

**Lehrstuhl für Statik
der Technischen Universität München**

Geometrische Locking-Effekte bei Finiten Elementen und ein allgemeines Konzept zu ihrer Vermeidung

Frank Koschnick

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktor-Ingenieurs

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr.-Ing. Gerhard H. Müller

Prüfer der Dissertation:

1. Univ.-Prof. Dr.-Ing. Kai-Uwe Bletzinger
2. Univ.-Prof. Dr.-Ing. Karl Schweizerhof,
Universität Fridericiana zu Karlsruhe (TH)

Die Dissertation wurde am 15.06.2004 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen am 22.09.2004 angenommen.

Geometrische Locking-Effekte bei Finiten Elementen und ein allgemeines Konzept zu ihrer Vermeidung

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird eine systematische Analyse der Locking-Effekte bei Finiten Elementen sowie der Methoden zu ihrer Vermeidung gegeben. Mit der Discrete-Strain-Gap-Methode wird ein universelles Konzept zur Elimination geometrischer Locking-Phänomene vorgestellt. Herausragendes Merkmal dieser Formulierung ist die einheitliche Behandlung aller geometrischen Versteifungsphänomene sowie ihre Anwendbarkeit auf beliebige Elementtypen unabhängig von deren Polynomordnung und ohne die Wahl von Kollokationspunkten. Ein Vergleich dieser Methode mit bekannten Formulierungen sowie numerische Beispiele belegen die Leistungsfähigkeit des vorgeschlagenen Konzeptes.

Die Analyse der Locking-Phänomene und das Verständnis der Ursachen ihres Auftretens ist für die Beurteilung der Eigenschaften von finiten Elementen unerlässlich. Neben der Definition des Begriffes Locking und dessen mechanisch motivierter Interpretation wird ebenfalls eine numerische bzw. mathematische Sichtweise der Versteifungseffekte gegeben. Besondere Aufmerksamkeit wird auf eine klare Trennung und Definition der unterschiedlichen Locking-Phänomene gelegt.

Einen weiteren Schwerpunkt dieser Arbeit bildet die Anwendung und Erweiterung der Discrete-Strain-Gap-Methode (DSG) und die Analyse ihrer Eignung hinsichtlich der beschriebenen Locking-Phänomene. Die vorgeschlagenen DSG-Modifikationen sind für dreidimensionale Kontinua anwendbar und enthalten somit als Sonderfall alle Strukturelemente. Die Darstellung der bekannten Methoden der Unterintegration, der Assumed-Natural-Strains (ANS) und der Enhanced-Assumed-Strains (EAS) verfolgt vor allem das Ziel, für die Modifikationen der DSG-Methode einen Vergleichsrahmen zu bieten. Ausgehend vom Dreifeld-Funktional von Hu-Washizu wird mit der Entwicklung einer variationellen Basis ebenfalls eine mathematische Grundlage der DSG-Methode angegeben.

Mit der DSG-Methode kann somit ein universelles Konzept entwickelt werden, das variationell abgesichert ist und neben seinen hervorragenden numerischen Eigenschaften vor allem durch seine Universalität und konzeptionelle Klarheit besticht.

Geometric Locking Phenomena of Finite Elements and a Uniform Concept for their Elimination

Abstract

This thesis presents a systematic analysis of locking phenomena in the context of finite elements and methods for their elimination. The Discrete Strain Gap method (DSG) represents a universal concept for the elimination of geometric locking effects. Exceptional characteristic of this formulation is the uniform treatment of all kinds of geometric locking effects. It is applicable to elements of arbitrary shape and order without the determination of collocation points. Comparison with established element formulations as well as numerical examples confirm the efficiency of the proposed concept.

Analysis of locking phenomena and the understanding of their origins are essential for the assessment of finite element properties. Beside the definition of the term locking, mechanical, numerical and mathematical interpretations of locking effects are presented. Special attention is devoted to a strict separation and definition of the different locking phenomena.

Furthermore, this thesis deals with the application of the Discrete Strain Gap method (DSG) and its suitability concerning the described locking phenomena. The proposed DSG modifications are applicable for both three-dimensional solid elements and structural elements. Description of well-known concepts like Reduced Integration, Assumed Natural Strains (ANS) and Enhanced Assumed Strains (EAS) provides a framework suited for a comparison to the modifications introduced by the DSG method.

Starting from the Hu-Washizu principle the development of a variational basis leads to a mathematical foundation of the DSG method.

The DSG method represents a uniform concept for the formulation of finite elements. Based on a variational principle, this method convinces by its excellent numerical performance and in particular by its universality and conceptual clarity.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner sechsjährigen Tätigkeit als wissenschaftlicher Assistent am Lehrstuhl für Statik der Technischen Universität München.

Meinen herzlichsten Dank möchte ich Herrn Prof. Dr.-Ing. Kai-Uwe Bletzinger aussprechen. Seine wissenschaftliche Kompetenz, sein Vertrauen und Rückhalt sowie das von ihm geschaffene Umfeld bildeten eine ideale Grundlage für eine erfolgreiche Forschungstätigkeit und ermöglichten so diese Arbeit.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Karl Schweizerhof von der Universität Karlsruhe danke ich herzlich für die Übernahme des Koreferats. Sein aufrichtiges Interesse an meiner Arbeit hat mich sehr gefreut. Herrn Prof. Dr.-Ing. Gerhard Müller möchte ich für die bereitwillige Übernahme der Leitung der Prüfungskommission danken.

Mein Dank gilt ebenfalls Herrn em.Prof. Dr.-Ing. Walter Wunderlich, der mein Interesse für die Finite-Element-Methode geweckt und gefördert hat und durch meine Aufnahme an seinen Lehrstuhl die Basis für diese Arbeit geschaffen hat.

Bei meinen Kollegen am Lehrstuhl für Statik möchte ich mich für die offene und herzliche Atmosphäre bedanken, die nicht nur durch fachliche Diskussionen und zahlreiche gemeinsame Aktivitäten geprägt war, sondern aus der sich ebenfalls viele Freundschaften entwickelt haben. Besonders danken möchte ich Herrn Dr.-Ing. Manfred Bischoff, der mir stets mit Rat und Tat zur Seite stand und maßgeblich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen hat. Meinem langjährigen Zimmerkollegen Dipl.-Ing. Roland Wüchner danke ich für die sehr angenehme Zusammenarbeit und die aufmunternden Gespräche, an die ich immer gerne zurückdenken werde.

Meinen lieben Eltern, Ute und Walter Koschnick, danke ich für die Unterstützung und den Rückhalt, die sie mir immer gewährt haben.

Meiner Lebensgefährtin Simone Abthoff möchte ich für ihr liebevolles Verständnis und ihre Motivation danken. Sie hat mir die nötige Kraft gegeben und mir jederzeit zur Seite gestanden.

München, im Oktober 2004

Frank Koschnick

Inhaltsverzeichnis

Notation	1
1 Einleitung	5
1.1 Motivation und Stand der Technik	5
1.2 Ziele dieser Arbeit	8
2 Kontinuumsmechanische Grundlagen	11
2.1 Differentialgeometrie	11
2.2 Kinematik	12
2.3 Spannungen und Gleichgewicht	13
2.4 Stoffgesetze	14
2.5 Energieprinzipien und Variationsmethoden	14
2.5.1 Prinzip der virtuellen Verschiebungen	15
2.5.2 Prinzip von HU-WASHIZU	15
2.5.3 Prinzip von HELLINGER-REISSNER	16
3 Grundlagen der Methode der Finiten Elemente	17
3.1 Lösbarkeit und Stabilität von Funktionalen	17
3.1.1 Einfeldfunktionale	17
3.1.2 Mehrfeldfunktionale	19
3.2 Nachweis der Konvergenz	22
3.2.1 Rang der Steifigkeitsmatrix, Rangabfall	22
3.2.2 Der Patchtest	23
3.3 Grenzen der Perfektionierbarkeit	25

4	Struktur- und Kontinuumselemente	27
4.1	Einleitung	27
4.2	Schalenelemente	28
4.2.1	Schalenmodelle	28
4.2.2	Herleitung des Schalenmodells aus der 3D-Kontinuumstheorie	32
4.2.3	5-Parameter-Formulierung	38
4.2.4	7-Parameter-Formulierung	39
4.2.5	Diskretisierung	42
4.2.6	Bestimmung des Schalendirektors	45
4.2.7	Linearisierung	46
4.3	Balken- und Plattenelemente	48
4.3.1	Balkenelemente	48
4.3.2	Plattenelemente	51
4.4	Scheiben- und Kontinuumselemente	55
4.5	Zusammenfassung	57
5	Locking	59
5.1	Einleitung	59
5.2	Definition von Locking	59
5.2.1	Mathematische Sichtweise	61
5.2.2	Numerische Sichtweise	62
5.2.3	Mechanische Sichtweise	63
5.3	Schub-Locking	64
5.4	Trapezoidal-Locking / Curvature-Thickness-Locking	67
5.5	Volumetrisches Locking	70
5.6	Querschub-Locking	72
5.7	Membran-Locking	74
5.7.1	Modellbeispiel: Schwach gekrümmter Balken	75
5.7.2	Identifikation und Auftreten	77
5.8	Netzverzerrungsempfindlichkeit	80
5.9	Zusammenfassung	81

6	Effiziente Elementformulierungen	83
6.1	Einleitung	83
6.2	Variationelle Basis	85
6.2.1	B-bar-Formulierungen	85
6.2.2	Enhanced-Strain-Formulierung	87
6.3	Unterintegration	88
6.3.1	Übersicht	88
6.3.2	Hourglass-Stabilisierung	89
6.4	Die Assumed-Natural-Strain-Methode (ANS)	92
6.4.1	Grundidee	93
6.4.2	Erweiterungen der ANS-Methode	95
6.4.3	Zusammenfassung	99
6.5	Die Discrete-Strain-Gap-Methode (DSG)	100
6.5.1	Einleitung	100
6.5.2	Grundidee und Anwendung auf Querschub-Locking	101
6.5.3	Dreieckige DSG-Elemente	105
6.5.4	Stabilisierte DSG-Elemente	106
6.5.5	Erweiterungen der DSG-Methode	107
6.5.6	Netzverzerrungsempfindlichkeit	114
6.5.7	Konvergenz und Patchtest	116
6.5.8	Zusammenfassung	117
6.6	Die Enhanced-Assumed-Strain-Methode (EAS)	118
6.6.1	Herleitung der Steifigkeitsmatrix	119
6.6.2	Methode der inkompatiblen Verschiebungen	120
6.6.3	EAS-Elemente	120
6.6.4	Zusammenfassung	125
7	Numerische Beispiele	127
7.1	Verzerrungsempfindlichkeit des Membrananteils	128
7.1.1	Kragscheibe	128
7.1.2	MacNeal-Balken	129
7.2	Schalenstrukturen	132
7.2.1	Pinched Hemisphere	132
7.2.2	Twisted Beam	133
7.2.3	Zylindersektor	136

8 Zusammenfassung und Ausblick	139
Anhang	143
A.1 Tensorrechnung	143
A.2 Formfunktionen	144
A.2.1 Dreieckige Elemente	144
A.2.2 Viereckige Elemente	144
A.3 Zweidimensionaler Balken	145
A.4 Schalen	146
A.4.1 Lokal kartesisches Koordinatensystem	146
A.4.2 Diskretisierung der Funktionale	146
A.5 Linearisierung	149
Literaturverzeichnis	151

Notation

Tensoren erster und zweiter Stufe werden fettgedruckten Buchstaben dargestellt, ebenso Matrizen. Die Unterscheidung ergibt sich aus dem Kontext. Skalare sind in Standardschrift dargestellt.

Bei Indexschreibweise nehmen kleine lateinische Indizes die Werte 1 bis 3 an, kleine griechische Indizes die Werte 1 und 2. Große lateinische Indizes laufen von 1 bis n . Grundsätzlich gilt die Einsteinsche Summationskonvention.

Lateinische Buchstaben:

$\mathbf{A}_i, \mathbf{A}^i$	ko- und kontravariante Basisvektoren der Schalenmittelfläche in der <i>unverformten</i> Konfiguration
$\mathbf{a}_i, \mathbf{a}^i$	ko- und kontravariante Basisvektoren der Schalenmittelfläche in der <i>verformten</i> Konfiguration
$\mathbf{A}_3, \mathbf{a}_3$	Direktor der <i>unverformten</i> bzw. <i>verformten</i> Konfiguration
\mathbf{A}, \mathbf{a}	Metriktensor der Schalenmittelfläche in der <i>unverformten</i> bzw. <i>verformten</i> Konfiguration
\mathbf{b}	Volumenlasten
\mathbf{B}	diskretisierter Differentialoperator (B-Operator)
\mathbf{B}''	verschiebungskompatibler Differentialoperator
$\bar{\mathbf{B}}$	modifizierter Differentialoperator (DSG-Methode, ANS-Methode)
C^n	Raum der n-fach stetig differenzierbaren Funktionen
\mathbf{C}	Materialtensor
\mathbf{D}	Materialtensor der Strukturelemente (Dickenintegration von \mathbf{C})
\mathbf{d}	Vektor der Knotenverschiebungen \mathbf{v}^h und Differenzverschiebungen \mathbf{w}^h bzw. Rotationen $\boldsymbol{\varphi}^h$
E	Elastizitätsmodul
E_{ij}^M	kinematische Variable
\mathbf{E}	Green-Lagrangescher Verzerrungstensor
\mathbf{E}''	Verschiebungskompatibler Green-Lagrangescher Verzerrungstensor
$\tilde{\mathbf{E}}$	Tensor der erweiterten Verzerrungen entsprechend der EAS-Methode
\mathbf{F}	Deformationsgradient
G	Schubmodul
G_{ij}, G^{ij}, G_i^j	ko-, kontra, und gemischtvariante Komponenten von \mathbf{G}
g_{ij}, g^{ij}, g_i^j	ko-, kontra, und gemischtvariante Komponenten von \mathbf{g}
\mathbf{G}, \mathbf{g}	Metriktensor in der Referenz- bzw. Momentankonfiguration

$\mathbf{G}_i, \mathbf{G}^i$	ko- und kontravariante Basisvektoren in der Referenzkonfiguration
$\mathbf{g}_i, \mathbf{g}^i$	ko- und kontravariante Basisvektoren in der Momentankonfiguration
I	Trägheitsmoment beim Balken
J	Jacobideterminante
\mathbf{K}	Steifigkeitsmatrix
\mathbf{L}	Kopplungsmatrix (EAS-Methode)
\mathbf{M}	Matrix der Ansatzfunktionen der erweiterten Verzerrungen (EAS-Methode) N
\mathbf{N}	Matrix der Formfunktionen N
n_M^{ij}	statische Variable, energetisch konjugiert zu E_{ij}^M
\mathbf{P}	PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor 1. Art
\mathbf{R}, \mathbf{r}	Ortsvektor eines Punktes der Strukturmittelfläche bzw.-linie in der Referenz- bzw. Momentankonfiguration
\mathbf{S}	PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor 2. Art, energetisch konjugiert zu \mathbf{E}
t	Abmessung in Dickenrichtung
\mathbf{t}	Spannungsvektor
\mathbf{t}^S	Vektor der von \mathbf{S} abhängigen Spannungen
\mathbf{t}^u	Vektor der von \mathbf{S}^u abhängigen Spannungen
$\hat{\mathbf{t}}$	Vektor der vorgegebenen Spannungen
\mathbf{u}	Verschiebungsvektor eines Punktes
$\hat{\mathbf{u}}$	vorgegebenen Verschiebungen
\mathbf{v}	Verschiebungsvektor der Mittelfläche bzw. Mittellinie von Strukturelementen
\mathbf{w}	Differenzvektor
\mathbf{X}, \mathbf{x}	Ortsvektor eines Punktes in der Referenz- bzw. Momentankonfiguration
\mathbf{Z}	Schalenshifter

Griechische Buchstaben:

α_s^0, α_s^1	Schubkorrekturfaktoren für den konstanten bzw. lineare Anteil der Querschubverzerrungen
δ_{ij}	Kronecker-Delta
$\varepsilon_{\alpha\beta}$	kinematische Variable, entspricht dem konstanten Anteil $E_{\alpha\beta}^0$
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Vektor mit den Komponenten der Verzerrungen (Voigt-Notation)
$\gamma_{\alpha 3}$	kinematische Variable, entspricht dem konstanten Anteil $2 \cdot E_{\alpha 3}^0$
$\boldsymbol{\gamma}$	Vektor der Querschub-Verzerrungen
$\kappa_{\alpha\beta}$	kinematische Variable, entspricht dem linearen Anteil $E_{\alpha\beta}^1$
$\boldsymbol{\kappa}$	Vektor der Krümmungen
η	zweite Koordinatenrichtung im Elementkoordinatensystem (entspricht θ^2)
$\boldsymbol{\Lambda}$	Rotationstensor
μ, λ	Lamé-Konstanten

ν	Querdehnzahl
φ	Rotation beim Balken
φ_a	Rotation um Achse a (Platte)
Ω	Gebiet
Π	potentielle Energie
Π^{ext}	äußere potentielle Energie
Π^{int}	innere potentielle Energie
Π_{HW}	potentielle Energie beim Prinzip von HU-WASHIZU
Π_{HW}^{ext}	äußere potentielle Energie beim Prinzip von HU-WASHIZU
Π_{HW}^{int}	innere potentielle Energie beim Prinzip von HU-WASHIZU
Π_{HR}	potentielle Energie beim Prinzip von HELLINGER-REISSNER
ρ	Dichte
$\boldsymbol{\sigma}$	Vektor mit den Komponenten der Spannungen (Voigt-Notation)
τ	Stabilisierungsparameter
θ^i	krummlinige, konvektive Koordinaten
$d\theta^i$	inkrementelles krummliniges Linienelement
ξ	erste Koordinatenrichtung im Elementkoordinatensystem (entspricht θ^1)
ζ	dritte Koordinatenrichtung im Elementkoordinatensystem (entspricht θ^3)

Operatoren und sonstige Vereinbarungen

$\operatorname{div} \mathbf{A}$	Divergenz von \mathbf{A} bzgl. der unverformten Konfiguration
$\operatorname{grad} \mathbf{A}$	Gradient von \mathbf{A} bzgl. der unverformten Konfiguration
$\frac{\partial a}{\partial b} = a_{,b}$	partielle Ableitung von a nach b
δa	Variation von a
Δa	Inkrement bezüglich a
\mathbf{A}^T	Transponierte von \mathbf{A}
\mathbf{A}^{-1}	Inverse von \mathbf{A}
$\operatorname{span}\{a, b\}$	von a und b aufgespannter Funktionenraum

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Motivation und Stand der Technik

Die Methode der finiten Elemente ist heute aus dem Bereich der numerischen Simulation nicht mehr wegzudenken. Infolge seiner unübertroffenen Vielseitigkeit und Flexibilität nimmt dieses Konzept eine herausragende Stellung zur numerischen Lösung von Differentialgleichungen ein. Ursprünglich entwickelt für strukturmechanische Analysen, erstreckt sich der Anwendungsbereich der Methode der Finiten Elemente inzwischen auf zahlreiche weitere Gebiete beispielsweise Wärmeleitung, Strömungsmechanik, Elektrizität, Magnetostatik, Biomechanik.

Entscheidenden Einfluss auf die Qualität der Ergebnisse von FE-Berechnungen hat die verwendete Elementformulierung. Die wichtigsten Anforderungen an ein Element sind Zuverlässigkeit (Robustheit, Stabilität), Effizienz (Genauigkeit, Rechenaufwand) und Flexibilität.

Die ersten entwickelten und eingesetzten Elemente konnten allerdings kaum eine dieser Bedingungen erfüllen. Grund hierfür war vor allem der damals noch nicht erkannte Einfluss der Locking-Phänomene. Um das zu steife Verhalten der verschiebungsformulierten Elemente zu verbessern, wurde zunächst die Ansatzordnung der Elemente erhöht (Irons [81]). Das Verständnis für die genaueren Ursachen der Versteifungseffekte und damit auch die ersten Lösungsansätze für niedrig interpolierte Elemente (Doherty, Wilson und Taylor [54]) entwickelte sich jedoch nur langsam, der Begriff „Locking“ selbst verbreitete sich erst Mitte der 70er Jahre.

Auch wenn in der Elementtechnologie die Problematik und Behandlung der Lockingphänomene zunehmend an Bedeutung gewann, hatten die meisten kommerziellen FE-Programme Ende der 70er Jahre dieser Entwicklung noch nicht Rechnung getragen.

Als Reaktion auf die in vielen dieser Programme enthaltenen Fehler, wurde 1983 in Großbritannien die NAFEMS (National Agency for Finite Element Methods and Standards) gegründet. In diesem Kontext wurde ebenfalls die Veröffentlichung geeigneter Testbeispiele vorangetrieben, mit deren Hilfe die Eignung finiter Elemente hinsichtlich der Locking-Probleme untersucht werden konnte (MacNeal und Harder [100], Belytschko et al. [25]).

Dennoch konzentrierten sich die Anstrengungen der Elemententwickler eher auf Möglichkeiten, die Locking-Phänomene zu vermeiden, und nicht auf eine Untersuchung der maßgeblichen Ursachen der Versteifungseffekte. Systematische Analysen über die verschiedenen Lockingeffekte und die Gründe für ihr Auftreten – beispielhaft sei die Arbeit von Babuška und Suri [11] erwähnt – wurden nur wenige durchgeführt, insbesondere im Vergleich zur immensen Anzahl an Vorschlägen für Elementformulierungen. Dementsprechend existieren teilweise immer noch unterschiedliche Definitionen der Lockingeffekte und Unklarheiten über deren Ursachen sowie die Eignung der verschiedenen Methoden zu ihrer Vermeidung.

Auch die Bedeutung einer Elementformulierung ohne Versteifungsdefekte wird teilweise immer noch unterschätzt. So stellen partiell auch die Elementbibliotheken kommerzieller Programme Elemente zur Verfügung, die Lockingeffekte aufweisen.

Da der *Ablauf* einer FE-Berechnung durch versteifende Elemente gewöhnlich nicht gestört wird, wird

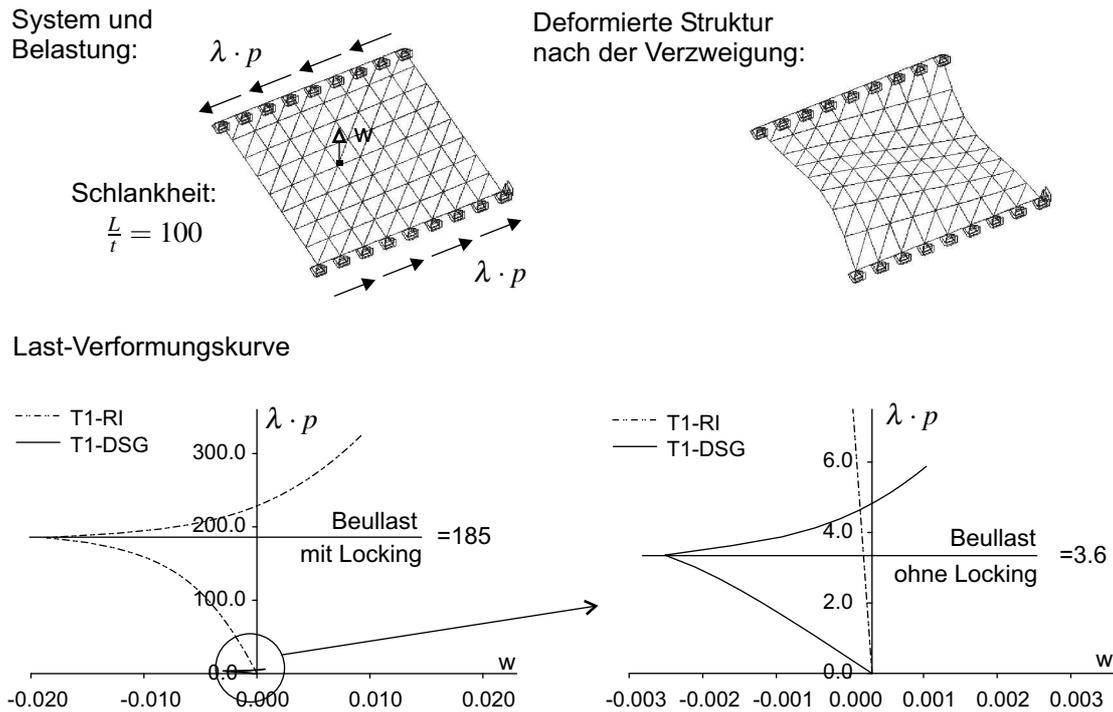


Abbildung 1.1: Einfluss von Locking: Verzweigungslast

der Einfluss auf die Berechnungsergebnisse oft übersehen. Allerdings sind gerade bei komplexen Fragestellungen, wie Optimierungsproblemen, gekoppelten Problemen oder auch „nur“ bei geometrisch aufwendigen strukturmechanischen Problemen die Ergebnisse nur schwer abzuschätzen und somit eventuell auftretende Lockingphänomene kaum zu identifizieren. Für die Gewährleistung korrekter Ergebnisse ist die Forderung nach Locking-freien Elementen somit unerlässlich. Die Relevanz der Elementtechnologie gerade bei der Komplexität der heute untersuchten Fragestellungen soll an dieser Stelle anhand von zwei Beispielen unterstrichen werden:

Zunächst wird das Verhalten einer schubbeanspruchten Membran untersucht, Abbildung 1.1. Dabei wird die Belastung gesteigert, bis sich eine Faltenbildung ergibt. Die Diskretisierung der Struktur erfolgt mit Schalelementen, die Falte stellt sich nach Erreichen der kritischen Last ein¹.

Aus den Last-Verschiebungsdiagrammen wird die extreme Abweichung bei der Berechnung der Verzweigungslast infolge des Versteifungseffektes sichtbar, die kritische Last der Berechnung mit Locking-behafteten Elementen ist um den Faktor 50 höher.

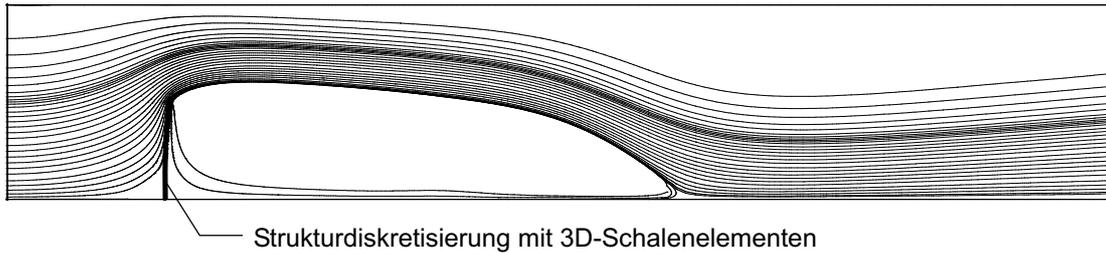
Auch wenn dieses Beispiel einen extremen Fall darstellt, so ist dennoch mit Abweichungen vom kritischen Lastfaktor zu rechnen, falls die Elemente nicht Locking-frei sind.

Als weiteres Beispiel für den Einfluss von Versteifungseffekten bei Strukturelementen soll die Berechnung eines gekoppelten Problems angeführt werden. Abbildung 1.2 zeigt die Analyse der Wechselwirkung zwischen Fluid und Struktur (FSI) am Beispiel einer laminaren Kanalströmung, die durch eine flexible Hindernis, diskretisiert mit Schalelementen, gestört wird. Gemessen am numerischen Aufwand fällt der Strukturanalyse in dieser gekoppelten Berechnung die geringere Bedeutung zu. Der Einfluss der Formulierung der Strukturelemente auf die Ergebnisse ist jedoch drastisch: obwohl beide Lösungen für sich genommen plausibel erscheinen, bewirkt das Auftreten von Locking (Abb. 1.2a) neben der geringer verformten Struktur ein völlig anderes Strömungsbild und Druckverteilung².

¹Durch weitere Laststeigerung kann das Entstehen eines Faltenmusters beobachtet werden, auch hier wird der Einfluss von Locking-Effekten durch Abweichungen in der Anzahl und Amplitude der Falten sichtbar

²Entsprechend können bei der realitätsnahen Berechnung von Windlasten aus Abweichungen der Druckverteilung falsche

a) Locking der Strukturelemente



b) Verwendung Locking-freier Strukturelemente

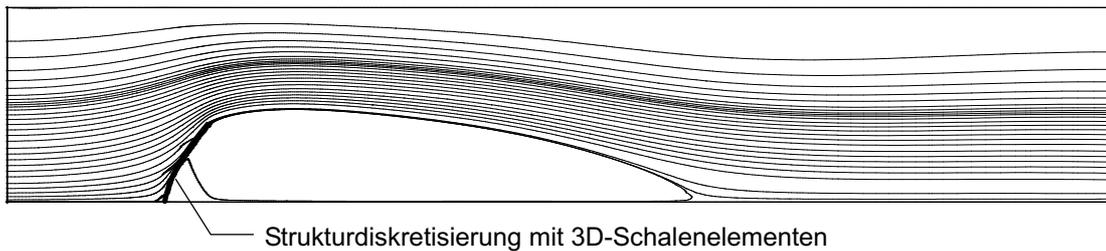


Abbildung 1.2: Einfluss von Versteifungseffekten auf gekoppelte Berechnungen: Fluid-Struktur-Interaktion

Neben diesen beiden Darstellungen können zahllose weitere Beispiele angeführt werden, bei denen der Einfluss von Locking zu deutlich schlechteren oder gar unbrauchbaren Ergebnissen führt. Exemplarisch seien noch Problemstellungen aus dem Bereich der Formoptimierung erwähnt: hier hat neben der Vermeidung der Versteifungseffekte vor allem die Stabilität und der numerische Aufwand der eingesetzten Elemente Einfluss auf die Berechnungsergebnisse, siehe z.B. Camprubí et al. [47].

Zusammenfassend kann aus diesen Beispielen abgeleitet werden, dass mit der Komplexität der zu untersuchenden Aufgabenstellung auch die Bedeutung einer robusten und effizienten Elementformulierung steigt.

Die Zahl der Publikationen, die die Formulierung geeigneter, d.h. Locking-freier Finiter Elemente behandelt, ist kaum überschaubar. Eine vollständige Übersicht über die wesentlichen Entwicklungen in diesem Bereich anzugeben, erweist sich daher als unmöglich. Dementsprechend werden in dieser Arbeit auch nur Konzepte aufgegriffen, die sich als Grundlage zur Elementformulierung etabliert haben.

Dazu ist die Methode der *Unterintegration* (Abschnitt 6.3) zu zählen, die als erste zur Vermeidung von Locking-Phänomenen eingesetzt wurde. Der Erfolg der reduzierten Integration liegt in der Ausblendung der parasitären Verzerrungen, der Ursache für die Versteifungsphänomene. Problematisch ist bei der Anwendung der Unterintegration jedoch das Auftreten von unphysikalischen Nullenergie-Eigenformen (*Zero-Energy-Modes*), die die Stabilität des Elementes beeinträchtigen und einen Einsatz in dieser Form unmöglich machen.

Abhilfe für diesen Defekt bietet die so genannte *Hourglass-Stabilisierung*. Dabei werden den *Zero-Energy-Modes* des (unterintegrierten) Verschiebungselementes künstliche Steifigkeiten zugeordnet. Der Vorteil der *Hourglass-Stabilisierung* liegt in der Effizienz der resultierenden Elementformulierung, weshalb diese Elemente oftmals bei der Lösung transienter Probleme eingesetzt werden, nachteilig sind die Schwierigkeiten bei der Wahl geeigneter Stabilisierungsparameter.

Mit der *Enhanced-Assumed-Strain-Methode* (EAS, Abschnitt 6.6) wird ein hybrid-gemischter Ansatz beschrieben, der sich vor allem für die Formulierung von zwei- und dreidimensionalen Kontinuums-

elementen bewährt hat. Neben Schub-Locking und Volumetrischem Locking wird die EAS-Methode ebenfalls zur Vermeidung von Membran-Locking eingesetzt. Da explizit Ansätze für ein unabhängiges Verzerrungsfeld eingeführt werden, ergibt sich bei der Ermittlung der Elementsteifigkeiten ein erhöhter numerischer Aufwand durch die erforderliche Kondensation der zusätzlichen Freiheitsgrade. Dennoch stellt sich die EAS-Methode als eine der am meisten verbreiteten Formulierungen für die o.g. Anwendungen dar.

Eine sehr elegante Möglichkeit der Formulierung Locking-freier Elemente bieten die so genannten B-Bar-Methoden. Im Mittelpunkt dieser Formulierungen steht die Entwicklung eines modifizierten Verzerrungsfeldes, das die gewünschten Eigenschaften aufweist und über den (modifizierten) Differential-Operator \mathbf{B} mit den Verschiebungsfreiheitsgraden verknüpft ist. Das Besondere an dieser Methode ist, dass keine zusätzlichen (Verzerrungs-) Freiheitsgrade in die Formulierung eingebracht werden, der numerische Aufwand gegenüber einem Verschiebungselement also nicht anwächst.

Zu einem bekannten Vertreter dieser Vorgehensweise zählt die *Assumed-Natural-Strain-Methode* (ANS, Abschnitt 6.4), die sich insbesondere zur Vermeidung von Querschub-Locking etabliert hat.

Mit der *Discrete-Strain-Gap-Methode*, Abschnitt 6.5, wird von Bletzinger et al. ein neues Konzept zur Formulierung vorgestellt, das ebenfalls auf der Idee der B-bar-Methode fußt, aber allgemeiner formuliert ist als beispielsweise die ANS-Methode. Die Attraktivität dieser Methode liegt neben ihrer Leistungsfähigkeit in der einheitlichen Anwendung für beliebige Elementtypen und Polynomordnungen. Da die ursprüngliche Formulierung auf die Modifikation der Querschubverzerrungen beschränkt ist, bietet sich hier ein besonderer Anreiz zur Erweiterung dieser Methode.

1.2 Ziele dieser Arbeit

Die systematische Analyse der Locking-Effekte bei finiten Elementen stellt einen Hauptpunkt dieser Arbeit dar. Ziel dieser Untersuchungen ist eine eindeutige Definition und Klassifizierung der verschiedenen Versteifungsphänomene.

Dabei sollen neben den relativ bekannten Effekten des Schub- bzw. Querschub-Locking und des Volumetrischen Locking insbesondere Versteifungsphänomene besprochen werden, die in der Literatur seltener behandelt werden bzw. für die unterschiedliche oder nur unklare Definitionen existieren.

Einen weiteren Schwerpunkt bildet die Erweiterung der Discrete-Strain-Gap-Methode. Aufbauend auf den Analysen zu den Versteifungsphänomenen ist hierbei das Ziel, die DSG-Formulierung neben der Eliminierung von Querschub-Locking zur Vermeidung aller geometrischen Lockingeffekte einzusetzen. Ein besonderes Augenmerk liegt hierbei auf der Leistungsfähigkeit der DSG-Modifikationen in Relation zu den bekannten Methoden wie der EAS- oder ANS-Methode.

Neben der Beschreibung der numerischen Eigenschaften soll mit der Entwicklung einer variationellen Basis ebenfalls eine mathematische Grundlage der DSG-Methode angegeben werden.

Die Gliederung der Arbeit stellt sich wie folgt dar:

In *Kapitel 2* werden die wesentlichen Grundlagen der Kontinuumsmechanik angegeben, auf die im Rahmen dieser Arbeit Bezug genommen wird.

Kapitel 3 beschäftigt sich mit den mathematischen Grundlagen der Methode der Finiten Elemente und gibt die Lösbarkeits- und Stabilitätsbedingungen von Ein- und Mehrfeldfunktionalen an. Des Weiteren wird die Bedeutung des Patchtests diskutiert.

Kapitel 4 gibt die Grundgleichungen der verschiedenen Struktur- und Kontinuumselemente an. Der Schwerpunkt liegt hier auf der Entwicklung von Schalenelementen sowie der Beschreibung der zugrunde liegenden Schalenmodelle und deren Herleitung aus der dreidimensionalen Kontinuumstheorie.

Mit dem 7-Parameter-Modell als niedrigstem asymptotisch korrektem Schalenmodell, das zur Verwendung dreidimensionaler Stoffgesetze geeignet ist, und dem 5-Parameter-Modell als „klassische“ schubweiche Schale werden zwei der gebräuchlichsten Schalenmodelle vorgestellt. Dem Vergleich zum Degenerationskonzept folgen die Diskretisierung der im Schalenmodell auftretenden Felder sowie die Diskussion der Probleme bzw. Besonderheiten infolge der Wahl des Schalendirektors.

Die anschließende Herleitung von Balken- und Plattenelementen aus den Schalengleichungen verfolgt vor allem das Ziel, eine anschaulichere Darstellung der Probleme bei der Elementformulierung und Strategien zu deren Lösung zu ermöglichen.

Die Versteifungs-Phänomene finiter Elemente werden in *Kapitel 5* diskutiert. Der Definition des Begriffs *Locking* folgt die Beschreibung der unterschiedlichen Locking-Phänomene und ihre mechanische, numerische und mathematische Interpretation. Die Einteilung in geometrische und materielle Lockingeffekte sowie die Analyse der zu den Versteifungseffekten führenden Ursachen bildet die Grundlage der Beurteilung der Eignung von Elemententwicklungen.

In *Kapitel 6* werden geeignete Methoden zur Formulierung effizienter finiter Elemente vorgestellt. Ausgehend vom Prinzip von Hu-Washizu werden zunächst die unterschiedlichen Annahmen und Voraussetzungen für eine variationelle Konsistenz der betrachteten Methoden erörtert. Die Eignung verschiedener bekannter Konzepte wie der Unterintegration, der Methode der angenommenen Verzerrungen oder der Methode der erweiterten Verzerrungen wird anhand der Locking-Phänomene diskutiert. Besonderes Augenmerk liegt auf der *Discrete-Strain-Gap*-Methode, die mit den vorgeschlagenen Erweiterungen ein universelles Konzept zur Vermeidung geometrischer Locking-Phänomene darstellt.

Die numerischen Beispiele in *Kapitel 7* stützen und ergänzen die Analysen des vorangegangenen Kapitels und dokumentieren die Leistungsfähigkeit der vorgeschlagenen Formulierungen der *Discrete-Strain-Gap*-Methode.

Kapitel 2

Kontinuumsmechanische Grundlagen

In diesem Kapitel sollen kurz die Begriffe und Beziehungen der Kontinuumsmechanik erläutert werden, auf die in den folgenden Kapiteln Bezug genommen wird. Auf eine ausführliche Darstellung soll dabei verzichtet werden, für eine tiefer gehende Beschreibung der aufgeführten Grundlagen wird auf entsprechende Literatur verwiesen, exemplarisch seien Truesdell und Noll [151], Malvern [105], Marsden und Hughes [107], Mang und Hofstetter [106] sowie Parisch [114] angeführt.

2.1 Differentialgeometrie

Die Bewegung und Deformation eines Körpers im dreidimensionalen Euklidischen Raum wird in der materiellen (LAGRANGESchen) Betrachtungsweise durch die Änderung der Ortsvektoren seiner materiellen Punkte beschrieben.

Hierfür werden folgende Koordinatensysteme definiert: neben dem ortsfesten, kartesischen Koordinatensystem x^i , das von den Basisvektoren $\mathbf{E}_i = \mathbf{E}^i$ aufgespannt wird, wird ein krummliniges, konvекtives Koordinatensystem θ^i mit den Basisvektoren \mathbf{G}_i für die Referenzkonfiguration und \mathbf{g}_i für die Momentankonfiguration festgelegt.

Der Körper wird in der Ausgangs- oder Referenzkonfiguration durch das Feld von Ortsvektoren $\mathbf{X}(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$, die Momentanlage des Körpers durch $\mathbf{x}(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$ beschrieben und folgt damit der verbreiteten Notation, die Referenzkonfiguration durch Großbuchstaben und die Momentankonfiguration durch Kleinbuchstaben zu kennzeichnen.

Die ko- und kontravarianten Basisvektoren lassen sich damit nach Gleichung (2.1) für die Referenzkonfiguration

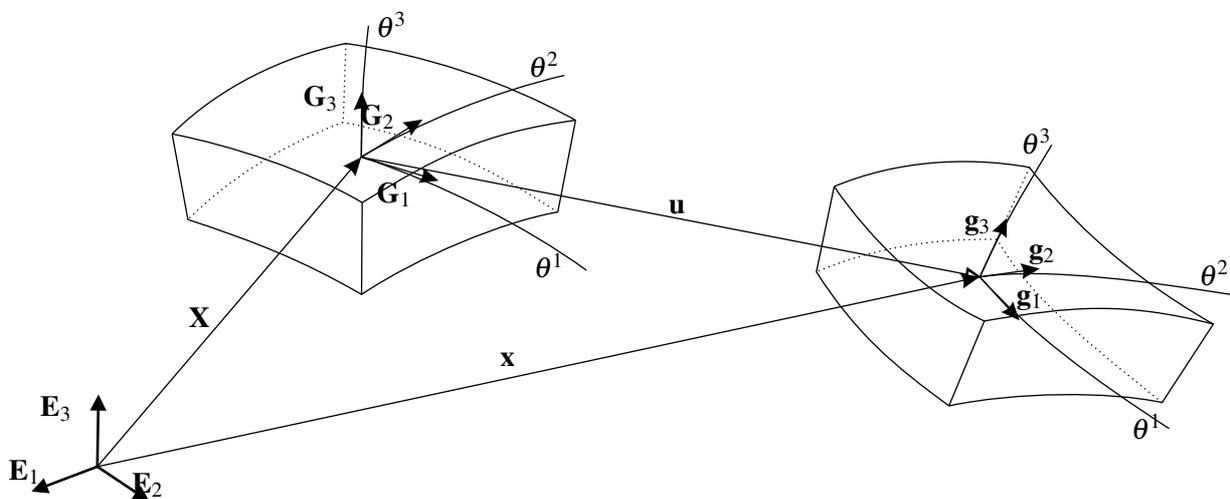


Abbildung 2.1: Referenz- und Momentankonfiguration, Koordinatensysteme

$$\mathbf{G}_i = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta^i}, \quad \mathbf{G}^i = \frac{\partial \theta^i}{\partial \mathbf{X}} \quad (2.1)$$

und nach Gleichung (2.2) für die Momentankonfiguration definieren.

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta^i}, \quad \mathbf{g}^i = \frac{\partial \theta^i}{\partial \mathbf{x}} \quad (2.2)$$

Die Berechnung der ko- bzw. kontravarianten Metrikoeffizienten erfolgt über das Skalarprodukt der entsprechenden Basisvektoren

$$g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j, \quad g^{ij} = \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^j \quad (2.3)$$

und können herangezogen werden, um die ko- und kontravarianten Basisvektoren ineinander überzuführen:

$$\mathbf{g}^i = g^{ij} \mathbf{g}_j, \quad \mathbf{g}_i = g_{ij} \mathbf{g}^j. \quad (2.4)$$

Durch die Ortsvektoren und die Metrik sind die Geometrie und Bewegung des Körpers eindeutig definiert und alle anderen Größen, wie Verzerrungsmaße, etc., daraus ableitbar.

2.2 Kinematik

Die kinematischen Gleichungen stellen die Beziehung zwischen den Verschiebungen und den Verzerrungen eines Körpers her. Die Bewegung des Körpers ist durch die Änderung der Ortsvektoren, d.h. die Differenz zwischen den Ortsvektoren der Referenz- und Momentankonfiguration definiert.

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} \quad (2.5)$$

Mit der Definition des Deformationsgradienten \mathbf{F}

$$\mathbf{F} = \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^i, \quad \mathbf{F}^T = \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{g}_i \quad (2.6)$$

$$\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{g}^i, \quad \mathbf{F}^{-T} = \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{G}_i \quad (2.7)$$

kann die unverformte Basis \mathbf{G}_i in die verformte Basis \mathbf{g}_i und umgekehrt überführt werden:

$$\mathbf{g}_i = \mathbf{F} \mathbf{G}_i, \quad \mathbf{G}_i = \mathbf{F}^{-T} \mathbf{g}_i. \quad (2.8)$$

Die Determinante des Deformationsgradienten J setzt die deformierten und undeformierten differentiellen Volumenelemente dV und dV_0 in Relation

$$J = \det(\mathbf{F}) = \frac{dV}{dV_0} \quad (2.9)$$

und ist für zulässige Deformationen immer größer Null, womit Selbstdurchdringungen und negative Volumina ausgeschlossen sind. Des weiteren gilt für die Transformation eines differentiellen Flächenelementes zwischen der verformten und unverformten Konfiguration

$$\mathbf{n} dA = \det(\mathbf{F}) \mathbf{N} dA_0, \quad (2.10)$$

mit dem differentiellen Flächenelement dA und der Einheitsflächennormalen \mathbf{n} in der Momentan- bzw. dA_0 und \mathbf{N} in der Referenzkonfiguration. Als objektives Verzerrungsmaß für große Deformationen wird in diesem Kontext gewöhnlich der GREEN-LAGRANGESche Verzerrungstensor verwendet.

$$\mathbf{E} = E_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \quad (2.11)$$

$$= \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{G}) \quad (2.12)$$

Seine Komponenten können nach Gleichung (2.13) bestimmt werden.

$$E_{ij} = \frac{1}{2} (\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j - \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_j) = \frac{1}{2} (\mathbf{G}_i \cdot \mathbf{u}_{,j} + \mathbf{G}_j \cdot \mathbf{u}_{,i} + \mathbf{u}_{,i} \cdot \mathbf{u}_{,j}) \quad (2.13)$$

Die Gleichungen (2.11) stellen die kinematischen Feldgleichungen dar. Auf dem Rand Γ_u sind zusätzlich die Verschiebungsrandbedingungen $\hat{\mathbf{u}}$ zu erfüllen.

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} \quad (2.14)$$

2.3 Spannungen und Gleichgewicht

In jedem Punkt des verformten Körpers kann der wahre oder CAUCHY-Spannungsvektor \mathbf{t} definiert werden als

$$\mathbf{t} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta A}, \quad \mathbf{t} = \frac{d\mathbf{p}}{dA} \quad (2.15)$$

mit \mathbf{p} als Kraft auf dem infinitesimalen verformten Flächenstück ΔA , das durch den Einheitsnormalenvektor \mathbf{n} gekennzeichnet ist. Nach dem CAUCHY-Theorem lässt sich der Spannungsvektor als verjüngendes Produkt des CAUCHY-Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma}$ mit der Flächennormalen \mathbf{n} darstellen:

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \quad (2.16)$$

Damit ist der symmetrische CAUCHY-Spannungstensor in der kovarianten Basis der aktuellen Konfiguration definiert.

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T = \sigma^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \quad (2.17)$$

Unter Vernachlässigung der Beschleunigungsterme können aus dem Impulserhaltungssatz die statische Feldgleichung und die statischen Randbedingungen, d.h. die Gleichgewichtsbedingungen abgeleitet werden.

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \rho \mathbf{b} = 0 \quad (2.18)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \hat{\mathbf{t}} \quad (2.19)$$

Dabei repräsentieren \mathbf{b} Volumenlasten und $\hat{\mathbf{t}}$ vorgeschriebene Randlasten.

Aufgrund der Unabhängigkeit des Kraftvektors $d\mathbf{p}$ von der jeweiligen Bezugskonfiguration kann der CAUCHY-Spannungsvektor auch auf das differentielle Flächenelement dA_0 bzw. die Normale \mathbf{N} des Referenzzustandes bezogen werden, mit \mathbf{t}_0 als so genanntem Pseudo-Spannungsvektor.

$$d\mathbf{p} = \mathbf{t} dA = \mathbf{t}_0 dA_0 = \mathbf{P} \mathbf{N} dA_0 \quad (2.20)$$

$$\mathbf{t}_0 = \mathbf{P} \mathbf{N} \quad (2.21)$$

Der damit definierte PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor 1. Art \mathbf{P} (PK1) oder auch Tensor der nominalen Spannungen kann unter Verwendung der Transformationsbeziehungen (2.20) direkt aus dem CAUCHY-Spannungstensor hergeleitet werden:

$$\mathbf{P} = \det(\mathbf{F}) \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} \quad (2.22)$$

Der PK1-Spannungstensor kann mit Hilfe des inversen Deformationsgradienten in den symmetrischen PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor 2. Art (PK2) \mathbf{S} transformiert werden:

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P} = \det(\mathbf{F}) \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} = S^{ij} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j \quad (2.23)$$

Der PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor 2. Art ist energetisch konjugiert zum GREEN-LAGRANGESchen Verzerrungstensor (2.11) und stellt somit ein geeignetes Spannungsmaß für die Formulierung der zu behandelnden Strukturen in Lagrangescher Betrachtungsweise dar, jedoch erlaubt seine Definition keine sinnvolle/anschauliche physikalische Interpretation seiner Komponenten.

Die statische Feldgleichung (2.18) kann also wie folgt formuliert werden:

$$\operatorname{div}(\mathbf{F} \mathbf{S}) + \rho \mathbf{b} = 0 \quad (2.24)$$

$$\mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{N} = \hat{\mathbf{t}}_0 \quad (2.25)$$

2.4 Stoffgesetze

Die Gleichungen, die die statischen mit den kinematischen Größen verknüpfen, also Spannungen mit den Verzerrungen, werden als konstitutive Gleichungen, Stoff- oder Materialgesetze bezeichnet. Ihre Entwicklung, numerische Umsetzung und die erforderliche experimentelle Verifikation stellen ein komplexes Forschungsgebiet dar. Für einen Überblick und eine weitergehende Beschäftigung mit dieser Thematik siehe beispielsweise Mang und Hofstetter [106], Malvern [105], Stein und Barthold [141].

Für die in dieser Arbeit behandelten Fragestellungen haben die unterschiedlichen Stoffgesetze jedoch keinen Einfluss, so dass hier nur die grundlegenden Beziehungen linear elastischen Materialverhaltens dargestellt werden sollen.

Der in Lagrange'scher Betrachtungsweise verwendete GREEN-LAGRANGESche Verzerrungstensor und der dazu energetisch konjugierte PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor 2. Art sind für linear-elastisches Materialverhalten über den Materialtensor \mathbb{C} nach Gleichung (2.26) eindeutig miteinander verknüpft.

$$\mathbf{S} = \mathbb{C} : \mathbf{E} \quad (2.26)$$

$$\mathbb{C} = C^{ijkl} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j \otimes \mathbf{G}_k \otimes \mathbf{G}_l \quad (2.27)$$

Unter der Annahme kleiner Verzerrungen, wovon im folgenden ausgegangen werden soll, ist die konstitutive Feldgleichung durch das so genannte ST.VENANT-KIRCHHOFF-Materialgesetz charakterisiert. Ist das Material außerdem noch isotrop, sind zwei Parameter zu seiner Beschreibung ausreichend. Hierzu werden die Lamé-Konstanten λ und μ herangezogen, die sich mit dem Elastizitätsmodul E und der Querdehnzahl ν in Beziehung setzen lassen.

$$\lambda = \frac{E \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.28)$$

Für diesen Sonderfall ergeben sich die Komponenten des Materialtensors nach Gleichung (2.29).

$$C^{ijkl} = \lambda G^{ij} G^{kl} + \mu (G^{ik} G^{jl} + G^{il} G^{kj}) \quad (2.29)$$

2.5 Energieprinzipien und Variationsmethoden

Die starke Form der Bestimmungsgleichungen des statischen Randwertproblems können zusammenfassend wie folgt angegeben werden:

$$\text{Gleichgewicht} \quad \text{div}(\mathbf{FS}) + \rho \mathbf{b} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (2.24)$$

$$\text{kinematische Randbedingungen} \quad \mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} \quad \text{auf } \Gamma_u \quad (2.14)$$

$$\text{statische Randbedingungen} \quad \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{N} = \hat{\mathbf{t}}_0 \quad \text{auf } \Gamma_S \quad (2.25)$$

$$\text{Stoffgesetz} \quad \mathbf{S} = \mathbb{C} : \mathbf{E} \quad \text{in } \Omega \quad (2.26)$$

$$\text{Kinematik} \quad \mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) \quad \text{in } \Omega \quad (2.13)$$

Das angeschriebene System von Differentialgleichungen ist jedoch nur in Sonderfällen analytisch lösbar, als Basis für Näherungsverfahren dienen häufig Integralformulierungen.

Finite Elemente werden meist auf der Grundlage von Funktionalen formuliert. Dabei stellt das Prinzip der virtuellen Verschiebungen das einfachste und am weitesten verbreitete Funktional dar, das zu den Verschiebungselementen führt. Weitere Möglichkeiten stellen das Prinzip von HU-WASHIZU und das Prinzip von HELLINGER-REISSNER dar, die neben Verschiebungs- auch Spannungs- und Verzerrungsfreiheitsgrade aufweisen können.

2.5.1 Prinzip der virtuellen Verschiebungen

Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen erlaubt durch seine Beschreibung des Gleichgewichts als eine Bilanz virtueller Arbeiten eine sehr anschauliche physikalische Interpretation. Es besagt, dass in einem mechanischen System, das sich im Gleichgewicht befindet, durch eine geometrisch verträgliche, aber sonst beliebige, infinitesimale, virtuelle Verschiebung $\delta \mathbf{u}$ keine Arbeit in diesem System verrichtet wird, d.h. die virtuelle Arbeit der inneren Kräfte gleich derjenigen der äußeren ist.

$$\delta \Pi(\mathbf{u}) = \delta \Pi^{int}(\mathbf{u}) - \delta \Pi^{ext}(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E}^u d\Omega - \int_{\Omega} \rho \mathbf{b} \delta \mathbf{u} d\Omega - \int_{\Gamma_S} \hat{\mathbf{t}} \delta \mathbf{u} d\Gamma_S = 0 \quad (2.30)$$

Diese Prinzip kann ebenfalls mit dem Verfahren der gewichteten Residuen aus den Gleichgewichtsbedingungen (2.24) oder Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie (Gleichung (2.31)) hergeleitet werden (mit der Formänderungsenergiedichte $\frac{\partial W^{int}(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} = \mathbf{S}$).

$$\Pi(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} W^{int}(\mathbf{E}^u) d\Omega - \int_{\Omega} \rho \mathbf{b} \mathbf{u} d\Omega - \int_{\Gamma_S} \hat{\mathbf{t}} \mathbf{u} d\Gamma_S = \min. \quad (2.31)$$

Dabei soll der Kopfzeiger u auf die explizite Abhängigkeit der Verzerrungen von den Verschiebungen hinweisen, d.h. $\mathbf{E}^u = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I})$.

Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen bildet die Grundlage für die Entwicklung verschiebungsformulierter finiter Elemente. Die Verschiebungen als einzige zu diskretisierenden Größen unterliegen dabei bestimmten Kontinuitätsanforderungen, um die Stabilität und Konvergenz zu gewährleisten (siehe Kapitel 3).

2.5.2 Prinzip von HU-WASHIZU

Das Prinzip von HU-WASHIZU stellt die allgemeinste Form der Mehrfeldfunktionale dar. Bei diesem Funktional werden drei unabhängige Felder eingesetzt, namentlich die Verschiebungen, die Verzerrungen und die Spannungen.

$$\Pi_{HW}(\mathbf{u}, \mathbf{E}, \mathbf{S}) = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbf{S}^E + \mathbf{S} : (\mathbf{E}^u - \mathbf{E}) - \rho \mathbf{b} \mathbf{u} \right] d\Omega - \int_{\Gamma_S} \hat{\mathbf{t}} \mathbf{u} d\Gamma_S - \int_{\Gamma_u} \mathbf{t}^S (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) d\Gamma_u \rightarrow \text{stat.}, \quad (2.32)$$

mit $\mathbf{S}^E = \mathbb{C} : \mathbf{E}$ sowie dem von \mathbf{S} abhängigen Vektor \mathbf{t}^S .

Durch Variation erhält man folgendes Funktional, das unter anderem den variationellen Ausgangspunkt für die in Kapitel 6 beschriebenen Elementmethoden bildet.

$$\delta \Pi_{HW} = \int_{\Omega} [\delta \mathbf{E} : (\mathbf{S}^E - \mathbf{S}) + \delta \mathbf{S} : (\mathbf{E}^u - \mathbf{E}) + \delta \mathbf{E}^u : \mathbf{S}] d\Omega - \int_{\Gamma_S} \hat{\mathbf{t}} \mathbf{u} d\Gamma_S - \int_{\Omega} \rho \mathbf{b} \delta \mathbf{u} d\Omega - \int_{\Gamma_S} (\hat{\mathbf{t}} - \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{N}) \delta \mathbf{u} d\Gamma_S - \int_{\Gamma_u} \delta \mathbf{t}^S (\mathbf{t}(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u})) d\Gamma_u = 0 \quad (2.33)$$

Das Fundamentallema der Variationsrechnung liefert die Eulergleichungen des Prinzips von HU-WASHIZU:

$$\text{div}(\mathbf{F} \mathbf{S}) + \rho \mathbf{b} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (\text{Gleichgewicht}) \quad (2.34)$$

$$\hat{\mathbf{t}} - \mathbf{t} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_S \quad (2.35)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{u}, \mathbf{E}) \quad \text{in } \Omega \quad (\text{Stoffgesetz}) \quad (2.36)$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{G}) \quad \text{in } \Omega \quad (\text{Kinematik}) \quad (2.37)$$

$$\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_u \quad (2.38)$$

2.5.3 Prinzip von HELLINGER-REISSNER

Als Grundlage für die Herleitung des Prinzips von HELLINGER-REISSNER wird gewöhnlich das Prinzip vom Minimum der Komplementärenergie herangezogen. Durch Einsetzen der konstitutiven Gleichung in (2.32) kann es ebenfalls aus dem Prinzip von HU-WASHIZU abgeleitet werden, so dass als unabhängige Variablen die Verschiebungen \mathbf{u} und die Spannungen \mathbf{S} verbleiben.

Das entsprechende Funktional und seine Variation lauten (mit der Komplementärenergiedichte $\frac{\partial \tilde{W}^{int}(\mathbf{S})}{\partial \mathbf{S}} = \mathbf{E}$):

$$\begin{aligned} \Pi_{HR}(\mathbf{u}, \mathbf{S}) = & \int_{\Omega} \left[-\tilde{W}^{int}(\mathbf{S}) + \mathbf{S} : \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{G}) \right] d\Omega \\ & - \int_{\Omega} \rho \mathbf{b} \mathbf{u} d\Omega - \int_{\Gamma_S} \hat{\mathbf{t}} \mathbf{u} d\Gamma_S - \int_{\Gamma_u} \mathbf{t}^S (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) d\Gamma_u \rightarrow \text{stat.} \end{aligned} \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{HR}(\mathbf{u}, \mathbf{S}) = & \int_{\Omega} \left[\frac{\partial \tilde{W}^{int}}{\partial \mathbf{S}} : \delta \mathbf{S} + \delta \mathbf{S} : \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{G}) - \delta \mathbf{u} \cdot \text{div}(\mathbf{F} \mathbf{S}) \right] d\Omega \\ & - \int_{\Omega} \rho \mathbf{b} \delta \mathbf{u} d\Omega - \int_{\Gamma_S} \delta \mathbf{u} (\hat{\mathbf{t}} - \mathbf{t}^S) d\Gamma_S - \int_{\Gamma_u} \delta \mathbf{t}^S (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) d\Gamma_u = 0 \end{aligned} \quad (2.40)$$

Kapitel 3

Grundlagen der Methode der Finiten Elemente

Die das Elastizitätsproblem beschreibenden Funktionale, die bereits in Abschnitt 2.5 bereitgestellt wurden, bilden die mathematische Grundlage zur Herleitung finiter Elemente. Die Voraussetzungen zur Lösbarkeit und Stabilität dieser Funktionale sollen im folgenden kurz angegeben werden. Eine ausführliche Darstellung findet man beispielsweise bei Strang und Fix [144], Reddy [125], Braess [39], Hackbusch [65] oder Brezzi und Fortin [42].

3.1 Lösbarkeit und Stabilität von Funktionalen

Bereits hier sei angemerkt, dass sich die aus der Funktionalanalysis ergebenden mathematischen Anforderungen an die Elemente (insbesondere für Elemente auf der Basis gemischter bzw. hybrid gemischter Formulierungen) nur in wenigen Fällen allgemeingültig nachweisen lassen.

Ebenso beruht die Entwicklung vieler leistungsfähiger Elemente auf anschaulichen, mechanisch motivierten Modifikationen (s.a. Kapitel 6), entsprechende mathematische Nachweise finden teilweise erst später oder auch gar nicht statt.

3.1.1 Einfeldfunktionale

Das durch die Variationsaufgabe beschriebene Problem der linearen Elastizitätstheorie mit nur einer unabhängigen Variablen \mathbf{u} (entsprechend 2.5.1) kann mit Hilfe der Bilinearform $\mathbf{a}(\cdot, \cdot)$ bzw. der Linearform (\cdot, \cdot) wie folgt beschrieben werden:

$$\begin{aligned} \text{Für gegebenes } \mathbf{f}, \text{ finde } \mathbf{u} \in \mathcal{U}, \text{ so dass} \\ \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - (\mathbf{f}, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Dabei sind die Räume der zulässigen Funktionen \mathcal{U} und \mathcal{V} zunächst als Hilbert-Räume gewählt und definiert als

$$\mathcal{U} = \{ \mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in H^1(\Omega) ; \mathbf{u}_{\Gamma_u} = \hat{\mathbf{u}} \} \quad (3.2)$$

$$\mathcal{V} = \{ \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in H^1(\Omega) ; \mathbf{v}_{\Gamma_u} = 0 \} . \quad (3.3)$$

Nach dem Satz von LAX-MILGRAM hat das Problem (3.1) eine eindeutige Lösung, wenn die Bilinearform $\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ beschränkt und koerziv (V-elliptisch) ist.

Ein bilineares Funktional ist beschränkt und stetig, wenn die Kontinuitätsbedingung

$$|\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq \alpha \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \quad \text{mit } \alpha > 0 \quad (3.4)$$

erfüllt ist, die Anwendung des Funktionals auf \mathbf{u} und \mathbf{v} also keine Werte liefert, die im Vergleich zu deren Normen über alle Grenzen ansteigen. Für die Anwendung finiter Elemente bedeutet dies, dass die Verzerrungsenergie für endliche Verzerrungen beschränkt bleibt.

Die Koerzivität des Funktionals ist durch Einhalten der Elliptizitätsbedingung (3.5) gegeben¹

$$|\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{u})| \geq \beta \|\mathbf{u}\|^2 \Leftrightarrow \frac{|\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{u})|}{\|\mathbf{u}\|} \geq \beta \|\mathbf{u}\| \quad \text{mit } \beta > 0, \quad (3.5)$$

und entspricht einer Abschätzung des Funktionals nach unten. Für unendlich große \mathbf{u} muss somit auch $\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{u})$ unendlich groß werden. Bei der Diskretisierung mit finiten Elementen ist diese Bedingung zum Beispiel beim Auftreten innerer Kinematiken (sog. Zero-Energy-Modes, siehe Abschnitt 3.2.1, Folgeerscheinung z.B. der Unterintegration, s. 6.3) verletzt, dort stellen sich bei endlichen Lasten unendlich große Verschiebungen ein.

Die Stabilität der Lösung ergibt sich aus der Elliptizität von $\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{u})$ sowie der Beschränktheit der Linearform (\mathbf{f}, \mathbf{v}) :

$$\beta \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{U}}^2 \leq \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = (\mathbf{f}, \mathbf{u}) \leq \|\mathbf{f}\|_{\mathcal{F}} \|\mathbf{u}\| \quad (3.6)$$

Gleichung (3.6) sagt aus, dass die Norm der Variablen \mathbf{u} im gleichen Maße beschränkt bleibt wie die Norm der gegebenen Größe \mathbf{f} , übertragen auf strukturmechanische Probleme also die Norm der Verschiebungen wie die Norm der Belastung beschränkt bleibt.

Diskretisierung Eine Näherungslösung des Problems (3.1) auf Basis der GALERKIN-Methode beschränkt die Funktionenräume \mathcal{U} und \mathcal{V} auf endlich-dimensionale Unterräume \mathcal{U}^h und \mathcal{V}^h , so dass die Lösung $\mathbf{u}^h \in \mathcal{U}^h$ des Problems

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h) - (\mathbf{f}, \mathbf{v}^h) = 0 \quad \forall \mathbf{v}^h \in \mathcal{V}^h \quad (3.7)$$

gesucht wird. Die oben beschriebenen Voraussetzungen bezüglich der Lösbarkeit und Stabilität sind für das Problem (3.7) ebenso bindend.

Die Methode der Finiten Elemente stellt eine allgemeine Technik zum Aufstellen endlich-dimensionaler Unterräume von \mathcal{U} bzw. \mathcal{V} dar, deren grundlegendes Merkmal die Zerlegung des betrachteten Gebietes Ω in Untergebiete Ω^e , d.h. in *Elemente* ist. Im Gegensatz zum klassischen RITZ'schen Verfahren, dessen Ansatzfunktionen sich über das gesamte Gebiet erstrecken, wird der Funktionenraum also durch „einfache“ Funktionen, die in den Elementen definiert sind und entsprechenden Übergangsbedingungen an den Elementengrenzen genügen, approximiert.

Die Eigenschaften dieser Funktionen werden demzufolge von den Anforderungen bezüglich Kontinuität und Elliptizität (Gleichungen (3.4) und (3.5)) des Funktionals (3.7) bestimmt.

Sowohl für die RITZ-Ansätze als auch für die Ansatzfunktionen der FE-Approximation ergeben sich daraus bestimmte allgemeine Bedingungen: lineare Unabhängigkeit, Vollständigkeit, Differenzierbarkeit, Integrierbarkeit sowie die Erfüllung der geometrischen Feld- und Randbedingungen.

Konvergenz der FE-Lösung Aus der Forderung nach monotoner Konvergenz bei Anwendung der Methode der finiten Elemente ergeben sich für die Element-Ansätze weitere Bedingungen.

Die FE-Lösung \mathbf{u}^h soll sich der exakten Lösung \mathbf{u} annähern, wenn die Elementgröße h gegen Null geht. Dabei wird prinzipiell von einer gleichmäßigen Verfeinerung des Netzes ausgegangen, die Struktur des Netzes bzw. die Verfeinerungsstrategie kann allerdings die Konvergenz auch beeinflussen, siehe auch Kapitel 6.

¹Zum Nachweis der Elliptizität der linearen Elastizitätstheorie wird oftmals die KORNSche Ungleichung herangezogen.

Mit Hilfe des Lemmas von CEA (3.8) lässt sich der Fehler der Verschiebungsformulierungen nach oben abschätzen, mit der Konstante C , die unabhängig von h , jedoch nicht von Materialparametern ist.

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\| \leq C \inf_{\mathbf{w}_h \in \mathcal{V}_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{w}_h\| \quad (3.8)$$

Die obere Schranke des Fehlers kann somit von Kenngrößen abhängen, die sehr groß werden, d.h. der Fehler selbst kann sehr groß werden. Dies lässt sich zum Beispiel bei der Berechnung von inkompressiblen Material beobachten: Die Konstante C ergibt sich hierbei aus dem Verhältnis der Lamé-Konstanten und strebt entsprechend dem Kompressionsmodul für $\nu \rightarrow 0.5$ gegen unendlich. Der Fehler kann demzufolge nicht nach oben begrenzt und ebenfalls unendlich groß werden, was genau im Fall von Volumetrischem Locking (Abschnitt 5.5) eintritt.

Für die Konvergenzrate der Finite-Element-Lösung – unter der Voraussetzung einer glatten Lösung \mathbf{u} und einer Approximation mit Polynomen der Ordnung k – lässt sich die folgende Fehlerabschätzung heranziehen:

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_1 \leq C h^k \|\mathbf{u}\|_{k+1} \quad (3.9)$$

Die Konvergenzgeschwindigkeit ist somit von der Ordnung $O(h^k)$. Entsprechend der Definition der Norm $\|\cdot\|_1$ stellt (3.9) hauptsächlich eine Abschätzung der Gradienten der Verschiebungen, d.h. der Verzerrungen bzw. Spannungen dar. Betrachtet man den Fehler in den Verschiebungen,

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_0 \leq C h^{k+1} \|\mathbf{u}\|_{k+1} , \quad (3.10)$$

zeigt sich hier eine im Vergleich zu den Verzerrungen um eine Ordnung höhere Konvergenzrate.

3.1.2 Mehrfeldfunktionale

Bei der Fehlerabschätzung für Einfeldfunktionale (CEA-Lemma, (3.8)) wurden die Grenzen eines Variationsproblems mit einer Variablen deutlich, da hier alle Neben- bzw. Zwangsbedingungen streng erfüllt werden müssen.

Die in Abschnitt 2.5 beschriebenen Mehrfeld-Funktionale (Prinzip von HELLINGER-REISSNER, Prinzip von HU-WASHIZU) können durch das Einbringen der Nebenbedingungen mittels LAGRANGE'scher Multiplikatoren in das entsprechende Einfeldfunktional (Prinzip vom Minimum der potentiellen bzw. Komplementärenergie) abgeleitet werden.

Hierdurch werden neue, zusätzliche Variablen eingeführt und die ursprünglich einzige Variable \mathbf{u} wird von der Anforderung nach der strengen Erfüllung der Nebenbedingungen befreit und kann entsprechend aus einem größeren Raum gewählt werden.

Im Gegensatz zur Einfeldformulierung sind *gemischte* Formulierungen durch die höhere Anzahl an Unbekannten numerisch aufwendiger. Die Zahl der globalen Freiwerte kann zwar durch eine Eliminierung der zusätzlichen Freiheitsgrade auf Elementebene durch statische Kondensation auf die des Einfeldproblems verringert werden. Der Aufwand beim Aufstellen der Elementmatrizen bleibt jedoch durch die erforderlichen Rechenoperationen – auch bei diesen sog. *hybrid-gemischten* Elementen – relativ hoch.

Wesentlicher Punkt bei der Entwicklung von Elementen auf Basis von Mehrfeldfunktionalen ist vor allem die Wahl der Ansatzräume für die verschiedenen Felder. Wie gezeigt wird, ist dies bereits für ein Zweifeldfunktional schwierig, entsprechend wird beispielsweise auch das ursprünglich drei Felder beinhaltende Funktional von HU-WASHIZU modifiziert (s.a. Kapitel 6.2), um effiziente Elemente zu erhalten.

Die Bedingung zur Lösung des Mehrfeldfunktionalen ist jetzt nicht mehr die Forderung nach dem Minimalwert, sondern dem stationären Wert des Funktionalen, d.h. es ist nun ein Sattelpunktproblem zu berechnen. Entsprechende Variation dieses Funktionalen nach allen Variablen liefert die Gleichungen zur Lösung der unbekanntenen Felder.

Für ein Zweifeldfunktional – beispielhaft sei das Prinzip von HELLINGER-REISSNER herangezogen – kann das entsprechende Variationsproblem mit Hilfe der Bilinearformen wie folgt ausgedrückt werden:

Für gegebene \mathbf{f} und \mathbf{g} , finde $\{\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}\} \in \mathcal{W} \times \mathcal{V}$, so dass

$$\mathbf{a}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) + \mathbf{b}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{u}) = (\mathbf{f}, \boldsymbol{\tau}) \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{W} \quad (3.11)$$

$$\mathbf{b}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}) = (\mathbf{g}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}$$

Der Nachweis der Existenz von Lösungen für Mehrfeldfunktionale und deren Stabilität gestaltet sich schwierig, grundlegende Arbeiten zu dieser Thematik wurden von Babuska und Azis [9] und Brezzi [41] geleistet.

Die Voraussetzungen für die Lösbarkeit von (3.11) sind die Stetigkeit der Bilinearformen $a(\cdot, \cdot)$ und $b(\cdot, \cdot)$

$$|\mathbf{a}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})| \leq \alpha_1 \|\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathcal{W}} \|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathcal{W}} \quad \text{mit } \alpha_1 > 0 \quad (3.12)$$

$$|\mathbf{b}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v})| \leq \alpha_2 \|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathcal{W}} \|\mathbf{v}\|_{\mathcal{V}} \quad \text{mit } \alpha_2 > 0 \quad , \quad (3.13)$$

sowie die Einhaltung der BABUSKA-BREZZI-Bedingung (auch LADYSHENSKAYA-BABUSKA-BREZZI- oder LBB-Bedingung), die nach Braess [39] durch die Erfüllung der zwei folgenden Forderungen gewährleistet ist:

$$|\mathbf{a}(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau})| \geq \alpha_1 \|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathcal{W}}^2 \quad \text{mit } \alpha_1 > 0 \quad , \quad (3.14)$$

$$\inf_{\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{W}} \sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}} \frac{|b(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v})|}{\|\mathbf{v}\|_{\mathcal{V}} \|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathcal{W}}} \geq \alpha_2 = \text{const.} > 0 \quad (3.15)$$

Für den Sonderfall V-elliptischer, quadratischer Bilinearformen $a(\cdot, \cdot)$ erhält man aus der inf-sup-Bedingung (3.15) den Satz von LAX-MILGRAM, siehe auch Abschnitt 3.1.1.

Diskretisierung Mit einer Diskretisierung der Verschiebungsfelder $\mathbf{u}_h \in \mathcal{U}_h \subset \mathcal{U}$ und Spannungsfelder $\boldsymbol{\sigma}_h \in \mathcal{W}_h \subset \mathcal{W}$ der Form

$$\mathbf{u}_h = \mathbf{N} \cdot \mathbf{d} \quad \text{bzw.} \quad \nabla \mathbf{u}_h = \mathbf{B} \cdot \mathbf{d} \quad (3.16)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_h = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\beta} \quad (3.17)$$

kann das diskretisierte Problem (3.11) in Matrixschreibweise formuliert werden:

$$\mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\beta} + \mathbf{G} \cdot \mathbf{d} = (\mathbf{f}, \boldsymbol{\tau}) \quad (3.18)$$

$$\mathbf{G}^T \cdot \boldsymbol{\beta} = (\mathbf{g}, \mathbf{v}) \quad (3.19)$$

wobei aus den entsprechenden Definitionen der Bilinearformen

$$\mathbf{a}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau}^T \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega = \boldsymbol{\beta}^T \int_{\Omega} \mathbf{P}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{P} \, d\Omega \quad (3.20)$$

$$\mathbf{b}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{u}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau}^T \nabla \mathbf{u} \, d\Omega = \boldsymbol{\beta}^T \int_{\Omega} \mathbf{P}^T \mathbf{B} \, d\Omega \quad (3.21)$$

die Matrizen \mathbf{H} und \mathbf{G} folgen:

$$\mathbf{H} = \int_{\Omega} \mathbf{P}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{P} \, d\Omega \quad (3.22)$$

$$\mathbf{G} = \int_{\Omega} \mathbf{P}^T \mathbf{B} \, d\Omega \quad (3.23)$$

Auch für den Nachweis der Lösbarkeit des *diskreten* Problems sind die Bedingungen (3.12) bis (3.15) einzuhalten. Die Einhaltung der Kontinuitätsbedingungen bereitet in der Regel keine Schwierigkeiten. Die Stabilitätsbedingungen ((3.18), (3.19)) lauten also:

$$\text{Elliptizität:} \quad |\mathbf{a}(\boldsymbol{\tau}_h, \boldsymbol{\tau}_h)| \geq \alpha_1 \|\boldsymbol{\tau}_h\|_{\mathcal{W}_h}^2 \quad \forall \boldsymbol{\tau}_h \in \tilde{\mathcal{W}}_h \quad (3.24)$$

$$\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{H} \boldsymbol{\beta} \geq \alpha_1 \|\boldsymbol{\beta}\|^2 \quad \text{mit } \alpha_1 > 0 \quad (3.25)$$

$$\text{inf-sup-Bedingung:} \quad \inf_{\boldsymbol{\tau}_h \in \mathcal{W}_h} \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathcal{V}_h} \frac{|b(\boldsymbol{\tau}_h, \mathbf{v}_h)|}{\|\mathbf{v}_h\|_{\mathcal{V}} \|\boldsymbol{\tau}_h\|_{\mathcal{W}}} \geq \alpha_2 > 0 \quad (3.26)$$

$$\inf_{\mathbf{d}} \sup_{\boldsymbol{\beta}} \frac{|\mathbf{d}^T \mathbf{G} \boldsymbol{\beta}|}{\|\mathbf{d}\| \|\boldsymbol{\beta}\|} \geq \alpha_2 > 0 \quad (3.27)$$

Die Koerzitivitätsbedingung (3.24) muss nur in dem Unterraum $\tilde{\mathcal{W}}_h = \{\boldsymbol{\tau}_h : \boldsymbol{\tau}_h \in \mathcal{W}_h \mid b(\boldsymbol{\tau}_h, \mathbf{u}_h) = 0 \quad \forall \mathbf{u}_h \in \mathcal{U}_h\}$, der diejenigen Spannungen enthält, die orthogonal zu \mathbf{u} sind, erfüllt werden, was für die meisten Problemstellungen zutrifft. Eine Ausnahme (s.a. vorhergehenden Abschnitt) bildet zum Beispiel das inkompressible Elastizitätsproblem (bei einer Berechnung auf Basis des HR-Prinzips), da ein hydrostatischer Spannungszustand in diesem Fall zu keinerlei Verzerrungen und entsprechend verschwindender Energie führt. Abhilfe für diesen expliziten Fall bietet hier nur eine alternative Formulierung.

Entscheidender Punkt bei der Konstruktion „guter“ Elemente ist offensichtlich die Diskretisierung der auftretenden Felder, d.h. die Wahl geeigneter Funktionenräume \mathcal{U}_h und \mathcal{W}_h . Insbesondere verdeutlicht die Bedingung (3.27), dass die Ansätze der verschiedenen Felder, hier \mathbf{N} bzw. \mathbf{P} , aufeinander abgestimmt sein müssen.

Von Versteifungseffekten betroffene Elemente weisen beispielsweise einen inf-sup-Wert auf, der nicht unabhängig von der Diskretisierung ist und mit zunehmender Netzverfeinerung immer kleiner wird. Anschaulich lässt sich das so interpretieren, dass die von $\boldsymbol{\tau}_h$ und \mathbf{v}_h verrichtete Arbeit $b(\boldsymbol{\tau}_h, \mathbf{u}_h)$ im Vergleich zu ihren Normen $\|\boldsymbol{\tau}_h\|$ und $\|\mathbf{v}_h\|$ zu klein ist. Mechanisch kann dies so gedeutet werden, dass durch eine unausgeglichene Wahl der Ansatzräume beispielsweise \mathcal{W}_h so „groß“ ist, dass für bestimmte $\boldsymbol{\tau}_h \in \mathcal{W}_h$ keine passenden Arbeitspartner $\mathbf{v}_h \in \mathcal{U}_h$ gefunden werden können, also bestimmte $\boldsymbol{\tau}_h$ *parasitär*, d.h. überflüssig sind (siehe auch Abschnitt 5.2.3).

Eine zu „kleine“ Wahl von \mathcal{W}_h ist allerdings auch problematisch. In diesem Fall kann ein $\mathbf{u}_h \in \mathcal{U}_h$ existieren, das zu allen $\boldsymbol{\tau}_h \in \mathcal{W}_h$ orthogonal ist und somit innere Kinematiken auftreten.

Entscheidend für stabile und konvergente Elemente, die auf Basis einer gemischten Formulierung entwickelt werden, ist demzufolge meistens die inf-sup-Bedingung.

Der mathematische Nachweis der inf-sup-Bedingung ist allerdings schwierig und nur in Ausnahmefällen möglich, da die Untersuchung am Gesamtsystem erfolgen muss und nicht nur an einzelnen Elementen.

Chapelle und Bathe ([48]) schlagen deshalb einen numerischen inf-sup-Test vor, der die Erfüllung der Bedingung (3.27) für bestimmte Netzkonfigurationen überprüft.

Er beruht auf einer der inf-sup-Bedingung (3.27) äquivalenten Eigenwertanalyse:

$$\mathbf{G} \boldsymbol{\varphi} = \lambda \mathbf{S} \boldsymbol{\varphi} \quad (3.28)$$

mit $\|\mathbf{v}_h\|^2 = \mathbf{d}^T \mathbf{S} \mathbf{d}$ und \mathbf{G} wie oben. Die Wurzel aus dem kleinsten (nicht verschwindenden) Eigenwert dieses Problems, $\sqrt{\lambda}$, entspricht dann dem inf-sup-Wert.

In der Natur dieses Tests liegt, dass nur wenige ausgewählte Netzdiskretisierungen untersucht werden können, eine Aussage hinsichtlich der Erfüllung der LBB-Bedingung also nur dann verallgemeinert werden kann, wenn der numerische Test negativ ausfällt.

Wird in den getesteten Fällen die inf-sup-Bedingung eingehalten, so kann lediglich vermutet werden, dass der Nachweis der Stabilität durch die LBB-Bedingung für alle Fälle erbracht werden kann.

Konvergenz Werden die oben angeführten Bedingungen zur Lösbarkeit und Stabilität erfüllt, können also Werte α_1 und α_2 für (alle) Diskretisierungen angegeben werden, kann eine optimale Fehlerschranke angegeben werden (Brezzi und Fortin [42]):

$$\|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{\mathcal{W}} + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathcal{V}} \leq C \left\{ \inf_{\boldsymbol{\tau}_h \in \mathcal{W}_h} \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\tau}_h\|_{\mathcal{W}} + \inf_{\mathbf{v}_h \in \mathcal{V}_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{\mathcal{V}} \right\} \quad (3.29)$$

Dabei beinhaltet der Nenner der positiven Konstanten C die Parameter α_1 und α_2 , wobei nochmals deutlich wird, dass beispielsweise ein bei Netzverfeinerung kleiner werdendes α_2 die Konvergenzrate zerstört, der typische Effekt beim Auftreten von Locking.

3.2 Nachweis der Konvergenz

Aufbauend auf den Grundlagen des Abschnittes 3.1.1 ist die Konvergenz von *Verschiebungselementen* gewährleistet, wenn sie die im folgenden beschriebenen Eigenschaften aufweisen.

Vollständigkeit. Element muss alle Polynome bis zu einem ausreichend hohen Grad (abh. vom Variationsindex des zugrunde liegenden Funktionals) exakt abbilden können. Die Elemente müssen bei unendlicher Netzverfeinerung die analytische Lösung abbilden können.

Stabilität. Die Lösung muss stabil gegenüber Veränderungen der äußeren Belastung sein, d.h. kleine Veränderungen in der Belastung dürfen nur zu endlichen Änderungen der Lösung führen. Dazu sind insbesondere unphysikalische Null-Energie-Eigenformen (Zero-Energy-Modes, siehe 3.2.1) zu vermeiden.

Nach dem LAX-WENDROFF-Theorem – ursprünglich für das Verfahren der Finiten Differenzen formuliert – schließen Vollständigkeit und Stabilität die Konvergenz ein. Die Kompatibilität, d.h. die Gewährleistung der Kontinuität der Verschiebungen, deren Fehlen von Strang [144] noch als „Variational Crime“ eingestuft wurde, ist dagegen für die Konvergenz nicht unbedingt erforderlich (siehe Abschnitt 6.6.2).

3.2.1 Rang der Steifigkeitsmatrix, Rangabfall

Für die Stabilität eines Elementes ist ein korrekter Rang der Steifigkeitsmatrix erforderlich. Ein zu niedriger Rang führt in dynamischen Berechnungen zu unerwünschten Oszillationen der Lösung, bei statischen Problemen zu einem singulären oder beinahe singulären Gleichungssystem.

Wird der korrekte Rang überschritten, treten auch im Fall von Starrkörperbewegungen Verzerrungen auf, die die Konvergenz der Berechnung verhindern oder zumindest erheblich verlangsamen.

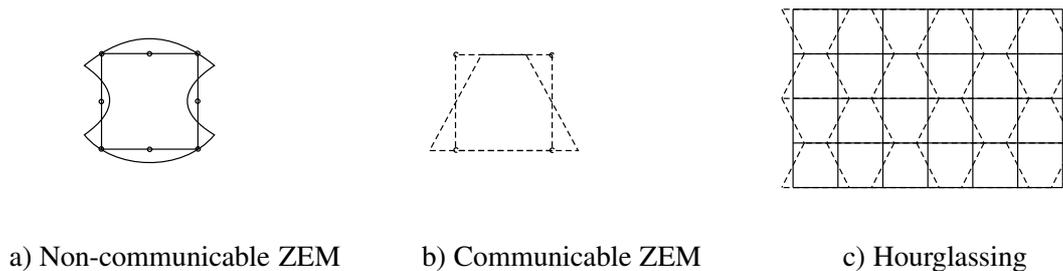
Der korrekte Rang Rang_k der Elementsteifigkeitsmatrix ergibt sich aus der Differenz der Ordnung der Matrix, also der Anzahl der Elementfreiheitsgrade n_{DOF} , und der Anzahl der Starrkörperverschiebungen n_{RB} .

$$\text{Rang}_k(\mathbf{K}_e) = n_{DOF} - n_{RB} \quad (3.30)$$

Der Rangabfall Rang_{def} kann aus dem Vergleich des korrekten Ranges der Steifigkeitsmatrix mit dem tatsächlichen ermittelt werden:

$$\text{Rang}_{def}(\mathbf{K}_e) = \text{Rang}_k(\mathbf{K}_e) - \text{Rang}(\mathbf{K}_e) \quad (3.31)$$

Die Elementsteifigkeitsmatrix wird gewöhnlich numerisch integriert, wobei im Folgenden davon ausgegangen werden soll, dass sowohl die Jacobi-Determinante J in allen Gauss-Punkten Q positiv, d.h. die Elementverzerrung begrenzt ist, als auch die Materialmatrix \mathbf{C} positiv definit ist. Letztere Bedingung entspricht z.B. linear elastischem Materialverhalten, da allgemein bei der Verwendung von nichtlinearen



a) Non-communicable ZEM

b) Communicable ZEM

c) Hourglassing

Abbildung 3.1: Zero-Energy-Modes

Stoffgesetzen auch bei einer korrekten Elementformulierung ein Rangabfall der Elementsteifigkeitsmatrix auftreten kann. Ebenso bleibt der mögliche Rangabfall infolge einer geometrischen Instabilität unberücksichtigt.

Besitzt ein Element eine Steifigkeitsmatrix mit korrektem Rang, so sind alle auftretenden Nullenergie-Moden (Zero-Energy-Modes, ZEM) Starrkörpermoden, d.h. jede Bewegung außer den Starrkörperverschiebungen ruft eine Verzerrungsenergie hervor. Die Stabilität eines Elementverbundes ist gesichert, wenn jedes *Element* in diesem Netz den korrekten Rang besitzt. Umgekehrt kann vom korrekten Rang der *Systemsteifigkeit* allerdings nicht darauf geschlossen werden, dass dies auch für die einzelnen Elemente zutrifft. Die Ursache hierfür liegt in so genannten *non-communicable* Zero-Energy-Modes, also Deformationszuständen, die am einzelnen Element keine Verzerrungsenergie hervorrufen, jedoch nicht zu den Starrkörpermoden zählen (siehe Abbildung 3.1a). Diese Moden können sich nicht im Elementverband einstellen, da die hierzu erforderlichen Deformationen in den Nachbarelementen Verzerrungen und entsprechende Energiebeiträge hervorrufen.

Gewöhnlich sind deshalb die *non-communicable* Zero-Energy-Modes für Berechnungen nicht so kritisch, können für besondere Konfigurationen (z.B. Diskretisierung von benachbarten Medien mit sehr unterschiedlichen Materialwerten) dennoch auftreten.

Können jedoch die Zero-Energy-Modes der einzelnen Elemente auch im Elementverbund auftreten (*communicable* ZEM, siehe Abbildung 3.1c), kann dies eine singuläre oder beinahe singuläre Systemsteifigkeitsmatrix zur Folge haben. Die sanduhrförmige Gestalt dieser Moden ist in Abbildung 3.1b gezeigt und führte zur Bezeichnung als *hourglass modes* (auch *Keystoning*, *kinematic modes*, *Netzinstabilität*). In diesem Fall ist entweder keine Lösung möglich bzw. ist die Lösung durch die „Instabilität“ unbrauchbar verfälscht.

Der Rang numerisch integrierter Elemente kann nach oben begrenzt werden

$$\text{Rang}(\mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B}) \leq \text{Min}(\text{Rang}(\mathbf{B}), \text{Rang}(\mathbf{C})) , \quad (3.32)$$

wobei wiederum der Rang der Differentialoperatormatrix \mathbf{B} durch die Anzahl der linear unabhängigen Funktionen, die die Verzerrungen diskretisieren, limitiert ist. Diese Funktionen repräsentieren genau die Verzerrungszustände, die das Element für die gewählte Diskretisierung darzustellen vermag. Offensichtlich lassen sich durch die Wahl der Integrationspunkte diese Funktionen und damit auch der Rang der Steifigkeitsmatrix beeinflussen, siehe auch Abschnitt 6.3 zum Einfluss der Unterintegration.

3.2.2 Der Patchtest

Der ursprünglich 1965 von Irons [82] eingeführte Patchtest dient im wesentlichen der einfachen Kontrolle der Vollständigkeit des Verschiebungsfeldes, d.h. ob ein Element in der Lage ist, ein Feld bestimmter Polynomordnung korrekt abzubilden.

Standard-Patchtest Der Standard-Patchtest überprüft die Fähigkeit des Elementes, eine konstante Verteilung der Zustandsgrößen korrekt abzubilden. Diese Forderung gründet sich darauf, dass jeder beliebige

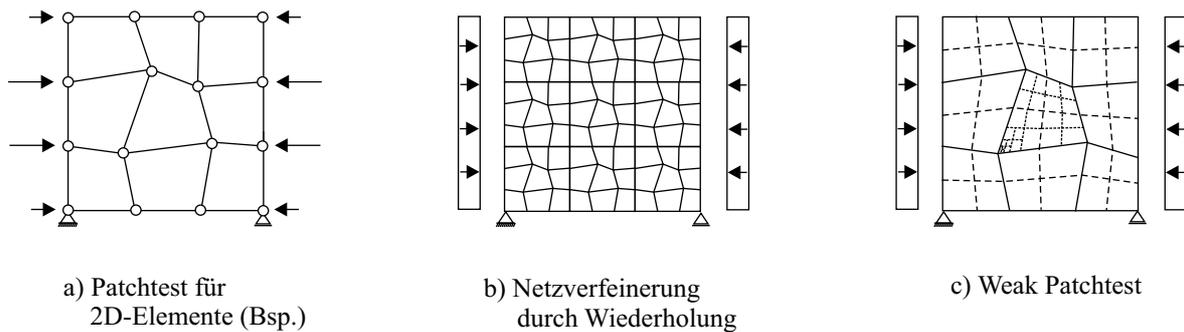


Abbildung 3.2: Patchtest

Zustand mit konstanten Funktionen approximiert werden kann, wenn das Netz fein genug ist. Dabei wird ein Patch von Elementen, die eine beliebig verzerrte Geometrie aufweisen (Abbildung 3.2a), einem konstanten Verzerrungszustand bzw. dem entsprechenden Verschiebungsfeld unterworfen und überprüft, ob die Elemente die korrekte Lösung wiedergeben können.

Individual Element Test (IET) Der *Individual Element Test* besitzt eine einfache, physikalisch motivierte Grundlage: die Randkräfte benachbarter Elemente müssen sich in einem einheitlichen Spannungszustand paarweise aufheben. Der IET stellt eine starke Form des üblichen Patchtests in dem Sinne dar, dass Elemente, die den IET bestehen, auch den Multi-Element-Patchtest bestehen, aber nicht notwendigerweise umgekehrt.

Insbesondere liefert der IET Regeln zur Formulierung finiter Elemente, um bestimmte Eigenschaften wie das Bestehen des Patchtest a priori zu gewährleisten. So fußt die so genannte *Free Formulation*, entwickelt von Bergan und Nygård [26], auf dem Individual Element Test. Ebenso bildet er die Grundlage der „high-performance“-Elemente von Felippa et al. [59].

Der Grundgedanke des IET ist die Aufteilung der Steifigkeitsmatrix bzw. des B-Operators in einen konstanten und höheren Anteil. Der konstante Anteil, die sog. Basissteifigkeit erfüllt die Forderungen nach der Abbildung der Starrkörperverschiebungen und -rotationen sowie nach der Darstellbarkeit konstanter Verzerrungs- und Spannungszustände. Damit ist a priori die Erfüllung des Patchtests gesichert.

Auch die von Andelfinger [4] vorgeschlagene ANS-Formulierung des Membrananteils (siehe Abschnitt 6.4.2) beschränkt sich auf die Modifikation der höheren Anteile der Steifigkeitsmatrix. Um die konstanten, den Patchtest garantierenden Anteile nicht zu beeinflussen, wird eine modale Formulierung gewählt, die eine entkoppelte Betrachtung ermöglicht, siehe Kapitel 6.4.2.

Weak Patchtest Der „schwache“ Patchtest überprüft, ob das untersuchte Element zumindest für $h \rightarrow 0$, also bei zunehmender Netzverfeinerung konstante Verzerrungs- und Spannungszustände des Standard-Patchtests abbilden kann. Dabei wird das Netz, mit dem der Standard-Patchtest durchgeführt wurde, durch progressives Halbieren verfeinert, so dass sich im Grenzübergang der Patch aus parallelogrammatischen Elementen zusammensetzt, siehe Abbildung 3.2 c). Dieser Test wird beispielsweise auch von den nicht-konformen Elementen von Wilson [157] bestanden, obwohl dieses Element den Standard-Patchtest nicht erfüllt, siehe auch Shi [131]. Erfolgt die Netzverfeinerung dagegen entsprechend Abbildung 3.2 b), also durch Wiederholung des ursprünglichen Netzes, wird von Elementen, die nicht den Standardtest (3.2 a)) bestehen, auch für zunehmende Verfeinerung der konstante Zustand nicht korrekt abgebildet. Ein Vergleich der Diskretisierungen 3.2 b) und 3.2 c) zeigt allerdings die größere praktische Relevanz des Netzes 3.2 c), so dass für Elemente, die den Weak Patchtest bestehen, im allgemeinen ein konvergentes Verhalten angenommen werden kann.

Bemerkungen zum Patchtest Zur Sicherung der Konvergenz eines Finiten Elementes ist das Bestehen des Patchtests weder hinreichend noch erforderlich. Elemente, die den Patchtest nicht bestehen, aber dennoch gegen die richtige Lösung konvergieren sollen, müssen dann allerdings eine Steifigkeitsmatrix besitzen, die von der Schlankheit des Elementes abhängt. Diese Eigenschaft kann gegebenenfalls durch die Anwendung von Stabilisierungsverfahren erreicht werden, siehe Abschnitt 6.5.4.

3.3 Grenzen der Perfektionierbarkeit

Die Entwicklung von Elementen nach der Verschiebungsmethode führt – wie insbesondere im folgenden Kapitel gezeigt wird – zu einer Reihe unerwünschter Nebeneffekte, die die Konvergenz des Elementes erheblich beeinträchtigen oder gar zu einer Konvergenz gegen eine falsche Lösung führen.

Die verschiedenen Methoden, die deshalb als Alternative zur Verschiebungsmethode für die Elementformulierung entwickelt wurden, bezwecken dementsprechend eine Vermeidung dieser Effekte und versuchen dabei ebenfalls die Konvergenzrate zu erhöhen und den numerischen Aufwand zu verringern. Ziel ist also, die bei der Elementformulierung zur Verfügung stehenden bzw. verbleibenden Freiheiten so auszunutzen, dass die Anforderungen an das Element bestmöglich erfüllt werden.

Die Wertigkeit der einzelnen Anforderungen wird dabei zum Teil unterschiedlich eingeordnet. Neben den unbedingten Eigenschaften wie der Darstellbarkeit von Starrkörperbewegungen und konstanten Verzerrungszuständen für *unverzerrte* Elementgeometrien wird vor allem die Priorität des Bestehens des Patchtests (Abschnitt 3.2.2) für beliebige Elementgeometrien oder der Netzverzerrungsunempfindlichkeit diskutiert.

Eine gleichzeitige Erfüllung der beiden letztgenannten Forderungen war Motivation zahlreicher Versuche, ein solches Element zu formulieren. Dass jedoch die Entwicklung eines in dieser Hinsicht optimalen Elementes nicht möglich ist bzw. gewissen Einschränkungen unterliegt, wird von MacNeal 1987 für vierknotige Elemente gezeigt [101] und später verallgemeinert [102]. Danach stellen die Erfüllung des Patchtests und die Unempfindlichkeit gegenüber Netzverzerrungen konkurrierende Forderungen dar, so dass Elemente, die den Patchtest bestehen, kein optimales Verhalten bei verzerrten Netzen aufweisen und umgekehrt verzerrungsunempfindliche Elemente den Patchtest nicht erfüllen. Diese Eigenschaft wird ebenfalls von den in dieser Arbeit vorgestellten DSG-Modifikationen der Membrananteile geteilt: zwar bestehen sie nicht den Patchtest, weisen aber für komplexe Strukturen mit verzerrten Elementen ein entsprechend gutes Verhalten auf.

Für den Elemententwickler stellt sich hier die Frage, welche dieser Forderungen – Patchtest oder Verzerrungsunempfindlichkeit – primär zu behandeln ist. Dabei haben sich Elemente, die den Patchtest nicht bestehen, in *kommerziellen* FE-Programmen bisher nicht etablieren können.

Dass die dabei untersuchten Geometrien für die meisten praktischen Berechnungen nicht relevant sind und die Performance dieser (den Patchtest bestehenden) Elemente für beliebig verzerrte Netze abfallen kann, scheint die Akzeptanz für Elemente, die den Patchtest *nicht* bestehen, nicht zu erhöhen.

Entsprechend findet sich die Forderung nach dem Bestehen des Patchtests in vielen Elementformulierungen wieder. So wurde z.B. das Element von Wilson [157] von Taylor et al. [148] dahingehend modifiziert (siehe auch Abschnitt 6.6); die γ -Elemente von Belytschko et al. [24] basieren ebenso wie die von Andelfinger [4] vorgeschlagenen ANS-Elemente auf der Forderung nach dem Bestehen des Patchtests. Auch die so genannte Basissteifigkeit, die Bestandteil aller Elemente der *Free Formulation* und ihren Weiterentwicklungen ist, beruht auf dieser Anforderung.

Zweifelsohne ist das Bestehen des Patchtests für beliebige Geometrien wünschenswert. Dennoch stellt sich die Frage, ob die Erfüllung dieser Forderung der nach einer besseren Leistungsfähigkeit für beliebige Netzgeometrien vorzuziehen ist.

Abschließend soll nochmals betont werden, dass zwar durch den Patchtest auch die Konvergenz nachgewiesen werden kann, dies jedoch umgekehrt nicht bedeutet, dass ein Element, das den Test nicht besteht, nicht konvergiert. Desweiteren kann die Konvergenz von Elementen, die nicht den Patch Test bestehen,

durch weitere Maßnahmen, wie beispielsweise Stabilisierungsverfahren, gesichert werden, s.a. Abschnitt 6.5.4.

Kapitel 4

Struktur- und Kontinuumselemente

4.1 Einleitung

In diesem Kapitel sollen die verschiedenen, bei der Berechnung strukturmechanischer Probleme auftretenden Elementtypen beschrieben und die in den folgenden Kapiteln benötigten Gleichungen und die entsprechende Notation bereitgestellt werden. Die sich infolge der Diskretisierung einstellenden Probleme durch das Auftreten von Lockingeffekten und entsprechende Lösungsvorschläge werden in den anschließenden Kapiteln ausführlich diskutiert.

Die Berechnung beliebiger Strukturen wirft die Frage nach dem Einsatz geeigneter finiter Elemente auf. Der Universalität von *Kontinuumselementen* stehen hierbei die Vorteile von *Strukturelementen* hinsichtlich Berechnungs- und Interpretationsaufwand gegenüber.

Gemeinsam ist jedoch beiden Elementtypen das Auftreten unerwünschter Effekte, falls die Entwicklung auf einer Standard-Galerkin-Formulierung (Verschiebungselemente) basiert. Die Identifikation und Behandlung dieser Probleme bildet einen der Kernpunkte dieser Arbeit.

Kontinuumselemente Den breitesten Einsatzbereich besitzen zweifellos Kontinuumselemente. Sie werden einerseits eingesetzt, um Gebiete zu untersuchen, die keine ausgeprägte geometrische Struktur aufweisen, d.h. „echte“ Kontinua, wie z.B. Böden, massige Bauteile wie Fundamente oder Knotenpunkte von Strukturen, also Gebiete, bei denen alle drei (bzw. zwei) Dimensionen ähnliche Abmessungen besitzen.

Parallel zur steigenden Rechnerleistung werden sie allerdings auch zunehmend zur Berechnung von strukturspezifischen Gebieten herangezogen, deren Abmessung sich in einer (Platten, Schalen) oder zwei Richtungen (Balken) deutlich von der anderen unterscheidet. Die Problematik bei dieser Vorgehensweise ist einerseits die erforderliche feine Diskretisierung mit dementsprechend erhöhter Anzahl an Unbekannten, andererseits die schwierige Ergebnisbeurteilung einer solchen Berechnung. Vorteile der Kontinuumselemente sind die nahezu unbegrenzte Einsatzbreite und eine relativ simple Elementformulierung.

Strukturelemente Grundsätzliches Unterscheidungsmerkmal zwischen den Kontinuums- und Strukturelementen sind die Annahmen, die bezüglich Bewegungs- und Spannungszuständen getroffen werden, d.h. Strukturelemente (Balken, Platten, Schalen) sind durch die Einführung von kinematischen und kinetischen Restriktionen, die z.B. bei Versuchen festgestellt wurden, aus dem Kontinuum ableitbar.

Neben der Reduktion der Anzahl der Unbekannten und damit des Rechenaufwands im Vergleich zu einer Berechnung mit Kontinuumselementen ist die Interpretationsfähigkeit der Berechnungsergebnisse ein wesentlicher Aspekt für den bevorzugten Einsatz von Strukturelementen. Bei einer Berechnung mit Kontinuumselementen ist die Aussagefähigkeit der Ergebnisse zunächst gering bzw. ihre Beurteilung und Weiterverwendung im Sinne der zugehörigen Konstruktionsaufgabe schwierig. Die mechanische

Einsicht und ebenfalls die Berücksichtigung der Randbedingungen wird von vornherein durch die Resultierendenbildung bei der Verwendung von Strukturelementen vereinfacht.

Besonderes Augenmerk wird im Rahmen dieser Arbeit auf die Entwicklung von Schalenelementen gelegt. Die Beschreibung von Balken- und Plattenelementen (Abs. 4.3) rechtfertigt sich allerdings mit der anschaulicheren Darstellung der Probleme bei der Elementformulierung und Strategien zu deren Lösung. So kann zum Beispiel die grundlegende Problematik des Querschub-Locking schon am zweiknotigen Balkenelement aufgezeigt und die hier gewonnenen Erkenntnisse auf Platten- und Schalenelemente übertragen werden.

Der Einsatzbereich von Schalenelementen ist nicht nur auf den Bereich dünner Strukturen begrenzt. Durch eine entsprechende Formulierung der Schalenelemente (vgl. Abschnitt 4.2.4) können auch zusätzliche Effekte in Dickenrichtung berücksichtigt werden sowie eine direkte Anwendung dreidimensionaler Stoffgesetze erreicht werden.

Ein weiterer Vorteil ist die vergleichsweise gute Konditionierung des Gleichungssystems bei der Berechnung schlanker Strukturen mit Schalenelementen. Werden hierfür Kontinuums-elemente eingesetzt, können große Unterschiede der Seitenverhältnisse der einzelnen Elemente (*aspect ratio*) und demzufolge eine Beeinträchtigung der Genauigkeit und der Konditionszahl auftreten. Grund hierfür ist, dass die Moden, die mit den Verzerrungen in Dickenrichtung verknüpft sind, im Vergleich zu den anderen Moden sehr hohe Eigenwerte aufweisen und sich dies entsprechend nachteilig auf die Konditionierung auswirkt. Eine Verbesserung der 3D-Schalenelemente in dieser Hinsicht bietet die von Wall et al. [155] und Gee et al. [62] vorgeschlagene Methode der skalierten Direktoren (SDC - Scaled Director Conditioning).

Nicht zuletzt kann bei der Berechnung dynamischer Probleme durch den Einsatz von Schalenelementen die kritische Zeitschrittlänge gegenüber einer Modellierung mit Kontinuums-elementen deutlich erhöht werden. Zusammen mit der kleineren Anzahl an Unbekannten kann die Zahl der erforderlichen Rechenoperationen deutlich verringert und der Aufwand transienter Analysen auf ein applikables Maß reduziert werden.

4.2 Schalenelemente

Die Entwicklung von *Schalenelementen* (generell von Strukturelementen) erfolgt ausgehend vom mechanischen Modell über das mathematische zum numerischen Modell. Dabei sind sowohl verschiedene Ausgangsmodelle als auch unterschiedliche Annahmen in den Schritten zwischen den Modellstufen möglich, die das resultierende numerische Modell, d.h. das Schalenelement, wesentlich beeinflussen.

Zu unterscheiden ist hierbei prinzipiell zwischen den Annahmen, die das *Schalensmodell* betreffen und der Diskretisierung, d.h. der Formulierung des finiten *Schalenelementes*. Das *Schalensmodell* ist geprägt durch die Annahmen und Näherungen bei der Herleitung der kontinuierlichen Schalentheorie. Mit der Elementformulierung kommen durch die Diskretisierung des gewählten Modells zusätzliche Fehler hinzu. Während jedoch die Diskretisierungsfehler bei Netzverfeinerung verschwinden können, bleiben die Näherungen des *Schalensmodells* bestehen.

Im Folgenden sollen lediglich die prinzipiellen Unterschiede kurz angerissen werden, genauere Beschreibungen beschränken sich auf die Annahmen der hier vorgestellten Schalenelemente. Eine detaillierte Darstellung über den Einfluss der verschiedenen Modellannahmen findet sich beispielsweise bei Bischoff et al. [36].

4.2.1 Schalenmodelle

Aus historischer Sicht sind Schalenmodelle – wie die meisten Strukturmodelle – zunächst auf Basis heuristischer Annahmen (wie das Ebenbleiben der Querschnitte) entwickelt worden. Eine mathematische Grundlage dieser Modelle wurde erst mit dem Vergleich mit den exakten dreidimensionalen Gleichungen mittels der so genannten asymptotischen Analyse gegeben (Morgenstern [108], Arnold und Falk [7],

Paumier und Raoult [117]). Danach ist ein Schalenmodell asymptotisch korrekt, wenn für den Grenzfall verschwindender Dicke die Lösung des Modells gegen die Kontinuumslösung konvergiert.

Die Entwicklung von Schalenmodellen beruht im wesentlichen auf der Dimensionsreduktion des 3D-Kontinuums, d.h. der *Semidiskretisierung* des Kontinuums in Dickenrichtung, die völlig unabhängig von der Diskretisierung in der Schalenmittelfläche (Abschnitt 4.2.5) ist. Dabei werden verschiedene Annahmen bezüglich des Verschiebungsfeldes, der Kinematik, der Spannungen sowie des Stoffgesetzes getroffen. Entsprechend den vielfältigen Kombinationsmöglichkeiten bei der Wahl dieser Annahmen können zahlreiche verschiedene Modelle entworfen werden.

Für das mechanische Modell können prinzipiell zwei verschiedene Ausgangspunkte gewählt werden:

- Entwicklung aus dem dreidimensionalen Kontinuum mit entsprechender Berücksichtigung der spezifischen Annahmen der Struktur einer Schale (*Kontinuumsbasiertes Schalenmodell*).
- Entwicklung des Modells auf Basis einer schwachen Form der klassischen Schalendifferentialgleichungen der Cosserat-Fläche, die aus dem Gleichgewicht abgeleitet werden (*Direkte Methode*).

Bei der *Herleitung des Schalenmodells aus der dreidimensionalen Kontinuumstheorie*¹ werden aus den Verzerrungen und Spannungen des dreidimensionalen Kontinuums durch entsprechende Annahmen kinematische und statische Resultierende (Schnittgrößen) gebildet und so die Reduktion auf das 2D-Modell der Schale durchgeführt.

Die Dimensionsreduktion zur 2D-Fläche durch Ableitung aus den Kontinuumsgleichungen mittels geeigneter Annahmen ist bereits in der Schalentheorie von Love [95] enthalten und wurde ebenfalls von Kirchhoff bei der Entwicklung der Plattentheorie angewandt. Koiter [88] gibt auf dieser Basis eine konsistente Herleitung für dünne Schalen an, während mit der von Naghdi [109] vorgeschlagenen polynomialen Entwicklung der Verschiebungen in Dickenrichtung Modelle gewonnen werden können, die beliebig genau der dreidimensionalen Theorie entsprechen. Durch das gezielte Weglassen bestimmter Terme kann ein Modell gewünschter Genauigkeit erhalten werden. Da die zugrunde liegende Kinematik Querschubverzerrungen berücksichtigt, werden Reissner-Mindlin-Modelle oftmals mit Naghdi in Verbindung gebracht, die Kirchhoff-Love- oder auch Koiter'schen Modelle bezeichnen hingegen schubstarre Schalentheorien, deren Gültigkeit sich auf dünne Schalen beschränkt.

Die in dieser Arbeit betrachteten Schalenelemente basieren auf dem aus dem Kontinuum hergeleiteten Modell, dessen Modellannahmen in Abschnitt 4.2.2 näher beschrieben werden.

Die zweite Möglichkeit beruht auf dem von Cosserat [49] postulierten 2D-Schalenmodell, an dem die Gleichgewichtsbedingungen direkt über Schnittgrößen formuliert werden, unabhängig von den Spannungen des dreidimensionalen Modells. Diese, als *direkte Methode* bezeichnete Vorgehensweise stellt zunächst keine Verbindung zum dreidimensionalen Körper her, sondern beruht auf der Darstellung der Schale als so genanntes gerichtetes Kontinuum, d.h. jeder einzelne Punkt der Schale ist nicht nur durch seinen Ortsvektor gekennzeichnet, sondern besitzt zusätzlich noch ein davon unabhängiges Vektorfeld, den Direktor.

Simo und Fox [133] bezeichnen Schalenmodelle dieser Art als „geometrisch exakt“, auch wenn dies im Vergleich zu den kontinuumsbasierten Modellen noch keine genauere *Approximation* der Schalen deformation impliziert. Diese Bezeichnung drückt lediglich aus, dass dieses Konzept auf der exakten Beschreibung der zweidimensionalen Cosserat-Fläche aufbaut.

Hauptproblem der direkten Methode ist die Übertragung der im Kontinuum gültigen Beziehungen, insbesondere der Stoffgesetze. Weitere Schwierigkeiten bei dieser Methode sind die generelle Berücksichtigung von Dickenänderungen, der Einbau von Steifen sowie die Modellierung von Anschluss- und Kreuzungspunkten.

¹Die Bezeichnung *continuum based shell model* ist im englischen Sprachgebrauch meist mit dem Degenerationskonzept verbunden

Auf der direkten Methode basierende Elemente wurden u.a. von Simo und Fox et al. ([133], [134], [135], [138], [137]) vorgestellt.

Die Entwicklung finiter Schalenelemente kann – neben der Diskretisierung einer der beiden beschriebenen Modelle – noch mittels einer weiteren Methode, dem sogenannten *Degenerationskonzept* (Ahmad et al. [2]) erfolgen (s.a. Abschnitt 4.2.5).

Dabei geht der Dimensionsreduktion, d.h. der Identifikation des Kontinuums als Schale, die Diskretisierung des Kontinuums voraus. Das Kontinuumelement wird dann anschließend durch entsprechende Annahmen zum Schalenelement „degeneriert“. Hierbei sind allerdings starke Parallelen zu kontinuumsbasierten Schalenelementen gegeben. Werden für beide Vorgehensweisen dieselben mechanischen Annahmen getroffen, sind die entsprechenden Elementformulierungen sogar äquivalent (Büchter [45]). Unterschiedlich sind somit nur der „Zeitpunkt“ der Diskretisierung sowie die Parametrisierung der Rotationen, sofern eine Formulierung mit Verdrehungsfreiheitsgraden gewählt wird.

Schalenmodelle höherer Ordnung, Semidiskretisierung in Dickenrichtung

Die Diskretisierung in Dickenrichtung stellt den zentralen Punkt bei der Entwicklung der Schalenmodelle und damit auch der Schalenelemente dar. Durch die verschiedenen Modellannahmen wird die Anzahl der Freiheitsgrade des Modells n_{model} beeinflusst, das entsprechend als n_{model} -Parameter-Modell bezeichnet werden kann.

So kann die klassische schubstarre KIRCHHOFF-LOVE/KOITER-Theorie als 3-Parameter-Modell angesehen werden, da lediglich drei Verschiebungsfreiheitsgrade auftreten. Werden zusätzlich die Querschubverzerrungen berücksichtigt, erhält man das 5-Parameter-Modell der Theorien mit REISSNER-MINDLIN-Kinematik, da aus dem Wegfall der Normalenhypothese die Unabhängigkeit der Rotationen von der transversalen Verschiebung und somit zwei zusätzliche Freiheitsgrade folgen. Diese Modelle beinhalten die Inextensibilität des Direktors, d.h. einen konstanten Ansatz für die Verschiebungen in Dickenrichtung (vgl. 4.2.3).

Allerdings erfordern diese Modelle eine Modifikation der allgemeinen, dreidimensionalen konstitutiven Gleichungen, die damit verbundenen Schwierigkeiten motivieren die Entwicklung von Schalenmodellen höherer Ordnung.

Das 6-Parameter-Modell als nahe liegende Erweiterung des 5-Parameter-Modells mit einem linearen Verschiebungsansatz in Dickenrichtung ermöglicht zwar den Einsatz von 3D-Stoffgesetzen ohne Modifikationen, stellt allerdings (für Biegezustände) kein asymptotisch korrektes Modell dar. Der Grund hierfür ist das Auftreten eines Versteifungseffektes, des Volumetrischen oder POISSON-Locking, auf den in Abschnitt 5.5 näher eingegangen wird.

Das „niedrigste“ asymptotisch korrekte Schalenmodell (für Biegung), für das unveränderte dreidimensionale Stoffgesetze verwendet werden können, ist das 7-Parameter-Modell, das in dieser Hinsicht eine optimale Wahl darstellt.

Der siebte Parameter kann hierfür als zusätzliche Verschiebungskomponente in Dickenrichtung angesetzt werden, was einem quadratischen Verlauf der transversalen Verschiebungen entspricht (s. u.a. Kühhorn und Schoop [94], Sansour [128], Basar und Ding [12], Parisch [113]). Alternativ zu diesem verschiebungsbasierten 7-Parameter-Modell kann der siebte Parameter als zusätzlicher Verzerrungsfreiheitsgrad eingebracht werden (Büchter et al. [45], [46], Betsch et al. [27], Eberlein und Wriggers [57], Bischoff und Ramm [33], Bischoff [29]).

Beide Modelle vermeiden den erwähnten POISSON-Lockingeffekt des 6-Parameter-Modells, im Rahmen dieser Arbeit wird jedoch nur die Erweiterung mit dem zusätzlichen Verzerrungsfreiheitsgrad entsprechend der EAS-Methode (vgl. 6.6) genauer beschrieben (Abschnitt 4.2.4).

Über das 7-Parameter-Modell hinaus können weitere Schalenmodelle höherer Ordnung entwickelt werden, deren Approximation über die Schalendicke noch genauere Analysen der dort auftretenden Effekte

ermöglicht. Generell können diese Modelle höherer Ordnung in *hierarchische* und *Mehrschicht*-Modelle unterschieden werden.

Hierarchische Modelle Bei hierarchischen Modellen (Naghdi [109]) wird der Verlauf der Verschiebungen in Dickenrichtung durch eine beliebige Anzahl von Polynomen höherer Ordnung beschrieben (siehe Abbildung 4.1). Da eine Verfeinerung der Ansätze durch die Erhöhung des Polynomgrades der Verschiebung in Dickenrichtung erfolgt, kann dieses Vorgehen auch als *p*-Methode bezeichnet werden.

$$\mathbf{u}(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = \mathbf{v}(\theta^1, \theta^2) + \sum_{N=1}^{\infty} P_N(\theta^3) \mathbf{w}_N(\theta^1, \theta^2) \quad (4.1)$$

Mit der Verschiebung der Schalenmittelfläche $\mathbf{v}(\theta^1, \theta^2)$ sowie den auf dieser definierten Differenzvektoren $\mathbf{w}_N(\theta^1, \theta^2)$ lässt sich das dreidimensionale Verschiebungsfeld $\mathbf{u}(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$ beschreiben. Lagrange-Polynome weisen weder die für die Ansatzfunktionen in Dickenrichtung notwendigen hierarchischen noch orthogonalen Eigenschaften auf. Werden Legendre-Polynome $P_N(\theta^3)$ als Basis (vgl. Abbildung 4.1) verwendet, kann eine Entkopplung der unterschiedlichen Approximationsstufen erreicht werden.

Generell wird für hierarchische Modelle gefordert, dass sowohl von jedem einzelnen Glied der Hierar-

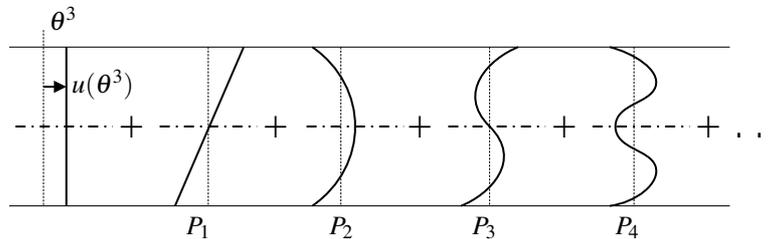


Abbildung 4.1: Verschiebungsansätze in Dickenrichtung bei hierarchischen Modellen

chie für verschwindende Dicke die 3D-Lösung erreicht wird (asymptotische Korrektheit), als auch für jede beliebige Dicke für $N \rightarrow \infty$ die Konvergenz gegen die dreidimensionale Lösung sichergestellt ist. Genauere Untersuchungen zu hierarchischen Modellen wurden u.a. von Babuska und Li [10], Schwab [129], Düster und Rank [55] angestellt.

Mehrschichtmodelle Mehrschichtmodelle zeichnen sich durch eine schichtweise Approximation des Verschiebungsfeldes über die Dicke der Schale aus (*h*-Methode). Die gewünschte Approximationsgüte wird durch die Anzahl N_L der Schichten L_S sowie den Polynomgrad der Ansatzfunktionen M_S in den Schichten bestimmt.

Die Mehrschichtmodelle können als „Stapelung“ von Einschichtschalen gesehen werden, entsprechend sind für die einzelnen Schichten auch die verschiedenen Schalenmodelle, wie beispielsweise Kirchhoff-Love- oder Reissner-Mindlin-Modelle, einsetzbar.

Abbildung 4.2 zeigt ein Mehrschichtmodell, dessen einzelne Layer jeweils einem 7-Parameter-Modell entsprechen, das also sowohl Querschubverzerrungen (Reissner-Mindlin-Kinematik) als auch Normalverzerrungen in Dickenrichtung (extensible Direktoren) berücksichtigt.

Beschreibungen von Mehrschichtmodellen mit extensibler Reissner-Mindlin-Kinematik sind z.B. bei Braun [40] und Hörmann [69] zu finden. Dabei ist in jeder Schicht der betreffende Direktor der verformten Konfiguration $\mathbf{a}_{3_S} = \mathbf{A}_{3_S} + \mathbf{w}_S$ bzw. der Differenzvektor \mathbf{w}_S zu bestimmen, so dass sich die Zahl der auftretenden Freiheitsgrade pro Knoten mit jeder zusätzlichen Schicht um drei erhöht (Abbildung 4.2). Wird vorausgesetzt, dass die einzelnen Direktoren jeder Schicht gerade bleiben, was einem linearen Verschiebungsansatz über jede Schichtdicke entspricht (vgl. Abbildung 4.3), ergibt sich das Verschiebungsfeld des Schalenkontinuums zu

$$\mathbf{u}(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = \mathbf{v}(\theta^1, \theta^2) + \sum_{S=1}^{N_L} M_S(\theta^3) \mathbf{w}_S(\theta^1, \theta^2). \quad (4.2)$$

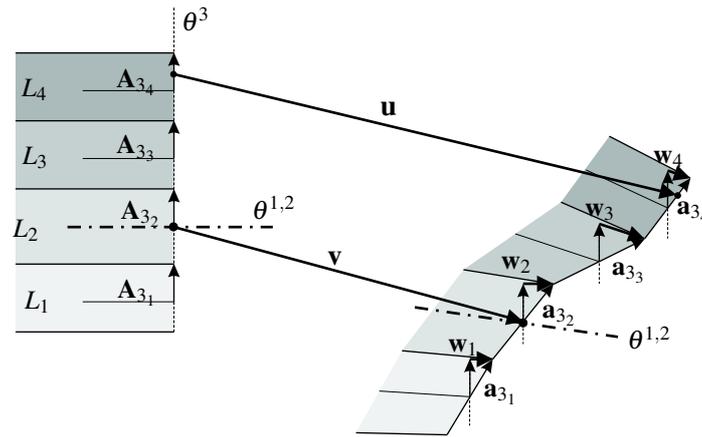


Abbildung 4.2: Mehrschichtmodell mit extensibler Reissner-Mindlin-Kinematik

Ausgehend von dieser Formulierung können die bei der Schalenberechnung erforderlichen Größen schichtweise entsprechend der in den folgenden Abschnitten beschriebenen Vorgehensweise für das 7-Parameter-Schalenmodell ermittelt werden.

Eine Beschränkung auf lineare Ansatzfunktionen in Dickenrichtung ist jedoch nicht zwingend, durch Verwendung höherer Ansatzfunktionen kann auch eine Erhöhung der Genauigkeit im Sinne einer h-p-Verfeinerung erzielt werden.

Natürgemäß eignen sich Mehrschichtmodelle zur Berechnung geschichteter Strukturen wie z.B. Laminaten. Die hierbei auftretenden Diskontinuitäten sind durch die schichtweise auftretenden Knicke in den Verschiebungen erfassbar. Auch die Effekte komplizierterer Zustände wie Delaminationsvorgänge können z.B. über eine verschmierte Betrachtungsweise (z.B. Gruttmann [63]) oder diskret über Hinzunahme von Rissöffnungsvektoren eingebracht werden (z.B. Teßmer [150]).

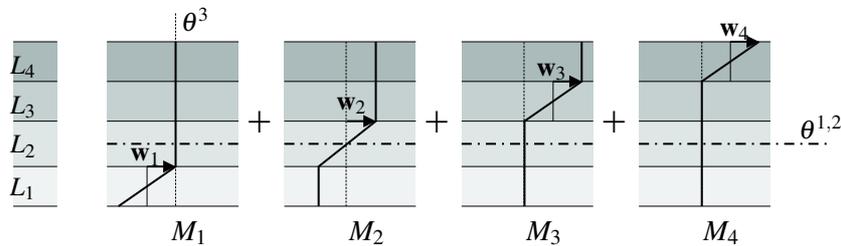


Abbildung 4.3: Verschiebungsansätze in Dickenrichtung bei Mehrschichtmodellen

4.2.2 Herleitung des Schalenmodells aus der 3D-Kontinuumsstheorie

Der Ausgangspunkt bei der Formulierung kontinuumsbasierter Schalenmodelle ist die Identifikation des Kontinuums als dreidimensionaler Schalenkörper durch die Parametrisierung mit krummlinigen Koordinaten. Im Gegensatz zum „normalen“ Kontinuum (siehe Abb. 2.1) wird jedoch eine durch θ^1 und θ^2 definierte Schalenmittelfläche sowie die (nicht notwendigerweise dazu senkrechte) Dickenrichtung θ^3 eingeführt. Die Geometriebeschreibung, d.h. die Ortsvektoren der Referenz- und der aktuellen Konfiguration, können über den Ortsvektor der Schalenmittelfläche \mathbf{R} bzw. \mathbf{r} und die die Dickenrichtung der Schale beschreibenden Vektoren $\mathbf{R}_i, \mathbf{r}_i$ ($i \geq 1$) ausgedrückt werden.

$$\mathbf{X}(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = \mathbf{R}(\theta^1, \theta^2) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\theta^3) \mathbf{R}_n(\theta^1, \theta^2) \quad (4.3)$$

$$\mathbf{x}(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = \mathbf{r}(\theta^1, \theta^2) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\theta^3) \mathbf{r}_n(\theta^1, \theta^2) \quad (4.4)$$

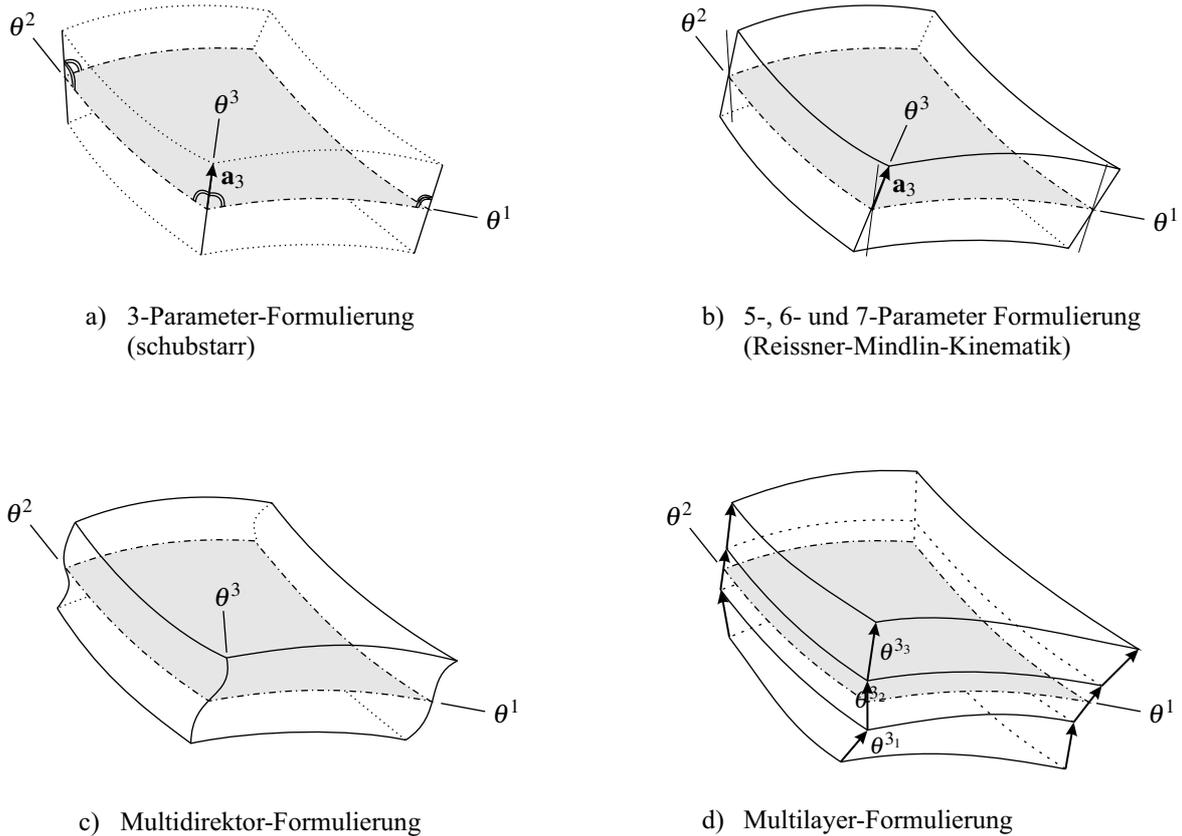


Abbildung 4.4: Schalenmodelle

Die Verschiebung $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}$ kann als Differenz der Ortsvektoren der Referenz- und Momentankonfiguration definiert werden und ergibt sich mit (4.3) und (4.4) zu:

$$\mathbf{u}(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = \mathbf{v}(\theta^1, \theta^2) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\theta^3) \mathbf{w}_n(\theta^1, \theta^2). \quad (4.5)$$

Diese Gleichung repräsentiert eine allgemeine Form zur Beschreibung der Deformation des Schalenkörpers, die entsprechend den oben beschriebenen Möglichkeiten der Semidiskretisierung (Multilayer, Multidirektor) spezifiziert werden können. Die verschiedenen Modelle sind in Abbildung 4.4 nochmals angedeutet, wobei die Modelle a) und b) als Sonderfälle in c) und d) enthalten sind.

Da in dieser Arbeit lediglich 5-, 6- oder 7-Parameter-Schalenmodelle mit Reissner-Mindlin-Kinematik betrachtet werden, können die Gleichungen (4.3)–(4.5) vereinfacht werden. Die Gemeinsamkeit dieser Modelle besteht in der Annahme des Ebenbleibens der Querschnitte. Da auch das in dieser Arbeit beschriebene 7-Parameter-Modell aufgrund der gewählten EAS-Formulierung lediglich 6 Verschiebungsparameter aufweist, lassen sich alle drei Modelle aus den folgenden Gleichungen ableiten. Die entscheidenden Annahmen, die zum jeweiligen Schalenmodell führen, werden an entsprechender Stelle angegeben.

Geometrie

Die Beschreibung des Schalenkontinuums erfolgt entsprechend der oben erwähnten Semidiskretisierung durch die Schalenmittelfläche mit dem Ortsvektor \mathbf{R} bzw. \mathbf{r} und in Dickenrichtung mit Hilfe des Schalendirektors \mathbf{A}_3 bzw. \mathbf{a}_3 für die Referenz- bzw. Momentankonfiguration (Abbildung 4.5).

Die kovarianten Basisvektoren tangential zur Schalenmittelfläche ergeben sich für die Referenz- und

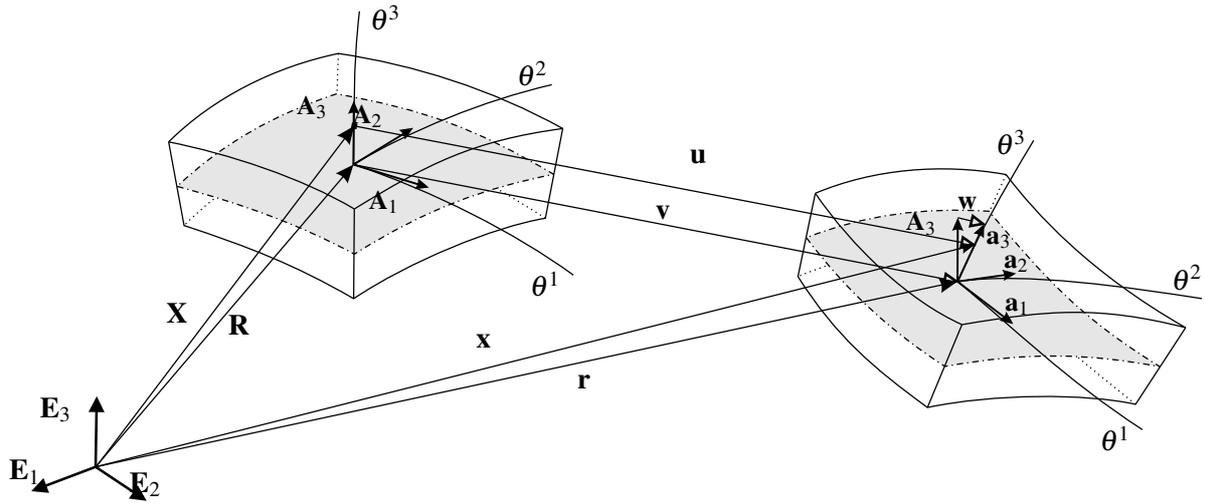


Abbildung 4.5: Geometrie und Kinematik der Schale

Momentankonfiguration aus Differentiation der entsprechenden Ortsvektoren:

$$\mathbf{A}_\alpha = \mathbf{G}_\alpha(\theta^3 = 0) = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \theta_\alpha} = \mathbf{R}_{,\alpha} \quad , \quad (4.6)$$

$$\mathbf{a}_\alpha = \mathbf{g}_\alpha(\theta^3 = 0) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta_\alpha} = \mathbf{a}_{,\alpha} \quad , \quad (4.7)$$

mit $\alpha = 1, 2$.

Für die Definition des Direktorvektors der Referenzkonfiguration \mathbf{A}_3 bestehen verschiedene Möglichkeiten, die zusammen mit den sich daraus ergebenden Konsequenzen in Abschnitt 4.2.6 näher erläutert werden. An dieser Stelle wird lediglich die Länge von \mathbf{A}_3 als halbe Schalendicke vorgeschrieben:

$$|\mathbf{A}_3| = \frac{t}{2} \quad (4.8)$$

Die Ortsvektoren eines Punktes im Schalenraum in der Referenz- bzw. Momentankonfiguration können somit in Abhängigkeit der Ortsvektoren der Schalenmittelfläche \mathbf{R} bzw. \mathbf{r} und der Direktoren \mathbf{A}_3 bzw. \mathbf{a}_3 ausgedrückt werden:

$$\mathbf{X} = \mathbf{R} + \theta^3 \mathbf{A}_3 \quad (4.9)$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{r} + \theta^3 \mathbf{a}_3 \quad (4.10)$$

Gleichung (4.9) drückt aus, dass die Querschnitte im *undeformierten* Zustand eben sind. Diese Annahme wird aus praktischen Gründen oft auch für Multidirektor- oder Multilayermodelle getroffen. Dagegen beinhaltet die Definition des Schalenkörpers in der deformierten Konfiguration (4.10) die Restriktion des *Ebenbleibens* der Querschnitte, die einen wesentlichen Bestandteil der hier beschriebenen 5-, 6- und 7-Parameter-Modelle darstellt².

Wird die Verschiebung der Schalenmittelfläche mit \mathbf{v} und die Veränderung des Direktors der Momentankonfiguration \mathbf{a}_3 gegenüber dem Direktor der Referenzkonfiguration \mathbf{A}_3 über den Differenzvektor \mathbf{w} definiert

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{v} \quad (4.11)$$

$$\mathbf{a}_3 = \mathbf{A}_3 + \mathbf{w} \quad (4.12)$$

²Diese Annahme trifft natürlich auch auf das 3-Parameter-Modell zu, dessen Formulierung erfordert allerdings noch die Modifikation von Gleichung (4.10) entsprechend der Normalenhypothese.

lässt sich der Zusammenhang zwischen Referenz- und aktueller Konfiguration (vgl. (2.5)) für das Schalenkontinuum wie folgt formulieren

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} = \mathbf{r} + \theta^3 \mathbf{a}_3 - \mathbf{R} - \theta^3 \mathbf{A}_3, \quad (4.13)$$

d.h. die Verschiebung eines Punktes des Schalenraumes ergibt sich zu

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + \theta^3 \mathbf{w}. \quad (4.14)$$

Gleichung (4.14) beinhaltet weder Annahmen bezüglich der Extensibilität des Direktors noch ist die Parametrisierung des Differenzvektors auf Verschiebungskomponenten beschränkt. Dadurch ist es möglich, zunächst die den Herleitungen aller drei Modelle (5-, 6-, 7-P.) gemeinsamen Schritte durchzuführen und erst dann die Spezialisierungen des jeweiligen Modells (Abschnitte 4.2.3, 4.2.4) einzubringen.

Kinematik

Die Herleitung der kinematischen Größen erfolgt entsprechend den Gleichungen des Kontinuums unter Berücksichtigung des eben hergeleiteten Bezugs zur Schalenmittelfläche.

Die kovarianten Basisvektoren (2.1) lauten somit

$$\mathbf{G}_\alpha = \mathbf{X}_{,\alpha} = \mathbf{R}_{,\alpha} + \theta^3 \mathbf{A}_{3,\alpha} \quad (4.15)$$

$$\mathbf{g}_\alpha = \mathbf{x}_{,\alpha} = \mathbf{r}_{,\alpha} + \theta^3 \mathbf{a}_{3,\alpha}, \quad (4.16)$$

bzw. mit Gleichung (4.6)

$$\mathbf{G}_\alpha = \mathbf{A}_\alpha + \theta^3 \mathbf{A}_{3,\alpha} \quad (4.17)$$

$$\mathbf{g}_\alpha = \mathbf{a}_\alpha + \theta^3 \mathbf{a}_{3,\alpha} \quad (4.18)$$

$$\mathbf{G}_3 = \mathbf{A}_3. \quad (4.19)$$

Damit stehen alle Ausdrücke zur Verfügung, die zur Bestimmung der kompatiblen, d.h. verschiebungsabhängigen Komponenten E_{ij}^u (vgl. Abschnitt 4.2.4) des GREEN-LAGRANGESchen Verzerrungstensors erforderlich sind.

$$\mathbf{E}^u = E_{ij}^u \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j, \quad E_{ij}^u = \frac{1}{2} (\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j - \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_j) = \frac{1}{2} (\mathbf{G}_i \cdot \mathbf{u}_{,j} + \mathbf{G}_j \cdot \mathbf{u}_{,i} + \mathbf{u}_{,i} \cdot \mathbf{u}_{,j}) \quad (4.20)$$

Einsetzen der Gleichungen (4.17)–(4.19) liefert ($\alpha = 1, 2$; $\beta = 1, 2$):

$$E_{\alpha\beta}^u = \frac{1}{2} [(\mathbf{A}_\alpha + \theta^3 \mathbf{A}_{3,\alpha}) (\mathbf{v}_{,\beta} + \theta^3 \mathbf{w}_{,\beta}) + (\mathbf{A}_\beta + \theta^3 \mathbf{A}_{3,\beta}) (\mathbf{v}_{,\alpha} + \theta^3 \mathbf{w}_{,\alpha}) + (\mathbf{v}_{,\alpha} + \theta^3 \mathbf{w}_{,\alpha}) (\mathbf{v}_{,\beta} + \theta^3 \mathbf{w}_{,\beta})] \quad (4.21)$$

$$E_{\alpha 3}^u = \frac{1}{2} [(\mathbf{A}_\alpha + \theta^3 \mathbf{A}_{3,\alpha}) \cdot \mathbf{w} + \mathbf{A}_3 \cdot (\mathbf{v}_{,\alpha} + \theta^3 \mathbf{w}_{,\alpha}) + (\mathbf{v}_{,\alpha} + \theta^3 \mathbf{w}_{,\alpha}) \cdot \mathbf{w}] \quad (4.22)$$

$$E_{33}^u = \mathbf{A}_3 \cdot \mathbf{w} + \frac{1}{2} \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} \quad (4.23)$$

Die kinematischen Annahmen (4.10)–(4.14) beschränken die verschiebungskompatiblen Verzerrungskomponenten (4.21), (4.22) auf höchstens quadratische Terme in θ^3 , d.h. in Dickenrichtung.

Um eine mechanische Interpretation der auftretenden Verzerrungsgrößen und der entsprechenden zugehörigen Spannungen zu ermöglichen, werden diese Komponenten in konstant, linear und quadratisch in θ^3 verlaufende Anteile separiert³:

$$E_{ij} = E_{ij}^0 + \theta^3 E_{ij}^1 + (\theta^3)^2 E_{ij}^2 = \sum_{N=0}^2 (\theta^3)^N E_{ij}^N \quad (4.24)$$

³Da an dieser Stelle nur verschiebungskompatible Komponenten der Verzerrungen betrachtet werden, wird der Index $(\cdot)^u$ in den folgenden Gleichungen weggelassen.

Bei der Formulierung von Schalenelementen werden die quadratischen Anteile der Verzerrungen gewöhnlich vernachlässigt, so dass

$$E_{ij}^h = E_{ij}^0 + \theta^3 E_{ij}^1 . \quad (4.25)$$

Der hierdurch entstehende Fehler bleibt klein, solange die Gradienten der Dickenänderung und der Querschubverzerrungen klein sind, d.h. große Biegeverformungen dicker bzw. stark gekrümmter Schalen vermieden werden. Ausführungen über die Größenordnung der Fehler dieser Vereinfachung finden sich bei Büchter [45] und Krätzig [93].

Diese Ausdrücke für die Verzerrungen können bereits zur Formulierung der virtuellen Arbeit und damit als Basis eines Schalenelementes herangezogen werden, ohne dass eine Berechnung von statischen Resultierenden erforderlich wäre.

Mit der Definition der Variation des Verzerrungen $\delta E_{ij} = \frac{\partial E_{ij}}{\partial u_k} \delta u_k$ sowie unter Berücksichtigung des Stoffgesetzes $S_{ij} = C^{ijkl} E_{kl}$ ergibt sich der Ausdruck für die inneren virtuellen Arbeiten

$$-\delta \Pi^{int} = \int_{\Omega} \delta \mathbf{E}^T : \mathbf{S} d\Omega = \int_{\Omega} \delta \mathbf{E}^T : \mathbf{C} : \mathbf{E} d\Omega = \int_{\Omega} \delta E_{ji}^u C^{ijkl} E_{kl}^u d\Omega , \quad (4.26)$$

der sich von der Formulierung der entsprechenden Kontinuumsleichungen nur durch die Annahmen bezüglich des Verschiebungsfeldes unterscheidet.

Die Entwicklung finiter Elemente auf Basis dieser Gleichungen ist ohne weiteres möglich, da jedoch die Dimensionsreduktion und der Bezug der relevanten Größen auf die Schalenmittelfläche noch nicht erfolgt sind, haften einer solchen Formulierung noch die Nachteile der Kontinuumelemente an: schwierigere Interpretationsfähigkeit (aufgrund fehlender Schnittgrößen, d.h. Spannungsergebnissen) sowie eine aufwendigere numerische Integration (in Dickenrichtung θ^3 , explizite Dickenintegration).

Statische Variable, Vorabintegration des Stoffgesetzes

Die Reduktion von drei auf zwei Dimensionen erfordert die Definition aller relevanten Größen auf der Schalenmittelfläche, d.h. als Funktionen der Koordinaten θ^1 und θ^2 .

Maßgebender Schritt ist die Vorabintegration der auftretenden Komponenten in Dickenrichtung (*implizite Dickenintegration*), d.h. die Umwandlung der Integration über das Schalenvolumen Ω in eine Integration über die Schalenmittelfläche Ω_0 . Der Bezug zwischen Schalenkontinuum und Mittelfläche wird dabei über den so genannten *Schalenshifter* oder *Shifter-Tensor* \mathbf{Z} hergestellt.

$$\mathbf{Z} = \mathbf{G}^\alpha \otimes \mathbf{A}_\alpha \quad (4.27)$$

Der Betrag Z des Schalenshifters ist definiert durch

$$Z = \text{Det}(\mathbf{Z}^{-1}) = \frac{(\mathbf{G}_1 \times \mathbf{G}_2) \cdot \mathbf{G}_3}{\|\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2\|} \quad (4.28)$$

und ergibt sich durch den Vergleich des differentiellen Volumenelements $d\Omega$ in Abhängigkeit der kovarianten Basisvektoren \mathbf{G}_i

$$d\Omega = \text{Det}(\mathbf{J}) d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3 , \quad \text{Det}(\mathbf{J}) = (\mathbf{G}_1 \times \mathbf{G}_2) \cdot \mathbf{G}_3 \quad (4.29)$$

mit dem durch das differentielle Flächenelement $d\Omega_0$ der Schalenmittelfläche und den Betrag des Schalenshifters definierten Volumenelement

$$d\Omega = Z d\theta^3 d\Omega_0 = Z d\theta^3 \|\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2\| d\theta^1 d\theta^2 \quad (4.30)$$

Damit kann der Ausdruck für die innere virtuelle Arbeit wie folgt formuliert werden:

$$-\delta \Pi^{int} = \int_{\Omega} \delta E_{ji} C^{ijkl} E_{kl} d\Omega = \int_{\Omega_0} \int_{-t/2}^{t/2} \delta E_{ji} C^{ijkl} E_{kl} Z d\theta^3 d\Omega_0 \quad (4.31)$$

Mit der Aufspaltung gemäß Gleichung (4.24) erhält man

$$\begin{aligned}
-\delta\Pi^{int} &= \int_{\Omega_0} \int_{-t/2}^{t/2} \left(\sum_{M=0}^2 (\theta^3)^M \delta E_{ji}^M \right) C^{ijkl} \left(\sum_{N=0}^2 (\theta^3)^N E_{kl}^N \right) Z d\theta^3 d\Omega_0 \\
&= \int_{\Omega_0} \sum_{M=0}^2 \sum_{N=0}^2 \delta E_{ji}^M \int_{-t/2}^{t/2} (\theta^3)^M C^{ijkl} (\theta^3)^N Z d\theta^3 E_{kl}^N d\Omega_0 \\
&= \int_{\Omega_0} \sum_{M=0}^2 \sum_{N=0}^2 \delta E_{ji}^M D_{M+N}^{ijkl} E_{kl}^N d\Omega_0 \quad ,
\end{aligned} \tag{4.32}$$

mit der Materialmatrix des Schalenmodells D_{M+N}^{ijkl} :

$$D_{M+N}^{ijkl} = \int_{-t/2}^{t/2} (\theta^3)^M C^{ijkl} (\theta^3)^N Z d\theta^3 \tag{4.33}$$

Die Berechnung des „Schalenmaterialgesetzes“ D_{M+N}^{ijkl} ist aufgrund der Komplexität der auftretenden Terme im allgemeinen nicht analytisch durchführbar. Erst zusätzliche vereinfachende Annahmen bezüglich des Schalenshifters ermöglichen eine solche Vorgehensweise, die allerdings weitere Restriktionen über die Anwendbarkeit des Schalenmodells mit sich bringen. Die Annahme eines konstanten Schalenshifters ($Z = 1$) beispielsweise macht die Berücksichtigung von in θ^3 quadratischen Verzerrungsanteilen obsolet. Dementsprechend bietet sich eine numerische Integration von Gleichung (4.33) als Alternative an. Eine ausführliche Diskussion dieser Sachverhalte findet man bei Büchter [45] und Bischoff et al. [36].

Mit der Vorabintegration des Stoffgesetzes ist gleichzeitig die Definition von statischen Variablen n_N^{ij} verbunden, die sich als energetisch konjugierte Größen zu den kinematischen Variablen ergeben. Die innere virtuelle Arbeit (4.32) kann dann mit Größen formuliert werden, die nur auf die Schalenmittelfläche bezogen sind:

$$-\delta\Pi^{int} = \int_{\Omega_0} \sum_{N=0}^2 \delta E_{ij}^N n_N^{ij} d\Omega_0 \tag{4.34}$$

Durch Vergleich mit (4.32) ergibt sich die Definition der statischen Variablen n_M^{ij} :

$$n_M^{ij} = \int_{-t/2}^{t/2} (\theta^3)^M s^{ij} Z d\theta^3 = \int_{-t/2}^{t/2} (\theta^3)^M C^{ijkl} E_{kl} Z d\theta^3 = \sum_{N=0}^2 D_{M+N}^{ijkl} E_{kl}^N \tag{4.35}$$

Schwierigkeiten bereitet die mechanische Interpretation der Größen n_M^{ij} . Sie stellen lediglich energetisch konjugierte Größen zu den kinematischen Variablen E^{ij} dar. Entsprechend der gewählten Beschreibung ist die Basis dieser Größen der GREEN-LAGRANGESche Verzerrungstensor bzw. der PIOLA-KIRCHHOFFSche Spannungstensor 2. Art, die keine physikalisch sinnvolle Aussagekraft besitzen.

Physikalisch sinnvolle Schnittgrößen wie Kräfte und Momente können unter Verwendung der CAUCHY-Spannungen σ^{ij} abgeleitet werden. Dabei ist die Anzahl der auftretenden Variablen von der Wahl des Schalenmodells abhängig. Für das 5-Parameter-Modell ergeben sich die bekannten Spannungsergebnisse, Membran- und Querkräfte sowie Biege- und Drillmomente, während sich beim 7-Parameter-Modell zusätzlich Variablen höherer Ordnung einstellen, die jedoch keine resultierende Wirkung aufweisen.

In den nächsten zwei Abschnitten werden die wesentlichen Annahmen zusammengestellt, die zur Herleitung der in dieser Arbeit behandelten Schalenmodelle – namentlich des 5- und des 7-Parameter-Modells – aus den bisherigen Ausführungen zu treffen sind.

4.2.3 5-Parameter-Formulierung

Wesentliche Annahme des 5-Parameter-Modells ist die Inextensibilität des Direktors, d.h.

$$|\mathbf{a}_3| = |\mathbf{A}_3 + \mathbf{w}| \quad . \quad (4.36)$$

Die Änderung des Direktors kann somit alternativ über die Rotation des Direktors der Referenzkonfiguration dargestellt werden (s.a. 4.2.7),

$$\mathbf{a}_3 = \mathbf{\Lambda} \mathbf{A}_3 \quad (4.37)$$

mit dem Rotationstensor $\mathbf{\Lambda}$

und somit

$$\mathbf{x} = \mathbf{r} + \theta^3 \mathbf{a}_3 = \mathbf{R} + \mathbf{v} + \theta^3 \mathbf{\Lambda} \mathbf{A}_3 \quad (4.38)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + \theta^3 \mathbf{\Lambda} \mathbf{A}_3 \quad . \quad (4.39)$$

Mit der Definition der Grundformen

$$A_{ij} = \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{A}_j \quad , \quad a_{ij} = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j \quad (4.40)$$

$$B_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\mathbf{A}_\alpha \cdot \mathbf{A}_{3,\beta} + \mathbf{A}_\beta \cdot \mathbf{A}_{3,\alpha}) \quad , \quad b_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_{3,\beta} + \mathbf{a}_\beta \cdot \mathbf{a}_{3,\alpha}) \quad (4.41)$$

ergeben sich Verzerrungskomponenten des 5-Parameter-Modells zu:

$$E_{ij} = E_{ij}^0 + \theta^3 E_{ij}^1 \quad (4.42)$$

$$\text{Normalverzerrungen} \quad E_{(\alpha\alpha)}^0 = \frac{1}{2} (a_{(\alpha\alpha)} - A_{(\alpha\alpha)}) \quad (4.43)$$

$$\text{Schubverzerrungen} \quad E_{12}^0 = \frac{1}{2} (a_{12} - A_{12}) \quad (4.44)$$

$$\text{Verkrümmungen} \quad E_{(\alpha\alpha)}^1 = b_{(\alpha\alpha)} - B_{(\alpha\alpha)} \quad (4.45)$$

$$\text{Verwindung} \quad E_{12}^1 = b_{12} - B_{12} \quad (4.46)$$

$$\text{Querschubverzerrungen} \quad E_{\alpha 3}^0 = \frac{1}{2} (a_{\alpha 3} - A_{\alpha 3}) \quad (4.47)$$

$$\text{Querschubverkrümmungen} \quad E_{\alpha 3}^1 = \frac{1}{2} (\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_{3,\alpha} - \mathbf{A}_3 \cdot \mathbf{A}_{3,\alpha}) = 0 \quad (4.48)$$

$$E_{33} \equiv 0 \quad = E_{33}^0 = E_{33}^1 = E_{33}^2 \quad (4.49)$$

Die Inextensibilitätsbedingung (4.36) impliziert das Verschwinden der Verzerrungen in Dickenrichtung, d.h. $E_{33} = 0$. Aufgrund des Einflusses der Querdehnung rufen jedoch Spannungen $S^{\alpha\alpha}$ in der Schalen-ebene Verzerrungen in Dickenrichtung hervor. Der Zustand verschwindender Normalverzerrungen in Dickenrichtung kann nicht korrekt abgebildet werden, die Folge ist ein deutlich zu steifes Verhalten dieses Modells. Um die asymptotische Korrektheit des 5-Parameter-Modells zu bewahren, ist somit die Modifikation des Stoffgesetzes erforderlich.

Gewöhnlich werden hierzu die Spannungen S^{33} durch statische Kondensation aus dem Stoffgesetz eliminiert, was durch die Berücksichtigung der Bedingung $S^{33} = 0$ gelingt.

$$S^{33} = C^{33kl} E_{kl} + C^{3333} E_{33} = 0 \quad \Rightarrow \quad E_{33} = -\frac{C^{33kl}}{C^{3333}} E_{kl} \quad (4.50)$$

$$\bar{C}^{ijkl} = \left(C^{ijkl} - C^{ij33} \frac{C^{33kl}}{C^{3333}} \right) \quad (4.51)$$

Für die innere virtuelle Arbeit ergibt sich damit der Ausdruck, der als Basis für die Diskretisierung der 5-Parameter-Formulierung dient (verschiebungsformuliert, Probleme und alternative Formulierungen werden in Kapitel 5 und 6 beschrieben).

$$-\delta\Pi^{int} = \int_{\Omega_0} \left[\delta E_{\alpha\beta} \bar{C}^{\alpha\beta\gamma\delta} E_{\gamma\delta} + \delta E_{\alpha\beta} \bar{C}^{\alpha\beta\gamma 3} E_{\gamma 3} + \delta E_{\alpha 3} \bar{C}^{\alpha 3\gamma\delta} E_{\gamma\delta} + \delta E_{\alpha 3} \bar{C}^{\alpha 3\gamma 3} E_{\gamma 3} \right] d\Omega_0 \quad (4.52)$$

Mit der Vorabintegration des (modifizierten) Stoffgesetzes entsprechend (4.35) ergeben sich die statischen Variablen (Bischoff und Ramm [34]) des 5-Parameter-Modells:

$$\text{Membrankräfte} \quad n_0^{\alpha\beta} = D_0^{\alpha\beta\gamma\delta} E_{\gamma\delta}^0 + D_0^{\alpha\beta\gamma 3} E_{\gamma 3}^0 + D_1^{\alpha\beta\gamma\delta} E_{\gamma\delta}^0 + D_1^{\alpha\beta\gamma 3} E_{\gamma 3}^1 \quad (4.53)$$

$$\text{Momente} \quad n_1^{\alpha\beta} = D_1^{\alpha\beta\gamma\delta} E_{\gamma\delta}^0 + D_1^{\alpha\beta\gamma 3} E_{\gamma 3}^0 + D_2^{\alpha\beta\gamma\delta} E_{\gamma\delta}^1 + D_2^{\alpha\beta\gamma 3} E_{\gamma 3}^1 \quad (4.54)$$

$$\text{Querkräfte} \quad n_0^{\alpha 3} = D_0^{\alpha 3\gamma\delta} E_{\gamma\delta}^0 + D_0^{\alpha 3\gamma 3} E_{\gamma 3}^0 + D_1^{\alpha 3\gamma\delta} E_{\gamma\delta}^0 + D_1^{\alpha 3\gamma 3} E_{\gamma 3}^1 \quad (4.55)$$

$$\text{Querschubmoment} \quad n_1^{\alpha 3} = D_1^{\alpha 3\gamma\delta} E_{\gamma\delta}^0 + D_1^{\alpha 3\gamma 3} E_{\gamma 3}^0 + D_2^{\alpha 3\gamma\delta} E_{\gamma\delta}^1 + D_2^{\alpha 3\gamma 3} E_{\gamma 3}^1 \quad (4.56)$$

und entsprechend

$$-\delta\Pi^{int} = \int_{\Omega_0} \left[\delta E_{\alpha\beta}^0 n_0^{\alpha\beta} + \delta E_{\alpha\beta}^1 n_1^{\alpha\beta} + \delta E_{\alpha 3}^0 n_0^{\alpha 3} + \delta E_{\alpha 3}^1 n_1^{\alpha 3} \right] d\Omega_0 \quad (4.57)$$

4.2.4 7-Parameter-Formulierung

Die Nachteile der 5-Parameter-Modelle liegen vor allem in der erforderlichen Kondensation des Stoffgesetzes (vgl. (4.51)). Um dreidimensionale Stoffgesetze unverändert verwenden zu können, ist demnach ein mindestens linearer Verlauf der Verschiebungen in Dickenrichtung vonnöten, der bei der 5-Parameter-Formulierung durch die Inextensibilität des Direktors (4.36) ausgeschlossen wird.

Verwendet man allein das Verschiebungsfeld mit 6 Freiheitsgraden (4.14) (6-Parameter-Modell) ist zwar der lineare Verlauf in Dickenrichtung gewährleistet, betrachtet man jedoch die resultierenden Verzerrungen (4.21)–(4.22) (wiederum unter Vernachlässigung der quadratischen Anteile)

$$E_{\alpha\beta} \in \text{span} \{1, \theta^3\}, \quad E_{\alpha 3} \in \text{span} \{1, \theta^3\}, \quad E_{33} \in \text{span} \{1\} \quad (4.58)$$

und vergleicht diese mit den entsprechenden energetisch konjugierten Spannungen

$$S^{\alpha\beta} \in \text{span} \{1, \theta^3\}, \quad S^{\alpha 3} \in \text{span} \{1, \theta^3\}, \quad S^{33} \in \text{span} \{1, \theta^3\} \quad (4.59)$$

wird die Diskrepanz zwischen den Verzerrungen E_{33} und den Spannungen S^{33} in Dickenrichtung deutlich. Aufgrund des Querdehneffektes enthalten die Normalspannungen auch lineare Anteile, während die Normalverzerrungen in Dickenrichtung nur einen konstanten Verlauf aufweisen⁴.

Diese Unbalance zwischen den Verzerrungen und Spannungen führt zu einer Überschätzung der Biegesteifigkeit bei 6-Parameter-Schalenformulierungen mit extensilem Direktor und als Folge zum Verlust der asymptotischen Korrektheit. Dieser Versteifungseffekt kann als POISSON-Dickenlocking identifiziert werden und wird in Kapitel 5.5 ausführlich dargestellt.

Eine Modifikation des Stoffgesetzes entsprechend dem 5-Parameter-Modell vermeidet zwar den Versteifungseffekt, bringt aber einen zusätzlichen Zero-Energy-Mode in die Formulierung, da bei einer reinen

⁴Diese Unbalance zwischen den Verzerrungen E_{33} und den Spannungen S^{33} tritt ebenfalls beim 5-Parameter-Modell auf ($E_{33}^{5-P} \equiv 0$) und wurde dort mit der Modifikation des Stoffgesetzes behoben, vgl. (4.50)–(4.51).

Dickenänderung ($E_{33} = \text{const.}$) kein energetisch konjugierter Arbeitspartner mehr zur Verfügung steht ($S^{33} = 0$).

Dies motiviert die Formulierung eines 7-Parameter-Modells, die auf zwei verschiedenen Wegen erfolgen kann:

- Definition eines in Dickenrichtung quadratisch verlaufenden Verschiebungsfeldes
- Einführung eines zusätzlichen Verzerrungsparameters mit der EAS-Methode

Die erste Möglichkeit führt zu einer Formulierung, die sieben Verschiebungsfreiheitsgrade und damit den Nachteil eines erhöhten numerischen Aufwands ohne größere Genauigkeit beinhaltet.

Dagegen erlaubt die Formulierung mit erweiterten Verzerrungen (EAS-Methode) die Kondensation des zusätzlichen Freiheitsgrades auf Elementebene und dementsprechend eine Reduktion auf sechs Freiheitsgrade je Knoten.

Sansour [127] schlägt ein 7-Parameter-Modell vor, bei dem der quadratische Verschiebungsanteil als inkompatibler Verschiebungsmodus (vgl. Kapitel 6.6.2) eingeführt wird, um somit ebenfalls den siebten Freiheitsgrad auf Elementebene zu kondensieren. Die Tatsache, dass die Methode der Inkompatiblen Verschiebungen als Sonderfall der EAS-Methode angesehen werden kann, deutet die Äquivalenz dieses Modells mit dem hier präsentierten an.

Die Beschränkung auf die Darstellung der zweiten Variante folgt dem Ziel dieser Arbeit, primär die Formulierung von Elementen niedriger Ordnung sowie die dabei auftretenden Probleme und Lösungsmöglichkeiten zu diskutieren.

Entsprechend werden hier auch nur die „niedrigen“ Interpolationen der Semidiskretisierung in Dickenrichtung betrachtet. Neben dem beschriebenen 5-Parameter-Modell zählt dazu als niedrigstes zur Verwendung dreidimensionaler Stoffgesetze geeignetes Modell die 7-Parameter-Formulierung mit dem 6-parametrischen Verschiebungsansatz und der Erweiterung der Verzerrungen in Dickenrichtung.

Insbesondere verdeutlicht dieses Modell die weitreichende Anwendungsmöglichkeit der in Kapitel 6 vorgestellten Methoden, in diesem Fall die Anwendung der EAS-Methode zur Herleitung eines geeigneten Schalenmodells.

Neben der schon eingeführten Annahme für das Verschiebungsfeld

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + \theta^3 \mathbf{w} \quad (4.14)$$

und den sich daraus ergebenden verschiebungskompatiblen Verzerrungen E^u (4.20) wird ein linearer Normalverzerrungsanteil in Dickenrichtung als siebter Parameter eingeführt, d.h. die Normalverzerrungen in Dickenrichtung werden mit

$$E_{33} = E_{33}^u + \tilde{E}_{33} \quad (4.60)$$

angesetzt. Werden wiederum die in θ^3 quadratischen Anteile gestrichen, ergeben sich die Verzerrungskomponenten des 7-Parameter-Modells zu ⁵:

$$E_{ij} = E_{ij}^0 + \theta^3 E_{ij}^1 \quad (4.61)$$

⁵die Verzerrungskomponenten $E_{\alpha\beta}^0$, $E_{\alpha\beta}^1$, $E_{\alpha 3}^0$, des 7-Parameter-Modells sind unter den hier getroffenen Annahmen identisch zu denjenigen des 5-Parameter-Modells

$$\text{Normalverzerrungen} \quad E_{\alpha\alpha}^0 = \frac{1}{2} (a_{\alpha\alpha} - A_{\alpha\alpha}) \quad (4.43)$$

$$\text{Schubverzerrungen} \quad E_{12}^0 = \frac{1}{2} (a_{12} - A_{12}) \quad (4.44)$$

$$\text{Verkrümmungen} \quad E_{\alpha\alpha}^1 = b_{\alpha\alpha} - B_{\alpha\alpha} \quad (4.45)$$

$$\text{Verwindung} \quad E_{12}^1 = b_{12} - B_{12} \quad (4.46)$$

$$\text{Querschubverzerrungen} \quad E_{\alpha 3}^0 = \frac{1}{2} (a_{\alpha 3} - A_{\alpha 3}) \quad (4.47)$$

$$\text{Querschubverkrümmungen} \quad E_{\alpha 3}^1 = \frac{1}{2} (\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_{3,\alpha} - \mathbf{A}_3 \cdot \mathbf{A}_{3,\alpha}) \quad (4.48)$$

$$\text{Quernormalverzerrungen} \quad E_{33}^0 = \frac{1}{2} (\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_3 - \mathbf{A}_3 \cdot \mathbf{A}_3) \quad (4.62)$$

$$\text{Quernormalverkrümmungen} \quad E_{33}^1 = \tilde{E}_{33} = \tilde{\beta} \quad (4.63)$$

Durch die hier gewählte EAS-Formulierung für die Diskretisierung in Dickenrichtung stellt das modifizierte Prinzip von HU-WASHIZU die funktionalanalytische Basis des 7-Parameter-Modells dar (siehe Kapitel 6.6).

$$\delta\Pi_{HW}^{mod, int} = \int_{\Omega} [\delta\tilde{\mathbf{E}} : \tilde{\mathbf{S}} + \delta\mathbf{E}^u : \mathbf{S}^u] d\Omega \quad (4.64)$$

und somit

$$\delta\Pi_{HW}^{mod, int} = \int_{\Omega_0} [\delta E_{\alpha\beta}^0 n_0^{\alpha\beta} + \delta E_{\alpha\beta}^1 n_1^{\alpha\beta} + \delta E_{\alpha 3}^0 n_0^{\alpha 3} + \delta E_{\alpha 3}^1 n_1^{\alpha 3} + \delta E_{33}^0 n_0^{33} + \delta E_{33}^1 n_1^{33}] d\Omega_0 \quad (4.65)$$

Die Definition der statischen Variablen $n_0^{\alpha\beta}$, $n_1^{\alpha\beta}$, $n_0^{\alpha 3}$, $n_1^{\alpha 3}$ kann hierbei vom 5-Parameter-Modell übernommen werden (Gl. (4.53)–(4.56)), hinzu kommen die Anteile aus der Berücksichtigung der Verzerrungen in Dickenrichtung:

$$\text{Quernormalkraft} \quad n_0^{33} = D_0^{33\gamma\delta} E_{\gamma\delta}^0 + D_0^{33\gamma 3} E_{\gamma 3}^0 + D_1^{33\gamma\delta} E_{\gamma\delta}^1 + D_1^{33\gamma 3} E_{\gamma 3}^1 \quad (4.66)$$

$$\text{Quermoment} \quad n_1^{33} \quad (4.67)$$

Bischoff et al. ([29], [34]) geben eine ausführliche Diskussion über die Bedeutung dieser zusätzlichen statischen Variablen.

Schubkorrekturfaktoren Gewöhnlich wird der Querschubanteil $\delta E_{\alpha 3}^0 n_0^{\alpha 3}$ mit einem Schubkorrekturfaktor ($\alpha_s^0 = \frac{5}{6}$) multipliziert, um die Diskrepanz zwischen dem angenommenen konstanten und dem – für dünne Schalen – realistischeren parabolischen Schubspannungsverlauf zu berücksichtigen⁶.

Für die 7-Parameter-Formulierung entwickeln Bischoff et al. ([29], [34]) unter der Annahme eines kubischen Schubspannungsverlaufes für die höheren Anteile von $S^{\alpha 3}$ einen zusätzlichen Schubkorrekturfaktor $\alpha_s^1 = \frac{7}{10}$ für den linearen Querschubanteil $\delta E_{\alpha 3}^1 n_1^{\alpha 3}$.

Durch die Einführung von Schubkorrekturfaktoren kann die Genauigkeit der Berechnung bei der Präsenz von Schubdeformationen positiv beeinflusst werden, auf die asymptotische Korrektheit der Schalenmodelle haben sie jedoch keine Auswirkung.

⁶Der Schubkorrekturfaktor $\alpha_s^0 = \frac{5}{6}$ kann ebenfalls für die 5-Parameter-Formulierung eingesetzt werden, entsprechendes gilt für die in Abschnitt 4.3 vorgestellten Balken- und Plattenelemente

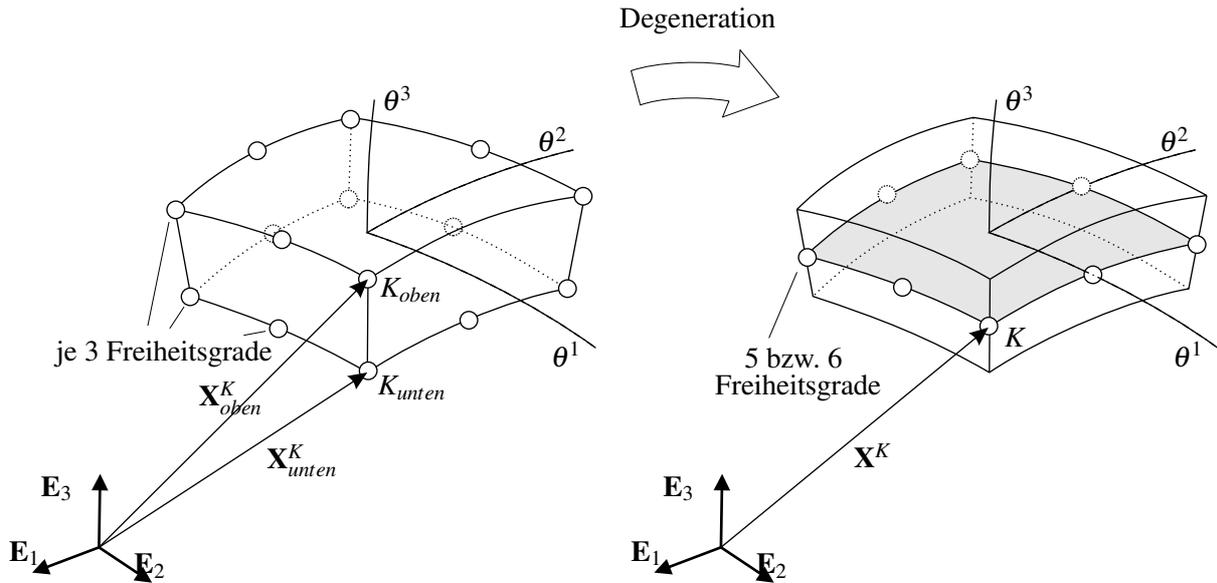


Abbildung 4.6: Degenerationskonzept

4.2.5 Diskretisierung

Degenerationskonzept

Die Grundlage des sogenannten Degenerationskonzeptes (Ahmad [2]) bildet die Diskretisierung des Schalenkörpers mit entsprechenden Kontinuums-elementen (*bricks*). Der dabei gewählte Ansatz der Diskretisierung in Dickenrichtung bestimmt die Ordnung des Schalenmodells.

Üblicherweise wird die Schale dabei als von zwei gekrümmten Flächen, d.h. den Schalenlaibungen, begrenztes Kontinuum modelliert, entsprechend Abbildung 4.6 links.

Punkte auf der Schalenmittelfläche \mathbf{r} können als Mittel zwischen Punkten auf der Ober- und der Unterseite bestimmt werden:

$$\mathbf{R}^K = \frac{1}{2} (\mathbf{X}_{oben}^K + \mathbf{X}_{unten}^K) \quad (4.68)$$

Durch die Knoten der Schalenlaibungen \mathbf{X}_{oben}^K bzw. \mathbf{X}_{unten}^K werden ebenfalls die Direktoren der Schalenmittelfläche festgelegt. Sie ergeben sich als halbe Differenz zwischen Knoten auf Ober- und der Unterseite und besitzen somit die Länge $t/2$.

$$\mathbf{A}_3^K = \frac{1}{2} (\mathbf{X}_{oben}^K - \mathbf{X}_{unten}^K) \quad (4.69)$$

$$(4.70)$$

Entsprechend werden die Verschiebungen der Schalenmittelfläche \mathbf{v} und die Differenzvektoren \mathbf{w} in Abhängigkeit der Knotenverschiebungen des Kontinuums-elementes definiert:

$$\mathbf{v}^K = \frac{1}{2} (\mathbf{u}_{oben}^K + \mathbf{u}_{unten}^K) \quad (4.71)$$

$$\mathbf{w}^K = \frac{1}{2} (\mathbf{u}_{oben}^K - \mathbf{u}_{unten}^K) \quad (4.72)$$

Die Beschreibung mit Knoten auf den Schalenlaibungen (K_{unten} , K_{oben}) beinhaltet bereits die wesentlichen Annahmen zur Semidiskretisierung des Schalenkontinuums, nämlich das Ebenbleiben der Querschnitte (werden durch eine Gerade zwischen K_{unten} und K_{oben} beschrieben) sowie das Verschiebungsfeld mit maximal 6 Parametern.

$$\mathbf{u}^K = \mathbf{v}^K + \theta^3 \mathbf{w}^K \quad (4.73)$$

Der Unterschied zur Herleitung aus der Kontinuumsmechanik besteht darin, dass (4.73) die Verschiebung eines *Knotens* darstellt, das Verschiebungsfeld also erst durch die Interpolation dieser Knotenwerte definiert wird und somit die Diskretisierung in der Schalenebene (θ^1, θ^2) bereits impliziert.

Führt man die Diskretisierung des aus dem Kontinuum hergeleiteten Schalenmodells durch und wählt eine identische Parametrisierung der Verschiebungen, erhält man aus dem Degenerationskonzept und dem kontinuumsbasierten Schalenmodell äquivalente diskrete Schalenformulierungen.

Die Differenz zwischen beiden Konzepten besteht also offensichtlich im „Zeitpunkt“ der Diskretisierung. Während die Schalentheorie zunächst eine Dimensionsreduktion vom Kontinuum auf die Schalenmittelfläche vornimmt und dort anschließend die Diskretisierung erfolgt, ist der Ausgangspunkt beim Degenerationskonzept das (schon diskretisierte) Kontinuumsselement.

Dabei führt das Degenerationskonzept auf natürliche Weise auf eine Schalenformulierung mit gemittelten Direktoren, da der Direktor über die Differenz von zwei Ortsvektoren und nicht als Normale auf der Schalenmittelfläche definiert wird.

Diskretisierung der Geometrie- und Verschiebungsfelder

Für die hier vorgestellten Schalenformulierungen mit Reissner-Mindlin-Kinematik ist die Verwendung von C^0 -kontinuierlichen Ansatzfunktionen N^K (siehe A.2) ausreichend, die entsprechend der Dimensionsreduktion auf die Schalenmittelfläche nur von θ^1 und θ^2 abhängig sind und – gemäß dem isoparametrischen Konzept – für die Interpolation sowohl der Geometrie als auch der Verschiebungsparameter angesetzt werden.

Die Diskretisierung der erforderlichen Orts- und Basisvektoren des Referenzzustandes ergibt demnach:

$$\mathbf{R}^h = \sum_{K=1}^{N_{node}} N^K(\theta^1, \theta^2) \mathbf{R}^K \quad (4.74)$$

$$\mathbf{A}_\alpha^h = \mathbf{R}_{,\alpha}^h = \sum_{K=1}^{N_{node}} N_{,\alpha}^K(\theta^1, \theta^2) \mathbf{R}^K \quad (4.75)$$

$$\mathbf{A}_3^h = \sum_{K=1}^{N_{node}} N^K(\theta^1, \theta^2) \mathbf{A}_3^K \quad (4.76)$$

Die deformierte Konfiguration ist mit der Verschiebung der Schalenmittelfläche und der Veränderung der Direktoren definiert, wobei die Parametrisierung letzterer dem 5- bzw. 7-Parameter-Modell entsprechend gewählt wird.

$$\mathbf{v}^h = \sum_{K=1}^{N_{node}} N^K \mathbf{v}^K \quad \text{mit} \quad \mathbf{v}^K = [v_x^K, v_y^K, v_z^K]^T \quad (4.77)$$

Der kontinuumsbasierten Formulierung der Schale folgend ist das diskretisierte Direktorfeld über die Interpolation der deformierten Direktoren in den Knoten beschrieben (Summationskonvention):

$$\mathbf{a}_3^h = N^K \mathbf{a}_3^K = N^K (\mathbf{A}_3^K + \mathbf{w}^K) \quad (7\text{-P-Modell}) \quad (4.78)$$

$$\Rightarrow \mathbf{u}_{7-P}^K = [v_x^K, v_y^K, v_z^K, w_x^K, w_y^K, w_z^K]^T_K \quad (4.79)$$

Für das 5-Parameter-Modell wird das Direktorfeld der deformierten Konfiguration über die Rotation der Direktoren des Referenzzustandes in den Knoten und anschließender Interpolation bestimmt ⁷.

$$\mathbf{a}_3^h = N^K \mathbf{a}_3^K = N^K \mathbf{\Lambda}^K \mathbf{A}_3^K \quad (5\text{-P-Modell}) \quad (4.80)$$

$$\Rightarrow \mathbf{u}_{5-P}^K = [v_x^K, v_y^K, v_z^K, \phi_1^K, \phi_2^K]^T_K \quad (4.81)$$

⁷Die ebenfalls mögliche direkte Interpolation des Rotationsfeldes $\mathbf{\Lambda}^h = N^K \mathbf{\Lambda}^K$ führt zur von (4.80) abweichenden Definition für das diskretisierte Direktorfeld: $\mathbf{a}_3^h = \mathbf{\Lambda}^h \mathbf{A}_3^h$.

Im Gegensatz zum 7-Parameter-Modell, das 6 Verschiebungsfreiheitsgrade aufweist (4.79), sind infolge der Inextensibilitätsbedingung (4.36) für die 5-Parameter-Formulierung die drei Verschiebungskomponenten (Schalenmittelfläche) sowie zwei Rotationen zur Beschreibung der Deformation ausreichend (4.81).

Für die Beschreibungen der Veränderung des Direktors mittels Rotationen ist es zweckmäßig, ein lokales kartesisches Koordinatensystem in den Knoten einzuführen, das die Rotationsachsen definiert. Entsprechende Formulierungen wurden u.a. von Ahmad [3] und Zienkiewicz [161] vorgeschlagen (siehe A.4.1).

Die diskreten Formen von A_{ij} bzw. a_{ij} (4.40) sind

$$A_{\alpha\beta}^h = N_{,\theta\alpha}^K N_{,\theta\beta}^L \mathbf{R}^K \cdot \mathbf{R}^L, \quad a_{\alpha\beta}^h = N_{,\theta\alpha}^K N_{,\theta\beta}^L (\mathbf{R}^K + \mathbf{v}^K) \cdot (\mathbf{R}^L + \mathbf{v}^L) \quad (4.82)$$

$$A_{\alpha 3}^h = N_{,\theta\alpha}^K N^L \mathbf{R}^K \cdot \mathbf{A}_3^L, \quad a_{\alpha 3}^h = N_{,\theta\alpha}^K N^L (\mathbf{R}^K + \mathbf{v}^K) \cdot (\mathbf{A}_3^L + \mathbf{w}^L) \quad (4.83)$$

$$A_{33}^h = N^K N^L \mathbf{A}_3^K \cdot \mathbf{A}_3^L, \quad a_{33}^h = N^K N^L (\mathbf{A}_3^K + \mathbf{w}^K) \cdot (\mathbf{A}_3^L + \mathbf{w}^L) \quad (4.84)$$

bzw. von $B_{\alpha\beta}$ und $b_{\alpha\beta}$ (4.41)

$$B_{\alpha\beta}^h = \frac{1}{2} \left(N_{,\theta\alpha}^K N_{,\theta\beta}^L \mathbf{R}^K \cdot \mathbf{A}_3^L + N_{,\theta\beta}^K N_{,\theta\alpha}^L \mathbf{R}^K \cdot \mathbf{A}_3^L \right) \quad (4.85)$$

$$b_{\alpha\beta}^h = \frac{1}{2} \left(N_{,\theta\alpha}^K N_{,\theta\beta}^L (\mathbf{R}^K + \mathbf{v}^K) \cdot (\mathbf{A}_3^L + \mathbf{w}^L) + N_{,\theta\beta}^K N_{,\theta\alpha}^L (\mathbf{R}^K + \mathbf{v}^K) \cdot (\mathbf{A}_3^L + \mathbf{w}^L) \right) \quad (4.86)$$

Damit können die verschiebungskompatiblen Verzerrungsanteile in diskreter Form ausgedrückt werden, dies sind die

$$\text{Membrannormalverzerrungen} \quad \varepsilon_{\alpha\alpha}^h = \frac{1}{2} \left(a_{\alpha\alpha}^h - A_{\alpha\alpha}^h \right) \quad (= E_{\alpha\alpha}^0) \quad (4.87)$$

$$\text{Schubverzerrungen} \quad \gamma_{12}^h = a_{12}^h - A_{12}^h \quad (= 2E_{12}^0 = 2E_{21}^0) \quad (4.88)$$

$$\text{Krümmungen} \quad \kappa_{\alpha\beta}^h = \frac{1}{2} \left(b_{\alpha\beta}^h - B_{\alpha\beta}^h \right) \quad (= E_{\alpha\beta}^1) \quad (4.89)$$

$$\text{Querschubverzerrungen} \quad \gamma_{\alpha 3}^h = a_{\alpha 3}^h - A_{\alpha 3}^h, \quad (= 2E_{\alpha 3}^0) \quad (4.90)$$

die für die 7-Parameter-Formulierung zur Verwendung dreidimensionaler Stoffgesetze um die linearen Anteile der Querschubverzerrungen sowie die konstanten Normalverzerrungen in Dickenrichtung ergänzt werden:

$$\text{Querschubverkrümmungen} \quad \kappa_{\alpha 3}^h = \frac{1}{2} \left(N_{,\theta\alpha}^K N^L (\mathbf{A}_3^K + \mathbf{w}^K) (\mathbf{A}_3^L + \mathbf{w}^L) - N_{,\theta\alpha}^K N^L \mathbf{A}_3^K \cdot \mathbf{A}_3^L \right) \quad (= E_{\alpha 3}^1) \quad (4.91)$$

$$\text{Normalverzerrungen } E_{33} \quad \varepsilon_{33}^h = \frac{1}{2} (a_{33} - A_{33}) \quad (= E_{33}^0) \quad (4.92)$$

Die Diskretisierung der zusätzlichen Verzerrungsanteile \tilde{E} der 7-Parameter-Formulierung erfolgt mit eigenen Ansatzfunktionen M^I in Abhängigkeit der Freiwerte α^I :

$$\tilde{E}_{33}^h = \sum_{I=1}^{N_{mode}} M^I(\xi, \eta) \alpha^I \quad (= E_{33}^1) \quad (4.93)$$

Die Wahl geeigneter Ansatzfunktionen dieser EAS-Erweiterung wird in Kapitel 6.6 ausführlich dargestellt. Da die Verzerrungsparameter auf Elementebene kondensiert werden, treten sie beim Lösen des Gesamtproblems nicht mehr auf.

Einsetzen von (4.82)–(4.93) liefert die diskreten Formen von (4.57) bzw. (4.64), die zur Herleitung der Elementmatrizen herangezogen werden (vgl. Anhang).

$$-\delta\Pi^h = \int_{\Omega_0} \left[\delta E_{ij}^0 D_0^{ijkl} E_{kl}^0 + \delta E_{ij}^0 D_1^{ijkl} E_{kl}^1 + \delta E_{ij}^1 D_1^{ijkl} E_{kl}^0 + \delta E_{ij}^1 D_2^{ijkl} E_{kl}^1 \right] d\Omega_0 - \delta\Pi^{ext, h} \quad (4.94)$$

mit E_{ij}^N entsprechend (4.87)–(4.93)

4.2.6 Bestimmung des Schalendirektors

Der Direktor wurde in den vorangegangenen Abschnitten als der wesentliche Bestandteil der Semidiscretisierung der Schale in Dickenrichtung herausgearbeitet. Die explizite Bestimmung des Direktors in der Referenzkonfiguration wurde jedoch bewusst ausgelassen, die abgeleiteten Gleichungen sind somit sowohl für den Fall eines orthogonalen Direktors als auch für nicht senkrecht auf der Schalenmittelfläche stehende Direktoren (z.B. infolge Mittelung der Direktoren benachbarter Elemente) gültig.

Die bei der Modellierung von Schalenstrukturen mit finiten Elementen auftretenden Probleme bzw. Besonderheiten infolge der Wahl des Direktors sollen im Folgenden kurz angesprochen werden.

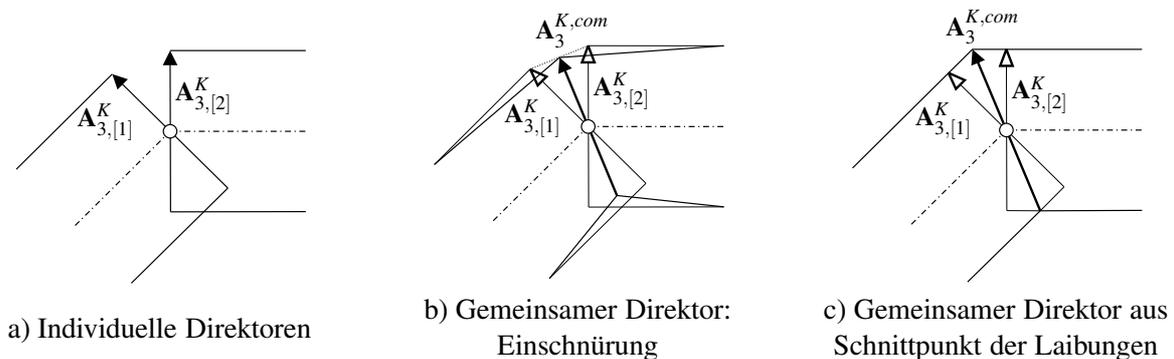


Abbildung 4.7: Definition des Schalendirektors

Die Entscheidung, in gemeinsamen Knoten individuelle Direktoren (Abb. 4.7 a)) für jedes Element aufzustellen, wird gewöhnlich für Schalenformulierungen mit orthogonalen Direktorfeldern getroffen, andernfalls müssen die Ansatzfunktionen zur Beschreibung der Geometrie (unerwünschten) C^1 -Kontinuitätsbedingungen genügen.

Die Berechnung des gemeinsamen Direktors kann über die arithmetische Mittelung der einzelnen Direktoren aller am Knoten K angrenzenden Elemente gebildet werden:

$$\mathbf{A}_3^{K,com} = \frac{\sum_{i=1}^{n_{el}} \mathbf{A}_{3,[n_{el}]}^K}{\left| \sum_{i=1}^{n_{el}} \mathbf{A}_{3,[n_{el}]}^K \right|}, \quad n_{el} \dots \text{Anzahl der am Knoten } K \text{ angrenzenden Elemente} \quad (4.95)$$

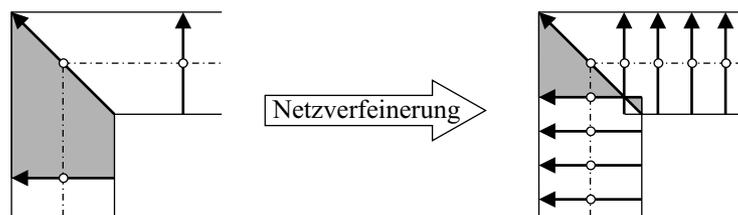


Abbildung 4.8: Probleme bei Netzverfeinerung

Bei der Verwendung eines gemittelten Direktors wird die Orthogonalitätsbedingung fallengelassen. Dies impliziert allerdings die Annahme einer *glatten* Schale, d.h. die Knicke der Schale lassen sich auf die mangelnde Approximationsgüte der *Diskretisierung* zurückführen.

Die Modellierung von *strukturbedingten* Knicken oder Verschneidungen mehrerer Schalenflächen bringt zusätzliche Probleme mit sich.

So führt die direkte Anwendung von (4.95) zu Einschnürungseffekten in der Nähe von Knicken (Abb. 4.7b)). Bischoff [29] schlägt deshalb vor, bei 7-Parameter-Modellen den gemeinsamen Direktor über den Schnittpunkt der Schalenlaibungen zu definieren⁸ (Abb. 4.7 c)).

⁸Diese Vorgehensweise entspricht dem Degenerationskonzept.

Probleme treten allerdings auch dann noch auf, wenn eine Netzverfeinerung im Bereich der Kanten vorgenommen wird. Abbildung 4.8 zeigt die dabei zunehmende Elementverzerrung im Bereich der Kante, die zu unzulässigen Elementgeometrien führen kann. Untersuchungen über die Auswirkungen dieser Modellierungsdefizite (Bischoff [29]) zeigen jedoch deren geringen Einfluss auf die Gesamtlösung.

Die Formulierung von Schalenelementen mit gemittelten Direktoren bzw. die dadurch verloren gegangene Orthogonalität des Direktorfeldes zur Schalenmittelfläche kann jedoch auch Versteifungseffekte bedingen (Kapitel 5.4).

Hauptproblem bei der Modellierung von Knicken mit Elementen, die einen *individuellen Direktor* verwenden, ist neben der Überschneidung der Elemente vor allem die Zuordnung der Rotationsfreiheitsgrade.

Der Effekt tritt bei rechtwinklig aneinander stoßenden Elementen auf, wo jeweils die Torsionsverdrehung eines Elementes einer Verdrillung, d.h. einer Rotation um eine Achse senkrecht zur Schalenmittelfläche des anderen Elementes entspräche. Da der Verdrillungsfreiheitsgrad für nicht-polare Kontinua (was für die Schalenmittelfläche zutrifft) nicht existiert, ist diesem Freiheitsgrad auch keine Steifigkeit zugeordnet. Als Folge werden in diesem Knick als Randbedingung für die angrenzenden Elemente die Torsionsmomente zu Null gesetzt.

Abhilfe bietet die explizite Einführung von Verdrillungsfreiheitsgraden („drilling rotations“) und entsprechend zugeordneten Steifigkeiten (z.B. Ibrahimbegovic [77]). Diese Methode kann für das beschriebene Problem der Modellierung von Knicken eingesetzt werden, findet allerdings ebenfalls im Bereich der Elementtechnologie Anwendung, siehe Kapitel 6.

Die Entscheidung, wie der Direktor in der Referenzkonfiguration bestimmt wird, hat also sowohl entscheidenden Einfluss bei der Modellierung von Schalenstrukturen als auch auf die Formulierung des Elementes. So können die bei der Modellierung von Knicken günstigen Verdrillungsrotationen auch zur Verbesserung des Elementverhaltens herangezogen werden.

4.2.7 Linearisierung

Die vorgestellten Schalenformulierungen beinhalten bisher keine Einschränkungen bezüglich der Größe der Verformungen und Verzerrungen, und stellen somit eine geometrisch nichtlineare Beschreibung der Schalen dar.

Die Lösung des aus (4.94) resultierenden nichtlinearen Gleichungssystems ist deshalb nicht direkt möglich, sondern nur numerisch mit geeigneten Lösungsstrategien (Newton-Raphson-Verfahren). Die prinzipiellen Schritte sind im Anhang A.5 angegeben.

Lineare Schalentheorie Merkmale einer linearen Schalentheorie sind die Verwendung eines linearen Dehnungsmaßes und die Bildung des Gleichgewichts am unverformten System. Das Anwendungsgebiet dieser Theorie ist demzufolge auf Berechnungen kleiner Verformungen und Dehnungen beschränkt.

Die Bedeutung der linearen Modelle in dieser Arbeit begründet sich auf der einfachen Darstellungsmöglichkeit und Interpretation der Locking-Phänomene, die sowohl für lineare als auch nichtlineare Berechnungen auftreten. Die Analyse der Phänomene ebenso wie die Konstruktion und Entwicklung von Methoden, die die Versteifungseffekte vermeiden, ist für die einfachen, linearen Ausdrücke wesentlich transparenter.

Berücksichtigung großer Verformungen

Der Einfluss großer Verformungen ist insbesondere bei schlanken Strukturen, zu denen Schalenstrukturen zählen, bedeutsam. Lineare Theorien – unter der Verwendung linearer Dehnungsmaße und der damit

verbundenen Einschränkung auf kleine Verformungen – sind gewöhnlich nicht in der Lage, die Tragmechanismen zu erfassen, die sich bei großen Verformungen einstellen (z.B. Stabilitätsprobleme). Die hier behandelten Defekte der Elementformulierungen (Locking) sind jedoch sowohl bei den linearen als auch bei den nichtlinearen Formulierungen präsent.

Formulierung mit Differenzvektor Die Formulierung mit Differenzvektor, wie sie auch für das oben beschriebene 7-Parameter-Modell verwendet wird, ist ohne Probleme auf große Verformungen anwendbar.

Die Bestimmung des aktuellen Direktors als Vektoraddition des Differenzvektors und des Direktors der Referenzkonfiguration $\mathbf{a}_3 = \mathbf{A}_3 + \mathbf{w}$ ist auch bei großen Verschiebungen eindeutig.

Formulierung mit Rotationen Im Gegensatz zur Differenzvektorformulierung ist die Berechnung von Deformationen mit großen Rotationen erheblich aufwendiger in der Herleitung und Umsetzung. Die Wahl der algorithmischen Behandlung der Rotationen beeinflusst dabei den Einsatzbereich der resultierenden Schalenelemente.

Zur Theorie großer Rotationen wird auf den Beitrag von Argyris [6] verwiesen. Einen guten Überblick über die Möglichkeiten der algorithmischen Umsetzung bieten weiterhin Betsch et al. [28].

Während sich der Update der Verschiebungsgrößen direkt additiv durchführen lässt, ist die Bestimmung des deformierten Direktors über die Rotation des Referenz-Direktors (wie bei der beschriebenen 5-Parameter-Formulierung) um die Achsen des lokalen Koordinatensystems (z.B. (A.53)–(A.54)) bei großen Verdrehungen nicht mehr eindeutig und erfordert demzufolge alternative Update-Strategien.

In der algorithmischen Umsetzung zur Erfassung endlicher Rotationen kann grundsätzlich unterschieden werden zwischen:

- *Additiven Verfahren:* $\mathbf{\Lambda}_{k+1} = \mathbf{\Lambda}(\Delta\boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\varphi})$

Die Gesamtrotation kann durch zwei sukzessive Elementarrotationen dargestellt werden, wobei die zweite Drehung um die mitgehende Achse erfolgt. Alternativ ist auch eine Beschreibung der Rotation in Kugelkoordinaten möglich (Ramm [123]).

Nachteil ist die Singularität des Rotationstensors bei Erreichen einer bestimmten Größe der Rotationen. Der dadurch entstehende Rangabfall der Tangentensteifigkeitsmatrix führt zu zusätzlichen Zero-Energy-Modes.

- *Multiplikativen Verfahren:* $\mathbf{\Lambda}_{k+1} = \Delta\mathbf{\Lambda}(\Delta\boldsymbol{\varphi}) \cdot \mathbf{\Lambda}(\boldsymbol{\varphi})$

Multiplikative Verfahren basieren auf zwei linearisierten Rotationsfreiheitsgraden, die Parametrisierung der Rotationen erfolgt dabei gewöhnlich mit der Rotation um eine Achse.

Nachteilig ist die erforderliche Vorhaltung des Rotationstensors des letzten Inkrementes und demzufolge ein (geringfügig) erhöhter Speicherbedarf, dem allerdings die bedeutendere singularitätenfreie Darstellung beliebig großer Rotationen gegenübersteht.

Aufgrund der angeführten Vorteile haben sich überwiegend Algorithmen durchgesetzt, die auf einer multiplikativen Strategie aufbauen.

Berücksichtigung großer Verzerrungen

Die Gleichungen des 7-Parameter-Modells beinhalten keine prinzipiellen Einschränkungen bezüglich der Größe der Verzerrungen. Für physikalisch sinnvolle Ergebnisse ist allerdings die Berücksichtigung entsprechender Materialgesetze erforderlich.

Dieser Problembereich ist von der Seite der Elementtechnologie bisher noch fast völlig unbeachtet geblieben. Erst in jüngster Zeit wurden Probleme der Elementformulierungen bei großen Verzerrungen entdeckt. Wall et al. [154] sowie Wriggers und Reese [158] wiesen Stabilitätsprobleme der EAS-Methode beim Auftreten großer Verzerrungen nach.

4.3 Balken- und Plattenelemente

4.3.1 Balkenelemente

Die Entwicklung von Balkenelementen stellt sich als komplexes Gebiet dar, insbesondere wenn neben den (bei räumlichen Balkenmodellen) auftretenden Problemen bei der Behandlung der Rotationen auch beliebige dünnwandige Querschnitte mit den entsprechenden Effekten (Verwölbung, etc.) berücksichtigt werden sollen. Literatur zu dieser Thematik findet man beispielsweise bei Simo et al. ([132], [140]), Crisfield et al. ([52],[50],[51]), Dutta et al. [56], Gruttmann et al. [64] und Ibrahimbegovic et al. ([79],[78]). In dieser Arbeit dienen Balkenelemente in erster Linie der Erläuterung der Versteifungseffekte (Kapitel 5) bzw. der Methoden zu deren Vermeidung (Kapitel 6), die bereits anhand eindimensionaler Strukturelemente verdeutlicht werden können. Demnach wird auf eine Beschreibung räumlicher Balken und dünnwandiger Querschnitte verzichtet und im folgenden nur die für Rechteckquerschnitte gültigen Beziehungen aufgestellt. Auf die Gültigkeit der vorgestellten Methoden hat dies jedoch keinen prinzipiellen Einfluss.

Balken sind durch eine ausgezeichnete Richtung charakterisiert, die sich mit der Bezugsachse deckt. Alle resultierenden kinematischen und statischen Größen sind auf diese Linie bezogen. Für die Lage der Achse wird bei Rechteckquerschnitten gewöhnlich die Schwerachse gewählt, auf die Berechnungsergebnisse – Verschiebungen und *Spannungen* – hat dies allerdings keinen Einfluss, lediglich die aus den Spannungen resultierenden Momente ändern mit einem Wechsel dieses Bezugssystems ihren Wert.

Die zwei verbreiteten Balkentheorien setzen zwar beide das Ebenbleiben der Querschnitte voraus, unterscheiden sich jedoch hinsichtlich der Korrelation des Querschnitts zur Bezugsachse im verformten Zustand (siehe Abbildungen 4.11, 4.12).

- Die EULER-BERNOULLI-Balkentheorie (Abbildung 4.12) fordert, dass der Querschnitt in der verformten Konfiguration senkrecht zur verformten Balkenachse bleibt. Dies schließt das Auftreten von (Quer-)Schubverzerrungen aus, entsprechende Elemente werden als *schubstarr* bezeichnet.
- Bei der TIMOSHENKO-Balkentheorie (Abbildung 4.11) werden Schubverzerrungen und entsprechend eine Verdrehung des Querschnittes gegenüber der Normalen zur Bezugsachse zugelassen.

Kontinuumsbasierter Balken

Angelehnt an die in Abschnitt 4.2 beschriebene Herleitung von Schalenelementen kann auch ein entsprechendes (zweidimensionales) kontinuumsbasiertes Balkenelement formuliert werden. Dieses Element wird im Rahmen dieser Arbeit herangezogen, um insbesondere die Defekte gekrümmter Strukturelemente zu veranschaulichen.

Die Herleitung und Definitionen der auftretenden kinematischen und statischen Variablen können direkt aus Abschnitt 4.2.3 abgeleitet werden, dabei werden hier allerdings die kinematischen Annahmen auf kleine Verschiebungen und ein lineares Verzerrungsmaß sowie durch die Inextensibilität des Direktors

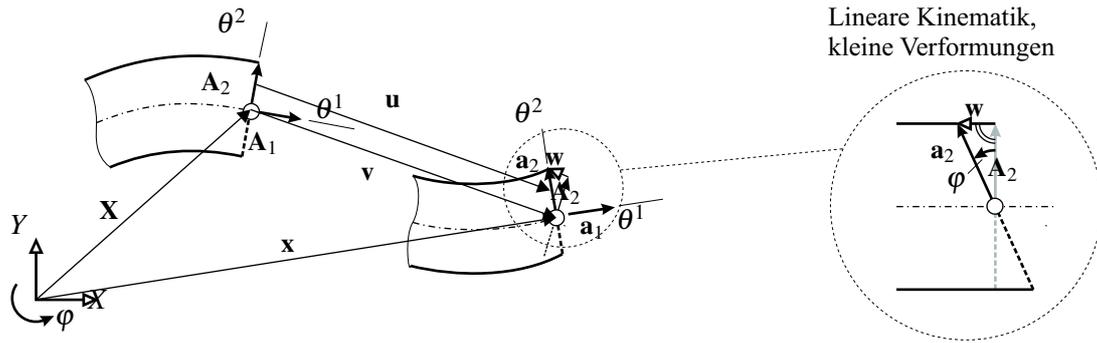


Abbildung 4.9: Kontinuumsbalken: Geometrie und Kinematik

restringiert, vgl. Abbildung 4.9, d.h.:

$$\text{Balkenshifter:} \quad Z = 1 \quad (4.96)$$

$$\text{Differenzvektor:} \quad \mathbf{w} = \frac{t}{2} \boldsymbol{\varphi} \mathbf{A}_1 \quad (4.97)$$

$$\text{Verschiebung Balkenachse:} \quad \mathbf{v} = [v_x, v_y]^T \quad (4.98)$$

Aus den Gleichungen (4.43)–(4.47) verbleiben mit den obigen Annahmen die Verzerrungskomponenten E_{11}^0, E_{11}^1 sowie E_{13}^0 des linearisierten Verzerrungstensors $E_{ij} = \frac{1}{2} (\mathbf{G}_i \mathbf{u}_{,j} + \mathbf{G}_j \mathbf{u}_{,i}) = E_{ij}^0 + \theta^2 E_{ij}^1$ (wiederum unter Vernachlässigung quadratischer Terme):

$$\text{Normalverzerrung:} \quad E_{11}^0 = \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{v}_{,1} = \varepsilon \quad (4.99)$$

$$\text{Verkrümmung:} \quad E_{11}^1 = \mathbf{A}_{2,1} \cdot \mathbf{v}_{,1} + \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{w}_{,1} = \kappa \quad (4.100)$$

$$\text{(Quer)Schubverzerrung:} \quad \gamma_{12}^0 = \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{v}_{,1} + \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{w} = \gamma \quad (4.101)$$

$$E_{12}^1 = 0, \quad E_{22} = 0 \quad (4.102)$$

Die Bestimmung des Stoffgesetzes erfolgt über die Beziehung (4.158) des zweidimensionalen Kontinuums (d.h. unter der Annahme des ebenen Spannungszustandes) und wird mit der Bedingung, dass die Normalspannungen senkrecht zur Balkenachse verschwinden $S^{22} = 0$, für die Balkentheorie modifiziert (vgl. (4.50)).

Für die hier getroffene Annahme eines orthogonalen Bezugssystems (d.h. $\mathbf{A}_1 \perp \mathbf{A}_2$) kann die innere virtuelle Arbeit entsprechend angegeben werden (siehe auch Anhang A.3):

$$-\delta W^{int} = \int_{\Omega_0} (\delta E_{11}^0 D_0^{1111} E_{11}^0 + \delta E_{11}^1 D_2^{1111} E_{11}^1 + \delta \gamma_{12}^0 D_0^{1212} \gamma_{12}^0) d\Omega_0 \quad (4.103)$$

$$= \int_{\Omega_0} (\delta \varepsilon E A \varepsilon + \delta \kappa E I \kappa + \delta \gamma G A_s \gamma) d\Omega_0 \quad (4.104)$$

$$= \int_{\Omega_0} (\delta \varepsilon N + \delta \kappa M + \delta \gamma Q) d\Omega_0 \quad (4.105)$$

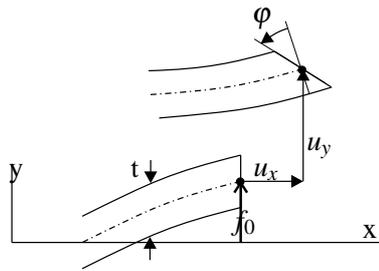
mit den statischen Variablen Normalkraft $n_{11}^0 = N$, Biegemoment $n_{11}^1 = M$ und Querkraft $n_{12}^0 = Q$.

Sonderfall: Schwach gekrümmter Balken Bei dem auch als MARGUERRE-Theorie bekannten Sonderfall des schwach gekrümmten Balkens werden alle kinematischen und statischen Größen auf eine *gerade* Stabachse bezogen.

Die geometrischen und kinematischen Größen des Balkens sind in Abbildung 4.10 dargestellt.

Die Theorie schwach gekrümmter Balken⁹ berücksichtigt den Einfluss der Ausgangskrümmung $f_{0,x}$

⁹Schalentheorien mit entsprechenden Annahmen sind natürlich ebenso formulierbar.



$$\varepsilon = u_{x,x} + u_{y,x}f_{0,x} \quad (4.106)$$

$$\gamma = u_{y,x} - \varphi \quad (4.107)$$

$$\kappa = -\varphi_{,x} \quad (4.108)$$

Abbildung 4.10: Geometrie und Kinematik des schwach gekrümmten Balkens

durch die Addition von zur Ableitung der Querverschiebungen u_y proportionalen (kleinen) Terme zu den Normalverzerrungen ε .

Die MARGUERRE-Theorie wird oft herangezogen, um den Effekt des Membran-Lockings zu erläutern und entsprechende Methoden zu dessen Vermeidung zu formulieren.

Diese Methoden werden gewöhnlich auf beliebig gekrümmte Elemente übertragen, ohne die Differenzen zwischen diesen Theorien näher zu berücksichtigen. Die Auswirkungen dieser Vorgehensweise werden in Kapitel 5.7 näher dargestellt.

Balken mit gerader Achse

Mit den geometrischen Annahmen

$$\mathbf{A}_{1,1} = \mathbf{A}_{2,1} = 0 \quad (4.109)$$

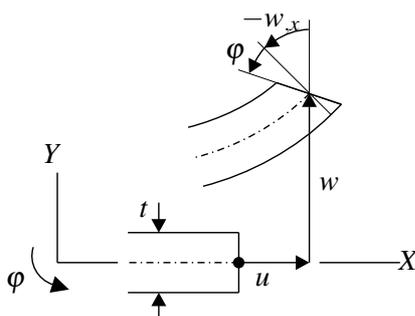
sowie $\theta^1 \equiv X$, $\theta^2 \equiv Y$ vereinfachen sich die Gleichungen (4.99)–(4.101) zu den bekannten Gleichungen der TIMOSHENKO-Balkentheorie (Abbildung 4.11).

Mit der Restriktion verschwindender Schubverzerrungen $\gamma = 0$ erhält man den schubstarreren BERNOULLI-Balken, Abbildung 4.12.

Für Balken mit gerader Bezugsachse kann die Berücksichtigung der Längswirkung für beide Balkentheorien identisch berücksichtigt und bei linearer Theorie einfach der Biegewirkung überlagert werden, es gilt für die Normalverzerrung $\varepsilon = u_{,x}$ (Kinematik) und für die Normalkraft $N = EA\varepsilon$ (Stoffgesetz).

Ein Vergleich der beiden kinematischen Annahmen zeigt, dass die Bewegungen des Bernoulli-Balkens in der Timoshenko-Theorie als Sonderfall enthalten sind. Timoshenko-Balkenelemente sollten also ebenfalls in der Lage sein, den Fall verschwindender Schubverzerrungen abzubilden.

Genau dies trifft jedoch auf verschiebungsbasierte (Gleichung (4.114)) Balkenelemente niedriger Ansatzordnung im allgemeinen nicht zu, dieser Defekt führt zu dem später behandelten Querschub-Locking (Kapitel 5.6).



Kinematik:

$$\gamma = \varphi - w_{,x} \quad (4.110)$$

$$\kappa = \varphi_{,x} \quad (4.111)$$

Stoffgesetz:

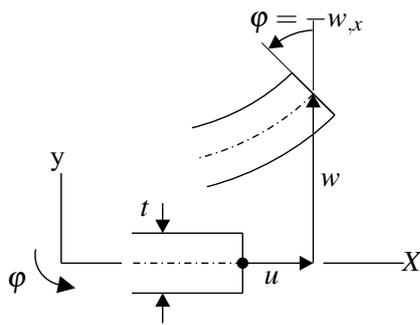
$$Q = GA_s \gamma \quad (4.112)$$

$$M = EI \kappa \quad (4.113)$$

PvV:

$$-\delta W_i = \int_{\Omega} \delta \kappa EI \kappa d\Omega + \int_{\Omega} \delta \gamma GA_s \gamma d\Omega \quad (4.114)$$

Abbildung 4.11: Timoshenko-Balken



Kinematik:

$$\varphi = -w_{,x} \quad (4.115)$$

$$\kappa = -w_{,xx} \quad (4.116)$$

PvV:

$$-\delta W_i = \int_{\Omega} \delta \kappa EI \kappa d\Omega \quad (4.118)$$

Stoffgesetz:

$$M = EI \kappa \quad (4.117)$$

Abbildung 4.12: Bernoulli-Balken

Zusätzlich zu den kinematischen und statischen Gleichungen der beiden Balkentheorien wurden ebenfalls die jeweiligen inneren virtuellen Arbeiten angegeben, die die Grundlage für verschiebungsformulierte Elemente bilden. Dabei wird insbesondere deutlich, dass bei der schubstarrn Theorie zwar nur ein Feld an unabhängigen Verschiebungsgrößen, w , auftritt, dieses allerdings höheren Stetigkeitsanforderungen (C^1 -stetig) genügen muss, da seine zweite Ableitung auftaucht.

Für die Timoshenko-Elemente treten zusätzlich zu den Verschiebungen w auch noch die Rotationen φ (Querschnittsverdrehungen) als zu diskretisierende Größe auf, allerdings müssen hier beide Felder nur C^0 -stetig sein.

4.3.2 Plattenelemente

Die Entwicklung von Plattenelementen begann in den 1950ern und hält bis heute(!) an, dementsprechend intensiv ist die Literatur zu dieser Thematik.

Das große Interesse erklärt sich aus den (im Vergleich zu Schalen) einfachen Plattengleichungen und deren Anwendbarkeit im Rahmen von Faltwerksmodellen bzw. der facettenartigen Approximation gekrümmter Strukturen. Plattenelemente können als Sonderfall der Schalen hergeleitet werden, wesentliche Annahme im Vergleich zu den Schalenelementen ist die ebene Mittelfläche,

$$\text{Plattenshifter:} \quad Z = 1 \quad (\mathbf{A}_{\alpha,3} = 0) \quad (4.119)$$

$$\text{Basisvektoren:} \quad \mathbf{A}_3 = [0, 0, 1]^T \quad (4.120)$$

$$\mathbf{A}_{\alpha} \cdot \mathbf{A}_3 = 0 \quad (4.121)$$

$$\mathbf{A}_{3,\alpha} = 0 \quad (4.122)$$

$$\text{Differenzvektor:} \quad \mathbf{w} = \frac{t}{2} \cdot [\varphi_y, \varphi_x, 0]^T \quad (4.123)$$

$$\text{Verschiebung Plattenmittelfläche:} \quad \mathbf{v} = [0, 0, v_z]^T \quad (4.124)$$

sowie die Entkopplung von Biege- und Membrananteil. Diese Aufteilung in Platten und Scheiben ist allerdings mehr im deutschen Sprachgebrauch üblich, im angelsächsischen Raum kennzeichnen „plates“ sowohl die ausschließlich senkrecht zu ihrer Mittelfläche belasteten, biegebeanspruchten Platten als auch die nur über Membrantragwirkung abtragenden Scheiben (Abschnitt 4.4).

Für die Plattenelemente verbleiben demnach die

$$\text{Krümmungen:} \quad E_{\alpha\beta}^1 = \frac{1}{2} (\mathbf{A}_{\alpha} \cdot \mathbf{w}_{,\beta} + \mathbf{A}_{\beta} \cdot \mathbf{w}_{,\alpha}) \quad (4.125)$$

$$= \frac{1}{2} (x_{,\alpha} \varphi_{y,\beta} + y_{,\alpha} \varphi_{x,\beta} + x_{,\beta} \varphi_{y,\alpha} + y_{,\beta} \varphi_{x,\alpha}) \quad (4.126)$$

$$\text{Querschubverzerrungen:} \quad E_{\alpha 3}^0 = \mathbf{A}_3 \cdot \mathbf{v}_{,\alpha} + \mathbf{A}_{\alpha} \cdot \mathbf{w} \quad (4.127)$$

$$= v_{z,\alpha} + x_{,\alpha} \varphi_y + y_{,\alpha} \varphi_x \quad (4.128)$$

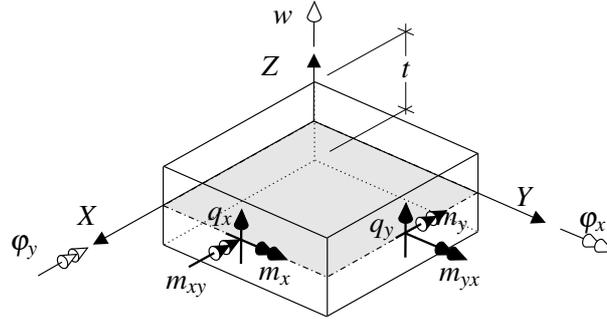


Abbildung 4.13: Freiheitsgrade und statische Variablen von Platten

als kinematische Größen und entsprechend die Momente $m_\alpha = n_1^{\alpha\alpha}$ und Querkräfte $q_\alpha = n_0^{\alpha 3}$ als statische Variablen (vgl. Abb. 4.13) sowie

$$-\delta W^{int} = \int_{\Omega_0} \left(\delta E_{\alpha\beta}^1 D_2^{\alpha\beta\gamma\delta} E_{\gamma\delta}^1 + \delta E_{\alpha 3}^0 D_0^{\alpha 3\gamma 3} E_{\gamma 3}^0 \right) d\Omega_0 . \quad (4.129)$$

KIRCHHOFF-Theorie Die Kirchhoff-Theorie stellt für die Platten das Äquivalent zur Bernoulli-Balkentheorie dar (vgl. Abbildung 4.12). Sie wurde 1850 von Gustav Kirchhoff [87] zur Berechnung dünner Platten formuliert.

Diese Theorie fordert, dass Normalen zur Plattenmittelfläche auch im deformierten Zustand normal zur verformten Mittelfläche bleiben. Diese kinematische Restriktion schließt wiederum das Auftreten von Querschubverzerrungen aus.

Entsprechend lauten die kinematischen Beziehungen der Kirchhoff-Platte (kartesisches Bezugssystem):

$$\begin{aligned} \gamma_x = 0 \\ \gamma_y = 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \varphi_x = -w_{,x} \\ \varphi_y = -w_{,y} \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \kappa_x = \varphi_{x,x} = -w_{,xx} \\ \kappa_y = \varphi_{y,y} = -w_{,yy} \\ 2 \cdot \kappa_{xy} = \varphi_{x,y} + \varphi_{y,x} = -2 \cdot w_{,xy} \end{cases} \quad (4.130)$$

so dass mit

$$\boldsymbol{\kappa}^T = [\kappa_x, \kappa_y, 2\kappa_{xy}] = \left[-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \quad (4.131)$$

und den konstitutiven Gleichungen

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{bmatrix} &= \frac{E t^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ 2\kappa_{xy} \end{bmatrix} \\ \mathbf{m} &= \mathbf{D}_b \boldsymbol{\kappa} \end{aligned} \quad (4.132)$$

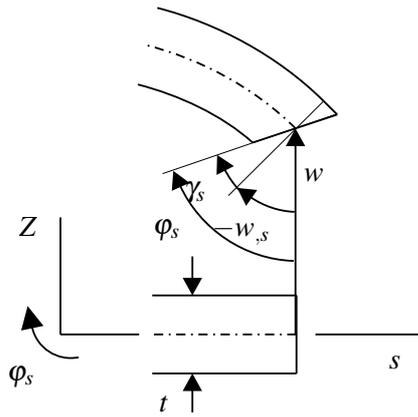
die virtuelle Arbeit für schubstarre Platten wie folgt angegeben werden kann:

$$\delta W = \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\kappa}^T \cdot \mathbf{m} d\Omega - \delta W^{ext} = \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\kappa}^T \mathbf{D}_b \boldsymbol{\kappa} d\Omega - \delta W^{ext} = 0 \quad (4.133)$$

Es treten keine Anteile aus den Schubverzerrungen auf, die aufgrund der kinematischen Annahmen eliminiert wurden.

Dies verringert zwar die Anzahl der zu diskretisierenden Felder (es treten nur die Verschiebungen w auf, vgl. (4.133)), erhöht jedoch gleichzeitig die Stetigkeitsanforderungen an w (C^1 -stetig), die von den entsprechenden Verschiebungsansätzen natürlich mitgetragen werden müssen.

Genau dies stellt die Schwierigkeit bei der Entwicklung schubstarrer Plattenelemente dar. Im Gegensatz



$$\begin{aligned}\gamma_x &= \varphi_x + w_{,x} \\ \gamma_y &= \varphi_y + w_{,y}\end{aligned}\quad \boldsymbol{\gamma} = \nabla w + \boldsymbol{\varphi} \quad (4.134)$$

$$\begin{aligned}\kappa_x &= \varphi_{,x} \\ \kappa_y &= \varphi_{,y} \\ 2\kappa_{xy} &= \varphi_{x,y} + \varphi_{y,x}\end{aligned}\quad \boldsymbol{\kappa} = \nabla \boldsymbol{\varphi} \quad (4.135)$$

Abbildung 4.14: Kinematik der Reissner-Mindlin-Platte

zu den schubstarrten Bernoulli-Balkenelementen, wo die C^1 -Stetigkeit durch kubische Polynome relativ problemlos herzustellen ist, ist diese Anforderung für die Plattenelemente ungleich schwerer zu erfüllen, insbesondere wenn die Elemente nicht mehr rechteckig sind.

Das vierknotige Plattenelement von Bogner, Fox und Schmit mit 16 Freiheitsgraden ([38]) – auch bekannt als BFS- oder Schäferelement – stellt einen Vertreter dieser „reinen“ Kirchhoffelemente dar und liefert für rechteckige Netze gute Ergebnisse. Neben der schwierigen mechanischen Interpretation des vierten Knotenfreiheitsgrades macht allerdings die Beschränkung auf rechteckige Netze einen praktischen Einsatz dieses Elementes unmöglich.

REISSNER-MINDLIN-Theorie Einen Ausweg aus dieser Problematik bietet die Formulierung von Elementen auf Basis der REISSNER-MINDLIN-Kinematik.

Im Gegensatz zur Kirchhoff-Theorie werden die Querschubdeformationen berücksichtigt und eine Verdrehung der Normalen gegenüber der verformten Plattenmittelfläche zugelassen. Die Reissner-Mindlin-Kinematik ergibt sich nach Abbildung 4.14.

Unter der Annahme eines kartesischen Bezugssystems ergeben sich die konstitutiven Gleichungen der Reissner-Mindlin-Platte – getrennt für den Biege- und Schubanteil – zu:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{bmatrix} &= \frac{E t^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ 2\kappa_{xy} \end{bmatrix} \\ \mathbf{m} &= \mathbf{D}_b \boldsymbol{\kappa}\end{aligned}\quad (4.136)$$

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix} &= \frac{E t \alpha_s^0}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \end{bmatrix} \\ \mathbf{q} &= \mathbf{D}_s \boldsymbol{\gamma}\end{aligned}\quad (4.137)$$

mit α_s^0 ... Schubkorrekturfaktor (s. Abs. 4.2.4)

Damit lässt sich die virtuelle Arbeit für Reissner-Mindlin-Platten angeben:

$$\delta W = \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\kappa}^T \cdot \mathbf{m} \, d\Omega + \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\gamma}^T \cdot \mathbf{q} \, d\Omega - \delta W^{ext} \quad (4.138)$$

$$= \int_{\Omega} \delta(\nabla \boldsymbol{\varphi})^T \mathbf{D}_b \nabla \boldsymbol{\varphi} \, d\Omega + \int_{\Omega} \delta(\nabla w + \boldsymbol{\varphi})^T \mathbf{D}_s (\nabla w + \boldsymbol{\varphi}) \, d\Omega - \delta W^{ext} = 0 \quad (4.139)$$

Die sich aus (4.138) ergebenden Anforderungen an die Verschiebung w sowie an die Verdrehungen φ_x und φ_y haben sich durch die Mitberücksichtigung der Schubterme im Vergleich zur Kirchhoff-Platte auf die Forderung nach C^0 -Stetigkeit abgeschwächt.

Diskretisierung Insbesondere die geringeren Stetigkeitsanforderungen aber auch die Möglichkeit, „dicke“ Platten zu berechnen, erklären die Beliebtheit der Reissner-Mindlin-Theorie als Grundlage von Platten- und Schalenformulierungen. Für auf Basis von (4.138) entwickelte Plattenelemente (Verschiebungselemente) müssen lediglich die Durchsenkung w und die Verdrehungen φ_x , φ_y selbst an den Elementengrenzen stetig, nicht aber stetig differenzierbar sein.

Der bekannte Nachteil der Verschiebungselemente, Locking, wird ebenso wie die Möglichkeiten, diesen zu vermeiden, ausführlich in den weiteren Kapiteln dieser Arbeit diskutiert. An dieser Stelle sollen lediglich die später verwendeten Begriffe und Notationen eingeführt werden.

Werden die Felder in Abhängigkeit von den Knotenfreiwerten mit den üblichen Formfunktionen N_i (siehe A.2) diskretisiert,

$$w^h = \sum_{i=1}^k N_i w_i, \quad \varphi_x^h = \sum_{i=1}^k N_i \varphi_{xi}, \quad \varphi_y^h = \sum_{i=1}^k N_i \varphi_{yi} \quad (4.140)$$

und die Knotenfreiheitsgrade im Vektor \mathbf{d} zusammengefasst

$$\mathbf{d} = [w_1, \varphi_{x1}, \varphi_{y1}, \dots, w_k, \varphi_{xk}, \varphi_{yk}]^T \quad (4.141)$$

kann die Beziehung zwischen den (diskretisierten) Verzerrungen und den Elementfreiheitsgraden mit Hilfe der sogenannten B-Matrizen hergestellt werden:

$$\boldsymbol{\kappa}^h = \mathbf{B}_b \cdot \mathbf{d} \quad (4.142)$$

$$\boldsymbol{\gamma}^h = \mathbf{B}_s \cdot \mathbf{d} \quad (4.143)$$

Durch Einsetzen von (4.142) und (4.143) in (4.138) kann die Steifigkeitsmatrix bestimmt werden.

$$\delta W^{int} = \delta \mathbf{d}^T \int_{\Omega} \mathbf{B}_b^T \mathbf{E}_b \mathbf{B}_b d\Omega \mathbf{d} + \delta \mathbf{d}^T \int_{\Omega} \mathbf{B}_s^T \mathbf{E}_s \mathbf{B}_s d\Omega \mathbf{d} \quad (4.144)$$

$$= \underbrace{\delta \mathbf{d}^T \int_{-1}^1 \mathbf{B}_b^T \mathbf{E}_b \mathbf{B}_b \det \mathbf{J} d\xi d\eta}_{\mathbf{K}_b} \mathbf{d} + \underbrace{\delta \mathbf{d}^T \int_{-1}^1 \mathbf{B}_s^T \mathbf{E}_s \mathbf{B}_s \det \mathbf{J} d\xi d\eta}_{\mathbf{K}_s} \mathbf{d} \quad (4.145)$$

Die Aufspaltung des B-Operators und entsprechend der Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_{ges} = \mathbf{K}_b + \mathbf{K}_s$ in nach Biegung und Schub getrennte Anteile dient der späteren Identifikation der Versteifungseffekte und entsprechender Modifikation der kritischen Anteile (in diesem Fall des Querschubanteils \mathbf{B}_s).

Gleichung (4.138) stellt die Ausgangsform *verschiebungsbasierter* Reissner-Mindlin-Plattenelemente dar, die für niedrige Ansatzordnungen zu nicht befriedigenden Ergebnissen führen. Dennoch wurden viele effiziente Elemente zunächst über Modifikationen dieser Formulierung gefunden und erst später passende variationelle Grundlagen für die neuen Elemente gelegt, prominente Beispiele hierfür sind unterintegrierte Elemente (Abschnitt 6.3) und die B-bar-Methoden (6.4, 6.5).

Alternative Formulierungen für Plattenelemente

An dieser Stelle soll ein kurzer Überblick über die Konzepte und Elemente gegeben werden, die nicht direkt auf Basis der in Kapitel 6 beschriebenen Methoden entwickelt wurden. Dazu zählen insbesondere die Elemente nach der *Diskreten Kirchhoff Methode*.

Der Anspruch auf Vollständigkeit soll und kann an dieser Stelle nicht erhoben werden, es sollen lediglich einige bewährte Ideen skizziert werden.

Diskrete Kirchhoff Elemente Maßgeblich zur Entwicklung der Diskreten Kirchhoff Elemente beigetragen haben Batoz et al. ([18], [17], [21], [20], [19], [22]), auch wenn die grundlegende Idee bereits von Wempner et al. [156], Stricklin et al. [145] und Dhatt [53] eingeführt wurde.

Im Gegensatz zu den oben beschriebenen „echten“ Kirchhoffelementen, bei denen die Kirchhoffbedingung a priori eingeführt wird und Rotationen lediglich als Koeffizienten des Verschiebungsfeldes auftreten, werden bei den Diskreten Kirchhoff Elementen explizite Ansätze für die Rotationen gemacht, die zugrunde liegenden kinematischen Beziehungen entsprechen also denjenigen der Reissner-Mindlin-Platten. Die Annahme verschwindender Schubverzerrungen (4.130) wird dabei nur in diskreten Punkten gewährleistet und mit den entsprechenden Bedingungen die Anzahl der Freiwerte reduziert. Die Entwicklung der Steifigkeitsmatrix erfolgt jedoch gemäß dem Funktional (4.133), d.h. ohne Berücksichtigung der Schubterme.

Insbesondere das dreieckige DKT-Element mit neun Freiheitsgraden (Dhatt [53]) und entsprechende Derivate sowie das viereckige Semiloof-Element von Irons [83] sind zur Berechnung dünner Platten gut geeignet und werden demzufolge auch von verschiedenen kommerziellen FE-Programmen verwendet.

Durch die diskreten Bedingungen verschwindender Schubverzerrungen besteht eine Ähnlichkeit mit den später ausführlich vorgestellten Kollokationsmethoden (siehe Abschnitt 6.4), die auf Basis eines gemischten Funktionals die Schubverzerrungen allerdings berücksichtigen.

Batoz und Lardeur ([20]) schlagen mit dem DST-Element (Discrete Shear Triangle) eine Weiterentwicklung des DKT-Elementes vor, dessen Anwendung durch die Miteinbeziehung der Schubverzerrungen nicht mehr alleine auf dünne Platten beschränkt ist. Durchwegs für Platten beliebiger Dicke einsetzbar sind allerdings erst die von Batoz und Katili [19] verbesserten DST-Elemente. Weiterführende Entwicklungen von Katili ([85], [86]) führen zu Elementen, deren Grundlage die in Abschnitt 6.6 beschriebene EAS-Methode bildet.

Elemente ohne Rotationsfreiheitsgrade Die Entwicklung von rotationsfreien Elementen für dünne Platten wurde von Nay und Utku [110] und vor allem von der Gruppe um Oñate ([111], [112]) vorangetrieben.

Grundlegende Idee ist die Entwicklung von Elementen, die ausschließlich von den Parametern für die Durchsenkung w abhängig sind. Da diese Elemente prinzipiell auf der Kirchhoff-Kinematik basieren, ist zum Erzielen der benötigten C^1 -Stetigkeit die Einbeziehung der Nachbarelemente erforderlich.

Oñate et al. [112] geben für ihre BPT- bzw. BST-Elemente (Basic Plate/Shell Triangle) eine Herleitung auf Basis des Funktionals von HU-WASHIZU an, eine weitere Entwicklung stellt eine Kombination aus Finite-Elemente- und Finite-Volumen-Ansätzen dar [61].

Schwierigkeiten bei der Anwendung dieser Methode stellen die Behandlung der Randbedingungen dar sowie der sich von den „üblichen“ Elementen unterscheidende Aufbau der Steifigkeitsmatrizen und deren Assemblierung. Vorteile durch den Einsatz dieser Elemente können sich aufgrund der geringeren Anzahl an Freiheitsgraden bei der Berechnung transienter Probleme mit vielen Zeitschritten ergeben.

4.4 Scheiben- und Kontinuumselemente

Scheiben Scheiben repräsentieren die „Inplane“-Tragwirkung ebener Schalen, entsprechend kann mit den bereits getroffenen geometrischen Annahmen (4.119)–(4.122) und den Verschiebungsvektoren

$$\text{Differenzvektor:} \quad \mathbf{w} = \mathbf{0} \quad (4.146)$$

$$\text{Verschiebung Mittelfläche:} \quad \mathbf{v} = [v_x, v_y, 0]^T \quad (4.147)$$

die Kinematik gemäß den Gleichungen (4.43)

$$\text{Normalverzerrungen: } E_{(\alpha\alpha)}^0 = \mathbf{A}_\alpha \cdot \mathbf{v}_{,\alpha} \quad (4.148)$$

$$= x_{,\alpha} v_{x,\alpha} + y_{,\alpha} v_{y,\alpha} \quad (4.149)$$

$$\text{Schubverzerrungen: } E_{12}^0 = \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{v}_{,2} + \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{v}_{,1} \quad (4.150)$$

$$= x_{,1} v_{x,2} + y_{,1} v_{y,2} + x_{,2} v_{x,1} + y_{,2} v_{y,1} \quad (4.151)$$

und die innere virtuelle Arbeit

$$-\delta W^{int} = \int_{\Omega_0} (\delta E_{\alpha\alpha}^0 D_0^{\alpha\alpha\gamma\gamma} E_{\gamma\gamma}^0 + 2 \delta E_{\alpha\alpha}^0 D_0^{\alpha\alpha 12} E_{12}^0 + \delta E_{12}^0 D_0^{1212} E_{12}^0) d\Omega_0 \quad (4.152)$$

angegeben werden.

Für kartesische Bezugssysteme (x, y) ergeben sich die zwei Normalverzerrungen und die Schubverzerrung zu

$$\varepsilon_x = u_{x,x} \quad (4.153)$$

$$\varepsilon_y = u_{y,y} \quad (4.154)$$

$$\gamma_{xy} = u_{x,y} + u_{y,x} \quad (4.155)$$

Die Kondensation des Stoffgesetzes für die Anwendung auf zweidimensionale Scheibenprobleme erfolgt entweder unter der Annahme des ebenen *Spannungszustandes* oder des ebenen *Verzerrungszustandes*.

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}^{ESZ/EVZ} \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\sigma}^T = [\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}]^T \quad (4.156)$$

Für den ebenen Spannungszustand kann einfach die entsprechende Spannungskomponente σ_{33} zu Null gesetzt und gestrichen werden, für orthonormierte Bezugssysteme ergibt sich:

$$\text{ESZ: } \sigma_z = 0, \quad \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \quad (4.157)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (4.158)$$

Die Berücksichtigung des ebenen Verzerrungszustandes wird durch Einsetzen der Bedingung $\varepsilon_3 = 0$ erreicht.

$$\text{EVZ: } \varepsilon_z = 0, \quad \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \quad (4.159)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}-\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (4.160)$$

Gleichung (4.160) deutet die im Fall inkompressiblen Materialverhaltens ($\nu = 0,5$) auftauchenden Probleme an: die Spannungen können in diesem Fall nicht mehr über die angegebene konstitutive Beziehung ermittelt werden, da die Matrix \mathbf{E}^{EVZ} singulär wird.

Eine Lösung ist für diesen Fall nur möglich, wenn für das Verschiebungsfeld

$$\text{div } \mathbf{u} = u_{x,x} + u_{y,y} = 0 \quad (4.161)$$

vorgeschrieben wird. Dadurch wird der Lösungsraum der Verschiebungen eingeschränkt, dementsprechend sind bei einer Diskretisierung mit Finiten Elementen Probleme zu erwarten, falls $\nu \rightarrow 0.5$ (siehe Abschnitt 5.5).

Offensichtlich ist dieser Effekt nur für den ebenen Verzerrungszustand (und natürlich für das 3D-Kontinuum) kritisch, da sich im ebenen Spannungszustand die Verzerrungen in Dickenrichtung frei einstellen können.

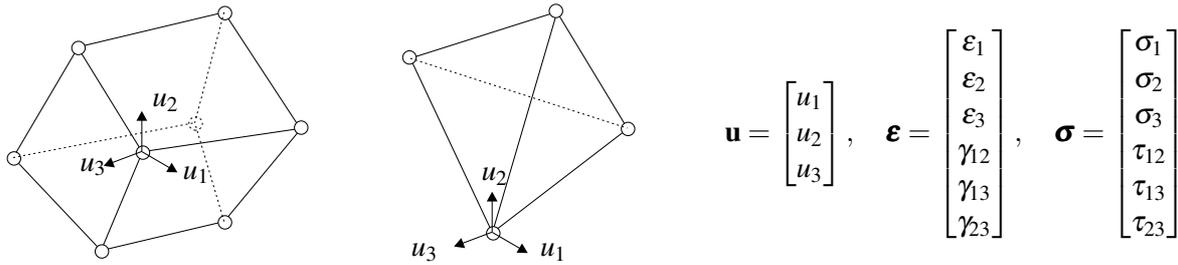


Abbildung 4.15: Kontinuumsselemente

Kontinuum Die Herleitung von dreidimensionalen Kontinuumsselementen kann direkt, d.h. ohne weitere kinematische oder kinetische Einschränkungen aus den kontinuumsmechanischen Grundgleichungen erfolgen.

Das Verschiebungsfeld \mathbf{u} wird bei Kontinuumsselementen allein durch drei (unabhängige) Verschiebungskomponenten u_1, u_2, u_3 beschrieben. Die Dehnungen entsprechen direkt den Komponenten des Green'schen Verzerrungstensors, $\varepsilon_i = E_{ii}$, die Gleitungen γ_{ij} sind als Summe der entsprechenden Schubkomponenten definiert: $\gamma_{ij} = E_{ij} + E_{ji} = 2 \cdot E_{ij}$, $i \neq j$.

Abbildung 4.15 zeigt die für Kontinuumsselemente typischen Hexaeder bzw. Tetraeder sowie die Auflistung der Freiheitsgrade, Spannungen und Verzerrungen.

Mit der üblichen Interpolation der Verschiebungen

$$u_i^h = \sum_{K=1}^{n_{\text{node}}} N^K(\xi, \eta, \zeta) u_i^K \quad (4.162)$$

sowie der daraus folgenden Abhängigkeit der diskretisierten Verzerrungen von den Knotenfreiheitsgraden $\mathbf{d} = [u_1^1, u_2^1, u_3^1, \dots, u_1^{n_{\text{node}}}, u_2^{n_{\text{node}}}, u_3^{n_{\text{node}}}]^T$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^h = \mathbf{B} \cdot \mathbf{d} \quad (4.163)$$

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}^h = \mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{d}, \quad \text{linearisierte Verzerrungen} \quad (4.164)$$

kann die innere virtuelle Arbeit und entsprechend die Elementsteifigkeitsmatrix K^{disp} des Verschiebungselementes berechnet werden,

$$\delta W^{int,h} = \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^h \boldsymbol{\sigma}^h d\Omega = \delta \mathbf{d}^T \underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} d\Omega}_{K^{disp}} \mathbf{d}. \quad (4.165)$$

4.5 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden die Grundgleichungen verschiedener Elementtypen bereitgestellt: Balken, Platte, Schale, Kontinuum, Scheibe. Neben der detaillierteren Beschreibung der Grundlagen der Schalelemente wurden ebenfalls die daraus ableitbaren Strukturelemente wie Platten, Scheiben oder der 2D-Balken sowie Kontinuumsselemente dargestellt. Damit ist der gesamte Bereich der Grundtypen finiter Elemente abgedeckt, vom Kontinuum ohne jegliche kinematische und kinetische Einschränkungen über die 7-Parameter-Schale als niedrigstes Strukturmodell mit der Anwendbarkeit von 3D-Stoffgesetzen bis hin zur schubstarrten Kirchhoff-Platte. Lediglich räumliche, aus dünnwandigen Querschnitten zusammengesetzte Balkenelemente sind nicht explizit angeführt.

Schalelemente vereinen alle Lockingeffekte in sich. Entsprechend ihrer Eigenschaft als komplexeste Elementtypen gestaltet sich die Identifikation dieser Effekte sowie die Formulierung geeigneter, d.h.

diese Phänomene vermeidender, Methoden schwierig. Hierzu werden die Balken-, Platten- und Scheibenelemente herangezogen, das Hauptargument für die Darstellung dieser vergleichsweise „einfachen“ Elemente.

Ziel der folgenden Abschnitte ist, eine möglichst uniforme Darstellung der Lockingphänomene zu geben sowie die Anwendbarkeit der bekannten Methoden hinsichtlich dieser Phänomene zu vergleichen. Eine sehr allgemeine und dennoch durch ihre Simplizität bestechende Formulierung stellt hierbei die DSG-Methode (*Discrete Strain Gap*) dar, deren Grundlagen und Applikationen besondere Beachtung finden.

Kapitel 5

Locking

5.1 Einleitung

Das Phänomen der Versteifungseffekte (*Locking*) hat die Entwicklung finiter Elemente seit seiner Entdeckung Mitte der 1960er bis heute maßgebend geprägt.

Auf die Beobachtung der mangelhaften Leistungsfähigkeit der ersten 3-knotigen Dreiecks- und 4-knotigen Viereckselemente (Fraeijs de Veubeke [153]) wurde zunächst mit einer Erhöhung der Ansatzordnung der Elemente reagiert (Irons [81]). Das genauere Verständnis für die Ursachen der Versteifungseffekte und damit auch die ersten Lösungen für niedrig interpolierte Elemente (Doherty, Taylor und Wilson [54]) entwickelten sich langsam, der Begriff „Locking“ selbst verbreitete sich erst Mitte der 70er Jahre. Die Veröffentlichung geeigneter Testbeispiele ermöglichte zwar auch eine Überprüfung finiter Elemente hinsichtlich ihrer Eignung zur Vermeidung der Locking-Probleme (MacNeal und Harder [100], Belytschko et al. [25]), eine genaue Analyse und das Verständnis für die Ursachen der Versteifungseffekte stand bei den meisten Elemententwicklern jedoch weiterhin nicht im Vordergrund.

Erst mit der Arbeit von Babuška und Suri [11] wurde eine systematische Analyse und Beurteilung des Lockingeffektes vorgelegt. Die dort vorgeschlagene Charakterisierung der Versteifungsphänomene durch bestimmte Parameter sowie deren Einfluss auf die Konvergenzrate bildet die Grundlage der in dieser Arbeit gegebenen Definition des Begriffs „Locking“.

Weitere Defekte in der Elementformulierung, die zu Versteifungseffekten führen können, wurden Ende der 90er Jahre entdeckt und beschrieben. Die Lockingeffekte treten dabei nur für bestimmte Elementformulierungen auf (z.B. Curvature-Thickness-Locking bei Schalen mit Dickenänderung, siehe Abschnitt 5.4).

Die meisten Untersuchungen zur Thematik Locking haben sich bis heute auf lineare Fragestellungen konzentriert; für lineare¹ Elemente entwickelte Methoden werden normalerweise direkt auf nichtlineare Elementformulierungen übertragen. Dass diese gewöhnlich erfolgreiche Applikation auf nichtlineare Formulierungen problematisch sein kann, zeigt beispielsweise die Instabilität der EAS-Elemente bei großen Verzerrungen, siehe z.B. Wriggers und Reese [158], Wall et al. [154]. Dieser Themenbereich blieb bisher allerdings noch weitgehend unbeachtet und ist Gegenstand aktueller Forschungsbemühungen.

5.2 Definition von Locking

Auch wenn sich zahllose Veröffentlichungen mit der Formulierung lockingfreier Elemente beschäftigt haben, wird eine genaue Definition des Begriffs Locking fast nie angegeben. Dem Ingenieurwesen angelehnte Literatur begnügt sich zumeist mit Hinweisen auf parasitäre Spannungen, mathematisch orientierte Publikationen diskutieren die Eigenschaften der zugehörigen Differentialgleichungen und Funktionale, gewöhnlich ohne den Term „Locking“ explizit zu verwenden.

¹„Linear“ bezieht sich hier auf die zugrundeliegende Kinematik, nicht auf den Polynomgrad der Ansatzfunktionen.

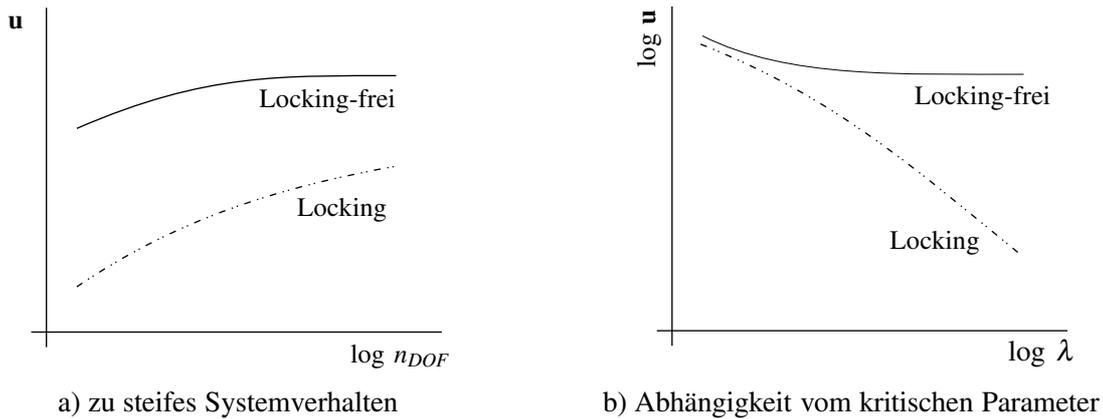


Abbildung 5.1: Charakteristika von Versteifungseffekten

An dieser Stelle soll versucht werden, eine allgemeine Definition eines Lockingphänomens zu formulieren sowie die verschiedenen Sichtweisen und Identifikationsmöglichkeiten in einen gemeinsamen Kontext zu bringen.

Ein Versteifungsphänomen ist generell dadurch charakterisiert, dass die gesuchte Größe in der diskreten Lösung des Problems kleiner ist als nach der analytischen Lösung, bei einem strukturmechanischen Problem also die Lösung dadurch gekennzeichnet ist, dass die Verschiebungen infolge der zu steifen Abbildung des Systems zu klein sind (siehe Abbildung 5.1 a)). Die Konvergenz gegen die exakte Lösung stellt sich mit zunehmender Netzverfeinerung $n_{DOF} \rightarrow \infty$ zwar ein, jedoch wesentlich langsamer als bei lockingfreien Elementen.

Wesentliches Merkmal eines Lockingphänomens ist die Abhängigkeit der Lösung von einem so genannten *kritischen Parameter*. Abbildung 5.1b) verdeutlicht dieses Verhalten: der Fehler der berechneten Lösung nimmt dabei weiter zu, wenn der kritische Parameter gegen seinen kritischen Wert $\lambda \rightarrow \lambda_{krit}$ strebt, und zwar für eine bestimmte Diskretisierung, d.h. unabhängig von der Netzverfeinerung.

Je nach Versteifungsphänomen variiert auch der kritische Parameter. Er dominiert jedoch das der Lösung zugrundeliegenden Funktional zunehmend, wenn er gegen seinen kritischen Wert tendiert. Dieser Effekt kann leicht am Beispiel des schubweichen Timoshenko-Elementes aufgezeigt werden:

$$-\delta W_i = Ebt^3 \left[\frac{1}{12} \int_{\Omega} (\delta \varphi' \varphi') d\Omega + \boxed{\frac{1}{t^2}} \frac{5}{12(1+\nu)} \int_{\Omega} (\delta(w' + \varphi)(w' + \varphi) d\Omega) \right] \quad (5.1)$$

Der eingerahmte Term $\frac{1}{t^2}$ geht dabei mit kleiner werdender Dicke/Höhe t des Balkens gegen unendlich, das darauf folgende Integral ist infolge des Interpolierungsfehlers bei der Approximation allerdings nicht gleich Null, wie es die sich im Grenzübergang einstellende Bernoulli-Bedingung fordert. Der (wenn auch evtl. kleine) Interpolierungsfehler wird demzufolge mit einem großen Faktor multipliziert, so dass der Term, der eigentlich verschwinden sollte, die Lösung dominiert. Die Folge ist eine zu steife Systemantwort, der kritische Parameter die Schlankheit des Balkens.

In Abhängigkeit des kritischen Parameters kann eine Einteilung der Lockingphänomene in *geometrische* und *materielle* Versteifungseffekte vorgenommen werden. Diese Unterscheidung erfolgt in Hinblick auf die für den entsprechenden Versteifungseffekt verantwortliche Zwangsbedingung.

So ist bei den geometrischen Lockingeffekten das Nichterfüllen kinematischer Zwangsbedingungen ursächlich, also Gleichungen, die allein Beziehungen zwischen geometrischen Größen herstellen. Beim materiellen Versteifungsphänomen ist dagegen die Abhängigkeit der Lösung von einem bestimmten Materialparameter gegeben.

Tabelle 5.2 gibt einen Überblick über die in dieser Arbeit behandelten Versteifungseffekte und die entsprechenden kritischen Parameter.

Neben der angedeuteten mechanischen Interpretation als Auftreten parasitärer Spannungen, können

		<i>kritischer Parameter</i>
<i>geometrische Lockingeffekte</i>	(Inplane)Shear-Locking	Seitenverhältnis der Elemente
	Querschub-Locking	Schlankheit
	Membran-Locking	Schlankheit
	Trapezoidal Locking Curvature Thickness Locking	Seitenverhältnis der Elemente, Schlankheit
<i>materielle Lockingeffekte</i>	Volumetrisches Locking	Kompressionsmodul (Querdehnzahl)

Abbildung 5.2: Einteilung der Lockingeffekte und kritische Parameter

Lockingphänomene auch aus numerischer und mathematischer Sichtweise beurteilt werden (siehe Bischoff [29]). Entsprechende Überlegungen werden in den folgenden Abschnitten angestellt.

5.2.1 Mathematische Sichtweise

Die mathematische Beurteilung von Versteifungseffekten erfolgt auf der Basis der funktionalanalytischen Grundlagen der Methode der Finiten Elemente, die bereits in Kapitel 3.1 dargelegt wurden. Entsprechend zur oben gegebenen Definition von Locking beruht die mathematische Analyse dieser Effekte auf den Konvergenzeigenschaften des betrachteten Problems. Eine der maßgebenden Formeln zur Fehlerabschätzung und zur Beurteilung der Konvergenz von Funktionalen ist das Lemma von CÉA (3.8). Dabei erscheinen die im Funktional auftretenden (problemabhängigen) Konstanten wiederum im CÉA-Lemma und können die daraus ableitbare Konvergenzordnung beeinflussen, insbesondere, wenn das Verhältnis der Konstanten sehr groß wird bzw. die entsprechende Konditionszahl des Problems $\gg 1$ ist. Der die Konvergenz beeinträchtigende Wert aus dem Verhältnis der Konstanten entspricht dem kritischen Parameter.

„Aus mathematischer Sicht würde man lieber von einem schlecht konditionierten Problem als von Locking reden“ (Braess [39]), diese Definition umfasst allerdings nicht alle Versteifungseffekte, die nach der mechanischen Sichtweise identifiziert werden können. Das Schub-Locking (Abschnitt 5.3) beispielsweise wäre nach dieser mathematischen Beurteilung nicht existent.

Beispiel: TIMOSHENKO-Balken Die mathematische Deutung bzw. Definition der Locking-Phänomene (entsprechend Abschnitt 3.1.1) kann gut am Beispiel des schubweichen Balkens aufgezeigt werden. Eliminiert man die Lamé-Konstanten, lautet die innere Verformungsenergie des TIMOSHENKO-Balkens in Abhängigkeit der Durchbiegung w und der Verdrehungen φ

$$\Pi^{int}(w, \varphi) = \frac{1}{2} \int_0^L (\varphi')^2 dx + \frac{1}{2I^2} \int_0^L (w' + \varphi)^2 dx \quad , \quad (5.2)$$

und das zugehörige Variationsproblem

$$\delta \Pi(w, \varphi, \delta w, \delta \varphi) = \int_0^L \delta \varphi' \varphi' dx + \frac{1}{I^2} \int_0^L (\delta w' + \delta \varphi)(w' + \varphi) dx - \delta \Pi^{ext} = 0 \quad . \quad (5.3)$$

Entsprechend der in Abschnitt 3.1 eingeführten Schreibweise und folgenden Definitionen

$$a : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R} : (w, \varphi; \delta w, \delta \varphi) \rightarrow \int_0^L \delta \varphi' \varphi' dx \quad (5.4)$$

$$B : \mathcal{V} \rightarrow L^2 : (w, \varphi) \rightarrow B(w, \varphi) := w' + \varphi \quad (5.5)$$

sowie

$$\mathbf{u} = (w, \varphi) \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{v} = (\delta w, \delta \varphi) \quad (5.6)$$

kann die variationelle Formulierung wie folgt ausgedrückt werden:

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \frac{1}{t^2} (B\mathbf{u}, B\mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad (5.7)$$

Die V-Elliptizität kann unter Zuhilfenahme der Dreiecks- und der POINCARÉ-FRIEDRICHS'schen Ungleichung nachgewiesen werden.

$$\alpha \cdot \|\mathbf{u}\|^2 \leq a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \frac{1}{t^2} (B\mathbf{u}, B\mathbf{v}) \leq C \cdot \|\mathbf{u}\|^2 \quad (5.8)$$

Dabei ist zwar α unabhängig von t , $C = c/t^2$ ist allerdings von der Ordnung $\mathcal{O}(t^{-2})$. Dementsprechend ist die Konstante im Lemma von Céa (5.9) für kleine t sehr groß, so dass sich in diesem Fall bei der Lösung Probleme abzeichnen. Eine solche Situation wird in der numerischen Mathematik als *schlecht konditioniert* bezeichnet.

Die Werte α und C stellen eine Abschätzung der kleinsten bzw. größten Eigenwerte von $\mathbf{a}(\cdot, \cdot)$ dar, die also bei entsprechend kleinem t um Größenordnungen differieren. Mit der Interpretation der Eigenwerte als Steifigkeit bestimmter Deformationszustände kann somit die Neigung zu Locking bereits hier identifiziert werden.

Eine Unterteilung des betrachteten Gebiets in Elemente der Länge h und elementweisen, C^0 -stetigen Ansätzen liefert folgende grobe Abschätzung für die Konvergenz (Céa-Lemma):

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_1^2 \leq \frac{c}{t^2} h^s \|\mathbf{u}\|_{s+1}^2 \quad (5.9)$$

Offensichtlich ist die Konvergenz nicht gleichmäßig in t , was der Definition von Locking entspricht, siehe Abbildung 5.1 mit dem Verhältnis t/h als kritischem Parameter.

Genauere Untersuchungen dieses Problems wurden von Arnold [8] durchgeführt, nach denen sich die Konvergenz deutlich verschlechtert, sobald $t \ll h$ wird. Dies entspricht genau der Beobachtung, dass der Versteifungseffekt infolge Querschub mit zunehmender Schlankheit der Elemente zunimmt.

Umgekehrt bleibt die Konvergenz mit Netzverfeinerung ($h \rightarrow 0$) erhalten.

Eine Formulierung des Minimalproblems (5.7) als Sattelpunktproblem und die entsprechende numerische Behandlung mit der Hilfe gemischter FE-Methoden (vgl. Kapitel 3.1.2) kann von t unabhängige Konvergenzraten liefern und so den Versteifungseffekt vermeiden. Die wesentliche Bedingung für gemischte FE-Ansätze ist die Einhaltung der BABUSKA-BREZZI-Bedingung (3.15), die die Lösbarkeit und Stabilität eines Mehrfeldfunktionals garantiert.

5.2.2 Numerische Sichtweise

Eine mathematisch weniger rigorose Beurteilung der Lockingphänomene wird von Hughes [73] vorgeschlagen. Dabei wird die Neigung eines Elementes zum Versteifen durch einen so genannten Zwangsbedingungsfaktor (*constraint count* oder *constraint ratio*) identifiziert. Dieser Kennwert ist definiert als Verhältnis der Anzahl der Verschiebungsgleichungen zur Anzahl der Zwangsbedingungen (*constraints*).

$$r = \frac{n_{eq}}{n_c} = \frac{n_{node} \cdot n_{DOF}}{n_c} \quad (5.10)$$

Als Zwangsbedingungen können die z.B. die Bernoulli- oder Kirchhoff-Bedingung für Balken und Schalen oder die Inkompressibilitätsbedingung auftreten, dabei sind für eine Berechnung des Zwangsbedingungsfaktors nur solche Freiheitsgrade zu berücksichtigen, die einen Anteil zur entsprechenden Bedingung beitragen.

Die Beurteilung einer Elementformulierung erfolgt über den Vergleich des ermittelten Zwangsbedingungsfaktors r zum optimalen Zwangsbedingungsfaktor des kontinuierlichen Problems r_k . Im günstigsten Fall stimmen r und r_k überein, für $r < r_k$ besteht eine Tendenz zum Locking und für $r > r_k$ kann die Zwangsbedingung eventuell nicht gut abgebildet werden, im Extremfall ist sogar das Auftreten zusätzlicher Null-Energie-Eigenmoden möglich.

Die Eingangsgrößen zur Bestimmung des Zwangsbedingungsfaktors werden an einem unendlich großen, strukturierten Netz ermittelt, um trotz der Abhängigkeit von der Diskretisierung, die eigentlich durch die Definition von r nach Gleichung (5.10) gegeben ist, Aussagen für ein Element zu erhalten.

Danach lässt sich das Verhältnis von Knotenanzahl zu Elementanzahl (d.h. wie viele Knoten kommen im kontinuierlichen Problem bei Addition eines Elementes hinzu, für vierknotige Elemente: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{n^2}$) für unterschiedliche Elementtypen angeben, z.B. für lineare und quadratische 2D-Elemente:

bilineare Viereckselemente	$n_{node}^4 = 1$
lineare Dreieckselemente	$n_{node}^3 = \frac{1}{2}$
biquadratische Viereckselemente	$n_{node}^9 = 4$
quadratische Dreieckselemente	$n_{node}^6 = 2$

Die Anzahl der gewählten Gauss-Punkte bestimmt die Anzahl der Zwangsbedingungen, da diese in den Gauss-Punkten einzuhalten sind.

Der Zwangsbedingungsfaktor ist somit nur noch von der Anzahl der Elementfreiheitsgrade, der Elementform und der Anzahl der Gauss-Punkte abhängig. Offensichtlich bewirkt dabei eine Reduzierung der Anzahl der Gauss-Punkte, dass der *constraint count* größer wird. Ein zu Locking neigendes Element kann nach diesem Kriterium also verbessert werden, was unter anderem den Effekt und Erfolg der Unterintegration erklärt. Werte für die Zwangsbedingungsfaktoren werden an entsprechender Stelle in den folgenden Abschnitten bzw. in Kapitel 6 angegeben.

Ein Nachteil des *constraint count* ist, dass durch die Betrachtung an einem strukturierten, gleichförmigen Netz die Verzerrung der Elemente keine Berücksichtigung erfährt. Die Empfindlichkeit eines Elementes gegenüber Netzverzerrungen kann also im Rahmen dieser Betrachtungsweise nicht erörtert werden, ebenso ist die Identifizierung von Zero-Energy-Modes hier nicht möglich.

5.2.3 Mechanische Sichtweise

Die mechanisch motivierte Sichtweise repräsentiert die am weitesten verbreitete Erklärung der Lockingphänomene. Hierbei werden die Versteifungseffekte als Folge des Auftretens *parasitärer* Spannungen interpretiert.

Als parasitär werden diejenigen Spannungen und Verzerrungen bezeichnet, die in der exakten Lösung nicht auftreten, sehr wohl aber in der diskreten. Bei dem in der Einführung angeführten Beispiel des Timoshenko-Balkens sind dies die (diskreten) Schubverzerrungen $\gamma^h = w_{,x}^h + \varphi^h$ sowie die entsprechenden Spannungen, die die relevante Zwangsbedingung – in diesem Fall die Bernoulli-Bedingung – nicht im Allgemeinen erfüllen können, sondern einen parasitären Verlauf annehmen. Die dadurch hervorgerufenen unerwünschten (parasitären) Energieanteile bewirken eine zusätzliche, künstliche Steifigkeit und entsprechend falsche (zu kleine) Verschiebungen.

Die Identifizierung der parasitären Spannungen und Verzerrungen erfolgt gewöhnlich anhand geeigneter Testbeispiele. Dabei werden die Elemente bestimmten Deformationszuständen unterworfen, deren Charakteristikum das Auftreten der kritischen Zwangsbedingung ist. Die hierbei von der erwarteten Lösung

abweichenden Terme können als die parasitären Anteile erkannt werden. Als geeignetes Hilfsmittel wird hierbei auch die tabellarische Analyse der einzelnen Deformationszustände eines Elementes (siehe Andelfinger [4]) herangezogen.

Die Interpretation der Versteifungsphänomene als Folge des Auftretens parasitärer Spannungen stellt allerdings nicht nur eine sehr anschauliche Erklärung dar, sie ermöglicht auch die Identifizierung und somit eine direkte Beeinflussung der störenden Terme bei der Elementformulierung. Diese Eigenschaft erklärt die Dominanz dieser Vorgehensweise in der Elementtechnologie, maßgebliche Elemententwicklungen lassen sich hierauf zurückführen (z.B. die ANS-Methode, Abs. 6.4 oder die EAS-Methode, Abs. 6.6).

Die Schwäche dieser Betrachtungsweise liegt in der etwas willkürlichen Definition, welche Spannungen als parasitär einzustufen sind. Lineare dreieckige Scheibenelemente beispielsweise wären demnach frei von parasitären Spannungen, weisen aber trotzdem Versteifungstendenzen auf (s.a. Abschnitt 5.5).

Zusammenfassung Die *Definition* von Locking ist die Abhängigkeit der Konvergenzrate von einem charakteristischen Wert, dem kritischen Parameter.

Die *Identifizierung* der Versteifungsphänomene und ihrer Charakteristika unterscheidet sich entsprechend den verschiedenen Sichtweisen. So ermöglicht die mathematische Beurteilung einen rigiden Nachweis der Stabilität und Konvergenz der Elemente, der numerisch orientierte Constraint Count eine sehr einfache und schnelle – wenn auch grobe – Einschätzung. Unentbehrlich vom Standpunkt der Elemententwicklung bleibt jedoch die mechanische motivierte Einschätzung.

In den folgenden Abschnitten sollen die in der Strukturmechanik bekannten Locking-Phänomene näher erläutert werden. Generell werden dabei die *linearen* Beziehungen der Elastostatik herangezogen, d.h. insbesondere lineare kinematische Gleichungen, da bereits hiermit die wesentlichen Effekte dargestellt werden können.

5.3 Schub-Locking

Schub-Locking (auch Shear-Locking) kann generell bei zwei- und dreidimensionalen Kontinuumselementen sowie im Membrananteil von Flächenelementen auftreten². Der Versteifungseffekt wird insbesondere dann relevant, wenn mit Hilfe von Kontinuumselementen niederer Ansatzordnung Biegezustände abgebildet werden sollen (z.B. Abbildung 5.3).

Der Effekt des Shear-Locking lässt sich verdeutlichen, wenn die Deformation eines reinen Biegezustandes durch ein Element mit linearen Ansatzfunktionen abgebildet werden soll. Abbildung 5.4 zeigt die erwartete Verschiebungsfigur und die zugehörigen Spannungen des kontinuierlichen Problems. Entsprechend dem in x quadratischen Verlauf der vertikalen Verschiebungen u_y sowie den in x und y linear veränderlichen horizontalen Verschiebungen u_x stellen sich ausschließlich linear über die Höhe verlaufende Normalverzerrungen und -spannungen in x -Richtung ein (vgl. (4.153)–(4.158)).

Soll dieser Deformationszustand mit einem bilinearen Scheibenelement abgebildet werden, liefert das Element zwar die korrekte Antwort für die *Normalverzerrungen* $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ und entsprechend für die Normalspannungen σ_x und σ_y , die *Schubverzerrungen* und -spannungen ergeben sich jedoch nicht zu Null, siehe Abbildung 5.7a).

Die Analyse der Deformationsmoden des 4-knotigen Scheibenelementes (Tabelle 5.5) bestätigt diese Feststellungen. Die Abbildung eines Biegezustandes (Mode 4: $u_x = xy$ bzw. Mode 8: $u_y = xy$) ist immer mit dem Auftreten einer parasitären Schubverzerrung ($\varepsilon_{xy} = x$ bzw. $\varepsilon_{xy} = y$) und entsprechenden Spannungen verbunden.

²Da sich dieser Effekt auf die Membranspannungen auswirkt, findet man hierfür auch die Bezeichnung *Membran-Locking*, z.B. Hauptmann et al. [66]. In dieser Arbeit wird der Begriff Membran-Locking jedoch einem anderen Versteifungseffekt zugeordnet (Abschnitt 5.7).

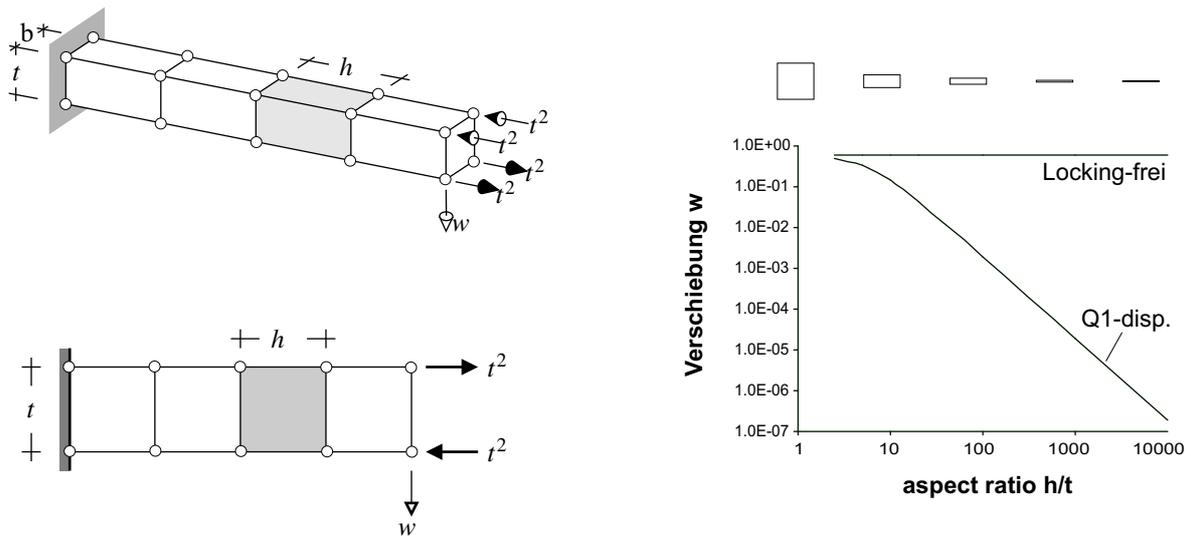


Abbildung 5.3: Schub-Locking bei Biegezuständen von 2D- und 3D-Kontinuums-elementen

Der Anteil dieser parasitären Verzerrungen an der Verzerrungsenergie kann leicht berechnet werden:

$$\Pi_{Q1}^{int} = \frac{1}{2} \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x \epsilon_x + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dx dy = b \frac{Et^3 h}{24(1-\nu^2)} \left(1 + \left(\frac{h}{t} \right)^2 \cdot \frac{1-\nu}{2} \right) \quad (5.16)$$

Die (parasitäre) Schubverzerrungsenergie geht dabei offensichtlich proportional zum Faktor $\left(\frac{h}{t}\right)^2$ ein und dominiert die Lösung des Problems mit zunehmend „schlankerem“ Seitenverhältnis des Elementes. Der kritische Parameter, von dem die Konvergenz der Lösung abhängt, kann im Fall des Shear-Locking also als das Seitenverhältnis der Elemente $\frac{h}{t}$ (engl. *aspect ratio*) identifiziert werden.

Mit dieser mechanischen Interpretation des Schub-Locking und der Identifikation linear verlaufender, unerwünschter Schubverzerrungen drängt sich die *selektiv reduzierte Integration* als Technik zur Vermeidung des Locking-Phänomens auf. Die mit der reduzierten Integration verbundene Auswertung der Schubverzerrungen in der Elementmitte erfolgt im Nulldurchgang der parasitären Verzerrungen, d.h. genau in dem Punkt, in dem sich der korrekte Wert einstellt (Abb. 5.7a) rechts). Eine Eigenschaft, die neben der Technik der reduzierten Integration z.B. auch von der ANS-Methode aufgegriffen wird und nicht nur zur Behandlung von Shear-Locking geeignet ist. Eine ausführliche Diskussion dieser Anwendungen folgt in Kapitel 6.

Da das Schub-Locking für 2D- und 3D-Kontinuums-elemente bzw. die entsprechenden Anteile von Strukturelementen auftritt, erfolgt eine mathematische Beurteilung dieses Versteifungseffektes auf Basis der KORNschen Ungleichung. Die in dieser Ungleichung auftretende Konstante ergibt sich als Verhältnis der Verschiebungsnorm zur Norm der Verzerrungen, die mit dem Verschiebungsfeld $\mathbf{u} = [u_x, u_y]^T$ ((5.11),

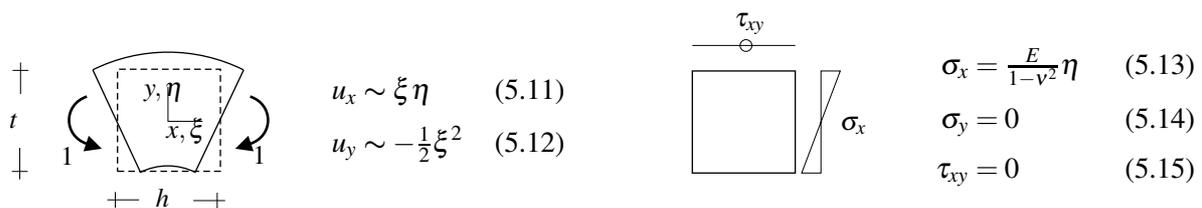


Abbildung 5.4: Deformationszustand: reine Biegung

u_x	1	x	y	xy	-	-	-	-
u_y	-	-	-	-	1	x	y	xy
$\varepsilon_x = u_{x,x}$	0	1	0	y	0	0	0	0
$\varepsilon_y = u_{y,y}$	0	0	0	0	0	0	1	x
$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}(u_{x,y} + u_{y,x})$	0	0	1	x	0	1	0	y

Abbildung 5.5: Deformationsmoden des linearen Viereckselementes

(5.12)) und den zugehörigen Verzerrungen $\boldsymbol{\varepsilon}$ berechnet werden können. Bei der Berechnung von Kontinua, deren Geometrie strukturähnliche Abmessungen aufweist (z.B. wie in Abbildung 5.3) ergibt sich diese Konstante näherungsweise zu:

$$C = \frac{\|\mathbf{u}\|_1}{\|\boldsymbol{\varepsilon}\|_0} \approx \frac{h}{t}. \quad (5.17)$$

Dieses Verhältnis bestimmt die Fehlerschranke des CéA-Lemmas (3.8), erreicht aber nicht die Größenordnungen, die die Konstante für andere Locking-Phänomene aufweist. Dieser mathematischen Beurteilung zufolge ist das *Inplane*-Shear-Locking praktisch nicht existent.

Tatsächlich ist der Effekt der Schub-Locking bei der Verwendung regelmäßiger Netze vergleichsweise gering.

Die Schwäche der mechanischen Sichtweise zeigt sich bei der Analyse von dreiknotigen linearen Scheibenelementen. Dieses Element kann – neben den Starrkörpermoden – ausschließlich konstante Dehnungszustände darstellen, wie die Untersuchung der Deformationsmoden in Tabelle 5.6 zeigt.

Die Abbildung eines Biegezustandes (Abb. 5.4) mit zwei dreieckigen Elementen (Abb. 5.7c)) liefert im Gebiet einen konstanten Verlauf sowohl für die Normalverzerrungen ε_x als auch für die Schubverzerrungen ε_y und im Vergleich zur korrekten Lösung zu kleine Verschiebungswerte, das Indiz für Locking. Da die Darstellung konstanter Verzerrungen jedoch zu den erforderlichen Grundeigenschaften jedes Elementes gehören (vgl. Kapitel 3), können sie nicht als parasitär bezeichnet werden. Die Identifikation des Lockingeffektes über das für die mechanische Betrachtungsweise typische Auftreten parasitärer Verzerrungen ist somit nicht möglich.

Im Fall der linearen Dreiecke ist somit vor allem die numerische Sichtweise geeignet, eine Neigung dieser Elemente zu Shear-Locking aufzuzeigen. Die Zwangsbedingung beim Schub-Locking ist das Verschwinden der Schubverzerrungen:

$$\gamma_{xy} = 0 \quad (5.18)$$

Für das mit einem Gauß-Punkt exakt integrierte Dreieckselement T1 ergibt sich der Zwangsbedingungsfaktor nach (5.10) zu

$$r_{T1} = \frac{n_{node}^3 \cdot n_{DOF}}{n_c} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2}{1} = 1 \quad (5.19)$$

u_x	1	x	y	-	-	-
u_y	-	-	-	1	x	y
$\varepsilon_x = u_{x,x}$	0	1	0	0	0	0
$\varepsilon_y = u_{y,y}$	0	0	0	0	0	1
$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}(u_{x,y} + u_{y,x})$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0

Abbildung 5.6: Deformationsmoden des linearen Dreieckselementes T1

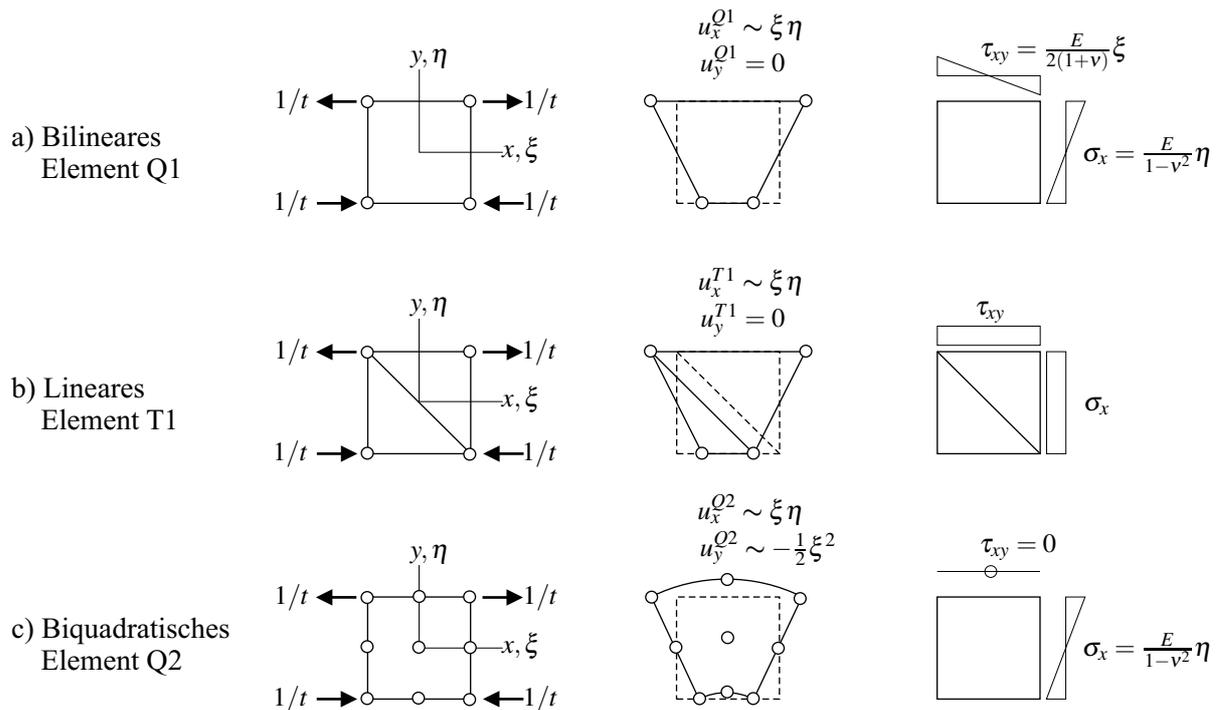


Abbildung 5.7: Abbildung des Biegezustandes durch 2D-Kontinuumselemente

Im Vergleich zum idealen Wert des kontinuierlichen Problems

$$r_k = \frac{2}{1} = 2, \quad (5.20)$$

ist der Zwangsbedingungsfaktor des T1-Elementes deutlich niedriger, das Kennzeichen der numerisch orientierten Definition von Locking.

Im Vergleich dazu ist das in Abbildung 5.7 c) ebenfalls aufgeführte biquadratische Element Q2 zwar in der Lage, den hier dargestellten Biegemode (Abb. 5.4) korrekt abzubilden, dennoch ist das Element nicht frei von Shear-Locking, was durch den Zwangsbedingungsfaktor $r_{Q2} = \frac{8}{9}$ verdeutlicht wird.

5.4 Trapezoidal-Locking / Curvature-Thickness-Locking

Trapezoidal-Locking kann auftreten, wenn bei der Modellierung von Biegezuständen *gekrümmter* Strukturen Kontinuumselemente eingesetzt werden.

Ein wesentliches Merkmal dieses Effektes ist, dass er *nicht allein* durch eine trapezförmige Geometrie des betrachteten Elementes charakterisiert ist, sondern sich diese zwangsläufig aus der Diskretisierung einer gekrümmten Struktur ergibt.

Abbildung 5.8 deutet die prinzipiellen Möglichkeiten des Auftretens von trapezförmig verzerrten Elementen an. Bild 5.8a) zeigt einen *geraden* Kragbalken, der mit 2D-Kontinuumselementen diskretisiert wurde. Die trapezförmige Geometrie der einzelnen Elemente beruht einzig auf einer *Netzverzerrung*, bei regulärer Diskretisierung wären alle Elemente rechtwinklig, siehe z.B. Abbildung 5.3.

Dagegen repräsentieren die trapezförmigen Elemente des *gekrümmten* Kragbalkens, Abbildung 5.8b), die *reguläre* Diskretisierung des dargestellten Problems, sind also *nicht* die Folge von Netzverzerrungen.

Um eine strikte Trennung von Locking-Effekt und Einfluss der Netzverzerrung zu gewährleisten, kann die Definition des Trapezoidal-Locking nur über das Auftreten parasitärer Spannungen bei gekrümmten Strukturen erfolgen, da nur hier die trapezförmige Elementgeometrie der regulären Diskretisierung entspricht.

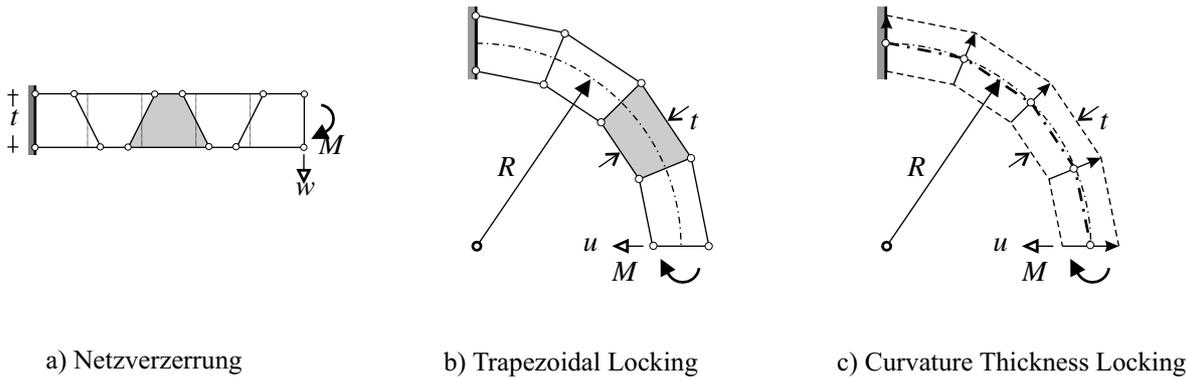


Abbildung 5.8: Versteifungseffekte trapezförmiger Scheibenelemente

Eine asymptotische Analyse liefert dementsprechend für Beispiel 5.8a) als Ergebnis eine Mischung aus Netzverzerrungsempfindlichkeit und Lockingeffect, d.h. die Ergebnisse hängen sowohl vom Verhältnis h/t als auch von α ab. Für Beispiel 5.8b) hingegen zeigt sich bei der asymptotischen Analyse nur eine Abhängigkeit vom Seitenverhältnis der Elemente h/t , die als kritischer Parameter identifiziert werden kann³.

Trapezoidal-Locking Zur Analyse dieses Versteifungseffektes wird ein vierknotiges, trapezförmig verzerrtes Scheibenelement einem Biegezustand unterworfen (Bild 5.9).

Entsprechend der oben gegebenen Definition des Trapezoidal-Locking ergeben sich die *krummlinigen* Verzerrungen zu:

$$\varepsilon_{\xi}^{Q1} = \frac{ht}{2} \eta (\alpha \eta - 1) \quad (5.21)$$

$$\varepsilon_{\eta}^{Q1} = \frac{\alpha ht}{2} (\xi^2 - 1) \quad (5.22)$$

$$\gamma_{\xi\eta}^{Q1} = \xi \frac{ht}{2} (2\alpha \eta - 1) \quad (5.23)$$

Dabei ist die ξ -Koordinate in den Mittelpunkten der gemeinsamen Elementkanten mit der gekrümmten Strukturachse identisch, η definiert die Dickenrichtung der Struktur und der Parameter α ergibt sich in Abhängigkeit der Krümmung der Struktur.

Der Vergleich mit den korrekten Verzerrungen

$$\varepsilon_{\xi} \sim \eta, \quad \varepsilon_{\eta} = 0, \quad \gamma_{\xi\eta} = 0 \quad (5.24)$$

zeigt für alle drei Komponenten Differenzen auf, sobald $\alpha \neq 0$, d.h. die Struktur gekrümmt ist⁴. Dabei sind die Abweichungen der Normalverzerrungen ε_{ξ}^{Q1} vom linearen Verlauf relativ klein. Die parasitären Schubverzerrungen $\gamma_{\xi\eta}^{Q1}$ konnten für rechteckige Elemente bereits beim Schub-Locking identifiziert werden. Sie weisen im Fall des Trapezoidal-Locking ebenfalls einen in ξ linearen Verlauf und damit einen Nulldurchgang auf, der die Anwendung der oben bereits angedeuteten Techniken ermöglicht. Die parasitären Normalverzerrungen in Dickenrichtung ε_{η} dagegen verlaufen quadratisch und verschwinden entlang der Elementkanten $\xi = \pm 1$, somit bietet sich eine Möglichkeit zur Vermeidung des Versteifungseffektes mittels der ANS-Methode (Abschnitt 6.4) oder der DSG-Methode (Abs. 6.5) an.

³Mit der hier gegebenen Definition unterscheidet sich das Trapezoidal-Locking z.B. von der von MacNeal [103] eingeführten Beschreibung, der ebenfalls Versteifungseffekte für Diskretisierungen entsprechend Bild 5.8a) als Trapezoidal Locking einordnet.

⁴Umgekehrt bedeutet $\alpha = 0$ eine gerade Strukturachse und entsprechend unverzerrte Elemente

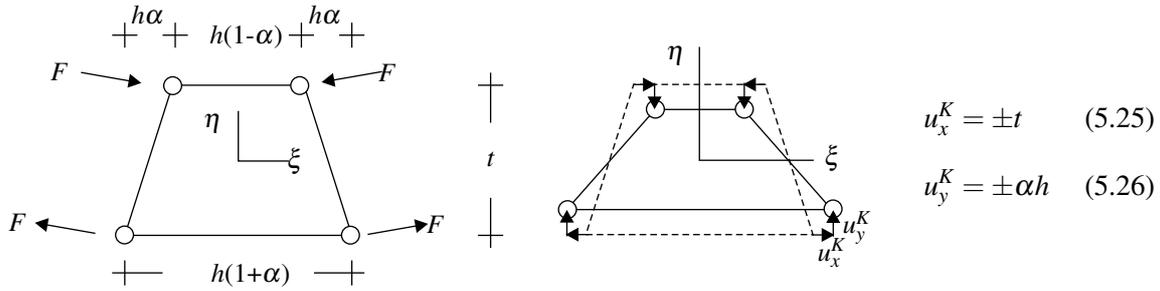


Abbildung 5.9: Biegezustand: Trapezförmiges bilineares Element Q1

Curvature-Thickness-Locking Der zuerst von Ramm et al. [124] beschriebene Effekt des Curvature-Thickness-Locking (s.a. Betsch et al. [27]) kann als Sonderfall des Trapezoidal-Locking interpretiert werden.

Das Auftreten des Curvature-Thickness-Locking ist auf dreidimensionale Schalelemente (7-Parameter-Formulierung) beschränkt, wenn bei den verwendeten Modellen eine Mittelung der Direktoren und die Verzerrungen in Dickenrichtung berücksichtigt werden. Dies ist bei den in Kapitel 4.2.4 vorgestellten Schalenmodellen mit extensiblen Direktor der Fall.

Eine reine Biegedeformation des Schalenmodells (Abbildung 5.10) ist durch die Inextensibilität des Direktors $|\mathbf{A}_3| = |\mathbf{a}_3| = 0$ sowie durch die Orthogonalität zwischen Direktor und Differenzvektor $\mathbf{A}_3 \cdot \mathbf{w} = 0$ gekennzeichnet. Für das kontinuierliche Problem wird die dem Biegezustand entsprechende Bedingung verschwindender Normalverzerrungen $E_{33}^0 = \mathbf{A}_3 \cdot \mathbf{w} = 0$ (4.62) natürlich erfüllt. Eine Diskretisierung mit einem bilinearen Schalelement, d.h.

$$\mathbf{A}_3^h = \frac{1}{2}(1 - \theta^\alpha) \mathbf{A}_3^1 + \frac{1}{2}(1 + \theta^\alpha) \mathbf{A}_3^2 \tag{5.27}$$

$$\mathbf{w}^h = \frac{1}{2}(1 - \theta^\alpha) \mathbf{w}^1 + \frac{1}{2}(1 + \theta^\alpha) \mathbf{w}^2 \tag{5.28}$$

ergibt jedoch wie für das Scheibenelement Q1 (5.22) parasitäre Normalverzerrungen in Dickenrichtung $E_{33}^{0,h}$ (5.29). Bei symmetrischer Deformation ergibt sich mit $\mathbf{A}_3^1 \cdot \mathbf{w}^2 = \mathbf{A}_3^2 \cdot \mathbf{w}^1 = \frac{t}{2} \sin(\varphi) |\mathbf{w}|$ (der Winkel φ repräsentiert den Winkel zwischen den Direktoren in Knoten 1 und 2) für die Normalverzerrungen:

$$E_{33}^{0,h} = \mathbf{A}_3^h \cdot \mathbf{w}^h = \frac{1}{4} [1 - (\theta^\alpha)^2] t \sin(\varphi) |\mathbf{w}| \tag{5.29}$$

Die Analogie ist selbstverständlich, wenn die Herleitung des Schalelementes entsprechend dem Degenerationskonzept (Kapitel 4.2.5) betrachtet wird, bei der die Kinematik des Kontinuumselementes übernommen wird und so lediglich eine neue Parametrisierung der Verschiebungsgrößen erfolgt. Die Zwangsbedingung $E_{33}^0 = 0$ kann auch hier nicht korrekt abgebildet werden.

Gleichung (5.29) verdeutlicht, dass der Effekt des Curvature-Thickness-Locking auf mit Balken- bzw. Schalelementen modellierten *gekrümmten* Strukturen beschränkt ist. Bei Elementen, deren Ausgangsgeometrie keine Krümmung aufweist ($\varphi = 0$), tritt dieser Effekt nicht auf, entsprechend den rechtwinkligen Scheibenelementen ($\alpha = 0$). Bei einer Verfeinerung der Diskretisierung wird die gekrümmte Struktur

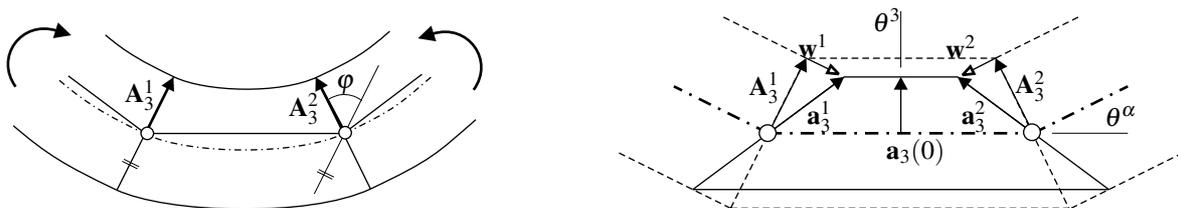


Abbildung 5.10: Balken-/Schalelement mit extensiblen und gemittelten Direktoren: Curvature-Thickness-Locking

besser approximiert und demzufolge tendiert auch der Winkel zwischen den Direktoren φ gegen Null. Der quadratische Verlauf der Normalverzerrungen $E_{33}^{0,h}$ (krummlinige Koordinaten) verschwindet entlang der Elementkanten $\theta^\alpha = \pm 1$, somit bietet sich eine Möglichkeit zur Vermeidung des Versteifungseffektes mittels der ANS-Methode (Abschnitt 6.4) oder der DSG-Methode (Abschnitt 6.5) an.

Einflussgrößen des Curvature-Thickness-Locking sind offensichtlich die Krümmung der Struktur sowie die Netzverzerrung, die eine größere Winkeldifferenz zwischen den Direktoren verursachen kann. Der kritische Parameter ist die Schlankheit des Elementes.

Zusammenfassung Die Effekte des Trapezoidal-Locking bzw. des Curvature-Thickness-Locking wurden als das Auftreten parasitärer Normalspannungen bei Biegedeformationen *gekrümmter* Strukturen definiert. Die Unterscheidung dieser beiden Effekte hinsichtlich des Typs der eingesetzten Elemente (Kontinuum, Schale) sowie der kritischen Parameter (Seitenverhältnis, Schlankheit) ist dabei völlig analog zu den Phänomenen des Shear-Locking sowie des Transverse-Shear-Locking.

5.5 Volumetrisches Locking

Im Gegensatz zu allen anderen Lockingeffekten, deren Einflussparameter geometrischer Natur sind, tritt beim Volumetrischen Locking eine Materialeigenschaft als kritischer Parameter auf.

Der kritische Parameter kann hierbei als der Kompressionsmodul $\kappa = \frac{E}{3-6\nu}$ identifiziert werden, der über die Querdehnzahl oder auch POISSON-Zahl ν definiert ist, weshalb oftmals der Begriff POISSON-Locking zu finden ist. Für $\nu = 0.0$ ist kein volumetrisches Locking festzustellen, beim Erreichen der Inkompressibilität $\nu \rightarrow 0.5$ (entsprechend $\kappa \rightarrow \infty$) verstärkt sich dieser Versteifungseffekt. Ursache ist, dass die Bedingungen einer isochoren Deformation von den Ansätzen nicht punktweise erfüllt werden können, die Zwangsbedingung kann also über die Divergenzfreiheit des Verschiebungsfeldes formuliert werden:

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}) = u_{i,i} = u_{x,x} + u_{y,y} + u_{z,z} = 0 \quad (5.30)$$

Volumetrisches Locking tritt sowohl für zwei- als auch dreidimensionale Kontinuumselemente auf. Für die Scheibentheorie (2D-Kontinuum) können dabei entweder die Verzerrungen oder die Spannungen senkrecht zur Scheibenebene eliminiert werden (ebener Verzerrungs- bzw. Spannungszustand, siehe Kapitel 4.4). In letzterem Fall wird über das Materialgesetz die Normalspannungskomponente (σ_{zz}) explizit zu Null gesetzt und somit die Zwangsbedingung (5.30) wesentlich abgeschwächt.

Für den Fall des ebenen Verzerrungszustandes ($\varepsilon_z = 0$, d.h. $u_{z,z} = 0$) vereinfacht sich (5.30) zu

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}) = u_{x,x} + u_{y,y} = 0 \quad (5.31)$$

Eine diese Bedingung befriedigende Deformation ist beispielsweise durch

$$\begin{aligned} u_x &\sim \xi \eta & \varepsilon_x &= \eta & \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} \eta \\ u_y &\sim -\frac{1}{2} \xi^2 - \frac{\nu}{2(1-\nu)} \eta^2 & \varepsilon_y &= -\frac{\nu}{1-\nu} \eta & \sigma_y &= 0 \\ & & \gamma_{xy} &= 0 & \tau_{xy} &= 0 \end{aligned} \quad (5.32)$$

gegeben. Die Auswertung der Verzerrungen für das bilineare Element Q1 liefert hingegen die Ausdrücke (5.35)–(5.37).

Anschaulich kann die Ursache des Volumetrischen Locking mit Bild 5.11 Mitte erklärt werden: infolge der Querdehnung dehnen sich die unter Druck stehenden Fasern aus, die gezogenen Fasern hingegen werden schlanker, als Folge müsste sich eigentlich die Mittellinie verschieben. Genau dies vermag das bilineare Element jedoch nicht abzubilden, wenn sich die Knoten vertikal nicht bewegen, behält aufgrund

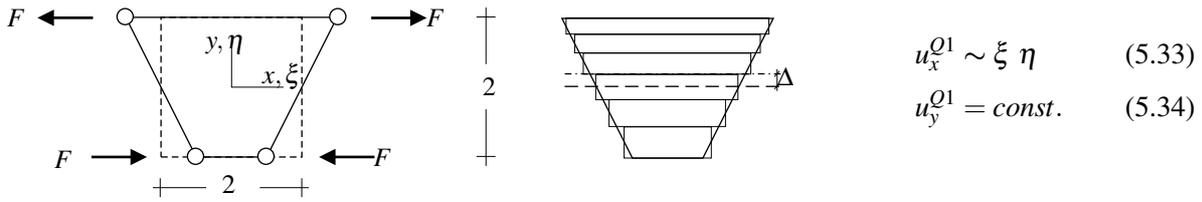


Abbildung 5.11: Bilineares Element Q1: Volumetrisches Locking

der linearen Interpolation auch jeder Punkt im Element seine vertikale Position. Die materielle Mittellinie wird somit in der geometrischen Mitte, d.h. in ihrer ursprünglichen Lage festgehalten.

$$\varepsilon_x^{Q1} = \eta \quad \sigma_x^{Q1} = \frac{E\nu(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \eta \quad (5.35)$$

$$\varepsilon_y^{Q1} = 0 \quad \sigma_y^{Q1} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \eta \quad (5.36)$$

$$\gamma_{xy}^{Q1} = \xi \quad \tau_{xy}^{Q1} = \frac{E}{2(1+\nu)} \xi \quad (5.37)$$

Offensichtlich nehmen die parasitären Spannungen und entsprechend die Steifigkeit des Elementes mit Anwachsen des kritischen Parameters $\kappa \rightarrow \infty$ ($\nu \rightarrow 0.5$) immer weiter zu, der Indikator von Locking. Das Auftreten des Versteifungseffektes folgt somit direkt aus der Unfähigkeit des Elementes lineare Verzerrungszustände in Dickenrichtung (hier: y) abzubilden. Die beim Shear-Locking vorgeschlagenen Verbesserungsmöglichkeiten, die auf der Elimination parasitärer Verzerrungen beruhen, sind zur Vermeidung des Volumetrischen Locking nicht geeignet. Eine erfolgreiche Möglichkeit besteht in der Erweiterung der Verzerrungen des Elementes, dies ist auch die Grundidee der EAS-Methode (Kapitel 6.6).

Mit der Aufspaltung der Verzerrungen in einen dilatatorischen und deviatorischen Anteil kann die schwache Formulierung mit Hilfe folgender Bilinearform ausgedrückt werden (mit den Lamé-Konstanten entsprechend (2.28))

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \lambda (\operatorname{div} \mathbf{u}, \operatorname{div} \mathbf{v}) + 2\mu (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})) , \quad (5.38)$$

die zwar prinzipiell elliptisch ist,

$$\alpha \cdot \|\mathbf{u}\|^2 \leq \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \leq C \cdot \|\mathbf{u}\|^2 \quad (5.39)$$

wobei die Konstanten mit $\alpha \leq \mu$ und $C \geq \lambda + \mu$ abgeschätzt werden können. Das Verhältnis dieser Konstanten C/α , das in die Fehlerschätzung gemäß dem CÉA-Lemma eingeht, nimmt für $\lambda \gg \mu$, also für $\nu \rightarrow 0.5$ sehr große Werte an. Demnach ist die Konvergenz stark beeinträchtigt, wenn nicht ausgeschlossen ($\nu = 0.5$).

Poisson-Locking bei Schalenelementen Der Effekt des Poisson-Dicken-Locking bei Schalenelementen wurde bereits in Kapitel 4 bei der Semidiskretisierung der Schalenmodelle in Dickenrichtung besprochen und hat prinzipiell dieselben Ursachen, wie sie für das bilineare Scheibenelement festgestellt wurden.

Der konstante Verlauf der Verschiebungen und somit verschwindende Normalverzerrungen $E_{33} = 0$ in Dickenrichtung würden auch für das 5-Parameter-Modell Dicken-Locking verursachen. Der Einfluss der Querdehnung bewirkt zusammen mit den linear in Dickenrichtung verlaufenden Normalverzerrungen $E_{\alpha\beta}$ einen ebenfalls linearen Verlauf der Normalspannungen in Dickenrichtung, die physikalisch nicht erklärbar sind. Diese Zwangsspannungen verursachen ein zu steifes Verhalten des Modells. Durch die Bedingung $S^{33} = 0$ und entsprechende Modifikation (statische Kondensation) des Stoffgesetzes (4.50) wird dieser Effekt für das 5-Parameter-Modell allerdings vermieden.

Das 6-Parameter-Modell entspricht mit dem linearen Verschiebungsansatz in Dickenrichtung dem oben beschriebenen Scheibenelement. Mit dem daraus ableitbaren konstanten Verlauf der Dicken-Normalverzerrungen E_{33} können zwar Membranspannungszustände abgebildet werden, die im Fall von

Biegezuständen zu den auftretenden linearen Normalspannungen S^{33} erforderlichen, energetisch konjugierten linearen Verzerrungen stehen allerdings nicht zur Verfügung, die Folge ist Volumetrisches Locking.

Um diesen Versteifungseffekt zu vermeiden und gleichzeitig die Vorteile der Verwendung dreidimensionaler Stoffgesetze zu behalten, muss der Raum der zur Verfügung stehenden Verzerrungen E_{33} um den linearen Anteil erweitert werden. Dies gelingt entweder durch einen quadratischen Verschiebungsansatz in Dickenrichtung oder durch die Erweiterung der Verzerrungen mittels der EAS-Methode, wie sie für das 7-Parameter-Modell vorgeschlagen wurde (vgl. Abschn. 4.2.4 und 6.6).

5.6 Querschub-Locking

Der Effekt des Querschub-Locking (*Transverse-Shear-Locking*) betrifft Strukturelemente⁵, die auf einer Reissner-Mindlin-Kinematik basieren, also durch eine Berücksichtigung der *transversalen* Schubverzerrungen gekennzeichnet sind.

Der Effekt des Querschub-Locking zählt zu den mit am meisten beachteten und behandelten Versteifungseffekten, dies liegt zum einen an der weiten Verbreitung und frühen Entwicklung von Strukturelementen wie Balken, Platten oder Schalen, vor allem aber auf dem erheblichen (negativen) Einfluss auf die Berechnungsergebnisse. Im Gegensatz zum im Abschnitt 5.3 beschriebenen Shear-Locking kann Querschub-Locking nicht nur in einer erheblich schlechteren Konvergenzrate münden, sondern gerade bei für praktische Anwendungen typischen Netzfeinheiten zu inakzeptablen Resultaten führen. Neben den zu geringen Werten für die Verschiebungen sind dies vor allem die Fehler in den Verläufen der Spannungen bzw. Querkräfte, die starke Oszillationen aufweisen können.

Aus mechanischer Sicht ist die Ursache für das Querschub-Locking das Auftreten parasitärer Verzerrungen und Spannungen, in diesem Fall der Querschubanteile. Sie resultieren aus der Unfähigkeit eines Elementes, bestimmte Deformationszustände abbilden zu können, in denen die Querschubverzerrungen bzw. -spannungen verschwinden sollten. Hierzu zählen zum einen reine Biegezustände, des weiteren das Einhalten der für dünne bzw. schlanke Strukturen gültigen Normalenhypothese, die ebenfalls das Auftreten von Querschubverzerrungen ausschließt.

Offensichtlich kann das Problem des Transverse-Shear-Locking also nur bei *schubweichen* Elementen auftreten, bei *schubstarr* Elementen (BERNOULLI- bzw. KIRCHHOFF-Theorie), ist die Normalenbedingung bereits stark erfüllt. Dass trotzdem oftmals eine Formulierung mit Berücksichtigung der Schubverzerrungen gewählt wird, liegt an den niedrigeren und leichter zu erfüllenden Kontinuitätsanforderungen der schubweichen Elemente (C^0 -Kontinuität) im Vergleich zu den schubstarr Elementen (C^1 -Kontinuität).

Timoshenko-Balkenelement Die wesentlichen Effekte des Transverse-Shear-Locking lassen sich bereits anhand eines einfachen Beispiels, des linearen zweiknotigen Timoshenko-Balkenelementes (siehe Abbildung 5.12) aufzeigen.

Mit dem linearen Ansatz sowohl für die Durchbiegung w als auch die Rotation φ

$$w^h(x) = \sum_{i=1}^2 N^i(x) \cdot w_i = \left(1 - \frac{x}{L}\right)w_1 + \frac{x}{L}w_2 \quad (5.42)$$

$$\varphi^h(x) = \sum_{i=1}^2 N^i(x) \cdot \varphi_i = \left(1 - \frac{x}{L}\right)\varphi_1 + \frac{x}{L}\varphi_2 \quad (5.43)$$

⁵Die Definition von *Querschub* ist erst bei Strukturelementen, die im Gegensatz zum Kontinuum eine ausgezeichnete Dickenrichtung besitzen, sinnvoll.

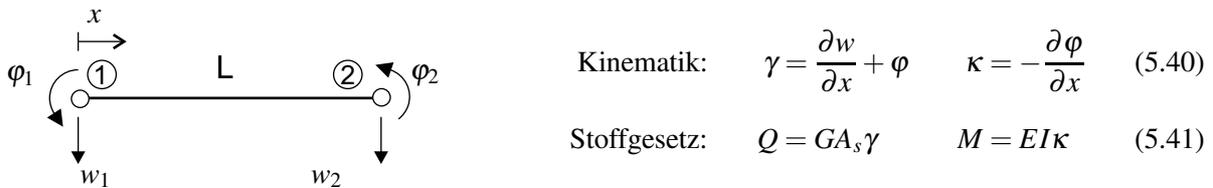


Abbildung 5.12: Zweiknotiges Balkenelement

ergeben sich die diskretisierten Querschubverzerrungen zu

$$\begin{aligned} \gamma^h(x) &= \frac{\partial w^h}{\partial x} + \varphi^h = \sum_{i=1}^2 (N_{,x}^i \cdot w_i + N^i \cdot \varphi_i) \\ &= \frac{1}{L}(w_2 - w_1) + \varphi_1 + \frac{x}{L}(\varphi_2 - \varphi_1) \end{aligned} \quad (5.44)$$

Wird beispielsweise ein reiner Biegezustand betrachtet (Abbildung 5.13), erhält man für die Schubverzerrungen nach Gleichung 5.44 einen linearen Verlauf, Gleichung (5.45), obwohl für diesen Biegezustand die Schubverzerrungen verschwinden sollten.

Der Grund für diese parasitären Querschubverzerrungen liegt in der mangelnden Abstimmung der Ansätze für die Verschiebungen und Rotationen. Bei der Verwendung derselben Ansätze für die Verschiebungen und die Rotationen ergibt sich für den dargestellten Biegezustand ein linearer Verlauf für die Rotationen, während die Verschiebungen konstant sind. Bei der Berechnung der Schubverzerrungen kann deshalb der lineare Anteil nicht ausbalanciert und die Zwangsbedingung $\gamma = 0$ nicht im gesamten Element erfüllt werden.

Eine Betrachtung der inneren Energie des Timoshenko-Balken verdeutlicht den Einfluss der parasitären Spannungen. Die innere Energie kann als Summe der zur Biegung und zur Schubdeformation gehörenden Anteile ausgedrückt werden, wobei vereinfachend von einem konstanten, rechteckigen Querschnitt (Breite b , Höhe t) ausgegangen werden soll.

$$\Pi^{Biegung} = \frac{Ebt^3}{24} \int_x \kappa^2 dx = \frac{Ebt^3}{24} \int_x (\varphi_{,x})^2 dx = \frac{Ebt^3}{6L} \Phi^2 \quad (5.46)$$

$$\Pi^{Schub} = \frac{E b t}{1-\nu} \int_x \gamma^2 dx = \alpha_s^0 \frac{Ebt}{1-\nu} \int_0^L (\varphi - w_{,x})^2 dx = \alpha_s^0 \frac{EbtL}{3(1-\nu)} \Phi^2 \quad (5.47)$$

$$\text{mit } A_s = \alpha_s^0 bt, \quad \alpha_s^0 = \frac{5}{6} \quad \dots \text{ Schubkorrekturfaktor (Abschn. 4.2.4)}$$

Das Verhältnis von Biege- und Schubenergie $\Pi^{Schub} / \Pi^{Biegung}$ ist proportional zu $(L/t)^2$, d.h. je schlanker der Balken ist, desto größer wird der Einfluss der Schubenergie im Vergleich zur Biegeenergie, was genau konträr zu dem tatsächlichen Verhalten ist, in dem der Schubanteil mit gegen Null gehender Dicke t

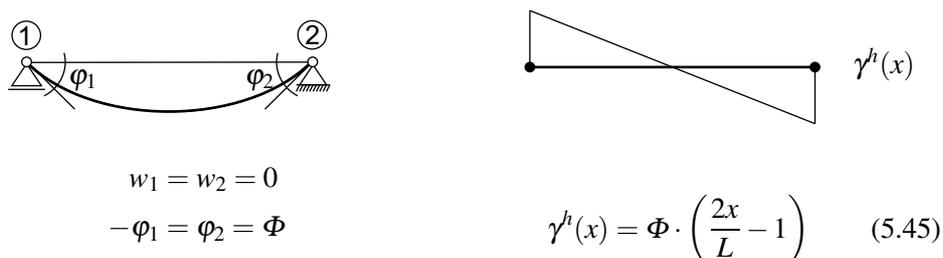


Abbildung 5.13: Parasitäre Schubverzerrungen für den reinen Biegezustand bei linearem Ansatz

ebenfalls verschwindet. Als Folge wird der Großteil der Energie durch die parasitäre Schubenergie absorbiert und die Verformungen entsprechend zu klein abgebildet. Der kritische Parameter des Querschub-Locking ist also die Schlankheit des Elementes.

Allerdings wird anhand dieses Beispiels auch deutlich, dass mit zunehmender Netzverfeinerung eine Berechnung mit diesem Element trotzdem zur wahren Lösung konvergiert, da in diesem Fall das Verhältnis L/t , d.h. die Schlankheit wieder abnimmt.

Der Verlauf der parasitären Schubspannungen (Bild 5.13) zeigt wiederum Möglichkeiten auf, wie das Problem des Querschub-Locking gelöst werden kann.

Durch eine Reduzierung der Integrationsordnung der Schubanteile kann anstelle des linearen der korrekte konstante Verlauf der Schubverzerrungen abgebildet werden, ebenso liefert eine Auswertung der Schubverzerrungen in der Elementmitte den korrekten Wert, der mittels Extrapolation auf das gesamte Element übertragen werden kann (ANS-Methode).

Die Aufteilung und Identifikation der Verschiebungen getrennt nach Biege- und Schubanteilen ist die Basis einer weiteren Locking-freien Formulierung, der DSG-Methode (Kapitel 6.5).

Platten- und Schalenelemente Die für das simple Balkenelement gewonnenen Erkenntnisse hinsichtlich Ursache und Wirkung des Querschub-Locking lassen sich direkt auf zweidimensionale Strukturelemente übertragen. Die Schubverzerrungen γ_{13}^h bzw. γ_{23}^h

$$\gamma_{\alpha 3}^h = a_{\alpha 3}^h - A_{\alpha 3}^h \quad (4.90)$$

$$= \mathbf{v}_{,\alpha}^h \cdot \mathbf{A}_3^h + \mathbf{w}^h \cdot \mathbf{R}_{,\alpha}^h \quad (\text{lin. Kinematik}) \quad (5.48)$$

weisen ebenfalls infolge des in Gleichung (5.48) auftretenden unterschiedlichen Polynomordnungen der Verschiebungsfelder $\mathbf{v}_{,\alpha}^h$ und \mathbf{w}^h parasitäre Anteile auf, die – abhängig von der Schlankheit des Elementes – die Konvergenz beeinflussen.

In Abschnitt 5.2.1 wurde der schubweiche Balken bereits als Beispiel der mathematischen Definition von Locking herangezogen, entsprechende Überlegungen für Platten- und Schalenelemente identifizieren ebenfalls die Schlankheit des Elementes als kritischen Parameter, genauere Ausführungen finden sich z.B. bei Brezzi und Fortin [42] oder Braess [39].

Die Bestimmung der Zwangsbedingungsfaktoren unterstreicht die Bedeutung des Querschub-Locking. Verglichen mit dem optimalen Wert von Plattenelementen (mit 3 Freiheitsgraden je Knoten) $r_k = \frac{3}{2}$ liegen beispielsweise die Zwangsbedingungsfaktoren für bilineare Viereckselemente $r_k^{Q1} = \frac{3}{8}$ oder dreiknotige Dreieckselemente $r_k^{T1} = \frac{1}{3}$ sogar noch deutlich unter dem kritischen Wert von 1. Auch der numerische orientierte Analyse dieses Versteifungseffektes deutet somit auf starkes Locking hin.

Geeignete Methoden, um das Querschub-Locking für flächenhafte Strukturelemente mit Reissner-Mindlin-Kinematik zu vermeiden, sind die so genannten B-bar-Methoden, dazu zählen die – relativ weit verbreitete – ANS-Methode sowie die DSG-Methode, und ebenfalls die EAS-Methode. Unterschiede zwischen diesen Methoden ergeben sich häufig erst für verzerrte Elementgeometrien, deren Einfluss in Abschnitt 5.8 sowie in Kapitel 6 diskutiert wird.

5.7 Membran-Locking

Im Vergleich zum oben beschriebenen Querschub-Versteifungseffekt wird dem Phänomen des Membran-Locking in der entsprechenden Literatur wesentlich weniger Rechnung getragen. Der Begriff *Membran-Locking* wurde von Stolarski und Belytschko [142] geprägt, die ebenfalls eine Analyse dieses Phänomens angeben.

Dies mag daran liegen, dass Membran-Locking nur für gekrümmte Strukturen und dort auch nur für

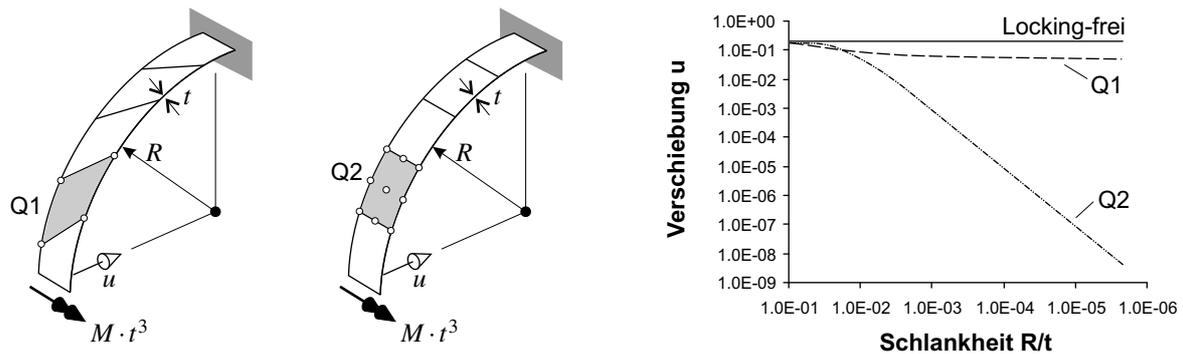


Abbildung 5.14: Membranlocking

einen eingeschränkten Kreis von Elementtypen auftritt. So sind lineare Balken- und Dreieckselemente hiervon gar nicht betroffen und bei den populären bilinearen Schalenelementen sind die Auswirkungen (wenn vorhanden, vgl. Abschnitt 5.7.2) ebenfalls geringer.

Desweiteren ist die Identifikation und Analyse des Membran-Lockings wesentlich schwieriger. Da das Auftreten dieses Effektes nur bei gekrümmten Elementen zu erwarten ist, sind die zu untersuchenden Ausdrücke entsprechend komplizierter und die zur Identifikation der anderen Versteifungseffekte eingesetzten einfachen Beispiele hier nicht anwendbar.

Dennoch kann der Einfluss des Membran-Lockings ähnlich gravierend sein wie der des Querschub-Lockings. Der kritische Parameter kann für den Membran-Lockingeffekt als die Schlankheit des Elementes identifiziert werden, eine Einflussgröße, die gerade für Schalenstrukturen große Werte annehmen kann und dementsprechend diesen Effekt betont.

Abbildung 5.14 verdeutlicht die Abhängigkeit der Lösung von der Schlankheit am Beispiel eines mit quadratischen Schalenelementen (Q2) diskretisierten Zylinderstreifens. Die Genauigkeit der Berechnungsergebnisse steht in krassem Gegensatz zu der bereits mit geringer Elementanzahl erreichten Approximationsgüte der Geometrie. Werden also höherwertige Elemente mit höherer Ansatzordnung (quadratisch und höher) eingesetzt, um gekrümmte Strukturen möglichst gut abzubilden und zu analysieren, ist eine Formulierung, die den Membran-Lockingeffekt vermeidet, unabdingbar.

Ebenfalls dargestellt ist der wesentlich geringere Einfluss des Membran-Locking bei der Verwendung bilinearer Elemente (Q1). Damit der Effekt überhaupt auftritt, wurde die Diskretisierung so gewählt, dass die Elemente nicht eben sind (siehe Abschnitt 5.7.2), zusätzlich ist der Querschubanteil für dieses Element bereits modifiziert, um Transverse-Shear-Locking auszuschließen. Trotz des zusätzlichen Einflusses des Netzverzerrung zeigt sich, dass die Bedeutung der Membranversteifung bei linearen Elementen vergleichsweise gering ist.

Bei der Entwicklung von Strategien zur Vermeidung von Membran-Locking wurde zumeist auf bestehende Methoden zurückgegriffen. Die zunächst für andere Versteifungseffekte, insbesondere für Querschub- und Dicken-Locking entwickelten Vorgehensweisen werden dabei meist ohne prinzipielle Modifikationen auf das Problem des Membran-Lockings übertragen (siehe Kapitel 6).

5.7.1 Modellbeispiel: Schwach gekrümmter Balken

Die wesentlichen Eigenschaften und Ursachen der Membranversteifung lassen sich bereits anhand des relativ einfachen Beispiels des schwach gekrümmten Balkens erläutern. Die geometrischen und kinematischen Größen nach der Marguerre'schen Balkentheorie wurden bereits in Abbildung 4.10 angeführt. Die Diskretisierung erfolgt wie üblich mit der isoparametrischen Interpolation der geometrischen und

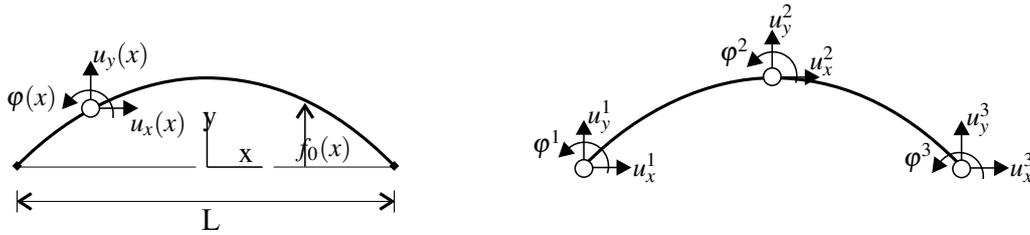


Abbildung 5.15: 3-knotiges Marguerre-Balkenelement

kinematischen Größen f^0 und u_x, u_y, φ :

$$f_0(x) = \sum_{k=1}^{n_k} N^k(x) \cdot f_0^k \quad (5.49)$$

$$u_x = \sum_{k=1}^{n_k} N^k(x) \cdot u_x^k, \quad u_y = \sum_{k=1}^{n_k} N^k(x) \cdot u_y^k, \quad \varphi = \sum_{k=1}^{n_k} N^k(x) \cdot \varphi^k \quad (5.50)$$

Für Diskretisierung eines dreiknotigen Balkenelement mit quadratischen Formfunktionen setzen sich die Normalverzerrungen (4.106) im allgemeinen als Summe eines linearen Anteils und eines Produktes zweier linearer Funktionen zusammen:

$$\varepsilon^h(x) = N_{,x}^K u_x^K + N_{,x}^K u_y^K \cdot N_{,x}^L f_0^L \quad (5.51)$$

Dieser Verzerrungsanteil kann im gesamten Element demzufolge nur dann verschwinden, wenn entweder die Ableitungen der Verschiebungen gleich Null sind oder die Ableitung von f_0 konstant ist.

Die erste Bedingung entspricht einer Starrkörperverschiebung, die keine Verzerrungen hervor ruft, während die zweite fordert, dass die Balkenachse (in der Ausgangslage) unverformt, d.h. gerade ist, wofür kein Membran-Locking auftritt. Die Forderung nach verschwindenden Längsnormalverzerrungen (und -spannungen) kann also nur für diese trivialen Lösungen erfüllt werden.

Dieses Element ist folglich nicht in der Lage, beliebige membranspannungsfreie Deformationszustände abzubilden. Die Ursache hierfür liegt darin, dass die Ansätze der Verschiebungen nicht die erforderlichen, d.h. zur Geometrie passenden Funktionen zur Verfügung stellen.

Dies kann verdeutlicht werden, wenn mit dem dreiknotigen Balkenelement ein reiner Biegezustand abgebildet werden soll (siehe Abbildung 5.15). Aus der Forderung nach verschwindenden Schubverzerrungen und konstanter Krümmung können unter der Berücksichtigung der Symmetrie die Werte der Knotenfreiheitsgrade für diesen Biegezustand ermittelt werden:

$$\left. \begin{array}{l} \kappa = -\varphi_{,x} = \bar{\varphi} \quad (= \text{const.}) \\ \gamma = u_{y,x} - \varphi = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varphi^1 = -\varphi^3 = \bar{\varphi} \\ u_x^1 = -u_x^3 = -\frac{2}{3} f_0^2 \bar{\varphi} \\ u_y^1 = u_y^3 = \frac{1}{4} \bar{\varphi} \end{array} \right. \quad (5.52)$$

Den aus der konstanten Krümmung resultierenden *quadratischen* vertikalen Durchsenkungen u_y steht die Forderung nach einem *kubischen* Verlauf der horizontalen Verschiebungskomponenten entgegen, die nicht im Raum der Ansatzfunktionen enthalten sind.

Die Normalverzerrungen, die für diesen Deformationszustand eigentlich im gesamten Element gleich Null sein sollten, weisen einen quadratischen Verlauf auf.

$$\varepsilon^h = \bar{\varphi} f_0^2 \frac{4}{L} \left(\frac{1}{3} - \left(\frac{2x}{L} \right)^2 \right) \quad (5.53)$$

Äquivalent zu den vorher beschriebenen Locking-Phänomenen treten auch hier parasitäre Verzerrungen und Spannungen in Erscheinung, die wiederum durch die Absorption von Energie zu Versteifungseffekten führen. Als kritischer Parameter kann wiederum die Schlankheit des Elementes identifiziert werden,

die Konvergenz mit zunehmender Netzverfeinerung ist ebenfalls gewährleistet.

Ein Vergleich der inneren Energien bestätigt diese Feststellung: die Forderung nach verschwindenden Schubverzerrungen kann das dreiknotige Verschiebungselement für den beschriebenen reinen Biegezustand noch erfüllen, entsprechend tritt auch keine Schubverzerrungsenergie auf.

$$\Pi^{Biegung} = \frac{Ebt^3}{24} \int_x \kappa^2 dx = \frac{Ebt^3}{12} \bar{\varphi}^2 \quad (5.54)$$

$$\Pi^{Schub} = \frac{Ebt}{1-\nu} \int_x \gamma^2 dx = 0 \quad (5.55)$$

$$\Pi^{Membran} = \frac{Ebt}{2} \int_x \varepsilon^2 dx = \frac{2}{3} Ebt f_0^2 \bar{\varphi} \quad (5.56)$$

Das Verhältnis der Biege- zur Normalverzerrungsenergie ist proportional zu $1/t^2$, d.h. mit abnehmender Dicke dominieren die Normalverzerrungen zunehmend die Lösung. Auch hier widerspricht dies dem tatsächlichen Verhalten, dass gerade bei sehr schlanken Strukturen biegedominierte Deformationszustände auftreten können, wie z.B. das sogenannte *Ovalisieren* von Schalenstrukturen.

5.7.2 Identifikation und Auftreten

Die anhand des Marguerre-Balkens gewonnenen Erkenntnisse bezüglich des Membran-Locking können prinzipiell auf die in Kapitel 4 hergeleiteten Elemente übertragen werden.

Die maßgebende Gleichung zur Bestimmung der Membranverzerrungen der vorgestellten Strukturelemente lautet:

$$\varepsilon_{\alpha\alpha}^h = \frac{1}{2}(a_{\alpha\alpha}^h - A_{\alpha\alpha}^h) \stackrel{E^{lin}}{=} \mathbf{R}_{,\alpha}^h \cdot \mathbf{v}_{,\alpha}^h \quad (4.87)$$

$$= R_{x,\alpha}^h v_{x,\alpha}^h + R_{y,\alpha}^h v_{y,\alpha}^h + R_{z,\alpha}^h v_{z,\alpha}^h \quad (5.57)$$

Gleichung 5.57 verdeutlicht den Einfluss der Krümmung des Elementes (repräsentiert durch $\mathbf{R}_{,\alpha}^h$) auf die Polynomordnung der beteiligten Verschiebungsfelder der Schalenmittelfläche: $v_{x,\alpha}^h, v_{y,\alpha}^h, v_{z,\alpha}^h$.

Für beliebige Geometrien können die „Geometriefaktoren“ $R_{i,\alpha}^h$ der Verschiebungskomponenten v_i^h für jeden Summanden unterschiedliche (im Rahmen der angesetzten Formfunktionen) Polynomordnungen aufweisen. Die Abbildung einer inextensiblen Deformation ($\varepsilon_{\alpha\alpha} = 0$) erfordert demzufolge auch unterschiedliche Polynomordnungen für die Verschiebungsfelder. Entsprechend der Diskretisierung wird der Grad der Ansatzfunktionen der Felder jedoch eingeschränkt und die erforderliche Polynomordnung zur Erfüllung der *diskreten* Inextensibilitätsbedingung $\varepsilon_{\alpha\alpha}^h = 0$ steht mit dem gewählten Raum der Ansatzfunktionen für beliebige Geometrien nicht zu Verfügung. Offensichtlich kann dieser Effekt auch auftreten, wenn die Polynomordnung aller Felder erhöht wird (p-Verfeinerung).

Die Folge dieser Unbalance ist auch hier das für Locking-Phänomene typische Auftreten unerwünschter Verzerrungen und Spannungen. Der Verlauf der parasitären Membranverzerrungen für einen reinen Biegezustand besitzt für *flache* Schalen Nullstellen, die wie für den Marguerre-Balken (5.53) in den Punkten $\theta^\alpha = \pm 1/\sqrt{3}$ auftreten.

Gibt man jedoch die Einschränkung der flachen Schale (Balken) auf und beobachtet den Verlauf der parasitären Membranverzerrungen in Abhängigkeit der Krümmung des Elementes, kann eine Verschiebung dieser Nullstelle festgestellt werden, siehe Abbildung 5.16.

Der Einfluss dieses Effektes ist jedoch relativ gering und tritt nur bei stark gekrümmten Elementen auf. Insbesondere bei einer Verfeinerung des Netzes nähern sich die Gleichungen beliebig gekrümmter Elemente wieder denjenigen der Theorie flacher Schalen an, so dass sich die Probleme und Lösungsmöglichkeiten für das Membran-Locking anhand schwach gekrümmter Elemente aufzeigen lassen.

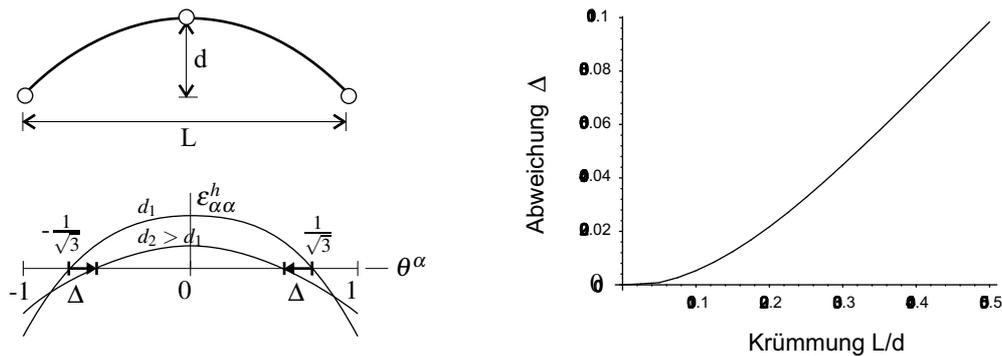


Abbildung 5.16: Nullstellen der parasitären Membranverzerrungen

Ähnlich dem Querschub-Locking treten auch beim Membran-Locking in den Verläufen der parasitären Verzerrungen energetisch zugeordneten Schnittgrößen Oszillationen auf. Waren es beim Transverse-Shear-Locking die Querkräfte, ist im Fall des Membran-Locking der Verlauf der Membrankräfte starken Schwankungen unterworfen, die die Aussagefähigkeit der Ergebnisse beeinträchtigen.

Der Membran-Lockingeffekt kann bei allen gekrümmten Verschiebungselementen auftreten, d.h. er ist für den beschriebenen Marguerre-Balken ebenso präsent für beliebig gekrümmte Balken-, Schalen- und Kontinuumselemente.

Hinsichtlich des Membran-Locking besteht dabei prinzipiell kein Unterschied, ob die Elemente auf der Kirchhoff- bzw. Bernoulli- oder Reissner-Mindlin- bzw. Timoshenko-Theorie basieren, da die Normalverzerrungen nicht von den Annahmen bezüglich der Schubverzerrungen betroffen sind.

Anders als beim Querschub-Locking, wo bei schubstarrten Elementen die Zwangsbedingung verschwindender Schubverzerrungen von den Ansatzfunktionen a priori erfüllt ist, Querschub-Locking also gar nicht auftreten kann, besteht auch für Kirchhoff- (und Bernoulli-) Elemente eine Neigung zum Locking, wenn inextensible oder biegedominierte Verformungszustände gekrümmter Strukturen berechnet werden.

Einige sehr populäre Berechnungsbeispiele, die gelegentlich auch zur Untersuchung des Membran-Lockings herangezogen wurden, sind die sog. 'Pinched Hemisphere' und der 'Pinched Cylinder'. Die Strukturen sind zwar doppelt bzw. einfach gekrümmt, weisen jedoch bei der Verwendung von 4-knotigen Elementen und einer Abbildung 5.17 entsprechenden Diskretisierung keine gekrümmten Elemente und somit auch kein Membran-Locking auf. Anhand dieser Beispiele kann demzufolge nicht auf (membran)locking-freie, lineare Elemente geschlossen werden.

Im Gegensatz dazu kann beim „Twisted Beam“, siehe Abbildung 5.18, die Lösung auch für 4-knotige Schalelemente von Membran-Locking beeinträchtigt werden. Da hierbei nicht alle 4 Knoten in einer Ebene liegen, tritt eine Verwindung bzw. Verkümmung der einzelnen Elemente auf. Dennoch ist der Effekt für vierknotige Elemente nicht so dominant wie für quadratische Elemente.

Die für die numerische Beurteilung relevanten Zwangsbedingungen sind das Verschwinden der beiden Membranverzerrungen $\varepsilon_{\alpha\alpha} = 0$ (Gl. (4.87)). Mit den Verschiebungen der Schalenmittelfläche \mathbf{v} ergibt sich die Anzahl der für das Membran-Locking relevanten Freiheitsgrade zu drei, $n_{FG}^{mem-lock} = 3$. Der Zwangsbedingungsfaktor des kontinuierlichen Problems ist also $r_k = \frac{3}{2} = 1.5$. Dieser optimale Wert wird sowohl vom bilinearen Element $r_{Q1} = \frac{3}{8} = 0.375$ als auch vom biquadratischen $r_{Q2} = \frac{2}{3} = 0.667$ deutlich unterschritten.

Zu bemerken ist jedoch, dass im Vergleich der Elemente untereinander das biquadratische Element nach der numerischen Sichtweise besser abschneidet, obwohl der Versteifungseffekt bei diesem Element sehr viel gravierender ausfällt als beim bilinearen.

In der mathematischen Literatur wird das Phänomen des Membran-Locking selten behandelt. Der kritische Parameter ist hier ebenfalls als die Schlankheit der Elementes zu identifizieren. Pitkaräntä [122]

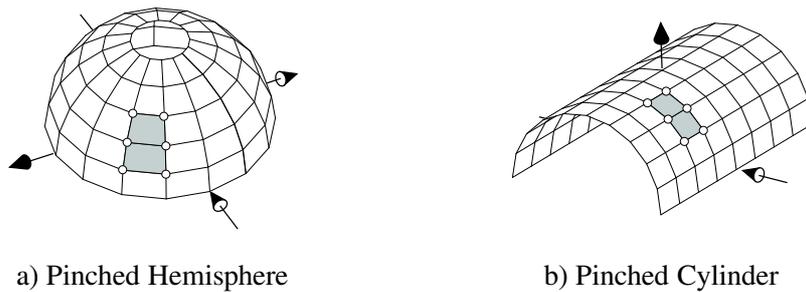


Abbildung 5.17: Beispiele für Diskretisierungen, bei denen kein Membran-Locking auftreten kann

gibt eine Analyse des Membran-Versteifungseffektes am Beispiel der eingespannten Zylinderschale an. Danach müssen die Ansatzfunktionen von Verschiebungselementen auf einem Polynom mindestens vierten Grades basieren, wenn Membran-Locking für *rechtwinklige* Netze ausgeschlossen werden soll. Sein Ergebnis, dass für allgemeine Geometrien (verzerrte Netze) ein gänzlich Vermeiden dieses Versteifungseffektes mit Verschiebungselementen nicht möglich sei, unterstützt obige Ausführungen.

Die Identifikation und Analyse der parasitären Verzerrungen zeigt wiederum mögliche Lösungsansätze zur Vermeidung des Membran-Lockingeffektes. Die Diskussion über den Verlauf der parasitären Dehnungen hat gezeigt, dass eine Auswertung dieser Verzerrungen an fixen Punkten für beliebig gekrümmte Elementgeometrien nicht exakt an der Nullstelle erfolgt. Methoden, die verbesserte Verzerrungsannahmen auf der Basis von Dehnungswerten an bestimmten, festen Punkten vorschlagen (z.B. die ANS-Methode), weisen demzufolge einen gewissen Fehler auf. Allerdings sind die Fehler infolge dieser Abweichungen gering und verschwinden für die Annahme flacher Schalen, die mit Netzverfeinerung immer genauer erreicht wird.

Neben der Modifikation (selektiv reduzierte Integration, ANS, DSG) kann auch eine Erweiterung der Verzerrungen (z.B. EAS-Methode) erfolgreich angewendet werden. Die resultierenden Elemente weisen jedoch eine vergleichsweise ausgeprägte Netzverzerrungsempfindlichkeit auf.

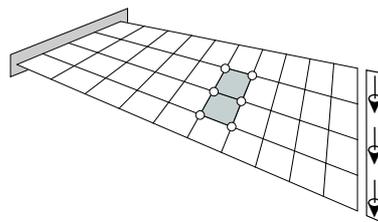


Abbildung 5.18: Twisted Beam

5.8 Netzverzerrungsempfindlichkeit

Ein weiterer Effekt, der die Konvergenz und Genauigkeit der Rechenergebnisse beeinflusst, ist die Empfindlichkeit eines Elementes gegenüber Netzverzerrungen. Unabhängig von der Netzeinteilung und deren Einfluss auf die Elementgeometrie sollen die eingesetzten Elemente gleichbleibend gute Ergebnisse liefern.

Das Beispiel in Abbildung 5.19 zeigt den Einfluss der Netzverzerrung anhand eines mit Scheibenelementen modellierten biegebeanspruchten Kragarms auf die Genauigkeit der Verschiebung. Das Verschiebungselement Q1-disp weicht aufgrund des Shear-Lockingeffektes bereits für die unverzerrte Geometrie stark von der exakten Lösung ab, mit zunehmender Verzerrung a sinkt der Wert auf unter 10 Prozent der exakten Lösung. Deutlicher ist der Einfluss für das selektiv reduziert integrierte Element Q1-SRI, das für rechteckige Elementgeometrien das korrekte Ergebnis liefert, allerdings bereits für kleine Netzverzerrungen einen drastischen Genauigkeitsabfall aufweist.

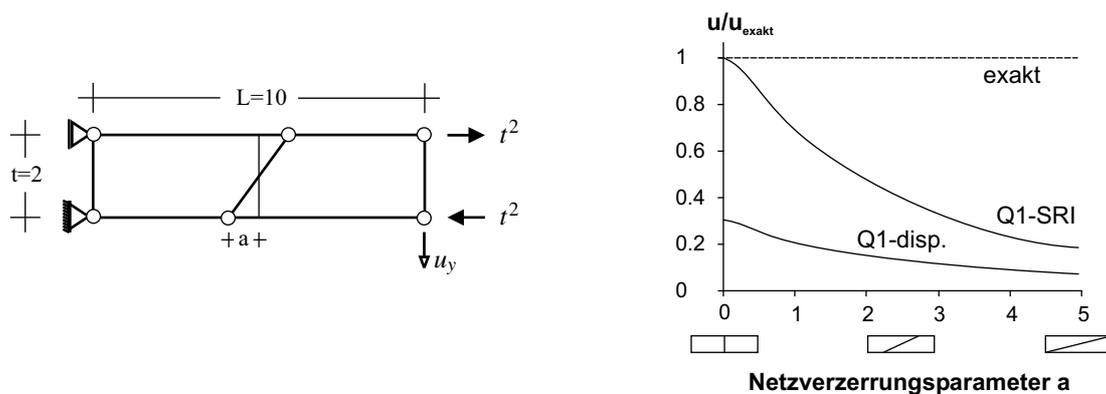


Abbildung 5.19: Einfluss der Netzverzerrung

Netzverzerrungsempfindlichkeit=Locking? Der Fehler wächst jedoch nicht über alle Schranken, wenn der den Effekt bestimmende Netzverzerrungsparameter gegen seinen Extremwert tendiert, der in obigem Beispiel durch Entartung des Vierecks zum Dreieck gegeben ist. Tatsächlich stellt sich ein bestimmtes – wenn auch äußerst schlechtes – Niveau ein⁶, die Lösung ist also nicht mehr von dem Parameter abhängig, was diesen Effekt von den vorher beschriebenen Lockingphänomenen unterscheidet.

Verfeinert man das Netz regelmäßig, ist die Konvergenzordnung also nicht von der Elementverzerrung abhängig. Allerdings ist der Fehler für eine gegebene Netzfeinheit für verzerrte Elemente gegenüber unverzerrten höher.

Die Netzverzerrungsempfindlichkeit eines Elementes ist somit kein Lockingeffect im Sinne der oben gegebenen Definition, auch wenn für diesen Effekt gelegentlich die Begriffe Distortion-Locking oder Shape-Locking verwendet werden. Dennoch kann die verzerrte Elementgeometrie den Versteifungseffekt maßgeblich beeinflussen. Die Berücksichtigung dieses Einflusses ist ein maßgeblicher Aspekt bei Entwicklung neuer Elementformulierungen. Die gleichzeitige Erfüllung der Forderungen nach Unempfindlichkeit gegenüber Netzverzerrungen, Vermeidung von Lockingeffecten und Bestehen des Patchtests insbesondere für niedrig interpolierte Elemente prägt die Entwicklungen seit der ersten Q1-Formulierung 1956 von Turner et al. [152] bis heute, so dass die Zahl der Vorschläge und Publikationen entsprechend umfangreich ist.

⁶Dies ist auch für andere Elementformulierungen zu beobachten, siehe Kapitel 6

5.9 Zusammenfassung

Tabelle 5.1 zeigt eine Zusammenstellung der beschriebenen Lockingphänomene. Neben der Aufzählung der auftretenden Effekte sind ebenfalls die problematische Zwangsbedingung und der kritische Parameter angegeben.

Lockingphänomen	Zwangsbedingung	Kritischer Parameter
Shear-Locking		
parasitäre Schubspannungen bei Biegedeformation	$\gamma_{xy} = 0$	Seitenverhältnis des Elementes
Transverse-Shear-Locking		
parasitäre Schubspannungen bei Biegedeformation	Bernoulli- bzw. Kirchhoffbedingung $\varepsilon_{\alpha 3} = 0$	Schlankheit des Elementes
Membran-Locking		
parasitäre Normalspannungen bei dehnungslosen Verformungen	Inextensibility constraint $\varepsilon_{\alpha\alpha}^h = 0$	Schlankheit des Elementes
Curvature-Thickness-Locking		
parasitäre Normalspannungen bei Biegedeformation	$\varepsilon_{33}^h = 0$	Schlankheit des Elementes
Trapezoidal-Locking		
parasitäre Normalspannungen bei Biegedeformation	$\varepsilon_{33}^h = 0$	Seitenverhältnis des Elementes
Volumetrisches Locking		
parasitäre Spannungen bei isochorer Deformation	Inkompressibilitätsbedingung $\text{div}(\mathbf{u}) = 0$	Kompressionsmodul

Tabelle 5.1: Zusammenstellung der beschriebenen Lockingeffekte

Kapitel 6

Effiziente Elementformulierungen

6.1 Einleitung

Die intensive Tätigkeit im Bereich der Elementtechnologie hat eine derart gewaltige Anzahl an Publikationen hervorgebracht, dass jeder Versuch, einen vollständigen Überblick über die vorgeschlagenen Elementformulierungen zu geben, von vornherein zum Scheitern verurteilt ist. Seit fast 50(!) Jahren ist eine nahezu unverändert anhaltende Aktivität bei der Entwicklung von Alternativen zu den reinen Verschiebungselementen festzustellen, die erst in jüngster Zeit geringfügig nachlässt. Auch an dieser Stelle kann und soll eine Beschränkung nur auf die wichtigsten Methoden und Formulierungen erfolgen.

Das Ziel aller Entwicklungen war und ist, die im vorherigen Kapitel dargestellten Versteifungsprobleme der Verschiebungselemente zu vermeiden, da deren Leistungsfähigkeit für Probleme ohne Zwangsbedingungen nicht zu verbessern ist. Obwohl viele der hierfür vorgeschlagenen Methoden völlig unabhängig voneinander entwickelt wurden und auf den ersten Blick keine Gemeinsamkeiten zu besitzen scheinen, wurden vor allem in den letzten Jahren Ähnlichkeiten oder gar Äquivalenzen zwischen einigen Formulierungen aufgezeigt (Andelfinger und Ramm [5], Bischoff et al. [35], Malkus und Hughes [104], Simo und Hughes [136], Simo und Rifai [139]).

Beispiele hierfür sind die Incompatible-Modes-Formulierung, die als Sonderfall der EAS-Methode aufgefasst werden kann, die wiederum zu hybrid-gemischten Ansätzen äquivalent ist, oder die Verwandtschaft der ANS- und DSG-Methode, die für bestimmte Geometrien zu identischen Steifigkeitsmatrizen führt.

Die Historie der Entwicklung geeigneter Methoden und Elemente, die frei von den in Kapitel 5 beschriebenen Effekten sind, kann bereits anhand des – eigentlich einfach erscheinenden – 4-knotigen zweidimensionalen Kontinuumselementes dokumentiert werden.

Die erste Beschreibung eines entsprechenden Elementes wird 1956 von Turner et al. [152] vorgestellt, 1961 gibt Taig [147] die erste isoparametrische Formulierung dieses Elementes an, dessen Leistungsfähigkeit insbesondere bei der Abbildung von Biegezuständen sehr begrenzt ist (vgl. Kapitel 5.3, 5.4, 5.8).

Ein zu den Verschiebungselementen alternativer Ansatz auf Basis des Minimums der Komplementärenergie führte zum ersten *hybriden* Element (Pian [118]), das allerdings keine Invarianz gegenüber Koordinatentransformationen aufweist. Mit den Beiträgen von Hermann [68] und Fraeijs de Veubeke [153] wird jedoch die Idee, Elemente mit Hilfe von *gemischten* Funktionalen herzuleiten, populär. Insbesondere das auf der Grundlage des Hellinger-Reissner-Prinzips (2.40) abgeleitete, *hybrid-gemischte*¹ Pian-Sumihara-Element (*PS*- oder auch 5β -Element) [119] stellt sich (bis heute) als eines der effizientesten Elemente für Scheibenberechnungen dar.

Die von Wilson et al. [157] vorgeschlagene Erweiterung des bilinearen Verschiebungsfeldes um zwei zusätzliche, quadratische Verschiebungsterme wurde aufgrund ihrer Inkompatibilität zunächst sehr kontrovers diskutiert [144]. Das *Q6*-Element zeigt ein hervorragendes Verhalten für Biegezustände bei verzerrten Netzgeometrien, das selbst heute von (fast) keinem vierknotigen Element erreicht wird, besteht

¹Als *gemischt* werden Elemente bezeichnet, die verschiedene Variablen benutzen, bei *hybrid-gemischten* Elementen wird eine oder mehrere Gruppe(n) der Variablen durch statische Kondensation eliminiert.

allerdings nicht den Patchtest. Dieses Handicap wurde ad hoc bei dem von Taylor et al. [148] formulierten $QM6$ -Element, einer Weiterentwicklung des $Q6$ -Elementes, vermieden, das Bestehen des Patchtests wurde jedoch mit einer – im Vergleich mit dem $Q6$ -Element – erhöhten Netzverzerrungsempfindlichkeit erkaufte.

Die Eigenschaft, dass die Unempfindlichkeit gegenüber Netzverzerrungen und das Bestehen des Patchtests konkurrierende Forderungen darstellen, ist auch bei neueren Entwicklungen festzustellen und stützt die Behauptung von MacNeal [101] bezüglich der Grenzen der Perfektionierbarkeit eines Elementes. Demnach ist das vierknotige Scheibenelement mit je zwei Freiheitsgraden per Knoten bestimmten Limitationen bezüglich seiner Abbildungsfähigkeit (Erfüllung des Patchtests und gleichzeitige Netzverzerrungsunempfindlichkeit bei Biegezuständen kann nicht erreicht werden) unterworfen (siehe auch MacNeal [102] für Elemente beliebiger Ordnung), unabhängig von seiner Formulierung.

Auf der Basis des modifizierten Prinzips von Hu-Washizu formulieren Simo und Rifai [139] 1990 die Enhanced-Assumed-Strain-Methode (EAS, Abschnitt 6.6). Die tensorielle Darstellung der Verzerrungs- und Spannungskomponenten ermöglicht die Definition des mechanischen Systems in der Umgebung der Differentialgeometrie des Elementes. Das zugrunde liegende Drei-Feld-Funktional (Variablen: Verschiebungen, Verzerrungen und Spannungen) führt auf eine zusätzliche Gleichung, der L_2 -Orthogonalität zwischen den erweiterten Verzerrungs- und Spannungsfeldern.

Eine weitere Entwicklung, die die Differentialgeometrie in die Elementformulierung miteinbezieht, stellt das hinsichtlich der Verzerrungsempfindlichkeit leicht verbesserte 5β -Element von Yuan [160] dar.

Wesentliche Fortschritte hinsichtlich der Leistungsfähigkeit des 4-knotigen Membranelementes brachten allerdings weder diese noch darauf folgende Entwicklungen – beispielhaft seien die Vorschläge von Korelc und Wriggers [89], Piltner und Taylor [120], César de Sa und Jorge [126] genannt – die sich alle in den von MacNeal 1987 aufgezeigten *limits of perfectability* bewegen.

Das einzige dem Autor bekannte Scheibenelement, das für beliebige Geometrien sowohl den Patchtest besteht als auch den Biegezustand exakt abbilden kann, ist das von Felippa vorgestellte UBOQP-Element (Unidirectional Bending-Optimal Quadrilateral Panel, [58]). Allerdings deutet bereits der Name den Nachteil dieses Elementes an: die Biegung kann nur für *eine* ausgezeichnete Richtung korrekt dargestellt werden, wiederum eine Einschränkung einer angestrebten universellen Einsatzmöglichkeit.

Die Entwicklung der Formulierungen für biegebeanspruchte *Strukturelemente* beginnt erst nach den Scheibenelementen mit dem Plattenelement von Adini und Clough [1]. Die in der Folge vorgestellten Plattenelemente (u.a. [153]) beruhen auf der Theorie schubstarrer Platten, deren Nachteile und Grenzen die Entwicklung der *diskreten* Kirchhoff-Elemente einleitete (siehe Kapitel 4.3.2).

Ein gänzlich anderer Weg, die sich aus der konsistenten Anwendung der Kirchhoff-Theorie ergebenden Probleme (Stetigkeit, Randbedingungen) zu umgehen, war die Formulierung von Elementen auf Basis der Reissner-Mindlin-Kinematik. Hiermit reduziert sich die Kompatibilitätsbedingung auf die Forderung nach C^0 -Stetigkeit und die Anwendung des isoparametrischen Konzepts war nun ebenfalls für Platten- und Schalelemente möglich [2]. Neben diesen Vorteilen traten bei der Formulierung schubweicher Elemente allerdings auch Schwierigkeiten (nämlich der Effekt des Querschub-Locking) auf, die – zunächst ohne genauere Analyse der Ursachen – mit der schon für die Kontinuums-elemente angewandten (Doherty et al. [54], 1969) reduzierten Integration [162] zu vermeiden versucht wurden (siehe auch Hughes et al. [75]). Die Gründe für den Erfolg dieser Vorgehensweise sowie für das Auftreten der Lockingphänomene wurden erst später erkannt ([99], [142], [143]).

Allerdings wurden mit dem Auftreten von Nullenergieformen auch beim „Trick“ der reduzierten Integration Probleme aktiviert, die zusätzliche Maßnahmen erfordern. Die Stabilisierung dieser Moden durch Addition entsprechender Terme wurde u.a. von Belytschko et al. ([60], [24]) vorgeschlagen, siehe auch Abschnitt 6.3.2.

Das Verständnis für die Ursachen der Lockingphänomene, insbesondere die Identifikation und Analyse der parasitären Spannungen war die Grundlage für die Methodik der Annahme von Verzerrungen (*Assumed Strains*). Die Grundidee basiert auf der Modifikation des Verzerrungsfeldes dahingehend, dass genau die parasitären, unerwünschten Anteile vermieden werden. Die Relation der modifizierten Verzerrungen zu den Freiwerten des Verschiebungsfeldes mündet letztendlich in einem geänderten B-Operator,

daher ist diese Vorgehensweise auch als B-bar-Methode bekannt. Auch dieses, zunächst pragmatisch erscheinende Verfahren kann variationell konsistent aus einem gemischten Funktional abgeleitet werden (Simo und Hughes [136]). Zu den Vertretern dieser Methodik sind auch die ANS-Methode (Abschnitt 6.4) sowie die DSG-Methode (Abschnitt 6.5) zu zählen.

6.2 Variationelle Basis

Die in dieser Arbeit vorgestellten Methoden zur Formulierung finiter Elemente können auf die variationelle Basis des Prinzips von HU-WASHIZU (Kapitel 2.5.2) zurückgeführt werden.

$$\Pi_{HW}(\mathbf{u}, \mathbf{S}, \mathbf{E}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{E} : \mathbf{S}^E d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{S} : (\mathbf{E}^u - \mathbf{E}) d\Omega - \Pi_{HW}^{ext} \rightarrow stat. \quad (6.1)$$

$$\delta \Pi_{HW}(\mathbf{u}, \mathbf{S}, \mathbf{E}) = \int_{\Omega} \delta \mathbf{E} : (\mathbf{S}^E - \mathbf{S}) d\Omega + \int_{\Omega} \delta \mathbf{S} : (\mathbf{E}^u - \mathbf{E}) d\Omega + \int_{\Omega} \delta \mathbf{E}^u : \mathbf{S} d\Omega - \delta \Pi_{HW}^{ext} = 0 \quad (6.2)$$

Prinzipiell kann auch dieses Funktional direkt diskretisiert werden. Dazu sind Approximationen aller drei auftretenden Felder erforderlich²:

$$\mathbf{u}^h = \mathbf{N} \cdot \mathbf{d}, \quad \mathbf{E}^h = \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\alpha}, \quad \mathbf{S}^h = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\beta}, \quad (6.3)$$

mit C^0 -stetigen Ansatzfunktionen für \mathbf{u}^h und C^{-1} -stetigen für \mathbf{E}^h und \mathbf{S}^h , deren Freiheitsgrade $\boldsymbol{\alpha}$ bzw. $\boldsymbol{\beta}$ auf Elementebene kondensiert werden können.

Der Aufwand einer solchen Diskretisierung ist jedoch beträchtlich: in 3(2)-dimensionalen Problemen sind \mathbf{E}^h sowie \mathbf{S}^h jeweils 6(3) und \mathbf{u}^h 3(2) skalare Felder zugeordnet³, 5(4)-mal mehr als bei einem Ein-Feld-Funktional. Eine direkte Implementierung des Drei-Feld-Funktional wird demzufolge selten vorgenommen.

Um die Anzahl der involvierten Felder und den damit verbundenen numerischen Aufwand zu reduzieren, sind verschiedene Varianten des Prinzips (6.2) vorgeschlagen worden. Zu den prominentesten und effektivsten Modifikationen zählen die B-bar-Formulierung von Simo und Hughes [136] sowie die Enhanced-Assumed-Strain-Methode von Simo und Rifai [139].

6.2.1 B-bar-Formulierungen

Eine wesentliche Vereinfachung der Implementierung von Elementen auf der Basis des Prinzips von Hu-Washizu wurde von Simo und Hughes [136] vorgeschlagen.

Die grundlegende Idee dieser Methode besteht darin, die Verzerrungen \mathbf{E}^h direkt in Abhängigkeit der Knotenverschiebungsfreiheitsgrade \mathbf{d} zu definieren.

$$\mathbf{E}^h = \bar{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{d} \quad (6.4)$$

Zusammen mit der Diskretisierung der verschiebungskompatiblen Verzerrungen $\mathbf{E}^u = \mathbf{B}^u \cdot \mathbf{d}$ ergibt sich für das Funktional (6.1):

$$\Pi_{HW}^{h,int}(\mathbf{u}, \mathbf{S}, \mathbf{E}) = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \int_{\Omega} \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{C} \bar{\mathbf{B}} d\Omega \mathbf{d} + \int_{\Omega} \mathbf{S} : (\mathbf{B}^u \mathbf{d} - \bar{\mathbf{B}} \mathbf{d}) d\Omega \quad (6.5)$$

²Im Folgenden gilt für die *diskretisierten* Felder die Voigt-Notation

³Unter Berücksichtigung der Symmetrie der betreffenden Tensorkomponenten.

Der maßgebliche Schritt ist die Orthogonalität zwischen der Differenz der modifizierten (assumed) Verzerrungen \mathbf{E} zu den verschiebungskompatiblen Verzerrungen \mathbf{E}^u und den Spannungen

$$\int_{\Omega} \mathbf{S} : (\mathbf{E}^u - \mathbf{E}) d\Omega = 0 \quad \text{bzw.} \quad \int_{\Omega} \mathbf{S} : (\mathbf{B}^u \mathbf{d} - \bar{\mathbf{B}} \mathbf{d}) d\Omega = 0 \quad \forall \mathbf{d} \quad (6.6)$$

Ist diese Orthogonalitätsbedingung erfüllt, verbleibt für die Berechnung der inneren virtuellen Arbeit somit folgender Ausdruck

$$\delta \Pi_{HW}^{h,int} = \int_{\Omega} \delta \mathbf{E} : \mathbf{S}^E d\Omega \quad \stackrel{\text{mit (6.4)}}{=} \quad \delta \mathbf{d}^T \int_{\Omega} \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{C} \bar{\mathbf{B}} d\Omega \mathbf{d}, \quad (6.7)$$

der sich formal nicht von der virtuellen inneren Arbeit des Ein-Feld-Funktional, d.h. der Herleitung eines Verschiebungselementes unterscheidet. Es wird lediglich der verschiebungskompatible \mathbf{B}^u -Operator durch den modifizierten $\bar{\mathbf{B}}$ -Operator ersetzt, wodurch sich die Bezeichnung dieser Vorgehensweise als B-bar-Methode eingepreßt hat.

Die Besonderheit dieser Methode liegt in ihrer Einfachheit und Eleganz: während die Schritte zur Entwicklung der Steifigkeitsmatrix identisch zu denen eines Verschiebungselementes sind, stehen dennoch gleichzeitig die Möglichkeiten des Drei-Feld-Funktional von Hu-Washizu zur Formulierung geeigneter, d.h. Locking-freier Verzerrungsfelder zur Verfügung.

Bemerkenswert ist die Behandlung des Spannungsfeldes \mathbf{S} : Für die Konstruktion der B-bar-Formulierung ist ein orthogonales Spannungsfeld erforderlich, da die Spannungen aber für die Bestimmung der Steifigkeitsmatrix nicht verwendet werden, besteht in der Wahl der Spannungsansätze völlige Freiheit. Ein Spannungsfeld, das die Orthogonalitätsbedingung (6.6) erfüllt, wäre somit jederzeit konstruierbar⁴. Theoretisch ist die Entwicklung eines solchen orthogonalen Spannungsfeldes für die Spannungsrückrechnung aus Gründen der variationellen Konsistenz durchzuführen. Gewöhnlich wird hierauf jedoch verzichtet, da die Konstruktion eines solchen Feldes die Vorteile der hinsichtlich des numerischen Aufwands mit der Ein-Feld-Formulierung vergleichbaren B-bar-Methode aufheben würde. Statt dessen werden die Spannungen in Abhängigkeit der Verzerrungen berechnet

$$\mathbf{S} = \mathbf{C} \bar{\mathbf{B}} \mathbf{d}. \quad (6.8)$$

Zentraler und schwierigster Punkt der B-bar-Methoden ist jedoch die Entwicklung der modifizierten Verzerrungskomponenten bzw. des daraus resultierenden B-Operators, der die Verzerrungen mit den Verschiebungsparametern verknüpft, Gleichung (6.4).

Mit der *Discrete-Strain-Gap*-Methode (DSG) wird in Abschnitt 6.5 eine leistungsstarke Konzept zur Formulierung von Locking-freien Elementen vorgestellt. Die Anwendung dieser Methode führt zu modifizierten Verzerrungsfeldern, die frei von parasitären Anteilen sind. Die resultierenden Ausdrücke sind dabei lediglich von den Knotenverschiebungen abhängig und können entsprechend Gleichung (6.4) dargestellt werden:

$$\mathbf{E}^{h,mod} = \mathbf{B}^{DSG} \cdot \mathbf{d} \quad (6.9)$$

Die DSG-Modifikationen besitzen somit das Charakteristikum einer B-bar-Methode⁵ und können entsprechend den obigen Ausführungen auf ein variationelles Fundament gestellt werden.

Die variationelle Herleitung der B-bar-Methode gibt zunächst keine Restriktionen bezüglich der Wahl des modifizierten Verzerrungsfeldes.

⁴Z.B. mit Hilfe des GRAM-SCHMIDT'schen Orthogonalisierungsverfahrens [43], eine Beschreibung der erforderlichen Matrixoperationen wird auch von Simo und Hughes gegeben [136].

⁵Von den in dieser Arbeit vorgestellten Methoden kann neben der DSG-Methode ebenfalls die ANS-Methode zu den B-bar-Formulierungen gezählt werden.

Über die Orthogonalitätsbedingung (6.6) kann allerdings mit der Forderung nach der Darstellbarkeit konstanter Spannungen eine Bedingung für die modifizierten Verzerrungen formuliert werden, die das Erfüllen des Patchtests a priori gewährleistet.

$$\int_{\Omega} (\mathbf{B}^u - \bar{\mathbf{B}}) d\Omega = 0 \quad (6.10)$$

Diese Bedingung wird von den Querschub-Modifikationen der DSG-Elemente (siehe Abschnitt 6.5.2) erfüllt. Für die DSG-Membranmodifikationen sind allerdings zusätzliche Maßnahmen erforderlich, wenn Forderung (6.10) und damit der Patchtest bestanden werden soll. Eine ausführliche Diskussion folgt in Abschnitt 6.5.7.

6.2.2 Enhanced-Strain-Formulierung

Simo und Rifai [139] stellen eine Implementierung des Drei-Feld-Funktional (6.11) vor, die sie als *Enhanced-Strain-Formulierung* bezeichnen.

Entscheidender Schritt bei Herleitung ist das Einbringen eines alternativen Verzerrungsfeldes $\tilde{\mathbf{E}}$ in das Hu-Washizu-Funktional:

$$\Pi_{HW}(\mathbf{u}, \mathbf{E}, \mathbf{S}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{E} : \mathbf{S}^E d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{S} : (\mathbf{E}^u - \mathbf{E}) d\Omega - \Pi_{HW}^{ext} = 0 \quad (6.11)$$

Dies wird erreicht durch das Ersetzen bzw. der Reparametrisierung der Verzerrungen \mathbf{E} durch

$$\mathbf{E} = \tilde{\mathbf{E}} + \mathbf{E}^u. \quad (6.12)$$

Gleichung (6.12) beschreibt den Zusammenhang zwischen den Gesamtverzerrungen \mathbf{E} und den kinematisch verträglichen Verzerrungen \mathbf{E}^u , $\tilde{\mathbf{E}}$ repräsentiert also genau das Residuum der kinematischen Gleichung. Die Substitution von (6.12) in (6.11) liefert

$$\delta \Pi_{HW}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{E}}, \mathbf{S}) = \int_{\Omega} (\tilde{\mathbf{E}} + \mathbf{E}^u) : \delta \mathbf{S}^{\tilde{\mathbf{E}} + \mathbf{E}^u} d\Omega + \int_{\Omega} \delta \mathbf{S} : \tilde{\mathbf{E}} d\Omega - \delta \Pi_{HW}^{ext} = 0 \quad (6.13)$$

Die zugehörigen starken Bestimmungsgleichungen können durch entsprechende Umformung von (6.13) mit Hilfe der Produktregel und des GAUSSSchen Integralsatzes ermittelt werden.

$$\operatorname{div}(\mathbf{F} \mathbf{S}^u) + \rho \mathbf{b} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad \text{Gleichgewicht} \quad (6.14)$$

$$\hat{\mathbf{t}} - \mathbf{t}^u = 0 \quad \text{auf } \Gamma_S \quad (6.15)$$

$$\mathbf{S}^{\tilde{\mathbf{E}} + \mathbf{E}^u} = \mathbf{S} \quad \text{in } \Omega \quad \text{Stoffgesetz} \quad (6.16)$$

$$\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega \quad \text{Kinematik} \quad (6.17)$$

$$\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_u \quad (6.18)$$

Die Gleichungen (6.14)–(6.16) sowie (6.18) entsprechen denjenigen aus Abschnitt 2.5.2, Gleichung (6.17) hingegen mag zunächst überraschend erscheinen. Berücksichtigt man jedoch, dass noch keine Diskretisierung stattgefunden hat, wird klar, dass für die starke Form die verschiebungskompatiblen Verzerrungen mit den Gesamtverzerrungen identisch sein müssen, d.h. ihre Differenz, repräsentiert durch $\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{E} - \mathbf{E}^u$ (entspr. (6.12)), gleich Null muss.

Für das *diskretisierte* Problem trifft diese Bedingung im allgemeinen nicht zu, d.h. die erweiterten Verzerrungen $\tilde{\mathbf{E}}$ verschwinden i.a. nicht und können bei entsprechend geschickter Wahl das Element verbessern.

Orthogonalitätsbedingung Aus Gleichung (6.13) wird ersichtlich, dass der Wegfall des zweiten Integrals die Spannungen aus dem Funktional eliminiert. Eine dementsprechend mögliche Reduktion der Freiheitsgrade bei Diskretisierung des so modifizierten Funktionals veranlasste Simo und Rifai ([139]) zur Formulierung einer entsprechenden Orthogonalitätsbedingung:

$$\int_{\Omega} \mathbf{S} : \tilde{\mathbf{E}} \, d\Omega = 0. \quad (6.19)$$

Unter Berücksichtigung von (6.19) entfallen in Gleichung (6.13) somit alle Terme, die die Spannungen \mathbf{S} enthalten, so dass das modifizierte Funktional lautet⁶:

$$\delta \Pi_{HW}^{mod}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{E}}) = \int_{\Omega} \delta(\tilde{\mathbf{E}} + \mathbf{E}^u) : \mathbf{S}^{\tilde{\mathbf{E}} + \mathbf{E}^u} \, d\Omega - \delta \Pi_{HW}^{ext} = 0 \quad (6.20)$$

6.3 Unterintegration

6.3.1 Übersicht

Die Unterintegration wurde zuerst 1969 von Doherty et al. [54] für 2D-Kontinuumselemente angewandt. Dabei beschränkte er die Anwendung der reduzierten (d.h. zu niedrigen für eine exakte Integration) Integrationsordnung auf bestimmte Steifigkeitsterme (hier die Schubanteile), woraus sich die heute gebräuchliche Bezeichnung *selektiv reduzierte Integration* erklärt.

1971 nutzen Zienkiewicz et al. [162] die reduzierte Integration zur Verbesserung des Querschubverzerungsanteils des Schalenelementes von Ahmad et al. [3], jedoch ohne nähere Erläuterung ihrer Wirkung. Dennoch war diese Erkenntnis bedeutend für die weitere Entwicklung der Platten- und Schalenelemente. Für Plattenelemente wurde die Technik der selektiv reduzierten Integration erst 1977 von Hughes et al. [75] eingesetzt. Die Auswertung der transversalen Schubspannungen in der Elementmitte war jedoch verantwortlich für Zero-Energy-Modes, wenn auch nicht in dem Ausmaß wie bei reduzierter Integration des gesamten Elementes.

Der Erfolg der Unterintegration erklärt sich direkt aus den in Kapitel 5 beschriebenen Ursachen der Lockingphänomene: die störenden Anteile der Verzerrungen bzw. Spannungen werden ausgeschaltet. Auch die numerische orientierte Beschreibung der Lockingeffekte gibt sofort eine Erläuterung der positiven Wirkung der Unterintegration. Da die Auswertung der Zwangsbedingungsfaktoren in den Gaußpunkten erfolgt, deren Anzahl also direkt in die Berechnung von r_K eingeht, ergibt eine Reduktion der Gaußpunkte eine Verbesserung dieses Wertes. Für viereckige Elemente (Q1, Q2) liefert die selektiv reduzierte Integration bei rechtwinkliger Geometrie den optimalen Wert für alle Lockingphänomene.

Am Beispiel des vierknotigen Scheibenelementes Q1 kann der Effekt gut nachvollzogen werden (vgl. Abschnitt 5.3): Die selektiv reduzierte Integration filtert die konstanten Anteile aus dem verschiebungskompatiblen Verlauf der Schubverzerrungen. Für den Biegezustand ergeben sich die (erwünschten) verschwindenden Schubverzerrungen $\gamma_{xy}^h = 0$. Der Vergleich mit den Verzerrungsmoden entsprechend Tabelle 5.5 zeigt, dass die damit genau die Schubanteile der Biegemoden (Mode 4 und 8) herausgenommen werden. Führt man eine Eigenwertanalyse des Biegemodes durch, wird deutlich, dass der Eigenwert mit zunehmendem Seitenverhältnis a/h (dem kritischen Parameter für Schub-Locking) für das voll integrierte Element Q1 zunimmt, Abbildung 6.1. Dies ist dem erwarteten Verhalten, nämlich einer mit dem Seitenverhältnis abnehmenden „Biegesteifigkeit“, genau konträr und die Folge des auftretenden Schub-Locking. Das selektiv reduzierte Element Q1-SRI zeigt dagegen das korrekte Verhalten. Bei reduzier-

⁶Hier wurde das den EAS-Elementen zugrundeliegende Prinzip (6.20) durch Reparametrisierung des Prinzips von HUSHIZU abgeleitet ([139]).

Alternative Herleitung der variationellen Basis: Bischoff [29] formuliert das Funktional (6.20) als eigenständiges Prinzip. Das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie (2.31) dient hierbei als Ausgangsbasis, dem mit Hilfe der Methode der LAGRANGESchen Multiplikatoren die kinematische Gebietsgleichung (6.17) sowie die kinematischen Randbedingungen (6.18) hinzugefügt werden.

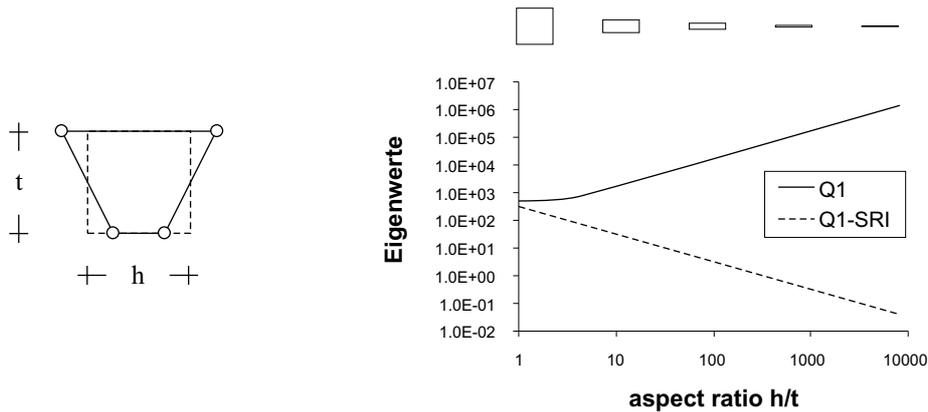


Abbildung 6.1: Eigenwerte des Biegemodes in Abhängigkeit des kritischen Parameters

ter Integration aller Terme, d.h. bei Auswertung im Elementmittelpunkt, werden alle höheren als die konstanten Verzerrungsanteile eliminiert. Die resultierende Steifigkeitsmatrix ist zwar in der Lage, den Patchtest für konstante Verzerrungen für beliebige Geometrien zu erfüllen, weist aber einen Rangabfall von 2 (siehe Kapitel 3.2.1) auf. Damit verbunden ist das Auftreten von zwei Nullenergieeigenformen, die einen Einsatz dieses Elements unmöglich machen. Mit der Eigenschaft, den Patchtest zu sichern, dient die Einpunkt-integrierte Steifigkeitsmatrix des Verschiebungselementes jedoch als Basis für verschiedene Entwicklungen (z.B. Hourglass Stabilization, Free Formulation).

Für die als numerischer Trick anmutende Unterintegration kann ebenfalls eine Äquivalenz zu gemischten Formulierungen hergeleitet werden (Malkus und Hughes [104]).

6.3.2 Hourglass-Stabilisierung

Durch Unterintegration können zwar Versteifungseffekte der Verschiebungselemente korrigiert werden, gleichzeitig werden jedoch Nullenergieeigenformen (ZEM) mit den entsprechenden Problemen in die Formulierung eingebracht.

Die Idee der so genannten Hourglass-Stabilisierung (Belytschko et al. [60], [24]) ist, den Rang der reduziert integrierten Steifigkeitsmatrix durch Stabilisierungsterme zu korrigieren. Dadurch werden die Vorteile der reduziert integrierten Elemente, d.h. die numerische Effizienz und die Vermeidung von Lockingeffekten, übernommen und dennoch das zu inakzeptablen Lösungen führende Hourglassing vermieden. Bei der Hourglass-Stabilisierung wird zur reduziert integrierten Steifigkeitsmatrix ein korrigierender Term addiert, mit dessen Hilfe der korrekte Rang der Steifigkeitsmatrix wiederhergestellt werden soll, ohne jedoch die Vollständigkeit des ursprünglichen, isoparametrischen Ansatzes zu (zer)stören.

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{K}^{red.} + \mathbf{K}^{stab.} \quad (6.21)$$

Letztere Forderung kann durch die Wahl geeigneter Stabilisierungsterme sichergestellt werden.

Flanagan und Belytschko [60] schlagen hierfür (für das ein-Punkt-integrierte Viereckselement) eine Erweiterung des B-Operators um zwei zusätzliche Zeilen vor, deren erforderliche lineare Unabhängigkeit durch die Orthogonalität zu den anderen Zeilen erreicht wird. Wesentlicher Punkt bei dieser Formulierung ist die Aufspaltung der Verschiebungen in einen Anteil niedriger und höherer Ordnung, $u = u_l + u_h$. Die niedrigen Anteile u_l sollen die Darstellung von Starrkörperbewegungen und das Erfüllen des Patchtests 3.2.2 gewährleisten.

Die höheren Terme u_h sind einerseits für die auftretenden Hourglass-Moden verantwortlich, auf der anderen Seite für die Darstellung bestimmter Deformationszustände, namentlich der Biegezustände, erforderlich. Können diese Zustände nicht richtig abgebildet werden, sind Versteifungseffekte die Folge.

Die Steuerung des Auftretens der höheren Verschiebungsterme wird durch den Stabilisierungsparameter übernommen.

Um zu garantieren, dass Deformationen, die entweder einer Starrkörperbewegung entsprechen oder einen konstanten Verzerrungszustand hervorrufen, die höheren Verschiebungsterme nicht beeinflussen (und umgekehrt), werden Ansätze für u_h gewählt, die orthogonal zu u_l sind.

Explizite Formeln für u_l und u_h werden u.a. von Belytschko et al. [24] für ihre $\boldsymbol{\gamma}$ -Elemente angegeben. Erweitert man beispielsweise die üblichen Verzerrungen des Scheibenproblems (hier: ebener Verzerrungszustand, dies hat jedoch keine prinzipiellen Änderungen zur Folge) um die höheren Verzerrungsanteile $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_x$ und $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_y$, kann der entsprechende B-Operator wie folgt dargestellt werden:

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_x = \boldsymbol{\gamma}^T \cdot \mathbf{d} \\ \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_y = \boldsymbol{\gamma}^T \cdot \mathbf{d} \end{array} \right\} \Rightarrow \tilde{\boldsymbol{\boldsymbol{\varepsilon}}}^T = [\boldsymbol{\varepsilon}_x, \boldsymbol{\varepsilon}_y, 2\boldsymbol{\varepsilon}_{xy}, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_x, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_y] \quad (6.22)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^0 \\ \boldsymbol{\varepsilon}^\gamma \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{d} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^0 \\ \dots \\ \mathbf{B}^\gamma \end{bmatrix} \cdot \mathbf{d} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{,x}^T & 0 \\ 0 & \mathbf{N}_{,y}^T \\ \mathbf{N}_{,y}^T & \mathbf{N}_{,x}^T \\ \dots & \dots \\ \boldsymbol{\gamma}^T & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\gamma}^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{x1} \\ \vdots \\ u_{x4} \\ u_{y1} \\ \vdots \\ u_{y4} \end{bmatrix} \quad (6.23)$$

mit

$$\mathbf{N}_{,i}^T = [N_{,i}^1, N_{,i}^2, N_{,i}^3, N_{,i}^4], \quad i = x, y \quad (6.24)$$

$$\mathbf{d}^T = [u_{x1}, u_{x2}, u_{x3}, u_{x4}, u_{y1}, u_{y2}, u_{y3}, u_{y4}] \quad (6.25)$$

Der Vektor $\boldsymbol{\gamma}$ repräsentiert dabei die Ansätze für die erweiterten Verzerrungen, die ebenfalls ausschließlich von den Knotenverschiebungsfreiheitsgraden abhängig sind. Sie erfüllen die bereits oben angeklungene Forderung nach linearer Unabhängigkeit von den Ansätzen der anderen auftretenden Verzerrungen $\boldsymbol{\varepsilon}_x$, $\boldsymbol{\varepsilon}_y$ und $\boldsymbol{\varepsilon}_{xy}$.

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{1}{4} (\mathbf{h} - (\mathbf{h}^T \mathbf{x}) \mathbf{b}_x - (\mathbf{h}^T \mathbf{y}) \mathbf{b}_y) \quad (6.26)$$

mit

$$\mathbf{b}_x = \mathbf{N}_{,x}, \quad \mathbf{b}_y = \mathbf{N}_{,y} \quad (6.27)$$

$$\mathbf{x}^T = [x_1, \dots, x_4], \quad \mathbf{y}^T = [y_1, \dots, y_4] \quad (6.28)$$

$$\mathbf{h}^T = [1, -1, 1, -1], \quad \mathbf{1}^T = [1, 1, 1, 1] \quad (6.29)$$

Mit dieser strikten Trennung der erweiterten von den 'normalen' Verzerrungsansätzen wird erreicht, dass die gewünschten Eigenschaften des reduziert integrierten Verschiebungselementes, \mathbf{B}_0 , erhalten bzw. nicht gestört werden. Einerseits ist dies die unabdingliche Forderung nach der exakten Reproduzierbarkeit der Starrkörpermoden, bei deren Nichterfüllung das Element als absolut unbrauchbar einzustufen wäre, zum anderen wird hierdurch die Erfüllung des Patchtests gewährleistet, eine Grundlage bei der Entwicklung dieser Elemente.

Die erweiterten Verzerrungen $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_x$ und $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_y$ müssen also für lineare Verschiebungsfelder verschwinden, woraus sich folgende Bedingung für $\boldsymbol{\gamma}$ formulieren lässt:

$$\boldsymbol{\gamma}^T \cdot \mathbf{u}_i^{lin} = 0, \quad i = x, y \quad (6.30)$$

$$\text{mit } \mathbf{u}_i^{lin} = \alpha_i^0 \mathbf{1} + \alpha_i^1 \mathbf{x} + \alpha_i^2 \mathbf{y} \quad (6.31)$$

Zu den erweiterten Verzerrungen werden energetisch konjugierte Spannungen $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_x$, $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_y$ definiert, die mit diesen über einen fiktiven Materialparameter C^γ verknüpft sind.

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_x = C^\gamma \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_x \\ \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_y = C^\gamma \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_y \end{array} \right\} \Rightarrow \tilde{\boldsymbol{\boldsymbol{\sigma}}}^T = [\boldsymbol{\sigma}_x, \boldsymbol{\sigma}_y, \boldsymbol{\sigma}_{xy}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_x, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_y] \quad (6.32)$$

Die zur Berechnung der Steifigkeitsmatrix erforderlichen konstitutiven Relationen lauten also für linear elastisches, isotropes Materialverhalten:

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \tilde{\mathbf{C}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (6.33)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \\ \tilde{\sigma}_x \\ \tilde{\sigma}_y \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C^\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C^\gamma \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \\ \tilde{\varepsilon}_x \\ \tilde{\varepsilon}_y \end{bmatrix} \quad (6.34)$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}^0 \\ \boldsymbol{\sigma}^\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}^\gamma \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^0 \\ \boldsymbol{\varepsilon}^\gamma \end{bmatrix} \quad (6.35)$$

Gleichung (6.35) deutet die anfangs beschriebene Aufteilung der hourglass-stabilisierten Elementsteifigkeit in einen reduziert integrierten und die stabilisierenden Anteil an. Mit der Variation der Verzerrungen zu $\delta \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \tilde{\mathbf{B}} \cdot \delta \mathbf{d}$ kann die innere virtuelle Arbeit und daraus die Steifigkeitsmatrix mit (6.23) und (6.35) wie folgt bestimmt werden.

$$\delta W^{int} = \int_{\Omega} \delta \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}} d\Omega = \delta \mathbf{d}^T \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{B}}^T \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{B}} d\Omega \mathbf{d} \quad (6.36)$$

$$\mathbf{K}_e = \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{B}}^T \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{B}} d\Omega \quad (6.37)$$

Die Elementsteifigkeitsmatrix der Elemente mit Hourglass-Stabilisierung setzt sich somit aus der reduziert integrierten Steifigkeitsmatrix des Verschiebungselementes \mathbf{K}^0 und der stabilisierenden Matrix \mathbf{K}^{stab} zusammen, deren explizite Formulierung man durch Einsetzen von (3.14) in Gleichung (6.37) erhält.

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_e &= \int_{\Omega} (\mathbf{B}^0)^T \mathbf{C}^0 \mathbf{B}^0 d\Omega + \int_{\Omega} (\mathbf{B}^\gamma)^T \mathbf{C}^\gamma \mathbf{B}^\gamma d\Omega \\ &= \mathbf{K}^0 + \mathbf{K}^{stab} \\ &= A \cdot (\mathbf{B}^0)^T \mathbf{C}^0 \mathbf{B}^0 + A \cdot C^\gamma \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma}^T & \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma}^T \\ \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma}^T & \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma}^T \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.38)$$

Der letzte Schritt in Gleichung (6.38) ist offensichtlich nur für das vierknotige Element gültig, da nur bei diesem die entsprechenden Operatoren konstant sind, so dass sich die Integration lediglich auf die Berechnung die Fläche A des Elementes beschränkt, die sich für das vierknotige Element zu $A = \frac{1}{2}((x_2 - x_4)(y_3 - y_1) + (x_3 - x_1)(y_4 - y_2))$ ergibt.

Bestimmung des Stabilisierungsparameters Die Ermittlung des Stabilisierungsparameters C^γ , der in der Herleitung als fiktiver Materialparameter auftritt, stellt den entscheidenden Schritt bei der Entwicklung des hourglass-stabilisierten Elementes dar.

Der Parameter C^γ ist so zu wählen, dass er den korrekten Rang der Steifigkeitsmatrix (für das vierknotige Scheibenelement: $\text{Rang}^{korr}(\mathbf{K}_e)=5$) wiederherstellt und die resultierende Elementsteifigkeitsmatrix nicht zu stark von der des unterintegrierten abweicht.

Zur Bestimmung des Stabilisierungsparameters existieren verschiedene Möglichkeiten. Oftmals wird der Parameter aus numerischen Experimenten ermittelt, stellt dann aber naturgemäß auch nur für die getesteten Problemklassen eine optimale Wahl dar.

Belytschko und Bindemann ([23]) schlagen eine Skalierung des Stabilisierungsparameters in Abhängigkeit der maximalen Eigenwerte der reduziert integrierten Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}^0 und der Stabilisierungsmatrix \mathbf{K}^{stab} vor.

Bei der Berechnung transienter Probleme, für die der Einsatz von Elementen mit nur einem Integrationspunkt einen erheblichen Vorteil hinsichtlich des numerischen Aufwands liefert, geben sie folgenden Wert für C^γ an (Dichte ρ , Wellengeschwindigkeit c):

$$C^\gamma = \frac{1}{2} \alpha_s c^2 \rho A \mathbf{N}_i^T \mathbf{N}_i, \quad (6.39)$$

wobei für α_s ein Wert in der Größenordnung von ungefähr 0,1 empfohlen wird.

Der Gleichung (6.39) liegt eine Eigenwertabschätzung des Eigenwertproblems $\mathbf{K}_e \mathbf{z} = \lambda \mathbf{M}_e \mathbf{z}$ zugrunde, für statische Fragestellungen ist eine Bestimmung der Eigenwerte und damit die Bestimmung von C^γ aus $\mathbf{K}_e \mathbf{z} = \lambda \mathbf{z}$ geeigneter.

Anzumerken bleibt jedoch, dass das Auftreten der Hourglass-Moden durch die obige Wahl des Stabilisierungsparameters nicht gänzlich unterdrückt wird, insbesondere, wenn die Lösung des Problems diese Moden enthält bzw. die Information dieser Moden für das Verhalten des Problems benötigt wird (z.B. beim Auftreten von Einzellasten, hier können auch große Werte von C^γ das Hourglassing nicht verhindern).

Kann das Erscheinen dieser Moden nicht eindeutig zugeordnet werden, wie z.B. beim Erreichen instablen Materialverhaltens, bleibt nur die Möglichkeit, die Elemente in den betroffenen Bereichen vollständig integrierte Elemente einzusetzen. Dieses Vorgehen beinhaltet allerdings die Gefahr, dass sich wiederum unerwünschte Effekte einstellen können, man würde also das Hourglassing gerade durch Locking zu vermeiden versuchen.

Die Übertragung der beschriebenen Hourglass-Stabilisierung auf die Formulierung von 3D-Kontinuumselementen ist ohne Probleme möglich.

Physikalische Stabilisierung Für Elemente, die auf Grundlage gemischter Funktionale entwickelt wurden, besteht beim Einsatz entsprechender Stabilisierungsverfahren ebenfalls die Möglichkeit der Unterintegration.

Grundlage der Stabilisierungsparameter sind die Material- und Geometrieigenschaften des Elementes. Die inneren Kräfte setzen sich aus dem reduziert integrierten Anteil der Steifigkeitsmatrix des gemischten Elementes und stabilisierenden Kräften zusammen.

$$\mathbf{f}^{int} = \int_{\Omega} (\mathbf{B}^0)^T \mathbf{C}^0 \mathbf{B}^0 d\Omega + \mathbf{f}^{stab} \quad (6.40)$$

Voraussetzung dieser Stabilisierungsmethode ist, dass im Element homogene Materialeigenschaften herrschen müssen.

Die Stabilisierungskräfte \mathbf{f}^{stab} können (im Gegensatz zur oben beschriebenen Methode) in der Herleitung analytisch bestimmt werden, d.h. es müssen keine Werte für die Stabilisierungsparameter definiert werden. Des weiteren treten keine Versteifungseffekte auf, entsprechend den Maßnahmen, die bei der Formulierung des zugrunde liegenden gemischten Elementes getroffen wurden.

6.4 Die Assumed-Natural-Strain-Methode (ANS)

Die Entwicklung der Methode der angenommenen Verzerrungen erfolgte auf Basis der bei der Unterintegration gewonnenen Erkenntnisse. Sie enthält einerseits die auch bei der reduzierten Integration eingesetzte Information über die Nullstellen der parasitären Verzerrungen, andererseits stellt sie eine Lösung zu deren Problemen, des Auftretens von inneren Kinematiken, dar.

Zwischen 1976 und 1982 wurden sowohl von MacNeal ([97], [98], [99]) als auch von Hughes et al. ([75], [76]) Vorschläge zu Formulierung von drei- und vierknotigen Elementen gemacht, die als die Grundlage der ANS-Methode angesehen werden können. Die Leistungsfähigkeit insbesondere des Plattenelementes von Hughes und Tezduyar [76] regte die Erweiterung dieses Konzeptes auf Schalen an, wobei nach

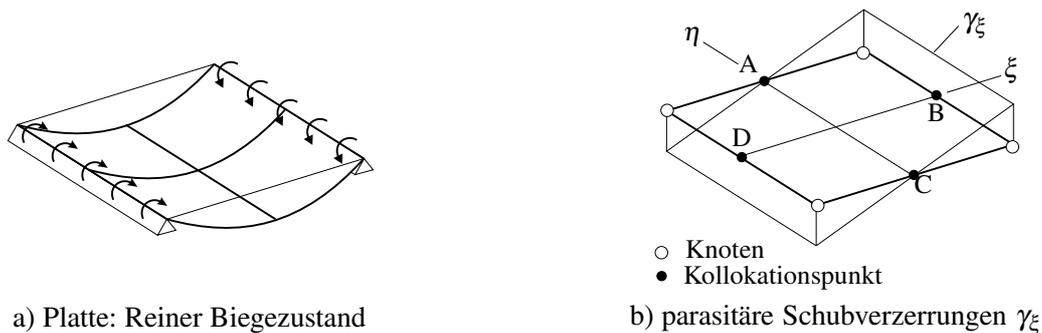


Abbildung 6.2: Kollokationspunkte der ANS-Methode

der Veröffentlichung von Bathe und Dvorkin [15] (s.a. [14], [13]) die Begriffe Bathe-Dvorkin- oder MITC-Element zu einem Synonym für ANS-Elemente wurden. Die MITC-Elemente beinhalten bereits ebenfalls die Formulierung über die tensoriellen Komponenten des Verzerrungstensors (Mixed Interpolation of Tensorial Components).

Die Methode wurde in der Folgezeit von verschiedenen Autoren auf biquadratische Elemente erweitert. Huang und Hinton [70] setzen die ANS-Methode zur Vermeidung des Querschub-Locking für ein 9-knotiges Plattenelement ein, bei dessen Extension zum Schalenelement kommt die Methode ebenfalls zur Verbesserung der Membranverzerrungen zum Einsatz [71]. Park und Stanley [116] geben ein 9-knotiges Element an, das auf der Beschreibung der Verzerrungen in natürlichen Koordinaten fußt und prägen somit den Begriff der *Assumed Natural Strains* (ANS). Weitere Entwicklungen 9-knotiger Elemente greifen dieses Konzept mit verschiedenen Modifikationen auf: Pinsky und Jang verwenden die kovarianten Komponenten des Verzerrungstensors [121], Park et al. [115] greifen auf eine Darstellung in physikalischen Verzerrungen zurück, weitere ANS-Elemente sind u.a. bei Sze et al. [146] zu finden.

Die Verwendung der an der Differentialgeometrie orientierten mechanischen Größen (natürliche Koordinaten) unterstützt die Forderung nach einer Invarianz des Elementes gegenüber Koordinatentransformationen und wirkt sich positiv auf die Verzerrungsempfindlichkeit aus.

Die ANS-Methode wird am häufigsten für die Querschubverzerrungen eingesetzt, ist jedoch ebenfalls zur Vermeidung von Membran-Locking sowie Curvature-Thickness-Locking geeignet (s. Abschnitt 6.4.2).

6.4.1 Grundidee

Grundgedanke der ANS-Methode ist die Annahme eines Verzerrungsverlaufes, der keine störenden Verzerrungen („spurious strains“) enthält. Dazu werden die Verzerrungen des verschiebungsformulierten Elementes an den Punkten (den sog. Sampling Points oder Kollokationspunkten) ausgewertet, an denen diese Dehnungen auch die „korrekten“ Werte liefern. Die Festlegung dieser Punkte erfolgt anhand geeigneter Beispiele, d.h. es werden im Regelfall die Nulldurchgänge der ursprünglichen, verschiebungskonformen Verzerrungen für einen geeigneten Testfall (z.B. reine Biegedeformation) als Kollokationspunkte verwendet.

Dabei sind, abhängig von der Ordnung des Elementes und der zu modifizierenden Verzerrungsanteile, verschiedene Kollokationspunkte zu bestimmen.

In Bild 6.2 sind die Kollokationspunkte eines vierknotigen ANS-Plattenelementes gezeigt.

Ein wesentlicher Punkt ist die Wahl der Kollokationspunkte. Aus dem Verlauf der parasitären Verzerrungen in Bild 6.2 ist ersichtlich, dass sich die korrekte Querschubverzerrung $\gamma_{\xi} = 0$ nicht nur in den zwei angezeigten Kollokationspunkten A und C einstellt, sondern entlang der gesamten Geraden $\xi = 0$. Um den angestrebten konstanten (i.A. konstant-linearen) Verlauf der Schubverzerrungen γ_{ξ} zu erzielen, könnten somit auch andere Punkte dieser Geraden verwendet und als Basis zur Extrapolation herangezogen werden.

Mit der Lage der Kollokationspunkte auf der Kante des Elementes wird auch der Zwangsbedingungsfaktor positiv beeinflusst. Die Auswertung auf der Elementkante reduziert die Anzahl der am unendlich ausgedehnten Netz zu erfüllenden Zwangsbedingungen, da sie für zwei (benachbarte) Elemente gültig ist. Für das dargestellte Element ergibt sich $r_K^{ANS} = 1.5$, was dem optimalen Wert entspricht.

Herleitung der Steifigkeitsmatrix Die Herleitung der Steifigkeitsmatrix von ANS-Elementen kann anschaulich aus der Formulierung von Verschiebungselementen begonnen werden, nach der bei der Bestimmung der Elementsteifigkeiten dem so genannten B-Operator die wesentliche Rolle zufällt. Für Plattenelemente ist dazu ein Trennung in Biege- und Schubanteile möglich⁷:

$$-\delta W^{int} = \int_{\Omega^e} \left(\delta E_{\alpha\beta}^{1,h} D_2^{\alpha\beta\gamma\delta} E_{\gamma\delta}^{1,h} \right) d\Omega^e + \int_{\Omega^e} \left(\delta E_{\alpha 3}^{0,h} D_0^{\alpha 3 \gamma 3} E_{\gamma 3}^{0,h} \right) d\Omega^e \quad (4.129)$$

$$= \mathbf{d}^T \int_{\Omega^e} \left((\mathbf{B}_\kappa^{\mathbf{u}})^T \mathbf{D}_\kappa \mathbf{B}_\kappa \right) d\Omega^e \mathbf{d} + \mathbf{d}^T \int_{\Omega^e} \left((\mathbf{B}_\gamma^{\mathbf{u}})^T \mathbf{D}_\gamma \mathbf{B}_\gamma \right) d\Omega^e \mathbf{d} \quad (6.41)$$

$$\text{mit } \boldsymbol{\kappa}^{h,u} = [\kappa_{\xi\xi}, \kappa_{\eta\eta}, \kappa_{\xi\eta}]^T = \mathbf{B}_\kappa^{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{d} \quad (6.42)$$

$$\boldsymbol{\gamma}^{h,u} = [\gamma_{\xi 3}, \gamma_{\eta 3}]^T = \mathbf{B}_\gamma^{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{d} \quad (6.43)$$

$$\mathbf{d} = [u_1^1, \dots, u_1^{n_{dof}}, \dots, u_{n_{node}}^1, \dots, u_{n_{node}}^{n_{dof}}]^T \quad (6.44)$$

Der Operator $\mathbf{B}^{\mathbf{u}}$ verknüpft die Knotenverschiebungen (und -verdrehungen) mit den Verzerrungen, repräsentiert also die diskretisierte kinematische Gleichung. Der Kopfzeiger soll darauf hinweisen, dass die entsprechenden Größen kompatibel zu den Verschiebungen sind. Wird der B-Operator unverändert, d.h. konsistent zum Verschiebungsmodell, zur Berechnung der Steifigkeitsmatrix herangezogen, treten insbesondere bei Elementen niedriger Polynomordnung die in Kapitel 5 beschriebenen Versteifungseffekte auf.

Mit der Identifikation der bei den Verschiebungselementen auftretenden parasitären Verzerrungen (s. Abschnitt 5.2.3) verwendet die ANS-Methode die in deren Verläufen auftretenden Nullstellen als Grundlage für die Formulierung eines neuen Verzerrungsfeldes (*assumed strains*), worin ein wesentlicher Unterschied zum Verfahren der selektiv reduzierten Integration besteht.

Die Auswertung der verschiebungskompatiblen Verzerrungen in den Kollokationspunkten liefert die Basis zur Formulierung der modifizierten Querschubverzerrungen. Für das vierknotige ANS-Element (MITC4) sind die Kollokationspunkte in Abbildung 6.2b angezeigt: A und C für γ_ξ , B und D für γ_η :

$$\gamma_\xi^{KP} = \gamma_\xi^u(\xi_{KP}, \eta_{KP}) \quad (6.45)$$

$$\gamma_\eta^{KP} = \gamma_\eta^u(\xi_{KP}, \eta_{KP}) \quad (6.46)$$

In Abhängigkeit dieser Verzerrungswerte, die definitionsgemäß frei von parasitären Anteilen sind, wird mit geeigneten Ansatzfunktionen ein modifizierter Verlauf der Querschubverzerrungen entwickelt, der die gewünschten Eigenschaften aufweist. Für das beschriebene Beispiel bedeutet dies einen konstanten Verlauf der Querschubverzerrungen $\bar{\gamma}_\xi$ in ξ -Richtung und einen linearen Verlauf in η -Richtung, siehe Abbildung 6.3a. Die zwei Freiwerte der Ansatzfunktionen \bar{N}^A und \bar{N}^C werden durch die Werte gemäß Gleichung (6.45) festgelegt. Entsprechend werden die Werte der Querschubverzerrungen $\bar{\gamma}_\eta$ in den Kollokationspunkten B, D mit konstant-linearen Ansatzfunktionen \bar{N}^B, \bar{N}^D (Abb. 6.3b) interpoliert:

$$\bar{\gamma}_\xi(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \eta) \cdot \gamma_\xi^u(\xi_A, \eta_A) + \frac{1}{2}(1 + \eta) \cdot \gamma_\xi^u(\xi_C, \eta_C) \quad (6.47)$$

$$\bar{\gamma}_\eta(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi) \cdot \gamma_\eta^u(\xi_B, \eta_B) + \frac{1}{2}(1 + \xi) \cdot \gamma_\eta^u(\xi_D, \eta_D) \quad (6.48)$$

⁷Für eine Schalenformulierung in krummlinigen Koordinaten ist dies ebenfalls ohne Probleme möglich, s.a. Abschnitt 6.4.2

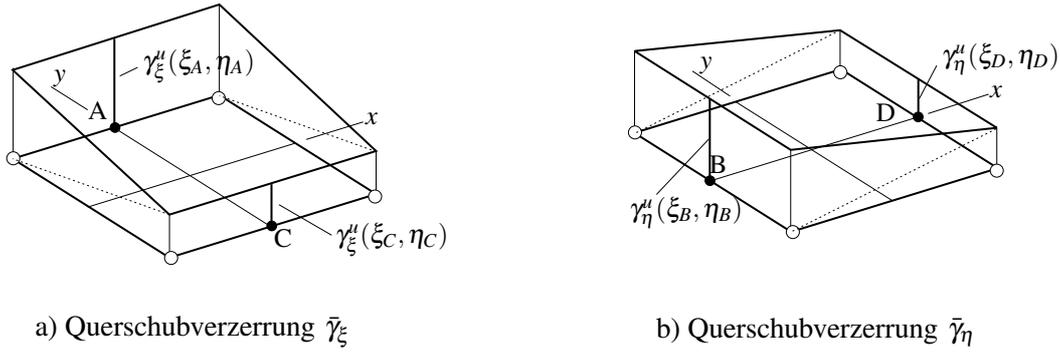


Abbildung 6.3: Modifizierte Schubverzerrungsverläufe des 4-knotigen Plattenelementes

Die modifizierten Querschubverzerrungen lassen sich direkt auf die Knotenverschiebungsfreiwerte \mathbf{d} zurückführen. Im Gegensatz zu anderen Methoden (siehe z.B. Abschnitt 6.6) treten also keine zusätzlichen Freiheitsgrade auf. Ausgehend von (6.51)–(6.52) kann also der modifizierte B-Operator $\bar{\mathbf{B}}_\gamma$ bestimmt werden, der die angenommenen Schubverzerrungen $\bar{\boldsymbol{\gamma}}$ mit den Knotenverschiebungen in Relation setzt.

$$\bar{\boldsymbol{\gamma}} = \begin{Bmatrix} \bar{\gamma}_\xi \\ \bar{\gamma}_\eta \end{Bmatrix} = \bar{\mathbf{B}}_\gamma \cdot \mathbf{d} \quad (6.49)$$

Die Berechnung der Steifigkeitsmatrix erfolgt ausgehend von Gleichung (6.41), allerdings mit dem modifizierten Operator $\bar{\mathbf{B}}_\gamma$, der den kompatiblen B-Operator \mathbf{B}_γ^u ersetzt.

$$\mathbf{k}_{ANS}^e = \int_{\Omega^e} (\mathbf{B}_\kappa^u)^T \mathbf{D}_\kappa \mathbf{B}_\kappa^u d\Omega^e + \int_{\Omega^e} \bar{\mathbf{B}}_\gamma^T \mathbf{D}_\gamma \bar{\mathbf{B}}_\gamma d\Omega^e \quad (6.50)$$

Diese Form zur Ermittlung der Steifigkeitsmatrix ist charakteristisch für Elemente, die nach der B-bar-Methode [72] entwickelt werden, zu denen auch die ANS-Methode zu zählen ist. Sie unterscheidet sich prinzipiell von der Steifigkeitsmatrix von Verschiebungselementen nur dahingehend, dass der B-Operator bzw. ein Teil des Operators durch eine modifizierte Variante ausgetauscht wird. Diese Methodik wird ebenfalls von der im Abschnitt 6.5 beschriebenen DSG-Methode aufgegriffen.

Diese Vorgehensweise lässt sich formal problemlos auf Elemente höherer Ordnung übertragen; die modifizierten Querschubverzerrungen können über die folgenden Gleichungen berechnet werden:

$$\bar{\gamma}_\xi(\xi, \eta) = \sum_{KP_\xi=1}^{n_{KP_\xi}} \bar{N}_\xi^{KP}(\xi, \eta) \cdot \gamma_\xi''(\xi_{KP}, \eta_{KP}) \quad (6.51)$$

$$\bar{\gamma}_\eta(\xi, \eta) = \sum_{KP_\eta=1}^{n_{KP_\eta}} \bar{N}_\eta^{KP}(\xi, \eta) \cdot \gamma_\eta''(\xi_{KP}, \eta_{KP}) \quad (6.52)$$

Ein Nachteil der ANS-Methode wird dabei jedoch deutlich: sowohl die Lage und Anzahl der Kollokationspunkte (ξ_{KP}, η_{KP}) als auch die Ansatzfunktionen \bar{N} müssen für jeden Elementtyp (und jeden Versteifungseffekt, siehe Abschnitt 6.4.2) getrennt bestimmt werden.

Die Anwendung der Gleichungen (6.51) bzw. (6.52) ist also nicht in der Allgemeingültigkeit möglich, wie es die Modifikationsvorschriften der DSG-Methode (Abschnitt 6.5) erlauben.

6.4.2 Erweiterungen der ANS-Methode

Die Anwendung der ANS-Methode ist – wie bereits angedeutet – nicht auf die oben beispielhaft beschriebene Modifikation der Querschubverzerrungen beschränkt, sondern kann prinzipiell auf jeden störenden

Verzerrungsanteil angewendet werden. Voraussetzung für eine erfolgreiche Applikation sind jedoch eine oder mehrere Nullstellen der parasitären Verzerrungen, da die Konstruktion der modifizierten Verzerrungen auf der korrekten, d.h. die jeweilige Zwangsbedingung erfüllenden Auswertung der kompatiblen Verzerrung in wenigstens einem Punkt basiert.

Curvature-Thickness-Locking

Bei der Modellierung gekrümmter Strukturen mit Kontinuumsselementen bzw. mit 7-Parameter-Schalenelementen können parasitäre Normalverzerrungen in Dickenrichtung auftreten, siehe Abschnitt 5.4.

Die Identifikation der parasitären Verzerrungen erfolgt für den Fall einer reinen Biegedeformation. Für den Fall des bilinearen Schalenelementes ergibt sich für diesen Zustand ein quadratischer Verlauf der Normalverzerrungen:

$$E_{33}^{0,h} = \frac{1}{4} (1 - (\theta^\alpha)^2) t \sin(\varphi) |\mathbf{w}| \quad (5.29)$$

Für das Schalenelement werden die Nullstellen dieser Verzerrungen offensichtlich durch die Funktion $(1 - \theta^\alpha)^2$ bestimmt und fallen mit der Lage der Elementknoten zusammen ($\theta^\alpha = \pm 1$). Als Kollokationspunkte für die ANS-Modifikation werden demnach die N Knoten des Elementes gewählt:

$$E_{33}^{0,KP} = E_{33}^0(\xi_N, \eta_N) \quad (6.53)$$

Zur Interpolation werden die selben Ansatzfunktionen wie für die Verschiebungsfelder gewählt. Für das 4-knotige Element ergibt sich somit ein bilinearer Verlauf (in ξ, η) der modifizierten Normalverzerrungen in Dickenrichtung.

$$E_{33}^{0,ANS} = \sum_{N=1}^{n_{node}} N^N(\xi, \eta) E_{33}^0(\xi_N, \eta_N) \quad (6.54)$$

Die Analyse des biquadratischen 7-P-Schalenelementes für den Biegezustand liefert den folgenden Verlauf der parasitären Verzerrungen

$$E_{33}^{0,h} = C \cdot (\theta^\alpha)^2 (1 - (\theta^\alpha)^2) , \quad (6.55)$$

mit der Konstante C , die von Parametern $t, \varphi, |\mathbf{w}|$ definiert ist. Die Nullstellen der verschiebungskompatiblen Dickenverzerrungen wiederum identisch mit den Knoten des Elementes: $\theta^\alpha = -1, 0, 1$. Die Wahl der Kollokationspunkte sowie die Interpolationsvorschrift der modifizierten Verzerrungen erfolgt somit für das 9-knotige Element entsprechend dem 4-knotigen, Gleichung (6.53) bzw. (6.54). Diese Konformität zwischen Elementen verschiedener Polynomordnung ist allerdings für die ANS-Methode untypisch.

Verbesserung der Membranverzerrungen

Bei der Behandlung der Membranverzerrungen ist zwischen den Maßnahmen, die auf eine Vermeidung des Membran-Locking (Kap. 5.7) oder eine Verbesserung des Verhaltens hinsichtlich der Scheibentragwirkung (Shear-Locking 5.3, Trapezoidal-Locking 5.4) abzielen, zu unterscheiden. Insbesondere das bilineare Element weist nur eine begrenzte Anzahl an Modifikationsmöglichkeiten auf.

Biquadratische Elemente Für gekrümmte Elemente, d.h. Elemente mit mindestens (bi-)quadratischer Ansatzordnung, ist eine Vermeidung des Membran-Locking (Kap. 5.7) unbedingt erforderlich, um nicht ähnlich gravierende Einschränkungen hinsichtlich der Konvergenz wie beim Querschub-Locking zu erhalten⁸.

Der die Kollokationspunkte bestimmende Testfall ist die Beschreibung dehnungsloser Verformungen. In Abschnitt 5.7 wurde gezeigt, dass die Lage der Nullstellen für diesen Zustand von der Krümmung des Elementes abhängig ist. Da insbesondere in die Formulierung der Schalenelemente weitere Annahmen unter der Voraussetzung einer mäßigen Krümmung einfließen, tritt der Fehler bei der Wahl eines festen Nulldurchgangs in den Hintergrund.

Die Analyse der inextensiblen Deformation erfolgt dementsprechend unter der Annahme schwach gekrümmter Elemente und deren kinematischer Vereinfachungen, vgl. Abschnitt 5.7.1. Eine weitere Rechtfertigung erfährt dieses Vorgehen durch die Annäherung der kinematischen Gleichungen für beliebig gekrümmte Elemente an diejenigen der Theorie flacher Schalen (bzw. Balken) für den Fall der Netzverfeinerung.

Für quadratische Elemente kann Gleichung (5.53) auf zweidimensionale Strukturen übertragen werden

$$\varepsilon_{\alpha\alpha}^h = C \cdot \left(\frac{1}{3} - (\theta^\alpha)^2\right), \quad (6.56)$$

und erlaubt die Bestimmung der Kollokationspunkte in θ^α -Richtung: $\theta^\alpha = \pm 1/\sqrt{3}$. Da jeweils nur der Verlauf in dieser Richtung parasitär ist, entspricht die Zahl der Kollokationspunkte in β -Richtung den zur korrekten numerischen Integration erforderlichen Gauss-Punkten (s.a. Abbildungen 6.4, 6.5), womit sich ein linear-quadratischer Verlauf der Normalmembranverzerrungen $\varepsilon_{\alpha\alpha}^h$ ergibt.

Die Berechnung der modifizierten Normalverzerrungen erfolgt nach den Gleichungen 6.57 – 6.58 unter Verwendung der in 6.64 – 6.68 (ANS9-Element von Jang und Pinsky) bzw. 6.73 – 6.77 (MITC9-Element von Bucalem und Bathe) definierten Interpolationsfunktionen.

$$\varepsilon_{11}^{ANS}(\xi, \eta) = \sum_3^{i=1} \sum_2^{j=1} P_i(\eta) \cdot Q_j(\xi) \cdot \varepsilon_{11}^{ij}(\xi^i, \eta^j) \quad (6.57)$$

$$\varepsilon_{22}^{ANS}(\xi, \eta) = \sum_3^{i=1} \sum_2^{j=1} P_i(\xi) \cdot Q_j(\eta) \cdot \varepsilon_{22}^{ij}(\xi^i, \eta^j) \quad (6.58)$$

Jang und Pinsky [84] schlagen desweiteren eine Modifikation der Inplane-Schubverzerrungen vor. Infolge der Zusammensetzung der Schubdehnungen aus zwei Anteilen,

$$\gamma_{12}^{in} = \mathbf{u}_{,1} \cdot \mathbf{G}_2 + \mathbf{u}_{,2} \cdot \mathbf{G}_1 \quad (6.59)$$

bietet sich eine dieser Aufteilung folgenden Modifizierung an⁹. Dabei wurde eine lineare Interpolation der Anteile $\mathbf{u}_{,\alpha} \cdot \mathbf{G}_\beta$ in α -Richtung mit einer quadratischen Verteilung in β -Richtung kombiniert:

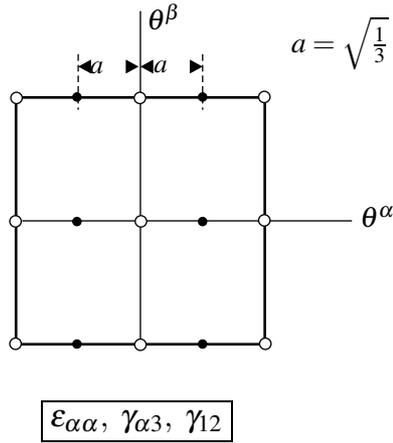
$$\gamma_{12}^{ANS} = [\mathbf{u}_{,1} \cdot \mathbf{G}_2]^{ANS}(\xi, \eta^2) + [\mathbf{u}_{,2} \cdot \mathbf{G}_1]^{ANS}(\xi^2, \eta) \quad (6.60)$$

Durch diese Vorgehensweise geht allerdings die Invarianz gegenüber Starrkörperrotationen verloren, weshalb die Formulierung dahingehend geändert wurde, dass die Konstruktion der linear-quadratischen bzw. quadratisch-linearen Verläufe sich auf die Auswertung der gesamten Schubverzerrungen stützt und das modifizierte Verzerrungsfeld durch das arithmetische Mittel dieser Verläufe gebildet wird:

$$\gamma_{12}^{I,ANS}(\xi, \eta) = \sum_3^{i=1} \sum_2^{j=1} R_i(\eta) \cdot Q_j(\xi) \cdot \alpha_{12}^{ij} \quad (6.61)$$

⁸Der Effekt tritt für bilineare Elemente bei verdrehter Geometrie ebenfalls auf, besitzt hier jedoch einen wesentlich geringeren Einfluss

⁹Siehe auch 9-knotiges DSG-Element, Abs. 6.5.5, die hier beschriebene Schwäche des ANS-Elementes lässt sich bei der DSG-Formulierung allerdings nicht feststellen



$$P_1(\rho) = \frac{1}{2}\rho(1 + \rho) \quad (6.64)$$

$$P_2(\rho) = \frac{1}{2}(1 - \rho)(1 + \rho) \quad (6.65)$$

$$P_3(\rho) = \frac{1}{2}\rho(1 - \rho) \quad (6.66)$$

$$Q_1(\rho) = \frac{1}{2}(1 + \rho) \quad (6.67)$$

$$Q_2(\rho) = \frac{1}{2}(1 - \rho) \quad (6.68)$$

$$R_1(\rho) = \frac{1}{6}(1 + 3\rho) \quad (6.69)$$

$$R_2(\rho) = \frac{2}{3} \quad (6.70)$$

$$R_3(\rho) = \frac{1}{6}(1 - 3\rho) \quad (6.71)$$

Abbildung 6.4: Kollokationspunkte und Interpolationsfunktionen des ANS9-Elementes nach [84]

$$\gamma_{12}^{II,ANS}(\xi, \eta) = \sum_3^{i=1} \sum_2^{j=1} R_i(\xi) \cdot Q_j(\eta) \cdot \alpha_{12}^{ij} \quad (6.62)$$

Durch anschließende Mittelung dieser beiden Komponenten erhält man die angenommenen Verzerrungen für den Inplane-Schub.

$$\gamma_{12}^{ANS}(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \left(\alpha_{12}^{I,ANS}(\xi, \eta) + \alpha_{12}^{II,ANS}(\xi, \eta) \right) \quad (6.63)$$

Das 9-knotige MITC-Element von Bucalem und Bathe [44] unterscheidet sich zu der obigen Formulierung der Normal- und Querschubverzerrungen nur in der Lage der Kollokationspunkte. Bucalem und Bathe wählen hierzu in der Richtung, die nicht durch die Nullstellen der parasitären Verzerrungen vorgegeben ist, zu den Gausspunkten koinzidente Stützstellen.

$$\gamma_{12}^{MITC9}(\xi, \eta) = \sum_2^{i=1} \sum_2^{j=1} Q_i(\xi) \cdot Q_j(\eta) \cdot \gamma_{12}^{jj}(\xi^i, \eta^j) \quad (6.72)$$

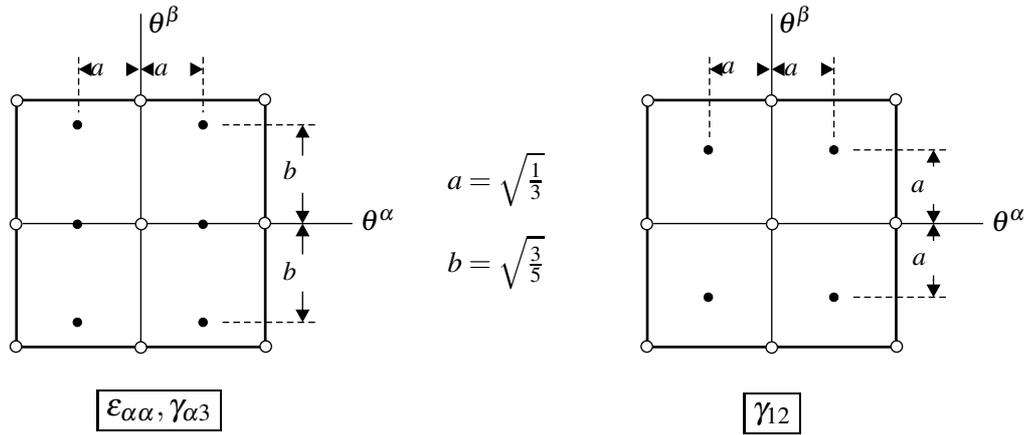
Unterschiede ergeben sich hierdurch allerdings in den Zwangsbedingungsfaktoren: während das ANS9-Element von Jang und Pinsky infolge der Lage der Kollokationspunkte auf dem Elementrand den optimalen Wert aufweist, $r_K^{ANS9,JP} = \frac{3}{2}$, fällt das MITC9-Element ($r_K^{MITC9} = 1$) in diesem Vergleich etwas zurück. In praktischen Berechnungen erweist sich der Unterschied jedoch nur als marginal.

Die bilineare Interpolation der Inplane-Schubverzerrungen erfolgt ohne weitere Aufteilung über die Auswertung von γ_{12} in den 2×2 -Gausspunkten, der Zwangsbedingungsfaktor ist identisch zu dem des ANS9-Elementes.

Bilineare Elemente ANS-Modifikationen der Membrananteile sind im Kontext bilinearer *Schalen*elemente in der Literatur fast nicht erwähnt.

Gelegentlich wird mit dem Hinweis auf eine Verbesserung des Verhaltens bei der Berechnung wand- oder balkenartiger Strukturen eine Auswertung der Inplane-Schubverzerrungen in Elementmitte ($\xi = 0, \eta = 0$) vorgeschlagen, z.B. Büchter [45]. Diese Annahme eines im Element konstanten Dehnungsverlaufes entspricht der selektiv reduzierten Integration und eliminiert die parasitären Schubverzerrungen für Biegezustände (vgl. Abbildung 5.7 und (5.23)).

Die für (trapezförmig) verzerrte Elemente auftretenden parasitären Normalspannungen können zwar mit einer dem beim Querschub-Locking verwendeten Kollokation und Interpolation der ANS-Methode entsprechend modifiziert werden, bestehen dann aber den Patchtest nicht mehr.



$$P_1(\rho) = \frac{1}{2}\rho(1 + \rho) \quad (6.73)$$

$$P_2(\rho) = \frac{1}{2}(1 - \rho)(1 + \rho) \quad (6.74)$$

$$P_3(\rho) = \frac{1}{2}\rho(1 - \rho) \quad (6.75)$$

$$Q_1(\rho) = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}\rho) \quad (6.76)$$

$$Q_2(\rho) = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}\rho) \quad (6.77)$$

Abbildung 6.5: Kollokationspunkte und Interpolationsfunktionen des MITC9-Elementes [44]

Andelfinger [4] schlägt deshalb eine Aufteilung der Elementsteifigkeit in eine Basissteifigkeit \mathbf{k}_c und einen Anteil \mathbf{k}_h , der die höheren Steifigkeitsterme enthält, vor. Starrkörperverschiebungen sowie konstante Verzerrungsmoden können über die Einpunkt-integrierte Basissteifigkeitsmatrix \mathbf{k}_c des Verschiebungselementes erfasst werden, das Bestehen des Patchtests ist damit gesichert¹⁰.

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_c + \mathbf{k}_h \quad (6.78)$$

Die ANS-Modifikation wird somit nur auf die störenden Anteile der Steifigkeitsmatrix \mathbf{k}_h angewendet. Um die exakten Terme der Basissteifigkeit nicht zu beeinflussen, wird die Steifigkeitsmatrix in Abhängigkeit der generalisierten Freiwerte α der globalen Moden formuliert,

$$\mathbf{k}_h^\alpha = \int_{\Omega} (\mathbf{B}^\alpha)^T \mathbf{C} \mathbf{B}^\alpha d\Omega. \quad (6.79)$$

Diese Maßnahme gewährleistet die erforderliche Orthogonalität der höheren zu den Basistermen. Die Modifikation erfolgt hinsichtlich der gewünschten linear-konstanten Verteilung der den zwei Biegemoden zugeordneten Normalspannungen mit der Interpolationsvorschrift gemäß Abbildung 6.6:

$$\bar{\varepsilon}_{11}^\alpha(\xi, \eta) = N^A \varepsilon_{11}^A + N^C \varepsilon_{11}^C \quad (6.80)$$

$$\bar{\varepsilon}_{22}^\alpha(\xi, \eta) = N^B \varepsilon_{22}^B + N^D \varepsilon_{22}^D \quad (6.81)$$

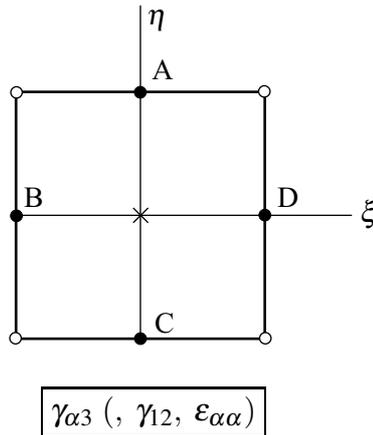
Der resultierende neue B-Operator $\bar{\mathbf{B}}^\alpha$ muss lediglich für die Formulierung der Steifigkeitsmatrix in Knotenfreiwerten \mathbf{d} noch transformiert werden.

Diese Vorgehensweise weist in seiner Grundidee Ähnlichkeiten mit der *Free Formulation* auf.

6.4.3 Zusammenfassung

Die bisherige Beschreibung der ANS-Methode beschränkte sich auf viereckige Elemente, deren Erfolg natürlich auch die Formulierung dreieckiger Elemente motivierte (z.B. MITC7, MITC12 von Bathe et al.). Im Vergleich zu den viereckigen Elementen weisen die 3-eckigen ANS-Elemente jedoch eine schlechtere Effizienz auf (Hauber [67]). Leistungsfähige Dreiecks-Elemente auf Basis einer B-bar-Formulierung können jedoch mit der DSG-Methode hergeleitet werden, siehe Abschnitt 6.5.3).

¹⁰Die Basissteifigkeit \mathbf{k}_c wurde ebenfalls bei den Hourglass-stabilisierten Elementen eingesetzt, vgl. Abschnitt 6.3.2



$$N^A(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \eta) \quad (6.82)$$

$$N^C(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 + \eta) \quad (6.83)$$

$$N^B(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad (6.84)$$

$$N^D(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (6.85)$$

Abbildung 6.6: Kollokationspunkte und Interpolationsfunktionen des ANS4-Elementes

Tabelle 6.1 gibt einen Überblick für die Zwangsbedingungsfaktoren verschiedener ANS-Elemente für die unterschiedlichen Locking-Phänomene. Aufgrund der im Vergleich zum MITC9-Element optimalen Zwangsbedingungsfaktoren bietet sich für 9-knotige ANS-Elemente eine Modifikation der Querschub- und Normalmembranverzerrungen entsprechend Abbildung 6.4 an. Für die Inplane-Schubverzerrungen ergeben sich identische Werte, weshalb die Interpolation nach Bild 6.5 rechts des geringeren Aufwands zufolge geeigneter erscheint.

	Optimaler Wert	ANS-4	ANS-9	MITC-9
Querschub-Locking $\gamma_x = \gamma_y = 0$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	1
Membran-Locking $\epsilon_x = \epsilon_y = 0$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	1
Curvature-Thickness-Locking $\epsilon_{33} = 0$	4	4	4	4
Shear-Locking $\gamma_{xy} = 0$	2	2	2	2

Tabelle 6.1: Zwangsbedingungsfaktoren der ANS-Elemente

Für einige ANS-Elemente existieren ebenfalls mathematische Untersuchungen hinsichtlich Stabilität und Konvergenz. So wurde beispielsweise die Erfüllung der BABUSKA-BREZZI-Bedingung anhand der bereits beschriebenen numerischen inf-sup-Tests (s. 3.1.2) von Iosilevich et al. [80] für MITC-Plattenelemente und von Bathe et al. [16] für MITC-Schalenelemente nachgewiesen.

6.5 Die Discrete-Strain-Gap-Methode (DSG)

6.5.1 Einleitung

Die von Bletzinger et al. [37] vorgeschlagene und ursprünglich als Discrete-*Shear*-Gap bezeichnete Methode wurde zur Formulierung lockingfreier schubweicher Balken-, Platten- und Schalenelemente entwickelt. Sie beinhaltet die gezielte Modifikation der Querschubverzerrungen und führt zu einer ausschließlich auf Verschiebungsgrößen basierenden Formulierung.

Koschnick et al. ([90], [92], [91]) sowie Bischoff et al. [32] erweitern den Anwendungsbereich der DSG-Methode auf alle geometrischen Lockingeffekte. Diese Erweiterung wird ebenfalls durch die modifizierte Bezeichnung als Discrete-*Strain*-Gap-Methode zum Ausdruck gebracht.

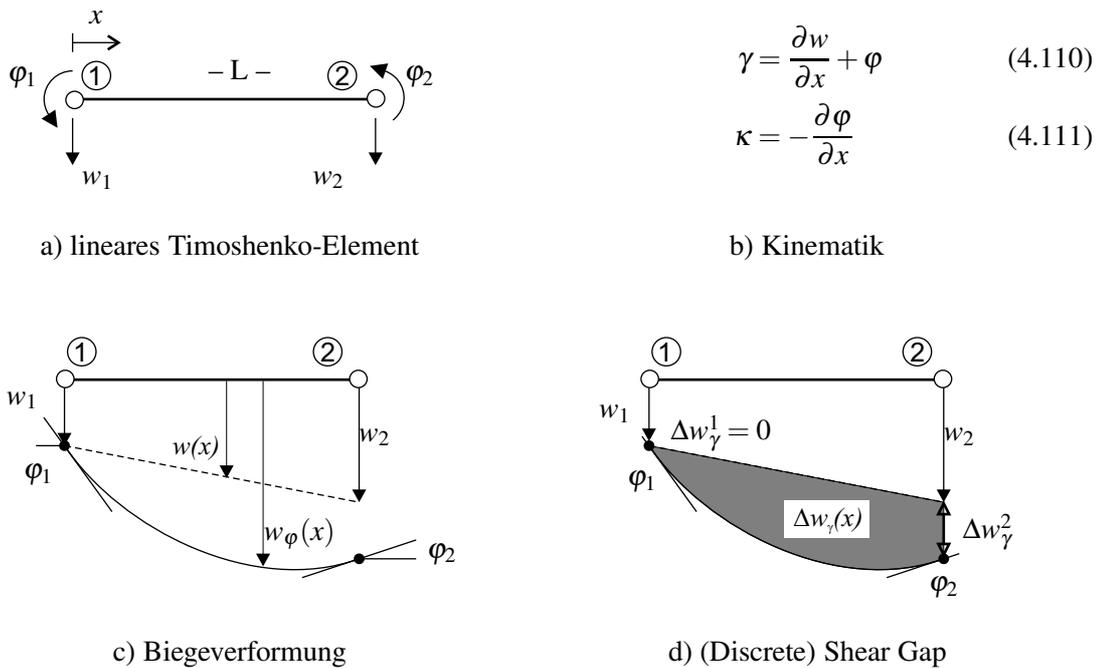


Abbildung 6.7: Discrete-Shear-Gap-Methode

Die Modifikation der Verläufe bestimmter Verzerrungsanteile deutet die Verwandtschaft der DSG- zur ANS-Methode an. Beide Methoden resultieren in Elementformulierungen, die ohne Einführung und Kondensation zusätzlicher Freiheitsgrade (wie z.B. bei der EAS-Methode 6.6) auskommen und lediglich die Knotenfreiwerte des Verschiebungselementes aufweisen. Die Ähnlichkeit spiegelt sich auch in identischen Steifigkeitsmatrizen für bestimmte Elementtypen und -geometrien wieder.

Die Besonderheit und der wesentliche Unterschied liegt jedoch in der konzeptionellen Gestaltung der DSG-Methode: während bei der ANS-Methode für jeden Elementtyp (Viereck, Dreieck), jede Polynomordnung und jeden zu modifizierenden Verzerrungsanteil verschiedene Kollokationspunkte und Interpolationsfunktionen festgelegt werden müssen, kann die DSG-Methode ohne weitere Überlegungen zur Formulierung sowohl von Drei- als auch von Viereckselementen beliebiger Polynomordnung angewendet werden.

6.5.2 Grundidee und Anwendung auf Querschub-Locking

Die Grundidee der DSG-Methode besteht in der Identifikation des Anteils der Querschubverzerrungen an den Gesamtverschiebungen eines Elementes. Die Auswertung dieses Anteils in den Elementknoten liefert die Grundlage zur Bestimmung eines modifizierten Schubspannungsverlaufs. Verändert werden somit nur bestimmte Verzerrungskomponenten bzw. der entsprechende Differentialoperator \mathbf{B} , so dass auch die DSG-Methode in Anlehnung an Hughes [73] als B-bar-Methode angesehen und entsprechend leicht in bestehende FE-Programme implementiert werden kann.

Insbesondere steht mit der Eigenschaft als B-bar-Methode eine variationelle Basis der DSG-Methode zur Verfügung, siehe Abschnitt 6.2.1.

Ausgangspunkt der Entwicklung der DSG-Elemente waren Überlegungen zur Erfüllung der Bernoulli-Bedingung bei schubweichen Balkenelementen. Die Beschreibung der prinzipiellen Idee und der Eigenschaften der DSG-Methode lässt sich anhand des linearen, zweiknotigen Timoshenko-Balkens anschaulich darlegen (s. Bild 6.7a).

Die Verformung des Balkenkontinuums wird beim Timoshenko-Balken durch die Verschiebung der Balkenachse und die Verdrehung des Balkenquerschnittes beschrieben. Erster Schritt nach der DSG-

Methode ist nun, die Deformation des Elementes nicht direkt mittels Interpolation der Knotenverschiebungen zu beschreiben, sondern die Anteile der einzelnen Komponenten der kinematischen Gleichung an der Gesamtverschiebung zu separieren.

Der Anteil der Schubverzerrungen w_γ ergibt sich dann als Differenz der Gesamtverschiebung w und der Verformung infolge reiner Biegung w_φ zu

$$w_\gamma = w - w_\varphi . \quad (6.86)$$

Der Anteil w_φ kann aus der Bernoulli-Bedingung $w_{,x} = -\varphi$ durch Integration hergeleitet werden und stellt für den Timoshenko-Balken eine reine Biegeverformung dar. Die dabei auftretende Integrationskonstante kann ohne Einschränkung zu Null gesetzt werden, da sie mit ihrer Bedeutung als Relativverschiebung nicht in die Berechnung der Verzerrungen eingeht.

$$w_\varphi(x) = - \int_x \varphi(x) dx \quad (6.87)$$

Die Integration der linear interpolierten Verdrehungen $\varphi^h(x)$ ergibt einen quadratischen Verlauf für die Biegeverschiebungen w_φ (Abbildung 6.7c), die somit genau die Polynomordnung aufweisen, die sich für die Durchsenkungen aus der zugrundeliegenden Differentialgleichung für ein konstantes Biegemoment ergibt.

Durch Einsetzen dieser Beziehung in Gleichung 6.86 können die Verschiebungen infolge der Schubverzerrungen formal als Integral der kinematischen Gleichung 4.110 berechnet werden.

$$w_\gamma(x) = w(x) - w_\varphi(x) = w(x) + \int_x \varphi(x) dx = \int_0^x [w(x)_{,x} + \varphi(x)] dx = \int_0^x \gamma(x) dx \quad (6.88)$$

Der Shear Gap $w_\gamma(x)$ repräsentiert die Differenz zwischen den Gesamt- und Biegeverschiebungen. Der Verlauf der Shear Gaps (Bild 6.7d) ist nicht im gesamten Gebiet frei von parasitären Anteilen, jedoch in den Knoten.

Diese Eigenschaft wird deutlicher, wenn für das zweiknotige Balkenelement ein reiner Biegezustand wie in Abbildung 6.8c betrachtet wird. Die Schubklaffungen sind in den Knoten identisch Null und entsprechen somit der Forderung, dass für diesen Zustand kein Einfluss der Querschubverzerrungen vorhanden sein darf. Diese Knotenwerte, die diskreten Schubklaffungen (*Discrete Shear Gaps*) (Abb. 6.7d) lassen sich einfach durch Auswertung des Integrals (6.88) in den Elementknoten bestimmen.

$$\Delta w_\gamma^k = \int_{x_0}^{x_k} \gamma(x) dx \quad (6.89)$$

Die Schubklaffung für den Startpunkt der Integration x_0 ist dabei definitionsgemäß unabhängig von der Ordnung des Elementes gleich Null. Für das zweiknotige Element ergeben sich somit die Discrete-Shear-Gaps zu

$$\Delta w_\gamma^1 = 0 \quad (6.90)$$

$$\Delta w_\gamma^2 = w_2 - w_1 + \frac{L}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) \quad (6.91)$$

Mit den diskreten Schubklaffungen Δw_γ^k wird ein modifizierter Schubklaffungsverlauf $w_\gamma^*(x)$ bestimmt, der entsprechend der Eigenschaft der *Discrete*-Shear-Gaps ebenfalls keine parasitären Anteile aufweist. Da die diskreten Schubklaffungen in den *Knoten* des Elementes ausgewertet werden, kann die Interpolation zum verbesserten Shear-Gap-Verlauf mit den selben Formfunktionen wie für die Geometrie und für die Verschiebungen bzw. Rotationen erfolgen ¹¹.

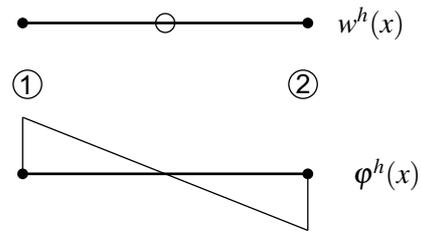
$$w_\gamma^*(x) = \sum_{k=1}^{n_{knot}} \Delta w_\gamma^k \quad (6.92)$$

¹¹Hier zeigt sich der wesentliche Vorteil im Vergleich zur ANS-Methode: es ist weder die Bestimmung von Kollokationspunkten noch von speziellen Ansatzfunktionen erforderlich, die Auswertung der Discrete-Strain-Gaps erfolgt immer in den Elementknoten, als Interpolationsfunktionen können immer die „üblichen“ Formfunktionen des Elementes verwendet werden.

a) Reiner Biegezustand (symmetrisch):

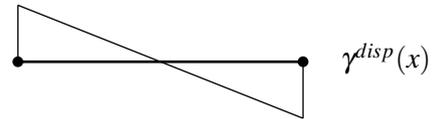
$$w_1 = w_2 = 0$$

$$\varphi_1 = -\varphi_2$$



b) Verschiebungsformuliertes Element:

$$\begin{aligned} \gamma^{disp}(x) &= N_{,x}^k w_k + N^k \varphi_k \\ &= \frac{1}{L}(w_2 - w_1) + \left(1 - \frac{x}{L}\right) \varphi_1 + \frac{x}{L} \varphi_2 \end{aligned}$$



c) DSG-Element:

$$\begin{aligned} \gamma^{DSG}(x) &= N_{,x}^k \int_{x_0}^{x_k} (w_{,x} + \varphi) dx \\ &= \frac{1}{L}(w_2 - w_1) + \frac{L}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) \end{aligned}$$

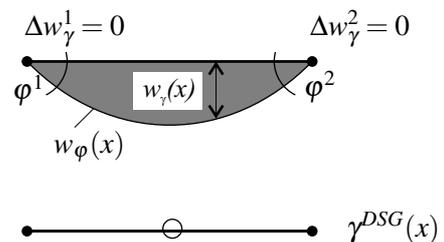


Abbildung 6.8: Zweiknotiger, schubweicher Balken unter reiner Biegung: Verschiebungs- und DSG-Element

Ausgehend vom modifizierten Verlauf der Schubklaffungen werden die modifizierten Schubverzerrungen durch Differentiation erhalten:

$$\gamma^*(x) = \frac{\partial w_\gamma^*(x)}{\partial x}. \quad (6.93)$$

Eingesetzt erhält man somit für die nach der Discrete-Shear-Gap-Methode modifizierten Verzerrungen

$$\gamma^{DSG}(x) = \sum_{k=1}^{n_{knot}} N_{,x}^k(x) \left[\int_{x_0}^{x_k} (w_{,x}(x) + \varphi(x)) dx \right]. \quad (6.94)$$

Als einzige Unbekannte treten bei der Definition der DSG-Verzerrungen die Knotenverschiebungsfreiheitsgrade auf, d.h. es sind keine zusätzlichen Spannungs- oder Verzerrungswerte vorhanden und zu kondensieren, wie beispielsweise bei der EAS-Methode. Aus Gleichung 6.94 lässt sich direkt der Differentialoperator \mathbf{B}^{DSG} bestimmen, der gegenüber dem verschiebungsformulierten Element als einzige Komponente im Berechnungsablauf zu ändern ist.

Die resultierende Steifigkeitsmatrix des zweiknotigen DSG-Balkenelementes ist identisch zu der des (selektiv) unterintegrierten linearen Elementes bzw. einer ANS-Formulierung mit dem Kollokationspunkt bei $x = l/2$.

Die diskretisierten Schubverzerrungen für das verschiebungsformulierte (Disp.) und das nach der DSG-Methode formulierte zweiknotige Balkenelement sind in Abbildung 6.8 zusammengestellt. Für einen reinen Biegezustand sind die entsprechenden Verläufe skizziert.

DSG-Modifikationen für den Querschub bei Platten- und Schalenelementen Die gerade beschriebenen Schritte zur Entwicklung Querschub-Locking-freier Balkenelemente können nahezu unverändert zur Formulierung von Platten- und Schalenelementen verwendet werden ([29],[37]).

Ein wesentlicher Gesichtspunkt der DSG-Methode – und wiederum eine Konformität zur ANS-Methode – ist die Beschreibung der Verzerrungen in natürlichen Koordinaten, die – im Gegensatz zum zweiknotigen Balkenelement – bei der Formulierung von Flächenelementen zum Tragen kommt.

Ausgangspunkt für die DSG-Modifikationen sind somit die den Querschubverzerrungen zugeordneten tensoriellen Komponenten $\gamma_{\alpha 3}$ des eingesetzten Platten- bzw. Schalenmodells (Kapitel 4). Sämtliche Modifikationen, d.h. die Berechnung der Discrete-(Shear)-Strain-Gaps, Interpolation, Differentiation etc. erfolgen ebenfalls in den natürlichen Koordinaten θ^1, θ^2 bzw. ξ, η . Eine eindeutige Zuordnung von Verschiebungen zur gesamten Querschubdeformation, d.h. die Identifikation *eines* Schubklaffungsfeldes wie beim Balken ist nicht mehr möglich, sondern wird getrennt für jede Koordinatenrichtung ξ, η durchgeführt.

Der erste Schritt der DSG-Modifikation des Querschubanteiles von 2D-Strukturelementen ist demzufolge die Bestimmung der diskreten Schubklaffungen $\Delta\gamma_{\alpha 3}^k$ und formal völlig identisch zur o.g. Vorgehensweise.

$$\Delta\gamma_{13}^K = \int_{\xi_0}^{\xi_K} \gamma_{13}(\xi, \eta) d\xi \quad (6.95)$$

$$\Delta\gamma_{23}^K = \int_{\eta_0}^{\eta_K} \gamma_{23}(\xi, \eta) d\eta \quad (6.96)$$

Auch hier sind definitionsgemäß die diskreten Schubklaffungen in den Anfangspunkten der jeweiligen Integrationsrichtung gleich Null, d.h. $\Delta w_{\gamma_{\alpha 3}}^k = 0$ für $\theta^\alpha = \theta_0^\alpha$. Für viereckige Elemente kann ohne Einschränkung ein beliebiger Knoten als Startpunkt für die Integration festgelegt werden. Das Verhalten dreieckiger Elemente gegenüber Netzverzerrungen kann jedoch durch eine entsprechende Wahl dieses Referenzknotens optimiert werden, siehe Abschnitt 6.5.3.

Mit der Definition der Querschubverzerrungen (4.47) und deren Diskretisierung (4.90) ergeben sich die diskreten Schubklaffungen

$$\Delta\gamma_{13}^I = \int_{\xi_0}^{\xi_K} [N_{,\xi}^K(\xi, \eta_I) N^L(\xi, \eta_I) \mathbf{R}^K \cdot \mathbf{w}_3^L + N_{,\xi}^K(\xi, \eta_I) N^L(\xi, \eta_I) \mathbf{v}^K \cdot \mathbf{A}_3^L + N_{,\xi}^K(\xi, \eta_I) N^L(\xi, \eta_I) \mathbf{v}^K \cdot \mathbf{w}^L] d\xi \quad (6.97)$$

$$\Delta\gamma_{23}^I = \int_{\eta_0}^{\eta_K} [N_{,\eta}^K(\xi_I, \eta) N^L(\xi_I, \eta) \mathbf{R}^K \cdot \mathbf{w}_3^L + N_{,\eta}^K(\xi_I, \eta) N^L(\xi_I, \eta) \mathbf{v}^K \cdot \mathbf{A}_3^L + N_{,\eta}^K(\xi_I, \eta) N^L(\xi_I, \eta) \mathbf{v}^K \cdot \mathbf{w}^L] d\eta \quad (6.98)$$

Unter Verwendung der für die Verschiebungsfelder eingesetzten Formfunktionen N^K werden die diskreten Schubklaffungen im Element interpoliert

$$\Delta\gamma_{13}^*(\xi, \eta) = N^K \Delta\gamma_{13}^K \quad (6.99)$$

$$\Delta\gamma_{23}^*(\xi, \eta) = N^K \Delta\gamma_{23}^K, \quad (6.100)$$

und schließlich die modifizierten Querschubverzerrungen durch partielle Differentiation ermittelt:

$$\gamma_{13}^{DSG} = \frac{\partial \Delta\gamma_{13}^*}{\partial \xi} = N_{,\xi}^K \Delta\gamma_{13}^K \quad (6.101)$$

$$\gamma_{23}^{DSG} = \frac{\partial \Delta\gamma_{23}^*}{\partial \eta} = N_{,\eta}^K \Delta\gamma_{23}^K. \quad (6.102)$$

Diese modifizierten Verzerrungen beinhalten keine Einschränkung hinsichtlich linearer Kinematik und können zur Formulierung (geometrisch) nichtlinearer Strukturelemente herangezogen werden. Die dazu

erforderlichen Linearisierungen sind direkt aus den Gleichungen (6.101) und (6.102) ableitbar und treten anstelle der entsprechenden verschiebungskonformen Ausdrücke.

Die DSG-Modifikationen der Querschubanteile entsprechend (6.101)–(6.102) resultieren für vierknotige Schalenelemente in einer der ANS-Methode äquivalenten Formulierung¹². So besitzen das bilineare DSG-Element und das MITC4-Element von Bathe und Dvorkin [14] identische Steifigkeitsmatrizen, allerdings setzt sich diese Übereinstimmung zwischen DSG- und ANS-Elementen nicht bei quadratischen und höheren Elementen fort. Insbesondere dreieckige DSG-Elemente unterscheiden sich von entsprechenden ANS-Elementen (z.B. MITC-7) und finden auch keine äquivalente Formulierung in der Literatur.

6.5.3 Dreieckige DSG-Elemente

Für dreieckige DSG-Elemente besteht eine gewisse Ähnlichkeit zum Kirchhoff-Mode(KM)-Konzept, das von Hughes und Taylor [74] vorgeschlagen wurde. Die Grundidee des KM-Konzeptes ist die Mittelung der Querschubverzerrungen entlang der Elementkanten, die für vierknotige Elemente von Hughes und Tezduyar [76] entwickelt wurde.

Auch die DSG-Modifikationen der viereckigen Elemente können als eine solche Mittelung entlang der Elementkanten verstanden werden, für dreieckige Elemente entspricht die Anwendung der DSG-Methode allerdings einer Mittelung entlang der natürlichen Koordinatenlinien. Hierin ist ebenfalls der prinzipielle Unterschied zu den KM-Dreieckselementen zu sehen: Während die Formulierung der KM-Elemente alle drei Kanten berücksichtigt, findet die DSG-Modifikation nur entlang der zwei lokalen Koordinatenlinien statt. Da hierdurch eine Zwangsbedingung weniger einzuhalten ist, somit auch der Zwangsbedingungsfaktor positiv beeinflusst wird, stellt sich ein wesentlich besseres Verhalten ein als bei den KM-Dreiecken, die deutliche Versteifungstendenzen aufweisen.

Allerdings resultiert aus dem „Weglassen“ der dritten Kante bei den DSG-Dreiecken eine Abhängigkeit der Steifigkeitsmatrix von der Knotennummerierung bzw. der Lage des Ursprungs des lokalen Koordinatensystems ξ, η , das Element ist nicht mehr objektiv.

Für die Berechnungsergebnisse ist dabei insbesondere die Lage der „freien“ Elementkanten zueinander relevant. Optimal ist eine Koinzidenz der freien Kanten, die Genauigkeit nimmt allerdings ab, falls die freie Kante jeweils mit einer „Integrationskante“ des Nachbar-elementes zusammenfällt, da dann wiederum die Anzahl der einzuhaltenden Zwangsbedingungen ansteigt.

So ergeben sich für das dreiknotige Schalenelement (Formfunktionen etc., siehe Anhang A.2) entsprechend den Gleichungen (6.97)–(6.102) die modifizierten (konstanten) Querschubverzerrungen¹³ zu

$$\gamma_{13}^{DSG3} = \mathbf{A}_3^2 \cdot \mathbf{v}^2 - \mathbf{A}_3^1 \cdot \mathbf{v}^1 - \frac{1}{2} (\mathbf{A}_3^2 - \mathbf{A}_3^1) (\mathbf{v}^1 + \mathbf{v}^2) + \mathbf{R}^2 \mathbf{w}^2 - \mathbf{R}^1 \mathbf{w}^1 - \frac{1}{2} (\mathbf{R}^2 - \mathbf{R}^1) (\mathbf{w}^1 + \mathbf{w}^2) \quad (6.103)$$

$$\gamma_{23}^{DSG3} = \mathbf{A}_3^3 \cdot \mathbf{v}^3 - \mathbf{A}_3^1 \cdot \mathbf{v}^1 - \frac{1}{2} (\mathbf{A}_3^3 - \mathbf{A}_3^1) (\mathbf{v}^1 + \mathbf{v}^3) + \mathbf{R}^3 \mathbf{w}^3 - \mathbf{R}^1 \mathbf{w}^1 - \frac{1}{2} (\mathbf{R}^3 - \mathbf{R}^1) (\mathbf{w}^1 + \mathbf{w}^3), \quad (6.104)$$

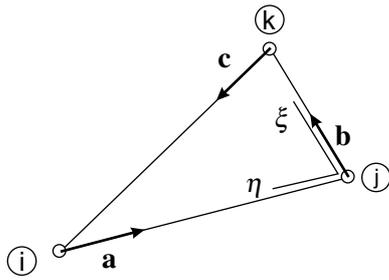
die die Abhängigkeit von der Knotennummerierung verdeutlichen.

Die mangelnde Objektivität der DSG-Dreieckselemente ist zwar kein prinzipielles Problem – der Patchtest wird von diesem Element bestanden und die Konvergenz für beliebige Netze gewährleistet – führt aber dennoch zu Ergebnissen, die je nach Netztopologie variieren.

Die Formulierung der DSG-Methode in kartesischen (globalen) Koordinaten, d.h. die Modifikation der Verzerrungen γ_{xz} bzw. γ_{yz} beseitigt zwar das Objektivitäts-Problem, weist aber ein schlechteres Konvergenzverhalten auf als die in natürlichen Koordinaten modifizierten Elemente, die somit die bevorzugte Variante darstellen.

¹²ANS-Modifikationen der Membrananteile sind für vierknotige Elemente in der Literatur praktisch nicht erwähnt, da sie den Patchtest nicht bestehen. Allerdings führen auch diese zu identischen Steifigkeitsmatrizen wie die DSG-Modifikationen, die in Abschnitt 6.5.5 beschrieben sind.

¹³Der Membrananteil des 3-knotigen Schalenelementes kann nicht weiter verbessert werden, vgl. Abschnitt 5.3



$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|}, \quad \mathbf{b} = \frac{\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j|}, \quad \mathbf{c} = \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|} \quad (6.105)$$

$$\min \{ |\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|, |\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}|, |\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}| \} = \begin{cases} |\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \Rightarrow i = 1 \\ |\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}| \Rightarrow j = 1 \\ |\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}| \Rightarrow k = 1 \end{cases} \quad (6.106)$$

Abbildung 6.9: DSG3-Element: Wahl des Referenzknotens

Mit der Beobachtung, dass das Verhalten der DSG-Dreiecke umso besser ist, je näher der von den beiden natürlichen Koordinatenrichtungen eingeschlossene Winkel einem rechten Winkel kommt, kann das DSG3-Element noch optimiert werden. Dazu wird die Knotennummerierung des *Elementes* so gewählt, dass Knoten 1 – und somit der Referenzknoten für die DSG-Integrationen – in der Ecke zu liegen kommt, deren Winkel am geringsten von 90° abweicht.

Das DSG3-Element zeichnet sich durch hohe Genauigkeit und Effizienz aus (1-Punkt-Integration). Die Empfindlichkeit gegenüber Netzverzerrungen sowie die Oszillation der Querkräfte kann durch Anwendung von Stabilisierungsverfahren allerdings noch verbessert werden.

6.5.4 Stabilisierte DSG-Elemente

Grundidee Stabilisierungsverfahren bei der Entwicklung von Strukturelementen zielen darauf ab, die – auch beim Einsatz der beschriebenen Elementmethoden noch auftretenden – unerwünschten Einflüsse, wie zum Beispiel die Empfindlichkeit gegenüber Netzverzerrungen oder Oszillationen der Spannungen, zu beseitigen bzw. abzumindern.

Grundsätzliche Idee ist die Modifikation der kritischen, d.h. parasitäre Anteile enthaltenden inneren Energie. Dies wird erreicht durch die Ergänzung der ursprünglichen Formulierung durch Stabilisierungsterme, die den Einfluss der Versteifungseffekte vermeiden sollen und deren Auftreten über den sog. Stabilisierungsparameter gesteuert wird. Die Wahl eines geeigneten Stabilisierungsparameters stellt dabei den zentralen Punkt und die größte Schwierigkeit dar, da er in Abhängigkeit einer Vielzahl variierender Parameter die optimale Lösung darstellen soll und dabei konkurrierende Einflüsse zu berücksichtigen sind.

Stabilisierungsverfahren Lyly et al. [96] stellen 1993 eine stabilisierte Version des MITC4-Elementes vor, das den Effekt des Querschub-Locking für beliebig verzerrte Elemente vermeidet. Zusätzlich werden die Oszillationen der Querkräfte merklich reduziert.

Für lineare (schubweiche) Plattenelemente kann die innere Energie in zur Biegung und zum Schub korrelierende Anteile aufgeteilt werden, vgl. (4.138):

$$\Pi(w, \boldsymbol{\varphi}) = \Pi_\varphi + \Pi_\gamma + \Pi^{ext} = \frac{1}{2}t^3 \int_\Omega \kappa^2 d\Omega + \frac{1}{2}\alpha_s^0 Gt \int_\Omega \gamma^2 d\Omega + \Pi^{ext} \quad (6.107)$$

Die von Lyly vorgeschlagene Modifikation

$$\Pi(w, \boldsymbol{\varphi}) = \Pi_\varphi + \Pi_\gamma^* + \Pi^{ext} \quad (6.108)$$

$$= \frac{1}{2}t^3 \int_\Omega \kappa^2 d\Omega + \frac{1}{2}\tau\alpha_s^0 Gt \int_\Omega \gamma^2 d\Omega + \Pi^{ext} \quad (6.109)$$

$$= \frac{1}{2}t^3 \int_\Omega \kappa^2 d\Omega + \frac{1}{2} \frac{\alpha_s^0 Gt}{1 + \alpha \frac{h_k^2}{t^2}} \int_\Omega \gamma^2 d\Omega + \Pi^{ext}, \quad (6.110)$$

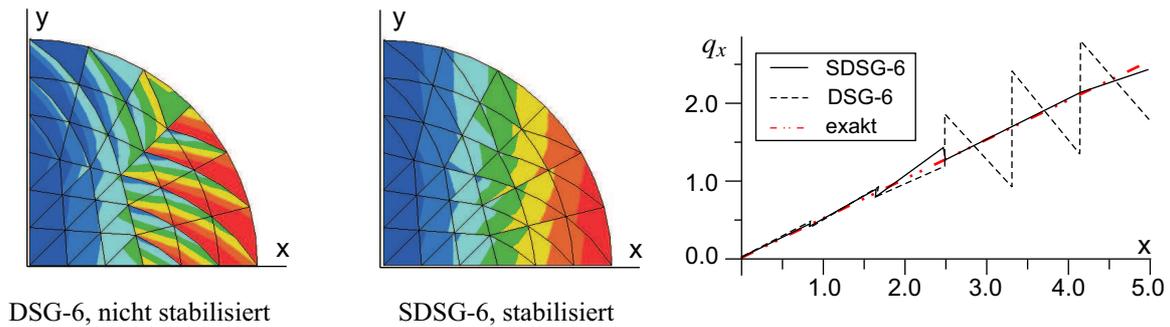


Abbildung 6.10: DSG6-Element: Querkraft-Oszillationen und Einfluss der Stabilisierung

mit einer „typischen“ Elementabmessung h_K ¹⁴ und einem Wichtungsfaktor $\alpha > 0$, kann anschaulich als Addition eines zusätzlichen Stabilisierungsterms zur Energie der Querschubverzerrungen interpretiert werden:

$$\Pi_\gamma^* = \Pi_\gamma + \Pi_\gamma^{stab} = \Pi_\gamma - (1 - \tau) \cdot \Pi_\gamma \quad (6.111)$$

Offensichtlich kommt dem Stabilisierungsparameter

$$\tau = \frac{1}{1 + \alpha \frac{h_K^2}{r^2}} \quad (6.112)$$

entscheidende Bedeutung zu. Insbesondere muss er zwei Eigenschaften besitzen:

- $\lim_{h_K \rightarrow 0} \tau = 1$ Gewährleistung der Konvergenz, d.h. der Stabilisierungsterm verschwindet, wenn die Elementgröße gegen Null geht.
- $\lim_{t \rightarrow 0} \tau = 0$ Vermeidung von Locking, im Grenzfall gegen Null gehender Dicke wird die Kirchhoff-Lösung erreicht, die gesamte Schubenergie verschwindet aus dem Funktional.

Für die Wahl des Wichtungsfaktors α wird von Lyly aufgrund numerischer Untersuchungen der Wert 0.1 empfohlen, der allerdings nur einen gewissen Kompromiss darstellt.

Mit der direkten Übertragung dieser Vorgehensweise entwickeln Bischoff et al. ([29], [30], [32]) stabilisierte DSG-Elemente, die eine geringere Netzverzerrungsempfindlichkeit und eine deutliche Reduktion der Querkraft-Oszillationen aufweisen, siehe auch Abbildungen 6.10 und 6.16.

Neben diesen beiden Effekten kann durch eine geeignete Wahl des Parameters α bzw. des Stabilisierungsparameters τ ebenfalls die Genauigkeit weiter erhöht werden. Angelehnt an die Technik des *Deflection-Matching* von Tessler und Hughes [149] bzw. der *Residual-Bending-Flexibility* von MacNeal [103] können modifizierte Stabilisierungsparameter entwickelt werden, die die Genauigkeit der Ergebnisse verbessern (z.B. Bischoff und Bletzinger [31]).

6.5.5 Erweiterungen der DSG-Methode

Die überzeugenden Ergebnisse motivierten die Anwendung der DSG-Methode auf andere Locking-Phänomene, die aus der Nichterfüllung einer kinematischen Zwangsbedingung resultieren. Koschnick

¹⁴Der Wert h_K stellt eine näherungsweise Abschätzung der Elementgröße dar, geeignet sind z.B. der Wert der längsten Kante eines Elementes oder die Quadratwurzel der Elementfläche

et al. ([90], [92]) sowie Bischoff et al. [32] erweitern das Anwendungsgebiet der DSG-Methode auf alle geometrischen Versteifungsphänomene. Für die Formulierung von Strukturelementen verbleibt neben der bereits beschriebenen Anwendung auf die Querschubverzerrungen die Modifikation der Membranverzerrungen (Normal- sowie Schubverzerrungen).

Die Universalität der Discrete-Strain-Gap-Methode wird dabei von der Tatsache unterstrichen, dass die eigentlich für Strukturelemente entwickelten Modifikationsvorschriften direkt zur Formulierung von Kontinuumselementen übernommen werden können. Die mechanische Deutung der Discrete-Strain-Gaps als Differenzverschiebungen, die den Schubverzerrungen zugeordnet sind, wird hierfür formal durch die Interpretation als Integration der kinematischen Gleichung und deren Auswertung an den Elementknoten ersetzt.

Erweiterung auf Membran-Locking

Die konsequente Anwendung der DSG-Modifikationen auf das Problem des Marguerre-Balkens (vgl. Abschnitt 5.7.1) führt zu der Berechnung diskreter „Normal-Strain-Gaps“.

$$\Delta \varepsilon^K = \int_{x_0}^{x_K} \varepsilon(x) dx \stackrel{\text{mit (5.51)}}{=} \int_{x_0}^{x_K} (u_{x,x} + u_{z,x} f_{0,x}) dx \quad (6.113)$$

Die Interpolation dieser Werte und anschließende Differentiation ergibt wiederum die modifizierten Normalverzerrungen:

$$\varepsilon^{DSG}(x) = \sum_{K=1}^{n_{\text{knot}}} N_{,x}^K(x) \Delta \varepsilon^K \quad (6.114)$$

Für den in Kapitel 5.7.1 beschriebenen dehnungslosen Verformungszustand berechnen sich die diskreten Verzerrungsklaffungen zu:

$$\Delta \varepsilon^1 = \int_{-L/2}^{-L/2} [u_{x,x}^h + u_{z,x}^h f_{0,x}^h] dx = 0 \quad (6.115)$$

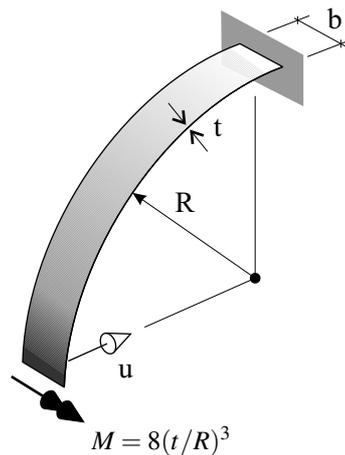
$$\Delta \varepsilon^2 = \int_{-L/2}^0 [\bar{\varphi} f_0^2 \frac{4}{L} (\frac{1}{3} - (\frac{2x}{L})^2)] dx = 0 \quad (6.116)$$

$$\Delta \varepsilon^3 = \bar{\varphi} f_0^2 \frac{4}{3L} [x - (\frac{2}{L})^2 x^3] \Big|_{-L/2}^{L/2} = 0 \quad (6.117)$$

Da alle drei Discrete-Strain-Gaps $\Delta \varepsilon^K$ den Wert Null annehmen, verschwinden die modifizierten Normalverzerrungen $\varepsilon^{DSG}(x)$ ebenfalls, der dehnungslose Verformungszustand wird somit vom DSG-Element korrekt, d.h. ohne parasitäre Normalverzerrungen abgebildet.

Die Übertragung auf den Membrananteil von Schalelementen kann völlig analog zur Erweiterung der Querschubverzerrungen auf flächenhafte Strukturelemente durchgeführt werden. Auch hier erfolgt die DSG-Modifikation für die in krummlinigen Koordinaten definierten Verzerrungskomponenten $E_{\alpha\alpha}$ getrennt für beide Koordinatenrichtungen ξ, η . Die Schritte der DSG-Methode – Integration, Interpolation und Differentiation – sind in Gleichung (6.118) zusammengefasst und führen zu den modifizierten Normalmembranverzerrungen.

$$\varepsilon_{(\alpha\alpha)}^{DSG} = N_{,\alpha}^K \int_{\theta_0^\alpha}^{\theta_K^\alpha} \varepsilon_{(\alpha\alpha)}^h d\theta^\alpha \quad (6.118)$$



Geometrie:

$$R = 0,1$$

$$b = 2,5 \cdot 10^{-2}$$

$$t = 2,5 \cdot 10^{-2} \dots 2,5 \cdot 10^{-5}$$

Material:

$$E = 2,0 \cdot 10^5$$

$$\nu = 0,0$$

Abbildung 6.11: Eingespannter Zylinderstreifen unter Einzelmoment

Zylinderstreifen unter Biegung Ein geeignetes Testbeispiel für Membran-Locking bei Schalenelementen stellt der Zylinderstreifen unter reiner Biegebelastung dar, siehe Abbildung 6.11. Für unverzerrte Netze und $\nu = 0$ entspricht das Beispiel einem gekrümmten Kragarm. Quadratische Elemente können die Querschubverzerrung für konstante Biegezustände korrekt abbilden, so dass der Einfluss des Transverse-Shear-Locking nicht präsent und zu steifes Verhalten einzig auf Membran-Locking zurückzuführen ist¹⁵. Somit kann der Effekt der vorgeschlagenen DSG-Modifikation (6.118) analysiert werden.

Das aufgebrachte Moment ist mit dem Faktor $(t/R)^3$ skaliert, um für die exakte Lösung bei veränderlicher Dicke einen konstanten Wert zu erhalten. Entsprechend wird die korrekte Lösung in der asymptotischen Analyse ($t \rightarrow 0$) von einer horizontalen Linie repräsentiert, wenn die Verschiebung u gegen die Schlankheit aufgetragen wird.

Die Ergebnisse dieses Beispiels für quadratische Elemente sind in Abbildung 6.12 a) und b) dargestellt. Das Verschiebungselement Q2 weist erwartungsgemäß (s.a. Abschnitt 5.7) bereits für unverzerrte Netzgeometrien starkes Locking auf, mit zunehmender Schlankheit tendiert die Verschiebung gegen Null. Für die Berechnung gekrümmter Strukturen erweist sich das quadratische Standard-Verschiebungselement Q2 somit als ungeeignet.

Das DSG-Element ist dagegen Locking-frei und stellt die Eignung der vorgeschlagenen DSG-Modifikation (6.118) unter Beweis. Für unverzerrte Netze sind Elemente mit EAS-Erweiterung des Membrananteils (siehe Abschnitt 6.6) ebenfalls frei von Membran-Locking, identische Ausdrücke ergeben sich hierbei für die DSG- und ANS-Membranmodifikation, die nicht explizit dargestellt ist.

Das Diagramm 6.12 b) zeigt das Verhalten der quadratischen Elemente für verzerrte Netze. Es wird deutlich, dass nur noch das DSG-Element völlig frei von Locking ist. Die dargestellten Elementen beinhalten allerdings neben der Modifikation der Normal-Membranverzerrungen bereits ebenfalls die im folgenden Abschnitt vorgestellte Modifikation der Inplane-Schubverzerrungen.

Die Erweiterung des Membrananteils durch eine EAS-Formulierung weist dagegen für verzerrte Netze ein Verhalten auf, das zwar deutlich besser als das der Verschiebungselemente ist, aber dennoch von der Schlankheit R/t abhängt und somit nicht Locking-frei ist.

Ein ähnliches Bild bietet sich für die Diskretisierung des Zylinderstreifens mit verzerrten vierknotigen Elementen, Abbildung 6.12 c), deren Querschubanteil entsprechend der DSG-Formulierung (6.95) modifiziert ist, um den Effekt des bei vierknotigen Elementen für diesen Biegezustand auftretenden

¹⁵Dies trifft nur für eine Modellierung mit 5-Parameter-Schalenelementen zu. Bei Schalenelementen mit Berücksichtigung der Dickenänderung (7-Parameter-Modell) müssen zusätzliche Modifikationen vorgenommen werden, um Curvature-Thickness-Locking auszuschließen, was in den folgenden Abschnitten diskutiert wird.

An dieser Stelle soll allerdings nur der Einfluss des Membran-Lockingeffektes untersucht werden, entsprechend stellen die Ergebnisse in Abb. 6.12 die Lösung von 5-Parameter-Schalen dar.

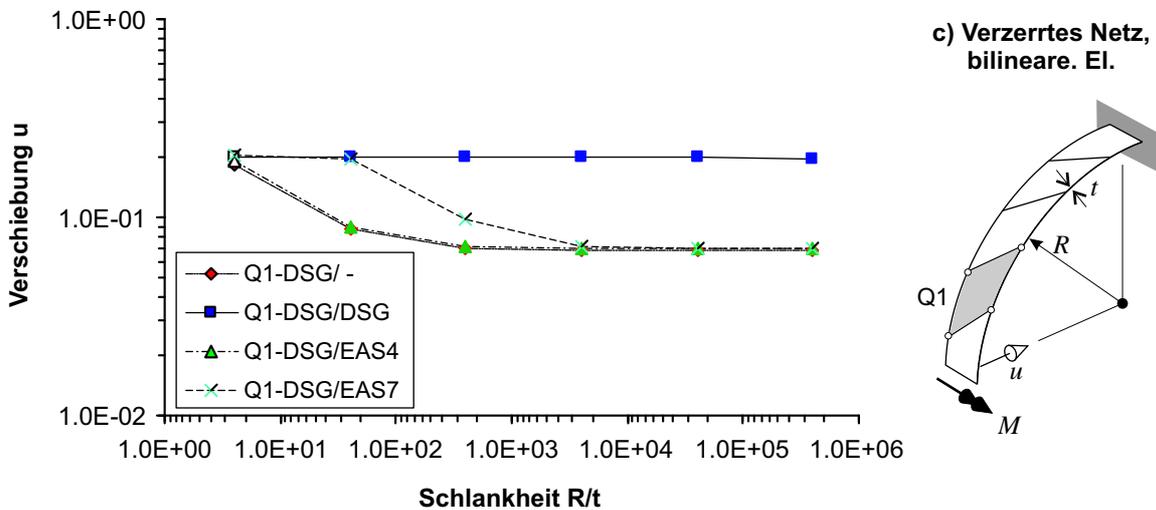
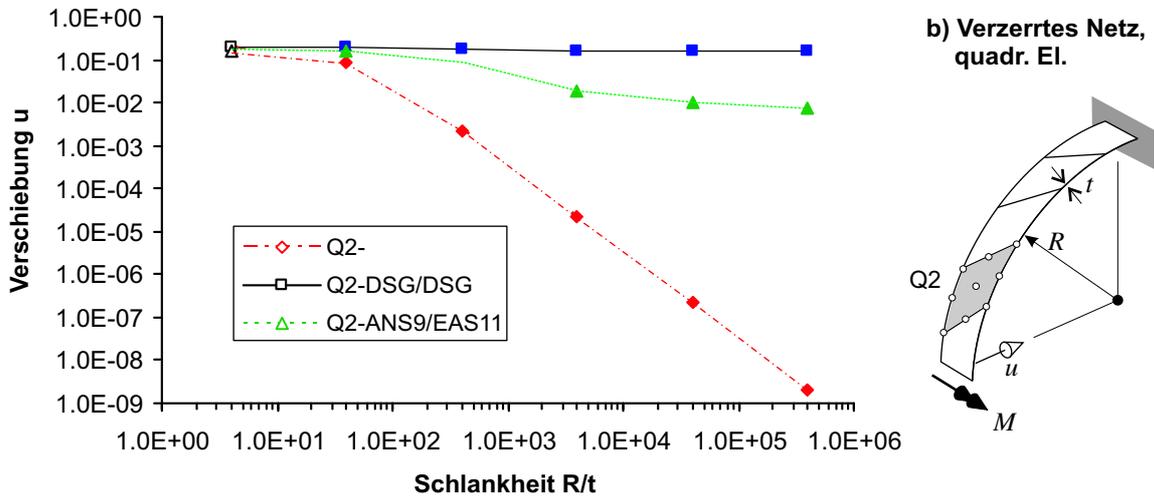
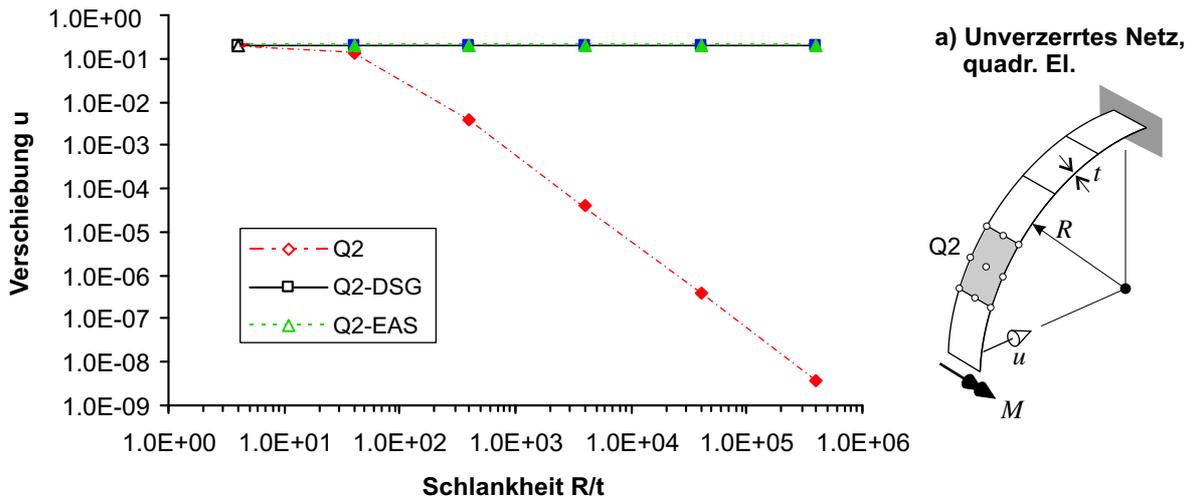
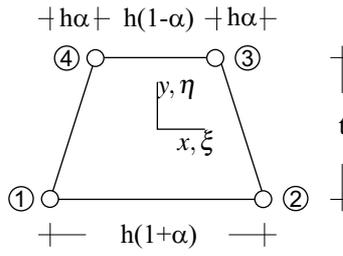


Abbildung 6.12: Membran-Locking bei Schalelementen



$$\xi_{K,K=1..4} = \{-1, 1, 1, -1\}, \quad \eta_{K,K=1..4} = \{-1, -1, 1, 1\} \quad (6.120)$$

$$N^K = \frac{1}{4} (1 - \xi_K \xi) (1 - \eta_K \eta) \quad (6.121)$$

$$\mathbf{u} = [u_x, u_y]^T \quad (6.122)$$

$$\mathbf{G}_\xi = \left[\frac{h}{2}(1 - \alpha\eta), \frac{h}{2} \right]^T, \quad \mathbf{G}_\eta = \left[-\frac{1}{2}\alpha h, \frac{t}{2} \right]^T \quad (6.123)$$

Abbildung 6.13: Trapezförmiges bilineares Element Q1

Transverse-Shear-Locking auszuschließen.

Offensichtlich ist auch hier die DSG-Methode der der EAS-Erweiterung überlegen: Das Q1-DSG/DSG-Element (d.h. DSG-Modifikation sowohl für den Querschub- als auch den Membrananteil) ist völlig unabhängig vom kritischen Parameter, während der Fehler bei den EAS-Membranelementen Q1-DSG/EAS4 und Q1-DSG/EAS7 zwar nicht über alle Grenzen wächst, wie beim quadratischen Element Q2-ANS/EAS11, aber dennoch eine gewisse Abhängigkeit aufweist.

Erweiterung hinsichtlich Scheibentragwirkung

Auch wenn die Anwendung der DSG-Methode auf die Membrannormalverzerrungen durch die Vermeidung des Membran-Lockingeffektes bei gekrümmten Strukturelementen motiviert war, impliziert die Modifikation der Membranverzerrungen gleichzeitig die Behandlung zweidimensionaler Kontinuums-elemente, die den Membrananteil ebener Schalelemente repräsentieren.

Neben der Darstellbarkeit dehnungsloser Verformungen (Membran-Locking) die durch Verschiebungen senkrecht zur Schalenebene gekennzeichnet sind, soll durch die DSG-Modifikationen ebenfalls die Abbildungsfähigkeit von Inplane-Biegezuständen verbessert werden.

Die Darstellung von Biegezuständen mit verschiebungsformulierten Kontinuums-elementen ist durch Shear-Locking (Kap. 5.3) sowie Curvature-Thickness-Locking (Kap. 5.4) beeinträchtigt, für die wiederum das Auftreten parasitärer Schub- (Shear-Locking) bzw. Normalverzerrungen (CTL) verantwortlich ist.

Neben der Modifikation der Normalverzerrungen $\varepsilon_{\alpha\alpha}^h$ ist demzufolge auch eine Verbesserung der Inplane-Schubverzerrungen ε_{12}^h erforderlich. Die Verbesserung der „gemischten“ Terme ε_{12}^h wirft die Frage auf, welche Koordinatenrichtung für die DSG-Integration anzusetzen ist.

Dabei wird der Definition der (linearisierten) Schubverzerrungen $\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} (\mathbf{u}_{,\xi} \cdot \mathbf{G}_\eta + \mathbf{u}_{,\eta} \cdot \mathbf{G}_\xi)$, die beide Inplane-Koordinatenrichtungen gleich berücksichtigt, bei der Modifikationsregel der DSG-Schubverzerrung Rechnung getragen:

$$\varepsilon_{12}^{DSG} = \frac{1}{2} \sum_{L=1}^N N_{,\eta}^L \int_{\eta_0}^{\eta_L} \left(\sum_{K=1}^N N_{,\xi}^K \int_{\xi_0}^{\xi_K} \varepsilon_{12}^h d\xi \right) d\eta \quad (6.119)$$

4-knotiges Scheibenelement Die Eignung der DSG-Methode zur Verbesserung des Inplane-Tragverhaltens kann am Beispiel des bilinearen 2D-Kontinuums-elementes aufgezeigt werden.

Die Anwendung von Gleichung (6.118) liefert für das vierknotige Element (Geometrie entspr. Abb. 6.13)

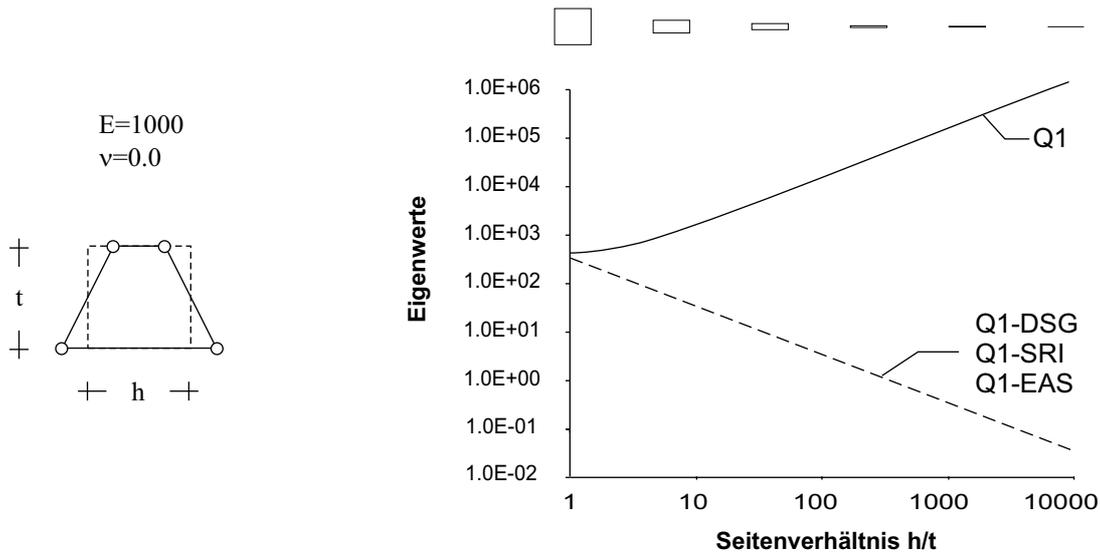


Abbildung 6.14: Q1-DSG-Eigenwerte in Abhängigkeit des Seitenverhältnisses

für die DSG-Normalverzerrungen

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{11}^{DSG} &= N_{,\xi}^2 \int_{\xi_1}^{\xi_2} \mathbf{u}_{,\xi} \cdot \mathbf{G}_{,\xi} d\xi + N_{,\xi}^3 \int_{\xi_1}^{\xi_3} \mathbf{u}_{,\xi} \cdot \mathbf{G}_{,\xi} d\xi \\
 &= \frac{1}{4}(1-\eta) \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{4}(1-\alpha\eta)(N_{,\xi}^1 u_x^1 + N_{,\xi}^2 u_x^2 + N_{,\xi}^3 u_x^3 + N_{,\xi}^4 u_x^4) \right) d\xi \\
 &\quad + \frac{1}{4}(1+\eta) \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{4}(1-\alpha\eta)(N_{,\xi}^1 u_x^1 + N_{,\xi}^2 u_x^2 + N_{,\xi}^3 u_x^3 + N_{,\xi}^4 u_x^4) \right) d\xi \\
 &= \frac{h}{8} [(1+\alpha)(1-\eta)(u_x^2 - u_x^1) + (1-\alpha)(1+\eta)(u_x^3 - u_x^4)]
 \end{aligned} \tag{6.124}$$

$$\varepsilon_{22}^{DSG} = \frac{1-\xi}{8} [h\alpha(-u_x^1 + u_x^4) + t(-u_y^1 + u_y^4)] + \frac{1+\xi}{8} [-h\alpha(-u_x^2 + u_x^3) + t(-u_y^2 + u_y^3)] \tag{6.125}$$

sowie für die DSG-Schubverzerrungen mit Gleichung (6.119):

$$\varepsilon_{12}^{DSG} = \frac{h}{16} [-u_x^1 - u_x^2 + u_x^3 + u_x^4] + \frac{t}{16} [-u_y^1 + u_y^2 + u_y^3 - u_y^4] \tag{6.126}$$

Für einen reinen Biegezustand, der durch die Knotenverschiebungen

$$u_x^1 = u_x^3 = -t \quad u_x^2 = u_x^4 = t \tag{6.127}$$

$$u_y^1 = u_y^2 = \alpha h \quad u_y^3 = u_y^4 = -\alpha h \tag{6.128}$$

gekennzeichnet ist (siehe auch Abbildung 5.9), ergeben sich für ein Verschiebungselement sowohl parasitäre Schubspannungen als auch Normalspannungen in „Dickenrichtung“ (vgl. Kapitel 5.3, 5.4).

Die Auswertung der DSG-modifizierten Verzerrungskomponenten, Gleichungen (6.124)–(6.126), liefert hingegen die gewünschten Ergebnisse: die Normalverzerrungen in „Biegerichtung“ ε_{11}^{DSG} weisen den zur Abbildung der Biegedeformation erforderlichen, linear in η veränderlichen Verlauf auf, die Normalverzerrungen ε_{22}^{DSG} hingegen verschwinden ebenso wie die Schubverzerrungen ε_{12}^{DSG} .

Für rechtwinklige Elementgeometrien führt die DSG-Modifikation zu identischen Steifigkeitsmatrizen wie die selektiv reduzierte Integration, siehe Abschnitt 6.3, eine entsprechende Analyse der Eigenwerte der Steifigkeitsmatrizen bestätigt die korrekte, d.h. Shear-Locking-freie Abbildung des Biegemodes, siehe Abbildung 6.14.

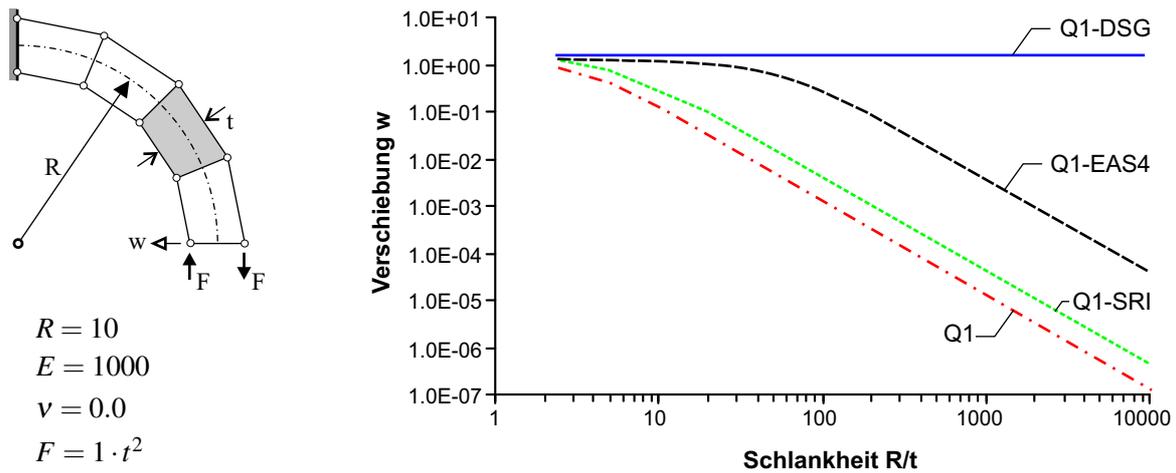


Abbildung 6.15: Q1-DSG-Element: Curvature-Thickness-Locking

Im Gegensatz zum SRI-Element vermeidet das DSG-Element neben dem Schub-Locking ($\alpha = 0$) auch das Curvature-Thickness-Locking ($\alpha \neq 0$), ist also ebenfalls in der Lage, Biegezustände gekrümmter Strukturen, die mit Kontinuums-elementen modelliert sind, zu erfassen.

Als Beispiel hierfür dient der gekrümmte Kragarm unter reiner Biegebeanspruchung, der mit Scheiben-(Kontinuums-) Elementen diskretisiert ist, siehe Abbildung 6.15 links. Die Belastung ist mit dem Faktor t^2 skaliert, um für die exakte Lösung für die Verschiebung w von der Dicke unabhängige Ergebnisse zu erhalten.

Das Diagramm 6.15 zeigt die Abhängigkeit der Lösung vom kritischen Parameter, der Schlankheit R/t , für verschiedene Elementformulierungen. Das Verschiebungselement Q1 schneidet erwartungsgemäß am schlechtesten ab, da hier sowohl Shear- als auch Curvature-Thickness-Locking auftreten. Das selektiv reduzierte Element Q1-SRI vermeidet durch die Auswertung in der Elementmitte die parasitären Schubverzerrungen (Shear-Locking) und liegt demzufolge geringfügig über dem reinen Verschiebungselement. Noch etwas besser verhält sich das Element Q1-EAS4 (mit 4 zusätzlichen Verzerrungsparametern, siehe Abschnitt 6.6), das für die rechtwinklige Geometrie identische Eigenwerte wie Q1-SRI und Q1-DSG aufweist (siehe Abbildung 6.14).

Dennoch ist auch das Lösungsverhalten dieser beiden Elemente abhängig vom kritischen Parameter, die somit beide Curvature-Thickness-Locking (CTL) aufweisen.

Als diesen Locking-Effekt vermeidende Elementformulierung erweist sich offensichtlich nur das DSG-modifizierte Element¹⁶. Entsprechend bietet sich die DSG-Methode ebenfalls für die Modifikation der Normalverzerrungen des 7-Parameter-Schalenelementes an, um das Auftreten parasitärer Normalspannungen in Dickenrichtung zu verhindern.

$$\varepsilon_{33}^{DSG} = N^K(\xi, \eta, \zeta)_{,\zeta} \int_{\zeta_0}^{\zeta_k} \varepsilon_{33}^h d\zeta \quad (6.129)$$

Auch auf diese Verzerrungskomponente kann die DSG-Methode unabhängig von Polynomgrad oder Elementtyp angewendet werden. Die Integration in ζ ist für Schalenelemente mit einer Vorabintegration in Dickenrichtung offensichtlich überflüssig. Trotzdem führt die konsequente Anwendung der DSG-Modifikationsregel äquivalent zu vorher beschriebenen ANS-Modifikation (vgl. 6.4.2) auf eine Interpolation der Knotenwerte von ε_{33}^h , die frei von parasitären Anteilen sind und ergibt somit den gewünschten Verzerrungsverlauf.

¹⁶Das vierknotige ANS-Element mit einer Interpolation der Membrannormalverzerrungen $\varepsilon_{\alpha\alpha}$ entsprechend Abbildung 6.6 führt zu einer identischen Formulierung und ist somit ebenfalls CTL-frei

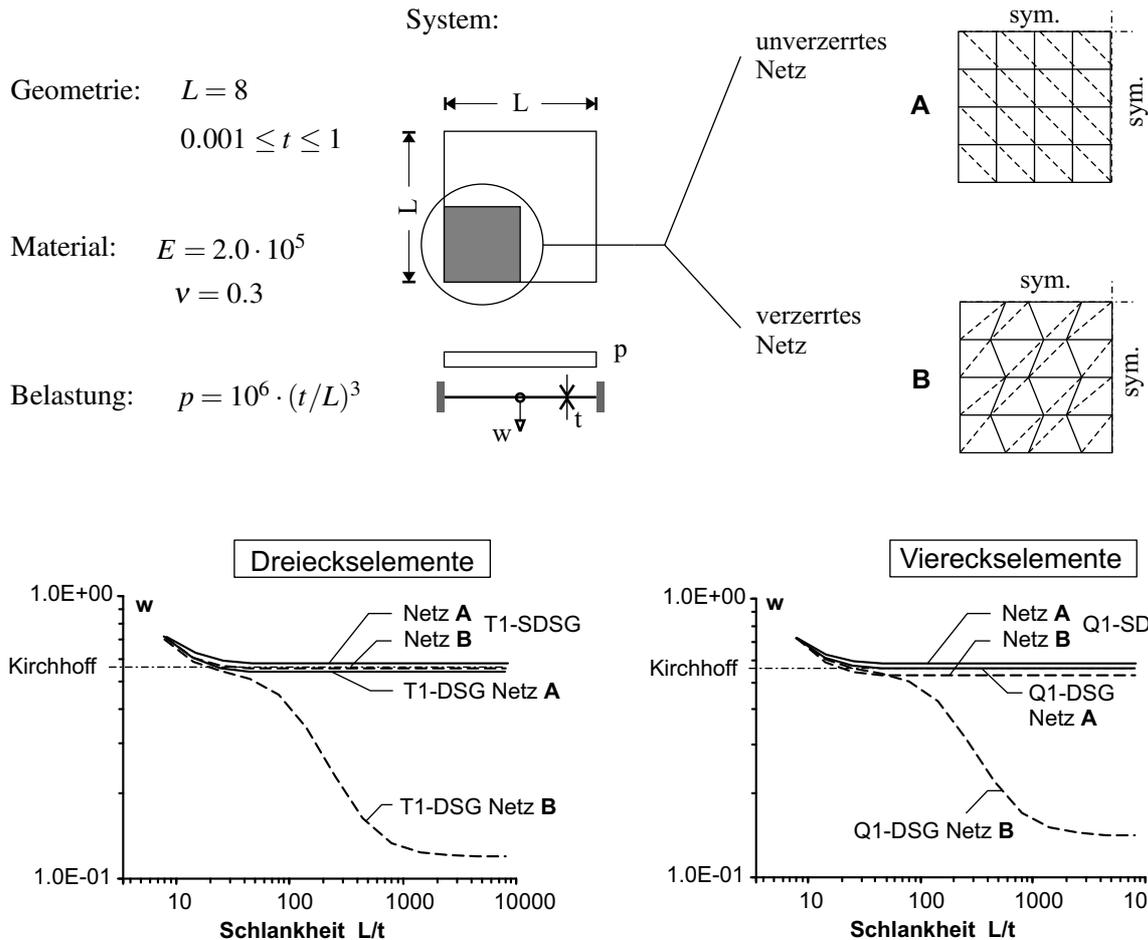


Abbildung 6.16: DSG-Modifikationen des Querschubanteils: Netzverzerrungsempfindlichkeit

6.5.6 Netzverzerrungsempfindlichkeit

An dieser Stelle soll die Empfindlichkeit der vorgeschlagenen DSG-Modifikationen gegenüber Netzverzerrungen diskutiert werden. Weitere Beispiele, die ebenfalls die Netzverzerrungsempfindlichkeit dokumentieren, sind in Kapitel 7 dargestellt.

Querschubanteil Die Netzverzerrungsempfindlichkeit der DSG-Querschuberweiterungen lässt sich am geeignetsten an ebenen Strukturen untersuchen, aus diesem Grund wurde hierfür das in Abbildung 6.16 dargestellte Plattensystem gewählt.

Für reguläre Netze, d.h. rechtwinklige Elemente (Netz A), sind sowohl die Viereck-, als auch die Dreieckselemente lockingfrei. Für eine Netzverzerrung entsprechend Netz B hingegen ist ein deutlicher Einfluss festzustellen: Sowohl die Dreieckselemente T1-DSG als auch die Viereckselemente Q1-DSG zeigen hier eine gewisse Abhängigkeit vom kritischen Parameter, der Schlankheit L/t , auch wenn der Fehler nicht über alle Schranken anwächst.

Die Ergebnisse untermauern insbesondere die positive Wirkung der Stabilisierung: die beiden stabilisierten DSG-Elemente, T1-SDSG und Q1-SDSG (vgl. 6.5.4), weisen so gut wie keine Empfindlichkeit gegenüber Netzverzerrungen auf.

Membrananteil Die Kragsscheibe unter einer Einzelmomentbelastung und einer Diskretisierung mit zwei Elementen stellt einen verbreiteten Test dar, um den Einfluss von Netzverzerrungen auf den Membrananteil zu überprüfen, siehe Abbildung 6.17 oben links. Dabei wird gewöhnlich die Durchsenkung

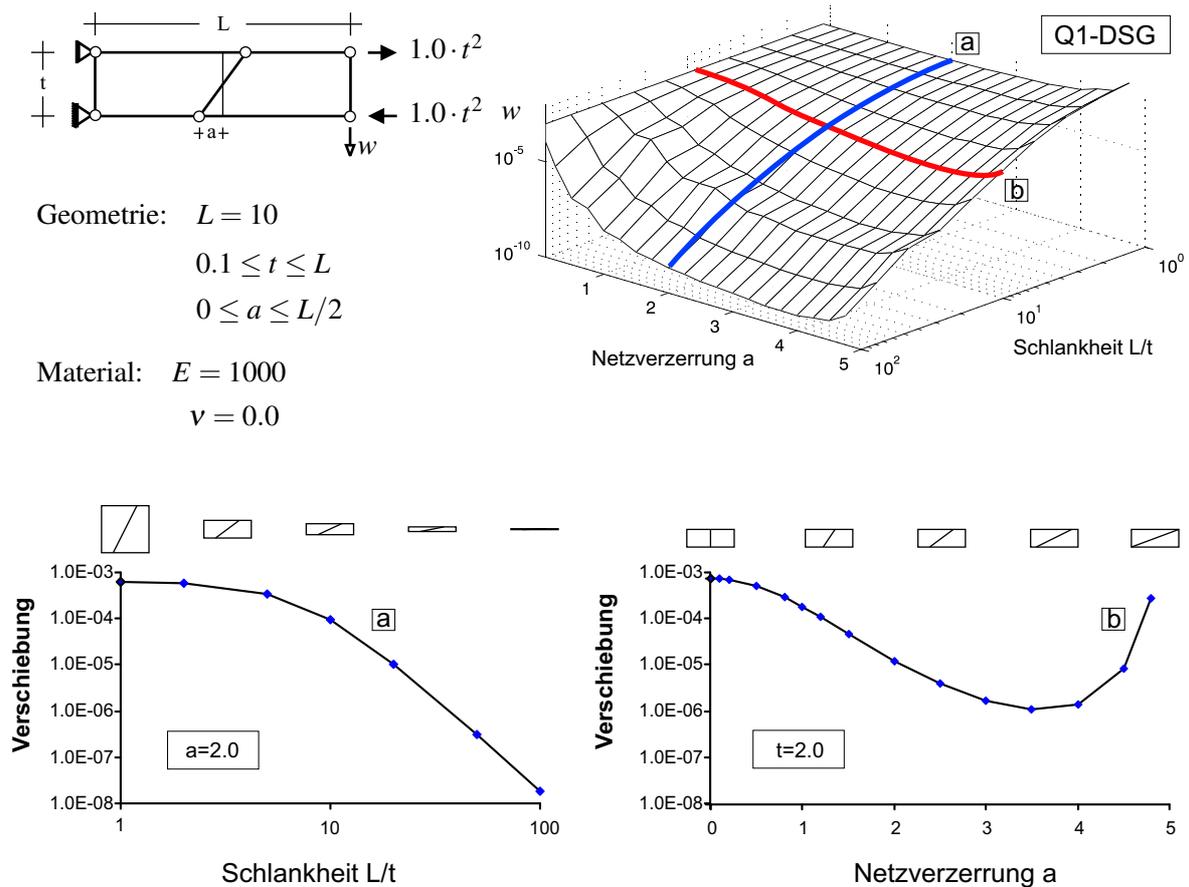


Abbildung 6.17: DSG-Modifikationen des Membrananteils: Netzverzerrungsempfindlichkeit

der Kragarmspitze in Abhängigkeit der Netzverzerrung a untersucht.

Für das bilineare DSG-Element Q1-DSG ist in Abbildung 6.17 rechts oben neben der Abhängigkeit von der Verzerrung a zusätzlich die Abhängigkeit von der Schlankheit L/t aufgetragen. Ein optimales Elementverhalten wäre in diesem Diagramm durch eine horizontale Ebene gekennzeichnet, d.h. einer sowohl von der Netzverzerrung als auch vom kritischen Parameter (hier der Schlankheit) unabhängigen Verschiebung. Die beiden unteren Diagramme repräsentieren die Abhängigkeit der Lösung von jeweils einem dieser Parameter, während der andere einen festen Wert einnimmt, mithin also achsenparallele Schnitte (a und b) durch die in 6.17 oben dargestellten Fläche.

Die Grafik verdeutlicht, dass das Q1-DSG-Element kein optimales Verhalten für verzerrte Netze aufweist. Insbesondere die asymptotische Analyse weist bis auf kleine Netzverzerrungen ein Anwachsen des Fehlers in Abhängigkeit des kritischen Parameters und somit Locking auf. Für kleine Netzverzerrungen ist das Verhalten des DSG-Elementes allerdings dem des EAS-Elementes überlegen, siehe Abbildung 6.21.

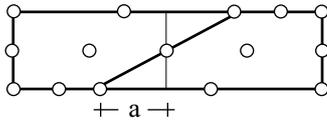
Das Verhalten des neunknotigen DSG-Elements Q2-DSG zeigt auch bezüglich Netzverzerrungen wiederum Ähnlichkeiten mit dem entsprechenden ANS9-Element auf. Das untersuchte System ist der *Distortion-Test* gemäß Abbildung 6.17, die Trägerhöhe beträgt in diesem Fall $t = const. = 2.0$.

Sowohl das DSG-Element als auch das ANS-Element reagieren bereits auf lineare Netzverzerrungen mit relativ großen Fehlern, Abbildung 6.18 a). Das EAS-Element Q2-EAS11¹⁷ sowie das Verschiebungselement liefern dagegen bei linear verzerrten Netzen das korrekte Ergebnis für diesen Test.

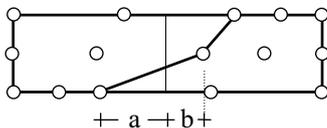
Eine quadratische Netzverzerrung, Abbildung 6.18 b), bewirkt bei dem DSG- und dem ANS-Element

¹⁷Neunknotiges EAS-Element mit 11 Verzerrungsparametern, siehe Bischoff und Ramm [33]

a) Linear verzerrtes Netz



b) Quadratisch verzerrtes Netz



$$b = \frac{2}{5}a$$

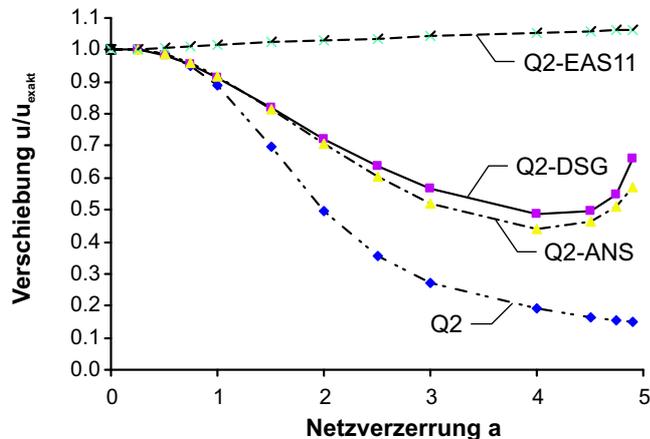
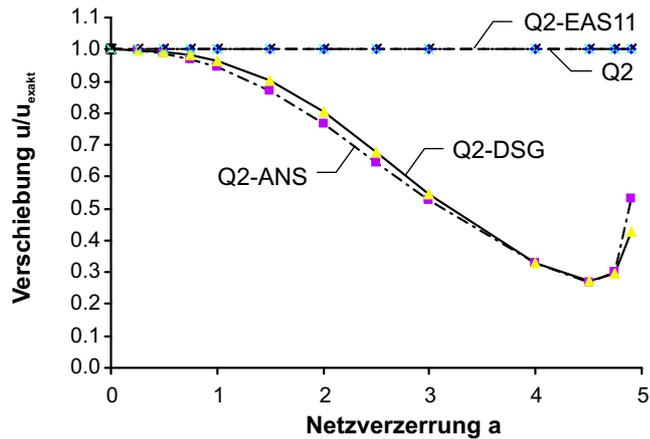


Abbildung 6.18: DSG-Modifikationen des Membrananteils: Netzverzerrungsempfindlichkeit

im Vergleich zu linear verzerrten Netzen keine weitere Verschlechterung, im Gegensatz zum verschiebungsformulierten Element, das stark von der Lösung abweicht. Als nahezu verzerrungsunempfindlich erweist sich dagegen auch bei quadratisch verzerrten Netzen das EAS-Element, das sich lediglich etwas zu weich verhält, die Verschiebung also leicht überschätzt.

Diese Ergebnisse sind insofern überraschend, als dass das von MacNeal [102] angeführte Theorem von Elementen, die den Patchtest nicht bestehen (und dazu gehören die Membranerweiterungen der DSG-Methode) ein besseres Verhalten hinsichtlich der Verzerrungsempfindlichkeit erwarten lässt. Hinzugefügt werden muss jedoch, dass sich die für das Testbeispiel der Kragsscheibe auftretende, relativ starke Netzverzerrungsempfindlichkeit für andere Beispielrechnungen nicht feststellen lässt, siehe Kapitel 7.

6.5.7 Konvergenz und Patchtest

Die DSG-Elemente bestehen nicht den Patchtest für konstante Spannungen, wenn die Elemente in der „Integrationsebene“ der Strain Gaps verzerrt sind.

Die DSG-Modifikation des Membrananteils der Verzerrungen (Normal- und Inplane-Schub-Verzerrungen) erfüllen somit nicht den Patchtest, wenn das Element in der entsprechenden Ebene verzerrt ist. So kann beispielsweise die Modifikation der Verzerrungskomponenten $\varepsilon_{\xi\eta}$ keinen konstanten Verzerrungszustand abbilden, wenn die Elementgeometrie in der ξ, η -Ebene beliebig verzerrt ist.

Die Querschubverzerrungen $\gamma_{\xi\xi}, \gamma_{\eta\xi}$ dagegen bestehen den Patchtest für beliebige Elementverzerrungen in der ξ, η -Ebene, da die Ebene, in der diese Verzerrungskomponenten wirken, von der Netzverzerrung unbeeinflusst bleibt.

Diese Patchtest-Eigenschaften teilen sich die DSG-Elemente mit entsprechenden ANS-Elementen, ein weiterer Hinweis auf die Verwandtschaft dieser beiden Methoden. Damit ist die Situation für lineare und bilineare DSG-Elemente konträr zu den Eigenschaften entsprechender Standard-Galerkin-Elemente, die nicht den Biege-Patchtest bestehen, dafür aber konstante Membranspannungszustände für beliebige Geometrien abbilden können.

Unter welchen Voraussetzungen das Bestehen des Patchtests mit dem Nachweis der Konvergenz korreliert, wurde bereits in Kapitel 3.2.2 diskutiert. Ein Kriterium ist die Änderung der Elementsteifigkeitsmatrix bei gegen Null gehender Elementgröße: besteht eine Abhängigkeit von der Elementgröße, ist der Patchtest für die Konvergenz nicht erforderlich, dies ist beispielsweise bei Platten- und Schalenelementen der Fall, da sich hier das Verhältnis von Länge zu Dicke ändert.

Die Steifigkeitsmatrizen von 2D-Kontinuumselementen, die ebenfalls den Membrananteil von Schalenelementen repräsentieren, sind dagegen nur von der Elementform und nicht von der Elementgröße abhängig. Ohne Bestehen des Patchtests kann die Konvergenz dieser Elemente nicht unbedingt gewährleistet werden.

Wenn die Abhängigkeit nicht von vornherein gegeben ist, kann sie künstlich z.B. mit Hilfe von Stabilisierungsverfahren in die Elementformulierung eingebracht werden.

Eine weitere Möglichkeit besteht in der bereits im Rahmen der ANS-Methode (Abs. 6.4.2) beschriebenen Anwendung der DSG-Modifikationen lediglich auf die höheren Steifigkeitsanteile.

Aus praktischer Sicht ist das Nicht-Bestehen des Patchtests allerdings weniger problematisch. Einerseits ist die Konvergenz gesichert, wenn mit zunehmender Netzverfeinerung die Elementverzerrungen verschwinden, was für strukturierte Netze gegeben ist. Andererseits besitzt hier die Genauigkeit für verzerrte Netze größere Bedeutung und diese Eigenschaft ist nicht direkt mit der Erfüllung des Patchtest verknüpft.

6.5.8 Zusammenfassung

Die DSG-Methode kann als ein allgemeines Konzept zur Vermeidung aller geometrischen Lockingeffekte angesehen werden.

Neben den bereits etablierten DSG-Querschubmodifikationen stellt die direkte Übertragung des ursprünglichen Konzeptes auf die Membranverzerrungen sowie die Normalverzerrungen in Dickenrichtung die Universalität dieses Konzeptes unter Beweis. Zusätzlich zur Vermeidung des Membran-Locking werden durch die Erweiterung ebenfalls das Shear-Locking und Curvature-Thickness-Locking eliminiert.

Die wesentlichen Schritte der DSG-Methode sind

1. Integration der kinematischen Gleichung und Auswertung dieses Integrals in den Elementknoten (Discrete Strain Gaps)
2. Interpolation der Discrete-Strain-Gaps zu einem Strain-Gap-Feld frei von parasitären Anteilen
3. Differentiation des Strain-Gap-Feldes zum modifizierten Verzerrungsverlauf

und können in folgenden Gleichungen zusammengefasst werden:

$$E_{(ii)}^{DSG} = N_{,i}^K \int_{\theta_0^i}^{\theta_k^i} E_{(ii)} d\theta^i \quad \begin{array}{l} \text{Kontinuumselemente: } i = 1, 2, 3 \\ \text{Strukturelemente: } i = 1, 2 \\ E_{(ii)} = \{\varepsilon_{ii}, \gamma_{i3}\} \end{array} \quad (6.130)$$

$$E_{ij}^{DSG} = N_{,j}^M \int_{\theta_0^j}^{\theta_M^j} \left(N_{,i}^K \int_{\theta_0^i}^{\theta_k^i} E_{ij} d\theta^i \right) d\theta^j \quad \begin{array}{l} \text{Kontinuumselemente: } i = 1, 2, 3 \\ \text{Strukturelemente: } i = 1, 2 \end{array} \quad (6.131)$$

Die dabei auftretenden Integrale können vorab analytisch (z.B. durch den Einsatz von Computeralgebra) oder auch numerisch ausgewertet werden.

Gewisse Ähnlichkeiten weist die Discrete-Strain-Gap-Methode insbesondere mit der ANS-Methode auf, die sich für die Anwendung beider Methoden in teilweise identischen Ergebnissen widerspiegelt.

Die Besonderheit der DSG-Methode liegt jedoch in ihrer Einheitlichkeit und Universalität, die eine einheitliche Formulierung unabhängig vom Elementtyp (Dreiecke, Vierecke), für beliebige Polynomordnungen und ohne die Wahl von Kollokationspunkten ermöglicht und alle *geometrischen* Locking-Effekte eliminiert.

Materielle Versteifungsphänomene, d.h. Volumetrisches Locking, können jedoch nicht durch die DSG-Methode vermieden werden, hierzu ist eine kombinierte Formulierung aus DSG- und EAS-Methode erforderlich.

6.6 Die Enhanced-Assumed-Strain-Methode (EAS)

Die Methode der erweiterten Verzerrungen (Enhanced Assumed Strains (EAS)) und die entsprechende variationelle Basis, Abschnitt 6.2.2, wurden 1990 von Simo und Rifai [139] eingeführt.

Die grundlegende Idee dieser Methode ist eine Erweiterung der verschiebungskompatiblen Verzerrungen (Enhanced Strains),

$$\mathbf{E} = \tilde{\mathbf{E}} + \mathbf{E}^u, \quad (6.12)$$

so dass sich die erforderliche Balance zu den parasitären Anteilen einstellt. Das Prinzip der EAS-Methode steht somit im Gegensatz zur Vorgehensweise der B-bar-Formulierungen (DSG, ANS), deren Ziel die Eliminierung der störenden Verzerrungsanteile ist.

Die im Vergleich zu diesen Methoden hervorstechendste und wichtigste Eigenschaft der EAS-Methode ist die Eliminierung *materieller* Lockingeffekte, d.h. des Volumetrischen Locking, die weder von der ANS- noch von der DSG-Methode geleistet werden kann.

Eine wesentliche Eigenschaft der Methode ist, dass die den erweiterten Verzerrungen zugeordneten Freiheitsgrade nur auf Elementebene erscheinen. Sie werden durch statische Kondensation auf Elementebene eliminiert und treten dadurch beim Zusammenbau der Systemsteifigkeit nicht auf mit dem Vorteil sich gegenüber der Verschiebungsmethode nicht erhöhenden Anzahl globaler Freiheitsgrade.

Ein Modell, das prinzipiell auf einer ähnlichen Methodik fußt, wurde bereits 1973 von Wilson et al. ([157]) mit der Methode der inkompatiblen Verschiebungen (Abschnitt 6.6.2) vorgestellt und von Taylor et al. ([148]) weiter verbessert.

Neben der Methode der inkompatiblen Verschiebungen, die einen Sonderfall der EAS-Methode darstellt, kann ebenfalls die Äquivalenz zwischen hybriden Spannungselementen und EAS-Elementen aufgezeigt werden (Andelfinger und Ramm [5])¹⁸.

¹⁸Der Schlüssel für den Nachweis der Äquivalenz zwischen EAS-Elementen und hybriden Spannungselementen (HR) bildet die Orthogonalitätsbedingung (6.19) mit der die Spannungen aus der variationellen Formulierung eliminiert wurden (Yeo und Lee [159]).

Wird jedoch eine Diskretisierung der Spannungen vorgenommen (wie beim HR-Element), $\tilde{\mathbf{E}}^h = \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\alpha}$, $\mathbf{S}^h = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\beta}$, ist die Erfüllung dieser Bedingung gleichbedeutend mit

$$\int_{\Omega} \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{M} \, d\Omega = \mathbf{0}. \quad (6.132)$$

Die Wahl zueinander komplementärer Ansätze \mathbf{P} und \mathbf{M} führt zu identischen Steifigkeitsmatrizen der HR- und EAS-Elemente, siehe Bischoff et al. [35].

6.6.1 Herleitung der Steifigkeitsmatrix

Die Diskretisierung des modifizierten Funktionals (6.20) liefert die Gleichungen zur Berechnung der Elementsteifigkeitsmatrix.

Mit der Diskretisierung der Verschiebungen und des Feldes der erweiterten Verzerrungen

$$\mathbf{u}_h = \mathbf{N} \cdot \mathbf{d} \quad (6.133)$$

$$\mathbf{E}_h^u = \mathbf{B}^u \cdot \mathbf{d} \quad (6.134)$$

$$\tilde{\mathbf{E}}_h = \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\alpha} \quad (6.135)$$

ergibt sich für das Funktional (6.20):

$$\delta \Pi_{HW}^{mod} = \int_{\Omega} (\delta \mathbf{d} \mathbf{B}^u + \delta \boldsymbol{\alpha} \mathbf{M}) \cdot \mathbf{S}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{E}}) d\Omega - \delta \Pi_{HW}^{ext} = 0 \quad (6.136)$$

Unter Berücksichtigung des Stoffgesetzes $\mathbf{S}^{\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{E}}} = \mathbf{C}(\mathbf{E}^u + \tilde{\mathbf{E}})$ erhält man:

$$\delta \Pi_{HW}^{mod} = \int_{\Omega} (\delta \mathbf{d}^T (\mathbf{B}^u)^T + \delta \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{M}^T) \cdot \mathbf{C} \cdot (\mathbf{B}^u \mathbf{d} + \mathbf{M} \boldsymbol{\alpha}) d\Omega - \delta \mathbf{d}^T \cdot \mathbf{f}^{ext} = 0 \quad (6.137)$$

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{HW}^{mod, int} = & \delta \boldsymbol{\alpha}^T \underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{M}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{M} d\Omega}_{\mathbf{D}} \boldsymbol{\alpha} + \delta \boldsymbol{\alpha}^T \underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{M}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}^u d\Omega}_{\mathbf{L}^T} \mathbf{d} \\ & + \delta \mathbf{d}^T \underbrace{\int_{\Omega} (\mathbf{B}^u)^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{M} d\Omega}_{\mathbf{L}} \boldsymbol{\alpha} + \delta \mathbf{d}^T \underbrace{\int_{\Omega} (\mathbf{B}^u)^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}^u d\Omega}_{\mathbf{K}^u} \mathbf{d} \end{aligned} \quad (6.138)$$

Das Gleichungssystem zur Lösung der Unbekannten \mathbf{d} und $\boldsymbol{\alpha}$ kann mit den in Gleichung (6.138) eingeführten Matrizen wie folgt formuliert werden:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^u & \mathbf{L}^T \\ \mathbf{L} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{d} \\ \boldsymbol{\alpha} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}^{ext} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (6.139)$$

Die Freiheitsgrade der erweiterten Verzerrungen können durch statische Kondensation auf Elementebene aus dem Gleichungssystem eliminiert werden:

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{d} + \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\alpha} = -\mathbf{D}^{-1} \mathbf{L} \mathbf{d} \quad (6.140)$$

Das reduzierte Gleichungssystem, aus dem die verbliebenen Unbekannten, die Knotenverschiebungsfreiheitsgrade, bestimmt werden können, lautet

$$\underbrace{[\mathbf{K}^u - \mathbf{L}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{L}]}_{\mathbf{K}_e^{EAS}} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{f}^{ext}, \quad (6.141)$$

womit die Elementsteifigkeitsmatrix der EAS-Elemente bestimmt ist:

$$\mathbf{K}_e^{EAS} = \mathbf{K}^u - \mathbf{L}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{L} \quad (6.142)$$

Ihre Formulierung setzt sich aus zwei Anteilen zusammen: der üblichen Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}^u des Verschiebungselementes, von der der Anteil abgezogen wird, der genau die Ansätze für die erweiterten Verzerrungen \mathbf{M} enthält. Anschaulich entspricht diese Differenz der Vorstellung, dass durch die Modifikation das Element 'weicher' gemacht wird, d.h. die Versteifungseffekte vermindert bzw. ausgeschaltet werden.

Die Berechnung der EAS-Steifigkeitsmatrix erfordert offensichtlich die Berechnung der Matrix \mathbf{L} sowie die Inversion der Matrix \mathbf{D}). Gegenüber B-bar-Elementen nimmt der numerische Aufwand beim Aufstellen der Steifigkeitsmatrix dadurch erheblich zu. Der Einsatz der EAS-Methode erscheint somit nur

sinnvoll, wenn entsprechend „numerisch billigere“ Verfahren ein deutlich schlechteres Verhalten aufweisen. Dies betrifft vor allem die Beschreibung (nahezu) inkompressibler Zustände, die durch Poisson-Locking gekennzeichnet sind. Die DSG- und die ANS-Methode sind nicht in der Lage, diesen *materiellen* Locking-Effekt zu beseitigen, aufgrund des starken Einflusses dieses Locking-Phänomens ist eine alternative Elementformulierung (EAS) in diesen Fällen unabdingbar.

6.6.2 Methode der inkompatiblen Verschiebungen

Einen Sonderfall der EAS-Methode stellt die Methode der inkompatiblen Verschiebungen dar. Wilson et al. ([157]) veröffentlichten 1973 ein vierknotiges Scheibenelement, dessen Verschiebungsansätze neben den üblichen vier Standardformfunktionen N^i des isoparametrischen Verschiebungselementes um zwei zusätzliche Funktionen \tilde{N} erweitert wurden.

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^4 N^i \mathbf{u}_i + \tilde{N}^5 \tilde{\mathbf{u}}_5 + \tilde{N}^6 \tilde{\mathbf{u}}_6 \quad (6.143)$$

Die Funktionen $\tilde{N}^5 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)$ und $\tilde{N}^6 = \frac{1}{2}(1 - \eta^2)$ sind in Abbildung 6.19 dargestellt.

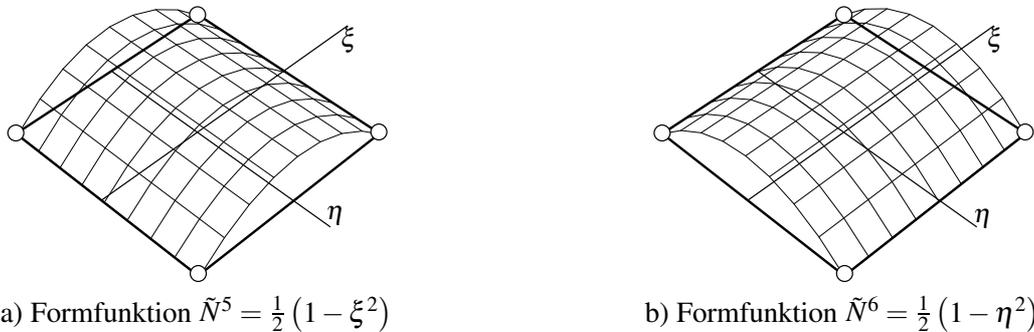


Abbildung 6.19: Inkompatible Moden des 4-knotigen -Elementes

Die Moden sind entlang der Kanten $\eta = \pm 1$ für \tilde{N}^5 bzw. $\xi = \pm 1$ für \tilde{N}^6 nicht kompatibel, d.h. sie müssen für benachbarte Elemente an der gemeinsamen Kante keine identischen Werte aufweisen.

In der Formulierung des Elementes wurde die Arbeit der Randkräfte entlang dieser Kanten vernachlässigt, um eine Kopplung der zusätzlichen Freiheitsgrade $\tilde{\mathbf{u}}_i$ zwischen den Elementen zu vermeiden.

Die Aufgabe der Funktionen \tilde{N}^i ist klar gezeichnet: die Konstruktion eines erweiterten Verzerrungsoperators, der die 'beschränkten' verschiebungs-kompatiblen Verzerrungen erweitert und so das Shear-Locking vermeidet. Dies wird durch das ursprüngliche Element von Wilson für rechtwinklige und parallelogrammartige Geometrien erreicht, nicht jedoch für allgemeine Vierecksformen, für die auch der Patchtest nicht bestanden wird.

Dieser Mangel wurde von Taylor et al. ([148]) erkannt und durch die Annahme einer konstanten Jacobi-Matrix (Auswertung im Elementmittelpunkt, $\xi = \eta = 0$) korrigiert.

In ihren Grundzügen entspricht die Methode der inkompatiblen Verzerrungen der EAS-Methode, ihre ursprüngliche Herleitung entbehrte jedoch der mathematischen Grundlage, was von Strang kritisch kommentiert wurde („*Two wrongs make a right in California*“, [144]). Diese wurden allerdings durch Simo und Rifai ([139]) mit der variationellen Grundlage der EAS-Methode geliefert („*Two rights do make a right, even in California*“).

6.6.3 EAS-Elemente

Die Bedingungen für die Stabilität und Konvergenz der EAS-Methode liefert die Voraussetzungen für die Ansatzräume der beteiligten Felder:

- Der Ansatzraum der verschiebungskompatiblen Verzerrungen $\mathcal{V}_h^{E''}$ und der Raum der erweiterten Verzerrungen $\mathcal{V}_h^{\tilde{E}}$ dürfen keine gemeinsamen Elemente enthalten, d.h. $\mathcal{V}_h^{E''} \cap \mathcal{V}_h^{\tilde{E}} = \{0\}$.
- Der Raum der Spannungen \mathcal{V}_h^S muss mindestens konstante Ansätze enthalten.
- Die Orthogonalität zwischen Spannungen und den erweiterten Verzerrungen, Gleichung (6.19), muss gewährleistet sein.

Die zweite der o.g. Forderungen entspricht einer a-priori-Patchtest-Bedingung und führt zusammen mit der Orthogonalitätsbedingung zur folgenden, von den Ansatzfunktionen der erweiterten Verzerrungen zu erfüllenden Gleichung

$$\int_{\Omega} \mathbf{M} d\Omega = \mathbf{0} \quad (6.144)$$

Innerhalb dieser Beschränkungen sind die Ansätze für die erweiterten Verzerrungen frei wählbar. Simo und Rifai [139] schlagen eine Formulierung der erweiterten Verzerrungen $\tilde{\mathbf{E}}$ in Abhängigkeit eines in den Elementkoordinaten ξ, η definierten Verzerrungsfeldes $\mathbf{E}^\xi(\xi, \eta)$ vor:

$$\tilde{\mathbf{E}} = \frac{|J_0|}{|J(\xi, \eta)|} \mathbf{F}_0^{-T} \mathbf{E}^\xi(\xi, \eta) \mathbf{F}_0^{-1} \quad \text{mit} \quad \mathbf{F}_0 = \mathbf{F}(\xi = 0, \eta = 0) \quad (6.145)$$

bzw. in Matrixform

$$\mathbf{M}(\xi, \eta) = \frac{|J_0|}{|J|} \mathbf{T}_0^{-T} \mathbf{M}^\xi(\xi, \eta) \quad (6.146)$$

mit der Matrix \mathbf{T}_0 , die die natürlichen Verzerrungen des Elementkoordinatensystems auf die physikalischen Spannungen, ausgewertet im Elementmittelpunkt, transformiert.

Der Vorteil dieses Ansatzes für das Verzerrungsfeldes wird beim Einsetzen in Gleichung (6.144) deutlich:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{|J_0|}{|J|} \mathbf{T}_0^{-T} \mathbf{M}^\xi |J| d\xi d\eta = \mathbf{0} \quad \frac{\mathbf{T}_0^{-T} = \text{const.}}{|J_0| = \text{const.}} \rightarrow \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{M}^\xi d\xi d\eta = \mathbf{0} \quad (6.147)$$

Die Wahl geeigneter Polynomterme für die erweiterten Verzerrungen, also die Konstruktion der Matrix \mathbf{M}^ξ ist durch die einzuhaltende Bedingung (6.147) – anstelle von (6.144) – erheblich vereinfacht.

So erfüllt beispielsweise der folgende vierparametrische Ansatz (Q1-EAS4-Element)

$$\mathbf{M}_4^\xi = \begin{bmatrix} \xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi & \eta \end{bmatrix} \quad (6.148)$$

aufgrund der verwendeten linearen Terme automatisch Gleichung (6.147). Dieses EAS-Element ist äquivalent zum modifizierten Incompatible-Modes-Element QM6 von Taylor et al. ([148]). Berechnet man die aus den quadratischen (inkompatiblen) Verschiebungen (Abb. 6.19) resultierenden Verzerrungen, lassen sich zum Verzerrungsansatz (6.148) identische Ausdrücke feststellen.

Umgekehrt allerdings können über die Methode der inkompatiblen Verschiebungen nicht alle Elemente hergeleitet werden, die sich mit der EAS-Methode formulieren lassen, so zum Beispiel die folgenden EAS-Elemente mit 5 bzw. 7 Verzerrungsparametern:

$$\mathbf{M}_5^\xi = \begin{bmatrix} \xi & 0 & 0 & 0 & \xi\eta \\ 0 & \eta & 0 & 0 & -\xi\eta \\ 0 & 0 & \xi & \eta & \xi^2 - \eta^2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_7^\xi = \begin{bmatrix} \xi & 0 & 0 & 0 & \xi\eta & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 & 0 & 0 & \xi\eta & 0 \\ 0 & 0 & \xi & \eta & 0 & 0 & \xi\eta \end{bmatrix} \quad (6.149)$$

									EAS			
u_ξ	1	ξ	η	$\xi\eta$	-	-	-	-				
u_η	-	-	-	-	1	ξ	η	$\xi\eta$	α_1	α_2	α_3	α_4
$\varepsilon_\xi^u = u_{\xi,\xi}$	0	1	0	η	0	0	0	0	ξ	0	0	0
$\varepsilon_\eta^u = u_{\eta,\eta}$	0	0	0	0	0	0	1	ξ	0	η	0	0
$\varepsilon_{\xi\eta}^u = \frac{1}{2}(u_{\xi,\eta} + u_{\eta,\xi})$	0	0	1	ξ	0	1	0	η	0	0	ξ	η

Tabelle 6.2: Deformationszustände des Q1-EAS4-Elementes

Den Einfluss der einzelnen Ansatzpolynome und somit deren geeignete Wahl kann wiederum durch die tabellarische Analyse veranschaulicht werden. Für das vierknotige Scheibenelement Q1-EAS4-Element zeigt Tabelle 6.2 die Verzerrungszustände des Verschiebungselementes sowie die entsprechenden EAS-Erweiterungen.

So ermöglicht es die dargestellte Erweiterung der Schubverzerrungen um lineare Anteile, die (parasitären) Schubverzerrungen der Biegemodes 4 und 8 auszubalancieren und das in 5.3 beschriebene Shear-Locking zu vermeiden.

Volumetrisches Locking Bedeutender als die Vermeidung des Schub-Locking, was ebenfalls durch die bisher beschriebenen Methoden (DSG, ANS, SRI) erreicht werden kann, ist jedoch die Eliminierung des Volumetrischen oder Poisson-Locking, Kapitel 5.5.

Das Auftreten dieses Versteifungseffektes war bedingt durch Kopplung der Normalverzerrungen ε_ξ^u und ε_η^u über das Stoffgesetz und die fehlende Balance zwischen den diskretisierten verschiebungskompatiblen Verzerrungen. Für die Biegemodes (4 und 8) kann dies durch Hinzufügen des jeweils fehlenden linearen Anteils erfolgen, so dass sich durch die EAS-Erweiterung für die Normalverzerrungen vollständig lineare Ansätze ergeben:

$$\varepsilon_\xi = \varepsilon_\xi^u + \tilde{\varepsilon}_\xi \in \text{span}\{1, \xi, \eta\} \quad (6.150)$$

$$\varepsilon_\eta = \varepsilon_\eta^u + \tilde{\varepsilon}_\eta \in \text{span}\{1, \xi, \eta\} \quad (6.151)$$

Über Methoden, die ein modifiziertes Verzerrungsfeld durch die Eliminierung der parasitären Verzerrungen aufbauen, kann der Poisson-Lockingeffekt nicht vermieden werden. Dies kann mit einer Eigenwertanalyse der entsprechender Elemente verdeutlicht werden. Abbildung 6.20 zeigt den Verlauf der Eigenwerte des Biegemodes in Abhängigkeit der Querdehnzahl bzw. des Kompressionsmoduls κ .

Für ein festes Seitenverhältnis $h/t = 1$ steigen die Eigenwerte des Verschiebungselementes Q1 sowie des DSG-Elementes Q1-DSG (entsprechend auch des ANS-Elementes) mit zunehmendem Kompressionsmodul an, im Grenzfall $\nu = 0.5$ tendiert der Kompressionsmodul gegen unendlich, ebenso die Eigenwerte von Q1 und Q1-DSG. Der Unterschied zwischen dem Verschiebungselement und dem DSG-Element ist auf den Einfluss von Schub-Locking zurückzuführen, den die DSG-Methode wie alle *geometrischen* Versteifungseffekte eliminiert und für $\nu = 0$ den korrekten Wert liefert (identisch zum EAS-Element, das wie erwähnt, ebenfalls Schub-Locking vermeidet).

Mit zunehmendem Kompressionsmodul tritt der Shear-Lockingeffekt in Relation zum Einfluss des *materiellen* Lockingeffektes jedoch in den Hintergrund, die Eigenwerte des DSG-Elementes nähern sich denen des Verschiebungselementes.

Die Steifigkeit (also der Eigenwert) des EAS-Elementes dagegen zeigt für diese deviatorische Deformation (den Biegemode) keine Abhängigkeit vom Kompressionsmodul, der den kritischen Parameter des Poisson-Locking darstellt und ist somit frei von Volumetrischem Locking¹⁹.

Neben der Formulierung von reinen Kontinuumselementen, die das Poisson-Locking vermeiden, ist die

¹⁹Mit einer Formulierung mit 5 Verzerrungsparametern (vgl. (6.149)) kann eine deutliche Verbesserung hinsichtlich Volumetrischen Locking bei *verzerrten* Netzen erreicht werden.

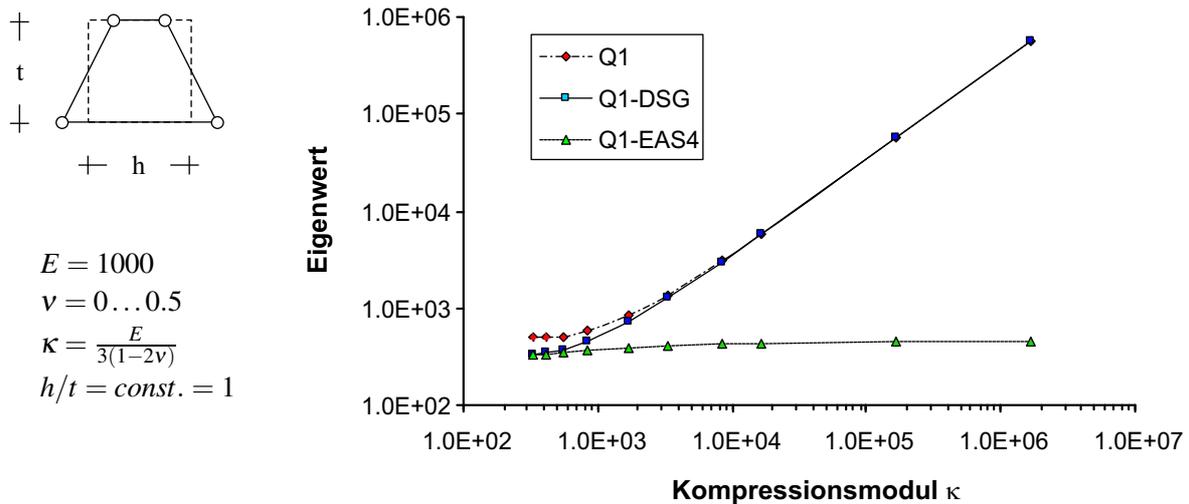


Abbildung 6.20: Eigenwertanalyse: Volumetrisches-Locking

EAS-Methode auch geeignet, die Normalverzerrungen in Dickenrichtung von 7-Parameter-Schalen zu erweitern. Dieses Verfahren wurde bereits in Kapitel 4.2.5 angesprochen, Gleichung (4.93).

Querschub-Locking Generell ist die EAS-Methode ebenfalls zur Formulierung von Elementen geeignet, die Querschub-Locking vermeiden. Für rechtwinklige Elemente ergeben sich dabei zu DSG(ANS)-Elementen identische Steifigkeitsmatrizen, auf Netzverzerrungen reagieren die Querschub-erweiterten EAS-Elemente allerdings relativ empfindlich, bereits bei kleinen Abweichungen von der Rechteckform tritt starkes Locking auf.

Der Einfluss der Netzverzerrung zusammen mit dem erhöhten Aufwand beim Aufstellen der Steifigkeitsmatrix sind dafür verantwortlich, dass die EAS-Methode zur Erweiterung des Querschub-Anteils gewöhnlich nicht eingesetzt wird.

Netzverzerrungsempfindlichkeit Abbildung 6.21 a) zeigt den Einfluss verzerrter Geometrien auf die Erweiterungen des Membrananteils für das EAS-Element mit 4 Verzerrungsparametern (Q1-EAS4). Wiederum ist das Elementverhalten in Abhängigkeit sowohl des Verzerrungsparameters a als auch des kritischen Parameters L/t aufgetragen.

Im Vergleich zu dem in Abschnitt 6.5.6 vorgestellten DSG-Element stechen zwei Unterschiede hervor: zum einen weist das EAS-Element für moderate bis starke Netzverzerrungen ($a > 1$) nicht den „worst-case“-Locking-Charakter auf, von dem das DSG-Element betroffen ist, d.h. für zunehmende Schlankheit (kritischer Parameter) wächst der Fehler *nicht* immer weiter an. Offensichtlich hat ab einem bestimmten Wert eine weitere Vergrößerung des Parameters a keinen wesentlichen Einfluss mehr auf das Verhalten des Elementes.

Eine weitere Differenz tritt insbesondere für sehr kleine Netzverzerrungen hervor ($0 < a < 0.5$): hier zeigt das EAS-Element ein deutlich schlechteres Verhalten als die DSG-Formulierung. Für eine feste Trägerhöhe von $t = 2.0$ ist das DSG-Element im Bereich $0 < a < 1.5$ überlegen, siehe Diagramm 6.21 c), ebenfalls bei der asymptotischen Analyse für $a = 0.1$ bzw. $a = 0.2$, Diagramm 6.21 d) und e).

Das Verhalten der EAS-Membranerweiterung gegenüber Netzverzerrungen kann etwas verbessert werden, indem den erweiterten Verzerrungen zusätzliche Polynomterme hinzugefügt werden, siehe (6.149). Generell ist das Verhalten jedoch dem des hier beschriebenen Q1-EAS4-Elementes vergleichbar.

Interessant ist der Einfluss der Annahme einer konstanten Metrik (6.145) bei der Formulierung der Ansatzfunktionen auf die Netzverzerrungsempfindlichkeit: zwar wird hierdurch die Erfüllung des Patchtests für das Q1-EAS4-Element, das dem QM6-Element entspricht, gewährleistet. Das ursprünglich ohne die Patchtest-Bedingung entwickelte Q6-Element weist allerdings eine deutlich verringerte Empfindlichkeit

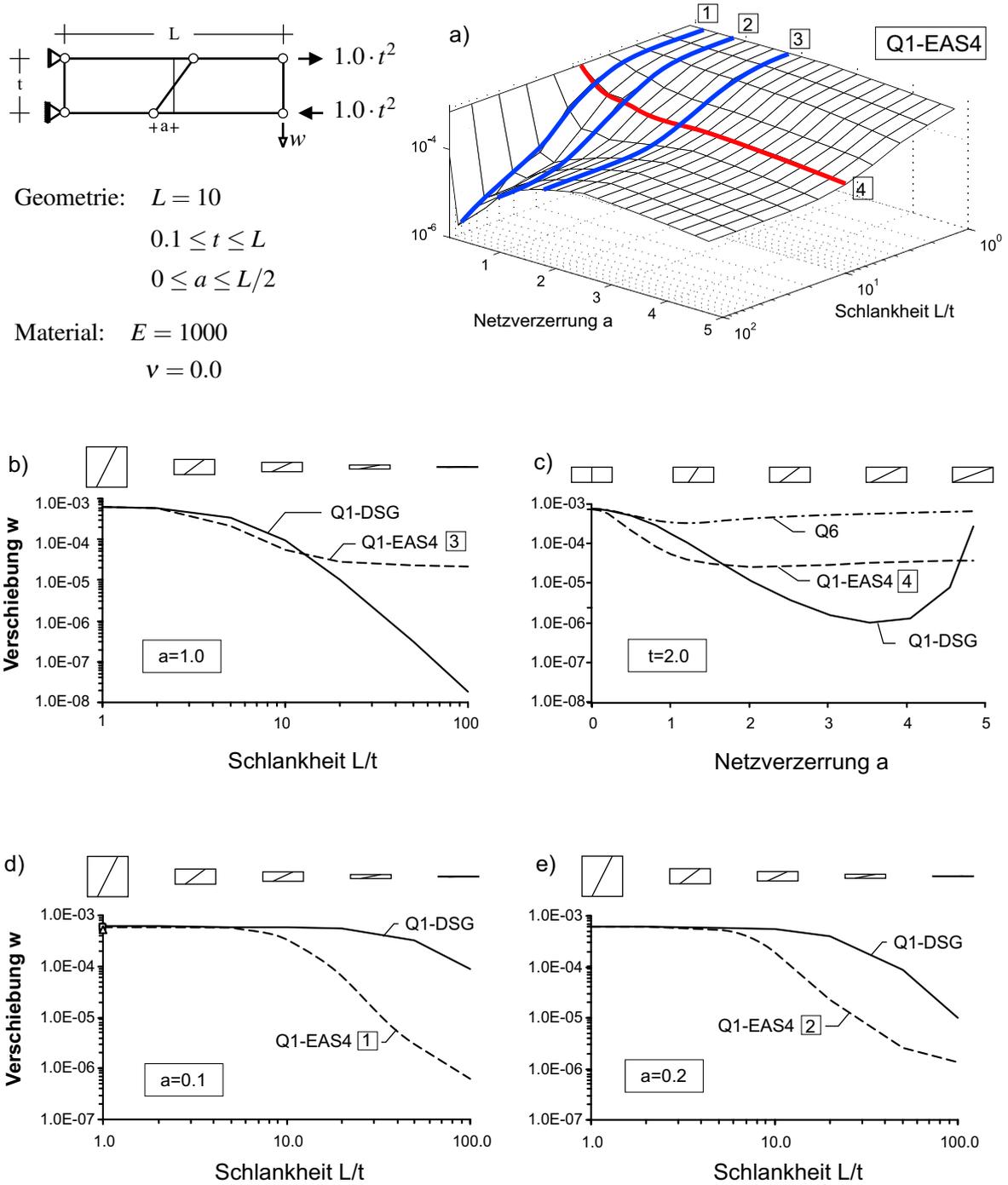


Abbildung 6.21: EAS-Element: Netzverzerrungsempfindlichkeit

gegenüber verzerrten Elementgeometrien auf, Diagramm 6.21 c).

Dies belegt wiederum die These der Grenzen der Perfektionierbarkeit der Elemente (MacNeal [102]), wonach die Erfüllung des Patchtests eine gleichzeitige Netzverzerrungsunempfindlichkeit ausschließt.

Trapezoidal-Locking / Curvature-Thickness-Locking Eine EAS-Erweiterung, mit deren Hilfe das Phänomen des Trapezoidal-Locking eliminiert werden kann, ist nicht bekannt.

Das Beispiel des mit Scheibenelementen gekrümmten Kragarms²⁰, Abbildung 6.15, zeigt das Verhalten des EAS4-Elementes bei zunehmender Schlankheit ($t \rightarrow 0$) im Vergleich zum voll- (Q1) und reduziert integrierten (Q1-SRI) Verschiebungselement sowie zum DSG-Element. Dabei wird deutlich, dass das EAS-Element zwar besser als die Verschiebungselemente abschneidet, die Lösung mit diesem Element dennoch eine Abhängigkeit von der Schlankheit aufweist. Das DSG-Element vermeidet diesen Versteifungseffekt dagegen, ohne eine speziell auf dieses Locking-Phänomen ausgerichtete Formulierung mit den in Abschnitt 6.5.5 vorgestellten Modifikationen des Membrananteils.

In der Literatur wird dieser Versteifungseffekt des EAS-Elementes selten explizit erwähnt, gewöhnlich wird lediglich das Verhalten einer trapezförmigen Elementgeometrie bei der Modellierung *gerader* Strukturen untersucht. Dies ist jedoch aus Sicht des Autors der Empfindlichkeit des Elementes gegenüber Netzverzerrungen zuzuordnen, der Curvature-Thickness-Lockingeffekt dagegen tritt bei der Modellierung gekrümmter Strukturen auf.

Membran-Locking Die EAS-Methode kann ebenfalls zur Vermeidung von Membran-Locking eingesetzt werden. Für unverzerrte Elemente ergibt sich eine zu den DSG- bzw. ANS-Elementen vergleichbares Verhalten, bei verzerrten Elementgeometrien ist allerdings ein Abfall der Leistungsfähigkeit festzustellen, siehe Beispiel 6.5.5.

6.6.4 Zusammenfassung

Die EAS-Methode hat sich vor allem zur Modifikation des Membrananteils etabliert. Besonderes Merkmal im Vergleich zu den B-bar-Methoden ist die Elimination *materieller* Locking-Effekte, d.h. des Volumetrischen oder Poisson-Dicken-Locking.

Nachteilig ist der erhöhte numerische Aufwand durch die erforderliche statische Kondensation der Verzerrungsparameter.

²⁰Eine entsprechende Diskretisierung mit 7-Parameter-Schalenelementen untersucht die Eignung der Elemente hinsichtlich Curvature-Thickness-Locking.

Kapitel 7

Numerische Beispiele

Zusätzlich zu den im vorhergehenden Kapitel beschriebenen Testbeispielen werden in diesem Kapitel weitere numerische Untersuchungen dargestellt, die das Verhalten insbesondere der DSG-Elemente dokumentieren und die Relation zu alternativen Elementformulierungen (ANS, EAS) beschreiben.

Die Bezeichnung der verschiedenen Elemente wird dabei wie folgt gewählt:

T1	3-knotiges Standard-Galerkin-Element (Verschiebungselement)
Q1	4-knotiges Standard-Galerkin-Element (Verschiebungselement)
Q2	9-knotiges Standard-Galerkin-Element (Verschiebungselement)
T1-DSG	T1 mit DSG-Modifikation der Querschubanteile
Q1-DSG	Q1 mit DSG-Modifikation der Querschubanteile
Q1-DSG/DSG	Q1 mit DSG-Modifikation der Querschub- und Membrananteile
Q2-DSG	Q2 mit DSG-Modifikation der Querschubanteile
Q2-DSG/DSG	Q2 mit DSG-Modifikation der Querschub- und Membrananteile
Q1-ANS/ANS	Q1 mit ANS-Modifikation der Querschub- und Membrananteile
Q2-ANS/ANS	Q2 mit ANS-Modifikation der Querschub- und Membrananteile
Q1-ANS/EAS_n	Q1 mit ANS-Modifikation der Querschubanteile und EAS-Erweiterung der Membrananteile mit n Verzerrungsfreiwerten
Q2-ANS/EAS_n	Q2 mit ANS-Modifikation der Querschubanteile und EAS-Erweiterung der Membrananteile mit n Verzerrungsfreiwerten

und entspricht den in Kapitel 6 vorgestellten Modifikationen.

7.1 Verzerrungsempfindlichkeit des Membrananteils

7.1.1 Kragsscheibe

Abbildung 7.1 zeigt den weit verbreiteten Test zur Überprüfung der Empfindlichkeit des Membrananteils gegenüber Netzverzerrungen. Untersucht wird eine Kragsscheibe, die mit einem Einzelmoment beaufschlagt wird. Die Diskretisierung besteht aus zwei Elementen, die Netzverzerrung wird über den Parameter a gesteuert.

Um ebenfalls eine Untersuchung des asymptotischen Verhaltens zu ermöglichen, ist die Belastung mit t^2 skaliert, die Ergebnisse der exakten Lösung sind damit unabhängig von der Trägerhöhe t .

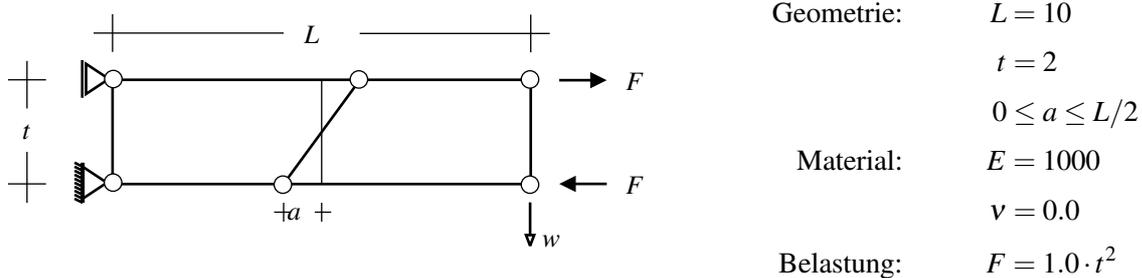


Abbildung 7.1: Distortion Test: Geometrie und Materialkennwerte

Die Verzerrungsempfindlichkeit der Membranmodifikationen der DSG- sowie EAS-Elemente wurde bereits in Kapitel 6.5.6 bzw. 6.6.3 ausführlich diskutiert. Abbildung 7.2 fasst nochmals die Ergebnisse zusammen. Dargestellt ist das Verhalten der Elemente Q1-DSG sowie Q1-EAS4¹ sowohl in Abhängigkeit der Dicke (Schlankheit) als auch der Netzverzerrung a .

Das EAS-Element weist insbesondere für leichte Netzverzerrungen einen starken Genauigkeitsabfall auf, für größere Parameter a stellt sich jedoch ein gewisses Niveau ein (ca. 50% der exakten Lösung), das auch für zunehmende Schlankheit erhalten bleibt, somit für $a > 0$ Locking-frei ist.

Das Q1-DSG-Element zeigt genau das umgekehrte Verhalten: die Ergebnisse sind bis auf sehr kleine Netzverzerrungen von der Dicke t abhängig, ein typisches Locking-Merkmal. Für kleine Werte von $a \lesssim 0.5$ jedoch ist das DGS-Element dem EAS-Element überlegen (vgl. auch Abbildung 6.21), der entsprechende Bereich ist in Bild 7.2 hervorgehoben.

¹Das Q1-EAS5-Element verhält sich in diesem Test nur unwesentlich besser als das EAS4-Element, siehe z.B. Andelfinger [4].

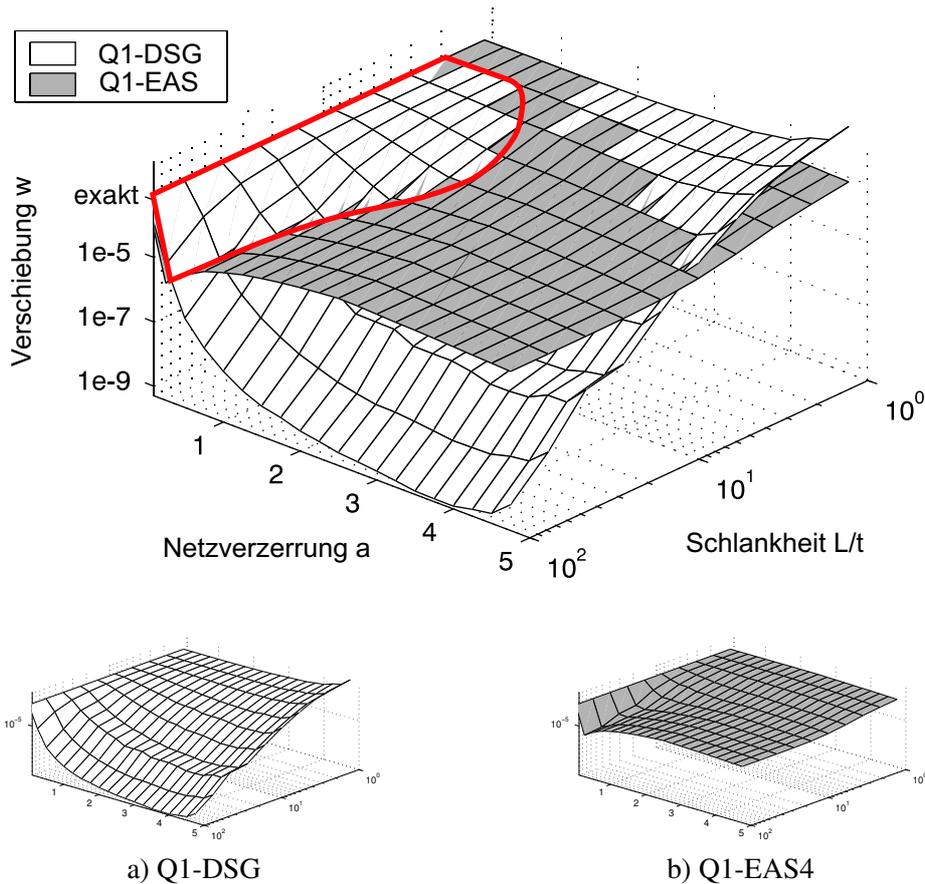


Abbildung 7.2: Verzerrungsempfindlichkeit verschiedener Membran-Modifikationen

7.1.2 MacNeal-Balken

Ein dem gerade beschriebenen Distortion-Test ähnliches Problem stellt der Kragbalken von MacNeal dar, System und Belastung sind in Abbildung 7.3 aufgezeigt. Wiederum können mit diesem Beispiel die Eigenschaften der Membranmodifikationen überprüft werden.

Die Ergebnisse der MacNeal-Balkentests unterstützen die Aussagen sowohl des Distortion-Tests 7.1.1 als auch des gekrümmten Kragarms, der als CTL-Test eingesetzt wurde, vgl. Abbildung 6.15.

Für das unverzerrte Netz A ergibt sich für die modifizierten Elemente (Q1-DSG und Q1-EAS4) die korrekte Lösung. Auf die Diskretisierung mit parallel (Netz B, Abb. 7.4 a)–c)) bzw. trapezförmig verzerrter Geometrie (Netz C, Abb. 7.4 d)–f)) reagieren die beiden Elemente jedoch unterschiedlich.

Zur Beurteilung des Einflusses der Netzverzerrung auf das asymptotische Verhalten wurden die beiden verzerrten Geometrien (Netz B und C) mit einem konstanten Winkel bzw. für ein konstanten Parameter

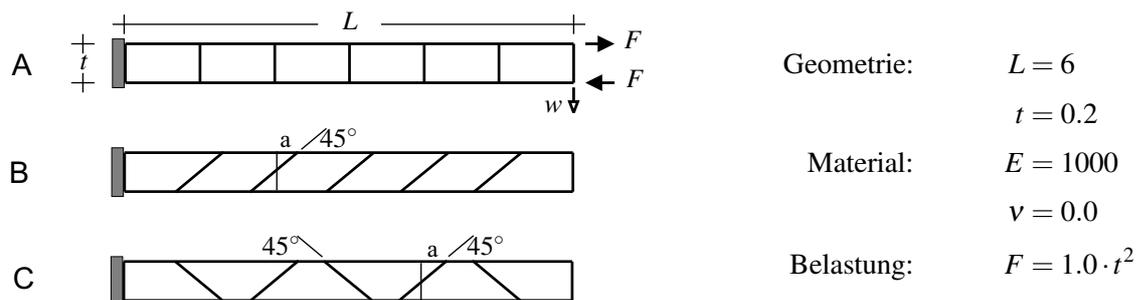


Abbildung 7.3: MacNeal-Balken: System und Diskretisierung

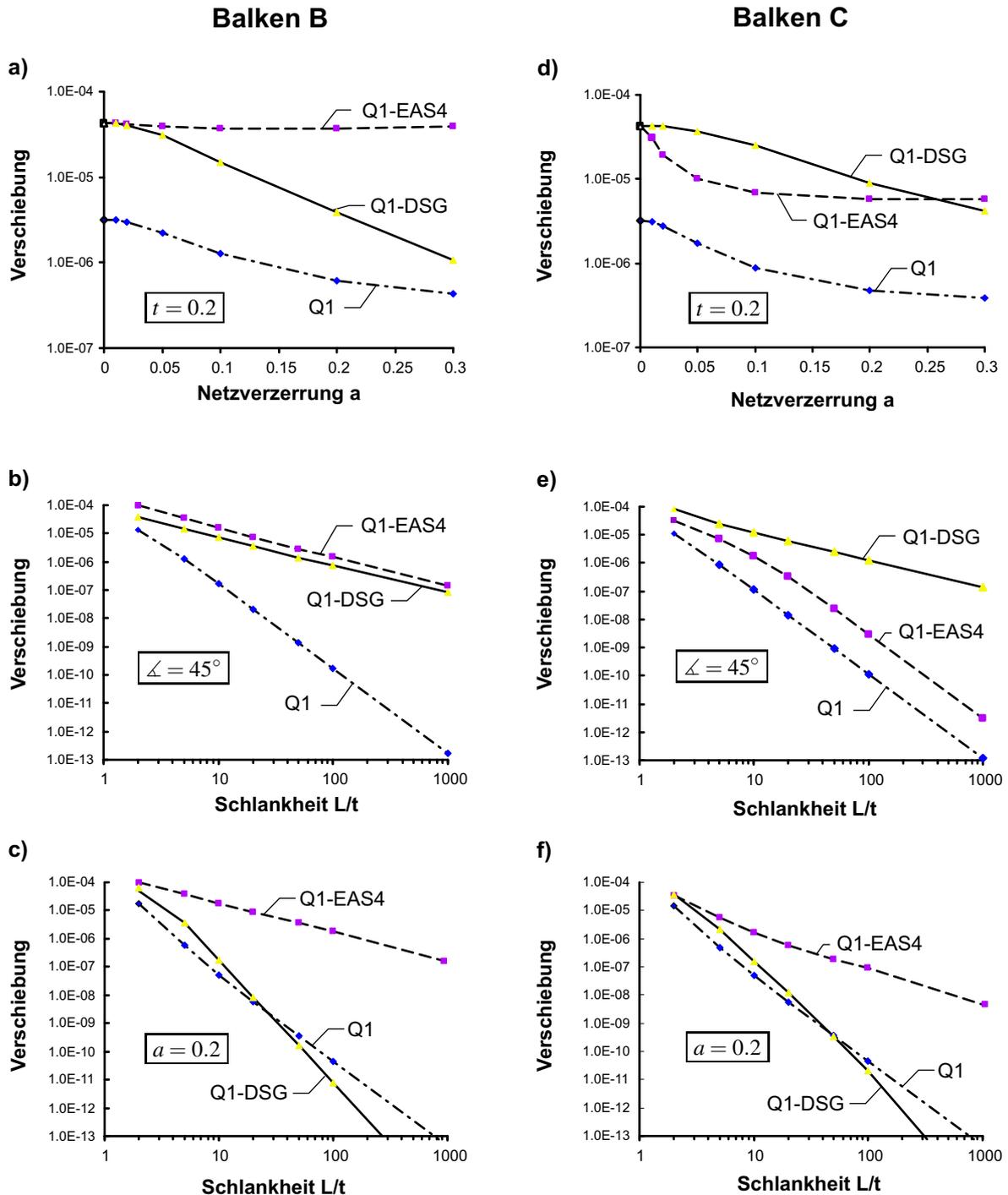


Abbildung 7.4: MacNeal-Balken: Ergebnisse für bilineare Elemente

a (vgl. Abb. 7.3) untersucht. Mit steigender Schlantheit der Elemente ($t \rightarrow 0$) bedeutet dies eine Zunahme ($\angle = const.$) bzw. Abnahme ($a = const.$) der Verzerrung der Elemente.

Gegenüber der Netzverzerrung entsprechend Geometrie B (bei einer konstanten Dicke des Balkens von $t = 0.2$) erweist sich das EAS-Element als relativ unempfindlich, siehe Abbildung 7.4 a), im Gegensatz zum DSG-Element, das sich nur für sehr kleine Netzverzerrungen ähnlich gut verhält, für entsprechend große Verzerrungen aber deutlich abfällt.

Die Untersuchung des asymptotischen Verhaltens stützt diese Feststellung: bei kleinen Netzverzerrungen ergibt sich für Q1-EAS4 und Q1-DSG ein ähnlicher Verlauf, wobei sich allerdings beide Elemente nicht völlig unabhängig von der Schlantheit verhalten (Abbildung 7.4 b)), während bei einer zunehmenden

Elementverzerrung das DSG-Element deutlich abfällt, Abbildung 7.4 c).

Die Ergebnisse einer Diskretisierung mit trapezförmiger Elementgeometrie, Balken C, weichen von denjenigen der Geometrie B ab. Hier stellt sich das DSG-Element als robuster gegenüber der trapezförmigen Netzverzerrung dar, wenn die Elemente nicht zu stark verzerrt sind (Abb. 7.4 d) und e)).

Bei einer ausgeprägten Netzverzerrung, wie sie sich für die in Abbildung 7.4 f) untersuchten Diskretisierungen ergeben, zeigt jedoch wiederum das EAS-Element ein besseres Verhalten.

Prinzipiell stützen die Analysen der MacNeal-Balken die bereits beim Distortion-Test (Abschnitt 7.1.1) festgestellten Eigenschaften des DSG- bzw. EAS-Elementes: für kleine Netzverzerrungen zeigt sich das DSG-Element überlegen, während bei stark verzerrten Elementen das EAS-Element ein robusteres Verhalten aufweist.

7.2 Schalenstrukturen

Die vorherigen Beispiele dienten vor allem der getrennten Analyse der Membranmodifikationen. Im Folgenden soll die Eignung der verschiedenen Elementformulierungen – insbesondere natürlich das Verhalten der DSG-Elemente – auch für komplexe Strukturen untersucht werden, die durch eine Interaktion aller modifizierten Größen gekennzeichnet sind.

7.2.1 Pinched Hemisphere

Das Beispiel der *Pinched Hemisphere*, einer durch je zwei Einzellasten gedrückten bzw. gezogenen Halbkugel, testet die Eignung der Elemente zur Modellierung einer doppelt gekrümmten Struktur, die im wesentlichen biegedominiert ist.

Wird die Schale allerdings wie in Abbildung 7.5 diskretisiert, ergibt sich eine Krümmung der *Elemente* nur für quadratische oder höhere Elemente, bilineare Elemente bleiben eben, auch wenn sie auf einer Formulierung mit gemittelten Direktoren basieren.

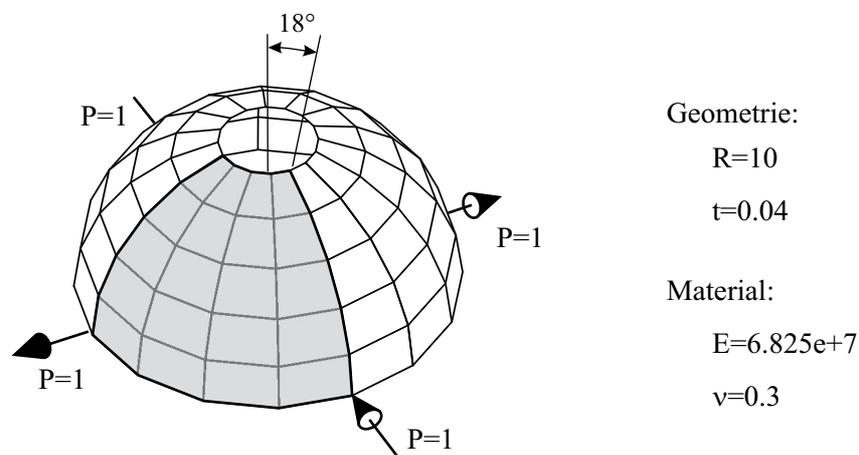


Abbildung 7.5: Pinched Hemisphere

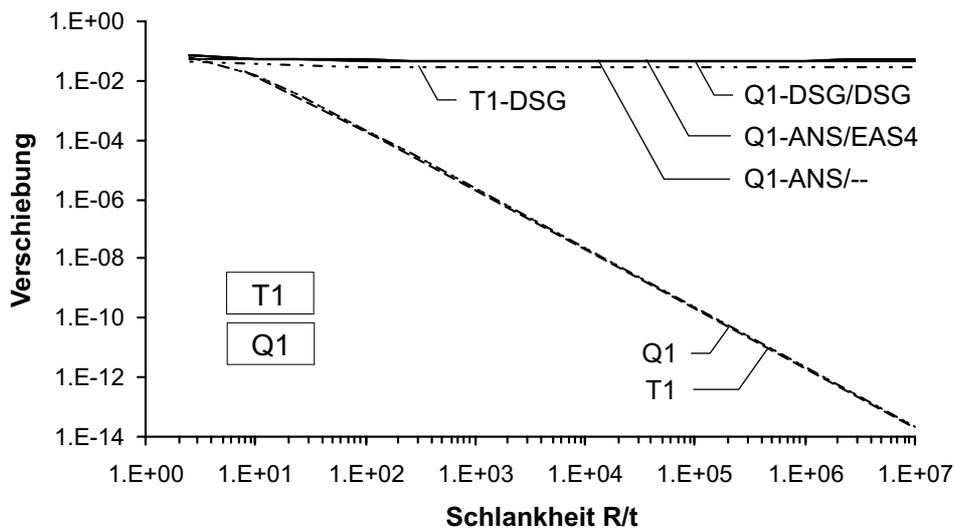
Eine Analyse hinsichtlich des Einflusses von Membran-Locking bzw. der Eignung der entsprechenden Modifikation der Membranverzerrungen kann somit für die vierknotigen Elemente anhand dieses Beispiels nicht durchgeführt werden, da für ebene Elemente per se keine Membran-Versteifung auftritt.

Dies spiegelt sich auch in den Ergebnissen der linearen Elemente wieder, Abbildung 7.6 a). Nur die reinen Verschiebungselemente Q1 und T1 zeigen eine Abhängigkeit von der Schlankheit, die wegfällt, sobald die Querschubverzerrungen modifiziert werden (Q1-ANS/–, Q1-ANS/EAS4, Q1-DSG/DSG, T1-DSG).

Dagegen kann für die quadratischen Elemente der Effekt des Membran-Locking gut abgelesen werden, Abbildung 7.6 b). Q2 weist naturgemäß die stärkste Abhängigkeit vom kritischen Parameter auf, da sowohl Querschub- als auch Membran-Locking auftreten. Die Dominanz des Membran-Locking für dieses Beispiel verdeutlicht das Querschub-modifizierte Element Q2-ANS/–: obwohl frei von Transverse-Shear-Locking, verhält es sich nur unwesentlich besser als das reine Verschiebungselement.

Ein Vergleich der Modifikationen der Membranverzerrungen stellt wiederum die Eignung der DSG-Methode unter Beweis. Während die – numerisch deutlich aufwändigere – EAS-Erweiterung mit 11 Verzerrungsparametern ebenfalls eine Neigung zum Membran-Locking zeigt (wenn auch wesentlich geringer als ohne Membranerweiterung), ist das DSG-Element Locking-frei. Ähnlichkeiten der DSG-Methode zur ANS-Methode deuten die nahezu identischen Ergebnisse an.

a) lineare Elemente



b) quadratische Elemente

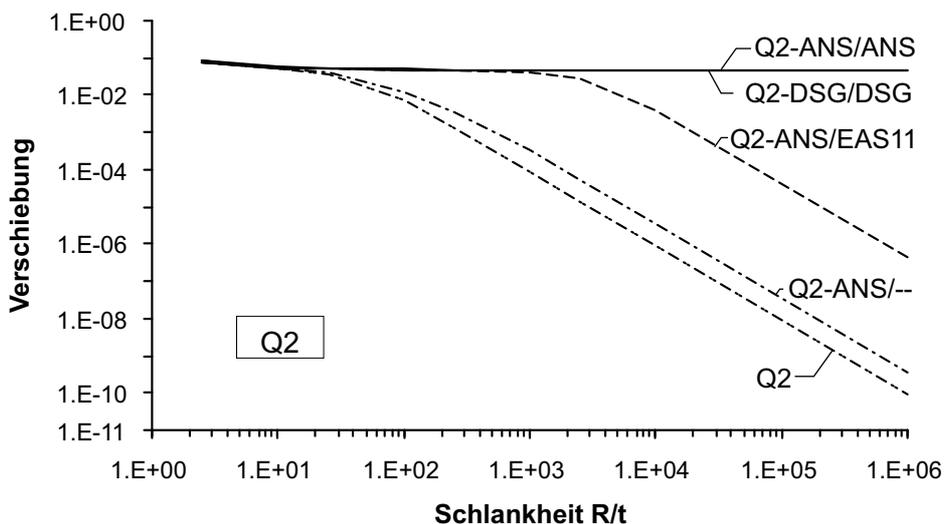


Abbildung 7.6: Ergebnisse Pinched Hemisphere

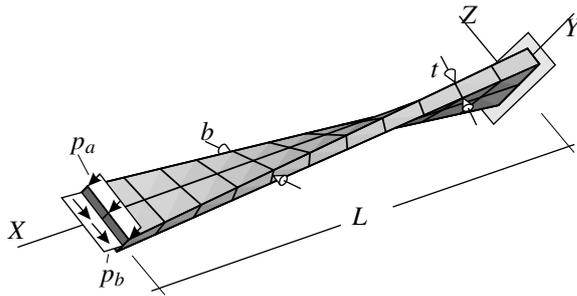
7.2.2 Twisted Beam

Das Problem des verdrehten Balkens (*Twisted Beam*) stellt ein verbreitetes Testbeispiel für Schalenelemente dar und wurde ebenfalls von MacNeal und Harder [100] als Standardtest vorgeschlagen. Geometrie sowie Belastung sind in Abbildung 7.7 gegeben.

Dieser Test überprüft, ob Schalenelemente in der Lage sind, bei verdrehter Elementgeometrie korrekte Ergebnisse zu reproduzieren.

Alle Elemente weisen bei diesem Test eine Verdrillung auf, d.h. sie sind nicht mehr eben. Bei der dargestellten Diskretisierung von 12×2 Elementen beträgt die Verdrillung für jedes Element zwar nur 7.5° , dennoch führt auch diese geringe Abweichung von einer ebenen Geometrie zu einer Kopplung von Inplane-Verzerrungen und denen senkrecht dazu, d.h. zu einer Kopplung von Scheiben- und Plattenanteilen.

Für bilineare und quadratische Elemente sind die Ergebnisse des ursprünglich vorgestellten Tests



Geometrie:	$L = 12.0$
	$b = 1.1$
	$t = 0.32$
Material:	$E = 2.9 \cdot 10^7$
	$\nu = 0.0 / 0.22$
Belastung:	$p_a = p_b = 1.0$

Abbildung 7.7: Twisted Beam

($\nu = 0.22$) in Tabelle 7.1 eingetragen (unverzernte Elemente). Dabei wird der Einfluss der verschiedenen Locking-Phänomene sichtbar: Das Verschiebungselement Q1 weist sowohl Querschub- als auch Membran-Locking auf, das querschubmodifizierte Element Q1-ANS/- (identisch zu Q1-ANS/DSG) vermeidet diesen – für bilineare Elemente im Vergleich zum Membran-Locking dominanten – Effekt und liefert entsprechend bessere Ergebnisse.

Dennoch wird der Effekt des Membran-Locking auch für die nur leicht verdrehten Elemente deutlich: entsprechende Modifikationen bzw. Erweiterungen des Membrananteils schalten auch diesen Effekt aus, die verbleibenden Unterschiede zwischen den Elementen Q1-ANS/EAS4 und Q1-DSG/DSG sind für unverzernte Netze minimal. Auch eine Netzverzerrung² hat bei der hier berücksichtigten Schlankheit von $L/t = 37.5$ nur geringen Einfluss.

Ähnliches gilt für die quadratischen Elemente, mit dem Unterschied, dass sich hier der Membran-Lockingeffekt in Relation zum Querschub-Locking stärker auswirkt, insgesamt jedoch deutlich geringer ausfällt als bei den bilinearen Elementen.

		Q1	Q1-ANS/-	Q1-ANS/EAS4	Q1-DSG/DSG
unverzerrtes	$u_y(p_a)$	$4.07 \cdot 10^{-4}$	$1.92 \cdot 10^{-3}$	$2.50 \cdot 10^{-3}$	$2.49 \cdot 10^{-3}$
Netz	$u_z(p_b)$	$5.72 \cdot 10^{-4}$	$7.12 \cdot 10^{-3}$	$7.29 \cdot 10^{-3}$	$7.29 \cdot 10^{-3}$
verzerrtes	$u_y(p_a)$	$2.76 \cdot 10^{-4}$	$1.80 \cdot 10^{-3}$	$2.41 \cdot 10^{-3}$	$2.33 \cdot 10^{-3}$
Netz	$u_z(p_b)$	$4.35 \cdot 10^{-4}$	$6.97 \cdot 10^{-3}$	$7.18 \cdot 10^{-3}$	$7.21 \cdot 10^{-3}$

		Q2	Q2-ANS/-	Q2-ANS/EAS11	Q2-DSG/DSG
unverzerrtes	$u_y(p_a)$	$2.58 \cdot 10^{-3}$	$2.61 \cdot 10^{-3}$	$2.63 \cdot 10^{-3}$	$2.62 \cdot 10^{-3}$
Netz	$u_z(p_b)$	$7.27 \cdot 10^{-3}$	$7.30 \cdot 10^{-3}$	$7.37 \cdot 10^{-3}$	$7.37 \cdot 10^{-3}$
verzerrtes	$u_y(p_a)$	$2.55 \cdot 10^{-3}$	$2.60 \cdot 10^{-3}$	$2.63 \cdot 10^{-3}$	$2.62 \cdot 10^{-3}$
Netz	$u_z(p_b)$	$7.18 \cdot 10^{-3}$	$7.25 \cdot 10^{-3}$	$7.36 \cdot 10^{-3}$	$7.36 \cdot 10^{-3}$

Tabelle 7.1: Ergebnisse des Twisted-Beam-Beispiels

Eine asymptotische Analyse (Abbildung 7.8a) und b)) zeigt die Netzverzerrungsempfindlichkeit der EAS-Erweiterungen.

Q1-ANS/EAS4 weist ein ähnliches Verhalten wie das Q1-ANS/- -Element ohne Modifikation des Membrananteils auf. Beide Elemente zeigen bei verzerrten Netzen eine klare Abhängigkeit von der Schlankheit der Elemente, d.h. (Membran-)Locking-Verhalten³, das Q1-DSG/DSG-Element dagegen verhält

²Die Elemente werden hierbei neben der Verwölbung zusätzlich in der Elementebene verzerrt.

³Für unverzernte Netze sind sowohl die membranmodifizierten Elemente Q1-DSG/DSG und Q1-ANS/EAS4 als auch das Element Q1-ANS/- Locking-frei, Abbildung 7.8a)

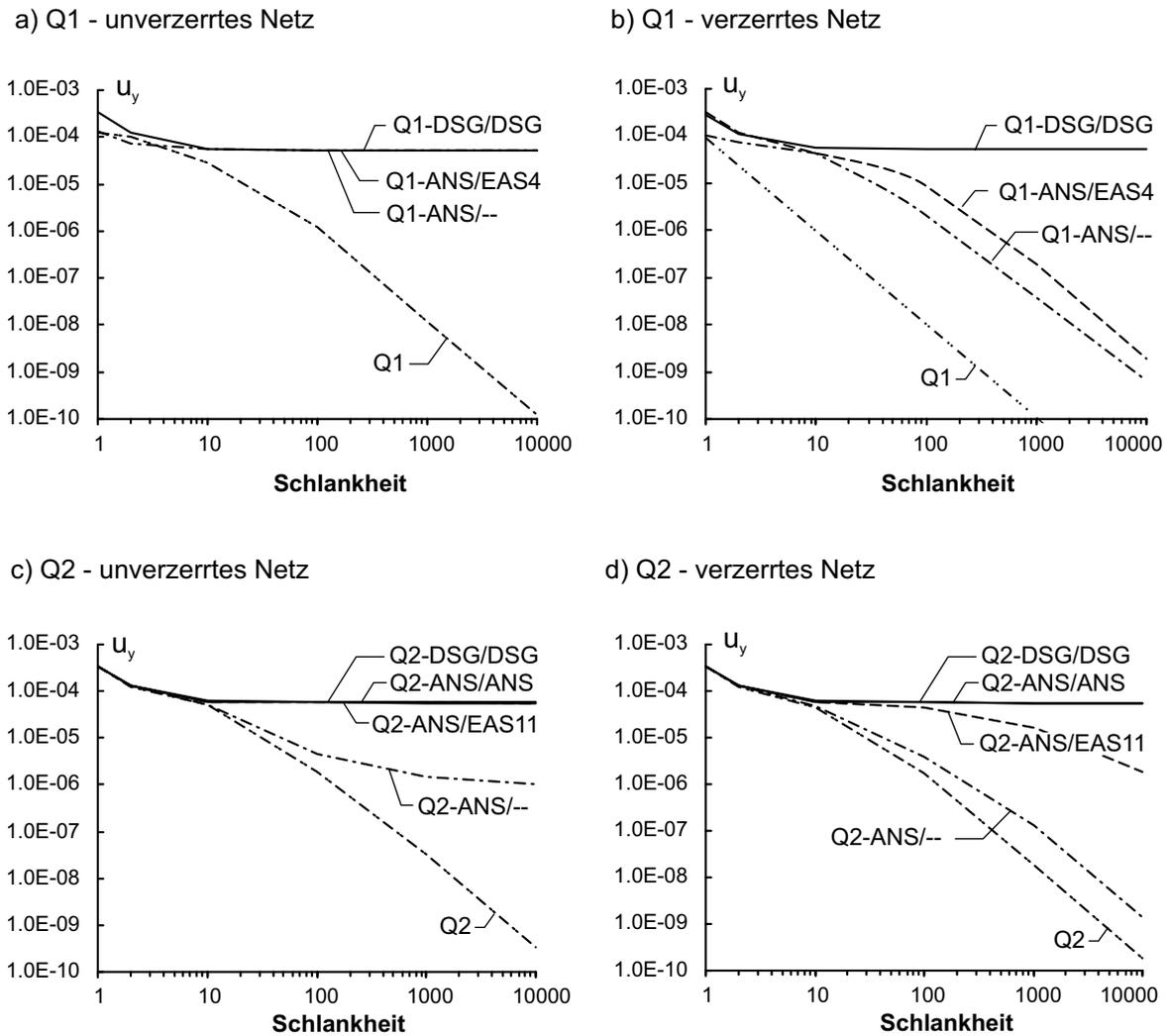


Abbildung 7.8: Twisted Beam: Asymptotisches Verhalten bilinearer und biquadratischer Elemente

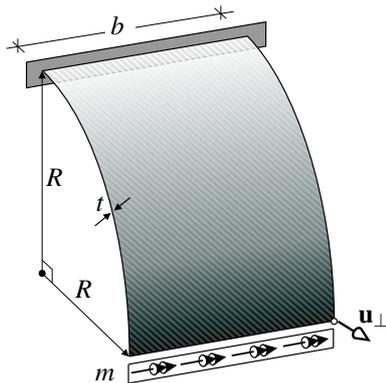
sich wie für unverzerrte Geometrien optimal.

Für die quadratischen Elemente gilt prinzipiell dieselbe Aussage: für unverzerrte Elemente sind alle Membran-modifizierte Elemente Locking-frei, für die verzerrte Konfiguration erweisen sich nur die B-Bar-Elemente (Q2-DSG/DSG, Q2-ANS/ANS) als unabhängig von der Schlankheit. Das EAS-Element Q2-ANS/EAS11 dagegen zeigt Locking-Tendenzen, wenn auch bei weitem nicht so stark ausgeprägt wie für die Elemente mit verschiebungskonformen Membranverzerrungen, Q2-ANS/-- und Q2.

Die DSG-Erweiterungen der Schalelemente erweisen sich also als geeignet, den komplexen Deformationszustand dieses Beispiels auch bei verzerrter Elementgeometrie Locking-frei abzubilden. Insbesondere geben die DSG-Elemente als einzige auch bei verzerrten Netzen das asymptotisch korrekte Verhalten wieder und relativieren die für das relativ spezielle Beispiel des Distortion-Tests (Abschnitt 7.1.1) aufgezeigte Verzerrungsempfindlichkeit der DSG-Elemente.

7.2.3 Zylindersektor

Das im folgenden angeführte Beispiel des Zylindersektors unterscheidet sich von dem in Abschnitt 6.5.5 beschriebenen im wesentlichen durch die Diskretisierung. So wurden einerseits über die Breite b der Struktur mehrere Elementreihen angesetzt und der Einfluss verschiedener Diskretisierungen untersucht. Das System ist in Abbildung 7.9 dargestellt, aus der ebenfalls hervorgeht, dass im Gegensatz zum Beispiel des Zylinderstreifens die Wirkung der Querdehnung berücksichtigt wurde. Die Belastung ist entsprechend einem konstanten Biegezustand gewählt, aus einem resultierenden Moment $M = 1$ ergeben sich die Streckenbelastung m und – bei der diskretisierten Struktur – die entsprechenden äquivalenten Knotenlasten.



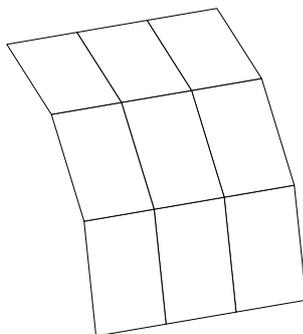
Geometrie:	$R = 10.0$
	$b = 10.0$
	$t = 0.1$
Material:	$E = 1.0 \cdot 10^7$
	$\nu = 0.3$
Belastung:	$m = 1.0/b$

Abbildung 7.9: Zylindersektor: System

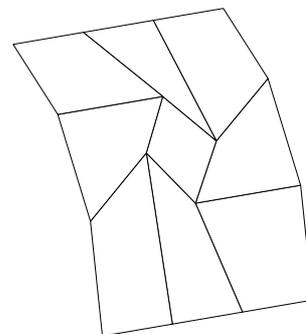
Das Beispiel vergleicht die Leistungsfähigkeit linearer bzw. quadratischer Schalenelemente und deren Netzverzerrungsempfindlichkeit. Gemeinsame Grundlage der verschiedenen Elementformulierungen ist hier ein 5-Parameter-Schalenmodell (vgl. 4.2.3) mit gemitteltem Direktor.

Der Vorteil insbesondere gegenüber den Beispielen des Pinched Cylinder bzw. der Pinched Hemisphere ist, dass keine Singularitäten durch Einzellasten auftreten, die bei Netzverfeinerung mehr oder weniger gut abgebildet wird und die Aussagefähigkeit der Ergebnisse reduzieren. Statt dessen stellt sich der Zylindersektor als prinzipiell einfache Struktur dar (ohne Einfluss der Querdehnung ergibt sich ein gekrümmter Kragarm), der allerdings bei einer entsprechenden Diskretisierung (siehe Abbildung 7.10 b)) zu komplexen Geometrien für die einzelnen Elemente führt und somit ein geeignetes Testbeispiel für Schalenelemente darstellt.

Für das *reguläre* Netz zeigen dementsprechend alle untersuchten Elemente ein ähnlich gutes Konvergenzverhalten, siehe Abbildung 7.11 a). Die beiden EAS-Elemente Q1-ANS/EAS4 und Q1-ANS/EAS7



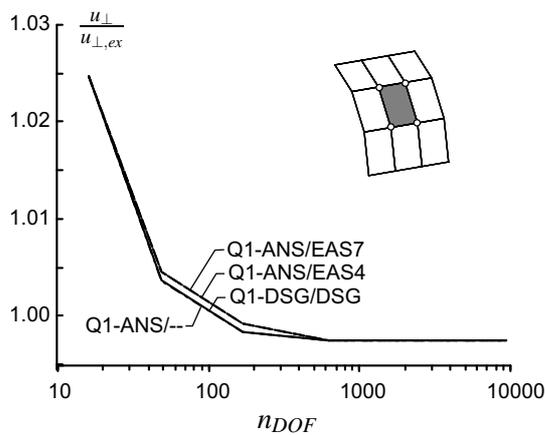
a) Reguläres Netz



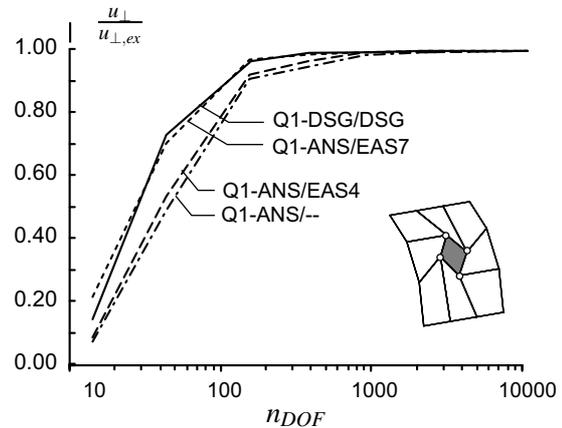
b) Verzerrtes Netz

Abbildung 7.10: Diskretisierungen des Zylindersektors

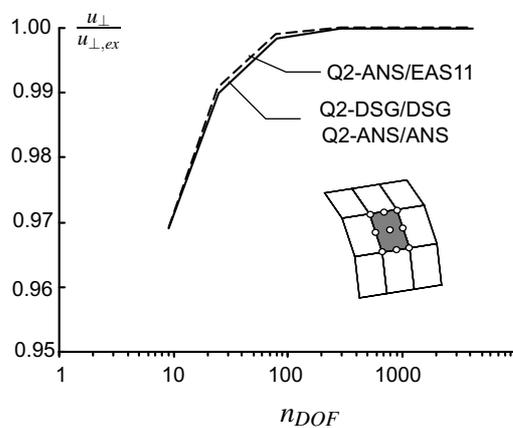
a) Reguläres Netz, Q1



b) Verzerrtes Netz, Q1



c) Reguläres Netz, Q2



d) Verzerrtes Netz, Q2

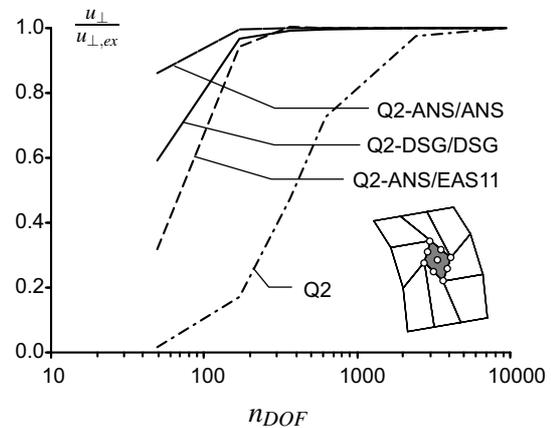


Abbildung 7.11: Konvergenz vier- und neunknotiger Schalenelemente

liefern identische Werte, da sich die zusätzlichen Verzerrungsansätze des EAS7- gegenüber dem EAS4-Element erst bei verzerrter Elementgeometrie auswirken.

Gleiches gilt für die B-Bar-Elemente mit bzw. ohne Modifikation der Membranverzerrungen, Q1-ANS/- und Q1-DSG/DSG. Da auch hier für das reguläre Netz kein Membran-Locking auftritt (vgl. Beispiel 7.2.1), bewirkt der modifizierte Membrananteil keine Veränderung der Resultate ⁴.

Die Differenzen zwischen den EAS- und den DSG-Elementen sind auf den Einfluss der Querdehnung zurückzuführen und nur minimal.

Das Verhalten der biquadratischen Elemente bietet für unverzerrte Netze einen ähnlichen Eindruck wie die linearen Elemente, sofern der Querschubanteil modifiziert wurde. Das reine Verschiebungselement taucht in dem hier dargestellten Bereich nicht auf, da der Einfluss des Membran-Locking die Konvergenzrate entsprechend stark beeinträchtigt.

Bei den verzerrten Netzen wird eine Abweichung zwischen den ANS- und den DSG-Modifikationen deutlich, identische Steifigkeitsmatrizen werden für die beiden Formulierungen lediglich für bilineare Elemente erhalten. Dabei zeigt sich die ANS-Formulierung in der Konvergenzgeschwindigkeit leicht überlegen, die DSG-Elemente wiederum stellen sich etwas besser als die EAS-Membranerweiterungen

⁴Es sei nochmals darauf hingewiesen, dass sich für bilineare Elemente identische Formulierungen der DSG- und ANS-Elemente sowohl für den Querschub- als auch den Membrananteil ergeben

dar. Das Verschiebungselement konvergiert erst bei sehr feiner Diskretisierung gegen die exakte Lösung. Generell werden vergleichbare Konvergenzraten für alle drei Modifikationen erhalten, interessanter hinsichtlich der Beurteilung von Locking ist das asymptotische Verhalten der Elemente.

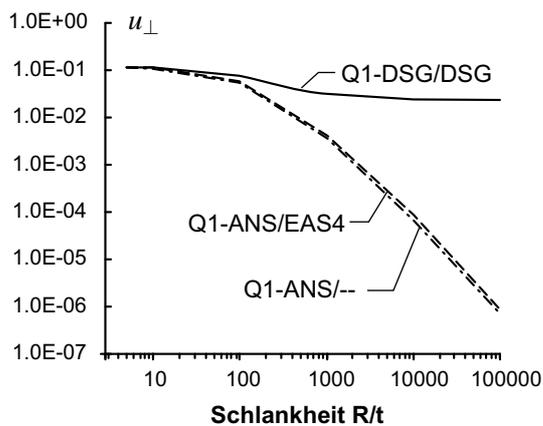
Die asymptotische Untersuchung der Struktur erfolgte nur für das verzerrte Netz; für das reguläre Netz sind alle hier untersuchten Elemente – mit Ausnahme natürlich der reinen Verschiebungselemente Q1, Q2 – frei von Locking-Effekten.

Die Diagramme 7.12 a) und b) zeigen ein den bisherigen numerischen Analysen ähnliches Bild: von den bilinearen Elementen ist wiederum lediglich das DSG-Element unabhängig von der Schlankheit, das nur Querschub-modifizierte Element Q1-ANS/- sowie das EAS-Element weisen dagegen starkes Locking auf, 7.12 a).

Für die quadratischen Elemente ohne Membranmodifikation wird der Einfluss des Membran-Locking deutlich: das Verhalten sowohl Q2 als auch von Q2-ANS/- in Abhängigkeit des kritischen Parameters ist stark von Versteifungseffekten geprägt. Die EAS-Erweiterung mit 11 Parametern kann diesen Effekt zwar abschwächen, jedoch nicht ganz vermeiden, lediglich die Membranerweiterungen gemäß der DSG-Methode bzw. des ANS9-Elementes besitzen nur noch eine geringe Abhängigkeit, der Fehler steigt jedoch mit $R/t \rightarrow 0$ nicht über alle Grenzen (Abbildung 7.12 b)).

Die verzerrte Elementgeometrie zeigt auch, dass sich die Äquivalenz zwischen ANS- und DSG-Methode nur auf lineare Elemente beschränkt, bei Elementen höherer Ordnung und beliebig verformter Geometrie ergeben sich Unterschiede bei den resultierenden Steifigkeitsmatrizen und entsprechend Differenzen zwischen den beiden Formulierungen auch bei der asymptotischen Analyse.

a) Bilineare Elemente



b) Biquadratische Elemente

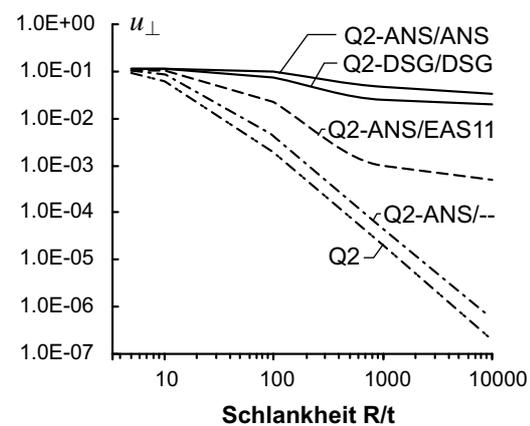


Abbildung 7.12: Asymptotisches Verhalten vier- und neunknotiger Schalenelemente

Kapitel 8

Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurde eine systematische Analyse der Lockingphänomene finiter Elemente gegeben sowie verschiedene Methoden zur Vermeidung dieser Effekte diskutiert. Mit entsprechenden Erweiterungen konnte dabei die *Discrete-Strain-Gap*-Methode als ein universelles Konzept zur Eliminierung geometrischer Versteifungsphänomene entwickelt werden. Der Vergleich mit bekannten Formulierungen wie der ANS-Methode und der EAS-Methode dokumentiert die Leistungsfähigkeit des vorgestellten Konzeptes.

Die Analyse der Locking-Phänomene und das Verständnis der Ursachen ihres Auftretens ist für die Beurteilung der Eigenschaften von finiten Elementen unerlässlich. Neben der Definition des Begriffes Locking und dessen mechanisch motivierter Interpretation wurde ebenfalls eine numerische bzw. mathematische Sichtweise der Versteifungseffekte gegeben. Für die Formulierung eines effizienten Elementes stellt die mechanische Deutung der Locking-Phänomene jedoch das hilfreichste Instrument dar, da sie mit der Identifizierung parasitärer Verzerrungen und Spannungen gezielte Hinweise für die Konstruktion geeigneter Ansätze gibt.

Mit der Einordnung des Trapezoidal Locking (TL) als Versteifungseffekt bei der Diskretisierung *gekrümmter* Strukturen mit Kontinuumelementen wurde eine klare Definition dieses Phänomens gegeben, in der die trapezförmige Elementgeometrie originär mit der Krümmung der zu diskretisierenden Struktur verknüpft ist. Diese Definition stellt insofern eine Einschränkung dar, als das Verhalten von Elementen mit einer infolge Netzverzerrung trapezförmigen Geometrie nicht diesem Locking-Effekt zugeordnet wird. Der Vorteil dieser Betrachtungsweise ist also die strikte Trennung zwischen Locking-Phänomen und Netzverzerrungsempfindlichkeit, die mit den bisherigen Definitionen dieses Effektes und der Betrachtung an geraden Strukturen mit (trapezförmig) verzerrten Netzen nicht möglich war.

Zusammen mit dem Curvature-Thickness-Locking (CTL) sind damit die Versteifungs-Phänomene erklärt, die sich durch parasitäre Normalverzerrungen in Dickenrichtung bei gekrümmten Elementen definieren, einmal erfolgt die Diskretisierung mit Kontinuumelementen, im anderen Fall mit Schalenelementen.

Dabei kann eine direkte Analogie zu den Effekten des Schub- bzw. Querschub-Locking gezogen werden. Auch hier beschreiben beide Effekte parasitäre Schubverzerrungen, die bei der Modellierung mit Kontinuumelementen (Shear-Locking, SL) bzw. Schalenelementen (Transverse-Shear-Locking, TSL) auftreten. Die kritischen Parameter sind jeweils auch identisch: Seitenverhältnis der Elemente (TL, SL) bzw. Schlankheit (CTL, TSL).

Das Membran-Locking stellt vor allem für quadratische oder höhere Elemente mit gekrümmter Geometrie einen schwerwiegenden Defekt dar. Außer für Balken- und Schalenelemente tritt dieser Effekt ebenfalls bei Kontinuumelementen auf. Die Ursache für dieses Phänomen konnte auf eine Unausgeglichenheit zwischen Verschiebungs- und Geometriefeldern zurückgeführt werden, desweiteren wurde der Einfluss der Krümmung des Elementes auf den Verlauf der parasitären Verzerrungen dargestellt. Die damit einhergehende, von der Krümmung des Elementes abhängige Lage der Nullstellen der parasitären Verzerrungen beeinflusst zwar theoretisch die Genauigkeit von Kollokationsmethoden wie der ANS-Methode, praktisch sind allerdings keine Unterschiede festzustellen.

Bei vierknotigen Elementen tritt der Einfluss des Membran-Lockingeffektes nur für verdrehte Elementgeometrien auf und ist bei weitem nicht so gravierend wie für die quadratischen Elemente.

Neben diesen geometrischen Lockingeffekten wurde ebenfalls der Einfluss der materiellen Locking-Effekte, Volumetrisches Locking (Kontinua) und Poisson-Dicken-Locking (7-Parameter-Schale) besprochen.

Einen weiteren Schwerpunkt dieser Arbeit bildet die Anwendung und Erweiterung der Discrete-Strain-Gap-Methode (DSG) und die Analyse ihrer Eignung hinsichtlich der beschriebenen Locking-Phänomene. Die vorgeschlagenen DSG-Modifikationen sind für dreidimensionale Kontinua anwendbar und enthalten somit als Sonderfall alle Strukturelemente. Herausragendes Merkmal der DSG-Methode ist ihre Formulierung als ein universelles Konzept zur Vermeidung geometrischer Locking-Phänomene, das auf beliebige Elementtypen beliebiger Polynomordnung ohne die Wahl von Kollokationspunkten anwendbar ist.

Die Darstellung der bekannten Methoden der Unterintegration, der Assumed-Natural-Strains (ANS) und der Enhanced-Assumed-Strains (EAS) verfolgte vor allem das Ziel, für die Modifikationen der DSG-Methode einen Vergleichsrahmen zu bieten. In den angestellten numerischen Analysen konnte nicht nur die Leistungsfähigkeit der DSG-Methode unter Beweis gestellt werden, es wurden auch Schwächen der etablierten EAS-Methode sichtbar.

So erweist sich die häufig für die Formulierung von Kontinuumselementen und die Verbesserung des Membrananteils von Strukturelementen eingesetzte Methode als anfällig gegenüber dem Effekt des Trapezoidal-Locking. Auch die Empfindlichkeit gegenüber Netzverzerrungen war teilweise größer als bei entsprechenden DSG- oder ANS-Formulierungen.

Beim Vergleich der DSG-Elemente mit ANS-Elementen zeigen sich Ähnlichkeiten der beiden Formulierungen, im Fall von vierknotigen Elementen ergeben sich sogar identische Steifigkeitsmatrizen. Deutliche Unterschiede sind jedoch bei Dreieckselementen bemerkbar, hier deutet sich eine gewisse Überlegenheit der DSG-Methode an.

Eine weitere Gemeinsamkeit mit der ANS-Methode ist das Nicht-Bestehen des Patchtests für die Modifikationen der Membrananteile. Der Vergleich mit der EAS-Methode, die oft zur Erweiterung der Membrananteile eingesetzt wird und den Patchtest besteht, zeigt jedoch ein sehr gutes Verhalten der membranmodifizierten DSG-Elemente. Bis auf den speziellen Distortion-Test weisen die DSG-Elemente bei verzerrten Netzgeometrien ein den EAS-Elementen überlegenes asymptotisches Verhalten auf.

Der einzige Effekt, der nicht mit der DSG- bzw. ANS-Methode behoben werden kann, ist der des Volumetrischen Locking, die Kombination mit der diese Anforderung erfüllenden EAS-Methode ist allerdings problemlos möglich.

Ausgehend vom Dreifeld-Funktional von Hu-Washizu wurde mit der Entwicklung einer variationellen Basis ebenfalls eine mathematische Grundlage der DSG-Methode angegeben.

Mit der DSG-Methode konnte somit ein universelles Konzept entwickelt werden, das variationell abgesichert ist und neben seinen hervorragenden numerischen Eigenschaften vor allem durch seine Universalität und konzeptionelle Klarheit besticht.

Die zwei grundsätzlichen Ziele der Elementtechnologie, das Vermeiden von künstlichen Steifigkeiten (Locking) und künstlichen Instabilitäten (ZEM), können mit den in dieser Arbeit beschriebenen Konzepten im wesentlichen erreicht werden.

Gewisse Verbesserungsmöglichkeiten bestehen noch hinsichtlich der Empfindlichkeit der Elemente gegenüber Netzverzerrungen sowie der Oszillationen der Spannungen. Einen geeigneten Ansatz hierfür stellt der Einsatz von Stabilisierungsverfahren dar, deren erfolgreiche Anwendung in dieser Arbeit bereits angedeutet wurde.

Einen bisher noch weitgehend unbeachteten Bereich der Elementtechnologie stellt dagegen das Verhalten bzw. die Eignung der Elementformulierungen für nichtlineare Berechnungen dar. Gewöhnlich werden die für lineare Elemente entwickelten Methoden direkt auf nichtlineare Elementformulierungen

übertragen. Zum Einfluss der bei nichtlinearen Problemen auftretenden Terme auf das Elementverhalten existieren jedoch noch kaum systematische Arbeiten oder Lösungsansätze, wie die erst in jüngerer Vergangenheit beobachteten Instabilitäten verschiedener Elementformulierungen bei großen Deformationen zeigen. Gerade die heute fast schon selbstverständliche Berücksichtigung geometrischer und materieller Nichtlinearitäten deuten die Notwendigkeit weiterer Forschungsbemühungen in dieser Richtung an.

Anhang

A.1 Tensorrechnung

- Vektor in ko- bzw. kontravarianter Darstellung

$$\mathbf{a} = a_i \mathbf{G}^i = a^i \mathbf{G}_i \quad (\text{A.1})$$

- Dyadisches Produkt zweier Vektoren

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \mathbf{A} \quad \text{mit} \quad \mathbf{A} \mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \quad (\text{A.2})$$

- Tensor zweiter Stufe in ko-, kontra- und gemischtvarianter Darstellung

$$\mathbf{A} = A_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j = A^{ij} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j = A_i^j \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}_j \quad (\text{A.3})$$

- Tensor vierter Stufe in kontravarianter Darstellung

$$\mathbb{A} = A^{ijkl} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \otimes \mathbf{G}^k \otimes \mathbf{G}^l \quad (\text{A.4})$$

- Skalarprodukt zweier Vektoren (einfache Verjüngung)

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b^i \quad (\text{A.5})$$

- Skalarprodukt zweier Tensoren (doppelte Verjüngung)

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = A_{ij} B^{ij} \quad (\text{A.6})$$

- Einfache Verjüngung eines Tensors zweiter Stufe durch einen Vektor

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{b} = A^{ij} b_j \mathbf{G}_i \quad (\text{A.7})$$

$$\mathbf{b}^T \cdot \mathbf{A} = b_i A^{ij} \mathbf{G}_j \quad (\text{A.8})$$

- Produktregel

$$\text{div}(\mathbf{S} \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{S}^T : \text{grad} \mathbf{u} + (\text{div} \mathbf{S}^T) \cdot \mathbf{u} \quad (\text{A.9})$$

- Gaußscher Integralsatz (Divergenztheorem)

$$\int_V \text{div} \mathbf{S} \, dV = \int_A \mathbf{S} \cdot \mathbf{N} \, dA \quad (\text{A.10})$$

$$\int_V \text{div} \mathbf{u} \, dV = \int_A \mathbf{u} \cdot \mathbf{N} \, dA \quad (\text{A.11})$$

- partielle Integration

$$\int_V \text{grad} \mathbf{u} : \mathbf{P} \, dV = \int_A \mathbf{P} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{u} \, dA - \int_V \text{grad} \mathbf{u} \cdot \text{div} \mathbf{P} \, dV \quad (\text{A.12})$$

- für beliebige Tensoren zweiter Stufe \mathbf{A} , \mathbf{B} und \mathbf{C} gilt

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A} : \mathbf{C} \quad (\text{A.13})$$

A.2 Formfunktionen

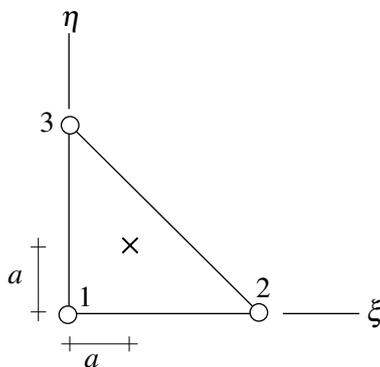
Die in dieser Arbeit vorgestellten Elemente basieren auf den folgenden drei- bzw. viereckigen Grundtypen der Lagrange- und Serendipity-Klasse.

A.2.1 Dreieckige Elemente

Lage der Integrationspunkte:

$$\text{Lineares Dreieckselement (Abb. A.1):} \quad a = \frac{1}{3} \quad (\text{A.14})$$

$$\text{Quadratisches Dreieckselement (Abb. A.2):} \quad \text{Seitenmittelpunkte} \quad (\text{A.15})$$

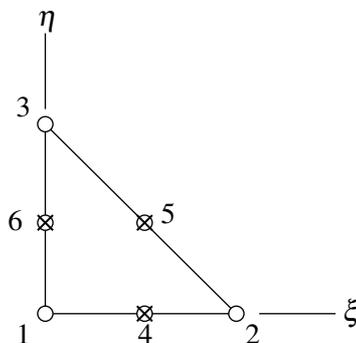


$$N_1 = 1 - \xi - \eta \quad (\text{A.16})$$

$$N_2 = \xi \quad (\text{A.17})$$

$$N_3 = \eta \quad (\text{A.18})$$

Abbildung A.1: Lineares Dreieckselement: Geometrie, Formfunktionen, Gausspunkte



$$N_1 = (1 - 2\xi - 2\eta)(1 - \xi - \eta) \quad (\text{A.19})$$

$$N_2 = 2\xi^2 - \xi \quad (\text{A.20})$$

$$N_3 = 2\eta^2 - \eta \quad (\text{A.21})$$

$$N_4 = 4(\xi - \xi^2 - \xi\eta) \quad (\text{A.22})$$

$$N_5 = 4\xi\eta \quad (\text{A.23})$$

$$N_6 = 4(\eta - \eta^2 - \xi\eta) \quad (\text{A.24})$$

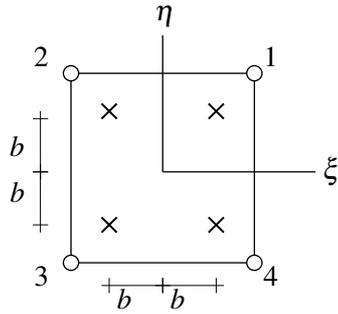
Abbildung A.2: Quadratisches Dreieckselement: Geometrie, Formfunktionen, Gausspunkte

A.2.2 Viereckige Elemente

Lage der Integrationspunkte:

$$\text{Lineares Viereckselement (Abb. A.3):} \quad b = \sqrt{\frac{1}{3}} \quad (\text{A.25})$$

$$\text{Quadratisches Viereckselement (Abb. A.4):} \quad c = \sqrt{\frac{3}{5}} \quad (\text{A.26})$$



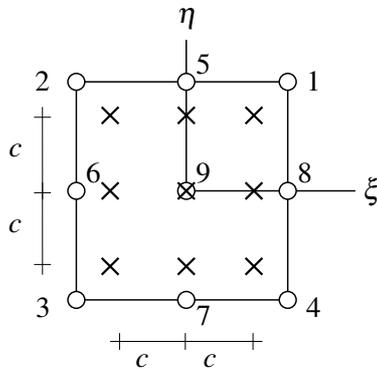
$$N_1 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \quad (\text{A.27})$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \quad (\text{A.28})$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \quad (\text{A.29})$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \quad (\text{A.30})$$

Abbildung A.3: Lineares Viereckselement: Geometrie, Formfunktionen, Gausspunkte



$$N_1 = \frac{1}{4}\xi\eta(1 + \xi)(1 + \eta) \quad (\text{A.31})$$

$$N_2 = \frac{1}{4}\xi\eta(1 - \xi)(1 + \eta) \quad (\text{A.32})$$

$$N_3 = \frac{1}{4}\xi\eta(1 - \xi)(1 - \eta) \quad (\text{A.33})$$

$$N_4 = \frac{1}{4}\xi\eta(1 + \xi)(1 - \eta) \quad (\text{A.34})$$

$$N_5 = \frac{1}{2}\eta(1 + \eta)(1 - \xi^2) \quad (\text{A.35})$$

$$N_6 = -\frac{1}{2}\xi(1 - \xi)(1 - \eta^2) \quad (\text{A.36})$$

$$N_7 = -\frac{1}{2}\eta(1 - \eta)(1 - \xi^2) \quad (\text{A.37})$$

$$N_8 = \frac{1}{2}\xi(1 + \xi)(1 - \eta^2) \quad (\text{A.38})$$

$$N_9 = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2) \quad (\text{A.39})$$

Abbildung A.4: Quadratisches Viereckselement: Geometrie, Formfunktionen, Gausspunkte

A.3 Zweidimensionaler Balken

- Modifikation des Stoffgesetzes mit der Bedingung $S^{22} = 0$:

$$\bar{C}^{\alpha\beta\gamma\delta} = C^{\alpha\beta\gamma\delta} - C^{\alpha\beta 22} \frac{C^{22\gamma\delta}}{C^{2222}} \quad (\text{A.40})$$

- Für orthogonale Bezugssysteme und isotropes Material gilt:

$$C^{1111} = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad (\text{A.41})$$

$$C^{1122} = \frac{\nu E}{1 - \nu^2} \quad (\text{A.42})$$

$$C^{1212} = \frac{E(1 - \nu)}{2(1 - \nu^2)} = G(1 - \nu) \quad (\text{A.43})$$

sowie (A.44)

$$C^{1112} = C^{2212} = 0 \quad (\text{A.45})$$

und somit entsprechend der Definition (4.33)

$$D_0^{1111} = b t \bar{C}^{1111} = EA \quad (\text{A.46})$$

$$D_1^{1111} = \frac{bt^3}{12} \bar{C}^{1111} = EI \quad (\text{A.47})$$

$$D_2^{1111} = b t \bar{C}^{1111} = G(1 - \nu) \quad (\text{A.48})$$

$$D_0^{1212} = 0 \quad (\text{A.49})$$

mit $A = b \cdot t$... Querschnittsfläche

mit $I = \frac{bt^3}{12}$... Trägheitsmoment, Flächenmoment 2. Grades

- Statische Variablen:

$$\text{Normalkraft} \quad n_0^{11} = D_0^{1111} E_{11}^0 \quad (\text{A.50})$$

$$\text{Biegemoment} \quad n_1^{11} = D_2^{1111} E_{11}^1 \quad (\text{A.51})$$

$$\text{Querkraft} \quad n_0^{12} = D_0^{1212} E_{12}^0 \quad (\text{A.52})$$

A.4 Schalen

A.4.1 Lokal kartesisches Koordinatensystem

Das lokal kartesische Koordinatensystem wird benötigt zur Beschreibung der Rotationen bei der 5-Parameter-Darstellung bzw. dient der Verwendung von Stoffgesetzen, die in orthonormierten Bezugssystemen definiert sind.

Konstruktion des lokal kartesischen Koordinatensystems $\hat{\mathbf{A}}_i^K$ in den Elementknoten:

$$\hat{\mathbf{A}}_3^K \equiv \mathbf{A}_3^K = A_{3x}^K \mathbf{E}_X + A_{3y}^K \mathbf{E}_Y + A_{3z}^K \mathbf{E}_Z \quad (\text{A.53})$$

$$\hat{\mathbf{A}}_1^K = \frac{\mathbf{E}_I \times \mathbf{A}_3^K}{|\mathbf{E}_I \times \mathbf{A}_3^K|} \quad (\text{A.54})$$

$$\mathbf{E}_I = \begin{cases} \mathbf{E}_X, & \text{wenn } A_{3x}^K = \min \{A_{3x}^K, A_{3y}^K, A_{3z}^K\} \\ \mathbf{E}_Y, & \text{wenn } A_{3y}^K = \min \{A_{3x}^K, A_{3y}^K, A_{3z}^K\} \\ \mathbf{E}_Z, & \text{wenn } A_{3z}^K = \min \{A_{3x}^K, A_{3y}^K, A_{3z}^K\} \end{cases} \quad (\text{A.55})$$

$$\hat{\mathbf{A}}_2^K = \frac{\mathbf{A}_3^K \times \hat{\mathbf{A}}_1^K}{|\mathbf{A}_3^K \times \hat{\mathbf{A}}_1^K|} \quad (\text{A.56})$$

A.4.2 Diskretisierung der Funktionale

Für das Funktional

$$-\delta \Pi^{int, h} = \int_{\Omega} \delta E_{ij} S^{ij} d\Omega \quad (\text{A.57})$$

ergibt sich mit der Vorabintegration des Stoffgesetzes sowie der Beschränkung auf in Dickenrichtung θ^3 konstant und linear verlaufende Anteile

$$-\delta\Pi^{int, h} = \int_{\Omega_0} [\delta E_{ij}^0 n_0^{ij} + \delta E_{ij}^0 n_1^{ij} + \delta E_{ij}^1 n_0^{ij} + \delta E_{ij}^1 n_1^{ij}] d\Omega_0 \quad (\text{A.58})$$

mit

$$\begin{bmatrix} n_0^{ij} \\ n_1^{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_0^{ijkl} & D_1^{ijkl} \\ D_1^{ijkl} & D_2^{ijkl} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{kl}^0 \\ E_{kl}^1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.59})$$

und

$$D_{M+N}^{ijkl} = \int_{-t/2}^{t/2} (\theta^3)^M C^{ijkl} (\theta^3)^N Z d\theta^3. \quad (\text{4.33})$$

5-Parameter-Formulierung

- Kinematische Variablen (4.82)–(4.90):

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{5P} = \left[\underbrace{\varepsilon_{\alpha\alpha}^h, \gamma_{12}^h, \gamma_{\alpha 3}^h}_{E_{ij}^0}, \underbrace{\kappa_{\alpha\alpha}^h, \kappa_{12}^h}_{E_{ij}^1} \right]^T \quad (\text{A.60})$$

- B-Operator:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{5P} = \mathbf{B}_{5P} \cdot \mathbf{d}_{5P} \quad (\text{A.61})$$

$$\mathbf{d}_{5P} = [u_x^1, u_y^1, u_z^1, \varphi_1^1, \varphi_2^1, \dots, u_x^N, u_y^N, u_z^N, \varphi_1^N, \varphi_2^N]^T \quad (\text{A.62})$$

- Stoffgesetzmatrix (nach Vorabintegration mit der bei 5-Parameter-Modellen erforderlichen Modifikation des Stoffgesetzes (4.51)):

$$\mathbf{D}_{5P} = \begin{bmatrix} D_0^{\alpha\alpha\beta\beta} & D_0^{12\beta\beta} & D_0^{\alpha 3\beta\beta} & D_1^{\alpha\alpha\beta\beta} & D_1^{12\beta\beta} \\ D_0^{\alpha\alpha 12} & D_0^{1212} & D_0^{\alpha 312} & D_1^{\alpha\alpha\beta\beta} & D_1^{12\beta\beta} \\ D_0^{\alpha\alpha\beta 3} & D_0^{12\beta 3} & D_0^{\alpha 3\beta 3} & D_1^{\alpha\alpha\beta 3} & D_1^{12\beta 3} \\ D_1^{\alpha\alpha\beta\beta} & D_1^{12\beta\beta} & D_1^{\alpha 3\beta\beta} & D_2^{\alpha\alpha\beta\beta} & D_2^{12\beta\beta} \\ D_1^{\alpha\alpha 12} & D_1^{1212} & D_1^{\alpha 312} & D_2^{\alpha\alpha 12} & D_2^{1212} \end{bmatrix} \quad (\text{A.63})$$

- Statische Variablen $\mathbf{n}_{5P} = \mathbf{D}_{5P} \boldsymbol{\varepsilon}_{5P}$:

$$\mathbf{n}_{5P} = \left[\underbrace{n_0^{\alpha\alpha}, n_0^{12}, n_0^{\alpha 3}}_{n_0^{ij}}, \underbrace{n_1^{\alpha\alpha}, n_1^{12}}_{n_1^{ij}} \right]^T \quad (\text{A.64})$$

- Funktional

$$-\delta\Pi^h = \int_{\Omega_0} (\delta \boldsymbol{\varepsilon}^{5P})^T \mathbf{D}^{5P} \boldsymbol{\varepsilon}^{5P} d\Omega_0 - \delta\Pi^{ext, h} \quad (\text{A.65})$$

$$= \delta \mathbf{d}_{5P}^T \int_{\Omega_0} \mathbf{B}_{5P}^T \mathbf{D}^{5P} \mathbf{B}_{5P} d\Omega_0 \mathbf{d}_{5P} - \delta\Pi^{ext, h} \quad (\text{A.66})$$

7-Parameter-Formulierung

- Kinematische Variablen (4.82)–(4.93):

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{7P} = \left[\underbrace{\varepsilon_{\alpha\alpha}^h, \gamma_{12}^h, \gamma_{\alpha 3}^h, \varepsilon_{33}^h}_{E_{ij}^0}, \underbrace{\kappa_{\alpha\alpha}^h, \kappa_{12}^h, \kappa_{\alpha\beta}^h}_{E_{ij}^1} \right]^T \quad \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{7P} = \left[\underbrace{\tilde{\varepsilon}_{33}^h}_{E_{ij}^1} \right] \quad (\text{A.67})$$

- B-Operator:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{7P}^u = \mathbf{B} \cdot \mathbf{d}_{7P} \quad (\text{A.68})$$

$$\mathbf{d}_{7P} = [v_x^1, v_y^1, v_z^1, w_x^1, w_y^1, w_z^1, \dots, v_x^N, v_y^N, v_z^N, w_x^N, w_y^N, w_z^N]^T \quad (\text{A.69})$$

- EAS-Erweiterung in Dickenrichtung:

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{7P} = \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\alpha}_{7P} \quad (\text{A.70})$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{7P} = [\alpha^1, \dots, \alpha^N]^T \quad (\text{A.71})$$

- Stoffgesetzmatrix:

$$\mathbf{D}_{7P} = \begin{bmatrix} D_0^{\alpha\alpha\beta\beta} & D_0^{12\beta\beta} & D_0^{\alpha 3\beta\beta} & D_0^{33\beta\beta} & D_1^{\alpha\alpha\beta\beta} & D_1^{12\beta\beta} & D_1^{\alpha 3\beta\beta} & D_1^{33\beta\beta} \\ D_0^{\alpha\alpha 12} & D_0^{1212} & D_0^{\alpha 312} & D_0^{3312} & D_1^{\alpha\alpha 12} & D_1^{1212} & D_1^{\alpha 312} & D_1^{3312} \\ D_0^{\alpha\alpha\beta 3} & D_0^{12\beta 3} & D_0^{\alpha 3\beta 3} & D_0^{33\beta 3} & D_1^{\alpha\alpha\beta 3} & D_1^{12\beta 3} & D_1^{\alpha 3\beta 3} & D_1^{33\beta 3} \\ D_0^{\alpha\alpha 33} & D_0^{1233} & D_0^{\alpha 333} & D_0^{3333} & D_1^{\alpha\alpha 33} & D_1^{1233} & D_1^{\alpha 333} & D_1^{3333} \\ D_1^{\alpha\alpha\beta\beta} & D_1^{12\beta\beta} & D_1^{\alpha 3\beta\beta} & D_1^{33\beta\beta} & D_2^{\alpha\alpha\beta\beta} & D_2^{12\beta\beta} & D_2^{\alpha 3\beta\beta} & D_2^{33\beta\beta} \\ D_1^{\alpha\alpha 12} & D_1^{1212} & D_1^{\alpha 312} & D_1^{3312} & D_2^{\alpha\alpha 12} & D_2^{1212} & D_2^{\alpha 312} & D_2^{3312} \\ D_1^{\alpha\alpha\beta 3} & D_1^{12\beta 3} & D_1^{\alpha 3\beta 3} & D_1^{33\beta 3} & D_2^{\alpha\alpha\beta 3} & D_2^{12\beta 3} & D_2^{\alpha 3\beta 3} & D_2^{33\beta 3} \\ D_1^{\alpha\alpha 33} & D_1^{1233} & D_1^{\alpha 333} & D_1^{3333} & D_2^{\alpha\alpha 33} & D_2^{1233} & D_2^{\alpha 333} & D_2^{3333} \end{bmatrix} \quad (\text{A.72})$$

- Statische Variablen $\mathbf{n}_{7P} = \mathbf{D}_{7P} \boldsymbol{\varepsilon}_{7P}$:

$$\mathbf{n}_{7P} = \left[\underbrace{n_0^{\alpha\alpha}, n_0^{12}, n_0^{\alpha 3}, n_0^{33}}_{n_0^{ij}}, \underbrace{n_1^{\alpha\alpha}, n_1^{12}, n_1^{\alpha 3}, n_1^{33}}_{n_1^{ij}} \right]^T \quad (\text{A.73})$$

- Funktional

$$\begin{aligned} -\delta\Pi^h &= \int_{\Omega_0} [(\delta\boldsymbol{\varepsilon}_{7P} + \delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{7P})^T \mathbf{D}_{7P} (\boldsymbol{\varepsilon}_{7P} + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{7P})] d\Omega_0 - \delta\Pi^{\text{ext}, h} \\ &= \delta\mathbf{d}_{7P}^T \int_{\Omega_0} \mathbf{B}_{7P}^T \mathbf{D}_{7P} \mathbf{B}_{7P} d\Omega_0 \mathbf{d}_{7P} + \delta\mathbf{d}_{7P}^T \int_{\Omega_0} \mathbf{B}_{7P}^T \mathbf{D}_{7P} \mathbf{M}_{7P} d\Omega_0 \boldsymbol{\alpha}_{7P} \\ &\quad + \delta\boldsymbol{\alpha}_{7P}^T \int_{\Omega_0} \mathbf{M}_{7P}^T \mathbf{D}_{7P} \mathbf{B}_{7P} d\Omega_0 \mathbf{d}_{7P} + \delta\boldsymbol{\alpha}_{7P}^T \int_{\Omega_0} \mathbf{M}_{7P}^T \mathbf{D}_{7P} \mathbf{M}_{7P} d\Omega_0 \boldsymbol{\alpha}_{7P} - \delta\Pi^{\text{ext}, h} \end{aligned} \quad (\text{A.74})$$

A.5 Linearisierung

Das i.a. nichtlineare Gleichungssystem

$$\delta\Pi^h(\mathbf{d}, \lambda) = \delta\Pi^{int,h}(\mathbf{d}) - \delta\Pi^{ext,h}(\lambda) = 0 \quad (\text{A.75})$$

ist i.a. nicht direkt lösbar¹. Daher werden gewöhnlich (für stabile und streng monotone Last-Verschiebungs-Pfade) iterative Prädiktor-Korrektor-Verfahren wie das Newton-Raphson-Verfahren zur numerischen Lösung der Gleichgewichtsbedingung (A.75) für einen beliebigen Punkt des Gleichgewichtspfades herangezogen.

Dazu wird die Linearisierung von (A.75) benötigt:

$$\text{LIN } \delta\Pi^h(\bar{\mathbf{d}}) = \delta\Pi^h(\bar{\mathbf{d}}_v) + \left. \frac{\partial \delta\Pi^h(\bar{\mathbf{d}})}{\partial \mathbf{d}_v} \right|_{\mathbf{d}=\bar{\mathbf{d}}} \cdot \Delta \mathbf{d}_v^i = 0 \quad (\text{A.76})$$

Mit der Lösung von (A.76) folgt der Prädiktorschritt:

$$\mathbf{d}^{i+1} = \Delta \mathbf{d}^i + \mathbf{d}^i \quad (\text{A.77})$$

der wiederum als Ausgangsbasis $\bar{\mathbf{d}}$ für (A.76) dient.

Die Schritte (A.76), (A.77) (Korrekturiteration) werden wiederholt, bis das Residuum R

$$R(\mathbf{d}^{i+1}) = \delta\Pi^h(\mathbf{d}^{i+1}) - \text{LIN } \delta\Pi^h(\mathbf{d}^i) \leq \varepsilon \quad (\text{A.78})$$

unter der geforderten Konvergenzschranke ε liegt.

5-Parameter-Formulierung

Split des Funktionals gemäß Verschiebungs- und Rotationsfreiheitsgraden $\mathbf{d}_{5P} = \mathbf{d}_v + \mathbf{d}_\varphi$

$$\delta\Pi_{5P}^h(\mathbf{d}_v, \mathbf{d}_\varphi, \lambda) = \delta\Pi^{int,h}(\mathbf{d}_v, \mathbf{d}_\varphi) - \delta\Pi^{ext,h}(\lambda) = 0 \quad (\text{A.79})$$

Additiver Update der Rotationen

- Linearisierung

$$\text{LIN } \delta\Pi^h(\mathbf{d}_v, \mathbf{d}_\varphi) = \delta\Pi^h(\mathbf{d}_v, \mathbf{d}_\varphi) \Big|_{\mathbf{d}=\bar{\mathbf{d}}} + \left. \frac{\partial \delta\Pi^h(\mathbf{d}_v, \mathbf{d}_\varphi)}{\partial \mathbf{d}_v} \right|_{\mathbf{d}=\bar{\mathbf{d}}} \cdot \Delta \mathbf{d}_v^i + \left. \frac{\partial \delta\Pi^h(\mathbf{d}_v, \mathbf{d}_\varphi)}{\partial \mathbf{d}_\varphi} \right|_{\mathbf{d}=\bar{\mathbf{d}}} \cdot \Delta \mathbf{d}_\varphi^i = 0 \quad (\text{A.80})$$

$$\implies \Delta \mathbf{d}_v^i, \Delta \mathbf{d}_\varphi^i$$

- Update der Freiheitsgrade

$$\mathbf{d}_v^{i+1} = \Delta \mathbf{d}_v^i + \mathbf{d}_v^i \quad (\text{A.81})$$

$$\mathbf{d}_\varphi^{i+1} = \Delta \mathbf{d}_\varphi^i + \mathbf{d}_\varphi^i \quad (\text{A.82})$$

- Update des Direktors

$$\mathbf{a}_3^{i+1} = \mathbf{\Lambda}(\mathbf{d}_\varphi^{i+1}) \cdot \mathbf{A}_3 \quad (\text{A.83})$$

¹In Gleichung (A.75) ist die Vereinfachung konservativer Lasten enthalten, d.h. die äußeren Lasten sind nicht von den Verschiebungen abhängig. Für die Behandlung verschiebungsabhängiger Lasten sei auf die Literatur verwiesen, z.B. Schweizerhof und Ramm [130]

Multiplikativer Update der Rotationen

- Linearisierung

$$\text{LIN } \delta\Pi^h(\mathbf{d}_v, \hat{\mathbf{d}}_\varphi) = \delta\Pi^h(\mathbf{d}_v, \hat{\mathbf{d}}_\varphi)\Big|_{\mathbf{d}=\bar{\mathbf{d}}} + \frac{\partial\delta\Pi^h(\mathbf{d}_v, \hat{\mathbf{d}}_\varphi)}{\partial\mathbf{d}_v}\Big|_{\mathbf{d}=\bar{\mathbf{d}}} \cdot \Delta\mathbf{d}_v^i + \frac{\partial\delta\Pi^h(\mathbf{d}_v, \hat{\mathbf{d}}_\varphi)}{\partial\hat{\mathbf{d}}_\varphi}\Big|_{\mathbf{d}=\bar{\mathbf{d}}} \cdot \Delta\hat{\mathbf{d}}_\varphi^i = 0 \quad (\text{A.84})$$

$$\implies \Delta\mathbf{d}_v^i, \Delta\hat{\mathbf{d}}_\varphi^i$$

- Update der Freiheitsgrade

$$\mathbf{d}_v^{i+1} = \Delta\mathbf{d}_v^i + \mathbf{d}_v^i \quad (\text{A.85})$$

$$\mathbf{d}_\varphi^{i+1} = \Delta\mathbf{d}_\varphi^i + \mathbf{d}_\varphi^i \quad (\text{A.86})$$

- Update des Direktors

$$\mathbf{a}_3^{i+1} = \mathbf{\Lambda}(\Delta\mathbf{d}_\varphi^i) \cdot \mathbf{\Lambda}(\mathbf{d}_\varphi^i) \cdot \mathbf{a}_3^i \quad (\text{A.87})$$

7-Parameter-Formulierung

Split des Funktionals gemäß Verschiebungs- und Verzerrungsfreiheitsgraden

$$\delta\Pi^h(\mathbf{d}, \boldsymbol{\alpha}, \lambda) = \delta\Pi^{int,h}(\mathbf{d}, \boldsymbol{\alpha}) - \delta\Pi^{ext,h}(\lambda) = 0 \quad (\text{A.88})$$

- Linearisierung

$$\text{LIN } \delta\Pi^h(\mathbf{d}, \boldsymbol{\alpha}) = \delta\Pi^h(\mathbf{d}, \boldsymbol{\alpha})\Big|_{\mathbf{d}=\bar{\mathbf{d}}, \boldsymbol{\alpha}=\bar{\boldsymbol{\alpha}}} + \frac{\partial\delta\Pi^h(\mathbf{d}, \boldsymbol{\alpha})}{\partial\mathbf{d}}\Big|_{\mathbf{d}=\bar{\mathbf{d}}} \cdot \Delta\mathbf{d}^i + \frac{\partial\delta\Pi^h(\mathbf{d}, \boldsymbol{\alpha})}{\partial\boldsymbol{\alpha}}\Big|_{\boldsymbol{\alpha}=\bar{\boldsymbol{\alpha}}} \cdot \Delta\boldsymbol{\alpha} = 0 \quad (\text{A.89})$$

- Update der Freiheitsgrade

$$\mathbf{d}^{i+1} = \Delta\mathbf{d}^i + \mathbf{d}^i \quad (\text{A.90})$$

- Update des Direktors

$$\mathbf{a}_3^{i+1} = \mathbf{A}_3 + \mathbf{w}^{i+1} \quad (\text{A.91})$$

Literaturverzeichnis

- [1] A. ADINI und R.W. CLOUGH: *Analysis of plate bending by the finite element method*. Report to Natl. Sci. Foundation, G7337, 1961.
- [2] S. AHMAD, B. M. IRONS und O. C. ZIENKIEWICZ: *Curved Thick Shell and Membrane Elements with Particular Reference to Axi-Symmetric Problems*. In: L. BERKE ET AL. (Herausgeber): *Proc. fo the 2nd. Conf. on Matrix Methods in Struct. Mech.*, 1968.
- [3] S. AHMAD, B. M. IRONS und O. C. ZIENKIEWICZ: *Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, (2):419–451, 1970.
- [4] U. ANDELFINGER: *Untersuchungen zur Zuverlässigkeit hybrid-gemischter Finiter Elemente für Flächentragwerke*. Report Nr. 13, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1991.
- [5] U. ANDELFINGER und E. RAMM: *EAS-elements for two-dimensional, three-dimensional, plate and shell structures and their equivalence to HR-elements*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 36:1311–1337, 1993.
- [6] J. ARGYRIS: *An excursion into large rotations*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 32:85–155, 1982.
- [7] D. ARNOLD und R.S. FALK: *Asymptotic Analysis of the Boundary Layer for the Reissner-Mindlin PLate Model*. SIAM Journal of Mathematical Analysis, 27:486–514, 1996.
- [8] D.N. ARNOLD: *Discretization by finite elements of a model parameter dependent problem*. Numer. Math., 37:347–367, 1981.
- [9] I. BABUŠKA und A.K. AZIS: *Survey Lectures on the Mathematical Foundations of then Finite Element Method*. Seiten 3–363. Academic Press.
- [10] I. BABUŠKA und L. LI: *Hierachic Modeling of Plates and Shells*. Computers & Structures, Seiten 419–413, 1991.
- [11] I. BABUŠKA und M. SURI: *On Locking and Robustness in the Finite Element Method*. Report BN-1112, Inst. for Physical Sci. and Tech., U. of Maryland, College Park Campus, May 1990.
- [12] Y. BAŞAR und Y. DING: *Shear Deformation Models for Large Strain Analysis*. International Journal of Solids and Structures, 34:1687–1708, 1996.
- [13] K.-J. BATHE und E.N. DVORKIN: *A formulation of general shell elements - The use of mixed interpolation of tensorial components*. In: *Proceedings of the NUMETA '85 Conference, Swansea 1985*, Seiten 551–563, 1985.
- [14] K.-J. BATHE und E.N. DVORKIN: *A Four-Node Plate Bending Element Based on Mindlin/Reissner Theory and a Mixed Interpolation*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 21:367–383, 1985.

- [15] K.-J. BATHE und E.N. DVORKIN: *A formulation of general shell elements - the use of mixed interpolation of tensorial components*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 22:697–722, 1986.
- [16] K.-J. BATHE, A. IOSILEVICH und D. CHAPELLE: *An inf-sup test for shell finite elements*. Computers & Structures, 75:439–456, 2000.
- [17] J.-L. BATOZ: *An explicit formulation for an efficient triangular plate-bending element*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 18:1077–1089, 1982.
- [18] J.-L. BATOZ, K.-J. BATHE und L.-W. HO: *A study of three-node triangular plate bending elements*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 15:1771–1812, 1980.
- [19] J.-L. BATOZ und I. KATILI: *On a simple triangular Reissner/Mindlin plate element based on incompatible modes and discrete constraints*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 35:1603–1632, 1992.
- [20] J.-L. BATOZ und P. LARDEUR: *A discrete shear triangular nine d.o.f. element for the analysis of thick to very thin plates*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 28:533–560, 1989.
- [21] J.-L. BATOZ und M. B. TAHAR: *Evaluation of a new quadrilateral thin plate bending element*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 18:1655–1677, 1982.
- [22] J.-L. BATOZ, C. L. ZHENG und F. HAMMADI: *Formulation, Evaluation and Application of New Triangular, Quadrilateral, Pentagonal and Hexagonal Discrete Kirchhoff Plate/Shell Elements*. In: W. WUNDERLICH (Herausgeber): *Proceedings of the European Conference on Computational Mechanics*, 1999.
- [23] T. BELYTSCHKO und L.P. BINDEMANN: *Assumed strain stabilization of the 4-node quadrilateral with 1-point quadrature for nonlinear problems*. Computer methods in applied mechanics and engineering, 88:311–340, 1991.
- [24] T. BELYTSCHKO, W. K. LIU und E. ENGELMANN: *The gamma-elements and related concepts*. In: T.J.R. HUGHES und E. HINTON (Herausgeber): *Finite Element Methods for Plate and Shell Structures*, Band 1: Element Technology, Seiten 316–347, Swansea, UK, 1986. PineridgePress International.
- [25] T. BELYTSCHKO, H. STOLARSKI, W. K. LIU, N. CARPENTER und J. ONG: *Stress Projections for Membrane and Shear Locking in Shell Finite Elements*. Computer Methods Appl. Mech. Eng., Seiten 221–258, 1985.
- [26] P.G. BERGAN und M.K. NYGÅRD: *Nonlinear Shell Analysis Using Free Formulation Finite Elements*. In: P.G. BERGAN, K.-J. BATHE und W. WUNDERLICH (Herausgeber): *Finite Element Methods for Nonlinear Problems*, Seiten 317–338, Trondheim, Norway, 1985. Proceedings of the Europe-US Symposium.
- [27] P. BETSCH, F. GRUTTMANN und E. STEIN: *A 4-node Finite Shell Element for the Implementation of General Hypoelastic 3D-Elasticity at Finite Strains*. Computer methods in applied mechanics and engineering, 130:57–79, 1996.
- [28] P. BETSCH, A. MENZEL und E. STEIN: *On the parametrization of finite rotations in computational mechanics. A classification of concepts with application to smooth shells*. Computer methods in applied mechanics and engineering, 155:273–305, 1998.
- [29] M. BISCHOFF: *Theorie und Numerik einer dreidimensionalen Schalenformulierung*. Report Nr. 30, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1999.

- [30] M. BISCHOFF und K.-U. BLETZINGER: *Stabilized DSG plate and shell elements*. In: K. SCHWEIZERHOF W. A. WALL, K.-U. BLETZINGER (Herausgeber): *Trends in Computational Structural Mechanics*, CIMNE, Barcelona, 2001.
- [31] M. BISCHOFF und K.-U. BLETZINGER: *Design of Stabilization Methods for Plate Elements*. In: *Proc. 7th. US National Congress on Computational Mechanics (USNCCM7)*, Albuquerque, New Mexico, 2003.
- [32] M. BISCHOFF, F. KOSCHNICK und K.-U. BLETZINGER: *Stabilized DSG elements: A New Paradigm in Finite Element Technology*. In: *Proc. of the 4th European LS-DYNA Conference*, Ulm, Germany, 2003.
- [33] M. BISCHOFF und E. RAMM: *Shear deformable shell elements for large strains and rotations*. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40:4427–4449, 1997.
- [34] M. BISCHOFF und E. RAMM: *On the physical significance of higher order kinematic and static variables in a three-dimensional shell formulation*. *International Journal of Solids and Structures*, 37:6933–6960, 2000.
- [35] M. BISCHOFF, E. RAMM und D. BRAESS: *A class of equivalent enhanced assumed strain and hybrid stress finite elements*. *Computational Mechanics*, 22:443–449, 1999.
- [36] M. BISCHOFF, W.A. WALL, K.-U. BLETZINGER und E. RAMM: *Encyclopedia of Computational Mechanics*, Kapitel Models and finite elements for thin-walled structures. Wiley, 2004.
- [37] K.-U. BLETZINGER, M. BISCHOFF und E. RAMM: *A unified approach for shear-locking-free triangular and rectangular shell finite elements*. *Computers & Structures*, 75:321–334, 2000.
- [38] F.K. BOGNER, R.L. FOX und L.A. SCHMIT: *The Generation of Inter-Element Compatible Stiffness and Mass Matrices by the Use of Interpolation Formulas*. In: *Proc. Conf. Matrix Methods in Struct. Mech., Air Force Inst. of Tech., Wright-Patterson AFB, Ohio*, Seiten 397–444, 1966.
- [39] D. BRAESS: *Finite Elemente*. Springer, Berlin, 1991.
- [40] M. BRAUN: *Nichtlineare Analysen von geschichteten, elastischen Flächentragwerken*. Report Nr. 19, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1995.
- [41] F. BREZZI: *On the Existence, Uniqueness and Approximation of Saddle Point Problems Arising from Lagrangian Multipliers*. *RAIRO Analysis Numerique*, 8:129–151, 1974.
- [42] F. BREZZI und M. FORTIN: *Mixed and Hybrid Finite Elements*. Springer, Berlin, 1991.
- [43] I.N. BRONSTEIN, K.A. SEMENDJAJEW, G. MUSIOL und H. MÜHLIG: *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harry Deutsch, Thun und Frankfurt/Main, 2001.
- [44] M. L. BUCALEM und K.-J. BATHE: *Higher-order MITC general shell elements*. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36:3729–3754, 1993.
- [45] N. BÜCHTER: *Zusammenführung von Degenerationskonzept und Schalentheorie bei endlichen Rotationen*. Report Nr. 14, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1992.
- [46] N. BÜCHTER, E. RAMM und D. ROEHL: *Three-dimensional extension of nonlinear shell formulation based on the enhanced assumed strain concept*. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37:2551–2568, 1994.
- [47] N. CAMPRUBÍ, M. BISCHOFF und K.-U. BLETZINGER: *On the significance of locking on shape optimization of shells*. In: *Contribution to the 2nd M.I.T. Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics, June 2003*.

- [48] D. CHAPELLE und K.-J. BATHE: *The Inf-Sup Test*. Computers & Structures, 47:537–545, 1993.
- [49] E. und F. COSSERAT: *Théorie des Corps Déformables*. Herman et fils, Paris, 1909.
- [50] M.A. CRISFIELD: *A consistent co-rotational formulation for non-linear, three-dimensional beam elements*. Comp. Meth. in Appl. Mech. & Engng., 1989.
- [51] M.A. CRISFIELD: *Some aspects of numerical modelling of plates, shells and beams*. In: NUMETA '90, 1990.
- [52] M.A. CRISFIELD und G. COLE: *Co-rotational beam elements for two and three-dimensional non-linear analysis*. In: *Symp. in Discretization Methods in Struct. Mech., Vienna, 1984*. IUTAM/IACM, Springer, 1984.
- [53] G.S. DHATT: *Numerical analysis of thin shells by curved triangular elements based on discrete Kirchhoff hypothesis*. In: *Proc. Sym. on Appl. of FEM in Civil Eng., Vanderbilt University, Nashville, Tennessee, 1969*.
- [54] W. P. DOHERTY, E. L. WILSON und R. L. TAYLOR: *Stress Analysis of Axisymmetric Solids Using Higher Order Quadrilateral Finite Elements*. Struct. Eng. Lab. Report SESM 69-3, 1969.
- [55] A. DÜSTER und E. RANK: *The p-version of the finite element method for three-dimensional thin-walled structures with physical non-linear behaviour*. In: *Proc. of IASS/IACM 2000, Fourth International Colloquium on Computation of Shell & Spatial Structures, Chania, Crete, 2000*.
- [56] A. DUTTA und D. W. WHITE: *Large displacement formulation of a three-dimensional beam element with cross-sectional warping*. Computers & Structures, 43:9–24, 1992.
- [57] R. EBERLEIN und P. WRIGGERS: *Finite Element Formulations of Five and Six Parameter Shell Theories Accounting for Finite Plastic Strains*. In: D.R.J. OWEN ET AL. (Herausgeber): *Computational Plasticity, Fundamentals and Applications*, Seiten 1898–1903, Barcelona, 1997. CIMNE.
- [58] C. A. FELIPPA: *A distortion-insensitive four-noded membrane quadrilateral that passes the patch test*. In: K.J. BATHE (Herausgeber): *Proc. Second MIT Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics*, Seiten 254–257. Elsevier Science Ltd., 2003.
- [59] C. A. FELIPPA und C. MILITELLO: *Developments in Variational Methods for High Performance Plate and Shell Elements*. In: A. K. NOOR, T. BELYTSCHKO und J.C. SIMO (Herausgeber): *Analyt. Comp. Models for Shells*, Band CED Vol. 3, Seiten 191–216, 1989.
- [60] D.P. FLANAGAN und T. BELYTSCHKO: *A uniform strain hexahedron and quadrilateral with orthogonal hourglass control*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 17(5):679–706, 1981.
- [61] F.G. FLORES und E. OÑATE: *A basic thin shell triangle with only translational DOFs for large strain plasticity*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 51:57–83, 2001.
- [62] M. GEE, W.A. WALL und E. RAMM: *Preconditioning for thin-walled structures and a scaled director approach for a three-dimensional shell*. zur Veröffentlichung angenommen.
- [63] F. GRUTTMANN: *Theorie und Numerik dünnwandiger Faserverbundstrukturen*. Habilitation, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover, 1996.
- [64] F. GRUTTMANN, R. SAUER und W. WAGNER: *A geometrical nonlinear eccentric 3D-beam element with arbitrary cross-sections*. Computer methods in applied mechanics and engineering, 160:383–400, 1998.
- [65] W. HACKBUSCH: *Theorie und Numerik elliptischer Differentialgleichungen*. Teubner Studienbücher. Teubner Verlag, 1986.

- [66] R. HAUPTMANN, S. DOLL, M. HARNAU und K. SCHWEIZERHOF: *'Solid-shell' elements with linear and quadratic shape functions at large deformations with nearly incompressible materials*. Computers & Structures, 79:1671–1685, 2001.
- [67] C. HAUSSER: *Effiziente Dreieckselemente für Flächentragwerke*. Bericht Nr. 21, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1996.
- [68] L.R. HERMANN: *Elasticity Equations for Incompressible and Nearly Incompressible Materials by a Variational Theorem*. AIAA, 3:1896–1900, 1965.
- [69] M. HÖRMANN: *Nichtlineare Versagensanalyse von Faserverbundstrukturen*. Report Nr. 39, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 2002.
- [70] H. C. HUANG und E. HINTON: *A nine node lagrangian mindlin plate element with enhanced shear interpolation*. Engineering Computations, 1:369–379, 1984.
- [71] H. C. HUANG und E. HINTON: *A new nine node degenerated shell element with enhanced membrane and shear interpolation*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 22:73–92, 1986.
- [72] T.J.R. HUGHES: *Generalization of Selective Integration Procedures to Anisotropic and Nonlinear Media*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 15:1413–1418, 1980.
- [73] T.J.R. HUGHES: *The Finite Element Method*. 1987.
- [74] T.J.R. HUGHES und R. L. TAYLOR: *The linear triangular bending element*. In: ACADEMIC PRESS (Herausgeber): *The Mathematic of Finite Elements and Applications V*, Seiten 127–142, 1981.
- [75] T.J.R. HUGHES, R. L. TAYLOR und W. KANOKNUKULCHAI: *A simple and efficient finite element for plate bending*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 11:1529–1543, 1977.
- [76] T.J.R. HUGHES und T.E. TEZDUYAR: *Finite elements based upon mindlin plate theory with particular reference to four-node bilinear isoparametric element*. In: T.J.R. HUGHES, D. GARTLING und R.L. SPILKER (Herausgeber): *New concepts in finite element analysis*, Band 44, Seiten 81–106, Boulder, 1981. The American Society of Mechanical Engineers.
- [77] A. IBRAHIMBEGOVIĆ: *Stress resultant geometrically nonlinear shell theory with drilling rotations – part I: a consistent formulation*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 118:265–284, 1994.
- [78] A. IBRAHIMBEGOVIĆ: *On finite element implementation of geometrically nonlinear Reissner's beam theory: three-dimensional curved beam elements*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 122:11–26, 1995.
- [79] A. IBRAHIMBEGOVIĆ, F. FREY und I. KOZAR: *A beam finite element non-linear theory with finite rotations*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 38:3653–3673, 1995.
- [80] A. IOSILEVICH, K.-J. BATHE und F. BREZZI: *On Evaluating the Inf-Sup-Condition for plate Bending Elements*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 40:3639–3663, 1997.
- [81] B. M. IRONS: *Engineering Application of Numerical Integrators in Stiffness Methods*. J. AIAA, 14:2035–2037, 1966.
- [82] B. M. IRONS: *Numerical Integration Applied to Finite Element Methods*. In: *Conf. on Use of Digital Computers in Structural Engineering*. Univ. of Newcastle, 1966.

- [83] B. M. IRONS: *The semi-loof shell element*. In: D.G. ASHWELL und R.H. GALLAGHER (Herausgeber): *Finite Elements for Thin Shells and Curved Members*, Seiten 197–222, Chichester, Sussex, 1976. John Wiley.
- [84] J. JANG und M. PINSKY: *Convergence of curved shell elements based on assumed covariant strain interpolations*. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 26:329–347, 1988.
- [85] I. KATILI: *A new discrete Kirchhoff-Mindlin element based on Mindlin-Reissner plate theory and assumed shear strain fields - part I: An extended DKT element for thick-plate bending analysis*. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36:1859–1883, 1993.
- [86] I. KATILI: *A new discrete Kirchhoff-Mindlin element based on Mindlin-Reissner plate theory and assumed shear strain fields - part II: An extended DKQ element for thick-plate bending analysis*. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36:1885–1908, 1993.
- [87] G. KIRCHHOFF: *Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe*. *Journal für reine angewandte Mathematik*, 40:51–58, 1850.
- [88] W.T. KOITER: *The Theory of Thin Elastic Shells*, Kapitel A Consistent First Approximation in the General Theory of Thin Elastic Shells, Seiten 12–33. North-Holland, 1960.
- [89] J. KORELC und P. WRIGGERS: *Efficient enhanced strain element formulation for 2D and 3D elements*. In: N.E. WIBERG (Herausgeber): *Advances in Finite Element Technology*, Barcelona, 1995. CIMNE.
- [90] F. KOSCHNICK, M. BISCHOFF und K.-U. BLETZINGER: *Avoiding Membrane Locking with the DSG Method*. In: H. A. MANG, F. G. RAMMERSTORFER und J. EBERHARDSTEINER (Herausgeber): *Proceedings of the Fifth World Congress on Computational Mechanics (WCCM V), July 7-12, 2002, Vienna, Austria*. Vienna University of Technology, Austria, ISBN 3-9501554-0-6, <http://wccm.tuwien.ac.at>, 2002.
- [91] F. KOSCHNICK, M. BISCHOFF und K.-U. BLETZINGER: *The Discrete Strain Gap (DSG) Method and its Application to Shell Elements*. In: *Proceedings of the 7th US Congress on Computational Mechanics (USNCCM 7), July 7-12, 2003, Albuquerque, New Mexico*, 2003.
- [92] F. KOSCHNICK, M. BISCHOFF, N. CAMPRUBÍ und K.-U. BLETZINGER: *The Discrete Strain Gap Method and Membrane Locking*. submitted to *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*.
- [93] W. B. KRÄTZIG: *'Best' transverse shearing and stretching shell theory for nonlinear finite element simulations*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 103:135–160, 1993.
- [94] A. KÜHHORN und H. SCHOOP: *A Nonlinear Theory for Sandwich Shells Including the Wrinkling Phenomenon*. *Archive of Applied Mechanics*, Seiten 413–427, 1992.
- [95] A.E.H. LOVE: *On the small vibrations and deformations of thin elastic shells*. *Philosophical Transactions of the royal Society*, 179:491 ff., 1888.
- [96] M. LYLÛ, R. STENBERG und T. VIHINEN: *A stable bilinear element for the Reissner-Mindlin plate model*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 110:343–357, 1993.
- [97] R. MACNEAL: *The TRIA3 plate element*. Technischer Bericht RHM-37, MacNeal-Schwendler Corp., 1976.
- [98] R. MACNEAL: *A simple quadrilateral shell element*. *Computers & Structures*, Seiten 175–183, 1978.

- [99] R. MACNEAL: *Derivation of element stiffness matrices by assumed strain distributions*. Nucl. Eng. Design, 70:3–12, 1982.
- [100] R. MACNEAL und L. HARDER: *A proposed set of problems to test finite element accuracy*. Finite Elements in Analysis and Design, (1):3–20, 1985.
- [101] R. H. MACNEAL: *A theorem Regarding the Locking of Tapered Four-Noded Membrane Elements*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 24:1793–1799, 1987.
- [102] R. H. MACNEAL: *On the Limits of Finite Element Perfectibility*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 35:1589–1601, 1992.
- [103] R. H. MACNEAL: *Finite Elements: Their Design and Performance*. Marcel Dekker, New York, 1994.
- [104] D.S. MALKUS und T.J.R. HUGHES: *Mixed Finite Element Methods. Reduced and Selective Integration Techniques: a Unification and Concepts*. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 15:63–81, 1978.
- [105] L.E. MALVERN: *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1969.
- [106] H. MANG und G. HOFSTETTER: *Festigkeitslehre*. Springer, 2000.
- [107] J.E. MARSDEN und T.J.R. HUGHES: *The Mathematical Foundation of Elasticity*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1983.
- [108] D. MORGENSTERN: *Herleitung der Plattentheorie aus der dreidimensionalen Elastizitätstheorie*. Archive of Rational Mechanics and Analysis, 4:145–152, 1959.
- [109] P.M. NAGHDI: *The Theory of Shells*. In: S. FLÜGGE (Herausgeber): *Handbuch der Physik*, Band VI/2. Springer, 1972.
- [110] R.A. NAY und S. UTKU: *An alternative for the finite element method*. Variational Methods in Engineering, 1, 1972.
- [111] E. OÑATE und M. CERVERA: *A general procedure for deriving thin plate bending elements with one degree of freedom per node*. Technical Report, E.T.S. Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Universidad Politécnica de Catalunya, 1993.
- [112] E. OÑATE und F. ZÁRATE: *Rotation-free triangular plate and shell elements*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Seiten 557–603, 2000.
- [113] H. PARISCH: *A continuum based shell theory for nonlinear applications*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 38:1855–1883, 1995.
- [114] H. PARISCH: *Festkörper-Kontinuumsmechanik*. Teubner, 2003.
- [115] K. C. PARK, E. PRAMONO, G. M. STANLEY und H. A. CABINESS: *The ANS shell elements: earlier developments and recent improvements*. In: *Analytical and Computational Models of Shells*, Seiten 217–239. The American Society of Mechanical Engineers, 1989.
- [116] K. C. PARK und G.M. STANLEY: *A curved C^0 shell element based on assumed natural-coordinate strains*. IJNME, 53:278–290, 1986.
- [117] J.C. PAUMIER und A. RAOULT: *Asymptotic Consistency of the Polynomial Approximation in the Linearized Plate Theory, Application to the Reissner-Mindlin Model*. In: *Elasticité, Viscoélasticité et Contrôle Optimal*, Band 2, Seiten 203–213, Lyon, 1997. ESIAM.

- [118] T. H. H. PIAN: *Derivation of element stiffness matrices by assumed stress distribution*. AIAA Journal, 2:1333–1336, 1964.
- [119] T. H. H. PIAN und K. SUMIHARA: *Rational Approach for Assumed Stress Finite Elements*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 20:1685–1695, 1984.
- [120] R. PILTNER und L. TAYLOR: *A quadrilateral mixed finite element with two enhanced strain modes*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 38:1783–1808, 1995.
- [121] P. M. PINSKY und J. JANG: *A C^0 elastoplastic shell element based on assumed covariant strain interpolations*. In: G. N. PANDE und SWANSEA J. MIDDELTON (Herausgeber): *Proc. of the Int. Conference NUMETA*, 1987.
- [122] J. PITKARÄNTÄ: *The problem of membrane locking in finite element analysis of cylindrical shells*. Report, Helsinki University of Technology, Finland, 1991.
- [123] E. RAMM: *Geometrisch nichtlineare Elastostatik und finite Elemente*. Habilitation, Report Nr. 76/2, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1976.
- [124] E. RAMM, M. BISCHOFF und M. BRAUN: *Higher Order Nonlinear Shell Formulation - a Step Back into Three Dimensions*. In: *From Finite Elements to the Troll Platform, Ivar Holland 70th Anniversary*, Seiten 65–88, Trondheim, 1994.
- [125] B.D. REDDY: *Functional Analysis: An Introductory Treatment*. Longman, London and Wiley, New York, 1986.
- [126] J. M. A. CÉSAR DE SÁ und R. M. NATAL JORGE: *New enhanced strain elements for incompressible problems*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 44:229–248, 1999.
- [127] C. SANSOUR: *Auf der polaren Zerlegung basierende Schalentheorie endlicher Theorien und ihre Finite-Element Diskretisierung*. Report Nr. 14, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1992.
- [128] C. SANSOUR: *A Theory and Finite Element Formulation of Shells at Finite Deformations Including Thickness Change: Circumventing the Use of a Rotation Tensor*. Archive of Applied Mechanics, 10:194–216, 1995.
- [129] C. SCHWAB: *A-posteriori modeling error estimation for hierarchical plate models*. Numerische Mathematik, 74:221–259, 1996.
- [130] K. SCHWEIZERHOF und E. RAMM: *Displacement Dependent Pressure Loads in Nonlinear Finite Element Analysis*. Computers & Structures, 18:1099–1114, 1984.
- [131] G. SHI: *A Convergence Criterion for the Quadrilateral Wilson Element*. Numerische Mathematik, 44:349–361, 1984.
- [132] J.C. SIMO: *A finite strain beam formulation. The three-dimensional dynamic problem. Part I*. Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering, 49:55–70, 1985.
- [133] J.C. SIMO und D. D. FOX: *On a stress resultant geometrically exact shell model. Part I: Formulation and optimal parametrization*. Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering, 72:267–304, 1989.
- [134] J.C. SIMO, D. D. FOX und M. S. RIFAI: *On a stress resultant geometrically exact shell model. Part II: The linear theory; computational aspects*. Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering, 73:53–92, 1989.

- [135] J.C. SIMO, D. D. FOX und M. S. RIFAI: *On a stress resultant geometrically exact shell model. Part III: Computational aspects of the nonlinear theory*; Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering, 79:21–70, 1990.
- [136] J.C. SIMO und T.J.R. HUGHES: *On the Variational Foundations of Assumed Strain Methods*. Journal of Applied Mechanics, 53:51–54, 1986.
- [137] J.C. SIMO und J. G. KENNEDY: *On a stress resultant geometrically exact shell model. Part V: Nonlinear plasticity: formulation and integration algorithms*. Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering, 96:133–171, 1992.
- [138] J.C. SIMO, M. S. RIFAI und D. D. FOX: *On a stress resultant geometrically exact shell model. Part IV: Variable thickness shells with through-the-thickness stretching*. Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering, 81:91–126, 1990.
- [139] J.C. SIMO und S. RIFAI: *A Class of Mixed Assumed Strain Methods and the Method of Incompatible Modes*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 29:1595–1638, 1990.
- [140] J.C. SIMO und L. VU-QUOC: *A three-dimensional finite-strain rod model. Part II: computational aspects*. Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering, 49:55–70, 1985.
- [141] E. STEIN und F.J. BARTHOLD: *Der Ingenieurbau - Werkstoffe, Elastizitätstheorie*, Kapitel Elastizitätstheorie. Ernst & Sohn, 1993.
- [142] H. STOLARSKI und T. BELYTSCHKO: *Membrane locking and Reduced Integration for Curved Elements*. Journal of Applied Mechanics, 49:172–176, 1982.
- [143] H. STOLARSKI und T. BELYTSCHKO: *Shear and membrane locking in curved C_0 -elements*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 41:279–296, 1983.
- [144] G. STRANG und G. FIX: *An Analysis of the Finite Element Method*. Prentice-Hall, 1973.
- [145] J.H. STRICKLIN, W. HAISLER, P. TISDALE und K. GUNDERSON: *A rapidly converging triangle plate element*. JAIAA, 7:180–181, 1969.
- [146] K. Y. SZE, C. WANJI und Y. K. CHEUNG: *An efficient quadrilateral plane element with drilling degrees of freedom using orthogonal stress modes*. Computer & Structures, 42:695–705, 1992.
- [147] I.C. TAIG: *Structural analysis by the matrix displacement method*. Technischer Bericht 5070, Engl. Electric Aviation Report, 1961.
- [148] R. L. TAYLOR, P. J. BERENSFORD und E. L. WILSON: *Non-conforming element for stress analysis*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 10:1211–1219, 1976.
- [149] A. TESSLER und T. J. R. HUGHES: *A three-node mindlin plate element with improved transverse shear*. Computer Methods in Applied Mechanics, 50:71–101, 1985.
- [150] J. TESSMER: *Theoretische und algorithmische Beiträge zur Berechnung von Faserverbundschaalen*. Doktorarbeit, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover, 2000.
- [151] C. TRUESDELL und W. NOLL: *The Nonlinear Field Theories of Mechanics*. Springer Verlag, Berlin, 1960.
- [152] M.J. TURNER, R.W. CLOUGH, H.C. MARTIN und L.J. TOPP: *Stiffness and Deflection analysis of complex structures*. Journal of Aero Science, 23:805–823, 1956.
- [153] B. FRAEIJIS DE VEUBEKE: *Displacement and Equilibrium Models for in the Finite Element Method*. Stress Analysis, 1965.

- [154] W. A. WALL, M. BISCHOFF und E. RAMM: *A deformation dependent stabilization technique, exemplified by EAS elements at large strains*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 188:859–871, 2000.
- [155] W.A. WALL, M. GEE und E. RAMM: *The challenge of a three-dimensional shell formulation*. In: M. PAPADRAKAKIS ET AL. (Herausgeber): *Proc. of the Fourth International Colloquium on Computation of Shell & Spatial Structures, IASS-IACM 2000*, Chania, Crete, 2000.
- [156] G.A. WEMPNER, J.T. ODEN und D.K. CROSS: *Finite Element analysis of thin shells*. In: *Proc. Am. Soc. Civ. Eng.*, Band 94 (EM6), Seiten 1273–1294, 1968.
- [157] E. L. WILSON, R. L. TAYLOR, W. P. DOHERTY und J. GHABOUSSI: *Incompatible Displacement Models*. Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics, Seiten 43–57, 1973.
- [158] P. WRIGGERS und S. REESE: *A note on enhanced strain methods for large deformations*. Computer Methos in Applied Mechanics and Engineering, 135:201–209, 1996.
- [159] S.T. YEO und B.C. LEE: *Equivalence between enhanced assumed strain method and assumed stress hybrid method based on the hellinger-reissner principle*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 39:3083–3099, 1996.
- [160] F.-G. YUAN, Y.S. HUANG und T.H.H. PIAN: *New strategy for assumed stresses for four-node hybrid stress membrane element*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 36:1747–1763, 1993.
- [161] O. C. ZIENKIEWICZ und R. L. TAYLOR: *The Finite Element Method*, Band 2: Solid Mechanics. Butterworth-Heinemann, 2000.
- [162] O.C. ZIENKIEWICZ, R.L. TAYLOR und J.M. TOO: *Reduced Integration Technique in General Analysis of Plates and Shells*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 3:275–290, 1971.