

**Untersuchungen zur Kombinationstechnik
bei der numerischen Strömungssimulation
auf versetzten Gittern**

Christoph Joseph Kranz

Institut für Informatik
der Technischen Universität München
Lehrstuhl für Ingenieur Anwendungen in der Informatik und
numerische Programmierung

Untersuchungen zur Kombinationstechnik bei der numerischen Strömungssimulation auf versetzten Gittern

Christoph Joseph Kranz

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Informatik der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)
genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr. Arndt Bode

Prüfer der Dissertation:

1. Univ.-Prof. Dr. Christoph Zenger
2. Univ.-Prof. Dr. Dr. h. c. Franz Durst,
Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

Die Dissertation wurde am 24. April 2002 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Informatik am 11. Juli 2002 angenommen.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Dünne Gitter	5
2.1	Funktionsdarstellung	6
2.1.1	Interpolation mit einer Knotenbasis	6
2.1.2	Interpolation mit einer hierarchischen Basis	8
2.2	Theorie der Dünnen Gitter	10
2.2.1	Raumzerlegung mit einer Knotenbasis	10
2.2.2	Hierarchische Teilraumzerlegung	13
2.2.3	Eigenschaften der hierarchischen Teilraumzerlegung	13
2.2.4	Vollgitterinterpolant	16
2.2.5	Dünngitterinterpolant	17
2.2.6	Effizienz der Dünngitterdarstellung	18
2.2.7	Hinzunahme der Randpunkte	19
2.2.8	Quadratische Basisfunktionen	22
3	Kombinationstechnik	25
3.1	Prinzip der Kombinationstechnik	26
3.2	Kombination mit Ausdünnung	28
3.3	Gitter für Strömungsberechnungen	31
3.4	Berechnung der Ausdünnungsindizes	32

4	Interpolationsfehler bei Kombinationslösungen	41
4.1	Lösungsfehler	41
4.2	Vergleich von Vollgitterlösungen	42
4.3	Vergleich von Vollgitter- und Kombinationslösung	43
4.4	Bilineare und transfinite Interpolation	44
4.5	Berechnung des Interpolationsfehlers	47
4.5.1	Erwartete Ordnung des Interpolationsfehlers	47
4.5.2	Berechnungsmöglichkeiten des Interpolationsfehlers	49
4.5.3	Bestimmung der Interpolationssterne	49
4.5.4	Fehlerberechnung mit Taylorreihenentwicklung	52
4.6	Interpolation höherer Ordnung	54
5	Strömungssimulation und Kombinationstechnik mit versetzten Gittern	57
5.1	Strömungsmechanische Grundgleichungen	57
5.2	Diskretisierung	58
5.3	Kombinationstechnik bei versetzten Gittern	60
5.4	Zeitabhängige Kombinationsrechnungen	61
5.5	Transfer von Gitterlösungen	63
5.6	Transfer von Flußwerten	71
5.7	Berechnung des Interpolationsfehlers bei versetzten Gittern	78
5.7.1	Interpolationsfehler im Zweidimensionalen	78
5.7.2	Interpolationsfehler im Dreidimensionalen	82
5.8	Numerische Tests	87
5.8.1	Tests im Zweidimensionalen	87
5.8.2	Tests im Dreidimensionalen	92
5.9	Interpolationsfehler auf groben Gittern	96
5.10	Interpolationsfehler für große Ausdünnungsparameter	100
5.11	Verhältnis von Interpolationsfehler zum Diskretisierungsfehler	102

6	Anwendungen mit dem Strömungslöser Nast++	107
6.1	Der Strömungslöser Nast++	107
6.1.1	Allgemeines	107
6.1.2	Randbedingungen	108
6.1.3	Schnittstellen	111
6.2	Implementierung des Kombinationsprogramms	112
6.3	Anwendung bei verschiedenen Strömungen	115
6.3.1	Zweidimensionale Nischenströmung mit $Re=10$	116
6.3.2	Zweidimensionale Nischenströmung mit $Re=1000$	130
6.3.3	Dreidimensionale Nischenströmung mit $Re=10$	137
6.3.4	Dreidimensionale Nischenströmung mit $Re=1000$	146
7	Zusammenfassung	153

Kapitel 1

Einleitung

Eine in den Naturwissenschaften häufig auftretende Aufgabe stellt sich folgendermaßen: Man möchte ein Problem in Raum und Zeit lösen, das als physikalisches Modell durch ein System partieller Differentialgleichungen beschrieben wird. Die exakte Lösung dieser Gleichungen ist in der Regel nicht bekannt und muß daher numerisch berechnet werden.

Zur numerischen Lösung werden die Differentialgleichungen auf einem Gitter diskretisiert und in Gleichungssysteme überführt, die auf einem Computer gelöst werden können. Diese Gleichungssysteme aber werden bei einer Verfeinerung des Diskretisierungsgitters zur Erhöhung der Genauigkeit schnell sehr groß, während die zur Verfügung stehende Rechenzeit und der Speicherplatz von Computern beschränkt ist. Das motiviert dazu, nach effektiveren und schnelleren Verfahren zu suchen, die den Aufwand zur Lösung eines Problems substantiell reduzieren oder die Lösung desselben erst ermöglichen.

Die auf der Idee der Dünnen Gitter [31] basierende Kombinationstechnik ist ein solcher Ansatz: Nicht auf einem einzelnen, feinen Diskretisierungsgitter, dem *Vollgitter*, wird eine Problemlösung berechnet sondern auf mehreren, gröberen Gittern mit unterschiedlichen Maschenweiten in den einzelnen Raumrichtungen. Eine spezielle Linearkombination der Lösungen auf diesen groben Gittern führt auf die *Kombinationslösung*. Die Genauigkeit der Kombinationslösung ist nahezu gleich der Genauigkeit, die eine Lösung auf dem Vollgitter besitzt. Die Summe der Gitterpunkte aller groben Gitter ist dabei jedoch wesentlich kleiner als die Anzahl der Gitterpunkte des Vollgitters. Somit steht mit der Kombinationstechnik ein Verfahren zur Verfügung, das den Rechenaufwand zur Lösung eines Problems wesentlich reduziert. Darüber hinaus ist die Kombinationstechnik leicht implementierbar und parallelisierbar.

Bei der numerischen Simulation von Strömungen wird eine Näherungslösung der Navier-Stokes-Gleichungen berechnet. Diese stellen ein System partieller Differen-

tialgleichungen dar und beschreiben das Geschwindigkeits- und Druckfeld einer Strömung. Zur Lösung dieser Gleichungen wird bei der Diskretisierung häufig ein versetztes Gitter verwendet, mit dem die Geschwindigkeitswerte an den Oberflächen der einzelnen Kontrollvolumen berechnet werden.

Diese Arbeit reiht sich in den Themenkomplex der Anwendung der Kombinationstechnik in der Strömungssimulation auf versetzten Gittern ein. Obwohl der Einsatz der Kombinationstechnik in der Strömungssimulation einen großen Gewinn verspricht, gibt es bisher nur wenige Arbeiten, in denen Untersuchungen dazu durchgeführt wurden. In [17] wird die Kombinationstechnik eingesetzt, um die Ergebnisse aus [30] bei der Simulation einer turbulenten Rohrströmung mit annähernd gleicher Genauigkeit zu erhalten. Ebenso werden in [18] und [26] Kombinationsrechnungen für laminare Strömungen durchgeführt. In [13] wird die Parallelisierbarkeit beschrieben. Das Konvergenzverhalten der Kombinationstechnik wurde untersucht in [14] und [23].

Beim praktischen Einsatz der Kombinationstechnik in der Strömungssimulation auf versetzten Gittern tauchen die folgenden, bisher noch nicht geklärten Fragestellungen auf, die in dieser Arbeit untersucht werden sollen:

- Bei einer Kombinationsrechnung ist ein Transfer der Lösungen, die auf den einzelnen groben Gitter berechnet werden, untereinander nötig. Dabei müssen Geschwindigkeitswerte auf Gitterpunkte eines anderen Gitters interpoliert werden. Welche Bedingungen sind an den Interpolanten für die Geschwindigkeit geknüpft, damit die Divergenzfreiheit des interpolierten Geschwindigkeitsfeldes nicht verletzt wird?
- Um eine Kombinationslösung mit einer Vollgitterlösung vergleichen zu können, muß die Kombinationslösung auf dem Vollgitter gebildet werden. Welche Ordnung und Abhängigkeiten besitzt der dabei auftretende Interpolationsfehler? Wie kann man seine Größe berechnen? Wie groß ist er konkret für die (in der Praxis relevanten) Kombinationsrechnungen, bei denen man mit relativ wenigen groben Gittern rechnet (< 50)? Wie verhält sich dieser Interpolationsfehler asymptotisch?
- Welchen Einfluß hat die für den Transfer der Geschwindigkeitswerte gewählte Interpolationsmethode auf die Genauigkeit der Kombinationslösung? Welchen Einfluß hat sie beim Transfer zwischen den groben Gittern?
- Wie ist das asymptotische Verhalten des Interpolationsfehlers in der Kombinationslösung im Vergleich zum Diskretisierungsfehler?
- Tritt das vorhergesagte Verhalten in Anwendungsrechnungen tatsächlich ein? Liefert die Kombinationsrechnung eine gute Lösung? Ist also der Fehler, der in der auf dem Vollgitter gebildeten Kombinationslösung auftritt, in erster Linie durch den Interpolationsfehler bestimmt?

Im folgenden wird ein kurzer Überblick über den Aufbau der Arbeit gegeben: In Kapitel 2 wird eine kurze Einführung in die Theorie der Dünnen Gitter gegeben. Dabei wird die Effizienz der Darstellung von Funktionen auf einem Dünnen Gitter im Vergleich zur Darstellung auf dem vollen Gitter deutlich. In Kapitel 3 werden die grundlegenden Formeln für die Kombinationstechnik vorgestellt. Das Prinzip der Ausdünnung des Vollgitters wird beschrieben und der Ausdünnungsparameter eingeführt, der die in einer Kombinationsrechnung verwendeten groben Gitter festlegt. In Kapitel 4 wird gezeigt, wie man bei der Interpolation einer Kombinationslösung mit Hilfe von Interpolationssternen und Taylorreihenentwicklungen den Interpolationsfehler explizit bestimmen kann. Kapitel 5 beschreibt das Vorgehen beim Transfer von Lösungen auf versetzten Gittern. Die an die Interpolanten geknüpften Bedingungen werden angegeben und zwei mögliche Interpolationsmethoden beschrieben. Für den Transfer einer Kombinationslösung auf das Vollgitter wird die konkrete Berechnung des auftretenden Interpolationsfehlers gezeigt. Abschließend werden in Kapitel 6 bei einfachen Anwendungsrechnungen die theoretischen Vorhersagen für den Interpolationsfehler bei den verschiedenen Interpolationsmethoden im zwei- und dreidimensionalen Fall überprüft und diskutiert.

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen bedanken, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben: Mein ganz besonderer Dank gilt meinem Doktorvater Prof. Dr. Christoph Zenger für die engagierte Betreuung der vorliegenden Arbeit, für die fruchtbaren Diskussionen, die guten Ratschläge und die zahlreichen Ideen, die mir diese Untersuchungen erst ermöglicht haben. Mein weiterer Dank gilt den Kollegen Stefan Achatz, Max Emans und Dr. Michael Bader für die vielen fachkundigen Gespräche und die große Unterstützung, die sie mir jederzeit zuteil werden ließen. Ebenso möchte ich mich für die sehr gute, kollegiale Zusammenarbeit bei Markus Pögl, Frank Günther, Michael Riss und Alexander Mors bedanken, die – auch als Betreuer der Computersysteme – für alle meine diesbezüglichen Wünsche immer großes Verständnis hatten und hilfreiches Entgegenkommen zeigten.

Kapitel 2

Dünne Gitter

Die grundlegende Idee der Kombinationstechnik geht hervor aus der Theorie der Dünne Gitter. Diese Theorie basiert auf der Darstellung von Funktionen mit hierarchischen Basen. Dabei werden nicht konkrete Funktionswerte einer Funktion an Gitterpunkten gespeichert sondern nur die sogenannten hierarchischen Überschüsse. Teilräume der hierarchischen Basis, die keinen entscheidenden Beitrag zum Interpolanten und somit zum Interpolationsfehler liefern, werden bei der Darstellung der Funktion auf einem Dünne Gitter weggelassen. Dadurch erreicht man eine signifikante Abnahme der zur Funktionsdarstellung notwendigen Freiheitsgrade bei einer nur unwesentlichen Vergrößerung des auftretenden Interpolationsfehlers.

In diesem Kapitel wird zunächst eine Einführung in die Funktionsdarstellung mit üblichen Knotenbasen sowie mit hierarchischen Basen gegeben. Anschließend wird die allgemeine Darstellung von Funktionen beliebiger Dimension mit hierarchischen Basen beschrieben. Einige bekannte Eigenschaften des Dünngitterinterpolanten werden zusammengestellt, wobei die Effizienz des Dünngitterinterpolanten im Vergleich zum Vollgitterinterpolanten deutlich wird.

Dünne Gitter in zwei Dimensionen wurden vorgestellt in [31]. Eine Erweiterung auf beliebige Dimensionen sowie die Beweise zu den Eigenschaften des Dünngitterinterpolanten finden sich in [3]. An diese Arbeit ist die hier gebrauchte Notation weitgehend angelehnt. In [4] werden weiterhin Dünne Gitter mit hierarchischen Basen polynomialer Ordnung untersucht. Diese Idee wird am Ende des Kapitels im Hinblick auf einen Interpolanten mit quadratischen Basisfunktionen beschrieben.

2.1 Funktionsdarstellung

Wichtig für numerische Berechnungen von zahlreichen Problemstellungen ist der Schritt, eine gesuchte kontinuierliche Funktion in einem Rechner darzustellen. Dabei wird die Funktion in der Regel nur noch diskret, d.h. an endlich vielen Punkten ihres Definitionsbereichs gespeichert. Diese diskrete Darstellung kann auf unterschiedliche Weise geschehen. Zunächst wird die verbreitete Darstellung einer Funktion mit einer Knotenbasis beschrieben. Anschließend wird die im Prinzip äquivalente, aber vom Denkansatz her unterschiedliche Darstellung einer Funktion mit einer hierarchischen Basis gezeigt. Die beiden folgenden Unterkapitel haben ausschließlich einen in die Problematik einführenden Charakter.

2.1.1 Interpolation mit einer Knotenbasis

Eindimensionaler Fall:

Sei $\Omega :=]0, 1[$ das offene und $\bar{\Omega} := [0, 1]$ das abgeschlossene Einheitsintervall in den reellen Zahlen. Eine kontinuierliche Funktion $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ soll in einem Rechner dargestellt werden. Üblicherweise speichert man dazu nur einige Funktionswerte $u(x_i)$ an diskreten Stützstellen $x_i \in \bar{\Omega}$, $0 \leq i \leq m$. Für die Stützstellen gelte die Ordnungsrelation $x_{i-1} < x_i$, $0 < i \leq m$. Am Gebietsrand $\partial\bar{\Omega}$ gelte für die Stützstellen $x_0 = 0$ und $x_m = 1$. Der Abstand zwischen zwei benachbarten Stützstellen muß nicht notwendigerweise gleich groß sein. Die Menge der Stützstellen bildet ein eindimensionales Gitter $\bar{\Omega}_m = \{x_i \in \bar{\Omega}, i = 0, \dots, m\}$. Eine näherungsweise Darstellung des kontinuierlichen Funktionsverlaufs $u(x)$, die *Rekonstruktion* der Funktion, geschieht durch Interpolation aus den an den Stützstellen gespeicherten Funktionswerten $u(x_i)$. Ein Interpolant $u^I : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ interpoliert $u(x)$ exakt an den Stützstellen, d.h. es gilt $u^I(x_i) = u(x_i) =: u_i$, $0 \leq i \leq m$. Der Funktionsverlauf $u^I(x)$ zwischen den Stützstellen kann auf verschiedene Weise gebildet werden, beispielsweise durch stückweise konstante Funktionen, lineare Funktionen oder durch Polynome höherer Ordnung. Bei der Interpolation durch stückweise lineare Funktionen definiert man dafür etwa eine Basis aus *Standard-Hutfunktionen* ψ_i :

$$\psi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} & : \quad x_{i-1} \leq x < x_i \quad \wedge \quad 0 < i \leq m \\ \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i} & : \quad x_i \leq x < x_{i+1} \quad \wedge \quad 0 \leq i < m \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases} \quad (2.1)$$

Jede Funktion ψ_i ist die zur Stützstelle x_i gehörige Basisfunktion. Die Gesamtheit dieser Basisfunktionen spannt den zugehörigen diskreten, endlich-dimensionalen Vektorraum der bezüglich $\bar{\Omega}_m$ stückweise linearen Funktionen auf. Eine geeignete Linearkombination der Basisfunktionen ergibt den stückweise linearen Interpolan-

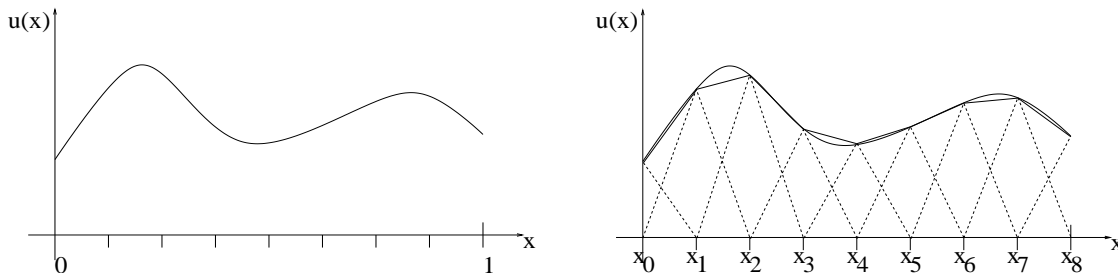


Abb. 2.1: Beliebige Funktion (links) und ihr linearer Interpolant (für $m = 8$) mit den Knotenbasisfunktionen (rechts)

ten u^I zur Funktion u :

$$u^I(x) = \sum_{i=0}^m u_i \psi_i(x) \quad (2.2)$$

Der einer Basisfunktion zugeordnete Koeffizient u_i stellt dabei den Funktionswert an der Stelle x_i dar; eine solche Basis heißt *Knotenbasis*. In Abbildung 2.1 wird die Interpolation mit einer Knotenbasis veranschaulicht.

Zweidimensionaler Fall:

Sei nun $\bar{\Omega} := [0, 1]^2$ das abgeschlossene Einheitsquadrat im \mathbb{R}^2 . Eine kontinuierliche Funktion $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ soll wiederum im Rechner dargestellt werden. Dazu wählt man Stützstellen (x_i, y_j) , $0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n$, die mit der Ordnungsrelation $x_{i-1} < x_i$, $0 < i \leq m$ und $y_{j-1} < y_j$, $0 < j \leq n$ und den Gebietsrandwerten $x_0 = 0$, $x_m = 1$, $y_0 = 0$, $y_n = 1$ ein orthogonales, strukturiertes, zweidimensionales Gitter $\bar{\Omega}_{m,n}$ bilden. Zur Darstellung der Funktion u werden nur die Funktionswerte an den Stützstellen $u(x_i, y_j) =: u_{i,j}$ gespeichert. Die Rekonstruktion der Funktion u geschieht wieder mit Hilfe eines Interpolanten u^I . Dieser Interpolant kann beispielsweise, analog zum obigen eindimensionalen Fall, als Linearkombination aus nun bilinearen Basisfunktionen einer Knotenbasis auf rechteckigen Trägern gebildet werden. Die Basisfunktionen $\psi_{i,j}$ können als Tensorprodukte eindimensionaler Standard-Hutfunktionen dargestellt werden:

$$\psi_{i,j}(x, y) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} \cdot \frac{y-y_{j-1}}{y_j-y_{j-1}} & : \quad x_{i-1} \leq x < x_i \quad (0 < i \leq m) \quad \wedge \quad y_{j-1} \leq y < y_j \quad (0 < j \leq n) \\ \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i} \cdot \frac{y-y_{j-1}}{y_j-y_{j-1}} & : \quad x_i \leq x < x_{i+1} \quad (0 \leq i < m) \quad \wedge \quad y_{j-1} \leq y < y_j \quad (0 < j \leq n) \\ \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} \cdot \frac{y_{j+1}-y}{y_{j+1}-y_j} & : \quad x_{i-1} \leq x < x_i \quad (0 < i \leq m) \quad \wedge \quad y_j \leq y < y_{j+1} \quad (0 \leq j < n) \\ \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i} \cdot \frac{y_{j+1}-y}{y_{j+1}-y_j} & : \quad x_i \leq x < x_{i+1} \quad (0 \leq i < m) \quad \wedge \quad y_j \leq y < y_{j+1} \quad (0 \leq j < n) \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases}$$

In Abbildung 2.2 sind exemplarisch Basisfunktionen $\psi_{i,j}(x, y)$ von zwei unterschiedlichen Knotenbasen skizziert. Der bilineare Interpolant u^I zur Funktion u

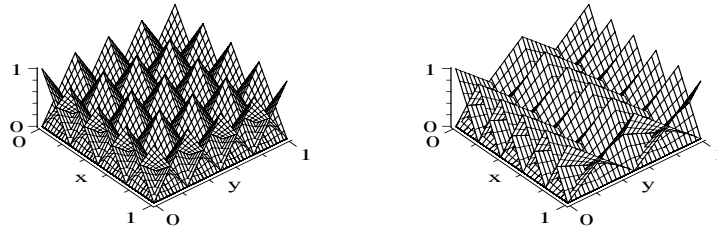


Abb. 2.2: Basisfunktionen $\psi_{i,j}(x, y)$ mit $0 \leq i \leq m$, $0 \leq j \leq n$ von zwei unterschiedlichen Knotenbasen mit äquidistanten Stützstellen für $m = 4, n = 4$ (links) und $m = 5, n = 2$ (rechts)

ergibt sich wiederum als Linearkombination der Basisfunktionen:

$$u^I(x, y) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n u_{i,j} \psi_{i,j}(x, y) \quad (2.3)$$

Höherdimensionaler Fall:

Im höherdimensionalen Fall kann die Darstellung einer Funktion im Rechner ganz analog zum ein- und zweidimensionalen Fall mit einem multilinearen Interpolanten geschehen. Die Stützstellen bilden ein orthogonales, strukturiertes, d -dimensionales Gitter; der Interpolant wird gebildet als Linearkombination aus Basisfunktionen einer Knotenbasis, die wiederum Tensorprodukte eindimensionaler Standard-Hutfunktionen sind.

2.1.2 Interpolation mit einer hierarchischen Basis

Eindimensionaler Fall:

Eine Alternative zur Funktionsdarstellung mit einer Knotenbasis ist die Darstellung mit einer hierarchischen Basis. Die Basisfunktionen ϕ_i der hierarchischen Basis können analog zu den Basisfunktionen ψ_i der Knotenbasis wieder als stückweise lineare Funktionen definiert werden, die ebenfalls jeweils einer Stützstelle x_i zugeordnet sind. Allerdings sind die Basisfunktionen ϕ_i nun *hierarchisch geschichtet* und die Träger der einzelnen ϕ_i sind je nach *Hierarchieebene* unterschiedlich groß. Exemplarisch wird dieses in Abbildung 2.3 für eine hierarchische Basis mit Stützstellen x_i , $i = 0, \dots, 8$ im Intervall $[x_0, x_8]$ skizziert: ϕ_0 und ϕ_8 interpolieren die Funktionswerte an den Randpunkten x_0 und x_8 des Intervalls und sind somit die hierarchisch höchsten Basisfunktionen. In der nächsten Hierarchieebene folgt die Basisfunktion ϕ_4 , die ebenfalls den Träger $[x_0, x_8]$ besitzt. Die hierarchisch tieferen Basisfunktionen ϕ_2 und ϕ_6 besitzen nur halb so große Träger $[x_0, x_4]$ bzw. $[x_4, x_8]$. Die tiefste Hierarchieebene bilden die Basisfunktionen $\phi_1, \phi_3, \phi_5, \phi_7$ mit den Trägern $[x_0, x_2], [x_2, x_4], [x_4, x_6], [x_6, x_8]$.

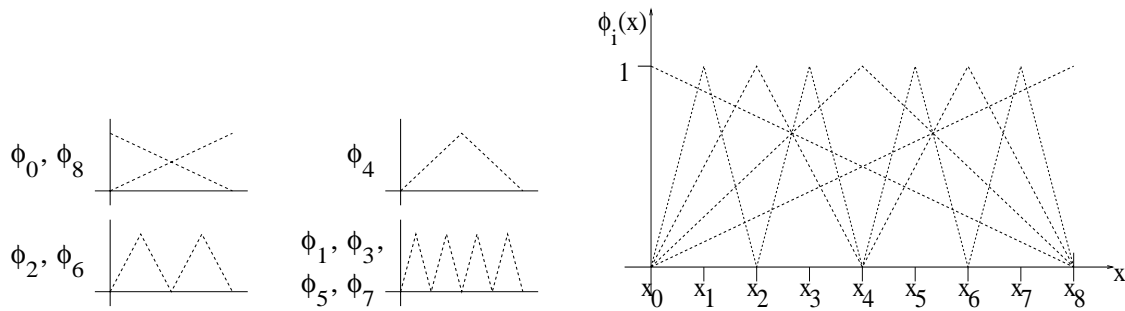


Abb. 2.3: Basisfunktionen ϕ_0, \dots, ϕ_8 einer eindimensionalen, stückweise linearen hierarchischen Basis mit Stützstellen x_0, \dots, x_8

Der Interpolant u^I zu einer Funktion u wird gebildet als Linearkombination der hierarchischen Basisfunktionen ϕ_i :

$$u^I(x) = \sum_{i=0}^m v_i \phi_i(x) \quad (2.4)$$

Die Koeffizienten v_i heißen *hierarchische Überschüsse*. Diese sind jeweils die Differenz vom Funktionswert $u(x_i)$ und dem Wert des Interpolanten an der Stützstelle x_i , der als Linearkombination aller hierarchisch höheren Basisfunktionen gebildet wird. In Abbildung 2.4 wird die Zusammensetzung der Linearkombinationen in den Formeln (2.2) bzw. (2.4) veranschaulicht: Dort ist die Funktionsinterpolation mit einer Knotenbasis der Interpolation mit einer hierarchischen Basis gegenübergestellt. Die senkrechten Striche an den Stützstellen symbolisieren jeweils die Größe der Koeffizienten u_i bzw. v_i in den betreffenden Linearkombinationsformeln.

Aus den Koeffizienten u_i der Knotenbasis lassen sich leicht die Koeffizienten v_i der hierarchischen Basis berechnen. Im obigen Beispiel mit den Stützstellen x_0, \dots, x_8 lautet die Transformation:

$$\begin{aligned} v_0 &= u_0 \quad , \quad v_8 = u_8 \\ v_4 &= u_4 - \frac{u_0 + u_8}{2} \\ v_2 &= u_2 - \frac{u_0 + u_4}{2} \quad , \quad v_6 = u_6 - \frac{u_4 + u_8}{2} \\ v_1 &= u_1 - \frac{u_0 + u_2}{2} \quad , \quad v_3 = u_3 - \frac{u_2 + u_4}{2} \quad , \quad v_5 = u_5 - \frac{u_4 + u_6}{2} \quad , \quad v_7 = u_7 - \frac{u_6 + u_8}{2} \end{aligned}$$

Dabei handelt es sich um einen Basiswechsel von der Knotenbasis in die hierarchische Basis. Die Umkehrung der Transformation von der hierarchischen Basis in die Knotenbasis ist natürlich auch möglich.

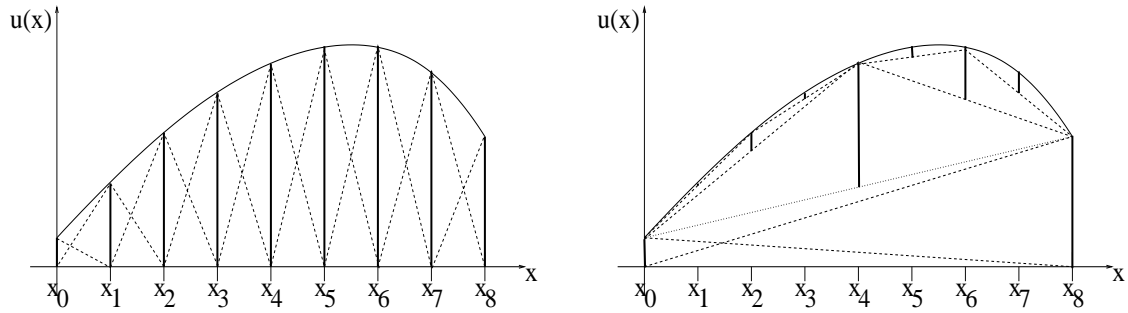


Abb. 2.4: Beliebige Funktion interpoliert mit einer Knotenbasis (links) und mit einer hierarchischen Basis (rechts)

Höherdimensionaler Fall:

Die Funktionsinterpolation mit einer hierarchischen Basis im eindimensionalen Fall lässt sich auch auf den zwei- und allgemein höherdimensionalen Fall ausweiten. Dabei kann man die hierarchische Basis wählen, indem man ausgehend von den Basisfunktionen des hierarchisch höchsten Levels hierarchisch tiefere Basisfunktionen mit immer kleiner werdenden Trägern definiert. Diese Verfeinerung kann dabei unabhängig in den verschiedenen Raumrichtungen vorgenommen werden. Die hierarchischen Basisfunktionen werden analog zur Herleitung der höherdimensionalen Knotenbasis als Tensorprodukte aus eindimensionalen Basisfunktionen gebildet. Diese hierarchischen Basen für beliebige Dimensionen werden im folgenden Abschnitt als Grundlage der Dünne Gitter ausführlich beschrieben.

2.2 Theorie der Dünne Gitter

2.2.1 Raumzerlegung mit einer Knotenbasis

Für die folgende Beschreibung der Funktionsinterpolation auf einem Dünne Gitter betrachtet man das offene und geschlossene d -dimensionale Einheitsintervall Ω bzw. $\bar{\Omega}$:

$$\Omega :=]0, 1[^d \quad , \quad \bar{\Omega} = [0, 1]^d$$

Die Menge der auf $\bar{\Omega}$ definierten Funktionen u , die stetige gemischte Ableitungen bis zur Ordnung $2d$ besitzen, sei $X(\bar{\Omega})$:

$$X(\bar{\Omega}) := \left\{ u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R} , \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_d} u}{\prod_{j=1}^d \partial x_j^{k_j}} \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}) , k_j \in \{0, 1, 2\} \right\}$$

Die Funktionen $u \in X(\overline{\Omega})$, die auf dem Gebietsrand $\partial\overline{\Omega}$ verschwinden, bilden die Menge $X_0(\overline{\Omega})$:

$$X_0(\overline{\Omega}) := \left\{ u \in X(\overline{\Omega}) : u|_{\partial\overline{\Omega}} = 0 \right\} \quad (2.5)$$

Zunächst betrachtet man aus Gründen der Übersichtlichkeit nur Funktionen $u \in X_0(\overline{\Omega})$. In der späteren Beschreibung der Dünngitterinterpolation und der Kombinationstechnik werden aber auch die Funktionen hinzugenommen, die auf dem Gebietsrand nicht verschwinden.

Mit dem Multiindex $\underline{l} = (l_1, \dots, l_d) \in \mathbb{N}_0^d$ läßt sich ein Gitter $\Omega_{\underline{l}}$ mit Maschenweiten $\underline{h}_{\underline{l}} := (h_{l_1}, \dots, h_{l_d}) = (2^{-l_1}, \dots, 2^{-l_d})$ auf kompakte Weise schreiben. l_j gibt die Auflösung (den *Level*) des Gitters in der j -Richtung an; die zugehörige Maschenweite ist $h_{l_j} = 2^{-l_j}$. In den verschiedenen Koordinatenrichtungen des Gitters $\Omega_{\underline{l}}$ gibt es in der Regel unterschiedliche, aber in jeder einzelnen Koordinatenrichtung gleiche Maschenweiten. Die einzelnen Gitterpunkte von $\Omega_{\underline{l}}$ werden bezeichnet mit $x_{\underline{l}, \underline{i}}$:

$$x_{\underline{l}, \underline{i}} = (x_{l_1, i_1}, \dots, x_{l_d, i_d}) \quad , \quad x_{l_j, i_j} = i_j \cdot h_{l_j} = i_j \cdot 2^{-l_j} \quad , \quad i_j = 0, \dots, 2^{l_j} \quad (2.6)$$

Für die *inneren Gitterpunkte* von $\Omega_{\underline{l}}$ gilt (2.6) mit dem Unterschied, daß der Index i_j durch $i_j = 1, \dots, 2^{l_j} - 1$ gegeben ist. Man definiert für die inneren Gitterpunkte von $\Omega_{\underline{l}}$ d -dimensionale Basisfunktionen $\phi_{\underline{l}, \underline{i}}$ als Tensorprodukte eindimensionaler Standard-Hutfunktionen:

$$\phi_{\underline{l}, \underline{i}}(\underline{x}) := \prod_{j=1}^d \phi_{l_j, i_j}(x_j) \quad (2.7)$$

$$\phi_{l_j, i_j}(x_j) := \begin{cases} 1 - \left| \frac{x_j - i_j h_{l_j}}{h_{l_j}} \right| & : \quad x_j \in [(i_j - 1)h_{l_j}, (i_j + 1)h_{l_j}] \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases} \quad (2.8)$$

$$\text{supp}(\phi_{l_j, i_j}) = [x_{l_j, i_j} - h_{l_j}, x_{l_j, i_j} + h_{l_j}] \quad (2.9)$$

Diese d -dimensionalen Basisfunktionen $\phi_{\underline{l}, \underline{i}}$ spannen den Raum $V_{\underline{l}}$ der bezüglich der inneren Gitterpunkte von $\Omega_{\underline{l}}$ stückweise multilinearen Funktionen auf:

$$V_{\underline{l}} := \text{span} \left\{ \phi_{\underline{l}, \underline{i}} \mid l_j > 0, i_j = 1, \dots, 2^{l_j} - 1, j = 1, \dots, d \right\} \quad (2.10)$$

Die Räume $V_{\underline{l}}$ sind geschachtelt, d.h. $V_{\underline{l}} \subseteq V_{\underline{k}}$ für $l_j \leq k_j, j = 1, \dots, d$.

In Abbildung 2.5 wird die Anordnung der den Basisfunktionen ϕ zugeordneten Stützstellen in den zweidimensionalen Räumen $V_{\underline{l}} = V_{(l_1, l_2)}$ dargestellt.

Die diskrete L_∞ -Norm angewandt auf den Multiindex \underline{l} ist wie folgt definiert:

$$|\underline{l}|_\infty := \max_{j=1,\dots,d} (l_j)$$

Damit definiert man den Raum $V_n^{(\infty)}$ als Summe von $V_{\underline{l}}$ -Räumen:

$$V_n^{(\infty)} := \sum_{|\underline{l}|_\infty \leq n} V_{\underline{l}} \tag{2.11}$$

Der obere Index (∞) verweist dabei auf die Definition über die diskrete L_∞ -Norm. Es gilt offensichtlich $V_n^{(\infty)} \subset V_{n+1}^{(\infty)}$. Damit ist jedes $u \in X_0(\overline{\Omega})$ durch eine nicht-eindeutige Linearkombination von Funktionen $u_n^{(\infty)} \in V_n^{(\infty)}$ beliebig genau approximierbar:

$$u(\underline{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(\infty)}(\underline{x})$$

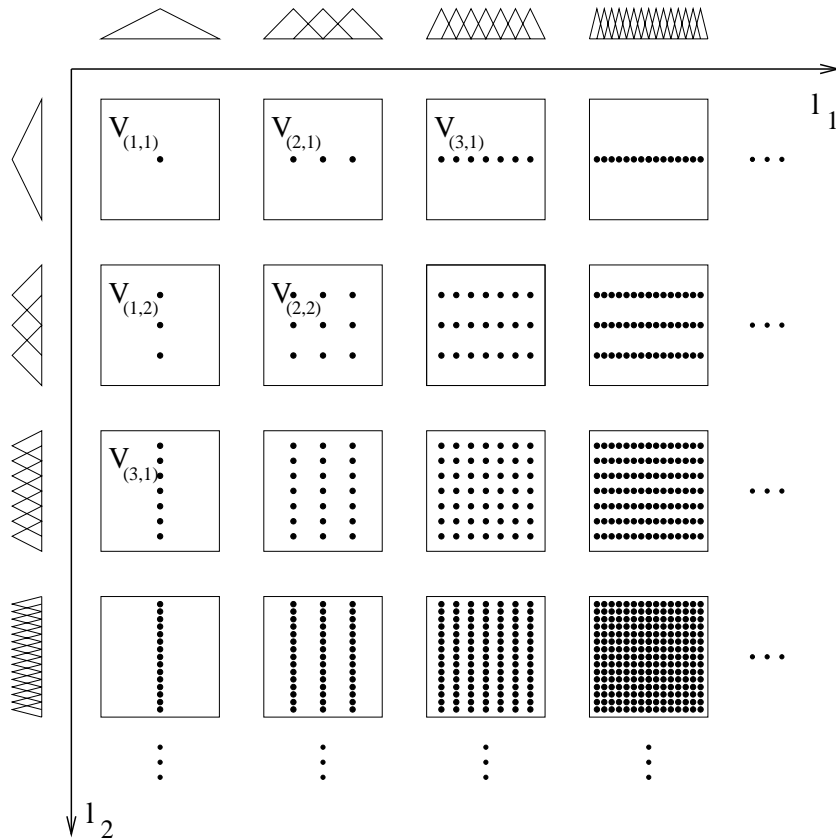


Abb. 2.5: Stützstellen der Basisfunktionen $\phi_{\underline{l},i}$ in den zweidimensionalen Räumen $V_{(l_1, l_2)}$. Die Basisfunktionen selbst werden gebildet als Tensorprodukte aus den oben und links skizzierten Standard-Hutfunktionen.

2.2.2 Hierarchische Teilraumzerlegung

Um zu einer hierarchischen Teilraumzerlegung von $\Omega_{\underline{l}}$ zu gelangen, definiert man die Multiindexmenge $\underline{I}_{\underline{l}}$:

$$\underline{I}_{\underline{l}} := \left\{ (i_1, \dots, i_d) \mid i_j = 1, \dots, 2^{l_j} - 1, i_j \text{ ungerade}, j = 1, \dots, d \right\} \quad (2.12)$$

In Anlehnung an die Definition der Räume $V_{\underline{l}}$ in (2.10) werden mit der Indexmenge $\underline{I}_{\underline{l}}$ die Funktionenräume $W_{\underline{l}}$ definiert:

$$W_{\underline{l}} := \text{span} \left\{ \phi_{\underline{l}, \underline{i}} \mid l_j > 0, \underline{i} \in \underline{I}_{\underline{l}}, j = 1, \dots, d \right\} \quad (2.13)$$

Für die Basisfunktionen $\phi_{\underline{l}, \underline{i}}$ gilt hierbei wieder die Definition in (2.7) bis (2.9).

Die Basisfunktionen der Räume $W_{\underline{l}}$ mit $|\underline{l}|_{\infty} \leq n$ bilden eine hierarchische Basis von $V_n^{(\infty)}$ aus Formel (2.11). Diesen Raum kann man daher auch mit den Räumen $W_{\underline{l}}$ definieren:

$$V_n^{(\infty)} := \bigoplus_{|\underline{l}|_{\infty} \leq n} W_{\underline{l}} \quad (2.14)$$

In jedem Funktionenraum $W_{\underline{l}}$ sind alle Träger der Basisfunktionen $\phi_{\underline{l}, \underline{i}}$ paarweise disjunkt, was für die Träger der einzelnen Basisfunktionen der $V_{\underline{l}}$ -Räume aufgrund ihrer Definition nicht gilt.

In Abbildung 2.6 ist die Anordnung der Stützstellen sowie die Größe der Träger der Basisfunktionen in den zweidimensionalen Räumen $W_{\underline{l}} = W_{(l_1, l_2)}$ dargestellt. Abbildung 2.7 zeigt exemplarisch Basisfunktionen von drei unterschiedlichen Räumen $W_{(l_1, l_2)}$.

Jedes $u \in X_0(\overline{\Omega})$ läßt sich nun eindeutig mit Hilfe dieser hierarchischen Teilraumzerlegung und $u_{\underline{l}} \in W_{\underline{l}}$ darstellen:

$$u(\underline{x}) = \sum_{\underline{l}} u_{\underline{l}}(\underline{x}) \quad , \quad u_{\underline{l}}(\underline{x}) = \sum_{\underline{i} \in \underline{I}_{\underline{l}}} v_{\underline{l}, \underline{i}} \cdot \phi_{\underline{l}, \underline{i}}(\underline{x}) \quad (2.15)$$

Die Koeffizienten $v_{\underline{l}, \underline{i}}$ sind hierbei die *hierarchischen Überschüsse*.

2.2.3 Eigenschaften der hierarchischen Teilraumzerlegung

Im folgenden werden einige grundlegende Eigenschaften der hierarchischen Teilräume, ihrer Basisfunktionen, der hierarchischen Überschüsse und der Beiträge der Teilräume zum Interpolanten zusammengestellt. Die zugehörigen Beweise finden sich in [3].

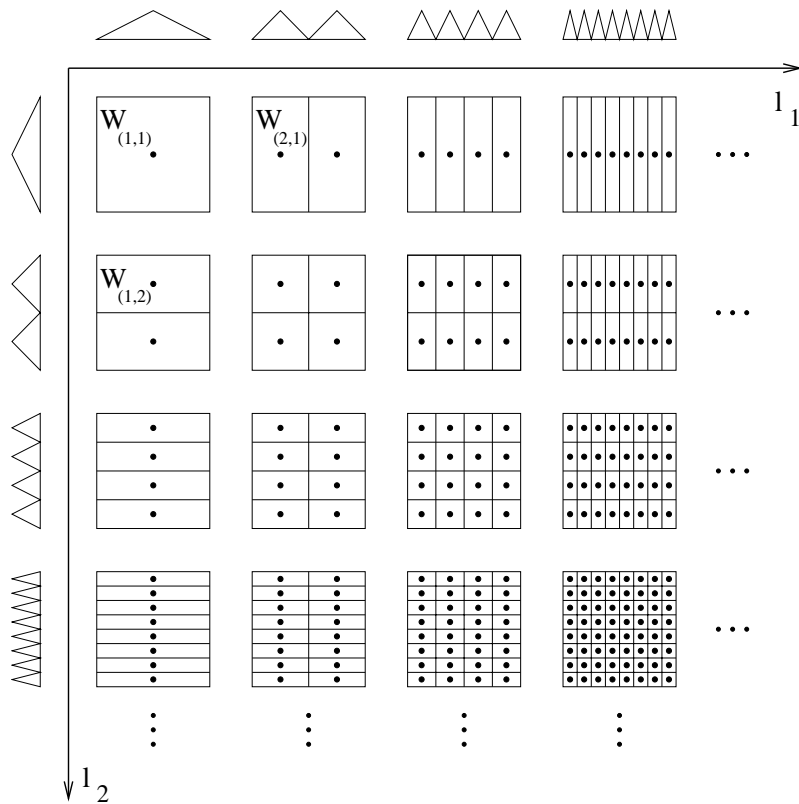


Abb. 2.6: Stützstellen und Träger der Basisfunktionen $\phi_{l,i}$ in den zweidimensionalen Räumen $W_{(l_1, l_2)}$. Die Basisfunktionen selbst werden gebildet als Tensorprodukte aus den oben und links skizzierten Standard-Hutfunktionen.

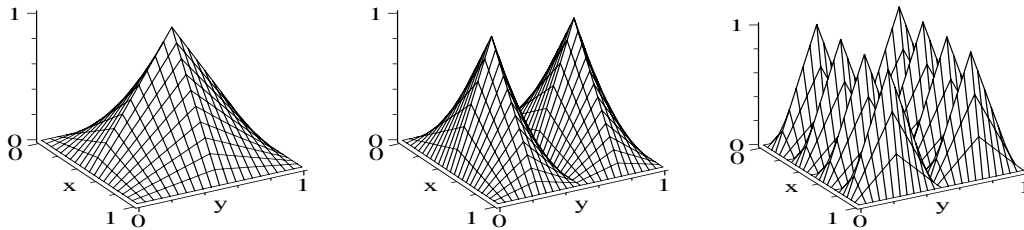


Abb. 2.7: Basisfunktionen der Räume $W_{(1,1)}$, $W_{(1,2)}$ und $W_{(3,2)}$

Benutzte Normen:

Eine Funktion $u \in X_0(\overline{\Omega})$ soll durch den d -dimensionalen, stückweise multilinearen Interpolanten $u_n^{(\infty)} \in V_n^{(\infty)}$ approximiert werden. Der Interpolationsfehler $\|u - u_n^{(\infty)}\|$ kann dabei in unterschiedlichen Normen gemessen werden:

$$L_\infty\text{-Norm: } \|u\|_\infty := \max_{\underline{x} \in \overline{\Omega}} |u(\underline{x})|$$

$$L_2\text{-Norm: } \|u\|_2 := \left(\int_{\bar{\Omega}} |u(\underline{x})|^2 d\underline{x} \right)^{1/2}$$

$$\text{Energienorm: } \|u\|_E := \left(\int_{\bar{\Omega}} |\nabla u(\underline{x})|^2 d\underline{x} \right)^{1/2}$$

Die diskrete L_1 -Norm angewandt auf den Multiindex \underline{l} ist wie folgt definiert:

$$|\underline{l}|_1 := \sum_{j=1}^d l_j$$

Weiterhin definiert man für $u \in X_0(\bar{\Omega})$ und $X_0(\bar{\Omega})$ gemäß (2.5) mit $\underline{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \bar{\Omega}$ zwei Halbnormen:

$$|u|_\infty := \left\| \frac{\partial^{2d} u(\underline{x})}{\prod_{j=1}^d \partial x_j^2} \right\|_\infty = \max_{\underline{x} \in \bar{\Omega}} \left| \frac{\partial^{2d} u(\underline{x})}{\prod_{j=1}^d \partial x_j^2} \right|$$

$$|u|_2 := \left\| \frac{\partial^{2d} u(\underline{x})}{\prod_{j=1}^d \partial x_j^2} \right\|_2 = \left(\int_{\bar{\Omega}} \left| \frac{\partial^{2d} u(\underline{x})}{\prod_{j=1}^d \partial x_j^2} \right|^2 d\underline{x} \right)^{1/2}$$

Eigenschaften:

Die Dimension des Teilraums $W_{\underline{l}}$ ist gegeben durch die Anzahl seiner Basisfunktionen:

$$\dim(W_{\underline{l}}) = 2^{|\underline{l}-\mathbb{1}|_1}$$

Für jede Basisfunktion $\phi_{\underline{l},i}$ des Teilraums $W_{\underline{l}}$ gilt:

$$\|\phi_{\underline{l},i}\|_\infty = 1$$

$$\|\phi_{\underline{l},i}\|_2 = \left(\frac{2}{3}\right)^{d/2} \cdot 2^{-|\underline{l}|_1/2}$$

$$\|\phi_{\underline{l},i}\|_E = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{(d-1)/2} \cdot 2^{-|\underline{l}|_1/2} \cdot \left(\sum_{j=1}^d 4^{l_j}\right)^{1/2}$$

Für die hierarchischen Koeffizienten $v_{\underline{l},i}$ gilt die Integraldarstellung:

$$v_{\underline{l},i} = \int_{\bar{\Omega}} \prod_{j=1}^d \left(2^{-l_j+1} \cdot \phi_{l_j,i_j}(x_j)\right) \cdot \frac{\partial^{2d} u(\underline{x})}{\prod_{j=1}^d \partial x_j^2} d\underline{x}$$

Für den Betrag der hierarchischen Koeffizienten $v_{\underline{l},i}$ gilt:

$$|v_{\underline{l},i}| \leq 2^{-d} \cdot 2^{-2|\underline{l}|_1} \cdot |u|_\infty \quad (2.16)$$

$$|v_{\underline{l},i}| \leq 2^{-d} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{d/2} \cdot 2^{-3|\underline{l}|_1/2} \cdot |u|_{\text{supp}(\phi_{\underline{l},i})}_2 \quad (2.17)$$

Sei $u \in X_0(\overline{\Omega})$ in der hierarchischen Darstellung gegeben gemäß (2.15). Der Beitrag der Funktion $u_{\underline{l}} \in W_{\underline{l}}$ zum Interpolanten der Funktion u kann folgendermaßen abgeschätzt werden:

$$\|u_{\underline{l}}\|_\infty \leq 2^{-d} \cdot 2^{-2|\underline{l}|_1} \cdot |u|_\infty \quad (2.18)$$

$$\|u_{\underline{l}}\|_2 \leq 3^{-d} \cdot 2^{-2|\underline{l}|_1} \cdot |u|_2 \quad (2.19)$$

$$\|u_{\underline{l}}\|_E \leq \frac{1}{2 \cdot 12^{(d-1)/2}} \cdot 2^{-2|\underline{l}|_1} \cdot \left(\sum_{j=1}^d 4^{l_j}\right)^{1/2} \cdot |u|_\infty \quad (2.20)$$

Aus den Abschätzungen (2.16) bis (2.20) erkennt man die wichtige Eigenschaft, daß mit größer werdendem $|\underline{l}|_1$ die hierarchischen Koeffizienten und die Beiträge zum Interpolanten exponentiell kleiner werden.

2.2.4 Vollgitterinterpolant

Eine Funktion $u \in X_0(\overline{\Omega})$ werde nun durch den Interpolanten $u_n^{(\infty)} \in V_n^{(\infty)}$ approximiert, wobei für $V_n^{(\infty)}$ die Definition (2.14) gilt. Diesen Interpolanten nennt man *Vollgitterinterpolant*.

Zum Vollgitterinterpolanten tragen alle Teilräume $W_{\underline{l}}$ bei, die im hierarchischen Schema in ein „quadratisches Fenster“ passen. In Abbildung 2.8 (links) wird dieses exemplarisch für den zweidimensionalen Raum $V_3^{(\infty)}$ veranschaulicht. Die Stützstellen der Basisfunktionen des Vollgitterinterpolanten bilden ein gewöhnliches, orthogonales, strukturiertes Gitter. Dieses Gitter nennt man auch *volles Gitter* oder *Vollgitter*.

Anzahl der Freiheitsgrade von $V_n^{(\infty)}$:

Die Anzahl der Freiheitsgrade von $V_n^{(\infty)}$ ist die Anzahl der den Raum aufspannenden Basisfunktionen, also die Dimension des Raums. Diese ist gleich der Anzahl der den Basisfunktionen zugeordneten Stützstellen im zugehörigen Gitter. Für die Dimension des Raums $V_n^{(\infty)}$ gilt mit $h = 2^{-n}$:

$$\dim(V_n^{(\infty)}) = (2^n - 1)^d = O(h^{-d}) \quad (2.21)$$

Interpolationsfehler des Interpolanten $u_n^{(\infty)}$:

Bei der Interpolation der Funktion $u \in X_0(\overline{\Omega})$ durch $u_n^{(\infty)}$ tritt ein Interpolationsfehler auf. Dieser Fehler ist bestimmt durch die Differenz $|u - u_n^{(\infty)}|$ und kann

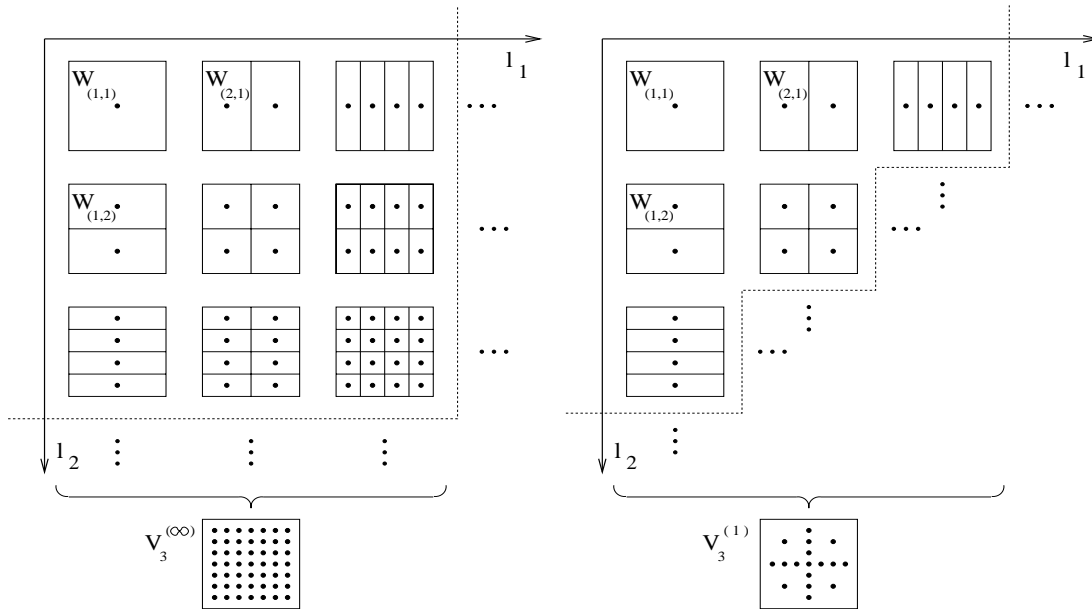


Abb. 2.8: Zusammensetzung der zweidimensionalen Räume $V_3^{(\infty)}$ und $V_3^{(1)}$

in den verschiedenen Normen abgeschätzt werden:

$$\|u - u_n^{(\infty)}\|_{\infty} \leq \frac{d}{6^d} \cdot 2^{-2n} \cdot |u|_{\infty} = O(h^2) \quad (2.22)$$

$$\|u - u_n^{(\infty)}\|_2 \leq \frac{d}{9^d} \cdot 2^{-2n} \cdot |u|_2 = O(h^2) \quad (2.23)$$

$$\|u - u_n^{(\infty)}\|_E \leq \frac{d^{3/2}}{2 \cdot 3^{(d-1)/2} \cdot 6^{(d-1)}} \cdot 2^{-n} \cdot |u|_{\infty} = O(h) \quad (2.24)$$

2.2.5 Dünngitterinterpolant

Eine Funktion $u \in X_0(\overline{\Omega})$ kann auch durch einen *Dünngitterinterpolanten* approximiert werden. Dieser wird mit $u_n^{(1)}$ bezeichnet und folgendermaßen definiert:

$$u_n^{(1)} \in V_n^{(1)} \quad \text{wobei} \quad V_n^{(1)} := \bigoplus_{\|\underline{l}\|_1 \leq n+d-1} W_{\underline{l}} \quad (2.25)$$

Der obere Index (1) bei $V_n^{(1)}$ deutet dabei die Definition mit der diskreten L_1 -Norm an. Der so definierte Raum $V_n^{(1)}$ wird (für $n > 1$) durch weniger Teilräume $W_{\underline{l}}$ gebildet als der Raum $V_n^{(\infty)}$. In Abbildung 2.8 (rechts) wird dies im zwei-dimensionalen Fall veranschaulicht: Der Raum $V_n^{(1)}$ wird zusammengesetzt aus Teilräumen $W_{\underline{l}}$, die in ein dreieckiges Schema passen. Die Stützstellen von $V_n^{(1)}$ bilden nicht mehr ein gewöhnliches strukturiertes Gitter sondern ein *Dünnes Gitter*.

Anzahl der Freiheitsgrade von $V_n^{(1)}$:

Analog zur Dimension des Raums $V_n^{(\infty)}$ in (2.21) kann man die Anzahl der Freiheitsgrade, also die Anzahl der Gitterpunkte im Dünnen Gitter angeben:

$$\begin{aligned} \dim(V_n^{(1)}) &= \sum_{|\mathbb{l}| \leq n+d-1} 2^{|\mathbb{l}-\mathbb{1}|} = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i \cdot \binom{d-1+i}{d-1} = 2^n \cdot \left(\frac{n^{d-1}}{(d-1)!} + O(n^{d-2}) \right) \\ &= O(2^n \cdot n^{d-1}) = O(h^{-1} \cdot |\log h|^{d-1}) \end{aligned} \quad (2.26)$$

Interpolationsfehler des Dünngitterinterpolanten $u_n^{(1)}$:

Bei der Interpolation der Funktion $u \in X_0(\bar{\Omega})$ durch den Interpolanten $u_n^{(1)} \in V_n^{(1)}$ tritt wiederum ein Interpolationsfehler auf. Dieser Fehler ist bestimmt durch die Differenz $|u - u_n^{(1)}|$. Mit der Festlegung

$$A(d, n) := \sum_{k=0}^{d-1} \binom{n+d-1}{k} = O(n^{d-1}) = O(|\log h|^{d-1})$$

kann er folgendermaßen in den verschiedenen Normen abgeschätzt werden:

$$\|u - u_n^{(1)}\|_{\infty} \leq \frac{2}{8^d} \cdot 2^{-2n} \cdot |u|_{\infty} \cdot A(d, n) = O(h^2 \cdot |\log h|^{d-1}) \quad (2.27)$$

$$\|u - u_n^{(1)}\|_2 \leq \frac{2}{12^d} \cdot 2^{-2n} \cdot |u|_2 \cdot A(d, n) = O(h^2 \cdot |\log h|^{d-1}) \quad (2.28)$$

$$\|u - u_n^{(1)}\|_E \leq \frac{d}{2 \cdot 3^{(d-1)/2} \cdot 4^{(d-1)}} \cdot 2^{-n} \cdot |u|_{\infty} = O(h) \quad (2.29)$$

2.2.6 Effizienz der Dünngitterdarstellung

Die Anzahl der Basisfunktionen im Vollgitterraum $V_n^{(\infty)}$ ist gegeben durch (2.21), die des Dünngitterraums $V_n^{(1)}$ durch (2.26). Damit erkennt man sofort, daß insbesondere für höhere Dimensionen die Anzahl der Freiheitsgrade auf dem Dünnen Gitter beträchtlich kleiner ist als die auf dem Vollgitter.

Der Interpolationsfehler in der Vollgitter- und Dünngitterdarstellung wurde in (2.22)-(2.24) bzw. (2.27)-(2.29) in den verschiedenen Normen angegeben. Die Ordnung des Interpolationsfehlers beim Vergleich der einzelnen Abschätzungen wird in der L_{∞} - und L_2 -Norm nur um einen Faktor $|\log h|^{d-1}$ schlechter für den Dünngitterinterpolanten, in der Energienorm bleibt die Ordnung gleich. Das bedeutet, daß die Dünngitterdarstellung eines Interpolanten, die erheblich weniger Freiheitsgrade benötigt als die Vollgitterdarstellung, asymptotisch nur einen unwesentlich größeren Interpolationsfehler aufweist. Dieses ist der Grund, warum der Gebrauch der Dünnen Gitter und der darauf basierenden Kombinationstechnik eine vielversprechende Verringerung des Rechenaufwands bei umfangreichen Problemen darstellt.

2.2.7 Hinzunahme der Randpunkte

Bisher wurden bei der Beschreibung der Eigenschaften des Dünngitterinterpolanten nur Funktionen $u \in X_0(\bar{\Omega})$ betrachtet, die auf dem Gebietsrand $\partial\bar{\Omega}$ verschwinden. Eine Erweiterung auf Funktionen $u \in X(\bar{\Omega})$ geschieht durch Hinzunahme von Basisfunktionen, die auf dem Gebietsrand ihr Maximum annehmen. Bei Verwendung der Standard-Hutfunktionen sind dies Funktionen, deren Träger im Prinzip über das Gebiet $\bar{\Omega}$ hinausreichen, die aber nur im Gebiet $\bar{\Omega}$ definiert werden. Die hierarchischen Teilräume $W_{\underline{l}}$, die mit (2.12) und (2.13) definiert wurden, müssen erweitert werden durch Teilräume, die diese Randfunktionen enthalten. Zunächst definiert man die Multiindexmenge $\hat{\underline{l}}$:

$$\hat{\underline{l}} := \left\{ (i_1, \dots, i_d) \mid i_j = \begin{cases} 1, \dots, 2^{l_j} - 1, & i_j \text{ ungerade} & : l_j > 0 \\ 0, 1 & & : l_j = 0 \end{cases}, j = 1, \dots, d \right\} \quad (2.30)$$

Die Funktionenräume $\widehat{W}_{\underline{l}}$ sind eine Erweiterung der Räume $W_{\underline{l}}$, weil sie auch Randfunktionen enthalten können. Sie werden definiert durch:

$$\widehat{W}_{\underline{l}} := \text{span} \left\{ \hat{\phi}_{\underline{l}, \underline{i}} \mid l_j \geq 0, \underline{i} \in \hat{\underline{l}}, j = 1, \dots, d \right\} \quad (2.31)$$

Die Basisfunktionen $\hat{\phi}_{\underline{l}, \underline{i}}$ werden ähnlich wie die Funktionen $\phi_{\underline{l}, \underline{i}}$ in (2.7) bis (2.9) folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_{\underline{l}, \underline{i}}(\underline{x}) &:= \prod_{j=1}^d \hat{\phi}_{l_j, i_j}(x_j) \\ \hat{\phi}_{l_j, i_j}(x_j) &:= \begin{cases} 1 - \left| \frac{x_j - i_j h_{l_j}}{h_{l_j}} \right| & : x_j \in [(i_j - 1)h_{l_j}, (i_j + 1)h_{l_j}] \cap \bar{\Omega} \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases} \\ \text{supp}(\hat{\phi}_{l_j, i_j}) &= [x_{l_j, i_j} - h_{l_j}, x_{l_j, i_j} + h_{l_j}] \cap \bar{\Omega} \end{aligned}$$

Es gilt $\widehat{W}_{\underline{l}} \equiv W_{\underline{l}}$ falls $l_j > 0$ für alle $j = 1, \dots, d$.

Das Schema der hierarchischen Teilräume (s. Abbildung 2.6 für den zweidimensionalen Fall) wird durch ein erweitertes Schema der Teilräume $\widehat{W}_{\underline{l}}$ ersetzt. Analog zur Definition des Raums $V_n^{(\infty)}$ in (2.14) wird der Raum $\widehat{V}_n^{(\infty)}$ definiert und analog zur Definition des Raums $V_n^{(1)}$ in (2.25) der Raum $\widehat{V}_n^{(1)}$:

$$\widehat{V}_n^{(\infty)} := \bigoplus_{\|\underline{l}\|_{\infty} \leq n} \widehat{W}_{\underline{l}}, \quad \widehat{V}_n^{(1)} := \bigoplus_{\|\underline{l}\|_1 \leq n+d-1} \widehat{W}_{\underline{l}} \quad (2.32)$$

In Abbildung 2.11 und 2.12 ist die Zusammensetzung dieser Funktionenräume exemplarisch für den zweidimensionalen Fall dargestellt. Dort sind die schwarzen

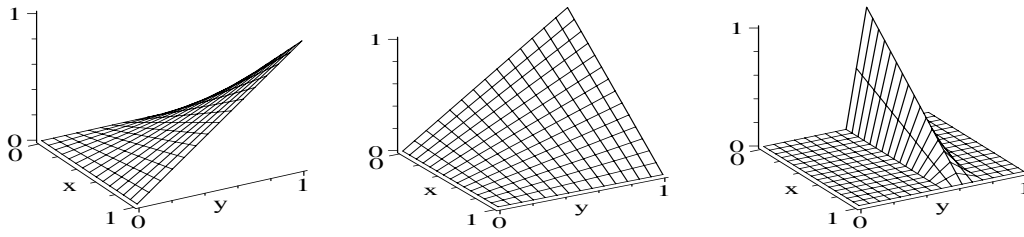


Abb. 2.9: Beispiele für Basisfunktionen am Gebietsrand:

$$\hat{\phi}_{(0,0),(1,1)} \in \widehat{W}_{(0,0)}, \quad \hat{\phi}_{(0,0),(0,1)} \in \widehat{W}_{(0,0)}, \quad \hat{\phi}_{(0,3),(0,5)} \in \widehat{W}_{(0,3)}$$

Punkte wiederum die Stützstellen der einzelnen hierarchischen Basisfunktionen. Einige Beispiele für das Aussehen von Randbasisfunktionen in zwei Dimensionen sind in Abbildung 2.9 gezeigt.

Die Stützstellen der Basisfunktionen des Raums $\widehat{V}_n^{(\infty)}$ bilden ein *Vollgitter* Ω_n . Die Stützstellen der Basisfunktionen des Raums $\widehat{V}_n^{(1)}$ bilden ein *Dünnes Gitter* Ω_n^c . In Abbildung 2.10 sind einige Dünne Gitter im zweidimensionalen Raum gezeichnet, wie sie durch das Schema in Abbildung 2.12 gebildet werden.

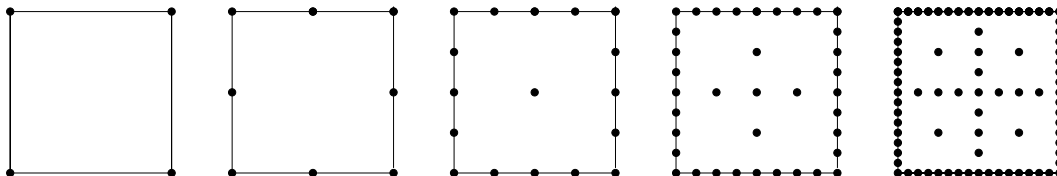


Abb. 2.10: Dünne Gitter Ω_i^c für $i = 0, \dots, 4$ im zweidimensionalen Raum

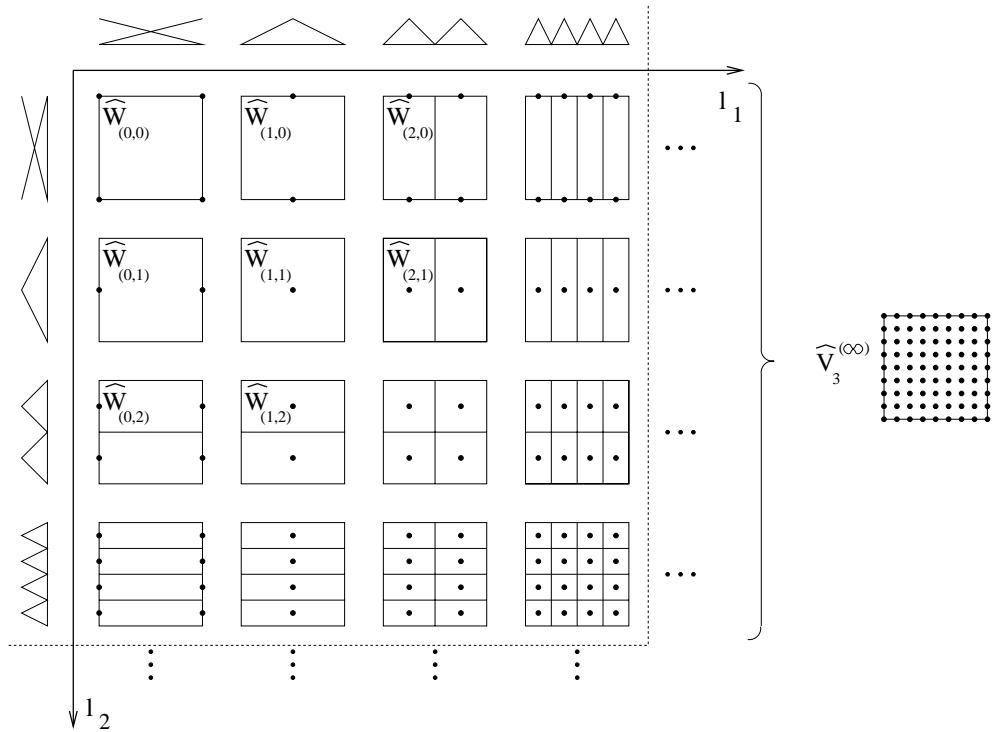


Abb. 2.11: Zusammensetzung des zweidimensionalen Raums $\widehat{V}_3^{(\infty)}$

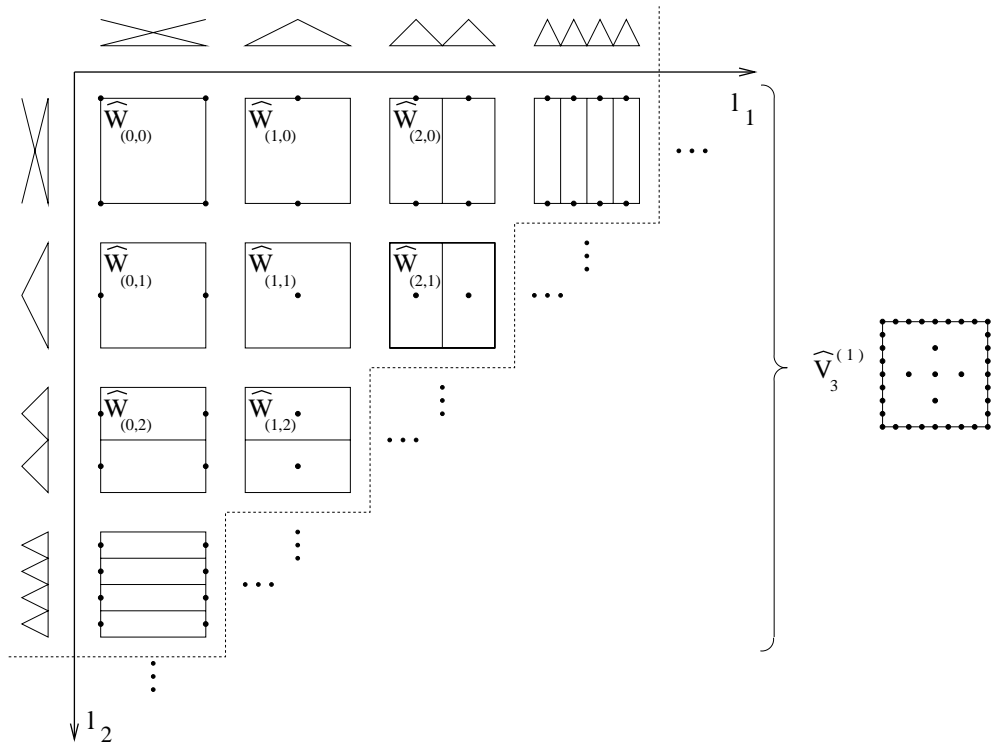


Abb. 2.12: Zusammensetzung des zweidimensionalen Raums $\widehat{V}_3^{(1)}$

2.2.8 Quadratische Basisfunktionen

Mit dem Multiindex $\hat{\underline{l}}$ aus (2.30) läßt sich auch leicht eine hierarchische Basis mit nicht mehr stückweise linearen sondern quadratischen Basisfunktionen definieren. Diese hierarchische Basis setzt sich zusammen aus den Teilräumen $\widetilde{W}_{\underline{l}}$:

$$\widetilde{W}_{\underline{l}} := \text{span} \left\{ \tilde{\phi}_{\underline{l}, \underline{i}} \mid l_j \geq 0, \underline{i} \in \hat{\underline{l}}, j = 1, \dots, d \right\} \quad (2.33)$$

Die Basisfunktionen $\tilde{\phi}_{\underline{l}, \underline{i}}$ werden folgendermaßen definiert:

$$\tilde{\phi}_{\underline{l}, \underline{i}}(\underline{x}) := \prod_{j=1}^d \tilde{\phi}_{l_j, i_j}(x_j)$$

$$\tilde{\phi}_{l_j, i_j}(x_j) := \begin{cases} -\frac{1}{h_{l_j}^2} (x_j - (i_j - 1)h_{l_j})(x_j - (i_j + 1)h_{l_j}) & : l_j > 0, x_j \in [(i_j - 1)h_{l_j}, (i_j + 1)h_{l_j}] \\ 1 - \left| \frac{x_j - i_j h_{l_j}}{h_{l_j}} \right| & : l_j = 0, x_j \in [(i_j - 1)h_{l_j}, (i_j + 1)h_{l_j}] \cap \overline{\Omega} \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{supp}(\tilde{\phi}_{l_j, i_j}) = [x_{l_j, i_j} - h_{l_j}, x_{l_j, i_j} + h_{l_j}] \cap \overline{\Omega}$$

In Abbildung 2.13 sind die Stützstellen und die Größe der Träger dieser Basisfunktionen für den zweidimensionalen Fall skizziert. Die Basisfunktionen werden gebildet (für $l_j > 0$) als Tensorprodukte aus quadratischen eindimensionalen Basisfunktionen. Die quadratischen eindimensionalen Basisfunktionen nehmen am Mittelpunkt ihres Trägers ihr Maximum 1 an, auf den beiden Randpunkten des Trägers verschwinden sie. Durch diese drei Punkte sind die Basisfunktionen eindeutig festgelegt. Die eindimensionalen Basisfunktionen am Rand mit $l_j = 0$ müssen lineare Funktionen sein, denn sie werden nur durch ihr Maximum an ihrer Stützstelle auf dem Rand sowie durch das Verschwinden am anderen Rand des Trägers eindeutig bestimmt.

Die Abbildung 2.14 zeigt die Gestalt der quadratischen Basisfunktionen in verschiedenen zweidimensionalen Räumen $\widetilde{W}_{\underline{l}}$. Die Randbasisfunktionen haben an den Gebietsecken dieselbe Gestalt wie bei den stückweise linearen Basisfunktionen, ansonsten werden sie gebildet als Tensorprodukt einer linearen und einer quadratischen eindimensionalen Basisfunktion (vgl. Abbildung 2.9).

Ein Dünngitterinterpolant, der aus den stückweise linearen Basisfunktionen gebildet wird, besitzt in der L_∞ - und L_2 -Norm einen Interpolationsfehler der Ordnung $O(h^2 \cdot |\log h|^{d-1})$, in der Energienorm einen Interpolationsfehler der Ordnung $O(h)$ (vgl. (2.27) bis (2.29)). In [4] wird gezeigt, daß ein Dünngitterinterpolant, der als

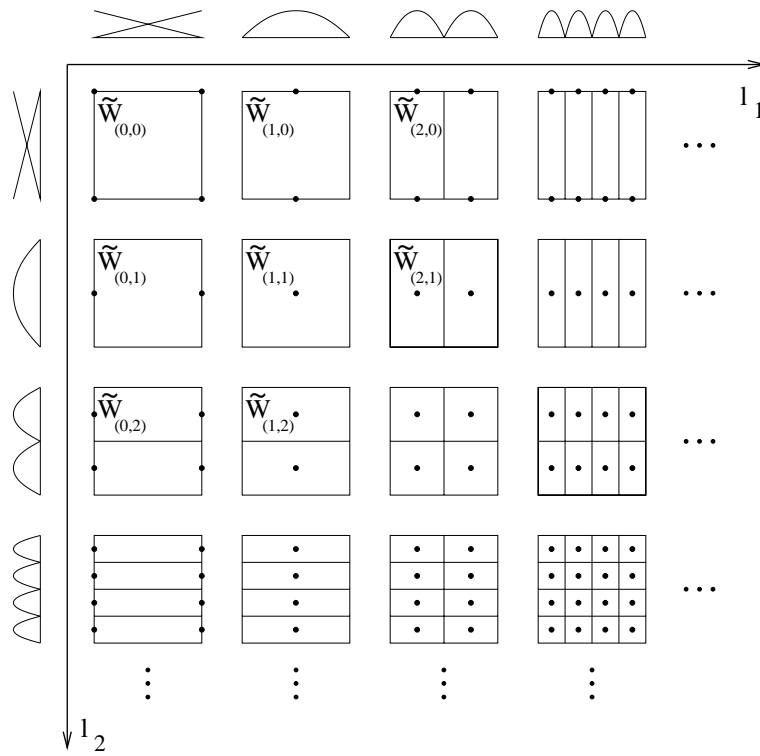


Abb. 2.13: Stützstellen der Basisfunktionen $\tilde{\phi}_{l,i}$ in den zweidimensionalen Räumen $\tilde{W}_{(l_1, l_2)}$. Die Basisfunktionen selbst werden gebildet als Tensorprodukte aus den oben und links skizzierten quadratischen (bzw. für $l_j = 0$ linearen) eindimensionalen Basisfunktionen.

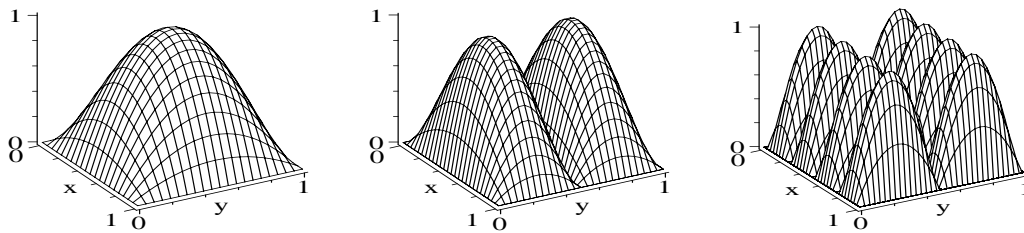


Abb. 2.14: Quadratische Basisfunktionen der Räume $\tilde{W}_{(1,1)}$, $\tilde{W}_{(1,2)}$, $\tilde{W}_{(3,2)}$

Linearkombination aus Basisfunktionen höherer Ordnung gebildet wird, in den verschiedenen Normen ebenfalls einen Interpolationsfehler höherer Ordnung besitzt. Für die quadratischen Basisfunktionen hat der Interpolationsfehler in der L_∞ - und L_2 -Norm die Ordnung $O(h^3 \cdot |\log h|^{d-1})$ und in der Energienorm die Ordnung $O(h^2)$.

Kapitel 3

Kombinationstechnik

Im vorherigen Kapitel wurden ausgehend vom Problem der Funktionsdarstellung hierarchische Basen und Dünngitterräume beschrieben. Das Verhältnis der Anzahl der Freiheitsgrade zum Interpolationsfehler führte auf die mit den Dünnen Gittern verbundene Effizienzsteigerung.

Das Berechnen von Näherungslösungen für partielle Differentialgleichungen, wie sie bei strömungsmechanischen Problemen in Form der Navier-Stokes-Gleichungen auftreten, geschieht durch Diskretisierung der Gleichungen und durch Lösen des daraus resultierenden Gleichungssystems. Die Diskretisierung der Gleichungen erfolgt dabei zumeist auf strukturierten Gittern, die als Vollgitter bezeichnet werden. Um zu einer Problemlösung auf einem Dünnen Gitter zu gelangen, gibt es prinzipiell zwei unterschiedliche Vorgehensmöglichkeiten:

- Man programmiert einen Lösungsalgorithmus, der direkt auf den Dünngitterpunkten arbeitet. Eventuell schon vorhandene Programme, die eine Problemlösung auf einem Vollgitter berechnen, müssen somit umgeschrieben bzw. völlig neu entworfen werden. Die für eine Dünngitterlösung nötigen Algorithmen sind in der Regel wesentlich komplizierter als die Algorithmen zur Berechnung einer Vollgitterlösung.
- Eine andere Möglichkeit besteht darin, verschiedene Vollgitterlösungen in einer geeigneten Linearkombination zu kombinieren und so eine Näherungslösung auf einem Dünnen Gitter zu erhalten. Dieser Ansatz wird *Kombinationstechnik* genannt; die so erhaltene Lösung heißt *Kombinationslösung*.

Die Kombinationslösung ist in der Regel nicht identisch mit der Lösung, die direkt auf dem Dünnen Gitter berechnet wird. Unter gewissen Voraussetzungen, die man für die Lösung der partiellen Differentialgleichung annehmen muß, besitzt der Fehler der Kombinationslösung aber dieselbe Ordnung wie der Dünngitterinterpolant [14].

In diesem Kapitel werden die grundlegenden Formeln der Kombinationstechnik zusammengestellt. Die Bildung eines Kombinationsgitters durch Ausdünnung des Vollgitters wird beschrieben, und die Kombinationsformeln für den Ausdünnungsparameter umgeschrieben. Für strömungsmechanische Probleme besitzt der zwei- und dreidimensionale Fall eine Bedeutung. Daher werden die Formeln insbesondere für diese Dimensionen angegeben und einige interessierende Werte in Tabellen zusammengefaßt. Weil in den späteren Anwendungen die Funktionen, die auf Vollgittern oder Dünne Gittern betrachtet werden, immer Näherungslösungen von Differentialgleichungen sind, wird zumeist von *Vollgitterlösungen* bzw. *Lösungen auf dem Dünne Gitter* gesprochen, womit eine dort gegebene Funktion gemeint ist.

3.1 Prinzip der Kombinationstechnik

Zunächst erfolgt eine Zusammenstellung der im weiteren benutzten Nomenklatur:

- Der Funktionenraum $\widehat{V}_n^{(1)}$ wurde in (2.32) definiert. Die Stützstellen sämtlicher Basisfunktionen dieses Funktionenraums bilden ein Dünnes Gitter, das man mit Ω_n^c bezeichnet. Für den zweidimensionalen Fall wurden in Abbildung 2.10 einige Dünne Gitter dargestellt.
- Das Vollgitter auf dem Einheitsgebiet $\overline{\Omega} = [0, 1]^d$ mit Maschenweiten $\underline{h}_l := (h_{l_1}, \dots, h_{l_d}) = (2^{-l_1}, \dots, 2^{-l_d})$, $l_j \in \mathbb{N}_0$, $j = 1, \dots, d$ bezeichnet man mit Ω_l . Es gilt: $|\underline{l}|_1 := \sum_{j=1}^d l_j$
- Der Raum der bezüglich der Gitterpunkte von Ω_l d -dimensionalen stückweise multilinearen Funktionen ist \widehat{V}_l . Darin sind als Basisfunktionen auch die Randfunktionen enthalten im Gegensatz zum Funktionenraum V_l in (2.10).
- Eine Funktion $u_l \in \widehat{V}_l$ ist eine auf dem Vollgitter Ω_l gegebene oder berechnete Funktion. Dabei kann es sich beispielsweise um eine Näherungslösung einer partiellen Differentialgleichung handeln.
- Das *regelmäßige Vollgitter* wird definiert durch $\Omega_n := \Omega_{(n, \dots, n)}$. Der zugehörige Funktionenraum ist $\widehat{V}_n := \widehat{V}_{(n, \dots, n)}$. Eine auf dem Gitter Ω_n gegebene Funktion ist $u_n \in \widehat{V}_n$.

Das Prinzip der Kombinationstechnik ist, durch eine geeignete Linearkombination verschiedener Vollgitterlösungen u_l eine Lösung u_n^c auf dem Dünne Gitter Ω_n^c zu berechnen. Die Lösung u_n^c heißt *Kombinationslösung*. Die *Kombinationsformel* zur Bildung der Linearkombination lautet:

$$u_n^c = \sum_{j=0}^{d-1} (-1)^j \binom{d-1}{j} \sum_{|\underline{l}|_1=n-j} u_l \quad (3.1)$$

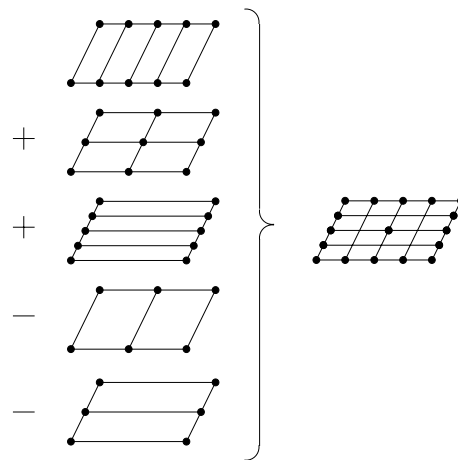


Abb. 3.1: Prinzip der Linearkombination zur Bildung der Kombinationslösung u_2^c im zweidimensionalen Raum

Die Indizes der zweiten Summe in (3.1) laufen im Vergleich zu anderen Arbeiten [14, 17, 23] über einen anderen Zahlenbereich, weil sich die in dieser Arbeit verwendete Definition der Dünne Gitter mit ihren zugehörigen Randpunkten von den anderen Arbeiten unterscheidet.

Im zweidimensionalen Fall lautet die Kombinationsformel (3.1):

$$u_{(n,n)}^c = \sum_{l_1+l_2=n} u_{(l_1,l_2)} - \sum_{l_1+l_2=n-1} u_{(l_1,l_2)} \quad (3.2)$$

Im dreidimensionalen Fall lautet sie:

$$u_{(n,n,n)}^c = \sum_{l_1+l_2+l_3=n} u_{(l_1,l_2,l_3)} - 2 \cdot \sum_{l_1+l_2+l_3=n-1} u_{(l_1,l_2,l_3)} + \sum_{l_1+l_2+l_3=n-2} u_{(l_1,l_2,l_3)} \quad (3.3)$$

Im folgenden wird man von der „Kombination, Linearkombination oder Superposition von Gittern“ sprechen. Dies sind lediglich verkürzende Ausdrücke, die eigentlich bedeuten, daß man aus auf den verschiedenen Gittern gegebenen oder als Näherungslösung berechneten Funktionen eine Linearkombination bildet und so eine Lösungsfunktion auf einem Kombinationsgitter erhält.

In Abbildung 3.1 ist schematisch die Superposition der verschiedenen vollen Gitter zur Bildung der zweidimensionalen Kombinationslösung u_2^c dargestellt. Mit der Kombinationsformel (3.2) ergibt sich für u_2^c :

$$u_2^c = u_{(2,0)} + u_{(1,1)} + u_{(0,2)} - u_{(1,0)} - u_{(0,1)}$$

In Abbildung 3.2 wird veranschaulicht, wie die verschiedenen Dünne Gitter Ω_i^c im zweidimensionalen Raum durch die Überlagerung der vollen Gitter entstehen. Das mehrfache Auftreten gewisser Gitterpunkte in der Linearkombination wird durch die Gitter, die mit negativem Faktor eingehen, wieder ausgeglichen.

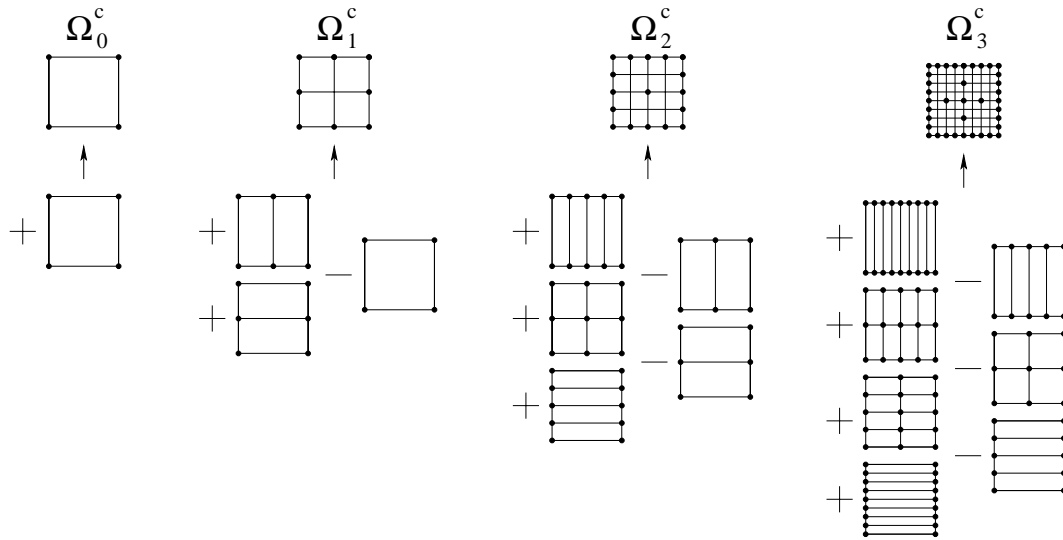


Abb. 3.2: Prinzip der Kombinationstechnik im zweidimensionalen Raum

3.2 Kombination mit Ausdünnung

Bei der Dünngitterinterpolation wird in ein Raumgebiet $\bar{\Omega}$ ein Dünnes Gitter Ω_n^c gelegt, das entscheidend weniger Gitterpunkte enthält als ein Vollgitter Ω_n , aber durch das der auftretende Interpolationsfehler nur geringfügig vergrößert wird. Eine Vergrößerung von n bedeutet bei der Notation für die Gitter immer eine Verfeinerung, also eine Verkleinerung der Maschenweiten des Vollgitters bzw. des Dünnes Gitters. Wird über ein Gebiet, wie es für eine Strömungssimulationsrechnung typisch sein könnte, ein Dünnes Gitter Ω_n^c gelegt (vgl. beispielsweise Abbildung 3.2 oben), so ist dieses in aller Regel zu grob, um das Geschwindigkeitsfeld der Strömung genau genug beschreiben zu können. Daher wird hier bei der Anwendung der Kombinationstechnik ein anderes Vorgehen notwendig: Ausgangspunkt ist ein Vollgitter Ω_n , das gewöhnlich für die Problemberechnung verwendet werden würde. Dieses Gitter habe zunächst in jeder Raumrichtung dieselbe Maschenanzahl. Man berechnet nun aber nicht die Lösung auf dem Vollgitter, sondern bildet eine Linearkombination von Lösungen, die man auf verschiedenen gröbereren Gittern berechnet hat. Diese gröbereren Gitter erhält man aus dem Vollgitter durch Weglassen von Gitterpunkten in den unterschiedlichen Raumrichtungen, was im folgenden als *Ausdünnung* bezeichnet wird.

Formal läßt sich dieses Vorgehen folgendermaßen beschreiben: Das volle Gitter sei Ω_n und $u_n \in \hat{V}_n$ eine darauf gegebene Funktion oder berechnete Näherungslösung. Man definiert zur Dimension d die vom *Ausdünnungsparameter* s abhängige Multiindexmenge I_n^s :

$$I_n^s := \left\{ (k_1, k_2, \dots, k_d) \mid |\underline{k}|_1 = dn - (d-1)s, n-s \leq k_j \leq n, j = 1, \dots, d \right\} \quad (3.4)$$

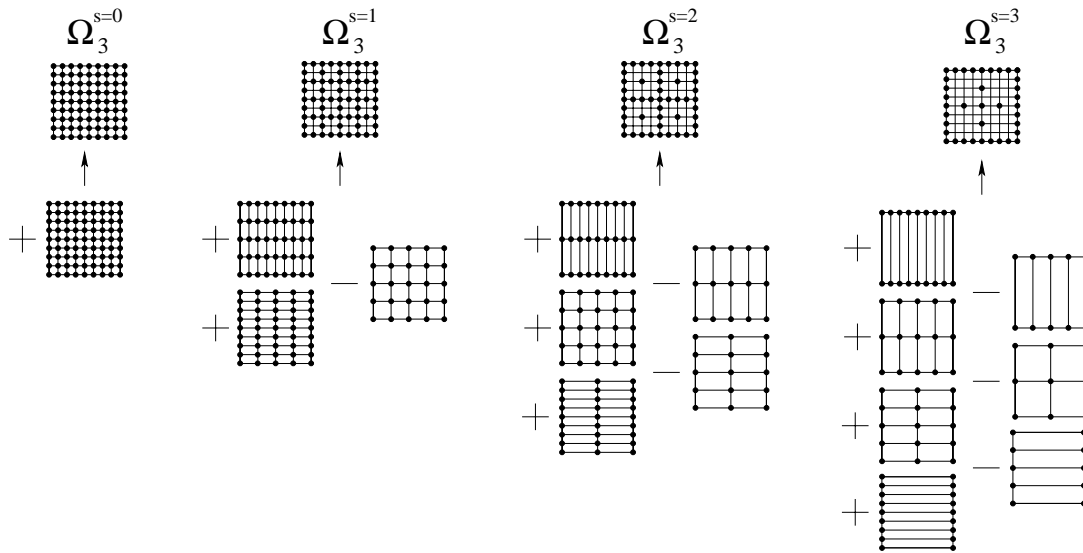


Abb. 3.3: Prinzip der Kombinationstechnik durch Ausdünnung im zweidimensionalen Raum

Mit dieser Multiindexmenge I_n^s läßt sich die Kombinationsformel zur Bildung der Kombinationslösung u_n^s schreiben:

$$u_n^s = \sum_{j=0}^{d-1} (-1)^j \binom{d-1}{j} \sum_{\underline{k} \in I_{n-j}^{s-j}} u_{\underline{k}} \quad (3.5)$$

Das Gitter, auf dem die Lösung u_n^s als Linearkombination berechnet wird, ist ein *ausgedünntes volles Gitter*, das mit Ω_n^s bezeichnet wird. Der Parameter s beschreibt dabei den *Ausdünnungsgrad*. Für $s < 0$ ist die Indexmenge I_n^s in (3.4) leer, so daß dafür die zweite Summe in der Kombinationsformel (3.5) verschwindet. Für $s = 0$ ergibt sich das volle Gitter Ω_n , für $s = n$ das normale Dünne Gitter Ω_n^c . Die Folge der entstehenden Kombinationsgitter ist für den zweidimensionalen Raum mit $n = 3$ in Abbildung 3.3 schematisch dargestellt.

In Abbildung 3.4 wird der Zusammenhang zwischen den Kombinationsformeln (3.1) und (3.5) wiederum für den zweidimensionalen Raum verdeutlicht: Das Schema im Beispiel beinhaltet alle vollen Gitter $\Omega_{(l_1, l_2)}$ mit $0 \leq l_1, l_2 \leq 4$. Die normalen Dünne Gitter Ω_n^c werden gebildet mit der Formel (3.1). Sie setzen sich für $n > 0$ zusammen aus der Linearkombination von Gittern, die im Schema auf jeweils zwei benachbarten Diagonalen liegen. Für größer werdendes n wandern diese Diagonalen vom Ursprung des l_1 - l_2 -Systems weiter nach außen. Für das Kombinationsgitter Ω_2^c sind exemplarisch die in die Linearkombination eingehenden fünf Gitter in der Abbildung durch zwei gestrichelte Linien eingegrenzt (vgl. dazu Abbildung 3.1). Das vollste Gitter im Schema ist $\Omega_{(4,4)}$. Von diesem

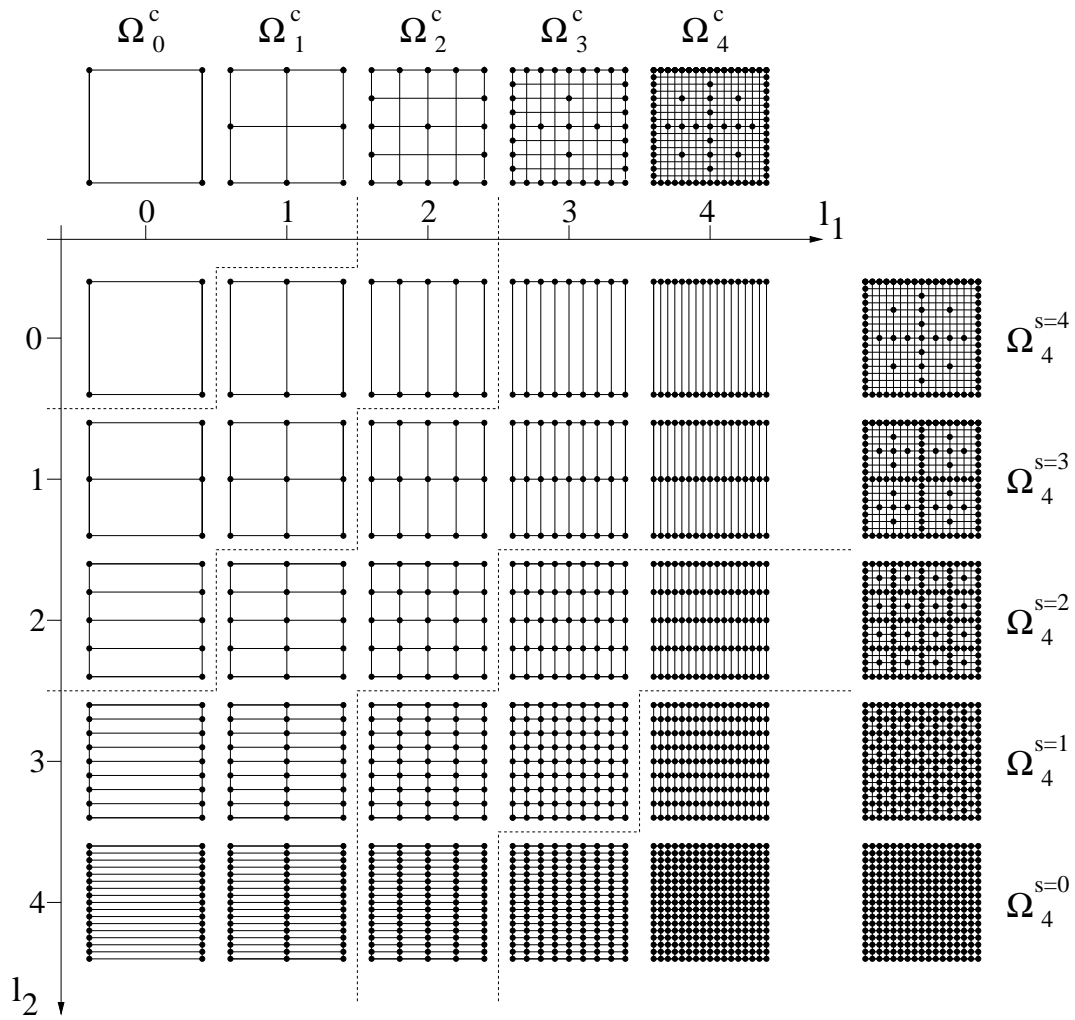


Abb. 3.4: Zusammenhang zwischen der Kombinationsformel (3.1) und der Kombination durch Ausdünnung (3.5) im zweidimensionalen Raum

ausgehend werden die ausgedünnten Gitter Ω_4^s nach Formel (3.5) gebildet. Die in die Linearkombination eingehenden Gitter liegen für $s > 0$ wiederum auf benachbarten Diagonalen, die für größer werdendes s auf den Ursprung des Systems zuwandern. Für das Kombinationsgitter $\Omega_4^{s=2}$ sind exemplarisch die in die Linearkombination (3.5) eingehenden Gitter in der Abbildung durch zwei gestrichelte Linien eingegrenzt. Eine Vereinfachung des Schemas aus Abbildung 3.4 wird in Abbildung 3.5 dargestellt: Jedes Kombinationsgitter wird gebildet als Linearkombination von verschiedenen anderen groben Gittern, die in dem quadratischen Schema angeordnet sind. Jedes kleine Quadrat stellt ein einzelnes grobes Gitter dar mit verschiedenem (l_1, l_2) , beginnend bei $(0,0)$ in der linken oberen Ecke. Die Bildung der Linearkombination kann man somit kurz schreiben, indem man jedes in ihr vorkommende grobe Gitter durch den jeweiligen Vorfaktor markiert.

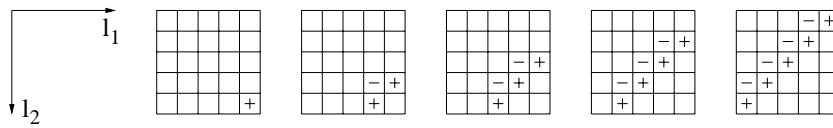


Abb. 3.5: Schema zur Bildung der Kombinationsgitter $\Omega_4^{s=0}$ bis $\Omega_4^{s=4}$

Das volle Gitter sei nun $\Omega_{\underline{l}}$ mit unterschiedlichen Maschenweiten in den verschiedenen Raumrichtungen, die durch \underline{l} festgelegt sind. Eine darauf gegebene Funktion oder berechnete Näherungslösung sei $u_{\underline{l}} \in \hat{V}_{\underline{l}}$. Man definiert zur Dimension d einen verallgemeinerten Multiindex $I_{\underline{l}}^s$:

$$I_{\underline{l}}^s := \left\{ (k_1, k_2, \dots, k_d) \mid |\underline{k}|_1 = |\underline{l}|_1 - (d-1)s, l_j - s \leq k_j \leq l_j, j = 1, \dots, d \right\} \quad (3.6)$$

Mit diesem Multiindex $I_{\underline{l}}^s$ und dem d -Tupel $\underline{1} = (1, 1, \dots, 1)$ sowie $j \cdot \underline{1} = (j, j, \dots, j)$ läßt sich die Kombinationsformel zur Berechnung der Kombinationslösung $u_{\underline{l}}^s$ auf dem Gitter $\Omega_{\underline{l}}^s$ folgendermaßen schreiben:

$$u_{\underline{l}}^s = \sum_{j=0}^{d-1} (-1)^j \binom{d-1}{j} \sum_{\underline{k} \in I_{\underline{l}-j \cdot \underline{1}}^{s-j}} u_{\underline{k}} \quad (3.7)$$

In Abbildung 3.6 ist ein Beispiel für diese Kombinationsformel im zweidimensionalen Raum gezeigt. Beispielsweise folgt aus der Formel (3.7) für die Lösung $u_{(3,2)}^{s=2}$ auf dem Gitter $\Omega_{(3,2)}^{s=2}$:

$$u_{(3,2)}^{s=2} = u_{(3,0)} + u_{(2,1)} + u_{(1,2)} - u_{(2,0)} - u_{(1,1)}$$

3.3 Gitter für Strömungsberechnungen

Bisher wurde stets das Berechnungsgebiet $\bar{\Omega} = [0, 1]^d$ mit einem Vollgitter Ω_n bzw. $\Omega_{\underline{l}}$ und den Kombinationsgittern Ω_n^c , Ω_n^s bzw. $\Omega_{\underline{l}}^s$ betrachtet. Im folgenden soll die Kombinationstechnik auf strömungsmechanische Probleme angewandt werden. Dabei werden strukturierte, orthogonale, zwei- und dreidimensionale Gitter mit unterschiedlichen physikalischen Abmessungen und unterschiedlichen Maschenweiten in den einzelnen Koordinatenrichtungen verwendet. Mit L_j als der physikalischen Länge des d -dimensionalen Berechnungsgebiets in der Raumrichtung j , $j = 1, \dots, d$, und mit N_j als der Anzahl der Maschen in dieser Richtung ergibt sich die Maschenweite $h_j = L_j/N_j$ in j -Richtung.

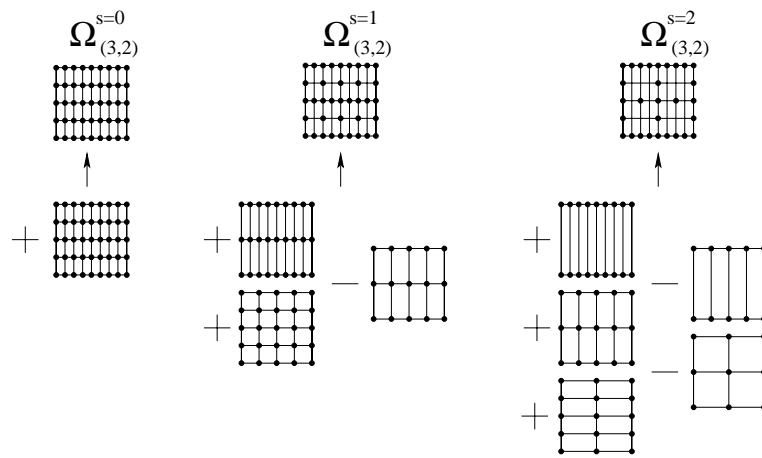


Abb. 3.6: Prinzip der Kombinationstechnik im zweidimensionalen Raum für ein Vollgitter $\Omega_{(3,2)}$

Das prinzipielle Vorgehen zur Untersuchung der Anwendbarkeit der Kombinationstechnik für Strömungsberechnungen ist, daß eine mit der Kombinationstechnik erhaltene Lösung mit einer auf einem Vollgitter erhaltenen Lösung verglichen wird. Berechnet werden dabei die strömungsmechanischen Größen Geschwindigkeit und Druck mit einem Programm zur Lösung der entsprechenden Gleichungen. Ein solches Programm wird im folgenden als *Strömungslöser* bezeichnet. Die Diskretisierung auf dem Vollgitter muß dabei so fein sein, daß alle physikalischen Phänomene hinreichend gut aufgelöst werden. Um eine Kombinationslösung zu erhalten, wird das Vollgitter in den verschiedenen Raumrichtungen geeignet ausgedünnt und anschließend wird auf den groben Gittern gerechnet. Um die Ausdünnung des Vollgitters allerdings durchführen zu können, muß für die Anzahl der Maschen N_j in dem Vollgitter eine Zerlegung der folgenden Art gelten:

$$N_j = m_j \cdot 2^n \quad \text{wobei } n \text{ fest für alle } j \quad \text{und} \quad m_j \in \mathbb{N} \quad (3.8)$$

Ein solches Vollgitter kann in jeder Richtung um einen Faktor 2^n ausgedünnt werden. Die absolute Anzahl der Maschen des Gitters wird dabei in jeder Raumrichtung durch den Vorfaktor m_j variiert. Die Kombinationsformel (3.5) mit dem Multiindex I_n^s aus (3.4) und dem Ausdünnungsparameter $0 \leq s \leq n$ ist für ein solches Gitter anwendbar, wobei man nun die Multiindexkomponenten auf den Exponenten des Faktors 2^n in (3.8) beziehen muß.

3.4 Berechnung der Ausdünnungsindizes

Man betrachtet ein Vollgitter, das die Bedingung (3.8) für die Anzahl der Maschen in den verschiedenen Raumrichtungen erfüllt. Wie beschrieben ist die Kom-

binationsformel (3.5) mit der Multiindexmenge I_n^s aus (3.4) anwendbar. Für die folgenden Untersuchungen ist es sinnvoll, die in die Kombinationsformel eingehenden größeren Gitter als *ausgedünnte Vollgitter* zu betrachten. Dies wird im folgenden näher beschrieben.

In die Kombinationsformel (3.5) geht die Multiindexmenge I_n^s in der Form I_{n-j}^{s-j} mit $j = 0, \dots, d-1$ ein. Ein d -Tupel $\underline{k} = (k_1, \dots, k_d) \in I_{n-j}^{s-j}$ wird in (3.4) durch zwei Bedingungen festgelegt:

$$1: \quad |\underline{k}|_1 = \sum_{i=1}^d k_i = d(n-j) - (d-1)(s-j) = dn - (d-1)s - j \quad (3.9)$$

$$2: \quad (n-j) - (s-j) \leq k_i \leq (n-j) \quad \text{mit} \quad i = 1, \dots, d \quad (3.10)$$

Durch Umformung erhält man hieraus folgende Bedingungen:

$$1: \quad \sum_{i=1}^d (n - k_i) = (d-1)s + j \quad (3.11)$$

$$2: \quad j \leq (n - k_i) \leq s \quad \text{mit} \quad i = 1, \dots, d \quad (3.12)$$

Die Größe $a_i := n - k_i$ nennt man *Ausdünnungstiefe* in Raumrichtung i . Maximale Ausdünnung in Richtung i liegt vor für $a_i = n$ mit $k_i = 0$, minimal ist sie für $a_i = 0$ mit $k_i = n$. Das Tupel $\underline{a} = (a_1, \dots, a_d)$ beschreibt somit, durch welche Potenzen von 2 die Maschenanzahlen der verschiedenen Raumrichtungen eines Vollgitters dividiert werden, um ein grobes Gitter, also ein ausgedünntes Vollgitter zu erhalten. Daher heißt das Tupel im folgenden auch *Ausdünnungsindex*. Die *Gesamtausdünnung* ist $A := \sum_{i=1}^d a_i$. Weil ausschließlich der zwei- und dreidimensionale Fall für die strömungsmechanischen Anwendungen von Interesse sind, werden diese im folgenden genauer untersucht.

Dreidimensionaler Fall:

Für den dreidimensionalen Fall lautet die Kombinationsformel (3.5):

$$u_n^s = \sum_{\underline{k} \in I_n^s} u_{\underline{k}} - 2 \cdot \sum_{\underline{k} \in I_{n-1}^{s-1}} u_{\underline{k}} + \sum_{\underline{k} \in I_{n-2}^{s-2}} u_{\underline{k}} \quad (3.13)$$

Der in (3.5) und damit in (3.9) bzw. (3.10) vorkommende Index j nimmt hier in den einzelnen drei Summen die Werte 0, 1 bzw. 2 an. Die Bedingungen (3.11) und (3.12) lauten für drei Dimensionen:

$$1: \quad A = a_1 + a_2 + a_3 = 2s + j \quad (3.14)$$

$$2: \quad j \leq a_1, a_2, a_3 \leq s \quad (3.15)$$

Folgende Prozedur berechnet dann für einen gegebenen Ausdünnungsparameter s alle Ausdünnungsindizes (a_1, a_2, a_3) der in den drei Summen in der Kombinationsformel (3.13) vorkommenden Gitter und gibt diese zusammen mit dem

Linearkombinationskoeffizienten (+1 bzw. -2) aus:

```

input(s);
for ( j = 0 ; j <= 2 ; j++ ) {
  if (j==1) { koef = -2; } else { koef = +1; }
  A = 2*s+j;
  for ( a1 = s ; a1 >= A-2*s ; a1- ) {
    for ( a2 = s ; a2 >= A-s-a1 ; a2- ) {
      a3 = A-a1-a2;
      print (koef,a1,a2,a3);
    }
  }
}

```

Die Anzahl der in der Linearkombination vorkommenden Gitter kann man mit der Gesamtausdünnung $A = A(s, j) = 2s + j$ in (3.14) in Anlehnung an die Schleifen in der obigen Prozedur für den dreidimensionalen Fall folgendermaßen berechnen:

$$\begin{aligned}
 L^{(3)}(s, j) &= \sum_{k=A-2s}^s \sum_{l=A-s-k}^s 1 = \sum_{k=A-2s}^s (2s - A + 1 + k) \\
 &= (3s - A + 1) \left((2s - A + 1) + \frac{A-s}{2} \right) \\
 &= (3s - A + 1) \left(\frac{3}{2}s - \frac{1}{2}A + 1 \right) \\
 &= \frac{1}{2} (s - j + 1) (s - j + 2)
 \end{aligned}$$

In drei Dimensionen nimmt j bei I_{n-j}^{s-j} für die drei einzelnen Summen in der Kombinationsformel (3.13) die Werte 0, 1, 2 an. Es folgt somit für die Anzahl der in diese Summen eingehenden Gitter sowie für deren Gesamtanzahl:

$$L^{(3)}(s, 0) = \frac{1}{2}(s+1)(s+2), \quad L^{(3)}(s, 1) = \frac{1}{2}s(s+1), \quad L^{(3)}(s, 2) = \frac{1}{2}(s-1)s \quad (3.16)$$

$$L^{(3)}(s, 0) + L^{(3)}(s, 1) + L^{(3)}(s, 2) = \frac{3}{2}(s^2 + s) + 1 \quad (3.17)$$

Das Vollgitter besitze N Gitterpunkte. Dann besitzt ein grobes Gitter, das in die Linearkombination (3.13) eingeht, in etwa $N/2^{a_1+a_2+a_3} = N/2^{2s+j}$ Gitterpunkte, wenn man von einer Ungenauigkeit hervorgerufen durch die Gebietsrandpunkte absieht. j nimmt dabei wie oben in Abhängigkeit der jeweiligen Summe in der Kombinationsformel die Werte 0, 1, 2 an. Die feinsten aller vorkommenden groben Gitter haben demnach $N/2^{2s}$ Gitterpunkte. Die gesamte Anzahl $N_{ges}^{(3)}(s)$ aller in die Linearkombination eingehenden Gitterpunkte berechnet sich somit folgendermaßen:

$$N_{ges}^{(3)}(s) = \sum_{j=0}^2 \frac{N}{2^{2s+j}} \cdot L^{(3)}(s, j) = N \cdot \frac{1}{4^s} \left(\frac{7}{8}s^2 + \frac{13}{8}s + 1 \right) \quad (3.18)$$

In Tabelle 3.1 wird dargestellt, wie sich in Abhängigkeit vom Ausdünnungsparameter s die Anzahlen der Gitterpunkte der groben Gitter bei einer Kombinationsrechnung verhalten: Die Gesamtanzahl aller Gitter in der Linearkombination (3.13) berechnet sich mit (3.17), die Gesamtanzahl aller Gitterpunkte der groben Gitter im Vergleich zum Vollgitter berechnet sich mit (3.18). Der Nutzen der Kombinationstechnik wird in dieser Tabelle offensichtlich: Die Gesamtanzahl aller Gitterpunkte in allen groben Gittern nimmt mit zunehmendem Ausdünnungsparameter s sehr schnell ab. Das feinste der groben Gitter hat nur noch einen Bruchteil der Gitterpunkte des Vollgitters. Der Speicherplatzbedarf und Rechenzeitbedarf zur Lösung der Einzelprobleme nimmt dementsprechend beim Einsatz der Kombinationstechnik stark ab.

Wenn der Ausdünnungsparameter von s auf $s + 1$ vergrößert wird, nimmt die gesamte Anzahl aller in die Linearkombination eingehenden Gitterpunkte asymptotisch für große s um einen Faktor $\frac{1}{4}$ ab, weil mit (3.18) folgendes gilt:

$$\frac{N_{ges}^{(3)}(s+1)}{N_{ges}^{(3)}(s)} \approx \frac{1}{4} \quad \text{für große } s \quad (3.19)$$

Die Tabelle 3.2 stellt zusammen, welche groben Gitter in die Linearkombination in Abhängigkeit vom Ausdünnungsparameter s eingehen: Dort sind die Anzahl der Gitter in den einzelnen Summen in (3.13), der Vorfaktor sowie die Ausdünnungsindizes für das Vollgitter angegeben. Diese Tabelle stellt somit alle Informationen zusammen, die für eine Kombinationsrechnung in der Praxis von Bedeutung sind. Die Tabelle kann für $s > 5$ natürlich fortgesetzt werden, indem man die oben angegebene Prozedur zur Berechnung der Ausdünnungsindizes in drei Dimensionen für $s > 5$ aufruft.

Ausdünnungsparameter s	Gesamtanzahl aller Gitter in der Linearkombination	Gesamtanzahl aller Gitterpunkte im Vergleich zum Vollgitter	Gitterpunktanzahl des feinsten groben Gitters im Vergleich zum Vollgitter
0	1	1 (100.0%)	1 (100.0%)
1	4	7/8 (87.5%)	1/4 (25.0%)
2	10	31/64 (48.4%)	1/16 (6.3%)
3	19	55/256 (21.5%)	1/64 (1.6%)
4	31	43/512 (8.4%)	1/256 (0.4%)
5	46	31/1024 (3.0%)	1/1024 (0.1%)

Tabelle 3.1: Speicherbedarf für die groben Gitter bei einer Kombinationsrechnung im Dreidimensionalen

s=0		
1	+1	(0,0,0)
s=1		
3	+1	(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)
1	-2	(1,1,1)
s=2		
6	+1	(2, 2, 0), (2, 1, 1), (2, 0, 2), (1, 2, 1), (1, 1, 2), (0, 2, 2)
3	-2	(2, 2, 1), (2, 1, 2), (1, 2, 2)
1	+1	(2, 2, 2)
s=3		
10	+1	(3, 3, 0), (3, 2, 1), (3, 1, 2), (3, 0, 3), (2, 3, 1), (2, 2, 2), (2, 1, 3), (1, 3, 2), (1, 2, 3), (0, 3, 3)
6	-2	(3, 3, 1), (3, 2, 2), (3, 1, 3), (2, 3, 2), (2, 2, 3), (1, 3, 3)
3	+1	(3, 3, 2), (3, 2, 3), (2, 3, 3)
s=4		
15	+1	(4, 4, 0), (4, 3, 1), (4, 2, 2), (4, 1, 3), (4, 0, 4), (3, 4, 1), (3, 3, 2), (3, 2, 3), (3, 1, 4), (2, 4, 2), (2, 3, 3), (2, 2, 4), (1, 4, 3), (1, 3, 4), (0, 4, 4)
10	-2	(4, 4, 1), (4, 3, 2), (4, 2, 3), (4, 1, 4), (3, 4, 2), (3, 3, 3), (3, 2, 4), (2, 4, 3), (2, 3, 4), (1, 4, 4)
6	+1	(4, 4, 2), (4, 3, 3), (4, 2, 4), (3, 4, 3), (3, 3, 4), (2, 4, 4)
s=5		
21	+1	(5, 5, 0), (5, 4, 1), (5, 3, 2), (5, 2, 3), (5, 1, 4), (5, 0, 5), (4, 5, 1), (4, 4, 2), (4, 3, 3), (4, 2, 4), (4, 1, 5), (3, 5, 2), (3, 4, 3), (3, 3, 4), (3, 2, 5), (2, 5, 3), (2, 4, 4), (2, 3, 5), (1, 5, 4), (1, 4, 5), (0, 5, 5)
15	-2	(5, 5, 1), (5, 4, 2), (5, 3, 3), (5, 2, 4), (5, 1, 5), (4, 5, 2), (4, 4, 3), (4, 3, 4), (4, 2, 5), (3, 5, 3), (3, 4, 4), (3, 3, 5), (2, 5, 4), (2, 4, 5), (1, 5, 5)
10	+1	(5, 5, 2), (5, 4, 3), (5, 3, 4), (5, 2, 5), (4, 5, 3), (4, 4, 4), (4, 3, 5), (3, 5, 4), (3, 4, 5), (2, 5, 5)

Tabelle 3.2: Übersicht über die zum Ausdünnungsparameter s gehörenden Größen bei einer Kombinationsrechnung im Dreidimensionalen:

Anzahl der in die einzelnen Summen in (3.13) eingehenden Gitter, Linearkombinationskoeffizient (+1 bzw. -2) und die zugehörigen Ausdünnungsindizes

Zweidimensionaler Fall:

Im zweidimensionalen Fall lautet die Kombinationsformel (3.5):

$$u_n^s = \sum_{\underline{k} \in I_n^s} u_{\underline{k}} - \sum_{\underline{k} \in I_{n-1}^{s-1}} u_{\underline{k}} \quad (3.20)$$

Der in (3.9) bzw. (3.10) vorkommende Index j nimmt hier in den beiden Summen die Werte 0 bzw. 1 an. Die Bedingungen (3.11) und (3.12) lauten für zwei Dimensionen:

$$1 : \quad A = a_1 + a_2 = s + j \quad (3.21)$$

$$2 : \quad j \leq a_1, a_2 \leq s \quad (3.22)$$

Folgende einfache Prozedur berechnet dann für den Parameter s alle Ausdünnungsindizes (a_1, a_2) der in den beiden Summen in der Kombinationsformel (3.20) vorkommenden Gitter und gibt diese mit dem Linearkombinationskoeffizienten (+1 bzw. -1) aus:

```
input(s);
for ( j = 0 ; j <= 1 ; j++ ) {
  if (j==1) { koef = -1; } else { koef = +1; }
  A = s+j;
  for ( a1 = s ; a1 >= A-s ; a1- ) {
    a2 = A-a1;
    print (koef,a1,a2);
  }
}
```

Wiederum kann man die Anzahl der in der Linearkombination vorkommenden Gitter mit der Gesamtausdünnung $A = A(s, j) = s + j$ in Anlehnung an die innere Schleife in der obigen Prozedur berechnen:

$$L^{(2)}(s, j) = \sum_{k=A-s}^s 1 = 2s - A + 1 = s - j + 1$$

In zwei Dimensionen nimmt j bei I_{n-j}^{s-j} für die beiden einzelnen Summen in der Kombinationsformel (3.20) die Werte 0 und 1 an. Es folgt somit für die Anzahl der in diese Summen eingehenden Gitter sowie für deren Gesamtanzahl:

$$L^{(2)}(s, 0) = s + 1, \quad L^{(2)}(s, 1) = s \quad (3.23)$$

$$L^{(2)}(s, 0) + L^{(2)}(s, 1) = 2s + 1 \quad (3.24)$$

Das zweidimensionale Vollgitter besitze N Gitterpunkte. Dann besitzt ein grobes Gitter, das in die Linearkombination (3.20) eingeht, in etwa $N/2^{a_1+a_2} = N/2^{s+j}$ Gitterpunkte, wenn man von einer Ungenauigkeit hervorgerufen durch die Gebietsrandpunkte absieht. j nimmt dabei wie oben in Abhängigkeit der jeweiligen Summe in der Kombinationsformel die Werte 0 bzw. 1 an. Die feinsten aller vorkommenden groben Gitter haben demnach $N/2^s$ Gitterpunkte. Die gesamte Anzahl $N_{ges}^{(2)}(s)$ aller in die Linearkombination eingehenden Gitterpunkte berechnet sich somit folgendermaßen:

$$N_{ges}^{(2)}(s) = \sum_{j=0}^1 \frac{N}{2^{s+j}} \cdot L^{(2)}(s, j) = N \cdot \frac{1}{2^s} \left(\frac{3}{2}s + 1 \right) \quad (3.25)$$

In Tabelle 3.3 wird dargestellt, wie sich in Abhängigkeit vom Ausdünnungsparameter s die Anzahlen der Gitterpunkte der groben Gitter bei einer Kombinationsrechnung verhalten: Die Gesamtanzahl aller Gitter in der Linearkombination (3.20) berechnet sich nach (3.24), die Gesamtanzahl aller Gitterpunkte der groben Gitter im Vergleich zum Vollgitter berechnet sich mit (3.25). Die Tabelle 3.4 stellt analog zur Tabelle 3.2 alle wichtigen Größen zusammen, die für eine Kombinationsrechnung im Zweidimensionalen wichtig sind.

Wird im Zweidimensionalen der Ausdünnungsparameter von s auf $s + 1$ vergrößert, so nimmt die gesamte Anzahl aller in die Linearkombination eingehenden Gitterpunkte asymptotisch für große s um einen Faktor $\frac{1}{2}$ ab, weil mit (3.25) folgendes gilt:

$$\frac{N_{ges}^{(2)}(s+1)}{N_{ges}^{(2)}(s)} \approx \frac{1}{2} \quad \text{für große } s \quad (3.26)$$

Ausdünnungsparameter s	Gesamtanzahl aller Gitter in der Linearkombination	Gesamtanzahl aller Gitterpunkte im Vergleich zum Vollgitter	Gitterpunktanzahl des feinsten groben Gitters im Vergleich zum Vollgitter
0	1	1 (100.0%)	1 (100.0%)
1	3	5/4 (125.0%)	1/2 (50.0%)
2	5	1 (100.0%)	1/4 (25.0%)
3	7	11/16 (68.8%)	1/8 (12.5%)
4	9	14/32 (43.8%)	1/16 (6.3%)
5	11	17/64 (26.6%)	1/32 (3.1%)

Tabelle 3.3: Speicherbedarf für die groben Gitter bei einer Kombinationsrechnung im Zweidimensionalen

s=0	<table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">1</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">+1</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">(0, 0)</td> </tr> </table>	1	+1	(0, 0)
1	+1	(0, 0)		

s=1	<table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">2</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">+1</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">(1, 0), (0, 1)</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">1</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">-1</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">(1, 1)</td> </tr> </table>	2	+1	(1, 0), (0, 1)	1	-1	(1, 1)
2	+1	(1, 0), (0, 1)					
1	-1	(1, 1)					

s=2	<table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">3</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">+1</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">(2, 0), (1, 1), (0, 2)</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">2</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">-1</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">(2, 1), (1, 2)</td> </tr> </table>	3	+1	(2, 0), (1, 1), (0, 2)	2	-1	(2, 1), (1, 2)
3	+1	(2, 0), (1, 1), (0, 2)					
2	-1	(2, 1), (1, 2)					

s=3	<table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">4</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">+1</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">(3, 0), (2, 1), (1, 2), (0, 3)</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">3</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">-1</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">(3, 1), (2, 2), (1, 3)</td> </tr> </table>	4	+1	(3, 0), (2, 1), (1, 2), (0, 3)	3	-1	(3, 1), (2, 2), (1, 3)
4	+1	(3, 0), (2, 1), (1, 2), (0, 3)					
3	-1	(3, 1), (2, 2), (1, 3)					

s=4	<table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">5</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">+1</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">(4, 0), (3, 1), (2, 2), (1, 3), (0, 4)</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">4</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">-1</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">(4, 1), (3, 2), (2, 3), (1, 4)</td> </tr> </table>	5	+1	(4, 0), (3, 1), (2, 2), (1, 3), (0, 4)	4	-1	(4, 1), (3, 2), (2, 3), (1, 4)
5	+1	(4, 0), (3, 1), (2, 2), (1, 3), (0, 4)					
4	-1	(4, 1), (3, 2), (2, 3), (1, 4)					

s=5	<table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">6</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">+1</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">(5, 0), (4, 1), (3, 2), (2, 3), (1, 4), (0, 5)</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">5</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">-1</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">(5, 1), (4, 2), (3, 3), (2, 4), (1, 5)</td> </tr> </table>	6	+1	(5, 0), (4, 1), (3, 2), (2, 3), (1, 4), (0, 5)	5	-1	(5, 1), (4, 2), (3, 3), (2, 4), (1, 5)
6	+1	(5, 0), (4, 1), (3, 2), (2, 3), (1, 4), (0, 5)					
5	-1	(5, 1), (4, 2), (3, 3), (2, 4), (1, 5)					

Tabelle 3.4: Übersicht über die zum Ausdünnungsparameter s gehörenden Größen bei einer Kombinationsrechnung im Zweidimensionalen:
 Anzahl der in die einzelnen Summen in (3.20) eingehenden Gitter, Linearkombinationskoeffizient (+1 bzw. -1) und die zugehörigen Ausdünnungsindizes

Kapitel 4

Interpolationsfehler bei Kombinationslösungen

Die Anwendbarkeit der Kombinationstechnik soll für strömungsmechanische Probleme untersucht werden. Dazu muß die Qualität von Kombinationslösungen beurteilt werden. Das kann entweder durch Vergleich mit den exakten Problemlösungen geschehen, wenn man diese kennt, oder durch Vergleich mit Lösungen, die auf den zugehörigen Vollgittern berechnet werden. In diesem Kapitel wird zunächst zusammengestellt, welche Vorgehensweisen beim Vergleich von Lösungen auf unterschiedlichen Gittern möglich sind. Anschließend wird gezeigt, wie man mit Hilfe von Taylorreihenentwicklungen und Interpolationssternen den Interpolationsfehler, der bei der Interpolation einer Kombinationslösung auf das zugehörige Vollgitter auftritt, berechnen kann.

4.1 Lösungsfehler

Bei der numerischen Berechnung von Strömungen sind die das System beschreibenden Grundgleichungen gekoppelte partielle Differentialgleichungen. Diese werden im Raum und in der Zeit diskretisiert. Anschließend wird das algebraische Gleichungssystem der diskretisierten Gleichungen gelöst. Der auftretende Fehler der berechneten Lösung setzt sich zusammen aus einem Diskretisierungsfehler und einem Fehler, der beim Lösen des Gleichungssystems auftritt [10, 9]. Der Diskretisierungsfehler ist die Differenz der exakten Lösung des Differentialgleichungssystems und der exakten Lösung des aus der Diskretisierung entstehenden algebraischen Gleichungssystems. Er ist abhängig von der gewählten Diskretisierungsmethode sowie von der Feinheit des numerischen Gitters. Der Fehler beim Lösen des Gleichungssystems ist die Differenz der exakten Lösung des algebraischen Gleichungssystems und seiner berechneten numerischen Lösung. Er setzt

sich zusammen aus den Rundungsfehlern und den Abbruchkriterien bei den eingesetzten iterativen Verfahren.

Eine Bestimmung des Lösungsfehlers ist nur möglich, wenn man die exakte Lösung des Differentialgleichungssystems kennt. Diese ist aber mit Ausnahme von sehr einfachen strömungsmechanischen Problemen nicht bekannt. Daher wird im folgenden die Kombinationslösung immer mit einer Vollgitterlösung verglichen, die man als hinreichend genau annimmt.

Durch systematische Verfeinerung des numerischen Gitters und der Zeitschrittweite im Lösungsalgorithmus kann der bei der Vollgitterlösung auftretende Lösungsfehler geschätzt werden: Bei einem Verfahren 1. Ordnung ist der auftretende Lösungsfehler ε proportional zur Gittermaschenweite bzw. zur Zeitschrittweite, bei einem Verfahren 2. Ordnung proportional zu deren Quadraten. Sei u die exakte, aber nicht bekannte Lösung des Problems. Dann erhält man bei der Berechnung von Lösungen auf Gittern mit Maschenweiten $2h$, h und $h/2$ die Näherungen $u_{2h} = u + \varepsilon_{2h}$, $u_h = u + \varepsilon_h$ bzw. $u_{h/2} = u + \varepsilon_{h/2}$. Der Lösungsfehler ε_h kann damit geschätzt werden:

$$\begin{aligned}
 1. \text{ Ordnung: } & u_{2h} - u_h = \varepsilon_{2h} - \varepsilon_h \approx 2(\varepsilon_h - \varepsilon_{h/2}) = 2(u_h - u_{h/2}) \\
 & \text{und } \varepsilon_h \approx \varepsilon_{2h} - \varepsilon_h \\
 2. \text{ Ordnung: } & u_{2h} - u_h = \varepsilon_{2h} - \varepsilon_h \approx 4(\varepsilon_h - \varepsilon_{h/2}) = 4(u_h - u_{h/2}) \\
 & \text{und } \varepsilon_h \approx \frac{1}{3}(\varepsilon_{2h} - \varepsilon_h)
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

4.2 Vergleich von Vollgitterlösungen

Es werden später Lösungen auf Vollgittern mit unterschiedlichen Maschenweiten berechnet, um eine Abschätzung für den Diskretisierungsfehler zu erhalten. Eine Vollgitterlösung u_h auf dem Gitter Ω_h mit Maschenweite h in jeder Raumrichtung hat mehr Punkte, an denen eine Lösung berechnet wird, als eine Lösung u_{2h} auf dem Gitter Ω_{2h} mit Maschenweite $2h$. Der Vergleich dieser zwei Vollgitterlösungen kann auf unterschiedliche Weise geschehen:

- Man interpoliert die Lösung u_{2h} auf das feinere Gitter Ω_h mit einer geeigneten Interpolationsmethode. Dann berechnet man die Abweichung der Lösungen auf den Gitterpunkten des feineren Gitters Ω_h in einer diskreten Norm.
- Man berechnet die Abweichung der Lösungen in einer diskreten Norm nur auf den Gitterpunkten, die räumlich betrachtet beide Vollgitter gemeinsam besitzen. Dies sind die Gitterpunkte von Ω_{2h} .

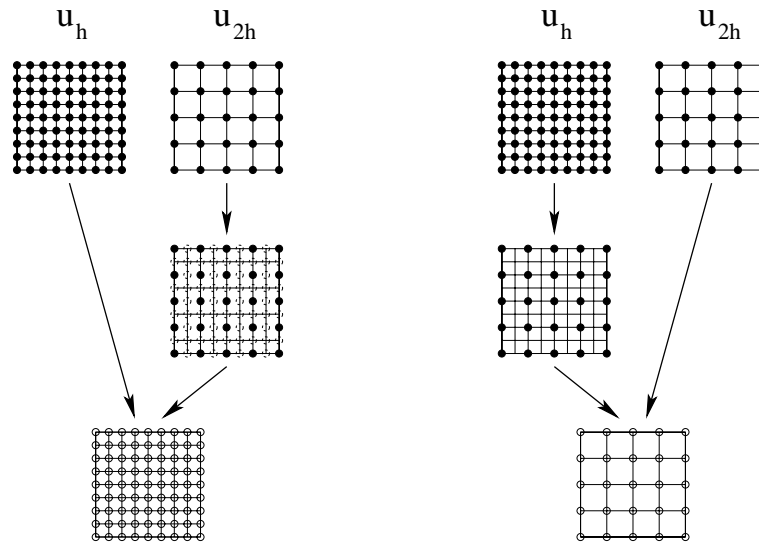


Abb. 4.1: Vorgehensweisen beim Vergleich von Vollgitterlösungen: die Vollgitterlösung u_{2h} wird auf alle Punkte des Gitters von u_h interpoliert und dort verglichen (links), oder die Vollgitterlösung u_h wird ausgedünnt und an allen Punkten des Gitters von u_{2h} mit dieser Lösung verglichen (rechts)

Diese beiden unterschiedlichen Vorgehensweisen sind in Abbildung 4.1 für den zweidimensionalen Fall skizziert. I_h stelle den Operator dar, der eine auf einem größeren Gitter gegebene Lösung auf das Gitter Ω_h interpoliert bzw. eine auf einem feineren Gitter gegebene Lösung durch Weglassen von Gitterpunkten auf das Gitter Ω_h überführt. P_h sei ein Laufindex über alle Gitterpunkte vom Gitter Ω_h und $\#P_h$ sei deren Gesamtanzahl. Dann kann man beispielsweise mit der diskreten L_2 -Norm einen Fehler ε_h , den *diskreten L_2 -Fehler*, berechnen:

$$\varepsilon_h = \left(\frac{1}{\#P_h} \sum_{P_h} (u_h(P_h) - (I_h u_{2h})(P_h))^2 \right)^{1/2} \quad (4.2)$$

Die zweite Vorgehensweise läßt sich analog schreiben:

$$\varepsilon_{2h} = \left(\frac{1}{\#P_{2h}} \sum_{P_{2h}} (u_{2h}(P_{2h}) - (I_{2h} u_h)(P_{2h}))^2 \right)^{1/2} \quad (4.3)$$

4.3 Vergleich von Vollgitter- und Kombinationslösung

Die Kombinationslösung u_h^c wird auf einem Dünnen Gitter Ω_h^c berechnet und besitzt somit in Abhängigkeit vom Ausdünnungsparameter s weniger Gitterpunk-

te als die entsprechende Vollgitterlösung u_h auf dem Gitter Ω_h . Daraus ergibt sich dieselbe Problematik wie beim oben beschriebenen Vergleich zweier Vollgitterlösungen auf unterschiedlichen Gittern. Die mögliche Vorgehensweise zur Berechnung eines diskreten L_2 -Fehlers kann auch auf die beiden oben beschriebenen Arten geschehen: Entweder man interpoliert die Kombinationslösung auf das Vollgitter und berechnet die L_2 -Norm der Differenz der Lösungen auf allen Vollgitterpunkten, oder man berechnet die L_2 -Norm der Differenz der Lösungen nur auf den Gitterpunkten des Kombinationsgitters.

Formal kann man dies mit den Interpolationsoperatoren I_h bzw. I_h^c entsprechend den Formeln (4.2) und (4.3) schreiben:

$$\varepsilon_h = \left(\frac{1}{\#P_h} \sum_{P_h} \left(u_h(P_h) - (I_h u_h^c)(P_h) \right)^2 \right)^{1/2} \quad (4.4)$$

Den diskreten L_2 -Fehler für die Gitterpunkte des Kombinationsgitters berechnet man analog:

$$\varepsilon_h^c = \left(\frac{1}{\#P_h^c} \sum_{P_h^c} \left(u_h^c(P_h^c) - (I_h^c u_h)(P_h^c) \right)^2 \right)^{1/2} \quad (4.5)$$

4.4 Bilineare und transfinite Interpolation

Für den Vergleich zweier Vollgitterlösungen oder den Vergleich von einer Vollgitterlösung mit einer Kombinationslösung wurden in den Abschnitten 4.2 bzw. 4.3 die Interpolationsoperatoren I_h bzw. I_h^c eingeführt. Die Funktion dieser Operatoren ist offensichtlich, wenn man beim Vergleich zweier Vollgitter nur die Gitterpunkte nutzt, die beide Vollgitter bzw. das Vollgitter und das Kombinationsgitter gemeinsam besitzen, wie es in der Formel (4.3) bzw. (4.5) geschieht.

Anders ist es, wenn man zunächst von einem gröberen Vollgitter auf ein feineres Vollgitter oder von einem Kombinationsgitter auf ein Vollgitter interpolieren muß, wie es in Formel (4.2) und (4.4) nötig ist. Dazu kann man beispielsweise multilineare Funktionen oder Polynome höherer Ordnung einsetzen. Die Interpolation und der bei der Interpolation auftretende Interpolationsfehler soll im folgenden weiter untersucht werden. Dieses ist für eine spätere Schätzung wichtig, ob der Fehler einer Kombinationslösung in erster Linie der Interpolationsfehler ist oder andere Ursachen hat. Dazu betrachtet man zunächst Funktionen, die auf einem Vollgitter und einem Kombinationsgitter gegeben sind, und untersucht, welcher Fehler sich bei der Interpolation der auf den Gitterpunkten gegebenen Werte auf andere Punkte des Gebiets ergibt. Die Darstellung geschieht dabei aus Gründen der Übersichtlichkeit für den zweidimensionalen Fall, wobei aber in höheren Dimensionen ganz analog vorgegangen werden kann.

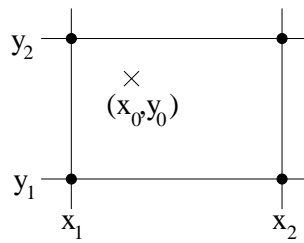


Abb. 4.2: Zur bilinearen Interpolation

Bilineare Interpolation:

Zunächst soll ein bilinearer Interpolant betrachtet werden. Auf einem Gitter sei die Funktion u gegeben. Das bedeutet, daß ihre Funktionswerte an allen Gitterstützstellen bekannt sind. In Abbildung 4.2 ist ein kleiner Ausschnitt aus dem Gitter skizziert, der die im folgenden gebrauchte Nomenklatur erklärt.

An der Stelle (x_0, y_0) wird der Funktionswert $u(x_0, y_0)$ durch einen bilinearen Interpolanten u_I mit Hilfe der Funktionswerte an den benachbarten Stützstellen $u(x_1, y_1)$, $u(x_2, y_1)$, $u(x_1, y_2)$, $u(x_2, y_2)$ interpoliert:

$$\begin{aligned}
 u_I(x_0, y_0) = & \frac{y_0 - y_2}{y_1 - y_2} \left(\frac{x_0 - x_2}{x_1 - x_2} u(x_1, y_1) + \frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_1} u(x_2, y_1) \right) \\
 & + \frac{y_0 - y_1}{y_2 - y_1} \left(\frac{x_0 - x_2}{x_1 - x_2} u(x_1, y_2) + \frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_1} u(x_2, y_2) \right)
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Im folgenden wird stets vorausgesetzt, daß sich die betrachteten Funktionen durch ihre Taylorreihen darstellen lassen [1, 7, 8]. Im Zweidimensionalen läßt sich mit dieser Annahme eine Funktion u durch ihre Taylorreihe mit dem Entwicklungspunkt (x_0, y_0) folgendermaßen schreiben:

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\left\{ (x - x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right\}^k u \right) (x_0, y_0) \tag{4.7}$$

Die Taylorreihenentwicklung kann man nutzen, um den Interpolationsfehler zu bestimmen: Mit den Festlegungen

$$h_x := x_2 - x_1, \quad \gamma_x := \frac{x_0 - x_1}{h_x}, \quad h_y := y_2 - y_1, \quad \gamma_y := \frac{y_0 - y_1}{h_y} \tag{4.8}$$

kann man die Formel (4.6) folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned}
 u_I(x_0, y_0) = & (1 - \gamma_y) \left((1 - \gamma_x) u(x_0 - \gamma_x h_x, y_0 - \gamma_y h_y) \right. \\
 & \left. + \gamma_x u(x_0 + (1 - \gamma_x) h_x, y_0 - \gamma_y h_y) \right) \\
 & + \gamma_y \left((1 - \gamma_x) u(x_0 - \gamma_x h_x, y_0 + (1 - \gamma_y) h_y) \right. \\
 & \left. + \gamma_x u(x_0 + (1 - \gamma_x) h_x, y_0 + (1 - \gamma_y) h_y) \right)
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

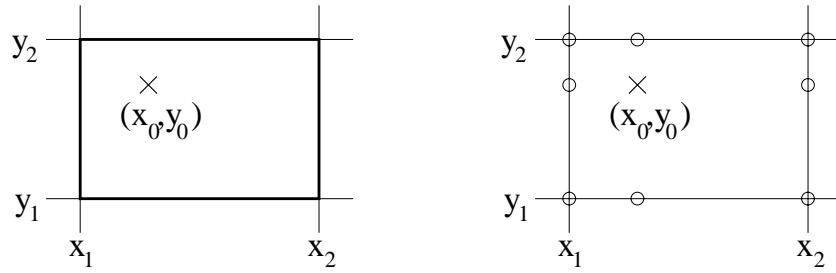


Abb. 4.3: Funktion u auf den Gitterlinien gegeben

Die Funktion u kann an den betreffenden Stellen in (4.9) durch Taylorreihen gemäß (4.7) mit dem Entwicklungspunkt (x_0, y_0) dargestellt werden. Damit erhält man direkt für den Interpolationsfehler die Formel:

$$\begin{aligned}
 u_I(x_0, y_0) - u(x_0, y_0) &= \frac{1}{2}\gamma_x(1 - \gamma_x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{(x_0, y_0)}h_x^2 + \frac{1}{2}\gamma_y(1 - \gamma_y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big|_{(x_0, y_0)}h_y^2 \\
 &\quad + O(h_x^3 + h_y^3 + h_x^2h_y^2)
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Dieser Interpolationsfehler ist also von der Größenordnung $O(h_x^2 + h_y^2)$.

Transfinite Interpolation:

Nun wird angenommen, daß die Funktion u nicht nur wie oben auf den Gitterpunkten sondern auf den gesamten Gitterlinien gegeben ist, die das Grundgebiet $[x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ umschließen. Auf den Punkt (x_0, y_0) soll interpoliert werden. In Abbildung 4.3 (links) ist dieses skizziert.

Ein Interpolant über dem Gebiet $[x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ kann als eine Verallgemeinerung des bilinearen Interpolanten konstruiert werden. Dabei stimmt der Interpolant auf den Gitterlinien mit der dort gegebenen Funktion u genau überein. Der transfinite Interpolant $u_I^t(x, y)$ wird folgendermaßen definiert [5]:

$$\begin{aligned}
 u_I^t(x, y) &:= \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}u(x_1, y) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}u(x_2, y) \\
 &\quad + \frac{y - y_2}{y_1 - y_2}u(x, y_1) + \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}u(x, y_2) \\
 &\quad - \frac{y - y_2}{y_1 - y_2} \left(\frac{x - x_2}{x_1 - x_2}u(x_1, y_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}u(x_2, y_1) \right) \\
 &\quad - \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \left(\frac{x - x_2}{x_1 - x_2}u(x_1, y_2) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}u(x_2, y_2) \right)
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Die negativen Summanden in dieser Formel entsprechen den aus den Funktionswerten an den Eckpunkten gebildeten bilinearen Interpolanten (4.6). Der transfinite Interpolant besitzt die Eigenschaft, daß die vierte gemischte Ableitung ver-

schwindet:

$$\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} u_I^t(x, y) = 0 \quad (4.12)$$

Eine weitere Eigenschaft lässt sich direkt aus der Formel (4.11) ablesen: Der Interpolant u_I^t im Gebiet $[x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ an der Stelle (x_0, y_0) wird ausschließlich durch diskrete Funktionswerte auf dem Rand $u(x_1, y_0)$, $u(x_2, y_0)$, $u(x_0, y_1)$, $u(x_0, y_2)$ und den vier Eckwerten $u(x_1, y_1)$, $u(x_2, y_1)$, $u(x_1, y_2)$, $u(x_2, y_2)$ bestimmt. In Abbildung 4.3 (rechts) sind diese Punkte markiert.

Zur Bestimmung des Interpolationsfehlers kann man mit den in (4.8) eingeführten Größen den Interpolanten (4.11) an der Stelle (x_0, y_0) , also $u_I^t(x_0, y_0)$, analog zu (4.9) umschreiben. Die Funktion u kann in dem so erhaltenen Ausdruck wieder durch die Taylorreihenentwicklung (4.7) mit dem Entwicklungspunkt (x_0, y_0) dargestellt werden. Für den auftretenden Interpolationsfehler erhält man so die Formel:

$$\begin{aligned} u_I^t(x_0, y_0) - u(x_0, y_0) &= -\frac{1}{4} \gamma_x (1 - \gamma_x) \gamma_y (1 - \gamma_y) \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} \Big|_{(x_0, y_0)} h_x^2 h_y^2 \\ &\quad + O(h_x^3 h_y^2 + h_x^2 h_y^3 + h_x^3 h_y^3) \end{aligned} \quad (4.13)$$

Dieser Interpolationsfehler ist somit von der Ordnung $O(h_x^2 h_y^2)$ und proportional zur vierten gemischten Ableitung.

Dieses Resultat besagt auch folgendes: Wenn man auf dem Gebietsrand von $[x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ nur Funktionswerte an diskreten Stellen (x_i, y_1) , (x_i, y_2) , (x_1, y_j) , (x_2, y_j) und an den Eckpunkten gegeben hat, kann man durch diese an jeder Gebietsseite beispielsweise ein Interpolationspolynom legen oder stückweise linear zwischen den Funktionswerten interpolieren. Dann kann mit diesen Randfunktionen ein transfiniter Interpolant nach (4.11) konstruiert werden. Der Interpolationsfehler dieses transfiniten Interpolanten ist somit für jeden inneren Punkt (x_i, y_j) ebenfalls von der Ordnung $O(h_x^2 h_y^2)$. Dies ist in Abbildung 4.4 skizziert: Die auf dem Gebietsrand gegebenen Funktionswerte sind durch offene Kreise symbolisiert. An den Punkten, die durch Kreuze markiert sind, hat der transfinite Interpolant die genannte Interpolationsfehlerordnung.

4.5 Berechnung des Interpolationsfehlers

4.5.1 Erwartete Ordnung des Interpolationsfehlers

Man betrachte nochmal Abbildung 3.4: Beispielsweise möchte man die Vollgitterlösung auf dem Gitter $\Omega_4^{s=0}$ mit der Kombinationslösung auf dem Gitter $\Omega_4^{s=2}$

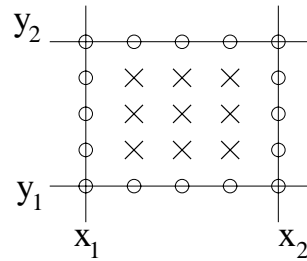


Abb. 4.4: Funktionswerte an diskreten Stellen auf dem Gebietsrand gegeben (runde Kreise)

vergleichen. Dieses Problem reduziert sich auf den Vergleich von einzelnen *Gitterausschnitten* gleicher Gestalt, die in Abbildung 4.5 skizziert sind. Jeder solche Gitterausschnitt der Kombinationslösung muß zuvor interpoliert werden auf alle Punkte des Gitterausschnitts des Vollgitters, um anschließend etwa die L_2 -Norm der Differenz der Lösungen auf allen Punkten berechnen zu können. Jede beliebige, glatte Funktion, die in diesem Gebietsausschnitt oder auf dem Gitter im Gebietsausschnitt gegeben ist, kann man zerlegen in eine Summe aus ihrem transfiniten Interpolanten und einem *Überschuß*. Gedanklich gehe man dabei wieder über in die hierarchische Darstellung einer Funktion und betrachte zunächst nur die Randpunkte des Gitterausschnitts in Abbildung 4.5. Der mit den Randpunkten des Ausschnitts berechnete transfinite Interpolant bringt auf den Vollgitterpunkten nach dem im Abschnitt 4.3 Gesagten einen Interpolationsfehler der Ordnung $O(h_x^2 h_y^2)$. Der transfinite Interpolant stimmt auf den Gebietsrandpunkten mit der Funktion überein, der Überschuß ist auf dem Gebietsrand identisch null. Der Überschuß setzt sich im Bild der hierarchischen Basis zusammen aus den hierarchischen Basisfunktionen mit ihren Stützstellen im Gebietsinneren. Für die Größe der hierbei auftretenden hierarchischen Koeffizienten gilt nach der Dünn- gittertheorie die Formel (2.16). Diese Formel besagt, daß alle Koeffizienten von der Ordnung $O(h_x^2 h_y^2)$ und proportional zur gemischten vierten Ableitung sind. Der Interpolationsfehler, den man bei der bilinearen Interpolation der Kombinationslösung auf die Vollgitterpunkte erhält, ist also insgesamt proportional zur gemischten vierten Ableitung und von der Ordnung $O(h_x^2 h_y^2)$.

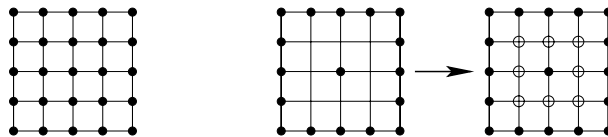


Abb. 4.5: Gitterausschnitte der Gitter $\Omega_4^{s=0}$ und $\Omega_4^{s=2}$, die verglichen werden sollen, sowie die Punkte (offene Kreise), auf die die Kombinationslösung zuvor interpoliert werden muß

4.5.2 Berechnungsmöglichkeiten des Interpolationsfehlers

Die direkte Berechnung des Fehlers, der bei der Interpolation der Kombinationslösung auf die Vollgitterpunkte entsteht (vgl. Abbildung 4.5), kann auf verschiedene Arten geschehen:

- Man betrachtet die einzelnen Gitterausschnitte. Dort sei die Kombinationslösung gegeben in der Darstellung mit der hierarchischen Basis. Die Kombinationslösung unterscheidet sich von der Vollgitterlösung dadurch, daß einzelne Teilräume des Vollgitterinterpolanten weggelassen werden (vgl. Abbildung 2.11 und 2.12). Mit der vorne beschriebenen Theorie der Dünne Gitter kann für jeden Teilraum eine Größenabschätzung der hierarchischen Koeffizienten (vgl. (2.16)) gemacht werden und damit der Interpolationsfehler als Summe der weggelassenen Teilräume abgeschätzt werden.
- Man betrachtet wiederum die einzelnen Gitterausschnitte. Die Kombinationslösung definiert einen stückweise bilinearen Interpolanten über dem Gitterausschnittsgebiet. Jeder Funktionswert an den Gitterpunkten des Kombinationsgitters hat einen Einfluß auf diesen bilinearen Interpolanten. Soll nun auf einen Vollgitterpunkt interpoliert werden, kann der Interpolant gebildet werden mit Hilfe eines *Interpolationssterns*, der sich auf die Kombinationsgitterpunkte bezieht. Eine Taylorreihenentwicklung mit Entwicklungspunkt an diesem Vollgitterpunkt und die Aufsummierung über die Kombinationsgitterpunkte mit den Gewichten des Interpolationssterns führt dann direkt auf den Interpolationsfehler.

In dieser Arbeit wird die zweite der beschriebenen Vorgehensweisen zur Berechnung des Interpolationsfehlers verwendet. Damit läßt sich sowohl für die multilineare Interpolation als auch für Interpolanten höherer Ordnung der Interpolationsfehler an den Vollgitterpunkten berechnen. Auch für die Bestimmung des Interpolationsfehlers mit anderer Anordnung der Datenpunkte, wie sie im späteren bei den versetzten Gittern in der Strömungssimulation zur Anwendung kommen, hat dies Vorteile.

4.5.3 Bestimmung der Interpolationssterne

Die Bestimmung der Interpolationssterne für die Interpolation der Kombinationslösung auf die verschiedenen Vollgitterpunkte wird nun exemplarisch für das in Abbildung 4.5 gegebene Problem dargestellt: Die Funktionswerte seien an den Punkten des Kombinationsgitters gegeben. Die Lösung auf dem Kombinationsgitter kann als Linearkombination (vgl. Abbildung 3.1) der auf groben Gittern gegebenen Funktionswerte gebildet werden. Die Funktionswerte an den Gitterpunkten der einzelnen groben Gittern sind dabei dieselben wie die Werte auf den

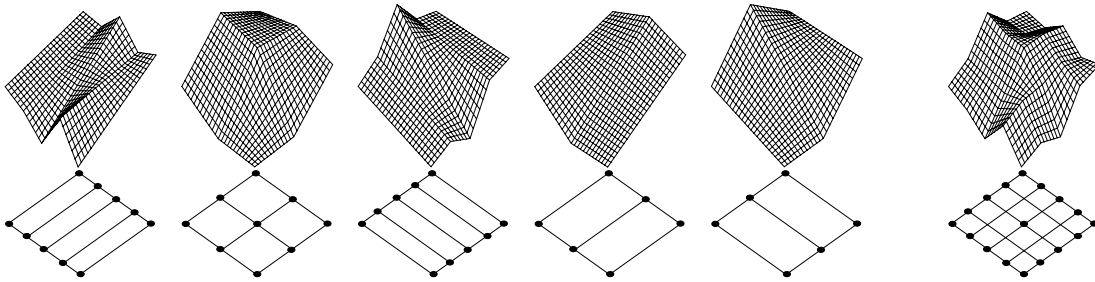


Abb. 4.6: Bilineare Interpolanten auf den groben Gitter und ihre Linearkombination zur Kombinationslösung (ganz rechts)

entsprechenden Gitterpunkten der Kombinationslösung. In Abbildung 4.6 sind exemplarisch die einzelnen bilinearen Interpolanten auf den groben Gittern sowie die daraus gebildete Kombinationslösung dargestellt, die als Linearkombination ebenfalls ein stückweise stetiger, bilinearer Interpolant ist.

In Abbildung 4.5 wird deutlich, daß in dem konkreten Beispiel die Kombinationslösung auf insgesamt acht Vollgitterpunkte interpoliert werden muß, um die Lösungen auf beiden Gittern vergleichen zu können. Diese acht Punkte teilen sich auf in zwei Klassen, die jeweils die Punkte umfassen, deren Lage in Bezug auf das umgebende Gitter symmetrisch ist. In Abbildung 4.7 ist jeweils ein Repräsentant jeder Klasse markiert. Aus Symmetriegründen haben die anderen sechs Punkte einen Interpolationsfehler, der jeweils einem dieser Repräsentanten entspricht.

Die Interpolation erfolgt mit den oben genannten Interpolationssternen. Diese kann man leicht bilden, wenn man die Interpolanten auf den verschiedenen groben Gittern betrachtet: Für jedes einzelne grobe Gitter kann man die Gewichtung der Funktionswerte an den Gitterpunkten auf den bilinear zu interpolierenden Punkt direkt angeben. Die Linearkombination dieser Gewichte ergibt dann den gesuchten Interpolationsstern. Dies ist in Abbildung 4.8 für die beiden Repräsentanten des Beispielproblems (vgl. Abbildung 4.7) dargestellt. Es sei nochmal betont, daß die Gewichte sich hier auf die Funktionswerte an den Gitterpunkten beziehen und nicht auf die Werte der hierarchischen Überschüsse in der Darstellung des Interpolanten mit einer hierarchischen Basis.

Den Interpolationsstern kann man auch über die Funktionsdarstellung in der hierarchischen Basis erhalten: Man bestimmt die Beiträge der hierarchischen Ba-

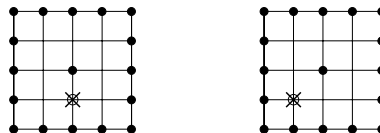


Abb. 4.7: Repräsentanten der Gitterpunkte, auf die interpoliert werden muß

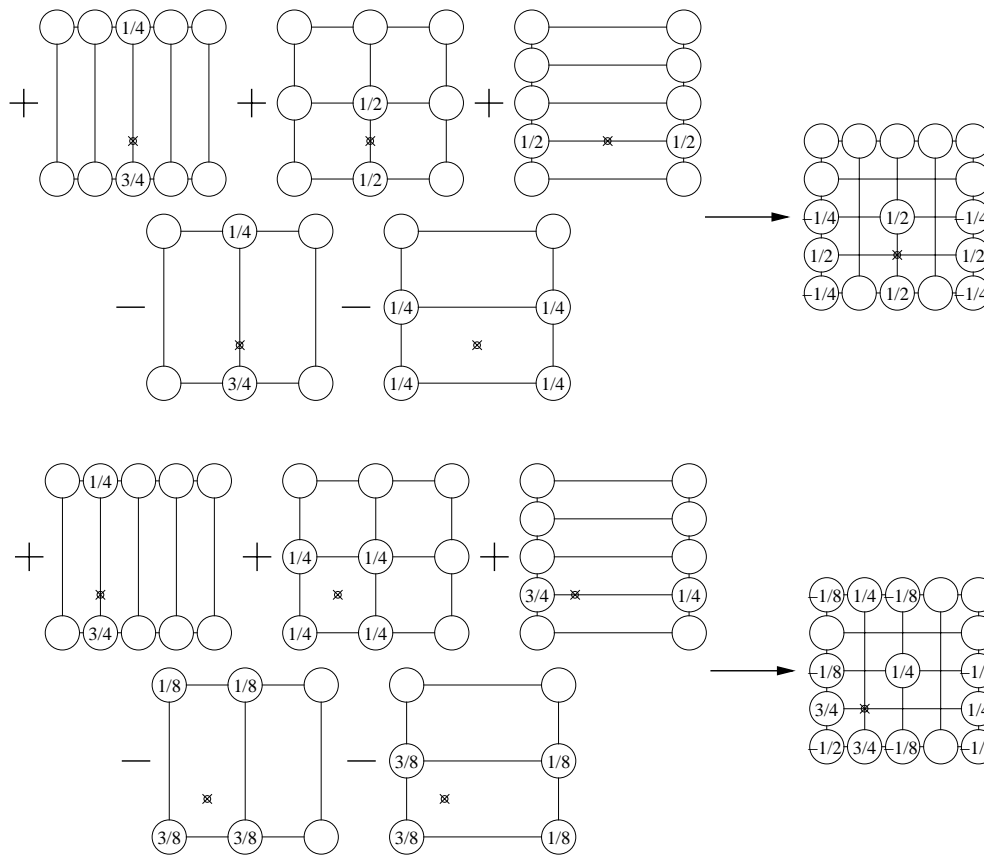


Abb. 4.8: Berechnung der Interpolationssterne im Gitter mit Ausdünnungsparameter $s = 2$ für die beiden Repräsentanten der unterschiedlichen Punktklassen

sisfunktionen auf den zu interpolierenden Punkt. Eine Transformation der hierarchischen Basisfunktionen auf die Knotenbasisfunktionen führt dann direkt auf die Gewichte des Interpolationssterns für die Funktionswerte an den Kombinationsgitterpunkten.

Weitere Beispiele für die Interpolationssterne bei den Kombinationsgittern mit Ausdünnungsparametern $s = 1$ und $s = 3$ sind in den Abbildungen 4.9 bzw. 4.10 gegeben: Beim Ausdünnungsparameter $s = 1$ gibt es in den Gitterausschnitten nur eine Klasse von Vollgitterpunkten, auf die interpoliert werden muß. Die Bildung des einfachen Interpolationssterns ist in Abbildung 4.9 dargestellt. Beim Ausdünnungsparameter $s = 3$ gibt es schon acht verschiedene Klassen von Punkten, die jeweils einen Interpolationsstern anderer Symmetrie haben. Diese Punkte sowie das Aussehen eines dieser Interpolationssterne ist in Abbildung 4.10 exemplarisch dargestellt.

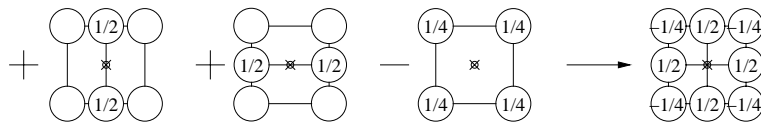


Abb. 4.9: Berechnung des Interpolationssterns im Gitter mit Ausdünnungsparameter $s = 1$

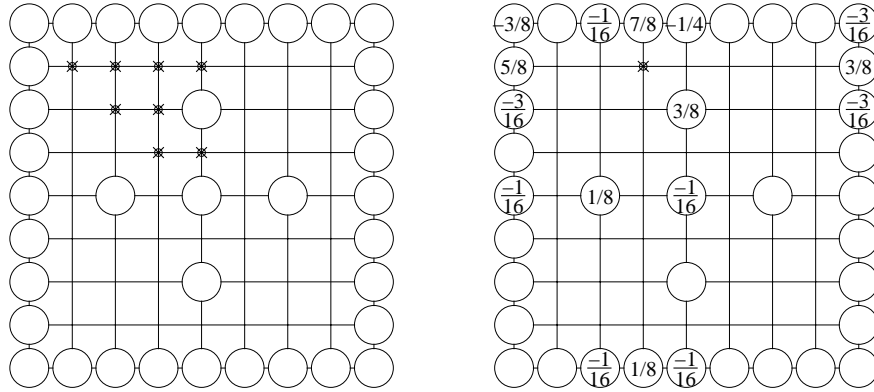


Abb. 4.10: Repräsentanten der Punkte verschiedener Klassen im Gitter mit Ausdünnungsparameter $s = 3$ (links) und ein Interpolationsstern für einen dieser Punkte (rechts)

4.5.4 Fehlerberechnung mit Taylorreihenentwicklung

Jeden Vollgitterpunkt, auf den die Kombinationslösung interpoliert werden muß, kann man als Entwicklungspunkt für eine zweidimensionale Taylorreihenentwicklung nehmen und die Taylorreihenentwicklungen an allen Kombinationsgitterpunkten mit den Gewichten des zugehörigen Interpolationssterns aufsummieren. Daraus folgt dann direkt der Interpolationsfehler, den man an diesem Vollgitterpunkt macht.

Im folgenden schreibt man symbolisch $T(u, (x, y))$ als Taylorreihenentwicklung der Funktion u am Punkt (x, y) mit Entwicklungspunkt $(0, 0)$. Diese Taylorreihenentwicklung wird im Zweidimensionalen nach Formel (4.7) mit $(x_0, y_0) = (0, 0)$ gebildet.

Die Berechnung des Interpolationsfehlers soll zunächst exemplarisch für das Kombinationsgitter mit Ausdünnungsparameter $s = 1$ erfolgen: Der Punkt, auf den mit Hilfe des Interpolationssterns aus Abbildung 4.9 interpoliert werden soll, wird Ursprung des benutzten Koordinatensystems und Entwicklungspunkt $(0, 0)$ für die Taylorreihen. Die Maschenweiten des Vollgitters seien in den beiden Raumrichtungen h_x bzw. h_y . Damit ergibt sich der Interpolationsfehler mit Hilfe des

Interpolationssterns direkt folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left(T(u, (h_x, 0)) + T(u, (-h_x, 0)) + T(u, (0, h_y)) + T(u, (0, -h_y)) \right) \\
& - \frac{1}{4} \left(T(u, (h_x, h_y)) + T(u, (-h_x, h_y)) + T(u, (h_x, -h_y)) + T(u, (-h_x, -h_y)) \right) \\
& \quad - u(0, 0) \\
& = -\frac{1}{4} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} \Big|_{(0,0)} h_x^2 h_y^2 + O(h_x^3 h_y^2 + h_x^2 h_y^3 + h_x^3 h_y^3)
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Wie erwartet ist dieser Interpolationsfehler von der Ordnung $O(h_x^2 h_y^2)$ und proportional zur vierten gemischten Ableitung am Entwicklungspunkt.

Nach demselben Schema lassen sich auch die Interpolationsfehler für Ausdünnungsparameter $s > 1$ berechnen. Beispielsweise ergeben sich für die beiden Repräsentanten der Punkte, auf die beim Ausdünnungsparameter $s = 2$ interpoliert werden muß (vgl. Abbildung 4.7), mit den Interpolationssternen aus Abbildung 4.8 und unter Vernachlässigung der Summanden höherer Ordnung in den Taylorreihen die Interpolationsfehler

$$-\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} \Big|_{(0,0)} h_x^2 h_y^2 \quad \text{bzw.} \quad -\frac{5}{4} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} \Big|_{(0,0)} h_x^2 h_y^2 \quad . \tag{4.15}$$

Bei höheren Ausdünnungsparametern gibt es immer mehr Vollgitterpunkte, auf die die Kombinationslösung interpoliert werden muß (vgl. beispielsweise Abbildung 4.10 für den Ausdünnungsparameter $s = 3$). Für die Beurteilung der Qualität der Kombinationslösung wird deshalb im folgenden nicht mehr der Interpolationsfehler an jedem einzelnen Gitterpunkt sondern der sogenannte L_2 -Interpolationsfehler betrachtet. Der L_2 -Interpolationsfehler ist die diskrete L_2 -Norm der in einem Gitter an den einzelnen Punkten auftretenden Interpolationsfehler und wird entsprechend Formel (4.4) berechnet.

Im folgenden wird gezeigt, wie für ein Kombinationsgitter mit Ausdünnungsparameter $s = 1$ und $s = 2$ der L_2 -Interpolationsfehler berechnet wird: Eine Funktion u sei auf einem Vollgitter und einem Kombinationsgitter mit dem Ausdünnungsparameter $s = 1$ gegeben. Dann besitzt jeder Punkt, der vom Kombinationsgitter auf das Vollgitter interpoliert wird, entweder keinen Interpolationsfehler, falls die Punkte in beiden Gittern vorhanden sind, oder er besitzt einen Interpolationsfehler nach Formel (4.14), wenn er bilinear interpoliert wurde. Drei Viertel der Punkte sind in beiden Gittern vorhanden und ein Viertel der Punkte muß interpoliert werden, wenn man von der Ungenauigkeit dieser Faktoren aufgrund der Randpunkte absieht. Wenn die vierte gemischte Ableitung der Funktion im Gebiet ungefähr konstant ist, also $\left| \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} \Big|_{\Omega} \right| \approx c$ gilt, dann ist der L_2 -Interpolationsfehler

gegeben durch:

$$\sqrt{\frac{3}{4} \cdot (0)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{4} c h_x^2 h_y^2\right)^2} = \frac{1}{8} c h_x^2 h_y^2$$

Für den Fehler auf einem Kombinationsgitter mit Ausdünnungsparameter $s = 2$ ergibt sich analog mit den Fehlern in Formel (4.15):

$$\sqrt{\frac{8}{16} \cdot (0)^2 + \frac{4}{16} \cdot \left(-c h_x^2 h_y^2\right)^2 + \frac{4}{16} \cdot \left(-\frac{5}{4} c h_x^2 h_y^2\right)^2} = \frac{\sqrt{41}}{8} c h_x^2 h_y^2$$

Fehlerberechnungen dieser Art werden später in abgewandelter Form bei den versetzten Gittern, die in der Strömungssimulation eingesetzt werden, benutzt, um Schätzungen für den L_2 -Interpolationsfehler für die verschiedenen Kombinationsgitter anzugeben. Die Annahme, daß die vierte gemischte Ableitung im Berechnungsgebiet konstant ist, wird dann ersetzt durch die Verwendung eines auf geeignete Weise gemittelten Werts für die gemischten Ableitungen.

4.6 Interpolation höherer Ordnung

Bisher wurde der Dünngitterinterpolant auf dem Kombinationsgitter immer als Linearkombination von Tensorprodukten stückweise linearer Basisfunktionen gebildet. Aber auch Basisfunktionen höherer Ordnung, wie beispielsweise die in Kapitel 2.2.8 vorgestellten quadratischen Basisfunktionen, können zur Bildung des Dünngitterinterpolanten benutzt werden. Dies hat dann Auswirkungen auf den Interpolationsfehler, was in diesem Abschnitt dargestellt wird.

Beispielsweise soll im Zweidimensionalen eine Vollgitterlösung auf dem Gitter $\Omega_4^{s=0}$ und eine Kombinationslösung auf dem Gitter $\Omega_4^{s=1}$ verglichen werden (vgl. Abbildung 3.4). Die Kombinationslösung muß dazu wieder auf die fehlenden Punkte im Vollgitter interpoliert werden. Abermals reduziert sich das Problem auf den Vergleich einzelner Gitterausschnitte. Da für die eindeutige Bestimmung eines quadratischen Interpolanten aber jeweils drei Punkte in jeder Raumrichtung nötig sind, werden diese Gitterausschnitte nun in jeder Raumrichtung doppelt so groß gewählt wie bei der Berechnung des Interpolationsfehlers mit linearer Interpolation. In Abbildung 4.11 werden dieser Gitterausschnitt sowie seine Zusammensetzung aus den einzelnen groben Gittern dargestellt.

Sind auf einem orthogonalen, zweidimensionalen Gitter Funktionswerte $u(x_i, y_j)$ an den Gitterpunkten (x_i, y_j) mit $1 \leq i, j \leq 3$ gegeben, so lautet das quadratische

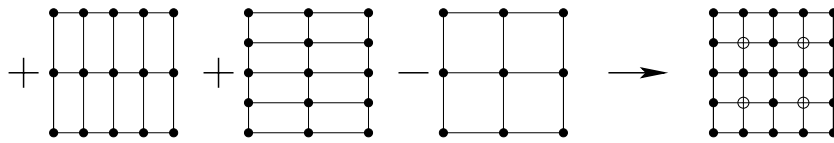


Abb. 4.11: Zusammensetzung des Gitterausschnitts des Gitters $\Omega_4^{s=1}$ für die quadratische Interpolation auf die fehlenden Punkte des Vollgitters (offene Kreise)

Lagrange-Interpolationspolynom $L(x, y)$:

$$L(x, y) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 u(x_i, y_j) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^3 \frac{x - x_k}{x_i - x_k} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^3 \frac{y - y_l}{y_j - y_l} \quad (4.16)$$

Es lassen sich analog zur Interpolation mit linearen Funktionen die Interpolationssterne bestimmen: Die Gewichte der Funktionswerte an den Gitterpunkten der einzelnen groben Gitter werden zunächst mit Hilfe der Formel (4.16) berechnet. Dabei setzt sich der Interpolant auf den einzelnen groben Gittern aus den quadratischen Basisfunktionen, die im Kapitel 2.2.8 beschrieben wurden, zusammen. Die Linearkombination dieser Gewichte gemäß der Kombinationsformel führt dann direkt auf den Interpolationsstern. Dieses ist in Abbildung 4.12 für das obige Beispiel exemplarisch gezeigt.

Den Interpolationsfehler, der bei der quadratischen Interpolation an den interpolierten Vollgitterpunkten auftritt, kann man ganz analog wie bei den stückweise linearen Basisfunktionen mit Hilfe der Taylorreihenentwicklung um den zu interpolierenden Punkt und Aufsummierung der Taylorreihen mit den Gewichten des Interpolationssterns bestimmen. Die zu interpolierenden Punkte in Abbildung 4.12 haben alle einen symmetrischen Interpolationsstern. Mit diesem ergibt sich für den Interpolationsfehler:

$$-\frac{1}{4} \frac{\partial^6 u}{\partial x^3 \partial y^3} \Big|_{(0,0)} h_x^3 h_y^3 + O(h_x^4 h_y^3 + h_x^3 h_y^4 + h_x^4 h_y^4)$$

Weil nun quadratisch interpoliert wurde, hat dieser Fehler die Ordnung $O(h_x^3 h_y^3)$.

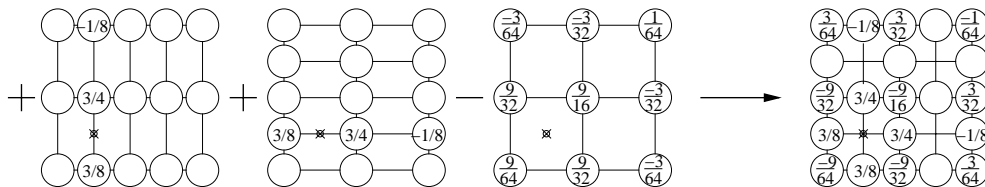


Abb. 4.12: Berechnung des Interpolationssterns im Gitter mit $s = 1$ für die quadratische Interpolation

Die Interpolation mit quadratischer Ordnung wird später eingesetzt bei Kombinationsrechnungen in der Strömungssimulation. Mit Hilfe der hier beschriebenen Taylorreihenentwicklungen und Interpolationssterne lassen sich dann Schätzungen des L_2 -Interpolationsfehlers für Lösungen auf den verschiedenen Kombinationsgittern angeben.

Kapitel 5

Strömungssimulation und Kombinationstechnik mit versetzten Gittern

5.1 Strömungsmechanische Grundgleichungen

In der Kontinuumsmechanik werden Grundgleichungen als Bilanzgesetze für Masse und Impuls formuliert [27, 19, 25]. Diese Grundgleichungen lassen sich auf Strömungen von Fluiden anwenden. Fluide unterscheiden sich durch ihre speziellen Materialeigenschaften, die durch zusätzliche Materialgleichungen ausgedrückt werden. Für Newtonsche Fluide läßt sich eine direkte Beziehung für den in den Grundgleichungen vorkommenden Spannungstensor zum Geschwindigkeitsfeld angeben. Die Bilanzgleichungen für Masse und Impuls ausgeschrieben für Newtonsche Fluide ergeben die Navier-Stokes-Gleichungen. Für inkompressible Newtonsche Fluide, die eine homogene Dichte und eine konstante dynamische Viskosität besitzen, lauten die Navier-Stokes-Gleichungen in koordinatenunabhängiger Schreibweise:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \frac{\mu}{\rho} \Delta \vec{u} + \vec{g} \quad (5.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (5.2)$$

Dabei beschreibt $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$ das gesuchte Geschwindigkeitsfeld der Strömung, $p = p(\vec{x}, t)$ das gesuchte Druckfeld. ρ ist die Dichte und μ die dynamische Viskosität des Fluids. \vec{g} ist eine durch Volumenkräfte (z.B. Gravitationskraft) hervorgerufene Beschleunigung. Die aus der Impulsbilanz hervorgehenden Gleichungen (5.1) heißen *Impulsleichungen*, die aus der Massenbilanz hervorgehende Gleichung (5.2) heißt *Massenbilanzgleichung*.

chung (5.2) heißt *Kontinuitätsgleichung*. Zusammen bilden sie ein nichtlineares System gekoppelter partieller Differentialgleichungen.

Ein Gleichungssystem für dimensionslose Größen erhält man durch Einführung von skalaren Konstanten $L, u_\infty, p_\infty, \rho_\infty$. Die dimensionslosen Größen $\vec{x}^*, t^*, \vec{u}^*, p^*$ werden definiert durch die Beziehungen:

$$\vec{x}^* := \frac{\vec{x}}{L}, \quad t^* := \frac{u_\infty t}{L}, \quad \vec{u}^* := \frac{\vec{u}}{u_\infty}, \quad p^* := \frac{p - p_\infty}{\rho u_\infty^2} \quad (5.3)$$

Mit Einführung der Reynoldszahl Re und der dimensionslosen Volumenkraft \vec{g}^* ,

$$Re := \frac{\rho u_\infty L}{\mu}, \quad \vec{g}^* := \frac{L \vec{g}}{u_\infty^2}, \quad (5.4)$$

kann man die Navier-Stokes-Gleichungen (5.1), (5.2) folgendermaßen schreiben:

$$\frac{\partial \vec{u}^*}{\partial t^*} + (\vec{u}^* \cdot \nabla^*) \vec{u}^* + \nabla^* p^* = \frac{1}{Re} \Delta^* \vec{u}^* + \vec{g}^* \quad (5.5)$$

$$\nabla^* \cdot \vec{u}^* = 0 \quad (5.6)$$

Die Operatoren ∇^* und Δ^* beziehen sich dabei auf die dimensionslosen Größen. Die Gleichungen (5.5) und (5.6) sind die Gleichungen, die mit dem später eingesetzten Strömungslöser *Nast++* gelöst werden.

5.2 Diskretisierung

Die Diskretisierung beschreibt den Übergang von einem kontinuierlichen zu einem an nur endlich vielen Punkten gegebenen Problem. Differentialgleichungen oder auch Systeme gekoppelter Differentialgleichungen werden dabei in ein algebraisches Gleichungssystem überführt, das mit einem Rechner gelöst werden kann. Dieses Vorgehen wird auch für die numerische Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen verwendet. Der Strömungslöser *Nast++* diskretisiert mit dem Verfahren der *Finiten Differenzen*. Dazu wird zunächst über das Berechnungsgebiet ein Gitter gelegt. Die kontinuierlichen Differentialoperatoren in den Gleichungen werden in diskrete Differenzenoperatoren überführt, die die Funktionswerte an den diskreten Gitterpunkten miteinander verknüpfen. Dies kann durch zentrale Differenzen oder einseitige upwind-Differenzen geschehen oder einer Mittelung aus beiden, um Stabilitätsprobleme zu vermeiden.

Die mit den Navier-Stokes-Gleichungen zu berechnenden Variablen \vec{u} und p müssen auf dem Berechnungsgitter nicht alle an denselben Gitterpunkten liegen. Im Strömungslöser *Nast++* wird ein *versetztes Gitter* benutzt, das sich folgendermaßen zusammensetzt: Das zweidimensionale rechteckige bzw. dreidimensionale

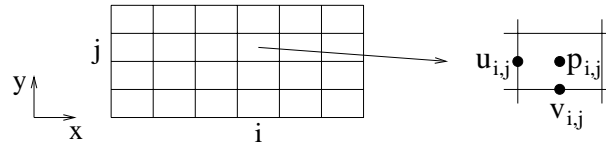


Abb. 5.1: Gitter über dem Berechnungsgebiet (links) und Anordnung der Variablen im Kontrollvolumen (i, j) des zweidimensionalen versetzten Gitters (rechts)

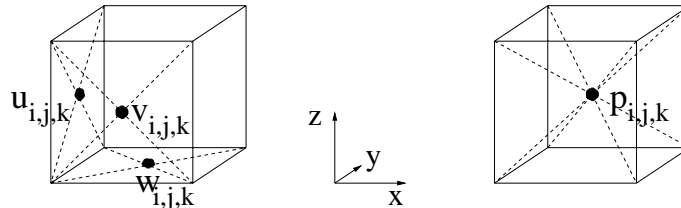


Abb. 5.2: Anordnung der Variablen im Kontrollvolumen (i, j, k) eines dreidimensionalen versetzten Gitters

quaderförmige Berechnungsgebiet wird mit einem orthogonalen Gitter überzogen. Dadurch wird das gesamte Gebiet in einzelne *Kontrollvolumen* zerlegt. Bezeichnet man die einzelnen Komponenten des Geschwindigkeitsvektors \vec{u} im Zweidimensionalen mit u, v und im Dreidimensionalen mit u, v, w , so liegen die einzelnen Geschwindigkeitswerte im versetzten Gitter in Abhängigkeit von der Raumrichtung an den Mittelpunkten der Kontrollvolumenoberflächen und der Druck p am Mittelpunkt des Kontrollvolumens. In Abbildung 5.1 ist die Anordnung der Variablen in einem Kontrollvolumen eines zweidimensionalen versetzten Gitters dargestellt: Die Geschwindigkeit $u_{i,j}$, die dem Kontrollvolumen (i, j) zugeordnet ist, ist ein diskreter Geschwindigkeitswert in x -Richtung, $v_{i,j}$ der Geschwindigkeitswert in y -Richtung. Abbildung (5.2) zeigt die Anordnung der Variablen in einem Kontrollvolumen (i, j, k) eines dreidimensionalen versetzten Gitters. In Abbildung 5.3 ist die räumliche Lage und die Orientierung aller Geschwindigkeiten im Berechnungsgebiet und auf dem Gebietsrand eines zweidimensionalen versetzten Gitters dargestellt.

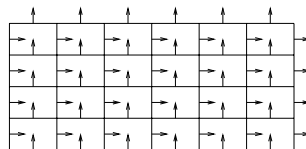


Abb. 5.3: Anordnung der Geschwindigkeiten im zweidimensionalen versetzten Gitter

5.3 Kombinationstechnik bei versetzten Gittern

Man kann leicht die Problematik erkennen, die auftritt, wenn mit versetzten Gittern eine Kombinationsrechnung durchgeführt wird: Das Gitter in Abbildung 5.3 sei das volle Gitter, auf dem eine Berechnung gemacht wird. Soll eine Kombinationslösung mit Ausdünnungsparameter $s = 1$ für dieses Gitter berechnet werden, so ergibt sie sich als Linearkombination der Lösungen auf ausgedünnten, groben Gittern, wie sie in Abbildung 5.4 dargestellt sind.

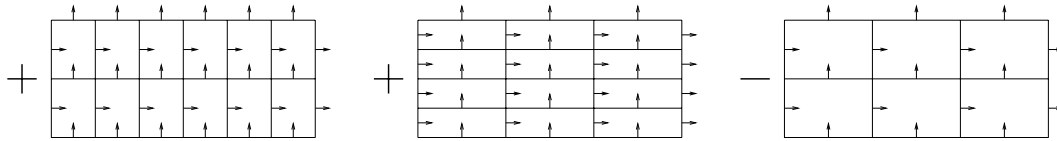


Abb. 5.4: Grobe Gitter zur Bildung einer Kombinationslösung

Es ist zu erkennen, daß die Lage der Datenwerte auf den groben Gittern bis auf einige Ausnahmen nicht mit der Lage der Datenwerte auf dem Vollgitter übereinstimmt. Möchte man die Datenwerte auf ein Kombinationsgitter transferieren und an einer Darstellung in Punkten festhalten, so ist nicht klar, an welchen Punkten in einem Kombinationsgitter bei der Bildung einer Kombinationslösung eigentlich die Datenwerte liegen sollen. Betrachtet man für das Beispiel in Abbildung 5.4 wie in Abschnitt 4.5.1 wieder nur einen repräsentativen Gitterausschnitt und nur die Geschwindigkeitskomponente in einer Raumrichtung, so sind in Abbildung 5.5 denkbare Anordnungen der Variablen auf dem Kombinationsgitter skizziert.

Für die Beurteilung der Qualität einer Kombinationslösung ist der direkte Vergleich mit einer Vollgitterlösung erforderlich. Es ist daher nicht notwendig, die einzelnen Grobgitterlösungen zunächst auf ein irgendwie definiertes Kombinationsgitter zu transferieren und danach die gebildete Kombinationslösung auf das Vollgitter zu interpolieren, um die Kombinationslösung mit der Vollgitterlösung vergleichen zu können. Man kann direkt den Transfer der Datenwerte der einzelnen Grobgitter auf die Datenpunkte des Vollgitters durchführen und an den

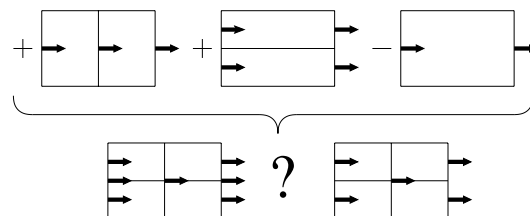


Abb. 5.5: Mögliche Anordnungen der Variablen auf dem Kombinationsgitter

Vollgitterpunkten die Linearkombination nach der Kombinationsformel bilden. Für den Transfer der einzelnen Grobgitterlösungen auf die Vollgitterpunkte sind spezielle Interpolationsmethoden notwendig, die später erklärt werden. Wenn im folgenden von Gitterpunkten oder Datenpunkten im Zusammenhang mit versetzten Gittern gesprochen wird, beziehen sich die Aussagen in Abhängigkeit der jeweiligen Variable auf die entsprechenden unterschiedlichen Punkte im versetzten Gitter.

Ebenso ist eine Technik zum Transfer der Datenwerte von jedem groben Gitter auf jedes andere grobe Gitter notwendig, wenn man eine Kombinationsrechnung für zeitabhängige Probleme durchführt. Im nächsten Abschnitt wird daher zunächst erläutert, wie die Kombinationstechnik bei zeitabhängigen Problemen in der Strömungssimulation eingesetzt werden kann. Anschließend werden geeignete Interpolationsoperatoren für den Transfer von Daten zwischen den verschiedenen versetzten Gittern beschrieben.

5.4 Zeitabhängige Kombinationsrechnungen

In der numerischen Strömungssimulation geht man häufig folgendermaßen vor: Man benutzt zur Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen ein fertiges Programm, einen *Strömungslöser*. Ein Berechnungsgebiet wird mit einem genügend feinen Gitter überzogen und man legt die Randbedingungen für den Gebietsrand fest, eine Startbelegung für die zu berechnenden Feldgrößen sowie einige Parameter für die folgende Rechnung. Mit der Startbelegung wird der Strömungslöser gestartet und anschließend rechnet dieser je nach Problemfall bis zu einer stationären Lösung oder er produziert eine zeitabhängige Lösung, die er für vorher festgelegte Zeitpunkte ausgibt.

Die Vorgehensweise bei einer Kombinationsrechnung für ein zeitabhängiges Problem ist folgendermaßen: Man legt nach dem oben beschriebenen Vorgehen fest, wie man das Problem auf dem Vollgitter lösen würde. Auch eine geeignete Startbelegung für die Datenwerte bestimmt man dabei. Man wählt den Ausdünnungsparameter s für die folgende Kombinationsrechnung, der die Tiefe des Kombinationsgitters angibt. Durch diesen Ausdünnungsparameter werden alle groben Gitter festgelegt, die in die Kombinationslösung eingehen (s. Kapitel 3). Die Startbelegung für die Feldgrößen wird dann auf alle diese groben Gitter transferiert. Anschließend werden für jedes einzelne Grobgitter mit dem Strömungslöser ein oder mehrere Zeitschritte gerechnet und die Lösungen ausgegeben. Im *Kombinationsschritt* werden diese Lösungen kombiniert, das bedeutet, daß jede Grobgitterlösung auf jedes andere Grobgitter transferiert wird und dort an den jeweiligen Gitterpunkten die Linearkombination der Funktionswerte gebildet wird. Für einen Vergleich der Kombinationslösung mit einer Vollgitterlösung können

die Grobgitterlösungen auch auf die Datenpunkte des Vollgitters transferiert und dort eine Kombinationslösung gebildet werden. Anschließend startet man für alle Grobgitter den Strömungslöser erneut, wobei nun die Kombinationslösungen auf den Grobgittern als Startfelder verwendet werden. Nach einem oder mehreren Zeitschritten wiederholt sich das beschriebene Vorgehen. In Abbildung 5.6 ist das Prinzip der zeitabhängigen Kombinationsrechnung dargestellt. Die in der Graphik exemplarisch angegebenen Indizes entsprechen den Ausdünnungsindizes, die bei einer dreidimensionalen Kombinationsrechnung mit Ausdünnungsparameter $s = 1$ auftreten.

Die Lösung für ein stationäres Problem wird im später eingesetzten Strömungslöser *Nast++* dadurch berechnet, daß ausgehend von einem Startfeld eine zeitliche Entwicklung der Strömung bis zum sich einstellenden stationären Zustand berechnet wird. Dabei ist die Kombinationstechnik auf dieselbe Weise einsetzbar wie oben beschrieben. Die Häufigkeit der Kombinationen bis zum Erreichen des stationären Zustands hat dabei einen Einfluß auf die berechnete Kombinationslösung.

Bei der Anwendung der Kombinationstechnik auf die oben beschriebene Weise wird der Strömungslöser als *Black Box* verwendet. Es muß weder ein neues Löserprogramm für ein Dünnes Gitter entwickelt noch der vorhandene Löser verändert werden, weil die Programme für die Kombination der einzelnen Gitterlösungen unabhängig vom Strömungslöser arbeiten. Damit kann man die Dünngittereffizienz auf relativ einfache Weise erhalten.

Die eine Kombinationslösung beeinflussenden Parameter sind zum einen der Ausdünnungsparameter s sowie die Anzahl der zwischen zwei Kombinationen gerechneten Zeitschritte. Die Strömungsberechnungen für die verschiedenen groben Gitter zwischen zwei Kombinationsschritten können prinzipiell parallel ausgeführt werden. Allerdings sollte dabei ein Lastbalancierungsverfahren eingesetzt werden, weil die einzelnen groben Gitter unterschiedlich viele Gitterpunkte besitzen. Da mit größer werdendem Ausdünnungsparameter s die Gesamtanzahl an Gitterpunkten aller groben Gitter zusammengekommen schnell kleiner wird, kann auch eine sequentielle Abarbeitung der Strömungsberechnungen für die verschiedenen

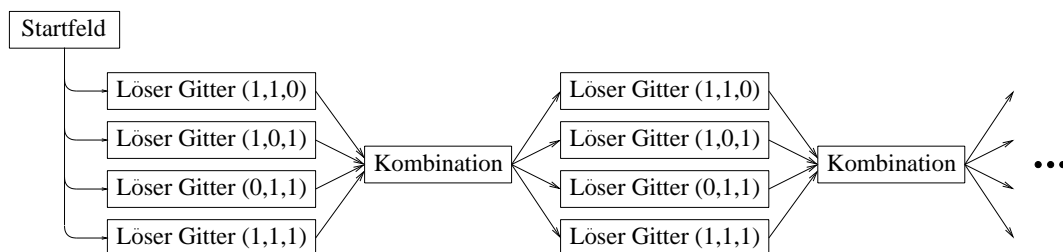


Abb. 5.6: Prinzip der zeitabhängigen Kombinationsrechnung

groben Gitter im Vergleich zur Berechnung auf dem vollen Gitter eine deutliche Laufzeitverkürzung bringen.

5.5 Transfer von Gitterlösungen

Wenn der Strömungslöser *Nast++* mit einem Startfeld gestartet wird, das nicht divergenzfrei ist, also in einzelnen Kontrollvolumen die diskrete Kontinuitätsgleichung verletzt ist, so wird im ersten Zeitschritt vom Löser ein neues Geschwindigkeitsfeld berechnet, das divergenzfrei ist. Allerdings sind in diesem Fall in der Regel sehr viele Iterationen im Löser notwendig, um ein Druckfeld iterativ zu bestimmen, so daß das damit neu berechnete Geschwindigkeitsfeld die Divergenzfreiheit erfüllt. Daher ist es bei einer Kombinationsrechnung wichtig, daß in jedem Kombinationsschritt beim Transfer der verschiedenen Grobgitterlösungen aufeinander die kombinierten Lösungen auf den verschiedenen Grobgittern divergenzfrei bleiben. Um dies zu gewährleisten, sind für den Transfer der Felder gewisse Techniken notwendig, die im folgenden beschrieben werden.

Im Spezialfall inkompressibler Fluide homogener Dichte lautet die kontinuierliche Kontinuitätsgleichung (5.2) $\nabla \cdot \vec{u} = 0$. Das Strömungsfeld ist also punktweise divergenzfrei. Der in dieser Arbeit benutzte Strömungslöser *Nast++* bestimmt für jeden neuen Zeitschritt ein Strömungsfeld, das die diskretisierte Kontinuitätsgleichung stets erfüllt. Mit der Wertebelegung nach Abbildung 5.7 bedeutet dies, daß für jedes Kontrollvolumen (i, j) in jedem Zeitschritt n folgende Gleichung gilt:

$$\frac{u_{i+1,j}^{(n)} - u_{i,j}^{(n)}}{\delta x} + \frac{v_{i,j+1}^{(n)} - v_{i,j}^{(n)}}{\delta y} = 0 \quad (5.7)$$

Direkt aus dieser Kontinuitätsgleichung ergibt sich durch Multiplikation mit der Dichte ρ und dem Faktor $\delta x \cdot \delta y$ eine Gleichung, in der als Summanden die einzelnen Flüsse über die Kontrollvolumenseiten stehen:

$$\rho u_{i+1,j}^{(n)} \delta y - \rho u_{i,j}^{(n)} \delta y + \rho v_{i,j+1}^{(n)} \delta x - \rho v_{i,j}^{(n)} \delta x = 0 \quad (5.8)$$

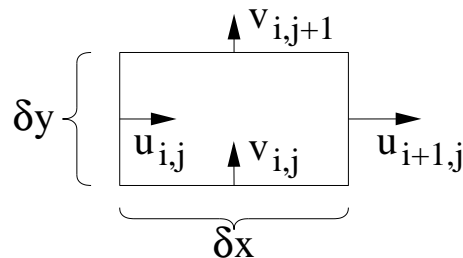


Abb. 5.7: Diskrete Geschwindigkeiten im Kontrollvolumen (i, j)

Bei Divergenzfreiheit verschwindet also der Gesamtfluß über die Kontrollvolumenseiten. Es ist offensichtlich, daß Flüsse und Geschwindigkeiten direkt ineinander umrechenbar sind und bei bekannter Gittergeometrie und Fluidichte denselben Informationsgehalt besitzen.

Die Kontinuitätsgleichung (5.2) mit einem Geschwindigkeitsfeld $\vec{u} = (u, v)$ im Zweidimensionalen bzw. $\vec{u} = (u, v, w)$ im Dreidimensionalen lautet ausgeschrieben für kartesische Koordinaten:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (5.9)$$

Sollen in einem Kombinationsschritt Datenwerte von einem groben Gitter auf Datenpunkte eines anderen groben Gitters transferiert werden, so muß man für die einzelnen Geschwindigkeitskomponenten u, v, w geeignete Interpolationsfunktionen wählen. Dabei bieten sich beispielsweise multivariate Polynome an. Aus der Kontinuitätsgleichung (5.9) erkennt man, daß sie nur durch Polynome erfüllt wird, bei denen der Interpolant für die u -Geschwindigkeit in x einen Grad höher ist als die Interpolanten der Geschwindigkeiten v und w , der Interpolant für die v -Geschwindigkeit in y einen Grad höher ist als die Interpolanten der Geschwindigkeiten u und w , und der Interpolant für die w -Geschwindigkeit in z einen Grad höher ist als die Interpolanten der Geschwindigkeiten u und v .

Beim Transfer von Datenwerten von einem Gitter auf ein anderes Gitter muß man mit einer Technik vorgehen, die die Divergenzfreiheit der kombinierten Lösung garantiert. Die in dieser Arbeit verwendete Technik wird im folgenden anhand eines zweidimensionalen Beispiels erläutert: Man betrachtet einen Gitterausschnitt aus einem Vollgitter sowie zwei Ausschnitte der groben Gitter, die aus dem Vollgitter durch Ausdünnung mit den Ausdünnungsindizes $(2, 0)$ und $(1, 2)$ entstehen. Diese groben Gitter kommen in einer Kombinationsrechnung mit Ausdünnungsparameter $s = 2$ vor (vgl. Tabelle 3.4). In Abbildung 5.8 sind die Gitterausschnitte gezeigt, zwischen denen die Geschwindigkeitswerte transferiert werden sollen.

Um die u -Geschwindigkeitswerte vom $(2, 0)$ -Gitter auf das $(1, 2)$ -Gitter zu transferieren, werden in einem ersten Schritt die u -Geschwindigkeiten in y -Richtung gemittelt. In dieser Richtung ist das $(2, 0)$ -Gitter feiner als das $(1, 2)$ -Gitter. Die Mittelung der Geschwindigkeiten entspricht der Aufsummierung der einzelnen Flüsse

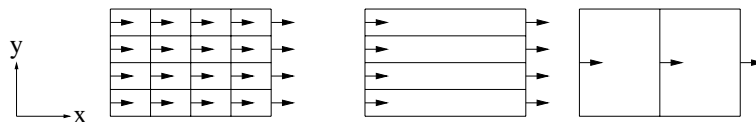


Abb. 5.8: Ausschnitte eines Vollgitters (links) sowie der Grobgitter mit Ausdünnungsindizes $(2, 0)$ und $(1, 2)$ (rechts) und die Datenpunkte der u -Geschwindigkeitskomponente

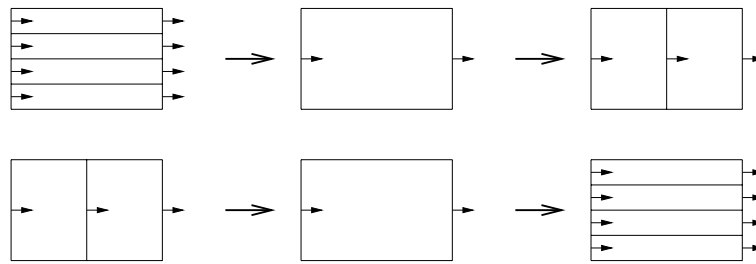


Abb. 5.9: Transfer der u -Geschwindigkeitswerte vom $(2, 0)$ -Gitter auf das $(1, 2)$ -Gitter (oben) und vom $(1, 2)$ -Gitter auf das $(2, 0)$ -Gitter (unten)

über die verschiedenen Kontrollvolumenseiten und anschließender Rückrechnung auf die Geschwindigkeit an der Kontrollvolumenseite des in dieser Raumrichtung größeren Gitters. In einem zweiten Schritt werden diese gemittelten Geschwindigkeiten auf die Datenpunkte des in x -Richtung feineren $(1, 2)$ -Gitters interpoliert, an denen nach der Mittelung noch kein Datenwert erhalten wurde. In Abbildung 5.9 (oben) ist dieser Transfer in den zwei Schritten schematisch dargestellt.

Der Transfer der u -Geschwindigkeitswerte vom $(1, 2)$ -Gitter auf das $(2, 0)$ -Gitter erfolgt ähnlich: In einem ersten Schritt wird das $(1, 2)$ -Gitter in der x -Richtung, in der es feiner ist als das Gitter $(2, 0)$, vergrößert. Dies geschieht durch einfaches Weglassen der entsprechenden Datenwerte. In einem zweiten Schritt werden die Geschwindigkeiten an den Kontrollvolumenseiten des in y -Richtung feineren $(2, 0)$ -Gitters durch Interpolation aus den Datenwerten des $(1, 2)$ -Gitters erhalten. In Abbildung 5.9 (unten) ist dieser Transfer skizziert.

Der polynomiale Interpolant der u -Geschwindigkeit muß nach dem oben Gesagten in x -Richtung eine Ordnung höher sein als in y -Richtung. Ein Interpolant, der in x -Richtung linear und in y -Richtung konstant ist, oder ein Interpolant, der in x -Richtung quadratisch und in y -Richtung linear ist, sind solche Funktionen. Diese beiden Möglichkeiten für die Wahl des Interpolanten werden später genauer untersucht. Dabei spricht man dann von *linear-konstanter* bzw. *quadratisch-linearer* Interpolation.

Im obigen Beispiel des Transfers zwischen dem $(2, 0)$ -Gitter und dem $(1, 2)$ -Gitter müssen im Fall der quadratisch-linearen Interpolation die Gitterausschnitte in jeder Raumrichtung doppelt so groß gewählt werden, um die u -Geschwindigkeit in der x -Richtung quadratisch und in der y -Richtung linear interpolieren zu können. Denn drei Punkte bestimmen eindeutig ein quadratisches Polynom und zwei Punkte ein lineares Polynom. Analog zur Abbildung 5.9 sind diese größeren Gitterausschnitte sowie das Vorgehen beim Transfer der Datenwerte in Abbildung 5.10 skizziert.

Beim Transfer eines groben Gitters auf ein anderes Gitter ist es eventuell auch nötig, daß im Zweidimensionalen in zwei Raumrichtungen oder im Dreidimensio-

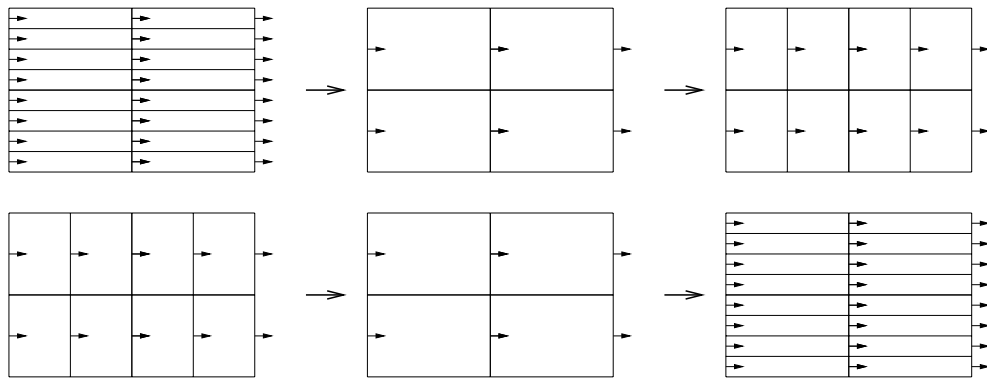


Abb. 5.10: Transfer der u -Geschwindigkeitswerte vom $(2,0)$ -Gitter auf das $(1,2)$ -Gitter (oben) und vom $(1,2)$ -Gitter auf das $(2,0)$ -Gitter (unten) für die quadratisch-lineare Interpolation

nalen in drei Raumrichtungen interpoliert werden muß. Im obigen Beispiel ist dies der Fall, wenn das $(1,2)$ -Gitter auf das Vollgitter (vgl. Abbildung 5.8) transferiert wird. Die nötigen Schritte setzen sich dabei zusammen aus der Interpolation in der einen und anschließend in der anderen Raumrichtung. Der andere Fall, daß ein Transfer nur durch Weglassen und Mittelung von Datenwerten geschieht, ist ebenso möglich. Im obigen Beispiel wäre dies der Fall, wenn eine Lösung auf dem Vollgitter auf das $(1,2)$ -Gitter transferiert werden sollte. In Abbildung 5.11 ist für diese Fälle die Vorgehensweise skizziert.

Linear-konstante Interpolation im Zweidimensionalen:

In Abbildung 5.12 wird ein Kontrollvolumen eines größeren Gitters mit den Geschwindigkeitswerten u_1, u_2, v_1, v_2 dargestellt, die auf die Geschwindigkeitswerte u'_1, u'_2, v'_1, v'_2 eines Kontrollvolumens eines feineren Gitters mit der linear-konstanten Interpolation transferiert werden sollen. Wenn die Geschwindigkeitswerte u_1, u_2, v_1, v_2 auf dem größeren Gitter eine berechnete Strömungslösung sind, erfüllen sie die diskrete Kontinuitätsgleichung (5.7). Diese schreibt sich folgen-

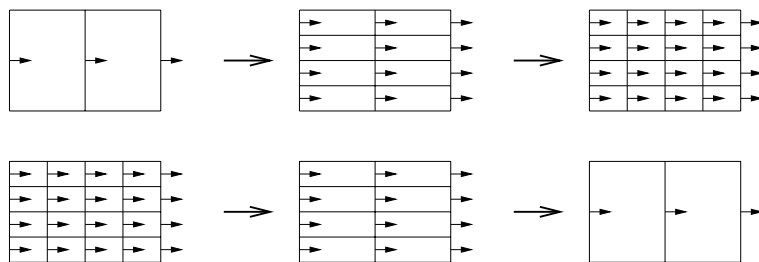


Abb. 5.11: Transfer der u -Geschwindigkeitswerte vom $(1,2)$ -Gitter auf das Vollgitter (oben) und vom Vollgitter auf das $(1,2)$ -Gitter (unten) für die linear-konstante Interpolation

dermaßen:

$$(u_2 - u_1)(y_2 - y_1) + (v_2 - v_1)(x_2 - x_1) = 0 \quad (5.10)$$

Die linear-konstanten Interpolanten $u^I(x, y)$ und $v^I(x, y)$ für die beiden Geschwindigkeitskomponenten lauten:

$$u^I(x, y) = \frac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + u_1 = \sum_{i=1}^2 u_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad (5.11)$$

$$v^I(x, y) = \frac{v_2 - v_1}{y_2 - y_1}(y - y_1) + v_1 = \sum_{i=1}^2 v_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 \frac{y - y_j}{y_i - y_j} \quad (5.12)$$

Durch die gewählten Interpolanten (5.11) und (5.12) wird sowohl die kontinuierliche Kombinationsgleichung (5.9) als auch die diskrete Kontinuitätsgleichung für das Kontrollvolumen des feinen Gitters erfüllt. Dies sieht man mit (5.10) folgendermaßen:

$$\begin{aligned} & (u'_2 - u'_1)(y'_2 - y'_1) + (v'_2 - v'_1)(x'_2 - x'_1) \\ = & \left(u^I\left(x'_2, \frac{y'_1 + y'_2}{2}\right) - u^I\left(x'_1, \frac{y'_1 + y'_2}{2}\right) \right) (y'_2 - y'_1) + \left(v^I\left(\frac{x'_1 + x'_2}{2}, y'_2\right) - v^I\left(\frac{x'_1 + x'_2}{2}, y'_1\right) \right) (x'_2 - x'_1) \\ = & \frac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1} (x'_2 - x'_1) (y'_2 - y'_1) + \frac{v_2 - v_1}{y_2 - y_1} (y'_2 - y'_1) (x'_2 - x'_1) \\ = & \left((u_2 - u_1)(y_2 - y_1) + (v_2 - v_1)(x_2 - x_1) \right) \frac{x'_2 - x'_1}{x_2 - x_1} \frac{y'_2 - y'_1}{y_2 - y_1} \\ = & 0 \end{aligned} \quad (5.13)$$

Damit ist gezeigt, daß mit der linear-konstanten Interpolation der Transfer von

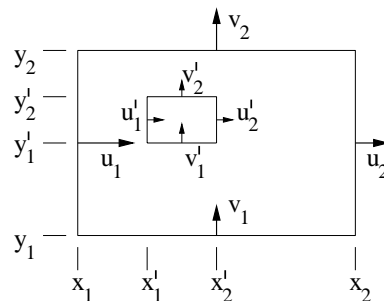


Abb. 5.12: Zur linear-konstanten Interpolation der Geschwindigkeitswerte u_1, u_2, v_1, v_2 eines größeren Gitters auf die Geschwindigkeitswerte u'_1, u'_2, v'_1, v'_2 eines Kontrollvolumens eines feineren Gitters

Geschwindigkeitswerten vom größeren auf ein feineres Gitter immer so geschieht, daß die Divergenzfreiheit beibehalten wird.

Quadratisch-lineare Interpolation im Zweidimensionalen:

In Abbildung 5.13 ist ein Gitterausschnitt gezeigt, der bei der quadratisch-linearen Interpolation zur Anwendung kommt, wenn man die Geschwindigkeitswerte von einem größeren Gitter auf ein feineres Gitter interpoliert. Wenn die Geschwindigkeitswerte $u_{i,j}, v_{i,j}$ des größeren Gitters eine Strömungslösung sind, erfüllen sie für jedes Kontrollvolumen die diskrete Kontinuitätsgleichung (5.7). Es gilt also:

$$\begin{aligned}
 (u_{2,1} - u_{1,1})(y_2 - y_1) + (v_{1,2} - v_{1,1})(x_2 - x_1) &= 0 \\
 (u_{3,1} - u_{2,1})(y_2 - y_1) + (v_{2,2} - v_{2,1})(x_3 - x_2) &= 0 \\
 (u_{2,2} - u_{1,2})(y_3 - y_2) + (v_{1,3} - v_{1,2})(x_2 - x_1) &= 0 \\
 (u_{3,2} - u_{2,2})(y_3 - y_2) + (v_{2,3} - v_{2,2})(x_3 - x_2) &= 0
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

Die Interpolationspolynome u^I und v^I für die beiden Geschwindigkeitskomponenten sind bei der quadratisch-linearen Interpolation ein Produkt eines quadratischen Polynoms in der einen und eines linearen Polynoms in der anderen Raumrichtung. Die Interpolationspolynome lauten:

$$u^I(x, y) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 u_{i,j} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^3 \frac{x - x_k}{x_i - x_k} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^2 \frac{y - \frac{y_l + y_{l+1}}{2}}{\frac{y_j + y_{j+1}}{2} - \frac{y_l + y_{l+1}}{2}} \tag{5.15}$$

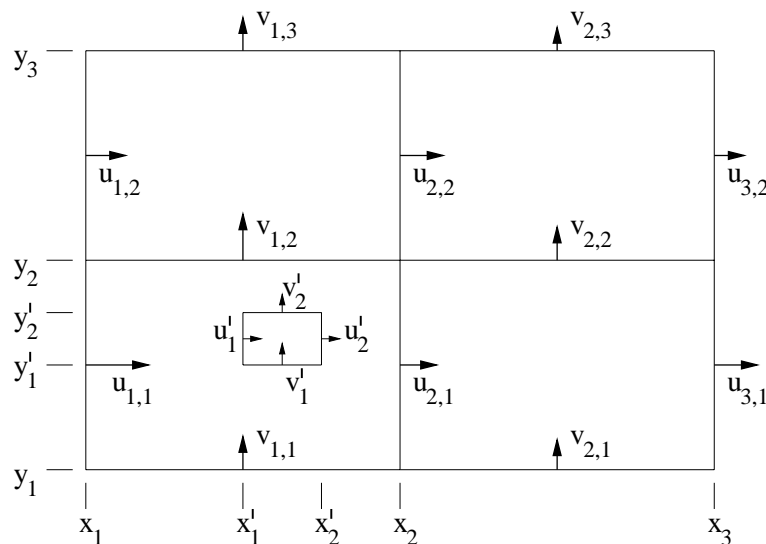


Abb. 5.13: Zur quadratisch-linearen Interpolation der Geschwindigkeitswerte $u_{i,j}, v_{i,j}$ eines größeren Gitters auf die Geschwindigkeitswerte u'_1, u'_2, v'_1, v'_2 eines Kontrollvolumens eines feineren Gitters

$$v^I(x, y) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 v_{i,j} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^2 \frac{x - \frac{x_k + x_{k+1}}{2}}{\frac{x_i + x_{i+1}}{2} - \frac{x_k + x_{k+1}}{2}} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^3 \frac{y - y_l}{y_j - y_l} \quad (5.16)$$

Der durch (5.15) und (5.16) definierte quadratisch-lineare Interpolant des Geschwindigkeitsfeldes erfüllt mit den Bedingungen (5.14) die kontinuierliche Kontinuitätsgleichung (5.9). Ebenso erfüllt der quadratisch-lineare Interpolant auch die diskrete Form der Kontinuitätsgleichung. Analog zu (5.13) kann man dies mit der Notation gemäß Abbildung 5.13 und den Bedingungen (5.14) zeigen:

$$\begin{aligned} & (u'_2 - u'_1)(y'_2 - y'_1) + (v'_2 - v'_1)(x'_2 - x'_1) \\ = & \left(u^I(x'_2, \frac{y'_1 + y'_2}{2}) - u^I(x'_1, \frac{y'_1 + y'_2}{2}) \right) (y'_2 - y'_1) \\ & + \left(v^I(\frac{x'_1 + x'_2}{2}, y'_2) - v^I(\frac{x'_1 + x'_2}{2}, y'_1) \right) (x'_2 - x'_1) \\ = & \dots \\ = & 0 \end{aligned} \quad (5.17)$$

Linear-konstante Interpolation im Dreidimensionalen:

Im Dreidimensionalen müssen die Interpolationspolynome (5.11) und (5.12) für die dritte Raumrichtung erweitert und noch das Interpolationspolynom für die dritte Geschwindigkeitskomponente w angegeben werden:

$$u^I(x, y, z) = \sum_{i=1}^2 u_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad (5.18)$$

$$v^I(x, y, z) = \sum_{i=1}^2 v_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 \frac{y - y_j}{y_i - y_j} \quad (5.19)$$

$$w^I(x, y, z) = \sum_{i=1}^2 w_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 \frac{z - z_j}{z_i - z_j} \quad (5.20)$$

Es wird also jede der drei Geschwindigkeitskomponenten in jeweils einer Raumrichtung linear und in den anderen beiden konstant interpoliert.

Ganz analog zum zweidimensionalen Fall kann man zeigen, daß die so definierten Interpolationspolynome bei der Interpolation von einem gröberen Gitter auf ein feineres Gitter sowohl die kontinuierliche als auch die diskrete Kontinuitätsgleichung erfüllen.

Quadratisch-lineare Interpolation im Dreidimensionalen:

Eine Erweiterung der Interpolationspolynome (5.15) und (5.16) für die dritte Dimension ergibt:

$$u^I(x, y, z) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 u_{i,j,k} \cdot \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^3 \frac{x - x_l}{x_i - x_l} \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^2 \frac{y - \frac{y_m + y_{m+1}}{2}}{\frac{y_j + y_{j+1}}{2} - \frac{y_m + y_{m+1}}{2}} \prod_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^2 \frac{z - \frac{z_n + z_{n+1}}{2}}{\frac{z_k + z_{k+1}}{2} - \frac{z_n + z_{n+1}}{2}} \quad (5.21)$$

$$v^I(x, y, z) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^2 v_{i,j,k} \cdot \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^2 \frac{x - \frac{x_l + x_{l+1}}{2}}{\frac{x_i + x_{i+1}}{2} - \frac{x_l + x_{l+1}}{2}} \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^3 \frac{y - y_m}{y_j - y_m} \prod_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^2 \frac{z - \frac{z_n + z_{n+1}}{2}}{\frac{z_k + z_{k+1}}{2} - \frac{z_n + z_{n+1}}{2}} \quad (5.22)$$

$$w^I(x, y, z) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^3 w_{i,j,k} \cdot \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^2 \frac{x - \frac{x_l + x_{l+1}}{2}}{\frac{x_i + x_{i+1}}{2} - \frac{x_l + x_{l+1}}{2}} \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^2 \frac{y - \frac{y_m + y_{m+1}}{2}}{\frac{y_j + y_{j+1}}{2} - \frac{y_m + y_{m+1}}{2}} \prod_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^3 \frac{z - z_n}{z_k - z_n} \quad (5.23)$$

Jede der drei Geschwindigkeitskomponenten wird in jeweils einer Raumrichtung quadratisch und in den anderen beiden linear interpoliert. Analog zu oben kann man zeigen, daß auch diese Interpolationspolynome bei der Interpolation von einem größeren Gitter auf ein feineres Gitter sowohl die kontinuierliche als auch die diskrete Kontinuitätsgleichung erfüllen.

Zusammenfassung:

In diesem Abschnitt wurde gezeigt, wie man beim Transfer von Gitterlösungen von einem Gitter auf ein anderes Gitter vorgeht: Zunächst werden gegebenenfalls Kontrollvolumen zusammengefaßt, wobei der Gesamtfluß über die Oberfläche der zusammengefaßten Kontrollvolumen erhalten bleibt. Mit Hilfe der linear-konstanten oder quadratisch-linearen Interpolationspolynome werden gegebenenfalls anschließend die Geschwindigkeiten von dem größeren Gitter auf das feinere Gitter interpoliert. Das so erhaltene Geschwindigkeitsfeld ist divergenzfrei. Wenn in einem Kombinationsschritt alle Lösungen auf den groben Gittern auf alle anderen groben Gitter gemäß der linear-konstanten oder quadratisch-linearen Interpolation transferiert werden und die transferierten Lösungen als Linearkombination kombiniert werden, bleiben die kombinierten diskreten Geschwindigkeitsfelder auf allen Gittern divergenzfrei. Die Bildung der Kombinationslösung auf dem Vollgitter ist ganz analog möglich, indem die Lösungen auf allen groben Gittern auf das

Vollgitter transferiert werden und dort gemäß der Kombinationsformel als Linearkombination kombiniert werden. Diese Kombinationslösung auf dem Vollgitter ist dann ebenfalls divergenzfrei.

Eine entsprechende Interpolation höherer Ordnung als die quadratisch-lineare, also beispielsweise eine kubisch-quadratische Interpolation, führt beim Transfer nach dem obigen Schema nicht mehr auf ein divergenzfreies Geschwindigkeitsfeld. Dies kann man analog zur obigen Vorgehensweise ausrechnen.

5.6 Transfer von Flußwerten

Die linear-konstante bzw. quadratisch-lineare Interpolation ermöglicht den Transfer von diskreten Geschwindigkeitsfeldern zwischen verschiedenen versetzten Gittern, wobei die Divergenzfreiheit des Feldes beibehalten wird. Die Interpolanten werden dabei in Abhängigkeit der jeweiligen Geschwindigkeitskomponente gebildet als Produkte von linearen und konstanten bzw. quadratischen und linearen Polynomen. Bei einer konkreten Implementierung des Transfers ist es somit notwendig, den Interpolanten jeder Geschwindigkeitskomponente entsprechend der Raumrichtung unterschiedlich zu behandeln.

Eine Vereinfachung für den Transfer ergibt sich, wenn man nicht mehr die Geschwindigkeitswerte an ihren entsprechenden Datenpunkten im versetzten Gitter nutzt sondern die aus den Geschwindigkeiten berechneten Flüsse. Dieses Vorgehen soll im folgenden genauer erklärt werden: Zunächst integriert man jede Geschwindigkeitskomponente über die zu ihrer Raumorientierung orthogonal stehende und durch die einzelnen Kontrollvolumenoberflächen gebildete Ebene im Gitter. Die Kontrollvolumenoberflächen und Gitterebenen sind im Zweidimensionalen einfache Linien, im Dreidimensionalen sind es zweidimensionale Flächen. Im Zweidimensionalen entspricht die Integration des diskreten Geschwindigkeitsfeldes einer Multiplikation der einzelnen Geschwindigkeitswerte mit der Größe der jeweiligen Kontrollvolumenoberfläche sowie einer anschließenden Aufsummierung von einem Gebietsrand zum anderen. Im Dreidimensionalen erfolgt die Integration über zwei Dimensionen: Zuerst werden ebenfalls die Geschwindigkeitswerte mit der Größe der jeweiligen Kontrollvolumenoberfläche multipliziert. Anschließend werden die so gebildeten Größen zunächst in der einen, dann in der anderen Raumrichtung aufsummiert. Die über die Flächen integrierten Geschwindigkeiten werden im folgenden immer als *Flüsse* bezeichnet, auch wenn die Multiplikation mit der Fluidichte unterlassen wurde. Dies ist möglich, weil die in dieser Arbeit betrachteten Probleme alle eine konstante Dichte besitzen, so daß es sich bei der Multiplikation mit der Dichte nur um einen konstanten Faktor handelt, der bei einer späteren Rückrechnung auf die interessierenden Geschwindigkeitswerte wieder herausfällt.

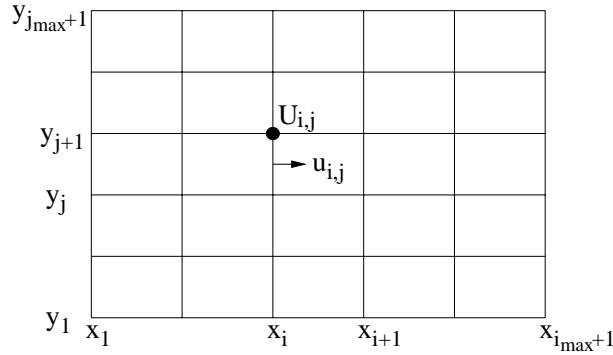


Abb. 5.14: Zweidimensionales Gitter mit $i_{\max} \times j_{\max}$ Kontrollvolumen sowie Lage des u -Geschwindigkeitswerts und des U -Flußwerts im Kontrollvolumen (i, j)

Für den zwei- und dreidimensionalen Fall werden im folgenden die Rechnungen für die Integration der Geschwindigkeitswerte explizit beschrieben: In Abbildung 5.14 ist die Anordnung der u -Geschwindigkeit und des U -Flußwerts in einem Kontrollvolumen (i, j) eines zweidimensionalen Gitters mit insgesamt $i_{\max} \times j_{\max}$ Kontrollvolumen schematisch dargestellt. Auf dem Gitter existieren die diskreten u -Geschwindigkeitswerte $u_{i,j}$ mit $i = 1, \dots, i_{\max} + 1$, $j = 1, \dots, j_{\max}$. Die Flußwerte U ergeben sich als integrierte Geschwindigkeitswerte und berechnen sich folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
 U_{i,0} &:= 0 && \text{für } i = 1, \dots, i_{\max} + 1 \\
 U_{i,j} &:= U_{i,j-1} + u_{i,j} \cdot (y_{j+1} - y_j) \\
 &= \sum_{j'=1}^j u_{i,j'} \cdot (y_{j'+1} - y_{j'}) && \text{für } i = 1, \dots, i_{\max} + 1, \quad j = 1, \dots, j_{\max}
 \end{aligned} \tag{5.24}$$

Die Größe $U_{i,j}$ bezeichnet den Gesamtfluß durch die durch die Punkte (x_i, y_1) und (x_i, y_{j+1}) begrenzte Fläche. Der Flußwert $U_{i,j}$ liegt räumlich also am Gitterpunkt (x_i, y_{j+1}) .

Die Berechnung der Geschwindigkeiten aus den Flußwerten geschieht durch Umkehrung der Integration:

$$u_{i,j} = \frac{U_{i,j} - U_{i,j-1}}{y_{j+1} - y_j} \quad \text{für } i = 1, \dots, i_{\max} + 1, \quad j = 1, \dots, j_{\max} \tag{5.25}$$

Im Dreidimensionalen berechnen sich die Flußwerte U mit der Anordnung der Variablen gemäß Abbildung 5.15 in einem Gitter mit $i_{\max} \times j_{\max} \times k_{\max}$ Kontrollvolumen durch Aufsummierung der einzelnen Flüsse durch die jeweiligen Kontrollvolumenoberflächen über zwei Dimensionen:

$$U_{i,0,k} := 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, i_{\max} + 1, \quad k = 1, \dots, k_{\max}$$

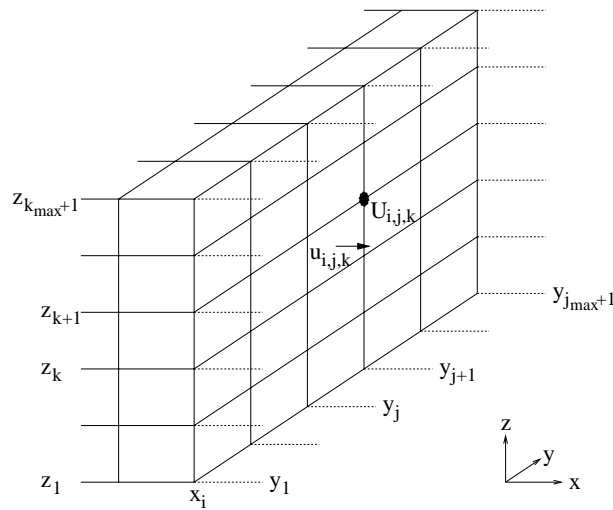


Abb. 5.15: Ebene im dreidimensionalen Gitter mit $i_{\max} \times j_{\max} \times k_{\max}$ Kontrollvolumen sowie Lage des u -Geschwindigkeitswerts und des U -Flußwerts im Kontrollvolumen (i, j, k)

$$\begin{aligned}
 U_{i,j,0} &:= 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, i_{\max} + 1, \quad j = 1, \dots, j_{\max} \\
 U_{i,j,k} &:= \sum_{k'=1}^k \sum_{j'=1}^j u_{i,j',k'} \cdot (y_{j'+1} - y_{j'}) \cdot (z_{k'+1} - z_{k'}) \\
 &\quad \text{für } i = 1, \dots, i_{\max} + 1, \quad j = 1, \dots, j_{\max}, \quad k = 1, \dots, k_{\max}
 \end{aligned} \tag{5.26}$$

Die Größe $U_{i,j,k}$ gibt somit den Gesamtfluß an der Koordinate x_i durch die Fläche mit den Eckpunkten (x_i, y_1, z_1) , (x_i, y_{j+1}, z_1) , (x_i, y_1, z_{k+1}) , (x_i, y_{j+1}, z_{k+1}) an. Der Flußwert $U_{i,j,k}$ liegt räumlich am Gitterpunkt (x_i, y_{j+1}, z_{k+1}) .

Die Berechnung der Geschwindigkeiten aus den Flußwerten geschieht wiederum durch Umkehrung der Integration:

$$\begin{aligned}
 u_{i,j,k} &= \frac{U_{i,j,k} - U_{i,j-1,k} - U_{i,j,k-1} + U_{i,j-1,k-1}}{(y_{j+1} - y_j)(z_{k+1} - z_k)} \\
 &\quad \text{für } i = 1, \dots, i_{\max} + 1, \quad j = 1, \dots, j_{\max}, \quad k = 1, \dots, k_{\max}
 \end{aligned} \tag{5.27}$$

Ganz analog werden die v -Geschwindigkeiten über die x - z -Ebenen zu Flußwerten V und die w -Geschwindigkeiten über die x - y -Ebenen zu Flußwerten W integriert. Alle Flußwerte liegen an den Knoten des Gitters und nicht an den Datenpunkten der Geschwindigkeitswerte im versetzten Gitter. Dies ist in Abbildung 5.16 für den zweidimensionalen Fall schematisch dargestellt.

Bei der von *Nast++* verwendeten Numerierung der Variablen in den einzelnen Kontrollvolumen (i, j) bzw. (i, j, k) gemäß der Abbildungen 5.14 und 5.15 lie-

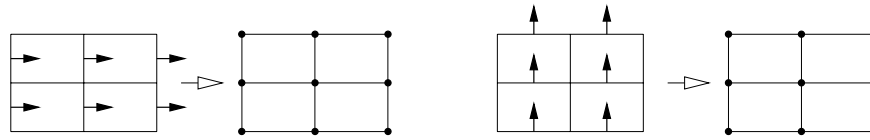


Abb. 5.16: Anordnung der u -Geschwindigkeiten und der U -Flußwerte (links) sowie der v -Geschwindigkeiten und der V -Flußwerte (rechts) in einem zweidimensionalen Gitter

gen die Werte $U_{i,j}$ und $V_{i,j}$ im zweidimensionalen Gitter bzw. $U_{i,j,k}$, $V_{i,j,k}$ und $W_{i,j,k}$ im dreidimensionalen Gitter jeweils an unterschiedlichen Knoten des Gitters. Das muß bei der Implementierung der Transferrountinen durch geeignete Indexrechnung beachtet werden.

Ein Vorteil der Darstellung mit den Flußwerten besteht darin, daß beim Transfer von Lösungen, die auf verschiedenen Gittern gegeben sind, ein Teil der Flußwerte an räumlich gleichen Punkten liegen. Die Kombination dieser Flußwerte ist somit wie im Kapitel 3 beschrieben möglich. In Abbildung 5.17 wird dies für einen Gitterausschnitt bei einer Kombinationsrechnung mit Ausdünnungsparameter $s = 1$ skizziert.

Ein weiterer Vorteil der Rechnung mit den Flußwerten besteht darin, daß die beim Transfer zwischen verschiedenen Gittern benutzte linear-konstante Interpolation der Geschwindigkeitswerte zu einer rein multilineareren Interpolation der Flußwerte sowie die quadratisch-lineare Interpolation zu einer rein multiquadratischen Interpolation wird. Daß dies so ist, wird zunächst an einem eindimensionalen Beispiel genauer erläutert: Bei der linear-konstanten Interpolation der u -Geschwindigkeitswerte werden diese in der y -Richtung konstant interpoliert. Diese konstante Interpolation kann auch durch eine lineare Interpolation der U -Flußwerte und anschließender Differentiation, also der Rückrechnung der Flußwerte auf die Geschwindigkeitswerte erreicht werden. Zur Veranschaulichung dient Abbildung 5.18: An einer Seite eines Kontrollvolumens wird seine Oberfläche durch die Punkte y_j und y_{j+1} begrenzt. In der Mitte der Kontrollvolumenoberfläche liegt die u -Geschwindigkeit u_j . Wird die u -Geschwindigkeit ent-

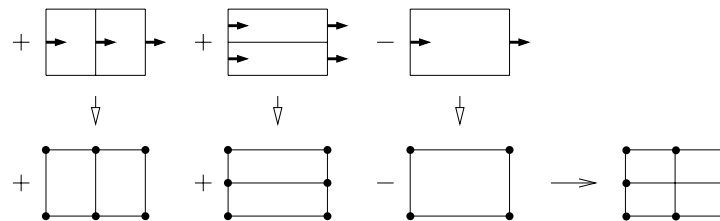


Abb. 5.17: Integration der u -Geschwindigkeiten auf die U -Flußwerte und Bildung einer Kombinationslösung mit den Flußwerten

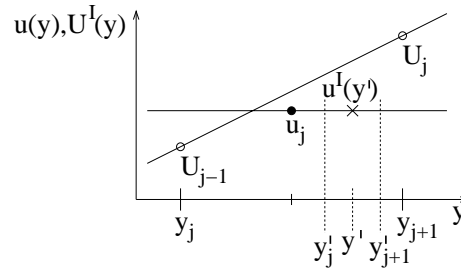


Abb. 5.18: Konstante Interpolation der u -Geschwindigkeit durch lineare Interpolation der U -Flußwerte

lang der y -Richtung integriert, so wird am linken Rand des Kontrollvolumens der Flußwert U_{j-1} gespeichert, der den Gesamtfluß in x -Richtung zwischen dem Gebietsrand an der Stelle y_1 und dem Punkt y_j angibt. Der Flußwert U_j am rechten Kontrollvolumenrand y_{j+1} ergibt sich durch die beschriebene Integration der u -Geschwindigkeit:

$$U_j := U_{j-1} + u_j \cdot (y_{j+1} - y_j)$$

Der lineare Interpolant U^I der U -Flußwerte lautet für das betreffende Kontrollvolumen:

$$U^I(y) := \frac{U_j - U_{j-1}}{y_{j+1} - y_j} \cdot (y - y_j) + U_{j-1}$$

Berechnet werden soll nun ein interpolierter Geschwindigkeitswert $u^I(y')$, der im Mittelpunkt eines Kontrollvolumens liegt, das in y -Richtung durch die Punkte y'_j und y'_{j+1} begrenzt wird. Bei der linear-konstanten Interpolation der Geschwindigkeitswerte würde dieser durch konstante Interpolation des Geschwindigkeitswerts u_j erhalten werden, also $u^I(y') = u_j$. Durch lineare Interpolation der Flußwerte U_{j-1} und U_j auf die Punkte y'_j und y'_{j+1} sowie anschließender Umkehrung der Integration ergibt sich das gleiche Ergebnis:

$$u^I(y') = \frac{U^I(y'_{j+1}) - U^I(y'_j)}{y'_{j+1} - y'_j} = u_j$$

In Abbildung 5.19 ist dasselbe Problem für die quadratisch-lineare Interpolation skizziert: Aus den Geschwindigkeitswerten u_j und u_{j+1} sowie dem Flußwert U_{j-1} berechnen sich die Flußwerte U_j und U_{j+1} . Mit diesen lautet der quadratische Interpolant $U^I(y)$:

$$\begin{aligned} U^I(y) &:= U_{j-1} \frac{y - y_{j+1}}{y_j - y_{j+1}} \frac{y - y_{j+2}}{y_j - y_{j+2}} \\ &+ U_j \frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j} \frac{y - y_{j+2}}{y_{j+1} - y_{j+2}} \\ &+ U_{j+1} \frac{y - y_j}{y_{j+2} - y_j} \frac{y - y_{j+1}}{y_{j+2} - y_{j+1}} \end{aligned}$$

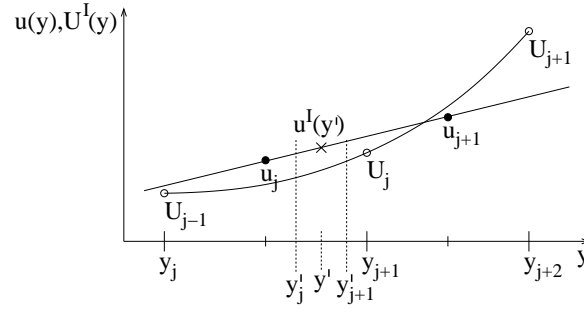


Abb. 5.19: Lineare Interpolation der u -Geschwindigkeit durch quadratische Interpolation der U -Flußwerte

Bei linearer Interpolation ergibt sich der interpolierte Geschwindigkeitswert $u^I(y')$ als linearer Interpolant aus den Geschwindigkeiten u_j und u_{j+1} :

$$u^I(y') = u_j \frac{y' - \frac{y_{j+1} + y_{j+2}}{2}}{\frac{y_j + y_{j+1}}{2} - \frac{y_{j+1} + y_{j+2}}{2}} + u_{j+1} \frac{y' - \frac{y_j + y_{j+1}}{2}}{\frac{y_{j+1} + y_{j+2}}{2} - \frac{y_j + y_{j+1}}{2}}$$

Den gleichen Wert $u^I(y')$ erhält man durch Berechnung des quadratischen Interpolanten $U^I(y)$ an den Punkten y'_j und y'_{j+1} sowie Umkehrung der Integration:

$$u^I(y') = \frac{U^I(y'_{j+1}) - U^I(y'_j)}{y'_{j+1} - y'_j}$$

Die lineare Interpolation der u -Geschwindigkeitswerte kann somit durch die quadratische Interpolation der U -Flußwerte ersetzt werden.

Was hier für die Interpolation in einer Dimension gezeigt wurde, läßt sich auch auf den zwei- und dreidimensionalen Fall erweitern: Im Zweidimensionalen wird die linear-konstante Interpolation der u -Geschwindigkeit in (5.11) zu einer multilineareren Interpolation der U -Flußwerte. Mit der Notation in Abbildung 5.20 (links) und der obigen Festlegung, daß der Flußwert $U_{i,j}$ am Gitterpunkt (x_i, y_{j+1}) liegt, lautet das Interpolationspolynom für die U -Flußwerte in einem Gitterausschnitt:

$$U^I(x, y) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 U_{i,j-1} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^2 \frac{x - x_k}{x_i - x_k} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^2 \frac{y - y_l}{y_j - y_l} \quad (5.28)$$

Die quadratisch-lineare Interpolation der u -Geschwindigkeiten in (5.15) wird mit der Notation in Abbildung 5.20 (rechts) zu einer multiquadratischen Interpolation der Flußwerte:

$$U^I(x, y) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 U_{i,j-1} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^3 \frac{x - x_k}{x_i - x_k} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^3 \frac{y - y_l}{y_j - y_l} \quad (5.29)$$

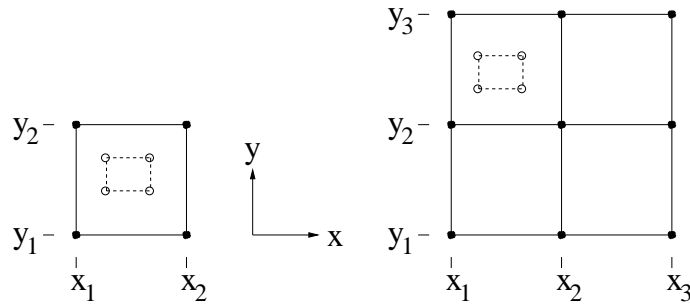


Abb. 5.20: Zur Interpolation der U -Flußwerte im Zweidimensionalen

Im Dreidimensionalen wird das Interpolationspolynom für die u -Geschwindigkeit in (5.18) zu einem multilinearen Interpolationspolynom für die U -Flußwerte. Mit der Notation in Abbildung 5.21 (links) und der obigen Festlegung, daß der Flußwert $U_{i,j,k}$ am Gitterpunkt (x_i, y_{j+1}, z_{k+1}) liegt, lautet dies:

$$U^I(x, y, z) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 U_{i,j-1,k-1} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^2 \frac{x - x_l}{x_i - x_l} \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^2 \frac{y - y_m}{y_j - y_m} \prod_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^2 \frac{z - z_n}{z_k - z_n} \quad (5.30)$$

Die quadratisch-lineare Interpolation aus (5.21) wird mit der Notation in Abbildung 5.21 (rechts) zu einer multiquadratischen Interpolation der U -Flußwerte:

$$U^I(x, y, z) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 U_{i,j-1,k-1} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^3 \frac{x - x_l}{x_i - x_l} \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^3 \frac{y - y_m}{y_j - y_m} \prod_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^3 \frac{z - z_n}{z_k - z_n} \quad (5.31)$$

Die Interpolationspolynome für die V - und W -Flußwerte ergeben sich ganz analog.

Man kann zeigen, daß sich beim Transfer von einem groben Gitter auf ein feineres Gitter, wie im obigen, eindimensionalen Beispiel, die Geschwindigkeitswerte

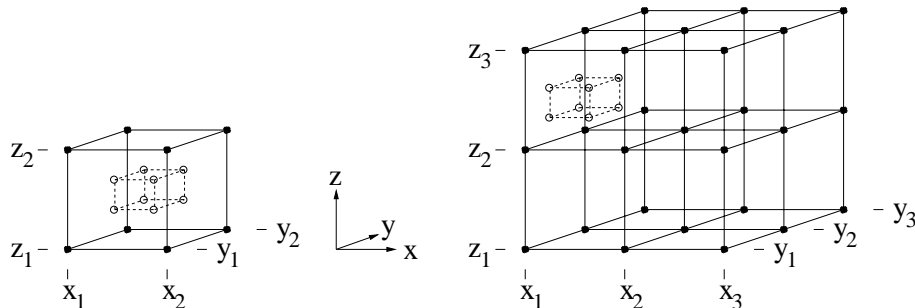


Abb. 5.21: Zur Interpolation der U -Flußwerte im Dreidimensionalen

durch Berechnung des Interpolanten der Flußwerte an den Ecken des feineren Kontrollvolumens sowie anschließender Umkehrung der Integration der Geschwindigkeitswerte gemäß (5.25) bzw. (5.27) berechnen lassen.

Zusammenfassung:

In diesem Abschnitt wurde gezeigt, daß beim Transfer von Geschwindigkeitsfeldern von einem gröberen auf ein feineres Gitter die direkte Interpolation der Geschwindigkeitswerte gleichwertig ist mit der Integration der Geschwindigkeitswerte zu Flußwerten, Interpolation der Flußwerte auf die Ecken des feineren Kontrollvolumens sowie anschließender Differentiation der Flußwerte. Die linear-konstante Interpolation der Geschwindigkeitswerte wird durch eine multilineare Interpolation der Flußwerte und die quadratisch-lineare durch eine multiquadratische ersetzt.

Der sich ergebende Vorteil liegt in der Tatsache, daß die Flußwerte auf den verschiedenen groben Gittern zum Teil an räumlich gleichen Punkten liegen. Die Interpolationspolynome für die U -, V - und W -Flußwerte haben dieselbe Gestalt, so daß die Unterscheidung der jeweiligen Raumrichtungen für die einzelnen Geschwindigkeitskomponenten bei der Implementierung der Transferroutrinen nicht nötig ist.

5.7 Berechnung des Interpolationsfehlers bei versetzten Gittern

5.7.1 Interpolationsfehler im Zweidimensionalen

In Abschnitt 4.5 wurden Berechnungsmöglichkeiten für den Interpolationsfehler gezeigt, der bei der Interpolation einer Kombinationslösung auf ein Vollgitter auftritt. Die konkrete Berechnung des Interpolationsfehlers für versetzte Gitter muß in abgewandelter Form geschehen. Das Vorgehen wird zunächst wieder exemplarisch für ein zweidimensionales Kombinationsgitter mit Ausdünnungsparameter $s = 1$ erläutert: Auf einem Vollgitter sei die u -Geschwindigkeitskomponente an den Punkten des versetzten Gitters gegeben. In Abbildung 5.22 ist ein Gitterausschnitt mit den Variablenbenennungen schematisch dargestellt. Die Integration der Geschwindigkeitswerte gemäß (5.24) führt auf die U -Flußwerte:

$$U_{1,1} = U_{1,0} + u_{1,1} h_y, \quad U_{1,2} = U_{1,1} + u_{1,2} h_y, \quad U_{2,1} = U_{2,0} + u_{2,1} h_y, \quad \dots \quad (5.32)$$

Zur Berechnung des Interpolationsfehlers wird die Vollgitterlösung mit der Kombinationslösung verglichen, bei der die durch das Geschwindigkeitsfeld gegebenen Flüsse im Vollgitter und im Kombinationsgitter identisch sind, die also dasselbe

physikalische Problem beschreibt. An den Gitterpunkten der verschiedenen groben Gitter, aus denen sich das Kombinationsgitter zusammensetzt, liegen demnach dieselben U -Flußwerte wie im Vollgitter. Die Interpolation der Kombinationsgitterlösung auf das Vollgitter geschieht wie im vorherigen Abschnitt beschrieben durch Integration der Geschwindigkeiten, Interpolation der Flußwerte sowie anschließender Differentiation. In Abbildung 5.23 ist das Vorgehen skizziert.

In diesem Beispiel ergibt sich der im Kombinationsgitter fehlende Flußwert $U_{2,1}$ durch Interpolation mit dem Stern aus Abbildung 4.9 als interpolierter Flußwert $U_{2,1}^I$:

$$U_{2,1}^I = \frac{1}{2}(U_{2,0} + U_{1,1} + U_{3,1} + U_{2,2}) - \frac{1}{4}(U_{1,0} + U_{3,0} + U_{1,2} + U_{3,2}) \quad (5.33)$$

Damit berechnen sich die Geschwindigkeiten $u_{2,1}^I$ und $u_{2,2}^I$ gemäß (5.25):

$$u_{2,1}^I = (U_{2,1}^I - U_{2,0}) / h_y, \quad u_{2,2}^I = (U_{2,2} - U_{2,1}^I) / h_y, \quad (5.34)$$

Diese beiden Geschwindigkeiten besitzen einen Interpolationsfehler; die anderen Geschwindigkeiten, die sich beim Transfer der Kombinationslösung auf das Vollgitter ergeben, sind identisch mit denen auf dem Vollgitter. Den Interpolationsfehler kann man wieder mit Hilfe von Taylorreihenentwicklungen bestimmen: Der Mittelpunkt des Gitterausschnitts sei wie in Abbildung 5.22 skizziert der Entwicklungspunkt $(0, 0)$. Die diskreten Geschwindigkeitswerte $u_{1,1}, u_{2,1}, \dots$ werden geschrieben als Taylorreihenentwicklungen einer Funktion u an den zugehörigen Datenpunkten. Mit der Notation aus Abschnitt 4.5.4 schreiben sich die Taylorreihenentwicklungen für die Geschwindigkeiten folgendermaßen:

$$u_{1,1} = T(u, (-h_x, -h_y/2)), \quad u_{2,1} = T(u, (0, -h_y/2)), \quad \dots$$

Damit lassen sich mit den Formeln (5.32), (5.33) und (5.34) die auftretenden

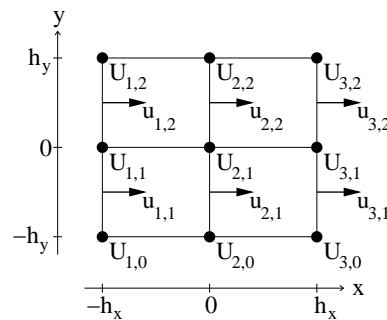


Abb. 5.22: Gitterausschnitt eines zweidimensionalen Gitters mit u -Geschwindigkeitswerten und U -Flußwerten

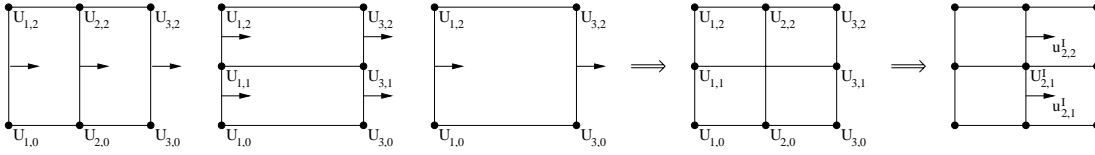


Abb. 5.23: Grobe Gitter, Kombinationsgitter und u -Geschwindigkeitswerte, die im Vergleich zum Vollgitter einen Interpolationsfehler besitzen (rechts)

Interpolationsfehler berechnen:

$$\begin{aligned}
 u_{2,1}^I - u_{2,1} &= -\frac{1}{4} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} \Big|_{(0,0)} h_x^2 h_y \\
 &\quad - \frac{1}{48} \frac{\partial^5 u}{\partial x^4 \partial y} \Big|_{(0,0)} h_x^4 h_y - \frac{1}{96} \frac{\partial^5 u}{\partial x^2 \partial y^3} \Big|_{(0,0)} h_x^2 h_y^3 \\
 &\quad + O(h_x^6 h_y + h_x^4 h_y^3 + h_x^2 h_y^5) \\
 u_{2,2}^I - u_{2,2} &= -(u_{2,1}^I - u_{2,1})
 \end{aligned}$$

Der Faktor $\frac{1}{4}$ vor dem Fehlerterm niedrigster Ordnung ist vom konkreten Entwicklungspunkt der benutzten Taylorreihen unabhängig. Die auftretenden Faktoren $\frac{1}{48}, \dots$ für die Fehlerterme höherer Ordnung sowie die überhaupt auftretenden gemischten Ableitungen höherer Ordnung sind von der Lage des Entwicklungspunktes abhängig. Unter Vernachlässigung aller Terme höherer Ordnung kann ein mittlerer Interpolationsfehler analog zu Abschnitt 4.5.4 berechnet werden. Für das Kombinationsgitter mit Ausdünnungsparameter $s = 1$ und der linear-konstanten Interpolation ergibt sich mit der Annahme, daß die gemischte Ableitung im Berechnungsgebiet ungefähr konstant ist, also $\left| \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} \Big|_{\Omega} \right| \approx c$ gilt, für den L_2 -Interpolationsfehler:

$$\sqrt{\frac{2}{4} \cdot (0)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{4} c h_x^2 h_y\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(+\frac{1}{4} c h_x^2 h_y\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{8} c h_x^2 h_y \quad (5.35)$$

Die Annahme, daß die gemischte Ableitung in einem Berechnungsgebiet ungefähr konstant ist, wird in der Regel in dem Geschwindigkeitsfeld einer Strömung nicht erfüllt. Wenn die gemischte Ableitung aber genügend glatt ist, also in jedem einzelnen Gitterausschnitt, der kombiniert wird, ungefähr konstant ist, dann kann ein mittlerer L_2 -Interpolationsfehler, der sogenannte *geschätzte L_2 -Interpolationsfehler*, angegeben werden. Das Ergebnis in (5.35) gilt dann für jeden einzelnen Gitterausschnitt mit jeweils einem anderen Wert für c . Für den geschätzten L_2 -Interpolationsfehler für das gesamte Berechnungsgebiet gilt ebenfalls das Ergebnis in (5.35), wenn der dort auftretende Wert c ersetzt wird durch

Ausdünnungsparameter	Linear-konstante Interpolation	Quadratisch-lineare Interpolation
$s = 1$	$\frac{1}{8}\sqrt{2} c_1 h_x^2 h_y$	$\frac{1}{8}\sqrt{2} c_2 h_x^3 h_y^2$
$s = 2$	$\frac{1}{8}\sqrt{42} c_1 h_x^2 h_y$	$\frac{1}{8}\sqrt{178} c_2 h_x^3 h_y^2$
$s = 3$	$\frac{1}{8}\sqrt{714} c_1 h_x^2 h_y$	$\frac{1}{8}\sqrt{12306} c_2 h_x^3 h_y^2$
$s = 4$	$\frac{1}{8}\sqrt{11594} c_1 h_x^2 h_y$	$\frac{1}{8}\sqrt{802834} c_2 h_x^3 h_y^2$
$s = 5$	$\frac{1}{8}\sqrt{186186} c_1 h_x^2 h_y$	$\frac{1}{8}\sqrt{51628562} c_2 h_x^3 h_y^2$
$s = 6$	$\frac{1}{8}\sqrt{2981706} c_1 h_x^2 h_y$	$\frac{1}{8} 3 \sqrt{367577602} c_2 h_x^3 h_y^2$
$s = 7$	$\frac{1}{8}\sqrt{47718218} c_1 h_x^2 h_y$	$\frac{1}{8}\sqrt{211788298770} c_2 h_x^3 h_y^2$

Tabelle 5.1: Geschätzter L_2 -Interpolationsfehler der u -Geschwindigkeitskomponente auf Kombinationsgittern mit unterschiedlichen Ausdünnungsparametern im Zweidimensionalen

einen Wert c_1 , der als Wurzel der Mittelung des Quadrats der gemischten Ableitung über das Berechnungsgebiet gebildet wird:

$$c_1 := \sqrt{\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} \right)^2 d\Omega} \quad (5.36)$$

Die Berechnung des geschätzten L_2 -Interpolationsfehlers, wie er in (5.35) exemplarisch am Beispiel der $s = 1$ Ausdünnung berechnet wurde, kann auf die gleiche Art geschehen für Ausdünnungsparameter $s > 1$. Ebenso ist eine Berechnung analog möglich für die quadratisch-lineare Interpolation der Geschwindigkeiten, die durch Integration der Geschwindigkeiten auf Flußwerte, quadratischer Interpolation der Flußwerte sowie anschließender Differentiation geschieht. Analog zum Wert c_1 in (5.36) tritt bei der quadratisch-linearen Interpolation ein Wert c_2 auf:

$$c_2 := \sqrt{\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^5 u}{\partial x^3 \partial y^2} \right)^2 d\Omega} \quad (5.37)$$

In Tabelle 5.1 sind die nach dem obigen Vorgehen berechneten geschätzten L_2 -Interpolationsfehler zusammengestellt, den man macht bei der Interpolation eines versetzten, zweidimensionalen Geschwindigkeitsfeldes von einem Kombinationsgitter mit Ausdünnungsparameter s auf das entsprechende Vollgitter. Die dort auftretenden Werte c_1 und c_2 sind in (5.36) und (5.37) definiert. Wenn die Glattheitsvoraussetzungen der in diese Konstanten eingehenden gemischten Ableitungen genügend gut erfüllt sind und die Gittermaschenweite so klein ist, daß der

Verhältnisse des Fehlers	Linear-konstante Interpolation	Quadratisch-lineare Interpolation
Fehler($s = 2$) / Fehler($s = 1$)	4.583	9.434
Fehler($s = 3$) / Fehler($s = 2$)	4.123	8.315
Fehler($s = 4$) / Fehler($s = 3$)	4.030	8.077
Fehler($s = 5$) / Fehler($s = 4$)	4.007	8.019
Fehler($s = 6$) / Fehler($s = 5$)	4.002	8.005
Fehler($s = 7$) / Fehler($s = 6$)	4.000	8.001

Tabelle 5.2: Verhältnisse der geschätzten L_2 -Interpolationsfehlers im Zweidimensionalen

Fehlerterm der niedrigsten Ordnung den Interpolationsfehler dominiert, kann somit mit den in Tabelle 5.1 angegebenen Ausdrücken eine gute Schätzung für den Interpolationsfehler berechnet werden. Insbesondere kennt man seine Abhängigkeit von den Gittermaschenweiten h_x und h_y . Die Verhältnisse des Fehlers, die bei verschiedenen Ausdünnungsparametern auftreten, sind in Tabelle 5.2 zusammengestellt. Man erkennt, daß bei Vergrößerung des Ausdünnungsparameters um 1 der geschätzte L_2 -Interpolationsfehler asymptotisch bei der linear-konstanten Interpolation um einen Faktor 4 und bei der quadratisch-linearen Interpolation um einen Faktor 8 größer wird. Warum dies der Fall ist, wird in Abschnitt 5.10 erläutert.

Verschwinden die in die Werte c_1 bzw. c_2 eingehenden gemischten Ableitungen, so verschwindet auch der Interpolationsfehler. Dies gilt zum Beispiel für das parabelförmige Geschwindigkeitsprofil einer laminaren Kanalströmung oder das Geschwindigkeitsfeld einer einfachen kreisförmigen Strömung. Derartige Geschwindigkeitsfelder werden somit auf jedem Kombinationsgitter mit beliebigem Ausdünnungsparameter exakt dargestellt.

5.7.2 Interpolationsfehler im Dreidimensionalen

Ganz analog zum Zweidimensionalen ist es möglich, im Dreidimensionalen den geschätzten L_2 -Interpolationsfehler zu berechnen. Dabei wird wiederum eine Vollgitterlösung mit einer Kombinationslösung verglichen, wobei die auf den jeweiligen Gittern gegebenen Flüsse identisch sind. Exemplarisch wird dies abermals für ein dreidimensionales Kombinationsgitter mit Ausdünnungsparameter $s = 1$ beschrieben: In Abbildung 5.24 ist ein Gitterausschnitt, die Lage der u -Geschwindigkeitswerte sowie der U -Flußwerte, die gemäß (5.26) berechnet werden, skiz-

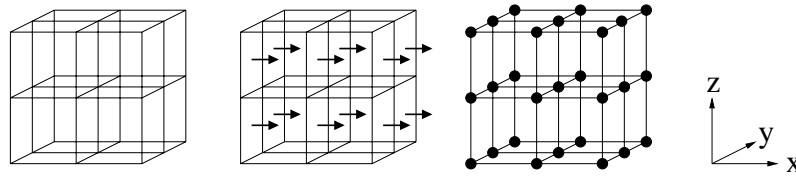


Abb. 5.24: Gitterausschnitt sowie Lage der u -Geschwindigkeitswerte und U -Flußwerte im Dreidimensionalen

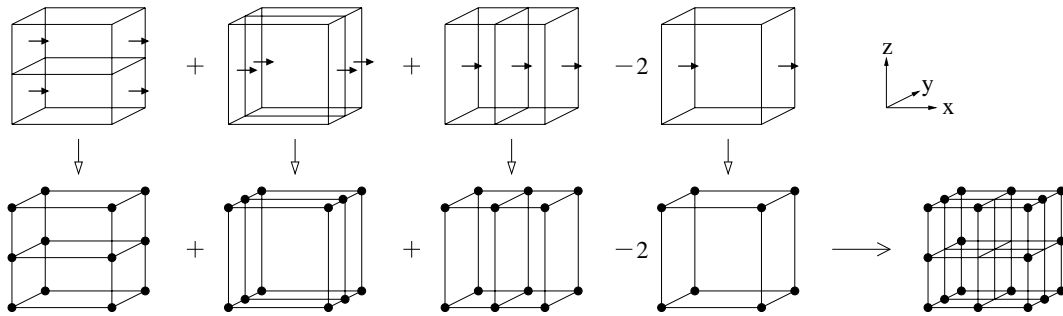


Abb. 5.25: Grobe Gitter mit der Lage der u -Geschwindigkeitswerte (oben) sowie die daraus erhaltenen Gitter mit der Lage der U -Flußwerte und das Kombinationsgitter (unten) für eine Kombinationsrechnung mit $s = 1$ im Dreidimensionalen

ziert. In Abbildung 5.25 werden die in die Kombinationslösung mit Ausdünnungsparameter $s = 1$ eingehenden Gitter mit der Lage der u -Geschwindigkeitswerte sowie der daraus errechneten Flußwerte dargestellt. Die Flußwerte im Kombinationsgitter werden daraus als Linearkombination berechnet. In Abbildung 5.26 ist skizziert, welche Flußwerte im Kombinationsgitter anschließend mit der multilinearen oder multiquadratischen Interpolation berechnet werden müssen. Bei der multiquadratischen Interpolation muß dabei ein in jeder Raumrichtung doppelt so großer Gitterausschnitt wie in Abbildung 5.26 verwendet werden. Die jeweiligen Interpolationssterne zur Berechnung der interpolierten Flußwerte im Dreidimensionalen kann man ganz analog zu denen im Zweidimensionalen, wie es in Abschnitt 4.5.3 beschrieben ist, bestimmen. Die Rückrechnung der im Kombinationsgitter gegebenen und interpolierten Flußwerte auf die Geschwindigkeitswerte gemäß (5.27) führt auf die Geschwindigkeiten der Kombinationslösung. Im Gegensatz zum Zweidimensionalen erkennt man in Abbildung 5.26, daß alle so berechneten Geschwindigkeiten im Gitterausschnitt einen Interpolationsfehler im Vergleich zum Vollgitter besitzen, weil immer mindestens ein durch Interpolation erhaltener Flußwert in die Berechnung eingeht.

Zur konkreten Berechnung des Interpolationsfehlers geht man ganz analog zum Zweidimensionalen vor: Der Mittelpunkt des Gitterausschnitts sei wie in Abbildung 5.27 skizziert der Entwicklungspunkt $(0, 0, 0)$ von Taylorreihen.

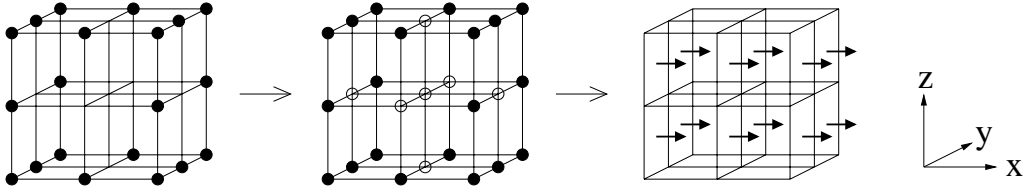


Abb. 5.26: Lage der Flußwerte im Kombinationsgitter (links), zu interpolierende Flußwerte (Mitte, offene Kreise) sowie Lage der mit einem Interpolationsfehler behafteten Geschwindigkeitswerte (rechts)

Die diskreten Geschwindigkeitswerte $u_{1,1,1}, u_{2,1,1} \dots$ werden geschrieben als Taylorreihenentwicklungen einer Funktion u an den zugehörigen Datenpunkten:

$$u_{1,1,1} = T(u, (-h_x, -h_y/2, -h_z/2)), \quad u_{2,1,1} = T(u, (0, -h_y/2, -h_z/2)), \quad \dots$$

Die Integration dieser Geschwindigkeitswerte zu Flußwerten, die anschließende Interpolation der so erhaltenen Flußwerte auf die im Kombinationsgitter fehlenden Flußwerte mit Hilfe der jeweiligen Interpolationssterne sowie die Rückrechnung auf die Geschwindigkeitswerte $u_{1,1,1}^I, u_{2,1,1}^I, \dots$ der Kombinationslösung führt wiederum auf den an den einzelnen Datenpunkten auftretenden Interpolationsfehler:

$$\begin{aligned} u_{1,1,1}^I - u_{1,1,1} &= -\frac{1}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \Big|_{(0,0,0)} h_y h_z + \frac{1}{4} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} \Big|_{(0,0,0)} h_x h_y h_z \\ &\quad + O(h_y^3 h_z + h_y h_z^3 + h_x^2 h_y h_z) \\ u_{2,1,1}^I - u_{2,1,1} &= -\frac{1}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \Big|_{(0,0,0)} h_y h_z \\ &\quad - \frac{1}{4} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} \Big|_{(0,0,0)} h_x^2 h_y - \frac{1}{4} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial z} \Big|_{(0,0,0)} h_x^2 h_z \\ &\quad + O(h_y^3 h_z + h_y h_z^3) \end{aligned}$$

Für die anderen Geschwindigkeitswerte erhält man ähnliche Ausdrücke. Ganz analog zum zweidimensionalen Fall und zu Abschnitt 4.5.4 kann unter Vernachlässigung aller Terme höherer Ordnung ein geschätzter L_2 -Interpolationsfehler berechnet werden. Die Mittelung erfolgt dabei für Gitterausschnitte wie in Abbildung 5.26 bzw. 5.27 nur über die Fehler von 8 und nicht von 12 Geschwindigkeitswerten, weil der mittlere Fehler des gesamten Gitters interessiert, das sich aus derartigen Gitterausschnitten zusammensetzt, und die Fehler an den Berührungsebenen der Gitterausschnitte dabei nicht doppelt gezählt werden dürfen.

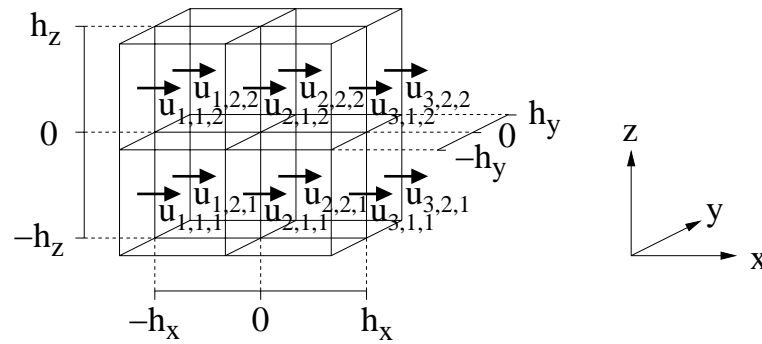


Abb. 5.27: Benennungen der u -Geschwindigkeitswerte im Gitterausschnitt

Mit der gemittelten Ableitung

$$c_3 := \sqrt{\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \right)^2 d\Omega} \quad (5.38)$$

erhält man als geschätzten L_2 -Interpolationsfehler der u -Geschwindigkeit im Kombinationsgitter mit Ausdünnungsparameter $s = 1$ den folgenden Wert:

$$\sqrt{\frac{1}{8} \cdot 8 \cdot \left(\frac{1}{4} c_3 h_y h_z \right)^2} = \frac{1}{4} c_3 h_y h_z \quad (5.39)$$

Für Ausdünnungsparameter $s > 1$ sowie die quadratisch-lineare Interpolation werden die geschätzten L_2 -Interpolationsfehler analog berechnet. Bei der quadratisch-linearen Interpolation tritt dabei die gemittelte Ableitung c_4 auf:

$$c_4 := \sqrt{\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial y^2 \partial z^2} \right)^2 d\Omega} \quad (5.40)$$

Die so berechneten geschätzten L_2 -Interpolationsfehler sind in Tabelle 5.3 und die Verhältnisse der Fehler in Tabelle 5.4 angegeben. Bei Vergrößerung des Ausdünnungsparameters um 1 streben die Verhältnisse asymptotisch gegen die Zahlen 2 bei der linear-konstanten Interpolation und 4 bei der quadratisch-linearen Interpolation. Dies wird genauer in Abschnitt 5.10 erläutert.

Für die konkrete Berechnung der Interpolationssterne, die Bildung und Aufsummierung der Taylorreihenentwicklungen und die Berechnung der geschätzten L_2 -Interpolationsfehler für die verschiedenen Ausdünnungsstufen wurde in dieser Arbeit das Computeralgebraprogramm *Maple* eingesetzt.

Ausdünnungsparameter	Linear-konstante Interpolation	Quadratisch-lineare Interpolation
$s = 1$	$\frac{1}{4} c_3 h_y h_z$	$\frac{1}{4} c_4 h_y^2 h_z^2$
$s = 2$	$\frac{1}{4} 3 c_3 h_y h_z$	$\frac{1}{4} \sqrt{41} c_4 h_y^2 h_z^2$
$s = 3$	$\frac{1}{4} \sqrt{57} c_3 h_y h_z$	$\frac{1}{4} \sqrt{1113} c_4 h_y^2 h_z^2$
$s = 4$	$\frac{1}{4} \sqrt{313} c_3 h_y h_z$	$\frac{1}{4} \sqrt{25433} c_4 h_y^2 h_z^2$
$s = 5$	$\frac{1}{4} 3 \sqrt{177} c_3 h_y h_z$	$\frac{1}{4} \sqrt{530521} c_4 h_y^2 h_z^2$

Tabelle 5.3: Geschätzte L_2 -Interpolationsfehler der u -Geschwindigkeitskomponente auf Kombinationsgittern mit unterschiedlichen Ausdünnungsparametern im Dreidimensionalen

Verhältnisse des Fehlers	Linear-konstante Interpolation	Quadratisch-lineare Interpolation
Fehler($s = 2$) / Fehler($s = 1$)	3.000	6.403
Fehler($s = 3$) / Fehler($s = 2$)	2.517	5.210
Fehler($s = 4$) / Fehler($s = 3$)	2.343	4.780
Fehler($s = 5$) / Fehler($s = 4$)	2.256	4.567

Tabelle 5.4: Verhältnisse der geschätzten L_2 -Interpolationsfehler im Dreidimensionalen

5.8 Numerische Tests

5.8.1 Tests im Zweidimensionalen

Beispiel 1:

Die in Tabelle 5.1 angegebenen Abschätzungen für den Interpolationsfehler werden nun anhand von Beispielen überprüft. Als erstes Beispiel dient die Funktion $u_1(x, y)$ auf dem Einheitsquadrat $[0, 1]^2$:

$$u_1(x, y) = (x^2 + y^2)^3 \quad (5.41)$$

Diese Funktion ist in Abbildung 5.28 dargestellt. Das Einheitsquadrat wird mit einem Gitter, das die Maschenweiten $h_x = h_y = 2^{-8}$ besitzt, überzogen. Dieses Gitter wird im folgenden das 256^2 -Gitter genannt. Die Datenpunkte, an denen im versetzten Gitter die u -Geschwindigkeitswerte liegen, werden nun mit den Funktionswerten der Funktion u_1 belegt. So erhält man die diskrete Funktionsdarstellung auf dem versetzten Gitter mit den einzelnen Funktionswerten:

$$u_1\left(\left(i - \frac{1}{2}\right) h_x, \left(j - \frac{1}{2}\right) h_y\right) \quad \text{für} \quad i = 1, \dots, 257, \quad j = 1, \dots, 256$$

Die auf dem 256^2 -Gitter gegebene Funktion wird mit der im Abschnitt 5.5 beschriebenen Technik auf die versetzten Datenpunkte der größeren Vollgitter 128^2 , 64^2 , 32^2 , 16^2 , 8^2 transferiert, die die Maschenweiten $h_x = h_y = 2^{-7}$, $h_x = h_y = 2^{-6}$, ... besitzen. Die auf diesen Gittern erhaltenen Funktionswerte werden anschließend auf alle groben Gitter transferiert, die in die Linearkombinationen zur Bildung von Kombinationslösungen mit den Ausdünnungsparametern $s = 1, 2, \dots$ eingehen. Schließlich werden die auf diesen groben Gittern so erhaltenen Funktionswerte nach der Kombinationsformel mit der linear-konstanten

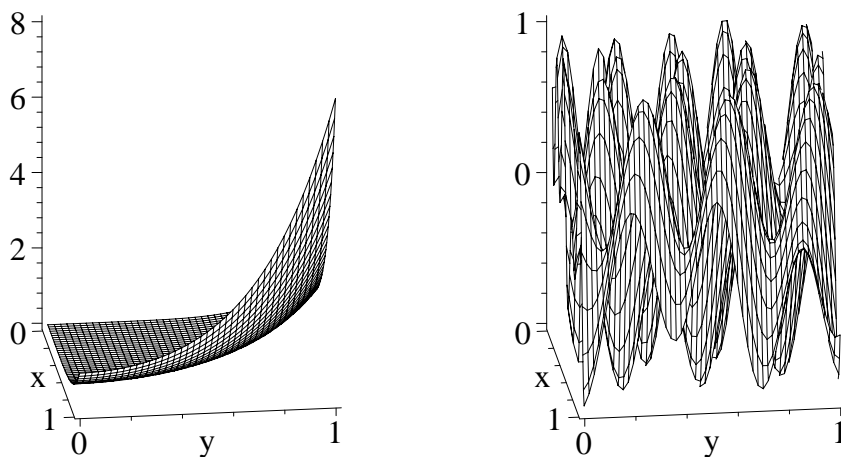


Abb. 5.28: Beispielfunktionen $u_1(x, y)$ (links) und $u_2(x, y)$ (rechts)

bzw. quadratisch-linearen Interpolation kombiniert. Damit erhält man die entsprechenden Kombinationslösungen auf dem Vollgitter und berechnet anschließend die diskrete L_2 -Norm der Differenz zur jeweiligen Vollgitterfunktion. Dies ist der in den verschiedenen Kombinationslösungen auftretende Interpolationsfehler.

Andererseits kann der Interpolationsfehler mit den in Tabelle 5.1 angegebenen Ausdrücken geschätzt werden. Dazu müssen die Werte c_1 gemäß (5.36) bzw. c_2 gemäß (5.37) bekannt sein. Die exakte numerische Integration mit Hilfe eines Computeralgebraprogramms liefert:

$$c_1^{\text{exakt}}(u_1) \doteq 2.5658 \cdot 10^1 \quad , \quad c_2^{\text{exakt}}(u_1) \doteq 8.3138 \cdot 10^1 \quad (5.42)$$

Näherungsweise lassen sich diese Werte auch berechnen, indem man in den Formeln (5.36) und (5.37) die Integrale in diskrete Summen umwandelt und die gemischten Ableitungen durch Differenzensterne ersetzt:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} \rightsquigarrow \frac{1}{h_x^2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}_x \otimes \frac{1}{2h_y} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}_y = \frac{1}{2h_x^2 h_y} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}_{xy} \quad (5.43)$$

$$\frac{\partial^5 u}{\partial x^3 \partial y^2} \rightsquigarrow \frac{1}{h_x^3} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \end{bmatrix}_x \otimes \frac{1}{h_y^2} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}_y = \frac{1}{h_x^3 h_y^2} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ -2 & 6 & -6 & 2 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \end{bmatrix}_{xy} \quad (5.44)$$

Diese Differenzensterne werden benutzt, um an allen inneren Datenpunkten im 256^2 -Gitter die Ableitungen der Funktion zu approximieren. So erhält man folgende Näherungen für die Werte c_1 bzw. c_2 :

$$c_1^{\text{Stern}}(u_1) \doteq 2.5499 \cdot 10^1 \quad , \quad c_2^{\text{Stern}}(u_1) \doteq 8.2976 \cdot 10^1 \quad (5.45)$$

Offensichtlich stimmen die auf dem feinen 256^2 -Gitter diskret berechneten Werte in 5.45 mit den exakten Werten in (5.42) bei dieser glatten Funktion u_1 gut überein.

In Tabelle 5.5 sind die numerisch berechneten Interpolationsfehler und die mit den Werten aus (5.42) gemäß Tabelle 5.1 geschätzten Interpolationsfehler für die verschiedenen Gitter und die verschiedenen Ausdünnungsparameter zusammengestellt. Es zeigt sich, daß die Abschätzungen des Interpolationsfehlers sehr gut mit den numerisch berechneten Werten übereinstimmen. Weil die Funktion u_1 sehr glatt ist, gilt dies auch noch für Kombinationsgitter mit großen Ausdünnungsparametern. Ebenso sieht man, daß die quadratisch-lineare Interpolation einen deutlich kleineren Interpolationsfehler aufweist als die linear-konstante Interpolation.

Gitter	$s = 1$	$s = 2$	$s = 3$	$s = 4$	$s = 5$
Linear-konstante Interpolation:					
256^2	$2.703 \cdot 10^{-7}$ ($2.704 \cdot 10^{-7}$)	$1.239 \cdot 10^{-6}$ ($1.239 \cdot 10^{-6}$)	$5.107 \cdot 10^{-6}$ ($5.108 \cdot 10^{-6}$)	$2.057 \cdot 10^{-5}$ ($2.058 \cdot 10^{-5}$)	$8.228 \cdot 10^{-5}$ ($8.249 \cdot 10^{-5}$)
128^2	$2.162 \cdot 10^{-6}$ ($2.163 \cdot 10^{-6}$)	$9.908 \cdot 10^{-6}$ ($9.911 \cdot 10^{-6}$)	$4.083 \cdot 10^{-5}$ ($4.087 \cdot 10^{-5}$)	$1.642 \cdot 10^{-4}$ ($1.647 \cdot 10^{-4}$)	$6.535 \cdot 10^{-4}$ ($6.599 \cdot 10^{-4}$)
64^2	$1.729 \cdot 10^{-5}$ ($1.730 \cdot 10^{-5}$)	$7.920 \cdot 10^{-5}$ ($7.929 \cdot 10^{-5}$)	$3.259 \cdot 10^{-4}$ ($3.269 \cdot 10^{-4}$)	$1.304 \cdot 10^{-3}$ ($1.317 \cdot 10^{-3}$)	
32^2	$1.382 \cdot 10^{-4}$ ($1.384 \cdot 10^{-4}$)	$6.317 \cdot 10^{-4}$ ($6.343 \cdot 10^{-4}$)	$2.584 \cdot 10^{-3}$ ($2.615 \cdot 10^{-3}$)		
16^2	$1.099 \cdot 10^{-3}$ ($1.107 \cdot 10^{-3}$)	$4.990 \cdot 10^{-3}$ ($5.075 \cdot 10^{-3}$)			
8^2	$8.602 \cdot 10^{-3}$ ($8.859 \cdot 10^{-3}$)				
Quadratisch-lineare Interpolation:					
256^2	$1.337 \cdot 10^{-11}$ ($1.337 \cdot 10^{-11}$)	$1.261 \cdot 10^{-10}$ ($1.261 \cdot 10^{-10}$)	$1.048 \cdot 10^{-9}$ ($1.048 \cdot 10^{-9}$)	$8.457 \cdot 10^{-9}$ ($8.469 \cdot 10^{-9}$)	$6.753 \cdot 10^{-8}$ ($6.791 \cdot 10^{-8}$)
128^2	$4.277 \cdot 10^{-10}$ ($4.277 \cdot 10^{-10}$)	$4.034 \cdot 10^{-9}$ ($4.035 \cdot 10^{-9}$)	$3.350 \cdot 10^{-8}$ ($3.355 \cdot 10^{-8}$)	$2.695 \cdot 10^{-7}$ ($2.710 \cdot 10^{-7}$)	$2.124 \cdot 10^{-6}$ ($2.173 \cdot 10^{-6}$)
64^2	$1.368 \cdot 10^{-8}$ ($1.369 \cdot 10^{-8}$)	$1.289 \cdot 10^{-7}$ ($1.291 \cdot 10^{-7}$)	$1.068 \cdot 10^{-6}$ ($1.074 \cdot 10^{-6}$)	$8.475 \cdot 10^{-6}$ ($8.672 \cdot 10^{-6}$)	
32^2	$4.372 \cdot 10^{-7}$ ($4.380 \cdot 10^{-7}$)	$4.107 \cdot 10^{-6}$ ($4.132 \cdot 10^{-6}$)	$3.356 \cdot 10^{-5}$ ($3.436 \cdot 10^{-5}$)		
16^2	$1.391 \cdot 10^{-5}$ ($1.402 \cdot 10^{-5}$)	$1.290 \cdot 10^{-4}$ ($1.322 \cdot 10^{-4}$)			
8^2	$4.350 \cdot 10^{-4}$ ($4.485 \cdot 10^{-4}$)				

Tabelle 5.5: Numerisch berechnete Werte des Interpolationsfehlers sowie Abschätzungen des Interpolationsfehlers (jeweils in Klammern darunter) in der L_2 -Norm für die Beispielfunktion u_1 im Zweidimensionalen

Beispiel 2:

Als eine Beispielfunktion mit großer Variation dient die Funktion u_2 auf dem Einheitsquadrat $[0, 1]^2$:

$$u_2(x, y) = \sin\left(20 \sqrt{(x + 0.3)^2 + (y + 0.3)^2}\right) \cdot \cos\left(15 \arctan\left(\frac{y+0.3}{x+0.3}\right)\right) \quad (5.46)$$

In Abbildung 5.28 ist diese Funktion dargestellt. Nach exakt demselben Vorgehen wie oben beschrieben wird diese Funktion auf dem Einheitsquadrat auf den Datenpunkten eines versetzten 256^2 -Gitters dargestellt und auf die anderen Gitter transferiert. Anschließend werden Kombinationslösungen gebildet und die genauen Werte der Interpolationsfehler berechnet.

Eine Abschätzung für die Interpolationsfehler liefern wieder die Ausdrücke in der Tabelle 5.1, wobei die Werte c_1 bzw. c_2 für die Funktion u_2 nun folgende, mit einem Computeralgebraprogramm exakt berechneten Werte annehmen:

$$c_1^{\text{exakt}}(u_2) \doteq 1.5333 \cdot 10^3 \quad , \quad c_2^{\text{exakt}}(u_2) \doteq 4.8223 \cdot 10^5 \quad (5.47)$$

Mit den Differenzensternen erhält man für sie die Näherungen:

$$c_1^{\text{Stern}}(u_2) \doteq 1.5180 \cdot 10^3 \quad , \quad c_2^{\text{Stern}}(u_2) \doteq 4.6400 \cdot 10^5 \quad (5.48)$$

In Tabelle 5.6 sind wiederum die numerisch berechneten Interpolationsfehler und die mit den Werten aus (5.47) gemäß Tabelle 5.1 geschätzten Interpolationsfehler für die verschiedenen Gitter zusammengestellt. Es zeigt sich, daß trotz der großen Variation der Funktion u_2 die Abschätzungen für den Interpolationsfehler für die feinen 256^2 - und 128^2 -Gitter auch bei großen Ausdünnungsparametern noch eine sinnvolle Größe darstellen.

Gitter	$s = 1$	$s = 2$	$s = 3$	$s = 4$	$s = 5$
Linear-konstante Interpolation:					
256^2	$1.614 \cdot 10^{-5}$ ($1.616 \cdot 10^{-5}$)	$7.384 \cdot 10^{-5}$ ($7.404 \cdot 10^{-5}$)	$3.024 \cdot 10^{-4}$ ($3.053 \cdot 10^{-4}$)	$1.189 \cdot 10^{-3}$ ($1.230 \cdot 10^{-3}$)	$4.439 \cdot 10^{-3}$ ($4.929 \cdot 10^{-3}$)
128^2	$1.288 \cdot 10^{-4}$ ($1.292 \cdot 10^{-4}$)	$5.858 \cdot 10^{-4}$ ($5.923 \cdot 10^{-4}$)	$2.355 \cdot 10^{-3}$ ($2.442 \cdot 10^{-3}$)	$8.837 \cdot 10^{-3}$ ($9.841 \cdot 10^{-3}$)	$2.513 \cdot 10^{-2}$ ($3.943 \cdot 10^{-2}$)
64^2	$1.019 \cdot 10^{-3}$ ($1.034 \cdot 10^{-3}$)	$4.541 \cdot 10^{-3}$ ($4.738 \cdot 10^{-3}$)	$1.740 \cdot 10^{-2}$ ($1.954 \cdot 10^{-2}$)	$4.937 \cdot 10^{-2}$ ($7.873 \cdot 10^{-2}$)	
32^2	$7.816 \cdot 10^{-3}$ ($8.272 \cdot 10^{-3}$)	$3.303 \cdot 10^{-2}$ ($3.791 \cdot 10^{-2}$)	$9.392 \cdot 10^{-2}$ ($1.563 \cdot 10^{-1}$)		
16^2	$5.549 \cdot 10^{-2}$ ($6.617 \cdot 10^{-2}$)	$1.636 \cdot 10^{-1}$ ($3.033 \cdot 10^{-1}$)			
8^2	$1.948 \cdot 10^{-1}$ ($5.294 \cdot 10^{-1}$)				
Quadratisch-lineare Interpolation:					
256^2	$7.716 \cdot 10^{-8}$ ($7.753 \cdot 10^{-8}$)	$7.223 \cdot 10^{-7}$ ($7.314 \cdot 10^{-7}$)	$5.936 \cdot 10^{-6}$ ($6.082 \cdot 10^{-6}$)	$4.167 \cdot 10^{-5}$ ($4.912 \cdot 10^{-5}$)	$2.451 \cdot 10^{-4}$ ($3.939 \cdot 10^{-4}$)
128^2	$2.434 \cdot 10^{-6}$ ($2.481 \cdot 10^{-6}$)	$2.263 \cdot 10^{-5}$ ($2.341 \cdot 10^{-5}$)	$1.621 \cdot 10^{-4}$ ($1.946 \cdot 10^{-4}$)	$9.504 \cdot 10^{-4}$ ($1.572 \cdot 10^{-3}$)	$4.481 \cdot 10^{-3}$ ($1.261 \cdot 10^{-2}$)
64^2	$7.543 \cdot 10^{-5}$ ($7.939 \cdot 10^{-5}$)	$5.957 \cdot 10^{-4}$ ($7.490 \cdot 10^{-4}$)	$3.563 \cdot 10^{-3}$ ($6.228 \cdot 10^{-3}$)	$1.617 \cdot 10^{-2}$ ($5.030 \cdot 10^{-2}$)	
32^2	$1.920 \cdot 10^{-3}$ ($2.541 \cdot 10^{-3}$)	$1.210 \cdot 10^{-2}$ ($2.397 \cdot 10^{-2}$)	$5.547 \cdot 10^{-2}$ ($1.993 \cdot 10^{-1}$)		
16^2	$3.532 \cdot 10^{-2}$ ($8.130 \cdot 10^{-2}$)	$1.465 \cdot 10^{-1}$ ($7.670 \cdot 10^{-1}$)			
8^2	$2.174 \cdot 10^{-1}$ ($2.602 \cdot 10^0$)				

Tabelle 5.6: Numerisch berechnete Werte des Interpolationsfehlers sowie Abschätzungen des Interpolationsfehlers (jeweils in Klammern darunter) in der L_2 -Norm für die Beispielfunktion u_2 im Zweidimensionalen

5.8.2 Tests im Dreidimensionalen

Die Abschätzungen für den Interpolationsfehler im Dreidimensionalen gemäß Tabelle 5.3 können ganz analog zum zweidimensionalen Fall anhand von Beispielen überprüft werden. Als Gebiet wird der Einheitsquader $[0, 1]^3$ benutzt. Die Punkte, an denen im versetzten Gitter die u -Geschwindigkeitswerte liegen, werden mit den diskreten Funktionswerten der Beispielfunktionen u_n belegt. Die diskrete Funktionsdarstellung auf dem versetzten Gitter hat also die Funktionswerte:

$$u_n\left(\left(i - \frac{1}{2}\right)h_x, \left(j - \frac{1}{2}\right)h_y, \left(k - \frac{1}{2}\right)h_z\right) \quad \text{für } i = 1, \dots, 257, \quad j, k = 1, \dots, 256$$

Die in Tabelle 5.3 vorkommenden Werte c_3 und c_4 gemäß (5.38) bzw. (5.40) für die gemittelten gemischten Ableitungen können für die Beispielfunktionen wiederum entweder exakt mit einem Computeralgebraprogramm oder durch Näherungen der Integrale durch diskrete Summen und unter Benutzung von Differenzensternen für die gemischten Ableitungen berechnet werden. Die Differenzensterne werden dabei folgendermaßen gewählt:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \rightsquigarrow \frac{1}{2h_y} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}_y \otimes \frac{1}{2h_z} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}_z = \frac{1}{4h_y h_z} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{yz} \quad (5.49)$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial y^2 \partial z^2} \rightsquigarrow \frac{1}{h_y^2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}_y \otimes \frac{1}{h_z^2} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}_z = \frac{1}{h_y^2 h_z^2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}_{yz} \quad (5.50)$$

Die Näherungen für die Werte c_3 und c_4 unter Benutzung der Differenzensterne werden für die folgenden drei Beispielfunktionen immer auf dem 128^3 -Gitter berechnet.

Beispiel 3:

Zunächst wird die Funktion u_3 betrachtet:

$$u_3(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^3 \quad (5.51)$$

In Abbildung 5.29 ist diese in einem Schnitt an der Stelle $z = 0.5$ dargestellt. Für die Werte c_3 und c_4 erhält man:

$$c_3^{\text{exakt}}(u_3) \doteq 1.2843 \cdot 10^1 \quad , \quad c_4^{\text{exakt}}(u_3) \doteq 6.4099 \cdot 10^1 \quad (5.52)$$

$$c_3^{\text{Stern}}(u_3) \doteq 1.2559 \cdot 10^1 \quad , \quad c_4^{\text{Stern}}(u_3) \doteq 6.3449 \cdot 10^1 \quad (5.53)$$

Gitter	$s = 1$	$s = 2$	$s = 3$	$s = 4$	$s = 5$
Linear-konstante Interpolation:					
128^3	$1.955 \cdot 10^{-4}$ ($1.960 \cdot 10^{-4}$)	$5.864 \cdot 10^{-4}$ ($5.879 \cdot 10^{-4}$)	$1.476 \cdot 10^{-3}$ ($1.480 \cdot 10^{-3}$)	$3.459 \cdot 10^{-3}$ ($3.467 \cdot 10^{-3}$)	$7.811 \cdot 10^{-3}$ ($7.822 \cdot 10^{-3}$)
64^3	$7.799 \cdot 10^{-4}$ ($7.839 \cdot 10^{-4}$)	$2.340 \cdot 10^{-3}$ ($2.352 \cdot 10^{-3}$)	$5.891 \cdot 10^{-3}$ ($5.918 \cdot 10^{-3}$)	$1.382 \cdot 10^{-2}$ ($1.387 \cdot 10^{-2}$)	$3.129 \cdot 10^{-2}$ ($3.129 \cdot 10^{-2}$)
32^3	$3.104 \cdot 10^{-3}$ ($3.135 \cdot 10^{-3}$)	$9.317 \cdot 10^{-3}$ ($9.406 \cdot 10^{-3}$)	$2.348 \cdot 10^{-2}$ ($2.367 \cdot 10^{-2}$)	$5.526 \cdot 10^{-2}$ ($5.547 \cdot 10^{-2}$)	
16^3	$1.231 \cdot 10^{-2}$ ($1.254 \cdot 10^{-2}$)	$3.698 \cdot 10^{-2}$ ($3.763 \cdot 10^{-2}$)	$9.358 \cdot 10^{-2}$ ($9.469 \cdot 10^{-2}$)		
8^3	$4.847 \cdot 10^{-2}$ ($5.017 \cdot 10^{-2}$)	$1.464 \cdot 10^{-1}$ ($1.505 \cdot 10^{-1}$)			
4^3	$1.893 \cdot 10^{-1}$ ($2.007 \cdot 10^{-1}$)				
Quadratisch-lineare Interpolation:					
128^3	$5.960 \cdot 10^{-8}$ ($5.970 \cdot 10^{-8}$)	$3.816 \cdot 10^{-7}$ ($3.822 \cdot 10^{-7}$)	$1.986 \cdot 10^{-6}$ ($1.992 \cdot 10^{-6}$)	$9.473 \cdot 10^{-6}$ ($9.520 \cdot 10^{-6}$)	$4.294 \cdot 10^{-5}$ ($4.348 \cdot 10^{-5}$)
64^3	$9.519 \cdot 10^{-7}$ ($9.551 \cdot 10^{-7}$)	$6.088 \cdot 10^{-6}$ ($6.116 \cdot 10^{-6}$)	$3.162 \cdot 10^{-5}$ ($3.187 \cdot 10^{-5}$)	$1.498 \cdot 10^{-4}$ ($1.523 \cdot 10^{-4}$)	$6.645 \cdot 10^{-4}$ ($6.957 \cdot 10^{-4}$)
32^3	$1.516 \cdot 10^{-5}$ ($1.528 \cdot 10^{-5}$)	$9.662 \cdot 10^{-5}$ ($9.786 \cdot 10^{-5}$)	$4.972 \cdot 10^{-4}$ ($5.098 \cdot 10^{-4}$)	$2.291 \cdot 10^{-3}$ ($2.437 \cdot 10^{-3}$)	
16^3	$2.391 \cdot 10^{-4}$ ($2.445 \cdot 10^{-4}$)	$1.504 \cdot 10^{-3}$ ($1.566 \cdot 10^{-3}$)	$7.460 \cdot 10^{-3}$ ($8.158 \cdot 10^{-3}$)		
8^3	$3.651 \cdot 10^{-3}$ ($3.912 \cdot 10^{-3}$)	$2.174 \cdot 10^{-2}$ ($2.505 \cdot 10^{-2}$)			
4^3	$4.873 \cdot 10^{-2}$ ($6.260 \cdot 10^{-2}$)				

Tabelle 5.7: Numerisch berechnete Werte des Interpolationsfehlers sowie Abschätzungen des Interpolationsfehlers (jeweils in Klammern darunter) in der L_2 -Norm für die Beispielfunktion u_3 im Dreidimensionalen

In Tabelle 5.7 sind wieder die numerisch berechneten Werte des Interpolationsfehlers sowie die Abschätzungen für den Interpolationsfehler, die gemäß Tabelle 5.3 und den exakten Werten für c_3 und c_4 nach (5.52) berechnet werden, zusammengestellt. Wie im zweidimensionalen Fall erkennt man bei dieser glatten Funktion eine sehr gute Übereinstimmung, die erst bei den groben 4^3 - und 8^3 -Gittern größere Abweichungen zeigt.

Beispiel 4:

Als weiteres Beispiel dient die Funktion u_4 :

$$u_4(x, y, z) = \frac{1}{4}y^2z^2 \quad (5.54)$$

Auch diese Funktion ist in Abbildung 5.29 in einem Schnitt an der Stelle $z = 0.5$ dargestellt. Für die Werte c_3 und c_4 erhält man:

$$c_3^{\text{exakt}}(u_4) = 1/3 \quad , \quad c_4^{\text{exakt}}(u_4) = 1 \quad (5.55)$$

$$c_3^{\text{Stern}}(u_4) \doteq 3.3074 \cdot 10^{-1} \quad , \quad c_4^{\text{Stern}}(u_4) \doteq 1.0000 \quad (5.56)$$

Bei der Funktion u_4 ist die gemischte vierte Ableitung zur Berechnung von c_4 gemäß (5.40) identisch 1 und somit das Integral über dem Einheitsquader ebenfalls identisch 1. Alle Terme höherer Ordnung in den Taylorreihenentwicklungen zur Berechnung der Abschätzung des Interpolationsfehlers verschwinden. Daher stimmen die in Tabelle 5.8 zusammengestellten numerisch berechneten Werte des Interpolationsfehlers und die Abschätzungen des Interpolationsfehlers, die gemäß Tabelle 5.3 und den exakten Werten für c_3 und c_4 nach (5.55) berechnet werden, erwartungsgemäß exakt überein.

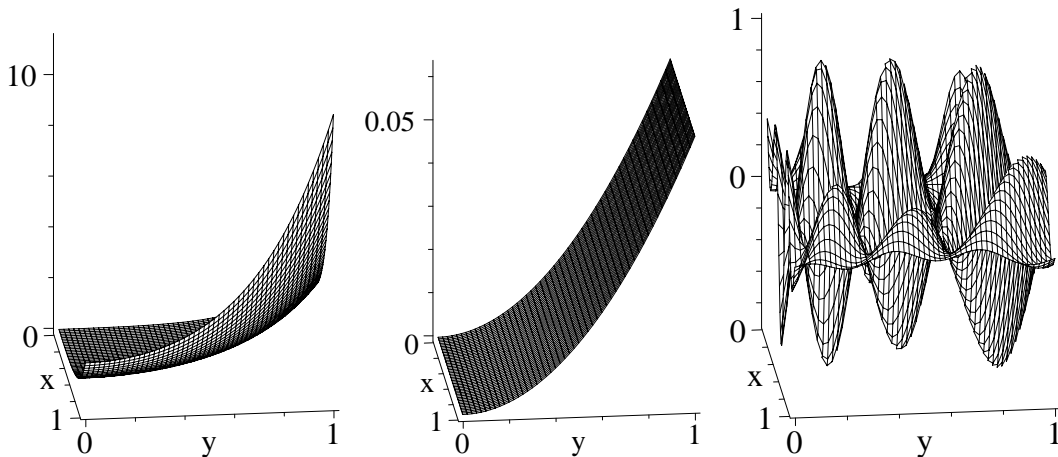


Abb. 5.29: Beispielfunktionen u_3 (links), u_4 (Mitte), u_5 (rechts) in der Ebene $(x, y, 0.5)$

Gitter	$s = 1$	$s = 2$	$s = 3$	$s = 4$	$s = 5$
Linear-konstante Interpolation:					
128^3	$5.086 \cdot 10^{-6}$ ($5.086 \cdot 10^{-6}$)	$1.526 \cdot 10^{-5}$ ($1.526 \cdot 10^{-5}$)	$3.839 \cdot 10^{-5}$ ($3.840 \cdot 10^{-5}$)	$8.988 \cdot 10^{-5}$ ($8.998 \cdot 10^{-5}$)	$2.023 \cdot 10^{-4}$ ($2.030 \cdot 10^{-4}$)
64^3	$2.034 \cdot 10^{-5}$ ($2.034 \cdot 10^{-5}$)	$6.100 \cdot 10^{-5}$ ($6.103 \cdot 10^{-5}$)	$1.534 \cdot 10^{-4}$ ($1.536 \cdot 10^{-4}$)	$3.583 \cdot 10^{-4}$ ($3.599 \cdot 10^{-4}$)	$8.004 \cdot 10^{-4}$ ($8.120 \cdot 10^{-4}$)
32^3	$8.130 \cdot 10^{-5}$ ($8.138 \cdot 10^{-5}$)	$2.436 \cdot 10^{-4}$ ($2.441 \cdot 10^{-4}$)	$6.106 \cdot 10^{-4}$ ($6.144 \cdot 10^{-4}$)	$1.414 \cdot 10^{-3}$ ($1.440 \cdot 10^{-3}$)	
16^3	$3.242 \cdot 10^{-4}$ ($3.255 \cdot 10^{-4}$)	$9.676 \cdot 10^{-4}$ ($9.766 \cdot 10^{-4}$)	$2.397 \cdot 10^{-3}$ ($2.458 \cdot 10^{-3}$)		
8^3	$1.282 \cdot 10^{-3}$ ($1.302 \cdot 10^{-3}$)	$3.763 \cdot 10^{-3}$ ($3.906 \cdot 10^{-3}$)			
4^3	$4.883 \cdot 10^{-3}$ ($5.208 \cdot 10^{-3}$)				
Quadratisch-lineare Interpolation:					
128^3	$9.313 \cdot 10^{-10}$ ($9.313 \cdot 10^{-10}$)	$5.963 \cdot 10^{-9}$ ($5.963 \cdot 10^{-9}$)	$3.107 \cdot 10^{-8}$ ($3.107 \cdot 10^{-8}$)	$1.485 \cdot 10^{-7}$ ($1.485 \cdot 10^{-7}$)	$6.783 \cdot 10^{-7}$ ($6.783 \cdot 10^{-7}$)
64^3	$1.490 \cdot 10^{-8}$ ($1.490 \cdot 10^{-8}$)	$9.541 \cdot 10^{-8}$ ($9.541 \cdot 10^{-8}$)	$4.971 \cdot 10^{-7}$ ($4.971 \cdot 10^{-7}$)	$2.376 \cdot 10^{-6}$ ($2.376 \cdot 10^{-6}$)	$1.085 \cdot 10^{-5}$ ($1.085 \cdot 10^{-5}$)
32^3	$2.384 \cdot 10^{-7}$ ($2.384 \cdot 10^{-7}$)	$1.527 \cdot 10^{-6}$ ($1.527 \cdot 10^{-6}$)	$7.954 \cdot 10^{-6}$ ($7.954 \cdot 10^{-6}$)	$3.802 \cdot 10^{-5}$ ($3.802 \cdot 10^{-5}$)	
16^3	$3.815 \cdot 10^{-6}$ ($3.815 \cdot 10^{-6}$)	$2.443 \cdot 10^{-5}$ ($2.443 \cdot 10^{-5}$)	$1.273 \cdot 10^{-4}$ ($1.273 \cdot 10^{-4}$)		
8^3	$6.104 \cdot 10^{-5}$ ($6.104 \cdot 10^{-5}$)	$3.908 \cdot 10^{-4}$ ($3.908 \cdot 10^{-4}$)			
4^3	$9.766 \cdot 10^{-4}$ ($9.766 \cdot 10^{-4}$)				

Tabelle 5.8: Numerisch berechnete Werte des Interpolationsfehlers sowie Abschätzungen des Interpolationsfehlers (jeweils in Klammern darunter) in der L_2 -Norm für die Beispielfunktion u_4 im Dreidimensionalen

Beispiel 5:

Als eine Beispielfunktion mit großer Variation dient die Funktion u_5 :

$$u_5(x, y, z) = \sin\left(20\sqrt{(x+0.3)^2 + (y+0.3)^2 + (z+0.3)^2}\right) \cdot \cos\left(15\arctan\left(\frac{z+0.3}{y+0.3}\right)\right) \cdot \cos\left(9\arctan\left(\frac{z+0.5}{x+0.7}\right)\right) \quad (5.57)$$

In Abbildung 5.29 ist die Funktion u_5 in einem Schnitt an der Stelle $z = 0.5$ dargestellt. Für die Werte c_3 und c_4 erhält man:

$$c_3^{\text{exakt}}(u_5) \doteq 5.7302 \cdot 10^1 \quad , \quad c_4^{\text{exakt}}(u_5) \doteq 1.8357 \cdot 10^4 \quad (5.58)$$

$$c_3^{\text{Stern}}(u_5) \doteq 6.5731 \cdot 10^1 \quad , \quad c_4^{\text{Stern}}(u_5) \doteq 2.9247 \cdot 10^4 \quad (5.59)$$

Bei diesen Werten zeigt sich eine große Diskrepanz zwischen den exakt integrierten und den mit Hilfe der Differenzensterne berechneten Werten. Offensichtlich ist die Auflösung der Funktion u_5 auch auf dem 128^3 -Gitter noch zu grob, um insbesondere die höheren Ableitungen mit den Differenzensternen gut darzustellen.

In die Berechnung für die Abschätzung des Interpolationsfehlers gehen die auf einem Gitter gegebenen diskreten Funktionswerte ein. Werden in diesem Beispiel die mit den Differenzensternen aus den diskreten Funktionswerten berechneten Werte in (5.59) für die Abschätzungen des Interpolationsfehlers genommen, so ergibt sich für nicht zu grobe Gitter immer noch eine sehr gute Übereinstimmung zwischen den numerisch berechneten Interpolationsfehlern auf den Kombinationsgittern und deren Abschätzungen gemäß Tabelle 5.3. In Tabelle 5.9 sind die Werte zusammengestellt.

5.9 Interpolationsfehler auf groben Gittern

In Abschnitt 5.7.1 und 5.7.2 wurden für den zwei- und dreidimensionalen Fall Interpolationsfehler für die Geschwindigkeitswerte berechnet, die im versetzten Gitter beim Transfer der Kombinationslösung auf das Vollgitter auftreten. Dabei zeigte sich, daß sich durch die quadratisch-lineare Interpolation ein Interpolationsfehler höherer Ordnung im Vergleich zur linear-konstanten Interpolation ergab.

Das prinzipielle Vorgehen dabei wird für das bessere Verständnis des folgen kurz zusammengefaßt: Man betrachtete eine Komponente des Geschwindigkeitsfeldes auf dem Vollgitter. Aus den Geschwindigkeitswerten berechnete man die Flußwerte (vgl. Abbildung 5.22 für den zweidimensionalen bzw. Abbildung 5.24 für den dreidimensionalen Fall). Dann nahm man an, daß diese Flußwerte nur noch

Gitter	$s = 1$	$s = 2$	$s = 3$	$s = 4$	$s = 5$
Linear-konstante Interpolation:					
128^3	$1.031 \cdot 10^{-3}$ ($1.003 \cdot 10^{-3}$)	$3.120 \cdot 10^{-3}$ ($3.009 \cdot 10^{-3}$)	$8.091 \cdot 10^{-3}$ ($7.572 \cdot 10^{-3}$)	$2.178 \cdot 10^{-2}$ ($1.774 \cdot 10^{-2}$)	$6.859 \cdot 10^{-2}$ ($4.003 \cdot 10^{-2}$)
64^3	$4.204 \cdot 10^{-3}$ ($4.012 \cdot 10^{-3}$)	$1.301 \cdot 10^{-2}$ ($1.204 \cdot 10^{-2}$)	$3.658 \cdot 10^{-2}$ ($3.029 \cdot 10^{-2}$)	$1.071 \cdot 10^{-1}$ ($7.098 \cdot 10^{-2}$)	$2.180 \cdot 10^{-1}$ ($1.601 \cdot 10^{-1}$)
32^3	$1.770 \cdot 10^{-2}$ ($1.605 \cdot 10^{-2}$)	$5.681 \cdot 10^{-2}$ ($4.814 \cdot 10^{-2}$)	$1.523 \cdot 10^{-1}$ ($1.212 \cdot 10^{-1}$)	$2.650 \cdot 10^{-1}$ ($2.839 \cdot 10^{-1}$)	
16^3	$7.275 \cdot 10^{-2}$ ($6.419 \cdot 10^{-2}$)	$1.977 \cdot 10^{-1}$ ($1.926 \cdot 10^{-1}$)	$3.056 \cdot 10^{-1}$ ($4.846 \cdot 10^{-1}$)		
8^3	$1.939 \cdot 10^{-1}$ ($2.568 \cdot 10^{-1}$)	$2.935 \cdot 10^{-1}$ ($7.703 \cdot 10^{-1}$)			
4^3	$1.576 \cdot 10^{-1}$ ($1.027 \cdot 10^0$)				
Quadratisch-lineare Interpolation:					
128^3	$2.804 \cdot 10^{-5}$ ($2.724 \cdot 10^{-5}$)	$1.764 \cdot 10^{-4}$ ($1.744 \cdot 10^{-4}$)	$8.945 \cdot 10^{-4}$ ($9.087 \cdot 10^{-4}$)	$5.960 \cdot 10^{-3}$ ($4.344 \cdot 10^{-3}$)	$4.707 \cdot 10^{-2}$ ($1.984 \cdot 10^{-2}$)
64^3	$4.374 \cdot 10^{-4}$ ($4.358 \cdot 10^{-4}$)	$2.637 \cdot 10^{-3}$ ($2.791 \cdot 10^{-3}$)	$1.611 \cdot 10^{-2}$ ($1.454 \cdot 10^{-2}$)	$9.875 \cdot 10^{-2}$ ($6.950 \cdot 10^{-2}$)	$2.426 \cdot 10^{-1}$ ($3.174 \cdot 10^{-1}$)
32^3	$6.290 \cdot 10^{-3}$ ($6.973 \cdot 10^{-3}$)	$3.691 \cdot 10^{-2}$ ($4.465 \cdot 10^{-2}$)	$1.629 \cdot 10^{-1}$ ($2.326 \cdot 10^{-1}$)	$2.960 \cdot 10^{-1}$ ($1.112 \cdot 10^0$)	
16^3	$6.364 \cdot 10^{-2}$ ($1.116 \cdot 10^{-1}$)	$2.153 \cdot 10^{-1}$ ($7.144 \cdot 10^{-1}$)	$3.528 \cdot 10^{-1}$ ($3.722 \cdot 10^0$)		
8^3	$2.123 \cdot 10^{-1}$ ($1.785 \cdot 10^0$)	$3.257 \cdot 10^{-1}$ ($1.143 \cdot 10^1$)			
4^3	$1.881 \cdot 10^{-1}$ ($2.856 \cdot 10^1$)				

Tabelle 5.9: Numerisch berechnete Werte des Interpolationsfehlers sowie Abschätzungen des Interpolationsfehlers (jeweils in Klammern darunter) in der L_2 -Norm für die Beispielfunktion u_5 im Dreidimensionalen

auf den Gitterpunkten eines Kombinationsgitters gegeben sind. So hatte man eine Darstellung auf dem Kombinationsgitter, die dasselbe physikalische Problem beschreibt wie die Darstellung auf dem Vollgitter. Man interpolierte die auf dem Kombinationsgitter gegebenen Flußwerte auf die Punkte, die das Kombinationsgitter im Vergleich mit dem Vollgitter nicht enthält (vgl. Abbildung 5.23 für den zweidimensionalen bzw. Abbildung 5.26 für den dreidimensionalen Fall). Aus den auf dem Kombinationsgitter gegebenen Flußwerten und den auf die Vollgitterpunkte interpolierten Flußwerte rechnet man Geschwindigkeitswerte aus, die an den versetzten Gitterpunkten im Vollgitter liegen. Die Differenz der so berechneten Werte mit den Geschwindigkeitswerten, die zuvor im Vollgitter an den betreffenden versetzten Gitterpunkten lagen, ergab den Interpolationsfehler für jeden einzelnen Geschwindigkeitswert.

Bei einer Kombinationsrechnung für ein zeitabhängiges Problem müssen, wie in Abschnitt 5.4 beschrieben, in jedem Kombinationsschritt die groben Gitter kombiniert werden. Das bedeutet, daß ein Transfer von jeder Lösung auf den einzelnen groben Gittern auf jedes andere grobe Gitter stattfindet und dort die Linearkombination gemäß der Kombinationsformel gebildet wird. Die groben Gitter besitzen aber alle eine andere Struktur (vgl. Abbildung 5.25), und daher müssen die Lösungen der groben Gitter aufeinander interpoliert werden. Man könnte annehmen, daß dabei auch ein Interpolationsfehler auftritt und dieser von der gewählten Interpolationsmethode abhängt. Daß dies aber nicht so ist, wird im folgenden erläutert: Um einen Interpolationsfehler zu ermitteln, muß man zunächst annehmen, daß auf allen groben Gittern dieselbe Funktion gegeben ist. „Dieselbe Funktion“ bedeutet in der Strömungssimulation, daß jeweils die Summe der Flüsse durch die Seiten der Kontrollvolumen an jeder Seite von jedem einzelnen Gitterausschnitt in jedem groben Gitter dieselbe ist. Zur Verdeutlichung sei auf die groben Gitter in Abbildung 5.25 verwiesen: Der Gesamtfluß, der beispielsweise durch die rechte Seite im größten der groben Gitter fließt, ist für alle anderen groben Gitter derselbe an der rechten Seite, unabhängig davon, ob an dieser Seite ein oder zwei Kontrollvolumen angrenzen, wie es bei den beiden linken groben Gittern in Abbildung 5.25 der Fall ist.

Die Flüsse aber werden durch die Flußwerte repräsentiert, deren Lage ebenfalls in Abbildung 5.25 eingezeichnet ist. Demnach haben alle Flußwerte, die auf den groben Gittern räumlich an derselben Stelle liegen, jeweils denselben Flußwert. Wird nun auf einem groben Gitter für die Flußwerte die Linearkombination gemäß der Kombinationsformel mit den Flußwerten aller anderen groben Gitter gebildet, so hebt sich der hinzukommende Beitrag der anderen groben Gitter in der Summe genau auf. Dies gilt unabhängig davon, welche Interpolationsmethode beim Transfer der anderen groben Gitter verwendet wurde: Die Flußwerte auf dem groben Gitter bleiben unverändert erhalten.

Ob in einer Kombinationsrechnung die quadratisch-lineare Interpolation für die

Geschwindigkeitswerte, die der multiquadratischen Interpolation der Flußwerte entspricht (s. Abschnitt 5.6), oder die linear-konstante Interpolation für die Geschwindigkeitswerte, die der multilinearen Interpolation der Flußwerte entspricht, verwendet wird, hat also auf die sich ergebenden Linearkombinationen auf den groben Gittern keinen Einfluß. Die gewählte Interpolationsmethode ist nur für die Interpolation der Kombinationslösung auf das Vollgitter wichtig, weil sie dort einen Interpolationsfehler verursacht, dessen Größe sich für beide Methoden unterscheidet.

Im praktischen Einsatz der Kombinationstechnik in der Strömungssimulation wird trotzdem ein geringer Unterschied in den Lösungen auf den groben Gittern bei der Verwendung der unterschiedlichen Interpolationsmethoden auftreten: Wenn Lösungen für partielle Differentialgleichungen auf Gittern verschiedener Maschenweiten berechnet werden, so tritt in der Lösung immer der Lösungsfehler auf (s. Abschnitt 4.1). Die Größe des Lösungsfehlers kennt man gewöhnlich nicht, aber man nimmt in der Regel gewisse Gesetzmäßigkeiten über seine Abhängigkeiten an. Zunächst geht man davon aus, daß man beim Lösen des algebraischen Gleichungssystems nur einen geringen Fehler macht, weil man gute numerische Verfahren verwendet und Rundungsfehler vernachlässigen kann, und daß daher der Lösungsfehler genau der Diskretisierungsfehler ist. Für den Diskretisierungsfehler macht man die Annahme, daß er von der Maschenweiten des Diskretisierungsgitters in den einzelnen Raumrichtungen abhängt und mit zunehmender Maschenweite größer wird. In der Kombinationstechnik werden die Lösungen auf den groben Gitter genau so miteinander kombiniert, daß die großen Anteile am Diskretisierungsfehler, die auf den groben Gittern mit großer Maschenweite in der betreffenden Raumrichtung auftreten, in der Linearkombination sich gegenseitig aufheben. Abbildung 5.30 soll dies verdeutlichen: An den oberen Punkten der groben Gitter sind jeweils Anteile des Diskretisierungsfehlers ε bzw. δ eingetragen, die von der Maschenweite des Gitters in x -Richtung herrühren. Es gilt $\varepsilon < \delta$, weil das Gitter mit ε eine feinere Maschenweite in der x -Raumrichtung besitzt. Die

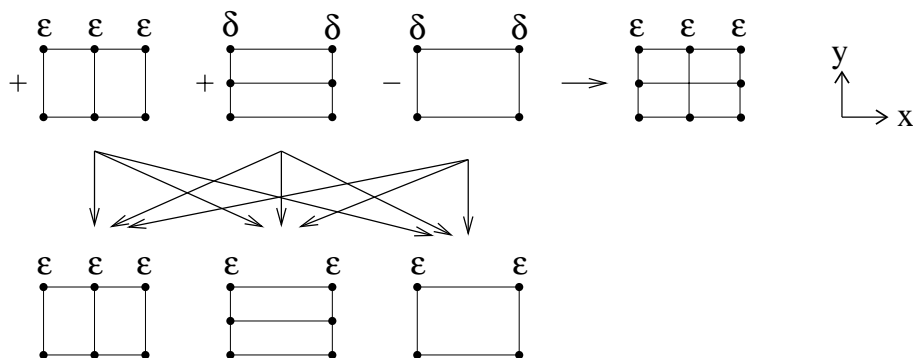


Abb. 5.30: Auslöschung eines Anteils des Diskretisierungsfehlers in der Kombinationslösung und auf den groben Gittern

Kombination der groben Gitter auf das Kombinationsgitter löscht den δ -Anteil im Diskretisierungsfehler aus. Dasselbe gilt für die Bildung der Linearkombination auf den einzelnen groben Gittern.

Bei einer Rechnung in der Praxis gelten für die Zusammensetzung des Diskretisierungsfehlers aber kompliziertere Abhängigkeiten. Daher werden sich bei der Bildung der Linearkombination nicht alle großen Anteile im Diskretisierungsfehler exakt auslöschen. Beim Transfer der Lösungen der groben Gitter untereinander tritt dann doch ein geringer Unterschied je nach Wahl der Interpolationsmethode auf, weil die Differenz der sich nicht aufhebenden Diskretisierungsfehleranteile gegebenenfalls interpoliert wird.

5.10 Interpolationsfehler für große Ausdünnungsparameter

In den Tabellen 5.2 und 5.4 wurden die Verhältnisse für die geschätzten L_2 -Interpolationsfehler bei den verschiedenen Interpolationsmethoden für einige Ausdünnungsparameter angegeben. In Abschnitt 5.7.1 bzw. 5.7.2 wurde dazu gesagt, daß diese Verhältnisse asymptotisch gegen die Zahlen 4 und 8 im Zweidimensionalen bzw. 2 und 4 im Dreidimensionalen streben. Der Grund dafür soll in diesem Abschnitt erläutert werden:

Jedes grobe Gitter, das in die Linearkombination zur Bildung der Kombinationslösung eingeht, liefert einen Beitrag zum Interpolationsfehler, wenn die Kombinationslösung auf dem Vollgitter gebildet wird. Der Anteil an diesem Interpolationsfehler, den jedes einzelne grobe Gitter beiträgt, ist abhängig von der Interpolationsmethode und von den Maschenweiten der einzelnen groben Gitter in den verschiedenen Raumrichtungen.

Betrachtet man zunächst die Bildung der Kombinationslösung mit linear-konstanter Interpolation im Zweidimensionalen: Die u -Geschwindigkeiten aller groben Gitter werden zur Bildung der Kombinationslösung auf dem Vollgitter in x -Richtung linear und in y -Richtung konstant interpoliert. Jedes grobe Gitter verursacht dabei also einen Interpolationsfehler der Ordnung $O(H_x^2 H_y)$, wobei H_x und H_y die Maschenweiten in diesem groben Gitter sind.

Vergrößert man bei einer Kombinationsrechnung den Ausdünnungsparameter von s auf $s + 1$, so kommen in der neuen Linearkombination die groben Gitter vor, deren Maschenweiten im Vergleich zur Kombinationsrechnung mit Ausdünnungsparameter s in jeweils einer der beiden Raumrichtungen doppelt so groß geworden sind (vgl. dazu Abbildung 3.4 und 3.5 oder Tabelle 3.4). Der Interpolationsfehler, den eines dieser groben Gitter beim Transfer auf das Vollgitter beiträgt, wird

nach dem oben gesagten mit der Ordnung $O(H_x^2 H_y)$ größer, also entweder um einen Faktor 4, wenn in x -Richtung die Maschenweite verdoppelt wurde, oder mit einem Faktor 2, wenn in y -Richtung die Maschenweite verdoppelt wurde. Daher wird für alle groben Gitter zusammen genommen der Interpolationsfehler bei der Vergrößerung des Ausdünnungsparameters asymptotisch mit dem größeren Faktor 4 wachsen, weil dieser Anteil im Interpolationsfehler wesentlich schneller wächst.

Die gleichen Überlegungen kann man für die quadratisch-lineare Interpolation im Zweidimensionalen anstellen: Werden die Geschwindigkeitswerte von einem groben Gitter auf das Vollgitter in x -Richtung quadratisch und in y -Richtung linear interpoliert, so verursacht dies einen Interpolationsfehler der Ordnung $O(H_x^3 H_y^2)$, wobei H_x und H_y die Maschenweiten in diesem groben Gitter sind. Vergrößert man wieder den Ausdünnungsparameter von s auf $s + 1$, so werden die Beiträge der neuen groben Gitter zum Interpolationsfehler entweder um einen Faktor 8, wenn in x -Richtung die Maschenweite verdoppelt wurde, oder um einen Faktor 4, wenn in y -Richtung die Maschenweite verdoppelt wurde, größer. In der Summe aller groben Gitter wächst der Interpolationsfehler also um einen Faktor 8.

Nun wird der Interpolationsfehler bei linear-konstanter Interpolation im Dreidimensionalen untersucht: Die u -Geschwindigkeiten aller groben Gitter werden zur Bildung der Kombinationslösung auf dem Vollgitter in x -Richtung linear und in y - und z -Richtung konstant interpoliert. Seien H_x , H_y und H_z die Maschenweiten in einem der groben Gitter. Bei der Interpolation auf das Vollgitter tritt im Interpolationsfehler, den dieses grobe Gitter im Vollgitter verursacht, als führender Term ein Term der Ordnung $O(H_y H_z)$ auf. Wird nun der Ausdünnungsparameter von s auf $s + 1$ erhöht, so kommen in der neuen Linearkombination die groben Gitter vor, deren Maschenweiten im Vergleich zur Kombinationsrechnung mit Ausdünnungsparameter s in jeweils zwei der drei Raumrichtungen doppelt so groß geworden sind (vgl. Tabelle 3.2). Allerdings gibt es dabei in der Linearkombination nur drei Gitter, deren Maschenweite sich in y - und z -Richtung gleichzeitig verdoppelt hat, während es proportional zu s viele Gitter gibt, die nur in der y - oder der z -Richtung die Maschenweite verdoppelt haben. Daher vergrößert sich für alle groben Gitter zusammen genommen der Interpolationsfehler bei der Vergrößerung des Ausdünnungsparameters asymptotisch nur mit dem Faktor 2. Ganz analog folgert man für die quadratisch-lineare Interpolation im Dreidimensionalen, daß sich der Interpolationsfehler mit führendem Term der Ordnung $O(H_y^2 H_z^2)$ um einen Faktor asymptotisch um einen Faktor 4 vergrößert.

In Abbildung 5.31 sind die Faktoren für das asymptotische Verhalten des Interpolationsfehlers der Kombinationslösung auf dem Vollgitter für den zwei- und dreidimensionalen Fall zusammengestellt, die bei Halbierung der Maschenweite h in jeder Raumrichtung und bei Vergrößerung des Ausdünnungsparameters s um 1 auftreten.

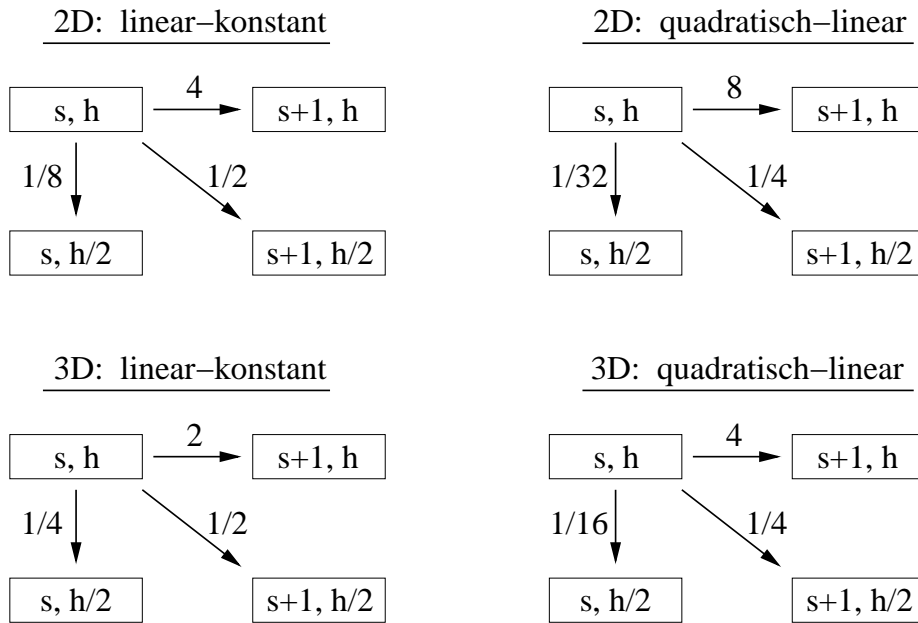


Abb. 5.31: Faktoren für das asymptotische Verhalten des Interpolationsfehlers der Kombinationslösung auf dem Vollgitter

5.11 Verhältnis von Interpolationsfehler zum Diskretisierungsfehler

In Abschnitt 5.7 wurden Abschätzungen für den Interpolationsfehler berechnet, der bei der Kombinationstechnik mit versetzten Gittern auftritt, und in Abschnitt 5.8 wurde anhand von numerischen Beispielen gezeigt, daß diese Abschätzungen gute Näherungen darstellen.

Der Interpolationsfehler einer Kombinationslösung ist also abhängig vom Ausdünnungsparameter, von den Gittermaschenweiten und von der verwendeten Interpolationsmethode. Auch wenn in konkreten Anwendungen der Kombinationstechnik in der Strömungssimulation bisher nur relativ kleine Ausdünnungsparameter von Bedeutung sind (etwa $s < 10$), so ist das asymptotische Verhalten des Interpolationsfehlers auch von Interesse. Insbesondere interessiert dabei, wie sich der Interpolationsfehler der Kombinationslösung im Vergleich zum Diskretisierungsfehler eines Verfahrens verhält, mit dem eine Strömungssimulationsrechnung durchgeführt wird. Dieses soll im folgenden genauer untersucht werden.

Wird zur Berechnung einer Strömung ein Verfahren erster Ordnung verwendet, so wird der Diskretisierungsfehler ε_D mit $O(h)$ kleiner, wobei h die Maschenweite des verwendeten Gitters in jeder Raumrichtung ist. Es gilt also $\varepsilon_D \propto h$. Im Zweidimensionalen ist die Anzahl der Gitterpunkte im Vollgitter N_V proportional

	2-dimensional	3-dimensional
	Verfahren 1. Ordnung	
$h \longrightarrow h/2$	$N_V \longrightarrow 4 N_V$ $\varepsilon_D \longrightarrow \frac{1}{2} \varepsilon_D$	$N_V \longrightarrow 8 N_V$ $\varepsilon_D \longrightarrow \frac{1}{2} \varepsilon_D$
	$\implies \varepsilon_D \propto N_V^{-1/2}$	$\implies \varepsilon_D \propto N_V^{-1/3}$
	Verfahren 2. Ordnung	
$h \longrightarrow h/2$	$N_V \longrightarrow 4 N_V$ $\varepsilon_D \longrightarrow \frac{1}{4} \varepsilon_D$	$N_V \longrightarrow 8 N_V$ $\varepsilon_D \longrightarrow \frac{1}{4} \varepsilon_D$
	$\implies \varepsilon_D \propto N_V^{-1}$	$\implies \varepsilon_D \propto N_V^{-2/3}$

Tabelle 5.10: Abhängigkeit des Diskretisierungsfehlers ε_D von der Anzahl der Gitterpunkte im Vollgitter N_V

zu h^{-2} , also $h \propto N_V^{-1/2}$. Somit gilt für den Diskretisierungsfehler $\varepsilon_D \propto N_V^{-1/2}$. Im Dreidimensionalen ist die Anzahl der Gitterpunkte im Vollgitter N_V proportional zu h^{-3} , also $h \propto N_V^{-1/3}$. Für den Diskretisierungsfehler gilt damit $\varepsilon_D \propto N_V^{-1/3}$.

Dieselben Überlegungen kann man bei einem Verfahren zweiter Ordnung verwenden, dessen Diskretisierungsfehler ε_D mit $O(h^2)$ kleiner wird. Wenn N_V wieder die Anzahl der Gitterpunkte im Vollgitter beschreibt, so erhält man im Zweidimensionalen die Beziehung $\varepsilon_D \propto N_V^{-1}$ und im Dreidimensionalen $\varepsilon_D \propto N_V^{-2/3}$. In der Tabelle 5.10 ist zusammengefaßt, wie sich Gitterpunktanzahl und Diskretisierungsfehler bei den unterschiedlichen Verfahren bei Halbierung der Maschenweiten verhalten und was damit für die Abhängigkeit des Diskretisierungsfehlers von der Gitterpunktanzahl gilt.

Bei einer Kombinationsrechnung tritt in der auf das Vollgitter interpolierten Kombinationslösung der Interpolationsfehler ε_I auf. Dieser ist unter anderem abhängig von der Gittermaschenweite h . h steht hierbei für h_x , h_y und h_z im Vollgitter, auf das die Kombinationslösung interpoliert wird. Bei Verkleinerung der Maschenweiten von h auf $h/2$ wird der Interpolationsfehler gemäß Tabelle 5.1 und 5.3 bei der linear-konstanten bzw. der quadratisch-linearen Interpolation um den Faktor $(1/2)^3$ bzw. $(1/2)^5$ im Zweidimensionalen sowie $(1/2)^2$ bzw. $(1/2)^4$ im Dreidimensionalen kleiner.

Andererseits ist der Interpolationsfehler ε_I abhängig vom Ausdünnungsparameter s der Kombinationsrechnung. In Tabelle 5.2 und 5.4 sind die Quotienten des Interpolationsfehlers angegeben, die bei Vergrößerung des Ausdünnungsparameters von s auf $s + 1$ auftreten. Im Zweidimensionalen streben diese Werte für große

	2-dimensional		3-dimensional	
	lin.-konst. I.	quad.-lin. I.	lin.-konst. I.	quad.-lin. I.
$h \rightarrow h/2$	$N_K \rightarrow 4 N_K$ $\varepsilon_I \rightarrow \frac{1}{8} \varepsilon_I$	$N_K \rightarrow 4 N_K$ $\varepsilon_I \rightarrow \frac{1}{32} \varepsilon_I$	$N_K \rightarrow 8 N_K$ $\varepsilon_I \rightarrow \frac{1}{4} \varepsilon_I$	$N_K \rightarrow 8 N_K$ $\varepsilon_I \rightarrow \frac{1}{16} \varepsilon_I$
	$\Rightarrow \varepsilon_I \propto N_K^{-3/2}$	$\Rightarrow \varepsilon_I \propto N_K^{-5/2}$	$\Rightarrow \varepsilon_I \propto N_K^{-2/3}$	$\Rightarrow \varepsilon_I \propto N_K^{-4/3}$
$s+1 \rightarrow s$	$N_K \rightarrow 2 N_K$ $\varepsilon_I \rightarrow \frac{1}{4} \varepsilon_I$	$N_K \rightarrow 2 N_K$ $\varepsilon_I \rightarrow \frac{1}{8} \varepsilon_I$	$N_K \rightarrow 4 N_K$ $\varepsilon_I \rightarrow \frac{1}{2} \varepsilon_I$	$N_K \rightarrow 4 N_K$ $\varepsilon_I \rightarrow \frac{1}{4} \varepsilon_I$
	$\Rightarrow \varepsilon_I \propto N_K^{-2}$	$\Rightarrow \varepsilon_I \propto N_K^{-3}$	$\Rightarrow \varepsilon_I \propto N_K^{-1/2}$	$\Rightarrow \varepsilon_I \propto N_K^{-1}$

Tabelle 5.11: Abhängigkeit des Interpolationsfehlers ε_I zur Gesamtanzahl N_K

s gegen die Zahlen 4 bzw. 8, und im Dreidimensionalen gegen die Zahlen 2 bzw. 4. Wenn der Ausdünnungsparameter von $s+1$ auf s verkleinert wird, wird demzufolge der Interpolationsfehler um einen Faktor $\frac{1}{4}$ bzw. $\frac{1}{8}$ im Zweidimensionalen und $\frac{1}{2}$ bzw. $\frac{1}{4}$ im Dreidimensionalen kleiner.

Ein Maß für den Aufwand einer Kombinationsrechnung ist die Gesamtanzahl aller in die Linearkombination zur Bildung einer Kombinationslösung eingehenden Gitterpunkte N_K . Diese berechnet sich nach der Formel (3.25) im Zweidimensionalen bzw. (3.18) im Dreidimensionalen, wobei N_K nun stellvertretend für die dort auftretenden Benennungen $N_{ges}^{(2)}(s)$ bzw. $N_{ges}^{(3)}(s)$ steht. Die Anzahl N_K ist nach den Formeln proportional zur Anzahl der Gitterpunkte des zugehörigen Vollgitters. Bei Halbierung der Maschenweiten h wird die Anzahl N_K daher um einen Faktor 4 im Zweidimensionalen bzw. 8 im Dreidimensionalen größer. Bei der Vergrößerung des Ausdünnungsparameters s auf $s+1$ wird N_K gemäß den Formeln (3.26) und (3.19) um einen Faktor $1/2$ im Zweidimensionalen und um einen Faktor $1/4$ im Dreidimensionalen kleiner, und demnach bei Verkleinerung des Ausdünnungsparameters von $s+1$ auf s um einen Faktor 2 im Zweidimensionalen und um einen Faktor 4 im Dreidimensionalen größer.

Alle diese bei einer Kombinationsrechnung auftretenden Verhältnisse zwischen der Änderung des Interpolationsfehlers ε_I und der Gesamtanzahl aller in die Linearkombination zur Bildung einer Kombinationslösung eingehenden Gitterpunkte N_K sind in Tabelle 5.11 für zwei und drei Dimensionen und die linear-konstante bzw. quadratisch-lineare Interpolation zusammengestellt.

Betrachtet man den asymptotischen Fall, daß die Anzahl der Gitterpunkte N_V bzw. N_K immer mehr vergrößert wird, so können aus den Tabellen 5.10 und 5.11 für das Verhalten des Diskretisierungsfehlers im Vergleich zum Interpolationsfehler folgende interessante Aussagen gewonnen werden:

Wird bei einer Strömungssimulationsrechnung mit einem Verfahren erster Ordnung gerechnet, so nimmt der Interpolationsfehler ε_I in jedem Fall asymptotisch schneller ab als der Diskretisierungsfehler ε_D . Dies gilt ganz allgemein für den zwei- und dreidimensionalen Fall, für die beiden verschiedenen Interpolationsverfahren und für eine Änderung sowohl der Maschenweiten als auch des Ausdünnungsparameters.

Ebenso gilt dies allgemein bei einer Strömungssimulationsrechnung mit einem Verfahren zweiter Ordnung im zweidimensionalen Fall. Wird allerdings ein Verfahren zweiter Ordnung im dreidimensionalen Fall eingesetzt, so wird bei der linear-konstanten Interpolation bei einer Änderung des Ausdünnungsparameters der Interpolationsfehler asymptotisch langsamer kleiner als der Diskretisierungsfehler. Das bedeutet, daß man im Dreidimensionalen bei einer Kombinationsrechnung erst durch den Einsatz der quadratisch-linearen Interpolation ein Verfahren besitzt, das die zweite Ordnung, die man in der Strömungssimulationsrechnung verwendet, nicht verschlechtert.

Kapitel 6

Anwendungen mit dem Strömungslöser *Nast++*

6.1 Der Strömungslöser *Nast++*

6.1.1 Allgemeines

Der Strömungslöser *Nast++* wurde am Institut für Informatik V der TU München entwickelt. Das Programm dient zur Simulation zeitabhängiger Strömungen von laminaren, inkompressiblen Fluiden in zwei und drei Raumdimensionen. Das mathematische Modell sind die Navier-Stokes-Gleichungen (5.1), (5.2). Die räumliche Diskretisierung geschieht auf einem strukturierten, orthogonalen Gitter mittels Finiter Differenzen, wobei die Freiheitsgrade, wie in Abschnitt 5.2 beschrieben, auf einem versetzten Gitter angeordnet sind. Zur zeitlichen Diskretisierung wird ein explizites Eulerverfahren verwendet. Die Geschwindigkeitswerte zu einem neuen Zeitpunkt werden somit nur aus den Geschwindigkeitswerten des vorherigen Zeitpunkts ermittelt. Um die Divergenzfreiheit des Geschwindigkeitsfeldes zu gewährleisten, wird mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung eine Poissongleichung für den Druck aufgestellt, deren Lösung ein Druckfeld ergibt, das ein divergenzfreies Geschwindigkeitsfeld im neuen Zeitpunkt garantiert.

Eine praxisbezogene Beschreibung des in *Nast++* verwendeten mathematischen Modells sowie der Diskretisierung mittels Finiter Differenzen findet sich in [12]. Darin ist auch die Anleitung zu einer Implementierung in *C* für den zweidimensionalen Fall enthalten. Einen objektorientierten Ansatz dazu entwickelte Brück [2]. Die Erweiterung auf den dreidimensionalen Fall, eine Erweiterung der Geometriebeschreibung für komplizierte Rechengebiete sowie die konkrete Implementierung in *C++* und Parallelisierung mittels *MPI* machte Pögl [24]. Die Dissertation von Mehl [21] umfasst eine Beschreibung von *Nast++*. Im folgenden werden daher nur

die Aspekte des Programms beschrieben, die für die Implementierung der Kombinationstechnik und für die Durchführung von Kombinationsrechnungen von Bedeutung sind. Die Programmschnittstellen, die verwendeten Rechnungsparameter sowie einige der möglichen Randbedingungen, die in *Nast++* Verwendung finden, werden erläutert. Auf die Parallelisierung von *Nast++* sowie die Behandlung von komplizierten Geometrien wird nicht eingegangen.

Alle Rechnungen in dieser Arbeit erfolgen mit *Nast++* für drei Dimensionen. Zweidimensionale Kombinationsrechnungen sind damit auch möglich, wenn man ein dreidimensionales Diskretisierungsgitter wählt, das in der dritten Raumrichtung nur ein oder zwei Kontrollvolumen Tiefe besitzt, und an den zu dieser Richtung normalen Gebietsoberflächen eine geeignete Randbedingung (*Rutschbedingung*) setzt. Die Kombinationsprogramme wurden ebenfalls für drei Dimensionen implementiert. Sie sind aber in unveränderter Form für zweidimensionale Probleme einsetzbar, wenn man die Ausdünnungen der verschiedenen zu kombinierenden groben Gitter gemäß einer zweidimensionalen Kombinationsrechnung wählt und keine Ausdünnungen in der dritten Raumrichtung vornimmt.

6.1.2 Randbedingungen

An den äußeren Rändern des Berechnungsgebiets müssen Randbedingungen für die Strömungsgeschwindigkeit bzw. für den Druck angegeben werden. In einer der Eingabedateien von *Nast++* wird daher für jedes einzelne Kontrollvolumen, das mit mindestens einer Kontrollvolumenoberfläche am Gebietsrand liegt, in Abhängigkeit von der betreffenden Richtung die Randbedingung definiert. Die Benennungen der dabei benutzten Richtungen sind in Abbildung 6.1 dargestellt. In *Nast++* sind verschiedene Randbedingungen für die Strömungsgeschwindigkeit bzw. den Druck implementiert [21]. In dieser Arbeit werden nur folgende Randbedingungen für die Strömungsgeschwindigkeit benutzt:

- Haftbedingung (**NOSLIP**): Die Geschwindigkeit am Rand ist null ($\vec{u} = 0$).
- Rutschbedingung (**SLIP**): Die zur Wand senkrechte Geschwindigkeitskomponente verschwindet ebenso wie die Normalableitung der zur Wand parallelen Geschwindigkeitskomponente ($\vec{u}_\perp = 0, \frac{\partial \vec{u}_\parallel}{\partial \vec{n}} = 0$).
- Einströmbedingung (**INFLOW**): Die Geschwindigkeit am Rand wird fest vorgegeben ($\vec{u} = \vec{u}_{in}$).

Intern sind in *Nast++* die Randbedingungen so implementiert, daß um das eigentliche Berechnungsgebiet herum noch eine Randschicht von Kontrollvolumen gelegt wird. In Abbildung 6.2 ist dieses für den dreidimensionalen Fall skizziert. An den versetzten Gitterpunkten in den Kontrollvolumen dieser Randschicht wer-

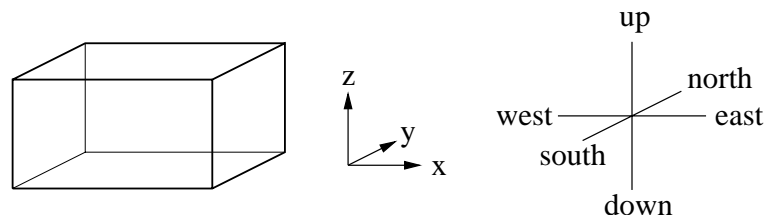


Abb. 6.1: Kontrollvolumen und Benennung der Richtungen für die Angabe der Randbedingungen

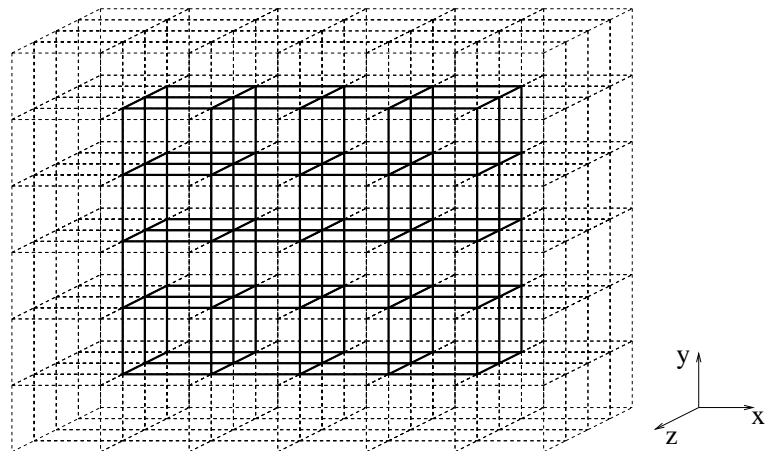


Abb. 6.2: Dreidimensionales Berechnungsgebiet mit Randschicht

den während der Strömungsberechnung die jeweiligen Geschwindigkeitswerte so gesetzt, daß genau am Gebietsrand, gegebenenfalls mit linearer Interpolation, die geforderten Randbedingungen erfüllt werden.

Aus Gründen der Übersichtlichkeit soll dies an dem zweidimensionalen Gitter in Abbildung 6.3 verdeutlicht werden: Dort sind alle Punkte eingezeichnet, an denen im Berechnungsgebiet, auf dem Gebietsrand sowie in der Randschicht Geschwindigkeitswerte bei der Strömungsberechnung entweder berechnet oder direkt als Randbedingung gesetzt werden. Soll beispielsweise an der unteren Seite des Berechnungsgebietes eine Haftbedingung vorliegen, so wird *Nast++* in der Eingabedatei für die Randwerte mitgeteilt, daß alle Kontrollvolumen (i, j) mit $i = 1, \dots, i_{max}$ und $j = 1$ an ihrer Südseite die Randbedingung `NOSLIP` haben. In *Nast++* werden bei der Lösung des Strömungsproblems für jeden Zeitschritt während der Rechnung für $i = 2, \dots, i_{max}$ die Geschwindigkeitswerte $u_{i,0} := -u_{i,1}$ und für $i = 1, \dots, i_{max}$ die Geschwindigkeitswerte $v_{i,1} := 0$ gesetzt. Man sieht, daß lineare Interpolation zwischen $u_{i,0}$ und $u_{i,1}$ genau auf dem Gebietsrand den geforderten Wert 0 ergibt.

Bei der Simulation einer Nischenströmung bewegt sich beispielsweise der obere Gebietsrand in der Geometrie aus Abbildung 6.3 mit einer vorgegebenen, kon-

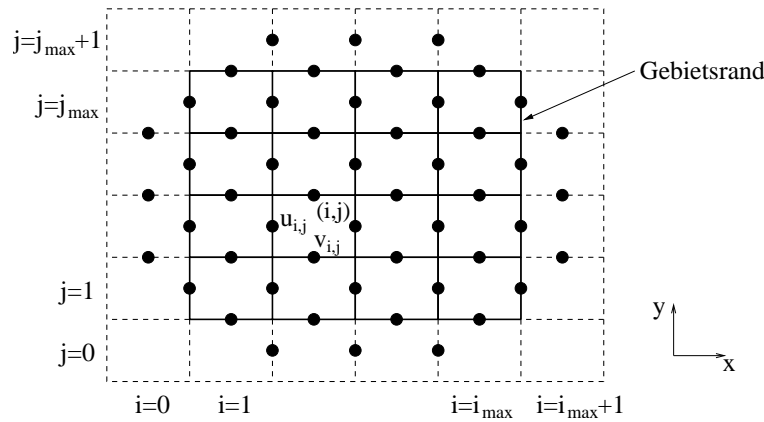


Abb. 6.3: Berechnungsgebiet mit Randzellen sowie alle Punkte, an denen Geschwindigkeitswerte liegen

stanten Geschwindigkeit $\vec{u} = (u_0, 0)$ von links nach rechts. Dieses wird in *Nast++* dadurch erreicht, daß in der Eingabedatei für die Randwerte für alle Kontrollvolumen (i, j) mit $i = 1, \dots, i_{\max}$ und $j = j_{\max}$ an ihrer Nordseite die Randbedingung **INFLOW** vorgeschrieben wird mit dem konkreten Geschwindigkeitswert $(u_0, 0)$. In *Nast++* werden dann während der Rechnung für $i = 2, \dots, i_{\max}$ die Geschwindigkeitswerte $u_{i, j_{\max}+1} := 2u_0 - u_{i, j_{\max}}$ und für $i = 1, \dots, i_{\max}$ die Geschwindigkeitswerte $v_{i, j_{\max}+1} := 0$ gesetzt. Lineare Interpolation zwischen den Geschwindigkeitswerten $u_{i, j_{\max}}$ und $u_{i, j_{\max}+1}$ führt somit genau am Gebietsrand auf den geforderten Wert u_0 . Wenn die Geschwindigkeit am Rand nicht konstant sein soll, kann in der Eingabedatei für die Randwerte für jedes einzelne Kontrollvolumen ein anderer Geschwindigkeitswert als Randbedingung angegeben werden.

Durch die lineare Interpolation der Geschwindigkeitswerte auf den Gebietsrand ergibt sich ein Interpolationsfehler der Ordnung $O(h^2)$, wobei h die Maschenweite des Gitters in x - bzw. y -Richtung ist. Diesen Diskretisierungsfehler am Rand beobachtet man in den späteren Rechnungen. Es wird dann auf Gittern verschiedener Maschenweiten h jeweils dasselbe Problem berechnet, und man kann beobachten, daß für das berechnete Geschwindigkeitsfeld durch die lineare Interpolation der Geschwindigkeitswerte der beschriebene Diskretisierungsfehler am Rand auftritt.

6.1.3 Schnittstellen

Als äußere Schnittstellen von *Nast++* dienen im wesentlichen drei Dateien:

npa-Eingabedatei:

In dieser Datei werden alle für die Rechnung benötigten Parameter festgelegt. Die wichtigsten dabei sind:

- Räumliche Abmessungen des Berechnungsgebiets (L_x, L_y, L_z) sowie Anzahl der Kontrollvolumen in jeder Raumrichtung ($i_{max}, j_{max}, k_{max}$)
- Zeitschrittweite (Δt) und Endzeitpunkt (T_{Ende}) der Simulation
- Zeitschrittweite für die Ausgabe der berechneten Felder ($\Delta t_{\text{Ausgabe}}$)
- Löser für die Druckgleichung (in dieser Arbeit immer SOR-Löser), maximale Anzahl der dabei auszuführenden Iterationen (`itermax`), Genauigkeitschranke für den Abbruch der Druckiterationen (`eps`), Relaxationsfaktor für die SOR-Iterationen (ω)
- Reynoldszahl (Re)
- Volumenkräfte (g_x, g_y, g_z)
- Mittelungsfaktor für zentrale und upwind-Differenzen bei der räumlichen Diskretisierung (γ): bei $\gamma = 0.0$ wird rein mit zentralen Differenzen gerechnet (Diskretisierungsordnung $O(h^2)$), bei $\gamma = 1.0$ rein mit upwind-Differenzen (Diskretisierungsordnung $O(h)$)

Für die Zeitschrittweite Δt sollte aus Stabilitätsgründen folgende Bedingung erfüllt sein [12]:

$$\Delta t < \min \left(\frac{Re}{2} \left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} + \frac{1}{h_z^2} \right)^{-1}, \frac{h_x}{|u_{max}|}, \frac{h_y}{|v_{max}|}, \frac{h_z}{|w_{max}|} \right) \quad (6.1)$$

Dabei sind h_x, h_y, h_z die Maschenweiten des Diskretisierungsgitters in den einzelnen Raumrichtungen und $u_{max}, v_{max}, w_{max}$ die in diesen Raumrichtungen auftretenden maximalen Geschwindigkeiten.

nbv-Eingabedatei:

In dieser Datei werden die Randbedingungen für die Geschwindigkeiten bzw. für den Druck und gegebenenfalls für die Temperatur und Stoffkonzentrationen definiert. Für jedes Kontrollvolumen, das mit mindestens einer Kontrollvolumenoberfläche auf dem Rand des Berechnungsgebiets liegt, ist hier ein Eintrag vorhanden. Dieser Eintrag legt die für dieses Kontrollvolumen an dieser Oberfläche gültigen Randbedingungen fest.

nfv-Ein- und Ausgabedatei:

Diese Datei enthält im wesentlichen das Geschwindigkeits- und Druckfeld zu einem bestimmten Zeitpunkt. Bei Rechnungen mit komplizierten Geometrien enthält sie auch die Geometriebeschreibung; bei Rechnungen mit Temperatur oder Stoffkonzentrationen sind auch diese Größen in ihr gespeichert. Eine Datei in diesem Format dient als Eingabedatei, wenn *Nast++* mit einer Vorbelegung an Feldgrößen gestartet werden soll, und sie dient als Ausgabedatei, in die die berechneten Werte geschrieben werden. Sollen während einer Rechnung zu verschiedenen Zeitpunkten die Feldgrößen gespeichert werden, so werden nacheinander *nfv*-Dateien mit fortlaufender Numerierung herausgeschrieben. Weil das Format der *nfv*-Datei sowohl für die Eingabe als auch für die Ausgabe dient, ist es leicht möglich, *Nast++* mit bereits berechneten und herausgeschriebenen Feldgrößen neu zu starten. Die einzelnen Datenwerte in der *nfv*-Datei sind standardmäßig Dezimalzahlen in Exponentialschreibweise mit sieben signifikanten Stellen der Mantisse.

6.2 Implementierung des Kombinationsprogramms

In Kapitel 5.4 wurde bereits der prinzipielle Ablauf von zeitabhängigen Kombinationsrechnungen beschrieben. Daran angelehnt ist die Implementierung des Kombinationsprogramms: Der Strömungslöser *Nast++* für drei Dimensionen wird bei den Kombinationsrechnungen als *Black Box* eingesetzt. Das Kombinationsprogramm arbeitet unabhängig davon und ruft *Nast++* für die Rechnungen zwischen zwei *Kombinationsschritten* über die oben beschriebenen Schnittstellen auf.

Ausgangspunkt für eine Kombinationsrechnung ist ein sogenanntes *Projekt*. Darunter versteht man alle Eingabedateien, die für eine normale Vollgitterrechnung mit *Nast++* nötig sind. Das sind die oben beschriebene *npa*-Datei mit den Rechnungsparametern, die *nfv*-Datei mit einer Startbelegung der Feldgrößen und die *nbc*-Datei mit der Festlegung der Randbedingungen.

Folgende Fragen stellen sich für eine Kombinationsrechnung:

- Mit welchem Ausdünnungsparameter s soll gerechnet werden?
- Soll eine zwei- oder dreidimensionale Kombinationsrechnung mit den Ausdünnungsindizes der Tabellen 3.2 bzw. 3.4 durchgeführt werden?
- Zu welchen Zeitpunkten ($\Delta t_{\text{Kombination}}$) soll ein Kombinationsschritt stattfinden?
- Soll bei den Kombinationsschritten linear-konstant oder quadratisch-linear interpoliert werden?

In einer Eingabedatei für das Kombinationsprogramm, der *Steuerdatei*, werden die gewünschten Parameter für die Kombinationsrechnung festgelegt. Mit dieser Steuerdatei wird dann das Kombinationsprogramm gestartet, das folgendes leistet: Die *nfv*-Datei mit der Startbelegung für die Vollgitterrechnung wird für jedes grobe Gitter, das später für die Kombinationsrechnung gebraucht wird, *ausgedünnt*. Das bedeutet, daß das Geschwindigkeitsfeld auf die groben Gitter transferiert wird. Damit erhält man *nfv*-Dateien mit den Startbelegungen für die verschiedenen groben Gitter. Ebenso werden die *nbc*-Datei mit der Festlegung der Randbedingungen sowie die *npa*-Datei, in der unter anderem die Anzahl der Kontrollvolumen des benutzten Gitters gespeichert ist, für jedes grobe Gitter geeignet angepaßt. Für jedes einzelne grobe Gitter wird anschließend *Nast++* mit den jeweiligen Eingabedateien gestartet, und es werden soviele Zeitschritte mit der Zeitschrittweite Δt berechnet, bis der in der Steuerdatei angegebene Zeitpunkt $\Delta t_{\text{Kombination}}$ erreicht ist. Dann erfolgt der Kombinationsschritt, in dem die Lösungen aller groben Gitter auf alle anderen groben Gitter transferiert und dort jeweils als Linearkombination kombiniert werden. Falls gewünscht wird in diesem Schritt auch eine Kombinationslösung auf dem Vollgitter gebildet. Die Linearkombinationen auf den groben Gittern dienen dann als Startfelder für die neuen Aufrufe von *Nast++*. In Abbildung 6.4 ist der Ablauf einer Kombinationsrechnung schematisch dargestellt. Die dort angegebenen Ausdünnungsindizes entsprechen einer dreidimensionalen Kombinationsrechnung mit dem Ausdünnungsparameter $s = 1$.

Nast++ berechnet in jedem Zeitschritt ein Geschwindigkeitsfeld und ein Druckfeld. Beim Kombinationsschritt werden auf den verschiedenen groben Gittern aber nur Linearkombinationen der transferierten Geschwindigkeiten gebildet und die Lösung für das Druckfeld unverändert übernommen. Das geschieht, weil das Druckfeld für den nächsten Zeitschritt im Lösungsalgorithmus von *Nast++* völlig neu aus der Poissongleichung berechnet wird und das Druckfeld vom alten Zeitschritt dabei nur als Startwert für das Iterationsverfahren verwendet wird. Es zeigte sich bei den Kombinationsrechnungen, daß eine Kombination der Druckwerte durch eine geeignete Mittelwertbildung in den einzelnen Gitterausschnitten der zu kombinierenden Gitter die Konvergenz des SOR-Lösers bei der Lösung der Poissongleichung sogar verschlechterte.

Das Kombinationsprogramm wurde in der Programmiersprache *Perl* implementiert. Diese Sprache wurde gewählt, weil mit *Perl* einerseits die Manipulation von Dateien recht leicht möglich ist, was beispielsweise beim Anlegen aller für eine Kombinationsrechnung benötigten Dateien Vorteile bietet. Andererseits kann mit *Perl* auf einfache Weise die Steuerung bzw. der Aufruf von anderen Programmen geschehen. Dieses betrifft bei einer Kombinationsrechnung beispielsweise den Aufruf von *Nast++* für die verschiedenen groben Gitter mit jeweils anderen Eingabedaten oder von Programmen zur Auswertung von Daten direkt während einer Kombinationsrechnung.

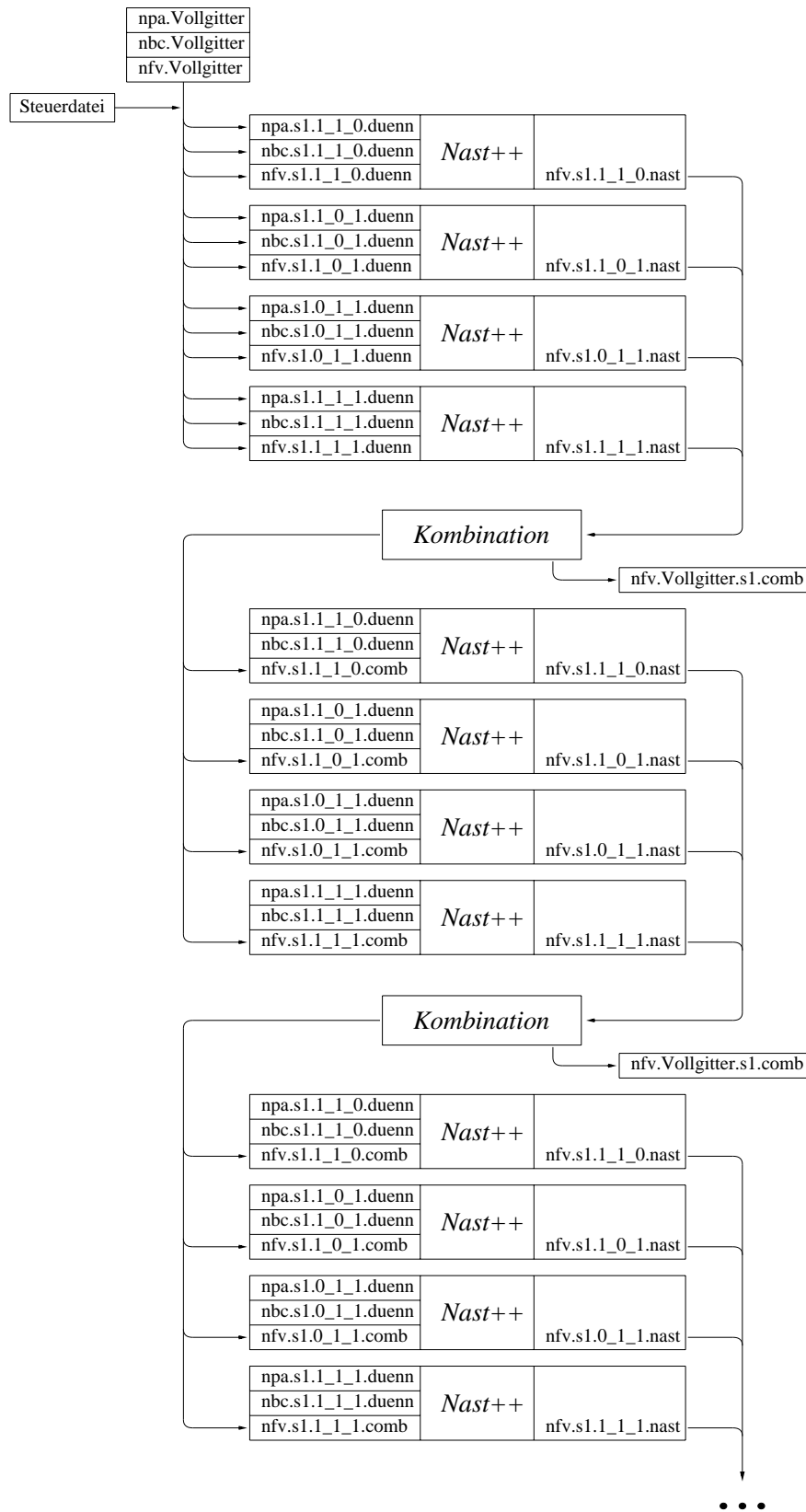


Abb. 6.4: Schematischer Ablauf einer Kombinationsrechnung

6.3 Anwendung bei verschiedenen Strömungen

Es wird die zwei- und dreidimensionale Nischenströmung als Testfall verwendet, um das Verhalten des Interpolationsfehlers der Kombinationslösung im Vergleich mit den theoretisch erwarteten Fehlern und mit den Diskretisierungsfehlern auf Vollgittern zu untersuchen. Zunächst werden dazu drei Begriffe, die für die folgende Diskussion von Bedeutung sind, festgelegt:

Der L_2 -Kombinationsfehler ist die diskrete L_2 -Norm der punktweisen Differenz einer Kombinationslösung von der zugehörigen Vollgitterlösung. Für jede Geschwindigkeitskomponente u, v bzw. u, v, w der Lösungen wird er einzeln berechnet. Für die u -Geschwindigkeitskomponente ist er folgendermaßen definiert:

$$L_2\text{-Kombinationsfehler}(u) := \left(\frac{1}{\#i} \sum_i \left((u_{\text{Kombinationslösung}})_i - (u_{\text{Vollgitterlösung}})_i \right)^2 \right)^{1/2} \quad (6.2)$$

Dabei ist i ein Laufindex über alle diskreten u -Geschwindigkeitswerte auf den beiden Gittern und $\#i$ deren Gesamtanzahl. Für die v - und w -Geschwindigkeitskomponente wird der L_2 -Kombinationsfehler entsprechend gebildet.

Der L_2 -Diskretisierungsfehler ist ein Fehler zwischen zwei Vollgitterlösungen, die für das gleiche Problem auf Gittern unterschiedlicher Maschenweite berechnet wurden. Auch er wird für jede Geschwindigkeitskomponente einzeln angegeben. Die Lösung auf dem Gitter mit der kleineren Maschenweite wird dafür zunächst auf das Gitter mit größerer Maschenweite transferiert gemäß Abschnitt 5.5. Anschließend wird die diskrete L_2 -Norm der punktweisen Differenz dieser transferierten Lösung mit der Lösung auf dem Gitter größerer Maschenweite analog zu (6.2) gebildet.

Der *geschätzte* L_2 -Interpolationsfehler ist der Fehler, den man im Zweidimensionalen gemäß der Tabelle 5.1 mit den Werten c_1 bzw. c_2 nach (5.36) bzw. (5.37) und im Dreidimensionalen gemäß der Tabelle 5.3 mit den Werten c_3 bzw. c_4 nach (5.38) bzw. (5.40) berechnet. Auch dieser Fehler wird für jede Geschwindigkeitskomponente einzeln bestimmt. Die Ausdrücke in den Tabellen 5.1 und 5.3 und den Formeln (5.36), (5.37), (5.38) und (5.40) sind jeweils für die u -Geschwindigkeitskomponente angegeben. Um die Werte für die v - bzw. w -Geschwindigkeitskomponente zu berechnen, müssen die Abhängigkeiten von h_x, h_y und h_z und die partiellen Ableitungen in diesen Ausdrücken entsprechend permutiert werden.

In den folgenden Testrechnungen wird im wesentlichen der Zusammenhang dieser drei Fehler untersucht: Bei der Durchführung einer Kombinationsrechnung tritt in der Kombinationslösung der L_2 -Kombinationsfehler auf. Liegt dieser Fehler in der Größe des geschätzten L_2 -Interpolationsfehlers, so bedeutet dies, daß

die Kombinationslösung eine gute Lösung darstellt, weil der geschätzte L_2 -Interpolationsfehler allein durch den Transfer der Lösung vom Kombinationsgitter auf das Vollgitter gemacht wird. Ist der L_2 -Kombinationsfehler größer als der geschätzte L_2 -Interpolationsfehler, so überwiegen andere Fehler in der Kombinationsrechnung. Die Kombinationsrechnung führt auf eine schlechtere Lösung als eine Vollgitterrechnung. Der Fall, daß der L_2 -Kombinationsfehler kleiner wird als der geschätzte L_2 -Interpolationsfehler, kann auch eintreten. Darauf wird in der Diskussion der Testfälle eingegangen.

Auch der Vergleich vom L_2 -Kombinationsfehler und L_2 -Diskretisierungsfehler ist interessant. An ihm erkennt man, bis zu welchem Ausdünnungsparameter eine Kombinationsrechnung eine Lösung liefert, die ähnlich gut wie eine Vollgitterlösung auf einem Gitter mit größerer Maschenweite ist.

6.3.1 Zweidimensionale Nischenströmung mit $\text{Re}=10$

Als Testfall dient eine zweidimensionale Nischenströmung auf dem Gebiet $[0, 1]^2$, wie sie in Abbildung 6.5 skizziert ist. Wie in Abschnitt 6.1.1 beschrieben, werden die folgenden Rechnungen mit *Nast++* für drei Dimensionen und dem Kombinationsprogramm für drei Dimensionen durchgeführt. In der z -Richtung werden auf allen Gittern nur zwei Kontrollvolumen mit der Maschenweite $h_z = 2^{-5}$ und an den Gebietsseiten in z -Richtung Rutschbedingungen für die Geschwindigkeiten verwendet. Das eigentliche Berechnungsgebiet besitzt also eine wie in Abbildung 6.2 skizzierte Gestalt. Durch die vorgegebenen Symmetrien wird somit das dreidimensionale Problem auf ein zweidimensionales reduziert, und daher wird in der folgenden Diskussion nicht auf die z -Richtung eingegangen. Die für die zweidimensionalen Kombinationsrechnungen benutzten Ausdünnungsindizes werden gemäß Tabelle 3.4 gewählt und beziehen sich auf die x - und y -Richtung.

Als Randbedingungen \vec{u}_R für das Geschwindigkeitsfeld werden an drei Seiten

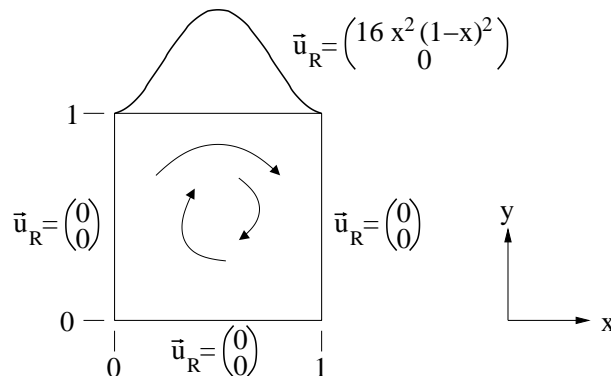


Abb. 6.5: Skizze zur zweidimensionalen Nischenströmung

des Gebiets Haftbedingungen ($\vec{u}_R = 0$) vorgegeben. Am oberen Rand wird die Einströmbedingung festgelegt durch $(\vec{u}_R)_x = 16x^2(1-x)^2$, $(\vec{u}_R)_y = 0$, durch die die Strömung angetrieben wird. Der Fluß durch die Seiten des Gebiets ist somit überall 0.

Zunächst wird mit *Nast++* die Lösung der dimensionslosen Navier-Stokes-Gleichungen (5.5), (5.6) für eine Reynoldszahl $Re = 10$ und ohne Volumenkräfte, also $\vec{g} = 0$, berechnet. Die Berechnung erfolgt mit zentralen Differenzen in der räumlichen Diskretisierung, also mit $\gamma = 0$ und der Approximationsordnung $O(h^2)$. Zum Startzeitpunkt ist das Fluid in Ruhe.

Berechnet wird vom Startzeitpunkt $T_{\text{Start}} = 0.0$ bis zum Zeitpunkt $T_{\text{Ende}} = 1.0$, an dem sich das Strömungsfeld nur noch geringfügig von Zeitschritt zu Zeitschritt ändert. In Abbildung 6.6 ist die zeitliche Entwicklung des Geschwindigkeitsfeldes für vier verschiedene Zeitpunkte und in Abbildung 6.8 die u - und v -Geschwindigkeitskomponente sowie das Druckfeld zum Zeitpunkt $T_{\text{Ende}} = 1.0$ dargestellt.

Auf dem 128^2 -Gitter wird mit der konstanten Zeitschrittweite $\Delta t = 2^{-13}$, auf dem 64^2 -, 32^2 - und 16^2 -Gitter mit der Zeitschrittweite $\Delta t = 2^{-11}$ gerechnet. Diese Werte erfüllen die Stabilitätsbedingung (6.1). Nach Zeitintervallen $\Delta t_{\text{Kombination}} = 2^{-7}$ wird jeweils ein Kombinationsschritt gemacht. Es erfolgen jeweils Rechnungen auf den vollen Gittern sowie zweidimensionale Kombinationsrechnungen mit linear-konstanter und quadratisch-linearer Interpolation bis hin zum Ausdünnungsparameter $s = 6$.

In Abbildung 6.7 ist der L_2 -Kombinationsfehler für das 128^2 -Gitter für Kombinationsrechnungen mit verschiedenen Ausdünnungsparametern dargestellt, der bei jedem Kombinationsschritt berechnet wurde. Die Abbildung zeigt somit die zeitliche Änderung des L_2 -Kombinationsfehlers. Wie unten gezeigt wird, ist bei diesem Testfall der L_2 -Kombinationsfehler fast genau gleich dem geschätzten L_2 -Interpolationsfehler. Dieser verändert sich aber auch zeitabhängig, weil er proportional ist zur dritten bzw. fünften gemischten Ableitung des Geschwindigkeitsfeldes und sich dieses im Laufe der Rechnung zeitabhängig verändert.

Für den Zeitpunkt $T_{\text{Ende}} = 1.0$ sind in Tabelle 6.1 die L_2 -Kombinationsfehler der u - und v -Geschwindigkeitskomponente angegeben. Um zu überprüfen, ob der L_2 -Kombinationsfehler in der Größe des geschätzten L_2 -Interpolationsfehlers liegt, bestimmt man Näherungswerte für c_1 und c_2 der gemittelten dritten bzw. fünften gemischten Ableitungen in (5.36) und (5.37) mit Hilfe der Differenzensterne (5.43) bzw. (5.44). Für die u - und v -Geschwindigkeitskomponente zum Zeitpunkt $T_{\text{Ende}} = 1.0$ erhält man mit der 128^2 -Vollgitterlösung dafür folgende Werte:

$$\begin{aligned} c_1^{(128)}(u) &= 3.265 \cdot 10^1 & , & & c_2^{(128)}(u) &= 1.907 \cdot 10^4 \\ c_1^{(128)}(v) &= 3.287 \cdot 10^1 & , & & c_2^{(128)}(v) &= 1.924 \cdot 10^4 \end{aligned} \quad (6.3)$$

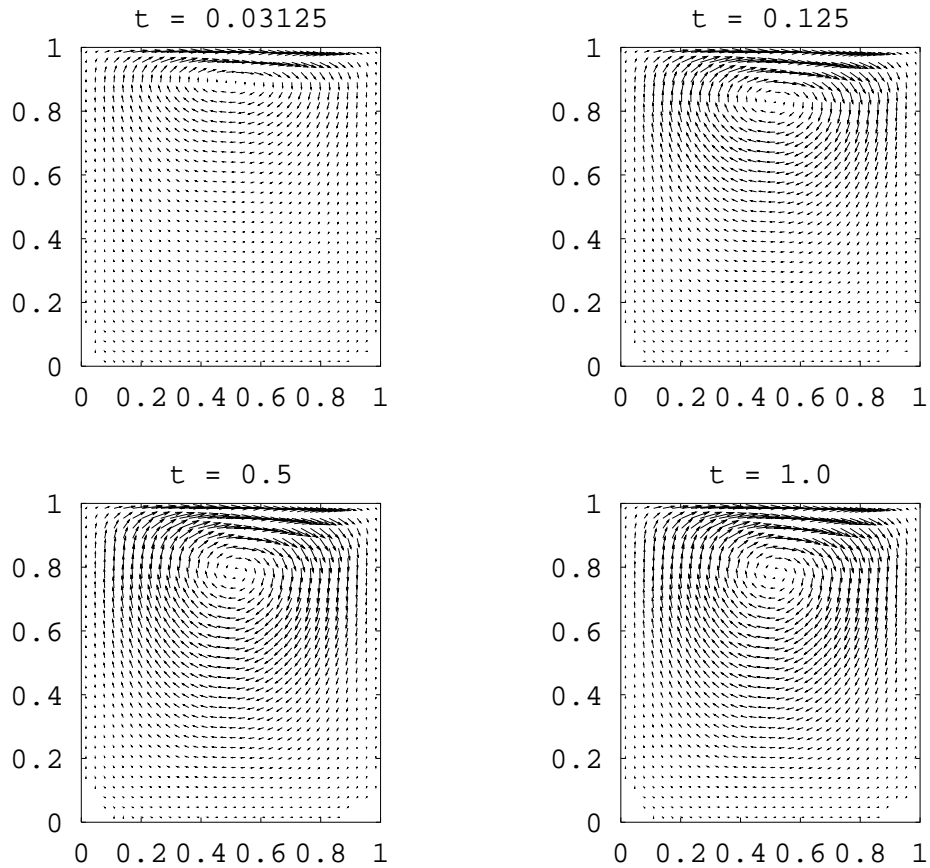


Abb. 6.6: Zeitliche Entwicklung der zweidimensionalen Nischenströmung mit $Re = 10$ zu den Zeitpunkten $t = 0.03125, 0.125, 0.5, 1.0$

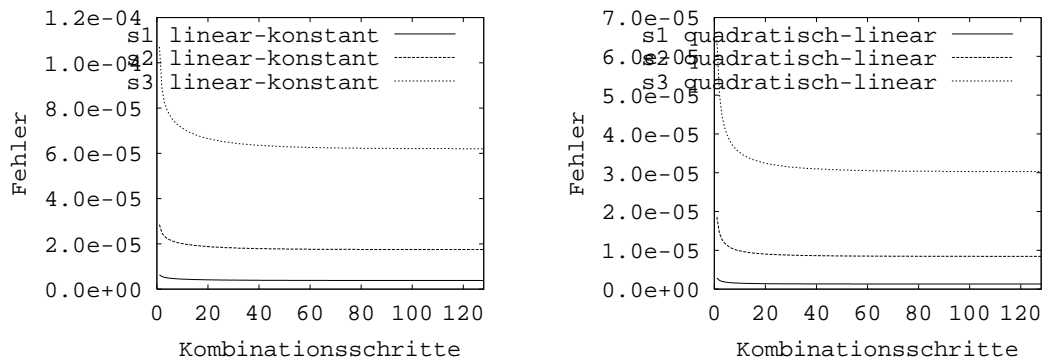


Abb. 6.7: Zeitliche Entwicklung des L_2 -Kombinationsfehlers für das 128^2 -Gitter der zweidimensionalen Nischenströmung mit $Re = 10$ für verschiedene Ausdünnungsparameter bei linear-konstanter (links) sowie quadratisch-linearer Interpolation (rechts)

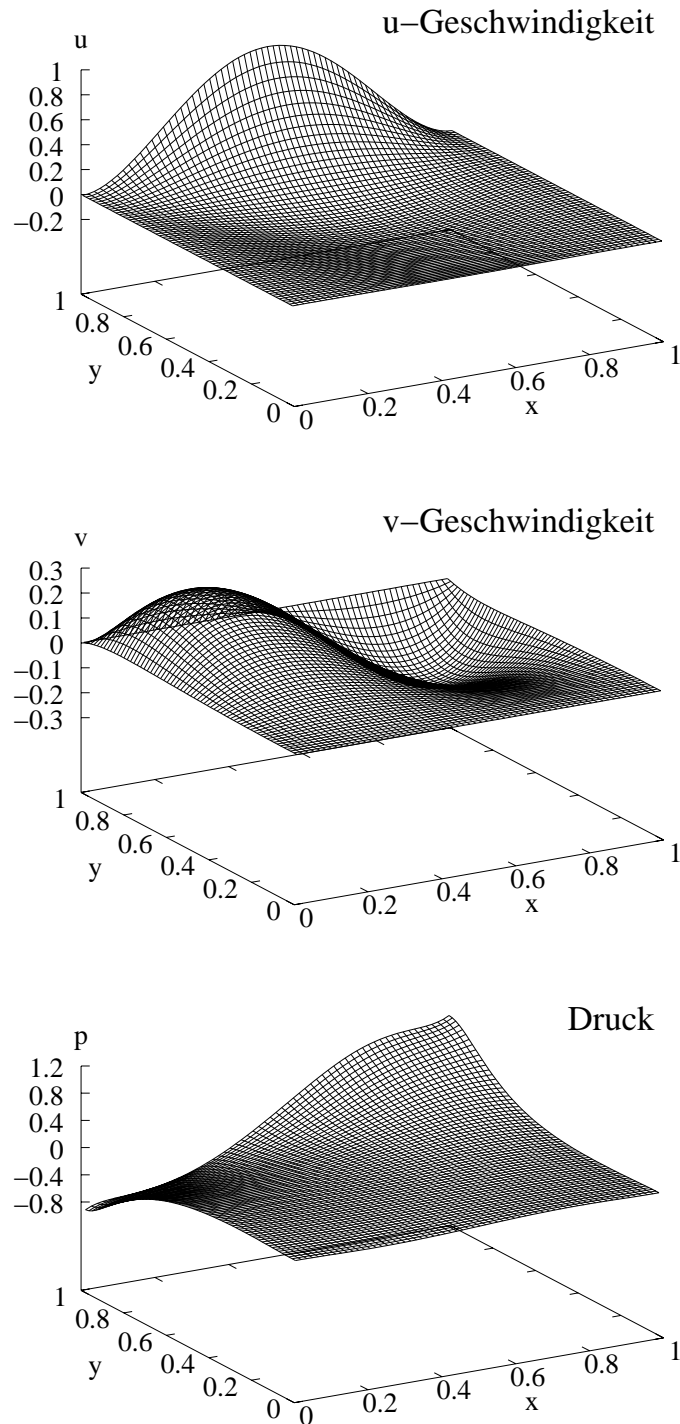


Abb. 6.8: Geschwindigkeitskomponenten und Druckfeld der zweidimensionalen Nischenströmung mit $Re = 10$ zum Zeitpunkt $T_{\text{Ende}} = 1.0$

Gitter	$s = 1$	$s = 2$	$s = 3$	$s = 4$	$s = 5$	$s = 6$
	<i>u</i> -Geschwindigkeit: Linear-konstante Interpolation					
128^2	$3.82 \cdot 10^{-6}$	$1.75 \cdot 10^{-5}$	$6.20 \cdot 10^{-5}$	$2.24 \cdot 10^{-4}$	$8.14 \cdot 10^{-4}$	$1.86 \cdot 10^{-3}$
64^2	$2.75 \cdot 10^{-5}$	$1.14 \cdot 10^{-4}$	$4.38 \cdot 10^{-4}$	$1.62 \cdot 10^{-3}$	$3.66 \cdot 10^{-3}$	
32^2	$1.82 \cdot 10^{-4}$	$7.99 \cdot 10^{-4}$	$3.07 \cdot 10^{-3}$	$6.53 \cdot 10^{-3}$		
16^2	$1.18 \cdot 10^{-3}$	$5.03 \cdot 10^{-3}$	$9.58 \cdot 10^{-3}$			
	<i>u</i> -Geschwindigkeit: Quadratisch-lineare Interpolation					
128^2	$1.32 \cdot 10^{-6}$	$8.45 \cdot 10^{-6}$	$3.03 \cdot 10^{-5}$	$7.37 \cdot 10^{-5}$	$1.63 \cdot 10^{-4}$	$4.50 \cdot 10^{-4}$
64^2	$1.32 \cdot 10^{-5}$	$5.38 \cdot 10^{-5}$	$1.29 \cdot 10^{-4}$	$3.77 \cdot 10^{-4}$	$1.29 \cdot 10^{-3}$	
32^2	$5.64 \cdot 10^{-5}$	$1.90 \cdot 10^{-4}$	$9.57 \cdot 10^{-4}$	$3.60 \cdot 10^{-3}$		
16^2	$2.60 \cdot 10^{-4}$	$2.28 \cdot 10^{-3}$	$8.31 \cdot 10^{-3}$			
	<i>v</i> -Geschwindigkeit: Linear-konstante Interpolation					
128^2	$3.84 \cdot 10^{-6}$	$1.80 \cdot 10^{-5}$	$6.74 \cdot 10^{-5}$	$2.43 \cdot 10^{-4}$	$8.58 \cdot 10^{-4}$	$2.58 \cdot 10^{-3}$
64^2	$2.89 \cdot 10^{-5}$	$1.25 \cdot 10^{-4}$	$4.72 \cdot 10^{-4}$	$1.70 \cdot 10^{-3}$	$5.12 \cdot 10^{-3}$	
32^2	$1.97 \cdot 10^{-4}$	$8.51 \cdot 10^{-4}$	$3.23 \cdot 10^{-3}$	$9.67 \cdot 10^{-3}$		
16^2	$1.27 \cdot 10^{-3}$	$5.39 \cdot 10^{-3}$	$1.59 \cdot 10^{-2}$			
	<i>v</i> -Geschwindigkeit: Quadratisch-lineare Interpolation					
128^2	$9.03 \cdot 10^{-7}$	$5.74 \cdot 10^{-6}$	$1.89 \cdot 10^{-5}$	$4.25 \cdot 10^{-5}$	$1.10 \cdot 10^{-4}$	$3.89 \cdot 10^{-4}$
64^2	$8.76 \cdot 10^{-6}$	$3.34 \cdot 10^{-5}$	$8.30 \cdot 10^{-5}$	$2.94 \cdot 10^{-4}$	$1.23 \cdot 10^{-3}$	
32^2	$4.07 \cdot 10^{-5}$	$1.46 \cdot 10^{-4}$	$8.02 \cdot 10^{-4}$	$3.71 \cdot 10^{-3}$		
16^2	$2.38 \cdot 10^{-4}$	$2.04 \cdot 10^{-3}$	$9.46 \cdot 10^{-3}$			

Tabelle 6.1: L_2 -Kombinationsfehler der Geschwindigkeitskomponenten der zwei-dimensionalen Nischenströmung mit $Re = 10$ zum Zeitpunkt $T_{\text{Ende}} = 1.0$

Mit diesen Werten ergeben sich die geschätzten L_2 -Interpolationsfehler gemäß Tabelle 5.1 für die Kombinationsrechnung mit Ausdünnungsparameter $s = 1$:

$$\begin{aligned}
 u\text{-Geschw., linear-konstante Int.:} & \quad \frac{\sqrt{2}}{8} c_1^{(128)}(u) \left(\frac{1}{128}\right)^3 = 2.75 \cdot 10^{-6} \\
 v\text{-Geschw., linear-konstante Int.:} & \quad \frac{\sqrt{2}}{8} c_1^{(128)}(v) \left(\frac{1}{128}\right)^3 = 2.77 \cdot 10^{-6} \\
 u\text{-Geschw., quadratisch-lineare Int.:} & \quad \frac{\sqrt{2}}{8} c_2^{(128)}(u) \left(\frac{1}{128}\right)^5 = 9.81 \cdot 10^{-8} \\
 v\text{-Geschw., quadratisch-lineare Int.:} & \quad \frac{\sqrt{2}}{8} c_2^{(128)}(v) \left(\frac{1}{128}\right)^5 = 9.90 \cdot 10^{-8}
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

Bei linear-konstanter Interpolation ist der geschätzte L_2 -Interpolationsfehler für beide Geschwindigkeitskomponenten etwas kleiner als der bei der Strömungsrechnung auftretende L_2 -Kombinationsfehler (Tabelle 6.1), aber er liegt in derselben Größenordnung. Bei quadratisch-linearer Interpolation hingegen ist der für den Ausdünnungsparameter $s = 1$ geschätzte L_2 -Interpolationsfehler in 6.4 für beide Geschwindigkeitskomponenten deutlich kleiner als der L_2 -Kombinationsfehler. Der Grund für die Abweichung besteht darin, daß die Ein- und Ausgabedateien von *Nast++*, wie in Abschnitt 6.1.3 beschrieben, nur eine siebenstellige Genauigkeit in den Feldgrößen benutzen. Bei einer durch die Antriebsfunktion am oberen Gebietsrand maximal erreichten Geschwindigkeit von $u \approx 1$ ist ein Fehler unterhalb der Größe 10^{-6} nicht mehr im Genauigkeitsbereich. Für größere Ausdünnungsparameter nimmt der geschätzte L_2 -Interpolationsfehler aber gemäß den Faktoren in Tabelle 5.2 schnell zu und der Vergleich mit den L_2 -Kombinationsfehlern wird wieder sinnvoll.

In den Abbildungen 6.9 und 6.10 sind alle berechneten Werte der L_2 -Kombinationsfehler aus Tabelle 6.1 und die geschätzten L_2 -Interpolationsfehler, die gemäß Tabelle 5.1 mit den Werten aus (6.3) berechnet werden, zusammengestellt für die beiden Geschwindigkeitskomponenten, die verschiedenen Gitter und die linear-konstante sowie die quadratisch-lineare Interpolation. Zur besseren Überschaubarkeit sind die einzelnen Punkte jeweils durch Linien verbunden. Im folgenden werden die aus diesen Abbildungen zu entnehmenden Resultate vorgestellt.

Für die linear-konstante Interpolation liegen der L_2 -Kombinationsfehler und der geschätzte L_2 -Interpolationsfehler bei allen Gittern sehr nahe beieinander. Das bedeutet, daß die zwischen der Vollgitterlösung und der Kombinationslösung auftretende Differenz der Lösungen durch den Interpolationsfehler, der beim Transfer der Kombinationslösung auf das Vollgitter auftritt, hervorgerufen wird. Somit liefert die Kombinationsrechnung auch bei großen Ausdünnungsparametern eine gute Lösung.

Der L_2 -Kombinationsfehler ist bei der quadratisch-linearen Interpolation immer kleiner als bei der linear-konstanten Interpolation. Die Kombinationsrechnung mit quadratisch-linearer Interpolation liefert also einen kleineren Fehler und somit

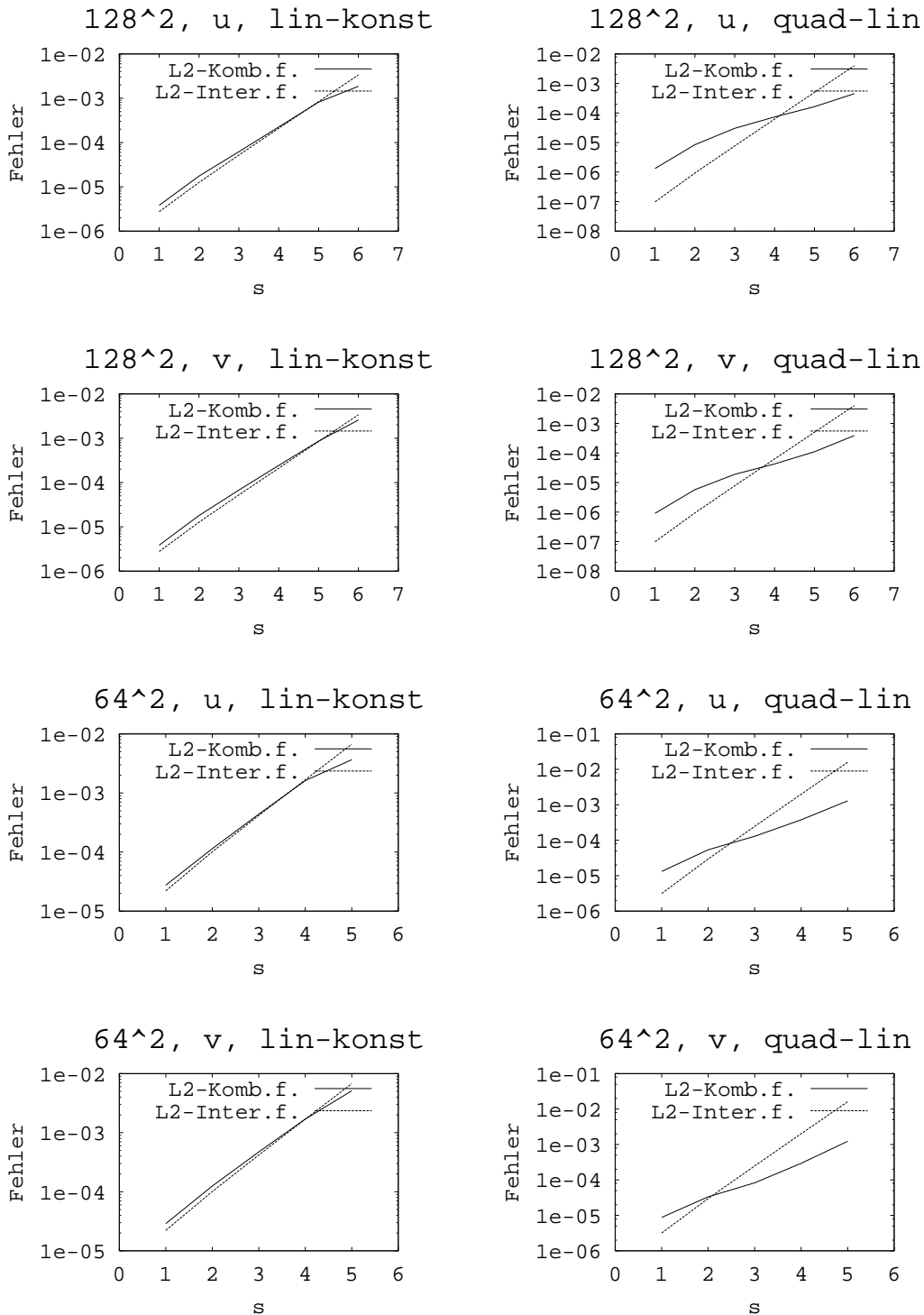


Abb. 6.9: L_2 -Kombinationsfehler und geschätzte L_2 -Interpolationsfehler der zweidimensionalen Nischenströmung mit $Re = 10$ für das 128^2 - und 64^2 -Gitter in Abhängigkeit vom Ausdünnungsparameter s

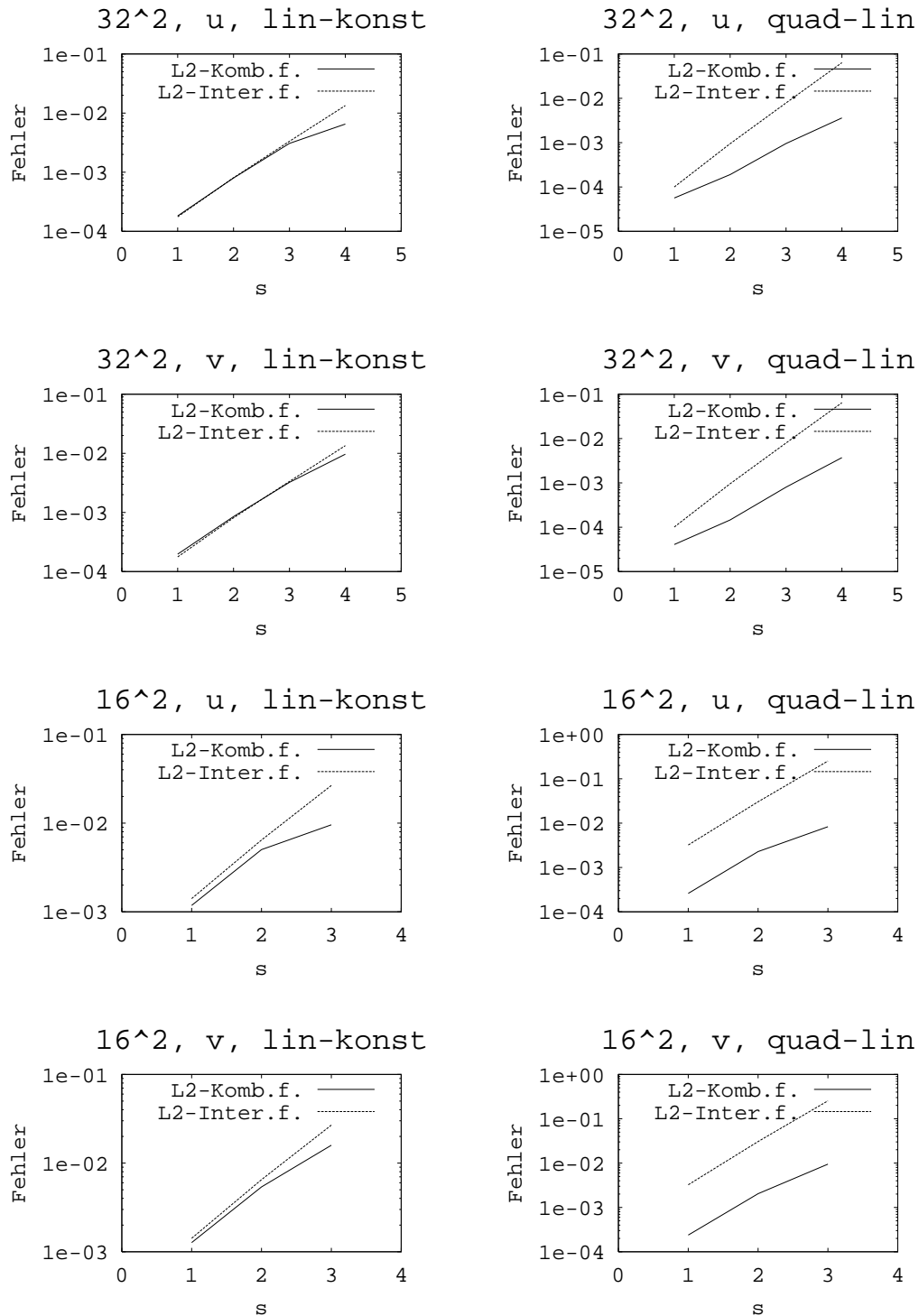


Abb. 6.10: L_2 -Kombinationsfehler und geschätzte L_2 -Interpolationsfehler der zweidimensionalen Nischenströmung mit $Re = 10$ für das 32^2 - und 16^2 -Gitter in Abhängigkeit vom Ausdünnungsparameter s

eine bessere Lösung. Für kleine Ausdünnungsparameter sind bei der quadratisch-linearen Interpolation die L_2 -Kombinationsfehler des 128^2 - und 64^2 -Gitters größer als die geschätzten L_2 -Interpolationsfehler. Der Grund dafür liegt in der oben beschriebenen beschränkten Genauigkeit der Zahldarstellung in den Ein- und Ausgabedateien. Dieser Effekt hat aber bei den Fehlern der größeren Ausdünnungsparameter keinen Einfluß mehr. Für die größeren Ausdünnungsparameter wird der L_2 -Kombinationsfehler bei der quadratisch-linearen Interpolation kleiner als der geschätzte L_2 -Interpolationsfehler. Dieser Effekt tritt auf, wenn einige Gebiete der Strömung in der Kombinationslösung bei höherem Ausdünnungsparameter nicht mehr fein aufgelöst werden. Der geschätzte L_2 -Interpolationsfehler ist bei der quadratisch-linearen Interpolation proportional zu den gemischten fünften Ableitungen. Werden nun die Gebiete, in denen die betreffenden Ableitungen groß werden, nicht mehr richtig in der Kombinationslösung dargestellt, so nimmt bei Vergrößerung des Ausdünnungsparameters der L_2 -Kombinationsfehler nicht mehr so stark zu, wie man es beim geschätzten L_2 -Interpolationsfehler erwarten würde. Dasselbe Verhalten erkennt man auch in den Abbildungen zur linear-konstanten Interpolation: Jeweils beim größten Ausdünnungsparameter steigt der L_2 -Kombinationsfehler nicht mehr so stark an wie der geschätzte L_2 -Interpolationsfehler.

Auf dem 32^2 - und 16^2 -Gitter erkennt man bei der quadratisch-linearen Interpolation einen großen Unterschied in den L_2 -Kombinationsfehlern und den geschätzten L_2 -Interpolationsfehlern. Der Grund dafür liegt ebenfalls darin, daß einige Gebiete mit großer Variation des Geschwindigkeitsfeldes auf diesen Gittern nicht mehr richtig aufgelöst werden. Die in den Abbildungen eingezeichneten geschätzten L_2 -Interpolationsfehler wurden alle mit den Werten $c_1^{(128)}$ und $c_2^{(128)}$ aus (6.3) berechnet, die auf dem 128^2 -Gitter bestimmt wurden. Bildet man ganz analog auf dem 16^2 -Gitter dieselben Werte der gemischten Ableitungen, so erhält man die Werte:

$$\begin{aligned} c_1^{(16)}(u) &= 1.875 \cdot 10^1 & , & & c_2^{(16)}(u) &= 1.044 \cdot 10^3 \\ c_1^{(16)}(v) &= 2.021 \cdot 10^1 & , & & c_2^{(16)}(v) &= 1.044 \cdot 10^3 \end{aligned} \quad (6.5)$$

Die Werte $c_2^{(128)}(u)$ und $c_2^{(128)}(v)$ sind etwa einen Faktor 20 größer als die Werte $c_2^{(16)}(u)$ und $c_2^{(16)}(v)$. Daher liegen auch der L_2 -Kombinationsfehler und der geschätzte L_2 -Interpolationsfehler in Abbildung 6.10 für das 16^2 -Gitter um etwa diesen Faktor auseinander. Das Geschwindigkeitsfeld der Nischenströmung wird also erwartungsgemäß auf dem 16^2 -Gitter nur grob aufgelöst. Andererseits ist sehr bemerkenswert, daß die Größe des L_2 -Kombinationsfehlers immer noch recht klein ist, daß demnach immer noch die meisten Strukturen der Strömung in der Kombinationslösung richtig berechnet wurden.

Ein wichtiger Punkt in der Diskussion zum Einsatz der Kombinationstechnik ist die Frage, wie sich der Fehler in der Kombinationslösung im Vergleich zum Dis-

diskretisierungsfehler auf dem Vollgitter verhält. In Abschnitt 4.1 wurde beschrieben, welche Anteile zum Fehler in einer berechneten Lösung beitragen. Unter der Annahme, daß die numerischen Fehler, also die Rundungsfehler und das Abbruchkriterium bei der iterativen Lösung, gegenüber dem Diskretisierungsfehler vernachlässigbar sind, kann mit den Formeln (4.1) der Diskretisierungsfehler geschätzt werden. Dazu wird, wie am Anfang von Abschnitt 6.3 beschrieben, der L_2 -Diskretisierungsfehler zwischen den Vollgitterlösungen zum Zeitpunkt T_{Ende} auf dem 128^2 - und 64^2 -Gitter, dem 64^2 - und 32^2 -Gitter und dem 32^2 - und 16^2 -Gitter berechnet. Die folgende Tabelle faßt die sich für beide Geschwindigkeitskomponenten ergebenden Werte zusammen:

Gitter	u -Fehler	v -Fehler
$128^2 \leftrightarrow 64^2$	$2.09 \cdot 10^{-4}$	$1.82 \cdot 10^{-4}$
$64^2 \leftrightarrow 32^2$	$8.18 \cdot 10^{-4}$	$7.11 \cdot 10^{-4}$
$32^2 \leftrightarrow 16^2$	$3.04 \cdot 10^{-3}$	$2.57 \cdot 10^{-3}$

Tabelle 6.2: L_2 -Diskretisierungsfehler der u - und v -Geschwindigkeit bei der zweidimensionalen Nischenströmung mit $Re = 10$

An diesen Werten ist zu erkennen, daß der Diskretisierungsfehler ein Fehler zweiter Ordnung ist, denn er wird (ungefähr) mit einem Faktor 4 größer. Dieses Verhalten war auch zu erwarten, weil die Rechnungen mit zentralen Differenzen durchgeführt wurden. In Abbildung 6.11 ist skizziert, wie sich die Größen der L_2 -Diskretisierungsfehler in Tabelle 6.2 im Vergleich mit den Größen der L_2 -Kombinationsfehler in Tabelle 6.1 verhalten. Dazu wird der $(128^2 \leftrightarrow 64^2)$ - L_2 -Diskretisierungsfehler zwischen die L_2 -Kombinationsfehler auf dem 128^2 -Gitter, der $(64^2 \leftrightarrow 32^2)$ - L_2 -Diskretisierungsfehler zwischen die L_2 -Kombinationsfehler

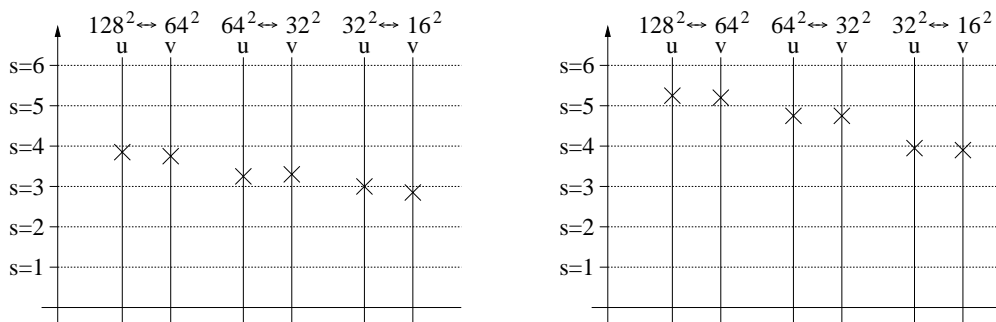


Abb. 6.11: Einordnung der Größe der L_2 -Diskretisierungsfehler zwischen die L_2 -Kombinationsfehler bei linear-konstanter Interpolation (links) und quadratisch-linearer Interpolation (rechts) für die zweidimensionale Nischenströmung bei Reynoldszahl $Re = 10$

auf dem 64^2 -Gitter (usw.) eingeordnet, jeweils für die linear-konstante und quadratisch-lineare Interpolation und für beide Geschwindigkeitskomponenten. Die Abbildung zeigt, daß man beispielsweise bei der Kombinationsrechnung mit quadratisch-linearer Interpolation auf dem 128^2 -Gitter bei einem Ausdünnungsparameter $s = 5$ einen kleineren, in der diskreten L_2 -Norm gemessenen Fehler erhält als bei einer Rechnung auf dem 64^2 -Vollgitter. Dabei enthält das feinste der in die Kombinationslösung eingehenden groben Gitter nach Tabelle 3.3 beim Ausdünnungsparameter $s = 5$ nur 3% der Punkte des 128^2 -Gitters, also nur 12% der Punkte des 64^2 -Gitters. Aus Tabelle 3.3 kann man auch entnehmen, daß bei einer Kombinationsrechnung mit Ausdünnungsparameter $s = 5$ im Zweidimensionalen die Gesamtanzahl aller in die zur Bildung der Kombinationslösung eingehenden Gitterpunkte etwa ein Viertel der Punkte des zugehörigen Vollgitters beträgt. Eine Vollgitterrechnung auf dem 64^2 -Gitter benötigt aber auch nur ein Viertel der Punkte des 128^2 -Gitters. Somit führen in diesem Fall beide Berechnungsmöglichkeiten derselben Komplexität auf etwa denselben Fehler in der diskreten L_2 -Norm. Ein tatsächlicher Gewinn in der Komplexität wird in diesem Rechnungsbeispiel

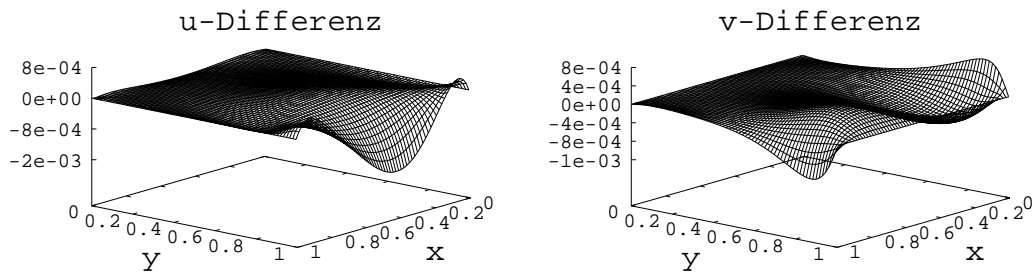


Abb. 6.12: Differenz der Lösungen auf dem 128^2 - und 64^2 -Gitter bei der zweidimensionalen Nischenströmung mit $Re = 10$

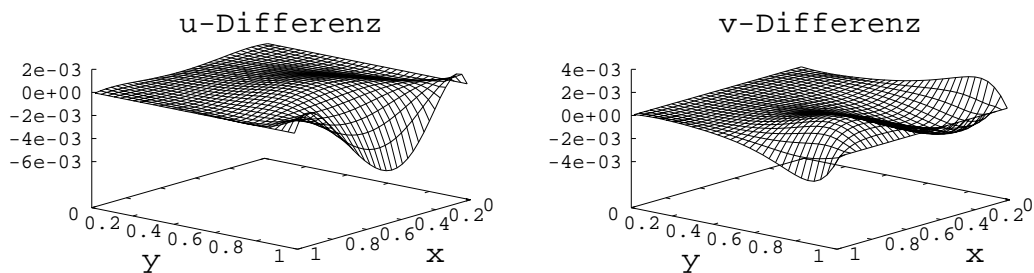


Abb. 6.13: Differenz der Lösungen auf dem 64^2 - und 32^2 -Gitter bei der zweidimensionalen Nischenströmung mit $Re = 10$

durch den Einsatz der Kombinationstechnik somit nicht erzielt.

Im folgenden soll auf die Bemerkung am Ende des Abschnitts 6.1.2 bezüglich des Diskretisierungsfehlers am Rand eingegangen werden: Die lineare Interpolation der Geschwindigkeitswerte zum Setzen der Randbedingungen in *Nast++* bewirkt einen Fehler der Ordnung $O(h^2)$. Bei der Nischenströmung ist diese lineare Interpolation insbesondere am oberen Gebietsrand keine gute Näherung. In Abbildung 6.12 ist die Differenz der Lösung auf dem 128^2 -Gitter, die zuvor auf das 64^2 -Gitter transferiert wurde, zur Lösung auf dem 64^2 -Gitter dargestellt, und in Abbildung 6.13 die Differenz der Lösung auf dem 64^2 -Gitter zur Lösung auf dem 32^2 -Gitter. Man erkennt, daß die größte Differenz für die u -Geschwindigkeitskomponente am oberen Gebietsrand liegt und für die v -Geschwindigkeitskomponente an den beiden angrenzenden Seiten. Ebenso zeigt der Vergleich beider Abbildungen, daß dieser Fehler die Ordnung $O(h^2)$ besitzt.

Interessant ist an dieser Stelle der Vergleich dieser Fehler mit dem Fehler, der in Kombinationslösungen auftritt: In Abbildung 6.14 ist jeweils die Differenz der 64^2 -Vollgitterlösung zur Kombinationslösung mit quadratisch-linearer Interpolation zu den Ausdünnungsparametern $s = 3, 4, 5$ für beide Geschwindigkeitskomponenten dargestellt. Die Differenz der Kombinationslösungen zur Vollgitterlösung hat eine oszillierende und völlig andere Gestalt als die Differenz zwischen zwei Vollgitterlösungen. Im direkten Vergleich mit der Abbildung 6.13 zeigt sich, daß insbesondere am oberen Gebietsrand die Kombinationsrechnungen noch bis zum Ausdünnungsparameter $s = 4$ eine bessere Lösung liefern als die Lösung auf dem 32^2 -Gitter. Der Grund dafür liegt darin, daß in die Linearkombination zur Bildung der Kombinationslösung auch jeweils ein Gitter eingeht, das am oberen Rand dieselbe feine Auflösung besitzt wie das zugehörige Vollgitter. Die Diskretisierungsfehler am Rand, die auf den anderen in die Kombinationslösung eingehenden groben Gittern auftreten, heben sich in der Linearkombination weitgehend auf.

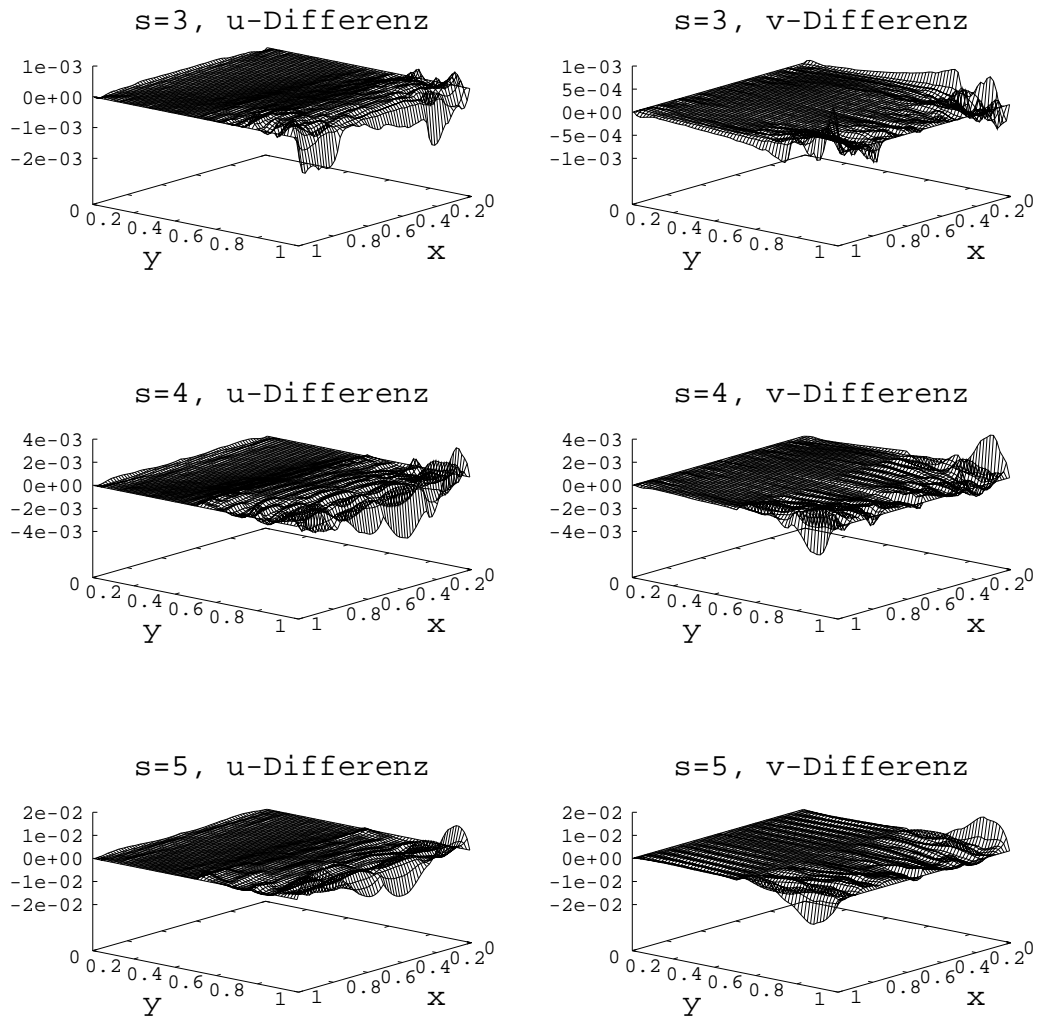


Abb. 6.14: Differenz der 64^2 -Vollgitterlösung von Kombinationslösungen mit quadratisch-linearer Interpolation mit den Ausdünnungsparametern $s = 3, 4, 5$ bei der zweidimensionalen Nischenströmung mit $Re = 10$

Abschließend soll noch gezeigt werden, daß die quadratisch-lineare Interpolation bei einer Kombinationsrechnung nur beim Transfer auf das Vollgitter einen kleineren Interpolationsfehler aufweist als die linear-konstante Interpolation und somit einen echten Gewinn darstellt (vgl. Abschnitt 5.9). Dazu wird die obige Rechnung der Nischenströmung auf den verschiedenen Gittern mit der Kombinationstechnik mit linear-konstanter Interpolation für die verschiedenen Ausdünnungsparameter durchgeführt, und erst im letzten Kombinationsschritt wird eine Kombinationslösung auf dem Vollgitter mit quadratisch-linearer Interpolation gebildet. Von dieser Kombinationslösung wird der L_2 -Kombinationsfehler berechnet. Die so erhaltenen Werte sind in Tabelle 6.3 angegeben. Sie stimmen fast genau mit den Werten aus Tabelle 6.1 überein, die man bei einer Kombinationsrechnung erhält, bei der in jedem Kombinationsschritt zwischen den groben Gittern quadratisch-linear interpoliert wird. Also ist in der Tat die linear-konstante Interpolation beim Transfer der groben Gitter auf die anderen groben Gitter eine Technik mit ausreichender Genauigkeit. Aber beim Transfer der groben Gitter auf das Vollgitter bringt die quadratisch-lineare Interpolation einen deutlichen Gewinn.

Gitter	$s = 1$	$s = 2$	$s = 3$	$s = 4$	$s = 5$	$s = 6$
	u -Geschwindigkeit					
128^2	$1.30 \cdot 10^{-6}$	$8.25 \cdot 10^{-6}$	$2.96 \cdot 10^{-5}$	$7.05 \cdot 10^{-5}$	$1.56 \cdot 10^{-4}$	$4.52 \cdot 10^{-4}$
64^2	$1.30 \cdot 10^{-5}$	$5.27 \cdot 10^{-5}$	$1.20 \cdot 10^{-4}$	$3.83 \cdot 10^{-4}$	$1.32 \cdot 10^{-3}$	
32^2	$5.51 \cdot 10^{-5}$	$1.70 \cdot 10^{-4}$	$9.98 \cdot 10^{-4}$	$3.55 \cdot 10^{-3}$		
16^2	$2.46 \cdot 10^{-4}$	$2.33 \cdot 10^{-3}$	$7.54 \cdot 10^{-3}$			
	v -Geschwindigkeit					
128^2	$8.77 \cdot 10^{-7}$	$5.53 \cdot 10^{-6}$	$1.80 \cdot 10^{-5}$	$3.84 \cdot 10^{-5}$	$1.13 \cdot 10^{-4}$	$4.43 \cdot 10^{-4}$
64^2	$8.48 \cdot 10^{-6}$	$3.19 \cdot 10^{-5}$	$7.08 \cdot 10^{-5}$	$3.38 \cdot 10^{-4}$	$1.37 \cdot 10^{-3}$	
32^2	$3.90 \cdot 10^{-5}$	$1.24 \cdot 10^{-4}$	$9.37 \cdot 10^{-4}$	$3.86 \cdot 10^{-3}$		
16^2	$2.23 \cdot 10^{-4}$	$2.24 \cdot 10^{-3}$	$9.13 \cdot 10^{-3}$			

Tabelle 6.3: L_2 -Kombinationsfehler der zweidimensionalen Nischenströmung mit $Re = 10$ bei einer Kombinationsrechnung, in der linear-konstant und nur im letzten Kombinationsschritt quadratisch-linear auf das Vollgitter interpoliert wird

6.3.2 Zweidimensionale Nischenströmung mit $Re=1000$

Genau der gleiche Testfall wie in Abschnitt 6.3.1 wird mit einer Reynoldszahl $Re = 1000$ gerechnet. Alle anderen Parameter der Rechnung und die Randbedingungen bleiben dieselben. Das Vorgehen bei der Auswertung und Interpretation der Ergebnisse ist dasselbe wie im Abschnitt 6.3.1.

In Abbildung 6.15 ist die sich einstellende Strömung zu zwei Zeitpunkten dargestellt. Zum Endzeitpunkt der Rechnung $T_{\text{Ende}} = 1.0$ ist die Strömung noch nicht stationär geworden; die Bildung des sich einstellenden Wirbels befindet sich noch in einem frühen Stadium.

Für den Zeitpunkt T_{Ende} sind in Tabelle 6.4 die L_2 -Kombinationsfehler der u - und v -Geschwindigkeitskomponente angegeben. Die Näherungswerte für c_1 und c_2 für die dritten bzw. fünften gemischten Ableitungen werden wiederum mit Hilfe der Differenzensterne (5.43) bzw. (5.44) für den Zeitpunkt T_{Ende} aus der 128^2 -Vollgitterlösung berechnet:

$$\begin{aligned} c_1^{(128)}(u) &= 1.165 \cdot 10^2 & , & & c_2^{(128)}(u) &= 1.942 \cdot 10^5 \\ c_1^{(128)}(v) &= 1.264 \cdot 10^2 & , & & c_2^{(128)}(v) &= 1.941 \cdot 10^5 \end{aligned} \quad (6.6)$$

Daraus werden die geschätzten L_2 -Interpolationsfehler gemäß Tabelle 5.1 berechnet. Für die Kombinationsrechnung mit Ausdünnungsparameter $s = 1$ erhält man:

$$\begin{aligned} u\text{-Geschw., linear-konstante Int.:} & \quad \frac{\sqrt{2}}{8} c_1^{(128)}(u) \left(\frac{1}{128}\right)^3 &= 9.82 \cdot 10^{-6} \\ v\text{-Geschw., linear-konstante Int.:} & \quad \frac{\sqrt{2}}{8} c_1^{(128)}(v) \left(\frac{1}{128}\right)^3 &= 1.07 \cdot 10^{-5} \\ u\text{-Geschw., quadratisch-lineare Int.:} & \quad \frac{\sqrt{2}}{8} c_2^{(128)}(u) \left(\frac{1}{128}\right)^5 &= 9.99 \cdot 10^{-7} \\ v\text{-Geschw., quadratisch-lineare Int.:} & \quad \frac{\sqrt{2}}{8} c_2^{(128)}(v) \left(\frac{1}{128}\right)^5 &= 9.99 \cdot 10^{-7} \end{aligned} \quad (6.7)$$

Für die linear-konstante Interpolation stimmen die geschätzten L_2 -Interpolationsfehler wiederum mit den L_2 -Kombinationsfehlern in Tabelle 6.4 gut überein. In den Abbildungen 6.18 und 6.19 sind die L_2 -Kombinationsfehler aus Tabelle 6.4 und die geschätzten L_2 -Interpolationsfehler, die mit den Werten aus (6.6) berechnet wurden, aufgetragen. Man erkennt, daß für die kleineren Ausdünnungsparameter der geschätzte L_2 -Interpolationsfehler wiederum eine sehr gute Näherung darstellt. Insgesamt entspricht die Gestalt der Kurven wieder dem, was bei der zweidimensionalen Nischenströmung mit Reynoldszahl $Re = 10$ zu beobachten war. Allerdings wird der L_2 -Kombinationsfehler nun schon für kleinere Ausdünnungsparameter kleiner als der geschätzte L_2 -Interpolationsfehler. Das bedeutet, daß die Strukturen mit großer Variation im Strömungsfeld in den Kombinationslösungen schon bei kleineren Ausdünnungsparametern als in der Rechnung zuvor verschwinden.

In Abbildung 6.16 sind die Geschwindigkeitsfelder für die Kombinationslösungen mit linear-konstanter Interpolation auf dem 32^2 -Gitter zum Zeitpunkt T_{Ende} dargestellt. Im direkten Vergleich mit Abbildung 6.15 (rechts), in der die zugehörige 32^2 -Vollgitterlösung dargestellt ist, erkennt man, daß die Kombinationslösungen das Geschwindigkeitsfeld gut wiedergeben. An diesem Testfall wird ebenfalls deutlich, daß selbst noch die Kombinationslösung mit Ausdünnungsparameter $s = 4$ am oberen Gebietsrand eine feine Auflösung erreicht. Der Grund dafür liegt wiederum darin, daß in die Linearkombination zur Bildung der Kombinationslösung verschiedene grobe Gitter eingehen, von denen jeweils eines in der Richtung normal zum oberen Rand dieselbe feine Auflösung besitzt wie das zugehörige Vollgitter. Im Vergleich mit Abbildung 6.17, in der die Lösung auf dem 16^2 -Vollgitter dargestellt ist, zeigt sich die deutlich bessere Auflösung der Kombinationslösungen am oberen Gebietsrand.

Eine zu Abschnitt 6.3.1 analoge Berechnung führt auf die L_2 -Diskretisierungsfehler in Tabelle 6.5. Die Einordnung dieser Werte zwischen die L_2 -Kombinationsfehler ist in Abbildung 6.20 dargestellt. Im Vergleich dieser Abbildung mit der Abbildung 6.11, die das gleiche Schema für die Strömung mit der Reynoldszahl $Re = 10$ zeigt, erkennt man, daß bei der Strömung mit Reynoldszahl $Re = 1000$ der L_2 -Diskretisierungsfehler im Verhältnis zum L_2 -Kombinationsfehler größer wird. Dies liegt wiederum an der beschriebenen Eigenschaft der Kombinationslösung, daß sie auch bei hohem Ausdünnungsparameter insbesondere am Gebietsrand feinere Strukturen auflösen kann als die Vollgitterrechnung auf einem größeren Gitter.

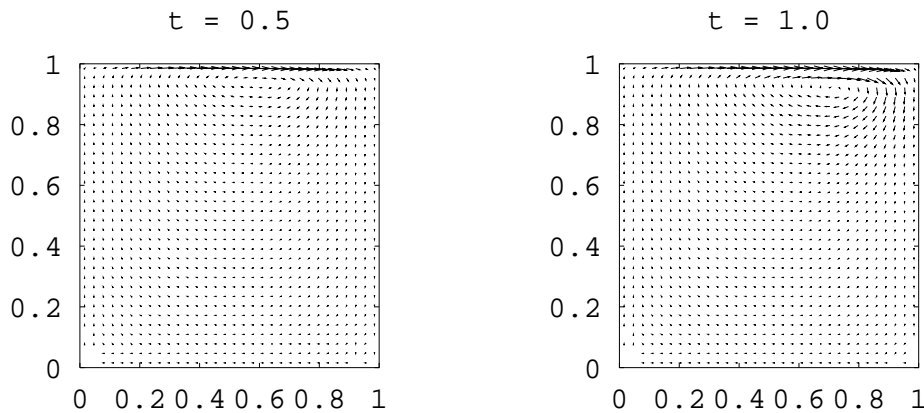


Abb. 6.15: Zweidimensionalen Nischenströmung mit $Re = 1000$ auf dem 32^2 -Gitter zu den Zeitpunkten $t = 0.5, 1.0$

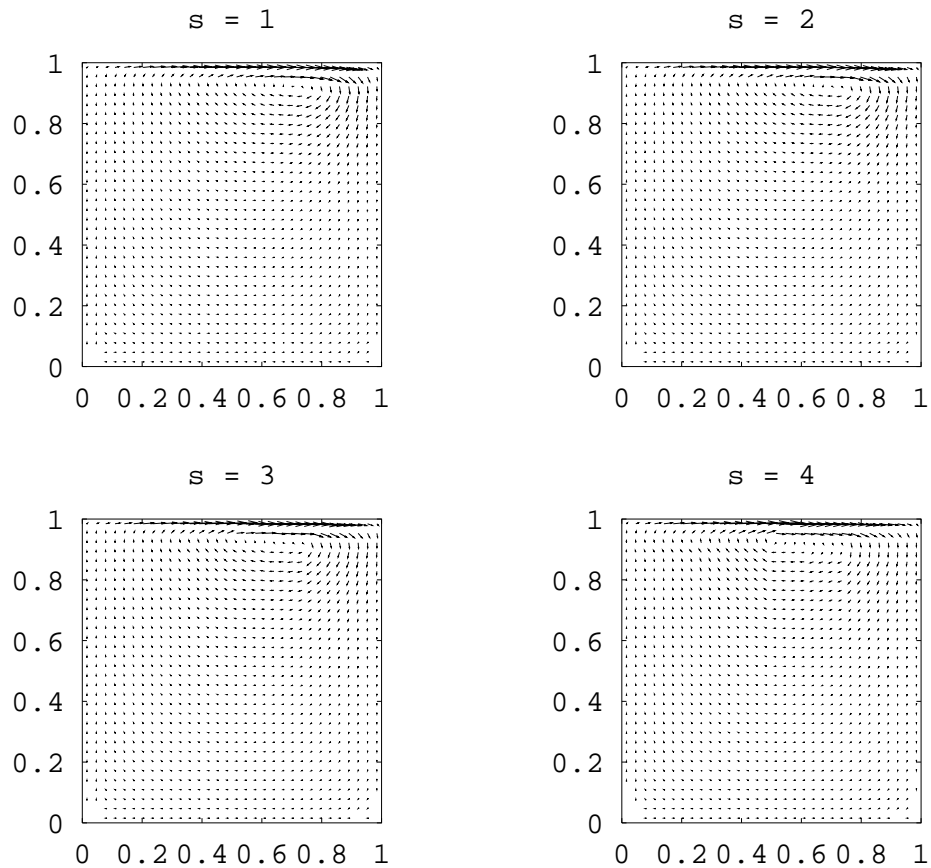


Abb. 6.16: Kombinationslösungen mit linear-konstanter Interpolation auf dem 32^2 -Gitter der zweidimensionalen Nischenströmung mit $Re = 1000$ für die verschiedenen Ausdünnungsparameter zum Zeitpunkt $T_{\text{Ende}} = 1.0$

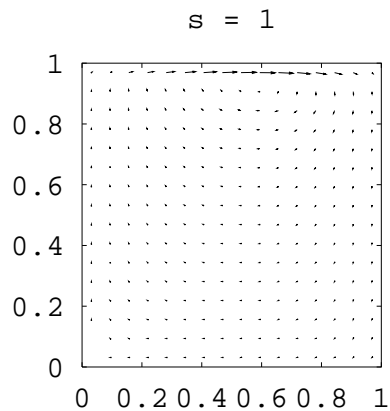


Abb. 6.17: Vollgitterlösung des 16^2 -Gitters der zweidimensionalen Nischenströmung mit $Re = 1000$ zum Zeitpunkt $T_{\text{Ende}} = 1.0$

Gitter	$s = 1$	$s = 2$	$s = 3$	$s = 4$	$s = 5$	$s = 6$
u -Geschwindigkeit: Linear-konstante Interpolation						
128^2	$1.40 \cdot 10^{-5}$	$6.91 \cdot 10^{-5}$	$2.89 \cdot 10^{-4}$	$1.09 \cdot 10^{-3}$	$3.25 \cdot 10^{-3}$	$8.47 \cdot 10^{-3}$
64^2	$1.18 \cdot 10^{-4}$	$5.72 \cdot 10^{-4}$	$2.07 \cdot 10^{-3}$	$6.13 \cdot 10^{-3}$	$1.11 \cdot 10^{-2}$	
32^2	$6.00 \cdot 10^{-4}$	$2.58 \cdot 10^{-3}$	$7.55 \cdot 10^{-3}$	$1.74 \cdot 10^{-2}$		
16^2	$1.07 \cdot 10^{-3}$	$4.18 \cdot 10^{-3}$	$8.30 \cdot 10^{-3}$			
u -Geschwindigkeit: Quadratisch-lineare Interpolation						
128^2	$4.49 \cdot 10^{-6}$	$3.40 \cdot 10^{-5}$	$1.62 \cdot 10^{-4}$	$6.55 \cdot 10^{-4}$	$2.30 \cdot 10^{-3}$	$6.22 \cdot 10^{-3}$
64^2	$8.06 \cdot 10^{-5}$	$4.76 \cdot 10^{-4}$	$1.51 \cdot 10^{-3}$	$5.17 \cdot 10^{-3}$	$1.12 \cdot 10^{-2}$	
32^2	$4.34 \cdot 10^{-4}$	$2.27 \cdot 10^{-3}$	$6.24 \cdot 10^{-3}$	$1.63 \cdot 10^{-2}$		
16^2	$7.01 \cdot 10^{-4}$	$3.25 \cdot 10^{-3}$	$1.07 \cdot 10^{-2}$			
v -Geschwindigkeit: Linear-konstante Interpolation						
128^2	$1.36 \cdot 10^{-5}$	$6.38 \cdot 10^{-5}$	$2.51 \cdot 10^{-4}$	$8.23 \cdot 10^{-4}$	$2.12 \cdot 10^{-3}$	$5.05 \cdot 10^{-3}$
64^2	$9.93 \cdot 10^{-5}$	$4.53 \cdot 10^{-4}$	$1.60 \cdot 10^{-3}$	$4.55 \cdot 10^{-3}$	$7.90 \cdot 10^{-3}$	
32^2	$5.70 \cdot 10^{-4}$	$2.51 \cdot 10^{-3}$	$5.51 \cdot 10^{-3}$	$1.11 \cdot 10^{-2}$		
16^2	$1.30 \cdot 10^{-3}$	$3.54 \cdot 10^{-3}$	$6.84 \cdot 10^{-3}$			
v -Geschwindigkeit: Quadratisch-lineare Interpolation						
128^2	$3.17 \cdot 10^{-6}$	$2.58 \cdot 10^{-5}$	$1.46 \cdot 10^{-4}$	$5.21 \cdot 10^{-4}$	$1.84 \cdot 10^{-3}$	$3.45 \cdot 10^{-3}$
64^2	$4.61 \cdot 10^{-5}$	$3.27 \cdot 10^{-4}$	$1.19 \cdot 10^{-3}$	$3.61 \cdot 10^{-3}$	$6.55 \cdot 10^{-3}$	
32^2	$3.27 \cdot 10^{-4}$	$2.00 \cdot 10^{-3}$	$4.72 \cdot 10^{-3}$	$8.09 \cdot 10^{-3}$		
16^2	$6.41 \cdot 10^{-4}$	$2.63 \cdot 10^{-3}$	$5.82 \cdot 10^{-3}$			

Tabelle 6.4: L_2 -Kombinationsfehler der Geschwindigkeitskomponenten der zweidimensionalen Nischenströmung mit $Re = 1000$ zum Zeitpunkt $T_{\text{Ende}} = 1.0$

Gitter	u -Fehler	v -Fehler
$128^2 \leftrightarrow 64^2$	$3.05 \cdot 10^{-3}$	$1.32 \cdot 10^{-3}$
$64^2 \leftrightarrow 32^2$	$7.93 \cdot 10^{-3}$	$4.46 \cdot 10^{-3}$
$32^2 \leftrightarrow 16^2$	$2.20 \cdot 10^{-2}$	$1.16 \cdot 10^{-2}$

Tabelle 6.5: L_2 -Diskretisierungsfehler der u - und v -Geschwindigkeit bei der zweidimensionalen Nischenströmung mit $Re = 1000$

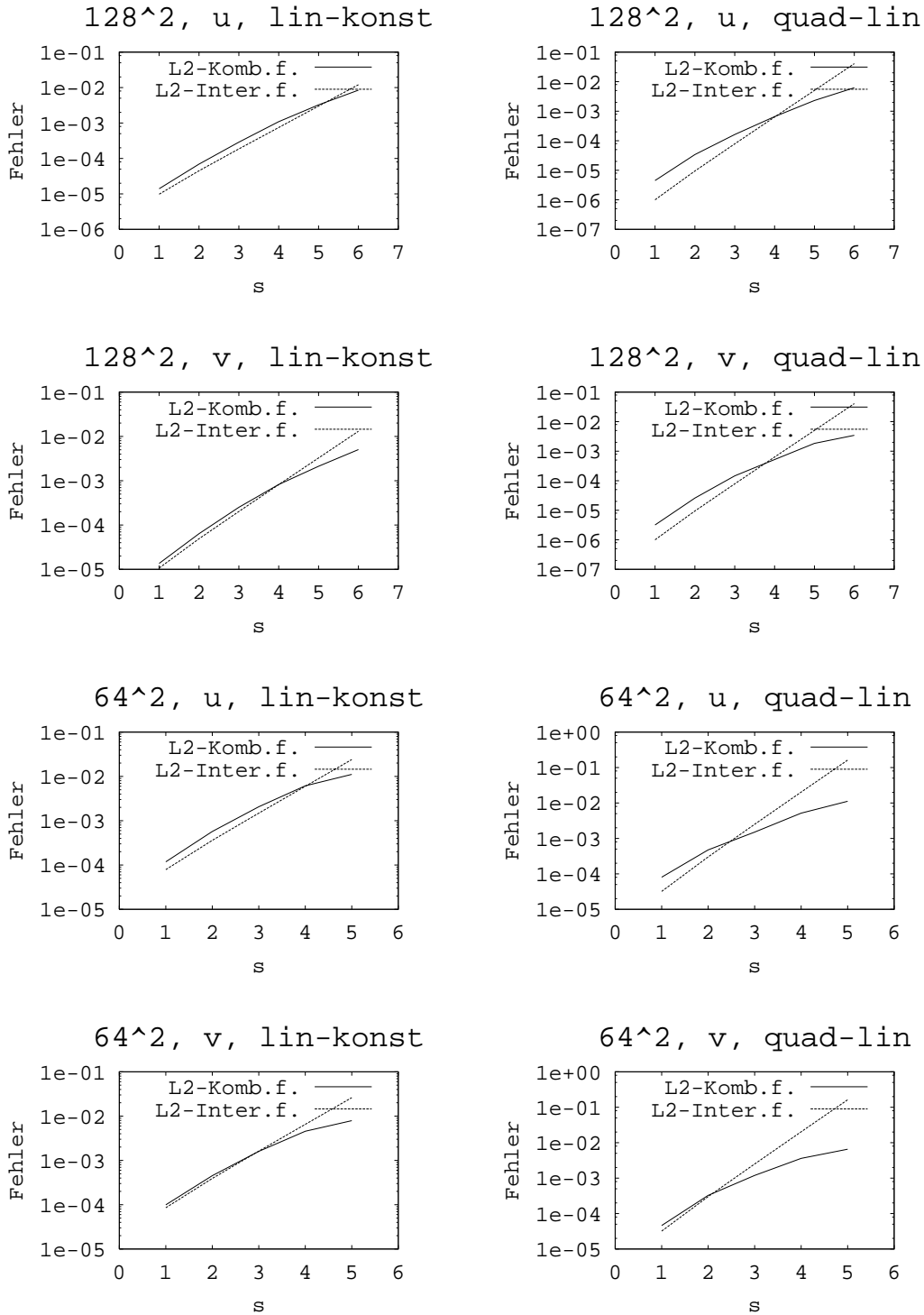


Abb. 6.18: L_2 -Kombinationsfehler und geschätzte L_2 -Interpolationsfehler der zweidimensionalen Nischenströmung mit $Re = 1000$ für das 128^2 - und 64^2 -Gitter in Abhängigkeit vom Ausdünnungsparameter s

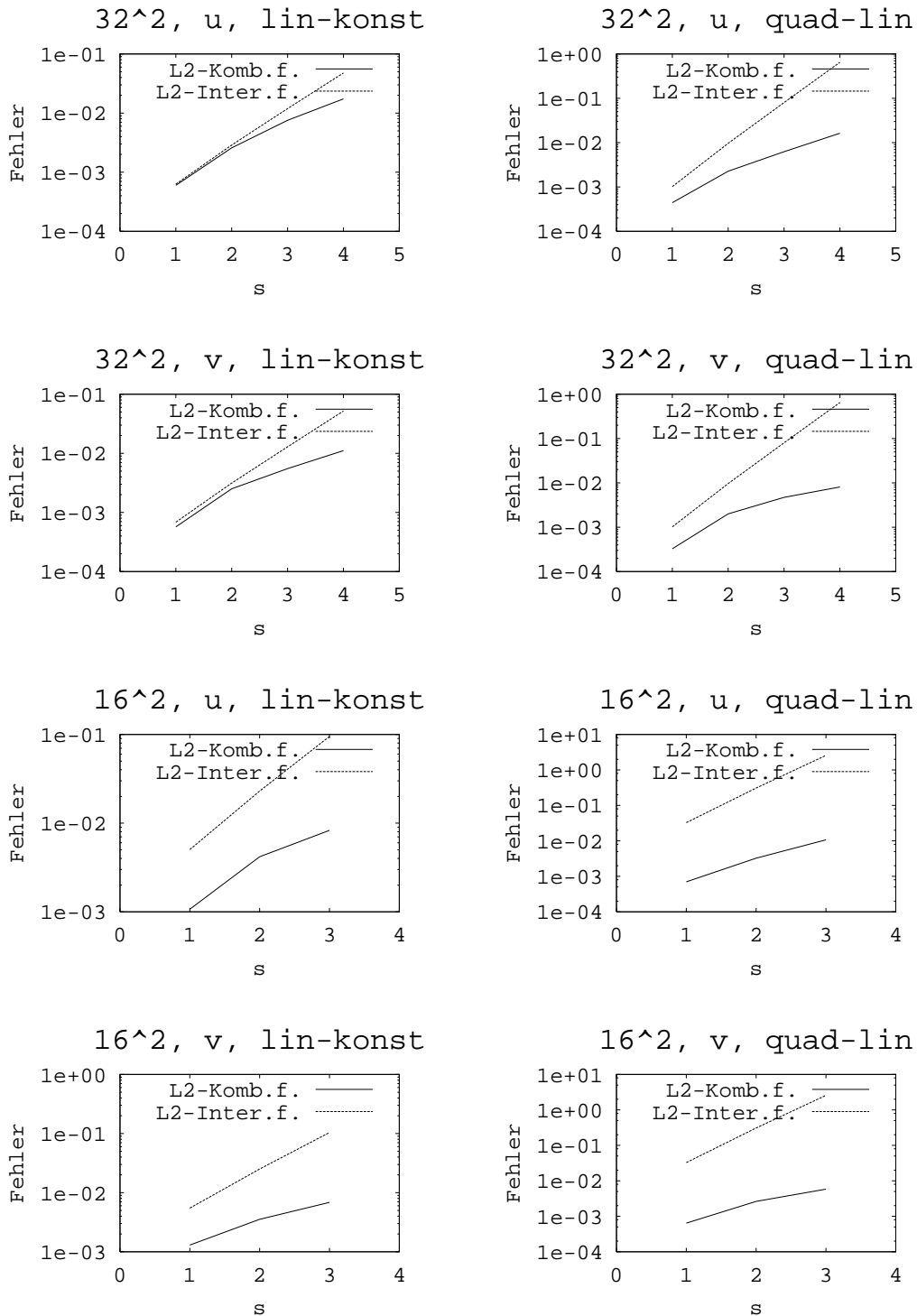


Abb. 6.19: L_2 -Kombinationsfehler und geschätzte L_2 -Interpolationsfehler der zweidimensionalen Nischenströmung mit $Re = 1000$ für das 32^2 - und 16^2 -Gitter in Abhängigkeit vom Ausdünnungsparameter s

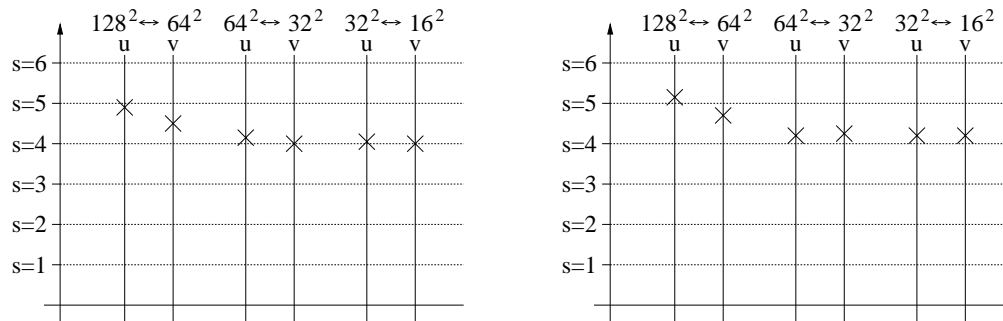


Abb. 6.20: Einordnung der Größe der L_2 -Diskretisierungsfehler zwischen die L_2 -Kombinationsfehler bei linear-konstanter Interpolation (links) und quadratisch-linearer Interpolation (rechts) für die zweidimensionale Nischenströmung bei Reynoldszahl $Re = 1000$

6.3.3 Dreidimensionale Nischenströmung mit $\text{Re}=10$

Als dreidimensionaler Testfall dient eine dreidimensionale Nischenströmung, die an die zweidimensionale Nischenströmung aus Abschnitt 6.3.1 angelehnt ist. Der Einheitsquader $[0, 1]^3$ wird als Gebiet gewählt. Als Randbedingungen für das Geschwindigkeitsfeld werden an fünf Seiten des Gebiets Haftbedingungen ($\vec{u}_R = 0$) vorgegeben. An der oberen Seite wird die Einströmbedingung festgelegt durch $(\vec{u}_R)_x = 256x^2(1-x)^2y^2(1-y)^2$, $(\vec{u}_R)_y = 0$, $(\vec{u}_R)_z = 0$. In Abbildung 6.21 ist die Strömungsgeometrie skizziert.

Gerechnet wird vom Startzeitpunkt $T_{\text{Start}} = 0.0$ bis zum Zeitpunkt $T_{\text{Ende}} = 1.0$. Es werden Rechnungen auf dem 64^3 -, 32^3 - und 16^3 -Gitter mit der Zeitschrittweite $\Delta t = 2^{-11}$ durchgeführt. In Zeitintervallen $\Delta t_{\text{Kombination}} = 2^{-7}$ wird jeweils ein Kombinationsschritt gemacht. Auch alle anderen Rechenparameter entsprechen denen der zweidimensionalen Nischenströmung aus Abschnitt 6.3.1. Es erfolgen wiederum jeweils Rechnungen auf den vollen Gittern sowie dreidimensionale Kombinationsrechnungen mit linear-konstanter und quadratisch-linearer Interpolation bis hin zum Ausdünnungsparameter $s = 5$ mit den Ausdünnungsindizes gemäß Tabelle 3.2. In Abbildung 6.22 ist das berechnete Geschwindigkeitsfeld zum Zeitpunkt T_{Ende} dargestellt.

Die Auswertung der Ergebnisse erfolgt analog zum zweidimensionalen Testfall. Die L_2 -Kombinationsfehler der verschiedenen Kombinationslösungen sind in Tabelle 6.6 zusammengefasst. Die geschätzten L_2 -Interpolationsfehler gemäß Tabelle 5.3 werden berechnet mit den Werten c_3 und c_4 aus (5.38) und (5.40). Für die drei Geschwindigkeitskomponenten erhält man mit den Differenzensternen aus (5.49)

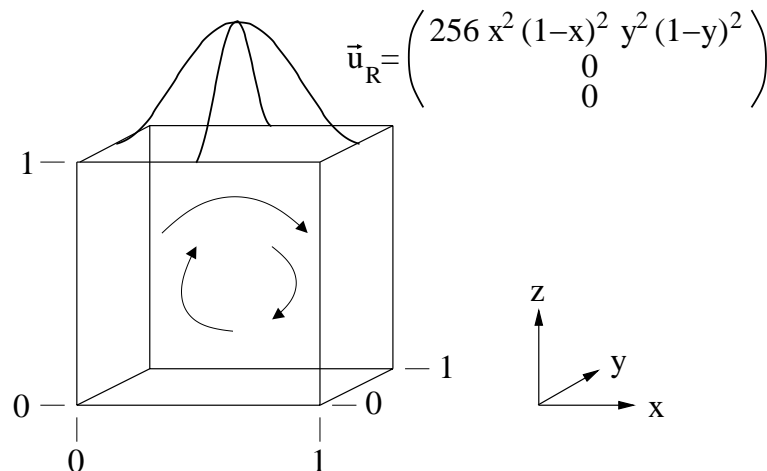


Abb. 6.21: Skizze zur dreidimensionalen Nischenströmung

bzw. (5.50) für die 64^3 -Vollgitterlösung zum Zeitpunkt T_{Ende} folgende Werte:

$$\begin{aligned} c_3^{(64)}(u) &= 2.948 \cdot 10^0 & , & & c_4^{(64)}(u) &= 2.506 \cdot 10^2 \\ c_3^{(64)}(v) &= 4.574 \cdot 10^{-1} & , & & c_4^{(64)}(v) &= 2.101 \cdot 10^2 \\ c_3^{(64)}(w) &= 1.116 \cdot 10^0 & , & & c_4^{(64)}(w) &= 9.960 \cdot 10^1 \end{aligned} \quad (6.8)$$

Die geschätzten L_2 -Interpolationsfehler ergeben sich damit nach Tabelle 5.3. Für den Ausdünnungsparameter $s = 1$ erhält man damit folgende Werte:

$$\begin{aligned} u\text{-Geschw., linear-konstante Int.:} & \quad \frac{1}{4} c_3^{(64)}(u) \left(\frac{1}{64}\right)^2 &= 1.80 \cdot 10^{-4} \\ v\text{-Geschw., linear-konstante Int.:} & \quad \frac{1}{4} c_3^{(64)}(v) \left(\frac{1}{64}\right)^2 &= 2.79 \cdot 10^{-5} \\ w\text{-Geschw., linear-konstante Int.:} & \quad \frac{1}{4} c_3^{(64)}(w) \left(\frac{1}{64}\right)^2 &= 6.81 \cdot 10^{-5} \\ u\text{-Geschw., quadratisch-lineare Int.:} & \quad \frac{1}{4} c_4^{(64)}(u) \left(\frac{1}{64}\right)^4 &= 3.73 \cdot 10^{-6} \\ v\text{-Geschw., quadratisch-lineare Int.:} & \quad \frac{1}{4} c_4^{(64)}(v) \left(\frac{1}{64}\right)^4 &= 3.13 \cdot 10^{-6} \\ w\text{-Geschw., quadratisch-lineare Int.:} & \quad \frac{1}{4} c_4^{(64)}(w) \left(\frac{1}{64}\right)^4 &= 1.48 \cdot 10^{-6} \end{aligned} \quad (6.9)$$

Der Vergleich dieser Werte mit den L_2 -Kombinationsfehlern in Tabelle 6.6 zeigt dasselbe wie im zweidimensionalen Fall: Für die linear-konstante Interpolation stimmen die geschätzten L_2 -Interpolationsfehler wieder gut mit den L_2 -Kombinationsfehlern überein. Die Werte für die quadratisch-lineare Interpolation sind wiederum zu klein.

In den Abbildungen 6.24, 6.25 und 6.26 sind die geschätzten L_2 -Interpolationsfehler und die L_2 -Kombinationsfehler aus Tabelle 6.6 für die verschiedenen Gitter, die drei Geschwindigkeitskomponenten sowie die linear-konstante als auch

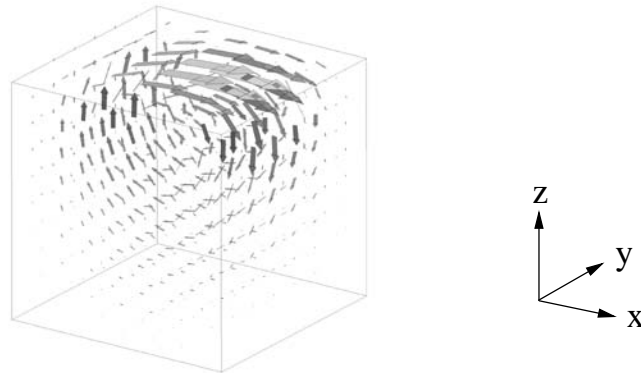


Abb. 6.22: Geschwindigkeitsfeld der dreidimensionalen Nischenströmung mit $Re = 10$ zum Zeitpunkt $T_{\text{Ende}} = 1.0$

quadratisch-lineare Interpolation dargestellt. Resultat ist wie im zweidimensionalen Fall, daß die geschätzten L_2 -Interpolationsfehler für die linear-konstante Interpolation mit den L_2 -Kombinationsfehlern gut übereinstimmen. Das gleiche gilt nun auch für die quadratisch-lineare Interpolation; insbesondere wird der L_2 -Kombinationsfehler auch für die größeren Ausdünnungsparameter nun nicht mehr deutlich kleiner als der geschätzte L_2 -Interpolationsfehler.

Der Grund dafür ist, daß der Interpolationsfehler im Dreidimensionalen für die Geschwindigkeitskomponenten eine andere Abhängigkeit von den Ableitungen der Geschwindigkeitskomponenten in den verschiedenen Raumrichtungen besitzt als im Zweidimensionalen. Im Zweidimensionalen wurde das „Abknicken“ der Kurven des L_2 -Kombinationsfehlers für größere Ausdünnungsparameter damit begründet, daß für größere Ausdünnungsparameter gewisse Strukturen des Strömungsfeldes in der Kombinationslösung nicht mehr dargestellt werden, und demzufolge der L_2 -Kombinationsfehler kleiner wird als der geschätzte L_2 -Interpolationsfehler. Im Dreidimensionalen wird der Interpolationsfehler für die u -Geschwindigkeit aber bestimmt durch die Ableitungen des Geschwindigkeitsfeldes in y - und z -Richtung. In diesen Raumrichtungen besitzt die u -Geschwindigkeit bei der dreidimensionalen Nischenströmung keine großen Ableitungen. Daher gibt es keine Strukturen im Strömungsfeld, die, wenn sie in der Kombinationslösung bei größerem Ausdünnungsparameter nicht mehr aufgelöst werden, den L_2 -Kombinationsfehler der u -Geschwindigkeit stark beeinflussen würden. Analoge Überlegungen sind auch für die v - und w -Geschwindigkeit möglich.

Der Vergleich der L_2 -Kombinationsfehler und der L_2 -Diskretisierungsfehler ist wiederum interessant. Diese werden wie beim zweidimensionalen Fall für den Zeitpunkt T_{Ende} bestimmt und sind in Tabelle 6.7 angegeben. In Abbildung 6.23 sind die L_2 -Diskretisierungsfehler in ein Schema eingeordnet, das ihre Größe mit den L_2 -Kombinationsfehlern bei den verschiedenen Ausdünnungsparametern in

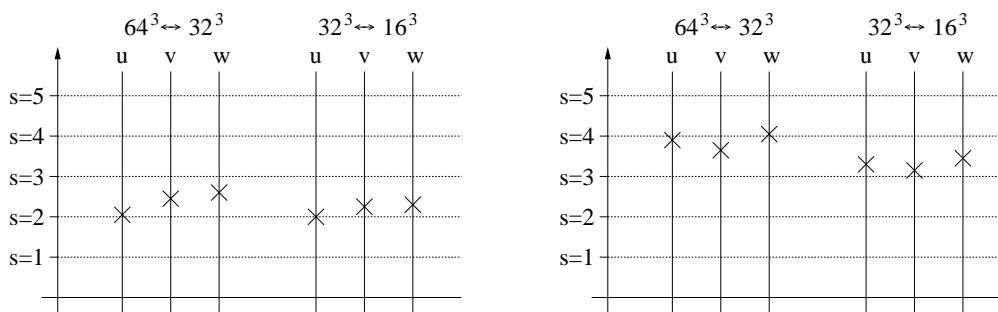


Abb. 6.23: Einordnung der Größe der L_2 -Diskretisierungsfehler zwischen die L_2 -Kombinationsfehler bei linear-konstanter Interpolation (links) und quadratisch-linearer Interpolation (rechts) für die dreidimensionale Nischenströmung bei Reynoldszahl $Re = 10$

Gitter	$s = 1$	$s = 2$	$s = 3$	$s = 4$	$s = 5$
<i>u</i> -Geschwindigkeit: Linear-konstante Interpolation					
64^3	$1.98 \cdot 10^{-4}$	$5.94 \cdot 10^{-4}$	$1.49 \cdot 10^{-3}$	$3.55 \cdot 10^{-3}$	$7.80 \cdot 10^{-3}$
32^3	$7.82 \cdot 10^{-4}$	$2.34 \cdot 10^{-3}$	$5.97 \cdot 10^{-3}$	$1.30 \cdot 10^{-2}$	
16^3	$2.97 \cdot 10^{-3}$	$8.86 \cdot 10^{-3}$	$2.00 \cdot 10^{-2}$		
<i>u</i> -Geschwindigkeit: Quadratisch-lineare Interpolation					
64^3	$1.26 \cdot 10^{-5}$	$5.36 \cdot 10^{-5}$	$1.78 \cdot 10^{-4}$	$7.25 \cdot 10^{-4}$	$2.43 \cdot 10^{-3}$
32^3	$8.22 \cdot 10^{-5}$	$3.96 \cdot 10^{-4}$	$1.73 \cdot 10^{-3}$	$5.60 \cdot 10^{-3}$	
16^3	$5.62 \cdot 10^{-4}$	$2.87 \cdot 10^{-3}$	$1.08 \cdot 10^{-2}$		
<i>v</i> -Geschwindigkeit: Linear-konstante Interpolation					
64^3	$4.22 \cdot 10^{-5}$	$1.23 \cdot 10^{-4}$	$2.80 \cdot 10^{-4}$	$5.62 \cdot 10^{-4}$	$1.57 \cdot 10^{-3}$
32^3	$1.47 \cdot 10^{-4}$	$3.94 \cdot 10^{-4}$	$8.02 \cdot 10^{-4}$	$2.32 \cdot 10^{-3}$	
16^3	$3.88 \cdot 10^{-4}$	$8.79 \cdot 10^{-4}$	$3.14 \cdot 10^{-3}$		
<i>v</i> -Geschwindigkeit: Quadratisch-lineare Interpolation					
64^3	$8.91 \cdot 10^{-6}$	$3.36 \cdot 10^{-5}$	$9.68 \cdot 10^{-5}$	$2.58 \cdot 10^{-4}$	$1.14 \cdot 10^{-3}$
32^3	$4.69 \cdot 10^{-5}$	$1.76 \cdot 10^{-4}$	$5.28 \cdot 10^{-4}$	$1.80 \cdot 10^{-3}$	
16^3	$2.34 \cdot 10^{-4}$	$8.42 \cdot 10^{-4}$	$2.43 \cdot 10^{-3}$		
<i>w</i> -Geschwindigkeit: Linear-konstante Interpolation					
64^3	$8.07 \cdot 10^{-5}$	$2.52 \cdot 10^{-4}$	$6.79 \cdot 10^{-4}$	$1.85 \cdot 10^{-3}$	$5.24 \cdot 10^{-3}$
32^3	$3.37 \cdot 10^{-4}$	$1.09 \cdot 10^{-3}$	$3.18 \cdot 10^{-3}$	$8.55 \cdot 10^{-3}$	
16^3	$1.43 \cdot 10^{-3}$	$4.85 \cdot 10^{-3}$	$1.23 \cdot 10^{-2}$		
<i>w</i> -Geschwindigkeit: Quadratisch-lineare Interpolation					
64^3	$7.47 \cdot 10^{-6}$	$3.15 \cdot 10^{-5}$	$1.04 \cdot 10^{-4}$	$4.04 \cdot 10^{-4}$	$1.66 \cdot 10^{-3}$
32^3	$4.21 \cdot 10^{-5}$	$1.96 \cdot 10^{-4}$	$8.53 \cdot 10^{-4}$	$4.39 \cdot 10^{-3}$	
16^3	$3.02 \cdot 10^{-4}$	$1.75 \cdot 10^{-3}$	$8.91 \cdot 10^{-3}$		

Tabelle 6.6: L_2 -Kombinationsfehler der Geschwindigkeitskomponenten der dreidimensionalen Nischenströmung mit $Re = 10$ zum Zeitpunkt $T_{\text{Ende}} = 1.0$

Bezug setzt. Es zeigt sich, daß die Kombinationsrechnung mit quadratisch-linearer Interpolation beim Ausdünnungsparameter $s = 4$ auf dem 64^3 -Gitter etwa denselben L_2 -Kombinationsfehler aufweist wie eine Vollgitterrechnung auf dem 32^3 -Gitter. Aus Tabelle 3.1 entnimmt man, daß der Speicherbedarf für die Punkte aller in die Kombinationslösung eingehenden Gitter nur 8,4% von der Anzahl der Punkte im Vollgitter beträgt, während das 32^3 -Gitter ein Achtel der Punkte des 64^3 -Gitters, also 12,5%, benötigt. Das feinste der in die Kombinationslösung eingehenden groben Gitter hat gerade einmal 0,4% der Punkte vom 64^3 -Gitter, das sind nur 3,2% der Punkte des 32^3 -Gitters. Im Dreidimensionalen bringt der Einsatz der Kombinationstechnik durch die Reduzierung der Komplexität also einen bemerkenswerten Vorteil.

Gitter	u -Fehler	v -Fehler	w -Fehler
$64^3 \leftrightarrow 32^3$	$6.07 \cdot 10^{-4}$	$1.84 \cdot 10^{-4}$	$5.22 \cdot 10^{-4}$
$32^3 \leftrightarrow 16^3$	$2.23 \cdot 10^{-3}$	$5.85 \cdot 10^{-4}$	$1.85 \cdot 10^{-3}$

Tabelle 6.7: L_2 -Diskretisierungsfehler der u -, v - und w -Geschwindigkeit bei der dreidimensionalen Nischenströmung mit $Re = 10$

Zum Abschluß der Diskussion dieses Testfalls soll wiederum gezeigt werden, daß die quadratisch-lineare Interpolation bei einer Kombinationsrechnung nur beim Transfer auf das Vollgitter einen kleineren Interpolationsfehler aufweist als die linear-konstante Interpolation. Es wird dazu analog zum zweidimensionalen Fall die obige Rechnung der dreidimensionalen Nischenströmung auf den verschiedenen Gittern mit der Kombinationstechnik mit linear-konstanter Interpolation für die verschiedenen Ausdünnungsparameter durchgeführt, und nur im letzten Kombinationsschritt wird eine Kombinationslösung auf dem Vollgitter mit quadratisch-linearer Interpolation gebildet. Von dieser Kombinationslösung wird der L_2 -Kombinationsfehler berechnet. Diese Werte sind für die verschiedenen Gitter in Tabelle 6.8 angegeben. Sie sind fast identisch mit den entsprechenden Werten aus Tabelle 6.6, die man bei einer Kombinationsrechnung erhält, bei der in jedem Kombinationsschritt zwischen den groben Gittern quadratisch-linear interpoliert wird. Auch hier ist die quadratisch-lineare Interpolation nur beim Transfer auf das Vollgitter besser als die linear-konstante Interpolation, was gemäß Abschnitt 5.9 auch erwartet wurde.

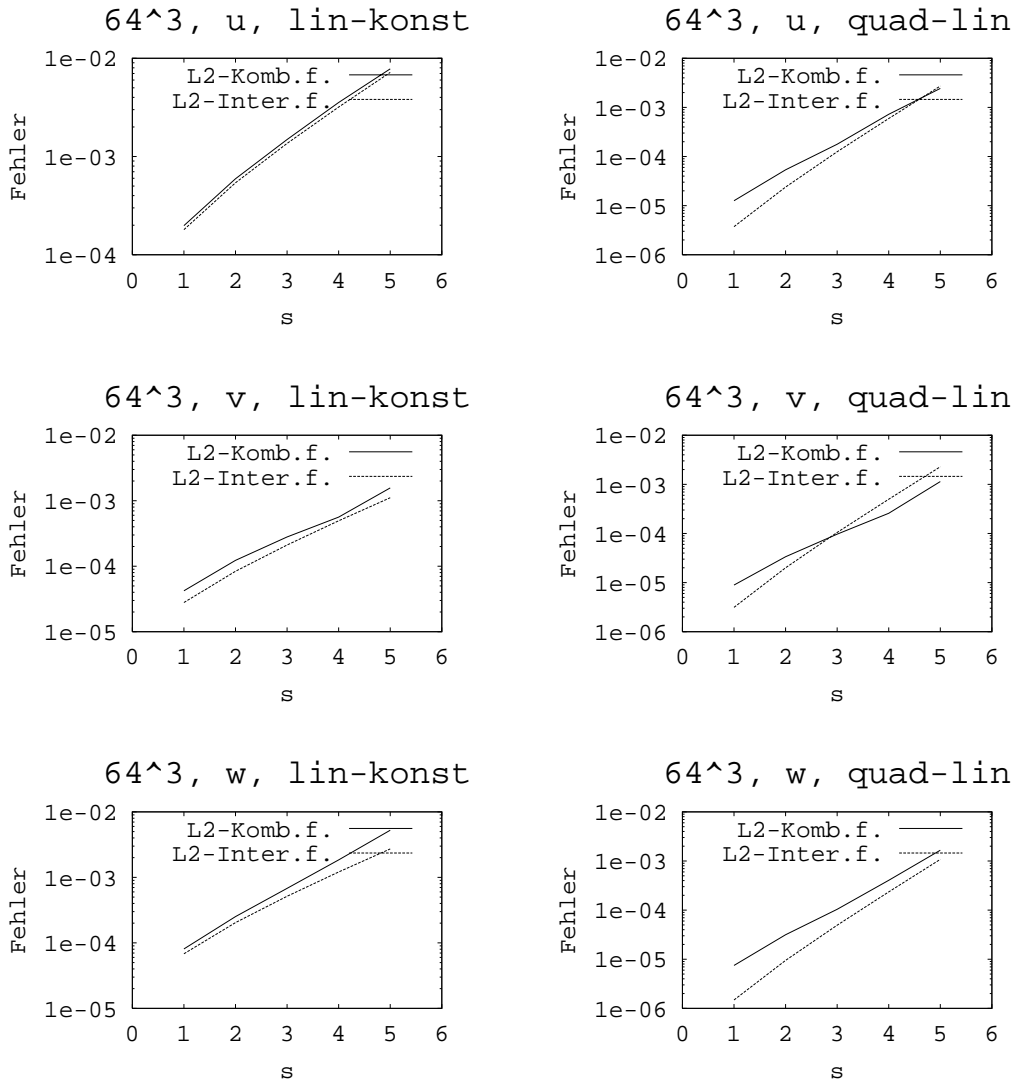


Abb. 6.24: L_2 -Kombinationsfehler und geschätzte L_2 -Interpolationsfehler der dreidimensionalen Nischenströmung mit $Re = 10$ für das 64^3 -Gitter in Abhängigkeit vom Ausdünnungsparameter s

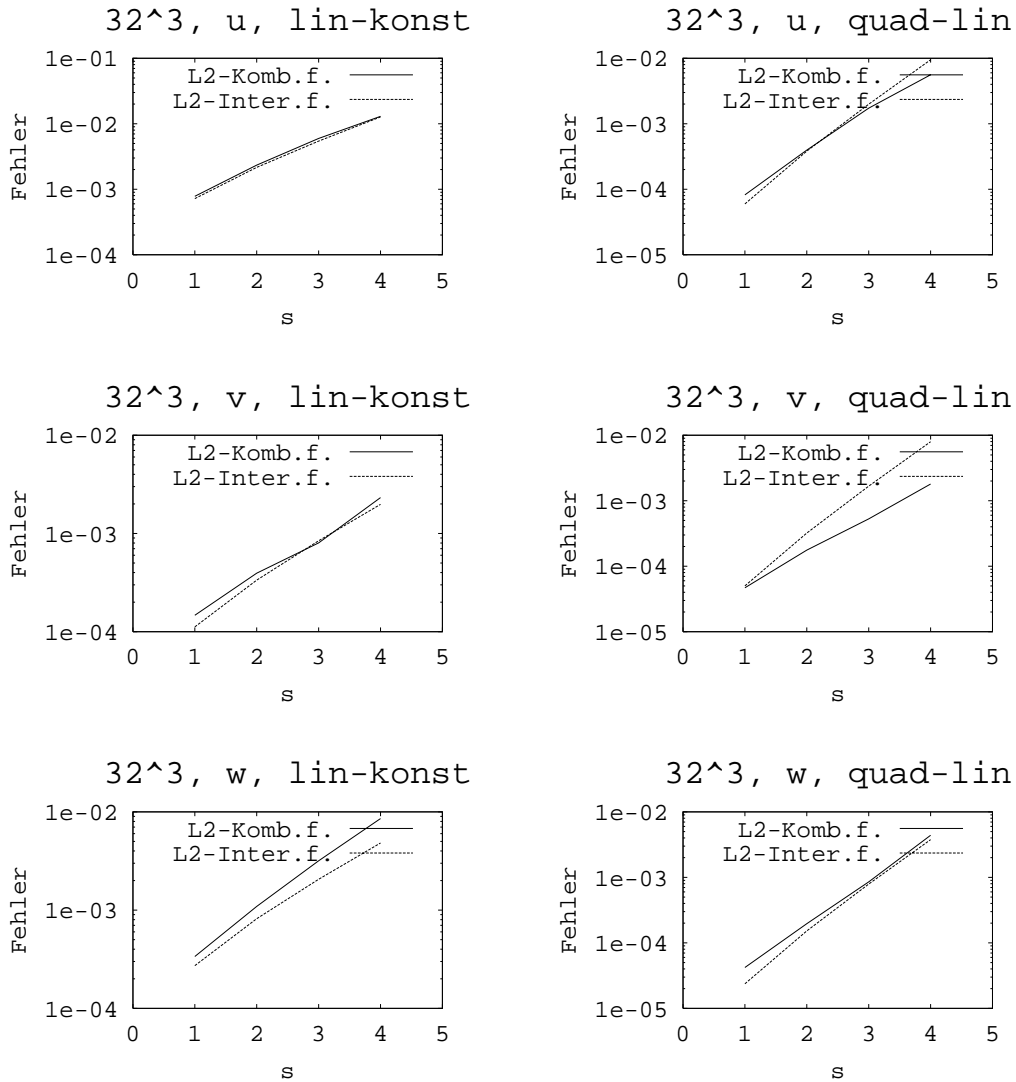


Abb. 6.25: L_2 -Kombinationsfehler und geschätzte L_2 -Interpolationsfehler der dreidimensionalen Nischenströmung mit $Re = 10$ für das 32^3 -Gitter in Abhängigkeit vom Ausdünnungsparameter s

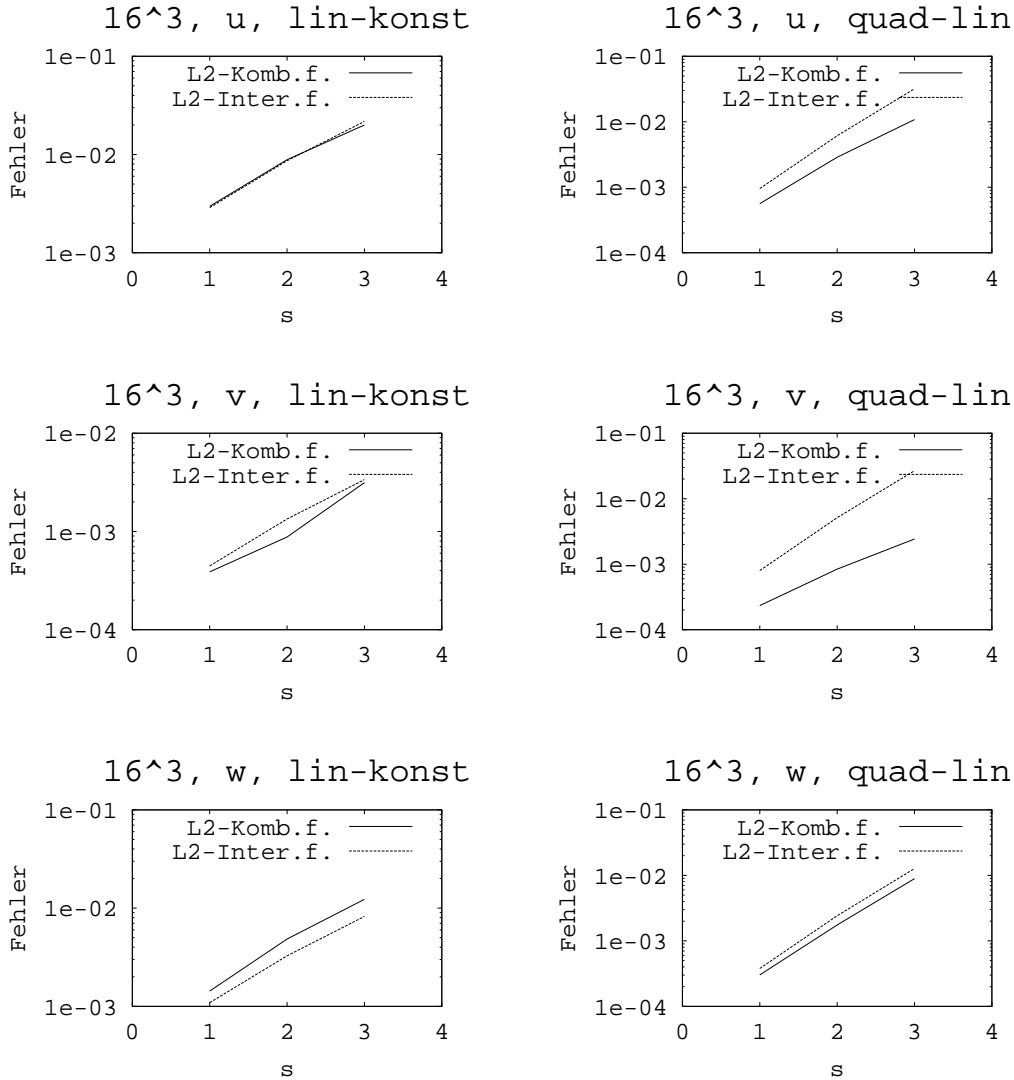


Abb. 6.26: L_2 -Kombinationsfehler und geschätzte L_2 -Interpolationsfehler der dreidimensionalen Nischenströmung mit $Re = 10$ für das 16^3 -Gitter in Abhängigkeit vom Ausdünnungsparameter s

Gitter	$s = 1$	$s = 2$	$s = 3$	$s = 4$	$s = 5$
	<i>u</i> -Geschwindigkeit				
64^3	$1.21 \cdot 10^{-5}$	$5.01 \cdot 10^{-5}$	$1.57 \cdot 10^{-4}$	$6.68 \cdot 10^{-4}$	$2.41 \cdot 10^{-3}$
32^3	$7.85 \cdot 10^{-5}$	$3.74 \cdot 10^{-4}$	$1.66 \cdot 10^{-3}$	$5.45 \cdot 10^{-3}$	
16^3	$5.58 \cdot 10^{-4}$	$2.85 \cdot 10^{-3}$	$1.05 \cdot 10^{-2}$		
	<i>v</i> -Geschwindigkeit				
64^3	$8.84 \cdot 10^{-6}$	$3.32 \cdot 10^{-5}$	$9.52 \cdot 10^{-5}$	$2.44 \cdot 10^{-4}$	$1.12 \cdot 10^{-3}$
32^3	$4.66 \cdot 10^{-5}$	$1.73 \cdot 10^{-4}$	$4.87 \cdot 10^{-4}$	$1.80 \cdot 10^{-3}$	
16^3	$2.32 \cdot 10^{-4}$	$7.69 \cdot 10^{-4}$	$2.55 \cdot 10^{-3}$		
	<i>w</i> -Geschwindigkeit				
64^3	$7.13 \cdot 10^{-6}$	$2.82 \cdot 10^{-5}$	$7.96 \cdot 10^{-5}$	$3.18 \cdot 10^{-4}$	$1.74 \cdot 10^{-3}$
32^3	$3.75 \cdot 10^{-5}$	$1.57 \cdot 10^{-4}$	$8.08 \cdot 10^{-4}$	$4.29 \cdot 10^{-3}$	
16^3	$2.80 \cdot 10^{-4}$	$1.80 \cdot 10^{-3}$	$8.50 \cdot 10^{-3}$		

Tabelle 6.8: L_2 -Kombinationsfehler der dreidimensionalen Nischenströmung mit $Re = 10$ bei einer Kombinationsrechnung, in der linear-konstant und nur im letzten Kombinationsschritt quadratisch-linear auf das Vollgitter interpoliert wird

6.3.4 Dreidimensionale Nischenströmung mit $Re=1000$

Als letzter Testfall wird analog zur dreidimensionalen Nischenströmung aus Abschnitt 6.3.3 eine Rechnung durchgeführt, bei der nur die Reynoldszahl auf $Re = 1000$ erhöht wird. Alle anderen Parameter der Rechnung und die Randbedingungen bleiben dieselben. Das Vorgehen bei der Auswertung ist ebenfalls dasselbe wie im Abschnitt 6.3.3.

In Abbildung 6.27 ist das berechnete Geschwindigkeitsfeld für den Zeitpunkt $T_{\text{Ende}} = 1.0$ dargestellt. Der sich später einstellende Wirbel hat sich wie im Zweidimensionalen noch gar nicht richtig ausgebildet. Ein Schnitt in der x - z -Ebene bei $y = 0.5$ (für die Raumrichtungen vgl. Abbildung 6.21) zeigt für das Geschwindigkeitsfeld eine Gestalt wie in Abbildung 6.15 für den zweidimensionalen Fall.

Die für den Zeitpunkt T_{Ende} bestimmten L_2 -Kombinationsfehler für die verschiedenen Kombinationsrechnungen sind in Tabelle 6.9 zusammengefasst. Die geschätzten L_2 -Interpolationsfehler gemäß Tabelle 5.3 werden berechnet mit den Werten c_3 und c_4 , für die man mit den Differenzensternen aus (5.49) bzw. (5.50) für die 64^3 -Vollgitterlösung folgende Werte berechnet:

$$\begin{aligned} c_3^{(64)}(u) &= 4.206 \cdot 10^0 & , & & c_4^{(64)}(u) &= 1.039 \cdot 10^3 \\ c_3^{(64)}(v) &= 6.752 \cdot 10^{-1} & , & & c_4^{(64)}(v) &= 1.041 \cdot 10^3 \\ c_3^{(64)}(w) &= 5.272 \cdot 10^{-1} & , & & c_4^{(64)}(w) &= 1.953 \cdot 10^2 \end{aligned} \quad (6.10)$$

Die geschätzten L_2 -Interpolationsfehler stellt Tabelle 6.9 zusammen. Für den Ausdünnungsparameter $s = 1$ erhält man:

$$\begin{aligned} u\text{-Geschw., linear-konstante Int.:} & \quad \frac{1}{4} c_3^{(64)}(u) \left(\frac{1}{64}\right)^2 &= 2.57 \cdot 10^{-4} \\ v\text{-Geschw., linear-konstante Int.:} & \quad \frac{1}{4} c_3^{(64)}(v) \left(\frac{1}{64}\right)^2 &= 4.12 \cdot 10^{-5} \\ w\text{-Geschw., linear-konstante Int.:} & \quad \frac{1}{4} c_3^{(64)}(w) \left(\frac{1}{64}\right)^2 &= 3.22 \cdot 10^{-5} \\ u\text{-Geschw., quadratisch-lineare Int.:} & \quad \frac{1}{4} c_4^{(64)}(u) \left(\frac{1}{64}\right)^4 &= 1.55 \cdot 10^{-5} \\ v\text{-Geschw., quadratisch-lineare Int.:} & \quad \frac{1}{4} c_4^{(64)}(v) \left(\frac{1}{64}\right)^4 &= 1.55 \cdot 10^{-5} \\ w\text{-Geschw., quadratisch-lineare Int.:} & \quad \frac{1}{4} c_4^{(64)}(w) \left(\frac{1}{64}\right)^4 &= 2.91 \cdot 10^{-6} \end{aligned} \quad (6.11)$$

In den Abbildungen 6.28, 6.29 und 6.30 sind die geschätzten L_2 -Interpolationsfehler und die L_2 -Kombinationsfehler aus Tabelle 6.9 aufgetragen. Im Vergleich zur Rechnung mit der kleineren Reynoldszahl kann man analog zum zweidimensionalen Fall eine größere Abweichung zwischen diesen beiden Fehlern erkennen. Auch das „Abknicken“ der Kurven bei der quadratisch-linearen Interpolation tritt wieder für größere Ausdünnungsparameter auf; es ist wiederum dadurch bedingt,

Gitter	$s = 1$	$s = 2$	$s = 3$	$s = 4$	$s = 5$
<i>u</i> -Geschwindigkeit: Linear-konstante Interpolation					
64^3	$3.74 \cdot 10^{-4}$	$1.08 \cdot 10^{-3}$	$2.63 \cdot 10^{-3}$	$6.23 \cdot 10^{-3}$	$1.42 \cdot 10^{-2}$
32^3	$1.25 \cdot 10^{-3}$	$3.57 \cdot 10^{-3}$	$8.54 \cdot 10^{-3}$	$1.93 \cdot 10^{-2}$	
16^3	$2.60 \cdot 10^{-3}$	$6.59 \cdot 10^{-3}$	$1.47 \cdot 10^{-2}$		
<i>u</i> -Geschwindigkeit: Quadratisch-lineare Interpolation					
64^3	$4.76 \cdot 10^{-5}$	$2.79 \cdot 10^{-4}$	$9.99 \cdot 10^{-4}$	$3.29 \cdot 10^{-3}$	$1.07 \cdot 10^{-2}$
32^3	$2.70 \cdot 10^{-4}$	$1.50 \cdot 10^{-3}$	$4.51 \cdot 10^{-3}$	$1.48 \cdot 10^{-2}$	
16^3	$8.86 \cdot 10^{-4}$	$2.95 \cdot 10^{-3}$	$1.26 \cdot 10^{-2}$		
<i>v</i> -Geschwindigkeit: Linear-konstante Interpolation					
64^3	$7.97 \cdot 10^{-5}$	$2.19 \cdot 10^{-4}$	$5.06 \cdot 10^{-4}$	$1.35 \cdot 10^{-3}$	$3.29 \cdot 10^{-3}$
32^3	$1.60 \cdot 10^{-4}$	$5.87 \cdot 10^{-4}$	$1.60 \cdot 10^{-3}$	$3.78 \cdot 10^{-3}$	
16^3	$2.59 \cdot 10^{-4}$	$8.73 \cdot 10^{-4}$	$2.42 \cdot 10^{-3}$		
<i>v</i> -Geschwindigkeit: Quadratisch-lineare Interpolation					
64^3	$2.86 \cdot 10^{-5}$	$1.26 \cdot 10^{-4}$	$4.19 \cdot 10^{-4}$	$1.14 \cdot 10^{-3}$	$2.52 \cdot 10^{-3}$
32^3	$9.59 \cdot 10^{-5}$	$4.74 \cdot 10^{-4}$	$1.18 \cdot 10^{-3}$	$3.15 \cdot 10^{-3}$	
16^3	$1.43 \cdot 10^{-4}$	$5.19 \cdot 10^{-4}$	$1.97 \cdot 10^{-3}$		
<i>w</i> -Geschwindigkeit: Linear-konstante Interpolation					
64^3	$7.08 \cdot 10^{-5}$	$2.71 \cdot 10^{-4}$	$9.11 \cdot 10^{-4}$	$2.64 \cdot 10^{-3}$	$6.09 \cdot 10^{-3}$
32^3	$3.46 \cdot 10^{-4}$	$1.44 \cdot 10^{-3}$	$3.33 \cdot 10^{-3}$	$7.39 \cdot 10^{-3}$	
16^3	$8.81 \cdot 10^{-4}$	$2.34 \cdot 10^{-3}$	$4.57 \cdot 10^{-3}$		
<i>w</i> -Geschwindigkeit: Quadratisch-lineare Interpolation					
64^3	$2.19 \cdot 10^{-5}$	$1.48 \cdot 10^{-4}$	$5.53 \cdot 10^{-4}$	$1.69 \cdot 10^{-3}$	$4.61 \cdot 10^{-3}$
32^3	$1.55 \cdot 10^{-4}$	$9.79 \cdot 10^{-4}$	$2.48 \cdot 10^{-3}$	$5.68 \cdot 10^{-3}$	
16^3	$3.95 \cdot 10^{-4}$	$1.61 \cdot 10^{-3}$	$3.90 \cdot 10^{-3}$		

Tabelle 6.9: L_2 -Kombinationsfehler der Geschwindigkeitskomponenten der dreidimensionalen Nischenströmung mit $Re = 1000$ zum Zeitpunkt $T_{\text{Ende}} = 1.0$

daß die Gebiete in der Strömung, die eine große Variation besitzen, in den Kombinationslösungen nicht mehr fein aufgelöst werden.

Der L_2 -Diskretisierungsfehler beim Vergleich der verschiedenen Lösungen auf den Vollgittern ist in Tabelle 6.10 angegeben. Seine Einordnung zwischen die Größen der L_2 -Kombinationsfehler aus Tabelle 6.9 ist in Abbildung 6.31 dargestellt. Im Vergleich zum Testfall mit der kleineren Reynoldszahl sieht man, daß nun bei Kombinationsrechnungen mit dem Ausdünnungsparameter $s = 4$ der L_2 -Kombinationsfehler etwa gleich groß ist wie der L_2 -Diskretisierungsfehler. Der Grund dafür liegt wiederum an der besseren Auflösung des Geschwindigkeitsfeldes der Kombinationslösung am Gebietsrand.

Gitter	u -Fehler	v -Fehler	w -Fehler
$64^3 \leftrightarrow 32^3$	$4.69 \cdot 10^{-3}$	$1.19 \cdot 10^{-3}$	$2.28 \cdot 10^{-3}$
$32^3 \leftrightarrow 16^3$	$1.33 \cdot 10^{-2}$	$2.72 \cdot 10^{-3}$	$6.09 \cdot 10^{-3}$

Tabelle 6.10: L_2 -Diskretisierungsfehler der u -, v - und w -Geschwindigkeit bei der dreidimensionalen Nischenströmung mit $Re = 1000$

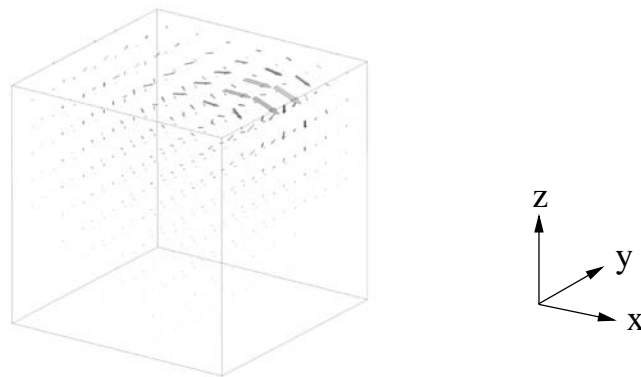


Abb. 6.27: Geschwindigkeitsfeld der dreidimensionalen Nischenströmung mit $Re = 1000$ zum Zeitpunkt $T_{\text{Ende}} = 1.0$

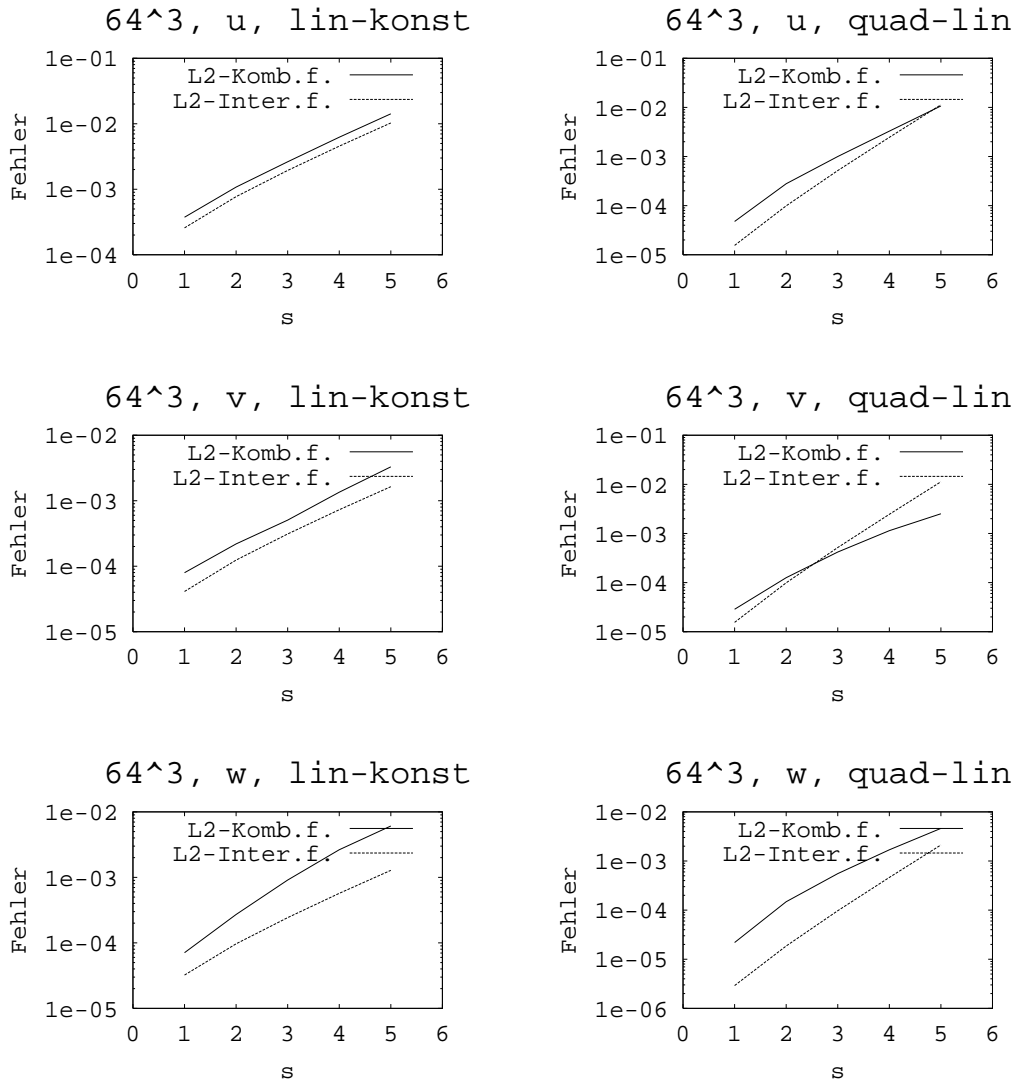


Abb. 6.28: L_2 -Kombinationsfehler und geschätzte L_2 -Interpolationsfehler der dreidimensionalen Nischenströmung mit $Re = 1000$ für das 64^3 -Gitter in Abhängigkeit vom Ausdünnungsparameter s

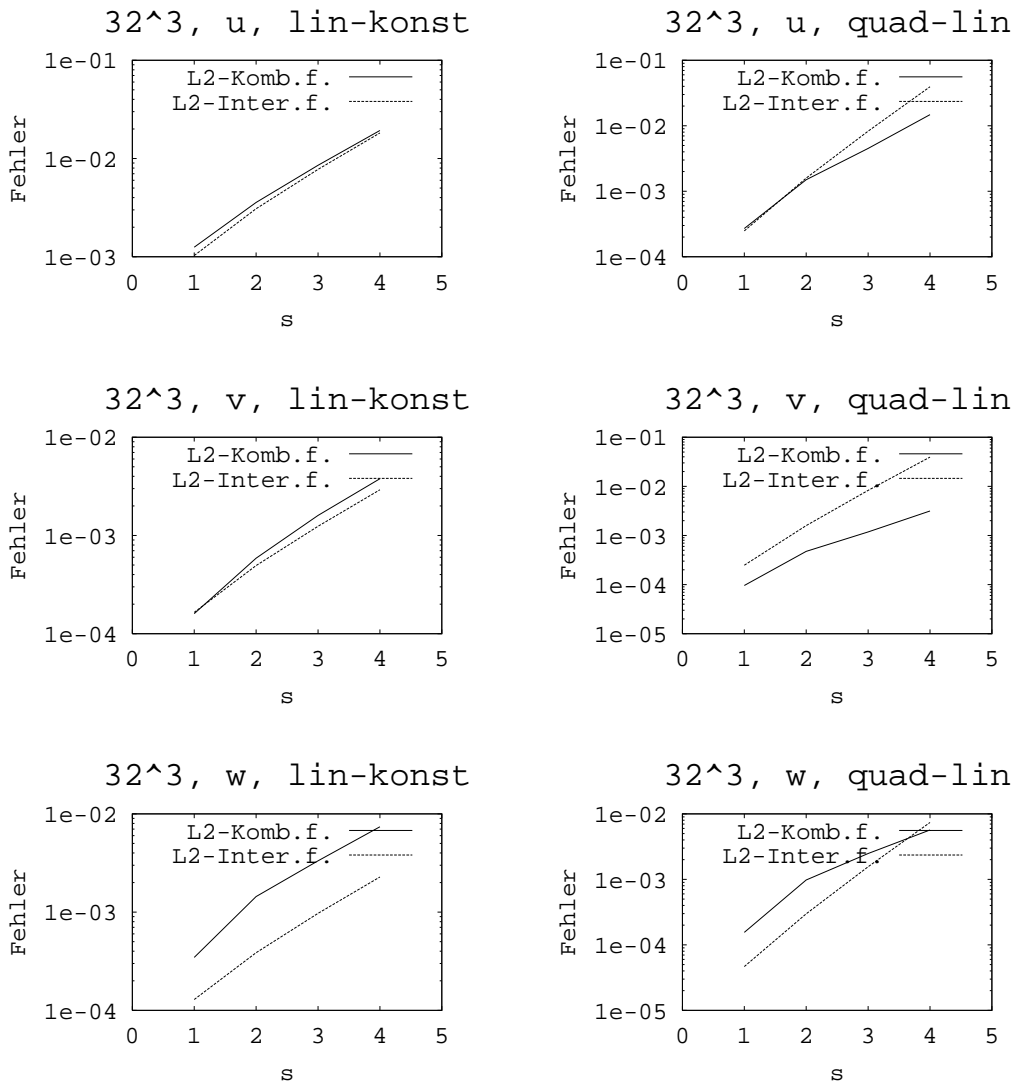


Abb. 6.29: L_2 -Kombinationsfehler und geschätzte L_2 -Interpolationsfehler der dreidimensionalen Nischenströmung mit $Re = 1000$ für das 32^3 -Gitter in Abhängigkeit vom Ausdünnungsparameter s

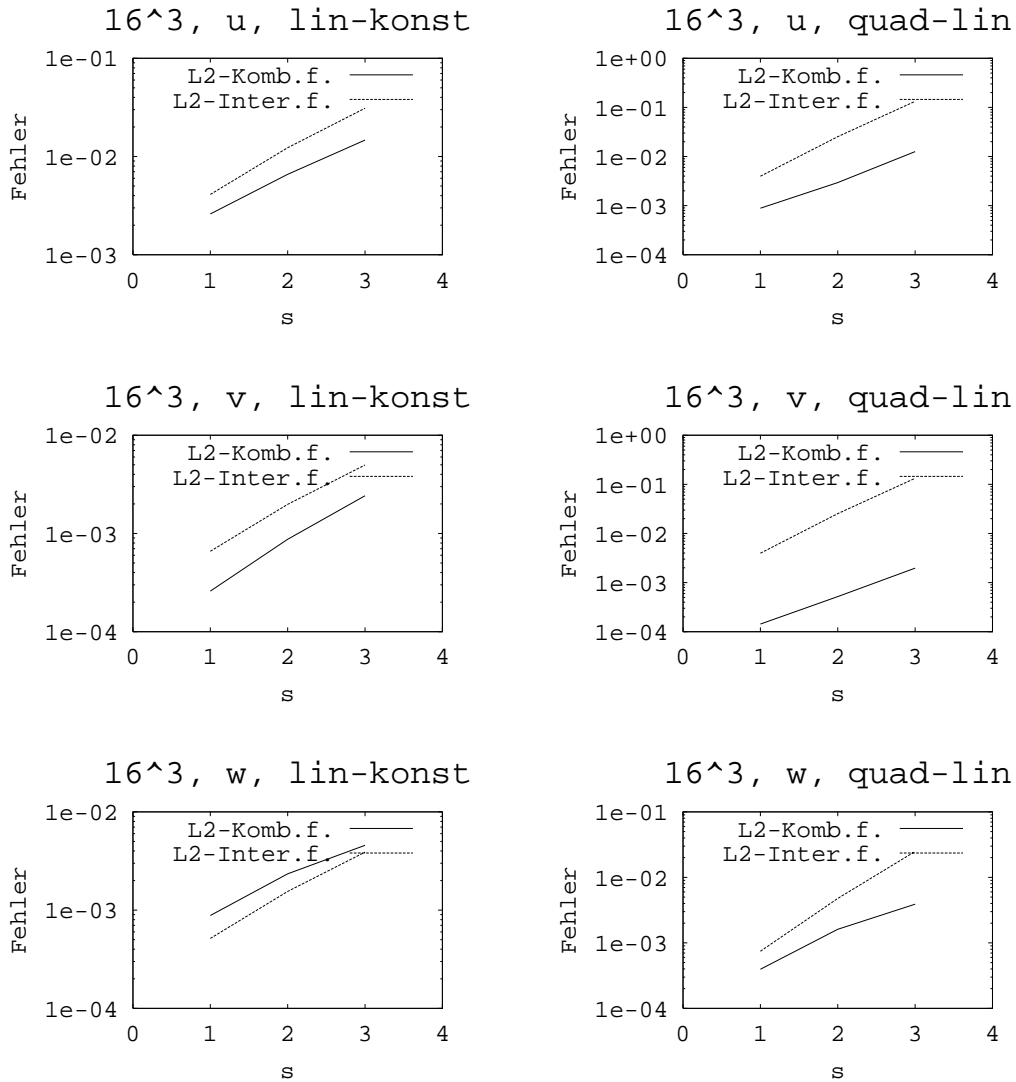


Abb. 6.30: L_2 -Kombinationsfehler und geschätzte L_2 -Interpolationsfehler der dreidimensionalen Nischenströmung mit $Re = 1000$ für das 16^3 -Gitter in Abhängigkeit vom Ausdünnungsparameter s

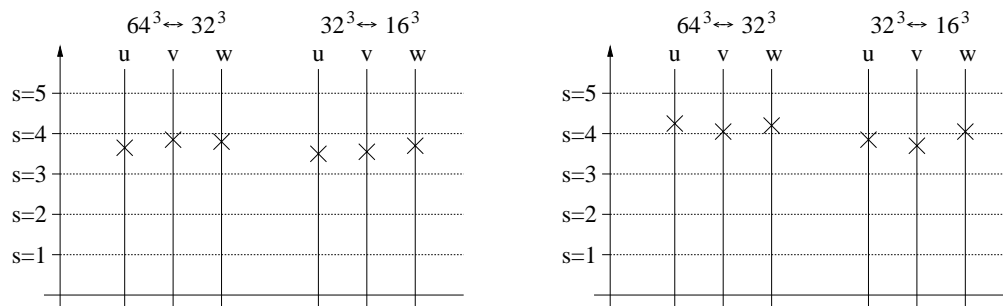


Abb. 6.31: Einordnung der Größe der L_2 -Diskretisierungsfehler zwischen die L_2 -Kombinationsfehler bei linear-konstanter Interpolation (links) und quadratisch-linearer Interpolation (rechts) für die dreidimensionale Nischenströmung bei Reynoldszahl $Re = 1000$

Kapitel 7

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurden Fragestellungen untersucht, die beim praktischen Einsatz der Kombinationstechnik in der numerischen Strömungssimulation mit versetzten Gittern auftreten. Die Untersuchungen wurden für strukturierte, orthogonale, äquidistante Gitter für den zwei- und dreidimensionalen Fall durchgeführt. Im folgenden werden die wesentlichen Ergebnisse der Arbeit aufgeführt:

Es wurde gezeigt, daß beim Transfer von Geschwindigkeitswerten von einem Gitter auf ein anderes sowohl die linear-konstante als auch die quadratisch-lineare Interpolation eingesetzt werden kann. Diese Interpolationsmethoden garantieren die Divergenzfreiheit der transferierten Geschwindigkeitswerte und somit die Divergenzfreiheit bei der Kombination dieser Lösungen.

In Abhängigkeit von der Interpolationsmethode tritt bei der Bildung der Kombinationslösung auf dem Vollgitter ein unterschiedlich großer Interpolationsfehler auf. Dieser kann mit Hilfe von Taylorreihenentwicklungen und Interpolationssternen konkret berechnet werden. Unter anderem kann so die Ordnung des Fehlers bestimmt werden. Für einige Ausdünnungsparameter wurden Schätzungen für die L_2 -Norm des Fehlers angegeben und deren asymptotisches Verhalten untersucht. Numerische Tests mit Beispielfunktionen zeigten, daß diese Schätzungen für den beobachteten Fehler gute Näherungswerte darstellen.

Weiterhin wurde gezeigt, daß bei einer Kombinationsrechnung bei der Bildung der Linearkombination auf einem groben Gitter kein Unterschied zwischen der linear-konstanten und quadratisch-linearen Interpolation besteht, weil in der Linearkombination alle Interpolationsfehler verschwinden. Bei der Bildung der Kombinationslösung auf dem Vollgitter tritt hingegen ein Interpolationsfehler auf, der je nach Interpolationsmethode unterschiedlich ist.

Das asymptotische Verhältnis dieses Interpolationsfehlers zum Diskretisierungsfehler einer Vollgitterlösung gleicher Komplexität wurde untersucht. Dabei wur-

de festgestellt, daß, falls das Verfahren einen Diskretisierungsfehler zweiter Ordnung hat, man im Dreidimensionalen zur Bildung der Kombinationslösung die quadratisch-lineare Interpolation verwenden muß, wenn der Interpolationsfehler schneller abklingen soll als der Diskretisierungsfehler.

Anwendungsrechnungen wurden für die Nischenströmung im zwei- und dreidimensionalen Fall durchgeführt. Es zeigte sich, daß die in den Kombinationslösungen auftretenden Fehler gut mit den Schätzungen für den Fehler übereinstimmten. Daraus läßt sich schließen, daß der in der Kombinationslösung auftretende Fehler im wesentlichen nur durch den Interpolationsfehler bestimmt wurde. Bei Kombinationsrechnungen waren die Fehler beim Einsatz der quadratisch-linearen Interpolation deutlich kleiner als die Fehler beim Einsatz der linear-konstanten Interpolation. Bei Betrachtungen der Komplexität der Probleme zeigte ein Vergleich des Diskretisierungsfehlers mit dem Fehler der Kombinationslösung die Effizienz der Kombinationstechnik.

Literaturverzeichnis

- [1] BRONSTEIN, I. N. und K. A. SEMENDJAJEW: *Taschenbuch der Mathematik, 25. Auflage*. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, Leipzig, 1991.
- [2] BRÜCK, B.: *Nast++: Ein objektorientiertes Framework zur modularen Strömungssimulation*. Diplomarbeit, Institut für Informatik, TU München, 1998.
- [3] BUNGARTZ, H.: *Dünne Gitter und deren Anwendung bei der adaptiven Lösung der dreidimensionalen Poisson-Gleichung*. Dissertation, Institut für Informatik, TU München, 1992.
- [4] BUNGARTZ, H.: *Finite Elements of Higher Order on Sparse Grids*. Habilitationsschrift, Institut für Informatik, TU München, 1998.
- [5] BUNGARTZ, H., M. GRIEBEL und C. ZENGER: *Einführung in die Computergraphik*. Vieweg Verlag, Braunschweig, 1996.
- [6] BUNGARTZ, H. und C. ZENGER: *Error Control for Adaptive Sparse Grids*. In: H. BULGAK AND C. ZENGER (Herausgeber): *Error Control and Adaptivity in Scientific Computing*, Dordrecht, Boston, London, 1999. NATO Science Series, Kluwer Academic Publishers.
- [7] ENDL, K. und W. LUH: *Analysis I, 9. Auflage*. AULA Verlag, Wiesbaden, 1989.
- [8] ENDL, K. und W. LUH: *Analysis II, 7. Auflage*. AULA Verlag, Wiesbaden, 1994.
- [9] FERZIGER, J. H. und M. PERIĆ: *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer, Berlin, 1997.
- [10] FLETCHER, C. A. J.: *Computational Techniques for Fluid Dynamics, Volume 1, Second Edition*. Springer, Berlin, 1991.
- [11] FLETCHER, C. A. J.: *Computational Techniques for Fluid Dynamics, Volume 2, Second Edition*. Springer, Berlin, 1991.
- [12] GRIEBEL, M., TH. DORNSEIFER und T. NEUNHOEFFER: *Numerische Simulation in der Strömungsmechanik*. Vieweg Verlag, Braunschweig, 1995.

- [13] GRIEBEL, M., W. HUBER, U. RÜDE und T. STÖRTKUHL: *The Combination Technique for Parallel Sparse-Grid-Preconditioning and -Solution of PDEs on Multiprocessor Machines and Workstation Networks*. In: L. BOUGÉ, M. COSNARD, Y. ROBERT AND D. TRYSTRAM (Herausgeber): *Proceedings of the Second Joint International Conference on Vector and Parallel Processing CONPAR/VAPP V 92*. Springer-Verlag, 1992. Auch erhältlich als SFB Bericht 342/11/92 A.
- [14] GRIEBEL, M., M. SCHNEIDER und C. ZENGER: *A Combination Technique for the Solution of Sparse Grid Problems*. In: P. DE GROEN AND R. BEAUWENS (Herausgeber): *Proceedings of the IMACS International Symposium on Iterative Methods in Linear Algebra*. Amsterdam, Elsevier, 1990. Auch erhältlich als SFB Bericht 342/19/90 A.
- [15] HACKBUSCH, W.: *Iterative Lösung großer schwachbesetzter Gleichungssysteme, 2. Auflage*. Teubner, Stuttgart, 1993.
- [16] HACKBUSCH, W.: *Theorie und Numerik elliptischer Differentialgleichungen, 2. Auflage*. Teubner, Stuttgart, 1996.
- [17] HUBER, W.: *Turbulenzsimulation mit der Kombinationsmethode auf Parallelrechnern und Workstation-Netzen*. Dissertation, Institut für Informatik, TU München, 1996.
- [18] KREISSL, R.: *Simulation laminarer Strömungen in komplexen Geometrien mit der Kombinationsmethode*. Diplomarbeit, Institut für Informatik, TU München, 1997.
- [19] LANDAU, L. D. und E. M. LIFSCHITZ: *Lehrbuch der theoretischen Physik, Band VI: Hydrodynamik, 5. überarbeitete Auflage*. Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 1991.
- [20] LEHRSTUHL INFORMATIK V DER TU MÜNCHEN: *Nast++: Ein objektorientiertes Programmpaket zur modularen Strömungssimulation*. <http://www5.in.tum.de/software/Nast++.html>.
- [21] MEHL, M.: *Ein interdisziplinärer Ansatz zur dreidimensionalen numerischen Simulation von Strömung, Stofftransport und Wachstum in Biofilmsystemen auf der Mikroskala*. Dissertation, Institut für Informatik, TU München, 2001.
- [22] MEIER, F.: *Effiziente numerische Behandlung von Strömungen in veränderlichen Geometrien auf kartesischen Gittern*. Dissertation, Institut für Informatik, TU München, 2000.
- [23] PFLAUM, C.: *Diskretisierung elliptischer Differentialgleichungen mit dünnen Gittern*. Dissertation, Institut für Informatik, TU München, 1996.

-
- [24] PÖGL, M.: *Erweiterungen von Nast++: Drei Raumdimensionen, Geometriebeschreibung und Parallelisierung*. Systementwicklungsprojekt, Institut für Informatik, TU München, 1999.
- [25] PRANDTL, L., K. OSWATITSCH und K. WIEGHARDT: *Führer durch die Strömungslehre, 9. Auflage*. Vieweg, Braunschweig, 1993.
- [26] RYKASCHEWSKI, M.: *Numerische Simulation von laminaren Strömungen über Hindernisse*. Diplomarbeit, Institut für Informatik, TU München, 1997.
- [27] SPURK, J. H.: *Strömungslehre, 4. Auflage*. Springer, Berlin, 1996.
- [28] STOER, J.: *Numerische Mathematik 1, 5. Auflage*. Springer, Berlin, 1989.
- [29] STOER, J. und R. BULIRSCH: *Numerische Mathematik 2, 3. Auflage*. Springer, Berlin, 1990.
- [30] UNGER, F.: *Numerische Simulation turbulenter Rohrströmungen*. Dissertation, Lehrstuhl für Fluidmechanik, TU München, 1994.
- [31] ZENGER, C.: *Sparse Grids*. SFB Bericht 342/18/90, Institut für Informatik, TU München, 1990.