

Topologische Methoden zur Analyse dynamischer Systeme

Dominik Eberlein

Technische Universität München

2004

Zentrum Mathematik der Technischen Universität München
Lehrstuhl Univ.-Prof. Dr. J. Scheurle

Topologische Methoden
zur Analyse
dynamischer Systeme

Dominik Eberlein

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Mathematik der
Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)
genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr. Peter Gritzmann

Prüfer der Dissertation:

1. Univ.-Prof. Dr. Jürgen Scheurle
2. Univ.-Prof. Dr. Stanislaus Maier-Paape,
Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen

Die Dissertation wurde am 24.3.2004 bei der Technischen Universität München eingereicht
und durch die Fakultät für Mathematik am 4.8.2004 angenommen.

Inhaltsverzeichnis

Symbolverzeichnis	v
Zusammenfassung	ix
Abstract	xi
Einführung	xiii
1 Hilfsmittel aus der Conley-Indextheorie	1
1.1 Isolierte invariante Mengen und Indexpaare	1
1.2 Der Conley-Index und drei Eigenschaften	3
1.3 Isolierende Blöcke	7
2 Grundlegende Ideen und die wesentlichen Sätze zur Entwicklung der Algorithmen	9
2.1 Strategie	9
2.2 Triangulierung der Austrittsmenge L^-	10
2.3 Auflösung interner Berührungspunkte	18
3 Triangulierung der Austrittsmenge L^-	23
3.1 Beweise der Hilfsmittel	23
3.2 Kontrahierbarkeits-Bedingungen	28
3.3 Rigorose Überprüfung der Kontrahierbarkeits-Bedingungen mit numerischen Methoden	34
4 Auflösung interner Berührungspunkte	39
4.1 Erkennung interner Berührungspunkte	40
4.2 Auflösung interner Berührungspunkte	42
4.3 Rigorose Erkennung interner Berührungspunkte mit numerischen Methoden	45
5 Ausgewählte Beispiele	49
5.1 Beispiel 1	49
5.2 Beispiel 2	52
5.3 Beispiel 3	60
A Algorithmen zur Konstruktion isolierender Blöcke	69
B Hilfsmittel aus der algebraischen Topologie	75
B.1 Motivation	75
B.2 Simpliciale Homologietheorie	76

B.3	Werkzeuge zur Berechnung der Homologiegruppen	80
B.4	Weitere Definitionen	82
C	Hilfsmittel aus der algorithmischen Geometrie	83
C.1	Hyperebenen und Seiten von Polyedern	83
C.2	Delaunay-Komplexe und der Satz vom Nerv	85
D	Literatur	88

Symbolverzeichnis

Wir bezeichnen mit \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{R} und \mathbb{C} die Menge der natürlichen, ganzen, reellen und komplexen Zahlen, respektive. In dieser Arbeit ist $\varphi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ stets ein Fluss, der von einem unendlich oft differenzierbaren Vektorfeld $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ und dem System

$$\dot{x} = f(x)$$

induziert wird.

$(x, y]$	Halboffene Verbindungsstrecke $(x, y] := \{x + t(y - x) : t \in (0, 1]\}$ für $x, y \in \mathbb{R}^n$, Seite 20
$[x, y]$	Verbindungsstrecke $[x, y] := \{x + t(y - x) : t \in [0, 1]\}$ für $x, y \in \mathbb{R}^n$, Seite 19
$[x_0, \dots, x_k]$	Orientiertes Simplex mit Ecken $\{x_0, \dots, x_k\}$, Seite 77
$\alpha \rightsquigarrow \alpha'$	Verbindungsortbit von α nach α'
$\lceil x \rceil$	Kleinste ganze Zahl, die größer als x ist, Seite 69
$\lfloor x \rfloor$	Größte ganze Zahl, die kleiner als x ist, Seite 69
$ K $	Dem simplizialen Komplex K zu Grunde liegender Raum, Seite 76
$A \cong B$	Isomorphie der Gruppen A und B , Seite 80
$A \oplus B$	Direkte Summe der Gruppen A und B : $A \oplus B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$, Seite 79
$f_0 \simeq f_1$	Homotopie der Abbildungen f_0 und f_1 , Seite 82
N/L	Quotientenraum: Alle Punkte in $N - L$ und L aufgefasst als ein Punkt, Seite 3
$\text{aff}(F)$	Affine Hülle von $F \subset \mathbb{R}^n$, Seite 83
$B_q(K)$	Gruppe der q -Ränder in $C_q(K)$, Seite 78
$CH_*(S)$	Conley-Index einer isolierten invarianten Menge S , Seite 3
$CH_q(S)$	q -te Gruppe des Conley-Index einer isolierten invarianten Menge S , Seite 3
$\text{cl } C$	Abschluss von $C \subset \mathbb{R}^n$

$C_q(K)$	Gruppe der q -Ketten von K , Seite 77
∂C	Rand von $C \subset \mathbb{R}^n$
$\text{diam } F$	Durchmesser einer Seite F : $\text{diam } F := \max_{x,y \in \text{cl } F} x - y $, Seite 34
$\text{diam } s$	Durchmesser eines Simplex s : $\text{diam } s := \max_{x,y \in s} x - y $, Seite 45
$\dim K$	Dimension des simplizialen Komplexes K , Seite 76
$D(P)$	Delaunay-Komplex zu P , Seite 85
$D_C(P)$	Auf C eingeschränkter Delaunay-Komplex zu P , Seite 85
∂_q	Randoperator $\partial_q: C_q \rightarrow C_{q-1}$, Seite 77
e_i	Standardnormalenvektor im \mathbb{R}^n , $e_i = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i\text{-te Position}}, 0, \dots, 0)$
η_F	Funktion zur Messung des Austritts des Flusses aus einer Seite F , $\eta_F(x) := \langle f(x), n_F \rangle$, Seite 12
η_s	Funktion zur Messung des Austritts des Flusses aus einem Simplex s , $\eta_s(x) := \langle f(x), n_s \rangle$, Seite 18
$\mathcal{F}_k(p)$	Menge der k -Seiten bezüglich p , Seite 12
$\mathcal{F}_k(F)$	Menge der k -Seiten von F , Seite 12
$\mathcal{F}(p)$	Menge der Seiten bezüglich p , Seite 12
$\mathcal{F}_{\bigcap Q}^*(p)$	Menge der maximalen Seiten in $\bigcap_{p \in Q} V_{p,L^-}$, Seite 13
$\mathcal{F}_{n-1}(x; K)$	Alle $(n-1)$ -Seiten von K , die x enthalten, Seite 39
$G_F(x)$	Zu $\eta_F^{-1}(0)$ orthogonales Vektorfeld, Seite 15
$H_*(G)$	Homologie von G , Seite 79
$H_q(G)$	q -te Homologiegruppe von G , Seite 78
$H(b; n_H)$	Orientierte Hyperebene mit Normalenvektor n_H : $H(b; n_H) = \{ x \in \mathbb{R}^n : \langle x, n_H \rangle + b = 0 \}$, Seite 83
$H^+(b; n_H)$	Positiver Halbraum zur Hyperebene $H(b; n_H)$, Seite 83
$H^-(b; n_H)$	Negativer Halbraum zur Hyperebene $H(b; n_H)$, Seite 83
$H(K)$	Menge der das Polyeder K erzeugenden Hyperebenen, Seite 84
Id_X	Identität auf dem Raum X : $\text{Id}_X: X \rightarrow X, x \mapsto x$
$\text{img } \partial_{q+1}$	Bild von ∂_q , Seite 78
$\text{int } C$	Menge der inneren Punkte von $C \subset \mathbb{R}^n$

$\text{inv } N$	Maximale invariante Menge in N : $\text{inv } N := \{x \in N : \varphi(x, \mathbb{R}) \subset N\}$, Seite 1
\mathcal{K}_1	Kontrahierbarkeits-Eigenschaft \mathcal{K}_1 , Seite 15
\mathcal{K}_2	Kontrahierbarkeits-Eigenschaft \mathcal{K}_2 , Seite 15
$\ker \partial_q$	Kern von ∂_q , Seite 78
L^-	Austrittsmenge $L^- := L^-(M)$ von M , Seite 7
L^+	Eintrittsmenge $L^+ := L^+(M)$ von M , Seite 7
$\text{nerve } \mathcal{U}$	Nerv von \mathcal{U} , Seite 86
N_F^-	Austrittsmenge der Seite F , Seite 12
N_F^+	Eintrittsmenge der Seite F , Seite 12
$n_{F,F'}$	Der nach innen zeigende Normalenvektor von F bezüglich F' , Seite 84
$T \text{ aff}(F)$	Tangentialraum der affinen Hülle $\text{aff}(F)$ von F , Seite 15
$\text{vert } K$	Ecken eines Polyeders K , Seite 84
$\text{vert } K$	Ecken eines simplizialen Komplexes K , Seite 76
$V_p(P)$	Voronoi-Zelle für $p \in P$, Seite 85
$\mathcal{V}(P)$	Voronoi-Diagramm zu P , Seite 85
$V_{p,C}$	Auf C eingeschränkte Voronoi-Zelle für $p \in P$, Seite 85
$\mathcal{V}_C(P)$	Auf C eingeschränktes Voronoi-Diagramm zu P , Seite 85
$Z_q(K)$	Gruppe der q -Zykeln (geschlossenen Wege) in $C_q(K)$, Seite 78

Zusammenfassung

Ziel dieser Arbeit ist die Entwicklung eines Verfahrens zum Nachweis der Existenz beschränkter invarianter Mengen bezüglich eines glatten Flusses. Ein Verbindungsorbit zwischen Gleichgewichtspunkten ist dafür ein Beispiel. Wir verwenden dazu die Conley-Indextheorie für isolierte invariante Mengen. Vermöge eines so genannten Indexpaares ist der Index einer isolierten invarianten Menge definiert. Zentral ist also die Bestimmung eines geeigneten Indexpaares. Wir entwickeln ein Verfahren, mit dem in gewissen Fällen ein Indexpaar konstruiert und durch ein topologisch äquivalentes Paar von simplizialen Komplexen in endlich vielen Schritten ersetzt werden kann. Dies gelingt mit einer speziellen Triangulierung und der Formulierung von hinreichenden Kontrahierbarkeits-Kriterien für die topologische Äquivalenz. Die praktische Umsetzung unserer Vorgehensweise einschließlich der numerischen Implementierung demonstrieren wir an konkreten Beispielen.

Abstract

The goal of this work lies on the development of a procedure for verifying the existence of bounded invariant sets with respect to a smooth flow. A connecting orbit between equilibria is an example. For this purpose we use the Conley index theory for isolated invariant sets. The index of an isolated invariant set is defined in terms of a so called index pair. Therefore, determining a suitable index pair is crucial. We develop a procedure that enables us in some cases to construct an index pair which can be replaced by a topological equivalent pair of simplicial complexes in a finite number of steps. This is possible by a special triangulation and by formulating sufficient contractibility conditions for the topological equivalence. We demonstrate the application of our procedure including numerical aspects by concrete examples.

Einführung

Der zeitliche Verlauf vieler Prozesse in den Naturwissenschaften wird sehr gut durch Differentialgleichungen beschrieben. Die Lösungskurven eines solchen dynamischen Systems können jedoch oft nicht explizit bestimmt werden. Sind allerdings alle beschränkten und bezüglich der Lösungskurven invarianten Mengen bekannt, so kann daraus das qualitative Verhalten des Systems abgelesen werden. Beispiele für solche invarianten Mengen sind etwa Gleichgewichtspunkte und Verbindungsorbits zwischen Gleichgewichtspunkten.

Im Fokus dieser Arbeit steht die Entwicklung eines Verfahrens zum Nachweis der Existenz beschränkter invarianter Mengen. Wir betrachten die Fälle, in denen ein System von Differentialgleichungen als Lösungen einen glatten Fluss $\varphi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ induziert. Ein Fluss ist eine Abbildung mit $\varphi(x, 0) = x$ und $\varphi(x, s+t) = \varphi(\varphi(x, s), t)$. Für unsere Untersuchungen verwenden wir die Conley-Indextheorie. Sie geht auf Charles C. Conley, [C78], zurück und macht Aussagen über isolierte invariante Mengen. Eine invariante Menge $S = \varphi(S, \mathbb{R})$ ist isoliert, falls sie die maximale invariante Menge einer kompakten Umgebung ist, in deren Inneren sie liegt. Zu jeder isolierten invarianten Menge S gibt es ein so genanntes Indexpaar (K, L) . Dieses besteht aus einer kompakten Umgebung K von S und einer Austrittsmenge $L \subset K$ bezüglich des Flusses. Umgebung und Austrittsmenge haben gewissen Anforderungen zu genügen. Der Conley-Index der isolierten invarianten Menge S wird als die relative Homologie des Indexpaares (K, L) definiert. Umgekehrt kann man von einem Indexpaar (K, L) ausgehen und den dazugehörigen Index betrachten. Daraus können mittels der Conley-Indextheorie Informationen über die maximale invariante Menge bezüglich dieses Indexpaares abgeleitet werden: So kann oft festgestellt werden, ob die maximale invariante Menge des Indexpaares nicht leer ist oder neben bereits bekannten invarianten Mengen noch eine weitere enthält. Zentral ist also die Bestimmung geeigneter Indexpaare. Wir entwickeln ein generisches Verfahren zur Konstruktion von Indexpaaren und damit der expliziten Berechnung des Index. Durch Verwendung von Ergebnissen aus der Conley-Indextheorie kann dann in vielen Fällen die Existenz einer invarianten Menge nachgewiesen werden. Die praktische Umsetzung unserer Vorgehensweise einschließlich der numerischen Implementierung demonstrieren wir an Beispielen.

In unserem Verfahren zur Konstruktion eines Indexpaares und der Berechnung des zugehörigen Index geben wir ein Polyeder K vor und wählen als Austrittsmenge L die Punkte in ∂K , die K bezüglich des Flusses sofort verlassen. Es gibt zwei wesentliche Schritte:

1. *Triangulierung der Austrittsmenge:* Wir entwickeln eine Vorgehensweise zur Bestimmung einer Triangulierung der Austrittsmenge L , die es uns erlaubt, die relative Homologie des Polyeders und seiner Austrittsmenge zu berechnen. Die Triangulierung der Austrittsmenge erfolgt durch so genannte eingeschränkte Delaunay-Komplexe.

Mittels der zu den Delaunay-Komplexen dualen Voronoi-Diagramme und einem Satz von Leray (Satz vom Nerv) kann ein Kriterium für geeignete Triangulierungen formuliert werden. Dabei stellt sich die Frage nach der Kontrahierbarkeit eingeschränkter Voronoi-Zellen und deren Schnitte. Die Beantwortung dieser Frage machen wir durch die Bereitstellung von geeigneten Kontrahierbarkeits-Kriterien möglich. Dazu reduzieren wir einerseits die Dimension der auf Kontrahierbarkeit zu untersuchenden Mengen durch iterative Zerlegung in Seiten und Unterseiten. Andererseits gelingt es uns, durch Konstruktion eines gewissen Vektorfeldes ein Kriterium zum Ausschluss „kleiner Zusammenhangskomponenten“ zu formulieren, was für die Feststellung der Kontrahierbarkeit von großer Bedeutung ist.

2. Auflösung interner Berührungspunkte: Die Frage, wann das gewählte Polyeder K mit der Austrittsmenge L ein Indexpaar bildet, hängt eng mit der Existenz interner Berührungspunkte zusammen. Das sind die Randpunkte $x \in \partial K$ mit $\varphi(x, (-\epsilon, \epsilon)) \subset K$ für ein $\epsilon > 0$. Enthält das Polyeder K keinen internen Berührungspunkt, so ist (K, L) bereits ein Indexpaar. Der Conley-Index kann dann vermöge der zuvor bestimmten Triangulierung berechnet werden. Gibt es einen internen Berührungspunkt, so wenden wir folgende Strategie an: Wir verfolgen den Orbit des internen Berührungspunkts. Tritt er nach endlicher Zeit aus dem Polyeder aus, so können wir unter gewissen Voraussetzungen ein Indexpaar konstruieren. Durch geeignete Abänderung der zuvor berechneten Triangulierung kann dann der Index berechnet werden.

Eine andere Herangehensweise zur Konstruktion von Indexpaaren stammt von Boczko, [Boc02] (siehe auch den Übersichtsartikel von Mischaikow, [Mi02], und die Ansätze von Eidenschink, [Ei95]). Boczko geht von einem simplizialen Komplex X im Lösungsraum aus und leitet daraus Fluss-transversale Polyeder, die im Inneren von X liegen, ab. Ist ein solches Polyeder konvex, so induziert es ein Indexpaar. Ob die Menge der so erhaltenen Fluss-transversalen Polyeder nicht leer ist oder Polyeder enthält, die für die weiteren Untersuchungen geeignet sind, hängt sehr stark vom anfangs gewählten simplizialen Komplex X ab. Eine klare Vorgehensweise zur Konstruktion eines brauchbaren simplizialen Komplexes X ist unseres Wissens noch nicht bekannt. Wir verweisen dazu auch auf [Mi02, Bemerkung zu Satz 2.19]: „What remains is the question of obtaining arbitrarily good approximations of the dynamics. This depends heavily on the initial simplicial complex and remains a difficult open question in computational geometry.“

In manchen Fällen kann eine Robustheitseigenschaft des Conley-Index ausgenutzt werden. So konnten Mrozek und Zelawski die Existenz von heteroklinen Verbindungsorbits für die Lorenz-Gleichungen durch Störung zu einem einfacherem System zeigen, [MrZe97]. Allerdings erlaubt dieser Zugang unseres Wissens keine generische Verfahrensweise.

Wir betrachten in dieser Arbeit kontinuierliche dynamische Systeme. Die Conley-Indextheorie wurde jedoch auch auf den Fall diskreter dynamischer Systeme erweitert ([RobSa92], [Mr90] und [Sz95]). Unter Verwendung von Poincaré-Abbildungen konnten Mischaikow und Mrozek so chaotisches Verhalten für die Lorenz-Gleichungen nachweisen, [MiMr95]. In der Folge wurden erfolgreich Algorithmen zur Konstruktion von Indexpaaren für diskrete dynamische Systeme entwickelt ([Mr96], [Sz97], [DaJuMi03]). Für die konkrete Umsetzung wurde teils das Softwarepaket GAIO verwendet ([DeFrJu01], [DeHo97], [DeJu02]).

Besonders hervorheben möchten wir die folgenden Aspekte unseres Vorgehens:

Konstruktion von Indexpaaren durch Auflösung interner Berührungspunkte: Wir gehen von einem Polyeder K aus. Dabei lassen wir zu, dass K einen internen Berührungspunkt enthält. Unter den Voraussetzungen des Satzes 2.3.6 kann daraus ein Indexpaar konstruiert werden und der Index effektiv berechnet werden. In gewisser Hinsicht erhalten wir damit das bestmögliche Indexpaar (vergleiche Bemerkung zu Satz 2.3.6). Bezüglich der Konstruktion eines Indexpaares unterscheiden wir uns mithin grundsätzlich von dem oben erwähnten Zugang Boczkos in [Boc02].

Triangulierung der Austrittsmenge: Wie oben beschrieben bestimmen wir unter Verwendung eingeschränkter Delaunay-Komplexe und der Formulierung von Kontrahierbarkeits-Kriterien eine Triangulierung der Austrittsmenge. Eine solche Herangehensweise ist uns im Zusammenhang mit der Conley-Indextheorie bisher nicht bekannt. Edelsbrunner und Shah haben in [EdSh97] eingeschränkte Delaunay-Komplexe zur Triangulierung topologischer Räume eingeführt. Danach haben der zu triangulierende Raum und der zugeordnete eingeschränkte Delaunay-Komplex isomorphe Homologien, falls die Schnitte der entsprechenden eingeschränkten Voronoi-Zellen leer oder kontrahierbar sind. Im allgemeinen ist die Frage der Kontrahierbarkeit eines Raumes nur schwer beantwortbar, erst recht algorithmisch. Für den Fall der Triangulierung der Austrittsmenge gelingt uns das jedoch, indem wir die Dimension der zu untersuchenden Mengen durch Zerlegung in Seiten und Unterseiten (Lemmas 2.2.7, 2.2.8, 2.2.9) reduzieren. Wesentlich ist dabei die Berücksichtigung des Zusammenhangs zwischen Austrittsmenge und dem Vektorfeld, das den Fluss induziert. Damit wird die Möglichkeit einer algorithmischen Behandlung eröffnet.

Im Einzelnen ist diese Arbeit wie folgt organisiert: In Kapitel 1 geben wir eine kurze Einführung in die Conley-Indextheorie. Insbesondere gehen wir auf die Eigenschaften des Index ein, die Aussagen über die Existenz isolierter invarianter Mengen erlauben. Daran schließt sich in Kapitel 2 die Darstellung unserer Ideen und grundlegenden Sätze für das Verfahren zur Konstruktion eines Indexpaares und der Berechnung des zugehörigen Index an. Insbesondere erläutern wir die Triangulierung der Austrittsmenge und die Auflösung interner Berührungspunkte.

In den Kapiteln 3 und 4 werden die zuvor dargestellten Sätze bewiesen. Zudem erfolgt eine Konkretisierung der Ergebnisse hinsichtlich der numerischen Implementierung. Es werden Anforderungen an Schrankenfunktionen definiert, mit Hilfe derer rigorose Abschätzungen zur numerischen Überprüfung der Kontrahierbarkeits-Kriterien und Kriterien bezüglich interner Berührungspunkte gemacht werden können.

Die konkrete Umsetzung einschließlich der numerischen Implementierung demonstrieren wir in Kapitel 5 an Beispielen. Es gelingt uns dort jeweils, die Existenz heterokliner Verbindungsorbits durch Anwendung unserer Algorithmen nachzuweisen. In Anhang A fassen wir die Vorgehensweisen der Kapitel 3 und 4 als Algorithmen in Pascal-ähnlicher Notation zusammen.

Eine kurze Einführung in die Homologietheorie mit Angabe der für uns relevanten Definitionen und Sätze wird mit Anhang B gegeben.

Anhang C enthält ausgewählte Definitionen aus der algorithmischen Geometrie. Insbesondere definieren wir Voronoi-Diagramme sowie Delaunay-Komplexe und formulieren den Satz vom Nerv.

Bei meinem Betreuer, Herrn Professor Scheurle, bedanke ich mich sehr für die interessante Aufgabenstellung, seine Anregungen und Geduld. Durch die Wahl eines Themas aus dem Schnittbereich der Theorie dynamischer Systeme, algebraischer Topologie und algorithmischer Geometrie lernte ich vielfältige Teilbereiche der Mathematik kennen. Dank gilt den Mitgliedern der Forschungseinheit Dynamische Systeme, besonders auch Herrn Professor Dorfmeister und Herrn Dr.(USA) Thomas Hagen, für das freundschaftliche Arbeitsklima und anregende Diskussionen. Ganz herzlich danke ich Herrn Professor Meyberg und Herrn Dr. Peter Vachenauer für ihre Unterstützung und ihr beständiges Interesse am Fortgang der Arbeit.

München
März 2004

— DE

Kapitel 1

Hilfsmittel aus der Conley-Indextheorie

Unser Ausgangspunkt ist ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\dot{x} = f(x)$$

mit einem unendlich oft differenzierbaren Vektorfeld $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, das einen glatten Fluss induziert:

$$\varphi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Mittels der Conley-Indextheorie ist es möglich, Aussagen über gewisse invariante Mengen des Flusses zu machen. Diese Theorie geht auf Charles C. Conley zurück, der sie in der Monographie „Isolated Invariant Sets and the Morse Index“, [C78], dargestellt hat. Die Conley-Indextheorie ist eine Verallgemeinerung der Morse-Theorie für nicht degenerierte kritische Punkte (siehe etwa [M73]) auf so genannte isolierte invariante Mengen. Wir geben nun die für uns wichtigen Definitionen und Sätze wieder und verweisen für eine ausführlichere Darstellung auf Conley, [C78], und Salamon, [Sa85]. Als Einführung neuerer Datums mit sehr umfassenden Literaturangaben verweisen wir auf [Mi99] und [MiMr02].

1.1 Isolierte invariante Mengen und Indexpaare

Die Conley-Indextheorie beschränkt sich auf spezielle invariante Mengen, die isolierten invarianten Mengen:

Definition 1.1.1 (Isolierende Umgebung, isolierte invariante Menge)

Eine kompakte Menge $N \subset \mathbb{R}^n$ heißt *isolierende Umgebung*, falls die in N enthaltene maximale invariante Menge echt in N liegt:

$$\text{inv } N := \text{inv}(N, \varphi) := \{ x \in N : \varphi(x, \mathbb{R}) \subset N \} \subset \text{int } N.$$

Eine invariante Menge S heißt *isolierte invariante Menge*, falls es eine isolierende Umgebung N gibt, so dass S die maximale invariante Menge in N ist: $S = \text{inv } N$. In diesem Fall ist N eine isolierende Umgebung für S . \diamond

Eines der einfachsten Beispiele für isolierte invariante Mengen ist ein hyperbolischer Gleichgewichtspunkt (siehe Abbildung 1.1). Andererseits gibt es invariante Mengen, zu denen es keine isolierende Umgebung gibt. Das ist etwa der Fall, wenn die invariante Menge aus einem Gleichgewichtspunkt im Ursprung und dazu konzentrischen Kreisen besteht (siehe Abbildung 1.2).

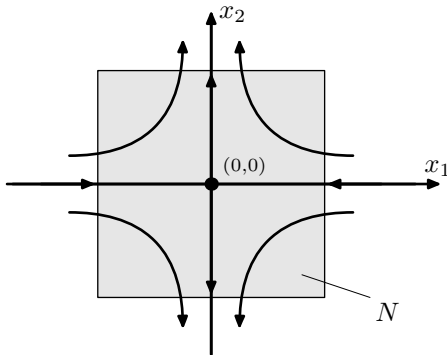


Abbildung 1.1: Der hyperbolische Gleichgewichtspunkt $(0, 0)$ (Sattelpunkt) des abgebildeten Systems ist eine isolierte invariante Menge mit N als isolierender Umgebung.

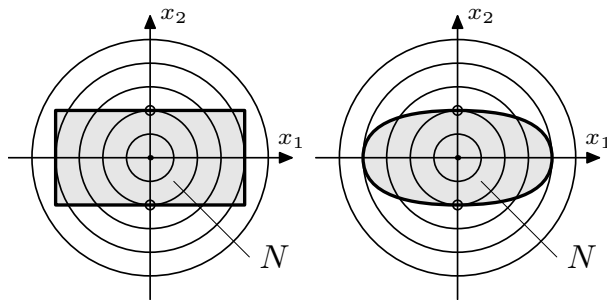


Abbildung 1.2: In diesem Beispiel ist der Ursprung ein Gleichgewichtspunkt und jeder dazu konzentrische Kreis ist eine invariante Menge. Es gilt: Der Rand einer jeden kompakten Menge N , die den Ursprung enthält, wird von der maximal invarianten Menge in N berührt. Damit gibt es keine isolierende Umgebung für den Ursprung.

Zwei Gründe sprechen für die Beschränkung auf isolierte invariante Mengen:

- **Robustheit:** Es sei N eine isolierende Umgebung. Dann folgt aus der Kompaktheit beschränkter invarianter Mengen und der von N zusammen mit der Isolierungseigenschaft $\text{inv } N \subset \text{int } N$, dass auch eine leichte Störung von N eine isolierende Umgebung ist.
- **Handhabbarkeit:** Die Untersuchung einer isolierten invarianten Menge über eine sie isolierende Umgebung fällt oft einfacher als die direkte Analyse der teils sehr komplizierten invarianten Menge. Dies wird auch in den Eigenschaften des Conley-Index deutlich (vergleiche Satz 1.2.5 und folgende).

Um Eigenschaften einer isolierten invarianten Menge aus einer isolierenden Umgebung ableiten zu können, muss noch der Verlauf des Flusses berücksichtigt werden. Dies führt auf den Begriff des Indexpaares:

Definition 1.1.2 (Indexpaar)

Es seien S eine isolierte invariante Menge und N und L kompakte Mengen mit $L \subset N \subset \mathbb{R}^n$. Dann heißt (N, L) *Indexpaar* für S , falls

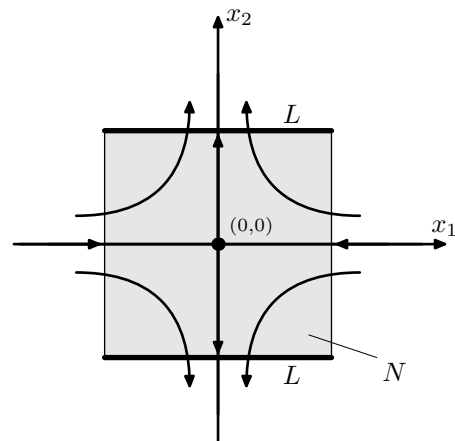
(1) $cl(N-L)$ isolierende Umgebung für S ist, d.h. S ist die maximale invariante Menge in $cl(N-L)$ und liegt echt in $cl(N-L)$.

(2) L positiv invariant in N ist, d.h.

$$\begin{aligned} x \in L, \quad \varphi(x, [0, t]) \subset N \\ \implies \quad \varphi(x, [0, t]) \subset L, \end{aligned}$$

(3) L Austrittsmenge von N ist, d.h.

$$\begin{aligned} x \in N, \quad t > 0, \quad \varphi(x, t) \notin N \\ \implies \quad \exists t_0 \in [0, t) : \varphi(x, t_0) \in L. \end{aligned}$$



Zu dem in Abbildung 1.1 skizzierten System bilden N und L wie abgebildet ein Indexpaar. Die Austrittsmenge L ist der fett gezeichnete Anteil von ∂N .

◇

1.2 Der Conley-Index und drei Eigenschaften

Jetzt kann der Conley-Index definiert werden:

Definition 1.2.1 (Conley-Index)

Es seien S eine isolierte invariante Menge und (N, L) ein Indexpaar für S . Dann ist der *Conley-Index* von S :

$$\begin{aligned} CH_*(S) &= \dots, CH_2(S), CH_1(S), CH_0(S) \\ &:= H_*(N/L, [L]) = \dots, H_2(N/L, [L]), H_1(N/L, [L]), H_0(N/L, [L]). \end{aligned}$$

◇

Bemerkung:

- N/L ist der Quotientenraum: Er besteht aus allen Punkten in N und $[L]$ (die Menge L aufgefasst als ein Punkt). Präziser: Sind $N, L \subset \mathbb{R}^n$ und $L \subset N$, so definieren wir die Äquivalenzrelation

$$x \sim y \iff x = y \text{ oder } x, y \in L$$

und die Projektion auf die Äquivalenzklassen $p(x) := [x]$. Der *Quotientenraum* ist dann die Menge $N/L := \{ [x] : x \in N \}$, die mit der *Quotiententopologie* ausgestattet ist. In dieser Topologie sind die Teilmengen von $U \subset N/L$ offen, für die das Urbild $p^{-1}(U)$ in N offen ist.

- Wir verwenden hier die singuläre Homologietheorie. Eine kurze Einführung in die Homologietheorie findet sich in Anhang B. Für den Moment genügt es, sich

die Homologie $H_*(A, B)$ zweier Räume A und B , $B \subset A$, als eine Folge abelscher Gruppen $(H_k(A, B))$, die die Topologie von A und B beschreiben, vorzustellen. Die Homologien homöomorpher Räume sind zueinander isomorph.

- In der Definition des Conley-Index einer isolierten invarianten Menge S tritt S selbst nicht explizit auf, sondern nur ein Indexpaar (N, L) für S . Damit kann der Conley-Index auch als Index isolierender Umgebungen aufgefasst werden: $CH_*(\text{inv } N) = H_*(N/L, [L])$, wobei (N, L) ein Indexpaar für die maximale invariante Menge in N sei.

Es stellt sich sofort die Frage, ob der Conley-Index wohldefiniert ist. So ist a priori nicht klar, dass es zu jeder isolierten invarianten Menge ein Indexpaar gibt. Umgekehrt kann es zu einem Gleichgewichtspunkt eine Vielzahl von Indexpaaren geben. Der folgende Satz hat daher zentrale Bedeutung:

Satz 1.2.2 (Der Conley-Index ist wohldefiniert.)

Es sei S eine isolierte invariante Menge. Dann gilt:

- (1) *Es existiert ein Indexpaar (N, L) für S .*
- (2) *Sind (N, L) und (N', L') Indexpaare für S , so ist*

$$H_*(N/L, [L]) = H_*(N'/L', [L']).$$

Für den Beweis verweisen wir auf Kapitel III, Abschnitt 4 und 5, „The Morse Index“ in [C78] und die Sätze 4.3 und 4.10 in [Sa85].

Beispiel 1.2.1: Der Conley-Index des hyperbolischen Gleichgewichtspunkts $(0, 0)$ aus dem Beispiel oben ist $CH_*(0, 0) = \dots, 0, 0, \mathbb{Z}, 0$, wie sich aus der Abbildung 1.3 (L auf einen Punkt zusammenziehen) und Beispiel B.2.3 ablesen lässt. \diamond

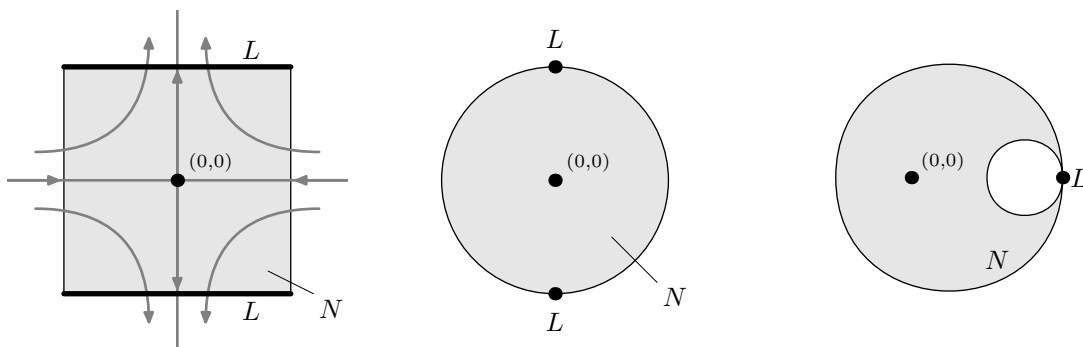


Abbildung 1.3: Der Quotientenraum N/L : Die Austrittsmenge L wird schrittweise auf einen Punkt zusammengezogen (von links nach rechts), d.h. zunächst werden die obere und untere Zusammenhangskomponente von L zu jeweils einem Punkt zusammengezogen. Schließlich werden noch diese beiden Punkte miteinander identifiziert.

Der Quotientenraum N/L kann eine sehr komplizierte Gestalt haben. Jedoch kann man zeigen, dass (N, L) so gewählt werden kann, dass eine einfachere Darstellung des Index möglich ist (siehe [MiMr02, Bemerkung 3.9]):

Satz 1.2.3

Es sei S eine isolierte invariante Menge. Dann gibt es ein Indexpaar (N, L) so, dass

$$\text{CH}_*(S) = H_*(N/L, [L]) \cong H_*(N, L).$$

Für hyperbolische Gleichgewichtspunkte kann damit sehr einfach der Index berechnet werden, was wir mit dem folgenden Satz tun:

Satz 1.2.4 (Conley-Index für hyperbolische Gleichgewichtspunkte)

Es sei x_0 ein hyperbolischer Gleichgewichtspunkt von $\dot{x} = f(x)$ mit instabiler Mannigfaltigkeit der Dimension k . Dann gilt

$$\text{CH}_l(x_0) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } l = k, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis: Nach dem Satz von Hartman-Grobman ist das System lokal um x_0 homöomorph zu $\dot{x} = Df(x_0)x$, was wiederum zu einem System $\dot{x} = Ax$ mit

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, \quad A_1 \in \mathbb{R}^{k \times k}, A_2 \in \mathbb{R}^{(n-k) \times (n-k)},$$

konjugiert ist. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass die Eigenwerte von A_1 positiven Realteil und die von A_2 negativen Realteil haben. Ist die Dimension der instabilen Mannigfaltigkeit Null, so ist (B_1, \emptyset) , B_1 die Einheitskugel im \mathbb{R}^n , ein Indexpaar. Da die Homologie eine Invariante homöomorpher Räume ist, erhalten wir

$$\text{CH}_*(x_0) = H_*(B_1, \emptyset) \cong \dots, 0, 0, 0, \mathbb{Z}.$$

Andernfalls ist $k \geq 1$. Dann ist $([-1, 1]^n, \partial([-1, 1]^k) \times [-1, 1]^{n-k})$ ein Indexpaar für den Gleichgewichtspunkt 0 von $\dot{x} = Ax$ und wir haben

$$\text{CH}_*(x_0) = H_*([-1, 1]^n, \partial([-1, 1]^k) \times [-1, 1]^{n-k}).$$

Damit ist

$$\text{CH}_l(x_0) = H_l([-1, 1]^n, \partial([-1, 1]^k) \times [-1, 1]^{n-k}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } l = k, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

□

Die mit der Conley-Indextheorie möglichen Aussagen folgen zum großen Teil aus den folgenden drei Eigenschaften:

Die erste Eigenschaft ergibt sich sehr einfach aus einer Summationseigenschaft für Homologien, so dass wir den kurzen Beweis mit angeben:

Satz 1.2.5 (Summationseigenschaft I)

Es seien S , S_1 und S_2 isolierte invariante Mengen mit $S = S_1 \cup S_2$, $S_1 \cap S_2 = \emptyset$. Dann gilt:

$$\text{CH}_*(S) = \text{CH}_*(S_1) \oplus \text{CH}_*(S_2)$$

Beweis: Sind S_1, S_2 und $S = S_1 \cup S_2$ isolierte invariante Mengen, $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, so gibt es dazu Indexpaare (N_1, L_1) , (N_2, L_2) und (N, L) , respektive. Da S_1 und S_2 disjunkt und kompakt sind, können wir auch N_1, N_2 disjunkt wählen. Mit [Ro98, Satz 5.13, S. 101] gilt dann

$$\begin{aligned} \text{CH}_*(S) &= H_*(N/L, [N]) = H_*(N_1/L_1, [L_1]) \oplus H_*(N_2/L_2, [L_2]) \\ &= \text{CH}_*(S_1) \oplus \text{CH}_*(S_2). \end{aligned}$$

□

Besonders nützlich ist die folgende Formulierung, mit der in gewissen Fällen die Existenz einer invarianten Menge bewiesen werden kann (siehe auch Beispiel 1.2.2):

Korollar 1.2.6 (Summationseigenschaft II)

Es seien S_1 und S_2 isolierte invariante Mengen mit $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ und N eine isolierende Umgebung mit $S_1, S_2 \subset \text{int } N$. Gilt

$$\text{CH}_*(\text{inv } N) \neq \text{CH}_*(S_1) \oplus \text{CH}_*(S_2),$$

so ist $\text{inv } N \neq S_1 \cup S_2$, d.h. N beinhaltet außer S_1 und S_2 noch eine weitere invariante Menge.

Beispiel zur Summationseigenschaft 1.2.2: Für das nebenstehende System sind etwa S_1 und S_2 Gleichgewichtspunkte und (N, L) ist ein Indexpaar für $\text{inv } N$. Wir haben

$$\begin{aligned} \text{CH}_*(S_1) &= \dots, 0, 0, \mathbb{Z}, 0, \\ \text{CH}_*(S_2) &= \dots, 0, 0, 0, \mathbb{Z}, \\ \text{CH}_*(\text{inv } N) &= \dots, 0, 0, 0, 0. \end{aligned}$$

Für S_1 und S_2 folgt das aus Satz 1.2.4. Für $\text{inv } N$ haben wir $\text{CH}_*(\text{inv } N) = H_*(N, L)$, weil (N, L) ein Indexpaar für $\text{inv } N$ ist und es lässt sich direkt zeigen, dass $H_*(N, L) = \dots, 0, 0, 0$ ist. Damit ist

$$\text{CH}_*(\text{inv } N) \neq \text{CH}_*(S_1) \oplus \text{CH}_*(S_2),$$

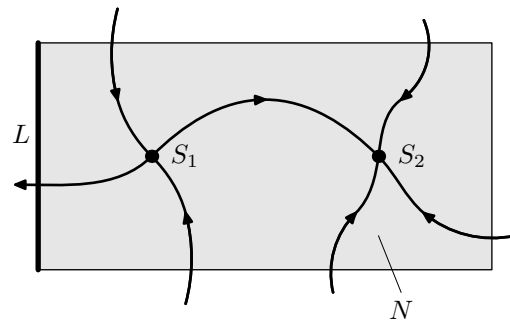
d.h. auf Grund der Summationseigenschaft gibt es außer S_1 und S_2 noch eine weitere isolierte invariante Menge: Hier den Verbindungsorbit zwischen S_1 und S_2 . ◇

Satz 1.2.7 (Wazewski-Eigenschaft)

Es sei N eine isolierende Umgebung. Dann gilt:

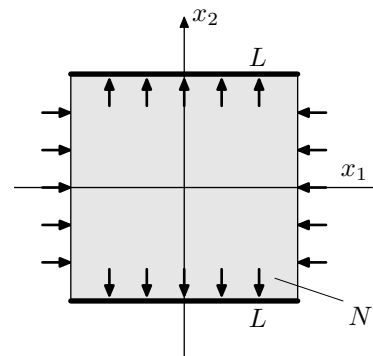
$$\text{CH}_*(\text{inv } N) \neq \dots, 0, 0, 0 \implies \text{inv } N \neq \emptyset.$$

Beweis des Kontrapositivums: Ist $S := \emptyset$, so ist (\emptyset, \emptyset) ein Indexpaar für S . Also gilt $\text{CH}_*(S) = H_*(\emptyset, \emptyset) = \dots, 0, 0, 0$. □



Beispiel zur Wazewski-Eigenschaft 1.2.3:

Der Index der maximalen invarianten Menge in N ist für den skizzierten Fluss nicht trivial: $CH_*(\text{inv } N) = \dots, 0, 0, \mathbb{Z}, 0$. Damit gibt es auf Grund der Wazewski-Eigenschaft eine isolierte invariante Menge in N , etwa einen Sattelpunkt. \diamond



Satz 1.2.8 (Störungseigenschaft)

Es seien $\varphi_\lambda: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Fluss und $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Ist N eine isolierende Umgebung für alle $\varphi_\lambda, \lambda \in I$, so ist der Conley-Index von $\text{inv}(N, \varphi_\lambda)$ konstant für alle $\lambda \in I$.

Für den Beweis verweisen wir auf Kapitel IV, Satz 1.4 in [C78] bzw. Satz 6.7 in [Sa85].

Auf Grund der Summationseigenschaft und der Wazewski-Eigenschaft reduzieren wir die Entwicklung eines Algorithmus zum Finden invarianter Mengen auf einen Algorithmus zur Bestimmung von Indexpaaren und der Berechnung des Conley-Index. Allerdings werden wir unter Umständen mit dieser Methode nicht alle invarianten Mengen finden, da – wie wir bereits gesehen haben – nicht jede beschränkte invariante Menge auch isoliert ist.

1.3 Isolierende Blöcke

Oftmals sind Indexpaare zwar leicht zu finden, aber die Berechnung des Index, also der relativen Homologie, ist teilweise schwierig. Daher betrachten wir im folgenden so genannte isolierende Blöcke, die leichter zu handhabende Indexpaare induzieren. Isolierende Blöcke gehen auf Conley und Easton, [CE71] zurück.

Definition 1.3.1 (Isolierender Block)

Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge. Dann heißen

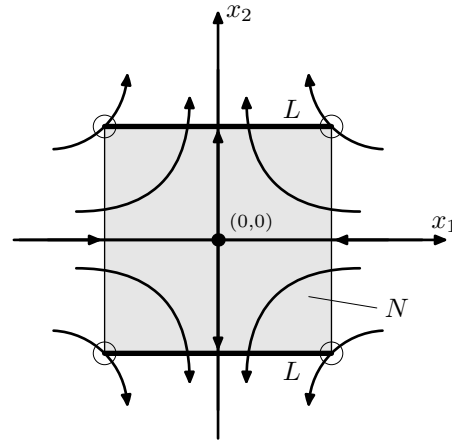
- $L^- := L^-(M) := \{ x \in \partial M : \forall t > 0 : \varphi(x, [0, t]) \not\subset M \}$ Austrittsmenge und
- $L^+ := L^+(M) := \{ x \in \partial M : \forall t > 0 : \varphi(x, [-t, 0]) \not\subset M \}$ Eintrittsmenge

jeweils von M . Gilt für jedes $x \in \partial M$

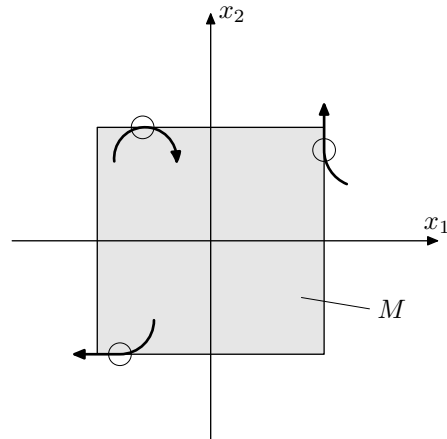
$$x \in L^- \quad \text{oder} \quad x \in L^+,$$

so heißt M isolierender Block. \diamond

Beispiel 1.3.1: Das Indexpaar (N, L) von oben liefert ein Beispiel für einen isolierenden Block, $M = N$, mit Austrittsmenge $L^- = L$. Die vier Ecken sind jeweils sowohl in L^- als auch in L^+ enthalten (vergleiche nebenstehende Abbildung). \diamond



Bemerkung: Die einzigen Punkte, die verhindern können, dass eine kompakte Menge M ein isolierender Block ist, sind interne Berührungspunkte (siehe Satz 4.2). Das sind Punkte, die aus M heraus kommend den Rand von M berühren und anschließend auch in M bleiben (siehe nebenstehende Abbildung).



Satz 1.3.2 (Isolierende Blöcke sind Indexpaare)

Es sei M ein isolierender Block. Dann ist (M, L^-) ein Indexpaar.

Beweis: Nach Voraussetzung ist M kompakt. Außerdem ist $L^- \subset \partial M$ kompakt (vergleiche Lemma 3.1.3). Die drei Bedingungen der Definition 1.1.2 sind erfüllt: Wegen $L^- \subset \partial M$ ist $M = \text{cl}(M - L^-)$. Ist $x \in \partial M$, so ist $\varphi(x, \mathbb{R}) \not\subset M$, denn $x \in L^-$ oder $x \in L^+$. Damit ist Bedingung (1) erfüllt.

Die Austrittsmenge L^- ist positiv invariant in M , da schon $\varphi(x, [0, t]) \not\subset M$ für jedes $t > 0$.

Außerdem ist die dritte Bedingung erfüllt, denn $\partial M = L^- \cup L^+$ und ein $x \in M$ kann nach Definition M nicht über L^+ verlassen. \square

Satz 1.3.3 (Existenz isolierender Blöcke)

Es sei $S \subset \mathbb{R}^n$ eine isolierte invariante Menge. Dann gibt es einen isolierenden Block M , der isolierende Umgebung für S ist, d.h. $S = \text{inv } M \subset \text{int } M$.

Für den Beweis verweisen wir auf Satz 1.5 in [CE71].

Kapitel 2

Grundlegende Ideen und die wesentlichen Sätze zur Entwicklung der Algorithmen

Es sei weiterhin $\varphi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein glatter Fluss, der von einer Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$ erzeugt wird. Unser zentrales Ziel ist die Entwicklung eines effektiven Algorithmus, mit dem wir die Existenz invarianter Mengen bezüglich φ beweisen können, unter Verwendung der Conley-Index Theorie. Wir verstehen darunter eine endliche Anzahl wohldefinierter Verarbeitungsschritte, die auf eine endliche Eingabemenge hin die Existenz einer isolierten invarianten Menge feststellen oder abbrechen, weil das Problem (für diesen Algorithmus) nicht entscheidbar ist. Auf Grund der Summationseigenschaft (Korollar 1.2.6) und der Wazewski-Eigenschaft (Satz 1.2.7) reduzieren wir diese Aufgabe auf die Konstruktion isolierender Blöcke und die Berechnung des Conley-Index. In diesem Kapitel stellen wir dazu unsere Ideen und wesentlichen Sätze vor. Den detaillierten Zugang und die Beweise erbringen wir in den Kapiteln 3 und 4.

2.1 Strategie

Haben wir ein Polyeder K gegeben, aus dem wir einen isolierenden Block herleiten wollen, so sind vor allem die folgenden beiden Aufgaben zu bewältigen:

1. **Schritt:** Bestimme eine Triangulierung \tilde{L}^- der Austrittsmenge $L^- = L^-(K)$ von K so, dass

$$H_*(K, L^-) \cong H_*(K, \tilde{L}^-).$$

2. **Schritt:** Enthält ∂K interne Berührungspunkte?

1. Nein: Dann ist K ein isolierender Block und

$$CH_*(\text{inv } K) \cong H_*(K, \tilde{L}^-).$$

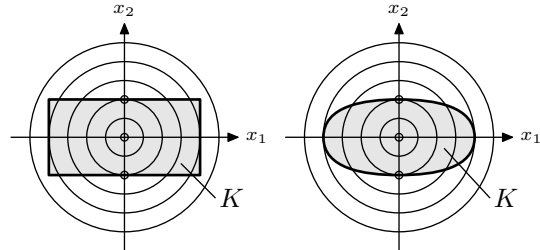
2. Ja: Löse die internen Berührungspunkte durch Konstruktion eines entsprechenden Indexpaares (N, L) auf. Bestimme ferner eine Triangulierung (\tilde{N}, \tilde{L}) für (N, L) unter Erhaltung der Homologie. Dann ist:

$$CH_*(\text{inv } K) \cong H_*(N, L) \cong H_*(\tilde{N}, \tilde{L}).$$

Es ist leicht einzusehen, dass Schritt 1 nicht immer effektiv in endlich vielen Teilschritten durchführbar ist. Das ist etwa dann der Fall, wenn L^- aus unendlich vielen Zusammenhangskomponenten besteht und somit durch eine endliche Triangulierung gar nicht erfasst werden kann.

Das Auftreten interner Berührungspunkte stellt ein Hindernis dar, das in manchen Fällen nicht erfolgreich bewältigt werden kann:

Wir haben bereits bei der Definition isolierender Umgebungen gesehen, dass gewisse invariante Mengen nicht isoliert sind (siehe auch nebenstehende Abbildung) und damit ist es auch unmöglich, dort die internen Berührungspunkte aufzulösen. Aber selbst dann, wenn die Existenz eines isolierenden Blocks durch Satz 1.3.3 gesichert ist, kann die konkrete Angabe sehr schwierig sein.



Der Rand einer jeden Menge K wird von einer invarianten Menge des Flusses $\varphi(x, t) = |x|(\cos t, \sin t)$ berührt.

Auf den ersten Schritt gehen wir im folgenden Abschnitt 2.2 näher ein, auf den zweiten Schritt in Abschnitt 2.3.

2.2 Triangulierung der Austrittsmenge L^-

Es sei also K ein Polyeder. Ist K ein isolierender Block, so haben wir $CH_*(\text{inv } K) \cong H_*(K, L^-)$. Die direkte algorithmische Berechnung von $H_*(K, L^-)$ ist jedoch im allgemeinen aus den folgenden Gründen nicht möglich oder jedenfalls sehr schwierig:

- Die Definition der Austrittsmenge

$$L^- := \{ x \in \partial M : \forall t > 0 : \varphi(x, [0, t)) \not\subset M \}$$

macht einen direkten effektiven algorithmischen Zugang unwahrscheinlich.

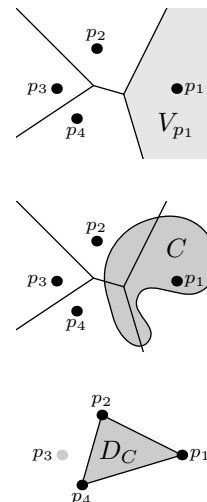
- Auch bei Berücksichtigung der Tatsache

$$x \in L^- \implies \langle f(x), n_s \rangle \leq 0 \quad \text{und} \quad \langle f(x), n_s \rangle < 0 \implies x \in \text{int } L^-$$

für $x \in \text{int } s$, $s \in \partial K$ und n_s dem nach innen zeigenden Einheitsnormalenvektor von s , ist L^- nicht ohne weiteres direkt effektiv zu beschreiben: Einzelne Zusammenhangskomponenten von L^- können beliebig klein sein. Bei vorgegebener Diskretisierung werden sie dann unter Umständen nicht erfasst.

Durch eine auf L^- eingeschränkte Delaunay-Triangulierung können wir jedoch eine Triangulierung von L^- berechnen, die für unsere Zwecke brauchbar ist.

Die Delaunay-Triangulierung für eine kompakte Menge $C \subset \mathbb{R}^n$ und eine endliche Punktmenge $P \subset \mathbb{R}^n$ ist wie folgt erklärt (vergleiche Anhang C): Zunächst betrachtet man die Voronoi-Zellen $V_p := \{x \in \mathbb{R}^n : |x - p| \leq |x - p'| \text{ für alle } p' \in P\}$ für alle $p \in P$. Diese bestehen jeweils aus den Punkten des \mathbb{R}^n , deren Abstand zu p kleiner oder gleich als zu jedem anderen $p' \in P$ ist (Abbildung rechts oben mit $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$). Anschließend schränkt man jede Voronoi-Zelle auf C ein: $V_{p,C} := V_p \cap C$. Die Delaunay-Triangulierung D_C von C wird nun durch Simplexe mit Punkten aus P als Eckpunkten gebildet: Ein Simplex $[Q]$ (Q sind die Eckpunkte, $Q \subset P$) ist in D_C genau dann, wenn der Schnitt der zugehörigen eingeschränkten Voronoi-Zellen nicht leer ist, d.h. $\bigcap_{p \in Q} V_{p,C} \neq \emptyset$ (Abbildung rechts unten mit $D_C = \{[p_1], [p_2], [p_4], [p_1, p_2], [p_2, p_4], [p_4, p_1], [p_1, p_2, p_4]\}$).



Das folgende Kriterium gibt an, ob die Delaunay-Triangulierungen D_K und D_{L^-} von K und L^- , respektive, so fein sind, dass $H_*(K, L^-)$ berechnet werden kann. Die rigorosen numerischen Hilfsmittel dazu werden in Abschnitt 3.3 präsentiert. Es sei $P \subset \mathbb{R}^n$ im folgenden eine endliche Punktmenge. (Wir werden an P noch gewisse Anforderungen zu stellen haben, vergleiche Definition 2.2.3).

Satz 2.2.1 (Triangulierung der Austrittsmenge)

Gilt für alle $Q \subset P$

$$\bigcap_{p \in Q} V_{p,L^-} \text{ ist leer oder kontrahierbar,}$$

so ist

$$H_*(K, L^-) \cong H_*(D_K, D_{L^-}).$$

Beweisidee: Mit passendem P ist $K = |D_K|$ (siehe Lemma 3.1.1) und auf L^- wird der Satz vom Nerv (Satz C.2.5) angewendet. Die Isomorphie der relativen Homologien kann dann mit dem Fünferlemma (Lemma B.3.3) gezeigt werden.

Bemerkung: Eine Menge $C \subset \mathbb{R}^n$ heißt kontrahierbar, falls sie stetig auf einen Punkt zusammengezogen werden kann (siehe Definition B.4.1).

Wir betrachten dazu das folgende

Beispiel 2.2.1: Mit $g(x_1, x_2) := x_1^2 x_2 - x_2^2 - x_2$ definieren wir das Gradientensystem $\dot{x} = \nabla g(x)$:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 2x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1^2 - 2x_2 - 1 \end{aligned} \tag{*}$$

Die Gleichgewichtspunkte sind:

$$\alpha_0 := (0, -1/2), \quad \alpha_1 := (-1, 0), \quad \alpha_2 := (1, 0).$$

Wir illustrieren die Delaunay-Triangulierung an einem isolierendem Block für α_2 : Dazu wählen wir ein Polyeder K wie abgebildet. Es sei ferner $P = \{p_0, p_1, p_2, p_3, p_4\}$ mit $p_0 = (3/2, -3/4), p_1 = (3/2, 3/4), p_2 = (1/2, 3/4), p_3 = (1/2, -3/4)$ und $p_4 = (1, -3/4)$. Wir erhalten das folgende Voronoi-Diagramm mit entsprechendem Delaunay-Komplex:

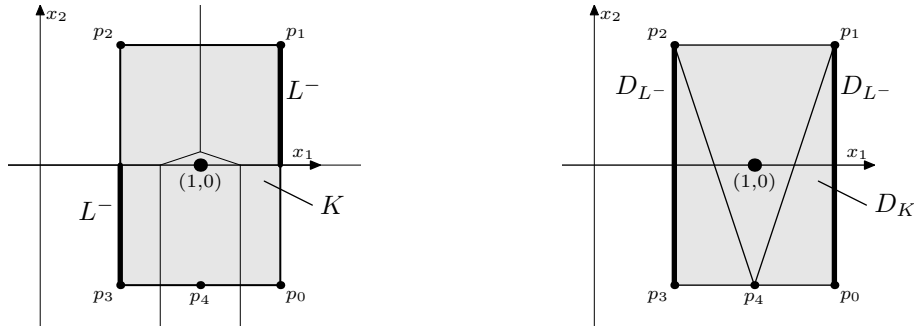


Abbildung 2.1: Links sind das zu Grunde liegende Polyeder K (schraffiert), die Austrittsmenge L^- (fett gezeichnet) und das Voronoi-Diagramm zu P abgebildet. Zu beachten ist, dass die Punkte $(1/2, 0)$ und $(3/2, 0)$ beide zu L^- gehören. Damit sind neben $V_{p_1, L^-} \neq \emptyset$ und $V_{p_3, L^-} \neq \emptyset$ auch V_{p_0, L^-} , V_{p_2, L^-} , $V_{p_0, L^-} \cap V_{p_1, L^-}$ und $V_{p_2, L^-} \cap V_{p_3, L^-}$ nicht leer. Für den Unterkomplex D_{L^-} von D_K bedeutet das: $D_{L^-} = \{[p_0], [p_1], [p_2], [p_3], [p_0, p_1], [p_2, p_3]\}$ (rechte Abbildung).

◇

Zur algorithmischen Überprüfung der Kontrahierbarkeit von $\bigcap V_{p, L^-}$ können wir die einzelnen Seitenflächen der V_{p, L^-} betrachten, wie wir gleich sehen werden. Wir verwenden folgende Notation (siehe Definition C.1.3 zur Definition der Seiten eines Polyeders):

Definition 2.2.2 (Seitenflächen und Austritt des Flusses)

Seitenflächen von $V_{p, \partial K}$: Wir definieren induktiv:

$k = 1$: Die $(n - 1)$ -Seiten von $V_{p, \partial K}$ sind:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{n-1}(p) &:= \mathcal{F}_{n-1}(p; K) \\ &:= \{ (F; n_F) : F \subset \partial K \text{ ist } (n-1)\text{-Seite von } V_p \cap K \}, \end{aligned}$$

wobei n_F jeweils der nach innen zeigende Einheitsnormalenvektor von F ist.

$k = 2, \dots, n$: Für $F' = (F'; n_{n-1}, n_{n-2}, \dots, n_{n-k+1}) \in \mathcal{F}_{n-k+1}(p)$ sind die $(n-k)$ -Seiten von F'

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{n-k}(F') &:= \mathcal{F}_{n-k}(F'; K) \\ &:= \{ (F; n_{n-1}, \dots, n_{n-k+1}, n_{n-k}) : \\ &\quad F \subset \text{cl } F' \text{ ist } (n-k)\text{-Seite von } V_p \cap K \text{ und } n_{n-k} := n_{F, F'} \}. \end{aligned}$$

Dabei ist $n_{F, F'}$ der nach innen zeigende Einheitsnormalenvektor von F , der in $\text{cl } F'$ liegt. Die Gesamtheit der $(n - k)$ -Seiten von $V_{p, \partial K}$ bezeichnen wir mit

$$\mathcal{F}_{n-k}(p) := \mathcal{F}_{n-k}(p; K) := \bigcup_{F' \in \mathcal{F}_{n-k+1}(p)} \mathcal{F}_{n-k}(F').$$

Schließlich ist

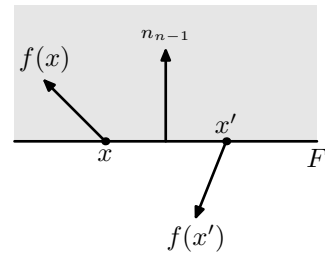
$$\mathcal{F}(p) := \mathcal{F}(p; K) := \bigcup_{k=0}^{n-1} \mathcal{F}_k(p).$$

Messung des Austritts: Den *Austritt des Flusses* aus einer $(n - k)$ -Seite

$F = (F; n_{n-1}, \dots, n_{n-k})$ messen wir mit

$$\eta_F: \text{aff}(F) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \langle f(x), n_{n-1} \rangle.$$

Dabei ist $\text{aff}(F)$ die *affine Hülle* von F . Das ist der kleinste affine Unterraum des \mathbb{R}^n , der F enthält. In der Abbildung ist $\eta_F(x) < 0$ und $\eta_F(x') > 0$.

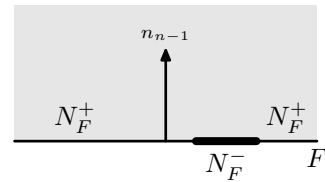


Aus- und Eintrittsmenge: Entsprechend definieren wir die *Austrittsmenge* von F als

$$N_F^- := \text{cl}\{x \in F : \eta_F(x) < 0\} \subset \text{aff}(F)$$

und die *Eintrittsmenge* von F als

$$N_F^+ := \text{cl}\{x \in F : \eta_F(x) > 0\} \subset \text{aff}(F).$$



◇

Wir benötigen folgende Voraussetzungen:

Definition 2.2.3 (Globale Voraussetzungen)

Es sei $P \subset \mathbb{R}^n$ eine endliche Menge, die den folgenden Bedingungen genügt:

1. $\text{vert } K \subset P \subset \partial K$.
2. P erfüllt die Delaunay-Eigenschaft (vergleiche Definition C.2.2).
3. *Ausschluss degenerierter Schnitte von Voronoi-Zellen I:*

Für alle $p, q \in P$ gilt:

$$p, q \text{ liegen im Abschluss einer Seite } F \text{ von } \partial K \text{ und } V_p \cap V_q \neq \emptyset \\ \iff V_p \cap V_q \cap \partial K \neq \emptyset.$$

4. *Ausschluss degenerierter Schnitte von Voronoi-Zellen II:*

Für $Q \subset P$, $p \in Q$ seien

$$\mathcal{F}_{\cap Q}(p) := \{F \in \mathcal{F}(p) : F \subset \bigcap_{p \in Q} V_{p, \partial K}\}, \\ \mathcal{F}_{\cap Q}^*(p) := \{F \in \mathcal{F}_{\cap Q}(p) : \text{Es gibt kein } F' \in \mathcal{F}_{\cap Q}(p) \text{ mit } F \subsetneq \text{cl } F'\}.$$

Für alle $Q \subset P$, $|Q| \geq 2$, und alle $p \in Q$ gilt: Ist $F \in \mathcal{F}_{\cap Q}^*(p)$, so liegt F in einer $(n - 1)$ -Seite und in keiner $(n - l)$ -Seite, $l > 1$, von K .

5. Die Menge K enthalte keine internen Berührungspunkte.

◇

Mit der Überprüfung der Voraussetzung 5 beschäftigen wir uns in Abschnitt 2.3.

Wir veranschaulichen diese Begrifflichkeiten an dem System und Polyeder K aus Beispiel 2.2.1:

Beispiel 2.2.2: Dazu betrachten wir aus dem gegebenen Polyeder und dem Voronoi-Diagramm eine Ausschnittsvergrößerung. Als 1-Seiten (das sind hier die $(n - 1)$ -Seiten) erhalten wir für p_0, p_1, p_2, p_3 jeweils zwei Seiten und für p_4 eine Seite. Exemplarisch für p_3 und p_4 sind die 1-Seiten und für p_3 auch die 0-Seiten dargestellt.

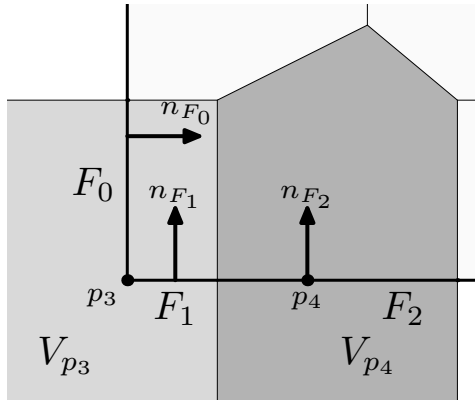


Abbildung 2.2: Vergrößerung: V_{p_3} und V_{p_4} sind hell und dunkel eingefärbt, respektive. Außerdem sind die 1-Seiten $\mathcal{F}_1(p_3) = \{(F_0; n_{F_0}), (F_1; n_{F_1})\}$ und $\mathcal{F}_1(p_4) = \{(F_2; n_{F_2})\}$ eingezeichnet. Die Einheitsnormalenvektoren wurden zur besseren Darstellbarkeit skaliert.

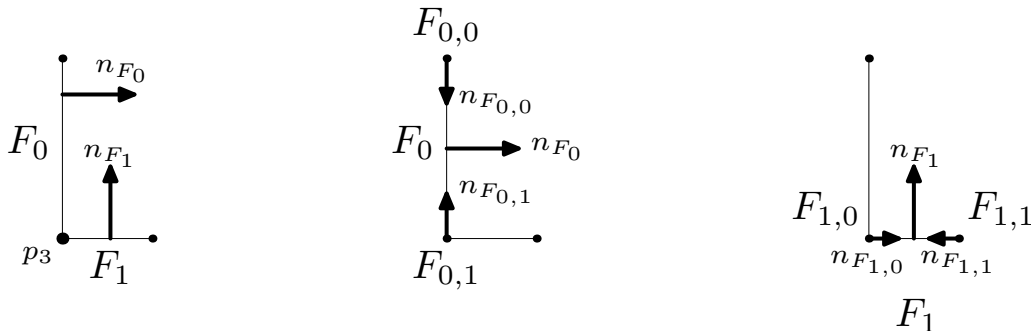


Abbildung 2.3: Vergrößerung: Die 1-Seiten (links) und die 0-Seiten (das sind die Ecken von F_0 bzw. F_1 , Abbildungen in der Mitte bzw. rechts) für p_3 . Es sind $\mathcal{F}_0(F_0) = \{(F_{0,0}; n_{F_0}, n_{F_{0,0}}), (F_{0,1}; n_{F_0}, n_{F_{0,1}})\}$ und $\mathcal{F}_0(F_1) = \{(F_{1,0}; n_{F_1}, n_{F_{1,0}}), (F_{1,1}; n_{F_1}, n_{F_{1,1}})\}$. Die Einheitsnormalenvektoren wurden zur besseren Darstellbarkeit skaliert.

◇

Mittels der Seitenflächen lassen sich $V_{p,\partial K}$ und V_{p,L^-} zerlegen (siehe Lemma 3.1.4):

$$V_{p,\partial K} = \bigcup_{F \in \mathcal{F}_{n-1}(p)} \text{cl} F, \quad V_{p,L^-} = \bigcup_{F \in \mathcal{F}_{n-1}(p)} N_F^-.$$

Das folgende Lemma erlaubt, die Frage nach der Kontrahierbarkeit von V_{p,L^-} auf die Kontrahierbarkeit der N_F^- (Austrittsmengen der Seiten) und deren Schnitte zu reduzieren – man setze dazu $C_i := N_F^-$ für $F \in \mathcal{F}_{n-1}(p)$. Dadurch können wir die Dimension der zu betrachtenden Mengen reduzieren, was von großer Bedeutung für die algorithmische Beurteilung der Kontrahierbarkeit ist.

Lemma 2.2.4 (Vereinigung kontrahierbarer Mengen)

Es seien C_1, \dots, C_k kompakte Mengen, die die beiden Kontrahierbarkeits-Eigenschaften \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 erfüllen:

(\mathcal{K}_1) C_1, \dots, C_k sind kontrahierbar.

(\mathcal{K}_2) Es gibt eine Permutation π auf $\{1, \dots, k\}$ so, dass für $1 \leq l \leq k-1$ gilt:

$$(C_{\pi(1)} \cup \dots \cup C_{\pi(l)}) \cap C_{\pi(l+1)} \text{ ist kontrahierbar.}$$

Dann ist auch die Vereinigung $\bigcup_{i=1}^k C_i$ kontrahierbar.

Bemerkung: Sind für alle $I \subset \{1, \dots, k\}$ die Schnitte $\bigcap_{i \in I} C_i$ kontrahierbar, so erfüllen die C_i die Bedingungen \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 (vergleiche Lemma 3.1.6).

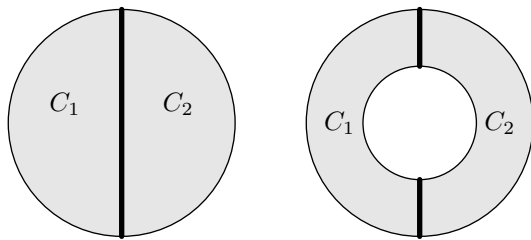


Abbildung 2.4: Spezialfall $k = 2$ in der Ebene: C_1 und C_2 sind in beiden Abbildungen kontrahierbar. Der Schnitt $C_1 \cap C_2$ ist fett gekennzeichnet. In der rechten Abbildung ist jedoch $C_1 \cap C_2$ nicht kontrahierbar und ebenso ist rechts $C_1 \cup C_2$ nicht kontrahierbar.

Um die Kontrahierbarkeit der Austrittsmenge N_F^- entscheiden zu können, ist es notwendig, „kleine Zusammenhangskomponenten“ der Austrittsmenge, die ganz in der Seite F liegen, feststellen zu können. Dies gelingt uns durch die Konstruktion eines geeigneten Vektorfelds, zu dem wir eine Lyapunov-Funktion angeben können:

Definition 2.2.5 (Konstruktion eines zu $\eta_F^{-1}(0)$ orthogonalen Vektorfelds)

Für $F = (F; n_{n-1}, \dots, n_{n-k}) \in \mathcal{F}_{n-k}(p)$ sei G_F die Projektion von $\nabla \eta_F$ auf die affine Hülle $\text{aff}(F)$ von F ($T \text{aff}(F)$ ist der Tangentialraum von $\text{aff}(F)$):

$$G_F: \text{aff}(F) \rightarrow T \text{aff}(F), \quad x \mapsto \nabla \eta_F(x) - \sum_{l=1}^k \langle \nabla \eta_F(x), n_{n-l} \rangle n_{n-l}. \quad \diamond$$

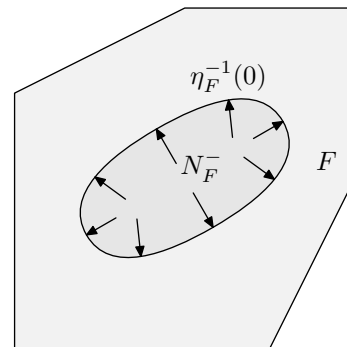
Das Vektorfeld G_F hat folgende Eigenschaften (siehe Satz 3.1.8):

1. Der von $\dot{x} = G_F(x)$ erzeugte Fluss bleibt für Startwerte in $\text{aff}(F)$ stets in $\text{aff}(F)$.
2. Für $\dot{x} = G_F(x)$ ist $-\eta_F(x)$ eine Lyapunov-Funktion.

Damit erhalten wir den folgenden Satz, der es uns erlaubt, „kleine Zusammenhangskomponenten“ der Austrittsmenge auszuschließen:

Satz 2.2.6 (Ausschluss von Zusammenhangskomponenten von N_F^\pm)

Enthält $F \in \mathcal{F}(p)$ keine Gleichgewichtspunkte von $\dot{x} = G_F(x)$, so enthält F keine (relativ zu F) kompakten Zusammenhangskomponenten von N_F^- oder N_F^+ .



In der Abbildung ist eine Seite F und eine Zusammenhangskomponente von N_F^- , die ganz in F liegt, dargestellt. Das Vektorfeld $G_F(x)$ ist orthogonal zu $\eta_F^{-1}(0)$, so dass N_F^- einen Gleichgewichtspunkt von $\dot{x} = G_F(x)$ enthält.

Uns stehen nun die Hilfsmittel für die Formulierung der Kontrahierbarkeits-Kriterien bezüglich $\bigcap V_{p,L^-}$ zur Verfügung. Jedenfalls in den Dimensionen 2 und 3 sind diese effektiv algorithmisch nachprüfbar (siehe Abschnitt 3.3). In höheren Dimensionen trifft das im allgemeinen nicht zu und unsere Ansätze müssen erweitert werden. Das soll aber nicht Gegenstand dieser Arbeit sein. Wir geben die Kriterien in drei Schritten an:

1. *Kontrahierbarkeit der Seiten F durch Reduktion auf Unterseiten und Ausschluss kleiner Zusammenhangskomponenten von $N_F^\pm \rightarrow$ Lemma 2.2.7.*
2. *Kontrahierbarkeit von V_{p,L^-} durch Reduktion auf die $(n-1)$ -Seiten unter Verwendung von 1. \rightarrow Lemma 2.2.8.*
3. *Kontrahierbarkeit von $\bigcap V_{p,L^-}$ für $p \in Q$, $Q \subset P$ mit $|Q| \geq 2$, durch Reduktion auf Seiten unter Verwendung von 1. \rightarrow Lemma 2.2.9.*

Lemma 2.2.7 (Kontrahierbarkeit der Austrittsmenge der Seiten)

Für alle $k = 1, \dots, n-1$ und alle $F' = (F'; n_{n-1}, \dots, n_k) \in \mathcal{F}_k(p)$ gelte

- (1)
 - $\{N_{F'}^- : F \in \mathcal{F}_{k-1}(F') \text{ mit } N_{F'}^- \neq \emptyset\}$ erfüllt die Kontrahierbarkeits-Eigenschaft \mathcal{K}_2 .
 - $N_{F'}^- = \text{cl } F$ für alle $F = (F; n_{n-1}, \dots, n_{k-1}) \in \mathcal{F}_{k-1}(F')$ oder
 - $N_{F'}^- = \emptyset$ für alle $F \in \mathcal{F}_{k-1}(F')$.
- (2) $\dot{x} = G_{F'}(x)$ hat auf $\text{cl } F'$ einen Gleichgewichtspunkt $\implies \eta_{F'} \neq 0$ auf $\text{cl } F'$.

Dann ist $N_{F'}^-$ für alle $\tilde{F} \in \mathcal{F}_{n-1}(p)$ kontrahierbar oder leer.

Beweisidee:

- Mit (1) und (2) folgt zunächst, dass die Austrittsmenge $N_{F'}^-$ für jede 1-Seite F' kontrahierbar ist.
- Iterativ folgt dann aus (1) und (2) mit Lemma 2.2.4 für alle Seiten die Kontrahierbarkeit.

Lemma 2.2.8 (Kontrahierbarkeit von V_{p,L^-})

Es habe $\{N_{F'}^- : F \in \mathcal{F}_{n-1}(p) \text{ mit } N_{F'}^- \neq \emptyset\}$ die Eigenschaften \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 oder sei leer.

Dann ist V_{p,L^-} kontrahierbar oder leer.

Beweisidee: Mit $C_i = N_{F'}^-$ lässt sich Lemma 2.2.4 anwenden.

Lemma 2.2.9 (Kontrahierbarkeit von $\bigcap V_{p,L^-}$)

Es sei $Q \subset P$ mit $|Q| \geq 2$, $p \in Q$ beliebig und es gelte:

- Es habe $\{N_{F'}^- : F \in \mathcal{F}_{\bigcap Q}^*(p)\}$ die Eigenschaften \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 oder
- $N_{F'}^- = \text{cl } F$ für alle $F = (F; n_{n-1}, \dots, n_k) \in \mathcal{F}_{\bigcap Q}^*(p)$ oder
- $N_{F'}^- = \emptyset$ für alle $F \in \mathcal{F}_{\bigcap Q}^*(p)$.

Dann ist $\bigcap_{p \in Q} V_{p,L^-}$ kontrahierbar oder leer.

Beweisidee: Der Beweis erfolgt unter Ausnutzung der Zerlegung von V_{p,L^-} in die Seitenflächen (Lemma 3.1.4).

Diese drei Lemmata zusammengefasst ergeben den folgenden Satz:

Satz 2.2.10 (Triangulierung von K und L^-)

Sind für alle $p \in P$ die Voraussetzungen der Lemmata 2.2.7 und 2.2.8 erfüllt und für alle $Q \subset P$ die Voraussetzungen des Lemmas 2.2.9, so gilt

$$H_*(K, L^-) \cong H_*(D_K, D_{L^-}).$$

In Dimension 2 und 3 vereinfachen sich die Kriterien und sie können wie folgt zusammengefasst werden:

Satz 2.2.11 (Kontrahierbarkeits-Kriterien, 2D)

Es sei K ein Polyeder im \mathbb{R}^2 . Die folgenden Bedingungen seien für alle $p \in P$ erfüllt:

- (1) *Für jedes $F = (F; n_1) \in \mathcal{F}_1(p)$ hat η_F auf $\text{cl}F$ höchstens eine Nullstelle.*
- (2) *Für $F, F' \in \mathcal{F}_1(p)$ ist $N_F^- \cap N_{F'}^- \neq \emptyset$ oder $N_F^- = \emptyset$ oder $N_{F'}^- = \emptyset$.*

Für alle $Q \subset P$ ist dann $\bigcap_{p \in Q} V_{p,L^-}$ kontrahierbar oder leer.

Korollar 2.2.12 (Triangulierung von K und L^- , 2D)

Es sei K ein Polyeder im \mathbb{R}^2 und die Kontrahierbarkeits-Kriterien, Satz 2.2.11, seien erfüllt. Dann gilt:

$$H_*(K, L^-) \cong H_*(D_K, D_{L^-}).$$

Satz 2.2.13 (Kontrahierbarkeits-Kriterien, 3D)

Es sei K ein Polyeder im \mathbb{R}^3 . Die folgenden Bedingungen seien für alle $p \in P$ erfüllt:

- (1) *Für jedes $F' = (F'; n_2) \in \mathcal{F}_2(p)$ gilt:*
 - (a) *Für jedes $F = (F; n_2, n_1) \in \mathcal{F}_1(F')$ ist $G_F(x) \neq 0$ auf $\text{cl}F$ oder $\eta_F \neq 0$ auf $\text{cl}F$.*
 - (b) *• Zu $\{N_F^- : F \in \mathcal{F}_1(F') \text{ mit } N_F^- \neq \emptyset\} = \{N_{F_0}^-, \dots, N_{F_k}^-\}$ gibt es eine Permutation $\pi: \{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, k\}$ so, dass für $1 \leq l \leq k-1$*

$$(N_{F_{\pi(1)}}^- \cup \dots \cup N_{F_{\pi(l)}}^-) \cap N_{F_{\pi(l+1)}}^- \neq \emptyset$$

oder

- $N_F^- = \emptyset$ für alle $F \in \mathcal{F}_1(F')$.

- (c) $G_{F'}(x) \neq 0$ auf $\text{cl}F'$ oder $\eta_{F'} \neq 0$ auf $\text{cl}F'$.

- (2) $\bigcap_{F \in \Omega} N_F^- \neq \emptyset$ für alle $\Omega \subset \{F \in \mathcal{F}_2(p) : N_F^- \neq \emptyset\}$.

(3) Für jedes $p' \in P$, $p' \neq p$ ist

$$\bigcap_{\substack{F \in \mathcal{F}^* \\ \bigcap_{\{p,p'\}}(p) \\ N_F \neq \emptyset}} N_F \neq \emptyset \quad \text{oder} \quad N_F = \emptyset \quad \text{für alle } F \in \mathcal{F}^*_{\bigcap_{\{p,p'\}}(p)}.$$

Für alle $Q \subset P$ ist dann $\bigcap_{p \in Q} V_{p,L^-}$ kontrahierbar oder leer.

Korollar 2.2.14 (Triangulierung von K und L^- , 3D)

Es sei K ein Polyeder im \mathbb{R}^3 und die Kontrahierbarkeits-Kriterien 2.2.13 seien erfüllt. Dann gilt:

$$H_*(K, L^-) \cong H_*(D_K, D_{L^-}).$$

2.3 Auflösung interner Berührungspunkte

Nun kommen wir zum zweiten Schritt: Der Auflösung interner Berührungspunkte von K – so sie denn vorhanden sind. Es ist nämlich leicht einzusehen, dass eine kompakte Menge genau dann ein isolierender Block ist, falls sie keine internen Berührungspunkte besitzt (vergleiche Definition 4.1 und Satz 4.2). Für die algorithmische Umsetzung ist es wesentlich, interne Berührungspunkte sicher und effektiv ausschließen zu können. Wir unterscheiden zwei Arten von internen Berührungspunkten (vergleiche ebenfalls Definition 4.1):

- *Fluss-tangentiale* interne Berührungspunkte, in denen der Fluss tangential zu ∂K ist.
- *Nicht Fluss-tangentiale* interne Berührungspunkte, in denen der Fluss einen Knickpunkt von ∂K berührt.

Es ist nützlich alle $(n - 1)$ -Seiten von $V_{p,K}$, $p \in P$, K ein Polyeder, in deren Rand ein Punkt $x \in \partial K$ liegt, mit

$$\mathcal{F}_{n-1}(x; K) := \mathcal{F}_{n-1}(x; K; P) := \{ F \in \mathcal{F}_{n-1}(p; K) : p \in P, x \in \text{cl } F \}$$

zu bezeichnen (vergleiche Definition 4.1).

Ist $s = [p_0, \dots, p_{n-1}] \in D_{\partial K}$ ein $(n - 1)$ -Simplex, so gibt es zu jedem der p_0, \dots, p_{n-1} genau eine $(n - 1)$ -Seite $F \in \mathcal{F}_{n-1}(p_i)$ mit $F \cap s \neq \emptyset$. Die Normalenvektoren n_F dieser Seiten sind alle gleich. Damit definieren wir $n_s := n_F$ und $\eta_s := \eta_F$.

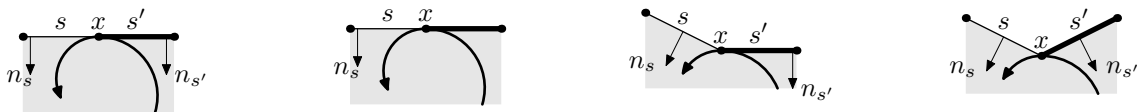


Abbildung 2.5: In den beiden linken Abbildungen liegt ein Fluss-tangentialer interner Berührungspunkt vor; in den beiden rechten ein nicht Fluss-tangentialer interner Berührungspunkt.

Korollar 2.3.1 (Ausschluss interner Berührungspunkte I)

Es sei $x \in \partial K$. Gilt für ein $(n - 1)$ -Simplex s mit $x \in s$, $s \in D_{\partial K}$

$$\eta_s(x) \neq 0$$

oder für jedes $(n - 1)$ -Simplex $s \in D_{\partial K}$ mit $x \in s$

$$\langle \dot{\varphi}(x, 0), n_s \rangle < 0,$$

so ist x kein Fluss-tangentialer interner Berührungspunkt.

Haben zusätzlich alle Simplexe s mit $x \in s$ den selben Normalenvektor n_s , so ist x kein interner Berührungspunkt.

Korollar 2.3.2 (Existenz Fluss-tangentialer interner Berührungspunkte)

Es sei $x \in \text{int } s$ für ein $(n - 1)$ -Simplex $s \in D_{\partial K}$. Ist

$$\eta_s(x) = 0 \quad \text{und} \quad \langle \dot{\varphi}(x, 0), n_s \rangle > 0,$$

so ist x ein Fluss-tangentialer interner Berührungspunkt.

Wir verwenden folgende Sprechweise: Ein $x \in \partial K$ heißt *konvexer Knickpunkt*, falls für je zwei Seiten $F_0, F_1 \in \mathcal{F}_{n-1}(x; K)$ und für beliebige $x_0 \in \text{cl } F_0$, $x_1 \in \text{cl } F_1$ gilt, dass die Verbindungsstrecke $[x_0, x_1] \subset K$ ist. Entsprechend ist $x \in \partial K$ ein *konkaver Knickpunkt*, wenn für je zwei Seiten $F_0, F_1 \in \mathcal{F}_{n-1}(x; K)$ und für beliebige $x_0 \in \text{cl } F_0$, $x_1 \in \text{cl } F_1$ gilt, dass für die offene Verbindungsstrecke $([x_0, x_1] - \{x_0, x_1\}) \cap K = \emptyset$ gilt (siehe auch Definition 4.1.5).

Satz 2.3.3 (Ausschluss interner Berührungspunkte II)

Es sei $x \in \partial K$ ein konvexer Knickpunkt. Gibt es ein $F \in \mathcal{F}_{n-1}(x; K)$ mit $\eta_F(x) \neq 0$, so ist x kein interner Berührungspunkt.

Satz 2.3.4 (Ausschluss interner Berührungspunkte III)

Es sei $x \in \partial K$. Gilt eine der folgenden Aussagen, so ist x kein interner Berührungspunkt.

- Es ist $\eta_F(x) > 0$ für alle $F \in \mathcal{F}_{n-1}(x; K)$.
- Es ist $\eta_F(x) < 0$ für alle $F \in \mathcal{F}_{n-1}(x; K)$.

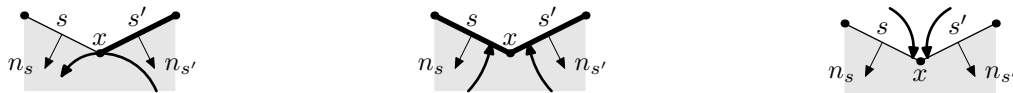


Abbildung 2.6: Links liegt ein interner Berührungspunkt vor, in der Mitte und rechts ist x kein Berührungspunkt. (Die Austrittsmenge ist wie üblich fett dargestellt.)

Zur Angabe eines Kriteriums für die Auflösbarkeit interner Berührungspunkte benötigen wir die folgenden Begriffe:

Ein $(n - 1)$ -Simplex $s \in D_{\partial K}$ heißt *Schnittsimplex*, falls $f(x)$ nirgends tangential bezüglich s ist (vergleiche Definition 4.2.1).

Für eine Menge $C \subset \mathbb{R}^n$ ist

$$\sigma_C: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sup \{ t > 0 : \varphi(x, [0, t]) \cap C = \emptyset \}$$

und σ_C heißt *Schnittzeit* (vergleiche Definition 4.2.2).

Schnittflächen, von denen Schnittsimplexe ein Spezialfall sind, und Schnittzeiten wurden von Conley und Easton, [CE71], eingeführt. Conley und Easton haben auch folgende Eigenschaften bewiesen:

Lemma 2.3.5 (Eigenschaften der Schnittzeit)

Es sei s ein Schnittsimplex. Dann sind

- (1) *der Stetigkeitsbereich I_s von $\sigma_{\text{int } s}$ offen und*
- (2) $\sigma_{\text{int } s}(x) < \infty \implies x \in I_s$.

Jetzt können wir ein Konstruktionsverfahren zur Auflösung gewisser interner Berührungspunkte angeben:

Satz 2.3.6 (Auflösung interner Berührungspunkte, 2D)

Es seien K ein Polyeder im \mathbb{R}^2 und $x_0 \in \text{int } s_0$, $s_0 \in D_{\partial K}$, ein isolierter Fluss-tangentialer interner Berührungspunkt. Außerdem seien die folgende Bedingungen erfüllt:

- (1) $\sigma_{\partial K}(x_0) < \infty$.
- (2) $x_1 := \varphi(x_0, \sigma_{\partial K}(x_0))$ ist in der selben Zusammenhangskomponente von ∂K wie x_0 .
- (3) $x_1 \in \text{int } s_1$ für ein Schnittsimplex $s_1 \in D_{\partial K}$.

Dann führen wir folgende Konstruktionssschritte durch:

1. *Es sei $R := \varphi(x_0, [0, \sigma_{\text{int } s_1}(x_0)])$.*
2. (a) *Wähle $x'_0 \in s_0$ so, dass $(x_0, x'_0) \subset L^+$. Dabei ist $(x_0, x'_0]$ die halboffene Verbindungsstrecke von x_0 und x'_0 ohne den Punkt x_0 , aber mit x'_0 .*
 (b) *Es bildet $\partial K - \{x_0, x_1\}$ eine Partition von ∂K . Mit R' bezeichnen wir den Abschluss der Komponente, die x'_0 enthält.*
 (c) *Es bezeichne B den Abschluss des von R und R' berandeten Gebiets.*
3. *Konstruktion des neuen Komplexes:*

Es seien nun

$$\begin{aligned} N &:= \text{cl}(K - (B \cap K)), \\ L &:= R \cup (L^- - (L^- \cap R')), \end{aligned}$$

und die simplizialen Komplexe

$$\begin{aligned} \tilde{B} &:= \{s \in D_K : s \text{ ist Seite eines 2-Simplex } s' \in D_K \text{ mit } s' \cap B \neq \emptyset\}, \\ \tilde{N} &:= D_K, \\ \tilde{L} &:= (D_{L^-} - \{s \in D_{L^-} : \text{int } s \cap R' \neq \emptyset\}) \cup \\ &\quad \{s \in \partial \tilde{N} : s \text{ ist Seite eines 1-Simplex } s' \in \partial \tilde{N} \text{ mit } s' \cap R' \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

Enthält N auf $\partial N - R$ keine internen Berührungspunkte und ist \tilde{B} kontrahierbar, so gilt:

- (1) (N, L) ist ein Indexpaar.
- (2) $\text{CH}_*(\text{inv } N) \cong H_*(N, L) \cong H_*(\tilde{N}, \tilde{L})$.

Bemerkung: Die Menge N ist kein isolierender Block, da der Fluss überall tangential zu R ist. Das Paar (N, L) ist aber in dem Sinne optimal, dass es zu jeder zusammenhängenden kompakten Menge M mit $N \subsetneq M \subseteq K$ und $\text{cl}(\text{int } M) = M$ ein $x \in \partial M$ und $\epsilon > 0$ mit $\varphi(x, (-\epsilon, 0) \cup (0, \epsilon)) \subset \text{int } M$ gibt. Nach Konstruktion ist nämlich N die größte Teilmenge von K mit folgender Eigenschaft: Zu jedem $x \in \partial N$ gilt für alle $\epsilon > 0$, dass $\varphi(x, (-\epsilon, 0) \cup (0, \epsilon)) \not\subset \text{int } M$.

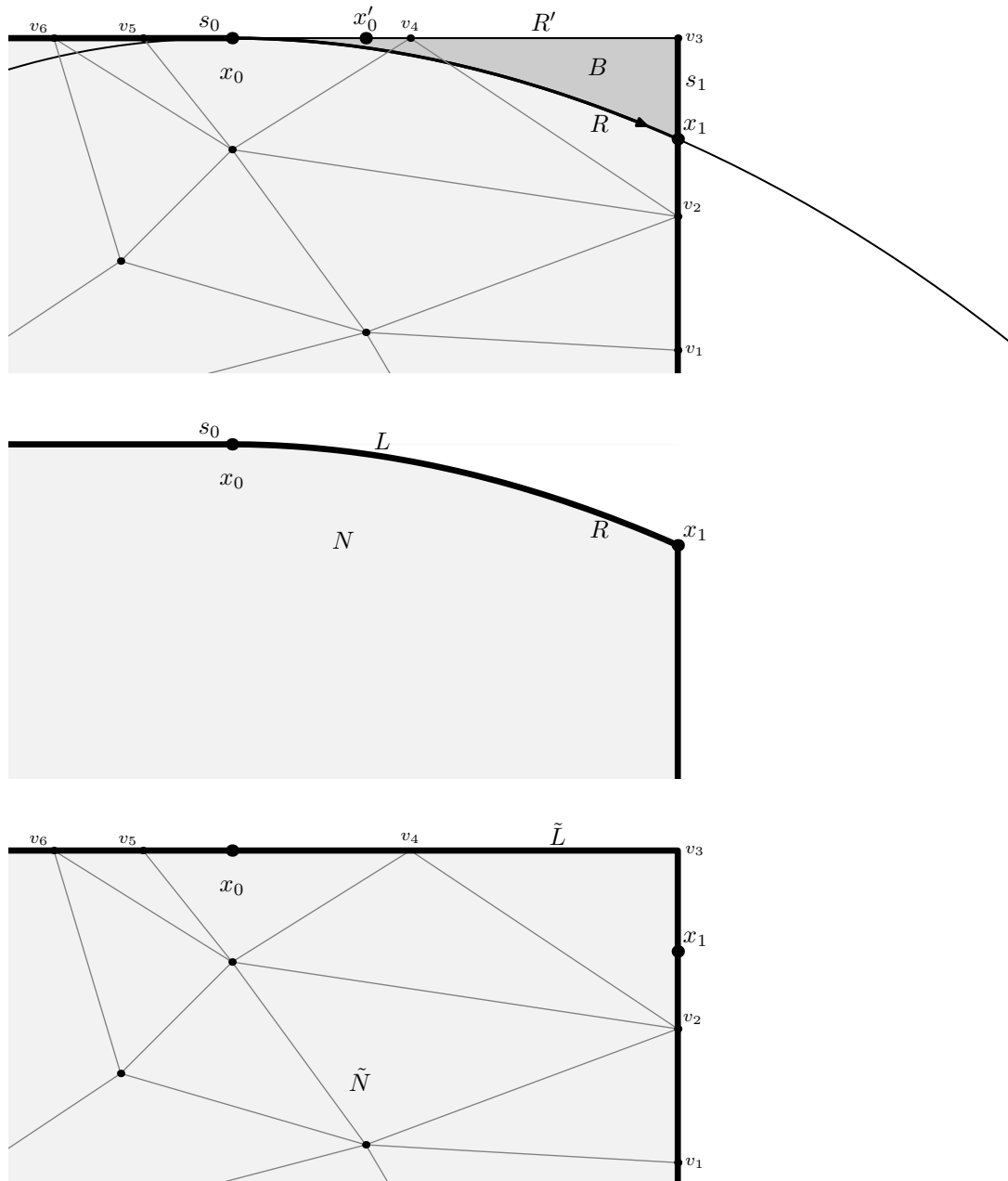


Abbildung 2.7: Auflösung des Berührungspunkts x_0 : Oben sind ein Ausschnitt aus dem Delaunay-Komplex D_K sowie ein Orbitsegment durch den internen Berührungspunkt x_0 dargestellt. Daraus lassen sich die ersten beiden Konstruktionsschritte ablesen. Im mittleren Bild ist (N, L) dargestellt und schließlich in der unteren Abbildung das Paar (\tilde{N}, \tilde{L}) .

Kapitel 3

Triangulierung der Austrittsmenge L^-

In diesem Kapitel führen wir die Beweise der in Abschnitt 2.2 angegebenen Sätze und skizzierten Schritte (Abschnitte 3.1 und 3.2). In Abschnitt 3.3 zeigen wir schließlich Kriterien zur rigorosen numerischen Überprüfung der Kontrahierbarkeits-Bedingungen.

Wie bisher ist $\varphi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein glatter Fluss, der Lösung von $\dot{x} = f(x)$ ist. Es bezeichne K ein Polyeder mit Austrittsmenge $L^- := L^-(K)$. Außerdem sei $P \subset \mathbb{R}^n$ eine endliche Punktmenge, die den globalen Voraussetzungen (Definition 2.2.3) genügt. Insbesondere habe K keine internen Berührungspunkte.

3.1 Beweise der Hilfsmittel

Für den Beweis von Satz 2.2.1 (Triangulierung der Austrittsmenge) benötigen wir folgende Lemmata:

Lemma 3.1.1 (Delaunay-Triangulierung von K)

Es gilt

$$|D_{\partial K}| = \partial K \quad \text{und} \quad |D_K| = K.$$

Beweis: Wir zeigen zunächst

$$1. |D_{\partial K}| \subset \partial K \quad \text{und} \quad 2. \partial K \subset |D_{\partial K}|.$$

Ad 1.: Es sei $s = [p_0, \dots, p_k] \in D_{\partial K}$. Sind alle $p_i \in \text{cl}F$ für die selbe $(n-1)$ -Seite F von ∂K , so liegt auch das Simplex s ganz in $\text{cl}F \subset \partial K$. Wären nicht alle p_i im Abschluss der selben Seite von ∂K , so führte das zu einem Widerspruch: O.B.d.A. wären wenigstens p_0 und p_1 nicht im Abschluss einer $(n-1)$ -Seite von ∂K enthalten. Nach der globalen Voraussetzung 3 wäre dann aber $V_{p_0} \cap V_{p_1} \cap \partial K = \emptyset$, d.h. erst recht $\bigcap_{i=0}^k V_{p_i, \partial K} = \bigcap_{i=0}^k V_{p_i} \cap \partial K = \emptyset$ und somit $s \notin D_{\partial K}$.

Ad 2.: Es sei $x \in \partial K$. Der dem Delaunay-Komplex D zu Grunde liegende Raum $|D|$ ist gleich der konvexen Hülle $\text{conv} P$ (vergleiche Definitionen C.1.1 und C.2.2) und enthält somit K wegen $\text{vert} K \subset P$ (globale Voraussetzung 1, Definition 2.2.3). Zu einem $x \in \partial K$ existiert daher genau ein k -Simplex $s = [p_0, \dots, p_k] \in D$ mit $x \in \text{int} s$. (Für $s = [p_0]$ ist $\text{int} s = s$.) Da $x \in \partial K \cap \text{int} s$ müssen auch p_0, \dots, p_k im Abschluss der selben $(n-1)$ -Seite von ∂K liegen. Wegen der globalen Voraussetzung 3 ist damit $V_{p_i} \cap V_{p_j} \cap \partial K \neq \emptyset$ für $0 \leq i, j \leq k$. Mithin ist $\bigcap_{i=0}^k V_{p_i, \partial K} = \bigcap_{i=0}^k V_{p_i} \cap \partial K \neq \emptyset$ und $s \in D_{\partial K}$.

Schließlich folgt $|D_K| = K$ aus $|D_{\partial K}| = \partial K$, denn K ist ein Polyeder und $K \subset |D| = \text{conv} P$. \square

Lemma 3.1.2 (Delaunay-Triangulierung von L^-)

Es seien D_K und D_{L^-} die Delaunay-Triangulierungen von K und L^- , respektive. Dann ist D_{L^-} ein Unterkomplex von D_K .

Beweis: Für jedes Simplex $[Q] \in D_{L^-}$ ist $\bigcap_{p \in Q} V_{p,L^-} \neq \emptyset$ (Definition des Delaunay-Komplexes, siehe Definition C.2.2). Damit gilt erst recht $\bigcap_{p \in Q} V_{p,L^-} \subset \bigcap_{p \in Q} V_{p,K} \neq \emptyset$. Außerdem sind D_{L^-} und D_K simpliziale Komplexe (Proposition C.2.4) und damit ist D_{L^-} ein Unterkomplex von D_K . \square

Lemma 3.1.3 (Kompaktheit von L^\pm)

Besitzt eine kompakte Menge M keine internen Berührungspunkte, so sind $L^- = L^-(M)$ und $L^+ = L^+(M)$ kompakt.

Beweis: *Vorbemerkung:* Aus der Kompaktheit von M und der Stetigkeit von φ folgt: Gilt für ein $x^* \in \partial M$

Aussage A1: $\forall t > 0$ ist $\varphi(x^*, [0, t]) \not\subset M$ bzw.

Aussage A2: $\forall t > 0$ ist $\varphi(x^*, [-t, 0]) \not\subset M$,

so gilt (A1) bzw. (A2) auch in einer Umgebung von x^* .

Aus der Kompaktheit von M folgt die Beschränktheit von L^- . Wäre L^- nicht abgeschlossen, so existierte eine Folge (x_n) in L^- mit $x^* := \lim x_n$ und $x^* \notin L^-$. Das bedeutete:

$$\begin{aligned} \forall t > 0 \text{ ist } \varphi(x_n, [0, t]) \not\subset M \text{ und} \\ \exists t^* > 0 \text{ mit } \varphi(x^*, [0, t^*]) \subset M. \end{aligned}$$

Da M keinen internen Berührungspunkt hat, wäre $\varphi(x^*, [-t, 0]) \not\subset M$ für alle $t > 0$. Mit der Vorbemerkung folgte, dass es eine Umgebung U von x^* gäbe, so dass für alle $x \in U$ Aussage (A2) gelten würde. Da x^* der Grenzwert von (x_n) ist, liegen fast alle x_n in U . Es sei $x_{n'}$ eines davon. Erneut folgte mit der Vorbemerkung, dass es eine Umgebung $U' \subset U$ gäbe, so dass für alle $x \in U'$ Aussage (A1) gelten würde. Damit hätten wir auf einer offenen Teilmenge von ∂K beide Aussagen (A1) und (A2). Das wäre ein Widerspruch zur Eindeutigkeit von φ .

Die gleichen Argumente zeigen mutatis mutandis die Kompaktheit von L^+ . \square

Satz 2.2.1, S. 11. (Triangulierung der Austrittsmenge)

Gilt für alle $Q \subset P$

$$\bigcap_{p \in Q} V_{p,L^-} \text{ ist leer oder kontrahierbar,}$$

so ist

$$H_*(K, L^-) \cong H_*(D_K, D_{L^-}).$$

Beweis: Weil L^- ein Unterraum von K und D_{L^-} ein Unterkomplex von D_K ist (Lemma 3.1.2), folgt mit Satz B.3.2, dass es die beiden folgenden exakten Sequenzen gibt:

$$\cdots \longrightarrow H_n(L^-) \longrightarrow H_n(K) \longrightarrow H_n(K, L^-) \longrightarrow H_{n-1}(L^-) \longrightarrow H_{n-1}(K) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow H_n(D_{L^-}) \longrightarrow H_n(D_K) \longrightarrow H_n(D_K, D_{L^-}) \longrightarrow H_{n-1}(D_{L^-}) \longrightarrow H_{n-1}(D_K) \longrightarrow \cdots$$

Da K keine internen Berührungspunkte besitzt, ist L^- kompakt (Lemma 3.1.3). Nach Proposition C.2.4 sind somit die Voronoi-Diagramme V_K und V_{L^-} endliche abgeschlossene

Überdeckungen von K und L^- , respektive, und D_K bzw. D_{L^-} geometrische Realisierungen von \mathcal{V}_K bzw. \mathcal{V}_{L^-} . Für jede Teilmenge $Q \subset P$ ist nach Voraussetzung $\bigcap_{p \in Q} V_{p,L^-}$ leer oder kontrahierbar. Mit dem Satz vom Nerv (Satz C.2.5) folgt jetzt, dass die Homologien isomorph sind: $H_*(L^-) \cong H_*(D_{L^-})$. Lemma 3.1.1 impliziert, dass $H_*(K) = H_*(D_K)$. Für die beiden exakten Sequenzen haben wir also:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_n(L^-) & \longrightarrow & H_n(K) & \longrightarrow & H_n(K, L^-) & \longrightarrow & H_{n-1}(L^-) & \longrightarrow & H_{n-1}(K) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \uparrow \cong & & \uparrow \cong & & \downarrow & & \uparrow \cong & & \uparrow \cong & & \\ \cdots & \longrightarrow & H_n(D_{L^-}) & \longrightarrow & H_n(D_K) & \longrightarrow & H_n(D_K, D_{L^-}) & \longrightarrow & H_{n-1}(D_{L^-}) & \longrightarrow & H_{n-1}(D_K) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Mit dem Fünferlemma (Lemma B.3.3) folgt nun, dass $H_n(K, L^-) \cong H_n(D_K, D_{L^-})$ für alle $n \geq 0$. \square

Lemma 3.1.4 (Zerlegung von $V_{p,\partial K}$ und V_{p,L^-})

Für $p \in P$ gilt:

$$(1) \quad V_{p,\partial K} = \bigcup_{F \in \mathcal{F}_{n-1}(p)} \text{cl} F, \quad (2) \quad V_{p,L^-} = \bigcup_{F \in \mathcal{F}_{n-1}(p)} N_F^-.$$

Beweis: Ad (1): Nach Definition von $\mathcal{F}_{n-1}(p)$ ist $F \subset V_{p,\partial K}$ für jedes $F \in \mathcal{F}_{n-1}(p)$ und aus der Kompaktheit von $V_{p,\partial K}$ folgt damit $\text{cl} F \subset V_{p,\partial K}$. Umgekehrt gibt es zu jedem $x \in V_{p,\partial K}$ eine Seite $F' \in \mathcal{F}(p)$ mit $x \in F'$, denn jedes $x \in V_{p,\partial K}$ ist in einer Seite des Polyeders $V_{p,K}$ enthalten (vergleiche auch Definition C.1.3). Ist F' eine k -Seite von $V_{p,\partial K}$ mit $k < n-1$, so liegt F' im Abschluss wenigstens einer $(n-1)$ -Seite. Ad (2): Es sei $x \in V_{p,L^-} \subset V_{p,\partial K}$. Es gibt dann ein $F \in \mathcal{F}_{n-1}(p)$ mit $x \in \text{cl} F$ und $\eta_F(x) \leq 0$. Ist $\eta_F(x) < 0$, so ist offenbar $x \in N_F^-$. Falls $\eta_F(x) = 0$ ist, sei $U \subset \text{cl} F$ eine Umgebung von x . Da $x \in L^-$ ist, enthält eine jede Umgebung $U' \subset U$ von x Punkte x' mit $\eta(x') < 0$, d.h. $x \in N_F^-$. Nun sei umgekehrt $x \in N_F^-$ für ein $F \in \mathcal{F}_{n-1}(p)$. Da K keine internen Berührungspunkte enthält, ist $x \in L^-$ oder $x \in L^+$. Wäre nun $x \notin L^-$, so wäre $x \in \text{int} L^+$ (Kompaktheit von L^+ und L^- , Lemma 3.1.3). Daraus folgte aber $\eta_F(x) > 0$, also $x \notin N_F^-$. \square

Lemma 3.1.5 (Homotopietyp der Vereinigung zweier Mengen)

Es seien $C \subset \mathbb{R}^n$ eine zusammenhängende Menge sowie $C' \subset \mathbb{R}^n$ und $C \cap C'$ kontrahierbar. Dann besitzen C und $C \cup C'$ den selben Homotopietyp.

Beweis: Da C' und $C \cap C'$ beide kontrahierbar sind und $C \cap C' \subset C'$, ist $C \cap C'$ ein strenges Deformationsretrakt von C' (vergleiche [StZi94, Satz 2.4.4, S. 62]), d.h.: Es gibt eine Homotopie $h: C' \times [0, 1] \rightarrow C'$ mit $h(x, 0) = \text{Id}_{C'}$ und $h(x, 1) \in C \cap C'$ für $x \in C'$ sowie $h(x, t) = x$ für $x \in C \cap C'$. Das gibt uns eine Homotopieäquivalenz

$$g: C \cup C' \rightarrow C, \quad x \mapsto \begin{cases} h(x, 1) & \text{für } x \in C', \\ x & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zum Nachweis sei $\tilde{g}: C \rightarrow C \cup C'$, $x \mapsto x$. Es ist $g \circ \tilde{g} = \text{Id}_C \simeq \text{Id}_C$. Für die Homotopie

$$H: C \cup C' \times [0, 1] \rightarrow C \cup C', \quad (x, t) \mapsto \begin{cases} h(x, t) & \text{für } x \in C', \\ x & \text{sonst.} \end{cases}$$

gilt $H(x, 0) = \text{Id}_{C \cup C'}$ und $H(x, 1) = \tilde{g} \circ g(x)$. Es folgt $\tilde{g} \circ g \simeq \text{Id}_{C \cup C'}$. Damit ist g eine Homotopieäquivalenz, und C hat den selben Homotopietyp wie $C \cup C'$. \square

Lemma 2.2.4, S. 15. (Vereinigung kontrahierbarer Mengen)

Es seien C_1, \dots, C_k kompakte Mengen, die die beiden Kontrahierbarkeits-Eigenschaften \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 erfüllen:

(\mathcal{K}_1) C_1, \dots, C_k sind kontrahierbar.

(\mathcal{K}_2) Es gibt eine Permutation π auf $\{1, \dots, k\}$ so, dass für $1 \leq l \leq k-1$ gilt:

$$(C_{\pi(1)} \cup \dots \cup C_{\pi(l)}) \cap C_{\pi(l+1)} \text{ ist kontrahierbar.}$$

Dann ist auch die Vereinigung $\bigcup_{i=1}^k C_i$ kontrahierbar.

Beweis: Wir beweisen die Aussage durch Induktion nach k : Für $k=1$ ist alles klar. $k \rightarrow k+1$: Die Aussage sei für k wahr. Haben nun C_1, \dots, C_k, C_{k+1} die Eigenschaften \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 , so gilt: Es gibt nach Voraussetzung eine Permutation π so, dass $(C_{\pi(1)} \cup \dots \cup C_{\pi(k)}) \cap C_{\pi(k+1)}$ kontrahierbar ist. Nach Induktionsvoraussetzung ist $\bigcup_{i=1}^k C_{\pi(i)}$ kontrahierbar und nach Voraussetzung C_{k+1} . Mit Lemma 3.1.5 folgt jetzt, dass

$$(C_{\pi(1)} \cup \dots \cup C_{\pi(k)}) \cup C_{\pi(k+1)} = \bigcup_{i=1}^{k+1} C_i$$

kontrahierbar ist. □

Manchmal ist es einfacher, die folgende stärkere Bedingung (vergleiche Abbildung) anstatt \mathcal{K}_2 nachzuprüfen:

Lemma 3.1.6

Gilt für kompakte Mengen C_1, \dots, C_k und für alle $I \subset \{1, \dots, k\}$

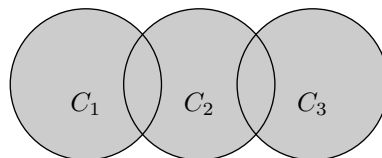
$$\bigcap_{i \in I} C_i \text{ ist kontrahierbar,}$$

so haben die C_i die Kontrahierbarkeits-Eigenschaften \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 .

Beweis: Mit $I = \{i\}$ folgt die Eigenschaft \mathcal{K}_1 . Für jedes $l \in \{1, \dots, k-1\}$ sind nach Voraussetzung $C_1 \cap C_{l+1}, \dots, C_l \cap C_{l+1}$ kontrahierbar. Nun folgt iterativ mit Lemma 3.1.5 und der Voraussetzung, dass

$$(C_1 \cap C_{l+1}) \cup \dots \cup (C_l \cap C_{l+1}) = (C_1 \cup \dots \cup C_l) \cap C_{l+1}$$

kontrahierbar ist. □



Es ist $C_1 \cap C_2 \cap C_3 = \emptyset$ aber mit $\pi = \text{Id}$ erfüllen C_1, C_2, C_3 die Eigenschaft \mathcal{K}_2 .

Wir kommen zur Untersuchung des Vektorfeldes (vergleiche Definition 2.2.5)

$$G_F(x) = \nabla \eta_F(x) - \sum_{l=1}^k \langle \nabla \eta_F(x), n_{n-l} \rangle n_{n-l}.$$

Zur Vorbereitung benötigen wir das folgende Lemma:

Lemma 3.1.7

Es sei $\mathbf{F} = (F; \mathbf{n}_{n-1}, \dots, \mathbf{n}_{n-k}) \in \mathcal{F}_{n-k}(p)$. Dann gilt

- (1) $\text{aff}(\mathbf{F}) = v + T \text{aff}(\mathbf{F})$, $v \in \text{aff}(\mathbf{F})$ ist ein affiner k -dimensionaler Unterraum des \mathbb{R}^n .
- (2) Ist (v_1, \dots, v_{n-k}) eine Orthonormalbasis von $T \text{aff}(\mathbf{F})$, so ist

$$(v_1, \dots, v_{n-k}, \mathbf{n}_{n-1}, \dots, \mathbf{n}_{n-k})$$

eine Orthonormalbasis des \mathbb{R}^n .

Beweis: Die erste Aussage folgt sofort aus den Definitionen. Zur zweiten Aussage: Nach Konstruktion sind alle \mathbf{n}_{n-l} paarweise zueinander orthogonal. Ebenfalls nach Konstruktion liegen die \mathbf{n}_{n-l} nicht in $T \text{aff}(\mathbf{F})$. Also ist $(v_1, \dots, v_{n-k}, \mathbf{n}_{n-1}, \dots, \mathbf{n}_{n-k})$ ein Orthonormalsystem ist, das aus n Vektoren besteht. \square

Satz 3.1.8 (Lyapunov-Funktion für $\dot{x} = G_{\mathbf{F}}(x)$)

Zu $\mathbf{F} = (F; \mathbf{n}_{n-1}, \dots, \mathbf{n}_{n-k}) \in \mathcal{F}_{n-k}(p)$, $1 \leq k \leq n$ betrachten wir den von $\dot{x} = G_{\mathbf{F}}(x)$ erzeugten Fluss $(x, t) \mapsto x \cdot t$. Es gilt

- (1) $G_{\mathbf{F}}(x)$ ist ein Vektorfeld auf $\text{aff}(\mathbf{F})$, d.h. $G_{\mathbf{F}}: \text{aff}(\mathbf{F}) \rightarrow T \text{aff}(\mathbf{F})$.

Der von $\dot{x} = G_{\mathbf{F}}(x)$ erzeugte Fluss bleibt somit für Startwerte in $\text{aff}(\mathbf{F})$ stets in $\text{aff}(\mathbf{F})$.

- (2) Durch $-\eta_{\mathbf{F}}(x)$ ist eine Lyapunov-Funktion bezüglich $(x, t) \mapsto x \cdot t$ gegeben, d.h. für $x \in \text{aff}(\mathbf{F})$ ist $-\dot{\eta}_{\mathbf{F}}(x) \leq 0$ und $-\dot{\eta}_{\mathbf{F}}(x) = 0$ genau dann, wenn x ein Gleichgewichtspunkt von $\dot{x} = G_{\mathbf{F}}(x)$ ist.

Damit ist $-\eta_{\mathbf{F}}(x \cdot t) < -\eta_{\mathbf{F}}(x)$, falls x kein Gleichgewichtspunkt ist und $t > 0$.

Beweis: Ad (1): Wegen Lemma 3.1.7 genügt es zu zeigen, dass $G_{\mathbf{F}}(x) \perp \mathbf{n}_{n-i}$ für $1 \leq i \leq k$. Dies folgt aus

$$\begin{aligned} \langle G_{\mathbf{F}}(x), \mathbf{n}_{n-i} \rangle &= \langle \nabla \eta_{\mathbf{F}}(x), \mathbf{n}_{n-i} \rangle - \sum_{l=1}^k \langle \nabla \eta_{\mathbf{F}}(x), \mathbf{n}_{n-l} \rangle \langle \mathbf{n}_{n-l}, \mathbf{n}_{n-i} \rangle \\ &= \langle \nabla \eta_{\mathbf{F}}(x), \mathbf{n}_{n-i} \rangle - \langle \nabla \eta_{\mathbf{F}}(x), \mathbf{n}_{n-i} \rangle = 0. \end{aligned}$$

Zum Beweis der zweiten Aussage:

Vorbetrachtung: Für eine Orthonormalbasis (b_1, \dots, b_n) des \mathbb{R}^n und $a \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$a = \sum_{i=1}^n \langle a, b_i \rangle b_i \quad \text{und damit} \quad \langle a, a \rangle = \sum_{i=1}^n \langle a, b_i \rangle^2.$$

Jetzt erhalten wir

$$\begin{aligned} -\dot{\eta}_{\mathbf{F}}(x) &= \langle -\nabla \eta_{\mathbf{F}}(x), G_{\mathbf{F}}(x) \rangle = \langle -\nabla \eta_{\mathbf{F}}(x), \nabla \eta_{\mathbf{F}}(x) \rangle + \sum_{l=1}^k \langle \nabla \eta_{\mathbf{F}}(x), \mathbf{n}_{n-l} \rangle^2 \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

auf Grund der Vorbetrachtung und Lemma 3.1.7. Dabei ist $-\dot{\eta}_{\mathbf{F}}(x) = 0$ dann und nur dann, wenn $-\nabla \eta_{\mathbf{F}}(x) = 0$ oder $-\nabla \eta_{\mathbf{F}}(x)$ eine Linearkombination der \mathbf{n}_{n-l} ist. Das sind genau die Gleichgewichtspunkte von $\dot{x} = G_{\mathbf{F}}(x)$.

Ist x kein Gleichgewichtspunkt, so folgt $-\dot{\eta}_F(x \cdot \vartheta) \neq 0$ für jedes $\vartheta \in \mathbb{R}$ und für $t > 0$ ist

$$-\eta_F(x \cdot t) - (-\eta_F(x)) = -\dot{\eta}_F(x \cdot \vartheta^*)t < 0$$

für ein $\vartheta^* \in \mathbb{R}$, d.h. $-\eta_F(x \cdot t) < -\eta_F(x)$. \square

Satz 2.2.6, S. 15. (Ausschluss von Zusammenhangskomponenten von N_F^\pm)
Enthält $F \in \mathcal{F}(p)$ keine Gleichgewichtspunkte von $\dot{x} = G_F(x)$, so enthält F keine (relativ zu F) kompakten Zusammenhangskomponenten von N_F^- oder N_F^+ .

Wir zeigen das Kontrapositivum:

Korollar 3.1.9 (Existenz von Gleichgewichtspunkten)

Enthält $F \in \mathcal{F}(p)$ eine relativ zu F kompakte Zusammenhangskomponente C von N_F^- oder N_F^+ , so enthält C einen Gleichgewichtspunkt von $\dot{x} = G_F(x)$.

Beweis: Aus der Beschränktheit von C und der Definition von N_F^\pm folgt $\eta_F \equiv 0$ auf ∂C . Zunächst nehmen wir an, dass es ein $x \in C$ mit $-\eta_F(x) < 0$ gibt. Dann wird das Minimum $m := \min\{-\eta_F(x) : x \in C\} < 0$ etwa in $\bar{x} \in \text{int } C$ angenommen (\bar{x} kann nicht auf ∂C liegen, denn dort ist $\eta_F \equiv 0$). Damit ist \bar{x} ein Gleichgewichtspunkt. Andernfalls führte $-\eta_F(\bar{x} \cdot t) < -\eta_F(\bar{x}) = m$ für $t > 0$ zu einem Widerspruch (vergleiche Satz 3.1.8).

Gibt es ein $x \in C$ mit $-\eta_F(x) > 0$, so zeigen die vorigen Argumente mutatis mutandis die Existenz eines Gleichgewichtspunkts.

Das beweist die Aussage, denn $\eta_F \equiv 0$ auf C kann auf Grund der Definition von N_F^\pm ausgeschlossen werden. \square

3.2 Kontrahierbarkeits-Bedingungen

Wir beweisen nun die Kontrahierbarkeits-Bedingungen Lemma 2.2.7, Lemma 2.2.8, Lemma 2.2.9 sowie die Spezialisierungen auf den \mathbb{R}^2 (Satz 2.2.11 und Satz 2.2.12) und \mathbb{R}^3 (Satz 2.2.13 und Satz 2.2.14).

Lemma 3.2.1 (Kontrahierbarkeit der Austrittsmenge einer Seite)

Für $p \in P$, $F' = (F'; n_{n-1}, \dots, n_k) \in \mathcal{F}_k(p)$, $1 \leq k \leq n-1$, gelte:

- (1)
 - $\{N_F^- : F \in \mathcal{F}_{k-1}(F') \text{ mit } N_F^- \neq \emptyset\}$ habe die Kontrahierbarkeits-Eigenschaften \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 oder
 - $N_F^- = \text{cl } F$ für alle $F = (F; n_{n-1}, \dots, n_{k-1}) \in \mathcal{F}_{k-1}(F')$ oder
 - $N_F^- = \emptyset$ für alle $F \in \mathcal{F}_{k-1}(F')$.

- (2) $\dot{x} = G_{F'}(x)$ hat auf $\text{cl } F'$ einen Gleichgewichtspunkt $\implies \eta_{F'} \neq 0$ auf $\text{cl } F'$.

Dann ist $N_{F'}^-$ kontrahierbar oder leer.

Beweis: Fall 1, $N_F^- = \text{cl } F$ für alle $F \in \mathcal{F}_{k-1}(F')$: Dann ist $N_{F'}^- = \text{cl } F'$, denn andernfalls gäbe es in F' eine kompakte Zusammenhangskomponente von $N_{F'}^+$. Damit enthielte F' einen Gleichgewichtspunkt von $\dot{x} = G_{F'}(x)$ (vergleiche Korollar 3.1.9) und ein x mit $\eta_{F'}(x) = 0$. Das wäre ein Widerspruch zu Bedingung (2). Also ist $N_{F'}^- = \text{cl } F'$ und somit kontrahierbar.

Fall 2, $N_{\bar{F}}^- = \emptyset$ für alle $F \in \mathcal{F}_{k-1}(F')$: Analog zu Fall 1 folgt, dass $N_{\bar{F}'}^- = \emptyset$. Sonst gäbe es eine kompakte Zusammenhangskomponente von $N_{\bar{F}'}^-$ und somit einen Gleichgewichtspunkt von $\dot{x} = G_{F'}(x)$ in $\text{cl } F'$ sowie ein $x \in \text{cl } F'$ mit $\eta_{F'}(x) = 0$.

Fall 3: Liegt weder Fall 1 noch Fall 2 vor, so folgt mit Bedingung (1) und dem Lemma 2.2.4, dass

$$\partial F' \cap N_{\bar{F}'}^- = \bigcup_{F \in \mathcal{F}_{k-1}(F')} N_{\bar{F}}^-$$

kontrahierbar ist. Daher gibt es eine Zusammenhangskomponente C von $N_{\bar{F}'}^-$, die den Schnitt $\partial F' \cap N_{\bar{F}'}^-$ enthält. Wäre C nicht kontrahierbar, so gäbe es eine geschlossene Kurve γ in C , die in C nicht auf einen Punkt zusammenziehbar wäre. Das von γ berandete Gebiet enthielte Punkte x mit $\eta_{F'}(x) > 0$, d.h. eine kompakte Zusammenhangskomponente von $N_{\bar{F}'}^+$ und somit auch einen Gleichgewichtspunkt von $\dot{x} = G_{F'}(x)$ (Korollar 3.1.9). Weil es dann auch Punkte x mit $\eta_{F'}(x) = 0$ gäbe, führte das zu einem Widerspruch (Bedingung (2)). Die Zusammenhangskomponente $C \subset N_{\bar{F}'}^-$ ist damit kontrahierbar. Gäbe es außer C noch weitere Zusammenhangskomponenten von $N_{\bar{F}'}^-$, so wären diese kompakt und enthielten ebenfalls einen Gleichgewichtspunkt (Korollar 3.1.9): Widerspruch. Also ist $N_{\bar{F}'}^- = C$ und kontrahierbar. \square

Lemma 2.2.7, S. 16. (Kontrahierbarkeit der Austrittsmenge der Seiten)

Für alle $k = 1, \dots, n-1$ und alle $F' = (F'; n_{n-1}, \dots, n_k) \in \mathcal{F}_k(p)$ gelte

- (1) • $\{N_{\bar{F}}^- : F \in \mathcal{F}_{k-1}(F') \text{ mit } N_{\bar{F}}^- \neq \emptyset\}$ erfüllt die Kontrahierbarkeits-Eigenschaft \mathcal{K}_2 .
 • $N_{\bar{F}}^- = \text{cl } F$ für alle $F = (F; n_{n-1}, \dots, n_{k-1}) \in \mathcal{F}_{k-1}(F')$ oder
 • $N_{\bar{F}}^- = \emptyset$ für alle $F \in \mathcal{F}_{k-1}(F')$.

- (2) $\dot{x} = G_{F'}(x)$ hat auf $\text{cl } F'$ einen Gleichgewichtspunkt $\implies \eta_{F'} \neq 0$ auf $\text{cl } F'$.

Dann ist $N_{\bar{F}}^-$ für alle $\tilde{F} \in \mathcal{F}_{n-1}(p)$ kontrahierbar oder leer.

Beweis: Wir beweisen induktiv für $0 \leq k \leq n-1$:

$$\text{Für jedes } F' \in \mathcal{F}_k(p) \text{ ist } N_{\bar{F}'}^- \text{ kontrahierbar oder leer.} \quad (*)$$

$k = 0$: Jede 0-Seite ist ein Punkt und damit gilt (*) für $k = 0$ ganz offenbar.

$k-1 \rightarrow k$: Es gelte (*) für $k-1$ und es sei $F' \in \mathcal{F}_k(p)$. Damit haben die Austrittsmengen $N_{\bar{F}}^-$ für $F \in \mathcal{F}_{k-1}(F')$ mit $N_{\bar{F}}^- \neq \emptyset$, die Kontrahierbarkeits-Eigenschaft \mathcal{K}_1 . Aus den Voraussetzungen (1) und (2) sowie aus (*) folgt mit Lemma 3.2.1 die Aussage. \square

Lemma 2.2.8, S. 16. (Kontrahierbarkeit von V_{p,L^-})

Es habe $\{N_{\bar{F}}^- : F \in \mathcal{F}_{n-1}(p) \text{ mit } N_{\bar{F}}^- \neq \emptyset\}$ die Eigenschaften \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 oder sei leer.

Dann ist V_{p,L^-} kontrahierbar oder leer.

Beweis: Sind alle $N_{\bar{F}}^-$ leer, $F \in \mathcal{F}_{n-1}(p)$, so ist V_{p,L^-} wegen der Zerlegungseigenschaft (Lemma 3.1.4) leer. Andernfalls gilt: Mit Lemma 2.2.4 folgt aus der Voraussetzung, dass die Vereinigung

$$\bigcup_{\substack{F \in \mathcal{F}_{n-1}(p) \\ N_{\bar{F}}^- \neq \emptyset}} N_{\bar{F}}^- = \bigcup_{F \in \mathcal{F}_{n-1}(p)} N_{\bar{F}}^-$$

kontrahierbar ist. Mit der Zerlegung von V_{p,L^-} (siehe Lemma 3.1.4) folgt dann die Behauptung. \square

Lemma 2.2.9, S. 16. (Kontrahierbarkeit von $\bigcap V_{p,L^-}$)

Es sei $Q \subset P$ mit $|Q| \geq 2$, $p \in Q$ beliebig und es gelte:

- Es habe $\{N_{\mathbf{F}}^- : \mathbf{F} \in \mathcal{F}_{\bigcap Q}^*(p)\}$ die Eigenschaften \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 oder
- $N_{\mathbf{F}}^- = \text{cl } F$ für alle $\mathbf{F} = (F; n_{n-1}, \dots, n_k) \in \mathcal{F}_{\bigcap Q}^*(p)$ oder
- $N_{\mathbf{F}}^- = \emptyset$ für alle $\mathbf{F} \in \mathcal{F}_{\bigcap Q}^*(p)$.

Dann ist $\bigcap_{p \in Q} V_{p,L^-}$ kontrahierbar oder leer.

Beweis: Wir machen zunächst zwei Vorbemerkungen für $p, p' \in Q$:

$$(1) \mathbf{F} \in \mathcal{F}_{\bigcap Q}^*(p), \mathbf{F}' \in \mathcal{F}_{\bigcap Q}^*(p'), F = F' \implies N_{\mathbf{F}}^- = N_{\mathbf{F}'}^-.$$

$$(2) \text{ Zu } \mathbf{F} \in \mathcal{F}_{\bigcap Q}^*(p) \text{ gibt es ein } \mathbf{F}' \in \mathcal{F}_{\bigcap Q}^*(p') \text{ mit } F = F'.$$

Zur ersten Bemerkung: Sind $\mathbf{F} = (F; n_{n-1}, \dots, n_{n-k}), \mathbf{F}' = (F'; n'_{n-1}, \dots, n'_{n-k})$ $(n-k)$ -Seiten von V_{p,L^-} , so liegt wegen der globalen Voraussetzung 4 (Definition 2.2.3) $F = F'$ in einer $(n-1)$ -Seite von K . Damit ist $n_{n-1} = n'_{n-1}$ und mit der Definition von $N_{\mathbf{F}}^-$ folgt die Behauptung.

Zur zweiten Bemerkung: Aus der Definition von $\mathcal{F}_{\bigcap Q}^*(p)$ folgt für eine $(n-k)$ -Seite $\mathbf{F} \in \mathcal{F}_{\bigcap Q}^*(p)$, dass $\mathbf{F} \in \mathcal{F}_{n-k}(p)$ und $F \subset V_{p',\partial K}$. Also gibt es ein $\mathbf{F}' \in \mathcal{F}_{n-k}(p')$ mit $F = F'$. Nun folgt aus $F' = F \subset \bigcap_{p \in Q} V_{p,\partial K}$, dass $\mathbf{F}' \in \mathcal{F}_{\bigcap Q}^*(p)$.

Damit ist

$$\bigcup_{\mathbf{F} \in \mathcal{F}_{\bigcap Q}^*(p)} N_{\mathbf{F}}^- = \bigcup_{\mathbf{F}' \in \mathcal{F}_{\bigcap Q}^*(p')} N_{\mathbf{F}'}^-$$

für alle $(p, p') \in Q \times Q$. Mit der Zerlegungseigenschaft (Lemma 3.1.4) folgt

$$\bigcap_{p \in Q} V_{p,\partial K} = \bigcap_{p \in Q} \bigcup_{\mathbf{F} \in \mathcal{F}_{\bigcap Q}^*(p)} \text{cl } F$$

und das impliziert

$$\bigcap_{p \in Q} V_{p,L^-} = \bigcap_{p \in Q} \bigcup_{\mathbf{F} \in \mathcal{F}_{\bigcap Q}^*(p)} N_{\mathbf{F}}^- = \bigcup_{\mathbf{F} \in \mathcal{F}_{\bigcap Q}^*(q)} N_{\mathbf{F}}^- \quad (*)$$

für ein beliebiges $q \in Q$. Nun unterscheiden wir folgende Fälle:

A. $\{N_{\mathbf{F}}^- : \mathbf{F} \in \mathcal{F}_{\bigcap Q}^*(p)\}$ erfüllt die Kontrahierbarkeits-Eigenschaften \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 : Daraus folgt mit Lemma 2.2.4 aus (*), dass $\bigcap_{p \in Q} V_{p,L^-}$ kontrahierbar ist.

B. $N_{\mathbf{F}}^- = \text{cl } F$ für alle $\mathbf{F} \in \mathcal{F}_{\bigcap Q}^*(p)$: Aus (*) folgt, dass $\bigcap_{p \in Q} V_{p,L^-} = \bigcup_{\mathbf{F} \in \mathcal{F}_{\bigcap Q}^*(q)} \text{cl } F$ ist und damit kontrahierbar.

C. $N_{\mathbf{F}}^- = \emptyset$ für alle $\mathbf{F} \in \mathcal{F}_{\bigcap Q}^*(p)$: Dann ist $\bigcap_{p \in Q} V_{p,L^-} = \emptyset$ aus (*) offensichtlich. \square

Bemerkung: Man beachte, dass aus (1) in Lemma 2.2.7 nicht die Voraussetzungen des Lemmas 2.2.9 folgen. In Lemma 2.2.7, (1) wird nur der Schnitt von $(k-1)$ -Seiten einer k -Seite betrachtet, wohingegen in Lemma 2.2.9 der Schnitt von $(k-1)$ -Seiten möglicherweise *mehrerer* k -Seiten vorliegen kann.

Satz 2.2.10, S. 17. (Triangulierung von K und L^-)

Sind für alle $p \in P$ die Voraussetzungen der Lemmata 2.2.7 und 2.2.8 erfüllt und für alle $Q \subset P$ die Voraussetzungen des Lemmas 2.2.9, so gilt

$$H_*(K, L^-) \cong H_*(D_K, D_{L^-}).$$

Beweis: Aus den Lemmata folgt, dass für alle $Q \subset P$ der Schnitt $\bigcap_{p \in Q} V_{p, L^-}$ kontrahierbar oder leer ist. Mit Satz 2.2.1 folgt dann die Aussage. \square

Satz 2.2.11, S. 17. (Kontrahierbarkeits-Kriterien, 2D)

Es sei K ein Polyeder im \mathbb{R}^2 . Die folgenden Bedingungen seien für alle $p \in P$ erfüllt:

- (1) *Für jedes $F = (F; n_1) \in \mathcal{F}_1(p)$ hat η_F auf $\text{cl} F$ höchstens eine Nullstelle.*
- (2) *Für $F, F' \in \mathcal{F}_1(p)$ ist $N_F^- \cap N_{F'}^- \neq \emptyset$ oder $N_F^- = \emptyset$ oder $N_{F'}^- = \emptyset$.*

Für alle $Q \subset P$ ist dann $\bigcap_{p \in Q} V_{p, L^-}$ kontrahierbar oder leer.

Beweis: Für jedes $p \in P$ haben wir: Die Menge der $(n-1)$ -Seiten, das sind hier die 1-Seiten, besteht aus ein oder zwei Seiten, $\mathcal{F}_1(p) = \{F_0, F_1\}$. Für $\Omega := \{F \in \mathcal{F}_1(p) : N_F^- \neq \emptyset\}$ gibt es somit folgende Fälle:

$\Omega = \emptyset$: Dann ist $V_{p, L^-} = \emptyset$.

$\Omega = \{F\}$: Aus Voraussetzung (1) folgt, dass N_F^- kontrahierbar oder leer ist: Hat η_F auf F keine Nullstelle, so ist $N_F^- = \text{cl} F$, also kontrahierbar ($N_F^- = \emptyset$ kann wegen der Definition von Ω ausgeschlossen werden). Ist $x_0 \in F$ Nullstelle von η_F , so zeigt die lineare Homotopie $H: N_F^- \times [0, 1] \rightarrow N_F^-$, $(x, t) \mapsto x_0 t + x(1-t)$ die Kontrahierbarkeit von N_F^- . Also hat N_F^- die Kontrahierbarkeits-Eigenschaften \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 .

$\Omega = \{F, F'\}$: Aus Voraussetzung (1) folgt wie eben die Kontrahierbarkeit von N_F^- und $N_{F'}^-$. Mit (2) folgt, dass $N_F^- \cap N_{F'}^-$ kontrahierbar ist. Damit haben N_F^- , $N_{F'}^-$ die Kontrahierbarkeits-Eigenschaften \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 . (Die Fälle $N_F^- = \emptyset$, $N_{F'}^- = \emptyset$ können auf Grund der Definition von Ω ausgeschlossen werden.)

Somit zeigt Lemma 2.2.8, dass V_{p, L^-} kontrahierbar oder leer ist.

Anwendung des Lemmas 2.2.9: Der Schnitt mindestens zweier verschiedener 1-Seiten (Liniensegmente) in der Ebene besteht aus maximal einer 0-Seite (Punkt). Damit ist $\mathcal{F}_{\bigcap Q}^*(p)$ für jedes $Q \subset P$, $|Q| \geq 2$ leer oder ein Punkt. Somit haben die N_F^- für $F \in \mathcal{F}_{\bigcap Q}^*(p)$ die Kontrahierbarkeits-Eigenschaften \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 oder sind alle leer. Lemma 2.2.9 zeigt jetzt die Kontrahierbarkeit von $\bigcap_{p \in Q} V_{p, L^-}$ für $Q \subset P$. \square

Bemerkung: Ein alternativer Zugang wäre, den Ausschluss kleiner Zusammenhangskomponenten von $N_{\mathbb{F}}^-$ mittels der Gleichgewichtspunkte von $\dot{x} = G_{\mathbb{F}}(x)$ zu fordern (anstatt der Existenz nur einer Nullstelle von $\eta_{\mathbb{F}}$ auf \mathbb{F}); vergleiche Lemma 2.2.7. Im Falle $n = 2$ ist die direkte Überprüfung mittels des Tests auf Nullstellen von $\eta_{\mathbb{F}}$ jedoch einfacher.

Korollar 2.2.12, S. 17. (Triangulierung von K und L^- , 2D)

Es sei K ein Polyeder im \mathbb{R}^2 und die Kontrahierbarkeits-Kriterien, Satz 2.2.11, seien erfüllt. Dann gilt:

$$H_*(K, L^-) \cong H_*(D_K, D_{L^-}).$$

Beweis: Das Korollar folgt durch Anwendung von Satz 2.2.1 aus dem eben bewiesenen Satz 2.2.11. \square

Satz 2.2.13, S. 17. (Kontrahierbarkeits-Kriterien, 3D)

Es sei K ein Polyeder im \mathbb{R}^3 . Die folgenden Bedingungen seien für alle $p \in P$ erfüllt:

(1) *Für jedes $\mathbf{F}' = (F'; n_2) \in \mathcal{F}_2(p)$ gilt:*

(a) *Für jedes $\mathbf{F} = (F; n_2, n_1) \in \mathcal{F}_1(\mathbf{F}')$ ist $G_{\mathbf{F}}(x) \neq 0$ auf $\text{cl}F$ oder $\eta_{\mathbf{F}} \neq 0$ auf $\text{cl}F$.*

(b) *• Zu $\{N_{\mathbf{F}}^- : \mathbf{F} \in \mathcal{F}_1(\mathbf{F}')$ mit $N_{\mathbf{F}}^- \neq \emptyset\} = \{N_{\mathbf{F}_0}^-, \dots, N_{\mathbf{F}_k}^-\}$ gibt es eine Permutation $\pi: \{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, k\}$ so, dass für $1 \leq l \leq k-1$*

$$(N_{\mathbf{F}_{\pi(1)}}^- \cup \dots \cup N_{\mathbf{F}_{\pi(l)}}^-) \cap N_{\mathbf{F}_{\pi(l+1)}}^- \neq \emptyset$$

oder

• $N_{\mathbf{F}}^- = \emptyset$ für alle $\mathbf{F} \in \mathcal{F}_1(\mathbf{F}')$.

(c) *$G_{\mathbf{F}'}(x) \neq 0$ auf $\text{cl}F'$ oder $\eta_{\mathbf{F}'} \neq 0$ auf $\text{cl}F'$.*

(2) $\bigcap_{\mathbf{F} \in \Omega} N_{\mathbf{F}}^- \neq \emptyset$ für alle $\Omega \subset \{\mathbf{F} \in \mathcal{F}_2(p) : N_{\mathbf{F}}^- \neq \emptyset\}$.

(3) *Für jedes $p' \in P$, $p' \neq p$ ist*

$$\bigcap_{\substack{\mathbf{F} \in \mathcal{F}_{\bigcap\{p, p'\}}^*(p) \\ N_{\mathbf{F}}^- \neq \emptyset}} N_{\mathbf{F}}^- \neq \emptyset \quad \text{oder} \quad N_{\mathbf{F}}^- = \emptyset \text{ für alle } \mathbf{F} \in \mathcal{F}_{\bigcap\{p, p'\}}^*(p).$$

Für alle $Q \subset P$ ist dann $\bigcap_{p \in Q} V_{p, L^-}$ kontrahierbar oder leer.

Beweis: Wir zeigen, dass die Voraussetzungen der Lemmata 2.2.7, 2.2.8 und 2.2.9 erfüllt sind:

Lemma 2.2.7, $k = 1$: Eine 1-Seite F' hat genau zwei 0-Seiten F_0 und F_1 : $\mathcal{F}_0(F') = \{F_0, F_1\}$. Damit ist Voraussetzung (1) in Lemma 2.2.7 stets erfüllt. Voraussetzung (2) in Lemma 2.2.7 ist wegen (1a) erfüllt.

$k = 2$: Für $F' \in \mathcal{F}_2(p)$ und $l+1$ verschiedene 1-Seiten $F_1, \dots, F_{l+1} \in \mathcal{F}_1(F')$ (Linien-segmente) ist $(\text{cl } F_1 \cup \dots \cup \text{cl } F_l) \cap \text{cl } F_{l+1}$ ein Punkt oder leer. Aus Voraussetzung (1b) folgt also, dass $N_{F_1}^-, \dots, N_{F_{l+1}}^-$ die Eigenschaft \mathcal{K}_2 besitzen oder $N_F^- = \text{cl } F$ für alle $F \in \mathcal{F}_1(F')$ oder $N_F^- = \emptyset$ für alle $F \in \mathcal{F}_1(F')$ gilt. Voraussetzung (1) in Lemma 2.2.7 folgt somit aus (1b). Voraussetzung (2) ergibt sich unmittelbar aus (1c).

Insgesamt zeigt Lemma 2.2.7 nun, dass die N_F^- für jede 2-Seite $F \in \mathcal{F}_2(p)$, das sind hier die $(n-1)$ -Seiten, kontrahierbar sind.

Lemma 2.2.8: Es sei $\Omega \subset \{F \in \mathcal{F}_2(p) : N_F^- \neq \emptyset\}$, $\Omega \neq \emptyset$. Wir unterscheiden: $\Omega = \{F\}$: Dann ist $\bigcap_{F \in \Omega} N_F^- = N_F^-$ als Austrittsmenge einer 2-Seite kontrahierbar (Lemma 2.2.7).

$\Omega = \{F_0, F_1\}$: Es sind $N_{F_0}^-$, $N_{F_1}^-$ kontrahierbar (Lemma 2.2.7). Der Schnitt $\text{cl } F_0 \cap \text{cl } F_1$ ist ein Liniensegment und es gibt jeweils 1-Seiten $\tilde{F}_0 \in \mathcal{F}_1(F_0)$, $\tilde{F}_1 \in \mathcal{F}_1(F_1)$ mit $\text{cl } F_0 \cap \text{cl } F_1 = \text{cl } \tilde{F}_0 = \text{cl } \tilde{F}_1$. Damit ist $N_{F_0}^- \cap N_{F_1}^- = N_{\tilde{F}_0}^- \cap N_{\tilde{F}_1}^-$. Weil $N_{\tilde{F}_0}^-$ und $N_{\tilde{F}_1}^-$ kontrahierbar sind (Lemma 3.2.1), ist $N_{F_0}^- \cap N_{F_1}^-$ kontrahierbar, falls nicht leer.

$|\Omega| \geq 3$: In diesem Fall ist $\bigcap_{F \in \Omega} \text{cl } F$ ein Punkt, d.h. $\bigcap_{F \in \Omega} N_F^-$ kontrahierbar, falls nicht leer.

In jedem der drei Fälle ist $\bigcap_{F \in \Omega} N_F^-$ kontrahierbar und die Voraussetzung von Lemma 2.2.8 ergibt sich damit aus (2) und Lemma 3.1.6.

Lemma 2.2.9: Es können drei Fälle auftreten:

$\mathcal{F}_{\bigcap Q}^*(p) = \emptyset$: Nichts ist zu zeigen.

$\mathcal{F}_{\bigcap Q}^*(p) \subset \mathcal{F}_0(p)$: Damit ist $\mathcal{F}_{\bigcap Q}^*(p) = \{F\}$ für ein $F \in \mathcal{F}_0(p)$. Als Teilmenge von $\mathcal{F}_{\bigcap Q}^*(p)$ ist nur $\Omega = \{F\}$ möglich und $\bigcap_{F \in \Omega} N_F^- = N_F^- = F$ ist kontrahierbar oder $N_F^- = \emptyset$. (Jede 0-Seite ist ein Punkt.)

$\mathcal{F}_{\bigcap Q}^*(p) \subset \mathcal{F}_1(p)$: In diesem Fall ist $Q = \{p, p'\}$ für verschiedene $p, p' \in P$, und es gilt $\mathcal{F}_{\bigcap Q}^*(p) = \{F_0, F_1\}$ für 1-Seiten $F_0, F_1 \in \mathcal{F}_1(p)$. Wäre $|Q| \geq 3$, so bestünde der Schnitt $\bigcap_{p \in Q} V_{p, L^-}$ aus maximal einem Punkt, wäre also eine 0-Seite oder leer (vorherige Fälle). Wegen (3) und Lemma 3.1.6 sind mithin die Voraussetzungen des Lemmas 2.2.9 erfüllt. \square

Korollar 2.2.14, S. 18. (Triangulierung von K und L^- , 3D)

Es sei K ein Polyeder im \mathbb{R}^3 und die Kontrahierbarkeits-Kriterien 2.2.13 seien erfüllt. Dann gilt:

$$H_*(K, L^-) \cong H_*(D_K, D_{L^-}).$$

Beweis: Das Korollar folgt durch Anwendung von Satz 2.2.1 aus dem eben bewiesenen Satz 2.2.13. \square

3.3 Rigorose Überprüfung der Kontrahierbarkeits-Bedingungen mit numerischen Methoden

In diesem Abschnitt geben wir verlässliche numerische Kriterien zur rigorosen Überprüfung der Kontrahierbarkeits-Bedingungen in den Dimensionen 2 und 3 an. Für die konkrete Umsetzung der Ergebnisse des vorigen Abschnitts sind diese von großer Bedeutung: Die Kontrahierbarkeit der Austrittsmenge einer 1-Seite F kann etwa über das Vorzeichenverhalten von η_F entschieden werden. Nun kann aber das Vorzeichen von η_F nicht in jedem Punkt von F direkt überprüft werden. Vielmehr sind durch entsprechende Abschätzungen und die Berechnung von $\eta_F(x)$ für ein $x \in F$ verlässliche Aussagen über das Vorzeichenverhalten von η_F auf ganz F zu machen. Ganz wesentlich ist hierbei, dass es Algorithmen zum Umgang mit Anordnungen von Hyperebenen gibt, insbesondere um die Seiten $\mathcal{F}(p)$ berechnen zu können. Wir verweisen dazu auf die Monographie „Algorithms in Combinatorial Geometry“ von Herbert Edelsbrunner, [Ed87].

Zur Notation: Für eine Seite $F \in \mathcal{F}(p)$ definieren wir den *Durchmesser* als $\text{diam } F := \max_{x,y \in \text{cl } F} |x - y|$. Sind $x, y \in \mathbb{R}^n$, so bezeichnen wir die *Verbindungsstrecke von x und y* mit $[x, y] := \{x + t(y - x) : t \in [0, 1]\}$.

Lemma 3.3.1 (Ausschluss von Nullstellen für η_F)

Es seien $F = (F; n_{n-1}, \dots, n_{n-k}) \in \mathcal{F}_{n-k}(p)$ eine Seite und

$$S_0 := S_0(F) \geq \max_{\xi \in \text{cl } F} |\text{Df}(\xi)^T n_{n-1}|.$$

Dann gilt:

- (1) $\exists x \in \text{cl } F$ mit $\eta_F(x) > S_0 \text{diam } F \implies \eta_F > 0$ auf $\text{cl } F$,
- (2) $\exists x \in \text{cl } F$ mit $\eta_F(x) < -S_0 \text{diam } F \implies \eta_F < 0$ auf $\text{cl } F$,
- (3) $\exists x \in \text{cl } F$ mit $|\eta_F(x)| > S_0 \text{diam } F \implies \eta_F \neq 0$ auf $\text{cl } F$.

Beweis: Wir nehmen an, dass $x_0 \in \text{cl } F$ eine Nullstelle von η_F ist. Zu jedem $x \in \text{cl } F$ gibt es ein $\xi = \xi(x) \in [x, x_0]$ mit $f(x) = f(x_0) + \text{Df}(\xi)(x - x_0)$. Wir hätten dann für jedes $x \in \text{cl } F$

$$\begin{aligned} |\eta_F(x)| &= |\langle f(x), n_{n-1} \rangle| = |\langle f(x_0), n_{n-1} \rangle + \langle \text{Df}(\xi)(x - x_0), n_{n-1} \rangle| \\ &= |\eta_F(x_0) + \langle \text{Df}(\xi)(x - x_0), n_{n-1} \rangle| = |\langle \text{Df}(\xi)(x - x_0), n_{n-1} \rangle| \\ &= |(x - x_0)^T \text{Df}(\xi)^T n_{n-1}| \leq |x - x_0| |\text{Df}(\xi)^T n_{n-1}| \\ &\leq S_0 \text{diam } F. \end{aligned}$$

Aber nach den Voraussetzungen ist jeweils $|\eta_F(x)| > S_0 \text{diam } F$ für ein $x \in \text{cl } F$. Es folgen die drei Aussagen. \square

Lemma 3.3.2 (Ausschluss von zwei Nullstellen)

Es seien $F \in \mathcal{F}_1(p)$, $\{n_\nu\}$ eine Orthonormalbasis von $T \text{ aff}(F)$ und

$$S_1 := S_1(F) \geq \max_{\xi \in \text{cl} F} |\langle D\nabla\eta_F(\xi)n_\nu, n_\nu \rangle|.$$

Gilt für ein $x \in \text{cl} F$

$$\left| \frac{d}{dn_\nu} \eta_F(x) \right| > S_1 \text{ diam } F,$$

so hat η_F auf $\text{cl} F$ höchstens eine Nullstelle.

Beweis: Hätte η_F auf $\text{cl} F$ zwei Nullstellen ξ_0 und ξ_1 , so wäre $\xi_1 = \xi_0 + t_0 n_\nu$ für ein $t_0 \in \mathbb{R} - \{0\}$ und es existierte ein $x_0 \in \text{cl} F$ mit

$$0 = \eta_F(\xi_1) - \eta_F(\xi_0) = \frac{d}{dn_\nu} \eta_F(x_0) t_0.$$

Somit wäre $\frac{d}{dn_\nu} \eta_F(x_0) = 0$. Wegen $\frac{d}{dn_\nu} \eta_F(x) = \langle \nabla\eta_F(x), n_\nu \rangle$ und der Darstellung

$$\nabla\eta_F(x) = \nabla\eta_F(x_0) + D\nabla\eta_F(\xi)(x - x_0), \quad \xi = \xi(x) \in [x, x_0] \text{ geeignet,}$$

folgte dann für $x \in \text{cl} F$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{d}{dn_\nu} \eta_F(x) \right| &= |\langle \nabla\eta_F(x), n_\nu \rangle| \\ &= |\langle \nabla\eta_F(x_0), n_\nu \rangle + \langle D\nabla\eta_F(\xi)(x - x_0), n_\nu \rangle| \\ &= \left| \frac{d}{dn_\nu} \eta_F(x_0) + \langle D\nabla\eta_F(\xi)(x - x_0), n_\nu \rangle \right| \\ &= |\langle D\nabla\eta_F(\xi)(x - x_0), n_\nu \rangle| = |x - x_0| |\langle D\nabla\eta_F(\xi)n_\nu, n_\nu \rangle| \\ &\leq S_1 \text{ diam } F. \end{aligned}$$

Das wäre ein Widerspruch zur Annahme $|\frac{d}{dn_\nu} \eta_F(x)| > S_1 \text{ diam } F$. □

Lemma 3.3.3 (Ausschluss von Gleichgewichtspunkten von $\dot{x} = G_F(x)$)

Es seien $F = (F; n_{n-1}, \dots, n_{n-k}) \in \mathcal{F}_{n-k}(p)$, (v_1, \dots, v_{n-k}) eine Orthonormalbasis von $\text{aff } F$ und

$$S_2 := S_2(F) \geq \max_{\xi \in \text{cl} F} \sum_{l=1}^{n-k} \sum_{i=1}^{n-k} |\langle D\nabla\eta_F(\xi)v_i, v_l \rangle|.$$

Gilt für ein $x \in \text{cl} F$, dass

$$|G_F(x)| > S_2 \text{ diam } F,$$

so enthält $\text{cl} F$ keinen Gleichgewichtspunkt von $\dot{x} = G_F(x)$.

Beweis: Wir beweisen das Kontrapositivum: Ist $x_0 \in \text{cl} F$ ein Gleichgewichtspunkt von $\dot{x} = G_F(x)$, so gilt $|G_F(x_0)| \leq S_2 \text{ diam } F$ für alle $x \in \text{cl} F$.

Vorbemerkung: Für eine Orthonormalbasis (b_1, \dots, b_n) des \mathbb{R}^n und $a \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$a = \sum_{i=1}^n \langle a, b_i \rangle b_i.$$

Mit der linearen Approximation $\nabla\eta_F(x) = \nabla\eta_F(x_0) + D\nabla\eta_F(\xi)(x - x_0)$ für $x \in \text{cl} F$ und ein $\xi = \xi(x) \in [x, x_0]$ erhalten wir wegen $G_F(x_0) = 0$

$$\begin{aligned} G_F(x) &= \nabla\eta_F(x_0) + D\nabla\eta_F(\xi)(x - x_0) \\ &\quad - \sum_{l=1}^k \langle \nabla\eta_F(x_0) + D\nabla\eta_F(\xi)(x - x_0), n_{n-l} \rangle n_{n-l} \\ &= \nabla\eta_F(x_0) - \sum_{l=1}^k \langle \nabla\eta_F(x_0), n_{n-l} \rangle n_{n-l} \\ &\quad + D\nabla\eta_F(\xi)(x - x_0) - \sum_{l=1}^k \langle D\nabla\eta_F(\xi)(x - x_0), n_{n-l} \rangle n_{n-l} \\ &= D\nabla\eta_F(\xi)(x - x_0) - \sum_{l=1}^k \langle D\nabla\eta_F(\xi)(x - x_0), n_{n-l} \rangle n_{n-l}. \end{aligned}$$

Ist (v_1, \dots, v_{n-k}) eine Orthonormalbasis von $T \text{ aff}(F)$ und $(x - x_0) = \sum_{i=1}^{n-k} \alpha_i v_i$, so erhalten wir mit Lemma 3.1.7, (2) und der Vorbemerkung

$$\begin{aligned} G_F(x) &= \sum_{l=1}^{n-k} \langle D\nabla\eta_F(\xi)(x - x_0), v_l \rangle v_l = \sum_{l=1}^{n-k} \langle D\nabla\eta_F(\xi) \sum_{i=1}^{n-k} \alpha_i v_i, v_l \rangle v_l \\ &= \sum_{l=1}^{n-k} \sum_{i=1}^{n-k} \alpha_i \langle D\nabla\eta_F(\xi) v_i, v_l \rangle v_l. \end{aligned}$$

Mit der Ungleichung

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n-k} \alpha_i^2} = \left| \sum_{i=1}^{n-k} \alpha_i v_i \right| = |x - x_0| \leq \text{diam } F$$

erhalten wir $|\alpha_i| \leq \text{diam } F$. Somit ergibt sich

$$|G_F(x)| \leq \text{diam } F \sum_{l=1}^{n-k} \sum_{i=1}^{n-k} |\langle D\nabla\eta_F(\xi) v_i, v_l \rangle| \leq S_2 \text{diam } F. \quad \square$$

Satz 3.3.4 (Rigorese numerische Kontrahierbarkeits-Bedingungen, 2D)

Es sei K ein Polyeder im \mathbb{R}^2 . Die folgenden Bedingungen seien für alle $p \in P$ erfüllt.

- (1) Für jedes $F \in \mathcal{F}_1(p)$ und eine Orthonormalbasis $\{n_\nu\}$ von $T \text{ aff}(F)$, gibt es ein $x \in \text{cl} F$ mit

$$|\eta_F(x)| > S_0(F) \text{diam } F \quad \text{oder} \quad \left| \frac{d}{dn_\nu} \eta_F(x) \right| > S_1(F) \text{diam } F.$$

- (2) Für je zwei verschiedene Seiten $F, F' \in \mathcal{F}_1(p)$ mit $\text{cl} F \cap \text{cl} F' = \{x^*\}$ sind $\eta_F(x^*), \eta_{F'}(x^*) > 0$ oder es gibt $x \in \text{cl} F, x' \in \text{cl} F'$ mit

$$\eta_F(x) < -S_0(F) \text{diam } F \quad \text{oder} \quad \eta_{F'}(x') < -S_0(F') \text{diam } F'.$$

Dann ist $\bigcap_{p \in Q} V_{p, L^-}$ für alle $Q \subset P$ kontrahierbar oder leer, und es gilt

$$H_*(K, L^-) \cong H_*(D_K, D_{L^-}).$$

Beweis: Mit den Lemmata 3.3.1 und 3.3.2 erkennen wir, dass aus Voraussetzung (1) bzw. (2) Voraussetzung (1) bzw. (2) des Satzes 2.2.11 folgt. Mit diesem Resultat und mit dem Korollar 2.2.12 folgen dann die Aussagen. \square

Satz 3.3.5 (Rigorese numerische Kontrahierbarkeits-Bedingungen, 3D)

Es sei K ein Polyeder im \mathbb{R}^3 . Die folgenden Bedingungen seien für alle $p \in P$ erfüllt:

(1) Für jedes $F' = (F'; n_2) \in \mathcal{F}_2(p)$ gilt:

(a) Für jedes $F = (F; n_2, n_1) \in \mathcal{F}_1(F')$ gibt es ein $x \in \text{cl} F$ mit $|G_F(x)| > S_2(F) \text{diam} F$ oder $|\eta_F(x)| > S_0(F) \text{diam} F$.

(b) Eine der beiden Aussagen sei wahr:

• Enthält

$$\begin{aligned} & \{ F \in \mathcal{F}_1(F') : \text{Es gibt kein } x \in \text{cl} F \text{ mit } \eta_F(x) > S_0(F) \text{diam} F \} \\ & = \{ F_1, \dots, F_k \} \end{aligned}$$

mindestens zwei Seiten, so sei $\pi: \{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, l\}$ eine Permutation und mit $1 \leq l \leq k-1$

$$\Omega_l := (\text{cl} F_1 \cup \dots \cup \text{cl} F_l) \cap \text{cl} F_{l+1}.$$

Für alle l enthält Ω_l ein oder zwei Punkte. Für jeweils wenigstens ein $x \in \Omega_l$ sei $\eta_F(x) < 0$.

• Für jedes $F = (F; n_2, n_1) \in \mathcal{F}_1(F')$ gibt es ein $x \in \text{cl} F$ mit $\eta_F(x) > S_0(F) \text{diam} F$.

(c) Es gibt ein $x \in \text{cl} F'$ mit

$$|G_{F'}(x)| > S_2(F') \text{diam} F' \quad \text{oder} \quad |\eta_{F'}(x)| > S_0(F') \text{diam} F'.$$

(2) Für jedes $\Omega \subset \{ F \in \mathcal{F}_2(p) : \text{Es gibt kein } x \in \text{cl} F \text{ mit } \eta_F(x) > S_0(F) \text{diam} F \}$ enthält $\bigcap_{F \in \Omega} \text{cl} F$ ein x^* mit $\eta_F(x^*) < 0$ für alle $F \in \Omega$.

(3) Für jedes $p' \in P$, $p' \neq p$ gilt:

Ist $\mathcal{F}_{\bigcap\{p, p'\}}^*(p) = \{F_0, F_1\} \subset \mathcal{F}_1(p)$ und gibt es kein $x_0 \in F_0$ oder $x_1 \in F_1$ mit $\eta_{F_i}(x_i) > S_0(F_i) \text{diam} F_i$ ($i = 0$ oder 1), so sind mit dem Schnitt $\{x^*\} = \text{cl} F_0 \cap \text{cl} F_1$ sowohl $\eta_{F_0}(x^*) < 0$ als auch $\eta_{F_1}(x^*) < 0$.

Dann ist $\bigcap_{p \in Q} V_{p, L^-}$ für alle $Q \subset P$ kontrahierbar oder leer, und es gilt

$$H_*(K, L^-) \cong H_*(D_K, D_{L^-}).$$

Beweis: Mit Lemma 3.3.1 sehen wir, dass

$$\begin{aligned} & \{ F \in \mathcal{F}_2(p) : N_F^- \neq \emptyset \} \\ & \subset \Omega := \{ F \in \mathcal{F}_2(p) : \text{Es gibt kein } x \in \text{cl} F \text{ mit } \eta_F(x) > S_0(F) \text{diam} F \}. \end{aligned}$$

Ist also $\bigcap_{F \in \Omega} N_F^- \neq \emptyset$, so ist erst recht $\bigcap_{\substack{F \in \mathcal{F}_2(p) \\ N_F^- \neq \emptyset}} N_F^- \neq \emptyset$. Analoge Aussagen gelten

für $F \in \mathcal{F}_1(F')$ und $F \in \mathcal{F}_{\bigcap\{p, p'\}}^*(p)$.

Nun prüfen wir mit Lemma 3.3.1 und Lemma 3.3.3 unmittelbar nach, dass die Voraussetzungen hier die Voraussetzungen des Satzes 2.2.13 implizieren. Mit Satz 2.2.13 und Korollar 2.2.14 folgen dann die Aussagen. \square

Kapitel 4

Auflösung interner Berührungspunkte

Jetzt behandeln wir den zweiten Schritt der Konstruktion isolierender Blöcke, die Auflösung interner Berührungspunkte, im Detail. Wie bisher sei $\varphi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein glatter Fluss, der Lösung des Systems $\dot{x} = f(x)$ ist. Es bezeichne K ein Polyeder mit Austrittsmenge $L^- = L^-(K)$ und D_K bzw. D_{L^-} sei die Delaunay-Triangulierung von K bzw. L^- bezüglich einer endlichen Menge $P \subset \mathbb{R}^n$. Die globalen Voraussetzungen 1-4 (Definition 2.2.3) seien erfüllt.

Wir unterscheiden zwei Arten von internen Berührungspunkten:

Definition 4.1 (Interne Berührungspunkte)

Ein $x \in \partial K$ heißt *interner Berührungspunkt*, falls es ein $\epsilon > 0$ mit $\varphi(x, (-\epsilon, \epsilon)) \subset K$ gibt.

Für einen beliebigen Punkt $x \in \partial K$ bezeichnen wir die Menge aller $(n-1)$ -Seiten von $V_{p,K}$, $p \in P$, in deren Abschluss x liegt, mit

$$\mathcal{F}_{n-1}(x; K) := \mathcal{F}_{n-1}(x; K; P) := \{ F \in \mathcal{F}_{n-1}(p; K) : p \in P, x \in \text{cl} F \}.$$

Ein interner Berührungspunkt ist *Fluss-tangential*, falls $\eta_F(x) = 0$ für jede $(n-1)$ -Seite $F \in \mathcal{F}_{n-1}(x; K)$ ist. Andernfalls heißt ein interner Berührungspunkt *nicht Fluss-tangential*. \diamond

Mittels interner Berührungspunkte erhalten wir leicht folgende für uns gut handhabbare Definition isolierender Blöcke:

Satz 4.2 (Alternative Definition isolierender Blöcke)

Es gilt: K ist ein isolierender Block genau dann, wenn ∂K keine internen Berührungspunkte enthält.

Beweis: Es sei zunächst K ein isolierender Block. Enthielte ∂K einen internen Berührungspunkt x , so gäbe es ein $t > 0$ mit $\varphi(x, [-t, 0]) \subset K$ und $\varphi(x, [0, t]) \subset K$, d.h. $x \notin L^-$ und $x \notin L^+$. Das steht im Widerspruch zur Definition eines isolierenden Blockes (Definition 1.3.1).

Enthält umgekehrt K keine internen Berührungspunkte, so ist für jedes $x \in \partial K$ und alle $t > 0$ das Orbitsegment $\varphi(x, [0, t]) \not\subset K$ oder $\varphi(x, [-t, 0]) \not\subset K$ (oder beides). Jedes $x \in \partial K$ ist also in L^- oder in L^+ und damit ist K ein isolierender Block. \square

4.1 Erkennung interner Berührungspunkte

Bevor wir zur Auflösung interner Berührungspunkte kommen, brauchen wir erst Kriterien für die Existenz bzw. zum Ausschluss interner Berührungspunkte.

Lemma 4.1.1

Es seien $x \in \partial K$, $F = (F; n_F) \in \mathcal{F}_{n-1}(x; K)$ und $\eta_F(x) = 0$. Dann gilt für ϵ hinreichend klein mit $b = -\langle x, n_F \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle \ddot{\varphi}(x, 0), n_F \rangle > 0 &\implies \varphi(x, (-\epsilon, \epsilon)) \subset H_F^+ = H^+(b; n_F), \\ \langle \ddot{\varphi}(x, 0), n_F \rangle < 0 &\implies \varphi(x, (-\epsilon, \epsilon)) \subset H_F^- = H^-(b; n_F). \end{aligned}$$

Beweis: Es sei T_F die orthogonale Matrix mit $T_F n_F = e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)^T$. Dann gilt mit einem $\vartheta_F = \vartheta_F(t) \in [0, t]$

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(x, t) := T_F(\varphi(x, t) - x) &= t T_F \dot{\varphi}(x, 0) + \frac{1}{2} t^2 T_F \ddot{\varphi}(x, 0) + \frac{1}{6} t^3 T_F \frac{d^3}{dt^3} \varphi(x, \vartheta_F) \\ &= t \dot{\tilde{\varphi}}(x, 0) + \frac{1}{2} t^2 \ddot{\tilde{\varphi}}(x, 0) + \frac{1}{6} t^3 \frac{d^3}{dt^3} \tilde{\varphi}(x, \vartheta_F). \end{aligned}$$

O.B.d.A. können wir also $n_F = e_1$ und $x = 0$ annehmen. Aus $\eta_F(x) = \langle f(x), n_F \rangle = 0$ folgt $f(x) \perp n_F$. Wir erhalten für alle $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, ϵ hinreichend klein,

$$\begin{aligned} \langle \varphi(x, t), n_F \rangle = \varphi_1(x, t) &= \varphi_1(x, 0) + t \dot{\varphi}_1(x, 0) + \frac{1}{2} t^2 \ddot{\varphi}_1(x, 0) + O(t^3) \\ &= \frac{1}{2} t^2 \ddot{\varphi}_1(x, 0) + O(t^3), \end{aligned}$$

denn $\varphi_1(x, 0) = 0$ wegen $x = 0$ und $\dot{\varphi}_1(x, 0) = 0$ wegen $\dot{\varphi}(x, 0) = f(x) \perp n_F = e_1$. Das bedeutet $\varphi(x, t) \in H_F^+$ bei hinreichend kleinem t , falls $\langle \ddot{\varphi}(x, 0), n_F \rangle > 0$, und $\varphi(x, t) \in H_F^-$, falls $\langle \ddot{\varphi}(x, 0), n_F \rangle < 0$ (vergleiche Definition C.1.1). \square

Satz 4.1.2 (Ausschluss interner Berührungspunkte I)

Es sei $x \in \partial K$. Gilt für eine Seite $F = (F; n_F) \in \mathcal{F}_{n-1}(x; K)$

$$\eta_F(x) \neq 0$$

oder für jede Seite $F = (F; n_F) \in \mathcal{F}_{n-1}(x; K)$

$$\langle \ddot{\varphi}(x, 0), n_F \rangle < 0,$$

so ist x kein Fluss-tangentiale interner Berührungspunkt.

Ist zusätzlich $x \in F = \text{int } F$, so ist x kein interner Berührungspunkt.

Beweis: Ist $\eta_F(x) \neq 0$ für eine Seite $F \in \mathcal{F}_{n-1}(x; K)$, so ist die erste Aussage klar. Es sei also $\eta_F(x) = 0$ und $\langle \ddot{\varphi}(x, 0), n_F \rangle < 0$ für alle $F = (F; n_F) \in \mathcal{F}_{n-1}(x; K)$. Mit Lemma 4.1.1 folgt dann, dass jeweils $\varphi(x, t) \in H_F^-$ für hinreichend kleines $|t|$ für alle F gilt. Somit ist x kein Fluss-tangentiale interner Berührungspunkt.

Ist $x \in F$, so ist das die einzige Seite, die x enthält. Wegen Lemma 4.1.1 könnte x in diesem Fall nur dann ein interner Berührungspunkt sein, wenn x ein Fluss-tangentiale interner Berührungspunkt wäre. \square

Es sei $s = [p_0, \dots, p_{n-1}] \in D_{\partial K}$. Zu jedem der p_i , $0 \leq i \leq n-1$ existiert dann genau eine $(n-1)$ -Seite $F \in \mathcal{F}_{n-1}(p_i)$ mit $F \cap s \neq \emptyset$. Diese Seiten haben alle den selben Normalenvektor n_F und wir setzen $n_s := n_F$. (Vergleiche auch Definitionen 2.2.2 und C.1.3.) Wir erhalten das folgende Korollar:

Korollar 2.3.1, S. 19. (Ausschluss interner Berührungspunkte I)

Es sei $x \in \partial K$. Gilt für ein $(n-1)$ -Simplex s mit $x \in s$, $s \in D_{\partial K}$

$$\eta_s(x) \neq 0$$

oder für jedes $(n-1)$ -Simplex $s \in D_{\partial K}$ mit $x \in s$

$$\langle \ddot{\varphi}(x, 0), n_s \rangle < 0,$$

so ist x kein Fluss-tangentiale interner Berührungspunkt.

Haben zusätzlich alle Simplexe s mit $x \in s$ den selben Normalenvektor n_s , so ist x kein interner Berührungspunkt.

Satz 4.1.3 (Existenz Fluss-tangentiale interner Berührungspunkte)

Es sei $F = (F; n_F) \in \mathcal{F}_{n-1}(p)$ für ein $p \in P$. Gilt für ein $x \in F$

$$\eta_F(x) = 0 \quad \text{und} \quad \langle \ddot{\varphi}(x, 0), n_F \rangle > 0,$$

so ist x ein Fluss-tangentiale interner Berührungspunkt.

Beweis: Mit Lemma 4.1.1 folgt, dass $\varphi(x, (-\epsilon, \epsilon)) \subset H_F^+$ für ϵ hinreichend klein. Damit ist x ein interner Berührungspunkt. Er ist Fluss-tangentiale, weil $\eta_F(x) = 0$ und $x \in F = \text{int } F$ in keiner weiteren $(n-1)$ -Seite liegt. \square

Daraus erhalten wir das folgende Korollar:

Korollar 2.3.2, S. 19. (Existenz Fluss-tangentiale interner Berührungspunkte)

Es sei $x \in \text{int } s$ für ein $(n-1)$ -Simplex $s \in D_{\partial K}$. Ist

$$\eta_s(x) = 0 \quad \text{und} \quad \langle \ddot{\varphi}(x, 0), n_s \rangle > 0,$$

so ist x ein Fluss-tangentiale interner Berührungspunkt.

Lemma 4.1.4

Es seien C ein konvexes Polyeder und $x \in \partial C$. Dann gilt für kleines $t > 0$:

$$(1) \quad \varphi(x, t) \in C \quad \implies \quad \eta_F(x) \geq 0 \quad \text{für alle } F \in \mathcal{F}_{n-1}(x; C),$$

$$(2) \quad \varphi(x, -t) \in C \quad \implies \quad \eta_F(x) \leq 0 \quad \text{für alle } F \in \mathcal{F}_{n-1}(x; C).$$

Beweis: Wie in Lemma 4.1.1 seien $H_F^\pm = H^\pm(b; n_F)$ für $F \in \mathcal{F}_{n-1}(p)$ und $b = -\langle x, n_F \rangle$ bei $x \in F$. Es bezeichne U eine Umgebung von x mit $\mathcal{F}_{n-1}(\xi; C) \subset \mathcal{F}_{n-1}(x; C)$ für alle $\xi \in U \cap \partial C$. Da C konvex ist, ist $\varphi(x, t)$ genau dann in $C \cap U$, wenn $\varphi(x, t) \in H_F^+$ für alle $F \in \mathcal{F}_{n-1}(x; C)$ und $t > 0$ hinreichend klein ist. Aus der Darstellung

$$\varphi(x, t) = x + tf(x) + O(t^2),$$

und $\eta_F(x) = \langle f(x), n_F \rangle$ für $F = (F; n_F)$ folgen die Implikationen

$$\bullet \quad \varphi(x, t) \in H_F^+ \quad \implies \quad \eta_F(x) \geq 0,$$

$$\bullet \quad \varphi(x, -t) \in H_F^+ \quad \implies \quad \eta_F(x) \leq 0.$$

Daraus erhalten wir die beiden Aussagen. \square

Definition 4.1.5 (Knickpunkte)

Ein $x \in \partial K$ heißt *Knickpunkt*, falls $\mathcal{F}_{n-1}(x; K)$ wenigstens zwei Seiten enthält. Ein Knickpunkt x ist ein *konvexer Knickpunkt*, falls für je zwei Seiten $F_0, F_1 \in \mathcal{F}_{n-1}(x; K)$ und beliebige $x_0 \in F_0, x_1 \in F_1$ die Verbindungsstrecke $[x_0, x_1]$ in K liegt. Ansonsten ist ein Knickpunkt ein *konkaver Knickpunkt*. \diamond

Satz 2.3.3, S. 19. (Ausschluss interner Berührungspunkte II)

Es sei $x \in \partial K$ ein konvexer Knickpunkt. Gibt es ein $F \in \mathcal{F}_{n-1}(x; K)$ mit $\eta_F(x) \neq 0$, so ist x kein interner Berührungspunkt.

Beweis: Da $\eta_F(x) \neq 0$ für eine Seite $F \in \mathcal{F}_{n-1}(x; K)$, ist x kein Fluss-tangentialer interner Berührungspunkt.

Wäre x ein nicht Fluss-tangentialer interner Berührungspunkt, so wäre $\varphi(x, (-t, t)) \subset K$ für ein kleines t . Wegen Lemma 4.1.4 hätten wir dann $\eta_F(x) \geq 0$ und $\eta_F(x) \leq 0$, d.h. $\eta_F(x) = 0$, für alle $F \in \mathcal{F}_{n-1}(x; K)$. Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung $\eta_F(x) \neq 0$ für wenigstens ein $F \in \mathcal{F}_{n-1}(x; K)$. \square

Satz 2.3.4, S. 19. (Ausschluss interner Berührungspunkte III)

Es sei $x \in \partial K$. Gilt eine der folgenden Aussagen, so ist x kein interner Berührungspunkt.

- *Es ist $\eta_F(x) > 0$ für alle $F \in \mathcal{F}_{n-1}(x; K)$.*
- *Es ist $\eta_F(x) < 0$ für alle $F \in \mathcal{F}_{n-1}(x; K)$.*

Beweis: Da $\eta_F(x) \neq 0$ für alle $F \in \mathcal{F}_{n-1}(x; K)$, ist x kein Fluss-tangentialer interner Berührungspunkt.

Wir nehmen an, dass x ein nicht Fluss-tangentialer interner Berührungspunkt ist. Das bedeutete $\varphi(x, (-t, t)) \subset K$ für kleines $t > 0$. Es sei \mathcal{C}^* eine endliche Zerlegung von K in konvexe Polyeder und $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}^*$ die Menge der Polyeder, die x enthalten. Für hinreichend kleines t ist $\varphi(x, (-t, t)) \subset K$ genau dann, wenn $\varphi(x, (-t, 0]) \subset \mathcal{C}$, $\varphi(x, [0, t)) \subset \mathcal{C}'$ für $\mathcal{C}, \mathcal{C}' \in \mathcal{C}$. Mit Lemma 4.1.4 sehen wir so, dass $\eta_F(x) \leq 0$ für alle $F \in \mathcal{F}_{n-1}(x; \mathcal{C})$ und $\eta_F(x) \geq 0$ für alle $F \in \mathcal{F}_{n-1}(x; \mathcal{C}')$. Das steht im Widerspruch zu jeder der beiden Annahmen. \square

4.2 Auflösung interner Berührungspunkte

Als Hilfsmittel zur Auflösung interner Berührungspunkte benötigen wir Schnittsimplexe und Schnittzeiten wie sie in ähnlicher Form von Conley und Easton in [CE71] eingeführt wurden.

Definition 4.2.1 (Schnittsimplex)

Ein $(n-1)$ -Simplex $s \in D_{\partial K}$ heißt *Schnittsimplex*, falls $f(x)$ für alle $x \in s$ nicht tangential bezüglich s ist, d.h. $\langle f(x), n_s \rangle \neq 0$ für alle $x \in s$. \diamond

In [CE71] wird von einer glatten offenen Untermannigfaltigkeit der Kodimension 1, zu der der Fluss nirgends tangential ist, ausgegangen. Betrachten wir nur das Innere int s eines Schnittsimplexes, so handelt es sich um einen Spezialfall der ursprünglichen Definition.

Definition 4.2.2 (Schnittzeit)

Für eine kompakte Menge $C \subset \mathbb{R}^n$ definieren wir

$$\sigma_C: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sup\{t > 0 : \varphi(x, [0, t]) \cap C = \emptyset\}$$

und nennen dies die *Schnittzeit*. ◇

Lemma 2.3.5, S. 20. (Eigenschaften der Schnittzeit)

Es sei s ein Schnittsimplex. Dann sind

- (1) der Stetigkeitsbereich I_s von $\sigma_{\text{int } s}$ offen und
- (2) $\sigma_{\text{int } s}(x) < \infty \implies x \in I_s$.

Beweis: Wir verweisen auf die Arbeit von Conley und Easton, [CE71, Korollar 4.4]. □

Satz 2.3.6, S. 20. (Auflösung interner Berührungspunkte, 2D)

Es seien K ein Polyeder im \mathbb{R}^2 und $x_0 \in \text{int } s_0$, $s_0 \in D_{\partial K}$, ein isolierter Fluss-tangentialer interner Berührungspunkt. Außerdem seien die folgende Bedingungen erfüllt:

- (1) $\sigma_{\partial K}(x_0) < \infty$.
- (2) $x_1 := \varphi(x_0, \sigma_{\partial K}(x_0))$ ist in der selben Zusammenhangskomponente von ∂K wie x_0 .
- (3) $x_1 \in \text{int } s_1$ für ein Schnittsimplex $s_1 \in D_{\partial K}$.

Dann führen wir folgende Konstruktionsschritte durch:

1. Es sei $R := \varphi(x_0, [0, \sigma_{\text{int } s_1}(x_0)])$.
2. (a) Wähle $x'_0 \in s_0$ so, dass $(x_0, x'_0] \subset L^+$. Dabei ist $(x_0, x'_0]$ die halboffene Verbindungsstrecke von x_0 und x'_0 ohne den Punkt x_0 , aber mit x'_0 .
 (b) Es bildet $\partial K - \{x_0, x_1\}$ eine Partition von ∂K . Mit R' bezeichnen wir den Abschluss der Komponente, die x'_0 enthält.
 (c) Es bezeichne B den Abschluss des von R und R' berandeten Gebiets.

3. Konstruktion des neuen Komplexes:

Es seien nun

$$\begin{aligned} N &:= \text{cl}(K - (B \cap K)), \\ L &:= R \cup (L^- - (L^- \cap R')), \end{aligned}$$

und die simplizialen Komplexe

$$\begin{aligned} \tilde{B} &:= \{s \in D_K : s \text{ ist Seite eines 2-Simplex } s' \in D_K \text{ mit } s' \cap B \neq \emptyset\}, \\ \tilde{N} &:= D_K, \\ \tilde{L} &:= (D_{L^-} - \{s \in D_{L^-} : \text{int } s \cap R' \neq \emptyset\}) \cup \\ &\quad \{s \in \partial \tilde{N} : s \text{ ist Seite eines 1-Simplex } s' \in \partial \tilde{N} \text{ mit } s' \cap R' \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

Enthält N auf $\partial N - R$ keine internen Berührungspunkte und ist \tilde{B} kontrahierbar, so gilt:

- (1) (N, L) ist ein Indexpaar.
- (2) $\text{CH}_*(\text{inv } N) \cong H_*(N, L) \cong H_*(\tilde{N}, \tilde{L})$.

Beweis: Wir gehen in drei Schritten vor:

A. Wohldefiniertheit der Konstruktionsschritte

B. (N, L) ist ein Indexpaar

C. $H_*(N, L) \cong H_*(\tilde{N}, \tilde{L})$

Zu A: 1. Konstruktionsschritt: Da $\sigma_{\partial K}(x_0) < \infty$, $x_1 := \varphi(x_0, \sigma_{\partial K}(x_0)) \in \text{int } s_1$ und s_1 ein Schnittsimplex ist, ist $\sigma_{\text{int } s_1}(x_0) = \sigma_{\partial K}(x_0)$, und $R := \varphi(x_0, [0, \sigma_{\text{int } s_1}(x_0)])$ ist eine glatte Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^2 der Kodimension 1 mit Rand $\{x_0, x_1\}$.

2. Konstruktionsschritt, a): Für hinreichend kleines $\epsilon > 0$ besteht $B_\epsilon(x_0) \cap \partial K - \{x_0\}$ aus zwei Zusammenhangskomponenten C_1 und C_2 , von denen eine in L^- und eine in L^+ liegt. Somit kann $x'_0 \in s_0$ so gewählt werden, dass $(x_0, x'_0) \subset L^+$ ist.

2b) Nach Voraussetzung liegen x_0 und x_1 in der selben Zusammenhangskomponente von ∂K , etwa C . Damit besteht $C - \{x_0, x_1\}$ aus zwei Zusammenhangskomponenten, wovon eine x'_0 enthält.

2c) Nach Konstruktion haben R und R' die selben Randpunkte x_0 und x_1 . Diese sind wegen $R' \subset \partial K$ und $R \cap \partial K = \{x_0, x_1\}$ die beiden einzigen gemeinsamen Punkte von R und R' . Ferner sind R und R' Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^2 der Kodimension 1. Damit beranden $R \cup R'$ ein Gebiet, dessen Abschluss wir mit B bezeichnen. Zudem folgt aus $R' \subset \partial K$ und $R \cap \partial K = \{x_0, x_1\}$, dass $B \cap K$ zusammenhängend ist.

3. Konstruktionsschritt: Wir haben zu zeigen, dass \tilde{N} , \tilde{L} und \tilde{B} simpliziale Komplexe sind. Für $\tilde{N} = D_K$ ist das klar. Ist $s \in \tilde{L}$, so ist offenbar auch jede Seite von s in \tilde{L} . Sind $s_0, s_1 \in \tilde{L}$, so ist $s_0 \cap s_1$ eine Seite von s_0 und s_1 und damit auch wieder in \tilde{L} . Nach Definition ist außerdem $\tilde{L} \subset \tilde{N}$ und ist somit ein Unterkomplex von \tilde{N} . Genau wie bei \tilde{L} erkennen wir, dass \tilde{B} ein simplizialer Komplex ist.

Zu B: Wir verifizieren die definierenden Eigenschaften eines Indexpaares direkt:

1. Es ist $\text{cl}(N - L) = N$ eine isolierende Umgebung:

Weil $R \subset B \cap K$ und $L^- - (L^- \cap R') \subset K - (B \cap K)$ sind, ist $L \subset \partial N$. Auf Grund der Konstruktion sind N und L kompakt. Ist $x \in \partial N - R$, so ist $x \in L^-$ oder $x \in L^+$ (oder beides), denn $\partial N - R$ enthält nach Voraussetzung keine internen Berührungspunkte. Es folgt $\varphi(x, (-\epsilon, \epsilon)) \not\subset N$ für jedes $\epsilon > 0$. Ist $x \in R$, so gibt es nach Konstruktion ein $t > 0$ mit $\varphi(x, t) \notin N$. Insgesamt ist also $\varphi(x, \mathbb{R}) \not\subset N$ für jedes $x \in \partial N$ und $\text{cl}(N - L)$ ist eine isolierende Umgebung.

2. L ist positiv invariant in N :

Ist $x \in L^- - (L^- \cap R')$, so ist $x \in L^-$ und damit $\varphi(x, [0, t]) \subset N$ genau für $t = 0$. Falls $x \in R$ ist, ist nach Konstruktion $\varphi(x, [0, t]) \subset N$ genau dann, wenn $\varphi(x, [0, t]) \subset R \subset L$.

3. L ist Austrittsmenge:

Ist $x \in N$ aber $\varphi(x, t) \notin N$ für ein $t > 0$, so gibt es nach Konstruktion ein $t^* \in [0, t)$ mit $\varphi(x, t^*) \in L^- - (L^- \cap R')$ oder $\varphi(x, t^*) \in R$. Jeder Orbit kann damit N nur über L verlassen.

Zu C: Wir gehen wieder in drei Schritten vor: 1. $H_*(N) \cong H_*(\tilde{N})$: Es ist $B \cap K$ kontrahierbar: Da $B \cap K$ zusammenhängend ist, gäbe es sonst in $B \cap K$ eine geschlossene einfache Kurve γ , die nicht zusammenziehbar wäre. Der von γ berandete Bereich

enthielte somit einen Punkt x , der nicht in K wäre (B selbst ist nach Konstruktion ja kontrahierbar). Weil aber γ in der kontrahierbaren Menge $|\tilde{B}|$ liegt, wäre auch $x \in |\tilde{B}|$. Das ist ein Widerspruch zu $|\tilde{B}| \subset K$ und $x \notin K$. Damit ist $B \cap K = B$ kontrahierbar. Daraus und aus der Kontrahierbarkeit des Schnitts $N \cap B = R$, sowie $|\tilde{N}| = N \cup B$ folgt mit Lemma 3.1.5, dass $|\tilde{N}|$ und N den selben Homotopietyp haben. Damit sind die Homologien zueinander isomorph.

2. $H_*(L) \cong H_*(\tilde{L})$: Zunächst stellen wir fest, dass

$$|\tilde{L}| = (L^- - (L^- \cap R')) \cup R'$$

gilt.

Die beiden Mengen R und R' sind Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^2 der Kodimension 1 und haben die gemeinsamen Randpunkte x_0 und x_1 . Damit haben $R' \cup (L^- - (L^- \cap R'))$ und $R \cup (L^- - (L^- \cap R'))$ den selben Homotopietyp. Dies impliziert die Isomorphie der Homologien.

3. $H_*(N, L) \cong H_*(\tilde{N}, \tilde{L})$: Weil \tilde{L} ein Unterkomplex von \tilde{N} ist und $H_*(N) \cong H_*(\tilde{N})$, $H_*(L) \cong H_*(\tilde{L})$, folgt wie in Satz 2.2.1 mit dem Fünferlemma $H_*(N, L) \cong H_*(\tilde{N}, \tilde{L})$. \square

4.3 Rigorose Erkennung interner Berührungspunkte mit numerischen Methoden

Durch entsprechende Abschätzungen können wir hinreichende Kriterien für den Ausschluss und die Existenz interner Berührungspunkte angeben. Wir bezeichnen den Durchmesser eines $(n-1)$ -Simplex s dabei mit $\text{diam } s := \max_{x, y \in s} |x - y|$.

Lemma 4.3.1 (Vorzeichen von $\langle \ddot{\varphi}(x, 0), n_s \rangle$ auf s)

Es seien $s \in D_{\partial K}$ ein $(n-1)$ -Simplex und

$$S_3 := S_3(s) \geq \max_{\xi \in s} |D\ddot{\varphi}(\xi, 0)^T n_s|.$$

Dann gilt mit $\tilde{x} \in s$ beliebig:

- $\langle \ddot{\varphi}(\tilde{x}, 0), n_s \rangle > S_3 \text{ diam } s \implies \langle \ddot{\varphi}(x, 0), n_s \rangle > 0$ für alle $x \in s$,
- $\langle \ddot{\varphi}(\tilde{x}, 0), n_s \rangle < -S_3 \text{ diam } s \implies \langle \ddot{\varphi}(x, 0), n_s \rangle < 0$ für alle $x \in s$.

Beweis: Wir betrachten die lineare Approximation

$$\ddot{\varphi}(x, 0) = \ddot{\varphi}(x_0, 0) + D\ddot{\varphi}(\xi, 0)(x - x_0)$$

für $x, x_0 \in s$ und $\xi \in [x, x_0]$ geeignet. Ist nun $\langle \ddot{\varphi}(x_0, 0), n_s \rangle = 0$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} |\langle \ddot{\varphi}(x, 0), n_s \rangle| &= |\langle D\ddot{\varphi}(\xi, 0)(x - x_0), n_s \rangle| = |(x - x_0)^T D\ddot{\varphi}(\xi, 0)^T n_s| \\ &\leq |x - x_0| |D\ddot{\varphi}(\xi, 0)^T n_s| \leq S_3 \text{ diam } s. \end{aligned}$$

Ist also $\langle \ddot{\varphi}(\tilde{x}, 0), n_s \rangle > S_3 \text{ diam } s$ für ein $\tilde{x} \in s$, so ist $\langle \ddot{\varphi}(x, 0), n_s \rangle > 0$ für alle $x \in s$. Entsprechend folgt aus $\langle \ddot{\varphi}(\tilde{x}, 0), n_s \rangle < -S_3 \text{ diam } s$ für $\tilde{x} \in s$, dass $\langle \ddot{\varphi}(x, 0), n_s \rangle < 0$ auf ganz s . \square

Satz 4.3.2 (Ausschluss interner Berührungspunkte I'/II')

Es seien $s \in D_{\text{OK}}$ ein $(n-1)$ -Simplex und

$$S_0 := S_0(s) \geq \max_{\xi \in s} |\text{Df}(\xi)^T \mathbf{n}_s|.$$

Ist

- $|\eta_s(x)| > S_0 \text{diam } s$ für ein $x \in s$ oder
- $\langle \ddot{\varphi}(x, 0), \mathbf{n}_{s'} \rangle < -S_3(s') \text{diam } s$ für jedes $s' \in D_{\text{OK}}$ mit $x \in s'$,

so enthält $\text{int } s$ keinen Fluss-tangentialen internen Berührungspunkt.

Zusätzlich gilt: Die einzigen Kandidaten für (nicht Fluss-tangentiale) interne Berührungspunkte sind Punkte in $\partial|s|$, die Knickpunkte sind.

Beweis: Wir zeigen, dass die Kriterien des Korollars 2.3.1 für alle $x \in s$ erfüllt sind: Aus $|\eta_s(x)| > S_0 \text{diam } s$ folgt $\eta_s(x) \neq 0$ auf s , wie wir schon in Lemma 3.3.1 gesehen haben. Lemma 4.3.1 zeigt uns unmittelbar, dass das zweite Kriterium ebenfalls erfüllt ist. Die Zusatzaussage folgt direkt mit Korollar 2.3.1. \square

Satz 4.3.3 (Existenz Fluss-tangentialer interner Berührungspunkte)

Es sei $s \in D_{\text{OK}}$ ein $(n-1)$ -Simplex. Gibt es $x^+, x^- \in \text{int } s$ mit

$$\eta_s(x^+) > 0 \quad \text{und} \quad \eta_s(x^-) < 0$$

sowie ein $x \in s$ mit

$$\langle \ddot{\varphi}(x, 0), \mathbf{n}_s \rangle > S_3 \text{diam } s,$$

so enthält s einen Fluss-tangentialen internen Berührungspunkt.

Beweis: Die Kriterien des Korollars 2.3.2 sind erfüllt: Nach dem Zwischenwertsatz gibt es ein $x^* \in \text{int } s$ mit $\eta_s(x^*) = 0$. Für dieses x^* ist $\langle \ddot{\varphi}(x^*, 0), \mathbf{n}_s \rangle > 0$ wegen $\langle \ddot{\varphi}(x, 0), \mathbf{n}_s \rangle > S_3 \text{diam } s$ und des Lemmas 4.3.1. Mit Korollar 2.3.2 folgt nun, dass x^* ein interner Berührungspunkt ist. \square

Satz 4.3.4 (Ausschluss interner Berührungspunkte III', 2D)

Es seien $s, s' \in D_{\text{OK}}$ zwei 1-Simplexe mit $\{x\} = s \cap s' \neq \emptyset$. Dann gilt:

- x ist konvexer Knickpunkt und $f(x) \neq 0 \implies x$ ist kein interner Berührungspunkt.
- x ist konkaver Knickpunkt und $\eta_s(x)\eta_{s'}(x) > 0 \implies x$ ist kein interner Berührungspunkt.

Beweis: Es sei x ein konvexer Knickpunkt. Wäre $\eta_s(x) = \eta_{s'}(x) = 0$ mit $\mathbf{n}_s \neq \mathbf{n}_{s'}$, so folgte $f(x) = 0$. Mit Satz 2.3.3 folgt daher, dass x kein interner Berührungspunkt ist. Es sei x ein konkaver Knickpunkt. Wegen $\eta_s(x)\eta_{s'}(x) > 0$ haben $\eta_s(x)$ und $\eta_{s'}(x)$ das selbe Vorzeichen und die Behauptung folgt mit Satz 2.3.4. \square

Satz 4.3.5 (Ausschluss interner Berührungspunkte III', 3D)

Wir unterscheiden nach der Dimension des Schnitts $\cap s$ für 2-Simplexe $s \in D_{\partial K}$.
 A. Es seien $s, s' \in D_{\partial K}$ zwei 2-Simplexe und $s \cap s' \neq \emptyset$ ein 1-Simplex.

- Ist x ein konvexer Knickpunkt, so gilt:
 $|\eta_s(x)| > S_0(s) \text{ diam } s$ oder $|\eta_{s'}(x)| > S_0(s') \text{ diam } s'$
 $\implies \text{int}(s \cap s')$ enthält keinen internen Berührungspunkt.
- Ist x ein konkaver Knickpunkt, so gilt:
 $|\eta_s(x)| > S_0(s) \text{ diam } s$ und $|\eta_{s'}(x)| > S_0(s') \text{ diam } s'$ und $\eta_s(x)\eta_{s'}(x) > 0$
 $\implies \text{int}(s \cap s')$ enthält keinen internen Berührungspunkt.

B. Es seien $S \subset D_{\partial K}$ 2-Simplexe und $\bigcap_{s \in S} s = \{x\}$ ein 0-Simplex.

- Ist x ein konvexer Knickpunkt, so gilt:
 $\eta_s(x) > 0$ für ein $s \in S$
 $\implies x$ ist kein interner Berührungspunkt.
- Ist x ein konkaver Knickpunkt, so gilt:
 $\eta_s(x)$ ist für alle $s \in S$ einheitlich negativ oder positiv
 $\implies x$ ist kein interner Berührungspunkt.

Beweis: Der Schnitt zweier unterschiedlicher 2-Simplexe $s = [v_0, v_1, v_2]$ und $s' = [v'_0, v'_1, v'_2]$ ist leer, ein 0-Simplex oder ein 1-Simplex je nachdem wie viele der v_i mit den v'_i übereinstimmen. Ebenso erkennt man, dass der Schnitt von drei oder mehr 2-Simplexen leer oder ein 0-Simplex ist.

Im Fall A sehen wir mit Satz 3.3.1, dass für alle $x \in \text{int } s \cap s'$ die Bedingungen der Sätze 2.3.3 und 2.3.4 erfüllt sind. Daraus folgen die Aussagen.

Im Fall B können wir direkt ablesen, dass die Aussagen der beiden Sätze 2.3.3 und 2.3.4 erfüllt sind und damit die Aussagen folgen. \square

Kapitel 5

Ausgewählte Beispiele

In diesem Kapitel demonstrieren wir die Anwendung unserer Vorgehensweise an drei Beispielen. Die ersten beiden behandeln ebene Systeme, das dritte ein dreidimensionales System. Insgesamt lassen die im Rahmen dieser Arbeit gemachten Versuche eine sehr gute Anwendbarkeit unserer Vorgehensweise auf zweidimensionale Systeme erkennen. Auch im Raum gelingt uns die praktische Umsetzung (Beispiel 3). Dies gilt jedenfalls für Systeme ohne rekurrente Dynamik, etwa Systeme mit einer globalen Lyapunov-Funktion. Eine breitere Anwendbarkeit auf dreidimensionale Fälle könnte durch eine Erweiterung des Satzes 2.3.6 (Auflösung interner Berührungspunkte) erreicht werden. Die Entwicklung von Algorithmen, die den Nutzer bei der Wahl einer guten oder sogar optimalen Punktmenge P unterstützen, würde vermutlich eine beschleunigte Anwendung des Verfahrens ermöglichen. Das soll aber nicht Gegenstand dieser Arbeit sein.

5.1 Beispiel 1

Wir betrachten das System

$$\dot{x} = f(x) := \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 + (x_1 - 1)(x_1 + 1/2) \end{pmatrix}$$

und den daraus induzierten Fluss $\varphi(x, t)$. Die einzigen Gleichgewichtspunkte sind offenbar

$$\alpha_0 = (-1/2, 0) \quad \text{und} \quad \alpha_1 = (1, 0).$$

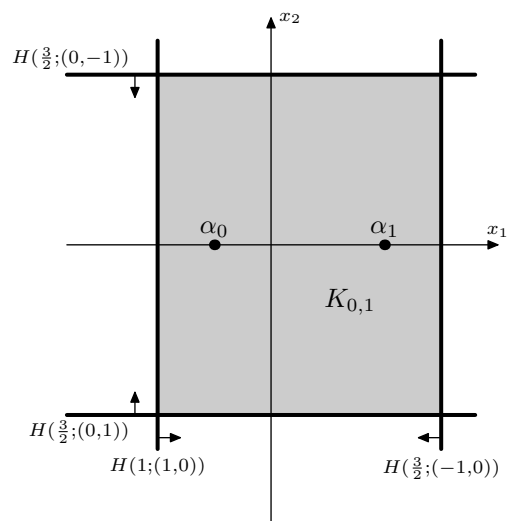
Das Polyeder $K = K_{0,1}$, das durch die Hyperebenen $H(1; (1, 0))$, $H(3/2; (-1, 0))$, $H(3/2; (0, 1))$ und $H(3/2; (0, -1))$ definiert ist (siehe nebenstehende Abbildung), enthält die beiden Gleichgewichtspunkte.

Gibt es einen Verbindungsorbit von einem Gleichgewichtspunkt α zu einem Gleichgewichtspunkt α' , so schreiben wir dafür $\alpha \rightsquigarrow \alpha'$.

Aussage 5.1.1

Für den Fluss $\varphi(x, t)$ gibt es einen Verbindungsorbit $\alpha_0 \rightsquigarrow \alpha_1$.

Zum Nachweis wenden wir folgende Strategie an:



1. Bestimmung von $\text{CH}_*(\alpha_0)$ und $\text{CH}_*(\alpha_1)$.
2. Anwendung des Algorithmus zur Bestimmung von $\text{CH}_*(\text{inv } K)$ für das oben angegebene K .
3. Nachweis der Existenz von $\alpha_0 \rightsquigarrow \alpha_1$ durch Anwendung der Summationseigenschaft und Bestimmung des Typs der invarianten Menge.

1. Bestimmung von $\text{CH}_*(\alpha_0)$ und $\text{CH}_*(\alpha_1)$:

Die Indizes von α_0 und α_1 können wir mit unserem Algorithmus berechnen oder, da beides hyperbolische Gleichgewichtspunkte sind, noch einfacher mit Satz 1.2.4. Dazu haben wir jeweils die Dimension der instabilen Mannigfaltigkeit des Gleichgewichtspunktes zu bestimmen, d.h. die Anzahl der Eigenwerte der Linearisierung Df mit positivem Realteil. Für die Linearisierung erhalten wir

$$Df(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2x_1 - 1/2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ d.h. } Df(\alpha_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3/2 & 1 \end{pmatrix}, Df(\alpha_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die instabilen Mannigfaltigkeiten von α_0 und α_1 haben damit die Dimension 2 und 1, respektive. Mit Satz 1.2.4 erhalten wir

$$\text{CH}_*(\alpha_0) \cong \dots, 0, 0, \mathbb{Z}, 0, 0 \quad \text{und} \quad \text{CH}_*(\alpha_1) \cong \dots, 0, 0, \mathbb{Z}, 0.$$

2. Anwendung des Algorithmus zur Bestimmung von $\text{CH}_*(\text{inv } K)$:

Zur Anwendung des Algorithmus A.6 haben wir zunächst die Schrankenfunktionen $S_0(\mathbf{F})$, $S_1(\mathbf{F})$ und $S_3(\mathbf{F})$ zu bestimmen (vergleiche Lemma 3.3.1, Lemma 3.3.2 und Lemma 4.3.1):

Haben wir ein P festgelegt, so sei $x \in \text{cl } F = [a, b]$ mit $\mathbf{F} = (F; n_{\mathbf{F}}) \in \mathcal{F}_1(p)$ und $p \in P$. Wir erhalten

$$Df(x)^T n_{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} 0 & 2x_1 - 1/2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_2(2x_1 - 1/2) \\ n_1 + n_2 \end{pmatrix}$$

und damit auch $S_0(\mathbf{F})$:

$$|Df(x)^T n_{\mathbf{F}}| \leq \left| \begin{pmatrix} n_2(2 \max(|a_1|, |b_1|) + 1/2) \\ n_1 + n_2 \end{pmatrix} \right| =: S_0(\mathbf{F}),$$

wobei $a = (a_1, a_2)$ und $b = (b_1, b_2)$.

Zu $S_1(\mathbf{F})$: Der Einheitsvektor $v := (-n_2, n_1)^T$ spannt die Seite F auf, da $v \perp n_{\mathbf{F}}$ ist. Damit gilt

$$D\nabla\eta_{\mathbf{F}}(x)v = D \begin{pmatrix} n_2(2x_1 - 1/2) \\ n_1 + n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -n_2 \\ n_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2n_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -n_2 \\ n_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2n_2^2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

und es folgt $S_1(\mathbf{F})$:

$$S_1(\mathbf{F}) := \max_{x \in \text{cl } F} |(D\nabla\eta_{\mathbf{F}}(x)v, v)| = 2|n_2|^3.$$

Für $S_3(\mathbf{F})$ müssen wir schließlich noch $\ddot{\varphi}(x, 0)$ bestimmen. Es ist

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 &= x_2 + (x_1 - 1)(x_1 + 1/2), \\ \ddot{x}_2 &= \dot{x}_2 + \dot{x}_1(x_1 + 1/2) + (x_1 - 1)\dot{x}_1 \\ &= x_2 + (x_1 - 1)(x_1 + 1/2) + x_2(x_1 + 1/2) + x_2(x_1 - 1) \\ &= \frac{1}{2}x_2 + 2x_1x_2 + (x_1 - 1)(x_1 + 1/2)\end{aligned}$$

und weiter

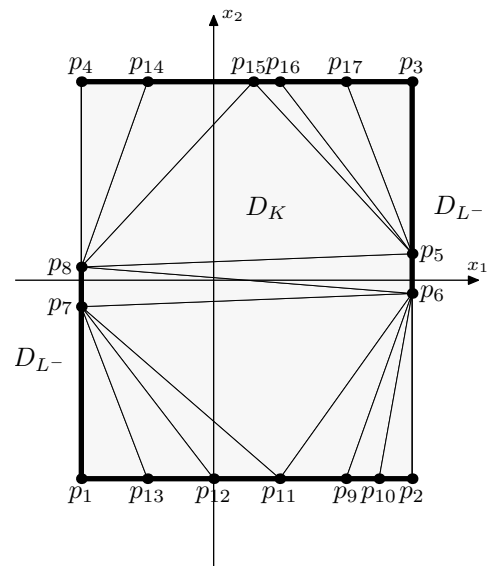
$$D\ddot{\varphi}(x, 0)^T = \begin{pmatrix} 2x_1 - 1/2 & 2x_2 + 2x_1 - 1/2 \\ 1 & 1/2 + 2x_1 \end{pmatrix}.$$

Das gibt uns $S_3(s)$, wobei $s = [a, b]$, $x_{1\max} := \max(|a_1|, |b_1|)$, $x_{2\max} := \max(|a_2|, |b_2|)$ und $n_s = (n_1, n_2)^T$:

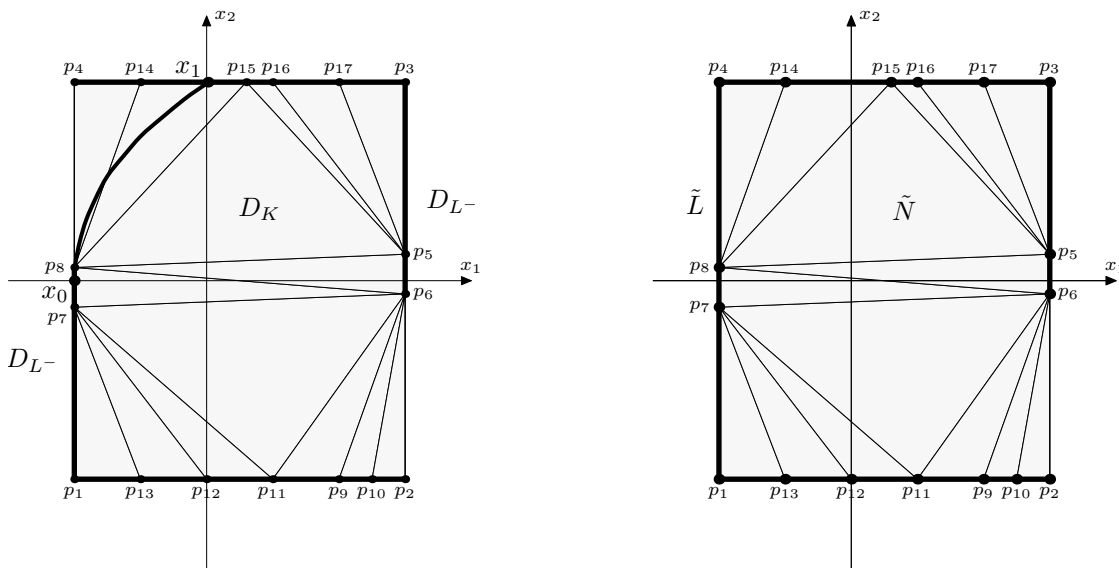
$$\begin{aligned}|D\ddot{\varphi}(x, 0)^T n_s| &= \left| \begin{pmatrix} (2x_1 - 1/2)n_1 + (2x_2 + 2x_1 - 1/2)n_2 \\ n_1 + n_2(1/2 + 2x_1) \end{pmatrix} \right| \\ &\leq \left| \begin{pmatrix} 2(x_{1\max} + 1/2)|n_1 + n_2| + 2|n_2 x_{2\max}| \\ |n_1| + |n_2|(2x_{1\max} + 1/2) \end{pmatrix} \right| =: S_3(s).\end{aligned}$$

Mit der Punktmenge $P = \{p_1, \dots, p_{17}\}$ wie angegeben starten wir den Algorithmus A.6. Die Kontrahierbarkeits-Bedingungen können verifiziert werden, und es werden die abgebildeten Triangulierungen D_K und D_{L^-} berechnet.

p_1	$(-1.0, -1.5)$	p_{11}	$(0.5, -1.5)$
p_2	$(1.5, -1.5)$	p_{12}	$(0.0, -1.5)$
p_3	$(1.5, 1.5)$	p_{13}	$(-0.5, -1.5)$
p_4	$(-1.0, 1.5)$	p_{14}	$(-0.5, 1.5)$
p_5	$(1.5, 0.2)$	p_{15}	$(0.3, 1.5)$
p_6	$(1.5, -0.1)$	p_{16}	$(0.5, 1.5)$
p_7	$(-1.0, -0.2)$	p_{17}	$(1.0, 1.5)$
p_8	$(-1.0, 0.1)$		
p_9	$(1.0, -1.5)$		
p_{10}	$(1.25, -1.5)$		



Ferner wird festgestellt, dass das Simplex $s_0 := [p_7, p_8] \in D_{\partial K}$ einen internen Berührungspunkt enthält. Bei allen anderen Simplexen in $D_{\partial K}$ kann ein interner Berührungspunkt ausgeschlossen werden. Für den internen Berührungspunkt x_0 wird näherungsweise $\tilde{x}_0 := (-1.0, 0.0)$ berechnet. Der Orbit von x_0 trifft in x_1 auf das Simplex $[p_{14}, p_{15}]$. Der Punkt x_1 wird näherungsweise mit dem Runge-Kutta-Fehlberg Verfahren als $\tilde{x}_1 := (0.01, 1.50)$ bestimmt (vergleiche Abbildung links). Der simpliziale Komplex \tilde{L} aus Satz 2.3.6 ergibt sich wie rechts unten abgebildet.



Für die Homologie von \$(\tilde{N}, \tilde{L})\$ und damit den Conley-Index von \$\text{inv } K\$ ergibt sich

$$CH_*(\text{inv } K) \cong H_*(\tilde{N}, \tilde{L}) \cong \dots, 0, 0.$$

3. Nachweis der Existenz von \$\alpha_0 \rightsquigarrow \alpha_1\$:

Nun gilt

$$CH_*(\alpha_0) \oplus CH_*(\alpha_1) \cong \dots, 0, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}, 0 \neq \dots, 0, 0, 0, 0 \cong CH_*(\text{inv } K).$$

Damit existiert nach der Summationseigenschaft (Korollar 1.2.6) außer \$\alpha_0, \alpha_1\$ noch eine weitere isolierte invariante Menge \$S\$ in \$K\$. Mit dem Kriterium von Bendixson können periodische Orbits oder homokline Verbindungsorbits ausgeschlossen werden, denn \$\text{div } f = 1 \neq 0\$ auf \$\mathbb{R}^2\$. Da die Dimension der instabilen Mannigfaltigkeit von \$\alpha_0\$ gleich 2 ist, kann es sich bei \$S\$ nur um einen Verbindungsorbit von \$\alpha_0\$ nach \$\alpha_1\$ handeln.

5.2 Beispiel 2

Der durch das Differentialgleichungs-System

$$\dot{x} = f(x) := \begin{pmatrix} x_2 - x_1^2 + 2 \\ 2x_2^2 - 2x_1x_2 \end{pmatrix} \tag{*}$$

induzierte Fluss \$\varphi(x, t)\$ hat genau vier Gleichgewichtspunkte:

$$\alpha_0 = (-\sqrt{2}, 0), \quad \alpha_1 = (\sqrt{2}, 0), \quad \alpha_2 = (-1, -1), \quad \alpha_3 = (2, 2).$$

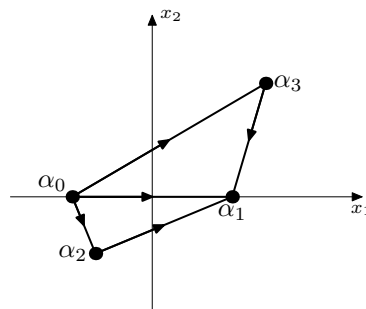
Wir wollen für (*) die folgende Aussage beweisen:

Aussage 5.2.1

Für das System (*) gibt es folgende Verbindungsorbits:

$$\alpha_0 \rightsquigarrow \alpha_1, \alpha_0 \rightsquigarrow \alpha_2, \alpha_0 \rightsquigarrow \alpha_3, \alpha_2 \rightsquigarrow \alpha_1, \alpha_3 \rightsquigarrow \alpha_1$$

(Vergleiche auch nebenstehende Skizze.)

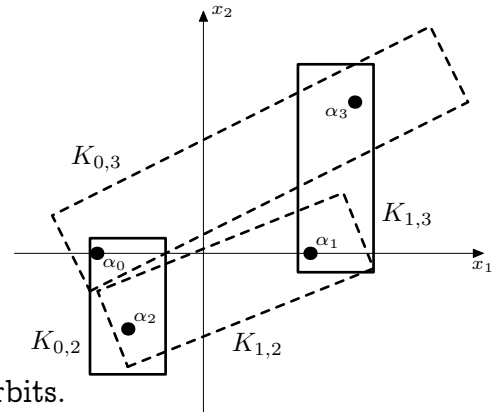


Für den Nachweis gehen wir wie folgt vor:

1. Existenz des Verbindungsorbits $\alpha_0 \rightsquigarrow \alpha_1$.
2. Bestimmung von $\text{CH}_*(\alpha_0)$, $\text{CH}_*(\alpha_1)$, $\text{CH}_*(\alpha_2)$ und $\text{CH}_*(\alpha_3)$.
3. Bestimmung der Indizes für Gleichgewichtspunkt-Paare:

Vorgabe von Polyedern $K_{0,2}$, $K_{0,3}$, $K_{1,2}$ und $K_{1,3}$, die die Paare (α_0, α_2) , (α_0, α_3) , (α_1, α_2) und (α_1, α_3) , respektive, enthalten und sonst keine weiteren Gleichgewichtspunkte (vergleiche nebenstehende Abbildung).

Anwendung des Algorithmus und damit Bestimmung der Indizes der maximalen invarianten Mengen der $K_{i,j}$.



4. Nachweis der Existenz der Verbindungsorbits.

1. Existenz des Verbindungsorbits $\alpha_0 \rightsquigarrow \alpha_1$:

Dies kann man direkt einsehen: Für $x_2 = 0$ sind $\dot{x}_2 = 0$ und $\dot{x}_1 = 2 - x_1^2$. Damit ist $\dot{x}_1 > 0$ genau für $x_1 \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ und es gibt einen Verbindungsorbit von α_0 nach α_1 .

2. Bestimmung von $\text{CH}_*(\alpha_0)$, $\text{CH}_*(\alpha_1)$, $\text{CH}_*(\alpha_2)$ und $\text{CH}_*(\alpha_3)$:

Da hier alle Gleichgewichtspunkte hyperbolische Gleichgewichtspunkte sind, können wir den Index jeweils mit Satz 1.2.4 über die Dimension der instabilen Mannigfaltigkeit bestimmen. Es gilt:

$$Df(x) = \begin{pmatrix} -2x_1 & 1 \\ -2x_2 & 4x_2 - 2x_1 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgen

$$\begin{aligned} Df(\alpha_0) &= \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix}, & Df(\alpha_1) &= \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} & 1 \\ 0 & -2\sqrt{2} \end{pmatrix}, \\ Df(\alpha_2) &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, & Df(\alpha_3) &= \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Für die Conley-Indizes erhalten wir somit

$$\begin{aligned} \text{CH}_*(\alpha_0) &\cong \dots, 0, \mathbb{Z}, 0, 0, & \text{CH}_*(\alpha_1) &\cong \dots, 0, 0, 0, \mathbb{Z}, \\ \text{CH}_*(\alpha_2) &\cong \dots, 0, 0, \mathbb{Z}, 0, & \text{CH}_*(\alpha_3) &\cong \dots, 0, 0, \mathbb{Z}, 0. \end{aligned}$$

3. Bestimmung der Indizes für Gleichgewichtspunkt-Paare:

Wir geben die Polyeder der Abbildung entsprechend wie folgt vor:

$K_{0,2}$:	$H(1.5; (1, 0)),$	$H(-0.5; (-1, 0)),$	$H(1.6; (0, 1)),$	$H(0.2; (0, -1))$
$K_{0,3}$:	$H(3.5; (2, 1)),$	$H(9; (-2, -1)),$	$H(-0.5; (-1, 2)),$	$H(3; (1, -2))$
$K_{1,2}$:	$H(4; (2.5, 1)),$	$H(5.425; (-2.5, -1)),$	$H(2.75; (-1, 2.5)),$	$H(0.15; (1, -2.5))$
$K_{1,3}$:	$H(-1.25; (1, 0)),$	$H(2.25; (-1, 0)),$	$H(0.25; (0, 1)),$	$H(2.5; (0, -1))$

Bestimmung der Schrankenfunktionen gemäß Lemma 3.3.1, Lemma 3.3.2 und Lemma 4.3.1:

Es sei $P \subset \mathbb{R}^n$ endlich. Wir haben

$$Df(x)^T n_F = \begin{pmatrix} -2x_1 & -2x_2 \\ 1 & 4x_2 - 2x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_1 n_1 - 2x_2 n_2 \\ n_1 + n_2(4x_2 - 2x_1) \end{pmatrix}.$$

Daher definieren wir für $F \in \mathcal{F}_1(p)$:

$$S_0(F) := \left| \begin{pmatrix} \max_{x \in \text{cl} F} |2x_1 n_1 + 2x_2 n_2| \\ \max_{x \in \text{cl} F} |n_1 + n_2(4x_2 - 2x_1)| \end{pmatrix} \right|.$$

Wir erhalten mit $n_F = (n_1, n_2)^T$

$$D\nabla\eta_F(x) = D \begin{pmatrix} -2x_1 n_1 - 2x_2 n_2 \\ n_1 + n_2(4x_2 - 2x_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2n_1 & -2n_2 \\ -2n_2 & 4n_2 \end{pmatrix}.$$

Mit $v = (-n_2, n_1)^T$, was offenbar die Seite $F = (F; n_F) \in \mathcal{F}_1(p)$ aufspannt, erhalten wir

$$\langle D\nabla\eta_F(x)v, v \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2n_1 n_2 - 2n_1 n_2 \\ 2n_2^2 + 4n_1 n_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -n_2 \\ n_1 \end{pmatrix} \right\rangle = 2n_1 n_2^2 + 4n_1^2 n_2 =: S_1(F).$$

Schließlich haben wir noch $S_3(n_s)$, $n_s = (n_1, n_2)^T$ zu bestimmen. Es ist

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= \dot{x}_2 - 2x_1 \dot{x}_1 \\ &= 2x_2^2 - 2x_1 x_2 - 2x_1(x_2 - x_1^2 + 2) = 2x_2^2 - 4x_1 x_2 + 2x_1^3 - 4x_1, \\ \ddot{x}_2 &= 4x_2 \dot{x}_2 - 2(\dot{x}_1 x_2 + x_1 \dot{x}_2) \\ &= 4x_2(2x_2^2 - 2x_1 x_2) - 2((x_2 - x_1^2 + 2)x_2 + x_1(2x_2^2 - 2x_1 x_2)) \\ &= 8x_2^3 - 12x_1 x_2^2 + 6x_1^2 x_2 - 2x_2^2 - 4x_2. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$D\ddot{\phi}(x, 0) = \begin{pmatrix} -4x_2 + 6x_1^2 - 4 & 4x_2 - 4x_1 \\ -12x_2^2 + 12x_1 x_2 & 24x_2^2 - 24x_1 x_2 + 6x_1^2 - 4x_2 - 4 \end{pmatrix},$$

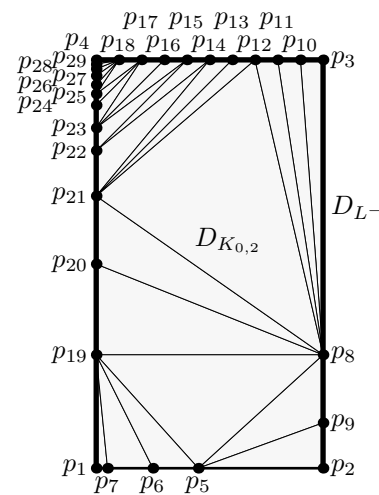
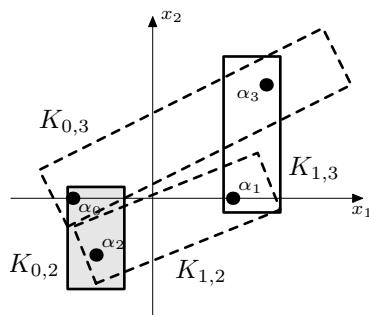
weshalb wir für $s \in D_{\partial K}$ und n_s definieren:

$$S_3(s) := \left(\begin{pmatrix} \max_{x \in s} |n_1(-4x_2 + 6x_1^2 - 4) + n_2(-12x_2^2 + 12x_1 x_2)| \\ \max_{x \in s} |n_1(4x_2 - 4x_1) + n_2(24x_2^2 - 24x_1 x_2 + 6x_1^2 - 4x_2 - 4)| \end{pmatrix} \right).$$

Nun wählen wir jeweils Punktfolgen $P(K_{i,j})$ für die Delaunay-Triangulierung wie nachfolgend angegeben und wenden den Algorithmus an. So erhalten wir die jeweils abgebildeten Triangulierungen $D_{K_{i,j}}$, D_{L^-} :

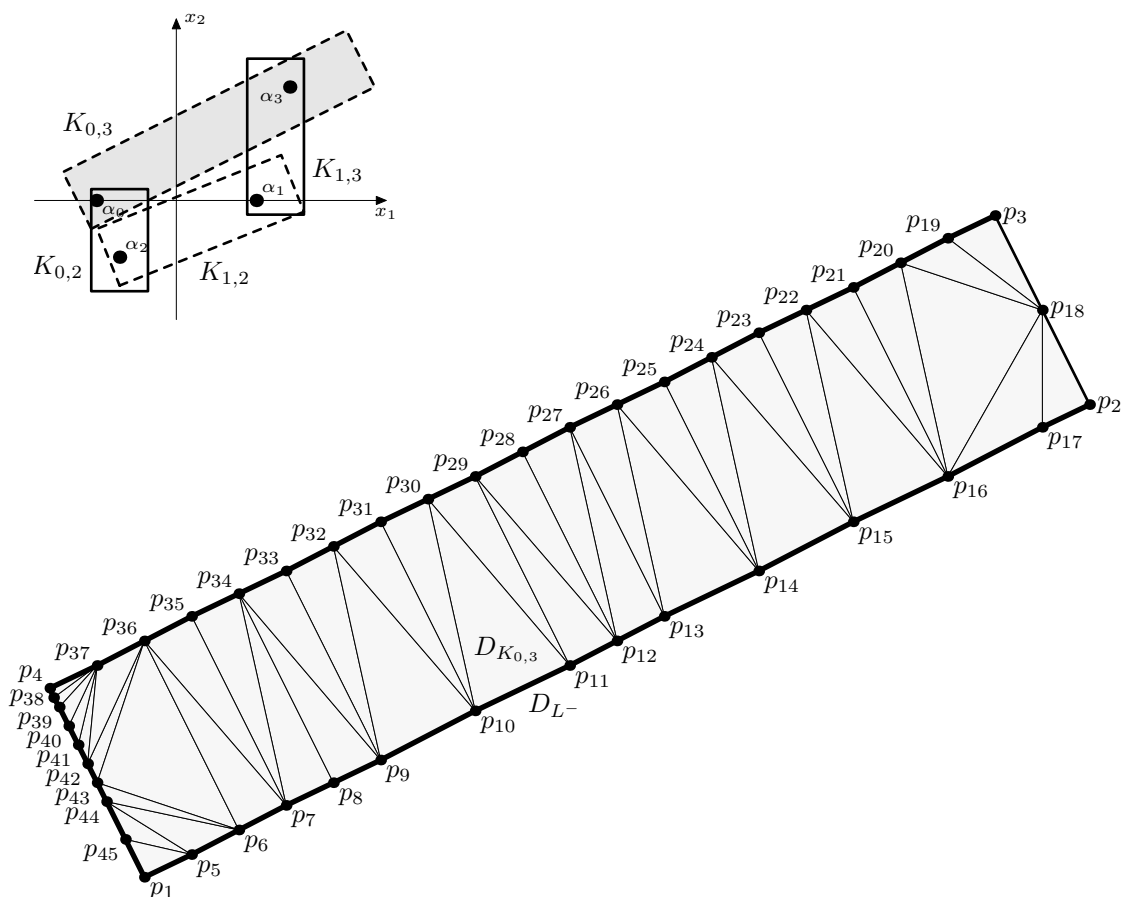
1. Polyeder $K_{0,2}$: Punktmenge P und induzierte Triangulierungen $D_{K_{0,2}}$, D_{L^-} :

p_1	$(-1.5000, -1.6000)$	p_2	$(-0.5000, -1.6000)$	p_3	$(-0.5000, 0.2000)$																										
p_4	$(-1.5000, 0.2000)$	p_5	$(-1.0500, -1.6000)$	p_6	$(-1.2500, -1.6000)$																										
p_7	$(-1.4500, -1.6000)$	p_8	$(-0.5000, -1.1000)$	p_9	$(-0.5000, -1.4000)$																										
p_{10}	$(-0.6000, 0.2000)$	p_{11}	$(-0.7000, 0.2000)$	p_{12}	$(-0.8000, 0.2000)$																										
p_{13}	$(-0.9000, 0.2000)$	p_{14}	$(-1.0000, 0.2000)$	p_{15}	$(-1.1000, 0.2000)$																										
p_{16}	$(-1.2000, 0.2000)$ </tr <tr> <td>p_{17}</td> <td>$(-1.3000, 0.2000)$</td> <td>p_{18}</td> <td>$(-1.4000, 0.2000)$</td> <td>p_{19}</td> <td>$(-1.5000, -1.1000)$</td> </tr> <tr> <td>p_{20}</td> <td>$(-1.5000, -0.7000)$</td> <td>p_{21}</td> <td>$(-1.5000, -0.4000)$</td> <td>p_{22}</td> <td>$(-1.5000, -0.2000)$</td> </tr> <tr> <td>p_{23}</td> <td>$(-1.5000, -0.1000)$</td> <td>p_{24}</td> <td>$(-1.5000, 0.0000)$</td> <td>p_{25}</td> <td>$(-1.5000, 0.0500)$</td> </tr> <tr> <td>p_{26}</td> <td>$(-1.5000, 0.0900)$</td> <td>p_{27}</td> <td>$(-1.5000, 0.1300)$</td> <td>p_{28}</td> <td>$(-1.5000, 0.1600)$</td> </tr> <tr> <td>p_{29}</td> <td>$(-1.5000, 0.1800)$</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr>	p_{17}	$(-1.3000, 0.2000)$	p_{18}	$(-1.4000, 0.2000)$	p_{19}	$(-1.5000, -1.1000)$	p_{20}	$(-1.5000, -0.7000)$	p_{21}	$(-1.5000, -0.4000)$	p_{22}	$(-1.5000, -0.2000)$	p_{23}	$(-1.5000, -0.1000)$	p_{24}	$(-1.5000, 0.0000)$	p_{25}	$(-1.5000, 0.0500)$	p_{26}	$(-1.5000, 0.0900)$	p_{27}	$(-1.5000, 0.1300)$	p_{28}	$(-1.5000, 0.1600)$	p_{29}	$(-1.5000, 0.1800)$				
p_{17}	$(-1.3000, 0.2000)$	p_{18}	$(-1.4000, 0.2000)$	p_{19}	$(-1.5000, -1.1000)$																										
p_{20}	$(-1.5000, -0.7000)$	p_{21}	$(-1.5000, -0.4000)$	p_{22}	$(-1.5000, -0.2000)$																										
p_{23}	$(-1.5000, -0.1000)$	p_{24}	$(-1.5000, 0.0000)$	p_{25}	$(-1.5000, 0.0500)$																										
p_{26}	$(-1.5000, 0.0900)$	p_{27}	$(-1.5000, 0.1300)$	p_{28}	$(-1.5000, 0.1600)$																										
p_{29}	$(-1.5000, 0.1800)$																														



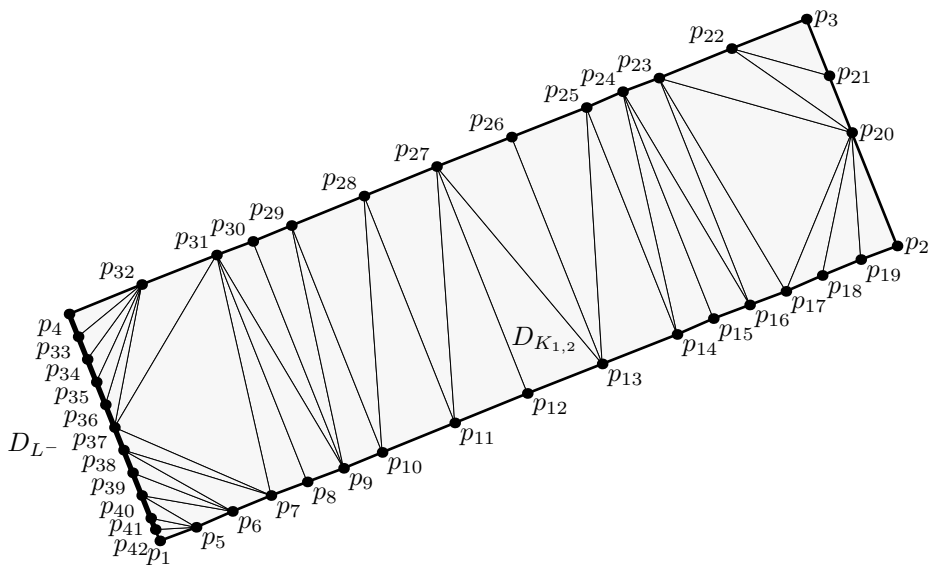
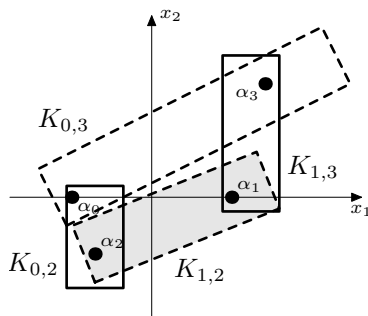
2. Polyeder $K_{0,3}$: Punktmenge P und induzierte Triangulierungen $D_{K_{0,3}}$, D_{L^-} :

p_1	(-1.5000, -0.5000)	p_2	(3.5000, 2.0000)	p_3	(3.0000, 3.0000)
p_4	(-2.0000, 0.5000)	p_5	(-1.2500, -0.3750)	p_6	(-1.0000, -0.2500)
p_7	(-0.7500, -0.1250)	p_8	(-0.5000, 0.0000)	p_9	(-0.2500, 0.1250)
p_{10}	(0.2500, 0.3750)	p_{11}	(0.7500, 0.6250)	p_{12}	(1.0000, 0.7500)
p_{13}	(1.2500, 0.8750)	p_{14}	(1.7500, 1.1250)	p_{15}	(2.2500, 1.3750)
p_{16}	(2.7500, 1.6250)	p_{17}	(3.2500, 1.8750)	p_{18}	(3.2500, 2.5000)
p_{19}	(2.7500, 2.8750)	p_{20}	(2.5000, 2.7500)	p_{21}	(2.2500, 2.6250)
p_{22}	(2.0000, 2.5000)	p_{23}	(1.7500, 2.3750)	p_{24}	(1.5000, 2.2500)
p_{25}	(1.2500, 2.1250)	p_{26}	(1.0000, 2.0000)	p_{27}	(0.7500, 1.8750)
p_{28}	(0.5000, 1.7500)	p_{29}	(0.2500, 1.6250)	p_{30}	(0.0000, 1.5000)
p_{31}	(-0.2500, 1.3750)	p_{32}	(-0.5000, 1.2500)	p_{33}	(-0.7500, 1.1250)
p_{34}	(-1.0000, 1.0000)	p_{35}	(-1.2500, 0.8750)	p_{36}	(-1.5000, 0.7500)
p_{37}	(-1.7500, 0.6250)	p_{38}	(-1.9750, 0.4500)	p_{39}	(-1.9500, 0.4000)
p_{40}	(-1.9000, 0.3000)	p_{41}	(-1.8500, 0.2000)	p_{42}	(-1.8000, 0.1000)
p_{43}	(-1.7500, 0.0000)	p_{44}	(-1.7000, -0.1000)	p_{45}	(-1.6000, -0.3000)



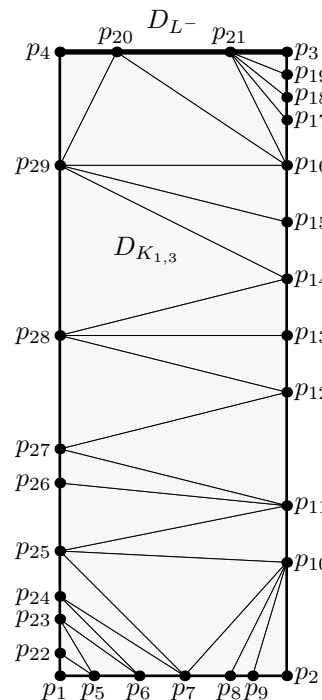
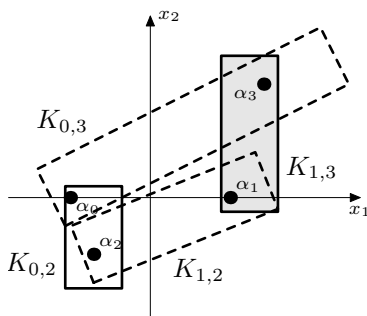
3. Polyeder $K_{1,2}$: Punktmenge P und induzierte Triangulierungen $D_{K_{1,2}}, D_{L^-}$:

p_1	$(-1.0000, -1.5000)$	p_2	$(2.2500, -0.2000)$	p_3	$(1.8500, 0.8000)$
p_4	$(-1.4000, -0.5000)$	p_5	$(-0.8375, -1.4350)$	p_6	$(-0.6750, -1.3700)$
p_7	$(-0.5125, -1.3050)$	p_8	$(-0.3500, -1.2400)$	p_9	$(-0.1875, -1.1750)$
p_{10}	$(-0.0250, -1.1100)$	p_{11}	$(0.3000, -0.9800)$	p_{12}	$(0.6250, -0.8500)$
p_{13}	$(0.9500, -0.7200)$	p_{14}	$(1.2750, -0.5900)$	p_{15}	$(1.4375, -0.5250)$
p_{16}	$(1.6000, -0.4600)$	p_{17}	$(1.7625, -0.3950)$	p_{18}	$(1.9250, -0.3300)$
p_{19}	$(2.0875, -0.2650)$	p_{20}	$(2.0500, 0.3000)$	p_{21}	$(1.9500, 0.5500)$
p_{22}	$(1.5250, 0.6700)$	p_{23}	$(1.2000, 0.5400)$	p_{24}	$(1.0375, 0.4750)$
p_{25}	$(0.8750, 0.4100)$	p_{26}	$(0.5500, 0.2800)$	p_{27}	$(0.2250, 0.1500)$
p_{28}	$(-0.1000, 0.0200)$	p_{29}	$(-0.4250, -0.1100)$	p_{30}	$(-0.5875, -0.1750)$
p_{31}	$(-0.7500, -0.2400)$	p_{32}	$(-1.0750, -0.3700)$	p_{33}	$(-1.3600, -0.6000)$
p_{34}	$(-1.3200, -0.7000)$	p_{35}	$(-1.2800, -0.8000)$	p_{36}	$(-1.2400, -0.9000)$
p_{37}	$(-1.2000, -1.0000)$	p_{38}	$(-1.1600, -1.1000)$	p_{39}	$(-1.1200, -1.2000)$
p_{40}	$(-1.0800, -1.3000)$	p_{41}	$(-1.0400, -1.4000)$	p_{42}	$(-1.0200, -1.4500)$



4. Polyeder $K_{1,3}$: Punktmenge P und induzierte Triangulierungen $D_{K_{1,3}}$, D_{L^-} :

p_1	(1.2500, -0.2500)	p_2	(2.2500, -0.2500)	p_3	(2.2500, 2.5000)
p_4	(1.2500, 2.5000)	p_5	(1.4000, -0.2500)	p_6	(1.6000, -0.2500)
p_7	(1.8000, -0.2500)	p_8	(2.0000, -0.2500)	p_9	(2.1000, -0.2500)
p_{10}	(2.2500, 0.2500)	p_{11}	(2.2500, 0.5000)	p_{12}	(2.2500, 1.0000)
p_{13}	(2.2500, 1.2500)	p_{14}	(2.2500, 1.5000)	p_{15}	(2.2500, 1.7500)
p_{16}	(2.2500, 2.0000)	p_{17}	(2.2500, 2.2000)	p_{18}	(2.2500, 2.3000)
p_{19}	(2.2500, 2.4000)	p_{20}	(1.5000, 2.5000)	p_{21}	(2.0000, 2.5000)
p_{22}	(1.2500, -0.1500)	p_{23}	(1.2500, 0.0000)	p_{24}	(1.2500, 0.1000)
p_{25}	(1.2500, 0.3000)	p_{26}	(1.2500, 0.6000)	p_{27}	(1.2500, 0.7500)
p_{28}	(1.2500, 1.2500)	p_{29}	(1.2500, 2.0000)		



In allen vier Fällen können mittels des Algorithmus A.6 die Kontrahierbarkeits-Bedingungen verifiziert, interne Berührungspunkte ausgeschlossen und die Indizes berechnet werden:

$$\begin{aligned} \text{CH}_*(\text{inv } K_{0,2}) &\cong \dots, 0, 0, 0, 0, & \text{CH}_*(\text{inv } K_{0,3}) &\cong \dots, 0, 0, 0, 0, \\ \text{CH}_*(\text{inv } K_{1,2}) &\cong \dots, 0, 0, 0, 0, & \text{CH}_*(\text{inv } K_{1,3}) &\cong \dots, 0, 0, 0, 0. \end{aligned}$$

4. Existenz der Verbindungsorbits:

Nun vergleichen wir jeweils den Index der maximalen invarianten Menge der Polyeder mit der direkten Summe der Indizes der jeweils beiden enthaltenen Gleichgewichtspunkte. Es gilt

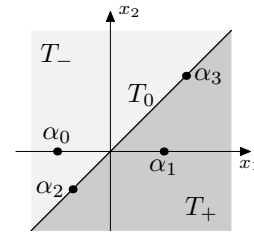
$$\begin{aligned} \text{CH}_*(\text{inv } K_{0,2}) &\cong \dots, 0, 0, 0, 0, 0 \neq \dots, 0, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}, 0 \cong \text{CH}_*(\alpha_0) \oplus \text{CH}_*(\alpha_2) \\ \text{CH}_*(\text{inv } K_{0,3}) &\cong \dots, 0, 0, 0, 0, 0 \neq \dots, 0, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}, 0 \cong \text{CH}_*(\alpha_0) \oplus \text{CH}_*(\alpha_3) \\ \text{CH}_*(\text{inv } K_{1,2}) &\cong \dots, 0, 0, 0, 0, 0 \neq \dots, 0, 0, \mathbb{Z}, \mathbb{Z} \cong \text{CH}_*(\alpha_2) \oplus \text{CH}_*(\alpha_1) \\ \text{CH}_*(\text{inv } K_{1,3}) &\cong \dots, 0, 0, 0, 0, 0 \neq \dots, 0, 0, \mathbb{Z}, \mathbb{Z} \cong \text{CH}_*(\alpha_3) \oplus \text{CH}_*(\alpha_1) \end{aligned}$$

Mit der Summationseigenschaft (Korollar 1.2.6) folgt damit, dass jedes der Polyeder $K_{0,2}$, $K_{0,3}$, $K_{1,2}$ und $K_{1,3}$ außer den beiden Gleichgewichtspunkten noch eine weitere isolierte invariante Menge enthält. Wir beweisen nun, dass es sich jeweils um einen heteroklinen Verbindungsorbit handelt.

Lemma 5.2.2

Es seien

$$\begin{aligned} T_- &:= \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 < x_2\}, \\ T_+ &:= \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 > x_2\}, \\ T_0 &:= \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 = x_2\}. \end{aligned}$$



Wechselt ein Orbit von T_- nach T_+ , so bleibt er in T_+ und umgekehrt. Genauer gilt:

$$(1) \quad x \in T_- \text{ mit } \varphi(x, t^*) \in T_+, t^* > 0 \implies \varphi(x, t) \in T_+ \text{ für alle } t > t^*.$$

$$(2) \quad x \in T_+ \text{ mit } \varphi(x, t^*) \in T_-, t^* > 0 \implies \varphi(x, t) \in T_- \text{ für alle } t > t^*.$$

Beweis: Es gilt für $x_1 = x_2$:

$$\dot{x}_1 > 0 \quad \text{für } -1 < x_1 < 2, \quad (5.1)$$

$$\dot{x}_1 = 0 \quad \text{für } x_1 = -1 \text{ oder } x_1 = 2, \quad (5.2)$$

$$\dot{x}_1 < 0 \quad \text{für } x_1 < -1 \text{ oder } x_1 > 2. \quad (5.3)$$

Ferner haben wir

$$\dot{x}_2 > 0 \quad \text{für } x \in T_- \text{ mit } x_2 > 0, \quad (5.4)$$

$$\dot{x}_2 < 0 \quad \text{für } x \in T_- \text{ mit } x_2 < 0, \quad (5.5)$$

$$\dot{x}_2 < 0 \quad \text{für } x \in T_+ \text{ mit } x_2 > 0, \quad (5.6)$$

$$\dot{x}_2 > 0 \quad \text{für } x \in T_+ \text{ mit } x_2 < 0. \quad (5.7)$$

Es seien nun $x \in T_-$, $\varphi(x, t^*) \in T_+$ und $y := \varphi(x, \hat{t}) \in T_0$ mit $\hat{t} \in (0, t^*)$. Wegen (1)-(3) gilt dann $-1 < y_1 < 2$ und, mit (6) und (7) folgt, dass der Orbit in T_+ bleibt. Das zeigt die Aussage (1).

Aussage (2) folgt ganz analog. \square

Jetzt können wir beweisen, dass die $K_{i,j}$ jeweils einen Verbindungsorbit enthalten. Da $\operatorname{div} f = 4x_2 - 4x_1 \neq 0$ auf T_- und T_+ ist, enthalten nach dem Bendixson-Kriterium weder T_- noch T_+ einen periodischen Orbit oder einen homoklinen Verbindungsorbit. Wegen Lemma 5.2.2 gibt es damit auch keinen periodischen Orbit in $T_- \cup T_+$. Da aber jedes $K_{i,j}$ außer den beiden Gleichgewichtspunkten eine weitere isolierte invariante Menge enthält, muss das jeweils ein Verbindungsorbit sein.

5.3 Beispiel 3

Zu der Funktion $V: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $x \mapsto x_2 - x_3 + x_2x_3 - x_1^2x_2 + x_1^2x_3$ betrachten wir das Gradientensystem:

$$\dot{x} = f(x) := \nabla V(x) = \begin{pmatrix} 2x_1(x_3 - x_2) \\ 1 + x_3 - x_1^2 \\ -1 + x_2 + x_1^2 \end{pmatrix}.$$

Wie üblich bezeichnen wir mit $\varphi(x, t)$ den zugehörigen Fluss. Offenbar gibt es genau drei Gleichgewichtspunkte:

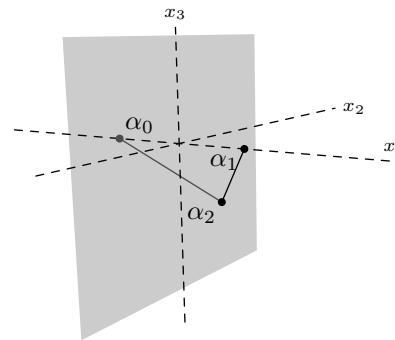
$$\alpha_0 = (-1, 0, 0), \quad \alpha_1 = (1, 0, 0), \quad \alpha_2 = (0, 1, -1).$$

Wir zeigen die folgende Aussage:

Aussage 5.3.1

Für den Fluss $\varphi(x, t)$ gilt:

- (1) Es gibt Verbindungsorbits $\alpha_0 \rightsquigarrow \alpha_2$ und $\alpha_1 \rightsquigarrow \alpha_2$.
- (2) Zwischen α_0 und α_1 gibt es keinen Verbindungsorbit.



Zum Nachweis der Aussage gehen wir in den folgenden Schritten vor:

1. Bestimmung von $CH_*(\alpha_0)$, $CH_*(\alpha_1)$ und $CH_*(\alpha_2)$.
2. Bestimmung von $CH_*(\text{inv } K_{0,1})$ für ein Polyeder $K_{0,1}$, das α_0 und α_1 enthält, nicht aber α_2 .
3. Anwendung des Algorithmus zur Bestimmung von $CH_*(\text{inv } K_{0,1,2})$ für ein Polyeder $K_{0,1,2}$, das $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ enthält.
4. Nachweis der Existenz von $\alpha_0 \rightsquigarrow \alpha_2$ und $\alpha_1 \rightsquigarrow \alpha_2$ durch Anwendung der Summationseigenschaft auf die berechneten Indizes.

1. Bestimmung von $CH_*(\alpha_0)$, $CH_*(\alpha_1)$ und $CH_*(\alpha_2)$:

Die Indizes der Gleichgewichtspunkte können wir mit Satz 1.2.4 bestimmen. Dazu berechnen wir $Df(x)$:

$$Df(x) = \begin{pmatrix} 2(x_3 - x_2) & -2x_1 & 2x_1 \\ -2x_1 & 0 & 1 \\ 2x_1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und damit}$$

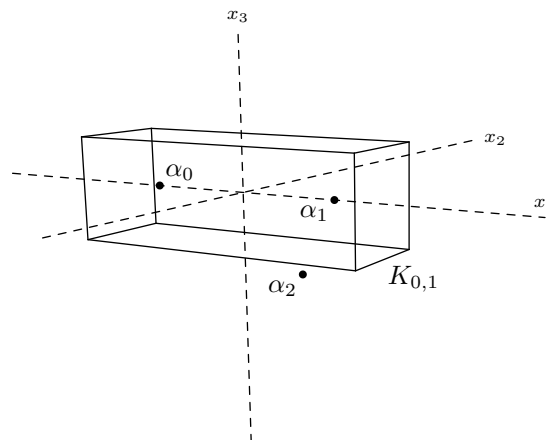
$$Df(\alpha_0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Df(\alpha_1) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Df(\alpha_2) = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die drei Gleichgewichtspunkte sind also hyperbolisch und die Dimensionen der instabilen Mannigfaltigkeiten von α_0 , α_1 und α_2 sind 2, 2 und 1, respektive. Mit Satz 1.2.4 folgt für die Indizes:

$$CH_*(\alpha_0) = \dots, 0, \mathbb{Z}, 0, 0, \quad CH_*(\alpha_1) = \dots, 0, \mathbb{Z}, 0, 0, \quad CH_*(\alpha_2) = \dots, 0, 0, \mathbb{Z}, 0.$$

2. Bestimmung von $\text{CH}_*(\text{inv } K_{0,1})$:

Wir wählen $K_{0,1}$ als das Polyeder mit den acht Ecken $(\pm 3/2, \pm 1/2, \pm 1/2)$. Offenbar enthält $K_{0,1}$ die Gleichgewichtspunkte α_0 und α_1 , nicht jedoch α_2 . Die Ebene $x_1 \equiv 0$ ist invariant, denn aus $x_1 = 0$ folgt $\dot{x}_1 = 0$. Aus Zusammenhangsgründen gibt es daher keinen Verbindungsorbit zwischen α_0 und α_1 . Da $-V(x)$ auf \mathbb{R}^3 eine Lyapunov-Funktion für $\dot{x} = \nabla V(x)$ ist, enthält $K_{0,1}$ auch keine homoklinen oder periodische Orbits. Somit ist $\text{inv } K_{0,1} = \{\alpha_0, \alpha_1\}$ und nach der Summationseigenschaft (Satz 1.2.5) gilt



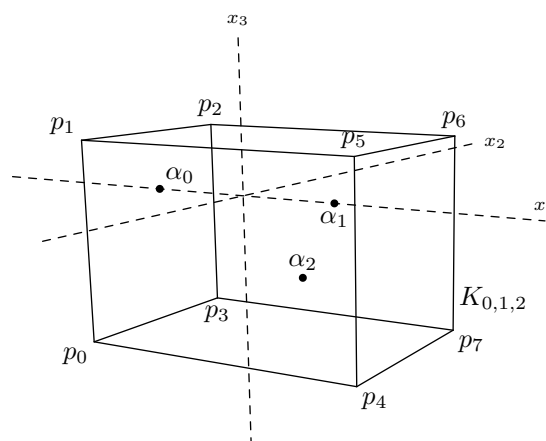
$$\text{CH}_*(\text{inv } K_{0,1}) = \text{CH}_*(\alpha_0) \oplus \text{CH}_*(\alpha_1) = \dots, 0, (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}), 0, 0.$$

3. Anwendung des Algorithmus zur Bestimmung von $\text{CH}_*(\text{inv } K_{0,1,2})$:

Wir wählen als $K_{0,1,2}$ das von den Hyper-ebenen

$$\begin{aligned} H_0 &:= H(3/2; e_1) = \text{aff}\{p_0, p_1, p_2, p_3\}, \\ H_1 &:= H(3/2; -e_1) = \text{aff}\{p_4, p_5, p_6, p_7\}, \\ H_2 &:= H(1/2; e_2) = \text{aff}\{p_0, p_1, p_4, p_5\}, \\ H_3 &:= H(3/2; -e_2) = \text{aff}\{p_2, p_3, p_6, p_7\}, \\ H_4 &:= H(3/2; e_3) = \text{aff}\{p_0, p_3, p_4, p_7\}, \\ H_5 &:= H(1/2; -e_3) = \text{aff}\{p_1, p_2, p_5, p_6\} \end{aligned}$$

erzeugte Polyeder. Offenbar enthält $K_{0,1,2}$ die drei Gleichgewichtspunkte $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$. Als P wählen wir die Punktmenge wie am Ende des Abschnitts (Seiten 65-68) angegeben.



Zur Anwendung des Algorithmus haben wir die Schrankenfunktionen (Lemma 3.3.1, Lemma 3.3.3 und Lemma 4.3.1) zu bestimmen.

Es sei dazu $\mathbf{F} = (F; n_{\mathbf{F}}, \dots) \in \mathcal{F}(p)$, $p \in P$ mit $n_{\mathbf{F}} = (n_1, n_2, n_3)^T$.

Bestimmung von $S_0(\mathbf{F})$:

Wir erhalten

$$\text{Df}(x)^T n_{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} 2(x_3 - x_2)n_1 - 2x_1n_2 + 2x_1n_3 \\ -2x_1n_1 + n_3 \\ 2x_1n_1 + n_2 \end{pmatrix}$$

und setzen daher

$$S_0(\mathbf{F}) := \max_{x \in \text{cl } F} \left| \begin{pmatrix} 2(x_3 - x_2)n_1 - 2x_1n_2 + 2x_1n_3 \\ -2x_1n_1 + n_3 \\ 2x_1n_1 + n_2 \end{pmatrix} \right|.$$

Bestimmung von $S_2(\mathbf{F})$:

Es gilt

$$D\nabla\eta_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) = D \begin{pmatrix} 2(x_3 - x_2)n_1 - 2x_1n_2 + 2x_1n_3 \\ -2x_1n_1 + n_3 \\ 2x_1n_1 + n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(n_3 - n_2) & -2n_1 & 2n_1 \\ -2n_1 & 0 & 0 \\ 2n_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Auf Grund der Wahl eines Polyeders mit achsenparallelen Kanten kommen für die Normalenvektoren $\mathbf{n}_{\mathbf{F}}$ der sechs Seiten nur die sechs Vektoren $\pm e_i$, $i \in \{1, 2, 3\}$ in Frage. Ist $\mathbf{n}_{\mathbf{F}} = \pm e_i$, so bilden die jeweils beiden anderen Vektoren $\{e_1, e_2, e_3\} - \{e_i\}$ eine Orthonormalbasis (v_1, v_2) von $\text{aff } F$. Daher ist

$$C := \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 |\langle D\nabla\eta_{\mathbf{F}}(\mathbf{x})v_k, v_l \rangle|$$

die Summe der Beträge der Einträge in $D\nabla\eta_{\mathbf{F}}(\mathbf{x})$, die weder in der i -ten Spalte noch in der i -ten Zeile sind. Wir lesen damit $C = 0$ für $\mathbf{n}_{\mathbf{F}} = \pm e_1$, dann $C = 2$ für $\mathbf{n}_{\mathbf{F}} = \pm e_2$ und $C = 2$ für $\mathbf{n}_{\mathbf{F}} = \pm e_3$ ab. Mithin setzen wir $S_2(\mathbf{F}) := 2|n_2 + n_3|$.

Bestimmung von $S_3(\mathbf{F})$:

Es gilt:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= 2\dot{x}_1(x_3 - x_2) + 2x_1(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) \\ &= 2x_1(2(x_3 - x_2)^2 + 2x_1^2 - 2 + x_2 - x_3), \\ \ddot{x}_2 &= \dot{x}_3 - 2x_1\dot{x}_1 \\ &= -1 + x_2 + x_1^2 - 4x_1^2(x_3 - x_2), \\ \ddot{x}_3 &= \dot{x}_2 + 2x_1\dot{x}_1 \\ &= 1 + x_3 - x_1^2 + 4x_1^2(x_3 - x_2). \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir mit $u := x_3 - x_2$

$$D\ddot{\varphi}(\mathbf{x}, 0) = \begin{pmatrix} 4u^2 + 12x_1^2 - 4 - 2u & 2x_1(1 - 4u) & 2x_1(4u - 1) \\ 2x_1(1 - 4u) & 1 + 4x_1^2 & -4x_1^2 \\ 2x_1(4u - 1) & -4x_1^2 & 1 + 4x_1^2 \end{pmatrix}$$

und weiter

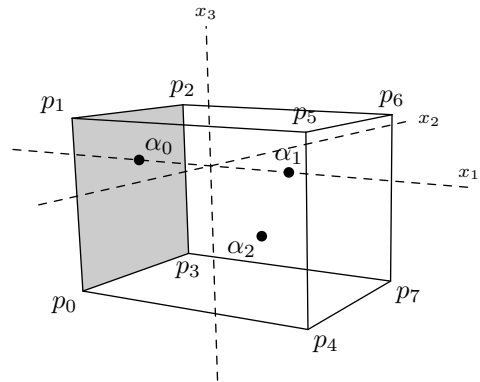
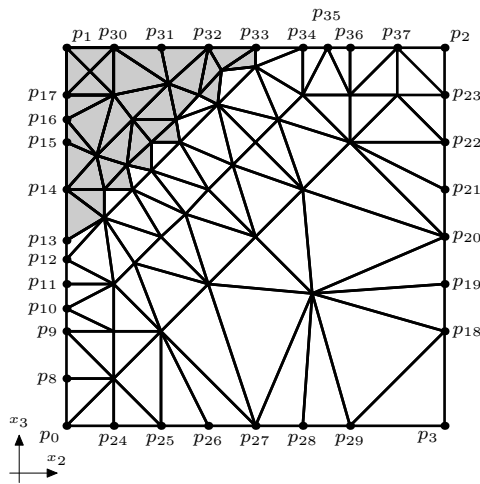
$$D\ddot{\varphi}(\mathbf{x}, 0)\mathbf{n}_s = \begin{pmatrix} (4u^2 + 12x_1^2 - 4 - 2u)n_1 + 2x_1(1 - 4u)n_2 + 2x_1(4u - 1)n_3 \\ 2x_1(1 - 4u)n_1 + (1 + 4x_1^2)n_2 - 4x_1^2n_3 \\ 2x_1(4u - 1)n_1 - 4x_1^2n_2 + (1 + 4x_1^2)n_3 \end{pmatrix}.$$

Für $S_3(\mathbf{F})$ setzen wir somit

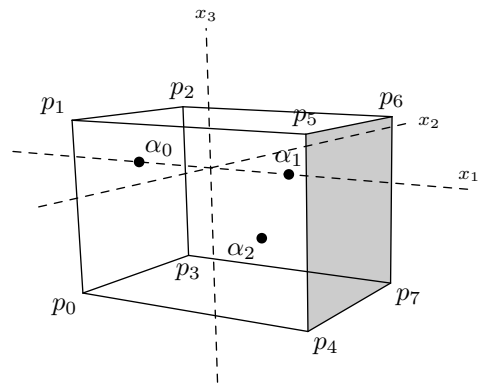
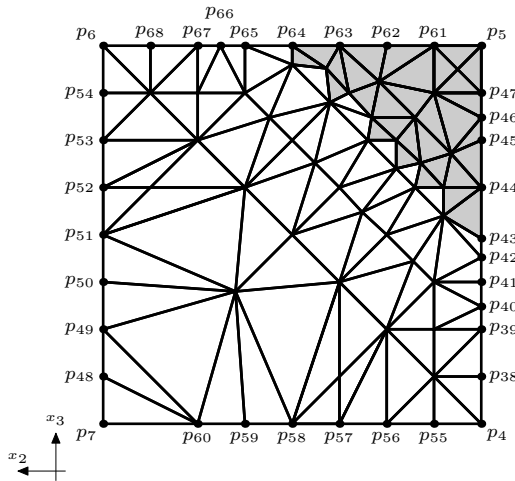
$$S_3(\mathbf{F}) := \max_{\mathbf{x} \in \text{cl } F} \left| \begin{pmatrix} (4u^2 + 12x_1^2 - 4 - 2u)n_1 + 2x_1(1 - 4u)n_2 + 2x_1(4u - 1)n_3 \\ 2x_1(1 - 4u)n_1 + (1 + 4x_1^2)n_2 - 4x_1^2n_3 \\ 2x_1(4u - 1)n_1 - 4x_1^2n_2 + (1 + 4x_1^2)n_3 \end{pmatrix} \right|.$$

Nun erhalten wir die Triangulierungen $D_{K_{0,1,2}}$ und D_{L^-} . In der Abbildung sind dabei die sechs Seitenflächen von $K_{0,1,2}$ und die darauf eingeschränkten Triangulierungen zu sehen (D_{L^-} jeweils schattiert).

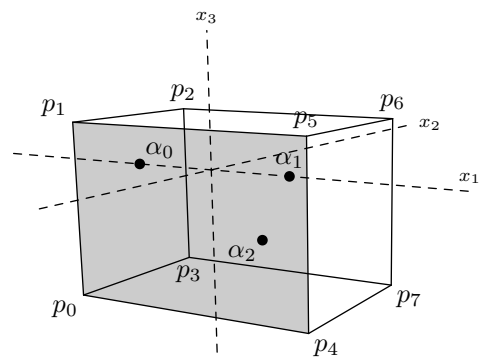
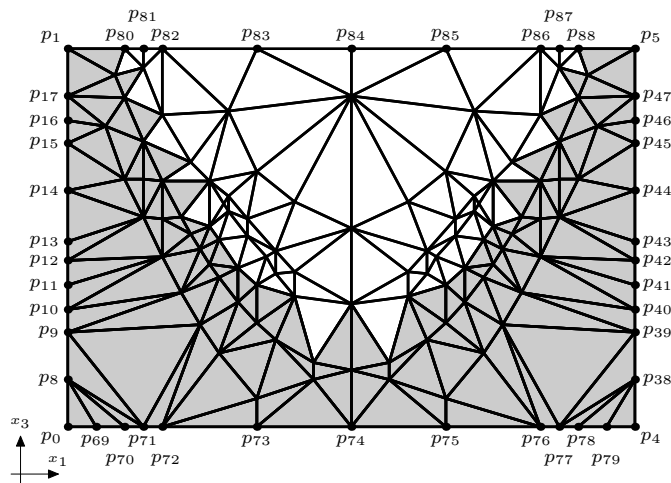
Seite F mit $F \subset H_0$ und $n_F = e_1$:



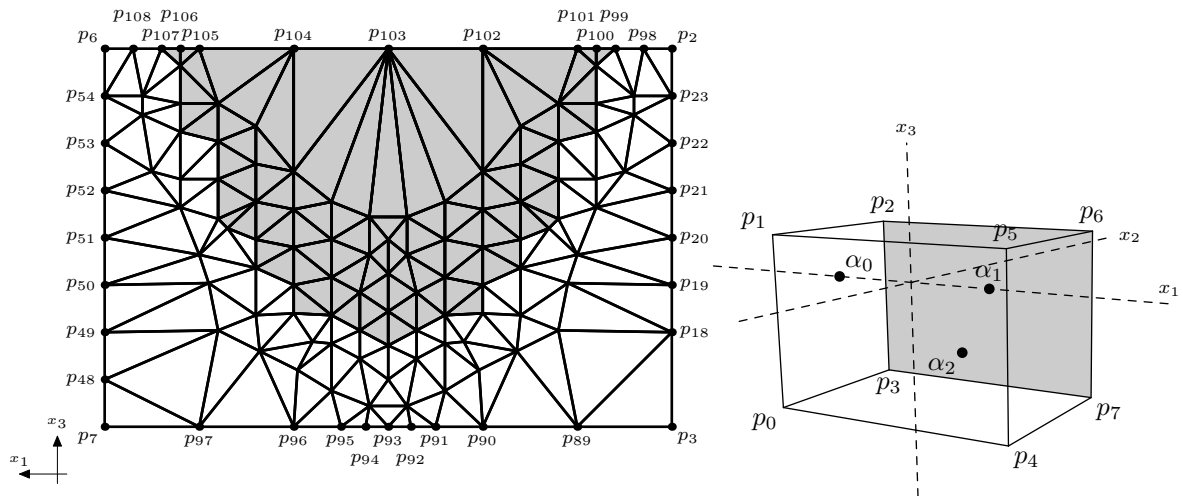
Seite F mit $F \subset H_1$ und $n_F = -e_1$:



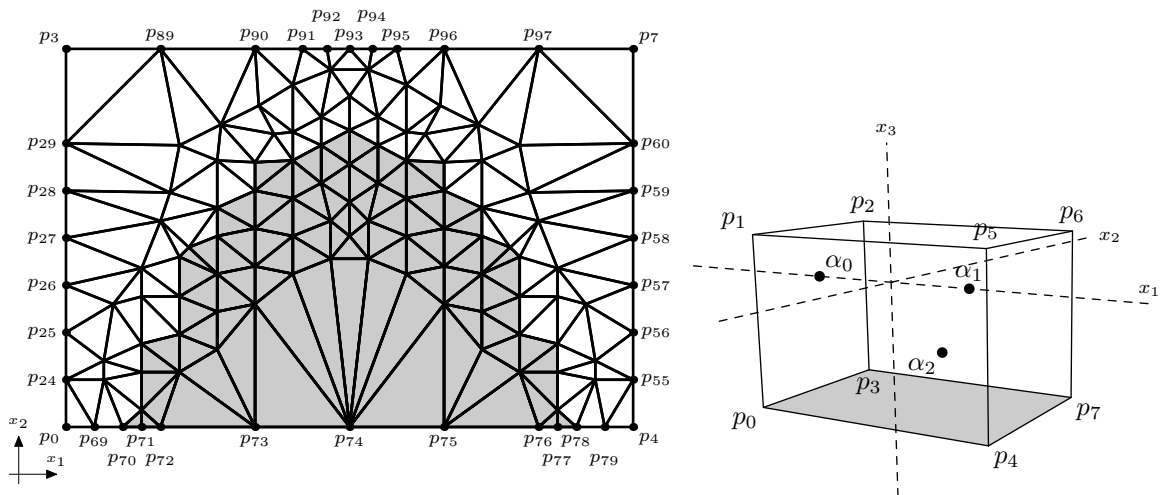
Seite F mit $F \subset H_2$ and $n_F = e_2$:



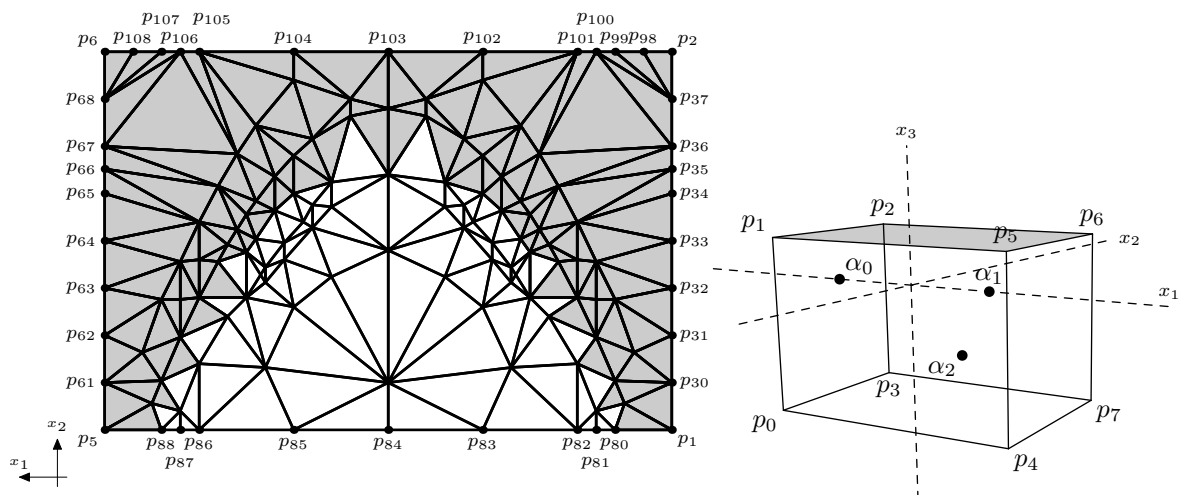
Seite F mit $F \subset H_3$ und $n_F = -e_2$:



Seite F mit $F \subset H_4$ und $n_F = e_3$:



Seite F mit $F \subset H_5$ and $n_F = -e_3$:



Der Algorithmus A.6 kann die Kontrahierbarkeits-Bedingungen verifizieren, interne Berührungspunkte ausschließen und berechnet $H_*(D_{K_{0,1,2}}, D_{L^-}) \cong \dots, 0, \mathbb{Z}, 0, 0$. Insgesamt

haben wir jetzt

$$CH_*(\text{inv } K_{0,1,2}) \cong H_*(D_{K_{0,1,2}}, D_{L^-}) \cong \dots, 0, \mathbb{Z}, 0, 0.$$

4. Nachweis der Existenz von $\alpha_0 \rightsquigarrow \alpha_2$ und $\alpha_1 \rightsquigarrow \alpha_2$:

Wegen

$$CH_*(\text{inv } K_{0,1,2}) \cong \dots, 0, \mathbb{Z}, 0, 0 \neq \dots, 0, (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}), \mathbb{Z}, 0 \cong CH_*(\text{inv } K_{0,1}) \oplus CH_*(\alpha_2)$$

folgt mit der Summationseigenschaft (Korollar 1.2.6), dass $\text{inv } K_{0,1,2} \neq \text{inv } K_{0,1} \oplus \{\alpha_2\}$ ist. Daher enthält $\text{inv } K_{0,1,2}$ außer $\text{inv } K_{0,1} = \{\alpha_0, \alpha_1\}$ und α_2 noch eine weitere invariante Menge. Es muss sich dabei um einen Verbindungsorbit zwischen α_0 oder α_1 und α_2 handeln, weil $-V(x)$ eine Lyapunov-Funktion für das System ist und es keine weiteren Gleichgewichtspunkte gibt. Nun ist aber die Ebene $x_1 \equiv 0$ eine Spiegelungsebene für den Fluss $\varphi(x, t)$ und damit gibt es jeweils zwischen α_0 und α_2 sowie zwischen α_1 und α_2 einen Verbindungsorbit. Wegen $-V(\alpha_0) = -V(\alpha_1) = 0 > -1 = -V(\alpha_2)$ verlaufen beide Orbits von α_0 bzw. α_1 nach α_2 .

Wahl der Punktmenge P:

p ₀	(-1.500, -0.500, -1.500)	p ₁	(-1.500, -0.500, 0.500)	p ₂	(-1.500, 1.500, 0.500)
p ₃	(-1.500, 1.500, -1.500)	p ₄	(1.500, -0.500, -1.500)	p ₅	(1.500, -0.500, 0.500)
p ₆	(1.500, 1.500, 0.500)	p ₇	(1.500, 1.500, -1.500)	p ₈	(-1.500, -0.500, -1.250)
p ₉	(-1.500, -0.500, -1.000)	p ₁₀	(-1.500, -0.500, -0.875)	p ₁₁	(-1.500, -0.500, -0.750)
p ₁₂	(-1.500, -0.500, -0.625)	p ₁₃	(-1.500, -0.500, -0.520)	p ₁₄	(-1.500, -0.500, -0.250)
p ₁₅	(-1.500, -0.500, 0.000)	p ₁₆	(-1.500, -0.500, 0.125)	p ₁₇	(-1.500, -0.500, 0.250)
p ₁₈	(-1.500, 1.500, -1.000)	p ₁₉	(-1.500, 1.500, -0.750)	p ₂₀	(-1.500, 1.500, -0.500)
p ₂₁	(-1.500, 1.500, -0.250)	p ₂₂	(-1.500, 1.500, 0.000)	p ₂₃	(-1.500, 1.500, 0.250)
p ₂₄	(-1.500, -0.250, -1.500)	p ₂₅	(-1.500, 0.000, -1.500)	p ₂₆	(-1.500, 0.250, -1.500)
p ₂₇	(-1.500, 0.500, -1.500)	p ₂₈	(-1.500, 0.750, -1.500)	p ₂₉	(-1.500, 1.000, -1.500)
p ₃₀	(-1.500, -0.250, 0.500)	p ₃₁	(-1.500, 0.000, 0.500)	p ₃₂	(-1.500, 0.250, 0.500)
p ₃₃	(-1.500, 0.500, 0.500)	p ₃₄	(-1.500, 0.750, 0.500)	p ₃₅	(-1.500, 0.875, 0.500)
p ₃₆	(-1.500, 1.000, 0.500)	p ₃₇	(-1.500, 1.250, 0.500)	p ₃₈	(1.500, -0.500, -1.250)
p ₃₉	(1.500, -0.500, -1.000)	p ₄₀	(1.500, -0.500, -0.875)	p ₄₁	(1.500, -0.500, -0.750)
p ₄₂	(1.500, -0.500, -0.625)	p ₄₃	(1.500, -0.500, -0.520)	p ₄₄	(1.500, -0.500, -0.250)
p ₄₅	(1.500, -0.500, 0.000)	p ₄₆	(1.500, -0.500, 0.125)	p ₄₇	(1.500, -0.500, 0.250)
p ₄₈	(1.500, 1.500, -1.250)	p ₄₉	(1.500, 1.500, -1.000)	p ₅₀	(1.500, 1.500, -0.750)
p ₅₁	(1.500, 1.500, -0.500)	p ₅₂	(1.500, 1.500, -0.250)	p ₅₃	(1.500, 1.500, 0.000)
p ₅₄	(1.500, 1.500, 0.250)	p ₅₅	(1.500, -0.250, -1.500)	p ₅₆	(1.500, 0.000, -1.500)
p ₅₇	(1.500, 0.250, -1.500)	p ₅₈	(1.500, 0.500, -1.500)	p ₅₉	(1.500, 0.750, -1.500)
p ₆₀	(1.500, 1.000, -1.500)	p ₆₁	(1.500, -0.250, 0.500)	p ₆₂	(1.500, 0.000, 0.500)
p ₆₃	(1.500, 0.250, 0.500)	p ₆₄	(1.500, 0.500, 0.500)	p ₆₅	(1.500, 0.750, 0.500)
p ₆₆	(1.500, 0.875, 0.500)	p ₆₇	(1.500, 1.000, 0.500)	p ₆₈	(1.500, 1.250, 0.500)
p ₆₉	(-1.350, -0.500, -1.500)	p ₇₀	(-1.200, -0.500, -1.500)	p ₇₁	(-1.100, -0.500, -1.500)
p ₇₂	(-1.000, -0.500, -1.500)	p ₇₃	(-0.500, -0.500, -1.500)	p ₇₄	(0.000, -0.500, -1.500)
p ₇₅	(0.500, -0.500, -1.500)	p ₇₆	(1.000, -0.500, -1.500)	p ₇₇	(1.100, -0.500, -1.500)
p ₇₈	(1.200, -0.500, -1.500)	p ₇₉	(1.350, -0.500, -1.500)	p ₈₀	(-1.200, -0.500, 0.500)
p ₈₁	(-1.100, -0.500, 0.500)	p ₈₂	(-1.000, -0.500, 0.500)	p ₈₃	(-0.500, -0.500, 0.500)
p ₈₄	(0.000, -0.500, 0.500)	p ₈₅	(0.500, -0.500, 0.500)	p ₈₆	(1.000, -0.500, 0.500)
p ₈₇	(1.100, -0.500, 0.500)	p ₈₈	(1.200, -0.500, 0.500)	p ₈₉	(-1.000, 1.500, -1.500)
p ₉₀	(-0.500, 1.500, -1.500)	p ₉₁	(-0.250, 1.500, -1.500)	p ₉₂	(-0.125, 1.500, -1.500)
p ₉₃	(0.000, 1.500, -1.500)	p ₉₄	(0.125, 1.500, -1.500)	p ₉₅	(0.250, 1.500, -1.500)
p ₉₆	(0.500, 1.500, -1.500)	p ₉₇	(1.000, 1.500, -1.500)	p ₉₈	(-1.350, 1.500, 0.500)
p ₉₉	(-1.200, 1.500, 0.500)	p ₁₀₀	(-1.100, 1.500, 0.500)	p ₁₀₁	(-1.000, 1.500, 0.500)
p ₁₀₂	(-0.500, 1.500, 0.500)	p ₁₀₃	(0.000, 1.500, 0.500)	p ₁₀₄	(0.500, 1.500, 0.500)
p ₁₀₅	(1.000, 1.500, 0.500)	p ₁₀₆	(1.100, 1.500, 0.500)	p ₁₀₇	(1.200, 1.500, 0.500)
p ₁₀₈	(1.350, 1.500, 0.500)	p ₁₀₉	(-1.500, -0.300, -0.250)	p ₁₁₀	(-1.500, -0.175, -0.125)
p ₁₁₁	(-1.500, -0.050, 0.000)	p ₁₁₂	(-1.500, 0.075, 0.125)	p ₁₁₃	(-1.500, 0.200, 0.250)
p ₁₁₄	(-1.500, 0.325, 0.375)	p ₁₁₅	(-1.500, -0.250, -1.000)	p ₁₁₆	(-1.500, -0.250, -1.250)

Fortsetzung auf der nächsten Seite

p117	(-1.500, 0.000, -1.000)	p118	(-1.500, 0.250, -0.750)	p119	(-1.500, 0.500, -0.500)
p120	(-1.500, 0.750, -0.250)	p121	(-1.500, 1.000, 0.000)	p122	(-1.500, 1.250, 0.250)
p123	(-1.500, -0.300, -0.400)	p124	(-1.500, -0.150, -0.250)	p125	(-1.500, -0.050, -0.150)
p126	(-1.500, 0.100, 0.000)	p127	(-1.500, 0.300, 0.200)	p128	(-1.500, 0.500, 0.400)
p129	(-1.500, -0.250, 0.250)	p130	(-1.500, 0.800, -0.800)	p131	(-1.500, -0.250, -0.750)
p132	(-1.500, -0.135, -0.635)	p133	(-1.500, 0.000, -0.500)	p134	(-1.500, 0.130, -0.380)
p135	(-1.500, 0.250, -0.250)	p136	(-1.500, 0.375, -0.125)	p137	(-1.500, 0.500, 0.000)
p138	(-1.500, 0.625, 0.125)	p139	(-1.500, 0.750, 0.250)	p140	(-1.500, 1.000, 0.250)
p141	(-1.500, -0.338, -0.070)	p142	(-1.500, -0.150, 0.122)	p143	(-1.500, 0.038, 0.313)
p144	(1.500, -0.300, -0.250)	p145	(1.500, -0.175, -0.125)	p146	(1.500, -0.050, 0.000)
p147	(1.500, 0.075, 0.125)	p148	(1.500, 0.200, 0.250)	p149	(1.500, 0.325, 0.375)
p150	(1.500, -0.250, -1.000)	p151	(1.500, -0.250, -1.250)	p152	(1.500, 0.000, -1.000)
p153	(1.500, 0.250, -0.750)	p154	(1.500, 0.500, -0.500)	p155	(1.500, 0.750, -0.250)
p156	(1.500, 1.000, 0.000)	p157	(1.500, 1.250, 0.250)	p158	(1.500, -0.300, -0.400)
p159	(1.500, -0.150, -0.250)	p160	(1.500, -0.050, -0.150)	p161	(1.500, 0.100, 0.000)
p162	(1.500, 0.300, 0.200)	p163	(1.500, 0.500, 0.400)	p164	(1.500, -0.250, 0.250)
p165	(1.500, 0.800, -0.800)	p166	(1.500, -0.250, -0.750)	p167	(1.500, -0.135, -0.635)
p168	(1.500, 0.000, -0.500)	p169	(1.500, 0.130, -0.380)	p170	(1.500, 0.250, -0.250)
p171	(1.500, 0.375, -0.125)	p172	(1.500, 0.500, 0.000)	p173	(1.500, 0.625, 0.125)
p174	(1.500, 0.750, 0.250)	p175	(1.500, 1.000, 0.250)	p176	(1.500, -0.338, -0.070)
p177	(1.500, -0.150, 0.122)	p178	(1.500, 0.038, 0.313)	p179	(0.000, -0.500, 0.250)
p180	(-1.100, -0.500, 0.400)	p181	(-1.000, -0.500, 0.150)	p182	(-0.850, -0.500, -0.100)
p183	(-0.750, -0.500, -0.200)	p184	(-0.650, -0.500, -0.360)	p185	(-0.550, -0.500, -0.490)
p186	(-0.450, -0.500, -0.600)	p187	(-0.400, -0.500, -0.690)	p188	(-0.300, -0.500, -0.810)
p189	(0.000, -0.500, -0.850)	p190	(0.300, -0.500, -0.810)	p191	(0.400, -0.500, -0.690)
p192	(0.450, -0.500, -0.600)	p193	(0.550, -0.500, -0.490)	p194	(0.650, -0.500, -0.360)
p195	(0.750, -0.500, -0.200)	p196	(0.850, -0.500, -0.100)	p197	(1.000, -0.500, 0.150)
p198	(1.100, -0.500, 0.400)	p199	(-1.250, -0.500, 0.362)	p200	(-1.200, -0.500, 0.240)
p201	(-1.100, -0.500, 0.010)	p202	(-1.000, -0.500, -0.200)	p203	(-0.900, -0.500, -0.390)
p204	(-0.850, -0.500, -0.478)	p205	(-0.800, -0.500, -0.560)	p206	(-0.750, -0.500, -0.638)
p207	(-0.700, -0.500, -0.710)	p208	(-0.600, -0.500, -0.840)	p209	(-0.500, -0.500, -0.950)
p210	(-0.400, -0.500, -1.040)	p211	(-0.200, -0.500, -1.160)	p212	(0.000, -0.500, -1.200)
p213	(0.200, -0.500, -1.160)	p214	(0.400, -0.500, -1.040)	p215	(0.500, -0.500, -0.950)
p216	(0.600, -0.500, -0.840)	p217	(0.700, -0.500, -0.710)	p218	(0.750, -0.500, -0.638)
p219	(0.800, -0.500, -0.560)	p220	(0.850, -0.500, -0.478)	p221	(0.900, -0.500, -0.390)
p222	(1.000, -0.500, -0.200)	p223	(1.100, -0.500, 0.010)	p224	(1.200, -0.500, 0.240)
p225	(1.250, -0.500, 0.362)	p226	(-1.300, -0.500, 0.090)	p227	(-1.200, -0.500, -0.190)
p228	(-1.100, -0.500, -0.390)	p229	(-1.000, -0.500, -0.600)	p230	(-0.900, -0.500, -0.790)
p231	(-0.800, -0.500, -0.960)	p232	(-0.700, -0.500, -1.110)	p233	(-0.500, -0.500, -1.350)
p234	(0.500, -0.500, -1.350)	p235	(0.700, -0.500, -1.110)	p236	(0.800, -0.500, -0.960)
p237	(0.900, -0.500, -0.790)	p238	(1.000, -0.500, -0.600)	p239	(1.100, -0.500, -0.390)
p240	(1.200, -0.500, -0.190)	p241	(1.300, -0.500, 0.090)	p242	(-0.650, -0.500, 0.170)
p243	(-0.500, -0.500, -0.150)	p244	(-0.300, -0.500, -0.310)	p245	(0.000, -0.500, -0.450)
p246	(0.300, -0.500, -0.310)	p247	(0.500, -0.500, -0.150)	p248	(0.650, -0.500, 0.170)
p249	(-0.750, -0.500, -0.438)	p250	(-0.700, -0.500, -0.510)	p251	(-0.600, -0.500, -0.660)
p252	(-0.500, -0.500, -0.750)	p253	(0.500, -0.500, -0.750)	p254	(0.600, -0.500, -0.660)
p255	(0.700, -0.500, -0.510)	p256	(0.750, -0.500, -0.438)	p257	(-1.100, -0.500, -0.190)
p258	(-1.000, -0.500, -0.400)	p259	(1.000, -0.500, -0.400)	p260	(1.100, -0.500, -0.190)
p261	(0.200, -0.500, -1.250)	p262	(-0.200, -0.500, -1.250)	p263	(-0.650, -0.500, -0.278)
p264	(-0.550, -0.500, -0.398)	p265	(-0.400, -0.500, -0.568)	p266	(-0.300, -0.500, -0.685)
p267	(0.300, -0.500, -0.685)	p268	(0.400, -0.500, -0.568)	p269	(0.550, -0.500, -0.398)
p270	(0.650, -0.500, -0.278)	p271	(-1.100, 1.500, 0.410)	p272	(-0.900, 1.500, 0.010)
p273	(-0.700, 1.500, -0.310)	p274	(-0.500, 1.500, -0.550)	p275	(-0.300, 1.500, -0.710)
p276	(-0.150, 1.500, -0.790)	p277	(0.150, 1.500, -0.790)	p278	(0.300, 1.500, -0.710)
p279	(0.500, 1.500, -0.550)	p280	(0.700, 1.500, -0.310)	p281	(0.900, 1.500, 0.010)
p282	(1.100, 1.500, 0.410)	p283	(-1.100, 1.500, 0.060)	p284	(-0.900, 1.500, -0.400)
p285	(-0.700, 1.500, -0.660)	p286	(-0.500, 1.500, -0.900)	p287	(-0.300, 1.500, -1.060)
p288	(-0.150, 1.500, -1.140)	p289	(0.150, 1.500, -1.140)	p290	(0.300, 1.500, -1.060)
p291	(0.500, 1.500, -0.900)	p292	(0.700, 1.500, -0.660)	p293	(0.900, 1.500, -0.400)
p294	(1.100, 1.500, 0.060)	p295	(-1.100, 1.500, 0.210)	p296	(-0.900, 1.500, -0.190)
p297	(-0.700, 1.500, -0.510)	p298	(-0.500, 1.500, -0.750)	p299	(-0.300, 1.500, -0.910)
p300	(-0.150, 1.500, -0.990)	p301	(0.150, 1.500, -0.990)	p302	(0.300, 1.500, -0.910)
p303	(0.500, 1.500, -0.750)	p304	(0.700, 1.500, -0.510)	p305	(0.900, 1.500, -0.190)
p306	(1.100, 1.500, 0.210)	p307	(-1.300, 1.500, 0.250)	p308	(-1.100, 1.500, -0.190)

Fortsetzung auf der nächsten Seite

p309	(-0.850, 1.500, -0.450)	p310	(-0.700, 1.500, -0.910)	p311	(-0.400, 1.500, -1.050)
p312	(-0.300, 1.500, -1.310)	p313	(-0.100, 1.500, -1.390)	p314	(0.100, 1.500, -1.390)
p315	(0.300, 1.500, -1.310)	p316	(0.400, 1.500, -1.050)	p317	(0.700, 1.500, -0.910)
p318	(0.850, 1.500, -0.450)	p319	(1.100, 1.500, -0.190)	p320	(1.300, 1.500, 0.250)
p321	(-0.900, 1.500, 0.210)	p322	(-0.700, 1.500, -0.110)	p323	(-0.500, 1.500, -0.350)
p324	(-0.300, 1.500, -0.510)	p325	(-0.100, 1.500, -0.590)	p326	(0.100, 1.500, -0.590)
p327	(0.300, 1.500, -0.510)	p328	(0.500, 1.500, -0.350)	p329	(0.700, 1.500, -0.110)
p330	(0.900, 1.500, 0.210)	p331	(-0.700, 1.500, 0.090)	p332	(-0.500, 1.500, -0.150)
p333	(-0.300, 1.500, -0.310)	p334	(-0.100, 1.500, -0.390)	p335	(0.100, 1.500, -0.390)
p336	(0.300, 1.500, -0.310)	p337	(0.500, 1.500, -0.150)	p338	(0.700, 1.500, 0.090)
p339	(-1.000, 1.500, -0.590)	p340	(-0.900, 1.500, -0.990)	p341	(0.900, 1.500, -0.990)
p342	(1.000, 1.500, -0.590)	p343	(0.000, 1.500, -1.250)	p344	(0.000, 1.500, -1.070)
p345	(0.000, 1.500, -0.890)	p346	(0.000, 1.500, -0.690)	p347	(0.000, 1.500, -0.510)
p348	(-0.675, 1.500, -1.100)	p349	(-0.475, 1.500, -1.200)	p350	(-0.950, 1.500, -0.740)
p351	(-1.100, 1.500, -0.340)	p352	(-1.300, 1.500, 0.150)	p353	(-1.250, 1.500, -0.150)
p354	(0.675, 1.500, -1.100)	p355	(0.475, 1.500, -1.200)	p356	(0.950, 1.500, -0.740)
p357	(1.100, 1.500, -0.340)	p358	(1.300, 1.500, 0.150)	p359	(1.250, 1.500, -0.150)
p360	(-1.100, -0.410, -1.500)	p361	(-0.900, -0.010, -1.500)	p362	(-0.700, 0.310, -1.500)
p363	(-0.500, 0.550, -1.500)	p364	(-0.300, 0.710, -1.500)	p365	(-0.150, 0.790, -1.500)
p366	(0.150, 0.790, -1.500)	p367	(0.300, 0.710, -1.500)	p368	(0.500, 0.550, -1.500)
p369	(0.700, 0.310, -1.500)	p370	(0.900, -0.010, -1.500)	p371	(1.100, -0.410, -1.500)
p372	(-1.100, -0.060, -1.500)	p373	(-0.900, 0.400, -1.500)	p374	(-0.700, 0.660, -1.500)
p375	(-0.500, 0.900, -1.500)	p376	(-0.300, 1.060, -1.500)	p377	(-0.150, 1.140, -1.500)
p378	(0.150, 1.140, -1.500)	p379	(0.300, 1.060, -1.500)	p380	(0.500, 0.900, -1.500)
p381	(0.700, 0.660, -1.500)	p382	(0.900, 0.400, -1.500)	p383	(1.100, -0.060, -1.500)
p384	(-1.100, -0.210, -1.500)	p385	(-0.900, 0.190, -1.500)	p386	(-0.700, 0.510, -1.500)
p387	(-0.500, 0.750, -1.500)	p388	(-0.300, 0.910, -1.500)	p389	(-0.150, 0.990, -1.500)
p390	(0.150, 0.990, -1.500)	p391	(0.300, 0.910, -1.500)	p392	(0.500, 0.750, -1.500)
p393	(0.700, 0.510, -1.500)	p394	(0.900, 0.190, -1.500)	p395	(1.100, -0.210, -1.500)
p396	(-1.300, -0.250, -1.500)	p397	(-1.100, 0.190, -1.500)	p398	(-0.850, 0.450, -1.500)
p399	(-0.700, 0.910, -1.500)	p400	(-0.400, 1.050, -1.500)	p401	(-0.300, 1.310, -1.500)
p402	(-0.100, 1.390, -1.500)	p403	(0.100, 1.390, -1.500)	p404	(0.300, 1.310, -1.500)
p405	(0.400, 1.050, -1.500)	p406	(0.700, 0.910, -1.500)	p407	(0.850, 0.450, -1.500)
p408	(1.100, 0.190, -1.500)	p409	(1.300, -0.250, -1.500)	p410	(-0.900, -0.210, -1.500)
p411	(-0.700, 0.110, -1.500)	p412	(-0.500, 0.350, -1.500)	p413	(-0.300, 0.510, -1.500)
p414	(-0.100, 0.590, -1.500)	p415	(0.100, 0.590, -1.500)	p416	(0.300, 0.510, -1.500)
p417	(0.500, 0.350, -1.500)	p418	(0.700, 0.110, -1.500)	p419	(0.900, -0.210, -1.500)
p420	(-0.700, -0.090, -1.500)	p421	(-0.500, 0.150, -1.500)	p422	(-0.300, 0.310, -1.500)
p423	(-0.100, 0.390, -1.500)	p424	(0.100, 0.390, -1.500)	p425	(0.300, 0.310, -1.500)
p426	(0.500, 0.150, -1.500)	p427	(0.700, -0.090, -1.500)	p428	(-1.000, 0.590, -1.500)
p429	(-0.900, 0.990, -1.500)	p430	(0.900, 0.990, -1.500)	p431	(1.000, 0.590, -1.500)
p432	(0.000, 1.250, -1.500)	p433	(0.000, 1.070, -1.500)	p434	(0.000, 0.890, -1.500)
p435	(0.000, 0.690, -1.500)	p436	(0.000, 0.510, -1.500)	p437	(-0.675, 1.100, -1.500)
p438	(-0.475, 1.200, -1.500)	p439	(-0.950, 0.740, -1.500)	p440	(-1.100, 0.340, -1.500)
p441	(-1.300, -0.150, -1.500)	p442	(-1.250, 0.150, -1.500)	p443	(0.675, 1.100, -1.500)
p444	(0.475, 1.200, -1.500)	p445	(0.950, 0.740, -1.500)	p446	(1.100, 0.340, -1.500)
p447	(1.300, -0.150, -1.500)	p448	(1.250, 0.150, -1.500)	p449	(0.000, -0.250, 0.500)
p450	(-1.100, -0.400, 0.500)	p451	(-1.000, -0.150, 0.500)	p452	(-0.850, 0.100, 0.500)
p453	(-0.750, 0.200, 0.500)	p454	(-0.650, 0.360, 0.500)	p455	(-0.550, 0.490, 0.500)
p456	(-0.450, 0.600, 0.500)	p457	(-0.400, 0.690, 0.500)	p458	(-0.300, 0.810, 0.500)
p459	(0.000, 0.850, 0.500)	p460	(0.300, 0.810, 0.500)	p461	(0.400, 0.690, 0.500)
p462	(0.450, 0.600, 0.500)	p463	(0.550, 0.490, 0.500)	p464	(0.650, 0.360, 0.500)
p465	(0.750, 0.200, 0.500)	p466	(0.850, 0.100, 0.500)	p467	(1.000, -0.150, 0.500)
p468	(1.100, -0.400, 0.500)	p469	(-1.250, -0.362, 0.500)	p470	(-1.200, -0.240, 0.500)
p471	(-1.100, -0.010, 0.500)	p472	(-1.000, 0.200, 0.500)	p473	(-0.900, 0.390, 0.500)
p474	(-0.850, 0.478, 0.500)	p475	(-0.800, 0.560, 0.500)	p476	(-0.750, 0.638, 0.500)
p477	(-0.700, 0.710, 0.500)	p478	(-0.600, 0.840, 0.500)	p479	(-0.500, 0.950, 0.500)
p480	(-0.400, 1.040, 0.500)	p481	(-0.200, 1.160, 0.500)	p482	(0.000, 1.200, 0.500)
p483	(0.200, 1.160, 0.500)	p484	(0.400, 1.040, 0.500)	p485	(0.500, 0.950, 0.500)
p486	(0.600, 0.840, 0.500)	p487	(0.700, 0.710, 0.500)	p488	(0.750, 0.638, 0.500)
p489	(0.800, 0.560, 0.500)	p490	(0.850, 0.478, 0.500)	p491	(0.900, 0.390, 0.500)
p492	(1.000, 0.200, 0.500)	p493	(1.100, -0.010, 0.500)	p494	(1.200, -0.240, 0.500)
p495	(1.250, -0.362, 0.500)	p496	(-1.300, -0.090, 0.500)	p497	(-1.200, 0.190, 0.500)
p498	(-1.100, 0.390, 0.500)	p499	(-1.000, 0.600, 0.500)	p500	(-0.900, 0.790, 0.500)

Fortsetzung auf der nächsten Seite

p ₅₀₁	(-0.800, 0.960, 0.500)	p ₅₀₂	(-0.700, 1.110, 0.500)	p ₅₀₃	(-0.500, 1.350, 0.500)
p ₅₀₄	(0.500, 1.350, 0.500)	p ₅₀₅	(0.700, 1.110, 0.500)	p ₅₀₆	(0.800, 0.960, 0.500)
p ₅₀₇	(0.900, 0.790, 0.500)	p ₅₀₈	(1.000, 0.600, 0.500)	p ₅₀₉	(1.100, 0.390, 0.500)
p ₅₁₀	(1.200, 0.190, 0.500)	p ₅₁₁	(1.300, -0.090, 0.500)	p ₅₁₂	(-0.650, -0.170, 0.500)
p ₅₁₃	(-0.500, 0.150, 0.500)	p ₅₁₄	(-0.300, 0.310, 0.500)	p ₅₁₅	(0.000, 0.450, 0.500)
p ₅₁₆	(0.300, 0.310, 0.500)	p ₅₁₇	(0.500, 0.150, 0.500)	p ₅₁₈	(0.650, -0.170, 0.500)
p ₅₁₉	(-0.750, 0.438, 0.500)	p ₅₂₀	(-0.700, 0.510, 0.500)	p ₅₂₁	(-0.600, 0.660, 0.500)
p ₅₂₂	(-0.500, 0.750, 0.500)	p ₅₂₃	(0.500, 0.750, 0.500)	p ₅₂₄	(0.600, 0.660, 0.500)
p ₅₂₅	(0.700, 0.510, 0.500)	p ₅₂₆	(0.750, 0.438, 0.500)	p ₅₂₇	(-1.100, 0.190, 0.500)
p ₅₂₈	(-1.000, 0.400, 0.500)	p ₅₂₉	(1.000, 0.400, 0.500)	p ₅₃₀	(1.100, 0.190, 0.500)
p ₅₃₁	(0.200, 1.250, 0.500)	p ₅₃₂	(-0.200, 1.250, 0.500)	p ₅₃₃	(-0.650, 0.278, 0.500)
p ₅₃₄	(-0.550, 0.398, 0.500)	p ₅₃₅	(-0.400, 0.568, 0.500)	p ₅₃₆	(-0.300, 0.685, 0.500)
p ₅₃₇	(0.300, 0.685, 0.500)	p ₅₃₈	(0.400, 0.568, 0.500)	p ₅₃₉	(0.550, 0.398, 0.500)
p ₅₄₀	(0.650, 0.278, 0.500)				

Anhang A

Algorithmen zur Konstruktion isolierender Blöcke

In diesem Kapitel fassen wir die in den Kapiteln 3 und 4 beschriebene Vorgehensweise zur Konstruktion isolierender Blöcke als Algorithmen zusammen. Sämtliche hier angegebenen Algorithmen wurden im Rahmen dieser Arbeit als Programm-bibliothek für das Computeralgebrasystem Maple, [Ma03], implementiert (Umfang ca. 2500 Zeilen). Dabei wurde zur Berechnung des Schnitts von Halbräumen, der Voronoi-Diagramme und der Delaunay-Komplexe auf das Programmpaket qhull von Bradford Barber und Hannu Huhdanpaa zurückgegriffen (siehe [BaHu03] und für die dort verwendeten Algorithmen [BaDoHu96]).

Als erster Schritt ist ein Polyeder K , das von endlich vielen Halbräumen $H(K) = \{H^+(b_i; n_i)\}$, $i \in I_K$ erzeugt wird, vorzugeben. Danach ist eine endliche Menge $P = \{p_1, \dots, p_k\}$, die den globalen Voraussetzungen (Definition 2.2.3) entspricht, zu wählen. Wir schränken uns hier auf konvexe Polyeder ein. Im Fall konkaver Polyeder führt man zunächst eine Zerlegung in konvexe Polyeder durch und verwendet dann die dargelegten Algorithmen.

Für ein $x \in \mathbb{R}$ bezeichnen wir mit $\lceil x \rceil$ die kleinste ganze Zahl, die größer als x ist, und mit $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl, die kleiner als x ist.

Als vorbereitender Schritt erfolgt die Bestimmung der Seiten $\mathcal{F}(p)$, mittels derer anschließend die Kontrahierbarkeits-Bedingungen überprüft werden können:

Algorithmus A.1 (Bestimmung der $(n - 1)$ -Seiten)

```
1: CALCULATE_FACES( $K, P$ ) :=  
2:  $\{V_{p_1}, \dots, V_{p_k}\} \leftarrow \text{VORONOI}(P)$   
3: for all  $p \in P$  do  
4:    $\{v_1, \dots, v_{l_p}\} \leftarrow \text{HALF}(V_p, K)$   
5:    $\mathcal{F}_{n-1}(p) \leftarrow \emptyset$   
6:   for all  $H^+(b; n_H) \in H(K)$  mit  $p \in H(b; n_H)$  do  
7:      $F_H \leftarrow \{v_i : v_i \in \{v_1, \dots, v_{l_p}\}, v_i \in H(b, n_H)\}$   
8:      $\text{INSERT}(F_H, \mathcal{F}_{n-1}(p))$   
9:   end for  
10: end for  
11:  $\text{RETURN}(\mathcal{F}_{n-1}(p_1), \dots, \mathcal{F}_{n-1}(p_k))$ 
```

Dabei liefert $\text{VORONOI}(P)$ die Menge der Polyeder V_{p_i} (Voronoi-Zellen). Diese werden jeweils durch endlich viele Halbräume $\{H_j^+, j \in I_{p_i}\}$ dargestellt:

$$V_{p_i} = \bigcap_{j \in I_{p_i}} H_j^+.$$

Die Prozedur $\text{HALF}(V_p, K)$ berechnet den Schnitt $V_p \cap K$ der beiden Polyeder. Der Rückgabewert ist die Menge der Ecken von $V_p \cap K$ (vergleiche Definition C.1.3).

$\text{INSERT}(A, B)$ erweitert schließlich die Menge B um A .

Zur Komplexität: Bei Wahl eines geeigneten Algorithmus für $\text{VORONOI}(P)$ ist das worst-case Laufzeitverhalten $O(k \log k)$ im \mathbb{R}^2 und $O(k^{\lceil (n+1)/2 \rceil})$ im \mathbb{R}^n , $n \geq 3$, k die Anzahl der Elemente in P . Wir verweisen dazu auf [Ed87, Korollar 13.6, S. 298].

Die Laufzeit von HALF ist bei Eingabe von Polyedern, die von l Halbräumen erzeugt werden $O(l \log l + l^{\lceil (n+1)/2 \rceil})$ im \mathbb{R}^n , $n \geq 2$ (siehe [Ed87, Satz 8.11, S. 158]). Die Gesamtanzahl der $(n-1)$ -Seiten aller V_{p_i} ist durch $O(k^{\min\{2, \lceil n/2 \rceil\}})$ gegeben, [Ed87, Korollar 13.5, S. 297]. Damit ist die durchschnittliche Anzahl von $(n-1)$ -Seiten pro V_{p_i} im \mathbb{R}^2 konstant, im \mathbb{R}^n , $n \geq 3$, jedoch $O(k^{\lceil n/2 \rceil - 1})$. Die Anzahl der Halbräume $H(K)$ hängt hingegen nicht von k ab, sondern ist durch die anfängliche Wahl des Polyeders K gegeben und konstant. Für die Laufzeit der for-Schleife in den Zeilen 3-10 erhalten wir damit $O(k)$ im \mathbb{R}^2 und $O(k^{\lceil n/2 \rceil})$ im \mathbb{R}^n , $n \geq 3$.

Die Gesamtlaufzeit zur Berechnung der Seiten $\mathcal{F}_{n-1}(p_i)$ wird somit durch die Berechnung der Voronoi-Zellen bestimmt. Wir erhalten insgesamt $O(k \log k)$ im \mathbb{R}^2 und $O(k^{\lceil (n+1)/2 \rceil})$ im \mathbb{R}^n , $n \geq 3$.

Bemerkung:

- Durch Entwicklung spezieller Algorithmen zur Bestimmung eingeschränkter Voronoi-Diagramme könnte vermutlich ein besseres Laufzeitverhalten erzielt werden. Dies soll aber nicht Gegenstand dieser Arbeit sein. Wir verweisen dazu auch auf die Schlussbemerkung in [EdSh97], wo dieses offene Problem ebenfalls angesprochen wird.
- Im \mathbb{R}^2 berechnen wir mit diesem Algorithmus sämtliche 1-Seiten $\mathcal{F}_1(p)$ und erhalten aus diesen unmittelbar die 0-Seiten (das sind die Ecken der 1-Seiten).
Im \mathbb{R}^3 erhalten wir zunächst nur die 2-Seiten, dargestellt durch ihre Ecken. Daraus können deren 1-Seiten berechnet werden. Die 0-Seiten ergeben sich wieder als Ecken der 1-Seiten.

Jetzt können die Kontrahierbarkeits-Bedingungen überprüft werden. Wir schränken uns dazu auf die Dimensionen 2 und 3 ein.

In Algorithmus A.2 prüft die Prozedur $\text{CONTRACTIBILITY_CONDITION_1_2D}(F)$ bzw. $\text{CONTRACTIBILITY_CONDITION_2_2D}(F, F')$ die Bedingung 1 bzw. 2 des Satzes 3.3.4 in höchstens C_T vielen Punkten von $F \in \mathcal{F}_1(p)$ bzw. $F, F' \in \mathcal{F}_1(p)$. Hierbei hängt C_T nicht von $|P|$ ab, d.h. $O(C_T) = O(1)$ bezüglich $|P|$. Kann die Bedingung in einem Punkt verifiziert werden, so wird `true` zurückgegeben. Ansonsten ist der Rückgabewert `false`.

Der Algorithmus liefert natürlich nur eine hinreichende Rückgabe: Da die Kontrahierbarkeits-Bedingungen 1 bzw. 2 in nur endlich vielen Punkten überprüft werden

Algorithmus A.2 (Überprüfen der Kontrahierbarkeits-Bedingungen, 2D)

```

1: (Boolean) IS_CONTRACTIBILE_2D( $P, \mathcal{F}_{n-1}(p_1), \dots, \mathcal{F}_{n-1}(p_k)$ ) :=
2: for all  $p \in P$  do
3:   for all  $F \in \mathcal{F}_1(p)$  do
4:     if CONTRACTIBILITY_CONDITION_1_2D( $F$ ) = false then
5:       RETURN(false)
6:     end if
7:   end for
8:   for all  $F, F' \in \mathcal{F}_1(p), F \neq F'$  do
9:     if CONTRACTIBILITY_CONDITION_2_2D( $F, F'$ ) = false then
10:      RETURN(false)
11:    end if
12:   end for
13: end for
14: RETURN(true)

```

(können), liefern $\text{CONTRACTIBILITY_CONDITION_1_2D}(F)$ oder $\text{CONTRACTIBILITY_CONDITION_2_2D}(F, F')$ unter Umständen false, obwohl die Bedingung 1 oder 2 des Satzes 3.3.4 erfüllt sind.

Zur Überprüfung der Kontrahierbarkeit im \mathbb{R}^3 :

Algorithmus A.3 (Überprüfen der Kontrahierbarkeits-Bedingungen, 3D)

```

1: (Boolean) IS_CONTRACTIBILE_3D( $P$ ) :=
2: for all  $p \in P$  do
3:   for all  $F \in \mathcal{F}_2(p)$  do
4:     if CONTRACTIBILITY_CONDITION_1_3D( $F$ ) = false then
5:       RETURN(false)
6:     end if
7:   end for
8:   if CONTRACTIBILITY_CONDITION_2_3D( $\mathcal{F}_2(p)$ ) = false then
9:     RETURN(false)
10:  end if
11:  for all  $q \in P, q \neq p$  do
12:    if CONTRACTIBILITY_CONDITION_3_3D( $\mathcal{F}_2(p), \mathcal{F}_2(q)$ ) = false then
13:      RETURN(false)
14:    end if
15:  end for
16: end for
17: RETURN(true)

```

Wie im zwei-dimensionalen Fall prüfen hier die Prozeduren $\text{CONTRACTIBILITY_CONDITION_i_3D}$, $i = 1, 2, 3$, die entsprechenden Bedingungen 1, 2 und 3 des Satzes 3.3.5, respektive, in endlich vielen Punkten nach. Ist die entsprechende Bedingung in einem der Punkte erfüllt, so ist der Rückgabewert true und sonst false.

Die Behandlung interner Berührungspunkte erfolgt in zwei Schritten: Zum einen wird jedes $(n - 1)$ -Simplex $s \in D_{\partial K}$ daraufhin überprüft, ob die Existenz eines internen

Algorithmus A.4 (Erkennung und Ausschluss interner Berührungspunkte)

```

1: INTERNAL_TANGENCIES( $D_K$ ) :=
2:  $P_{IT} \leftarrow \emptyset$  {Menge der  $(n - 1)$ -Simplexe, die sicher einen internen Berührungspunkt
   enthalten.}
3:  $P_{nonIT} \leftarrow \emptyset$  {Menge der  $(n - 1)$ -Simplexe, die sicher keinen internen Berührungspunkt
   enthalten.}
4:  $P_? \leftarrow \emptyset$  {Menge der  $(n - 1)$ -Simplexe, bei denen nicht entschieden werden kann,
   ob sie einen internen Berührungspunkt enthalten oder nicht.}
5: for all  $(n - 1)$ -Simplexe  $s \in D_{\partial K}$  do
6:   if CONTAINS_INTERNAL_TANGENCY( $s$ ) = true then
7:     INSERT( $s$ ,  $P_{IT}$ )
8:   else if CONTAINS_NO_INTERNAL_TANGENCY( $s$ ) = true then
9:     INSERT( $s$ ,  $P_{nonIT}$ )
10:  else
11:    INSERT( $s$ ,  $P_?$ )
12:  end if
13: end for
14: RETURN( $P_{IT}, P_{nonIT}, P_?$ )

```

Berührungspunkts mit Satz 4.3.3 garantiert werden kann. Zum anderen erfolgt ein Test mittels Satz 4.3.2 auf den Ausschluss interner Berührungspunkte.

Kann für ein $(n - 1)$ -Simplex in $D_{\partial K}$ weder die Existenz noch der Ausschluss eines internen Berührungspunkts entschieden werden, so muss ein anderes P gewählt werden. Können durch Nachprüfen in endlich vielen Punkten die Bedingungen der Sätze 4.3.3 und 4.3.2 verifiziert werden, so haben CONTAINS_INTERNAL_TANGENCY(s) und CONTAINS_NO_INTERNAL_TANGENCY(s), respektive, jeweils den Rückgabewert true und ansonsten false.

Tritt ein interner Berührungspunkt auf, so kann dieser im \mathbb{R}^2 in gewissen Fällen mit Satz 2.3.6 aufgelöst werden. Dies führt auf den Algorithmus A.5

Hier liefert APPROXIMATE_ZERO(s) eine Näherung \tilde{x} der Nullstelle von $\eta_s(x)$ auf s . Mit $\tilde{\varphi}(x, t)$ bezeichnen wir eine Näherungslösung von $\dot{x} = f(x)$, etwa vermöge eines Runge-Kutta-Verfahrens.

Zusammenfassend erhalten wir im \mathbb{R}^2 bzw. \mathbb{R}^3 den folgenden Algorithmus zur Berechnung des Conley-Index. Dabei ist im \mathbb{R}^2 der Algorithmus IS_CONTRACTIBLE_2D und im \mathbb{R}^3 der Algorithmus IS_CONTRACTIBLE_2D zu wählen. Die Prozedur DELAUNAY berechnet die eingeschränkten Delaunay-Triangulierungen von K , ∂K und L^- . Ausgehend von der Delaunay-Triangulierung D werden dabei nur die Simplexe in D berücksichtigt, für die der Schnitt der entsprechenden eingeschränkten Voronoi-Zellen nicht leer ist.

Für Algorithmen zur Berechnung der Homologie verweisen wir auf die Arbeiten [KaMrSl98], [KaMiWa99], [KaMiMr03] und das Programmpaket [ChomP04].

Algorithmus A.5 (Auflösung interner Berührungspunkte)

```

1: RESOLVE_INTERNAL_TANGENCY_2D( $P_{IT}$ ) :=
2:  $\tilde{x} \leftarrow$  APPROXIMATE_ZERO( $s$ )
3: for  $t$  from  $h$  to  $h_{\max}$  by  $h$  do
4:   if  $[\tilde{\varphi}(\tilde{x}, t), \tilde{\varphi}(\tilde{x}, t+h)] \cap \partial K \neq \emptyset$  then
5:      $\hat{x} \leftarrow [\tilde{\varphi}(\tilde{x}, t), \tilde{\varphi}(\tilde{x}, t+h)] \cap \partial K$ 
6:      $s \leftarrow$  1-Simplex in  $D_{\partial K}$ , das  $\hat{x}$  enthält.
7:      $\tilde{B} \leftarrow$  wie in Satz 2.3.6 definiert.
8:      $(\tilde{N}, \tilde{L}) \leftarrow$  wie in Satz 2.3.6 definiert.
9:     if  $s \in D_{L^-}$  and  $\tilde{B}$  ist kontrahierbar then
10:       RETURN( $\tilde{N}, \tilde{L}$ )
11:     end if
12:   end if
13: end for
14: RETURN( $\emptyset, \emptyset$ )

```

Algorithmus A.6 (Bestimmung des Conley-Index)

```

1: CONLEY_INDEX( $K, P$ ) :=
2:  $(\mathcal{F}_{n-1}(p_1), \dots, \mathcal{F}_{n-1}(p_k)) \leftarrow$  CALCULATE_FACES( $K, P$ )
3: if IS_CONTRACTIBLE_ID( $P, \mathcal{F}_{n-1}(p_1), \dots, \mathcal{F}_{n-1}(p_k)$ ) = false then
4:   „Die Kontrahierbarkeits-Bedingungen können nicht verifiziert werden.“
5:   RETURN( $\emptyset$ )
6: end if
7:  $(D_K, D_{\partial K}, D_{L^-}) \leftarrow$  DELAUNAY( $K, P$ )
8:  $(P_{IT}, P_{\text{nonIT}}, P_?) \leftarrow$  INTERNAL_TANGENCIES( $D_{\partial K}$ )
9: if  $P_? = \emptyset$  then
10:   „Für die Menge der Simplex  $P_?$  kann nicht entschieden werden, ob sie einen
      internen Berührungspunkt enthalten oder nicht.“
11:   RETURN( $\emptyset$ )
12: end if
13: if  $P_{IT} = \emptyset$  then
14:   RETURN( $H_*(D_K, D_{L^-})$ )
15: end if
16: „Die folgenden Simplexe enthalten interne Berührungspunkte:  $P_{IT}$ .“
17: RETURN( $\emptyset$ )

```

Anhang B

Hilfsmittel aus der algebraischen Topologie

In diesem Kapitel geben wir einige für uns wichtige Definitionen, Eigenschaften und Sätze aus der algebraischen Topologie an. Dabei sind vor allem die Homologietheorie und die zu ihrer Berechnung nützlichen Werkzeuge wie exakte Sequenzen oder das Fünferlemma von Bedeutung. Für eine ausführliche Darstellung verweisen wir auf das Textbuch „An Introduction to Algebraic Topology“ von Joseph J. Rotman, [Ro98].

B.1 Motivation

Zunächst wollen wir ohne die formale Sprache der algebraischen Topologie die Bedeutung der Homologie ansatzweise verdeutlichen. Ein wesentliches Ziel der Homologietheorie ist die

Beschreibung der Topologie eines Raumes G .

Im Falle des abgebildeten Gebiets G in der Ebene sind für die Topologie die vier Löcher maßgeblich. Diese können durch geschlossene Kurven in G erfasst werden (etwa γ_1 im Bild). Allerdings beschreiben viele dieser Kurven dasselbe Loch (etwa γ_1 und γ_2), so dass wir die folgende Äquivalenzrelation einführen und die Äquivalenzklassen mit $\bar{\gamma}$ bezeichnen:

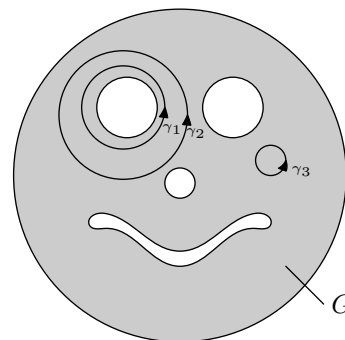
$$\gamma \sim \gamma' \iff \int_{\gamma} f dz = \int_{\gamma'} f dz$$

für alle holomorphen Funktionen $f: G \rightarrow \mathbb{C}$. Damit werden die Löcher durch die Menge der *Zykeln* von G beschrieben:

$$Z(G) := \{ \bar{\gamma} : \gamma \text{ ist eine geschlossene Kurve in } G \}$$

Einige der geschlossenen Kurven sind jedoch trivial in dem Sinne, dass sie ein Gebiet, das ganz in G liegt, beranden (etwa γ_3) und damit keine Information über die Löcher in G liefern. Diese Kurven sind also jeweils der Rand eines Gebiets, das ganz in G liegt, weshalb die entsprechenden Zykeln *Ränder* (englisch: boundary) genannt werden:

$$B(G) := \{ \bar{\gamma} : \gamma \text{ berandet ein Gebiet, das ganz in } G \text{ liegt} \}$$



Die Menge der nichttrivialen Zykel $Z(G) - B(G)$, das sind alle Zykel ohne die Ränder, beschreibt damit die Topologie von G . Die erste Homologiegruppe $H_1(G)$ entspricht in diesem Beispiel dieser Menge der nichttrivialen Zykel.

B.2 Simpliciale Homologietheorie

Zur rigorosen Definition der simplicialen Homologietheorie gehen wir wie folgt vor:

1. Triangulierung von G .
2. Gruppe C_q der q -Ketten (Analogon zu den Kurven in G).
3. Definition der Zykel und Ränder.

1. Triangulierung von G

Definition B.2.1 (Simplizialer Komplex)

Es sei $\{x_0, \dots, x_k\}$ eine linear unabhängige Menge von Punkten im \mathbb{R}^n . Die konvexe Hülle der x_i ist dann ein k -Simplex s mit Ecken $\text{vert } s := \{x_0, \dots, x_k\}$ und Dimension $\dim s = k$.

Ein Simplex s' mit $\text{vert } s' \subset \text{vert } s$ heißt Seite von s und im Fall $\text{vert } s' \subsetneq \text{vert } s$ eigentliche Seite.

Eine Menge K von Simplexen heißt *simplizialer Komplex*, falls

- $s \cap s'$ für $s, s' \in K$ eine Seite von s und s' ist,
- jede Seite von $s \in K$ auch in K enthalten ist.

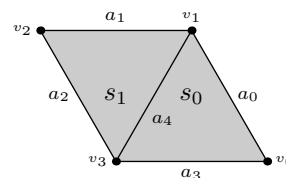
Die Menge der *Ecken von K* ist die Menge der Ecken aller Simplexe in K :

$$\text{vert } K := \bigcup_{s \in K} \text{vert } s.$$

Die *Dimension eines simplicialen Komplexes* ist

$$\dim K := \max_{s \in K} \dim s.$$

Der K zu Grunde liegende Raum ist $|K| := \bigcup s$ für alle $s \in K$.



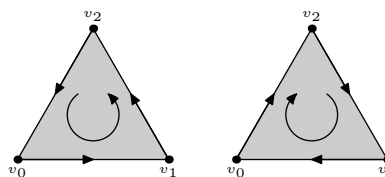
In der Abbildung ist ein 2-dimensionaler simplicialer Komplex K skizziert. Er besteht aus den 2-Simplexen s_0 und s_1 mit ihren Seiten a_0, \dots, a_4 und den Ecken $\text{vert } K = \{v_0, \dots, v_3\}$.

◇

Definition B.2.2 (Orientierung von Simplexen)

Für ein k -Simplex mit Ecken $\{x_0, \dots, x_k\}$ nennen wir eine lineare Ordnung auf den Ecken, $x_0 < \dots < x_k$, eine *Orientierung*. Das Simplex zusammen mit der Orientierung bezeichnen wir als *orientiertes Simplex* $s = [x_0, \dots, x_k]$. Es bezeichne $\pi = \pi_k$ eine Permutation von $\{0, \dots, k\}$ und $\text{sig } \pi$ die Anzahl der Vertauschungen von π . Zwei Orientierungen $x_0 < \dots < x_k$ und $x_{\pi(0)} < \dots < x_{\pi(k)}$ sind *gleich*, falls $\text{sig } \pi$ gerade ist. Dann sind auch die orientierten Simplexe $[x_0, \dots, x_k]$ und $[x_{\pi(0)}, \dots, x_{\pi(k)}]$ *gleich*. Ist $\text{sig } \pi$ ungerade, so heißen $[x_0, \dots, x_k]$ und $[x_{\pi(0)}, \dots, x_{\pi(k)}]$ *entgegengesetzt orientiert*. Ein orientiertes k -Simplex $s = [x_0, \dots, x_k]$ *induziert orientierte Seiten* $(-1)^i [x_0, \dots, \check{x}_i, \dots, x_k]$. Dabei ist $[x_0, \dots, \check{x}_i, \dots, x_k]$ die Seite von s mit Ecken $\text{vert } s - \{x_i\}$ und linearer Ordnung $x_0 < \dots < x_{i-1} < x_{i+1} < x_k$. Ferner bezeichnen wir mit $-[y_0, \dots, y_l]$ das l -Simplex mit zu $[y_0, \dots, y_l]$ entgegengesetzter Orientierung.

Das Simplex $s = [v_0, v_1, v_2]$ ist entgegen des Uhrzeigersinns orientiert und das Simplex $-s = [v_0, v_2, v_1]$ ist im Uhrzeigersinn orientiert. Die von s induzierten Seiten sind $[v_1, v_2]$, $-[v_0, v_2] = [v_2, v_0]$ und $[v_0, v_1]$. Die Orientierung wird durch Pfeile dargestellt.



◇

Definition B.2.3 (Triangulierung)

Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$. Ein simplizialer Komplex K zusammen mit einem Homöomorphismus $h: |K| \rightarrow G$ heißt *Triangulierung* von G , falls $h(|K|) = G$ gilt. ◇

2. Gruppe der q -Ketten

Definition und Satz B.2.4 (Kettenkomplex)

Für einen k -dimensionalen simplizialen Komplex K definieren wir die von allen orientierten q -Simplexen in K erzeugte abelsche Gruppe der q -Ketten

$$C_q := C_q(K) := \langle s \in K : s \text{ ist } q\text{-Simplex} \rangle, \quad q \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Der Randoperator $\partial_q: C_q \rightarrow C_{q-1}$ ist die lineare Fortsetzung von

$$[x_0, \dots, x_q] \mapsto \sum_{i=0}^q (-1)^i [x_0, \dots, \check{x}_i, \dots, x_q].$$

Damit ist

$$C_*(K) := (C_*(K), \partial_*) := 0 \xrightarrow{\partial_{k+1}} C_k(K) \xrightarrow{\partial_k} \dots \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

ein Kettenkomplex, d.h. die C_q sind abelsche Gruppen, die ∂_q Homomorphismen und es gilt $\partial_q \partial_{q+1} = 0$.

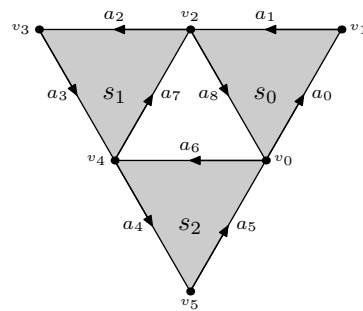
Beweis: Durch eine kurze Rechnung kann gezeigt werden, dass $C_*(K)$ ein Kettenkomplex ist. Wir verweisen auf [Ro98, Satz 4.6, S. 65] und [Ro98, Satz 7.11, S. 144]. □

Bemerkung:

- Die Summe von Simplexen wird formal gebildet. Es ist etwa $s_0 + s_0 + s_0 = 3s_0$ und $s_0 + s_1 - s_0 = s_1$.
- Da ein k -dimensionaler simplizialer Komplex für $q < 0$ und $q > k$ keine q -Simplexe besitzt, ist in diesen Fällen $C_q = \langle \emptyset \rangle = 0$. Dabei bezeichnet 0 die triviale Gruppe, die nur aus dem neutralem Element 0 besteht.
- Der Homomorphismus ∂_q heißt Randoperator, da $|\partial_q s| = \partial|s|$ für ein $s \in K$.

Beispiel B.2.1: Der abgebildete simpliziale Komplex K mit Loch hat die folgenden q -Ketten:

$$\begin{aligned} C_q &= 0 \text{ für } q \geq 3, \\ C_2 &= \langle s_0, s_1, s_2 \rangle, \\ C_1 &= \langle a_0, \dots, a_8 \rangle, \\ C_0 &= \langle v_0, \dots, v_5 \rangle. \end{aligned}$$



Dabei bezeichnet $\langle s_0, s_1, s_2 \rangle$ die abelsche Gruppe, die von s_0, s_1 und s_2 erzeugt wird. In C_2 sind etwa das neutrale Element 0 sowie $-s_0$ und $s_0 + 2s_1 - 5s_2$ enthalten.

Für den Randoperator ∂_* gilt beispielsweise

$$\begin{aligned} \partial_2 s_0 &= a_0 + a_1 + a_8, \\ \partial_1 \partial_2 s_0 &= \partial_1 a_0 + \partial_1 a_1 + \partial_1 a_8 \\ &= v_1 - v_0 + v_2 - v_1 + v_0 - v_2 = 0. \end{aligned}$$

◇

3. Definition der Zykel und Ränder

Den geschlossenen Kurven in der Motivation entsprechen nun die geschlossenen q -Ketten. Eine q -Kette c ist genau dann geschlossen, wenn $c \in \ker \partial_q$. Damit definieren wir die *Gruppe der q -Zykeln* als

$$Z_q(K) := \ker \partial_q = \{ c \in C_q(K) : \partial_q c = 0 \}.$$

Es ist $c \in \text{img } \partial_{q+1}$ genau dann, wenn es ein $c' \in C_{q+1}(K)$ gibt, so dass $c = \partial_{q+1} c'$ ist, also c der Rand einer Summe von $(q + 1)$ -Simplexen ist. Wir definieren folglich die Gruppe der q -Ränder als

$$B_q(K) := \text{img } \partial_{q+1} := \{ c \in C_q(K) : \exists c' \in C_{q+1}(K) \text{ mit } \partial_{q+1} c' = c \}.$$

Weil jeder Rand eine geschlossene q -Kette bildet, ist $\text{img } \partial_{q+1} \subset \ker \partial_q$. Die q -te Homologiegruppe ist nun die Gruppe der nichttrivialen q -Zykeln:

Definition B.2.5 (Simpliziale Homologie)

Es seien $G \subset \mathbb{R}^n$ und K zusammen mit einem Homöomorphismus $h: |K| \rightarrow G$ eine Triangulierung von G . Dann ist die q -te *simpliziale Homologiegruppe* von G

$$H_q(G) := H_q(K) := H_q(C_*(K)) := \frac{Z_q(K)}{B_q(K)} = \frac{\ker \partial_q}{\text{img } \partial_{q+1}}.$$

Die *simpliziale Homologie* von G ist die Folge der abelschen Gruppen $H_q(K)$:

$$H_*(G) := \dots, H_2(G), H_1(G), H_0(G).$$

Es sei $H \subset G$. Ferner sei L ein Unterkomplex von K , der zusammen mit einem Homöomorphismus eine Triangulierung von H bildet. Dann definieren wir die *relative Homologie* von (G, H) als

$$H_*(G, H) := H_*(K, L) := H_*(C_*(K)/C_*(L)).$$

◇

Bemerkung:

- Die *Faktorgruppe* $Z_q(K)/B_q(K)$ besteht aus allen Nebenklassen $z+B_q(K)$ für $z \in Z_q(K)$ und ist ebenfalls eine abelsche Gruppe.
- Der *Quotientenkomplex* $C_*(K)/C_*(L)$ besteht aus den $C_q(K)/C_q(L)$ und dem Randoperator $\bar{\partial}_q: C_q(K)/C_q(L) \rightarrow C_{q-1}(K)/C_{q-1}(L), c + C_q(L) \mapsto \partial_q(c) + C_{q-1}(L)$:

$$\frac{C_*(K)}{C_*(L)} := 0 \xrightarrow{\bar{\partial}_{k+1}} \frac{C_k(K)}{C_k(L)} \xrightarrow{\bar{\partial}_k} \dots \xrightarrow{\bar{\partial}_1} \frac{C_0(K)}{C_0(L)} \xrightarrow{\bar{\partial}_0} 0.$$

Anschaulich bedeutet dies für die Berechnung von $H_q(K, L)$, dass alle Zyklen, die nicht in L liegen, nicht berücksichtigt werden (vergleiche auch Beispiel B.2.3).

- Durch die Definition anderer Kettenkomplexe erhält man analog zu der vorigen Konstruktion entsprechend andere Homologietheorien. Damit lässt sich die Homologie auch für eine größere Klasse als die der triangulierbaren Räume definieren. Wir verweisen auf [Ro98, Kapitel 4 und 8].

Beispiel B.2.2: Für den simplizialen Komplex K aus dem Beispiel B.2.1 erhalten wir

$$\begin{aligned} \text{img } \partial_{q+1} &= 0 \quad \text{für } q \geq 2, \\ \ker \partial_q &= 0 \quad \text{für } q \geq 2, \\ \text{img } \partial_2 &= \langle a_0 + a_1 + a_8 \rangle \oplus \langle a_2 + a_3 + a_7 \rangle \oplus \langle a_4 + a_5 + a_6 \rangle, \\ \ker \partial_1 &= \langle a_0 + a_1 + a_8 \rangle \oplus \langle a_2 + a_3 + a_7 \rangle \oplus \langle a_4 + a_5 + a_6 \rangle \oplus \langle a_6 + a_7 + a_8 \rangle, \\ \text{img } \partial_1 &= \langle v_1 - v_0 \rangle \oplus \langle v_2 - v_1 \rangle \oplus \langle v_3 - v_2 \rangle \oplus \langle v_4 - v_3 \rangle \oplus \langle v_5 - v_4 \rangle, \\ \ker \partial_0 &= \bigoplus_{i=0}^5 \langle v_i \rangle. \end{aligned}$$

Dabei bezeichnen wir für die abelschen Gruppen A und B mit $A \oplus B$ die *direkte Summe*. Das ist das kartesische Produkt von A und B zusammen mit der komponentenweisen Addition:

$$\begin{aligned} A \oplus B &= \{ (a, b) : a \in A, b \in B \}, \\ (a_0, b_0) + (a_1, b_1) &= (a_0 + a_1, b_0 + b_1) \quad \text{für } a_0, a_1 \in A \text{ und } b_0, b_1 \in B. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir für die Homologie von K :

$$H_q(K) = \frac{\ker \partial_q}{\text{img } \partial_{q+1}} = 0 \quad \text{für } q \geq 2,$$

$$H_1(K) = \frac{\ker \partial_1}{\text{img } \partial_2} = \langle a_6 + a_7 + a_8 \rangle \cong \mathbb{Z}, \quad H_0(K) = \frac{\ker \partial_0}{\text{img } \partial_1} \cong \mathbb{Z}.$$

Also ist $H_*(K) \cong \dots, 0, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}$. Wie üblich schreiben wir dabei $A \cong B$ für zueinander isomorphe Gruppen A und B . ◇

Beispiel zur relativen Homologie B.2.3: Bei der relativen Homologie von (K, L) werden die Teile des Kettenkomplexes $C_q(K)$, die in $C_q(L)$ liegen, nicht gewertet (Definition der relativen Homologie). Für den abgebildeten simplizialen Komplex K relativ zu $L = \{v_0\}$ erhalten wir:

$$\text{img } \partial_{q+1} = 0 \quad \text{für } q \geq 2,$$

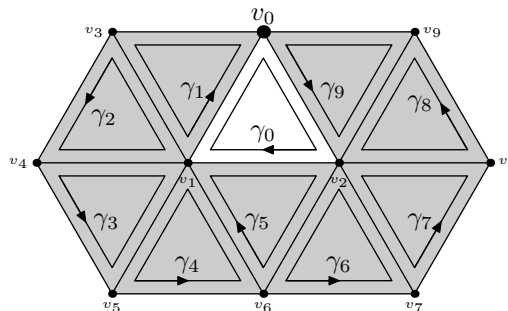
$$\ker \partial_q = 0 \quad \text{für } q \geq 2,$$

$$\text{img } \partial_2 = \bigoplus_{i=1}^9 \langle \gamma_i \rangle,$$

$$\ker \partial_1 = \bigoplus_{i=0}^9 \langle \gamma_i \rangle,$$

$$\text{img } \partial_1 = \bigoplus_{i=1}^9 \langle v_i \rangle$$

$$\ker \partial_0 = \bigoplus_{i=1}^9 \langle v_i \rangle.$$



Mit γ_i bezeichnen wir jeweils die abgebildeten Zyklen. So ist $\gamma_0 = [v_0, v_2] + [v_2, v_1] + [v_1, v_0]$. Man beachte, dass $\partial_1([v_i, v_0]) = v_i$ für $i = 1, 2, 3, 9$, denn es ist die Homologie relativ zu $L = \{v_0\}$ zu berechnen. Daher sind alle Ecken im Bild von ∂_1 enthalten. Für die Homologie erhalten wir insgesamt $H_*(K, L) = \dots, 0, 0, \langle \gamma_0 \rangle, 0 \cong \dots, 0, 0, \mathbb{Z}, 0$. ◇

B.3 Werkzeuge zur Berechnung der Homologiegruppen

Exakte Sequenzen sind bei der Homologieberechnung oft nützlich, falls bereits Teile der Homologie bekannt sind.

Definition B.3.1 (Exakte Sequenz)

Eine Folge abelscher Gruppen $(G_q)_{q \in \mathbb{Z}}$ mit Homomorphismen $\partial_q: G_q \rightarrow G_{q-1}$, $q \in \mathbb{Z}$ heißt *exakte Sequenz*, falls $\text{img } \partial_{q+1} = \ker \partial_q$ für alle $q \in \mathbb{Z}$. ◇

Bemerkung: Ist der Kettenkomplex $C_*(K)$ eines simplizialen Komplexes exakt, so zeigt die Definition der Homologie sofort $H_*(K) = 0_* = \dots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots$

Satz B.3.2 (Exakte Sequenz eines Paares (X, A))

Es seien $A \subset X \subset \mathbb{R}^n$ sowie A und X triangulierbar. Dann gibt es eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow H_*(A) \xrightarrow{i_*} H_*(X) \xrightarrow{p_*} H_*(X, A) \longrightarrow 0 \quad d.h.$$

$$\dots \longrightarrow H_{k+1}(X, A) \xrightarrow{d_{k+1}} H_k(A) \xrightarrow{i_k} H_k(X) \xrightarrow{p_k} H_k(X, A) \xrightarrow{d_k} H_{k-1}(A) \longrightarrow \dots$$

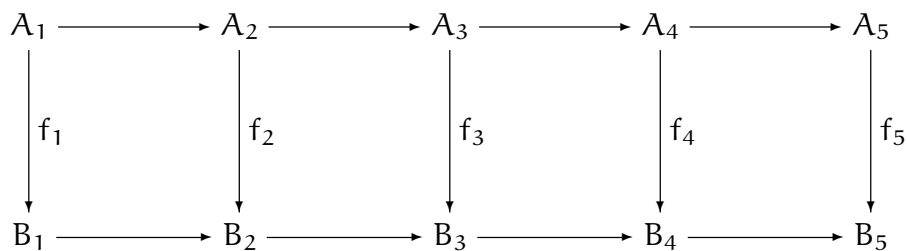
mit den durch die Inklusionen $i: A \rightarrow X$ und $p: (A, \emptyset) \rightarrow (X, A)$ induzierten Homomorphismen $i_* = (i_k)$ und $p_* = (p_k)$.

Für den Beweis verweisen wir auf [Ro98, Satz 5.8, S. 96].

In diesem Kontext ist auch oft das so genannte Fünferlemma nützlich (vergleiche [Ro98, Satz 5.10, S. 98]):

Lemma B.3.3 (Fünferlemma)

Für ein kommutatives Diagramm von Gruppen A_i und B_i sowie Homomorphismen $f_i: A_i \rightarrow B_i$,



mit exakten Zeilen gilt:

Sind f_1, f_2, f_4 und f_5 Isomorphismen, so ist auch f_3 ein Isomorphismus.

B.4 Weitere Definitionen

Definition B.4.1 (Kontrahierbarkeit)

Eine Menge $C \subset \mathbb{R}^n$ ist kontrahierbar, falls es eine stetige Abbildung $h: C \times [0, 1] \rightarrow C$ gibt so, dass

$$h(x, 0) = x \quad \text{und} \quad h(x, 1) = x_0$$

für alle $x \in C$ und ein festes $x_0 \in C$ gilt. \diamond

Beispiel B.4.1: Die Einheitskreisscheibe ist kontrahierbar, denn $h(x, t) := x(1 - t)$ ist offenbar eine geeignete Abbildung. Hingegen ist ein Kreisring nicht kontrahierbar. Dazu verweisen wir auf [Ro98, S. 18ff.]. \diamond

Definition B.4.2 (Homotopietyp)

Es seien $X, Y \subset \mathbb{R}^n$. Zwei stetige Abbildungen $f_0, f_1: X \rightarrow Y$ sind zueinander *homotop*, $f_0 \simeq f_1$, falls es eine stetige Abbildung $h: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ mit

$$h(x, 0) = f_0(x) \quad \text{und} \quad h(x, 1) = f_1(x)$$

für jeweils alle $x \in X$ gibt.

Die beiden Räume X und Y haben denselben *Homotopietyp*, falls es eine *Homotopieäquivalenz* $f: X \rightarrow Y$ gibt. Das ist eine stetige Abbildung, zu der es ein $g: Y \rightarrow X$ mit

$$g \circ f \simeq \text{Id}_X \quad f \circ g \simeq \text{Id}_Y$$

gibt (Id_X bzw. Id_Y ist die Identität auf X bzw. Y). \diamond

Bemerkung: Sind X und Y zueinander homöomorph, so haben sie den selben Homotopietyp. Begründung: Jeder Homöomorphismus ist eine Homotopieäquivalenz. Sehr nützlich ist die Tatsache, dass Räume des selben Homotopietyps auch isomorphe Homologien haben, [Ro98, Korollar 4.2.4, S. 79].

Anhang C

Hilfsmittel aus der algorithmischen Geometrie

Zur Triangulierung der Austrittsmenge L^- verwenden wir so genannte Delaunay-Komplexe. Wir führen hier kurz in die Notation ein und geben die wesentlichen Sätze wieder. Ansonsten verweisen wir auf die Monographie „Algorithms in combinatorial geometry“ von Herbert Edelsbrunner, [Ed87].

C.1 Hyperebenen und Seiten von Polyedern

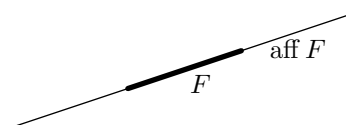
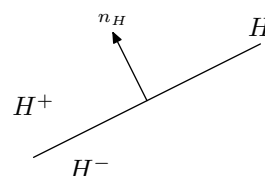
Definition C.1.1 (Hyperebenen, Halbräume, affine und konvexe Hülle)

Ein Einheitsvektor $n_H \in \mathbb{R}^n$ und eine reelle Zahl b definieren eine *orientierte Hyperebene*

$$H := H(b; n_H) := \{ x \in \mathbb{R}^n : \langle x, n_H \rangle + b = 0 \}$$

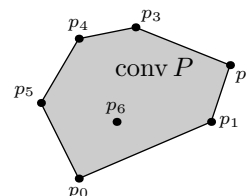
und *positive bzw. negative Halbräume*

$$\begin{aligned} H^+(b; n_H) &:= \{ x \in \mathbb{R}^n : \langle x, n_H \rangle + b \geq 0 \}, \\ H^-(b; n_H) &:= \{ x \in \mathbb{R}^n : \langle x, n_H \rangle + b \leq 0 \}. \end{aligned}$$



Die *affine Hülle* $\text{aff}(F)$ einer Menge $F \subset \mathbb{R}^n$ ist der kleinste affine Unterraum im \mathbb{R}^n , der F enthält.

Die *konvexe Hülle* einer endlichen Menge $P \subset \mathbb{R}^n$ ist



$$\text{conv } P := \left\{ \sum_{p \in P} \lambda_p p : \sum_{p \in P} \lambda_p = 1, 0 \leq \lambda_p \leq 1 \text{ für alle } p \in P \right\}$$

◇

Definition C.1.2 (Polyeder)

Sind H_1, \dots, H_k orientierte Hyperebenen, so ist der Schnitt der positiven Halbräume,

$$K := \bigcap_{i=1}^k H_i^+,$$

ein *konvexes Polyeder*, das von den Hyperebenen H_1, \dots, H_k erzeugt wird. Wir schreiben dafür auch $H(K) = \{H_1, \dots, H_k\}$.

Sind K_1, \dots, K_l konvexe Polyeder mit disjunktem Inneren, so ist

$$\bigcup_{i=1}^l K_i$$

ein *Polyeder*, das von den die konvexen Polyeder erzeugenden Hyperebenen erzeugt wird. ◇

Definition C.1.3 (Seiten)

Die Punktmenge, die genau die Seiten eines Polyeders beschreiben, sind durch ihre Lage bezüglich der definierenden Hyperebenen H_1, \dots, H_k bestimmt: Für $1 \leq i \leq k$ und $x \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\alpha_i(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \in H_i, \\ + & \text{für } x \in H_i^+ - H_i, \\ - & \text{für } x \in H_i^- - H_i. \end{cases}$$

die *Position von x bezüglich H_i* und

$$\alpha(x) := (\alpha_1(x), \dots, \alpha_k(x))$$

die *Position von x bezüglich H_1, \dots, H_k* . Offensichtlich ist die Relation

$$x \sim y \iff \alpha(x) = \alpha(y)$$

eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklassen heißen *Seiten von $\{H_1, \dots, H_k\}$* . Eine Seite F ist d -Seite, falls F in einem d -dimensionalen Unterraum des \mathbb{R}^n liegt, nicht aber in einem $(d - 1)$ -dimensionalen Unterraum.

Ist F' eine k -Seite und F eine $(k - 1)$ -Seite mit $F \subset \text{cl } F'$, so ist $n_{F,F'}$ der nach innen zeigende Normalenvektor von F bezüglich F' : Zu jedem $x \in F$ gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $x + (0, \epsilon)n_{F,F'} \subset F'$.

Es sei K ein Polyeder, das von Hyperebenen H_1, \dots, H_k erzeugt wird. Die *Seiten von K* sind die Seiten von $\{H_1, \dots, H_k\}$, die in ∂K liegen.

Die 0-Seiten von K heißen *Ecken* und werden mit $\text{vert } K$ bezeichnet. ◇

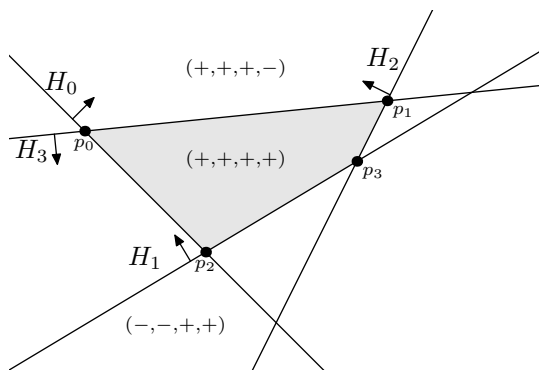


Abbildung: Ein konvexes Polyeder (schraffiert), das von vier Hyperebenen erzeugt wird. Für drei 2-Seiten ist die Position angegeben. Beispiele für 1-Seiten sind die Strecken zwischen p_0 und p_1 bzw. p_0 und p_2 mit den Positionen $(+, +, +, 0)$ bzw. $(0, +, +, +)$. Die 0-Seiten sind die Punkte p_0, p_1, p_2, p_3 mit den Positionen $(0, +, +, 0)$, $(+, +, 0, 0)$, $(0, 0, +, +)$, $(+, 0, 0, +)$, respektive.

C.2 Delaunay-Komplexe und der Satz vom Nerv

Zur Triangulierung der Austrittsmenge können so genannte eingeschränkte Voronoi-Diagramme und eingeschränkte Delaunay-Komplexe verwendet werden. Sie gehen in dieser Form auf Edelsbrunner und Shah, [EdSh97], zurück.

Definition C.2.1 (Voronoi-Diagramm)

Es sei $P \subset \mathbb{R}^n$ eine endliche Punktmenge. Dann heißt für ein $p \in P$

$$V_p := V_p(P) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x - p| \leq |x - p'| \text{ für alle } p' \in P\}$$

Voronoi-Zelle und die Menge aller Zellen ist das *Voronoi-Diagramm* zu P :

$$\mathcal{V}(P) := \{V_p : p \in P\}.$$

Für eine kompakte Menge $C \subset \mathbb{R}^n$ heißt

$$V_{p,C} := V_p \cap C$$

die *auf C eingeschränkte Voronoi-Zelle* und $\mathcal{V}_C(P) := \{V_{p,C} : p \in P\}$ das *auf C eingeschränkte Voronoi-Diagramm*. \diamond

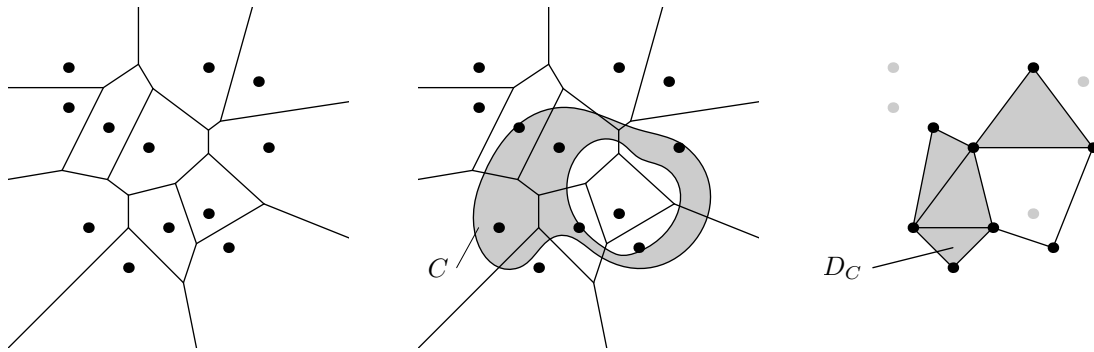


Abbildung C.1: Links ist ein Voronoi-Diagramm für ein P mit 12 Punkten abgebildet. In der Mitte ist das Voronoi-Diagramm auf eine zweifach zusammenhängende Menge eingeschränkt. Rechts ist der entsprechende Delaunay-Komplex abgebildet.

Bemerkung: Jede Voronoi-Zelle V_p ist ein konvexes Polyeder: Sie besteht aus dem Schnitt $\bigcap H_{p,p'}^+$, $p' \in P - \{p\}$. Dabei ist $H_{p,p'}$ die Hyperebene, die von p und p' überall den selben Abstand hat, mit $p \in H_{p,p'}^+$.

Definition C.2.2 (Delaunay-Eigenschaft und Delaunay-Komplex)

Es sei $C \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $P \subset \mathbb{R}^n$ endlich.

Dann hat P die *Delaunay-Eigenschaft*, falls gilt:

$$n + 2 \text{ Punkte aus } P \text{ liegen auf einer } (n - 1)\text{-Sphäre } \partial B_r \implies \text{int } B_r \cap P \neq \emptyset.$$

Hat P die Delaunay-Eigenschaft, so ist

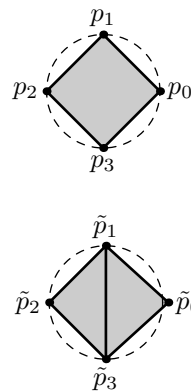
$$D(P) := \{[Q] : Q \subset P, \bigcap_{p \in Q} V_p \neq \emptyset\}$$

der *Delaunay-Komplex* zu P und

$$D_C(P) := \{[Q] : Q \subset P, \bigcap_{p \in Q} V_{p,C} \neq \emptyset\}$$

der *auf C eingeschränkte Delaunay-Komplex* zu P . \diamond

Lägen $n + 2$ Punkte auf einer $(n - 1)$ -Sphäre, so enthielte $D(P)$ auch Mengen $[Q]$, die nicht linear unabhängig wären. In der Abbildung rechts besteht $P = \{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ aus den Eckpunkten eines Quadrats. Die Delaunay-Eigenschaft ist damit nicht erfüllt und es wäre $[p_0, p_1, p_2, p_3] \in D(P)$. Da eine $(n - 1)$ -Sphäre jedoch Maß Null im \mathbb{R}^n hat, kann jede Punktmenge P durch eine beliebig kleine Störung zu einer Punktmenge \tilde{P} verändert werden, die die Delaunay-Eigenschaft hat (vergleiche Abbildung rechts unten sowie [EdSh97, Abschnitt 3] und [EdMu90]).



Bereits 1928 führte Alexandroff in [Al28] den Begriff des Nervs einer Überdeckung ein, um simpliziale Komplexe zu konstruieren. Wir verweisen auch auf [Ro98, S. 154] und [EdSh97, Abschnitt 2].

Definition C.2.3 (Überdeckung und Nerv)

Es seien $C \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und \mathcal{U} eine endliche, abgeschlossene Überdeckung von C , d.h.

- (1) \mathcal{U} ist endlich,
- (2) jedes $U \in \mathcal{U}$ ist abgeschlossen und
- (3) $C = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$.

Der *Nerv* von \mathcal{U} ist

$$\text{nerve } \mathcal{U} := \left\{ \mathcal{W} \subseteq \mathcal{U} : \bigcap_{W \in \mathcal{W}} W \neq \emptyset \right\}.$$

Ein simplizialer Komplex K ist eine *geometrische Realisierung* von $\text{nerve } \mathcal{U}$, falls es eine Bijektion $\iota: \text{nerve } \mathcal{U} \rightarrow K$ mit $\mathcal{W} \in \text{nerve } \mathcal{U} \iff \iota(\mathcal{W}) \in K$ gibt. \diamond

Proposition C.2.4

Es seien $P \subset \mathbb{R}^n$ endlich, $C \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $\mathcal{V}_C := \{V_{p,C} : p \in P\}$. Dann gilt:

- (1) \mathcal{V}_C ist eine endliche, abgeschlossene Überdeckung von C .
- (2) Der Delaunay-Komplex D_C ist ein simplizialer Komplex und eine geometrische Realisierung von $\text{nerve } \mathcal{V}_C$.

Beweis: Aussage (1) prüft man sofort an der Definition nach.

Zu Aussage (2): Es seien $Q' \subset Q \subset P$. Mit $\bigcap_{p \in Q} V_{p,C} \neq \emptyset$ ist dann wegen $Q' \subset Q$ erst recht $\bigcap_{p \in Q'} V_{p,C} \neq \emptyset$. Also ist mit $[Q], [Q'] \in D_C$ auch $[Q \cap Q'] \in D_C$ und für jede Seite $[\tilde{Q}]$ von $[Q]$ gilt $[\tilde{Q}] \in D_C$.

Mit der Bijektion $\iota: \mathcal{V}_C \rightarrow D_C, \iota(\{V_{p_0,C}, \dots, V_{p_k,C}\}) := [p_0, \dots, p_k]$ erkennen wir schließlich D_C als geometrische Realisierung von $\text{nerve } \mathcal{V}_C$. \square

Leray stellte 1945 in [Le45] folgenden Zusammenhang zwischen dem Nerv einer Überdeckung und der überdeckten Menge her (vergleiche auch [Ro98, S. 154] und [EdSh97, Abschnitt 2]):

Satz C.2.5 (Satz vom Nerv)

Es sei C kompakt, \mathcal{U} eine endliche, abgeschlossene Überdeckung von C und K eine geometrische Realisierung von $\text{nerve } \mathcal{U}$. Ist

$$\bigcap_{W \in \mathcal{W}} W \text{ für jedes } \mathcal{W} \subset \mathcal{U} \text{ kontrahierbar oder leer,}$$

so gilt

$$H_*(C) \cong H_*(K).$$

Literaturverzeichnis

- [Al28] Paul Alexandroff, *Über den allgemeinen Dimensionsbegriff und seine Beziehungen zur elementaren geometrischen Anschauung*, Mathematische Annalen **98** (1928), 617–635.
- [BaDoHu96] C. Bradford Barber, David P. Dobkin und Hannu Huhdanpaa, *The quickhull algorithm for convex hulls*, ACM Trans. Math. Software **22** (1996), no. 4, 469–483.
- [BaHu03] C. Bradford Barber und Hannu Huhdanpaa, *qhull Programmpaket zur Algorithmischen Geometrie*, 2003, URL: <http://www.qhull.org>.
- [Boc02] Erik M. Boczko, *Polygonal approximation for flows*, Ph.D. thesis, Georgia Institute of Technology, November 2002.
- [C78] Charles C. Conley, *Isolated invariant sets and the Morse index*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol. 38, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1978.
- [CE71] Charles C. Conley und Robert Easton, *Isolated invariant sets and isolating blocks*, Trans. Amer. Math. Soc. **158** (1971), 35–61.
- [ChomP04] ChomP Group, *Computational homology program*, 2004, URL: <http://www.math.gatech.edu/~chom/>.
- [DaJuMi03] Sarah Day, Oliver Junge und Konstantin Mischaikow, *A rigorous numerical method for the global analysis of infinite dimensional discrete dynamical systems*, to appear in SIAM Journal on Applied Dynamical Systems, URL: <http://www.math.gatech.edu/~mishaik/papers/paperlist.html>, 2003.
- [DeFrJu01] Michael Dellnitz, Gary Froyland und Oliver Junge, *The algorithms behind GAIO-set oriented numerical methods for dynamical systems*, Ergodic theory, analysis, and efficient simulation of dynamical systems, Springer, Berlin, 2001, 145–174.
- [DeHo97] Michael Dellnitz und Andreas Hohmann, *A subdivision algorithm for the computation of unstable manifolds and global attractors*, Numer. Math. **75** (1997), no. 3, 293–317.

- [DeJu02] Michael Dellnitz und Oliver Junge, *Set oriented numerical methods for dynamical systems*, Handbook of dynamical systems, Vol. 2, North-Holland, Amsterdam, 2002, 221–264.
- [Ed87] Herbert Edelsbrunner, *Algorithms in combinatorial geometry*, EATCS Monographs on Theoretical Computer Science, vol. 10, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [EdMu90] Herbert Edelsbrunner und Ernst Peter Mücke, *Simulation of simplicity: a technique to cope with degenerate cases in geometric algorithms*, ACM Trans. Comput. Graphics 9 (1990), 66–104.
- [EdSh97] Herbert Edelsbrunner und Nimish R. Shah, *Triangulating topological spaces*, Internat. J. Comput. Geom. Appl. 7 (1997), no. 4, 365–378, Tenth Annual ACM Symposium on Computational Geometry (Stony Brook, NY, 1994).
- [Ei95] Michael Eidenschink, *Exploring global dynamics: a numerical algorithm based on the Conley index theory*, Ph.D. thesis, Georgia Institute of Technology, 1995.
- [KalMiWa99] William D. Kalies, Konstantin Mischaikow und Greg Watson, *Cubical approximation and computation of homology*, Conley index theory (Warsaw, 1997), Banach Center Publ., vol. 47, Polish Acad. Sci., Warsaw, 1999, 115–131.
- [KaMiMr03] Tomasz Kaczyński, Konstantin Mischaikow und Marian Mrozek, *Computing homology*, Homology Homotopy Appl. 5 (2003), no. 2, 233–256 (electronic), Algebraic topological methods in computer science (Stanford, CA, 2001).
- [KaMrSl98] Tomasz Kaczyński, Marian Mrozek und Maciej Ślusarek, *Homology computation by reduction of chain complexes*, Computers and Mathematics 35 (1998), no. 4, 50–70.
- [Le45] Jean Leray, *Sur la forme des espaces topologiques et sur les points fixes des représentations*, J. Math. Pures Appl. 24 (1945), no. 9, 95–167.
- [M73] John W. Milnor, *Morse theory*, Based on lecture notes by M. Spivak and R. Wells. Annals of Mathematics Studies, No. 51, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1973.
- [Ma03] Maplesoft, *Maple 9*, 2003, URL: <http://www.maplesoft.com>.
- [Mi99] Konstantin Mischaikow, *The Conley index theory: a brief introduction*, Conley index theory, Banach Center Publ., vol. 47, Polish Acad. Sci., Warsaw, 1999, 9–19.
- [Mi02] Konstantin Mischaikow, *Topological techniques for efficient rigorous computations in dynamics*, Acta Numerica 11 (2002), 435–477.

- [MiMr95] Konstantin Mischaikow und Marian Mrozek, *Chaos in the Lorenz equations: a computer-assisted proof*, Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society **32** (1995), no. 1, 66–72.
- [MiMr02] Konstantin Mischaikow und Marian Mrozek, *Conley index*, Handbook of dynamical systems, Vol. 2, North-Holland, Amsterdam, 2002, 393–460.
- [Mr90] Marian Mrozek, *Leray functor and cohomological Conley index for discrete dynamical systems*, Trans. Amer. Math. Soc. **318** (1990), no. 1, 149–178.
- [Mr96] Marian Mrozek, *Topological invariants, multivalued maps and computer assisted proofs in dynamics*, Computers & Mathematics **32** (1996), 83–104.
- [MrZe97] Marian Mrozek und Marcin Zelawski, *Heteroclinic connections in the Kuramoto-Sivashinsky equation: a computer assisted proof*, Reliable Computing **3** (1997), 277–285.
- [Ro98] Joseph J. Rotman, *An introduction to algebraic topology*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 119, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1998.
- [RobSa92] Joel W. Robbin und Dietmar A. Salamon, *Lyapunov maps, simplicial complexes and the Stone functor*, Ergodic Theory Dynam. Systems **12** (1992), no. 1, 153–183.
- [Sa85] Dietmar A. Salamon, *Connected simple systems and the Conley index of isolated invariant sets*, Trans. Amer. Math. Soc. **291** (1985), no. 1, 1–41.
- [StZi94] Ralph Stöcker und Heiner Zieschang, *Algebraische Topologie*, 2. Aufl., Mathematische Leitfäden., B. G. Teubner, Stuttgart, 1994.
- [Sz95] Andrzej Szymczak, *The Conley index for discrete semidynamical systems*, Topology Appl. **66** (1995), no. 3, 215–240.
- [Sz97] Andrzej Szymczak, *A combinatorial procedure for finding isolating neighbourhoods and index pairs*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **127** (1997), no. 5, 1075–1088.