u, v\rangle| \in \mathbb{R}$. Also gilt

$$\|u\|^2 + 2\lambda\,|\langle u, v\rangle| + \lambda^2\,\|v\|^2 = \|e^{i\varphi}u + \lambda v\|^2.$$

Mit Hilfe von (4) ergibt sich damit

$$\begin{aligned}\|u\|^2 + 2\lambda\,|\langle u, v\rangle| + \lambda^2\,\|v\|^2 &\geq \|S^{-1}\|^{-2}\,\|(e^{i\varphi}u, \lambda v)\|_\infty^2 \geq \tfrac{1}{2}\,\|S^{-1}\|^{-2}\,(\|e^{i\varphi}u\|^2 + \|\lambda v\|^2)\\ &= \tfrac{1}{2}\,\|S^{-1}\|^{-2}\,(\|u\|^2 + \lambda^2\,\|v\|^2).\end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung der Definition von γ gilt also

$$\begin{aligned}0 &\leq (1 - \tfrac{1}{2}\,\|S^{-1}\|^{-2})\,\|u\|^2 + 2\lambda\,|\langle u, v\rangle| + (1 - \tfrac{1}{2}\,\|S^{-1}\|^{-2})\,\lambda^2\,\|v\|^2\\ &= \gamma\,\|u\|^2 + 2\lambda\,|\langle u, v\rangle| + \gamma\lambda^2\,\|v\|^2.\end{aligned}$$

Wegen $\gamma > 0$ folgt damit

$$\begin{aligned}0 &\leq \|u\|^2 + 2\gamma^{-1}\lambda\,|\langle u, v\rangle| + \lambda^2\,\|v\|^2 \leq \|(u, v)\|_\infty^2 + 2\gamma^{-1}\lambda\,|\langle u, v\rangle| + \lambda^2\,\|(u, v)\|_\infty^2\\ &\leq 1 + 2\gamma^{-1}\lambda\,|\langle u, v\rangle| + \lambda^2 = 1 + (\gamma^{-1}\,|\langle u, v\rangle| + \lambda)^2 - \gamma^{-2}\,|\langle u, v\rangle|^2.\end{aligned}$$

Speziell für $\lambda = -\gamma^{-1}\,|\langle u, v\rangle| \in \mathbb{R}$ gilt also $\gamma^{-2}\,|\langle u, v\rangle|^2 \leq 1$. Wegen $\gamma > 0$ gilt daher $|\langle u, v\rangle| \leq \gamma$. Aus der Definition von $\sphericalangle_{(U,V)}$ folgt damit $\cos\sphericalangle_{(U,V)} \leq \gamma < 1$. □

1.2 Ein Minimierungsproblem unter Nebenbedingungen

Sei (U, V) ein A–Paar. In diesem Abschnitt wird gezeigt, daß zu jedem $(u_0, v_0) \in U \times V$ das Minimierungsproblem

$$\|x_0\| = \min\{\,\|x\| : x \in H\,\} \text{ unter der Nebenbedingung } (P_U x_0, P_V x_0) = (u_0, v_0)$$

genau eine Lösung hat.

Definition 1.2.1. Zu (U, V) sei $P_{(U,V)} \in L(H)$ definiert durch $P_{(U,V)} = P_{U^\perp} T_{(V,U)}^{-1} P_{V^\perp}$.

Korollar 1.2.2. *Ist $(x, y) \in H \times H$ mit $P_{V^\perp}x = T_{(V,U)}y$, so gilt: $P_{(U,V)}x = P_{U^\perp}y$.*

Beweis. Sei $(x, y) \in H \times H$ mit $P_{V^\perp} x = T_{(V,U)} y$. Mit der Definition von $P_{(U,V)}$ ergibt sich dann

$$P_{(U,V)} x = P_{U^\perp} T_{(V,U)}^{-1} P_{V^\perp} x = P_{U^\perp} T_{(V,U)}^{-1} T_{(V,U)} y = P_{U^\perp} y.$$

□

Korollar 1.2.3. *Es gelten folgende Aussagen:*

(1) $P_{(U,V)} U = \{ 0 \}$.
(2) $P_{(U,V)} V = \{ 0 \}$.
(3) *Für alle* $x \in U^\perp \cap V^\perp$ *gilt:* $P_{(U,V)} x = x$.

Beweis. (1) Sei $u \in U$. Dann gilt $P_{U^\perp} u = 0$. Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} T_{(V,U)} u &= (id - P_V P_U) u = (id - (id - P_{V^\perp})(id - P_{U^\perp})) u \\ &= (id - id + P_{U^\perp} + P_{V^\perp} - P_{V^\perp} P_{U^\perp}) u = P_{V^\perp} u. \end{aligned}$$

Aus Korollar (1.2.2) folgt damit $P_{(U,V)} u = P_{U^\perp} u = 0$. Also gilt $P_{(U,V)} U = \{ 0 \}$.

(2) Sei $v \in V$. Dann gilt $P_{V^\perp} v = 0 = T_{(V,U)} 0$. Aus Korollar (1.2.2) folgt damit $P_{(U,V)} v = P_{U^\perp} 0 = 0$. Also gilt $P_{(U,V)} V = \{ 0 \}$.

(3) Sei $x \in U^\perp \cap V^\perp$. Dann gilt $(P_U x, P_{V^\perp} x) = (0, x)$. Somit ergibt sich

$$T_{(V,U)} x = (id - P_V P_U) x = x = P_{V^\perp} x.$$

Aus Korollar (1.2.2) folgt damit $P_{(U,V)} x = P_{U^\perp} x = x$. □

Lemma 1.2.4. *Es gilt:* $U + V = (U^\perp \cap V^\perp)^\perp$.

Beweis. Als erstes zeigen wir $U + V \subseteq (U^\perp \cap V^\perp)^\perp$. Sei $(u, v) \in U \times V$. Für alle $x \in U^\perp \cap V^\perp$ gilt dann

$$\langle u + v, x \rangle = \langle u, x \rangle + \langle v, x \rangle = 0 + 0 = 0.$$

Dies zeigt $u + v \in (U^\perp \cap V^\perp)^\perp$. Also gilt $U + V \subseteq (U^\perp \cap V^\perp)^\perp$.

Als zweites zeigen wir $(U^\perp \cap V^\perp)^\perp \subseteq U + V$. Aus U, $V \subseteq U + V$ folgt $(U + V)^\perp \subseteq U^\perp$, $V^\perp$. Daher gilt $(U+V)^\perp \subseteq U^\perp \cap V^\perp$. Folglich gilt $(U^\perp \cap V^\perp)^\perp \subseteq (U+V)^{\perp\perp}$. Nach Voraussetzung ist (U, V) eine A–Paar. Daher ist $U + V$ abgeschlossen. Mit [43, S. 197, Korollar V.3.5] gilt also

$$(U^\perp \cap V^\perp)^\perp \subseteq (U + V)^{\perp\perp} = \overline{U + V} = U + V.$$

□

Korollar 1.2.5. *Es gilt:* $(U + V)^\perp = U^\perp \cap V^\perp$.

Beweis. Als Schnitt zweier abgeschlossener Untervektorräume von H ist $U^\perp \cap V^\perp$ selbst ein abgeschlossener Untervektorraum von H. Aus Lemma (1.2.4) und [43, S. 197, Korollar V.3.5] folgt daher

$$(U+V)^\perp = (U^\perp \cap V^\perp)^{\perp\perp} = \overline{U^\perp \cap V^\perp} = U^\perp \cap V^\perp.$$

□

Lemma 1.2.6. *$P_{(U,V)}$ ist die orthogonale Projektion auf $(U+V)^\perp$.*

Beweis. Sei $z \in H$. Da $U+V$ nach Voraussetzung abgeschlossen ist, gibt es nach dem Satz von der orthogonalen Projektion Elemente $x \in U+V$ und $y \in (U+V)^\perp$ mit $z = x \oplus y$. Folglich genügt es $P_{(U,V)}z = y$ zu zeigen.

Zu x gibt es ein $(u,v) \in U \times V$ mit $x = u+v$. Nach Aussage (1) und (2) von Korollar (1.2.3) ergibt sich damit

$$P_{(U,V)}x = P_{(U,V)}u + P_{(U,V)}v = 0.$$

Nach Korollar (1.2.5) und Aussage (3) von Korollar (1.2.3) gilt $P_{(U,V)}y = y$. Insgesamt gilt also $P_{(U,V)}z = y$. □

Korollar 1.2.7. *Es gilt: $P_{(V,U)} = P_{(U,V)}$.*

Beweis. Wegen $(V+U)^\perp = (U+V)^\perp$ gilt die Behauptung nach vorherigem Lemma. □

Lemma 1.2.8. *Es gilt: $P_U T^{-1}_{(U,V)} P_U = T^{-1}_{(U,V)} P_U$.*

Beweis. Da P_U die orthogonale Projektion auf U ist, genügt es $T^{-1}_{(U,V)}U \subseteq U$ zu zeigen. Sei $x \in T^{-1}_{(U,V)}U$. Dann gilt $x - P_U P_V x = T_{(U,V)}x \in U$. Wegen $P_U P_V x \in U$ folgt damit $x = T_{(U,V)}x + P_U P_V x \in U + U = U$. Also gilt $T^{-1}_{(U,V)}U \subseteq U$. □

Lemma 1.2.9. *Es gilt: $P_{(U,V)} T^{-1}_{(U,V)} P_U = 0$.*

Beweis. Nach Definition von $P_{(U,V)}$ gilt

$$P_{(U,V)} T^{-1}_{(U,V)} P_U = P_{U^\perp} T^{-1}_{(V,U)} P_{V^\perp} T^{-1}_{(U,V)} P_U.$$

Mit Lemma (1.2.8) folgt daraus

$$P_{(U,V)} T^{-1}_{(U,V)} P_U = P_{U^\perp} T^{-1}_{(V,U)} P_{V^\perp} P_U T^{-1}_{(U,V)} P_U.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
P_{(U,V)} T^{-1}_{(U,V)} P_U &= P_{U^\perp} T^{-1}_{(V,U)} (id - P_V) P_U T^{-1}_{(U,V)} P_U = P_{U^\perp} T^{-1}_{(V,U)} (P_U - P_V P_U) T^{-1}_{(U,V)} P_U \\
&= P_{U^\perp} T^{-1}_{(V,U)} (P_U - id + id - P_V P_U) T^{-1}_{(U,V)} P_U \\
&= P_{U^\perp} T^{-1}_{(V,U)} (P_U - id + T_{(V,U)}) T^{-1}_{(U,V)} P_U \\
&= P_{U^\perp} T^{-1}_{(V,U)} (P_U - id) T^{-1}_{(U,V)} P_U + P_{U^\perp} T^{-1}_{(U,V)} P_U \\
&= P_{U^\perp} T^{-1}_{(V,U)} (P_U - id) T^{-1}_{(U,V)} P_U + (id - P_U) T^{-1}_{(U,V)} P_U \\
&= P_{U^\perp} T^{-1}_{(V,U)} (P_U - id) T^{-1}_{(U,V)} P_U - (P_U - id) T^{-1}_{(U,V)} P_U \\
&= (P_{U^\perp} T^{-1}_{(V,U)} - id)(P_U - id) T^{-1}_{(U,V)} P_U.
\end{aligned}$$

Mit Lemma (1.2.8) gilt

$$(P_U - id\,)T_{(U,V)}^{-1}P_U = P_U T_{(U,V)}^{-1}P_U - T_{(U,V)}^{-1}P_U = 0.$$

Folglich gilt $P_{(U,V)}T_{(U,V)}^{-1}P_U = 0$. □

Definition 1.2.10. Zu (U,V) sei der Operator $R_{(U,V)} : H \times H \to H$ definiert durch

$$R_{(U,V)}(x,y) = P_{V^\perp}T_{(U,V)}^{-1}P_U x + P_{U^\perp}T_{(V,U)}^{-1}P_V y.$$

Korollar 1.2.11. *Für alle $(x,y) \in H \times H$ gilt: $R_{(V,U)}(x,y) = R_{(U,V)}(y,x)$.*

Beweis. Die Behauptung folgt sofort aus der Definition von $R_{(U,V)}$. □

Lemma 1.2.12. *Für alle $(u,v) \in U \times V$ gilt: $(P_U R_{(U,V)}(u,v), P_V R_{(U,V)}(u,v)) = (u,v)$.*

Beweis. Sei $(u,v) \in U \times V$. Als erstes zeigen wir $P_U R_{(U,V)}(u,v) = u$. Wegen $P_U P_{U^\perp} = 0$ folgt aus der Definition von $R_{(U,V)}$, daß $P_U R_{(U,V)}(u,v) = P_U P_{V^\perp}T_{(U,V)}^{-1}P_U u$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
P_U R_{(U,V)}(u,v) &= P_U(id - P_V)T_{(U,V)}^{-1}P_U u = (P_U - P_U P_V)T_{(U,V)}^{-1}P_U u \\
&= (P_U - id + id - P_U P_V)T_{(U,V)}^{-1}P_U u = (P_U - id + T_{(U,V)})T_{(U,V)}^{-1}P_U u \\
&= (P_U T_{(U,V)}^{-1}P_U - T_{(U,V)}^{-1}P_U)u + P_U u.
\end{aligned}$$

Wegen $u \in U$ gilt also

$$P_U R_{(U,V)}(u,v) = (P_U T_{(U,V)}^{-1}P_U - T_{(U,V)}^{-1}P_U)u + u.$$

Aus Lemma (1.2.8) folgt damit $P_U R_{(U,V)}(u,v) = u$.

Als zweites zeigen wir $P_V R_{(U,V)}(u,v) = v$. Da mit (U,V) auch (V,U) ein A–Paar ist, gilt nach dem bereits Gezeigtem $P_V R_{(V,U)}(v,u) = v$. Aus Korollar (1.2.11) folgt damit $P_V R_{(U,V)}(u,v) = P_V R_{(V,U)}(v,u) = v$. □

Lemma 1.2.13. *Es gilt: $R_{(U,V)}(H \times H) \subseteq U + V$.*

Beweis. Sei $(x,y) \in H \times H$. Da $P_{(U,V)}$ die orthogonale Projektion auf $(U+V)^\perp$ ist, genügt es $P_{(U,V)}R_{(U,V)}(x,y) = 0$ zu zeigen.
Aufgrund der Linerarität von $P_{(U,V)}R_{(U,V)}$ genügt es dazu $P_{(U,V)}R_{(U,V)}(x,0) = 0$ und $P_{(U,V)}R_{(U,V)}(0,y) = 0$ zu zeigen.

Als erstes zeigen wir $P_{(U,V)}R_{(U,V)}(x,0) = 0$. Mit der Definition von $P_{(U,V)}$ und $R_{(U,V)}$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
P_{(U,V)}R_{(U,V)}(x,0) &= P_{U^\perp}T_{(V,U)}^{-1}P_{V^\perp}P_{V^\perp}T_{(U,V)}^{-1}P_U x = P_{U^\perp}T_{(V,U)}^{-1}P_{V^\perp}T_{(U,V)}^{-1}P_U x \\
&= P_{(U,V)}T_{(U,V)}^{-1}P_U x.
\end{aligned}$$

Aus Lemma (1.2.9) folgt damit $P_{(U,V)}R_{(U,V)}(x,0) = 0$.

Als zweites zeigen wir $P_{(U,V)}R_{(U,V)}(0,y) = 0$. Da mit (U,V) auch (V,U) ein A–Paar ist, gilt nach dem bereits Gezeigtem $P_{(V,U)}R_{(V,U)}(y,0) = 0$. Aus Korollar (1.2.7) und Korollar (1.2.11) folgt damit $P_{(U,V)}R_{(U,V)}(0,y) = P_{(V,U)}R_{(V,U)}(y,0) = 0$. □

Satz 1.2.14. *Zu jedem $(u_0, v_0) \in U \times V$ besitzt das Minimierungsproblem*

$$\|x_0\| = \min\{\, \|x\| : x \in H \,\} \text{ unter der Nebenbedinung } (P_U x_0, P_V x_0) = (u_0, v_0)$$

genau eine Lösung.

Beweis. Zu $(u_0, v_0) \in U \times V$ sei $L_0 \subseteq H$ und $x_0 \in H$ definiert durch

$$L_0 = \{\, x \in H : (P_U x, P_V x) = (u_0, v_0) \,\} \text{ und } x_0 = R_{(U,V)}(u_0, v_0).$$

Nach Lemma (1.2.13) gilt $x_0 \in U + V$. Aufgrund des Satzes von Pythagoras genügt es daher $L_0 = x_0 + (U+V)^\perp$ zu zeigen.

Als erstes zeigen wir $L_0 \subseteq x_0 + (U+V)^\perp$. Sei $x \in L_0$. Mit der Definition von L_0 und Lemma (1.2.12) ergibt sich dann

$$\begin{aligned}&(P_U(x-x_0), P_V(x-x_0)) = (P_U x - P_U x_0, P_V x - P_V x_0) = \\ &(P_U x - P_U R_{(U,V)}(u_0,v_0), P_V x - P_V R_{(U,V)}(u_0,v_0)) = (u_0 - u_0, v_0 - v_0) = (0,0).\end{aligned}$$

Da P_U bzw. P_V die orthogonale Projektion auf U bzw. auf V ist, zeigt dies $x - x_0 \in U^\perp \cap V^\perp$. Mit Korollar (1.2.5) gilt daher $x \in x_0 + (U+V)^\perp$. Also gilt $L_0 \subseteq x_0 + (U+V)^\perp$.

Als zweites zeigen wir $x_0 + (U+V)^\perp \subseteq L_0$. Sei $x \in (U+V)^\perp$. Nach Korollar (1.2.5) gilt dann $x \in U^\perp \cap V^\perp$. Da P_U bzw. P_V die orthogonale Projektion auf U bzw. auf V ist, gilt also $(P_U x, P_V x) = (0,0)$. Aus Lemma (1.2.12) folgt damit

$$\begin{aligned}(P_U(x_0+x), P_V(x_0+x)) &= (P_U x_0 + P_U x, P_V x_0 + P_V x) \\ &= (P_U R_{(U,V)}(u_0,v_0), P_V R_{(U,V)}(u_0,v_0)) = (u_0, v_0).\end{aligned}$$

Nach Definition von L_0 gilt daher $x_0 + x \in L_0$. Also gilt $x_0 + (U+V)^\perp \subseteq L_0$. □

2 Qualitative Unschärferelation und gleichgradig beschränkte Orthogonalbasen

In diesem Kapitel wird eine Qualitative Unschärferelation auf $L^1(\mu)$ gezeigt. Es wird vorausgesetzt, daß μ ein endliches positives Maß auf der Menge Ω ist und daß eine gleichgradig beschränkte Orthogonalbasis $\varphi = \{ \varphi_n : n \in \mathbb{N}_0 \}$ von $L^2(\mu)$ existiert. Dabei heißt φ gleichgradig beschränkt, falls für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\|\varphi_n\|_\infty \leq 1$.
Im folgenden sei $A \subseteq \Omega$ meßbar und Λ sei eine Teilmenge von $\mathbb{N}_0$.

Definition 2.0.1. Die Gewichtsfunktion $h : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $h(n) = \|\varphi_n\|_2^{-2}$.

Definition 2.0.2. Zu $f \in L^2(\mu)$ sei die Fourier–Transformierte $\mathcal{F}f$ von f definiert durch $\mathcal{F}f = \{\langle f, \varphi_n \rangle\}_{n \in \mathbb{N}_0}$.

Bemerkung. Da $\{ h(n)^{\frac{1}{2}} \varphi_n : n \in \mathbb{N}_0 \}$ eine Orthonormalbasis von $L^2(\mu)$ ist, ist $\mathcal{F} : L^2(\mu) \to \ell^2(h)$ ein isometrischer Isomorphismus.

Definition 2.0.3. Sei $p \in \{ 1, 2 \}$. Zu A sei der Untervektorraum $L^p(A, \mu)$ von $L^p(\mu)$ definiert durch $L^p(A, \mu) = \{ f \in L^p(\mu) : 1_A f = f \}$.

Korollar 2.0.4. *$L^p(A, \mu)$ ist abgeschlossen.*

Beweis. Sei $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge in $L^p(A, \mu)$ mit $\lim_{k \to \infty} f_k = f$ in $L^p(\mu)$. Dann ist $f \in L^p(A, \mu)$ zu zeigen. Mit $1_A f_k = f_k$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
\|1_A f - f\|_p &= \|1_A(f - f_k) + 1_A f_k - f_k + (f_k - f)\|_p \\
&\leq \|1_A(f - f_k)\|_p + \|1_A f_k - f_k\|_p + \|f_k - f\|_p = \|1_A(f - f_k)\|_p + \|f_k - f\|_p \\
&\leq 2\, \|f - f_k\|_p.
\end{aligned}$$

Wegen $\lim_{n \to \infty} f_k = f$ in $L^p(\mu)$ folgt daraus $1_A f = f$. Folglich ist $f \in L^p(A, \mu)$. $\square$

Definition 2.0.5. Zu A sei $P_A \in L(L^2(\mu))$ definiert durch $P_A f = 1_A f$.

Korollar 2.0.6. *P_A ist die orthogonale Projektion auf $L^2(A, \mu)$.*

Beweis. Sei $\omega \in \Omega$. Aus $1_A(\omega)^2 = 1_A(\omega)$ und $1_A(\omega) \in \mathbb{R}$ folgt sofort $P_A^2 = P_A$ und $P_A^* = P_A$. Folglich ist P_A eine orthogonale Projektion. Aus der Definition von $L^2(A, \mu)$ ergibt sich sofort $L^2(A, \mu) \subseteq P_A L^2(\mu)$. Daher ist nur noch $P_A L^2(\mu) \subseteq L^2(A, \mu)$ zu zeigen. Sei also $f \in P_A L^2(\mu)$. Dann gibt es ein $g \in L^2(\mu)$ mit $f = P_A g$. Wegen $P_A^2 = P_A$ ergibt sich damit

$$1_A f = P_A f = P_A^2 g = P_A g = f.$$

Folglich ist $f \in L^2(A, \mu)$. Also gilt $P_A L^2(\mu) \subseteq L^2(A, \mu)$. $\square$

Lemma 2.0.7. *Es gilt: $\mathcal{F} \in L(L^1(\mu), \ell^\infty(\mathbb{N}_0))$ mit $\|\mathcal{F}\| \leq 1$.*

Beweis. Sei $f \in L^1(\mu)$ und sei $n \in \mathbb{N}_0$. Mit $\|\varphi_n\|_\infty \leq 1$ ergibt sich

$$|\mathcal{F}f(n)| = |\int_\Omega f(\omega)\,\varphi_n(\omega)\,d\mu(\omega)| \leq \int_\Omega |f(\omega)|\,|\varphi_n(\omega)|\,d\mu(\omega) \leq \int_\Omega |f(\omega)|\,d\mu(\omega) = \|f\|_1.$$

Daraus folgt $\|\mathcal{F}f\|_\infty \leq \|f\|_1$. Folglich ist $\mathcal{F} \in L(L^1(\mu), \ell^\infty(\mathbb{N}_0))$ mit $\|\mathcal{F}\| \leq 1$. □

Bemerkung. Im folgenden sei die Fourier–Transformation $\mathcal{F}$ stets injektiv auf $L^1(\mu)$.

Definition 2.0.8. Sei $p \in \{1, 2\}$. Für $f \in L^p(\mu)$ sei das Spektrum $\mathit{spec}\, f$ von f definiert durch $\mathit{spec}\, f = \{\, n \in \mathbb{N}_0 : \mathcal{F}f(n) \neq 0 \,\}$.

Definition 2.0.9. Sei $p \in \{1, 2\}$. Zu Λ sei der Untervektorraum $L^p_\Lambda(\mu)$ von $L^p(\mu)$ definiert durch $L^p_\Lambda(\mu) = \{\, f \in L^p(\mu) : \mathit{spec}\, f \subseteq \Lambda \,\}$.

Korollar 2.0.10. *$L^p_\Lambda(\mu)$ ist abgeschlossen.*

Beweis. Sei $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $L^p_\Lambda(\mu)$ mit $\lim_{k\to\infty} f_k = f$ in $L^p(\mu)$. Dann ist $f \in L^p_\Lambda(\mu)$ zu zeigen. Wegen $\lim_{k\to\infty} f_k = f$ in $L^p(\mu)$ konvergiert $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ insbesondere schwach gegen f in $L^p(\mu)$. Da μ nach Voraussetzung endich ist, gilt $L^1(\mu)^* = L^\infty(\mu)$ und $L^2(\mu)^* = L^2(\mu)$. Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Wegen $\varphi_n \in L^\infty(\mu) \cap L^2(\mu)$ gilt daher

$$\mathcal{F}f(n) = \int_\Omega f(\omega)\,\varphi_n(\omega)\,d\mu(\omega) = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k(\omega)\,\varphi_n(\omega)\,d\mu(\omega) = \lim_{k\to\infty} \mathcal{F}f_k(n).$$

Wegen $\mathit{spec}\, f_k \subseteq \Lambda$ folgt daraus $\mathit{spec}\, f \subseteq \Lambda$. Folglich ist $f \in L^p_\Lambda(\mu)$. □

Definition 2.0.11. Zu Λ sei $P_\Lambda \in L(L^2(\mu))$ definiert durch $P_\Lambda = \mathcal{F}^{-1} 1_\Lambda \mathcal{F}$.

Korollar 2.0.12. *P_Λ ist die orthogonale Projektion auf $L^2_\Lambda(\mu)$.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß P_Λ eine orthogonale Projektion ist. Dazu genügt es $P_\Lambda^2 = P_\Lambda$ und $P_\Lambda^* = P_\Lambda$ zu zeigen. Seien $f, g \in L^2(\mu)$. Aus der Definition von P_Λ ergibt sich

$$P_\Lambda^2 f = P_\Lambda \mathcal{F}^{-1} 1_\Lambda \mathcal{F} f = \mathcal{F}^{-1} 1_\Lambda \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} 1_\Lambda \mathcal{F} f = \mathcal{F}^{-1} 1_\Lambda^2 \mathcal{F} f = \mathcal{F}^{-1} 1_\Lambda \mathcal{F} f = P_\Lambda f$$

und

$$\langle P_\Lambda f, g\rangle = \langle \mathcal{F}^{-1} 1_\Lambda \mathcal{F} f, g\rangle = \langle 1_\Lambda \mathcal{F} f, \mathcal{F} g\,\rangle = \langle \mathcal{F} f, 1_\Lambda \mathcal{F} g\,\rangle = \langle f, \mathcal{F}^{-1} 1_\Lambda \mathcal{F} g\rangle = \langle f, P_\Lambda g\rangle.$$

Also gilt $P_\Lambda^2 = P_\Lambda$ und $P_\Lambda^* = P_\Lambda$.

Nun ist nur noch $L^2_\Lambda(\mu) = P_\Lambda L^2(\mu)$ zu zeigen. Als erstes zeigen wir $L^2_\Lambda(\mu) \subseteq P_\Lambda L^2(\mu)$. Unmittelbar aus der Definition von $L^2_\Lambda(\mu)$ folgt

$$\begin{aligned} L^2_\Lambda(\mu) &= \{\, f \in L^2(\mu) :\, 1_\Lambda \mathcal{F} f = \mathcal{F} f \,\} = \{\, f \in L^2(\mu) :\, \mathcal{F}^{-1} 1_\Lambda \mathcal{F} f = f \,\} \\ &= \{\, f \in L^2(\mu) :\, P_\Lambda f = f \,\}. \end{aligned}$$

Daher gilt $L^2_\Lambda(\mu) \subseteq P_\Lambda L^2(\mu)$.

Als zweites zeigen wir $P_\Lambda L^2(\mu) \subseteq L^2_\Lambda(\mu)$. Sei $f \in P_\Lambda L^2(\mu)$. Dann gibt es ein $g \in L^2(\mu)$ mit $f = P_\Lambda g$. Wegen $P_\Lambda^2 = P_\Lambda$ ergibt sich damit

$$1_\Lambda \mathcal{F} f = \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} 1_\Lambda \mathcal{F} f = \mathcal{F} P_\Lambda f = \mathcal{F} P_\Lambda^2 g = \mathcal{F} P_\Lambda g = \mathcal{F} f.$$

Diese Gleichung zeigt $\mathit{spec}\, f \subseteq \Lambda$. Folglich ist $f \in L^2_\Lambda(\mu)$. Also gilt $P_\Lambda L^2(\mu) \subseteq L^2_\Lambda(\mu)$. □

Definition 2.0.13. Ein Paar (A, Λ) heißt A–Paar auf $L^2(\mu)$, falls $(L^2(A,\mu), L^2_\Lambda(\mu))$ ein A–Paar auf $L^2(\mu)$ ist.

Lemma 2.0.14. *Es gilt:* $\|P_A P_\Lambda\| \le (\mu(A)\, h(\Lambda))^{\frac{1}{2}}$.

Beweis. Wir zeigen zunächst:

$$\|\mathcal{F} P_A f\|_\infty \le \mu(A)^{\frac{1}{2}}\, \|f\|_2 \text{ für alle } f \in L^2(\mu).$$

Offensichtlich ist die Behauptung richtig für $\mu(A) = \infty$. Sei also $\mu(A) < \infty$. Für $f \in L^2(\mu)$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\begin{aligned} |\mathcal{F} P_A f(n)| = |\mathcal{F} 1_A f(n)| &= \Big| \int_\Omega 1_A(\omega)\, f(\omega)\, \varphi_n(\omega)\, d\mu(\omega) \Big| \\ &\le \int_\Omega |1_A(\omega)\, f(\omega)|\, |\varphi_n(\omega)|\, d\mu(\omega). \end{aligned}$$

Wegen $\|\varphi_n\|_\infty \le 1$ und $\mu(A) < \infty$ gilt also

$$|\mathcal{F} P_A f(n)| \le \int_\Omega |1_A(\omega)\, f(\omega)|\, d\mu(\omega) = \langle |1_A|, |f| \rangle.$$

Mit Hilfe der Cauchy–Schwarz–Ungleichung ergibt sich damit

$$|\mathcal{F} P_A f(n)| \le \|1_A\|_2\, \|f\|_2 = \mu(A)^{\frac{1}{2}}\, \|f\|_2.$$

Diese Abschätzung zeigt $\|\mathcal{F} P_A f\|_\infty \le \mu(A)^{\frac{1}{2}}\, \|f\|_2$.

Wir zeigen nun $\|P_A P_\Lambda\| \le (\mu(A)\, h(\Lambda))^{\frac{1}{2}}$. Da P_A und P_Λ selbstadjungiert sind, folgt aus [43, S. 208, Satz V.5.2], daß $\|P_A P_\Lambda\| = \|P_\Lambda P_A\|$. Daher genügt es $\|P_\Lambda P_A\| \le (\mu(A)\, h(\Lambda))^{\frac{1}{2}}$ zu zeigen. Für $f \in L^2(\mu)$ gilt

$$\begin{aligned} \|P_\Lambda P_A f\|_2^2 &= \sum_{n=0}^\infty |\mathcal{F} P_\Lambda P_A f(n)|^2\, h(n) = \sum_{n=0}^\infty |1_\Lambda(n) (\mathcal{F} P_A f)(n)|^2\, h(n) \\ &= \sum_{n\in\Lambda} |\mathcal{F} P_A f(n)|^2\, h(n) \le \|\mathcal{F} P_A f\|_\infty^2 \sum_{n\in\Lambda} h(n) = \|\mathcal{F} P_A f\|_\infty^2\, h(\Lambda). \end{aligned}$$

Mit der zuvor gezeigten Ungleichung folgt daraus $\|P_\Lambda P_A f\|_2^2 \le \mu(A)\, h(\Lambda)\, \|f\|_2^2$. Folglich gilt $\|P_\Lambda P_A\| \le (\mu(A)\, h(\Lambda))^{\frac{1}{2}}$. □

Korollar 2.0.15. *Ist* $f \in L^2(A,\mu) \cap L^2_\Lambda(\mu)$ *mit* $\mu(A)\, h(\Lambda) < 1$, *so gilt* $f = 0$ μ*–f.ü.*.

Beweis. Sei (A, Λ) ein Paar mit $\mu(A)\, h(\Lambda) < 1$. Offensichtlich genügt es zu zeigen, daß (A, Λ) ein A–Paar ist.
Aus vorherigem Lemma und Lemma (1.1.2) folgt, daß $\sphericalangle(L^2(A, \mu), L^2_\Lambda(\mu)) > 0$. Nach Satz (1.1.9) ist daher (A, Λ) ein A–Paar. □

Satz 2.0.16. *Ist $f \in L^1(A, \mu) \cap L^1_\Lambda(\mu)$ mit $\mu(A)\, h(\Lambda) < 1$, so gilt $f = 0$ μ–f.ü..*

Beweis. Sei $f \in L^1(A, \mu) \cap L^1_\Lambda(\mu)$ mit $\mu(A)\, h(\Lambda) < 1$. Ist A eine μ–Nullmenge, so ist 1_A die Nullfunktion in $L^1(\mu)$. Folglich gilt $f = 1_A f = 0$ in $L^1(\mu)$. Sei also $\mu(A) > 0$. Wir zeigen zunächst $f \in L^2(\mu)$. Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $|\mathcal{F}f(n)| \le \|f\|_1$. Wegen $spec\, f \subseteq \Lambda$ ergibt sich damit

$$\|\mathcal{F}f\|_2^2 = \sum_{n\in\Lambda} |\mathcal{F}f(n)|^2\, h(n) \le \|f\|_1^2 \sum_{n\in\Lambda} h(n) = \|f\|_1^2\, h(\Lambda).$$

Wegen $\mu(A) > 0$ folgt aus $\mu(A)\, h(\Lambda) < 1$ sofort $h(\Lambda) < \infty$. Wegen $f \in L^1(\mu)$ gilt also $\mathcal{F}f \in \ell^2(h)$. Mit den Voraussetzungen an μ und $\mathcal{F}$ folgt daraus sofort $f \in L^2(\mu)$.

Wir zeigen nun $f = 0$ μ–f.ü.. Es gilt $f \in L^2(\mu) \cap L^1(A, \mu) \cap L^1_\Lambda(\mu)$. Offensichtlich ist daher $f \in L^2_\Lambda(\mu)$. Mit $f \in L^2(\mu)$ ist auch $1_A\, f \in L^2(\mu)$. Aus der Definition von $L^p(A, \mu)$ ergibt sich damit $f \in L^2(A, \mu)$. Insgesamt ist also $f \in L^2(A, \mu) \cap L^2_\Lambda(\mu)$. Nach vorherigem Korollar gilt daher $f = 0$ μ–f.ü.. □

Beispiel. Seien $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folgen mit

$$a_n > 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0,\ b_n \ge 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0,\ c_n > 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

und

$$\begin{aligned} a_0 + b_0 &= 1, \\ a_n + b_n + c_n &= 1 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Dann sei die Folge $\{R_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ von Polynomen definiert durch

$$\begin{aligned} R_0(x) &= 1, \\ R_1(x) &= \frac{1}{a_0}(x - b_0), \\ R_1(x)\, R_n(x) &= a_n\, R_{n+1}(x) + b_n\, R_n(x) + c_n\, R_{n-1}(x) \text{ für } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Aus obiger Rekursionsformel folgt sofort $\deg R_n = n$. Nach dem Satz von Favard existiert ein W–Maß π auf $\mathbb{R}$ mit

$$\int_{\mathbb{R}} R_n(x)\, R_m(x)\, d\pi(x) = h(n)^{-1}\, \delta_{n,m}\, ,\ 0 < h(n) < \infty.$$

Daher bildet die Folge $\{R_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein orthogonales Polynomsystem. Seien $k, l \in \mathbb{N}_0$. Wegen $\deg R_n = n$ existieren zu R_k und R_l Koeffizienten $g(k, l, 0), \ldots, g(k, l, k + l) \in \mathbb{R}$ mit

$$R_k(x)\, R_l(x) = \sum_{n=0}^{k+l} g(k, l, n)\, R_n(x).$$

Die Folge $\{R_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ hat die Eigenschaft (P), falls gilt:

$$g(k,l,n) \geq 0 \text{ für alle } k,l \in \mathbb{N}_0 \text{ und alle } 0 \leq n \leq k+l.$$

Sei $\{R_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge mit der Eigenschaft (P). Nach [23] gilt dann:

$$\begin{aligned} &\mathit{supp}\,\pi \subseteq [1-2a_0, 1], \\ &\sup\{\,|R_n(x)| : x \in \mathit{supp}\,\pi\,\} \leq 1 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Damit ist also π ein W–Maß mit kompaktem Träger. Mit dem Approximationssatz von Weierstraß folgt daraus sofort, daß $\{R_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ in $L^2(\pi)$ vollständig ist. Insgesamt ist also eine Folge $\{R_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit der Eigenschaft (P) eine gleichgradig beschränkte Orthogonalbasis von $L^2(\pi)$.
Die Jacobi–Polynome aus Kapitel 3 sind nach [23] ein konkretes Beispiel für eine Folge $\{R_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit der Eigenschaft (P).

3 Die Jacobi–Ableitung

Im folgenden sei der Parameter (α, β) aus

$$\{\, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \alpha \geq \beta > -1 \text{ und } (\alpha + \beta \geq 0 \text{ oder } \beta \geq -\tfrac{1}{2}) \,\}.$$

Die normierten Jacobi–Polynome $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ zum Parameter (α, β) sind orthogonal bzgl. $d\pi(x) = 2^{-(\alpha+\beta+1)} \frac{\Gamma(\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\beta+1)} (1-x)^\alpha (1+x)^\beta 1_{]-1,1[}(x)\, dx$. Für den Träger S von π gilt $S = [-1, 1]$. Durch die Normierung $r_n(1) = 1$, $n \in \mathbb{N}_0$ bildet $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine gleichgradig beschränkte Orthogonalbasis von $L^2(\pi)$. Im folgenden bezieht sich die Fourier–Transformation $\mathcal{F}$ und die Gewichts–Funktion h stets auf $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$.
Zu $z \in S$ sei $\varphi(z) \in [0, \frac{\pi}{2}]$ definiert durch $z = \cos 2\,\varphi(z)$. In [14] wurde von Gasper gezeigt, daß zu $x, y \in S$ genau ein Borel–Maß $\mu_{x,y}$ auf S mit folgenden Eigenschaften existiert:

(P1) $\mu_{x,y}(S) = 1$.

(P2) $supp\, \mu_{x,y} \subseteq [xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}, xy + \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\,]$.

(P3) Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $r_n(x)\, r_n(y) = \displaystyle\int_S r_n(z)\, d\mu_{x,y}(z)$.

Die Faltung der Dirac–Maße δ_x und δ_y ist definiert durch $\delta_x * \delta_y = \mu_{x,y}$. Die Involution $^-$ $: S \to S$ ist definiert durch $\overline{z} = z$. Damit wird $(S,*,^-)$ zu einer kompakten kommutativen Hypergruppe mit 1 als neutralem Element und π als Haar–Maß.
Es bezeichne $(X, \|\cdot\|_X)$ den Banach–Raum $(C(S), \|\cdot\|_\infty)$ oder $(L^p(\pi), \|\cdot\|_p)$, $1 \leq p < \infty$. Sei $f \in X$. Die kontinuierliche Jacobi–Translation ist definiert durch

$$T_x f(y) = \int_S f(z)\, d(\delta_x * \delta_y)(z).$$

Mit [19, Kapitel 3] ergibt sich:

(T1) Für jedes $x \in S$ und alle $f \in X$ ist $T_x f \in X$ mit $\|T_x f\|_X \leq \|f\|_X$.

(T2) Für jedes $f \in X$ ist die Abbildung $S \to X$, $x \to T_x f$ stetig.

Weitere Eigenschaften der normierten Jacobi–Polynome sind im Anhang zusammengestellt.
In diesem Kapitel wird eine Ableitung auf $L^2(\pi)$ untersucht, die zur kontinuierlichen Jacobi–Translation gehört.

Definition 3.0.1. Die Funktion $q : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $q(n) = r_n'(1)$.

Bemerkung. Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $q(n) = \frac{n\,(n+1+\alpha+\beta)}{\alpha+\beta+2}$.

Lemma 3.0.2. *Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:* $q(n) = \max_{x\in S} |\, r_n'(x)|$.

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Da die normierten Jacobi–Polynome die Eigenschaft (T) besitzen, existieren zu r_n Koeffizienten $c(n, 0), \ldots, c(n, n) \geq 0$ mit

$$r_n = \sum_{k=0}^{n} c(n,k)\, r_k^{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}.$$

Mit [38, S. 62, (4.21.7)] ergibt sich daraus

$$r_n^{\shortmid} = \sum_{k=0}^{n} c(n,k)\, \tfrac{d}{dx} r_k^{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})} = \sum_{k=1}^{n} c(n,k)\, k^2\, r_{k-1}^{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}.$$

Sei $x \in S$. Wegen $c(n,k) \geq 0$ ergibt sich dann

$$\begin{aligned} |r_n^{\shortmid}(x)| &\leq \sum_{k=1}^{n} c(n,k)\, k^2\, |r_{k-1}^{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(x)| \leq \sum_{k=0}^{n} c(n,k)\, k^2 = \sum_{k=1}^{n} c(n,k)\, \tfrac{d}{dx} r_k^{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}(1) \\ &= \sum_{k=0}^{n} c(n,k)\, \tfrac{d}{dx} r_k^{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}(1) = r_n^{\shortmid}(1). \end{aligned}$$

Wegen $1 \in S$ gilt daher $\max_{x\in S} |r_n^{\shortmid}(x)| = r_n^{\shortmid}(1) = q(n)$. □

Bemerkung. Obige Beweisidee stammt von Prof. Dr. R. Szwarc.

Definition 3.0.3. Zu $f \in L^1(\pi)$ sei die Jacobi–Transformierte $\widehat{f}$ von f definiert durch $\widehat{f} = \mathcal{F} f$.

Bemerkung. Sei $p \in [1,\infty]$. Da π ein W–Maß ist, gilt $\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_p$. Nach Lemma (2.0.7) ist daher $\mathcal{F} \in L(L^p(\pi), \ell^\infty(\mathbb{N}_0))$ mit $\|\mathcal{F}\| \leq 1$.

Lemma 3.0.4. *Die Abbildung $P : \mathcal{P}(\mathbb{N}_0) \to L(L^2(\pi))$, $P(\Lambda) = P_\Lambda$ ist ein Spektralmaß auf $\mathbb{N}_0$.*

Beweis. Für $\Lambda \subseteq \mathbb{N}_0$ ist $P(\Lambda)$ nach Korollar (2.0.12) eine orthogonale Projektion.
Offensichtlich gilt $P(\emptyset) = 0$ und $P(\mathbb{N}_0) = id$.
Seien $\Lambda_n \subseteq \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}_0$ paarweise disjunkte Mengen und sei $f \in L^2(\pi)$. Die Menge $\Lambda \subseteq \mathbb{N}_0$ sei definiert durch $\Lambda = \bigcup_{n=0}^\infty \Lambda_n$. Da die Jacobi–Reihe einer Funktion aus $L^2(\pi)$ unbedingt konvergiert, darf sie umgeordnet werden. Da die Λ_n paarweise disjunkt sind, gilt daher

$$P(\bigcup_{n=0}^{\infty} \Lambda_n) f = P_\Lambda f = \sum_{k\in\Lambda} \widehat{f}(k)\, r_k\, h(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k\in\Lambda_n} \widehat{f}(k)\, r_k\, h(k) = \sum_{n=0}^{\infty} P(\Lambda_n) f.$$

Folglich gilt $P(\bigcup_{n=0}^\infty \Lambda_n) = \sum_{n=0}^\infty P(\Lambda_n)$ in der starken Operator–Topologie.
Insgesamt ist also P ein Spektralmaß auf $\mathbb{N}_0$. □

Korollar 3.0.5. *$q(P)$ ist ein Spektralmaß auf $\mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:*

(1) Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $q(P)(\{q(n)\}) = P_{\{n\}}$.
(2) $supp\, q(P) = q(\mathbb{N}_0)$.

Beweis. Da P ein Spektralmaß auf $\mathbb{N}_0$ ist, ist $q(P)$ ein Spektralmaß auf $\mathbb{R}$.

(1) Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Wegen $q(0) < q(1) < q(2) < \cdots$ gilt

$$q(P)(\{q(n)\}) = P(q^{-1}(\{q(n)\})) = P(\{n\}) = P_{\{n\}}.$$

(2) Wegen $q(0) < q(1) < q(2) < \cdots$ und $\lim_{n\to\infty} q(n) = \infty$ hat $q(\mathbb{N}_0)$ keinen Häufungspunkt in $\mathbb{R}$. Daher ist $q(\mathbb{N}_0)$ abgeschlossen in $\mathbb{R}$. Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Aus (1) folgt $q(P)(q(\mathbb{N}_0)) = P_{\mathbb{N}_0} = id$ und $q(P)(q(\mathbb{N}_0)\backslash\{q(n)\}) = P_{\mathbb{N}_0\backslash\{n\}} \neq id$.
Nach Definition von $supp\, q(P)$ gilt also $supp\, q(P) = q(\mathbb{N}_0)$. □

Definition 3.0.6. Der Operator $M_0 : \mathcal{D}(M_0) \subseteq L^2(\pi) \to L^2(\pi)$ sei definiert durch $\mathcal{D}(M_0) = lin\{\, r_n : n \in \mathbb{N}_0 \,\}$ und $M_0\, r_n = (1 + q(n))\, r_n$.

Korollar 3.0.7. *Es gelten folgende Aussagen:*

(1) M_0 ist symmetrisch und positiv definit.
(2) $\sigma_p(M_0) = \{\, 1 + q(n) : n \in \mathbb{N}_0 \,\}$.
(3) Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $Ker(M_0 - (1 + q(n))\, id\,) = \mathbb{C}\, r_n$.

Beweis. Zu $f \in \mathcal{D}(M_0)$ existiert ein $K(f) \in \mathbb{N}_0$ mit $spec\, f \subseteq \{\, 0, \ldots, K(f)\,\}$. Zu $f, g \in \mathcal{D}(M_0)$ sei $K(f, g) \in \mathbb{N}_0$ definiert durch $K(f, g) = \max\{\, K(f), K(g)\,\}$.

(1) Als erstes zeigen wir, daß M_0 symmetrisch ist. Für $f, g \in \mathcal{D}(M_0)$ gilt

$$\begin{aligned}
\langle M_0\, f, g\,\rangle &= \sum_{k,l=0}^{K(f,g)} \widehat{f}(k)\, \overline{\widehat{g}(l)}\, \langle M_0\, r_k, r_l\rangle\, h(k)\, h(l) \\
&= \sum_{k,l=0}^{K(f,g)} (1 + q(k))\, \widehat{f}(k)\, \overline{\widehat{g}(l)}\, \langle r_k, r_l\rangle\, h(k)\, h(l) \\
&= \sum_{k=0}^{K(f,g)} (1 + q(k))\widehat{f}(k)\, \overline{\widehat{g}(k)}\, h(k).
\end{aligned}$$

Wegen $1 + q(k) \in \mathbb{R}$ folgt daraus $\langle M_0\, f, g\,\rangle = \langle f, M_0\, g\,\rangle$. Folglich ist M_0 symmetrisch.

Als zweites zeigen wir, daß M_0 positiv definit ist. Für $f \in \mathcal{D}(M_0)$ ergibt sich wie zuvor $\langle M_0\, f, f\,\rangle = \sum_{k=0}^{K(f)} (1 + q(k))\, |\widehat{f}(k)|^2\, h(k)$. Wegen $q \geq 0$ gilt daher

$$\langle M_0\, f, f\,\rangle \geq \sum_{k=0}^{K(f)} |\widehat{f}(k)|^2\, h(k) = \|f\|_2^2.$$

Folglich ist M_0 positiv definit.

(2) Offensichtlich ist nur $\sigma_p(M_0) \subseteq \{\, 1 + q(n) : n \in \mathbb{N}_0 \,\}$ zu zeigen. Sei $\lambda \in \sigma_p(M_0)$. Dann existiert ein $f \in \mathcal{D}(M_0)$, $f \neq 0$ mit $M_0\, f = \lambda\, f$. Damit ergibt sich

$$0 = (M_0 - \lambda\, id\,)f = \sum_{k=0}^{K(f)} \widehat{f}(k)\, (M_0 - \lambda\, id\,) r_k\, h(k) = \sum_{k=0}^{K(f)} (1 + q(k) - \lambda)\, \widehat{f}(k)\, r_k\, h(k).$$

Für alle $k \in \{\, 0, \ldots, K(f)\,\}$ gilt daher $(1 + q(k) - \lambda)\, \widehat{f}(k) = 0$. Wegen $f \neq 0$ existiert ein $n \in \{\, 0, \ldots, K(f)\,\}$ mit $\widehat{f}(n) \neq 0$. Folglich gilt $\lambda = 1+q(n)$. Also gilt $\sigma_p(M_0) \subseteq \{\, 1+q(n) : n \in \mathbb{N}_0 \,\}$.

(3) Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Offensichtlich ist nur $Ker(M_0 - (1+q(n))\, id\,) \subseteq \mathbb{C}\, r_n$ zu zeigen. Sei $f \in Ker(M_0 - (1+q(n))\, id\,)$. Dann ergibt sich wie in (2), daß für alle $k \in \{\, 0, \ldots, K(f)\,\}$ gilt

$$0 = (1 + q(k) - (1 + q(n)))\, \widehat{f}(k) = (q(k) - q(n))\, \widehat{f}(k).$$

Wegen $q(0) < q(1) < q(2) < \cdots$ und $spec\, f \subseteq \{\, 0, \ldots, K(f)\,\}$ folgt daraus $f \in \mathbb{C}\, r_n$. Folglich gilt $Ker(M_0 - (1 + q(n))\, id\,) \subseteq \mathbb{C}\, r_n$. □

Lemma 3.0.8. *M_0 ist wesentlich selbstadjungiert. Für den Abschluß M von M_0 gilt:*

(1) $\mathcal{D}(M) = \{\, f \in L^2(\pi) : \sum_{n=0}^{\infty} (1 + q(n))^2\, |\widehat{f}(n)|^2\, h(n) < \infty\,\}$.
(2) $\sigma(M) = \sigma_p(M) = \{\, 1 + q(n) : n \in \mathbb{N}_0\,\}$.
(3) Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $Ker(M - (1 + q(n))\, id\,) = \mathbb{C}\, r_n$.

Beweis. Für die Eigenwerte von M_0 gilt $0 < 1 + q(0) < 1 + q(1) < 1 + q(2) < \cdots$ und $\lim_{n\to\infty}(1 + q(n)) = \infty$. Die lineare Hülle von $\{\, r_n : n \in \mathbb{N}_0\,\}$ liegt dicht in $L^2(\pi)$. Damit folgt die Behauptung aus vorherigem Korollar und [40, S. 278, Satz 21.4]. □

Definition 3.0.9. Der Operator $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}) \subseteq L^2(\pi) \to L^2(\pi)$ sei definiert durch $\mathcal{D}(\mathcal{L}) = \mathcal{D}(M)$ und $\mathcal{L} = M - id$.

Lemma 3.0.10. *Es gelten folgende Aussagen:*

(1) $\mathcal{L}$ ist selbstadjungiert.
(2) Für $f \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$ gilt: $\mathcal{L}f = \sum_{n=0}^{\infty} q(n)\, \widehat{f}(n)\, r_n\, h(n)$.
(3) $\mathcal{L} = \overline{M_0 - id}$.

Beweis. (1) Da M selbstadjungiert ist, ergibt sich mit [40, S. 207, Lemma 17.2]

$$\mathcal{L}^* = (M - id\,)^* = M^* - id = M - id = \mathcal{L}.$$

(2) Sei $f \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$ und sei $n \in \mathbb{N}_0$. Es genügt $\widehat{\mathcal{L}f}(n) = q(n)\, \widehat{f}(n)$ zu zeigen. Es gilt $M_0 \subseteq M$ und $r_n \in \mathcal{D}(M_0) \subseteq \mathcal{D}(M) = \mathcal{D}(\mathcal{L})$. Da $\mathcal{L}$ selbstadjungiert ist, gilt also

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{L}f}(n) &= \langle \mathcal{L}f, r_n \rangle = \langle f, \mathcal{L}r_n \rangle = \langle f, (M - id\,) r_n \rangle = \langle f, M r_n \rangle - \langle f, r_n \rangle \\ &= \langle f, M_0\, r_n \rangle - \widehat{f}(n) = (1 + q(n))\, \widehat{f}(n) - \widehat{f}(n) = q(n)\, \widehat{f}(n). \end{aligned}$$

(3) Wegen $M_0 - id \subseteq M - id$ ist $M_0 - id$ abschließbar. Nach [35, S. 252, Theorem VIII.1,(b)] gilt daher $\overline{M_0 - id} = (M_0 - id\,)^{**}$. Da M_0 wesentlich selbstadjungiert ist, ergibt sich damit unter Berücksichtigung von [40, S. 207, Lemma 17.2] und [35, S. 252, Theorem VIII.1,(c)]

$$\overline{M_0 - id} = (M_0^* - id\,)^* = (M^* - id\,)^* = (M - id\,)^* = M^* - id = M - id = \mathcal{L}.$$

□

Korollar 3.0.11. *Es gelten folgende Aussagen:*

(1) $q(P)$ ist das Spektralmaß von $\mathcal{L}$.
(2) $\sigma(\mathcal{L}) = \sigma_p(\mathcal{L}) = q(\mathbb{N}_0)$.
(3) Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $Ker(\mathcal{L} - q(n)\, id) = \mathbb{C}\, r_n$.

Beweis. (1) Sei $f \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$ und sei $g \in L^2(\pi)$. Mit Korollar (3.0.5) ergibt sich

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{L}f, g\,\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} q(n)\,\langle \widehat{f}(n)\, r_n\, h(n), g\,\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} q(n)\,\langle P_{\{n\}}f, g\,\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} q(n)\,\langle q(P)(\{q(n)\})f,\, g\,\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} q(n)\, q(P)_{f,g}(\{q(n)\}) = \int_Q \lambda\, dq(P)_{f,g}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \lambda\, dq(P)_{f,g}(\lambda).\end{aligned}$$

Folglich ist $q(P)$ das Spektralmaß von $\mathcal{L}$.

(2) Offensichtlich gilt $q(\mathbb{N}_0) \subseteq \sigma_p(\mathcal{L})$. Da $q(P)$ das Spektralmaß von $\mathcal{L}$ ist, gilt $\sigma(\mathcal{L}) = supp\, q(P)$. Mit Korollar (3.0.5),(2) ergibt sich daher

$$\sigma(\mathcal{L}) = supp\, q(P) = q(\mathbb{N}_0) \subseteq \sigma_p(\mathcal{L}) \subseteq \sigma(\mathcal{L}).$$

Folglich gilt $\sigma(\mathcal{L}) = \sigma_p(\mathcal{L}) = q(\mathbb{N}_0)$.

(3) Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Offensichtlich genügt es $Ker(\mathcal{L} - q(n)\, id\,) \subseteq \mathbb{C}\, r_n$ zu zeigen. Für $f \in Ker(\mathcal{L} - q(n)\, id)$ gilt

$$0 = (\mathcal{L} - q(n)\, id\,)f = \sum_{k=0}^{\infty} (q(k) - q(n))\, \widehat{f}(k)\, r_k\, h(k).$$

Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt daher $(q(k) - q(n))\, \widehat{f}(k) = 0$. Wegen $q(0) < q(1) < q(2) < \cdots$ folgt daraus $f \in \mathbb{C}\, r_n$. Folglich gilt $Ker(\mathcal{L} - q(n)\, id\,) \subseteq \mathbb{C}\, r_n$. □

Lemma 3.0.12. *Sei $x \in S$. Für $T_x \in L(L^2(\pi))$ gelten folgende Aussagen:*

(1) Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $T_x r_n = r_n(x)\, r_n$.
(2) Für $f \in L^2(\pi)$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\widehat{T_x f}(n) = r_n(x)\, \widehat{f}(n)$.
(3) Für $f \in L^2(\pi)$ gilt: $T_1 f = f$.
(4) T_x ist selbstadjungiert.

Beweis. Sei $x \in S$.

(1) Die Behauptung folgt sofort aus (P3) und der Definition von T_x.

(2) Sei $f \in L^2(\pi)$. Wegen $T_x \in L(L^2(\pi))$ ergibt sich mit (1)

$$T_x f = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n)\, T_x r_n\, h(n) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n(x)\, \widehat{f}(n)\, r_n\, h(n).$$

Folglich gilt $\widehat{T_x f}(n) = r_n(x)\,\widehat{f}(n)$.

(3) Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Wegen $r_n(1) = 1$ folgt die Behauptung sofort aus (2).

(4) Für $f, g \in L^2(\pi)$ ergibt sich mit (2)

$$\langle T_x f, g\,\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} r_n(x)\,\widehat{f}(n)\,\overline{\widehat{g}(n)}\,h(n).$$

Wegen $r_n(x) \in \mathbb{R}$ folgt daraus $\langle T_x f, g\,\rangle = \langle f, T_x g\,\rangle$. Folglich ist T_x selbstadjungiert. □

Korollar 3.0.13. *Sei $x \in S$ und sei $f \in L^1(\pi)$. Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt dann:*

$$\widehat{T_x f}(n) = r_n(x)\,\widehat{f}(n).$$

Beweis. Sei $x \in S$, sei $f \in L^1(\pi)$ und sei $n \in \mathbb{N}_0$. Zu f existiert eine Folge $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}_0} \subseteq C(S)$ mit $\lim_{k\to\infty} f_k = f$ in $L^1(\pi)$. Wegen $T_x \in L(L^1(\pi))$ konvergiert damit $\{T_x f_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ gegen $T_x f$ in $L^1(\pi)$. Insbesondere konvergiert also $\{T_x f_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ schwach gegen $T_x f$ in $L^1(\pi)$. Wegen $r_n \in L^\infty(\pi) = L^1(\pi)^*$ gilt daher

$$\widehat{T_x f}(n) = \int_S T_x f(y)\,r_n(y)\,d\pi(y) = \lim_{k\to\infty} \int_S T_x f_k(y)\,r_n(y)\,d\pi(y) = \lim_{k\to\infty} \widehat{T_x f}_k(n).$$

Es gilt $f_k \in C(S) \subseteq L^2(\pi)$. Nach Aussage (2) von vorherigem Lemma gilt also

$$\widehat{T_x f}(n) = \lim_{k\to\infty} r_n(x)\,\widehat{f_k}(n) = r_n(x) \lim_{k\to\infty} \int_S f_k(y)\,r_n(y)\,d\pi(y).$$

Wegen $\lim_{k\to\infty} f_k = f$ in $L^1(\pi)$ konvergiert $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ insbesondere schwach gegen f in $L^1(\pi)$. Wegen $r_n \in L^\infty(\pi) = L^1(\pi)^*$ gilt daher

$$\widehat{T_x f}(n) = r_n(x) \lim_{k\to\infty} \int_S f_k(y)\,r_n(y)\,d\pi(y) = r_n(x) \int_S f(y)\,r_n(y)\,d\pi(y) = r_n(x)\,\widehat{f}(n).$$

□

Definition 3.0.14. Die Jacobi–Ableitung $L : \mathcal{D}(L) \subseteq L^2(\pi) \to L^2(\pi)$ sei definiert durch

$$\mathcal{D}(L) = \{\, f \in L^2(\pi) : \lim_{x\to 1-} \frac{f - T_x f}{1-x} \text{ existiert in } L^2(\pi)\,\} \text{ und } Lf = \lim_{x\to 1-} \frac{f - T_x f}{1-x}.$$

Korollar 3.0.15. *L ist eine symmetrische Erweiterung von $M_0 - id$.*

Beweis. Als erstes zeigen wir, daß L symmetrisch ist. Seien $f, g \in \mathcal{D}(L)$. Da ein Skalarprodukt als Funktion der ersten Variablen stetig ist, ergibt sich

$$\langle Lf, g\,\rangle = \lim_{x\to 1-} \langle \frac{f - T_x f}{1-x}, g\,\rangle = \lim_{x\to 1-} \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{1 - r_n(x)}{1-x}\,\widehat{f}(n)\,\overline{\widehat{g}(n)}\,h(n).$$

Wegen $\frac{1-r_n(x)}{1-x} \in \mathbb{R}$ folgt daraus $\langle Lf, g \rangle = \langle f, Lg\rangle$. Folglich ist L symmetrisch.

Als zweites zeigen wir, daß L eine Erweiterung von $M_0 - id$ ist. Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\lim_{x\to 1-} \|\frac{r_n - T_x r_n}{1-x} - (M_0 - id\,)r_n\|_2 = \lim_{x\to 1-} \|\tfrac{1-r_n(x)}{1-x}\, r_n - r_n^{\shortmid}(1)\, r_n\|_2 =$$
$$= \lim_{x\to 1-} |\tfrac{1-r_n(x)}{1-x} - r_n^{\shortmid}(1)|\, \|r_n\|_2.$$

Unter Berücksichtigung von $r_n(1) = 1$ folgt daraus $\lim_{x\to 1-} \frac{r_n - T_x r_n}{1-x} = (M_0 - id\,)r_n$. Folglich ist $r_n \in \mathcal{D}(L)$ mit $Lr_n = (M_0 - id\,)r_n$. Wegen $\mathcal{D}(M_0 - id\,) = lin\{\, r_n :\ n \in \mathbb{N}_0 \,\}$ gilt also $M_0 - id \subseteq L$. ☐

Satz 3.0.16. *Es gelten folgende Aussagen:*

(1) $\mathcal{D}(L) = \{\, f \in L^2(\pi) :\ \sum_{n=0}^{\infty}(1 + q(n))^2\, |\widehat{f}(n)|^2\, h(n) < \infty \,\}$.
(2) $\sigma(L) = \sigma_p(L) = \{\, q(n) :\ n \in \mathbb{N}_0 \,\}$.
(3) Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $Ker(L - q(n)\, id\,) = \mathbb{C}\, r_n$.
(4) Für $f \in \mathcal{D}(L)$ gilt: $Lf = \sum_{n=0}^{\infty} q(n)\, \widehat{f}(n)\, r_n\, h(n)$.

Beweis. Offensichtlich genügt es $L = \mathcal{L}$ zu zeigen. Als erstes zeigen wir $L \subseteq \mathcal{L}$. Nach vorherigem Korollar gilt

$$L \subseteq L^* \subseteq (M_0 - id)^*.$$

Aus [35, S. 252, Theorem VIII.1,(c)] ergibt sich damit $L \subseteq \overline{M_0 - id}^{\,*}$. Mit Lemma (3.0.10) folgt daraus $L \subseteq \mathcal{L}^* = \mathcal{L}$.

Als zweites zeigen wir $\mathcal{L} \subseteq L$. Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und sei $x \in [-1, 1[$. Zu n und x existiert nach dem Mittelwertsatz ein $x_n \in]x, 1[$ mit $\frac{1-r_n(x)}{1-x} = r_n^{\shortmid}(x_n)$. Mit Lemma (3.0.2) ergibt sich daher

$$|\tfrac{1-r_n(x)}{1-x} - r_n^{\shortmid}(1)| \le |r_n^{\shortmid}(x_n)| + |r_n^{\shortmid}(1)| \le 2\, q(n).$$

Sei $f \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$. Dann ist $2\, q\, \widehat{f}$ eine von x unabhängige Folge aus $\ell^2(h)$. Mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz ergibt sich daher

$$\lim_{x\to 1-} \|\frac{f - T_x f}{1-x} - \mathcal{L}f\|_2^2 = \lim_{x\to 1-} \sum_{n=0}^{\infty} |\tfrac{1-r_n(x)}{1-x} - r_n^{\shortmid}(1)|^2\, |\widehat{f}(n)|^2\, h(n) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x\to 1-} |\tfrac{1-r_n(x)}{1-x} - r_n^{\shortmid}(1)|^2\, |\widehat{f}(n)|^2\, h(n).$$

Unter Berücksichtigung von $r_n(1) = 1$ folgt daraus $\lim_{x\to 1-} \frac{f - T_x f}{1-x} = \mathcal{L}f$. Folglich ist $f \in \mathcal{D}(L)$ mit $Lf = \mathcal{L}f$. Also gilt $\mathcal{L} \subseteq L$. ☐

Definition 3.0.17. Der Sobolev–Raum $(\mathcal{H}^{1,2}, \|\cdot\|_{1,2})$ sei definiert durch $\mathcal{H}^{1,2} = \mathcal{D}(L)$ und $\|f\|_{1,2}^2 = \|f\|_2^2 + \|Lf\|_2^2$.

Bemerkung. Da L als selbstadjungierter Operator insbesondere abgeschlossen ist, folgt aus obiger Definition sofort, daß $\mathcal{H}^{1,2}$ ein Hilbert–Raum ist.

Korollar 3.0.18. *Für jedes $x \in S$ und alle $f \in \mathcal{H}^{1,2}$ ist $T_x f \in \mathcal{H}^{1,2}$ mit $\|T_x f\|_{1,2} \leq \|f\|_{1,2}$.*

Beweis. Sei $f \in \mathcal{H}^{1,2}$ und sei $n \in \mathbb{N}_0$. Es gilt

$$|\widehat{T_x f}(n)| \leq |r_n(x)\, \widehat{f}(n)| \leq |\widehat{f}(n)| \text{ und } |q(n)\widehat{T_x f}(n)| = |q(n)\, r_n(x)\, \widehat{f}(n)| \leq |q(n)\, \widehat{f}(n)|.$$

Daraus folgt $f \in \mathcal{H}^{1,2}$ und $\|T_x f\|_{1,2} \leq \|f\|_{1,2}$. □

Lemma 3.0.19. *Für $x \in S$ vertauschen T_x und L.*

Beweis. Sei $x \in S$. Zunächst sei bemerkt, daß T_x und L selbstadjungiert sind.
Sei $Q \subseteq \mathbb{N}_0$. Da T_x beschränkt ist, genügt es $T_x\, q(P)(Q) = q(P)(Q)\, T_x$ zu zeigen. Die Menge $\Lambda \subseteq \mathbb{N}_0$ sei definiert durch $\Lambda = q^{-1}(Q)$. Nach Korollar (3.0.5),(1) genügt es dann $T_x\, P_\Lambda = P_\Lambda\, T_x$ zu zeigen. Für $f \in L^2(\pi)$ gilt

$$\begin{aligned} T_x\, P_\Lambda f &= T_x \sum_{n\in\Lambda} \widehat{f}(n)\, r_n\, h(n) = \sum_{n\in\Lambda} \widehat{f}(n)\, T_x r_n\, h(n) = \sum_{n\in\Lambda} r_n(x)\, \widehat{f}(n)\, r_n\, h(n) \\ &= \sum_{n\in\Lambda} \widehat{T_x f}(n)\, r_n\, h(n) = P_\Lambda \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{T_x f}(n)\, r_n\, h(n) = P_\Lambda\, T_x f. \end{aligned}$$

Folglich gilt $T_x\, P_\Lambda = P_\Lambda\, T_x$. □

Korollar 3.0.20. *Für $x \in S$ gelten folgende Aussagen:*

(1) $\mathcal{D}([T_x, L]) = \mathcal{H}^{1,2}$.
(2) $[T_x, L] = 0$.

Beweis. (1) Sei $x \in S$. Da T_x beschränkt ist, gilt $\mathcal{D}(T_x\, L) = \mathcal{H}^{1,2}$. Nach Korollar (3.0.18) gilt $\mathcal{H}^{1,2} \subseteq \mathcal{D}(L\, T_x)$. Folglich gilt

$$\mathcal{D}([T_x, L]) = \mathcal{D}(T_x\, L) \cap \mathcal{D}(L\, T_x) = \mathcal{H}^{1,2} \cap \mathcal{D}(L\, T_x) = \mathcal{H}^{1,2}.$$

(2) Sei $x \in S$ und sei $f \in \mathcal{H}^{1,2}$. Da T_x und L vertauschen, ergibt sich mit Korollar (3.0.5),(1)

$$\begin{aligned} T_x L f &= T_x \sum_{n=0}^{\infty} q(n)\, \widehat{f}(n)\, r_n\, h(n) = T_x \sum_{n=0}^{\infty} q(n)\, P_{\{n\}} f = \sum_{n=0}^{\infty} q(n)\, T_x\, P_{\{n\}} f \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} q(n)\, P_{\{n\}} T_x f = \sum_{n=0}^{\infty} q(n)\, \widehat{T_x f}(n)\, r_n\, h(n). \end{aligned}$$

Nach Korollar (3.0.18) ist mit $f \in \mathcal{H}^{1,2}$ auch $T_x f \in \mathcal{H}^{1,2}$. Folglich gilt $T_x\, L f = L\, T_x f$. Also gilt $[T_x, L] = 0$. □

4 Homogene Banach–Räume und Jacobi–Polynome

4.1 Gewichtete Jacobi–Reihen

In diesem Abschnitt werden homogene Banach–Räume für normierte Jacobi–Polynome definiert. Es wird gezeigt, daß sich eine Funktion f aus einem homogenen Banach–Raum durch eine gewichtete Jacobi–Reihe von f darstellen läßt. Die Jacobi–Koeffizienten des de la Vallée–Poussin Kerns dienen als Beispiel für ein Gewicht.

Definition 4.1.1. Ein homogener Banach–Raum ist ein normierter Untervektorraum $(X, \|\cdot\|_X)$ von $L^1(\pi)$ mit folgenden Eigenschaften:

(HB1) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist $r_n \in X$.
(HB2) $(X, \|\cdot\|_X)$ ist ein Banach–Raum mit $\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_X$.
(HB3) Für jedes $x \in S$ und alle $f \in X$ ist $T_x f \in X$ mit $\|T_x f\|_X \leq \|f\|_X$.
(HB4) Für jedes $f \in X$ ist die Abbildung $S \to X$, $x \mapsto T_x f$ stetig.

Bemerkung. Auf einem homogenen Banach–Raum X betrachten wir immer $\|\cdot\|_X$ als Norm. Im folgenden sei X stets ein homogener Banach–Raum.

Beispiel. Sei $1 \leq p < \infty$. Die Räume $C(S)$ und $L^p(\pi)$ sind homogene Banach–Räume.

Da π ein W–Maß mit kompaktem Träger ist, gilt $C(S) \subseteq L^p(\pi) \subseteq L^1(\pi)$. Folglich sind $C(S)$ und $L^p(\pi)$ normierte Untervektorräume von $L^1(\pi)$.

(HB1) Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Als Polynom ist $r_n \in C(S)$. Da π ein W–Maß mit kompaktem Träger ist, gilt daher $r_n \in C(S) \subseteq L^p(\pi)$.

(HB2) Die Räume $C(S)$ und $L^p(\pi)$ sind Banach–Räume. Da π ein W–Maß mit kompaktem Träger ist, gilt $\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_p \leq \|\cdot\|_\infty$.

Da S eine kompakte kommutative Hypergruppe ist, haben $C(S)$ und $L^p(\pi)$ die Eigenschaften (HB3) und (HB4).

Definition 4.1.2. Zu $f \in \mathcal{L}^1(\pi)$ und $g \in X$ sei die Abbildung $\phi(f,g) : S \to X$ definiert durch $\phi(f,g)(x) = 1_{\{\,|f|<\infty\,\}}(x)\, f(x)\, T_x g$.

Bemerkung. Für $f \in \mathcal{L}^1(\pi)$ ist $\{\,|f| = \infty\,\}$ eine π–Nullmenge.

Korollar 4.1.3. *Sei $f \in \mathcal{L}^1(\pi)$ und $g \in X$. Dann ist $\phi(f,g)$ schwach Borel–meßbar.*

Beweis. Sei $f \in \mathcal{L}^1(\pi)$, sei $g \in X$ und sei $u \in X^*$. Aus $u \in X^*$ und (HB4) folgt sofort, daß $u(T.g)$ stetig ist. Insbesondere ist also $u(T.g)$ Borel–meßbar. Wegen $u(\phi(f,g)(x)) = 1_{\{\,|f|<\infty\,\}}(x)\, f(x)\, u(T_x g)$ ist daher $u(\phi(f,g))$ Borel–meßbar als Produkt Borel–meßbarer Funktionen. Da $u \in X^*$ beliebig war, folgt daraus, daß $\phi(f,g)$ schwach Borel–meßbar ist. $\square$

Korollar 4.1.4. *Für $f \in C(S)$ und $g \in X$ ist $\phi(f,g) \in C(S,X)$.*

Beweis. Für $f \in C(S)$ und $g \in X$ gilt $\phi(f,g)(x) = f(x)\,T_x g$. Für $x_0, x \in S$ ergibt sich damit

$$\begin{aligned}\|\phi(f,g)(x) - \phi(f,g)(x_0)\|_X &= \|f(x)\,T_x g - f(x_0)\,T_{x_0} g\|_X \\ &\leq \|f(x)\,T_x g - f(x_0)\,T_x g\|_X + \|f(x_0)\,T_x g - f(x_0)\,T_{x_0} g\|_X \\ &= \|T_x g\|_X\,|f(x) - f(x_0)| + |f(x_0)|\,\|T_x g - T_{x_0} g\|_X \\ &\leq \|g\|_X\,|f(x) - f(x_0)| + \|f\|_\infty\,\|T_x g - T_{x_0} g\|_X.\end{aligned}$$

Wegen $f \in C(S)$ und (HB4) folgt aus dieser Abschätzung $\phi(f,g) \in C(S,X)$. □

Definition 4.1.5. Zu $f \in C(S)$ und $g \in X$ sei $f * g \in X$ definiert durch $f * g = \int_S \phi(f,g)(x)\,d\pi(x)$.

Bemerkung. Für X–wertige Funktionen betrachten wir das Pettis–Integral. Für $f \in C(S)$ und $g \in X$ ist $\phi(f,g) \in C(S,X)$. Daher existiert $\int_S \phi(f,g)(x)\,d\pi(x)$ nach der Bemerkung zu [37, S. 77, Definition 3.26] und nach [37, S. 78, Theorem 3.27].

Korollar 4.1.6. *Für $f \in C(S)$ und $g \in X$ gilt: $\|f * g\|_X \leq \|f\|_1\,\|g\|_X$.*

Beweis. Sei $f \in C(S)$ und $g \in X$. Mit [37, S. 81, Theorem 3.29] ergibt sich

$$\begin{aligned}\|f * g\|_X &\leq \int_S \|\phi(f,g)(x)\|_X\,d\pi(x) = \int_S |f(x)|\,\|T_x g\|_X\,d\pi(x) \\ &\leq \int_S |f(x)|\,\|g\|_X\,d\pi(x) = \|f\|_1\,\|g\|_X.\end{aligned}$$

□

Lemma 4.1.7. *Seien $\{f_n^{(1)}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $\{f_n^{(2)}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ zwei Folgen in $C(S)$ mit $\lim_{n\to\infty} f_n^{(1)} = \lim_{n\to\infty} f_n^{(2)}$ in $L^1(\pi)$.*
Für $g \in X$ gilt dann: $lim_{n\to\infty} f_n^{(1)} * g = \lim_{n\to\infty} f_n^{(2)} * g$ in X.

Beweis. Seien $\{f_n^{(1)}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $\{f_n^{(2)}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ zwei Folgen in $C(S)$ mit $\lim_{n\to\infty} f_n^{(1)} = f = \lim_{n\to\infty} f_n^{(2)}$ in $L^1(\pi)$ und sei $i \in \{1,2\}$. Für $g \in X$ und $n, m \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\begin{aligned}f_n^{(i)} * g - f_m^{(i)} * g &= \int_S \phi(f_n^{(i)}, g)(x) - \phi(f_m^{(i)}, g)(x)\,d\pi(x) = \int_S \phi(f_n^{(i)} - f_m^{(i)}, g)(x)\,d\pi(x) \\ &= (f_n^{(i)} - f_m^{(i)}) * g.\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich mit vorherigem Korollar

$$\|f_n^{(i)} * g - f_m^{(i)} * g\|_X \leq \|f_n^{(i)} - f_m^{(i)}\|_1\,\|g\|_X \leq \|f_n^{(i)} - f\|_1\,\|g\|_X + \|f - f_m^{(i)}\|_1\,\|g\|_X.$$

Wegen $\lim_{k\to\infty} f_k^{(i)} = f$ in $L^1(\pi)$ zeigt diese Abschätzung, daß $\{f_n^{(i)} * g\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Cauchy–Folge in X ist. Folglich existiert $\lim_{n\to\infty} f_n^{(i)} * g$ in X.

Für $n \in \mathbb{N}_0$ ergibt sich wie zuvor $\|f_n^{(1)} * g - f_n^{(2)} * g\|_X \leq \|f_n^{(1)} - f\|_1\,\|g\|_X + \|f - f_n^{(2)}\|_1\,\|g\|_X$. Wegen $\lim_{n\to\infty} f_n^{(i)} = f$ in $L^1(\pi)$ folgt daraus $\lim_{n\to\infty} f_n^{(1)} * g = \lim_{n\to\infty} f_n^{(2)} * g$ in X. □

Definition 4.1.8. Seien $f, g \in X$ und sei $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $C(S)$ mit $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ in $L^1(\pi)$. Dann sei $f \circledast g \in X$ definiert durch $f \circledast g = \lim_{n\to\infty} f_n * g$ in X.

Bemerkung. Seien $f, g \in X$. Wegen $X \subseteq L^1(\pi)$ gibt es zu f eine Folge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ in $C(S)$ mit $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ in $L^1(\pi)$. Nach vorherigem Lemma ist $f \circledast g$ unabhängig von der konkreten Wahl von $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$.
Zu $f \in C(S)$ sei $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}_0} \subseteq C(S)$ definiert durch $f_n = f$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ in $L^1(\pi)$. Nach Definition von $\circledast$ gilt also

$$f \circledast g = \lim_{n\to\infty} f_n * g = \lim_{n\to\infty} f * g = f * g \text{ in } X.$$

Daher schreiben wir $*$ für $\circledast$.

Korollar 4.1.9. *Für $f, g \in X$ gilt:* $\|f * g\|_X \leq \|f\|_X \, \|g\|_X$.

Beweis. Seien $f, g \in X$ und sei $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $C(S)$ mit $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ in $L^1(\pi)$. Da $\|\cdot\|_X$ und $\|\cdot\|_1$ stetig sind, ergibt sich mit Korollar (4.1.6)

$$\|f * g\|_X = \lim_{n\to\infty} \|f_n * g\|_X \leq \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_1 \, \|g\|_X = \|f\|_1 \, \|g\|_X.$$

Wegen (HB2) gilt daher $\|f * g\|_X \leq \|f\|_X \, \|g\|_X$. □

Lemma 4.1.10. *Für $f, g \in X$ gilt:* $f * g = \int_S \phi(f, g)(x) \, d\pi(x)$.

Beweis. Seien $f, g \in X$ und sei $u \in X^*$. Nach Korollar (4.1.3) ist $u(\phi(f, g))$ Borel–meßbar. Es gilt

$$\begin{aligned}\int_S |u(\phi(f,g)(x))| \, d\pi(x) &= \int_S |f(x)| \, |u(T_x g)| \, d\pi(x) \leq \|u\| \int_S |f(x)| \, \|T_x g\|_X \, d\pi(x) \\ &\leq \|u\| \int_S |f(x)| \, \|g\|_X \, d\pi(x) = \|u\| \, \|f\|_1 \, \|g\|_X < \infty.\end{aligned}$$

Daher ist $u(\phi(f, g)) \in L^1(\pi)$. Insbesondere gilt also $\int_S u(\phi(f, g)(x)) \, d\pi(x) \in \mathbb{C}$.

Sei $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $C(S)$ mit $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ in $L^1(\pi)$. Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt dann $f_n * g = \int_S \phi(f_n, g)(x) \, d\pi(x)$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}u(f_n * g) - \int_S u(\phi(f,g)(x)) \, d\pi(x) &= \int_S u(\phi(f_n,g)(x)) - u(\phi(f,g)(x)) \, d\pi(x) \\ &= \int_S (f_n(x) - f(x)) \, u(T_x g) \, d\pi(x).\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$|u(f_n * g) - \int_S u(\phi(f,g)(x)) \, d\pi(x)| \leq \|u\| \, \|f_n - f\|_1 \, \|g\|_X.$$

Wegen $\lim_{n\to\infty} u(f_n * g) = u(f * g)$ und $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ in $L^1(\pi)$ ergibt sich daraus

$$u(f * g) = \int_S u(\phi(f,g)(x)) \, d\pi(x).$$

Da $u \in X^*$ beliebig war, gilt also $f * g = \int_S \phi(f, g)(x) \, d\pi(x)$. □

Satz 4.1.11. **[Multiplikationssatz]** *Für $f, g \in X$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:* $\widehat{f * g}(n) = \widehat{f}(n)\,\widehat{g}(n)$.

Beweis. Seien $f, g \in X$ und sei $n \in \mathbb{N}_0$. Mit vorherigem Lemma gilt

$$\widehat{f * g}(n) = \int_S \Big[\int_S \phi(f,g)(x)\, d\pi(x)\Big](y)\, r_n(y)\, d\pi(y).$$

Wegen $r_n \in L^\infty(\pi) = L^1(\pi)^* \subseteq X^*$ ergibt sich daher

$$\begin{aligned}\widehat{f * g}(n) &= \int_S \int_S \big[\phi(f,g)(x)\big](y)\, r_n(y)\, d\pi(y)\, d\pi(x) = \int_S f(x) \int_S T_x g(y)\, r_n(y)\, d\pi(y)\, d\pi(x) \\ &= \int_S f(x)\, \widehat{T_x g}(n)\, d\pi(x) = \int_S f(x)\, r_n(x)\, d\pi(x)\, \widehat{g}(n) = \widehat{f}(n)\, \widehat{g}(n).\end{aligned}$$

□

Definition 4.1.12. Zu einem Polynom P vom Grad $n \in \mathbb{N}_0$ sei der Operator $S(P) : X \to X$ definiert durch $S(P)f = \sum_{k=0}^n \widehat{P}(k)\, \widehat{f}(k)\, r_k\, h(k)$.

Korollar 4.1.13. *Sei P ein Polynom. Für $x \in S$ gilt dann:* $T_x S(P) = S(P) T_x$.

Beweis. Sei P ein Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}_0$ und sei $x \in S$. Für $f \in X$ gilt

$$\begin{aligned}T_x S(P) f &= T_x \sum_{k=0}^n \widehat{P}(k)\, \widehat{f}(k)\, r_k\, h(k) = \sum_{k=0}^n \widehat{P}(k)\, \widehat{f}(k)\, T_x r_k\, h(k) \\ &= \sum_{k=0}^n \widehat{P}(k)\, \widehat{f}(k)\, r_k(x)\, r_k\, h(k) = \sum_{k=0}^n \widehat{P}(k) \widehat{T_x f}(k)\, r_k\, h(k) = S(P) T_x f.\end{aligned}$$

Folglich gilt $T_x S(P) = S(P) T_x$. □

Lemma 4.1.14. *Sei P ein Polynom. Für $f \in X$ gilt dann:* $S(P)f = f * P$.

Beweis. Sei $f \in X$. Für $k \in \mathbb{N}_0$ zeigen wir zunächst $f * r_k = \widehat{f}(k)\, r_k$. Für $u \in X^*$ gilt

$$\begin{aligned}u(\widehat{f}(k)\, r_k) &= \int_S f(x)\, r_k(x)\, d\pi(x)\, u(r_k) = \int_S f(x)\, r_k(x)\, u(r_k)\, d\pi(x) \\ &= \int_S u(f(x)\, r_k(x)\, r_k)\, d\pi(x) = \int_S u(f(x)\, T_x r_k)\, d\pi(x) \\ &= \int_S u(\phi(f, r_k)(x))\, d\pi(x).\end{aligned}$$

Mit Lemma (4.1.10) folgt daraus $u(\widehat{f}(k)\, r_k) = u(f * r_k)$. Da $u \in X^*$ beliebig war, gilt also $\widehat{f}(k)\, r_k = f * r_k$.

Sei P ein Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}_0$. Mit dem bereits Gezeigtem ergibt sich

$$\begin{aligned}f * P &= \int_S \phi(f,P)(x)\, d\pi(x) = \sum_{k=0}^n \widehat{P}(k) \int_S \phi(f, r_k)(x)\, d\pi(x)\, h(k) \\ &= \sum_{k=0}^n \widehat{P}(k)\, (f * r_k)\, h(k) = \sum_{k=0}^n \widehat{P}(k)\, \widehat{f}(k)\, r_k\, h(k) = S(P)f.\end{aligned}$$

□

Korollar 4.1.15. *Sei P ein Polynom. Dann ist $S(P) \in L(X)$ mit $\|S(P)\|_{L(X)} \leq \|P\|_X$.*

Beweis. Die Behauptung folgt sofort aus vorherigem Lemma und Korollar (4.1.9). □

Definition 4.1.16. Sei $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge von Polynomen.

(1) $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ hat die Eigenschaft (A1), falls für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} \widehat{P}_n(k) = 1$.

(2) $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ hat die Eigenschaft (A2), falls gilt: $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} \|S(P_n)\|_{L(X)} < \infty$.

Lemma 4.1.17. *Die lineare Hülle von $\{\, r_n : n \in \mathbb{N}_0 \,\}$ liege dicht in X. Dann sind für eine Folge $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ von Polynomen folgende Aussagen äquivalent:*

(1) Für jedes $f \in X$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} S(P_n)f = f$ *in* X.

(2) $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ hat die Eigenschaften (A1) und (A2).

Beweis. (1) $\Longrightarrow$ (2). Sei $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge von Polynomen mit der Eigenschaft aus (1). Als erstes zeigen wir (A1). Für $k \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$r_k = \lim_{n\to\infty} S(P_n)r_k = \lim_{n\to\infty} \widehat{P}_n(k)r_k \text{ in } X.$$

Folglich gilt (A1).

Als zweites zeigen wir (A2). Für $f \in X$ ist $\{S(P_n)f\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ als konvergente Folge in X insbesondere beschränkt in X. Also gilt $\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \|S(P_n)f\|_X < \infty$. Mit dem Satz von Banach–Steinhaus folgt daraus (A2).

(2) $\Longrightarrow$ (1). Sei $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge von Polynomen mit den Eigenschaften (A1) und (A2). Dann sei die Konstante C definiert durch $C = \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \|S(P_n)\|_{L(X)}$. Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Mit (A1) ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty} S(P_n)r_k = \lim_{n\to\infty} \widehat{P}_n(k)r_k = r_k \text{ in } X.$$

Für jedes Polynom p gilt folglich $\lim_{n\to\infty} S(P_n)p = p$ in X.
Sei $f \in X$ und sei $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung existiert zu f und ε ein Polynom p mit $\|f-p\|_X \leq \frac{\varepsilon}{2\,(C+1)}$. Da p ein Polynom ist, existiert zu ε ein $N \in \mathbb{N}_0$ mit $\|S(P_n)p-p\|_X \leq \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq N$. Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\begin{aligned}\|S(P_n)f - f\|_X &\leq \|S(P_n)f - S(P_n)p\|_X + \|S(P_n)p - p\|_X + \|p - f\|_X \\ &\leq (C+1)\,\|f-p\|_X + \|S(P_n)p - p\|_X.\end{aligned}$$

Nach Wahl von p und N gilt daher $\|S(P_n)f - f\|_X \leq \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Also gilt $\lim_{n\to\infty} S(P_n)f = f$ in X. □

Beispiel. Der de la Vallée–Poussin Kern $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei definiert durch

$$V_n(x) = \frac{\Gamma(\beta+1)\,\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(n+\beta+1)\,\Gamma(\alpha+\beta+2)} \left(\frac{1+x}{2}\right)^n.$$

In [33] wurde gezeigt:

(A1) Für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} \widehat{V}_n(k) = 1$.

(A2) Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\|V_n\|_1 = 1$.

Satz 4.1.18. *Für jedes $f \in L^1(\pi)$ gilt:*

$$f = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \widehat{V}_n(k)\, \widehat{f}(k)\, r_k\, h(k) \;\; in \;\; L^1(\pi).$$

Beweis. Da π ein W–Maß mit kompaktem Träger ist, folgt aus dem Approximationssatz von Weierstraß, daß die lineare Hülle von $\{\, r_n : n \in \mathbb{N}_0 \,\}$ dicht liegt in $L^1(\pi)$. Damit folgt die Behauptung aus vorherigem Beispiel und Lemma (4.1.17). □

Satz 4.1.19. [Riemann–Lebesgue Lemma] *Für $f \in L^1(\pi)$ ist $\widehat{f}$ eine Nullfolge.*

Beweis. Sei $f \in L^1(\pi)$ und sei $\varepsilon > 0$. Nach vorherigem Satz existiert zu ε ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit $\|f - S(V_n)f\|_1 \le \varepsilon$. Sei $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k > n$. Wegen $deg\, S(V_n)f \le n$ gilt dann

$$(S(V_n)f)\widehat{\ }(k) = \langle S(V_n)f, r_k \rangle = 0.$$

Daraus folgt

$$|\widehat{f}(k)| = |(f - S(V_n)f)\widehat{\ }(k)| \le \|f - S(V_n)f\|_1 \le \varepsilon.$$

Daher gilt $|\widehat{f}(k)| \le \varepsilon$ für alle $k > n$. Folglich ist $\widehat{f}$ eine Nullfolge. □

Satz 4.1.20. [Eindeutigkeitssatz] *Ist $f \in L^1(\pi)$ mit $\widehat{f} = 0$, so gilt $f = 0$ in $L^1(\pi)$.*

Beweis. Für $f \in L^1(\pi)$ mit $\widehat{f} = 0$ gilt

$$f = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \widehat{V}_n(k)\, \widehat{f}(k)\, r_k\, h(k) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0 \text{ in } L^1(\pi).$$

□

Korollar 4.1.21. *Sei P ein Polynom. Für $f \in X$ gilt dann: $S(P)f = P * f$.*

Beweis. Sei P ein Polynom und sei $f \in X$. Wegen Lemma (4.1.14) genügt es $f * P = P * f$ zu zeigen. Für $n \in \mathbb{N}_0$ ergibt sich mit dem Multiplikationsssatz

$$(f * P)\widehat{\ }(n) = \widehat{f}(n)\, \widehat{P}(n) = \widehat{P}(n)\, \widehat{f}(n) = (P * f)\widehat{\ }(n).$$

Mit dem Eindeutigkeitssatz folgt daraus $f * P = P * f$ in $L^1(\pi)$. Da X als homogener Banach–Raum insbesondere ein Untervektorraum von $L^1(\pi)$ ist, gilt also $f * P = P * f$ in X. □

Korollar 4.1.22. *Sei P ein Polynom. Dann ist $S(P) \in L(X)$ mit $\|S(P)\|_{L(X)} \le \|P\|_1$.*

Beweis. Die Behauptung folgt sofort aus vorherigem Korollar und Korollar (4.1.6). □

Lemma 4.1.23. *Zu $f \in X$ existiert eine Folge von Polynomen $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, so daß gilt: $\lim_{n\to\infty} S(P_n)f = f$ in X.*

Beweis. Sei $f \in X$ und sei $\varepsilon > 0$. Es genügt zu zeigen, daß zu ε ein Polynom P existiert mit $\|f - S(P)f\|_X \leq \varepsilon$. Ist $f = 0$, so gilt $\|f - S(0)f\|_X = 0 \leq \varepsilon$. Sei also $f \neq 0$.

Als erstes zeigen wir, daß zu ε ein $\rho \in C(S)$ existiert mit $\|\rho * f - f\|_X \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Zu ε existiert nach (HB4) ein $\delta > 0$ mit

$$\|T_x f - f\|_X \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ für alle } x \in [1-\delta, 1].$$

Sei ρ ein Friedrichs–Glätter mit folgenden Eigenschaften: $\rho \in C^\infty(\mathbb{R})$, $supp(\rho) \subseteq [1 - \delta, 1 + \delta]$, $\rho \geq 0$ und $\int_S \rho(x)\, d\pi(x) = 1$. Für $u \in X^*$ gilt dann

$$\int_S u(\rho(x)\, f)\, d\pi(x) = \int_S \rho(x)\, u(f)\, d\pi(x) = \int_S \rho(x)\, d\pi(x)\, u(f) = u(f).$$

Da $u \in X^*$ beliebig war, folgt daraus $f = \int_S \rho(x)\, f\, d\pi(x)$. Unter Berücksichtigung der Eigenschaften von ρ ergibt sich damit

$$\begin{aligned}
\|\rho * f - f\|_X &= \|\int_S \rho(x)\, (T_x f - f)\, d\pi(x)\|_X \leq \int_S |\rho(x)|\, \|T_x f - f\|_X\, d\pi(x) \\
&= \int_{1-\delta}^1 \rho(x)\, \|T_x f - f\|_X\, d\pi(x) \leq \int_{1-\delta}^1 \rho(x)\, d\pi(x) \sup_{x\in[1-\delta,1]} \|T_x f - f\|_X \\
&= \sup_{x\in[1-\delta,1]} \|T_x f - f\|_X.
\end{aligned}$$

Nach Wahl von δ gilt daher $\|\rho * f - f\|_X \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Als zweites zeigen wir, daß zu ρ und ε ein Polynom P existiert mit $\|\rho * f - S(P)f\|_X \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Nach dem Approximationssatz von Weierstraß gibt es zu $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}) \subseteq C(S)$ und zu ε ein Polynom P mit $\|\rho - P\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2\,\|f\|_X}$. Daher ergibt sich

$$\begin{aligned}
\|\rho * f - S(P)f\|_X = \|\rho * f - P * f\|_X &= \|\int_S \phi(\rho, f)(x) - \phi(P, f)(x)\, d\pi(x)\|_X \\
&= \|\int_S \phi(\rho - P, f)(x)\, d\pi(x)\|_X = \|(\rho - P) * f\|_X.
\end{aligned}$$

Mit Korollar (4.1.6) folgt daraus

$$\|\rho * f - S(P)f\|_X \leq \|\rho - P\|_1\, \|f\|_X \leq \|\rho - P\|_\infty\, \|f\|_X \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Insgesamt gilt also $\|f - S(P)f\|_X \leq \|f - \rho * f\|_X + \|\rho * f - S(P)f\|_X \leq \varepsilon$. □

Korollar 4.1.24. *Die lineare Hülle von $\{\, r_n : n \in \mathbb{N}_0 \,\}$ liegt dicht in X.*

Beweis. Sei P ein Polynom und sei $f \in X$. Aus der Definition von $S(P)$ ergibt sich $S(P)f \in lin\{\, r_n : n \in \mathbb{N}_0 \,\}$. Damit folgt die Behauptung aus vorherigem Lemma. □

Korollar 4.1.25. *X ist separabel.*

Beweis. Die Behauptung gilt nach vorherigem Korollar. □

Satz 4.1.26. *Für jedes $f \in X$ gilt:*

$$f = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \widehat{V}_n(k)\, \widehat{f}(k)\, r_k\, h(k) \ \ \textit{in } X.$$

Beweis. Nach Korollar (4.1.24) liegt die lineare Hülle von $\{ r_n : n \in \mathbb{N}_0 \}$ dicht in X. Daher genügt es nach Lemma (4.1.17) zu zeigen, daß $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ die Eigenschaften (A1) und (A2) hat.
Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Nach [33] gilt $\lim_{n\to\infty} \widehat{V}_n(k) = 1$. Folglich hat $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ die Eigenschaft (A1).
Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Nach [33] gilt $\|V_n\|_1 = 1$. Aus Korollar (4.1.22) ergibt damit

$$\|S(V_n)\|_{L(X)} \le \|V_n\|_1 = 1.$$

Folglich hat $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ die Eigenschaft (A2). □

Korollar 4.1.27. *Für $x, y \in S$ und $f \in X$ gilt: $T_xT_y = T_yT_xf$.*

Beweis. Seien $x, y \in S$ und sei $f \in X$. Mit vorherigem Satz ergibt sich

$$\begin{aligned} T_xT_yf &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \widehat{V}_n(k)\, (T_xT_yf)\widehat{\ }(k)\, r_k\, h(k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \widehat{V}_n(k)\, r_k(x)\, \widehat{T_yf}(k)\, r_k\, h(k) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \widehat{V}_n(k)\, r_k(x)\, r_k(y)\, \widehat{f}(k)\, r_k\, h(k) \text{ in } X. \end{aligned}$$

Daraus folgt $T_xT_yf = T_yT_xf$. □

Beispiel. Der Sobolev–Raum $\mathcal{H}^{1,2}$ mit $\|f\|_{1,2}^2 = \|f\|_2^2 + \|Lf\|_2^2$ ist ein homogener Banach–Raum.

Offensichtlich ist $\mathcal{H}^{1,2}$ ein normierter Untervektorraum von $L^2(\pi)$. Daher ist mit $L^2(\pi)$ auch $\mathcal{H}^{1,2}$ ein normierter Untervektorraum von $L^1(\pi)$.

(HB1) Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Es gilt $r_n \in \mathcal{D}(M_0) \subseteq \mathcal{D}(M) = \mathcal{D}(L) = \mathcal{H}^{1,2}$.

(HB2) Da L als selbstadjungierter Operator insbesondere abgeschlossen ist, folgt aus der Definition von $\|\cdot\|_{1,2}$ sofort, daß $\mathcal{H}^{1,2}$ ein Hilbert–Raum ist. Es gilt $\|\cdot\|_1 \le \|\cdot\|_2 \le \|\cdot\|_{1,2}$.

(HB3) Sei $f \in \mathcal{H}^{1,2}$ und sei $x \in S$. Nach Korollar (3.0.18) ist $T_xf \in \mathcal{H}^{1,2}$ mit $\|T_xf\|_{1,2} \le \|f\|_{1,2}$.

(HB4) Sei $f \in \mathcal{H}^{1,2}$ und sei $x_0 \in S$. Da $L^2(\pi)$ ein homogener Banach–Raum ist, existiert zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$\|T_xf - T_{x_0}f\|_2^2 \le \frac{\varepsilon^2}{2} \text{ und } \|T_x(Lf) - T_{x_0}(Lf)\|_2^2 \le \frac{\varepsilon^2}{2} \text{ für alle } x \in S \text{ mit } |x - x_0| \le \delta.$$

Für $y \in S$ gilt $[T_y, L] = 0$. Für $x, x_0 \in S$ ergibt sich damit

$$\begin{aligned} \|T_xf - T_{x_0}f\|_{1,2}^2 &= \|T_xf - T_{x_0}f\|_2^2 + \|LT_xf - LT_{x_0}f\|_2^2 \\ &= \|T_xf - T_{x_0}f\|_2^2 + \|T_xLf - T_{x_0}Lf\|_2^2. \end{aligned}$$

Nach Wahl von δ gilt also

$$\|T_x f - T_{x_0} f\|_{1,2}^2 \leq \varepsilon^2 \text{ für alle } x \in S \text{ mit } |x - x_0| \leq \delta.$$

Beispiel. Da ein homogener Banach–Raum separabel ist, ist $L^\infty(\pi)$ kein homogener Banach–Raum.

Definition 4.1.28. Zu $0 < \lambda < 1$ sei der Lipschitz–Raum $(lip_X(\lambda), \|\cdot\|_\lambda)$ von X definiert durch

$$\begin{aligned} lip_X(\lambda) &= \{\, f \in X : \lim_{x \to 1-} \frac{\|T_x f - f\|_X}{(1-x)^\lambda} = 0 \,\} \text{ und} \\ \|f\|_\lambda &= \|f\|_X + \sup_{x \in [-1,1[} \frac{\|T_x f - f\|_X}{(1-x)^\lambda}. \end{aligned}$$

Lemma 4.1.29. *$lip_X(\lambda)$ ist ein Banach–Raum mit $\|\cdot\|_X \leq \|\cdot\|_\lambda$.*

Beweis. Offensichtlich ist $lip_X(\lambda)$ ein normierter Raum mit $\|\cdot\|_X \leq \|\cdot\|_\lambda$. Deshalb ist nur zu zeigen, daß $lip_X(\lambda)$ vollständig ist. Dazu sei $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Cauchy–Folge in $lip_X(\lambda)$. Wegen $\|\cdot\|_X \leq \|\cdot\|_\lambda$ ist dann $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ insbesondere eine Cauchy–Folge in X. Daher existiert ein $f \in X$ mit $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ in X. Wir werden zeigen, daß $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ sogar in $lip_X(\lambda)$ gilt. Da $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Cauchy–Folge in $lip_X(\lambda)$ ist, existiert zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}_0$ mit

$$\sup_{x \in [-1,1[} \frac{\|T_x(f_n - f_m) - (f_n - f_m)\|_X}{(1-x)^\lambda} \leq \frac{\varepsilon}{4} \text{ für alle } n, m \geq N. \tag{5}$$

Wegen $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ in X existiert zu ε und zu jedem $z \in [-1,1[$ ein $N(z) \in \mathbb{N}_0$ mit

$$\|f - f_n\|_X \leq \frac{\varepsilon}{8}\,(1-z)^\lambda \text{ für alle } n \geq N(z). \tag{6}$$

Für $x \in [-1,1[$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\begin{aligned} &\frac{\|T_x(f - f_n) - (f - f_n)\|_X}{(1-x)^\lambda} \leq \\ &\leq \frac{\|T_x(f - f_{N(x)}) - (f - f_{N(x)})\|_X}{(1-x)^\lambda} + \frac{\|T_x(f_{N(x)} - f_n) - (f_{N(x)} - f_n)\|_X}{(1-x)^\lambda} \\ &\leq \frac{\|T_x(f - f_{N(x)})\|_X + \|f - f_{N(x)}\|_X}{(1-x)^\lambda} + \sup_{y \in [-1,1[} \frac{\|T_y(f_{N(y)} - f_n) - (f_{N(y)} - f_n)\|_X}{(1-y)^\lambda} \\ &\leq 2\,\frac{\|f - f_{N(x)}\|_X}{(1-x)^\lambda} + \sup_{y \in [-1,1[} \frac{\|T_y(f_{N(y)} - f_n) - (f_{N(y)} - f_n)\|_X}{(1-y)^\lambda}. \end{aligned}$$

Wählen wir $N(y) \geq N$, so ergibt sich mit (6) und (5)

$$\frac{\|T_x(f - f_n) - (f - f_n)\|_X}{(1-x)^\lambda} \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ für jedes } x \in [-1,1[\text{ und alle } n \geq N. \tag{7}$$

Wegen $f_N \in lip_X(\lambda)$ existiert zu ε ein $\delta > 0$ mit

$$\frac{\|T_x f_N - f_N\|_X}{(1-x)^\lambda} \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ für alle } x \in [-1,1[\text{ mit } |x - 1| \leq \delta.$$

Daraus folgt zusammen mit (7), daß für alle $x \in [-1,1[$ mit $|x-1| \le \delta$ gilt

$$\frac{\|T_x f - f\|_X}{(1-x)^\lambda} \le \frac{\|T_x(f-f_N) - (f-f_N)\|_X}{(1-x)^\lambda} + \frac{\|T_x f_N - f_N\|_X}{(1-x)^\lambda} \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Diese Abschätzung zeigt $\lim_{x\to 1-} \frac{\|T_x f - f\|_X}{(1-x)^\lambda} = 0$. Also ist $f \in lip_X(\lambda)$. Aus (7) folgt daher $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ in $lip_X(\lambda)$. □

Lemma 4.1.30. *$lip_X(\lambda)$ ist ein homogener Banach–Raum.*

Beweis. (HB1) Sei $x \in [-1,1[$. Aus $T_x r_0 = r_0(x)\, r_0 = r_0$ folgt sofort $r_0 \in lip_X(\lambda)$. Sei also $n \in \mathbb{N}$. Wegen $r_n(1) = 1$ wird durch $p : S\backslash\{1\} \to \mathbb{C}$, $p(y) = \frac{r_n(y)-1}{1-y}$ ein Polynom vom Grad $n-1$ definiert. Insbesondere gilt also $\|p\|_\infty < \infty$. Es gilt

$$\frac{\|T_x r_n - r_n\|_X}{(1-x)^\lambda} = \frac{|r_n(x) - 1|}{(1-x)^\lambda}\, \|r_n\|_X = (1-x)^{1-\lambda}\, |p(x)|\, \|r_n\|_X \le (1-x)^{1-\lambda}\, \|p\|_\infty\, \|r_n\|_X.$$

Wegen $\lambda < 1$ folgt aus dieser Abschätzung $\lim_{x\to 1-} \frac{\|T_x r_n - r_n\|_X}{(1-x)^\lambda} = 0$. Also ist $r_n \in lip_X(\lambda)$.

(HB2) Unter Berücksichtigung von $\|\cdot\|_1 \le \|\cdot\|_X$ gilt (HB2) nach vorherigem Lemma.

(HB3) Sei $f \in lip_X(\lambda)$ und sei $x \in S$. Für $y \in [-1,1[$ gilt mit Korollar (4.1.27)

$$\|T_y T_x f - T_x f\|_X = \|T_x(T_y f - f)\|_X \le \|T_y f - f\|_X.$$

Aus dieser Abschätzung folgt unmittelbar $T_x f \in lip_X(\lambda)$ und $\|T_x f\|_\lambda \le \|f\|_\lambda$.

(HB4) Sei $f \in lip_X(\lambda)$ und sei $x_0 \in S$. Dann existiert zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$\frac{\|T_y f - f\|_X}{(1-y)^\lambda} \le \frac{\varepsilon}{2} \text{ für alle } y \in [-1,1[\text{ mit } |y-1| \le \delta.$$

Als erstes betrachten wir alle $y \in [-1,1[$ mit $|y-1| \le \delta$. Für $x \in S$ gilt

$$\frac{\|T_y(T_x f - T_{x_0} f) - (T_x f - T_{x_0} f)\|_X}{(1-y)^\lambda} = \frac{\|(T_y T_x f - T_x f) - (T_y T_{x_0} f - T_{x_0} f)\|_X}{(1-y)^\lambda}.$$

Mit Korollar (4.1.27) ergibt sich daher

$$\begin{aligned}
&\frac{\|T_y(T_x f - T_{x_0} f) - (T_x f - T_{x_0} f)\|_X}{(1-y)^\lambda} = \\
&= \frac{\|T_x(T_y f - f) - T_{x_0}(T_y f - f)\|_X}{(1-y)^\lambda} \le \frac{\|T_x(T_y f - f)\|_X + \|T_{x_0}(T_y f - f)\|_X}{(1-y)^\lambda} \\
&\le 2\,\frac{\|T_y f - f\|_X}{(1-y)^\lambda}.
\end{aligned}$$

Nach Wahl von δ gilt daher

$$\frac{\|T_y(T_x f - T_{x_0} f) - (T_x f - T_{x_0} f)\|_X}{(1-y)^\lambda} \le \varepsilon \text{ für alle } x \in S \text{ und } y \in [-1,1[\text{ mit } |y-1| \le \delta.$$

Als zweites betrachten wir alle $y \in [-1,1[$ mit $|y-1| \geq \delta$. Zu ε und δ existiert ein $\gamma > 0$ mit

$$\|T_x f - T_{x_0} f\|_X \leq \frac{\varepsilon\,\delta^\lambda}{2} \text{ für alle } x \in S \text{ mit } |x - x_0| \leq \gamma.$$

Für alle $y \in [-1,1[$ mit $|y-1| \geq \delta$ gilt $(1-y)^{-\lambda} \leq \delta^{-\lambda}$. Für $x \in S$ gilt daher

$$\frac{\|T_y(T_x f - T_{x_0} f) - (T_x f - T_{x_0} f)\|_X}{(1-y)^\lambda} \leq \frac{\|T_y(T_x f - T_{x_0} f)\|_X + \|T_x f - T_{x_0} f\|_X}{(1-y)^\lambda}$$
$$\leq 2\,\frac{\|T_x f - T_{x_0} f\|_X}{(1-y)^\lambda} \leq 2\,\frac{\|T_x f - T_{x_0} f\|_X}{\delta^\lambda}.$$

Nach Wahl von γ gilt daher

$$\frac{\|T_y(T_x f - T_{x_0} f) - (T_x f - T_{x_0} f)\|_X}{(1-y)^\lambda} \leq \varepsilon \text{ für alle } x \in S \text{ mit } |x - x_0| \leq \gamma \text{ und}$$
$$\text{alle } y \in [-1,1[\text{ mit } |y-1| \geq \delta.$$

Insgesamt gilt also

$$\sup_{y \in [-1,1[} \frac{\|T_y(T_x f - T_{x_0} f) - (T_x f - T_{x_0} f)\|_X}{(1-y)^\lambda} \leq \varepsilon \text{ für alle } x \in S \text{ mit } |x - x_0| \leq \delta.$$

Aus dieser Abschätzung folgt (HB4). □

Lemma 4.1.31. *Es gilt: $lip_X(\lambda) \subsetneq X$.*

Beweis. Angenommen, es gilt $lip_X(\lambda) = X$. Wegen $\|\cdot\|_X \leq \|\cdot\|_\lambda$ ist dann die Abbildung $(X, \|\cdot\|_\lambda) \to (X, \|\cdot\|_X)$, $f \mapsto f$ eine stetige Bijektion. Aus der Annahme folgt, daß $(X, \|\cdot\|_\lambda)$ ein Banach–Raum ist. Da auch $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banach–Raum ist, existiert nach dem Satz von der stetigen Inversen eine Konstante $C > 0$ mit $\|\cdot\|_\lambda \leq C\,\|\cdot\|_X$. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ergibt sich daher

$$C\,\|r_n\|_X \geq \|r_n\|_\lambda \geq \sup_{x \in [-1,1[} \frac{\|T_x r_n - r_n\|_X}{(1-x)^\lambda} = \|r_n\|_X \sup_{x \in [-1,1[} \frac{|r_n(x) - 1|}{(1-x)^\lambda}.$$

Daraus folgt

$$\sup_{n \in \mathbb{N}_0} \sup_{x \in [-1,1[} \frac{|r_n(x) - 1|}{(1-x)^\lambda} \leq C.$$

Es bezeichne $x_{n,n} \in]-1,1[$ die n–te Nullstelle von r_n. Dann gilt

$$\sup_{x \in [-1,1[} \frac{|r_n(x) - 1|}{(1-x)^\lambda} \geq \frac{|r_n(x_{n,n}) - 1|}{(1-x_{n,n})^\lambda} = \frac{1}{(1-x_{n,n})^\lambda}.$$

Nach [38, S. 236, Theorem 8.9.1.] gilt $\lim_{n\to\infty} x_{n,n} = 1$. Wegen $\lambda > 0$ gilt also

$$\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{1}{(1-x_{n,n})^\lambda} \leq \sup_{n \in \mathbb{N}_0} \sup_{x \in [-1,1[} \frac{|r_n(x) - 1|}{(1-x)^\lambda} \leq C < \infty.$$

Dieser Widerspruch zeigt, daß die Annahme falsch ist. Folglich muß die Behauptung richtig sein. □

Definition 4.1.32. Der Dirichlet-Kern $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei definiert durch $D_n = \sum_{k=0}^n r_k\, h(k)$.

Definition 4.1.33. Der Dirichlet–Raum $(U_X, \|\cdot\|_U)$ von X sei definiert durch

$$U_X = \{\, f \in X : \lim_{k\to\infty} \|S(D_k)f - f\|_X = 0 \,\} \text{ und } \|f\|_U = \sup_{k\in\mathbb{N}_0} \|S(D_k)f\|_X .$$

Lemma 4.1.34. *U_X ist ein Banach–Raum mit $\|\cdot\|_X \le \|\cdot\|_U$.*

Beweis. Als erstes zeigen wir, daß $\|\cdot\|_U$ eine Norm auf U_X ist mit $\|\cdot\|_X \le \ \|\cdot\|_U$. Für $f \in U_X$ ist $\{S(D_k)f\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ als konvergente Folge in X insbesondere beschränkt in X. Daher gilt $\|f\|_U = \sup_{k\in\mathbb{N}_0} \|S(D_k)f\|_X < \infty$.
Offensichtlich ist $\|\cdot\|_U$ homogen und erfüllt die Dreiecksungleichung.
Für $f \in U_X$ und $k \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\|f\|_X \le \|f - S(D_k)f\|_X + \|S(D_k)f\|_X \le \|f - S(D_k)f\|_X + \|f\|_U .$$

Wegen $\lim_{k\to\infty} S(D_k)f = f$ in X folgt aus dieser Abschätzung $\|f\|_X \le \|f\|_U$. Insbesondere ist damit auch gezeigt, daß $\|\cdot\|_U$ definit ist.

Als zweites zeigen wir, daß U_X vollständig ist. Dazu sei $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Cauchy–Folge in U_X. Wegen $\|\cdot\|_X \le \|\cdot\|_U$ ist dann $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ insbesondere eine Cauchy–Folge in X. Daher existiert ein $f \in X$ mit $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ in X. Wir werden zeigen, daß $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ sogar in U_X gilt. Da $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Cauchy–Folge in U_X ist, existiert zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein $N_1 \in \mathbb{N}_0$ mit

$$\|S(D_k)f_n - S(D_k)f_m\|_X \le \frac{\varepsilon}{3} \text{ für alle } k \in \mathbb{N}_0 \text{ und alle } n, m \ge N_1. \tag{8}$$

Wegen $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ in X existiert zu ε ein $N_2 \in \mathbb{N}_0$ mit

$$\|f - f_n\|_X \le \frac{\varepsilon}{3} \text{ für alle } n \ge N_2. \tag{9}$$

Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Wegen $S(D_k) \in L(X)$ existiert zu k und ε ein $N(k) \in \mathbb{N}_0$ mit

$$\|S(D_k)f - S(D_k)f_n\|_X \le \frac{\varepsilon}{3} \text{ für alle } n \ge N(k).$$

Für $k, n \in \mathbb{N}_0$ ergibt sich damit

$$\begin{aligned} &\|S(D_k)(f - f_n) - (f - f_n)\|_X \le \\ &\le \|S(D_k)f - S(D_k)f_{N(k)}\|_X + \|S(D_k)f_{N(k)} - S(D_k)f_n\|_X + \|f - f_n\|_X \\ &\le \frac{\varepsilon}{3} + \|S(D_k)f_{N(k)} - S(D_k)f_n\|_X + \|f - f_n\|_X . \end{aligned}$$

Sei $N \in \mathbb{N}_0$ definiert durch $N = \max\{\, N_1, N_2 \,\}$. Wählen wir $N(k) \ge N_1$, so folgt aus (8) und (9)

$$\|S(D_k)(f - f_n) - (f - f_n)\|_X \le \varepsilon \text{ für alle } k \in \mathbb{N}_0 \text{ und alle } n \ge N. \tag{10}$$

Wegen $f_N \in U_X$ existiert zu ε ein $K \in \mathbb{N}_0$ mit $\|S(D_k)f_N - f_N\|_X \le \varepsilon$ für alle $k \ge K$. Daraus folgt zusammen mit (10), daß für alle $k \ge K$ gilt

$$\|S(D_k)f - f\|_X \le \|S(D_k)(f - f_N) - (f - f_N)\|_X + \|S(D_k)f_N - f_N\|_X \le \varepsilon + \varepsilon = 2\,\varepsilon.$$

Diese Abschätzung zeigt $\lim_{k\to\infty} S(D_k)f = f$ in X. Also ist $f \in U_X$. Mit (10) und (9) folgt, daß für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und alle $n \geq N$ gilt

$$\|S(D_k)f - S(D_k)f_n\|_X \leq \|S(D_k)(f - f_n) - (f - f_n)\|_X + \|f - f_n\|_X \leq \varepsilon + \frac{\varepsilon}{3} \leq 2\varepsilon.$$

Diese Abschätzung zeigt $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ in U_X. □

Lemma 4.1.35. *U_X ist ein homogener Banach–Raum.*

Beweis. (HB1) Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Aus $S(D_k)r_n = r_n$ für alle $k \geq n$ folgt $r_n \in U_X$.

(HB2) Unter Berücksichtigung von $\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_X$ gilt (HB2) nach vorherigem Lemma.

(HB3) Sei $f \in U_X$ und sei $x \in S$. Für $k \in \mathbb{N}_0$ gilt mit Korollar (4.1.13)

$$\|S(D_k)T_x f - T_x f\|_X = \|T_x(S(D_k)f - f)\|_X \leq \|S(D_k)f - f\|_X.$$

Wegen $\lim_{k\to\infty} S(D_k)f = f$ in X folgt aus dieser Abschätzung $\lim_{k\to\infty} S(D_k)T_x f = T_x f$ in X. Also ist $T_x f \in U_X$. Mit Korollar (4.1.13) gilt

$$\|S(D_k)T_x f\|_X = \|T_x S(D_k)f\|_X \leq \|S(D_k)f\|_X \leq \|f\|_U.$$

Aus dieser Abschätzung folgt $\|T_x f\|_U \leq \|f\|_U$.

(HB4) Sei $f \in U_X$ und sei $x_0 \in S$. Dann existiert zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein $K \in \mathbb{N}_0$ mit

$$\|S(D_k)f - f\|_X \leq \frac{\varepsilon}{3} \text{ für alle } k \geq K.$$

Wegen $f \in U_X \subseteq X$ existiert zu ε ein $\delta_1 > 0$ mit

$$\|T_x f - T_{x_0} f\|_X \leq \frac{\varepsilon}{3} \text{ für alle } x \in S \text{ mit } |x - x_0| \leq \delta_1.$$

Als erstes betrachten wir alle $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \geq K$. Für $x \in S$ gilt mit Korollar (4.1.13)

$$\begin{aligned}
&\|S(D_k)T_x f - S(D_k)T_{x_0} f\|_X = \|T_x S(D_k)f - T_{x_0} S(D_k)f\|_X \\
&\leq \|T_x S(D_k)f - T_x f\|_X + \|T_x f - T_{x_0} f\|_X + \|T_{x_0} f - T_{x_0} S(D_k)f\|_X \\
&\leq 2\,\|S(D_k)f - f\|_X + \|T_x f - T_{x_0} f\|_X.
\end{aligned}$$

Nach Wahl von δ_1 und K gilt daher

$$\|S(D_k)T_x f - S(D_k)T_{x_0} f\|_X \leq \varepsilon \text{ für alle } k \geq K \text{ und alle } x \in S \text{ mit } |x - x_0| \leq \delta_1.$$

Als zweites betrachten wir alle $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq K$. Für $x \in S$ gilt

$$\|S(D_k)T_x f - S(D_k)T_{x_0} f\|_X = \|\sum_{l=0}^{k} (r_l(x) - r_l(x_0))\, \widehat{f}(l)\, r_l\, h(l)\|_X \leq$$

$$\sum_{l=0}^{k} |r_l(x) - r_l(x_0)|\, \|\widehat{f}(l)\, r_l\, h(l)\|_X \leq \sum_{l=0}^{K} |r_l(x) - r_l(x_0)|\, \|\widehat{f}(l)\, r_l\, h(l)\|_X.$$

Wegen $r_l \in C(S)$ existiert daher zu x_0 und ε ein $\delta_2 > 0$ mit

$\|S(D_k)T_x f - S(D_k)T_{x_0} f\|_X \le \varepsilon$ für alle $0 \le k \le K$ und alle $x \in S$ mit $|x - x_0| \le \delta_2$.

Sei $\delta > 0$ definiert durch $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Dann gilt insgesamt

$$\|T_x f - T_{x_0} f\|_U = \sup_{k \in \mathbb{N}_0} \|S(D_k)T_x f - S(D_k)T_{x_0} f\|_X \le \varepsilon \text{ für alle } x \in S \text{ mit } |x - x_0| \le \delta.$$

□

4.2 Charakter–invariante homogene Banach–Räume

In diesem Abschnitt wird die Charakter–Invarianz für homogene Banach–Räume definiert. Es wird gezeigt, daß der Wiener–Raum für normierte Jacobi–Polynome der kleinste charakter–invariante homogene Banach–Raum ist. Der Beurling–Raum für normierte Jacobi–Polynome dient als Beispiel für einen homogenen Banach–Raum, der nicht charakter–invariant ist.

Definition 4.2.1. Ein homogener Banach–Raum X heißt charakter–invariant, falls gilt:

(HB5) Für jedes $f \in X$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist $r_n f \in X$ mit $\|r_n f\|_X \le \|f\|_X$.

Korollar 4.2.2. *Sei X ein charakter–invarianter homogener Banach–Raum. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt dann: $\|r_n\|_X \le \|r_0\|_X$.*

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Dann folgt die Behauptung mit (HB5) sofort aus $r_n = r_n r_0$. □

Definition 4.2.3. Der Wiener–Raum $(\mathbb{W}, \|\cdot\|_{\mathbb{W}})$ sei definiert durch

$$\mathbb{W} = \{ f \in C(S) : \widehat{f} \in \ell^1(h) \} \text{ und } \|f\|_{\mathbb{W}} = \|\widehat{f}\|_1.$$

Lemma 4.2.4. *$\widehat{\cdot} : \mathbb{W} \to \ell^1(h)$ ist ein isometrischer Isomorphismus.*

Beweis. Zunächst ist zu zeigen, daß $\|\cdot\|_{\mathbb{W}}$ eine Norm auf $\mathbb{W}$ ist. Offensichtlich ist $\|\cdot\|_{\mathbb{W}}$ homogen und erfüllt die Dreiecksungleichung.
Es ist also nur zu zeigen, daß $\|\cdot\|_{\mathbb{W}}$ definit ist. Dazu sei $f \in \mathbb{W}$ mit $\|f\|_{\mathbb{W}} = 0$. Dann gilt $\widehat{f} = 0$. Da $C(S)$ ein homogener Banach–Raum ist, ergibt sich damit

$$f = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \widehat{V}_n(k)\, \widehat{f}(k)\, r_k\, h(k) = 0 \text{ in } C(S).$$

Wir zeigen nun, daß $\widehat{\cdot} : \mathbb{W} \to \ell^1(h)$, $f \mapsto \widehat{f}$ ein isometrischer Isomorphismus ist. Offensichtlich ist dazu nur zu zeigen, daß $\widehat{\cdot}$ surjektiv ist. Zu vorgegebenem $a \in \ell^1(h)$ sei die Folge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}_0} \subseteq C(S)$ definiert durch $f_n = \sum_{k=0}^n a(k)\, r_k\, h(k)$. Für $m, n \in \mathbb{N}_0$ mit $m > n$ gilt

$$\|f_m - f_n\|_\infty = \|\sum_{k=n+1}^{m} a(k)\, r_k\, h(k)\|_\infty \le \sum_{k=n+1}^{m} |a(k)|\, \|r_k\|_\infty\, h(k) = \sum_{k=n+1}^{m} |a(k)|\, h(k).$$

Wegen $a \in \ell^1(h)$ folgt aus dieser Abschätzung, daß $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Cauchy–Folge in $C(S)$ ist. Daher existiert ein $f \in C(S)$ mit $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ in $C(S)$. Insbesondere gilt also $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ in $L^2(\pi)$. Für $k \in \mathbb{N}_0$ gilt folglich

$$\widehat{f}(k) = \langle f, r_k\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle f_n, r_k\rangle = a(k).$$

Wegen $a \in \ell^1(h)$ zeigt diese Gleichung $f \in \mathbb{W}$ und $\widehat{f} = a$. Folglich ist $\widehat{\cdot}$ surjektiv. □

Definition 4.2.5. Die Abbildung $\cdot^\vee : \ell^1(h) \to \mathbb{W}$, $a \mapsto a^\vee$ bezeichne die Umkehrabbildung von $\widehat{\cdot}$.

Lemma 4.2.6. $\mathbb{W}$ *ist ein charakter–invarianter homogener Banach–Raum.*

Beweis. (HB1) Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Aus $\widehat{r_n} = h(n)^{-1}\,\delta_{n,\cdot}$ folgt $r_n \in \mathbb{W}$.

(HB2) Aus vorherigem Lemma folgt sofort, daß mit $\ell^1(h)$ auch $\mathbb{W}$ ein Banach–Raum ist. Für $f \in \mathbb{W}$ gilt

$$\|f\|_{\mathbb{W}} = \|\widehat{f}\,\|_1 \geq \|\widehat{f}\,\|_2 = \|f\|_2 \geq \|f\|_1.$$

(HB3) Sei $f \in \mathbb{W}$ und sei $x \in S$. Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$|\widehat{T_x f}(n)| = |r_n(x)\,\widehat{f}(n)| \leq |\widehat{f}(n)|.$$

Aus dieser Abschätzung folgt sofort $T_x f \in \mathbb{W}$ und $\|T_x f\|_{\mathbb{W}} \leq \|f\|_{\mathbb{W}}$.

(HB4) Sei $f \in \mathbb{W}$ und sei $x_0 \in S$. Dann existiert zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}_0$ mit

$$\|f - S(D_n)f\|_{\mathbb{W}} = \sum_{k=n+1}^{\infty} |\widehat{f}(k)|\,h(k) \leq \frac{\varepsilon}{4} \text{ für alle } n \geq N.$$

Für $x \in S$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\begin{aligned}
&\|T_x f - T_{x_0} f\|_{\mathbb{W}} \leq \\
&\leq \|T_x f - T_x S(D_n) f\|_{\mathbb{W}} + \|T_x S(D_n) f - T_{x_0} S(D_n) f\|_{\mathbb{W}} + \|T_{x_0} S(D_n) f - T_{x_0} f\|_{\mathbb{W}} \\
&\leq 2\,\|S(D_n) f - f\|_{\mathbb{W}} + \|T_x S(D_n) f - T_{x_0} S(D_n) f\|_{\mathbb{W}}.
\end{aligned}$$

Nach Wahl von N gilt daher

$$\|T_x f - T_{x_0} f\|_{\mathbb{W}} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \|T_x S(D_N) f - T_{x_0} S(D_N) f\|_{\mathbb{W}} \text{ für alle } x \in S. \tag{1}$$

Für $x \in S$ gilt

$$\|T_x S(D_N) f - T_{x_0} S(D_N) f\|_{\mathbb{W}} = \sum_{k=0}^{N} |r_k(x) - r_k(x_0)|\,|\widehat{f}(k)|\,h(k).$$

Wegen $r_k \in C(S)$ existiert daher zu x_0 und ε ein $\delta > 0$ mit

$$\|T_x S(D_N) f - T_{x_0} S(D_N) f\|_{\mathbb{W}} \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ für alle } x \in S \text{ mit } |x - x_0| \leq \delta.$$

Mit (1) ergibt sich daraus $\|T_x f - T_{x_0} f\|_{\mathbb{W}} \le \varepsilon$ für alle $x \in S$ mit $|x - x_0| \le \delta$.

(HB5) Sei $f \in \mathbb{W}$ und sei $n \in \mathbb{N}_0$. Für $k \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\begin{aligned}\widehat{r_n\, f}(k) &= \int_S f(x)\, r_n(x)\, r_k(x)\, d\pi(x) = \sum_{l=0}^{n+k} g(n,k,l) \int_S f(x)\, r_l(x)\, d\pi(x) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} g(n,k,l)\, h(l)^{-1}\, \widehat{f}(l)\, h(l).\end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung der Eigenschaften von g ergibt sich damit

$$\begin{aligned}\|\widehat{r_n\, f}\|_1 &= \sum_{k=0}^{\infty} |\widehat{r_n\, f}(k)|\, h(k) \le \sum_{k,l=0}^{\infty} g(n,k,l)\, h(l)^{-1}\, h(k)\, |\widehat{f}(l)|\, h(l) \\ &= \sum_{k,l=0}^{\infty} g(n,l,k)\, h(k)^{-1}\, h(k)\, |\widehat{f}(l)|\, h(l) = \sum_{l=0}^{\infty} |\widehat{f}(l)|\, h(l) \sum_{k=0}^{\infty} g(n,l,k) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} |\widehat{f}(l)|\, h(l) = \|\widehat{f}\|_1.\end{aligned}$$

Diese Abschätzung zeigt $r_n\, f \in \mathbb{W}$ und $\|r_n\, f\|_{\mathbb{W}} \le \|f\|_{\mathbb{W}}$. □

Lemma 4.2.7. *$\mathbb{W}$ läßt sich in jeden charakter–invarianten homogenen Banach–Raum stetig einbetten.*

Beweis. Sei X ein charakter–invarianter homogener Banach–Raum. Dann zeigen wir zu–nächst $\mathbb{W} \subseteq X$. Für $f \in \mathbb{W}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\|S(D_n)f\|_X = \|\sum_{k=0}^{n} \widehat{f}(k)\, r_k\, h(k)\|_X \le \sum_{k=0}^{n} |\widehat{f}(k)|\, \|r_k\|_X\, h(k).$$

Mit Korollar (4.2.2) ergibt sich daraus

$$\|S(D_n)f\|_X \le \|r_0\|_X \sum_{k=0}^{n} |\widehat{f}(k)|\, h(k) \text{ für jedes } f \in \mathbb{W} \text{ und alle } n \in \mathbb{N}_0. \tag{2}$$

Für $f \in \mathbb{W}$ und $m, n \in \mathbb{N}_0$ mit $m > n$ gilt daher

$$\begin{aligned}\|S(D_m)f - S(D_n)f\|_X &= \|\sum_{k=n+1}^{m} \widehat{f}(k)\, r_k\, h(k)\|_X = \|S(D_m) \sum_{k=n+1}^{m} \widehat{f}(k)\, r_k\, h(k)\|_X \\ &\le \|r_0\|_X \sum_{k=n+1}^{m} |\widehat{f}(k)|\, h(k).\end{aligned}$$

Wegen $f \in \mathbb{W}$ folgt aus dieser Abschätzung, daß $\{S(D_n)f\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Cauchy–Folge in X ist. Daher existiert ein $g \in X$ mit $\lim_{n\to\infty} S(D_n)f = g$ in X. Insbesondere konvergiert also $\{S(D_n)f\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ schwach gegen g in X. Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Wegen $r_k \in L^\infty(\pi) = L^1(\pi)^* \subseteq X^*$ gilt also

$$\begin{aligned}\widehat{g}(k) &= \int_S g(x)\, r_k(x)\, d\pi(x) = \lim_{n\to\infty} \int_S [S(D_n)f](x)\, r_k(x)\, d\pi(x)\\ &= \lim_{n\to\infty} (S(D_n)f)\widehat{\ }(k) = \widehat{f}(k).\end{aligned}$$

Mit dem Eindeutigkeitssatz folgt daraus $f = g$ in $L^1(\pi)$. Da X als homogener Banach–Raum insbesondere ein Untervektorraum von $L^1(\pi)$ ist, gilt also $f = g$ in X. Damit ist $f \in X$. Folglich gilt $\mathbb{W} \subseteq X$.

Wir zeigen nun, daß die Abbildung $\iota : \mathbb{W} \to X,\ f \mapsto f$ injektiv und stetig ist. Sei $f \in \mathbb{W}$ mit $f = 0$ in X. Dann gilt $\widehat{f} = 0$. Damit ergibt sich $\|f\|_{\mathbb{W}} = \|\widehat{f}\|_1 = 0$. Folglich gilt $f = 0$ in $\mathbb{W}$. Also ist ι injektiv.
Sei $f \in \mathbb{W}$. Dann gilt nach dem bereits Gezeigtem $f = \lim_{n\to\infty} S(D_n)f$ in X. Da $\|\cdot\|_X$ stetig ist, ergibt sich damit aus (2)

$$\|f\|_X = \lim_{n\to\infty} \|S(D_n)f\|_X \leq \|r_0\|_X \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} |\widehat{f}(k)|\, h(k) = \|r_0\|_X\, \|\widehat{f}\,\|_1 = \|r_0\|_X\, \|f\|_{\mathbb{W}}.$$

Also ist ι stetig. □

Bemerkung. Wegen $lip_X(\lambda) \subsetneq X$ gibt es im Gegensatz zu charakter–invarianten homogenen Banach–Räumen keinen kleinsten homogenen Banach–Raum.

Definition 4.2.8. Zu $f \in L^1(\pi)$ sei $\widetilde{f} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ definiert durch $\widetilde{f}(n) = \sup_{k\geq n}\{\, |\widehat{f}(k)|\,\}$.

Bemerkung. Sei $f \in L^1(\pi)$. Nach dem Riemann–Lebesgue Lemma ist $\widehat{f}$ eine Nullfolge. Insbesondere ist also $\widehat{f}$ beschränkt.

Korollar 4.2.9. *Für $f, g \in L^1(\pi)$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ gelten folgende Aussagen:*

(1) *Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:* $\widetilde{f}(n+1) \leq \widetilde{f}(n)$.

(2) *Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:* $0 \leq |\widehat{f}(n)| \leq \widetilde{f}(n)$.

(3) *Es gilt:* $(f+g)^\sim \leq \widetilde{f} + \widetilde{g}$.

(4) *Es gilt:* $(\lambda f)^\sim = |\lambda|\, \widetilde{f}$.

Beweis. Die Aussagen folgen sofort aus der Definition von $\widetilde{\cdot}$. □

Definition 4.2.10. Der Beurling–Raum $(\mathbb{W}_*, \|\cdot\|_*)$ sei definiert durch

$$\mathbb{W}_* = \{\, f \in C(S) :\ \widetilde{f} \in \ell^1(h)\,\} \text{ und } \|f\|_* = \|\widetilde{f}\|_1.$$

Korollar 4.2.11. *Es gilt:* $\mathbb{W}_* \subsetneq \mathbb{W}$.

Beweis. Aus Korollar (4.2.9),(2) folgt sofort $\mathbb{W}_* \subseteq \mathbb{W}$. Die Folge $a : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $a(n) = 0$ für $n \notin \{\, 2^k : k \in \mathbb{N}_0 \,\}$ und $a(2^k) = \frac{1}{2^k\, h(k)}$ für $k \in \mathbb{N}_0$. Damit gilt

$$\|a\|_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k\, h(k)}\, h(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2.$$

Also ist $a^\vee \in \mathbb{W}$. Da a monoton fallend ist, ergibt sich

$$\|\widetilde{a}\|_1 = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k\, h(k)}\, (h(2^{k-1}+1) + \cdots + h(2^k)).$$

Da h monoton steigend ist, ergibt sich weiter

$$\|\widetilde{a}\|_1 \geq 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}\, h(2^{k-1}+1)}{2^k\, h(2^k)} = 1 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h(2^{k-1}+1)}{h(2^k)}.$$

Wegen $h(n) = \mathcal{O}(n^{2\alpha+1})$ für $n \to \infty$ ist $\{\frac{h(2^{k-1}+1)}{h(2^k)}\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ keine Nullfolge. Daher zeigt obige Abschätzung $\widetilde{a} \notin \ell^1(h)$. Daher ist $a^\vee \notin \mathbb{W}_*$. Insgesamt gilt also $\mathbb{W}_* \subsetneq \mathbb{W}$. □

Lemma 4.2.12. $\mathbb{W}_*$ *ist ein Banach–Raum mit* $\|\cdot\|_{\mathbb{W}} \leq \|\cdot\|_*$.

Beweis. Aus Korollar (4.2.9) folgt sofort, daß $\|\cdot\|_*$ eine Norm auf $\mathbb{W}_*$ ist mit $\|\cdot\|_{\mathbb{W}} \leq \|\cdot\|_*$. Es ist also nur zu zeigen, daß $\mathbb{W}_*$ vollständig ist. Dazu sei $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Cauchy–Folge in $\mathbb{W}_*$. Wegen $\|\cdot\|_{\mathbb{W}} \leq \|\cdot\|_*$ ist dann $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ insbesondere eine Cauchy–Folge in $\mathbb{W}$. Daher existiert ein $f \in \mathbb{W}$ mit $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ in $\mathbb{W}$. Wir werden zeigen, daß $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ sogar in $\mathbb{W}_*$ gilt. Da $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Cauchy–Folge in $\mathbb{W}_*$ ist, existiert zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein $N_1 \in \mathbb{N}_0$ mit

$$\|f_m - f_n\|_* \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ für alle } m, n \geq N_1. \tag{3}$$

Wegen $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ in $\mathbb{W}$ gibt es zu ε und zu vorgegebenem $m \in \mathbb{N}_0$ ein $N_2 \in \mathbb{N}_0$, so daß für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq N_2$ und alle $l \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\frac{\varepsilon}{2\,(m+1)} \geq \|f - f_n\|_{\mathbb{W}} = \sum_{k=0}^{\infty} |\widehat{f}(k) - \widehat{f}_n(k)|\, h(k) \geq |\widehat{f}(l) - \widehat{f}_n(l)|\, h(l).$$

Aus dieser Abschätzung folgt

$$\|\widehat{f}\, h - \widehat{f}_n\, h\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2\,(m+1)} \text{ für alle } n \geq N_2. \tag{4}$$

Für $n, N \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m} (f - f_n)^\sim(k)\, h(k) &\leq \sum_{k=0}^{m} (f - f_N)^\sim(k)\, h(k) + \sum_{k=0}^{m} (f_N - f_n)^\sim(k)\, h(k) \\ &\leq \sum_{k=0}^{m} \sup_{l\geq k}\{\, |\widehat{f}(l) - \widehat{f}_N(l)| \,\}\, h(k) + \|f_N - f_n\|_*.\end{aligned}$$

Da h monoton steigend ist, ergibt sich damit

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m}(f-f_n)^{\sim}(k)\,h(k) &\le \sum_{k=0}^{m}\sup_{l\ge k}\{\,|\widehat{f}(l)\,h(l)-\widehat{f}_N(l)\,h(l)|+\|f_N-f_n\|_*\\ &\le \sum_{k=0}^{m}\|\widehat{f}\,h-\widehat{f}_N\,h\|_\infty+\|f_N-f_n\|_*\\ &= (m+1)\|\widehat{f}\,h-\widehat{f}_N\,h\|_\infty+\|f_N-f_n\|_*.\end{aligned}$$

Wählen wir $N \ge \max\{\,N_1, N_2\,\}$, so folgt aus (3) und (4)

$$\sum_{k=0}^{m}(f-f_n)^{\sim}(k)\,h(k) \le \varepsilon \text{ für alle } n \ge N_1.$$

Sei $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \ge N_1$. Da $m \in \mathbb{N}_0$ beliebig war, zeigt obige Abschätzung $f - f_n \in \mathbb{W}_*$ und $\|f-f_n\|_* \le \varepsilon$. Folglich gilt $f = (f-f_n)+f_n \in \mathbb{W}_*$ und $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ in $\mathbb{W}_*$. □

Lemma 4.2.13. *Für $f \in \mathbb{W}_*$ gilt:* $\lim_{n\to\infty} S(D_{2n-1})f = f$ *in $\mathbb{W}_*$.*

Beweis. Sei $f \in \mathbb{W}_*$ und sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}_0$ mit

$$\sum_{k=n}^{\infty}\widetilde{f}(k)\,h(k) \le \frac{\varepsilon}{2} \text{ für alle } n \ge N.$$

Sei $n \in \mathbb{N}$. Für $k \in \{\,0,\dots,2n-1\,\}$ gilt $\widehat{f}(k) - (S(D_{2n-1})f)^{\wedge}(k) = 0$. Folglich gilt

$$(f - S(D_{2n-1})f)^{\sim}(k) = \widetilde{f}(2n) \text{ für alle } k \in \{\,0,\dots,2n-1\,\}. \tag{5}$$

Für $k \in \mathbb{N}$ mit $k \ge 2n$ gilt $\widehat{f}(k) - (S(D_{2n-1})f)^{\wedge}(k) = \widehat{f}(k)$. Folglich gilt

$$(f - S(D_{2n-1})f)^{\sim}(k) = \widetilde{f}(k) \text{ für alle } k \ge 2n. \tag{6}$$

Zur Abkürzung sei $\sigma_1(n)$ definiert durch

$$\sigma_1(n) = \sum_{k=0}^{n}(f - S(D_{2n-1})f)^{\sim}(k)\,h(k)$$

und $\sigma_2(n)$ sei definiert durch

$$\sigma_2(n) = \sum_{k=n}^{\infty}(f - S(D_{2n-1})f)^{\sim}(k)\,h(k).$$

Als erstes betrachten wir $\sigma_1(n)$. Wegen $n \in \mathbb{N}$ gilt $n \le 2n-1$. Mit (5) ergibt sich daher $\sigma_1(n) = \sum_{k=0}^{n}\widetilde{f}(2n)\,h(k)$. Da $\widetilde{f}$ monoton fällt und h monoton steigt, folgt daraus

$$\sigma_1(n) \le \sum_{k=0}^{n}\widetilde{f}(k+n)\,h(k+n) = \sum_{k=n}^{2n}\widetilde{f}(k)\,h(k) \le \sum_{k=n}^{\infty}\widetilde{f}(k)\,h(k).$$

Nach Wahl von N gilt daher $\sigma_1(n) \le \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \ge N$.

Als zweites betrachten wir $\sigma_2(n)$. Mit (5) und (6) gilt

$$\begin{aligned}\sigma_2(n) &= \sum_{k=n}^{2n-1} (f - S(D_{2n-1})f)^{\sim}(k)\, h(k) + \sum_{k=2n}^{\infty} (f - S(D_{2n-1})f)^{\sim}(k)\, h(k) \\ &= \widetilde{f}(2n)\, h(n) + \cdots + \widetilde{f}(2n)\, h(2n-1) + \sum_{k=2n}^{\infty} \widetilde{f}(k)\, h(k).\end{aligned}$$

Da $\widetilde{f}$ monoton fällt, ergibt sich damit

$$\sigma_2(n) \le \widetilde{f}(n)\, h(n) + \cdots + \widetilde{f}(2n-1)\, h(2n-1) + \sum_{k=2n}^{\infty} \widetilde{f}(k)\, h(k) = \sum_{k=n}^{\infty} \widetilde{f}(k)\, h(k).$$

Nach Wahl von N gilt daher $\sigma_2(n) \le \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \ge N$.
Für alle $n \ge N$ gilt also insgesamt

$$\|f - S(D_{2n-1})f\|_* = \sum_{k=0}^{\infty} (f - S(D_{2n-1})f)^{\sim}(k)\, h(k) \le \sigma_1(n) + \sigma_2(n) \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Lemma 4.2.14. *$\mathbb{W}_*$ ist ein homogener Banach–Raum.*

Beweis. (HB1) Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Aus $\|r_n\|_* = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{h(n)}\, h(k) < \infty$ folgt $r_n \in \mathbb{W}_*$.

(HB2) Unter Berücksichtigung von $\|\cdot\|_1 \le \|\cdot\|_{\mathbb{W}}$ gilt (HB2) nach Lemma (4.2.12).

(HB3) Sei $f \in \mathbb{W}_*$ und sei $x \in S$. Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$(T_x f)^{\sim}(n) = \sup_{k \ge n} \{\, |\widehat{T_x f}(k)|\, \} = \sup_{k \ge n} \{\, |r_k(x)\, \widehat{f}(k)|\, \} \le \sup_{k \ge n} \{\, |\widehat{f}(k)|\, \} = \widetilde{f}(n).$$

Aus dieser Abschätzung folgt sofort $T_x f \in \mathbb{W}_*$ und $\|T_x f\|_* \le \|f\|_*$.

(HB4) Sei $f \in \mathbb{W}_*$ und sei $x_0 \in S$. Nach vorherigem Lemma existiert zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\|f - S(D_{2n-1})f\|_* \le \frac{\varepsilon}{4}$. Für $x \in S$ gilt

$\|T_x f - T_{x_0} f\|_* \le$
$\|T_x f - T_x S(D_{2n-1})f\|_* + \|T_x S(D_{2n-1})f - T_{x_0} S(D_{2n-1})f\|_* + \|T_{x_0} S(D_{2n-1})f - T_{x_0} f\|_*$.

Folglich gilt

$$\|T_x f - T_{x_0} f\|_* \le 2\, \|f - S(D_{2n-1})f\|_* + \|T_x S(D_{2n-1})f - T_{x_0} S(D_{2n-1})f\|_*.$$

Nach Wahl on n gilt also

$$\begin{aligned}\|T_x f - T_{x_0} f\|_* &\le \frac{\varepsilon}{2} + \|T_x S(D_{2n-1})f - T_{x_0} S(D_{2n-1})f\|_* \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=0}^{2n-1} \sup_{k \le l \le 2n-1} \{\, |r_l(x) - r_l(x_0)|\, |\widehat{f}(l)|\, \}\, h(k).\end{aligned}$$

Wegen $r_l \in C(S)$ existiert daher zu x_0 und ε ein $\delta > 0$ mit

$$\|T_x f - T_{x_0} f\|_* \leq \varepsilon \text{ für alle } x \in S \text{ mit } |x - x_0| \leq \delta.$$

$\square$

Bemerkung. Wegen $\mathbb{W}_* \subsetneq \mathbb{W}$ ist $\mathbb{W}_*$ nach Lemma (4.2.7) nicht charakter–invariant.

5 Qualitative Unschärferelationen und Jacobi–Polynome

5.1 $\Lambda(2)$–Mengen

In diesem Abschnitt wird gezeigt, daß zu jeder $\Lambda(2)$–Menge Λ eine Konstante $\varepsilon > 0$ existiert, so daß für jede Borel–Menge B mit $\pi(B) \leq \varepsilon$ das Paar (B, Λ) ein A–Paar ist. Aus der Definition der $\Lambda(2)$–Menge folgt damit sofort eine Qualitative Unschärferelation auf $L^1(\pi)$.

Definition 5.1.1. Eine Teilmenge Λ von $\mathbb{N}_0$ heißt (ε, δ)–Menge, falls es Konstanten $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ gibt, so daß für jede Borel–Menge B mit $\pi(B) \leq \varepsilon$ und alle $f \in L^2_\Lambda(\pi)$ gilt:

$$\|P_{B^c} f\|_2^2 \geq \delta \, \|f\|_2^2.$$

Lemma 5.1.2. *Sei Λ eine (ε, δ)–Menge und sei B eine Borel–Menge mit $\pi(B) \leq \varepsilon$. Dann ist (B, Λ) ein A–Paar.*

Beweis. Sei Λ eine (ε, δ)–Menge und sei B eine Borel–Menge mit $\pi(B) \leq \varepsilon$. Wir zeigen zunächst:

$$\|P_B P_\Lambda f\|_2^2 = \|P_\Lambda f\|_2^2 - \|P_{B^c} P_\Lambda f\|_2^2 \text{ für alle } f \in L^2(\pi). \tag{1}$$

Sei $f \in L^2(\pi)$. Nach dem Satz von der orthogonalen Projektion läßt sich $P_\Lambda f$ schreiben als

$$P_\Lambda f = P_B P_\Lambda f \oplus (I - P_B) P_\Lambda f = P_B P_\Lambda f \oplus P_{B^c} P_\Lambda f.$$

Mit dem Satz von Pythagoras folgt daraus (1).

Wir zeigen nun, daß (B, Λ) ein A–Paar ist. Nach Lemma (1.1.2) und Satz (1.1.9) genügt es $\|P_B P_\Lambda\| < 1$ zu zeigen. Für $f \in L^2(\pi)$ ist $P_\Lambda f \in L^2_\Lambda(\pi)$. Da Λ nach Voraussetzung eine (ε, δ)–Menge ist, gilt also

$$\|P_{B^c} P_\Lambda f\|_2^2 \geq \delta \, \|P_\Lambda f\|_2^2.$$

Aus (1) ergibt sich damit

$$\|P_B P_\Lambda f\|_2^2 \leq \|P_\Lambda f\|_2^2 - \delta \, \|P_\Lambda f\|_2^2 = (1 - \delta) \, \|P_\Lambda f\|_2^2 \leq (1 - \delta) \, \|f\|_2^2.$$

Wegen $\delta > 0$ folgt aus dieser Abschätzung $\|P_B P_\Lambda\| \leq (1 - \delta)^{\frac{1}{2}} < 1$. □

Definition 5.1.3. Eine Teilmenge Λ von $\mathbb{N}_0$ heißt $\Lambda(2)$–Menge, falls gilt: $L^1_\Lambda(\pi) = L^2_\Lambda(\pi)$.

Satz 5.1.4. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(1) Λ *ist eine* (ε, δ)*–Menge.*
(2) Λ *ist eine* $\Lambda(2)$*–Menge.*

Beweis. (1) $\Longrightarrow$ (2). Sei Λ eine (ε,δ)–Menge. Dann zeigen wir zunächst:

$$\|f\|_2 \leq \ \varepsilon^{-1}\delta^{-\frac{1}{2}}\,\|f\|_1 \text{ für alle } f \in L^2_\Lambda(\pi). \tag{2}$$

Sei $f \in L^2_\Lambda(\pi)$. Offensichtlich gilt (2) für $f = 0$. Sei also $f \neq 0$. Zu einem Vertreter $\widetilde{f}$ von f sei die Menge B definiert durch

$$B = \{\, x \in S : \varepsilon\,|\widetilde{f}(x)| > \|f\|_1 \,\}.$$

Aus der Definition von B folgt sofort $1_B(x)\,\|f\|_1 \leq \varepsilon\,|\widetilde{f}(x)|$ für alle $x \in S$. Mit $\widetilde{f}$ ist auch B Borel–meßbar. Also gilt

$$\pi(B)\,\|f\|_1 = \int_S 1_B(x)\|f\|_1\,d\pi(x) \leq \varepsilon \int_S |\widetilde{f}(x)|\,d\pi(x) = \varepsilon\|f\|_1.$$

Wegen $f \neq 0$ zeigt diese Abschätzung $\pi(B) \leq \varepsilon$. Nach Voraussetzung ist Λ eine (ε,δ)–Menge. Wegen $f \in L^2_\Lambda(\pi)$ gilt also

$$\delta\,\|f\|_2^2 \leq \|P_{B^c}f\|_2^2 = \int_{B^c} |\widetilde{f}(x)|^2\,d\pi(x).$$

Unter Berücksichtigung der Definition von B ergibt sich damit

$$\delta\,\|f\|_2^2 \leq \int_{B^c} \varepsilon^{-2}\,\|f\|_1^2\,d\pi(x) = \pi(B^c)\,\varepsilon^{-2}\,\|f\|_1^2 \leq \varepsilon^{-2}\,\|f\|_1^2.$$

Aus dieser Abschätzung folgt (2).

Wir zeigen nun, daß Λ eine $\Lambda(2)$–Menge ist. Offensichtlich genügt es $L^1_\Lambda(\pi) \subseteq L^2(\pi)$ zu zeigen. Für $f \in L^1_\Lambda(\pi)$ gilt

$$f = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \widehat{V}_n(k)\,\widehat{f}(k)\,r_k\,h(k) \text{ in } L^1(\pi).$$

Die Folge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}_0} \subseteq L^2_\Lambda(\pi)$ sei definiert durch

$$f_n = \sum_{k=0}^{n} \widehat{V}_n(k)\,\widehat{f}(k)\,r_k\,h(k).$$

Als konvergente Folge in $L^1(\pi)$ ist $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ insbesondere eine Cauchy–Folge in $L^1(\pi)$. Wegen $f_n \in L^2_\Lambda(\pi)$ zeigt daher (2), daß $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Cauchy–Folge in $L^2(\pi)$ ist. Folglich existiert ein $g \in L^2(\pi)$ mit $\lim_{n\to\infty} f_n = g$ in $L^2(\pi)$. Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Da ein Skalarprodukt als Funktion der ersten Variablen stetig ist, gilt also

$$\widehat{g}(k) = \langle g, r_k\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle f_n, r_k\rangle = \lim_{n\to\infty} \widehat{V}_n(k)\,\widehat{f}(k) = \widehat{f}(k).$$

Folglich gilt $\widehat{f} = \widehat{g}$. Wegen $f \in L^2(\pi) \subseteq L^1(\pi)$ gilt damit nach dem Eindeutigkeitssatz $f = g$ in $L^1(\pi)$. Da $L^2(\pi)$ als homogener Banach–Raum insbesondere ein Untervektorraum von $L^1(\pi)$ ist, gilt daher $f = g$ in $L^2(\pi)$. Folglich ist $f \in L^2(\pi)$. Also gilt $L^1_\Lambda(\pi) \subseteq L^2(\pi)$.

(2) $\Longrightarrow$ (1). Sei Λ eine $\Lambda(2)$–Menge. Der Operator $\iota:\ L^2_\Lambda(\pi)\to L^1_\Lambda(\pi)$ sei definiert durch $\iota f = f$. Dann zeigen wir zunächst, daß ι in $L(L^2_\Lambda(\pi), L^1_\Lambda(\pi))$ invertierbar ist.
Offensichtlich ist ι beschränkt und injektiv. Da Λ nach Voraussetzung eine $\Lambda(2)$–Menge ist, ist ι surjektiv. Insgesamt ist ι also ein bijektiver Operator aus $L(L^2_\Lambda(\pi), L^1_\Lambda(\pi))$.
Als abgeschlossene Untervektorräume von Banach–Räumen sind $L^2_\Lambda(\pi)$ und $L^1_\Lambda(\pi)$ selbst Banach–Räume. Daher ist ι nach dem Satz von der stetigen Inversen invertierbar. Insbesondere gilt also $0 < \|\iota^{-1}\| < \infty$.

Wir zeigen nun, daß Λ eine $(\frac{1}{4}\,\|\iota^{-1}\|^{-2}, \frac{1}{4}\,\|\iota^{-1}\|^{-2})$–Menge ist. Sei B eine Borel–Menge mit $\pi(B) \leq \frac{1}{4}\|\iota^{-1}\|^{-2}$ und sei $f \in L^2_\Lambda(\pi)$. Da ι^{-1} nach dem bereits Gezeigtem aus $L(L^1_\Lambda(\pi), L^2_\Lambda(\pi))$ ist, gilt

$$\begin{aligned}\|\iota^{-1}\|^{-1}\,\|f\|_2 &= \|\iota^{-1}\|^{-1}\,\|\iota^{-1}f\|_2 \leq \|\iota^{-1}\|^{-1}\,\|\iota^{-1}\|\,\|f\|_1 = \|f\|_1\\ &= \int_S 1_B(x)\,|f(x)|\,d\pi(x) + \int_S 1_{B^c}(x)\,|f(x)|\,d\pi(x)\\ &= \int_S 1_B(x)\,|f(x)|\,d\pi(x) + \int_S 1_{B^c}(x)\,|1_{B^c}(x)\,f(x)|\,d\pi(x)\\ &= \langle 1_B, |f|\rangle + \langle 1_{B^c}, |1_{B^c}\,f|\rangle.\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Cauchy–Schwarz–Ungleichung ergibt sich damit

$$\begin{aligned}\|\iota^{-1}\|^{-1}\,\|f\|_2 &\leq \|1_B\|_2\,\|f\|_2 + \|1_{B^c}\|_2\,\|1_{B^c}f\|_2 = \pi(B)^{\frac{1}{2}}\,\|f\|_2 + \pi(B^c)^{\frac{1}{2}}\,\|P_{B^c}f\|_2\\ &\leq \pi(B)^{\frac{1}{2}}\,\|f\|_2 + \|P_{B^c}f\|_2.\end{aligned}$$

Wegen $\pi(B) \leq \frac{1}{4}\,\|\iota^{-1}\|^{-2}$ folgt daraus

$$\|P_{B^c}f\|_2 \geq \frac{1}{2}\,\|\iota^{-1}\|^{-1}\,\|f\|_2.$$

Diese Abschätzung zeigt, daß Λ eine $(\frac{1}{4}\,\|\iota^{-1}\|^{-2}, \frac{1}{4}\,\|\iota^{-1}\|^{-2})$–Menge ist. □

Satz 5.1.5. *Sei Λ eine (ε,δ)–Menge. Ist $f \in L^1(B,\pi) \cap L^1_\Lambda(\pi)$ mit $\pi(B) \leq \varepsilon$, so gilt $f = 0$ π–f.ü..*

Beweis. Sei Λ eine (ε,δ)–Menge und sei $f \in L^1(B,\pi) \cap L^1_\Lambda(\pi)$ mit $\pi(B) \leq \varepsilon$. Nach Lemma (5.1.2) ist dann (B,Λ) ein A–Paar. Daher genügt es $f \in L^2(B,\pi) \cap L^2_\Lambda(\pi)$ zu zeigen.
Da Λ eine (ε,δ)–Menge ist, ist nach vorherigem Satz $f \in L^2_\Lambda(\pi) \subseteq L^2(\pi)$. Mit $f \in L^2(\pi)$ ist auch $1_B f \in L^2(\pi)$. Aus der Definition von $L^p(B,\pi)$ ergibt sich damit $f \in L^2(B,\pi)$. Insgesamt ist also $f \in L^2(B,\pi) \cap L^2_\Lambda(\pi)$. □

Lemma 5.1.6. *Sei $\Lambda \neq \emptyset$ eine endliche Teilmenge von $\mathbb{N}_0$ und sei $\varepsilon \in]0, h(\Lambda)^{-1}[$. Dann ist Λ eine $(\varepsilon, 1 - \varepsilon\, h(\Lambda))$–Menge.*

Bemerkung. Sei $\Lambda \neq \emptyset$ eine endliche Teilmenge von $\mathbb{N}_0$. Dann gilt $0 < h(\Lambda) < \infty$.

Beweis. Sei $\Lambda \neq \emptyset$ eine endliche Teilmenge von $\mathbb{N}_0$, sei $\varepsilon \in]0, h(\Lambda)^{-1}[$ und sei B eine Borel–Menge mit $\pi(B) \leq \varepsilon$. Für $f \in L^2_\Lambda(\pi)$ gilt $P_\Lambda f = f$. Aus Gleichung (1) aus dem Beweis von Lemma (5.1.2) ergibt sich damit

$$\|P_{B^c}f\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \|P_B P_\Lambda f\|_2^2 \geq \|f\|_2^2 - \|P_B P_\Lambda\|^2\,\|f\|_2^2 = (1 - \|P_B P_\Lambda\|^2)\,\|f\|_2^2.$$

Mit Lemma (2.0.14) gilt daher

$$\|P_{B^c} f\|_2^2 \geq (1 - \pi(B)\, h(\Lambda))\, \|f\|_2^2.$$

Nach Wahl von B gilt also

$$\|P_{B^c} f\|_2^2 \geq (1 - \varepsilon\, h(\Lambda))\, \|f\|_2^2.$$

Wegen $\varepsilon\, h(\Lambda) < 1$ zeigt diese Abschätzung, daß Λ eine $(\varepsilon, 1 - \varepsilon\, h(\Lambda))$–Menge ist. □

Korollar 5.1.7. *Sei $\Lambda \neq \emptyset$ eine endliche Teilmenge von $\mathbb{N}_0$. Ist $f \in L^1(B, \pi) \cap L^1_\Lambda(\pi)$ mit $\pi(B)\, h(\Lambda) < 1$, so gilt $f = 0$ π–f.ü..*

Beweis. Sei $\Lambda \neq \emptyset$ eine endliche Teilmenge von $\mathbb{N}_0$ und sei B eine Borel–Menge mit $\pi(B)\, h(\Lambda) < 1$. Wegen $\pi(B)\, h(\Lambda) < 1$ gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $\pi(B) \leq \varepsilon < h(\Lambda)^{-1}$. Nach vorherigem Lemma ist Λ damit eine $(\varepsilon, 1 - \varepsilon\, h(\Lambda))$–Menge. Wegen $\pi(B) \leq \varepsilon$ folgt daher die Behauptung aus Satz (5.1.5). □

5.2 2–lakunäre Mengen

In diesem Abschnitt wird für den Fall der Tschebyscheff–Polynome erster Art gezeigt, daß jede 2–lakunäre Menge eine $\Lambda(2)$–Menge ist.
Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Zur Abkürzung schreiben wir T_n für $r_n^{(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}$.

Lemma 5.2.1. *Für $n, m \in \mathbb{N}_0$ gilt: $T_n(x)\, T_m(x) = \frac{1}{2}\, T_{|n-m|}(x) + \frac{1}{2}\, T_{n+m}(x)$.*

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Zu $x \in S$ sei $\varphi(x) \in [0, \pi]$ definiert durch $x = \cos \varphi(x)$. Damit gilt $T_n(x) = \cos n\, \varphi(x)$. Aus den Additionstheoremen für trigonometrische Funktionen und aus der Symmetrie des cos folgt daher die Behauptung. □

Definition 5.2.2. Eine Teilmenge $\{ \lambda_n : n \in \mathbb{N}_0 \}$ von $\mathbb{N}$ heißt 2–lakunär, falls für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \geq 2$.

Bemerkung. Sei $\{ \lambda_n : n \in \mathbb{N}_0 \}$ eine 2–lakunäre Menge. Dann folgt unmittelbar aus obiger Definition, daß für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $1 \leq \lambda_n < 2\, \lambda_n \leq \lambda_{n+1}$.

Definition 5.2.3. Die Diagonale Δ von $\mathbb{N}_0^2$ sei definiert durch $\Delta = \{ (n, n) : n \in \mathbb{N}_0 \}$.

Definition 5.2.4. Sei $\Lambda \subseteq \mathbb{N}_0$ und sei $k \in \mathbb{N}_0$.

(1) Zu Λ und k sei die Menge $\Lambda_+(k) \subseteq \mathbb{N}_0^2$ definiert durch
$\Lambda_+(k) = \{ (n, m) \in \Lambda^2 \backslash \Delta : n + m = k \}$.

(2) Zu Λ und k sei die Menge $\Lambda_-(k) \subseteq \mathbb{N}_0^2$ definiert durch
$\Lambda_-(k) = \{ (n, m) \in \Lambda^2 \backslash \Delta : |n - m| = k \}$.

Korollar 5.2.5. *Sei Λ eine 2–lakunäre Menge. Dann gelten für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ folgende Aussagen:*

(1) $|\Lambda_+(k)| \leq 2$.
(2) $|\Lambda_-(k)| \leq 2$.

Beweis. Sei $\Lambda = \{\, \lambda_n : n \in \mathbb{N}_0 \,\}$ eine 2–lakunäre Menge.

(1) Angenommen, die Behauptung ist falsch für ein $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gibt es mindestens zwei Elemente $(\lambda_{n_1}, \lambda_{m_1})$ und $(\lambda_{n_2}, \lambda_{m_2})$ aus $\Lambda^2 \backslash \Delta$ mit

$$\lambda_{n_1} + \lambda_{m_1} = k = \lambda_{n_2} + \lambda_{m_2}.$$

O.B.d.A. sei $n_2 > n_1 > m_1$. Mit der Bemerkung zu Definition (5.2.2) ergibt sich dann

$$k = \lambda_{n_1} + \lambda_{m_1} < \lambda_{n_1} + \lambda_{n_1} = 2\,\lambda_{n_1} \leq \lambda_{n_1+1} \leq \lambda_{n_2}.$$

Wegen $\lambda_{m_2} > 0$ gilt daher

$$k < \lambda_{n_2} < \lambda_{n_2} + \lambda_{m_2} = k.$$

Dieser Widerspruch zeigt, daß die Annahme falsch ist. Folglich muß die Behauptung richtig sein.

(2) Angenommen, die Behauptung ist falsch für ein $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gibt es mindestens zwei Elemente $(\lambda_{n_1}, \lambda_{m_1})$ und $(\lambda_{n_2}, \lambda_{m_2})$ aus $\Lambda^2 \backslash \Delta$ mit

$$|\lambda_{n_1} - \lambda_{m_1}| = k = |\lambda_{n_2} - \lambda_{m_2}|.$$

O.B.d.A. sei $n_1 > m_1$, $n_2 > m_2$ und $n_2 > n_1$. Mit der Bemerkung zu Definition (5.2.2) ergibt sich dann

$$k = \lambda_{n_1} - \lambda_{m_1} < \lambda_{n_1} \leq \lambda_{n_2-1} = 2\,\lambda_{n_2-1} - \lambda_{n_2-1} \leq \lambda_{n_2} - \lambda_{n_2-1}.$$

Wegen $n_2 - 1 \geq m_2$ und $n_2 > m_2$ gilt daher

$$k < \lambda_{n_2} - \Lambda_{n_2-1} \leq \lambda_{n_2} - \lambda_{m_2} = |\lambda_{n_2} - \lambda_{m_2}| = k.$$

Dieser Widerspruch zeigt, daß die Annahme falsch ist. Folglich muß die Behauptung richtig sein. □

Definition 5.2.6. Sei $\Lambda \subseteq \mathbb{N}_0$ und sei $B \subseteq S$ eine Borel–Menge. Zu (Λ, B) sei der Kern $K_{(\Lambda,B)} : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$K_{(\Lambda,B)}(n,m) = \langle 1_{B^c} T_n, T_m \rangle \, 1_{\Lambda^2 \backslash \Delta}(n,m).$$

Lemma 5.2.7. *Für jede 2–lakunäre Menge Λ gilt: $\|K_{(\Lambda,B)}\|_2 \leq 2\,\pi(B)^{\frac{1}{2}}$.*

Beweis. Sei Λ eine 2–lakunäre Menge. Es gilt

$$\begin{aligned}\|K_{(\Lambda,B)}\|_2 &= \Big[\sum_{n,m\in\Lambda^2\setminus\Delta} |\langle 1_{B^c}T_n, T_m\rangle|^2\, h(n)\, h(m)\Big]^{\frac{1}{2}}\\ &= \Big[\sum_{n,m\in\Lambda^2\setminus\Delta} \Big|\tfrac{1}{2}\,\langle 1_{B^c}, T_{|n-m|}\rangle + \tfrac{1}{2}\,\langle 1_{B^c}, T_{n+m}\rangle\Big|^2\, h(n)\, h(m)\Big]^{\frac{1}{2}}\\ &= \Big[\sum_{n,m\in\Lambda^2\setminus\Delta} \tfrac{1}{4}\Big|\widehat{1}_{B^c}(|n-m|) + \widehat{1}_{B^c}(n+m)\Big|^2\, h(n)\, h(m)\Big]^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Sei $k\in\Lambda$. Wegen $\Lambda\subseteq\mathbb{N}$ gilt dann $h(k)=2$. Mit der Dreiecks–Ungleichung in $\ell^2(h\otimes h)$ ergibt sich daher

$$\begin{aligned}&\|K_{(\Lambda,B)}\|_2 \le\\ &\le \Big[\sum_{n,m\in\Lambda^2\setminus\Delta} \tfrac{1}{4}|\widehat{1}_{B^c}(|n-m|)|^2\, h(n)\, h(m)\Big]^{\frac{1}{2}} + \Big[\sum_{n,m\in\Lambda^2\setminus\Delta} \tfrac{1}{4}|\widehat{1}_{B^c}(n+m)|^2\, h(n)\, h(m)\Big]^{\frac{1}{2}}\\ &= \Big[\sum_{n,m\in\Lambda^2\setminus\Delta} |\widehat{1}_{B^c}(|n-m|)|^2\Big]^{\frac{1}{2}} + \Big[\sum_{n,m\in\Lambda^2\setminus\Delta} |\widehat{1}_{B^c}(n+m)|^2\Big]^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Für $(n,m)\in\Lambda^2\setminus\Delta$ gilt $n-m\neq 0$ und $n+m\neq 0$. Nach Definition von $\Lambda_+(\cdot)$ und $\Lambda_-(\cdot)$ gilt also

$$\|K_{(\Lambda,B)}\|_2 \le \Big[\sum_{k=1}^{\infty} |\widehat{1}_{B^c}(k)|^2\, |\Lambda_-(k)|\Big]^{\frac{1}{2}} + \Big[\sum_{k=1}^{\infty} |\widehat{1}_{B^c}(k)|^2\, |\Lambda_+(k)|\Big]^{\frac{1}{2}}.$$

Aus Korollar (5.2.5) folgt damit

$$\|K_{(\Lambda,B)}\|_2 \le 2\Big[\sum_{k=1}^{\infty} |\widehat{1}_{B^c}(k)|^2\, 2\Big]^{\frac{1}{2}} = 2\Big[\sum_{k=1}^{\infty} |\widehat{1}_{B^c}(k)|^2\, h(k)\Big]^{\frac{1}{2}}.$$

Wegen $h(0)=1$ gilt also

$$\begin{aligned}\|K_{(\Lambda,B)}\|_2 &\le 2\Big[\sum_{k=0}^{\infty} |\widehat{1}_{B^c}(k)|^2\, h(k) - |\widehat{1}_{B^c}(0)|^2\Big]^{\frac{1}{2}} = 2\left[\|1_{B^c}\|_2^2 - \pi(B^c)^2\right]^{\frac{1}{2}}\\ &= 2\left[\pi(B^c) - \pi(B^c)^2\right]^{\frac{1}{2}} = 2\,\pi(B^c)^{\frac{1}{2}}\left[1-\pi(B^c)\right]^{\frac{1}{2}} \le 2\left[1-\pi(B^c)\right]^{\frac{1}{2}} = 2\,\pi(B)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

□

Korollar 5.2.8. *Sei Λ eine 2–lakunäre Menge und sei $a\in\ell^2(h)$. Dann wird durch*

$$\mathcal{K}_{(\Lambda,B)}a(n) = \sum_{m=0}^{\infty} K_{(\Lambda,B)}(n,m)\, a(m)\, h(m)$$

ein Hilbert–Schmidt–Operator in $L(\ell^2(h))$ mit $\|\mathcal{K}_{(\Lambda,B)}\|_{HS} \le 2\,\pi(B)^{\frac{1}{2}}$ definiert.

Beweis. Die Behauptung folgt aus vorherigem Lemma und [35, S. 210, Theorem VI.23]. $\square$

Lemma 5.2.9. *Sei Λ eine 2–lakunäre Mange und sei $\varepsilon \in]0, \frac{1}{16}[$. Dann ist Λ eine $(\varepsilon, 1 - 4\,\varepsilon^{\frac{1}{2}})$–Menge.*

Beweis. Sei Λ eine 2–lakunäre Menge, sei $\varepsilon \in]0, \frac{1}{16}[$ und sei B eine Borel–Menge mit $\pi(B) \leq \varepsilon$. Für $f \in L^2_\Lambda(\pi)$ gilt

$$\begin{aligned}
\|P_{B^c} f\|_2^2 &= \int_S |1_{B^c}(x)\, f(x)|^2\, d\pi(x) = \int_S 1_{B^c}(x)\, f(x)\, \overline{1_{B^c}(x)\, f(x)}\, d\pi(x) \\
&= \int_S 1_{B^c}(x)\, f(x)\, \overline{f(x)}\, d\pi(x) = \langle 1_{B^c}\, f, f\rangle \\
&= \sum_{n,m=0}^{\infty} \widehat{f}(n)\, \overline{\widehat{f}(m)}\, \langle 1_{B^c} T_n, T_m\rangle\, h(n)\, h(m) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} |\widehat{f}(n)|^2\, \langle 1_{B^c} T_n, T_n\rangle\, h(n)^2 + \sum_{n\neq m} \widehat{f}(n)\, \overline{\widehat{f}(m)}\, \langle 1_{B^c} T_n, T_m\rangle\, h(n)\, h(m).
\end{aligned}$$

Es gilt $\mathit{spec}\, f \subseteq \Lambda \subseteq \mathbb{N}$. Mit der Definition von $K_{(\Lambda,B)}$ und $\mathcal{K}_{(\Lambda,B)}$ ergibt sich daher

$$\begin{aligned}
\|P_{B^c} f\|_2^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} |\widehat{f}(n)|^2\, \langle 1_{B^c} T_n, T_n\rangle\, h(n)^2 + \sum_{n\neq m} \widehat{f}(n)\, \overline{\widehat{f}(m)}\, K_{(\Lambda,B)}(n,m)\, h(n)\, h(m) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} |\widehat{f}(n)|^2\, h(n)\, 2\, \langle 1_{B^c} T_n, T_n\rangle + \langle \mathcal{K}_{(\Lambda,B)} \widehat{f}, \widehat{f}\,\rangle.
\end{aligned}$$

Als erstes zeigen wir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\widehat{f}(n)|^2\, h(n)\, 2\, \langle 1_{B^c} T_n, T_n\rangle \geq \left[1 - 2\,\pi(B)^{\frac{1}{2}}\right] \|f\|_2^2.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
2\,\langle 1_{B^c} T_n, T_n\rangle &= \langle 1_{B^c}, T_0\rangle + \langle 1_{B^c}, T_{2n}\rangle = \pi(B^c) + \langle 1_{B^c}, T_{2n}\rangle \\
&= \pi(B^c) + \langle 1_S - 1_B, T_{2n}\rangle = \pi(B^c) + \langle 1_S, T_{2n}\rangle - \langle 1_B, T_{2n}\rangle \\
&= \pi(B^c) + \langle T_0, T_{2n}\rangle - \langle 1_B, T_{2n}\rangle.
\end{aligned}$$

Wegen $2\,n > n \geq 1$ gilt also

$$2\,\langle 1_{B^c} T_n, T_n\rangle = \pi(B^c) - \langle 1_B, T_{2n}\rangle = 1 - \pi(B) - \langle 1_B, T_{2n}\rangle.$$

Mit Hilfe der Cauchy–Schwarz–Ungleichung folgt daraus

$$2\,\langle 1_{B^c} T_n, T_n\rangle \geq 1 - \pi(B) - \|1_B\|_2\, \|T_{2n}\|_2 \geq 1 - \pi(B) - \pi(B)^{\frac{1}{2}}.$$

Wegen $\pi(B) \leq 1$ gilt $\pi(B) \leq \pi(B)^{\frac{1}{2}}$. Folglich gilt

$$2\,\langle 1_{B^c}\, T_n, T_n\rangle \geq 1 - 2\,\pi(B)^{\frac{1}{2}}.$$

Wegen *spec* $f \subseteq \Lambda \subseteq \mathbb{N}$ ergibt sich damit

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\widehat{f}(n)|^2\, h(n)\, 2\, \langle 1_B T_n, T_n\rangle \geq \big[1 - 2\,\pi(B)^{\frac{1}{2}}\big] \sum_{n=1}^{\infty} |\widehat{f}(n)|^2\, h(n) = \big[1 - 2\,\pi(B)^{\frac{1}{2}}\big]\, \|f\|_2^2.$$

Als zweites zeigen wir:

$$|\langle \mathcal{K}_{(\Lambda,B)} \widehat{f}, \widehat{f}\,\rangle| \leq 2\,\pi(B)^{\frac{1}{2}}\, \|f\|_2^2.$$

Mit Hilfe der Cauchy–Schwarz–Ungleichung ergibt sich

$$|\langle \mathcal{K}_{(\Lambda,B)} \widehat{f}, \widehat{f}\,\rangle| \leq \|\mathcal{K}_{(\Lambda,B)} \widehat{f}\,\|_2\, \|\widehat{f}\,\|_2 \leq \|\mathcal{K}_{(\Lambda,B)}\|\, \|\widehat{f}\,\|_2^2 = \|\mathcal{K}_{(\Lambda,B)}\|\, \|f\|_2^2.$$

Aus Korollar (5.2.8) folgt daher

$$|\langle \mathcal{K}_{(\Lambda,B)} \widehat{f}, \widehat{f}\,\rangle| \leq \|\mathcal{K}_{(\Lambda,B)}\|\, \|f\|_2^2 \leq \|\mathcal{K}_{(\Lambda,B)}\|_{HS}\, \|f\|_2^2 \leq 2\,\pi(B)^{\frac{1}{2}}\, \|f\|_2^2.$$

Insgesamt gilt also

$$\begin{aligned}
\|P_{B^c} f\|_2^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} |\widehat{f}(n)|^2\, h(n)\, 2\, \langle 1_{B^c} T_n, T_n\rangle + \langle \mathcal{K}_{(\Lambda,B)} \widehat{f}, \widehat{f}\rangle \\
&\geq \sum_{n=1}^{\infty} |\widehat{f}(n)|^2\, h(n)\, 2\, \langle 1_{B^c} T_n, T_n\rangle - |\langle \mathcal{K}_{(\Lambda,B)} \widehat{f}, \widehat{f}\,\rangle| \\
&\geq \big[1 - 2\pi(B)^{\frac{1}{2}}\big]\, \|f\|_2^2 - 2\,\pi(B)^{\frac{1}{2}}\, \|f\|_2^2 = \big[1 - 4\,\pi(B)^{\frac{1}{2}}\big]\, \|f\|_2^2.
\end{aligned}$$

Nach Wahl von B gilt $\pi(B) \leq \varepsilon$. Folglich gilt

$$\|P_{B^c} f\|_2^2 \geq (1 - 4\,\varepsilon^{\frac{1}{2}})\, \|f\|_2^2.$$

Wegen $\varepsilon < \frac{1}{16}$ zeigt diese Abschätzung, daß Λ eine $(\varepsilon, 1 - 4\,\varepsilon^{\frac{1}{2}})$–Menge ist. □

Satz 5.2.10. *Jede* 2*–lakunäre Menge ist eine* $\Lambda(2)$*–Menge.*

Beweis. Die Behauptung folgt sofort aus vorherigem Lemma und Satz (5.1.4). □

Anhang

Wir stellen hier die wichtigsten Eigenschaften der normierten Jacobi–Polynome zusammen.

Der Parameterbereich.

$$\{\,(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 :\ \alpha \geq \beta > -1 \text{ und } (\alpha+\beta \geq 0 \text{ oder } \beta \geq -\tfrac{1}{2})\,\}.$$

Die Rekursionskoeffizienten.

$$a_0 = \frac{2\,(\alpha+1)}{\alpha+\beta+2}, \qquad a_n = \frac{2\,(n+\alpha+\beta+1)\,(n+\alpha+1)\,(\alpha+\beta+2)}{(2n+\alpha+\beta+2)\,(2n+\alpha+\beta+1)\,2\,(\alpha+1)} \quad \text{für } n \in \mathbb{N},$$

$$b_0 = \frac{\beta-\alpha}{\alpha+\beta+2}, \qquad b_n = \frac{\alpha-\beta}{2\,(\alpha+1)}\left[1 - \frac{(\alpha+\beta+2)\,(\alpha+\beta)}{(2n+\alpha+\beta+2)\,(2n+\alpha+\beta)}\right] \quad \text{für } n \in \mathbb{N},$$

$$c_n = \frac{2n\,(n+\beta)\,(\alpha+\beta+2)}{(2n+\alpha+\beta+2)\,(2n+\alpha+\beta)\,2\,(\alpha+1)} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Die Rekursionsgleichung.

$$\begin{aligned} r_0(x) &= 1, \\ r_1(x) &= \frac{1}{a_0}\,(x-b_0), \\ r_1(x)\,r_n(x) &= a_n\,r_{n+1}(x) + b_n\,r_n(x) + c_n\,r_{n-1}(x) \text{ für } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Die Normierung. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $r_n(1) = 1$.

Bemerkung. Für die Jacobi–Polynome $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ aus [38] ergibt sich durch obige Normierung:

$$P_n(x) = P_n(1)\,r_n(x).$$

Das Orthogonalisierungs–Maß.

$$d\pi(x) = 2^{-(\alpha+\beta+1)}\,\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\beta+1)}\,(1-x)^{\alpha}\,(1+x)^{\beta}\,dx,$$

$$\mathit{supp}\,\pi = [-1,1].$$

Das Maximum. Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\max_{x\in[-1,1]} |r_n(x)| = r_n(1) = 1.$$

Die Nullstellen. Sei $n \in \mathbb{N}$. Wegen $\mathit{supp}\,\pi = [-1,1]$ liegen alle n Nullstellen von r_n in $]-1,1[$.

Die Gewichtsfunktion.

$$\begin{aligned} h(0) &= 1, \\ h(n) &= \frac{(2n+\alpha+\beta+1)}{(\alpha+\beta+1)\,n!}\,\frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\,\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)}\,\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n+\beta+1)} \text{ für } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Bemerkung. Die Stirling–Formel für die Γ–Funktion zeigt

$$h(n) = \mathcal{O}(n^{2\alpha+1}) \text{ für } n \to \infty.$$

Die Linearisierungskoeffizienten. Zu $n, m \in \mathbb{N}_0$ sei die Folge $\{g(n,m,k)\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ der Linearisierungskoeffizienten definiert durch:

$$r_n(x)\, r_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} g(n,m,k)\, r_k(x).$$

Es gilt:

(1) $g(n,m,k) = 0$ für $k \notin \{\, |n-m|, \ldots, n+m \,\}$,

(2) $\displaystyle\sum_{k=|n-m|}^{n+m} g(n,m,k) = 1$,

(3) $g(n,m,k) = g(m,n,k)$,

(4) $g(n,m,k)\, h(k)^{-1} = g(n,k,m)\, h(m)^{-1}$.

Die Eigenschaft (P). In [11] wurde von Gasper gezeigt, daß $g(n,m,k) \geq 0$.

Die Verbindungskoeffizienten. Zu $n \in \mathbb{N}_0$ seien die Verbindungskoeffizienten $c(n,0), \ldots, c(n,n) \in \mathbb{R}$ definiert durch:

$$r_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c(n,k)\, r_n^{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}(x).$$

Die Eigenschaft (T): In [30] wurde von Lsser und Rösler gezeigt, daß $c(n,k) \geq 0$.

Literatur

[1] W. O. Amrein, A. M. Berthier, *On Support Properties of L^p–Functions and Their Fourier Transforms.* J. Func. Anal. 24, 258–267, 1977.

[2] R. Askey, *Orthogonal Polynomials and Special Functions.* SIAM, 1975.

[3] H. Bauer, *Maß– und Integrationstheorie.* de Gruyter, 2. Auflage, 1992.

[4] P. L. Butzer, R. J. Nessel, *Fourier Analysis and Approximation.* Birkhäuser, 1971.

[5] T. S. Chihara, An introduction to orthogonal polynomials. Gordon and Breach, 1978.

[6] W. C. Connett, A. L. Schwartz, *The Littlewood–Paley theory for Jacobi expansions.* Trans. AMS 251, 219–234, 1979.

[7] ———, ———, *Product formulas, hypergroups, and Jacobi polynomials.* Bull. AMS 33, 89–102, 1986.

[8] D. L. Donoho, P. B. Stark, *Uncertainty principles and signal recovery.* SIAM J. APPL. MATH. 49, 906–931, 1989.

[9] J. Elstrodt, *Maß– und Integrationstheorie*, Springer, 1996.

[10] G. B. Folland, A. Sitaram, *The Uncertainty Principle: A Mathematical Survey.* J. Fourier Anal. Appl. 3, 207–238, 1997.

[11] G. Gasper, *Linearization of the product of Jacobi polynomials I.* Canad. J. Math. 22, 171–175, 1970.

[12] ———, *Linearization of the product of Jacobi polynomials II.* Canad. J. Math. 22, 582–593, 1970.

[13] ———, *Positivity and the convolution structure for Jacobi series.* Ann. of Math. 93, 112–118, 1971.

[14] ———, *Banach algebras for Jacobi series and positivity of a kernel.* Ann. of. Math. 95, 261–280, 1972.

[15] H.–J. Glaeske, T. Runst, *The Discrete Jacobi Transform of Generalized Functions.* Math. Nachr. 132, 239–251, 1987.

[16] K. E. Hare, *An elementary proof of a result on $\Lambda(p)$–sets.* Proc. AMS 104, 829–834, 1988.

[17] ———, *Sidonicity in compact, abelian hypergroups.* Colloq. Math. 76, 171–180, 1998.

[18] V. Havin, B. Jöricke, *The Uncertainty Principle in Harmonic Analysis.* Springer, 1994.

[19] R. I. Jewett, *Spaces with an abstract convolution of measures.* Adv. in Math. 18, 1–101, 1975.

[20] Y. Katznelson, *An introduction to harmonic analysis.* Wiley, 1968.

[21] K. Königsberger, *Analysis 1.* Springer, 2. Auflage, 1992.

[22] A. Kumar, *A qualitative uncertainty principle for hypergroups.* In: Functional Analysis and Operator Theory, 1–9, LNM 1511, Springer, 1990.

[23] R. Lasser, *Orthogonal polynomials and hypergroups.* Rend. Mat. 3, 185–209, 1983.

[24] ———, *Lacunarity with respect to orthogonal polynomial sequences.* Acta Sci. Math. 47, 391–403, 1984.

[25] ———, *On the Lévy–Hinčin formula for commutative hypergroups.* In: Probability Measures on Groups VII, 298–308, LNM 1064, Springer, 1984.

[26] ———, *Convolution semigroups on hypergroups.* Pacific J. Math. 127, 353–371, 1987.

[27] ———, *Introduction to Fourier Series.* Marcel Dekker, 1996.

[28] ———, J. Obermaier, *On Fejér means with respect to orthogonal polynomials.* In: Progress in Approximation Theory, 551–565, Academic Press, 1991.

[29] ———, ———, *On the convergence of weighted Fourier expansions with respect to orthogonal polynomials.* Acta Sci. Math. 61, 345–355, 1995.

[30] ———, M. Rösler, *A note on property (T) of orthogonal polynomials.* Arch. Math. 60, 459–463, 1993.

[31] F. L. Nazarov, *Local estimates of exponential polynomials and their applications to the uncertainty principle.* Algebra Anal. 5, 3–66, 1993.

[32] P. Nevai, *Orthogonal Polynomials.* Mem. Amer Math. Soc 231, 1997.

[33] J. Obermaier, *The de la Vallée–Poussin kernel for orthogonal polynomial systems.* Analysis 21, 277-288, 2001.

[34] G. K. Pedersen, *Analysis Now.* Springer, 2. Auflage, 1995.

[35] M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics I: Functional Analysis.* Academic Press, 2. Auflage, 1980.

[36] H. Reiter, *Classical harmonic analysis and locally compact groups.* Clarendon Press, 1968.

[37] W. Rudin, *Functional Analysis.* McGraw–Hill, 2. Auflage, 1991.

[38] G. Szegö, *Orthogonal Polynomials.* AMS, 3. Auflage, 1967.

[39] H. Triebel, *Fourier analysis and function spaces.* Teubner, 1977.

[40] ———, *Höhere Analysis.* Deutsch, 2. Auflage, 1980.

[41] M. Voit, *An Uncertainty Principle for Commutative Hypergroups and Gelfand Pairs*. Math. Nachr. 164, 187–195, 1993.

[42] H.–C. Wang, *Homogeneous Banach Algebras*. Marcel Dekker, 1997.

[43] D. Werner, *Funktionalanalysis*. Springer, 4. Auflage, 2002.