

Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik
Institut für Astrophysik

Ein Modell für zeitabhängige, nichtlokale Konvektion in Sternen

Rudolf Kuhfuß

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Physik von der Technischen Universität
München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktors der Naturwissenschaften

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender :	Univ.-Prof. Dr. E. Lüscher
1. Prüfer :	Priv.-Doz. Dr. W. Hillebrandt
2. Prüfer :	Univ.-Prof. Dr. K. Dietrich
3. Prüfer :	Univ.-Prof. Dr. E. Lüscher

Die Dissertation wurde am 27. 8. 1987 bei der Technischen Universität München eingereicht
und durch die Fakultät für Physik am 6. 11. 1987 angenommen.

Mein Dank gilt zunächst meinen Eltern, die mir nicht nur ein von materiellen Sorgen freies Studium ermöglicht, sondern auch in großem Maße seelische Unterstützung gewährten haben.

Meiner geliebten Freundin Gertrud danke ich für das sorgfältige Korrekturlesen der Arbeit und viel mehr noch für die in ihrem Wert nicht zu ermessende menschliche Nähe, die mir über manche schwache Stunde hinweghalf.

Herrn Dr. W. Hillebrandt danke ich für die freundliche Aufnahme in seiner Arbeitsgruppe, seine spezifische Betreuung sowie die Möglichkeit, meine speziellen wissenschaftlichen Interessen zu verfolgen.

Weiter möchte ich all denen danken, die mir mit Rat und Kritik während der Anfertigung dieser Arbeit zur Seite standen. Dabei sind ganz besonders Herr Dr. F. Meyer und Herr Dr. N. H. Baker zu nennen.

Den Mitgliedern, Doktoranden und Diplomanden des Instituts für Astrophysik, darunter besonders meinem Zimmergenossen Dr. A. Weiss-Römer, danke ich für die freundschaftliche Atmosphäre. Besonders Herrn Prof. Dr. Kippenhahn möchte ich in diesem Zusammenhang meine Achtung aussprechen für seinen Einfluß auf das Institutsklima, welches mir ermöglichte, Kritik zu äußern auch da, wo sich diese auf ihn selbst bezog.

Lebenslauf

5. Oktober 1956 : geboren in Köln als Sohn der Eheleute
Herr W. Kuhfuhs und Frau L. Kuhfuhs
- Ostern 1963 : Einschulung in die damalige Volksschule
in Köln-Deutz, Alsenstraße
- Herbst 1967 : Wechsel zum städtischen, neusprachlichen Gymnasium
in Köln-Deutz, Schaurtestraße
2. Juni 1976 : Abitur an diesem Gymnasium,
anschließend Ableistung des Zivildienstes
- ab Wintersemester 1977/1978 : Studium der Physik an der Universität zu Köln
20. November 1979 : Diplom-Vorprüfung im Fach Physik
4. Juni 1984 : Diplom-Hauptprüfung im Fach Physik,
physikalisches Wahlfach: Relativitätstheorie,
Wahlfach: Mathematik,
Thema der Diplomarbeit:
'Propagierende Moden in Eichfeldtheorien
der Gravitation mit Torsion',
betreut von Prof. Dr. F.W. Hehl
- seit Juli 1984 : Doktorand am Max-Planck-Institut für Astrophysik,
Garching, Karl-Schwarzschild-Str. 1,
betreut von Dr. W. Hillebrandt

Abstract

In den letzten Jahren wurde die Notwendigkeit der Beachtung des nichtlokalen, zeitabhängigen Charakters der Konvektion bei Modellrechnungen zur Sternstruktur und Sternentwicklung offenbar. In der vorliegenden Arbeit wird ein Modell zur Behandlung der Konvektion abgeleitet, welches diesen Effekten Rechnung trägt. Ein Mittelungsverfahren führt auf Modellgleichungen, die nur eine Abhängigkeit von der Zeit sowie von der Radialkoordinate des als näherungsweise kugelsymmetrisch angesetzten Sternes beinhalten. Durch physikalisch motivierte Modellannahmen werden diese Gleichungen geschlossen. Anhand analytischer Überlegungen und Anwendungen werden die Eigenschaften des Modells diskutiert.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1. Ein eindimensionales Modell für Konvektion in Sternen	3
1.1 Übersicht über einige bekannte Ansätze	3
1.2 Grundlagen des Konvektionsmodells	8
1.2.1. Das Mittelungsverfahren	8
1.2.2. Die physikalischen Gleichungen	11
1.2.3. Mittelung der Kontinuitätsgleichung	13
1.2.4. Die gemittelten Konzentrationsgleichungen	14
1.2.5. Die gemittelte Navier-Stokes-Gleichung	15
1.2.6. Die Gleichung für die konvektive kinetische Energie	16
1.2.7. Die gemittelte Energiegleichung	17
1.2.8. Die Vernachlässigung der molekularen Viskosität $\overline{\nu}$	19
1.2.9. Zusammenfassung der Gleichungen	20
1.3 Schließbedingungen	21
1.3.1. Der Reynoldstensor	21
1.3.2. Die Diffusionsapproximation	23
1.3.3. Dissipation konvektiver kinetischer Energie	24
1.3.4. Erzeugung konvektiver kinetischer Energie und der thermische Fluß	25
1.3.5. Die Auswertung von Mittelwerten von Funktionen	26
1.3.6. Zusammenfassung der Gleichungen	27
1.4 Das Ein-Gleichungs-Modell (Kuhfuß 1986a)	28
1.5 Das Drei-Gleichungs-Modell	29
1.5.1. Die Ableitung der Gleichungen für die Korrelationen $\langle \overline{v' s'} \rangle$ und $\langle \overline{s'^2} / 2 \rangle$	30
1.5.2. Schließbedingungen und Approximationen	31
1.5.3. Approximation der Flüsse zweiter Ordnung	35
1.5.4. Zusammenfassung des Drei-Gleichungs-Modells	36
2. Stabilitätskriterien und lokale, stationäre Lösungen	38
2.1 Stabilität und lokale, stationäre Lösung im Ein-Gleichungs-Modell	39
2.1.1. Das Ledoux-Kriterium	39
2.1.2. Die lokale, stationäre Lösung	40
2.2 Stabilität und lokale, stationäre Lösung im Drei-Gleichungs-Modell	44
2.2.1. Die lokale, stationäre Lösung	44
2.2.2. Das Ledoux-Kriterium	46

3. Analytische Überlegungen zur Nichtlokalität	49
3.1 Abschätzung des Overshooting beim Ein-Gleichungs-Modell	49
3.2 Eine Abschätzung des Transportparameters α_t	51
4. Studien zur Zeitabhängigkeit	54
4.1 Eine Modellgleichung und deren Lösungen (Kuhfuß 1986b)	54
4.2 Bemerkungen zum Drei-Gleichungs-Modell	59
5. Ein-Zonen-Modell für pulsierende Sterne	65
5.1 Einfache Version, analog zu Stellingwerf 1982	66
5.1.1. Grundlagen des Ein-Zonen-Modells.....	66
5.1.2. Implementation des Konvektionsmodells.....	70
5.1.3. Stabilitätsanalyse.....	71
5.1.4. Numerische Experimente.....	74
5.2 Ein-Zonen-Modell mit beliebiger Zustandsgleichung	79
5.2.1. Die Grundgleichungen.....	79
5.2.2. Konvektion: Ein-Gleichungs-Modell.....	83
5.2.3. Konvektion: Drei-Gleichungs-Modell.....	83
5.2.4. Stabilitätsanalyse.....	84
5.2.5. Numerische Experimente.....	86
6. Numerische Studien der Nichtlokalität	90
6.1 Beschreibung des numerischen Verfahrens	91
6.2 Die Struktur des konvektiven Kerns bei einem Stern mit $20 M_{\odot}$	92
6.3 Parameterstudie: Gesamtmasse des Sterns	98
6.4 Parameterstudie: Mischungswegparameter α_{ML}	101
7. Schlußbemerkungen	104
Anhang A1: Lagrange'sche Formulierung.....	107
Anhang A2: Grundlagen der numerischen Stabilitätsanalyse.....	110
Anhang A3: Bemerkungen zum Roxburgh-Kriterium (Roxburgh 1978).....	112
8. Literaturliste	116

Einleitung

Der Energietransport in Sternen wird im wesentlichen von drei Mechanismen getragen, dem radiativen Transport durch Strahlung, der Wärmeleitung durch entartete Elektronen in einigen Fällen fortgeschrittener Entwicklungsstadien mit relativ dichtem Kern und dem Transport thermischer Energie durch Konvektion. Konvektive Instabilität kann man sowohl im Zentralbereich von Sternen finden, z. B. bei jungen Sternen mit mehr als etwa $1.1M_{\odot}$, hauptsächlich verursacht durch relativ große Energieerzeugung in einem verhältnismäßig kleinen Raumbereich, als auch in Außenschichten, wo durch Ionisation in bestimmten Bereichen sowohl die Opazität, ein Maß für die ‘Undurchlässigkeit’ der Materie für Strahlung, ansteigt und damit den Gradienten der Temperatur erhöht, als auch der adiabatische Exponent abnimmt und dadurch der maximale Temperaturgradient, der ohne konvektive Instabilität aufrechtzuerhalten wäre, geringer wird.

Schon seit vielen Jahren wird der konvektive Energietransport in numerischen Modellrechnungen zur Sternstruktur und Sternentwicklung berücksichtigt. Dies kann nur in Form einfacher Modellgleichungen geschehen, da eine vollständige, dreidimensionale Simulation der turbulent konvektiven Bewegung einen viel zu großen, sogar nicht mehr handhabbaren Aufwand sowohl an Rechenzeit als auch an Speicherplatz verursachen würde. Im Kern eines jungen O-Sternes können z. B. Reynoldszahlen \Re (das Verhältnis von typischer Skalenlänge der konvektiven Bewegung multipliziert mit der typischen Geschwindigkeit zur vorhandenen molekularen Viskosität) von 10^{12} auftreten. Das Verhältnis von typischer makroskopischer Skalenlänge zur typischen Größe der kleinsten Turbulenzelemente ist aber von der Größenordnung $\Re^{3/4}$, so daß man in diesem Falle also etwa 10^9 Intervalle zur Diskretisierung in einer Raumrichtung für eine typische Skalenlänge, also in der Größenordnung 10^{27} Stützstellen insgesamt bräuchte, wäre man nicht gewillt, auch in dieser Art von Modellen Approximationen zu benutzen, die dazu dienen, unterhalb einer bestimmten Skalenlänge das Verhalten der Turbulenzkaskade zu beschreiben. Auch zweidimensionale Simulationen, die für bestimmte Probleme durchaus angebracht sein können, werden in diesem Zusammenhang nicht weiterhelfen können, insbesondere da diese Behandlung der turbulenten Konvektion noch einen wesentlichen Nachteil aufweist, der durchaus zu Vorsicht bei der Interpretation der Ergebnisse Anlaß gibt. Im allgemeinen sind für den Transport bei turbulenter Konvektion die größten Skalen des Spektrums verantwortlich, denn diese sind verbunden mit den größten Geschwindigkeiten. Die kleinsten Turbulenzelemente hingegen verursachen die

Dissipation kinetischer Energie in thermische aufgrund der molekularen Viskosität, denn sie sind verbunden mit den größten Geschwindigkeitsgradienten. Im Falle stationärer, dreidimensional isotrop turbulenter Bewegung stellt sich die sogenannte Kolmogoroffkaskade ein, ein bestimmtes Spektrum der Turbulenzelemente, bei dem der Transport kinetischer Energie von den größeren zu den kleineren Elementen erfolgt. Im zweidimensionalen Fall aber besteht die Möglichkeit eines Transportes kinetischer Energie in die größten Skalen hinein, somit also eine Tendenz zur Überschätzung des Transportes durch diese Skalen im Verhältnis zum dreidimensionalen Fall.

Diese Kritiken an mehrdimensionalen Simulationen sollen aber keineswegs deren schlußendliche Notwendigkeit zum Verständnis der sehr komplexen Vorgänge in einer turbulent strömenden Flüssigkeit in Frage stellen. Im Gegenteil können solche Rechnungen sehr wohl großen Aufschluß geben über die Wahl der freien Parameter, wie sie in den in der Sternentwicklung eingesetzten, verhältnismäßig einfachen Modellen für turbulente Konvektion immer wieder auftreten. Erwähnt seien in diesem Zusammenhang z. B. die Arbeiten von Nordlund (1982) über die solare Granulationszone sowie Arbeiten von Deupree (1984, 1986), Hurlburt *et al.* (1984), Chan *et al.* (1982), Sofia, Chan (1984) und Chan, Sofia (1986, 1987). Nicht zuletzt wird auch im Rahmen höherdimensionaler Modellansätze sehr viel an theoretischer Arbeit getan, um die oben dargestellten Probleme der numerischen Auflösung aller für die Physik signifikanten Skalen der Kaskade zu lösen (z. B. die interessanten Kaskadenmodelle von Bell und Nelkin 1977, 1978). Dies ist ein weites Feld der neueren Forschung, und da es sich auch da oft um chaotische Phänomene handelt, zeigt schon die einfache Feigenbaumfunktion, wie schwierig, wenn nicht sogar unmöglich, eine exakte, vielleicht statistische Behandlung derartiger Vorgänge sein mag, wieviel mehr muß dies für die vergleichsweise komplizierten hydrodynamischen Systeme gelten.

In der vorliegenden Arbeit wird ein einfaches, eindimensionales Modell für die turbulente Konvektion in Sternen entwickelt und seine Eigenschaften untersucht im Rahmen analytischer Überlegungen als auch anhand einiger numerischer Anwendungsbeispiele. Das Modell ist konzipiert für Sternentwicklungsrechnungen und insbesondere für solche Fälle, in denen die erwähnten höherdimensionalen Modelle vom Aufwand her nicht angebracht oder gar nicht realisierbar erscheinen, in denen aber die bisher verwandten eindimensionalen Modelle nicht mehr anwendbar sind.

1. Ein eindimensionales Modell für Konvektion in Sternen

1.1. Übersicht über einige bekannte Ansätze

Die eindimensionalen Modelle bedienen sich im wesentlichen alle des folgenden physikalischen Bildes: Die turbulente Kaskade wird für den Aspekt des Transportes reduziert auf eine dominante Skalenlänge. Diese wird implizit immer als die Skalenlänge angenommen, die in die nicht so dominanten Skalen der Bewegung nach endlicher Zeit zerfällt. Die anderen Skalenlängen werden so behandelt, daß die kinetische Energie in ihnen zwar bis zur letztendlichen Umsetzung in thermische Energie immer weiter in kleinere Skalen dissipiert wird, die dabei auftretenden Transporte aber, aufgrund der im Verhältnis zur Bewegung der dominanten Skala kleinen Geschwindigkeiten, vernachlässigbar sind. Es gibt darüber hinaus auch Rechnungen, die explizit versuchen, mehr als eine Skala oder typische Bewegungsform, wie z. B. die Rollen- oder Hexagonlösungen in der Bénardkonvektion, zu berücksichtigen in Form von Entwicklungen in mehrere dominante Moden.

Das bisher wohl in der einen oder anderen leichten Modifikation meist benutzte eindimensionale Modell für die turbulente Konvektion in Sternen ist die sogenannte Mischungswegtheorie (MLT), die auf eine Idee von Prandtl (1932) zurückgeht, deren bekannteste Form in den Arbeiten von Böhm-Vitense (1953,1958) entwickelt und verwandt, und die in Sternstruktur- und Entwicklungsrechnungen von Kippenhahn (1962) und Hofmeister *et al.* (1964) angewandt wurde. Diesem Modell liegt folgendes Bild zugrunde: Aufgrund eines kleinen Temperaturüberschusses (Störung) bewegt sich ein einmal zustandegekommenes Turbulenzelement über eine bestimmte typische Distanz, um dann instantan in kleinere Elemente zu zerfallen und so die kinetische Energie in thermische zu dissipieren als auch die beinhaltete thermische Energie und Materie in die Umgebung freizusetzen. Einfache Überlegungen zur Kinematik der Bewegung einer solchen Blase unter Berücksichtigung der Auftriebskräfte und der Entwicklung des Temperaturexzesses bei gegebenem Temperaturgradienten der Umgebung führen zu Gleichungen für die typische Geschwindigkeit, den Temperaturüberschuß, den konvektiven Energiefluß sowie den sich dadurch einstellenden Gradienten in der Temperatur. So gelangt man z. B. sehr einfach schon zu einem Kriterium für konvektive Instabilität eines Bereiches: Wenn ein solches Turbulenzelement einmal aufgrund einer kleinen Störung einen Temperaturüberschuß hat und deshalb, wegen der etwas geringeren Dichte im Vergleich zur

Umgebung und der dadurch resultierenden Auftriebskräfte, aufsteigt in Schichten geringeren Druckes, so wird es dabei in Näherung (Korrekturen werden z. B. notwendig, wenn das Element optisch dünn wird und es deshalb Entropieverluste aufgrund von Abstrahlung erleidet) aufgrund des nachlassenden Außendruckes adiabatisch expandieren. Wenn nun der Temperaturgradient in der Umgebung so steil ist, daß trotz dieser Expansion und der damit verbundenen Abkühlung immer ein Temperaturüberschuß bestehen bleibt, so wird diese Bewegung zunächst nicht gedämpft, die Schicht ist instabil. Ist die adiabatische Abkühlung jedoch stärker als die Abkühlung der Umgebung, so wird nach einer gewissen Strecke das 'Eddy' eine höhere Dichte als seine Umgebung aufweisen, und die Auftriebskräfte werden die Bewegung dämpfen, die Schicht ist in diesem Falle also stabil. Formal ist diese Überlegung im sogenannten Schwarzschild-Kriterium zusammengefaßt:

$$\nabla > \nabla_{ad} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{Instabilität} \quad (1)$$

mit den in der Sternentwicklung gebräuchlichen Abkürzungen

$$\nabla := \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln p} \right)_* \quad (2a)$$

$$\nabla_{ad} := \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln p} \right)_s \quad (2b)$$

Dabei bedeutet der Index *, daß die aktuell im Stern auftretenden Gradienten von Temperatur und Druck zur Bestimmung dieser Größe heranzuziehen sind. Im Falle des Auftretens von Gradienten in der chemischen Zusammensetzung sind noch Korrekturen an diesem Kriterium anzufügen, die zu dem sogenannten Ledoux-Kriterium führen, welches später noch eingehender beschrieben werden wird.

Das MLT-Modell ist allerdings nicht in der Lage, die zeitliche Veränderung der Konvektionsgrößen, also z. B. das Starten der Konvektion, zu beschreiben, sondern nur stationäre Zustände der Konvektion. Dies mag für Hauptreihensterne noch eine hervorragende Approximation sein, wenn aber typische Zeitskalen der Veränderungen in einem Stern der Zeitskala des Entstehens oder Vergehens der Konvektion entsprechen, wird diese Näherung unangemessen sein. Dies kann z. B. in pulsierenden Sternen der Fall sein. In den derzeit verfügbaren Modellrechnungen dazu ist die Konvektion meist entweder als 'eingefroren', also auf einem Mittelwert konstant gehalten, angenommen worden, oder aber als instantan adjustierend auf den stationären Grenzwert, der sich nach unendlicher Zeit unter den gegebenen Bedingungen

einstellen würde. Auch in den Spätstadien der Sternentwicklung, das Siliziumbrennen eines massereichen Sternes dauert nur etwa einen Tag, wurde bisher mit nicht zeitabhängiger Konvektion gearbeitet. Ein drittes Beispiel sind die eindimensionalen Nova-Rechnungen, bei denen eine typische Zeitskala für den thermonuklearen Runaway in der Größenordnung von 100 Sekunden liegt. Auch hier wird man berücksichtigen müssen, daß die Konvektion sich an solch kurzzeitskalige Veränderungen nicht mit vernachlässigbarer Verzögerung anpassen können (Oetzl 1987). Ähnliche Probleme treten auch bei der Behandlung von Core-Helium Flashes auf (Deupree 1984, 1986).

Ein weiteres Problem ist die **Lokalität** der MLT. Die wesentlichen Größen in diesem Modell, die den konvektiven Transport beschreiben, werden immer nur lokal bestimmt. Es ist jedoch leicht einzusehen, daß die Bewegung eines konvektiven Elementes zu einer gegebenen Zeit nicht nur von den, an seinem momentanen Aufenthaltsort gegebenen, physikalischen Bedingungen, sondern auch von seiner ganzen thermo- und hydrodynamischen Vorgeschichte sowie der seiner Umgebung beeinflusst ist. Die lokale Approximation führt deshalb zu Schwierigkeiten. Das wohl bekannteste und im Rahmen der Sternentwicklung und der Fragen der Nukleosynthese meist diskutierte derartige Problem ist das sogenannte Overshooting. Wenn ein Turbulenzelement im Bereich, der Konvektion treibt, erzeugt wird und dann die typische Distanz zurücklegt, kann es sicherlich passieren, daß dieses 'Eddy' an die Grenze des konvektiv instabilen Bereiches gerät. Dort verkehren sich die beschleunigenden Auftriebskräfte in bremsende, jedoch wird man aufgrund der Massenträgheit nicht erwarten können, daß die Bewegung abrupt endet. Vielmehr wird dieses Element in die eigentlich stabile Schichtung 'überschießen' und dort noch eine gewisse Strecke zurücklegen. Dabei wird sich sogar ein Temperaturdefizit aufbauen können aufgrund der adiabatischen Abkühlung, die in einer stabilen Schicht ja bei der Bewegung in Zonen niedrigeren Druckes schneller ist als die Abkühlung der Umgebung längs dieses Weges. Dies wiederum bedingt, wie später noch gezeigt werden wird, einen Fluß thermischer Energie in die dem Temperaturgradienten entgegengesetzte Richtung, der natürlich auch die umgebende Struktur beeinflusst. Insbesondere für die Nukleosynthese, also die Beschreibung des Entstehens der beobachteten Elementhäufigkeiten in der Natur, ist es von größtem Interesse, das Ausmaß dieses Overshooting quantitativ zu erfassen, da der konvektive Kern von Sternen letztendlich den wesentlichen Teil des zur Verfügung stehenden nuklearen Brennmaterials darstellt. In vielen Arbeiten (Bressan *et al.* 1981, Bertelli *et al.* 1985, Langer, El Eid 1986, El Eid, Langer 1986) wurde dem Overshooting in Form einer parametrisierten Vergrößerung des Kerns Rechnung getragen. Andere Arbeiten benutzen das

Model von Shaviv und Salpeter (1973) (Maeder 1975, Langer 1986a, Langer 1986b) oder aber das sogenannte Roxburgh Kriterium (Roxburgh 1978) zur Berechnung der Ausdehnung des konvektiven Kerns inklusive des Overshooting (Doom 1985, Sybesma 1985, Doom *et al.* 1986, Sybesma 1986, Prantzos *et al.* 1987). Dieses Kriterium beruht aber auf einer gravierenden Inkonsistenz, die seine Anwendung und die gewonnenen Resultate höchst fragwürdig erscheinen läßt (Bressan 1984, Baker, Kuhfuß 1987; siehe auch Anhang A3).

In diesem Zusammenhang ergibt sich auch ein weiteres Problem: das Mischen des Materials durch Konvektion. Bisher wurde meist davon ausgegangen, daß eine konvektive Zone in einem Stern chemisch instantan homogenisiert wird. Dies ist wieder eine Frage der Zeitskalen. Typische Mischungszeitskalen dürften in der Größenordnung einiger weniger Jahre liegen, so daß die Approximation sicherlich wieder keine schlechte ist für die Hauptreihe im Hertzsprung-Russel-Diagramm. Es gibt jedoch durchaus Bedenken in Bezug auf spätere spezielle Brennphasen, bei denen wegen kurzer Zeitskalen, z. B. aufgrund extrem schnellen nuklearen Prozessierens des von außen nachgemischten Materiales, die Näherung der homogenen konvektiven Schicht nicht mehr angemessen ist. Dies gilt erst recht in sehr späten Brennphasen, wenn, wie oben angedeutet, schon abgesehen vom Mischen nicht einmal sichergestellt ist, ob die Konvektion sich entsprechend der Annahmen der MLT bis zum stationären Grenzfall hin ausgebildet haben kann. Einige Autoren benutzen Diffusionsgleichungen, um das konvektive Mischen zeitabhängig zu beschreiben (Simpson 1971, Eggleton 1972, Weaver *et al.* 1978, Habets 1985, Langer *et al.* 1985), dabei wird jedoch die Diffusionskonstante zum Teil sehr unbefriedigend bestimmt. Auch ist weitestgehend unbekannt, wie die Dynamik konvektiven Mischens im Overshooting-Bereich beschaffen ist, insbesondere bei zusätzlich auftretenden, starken Gradienten der chemischen Zusammensetzung (Unno 1965, Kato 1966, Langer 1986b).

Es sind in der Vergangenheit mehrere Modelle für die Konvektion entworfen und publiziert worden. Diese Arbeiten lassen sich in mehrere Gruppen von Ansätzen einordnen. Eine Klasse von Arbeiten bedient sich verschiedener Mittelungsverfahren. Die Konvektion wird dabei als der Mechanismus behandelt, der die Fluktuationen hervorruft. Die ersten derartigen Modelle gehen auf Gough (1965) und Unno (1967) zurück. Gough stellte 1969 in einer sehr grundlegenden Arbeit die Bedeutung der in der stellaren Konvektion immer wieder verwandten Boussinesq- und anelastischen Approximation als zwei Stufen einer konsistenten Entwicklung in kleine Parameter dar. Auch eine Weiterentwicklung der Modelle von Unno

und Gough geht auf Gough (1977) zurück. Diese Modelle sind allerdings zum Teil nur lokal, genauso wie das von Eggleton (1983). Ebenfalls in diese Klasse von Arbeiten gehören die sehr verwandten Modelle von Castor (1968, nicht veröffentlicht) und Stellingwerf (1982a) sowie das Modell von Xiong (1980, 1981). Das in der vorliegenden Arbeit entwickelte, analysierte und angewandte Modell ist ebenfalls von dieser Art und in der Ein-Gleichungs-Formulierung (Kuhfuß 1986a) dem Castor-Stellingwerf'schen, in der Drei-Gleichungs-Formulierung dem Xiong'schen sehr ähnlich. Die allerdings zum Teil wesentlichen Unterschiede werden an geeigneter Stelle erläutert werden.

Ein dritter Typ von Modellen benutzt eine Entwicklung in verschiedene Moden. Der erste derartige Ansatz stammt von Busse (1975). Dieser wurde später von Marcus (1979, 1980a, 1980b) in größerem Maße ausgeführt und auf realistischere Fälle angewandt. Dabei verwandten beide Kugelflächenfunktionen als Basisfunktionen. Im Prinzip könnte man mit diesen Methoden auch beliebig hohe Auflösungen in drei Dimensionen erreichen, aber die Probleme sind dann dieselben wie bei den in normaler dreidimensionaler Form diskretisierten hydrodynamischen Gleichungen (siehe auch Tscharnutter, Winkler 1979).

Auch andere Formen der Entwicklung in Moden sind schon verwandt worden (Latour *et al.* 1976, Toomre *et al.* 1976, Massaguer, Zahn 1980, Latour *et al.* 1981, Massaguer *et al.* 1984). Aber derartige Rechnungen mußten wegen zu großer Komplexität immer auf die Entwicklung in eine oder zwei Moden beschränkt werden. Außerdem erstreckten sie sich nie über eine ganze Entwicklung eines Sternes und oft wurden nur stationäre Lösungen konstruiert. Es stellt sich auch und insbesondere heraus, daß die Ergebnisse zum Teil sehr von der spezifischen Wahl der Entwicklungsfunktionen, die dreidimensionale Raumabhängigkeiten beinhalten können, abhängen, so daß auch in diesen sehr grundlegenden Arbeiten nicht davon ausgegangen werden kann, daß die Beschreibung der Konvektionszone unabhängig vom Ansatz ist. Darüber hinaus ergab sich (private Mitteilung, Baker 1986), daß bei einer unveröffentlichten Rechnung mit drei Moden kein stationärer Zustand zu erhalten war. Trotz allem kann die Bedeutung dieser Ansätze gar nicht hoch genug eingeschätzt werden.

1.2. Grundlagen des Konvektionsmodells

1.2.1. Das Mittelungsverfahren

Ein wesentlicher Punkt der vorgestellten Modelle ist die Eindimensionalität. Diese wird in manchen anderen Theorien quasi ad hoc eingeführt durch eine Annahme der Art, daß die eigentlich von allen drei Raumkoordinaten abhängenden Größen nur als von einer abhängig behandelt werden, meist der Höhe im Falle kartesischer Koordinaten oder dem Abstand vom Zentrum bei einem kugelsymmetrischen Objekt. Insofern erscheint es zunächst sauberer, eine geeignete, mathematisch wohldefinierte als auch physikalisch verständliche Reduktion auf eine Raumdimension vorzunehmen. Im vorliegenden Falle wird über Kugelflächen gemittelt. Dies ist einfach zu beschreiben für skalare Größen wie z. B. die Materiedichte ρ , die im folgenden immer als typischer Fall eines skalaren Feldes benutzt werden wird. Sei $K(r)$ die Kugel vom Radius r und $S(r)$ deren Oberfläche, dann wird das auf die Oberfläche $S(r)$ normierte Oberflächenintegral über $S(r)$ des skalaren Feldes als dessen Mittelwert im Abstand r vom Zentrum definiert, also

$$\begin{aligned} \langle \rho \rangle(r) &:= \frac{\iint_{S(r)} \rho(r, \vartheta, \varphi) df}{\iint_{S(r)} df} \\ &= \int_{S_2} \rho(r, \Omega) \frac{d\Omega}{4\pi} \quad , \quad d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \quad . \end{aligned} \quad (1)$$

Dabei sei Ω der Raumwinkel, S_2 die 2-Sphäre. Für vektorielle Größen, wie z. B. als typischer Fall das Geschwindigkeitsvektorfeld \vec{v} , ist hingegen nur der radiale Anteil von Interesse, also der proportional zum radialen Einheitsvektor \vec{e}_r . Folglich wird der entsprechende Mittelwert definiert als

$$\langle \vec{v} \rangle := \langle \vec{v} \cdot \vec{e}_r \rangle \vec{e}_r \quad . \quad (2)$$

Analog ist auch der Mittelwert für zweitstufige Tensoren zu definieren:

$$\langle \vec{\sigma} \rangle := \langle \vec{e}_r^t \cdot \vec{\sigma} \cdot \vec{e}_r \rangle \vec{e}_r \otimes \vec{e}_r^t \quad (3)$$

Alle diese Bildungen sind offenbar linear über dem Körper der reellen Zahlen. Des weiteren erhält man unmittelbar:

$$\langle \vec{v} \rangle_r = \langle v_r \rangle \quad (4a)$$

$$\langle \vec{\sigma} \rangle_{rr} = \langle \sigma_{rr} \rangle . \quad (4b)$$

Die Abweichung einer Größe von ihrem Mittelwert ist die Fluktuation, die mit einem Apostroph gekennzeichnet wird:

$$\rho' := \rho - \langle \rho \rangle \quad (5a)$$

$$\vec{v}' := \vec{v} - \langle \vec{v} \rangle . \quad (5b)$$

Die beiden Operationen zur Bildung der Mittelwerte bzw. der Fluktuationen sind idempotent und orthogonal, d. h. für eine Größe a beliebigen mathematischen Typs gilt:

$$\langle \langle a \rangle \rangle = \langle a \rangle \quad (6a)$$

$$(a')' = a' \quad (6b)$$

$$\langle a \rangle' = 0 \quad (6c)$$

$$\langle a' \rangle = 0 . \quad (6d)$$

Eine ganz wesentliche Folgerung ist die Darstellung des Mittelwertes eines Produktes zweier Größen a und b beliebigen, nicht notwendig gleichen mathematischen Typs. Es gilt

$$\langle a b \rangle = \langle a \rangle \langle b \rangle + \langle a' b' \rangle . \quad (7)$$

Auch lassen sich einige Aussagen zum Verhalten der Mittelwertbildung in Verbindung mit Differentiation machen. So vertauscht die partielle Ableitung nach der Zeit sowie die partielle Ableitung nach der Radialkoordinate r für eine beliebige Größe a mit der Mittelwertbildung und damit natürlich auch mit der Bildung des fluktuierenden Anteils:

$$\langle \partial_t a \rangle = \partial_t \langle a \rangle \quad (8a)$$

$$\langle \partial_r a \rangle = \partial_r \langle a \rangle \quad (8b)$$

$$(\partial_t a)' = \partial_t a' \quad (8c)$$

$$(\partial_r a)' = \partial_r a' . \quad (8d)$$

Weitaus wichtiger, weil anwendungsträchtiger, sind jedoch die folgenden Identitäten (a sei wieder ein Feld beliebigen Typs):

$$\langle \text{grad } \rho \rangle = \text{grad} \langle \rho \rangle \quad (9a)$$

$$\langle \operatorname{div} \vec{v} \rangle = \operatorname{div} \langle \vec{v} \rangle \quad (9b)$$

$$(\operatorname{grad} \rho)' = \operatorname{grad} \rho' \quad (9c)$$

$$(\operatorname{div} \vec{v})' = \operatorname{div} \vec{v}' \quad (9d)$$

$$\langle (\vec{v} \nabla) a \rangle = \langle (\vec{v}) \nabla \rangle \langle a \rangle + \langle (\vec{v}' \nabla) a' \rangle \quad (9e)$$

Die letzte dieser Gleichungen erinnert schon an die späteren Anwendungen im Zusammenhang mit den Gleichungen der Hydrodynamik, in denen die sogenannte konvektive oder substantielle Ableitung auftritt, die definiert ist als

$$D_t := \partial_t + (\vec{v} \nabla) \quad (10)$$

Da nachher nur die mittlere Geschwindigkeit $\langle \vec{v} \rangle$, das heißt der reine, mit globaler radialer Bewegung verknüpfte Anteil des Geschwindigkeitsfeldes, in den Gleichungen auftreten soll, ist es naheliegend, analog eine ‘mittlere’ substantielle Ableitung zu definieren gemäß

$$d_t := \partial_t + \langle (\vec{v}) \nabla \rangle \quad (11)$$

Aufgrund der oben ausgeführten Identitäten hat diese Ableitung interessante Eigenschaften. Zunächst vertauscht sie mit der Mittelung einer Größe a :

$$\langle d_t a \rangle = d_t \langle a \rangle \quad (12a)$$

$$(d_t a)' = d_t a' \quad (12b)$$

Des weiteren folgen die direkt auf die Anwendung führenden Verknüpfungen der mittleren mit der totalen substantiellen Ableitung für den Fall der Anwendung auf einen Mittelwert oder eine Fluktuation einer beliebigen Größe a :

$$d_t \langle a \rangle = \langle D_t a \rangle - \langle (\vec{v}' \nabla) a' \rangle \quad (13a)$$

$$d_t a' = (D_t a)' - ((\vec{v}' \nabla) a')' - (\vec{v}' \nabla) \langle a \rangle \quad (13b)$$

Damit sind alle später benötigten Eigenschaften und Identitäten abgeleitet, diese sind nun auf die physikalischen Gleichungen anzuwenden.

1.2.2. Die physikalischen Gleichungen

Die physikalischen Gleichungen ergeben sich aus den verschiedenen Erhaltungssätzen. Zunächst sind die Partialdichten aller Teilchensorten erhalten, soweit sie nicht aufgrund von thermonuklearen Reaktionen verändert erzeugt werden:

$$\partial_t \rho_i + \operatorname{div}(\rho_i \vec{v}) = \sum_j m_i \nu_{ij} R_j \quad . \quad (1)$$

Dabei ist m_i die Teilchenmasse der Teilchensorte i , ρ_i die zugehörige Partialdichte, R_j repräsentiert die Rate für die Reaktion j in Reaktionen pro Volumen- und Zeiteinheit, und ν_{ij} ist der stöchiometrische Koeffizient der Reaktion, d. h. in der Reaktion j werden ν_{ij} Teilchen der Sorte i erzeugt bzw. vernichtet. Die molekulare Diffusion wurde hier vernachlässigt. Für konvektive Gebiete ist das aufgrund der viel geringeren typischen Geschwindigkeiten gerechtfertigt; für massearme Sterne kann in radiativen Gebieten aber auch die molekulare Diffusion, und dabei insbesondere die Druckdiffusion (Sedimentation), durchaus wesentliche Effekte zeitigen (Wambsganß 1987).

Die Gesamtdichte ρ ist die Summe aller Partialdichten ρ_i . Damit folgt aus den obigen Gleichungen durch Summation über alle Teilchensorten die Kontinuitätsgleichung für die Gesamtdichte

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = \sum_{ij} m_i \nu_{ij} R_j \quad . \quad (2)$$

Die linke Seite dieser Gleichung repräsentiert die Massenverluste bei den Reaktionen und kann in sehr guter Näherung vernachlässigt werden. Dies ist leicht zu belegen. Angenommen ein Stern von $1M_\odot$ würde 10^{10} (typisch) Jahre mit der Leuchtkraft der Sonne Energie abstrahlen, dann entspräche das 0.07% der Gesamtmasse an Massenverlust. Dies aber ist vernachlässigbar, insbesondere im Vergleich zu typischen anderen Massenverlustmechanismen. Anders ausgedrückt ist der Massenverlust durch Massendefekte bei der Sonne $7 \cdot 10^{-14} M_\odot$ pro Jahr, das ist etwa genau soviel wie der Verlust durch den Sonnenwind. Man kann also auch für Sterne in sehr guter Näherung die Massenerhaltung in der bekannten Weise formulieren als

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad . \quad (3)$$

In der weiteren Behandlung erweist es sich als sinnvoller, immer mit spezifischen, das heißt auf die Masseneinheit bezogenen Größen zu arbeiten. Aus diesem Grunde werden statt der

Kontinuitätsgleichungen für die Teilchensorten die äquivalenten Gleichungen für die auf den Massenanteil bezogenen Konzentrationen benutzt, deren Bestimmungsgleichung aus (1) und (3) folgt:

$$c_i := \frac{\rho_i}{\rho} \quad (4a)$$

$$\rho D_t c_i = \sum_j m_i \nu_{ij} R_j \quad . \quad (4b)$$

Die zweite wesentliche physikalische Gleichung ist die aus der Impulserhaltung folgende Navier-Stokes-Gleichung:

$$\rho D_t \vec{v} = \rho \vec{g} - \nabla p + \text{Div } \overset{\leftrightarrow}{\sigma} \quad . \quad (5)$$

Dabei ist p der Druck, und der Vektor \vec{g} steht für die Beschleunigung der Materie durch ein äußeres Feld; dieses wird nachher das radialsymmetrisch angesetzte Gravitationsfeld sein. $\overset{\leftrightarrow}{\sigma}$ ist der Tensor der Viskosität. Die dritte Erhaltungsgröße ist die Gesamtenergie:

$$\partial_t \left\{ \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) \right\} + \text{div} \left\{ \rho \vec{v} \left(w + \frac{v^2}{2} \right) + \vec{q} - \vec{v} \overset{\leftrightarrow}{\sigma} \right\} = \rho \vec{v} \vec{g} + \rho \epsilon \quad . \quad (6)$$

Dabei ist e die spezifische thermische Energie, w die spezifische Enthalpie, \vec{q} entspricht dem Transport von Energie durch nicht von der Bewegung \vec{v} getragene Mechanismen wie der Strahlungstransport, und ϵ ist die spezifische Erzeugung oder Vernichtung thermischer Energie z. B. durch die thermonuklearen Prozesse oder auch durch Neutrinoverluste. Auch diese Gleichung wird wieder in der nicht konservativen Form benutzt:

$$\rho D_t \left(e + \frac{v^2}{2} \right) = \rho \vec{v} \vec{g} + \rho \epsilon - \text{div}(\vec{q} - \vec{v} \overset{\leftrightarrow}{\sigma} + p \vec{v}) \quad . \quad (7)$$

Im Verlauf der Herleitungen wird auch noch die Energieerhaltung in Form der Entropiegleichung benötigt werden:

$$\rho T D_t s = \rho \epsilon - \text{div } \vec{q} + \sigma_{ij} \partial_i v_j - \sum_{ij} \psi_i m_i \nu_{ij} R_j \quad . \quad (8)$$

Dabei ist s die spezifische Entropie. Für den die Entropieerzeugung durch viskose Dissipation kinetischer Energie repräsentierenden Term wird die Einstein'sche Summenkonvention benutzt. Die Größe ψ_i resultiert aus den die chemischen Potentiale μ_i beinhaltenden

$\mu_i dn_i$ -Termen (n_i sei die Anzahl der Teilchen i pro Masseneinheit) aufgrund der Tatsache, daß noch die Nebenbedingung $\sum_i c_i = 1$ erfüllt werden muß,

$$\psi_i = \frac{\mu_i}{m_i} - \frac{\mu_N}{m_N} \quad (9)$$

für den Fall, daß die N -te Konzentration als die abhängige behandelt wird. Auch die Summe ist im folgenden immer nur verstanden als Summe über alle unabhängig wählbaren Konzentrationen, also bei N Teilchensorten $N - 1$ Stück.

1.2.3. Mittelung der Kontinuitätsgleichung

Unter Anwendung der in Kapitel 1.2.1. abgeleiteten Regeln und Identitäten gelangt man von der Kontinuitätsgleichung sofort zu deren gemitteltem Anteil und den entsprechenden Fluktuationen:

$$\partial_t \langle \rho \rangle + \text{div}(\langle \rho \rangle \langle \vec{v} \rangle + \langle \rho' \vec{v}' \rangle) = 0 \quad (1a)$$

$$\partial_t \rho' + \text{div}(\langle \rho \rangle \vec{v}' + \rho' \langle \vec{v} \rangle + (\rho' \vec{v}')') = 0. \quad (1b)$$

Die **anelastische Approximation** (Spiegel, Veronis 1960, Gough 1969) behandelt nun grob gesprochen alle Fluktuationen als Störungen, ausgenommen die Fluktuation der Geschwindigkeit \vec{v}' . Alle Gleichungen werden demgemäß in der führenden Ordnung approximiert. Im Falle der Gleichungen (1) erhält man

$$\partial_t \langle \rho \rangle + \text{div}(\langle \rho \rangle \langle \vec{v} \rangle) = 0 \quad (2a)$$

$$\text{div}(\langle \rho \rangle \vec{v}') = 0. \quad (2b)$$

Diese Gleichungen lassen sich einfach interpretieren. Die mittlere Geschwindigkeit $\langle \vec{v} \rangle$ wird identifiziert als die, die bei einer mittleren Dichte $\langle \rho \rangle$ zu vorgegebenen Massenflüssen aufgrund von Dichteänderungen führt. Die Gleichung (2b) beinhaltet hingegen im Divergenzterm einfach nur den führenden Anteil. Das Verschwinden der Zeitableitung des fluktuierenden Anteils der Dichte bewirkt, daß kurzzeitskalige Fluktuationen, nämlich Schallwellen, in dieser Näherung vernachlässigt werden; so wird die anelastische Approximation in der Literatur häufig charakterisiert. An dieser Stelle sei bemerkt, daß auch hier klar wird, daß eine approximationsfreie Simulation der Konvektion in Sternen über die notwendig großen Zeitskalen gar nicht möglich ist, da man gleichzeitig auch die kleinen Zeitskalen schallartiger Störungen mit auflösen müßte.

1.2.4. Die gemittelten Konzentrationsgleichungen

Anhand der Gleichungen für die Konzentrationen (1.2.2/4b) läßt sich besonders einfach die Anwendung des Mittelungsverfahrens demonstrieren. Nach einer Division durch die Dichte ρ hat man

$$D_t c_i = \sum_j m_i \nu_{ij} \frac{R_j}{\rho} \quad . \quad (1)$$

Auf diese Gleichung wendet man nun die Identität (1.2.1/13a) an und erhält zunächst

$$d_t \langle c_i \rangle = \sum_j m_i \nu_{ij} \left\langle \frac{R_j}{\rho} \right\rangle - \langle (\vec{v}' \nabla) c_i' \rangle \quad . \quad (2)$$

Der auftretende Flußterm, der den Transport durch die konvektive Geschwindigkeit repräsentiert, ist aufgrund der ‘anelastischen Gleichung’ (1.2.3/2b) noch exakt umzuformen, indem man einen Faktor $\langle \rho \rangle \vec{v}'$ hinter die Differentiation zieht. Diese Operation wird auch bei allen anderen Gleichungen später in der einen oder anderen Form durchgeführt werden:

$$\begin{aligned} \langle (\vec{v}' \nabla) c_i' \rangle &= \frac{1}{\langle \rho \rangle} \langle (\langle \rho \rangle \vec{v}' \nabla) c_i' \rangle \\ &= \frac{1}{\langle \rho \rangle} \operatorname{div} \langle \vec{v}' (\langle \rho \rangle c_i)' \rangle \quad . \end{aligned} \quad (3)$$

Der Term, dessen Divergenz in der letzten Gleichung auftritt, ist ein typischer Flußterm, wie er immer wieder erhalten werden wird. Er repräsentiert den Strom von Materie der Spezies i aufgrund der Konvektion und damit das konvektive Mischen. Man erhält also letztendlich:

$$d_t \langle c_i \rangle = \sum_j m_i \nu_{ij} \left\langle \frac{R_j}{\rho} \right\rangle - \frac{1}{\langle \rho \rangle} \operatorname{div} \vec{j}_i \quad (4a)$$

$$\vec{j}_i := \langle \vec{v}' (\langle \rho \rangle c_i)' \rangle \quad . \quad (4b)$$

Die Gleichung (4a) ist identisch mit einer Gleichung für eine Konzentration $\langle c_i \rangle$, wie sie gelten würde in Gegenwart eines Diffusionsstromes \vec{j}_i . Durch Anwendung der Kontinuitätsgleichung für mittlere Dichte und Geschwindigkeit (1.2.3/2a) erhält man in konservativer Form geschrieben

$$\begin{aligned} \partial_t (\langle \rho \rangle \langle c_i \rangle) + \operatorname{div} (\langle \rho \rangle \langle \vec{v}' \rangle \langle c_i \rangle + \vec{j}_i) &= \sum_j m_i \nu_{ij} \langle \rho \rangle \left\langle \frac{R_j}{\rho} \right\rangle \\ &\approx \sum_j m_i \nu_{ij} \langle R_j \rangle \quad . \end{aligned} \quad (5)$$

Diese formale Analogie führt später zu der Idee, alle Ströme solchen Typs als Diffusionsströme zu behandeln, und diese, aufgrund der Tatsache, daß eine durch Konvektion verursachte 'Diffusion' sehr effizient ist, nur durch den Gradienten der diffundierenden Größe zu beschreiben und Druck- und Temperaturdiffusion zu vernachlässigen.

1.2.5. Die gemittelte Navier-Stokes-Gleichung

Mit Hilfe der schon abgeleiteten Eigenschaften des Mittelungsverfahrens und insbesondere Gleichung (1.2.1/13a) ergibt sich sofort aus der Navier-Stokes-Gleichung (1.2.2/5)

$$d_t \langle \vec{v} \rangle = \langle \vec{g} \rangle - \left\langle \frac{1}{\rho} \nabla p \right\rangle + \left\langle \frac{1}{\rho} \text{Div} \overleftrightarrow{\sigma} \right\rangle - \langle (\vec{v}' \nabla) \vec{v}' \rangle . \quad (1)$$

Der letzte Term dieser Gleichung führt zur Definition des Reynolds-Tensors

$$\tau_{\mu\nu} := -\langle \rho \rangle v'_{\mu} v'_{\nu} . \quad (2)$$

Vernachlässigt man darüber hinaus noch die Terme höherer Ordnung in der molekularen Viskosität, d. h. hier, daß man die Dichte bei dem Viskositätsterm aus der Mittelung herausziehen kann, und approximiert man zusätzlich noch, daß die Beschleunigung \vec{g} aus der langreichweitigen Gravitationswechselwirkung resultierend einen fast verschwindenden fluktuierenden Anteil hat, so erhält man

$$d_t \langle \vec{v} \rangle = \vec{g} - \left\langle \frac{1}{\rho} \nabla p \right\rangle + \frac{1}{\langle \rho \rangle} \langle \text{Div}(\overleftrightarrow{\sigma} + \overleftrightarrow{\tau}) \rangle . \quad (3)$$

Der letzte Approximationsschritt ist die Entwicklung des Termes, der den Druckgradienten beinhaltet. Es sei jedoch darauf hingewiesen, daß an späterer Stelle die Gleichung (3) noch verwandt wird ohne diese Entwicklung:

$$d_t \langle \vec{v} \rangle = \vec{g} - \frac{1}{\langle \rho \rangle} \nabla \langle p \rangle + \frac{1}{\langle \rho \rangle} \langle \text{Div}(\overleftrightarrow{\sigma} + \overleftrightarrow{\tau}) \rangle . \quad (4)$$

Die Mittelung der Navier-Stokes-Gleichung führt also auf eine Bewegungsgleichung für die gemittelte, rein radiale Bewegung. In der jetzt erhaltenen Form ist sie allerdings noch nicht verwendbar, da der Reynoldstensor $\overleftrightarrow{\tau}$ noch einen Term höherer Ordnung darstellt, der nicht exakt behandelt werden kann.

1.2.6. Die Gleichung für die konvektive kinetische Energie

Wesentlichster Bestandteil des Konvektionsmodells ist eine dynamische Gleichung für die konvektive kinetische Energie, also die Energie, die in der konvektiven Bewegung steckt. Diese ist auch als spezifische Größe definiert, also als Energie pro Masseneinheit:

$$\varpi := \left\langle \frac{v'^2}{2} \right\rangle . \quad (1)$$

Die Motivation für die Einführung dieser Größe ist die Tatsache, daß sie als Skalar zu einer typischen Geschwindigkeitsskala der konvektiven Bewegung führt. Eine Gleichung für diese Größe ist also ein erster Schritt zu einer vereinfachten Beschreibung der Dynamik des konvektiven Geschwindigkeitsfeldes und damit der Transporte aufgrund der Konvektion. Die Anwendung der Gleichungen (1.2.1/12a) und (1.2.1/13b) auf die Navier-Stokes-Gleichung (1.2.2/5) führt zu

$$d_t \varpi = - \left\langle \frac{\vec{v}'}{\rho} \nabla p \right\rangle + \left\langle \frac{\vec{v}'}{\rho} \text{Div } \overleftrightarrow{\sigma} \right\rangle - \left\langle (\vec{v}' \nabla) (v'^2/2) \right\rangle + \frac{1}{\langle \rho \rangle} \langle \tau_{ij} D_i \langle \vec{v} \rangle_j \rangle . \quad (2)$$

Dabei steht D_i für die kovariante Ableitung in Richtung des Basisvektors i . Diese wird später noch ausführlich behandelt werden und dabei zweckmäßig auf das anholonome orthonormale Dreibeinfeld $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi\}$ bezogen. Die Einstein'sche Summenkonvention kommt hier zur Anwendung. Wieder wird beim Auftreten des Tensors der molekularen Viskosität die Dichtefluktuation als Term höherer Ordnung vernachlässigt, was berechtigt ist aufgrund der Tatsache, daß die eigentlichen Effekte der Viskosität aus der Wechselwirkung mit der Geschwindigkeit bzw. deren Ableitungen erwachsen und so zu den Dissipations- bzw. Transportgliedern führen. Demgemäß handelt es sich hier bei $\text{Div } \overleftrightarrow{\sigma}$ um einen Term der Ordnung der Geschwindigkeitsfluktuationen. Man erhält

$$d_t \varpi = \mathbf{S}_\varpi - \hat{\mathbf{S}}_\varpi - \frac{1}{\langle \rho \rangle} \text{div}(\vec{j}_t - \langle \vec{v}' \overleftrightarrow{\sigma} \rangle) + \frac{1}{\langle \rho \rangle} \langle \tau_{ij} D_i \langle \vec{v} \rangle_j \rangle \quad (3)$$

mit den Definitionen

$$\mathbf{S}_\varpi := - \left\langle \frac{\vec{v}'}{\rho} \nabla p \right\rangle \quad (4a)$$

$$\hat{\mathbf{S}}_\varpi := \frac{1}{\langle \rho \rangle} \langle \sigma_{ij} D_i v'_j \rangle \quad (4b)$$

$$\vec{j}_t := \left\langle \vec{v}' \left(\langle \rho \rangle v'^2 / 2 \right)' \right\rangle . \quad (4c)$$

Wieder bleiben Terme übrig, deren exakte Behandlung nicht möglich ist und die zu modellieren die eigentliche Schwierigkeit des Modells darstellt.

1.2.7. Die gemittelte Energiegleichung

Die Energiegleichung (1.2.2/7) ist zunächst durch ρ zu teilen. Dann erhält man unter Berücksichtigung der Identität

$$\left\langle e + \frac{1}{2}v^2 \right\rangle = \langle e \rangle + \varpi + \frac{1}{2}\langle \vec{v} \rangle^2 \quad (1)$$

und der Näherung, daß die äußeren Kräfte aus der Gravitation resultieren und deshalb deren Fluktuationen aufgrund der Langreichweitigkeit vernachlässigt werden können, sowie der erneuten und schon begründeten Vernachlässigung der Dichtefluktuationen im Zusammenhang mit der molekularen Viskosität und unter Benutzung von (1.2.1/13a) und (1.2.5/3) sofort

$$\begin{aligned} d_t(\langle e \rangle + \varpi) = & \langle \epsilon \rangle - \left\langle \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \vec{q} \right\rangle - \frac{1}{\langle \rho \rangle} \operatorname{div}(\vec{j}_t - \langle \vec{v}' \vec{\sigma}' \rangle) \\ & + \frac{1}{\langle \rho \rangle} \langle (\sigma_{ij} + \tau_{ij}) D_i \langle \vec{v} \rangle_j \rangle - \langle (\vec{v}' \nabla) e' \rangle \\ & - \left\langle \frac{1}{\rho} \operatorname{div}(p\vec{v}) \right\rangle + \langle \vec{v} \rangle \left\langle \frac{1}{\rho} \nabla p \right\rangle . \end{aligned} \quad (2)$$

Man kann zeigen, daß in guter Näherung unter Vernachlässigung der Druckfluktuationen, ansonsten nur unter der erwähnten Entwicklung nach fluktuierenden Größen und der Anwendung der sogenannten 'anelastischen' Gleichung (1.2.3/2b), gilt

$$\langle \vec{v} \rangle \left\langle \frac{1}{\rho} \nabla p \right\rangle - \left\langle \frac{1}{\rho} \operatorname{div}(p\vec{v}) \right\rangle \approx - \frac{\langle p \rangle}{\langle \rho \rangle} \operatorname{div} \langle \vec{v} \rangle - \left\langle \vec{v}' \nabla \left(\frac{p}{\rho} \right)' \right\rangle . \quad (3)$$

An dieser Stelle sei erwähnt, daß es nicht generell erlaubt ist, im Rahmen der anelastischen Approximation die Druckfluktuationen zu vernachlässigen, wenn man mit dem Auftreten konvektiver Geschwindigkeiten mit Machzahlen, die nicht mehr klein gegen 1 sind, rechnen muß. Dabei ist immer zu beachten, von welcher Ordnung andere auftretende Terme sind. Für die mittlere Energie ergibt sich aufgrund der Analyse von Gough (1969) allerdings, daß die Druckfluktuationen vernachlässigt werden können. Es sei aber schon an dieser Stelle darauf hingewiesen, daß die anelastische Approximation im folgenden nicht immer vollständig respektiert werden kann und zusätzliche Näherungen notwendig werden, die das Modell zum Teil nur exakt im Sinne der Boussinesq-Approximation machen. Gough (1977) versucht diese

Problematik durch analytische Überlegungen zu den Druckfluktuationen zu umgehen, aber auch dies gelingt nur approximativ. Die meisten derzeit vorhandenen Konvektionsmodelle, wie insbesondere die seit langen Jahren benutzte MLT, kranken ebenfalls an der Tatsache, daß sie ihre Gültigkeit bei Machzahlen, die nicht mehr klein sind gegen 1, verlieren. Dies ist eine leider nicht leicht zu überwindende Inkonsistenz, denn bei der Anwendung dieser Modelle können durchaus Lösungen mit großen konvektiven Geschwindigkeiten erhalten werden, wie z. B. aus ungezählten Rechnungen für Konvektionszonen in äußeren Ionisationsschichten entwickelter Sterne bekannt ist. Es ist jedoch im gegebenen Rahmen nicht möglich, die Druckfluktuationen vollständig mitzubestimmen. Dazu müßte die Navier-Stokes-Gleichung auch für die Geschwindigkeitsfluktuationen gelöst werden, wie es in einigen neueren Arbeiten durchgeführt wird, in denen sogar zum Teil voll kompressible Materie behandelt wird (Latour *et al.* 1976, Toomre *et al.* 1976, Massaguer, Zahn 1980, Latour *et al.* 1981, Hurlburt *et al.* 1984, Massaguer *et al.* 1984, Deupree 1984, 1986). Es ist sowohl anschaulich klar als auch aus den oben genannten Arbeiten ersichtlich, daß die Druckfluktuationen mit den horizontalen, also vom Mittelungsverfahren gar nicht erfaßten, Strömungen zu tun haben, denn die vertikalen Strömungen müssen am Rand einer konvektiven Zone 'umgebogen' werden, und dort entsteht somit ein Staudruck. Es zeigt sich also, daß mindestens eine zweidimensionale Behandlung oder eine Zerlegung in höherdimensional abhängige Moden notwendig wird, und genau dies wird in den zitierten Arbeiten vorgeführt. Damit ist aber das Modell doch wieder zu kompliziert, um es in einer Sternentwicklungsrechnung uneingeschränkt benutzen zu können.

Unter Berücksichtigung der Gleichung (3) gelangt man zu einer leicht interpretierbaren Form der Gleichung für die mittlere Energie:

$$d_t(\langle e \rangle + \varpi) = \langle \epsilon \rangle - \frac{1}{\langle \rho \rangle} \operatorname{div}(\langle \vec{q} \rangle + \vec{j}_t + \vec{j}_w - \langle \vec{v}' \vec{\sigma}' \rangle) \\ + \frac{1}{\langle \rho \rangle} \langle (\sigma_{ij} + \tau_{ij}) D_i \langle \vec{v} \rangle_j \rangle - \frac{\langle p \rangle}{\langle \rho \rangle} \operatorname{div} \langle \vec{v} \rangle \quad . \quad (4)$$

Dabei wurde der radiative Transport wieder in führender Ordnung entwickelt, und \vec{j}_w ist der durch die Konvektion verursachte Fluß thermischer Energie:

$$\vec{j}_w := \langle \vec{v}' (\langle \rho \rangle w)' \rangle . \quad (5)$$

Es ist nur natürlich, daß hier die Enthalpie und nicht die Energie als transportierte Größe

auftritt, was der Tatsache der durch das konvektive Element zu leistenden Arbeit Rechnung trägt. Auch in der Energieerhaltung (1.2.2/6) kommt dies zum Ausdruck.

Es ist instruktiv und für die Interpretation unerlässlich, die Gleichung (4) umzuschreiben in die Form eines Erhaltungssatzes:

$$\begin{aligned} & \partial_t \left\{ \langle \rho \rangle \left(\langle e \rangle + \varpi + \frac{1}{2} \langle \vec{v} \rangle^2 \right) \right\} \\ & + \operatorname{div} \left\{ \langle \rho \rangle \langle \vec{v} \rangle \left(\langle e \rangle + \frac{\langle p \rangle}{\langle \rho \rangle} + \varpi + \frac{1}{2} \langle \vec{v} \rangle^2 \right) \right. \\ & \left. + \vec{j}_w + \langle \vec{q} \rangle + \vec{j}_t - \langle \vec{v}' \langle \vec{\sigma} \rangle \rangle - \langle \vec{v} \rangle (\langle \tau \rangle + \langle \langle \vec{\sigma} \rangle \rangle) \right\} = \langle \rho \rangle \langle \epsilon \rangle + \langle \rho \rangle \langle \vec{v} \rangle \vec{g}. \quad (5) \end{aligned}$$

Es fällt auf, daß die konvektive kinetische Energie auftritt wie eine zusätzliche innere Energie etwa aufgrund einer zusätzlichen Komponente im Gas. Später wird sich noch herausstellen, daß im scherkraftfreien Teil des Reynoldstensors auch noch der zugehörige Druck verborgen liegt. Man beachte außerdem, daß Terme, die aus der molekularen Viskosität $\langle \vec{\sigma} \rangle$ erwachsen, immer in Konkurrenz stehen mit Termen, die unmittelbar aus dem Reynoldstensor $\langle \vec{\tau} \rangle$ oder dem mit diesem verwandten Fluß konvektiver kinetischer Energie \vec{j}_t resultieren.

1.2.8. Die Vernachlässigung der molekularen Viskosität $\langle \vec{\sigma} \rangle$

Eine weitere Näherung des Modells besteht nun in der Vernachlässigung der molekularen Viskosität $\langle \vec{\sigma} \rangle$ in allen Termen bis auf einen. Es wird sich später noch genauer erweisen, daß diese Näherung für die Scherkräfte bei hohen Reynoldszahlen gerechtfertigt ist (siehe Kapitel 1.3.1.). Der ebenfalls auftretende Spurterm des viskosen Tensors steht sogar in direkter Konkurrenz mit Druck und Turbulenzdruck und ist deshalb auch vernachlässigbar. Die aufgrund der molekularen Viskosität entstehenden Energieflüsse wiederum sind zu vergleichen mit den Flüssen thermischer Energie, \vec{j}_w und $\langle \vec{q} \rangle$, oder kinetischer Energie \vec{j}_t . Letzterer ist zwar auch klein relativ zu den thermischen Flüssen, jedoch ist er aus einem Term von der Struktur Reynoldstensor multipliziert mit einer Geschwindigkeitsableitung entstanden, und deshalb gilt das später noch zu belegende Argument der hohen Reynoldszahlen auch hier.

Diese Näherung ist zu interpretieren als das Abschneiden der Turbulenzkaskade 'unterhalb' der den Transport dominierenden größten Skalenlänge durch Einführung der viel größeren turbulenten Viskosität, die im Reynoldstensor beinhaltet ist. Diese große Viskosität führt zur Dissipation der kinetischen Energie schon auf großen Skalen. Die kleinen Skalen werden dabei vernachlässigt mit dem Argument, daß unterhalb der dominanten Skala die

Energie schon als in relativ kurzer Zeit in thermische dissipiert betrachtet werden kann. Damit ist dem Transport genüge getan, nur der Dissipationsmechanismus muß noch genauer modelliert werden. Dieser ist beinhaltet in einem Term der Gleichung für die konvektive kinetische Energie ϖ , dem einzigen Term, in dem die molekulare Viskosität nicht konkurriert mit dem Reynoldstensor.

1.2.9. Zusammenfassung der Gleichungen

Im folgenden sind die unter den bisherigen Approximationen erhaltenen Gleichungen des Modells noch einmal aufgeführt:

$$\partial_t \langle \rho \rangle + \text{div}(\langle \rho \rangle \langle \vec{v} \rangle) = 0 \quad (1)$$

$$\text{div}(\langle \rho \rangle \vec{v}') = 0 \quad (2)$$

$$d_t \langle c_i \rangle = \sum_j m_i \nu_{ij} \left\langle \frac{R_j}{\rho} \right\rangle - \frac{1}{\langle \rho \rangle} \text{div} \vec{j}_i \quad (3)$$

$$\vec{j}_i := \langle \vec{v}' (\langle \rho \rangle c_i)' \rangle \quad (4)$$

$$d_t \langle \vec{v} \rangle = \vec{g} - \frac{1}{\langle \rho \rangle} \nabla \langle p \rangle + \frac{1}{\langle \rho \rangle} \langle \text{Div} \overleftrightarrow{\tau} \rangle \quad (5)$$

$$\tau_{ij} := - \langle \rho \rangle v'_i v'_j \quad (6)$$

$$d_t \varpi = \mathbf{S}_\varpi - \hat{\mathbf{S}}_\varpi - \frac{1}{\langle \rho \rangle} \text{div}(\vec{j}_t) + \frac{1}{\langle \rho \rangle} \langle \tau_{ij} D_i \langle \vec{v} \rangle_j \rangle \quad (7)$$

$$\mathbf{S}_\varpi := - \left\langle \frac{\vec{v}'}{\rho} \nabla p \right\rangle \quad (8)$$

$$\hat{\mathbf{S}}_\varpi := \frac{1}{\langle \rho \rangle} \langle \sigma_{ij} D_i v'_j \rangle \quad (9)$$

$$\vec{j}_t := \left\langle \vec{v}' \left(\langle \rho \rangle v'^2 / 2 \right)' \right\rangle \quad (10)$$

$$\begin{aligned} d_t(\langle e \rangle + \varpi) &= \langle \epsilon \rangle - \frac{1}{\langle \rho \rangle} \text{div}(\langle \vec{q} \rangle + \vec{j}_t + \vec{j}_w) \\ &\quad + \frac{1}{\langle \rho \rangle} \langle \tau_{ij} D_i \langle \vec{v} \rangle_j \rangle - \frac{\langle p \rangle}{\langle \rho \rangle} \text{div} \langle \vec{v} \rangle \end{aligned} \quad (11)$$

$$\vec{j}_w := \langle \vec{v}' (\langle \rho \rangle w)' \rangle \quad (12)$$

Die weitere Aufgabe ist es nun, diese Gleichungen zu schließen, d. h. die immer noch vorhandenen Mittelwerte von Produkten fluktuierender Größen physikalisch sinnvoll zu modellieren.

1.3. Schließbedingungen

1.3.1. Der Reynoldstensor

Analog zum Tensor der molekularen Viskosität wird ein Ansatz für den Reynoldstensor gewählt. Dies ist eine in der Theorie turbulenter Flüsse häufig benutzte Approximation, die sich darüber hinaus auch motivieren läßt aus der Betrachtung der Terme, die in der Navier-Stokes-Gleichung bei deren Ableitung aus der Boltzmann-Gleichung auf die Viskosität führen (Chiu 1968). Es wird im folgenden isotrope Turbulenz angenommen, da nur unter dieser Annahme der zweistufige symmetrische Tensor, bezogen auf ein orthonormiertes Dreibeinfeld wie $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi\}$, irreduzibel zerfällt in einen spurfreien symmetrischen Anteil und einen, der proportional ist zum Kronecker- δ :

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &:= - \langle \rho \rangle v'_i v'_j \\ &\approx \langle \rho \rangle \mu \left\{ 2D_{(i} v_{j)} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \operatorname{div} \vec{v} \right\} - \frac{1}{3} \langle \rho \rangle v'^2 \delta_{ij} \quad . \end{aligned} \quad (1)$$

Die Annahme isotroper Turbulenz erscheint natürlich fragwürdig, insbesondere würde man wohl an den Rändern einer konvektiven Zone eine starke Anisotropie erwarten. Ein Verzicht auf diese Annahme ist jedoch mit ähnlichen Schwierigkeiten verbunden wie die Darstellung der Druckfluktuationen (Gough 1977), und somit im gegebenen Rahmen nicht durchführbar. Eine andere Möglichkeit wäre die Annahme totaler Anisotropie, aber diese ist ebenfalls nicht global zu rechtfertigen, sie ist eher noch unnatürlicher, da bei hohen Reynolds- und Rayleighzahlen, wie die Analysen zeigen, beliebig kurzskalige und damit immer stärker isotrope Moden instabil werden, und man somit diesen Grenzfall beliebig exakt behandeln können muß im Gegensatz zum anderen Extrem, das nur sehr begrenzt und vereinzelt als gut erfüllt betrachtet werden kann.

Man beachte, daß aufgrund der Isotropieannahme der Spurterm schon exakt bestimmt ist. D_i repräsentiert wieder die kovariante Ableitung nach der i -ten Richtung, die Symmetrisierung im Scherterm wird dargestellt durch das Klammerpaar (...) im Index. Eine derartige Approximation ist durchaus gebräuchlich im Zusammenhang mit Modellen für turbulente Strömungen (siehe z. B. Tennekes, Lumley 1972). Die kinetische turbulente Viskosität μ hat die Dimension einer Geschwindigkeit multipliziert mit einer Länge. Einzusetzen ist dort eine typische Geschwindigkeit der konvektiven Bewegung, die zeitabhängig und nichtlokal zu

beschreiben die Motivation war für die Ableitung der Gleichung für die konvektive kinetische Energie ϖ , sowie eine typische Skalenlänge dieser Bewegung Λ . Des weiteren enthält μ einen freien Parameter α_μ :

$$\mu := \alpha_\mu \varpi^{1/2} \Lambda \quad . \quad (2)$$

Hier zeigt sich nun, daß die in Kapitel 1.2.8. durchgeführte Vernachlässigung der molekularen Viskosität bei gleichartigem Auftreten des Reynoldstensors eine Approximation für hohe Reynoldszahlen darstellt, denn

$$\Re := \frac{\delta v \delta \ell}{\mu_{mol}} \quad (3)$$

ist etwa das Verhältnis von der turbulenten oder ‘Eddy’-Viskosität μ zur molekularen μ_{mol} .

Es ist sinnvoll, den Reynoldstensor aufzuspalten in den Scheranteil, der aus dem spurfreien Anteil $\overleftrightarrow{\tau}$ resultiert, und dem Spuranteil, der immer wieder auf den Turbulenzdruck

$$p_t := \frac{2}{3} \langle \rho \rangle \varpi \quad (4)$$

führt. Die in den Gleichungen benötigten Terme zerfallen demgemäß in

$$\langle \text{Div } \overleftrightarrow{\tau} \rangle = \langle \text{Div } \overleftrightarrow{\tilde{\tau}} \rangle - \nabla p_t \quad (5a)$$

$$\langle \tau_{ij} D_i \langle \vec{v} \rangle_j \rangle = \langle \tilde{\tau}_{ij} D_i \langle \vec{v} \rangle_j \rangle - p_t \text{div} \langle \vec{v} \rangle \quad (5b)$$

$$\langle \vec{v} \rangle \langle \overleftrightarrow{\tau} \rangle = \langle \vec{v} \rangle \left(\langle \overleftrightarrow{\tilde{\tau}} \rangle - p_t \right) \quad . \quad (5c)$$

Die Scherterme sind auch ohne weitere Approximationen auszuwerten. Man erhält:

$$\langle \text{Div } \overleftrightarrow{\tilde{\tau}} \rangle = \bar{e}_r \frac{1}{r^3} \partial_r \frac{4}{3} \langle \rho \rangle \mu r^4 \partial_r \frac{\langle v_r \rangle}{r} \quad (6a)$$

$$\langle \tilde{\tau}_{ij} D_i \langle \vec{v} \rangle_j \rangle = \frac{4}{3} \langle \rho \rangle \mu \left(r \partial_r \frac{\langle v_r \rangle}{r} \right)^2 \quad (6b)$$

$$\langle \vec{v} \rangle \langle \overleftrightarrow{\tilde{\tau}} \rangle = \langle \vec{v} \rangle \frac{4}{3} \langle \rho \rangle \mu r \partial_r \frac{\langle v_r \rangle}{r} \quad . \quad (6c)$$

1.3.2. Diffusionsapproximation

Die formale Analogie der Gleichungen für die mittleren Konzentrationen $\langle c_i \rangle$ zu normalen Diffusionsgleichungen führt auf die Idee, die in diesen Gleichungen auftretenden Flüsse einer Spezies i ebenfalls als diffusive zu approximieren, d. h.

$$\vec{j}_i := \langle \bar{v}'(\langle \rho \rangle c_i)' \rangle \approx -\alpha_i \langle \rho \rangle \Lambda \varpi^{1/2} \nabla \langle c_i \rangle . \quad (1)$$

Durch Summation der Konzentrationsgleichungen (1.2.9/3) über alle Teilchensorten und wieder unter Vernachlässigung der Massendefekte bei Kernreaktionen gelangt man mit Hilfe des Gauß'schen Satzes unmittelbar zu der Nebenbedingung, daß die Summe aller Diffusionsströme verschwinden muß. Dies ist für beliebige räumliche Verteilungen der Konzentrationen c_i jedoch nur möglich, wenn, wie oben getan, der Gradient der Konzentrationen c_i und nicht der der Partialdichten ρ_i benutzt wird (analog wie im Falle molekularer Diffusion), und darüber hinaus alle freien Parameter α_i gleich sind. Demgemäß wird im folgenden nur der freie Parameter α_m für diese Diffusionsnäherungen für alle Spezies i benutzt, also

$$\vec{j}_i = -\alpha_m \langle \rho \rangle \Lambda \varpi^{1/2} \nabla \langle c_i \rangle . \quad (2)$$

Der Fluß kinetischer Energie \vec{j}_t wird nun aufgrund der formalen Analogie ebenfalls durch eine solche Diffusionsapproximation modelliert:

$$\vec{j}_t = -\alpha_t \langle \rho \rangle \Lambda \varpi^{1/2} \nabla \varpi . \quad (3)$$

Dieser Fluß ist es letztendlich, der den nichtlokalen Charakter des gesamten Konvektionsmodells ausmacht. Die Gleichung für die konvektive kinetische Energie wird durch die Näherung (3) zu einer nichtlinearen Diffusionsgleichung, die diffundierende Größe ist nicht nur in den Quell- und Senkentermen vorhanden, sondern auch und insbesondere in der Diffusivität für deren Transport. Ein solches Modell zur Behandlung von turbulenten Strömungen mit kleineren Strukturen, als aufgelöst werden können oder sollen, wird häufig als 'Energiegleichungsmodell' bezeichnet (siehe z. B. Tennekes, Lumley 1972).

Der radiative Fluß $\langle \vec{q} \rangle$ wird, wie es in der Sternentwicklung zumindest für Bereiche großer optischer Tiefe gebräuchlich ist, ebenfalls durch eine Diffusionsapproximation beschrieben,

$$\langle \vec{q} \rangle = -\frac{4ac\langle T \rangle^3}{3\langle \kappa \rangle \langle \rho \rangle} \nabla \langle T \rangle , \quad (4)$$

dabei ist a die Strahlungskonstante, c die Lichtgeschwindigkeit, κ die Opazität und T die Temperatur. Diese Näherung ist gerechtfertigt aufgrund der Tatsache, daß die mittlere freie Weglänge der Photonen klein ist verglichen mit den typischen Skalen der Veränderung der Zustandsgrößen im Stern.

1.3.3. Dissipation konvektiver kinetischer Energie

Die molekulare Viskosität tritt noch in dem Dissipationsterm in der Gleichung für die konvektive kinetische Energie ϖ auf. Dieser Term kann zunächst nur mit Hilfe eines Dimensionsargumentes approximiert werden, denn für eine exakte Behandlung wäre ein detailliertes Wissen über den gesamten Transport von kinetischer Energie über die turbulente Kaskade bis in immer kleinere Skalen mit deren schlußendlicher Umsetzung in thermische Energie notwendig. Im vorliegenden Fall wird jedoch nur die Dissipation der Energie aus der größten, für den Transport wesentlichen Skala benötigt, alle höheren Anregungen werden nur als bestenfalls leicht verzögernder Mechanismus zur Dissipation der Bewegung verstanden. Es wird eine typische Zeitskala der Dissipation τ_D definiert mit Hilfe der schon angegebenen typischen Skalen der Geschwindigkeit und der Länge

$$\tau_D := \frac{\Lambda}{c_D \varpi^{1/2}} \quad , \quad (1)$$

und damit dann der Verlustterm modelliert gemäß

$$\hat{S}_\varpi := \frac{1}{\langle \rho \rangle} \langle \sigma_{ij} D_i v'_j \rangle \approx \frac{\varpi}{\tau_D} = c_D \frac{\varpi^{3/2}}{\Lambda} \quad . \quad (2)$$

Es sei darauf hingewiesen, daß dieses Modell einer Stokes'schen Reibung für die bewegten Turbulenzelemente entspricht, denn mit dem Ansatz für eine typische Geschwindigkeit

$$\delta v := \sqrt{\frac{1}{3} \langle v'^2 \rangle} = \sqrt{\frac{2}{3} \varpi} \quad , \quad (3)$$

wie er wieder sinnvoll für den Fall totaler Isotropie ist, ergibt sich die Bewegungsgleichung aufgrund der Dissipation zu

$$\dot{\delta v} = -k(\delta v)^2, \quad k := \frac{c_D}{2\Lambda} \sqrt{\frac{3}{2}} \quad . \quad (4)$$

Diese Interpretation wird an späterer Stelle erneut aufgenommen werden.

1.3.4. Erzeugung konvektiver kinetischer Energie und der thermische Fluß

Zunächst ist der Quellterm kinetischer Energie wieder in den Störungen zu entwickeln, wobei aus den schon genannten Gründen die Druckfluktuationen vernachlässigt werden

$$\mathbf{S}_\omega := -\left\langle \frac{\vec{v}'}{\rho} \nabla p \right\rangle \approx -\nabla \langle p \rangle \left\langle \left(\frac{1}{\rho} \right)' \vec{v}' \right\rangle . \quad (1)$$

An dieser Stelle kann jedoch der ρ' -Term nicht als vernachlässigbar angesehen werden, da es sich hier um einen Term in einer Gleichung für eine Größe, die selbst von höherer Ordnung ist, handelt. Konsistent wird eine Entwicklung der Dichtefluktuationen vorgenommen in Fluktuationen der Entropie und der Konzentrationen

$$\left(\frac{1}{\rho} \right)' \approx -\frac{1}{\langle \rho \rangle^2} \left\{ \left\langle \left(\frac{\partial \rho}{\partial s} \right)_{p,c} \right\rangle s' + \sum_i \left\langle \left(\frac{\partial \rho}{\partial c_i} \right)_{s,p} \right\rangle c'_i \right\} . \quad (2)$$

Der Index c an der ersten thermodynamischen Ableitung soll auf die Abhängigkeit der Dichte von den Konzentrationen c_i , die ebenfalls als unabhängige thermodynamische Variable zu betrachten sind, hinweisen. Insgesamt erhält man also als Modell für den Quellterm kinetischer Energie

$$\mathbf{S}_\omega \approx \frac{\nabla \langle p \rangle}{\langle \rho \rangle^2} \left\{ \left\langle \left(\frac{\partial \rho}{\partial s} \right)_{p,c} \right\rangle \vec{\Pi} + \frac{1}{\langle \rho \rangle} \sum_i \left\langle \left(\frac{\partial \rho}{\partial c_i} \right)_{s,p} \right\rangle \vec{j}_i \right\} \quad (3a)$$

$$\vec{\Pi} = \langle \vec{v}' s' \rangle . \quad (3b)$$

Oft wird die Boussinesq-Approximation grob auch umschrieben als die Näherung, bei der die Dichteschwankungen nur von den Temperaturschwankungen herrühren, der Innendruck eines Turbulenzelementes also instantan an den Außendruck adjustiert (Vernachlässigung des Staudruckes), und diese Schwankungen nur im Auftriebsterm der Navier-Stokes-Gleichung berücksichtigt werden. Hier wird also deutlich, daß dieses Modell die Boussinesq-Approximation erfüllt, zum Teil genauer ist, z. B. durch die Berücksichtigung der anelastischen Gleichung, daß aber andererseits beim Modell für die Quellfunktion die Druckfluktuationen vernachlässigt werden, die zu berücksichtigen für ein wirklich anelastisches Modell notwendig wäre (Gough 1969).

Analog wird mit dem konvektiven Fluß thermischer Energie verfahren. Um die Vernachlässigung der Druckfluktuationen explizit zu berücksichtigen, wird die Enthalpie für

kleine Störungen entwickelt als Funktion ihrer natürlichen Variablen,

$$\begin{aligned} w' &= \langle T \rangle s' + \frac{1}{\langle \rho \rangle} p' + \sum_i \langle \psi_i \rangle c'_i \\ &\approx \langle T \rangle s' + \sum_i \langle \psi_i \rangle c'_i \quad , \end{aligned} \quad (4)$$

und es ergibt sich dann für den Fluß

$$\vec{j}_w = \langle \rho \rangle \langle T \rangle \vec{\Pi} + \sum_i \langle \psi_i \rangle \vec{j}_i \quad . \quad (5)$$

Damit sind alle Terme, die Korrelationen zwischen Fluktuationen darstellen, durch mittlere Größen und deren Ableitungen modelliert und somit die Gleichungen geschlossen, mit Ausnahme des Vektors $\vec{\Pi}$. Diese Größe stellt sozusagen den wichtigsten Teil dar, sie beschreibt im wesentlichen sowohl die Erzeugung konvektiver kinetischer Energie als auch den durch die Konvektion getragenen Strom thermischer Energie.

1.3.5. Die Auswertung von Mittelwerten von Funktionen

In den bisher abgeleiteten Gleichungen treten immer wieder Mittelwerte von Funktionen wie Energieerzeugung, Reaktionsraten oder auch Opazitäten und aus der Zustandsgleichung abgeleitete Größen auf. Diese werden generell berücksichtigt in der Form, daß eine Entwicklung in der notwendigen Ordnung der Störungen ausgeführt wird, z. B. wird die Opazität in der Diffusionsnäherung für den radiativen Fluß approximiert als

$$\langle \kappa \rangle \approx \kappa(\langle \rho \rangle, \langle T \rangle, \langle c_i \rangle) \quad . \quad (1)$$

An späterer Stelle wird es manchmal notwendig, von einer Größe nicht den Mittelwert, sondern die Fluktuation in der ersten Ordnung zu bestimmen. Dies geschieht dann in der Form einer Linearisierung um den durch die mittleren Variablen definierten Zustand.

1.3.6. Zusammenfassung der Gleichungen

Im folgenden sind die unter den bisherigen Approximationen erhaltenen Gleichungen des Modells noch einmal aufgeführt:

$$\partial_t \langle \rho \rangle + \text{div}(\langle \rho \rangle \langle \vec{v} \rangle) = 0 \quad (1)$$

$$\text{div}(\langle \rho \rangle \vec{v}') = 0 \quad (2)$$

$$d_t \langle c_i \rangle = \sum_j m_i \nu_{ij} \left\langle \frac{R_j}{\rho} \right\rangle - \frac{1}{\langle \rho \rangle} \text{div} \vec{j}_i \quad (3)$$

$$\vec{j}_i = -\alpha_m \langle \rho \rangle \Lambda \varpi^{1/2} \nabla \langle c_i \rangle \quad (4)$$

$$d_t \langle \vec{v} \rangle = \vec{g} - \frac{1}{\langle \rho \rangle} \nabla(\langle p \rangle + p_t) + \frac{1}{\langle \rho \rangle} \langle \text{Div} \overleftarrow{\vec{r}} \rangle \quad (5)$$

$$\langle \text{Div} \overleftarrow{\vec{r}} \rangle = \vec{e}_r \frac{1}{r^3} \partial_r \frac{4}{3} \langle \rho \rangle \mu r^4 \partial_r \frac{\langle v_r \rangle}{r} \quad (6)$$

$$\mu = \alpha_\mu \Lambda \varpi^{1/2} \quad (7)$$

$$d_t \varpi = \mathbf{S}_\varpi - \hat{\mathbf{S}}_\varpi - \frac{1}{\langle \rho \rangle} \text{div}(\vec{j}_t) - \frac{p_t}{\langle \rho \rangle} \text{div} \langle \vec{v} \rangle + \frac{1}{\langle \rho \rangle} \langle \tilde{r}_{ij} D_i \langle \vec{v} \rangle_j \rangle \quad (8)$$

$$\mathbf{S}_\varpi = \frac{\nabla \langle p \rangle}{\langle \rho \rangle^2} \left\{ \left\langle \left(\frac{\partial \rho}{\partial s} \right)_{p,c} \right\rangle \bar{\Pi} + \frac{1}{\langle \rho \rangle} \sum_i \left\langle \left(\frac{\partial \rho}{\partial c_i} \right)_{s,p} \right\rangle \vec{j}_i \right\} \quad (9)$$

$$\bar{\Pi} = \langle \vec{v}' s' \rangle \quad (10)$$

$$\hat{\mathbf{S}}_\varpi = c_D \frac{\varpi^{3/2}}{\Lambda} \quad (11)$$

$$\vec{j}_t = -\alpha_t \langle \rho \rangle \Lambda \varpi^{1/2} \nabla \varpi \quad (12)$$

$$\langle \tilde{r}_{ij} D_i \langle \vec{v} \rangle_j \rangle = \frac{4}{3} \langle \rho \rangle \mu \left(r \partial_r \frac{\langle v_r \rangle}{r} \right)^2 \quad (13)$$

$$\begin{aligned} d_t(\langle e \rangle + \varpi) &= \langle \epsilon \rangle - \frac{1}{\langle \rho \rangle} \text{div}(\langle \vec{q} \rangle + \vec{j}_t + \vec{j}_w) \\ &+ \frac{1}{\langle \rho \rangle} \langle \tilde{r}_{ij} D_i \langle \vec{v} \rangle_j \rangle - \frac{\langle p \rangle + p_t}{\langle \rho \rangle} \text{div} \langle \vec{v} \rangle \end{aligned} \quad (14)$$

$$\langle \vec{q} \rangle = -\frac{4ac \langle T \rangle^3}{3 \langle \kappa \rangle \langle \rho \rangle} \nabla \langle T \rangle \quad (15)$$

$$\vec{j}_w = \langle \rho \rangle \langle T \rangle \bar{\Pi} + \sum_i \langle \psi_i \rangle \vec{j}_i \quad (16)$$

Die konvektive kinetische Energie erscheint in diesen Gleichungen wie eine zusätzliche Komponente der Materie mit Beiträgen jeweils zum Druck, zur Energie und zu viskosen Schertermen. Deutlicher wird dies vielleicht noch anhand der Energiegleichung in konservativer Form:

$$\begin{aligned} & \partial_t \left\{ \langle \rho \rangle \left(\langle e \rangle + \varpi + \frac{1}{2} \langle \vec{v} \rangle^2 \right) \right\} \\ & + \operatorname{div} \left\{ \langle \rho \rangle \langle \vec{v} \rangle \left(\langle e \rangle + \varpi + \frac{\langle p \rangle + p_t}{\langle \rho \rangle} + \frac{1}{2} \langle \vec{v} \rangle^2 \right) \right. \\ & \quad \left. + \vec{j}_w + \langle q \rangle + \vec{j}_t - \langle \vec{v} \rangle \langle \vec{\tau} \rangle \right\} = \langle \rho \rangle \langle \epsilon \rangle + \langle \rho \rangle \langle \vec{v} \rangle \vec{g} \quad . \quad (17) \end{aligned}$$

Dabei ist der aus den Reynoldsscherkräften resultierende Energiestrom

$$\langle \vec{v} \rangle \langle \vec{\tau} \rangle = \langle \vec{v} \rangle \frac{4}{3} \langle \rho \rangle \mu r \partial_r \frac{\langle v_r \rangle}{r} \quad . \quad (18)$$

1.4. Das Ein-Gleichungs-Modell (Kuhfuß 1986a)

Der zunächst einfachste und direkteste Weg, die einzig noch nicht approximierten Korrelation zwischen Geschwindigkeits- und Entropiefluktuationen $\vec{\Pi}$ zu behandeln, besteht in der Anwendung der Diffusionsapproximation auch für diesen Fluß der Entropie, wie sie auch für die von der Struktur her gleichen Terme $\langle \vec{v}' c'_i \rangle$ und $\langle \vec{v}' (v'^2/2)' \rangle$ schon benutzt wurde (siehe Kapitel 1.3.2.) :

$$\vec{\Pi} \approx -\alpha_s \Lambda \varpi^{1/2} \nabla \langle s \rangle \quad . \quad (1)$$

Damit ist ein vollständiges Modell für zeitabhängige und nichtlokale Konvektion entworfen (Kuhfuß 1986a), dessen Eigenschaften im weiteren Verlauf dieser Arbeit noch detaillierter zu diskutieren sind.

Dieses Modell ist dem Stellingwerf'schen (1982a) sehr ähnlich. Weniger wichtige Unterschiede treten auf in der Behandlung des Reynoldstensors. Stellingwerf erhält den Turbulenzdruck nur grob aus einer Abschätzung, und der Term, der aus den Reynolds-Scherkräften stammt, tritt gar nicht auf. Es wird allerdings ein zusätzlicher Term, der diesem ähnlich ist, ad hoc eingeführt zur zusätzlichen Verkopplung der radialen Bewegung mit der Konvektion.

Der wesentliche Unterschied besteht in der Behandlung des Vektors $\vec{\Pi}$. Diesen modelliert Stellingwerf nicht vermöge einer Diffusionsapproximation sondern nur durch Dimensionsargumente und dem Ansatz der MLT im stationären lokalen Grenzwert des Modells. Dabei erhält

er eine Proportionalität zu ϖ statt zur Wurzel dieser Größe. Aus Dimensionsgründen muß er deshalb mit einer Wurzel des Entropiegradienten arbeiten, welcher unter Vernachlässigung der Konzentrationsgradienten proportional ist zu $\nabla - \nabla_{ad}$. Für stabile Bereiche würde diese Wurzel aber imaginär, so daß Stellingwerf in diesem Fall den Treiberterm zu Null setzen muß. Physikalisch bedeutet dies die Vernachlässigung dämpfender Auftriebskräfte. Es wird sich zeigen, daß dieses Vorgehen schwerwiegende Konsequenzen sowohl für das Zeit- als auch für das räumliche Verhalten hat.

1.5. Das Drei-Gleichungs-Modell

Es wurde schon darauf hingewiesen, daß die Größe $\vec{\Pi}$ die wichtigste zu modellierende Korrelationsfunktion ist. Dies gilt insbesondere sowohl nur für das räumliche Verhalten des Modells als vielmehr auch für Studien des zeitlichen Verhaltens. Baker (1986, private Mitteilung) vermutet, daß es für eine realistische Beschreibung pulsierender Sterne durchaus notwendig sein könnte, die zeitliche Entwicklung des mittleren Temperaturexzesses ebenfalls zu berücksichtigen und nicht nur die Dynamik des konvektiven Geschwindigkeitsfeldes. In der Tat impliziert die oben abgeleitete Ein-Gleichungs-Formulierung, daß die durchschnittliche Störung der mittleren Temperatur im Falle einer konvektiven Instabilität instantan dem stationären Grenzwert dieser Fluktuation entspricht, und diese ist gerade der Wert, den auch die MLT voraussagt. Viele der 1-d Modelle für Konvektion (z. B. Unno 1967, Gough 1977) enthalten aus diesen Gründen eine dynamische Gleichung für den Temperaturexzess der konvektiven Elemente. Das Modell von Xiong (1981) beinhaltet sogar drei Gleichungen für die Konvektion, eine davon beschreibt die Korrelation von Geschwindigkeits- und Temperaturfluktuationen.

Im folgenden wird nun statt des einfachen Modelles eine dynamische Gleichung für die Größe $\vec{\Pi}$ abgeleitet. Es stellt sich dabei jedoch heraus, daß man in natürlicher Weise auf eine dritte Größe, die Varianz der Entropiefluktuationen, geführt wird. Diese aus bekannten Größen zu modellieren ist mathematisch nicht befriedigend, da dadurch Singularitäten in den Differentialgleichungen auftreten. So erweist es sich als notwendig, auch für diese Größe eine eigene dynamische Gleichung abzuleiten. Diese 3 Gleichungen sind allerdings unter der Annahme zu allen Zeiten vollständiger Korrelation zwischen Entropie- und Geschwindigkeitsfluktuationen nicht mehr unabhängig, es besteht dann die Möglichkeit, eine der Unbekannten zu eliminieren. Dieses erscheint aber wenig sinnvoll, denn eine Implikation der vollständigen

Korrelation wäre, wie gezeigt werden wird, ein total anisotropes Geschwindigkeitsfeld, d. h. \bar{v}' hätte ausschließlich eine radiale Komponente.

1.5.1. Die Ableitung der Gleichungen für die Korrelationen $\langle \bar{v}' s' \rangle$ und $\langle s'^2/2 \rangle$

Aus der Navier-Stokes-Gleichung (1.2.2/5) sowie die Entropiegleichung (1.2.2/8) ergeben sich unter Benutzung der Identität (1.2.1/13b) die folgenden, dynamischen Gleichungen für die Geschwindigkeits- und Entropiefluktuationen:

$$d_t \bar{v}' = - \left(\frac{1}{\rho} \nabla p \right)' + \left(\frac{1}{\rho} \text{Div } \bar{\sigma}' \right)' - (\bar{v}' \nabla) \langle \bar{v}' \rangle - ((\bar{v}' \nabla) \bar{v}')' \quad (1a)$$

$$d_t s' = \left(\frac{\epsilon}{T} \right)' - \left(\frac{\text{div } \bar{q}}{\rho T} \right)' + \left(\frac{\sigma_{ij} \partial_i v_j}{\rho T} \right)' - \sum_{ij} m_i \nu_{ij} \left(\frac{\psi_i R_j}{\rho T} \right)' \\ - (\bar{v}' \nabla) \langle s' \rangle - ((\bar{v}' \nabla) s')' \quad . \quad (1b)$$

Aus diesen Gleichungen leitet man nun unter Benutzung der Identität (1.2.1/12b) die Gleichungen für die beiden, den mittleren Entropieexzess sowie dessen Korrelation mit der Geschwindigkeitsfluktuation beschreibenden Größen

$$\bar{\Pi} := \langle \bar{v}' s' \rangle \quad (2a)$$

$$\phi := \langle s'^2/2 \rangle \quad (2b)$$

ab. Es ergibt sich zunächst:

$$d_t \bar{\Pi} = \left\langle \bar{v}' \frac{\sigma_{ij} \partial_i v_j}{\rho T} \right\rangle - \sum_{ij} m_i \nu_{ij} \left\langle \bar{v}' \frac{\psi_i R_j}{\rho T} \right\rangle + \left\langle \frac{s'}{\rho} \text{Div } \sigma \right\rangle + \left\langle \bar{v}' \frac{\epsilon}{T} \right\rangle \\ - \left\langle \bar{v}' \frac{\text{div } \bar{q}}{\rho T} \right\rangle - \left\langle \frac{s'}{\rho} \nabla p \right\rangle - (\bar{\Pi} \nabla) \langle \bar{v}' \rangle - \langle (\bar{v}' \nabla) \bar{v}' s' \rangle - \left\langle v_r'^2 \right\rangle \nabla \langle s' \rangle \quad (3a)$$

$$d_t \phi = \left\langle s' \frac{\sigma_{ij} \partial_i v_j}{\rho T} \right\rangle - \sum_{ij} m_i \nu_{ij} \left\langle s' \frac{\psi_i R_j}{\rho T} \right\rangle \\ + \left\langle s' \frac{\epsilon}{T} \right\rangle - \left\langle s' \frac{\text{div } \bar{q}}{\rho T} \right\rangle - \bar{\Pi} \nabla \langle s' \rangle - \left\langle (\bar{v}' \nabla) \frac{s'^2}{2} \right\rangle \quad . \quad (3b)$$

1.5.2. Schließbedingungen und Approximationen

Wieder besteht die Problematik in der Notwendigkeit, physikalisch sinnvolle Approximationen für die Terme zu finden, die nicht aus schon bekannten dargestellt werden können, z. B. weil sie Korrelationen höherer Ordnung erhalten. Im folgenden werden diese Terme also zu modellieren bzw. so weit wie möglich exakt auszuwerten sein.

1. Es wird angenommen, daß die Temperaturfluktuationen T' in guter Näherung nur Funktionen der als klein angenommenen Entropiefluktuationen sind und die Einflüsse der Konzentrations- und Druckfluktuationen vernachlässigt werden können, d. h.

$$T' \approx \frac{\langle T \rangle}{\langle c_p \rangle} s' \quad (1a)$$

$$c_p := T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_{p,c} . \quad (1b)$$

2. Da Reaktionsraten im allgemeinen sehr sensibel von der Temperatur, jedoch relativ schwach von der Dichte abhängen, wird bei den Fluktuationen, die die Energieerzeugung ϵ beinhalten, nur nach Temperaturstörungen entwickelt. Diese Näherung kann natürlich ohne großen Aufwand dahingehend relaxiert werden, daß man auch Dichteschwankungen mit einbezieht. Im einzelnen erhält man unter Berücksichtigung der Approximation (1a):

$$\left\langle \vec{v}' \frac{\epsilon}{T} \right\rangle \approx \left\langle \frac{\partial(\epsilon/T)}{\partial T} \right\rangle \frac{\langle T \rangle}{\langle c_p \rangle} \vec{\Pi} \quad (2a)$$

$$\left\langle s' \frac{\epsilon}{T} \right\rangle \approx \left\langle \frac{\partial(\epsilon/T)}{\partial T} \right\rangle \frac{\langle T \rangle}{\langle c_p \rangle} 2\phi . \quad (2b)$$

Es sei an dieser Stelle noch mal an das in Abschnitt 1.3.5. Gesagte über die Bildung von Mittelwerten von Funktionen erinnert. In den obigen Approximationen ist es in der notwendigen Ordnung konsistent, die Mittelwerte der Temperaturableitung der Funktion ϵ/T durch die Werte dieser Ableitung für die mittleren Variablen zu ersetzen.

3. Analog zur Behandlung der Energieerzeugung wird auch wieder bei den Termen, die die Entropieänderungen aufgrund der $\mu_i dn_i$ -Terme beinhalten, vorgegangen, indem diese nur in ihren Temperaturabhängigkeiten entwickelt und die Fluktuationen der Dichte und der chemischen Potentiale vernachlässigt werden:

$$\left\langle \vec{v}' \frac{\psi_i R_j}{\rho T} \right\rangle \approx \frac{\langle T \rangle \langle \psi_i \rangle}{\langle \rho \rangle \langle c_p \rangle} \left\langle \frac{\partial(R_j/T)}{\partial T} \right\rangle \vec{\Pi} \quad (3a)$$

$$\left\langle s' \frac{\psi_i R_j}{\rho T} \right\rangle \approx \frac{\langle T \rangle \langle \psi_i \rangle}{\langle \rho \rangle \langle c_p \rangle} \left\langle \frac{\partial(R_j/T)}{\partial T} \right\rangle 2\phi . \quad (3b)$$

Auch hier besteht wieder die Möglichkeit, diese Approximation zu relaxieren und Dichteschwankungen mit einzubeziehen.

4. Wieder wird eine annähernde Isotropie des Geschwindigkeitsfeldes angenommen, d. h.

$$\langle v_r'^2 \rangle \approx \frac{1}{3} \langle v'^2 \rangle = \frac{2}{3} \varpi \quad . \quad (4)$$

5. Die Korrelation höherer Ordnung zwischen Entropie- und Konzentrationsfluktuationen $\langle s'c_i' \rangle$ wird approximiert als Produkt der beiden mittleren Fluktuationen, was auch anschaulich als sinnvoll erscheint, ist doch jede der beiden im physikalischen Bild verknüpft mit dem Transport durch die individuellen Turbulenzelemente. Zunächst wird angesetzt:

$$\langle s'c_i' \rangle \approx \delta s \delta c_i \quad . \quad (5a)$$

Dabei wird die Fluktuation der Entropie aus der Größe ϕ gewonnen:

$$|\delta s| := \sqrt{\langle s'^2 \rangle} = \sqrt{2\phi} \quad (5b)$$

$$\delta s = \text{sign}(\delta s) |\delta s| \quad . \quad (5c)$$

Die Fluktuationen der Konzentrationen werden aus den mit Hilfe der Diffusionsapproximation modellierten Strömen \vec{j}_i (1.3.2/2) bestimmt:

$$\begin{aligned} \delta c_i &\approx \text{sign}(\delta v) \frac{\langle v_r' c_i' \rangle}{\sqrt{\langle v_r'^2 \rangle}} \\ &\approx - \text{sign}(\delta v) \alpha_m \sqrt{\frac{3}{2}} \Lambda \partial_r \langle c_i \rangle \quad . \end{aligned} \quad (5d)$$

Ein Vorzeichen ist noch unbekannt. Dieses wird aus Gründen der Anschauung gewählt als

$$\text{sign}(\delta v \delta s) = \text{sign}(\langle v_r' s' \rangle) = \text{sign}(\Pi) \quad , \Pi := \vec{\Pi} \cdot \vec{e}_r \quad . \quad (5e)$$

Somit erhält man letztendlich:

$$\langle s'c_i' \rangle \approx - \text{sign}(\Pi) \alpha_m \sqrt{3} \Lambda \phi^{1/2} \partial_r \langle c_i \rangle \quad . \quad (5f)$$

6. Die gerade approximierten Korrelationen treten nur im Auftriebsterm der Gleichung für $\vec{\Pi}$ auf. Es ist wieder eine Entwicklung der Dichtefluktuationen in Entropie- und Konzentrationsfluktuationen vorzunehmen, und man erhält unmittelbar:

$$-\left\langle s' \left(\frac{\nabla p}{\rho} \right)' \right\rangle_r \approx \frac{2\langle T \rangle \langle \nabla_{ad} \rangle}{H_p} \phi + \sqrt{3} \alpha_m \text{sign}(\Pi) \phi^{1/2} \frac{\langle p \rangle \Lambda}{\langle \rho \rangle^2 H_p} \sum_i \left\langle \left(\frac{\partial \rho}{\partial c_i} \right)_{p,s} \right\rangle \partial_r \langle c_i \rangle \quad (6a)$$

$$H_p := -(\partial_r \ln \langle p \rangle)^{-1} \quad . \quad (6b)$$

Die Größe H_p ist in der Sternentwicklung allgemein als typische Skalenlänge gebräuchlich und wird als ‘Druckskalenhöhe’ bezeichnet.

7. Die Terme, die die viskose Dämpfung beinhalten, können wie vorher modelliert werden. Dazu wird zunächst wieder eine Entwicklung vorgenommen gemäß

$$\left\langle f \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} \partial_i v_j \right\rangle \approx \langle f \rangle \left\langle \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} \partial_i v_j \right\rangle \quad . \quad (7a)$$

Vernachlässigt wurden dabei die Terme, die nicht die typische Dämpfung der Konvektion darstellen, sondern darüber hinaus die Fluktuationen in eben dieser Dämpfung berücksichtigen. Der zweite Faktor in (7) war schon an früherer Stelle durch ein Dimensionsargument modelliert worden (siehe Kapitel 1.3.3.), so erhält man hier

$$\left\langle \vec{v}' \frac{\sigma_{ij} \partial_i v_j}{\rho T} \right\rangle \approx - \frac{c_D \varpi^{3/2}}{\langle c_p \rangle \langle T \rangle \Lambda} \vec{\Pi} \quad (7b)$$

$$\left\langle s' \frac{\sigma_{ij} \partial_i v_j}{\rho T} \right\rangle \approx - \frac{c_D \varpi^{3/2}}{\langle c_p \rangle \langle T \rangle \Lambda} 2\phi \quad . \quad (7c)$$

Der zweite in (1.5.1/3a) auftretende Term, der die molekulare Viskosität enthält, wird später behandelt.

8. Die Auswertung der Terme, die die Fluktuationen des radiativen Flusses beinhalten, kann nur in einer sehr vereinfachten Form, die analog zur Abschätzung der radiativen Verluste eines konvektiven Elementes in der MLT ist (Böhm-Vitense 1953, 1958), geschehen, d. h., daß Ableitungen approximiert werden durch eine geeignet zu wählende Skalenlänge Λ_{rad} und außerdem die Fluktuationen der Opazität vernachlässigt werden. Darüber hinaus

werden Dichtefluktuationen bei angenommener Druckkonstanz auf Temperaturfluktuationen näherungsweise zurückgeführt durch die Approximation eines idealen Gases:

$$\frac{\rho'}{\langle \rho \rangle} \approx -\frac{T'}{\langle T \rangle} . \quad (8a)$$

Die Skalenlänge wird zweckmäßig bezogen auf die schon für die Konvektion eingeführte Skalenlänge Λ vermöge eines freien Parameters

$$\gamma := \sqrt{\frac{5}{3}} \frac{\Lambda}{\Lambda_{\text{rad}}} \quad (8b)$$

$$\tau_{\text{rad}} := \frac{\langle c_p \rangle \langle \kappa \rangle \langle \rho \rangle^2 \Lambda^2}{ac \langle T \rangle^3 \gamma^2} \quad (8c)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\text{div } \vec{q}}{\rho T} \right)' &= \left(-\frac{1}{\rho T} \text{div} \left\{ \frac{ac}{3\kappa\rho} \nabla T^4 \right\} \right)' \\ &\approx \left(-\frac{1}{\rho T} \frac{1}{\Lambda_{\text{rad}}} \frac{ac}{3\kappa\rho} \frac{-T^4}{\Lambda_{\text{rad}}} \right)' \\ &\approx \frac{ac \langle T \rangle^3 \gamma^2}{\langle c_p \rangle \langle \kappa \rangle \langle \rho \rangle^2 \Lambda^2} s' \\ &= \frac{1}{\tau_{\text{rad}}} s' . \end{aligned} \quad (8d)$$

Die Größe τ_{rad} repräsentiert eine typische Zeitskala für die Abkühlung eines konvektiven Elementes durch radiative Energieverluste an die Umgebung. Somit erhält man für die beiden betreffenden Terme die Approximationen:

$$\left\langle \vec{v}' \frac{\text{div } \vec{q}}{\rho T} \right\rangle = \frac{1}{\tau_{\text{rad}}} \vec{\Pi} \quad (8e)$$

$$\left\langle s' \frac{\text{div } \vec{q}}{\rho T} \right\rangle = \frac{1}{\tau_{\text{rad}}} 2\phi . \quad (8f)$$

Es muß natürlich darauf hingewiesen werden, daß diese Approximationen nicht mehr als grobe Abschätzungen sein können, was auch an den einfachen Ergebnissen deutlich wird. Hätte man sich einen ersten Ansatz für diese Strahlungsverluste überlegen wollen, so wäre eine Proportionalität zur Entropiefluktuation geteilt durch eine typische Zeitskala naheliegend gewesen. Dann hätte man auch die typische Zeitskala bis auf einen Parameter schon aus einfachen Dimensionsargumenten ableiten können.

1.5.3. Approximation der Flüsse zweiter Ordnung

In den Gleichungen (1.5.1/3) sind wieder Flußterme der schon bekannten Struktur enthalten. Deren physikalische Interpretation hingegen ist etwas unklar, denn es handelt sich nicht um Flüsse von Dichten, sondern z. B. um einen Fluß des Quadrates der Entropie. Aus diesem Grunde werden diese Terme auch in zweierlei Form approximiert, einer lokalen, in der der Gradient durch eine typische inverse Skalenlänge ersetzt wird, und einer nichtlokalen, die analog ist zu der bisherigen Behandlung derartiger Terme. Es wird sich in Anwendungen erweisen müssen, ob es sinnvoll ist, der nichtlokalen Version den Vorzug zu geben.

1. Die lokale Approximation geschieht einfach durch Ersetzung des Differentialoperators $(\vec{v}'\nabla)$ durch die Skalengrößen $\varpi^{1/2}$ und Λ^{-1} :

$$\langle (\vec{v}'\nabla)s'^2/2 \rangle \approx \frac{\beta_\phi}{\Lambda} \varpi^{1/2} \phi \quad (1a)$$

$$\langle (\vec{v}'\nabla)\vec{v}'s' \rangle \approx \frac{\beta_\Pi}{\Lambda} \varpi^{1/2} \vec{\Pi} \quad (1b)$$

2. Die nichtlokale Approximation entspricht der bisherigen Behandlung der Terme dieser Struktur:

$$\langle (\vec{v}'\nabla)s'^2/2 \rangle \approx -\frac{1}{\langle \rho \rangle} \operatorname{div} \left(\beta_\phi \varpi^{1/2} \Lambda \langle \rho \rangle \nabla \phi \right) \quad (2a)$$

$$\langle (\vec{v}'\nabla)\vec{v}'s' \rangle \approx -\frac{1}{\langle \rho \rangle} \operatorname{div} \left(\beta_\Pi \varpi^{1/2} \Lambda \langle \rho \rangle \nabla \Pi \right) \vec{e}_r \quad (2b)$$

Es wird gezeigt werden, daß die lokale Approximation im stationären Grenzfall zur MLT führt. Außerdem weist sie auf die Möglichkeit der Vernachlässigung der Viskositätsterme hin. Zunächst ist der in der Π -Gleichung auftretende Term $\langle s' \operatorname{Div} \vec{\sigma} / \rho \rangle$ aufgrund einfacher Abschätzungen von der Ordnung

$$\delta s \frac{\varpi}{\Lambda} \frac{\mu_{mol}}{\mu_{turb}},$$

dabei bezeichne δs die typische Schwankung der Entropie. In der lokalen Formulierung ist dagegen (1b) ungefähr

$$\delta s \frac{\varpi}{\Lambda}$$

und somit dominant für große Reynoldszahlen. Auch hier kann wieder das Wirken der molekularen Viskosität vernachlässigt werden verglichen mit den Effekten der alles unterhalb der größten Skala approximierenden Schließbedingungen für die Fluktuationen.

Weiterhin kann man aufgrund der bisherigen Näherungen in der Gleichung für die Entropievarianz ϕ ableiten

$$\left\langle s' \frac{\sigma_{ij} \partial_i v_j}{\rho T} \right\rangle - \left\langle (\vec{v}' \nabla) \frac{s'^2}{2} \right\rangle \approx -\frac{\beta_\phi}{\Lambda} \varpi^{1/2} \phi \left(1 + \frac{2c_D \varpi}{\beta_\phi \langle c_p \rangle \langle T \rangle} \right) . \quad (3)$$

Im allgemeinen ist $\langle c_p \rangle \langle T \rangle$ von der Größenordnung $\langle e \rangle$ und damit groß verglichen mit ϖ . Also ist der zweite Term in der Klammer klein gegen 1, solange die freien Konstanten c_D und β_ϕ von der Größenordnung 1 sind. Folglich kann man den ersten Term der linken Seite von (3) in der ϕ -Gleichung vernachlässigen. Es sei aber darauf hingewiesen, daß diese Terme beim Gebrauch der nichtlokalen Approximation für die Flüsse zweiter Ordnung eventuell unverzichtbar sind, denn anderweitig würde in einem homogenen Modell, in dem alle räumlichen Gradienten verschwinden, die Größen $\vec{\Pi}$ und ϕ aufgrund der Struktur der Gleichungen bei fest vorgegebener Superadiabatie, d. h. treibender Auftriebskräfte, beliebig anwachsen können wegen der Struktur der Gleichungen. Dies ist aber vielleicht von untergeordneter Bedeutung, da in einem realistischen Modell in diesem Fall der starke, mit $\vec{\Pi}$ verknüpfte thermische Fluß den Temperaturverlauf über die Energiegleichung wieder so verändert, daß ein hinreichend subadiabatischer Temperaturgradient zur Dämpfung der Konvektion entsteht. Diese Fragen können deshalb letztendlich nur in einem vollständigen numerischen Modell endgültig geklärt werden.

1.5.4. Zusammenfassung des Drei-Gleichungs-Modells

Die Bestimmung der Korrelation $\langle \vec{v}' s' \rangle$ wird also im Drei-Gleichungs-Modell zurückgeführt auf die Lösung der beiden zusätzlichen Differentialgleichungen (die $\vec{\Pi}$ -Gleichung ist trivial auf eine Gleichung für den Betrag Π umzuschreiben)

$$\begin{aligned} d_t \Pi &= \frac{\langle T \rangle \langle \nabla_{ad} \rangle}{H_p} 2\phi - \frac{2}{3} \varpi \partial_r \langle s \rangle - \frac{1}{\tau_{rad}} \Pi + \mathcal{F}_\Pi - (\vec{\Pi} \nabla) \langle \vec{v} \rangle_r \\ &+ \left\langle \frac{\partial(\epsilon/T)}{\partial T} \right\rangle \frac{\langle T \rangle}{\langle c_p \rangle} \Pi - \frac{\langle T \rangle}{\langle c_p \rangle \langle \rho \rangle} \sum_{ij} m_i \nu_{ij} \langle \psi_i \rangle \left\langle \frac{\partial(R_j/T)}{\partial T} \right\rangle \Pi \\ &+ \sqrt{3} \alpha_m \text{sign}(\Pi) \phi^{1/2} \frac{\langle p \rangle \Lambda}{\langle \rho \rangle^2 H_p} \sum_i \left\langle \left(\frac{\partial \rho}{\partial c_i} \right)_{p,s} \right\rangle \partial_r \langle c_i \rangle \end{aligned} \quad (1a)$$

$$\begin{aligned} d_t \phi &= -(\vec{\Pi} \nabla) \langle s \rangle - \frac{1}{\tau_{rad}} 2\phi + \mathcal{F}_\phi \\ &+ \left\langle \frac{\partial(\epsilon/T)}{\partial T} \right\rangle \frac{\langle T \rangle}{\langle c_p \rangle} 2\phi - \frac{\langle T \rangle}{\langle c_p \rangle \langle \rho \rangle} \sum_{ij} m_i \nu_{ij} \langle \psi_i \rangle \left\langle \frac{\partial(R_j/T)}{\partial T} \right\rangle 2\phi . \end{aligned} \quad (1b)$$

Wobei die Terme \mathcal{F}_Π und \mathcal{F}_ϕ die Approximationen der Flußterme enthalten, d. h.

$$\mathcal{F}_\Pi = \begin{cases} -\beta_\Pi \Lambda^{-1} \varpi^{1/2} \Pi & , \text{ lokal} \\ \langle \rho \rangle^{-1} \operatorname{div} (\beta_\Pi \Lambda \varpi^{1/2} \langle \rho \rangle \nabla \Pi) & , \text{ nichtlokal} \end{cases} \quad (2a)$$

$$\mathcal{F}_\phi = \begin{cases} -\beta_\phi \Lambda^{-1} \varpi^{1/2} \phi & , \text{ lokal} \\ \langle \rho \rangle^{-1} \operatorname{div} (\beta_\phi \Lambda \varpi^{1/2} \langle \rho \rangle \nabla \phi) & , \text{ nichtlokal.} \end{cases} \quad (2b)$$

Das vorgestellte Drei-Gleichungs-Modell ist verwandt mit dem Modell von Xiong (1981). Die Gleichungen sind von ähnlicher Struktur, allerdings benutzt Xiong Korrelation und Autokorrelation von Geschwindigkeits- und Temperaturfluktuationen. Da aber ein konvektives Element eigentlich nur Entropie, nicht aber Energie transportieren kann wegen der zu leistenden Druckarbeit längs des Weges, und außerdem im Schwarzschild Kriterium der Entropiegradient zu finden ist, halte ich die hier vorgestellte Formulierung zumindest für physikalisch verständlicher. Auch Xiong hat die Druckfluktuationen vernachlässigen müssen, so daß, entgegen der Behauptung in seinen Veröffentlichungen, das Modell nicht genau im Sinne der anelastischen Approximation sein kann (Gough 1969). Das Modell hat sich allerdings schon in numerischen Rechnungen bewährt (Unno *et al.* 1985, Xiong 1985a, b).

Der wesentliche Unterschied zwischen dem Ein- und dem Drei-Gleichungs-Modell besteht in der expliziten Berechnung der Korrelation zwischen Entropie- und Geschwindigkeitsfluktuationen. Stellingwerf (1982) hat in seiner Veröffentlichung die schon erwähnte Vernachlässigung dämpfender Auftriebskräfte in stabilen Gebieten mit dem Verschwinden der Korrelation zwischen Entropieschwankung und Geschwindigkeit begründet. Dies kann vom physikalischen Bild her nicht richtig sein, denn ein überschießendes konvektives Element wird noch einen gewissen Temperaturexzeß auch kurz hinter der Schwarzschildgrenze haben. Es fragt sich natürlich, ob die de facto im Ein-Gleichungs-Modell angenommene Gleichheit der Korrelation in instabilen wie in stabilen Gebieten eine hinreichend gute Approximation ist. Neben der speziellen Wahl der vielen freien Parameter kann auch die Modellannahme des Grades der Korrelation ganz wesentlich die Ausdehnung der Overshooting-Zone beeinflussen.

2. Stabilitätskriterien und lokale, stationäre Lösungen

Die beiden vorgestellten Versionen des Konvektionsmodelles enthalten sehr viele freie Parameter, die eigentlich nur durch eine Vielzahl von Modellrechnungen und den Vergleich mit der Beobachtung bestimmt werden können, wobei natürlich auch dann noch fraglich ist, ob es sich wirklich um Konstanten handelt. Trotzdem besteht etwas mehr Grund zum Optimismus als z. B. bei Rechnungen mit parametrisiertem Overshooting, in welchen der zugehörige freie Parameter sehr komplexe physikalische Zusammenhänge repräsentiert, und, wie auch später gezeigt werden wird, nicht unabhängig z. B. von der Masse des Sternes ist. Die Parameter in den vorgestellten Versionen des Konvektionsmodells hingegen haben eine genauer definierte und mehr auf einen einzigen physikalischen Prozeß bezogene Bedeutung und sollten deshalb einen etwas grundlegenden Charakter und geringere Abhängigkeiten von speziellen Modellannahmen haben.

Als erster Versuch einer Bestimmung der freien Parameter und insbesondere auch im Hinblick auf die spätere Anwendung werden nun die folgenden Forderungen aufgestellt:

1. Das Stabilitätskriterium, welches aus den Modellen ableitbar ist, soll identisch sein mit dem aus den hydrodynamischen Gleichungen ableitbaren Ledoux-Kriterium (Kato 1966).
2. Die lokale, stationäre Lösung der Modelle soll identisch sein mit den Ergebnissen der MLT.

Die zweite Forderung erscheint nicht zwingend. Zwar sind die kinematischen Überlegungen, die zur MLT führen (Böhm-Vitense 1953, 1958) sicherlich physikalisch begründet, wohl aber enthalten sie doch grobe Abschätzungen. Darüber hinaus liefern beide Forderungen noch nicht den Wert des Overshooting-Parameters α_t . Dieser wird später anhand eines einfachen physikalischen Bildes, welches dem der MLT nicht unähnlich ist, abgeschätzt (siehe Kapitel 3).

Im folgenden wird die Skalenlänge Λ durch die Druckskalenhöhe H_p ausgedrückt, ein Ansatz, wie er in der Sternentwicklung fast immer Verwendung findet:

$$\Lambda \approx \alpha_{ML} H_p \quad . \quad (1)$$

Außerdem kann auf die die Mittelung anzeigenden Klammern $\langle \dots \rangle$ verzichtet werden, da nur noch solche Mittelwerte auftreten, insbesondere sei definiert $v := \langle \vec{v}_r \rangle$.

2.1. Stabilität und lokale, stationäre Lösung im Ein-Gleichungs-Modell

2.1.1. Das Ledoux-Kriterium

Der Gradient der Entropie kann durch die schon erwähnten, in der Sternentwicklung gebräuchlichen Terme ∇ und ∇_{ad} ausgedrückt werden:

$$-\partial_r s = \frac{c_p}{H_p} (\nabla - \nabla_{ad}) - \sum_i \left(\frac{\partial s}{\partial c_i} \right)_{p,T} \partial_r c_i \quad . \quad (1)$$

Einfache thermodynamische Identitäten erlauben nun, den Quellterm konvektiver kinetischer Energie im Ein-Gleichungs-Modell umzuschreiben in

$$\begin{aligned} S_\varpi = & \frac{\nabla_{ad} c_p \varpi^{1/2} \Lambda T}{H_p^2} \cdot \\ & \left\{ \alpha_s \left[\nabla - \nabla_{ad} - \frac{H_p}{T} \sum_i \left(\frac{\partial p}{\partial c_i} \right)_{\rho,T} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_{\rho,c}^{-1} \partial_r c_i \right] \right. \\ & \left. + (\alpha_m - \alpha_s) \frac{H_p}{\alpha \rho T} \sum_i \left(\frac{\partial \rho}{\partial c_i} \right)_{p,s} \partial_r c_i \right\} \quad , \quad (2) \end{aligned}$$

wobei α den Ausdehnungskoeffizienten des Materials bezeichnet:

$$\alpha = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{p,c} \quad . \quad (3)$$

Das Kriterium für konvektive Instabilität ergibt sich aus der Bedingung, daß konvektive kinetische Energie erzeugt wird ($S_\varpi > 0$). Der Ausdruck in den eckigen Klammern von (2) führt alleine gerade auf das Ledoux-Kriterium. Wenn dieses also immer gültig sein soll, so ist das äquivalent zu der Forderung

$$\alpha_m = \alpha_s \quad , \quad (4)$$

und man erhält als Bedingung für konvektive Instabilität

$$\nabla > \nabla_{ad} + \frac{H_p}{T} \sum_i \left(\frac{\partial p}{\partial c_i} \right)_{\rho,T} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_{\rho,c}^{-1} \partial_r c_i \quad . \quad (5)$$

Für den Fall, daß die Konzentrationen nur in Form des mittleren Molekulargewichtes $\tilde{\mu}$, gebildet aus den Molekulargewichten der einzelnen Komponenten des Gases $\tilde{\mu}_i$,

$$\frac{1}{\tilde{\mu}} := \sum_i \frac{c_i}{\tilde{\mu}_i} \quad , \quad (6)$$

in die Zustandgleichung eingehen, läßt sich (5) noch weiter vereinfachen zu

$$\nabla > \nabla_{ad} + \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln \tilde{\mu}} \right)_{\rho, p} \nabla_{\tilde{\mu}} \quad (7a)$$

$$\nabla_{\tilde{\mu}} := \left(\frac{\partial \ln \tilde{\mu}}{\partial \ln p} \right)_* . \quad (7b)$$

Dieses Kriterium wird in der Literatur allerdings meist nur für den Spezialfall eines aus verschiedenen Komponenten zusammengesetzten idealen Gases mit elektromagnetischer thermalisierter Strahlung benutzt. Dann ist (7a) äquivalent zu (Kato 1966)

$$\nabla > \nabla_{ad} + \frac{\beta}{4 - 3\beta} \nabla_{\tilde{\mu}} , \quad (8)$$

wobei β das Verhältnis von Gasdruck zu Gesamtdruck ist. Insbesondere wird deutlich, daß das Ledoux-Kriterium in dieser einfachen Form in Ionisationszonen kaum eine gute Näherung darstellen kann.

2.1.2. Die lokale, stationäre Lösung

Unter der Annahme der Stationarität, insbesondere auch des Verschwindens der rein radialen Geschwindigkeit, sowie der Lokalität, also des Verschwindens des Stromes kinetischer Energie \vec{j}_t unter allen Bedingungen, d. h. $\alpha_t = 0$, ist die Gleichung für die konvektive kinetische Energie zu lösen. Bei Vernachlässigung der Effekte von Gradienten der chemischen Komposition und unter Benutzung der Darstellung des Entropiegradienten durch $\nabla - \nabla_{ad}$ erhält man unmittelbar für einen überadiabatischen Temperaturgradienten ($\nabla > \nabla_{ad}$), d. h. im konvektiv instabilen Fall, für die konvektive Geschwindigkeit v_c und den Fluß j_w wieder im Falle eines isotropen konvektiven Geschwindigkeitsfeldes

$$v_c^2 := \frac{2}{3} \varpi = \frac{2\alpha_s}{3c_D} \alpha_{ML}^2 \nabla_{ad} c_p T (\nabla - \nabla_{ad}) \quad (1a)$$

$$j_w = \sqrt{\frac{3}{2}} \alpha_s \alpha_{ML} \rho c_p T v_c (\nabla - \nabla_{ad}) . \quad (1b)$$

In der MLT wird der Turbulenzdruck immer vernachlässigt, was auch notwendig ist aufgrund einer sonst auftretenden Singularität (Heney *et al.* 1965). Dann lauten im hydrostatischen Gleichgewicht die analogen Ergebnisse der MLT (Böhm-Vitense 1953, 1958, Hofmeister *et al.* 1964):

$$v_c^2 = \frac{\alpha_{ML}^2}{8} \nabla_{ad} c_p T (\nabla - \nabla_{ad}) \quad (2a)$$

$$j_w = \frac{1}{2} \alpha_{ML} \rho c_p T v_c (\nabla - \nabla_{ad}) . \quad (2b)$$

Konvektive Geschwindigkeit und Fluß stimmen also in beiden Modellen dann und nur dann überein, wenn die freien Parameter α_s und c_D die folgenden Gleichungen erfüllen:

$$\frac{2\alpha_s}{3c_D} = \frac{1}{8} \quad (3a)$$

$$\sqrt{\frac{3}{2}}\alpha_s = \frac{1}{2} \quad . \quad (3b)$$

Diese Gleichungen sind aufzulösen und man erhält die 'Standardwahl' für das Ein-Gleichungs-Modell

$$\alpha_s = \alpha_m = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} \quad (4a)$$

$$c_D = \frac{8}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} \quad . \quad (4b)$$

Es sei nochmals darauf hingewiesen, daß diese Wahl nicht zwingend, aber derzeit wohl die am besten motivierte ist.

Wesentlich für die Sternstruktur ist der in konvektiven Gebieten resultierende Temperaturgradient, der in alten MLT-Formulierungen (Biermann 1937) approximativ als adiabatisch angenommen wurde. Aus den obigen Gleichungen ist zu erkennen, daß das nicht ganz richtig sein kann, denn dann würde wieder der konvektive Fluß verschwinden und somit der Gradient steiler. Trotzdem ist, wie auch noch gezeigt werden wird, eine adiabatische Schichtung quantitativ eine gute Approximation im Kern von Hauptreihensternen. In konvektiven Hüllen jedoch muß man die sogenannte kubische Gleichung zur Bestimmung des Gradienten heranziehen, die sich aus den Arbeiten zur MLT von Böhm-Vitense (1953, 1958) ergibt und z. B. von Kippenhahn (1962) und Hofmeister *et al.* (1964a) formuliert wurde.

Die Energiegleichung lautet unter all den oben genannten Näherungen und Bedingungen

$$\operatorname{div}(\vec{q} + \vec{j}_w) = \rho\epsilon \quad . \quad (5)$$

Die Leuchtkraft $L(r)$ ist im stationären Zustand gerade das Integral der Energieerzeugung über eine Kugel mit Radius r , also folgt aus (5) mit Hilfe des Gauß'schen Satzes

$$q + j_w = \frac{1}{4\pi r^2}L \quad . \quad (6)$$

Für den radiativen Fluß erhält man aus der Diffusionsapproximation (1.3.2/4) durch Umschreiben des Temperaturgradienten

$$q = \frac{kT}{H_p} \nabla \quad (7a)$$

$$k := \frac{4acT^3}{3\kappa\rho} \quad (7b)$$

Der sogenannte radiative Gradient ∇_{rad} ist der Temperaturgradient, der sich einstellen würde, wenn sämtliche Energie nur durch Strahlung transportiert würde. Unter den hier gegebenen Bedingungen folgt

$$\nabla_{rad} = \frac{H_p}{kT} \frac{1}{4\pi r^2} L \quad (8)$$

Setzt man nun dies alles sowie die oben abgeleitete Darstellung des konvektiven Flusses (2.1.2.1b) in die Energiegleichung (6) ein, so resultiert die Bestimmungsgleichung für den aktuell gegebenen Temperaturgradienten ∇ :

$$(\nabla - \nabla_{ad})^{3/2} = (\nabla_{rad} - \nabla) \frac{8}{9} U \quad (9a)$$

$$U := \frac{9k}{\alpha_{ML}^2 \rho H_p} (2\nabla_{ad} c_p^3 T)^{-1/2} \quad (9b)$$

Die Größe U ist identisch mit der genauso bezeichneten, die in den Arbeiten zur MLT benutzt wird (Kippenhahn 1962, Hofmeister *et al.* 1964).

Zweckmäßig schreibt man die sogenannte kubische Gleichung (9) noch in einer normierten Form auf. Dazu werden die Größen

$$f := \frac{\nabla - \nabla_{ad}}{\nabla_{rad} - \nabla_{ad}} \quad (10a)$$

$$x := \frac{U}{\sqrt{\nabla_{rad} - \nabla_{ad}}} \quad (10b)$$

eingeführt. Damit wird dann die kubische Gleichung der MLT zu

$$1 - f = \frac{9}{8x} \left\{ \sqrt{f + x^2} - x \right\}^3, \quad (11)$$

wohingegen man im Ein-Gleichungs-Modell aus (9) erhält

$$1 - f = \frac{9}{8x} f^{3/2} \quad (12)$$

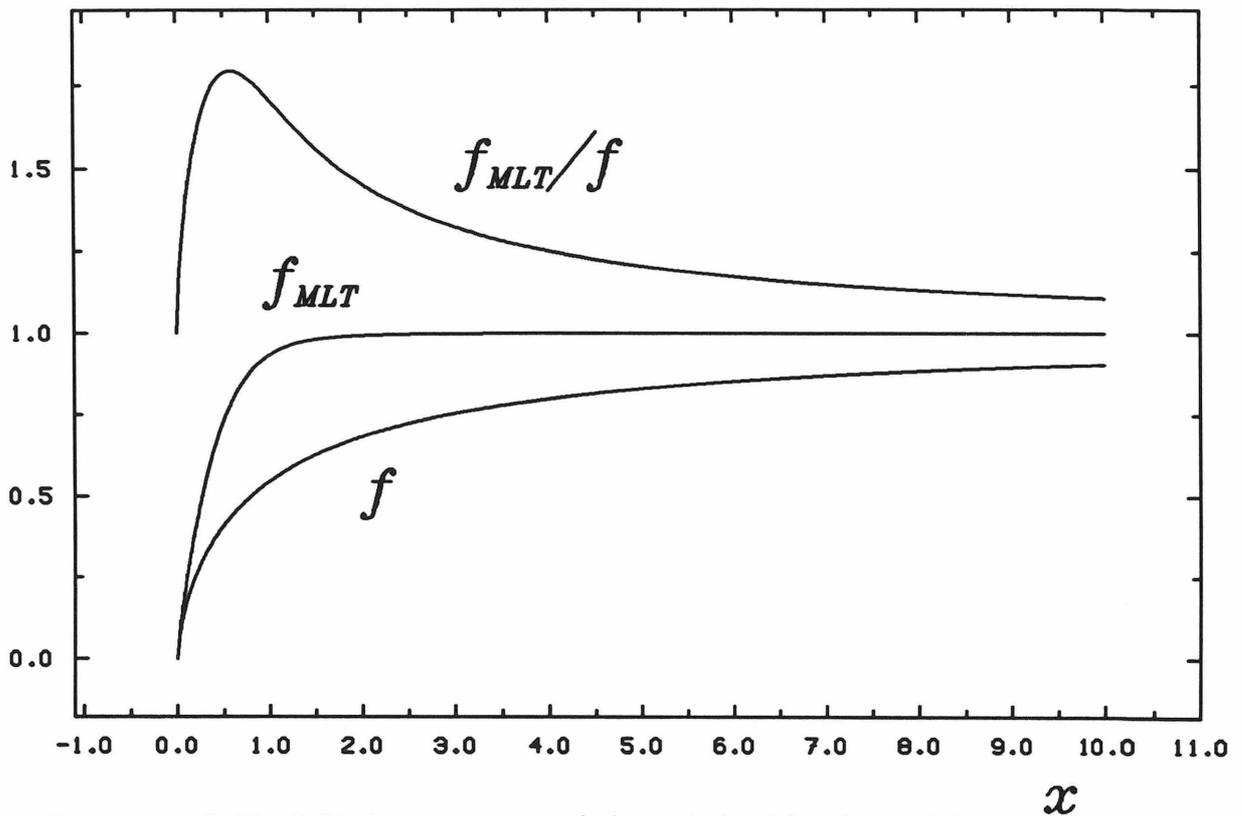


Abb. 1. : Lösungen der beiden kubischen Gleichungen (11) und (12), $f(x)$ und $f_{MLT}(x)$, und deren Verhältnis

Der Unterschied in den beiden kubischen Gleichungen resultiert aus der Tatsache, daß im Ein-Gleichungs-Modell der radiative Energieaustausch der konvektiven Elemente mit der Umgebung nicht berücksichtigt wird. Dieser Mangel könnte leicht behoben werden, indem man in Treiberterm und konvektivem Fluß wie in der MLT nicht $\nabla - \nabla_{ad}$ sondern $\nabla - \nabla'$ einsetzt, wobei ∇' wie in der MLT auszurechnen ist (Böhm-Vitense 1953, 1958). Es ist aber unmittelbar zu erkennen, daß im Falle großer Opazität, d. h. sehr kleines x , die MLT kubische Gleichung in die des Ein-Gleichungs-Modelles übergeht, was auch die Interpretation dieses Unterschiedes bekräftigt. Quantitativ ist der Faktor zwischen den Lösungen der beiden kubischen Gleichungen niemals größer als etwa 1.8 (siehe Abbildung 1). Im Core von Hauptreihensternen z. B. ist x ohnehin sehr klein, und deshalb stimmen die Modelle dort zumindest gut überein, in beiden Fällen resultieren fast adiabatische Temperaturgradienten. Unterschiede würden sich dagegen in der Berechnung konvektiver Hüllen älterer Sterne ergeben, so daß die oben angegebene Ersetzung angemessen wäre.

2.2. Stabilität und lokale, stationäre Lösung im Drei-Gleichungs-Modell

2.2.1. Die lokale, stationäre Lösung

Für die weiteren Anwendungen empfiehlt es sich, den Quellterm konvektiver kinetischer Energie unter Benutzung elementarer thermodynamischer Relationen umzuschreiben:

$$\mathbf{S}_\varpi = \frac{\nabla_{ad}T}{H_p} \left\{ \Pi - \frac{c_p}{\alpha\rho^2T} \sum_i \left(\frac{\partial\rho}{\partial c_i} \right)_{p,s} j_i \right\} . \quad (1)$$

Unter denselben Einschränkungen wie in Kapitel 2.1.2., aber unter Berücksichtigung der radiativen Verluste lauten die Gleichungen zur Bestimmung der die Konvektion beschreibenden Größen im lokalen Fall, d. h. $\alpha_t = 0$, und unter Benutzung der lokalen Approximationen in der Π - und der ϕ -Gleichung,

$$0 = \frac{\nabla_{ad}T}{H_p} \Pi - \frac{c_D}{\Lambda} \varpi^{3/2} \quad (2a)$$

$$0 = \frac{\nabla_{ad}T}{H_p} 2\phi + \frac{2}{3} \frac{c_p}{H_p} \varpi (\nabla - \nabla_{ad}) - \frac{\beta_\Pi}{\Lambda} \varpi^{1/2} \Pi - \frac{1}{\tau_{rad}} \Pi \quad (2b)$$

$$0 = \frac{c_p}{H_p} \Pi (\nabla - \nabla_{ad}) - \frac{\beta_\phi}{\Lambda} \varpi^{1/2} \phi - \frac{1}{\tau_{rad}} 2\phi . \quad (2c)$$

Für einen überadiabatischen Temperaturgradienten ($\nabla > \nabla_{ad}$) und bei Vernachlässigung der radiativen Verluste ($\tau_{rad} \rightarrow \infty$) erhält man die Lösungen für konvektive Geschwindigkeit v_c , den konvektiven Fluß j_w und den durchschnittlichen Temperaturexzess T_c (definiert entsprechend der Gleichung (1.5.2/1)):

$$v_c^2 := \frac{2}{3} \varpi = \frac{4}{9\beta_\Pi c_D} \left(1 + \frac{3c_D}{\beta_\phi} \right) \left(\frac{\Lambda}{H_p} \right)^2 c_p \nabla_{ad}T (\nabla - \nabla_{ad}) \quad (3a)$$

$$j_w := \rho T \Pi = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{\beta_\Pi} \left(1 + \frac{3c_D}{\beta_\phi} \right) \frac{\Lambda}{H_p} \rho c_p T v_c (\nabla - \nabla_{ad}) \quad (3b)$$

$$T_c := \frac{T}{c_p} \sqrt{2\phi} = \left\{ \frac{4}{3\beta_\Pi \beta_\phi} \left(1 + \frac{3c_D}{\beta_\phi} \right) \right\}^{\frac{1}{2}} \frac{\Lambda}{H_p} T (\nabla - \nabla_{ad}) . \quad (3c)$$

Wieder ergibt der Vergleich mit den entsprechenden Ergebnissen der MLT (Böhm-Vitense 1953, 1958) Bestimmungsgleichungen für die freien Parameter, und als Lösung folgt die 'Standardwahl' für das Drei-Gleichungs-Modell:

$$c_D = \frac{8}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} \quad (4a)$$

$$\beta_\phi = 4\sqrt{\frac{2}{3}} \quad (4b)$$

$$\beta_\Pi = 6\sqrt{\frac{2}{3}} \quad . \quad (4c)$$

Es zeigt sich insbesondere, daß der Parameter der Dissipation konvektiver kinetischer Energie derselbe ist wie im Ein-Gleichungs-Modell. Außerdem sei angemerkt, daß der Ansatz aus der MLT,

$$j_w = \rho c_p T_c v_c \quad , \quad (5)$$

in den hier verwendeten Größen lautet

$$\langle v'_r s' \rangle = \Pi = \sqrt{\frac{4}{3} \phi \varpi} = \sqrt{\frac{1}{3} \langle v'^2 \rangle \langle s'^2 \rangle} \quad , \quad (6)$$

so daß insbesondere konsistent die Annahme des isotropen Geschwindigkeitsfeldes wiedergewonnen wird. Im stationären Fall ist (6) dann als Bedingung an die freien Parameter formulierbar,

$$\frac{2\beta_\Pi}{3c_D} = 1 + \frac{\beta_\phi}{3c_D} \quad , \quad (7)$$

eine Beziehung, die im folgenden noch häufiger auftreten wird.

Zur Ableitung der kubischen Gleichung werden die $(1/\tau_{rad})$ -Terme in den Gleichungen (2) mit berücksichtigt. Zusätzlich erhält man wie in Kapitel 2.1.2. aus der Energiegleichung die Bedingung

$$\Pi = \frac{4c_p \Lambda^2}{3H_p \gamma^2 \tau_{rad}} (\nabla_{rad} - \nabla) \quad . \quad (8)$$

Damit sind nun vier Gleichungen gegeben, und demgemäß ist es möglich, nicht nur die Konvektionsgrößen Π , ϕ und ϖ zu bestimmen, sondern darüber hinaus auch den aktuellen Temperaturgradienten ∇ . Wieder wird das Ergebnis ausgedrückt mit Hilfe der Variablen f und x (2.1.2/10) sowie zweier Hilfsgrößen

$$g := (3x(1-f))^{1/3} \quad (9a)$$

$$\Delta := \nabla_{rad} - \nabla_{ad} \quad . \quad (9b)$$

Man erhält dann als Bestimmungsgleichung im für Konvektion notwendigen Fall $\Delta > 0$:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{c_D}\right)^{1/3} g \left\{ \frac{\gamma^2}{6\sqrt{2}} x + \frac{\beta_{\Pi}}{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{c_D}\right)^{1/3} g \right\} \cdot \left\{ \frac{\gamma^2}{6\sqrt{2}} x + \frac{\beta_{\phi}}{6} \left(\frac{\sqrt{2}}{c_D}\right)^{1/3} g \right\} = \frac{2}{c_D} f \left\{ \frac{c_D}{2} \left(1 + \frac{\beta_{\phi}}{3c_D}\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{c_D}\right)^{1/3} g + \frac{\gamma^2}{6\sqrt{2}} x \right\} . \quad (10)$$

Dies ist zunächst keine kubische Gleichung, wohl aber kann bei der hier angenommenen Gültigkeit der Beziehung (7) für die freien Parameter der erste Ausdruck in geschweiften Klammern auf der linken Seite gekürzt werden gegen den Ausdruck in geschweiften Klammern auf der rechten Seite:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{c_D}\right)^{1/3} g \left\{ \frac{\gamma^2}{6\sqrt{2}} x + \frac{\beta_{\phi}}{6} \left(\frac{\sqrt{2}}{c_D}\right)^{1/3} g \right\} = \frac{2}{c_D} f . \quad (11)$$

Werden noch die Werte der Parameter für die Standardwahl eingesetzt, so folgt nach Elimination der positiv definiten Hilfsgröße g die Gleichung

$$1 - f = \frac{9}{8x} \left\{ \sqrt{f + \left(\frac{\gamma^2}{12}\right)^2 x^2} - \left(\frac{\gamma^2}{12}\right) x \right\}^3 . \quad (12)$$

Diese steht offenbar im Einklang mit dem Ergebnis der MLT (2.1.2/11) für die Wahl des die Zeitskala radiativer Verluste bestimmenden freien Parameters γ gemäß

$$\gamma = 2\sqrt{3} . \quad (13)$$

Es muß aber noch einmal darauf hingewiesen werden, daß die 'Standardwahl' der freien Parameter nicht zwingend ist.

2.2.2. Das Ledoux-Kriterium

Unter denselben Voraussetzungen wie im Falle des Ein-Gleichungs-Modells (siehe Kapitel 2.1.1.) und unter Vernachlässigung der radiativen Verluste sowie der die nuklearen Reaktionen beinhaltenden Terme lauten die Gleichungen für die die Konvektion beschreibenden Größen im lokalen, stationären Grenzfall

$$0 = \frac{\nabla_{ad} T}{H_p} \left\{ \Pi - \frac{c_p}{\alpha \rho T} \sum_i \left(\frac{\partial \rho}{\partial c_i} \right)_{p,s} j_i \right\} - \frac{c_D}{\Lambda} \varpi^{3/2} \quad (1a)$$

$$0 = \frac{\nabla_{ad} T}{H_p} 2\phi + \sqrt{3}\alpha_m \text{sign}(\Pi)\phi^{1/2} \frac{p\Lambda}{\rho^2 H_p} \sum_i \left(\frac{\partial \rho}{\partial c_i} \right)_{p,s} \partial_r c_i - \frac{2}{3}\varpi \partial_r s - \frac{\beta_\Pi}{\Lambda} \varpi^{1/2} \Pi \quad (1b)$$

$$0 = -\Pi \partial_r s - \frac{\beta_\phi}{\Lambda} \varpi^{1/2} \phi \quad . \quad (1c)$$

Zur einfacheren Handhabung werden die Hilfsgrößen

$$A := -\partial_r s \quad \text{und} \quad B := \alpha_m \frac{p\Lambda}{\rho^2 H_p} \sum_i \left(\frac{\partial \rho}{\partial c_i} \right)_{p,s} \partial_r c_i \quad (2)$$

sowie ein System von Normierungsgrößen,

$$\varpi_0 := \nabla_{ad} c_p T \quad \phi_0 := c_p^2 \quad \Pi_0 := (\phi_0 \varpi_0)^{1/2} \quad (3a)$$

$$A_0 := c_p / H_p \quad B_0 := \varpi_0 / H_p \quad , \quad (3b)$$

und normierten Variablen,

$$x := \Pi / \Pi_0 \quad y := \phi / \phi_0 \quad z := \varpi / \varpi_0 \quad (4a)$$

$$\xi := A / A_0 \quad \chi := B / B_0 \quad , \quad (4b)$$

benutzt. Mit Hilfe des MLT-Parameters

$$\alpha_{ML} = \frac{\Lambda}{H_p} \quad (5)$$

folgen dann im stationären Zustand die Bestimmungsgleichungen

$$0 = x + \chi z^{1/2} - \frac{c_D}{\alpha_{ML}} z^{3/2} \quad (6a)$$

$$0 = 2y + \chi y^{1/2} \sqrt{3} \text{sign}(x) + \frac{2}{3} \xi z - \frac{\beta_\Pi}{\alpha_{ML}} x z^{1/2} \quad (6b)$$

$$0 = \xi x - \frac{\beta_\phi}{\alpha_{ML}} y z^{1/2} \quad . \quad (6c)$$

Wieder zeigt man zunächst, daß diese Gleichungen dann und nur dann kompatibel mit der Forderung

$$\Pi = \sqrt{\frac{4}{3} \phi \varpi} \quad (7)$$

sind, wenn wieder die Bedingung (2.2.1/7) an die Parameter erfüllt ist. Unter dieser Voraussetzung kann dann eine der Gleichungen (6) ersetzt werden durch (7), und man erhält als Lösung für die normierte konvektive kinetische Energie z

$$z = \frac{\alpha_{\text{ML}}}{c_{\text{D}}} \left(\frac{4\alpha_{\text{ML}}}{3\beta_{\phi}} \xi + \chi \right) . \quad (8)$$

Für eine positive Lösung für z muß also die Ungleichung

$$\frac{4\alpha_{\text{ML}}}{3\beta_{\phi}} \xi + \chi > 0 \quad (9)$$

erfüllt sein, und diese ist äquivalent zum Ledoux-Kriterium (2.1.1/5), wenn gilt

$$\alpha_m = \frac{4}{3\beta_{\phi}} . \quad (10)$$

Für die Standardwahl hat man also den freien Parameter, der das konvektive Mischen von Materie beeinflußt, bestimmt zu

$$\alpha_m = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} . \quad (11)$$

Wie c_{D} ist also auch dieser Parameter genauso zu wählen wie im Falle der Standardwahl für das Ein-Gleichungs-Modell.

3. Analytische Überlegungen zur Nichtlokalität

3.1. Abschätzung des Overshooting beim Ein-Gleichungs-Modell

Im Ein-Gleichungs-Modell lautet die nichtlokale Bestimmungsgleichung bei Vernachlässigung der Gradienten der chemischen Komposition im stationären Zustand

$$0 = \frac{1}{H_p} \nabla_{ad} c_p T \alpha_{ML} \alpha_s \varpi^{1/2} (\nabla - \nabla_{ad}) - \frac{c_D}{\Lambda} \varpi^{3/2} + \frac{\alpha_t}{\rho r^2} \partial_r r^2 \varpi^{1/2} \Lambda \rho \partial_r \varpi \quad . \quad (1)$$

Außerhalb eines generisch konvektiven Gebietes mit Radius r_0 und superadiabatischem Temperaturgradienten, d. h. in der Overshooting-Zone, gilt $\nabla < \nabla_{ad}$, so daß dort eine zusätzliche Abbremsung durch Auftriebskräfte neben der Dissipation wirksam wird. Man wird bei einer Abschätzung der Overshooting-Distanz also höchstens einen zu großen Wert erhalten, wenn man diesen Term vernachlässigt, in diesem Sinne also wird (1) vereinfacht zu

$$0 = \frac{\alpha_t}{\rho r^2} \partial_r r^2 \varpi^{1/2} \Lambda \rho \partial_r \varpi - \frac{c_D}{\Lambda} \varpi^{3/2} \quad . \quad (2)$$

Für den Fall eines konvektiven Kerns nimmt der Faktor $\Lambda \rho$ in der ‘Diffusionskonstante’ ebenfalls nach außen hin ab, also wird die Effizienz der Diffusion nach oben hin dadurch abgeschätzt werden, daß der größte Wert, das ist der Wert an der Schwarzschild-Grenze $r = r_0$, benutzt wird. Außerdem ist die Dissipation um so geringer, je größer die Skalenlänge Λ ist, also wird auch hier der Wert bei r_0 im folgenden fest beibehalten, somit ist

$$0 = \frac{\alpha_t \Lambda}{r^2} \partial_r r^2 \varpi^{1/2} \partial_r \varpi - \frac{c_D}{\Lambda} \varpi^{3/2} \quad . \quad (3)$$

Nach Einführung der typischen Distanz

$$\lambda := \Lambda \sqrt{\frac{2 \alpha_t}{3 c_D}} \quad (4)$$

kann nun (3) in eine Yukawa-Gleichung umgewandelt werden:

$$\left(\Delta - \left(\frac{1}{\lambda} \right)^2 \right) \varpi^{3/2} = 0 \quad . \quad (5)$$

Die physikalisch motivierte Forderung, daß die konvektive kinetische Energie im Unendlichen verschwinden möge, bestimmt schon die Lösung bis auf eine multiplikative Konstante, die z. B. aus der Randbedingung an der Schwarzschild-Grenze ($r = r_0$) zu erhalten wäre:

$$\varpi^{3/2} = \varpi_0^{3/2} \frac{r_0}{r} \exp\left(-\frac{(r-r_0)}{\lambda}\right) . \quad (6)$$

Somit ergibt sich die Lösung für die Gleichung (5) unter den gegebenen Bedingungen

$$\varpi = \varpi_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^{2/3} \exp\left(-\frac{(r-r_0)}{\lambda_0}\right) \quad (7)$$

mit der typischen Länge für den exponentiellen Abfall

$$\lambda_0 = \frac{3}{2}\lambda = \Lambda \sqrt{\frac{3\alpha_t}{2c_D}} . \quad (8)$$

Es ist physikalisch sinnvoll (siehe auch Kapitel 3.2.) anzunehmen, daß der Transport kinetischer Energie höchstens so effizient sein kann wie der Transport von Entropie, deshalb kann α_t nach oben abgeschätzt werden durch α_s . Drückt man nun die Skalenlänge Λ wieder mit Hilfe der Druckskalenhöhe aus, und ersetzt man weiterhin c_D und α_s gemäß der Standardwahl (2.1.2/4), so folgt

$$\lambda_0 \leq \frac{3}{8}\sqrt{2}\alpha_{ML}H_p . \quad (9)$$

Damit ist also die typische Skalenlänge für das Verschwinden konvektiver kinetischer Energie in der Overshooting-Zone kleiner als die Druckskalenhöhe, wenn für den MLT-Parameter gilt

$$\alpha_{ML} < \frac{4}{3}\sqrt{2} \approx 1.886 . \quad (10)$$

Dieser Ungleichung genügen die typischerweise in der Literatur benutzten MLT-Parameter fast alle.

3.2. Eine Abschätzung des Transportparameters α_t

Um eine ungefähre Vorstellung von der Größe des das Overshooting kontrollierenden Parameters α_t zu bekommen, wird im folgenden ein Szenarium entwickelt, das dem der MLT zugrundeliegenden Bild der turbulenten Konvektion sehr ähnlich ist. Ausgangspunkt ist die Vorstellung von einem konvektiven Element, welches eine typische Distanz Λ_0 zurücklegt und sich dann instantan auflöst und dabei z. B. die mitgeführte Entropie oder irgendwelche speziellen Nuklidsorten in die Umgebung freisetzt. Wenn sich dieses 'Eddy' nun in einer adiabatischen Schichtung bewegt, so wird es nicht durch Auftriebskräfte beeinflusst werden können, wenn es ohne Temperaturexzess in diese Schicht mit einer gewissen Anfangsgeschwindigkeit v_0 eingetreten ist. Dann ist nur die Dissipation aufgrund von turbulenter Reibung verantwortlich für eine Verringerung der Geschwindigkeit. Damit aber wird klar, daß das Eddy einen Teil seiner kinetischen Energie schon während der Bewegung verliert und nur der Rest am Ende des Weges instantan in kleinere Skalen dissipiert wird. Durch kinematische Überlegungen über die Effizienz des Transportes kinetischer Energie im Vergleich zum Transport von Entropie oder dem konvektiven Mischen wird nun der Parameter α_t kalibriert unter der Annahme, daß er sich bei einer anderen physikalischen Umgebung nicht zu sehr von dem gefundenen Wert unterscheidet.

Ausgehend von einer für den Entropietransport oder das konvektive Mischen typischen Skala Λ_0 wird zunächst die Verteilung der Entropieverluste oder des Freisetzens der Materie in die Umgebung betrachtet. Diese ist offenbar im vorliegenden Bild eine δ -Funktion:

$$f_s(x) = \delta(x - \Lambda_0) \quad . \quad (1)$$

Umgekehrt läßt sich natürlich auch die typische Strecke Λ_0 aus dieser Verteilung als das erste Moment, der Schwerpunkt, konstruieren:

$$\Lambda_0 = \int_0^{\infty} x f_s(x) dx \quad . \quad (2)$$

Wenn man nun die Verteilung der Verluste kinetischer Energie längs des Weges f_t kennen würde, so könnte man daraus analog eine typische Skalenlänge für den Transport kinetischer Energie ableiten:

$$\Lambda_t = \int_0^{\infty} x f_t(x) dx \quad . \quad (3)$$

Die Struktur des Dissipationsterms in der Gleichung für die konvektive kinetische Energie ϖ legt, wie auch schon in Kapitel 1.3.3. dargelegt, eine Stokes'sche Reibung für die Dissipation der Geschwindigkeit der konvektiven Elemente nahe. Dabei wird im folgenden immer mit einem total isotropen ($\langle v'^2 \rangle = 3 \langle v_r'^2 \rangle$) und einem total anisotropen ($\vec{v}' = v' \vec{e}_r$) Ansatz für die Geschwindigkeit gearbeitet:

$$v_c^2 := \begin{cases} \frac{2}{3}\varpi & , \text{ isotrop} \\ 2\varpi & , \text{ anisotrop} \end{cases} . \quad (4)$$

Berücksichtigt man nun in einer lokalen Betrachtung der Bewegung eines einzigen Elementes die Gleichung der konvektiven kinetischen Energie im adiabatischen Fall, d. h., betrachtet man nur den verschwindenden Quellterm sowie die Dissipation, so folgt die Bewegungsgleichung

$$\dot{v}_c = -k v_c^2 \quad (5)$$

mit den Reibungskonstanten

$$k = \frac{c_D}{2\Lambda} \cdot \begin{cases} \sqrt{\frac{3}{2}} & , \text{ isotrop} \\ \sqrt{\frac{1}{2}} & , \text{ anisotrop} \end{cases} . \quad (6)$$

Die Lösung der Gleichung (5) ist trivial. Sei s die zurückgelegte Wegstrecke, dann folgt

$$v_c(s) = v_0 \exp(-ks) . \quad (7)$$

Damit kann man nun die Verluste kinetischer Energie längs des Weges darstellen, von $s = 0$ bis $s = \Lambda_0$ sind diese Verluste durch die Lösung der Bewegungsgleichung bestimmt, bei $s = \Lambda_0$ wird dann der Rest freigesetzt, d. h. in kleinskalige Bewegungen dissipiert. Normiert auf die Anfangsenergie des Eddy erhält man so die Verteilungsfunktion

$$f_t(s) = 2k \exp(-2ks) \Theta(\Lambda_0 - s) + \exp(-2k\Lambda_0) \delta(s - \Lambda_0) . \quad (8)$$

Dabei ist Θ die Heavyside'sche Sprungfunktion. Die die Effizienz des Transportes konvektiver kinetischer Energie repräsentierende Skalenlänge Λ_t ist damit gemäß (3) bestimmt zu

$$\frac{\Lambda_t}{\Lambda_0} = f(2k\Lambda_0) \quad (9a)$$

$$f(x) := \frac{1}{x} \int_0^x \varphi e^{-\varphi} d\varphi + e^{-x} . \quad (9b)$$

Die Geschwindigkeit geht in die die verschiedenen Transporte in der Diffusionsapproximation modellierende Diffusionskonstante immer gleichartig ein, somit ist das Verhältnis der Effizienz der Transporte dasselbe wie das Verhältnis der typischen Skalenlängen. Es war angesetzt worden

$$\Lambda_0 = \alpha_s \Lambda \quad (10a)$$

$$\Lambda_t = \alpha_t \Lambda \quad , \quad (10b)$$

und somit folgt

$$\frac{\alpha_t}{\alpha_s} = \begin{cases} f(\sqrt{3/2} c_D \alpha_s) & , \text{ isotrop} \\ f(\sqrt{1/2} c_D \alpha_s) & , \text{ anisotrop} \end{cases} . \quad (11)$$

Für die Standardwahl ergibt sich

$$\frac{\alpha_t}{\alpha_s} \approx \begin{cases} 0.6093 & , \text{ isotrop} \\ 0.7424 & , \text{ anisotrop} \end{cases} . \quad (12)$$

Man beachte jedoch, daß es nicht notwendig konsistent ist, hier die eine Isotropie beinhaltende Standardwahl zu benutzen. Berechnet man hingegen die einem total anisotropen Fall entsprechenden Werte für α_s und c_D , so erhält man ein noch kleineres Verhältnis von

$$\frac{\alpha_t}{\alpha_s} \approx 0.1762 \quad , \quad (13)$$

was insbesondere auf eine wesentlich stärkere Dissipation, d. h. sehr großes c_D , zurückzuführen ist.

Nachtragend kann nun noch angemerkt werden, daß bei der Wahl des isotropen Falles die typische Skalenlänge λ_0 für das Verschwinden der konvektiv kinetischen Energie gemäß der analytischen Lösung von Kapitel 3.1., mit der Wahl des Parameters α_t wie hier beschrieben, kleiner ist als eine Druckskalenhöhe schon für

$$\alpha_{ML} < 2.9586 \quad , \quad (14)$$

oder anders ausgedrückt, für $\alpha_{ML} = 1.5$, ein Wert, der durchaus gebräuchlich ist, sollte die typische Overshooting-Distanz ungefähr eine halbe Druckskalenhöhe betragen.

4. Studien zur Zeitabhängigkeit

Im folgenden werden erste Untersuchungen zur Zeitabhängigkeit des Modells durchgeführt. Dies geschieht auf dem Hintergrund eines Szenariums mit vorgegebenem Entropiegradienten. Die Rückwirkung der Konvektion und insbesondere des konvektiven Flusses auf die Temperaturschichtung wird nicht berücksichtigt. Dies ist sicherlich eine grobe Approximation, die allerdings eine zum Teil noch exakte Analyse des Modells gestattet und deshalb geeignet ist, qualitative Aspekte aufzuzeigen.

4.1. Eine Modellgleichung und deren Lösungen (Kuhfuß 1986b)

Das Ein-Gleichungs-Modell wird im folgenden vereinfacht durch die Annahme, daß die Zustandsgrößen und auch der Entropiegradient durch ein Hintergrundmodell schon vorgegeben sind, dabei sei nur der Entropiegradient zeitabhängig. Zusätzlich sei $\alpha_t = 0$, die Nichtlokalität des Modells ist also eliminiert. Nach einigen Skalierungen gelangt man dann zu einer sehr einfachen gewöhnlichen Differentialgleichung. Diese hat sowohl im Stellingwerf'schen als auch im vorgestellten Modell (Ein-Gleichungs-Formulierung) die Form

$$\partial_t \varpi = S_\varpi (\nabla - \nabla_{ad}, \varpi) - \varpi^{3/2} \quad . \quad (1)$$

Der wesentliche Unterschied besteht in der Struktur des Quellterms konvektiver kinetischer Energie und des konvektiven Flusses. Bei Stellingwerf erhält man

$$S_\varpi = \varpi \sqrt{\max\{\nabla - \nabla_{ad}, 0\}} \quad . \quad (2)$$

Das hier vorgestellte Modell hingegen ergibt

$$S_\varpi = \varpi^{1/2} (\nabla - \nabla_{ad}) \quad . \quad (3)$$

Die Abhängigkeit der Quellfunktion vom Hintergrund wird im folgenden in einer zeitabhängigen Funktion $a(t)$ zusammengefaßt:

$$a(t) := \nabla - \nabla_{ad} \quad , \quad (4)$$

und es folgt für die beiden Modelle

$$\partial_t \varpi = \left\{ \begin{array}{l} \varpi \sqrt{\max\{a(t), 0\}} \\ \varpi^{1/2} a(t) \end{array} \right\} - \varpi^{3/2} \quad . \quad (5)$$

Das entsprechende Ergebnis der MLT lautet

$$\varpi = \max\{a(t), 0\} \quad . \quad (6)$$

Man beachte die physikalische Interpretation des Unterschiedes in den Modellen im Falle einer stabilen Schichtung ($\nabla < \nabla_{ad}$), wie sie z. B. im Overshooting-Bereich oder aber im zeitabhängigen Falle, wenn eine konvektive Schicht stabil geworden ist, auftreten könnte. Im Stellingwerf'schen Modell werden dann die dämpfend wirkenden Auftriebskräfte 'abgeschnitten'. Die Begründung dafür ist die Annahme, daß in einer stabilen Schichtung die Korrelation zwischen Entropiefluktuationen und konvektiver Geschwindigkeit verschwindet (Stellingwerf 1982). Im vorgestellten Modell (Ein-Gleichungs-Formulierung) hingegen wird implizit davon ausgegangen, daß der Betrag der Korrelation in einem stabilen Gebiet beim Vorhandensein konvektiver Bewegung derselbe ist wie in einem generisch instabilen Gebiet. Beide Grenzfälle können nur als Approximationen angesehen werden, wenngleich sie unerwähnt in den meisten anderen Arbeiten auch enthalten sind. Nicht zuletzt diese Problematik motivierte die Entwicklung der Drei-Gleichungs-Formulierung des Modells.

Für einfache Funktionen $a(t)$ können die Gleichungen (5) gelöst werden. Im Falle eines konstanten $a(t) = a_0$ erhält man für das Stellingwerf-Modell

$$\varpi = \begin{cases} 0 & , \text{ stabil (?) für alle } a_0 \\ \frac{4}{(t - t_0)^2} & , \quad a_0 \leq 0 \\ \frac{a_0}{4} \left(1 + \tanh \left(\frac{\sqrt{a_0}}{4} (t - t_0) \right) \right)^2 & , \quad a_0 > 0 \quad . \end{cases} \quad (7)$$

Das Fragezeichen bei der identisch verschwindenden Lösung weist auf einen seltsamen Umstand hin: Im Stellingwerf-Modell gibt es keine anwachsende Lösung, die gleichzeitig als Randbedingung $\varpi = 0$ zu irgendeiner Zeit erfüllen könnte, deshalb entsteht selbst im instabilen Falle $a_0 > 0$ keine Konvektion, es sei denn, man gibt 'von Hand' eine kleine Störung vor, die dann zu der dritten Lösung führt (Stellingwerf 1985). Dies ist insofern etwas unbefriedigend, als daß man aus der anwachsenden Lösung leicht abliest, daß eine sehr starke Abhängigkeit der Entwicklung von solch einer Anfangsbedingung besteht. Des weiteren ist der Effekt der Vernachlässigung der dämpfenden Auftriebskräfte im stabilen Falle deutlich an der zweiten Lösung zu erkennen: im Stellingwerf'schen Modell dauert es unendlich lange, bis die Konvektion verschwindet.

Analog kann man die Lösungen im hier vorgestellten Modell angeben:

$$\varpi = \begin{cases} 0 & , \text{ stabil für } a_0 \leq 0 \\ a_0 \tanh^2 \left(\frac{\sqrt{a_0}}{2} (t - t_0) \right) & , \quad a_0 > 0 \\ \frac{4}{(t - t_0)^2} & , \quad a_0 = 0 \\ -a_0 \tan^2 \left(\frac{\sqrt{-a_0}}{2} (t_0 - t) \right) & , \quad a_0 < 0 \end{cases} \quad (8)$$

Zunächst fällt auf, daß die anwachsende Lösung für $a_0 > 0$ durchaus die Anfangsbedingung verschwindender Konvektion erfüllen kann. Bei den beiden abfallenden Lösungen ist die Wirkung dämpfender Auftriebskräfte deutlich zu sehen. Im Falle $a_0 = 0$ besteht natürlich kein Unterschied zum Stellingwerf-Modell, die Schicht ist marginal stabil. Bei $a_0 < 0$ jedoch kommt die unterschiedliche Darstellung des Quelltermes zum Tragen, innerhalb endlicher Zeit verschwindet das konvektive Geschwindigkeitsfeld.

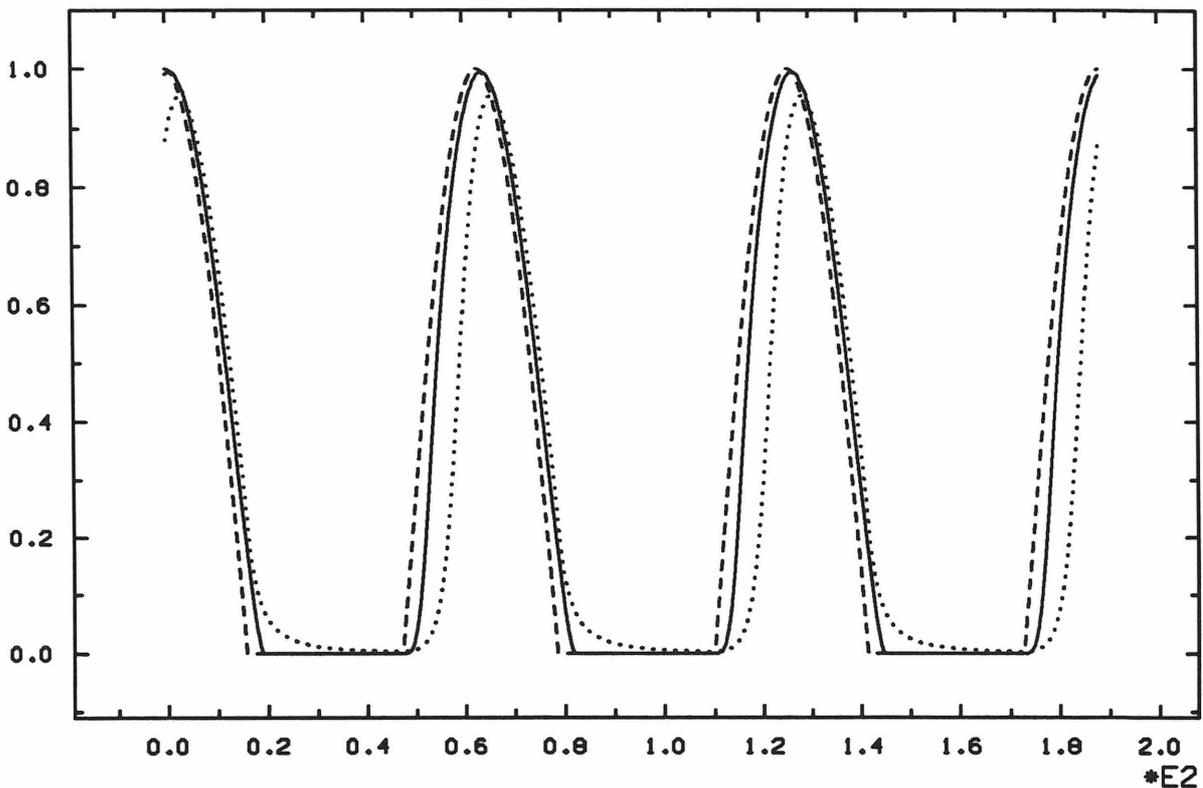


Abb. 1. : Periodische Lösung $\varpi(t)$ der Gleichungen (5), als Funktion der dimensionslosen Zeit t , Stellingwerf-Modell gepunktet, im Vergleich zur MLT (gestrichelt), bei periodischem Treiber $a(t) = \cos(\omega t)$ mit geringer Frequenz $\omega = 0.1$.

Ein weiteres, allerdings nur noch numerisch handhabbares Beispiel ist der Fall einer periodischen Treiberfunktion $a(t) = \cos(\omega t)$. Eine numerische Integration der Gleichungen (5) wurde zunächst so lange fortgesetzt, bis eine periodische Lösung erreicht und die Anfangsbedingungen ausrelaxiert waren. Dargestellt ist jeweils die Lösung der MLT (gestrichelt), des Stellingwerf-Modells (gepunktet) und des hier entwickelten Modells. Abbildung 1 zeigt die Ergebnisse für eine geringe Frequenz, $\omega = 0.1$. Es ist deutlich zu erkennen, daß alle drei Modelle qualitativ als auch quantitativ weitestgehend identische Ergebnisse liefern. Lediglich das langsame Verschwinden der Konvektion beim Stellingwerf-Modell sowie eine leichte Verzögerung im Anstieg aufgrund des schon sehr klein gewordenen Wertes zu Beginn einer neuen treibenden Phase weisen auf die Unterschiede hin.

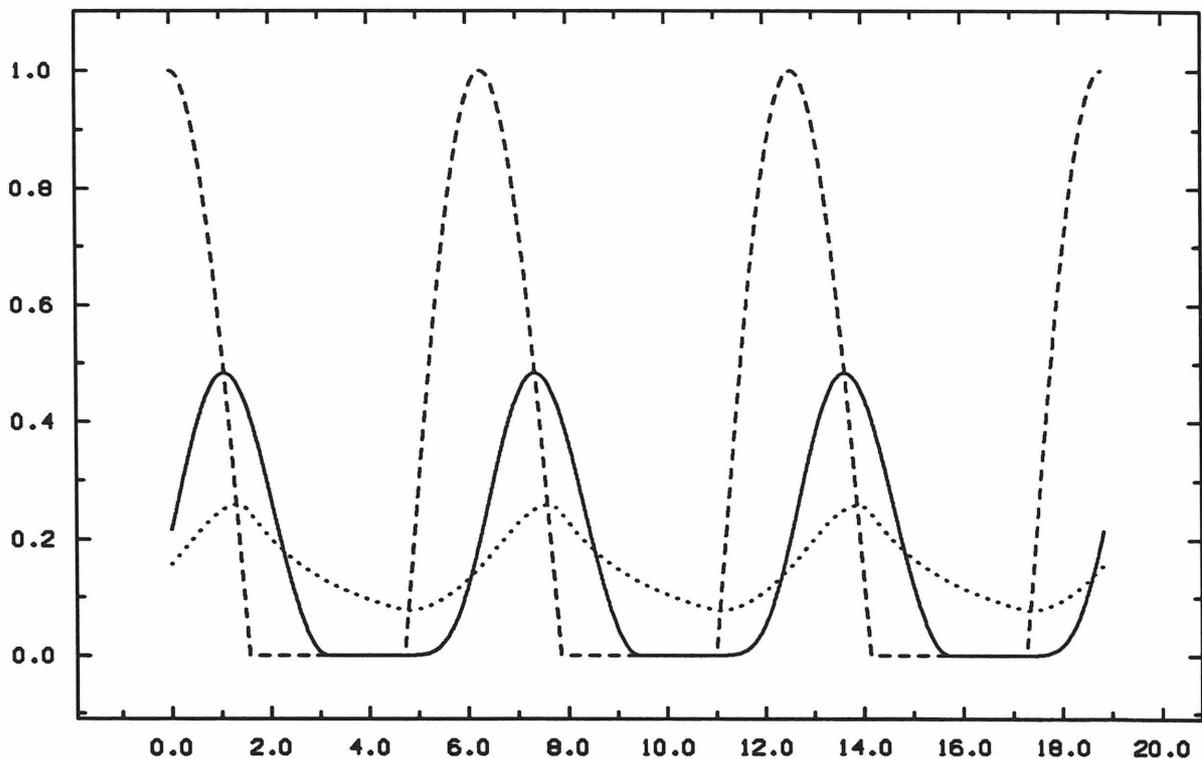


Abb. 2.: Periodische Lösung $\varpi(t)$ der Gleichungen (5), als Funktion der dimensionslosen Zeit t , Stellingwerf-Modell gepunktet, im Vergleich zur MLT (gestrichelt), bei periodischem Treiber $a(t) = \cos(\omega t)$ mit mittlerer Frequenz $\omega = 1.0$.

Bei höherer Frequenz hingegen werden die Unterschiede deutlich (siehe Abbildung 2). Das Stellingwerf-Modell reagiert relativ langsam. Andererseits überschätzt die MLT die Konvektion. Das hier vorgestellte Modell führt darüber hinaus zu einer Phasenverschiebung, die aus der Tatsache resultiert, daß eine Verringerung der Konvektion erst erfolgen kann, wenn

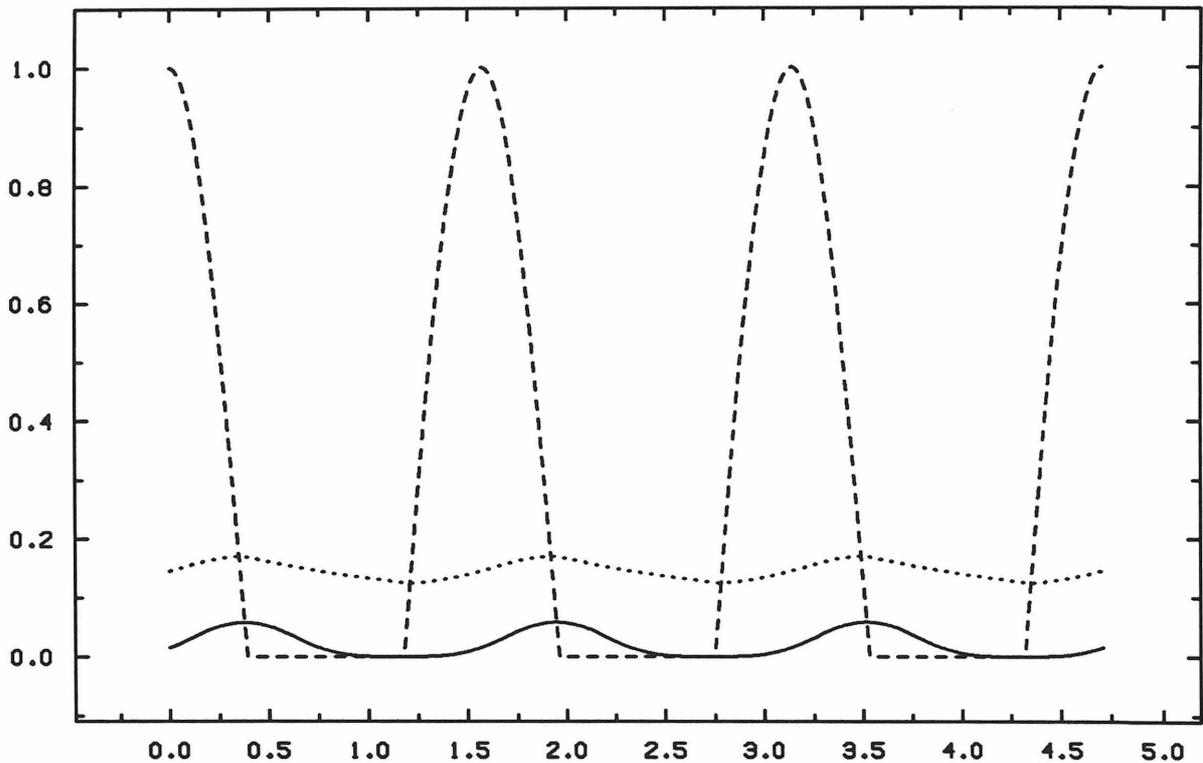


Abb. 3.: Periodische Lösung $\varpi(t)$ der Gleichungen (5), als Funktion der dimensionslosen Zeit t , Stellingwerf-Modell gepunktet, im Vergleich zur MLT (gestrichelt), bei periodischem Treiber $a(t) = \cos(\omega t)$ mit hoher Frequenz $\omega = 4.0$.

der Treiberterm $a(t)$ kleiner wird als die Konvektionsgröße ϖ . Bei sehr hoher Frequenz fluktuiert die Konvektion im Stellingwerf-Modell nur noch schwach um einen endlichen Wert (Abbildung 3). Die MLT liefert definitiv keine befriedigenden Ergebnisse mehr. Ein wesentlicher Unterschied zwischen dem Stellingwerf-Modell und der Ein-Gleichungs-Formulierung besteht auch im Verhalten im Grenzfall beliebig hoher Frequenzen. Sei a_Δ eine beschränkte periodische Funktion mit Periode Δ , dann kann man für jede beliebige Periodendauer Δ die zugehörigen periodischen Lösungen ϖ_Δ konstruieren. Im Grenzwert $\Delta \rightarrow 0$ entarten diese Lösungen zu einer Konstanten, die bestimmt ist durch

$$\varpi_\Delta^0 = \begin{cases} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \overline{a_\Delta} & , \text{Ein-Gleichungs-Modell} \\ \left(\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sqrt{\max\{a_\Delta, 0\}} \right)^2 & , \text{Stellingwerf Modell} \end{cases} , \quad (9)$$

mit der Definition des Zeitmittels gemäß

$$\bar{x} := \frac{1}{\Delta} \int_0^\Delta x \, dt . \quad (10)$$

Im Fall der oben benutzten Anregungsfunktionen proportional zu $\cos(\omega t)$ erhält man unmittelbar die Werte

$$\varpi_{\Delta}^0 = \begin{cases} 0 & , \text{Ein-Gleichungs-Modell} \\ 0.14541 & , \text{Stellingwerf-Modell} \end{cases} . \quad (11)$$

Andererseits zeigt man mit Hilfe von (9) leicht, daß im Falle einer positiv semidefiniten Treiberfunktion im Grenzfall hoher Frequenz zeitgemittelt im Stellingwerf'schen Modell immer ein kleineres ϖ zu erwarten ist als im Ein-Gleichungs-Modell.

4.2. Bemerkungen zum Drei-Gleichungs-Modell

Es wurde an früherer Stelle schon darauf hingewiesen, daß ein Zusammenhang besteht zwischen der Möglichkeit, eine der drei Gleichungen durch Darstellung von Π direkt aus ϕ und ϖ zu eliminieren, und der Isotropie des Geschwindigkeitsfeldes. Dies gilt aber nur bei einem total lokalisierten Modell, d. h. $\alpha_t = 0$ und Verwendung der lokalen Approximation der Flußterme in den Gleichungen für Π und ϕ .

Zunächst sei wieder, wie auch schon in Kapitel 4.1., von einem stationären Hintergrund mit lediglich zeitabhängigem Temperaturgradienten ausgegangen. Mit den Normierungen und Definitionen von Kapitel 2.2.2. und der zusätzlichen Zeitskala

$$t_0 := \frac{H_p}{\sqrt{\varpi_0}} \quad (1)$$

sowie der Näherung verschwindender Gradienten der chemischen Komposition gelangt man zu den Gleichungen

$$\dot{x} = 2y + 2k\xi z - \frac{\beta_{\Pi}}{\alpha_{ML}} xz^{1/2} \quad (2a)$$

$$\dot{y} = \xi x - \frac{\beta_{\phi}}{\alpha_{ML}} yz^{1/2} \quad (2b)$$

$$\dot{z} = x - \frac{c_D}{\alpha_{ML}} z^{3/2} . \quad (2c)$$

Dabei steht der Punkt für die Ableitung nach der mit Hilfe von t_0 normierten Zeit. Die Größe k tritt immer dort auf, wo in der Ableitung der Gleichungen ein Übergang von $\langle \bar{v}'^2 \rangle$ auf $\langle v_r'^2 \rangle$ notwendig war und deshalb eine Annahme über den Grad der Isotropie gemacht wurde:

$$k \langle \bar{v}'^2 \rangle = \langle v_r'^2 \rangle , \quad k \in \left[\frac{1}{3}, 1 \right] , \quad (3)$$

und genauso wird nun angesetzt

$$x^2 = 4k y z \quad , \quad (4)$$

was dem Ansatz gemäß (2.2.1/5) und (2.2.1/6) entspricht. Man beachte außerdem, daß aufgrund der Normierung folgt

$$\xi = \nabla - \nabla_{ad} \quad . \quad (5)$$

Aus der Bedingung der Kompatibilität von (2) und (4) ergibt sich im stationären Grenzfall zunächst wieder die schon bekannte Gleichung für die Parameter (2.2.1.7), hier verallgemeinert auf den Fall eines beliebigen Koeffizienten der Isotropie k :

$$\frac{2\beta_{\Pi}}{3c_D} = \frac{1}{3k} + \frac{\beta_{\phi}}{3c_D} \quad . \quad (6)$$

Damit die Gleichungen (2) aber generell entarten in dem Sinne, daß Π auch zeitabhängig immer durch die Beziehung (4) darstellbar ist, muß gelten $k = 1$, wie leicht durch Einsetzen zu verifizieren ist. Das heißt also, daß im Falle der Annahme eines total anisotropen Geschwindigkeitsfeldes ($\vec{v}' = v'_r \cdot \vec{e}_r$), und nur dann, das Drei-Gleichungs-Modell in der lokalen Formulierung auf ein Zwei-Gleichungs-Modell reduzierbar ist. Diese Feststellung gewinnt an Bedeutung aufgrund der Tatsache, daß viele der bekannten Modelle (Unno 1967, Castor 1968, Gough 1969) Zwei-Gleichungs-Modelle sind, oft abgeleitet unter der Annahme eines nur radialen konvektiven Geschwindigkeitsfeldes. Die Frage nach der Rechtfertigung des zusätzlichen Aufwandes eines Drei-Gleichungs-Modells reduziert sich also im vorgestellten Modell auf die physikalische Frage nach der Rechtfertigung eines total anisotropen Geschwindigkeitsfelds.

Einen Nachteil hat das Drei-Gleichungs-Modell mit dem Stellingwerf'schen Modell, den meisten bekannten Zwei-Gleichungs Modellen und dem Xiong'schen Drei-Gleichungs-Modell gemeinsam: Konvektion kann sich nicht auf einem überadiabatischen, anderweitig aber stationären Hintergrund entwickeln. Dies ist leicht anhand der Gleichungen (2) nachzuweisen. Sie lassen sich für den Fall einer instabilen Schichtung $\xi > 0$ bei Vorgabe verschwindender Konvektion zur Zeit $t = t_0$ und demgemäß einer approximativ Vernachlässigung der Dämpfungsterme in der Startphase geschlossen lösen. Die Lösung verschwindet identisch. In einem realistischen Modell bei Berücksichtigung aller Terme und insbesondere der Reynolds-Scherkräfte, die in der Gleichung für ϖ mit dem Vorfaktor $\varpi^{1/2}$ auftreten, kann die Konvektion jedoch durch radiale Bewegungen eingeschaltet werden. Anderfalls müßte man mit

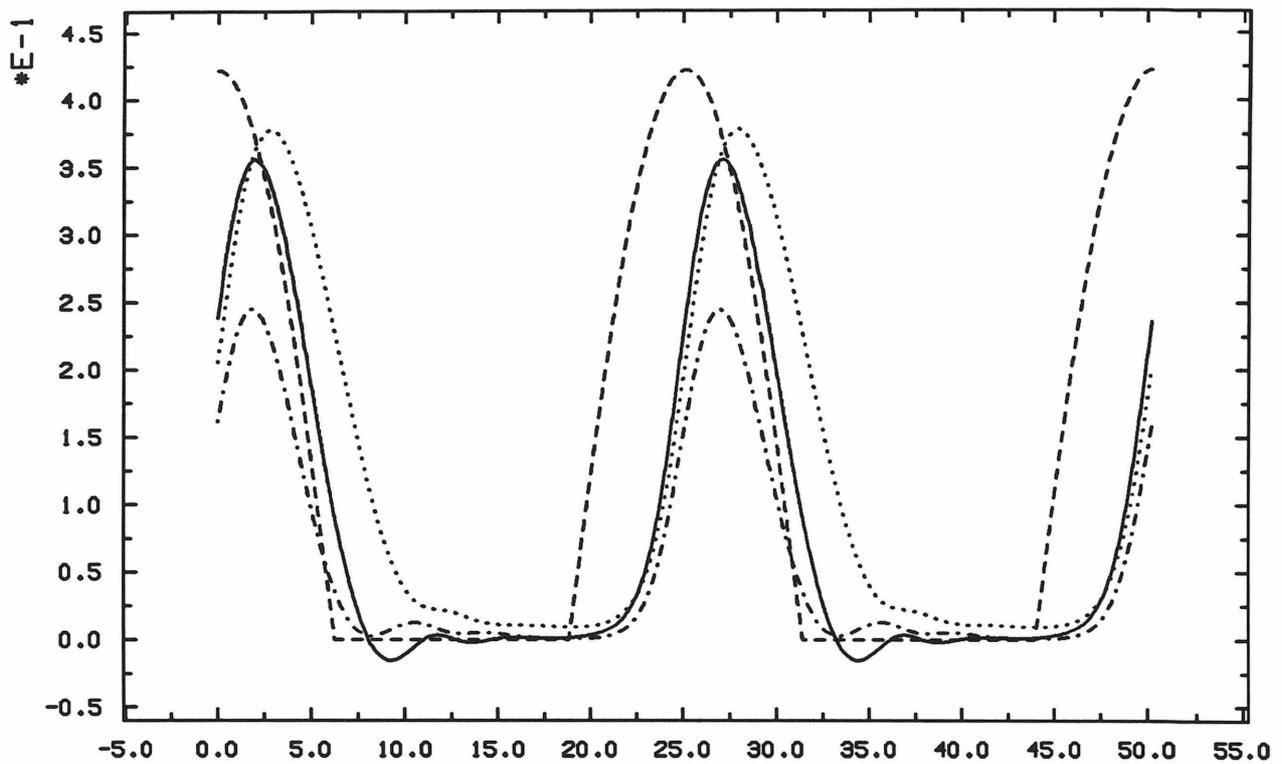


Abb. 1. : Periodische Lösung der Gleichungen (2), durchgezogene Linie: x , gepunktete Linie: z , strichpunktet: y . Das MLT-Ergebnis für z ist zum Vergleich gestrichelt gezeichnet, Frequenz: $\omega = 0.25$.

allerdings sehr künstlich erscheinenden Startbedingungen arbeiten (siehe auch Stellingwerf 1985).

Eine numerische Integration der obigen einfachen Gleichungen in der Zeit mit der Vorgabe einer periodischen Treiberfunktion

$$\xi(t) = \cos(\omega t) \quad (7)$$

gibt insbesondere Aufschluß über das Verhalten der Korrelation. Abbildung 1 zeigt eine periodische Lösung für $\omega = 0.25$. Dabei wurde für die freien Parameter die Standardwahl sowie für den MLT-Parameter $\alpha_{ML} = 1.5$ benutzt und außerdem das Geschwindigkeitsfeld isotrop angesetzt ($k = 1/3$). Die durchgezogene Linie steht für x (normiert für $\langle v'_r s' \rangle$), die gepunktete für die normierte konvektive kinetische Energie z , strichpunktet ist die normierte Entropievarianz y gezeichnet. Die gestrichelte Linie entspricht dem MLT-Ergebnis für die konvektive kinetische Energie. Es fällt auf, daß die Konvektion gewissermaßen erst verspätet einsetzt, ein Verhalten, welches von dem Stellingwerf'schen Modell bekannt ist (siehe z. B. Abbildung 4.1/2). Der Grund ist ein sehr langsames Anwachsverhalten für den

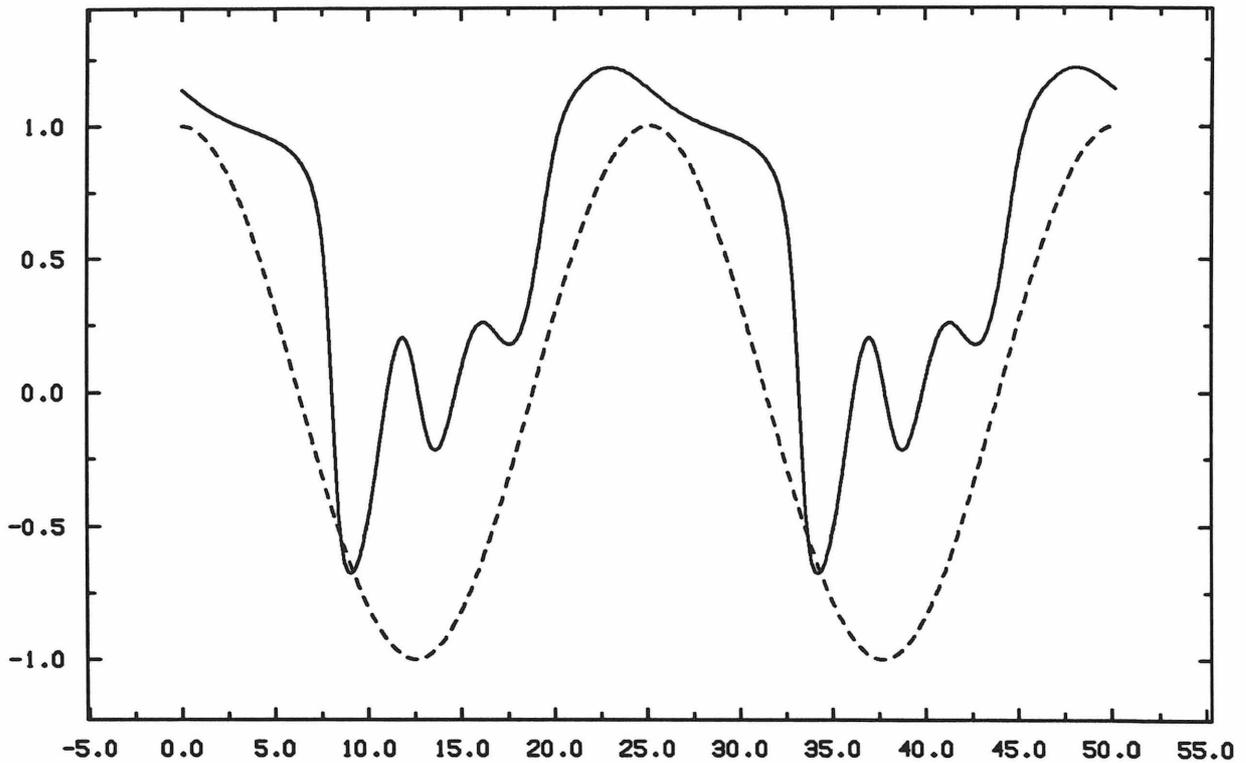


Abb. 2. : Die Korrelationsfunktion, berechnet aus der Lösung der Gleichungen (2) (siehe Abbildung 1). Die Treiberfunktion $\xi(t)$ ist gestrichelt gezeichnet, Frequenz $\omega = 0.25$.

Fall eines fast verschwindenden Startwertes. Wie schon angemerkt, kann jedoch bei Auftreten radialer Bewegungen der Reynolds-Scherterm ebenfalls treibend wirken und dieses Problem so beseitigen.

Eine stabile Schichtung führt zunächst auf eine Verringerung der Korrelation. Dies wird besonders deutlich in Abbildung 2, wo die Korrelationsfunktion

$$f := \frac{\Pi}{\sqrt{\frac{4}{3}\phi\omega}} \quad (8)$$

dargestellt ist. Gestrichelt gezeichnet ist dabei noch einmal die Treiberfunktion $\xi(t)$. Wann immer Konvektion entsteht, ist die Korrelation besonders hoch, wann immer sie verschwindet, ist sie vom Betrag her sehr niedrig. Auch kann sie negativ werden, was darauf hinweist, daß die Trägheit der Materie auch im Falle eines stabilisierenden Temperaturgradienten noch lange genug eine konvektive Bewegung aufrechterhält, selbst wenn dabei schließlich entropiereiches Material nach 'unten' und entropiearmes nach 'oben' gelangt, was zu einem Energiefluß in sozusagen umgekehrter Richtung führt. Im Ein-Gleichungs-Modell tritt dieser

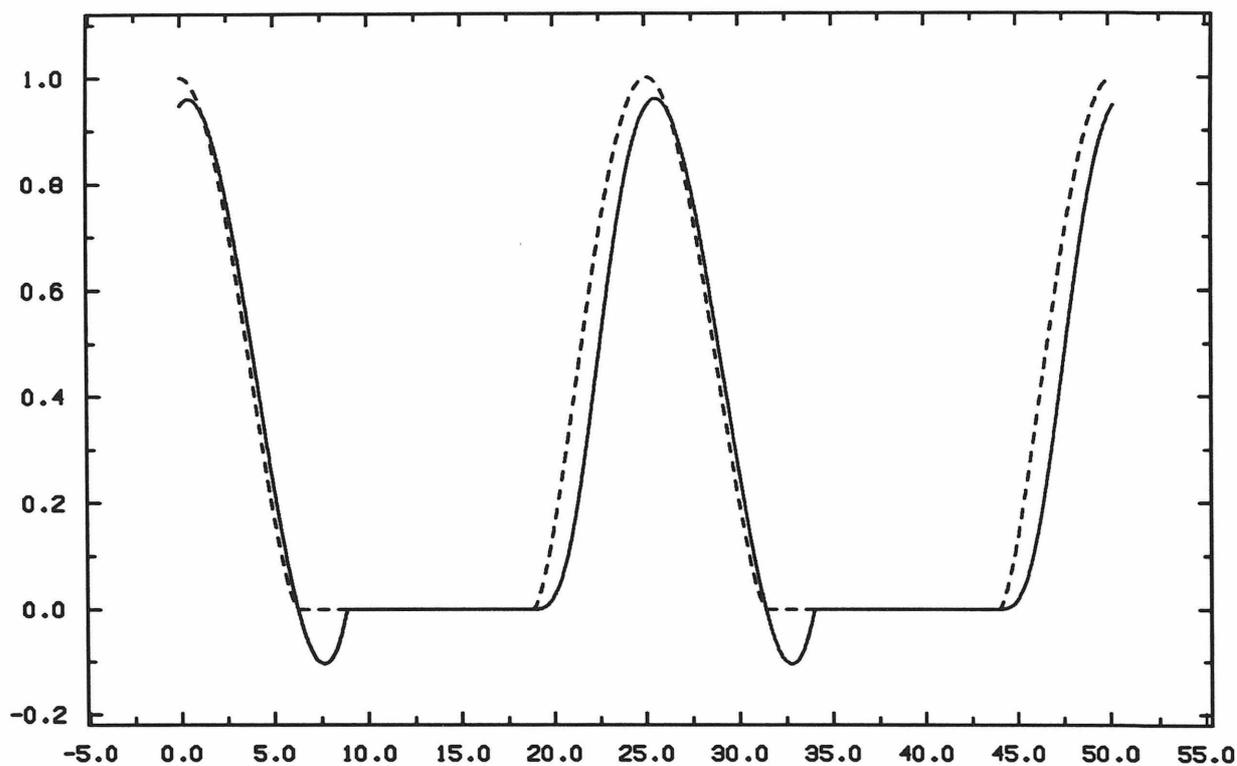


Abb. 3. : Das Analogon zur Größe x in der Ein-Gleichungs-Formulierung zum Vergleich. Das MLT-Ergebnis gestrichelt gezeichnet, Frequenz $\omega = 0.25$.

Effekt noch viel stärker auf, denn dort ist

$$\Pi \propto \varpi^{1/2} (\nabla - \nabla_{ad}) \quad (9a)$$

$$f = \text{sign}(\nabla - \nabla_{ad}) \quad , \quad (9b)$$

so daß ein subadiabatischer Temperaturgradient sofort zu einem negativen konvektiven Fluß führt, jedoch mit einer Korrelation vom Betrage 1. Dies ist in Abbildung 3 dargestellt unter der Benutzung der Modellgleichung (4.1/5). Mit dem konvektiven Fluß entwickelt sich auch die Dämpfung der konvektiven Geschwindigkeit, die somit im Drei-Gleichungs-Modell schwächer ist. Dies erinnert stark an die Näherung für den stabilen Fall im Stellingwerf'schen Konvektionsmodell. Dieses Modell und die schon analysierte Ein-Gleichungs-Formulierung stellen somit zwei Grenzfälle in Bezug auf die Korrelation dar. Ein weiterer interessanter Aspekt ist die 'innere' Zeitskala der Konvektion, die im Ein-Gleichungs-Modell nicht auftreten kann und am besten in der Korrelationsfunktion f zu erkennen ist. Für den Fall fast verschwindender Konvektion, in dem die Dämpfungsterme in guter Näherung vernachlässigt werden können, und bei konstantem Treiberterm ξ kann man aus den Gleichungen (2) ablei-

ten

$$\ddot{x} = \frac{8}{3}\xi x \quad , \quad (10)$$

was im Falle eines stabilisierenden Temperaturgradienten $\xi < 0$ zu einer Schwingung mit Periodendauer

$$T_x = \sqrt{\frac{3}{2}}\pi|\xi|^{-1/2} \quad (11)$$

führt. Die typische Zeitskala hängt also in dieser Näherung nur von der Größe des Treiberterms ab. Man wird von diesen Gleichungen ein sehr interessantes, nichtlineares Verhalten erwarten können, insbesondere in der Kopplung mit den Gleichungen der Hydrodynamik.

5. Ein-Zonen-Modell für pulsierende Sterne

Zum Verständnis der physikalischen Anregungsmechanismen in pulsierenden Sternen (Cepheiden, RR-Lyrae etc.) haben Ein-Zonen-Modelle wesentlich beigetragen. Das erste wurde von Baker 1966 veröffentlicht. Der Vorteil derartiger Modelle besteht in der Möglichkeit, mit einfachen Mitteln noch Aussagen qualitativer und zum Teil sogar quantitativer Natur abzuleiten, z. B. gelangt man sehr einfach zu Kriterien für dynamische und säkulare sowie für Pulsationsstabilität. Bisher wurde jedoch meist bei der Behandlung pulsierender Sterne die Konvektion entweder als stationär aus einem zugrundeliegenden, instabilen Gleichgewichtsmodell gegeben oder als instantan adjustierend betrachtet (siehe jedoch z. B. Stellingwerf 1982b, 1984a, b, c). Im Rahmen von Ein-Zonen-Modellen wurde die Zeitabhängigkeit der Konvektion in einer Arbeit von Stellingwerf (1986) berücksichtigt, die im Zusammenhang mit einer früheren Veröffentlichung eines solchen Modelles für radiative Sterne steht (Stellingwerf 1972). Das in dieser Arbeit benutzte Konvektionsmodell leitet sich allerdings nicht, wie dort behauptet, von dem Stellingwerf'schen Konvektionsmodell ab, es ist vielmehr ein ad hoc Ansatz für eine Zeitabhängigkeit der konvektiven Geschwindigkeit.

Im folgenden wird der der Stellingwerf'schen Arbeit zugrundeliegende Ansatz für die Ableitung eines Ein-Zonen-Modelles benutzt, wobei die Konvektion konsistent mit einbezogen wird. In der einfachen Form analog zu Stellingwerf (1972, 1986) werden zunächst die räumlichen Ableitungen nur grob approximiert, und ein Modell für den radiativen Fluß beinhaltet eine nur angenäherte Bestimmung der Temperatur mit Hilfe der Zustandsgleichung eines idealen Gases. Auch wird von der Konstanz der höheren thermodynamischen Ableitungen wie

$$\Gamma_1 := \left(\frac{\partial \ln p}{\partial \ln \rho} \right)_s \quad (1a)$$

$$\frac{\Gamma_2}{\Gamma_2 - 1} := \left(\frac{\partial \ln p}{\partial \ln T} \right)_s \quad (1b)$$

$$\Gamma_3 - 1 := \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln \rho} \right)_s \quad (1c)$$

ausgegangen, insbesondere ist also auch ∇_{ad} konstant. Dieses Modell wird nur in der Ein-Gleichungs-Formulierung benutzt.

Ein verfeinertes Modell, welches gestattet, die Effekte variabler Ionisation zu berücksichtigen, wird ebenfalls untersucht. Dieser Ansatz ist selbstkonsistent in Bezug auf die Behand-

lung der Zustandsgleichung, diesbezüglich werden keine Approximationen mehr benötigt, er ist allerdings schon nicht mehr so einfach analytischen Überlegungen zugänglich.

5.1. Einfache Version, analog zu Stellingwerf (1986)

5.1.1. Grundlagen des Ein-Zonen-Modells

Gegeben sei eine Massenschale der Masse M_s , die auf einer inerten, inneren Kugel mit Masse M_c , Leuchtkraft L_{in} und Radius r_c aufliegt und den zeitabhängigen äußeren Radius r hat. Die physikalischen Größen werden dabei auf ein Gleichgewichtsmodell mit durch den Index '0' gekennzeichneten Variablen bezogen. Die wesentliche Approximation besteht in der Annahme, daß für Dichte, Druck, Temperatur und spezifische innere Energie gilt, daß an jedem Ort in der Schale die logarithmische Ableitung nach der Massenkoordinate (siehe Anhang A1) für alle Zeiten den konstanten Wert behält, der auch im Hintergrundmodell angenommen wird, also z. B.

$$\partial_M \ln \rho = \partial_M \ln \rho_0 \quad . \quad (1)$$

Diese Beziehung rührt von der Näherung her, daß besagte Variable im Innern der Schale um Größenordnungen größer sind als am äußeren Rand, und eine entsprechende Approximation der Ableitung nach der Massenkoordinate liefert dann

$$\partial_M \rho \approx \frac{1}{M_s} (\rho_{out} - \rho) \approx -\frac{\rho}{M_s} \quad (2)$$

und damit die Beziehung (1). Im folgenden wird die Nomenklatur von Stellingwerf (1986) beibehalten, so definiert man den auf den Gleichgewichtswert normierten äußeren Schalenradius

$$X := \frac{r}{r_0} \quad (3)$$

und den Radius der inneren Kugel

$$\eta := \frac{r_c}{r_0} \quad . \quad (4)$$

Die Masse der äußeren Schale ist konstant, für die Zustandsgrößen werden nur in geeigneter Weise räumlich gemittelte Werte benutzt; so ist die mittlere Dichte einfach die Schalenmasse

dividiert durch das Schalenvolumen. Normiert auf den Wert des Hintergrundmodells erhält man

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1 - \eta^3}{X^3 - \eta^3} =: X^{-m} \quad . \quad (5)$$

Die vermöge obiger Gleichung definierte, die Geometrie repräsentierende Größe m ergibt sich explizit zu

$$m = \frac{1}{\ln(X)} \ln \left(\frac{X^3 - \eta^3}{1 - \eta^3} \right) \quad , \quad (6)$$

und als Wert im Gleichgewicht erhält man

$$m_0 := \lim_{X \rightarrow 1} m = \frac{3}{1 - \eta^3} \quad . \quad (7)$$

Die erste, die Dynamik beschreibende Größe ist also der normierte äußere Schalenradius X , der zusätzlich in dieser einfachen Approximation die mittlere Dichte durch Gleichung (5) angibt. Eine weitere dynamische Variable ist eine Funktion, die aus der Nicht-Adiabatie der Zustandsänderungen resultiert. Bei adiabatischen Prozessen hat man

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\Gamma_1} \quad , \quad (8)$$

so daß es naheliegt, alle nicht-adiabatischen Vorgänge in der Form eines Faktors, der im Gleichgewicht den Wert 1 hat, einzubeziehen:

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\Gamma_1} h \quad . \quad (9)$$

Schlußendlich erhält man also für den normierten Druck

$$\frac{p}{p_0} = h X^{-m\Gamma_1} \quad . \quad (10)$$

Die Temperatur wird im einfachen Ein-Zonen-Modell durch den Ansatz einer idealen Gasgleichung approximativ bestimmt, sie wird nur zur Darstellung des radiativen Flusses benötigt,

$$\frac{T}{T_0} = h X^{-m(\Gamma_1-1)} \quad , \quad (11)$$

und unter Benutzung der Approximation (1) für den Druck erhält man analog für die Skalenlänge

$$\frac{H_p}{H_{p0}} = X^{m-2} \quad . \quad (12)$$

Die Opazität der Materie wird durch ein Potenzgesetz in Dichte und Temperatur dargestellt,

$$\kappa \propto \rho^n T^{-s} \quad , \quad (13)$$

und aus der in der Lagrange-Formulierung der Gleichungen auftretenden radiativen Leuchtkraft (siehe Anhang A1), die aus dem über eine Kugeloberfläche mit Radius r integrierten radiativen Fluß q_{rad} resultiert,

$$L_{rad} := 4\pi r^2 q_{rad} = -\frac{64\pi^2 a c r^4 T^3}{3\kappa} \partial_M T \quad , \quad (14)$$

erhält man dann

$$\frac{L_{rad}}{L_{rad0}} = h^{s+4} X^{4+mq} \quad (15a)$$

$$q := n - (s + 4)(\Gamma_1 - 1) \quad . \quad (15b)$$

Der Turbulenzdruck wird im folgenden immer vernachlässigt werden außer in der Gleichung für die konvektive kinetische Energie, denn dort ist er von derselben Ordnung wie die beschriebene Größe selber. Auch die Reynolds-Scherterme werden nicht berücksichtigt. Dann lautet die Navier-Stokes-Gleichung in der Lagrange'schen Formulierung (siehe Anhang A1)

$$\partial_t v = -\frac{GM}{r^2} - 4\pi r^2 \partial_M p \quad , \quad (16)$$

dabei ist die Geschwindigkeit

$$v = \partial_t r \quad . \quad (17)$$

Als typische Zeiteinheit sei die Freifallzeit

$$t_f = \left(\frac{GM}{r_0^3} \right)^{-1/2} \quad (18)$$

gewählt, so daß im folgenden alle Zeitableitungen in der normierten Zeit

$$\tau := t/t_f \quad (19)$$

ausgedrückt werden können. Insbesondere erhält man für die Navier-Stokes-Gleichung (16)

$$\partial_\tau^2 X = h X^{2-m\Gamma_1} - X^{-2} \quad . \quad (20)$$

Es wird die Entropiegleichung in Lagrange'scher Schreibweise benutzt, Energieerzeugungsprozesse werden hier vernachlässigt. Auch der Austausch zwischen thermischer und konvektiver kinetischer Energie wird nicht berücksichtigt, denn der entsprechende Anteil ist verglichen mit den anderen auftretenden Termen von der Größenordnung p_t/p_0 und damit klein gegen 1. Damit ergibt sich

$$T \partial_t s = -\partial_M(L_{rad} + L_w) \quad , \quad (21)$$

mit der radiativen Leuchtkraft L_{rad} und der konvektiven Leuchtkraft

$$L_w := 4\pi r^2 j_w \quad . \quad (22)$$

Durch Anwendung der thermodynamischen Relation

$$T ds = \frac{p}{\rho(\Gamma_3 - 1)} (d \ln p - \Gamma_1 d \ln \rho) \quad (23)$$

folgt bei konstantem Γ_1

$$T \partial_t s = \frac{p_0}{\rho_0 t_f (\Gamma_3 - 1)} X^{-m(\Gamma_1 - 1)} \partial_\tau h \quad . \quad (24)$$

Die 'rechte Seite' der Entropiegleichung bedarf einer zusätzlichen Approximation aufgrund der Ableitung der Leuchtkräfte, welche einfach durch einen Differenzenquotienten ersetzt wird:

$$\partial_M(L_{rad} + L_w) \approx \frac{1}{M_s} (L_{rad} + L_w - L_{in}) \quad . \quad (25)$$

Führt man zusätzlich noch den Anteil der konvektiven Leuchtkraft an der Gesamtleuchtkraft im stationären Hintergrundmodell

$$\alpha := L_{w0}/L_{in} \quad (26)$$

ein, so erhält man

$$\partial_\tau h = X^{m(\Gamma_1 - 1)} \zeta_T (1 - (1 - \alpha) h^{s+4} X^{4+mq} - \alpha(L_w/L_{w0})) \quad , \quad (27)$$

mit dem aus der thermischen oder Kelvin-Helmholtz-Zeitskala t_T der Schale gebildeten dimensionslosen Parameter

$$\zeta_T := \frac{t_f}{t_{KH}} \quad (28a)$$

$$t_T := \frac{M_s p_0}{\rho_0 (\Gamma_3 - 1) L_{in}} \quad . \quad (28b)$$

Die konvektive Leuchtkraft ist noch aus dem Konvektionsmodell zu bestimmen.

5.1.2. Implementation des Konvektionsmodells

Das eigentliche Problem im Rahmen der Einbeziehung der Konvektion bei einem Ein-Zonen-Modell liegt in einer konsistenten Darstellung des Entropiegradienten in der Zone. Man kann natürlich nicht davon ausgehen, daß bei Vorhandensein von Konvektion die Entropie am äußeren Rand der Schale vernachlässigbar klein ist, schließlich kann durch Konvektion ein fast adiabatischer Temperaturgradient entstehen. Durch die Identität (5.1.1/23) ist jedoch der Entropiegradient mit den Gradienten von Druck und Dichte verknüpft, so daß man erhält

$$\frac{T\partial_r s}{(T\partial_r s)_0} = hX^{2-m\Gamma_1} \quad . \quad (1)$$

Als die die Konvektion repräsentierende Variable sei

$$y := \frac{\varpi}{\varpi_0} \quad (2)$$

eingeführt. Die Skalenhöhe Λ wird wieder ersetzt durch $\alpha_{\text{ML}} H_p$. Dann folgt für die konvektive Leuchtkraft und den auf den Gleichgewichtswert normierten Quellterm konvektiver kinetischer Energie

$$\frac{S_\varpi}{S_{\varpi_0}} = \frac{L_w}{L_{w0}} = hy^{1/2} X^{2-m\Gamma_1} \quad . \quad (3)$$

In der Lagrange'schen Schreibweise, bei Vernachlässigung der Reynolds-Scherterme sowie des Transportes kinetischer Energie, lautet die Gleichung für die konvektive kinetische Energie

$$\partial_t \varpi + \frac{2}{3} \rho \varpi \partial_t \frac{1}{\rho} = S_\varpi - \frac{c_D}{\Lambda} \varpi^{3/2} \quad . \quad (4)$$

Damit folgt die Gleichung für die normierte Variable y

$$X^{-(2/3)m} \partial_\tau \left\{ y X^{(2/3)m} \right\} = \zeta_c y^{1/2} X^{2-m} \left\{ h X^{-m(\Gamma_1-1)} - y \right\} \quad , \quad (5)$$

mit dem aus der für die Konvektion typischen Zeitskala t_c folgenden dimensionslosen Parameter

$$\zeta_c := \frac{t_f}{t_c} \quad (6a)$$

$$t_c := \frac{\varpi_0}{S_{\varpi_0}} \quad . \quad (6b)$$

Es erweist sich also insbesondere als sinnvoll, auf die Größe

$$z := y X^{(2/3)m} \quad (7)$$

überzugehen. Damit lauten dann die Gleichungen zusammengefaßt:

$$\partial_\tau^2 X = hX^{2-m\Gamma_1} - X^{-2} \quad (8a)$$

$$\partial_\tau z = \zeta_c z^{1/2} X^{2-(4/3)m} \left\{ hX^{-m(\Gamma_1-(5/3))} - z \right\} \quad (8b)$$

$$\partial_\tau h = X^{m(\Gamma_1-1)} \zeta_T \left\{ 1 - (1-\alpha)h^{s+4} X^{4+mq} - \alpha h z^{1/2} X^{2-m(\Gamma_1+(1/3))} \right\}. \quad (8c)$$

5.1.3. Stabilitätsanalyse

Aufgrund der Herleitung ist eine stationäre Lösung der Gleichungen das Hintergrundmodell, d. h.

$$X = h = z = 1. \quad (1)$$

Zur Untersuchung der Stabilität dieser Lösung wird nun eine Linearisierung der Gleichungen vorgenommen, d. h., es wird angesetzt

$$h = 1 + u\phi \quad (2a)$$

$$X = 1 + v\phi \quad (2b)$$

$$z = 1 + w\phi \quad (2c)$$

$$\phi = \exp(\lambda\tau), \quad (2d)$$

mit $u, v, w \ll 1$, und anschließend eine Entwicklung in der führenden Ordnung, d. h. linear in $\{u, v, w\}$, vorgenommen. Eine Lösung existiert dann und nur dann, wenn die Determinante der charakteristischen Matrix des linearisierten Systems

$$\begin{pmatrix} 1 & a - \lambda^2 & 0 \\ \zeta_c & -\zeta_c b & -(\lambda + \zeta_c) \\ \lambda + \zeta_T c & \zeta_T d & \zeta_T \frac{1}{2} \alpha \end{pmatrix} \quad (3)$$

mit den folgenden Hilfsgrößen

$$a := 4 - m_0 \Gamma_1 \quad (4a)$$

$$b := m_0 \left(\Gamma_1 - \frac{5}{3} \right) \quad (4b)$$

$$c := (1 - \alpha)(s + 4) + \alpha \quad (4c)$$

$$d := (1 - \alpha)(4 + m_0 q) + \alpha \left(2 - m_0 \left(\Gamma_1 + \frac{1}{3} \right) \right) \quad (4d)$$

verschwindet. Das charakteristische Polynom in λ ist von viertem Grade, und das Hintergrundmodell ist stabil, wenn alle Wurzeln dieses Polynoms einen negativen Realteil haben, es ist instabil, wenn mindestens eine der Wurzeln einen positiven Realteil aufweist. Diese Analyse läßt sich mit Hilfe eines sehr eleganten Satzes von Hurwitz (Uspensky 1948) durchführen, welcher auf Polynome beliebigen Grades anwendbar ist und auf den vorliegenden Fall spezialisiert lautet:

Satz (Hurwitz): Sei $P(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + x^4$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten A, B, C, D , dann hat dieses Polynom ausschließlich Nullstellen mit negativem Realteil dann und nur dann, wenn folgende Ungleichungen gelten:

$$A > 0 \quad (i)$$

$$B > 0 \quad (ii)$$

$$BC - AD > 0 \quad (iii)$$

$$D(BC - AD) - B^2 > 0 \quad (iv)$$

Die aus den Ungleichungen (i) bis (iv) folgenden Kriterien seien im folgenden kurz, zum Teil nur in Grenzfällen, diskutiert:

i. Zunächst sei für die Koeffizienten der Opazität angenommen

$$n + s > -4. \quad (5)$$

Dies ist gerechtfertigt, denn typische Werte für n liegen zwischen 1 und 3, s ist aber fast immer größer als -5 . Dann folgt aus dem ersten Kriterium eine Bedingung für Stabilität an die unmittelbar mit der Schalendicke verknüpfte Größe m_0 :

$$m_0 > 4 \frac{(1 - \alpha)(s + 3) + \alpha}{(1 - \alpha)(n + s + 4) + (1/2)\alpha} \quad (6)$$

Diese Bedingung hat auch schon Stellingwerf in seiner Arbeit erhalten (Stellingwerf 1986). Auffallend ist dabei die Tatsache, daß die Einschränkung im vollständig konvektiven Falle restriktiver ist als im radiativen:

$$m_0 > \begin{cases} 4 \frac{s + 3}{n + s + 4} & , \text{ für } \alpha = 0 \\ 8 & , \text{ für } \alpha = 1. \end{cases} \quad (7)$$

Generell ist also zu folgern, daß eine dicke Schale instabiler ist als eine dünne, wobei die Konvektion diesen Effekt noch verstärkt. Dieses vorliegende Kriterium ist eng verknüpft mit einem Kriterium, daß auf Jeans (1928) zurückgeht. Im Falle des Grenzüberganges $r_c \rightarrow 0$, die Schale wird also zur homogenen Vollkugel ($m_0 = 3$), erhält man aus (6)

$$(1 - \alpha)(3n - s) > \frac{5}{2}\alpha \quad . \quad (8)$$

Im konvektionsfreien Falle $\alpha = 0$ ist dies das Jeans-Kriterium bei vernachlässigbarer Energieerzeugung.

ii. Die zweite Bedingung für Stabilität lautet allgemein

$$m_0 \left\{ \zeta_T \left[(1 - \alpha)(n + s + 4) - \frac{\alpha}{3} \right] + \zeta_c \Gamma_1 \right\} > 4 \left\{ \zeta_T \left[(1 - \alpha)(s + 3) + \frac{\alpha}{2} \right] + \zeta_c \right\} \quad . \quad (9)$$

Im konvektionsfreien Fall reduziert sich dies wieder auf das Kriterium (7a), im vollständig konvektiven Fall $\alpha = 1$ hat man hingegen

$$\zeta_T < \zeta_c \frac{m_0 \Gamma_1 - 4}{2 + (1/3)m_0} \quad . \quad (10)$$

Dieses Kriterium weicht etwas von dem entsprechenden Stellingwerf'schen ab, was in der Benutzung des anderen Konvektionsmodells begründet liegt. Im rein adiabatischen Falle, d. h. $\zeta_T = 0$, oder für fast instantan adjustierende Konvektion, d. h. $\zeta_c \rightarrow \infty$, lautet dieses Kriterium

$$\Gamma_1 > \frac{4}{m_0} \quad , \quad (11)$$

was im Falle einer homogenen Vollkugel ($m_0 = 3$) entartet zu der sehr bekannten Bedingung

$$\Gamma_1 > \frac{4}{3} \quad . \quad (12)$$

iii. Die weiteren Kriterien werden nur noch im Falle verschwindender Konvektion ausgewertet, da sie sich sonst einer einfachen Erklärung entziehen. Das dritte Kriterium ist in diesem Falle identisch mit der Bedingung (7a), das Vierte lautet

$$\Gamma_1 > \frac{1}{s + 4} \left(\frac{4}{m_0} + n + s + 4 \right) \quad . \quad (13)$$

In den numerischen Rechnungen wurden die Kriterien immer vollständig ausgewertet, sowohl in der hier vorgestellten analytischen Form als auch mit Hilfe eines Eigenwertproblem, welches in sehr allgemeiner Form für solche Zwecke formuliert werden kann (siehe Anhang A2).

5.1.4. Numerische Experimente

Ein-Zonen-Modelle wurden im wesentlichen bisher zur Untersuchung der prinzipiellen Mechanismen, die zu Pulsationsinstabilitäten bei Sternen führen, benutzt. Die im vorhergehenden Kapitel abgeleiteten Kriterien resultierten aus den linearisierten Gleichungen. Es ist jedoch nicht minder interessant, periodische Lösungen dieser Gleichungen zu konstruieren, insbesondere, da die nichtlinearen Terme in einer solchen Lösung die Amplitude begrenzen. Es wird allgemein vermutet, daß die Pulsationen von Sternen nichtlineare Limitzyklen dieser Systeme sind. Im folgenden werden zwei Beispiele derartiger Lösungen diskutiert (Kuhfuß 1987). Solche Rechnungen sind auch schon in der Literatur zu finden (Stellingwerf 1972, 1986). Der als 'Strip Case' bezeichnete Fall einer Parameterwahl von Stellingwerf (1986) führt auf eine periodische Lösung. Diese unterscheidet sich von der Stellingwerf'schen, die nicht auskonvergiert ist in dem Sinne, daß lediglich eine Integration in der Zeit vorgenommen wurde, diese aber nicht weit genug reichte, um die willkürlich gewählten Anfangsbedingungen auszurelaxieren. Die anderen Fälle der Stellingwerf-Arbeiten lieferten oft keine streng periodischen Lösungen, ein Fall scheint von der Parameterwahl her zumindest bei Benutzung des in der vorliegenden Arbeit beschriebenen Konvektionsmodells stabil zu sein (Fall 3: 'Red edge'). Manche der Modelle führen zu oszillierenden Lösungen mit jedoch beliebig anwachsender Amplitude und Zeitdauer zwischen zwei Phasen maximaler Kompression.

Zur numerischen Bestimmung periodischer Lösungen wird zunächst eine Stabilitätsanalyse mit Hilfe der in Kapitel 5.1.3. abgeleiteten Kriterien sowie unabhängig eine numerische Stabilitätsanalyse durchgeführt (siehe Anhang A2). Im Falle nachgewiesener Instabilität wird dann eine approximative periodische Lösung durch Vorwärtsintegration in der Zeit mit Hilfe eines Adams-Verfahrens konstruiert. Wenn sich dabei eine hinreichend ausrelaxierte Periode ergibt, wird ein Iterationsverfahren angewandt, daß sich als nicht-lineares Eigenwertproblem bezeichnen läßt. Dabei sind die Periode T sowie die Werte der Funktionen an den zeitlichen Stützstellen $\tau_0 = 0$ bis $\tau_N = T$ zu bestimmen. Als Bestimmungsgleichungen dienen die auf den N Zwischenräumen der $N + 1$ Stützstellen diskretisierten (two-point centered differences) Differentialgleichungen, wobei die zweite Ableitung in der Navier-Stokes-Gleichung eliminiert wird durch Einführung der Geschwindigkeit als vierte Unbekannte, sowie die vier Periodizitätsbedingungen und die Definition des Beginns der Periode: $X_0 = 1$. Den $4 * (N + 1) + 1$ Unbekannten stehen also $4 * N + 4 + 1$, also genausoviele Gleichungen gegenüber. Das nichtlineare System wird mit Hilfe eines Newton-Raphson-Verfahrens gelöst, wobei ein schneller Al-

gorithmus zur Lösung der dabei auftretenden Jacobi-Matrix mit spezieller Struktur entwickelt worden ist. Derartige Methoden sind in ähnlicher Form schon von Baker und Gough benutzt worden (Baker, private Mitteilung, unveröffentlichtes Manuskript; Gough, unveröffentlichtes Manuskript).

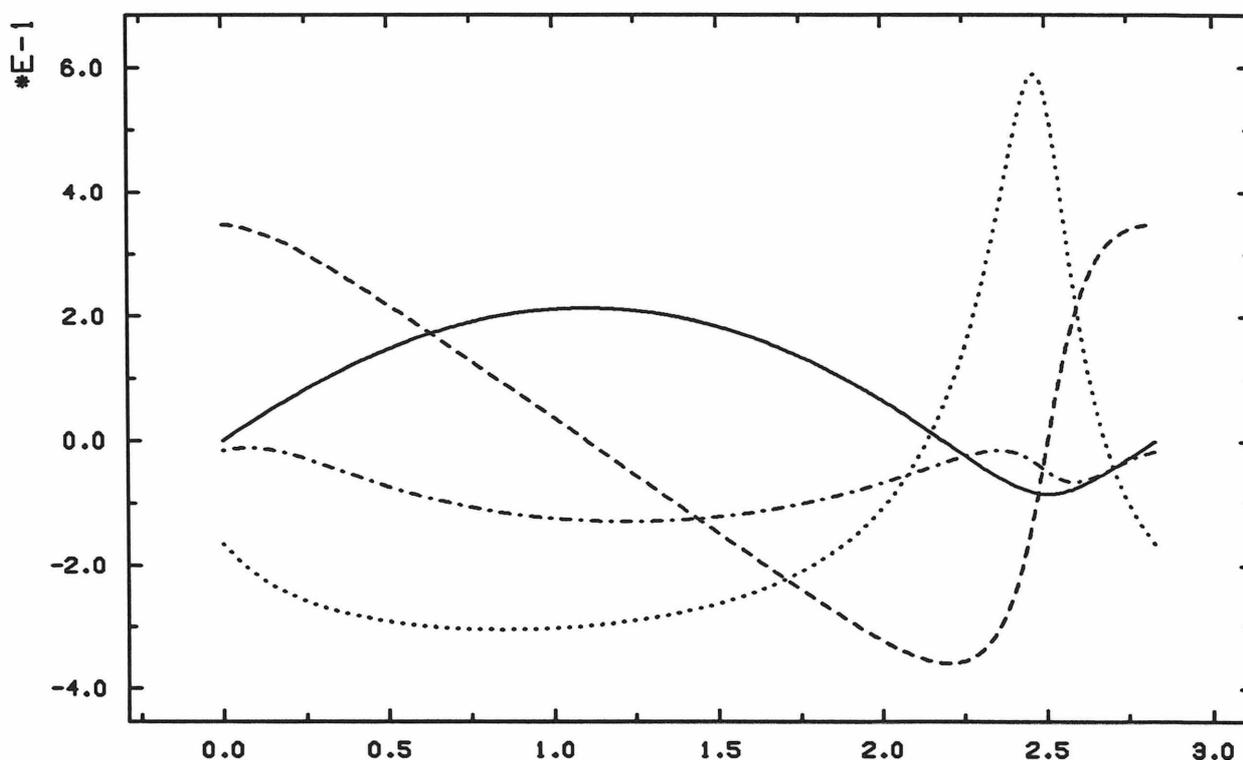


Abb. 1. : Periodische Lösung für $\Gamma_1 = 1.1$, $n = 1$, $s = 3$, $\zeta_c = \zeta_T = 1$, $\alpha = 0.2$ und $\eta = 0.887904$ (Stellingwerf 1986, case 2, 'Strip'). Zeiteinheit ist die Freifallzeit. Durchgezogene Linie (Radius): $X - 1$, gepunktete Linie (Konvektion): $(y - 1)/2$, gestrichelte Linie (Geschwindigkeit): $U := \partial_\tau X$, strichpunktiert (Nicht-Adiabasie): $h - 1$.

Die Ergebnisse der Rechnung für den 'Strip'-Fall von Stellingwerf sind in den Abbildungen 1 und 2 zusammengefaßt. Die Kurven für die Geschwindigkeit U und Radius X sehen recht realistisch aus (siehe Abbildung 1). Die Nichtadiabasie der Pulsation ist deutlich an der Veränderlichkeit der Funktion h zu erkennen, und auch die Konvektion y variiert beträchtlich. Nicht realistisch ist dagegen das übergroße und zeitlich sehr scharf begrenzte Maximum der Leuchtkraft zum Zeitpunkt größter Kompression (Abb. 2). Dieses resultiert aus der Tatsache, daß in diesen einfachen Modellen der amplitudenbegrenzende Dissipationsmechanismus nicht auf den Vorgängen in den tieferen Schichten des Sternes beruht, sondern alleine auf der Abstrahlung der Energie über die Leuchtkraft. Ausgedehnte Modellrechnungen (z. B. Baker,

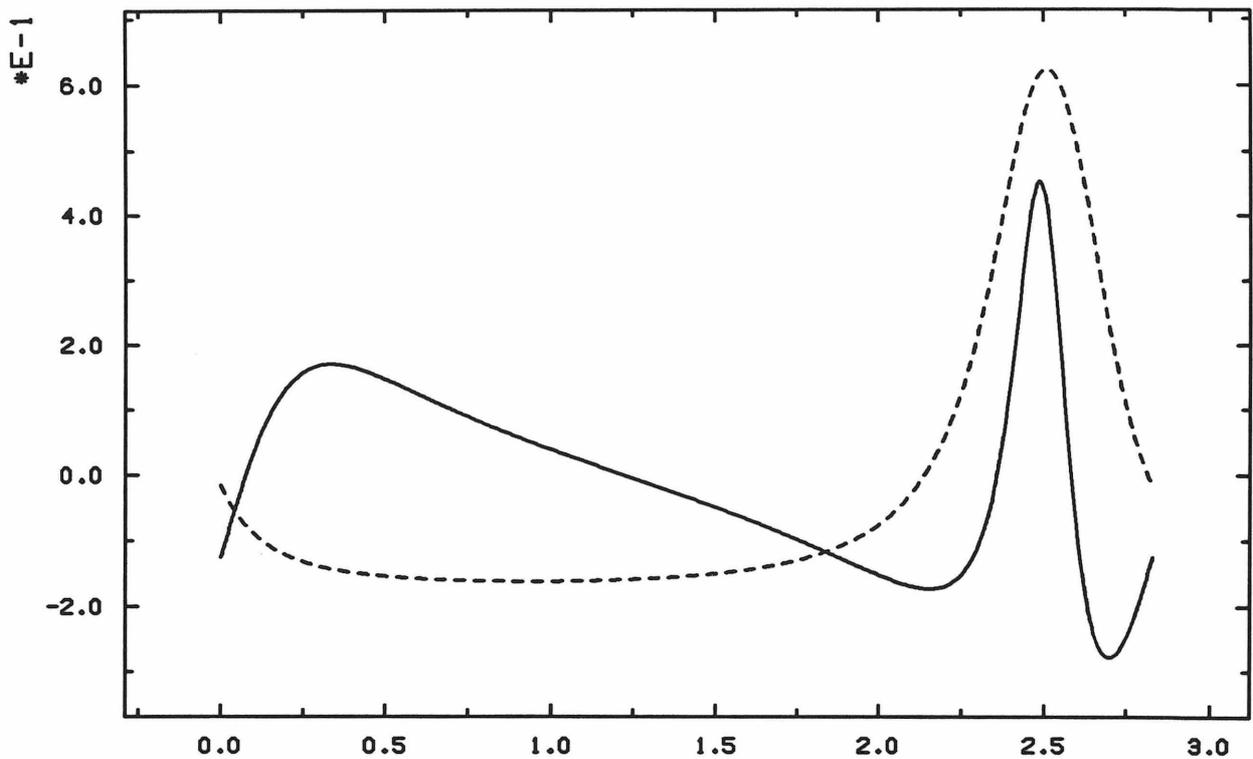


Abb. 2. : Die aus der periodischen Lösung resultierende Lichtkurve $(L/L_{in}) - 1$ (durchgezogene Linie) und die Änderungen des relativen Anteils der konvektiven Leuchtkraft im Vergleich zum Wert des Hintergrundmodells $\alpha(t) - \alpha$.

Kippenhahn 1962, 1965, Christy 1966) zeigen jedoch, daß unmittelbar unter einer treibenden Schicht, und eine solche wird ja hier simuliert, eine dämpfende liegt ('principal dissipation zone'). Dies ist sicherlich der wesentliche Nachteil eines Ein-Zonen-Modelles, um so mehr, als dieser Effekt auch bei rein radiativen Modellen erhalten wurde, er also nicht durch die Konvektion verursacht wird, wie vielleicht der hohe Anteil des konvektiven Transportes nahelegen scheint.

Die Lichtkurve wäre ohne das Leuchtkraftmaximum durchaus im Einklang mit den Beobachtungen. Es wäre sicher auch möglich, dieses Maximum durch geeignete Parameterwahlen etwas zu reduzieren. Der durch Konvektion getragene Anteil der Leuchtkraft liegt zwischen ca. 5% und ca. 80%, wobei der letztere, etwas unerwartete Wert jedoch zum Zeitpunkt der unphysikalischen Spitze auftritt. Die Radiusvariationen sind mit ca. 20% durchaus realistisch. Anzumerken ist noch, daß die in der Beobachtung verwandte Methode, den Gleichgewichtsradius bei Cepheiden zu bestimmen, nämlich als zeitgemittelten Radius, schon auf dem Hintergrund dieses Modells etwas fragwürdig erscheint, der Minimalradius wäre hier offenbar eine bessere Approximation (Gautschy, 1986).

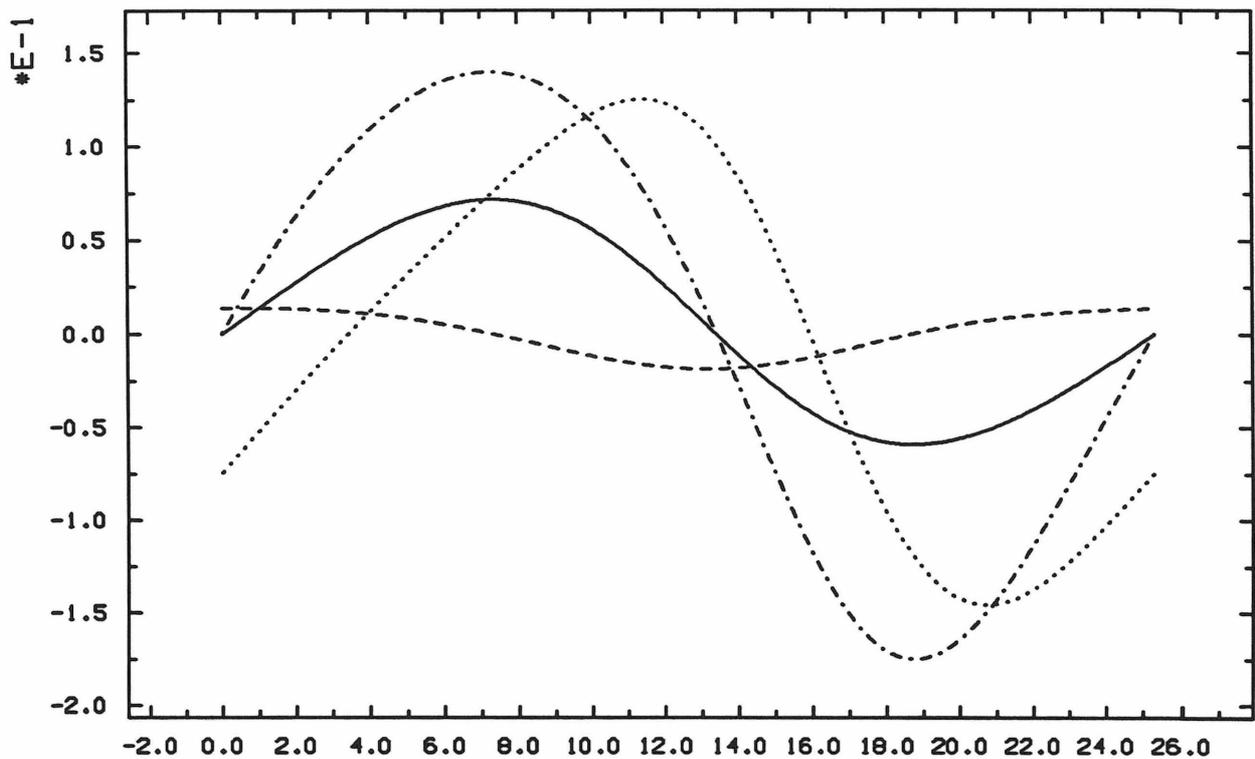


Abb. 3.: Periodische Lösung für $\Gamma_1 = 1.1$, $n = 0$, $s = 0$, $\zeta_c = \zeta_T = 1$, $\alpha = 0.9$ und $\eta = 0.79$. Zeiteinheit ist die Freifallzeit. Durchgezogene Linie (Radius): $X - 1$, gepunktete Linie (Konvektion): $y - 1$, gestrichelte Linie (Geschwindigkeit): $U := \partial_r X$, strichpunktiert (Nicht-Adiabasie): $h - 1$.

Das Wesentliche an dem in den Abbildungen 3 und 4 vorgestellten Modell ist die Tatsache, daß eine konstante Opazität ($n = s = 0$) zugrundeliegt und darüber hinaus im Hintergrundmodell 90% der Leuchtkraft konvektiv transportiert wird. Man kann also durchaus vermuten, daß der die Pulsation treibende Mechanismus nicht der bekannte sogenannte κ -Effekt ist, sondern einer, der auf der Basis der zeitabhängigen Konvektion zustande kommt. In diesem Zusammenhang sei auf die vergleichsweise lange Periode hingewiesen, die diesem Modell eigen ist. In der Tat vermutet man bei gewissen langperiodischen Variablen, daß die Konvektion nicht unwesentlich zum Erscheinungsbild beiträgt. Die Leuchtkraft-Spitze ist in diesem Modell nicht vorhanden. Dies dürfte zwei Gründe haben. Zum einen sind die Radiusvariationen so gering, daß es nicht zu einer zu starken Kompression kommt (siehe Abbildung 3), darüber hinaus ist der konvektive Transport in der Zeit höchster Kompression mit ca. 96% relativem Anteil und aufgrund der verglichen mit der langen Periode kurzen typischen Zeitskala der Adjustierung der Konvektion wohl so effektiv, daß nicht genug Energie aufgestaut werden kann.

Dieses Modell muß trotzdem als unrealistisch angesehen werden. Zum einen haben die

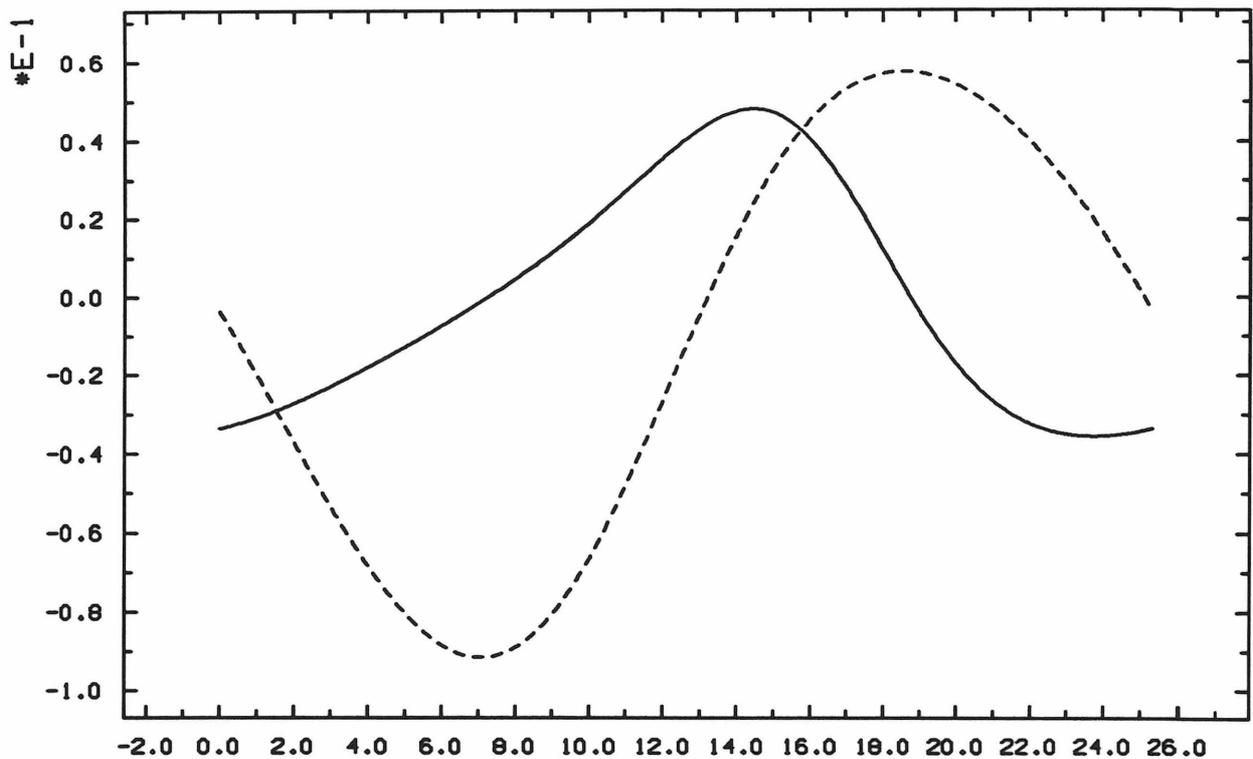


Abb. 4. : Die aus der periodischen Lösung resultierende Lichtkurve $(L/L_{in}) - 1$ (durchgezogene Linie) und die Änderungen des relativen Anteils der konvektiven Leuchtkraft im Vergleich zum Wert des Hintergrundmodells $\alpha(t) - \alpha$.

Lichtkurven bei den bisher beobachteten Pulsationsveränderlichen alle eine Anstiegsphase, die kürzer ist als die Abstiegsphase, und weiterhin sind die hier gefundenen Radiusvariationen zu symmetrisch. Es ist auch nicht leicht vorstellbar, die Opazitätsparameter, die hier so gewählt wurden, um eine Variation dieser wesentlichen Größe auszuschalten, in der Natur in instabilen Schichten eines Sternes zu finden. Diese periodische Lösung kann also nur als Indiz für die mögliche Existenz einer konvektiv getriebenen Pulsation angesehen werden.

5.2. Ein-Zonen-Modell mit beliebiger Zustandsgleichung

In obigem Ein-Zonen-Modell waren unter anderem sehr restriktive Approximationen in Bezug auf die Zustandsgleichung enthalten, so z. B. die Bestimmung der Temperatur in der Näherung eines idealen Gases sowie die Konstanz bestimmter höherer thermodynamischer Ableitungen. Es ist jedoch bekannt, daß die Dynamik von Pulsationen sehr stark beeinflußt und zum Teil erst verursacht wird durch die Existenz der Schichten in einem Stern, wo die Materie in nur teilweise ionisierter Form vorliegt. Dieser Tatsache wurde in der einfachen Formulierung nur durch ein konstantes $\Gamma_1 < 5/3$ Rechnung getragen. Jedoch wäre es denkbar, daß Effekte auftreten, die auf einer Variabilität des Ionisationsgrades beruhen. Unter anderem könnte eine explizite Berechnung der Änderungen des Ionisationsgrades während der verschiedenen Phasen einer Pulsation z. B. auch das Auftreten des unphysikalischen Leuchtkraftmaximums dämpfen, denn durch Ionisation kann zum einen eine Druckerhöhung ohne allzugroße Temperaturerhöhung stattfinden, zum anderen kann die Temperaturerhöhung selbst geringer sein, da ein Teil der durch die Kompression erzeugten thermischen Energie aufgrund der Ionisation kurzfristig abgeführt und als Ionisationsenergie gespeichert wird. Aus diesem Grunde und aufgrund des generellen Interesses an der Frage nach den Effekten variabler Ionisation wurde ein etwas verallgemeinertes Ein-Zonen-Modell entwickelt. Hierbei werden die Einflüsse der Ionisation auf die Opazität nicht explizit berücksichtigt, sondern diese wieder nur in Form eines Potenzgesetzes in Dichte und Temperatur approximiert. Es würde aber in der hier vorgestellten Formulierung ohne Schwierigkeiten möglich sein, realistischere Opazitäten zu benutzen. Das gleiche gilt auch für die ebenfalls nur in Potenzgesetzform mit einbezogene Energieerzeugung.

5.2.1. Die Grundgleichungen

Die Ableitung dieses Modells wird im folgenden kurz skizziert. Das Szenarium ist dasselbe wie in Kapitel 5.1.1. Die Nomenklatur unterscheidet sich etwas von der Stellingwerf'schen; die auf das Hintergrundmodell normierten Variablen werden nicht mehr abstrakt umbenannt, sondern suggestiver nur mit einem Apostroph versehen. Die Größen t_f , τ und m_0 werden übernommen, und die Dichte ρ' berechnet sich wie vorher

$$\rho' = \frac{1 - \eta^3}{r'^3 - \eta^3}. \quad (1)$$

Die Normierungsgröße für die Geschwindigkeit sei

$$v_0 = \frac{r_0}{t_f}. \quad (2)$$

Der wesentliche Unterschied zum vorherigen Modell besteht in der Benutzung einer Zustandsgleichung für die thermische Energie e und den thermischen Druck p , beide Größen als abhängig betrachtet von der Dichte ρ und der Temperatur T , die jetzt eine der Variablen des Modells darstellt und somit nicht mehr approximiert werden muß. Auch kann die Annahme der Konstanz der Lagrange'schen logarithmischen Ableitung dahingehend relaxiert werden, daß deren Gültigkeit für Druck und Temperatur gefordert wird. Dies alleine ist schon hinreichend zur Darstellung des Entropiegradienten:

$$(\partial_M s)' = c'_p - f_s (c'_p - \beta') \quad (3a)$$

$$c_p := T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p \quad (3b)$$

$$\beta := p \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T \quad (3c)$$

$$f_s := \frac{\beta_0 \partial_M \ln p_0}{\partial_M s_0}. \quad (3d)$$

Für die Opazität sowie die Energieerzeugung werden Potenzansätze benutzt:

$$\kappa \propto \rho^n T^{-s} \quad (4a)$$

$$\epsilon \propto \rho^\mu T^\nu. \quad (4b)$$

Man erhält nun sowohl Gleichungen für die normierten Größen als auch für die mit '0' indizierten Variablen des stationären Hintergrundmodells, letztere folgen einfach aus den jeweiligen Gleichungen bei verschwindender Zeitableitung. Zunächst ergeben sich wieder verschiedene typische Zeitskalen, die thermische Zeitskala, eine aus der Energieerzeugung folgende sowie die für die Konvektion typische,

$$t_T := \frac{e_0 M_s}{L_{in}} \quad (5a)$$

$$t_n := \frac{e_0}{\epsilon_0} \quad (5b)$$

$$t_c := \frac{\varpi_0}{S_0}, \quad (5c)$$

mit den entsprechenden dimensionslosen Modellparametern

$$\zeta_T := \frac{t_f}{t_T} \quad (6a)$$

$$\zeta_n := \frac{t_f}{t_n} \quad (6b)$$

$$\zeta_c := \frac{t_f}{t_c}. \quad (6c)$$

Zwei andere dimensionslose Parameter messen die Abweichung der Zustandsgleichung von der eines idealen Gases und das Verhältnis von konvektiver kinetischer zu thermischer Energie, beide bezogen auf das Hintergrundmodell:

$$f_1 := \frac{p_0}{\rho_0 e_0} \quad (7a)$$

$$f_2 := \frac{\varpi_0}{e_0}. \quad (7b)$$

Weiterhin bezeichne q_c die konvektive Leuchtkraft des Hintergrundmodells in Einheiten der Kernleuchtkraft L_{in} . Die Leuchtkraft am äußeren Rand kann aufgrund einer Energieerzeugung in der Schale natürlich höher sein. Der Turbulenzdruck wird wieder in der Navier-Stokes-Gleichung vernachlässigt, jedoch ist der Austausch zwischen thermischer und konvektiver kinetischer Energie berücksichtigt. Das mag zunächst inkonsistent erscheinen, allerdings muß für die Navier-Stokes-Gleichung die Ableitung des Turbulenzdruckes nach der Massenkoordinate approximiert werden und nicht der Druck selbst. Als erste Näherung sei deshalb diese Ableitung vernachlässigt. Eine Rechtfertigung dafür wäre z. B. ein Hintergrundmodell mit $f_2 \ll 1$.

Die Struktur des Hintergrundmodells ist durch folgende Gleichungen festgelegt:

$$\partial_M p_0 = - \frac{GM}{4\pi r_0^4} \quad (8a)$$

$$H_{p0} = \frac{p_0 r_0^2}{GM \rho_0} \quad (8b)$$

$$\Lambda_0 = \alpha_{ML} H_{p0} \quad (8c)$$

$$\mathbf{S}_{\varpi 0} = \frac{c_D}{\Lambda_0} \varpi_0^{3/2} \quad (8d)$$

$$L_{w0} = q_c L_{in} \quad (8e)$$

$$\Pi_0 = \frac{L_{w0}}{4\pi r_0^2 \rho_0 T_0} \quad (8f)$$

$$S_{\varpi_0} = \frac{\nabla_{ad} T_0}{H_{p0}} \Pi_0 \quad . \quad (8g)$$

Diese Gleichungen folgen bei der Ableitung der dynamischen Gleichungen aus der Bedingung, daß das Hintergrundmodell eine stationäre Lösung der Gleichungen sein soll, d. h. $v' = 0$ und der Wert 1 für alle anderen gestrichelten Variablen sollen eine, natürlich eventuell instabile Lösung des Systems sein. Die dann folgenden dynamischen Gleichungen für die gestrichelten Variablen, noch ohne Spezifikation des Konvektionsmodells, lauten

$$\partial_\tau r' = v' \quad (9a)$$

$$\partial_\tau v' = p' r'^2 - r'^{-2} \quad (9b)$$

$$\Lambda' = H'_p = r'^{-2} \rho'^{-1} \quad (9c)$$

$$\partial_\tau \varpi' = -m_0 r'^2 v' \frac{2}{3} \rho' \varpi' + \zeta_c \left(S'_{\varpi} - r'^2 \rho' \varpi'^{3/2} \right) \quad (9d)$$

$$L'_{rad} = r'^4 \rho'^{-n} T'^{s+4} \quad (9e)$$

$$\begin{aligned} \partial_\tau e' = & -f_1 m_0 r'^2 v' p' + \zeta_n \rho'^\mu T'^\nu - f_2 \zeta_c \left(S'_{\varpi} - r'^2 \rho' \varpi'^{3/2} \right) \\ & + \zeta_T \left\{ 1 - \left(1 + \frac{\zeta_n}{\zeta_T} - q_c \right) L'_{rad} - q_c L'_w \right\} \end{aligned} \quad (9f)$$

$$L'_w = r'^2 \rho' T' \Pi' \quad (9g)$$

$$S'_{\varpi} = \nabla'_{ad} L'_w \quad (9h)$$

Die noch notwendigen Größen Π_0 und $\partial_M s_0$ sowie Π' werden im Rahmen der Behandlung der Konvektion zu spezifizieren sein.

Im Gleichgewichtszustand ergibt sich außen aufgrund der Energieerzeugung in der Schale die Leuchtkraft

$$L_0 = \left(1 + \frac{\zeta_n}{\zeta_T} \right) L_{in} \quad , \quad (10)$$

und als normierte Leuchtkraft am äußeren Rand erhält man

$$L' = \frac{\zeta_T}{\zeta_T + \zeta_n} \left\{ \left(1 + \frac{\zeta_n}{\zeta_T} - q_c \right) L'_{rad} + q_c L'_w \right\} \quad . \quad (11)$$

5.2.2. Konvektion: Ein-Gleichungs-Modell

Aus der Darstellung der Größe Π im Ein-Gleichungs-Modell leitet man unmittelbar die noch notwendigen Gleichungen zur Vervollständigung des Ein-Zonen-Modells ab:

$$\Pi' = \varpi'^{1/2} (\partial_M s)' \quad (1a)$$

$$-\partial_M s_0 = \frac{\Pi_0}{\alpha_s \Lambda_0 \varpi_0^{1/2} 4\pi r_0^2 \rho_0} . \quad (1b)$$

Für den Vergleich mit dem Drei-Gleichungs-Modell werden zusätzlich unter einer Isotropieannahme noch folgende, mit der Varianz der Entropie verknüpfte Beziehungen eingeführt:

$$\phi_0 := \frac{3}{4} \frac{\Pi_0^2}{\varpi_0} \quad (2a)$$

$$\phi' := \frac{\Pi'^2}{\varpi'} . \quad (2b)$$

Damit sind die Gleichungen vollständig, es bedarf nur noch weniger Eingabeparameter, um ein Modell zu charakterisieren.

5.2.3. Konvektion: Drei-Gleichungs-Modell

Die Ableitung der Gleichungen für die Variablen Π' und ϕ' aus der lokalen Form des Drei-Gleichungs-Modells bereitet keine weiteren prinzipiellen Schwierigkeiten. Hilfreich ist noch folgende Darstellung der Ableitung der Geschwindigkeit, die aus der Kontinuitätsgleichung folgt:

$$-4\pi r^2 \rho \partial_M v = \frac{v'}{t_f r'} \left(2 - m_0 \rho' r'^3 \right) . \quad (1)$$

Es ergeben sich einige Modellparameter, die sich aus den freien Parametern des Konvektionsmodells ableiten:

$$g_1 := \left\{ \frac{2}{\beta_\Pi} \left(c_D + \frac{\beta_\phi}{3} \right) \right\}^{-1} \quad (2a)$$

$$g_2 := \frac{2}{3} g_1 g_4 \quad (2b)$$

$$g_3 := \frac{\beta_\Pi}{c_D} \quad (2c)$$

$$g_4 := \frac{\beta_\phi}{c_D} . \quad (2d)$$

Man erhält dann für das Hintergrundmodell

$$\phi_0 = g_1 \frac{\Pi_0^2}{\varpi_0} \quad (3a)$$

$$-\partial_M s_0 = \frac{\beta_\phi \varpi_0^{1/2} \phi_0}{\Lambda_0 4\pi r_0^2 \rho_0 \Pi_0}, \quad (3b)$$

und die dynamischen Gleichungen lauten:

$$\partial_\tau \Pi' = \frac{\Pi' v'}{r'} (2 - m_0 \rho' r'^3) + \zeta_c \left\{ 2g_1 \nabla'_{ad} T' \phi' + g_2 \varpi' (\partial_M s)' - g_3 \varpi'^{1/2} \Pi' \right\} r'^2 \rho' \quad (4a)$$

$$\partial_\tau \phi' = g_4 \zeta_c \left\{ \Pi' (\partial_M s)' - \varpi'^{1/2} \phi' \right\} r'^2 \rho' \quad (4b)$$

5.2.4. Stabilitätsanalyse

Eine Stabilitätsanalyse kann nun genauso wie bei der einfachen Formulierung des Ein-Zonen-Modells vorgenommen werden. Die Resultate werden natürlich etwas aufwendiger aufgrund der Benutzung einer allgemeinen Zustandsgleichung, die unter anderem bedingt, daß die vormals konstanten zweiten thermodynamischen Ableitungen hier auch variieren. Zur übersichtlichen Darstellung sei eine spezielle Notation für die logarithmischen thermodynamischen Ableitungen eingeführt, so z. B. für die thermische Energie e :

$$e_\rho := \left(\frac{\partial \ln e}{\partial \ln \rho} \right)_T \quad (1a)$$

$$e_T := \left(\frac{\partial \ln e}{\partial \ln T} \right)_\rho \quad (1b)$$

Im folgenden werden die Kriterien für den Fall verschwindender Konvektion dargestellt. Benutzt wird dabei wieder der Satz von Hurwitz (Uspensky 1968) für das Auftreten von Nullstellen mit positivem Realteil bei einem Polynom mit reellen Koeffizienten. Spezialisiert für den hier gegebenen Fall eines Polynoms vom Grade drei lautet dieses Kriterium:

Satz (Hurwitz): Sei $P(x) = A + Bx + Cx^2 + x^3$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten A, B, C , so hat dieses Polynom dann und nur dann ausschließlich Nullstellen mit negativem Realteil, wenn folgende Ungleichungen gelten:

$$A > 0 \quad (i)$$

$$B > 0 \quad (ii)$$

$$BC - A > 0 \quad (iii)$$

i. Das erste Kriterium lautet vollständig ausgeschrieben

$$(\zeta_T + \zeta_n) \{m_0 [p_\rho(s+4) + p_T n] - 4(s+4 - p_t)\} + \zeta_n \{m_0 [\mu p_T - \nu p_\rho] + 4\nu\} > 0. \quad (2)$$

Ohne die aus der Energieerzeugung resultierenden Terme ($\zeta_n = 0$) ist dies spezieller

$$m_0 [p_\rho(s+4) + p_T n] > 4(s+4 - p_t). \quad (3)$$

Dieses Kriterium hat offenbar mit der radiativen Leuchtkraft zu tun, was aus dem Auftreten der Opazitätskoeffizienten n und s zu ersehen ist. In der einfacheren Formulierung des Ein-Zonen-Modelles war von einem idealen Gasgesetz ausgegangen worden, um die Temperatur zu bestimmen, und in der Tat reduziert sich die Ungleichung (3) in dieser Approximation auf das schon bekannte und diskutierte Kriterium

$$m_0 (s+4+n) > 4(s+3). \quad (4)$$

Andererseits folgt aus der allgemeinen Form des Kriteriums beim Übergang auf eine homogene Vollkugel ($r_c \rightarrow 0$ und demgemäß natürlich auch $L_{in} \rightarrow 0$) sowie der Benutzung der Zustandsgleichung eines idealen Gases das Jeans-Kriterium (Jeans 1928)

$$3\mu + \nu > s - 3n. \quad (5)$$

ii. Aus dem zweiten Kriterium folgt unmittelbar die schon bekannte Bedingung

$$\Gamma_1 > \frac{4}{m_0}, \quad (6)$$

dabei sind keine zusätzlichen Näherungen notwendig.

iii. Selbst ohne Konvektion ist das Kriterium (iii) schon etwas komplizierter, was jedoch zum Teil auf die zusätzlich berücksichtigte Energieerzeugung zurückzuführen ist:

$$\begin{aligned} & \zeta_T \{m_0 [(\Gamma_1 - p_\rho)(s+4) - p_T n] - 4p_T\} + \\ & \zeta_n \{m_0 [(\Gamma_1 - p_\rho)(s+4 - \nu) - p_T(n + \mu)] - 4p_T\} > 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Im Falle einer numerischen Anwendung ist es häufig einfacher und dabei mathematisch nicht weniger exakt, eine Eigenwertanalyse der Jakobi-Matrix durchzuführen (siehe Anhang A2), zumal dabei noch genauere Informationen über die Art einer Instabilität und zugeordnete Anwachszeitskalen oder Frequenzen erhalten werden.

5.2.5. Numerische Experimente

Offensichtlich sind aufgrund der weitreichenden Verknüpfungen der Größen des Hintergrundmodells nur noch wenige, das Modell beschreibende Parameter notwendig. In einem numerischen Beispiel sei hier folgende Wahl der zu spezifizierenden Größen getroffen:

äußerer Schalenradius	:	$r_0 = 80 R_\odot$
innerer Schalenradius	:	$r_c = 75 R_\odot$
Temperatur in der Schale	:	$T_0 = 27.000 K$
Dichte	:	$\rho_0 = 10^{-8} g/cm^3$
Masse des Sterns	:	$M = 7 M_\odot$
Opazitätsexponent (Dichte)	:	$n = 1$
Opazitätsexponent (Temperatur)	:	$s = 3.5$
Energieerzeugung im Gleichgewicht	:	$\epsilon_0 = 0$
Energieerzeugungsexponent (Dichte)	:	$\mu = 0$
Energieerzeugungsexponent (Temperatur)	:	$\nu = 0$
Leuchtkraft der inneren Kugel	:	$L_{in} = 4600 L_\odot$
konvektive Leuchtkraft in L_{in}	:	$q_c = 0.2$

Diese Parameterwahlen dürften typisch sein für einen Cepheiden. Darüber hinaus sind noch die freien Parameter des jeweils benutzten Konvektionsmodells anzugeben und eine Zustandsgleichung zur Berechnung von Druck und innerer Energie aus Dichte und Temperatur beizufügen. Als MLT-Parameter wird $\alpha_{ML} = 1.5$ gewählt, und es wird die Ein-Gleichungs-Formulierung des Konvektionsmodells mit der Standardwahl für die freien Parameter benutzt.

Die Zustandsgleichung ist die eines einkomponentigen Gases mit einem Molekulargewicht von 2 und einem Ionisationspotential, welches einer Temperatur von 550.000 K entspricht, dies soll eine Annäherung an die He-II-Ionisation sein. Im unionisierten Zustand hat dieses Gas das Molekulargewicht 2, das ist aber gerade das mittlere Molekulargewicht im Falle einfach ionisierten Heliums. Im vollständig ionisierten Zustand erhält man hier ein mittleres Molekulargewicht von 1, bei zweifach ionisiertem Helium ist es 4/3. Die Ionisation wird berücksichtigt durch explizite Lösung der Saha-Gleichung.

Das benutzte Lösungsverfahren ist dasselbe wie das in Kapitel 5.1.4. beschriebene. Die lineare Stabilitätsanalyse (siehe Anhang A2) läßt zunächst auf eine Pulsationsinstabilität mit

einer Periodendauer von 1.602 in Einheiten der Freifallzeit schließen. Die nachher iterativ und selbstkonsistent der Lösung zugeordnete Periode beläuft sich hingegen auf 1.824 Freifallzeiten. Dieser Unterschied von immerhin ca. 12% mag Anlaß geben zu Diskussionen über die Gültigkeit der bisher meist in der linearen Näherung angegebenen Perioden bei veränderlichen Sternen.

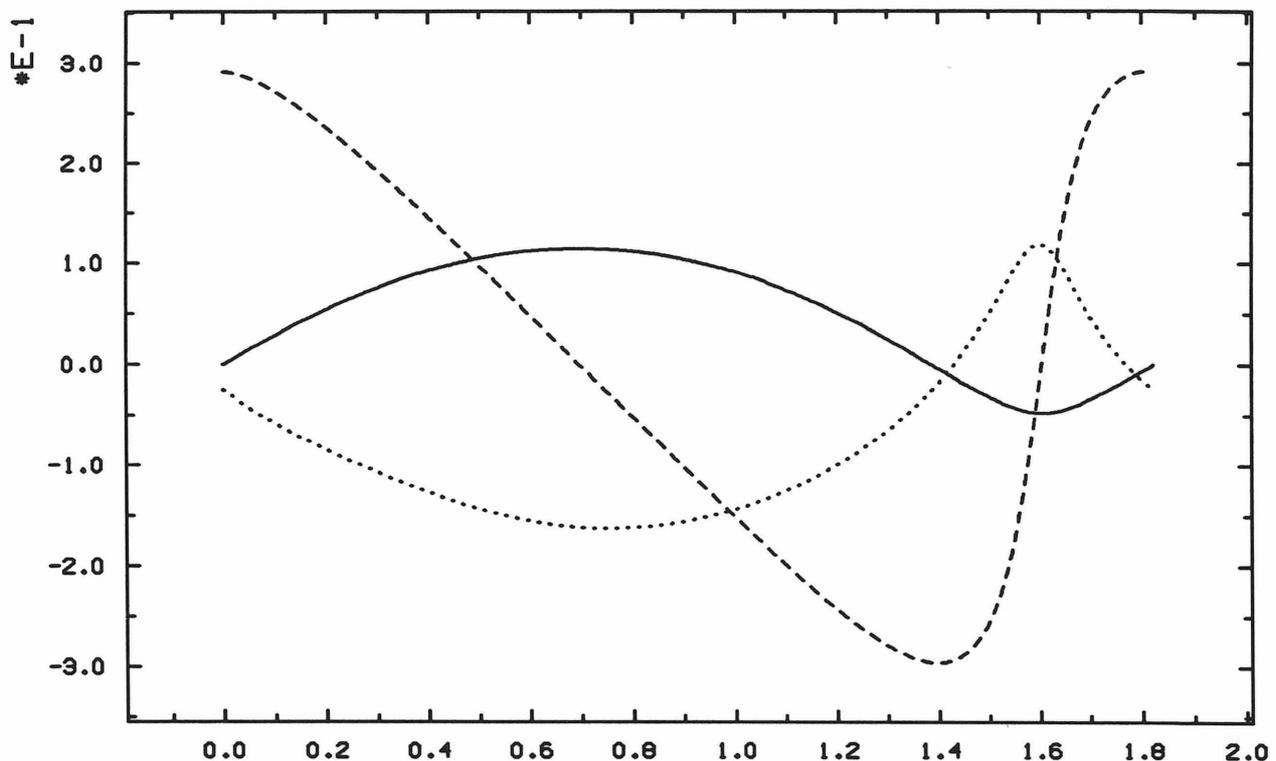


Abb. 1. : Periodische Lösung: Radiusvariation $r' - 1$ (durchgezogene Linie), Geschwindigkeit v' (gestrichelt) und Variation der Temperatur $T' - 1$ (gepunktet) als Funktionen der Zeit, Zeiteinheit ist die Freifallzeit.

Abbildung 1 zeigt den Verlauf von $r' - 1$ (Radius, durchgezogene Linie), Geschwindigkeit v' (gestrichelt) und $T' - 1$ (Temperatur, gepunktet), aufgetragen über der Zeit in Einheiten der Freifallzeit t_f . Sowohl die Amplitude der Radiusvariationen als auch der Verlauf der Geschwindigkeit stehen durchaus im Einklang mit der Beobachtung.

In Abbildung 2 ist die Leuchtkraftvariation $L' - 1$ sowie der relative Anteil der konvektiven Leuchtkraft $q_c(t)$ geplottet. Wieder tritt das unphysikalische Leuchtkraftmaximum zum Zeitpunkt der maximalen Kompression der Schale auf, dieser Effekt scheint also von der inneren Randbedingung einer harten Kugel herzurühren und nicht, wie erhofft, von der Vernachlässigung der Variationen des Ionisationsgrades. Interessant ist ferner, daß bei maximaler Ausdehnung in diesem Modell der Anteil der konvektiven Leuchtkraft fast verschwindet. Wieder wäre die Lichtkurve ohne das zeitlich scharf begrenzte Maximum durchaus realistisch.

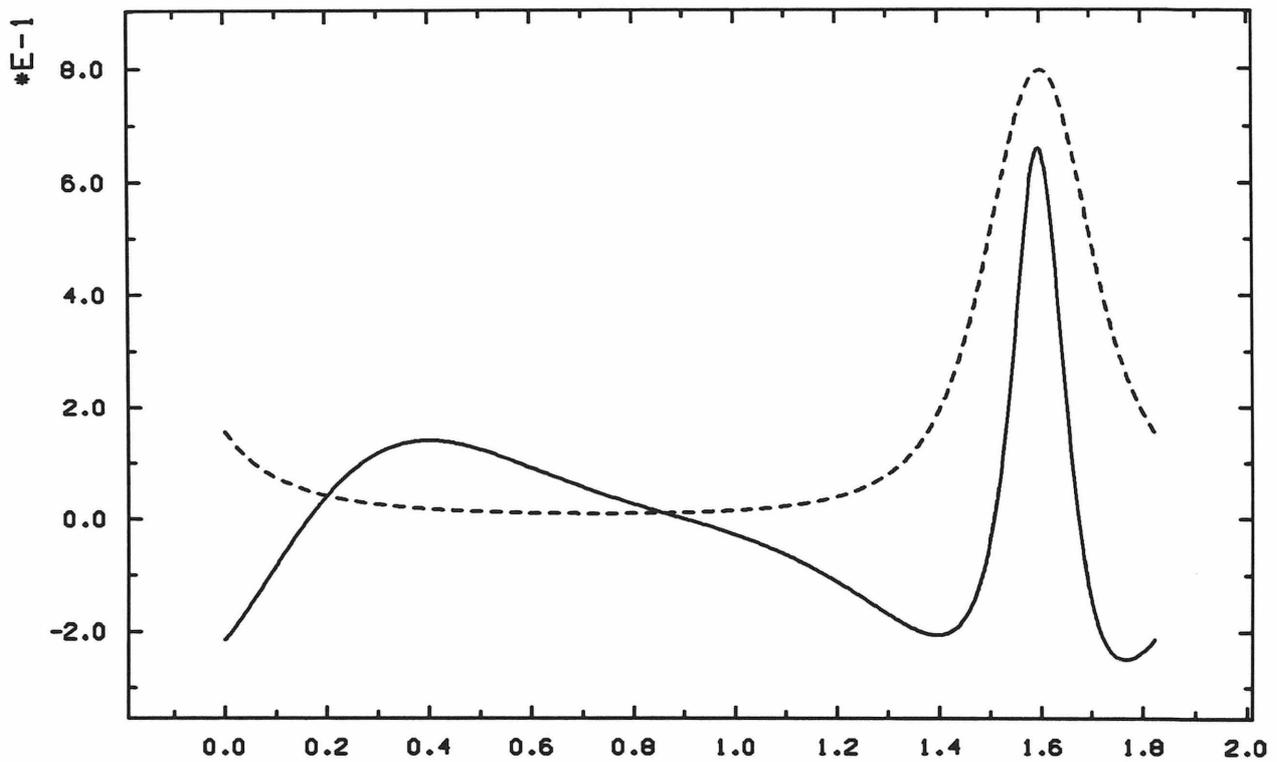


Abb. 2. : Periodische Lösung: Leuchtkraftvariation $L' - 1$ (durchgezogene Linie) und Anteil der konvektiven Leuchtkraft $q_c(t)$ (gestrichelt) als Funktionen der Zeit, Zeiteinheit ist die Freifallzeit.

Abbildung 3 zeigt das Verhalten der konvektiven Größen ϖ' (durchgezogene Linie), Π' (gestrichelt) und ϕ' (gepunktet). Auch hier wird deutlich, daß das Leuchtkraftmaximum wieder sehr von der konvektiven Leuchtkraft getragen wird. Dies ist aber kein Fehler der Konvektionsmodelle, denn das Maximum tritt auch in rein radiativen Modellen auf.

Abbildung 4 gibt Aufschluß über die zeitliche Variation des Ionisationsgrades (durchgezogene Linie), der zweiten thermodynamischen Ableitungen Γ_1 (gestrichelt, geplottet ist $\Gamma_1 - 1$) und ∇_{ad} (gepunktet). Obwohl die größten Variationen in diesen Größen zum Zeitpunkt maximaler Kompression auftreten, zum Zeitpunkt also, wo die innere Randbedingung einer harten Kugel als unphysikalisch anzusehen ist, sind auch zu anderen Zeiten Variationen zu erkennen, die die Approximation als Konstante, wie sie in der einfachen Version des Ein-Zonen-Modells benutzt wird, etwas fragwürdig erscheinen lassen.

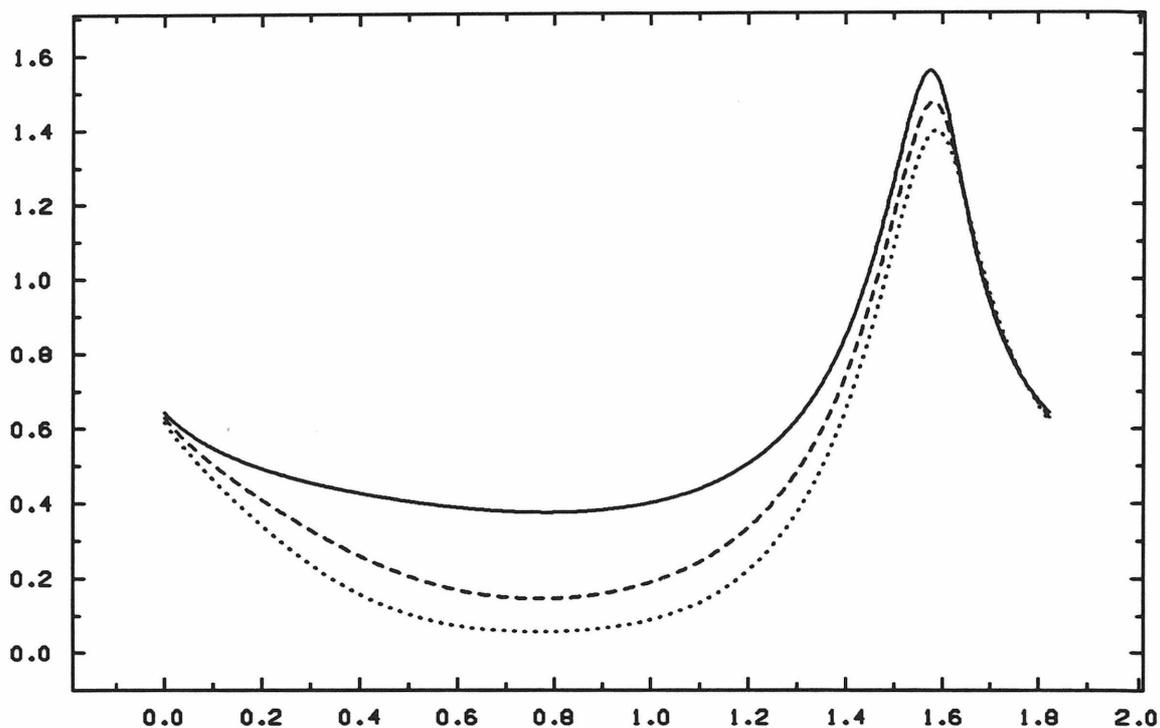


Abb. 3. : Periodische Lösung: Die Konvektionsgrößen $\varpi' - 1$ (durchgezogene Linie), Π' (gestrichelt) und ϕ' (gepunktet) als Funktionen der Zeit, Zeiteinheit ist die Freifallzeit.

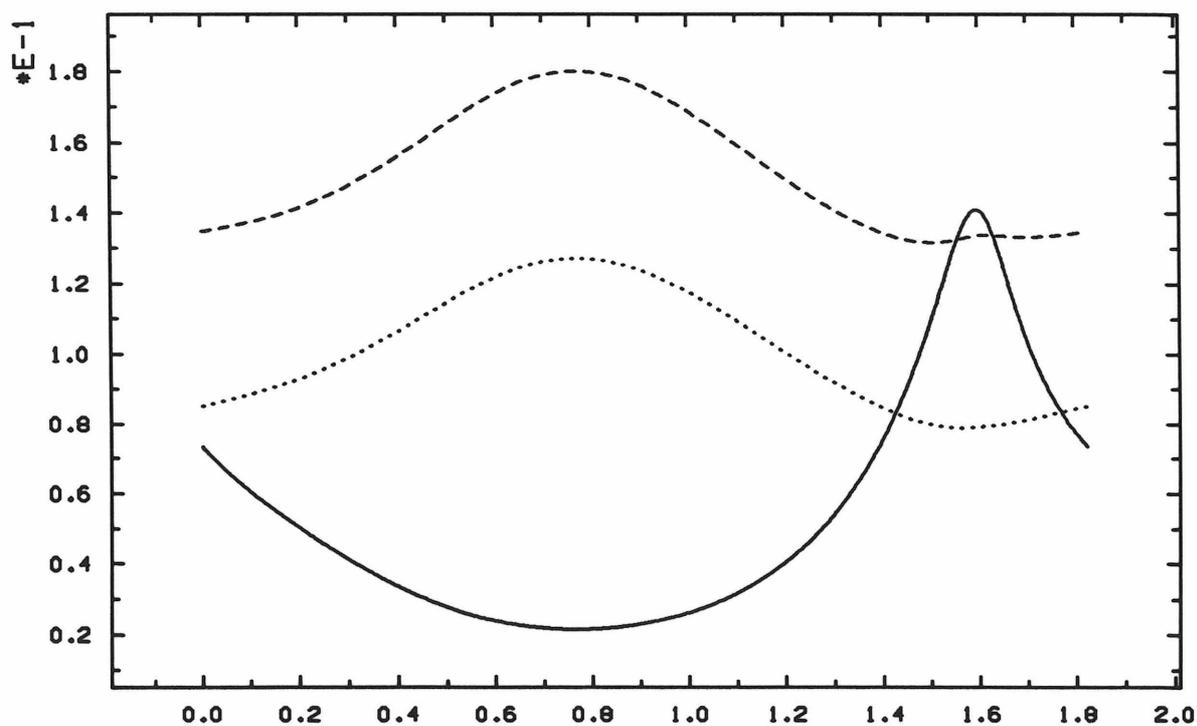


Abb. 4. : Periodische Lösung: Der Ionisationsgrad (durchgezogene Linie) und die beiden zweiten thermodynamischen Ableitungen Γ_1 (gestrichelt: $\Gamma_1 - 1$) und ∇_{ad} (gepunktet) als Funktionen der Zeit, Zeiteinheit ist die Freifallzeit.

6. Numerische Studien der Nichtlokalität (Kuhfuß 1987)

Im Zusammenhang mit Fragen der Sternentwicklung und der Nukleosynthese wurde in den letzten Jahren mehr und mehr die Notwendigkeit einer Beschreibung des Overshooting unterstrichen. In einigen publizierten Rechnungen wird die Ausdehnung der Overshooting-Zone parametrisiert angegeben, und damit insofern inkonsistent, als die Beschreibung der Konvektion anderweitig durch eine lokale Theorie, meist die MLT, vorgenommen wird (Bressan *et al.* 1981, Bertelli *et al.* 1985, Langer, El Eid 1986, El Eid, Langer 1986). Andere Ansätze benutzen das Roxburgh Kriterium (Roxburgh 1978; Doom 1985, Sybesma 1985, Doom *et al.* 1986, Sybesma 1986, Prantzos *et al.* 1987). Dieses Kriterium beruht aber auf einer Inkonsistenz (Bressan 1984, Baker, Kuhfuß 1987; siehe auch Anhang A3). Auch ein nichtlokaler Ansatz von Shaviv und Salpeter (1973), der allerdings nur stationäre Konvektion in einer integralen Verallgemeinerung der MLT behandelt, wurde oft benutzt (Maeder 1975, Langer 1986a, b). Xiong hat mit Hilfe seines Konvektionsmodelles ebenfalls sehr interessante numerische Ergebnisse erzielt (Xiong 1985a, b).

Die Problematik bei all diesen Versuchen besteht, außer bei der Verwendung des Roxburgh-Kriteriums, in der Wahl der auftretenden freien Parameter. Diese Parameter haben dabei eine mehr oder weniger grundlegende Bedeutung. Bei einer Parametrisierung des Overshooting werden sehr komplexe physikalische Zusammenhänge approximiert, man wird also nicht notwendig eine zumindest annähernde Konstanz des Parameters unter verschiedenen Modellbedingungen erwarten können. In den meisten anderen Fällen werden dagegen grundlegendere, physikalisch besser verständliche Vorgänge parametrisiert, z. B. nach einer Wahl einer typischen Geschwindigkeit und einer typischen Distanz zur Absorption wesentlichster Abhängigkeiten tritt ein solcher Parameter nur noch als Faktor in der Diffusionsapproximation auf. Einer solchen Wahl ist daher zunächst größere Allgemeingültigkeit zuzutrauen.

Ein wesentliches Problem wird allerdings in allen oben genannten Modellen und auch in dem in dieser Arbeit vorgestellten nicht gelöst: die Wahl einer typischen Skalenlänge der Konvektion. Das Unwissen über diese Größe steckt im Mischungswegparameter α_{ML} .

Im folgenden seien einige Studien zur Nichtlokalität anhand stationärer Modelle homogener Hauptreihensterne vorgestellt. Dabei wird die Ein-Gleichungs-Formulierung des Konvektionsmodells mit der in Kapitel 2 motivierten Standardwahl der freien Parameter benutzt. Zunächst wird die Struktur der Overshooting-Zone untersucht, und anschließend werden zwei

Parameterstudien vorgenommen, welche die Abhängigkeit des Overshooting von der Gesamtmasse des Sternes sowie vom immer noch freien Mischungswegparameter α_{ML} aufzeigt.

Die Mikrophysik wird in einfachster Weise beschrieben. So ist die Zustandsgleichung die eines vollständig ionisierten idealen Gases mit thermalisierter elektromagnetischer Strahlung. Die Opazität wird mit Hilfe eines Potenzgesetzes dargestellt (aus Habets 1985 übernommen), die Energieerzeugung wird aus einer Fit-Formel von Hofmeister *et al.* (1964) berechnet. Die Massenanteile unterschiedlicher Nuklide sind wie folgt gewählt:

Wasserstoff	:	0.685
Helium	:	0.294
Kohlenstoff	:	0.005
Stickstoff	:	0.006
Sauerstoff	:	0.010

Insbesondere bei massenarmen Sternen ist die benutzte Fit-Formel für die Opazität etwas unbefriedigend, so wurden insbesondere zu kleine Radien sowie zu hohe Leuchtkräfte und Zentraltemperaturen erhalten. Quantitative Aussagen der vorgestellten Modelle in Bezug auf diese Größen sollten also nicht überbewertet werden.

6.1. Beschreibung des numerischen Verfahrens

Nach Umschreibung der in den Kapiteln 1.3.6. und 1.4 zusammengefaßten Gleichungen auf die in der Lagrange'schen Formulierung benutzte Massenkoordinate (siehe Anhang A1) wurde eine Diskretisierung vorgenommen. Dabei wurden alle thermodynamischen Größen und die konvektive kinetische Energie als Zellgrößen behandelt, alle anderen Größen wurden den Interfaces zwischen den Massenschalen zugeordnet. Aufgrund der Verwendung von zentrierten Differenzen und der Tatsache, daß die unten dargestellten numerischen Beispiele mit einem äquidistanten Gitter gerechnet wurden, ist das Verfahren von zweiter Ordnung im Raum. Die aus der Diskretisierung der Differentialgleichungen folgenden Differenzgleichungen bestimmen als nichtlineares System die Variablen. Zur Lösung dieses Systems wurde ein Verfahren benutzt, welches in die Sternentwicklung von Henyey (Henyey *et al.* 1964) eingeführt wurde. Dieses Verfahren stellt letztendlich eine Newton-Raphson-Iteration sowie eine Speicherplatz sparende Methode der Lösung der dabei auftretenden linearen Gleichungen (Thomas-Algorithmus) dar.

Die vorgestellten Ergebnisse wurden mit 1000 äquidistanten Stützstellen gewonnen. Es ist durch Studien mit variierender Stützstellenzahl sichergestellt worden, daß die hier interessierenden Eigenschaften der Overshooting-Zone hinreichend aufgelöst worden sind.

6.2. Die Struktur des konvektiven Kerns bei einem Stern mit $20 M_{\odot}$

Als Beispiel sei im folgenden die Struktur des konvektiven Kerns bei einem Stern mit $20 M_{\odot}$ analysiert. Der MLT-Parameter wurde zu $\alpha_{ML} = 1.5$ gewählt. Geplottet sind jeweils die Größen des nichtlokalen Modells (durchgezogene Linien) im Vergleich zum korrespondierenden MLT-Modell (gestrichelt).

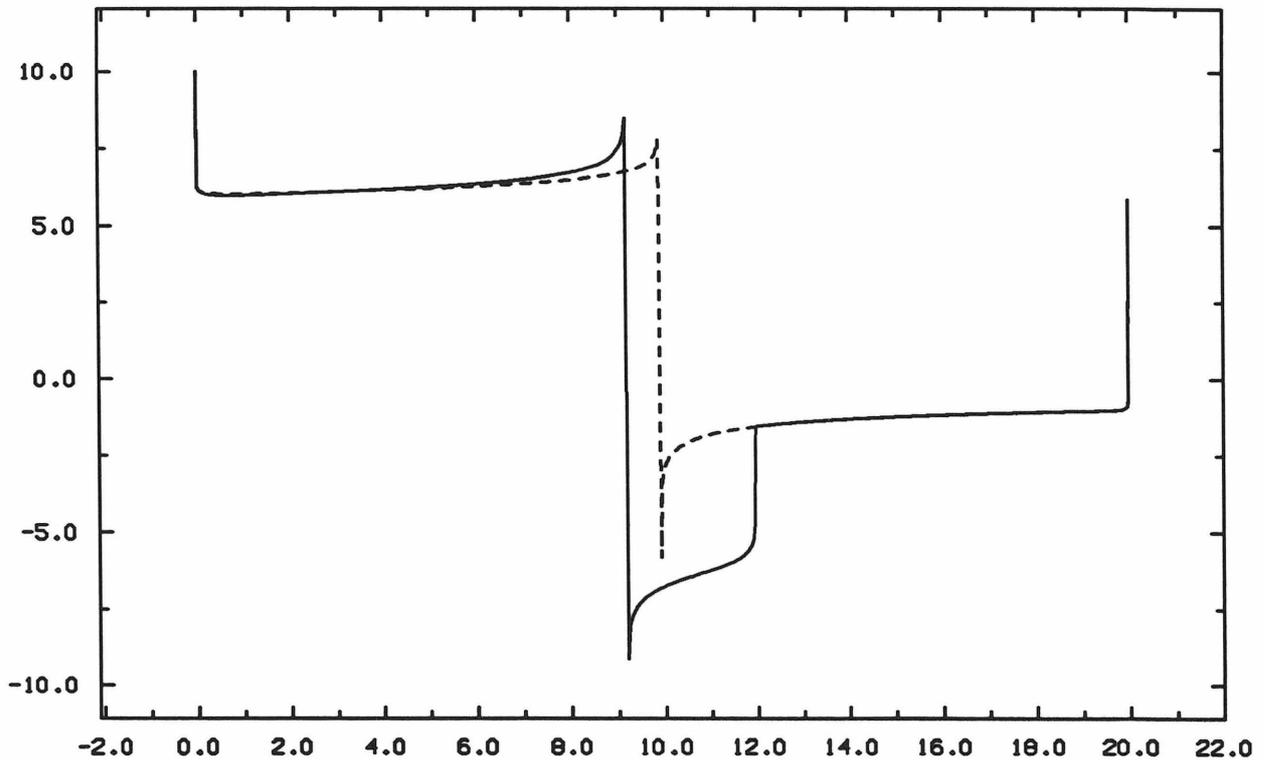


Abb. 1. : Der Logarithmus des Betrages von $\nabla - \nabla_{ad}$, versehen mit dem Vorzeichen von $\nabla - \nabla_{ad}$, bei einem $20 M_{\odot}$ Stern ($\alpha_{ML} = 1.5$), im nichtlokalen Fall (durchgezogene Linie) sowie im korrespondierenden MLT-Modell (gestrichelt), als Funktion der Massenkoordinate.

Abbildung 1 zeigt den Verlauf der aus der Abweichung des aktuellen vom adiabatischen Temperaturgradienten gebildeten Funktion

$$\text{sign}(\nabla - \nabla_{ad}) |\log_{10}(|\nabla - \nabla_{ad}|)| . \quad (1)$$

Diese Funktion ist also etwa der Logarithmus der Nichtadiabasie mit zusätzlicher Information, ob es sich um einen Konvektion treibenden Bereich handelt oder um einen dämpfenden.

Dabei wird der Tatsache Rechnung getragen, daß überall gilt $|\nabla - \nabla_{ad}| < 1$. Es ist zunächst deutlich zu erkennen, daß in beiden Modellen in dem die Konvektion treibenden Bereich eine fast adiabatische Schichtung vorliegt ($\nabla - \nabla_{ad} \approx 10^{-7}$). Die Schwarzschildgrenze ($\nabla = \nabla_{ad}$) bedingt in der in Gleichung (1) definierten Funktion einen Pol mit Vorzeichenwechsel. Die Funktion wurde beim Plotten auf einen hinreichend großen Wert begrenzt, und so kennzeichnet die Interpolationsroutine des Plotprogramms die Schwarzschildgrenze durch einen senkrechten Strich. Im nichtlokalen Modell liegt die Schwarzschildgrenze etwas weiter zum Zentrum hin als im MLT-Modell. Verursacht wird diese Verschiebung durch einen noch zu behandelnden starken konvektiven Rückfluß thermischer Energie im Overshooting-Bereich (siehe Abbildung 2). Der konvektive Kern ist weitestgehend adiabatisch geschichtet, selbst in der Overshooting-Zone ist die Abweichung $|\nabla - \nabla_{ad}|$ von der Größenordnung 10^{-6} . Damit ist zwar die Annahme einer vollständig adiabatischen Temperaturstruktur des Kerns sicherlich eine gute Approximation, man darf jedoch nicht die Effekte der Auftriebskräfte im Overshooting-Bereich vernachlässigen. Dies ist leicht einzusehen, wenn man sich erinnert, daß die die Auftriebskräfte verursachende Nichtadiabatie im Konvektion treibenden Bereich von der gleichen Größenordnung ist. Der Grad der Adiabatie im Overshooting-Bereich, und damit seine Ausdehnung, ist natürlich auch wieder beeinflußt von der Annahme über den Grad der Korrelation von Entropie- und Geschwindigkeitsfluktuationen, welche im Stellingwerf'schen Modell verschwindet (Stellingwerf 1982), dort würde also kein konvektiver Rückfluß auftreten, oder im Xiong'schen Modell (Xiong 1981) oder in der Drei-Gleichungs-Formulierung des vorliegenden Modells zumindest geringer ist. Dadurch könnte sich die Ausdehnung des Overshooting-Bereiches vergrößern, wobei allerdings zum einen auf die analytischen Abschätzungen (Kapitel 3.) verwiesen werden muß, und zum anderen ein geringerer konvektiver Rückfluß einen geringeren Grad an Adiabatie verursachen würde, und somit doch eine stärkere Dämpfung wieder entstehen könnte, selbst bei geringerer Korrelation.

Im folgenden wird die Distanz, die die Ausdehnung des Kerns im nichtlokalen Modell über die Ausdehnung des Kerns im korrespondierenden MLT-Modell hinaus quantifiziert, als 'effektives' Overshooting bezeichnet.

Ein weiteres wesentliches Merkmal des nichtlokalen Modells ist der trotz der Diffusion konvektiver kinetischer Energie doch recht scharf definierte 'Rand' des konvektiven Kerns. Dieser entsteht aufgrund des nichtlinearen Verhaltens der Gleichungen, welches quasi zu einem 'Umkippen' führt: Man betrachte eine bestimmte Massenschale im Overshooting-Bereich.

Diese wird von der darunter liegenden Schale versorgt mit konvektiver kinetischer Energie, und gibt diese wiederum an die darüber liegende Schale ab. Wenn nun die resultierende typische Geschwindigkeit in der Schale recht klein ist, so ist die Diffusionskonstante ebenfalls gering, und damit ist auch der Transport kinetischer Energie aus der darunterliegenden, stärker konvektiven Schale sehr ineffizient. Dies ist offenbar ein erster Mechanismus, der zu einem schlagartigen Umkippen am Rande führen kann. Der zweite ist vielleicht noch wesentlicher. Die dämpfenden Auftriebskräfte sind um so geringer, je stärker adiabatisch eine Schale ist. Wenn nun der konvektive Transport thermischer Energie am Rande der Overshooting-Zone uneffektiv wird, so kann er den adiabatischen Gradienten nicht mehr aufrechterhalten. Dadurch wird zum einen die Geschwindigkeit verringert, zum anderen darf zur Erzeugung eines noch weitestgehend adiabatischen Gradienten bei der dann geringeren Geschwindigkeit wegen des notwendigen Flusses thermischer Energie nach innen eine bestimmte Mindestabweichung von der Adiabasis nicht unterschritten werden. Um die Adiabasis zu erhalten, darf selbige also andererseits nicht zu gut realisiert sein.

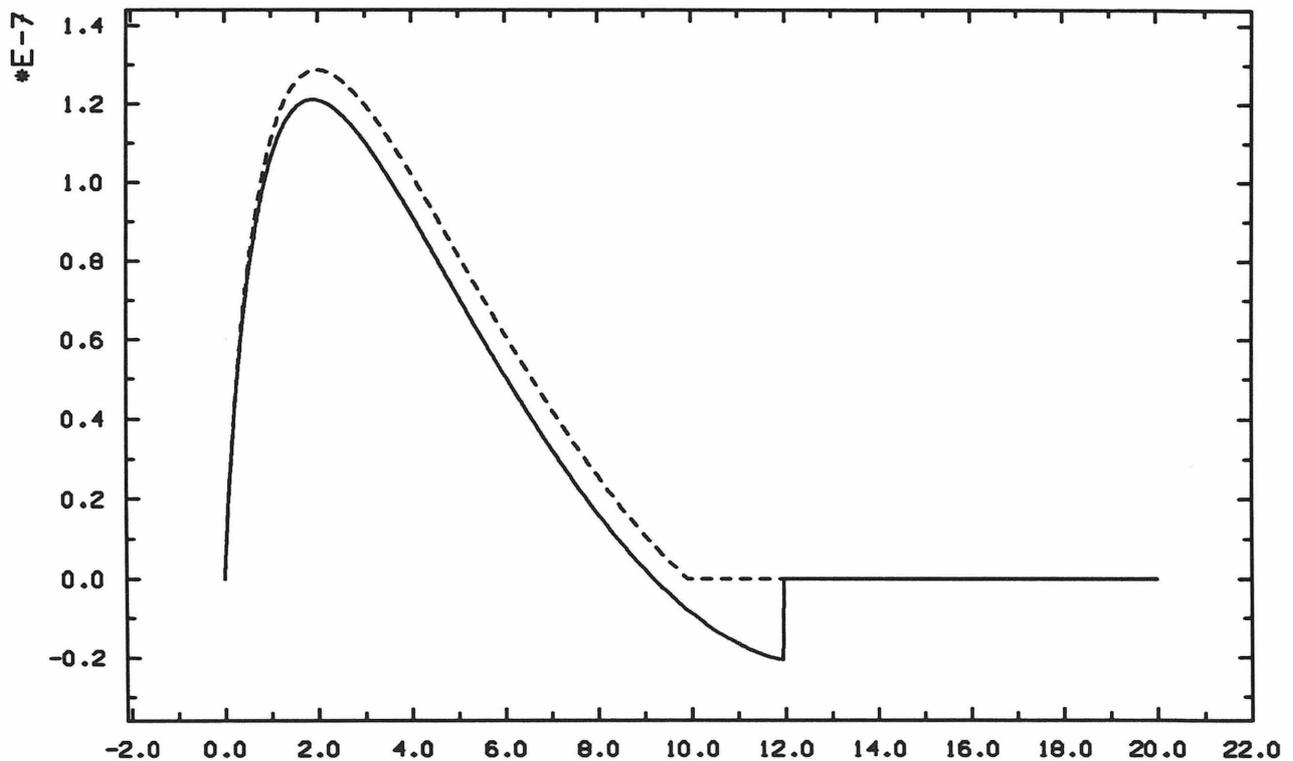


Abb. 2. : Die Leuchtkraft getragen durch den konvektiven Fluß thermischer Energie bei einem $20 M_{\odot}$ Stern ($\alpha_{ML} = 1.5$), im nichtlokalen Fall (durchgezogene Linie) sowie im korrespondierenden MLT-Modell (gestrichelt), als Funktion der Massenkoordinate.

Der letzte Mechanismus wird besonders gut durch Abbildung 2 verdeutlicht. Dort wird der Verlauf der aus dem Fluß konvektiver kinetischer Energie resultierenden Leuchtkraft

dargestellt in Einheiten von

$$L_0 = 2.15597 \cdot 10^{11} L_{\odot} \quad . \quad (2)$$

Sie ist im nichtlokalen Modell grundsätzlich geringer als im MLT-Modell, was an den meist etwas geringeren konvektiven Geschwindigkeiten im nichtlokalen Fall liegt. Diese geringeren Geschwindigkeiten resultieren aus der Diffusion kinetischer Energie. An der Schwarzschildgrenze $\nabla = \nabla_{ad}$ verschwindet die Leuchtkraft im MLT-Modell, im nichtlokalen Fall wechselt sie dort das Vorzeichen und zeigt so einen Transport thermischer Energie durch Konvektion gegen den Temperaturabfall, aber selbstverständlich in Richtung des Entropieabfalls an.

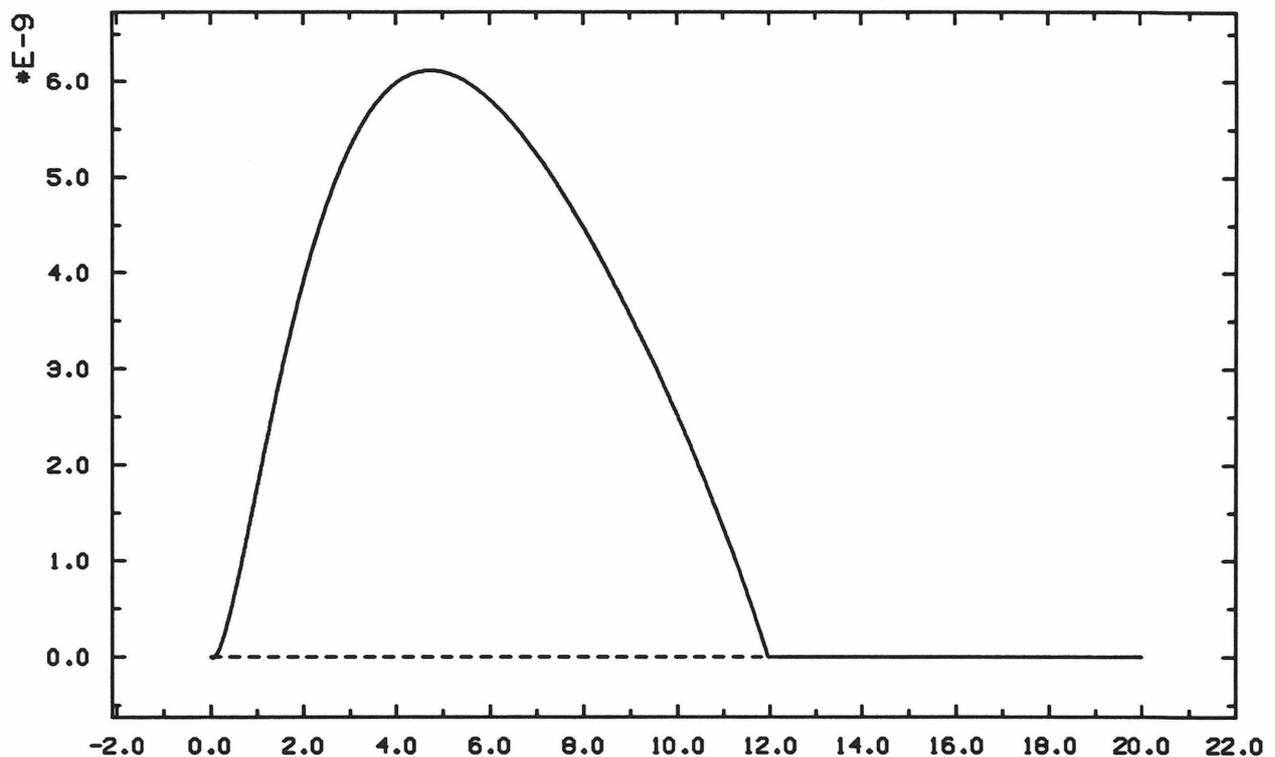


Abb. 3. : Die Leuchtkraft, getragen durch den Fluß konvektiver kinetischer Energie bei einem $20 M_{\odot}$ Stern ($\alpha_{ML} = 1.5$), im nichtlokalen Fall (durchgezogene Linie) sowie im korrespondierenden MLT-Modell (gestrichelt), als Funktion der Massenkoordinate.

Abbildung (3) zeigt die aus dem Fluß konvektiver kinetischer Energie resultierende Leuchtkraft. Auch wenn diese nur sehr unwesentlich zum gesamten Energietransport beiträgt, so ist sie doch letztendlich die Manifestation des nichtlokalen Charakters des Modells und bewirkt erst das Overshooting. Außerdem verursacht diese Leuchtkraft die schon angesprochene leichte Verringerung der konvektiven Geschwindigkeit im Konvektion treibenden Bereich.

Der Rückfluß thermischer Energie durch den konvektiven Transport im Overshooting-Bereich bedingt dort ein lokales Maximum der radiativen Leuchtkraft (siehe Abb. 4). In

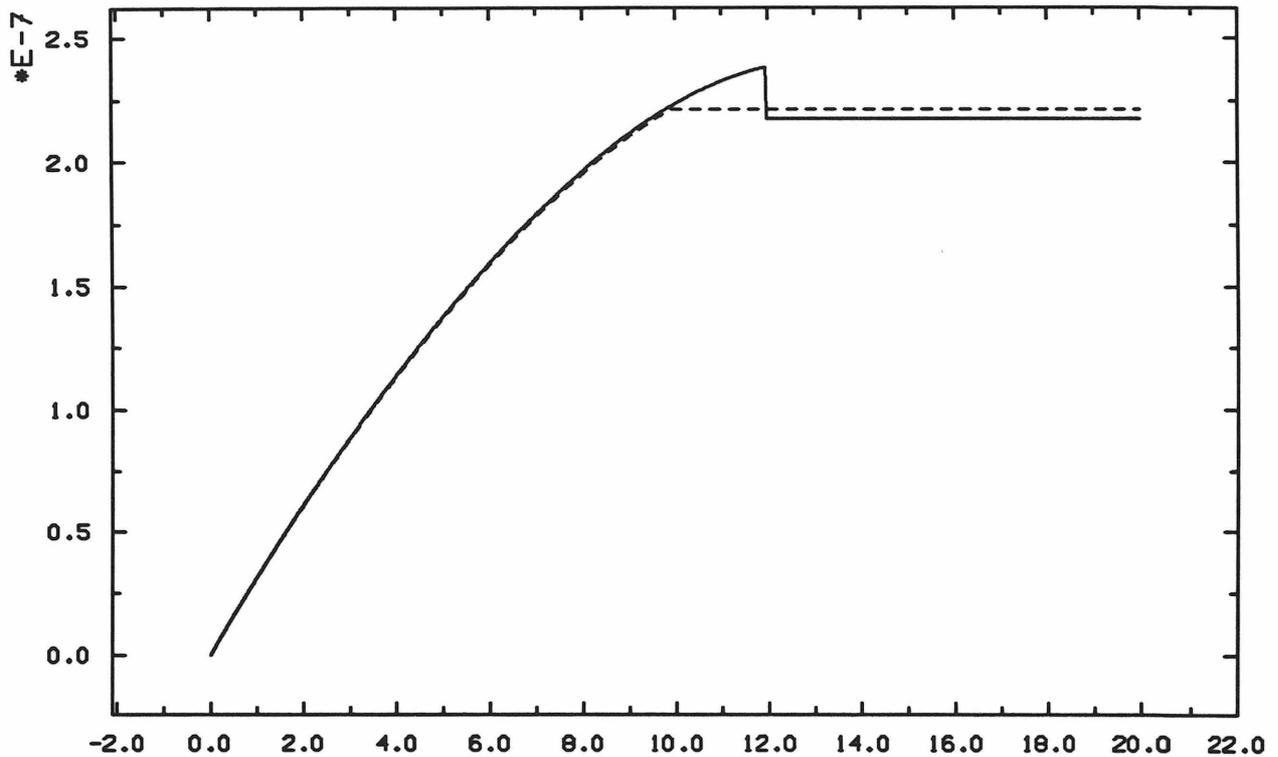


Abb. 4. : Die radiative Leuchtkraft bei einem $20 M_{\odot}$ Stern ($\alpha_{ML} = 1.5$), im nichtlokalen Fall (durchgezogene Linie) sowie im korrespondierenden MLT-Modell (gestrichelt), als Funktion der Massenkoordinate.

diesem Bereich findet fast keine Energieerzeugung durch nukleare Prozesse statt, deshalb muß die Summe aller Leuchtkräfte dort in guter Näherung konstant sein. Dies wird in Abbildung 5 für das MLT-Modell noch verdeutlicht. Dort sind alle in der Energiegleichung auftretenden Leuchtkräfte zusammengefaßt, die radiative (gestrichelt), die konvektiv-thermische (gepunktet) und die konvektiv-kinetische (strich-punktiert), sowie deren Summe (durchgezogene Linie). Natürlich verschwindet die Leuchtkraft kinetischer Energie im lokalen Modell. Im nichtlokalen Fall (Abb. 6) leistet sie fast keinen direkten Beitrag zum gesamten Energietransport. Gut zu erkennen ist auch hier wieder der konvektive Rückfluß thermischer Energie und das kompensierende Maximum der radiativen Leuchtkraft im Overshooting-Bereich.

In dieses Modell eines konvektiven Kerns gingen, neben den im Konvektionsmodell enthaltenen Modellannahmen und den hier nur im Sinne der Standardwahl festgelegten freien Parametern, noch zwei wesentliche Größen ein, deren Auswirkungen auf die Struktur des Sternes und insbesondere der Overshooting-Zone im folgenden in zwei Parameterstudien geklärt werden müssen, dies sind die Gesamtmasse des Sternes und der MLT-Parameter α_{ML} .

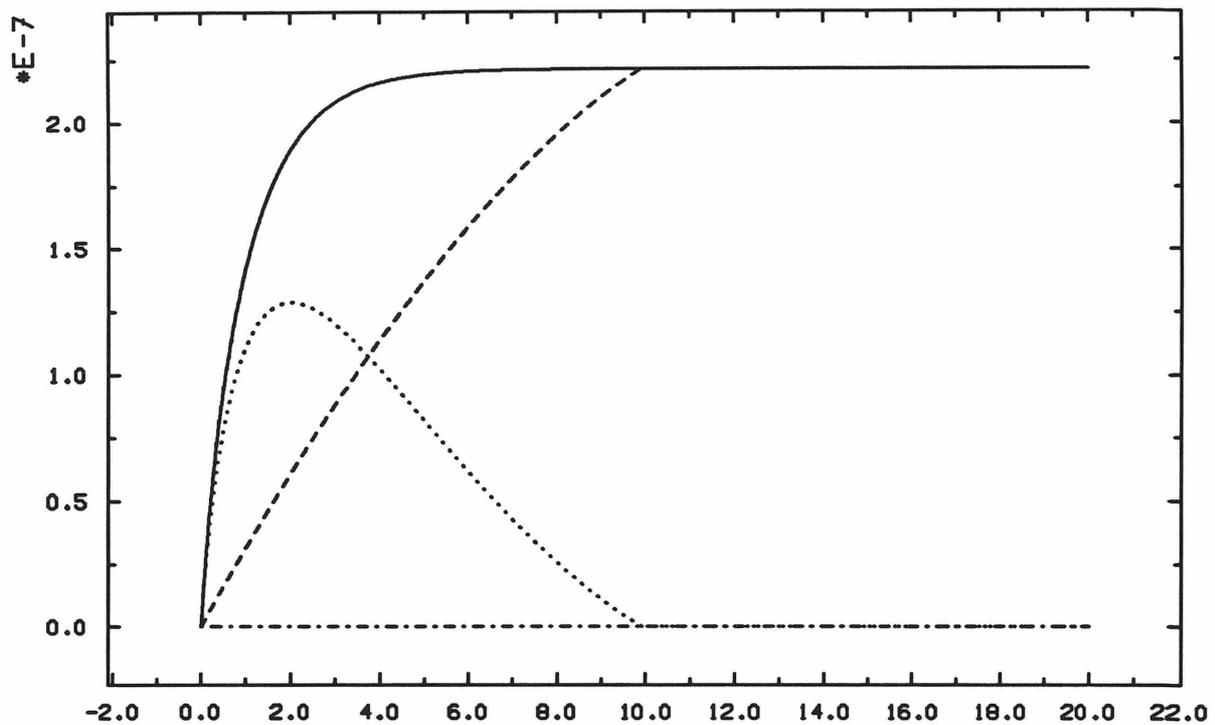


Abb. 5. : Die verschiedenen Leuchtkräfte im MLT-Modell als Funktionen der Massenkoordinate: radiativ (gestrichelt), konvektiv-thermisch (gepunktet) und konvektiv-kinetisch (strich-punktiert). Die durchgezogene Linie stellt die Summe, d. h. die totale Leuchtkraft dar.

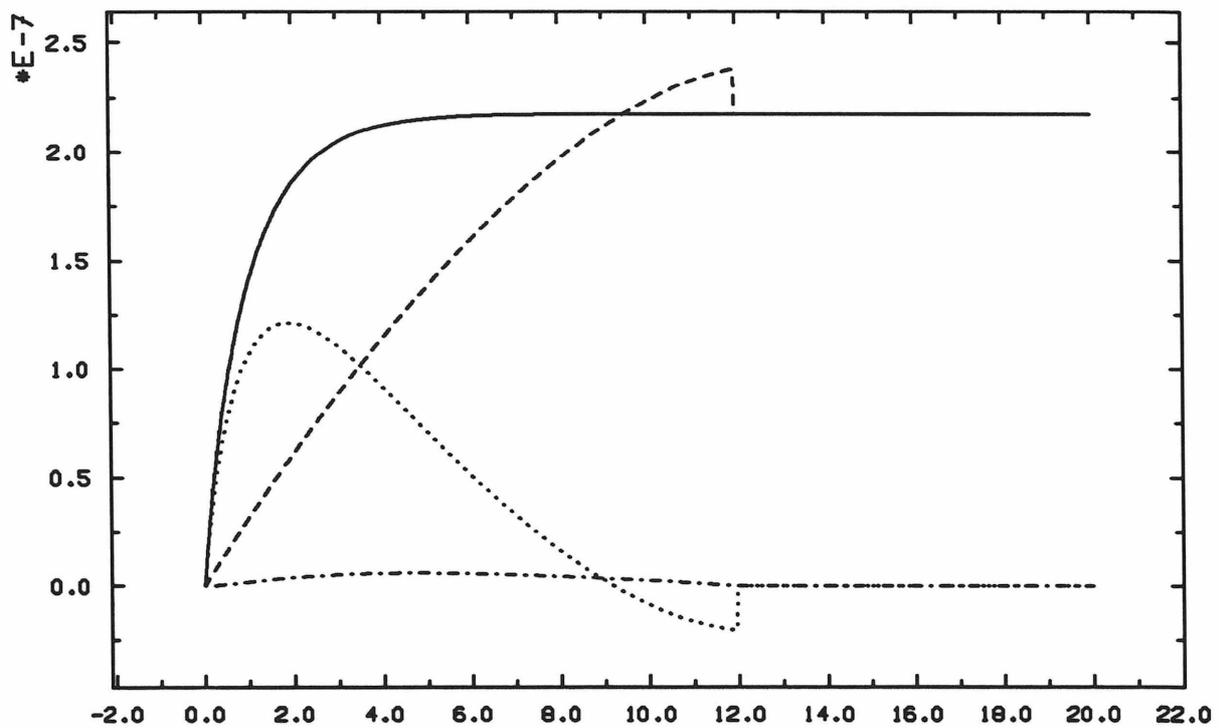


Abb. 6. : Die verschiedenen Leuchtkräfte im nichtlokalen Modell als Funktionen der Massenkoordinate: radiativ (gestrichelt), konvektiv-thermisch (gepunktet) und konvektiv-kinetisch (strich-punktiert). Die durchgezogene Linie stellt die Summe, d. h. die totale Leuchtkraft dar.

6.3. Parameterstudie: Gesamtmasse des Sterns

Zum Studium der Struktur der konvektiven Zone bei Sternen verschiedener Masse wurde eine Serie von Modellen mit Massen von $1 M_{\odot}$ bis $100 M_{\odot}$ erstellt, jeweils sowohl unter Benutzung der MLT als auch des nichtlokalen Modells in der Ein-Gleichungs-Formulierung. Für die freien Parameter oder die Mikrophysik wurden dabei dieselben Wahlen getroffen wie für das $20 M_{\odot}$ -Modell, dessen Aufbau detailliert in Kapitel 6.2. untersucht wurde. Zunächst ist dabei zu bemerken, daß aufgrund der schon erwähnten groben Approximationen, insbesondere für die Opazität, schon der Stern mit einer Masse von $1 M_{\odot}$ einen konvektiven Kern hat; bei Rechnungen mit verlässlicheren Opazitäten ist das erst bei Sternen mit mehr als ca. $1.1 M_{\odot}$ der Fall. Dabei ist allerdings die Konvektion in diesem Falle so schwach, daß sie quasi nicht zur Leuchtkraft beiträgt.

Von Interesse sind in diesem Zusammenhang die Ausdehnung der Overshooting-Zone im nichtlokalen Modell sowie deren Ausdehnung im Vergleich zum MLT-Modell, das 'effektive' Overshooting, die Vergrößerung der Kernmasse sowie Änderungen im Aufbau des Sterns, die exemplarisch anhand der Änderungen von zentraler Dichte ρ_c , zentraler Temperatur T_c , Radius R_* und Leuchtkraft L_* dargestellt werden.

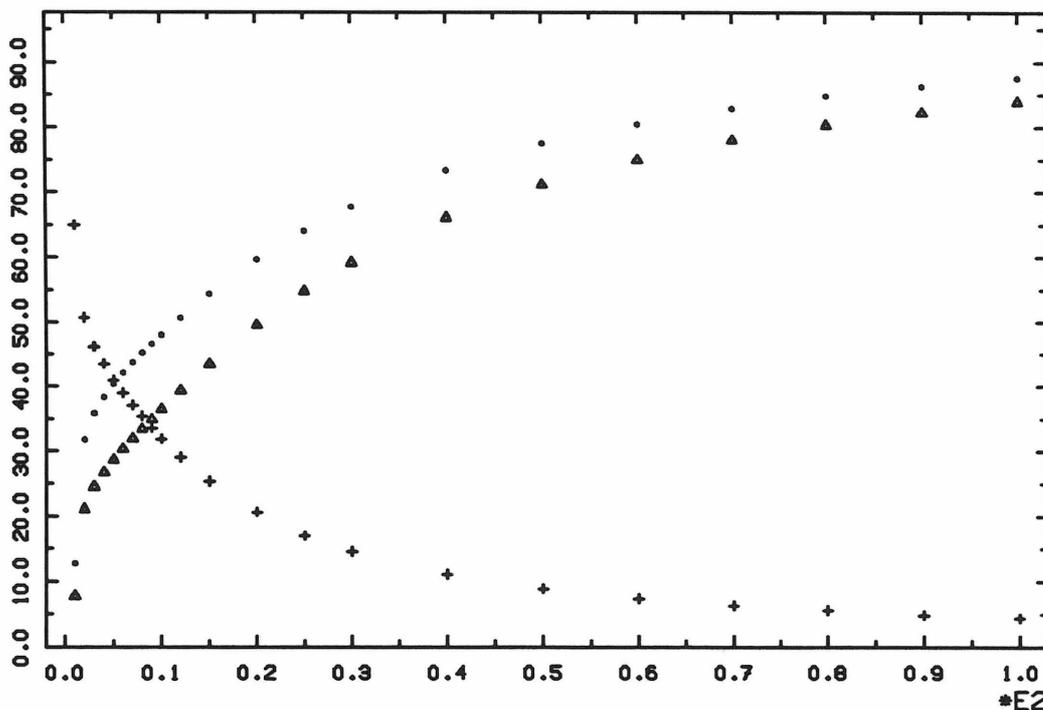


Abb. 1. : Die Kernmassen der Sternmodelle in % der Gesamtmasse für die MLT-Modelle (Dreiecke) und die nichtlokal gerechneten Modelle (Punkte), sowie die relative Vergrößerung des Kerns beim nichtlokalen Modell (Kreuze), ebenfalls in %, abhängig von der Gesamtmasse des Sternes.

Für Anwendungen im Rahmen der Nukleosynthese (z. B. Prantzos 1986) ist die Vergrößerung

der Kernmasse der wesentlichste Effekt, der durch das Overshooting bedingt wird. Abbildung 1 zeigt die Massen der konvektiven Kerne in % der Gesamtmasse für das MLT-Modell (Dreiecke) und das nichtlokal gerechnete (Punkte). Die relative Vergrößerung, definiert als auf die Kernmasse des MLT-Modells normierte Differenz der Kernmassen, wird durch die Kreuze in % angegeben.

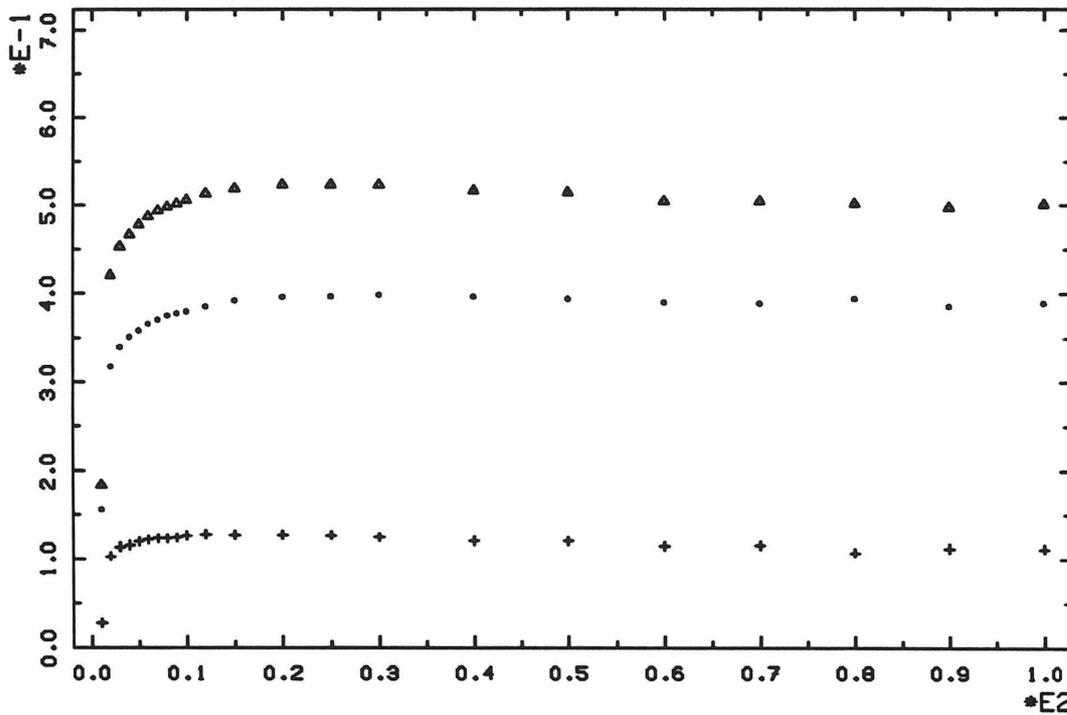


Abb. 2. : Die Verschiebung der Schwarzschildgrenze (Kreuze), das Overshooting über diese Grenze hinaus (Dreiecke) und das resultierende 'effektive' Overshooting (Punkte) in Einheiten der Druckskalenhöhe in Abhängigkeit von der Gesamtmasse des Sternes. Die Punkte korrespondieren zu dem in der Literatur benutzten Overshooting-Parameter.

In den schon erwähnten Rechnungen mit parametrisiertem Overshooting wurde die Ausdehnung des konvektiven Bereiches in die nach dem Schwarzschild-Kriterium stabilen Schichten meist angegeben als eine Konstante, den sogenannten Overshooting-Parameter, multipliziert mit der Druckskalenhöhe H_p . Aus diesem Grunde werden die wesentlichen radialen Abstände in Abbildung 2 in Einheiten der Druckskalenhöhe angegeben, bestimmt an der Grenze des konvektiven Kerns im MLT-Modell. Bei den hier vorgestellten Rechnungen ergeben sich drei verschiedene radiale Distanzen: die Verschiebung der Schwarzschildgrenze (Kreuze), das Overshooting über die Schwarzschildgrenze des nichtlokalen Kerns hinaus (Dreiecke) und das resultierende 'effektive' Overshooting (Punkte), welches sich aus dem Vergleich von lokalem und nichtlokalem konvektiven Kern ergibt. Die Werte für das effektive Overshooting entsprechen dem Overshooting-Parameter. Dieser ist also ab ca. $15 M_{\odot}$ in guter Näherung konstant und hat etwa den Wert 0.4 in den vorliegenden Rechnungen. Bei Sternen

mit kleinerer Masse ist eine leichte Veränderlichkeit dieses Parameters feststellbar. Es muß in diesem Zusammenhang aber kritisch bemerkt werden, daß bei einer Darstellung der typischen Skala der Konvektion anders als durch die Druckskalenhöhe das Ergebnis durchaus anders aussehen könnte.

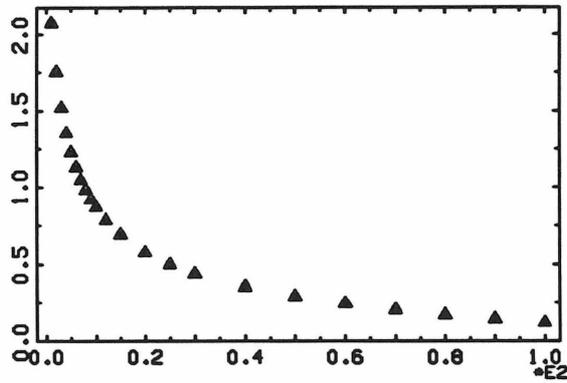


Abb. 3. : Dekadischer Logarithmus der Zentraldichte in g/cm^3

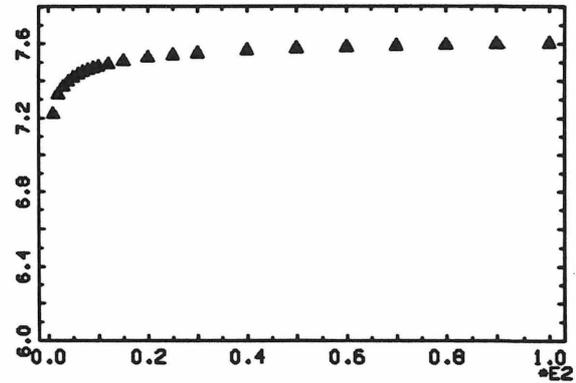


Abb. 4. : Dekadischer Logarithmus der Zentraltemperatur in K

Obwohl sich zum Teil, insbesondere bei kleineren und mittleren Massen, eine durchaus beträchtliche Vergrößerung des konvektiven Kerns ergibt, ist doch die Änderung der Struktur nicht gravierend und liegt unterhalb der Variationen, wie sie typischerweise bei Benutzung verschiedener Opazitäten auftreten können. Dies wird in den Abbildungen 3 bis 5 deutlich. Abbildung 3 zeigt die dekadischen Logarithmen der Zentraldichte der einzelnen Modelle in g/cm^3 sowohl für das MLT-Modell (offene Dreiecke) als auch für das nichtlokale Modell (Punkte). Die minimalen Unterschiede sind in der Grafik nicht mehr erkennbar. Dasselbe gilt für den dekadischen Logarithmus der Zentraltemperatur in Grad Kelvin (Abb. 4), den äußeren Radius des Sterns in Einheiten des Sonnenradius R_{\odot} (Abb. 5) und den dekadischen Logarithmus der Leuchtkraft in Einheiten der Sonnenleuchtkraft L_{\odot} (Abb. 6).

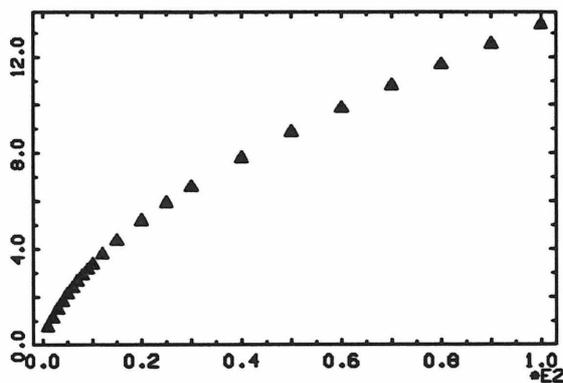


Abb. 5. : Radius des Sterns in R_{\odot}

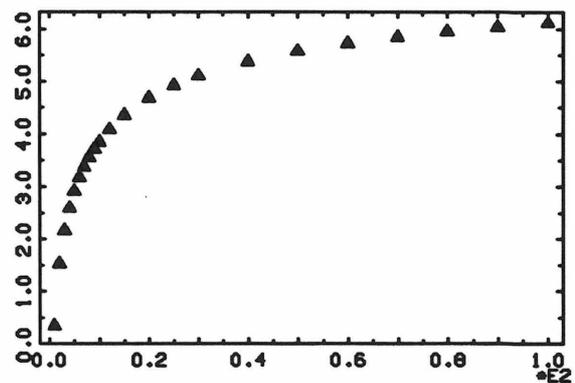


Abb. 6. : Dekadischer Logarithmus der Leuchtkraft in L_{\odot}

6.4. Parameterstudie: Mischungswegparameter α_{ML}

Wie schon mehrfach angedeutet, beinhaltet der Mischungswegparameter die wesentliche und gravierende Unkenntnis über die typische Skalenlänge der Konvektion. Diese Frage ist von erheblicher Tragweite, um so mehr, als selbst einige mehrdimensionale numerische Simulationen als größte Strukturen der konvektiven Bewegung solche ausbilden, die sich über den gesamten betrachteten Bereich erstrecken, so daß die Annahme gerechtfertigt ist, daß Einflüsse der Randbedingungen unter anderem auch die Skalenlänge bestimmen. Um bezogen auf das hier vorgestellte einfache Modell die Auswirkung von Variationen des MLT-Parameters zu studieren, wurde eine Serie von Sternmodellen erstellt für einen Stern von $20 M_{\odot}$, jeweils sowohl mit der MLT als auch dem in dieser Arbeit vorgestellten Modell in der Ein-Gleichungs-Formulierung, mit variierendem α_{ML} zwischen 1 und 3. Die Ergebnisse sind im folgenden analog zu den Ergebnissen in Kapitel 6.3. dargestellt.

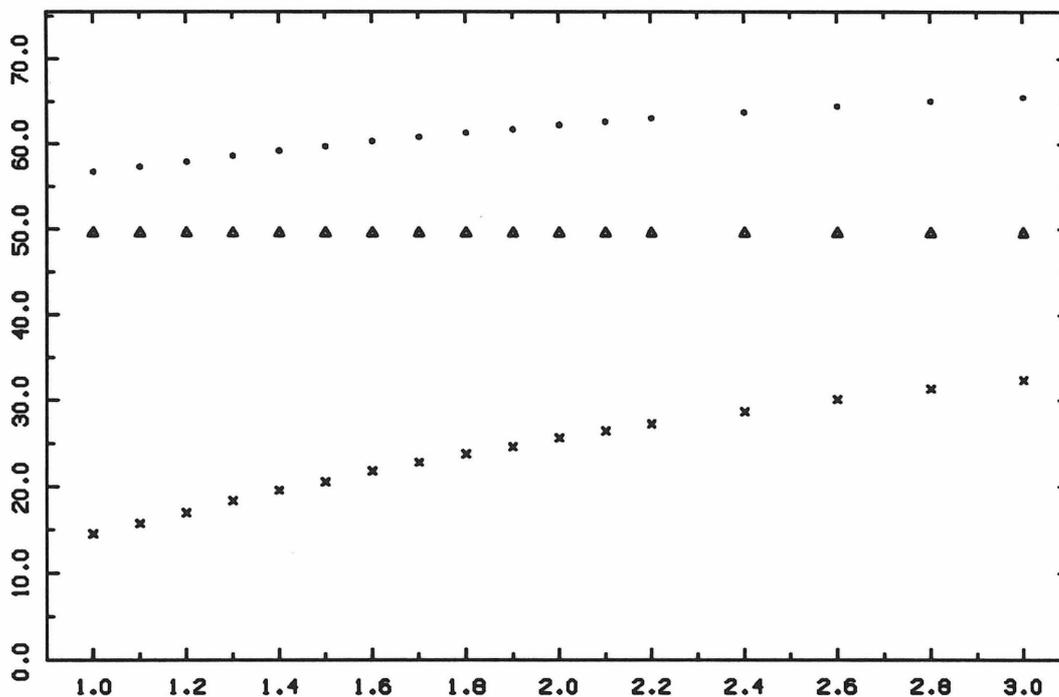


Abb. 1. : Die Kernmassen der Sternmodelle in % der Gesamtmasse für die MLT-Modelle (Dreiecke) und die nichtlokal gerechneten Modelle (Punkte), sowie die relative Vergrößerung des Kerns beim nichtlokalen Modell (Kreuze), ebenfalls in %, abhängig vom Mischungswegparameter α_{ML} .

Zunächst fällt eine nicht unwesentliche Abhängigkeit der Vergrößerung des konvektiven Kerns auf. Dies wird z. B. deutlich in Abbildung 1. Dort ist wieder die im Kern beinhaltetete Masse relativ zur Gesamtmasse des Sternes (MLT: Dreiecke, nichtlokal: Punkte) sowie

die relative Vergrößerung des Kerns bei Benutzung des nichtlokalen Modells (Kreuze) in % dargestellt, letztere variiert von ca. 15% bei einem Mischungswegparameter von $\alpha_{ML} = 1$ bis zu ca. 32% bei $\alpha_{ML} = 3$. So groß diese Abhängigkeit ist, so hilfreich könnte sie sich erweisen bei Versuchen, die freien Parameter des Konvektionsmodells oder auch den Mischungswegparameter durch Beobachtungen zu bestimmen (siehe z. B. Langer, El Eid 1986). Dabei muß sowohl an theoretische Hertzsprung-Russel-Diagramme als auch an Beobachtungen und theoretische Modelle der Nukleosynthese gedacht werden.

Abbildung 2 zeigt wieder die drei wesentlichen radialen Distanzen im Vergleich zwischen dem lokalen und dem nichtlokalen Modell, die Verschiebung der Schwarzschildgrenze zum Zentrum hin (Kreuze), das Overshooting über die Schwarzschildgrenze des nichtlokalen Modells hinaus (Dreiecke) und das resultierende effektive Overshooting (Punkte), welches sich aus dem Vergleich von lokalem und nichtlokalem konvektiven Kern ergibt.

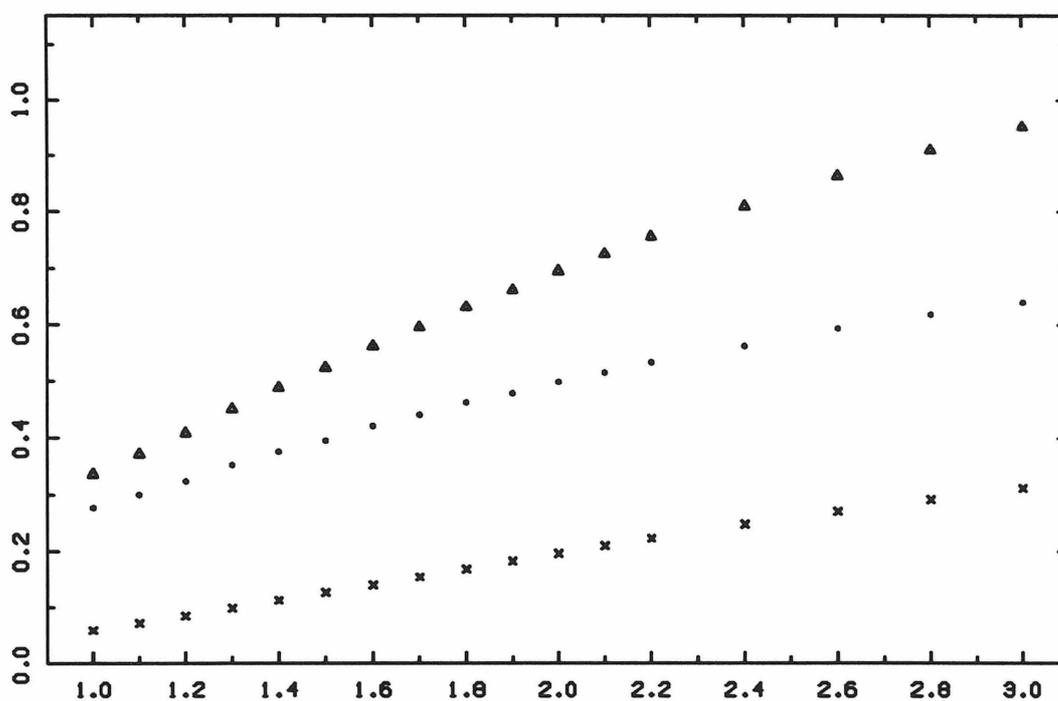
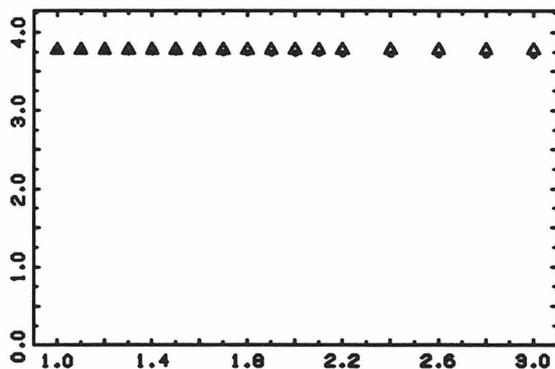
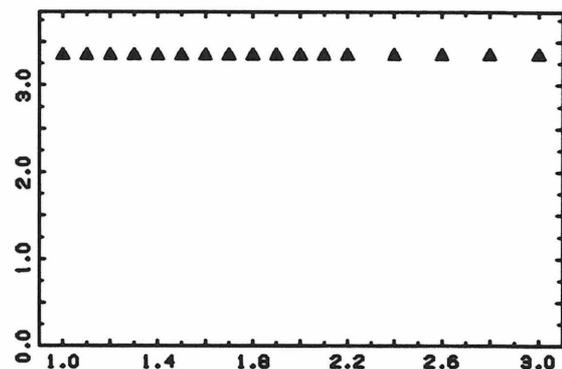
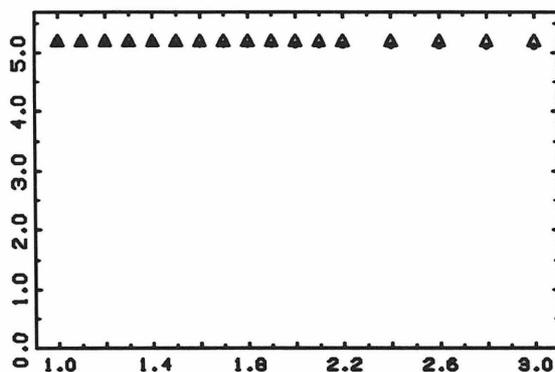
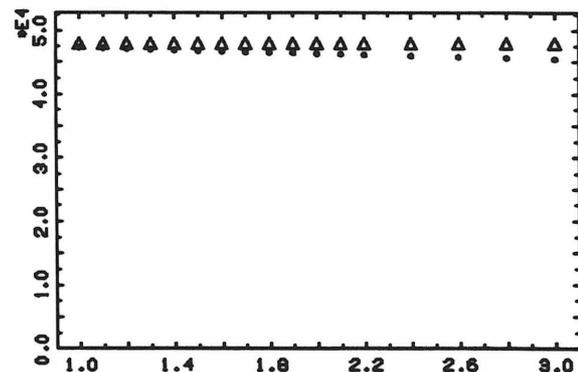


Abb. 2. : Die Verschiebung der Schwarzschildgrenze (Kreuze), das Overshooting über diese Grenze hinaus (Dreiecke) und das resultierende 'effektive' Overshooting (Punkte) in Einheiten der Druckskalenhöhe in Abhängigkeit vom Mischungswegparameter α_{ML} . Die Punkte korrespondieren zu dem in der Literatur benutzten Overshooting-Parameter.

Wieder korrespondieren die Punkte zu dem in der Literatur üblicherweise angegebenen Overshooting-Parameter. In diesem Zusammenhang sei darauf hingewiesen, daß derzeit ein Wert von etwa 0.25 für diesen Parameter aus Vergleichen von Modellrechnungen und

Beobachtungen favorisiert wird (Meynet 1987). Wie aus Abbildung 2 ersichtlich ist, kann dieser Wert erhalten werden für einen Mischungswegparameter von ca. 0.9. Dies ist ein etwas geringerer Wert als die in der Literatur üblicherweise benutzten (1.0–1.5).

Bei den hier zugelassenen sehr großen Schwankungen in α_{ML} ergeben sich auch leichte Unterschiede in der Struktur des Sterns. Diese werden wieder exemplarisch dargestellt anhand der Zentraldichte ρ_c , der Zentraltemperatur T_c , des Radius R_* und der Leuchtkraft L_* des Sternes. Wie zu erwarten war, sind die Änderungen am geringsten für die kleinsten Werte des MLT-Parameters. Es sei jedoch darauf hingewiesen, daß die Veränderungen hier aufgrund der Darstellung ohnehin etwas größer erscheinen als in Kapitel 6.2., weil die Werte hier linear und nicht logarithmisch angegeben sind. Abbildung 3 zeigt die Zentraldichten in g/cm^3 für das MLT-Modell (Dreiecke) sowie für das nichtlokale Modell (Punkte), abhängig von der Wahl des MLT-Parameters. Die Variationen sind im ganzen Bereich kleiner als ca. 2%. Die Zentraltemperatur T_c variiert hingegen fast überhaupt nicht (kleiner als 0.3%, Abbildung 4, angegeben in $10^7 K$). Etwas deutlicher sind die Veränderungen sowohl im Radius des Sternes (Abbildung 5, angegeben in R_\odot) als auch besonders in der Leuchtkraft (Abbildung 6, angegeben in L_\odot). Beim Radius sind es etwa 1.3% Variation, bei der Leuchtkraft hingegen 4.7%.

Abb. 3. : Zentraldichte in g/cm^3 Abb. 4. : Zentraltemperatur in $10^7 K$ Abb. 5. : Radius des Sterns in R_\odot Abb. 6. : Leuchtkraft in L_\odot

7. **Schlußbemerkungen**

In der vorliegenden Arbeit wurde ein Modell für Konvektion in Sternen vorgelegt sowie dessen Eigenschaften extensiv analysiert und diskutiert. Dabei wurden insbesondere Bedeutung und Implementation der Zeitabhängigkeit sowie des nichtlokalen Verhaltens der Konvektion herausgestellt.

Die Zeitabhängigkeit der Konvektion ist wesentlich zur Behandlung kurzzeitskaliger Phänomene, wie sie in manchen astrophysikalischen Objekten auftreten, z. B. in variablen Sternen oder in Novae. Dies wurde anhand eines Ein-Zonen-Modells für pulsierende Sterne nachgewiesen. Schon in der linearisierten Behandlung ist der Einfluß der Konvektion auf die Stabilität zu beobachten. Nichtlineare Rechnungen führen zu streng periodischen Lösungen, deren besondere Eigenschaft darin besteht, daß die Nichtlinearität des Systems die Amplituden begrenzt. Auch in diesen Rechnungen zeigt sich, daß die zeitliche Abhängigkeit der Konvektion sicher nicht unter allen Umständen vernachlässigbar ist.

Die nichtlokale Behandlung der Konvektion liefert eine Vergrößerung der Massen der konvektiven Kerne von Sternen und führt somit zu Implikationen für die Sternentwicklung und die Nukleosynthese. Dies wurde analysiert anhand einer Serie von Hauptreihensternmodellen. Es ergeben sich signifikante Unterschiede zu den bisher veröffentlichten Rechnungen, die meist die Mischungwegtheorie benutzen. Dabei wird allerdings deutlich, daß das Unwissen über die typische Skalenlänge der Konvektion die wesentliche Schwachstelle der Modelle, die für solche Zwecke noch uneingeschränkt anwendbar sind, darstellt. Konvektionsmodelle, die frei sind von diesem Nachteil, sind zumindest derzeit nicht verwendbar, da sie in der einen oder anderen Form doch letztendlich immer auf möglichst genaue Auflösung möglichst vieler Skalen der Konvektion hinauslaufen, und dies wird ohne Einschränkung vielleicht niemals möglich sein (Zahn 1987).

Vergleichend mit den in der Literatur vorhandenen anderen Modellen kann resümiert werden:

- i. Das Modell stellt eine sehr einfach geartete Beschreibung der Konvektion in Sternen dar. Bekannte Effekte von großer Tragweite für Modellrechnungen sind konsistent zusammengefaßt.
- ii. Es ergeben sich die verschiedensten beobachtbaren Konsequenzen, dies gilt sowohl für die Zeitabhängigkeit als auch für die Nichtlokalität. Nicht zuletzt beruht darauf die

Hoffnung, daß es möglich sein könnte, die freien Parameter, die hier nur in einer speziellen, durch allerdings nicht unphysikalische Annahmen motivierten Wahl benutzt wurden, durch Beobachtungen an *verschiedenen* Objekten vergleichend zu bestimmen.

- iii. Das Modell besitzt eine gewisse Flexibilität in Bezug auf die Anwendung in Simulationsrechnungen, denn die auftretenden Gleichungen sind von einfacher und bekannter Struktur.
- iv. Im Vergleich zu einigen der publizierten Modelle scheint das vorliegende weniger auf spezielle Effekte, die sich einer Beschreibung durch die bisher fast ausschließlich benutzte MLT entziehen, ausgerichtet zu sein, vielmehr resultieren diese aus natürlich auftretenden Termen. Dies gilt auch für das Stellingwerf'sche (Stellingwerf 1982) sowie das Xiong'sche Modell (Xiong 1981). Dabei ist aber für den Fall der Ein-Gleichungs-Formulierung des hier beschriebenen Modells zu betonen, daß sich eine etwas natürlichere Form der Entwicklung von Konvektion in einer vormals stabilen Schicht ergibt: es besteht keine Abhängigkeit von künstlich zu wählenden, die Ergebnisse aber evtl. signifikant affizierenden Startbedingungen.

Einige Fragen bleiben jedoch offen. Dabei ist besonders an das seit Prandtl ungelöste Problem des Modellierens einer typischen Skalenlänge zu denken, welches hier sogar noch schwieriger scheint, bestehen doch nicht, wie bei typischen z. B. in industriellen Anwendungen durchgeführten Hydrodynamiksimulationen, vorgegebene geometrische Randbedingungen. Vielmehr sind hier 'weiche' Randbedingungen gegeben, die lediglich aus großskaligen Veränderung der Strukturen resultieren. Dort ist also noch ein weites Betätigungsfeld für weitere Forschungen. Dabei ist besonders an folgende Erweiterungen der bestehenden Modelle zu denken, für die erste Ansätze zum Teil schon existieren:

- i. Die Einbeziehung der Druckfluktuationen im Fall sehr großer turbulenter Geschwindigkeiten, wie sie sich in äußeren konvektiven Hüllen von Sternen durchaus ergeben können (Latour *et al.* 1976, Toomre *et al.* 1976, Massaguer, Zahn 1980, Latour *et al.* 1981, Massaguer *et al.* 1984).
- ii. Eine Definition der schon erwähnten Skalenlänge vielleicht durch eine ebenfalls dynamische Gleichung, die eine Größe zur Darstellung typischer Kohärenzlängen der turbulenten Bewegung beschreibt.
- iii. Vielleicht sogar noch weitergehender eine Benutzung eines spektralen Ansatzes zur Dar-

stellung der Dynamik der Dissipation kinetischer Energie in kleinere Skalen. Dabei ist jedoch eventuell ein so großer Aufwand notwendig, daß eine Verwendung in der Beschreibung z. B. pulsierender Sterne oder aber einer ganzen Sternentwicklung mit Einbeziehung des Overshooting problematisch wird. Vielleicht könnten solche Modelle aber genutzt werden zur Bestimmung freier Parameter in einfacheren Ansätzen und so zumindest approximativ eingehen in komplexere Rechnungen (Markus 1979, 1980a, b; Bell, Nelkin 1977, 1978).

In Bezug auf die Testmöglichkeiten für solche Modelle muß generell auf eine Tatsache hingewiesen werden: die wesentliche Problematik, und auch der wesentliche Unterschied zwischen den verschiedenen Konvektionsmodellen einfacherer Natur, besteht in einer differierenden Beschreibung der Korrelation von Entropie- und Geschwindigkeitsfluktuationen. Dieser Term ist aber nicht nur höchst signifikant für die Nichtlokalität der Modelle, sondern vielleicht mehr noch für die Zeitabhängigkeit. Aus diesem Grunde erscheint das breite Spektrum beobachtbarer, kurzzeitskaliger Phänomene ein besseres Prüffeld für Konvektionsmodelle zu sein als die durch Beobachtungen doch nur höchst indirekt quantifizierbare Nichtlokalität. Dabei ist an alle Arten variabler Sterne gedacht. So ist z. B. bekannt, daß die Ergebnisse von Nova-Simulationen alleine durch unterschiedliche Behandlung der Konvektion vollständig differieren können (Oetzl 1987; Truran 1987, private Mitteilung). Genauso sind Effekte der Konvektion in pulsierenden Sternen noch teilweise ungeklärt, dies gilt nicht nur für die Bestimmung des roten Endes des Cepheidenstreifens, sondern auch für verschiedene mehr exotische Variable wie Mira-Sterne oder die sogenannten PG-Variablen, bei denen evtl. die Konvektion zu einem wesentlichen Teil die Instabilität bedingt.

Neben diesen Anwendungen auf astrophysikalische, der Beobachtung zugängliche Objekte ist jedoch auch noch eine Menge theoretischer Arbeit zu leisten. Dabei bilden aber gerade die hydrodynamischen Gleichungen schon in einfachsten Näherungen, z. B. der Annahme einer inkompressiblen Flüssigkeit, ein typisches nichtlineares System, welches chaotisches Verhalten aufweisen kann. Das heutige Wissen über Möglichkeiten einer vielleicht statistischen Beschreibung der Dynamik solcher Systeme ist jedoch noch sehr begrenzt.

A1. Lagrange'sche Formulierung

Zunächst ist die in einer Kugel $S(r)$ mit Radius r enthaltene Masse

$$\begin{aligned} M(r, t) &= \int_{S(r)} \rho(\vec{r}', t) d^3 \vec{r}' \\ &= \int_{S(r)} \langle \rho \rangle(r', t) d^3 \vec{r}' \quad . \end{aligned} \quad (1)$$

Im folgenden wird der Deutlichkeit halber bei partiellen Ableitungen angegeben, welches die jeweilige zweite unabhängige Variable ist, z. B.

$$(\partial_r M)_t = 4\pi r^2 \langle \rho \rangle \quad . \quad (2)$$

sowie aufgrund der Kontinuitätsgleichung der Masse

$$\begin{aligned} (\partial_t M)_r &= \int_{S(r)} \partial_t \langle \rho \rangle d^3 \vec{r}' \\ &= - \int_{S(r)} \operatorname{div}(\langle \rho \rangle \langle \vec{v} \rangle) d^3 \vec{r}' \\ &= - \oiint_{\Sigma(r)} \langle \rho \rangle \langle \vec{v} \rangle d\vec{f} \\ &= - 4\pi r^2 \langle \rho \rangle \langle \vec{v} \rangle_r \quad . \end{aligned} \quad (2)$$

Dabei sei $\Sigma(r)$ die Oberfläche der Kugel. Somit läßt sich die Geschwindigkeit auch wie folgt ausdrücken

$$\begin{aligned} \langle \vec{v} \rangle_r &= - (\partial_t M)_r / (4\pi r^2 \langle \rho \rangle) \\ &= - \frac{(\partial_t M)_r}{(\partial_r M)_t} \\ &= \left(\frac{\partial r}{\partial t} \right)_M \end{aligned} \quad (3a)$$

$$\langle \vec{v} \rangle = \left(\frac{\partial r}{\partial t} \right)_M \vec{e}_r \quad . \quad (3b)$$

Darüber hinaus weist man leicht nach, daß aus (3b) schon die Kontinuitätsgleichung ableitbar ist. Gelte also (3b), so folgt

$$\operatorname{div}(\langle \rho \rangle \langle \vec{v} \rangle) = \frac{1}{r^2} (\partial_r r^2 \langle \rho \rangle \langle \vec{v} \rangle_r)_t$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{4\pi r^2}(\partial_r(\partial_t M)_r)_t \\
&= -\frac{1}{4\pi r^2}(\partial_t(\partial_r M)_t)_r \\
&= -\frac{1}{4\pi r^2}(\partial_t 4\pi r^2 \langle \rho \rangle)_r \\
&= -(\partial_t \langle \rho \rangle)_r \quad .
\end{aligned} \tag{4}$$

Unter der Voraussetzung der Definition der Massenkoordinaten ist also die Kontinuitätsgleichung äquivalent zur Beschreibung der Geschwindigkeit als Zeitableitung des Radius einer festen Massenschale.

Des weiteren müssen nun alle Ableitungen von skalaren und vektorwertigen Funktionen entsprechend ersetzt werden. Sei $f(r, t)$ eine skalare Funktion, dann ist die entsprechende Funktion, die von der Massenkoordinate abhängt, zu definieren gemäß

$$\tilde{f}(M, t) := f(r(M, t), t) \quad . \tag{5}$$

Durch triviale Anwendung der Kettenregel gelangt man dann zu den Ergebnissen

$$(\partial_r f)_t(r, t) = \left(4\pi \tilde{r}^2 \langle \tilde{\rho} \rangle (\partial_M \tilde{f})_t\right)(M(r, t), t) \tag{6a}$$

$$(d_t f)(r, t) = (\partial_t \tilde{f})_M(M(r, t), t) \quad . \tag{6b}$$

Dabei wurde d_t wie vorher definiert als mittlere, konvektive Ableitung

$$d_t := \partial_t + \langle \vec{v} \rangle \cdot \nabla \quad . \tag{7}$$

Außerdem beachte man, das in Gleichung (6a) r und $\langle \rho \rangle$ auf der rechten Seite auch als Funktionen von M aufzufassen sind.

Analog erhält man für ein rein radial gerichtetes Vektorfeld $\vec{q} = q(r, t)\vec{e}_r$, und diese Eigenschaft besitzen alle gemittelten Vektorfelder, eine Beziehung für die Divergenz:

$$\left(\frac{1}{\langle \rho \rangle} \operatorname{div} \vec{q}\right)(r, t) = (\partial_M 4\pi \tilde{r}^2 \tilde{q})(M(r, t), t) \quad . \tag{8}$$

In etwas unakkurater, aber dafür sehr suggestiver Schreibweise lassen sich somit die Regeln für das Umschreiben der Gleichungen auf die Massenkoordinate angeben:

$$\partial_r f \longrightarrow 4\pi r^2 \langle \rho \rangle \partial_M f \tag{9a}$$

$$d_t f \longrightarrow \partial_t f \quad (9b)$$

$$\frac{1}{\langle \rho \rangle} \operatorname{div} \vec{q} \longrightarrow \partial_M 4\pi r^2 q. \quad (9c)$$

Dabei ist aber zu beachten, daß auf der linken Seite die unabhängigen Variablen ganz andere sind als auf der rechten.

Zusätzlich zu diesen Ersetzungen in dynamischen Gleichungen muß natürlich noch die Definition der Massenkoordinate (1) quasi invers benutzt werden zur Darstellung des Radius als von der Masse abhängige Funktion:

$$\partial_M r = \frac{1}{4\pi r^2 \langle \rho \rangle}. \quad (10)$$

Diese Differentialgleichung ist somit ebenfalls zu lösen. Im nicht statischen Falle ist darüber hinaus noch die Gleichung (3) mit einzubeziehen, die, wie schon gezeigt, die äquivalente Ersetzung der Kontinuitätsgleichung für die Masse darstellt.

A2. Grundlagen der numerischen Stabilitätsanalyse

Bei impliziten numerischen Verfahren steht meist eine Routine zur Verfügung, die die Jacobi-Matrix der verwendeten Gleichungen berechnet für gegebene Werte der zu bestimmenden Variablen. Alleine diese Matrix ist aber schon hinreichend zur Durchführung einer Stabilitätsanalyse. Die notwendige Eigenwertgleichung wird im folgenden abgeleitet. Im Grenzfall verschwindend kleiner Zeitschritte entspricht diese Gleichung einer von Stellingwerf und Buff (1978) abgeleiteten. Die Herleitung beinhaltet jedoch eine Inkonsistenz, die eine erneute geschlossene Darstellung der Methode angebracht erscheinen läßt, welche in nicht so ausführlicher Form auch in der Literatur zu finden ist (Buff, Gerola, Stellingwerf 1979).

Ausgehend von einer Gleichung des Typs

$$\frac{d}{dt}f(z) = G(z), \quad (1)$$

wie sie zum Beispiel nach räumlicher Diskretisierung der hydrodynamischen Gleichungen mit einem aus den Variablen an verschiedenen Stützstellen gebildeten Vektor z auftreten würde, wird zunächst eine zeitliche Diskretisierung vorgenommen, dabei sei Δ der Zeitschritt, z^n der Wert der Variablen zum neuen Zeitpunkt, z^o der zum alten Zeitpunkt:

$$0 = f(z^n) - f(z^o) - \Delta \cdot G(z^n, z^o) =: F(z^n, z^o). \quad (2)$$

Sei nun z_0 eine stationäre Lösung des Systems (1), und sei dieses gestört durch die kleine Störung δ zum alten Zeitschritt, d. h.

$$z^o = z_0 + \delta \quad \text{und} \quad z^n = z_0 + k\delta, \quad (3)$$

wobei in der Linearisierung von einem exponentiellen Verhalten der Störung ausgegangen werden kann, d. h.

$$k = \exp(\lambda\Delta). \quad (4)$$

Dann leitet man durch Entwicklung von (2) nach δ sofort folgende Gleichung ab:

$$\left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial z^n} \right)^{-1} (z_0, z_0) \left(\frac{\partial F}{\partial z^o} \right) (z_0, z_0) + k \right\} \delta = 0. \quad (5)$$

Diese Gleichung entspricht dem Ergebnis von Stellingwerf und Buff (1978) (Gleichung (9)) nur im Fall verschwindend geringer Zeitschritte. Dies ist insofern unwesentlich, als daß nur

dieser Fall interessiert, jedoch erscheint die Ableitung dort im Ansatz inkonsistent, da in der Funktion $G(z^n, z^o)$ beide Werte z^o und z^n auf den gleichen Wert gesetzt werden, was der auch dort benutzten Gleichung (2) nicht entspricht. Es ist also *a priori* nicht klar, ob der Grenzfall $\lim_{\Delta \rightarrow 0}$ zum gleichen Ergebnis führt.

Die Problematik der Eigenwertgleichung (5) besteht in der Tatsache, daß zur Sicherstellung der Gültigkeit des linearisierten Ansatzes der Zeitschritt beliebig klein wählbar sein muß. Aus der Definition der Funktion der Variablen F erkennt man aber unmittelbar, daß dann die beiden Faktoren

$$\left(\frac{\partial F}{\partial z^n}\right)(z^n, z^o) = \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)(z^n) - \Delta \left(\frac{\partial G}{\partial z^n}\right)(z^n, z^o) \quad (6a)$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial z^o}\right)(z^n, z^o) = - \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)(z^o) - \Delta \left(\frac{\partial G}{\partial z^o}\right)(z^n, z^o) \quad (6b)$$

numerisch nicht gut auszuwerten sind. Im einfachsten Falle $f(z) = z$ entarten die ersten Summanden jeweils zur Einheitsmatrix, so daß auch der Eigenwert k beliebig genau 1 werden kann, wobei jedoch wegen

$$\lambda = \frac{1}{\Delta} \ln k \quad (7)$$

lediglich die Abweichungen vom Wert 1 physikalisch von Interesse sind. Aus diesem Grunde ist eine Eigenwertanalyse vermöge Gleichung (5) fragwürdig, und sie erweist sich auch in der Praxis als ungenau oder nicht anwendbar. Allerdings wird laut Beschreibung des HYDRA-Programmpaketes diese Gleichung dort angewandt.

Sinnvoller erscheint deshalb, vor einer Eigenwertanalyse den Grenzübergang $\lim_{\Delta \rightarrow 0}$ explizit durchzuführen. Mit Hilfe der Identitäten (6) kann man die Eigenwertgleichung (5) unmittelbar umschreiben auf

$$\left\{ \frac{1-k}{\Delta} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)(z_0) - \Delta \left(\frac{\partial G}{\partial z^n}\right)(z_0, z_0) \right] + \left[\left(\frac{\partial G}{\partial z^n}\right) + \left(\frac{\partial G}{\partial z^o}\right) \right](z_0, z_0) \right\} \delta = 0. \quad (8)$$

Unter Berücksichtigung von

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1-k}{\Delta} = -\lambda \quad (9)$$

kann der Grenzwert der Gleichung explizit durchgeführt werden, und man erhält

$$\left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^{-1}(z_0) \left[\left(\frac{\partial G}{\partial z^n}\right) + \left(\frac{\partial G}{\partial z^o}\right) \right](z_0, z_0) - \lambda \right\} \delta = 0. \quad (10)$$

In dieser Form ist die Eigenwertgleichung numerisch gutartig. Sie entspricht genau dem Ergebnis von Stellingwerf und Buff (1978) sowie Buff, Gerola und Stellingwerf (1979).

A3. Bemerkungen zum Roxburgh-Kriterium (Roxburgh 1978)

Ausgehend von den Gleichungen

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (1a)$$

$$\partial_t \left\{ \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) \right\} + \operatorname{div} \left\{ \rho \vec{v} \left(w + \frac{v^2}{2} \right) + \vec{q} \right\} = \rho \epsilon + \rho \vec{v} \vec{g} \quad (1b)$$

$$w = e + \frac{p}{\rho} \quad (\text{Enthalpie})$$

$$d_t \vec{v} := \partial_t \vec{v} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p \quad (1c)$$

erhält man im stationären Grenzfall ($\partial_t = 0$)

$$\operatorname{div} \left\{ \rho \vec{v} \left(w + \frac{v^2}{2} \right) \right\} = \rho \epsilon - \operatorname{div} \vec{q} + \rho \vec{v} \vec{g} \quad (2a)$$

$$\operatorname{div} \{ \rho \vec{v} s \} = \frac{1}{T} \{ \rho \epsilon - \operatorname{div} \vec{q} \} \quad (2b)$$

$$\operatorname{div} \{ \rho \vec{v} \} = 0 \quad (2c)$$

Die Entropiegleichung wurde unter der Annahme eines homogenen Gases ohne Erzeugung oder Vernichtung von Teilchen abgeleitet, so daß die das chemische Potential enthaltenden Terme verschwinden.

Unter Benutzung der Definitionen für das Mittelungsverfahren folgen zunächst für eine beliebige skalare Größe ϕ oder einen beliebigen Vektor \vec{q} die Gleichungen

$$\int_{S(r)} \phi d^3 \vec{r} = \int_{S(r)} \langle \phi \rangle d^3 \vec{r} \quad (3a)$$

$$\oiint_{\Sigma(r)} \vec{q} d\vec{f} = 4\pi r^2 \langle q \rangle(r), \quad q := \vec{q} \cdot \vec{e}_r. \quad (3b)$$

Außerdem gilt wegen (2c) und aufgrund des Gauß'schen Satzes

$$\langle \rho \vec{v} \rangle = 0, \quad (4)$$

und insbesondere damit auch bei Vernachlässigung der Fluktuationen des Gravitationsfeldes

$$\langle \rho \vec{v} \vec{g} \rangle = 0. \quad (5)$$

Sei $S(r)$ die Kugel mit Radius r und $\Sigma(r)$ deren Oberfläche, so kann man die Energie- und die Entropieerhaltung mit Hilfe des Gauß'schen Gesetzes schreiben als

$$\oint_{\Sigma(r)} \rho \vec{v} \cdot d\vec{f} = \int_{S(r)} \frac{1}{T} (\rho \epsilon - \operatorname{div} \vec{q}) d^3 \vec{r} \quad (6a)$$

$$\oint_{\Sigma(r)} \rho \vec{v} \left(w + \frac{v^2}{2} \right) d\vec{f} = \int_{S(r)} (\rho \epsilon - \operatorname{div} \vec{q}) d^3 \vec{r} \quad (6b)$$

Die Definitionen der nuklearen, der radiativen und der konvektiven Leuchtkräfte sind:

1. Die radiative Leuchtkraft im Abstand r vom Zentrum ist das Integral des radiativen Flusses durch $\Sigma(r)$.
2. Die konvektive Leuchtkraft im Abstand r vom Zentrum ist das Integral des konvektiven Flusses durch $\Sigma(r)$.
3. Die nukleare Leuchtkraft im Abstand r vom Zentrum ist das Integral der Energieerzeugung über die Kugel $S(r)$.

Also ist formal

$$L_{\text{rad}} := \oint_{\Sigma(r)} \vec{q} \cdot d\vec{f} = 4\pi r^2 \langle q \rangle \quad (7a)$$

$$L_{\text{conv}} := \oint_{\Sigma(r)} \vec{j}_c \cdot d\vec{f} = 4\pi r^2 \langle j_c \rangle \quad (7b)$$

$$L_{\text{nuc}} := \oint_{\Sigma(r)} \vec{\Gamma} \cdot d\vec{f} = 4\pi r^2 \Gamma \quad (7c)$$

mit den Definitionen

$$\vec{j}_c = \rho \vec{v} \left(w + \frac{v^2}{2} \right) \quad (8a1)$$

$$j_c = \vec{j}_c \cdot \vec{e}_r \quad (8a2)$$

$$\Gamma = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S(r)} \rho \epsilon d^3 \vec{r} \quad (8b1)$$

$$\vec{\Gamma} = \Gamma \vec{e}_r \quad (8b2)$$

Sei nun r_c groß genug gewählt, um $\vec{v} = \vec{0}$ auf $\Sigma := \Sigma(r_c)$ zu gewährleisten, und sei ebenfalls abkürzend definiert $S := S(r_c)$, so sind die zwei grundlegenden, aus den Erhaltungssätzen

(6) folgenden Gleichungen

$$\int_S \frac{1}{T} (\rho\epsilon - \text{div } \vec{q}) d^3\vec{r} = 0 \quad (9a)$$

$$\int_S (\rho\epsilon - \text{div } \vec{q}) d^3\vec{r} = 0. \quad (9b)$$

Aus der zweiten Gleichung folgt mit Hilfe des Gauß'schen Satzes

$$\vec{\Gamma} = \langle \vec{q} \rangle \quad \text{auf } \Sigma, \quad (10)$$

und da aufgrund der Definitionen gilt

$$\text{div } \vec{\Gamma} = \langle \rho\epsilon \rangle \quad (11)$$

kann man die Entropieerhaltung (9a) umschreiben gemäß:

$$\int_S (\vec{\Gamma} - \vec{q}) \nabla \frac{1}{T} d^3\vec{r} = -4\pi r_c^2 \left\langle \left(\frac{1}{T} \right)' \vec{q}' \right\rangle (r_c) + \int_S \frac{(\rho\epsilon)'}{T} d^3\vec{r}. \quad (12)$$

Nun wird die linke Seite von (12) in mittlere und fluktuierende Anteile entwickelt. Diese Entwicklung ist exakt und besteht nur aus einer Zerlegung:

$$\begin{aligned} \int_S (\vec{\Gamma} - \langle \vec{q} \rangle) \nabla \left\langle \frac{1}{T} \right\rangle d^3\vec{r} &= \int_S (\vec{\Gamma} - \vec{q}) \nabla \frac{1}{T} d^3\vec{r} - \int_S \frac{1}{T} \text{div } \vec{q}' d^3\vec{r} \\ &\quad + 4\pi r_c^2 \left\langle \vec{q}' \left(\frac{1}{T} \right)' \right\rangle. \end{aligned} \quad (13)$$

Damit folgt aus (12) und (13)

$$\begin{aligned} \int_0^{r_c} (L_{\text{nuc}} - L_{\text{rad}}) \partial_r \left\langle \frac{1}{T} \right\rangle dr &= \int_S (\vec{\Gamma} - \langle \vec{q} \rangle) \nabla \left\langle \frac{1}{T} \right\rangle d^3\vec{r} \\ &= \int_S \frac{1}{T} (\rho\epsilon - \text{div } \vec{q}') d^3\vec{r}. \end{aligned} \quad (14)$$

Man beachte, daß die rechte Seite der Gleichung (14) aussieht wie ein Term zweiter Ordnung, da aufgrund der Identität (3a) nur der fluktuierende Anteil der Temperatur eingeht. Dieser Term ist aber, wie nun gezeigt werden wird, nicht vernachlässigbar, er beinhaltet vielmehr den Beitrag des konvektiven Flusses. In der Tat folgt aus Gleichung (2a)

$$\langle \rho\epsilon - \text{div } \vec{q}' \rangle = \left\langle \text{div} \left\{ \rho \vec{v} \left(w + \frac{v^2}{2} \right) \right\} - \rho \vec{v} \vec{g}' \right\rangle = \text{div} \left\langle \vec{j}_c \right\rangle, \quad (15)$$

und man erhält unter Benutzung der integralen Identität (9a)

$$\begin{aligned} \int_S \frac{1}{T} (\rho\epsilon - \operatorname{div} \vec{q})' d^3\vec{r} &= - \int_S \frac{1}{T} \operatorname{div} \langle \vec{j}_c \rangle d^3\vec{r} \\ &= \int_S \langle \vec{j}_c \rangle \nabla \left\langle \frac{1}{T} \right\rangle d^3\vec{r} . \end{aligned} \quad (16)$$

Schlußendlich folgt also aus den Gleichungen (14) und (16) die integrale Bedingung

$$\begin{aligned} \int_0^{r_c} (L_{\text{nuc}} - L_{\text{rad}} - L_{\text{conv}}) \partial_r \left\langle \frac{1}{T} \right\rangle dr &= \\ \int_S (\vec{\Gamma} - \langle \vec{q} \rangle - \langle \vec{j}_c \rangle) \nabla \left\langle \frac{1}{T} \right\rangle d^3\vec{r} &= 0 . \end{aligned} \quad (17)$$

Dies ist sozusagen ein korrigiertes Roxburgh-Kriterium. Die originale Version versucht folglich die Konvektion zu beschreiben unter Vernachlässigung derselben. Allerdings ist die Gleichung (17) eine triviale Folge des Energieerhaltungssatzes (2a), aus dem man durch Mittelung erhält:

$$\operatorname{div} \left\{ \vec{\Gamma} - \langle \vec{q} \rangle - \langle \vec{j}_c \rangle \right\} = 0 , \quad (18)$$

woraus unter Benutzung des Gauß'schen Gesetzes folgt:

$$\vec{\Gamma} = \langle \vec{q} \rangle + \langle \vec{j}_c \rangle \quad (19a)$$

bzw. äquivalent

$$L_{\text{nuc}} = L_{\text{rad}} + L_{\text{conv}} . \quad (19b)$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgen aber die Gleichungen (17) sofort. Man erkennt also, das das Roxburgh-Kriterium auf einer Inkonsistenz in der Behandlung der Energieerhaltung, einmal auf der Basis der Energiegleichung, zum anderen durch die Entropiegleichung, beruht. Es wäre ohnehin sehr verwunderlich, könnte man aufgrund eines Erhaltungssatzes, geschrieben in zwei verschiedenen Formen, zwei *verschiedene* Bedingungen an die Flüsse ableiten, das Roxburgh-Kriterium und die Gleichungen (19).

Literaturliste

- Baker, N.H., Kippenhahn, R.: 1962, *Zeitschr. f. Astrophysik* **54**, 114
- Baker, N.H., Kippenhahn, R.: 1965, *Astrophys. J.* **142**, 868
- Baker, N.H.: 1966, in 'Stellar Evolution', 333,
Hrsg. R.F. Stein, A.G.W. Cameron, Plenum
- Baker, N.H., Kuhfuß, R.: 1987, *Astron. Astrophys.*, im Druck
- Bell, T.L., Nelkin, M.: 1977, *Phys. of Fluids* **20.3**, 345
- Bell, T.L., Nelkin, M.: 1978, *J. of Fluid Mech.* **88.2**, 369
- Bertelli, G., Bressan, A.G., Chiosi, C.: 1985, *Astron. Astrophys.* **150**, 33
- Biermann, L.: 1937, *Astron. Nachrichten* **264**, 359
- Böhm-Vitense, E.: 1958, *Zeitschr. f. Astrophysik* **46**, 108
- Bressan, A.G., Bertelli, G., Chiosi, C.: 1981, *Astron. Astrophys.* **102**, 25
- Bressan, A.G.: 1984, International School for Advanced Studies,
Triest, Italien (unveröffentlicht)
- Buff, J., Gerola, H., Stellingwerf, R.F.: 1979, *Astrophys. J.* **230**, 839
- Busse, F.H.: 1975, *J. of Fluid Mech.* **72.1**, 67
- Castor, J.: 1975, unveröffentlichtes Manuskript
- Chan, K.L., Sofia, S., Wolff C.L.: 1982, *Astrophys. J.* **263**, 935
- Chan, K.L., Sofia, S.: 1986, *Astrophys. J.* **307**, 222
- Chan, K.L., Sofia, S.: 1987, *Science* **235**, 465
- Chiu, H.-Y.: 1968, *Stellar Physics, Vol.1*, Blaisdell
- Christy, R.F.: 1966, *IAU Symposium* **28**, 105
- Deupree, R.G.: 1984, *Astrophys. J.* **282**, 274
- Deupree, R.G.: 1986, *Astrophys. J.* **303**, 649
- Doom, C.: 1985, *Astron. Astrophys.* **142**, 143
- Doom, C., de Greve, J.P., de Loore, C.: 1986, *Astrophys. J.* **303**, 136
- Eggleton, P.P.: 1972, *Mon. Not. R. astr. Soc.* **156**, 361
- Eggleton, P.P.: 1983, *Mon. Not. R. astr. Soc.* **204**, 449
- El Eid, M.F., Langer, N.: 1986, *Astron. Astrophys.* **167**, 274
- Gautschy, A.: 1986, Preprint 23, Universität Basel
- Gough, D.O.: 1965, *Geophys. Fluid Dynamics* **2**, 49
- Gough, D.O.: 1969, *J. Atmos. Sci.* **26**, 448

- Gough, D.O.: 1977, *Astrophys. J.* **214**, 196
- Habets, G.M.H.J.: 1985, *Dissteration*, Amsterdam
- Henyey, L.G., Wilets, L., Böhm, K.H., Lelevier, R., Levée, R.D.:
1959, *Astrophys. J.* **129**, 628
- Henyey, L.G., Forbes, J.E., Gould, N.L.: 1964, *Astrophys. J.* **139**, 306
- Hofmeister, E., Kippenhahn, R., Weigert, A.: 1964, *Zeitschr. f. Astrophysik* **59**, 215
- Hofmeister, E., Kippenhahn, R., Weigert, A.: 1964, *Zeitschr. f. Astrophysik* **59**, 242
- Hofmeister, E., Kippenhahn, R., Weigert, A.: 1964, *Zeitschr. f. Astrophysik* **60**, 57
- Hofmeister, E.: 1967, *Zeitschr. f. Astrophysik* **65**, 164
- Hurlburt, N.E., Toomre, J., Massaguer, J.M.: 1984, *Astrophys. J.* **282**, 557
- J Jeans, J.: 1928, *Astronomy and Cosmology*, Par. 108, Cambridge
- Kato, S.: 1966, *Pub. Astr. Soc. Japan* **18.4**, 374
- Kippenhahn, R.: 1962, *Proc. Int. School of Phys. 'Enrico Fermi'* **XXVIII**, 330
- Kippenhahn, R., Thomas, H.-C., Weigert, A.: 1965, *Zeitschr. f. Astrophysik* **61**, 241
- Kippenhahn, R., Thomas, H.-C., Weigert, A.: 1966, *Zeitschr. f. Astrophysik* **64**, 373
- Kippenhahn, R., Weigert, A., Hofmeister, E.: 1967, *Meth. Comp. Phys.* **7**, 129
- Kuhfuß, R.: 1986, *Astron. Astrophys.* **160**, 116
- Kuhfuß, R.: 1986, in 'Advances in Nuclear Astrophysics', 135
Hrsg. E. Vangioni-Flam, J. Audouze, M. Cassé, J.-P. Chieze, J. Tran Than Van,
Edition Frontières
- Kuhfuß, R.: 1987, *Proceedings of the Fourth Workshop on Nuclear Astrophysics*,
Ringberg Castle, Tegernsee,
Hrsg. W. Hillebrandt, R. Kuhfuß, E. Müller, J.W. Truran
Lecture Notes in Physics, Springer
- Langer, N., El Eid, M.F., Fricke K.J.: 1985, *Astron. Astrophys.* **145**, 179
- Langer, N., El Eid, M.F.: 1986, *Astron. Astrophys.* **167**, 265
- Langer, N.: 1986, *Astron. Astrophys.* **164**, 45
- Langer, N.: 1986, *Dissertation*, Göttingen
- Latour, J., Spiegel, E.A., Toomre, J., Zahn, J.-P.: 1976, *Astrophys. J.* **207**, 223
- Latour, J., Toomre, J., Zahn, J.-P.: 1981, *Astrophys. J.* **248**, 1081
- Maeder, A.: 1975, *Astron. Astrophys.* **40**, 303
- Marcus, P.S.: 1979, *Astrophys. J.* **231**, 176
- Marcus, P.S.: 1980, *Astrophys. J.* **239**, 622

- Marcus, P.S.: 1980, *Astrophys. J.* **240**, 203
- Massaguer, J.M., Zahn, J.-P.: 1980, *Astron. Astrophys.* **87**, 315
- Massaguer, J.M., Latour, J., Toomre, J., Zahn, J.-P.:
1984, *Astron. Astrophys.* **140**, 1
- Meynet, G., Maeder, A.: 1987,
Proceedings of the Fourth Workshop on Nuclear Astrophysics,
Ringberg Castle, Tegernsee,
Hrsg. W. Hillebrandt, R. Kuhfuß, E. Müller, J.W. Truran
Lecture Notes in Physics, Springer
- Nordlund, A.: 1982, *Astron. Astrophys.* **107**, 1
- Oettl, R.: 1987, private Mitteilung
- Prandtl, L.: 1932, *Beiträge zur Physik der freien Atmosphäre* **19**, 188
- Prantzos, N., Arnould, M., Arcoragi, J.-P.: 1987, *Astrophys. J.* **315**, 209
- Roxburgh, I.W.: 1978, *Astron. Astrophys.* **65**, 281
- Shaviv, G., Salpeter, E.E.: 1973, *Astrophys. J.* **184**, 191
- Simpson, E.E.: 1971, *Astrophys. J.* **165**, 295
- Sofia, S., Chan, K.L.: 1984, *Astrophys. J.* **282**, 550
- Spiegel, E.A., Veronis, G.: 1960, *Astrophys. J.* **131**, 442
- Stellingwerf, R.F.: 1972, *Astron. Astrophys.* **21**, 91
- Stellingwerf, R.F., Buff, J.: 1978, *Astrophys. J.* **221**, 661
- Stellingwerf, R.F.: 1982, *Astrophys. J.* **262**, 330
- Stellingwerf, R.F.: 1982, *Astrophys. J.* **262**, 339
- Stellingwerf, R.F.: 1984, *Astrophys. J.* **277**, 322
- Stellingwerf, R.F.: 1984, *Astrophys. J.* **277**, 327
- Stellingwerf, R.F.: 1984, *Astrophys. J.* **284**, 712
- Stellingwerf, R.F.: 1985, in 'Radiation Hydrodynamics in stars and compact objects', 37,
Kopenhagen 1985, Hrsg. D. Mihalas, K.-H.A. Winkler, Springer 1986
- Stellingwerf, R.F.: 1986, *Astrophys. J.* **303**, 119
- Sybesma, C.H.B.: 1985, *Astron. Astrophys.* **142**, 171
- Sybesma, C.H.B.: 1986, *Astron. Astrophys.* **159**, 108
- Tennekes, H., Lumley, J.L.: 1972, A first course in turbulence, MIT-press
- Toomre, J., Zahn, J.-P., Latour, J., Spiegel, E.A.: 1976, *Astrophys. J.* **207**, 545
- Tscharnutter, W.M., Winkler, K.-H.: 1979, *Comput. Phys. Com.* **18**, 171

- Unno, W.: 1965, *Zeitschr. f. Astrophysik* **61**, 268
- Unno, W.: 1967, *Pub. Astr. Soc. Japan* **19.2**, 140
- Unno, W., Kondo, M., Xiong, D.R.: 1985, *Pub. Astr. Soc. Japan* **37**, 235
- Uspenky, J.V.: 1948, *Theory of equations*, McGraw-Hill
- Vitense, E.: 1953, *Zeitschr. f. Astrophysik* **32**, 135
- Wambsganß, J.: 1987, Diplomarbeit, Garching
- Weaver, T.A., Zimmerman, G.B., Woosley, S.E.: 1978, *Astrophys. J.* **225**, 1021
- Weigert, A.: 1966, *Zeitschr. f. Astrophysik* **64**, 395
- Xiong, D.R.: 1980, *Scientia Sinica* **XXIII.9**, 1139
- Xiong, D.R.: 1981, *Scientia Sinica* **XXIV.10**, 1406
- Xiong, D.R.: 1985, *Astron. Astrophys.* **150**, 133
- Xiong, D.R.: 1985, *Scientia Sinica* **XXVIII.7**, 764
- Zahn, J.P.: 1987, Vorabdruck, wird publiziert in 'Solar and Stellar Physics',
Hrsg. E.H. Schröter, M. Schüssler, *Lecture Notes in Physics*, Springer