Vektoranalysis *

Martin Brokate †

Inhaltsverzeichnis

---

*Vorlesungsskript, WS 2017/18

†Zentrum Mathematik, TU München

1 Kurvenintegrale und Potentiale

In der Analysis 2 wurden bereits Kurven behandelt. Dort wurde die Länge $L(x)$ einer Kurve $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ als Supremum der Längen von approximierenden Polygonzügen definiert und die Formel

$$L(x) = \int_a^b \|x'(t)\| \, dt$$

bewiesen. Weiter wurde gezeigt, dass $L(x)$ nicht von der Parametrisierung der Kurve abhängt.

In diesem Kapitel geht es darum, Integrale von Funktionen F längs einer Kurve zu betrachten; F ist dabei auf einer Teilmenge Ω des $\mathbb{R}^n$ definiert, innerhalb der die Kurve verläuft.

Zur Motivation betrachten wir eine Situation aus der Physik: Ein konstantes Kraftfeld, repräsentiert durch einen Vektor $F \in \mathbb{R}^3$, leistet entlang der Strecke, welche einen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^3$ mit einem Punkt $x_1 \in \mathbb{R}^3$ verbindet, die Arbeit

$$W = \langle F, x_1 - x_0 \rangle = \|F\|_2 \|x_1 - x_0\|_2 \cos \varphi$$

wobei φ der von den Vektoren F und $x_1 - x_0$ eingeschlossene Winkel ist. Betrachten wir den Streckenzug, welcher nacheinander die Punkte $x_0, x_1, \ldots x_N$ verbindet, und nehmen wir an, dass längs der Verbindung von x_{i-1} nach x_i die Kraft F_i wirkt, so ergibt sich die Gesamtarbeit zu

$$W = \sum_{i=1}^{N} \langle F_i, x_i - x_{i-1} \rangle \, . \tag{1.1}$$

Wenn wir diesen Streckenzug als Kurve $x : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ mit $x(t_i) = x_i$ zu einer geeigneten Zerlegung auffassen und $F(x_i) = F_i$ setzen, so wird (1.1) zu

$$W = \sum_{i=1}^{N} \left\langle F(x(t_i)), \frac{x(t_i) - x(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \right\rangle (t_i - t_{i-1}) \, , \tag{1.2}$$

Ist $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ stetig und $x : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar, so ist die längs x verrichtete Arbeit gleich

$$\int_a^b \langle F(x(t)), x'(t) \rangle \, dt \, .$$

Definition 1.1 (Kurvenintegral)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, seien $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ stetig und $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, sei $C = x([a, b]) \subset \Omega$. Dann heißt

$$\int_C F \cdot dx := \int_a^b \langle F(x(t)), x'(t) \rangle \, dt \tag{1.3}$$

das Kurvenintegral von F entlang C von $x(a)$ nach $x(b)$. □

Diese Definition ist sinnvoll, da das Kurvenintegral sich nicht ändert, wenn wir eine andere Parametrisierung von C wählen, die die Orientierung erhält. Ist etwa $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ eine C^1-Parametertransformation, so gilt

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta \langle F((x \circ \varphi)(\tau)), (x \circ \varphi)'(\tau)\rangle \, d\tau &= \int_\alpha^\beta \langle F(x(\varphi(\tau))), x'(\varphi(\tau))\rangle \, \varphi'(\tau) \, d\tau \\ = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} \langle F(x(t)), x'(t)\rangle \, dt &= \pm \int_a^b \langle F(x(t)), x'(t)\rangle \, dt \,,\end{aligned}$$

je nachdem, ob φ orientierungserhaltend oder orientierungsumkehrend ist.

Für stückweise stetig differenzierbare Kurven $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ setzen wir

$$\int_C F \cdot dx = \sum_{i=1}^k \int_{C_i} F \cdot dx \,, \tag{1.4}$$

falls $x|[t_{i-1}, t_i]$ stetig differenzierbar ist und $C_i = x([t_{i-1}, t_i])$. (Man zeigt, dass diese Definition unabhängig ist von der Wahl der Zerlegung.) Aus der Linearität des Integrals folgt unmittelbar

$$\int_C (F + G) \cdot dx = \int_C F \cdot dx + \int_C G \cdot dx \,, \quad \int_C \lambda F \cdot dx = \lambda \int_C F \cdot dx \,, \tag{1.5}$$

für $\lambda \in \mathbb{R}$.

Satz 1.2 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(\Omega)$, $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ stückweise stetig differenzierbar, sei $C = x([a, b]) \subset \Omega$. Dann gilt*

$$\int_C \operatorname{grad} f \cdot dx = f(x(b)) - f(x(a)) \,. \tag{1.6}$$

Beweis: Sei zunächst $x \in C^1([a, b])$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\int_C \operatorname{grad} f \cdot dx &= \int_a^b \langle \operatorname{grad} f(x(t)), x'(t)\rangle \, dt = \int_a^b (f \circ x)'(t) \, dt \\ &= f(x(b)) - f(x(a))\end{aligned}$$

nach Kettenregel und Hauptsatz. Ist x stückweise stetig differenzierbar und (t_i) eine entsprechende Zerlegung von $[a, b]$, so folgt

$$\int_C \operatorname{grad} f \cdot dx = \sum_{i=1}^k \int_{C_i} \operatorname{grad} f \cdot dx = \sum_{i=1}^k (f(x(t_i)) - f(x(t_{i-1}))) = f(x(b)) - f(x(a)) \,.$$

□

Aus Satz 1.2 folgt: Ist $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ein Gradientenfeld auf Ω (das heißt, es gibt $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $F = \operatorname{grad} f$), so ist das Kurvenintegral zwischen zwei Punkten $P, Q \in \mathbb{R}^n$ unabhängig davon, wie die Kurve von P nach Q verläuft. Insbesondere ist dann

$$\int_C F \cdot dx = 0$$

für jede geschlossene Kurve C.

Lemma 1.3 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Ist F ein Gradientenfeld auf Ω, so gilt*

$$\partial_i F_j(x) = \partial_j F_i(x) \tag{1.7}$$

für alle $x \in \Omega$ und alle i, j mit $1 \leq i, j \leq n$.

Beweis: Ist $F = \operatorname{grad} f$, so gilt

$$\partial_i F_j(x) = \partial_i(\partial_j f)(x) = \partial_j(\partial_i f)(x) = \partial_j F_i(x)\,.$$

$\square$

Definition 1.4 *Sei X Vektorraum, sei $Y \subset X$. Y heißt sternförmig, falls es ein $y \in Y$ gibt mit $[x, y] \subset Y$ für alle $x \in Y$.* $\square$

Satz 1.5 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und sternförmig, sei $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Gilt*

$$\partial_i F_j(x) = \partial_j F_i(x) \tag{1.8}$$

für alle $x \in \Omega$ und alle i, j, $1 \leq i, j \leq n$, so ist F ein Gradientenfeld auf Ω, es gibt $f \in C^2(\Omega)$ mit

$$F = \operatorname{grad} f\,. \tag{1.9}$$

Beweis: Sei $y \in \Omega$ mit $[y, x] \subset \Omega$ für alle $x \in \Omega$. Wir definieren f als das Kurvenintegral von F entlang der Strecke von y nach x, wir setzen also

$$f(x) = \int_0^1 \langle F(y + t(x-y)), x - y\rangle \; dt\,.$$

Nach einem Satz über das Differenzieren parameterabhängiger Integrale (siehe Analysis 2) existieren alle partiellen Ableitungen $\partial_i f$ und sind stetig. Für

$$\tilde{f}(x) = \langle F(y + t(x-y)), x - y\rangle$$

gilt

$$\partial_i \tilde{f}(x) = \langle t\partial_i F(y + t(x-y)), x - y\rangle + \langle F(y + t(x-y)), e_i\rangle \;,$$

also

$$\partial_i f(x) = \int_0^1 \langle t\partial_i F(y + t(x-y)), x - y\rangle + F_i(y + t(x-y))\, dt\,.$$

Für

$$g_i(t) = tF_i(y + t(x-y))$$

gilt

$$g_i'(t) = \langle t(\operatorname{grad} F_i)(y + t(x-y)), x - y\rangle + F_i(y + t(x-y))\,,$$

und mit $z = y + t(x-y)$

$$\begin{aligned}\langle(\operatorname{grad} F_i)(z), x - y\rangle &= \sum_{j=1}^n \partial_j F_i(z)(x_j - y_j) = \sum_{j=1}^n \partial_i F_j(z)(x_j - y_j) \\ &= \langle \partial_i F(z), x - y\rangle \;.\end{aligned}$$

Es folgt

$$g_i'(t) = \langle t(\partial_i F)(y + t(x-y)), x-y\rangle + F_i(y + t(x-y))\,,$$

und damit

$$\partial_i f(x) = \int_0^1 g_i'(t)\,dt = g_i(1) - g_i(0) = F_i(x)\,.$$

□

Folgerung 1.6 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ offen und sternförmig, sei $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar. Dann ist F ein Gradientenfeld auf Ω genau dann, wenn* $\operatorname{rot} F = 0$ *in Ω.*

Definition 1.7 (Wegzusammenhang)
Ein metrischer Raum (X, d) heißt wegzusammenhängend, wenn es für alle $x_a, x_b \in X$ eine Kurve $r : [0,1] \to X$ gibt mit $r(0) = x_a$ und $r(1) = x_b$. □

Definition 1.8 (Konservatives Vektorfeld)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Ein Vektorfeld $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ heißt konservativ auf Ω, falls "das Kurvenintegral wegunabhängig ist", d.h. falls für alle Punkte $x_a, x_b \in \Omega$ und alle stückweise C^1-Kurven C_1, C_2 von x_a nach x_b, welche in Ω verlaufen, gilt

$$\int_{C_1} F \cdot dx = \int_{C_2} F \cdot dx\,. \tag{1.10}$$

□

Satz 1.9 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und wegzusammenhängend, sei $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ stetig. Dann gilt*

$$F \text{ ist Gradientenfeld auf } \Omega \qquad \Leftrightarrow \qquad F \text{ ist konservativ auf } \Omega\,.$$

Beweis: "$\Rightarrow$": Folgt aus Satz 1.2.
"$\Leftarrow$": Seien $x, y \in \Omega$ beliebig. Wir beweisen zunächst

$$\text{Es gibt eine stückweise } C^1\text{-Kurve von } y \text{ nach } x. \tag{1.11}$$

Sei $r : [0,1] \to \Omega$ stetig mit $r(0) = y$, $r(1) = x$. Sei

$$U_\varepsilon = \{z : z \in \mathbb{R}^n,\ \operatorname{dist}(z, r([0,1])) < \varepsilon\}\,.$$

Wir wählen $\varepsilon > 0$ so, dass $U_\varepsilon \subset \Omega$ gilt (das ist möglich, da $\operatorname{dist}(\partial\Omega, r([0,1]) > 0$ falls $\partial\Omega \neq \emptyset$, was gleichbedeutend ist mit $\Omega \neq \mathbb{R}^n$). Für eine hinreichend feine Unterteilung (t_i) von $[0,1]$ gilt, dass der Polygonzug, welcher $r(0), r(t_1), \ldots, r(1)$ verbindet, ganz in U_ε und damit auch in Ω liegt. Damit ist (1.11) bewiesen. Wir wählen nun $x_* \in \Omega$ und definieren $f : \Omega \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \int_C F \cdot dx\,, \tag{1.12}$$

wobei C eine stückweise C^1-Kurve von x_* nach x ist (eine solche gibt es nach (1.11), und nach Voraussetzung hängt das Kurvenintegral nicht von der Wahl von C ab). Zu zeigen ist noch $F = \operatorname{grad} f$. Sei $x \in \Omega$ beliebig, sei $h > 0$ so gewählt, dass $[x, x + he_i] \subset \Omega$ gilt. Sei C_* eine stückweise C^1-Kurve von x_* nach x, sei $C(h)$ definiert durch

$$r_h : [0, h] \to \Omega\,, \quad r_h(t) = x + te_i\,.$$

Dann gilt

$$f(x + he_i) = \int_{C_*} F \cdot dx + \int_{C(h)} F \cdot dx = f(x) + \int_{C(h)} F \cdot dx\,.$$

Für

$$g(h) = f(x + he_i) - f(x)$$

gilt also

$$g(h) = \int_{C(h)} F \cdot dx = \int_0^h \langle F(r_h(t)), r_h'(t)\rangle \; dt = \int_0^h F_i(x + te_i)\, dt\,,$$

also ist g rechtsseitig differenzierbar in 0 und $g'_+(0) = F_i(x)$. Dasselbe Argument mit $-e_i$ statt e_i liefert die Existenz von $\partial_i f(x)$ und die Formel $\partial_i f(x) = F_i(x)$. □

Als Beispiel betrachten wir

$$\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}\,, \quad F : \Omega \to \mathbb{R}^2\,, \quad F(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}\,, \frac{x}{x^2 + y^2}\right)\,. \tag{1.13}$$

Es gilt für alle $(x, y) \neq (0, 0)$

$$\partial_1 F_2(x, y) = \partial_2 F_1(x, y)\,.$$

Die Menge Ω ist nicht sternförmig, Satz 1.5 ist also für Ω nicht anwendbar. Ist aber $\tilde{\Omega}$ eine sternförmige Teilmenge von Ω, so gibt es nach Satz 1.5 ein $f \in C^2(\tilde{\Omega})$ mit

$$F(x) = \operatorname{grad} f(x)\,, \quad \text{für alle } x \in \tilde{\Omega}\,.$$

Aber andererseits gilt, wenn wir den Einheitskreis als eine geschlossene Kurve C auffassen, mit $r : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $r(t) = (\cos t, \sin t)$

$$\int_C F \cdot dx = \int_0^{2\pi} \langle F(r(t)), r'(t)\rangle \; dt = \int_0^{2\pi} \sin^2 t + \cos^2 t\, dt = 2\pi\,,$$

also ist F nicht konservativ auf Ω. Aus Satz 1.9 (bzw. schon Satz 1.2) folgt, dass es kein $f \in C^2(\Omega)$ geben kann mit

$$F(x) = \operatorname{grad} f(x)\,, \quad \text{für alle } x \in \Omega\,.$$

2 Mannigfaltigkeiten

In diesem Abschnitt betrachten wir Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, die eine "differenzierbare Struktur" haben. Wir gehen aus von der Beschreibung affiner Unterräume. Ist $a \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor und $X \subset \mathbb{R}^n$ ein Unterraum mit $\dim X = k$, so können wir den affinen Unterraum

$$M = a + X = \{a + x : x \in X\} \tag{2.1}$$

auf zwei verschiedene Weisen beschreiben:

- mit einer Parameterdarstellung: Sei $(v_1, \ldots, v_k)$ Basis von X, sei $\Phi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$\Phi(t_1, \ldots, t_k) = a + \sum_{i=1}^{k} t_i v_i \,, \tag{2.2}$$

  dann ist

$$M = \Phi(\mathbb{R}^k) \,, \quad \Phi : \mathbb{R}^k \to M \quad \text{bijektiv.} \tag{2.3}$$

- als Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems: Sei $(w_1, \ldots, w_{n-k})$ Basis des orthogonalen Komplements

$$X^\perp = \{w : \, w^T x = 0 \quad \text{für alle } x \in X\} \,, \tag{2.4}$$

  sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$ definiert durch

$$f_i(x) = w_i^T (x - a) \,, \tag{2.5}$$

  so ist

$$M = \{x : \, f(x) = 0\} \,. \tag{2.6}$$

Affin lineare Unterräume können also als Urbild der 0 bzw. als Bild eines $\mathbb{R}^k$ vermittels affin linearer Abbildungen dargestellt werden. Verzichten wir auf die Linearität, so können wir allgemeinere Teilmengen darstellen, etwa gekrümmte Flächen. Wir werden verlangen, dass die darstellenden Abbildungen differenzierbar sind.

Nun ist es allerdings so, dass man zur Darstellung einer gekrümmten Fläche im allgemeinen nicht mit einer einzigen darstellenden Abbildung (Φ bzw. f) auskommt, sondern mehrere benötigt, die geeignet zusammengesetzt werden müssen.

Definition 2.1 (Mannigfaltigkeit)
Eine Teilmenge M von $\mathbb{R}^n$ heißt k-dimensionale C^α-Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$ (hierbei ist $0 \le k \le n$, $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$), falls zu jedem $a \in M$ eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ mit $a \in U$ und ein $f \in C^\alpha(U; \mathbb{R}^{n-k})$ existieren mit

$$M \cap U = \{x : \, f(x) = 0\} \,, \quad \operatorname{rang} J_f(a) = n - k \,. \tag{2.7}$$

□

Die Bedingung (2.7) bedeutet, dass $J_f(a)$ maximalen Rang hat. Dazu ist äquivalent, dass die Ableitung (Fréchet-Ableitung, totale Ableitung) $Df(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$ surjektiv ist.

In den folgenden Beispielen genügt eine einzige Abbildung zur Darstellung (also $U = M$).

Beispiel 2.2

1. Affine Unterräume. Wie in (2.4) – (2.6) dargestellt, können wir in Definition 2.1 $U = \mathbb{R}^n$ und für jedes a dasselbe f wählen.

2. Niveaumengen. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^\alpha(U)$, $c \in \mathbb{R}$,

$$N_c(f) = \{x : f(x) = c\} . \tag{2.8}$$

   $N_c(f)$ ist eine $(n-1)$-dimensionale C^α-Mannigfaltigkeit, falls $\operatorname{grad} f(x) \neq 0$ gilt für alle $x \in N_c(f)$. Ein Spezialfall davon ist die Oberfläche der n-dimensionalen Einheitskugel in der euklidischen Norm,

$$S^{n-1} = \{x : \|x\|_2 = 1\} . \tag{2.9}$$

   S^{n-1} ist eine $(n-1)$-dimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit.

3. Orthogonale Matrizen. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ ist orthogonal genau dann, wenn $A^T A = I$, die Menge $O(n)$ der orthogonalen Matrizen im $\mathbb{R}^{(n,n)}$ ist also gegeben durch

$$O(n) = \{X : X \in \mathbb{R}^{(n,n)}, \, f(X) = 0\}$$

   mit

$$f(X) = X^T X - I \,, \quad f : \mathbb{R}^{(n,n)} \to \mathbb{R}^{(n,n)}_{\mathrm{sym}} .$$

   Da $\mathbb{R}^{(n,n)}_{\mathrm{sym}}$ die Dimension $n(n+1)/2$ hat, ist hier $k = n^2 - n(n+1)/2 = n(n-1)/2$. Wir wollen zeigen, dass $Df(A)$ eine surjektive lineare Abbildung ist für jedes $A \in O(n)$. Es gilt

$$\frac{1}{t}(f(A+tH) - f(A)) = \frac{1}{t}\left[(A+tH)^T(A+tH) - A^T A\right] = H^T A + A^T H + tH^T H \,,$$

   also

$$Df(A)H = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(A+tH) - f(A)) = H^T A + A^T H .$$

   Eine Lösung von

$$Df(A)H = B$$

   für beliebiges $B \in \mathbb{R}^{(n,n)}_{\mathrm{sym}}$ ist gegeben durch

$$H = \frac{1}{2}(A^T)^{-1} B \,, \quad \text{da} \quad Df(A)H = \frac{1}{2}(B^T + B) = B .$$

   Also ist $Df(A)$ surjektiv. Die Menge $O(n)$ ist also eine C^∞-Mannigfaltigkeit der Dimension $n(n-1)/2$. Da orthogonale Matrizen die Determinante 1 oder -1 haben, und da die Determinante stetig ist, ist

$$SO(n) = \{X : X \in O(n) \, , \, \det(X) = 1\}$$

   ebenfalls eine C^∞-Mannigfaltigkeit der Dimension $n(n-1)/2$.

□

Satz 2.3 (Darstellung von C^α-Mannigfaltigkeiten)
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{N}$. Dann sind äquivalent:

(i) M ist eine k-dimensionale C^α-Mannigfaltigkeit.

(ii) Für alle $a \in M$ gibt es offene Mengen $U, V \subset \mathbb{R}^n$ und einen C^α-Diffeomorphismus $F : U \to V$ mit $a \in U$ und

$$F(M \cap U) = V \cap E_k\,, \quad E_k = \{(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) :\, x_i \in \mathbb{R},\, 1 \le i \le k\}\,. \quad (2.10)$$

(iii) Für alle $a \in M$ gibt es eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ mit $a \in U$, eine offene Menge $T \subset \mathbb{R}^k$ und ein $\Phi \in C^\alpha(T; \mathbb{R}^n)$, so dass $\Phi : T \to M \cap U$ bijektiv, $\Phi^{-1} : M \cap U \to T$ stetig ist und

$$\operatorname{rang} J_\Phi(t) = k\,, \quad \text{für alle } t \in T. \quad (2.11)$$

Beweis: "(i)⇒(ii)": Sei $a \in M$, sei $U' \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $a \in U'$, sei $f \in C^\alpha(U'; \mathbb{R}^{n-k})$ mit

$$M \cap U' = \{x : x \in \mathbb{R}^n,\, f(x) = 0\}\,, \quad \operatorname{rang} J_f(a) = n - k\,.$$

Wir betrachten zunächst den Spezialfall, dass die letzten $n-k$ Spalten von $J_f(a)$ linear unabhängig sind. Wir zerlegen $x \in \mathbb{R}^n$ in

$$x = (\xi, \eta)\,, \quad \xi \in \mathbb{R}^k\,, \quad \eta \in \mathbb{R}^{n-k}\,.$$

Die Matrix $\partial_\eta f(a) \in \mathbb{R}^{(n-k,n-k)}$ ist invertierbar. Also gibt es (Satz über implizite Funktionen) offene Mengen $U_1 \subset \mathbb{R}^k$, $U_2 \subset \mathbb{R}^{n-k}$, mit $(a_1, \dots, a_k) \in U_1$, und ein $g : U_1 \to U_2$, $g \in C^\alpha(U_1; \mathbb{R}^{n-k})$, mit

$$M \cap (U_1 \times U_2) = \{(\xi, g(\xi)) :\, \xi \in U_1\} \subset M \cap U'\,,$$

also $f(\xi, g(\xi)) = 0$. Wir setzen

$$U = U_1 \times U_2\,, \quad F(\xi, \eta) = (\xi, \eta - g(\xi))\,, \quad V = F(U)\,.$$

Dann ist F injektiv, also $F : U \to F(U) = V$ bijektiv, und

$$(\xi, \eta) \in M \cap U \quad \Leftrightarrow \quad \xi \in U_1\,, \quad \eta = g(\xi) \quad \Leftrightarrow \quad F(\xi, \eta) \in V \cap E_k\,.$$

Weiter ist

$$J_F(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -J_g(\xi) & I \end{pmatrix}\,,$$

also $J_F(\xi, \eta)$ invertierbar und daher (Satz über inverse Funktionen) F ein C^α-Diffeomorphismus. Der allgemeine Fall wird durch Umnumerieren der Koordinatenachsen darauf zurückgeführt. Seien die Spalten $i_1, i_2, \dots, i_{n-k}$ von $J_f(a)$ linear unabhängig. Sei $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung, welche die Einheitsvektoren permutiert, und zwar der Form

$$P(x_1, \dots, x_n) = (\dots, x_{i_1}, \dots, x_{i_{n-k}})\,.$$

Dann ist $P(M)$ eine k-dimensionale C^α-Mannigfaltigkeit mit der lokalen Darstellung (in einer Umgebung von $P(a)$)

$$P(M) \cap P(U') = P(M \cap U') = \{y :\, y \in P(U'),\, (f \circ P^{-1})(y) = 0\}$$

und die letzten $n-k$ Spalten von $J_{f\circ P^{-1}}(Pa)$ sind linear unabhängig. Also existiert F wie behauptet mit

$$V \cap E_k = F(P(M) \cap U) = (F \circ P)(M \cap P^{-1}(U)),$$

das heißt, $F \circ P$ leistet das Verlangte.
"(ii)⇒(iii)": Seien F, U, V wie in (ii) gegeben. Wir setzen

$$T = \{\xi : \xi \in \mathbb{R}^k, (\xi, 0) \in V\}, \quad \Phi(\xi) = F^{-1}(\xi, 0).$$

Dann ist $\Phi : T \to M \cap U$ bijektiv, $\Phi^{-1} = F|(M \cap U)$ stetig, und

$$J_\Phi(\xi) = J_{F^{-1}}(\xi, 0) \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix},$$

das heißt, J_Φ entsteht aus $J_{F^{-1}}$, indem man die Spalten $k+1, \ldots, n$ auf 0 setzt. Da $\operatorname{rang}(J_{F^{-1}}(\xi, 0)) = n$, ist $\operatorname{rang}(J_\Phi(\xi)) = k$.
"(iii)⇒(i)": Sei $a \in M$, seien U, T, Φ wie in (iii) gegeben. Wir setzen $c = \Phi^{-1}(a) \in T$ und betrachten den Spezialfall, dass die ersten k Zeilen von $J_\Phi(c)$ linear unabhängig sind. (Der allgemeine Fall wird wie oben durch eine geeignete Permutation darauf zurückgeführt.) Nach dem Satz über inverse Funktionen gibt es offene Mengen $\hat{T}, \hat{V} \subset \mathbb{R}^k$ mit $c \in \hat{T} \subset T$, so dass

$$\hat{\Phi} = (\Phi_1, \ldots, \Phi_k) : \hat{T} \to \hat{V}$$

ein C^α-Diffeomorphismus ist. Wir definieren

$$G : \hat{T} \times \mathbb{R}^{n-k} \to \hat{V} \times \mathbb{R}^{n-k}, \quad G(\xi, \eta) = \Phi(\xi) + (0, \eta).$$

Es ist

$$J_G(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} J_{\hat{\Phi}}(\xi) & 0 \\ * & I \end{pmatrix}, \quad \xi \in \hat{T}, \quad \eta \in \mathbb{R}^{n-k},$$

also ist J_G invertierbar auf $\hat{T} \times \mathbb{R}^{n-k}$. Wir zeigen, dass G bijektiv ist auf $\hat{T} \times \mathbb{R}^{n-k}$. Es gilt $G_j(\xi, \eta) = \Phi_j(\xi) = \hat{\Phi}_j(\xi)$ für $1 \le j \le k$, also

$$\begin{aligned} G(\xi, \eta) = G(\xi', \eta') \quad &\Rightarrow \quad \Phi(\xi) + (0, \eta) = \Phi(\xi') + (0, \eta') \quad \Rightarrow \quad \hat{\Phi}(\xi) = \hat{\Phi}(\xi') \\ &\Rightarrow \quad \xi = \xi' \quad \Rightarrow \quad \eta = \eta'. \end{aligned}$$

Also ist G injektiv. Sei nun $(y, z) \in \hat{V} \times \mathbb{R}^{n-k}$. Es ist

$$(y, z) = \Phi(\xi) + (0, \eta),$$

wenn wir $\xi = \hat{\Phi}^{-1}(y)$ setzen und η so definieren, dass die Gleichung erfüllt ist. Also ist G auch surjektiv und damit

$$G : \hat{T} \times \mathbb{R}^{n-k} \to \hat{V} \times \mathbb{R}^{n-k}$$

ein C^α-Diffeomorphismus. Wir setzen

$$\hat{U} = (\hat{V} \times \mathbb{R}^{n-k}) \cap U,$$

und zerlegen

$$G^{-1} = (\hat{f}, f), \quad \hat{f} : \hat{U} \to \hat{T}, \quad f : \hat{U} \to \mathbb{R}^{n-k}.$$

Dann gilt für alle $x \in \hat{U}$

$$x \in M \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, \xi \in \hat{T}\,,\, \Phi(\xi) = x \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, \xi \in \hat{T}\,,\, G^{-1}(x) = (\xi, 0) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = 0\,,$$

also ist

$$M \cap \hat{U} = \{x :\; x \in \hat{U},\; f(x) = 0\}\,.$$

Da $J_{G^{-1}}(x)$ invertierbar ist für alle $x \in \hat{U}$, hat $J_f(x)$ maximalen Rang, also rang $(J_f(x)) = n - k$ für alle $x \in \hat{U}$. □

Definition 2.4 (Karte, Atlas)
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale C^α-Mannigfaltigkeit. Eine Abbildung $\Phi : T \to M \cap U$ mit den in Satz 2.3(iii) genannten Eigenschaften heißt C^α-Karte (oder einfach Karte) von M. Eine Familie $(\Phi_j)_{j \in J}$ von Karten $\Phi_j : T_j \to M \cap U_j$ heißt Atlas von M, falls

$$M \subset \bigcup_{j \in J} (M \cap U_j)\,.$$

□

Aus Satz 2.3 folgt unmittelbar, dass jede Mannigfaltigkeit einen Atlas besitzt. Ist M kompakt, so besitzt M einen endlichen Atlas (d.h. einen Atlas mit einer endlichen Indexmenge J).

Satz 2.5 *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale C^α-Mannigfaltigkeit, seien $\Phi_j : T_j \to M \cap U_j$, $j = 1, 2$, C^α-Karten von M, sei $M \cap U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Dann sind*

$$W_j = \Phi_j^{-1}(M \cap U_1 \cap U_2) \tag{2.12}$$

offene Teilmengen von $\mathbb{R}^k$ mit $W_j \subset T_j$, und

$$\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1 : W_1 \to W_2 \tag{2.13}$$

ist ein C^α-Diffeomorphismus. Die Abbildung $\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1$ heißt Kartenwechsel.

Beweis: Nach Konstruktion gilt $W_j \subset T_j$ für $j = 1, 2$, und $\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1 : W_1 \to W_2$ ist bijektiv. Wir zeigen, dass W_j offen ist. Wir fassen $M \cap U_j$ als metrischen Raum auf (mit der Metrik aus dem $\mathbb{R}^n$). Die Menge $M \cap U_1 \cap U_2$ ist offen relativ zu $M \cap U_j$, $\Phi_j : T_j \to M \cap U_j$ ist stetig, also ist W_j als Urbild einer offenen Menge offen. Wir zeigen nun, dass $\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1$ ein C^α-Diffeomorphismus ist. Es genügt zu zeigen, dass $\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1 \in C^\alpha(W_1; \mathbb{R}^k)$. Sei $c_1 \in W_1$ beliebig. Wir setzen $a = \Phi_1(c_1)$. Gemäß Satz 2.3(ii) wählen wir eine offene Menge $U \subset U_1 \cap U_2$ mit $a \in U$, eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^n$ und einen C^α-Diffeomorphismus $F : U \to V$ mit $F(M \cap U) = V \cap E_k$. Wir setzen

$$\hat{W}_j = \Phi_j^{-1}(M \cap U)\,.$$

Dass $\hat{W}_j$ offen ist, zeigt man genauso wie oben für W_j. Es ist

$$F \circ \Phi_1 : \hat{W}_1 \to \mathbb{R}^n\,, \quad F \circ \Phi_1 = (g_1, \ldots, g_k, 0, \ldots, 0)\,,$$
$$F \circ \Phi_2 : \hat{W}_2 \to \mathbb{R}^n\,, \quad F \circ \Phi_2 = (h_1, \ldots, h_k, 0, \ldots, 0)\,.$$

Sei $g = (g_1, \ldots, g_k)$, $h = (h_1, \ldots, h_k)$. Es ist $g : \hat{W}_1 \to \mathbb{R}^k$, $h : \hat{W}_2 \to \mathbb{R}^k$ und

$$\operatorname{rang} J_F = n\,, \quad \operatorname{rang} J_{\Phi_j} = k\,,$$

also

$$\operatorname{rang} J_{F\circ\Phi_j} = k\,,$$

also

$$\operatorname{rang} J_g = \operatorname{rang} J_h = k\,.$$

Hieraus folgt mit dem Satz über inverse Funktionen, dass es Umgebungen $\tilde{W}_j \subset \hat{W}_j$ von $c_j = \Phi_j^{-1}(a)$ gibt, so dass

$$g : \tilde{W}_1 \to g(\tilde{W}_1)\,, \quad h : \tilde{W}_2 \to h(\tilde{W}_2)\,,$$

C^α-Diffeomorphismen sind, und dass

$$\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1 = h^{-1} \circ g\,, \quad \text{auf } \tilde{W}_1\,.$$

Da $c_1 \in W_1$ beliebig war, folgt $\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1 \in C^\alpha(W_1; \mathbb{R}^k)$. □

Satz 2.5 besagt, dass alle Kartenwechsel C^α-Diffeomorphismen sind. Hieraus läßt sich eine allgemeinere Definition einer Mannigfaltigkeit M gewinnen, die nicht mehr von vorneherein als Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ gegeben ist. Solche *differenzierbaren Mannigfaltigkeiten* werden in der Differentialtopologie untersucht. (Dort wird üblicherweise die Bezeichnung "Karte" für die Inverse Φ^{-1}, nicht für Φ wie in Definition 2.4, verwendet.)

3 Volumenintegrale

In der Vektoranalysis spielen "Volumenintegrale" und "Oberflächenintegrale" eine große Rolle. In diesem Abschnitt befassen wir uns mit Volumenintegralen.

Volumen. Sei Q ein Quader im $\mathbb{R}^n$. Sein Volumen ist definiert als

$$\mathrm{vol}\,(Q) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)\,, \quad \text{falls} \quad Q = \prod_{i=1}^{n}(a_i, b_i)\,. \tag{3.1}$$

Die Maßtheorie befasst sich mit der Frage, welche Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ man messen kann, und welches Maß man ihnen zuordnen kann. Will man Quadern das Volumen aus (3.1) zuordnen, so gelangt man zum Lebesgue-Maß; diejenigen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, für die das Volumen definiert ist, heißen messbar. Für nähere Einzelheiten sei auf die Vorlesung über Maß- und Integrationstheorie verwiesen. Dort wird auch gezeigt, dass für messbare Mengen gilt

$$\mathrm{vol}\,(a + \Omega) = \mathrm{vol}\,(\Omega)\,, \quad a \in \mathbb{R}^n\,, \tag{3.2}$$

$$\mathrm{vol}\,(\Omega_1 \cup \Omega_2) = \mathrm{vol}\,(\Omega_1) + \mathrm{vol}\,(\Omega_2) - \mathrm{vol}\,(\Omega_1 \cap \Omega_2)\,. \tag{3.3}$$

Wir benötigen auch das folgende Ergebnis aus der Maßtheorie.

Satz 3.1 *Sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear. Dann gilt*

$$\mathrm{vol}\,(T(\Omega)) = |\det(T)|\mathrm{vol}\,(\Omega) \tag{3.4}$$

für alle messbaren $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. □

Beispielsweise ergibt sich für $T = \alpha I$, I die Identität und $\alpha > 0$, dass

$$\mathrm{vol}\,(\alpha\Omega) = \alpha^n \mathrm{vol}\,(\Omega)\,.$$

Volumenintegral. In der Analysis 2 wurde das Integral

$$\int_Q f(x)\,dx$$

definiert für den Fall, dass $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader und f gleichmäßiger Grenzwert von Treppenfunktionen ist, also unter anderem für stetige Funktionen $f : Q \to \mathbb{R}$. Legt man das Lebesgue-Integral zugrunde, so ist

$$\int_\Omega f(x)\,dx \tag{3.5}$$

zunächst definiert für messbare $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und messbare Funktionen $f : \Omega \to [0, +\infty]$ mit $f \geq 0$; es kann auch den Wert $+\infty$ annehmen. Falls das Integral endlich ist, heißt f integrierbar. Messbare Funktionen $f : \Omega \to [-\infty, +\infty]$ werden zerlegt in Positiv- und Negativteil

$$f = f^+ - f^-\,, \quad f^+ = \max\{f, 0\}\,,\; f^- = \max -f, 0\,.$$

Ist $|f|$ integrierbar, so auch f^+ und f^-, und man definiert

$$\int_\Omega f(x)\,dx = \int_\Omega f^+(x)\,dx - \int_\Omega f^-(x)\,dx\,.$$

Für nähere Einzelheiten verweisen wir wieder auf die Maß- und Integrationstheorie, Es gelten die bekannten Rechenregeln zur Linearität

$$\int_\Omega (\alpha f + \beta g)(x)\, dx = \alpha \int_\Omega f(x)\, dx + \beta \int_\Omega g(x)\, dx\,, \tag{3.6}$$

Monotonie

$$f \le g \qquad \Rightarrow \qquad \int_\Omega f(x)\, dx \le \int g(x)\, dx\,, \tag{3.7}$$

Abschätzung

$$\left| \int_\Omega f(x)\, dx \right| \le \int_\Omega |f(x)|\, dx\,, \tag{3.8}$$

und Zerlegung

$$\int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f(x)\, dx = \int_{\Omega_1} f(x)\, dx + \int_{\Omega_2} f(x)\, dx - \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} f(x)\, dx\,. \tag{3.9}$$

Iterierte Integrale, Satz von Fubini. Mit dem Satz von Fubini wird die Berechnung von mehrdimensionalen Integralen auf die Berechnung eindimensionaler Integrale zurückgeführt. In der Analysis 2 wird behandelt:

Satz 3.2 *Sei $Q = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$, $f : Q \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt*

$$\int_Q f(x)\, dx = \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n)\, dx_n \cdots dx_1\,, \tag{3.10}$$

und die Integrationsreihenfolge kann beliebig vertauscht werden.

Für eine allgemeine Formulierung zerlegen wir den $\mathbb{R}^n$ in zwei Komponenten

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}^p\,,\ y \in \mathbb{R}^q\}$$

und betrachten messbare Mengen $U \subset \mathbb{R}^p$, $V \subset \mathbb{R}^q$.

Satz 3.3 (Fubini)
Sei $f : U \times V \to [-\infty, +\infty]$ messbar, sei $|f|$ integrierbar. Dann ist die Funktion

$$x \mapsto \int_V f(x, y)\, dy \tag{3.11}$$

integrierbar auf U, und es gilt

$$\int_{U \times V} f(x, y)\, d(x, y) = \int_U \left(\int_V f(x, y)\, dy \right) dx\,. \tag{3.12}$$

□

Vertauscht man die Rollen von U und V, so erhält man

$$\int_{U \times V} f(x, y)\, d(x, y) = \int_V \left(\int_U f(x, y)\, dx \right) dy\,. \tag{3.13}$$

Als Anwendung betrachten wir folgende Situation. Sei $n = 2$, $p = q = 1$, und Ω habe die Form

$$\Omega = \{(x,y) : a \le x \le b\,,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}\,. \tag{3.14}$$

Wir setzen $U = [a,b]$, $V = \mathbb{R}$. Dann ist

$$\int_\Omega f(x,y)\,d(x,y) = \int_{U\times V} 1_\Omega(x,y) f(x,y)\,d(x,y) = \int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy\,dx\,. \tag{3.15}$$

Im Falle $f = 1$ ergibt sich das **Prinzip von Cavalieri**

$$\mathrm{vol}\,(\Omega) = \int_a^b \mathrm{vol}\,(\Omega_x)\,dx\,, \quad \Omega_x = \{y : \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}\,. \tag{3.16}$$

Als Beispiel betrachten wir die Fläche (= zweidimensionales Volumen) der oberen Hälfte des Einheitskreises,

$$\Omega = \{(x,y) : -1 \le x \le 1\,,\ 0 \le y \le \sqrt{1-x^2}\}\,.$$

Es ist

$$\mathrm{vol}\,(\Omega) = \int_\Omega 1\,d(x,y) = \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} 1\,dy\,dx = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\,.$$

Substitution, Transformationsformel. Im Eindimensionalen haben wir die Substitutionsregel

$$\int_{T(a)}^{T(b)} f(y)\,dy = \int_a^b f(T(x))T'(x)\,dx\,. \tag{3.17}$$

Die sogenannte Transformationsformel verallgemeinert (3.17) ins Mehrdimensionale, sie lautet

$$\int_{T(U)} f(y)\,dy = \int_U f(T(x))|\det DT(x)|\,dx\,. \tag{3.18}$$

Der Betrag taucht in (3.17) nicht auf, weil die linke Seite dort durch die Unterscheidung von unterer und oberer Grenze eine Orientierungsinformation enthält,

$$\int_{T(a)}^{T(b)} f(y)\,dy = -\int_{T(b)}^{T(a)} f(y)\,dy\,.$$

Für den Spezialfall $f = 1$, T lineare Abbildung, ist (3.18) bereits in Satz 3.1 enthalten, da dann $DT(x) = T$ gilt für alle $x \in U$. Der Fall einer nichtlinearen Abbildung T wird durch Approximation darauf zurückgeführt, und zwar folgendermaßen.

Sei $P = [a-d, a+d]$ ein achsenparalleler Quader mit Mittelpunkt $a \in \mathbb{R}^n$ und Seitenlängen $2d_i$, $d \in \mathbb{R}^n$. Wir wollen das Bild $T(P)$ unter einer differenzierbaren Abbildung T durch das Bild unter der Linearisierung $DT(a)$ approximieren. Für $\varepsilon \in [0,1]$ betrachten wir die Quader

$$\begin{aligned} Y_\varepsilon &= T(a) + (1-\varepsilon)DT(a)(P-a)\,, \\ Y^\varepsilon &= T(a) + (1+\varepsilon)DT(a)(P-a)\,. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Satz 3.4 *Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $T : U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus, sei $Q \subset U$ ein achsenparalleler Quader. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass für alle Quader $P = [a-d, a+d] \subset Q$ mit $\|d\| \le \delta$ gilt*

$$Y_\varepsilon \subset T(P) \subset Y^\varepsilon \,. \tag{3.20}$$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Wir definieren das Restglied

$$\begin{aligned} r(x,a) &= T(x) - T(a) - DT(a)(x-a)\,, \\ \rho(x,a) &= DT(a)^{-1} r(x,a)\,, \end{aligned} \qquad x, a \in Q\,. \tag{3.21}$$

Rechte Inklusion: Sei $P = [a-d, a+d]$, es gelte

$$\rho(x,a) \in \varepsilon(P-a)\,, \quad \text{für alle } x \in P. \tag{3.22}$$

Dann gilt für alle $x \in P$

$$T(x) = T(a) + DT(a)[x - a + \rho(x,a)] \in T(a) + DT(a)[(1+\varepsilon)(P-a)]\,,$$

also $T(P) \subset Y^\varepsilon$.
Linke Inklusion: Zu $y \in Y_\varepsilon$ konstruieren wir ein $x \in P$ mit $y = T(x)$ durch eine geeignete Fixpunktiteration. Es gilt

$$\begin{aligned} y = T(x) \quad &\Leftrightarrow \quad y = T(a) + DT(a)[x - a + \rho(x,a)] \\ &\Leftrightarrow \quad x = a - \rho(x,a) + DT(a)^{-1}(y - T(a)) =: S(x)\,. \end{aligned}$$

Wir wollen zeigen, dass $S : P \to P$ eine Kontraktion ist. Da $y \in Y_\varepsilon$, gilt für jedes $x \in P$

$$DT(a)^{-1}(y - T(a)) \in (1-\varepsilon)(P-a)\,,$$

also unter Verwendung von (3.22), da $-(P-a) = P-a$,

$$S(x) \in a + \varepsilon(P-a) + (1-\varepsilon)(P-a) \subset P\,.$$

Weiterhin gilt

$$DS(x) = -DT(a)^{-1} \circ \partial_x r(x,a) = -DT(a)^{-1} \circ [DT(x) - DT(a)]\,,$$

also

$$\|DS(x)\| \le \|DT(a)^{-1}\| \cdot \|DT(x) - DT(a)\|\,. \tag{3.23}$$

Aus dem Mittelwertsatz im Mehrdimensionalen folgt, dass S eine Kontraktion ist, falls

$$\|DS(x)\| \le \frac{1}{2}\,, \quad \text{für alle } x \in P. \tag{3.24}$$

Aus der Kompaktheit von Q, der Stetigkeit von DT^{-1} sowie der gleichmäßigen Stetigkeit von DT und r folgt nun, dass es ein $\delta > 0$ gibt, so dass (3.22) und (3.24) gelten für alle P wie verlangt, und damit die Behauptung. $\square$

Satz 3.5 *Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $T : U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus, sei $Q \subset U$ ein achsenparalleler Quader. Dann gilt*

$$\mathrm{vol}\,(T(Q)) = \int_Q |\det DT(x)|\, dx\,. \tag{3.25}$$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$, sei Z_ε eine Zerlegung von Q in hinreichend kleine Quader P, so dass alle $P \in Z_\varepsilon$ die Bedingung

$$Y_\varepsilon \subset T(P) \subset Y^\varepsilon$$

in Satz 3.4 erfüllen. Aus Satz 3.1 folgt, dass für das Volumen der Parallelotope Y_ε und Y^ε gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}\,(Y_\varepsilon) &= (1-\varepsilon)^n |\det DT(a_P)| \mathrm{vol}\,(P)\,, \\ \mathrm{vol}\,(Y^\varepsilon) &= (1+\varepsilon)^n |\det DT(a_P)| \mathrm{vol}\,(P)\,, \end{aligned} \tag{3.26}$$

wobei a_P den Mittelpunkt von P bezeichnet. Es folgt

$$(1-\varepsilon)^n |\det DT(a_P)| \mathrm{vol}\,(P) \le \mathrm{vol}\,(T(P)) \le (1+\varepsilon)^n |\det DT(a_P)| \mathrm{vol}\,(P)\,. \tag{3.27}$$

Wir definieren die Funktionen $g_\varepsilon^\pm : Q \to \mathbb{R}$ durch

$$g_\varepsilon^\pm(x) = \sum_{P \in Z_\varepsilon} 1_P(x) \cdot (1 \pm \varepsilon)^n |\det DT(a_P)|$$

Es gilt dann wegen (3.27)

$$\begin{aligned} \int_Q g_\varepsilon^-(x)\, dx &= \sum_{P \in Z_\varepsilon} \int_P g_\varepsilon^-(x)\, dx \le \sum_{P \in Z_\varepsilon} \mathrm{vol}\,(T(P)) \le \sum_{P \in Z_\varepsilon} \int_P g_\varepsilon^+(x)\, dx \\ &= \int_Q g_\varepsilon^+(x)\, dx\,. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Da $x \mapsto |\det DT(x)|$ auf dem Kompaktum Q gleichmäßig stetig ist, konvergieren $g_\varepsilon^+(x)$ und $g_\varepsilon^-(x)$ gegen $|\det DT(x)|$ für $\varepsilon \to 0$. Da $g_\varepsilon^+(x)$ und $g_\varepsilon^-(x)$ außerdem gleichmäßig in ε beschränkt sind, folgt mit dem Konvergenzsatz von Lebesgue

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_Q g_\varepsilon^\pm(x)\, dx = \int_Q |\det DT(x)|\, dx\,.$$

Zusammen mit (3.28) folgt die Behauptung, da $\sum_P \mathrm{vol}\,(T(P)) = \mathrm{vol}\,(T(Q))$. $\square$

Satz 3.5 und seinen Beweis kann man als den Beitrag der Analysis zum Beweis der Transformationsformel auffassen.

Satz 3.6 (Transformationsformel)
Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $T : U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus, sei $f : T(U) \to [-\infty, \infty]$ und $|f|$ integrierbar. Dann ist die Funktion $x \mapsto f(T(x))|\det DT(x)|$ integrierbar auf U, und es gilt

$$\int_{T(U)} f(y)\, dy = \int_U f(T(x))|\det DT(x)|\, dx\,. \tag{3.29}$$

Beweis: Dieser wird mit Argumenten der Maßtheorie geführt. Siehe etwa M. Brokate, G. Kersting, Maß und Integral, Seite 106 und 107. □

Die Substitutionsregel (= Transformationsformel) wird oft dann angewendet, wenn T die Rolle einer Koordinatentransformation spielt. Wir betrachten **Polarkoordinaten in der Ebene**. Sie sind gegeben durch

$$T(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,, \quad T : [0,\infty) \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2\,. \tag{3.30}$$

Wir wenden Satz 3.6 an mit $U = (0, M) \times (0, 2\pi)$ und $f : T(U) \to \mathbb{R}$. Wir erhalten

$$\int_{T(U)} f(x,y)\, d(x,y) = \int_0^M \int_0^{2\pi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\, d\varphi\, dr\,. \tag{3.31}$$

Die Situation des "uneigentlichen Integrals" (unbeschränktes Integrationsgebiet bzw. Polstellen von f) wird in Satz 3.6 gleich miterfasst, etwa $U = (0,\infty) \times (0, 2\pi)$, $T(U) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : x \geq 0\}$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dx\, dy = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\, d\varphi\, dr\,. \tag{3.32}$$

Beispiel 3.7

1. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ rotationssymmetrisch, das heißt,

   $$f(x,y) = g(\sqrt{x^2+y^2})\,, \quad g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}\,.$$

   Wegen $(f \circ T)(r,\varphi) = g(r)$ wird die Formel (3.32) zu

   $$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, dx\, dy = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} g(r) r\, d\varphi\, dr = 2\pi \int_0^\infty g(r) r\, dr\,.$$

2. Fläche des Kreises K_M um 0 mit Radius M: Es ist $g = 1_{[0,M]}$,

   $$\mathrm{vol}\,(K_M) = \int_{K_M} 1\, d(x,y) = 2\pi \int_0^M r\, dr = \pi M^2\,.$$

3. Für

   $$f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$$

   erhalten wir

   $$g(r) = e^{-r^2}\,,$$

   also

   $$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy = 2\pi \int_0^\infty r e^{-r^2}\, dr = -\pi e^{-r^2} \Big|_{r=0}^{r=\infty} = \pi\,.$$

   Da andererseits

   $$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx \right)^2,$$

   folgt außerdem

   $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}\,.$$

Wir betrachten nun **Kugelkoordinaten im Raum**. Sie sind gegeben durch

$$T(r,\theta,\varphi) = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)\,. \tag{3.33}$$

Der Nordpol $(0,0,r)$ entspricht dem Winkel $\theta = 0$, der Südpol $(0,0,-r)$ dem Winkel $\theta = \pi$, der Äquator mit den Vektoren $(r\cos\varphi, r\sin\varphi, 0)$ dem Winkel $\theta = \pi/2$. Falls wir als Definitionsbereich für die Integration

$$T : U = (0,\infty)\times(0,\pi)\times(0,2\pi) \to \mathbb{R}^3\,. \tag{3.34}$$

setzen, so ist

$$\mathbb{R}^3 \setminus T(U) = \{(x,0,z) : x \geq 0,\ z \in \mathbb{R}\}$$

eine (Lebesgue-) Nullmenge im $\mathbb{R}^3$, und es gilt

$$\det DT(r,\theta,\varphi) = r^2\sin\theta\,. \tag{3.35}$$

Die Substitutionsregel, auf dem gesamten $\mathbb{R}^3$ formuliert, wird zu

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(T(r,\theta,\varphi))r^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,dr\,. \tag{3.36}$$

Beispiel 3.8

1. Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ rotationssymmetrisch, das heißt,

   $$f(x,y,z) = g(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,, \quad g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}\,.$$

   Dann ist $(f\circ T)(r,\theta,\varphi) = g(r)$, also

   $$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\,d(x,y,z) &= \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} g(r)r^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,dr = 2\pi\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int_0^{\infty} g(r)r^2\,dr\\ &= 4\pi\int_0^{\infty} g(r)r^2\,dr\,.\end{aligned} \tag{3.37}$$

2. Volumen der Kugel K_R um 0 mit Radius R: Hier ist $g = 1_{[0,R]}$,

   $$\mathrm{vol}\,(K_R) = 4\pi\int_0^{\infty} r^2 1_{[0,R]}(r)\,dr = 4\pi\int_0^R r^2\,dr = \frac{4}{3}\pi R^3\,.$$

3. Gravitationspotential der Kugel K_R mit rotationssymmetrischer Dichte ρ: Das Potential im Punkt $P = (0,0,a)$ oberhalb der Kugel ($a > R$) ist gegeben durch

   $$u(P) = \gamma\int_{K_R}\frac{\rho(\|x\|_2)}{\|x-P\|_2}\,dx\,,$$

   wobei γ die Gravitationskonstante ist. Wir substituieren $x = T(r,\theta,\varphi)$ und erhalten

   $$\rho(T(r,\theta,\varphi)) = \rho(r)\,,$$

sowie

$$\begin{aligned}\|T(r,\theta,\varphi)-P\|_2^2 &= r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + (a-r\cos\theta)^2\\ &= r^2\sin^2\theta + a^2 - 2ar\cos\theta + r^2\cos^2\theta\\ &= a^2+r^2-2ar\cos\theta\,.\end{aligned}$$

Es folgt also

$$\begin{aligned}u(P) &= \gamma\int_{K_R}\frac{\rho(\|x\|_2)}{\|x-P\|_2}\,dx = \gamma\int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^\pi \frac{\rho(r)r^2\sin\theta}{\sqrt{a^2+r^2-2ar\cos\theta}}\,d\theta\,d\varphi\,dr\\ &= 2\pi\gamma\int_0^R\rho(r)r^2\int_0^\pi\frac{\sin\theta}{\sqrt{a^2+r^2-2ar\cos\theta}}\,d\theta\,dr\,.\end{aligned}$$

Substitution $t=-\cos\theta$, $dt=\sin\theta\,d\theta$ ergibt

$$\begin{aligned}\int_0^\pi\frac{\sin\theta}{\sqrt{a^2+r^2-2ar\cos\theta}}\,d\theta &= \int_{-1}^1\frac{1}{\sqrt{a^2+r^2+2art}}\,dt = \frac{1}{ar}\sqrt{a^2+r^2+2art}\,\Big|_{t=-1}^{t=1}\\ &= \frac{1}{ar}\left(\sqrt{(a+r)^2}-\sqrt{(a-r)^2}\right) = \frac{2}{a}\,,\end{aligned}$$

also

$$u(P) = \frac{4\pi\gamma}{a}\int_0^R\rho(r)r^2\,dr\,.$$

Andererseits gilt für die Gesamtmasse der Kugel

$$M = \int_{K_R}\rho(x)\,dx = 4\pi\int_0^\infty 1_{[0,R]}(r)\rho(r)r^2\,dr = 4\pi\int_0^R\rho(r)r^2\,dr\,,$$

also

$$u(P) = \frac{\gamma M}{a}\,.$$

Als Ergebnis erhalten wir: Das von der Kugel herrührende Gravitationsfeld ist außerhalb der Kugel dasselbe wie das von einer Punktmasse M im Nullpunkt erzeugte Feld.

4 Das Oberflächenintegral

Thema dieses Kapitels ist das Integral

$$\int_M f(\xi)\, dS(\xi)$$

einer Funktion f, die auf einer Mannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ definiert ist. Dabei soll $\dim(M) = k < n$ und das Integral ein k-dimensionales Integral sein. Im Spezialfall $f = 1$ soll sich der k-dimensionale Inhalt

$$\mathrm{vol}_k(M) = \int_M 1\, dS(\xi)$$

von M ergeben. Eine typische Situation ist $M = \partial\Omega$, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen ist, mit $k = n-1$, M ist die "Oberfläche" von Ω, daher die Bezeichnung "Oberflächenintegral". Im Falle $n = 3$ ist $k = 2$ und $\partial\Omega$ zweidimensional, $\mathrm{vol}_2(M)$ ist dann der Flächeninhalt von M. Andere in Anwendungen häufig auftretende Fälle sind $k = 1$ mit $n = 3$ oder $n = 2$.

Inhalt eines niederdimensionalen Parallelotops. Wir wollen den k-dimensionalen Inhalt eines von k Vektoren aufgespannten Parallelotops im $\mathbb{R}^n$ betrachten. Für $w_1, \ldots, w_k \in \mathbb{R}^n$ setzen wir

$$P[w_1, \ldots, w_k] = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i w_i \,,\, 0 \le \lambda_i \le 1 \right\}. \tag{4.1}$$

Im Falle $k = n$ ist das Parallelotop "volldimensional". Sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die lineare Abbildung mit $Te_i = w_i$ für alle i. Dann ist

$$P[w_1, \ldots, w_n] = T(P[e_1, \ldots, e_n]) = T([0,1]^n)\,,$$

und es gilt nach Satz 3.1

$$\mathrm{vol}\,(P[w_1, \ldots, w_n]) = |\det T| = |\det B|\,, \tag{4.2}$$

wobei $B \in \mathbb{R}^{(k,k)}$ die Matrix mit den Spalten $w_1, \ldots, w_k$ ist. Sei nun $k < n$, seien $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathbb{R}^{(n,k)}$ die Matrix mit den Spalten $v_1, \ldots, v_k$. Wir betrachten zunächst den Spezialfall

$$v_i = \begin{pmatrix} w_i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_i \in \mathbb{R}^k\,. \tag{4.3}$$

Sinnvollerweise soll gelten

$$\mathrm{vol}_k\,(P[v_1, \ldots, v_k]) = \mathrm{vol}\,(P[w_1, \ldots, w_k])\,. \tag{4.4}$$

Nun ist $A^T A \in \mathbb{R}^{(k,k)}$ und

$$A = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A^T A = \begin{pmatrix} B^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} = B^T B\,,$$

und weiter

$$\det(A^T A) = \det(B^T B) = \det(B^T)\det(B) = (\det B)^2\,,$$

also

$$\sqrt{\det(A^T A)} = |\det B| = \mathrm{vol} P[w_1, \ldots, w_k]\,.$$

Im betrachteten Spezialfall liefert also die Definition

$$\mathrm{vol}_k\left(P[v_1,\ldots,v_k]\right) = \sqrt{\det(A^T A)} \tag{4.5}$$

einen k-dimensionalen Inhalt, welcher (4.4) erfüllt.

Sei nun $v_1,\ldots,v_k \in \mathbb{R}^n$ eine beliebige Menge linear unabhängiger Vektoren. Wir betrachten eine orthogonale Abbildung auf $\mathbb{R}^n$, welche den k-dimensionalen Unterraum $X = \mathrm{span}\,\{v_1,\ldots,v_k\}$ auf $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ abbildet, mit zugehöriger orthogonaler Matrix $U \in \mathbb{R}^{(n,n)}$. Da U alle Längen und Winkel invariant lässt, soll sinnvollerweise gelten

$$\mathrm{vol}_k\left(P[v_1,\ldots,v_k]\right) = \mathrm{vol}_k\left(P[Uv_1,\ldots,Uv_k]\right). \tag{4.6}$$

Aus (4.5) folgt, da $(UA)^T(UA) = A^T U^T U A = A^T A$,

$$\mathrm{vol}_k\left(P[Uv_1,\ldots,Uv_k]\right) = \sqrt{\det((UA)^T(UA))} = \sqrt{\det(A^T A)}\,,$$

so dass (4.6) erfüllt ist, wenn wir (4.5) auch für beliebige linear unabhängige $v_1,\ldots,v_k$ zugrundelegen.

Definition 4.1 (Volumen eines Parallelotops)
Seien $v_1,\ldots,v_k \in \mathbb{R}^n$. Wir definieren das k-dimensionale Volumen des von ihnen aufgespannten Parallelotops als

$$\mathit{vol}_k\left(P[v_1,\ldots,v_k]\right) = \sqrt{\det(A^T A)}\,, \tag{4.7}$$

wobei $A \in \mathbb{R}^{(n,k)}$ die Matrix mit den Spalten $v_1,\ldots,v_k$ ist. Die Elemente von $A^T A$ erhält man als Skalarprodukte,

$$(A^T A)_{ij} = v_i^T v_j\,. \tag{4.8}$$

□

Falls die Vektoren $v_1,\ldots,v_k$ linear abhängig sind, ergibt sich

$$\mathrm{vol}_k\left(P[v_1,\ldots,v_k]\right) = 0\,,$$

da dann $\mathrm{rang}\,(A^T A) \le \mathrm{rang}\,(A) < k$ gilt.

Im Spezialfall $k = 2$ ist das Parallelotop ein Parallelogramm. Wir betrachten $P[v,w]$ mit $v, w \in \mathbb{R}^n$. Sei φ der Winkel zwischen v und w, also

$$\cos\varphi = \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|\,\|w\|}\,.$$

Es ist dann

$$A^T A = \begin{pmatrix} v^T \\ w^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^T v & v^T w \\ w^T v & w^T w \end{pmatrix},$$

und

$$\begin{aligned} \det(A^T A) &= (v^T v)(w^T w) - (v^T w)(w^T v) = \|v\|^2\,\|w\|^2 - \langle v, w\rangle^2 \\ &= \|v\|^2\,\|w\|^2(1 - \cos^2\varphi) = \|v\|^2\,\|w\|^2 \sin^2\varphi\,. \end{aligned}$$

Der Flächeninhalt des Parallelogramms ist also gegeben durch

$$\mathrm{vol}_2\left(P[v,w]\right) = \|v\|\|w\|\sin\varphi\,. \tag{4.9}$$

Zerlegung der Eins.

Definition 4.2 (Träger)
Sei (X,d) metrischer Raum, Y Vektorraum, $f : X \to Y$ eine Abbildung. Die Menge

$$\mathrm{supp}\,(f) = \overline{\{x : x \in X\,,\ f(x) \neq 0\}} \tag{4.10}$$

*heißt der **Träger** (engl.: support) von f.* □

Definition 4.3 (C^∞-Zerlegung der Eins)
Sei $K \subset \mathbb{R}^n$, sei $\mathcal{U} = (U_j)_{1\le j\le N}$ eine offene Überdeckung von K. Eine Familie $(\alpha_j)_{1\le j\le N}$ von Funktionen $\alpha_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ heißt C^∞-Zerlegung der Eins für K bezüglich $\mathcal{U}$, falls gilt

$$0 \le \alpha_j \le 1\,, \quad \textit{für alle } j\,, \tag{4.11}$$

$$\mathrm{supp}\,(\alpha_j) \subset U_j\,, \quad \textit{für alle } j\,, \tag{4.12}$$

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j(x) = 1 \quad \textit{falls } x \in K\,. \tag{4.13}$$

□

Die Zerlegung der Eins stellt ein Werkzeug zur “Lokalisierung” dar. Mit ihrer Hilfe können wir eine Funktion $f : K \to Y$, Y Vektorraum, zerlegen in eine Summe

$$f = \sum_{j=1}^N \alpha_j f\,, \tag{4.14}$$

deren Summanden $\alpha_j f$ ihren Träger jeweils innerhalb der Mengen U_j haben. Meistens werden die Mengen U_j als beschränkte Mengen gewählt, dann haben alle Funktionen $\alpha_j f$ einen **kompakten Träger**.

Wir zeigen jetzt, dass kompakte Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ immer eine C^∞-Zerlegung der Eins besitzen.

Satz 4.4 *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, sei $(U(x))_{x\in K}$ ein System offener Mengen mit $x \in U(x)$ für alle $x \in K$. Dann gibt es endlich viele $x^j \in K$, $1 \le j \le N$, mit*

$$K \subset \bigcup_{j=1}^N U(x^j)\,,$$

und eine C^∞-Zerlegung der Eins für K bezüglich $(U_j)_{1\le j\le N}$, wobei $U_j = U(x^j)$.

Beweis: Wir definieren $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$\psi(t) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{t}\right)\,, & t > 0\,,\\ 0\,, & t \le 0\,. \end{cases}$$

Da $\psi^{(k)}(0) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$, gilt $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$. Wir setzen

$$\tilde{\psi}(t) = \frac{\psi(4-t)}{\psi(4-t) + \psi(t-1)}\,.$$

Es ist dann $\tilde{\psi} \in C^\infty(\mathbb{R})$, und es gilt $\tilde{\psi}(t) = 1$ für $t \le 1$, $\tilde{\psi}(t) = 0$ für $t \ge 4$. Zu jedem $x \in K$ wählen wir $\varepsilon_x > 0$ mit $B(x; 3\varepsilon_x) \subset U(x)$. Weiterhin wählen ($K$ ist kompakt) wir endlich viele $x^j \in K$, $1 \le j \le N$, so dass

$$K \subset \bigcup_{j=1}^N B(x^j; \varepsilon_j), \quad \varepsilon_j = \varepsilon_{x^j},$$

und definieren für $x \in \mathbb{R}^n$

$$\tilde{\alpha}_j(x) = \tilde{\psi}\left(\frac{\|x - x^j\|_2^2}{\varepsilon_j^2}\right).$$

Dann ist $\tilde{\alpha}_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $0 \le \tilde{\alpha}_j \le 1$, $\tilde{\alpha}_j = 1$ in $K(x^j; \varepsilon_j)$ (wobei $K(x; \varepsilon) = \{y : \|y - x\|_2 \le \varepsilon\}$), und $\tilde{\alpha}_j = 0$ außerhalb von $K(x^j; 2\varepsilon_j)$. Eine Zerlegung der Eins wie verlangt erhalten wir nun durch

$$\alpha_j(x) = \frac{\tilde{\alpha}_j(x)}{p(x) + \sum_{k=1}^N \tilde{\alpha}_k(x)}, \quad p(x) = \prod_{k=1}^N (1 - \tilde{\alpha}_k(x)).$$

Der Nenner ist ungleich Null für alle $x \in \mathbb{R}^n$, da $p(x) = 1$ falls $\sum_k \tilde{\alpha}_k(x) = 0$. Weiterhin ist $\operatorname{supp} \alpha_j = \operatorname{supp} \tilde{\alpha}_j \subset U_j$. Da $p(x) = 0$ für alle $x \in K$, folgt $\sum_j \alpha_j = 1$ auf K. $\square$

Folgerung 4.5 (Existenz einer C^∞-Zerlegung der Eins)
Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, sei $\mathcal{U} = (U_j)_{1 \le j \le N}$ eine offene Überdeckung von K. Dann gibt es eine C^∞-Zerlegung der Eins für K bezüglich $\mathcal{U}$.

Beweis: Für jedes $x \in K$ wählen wir ein $V \in \mathcal{U}$ mit $x \in V$ und setzen $U(x) = V$. Nach Satz 4.4 gibt es endlich viele $U(x^l)$, $1 \le l \le L$, und eine zugehörige Zerlegung der Eins (β_l). Zu $U_j \in \mathcal{U}$ definieren wir $\alpha_j = \sum \beta_l$, wobei über diejenigen l summiert wird, für die $U(x^l) = U_j$ gilt. Dann ist $(\alpha_j)_{1 \le j \le N}$ die gesuchte Zerlegung der Eins für $\mathcal{U}$. $\square$

Das Oberflächenintegral. Sei $\Phi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$, $\Phi(t) = At$ mit $A \in \mathbb{R}^{(n,k)}$. Dann ist gemäß Definition 4.1

$$\operatorname{vol}_k(\Phi([0,1]^k)) = \operatorname{vol}_k(Ae_1, \ldots, Ae_k) = \sqrt{\det(A^T A)}.$$

Definition 4.6 (Maßtensor, Gramsche Determinante)
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale C^α-Mannigfaltigkeit, sei $\Phi : T \to M \cap U$ eine Karte von M, wobei $U \subset \mathbb{R}^n$ und $T \subset \mathbb{R}^k$ offene Mengen sind. Wir definieren $G : T \to \mathbb{R}^{(k,k)}$ und $g : T \to \mathbb{R}$ durch

$$G(t) = J_\Phi(t)^T J_\Phi(t), \quad g(t) = \det G(t). \tag{4.15}$$

G heißt der Maßtensor, g die Gramsche Determinante. $\square$

Definition 4.7 *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale C^α-Mannigfaltigkeit, Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ heißt integrierbar über M bezüglich der Karte $\Phi : T \to \mathbb{R}^n$, falls die durch*

$$t \mapsto f(\Phi(t))\sqrt{g(t)} \tag{4.16}$$

definierte Funktion über T integrierbar ist. In diesem Fall definieren wir

$$\int_{\Phi(T)} f(\xi)\, dS(\xi) = \int_T f(\Phi(t))\sqrt{g(t)}\, dt\,. \tag{4.17}$$

□

Das folgende Lemma zeigt, dass das Integral auf der linken Seite von (4.17) nur von der Menge $\Phi(T)$, nicht aber von der Wahl von Φ abhängt, und dass also Definition 4.7 sinnvoll ist.

Lemma 4.8 *Sind $\Phi : T \to \mathbb{R}^n$ und $\hat{\Phi} : \hat{T} \to \mathbb{R}^n$ Karten mit $\Phi(T) = \hat{\Phi}(\hat{T})$, so ist f integrierbar über M bezüglich Φ genau dann, wenn f integrierbar ist über M bezüglich $\hat{\Phi}$, und es gilt*

$$\int_T f(\Phi(t))\sqrt{g(t)}\, dt = \int_{\hat{T}} f(\hat{\Phi}(s))\sqrt{\hat{g}(s)}\, ds\,. \tag{4.18}$$

Beweis: Wir betrachten den durch $\Psi = \Phi^{-1} \circ \hat{\Phi}$ definierten Kartenwechsel $\Psi : \hat{T} \to T$. Nach Satz 2.5 ist Ψ ein C^α-Diffeomorphismus. Sei nun f integrierbar über M bezüglich Φ. Aus der Substitutionsregel (Satz 3.6) folgt, dass die Funktion

$$s \mapsto f(\Phi(\Psi(s)))\sqrt{g(\Psi(s))}|\det J_\Psi(s)|$$

auf $\hat{T}$ integrierbar ist, und dass gilt

$$\int_T f(\Phi(t))\sqrt{g(t)}\, dt = \int_{\hat{T}} f(\Phi(\Psi(s)))\sqrt{g(\Psi(s))}|\det J_\Psi(s)|\, ds\,.$$

Es ist $\hat{\Phi} = \Phi \circ \Psi$, also

$$J_{\hat{\Phi}}(s) = J_\Phi(\Psi(s))J_\Psi(s)\,,$$

also

$$\begin{aligned}
\hat{g}(s) &= \det(J_{\hat{\Phi}}(s)^T J_{\hat{\Phi}}(s)) = \det(J_\Psi(s)^T J_\Phi(\Psi(s))^T J_\Phi(\Psi(s))J_\Psi(s)) \\
&= \det(J_\Psi(s)^T)\det(J_\Phi(\Psi(s))^T J_\Phi(\Psi(s)))\det(J_\Psi(s)) \\
&= g(\Psi(s))(\det J_\Psi(s))^2\,,
\end{aligned}$$

also

$$\int_T f(\Phi(t))\sqrt{g(t)}\, dt = \int_{\hat{T}} f(\hat{\Phi}(s))\sqrt{\hat{g}(s)}\, ds\,.$$

□

Definition 4.9 (Oberflächenintegral)
Sei M eine kompakte k-dimensionale C^α-Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$. Ein $f : M \to \mathbb{R}$ heißt integrierbar über M, falls es einen endlichen Atlas $(\Phi_j)_{1\le j\le N}$, $\Phi_j : T_j \to M \cap U_j$, gibt, so dass f integrierbar ist über M bezüglich aller Karten Φ_j, $1 \le j \le N$. In diesem Fall definieren wir das Oberflächenintegral von f über M als

$$\int_M f(\xi)\, dS(\xi) = \sum_{j=1}^N \int_{\Phi_j(T_j)} \alpha_j(\xi) f(\xi)\, dS(\xi)\,, \tag{4.19}$$

wobei $(\alpha_j)_{1\le j\le N}$ eine C^∞-Zerlegung der Eins für M bezüglich $(U_j)_{1\le j\le N}$ ist. □

Das folgende Lemma zeigt, dass Definition 4.9 sinnvoll ist.

Lemma 4.10 *In der Situation von Definition 4.9 gilt:*

(i) Zu jedem endlichen Atlas $(\Phi_j)_{1\le j\le N}$ gibt es eine solche C^∞-Zerlegung der Eins $(\alpha_j)_{1\le j\le N}$.

(ii) Für alle i, j gilt: Ist f über M bezüglich Φ_j integrierbar, so auch $\alpha_i f$.

(iii) Der in (4.19) definierte Wert des Oberflächenintegrals hängt weder von der Wahl des Atlas noch von der Wahl der Zerlegung ab.

Beweis: Die Aussage (i) ergibt sich aus Folgerung 4.5. Zum Beweis von (ii) bemerken wir, dass für alle $t \in T_j$ gilt

$$0 \le \alpha_i(\Phi_j(t))|f(\Phi_j(t))|\sqrt{g_j(t)} \le |f(\Phi_j(t))|\sqrt{g_j(t)}\,,$$

also definiert der mittlere Ausdruck eine auf T_j integrierbare Funktion. Zum Beweis von (iii) betrachten wir einen weiteren endlichen Atlas

$$(\tilde\Phi_k)_{1\le k\le \tilde N}\,, \quad \tilde\Phi_k : \tilde T_k \to M \cap \tilde U_k\,,$$

für M mit C^∞-Zerlegung der Eins

$$(\tilde\alpha_k)_{1\le k\le \tilde N}\,.$$

Es gilt dann

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^N \int_{\Phi_j(T_j)} \alpha_j(\xi) f(\xi)\, dS(\xi) &= \sum_{j=1}^N \int_{\Phi_j(T_j)} \sum_{k=1}^{\tilde N} \tilde\alpha_k(\xi)\alpha_j(\xi) f(\xi)\, dS(\xi)\\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^{\tilde N} \int_{\Phi_j(T_j)} \tilde\alpha_k(\xi)\alpha_j(\xi) f(\xi)\, dS(\xi)\,,\end{aligned}$$

und ebenso

$$\sum_{k=1}^{\tilde N} \int_{\tilde\Phi_k(\tilde T_k)} \tilde\alpha_k(\xi) f(\xi)\, dS(\xi) = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^{\tilde N} \int_{\tilde\Phi_k(\tilde T_k)} \tilde\alpha_k(\xi)\alpha_j(\xi) f(\xi)\, dS(\xi)\,,$$

und für alle j, k gilt

$$\begin{aligned}\int_{\Phi_j(T_j)} \tilde\alpha_k(\xi)\alpha_j(\xi) f(\xi)\, dS(\xi) &= \int_{\Phi_j(T_j)\cap\tilde\Phi_k(\tilde T_k)} \tilde\alpha_k(\xi)\alpha_j(\xi) f(\xi)\, dS(\xi)\\ &= \int_{\tilde\Phi_k(\tilde T_k)} \tilde\alpha_k(\xi)\alpha_j(\xi) f(\xi)\, dS(\xi)\,,\end{aligned}$$

da $\tilde\alpha_k\alpha_j = 0$ außerhalb von $\Phi_j(T_j) \cap \tilde\Phi_k(\tilde T_k)$. □

Ist K Teilmenge einer k-dimensionalen C^α-Mannigfaltigkeit M, so definieren wir

$$\int_K f(\xi)\,dS(\xi) = \int_M 1_K(\xi) f(\xi)\,dS(\xi)\,,$$

falls $1_K f$ über M integrierbar ist. Für $f = 1$ erhalten wir den k-dimensionalen Inhalt von K,

$$\mathrm{vol}_k\,(K) = \int_M 1_K(\xi)\,dS(\xi)\,.$$

Ist

$$\mathrm{vol}_k\,(K) = 0\,,$$

so heißt K eine k-dimensionale Nullmenge in M. In diesem Fall gilt

$$\int_{M\setminus K} f(\xi)\,dS(\xi) = \int_M f(\xi)\,dS(\xi)\,,$$

falls f über M integrierbar ist.

Beispiel 4.11

(i) Kurvenlänge: Sei $T = (a,b) \subset \mathbb{R}$, $\Phi : T \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar mit $\Phi'(t) \neq 0$ für alle $t \in (a,b)$, $M = \Phi(T)$. Es ist dann

$$g(t) = G(t) = J_\Phi(t)^T J_\Phi(t) = (\Phi_1'(t), \ldots, \Phi_n'(t)) \begin{pmatrix} \Phi_1'(t) \\ \vdots \\ \Phi_n'(t) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \Phi_i'(t)^2\,,$$

$$\int_M 1\,dS(\xi) = \int_T 1\sqrt{g(t)}\,dt = \int_a^b \|\Phi'(t)\|_2\,dt\,.$$

Der 1-dimensionale Inhalt von M ist also gerade die Länge der Kurve Φ.

(ii) Rotationsflächen: Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, sei $f > 0$. Dann ist

$$M = \{(x,y,z) : x \in (a,b),\, y^2 + z^2 = f(x)^2\} \tag{4.20}$$

eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^3$. Die durch

$$\Phi(t,s) = (t, f(t)\cos s, f(t)\sin s) \tag{4.21}$$

definierte Abbildung

$$\Phi : T = (a,b) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3 \tag{4.22}$$

ist eine C^1-Karte von M, da

$$J_\Phi(t,s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f'(t)\cos s & -f(t)\sin s \\ f'(t)\sin s & f(t)\cos s \end{pmatrix} \tag{4.23}$$

den Rang 2 hat. Der Maßtensor von Φ ist

$$G(t,s) = J_\Phi(t,s)^T J_\Phi(t,s) = \begin{pmatrix} 1 + f'(t)^2 & 0 \\ 0 & f(t)^2 \end{pmatrix}\,. \tag{4.24}$$

Die Menge

$$M \setminus \Phi(T) = \{(t, f(t), 0) : \, t \in (a,b)\}$$

ist eine 2-dimensionale Nullmenge in M. Also ist

$$\int_M 1 \, dS(\xi) = \int_{\Phi(T)} 1 \, dS(\xi) = \int_T \sqrt{\det G(t,s)} \, d(t,s) \tag{4.25}$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_a^b f(t)\sqrt{1 + f'(t)^2} \, dt \, ds = 2\pi \int_a^b f(t)\sqrt{1+f'(t)^2} \, dt \, . \tag{4.26}$$

(iii) Oberfläche der Einheitskugel im $\mathbb{R}^3$: Das ist ein Spezialfall von (ii) mit $(a,b) = (-1,1)$, $f(t) = \sqrt{1-t^2}$. Es ist

$$f'(t) = -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \, ,$$

also gilt

$$\int_M 1 \, dS(\xi) = 2\pi \int_{-1}^1 f(t)\sqrt{1+f'(t)^2} \, dt = 2\pi \int_{-1}^1 1 \, dt = 4\pi \, .$$

(iv) Inhalt des Graphen einer Funktion: Sei $T \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen, $F : T \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar,

$$M = \{(t, F(t)) : t \in T\} \subset \mathbb{R}^n \, . \tag{4.27}$$

Die Abbildung

$$\Phi : T \to \mathbb{R}^n \, , \quad \Phi(t) = (t, F(t)) \, ,$$

ist C^1-Karte mit $\Phi(T) = M$. Es ist

$$J_\Phi(t) = \begin{pmatrix} I \\ \partial_1 F(t) \cdots \partial_{n-1} F(t) \end{pmatrix}$$

$$G(t) = J_\Phi(t)^T J_\Phi(t) = I + \begin{pmatrix} \partial_1 F(t) \\ \vdots \\ \partial_{n-1} F(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_1 F(t) & \cdots & \partial_{n-1} F(t) \end{pmatrix} \, ,$$

also (siehe Lemma 4.12 unten)

$$g(t) = \det G(t) = 1 + \|(\operatorname{grad} F)(t)\|_2^2 \, . \tag{4.28}$$

Der $(n-1)$-dimensionale Inhalt des Graphen von F ist also

$$\int_M 1 \, dS(\xi) = \int_T \sqrt{1 + \|(\operatorname{grad} F)(t)\|_2^2} \, dt \, . \tag{4.29}$$

□

Lemma 4.12 *Sei $a \in \mathbb{R}^m$, $I \in \mathbb{R}^{(m,m)}$ die Einheitsmatrix. Dann ist*

$$\det(I + aa^T) = 1 + \|a\|_2^2 \, , \quad aa^T = \begin{pmatrix} a_1 a_1 & \cdots & a_1 a_m \\ \vdots & & \vdots \\ a_m a_1 & \cdots & a_m a_m \end{pmatrix} \tag{4.30}$$

Beweis: Sei $a \neq 0$ (sonst klar). Wir berechnen die Eigenwerte von $I + aa^T$:

$$(I + aa^T)x = \lambda x \qquad \Leftrightarrow \qquad (a^T x) \cdot a = (\lambda - 1)x \,.$$

Es ist also a ein Eigenvektor zum Eigenwert $1 + \|a\|_2^2$, und jeder Vektor x mit $x \perp a$ ist Eigenvektor zum Eigenwert 1. Wir erhalten also eine Basis aus Eigenvektoren mit den Eigenwerten

$$\lambda_1 = 1 + \|a\|_2^2 \,, \quad \lambda_2 = \cdots = \lambda_m = 1 \,,$$

also

$$\det(I + aa^T) = \prod_{i=1}^m \lambda_i = 1 + \|a\|_2^2 \,.$$

□

Satz 4.13 *Sei M eine k-dimensionale C^α-Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$, sei $r > 0$. Dann ist*

$$rM = \{rx : \, x \in M\} \tag{4.31}$$

ebenfalls eine k-dimensionale C^α-Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$. Ist $f : rM \to \mathbb{R}$, so gilt

$$f \text{ integrierbar über } rM \quad \Leftrightarrow \quad x \mapsto f(rx) \text{ integrierbar über } M \,, \tag{4.32}$$

und in diesem Fall ist

$$\int_{rM} f(\xi) \, dS(\xi) = r^k \int_M f(r\xi) \, dS(\xi) \,. \tag{4.33}$$

Beweis: Ist $\Phi : T \to U \cap M$ Karte für M, so ist

$$\tilde{\Phi} : T \to rU \cap rM \,, \quad \tilde{\Phi}(t) = r\Phi(t) \,,$$

Karte für rM. Die erste Behauptung folgt nun aus Satz 2.3. Zum Beweis von (4.32) und (4.33) bemerken wir, dass

$$\tilde{g}(t) = \det(J_{\tilde{\Phi}}(t)^T J_{\tilde{\Phi}}(t)) = \det(r^2 J_\Phi(t)^T J_\Phi(t)) = r^{2k} g(t) \,,$$

also gilt für jede Karte

$$\int_T f(\tilde{\Phi}(t)) \sqrt{\tilde{g}(t)} \, dt = \int_T f(r\Phi(t)) r^k \sqrt{g(t)} \, dt \,.$$

Summation über eine Zerlegung der Eins liefert die Behauptung. □

5 Der Integralsatz von Gauß

Wir betrachten offene Mengen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft, dass $\partial\Omega$ eine $(n-1)$-dimensionale C^1-Mannigfaltigkeit ist und Ω lokal nur auf einer Seite von $\partial\Omega$ liegt.

Definition 5.1 (C^1-Rand)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wir sagen, dass Ω einen C^1-Rand hat, falls gilt: Für alle $a \in \partial\Omega$ gibt es eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ mit $a \in U$ und eine Funktion $f \in C^1(U)$ so dass $\nabla f(x) \neq 0$ für alle $x \in U$ gilt und

$$\partial\Omega \cap U = \{x : x \in U, f(x) = 0\}\,, \tag{5.1}$$
$$\Omega \cap U = \{x : x \in U, f(x) < 0\}\,. \tag{5.2}$$

□

Definition 5.2 (Tangentialvektor, Tangentialraum)
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale C^1-Mannigfaltigkeit, sei $a \in M$. Ein $v \in \mathbb{R}^n$ heißt Tangentialvektor an M in a, falls eine stetig differenzierbare Kurve $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ existiert (wobei I ein offenes Intervall im $\mathbb{R}$ mit $0 \in I$ ist) mit

$$\varphi(0) = a\,, \quad \varphi'(0) = v\,, \quad \varphi(I) \subset M\,. \tag{5.3}$$

Die Menge

$$T_a(M) = \{v : v \text{ ist Tangentialvektor an } M \text{ in } a\} \tag{5.4}$$

heißt der Tangentialraum an M in a. □

Satz 5.3 (Charakterisierung des Tangentialraums)
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale C^1-Mannigfaltigkeit, sei $a \in M$, sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $a \in U$. Dann gilt:

(i) $T_a(M)$ ist ein k-dimensionaler Unterraum des $\mathbb{R}^n$.

(ii) Ist $\Phi : T \to M \cap U$ eine Karte von M mit $\Phi(c) = a$, $c \in T$, $T \subset \mathbb{R}^k$ offen, so bilden die k Spalten der Funktionalmatrix $J_\Phi(c)$, das heißt die Vektoren

$$\{\partial_1\Phi(c), \ldots, \partial_k\Phi(c)\}$$

eine Basis von $T_a(M)$.

(iii) Ist

$$M \cap U = \{x : x \in U,\ f(x) = 0\}$$

mit $f \in C^1(U; \mathbb{R}^{n-k})$ und $\operatorname{rang} J_f(a) = n - k$, so ist

$$T_a(M) = \{v : v \in \mathbb{R}^n,\ \langle v, \nabla f_i(a)\rangle = 0 \text{ für alle } i,\ 1 \leq i \leq n-k\}\,. \tag{5.5}$$

Beweis: Sei V_1 der von den Spalten von $J_\Phi(c)$ aufgespannte Unterraum und

$$V_2 = \{v : v \in \mathbb{R}^n,\ \langle v, \nabla f_i(a)\rangle = 0 \text{ für alle } i,\ 1 \le i \le n-k\}\,.$$

Wegen $\dim(V_1) = \dim(V_2) = k$ genügt es zu zeigen, dass

$$V_1 \subset T_a(M) \subset V_2\,. \tag{5.6}$$

Zum Beweis der ersten Inklusion sei

$$v = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \partial_j \Phi(c)$$

ein beliebiges Element von V_1. Wir definieren für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ eine Abbildung $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ durch

$$\varphi(s) = \Phi(c_1 + \lambda_1 s, c_2 + \lambda_2 s, \dots, c_k + \lambda_k s)\,.$$

Dann ist $\varphi(s) \in M$ für alle s, $\varphi(0) = a$, und aus der Kettenregel folgt

$$\varphi'(0) = J_\Phi(c) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \partial_j \Phi(c) = v\,,$$

also $v \in T_a(M)$. Zum Beweis der zweiten Inklusion sei $v \in T_a(M)$. Wähle $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ gemäß Definition 5.2, dann gilt $f(\varphi(s)) = 0$ für $|s|$ hinreichend klein, also gilt für alle i mit $1 \le i \le n-k$

$$0 = (f_i \circ \varphi)'(0) = \langle \nabla f_i(\varphi(0)), \varphi'(0)\rangle = \langle \nabla f_i(a), v\rangle\ ,$$

also ist $v \in V_2$. □

In Satz 5.3 ergibt sich aus (iii) im Spezialfall $\dim M = n-1$, dass $\dim T_a(M) = n-1$ und dass $\nabla f(a)$ auf $T_a(M)$ senkrecht steht.

Satz 5.4 (Existenz einer stetigen äußeren Normalen)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, Ω habe einen C^1-Rand. Dann gibt es genau ein Vektorfeld $\nu : \partial\Omega \to \mathbb{R}^n$ mit den folgenden Eigenschaften: Für alle $a \in \partial\Omega$ gilt

$$\nu(a) \perp T_a(\partial\Omega)\,, \quad \|\nu(a)\|_2 = 1\,, \tag{5.7}$$

für alle $a \in \partial\Omega$ gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit

$$a + t\nu(a) \notin \Omega\,, \quad \textit{für alle } t \in (0,\varepsilon)\,. \tag{5.8}$$

Das Vektorfeld ν ist stetig auf $\partial\Omega$. Der Vektor $\nu(a)$ heißt der äußere (Einheits-) Normalenvektor an $\partial\Omega$ in a.

Beweis: Nach Satz 5.3 ist $\dim T_a(\partial\Omega) = n-1$ und $\nabla f(a) \perp T_a(\partial\Omega)$, also gilt für $z \in \mathbb{R}^n$

$$z \perp T_a(\partial\Omega)\,, z \neq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad z = \lambda \nabla f(a) \quad \text{für ein } \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0.$$

Für solche z und hinreichend kleines $t > 0$ gilt (mit f wie in Definition 5.1)

$$f(a+tz) = f(a) + t\,\langle z, \nabla f(a)\rangle + o(t) = t\lambda \|\nabla f(a)\|_2^2 + o(t) = t\left(\lambda \|\nabla f(a)\|_2^2 + \frac{o(t)}{t}\right),$$

also folgt für hinreichend kleine t

$$a + tz \notin \Omega \qquad \Leftrightarrow \qquad f(a+tz) > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda > 0\,.$$

Falls außerdem $\|z\|_2 = 1$ gelten soll, ist also

$$\nu(a) = \frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|_2} \tag{5.9}$$

der eindeutig bestimmte Vektor, welcher (5.7) und (5.8) erfüllt. Da f stetig differenzierbar ist, ist ν stetig in a, und da a beliebig war, ist ν stetig auf $\partial\Omega$. □

Wir betrachten als Spezialfall das Normalenfeld an den Graphen einer Funktion. Sei dazu $x \in \mathbb{R}^n$ zerlegt in

$$x = (x', x_n)\,, \quad x' \in \mathbb{R}^{n-1}\,, \quad x_n \in \mathbb{R}\,, \tag{5.10}$$

und wir betrachten folgende Situation: $W \subset \mathbb{R}^{n-1}$ ist offen und beschränkt, $h \in C^1(W)$ mit $h(W) \subset I = (a,b) \subset \mathbb{R}$,

$$M = \operatorname{graph}(h) = \{(x', x_n) : x' \in W,\ x_n = h(x')\} \subset W \times I\,, \tag{5.11}$$

$$A = \{(x', x_n) : x' \in W\,,\ x_n \in I\,,\ x_n < h(x')\}\,. \tag{5.12}$$

Nach Konstruktion im Beweis von Satz 5.4, siehe (5.9) mit $f(x) = x_n - h(x')$, gilt für $x \in M$

$$\nu(x) = \frac{(-\nabla h(x'), 1)}{\|(-\nabla h(x'), 1)\|_2}\,. \tag{5.13}$$

Satz 5.5 (Partielle Integration im $\mathbb{R}^n$)
Es liege die Situation (5.10) – (5.13) vor. Dann gilt für alle $f \in C^1(W \times I)$ mit kompaktem Träger in $W \times I$

$$\int_A \partial_i f(x)\,dx = \int_M f(\xi)\nu_i(\xi)\,dS(\xi)\,, \quad 1 \leq i \leq n\,. \tag{5.14}$$

Beweis: Da f kompakten Träger hat, sind f und $\partial_i f$ stetig und beschränkt, also existieren alle Integrale, die im Folgenden auftreten.
Fall 1: $i = n$. Es ist (Fubini)

$$\begin{aligned}
\int_A \partial_n f(x)\,dx &= \int_W \int_a^{h(x')} \partial_n f(x', x_n)\,dx_n\,dx' = \int_W f(x', h(x'))\,dx' \\
&= \int_W f(x', h(x'))\nu_n(x', h(x'))\sqrt{1 + \|\nabla h(x')\|_2^2}\,dx' \\
&= \int_M f(\xi)\nu_n(\xi)\,dS(\xi)\,,
\end{aligned}$$

da $g(x') = 1+\|\nabla h(x')\|_2^2$ gilt für die Gramsche Determinante der Funktion $x' \mapsto (x', h(x'))$, siehe (4.28).
Fall 2: Sei $1 \le i \le n-1$. Die durch

$$F(x') = \int_a^{h(x')} f(x', x_n)\, dx_n$$

definierte Funktion $F : W \to \mathbb{R}$ hat kompakten Träger in W, also gilt (Übungsaufgabe)

$$0 = \int_W \partial_i F(x')\, dx' = \int_W \partial_i \left(\int_a^{h(x')} f(x', x_n)\, dx_n \right) dx' \,.$$

Es folgt weiter (unter Verwendung von Fubini und (5.13))

$$\begin{aligned}
0 &= \int_W \left[\int_a^{h(x')} \partial_i f(x', x_n)\, dx_n + f(x', h(x'))\partial_i h(x') \right] dx' \\
&= \int_W \int_a^{h(x')} \partial_i f(x', x_n)\, dx_n\, dx' + \int_W f(x', h(x'))\partial_i h(x')\, dx' \\
&= \int_A \partial_i f(x)\, dx - \int_W f(x', h(x'))\nu_i(x', h(x')) \sqrt{1 + \|\nabla h(x')\|_2^2}\, dx' \\
&= \int_A \partial_i f(x)\, dx - \int_M f(\xi)\nu_i(\xi)\, dS(\xi)\,,
\end{aligned}$$

□

Folgerung 5.6 *Satz 5.5 gilt auch, falls A auf der anderen Seite von M liegt, das heißt, falls*

$$A = \{(x', x_n) : \, x' \in W \,,\, x_n \in I \,,\, x_n > h(x')\} \,, \tag{5.15}$$

gilt. Die äußere Normale ist dann gegeben durch

$$\nu(x) = \frac{(\nabla h(x'), -1)}{\|(\nabla h(x'), -1)\|_2} \,. \tag{5.16}$$

Ebenso gilt Satz 5.5 auch, falls die Darstellung von M nach einer anderen Koordinate aufgelöst ist, also

$$M = \{(x_1, \dots, x_n) : (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in W \,,\, x_i = h(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)\} \tag{5.17}$$

und A, ν entsprechend.

Beweis: Entweder durch Modifikation des Beweises von Satz 5.6 oder durch Transformation auf die Situation des Satzes. □

Satz 5.7 (Gaußscher Integralsatz)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, Ω habe einen C^1-Rand. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $\overline{\Omega} \subset U$, sei $F : U \to \mathbb{R}^n$ ein C^1-Vektorfeld. Dann gilt

$$\int_\Omega \operatorname{div} F(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} \langle F(\xi), \nu(\xi) \rangle \, dS(\xi) \,. \tag{5.18}$$

Beweis: Für jedes $x \in \Omega$ wählen wir eine offene Menge $U(x)$ mit $x \in U(x) \subset \Omega$. Für jedes $x \in \partial\Omega$ betrachten wir zunächst gemäß Definition 5.1 eine lokale Darstellung

$$\partial\Omega \cap U' = \{f = 0\}\,, \quad \Omega \cap U' = \{f < 0\}\,,$$

mit $f \in C^1(U')$ und $\nabla f \neq 0$ überall. Nach dem Satz über implizite Funktionen gibt es offene Mengen (die wir o.B.d.A. konvex wählen können) $W(x) \subset \mathbb{R}^{n-1}$, $I(x) \subset \mathbb{R}$ und $h_x : W(x) \to I(x)$, $h_x \in C^1(W(x))$ mit

$$\begin{aligned} U(x) \cap \partial\Omega &= \{(x', x_n) : x_n = h_x(x')\}\,, \\ U(x) \cap \Omega &= \{(x', x_n) : x_n < h_x(x')\}\,, \\ U(x) &= W(x) \times I(x)\,, \end{aligned}$$

oder mit ">" statt "<" beziehungsweise aufgelöst nach x_i statt x_n. Gemäß Satz 4.4, angewendet auf $K = \Omega \cup \partial\Omega$, wählen wir endlich viele $U(x^j)_{1\le j\le N}$ und eine zugeordnete C^∞-Zerlegung der Eins $(\alpha_j)_{1\le j\le N}$. Wir nummerieren so, dass $x^1, \dots, x^M \in \partial\Omega$, $x^{M+1}, \dots, x^N \in \Omega$. Es gilt nun

$$\begin{aligned} \int_\Omega \operatorname{div} F(x)\,dx &= \int_\Omega \sum_{k=1}^n \partial_k \left(\sum_{j=1}^N \alpha_j F_k\right)(x)\,dx \\ &= \int_\Omega \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^n \partial_k(\alpha_j F_k)(x)\,dx \\ &= \sum_{j=1}^N \int_\Omega \operatorname{div}(\alpha_j F)(x)\,dx\,, \end{aligned}$$

sowie

$$\int_{\partial\Omega} \langle F(\xi), \nu(\xi)\rangle\; dS(\xi) = \sum_{j=1}^N \int_{\partial\Omega} \langle \alpha_j(\xi) F(\xi), \nu(\xi)\rangle\; dS(\xi)\,.$$

Es genügt daher, den Satz für $\alpha_j F$, $1 \le j \le N$, zu beweisen.
Fall 1: $j \le M$. Wir wenden Satz 5.5 an mit

$$f = \alpha_j F_k\,, \quad A = \Omega \cap U(x^j)\,, \quad M = \partial\Omega \cap U(x^j)\,,$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \int_\Omega \operatorname{div}(\alpha_j F)(x)\,dx &= \sum_{k=1}^n \int_\Omega \partial_k(\alpha_j F_k)(x)\,dx = \sum_{k=1}^n \int_{\partial\Omega} \alpha_j(\xi) F_k(\xi) \nu_k(\xi)\,dS(\xi) \\ &= \int_{\partial\Omega} \langle \alpha_j(\xi) F(\xi), \nu(\xi)\rangle\; dS(\xi)\,. \end{aligned}$$

Fall 2: $M < j \le N$. Es ist $U(x^j) \subset \Omega$, also $\operatorname{supp}(\alpha_j) \subset \Omega$, also

$$\int_{\partial\Omega} \langle \alpha_j(\xi) F(\xi), \nu(\xi)\rangle\; dS(\xi) = 0\,,$$

und (Übungsaufgabe)

$$\int_\Omega \operatorname{div}(\alpha_j F)(x)\,dx = \sum_{k=1}^n \int_\Omega \partial_k(\alpha_j F_k)(x)\,dx = 0\,.$$

□

Satz 5.8 (1. Greensche Formel)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, Ω habe einen C^1-Rand. Seien $f \in C^1(U)$, $g \in C^2(U)$, wobei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen ist mit $\overline{\Omega} \subset U$. Dann gilt

$$\int_\Omega f(x)\Delta g(x)\,dx = -\int_\Omega \langle \nabla f(x), \nabla g(x)\rangle\,dx + \int_{\partial\Omega} f(\xi)\partial_\nu g(\xi)\,dS(\xi)\,, \tag{5.19}$$

wobei

$$\partial_\nu g(\xi) = \langle \nabla g(\xi), \nu(\xi)\rangle$$

die Richtungsableitung in Richtung der äußeren Normalen bezeichnet. ($\partial_\nu g$ heißt auch die Normalenableitung von g.)

Beweis: Sei $F : U \to \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$F(x) = f(x)\nabla g(x)\,,$$

dann ist

$$\langle F(\xi), \nu(\xi)\rangle = f(\xi)\partial_\nu g(\xi)\,, \quad \xi \in M\,,$$

und

$$\operatorname{div} F(x) = \langle \nabla f(x), \nabla g(x)\rangle + f(x)\operatorname{div}(\nabla g(x)) = \langle \nabla f(x), \nabla g(x)\rangle + f(x)\Delta g(x)\,.$$

Die Behauptung folgt nun aus Satz 5.7. □

Folgerung 5.9 (2. Greensche Formel)
Es liege die Situation aus Satz 5.8 vor. Dann gilt (setze $f = 1$)

$$\int_\Omega \Delta g(x)\,dx = \int_{\partial\Omega} \partial_\nu g(\xi)\,dS(\xi)\,. \tag{5.20}$$

Ist außerdem $f \in C^2(U)$, so gilt

$$\int_\Omega (f\Delta g - g\Delta f)(x)\,dx = \int_{\partial\Omega} (f\partial_\nu g - g\partial_\nu f)(\xi)\,dS(\xi)\,. \tag{5.21}$$

□

Wir können den Satz von Gauß heranziehen, um die Divergenz eines Vektorfeldes F zu interpretieren. Sei F in einer Umgebung eines Punktes $x \in \mathbb{R}^n$ stetig, sei $B(x;\varepsilon)$ die offene ε-Kugel um x. Der Ausdruck

$$\int_{\partial B(x;\varepsilon)} \langle F(\xi), \nu(\xi)\rangle\,dS(\xi)$$

gibt den Fluss einer "Größe" durch den Rand von $B(x;\varepsilon)$ an, das wird weiter unten erläutert. Der Ausdruck

$$\frac{1}{\operatorname{vol}(B(x;\varepsilon))}\int_{\partial B(x;\varepsilon)} \langle F(\xi), \nu(\xi)\rangle\,dS(\xi) \tag{5.22}$$

skaliert diesen Fluss mit dem Volumen der Kugel.

Satz 5.10 (Divergenz als Quellstärke)
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F : U \to \mathbb{R}^n$ ein C^1-Vektorfeld. Dann gilt für alle $x \in U$

$$\operatorname{div} F(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\operatorname{vol}(B(x;\varepsilon))} \int_{\partial B(x;\varepsilon)} \langle F(\xi), \nu(\xi) \rangle \, dS(\xi) \,. \tag{5.23}$$

Beweis: Für $\varepsilon > 0$ mit $B(x;\varepsilon) \subset U$ gilt mit dem Satz von Gauß

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{\operatorname{vol}(B(x;\varepsilon))} \int_{\partial B(x;\varepsilon)} \langle F(\xi), \nu(\xi) \rangle \, dS(\xi) - \operatorname{div} F(x) \right| \\
&= \frac{1}{\operatorname{vol}(B(x;\varepsilon))} \left| \int_{B(x;\varepsilon)} \operatorname{div} F(y) - \operatorname{div} F(x) \, dy \right| \quad \le \sup_{y \in B(x;\varepsilon)} |\operatorname{div} F(y) - \operatorname{div} F(x)| \,.
\end{aligned}$$

Da $\operatorname{div} F$ stetig ist, folgt die Behauptung. □

Wir erläutern, warum wir uns den Ausdruck

$$\int_{\partial B(x;\varepsilon)} \langle F(\xi), \nu(\xi) \rangle \, dS(\xi) \tag{5.24}$$

als Fluss einer Größe durch den Rand von $B(x;\varepsilon)$ vorstellen können. Statt dieses speziellen Randes betrachten wir dabei eine allgemeine $(n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit M im $\mathbb{R}^n$.

Nehmen wir an, eine Größe "strömt" im $\mathbb{R}^n$ in eine feste Richtung mit konstanter Intensität. Dieser Vorgang kann beschrieben werden durch einen Vektor $F \in \mathbb{R}^n$. Dessen Zerlegung

$$F = \|F\|_2 \cdot \frac{F}{\|F\|_2}$$

beinhaltet die Richtung $F/\|F\|_2$ des Flusses[1] und die Menge $\|F\|_2$ der Größe, welche pro Zeiteinheit durch einen senkrecht auf der Flussrichtung stehenden $(n-1)$-dimensionalen Einheitswürfel (Quadrat für $n = 3$, Intervall für $n = 2$) strömt.

Sei E ein solcher Einheitswürfel. Wir denken uns einen zweiten Würfel W, welcher im Winkel α schräg zu E steht, aber so, dass durch E und W die gleichen "Teilchen" des Flusses strömen. Es ist dann

$$1 = \operatorname{vol}_{n-1}(E) = \operatorname{vol}_{n-1}(W) \cdot \cos\alpha \,.$$

Der Gesamtfluss pro Zeiteinheit durch E und W ist gegeben durch $\|F\|_2$. Man definiert nun die **Flussdichte** auf E bzw. W durch

$$\frac{\|F\|_2}{\operatorname{vol}_{n-1}(E)} = \|F\|_2 \,, \quad \text{bzw.} \quad \frac{\|F\|_2}{\operatorname{vol}_{n-1}(W)} = \|F\|_2 \cos\alpha \,.$$

(Der erste Ausdruck ist ein Spezialfall des zweiten für $\alpha = 0$.) Ist $n \in \mathbb{R}^n$ die Einheitsnormale auf W in Flussrichtung, so ist der Winkel zwischen F und n gleich α, und

$$\langle F, n \rangle = \|F\|_2 \cos\alpha \tag{5.25}$$

[1] Bemerkung: In der Theorie der dynamischen Systeme bezeichnet der Begriff "Fluss" etwas anderes, nämlich die Lösungen eines solchen Systems in Abhängigkeit von Zeit und Anfangswert.

gibt die Flussdichte auf W an.

Wir betrachten nun die Situation eines stationären (d.h. zeitlich konstanten) aber im Ort variablen Flusses durch eine vorgegebene $(n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit M im $\mathbb{R}^n$. Im Falle $n = 3$ ist M ein Flächenstück mit Einheitsnormale $n(\xi)$ im Punkt $\xi \in M$. Der Fluss durch M wird beschrieben durch ein Vektorfeld $F : M \to \mathbb{R}^3$. Im Sinne der obigen Erläuterungen stellt die Funktion

$$\xi \mapsto \langle F(\xi), n(\xi) \rangle \ , \quad \xi \in M \, , \tag{5.26}$$

die Flussdichte auf M dar. Das Oberflächenintegral

$$\int_M \langle F(\xi), n(\xi) \rangle \; dS(\xi) \tag{5.27}$$

liefert den Gesamtfluss der betrachteten Größe durch M als zeitliche Rate (= Menge pro Zeiteinheit). Der Satz von Gauß besagt nun, dass die pro Zeiteinheit durch $\partial\Omega$ strömende Menge gleich dem Integral über die Quellstärke des Flusses in Ω ist.

Ein allgemeinerer Fall liegt vor, wenn die Flussdichte nicht nur vom Ort, sondern auch von der Zeit abhängt, also $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. In diesem Fall wird (5.27) zu

$$\int_M \langle F(t, \xi), n(\xi) \rangle \; dS(\xi) \, . \tag{5.28}$$

Die Gesamtmenge der Größe, die in einem Zeitintervall $[t_1, t_2]$ durch M fließt, ist dann gleich

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_M \langle F(t, \xi), n(\xi) \rangle \; dS(\xi) \, dt \, . \tag{5.29}$$

Wir wollen ein allgemeines Erhaltungsgesetz für eine solche Größe formulieren. Sei wieder $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ offen und $M = \partial\Omega$ eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit mit der äußeren Einheitsnormale $n(\xi)$. Sei $t \in [t_1, t_2]$, sei $x \mapsto \varphi(t, x)$ die Dichte einer Größe φ, das heißt, die Gesamtmenge der Größe in Ω zum Zeitpunkt t ist gegeben durch

$$\int_\Omega \varphi(t, x) \, dx \, . \tag{5.30}$$

Sei F die Flussdichte, die zu dieser Größe gehört. Das Erhaltungsgesetz soll besagen, dass sich der Gesamtinhalt der Größe in Ω nur dadurch ändert, dass die Größe über den Rand zu- oder abfliesst. Das leistet die Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \int_\Omega \varphi(t, x) \, dx = - \int_{\partial\Omega} \langle F(t, \xi), n(\xi) \rangle \; dS(\xi) \, . \tag{5.31}$$

Das Minuszeichen kommt daher, dass das Skalarprodukt $\langle F, n \rangle$ für Zuflüsse negativ und für Abflüsse positiv ist. Man nennt (5.31) auch die **Integralform** des Erhaltungsgesetzes. Aus dem Gaußschen Satz folgt nun, dass

$$\int_{\partial\Omega} \langle F(t, \xi), n(\xi) \rangle \; dS(\xi) = \int_\Omega \operatorname{div} F(t, x) \, dx \tag{5.32}$$

gilt. Es folgt, dass für alle t gilt

$$\int_\Omega \partial_t \varphi(t,x) + \operatorname{div} F(t,x)\, dx = 0\,. \tag{5.33}$$

Gilt das Erhaltungsgesetz (5.31) für “beliebige Gebiete” Ω, so erhalten wir seine **differentielle** Form,

$$\partial_t \varphi(t,x) + \operatorname{div} F(t,x) = 0\,, \quad \text{für alle } x, t. \tag{5.34}$$

6 Der Integralsatz von Stokes

Wir beschäftigen uns zunächst mit einer zweidimensionalen Situation. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen, beschränkt, mit einem C^1-Rand $\partial\Omega$. Wir nehmen an, es gebe eine stetig differenzierbare Parametrisierung $r : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, mit $r(a) = r(b)$, so dass $r : [a,b) \to \partial\Omega$ bijektiv ist und $r'(t) \neq 0$ gilt für alle $t \in [a,b]$.

Sei $\nu : \partial\Omega \to \mathbb{R}^2$ das zugehörige Normalenfeld, siehe Satz 5.4. Für $a \in \partial\Omega$, $a = r(t)$ ist

$$T_a(\partial\Omega) = \operatorname{span}\{r'(t)\} = \{\lambda r'(t) : \lambda \in \mathbb{R}\},$$

also

$$r'(t) \perp \nu(r(t)).$$

Durch die Parametrisierung r wird ein Durchlaufsinn für $\partial\Omega$ festgelegt. Wir sagen, dass $\partial\Omega$ von r im **mathematisch positiven Sinn** durchlaufen wird, falls

$$\det(\nu(r(t)) \mid r'(t)) > 0. \tag{6.1}$$

Das ist dann der Fall, wenn

$$\nu(r(t)) = \frac{1}{\|r'(t)\|_2} \begin{pmatrix} r_2'(t) \\ -r_1'(t) \end{pmatrix}, \quad r'(t) = \|r'(t)\|_2 \begin{pmatrix} -\nu_2(r(t)) \\ \nu_1(r(t)) \end{pmatrix}. \tag{6.2}$$

Anschaulich bedeutet das, dass $\partial\Omega$ entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen wird, und dass Ω immer "links von der Richtung $r'(t)$ liegt".

Satz 6.1 (Satz von Stokes im $\mathbb{R}^2$)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen und beschränkt, Ω habe einen C^1-Rand $\partial\Omega$, welcher von der Parametrisierung r im mathematisch positiven Sinn durchlaufen wird. Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen mit $\overline{\Omega} \subset U$, sei $F : U \to \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt

$$\int_r F(x) \cdot dx = \int_\Omega (\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1)(x)\, dx. \tag{6.3}$$

Beweis: Aus der Definition des Kurvenintegrals und aus (6.2) folgt

$$\begin{aligned}
\int_r F(x) \cdot dx &= \int_a^b \langle F(r(t)), r'(t) \rangle \, dt = \int_a^b \left\langle F(r(t)), \begin{pmatrix} -\nu_2(r(t)) \\ \nu_1(r(t)) \end{pmatrix} \right\rangle \|r'(t)\|_2 \, dt \\
&= \int_a^b \left\langle \begin{pmatrix} F_2(r(t)) \\ -F_1(r(t)) \end{pmatrix}, \nu(r(t)) \right\rangle \|r'(t)\|_2 \, dt = \int_{\partial\Omega} \left\langle \begin{pmatrix} F_2 \\ -F_1 \end{pmatrix}(\xi), \nu(\xi) \right\rangle dS(\xi) \\
&= \int_\Omega (\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1)(x)\, dx,
\end{aligned}$$

letzteres nach dem Satz von Gauß. □

Für $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$F(x) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

gilt also

$$\int_{\partial\Omega} F(x)\cdot dx = \int_\Omega 1\,dx = \mathrm{vol}_2(\Omega)\,,$$

also etwa für den Einheitskreis $\Omega = B_1(0;1)$, $r(t) = (\cos t, \sin t)$

$$\mathrm{vol}_2(\Omega) = \int_0^{2\pi} \langle F(r(t)), r'(t)\rangle\, dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin^2(t) + \cos^2(t)\, dt = \pi\,.$$

Wir beschäftigen uns nun mit dem Satz von Stokes im $\mathbb{R}^3$. Dieser involviert die sogenannte **Rotation** eines Vektorfeldes $F : V \to \mathbb{R}^3$, $V \subset \mathbb{R}^3$ offen, definiert durch

$$\mathrm{rot}\, F : V \to \mathbb{R}^3\,, \tag{6.4}$$

$$(\mathrm{rot}\, F)(x) = (\partial_2 F_3(x) - \partial_3 F_2(x), \partial_3 F_1(x) - \partial_1 F_3(x), \partial_1 F_2(x) - \partial_2 F_1(x))\,. \tag{6.5}$$

Sei M eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^3$. Wir betrachten nur den Spezialfall, dass M durch eine einzige Karte beschrieben wird,

$$M = \Phi(T)\,,\quad \Phi : T \to \mathbb{R}^3\,,\quad T \subset \mathbb{R}^2 \text{ offen.} \tag{6.6}$$

Sei nun $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen und beschränkt, Ω habe einen C^1-Rand $\partial\Omega$, es gelte

$$\overline{\Omega} \subset T\,.$$

Wir betrachten

$$A = \Phi(\overline{\Omega}) \tag{6.7}$$

und definieren (nur für den Rest dieses Abschnitts)

$$\partial A = \Phi(\partial\Omega)\,. \tag{6.8}$$

Unter ∂A stellen wir uns den eindimensionalen Rand der zweidimensionalen Mannigfaltigkeit $\Phi(\Omega)$ vor. Sei nun $V \subset \mathbb{R}^3$ offen, $M \subset V$, $F : V \to \mathbb{R}^3$. Der **Satz von Stokes** besagt, dass unter geeigneten Voraussetzungen gilt

$$\int_{\partial A} F(x)\cdot dx = \int_A \langle (\mathrm{rot}\, F)(\xi), \nu(\xi)\rangle\, dS(\xi)\,. \tag{6.9}$$

Hierbei müssen der Umlaufsinn der Randkurve ∂A und die Normalenrichtung $\nu(\xi)$ zueinander passend gewählt werden. Das erreicht man, indem man erstens ∂A parametrisiert durch eine Kurve $\Phi\circ r : [a,b] \to A$, wobei $r : [a,b] \to T$ eine Kurve ist, welche $\partial\Omega$ im mathematisch positiven Sinn durchläuft, und zweitens das Vorzeichen der Normalen in einem Punkt $\xi = \Phi(u)$, $u \in \Omega$, festlegt durch ("$\times$" bezeichnet das Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$)

$$\nu(\Phi(u)) = \frac{1}{\|\partial_1\Phi(u) \times \partial_2\Phi(u)\|_2}\, \partial_1\Phi(u) \times \partial_2\Phi(u)\,. \tag{6.10}$$

Es ergibt sich dann, da $(\Phi\circ r)'(t) = J_\Phi(r(t))r'(t)$,

$$\int_{\partial A} F(x)\cdot dx = \int_{\Phi\circ r} F(x)\cdot dx = \int_a^b \langle F(\Phi(r(t))), J_\Phi(r(t))r'(t)\rangle\, dt \tag{6.11}$$

$$= \int_a^b \left\langle J_\Phi(r(t))^T F(\Phi(r(t))), r'(t)\right\rangle\, dt \tag{6.12}$$

$$= \int_r \tilde{F}(u)\cdot du\,, \tag{6.13}$$

wobei $\tilde{F} : T \to \mathbb{R}^2$ definiert ist durch

$$\tilde{F}(u) = J_\Phi(u)^T F(\Phi(u)) . \tag{6.14}$$

Wir können jetzt Satz 6.1 anwenden und erhalten

$$\int_r \tilde{F}(u) \cdot du = \int_\Omega (\partial_1 \tilde{F}_2 - \partial_2 \tilde{F}_1)(u) \, du . \tag{6.15}$$

Nach (6.14) hat $\tilde{F}$ die komponentenweise Form

$$\tilde{F}_i(u) = \langle \partial_i \Phi(u), F(\Phi(u)) \rangle \ , \quad i = 1, 2 . \tag{6.16}$$

Aus der Produktregel (für Skalarprodukte) und der Kettenregel folgt

$$\partial_1 \tilde{F}_2(u) = \langle \partial_1 \partial_2 \Phi(u), F(\Phi(u)) \rangle + \langle \partial_2 \Phi(u), J_F(\Phi(u)) \partial_1 \Phi(u) \rangle \tag{6.17}$$

$$\partial_2 \tilde{F}_1(u) = \langle \partial_2 \partial_1 \Phi(u), F(\Phi(u)) \rangle + \langle \partial_1 \Phi(u), J_F(\Phi(u)) \partial_2 \Phi(u) \rangle \tag{6.18}$$

Es folgt, falls Φ zweimal stetig differenzierbar ist,

$$(\partial_1 \tilde{F}_2 - \partial_2 \tilde{F}_1)(u) = \langle \partial_2 \Phi(u), J_F(\Phi(u)) \partial_1 \Phi(u) \rangle - \langle \partial_1 \Phi(u), J_F(\Phi(u)) \partial_2 \Phi(u) \rangle \ . \tag{6.19}$$

Die rechten Seite von (6.19) hat die Form

$$\langle y, Ax \rangle - \langle x, Ay \rangle \ , \quad x, y \in \mathbb{R}^3 \, , \, A \in \mathbb{R}^{3,3} \, .$$

Es gilt die algebraische Identität

$$\langle y, Ax \rangle - \langle x, Ay \rangle = \sum_{i,j=1}^{3} y_i a_{ij} x_j - \sum_{i,j=1}^{3} x_i a_{ij} y_j = \langle \begin{pmatrix} a_{32} - a_{23} \\ a_{13} - a_{31} \\ a_{21} - a_{12} \end{pmatrix} \, , \, x \times y \rangle$$

Anwendung auf (6.19) liefert mit (6.10)

$$(\partial_1 \tilde{F}_2 - \partial_2 \tilde{F}_1)(u) = \langle \begin{pmatrix} \partial_2 F_3 - \partial_3 F_2 \\ \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3 \\ \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 \end{pmatrix} (\Phi(u)) \, , \, \partial_1 \Phi(u) \times \partial_2 \Phi(u) \rangle \tag{6.20}$$

$$= \langle (\operatorname{rot} F)(\Phi(u)), \nu(\Phi(u)) \rangle \, \| \partial_1 \Phi(u) \times \partial_2 \Phi(u) \|_2 . \tag{6.21}$$

Es ist also

$$\int_\Omega (\partial_1 \tilde{F}_2 - \partial_2 \tilde{F}_1)(u) \, du = \int_\Omega \langle (\operatorname{rot} F)(\Phi(u)), \nu(\Phi(u)) \rangle \, \| \partial_1 \Phi(u) \times \partial_2 \Phi(u) \|_2 \, du . \tag{6.22}$$

Wir können das Integral auf der rechten Seite dieser Gleichung in ein Oberflächenintegral über M überführen. Sei dazu $B = (x \,|\, y) \in \mathbb{R}^{3,2}$ eine Matrix mit den Spalten x und y. Es gilt die algebraische Identität

$$\det(B^T B) = \det \begin{pmatrix} x^T x & x^T y \\ y^T x & y^T y \end{pmatrix} = \|x\|_2^2 \|y\|_2^2 - \langle x, y \rangle^2 = \|x \times y\|_2^2 . \tag{6.23}$$

Mit $x = \partial_1 \Phi(u)$, $y = \partial_2 \Phi(u)$ folgt also, dass für die Gramsche Determinante $g(u)$ der Karte Φ gilt

$$\sqrt{g(u)} = \sqrt{\det(J_\Phi(u)^T J_\Phi(u))} = \| \partial_1 \Phi(u) \times \partial_2 \Phi(u) \|_2 . \tag{6.24}$$

Die Gleichungen (6.11), (6.15), (6.22) und (6.24) zusammengenommen ergeben die Formel (6.9) des Satzes von Stokes. Wir haben also bewiesen:

Satz 6.2 (Satz von Stokes im $\mathbb{R}^3$)
Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit, welche durch eine globale Karte $\Phi : T \to M$ beschrieben wird, sei Φ zweimal stetig differenzierbar. Seien $A \subset M$ und $F : V \to \mathbb{R}^3$ wie in (6.6) – (6.9) beschrieben, sei der Umlaufsinn von ∂A und die Normalenrichtung $\nu(\xi)$ passend gewählt wie beschrieben. Dann gilt

$$\int_{\partial A} F(x) \cdot dx = \int_A \langle (\operatorname{rot} F)(\xi), \nu(\xi) \rangle \, dS(\xi)\,. \tag{6.25}$$

$\square$

Aus dem Satz von Stokes erhalten wir eine Interpretation der Rotation eines Vektorfelds F. Sei F in der Umgebung eines Punktes $x \in \mathbb{R}^3$ stetig, sei $A_\varepsilon \subset \mathbb{R}^3$ eine zweidimensionale Kreisscheibe um x mit Radius ε und Normalenvektor ν, letzterer passend gewählt zum Umlaufsinn des Randes von A_ε. Der Ausdruck

$$\frac{1}{\pi\varepsilon^2} \int_{\partial A_\varepsilon} F(x) \cdot dx$$

beschreibt die Wirbelstärke von F, bezogen auf die Kreisfläche.

Satz 6.3 (Rotation als Wirbelstärke)
Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen und $F : U \to \mathbb{R}^3$ ein C^1-Vektorfeld. Ist A_ε eine Kreisscheibe wie oben beschrieben, so gilt

$$\langle \operatorname{rot} F(x), \nu \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi\varepsilon^2} \int_{\partial A_\varepsilon} F(y) \cdot dy\,. \tag{6.26}$$

Beweis: Es gilt mit dem Satz von Stokes

$$\begin{aligned}\left| \frac{1}{\pi\varepsilon^2} \int_{\partial A_\varepsilon} F(y) \cdot dy - \langle \operatorname{rot} F(x), \nu \rangle \right| &= \frac{1}{\pi\varepsilon^2} \left| \int_{A_\varepsilon} \langle \operatorname{rot} F(\xi) - \operatorname{rot} F(x), \nu \rangle \, dS(\xi) \right| \\ &\le \sup_{\xi \in A_\varepsilon} | \langle \operatorname{rot} F(\xi) - \operatorname{rot} F(x), \nu \rangle |\,.\end{aligned}$$

Da $\operatorname{rot} F$ stetig ist, folgt die Behauptung. $\square$

Die Sätze von Gauß und Stokes stellen eine Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung ins Mehrdimensionale dar. Gemeinsam ist ihnen, dass ein Integral einer Funktion über den Rand einer Mannigfaltigkeit mit einem Integral eines Differentials dieser Funktion über die gesamte Mannigfaltigkeit in Verbindung gebracht wird. Einen einheitlichen allgemeinen begrifflichen Rahmen für diese Sätze liefert die Theorie der **Differentialformen**.

7 Harmonische Funktionen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wir betrachten den Laplace-Operator

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \partial_i^2 \,. \tag{7.1}$$

Wenden wir ihn auf eine Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ an, so ergibt sich

$$\Delta u(x) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i^2 u(x) = \operatorname{div}\left(\nabla u(x)\right), \quad x \in \Omega \,. \tag{7.2}$$

Definition 7.1 (Harmonische Funktion)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Funktion $u \in C^2(\Omega)$ heißt harmonisch auf (oder: in) Ω, falls

$$\Delta u(x) = 0 \,, \quad \textit{für alle } x \in \Omega. \tag{7.3}$$

□

Eine wesentliche Eigenschaft einer harmonischen Funktion u ist die Mittelwerteigenschaft. Sie besagt: Ist B eine Kugel im $\mathbb{R}^n$ mit Mittelpunkt x, so ist der Funktionswert $u(x)$ gleich dem Mittelwert von u sowohl über B als auch über ∂B. Dafür brauchen wir einige Vorüberlegungen.

Definition 7.2 (Volumen, Fläche, Mittelwert)
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ messbar, $f : U \to \mathbb{R}$ integrierbar. Dann heißt

$$\frac{1}{\operatorname{vol}(U)} \int_U f(x)\, dx \tag{7.4}$$

der Mittelwert von f auf U. Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Mannigfaltigkeit und f über M integrierbar, so heißt

$$\frac{1}{\mathrm{vol_k(M)}} \int_M f(\xi)\, dS(\xi) \,. \tag{7.5}$$

der Mittelwert von f über M. □

Sei $B(x;r)$ die offene Kugel um x mit Radius r. Wir wollen die folgende Formel erhalten:

$$\int_{B(x;R)} f(y)\, dy = \int_0^R \int_{\partial B(x;r)} f(\xi)\, dS(\xi)\, dr \,. \tag{7.6}$$

Wir kürzen ab $B_r := B(0;r)$. Sei $\Phi : T \to \partial B_1$ eine Karte für ∂B_1, $T \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen. Wir definieren durch

$$\tilde{\Phi}(r,t) = r\Phi(t) = \Phi^r(t) \tag{7.7}$$

Funktionen $\tilde{\Phi} : (0,\infty) \times T \to \mathbb{R}^n$, $\Phi^r : T \to \partial B_r$. Dann ist Φ^r Karte für ∂B_r, und

$$J_{\tilde{\Phi}}(r,t) = \begin{pmatrix} \Phi(t) & rJ_\Phi(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi(t) & J_{\Phi^r}(t) \end{pmatrix} \,. \tag{7.8}$$

Der Tangentialraum im Punkt $\Phi(t) \in \partial B_1$ an ∂B_1 wird gemäß Satz 5.3 aufgespannt von den Spalten von $J_\Phi(t)$. Da der Normalenvektor im Punkt $\Phi(t)$ für die Sphäre ∂B_1 gleich $\Phi(t)$ ist, folgt für alle $r > 0$ und alle $t \in T$

$$\operatorname{rang} J_{\tilde{\Phi}}(r,t) = n\,, \quad J_\Phi(t)^T \Phi(t) = 0\,, \quad \|\Phi(t)\|_2 = 1\,. \tag{7.9}$$

Es folgt weiter

$$J_{\tilde{\Phi}}(r,t)^T J_{\tilde{\Phi}}(r,t) = \begin{pmatrix} \Phi(t)^T\Phi(t) & r\Phi(t)^T J_\Phi(t) \\ rJ_\Phi(t)^T\Phi(t) & r^2 J_\Phi(t)^T J_\Phi(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & J_{\Phi^r}(t)^T J_{\Phi^r}(t) \end{pmatrix}, \tag{7.10}$$

und also auch (da $|\det A| = \sqrt{\det(A^T A)}$ für quadratische Matrizen A)

$$|\det J_{\tilde{\Phi}}(r,t)| = \sqrt{\det(J_{\Phi^r}(t)^T J_{\Phi^r}(t))}\,. \tag{7.11}$$

Satz 7.3 *Sei $x \in \mathbb{R}^n$, $f : K(x;R) \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt*

$$\int_{B(x;R)} f(y)\,dy = \int_0^R \int_{\partial B(x;r)} f(\xi)\,dS(\xi)\,dr\,. \tag{7.12}$$

Bemerkung: Eine geeignete Integrierbarkeitsvoraussetzung an f genügt, wir setzen Stetigkeit der Einfachheit halber voraus.

Beweis: Nach Translation können wir $x = 0$ annehmen. Sei $\{\Phi_1, \Phi_2\}$ Atlas für ∂B_1, seien $\tilde{\Phi}_j$, Φ_j^r analog zu (7.7) definiert, sei $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ zugehörige Zerlegung der Eins auf ∂B_1. Wir setzen α_j fort auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ durch

$$\alpha_j(x) = \alpha_j\left(\frac{x}{\|x\|_2}\right)\,. \tag{7.13}$$

Wegen (7.7) und (7.9) ist $\tilde{\Phi}_j$ ein Diffeomorphismus von $U_j := (0,R) \times T_j$ nach $V_j := \tilde{\Phi}_j(U_j) \subset B_R$. Aus der Substitutionsregel (Satz 3.6) folgt für $j = 1,2$ mit Fubini und (7.11)

$$\begin{aligned}
\int_{B_R} (\alpha_j f)(y)\,dy &= \int_{V_j} (\alpha_j f)(y)\,dy \\
&= \int_{(0,R)\times T_j} (\alpha_j f)(\tilde{\Phi}_j(r,t))|\det J_{\tilde{\Phi}}(r,t)|\,d(r,t) \\
&= \int_0^R \int_{T_j} (\alpha_j f)(\Phi_j^r(t))\sqrt{\det(J_{\Phi_j^r}(t)^T J_{\Phi_j^r}(t))}\,dt\,dr \\
&= \int_0^R \int_{\partial B_r} (\alpha_j f)(\xi)\,dS(\xi)\,dr\,.
\end{aligned}$$

Durch Summation über j erhalten wir (7.12). □

Im Spezialfall $f = 1$ wird (7.12) zu

$$\operatorname{vol}(B(x;R)) = \int_0^R \operatorname{vol}_{n-1} \partial B(x;r)\,dr\,. \tag{7.14}$$

Wir kürzen im Folgenden ab

$$|B(x;r)| = \mathrm{vol}\,_n(B(x;r))\,, \quad |\partial B(x;r)| = \mathrm{vol}_{n-1}\,\partial B(x;r)|\,.$$

Die Formel (7.14) können wir auch direkt erhalten aus den Beziehungen

$$|B(x;r)| = r^n|B_1|\,, \quad |\partial B(x;r)| = r^{n-1}|\partial B_1|\,, \tag{7.15}$$

sowie der Formel

$$|\partial B_1| = n|B_1| \qquad \left(= \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\right)\,, \tag{7.16}$$

hier steht Γ für die Gammafunktion.

Lemma 7.4 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $u \in C^2(\Omega)$, seien $x \in \Omega$, $R > 0$ mit $B(x;R) \subset \Omega$. Wir definieren*

$$\varphi(r) = \frac{1}{|\partial B(x;r)|}\int_{\partial B(x;r)} u(\xi)\,dS(\xi)\,, \quad 0 < r < R\,. \tag{7.17}$$

Dann ist φ differenzierbar auf $(0,R)$, und es gilt

$$\varphi'(r) = \frac{1}{|\partial B(x;r)|}\int_{B(x;r)} \Delta u(y)\,dy\,, \tag{7.18}$$

sowie

$$\lim_{r\downarrow 0}\varphi(r) = u(x)\,. \tag{7.19}$$

Beweis: Wir setzen $B_1 = B(0;1)$. Mit Satz (4.13) folgt

$$\int_{\partial B(x;r)} u(\xi)\,dS(\xi) = r^{n-1}\int_{\partial B_1} u(x+rz)\,dS(z)\,, \quad r \in (0,R)\,, \tag{7.20}$$

also wegen (7.15)

$$\varphi(r) = \frac{1}{|\partial B_1|}\int_{\partial B_1} u(x+rz)\,dS(z)\,. \tag{7.21}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\varphi'(r) &= \frac{1}{|\partial B_1|}\int_{\partial B_1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}u(x+rz)\,dS(z) = \frac{1}{|\partial B_1|}\int_{\partial B_1}\langle\nabla u(x+rz), z\rangle\;dS(z)\\ &= \frac{1}{|\partial B(x;r)|}\int_{\partial B(x;r)}\left\langle\nabla u(\xi), \frac{\xi - x}{r}\right\rangle\,dS(\xi)\,.\end{aligned}$$

Für die äußere Einheitsnormale an die Kugel $B(x;r)$ gilt

$$\nu(\xi) = \frac{\xi - x}{r}\,, \quad \xi \in \partial B(x;r)\,,$$

und aus dem Gaußschen Satz folgt

$$\int_{\partial B(x;r)} \left\langle \nabla u(\xi), \frac{\xi - x}{r} \right\rangle dS(\xi) = \int_{\partial B(x;r)} \langle \nabla u(\xi), \nu(\xi) \rangle \; dS(\xi) = \int_{B(x;r)} \operatorname{div}\left(\nabla u(y)\right) dy$$
$$= \int_{B(x;r)} \Delta u(y) \, dy \,.$$

Damit ist (7.18) bewiesen. Es gilt weiter

$$\varphi(r) - u(x) = \frac{1}{|\partial B(x;r)|} \int_{\partial B(x;r)} u(\xi) - u(x) \, dS(\xi) \,, \tag{7.22}$$

also

$$|\varphi(r) - u(x)| \leq \frac{1}{|\partial B(x;r)|} \int_{\partial B(x;r)} |u(\xi) - u(x)| \, dS(\xi) \leq \sup_{\xi \in \partial B(x;r)} |u(\xi) - u(x)| \,. \tag{7.23}$$

Da u stetig ist in x, folgt (7.19). □

Definition 7.5 (Subharmonische Funktion, Superharmonische Funktion)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Funktion $u \in C^2(\Omega)$ heißt subharmonisch in Ω, falls gilt

$$-\Delta u(x) \leq 0 \,, \quad \textit{für alle } x \in \Omega, \tag{7.24}$$

und superharmonisch in Ω, falls gilt

$$-\Delta u(x) \geq 0 \,, \quad \textit{für alle } x \in \Omega. \tag{7.25}$$

□

Folgerung 7.6 *Es liege die Situation von Lemma 7.4 vor. Ist u außerdem subharmonisch, so gilt*

$$u(x) \leq \frac{1}{|\partial B(x;r)|} \int_{\partial B(x;r)} u(\xi) \, dS(\xi) \,, \quad 0 < r < R \,, \tag{7.26}$$

sowie

$$u(x) \leq \frac{1}{|B(x;r)|} \int_{B(x;r)} u(y) \, dy \,, \quad 0 < r < R \,. \tag{7.27}$$

Beweis: Da $\varphi' \geq 0$, folgt (7.26) direkt aus (7.17) und (7.19). Aus (7.26) folgt nun

$$u(x)|B(x;r)| = u(x) \int_0^r |\partial B(x;\rho)| \, d\rho \leq \int_0^r \int_{\partial B(x;\rho)} u(\xi) \, dS(\xi) \, d\rho = \int_{B(x;r)} u(y) \, dy$$

mit Satz 7.3 und Formel (7.14), also ist (7.27) gezeigt. □

Ist u superharmonisch (statt subharmonisch), so können wir Satz 7.4 und Folgerung 7.6 auf $-u$ anwenden und erhalten die umgekehrten Ungleichungen in (7.26) und (7.27). Daraus ergibt sich nun die Mittelwerteigenschaft.

Satz 7.7 (Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, u harmonisch in Ω. Dann gilt

$$u(x) = \frac{1}{|\partial B(x;r)|} \int_{\partial B(x;r)} u(\xi)\, dS(\xi) = \frac{1}{|B(x;r)|} \int_{B(x;r)} u(y)\, dy \tag{7.28}$$

für alle $x \in \Omega$ und alle $r > 0$ mit $K(x;r) = \overline{B(x;r)} \subset \Omega$. □

Für den Spezialfall $n = 2$ ergibt sich die erste Gleichung in (7.28) direkt aus dem Integralsatz von Cauchy (siehe Vorlesung Funktionentheorie).

Eine Umkehrung gilt ebenfalls.

Satz 7.8 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $u \in C^2(\Omega)$, und es gelte*

$$u(x) = \frac{1}{|\partial B(x;r)|} \int_{\partial B(x;r)} u(\xi)\, dS(\xi) \tag{7.29}$$

für alle $x \in \Omega$ und alle $r > 0$ mit $K(x;r) = \overline{B(x;r)} \subset \Omega$. Dann ist u harmonisch in Ω.

Beweis: Bezeichnen wir die rechte Seite von (7.29) wieder mit $\varphi(r)$, gilt $\varphi'(r) = 0$, da die linke Seite nicht von r abhängt. Wäre u nicht harmonisch, so gäbe es wegen der Stetigkeit von u eine Kugel $K(x;r) \subset \Omega$ mit $\Delta u \neq 0$ in $K(x;r)$. Aus der Formel (7.18) würde nun $\varphi'(r) \neq 0$ folgen, ein Widerspruch. □

Wir erinnern daran: Eine Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heißt Gebiet, wenn sie offen und zusammenhängend ist. Ergänzung: Ein metrischer Raum (X, d) heißt zusammenhängend, wenn $\emptyset$ und X die einzigen Teilmengen von X sind, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind. (Siehe weiter unten.)

Satz 7.9 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, sei $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ subharmonisch in Ω. Dann gilt*

$$\max_{y \in \overline{\Omega}} u(y) = \max_{y \in \partial\Omega} u(y)\,. \tag{7.30}$$

Falls es ein $x \in \Omega$ gibt mit

$$u(x) = \max_{y \in \overline{\Omega}} u(y)\,, \tag{7.31}$$

so ist u in Ω konstant.

Beweis: Da u sowohl auf $\overline{\Omega}$ als auch auf $\partial\Omega$ ein Maximum annimmt, folgt die erste Behauptung aus der zweiten. Es gelte nun (7.31). Wir setzen $M = u(x)$. Sei $r > 0$ so, dass $r < \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$. Dann gilt

$$M = u(x) \le \frac{1}{|B(x;r)|} \int_{B(x;r)} u(y)\, dy \le u(x) = M\,. \tag{7.32}$$

(Die erste Ungleichung folgt aus Satz 7.4, die zweite aus (7.31).) Aus (7.32) folgt nun, dass u in $B(x;r)$ konstant gleich M ist. Es folgt weiter, dass die Menge $A = \{y : y \in \Omega, u(y) = M\}$ offen ist in M; als Urbildmenge einer abgeschlossenen Menge ist A auch abgeschlossen in M. Wegen $x \in A$ ist $A \neq \emptyset$, und da Ω zusammenhängend ist, folgt $A = \Omega$. □

Folgerung 7.10 (Maximumprinzip für harmonische Funktionen)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, sei $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ harmonisch in Ω. Dann gilt: Entweder ist u auf Ω konstant, oder es gilt

$$\min_{y \in \partial\Omega} u(y) < u(x) < \max_{y \in \partial\Omega} u(y)\,, \quad \textit{für alle } x \in \Omega. \tag{7.33}$$

Beweis: Anwendung von Satz 7.9 auf u und $-u$. □

Ergänzung: Zusammenhangsbegriffe. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Wir sagen, dass X **wegzusammenhängend** ist, wenn je zwei beliebige Punkte $x, y \in X$ sich durch einen Weg verbinden lassen, das heißt, es gibt eine stetige Funktion $\gamma : [0,1] \to X$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$.

Jede konvexe Menge ist wegzusammenhängend, also auch alle offenen Kugeln im $\mathbb{R}^n$.

(X, d) heißt **zusammenhängend**, falls gilt: Ist A eine nichtleere Teilmenge von U, welche relativ zu U sowohl offen als auch abgeschlossen ist, so muss $A = U$ gelten.

Satz 7.11 (Zwischenwertsatz) *Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, $f : X \to Y$ stetig. Ist X zusammenhängend, so auch $f(X)$.*

Beweis: Sei $A \subset f(X)$ nichtleer, offen und abgeschlossen in $f(X)$. Dann ist $f^{-1}(A)$ nichtleer, offen und abgeschlossen in X, da f stetig ist. Da X zusammenhängend ist, folgt $f^{-1}(A) = X$. Also ist $A \supset f(f^{-1})(A) = f(X)$ und damit $A = f(X)$. □

Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ heißt **lokal konstant**, falls es zu jedem $x \in X$ eine Kugel $B(x; \varepsilon)$ gibt, auf der f konstant ist.

Satz 7.12 *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann sind äquivalent:*
(i) U ist wegzusammenhängend.
(ii) U ist zusammenhängend.
(iii) Jede lokal konstante Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ ist konstant.

Beweis: "(i)⇒(ii)": Sei A eine solche Teilmenge. Sei $y \in U$ beliebig. Wir wählen ein $x \in A$ und einen Weg γ von x nach y. Sei

$$s = \sup\{t \in [0,1] : \gamma(t) \in A\}\,.$$

Ist $t_n \uparrow s$ mit $\gamma(t_n) \in A$, so folgt $\gamma(s) \in A$, da A abgeschlossen und γ stetig ist. Da A offen ist, muss $s = 1$ gelten, also $y = \gamma(1) \in A$. Da y beliebig war, folgt $A = U$.
"(ii)⇒(iii)": Sei $f : U \to \mathbb{R}$ lokal konstant. Sei $x \in U$ beliebig. Wir setzen

$$A = f^{-1}(f(x)) = \{y \in U : f(y) = f(x)\}\,.$$

A ist nichtleer, da $x \in A$. A ist offen, da f lokal konstant ist. A ist abgeschlossen als Urbild der abgeschlossenen Menge $\{f(x)\}$, da f als lokal konstante Funktion stetig ist. Nach Voraussetzung ist $A = U$, also f konstant auf U.
"(iii)⇒(i)": Sei $x \in U$. Sei $f : U \to \mathbb{R}$ definiert als $f(y) = 1$ falls es einen Weg von x nach y gibt, und $f(y) = 0$ andernfalls. Da offene Kugeln im $\mathbb{R}^n$ wegzusammenhängend

und damit zusammenhängend sind, gilt für jede offene Kugel $B \subset U$, dass $f(B)$ zusammenhängend ist, also muss entweder $f|B = 1$ oder $f|B = 0$ gelten. Also ist f lokal konstant und nach Voraussetzung konstant auf U. Da $f(x) = 1$, folgt $f = 1$ auf U. Also ist U wegzusammenhängend. $\square$

Die Implikationen "(i)$\Rightarrow$(ii)" und "(ii)$\Rightarrow$(iii)" gelten für beliebige Teilmengen U des $\mathbb{R}^n$. (Siehe den Beweis.)

Es gibt Teilmengen von $\mathbb{R}^2$, die zusammenhängend aber nicht wegzusammenhängend sind. Ein Beispiel ist die Menge

$$M = M_1 \cup M_1 \,, \quad M_1 = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\} \,, \quad M_2 = \{(x, \sin(1/x)) : x > 0\} \,.$$

Es gibt keinen Weg in M, der diese beiden Mengen verbindet. Andererseits sind M_1 und M_2 für sich genommen wegzusammenhängend, also zusammenhängend. Ist $A \subset M$ nichtleer, offen und abgeschlossen relativ zu M, so sind $A \cap M_1$ und $A \cap M_2$ offen und abgeschlossen relativ zu M_1 bzw. M_2. Es folgt $A \cap M_1 = M_1$ oder $A \cap M_1 = \emptyset$, dasselbe für $A \cap M_2$. Aber M_2 ist nicht abgeschlossen in M, und M_1 ist nicht offen in M.