Vorstellung & Überblick

Organisation: $\underbrace{\overset{\text{Wolf}}{V} + \overset{\text{Ziegler}}{Z\ddot{U}} + \overset{\text{Jia}}{\ddot{U}}}_{\text{moodle page}}$

Gedanken zum Studium:

- eigenes Skript
- Fragen, Fragen, Fragen
- Lerngruppen
- Literatur parallel zur Vorlesung

Lankham, Nachtergaele, Schilling
"Linear Algebra - As an Introduction to Abstract Mathematics"

Jänich
„Lineare Algebra"

Kemper & Reimers
(weiterführend)

Was ist Algebra? Abstraktion von +, · ohne Grenzprozesse

↳ Analysis

Moderne Algebra geht wesentlich auf Emmy Noether (1882 - 1935) zurück.

Was ist Lineare Algebra? Theorie endl.-dim. Linearer Abbildungen

(Lorentz-Trafos, Quanten-Observable, Layer in neuronalen Netzen, etc.)

Inhalt:

I. GRUNDBEGRIFFE – Mengen, Abbildungen, Relationen

I.1. Mengen

Eine Menge M ist eine ungeordnete Zusammenfassung von unterschiedlichen (mathematischen) Objekten, den Elementen der Menge.

Bsp.:

- $M = \{1,2,3\} = \{1,3,2\} = \{3,2,1,3\}$ ähnlich: "set" in Python
- $\emptyset = \{\}$ Leere Menge
- $\mathbb{N} := \{1,2,3,4,\dots\}$ natürliche Zahlen

  „... ist definiert als ..."

  $3 \in \mathbb{N}$, $0 \notin \mathbb{N}$ (ACHTUNG! Def.en in Literatur unterschiedlich)
- $\mathbb{Z} := \{0,-1,1,-2,2,\dots\}$ ganze Zahlen
- $\mathbb{R}$ reelle Zahlen

Mengen werden oft über Eigenschaften angegeben:

$B = \{x \in A \mid E(x)\}$ bedeutet, dass $x \in B$ g.d.w. $x \in A$ und $E(x)$ zutrifft.

Bsp.:

- $\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > 0\}$ logisches 'und' -> siehe Analysis Vlsg. (Junktoren & Quantoren)
- $\mathbb{Q} := \{\frac{z}{n} \mid z \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N}\}$ rationale Zahlen

$A \subseteq B$ bedeutet: A ist Teilmenge von B, d.h.

$$x \in A \Rightarrow x \in B$$

$A \subsetneq B$ bedeutet: A ist 'echte Teilmenge' von B, d.h.

$$A \subseteq B \wedge A \neq B$$

Bem.:

- $A = B \iff (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$
- $\emptyset \subseteq A$ gilt immer

Def.: Seien A, B Mengen. Man definiert:

$A \cap B := \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \}$ Durchschnitt

(A, B heißen disjunkt wenn $A \cap B = \emptyset$)

'oder'

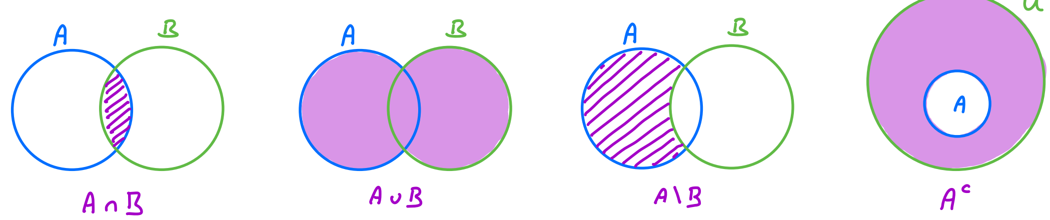
$A \cup B := \{ x \mid x \in A \vee x \in B \}$ Vereinigung

$A \setminus B := \{ x \mid x \in A \wedge x \notin B \}$ Differenz

$\mathcal{P}(A) := \{ M \mid M \subseteq A \}$ Potenzmenge

Sei ferner $A \subseteq U$, dann ist das 'Komplement von A in U' definiert als $A^c := \{ x \in U \mid x \notin A \}$.

Venn Diagramme zur Veranschaulichung:



Das Kartesische Produkt von A und B ist

$$A \times B := \{ \underbrace{(a, b)}_{\text{„geordnetes Paar"}} \mid a \in A \wedge b \in B \}$$

Analog definiert man für Mengen $A_1, \ldots, A_n$ mit $n \in \mathbb{N}$:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n := \{ \underbrace{(a_1, \ldots, a_n)}_{\text{„n-Tupel"}} \mid a_1 \in A_1 \wedge \ldots \wedge a_n \in A_n \}$$

ähnlich: "list", "tuple" in Python

Bsp.:

- $\mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$
- $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Allgemein: $A^n := \overbrace{A \times \ldots \times A}^{n \text{ mal}}$
- $M := \{a, c\} \times \{b, a\} = \{(a, b), (a, a), (c, b), (c, a)\}$

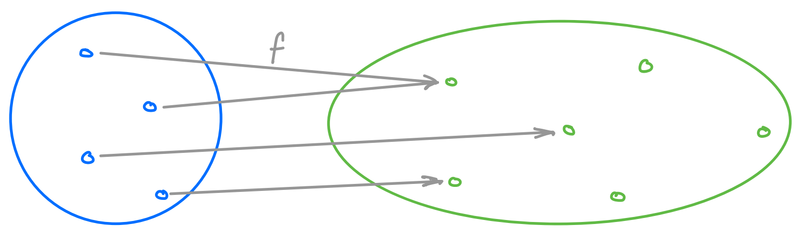
  Da die Paare geordnet sind ist z.B. $(a, c) \notin M$.

I.2. Abbildungen

Eine **Abbildung** (synonym: **Funktion**) f von einer Menge A in eine Menge B ordnet jedem $a \in A$ <u>genau ein</u> Element $b \in B$ zu. Man schreibt:

$f: A \to B$ oder $A \xrightarrow{f} B$ bzw. $f: a \mapsto b$ und $f(a) = b$.

Dabei heißt A **Definitionsbereich** und B **Wertebereich** von f.



Für die Menge aller Abbildungen von A nach B schreibt man B^A.

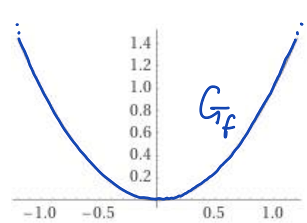
<u>Def.:</u> Sei $f: A \to B$ eine Abbildung, $M \subseteq A$, $N \subseteq B$.

- $f(M) := \{ f(x) \mid x \in M \}$ heißt **Bild** von M unter f.
- $f^{-1}(N) := \{ x \in A \mid f(x) \in N \}$ heißt **Urbild** von N unter f.
- $f|_M : \begin{cases} M \to B \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$ heißt **Einschränkung** von f auf M.
- Der **Graph** von f ist definiert als

$$G_f := \{ (x,y) \in A \times B \mid y = f(x) \}$$

<u>Bsp.:</u>

- $id_A: A \to A$, $id_A(x) := x$ **Identität**
- Für $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$ ist z.B. $f([0,1]) = [0,1]$, $f^{-1}([0,1]) = [-1,1]$ und $f^{-1}(\{1\}) = \{-1,1\}$.
  Für $g := f|_{\mathbb{Z}}$ ist $g^{-1}([0,1]) = \{-1,0,1\}$.



<u>Bem.:</u> ∘ Zwei Abbildungen $f: X \to Y$ und $g: X \to Y$ sind gleich

g.d.w. für alle $x \in X$ gilt: $f(x) = g(x)$

- Für $f: X \to Y$ nennt man oft $f(X)$ schlicht das **Bild** von f.

Def.: Eine Abbildung $f: X \to Y$ heißt

- **injektiv**, wenn $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

  (d.h. keine zwei verschiedenen Punkte in X werden auf denselben Punkt in Y abgebildet.)

- **surjektiv**, wenn $f(X) = Y$

  'für alle' 'existiert'

  (d.h. $\forall y \in Y \; \exists x \in X: f(x) = y$)

- **bijektiv**, wenn f surjektiv und injektiv ist.

Bsp.:

- $f: \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $f(x) := x^2$ ist surjektiv aber nicht injektiv.

  $f\big|_{[0,\infty)}$ ist bijektiv. $f\big|_{\mathbb{N}}: \mathbb{N} \to [0, \infty)$ ist injektiv aber nicht surjektiv.

- Eine **Permutation** von n Elementen ist eine bijektive Abb.

  $\pi: \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$

- Aus jeder injektiven Abbildung $g: X \to Y$ lässt sich über $\tilde{g}: X \to g(X)$, $\tilde{g}(x) := g(x)$ eine bijektive Abbildung (= **Bijektion**) $\tilde{g}$ konstruieren.

Def.: Für Abbildungen $f: X \to Y$ und $g: Y \to Z$ ist die **Komposition** (**Verknüpfung**, **Hintereinanderausführung**) $g \circ f: X \to Z$ definiert als $g \circ f(x) := g(f(x))$.

Bem.: • Komposition ist assoziativ, d.h. es gilt $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$, da $(h \circ g) \circ f(x) = h(g(f(x))) = h \circ (g \circ f)(x) \quad \forall x$.

• Abb.en auf kartesischen Produkten werden oft als Verknüpfungen bezeichnet. Hier: $\circ : Y^X \times Z^Y \to Z^X$, $(f, g) \mapsto g \circ f$

Aber auch $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x + y$

und $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x \cdot y$

Satz: Ist $f : X \to Y$ bijektiv, dann existiert eine Abbildung $g : Y \to X$ für die gilt:

$$f \circ g = id_Y \quad \wedge \quad g \circ f = id_X .$$

Diese ist eindeutig, wird als Umkehrabbildung f^{-1} bezeichnet, und es gilt $(f^{-1})^{-1} = f$.

Beweis: Wegen Bijektivität von f existiert zu jedem $y \in Y$ genau ein $x \in X$ mit $f(x) = y$.

surjektiv!

injektiv!

Diese eindeutige Zuweisung definiert eine Abbildung $g : Y \to X$, so dass $g(y) = x$ für das x mit $f(x) = y$. Nun gilt

$\forall y \in Y : \quad f \circ g(y) = f(g(y)) = f(x) = y \quad$ also $f \circ g = id_Y$ und

$\forall x \in X : \quad g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = x \quad$ also $g \circ f = id_X$.

Zur Eindeutigkeit: Ist $\tilde{g} : Y \to X$ eine weitere Abb. mit $f \circ \tilde{g} = id_Y$, dann gilt:

$$\tilde{g} = id_X \circ \tilde{g} = (g \circ f) \circ \tilde{g} \underset{\text{Assoziativität}}{=} g \circ \underbrace{(f \circ \tilde{g})}_{= id_Y} = g$$

Zu $(f^{-1})^{-1} = f$: Per Konstruktion ist f^{-1} bijektiv und erfüllt

$$f^{-1} \circ f = id_X \wedge f \circ f^{-1} = id_Y$$

Wegen Eindeutigkeit der Umkehrabb. ist damit $(f^{-1})^{-1} = f$.

$\square$

„Ende des Beweises"

<u>Bem.:</u>
- Die Umkehrung des Satzes gilt ebenfalls. D.h. die Existenz einer Umkehrabb. impliziert Bijektivität. (Hinweis zu einem Beweis: Zeige zunächst, dass $f \circ g = id$ impliziert, dass f surjektiv und g injektiv ist)
- Man zeigt leicht, dass die Verknüpfung zweier Bijektionen wieder bijektiv ist.

<u>Bsp.:</u>
- Für $f: [0,\infty) \to [0,\infty)$, $f(x) := x^2$ ist $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

<u>Def.:</u> Seien A, B Mengen.
- A und B heißen gleichmächtig und wir schreiben $|A| = |B|$, wenn eine Bijektion $f: A \to B$ existiert.
- A heißt höchstens so mächtig wie B (kurz $|A| \leq |B|$), wenn eine injektive Abbildung $f: A \to B$ existiert.
- B heißt mächtiger als A (kurz $|A| < |B|$), wenn $|A| \leq |B|$ aber nicht $|A| = |B|$ gilt.
- A heißt abzählbar wenn $|A| \leq |\mathbb{N}|$ und überabzählbar sonst.

Bem.:

- Hat A $n \in \mathbb{N}$ Elemente, können wir gefahrlos $|A| = n$ schreiben.
- Es gilt: $|A| \leq |B| \wedge |B| \leq |A| \Rightarrow |A| = |B|$.
  Dies ist der Satz von Cantor-Schröder-Bernstein.

Bsp.:

- $|\mathbb{N}_0| = |\mathbb{N}|$, da $f: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}$, $f(n) := n+1$ bijektiv
- $|\mathbb{N}_0| = |\mathbb{Z}|$, z.B. mit $f: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z}$, $f(n) := \begin{cases} \frac{n}{2}, & n \text{ gerade} \\ -\frac{n+1}{2}, & n \text{ ungerade} \end{cases}$
- $|\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0| = |\mathbb{N}|$:

	0	1	2	3	4	…
0	1	2	4	7	11	
1	3	5	8	12		
2	6	9	13			
3	10	14				
4	15					
⋮						

- $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$. Beweisidee:

$$|\mathbb{Q}| \underset{\text{Def. von } \mathbb{Q}}{\leq} |\mathbb{Z} \times \mathbb{N}| \underset{|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}_0| \wedge |\mathbb{N}| = |\mathbb{N}_0|}{=} |\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0| = |\mathbb{N}|$$

Zudem gilt $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Q}|$ also $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$

- $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$. Beweisidee (Cantors Diagonalisierungsargument):
  Sei $z_1, z_2, z_3, \dots$ eine beliebige 'Aufzählung' reeller Zahlen in $[0,1)$ als Dezimalzahlen. D.h. für $n \in \mathbb{N}$ ist $z_n \in [0,1]$ und $z_{n,k} \in \{0, \dots, 9\}$ die zugehörige k'te Dezimalstelle. Konstruiere nun eine Dezimalzahl $y \in [0,1)$ mit k'ter Dezimalstelle $y_k := \begin{cases} 4, & \text{wenn } z_{k,k} \neq 4 \\ 5, & \text{wenn } z_{k,k} = 4 \end{cases}$
  Dann gilt $\forall k \in \mathbb{N}: y \neq z_k$. D.h. y kann nicht in der Aufzählung enthalten sein, womit die zugehörige Abb. $\mathbb{N} \to [0,1)$ nicht surjektiv sein kann.

- Ist $|M| = n \in \mathbb{N}_0$, dann gilt $|\mathcal{P}(M)| = 2^n$.

I.3. Relationen

Def.: Eine Relation R zw. zwei Mengen A und B ist eine Teilmenge $R \subseteq A \times B$.

Ist $B = A$ spricht man von einer „Relation auf A".

Eine solche heißt:

(i) reflexiv, wenn $\forall x \in A: \quad (x,x) \in R$

(ii) symmetrisch, wenn $\forall x,y \in A: \quad (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$

(iii) transitiv, wenn $\forall x,y,z \in A:$

$$(x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \quad \Rightarrow \quad (x,z) \in R$$

Eine Relation auf A, die (i), (ii) & (iii) erfüllt nennt man Äquivalenzrelation und schreibt dann $x \sim y$ für $(x,y) \in R$.

Bsp.:

- Jede Funktion $f: X \to Y$ kann durch ihren Graphen $G_f \subseteq X \times Y$ als Relation aufgefasst werden.
- Die Zuweisung 'Studierende $\to$ Studienfächer' ist nicht unbedingt eine Funktion (ggfs. nicht eindeutig), kann aber als Relation betrachtet werden.
- „Parallelität" ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Geraden in der Ebene.
- Auf $\mathbb{Z}$ ist $\quad n \sim m :\Longleftrightarrow \quad 0 = (n-m) \bmod 7$ eine Äquivalenzrelation.
- „Gleichmächtigkeit" ist eine Äquivalenzrelation (auf der Klasse aller Mengen), da die Verknüpfung von Bijektionen wieder bijektiv ist.

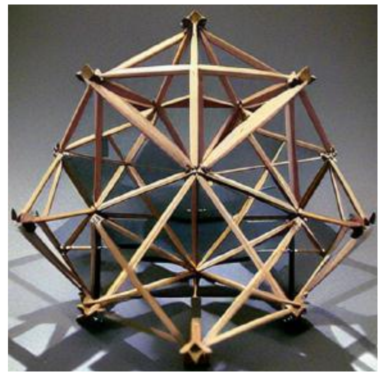
Def.: Sei X eine Menge auf der eine Äquivalenzrelation $\sim$ gegeben ist. Die **Äquivalenzklasse** $[x]$ eines Elements $x \in X$ bzgl. $\sim$ ist definiert als: $[x] := \{ y \in X \mid y \sim x \}$

Bsp.: Für $X = \mathbb{Z}$ und $x \sim y :\Leftrightarrow 0 = (x-y) \bmod 2$ gibt es zwei disjunkte Äquivalenzklassen: die Mengen der geraden bzw. ungeraden Zahlen:

$[1] = [3] = [5] \ldots$ und $[2] = [4] = [6] \ldots$.

II. ALGEBRAISCHE GRUNDSTRUKTUREN

(Gruppen, Körper, Ringe)



II.1. GRUPPEN

Math. Formalisierung von 'Symmetrien'.

Fundamental in der Physik. z.B.:

- Symmetrien in Eichfeldtheorien ($SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ Standardmodell)
- Noether's Theorem : Symmetrien → Erhaltungssätze

Def.: • Ein Paar $(G, *)$ einer nichtleeren Menge G und einer Verknüpfung $*: G \times G \to G$ heißt Gruppe, wenn:

sprich „G ist abgeschlossen unter *"

(i) $\forall a,b,c \in G: \quad (a*b)*c = a*(b*c)$ (Assoziativität)

(ii) $\exists e \in G \ \forall a \in G: \quad e * a = a$ (Existenz eines neutralen Elements)

(iii) $\forall a \in G \ \exists a^{-1} \in G: \quad a^{-1} * a = e$ (Existenz eines inversen Elements)

↑ neutrales Element aus (ii)

• Eine Gruppe $(G, *)$ heißt

- abelsch (synonym: kommutativ) wenn für alle $a, b \in G$ gilt:
$$a * b = b * a.$$
- endlich, wenn G endlich ist. $|G|$ heißt dann die Ordnung der Gruppe.

Bsp.:

- Zyklische Gruppe $(\mathbb{Z}_n, +)$ für $n \in \mathbb{N}$, wobei $\mathbb{Z}_n := \{0, 1, \dots, n-1\}$ und '+' Addition mod n ist. $(\mathbb{Z}_n, +)$ ist abelsch mit Ordnung n.
- $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$ sind abelsche Gruppen.
- S_n bezeichnet die Symmetrische Gruppe der Permutationen von $n \in \mathbb{N}$ Elementen. Diese ist von der Ordnung $n!$ und nicht abelsch für alle $n \geq 3$. z.B.:

$$(a,b,c) \begin{cases} \xrightarrow{1 \leftrightarrow 2} (b,a,c) \xrightarrow{2 \leftrightarrow 3} (b,c,a) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \neq \\ \xrightarrow{2 \leftrightarrow 3} (a,c,b) \xrightarrow{1 \leftrightarrow 2} (c,a,b) \end{cases}$$

- $(\mathbb{R}\setminus\{0\}, \cdot)$ und $(\mathbb{Q}\setminus\{0\}, \cdot)$ sowie $(\mathbb{C}\setminus\{0\}, \cdot)$ sind abelsche Gruppen.
- Die Gruppe, die durch die elementaren Operationen $\{V, H, L, R, O, U\}$ des Zauberwürfels generiert wird hat Ordnung $\frac{8!\, 3^8\, 12! \cdot 2^{12}}{2 \cdot 2 \cdot 3} \approx 4 \cdot 10^{19}$ und ist nicht abelsch (z.B. ist $RO \neq OR$).

Korollar: (meint: „einfache Folgerung")

Sei $(G, *)$ eine Gruppe mit neutralem Element e. Dann gilt:

(1) Für jedes $a \in G$ mit inversem Element a^{-1} gilt:

$$a * a^{-1} = e$$

(2) $\forall a \in G: \ a * e = a$

(3) Es existiert kein weiteres neutrales Element, d.h. wenn $\tilde{e} \in G$ so ist, dass $\forall a \in G: \tilde{e} * a = a$, dann ist $\tilde{e} = e$.

(4) Zu jedem $a \in G$ existiert genau ein inverses Element a^{-1}.

Beweis:

(1) Zu a^{-1} muss ebenfalls ein inverses Element $(a^{-1})^{-1} \in G$ existieren.

Damit gilt
$$\begin{aligned} e &\overset{(iii)}{=} (a^{-1})^{-1} * a^{-1} \\ &\overset{(ii)}{=} (a^{-1})^{-1} * (e * a^{-1}) \\ &\overset{(iii)}{=} (a^{-1})^{-1} * ((a^{-1} * a) * a^{-1}) \\ &\overset{(i)}{=} ((a^{-1})^{-1} * a^{-1}) * (a * a^{-1}) = a * a^{-1} \end{aligned}$$

(2) $a * e \overset{(iii)}{=} a * (a^{-1} * a) \overset{(i)}{=} (a * a^{-1}) * a \overset{(1)}{=} e * a \overset{(ii)}{=} a$

(3) $e \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Annahme}}}{=} \tilde{e} * e \overset{(2)}{=} \tilde{e}$

(4) Angenommen $\tilde{a} * a = e$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \tilde{a} &\overset{(2)}{=} \tilde{a} * e \overset{(1)}{=} \tilde{a} * (a * a^{-1}) \\ &\overset{(i)}{=} (\tilde{a} * a) * a^{-1} = e * a^{-1} \overset{(ii)}{=} a^{-1}. \end{aligned}$$

$\square$

Bem.:

- Manche Autor*innen verlangen schon in der Definition einer Gruppe, dass $a * e = e * a = a$ und $a^{-1} * a = a * a^{-1} = e$.
- Ist die Verknüpfung '+' wird das inverse Element mit '$-a$' (anstatt 'a^{-1}') bezeichnet.
- Ist die Verknüpfung aus dem Kontext klar, wird die Gruppe oft durch alleinige Angabe der Menge G spezifiziert.

Korollar: (Kürzungsregeln) Sei $(G, *)$ ein Gruppe und $a, b, c \in G$.

Dann gilt: (i) $a * b = c * b \Rightarrow a = c$

(ii) $a * b = a * c \Rightarrow b = c$

Beweis: → Übung.

genauer: $*|_{H \times H}$

Def.: Sei $(G, *)$ eine Gruppe und $H \subseteq G$. $(H, *)$ heißt Untergruppe von $(G, *)$, wenn

(i) $e \in H$,

(ii) $a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H$,

(iii) $a, b \in H \Rightarrow a * b \in H$.

Bsp.:

- $H = \{e\}$
- $(G, *) = (\mathbb{R}, +)$, $H = \mathbb{Z}$
- Die Gruppe der Drehungen des $\mathbb{R}^3$ um den Ursprung besitzt die Gruppe der Drehungen in der x-y-Ebene als Untergruppe.

II.2. Körper (engl.: "field")

Def.: Eine Menge K zusammen mit zwei Verknüpfungen $* : K \times K \to K$ und $+ : K \times K \to K$ ist ein Körper, wenn gilt:

(i) $(K, +)$ ist eine abelsche Gruppe.

(ii) $(K \setminus \{0\}, *)$ ist eine abelsche Gruppe, wobei '0' das neutrale Element von $(K, +)$ bezeichnet.

(iii) Es gilt das Distributivgesetz. D.h. $\forall\, a, b, c \in K$:

$$a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$$

Bem.:
- Eine Konsequenz ist, dass in einem Körper K für $a, b \in K$ sowohl $a * x = b$ (falls $a \neq 0$) als auch $a + x = b$ eindeutig gelöst werden können.
- Für das neutrale Element bzgl. '$*$' schreiben wir natürlich '1'.

Korollar: Sei $(K, *, +)$ ein Körper und '0' das bzgl. '+' neutrale Element. Dann gilt für alle $a, b \in K$:

(i) $a * 0 = 0 * a = 0$,

(ii) $a * b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$.

Beweis: (i)

$$\underbrace{\underbrace{a * 0}_{\shortparallel}}_{a * 0 + \underline{0}} = a * (0 + 0) \quad \text{da '0' neutral bzgl. '+'}$$

$$= a * 0 + \underline{a * 0} \quad \text{Distributivität}$$

Also ist $a * 0 = 0$ Kürzungsregel!

(ii) Angenommen $a \neq 0$. Dann $\exists\, a^{-1}$ s.d. $a^{-1} * a = 1$. Damit:

$$b = 1 * b = a^{-1} * \underbrace{(a * b)}_{=0} = a^{-1} * 0 \overset{(i)}{=} 0.$$

Analog falls $b \neq 0$ angenommen wird. $\square$

Bem.: (ii) nennt man Nullteilerfreiheit des Körpers.

Bsp.:
- Mit der üblichen Multiplikation & Addition sind $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ Körper.
- Für $p \in \mathbb{N}$ Primzahl, ist $\mathbb{Z}_p := \{0, \dots, p-1\}$ mit Mult. & Add. mod p ein Körper, der Restklassenkörper modulo p.
  (Anwendung z.B. in Reed-Solomon-Codes zur Fehlerkorrektur)
  Wenn p keine Primzahl ist, ist dies kein Körper! z.B. ist in $\mathbb{Z}_6$ $2 * 3 = 0$ im Widerspruch zur Nullteilerfreiheit.

II.3. Ringe

Def.: Eine Menge R zusammen mit zwei Verknüpfungen $+: R \times R \to R$ und $*: R \times R \to R$ heißt Ring, wenn:

(i) $(R, +)$ eine abelsche Gruppe ist,

(ii) $*$ assoziativ ist,

(iii) die Distributivgesetze gelten. D.h. $\forall a, b, c \in R$:

$$(a+b) * c = (a * c) + (b * c)$$
$$c * (a+b) = (c * a) + (c * b)$$

Bem.: Ist '$*$' zusätzlich kommutativ, spricht man von einem kommutativen Ring. Besitzt '$*$' ein neutrales Element, spricht man von einem Ring mit 1.

Bsp.: • Jeder Körper ($\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p$) sowie $(\mathbb{Z}, *, +)$ ist ein kommutativer Ring mit 1.

• Die Restklassenringe $\mathbb{Z}_n$ modulo $n \in \mathbb{N}$ sind kommutative Ringe mit 1.

Def.: • Sei R ein kommutativer Ring, $n \in \mathbb{N}_0$ und $a_0, a_1, \dots, a_n \in R$ mit $a_n \neq 0$. Dann heißt

$$a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 =: \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

Polynom vom Grad n über R.

• Die Menge aller Polynome über R (beliebigen Grades) bezeichnet man als $R[x]$.

Bsp.: • $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$ sind die Mengen aller Polynome mit rationalen bzw. reellen Koeffizienten.

Bem.: • Durch folgende Verknüpfungen wird $R[x]$ selbst zu einem kommutativen Ring, dem Polynomring. Für $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, $g(x) = \sum_{l=0}^{m} b_l x^l$ definiert man

$$(f+g)(x) := \sum_k (a_k + b_k) x^k$$ ggfs. durch 0 fortgesetzt

$$(f * g)(x) := \sum_{k=0}^{m+n} c_k x^k \quad \text{wobei} \quad c_k := \sum_{\substack{i,j \in \mathbb{N}_0 \\ \text{mit } i+j=k}} a_i b_j = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$$

- Genau genommen unterscheidet man zw. dem Polynom $f \in R[x]$, welches man mit der Koeffizientenfolge identifiziert, und der Polynomfunktion $R \ni x \mapsto f(x) \in R$. Für $R \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$ kann man diese Unterscheidung meist ignorieren, da es eine Bijektion dazwischen gibt (Koeffizientenvgl.!). I.A. können jedoch unterschiedliche Polynome dieselbe Polynomfkt. darstellen (z.B. x und x^2 als Fkt.en $\mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$).

Def.: Ein Körper K heißt algebraisch abgeschlossen, wenn jedes nicht-konstante Polynom $f \in K[x]$ in K eine Nullstelle besitzt. D.h. wenn für jedes $f \in K[x]$ vom Grad mindestens 1 ein $z \in K$ existiert, so dass $f(z) = 0$.

Bem.: $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ sind nicht algebraisch abgeschlossen, da z.B. x^2+1 in $\mathbb{Q}$ bzw. $\mathbb{R}$ keine Nullstelle besitzt.

Satz: (Fundamentalsatz der Algebra)
$\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen.

Beweis: $\to$ Analysis III.

Bem.: Tatsächlich hat ein Polynom n-ter Ordnung $(n \in \mathbb{N})$ in $\mathbb{C}$ n Nullstellen $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ und kann stets wie folgt faktorisiert werden: $\boxed{f(x) = a_n \prod_{k=1}^{n} (x - z_k)}$. $(*)$

(z.B.: $x^2 + 1 = (x+i)\cdot(x-i)$)

Gilt $(*)$ für $f \in \mathbb{K}[x]$ mit $a_n, z_k \in \mathbb{K}$, sagt man: „Das Polynom zerfällt in Linearfaktoren."

III. VEKTORRÄUME

Def.: Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Ein *Vektorraum* V über $\mathbb{K}$ (kurz: „$\mathbb{K}$-Vektorraum") ist eine Menge V zusammen mit zwei Abbildungen: einer *Vektoraddition* $+ : V \times V \to V$, $(v,w) \mapsto v+w$ und einer *Skalarmultiplikation* $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$, $(\lambda, v) \mapsto \lambda v$, für die gilt:

(i) $(V, +)$ ist eine abelsche Gruppe

(ii) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \quad \forall v, w \in V$:

a) $(\lambda\mu)\, v = \lambda(\mu v)$

b) $1 v = v$

c) $\lambda(v+w) = \lambda v + \lambda w$ und

$(\lambda + \mu)\, v = \lambda v + \mu v$

Bem.:
- Achtung: '+' und '·' haben hier jeweils zwei unterschiedliche Bedeutungen (welche?)
- Die neutralen Elemente in $(V,+)$ und $(\mathbb{K},+)$ werden üblicherweise beide mit 0 bezeichnet. Ob es sich dabei um den 'Nullvektor' oder die Null als Zahl handelt, muß aus dem Kontext geschlossen werden.
- Die Elemente aus $\mathbb{K}$ nennt man in diesem Zusammenhang *Skalare*.
- Vektorräume über $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ nennt man *reell* bzw. *komplex*.

Bsp.:

- $\mathbb{K}^n$ wird zu einem $\mathbb{K}$-Vektorraum mit

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$
$$\lambda (x_1, \dots, x_n) := (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

Hier ist $0 = (0, \dots, 0)$ das neutrale Element und $(-x_1, \dots, -x_n)$ das zu $(x_1, \dots, x_n)$ inverse Element.

Es bietet sich die Schreibweise der n-Tupel als Spaltenvektoren an. D.h.

$$\mathbb{K}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K} \right\} \quad \text{und}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + \lambda y_1 \\ \vdots \\ x_n + \lambda y_n \end{pmatrix}.$$

- Die Menge $\mathbb{K}^M := \{ f \mid f: M \to \mathbb{K} \}$ der $\mathbb{K}$-wertigen Funktionen über einer bel. Menge M wird zu einem $\mathbb{K}$-Vektorraum

$$\text{mit} \begin{cases} (f+g)(x) := f(x) + g(x) \\ (\lambda f)(x) := \lambda f(x) \end{cases}$$

(Dies nennt man punktweise Addition bzw. Skalarmultiplik.)

- Die Menge der Polynome $\mathbb{K}[x]$ wird mit koeffizienten-weisen Verknüpfungen zu einem $\mathbb{K}$-Vektorraum.

- $\mathbb{R}$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{Q}$ (mit $+, \cdot$ wie üblich)

Bem.: $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$, $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{C}[x]$ sind Vektorräume über $\mathbb{C}$ aber z.B. auch über $\mathbb{R}$.

Def.: Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine nichtleere Teilmenge $U \subseteq V$ heißt Untervektorraum von V, wenn gilt:

(i) $x, y \in U \Rightarrow x + y \in U$

(ii) $\lambda \in \mathbb{K},\ x \in U \Rightarrow \lambda x \in U$

(D.h. U muss „abgeschlossen" sein bzgl. Addition und Skalarmultiplikation)

Bem.: Oft spricht man schlicht von U als Unterraum.

Bsp.:

- Zu jedem Vektorraum V sind V und $\{0\}$ triviale Untervektorräume.
- $\{(x_1, 0) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$ ist Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$.
- Für bel. $n \in \mathbb{N}_0$ bildet die Menge $\mathbb{K}_n[x] := \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \mid a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K} \right\}$ der Polynome vom Grad höchstens n einen Untervektorraum von $\mathbb{K}[x]$.
- Die Lösungsmenge $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - 4y = 0\}$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$.

Mit Blick auf die Definitionen zeigt man leicht:

Korollar: Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $U \subseteq V$.
Dann sind äquivalent:

(i) U ist ein Untervektorraum von V.

(ii) U ist, mit der auf V definierten Addition und Skalarmultiplikation, selbst ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

Def.: Seien U_1, U_2 zwei Untervektorräume eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V.

- Die Vektorraum-Summe ist definiert als:

$$U_1 + U_2 := \{ x+y \mid x \in U_1 \wedge y \in U_2 \} \subseteq V$$

- Wenn $V = U_1 + U_2$ so, dass für jedes $v \in V$ eindeutige Elemente $x \in U_1$, $y \in U_2$ mit $v = x+y$ existieren, nennen wir V die direkte Summe von U_1 und U_2 und schreiben $V = U_1 \oplus U_2$.

Bsp.:

- $U_1 := \{ (x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R} \}$

  $U_2 := \{ (0, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R} \}$

  $U_3 := \{ (0, w, z) \in \mathbb{R}^3 \mid w, z \in \mathbb{R} \}$

  Dann gilt: $\mathbb{R}^3 = U_1 + U_2 = U_1 + U_3$ und $\mathbb{R}^3 = U_1 \oplus U_2$,

  $\mathbb{R}^3$ ist aber keine direkte Summe von U_1 und U_3 da z.B.

$$\begin{aligned}(1,1,1) &= (0,0,1) + (1,1,0) \\ &= \underbrace{(0,1,1)}_{\in U_3} + \underbrace{(1,0,0)}_{\in U_1}\end{aligned}$$

  uneindeutig ist.

Korollar: Seien U_1, U_2 zwei Untervektorräume eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V.

(i) $U_1 \cap U_2$ ist Untervektorraum von V.

(ii) $U_1 + U_2$ ist Untervektorraum von V.

(iii) $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ g.d.w. $U_1 + U_2 = U_1 \oplus U_2$

Beweis: (i) Wegen $0 \in U_1$, $0 \in U_2$ ist $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Weiter gilt:

$x, y \in U_1 \cap U_2 \Rightarrow x+y \in U_1 \wedge x+y \in U_2 \Rightarrow x+y \in U_1 \cap U_2$

$x \in U_1 \cap U_2, \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda x \in U_1 \wedge \lambda x \in U_2 \Rightarrow \lambda x \in U_1 \cap U_2$.

(ii), (iii) $\rightarrow$ Übung. $\square$

Def.: Sei $n \in \mathbb{N}$, V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $v_1, \dots, v_n \in V$. Dann ist die lineare Hülle von $v_1, \dots, v_n$ definiert als

$$\operatorname{span}(v_1, \dots, v_n) := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \;\middle|\; \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} \right\}.$$

Dabei heißt $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$ eine Linearkombination von $v_1, \dots, v_n$.

Korollar: $U := \operatorname{span}(v_1, \dots, v_n)$ ist Untervektorraum von V.

Beweis: U ist nicht leer da z.B. $v_1 \in U$.

U ist abgeschlossen unter Addition:

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \,, \quad y_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i \quad \Rightarrow \quad x + y = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \mu_i) v_i$$

U ist abgeschlossen unter Skalarmultiplikation:

$$\alpha x = \sum_{i=1}^{n} (\alpha \lambda_i) v_i \,. \qquad \square$$

Bem.: Die Lineare Hülle lässt sich auch für bel. Mengen $M \subseteq V$ definieren:

$$\operatorname{span}(M) := \left\{ v \in V \;\middle|\; \exists n \in \mathbb{N} \; \exists v_1, \dots, v_n \in M \; \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} : v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \right\}$$

D.h. $\operatorname{span}(M)$ ist die Menge aller (endlichen!) Linearkombinationen.

Zudem definiert man $\operatorname{span}(\emptyset) := \{0\}$.

Bsp.:

- Für $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ ist 'typischerweise'

  $\operatorname{span}(v_1)$ eine Gerade

  $\operatorname{span}(v_1, v_2)$ eine Ebene

  $\operatorname{span}(v_1, v_2, v_3) = \mathbb{R}^3$

Das 'typischerweise' nimmt an, das folgendes gilt:

Def.: Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $n \in \mathbb{N}$.

- Vektoren $v_1, \dots, v_n \in V$ heißen **linear unabhängig** wenn folgende Implikation für $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0 \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$$

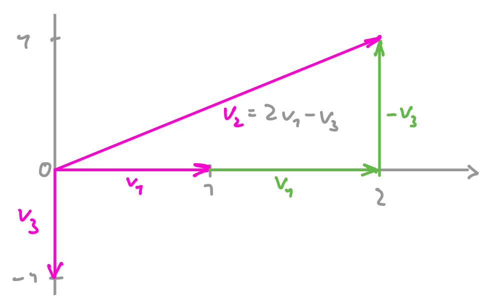
- $M \subseteq V$ heißt **linear unabh.** wenn jede endliche Teilmenge von M aus linear unabhängigen Vektoren besteht.

Bem.:

- Gilt lin. Unabhängigkeit nicht, spricht man von **linearer Abhängigkeit**.
- $v_1, \dots, v_n$ sind linear abhängig g.d.w. sich einer der Vektoren als Linearkombination der anderen schreiben lässt.
- Wir betrachten $\emptyset$ als lin. unabh.

Bsp.:

- $v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ sind linear abhängig, da z.B. $-2v_1 + v_2 + v_3 = 0$.



$\{v_1, v_2\}$ ist linear unabh. da $0 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 + 2\lambda_2 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$ impliziert, dass $\lambda_2 = 0$ und dann auch $\lambda_1 = 0$ gelten muß.

Def.: Eine Teilmenge B eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V heißt **Basis** von V, wenn (i) $\operatorname{span}(B) = V$,

und (ii) B ist lin. unabh.

Bsp.:

- Eine Basis von $\mathbb{K}^n$ ist $\{e_1, \dots, e_n\}$ mit $e_i := (\dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{i'ter Eintrag}}}{1}, 0, \dots)$. Diese heißt **kanonische Basis** (oder **Standardbasis**).
- Eine Basis von $\mathbb{R}[x]$ ist die Menge aller 'Monome' $B = \{ x^k \mid k \in \mathbb{N}_0 \}$. Beachte: z.B. $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \notin \operatorname{span}(B)$

Die Forderung nach lin. Unabh. von B garantiert eine eindeutige Darstellung:

Korollar: Ist $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V, dann lässt sich jedes $v \in V$ auf genau eine Art als $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$ mit $\lambda \in \mathbb{K}^n$ darstellen.

Beweis: Angenommen $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i = \sum_{i=1}^{n} \tilde{\lambda}_i b_i$ mit $\lambda_i, \tilde{\lambda}_i \in \mathbb{K}$.

Dann ist $v - v = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \tilde{\lambda}_i) b_i = 0$

und lin. Unabh. impliziert $\lambda = \tilde{\lambda}$. $\square$

Für manche Vektorräume (z.B. $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[x]$) ist die Existenz einer Basis offensichtlich. Für andere gilt das nicht (was ist z.B. eine Basis von $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum, oder von $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?) Mit Hilfe des sog. **Zorn'schen Lemmas** lässt sich jedoch zeigen (siehe z.B. [Kemper, Reimers] für einen Beweis):

Satz: (Basis-Ergänzungssatz)

Sei V ein Vektorraum und $M \subseteq V$ linear unabhäng (z.B. $M = \emptyset$).

Dann existiert ein Basis B von V, die M als Teilmenge enthält.

Insbesondere existiert also immer eine Basis.

Satz: Alle Basen eines Vektorraums sind gleichmächtig.

Beweis: siehe z.B. [Kemper, Reimers]. Idee:

Falls eine endliche Basis $B \subseteq V$ existiert, ist die Beweisidee folgende: Ist $\tilde{B}$ eine weitere Basis, lassen sich iterativ einzelne Elemente von $\tilde{B}$ durch einzelne Elemente von B austauschen – unter Beibehaltung der Basiseigenschaft. Die Iteration endet, wenn ganz B in der so neu konstruierten Basis enthalten ist. Dann darf aber kein weiteres Element vorhanden sein, da dies eine Linearkombination der Elemente von B sein würde. Dies zeigt $|\tilde{B}| = |B|$.

Def.: Ein Vektorraum V heißt endlich-dimensional, wenn er eine endliche Basis besitzt. Die Anzahl der Elemente dieser (und damit jeder) Basis nennt man dann die Dimension $\dim(V)$ von V. Existiert keine endliche Basis, nennt man V unendlich-dimensional und schreibt $\dim(V) = \infty$.

Bsp.:

- $\dim(\{0\}) = 0$
- $\dim(\mathbb{R}^n) = n$
- $\dim(\mathbb{R}[x]) = \infty$
- $\dim(\mathbb{R}_n[x]) = n+1$

wenn, wie üblich, als $\mathbb{R}$-Vektorraum betrachtet

- $\dim(\mathbb{R}) = \begin{cases} 1 & \text{über } \mathbb{R} \\ \infty & \text{über } \mathbb{Q} \end{cases}$

- $\dim(\mathbb{C}) = \begin{cases} 1 & \text{über } \mathbb{C} \\ 2 & \text{über } \mathbb{R} \text{ z.B. mit Basis } \{1, i\} \end{cases}$

Satz (Dimensionsformel für Untervektorräume)
Sei V ein Vektorraum mit endlich-dimensionalen Unterräumen U_1 und U_2. Dann ist

$$\dim(U_1 \cap U_2) + \dim(U_1 + U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2)$$

Bem.: Ganz ähnlich gilt für endliche Mengen A, B:

$$|A \cap B| + |A \cup B| = |A| + |B|$$

Beweis: Wir ergänzen eine Basis $v_1, \dots, v_r$ von $U_1 \cap U_2$ zu einer Basis $v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_s$ von U_1 und einer Basis $v_1, \dots, v_r, z_1, \dots, z_t$ von U_2. Dann gilt $U_1 + U_2 = \operatorname{span}(B)$ für $B := \{v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_s, z_1, \dots, z_t\}$. Um zu zeigen, dass B lin. unabh. ist, betrachten wir

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^{s} \mu_j w_j}_{\in U_1} + \underbrace{\sum_{k=1}^{t} \nu_k z_k}_{\in U_2} = 0 .$$

Also ist $\sum_{k=1}^{t} \nu_k z_k \in U_1 \cap U_2$, so dass $\sum_{k=1}^{t} \nu_k z_k = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i$ für geeignete α_i.
Wegen lin. Unabh. der Basiselemente von U_2 folgt $\alpha = 0$ und $\nu = 0$.
 -"- -"- von U_1 folgt auch $\lambda = 0$ und $\mu = 0$.
Also ist B eine Basis von $U_1 + U_2$ mit

$r + s + t = (r+s) + (r+t) - r = \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2)$ Elementen. $\square$

Bem.: Damit erhalten wir für endl.-dim Unterräume U_1, U_2:

$$U_1 + U_2 = U_1 \oplus U_2 \iff U_1 \cap U_2 = \{0\}$$
$$\iff \dim(U_1 + U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2)$$

IV. Lineare Abbildungen

Def.: Sein V und W Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$.

- Eine Abbildung $f: V \to W$ heißt linear oder (Vektorraum-) Homomorphismus, wenn $\forall \lambda \in \mathbb{K}\ \forall x, y \in V$:

$$\boxed{f(x+\lambda y) = f(x) + \lambda f(y)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x+y) = f(x) + f(y) & \forall x, y \\ f(\lambda x) = \lambda f(x) & \forall \lambda\ \forall x \end{cases}$$

- Die Menge der Homomorphismen von V nach W wird mit $\mathrm{Hom}(V, W)$ bezeichnet.
- $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ heißt (Vektorraum-) Isomorphismus wenn f bijektiv ist.
- Existiert ein Isomorphismus zw. V und W, heißen diese isomorph und wir schreiben dafür $V \cong W$.

Bem.:

- Linearität impliziert $f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$ $\forall n \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{K}^n, x \in V^n$

  Insbesondere: $f(\underset{\in V}{0}) = \underset{\in W}{0}$ und Untervektorräume werden wieder auf solche abgebildet.
- $\mathrm{Hom}(V, W)$ wird selbst zu einem $\mathbb{K}$-Vektorraum mit

  $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$ und $(\lambda f)(x) := \lambda f(x)$
- Die Komposition linearer Abbildungen liefert wieder eine lineare Abb.

Bsp.:

- id_V ist linear.
- Für $\varphi \in [0, 2\pi]$ ist $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x\cos(\varphi) + y\sin(\varphi) \\ -x\sin(\varphi) + y\cos(\varphi) \end{pmatrix}$

  linear und stellt eine Drehung um den Winkel φ dar.
- Die Differentiation $f: \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ $f(p) := p'$ ist linear.
- $f: \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{Q}[x]$, $p(x) \mapsto x^3 p(x)$ ist linear.
- $g, f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$, $g(x) := 1 + x$ sind nicht linear.

  (z.B. ist $g(x+y) = x + y + 1 \neq g(x) + g(y) = x + y + 2$)

Satz: Ist $f: V \to W$ ein Isomorphismus, dann ist auch $f^{-1}: W \to V$ ein Isomorphismus.

Beweis: Bijektivität von f^{-1} gilt für jede bijektive Abbildung f. Zur Linearität: Seien $\lambda \in \mathbb{K}$ und $v, w \in W$ mit $f^{-1}(v) =: x$ und $f^{-1}(w) =: y$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} f^{-1}(v + \lambda w) &= f^{-1}(f(x) + \lambda f(y)) \\ &\underset{f \text{ linear}}{=} f^{-1}(f(x+\lambda y)) \underset{f^{-1}\circ f = id}{=} x + \lambda y \\ &= f^{-1}(v) + \lambda f^{-1}(w). \end{aligned}$$

$\square$

Satz: Seien V und W $\mathbb{K}$-Vektorräume, $v_1, \dots, v_n \in V$ eine Basis von V und $w_1, \dots, w_n \in W$. Dann existiert genau eine lineare Abbildung $f: V \to W$ für die gilt $\forall i \in \{1, \dots, n\}: f(v_i) = w_i$.

Beweis: Zunächst zur Eindeutigkeit:
Für ein bel. $v \in V$ $\exists!\ \lambda \in \mathbb{K}^n$ s.d. $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$. Wegen der geforderten Linearität ist dann $f(v) = f(\sum_i \lambda_i v_i) = \sum_i \lambda_i f(v_i) = \sum_i \lambda_i w_i$ (*) eindeutig bestimmt.
Existenz von f wird klar, wenn wir (*) als Definition von f verwenden. f ist dann linear und es gilt $f(v_i) = w_i$.

$\square$

Def.: Für $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ definiert man

- den **Kern** $\ker(f) := \{x \in V \mid f(x) = 0\} = f^{-1}(\{0\})$,
- das **Bild** $f(V) := \{y \in W \mid \exists x \in V: y = f(x)\}$,
- den **Rang** $\mathrm{rg}(f) := \dim(f(V))$.

engl.:
'kernel/null space'
'range'
'rank'

Bem.: Wegen Linearität von f, ist $\ker(f)$ Untervektorraum von V und das Bild $f(V)$ Untervektorraum von W.

Satz: Seien V und W $\mathbb{K}$-Vektorräume, $\dim(V) < \infty$ und $f \in \mathrm{Hom}(V,W)$.

Dann gilt: $\boxed{\dim(V) = \dim(\ker(f)) + \dim(f(V))}$

Beweis: Sei $u_1, \dots, u_m$ eine Basis von $\ker(f)$, die wir zu einer Basis $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n$ von V ergänzen. Dann ist $\dim(V) = n + \dim(\ker(f))$.

Wir zeigen nun, dass $f(v_1), \dots, f(v_n)$ Basis von $f(V)$ ist.

Jedes $v \in V$ können wir schreiben als $v = \left(\sum_{i=1}^m a_i u_i\right) + \left(\sum_{j=1}^n b_j v_j\right)$.

Wegen $u_i \in \ker(f)$ ist also $f(v) = \sum_{j=1}^n b_j f(v_j)$, d.h. $f(V) = \mathrm{span}(f(v_1), \dots, f(v_n))$.

Um lineare Unabh. z.z., betrachten wir

$$0 = \sum_{j=1}^n \lambda_j f(v_j) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Linearität}}}{=} f\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j v_j\right)$$

Dies bedeutet, dass $\underbrace{\sum_{j=1}^n \lambda_j v_j}$ $\in \ker(f)$

also $= \sum_{i=1}^m \mu_i u_i$ für geeignete $\mu_i \in \mathbb{K}$.

Wegen lin. Unabh. von $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n$ muß nun $\lambda_j = 0 = \mu_i \ \forall i, j$. $\square$

Bem.:

- Wenn $\dim(V) = \infty$, gilt dies sinngemäß. D.h. $\dim(V) = \infty \Rightarrow \dim(\ker(f)) = \infty \vee \dim(f(V)) = \infty$.
- Für das Bild $f(V)$ schreiben wir zuweilen auch $\mathrm{Bild}(f)$.

Bsp.:

- Für $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y,z) \mapsto (x,y,0)$ ist $\ker(f) = \{(0,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\}$. Also $\underset{\overset{\shortparallel}{3}}{\dim V} = \underset{\overset{\shortparallel}{1}}{\dim(\ker(f))} + \underset{\overset{\shortparallel}{2}}{\dim(f(V))}$.

Korollar: Sei $f: V \to W$ eine lineare Abb. zw. zwei $\mathbb{R}$-Vektorräumen.

(i) f injektiv $\Leftrightarrow$ $\dim(\ker(f)) = 0$ $\Leftrightarrow$ $\ker(f) = \{0\}$

(ii) —"— $\Rightarrow$ $\dim(V) \leq \dim(W)$

(iii) f surjektiv $\Rightarrow$ $\dim(W) \leq \dim(V)$

Beweis: (i) '$\Rightarrow$': Ist f injektiv und $v \in \ker(f)$, dann gilt

$f(v) = 0 = f(0)$ und wegen Injektivität $v = 0$.

'$\Leftarrow$': Ist $\ker(f) = \{0\}$ und $f(u) = f(v)$, dann gilt

$f(u-v) = f(u) - f(v) = 0$ also $u = v$.

(ii) Ist f injektiv, folgt aus (i), dass $\dim(\ker(f)) = 0$.

Aus der Dimensionsformel des Satzes folgt dann

$$\dim(V) \underset{\ker(f)=\{0\}}{=} \dim(f(V)) \underset{f(V) \text{ Unterraum von } W}{\leq} \dim(W).$$

(iii) Es gilt: $\dim(V) = \dim(\underbrace{f(V)}_{=W}) + \dim(\ker(f))$

$$\underset{f \text{ surjektiv}}{=} \dim(W) + \dim(\ker(f)) \geq \dim(W). \qquad \square$$

Korollar: Seien V, W zwei $\mathbb{R}$-Vektorräume. Dann gilt:

(i) $V \cong W$ $\Rightarrow$ $\dim(V) = \dim(W)$

(ii) $\dim(V) = \dim(W) < \infty$ $\Rightarrow$ $V \cong W$

Beweis: (i) $V \cong W$ bedeutet, es existiert eine lineare, bijektive Abb. $V \xrightarrow{f} W$.

Nach dem vorangehenden Korollar ist dann

$$\dim(V) \overset{f \text{ inj.}}{\leq} \dim(W) \overset{f \text{ surj.}}{\leq} \dim V.$$

(ii) Sind $(v_i)_{i=1}^n$, $(w_i)_{i=1}^n$ Basen von V bzw. W, dann existiert eine lin. Abb. $f: V \to W$ mit $f(v_i) = w_i$. Für diese gilt $f(V) = W$ (Surjektivität!) und damit

$\dim(\ker(f)) = \dim(V) - \dim(f(V)) = \dim(V) - \dim(W) \overset{\text{Annahme}}{=} 0$

also auch Injektivität. $\square$

Bem.: D.h. es gilt insbesondere: $\dim(V) = n \in \mathbb{N} \Rightarrow V \cong \mathbb{K}^n$
Einen zugehörigen Isomorphismus erhalten wir aus einer bel. Basis:

Def.: Sei $B := (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V, dann ist der kanonische Basisisomorphismus $\phi_B : \mathbb{K}^n \to V$ definiert als $\phi_B(\lambda) := \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$.

Korollar: Sei V ein endlich-dim. Vektorraum und $f: V \to V$ linear.

1. Folgende Eigenschaften sind äquivalent:
   (i) f ist bijektiv
   (ii) f ist injektiv
   (iii) f ist surjektiv
2. Sind $(b_1, \dots, b_n)$ und $(c_1, \dots, c_n)$ zwei Basen von V und gilt $f(b_i) = c_i \; \forall i$, dann ist f ein Isomorphismus.

Beweis: $\longrightarrow$ Übung.

Bem.: zu 2.: Umgekehrt bildet ein Isomorphismus Basen immer auf Basen ab.

Def.: ∘ Für $m,n \in \mathbb{N}$ ist eine $m \times n$ Matrix A über $\mathbb{K}$ eine 'rechteckige Anordnung'

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ A_{m,1} & A_{m,2} & \cdots & A_{m,n} \end{pmatrix} = (A_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} = (A_{i,j})_{i,j}$$

Kurzschreibweisen:

mit m Zeilen und n Spalten und Einträgen $\underset{\text{Zeilen-}\ \ \text{Spalten-Index}}{\overset{A_{ij}}{\overset{\parallel}{A_{i,j}}}} \in \mathbb{K}$.

∘ $\mathbb{K}^{m \times n}$ bezeichnet die Menge aller $m \times n$ Matrizen über $\mathbb{K}$.

∘ Die Transponierte $A^T \in \mathbb{K}^{n \times m}$ einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ ist diejenige Matrix für die $(A^T)_{ij} = A_{ji}$ gilt.

∘ Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ heißt quadratisch, wenn $m = n$ und symmetrisch, wenn $A^T = A$ gilt.

Bem.: ∘ Ein Spaltenvektor ist damit eine $m \times 1$ Matrix und ein Zeilenvektor eine $1 \times n$ Matrix.

∘ $\mathbb{K}^{m \times n}$ ist $\mathbb{K}$-Vektorraum der Dimension $m \cdot n$ mit $(A+B)_{ij} := A_{ij} + B_{ij}$ und $(\lambda A)_{ij} := \lambda A_{ij}$.

Satz: Seien V, W $\mathbb{K}$-Vektorräume und $b_1, \dots, b_n \in V$ sowie $c_1, \dots, c_m \in W$ Basen von V bzw. W.
Für jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ existiert genau ein $f \in \mathrm{Hom}(V,W)$ mit

$$f : b_j \mapsto \sum_{i=1}^{m} A_{ij} c_i \quad \forall j$$

und umgekehrt existiert zu jedem $f \in \mathrm{Hom}(V,W)$ genau eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ für die dies erfüllt ist.

Beweis: Den ersten Teil hatten wir bereits gezeigt.
Sei nun $f \in \mathrm{Hom}(V,W)$ gegeben, dann lässt sich jedes $f(b_j) \in W$ eindeutig als Linearkombination der Basisvektoren c_i schreiben. Also als $f(b_j) = \sum_{i=1}^{m} A_{ij} c_i$. □

Bem.:
- A heißt Darstellungsmatrix von f bzgl. der Basen $(b_1, \dots, b_n) =: \mathcal{B}$ und $(c_1, \dots, c_m) =: \mathcal{C}$. Wo es sinnvoll ist, die Abhängigkeiten in die Notation aufzunehmen, schreiben wir für diese Darstellungsmatrix $M_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)$. Die Basen fassen wir dabei stets als Tupel auf, da die Reihenfolge entscheidend ist.
- Die Abbildung $f \mapsto M_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)$ ist ein Isomorphismus zw. $\mathrm{Hom}(V,W)$ und $\mathbb{K}^{m \times n}$ der von den gewählten Basen abhängt.
- Für $v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j b_j$ gilt $f(v) = \sum_{i=1}^{m} \mu_i c_i$ mit

$$\boxed{\mu_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \lambda_j \overset{*}{=}: (A\lambda)_i} \qquad \text{kurz: } \mu = A\lambda .$$

D.h. die durch $*$ definierte lineare Abbildung $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $\lambda \mapsto A\lambda$ (für die man üblicherweise ebenfalls A schreibt) erfüllt

$$\boxed{\phi_{\mathcal{C}} \circ A \circ \phi_{\mathcal{B}}^{-1} = f} \qquad \text{also} \qquad M_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f) = \phi_{\mathcal{C}}^{-1} \circ f \circ \phi_{\mathcal{B}}$$

wenn $\phi_{\mathcal{B}}, \phi_{\mathcal{C}}$ die kanonischen Basisisomorphismen sind.

Satz: Seien $F \in \mathbb{K}^{m\times n}$ und $G \in \mathbb{K}^{n\times r}$ Darstellungsmatrizen von $f \in \mathrm{Hom}(V,W)$ bzgl. B_V, B_W und $g \in \mathrm{Hom}(U,V)$ bzgl. B_U, B_V. Dann erfüllt die Darstellungsmatrix $H \in \mathbb{K}^{m\times r}$ von $f\circ g$ bzgl. B_U, B_W:

$$\boxed{H_{ik} = \sum_{j=1}^{n} F_{ij}\, G_{jk}}$$

Dies definiert das Matrixprodukt von F und G und man schreibt $H = FG$.

Beweis: Mit $B_U = (u_1, \dots, u_r)$, $B_V = (v_1, \dots, v_n)$, $B_W = (w_1, \dots, w_m)$ gilt $g(u_k) = \sum_{j=1}^{n} G_{jk} v_j$ und $f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} F_{ij} w_i$.

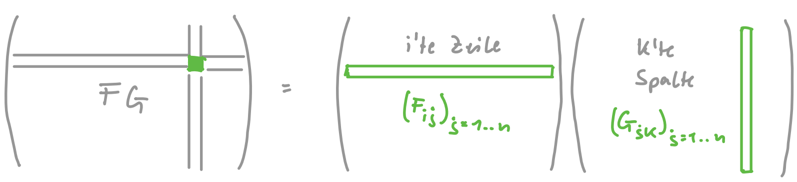
Damit ist $f\circ g\,(u_k) = \sum_{i=1}^{m} \boxed{H_{ik}}\, w_i$ per Def. der Darstellungsmatrix von $f\circ g$

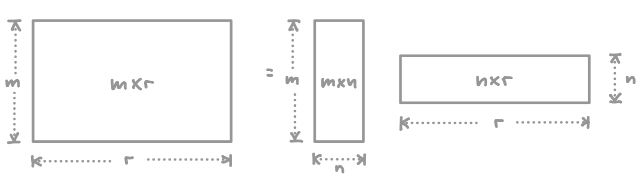
$$f\circ g\,(u_k) = \sum_{j=1}^{n} G_{jk}\, f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} \boxed{\sum_{j=1}^{n} F_{ij}\, G_{jk}}\, w_i$$

Die Eindeutigkeit der Darstellungsmatrix beweist dann die behauptete Gleichheit. $\square$

Bem.:

- Der (i,k)'te Eintrag von FG ergibt sich aus der i'ten Zeile von F und der k'ten Spalte von G:



- 

- Das Matrixprodukt $\mathbb{K}^{m\times n} \times \mathbb{K}^{n\times r} \longrightarrow \mathbb{K}^{m\times r}$, $(F,G) \mapsto FG$ ist assoziativ und distributiv (d.h. z.B. $G(F+H) = GF+GH$) aber i.a. nicht kommutativ. z.B.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ aber } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Mit dem Matrixprodukt wird $\mathbb{K}^{m\times n}$ zu einem Ring.

Bsp.:

- Betrachten wir $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ als Abbildung $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $\lambda \mapsto A\lambda$ ist dies schlicht die Matrixmultiplikation einer $m\times n$ Matrix A mit einer $n\times 1$ Matrix (Spaltenvektor!) λ.

  In diesem Fall gilt: Spalten sind die Bilder der Einheitsvektoren

$$\text{z.B.:} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 8 \\ 4 & 7 & 9 & 2 \\ 8 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  A heißt invertierbar, wenn $\lambda \mapsto A\lambda$ ein Isomorphismus ist.

- Die Darstellungsmatrix von $\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}$ bzgl. der Standardbasis ist

$$I \text{ mit } I_{ij} = \delta_{ij} := \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}$$

  'Kronecker Delta'

- komplexe Zahlen als reelle 2×2 Matrizen:

  Für $\varphi: \mathbb{C} \to G := \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a,b \in \mathbb{R} \right\}$

  $\varphi(a+ib) := \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ gilt:

  (i) φ ist ein Vektorraumisomorphismus (über $\mathbb{R}$)

  (ii) $\varphi(z_1 \cdot z_2) = \varphi(z_1)\,\varphi(z_2) \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

  Produkt in $\mathbb{C}$ — Matrixprodukt

  Beweis: $\longrightarrow$ Übung.

V. Lineare Gleichungssysteme

Bsp.: Gesucht ist die Schnittmenge dreier Ebenen im $\mathbb{R}^3$, die durch folgende drei Gleichungen gegeben sind:

$$\begin{aligned} x_1 &+ x_2 &+ 10x_3 &= -6 \\ 2x_1 &- x_2 &+ x_3 &= -2 \\ 6x_1 &- x_2 &- x_3 &= 4 \end{aligned} \qquad \text{d.h. } Ax = b \text{ mit } A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 10 \\ 2 & -1 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \; b := \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Wäre A in Zeilenstufenform, ließe sich dies einfach lösen. Für $\tilde{A}x = b$ mit $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 10 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ erhielten wir z.B. $x_3 = -4$, was wir einsetzen können in $-x_2 + x_3 = -2$ um $x_2 = -2$ zu erhalten, was wir wiederum einsetzen können in $x_1 + x_2 + 10x_3 = -6$ um schließlich $x_1 = 36$ zu erhalten.

Ziel ist, diese 'Zeilenstufenform' zu erreichen, ohne die Lösungsmenge $L := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax = b\}$ zu ändern. Diese wird erhalten bei

(i) Vertauschen von Zeilen (des Gleichungssystems)

(ii) Multiplizieren einer Zeile mit einem Skalar $\neq 0$.

(iii) Addieren (eines Vielfachen) einer Zeile zu einer anderen.

Anwendung auf die Erweiterte Koeffizientenmatrix $(A \,\vdots\, b) \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ ergibt:

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 10 & -6 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ 6 & -1 & -1 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2\cdot 1.\text{Zeile} \\ -6\cdot 1.\text{Zeile} \end{array} \xmapsto{(iii)} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 10 & -6 \\ 0 & -3 & -19 & 10 \\ 0 & -7 & -61 & 40 \end{array}\right) \cdot 3 \xmapsto{(ii)} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 10 & -6 \\ 0 & -3 & -19 & 10 \\ 0 & -21 & -183 & 120 \end{array}\right) -7\cdot 2.\text{Zeile}$$

$$\xmapsto{(iii)} (\hat{A} \,\vdots\, \hat{b}) := \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 10 & -6 \\ 0 & -3 & -19 & 10 \\ 0 & 0 & -50 & 50 \end{array}\right)$$

Das Gleichungssystem $\hat{A}x = \hat{b}$ hat dieselbe Lösungsmenge wie $Ax = b$.

Durch sukzessives Einsetzen (unten beginnend) lässt sich $\hat{A}x = \hat{b}$ lösen, s.d. $L := \{x \mid Ax = b\} = \{x \mid \hat{A}x = \hat{b}\} = \{(1, 3, -1)\}$. D.h. die Ebenen schneiden sich in einem Punkt $(1, 3, -1)$. Es wäre auch $L = \emptyset$ (für parallel verschobene Ebenen) oder $|L| = \infty$ (für Ebenen mit gemeinsamer Geraden) möglich gewesen.

Def.:
- Ein lineares Gleichungssystem (LGS) von m linearen Gleichungen in n Variablen/Unbekannten $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ ist von der Form $\boxed{Ax = b}$ mit Koeffizientenmatrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{K}^m$. Ein LGS heißt homogen, wenn $b = 0$ und inhomogen sonst. $\{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = b\}$ heißt die Lösungsmenge des LGS und $(A \,\vdots\, b) \in \mathbb{K}^{m \times (n+1)}$ erweiterte Koeffizientenmatrix.
- Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ ist in Zeilenstufenform, wenn folgendes gilt:
  - (1) Beginnt eine Zeile mit Nullen, stehen unter diesen ausschließlich wieder Nullen.
  - (2) Unter dem ersten von Null verschiedenen Element jeder Zeile stehen ausschließlich Nullen.
- Wir nennen eine Abbildung $\mathbb{K}^{m \times n} \to \mathbb{K}^{m \times n}$, $A \mapsto A'$ elementare Zeilenoperation, wenn A' aus A durch eine der folgenden Operationen hervorgeht:
  - (i) Vertauschung zweier Zeilen,
  - (ii) Multiplizieren einer Zeile mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$,
  - (iii) Addition des λ-fachen ($\lambda \in \mathbb{K}$) einer Zeile zu einer anderen.

Zeilenstufenform:
$$\begin{pmatrix} 0 \cdots 0 & A_{1,j_1} & & & & \\ 0 \cdots & 0 \quad 0 \cdots 0 & A_{2,j_2} & & & \\ 0 \cdots & \cdots & 0 \cdots 0 & A_{3,j_3} & & \\ \vdots & & & 0 & \ddots & \\ 0 & & & 0 & & \end{pmatrix}$$

Bsp.: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ aber nicht $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Satz: Sei $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{K}^m$ und $L := \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = b\}$ die Lösungsmenge des zugehörigen linearen Gleichungssystems.

(i) $L \neq \emptyset \iff rg(A) = rg(\underbrace{A \mid b}_{\text{erw. Koeffizientenmatrix}})$

(ii) $x_0 \in L \implies L = \{x_0 + x \mid x \in ker(A)\}$

D.h. die Lösungsmenge des inhomogenen LGS besteht aus einer inhomogenen Lösung x_0 plus der Lösungsmenge des homogenen LGS.

(iii) Existiert eine Lösung, dann gilt:

$|L| = 1 \iff rg(A) = n \iff ker(A) = \{0\}$

Beweis: (i) Es gilt: $L \neq \emptyset \iff b \in Bild(A)$

Wir verwenden, dass das Bild der linearen Abb. einer Matrix die lineare Hülle der Spaltenvektoren ist. Damit gilt

$Bild(A \mid b) = Bild(A) + span(b)$

'$\Rightarrow$': Ist $L \neq \emptyset$, also $b \in Bild(A)$, ist damit $rg(A \mid b) = rg(A)$

'$\Leftarrow$': Ist $rg(A \mid b) = rg(A)$, dann gilt wegen der Unterrauminklusion $Bild(A \mid b) \supseteq Bild(A)$, dass mit der Dimension auch die Räume gleich sein müssen. Also $b \in Bild(A)$ und damit $L \neq \emptyset$.

(ii) Sicher ist $L \supseteq \{x_0 + x \mid x \in ker(A)\}$, da

$A(x_0 + x) = \underbrace{Ax_0}_{=b} + \underbrace{Ax}_{=0}$.

Umgekehrt, ist $y \in L$, dann gilt $A(y - x_0) = 0$, also $y = x_0 + x$ mit $x \in ker(A)$.

(iii) Existiert eine Lösung, dann folgt aus (ii), dass die Anzahl der freien Parameter in L gleich ist $\dim(\ker(A)) = n - \mathrm{rg}(A)$. Dies ist Null (entsprechend $|L| = 1$), g.d.w. $\mathrm{rg}(A) = n$ ist.

$\square$

<u>Bem.:</u> Die Lösungsmenge eines homogenen LGS ist also stets ein (Unter-)Vektorraum. Die eines inhomogenen LGS ist, wenn nicht leer, ein affiner Unterraum, d.h. ein um einen konstanten Vektor verschobener Vektorraum.

Lösen lässt sich ein LGS $Ax = b$, $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens (synonym: Gauß-Algorithmus):

<u>kurz:</u> Umformung von $(A \,\vdots\, b)$ mittels elementarer Zeilenoperationen auf Zeilenstufenform und anschließend sukzessives Lösen des resultierenden LGS durch Einsetzen von unten.

<u>Ausführlicher:</u>

0) Beginne bei $k = 1$

1) Such kleinstes i_k mit $A_{s i_k} \neq 0$ für $s \geq k$. Fertig, wenn keines existiert.

2) Ist $A_{k i_k} = 0$, vertausche Gleichungen (d.h. Zeilen von $(A \,\vdots\, b)$) mit Index $\geq k$, so dass $A_{k i_k} \neq 0$.

3) Ersetze alle Gleichungen mit Index $l > k$ durch
$$\sum_{i=1}^{n} \left(A_{li} - \frac{A_{l i_k}}{A_{k i_k}} A_{ki} \right) x_i = b_l - \frac{A_{l i_k}}{A_{k i_k}} b_k$$
(D.h. das $\frac{A_{l i_k}}{A_{k i_k}}$-fache der k-ten Gleichung wird von der l'ten Gleichung abgezogen.)

4) Fertig, wenn $k = m$. Sonst weiter bei 1) mit $k \leftarrow k+1$.

Bem.: ∘ <u>Struktur der Lösungsmenge:</u>

Ist $(\hat{A} \,\vdots\, \hat{b})$ die aus $(A \,\vdots\, b)$ durch elem. Zeilenoperationen erhaltene Zeilenstufenform und $r \in \{0, \dots, m\}$ die Anzahl der von Null verschiedenen Zeilen in $\hat{A}$, dann sind folgende Fälle möglich:

(i) $r < m$ und $\{\hat{b}_{r+1}, \dots, \hat{b}_m\} \neq \{0\}$: Die Lösungsmenge is leer, da eine Gleichung der Form $0 \cdot x_k \neq 0$ auftaucht.

(ii) $r = m$ oder $\hat{b}_{r+1} = \dots = \hat{b}_m = 0$: Die Lösungsmenge ist nicht leer. (D.h. das LGS ist 'lösbar').

a) $r = n$: es gibt eine eindeutige Lösung

b) $r < n$: es gibt $n-r$ 'freie Parameter'.

∘ Jede elementare Zeilenoperation $A \mapsto \hat{A}$ lässt sich durch $\hat{A} = EA$ realisieren, wobei $E \in \mathbb{K}^{m \times m}$ invertierbar ist. z.B.:

$$E = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & 0 & & & 1 & & \\ & & & & 1 & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & 1 & & & 0 & & \\ & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \\ \quad\quad\uparrow\ \text{k'te} \quad \uparrow\ \text{l'te Spalte} \end{array}$$

vertauscht die Zeilen k & l

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \lambda & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

multipliziert die k'te Zeile mit λ

$$E = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & \lambda & & & 1 & \leftarrow \text{k'te Zeile} \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \\ \uparrow\ \text{l'te Spalte} \end{array}$$

addiert das λ-fache der l'ten Zeile zur k'ten Zeile

Damit führt der Gaußsche Algorithmus auf $\hat{A} = BA$, $\hat{b} = Bb$ wobei $B = E_k \cdots E_2 E_1 \in \mathbb{K}^{m \times m}$ invertierbar ist.

Die durch B dargestellte lineare Abb. beschreibt einen Basiswechsel im Bildraum.

Satz: Für $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ ist $Ax = b$ genau dann für jedes $b \in \mathbb{K}^m$ lösbar, wenn $\mathrm{rg}(A) = m$.

Beweis: '$\Rightarrow$': Lösbarkeit für jedes $b \in \mathbb{K}^m$ impliziert, dass $\mathrm{Bild}(A) = \mathbb{K}^m$ also $\mathrm{rg}(A) = m$.

'$\Leftarrow$': Ist $m = \mathrm{rg}(A) = \dim(\mathrm{Bild}(A))$, muß in der Inklusion $\mathrm{Bild}(A) \subseteq \mathbb{K}^m$ Gleichheit gelten. $\square$

Bem.: Insbesondere ist $Ax = b$ für jedes b lösbar, wenn $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ein Isomorphismus ist, was $\mathrm{rg}(A) = n$ bedeutet.
Die Umkehrabb. lässt sich dann wie folgt bestimmen:

Satz: Ist $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und lässt sich die Matrix $(A \mid I_n) \in \mathbb{K}^{n \times 2n}$ durch eine Abfolge elementarer Zeilenumformungen auf die Form $(I_n \mid \tilde{A})$ bringen, dann gilt $\tilde{A} A = I_n$, d.h. $\tilde{A} = A^{-1}$.

Beweis: Es gilt $(I_n \mid \tilde{A}) = B(A \mid I_n) = (\underbrace{BA}_{I_n} \mid \underbrace{BI_n}_{\tilde{A}})$.
Also $B = \tilde{A}$ und damit $\tilde{A} A = I_n$ $\square$

Bem.:
- A^{-1} heißt die zu A Inverse Matrix und es gilt $A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$.
- Jede invertierbare Matrix lässt sich auf diese Weise invertieren.

Bsp.:

$$\left(\underbrace{\begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix}}_{A} \;\middle|\; \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right) \xrightarrow[\text{vertauschen}]{} \left(\begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}\right) \xrightarrow[-2\cdot\text{Zeile 1}]{} \left(\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{matrix}\right) \xrightarrow{+\text{Zeile 2}}$$

$$\left(\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \;\middle|\; \underbrace{\begin{matrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{matrix}}_{A^{-1}}\right) \xleftarrow[\cdot(-1)]{} \left(\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{matrix}\right)$$

Kontrolle: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ✓

Korollar: Sei $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $a,b,c,d \in \mathbb{K}$ und $\Delta := (ad-bc) \neq 0$.
Dann gilt $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$.

Beweis: Betrachte $a \neq 0$ ($c \neq 0$ geht analog).

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & d-\frac{bc}{a} & -\frac{c}{a} & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & \frac{ad}{\Delta} & -\frac{ab}{\Delta} \\ 0 & d-\frac{bc}{a} & -\frac{c}{a} & 1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{d}{\Delta} & -\frac{b}{\Delta} \\ 0 & 1 & -\frac{c}{\Delta} & \frac{a}{\Delta} \end{array}\right)$$

$\square$

Lemma: Geht $\tilde{A} \in \mathbb{K}^{m \times n}$ aus $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ durch elementare Zeilenoperationen hervor, dann spannen die Zeilenvektoren von $\tilde{A}$ denselben Raum auf, wie die Zeilenvektoren von A.

Bem.: Dieser Raum wird Zeilenraum genannt.

Beweis: Sind $z_1, \ldots, z_m \in \mathbb{K}^n$ die Zeilenvektoren von A, dann ist der zugehörige Zeilenraum $\text{span}(z_1, \ldots, z_m) = \{ \sum_{i=1}^m c_i z_i \mid c_i \in \mathbb{K} \} \subseteq \mathbb{K}^n$.
Dieser ändert sich offensichtlich nicht, wenn (i) Zeilenvektoren vertauscht werden oder (ii) ein Zeilenvektor z_k durch (λz_k) mit $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ ersetzt wird. Wird (iii) z.B. die zweite zur ersten Zeile addiert, dann ist der resultierende Zeilenraum

$$\{ \tilde{c}_1 (z_1 + z_2) + \sum_{i=2}^m \tilde{c}_i z_i \mid \tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_m \in \mathbb{K} \} \underset{\uparrow}{=} \{ \sum_{i=1}^m c_i z_i \mid c_i \in \mathbb{K} \}$$

$\tilde{c}_1 + \tilde{c}_2 = c_2$ und $\tilde{c}_i = c_i$ für $i \neq 2$

$\square$

Satz: (Rang = Zeilenrang = Spaltenrang)
Sei $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, z die Anzahl lin. unabh. Zeilen von A und s die Anzahl linear unabh. Spalten von A. Dann gilt:
$\text{rg}(A) = s = z$.

Bem.: Anders ausgedrückt: Zeilenraum, Spaltenraum und Bild einer Matrix haben stets die gleiche Dimension.

Beweis: Wir wissen bereits, dass $\mathrm{rg}(A) = s$, da die Spalten von A die Bilder der Einheitsvektoren sind.

Elementare Zeilenoperationen ändern weder z ($\to$ Lemma) noch $\ker(A)$.

Letzteres gilt, da $\ker(BA) = \ker(A)$ für invertierbares B.

Wegen $s = n - \dim(\ker(A))$ bleibt damit auch s unverändert, so dass wir o.B.d.A. Zeilenstufenform annehmen können:

$$\begin{pmatrix} 0 \cdots 0 & A_{1,j_1} & & & & \\ 0 \cdots 0 & 0 \cdots 0 & A_{2,j_2} & & & \\ 0 \cdots & \cdots & \cdots 0 & A_{3,j_3} & & \\ \vdots & & & 0 & \ddots & \\ 0 & & & 0 & & \end{pmatrix}$$

Der von den Spaltenvektoren aufgespannte Raum ist dabei $\mathbb{R}^z \times \{0\}^{m-z}$. Also $z = s$. $\square$

Korollar: Für $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ gilt $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^T)$.

Beweis: Dies folgt unmittelbar aus dem vorangehenden Satz, da $A \mapsto A^T$ lediglich die Rolle von Zeilen & Spalten vertauscht. $\square$

Bsp.: $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 4 & 6 \\ 7 & 3 & 1 & 6 \\ -1 & -4 & -2 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ besitzt $\mathrm{rg}(A) = 2$, da die Zeilen 1, 2 und 4 Vielfache voneinander sind aber die Zeilen 2 und 3 linear unabh..

Die Anzahl lin. unabh. Spalten ist weniger offensichtlich. Wir wissen aber, dass dies auch 2 sein muss.

VI. Determinaten

Def.:
- Eine bijektive Abbildung $\pi : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ heißt Permutation.
- Eine Permutation heißt Transposition, wenn sie lediglich ein Paar vertauscht, d.h. wenn $\pi(i) = \begin{cases} k & ; i = l \\ l & ; i = k \\ \vdots & ; \text{sonst} \end{cases}$ für ein Paar $k \neq l$.
- S_n bezeichnet die Menge aller Permutationen von $\underbrace{\{1, \dots, n\}}_{=:[n]}$.
- Für $\pi \in S_n$ definieren wir

$$a(\pi) := \left| \left\{ (i,j) \in [n] \times [n] \;\middle|\; i < j \wedge \pi(i) > \pi(j) \right\} \right| \in \left\{0, \dots, \tfrac{n(n-1)}{2}\right\}$$

und das Signum $\mathrm{sgn}(\pi) := (-1)^{a(\pi)}$.
- $\pi \in S_n$ heißt gerade wenn $\mathrm{sgn}(\pi) = 1$ und ungerade bei $\mathrm{sgn}(\pi) = -1$.

Bem.:
- Unter Komposition bildet S_n die Symmetrische Gruppe. Diese besitzt $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ Elemente.
- Jede Permutation lässt sich als Komposition von Transpositionen realisieren, jede Transposition als Komposition einer ungeraden Anzahl von Nachbarvertauschungen (d.h. Transpositionen mit $k = l+1$).
- Für jede Nachbarvertauschung $\sigma \in S_n$ gilt $\forall \pi \in S_n$:

  $a(\sigma \circ \pi) = a(\pi) \pm 1$, d.h. $\mathrm{sgn}(\sigma \circ \pi) = -\mathrm{sgn}(\pi)$.

  Damit ist $\pi \in S_n$ (un-)gerade, wenn π sich als Komposition einer (un-)geraden Zahl von Nachbarvertauschungen (bzw. Transpositionen) schreiben lässt. Zudem gilt:

$$\boxed{\forall \pi, \tau \in S_n : \quad \mathrm{sgn}(\pi \circ \tau) = \mathrm{sgn}(\pi) \cdot \mathrm{sgn}(\tau)}$$

Bsp.: Eine Permutation $\pi \in S_n$ ist eindeutig durch das Tupel $(\pi(1), \dots, \pi(n))$ charakterisiert.

Ist $\pi \in S_3$ so gegeben als $(3,2,1)$, dann ist $\mathrm{sgn}(\pi) = -1$, da die Reihenfolge aller drei Paare $(1,2), (1,3), (2,3)$ geändert wurde, d.h. $a(\pi) = 3$.

Def.: Die **Determinante** einer quadratischen Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ist definiert als

$$\boxed{\det(A) := \sum_{\pi \in S_n} \mathrm{sgn}(\pi) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\pi(i)}} \qquad (*)$$

Bem.:

- $\mathbb{K}$ dürfte hier auch ein kommutativer Ring sein.
- Die Formel $(*)$ heißt **Leibniz-Formel**.
- Jeder der $n!$ Summanden ist ein Produkt, zu dem jede Zeile und jede Spalte von A genau einen Eintrag als Faktor beiträgt.

Bsp.:

- $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{2 \times 2}$. S_2 hat zwei Elemente: π_1 entsprechend $(1,2)$ mit $\mathrm{sgn}(\pi_1) = 1$ und π_2 entsprechend $(2,1)$ mit $\mathrm{sgn}(\pi_2) = -1$. Also ist

  $$\boxed{\det(A) = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}.$$

- Für eine **Diagonalmatrix** $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n \times n}$ mit $a_{ij} = \delta_{ij}\, a_i$ gilt $\boxed{\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_i}$ da für jedes $\pi \in S_n$ außer dem neutralen Element, für das $\pi(i) = i$ ist, das zugehörige Produkt $\prod_{i=1}^{n} a_{i,\pi(i)}$ eine Null enthält. Insbesondere gilt also $\boxed{\det(I_n) = 1}$.

- Ist $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n \times n}$ eine obere Dreiecksmatrix, d.h. $i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$, dann gilt $\boxed{\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}}$, da alle anderen Produkte in der Leibnizformel wieder einen Faktor Null enthalten. (Analog für 'untere Dreiecksmatrizen')

- Für $A \in \mathbb{K}^{3 \times 3}$ lässt sich die Determinante mit der Sarrus-Regel berechnen:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{array}{c|ccc|c} \overset{+}{a_{13}} & \overset{+}{a_{11}} & \overset{+}{a_{12}} & a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} \\ \underset{-}{a_{33}} & \underset{-}{a_{31}} & \underset{-}{a_{32}} & a_{33} & a_{31} \end{array}$$

$$= a_{13}a_{21}a_{32} + a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31}$$
$$- a_{33}a_{21}a_{12} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11}$$

(Für höhere Dimensionen gilt keine analoge Regel. Für die Berechnung der Determinanten gibt es dann bessere Methoden als mittels Leibnizformel.)

Satz: Für $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n \times n}$ gilt:

(i) $\boxed{\det(A) = \det(A^T)}$

(ii) $\det(A)$ ist linear als Funktion einer bel. Spalte von A.

(iii) Geht $\tilde{A}$ aus A durch Vertauschen zweier Spalten hervor, dann gilt $\det(\tilde{A}) = -\det(A)$.

(iv) Hat A zwei identische Spalten, dann gilt $\det(A) = 0$.

(v) Für $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ gilt: $\boxed{\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)}$

Multiplikativität

Bem.: Wegen (i) gelten (ii), (iii) und (iv) auch, wenn man "Spalte(n)" durch "Zeile(n)" ersetzt.

Beweis: (i) Wir können die Faktoren in der Leibnizformel anstatt nach dem ersten Index auch nach dem zweiten ordnen. Genauer gilt:
$$\prod_{i=1}^{n} a_{i,\underbrace{\pi(i)}_{=:j}} = \prod_{j=1}^{n} a_{\pi^{-1}(j),j}$$
Damit bekommen wir:
$$\det(A) = \sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sgn}(\pi)\prod_{i=1}^{n} a_{i,\pi(i)} = \sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sgn}(\pi)\prod_{i=1}^{n} a_{\pi^{-1}(i),i}$$
$$= \sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sgn}(\pi^{-1})\prod_{i=1}^{n} a_{\pi^{-1}(i),i} = \sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sgn}(\pi)\prod_{i=1}^{n} a_{\pi(i),i} = \det(A^T)$$
$\operatorname{sgn}(\pi) = \operatorname{sgn}(\pi^{-1})$ da $1 = \operatorname{sgn}(id) = \operatorname{sgn}(\pi\circ\pi^{-1}) = \operatorname{sgn}(\pi)\cdot\operatorname{sgn}(\pi^{-1})$

(ii) Folgt unmittelbar aus der Leibnizformel, denn ist $v\in\mathbb{K}^n$ der k'te Spaltenvektor von A, dann gilt $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i$ wobei die $c_i\in\mathbb{K}$ nicht von v abhängen.

(iii) Für $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})$ mit $\tilde{a}_{ij} = a_{i,\sigma(j)}$, wobei $\sigma\in S_n$ eine Transposition ist, gilt:
$$\det(\tilde{A}) = \sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sgn}(\pi)\prod_{i=1}^{n} \tilde{a}_{i,\pi(i)}$$
$$= \sum_{\pi} \operatorname{sgn}(\pi)\prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma\circ\pi(i)}$$
$$\overset{\operatorname{sgn}(\sigma^{-1})=-1}{=} -\sum_{\pi} \operatorname{sgn}(\sigma\circ\pi)\prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma\circ\pi(i)} = -\det(A)$$
$\pi\mapsto\sigma\circ\pi$ Bijektion auf S_n

(iv) folgt aus (iii), da Vertauschen gleicher Spalten auf $\det(A) = -\det(A)$ führt. (Bem.: wenn "$\operatorname{char}(\mathbb{K})=2$", d.h. in $\mathbb{K}$ gilt, dass $1+1=0$ ist, benötigt es noch ein weiteres Argument, welches z.B. in [Reimers, Kemper] zu finden ist.)

(v) Sei $B = (b_{ij})$. Dann gilt:

$$\det(AB) = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \sum_{k_1=1}^{n} \cdots \sum_{k_n=1}^{n} \prod_{i=1}^{n} a_{i,k_i} b_{k_i,\pi(i)}$$

$$= \sum_{k_1=1}^{n} \cdots \sum_{k_n=1}^{n} \prod_{j=1}^{n} a_{j,k_j} \underbrace{\sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \prod_{i=1}^{n} b_{k_i,\pi(i)}}$$

Für festes $k_1, \dots, k_n$ ist dies die det einer Matrix deren Zeilen die Zeilen $k_1, \dots, k_n$ von B sind. Nach (iv) ist dies Null, wenn die k_i's nicht alle verschieden sind. D.h. o.B.d.A. $(k_1, \dots, k_n) = (\sigma(1), \dots, \sigma(n))$ für ein $\sigma \in S_n$.

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{j=1}^{n} a_{j,\sigma(j)} \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \prod_{i=1}^{n} b_{\sigma(i),\pi(i)}$$

analog zum Beweis von (i)

$$\stackrel{\downarrow}{=} \underbrace{\sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{j,\sigma(j)}}_{\det(A)} \underbrace{\sum_{\pi} \operatorname{sgn}(\pi \circ \sigma^{-1}) \prod_{i=1}^{n} b_{i,\pi\circ\sigma^{-1}(i)}}_{\det(B)}$$

$$= \det(A) \det(B)$$

$\square$

<u>Korollar:</u> Geht $\tilde{A} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ aus $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ hervor durch

(i) Vertauschung zweier Zeilen (oder Spalten), dann gilt $\det(\tilde{A}) = -\det(A)$,

(ii) Multiplizieren einer Zeile oder Spalte mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{K}$, dann gilt $\det(\tilde{A}) = \lambda \det(A)$,

(iii) Addieren des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen oder einer Spalte zu einer anderen, dann gilt $\det(\tilde{A}) = \det(A)$.

<u>Beweis:</u> (i) & (ii) folgen unmittelbar aus dem Satz.

(iii) folgt (für Zeilen) aus $\det(\tilde{A}) = \det(EA) = \det(E)\det(A)$, da E eine Dreiecksmatrix mit $E_{ii} = 1$ ist, weshalb $\det(E) = 1$.

$\square$

Bem.: Bringen wir eine Matrix aus $\mathbb{K}^{n \times n}$ durch elem. Zeilenop.en auf Zeilenstufenform (in der die Determinante einfach das Produkt der Diagonaleinträge ist), lässt sich über die Änderung der Determinanten also einfach Buch führen.

Korollar: Für $\lambda \in \mathbb{K}$, $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ gilt: $\boxed{\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)}$.

Beweis: Folgt aus (ii) angewendet auf alle n Spalten. $\square$

Satz: Für $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ sind äquivalent:

(i) A ist invertierbar

(ii) $\operatorname{rg}(A) = n$

(iii) $\det(A) \neq 0$

Def.: $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ heißt regulär, wenn $\det(A) \neq 0$ und singulär, wenn $\det(A) = 0$.

Beweis: (i) $\Leftrightarrow$ (ii) ist bereits bekannt.

(i) $\Rightarrow$ (iii): Aus $I_n = A \cdot A^{-1}$ folgt

$$1 = \det(I_n) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1}) \quad \text{also } \det(A) \neq 0.$$

(iii) $\Rightarrow$ (ii): Ist $\det(A) \neq 0$, dann ändert sich dies durch elementare Zeilenop.en genausowenig wie $\operatorname{rg}(A)$.
In Zeilenstufenform bedeutet $\det(A) \neq 0$ jedoch, dass $a_{ii} \neq 0 \ \forall i$. Damit hat A n linear unabh. Spalten, also $\operatorname{rg}(A) = n$. $\square$

Aus dem Beweis (i) $\Rightarrow$ (iii) folgt unmittelbar:

Korollar: Ist $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ invertierbar, dann gilt $\boxed{\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}}$.

Bsp.: Liegen die Punkte $(2,-1), (-7,-7), (8,3) \in \mathbb{R}^2$ auf einer Linie?
Eine Linie ist über $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by + c = 0\}$ durch $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ charakterisiert, wobei $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Punkte $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{R}^2$ liegen also nur dann auf einer Linie, wenn das homogene LGS

$$\underbrace{\begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & 1 \\ z_{21} & z_{22} & 1 \\ z_{31} & z_{32} & 1 \end{pmatrix}}_{=: Z} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

eine von Null verschiedene Lösung besitzt, also $\det(Z) = 0$ ist.

Im Beispiel ist $\det(Z) = \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -7 & -7 & 1 \\ 8 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 0$.

Satz: (Entwicklungssatz von Laplace) Für $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n \times n}$, $n \geq 2$ sei $A_{i,j} \in \mathbb{K}^{(n-1)\times(n-1)}$ die Matrix, die aus A durch Weglassen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht. Dann gilt

(1) $\forall i \in \{1, \dots, n\}: \quad \det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \cdot \det(A_{i,j})$

"Entwicklung nach der i'ten Zeile"

(2) $\forall j \in \{1, \dots, n\}: \quad \det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \cdot \det(A_{i,j})$

"Entwicklung nach der j'ten Spalte"

Beweis: mittels Leibnizformel $\longrightarrow$ siehe z.B. [Reimers, Kemper].

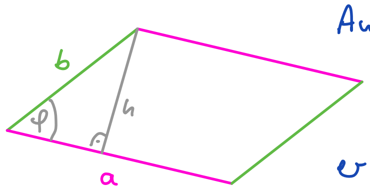
Bsp.:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \overset{\text{Entw. nach 1. Zeile}}{=} 0 \cdot \det\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} - 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} + 2 \cdot \det\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= -(3 \cdot 8 - 5 \cdot 6) + 2 \cdot (3 \cdot 7 - 6 \cdot 4) = 6 - 6 = 0.$$

Geometrische Interpretation der Determinanten

Ist F die Fläche eines durch $a, b \in \mathbb{R}^2$ aufgespannten Parallelogramms, dann gilt $F = \|a\| \cdot h = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \sin\varphi$.



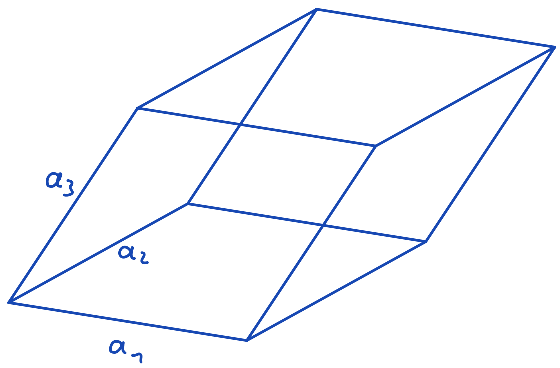
Aus $F^2 + \big(\underbrace{\|a\|\,\|b\| \cos\varphi}_{= \langle a, b \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2}\big)^2 = \|a\|^2 \|b\|^2$

erhält man
$$F = |a_1 b_2 - a_2 b_1| = \left| \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \right| .$$

Dies gilt auch allgemeiner: Spannen $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$ ein Parallelotop auf, dann ist dessen Volumen V gleich

$$\boxed{V = \left| \det \left(a_1 \,\vdots\, \dots \,\vdots\, a_n \right) \right|}$$

(→ Analysis 3)



Das Parallelotop ist dabei das Bild des Einheitswürfels unter der durch $A = \left(a_1 \,\vdots\, \dots \,\vdots\, a_n \right)$ gegebenen linearen Abbildung.

Lemma: (Basiswechsel)

Ist V ein n-dim. $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\phi_B : \mathbb{K}^n \to V$ und $\phi_C : \mathbb{K}^n \to V$ zwei kanonische Basisisomorphismen und $F: V \to V$ eine lineare Abbildung mit Darstellungsmatrizen $M_B := \phi_B^{-1} \circ F \circ \phi_B$ und $M_C := \phi_C^{-1} \circ F \circ \phi_C$. Dann gilt:

$$\boxed{M_B = S_{B,C} M_C S_{B,C}^{-1}} \quad \text{mit } S_{B,C} := \phi_B^{-1} \circ \phi_C : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$$

Beweis: $M_B = \phi_B^{-1} \circ F \circ \phi_B \underset{\substack{\uparrow \\ F = \phi_C \circ M_C \circ \phi_C^{-1}}}{=} (\phi_B^{-1} \circ \phi_C) \circ M_C \circ \underbrace{\phi_C^{-1} \circ \phi_B}_{(\phi_B^{-1} \circ \phi_C)^{-1}}$. $\square$

Bem.: Umgekehrt können wir jede Transformation $M_C \mapsto S M_C S^{-1}$ als Basiswechsel interpretieren/realisieren. Diese Transformationen heißen **Ähnlichkeitstransformationen** und zwei Matrizen –"– **ähnlich**, wenn eine –"– sie ineinander überführt.

Korollar: Sind $M_B, M_C \in \mathbb{K}^{n \times n}$ zwei Darstellungsmatrizen ein- und derselben linearen Abbildung, dann gilt:

$$\det(M_B) = \det(M_C).$$

Beweis: $\det(M_B) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Multiplikativität}}}{=} \det(S_{B,C}) \det(M_C) \underbrace{\det(S_{B,C}^{-1})}_{\det(S_{B,C})^{-1}} = \det(M_C)$. $\square$

Als Konsequenz können wir $\det(F)$ für $F: V \to V$ basisunabhängig definieren, da die Darstellungsmatrizen für F in allen Basen dieselbe Determinante besitzen.

VII. Eigenwerte & Eigenvektoren

Bem.: Eigenwerte spielen eine wichtige Rolle z.B.:

- in der Quantentheorie, wo sie die Menge der (quantisierten) Messwerte darstellen ($\longrightarrow$ z.B. Frauenhoferlinien).
- in der klassischen Mechanik als Hauptträgheitsmomente

Def.: Sei V ein endlich-dim. $\mathbb{K}$-Vektorraum und $F: V \to V$ linear. Gilt die Eigenwertgleichung $\boxed{Fv = \lambda v}$ für ein $\lambda \in \mathbb{K}$ und ein $v \in V \setminus \{0\}$, dann heißt v Eigenvektor zum Eigenwert λ.
Der Vektorraum $E_\lambda := \ker(F - \lambda \mathrm{id}_V) \leq V$ heißt Eigenraum zum Eigenvektor λ, seine Dimension $\dim(E_\lambda)$ geometrische Vielfachheit des Eigenwertes λ.

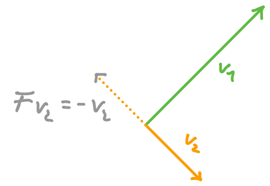
Bem.:

- Es gilt: $v \in E_\lambda \Leftrightarrow Fv = \lambda v$.
  Damit ist E_λ der Unterraum von V, der von allen Eigenvektoren zum Eigenwert λ aufgespannt wird und $\dim(E_\lambda)$ die Anzahl lin. unabh. Eigenvektoren zum Eigenwert λ.
- Ist v ein Eigenvektor, dann auch αv für bel. $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.
- Ist ein Eigenwert bekannt, ist die Bestimmung des zugehörigen Eigenraumes, die Lösung eines LGS.
- von nun an betrachten wir ausschließlich endl. dim. Vektorräume.

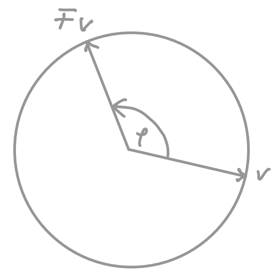
Bsp.:

- Die Spiegelung im $\mathbb{R}^2$ an einer durch $v_1 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ gegebenen Achse besitzt zwei Eigenwerte $+1$ und -1 mit Eigenvektoren v_1 und v_2 der senkrecht auf v_1 steht.

  Es existiert also eine <u>Basis</u> aus Eigenvektoren.



- Die Drehung des $\mathbb{R}^2$ um einen Winkel $\varphi \in (0, \pi)$ besitzt offenbar keinen Eigenwert.



- Die durch $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dargestellte Scherung des $\mathbb{R}^2$ besitzt wegen $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ b \end{pmatrix} \overset{!}{=} \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ nur einen Eigenwert $\lambda = 1$. Der Eigenraum dazu ist ein-dimensional.

<u>**Def.:**</u> Eine lineare Abbildung $F: V \to V$ heißt **diagonalisierbar**, wenn eine Basis von Eigenvektoren von F für V existiert.

<u>**Bem.:**</u>

- Angenommen $v_1, \dots, v_n$ ist so eine Basis, mit $Fv_i = \lambda_i v_i$.

  Der Name „diagonalisierbar" kommt daher, dass F in dieser Basis 'diagonal' ist, nämlich dargestellt durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

- Für eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ bedeutet diagonalisierbar, dass eine Ähnlichkeitstrafo. existiert, so dass SAS^{-1} diagonal ist. Diese können wir explizit angeben, wenn die Eigenvektoren gegeben sind:

Satz: Sei $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{K}^n$ eine Basis von Eigenvektoren von $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und $X := \left(v_1 \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, v_n \right) \in \mathbb{K}^{n \times n}$ die Matrix, deren Spalten durch die v_k's gegeben sind. Dann ist $X^{-1} A X$ diagonal. Genauer:

$$\boxed{X^{-1} A X = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}}$$

wobei $A v_k = \lambda_k v_k$.

Beweis: Zu zeigen ist, dass $(X^{-1} A X) e_k = \lambda_k e_k$ gilt, für alle Standardbasisvektoren e_k. Da das Bild von e_k unter X der k'te Spaltenvektor von X und damit v_k ist gilt:

$$(X^{-1} A X) e_k = X^{-1} A \underbrace{(X e_k)}_{= v_k} \overset{A v_k = \lambda_k v_k}{=} X^{-1} \lambda_k v_k \underset{v_k = X e_k}{=} \lambda_k X^{-1} X e_k \underset{X^{-1} X = I_n}{=} \lambda_k e_k .$$

$\square$

Lemma: Sind $v_1, \dots, v_r$ Eigenvektoren zu unterschiedlichen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ einer linearen Abbildung $F: V \to V$, dann ist $(v_1, \dots, v_r)$ linear unabhängig.

Beweis: durch Induktion:

Beginn: $r = 1$. Da $v_1 \neq 0$, ist v_1 in der Tat lin. unabh.

Induktionsannahme: $v_1, \dots, v_k$ sind lin. unabh.

Wir wollen zeigen, dass daraus lin. Unabh. von $v_1, \dots, v_{k+1}$ folgt.

Betrachte daher $\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i v_i = 0$ mit $\alpha_i \in \mathbb{K}$.

Dann gilt $\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i F v_i = 0$ sowie $\lambda_{k+1} \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i v_i = 0$

und für deren Differenz:

$$0 = \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i (\lambda_i - \lambda_{k+1}) v_i = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i (\lambda_i - \lambda_{k+1}) v_i$$

Hier muß $\alpha_i(\lambda_i - \lambda_{k+1}) = 0$ sein also $\alpha_i = 0$ da $\lambda_i \neq \lambda_{k+1}$.

$v_1, \dots, v_{k+1}$ sind damit ebenfalls lin. unabh.

$\square$

Satz: Sei V ein n-dim. $\mathbb{K}$-Vektorraum und $F: V \to V$ linear mit r unterschiedlichen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, deren geometrische Vielfachheiten $n_1, \dots, n_r$ sind. Dann gilt $\boxed{\sum_{i=1}^{r} n_i \leq n}$ und hier Gleichheit genau dann, wenn F diagonalisierbar ist.

Beweis: Sei $v_1^{(i)}, \dots, v_{n_i}^{(i)}$ eine Basis von E_{λ_i}. Wir wollen zunächst zeigen, dass auch die Vereinigung über i zu einem linear unabhängigen Satz von Vektoren führt.

Sei $\sum_{i=1}^{r} \underbrace{\sum_{k=1}^{n_i} \alpha_k^{(i)} v_k^{(i)}}_{=: w_i} = 0$. Dann sind nach dem Lemma alle $w_i = 0$, da $w_i \in E_{\lambda_i}$. Da für festes i aber $v_1^{(i)}, \dots, v_{n_i}^{(i)}$ lin. unabh. sind, müssen alle $\alpha_k^{(i)} = 0$. Also sind $\{v_1^{(i)}, \dots, v_{n_i}^{(i)}\}_{i=1}^{r}$ $\sum_{i=1}^{r} n_i$ linear unabh. Vektoren, so dass $\sum_{i=1}^{r} n_i \leq n$.

Gilt Gleichheit, existiert eine Basis von Eigenvektoren. Existiert, umgekehrt, eine solche -"- -"-, dann muß auch Gleichheit gelten, da $\sum_{i=1}^{r} n_i$ die Anzahl der lin. unabh. Eigenvektoren ist. $\square$

Bem.: Eigenwerte ändern sich nicht unter Ähnlichkeitstransformationen, da $Fv = \lambda v \Leftrightarrow SFS^{-1} \tilde{v} = \lambda \tilde{v}$ mit $\tilde{v} := Sv$.
Wir können eine lineare Abb. $F: V \to V$ also in beliebiger Basis darstellen und die Eigenwerte von F als Eigenwerte der Darstellungsmatrix bekommen. Zu deren Bestimmung definieren wir:

Def.: Zu $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ heißt $\chi_A \in \mathbb{K}[x]$, $\chi_A(x) := \det(x I_n - A)$ das charakteristische Polynom.

Bem.:
- In der Literatur ist auch $\det(A - x I_n)$ als Definition für χ_A zu finden.

- χ_A ist ein Polynom vom Grad n. Die beiden führenden Monome ergeben sich gemäß Leibnizformel für $A = (a_{ij})$ aus

$$\prod_{i=1}^{n} (x - a_{ii}) = x^n - x^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\right) + \ldots$$

Der Term $\sum_{i=1}^{n} a_{ii} =: \mathrm{tr}[A]$ heißt **Spur** (engl. 'trace') von A.

Insgesamt ist damit:

$$\boxed{\chi_A(x) = x^n - \mathrm{tr}[A]\, x^{n-1} + \ldots + (-1)^n \det(A)}$$

Korollar: 1. Die Eigenwerte von $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ sind genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms χ_A.

2. Ist $\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossen, besitzt $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mindestens einen Eigenwert.

Beweis: 1.

$$\begin{aligned} 0 = \chi_A(\lambda) &= \det(\lambda I_n - A) \\ \Leftrightarrow \quad & \mathrm{rg}(\lambda I_n - A) < n \\ \Leftrightarrow \quad & \dim \ker(\lambda I_n - A) \geq 1 \\ \Leftrightarrow \quad & \exists v \neq 0 : \lambda v = Av \end{aligned}$$

2. χ_A besitzt dann eine Nullstelle. $\square$

Bsp.: $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ besitzt keinen Eigenwert über $\mathbb{R}$, also als $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ dagegen besitzt Eigenwerte $\pm i$, da $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 + 1$ Nullstellen $\pm i$ besitzt.

Bem.: Ähnliche Matrizen besitzen das gleiche charakteristische Polynom, da für $B = SAS^{-1}$ gilt: $\chi_B(x) =$

$$= \det(xI_n - SAS^{-1}) = \det\left(S(xI_n - A)S^{-1}\right) = \underbrace{\det(S)\det(S^{-1})}_{=1} \chi_A(x).$$

Def.: Sei $\lambda \in \mathbb{K}$ ein Eigenwert von $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Die algebraische Vielfachheit von λ ist die Vielfachheit der Nullstelle λ im charakteristischen Polynom von A.

(D.h. das maximale $m \in \mathbb{N}$, s.d. $\chi_A(x) = (x-\lambda)^m f(x)$ mit $f \in \mathbb{K}[x]$)

Bem.: Ist $\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossen, hat das charakteristische Polynom nach dem Fundamentalsatz der Algebra die Form

$$\boxed{\chi_A(x) = \prod_{i=1}^{r} (x-\lambda_i)^{a_i}}$$

wobei $a_i \in \mathbb{N}$ die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts λ_i ist und $\sum_{i=1}^{r} a_i = n$ gilt.

Satz: Die algebraische Vielfachheit eines Eigenwerts ist mindestens gleich seiner geometrischen Vielfachheit.

Beweis: Wir verwenden, dass sich die Vielfachheiten unter Basiswechsel nicht ändern. Sei $\lambda \in \mathbb{K}$ der betrachtete Eigenwert mit algebraischer V. $a(\lambda)$ und geom. V. $g(\lambda)$. Dann gibt es $g(\lambda)$ linear unabh. Eigenvektoren $v_1, \dots, v_{g(\lambda)}$. Wir vervollständigen dies zu einer Basis und stellen die Matrix in dieser dar was auf

$$\tilde{A} := \left(\begin{array}{c:c} \lambda I_{g(\lambda)} & * \\ \hdashline 0 & C \end{array}\right)$$

führt. Wie $\tilde{A}$ ist $xI_n - \tilde{A}$ eine Blockdreiecksmatrix, deren Determinante gleich $\chi_{\tilde{A}}(x) = (x-\lambda)^{g(\lambda)} \chi_C(x)$ ist.

(Hier verwenden wir, dass $\det\begin{pmatrix} B & * \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(B)\det(C)$.) $\square$

Def.: Ist $\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossen und $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, dann heißt $\sigma(A) := \{ \lambda \in \mathbb{K} \mid \det(\lambda I_n - A) = 0 \}$ das **Spektrum** von A.

Korollar: Ist $\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossen, dann ist $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ genau dann diagonalisierbar, wenn für jeden Eigenwert von A gilt, dass algebraische und geometrische Vielfachheit übereinstimmen.

Beweis: Für $\lambda \in \sigma(A)$ seien $a(\lambda)$ und $g(\lambda)$ die alg. bzw. geom. Vielfachheit. Dann gilt:

$$\sum_{\lambda \in \sigma(A)} g(\lambda) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{voriger Satz}}}{\leq} \sum_{\lambda \in \sigma(A)} a(\lambda) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Fundamentalsatz der Algebra}}}{=} n$$

Damit ist die Summe der geom. Vielfachheiten (also die Anzahl der lin. unabh. Eigenvektoren) gleich n, g.d.w. $g(\lambda) = a(\lambda) \quad \forall \lambda \in \sigma(A)$. $\square$

Lemma: Ist $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n \times n}$ eine obere Dreiecksmatrix, dann gilt $\chi_A(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - a_{ii})$, d.h. die Eigenwerte von A sind genau die Diagonaleinträge.

Beweis: $xI_n - A$ ist ebenfalls obere Dreiecksmatrix, s.d. die Determinante das Produkt der Diagonaleinträge ist. $\square$

Zwar lassen sich auch für alg. abgeschlossenes $\mathbb{K}$ nicht alle Matrizen diagonalisieren, jedoch ist jede Matrix trigonalisierbar:

Satz: Ist $\mathbb{K}$ algebraisch abgeschl. und $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, dann existiert eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{K}^{n\times n}$, s.d. $S^{-1}AS$ eine obere Dreiecksmatrix ist.

Beweis: Dies lässt sich induktiv beweisen:

Wegen alg. Abgeschlossenheit besitzt A einen Eigenwert, den wir mit λ_1 bezeichnen. Dargestellt in der Basis, die den zug. Eigenvektor als $(1,0,\dots,0)$ darstellt, wird A zu

$$A \longmapsto \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * \\ \hline 0 & B \end{array}\right) \quad \text{mit } B \in \mathbb{K}^{(n-1)\times(n-1)}$$

Nun verfahren wir mit B genauso. B hat einen Eigenwert λ_2, so dass nach geeigneter Ähnlichkeitstransformation

$$A \longmapsto \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * \\ \hline 0 & B \end{array}\right) \longmapsto \left(\begin{array}{c|c|c} \lambda_1 & * & * \\ \hline 0 & \lambda_2 & * \\ \hline 0 & 0 & C \end{array}\right)$$

Iteration führt dann auf eine obere Dreiecksmatrix, mit den Eigenwerten auf der Diagonalen. $\square$

Korollar: Sei $\mathbb{K}$ alg. abgeschlossen und sind $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ die (nicht notwendigerweise versch.) Eigenwerte von $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$.

Dann gilt: (i) $\boxed{tr[A] = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i}$

(ii) $\boxed{det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i}$

d.h. die Eigenwerte werden hier gemäß ihrer alg. Vielfachheit gezählt

Beweis: Wir verwenden, dass sich das charak. Polynom nicht unter Ähnlichkeitstransformationen ändert und dass stets ein S existiert, s.d. $B = SAS^{-1}$ eine obere Dreiecksmatrix ist, für die (i) & (ii) bekannt sind. Für A folgt die Aussage dann aus

$$\chi_A(x) = x^n + tr[A]\, x^{n-1} + \dots + (-1)^n det(A)$$
$$\overset{\shortparallel}{\chi_B}(x) = x^n + tr[B]\, x^{n-1} + \dots + (-1)^n det(B)$$

durch Koeffizientenvergleich. $\square$

Bem.: Dies zeigt gleichzeitig, dass die Spur 'basisunabhängig' ist, d.h. es gilt $\boxed{tr[A] = tr[SAS^{-1}]}$ für bel. invertierbares S.

Def.: Für $\lambda \in \mathbb{K}$, $m \in \mathbb{N}$ heißt die Matrix $J(\lambda) \in \mathbb{K}^{m \times m}$

$$\boxed{J(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}}$$

Jordanblock (oder 'Jordankästchen') der Größe m zum Eigenwert λ. Für $m = 1$ meint dies $J(\lambda) := \lambda$.

Bem.:
- Offensichtlich ist λ der einzige Eigenwert von $J(\lambda)$.
- Manche Texte verwenden die Konvention in der die Einsen unter der Diagonale stehen.

Jordanblöcke der Größe $m \geq 2$ sind paradigmatisch für nicht-diagonalisierbare Matrizen, denn:

Lemma: Der Eigenwert λ eines Jordanblocks $J(\lambda) \in \mathbb{K}^{m \times m}$ besitzt algebraische Vielfachheit m und geom. Vielfachheit 1.

Bem.: D.h. ein Jordanblock besitzt genau einen Eigenvektor (nämlich $(1, 0, \dots, 0)$).

Beweis: Für das charakteristische Polynom von $J(\lambda)$ gilt:

$\chi(x) = \det(x I_m - J(\lambda)) = (x - \lambda)^m$.

Damit ist die alg. Vielfachheit von λ gleich m.

Der Eigenraum $E_\lambda = \ker(J(\lambda) - \lambda I_m)$ ist dagegen ein-dimensional, da

$$J(\lambda) - \lambda I_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

Rang $m-1$ besitzt. $\square$

Satz: (Jordan-Normalform)

Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ so, dass das charak. Polynom in Linearfaktoren zerfällt (d.h. $\chi_A(x) = \prod_{i=1}^{n}(x-\lambda_i)$ mit $\lambda_i \in \mathbb{K}$, was für alg. abgeschlossene $\mathbb{K}$ stets zutrifft).

A ist ähnlich zu einer blockdiagonalen Matrix der Form

$$\boxed{\begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2(\lambda_2) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_r(\lambda_r) \end{pmatrix}}$$

wobei jedes $J_k(\lambda_k)$ ein Jordanblock ist. Diese sog. Jordan-Normalform der Matrix A ist eindeutig bis auf die Reihenfolge der Jordanblöcke.

Beweis: z.B. in [Kemper & Reimers].

Bem.:
- Die λ_k's sind dann die Eigenwerte von A, wobei die geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts λ gleich der Anzahl der Jordanblöcke ist, die in der Jordan-Normalform zum Eigenwert λ auftauchen.
- A ist genau dann diagonalisierbar, wenn alle Jordanblöcke der Jordan-Normalform Größe 1 besitzen.
- Über $\mathbb{R}$ existiert die Jordan-Normalform nicht notwendigerweise (aber eine modifizierte Version davon ...).

Lemma: Hat $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ausschließlich reelle Einträge, dann gilt $\lambda \in \operatorname{spec}(A) \Rightarrow \bar{\lambda} \in \operatorname{spec}(A)$

D.h. die Eigenwerte reeller Matrizen sind entweder reell oder sind Teil eines komplex konjugierten Paars.

Beweis: Komplex-Konjugation der Eigenwertgleichung $Av = \lambda v$ liefert $\underbrace{A}_{= \bar{A}} \bar{v} = \bar{\lambda} \bar{v}$. $\square$

Bsp.: Für $a, b \in \mathbb{R}$ besitzt $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ die Eigenwerte $a \pm ib$.
Damit kann keine reelle Ähnlichkeitstrafo. existieren, die die Matrix auf Jordan-Normalform bringt, wenn $b \neq 0$ ist.

VIII Skalarprodukt

Def.: • Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.
Ein Skalarprodukt auf V ist eine Abbildung
$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$, für die gilt: $\forall\, \varphi, \varphi_1, \varphi_2, \psi \in V$:

(i) $\langle \varphi, \varphi \rangle \in [0, \infty)$ und $\langle \varphi, \varphi \rangle = 0 \Leftrightarrow \varphi = 0$.

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{K}$: $\langle \psi, \lambda \varphi_1 + \varphi_2 \rangle = \lambda \langle \psi, \varphi_1 \rangle + \langle \psi, \varphi_2 \rangle$

(iii) $\langle \varphi, \psi \rangle = \overline{\langle \psi, \varphi \rangle}$ (bzw. $\langle \varphi, \psi \rangle = \langle \psi, \varphi \rangle$ wenn $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)

• V ausgestattet mit einem Skalarprodukt heißt dann Euklid'scher Vektorraum für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bzw. unitärer Vektorraum für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Auf diesem ist die (vom Skalarprodukt induzierte) Norm $\|\cdot\| : V \to [0, \infty)$, $\boxed{\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}}$ definiert.

Bem.:

- Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist das Skalarprodukt also (i) positiv definit, (ii) linear in beiden Argumenten und (iii) symmetrisch.
- Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist das Skalarprodukt linear im zweiten Argument und 'konjugiert linear' im ersten Argument, d.h. $\langle \lambda \varphi_1 + \varphi_2, \psi \rangle = \bar{\lambda} \langle \varphi_1, \psi \rangle + \langle \varphi_2, \psi \rangle$.
  (Achtung: Manche Mathematiker verwenden die Konvention nach der Linearität im ersten und konj. Lin. im zweiten Argument gilt.)
- Unitäre Vektorräume sind für die Quantentheorie zentral.
- Für die Norm gilt $\forall x \in V$: $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ und
  $\forall \lambda \in \mathbb{K}$: $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ (absolute Homogenität)
- Über allgemeine Körper sind Skalarprodukte nicht definiert, da "$\geq$" i. A. keinen Sinn macht.

Bsp.:

- $V = \mathbb{R}^n$ mit $\langle x,y\rangle := \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i$
- $V = \mathbb{C}^n$ mit $\langle x,y\rangle := \sum_{i=1}^n \overline{x}_i \cdot y_i$

  } 'Standardskalarprodukt'

  d.h. $\langle x,y\rangle = \overline{x}^T \cdot y$ als Matrixprodukt

- $V = \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\langle A,B\rangle := \mathrm{tr}[A^T B]$
- $V = C([0,1])$ mit $\langle f,g\rangle := \int_0^1 \overline{f(x)}\, g(x)\, dx$

  (würden wir statt Stetigkeit Integrierbarkeit fordern, wäre dies kein Skalarprodukt, da dann $\langle f,f\rangle = 0$ für $f \neq 0$ sein kann.)

Satz: Ist V ein Vektorraum mit Skalarprodukt, dann gilt $\forall x,y \in V$:

(i) $|\langle x,y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ Cauchy-Schwarz Ungl.

(ii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ Dreiecksungleichung

(iii) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ ParallelogrammgL.

Beweis: (i) Wir können x durch λx mit $|\lambda| = 1$ ersetzen, so dass o.B.d.A. $\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}$. Dann gilt $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$0 \leq \|tx+y\|^2 = t^2\|x\|^2 + 2t\langle x,y\rangle + \|y\|^2$$

Minimieren bzgl. t liefert $t_{min} = -\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|^2}$ und nach Einsetzen:

$$-\frac{\langle x,y\rangle^2}{\|x\|^2} + \|y\|^2 \geq 0.$$

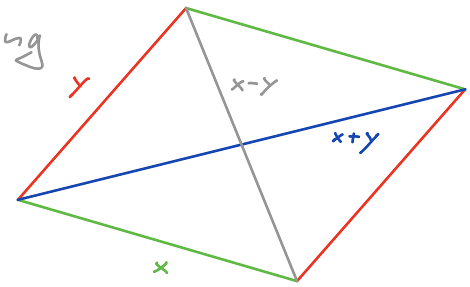
(ii)
$$\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|\langle x,y\rangle| \overset{(i)}{\leq} \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\cdot\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2$$

(iii)
$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle$$
$$= \|x\|^2 + \|y\|^2 + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \|x\|^2 + \|y\|^2 - \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle$$
$$= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

$\square$

Bem.:

- Interpretation / Namensgebung der Parallelogrammgl.:



  Die Gleichung kann als Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras betrachtet werden.

- In einem Euklid'schen Vektorraum erlaubt die C.S. Ungl. die Definition eines Winkels $\theta \in [0, \pi]$, s.d. $\boxed{\cos(\theta) = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}}$

- Gleichheit in der Cauchy-Schwarz Ungl. gilt g.d.w. sich x und y nur um einen skalaren Faktor unterscheiden (D.h. $x = \lambda y$ für ein $\lambda \in \mathbb{K}$ oder $y = 0$).

Def.: Sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt, $M \subseteq V$, $x, y \in V$.

- x heißt orthogonal zu y, wenn $\langle x, y \rangle = 0$ ($:\Leftrightarrow: x \perp y$)
- $M^\perp := \{ v \in V \mid \forall w \in M : \langle v, w \rangle = 0 \}$ heißt Orthogonalkomplement von M.

Bem.:

- Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ liefert $\cos(\theta) = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}$, $\theta \in [0, \pi]$, dass $x \perp y \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$.
- Es gilt $\{0\}^\perp = V$ und $V^\perp = \{0\}$.

Korollar (Pythagoras): $x \perp y \Rightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

Beweis: $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \underbrace{\langle x, y \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle y, x \rangle}_{=0}$

$\square$

Korollar: Für $M \subseteq V$ ist $M^\perp$ ein Untervektorraum von V.

Beweis: Es gilt $\varphi \in M^\perp \Rightarrow \lambda \varphi \in M^\perp$ und $\varphi, f \in M^\perp \Rightarrow \varphi + f \in M^\perp$.

$\square$

Def.: Sei V ein endl.-dim. Vektorraum mit Skalarprodukt. Eine Menge von Vektoren $v_1, \dots, v_n \in V \setminus \{0\}$ heißt

- orthogonal, wenn $v_i \perp v_j$ für alle $i \neq j$,
- orthonormal, wenn $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$,
- Orthonormalbasis (ONB), wenn sie orthonormal sind und eine Basis von V bilden.

Bsp.:
- Die Standardbasis in $\mathbb{K}^n$ bildet eine ONB bzgl. des Standardskalarprodukts.

Bem.:
- Jede orthogonale Menge von Vektoren ist linear unabh. Denn ist $0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$, dann auch das Skalarprodukt mit v_k, also $0 = \langle v_k, \sum_i \lambda_i v_i \rangle = \sum_i \lambda_i \langle v_k, v_i \rangle = \lambda_k \|v_k\|^2$
- Bzgl. ONBs lassen sich Entwicklungskoeffizienten besonders einfach bestimmen:

Satz: Ist $(v_1, \dots, v_n)$ eine ONB von V, dann gilt für alle $x, y \in V$:

$$\boxed{\begin{aligned} &(i) \quad x = \sum_{i=1}^n \langle v_i, x \rangle v_i \\ &(ii) \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle v_i, x\rangle|^2 \\ &(iii) \quad \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \overline{\langle v_i, x\rangle} \langle v_i, y \rangle \end{aligned}}$$

Parseval Identität

Standardskalarprodukt der Entwicklungskoeffizienten

Beweis: (i) Wegen der Basiseigenschaft existieren $\lambda_i \in \mathbb{K}$, s.d. $x = \sum_{j=1}^n \lambda_j v_j$. Skalarprodukt mit v_i ergibt dann: $\langle v_i, x \rangle = \lambda_i$.

(iii) Durch Einsetzen von (i) für x und y:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i,j} \overline{\langle v_i, x\rangle} \langle v_j, y \rangle \underbrace{\langle v_i, v_j \rangle}_{= \delta_{ij}} = \sum_{i=1}^n \overline{\langle v_i, x \rangle} \langle v_i, y \rangle$$

(ii) Folgt aus (iii) für $x = y$. $\square$

Bem.: Für die Darstellungsmatrix von $A: V \to V$ gilt bzgl. der ONB $(v_i)_{i=1}^n$ mit $A v_i =: \sum_j A_{ji} v_j$ dann $\boxed{A_{ij} = \langle v_i, A v_j \rangle}$.

Das Gram-Schmidt Orthonormalisierungsverfahren

Input: Linear unabh. Vektoren $u_1, \dots, u_n$ eines Vekt.raums V mit Skalarprodukt.

Output: Eine ONB $v_1, \dots, v_n$ von $\operatorname{span}(u_1, \dots, u_n)$.

Für $i = 1, \dots, n$ definieren wir:

$$\boxed{v_i := \frac{u_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle v_j, u_i \rangle v_j}{\left\| u_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle v_j, u_i \rangle v_j \right\|}}$$

Offensichtlich gilt $v_i \in \operatorname{span}\{u_1, \dots, u_i\}$ und insbesondere $\sum_{j=1}^{i-1} \langle v_j, u_i \rangle v_j \in \operatorname{span}\{u_1, \dots, u_{i-1}\}$. Wegen lin. Unabh. der u_i's ist die Norm im Nenner also $\neq 0$.

Per Konstruktion gilt:

(i) $\| v_i \| = 1$

(ii) $\langle v_k, v_i \rangle = 0$ für alle $i \neq k$

Es genügt dies für alle $k < i$ zu zeigen.

Induktionsannahme: Orthogonalität gilt für alle $k, i \leq m$

Für $i = m+1$ gilt dann:

$$\langle v_k, v_i \rangle \sim \langle v_k, u_i \rangle - \sum_{j=1}^{i-1} \langle v_j, u_i \rangle \underbrace{\langle v_k, v_j \rangle}_{= \delta_{kj} \text{ da } k, j \leq m} = \langle v_k, u_i \rangle - \langle v_k, u_i \rangle = 0.$$

(iii) $\operatorname{span}\{v_1, \dots, v_i\} = \operatorname{span}\{u_1, \dots, u_i\} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$

"$\subseteq$" ist klar. Da $v_1, \dots, v_i$ aber orthogonal und damit lin. unabhängig sind, müssen die Dimensionen und damit die Räume gleich sein.

Bem.: ◦ Sind $u_1, \dots, u_k$ bereits orthonormal, dann gilt $v_i = u_i \;\; \forall i \leq k$.

Korollar: Für jeden endl.-dim. Vektorraum V mit Skalarprodukt gilt: (i) V besitzt eine ONB

(ii) Jede orthonormale Menge von Vektoren $v_1, \dots, v_k \in V$ lässt sich zu einer ONB vervollständigen.

Beweis: (i) Aus jeder Basis von V wird durch Gram-Schmidt eine ONB.

(ii) $v_1, \dots, v_k$ bilden eine ONB von $M := \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_k\}$. Diese können wir zu einer Basis $v_1, \dots, v_k, b_{k+1}, \dots, b_n$ von V vervollständigen aus der durch Gram-Schmidt eine ONB $v_1, \dots, v_n$ wird, wobei sich die ersten k Vektoren nicht ändern. $\square$

Satz: Sei U ein Untervektorraum eines endl.-dim. Vektorraums V mit Skalarprodukt. Dann gilt:

(i) $V = U \oplus U^\perp$,

(ii) $(U^\perp)^\perp = U$.

Beweis: (i) Wir müssen zeigen, dass (a) $U + U^\perp = V$ und (b) $U \cap U^\perp = \{0\}$. Sei $v_1, \dots, v_k$ eine ONB von U, die wir zu einer ONB $v_1, \dots, v_n$ von V vervollständigen. Dann gilt für jedes $x \in V$:

$$x = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \langle v_i, x \rangle v_i}_{\in U} + \underbrace{\sum_{j=k+1}^{n} \langle v_j, x \rangle v_j}_{\in U^\perp}.$$ Also $V = U + U^\perp$.

Ist $v \in U \cap U^\perp$, dann muß $v \perp y \;\forall y \in U$ also auch $\langle v, v \rangle = 0$. Demnach ist $U \cap U^\perp = \{0\}$.

(ii) Ist $u \in U$, gilt für alle $v \in U^\perp$: $\langle u, v \rangle = 0$. Also $u \in (U^\perp)^\perp$ und damit $U \subseteq (U^\perp)^\perp$. Gleichheit gilt, wenn beide dieselbe Dimension besitzen. Dies folgt aber aus (i), da $V = U \oplus U^\perp$ und $V = (U^\perp)^\perp \oplus U^\perp$. □

<u>Def.:</u> Sei U ein Untervektorraum eines endl.-dim. Vektorraums V mit Skalarprodukt. Die Orthogonalprojektion auf U ist definiert als lineare Abbildung $P_U : V \to V$, so dass $P_U\big|_U = id_U$ und $\ker(P_U) = U^\perp$.

<u>Bem.:</u>

- Wegen $V = U \oplus U^\perp$ lässt sich jedes $x \in V$ eindeutig als $x = u + v$ mit $u \in U, v \in U^\perp$ schreiben. Dann ist $\boxed{P_U x = u}$ also P_U eindeutig definiert.
- P_U ist eine Projektion, was bedeutet, dass $P_U^2 = P_U$. 'Orthogonalprojektion' bedeutet, dass zusätzlich gilt: $\mathrm{Bild}(P_U) \perp \ker(P_U)$.
- Ist $u_1, \dots, u_d$ ONB von U, dann gilt $\forall x \in V$:
  $$P_U x = \sum_{i=1}^{d} \langle u_i, x \rangle u_i .$$
- Die Orthogonalproj. auf $U^\perp$ ist $P_{U^\perp} = id_V - P_U$.

Satz: Sei U ein Untervektorraum eines endl.-dim. Vektorraums V mit Skalarprodukt und $v \in V$. Dann gilt

$$\boxed{\min_{u \in U} \| v - u \| = \| v - P_U v \|}$$

und $P_U v$ ist das einzige Element von U für das '=' gilt.

Beweis: Sei $P := P_U$ und $u \in U$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\| v - Pv \|^2 &\leq \| \overbrace{v - Pv}^{\in U^\perp} \|^2 + \| \overbrace{Pv - u}^{\in U} \|^2 \\
&\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Pythagoras}}}{=} \| (v - Pv) + (Pv - u) \|^2 = \| v - u \|^2
\end{aligned}$$

mit Gleichheit g.d.w. $\| Pv - u \| = 0$ also $u = Pv$. $\square$

Def.: Sind V, W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume mit Skalarprodukt, dann heißt eine lineare Abbildung $F: V \to W$ für die gilt $\forall x, y \in V: \langle F(x), F(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ orthogonal (wenn $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) bzw. unitär (wenn $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

In beiden Fällen spricht man von einer Isometrie (was bedeutet, dass $\forall x: \| F(x) \| = \| x \|$).

Ist $V = W = \mathbb{K}^n$, versehen mit dem Standardskalarprodukt, werden die Mengen der durch Matrizen gegebenen orthogonalen bzw. unitären Abbildungen $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ mit $O(n) \subseteq \mathbb{R}^{n \times n}$ bzw. $U(n) \subseteq \mathbb{C}^{n \times n}$ bezeichnet.

Bem.: Die Darstellungsmatrizen von orth./unit. Abbildungen $V \to V$ bzgl. einer ONB sind orth./unit. Matrizen.

Satz: (i) $$O(n) = \{ M \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid M^T M = I_n \}$$
$$= \{ M = (v_1 \mid \cdots \mid v_n) \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid v_1, \dots, v_n \text{ ist ONB} \}$$

(ii) $$U(n) = \{ U \in \mathbb{C}^{n\times n} \mid \overline{U}^T U = I_n \}$$
$$= \{ U = (v_1 \mid \cdots \mid v_n) \in \mathbb{C}^{n\times n} \mid v_1, \dots, v_n \text{ ist ONB} \}$$

Beweis: Wir zeigen (ii). (i) ist analog bzgl. des St.skalarprodukts in $\mathbb{R}^n$.

$$U \in U(n) \iff \forall x, y \in \mathbb{C}^n : \langle x, y \rangle = \langle Ux, Uy \rangle$$
$$= \sum_{ijk} \overline{U}_{ik} \overline{x}_k U_{ij} y_j$$
$$= \langle x, \overline{U}^T U y \rangle$$
$$\iff \overline{U}^T U = I_n$$
$$\iff \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij} \quad \forall i,j \qquad \square$$

Bsp.:
- $O(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} \;\middle|\; \varphi \in [0, 2\pi) \right\}$
- $U(1) = \{ e^{i\varphi} \mid \varphi \in \mathbb{R} \}$

Bem.:
- Nach dem Satz sind unitäre / orthogonale Matrizen Isomorphismen mit $U^{-1} = \overline{U}^T$ bzw. $O^{-1} = O^T$.
- Wegen $1 = \det(I_n) = \det(\overline{U}^T) \cdot \det(U) = |\det(U)|^2$ gilt
$$U \in U(n) \Rightarrow |\det(U)| = 1$$
$$O \in O(n) \Rightarrow \det(O) \in \{-1, 1\}$$

Es gilt sogar folgende, etwas stärkere Aussage:

Satz: Ist $U: V \to V$ unitär, dann gilt $\boxed{\lambda \in \operatorname{spec}(U) \Rightarrow |\lambda| = 1}$.

Beweis: Mit $Ux = \lambda x$ gilt: $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle = \langle Ux, Ux\rangle = \langle \lambda x, \lambda x\rangle = |\lambda|^2 \|x\|^2$.

$\square$

Bem.:
- Da die definierende Eigenschaft von $O(n)$ bzw. $U(n)$ unter Komposition (Matrixprodukt) erhalten bleibt, handelt es sich hierbei um Gruppen.

Def.: (Matrixgruppen) Bzgl. der Matrixmultiplikation sind folgende Gruppen definiert:

- Allgemeine Lineare Gruppe $GL(n, \mathbb{K}) := \{ M \in \mathbb{K}^{n \times n} \mid \det(M) \neq 0 \}$
  (Invertierbare Matrizen)
- Spezielle Lineare Gruppe $SL(n, \mathbb{K}) := \{ M \in \mathbb{K}^{n \times n} \mid \det(M) = 1 \}$
- Orthogonale Gruppe $O(n)$ Drehungen & Spiegelungen
- Spezielle orth. Gruppe $SO(n) := \{ M \in O(n) \mid \det(M) = 1 \}$
  (Drehungen)
- Unitäre Gruppe $U(n)$
- Spezielle unitäre Gruppe $SU(n) := \{ M \in U(n) \mid \det(M) = 1 \}$
- Lorentzgruppe $O(1,3) := \{ M \in \mathbb{R}^{4 \times 4} \mid M g M^T = g,\ g := \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \}$
- ...

Dabei gelten folgende Untergruppenbeziehungen:

$$\begin{array}{ccccc} GL(n, \mathbb{C}) & \supseteq & U(n) & \supseteq & SU(n) \\ \cup\!| & & \cup\!| & & \cup\!| \\ GL(n, \mathbb{R}) & \supseteq & O(n) & \supseteq & SO(n) \end{array}$$

Def.:
- Sind $B = (b_1, \dots, b_n)$ und $C = (c_1, \dots, c_n)$ zwei Basen von $\mathbb{R}^n$ und $S_{B,C}$ die zugehörige Basiswechsel-matrix (d.h. $S_{B,C} : c_i \mapsto b_i$), dann sagt man, B und C haben dieselbe Orientierung wenn $\det(S_{B,C}) > 0$.
- $M \in GL(n, \mathbb{R})$ heißt
  orientierungserhaltend wenn $\det(M) > 0$,
  orientierungsumkehrend wenn $\det(M) < 0$.

Bem.:
- Damit lassen sich alle Basen des $\mathbb{R}^n$ in zwei Äquivalenzklassen einteilen, die "positiv / negativ orientiert" heißen.
- Alle Elemente von $SO(n)$ sind orientierungserhaltend.

IX. Matrixzerlegungen

Def.: Sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt und $A: W \to V$ eine lineare Abbildung. Eine lineare Abbildung $A^*: V \to W$ heißt zu A *adjungiert*, wenn für alle $v \in V$, $w \in W$:

$$\boxed{\langle A^* v, w \rangle = \langle v, A w \rangle}$$

Sei nun $W = V$.

- A heißt *selbstadjungiert* (oder *hermitesch*), wenn $A^* = A$.
- A heißt *normal*, wenn $A^* A = A A^*$.

Bem.:
- Sind für eine lineare Abbildung $T: V \to W$ alle Skalarprodukte $\langle Tv, w \rangle$ gegeben, ist T eindeutig bestimmt (da man v, w insbesondere aus einer Basis nehmen kann).
- In der (Quanten-)Physik schreibt man auch $A^\dagger$ statt A^* (dann gesprochen "A dagger").

Korollar: Für eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$, aufgefasst als lin. Abb. $\mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$, gilt bzgl. des Standardskalarprodukts: $\boxed{A^* = \overline{A}^T}$

Beweis: Mit der Standardbasis $e_1, e_2, \dots$ gilt:

$$(A^*)_{ij} = \langle e_i, A^* e_j \rangle = \overline{\langle A^* e_j, e_i \rangle} = \overline{\langle e_j, A e_i \rangle} = \overline{A_{ji}} \,. \qquad \square$$

Bem.:
- Für jede unitäre Matrix $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gilt also $U^* = U^{-1}$.
- Unitäre in $U(n)$ sind normal, da wegen $U^* U = I_n$ U^* die (Recht- & Links-)Inverse ist, so dass auch $U U^* = I_n$ gilt und damit $U^* U = U U^*$.

- Für Matrizen kann mann $A^* := \overline{A}^T$ als Definition betrachten.
- Für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist dann $A^* = A^T$. In diesem Fall, nennt man selbstadjungierte A symmetrisch.
- Selbstadjungiert impliziert normal, da $A^*A = AA = AA^*$.
- Aus der Definition der adjungierten Abbildung zeigt man:

(i) $(A + \lambda B)^* = A^* + \overline{\lambda} B^*$

(ii) $id^* = id$

(iii) $(AB)^* = B^* A^*$

(iv) $(A^*)^* = A$

(v) $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$

(vi) Für die Matrixdarstellung $M(A)$ bzgl. einer ONB gilt: $M(A^*) = M(A)^*$.

Satz: Ist $A: V \to V$ selbstadjungiert, dann gilt $\operatorname{spec}(A) \subseteq \mathbb{R}$.

Beweis: Sei $Av = \lambda v$ mit $v \neq 0$. Dann gilt:

$$\lambda \|v\|^2 = \langle v, \lambda v \rangle = \langle v, Av \rangle = \langle A^* v, v \rangle \overset{A = A^*}{=} \langle Av, v \rangle = \overline{\lambda} \|v\|^2. \quad \square$$

Bem.: In der Quantentheorie sind 'Observable', welche Messungen und deren Erwartungswerte beschreiben, selbstadjungiert, da deren Spektrum die möglichen Meßergebnisse beinhaltet und die zug. Größen, wie Ort, Impuls, Drehimpuls, Energie, etc., reell sind.

Bsp.:
- $\begin{pmatrix} 4 & -i & 2 \\ i & 0 & 1+2i \\ 2 & 1-2i & -1 \end{pmatrix}$ ist selbstadjungiert und hat daher ausschl. reelle Eigenwerte.
- Die Pauli-Matrizen $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ sind selbstadjungiert und unitär mit Eigenwerten ± 1. Zusammen mit $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ bilden sie eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraums der selbstadjungierten 2×2 Matrizen.

Satz: Sei V ein endl.-dim Vektorraum mit Skalarprodukt und $P: V \to V$ linear, so dass $P^2 = P$. Dann gilt mit $U := PV$:
P ist genau dann eine Orthogonalprojektion auf U, wenn $P = P^*$.

Beweis: Da $P|_U = \mathrm{id}_U$ schon aus $P^2 = P$ folgt, $\left(x \in U \Rightarrow \exists y \in V: Py = x \Rightarrow Px = PPy \underset{P^2 = P}{=} Py = x \right)$
ist noch z.z., dass $\ker(P) \perp U \iff P = P^*$.

"$\Rightarrow$": Sei $v_1, \dots, v_n$ ONB von U, s.d. $\forall x \in V$: $Px = \sum_{i=1}^{n} \langle v_i, x \rangle v_i$. Dann ist
$\langle y, Px \rangle = \sum_i \langle y, v_i \rangle \langle v_i, x \rangle = \langle Py, x \rangle \quad \forall x, y \in V$.

"$\Leftarrow$": Sei $x \in \ker(P)$ und $y \in U$, also $Px = 0$ und $y = Py$. Dann gilt:
$\langle x, y \rangle = \langle x, Py \rangle = \langle P^* x, y \rangle \underset{P = P^*}{=} \langle Px, y \rangle = 0$. $\square$

Lemma: Sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt und $A: V \to V$ linear und normal. Dann gilt:

(i) $\lambda \in \mathrm{spec}(A) \Rightarrow \underbrace{\ker(A - \lambda \mathrm{id}_V)}_{=: E_\lambda(A)} = \underbrace{\ker(A^* - \bar{\lambda} \mathrm{id}_V)}_{E_{\bar{\lambda}}(A^*)}$

(ii) Sind $v, w \in V$ Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten λ, μ von A, dann ist $v \perp w$.

(iii) Ist $x \in V$ orthogonal zu jedem Eigenvektor von A, dann besitzt auch Ax diese Eigenschaft.

Beweis: (i) $v \in E_\lambda(A) \iff Av = \lambda v$.

$\| A^* v - \bar{\lambda} v \|^2 = \underbrace{\langle A^* v, A^* v \rangle}_{\langle v, AA^* v \rangle = \langle v, A^* A v \rangle = \langle v, \lambda A^* v \rangle = \langle \bar{\lambda} v, A^* v \rangle} - \overbrace{\langle A^* v, \bar{\lambda} v \rangle}^{\langle v, \bar{\lambda} A v \rangle = \langle v, \bar{\lambda} \lambda v \rangle = \langle \bar{\lambda} v, \bar{\lambda} v \rangle} - \langle \bar{\lambda} v, A^* v \rangle + \langle \bar{\lambda} v, \bar{\lambda} v \rangle = 0$

D.h. $v \in E_{\bar\lambda}(A^*)$ und damit $E_\lambda(A) \subseteq E_{\bar\lambda}(A^*)$. Durch Anwenden auf $\bar\lambda$ und A^* gilt dann
$E_{\bar\lambda}(A^*) \subseteq E_\lambda(A^{**}) = E_\lambda(A)$.

(ii) $(\lambda-\mu)\langle v,w\rangle = \langle \bar\lambda v, w\rangle - \langle v, \mu w\rangle \overset{(i)}{=} \langle A^* v, w\rangle - \langle v, Aw\rangle$
$= \langle v, Aw\rangle - \langle v, Aw\rangle = 0$

(iii) $Av = \lambda v \neq 0 \Rightarrow \langle v, Ax\rangle = \langle A^* v, x\rangle \overset{(i)}{=} \lambda\langle v, x\rangle = 0$. $\square$

<u>Satz:</u> (Spektralsatz für normale Abbildungen)
Ist V ein endl.-dim. unitärer Raum und $A: V \to V$ linear und normal. Dann existiert für V eine ONB von Eigenvektoren von A.

<u>Beweis:</u> Sei $\mathrm{spec}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ und B_i eine ONB für den Eigenraum E_{λ_i}. Nach dem Lemma (ii) ist $\bigcup_{i=1}^{r} B_i =: \{v_1, \dots, v_n\}$ orthonormal, also eine ONB des von den Eigenvektoren v_i aufgespannten Unterraums $L := \mathrm{span}\{v_1, \dots, v_n\}$.
Nach dem Lemma (iii) ist aber $A|_{L^\perp}: L^\perp \to L^\perp$.
Wenn $L^\perp \neq \{0\}$, müsste dies, wie jede lineare Abb. auf einem nicht-trivialen $\mathbb{C}$-Vektorraum, einen Eigenvektor besitzen. Da $L^\perp$ aber orthogonal auf allen Eigenvektoren ist, muß $L^\perp = \{0\}$ also $L = V$ gelten. $\square$

Korollar: (Spektralzerlegung normaler Matrizen)

Für $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ sind äquivalent:

(i) A ist normal.

(ii) Es existiert ein $U \in SU(n)$ und eine Diagonalmatrix D, s.d.

$$\boxed{A = UDU^*}.$$

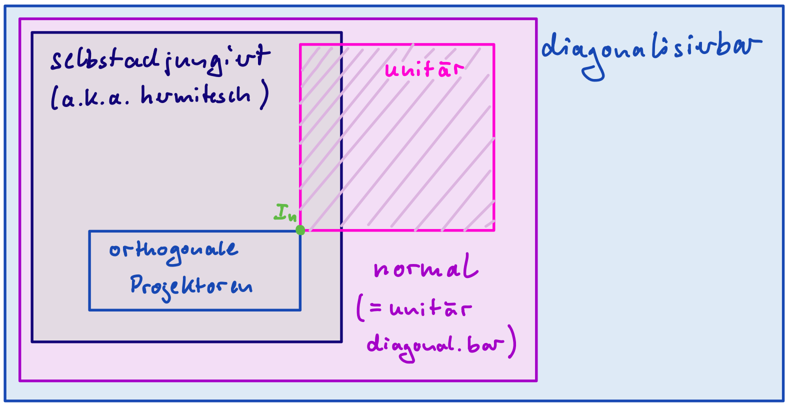
Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii): Nach dem Spektralsatz ist A diagonalisierbar, also $A = \tilde{U} D \tilde{U}^{-1}$ für ein $\tilde{U} \in GL(n, \mathbb{C})$, und die Eigenvektoren, die wir normiert annehmen können und in den Spalten von $\tilde{U}$ stehen, bilden eine ONB. Damit ist $\tilde{U} \in U(n)$, so dass wir $U := \tilde{U} \cdot \operatorname{diag}(\det(\tilde{U})^{-1}, 1, \dots, 1) \in SU(n)$ wählen können.

(ii) $\Rightarrow$ (i)

$$\begin{aligned} A^*A &= (UDU^*)^* UDU^* \\ &= U^{**} D^* U^* U D U^* = U D^* D U^* \\ AA^* &= UDU^* (UDU^*)^* \\ &= UDU^* U^{**} D^* U^* = U DD^* U^* \end{aligned}$$

Diese sind gleich, da für diagonale Matrizen gilt: $D^*D = DD^*$. $\square$

Das Bild in $\mathbb{C}^{n \times n}$ ist also folgendes:



Korollar: Jede normale Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ lässt sich schreiben als

$$\boxed{A = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i P_i},$$

wobei $\mathrm{spec}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ und P_i die Orthogonal-projektion auf E_{λ_i} darstellt.

Bem.: Die P_i's heißen dann Spektralprojektoren.

Beweis: Es genügt z.z., dass die beiden Seiten dieselbe Wirkung auf eine ONB haben. Wir wählen dazu eine ONB aus Eigenvektoren $v_1, \dots, v_n$. Dann gilt $A v_j = \lambda(v_j) v_j$ und $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i P_i v_j = \lambda(v_j) v_j$.

Eigenräume zu untersch. Eigenwerten sind orthogonal und $P_i|_{E_{\lambda_i}} = \mathrm{id}_{E_{\lambda_i}}$ sowie $\ker(P_i) \perp E_{\lambda_i}$. $\square$

Bem.: Sind $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{C}^n$ orthonormal und stellt $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ die Orthogonalprojektion auf $\mathrm{span}\{v_1, \dots, v_k\}$ dar, dann ist

$$\boxed{P = \sum_{i=1}^{k} v_i v_i^*},$$

da das 'Matrixprodukt' $v_i^* v_j = \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$ ist.

D.h., wenn $v_1, \dots, v_n$ eine ONB von Eigenvektoren von A zu den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ist, dann gilt:

$$\boxed{A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i v_i^*}.$$

Zusammengefasst:

$$\mathbb{C}^{n\times n} \ni A \overset{A\text{ normal}}{=} \underset{\in SU(n)}{U}\, \overset{\text{diag.}}{D}\, U^* = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i v_i^* = \sum_{\lambda\in \operatorname{spec}(A)} \lambda \underset{\text{„Spektralproj."}}{P_{E_\lambda}}$$

$$D = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i e_i^*$$

$$U e_i = v_i$$

Über $\mathbb{R}$ wissen wir bereits, dass sich nicht jede normale Matrix diagonalisieren lässt, da z.B. $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ für $\varphi \in (0,\pi)$ zwar normal ist, aber als Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ keinen Eigenwert besitzt. Wie der folgende Satz zeigt, ist dies aber i.W. schon die einzige Ausnahme:

Satz: (Spektralzerlegung für reelle normale Matrizen)

Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ normal, dann existiert $X \in O(n)$, so dass XAX^T folgende Form besitzt:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & \lambda_r & & & & & \\ & & & a_1 & -b_1 & & & \\ & & & b_1 & a_1 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & a_s & -b_s \\ & & & & & & b_s & a_s \end{pmatrix}$$

wobei $\lambda_i, a_i, b_k \in \mathbb{R}$ und $r, s \in \mathbb{N}_0$.

Beweis: $\longrightarrow$ z.B. [Kemper, Reimers].

Bem.:
- Ist $A \in O(n)$, dann gilt offensichtlich, dass $\lambda_i \in \{\pm 1\}$ und $a_i^2 + b_i^2 = 1$.
- Ist A symmetrisch, d.h. $A^T = A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, bedeutet dies, dass $s = 0$ sein muss. Demnach ist XAX^T diagonal. Analog zum komplexen Fall, können wir stets $X \in SO(n)$ wählen.

Def.: Ist $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, dann heißt $\beta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\beta(x,y) := \langle x, Ay \rangle$ symmetrische Bilinearform und $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $q(x) := \langle x, Ax \rangle$ quadratische Form. Für $c \in \mathbb{R}$ heißen die Niveauflächen $q^{-1}(\{c\}) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid q(x) = c \}$ Quadriken.

Korollar: (Hauptachsentransformation)
Ist $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine quadratische Form, dann existiert $\lambda \in \mathbb{R}^n$ und $S \in SO(n)$, so dass $\forall x \in \mathbb{R}^n$:

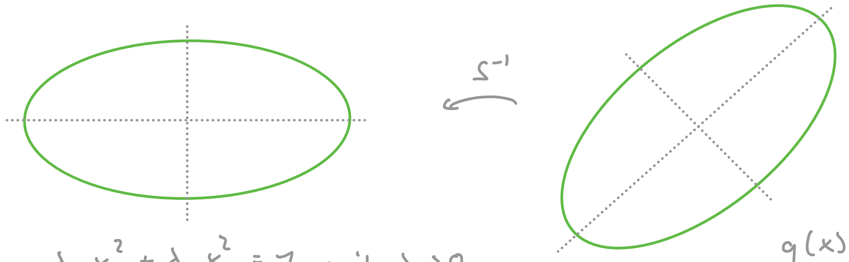
$$\boxed{q(Sx) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2}$$

Beweis: Ist $q(x) = \langle x, Ax \rangle$ mit $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, dann können wir A orthogonal diagonalisieren: $A = SDS^T$ mit $S \in SO(n)$ und $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Dann ist

$$q(Sx) = \langle Sx, ASx \rangle = \langle Sx, SD\underbrace{S^T S}_{= I_n} x \rangle = \langle x, Dx \rangle$$
$$= \sum_i \lambda_i x_i^2 .$$

$\square$

Bem.: • Die orthogonale Transformation S^{-1} dreht die zugehörigen Quadriken, die je nach Vorzeichen der λ_i's z.B. Hyperbeln oder Ellipsen sind, auf die 'Hauptachsen'.



$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 = 1$ mit $\lambda_i > 0$ $\qquad$ $q(x) = 1$

Anwendungen: • Analysis 2:

Mehrdim. Taylorentwicklung von $f \in C^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$:

$$f(x) = f(0) + \langle \nabla f(0), x \rangle + \tfrac{1}{2} \langle x, Hx \rangle + O(\|x\|^3)$$

mit Hessematrix $H = H^T$, $H_{ij} := \partial_i \partial_j f(0)$.

Ein lokales Extremum ($\nabla f(0) = 0$) ist durch die Vorzeichen der Eigenwerte von H charakterisiert.

• Mechanik:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Drehimpuls} \\ L \in \mathbb{R}^3}}{L} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Trägheitstensor } \Theta = \Theta^T \in \mathbb{R}^{3\times 3}}}{\Theta} \cdot \overset{\substack{\text{Winkelgeschw. } \omega \in \mathbb{R}^3 \\ \downarrow}}{\omega} \qquad (\text{analog zu } p = m \cdot v)$$

Die Hauptachsentrafo. dreht die 'Hauptträgheitsachsen' auf die Standard-ONB und liefert die 'Hauptträgheitsmomente' als Eigenwerte von Θ.

Def.: Eine selbst-adjungierte Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißt

- positiv semi-definit ($A \geq 0$), wenn $\langle x, Ax \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{C}^n$
- positiv definit ($A > 0$), wenn $\langle x, Ax \rangle > 0 \quad \forall x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$

Bem.:
- Mit umgekehrten Vorzeichen definiert man analog 'negativ' (semi-)definit.
- Sind $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ selbst-adjungiert, dann lässt sich eine 'partielle Ordnung' $A \geq B \; :\Leftrightarrow \; (A - B) \geq 0$ definieren.
- Aus $\langle x, Ax \rangle \geq 0 \;\; \forall x \in \mathbb{C}^n$ folgt bereits $A = A^*$ (dies gilt jedoch nicht über $\mathbb{R}$, da z.B. $\langle x, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x \rangle = 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}^2$).

Bsp.:
- Für bel. $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ gilt $A^* A \geq 0$, da $\langle x, A^* A x \rangle = \langle Ax, Ax \rangle = \| Ax \|^2 \geq 0$.
- Für $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ mit $\lambda_i \geq 0 \; \forall i$ gilt $D \geq 0$, da $\langle x, Dx \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |x_i|^2 \geq 0$.

Satz: Für $A = A^* \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit $\operatorname{spec}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ gilt:

$$A \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_i \geq 0 \quad \forall i$$
$$A > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_i > 0 \quad \forall i$$

Beweis: Wir verwenden die Spektralzerlegung $A = U^* D U$ mit $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Dann ist $\langle x, Ax \rangle = \langle x, U^* D U x \rangle = \langle Ux, DUx \rangle \geq 0 \;\; \forall x \neq 0$

$\overset{U \text{ bijektiv}}{\Leftrightarrow} \quad \langle y, Dy \rangle \geq 0 \;\; \forall y \neq 0$. $\square$

Bsp.: Stellt $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine Orthogonalprojektion dar, d.h. $P = P^2 = P^*$, dann gilt $P \geq 0$, da $\operatorname{spec}(P) \subseteq \{0, 1\}$.

Lemma: Eine selbstadjungierte Matrix $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ ist genau dann positiv (negativ) semidefinit, wenn $\det(A) \geq 0$ und $\operatorname{tr}[A] \overset{\leq}{\geq} 0$.

Beweis: Als selbstadjungierte Matrix ist A diagonalisierbar mit reellen Eigenwerten λ_1, λ_2. Es gilt $\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2$, $\operatorname{tr}[A] = \lambda_1 + \lambda_2$.
Also ist

$$\det(A) \geq 0 \iff \underbrace{\lambda_1, \lambda_2 \geq 0}_{\text{d.h. } \operatorname{tr}[A] \geq 0} \vee \underbrace{\lambda_1, \lambda_2 \leq 0}_{\text{d.h. } \operatorname{tr}[A] \leq 0}. \quad \square$$

Der Raum der selbstadjungierten 2×2 Matrizen ist ein 4-dim. $\mathbb{R}$-Vektorraum V. Ein Vektorraumisomorphismus $M: \mathbb{R}^4 \to V$ ist gegeben durch

$$M(x) := \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 - i x_2 \\ x_1 + i x_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad x = (x_0, \dots, x_3) \in \mathbb{R}^4.$$

Korollar: Für $x, y \in \mathbb{R}^4$ gilt:

$$(x_0 - y_0)^2 \geq \sum_{i=1}^{3} (x_i - y_i)^2 \iff \begin{array}{ll} \text{(i)} & M(x) \geq M(y) \text{ oder} \\ \text{(ii)} & M(x) \leq M(y) \end{array}$$

Ist dies erfüllt, gilt (i) wenn $x_0 \geq y_0$ und (ii) wenn $x_0 \leq y_0$.

Beweis:

$$M(x) \geq M(y) \iff 0 \leq M(x) - M(y) = M(\underbrace{x-y}_{=:z}) = M(z).$$

$$\det(M(z)) = z_0^2 - z_3^2 - (z_1 + i z_2)(z_1 - i z_2) = (x_0 - y_0)^2 - \sum_{i=1}^{3} (x_i - y_i)^2$$

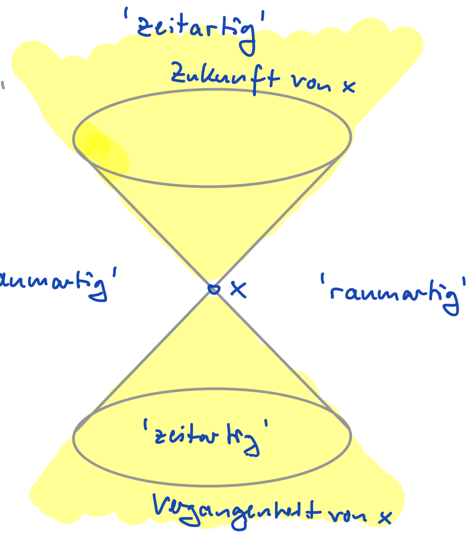
$\operatorname{tr}[M(z)] = 2(x_0 - y_0)$. Die Aussage folgt dann aus dem Lemma. $\square$

Exkursion ...

Interpretation: $\mathbb{R}^4 = \underset{\text{Zeit}}{\mathbb{R}} \times \underset{\text{Raum}}{\mathbb{R}^3}$ betrachtet als 'Minkowskiraum' der spez. Rel.theorie besitzt eine 'partielle Ordnung' für die

$x \geq y \Leftrightarrow M(x) \geq M(y)$

$\det(M(x-y)) \geq 0 \Leftrightarrow$ 'zeitartig'



Lorentz-trafos sind lineare Abb.en $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, die die Minkowski-'Metrik' $z_0^2 - z_1^2 - z_2^2 - z_3^2$ invariant lassen. Auf V sind diese einfach $M(z) \mapsto S\,M(z)\,S^*$ mit $S \in SL(2, \mathbb{C})$.

Was wenn eine Matrix nicht normal, oder gar nicht quadratisch ist?

Satz: (Singulärwertzerlegung) engl. 'sing. value decomp.' (SVD)

Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$ mit $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $r := rg(A)$.

Dann existieren $s_1, \dots, s_r > 0$ (Singulärwerte) und orthogonale bzw. unitäre Matrizen $U \in \mathbb{K}^{n \times n}$, $V \in \mathbb{K}^{m \times m}$ s.d.

$$\boxed{A = U D V} \quad \text{mit } D \in \mathbb{K}^{n \times m},\ D_{ij} = \begin{cases} s_i & \text{für } i = j \leq r \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis:

$\mathbb{K}^{m\times m} \ni A^*A \geq 0 \Rightarrow \exists$ ONB $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{K}^m$: $A^*A = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i v_i^*$ mit $\lambda_i \geq 0$.

Setze $s_i := \sqrt{\lambda_i}$ und $V := \sum_{i=1}^{m} e_i v_i^*$ d.h. $\overline{v_i}$ sind Zeilenvektoren.

Die Vektoren $w_i := \frac{1}{s_i} A v_i$ für $i \in \{1, \dots, r\}$ sind orthonormal,

da $\langle w_i, w_j \rangle = \frac{1}{s_i s_j} \langle v_i, \underbrace{A^*A v_j}_{= \lambda_j v_j} \rangle = \frac{\lambda_j}{s_i s_j} \delta_{ij}$.

Dies lassen sich zu einer ONB $w_1, \dots, w_n$ von $\mathbb{K}^n$ vervollständigen,

s.d. $U := \sum_{l=1} w_l e_l^* \in \mathbb{K}^{n\times n}$ orthogonal bzw. unitär ist.

Dann ist einerseits $\langle w_i, A v_j \rangle = \frac{1}{s_i} \langle A v_i, A v_j \rangle = \frac{1}{s_i} \langle v_i, A^*A v_j \rangle = s_i \delta_{ij}$

und andererseits $\langle w_i, UDV v_j \rangle \underset{w_i^* U = e_i^*}{=} \langle e_i, DV v_j \rangle \underset{V v_j = e_j}{=} \langle e_i, D e_j \rangle = s_i \delta_{ij}$ □

Bem.:

- Es gilt $A^*A = V^* D^* D V$ und $AA^* = U D D^* U^*$.
  Die Singulärwerte sind die Wurzeln der Eigenwerte von A^*A (& AA^*) und bis auf Umordnung eindeutig.
  V wird aus den Eigenvektoren v_j von A^*A gebildet und U aus den —"— w_j von AA^*.
- Alternative die SVD zu schreiben:

$$\boxed{A = \sum_{i=1}^{r} s_i w_i v_i^*}$$

Ordnet man die Singulärwerte $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_r$ erhält man möglich 'Approximationen' $A_k := \sum_{i=1}^{k} s_i w_i v_i^*$ die für $k \ll n$ deutlich weniger Speicherbedarf besitzen

(Stichworte: 'principal component analysis', 'dimensionality reduction')

- Ist $A \geq 0$, dann ist Singulärwertzerlegung = Spektralzerl.
- Ist $A = A^*$ mit $\operatorname{spec}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$, dann gilt $s_i = |\lambda_i|$ (→ Übung)

Korollar: Hat $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ Singulärwerte $s_1, \dots, s_n$, dann ist

$$\boxed{|\det(A)| = \prod_{i=1}^{n} s_i}$$

Beweis: $$|\det(A)| = |\det(UDV)| = \underbrace{|\det(U)|}_{=1} \cdot \underbrace{\det(D)}_{= \prod_{i=1}^{n} s_i} \cdot \underbrace{|\det(V)|}_{=1}.$$ □

Konsequenz: Jede lineare Abbildung $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist eine Hintereinanderausführung Drehung - Streckung - Drehung. Volumina werden dabei um einen Faktor $|\det(A)|$ geändert.

Korollar: (Polarzerlegung)
Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Dann existiert eine positiv semidefinite Matrix $P \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und eine unitäre (bzw. orthogonale) Matrix $X \in \mathbb{K}^{n \times n}$, so dass $\boxed{A = XP}$.

Beweis: Die Singulärwertzerlegung liefert $A = UDV = \underbrace{(UV)}_{=:X}\underbrace{(V^*DV)}_{=:P}$.

□

X. Matrix-Funktionen

<u>Def.:</u> Ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch eine auf ganz $\mathbb{C}$ absolut konvergierende Potenzreihe $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ gegeben, und $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, dann lässt sich $f(A)$ durch

$$\boxed{f(A) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k}$$

definieren, wobei $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{k \text{ mal}}$ und $A^0 = I_n$ ist.

<u>Bem.:</u>

- z.B. kann f Polynom, Exponentialfunktion oder Trigonometrische Fkt. sein.
- Mit den Methoden der Analysis kann man zeigen, dass die Reihe stets konvergiert. D.h. $f(A) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ist wohldefiniert.
- Achtung $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} f(a) & f(b) \\ f(c) & f(d) \end{pmatrix}$!

  z.B. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ aber $\begin{pmatrix} 0^2 & 1^2 \\ 0^2 & 0^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- Im Folgenden schreiben wir $\bigoplus_k B_k$ für eine Block-diagonale Matrix $\begin{pmatrix} \boxed{B_1} & & & \\ & \boxed{B_2} & & \\ & & \boxed{B_3} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$.

Satz: Ist $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch eine auf ganz $\mathbb{C}$ absolut konvergierende Potenzreihe $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ gegeben, und $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit Jordan-Normalform $A = X\left(\bigoplus_l J_l(\lambda_l)\right) X^{-1}$, dann ist

$$\boxed{f(A) = X\left[\bigoplus_l f(J_l(\lambda_l))\right] X^{-1}} \qquad \text{wobei}$$

$$f: \mathbb{C}^{k \times k} \ni \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \lambda & & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) & \frac{1}{2} f''(\lambda) & \cdots & \frac{1}{(k-1)!} f^{(k-1)}(\lambda) \\ & f(\lambda) & f'(\lambda) & \cdots & \vdots \\ & & f(\lambda) & & \\ & & & \ddots & f'(\lambda) \\ & & & & f(\lambda) \end{pmatrix}$$

Bem.: D.h. insbesondere wenn A diagonalisierbar ist:

$$\boxed{A = X \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} X^{-1} \Rightarrow f(A) = X \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(\lambda_n) \end{pmatrix} X^{-1}}$$

Beweisidee: Ist $A = XDX^{-1}$, dann gilt wegen $A^k = XD\underbrace{X^{-1}X}_{I_n}DX^{-1}\cdots$, dass $f(A) = X\left[\sum_{k=0}^{\infty} c_k D^k\right] X^{-1}$.

Zudem ist $D^k = \left(\bigoplus_l J_l\right)^k = \bigoplus_l J_l^k$.

Ist $J = \lambda I_m + N$ ein Jordanblock der Größe m, dann gilt

$J^k = (\lambda I_m + N)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \lambda^{k-i} N^i$ wobei alle Terme mit $i \geq m$ wegen $N^m = 0$ Null sind.

Einsetzen liefert nach etwas Umformen (zumindest formal) den gewünschten Ausdruck... $\square$

Bem.: Ein $N \in \mathbb{C}^{n \times n}$ für das ein $k \in \mathbb{N}$ existiert, s.d. $N^k = 0$ ist, heißt *nilpotent*.

Bem.: ∘ Die Form im Satz lässt sich als verallgemeinerte Definition von $f(A)$ verwenden:
Ist $m \in \mathbb{N}$ die Größe des größten Jordanblocks von A, dann genügt es, dass f in einer offenen Umgebung von $\operatorname{spec}(A)$ $m-1$ mal diff.bar ist (bzw. stetig, wenn $m=1$).

Satz: (Cayley-Hamilton)
Für $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit charakteristischem Polynom $\chi_A \in \mathbb{C}[x]$ gilt $\boxed{\chi_A(A) = 0}$.

Beweis: (für diagonalisierbares A)
Für $A = X \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} X^{-1}$ gilt $\chi_A(A) = X \begin{pmatrix} \chi_A(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \chi_A(\lambda_n) \end{pmatrix} X^{-1} = 0$
da $\chi_A(\lambda_i) = 0 \quad \forall i$. □

Bsp.: Für $A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ ist $\chi_A(x) = x^2 - \operatorname{tr}[A]\, x + \det(A)$.
Nach dem Satz von Cayley-Hamilton gilt demnach:

$$A^2 = \operatorname{tr}[A]\, A - \det(A)\, I_2$$