Steuerungstheorie I*

Martin Brokate †

Inhaltsverzeichnis

---

*Vorlesungsskript, SS 1994

†Institut für Informatik und Praktische Mathematik, Universität Kiel, 24098 Kiel

1 Einführung

Die Steuerungstheorie (oder Kontrolltheorie) befaßt sich mit dynamischen Systemen, deren Evolution durch eine Steuerung (oder Kontrolle) beeinflußt werden kann. Zwei Hauptziele lassen sich unterscheiden:

- Man möchte den Ablauf des dynamischen Systems in irgendeiner Weise optimieren. Hiermit beschäftigt sich die Theorie der optimalen Steuerung.
- Man möchte erreichen, daß das dynamische System gewisse Eigenschaften aufweist (z.B. daß es stabil ist). Hiermit beschäftigt sich die Regelungstheorie.

Die Theorie der optimalen Steuerung hat sich aus der Variationsrechnung heraus entwickelt. Ein klassisches Problem der Variationsrechnung, das von Galilei 1638 bearbeitet und von den Brüdern Bernoulli, Leibniz und Newton 1696/97 gelöst wurde, ist

Beispiel 1.1 (Das Problem der Brachystochrone)
Gegeben sind zwei Punkte $P_1 = (x_1, y_1)$ und $P_2 = (x_2, y_2)$ mit $y_2 > y_1$ und eine Kurve r,

$$r(x) = (x, y(x)), \quad x_1 \leq x \leq x_2, \tag{1.1}$$

die die beiden Punkte verbindet. Senkrecht nach unten wirkt die Schwerkraft, und man stelle sich eine Kugel vor, die reibungsfrei von P_1 nach P_2 rollt. Gefragt ist nun:

Wie muß die Kurve r aussehen, damit die Kugel in kürzestmöglicher Zeit von P_1 nach P_2 rollt ?

Abbildung 1: Das Problem der Brachystochrone.

Man muß also die Laufzeit T für gegebenes $y = y(x)$ berechnen.
Ist v_1 die Anfangsgeschwindigkeit der Kugel in P_1, so ist die Geschwindigkeit v in einem beliebigen Punkt P auf r gegeben durch

$$\frac{m}{2}v^2 - \frac{m}{2}v_1^2 = mg(y - y_1), \tag{1.2}$$

(Zunahme der kinetischen Energie = Abnahme der potentiellen Energie), also

$$v = \sqrt{2g(y-\alpha)}\,, \quad \alpha = y_1 - \frac{v_1^2}{2g}\,. \tag{1.3}$$

Sei

$$L = \text{Gesamtlänge von } r\,, \tag{1.4}$$

$$t(s) = \text{Zeit, die zum Durchlaufen der Länge } s \text{ benötigt wird}\,, \tag{1.5}$$

dann gilt

$$T = \int_0^T 1\,dt = \int_0^L 1 \cdot t'(s)\,ds = \int_0^L \frac{1}{v(s)}\,ds\,. \tag{1.6}$$

Wir fassen s als Funktion von x auf:

$$s(x) = \int_{x_1}^x \sqrt{1+y'(\xi)^2}\,d\xi\,, \quad x_1 \le x \le x_2 \tag{1.7}$$

(Formel für die Länge einer Kurve, siehe Analysis II). Weiter

$$T = \int_0^L \frac{1}{v(s)}\,ds = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{v(s(x))}\,s'(x)\,dx\,, \tag{1.8}$$

also schließlich

$$T = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{1+y'(x)^2}{2g(y(x)-\alpha)}}\,dx\,. \tag{1.9}$$

Gesucht ist also eine Funktion y mit $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = x_2$, welche das Integral in (1.9) minimiert.

Die Lösung dieses Problems ist die Zykloide (siehe Lehrbücher der Variationsrechnung). Als Kurve $r : [\tau_1, \tau_2] \to \mathbb{R}^2$, $r(\tau) = (x(\tau), y(\tau))$ geschrieben hat sie die Form

$$x(\tau) = a + b(\tau + \sin\tau)\,, \quad y(\tau) = a + b(1+\cos\tau)\,, \tag{1.10}$$

wobei die Konstanten a, b, τ_1, τ_2 so bestimmt werden müssen, daß $r(\tau_1) = P_1$ und $r(\tau_2) = P_2$ gelten.

Zur Geschichte des Problems siehe Goldstine, A History of the Calculus of Variations from the 17th through the 19th Century, Springer 1980. □

Bemerkung 1.2 Um einen mathematisch exakten Lösungsbegriff zu haben, muß man festlegen, welche Funktionen y bei der Minimierung in (1.9) zur Konkurrenz zugelassen sind. In 1.1 ist die Situation folgende.

- $C[x_1, x_2]$ ist zu groß, da die Kurvenlänge und damit das Integral in (1.9) nicht für beliebige stetige Funktionen definiert ist,

- $C^1[x_1, x_2]$ ist zu klein, da die Zykloide (1.10) als Funktion $y = y(x)$ eine vertikale Tangente haben kann ($x'(\pi) = 0$).

Ein geeigneter Funktionenraum ist hier der Sobolevraum $W^{1,1}$ (siehe später). □

Beispiel 1.3 (Einfaches zeitminimales Kontrollproblem)
Die eindimensionale Bewegung eines Greifarms werde beschrieben durch

$$\ddot{x}(t) = u(t)\,. \tag{1.11}$$

Der Arm soll in möglichst kurzer Zeit T von der Ruhelage

$$x(0) = 0\,, \quad \dot{x}(0) = 0\,, \tag{1.12}$$

in die Ruhelage

$$x(T) = 1\,, \quad \dot{x}(T) = 0\,, \tag{1.13}$$

bewegt werden. Beschleunigung und Bremsen ist eingeschränkt durch

$$|u(t)| \le 1\,, \quad 0 \le t \le T\,. \tag{1.14}$$

Lösung: $T = 2$, die optimale Steuerung ist

$$u(t) = \begin{cases} 1\,, & 0 \le t < 1\,, \\ -1\,, & 1 \le t \le 2\,. \end{cases} \tag{1.15}$$

Die zugehörige Lösung von (1.11) - (1.13) ist

$$x(t) = \int_0^t \int_0^s u(r)\,dr\,ds = \int_0^t (t-s)u(s)\,ds\,. \tag{1.16}$$

□

Bemerkung 1.4 In 1.3 ist typisch für Probleme optimaler Steuerungen: Die optimale Steuerung (1.15) ist unstetig und nimmt außerdem nur die beiden für die Einschränkung (1.14) extremen Werte ± 1 an ("bang-bang-Steuerung"). Läßt man die Einschränkung (1.14) weg, so hat das Problem keine Lösung:

$$T_n = \frac{2}{n}\,, \quad u_n(t) = \begin{cases} n^2\,, & 0 \le t < \frac{1}{n}\,, \\ -n^2\,, & \frac{1}{n} \le t \le \frac{2}{n}\,, \end{cases} \tag{1.17}$$

liefert eine Folge zulässiger Steuerungen mit $T_n \to 0$, aber $T = 0$ ist offensichtlich nicht möglich. □

Beispiel 1.5 (Höhenrakete; Goddard 1919)
Betrachtet wird das folgende Problem: Eine Rakete startet vom Erdboden und soll mit minimalem Treibstoffverbrauch eine vorgegebene Höhe erreichen (Variante 1) oder mit vorgegebener Treibstoffmenge möglichst hoch kommen (Variante 2). Da klar ist, daß die Rakete senkrecht nach oben fliegen muß, braucht nur eine Raumkoordinate betrachtet zu werden. Die Bewegung gehorcht dem Newton'schen Gesetz

Rate der Impulsänderung = von außen wirkende Kraft

Berechnung der Impulsänderung: Die Rakete habe zum Zeitpunkt t die Masse m und die Geschwindigkeit v, zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ die Masse $m + \Delta m$ und die Geschwindigkeit $v + \Delta v$. Es werde verbrannter Treibstoff der Masse $-\Delta m$ (beachte $\Delta m < 0$) mit der Geschwindigkeit v_0 ausgestoßen. Der Gesamtimpuls zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ ist dann

$$(m + \Delta m)\cdot(v + \Delta v) \;+\; (-\Delta m)\cdot(v - v_0)\,, \tag{1.18}$$

die Änderung von t nach $t + \Delta t$ ist

$$m\,\Delta v + v_0\,\Delta m + \Delta m\,\Delta v\,, \tag{1.19}$$

und die zeitliche Änderungsrate

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{m\,\Delta v + v_0\,\Delta m + \Delta m\,\Delta v}{\Delta t} = m(t)\,\dot v(t) + v_0 \dot m(t)\,. \tag{1.20}$$

Es ergibt sich also

$$m(t)\,\dot v(t) + v_0\,\dot m(t) = -m(t)\,g(h(t)) - D(v(t), h(t))\,, \tag{1.21}$$

wobei m, v, h die Masse, Geschwindigkeit und Höhe der Rakete zum Zeitpunkt t, $g = g(h)$ die Schwerkraft und $D = D(v, h)$ der Luftwiderstand (drag) bedeuten, z.B.

$$D(v, h) = \alpha v^2 e^{-\beta h}\,, \quad \alpha,\ \beta \text{ Konstante }. \tag{1.22}$$

Nehmen wir an, daß wir den Schub $F = -v_0 \dot m$ steuern können, so ergibt sich das System

$$\dot h = v\,, \tag{1.23}$$

$$\dot m = -\frac{1}{v_0} \cdot F\,, \tag{1.24}$$

$$\dot v = \frac{1}{m}(F - D(v, h)) - g(h)\,. \tag{1.25}$$

Der Schub ist eingeschränkt, z.B. durch

$$0 \le F \le F_{max}\,. \tag{1.26}$$

Die Endzeit T ist nicht festgelegt (freie Endzeit), und es gelten die Randbedingungen

$$h(0) = 0\,, \quad v(0) = 0\,, \quad m(T) = m_T\,, \tag{1.27}$$

$m_T =$ Masse ohne Treibstoff. Für die beiden Varianten gilt

Minimiere $m(0)$,
zusätzliche Bedingung $h(T) = h_T$,

bzw.

Maximiere $h(T)$,
zusätzliche Bedingung $m(0) = m_0$.

Das Kontrollproblem besteht nun darin, eine optimale Steuerung $F : [0, T] \to \mathbb{R}$ samt zugehöriger Endzeit T zu finden. Im allgemeinen ist die Lösung nicht bang-bang. Für die zweite Variante ist z.B. bewiesen (siehe Lee/Markus S. 456 ff.), daß eine Lösung existiert mit der Struktur

$$\begin{array}{ll} [0, t_1] & \text{voller Schub} \\ [t_1, t_2] & \text{variabler Schub (“singuläre Steuerung”)} \\ [t_2, T] & \text{kein Schub}\,. \end{array} \tag{1.28}$$

Zur Bestimmung der Lösung sind numerische Verfahren erforderlich. □

Abbildung 2: Dreharm

Nun ein Beispiel aus der Regelungstheorie.

Beispiel 1.6 (Stabilisierung eines Dreharms)
Wir betrachten einen masselosen Dreharm der Länge 1 mit Drehgelenk im festen Punkt P, an dessen beweglichen Ende die Masse m konzentriert ist. Ein Motor erzeugt im Punkt P das Drehmoment $u(t)$. Für das Drehmoment gilt die Gleichung

$$m\ddot{\varphi}(t) = mg\sin\varphi(t) + u(t)\,. \tag{1.29}$$

Das Problem besteht darin, durch eine geeignete Steuerung u den Dreharm in der senkrechten Lage (nach oben = inverses Pendel) zu halten bzw. dahin zurückzubringen. Kennt man die Störung nicht im voraus, so kann man natürlich u nicht von vorneherein angeben; gesucht ist eine sogenannte Rückkopplungssteuerung, d.h. eine vom Zustand φ abhängige Steuerung u. Wir vereinfachen das Problem zunächst, indem wir (1.29) linearisieren und $m = g = 1$ setzen, so daß sich ergibt

$$\ddot{\varphi}(t) - \varphi(t) = u(t)\,. \tag{1.30}$$

Wir betrachten als erstes eine proportionale Rückkopplung (P-Regler) der Form

$$u(t) = -k\varphi(t) \tag{1.31}$$

mit dem Verstärkungsfaktor $k > 0$. Einsetzen in (1.30) ergibt

$$\ddot{\varphi}(t) + (k-1)\varphi(t) = 0\,. \tag{1.32}$$

Die allgemeine Lösung von (1.32) hat die Form (falls $k \neq 1$)

$$\varphi(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}\,, \tag{1.33}$$

wobei λ_1, λ_2 die Lösungen von $\lambda^2 + (k-1) = 0$ sind.

- $k > 1$: Beide λ_i sind rein imaginär (ungedämpfte, periodische Schwingung),
- $k < 1$: $\lambda_1 > 0$ (exponentiell wachsende Lösung, bis auf den Ausnahmefall spezieller Anfangswerte),

- $k = 1$: $\varphi(t) = c_1 + c_2 t$, d.h. ebenfalls eine unbeschränkte Lösung bis auf den Ausnahmefall $c_2 = 0$.

Eine Stabilisierung ist also mit dem P-Regler (1.31) nicht möglich. Als nächstes betrachten wir den PD-Regler (proportional derivative controller)

$$u(t) = -k\varphi(t) - d\dot{\varphi}(t)\,, \quad k > 1\,, \quad d > 0\,. \tag{1.34}$$

welcher im Vergleich zu (1.31) einen zusätzlichen Dämpfungsterm aufweist. Einsetzen in (1.30) ergibt

$$\ddot{\varphi}(t) + d\dot{\varphi}(t) + (k-1)\varphi(t) = 0 \tag{1.35}$$

mit den zugehörigen

$$\lambda_{1,2} = -\frac{d}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{d^2 - 4(k-1)}\,. \tag{1.36}$$

Da $\mathrm{Re}(\lambda_{1,2}) < 0$, gilt $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = 0$ für alle Lösungen von (1.35), d.h. der PD-Regler stabilisiert das linearisierte inverse Pendel.

Etwas schwieriger ist die Situation, wenn das Drehmoment noch einer konstanten additiven Störung unterliegt, d.h. wenn das System statt durch (1.30) durch

$$\ddot{\varphi}(t) - \varphi(t) = u(t) + w\,, \quad w \in \mathbb{R}\,, \tag{1.37}$$

beschrieben wird, wobei der Wert von w nicht bekannt ist. Es stellt sich heraus, daß der PD-Regler (1.34) das System (1.37) nicht stabilisiert (außer für $w = 0$). Stattdessen verwendet man hierfür den PID-Regler

$$u(t) = -k\varphi(t) - d\dot{\varphi}(t) - \mu \int_0^t \varphi(\tau)\, d\tau\,, \tag{1.38}$$

welcher für geeignete Werte der Konstanten das System (1.37) stabilisiert.

2 Kontrollsysteme

Definition 2.1 (Kontrollsystem)
Sei $I \subset \mathbb{R}$ *ein Intervall, seien* $\mathcal{U} \subset Abb(I;\mathbb{R}^m)$, $f : I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *und* $h : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ *gegeben. Dann heißt*

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad y(t) = h(t, x(t)), \quad u \in \mathcal{U}, \quad t \in I, \tag{2.1}$$

deterministisches endlich-dimensionales Kontrollsystem in stetiger Zeit auf dem Intervall I *(oder einfach: Kontrollsystem). Die Funktionen* $u \in \mathcal{U}$ *heißen zulässige Steuerungen (oder Kontrollen), Lösungen* $x : I \to \mathbb{R}^n$ *und* $y : I \to \mathbb{R}^k$ *heißen Zustandsfunktionen (oder Trajektorien) bzw. Outputfunktionen (oder Outputs).*

Wichtige Spezialfälle:

Definition 2.2 (Lineares Kontrollsystem)
Das Kontrollsystem

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t), \tag{2.2}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$, $B \in \mathbb{R}^{(n,m)}$ *und* $C \in \mathbb{R}^{(k,n)}$ *heißt lineares zeitinvariantes Kontrollsystem. Das Kontrollsystem*

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad y(t) = C(t)x(t), \tag{2.3}$$

mit $A : I \to \mathbb{R}^{(n,n)}$, $B : I \to \mathbb{R}^{(n,m)}$ *und* $C : I \to \mathbb{R}^{(k,n)}$ *heißt lineares zeitvariantes Kontrollsystem.*

Man möchte, daß das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad t_0 \in I, \tag{2.4}$$

für jede zulässige Steuerung $u \in \mathcal{U}$ eine eindeutige Lösung hat, und zwar insbesondere auch für unstetige Steuerungen. Wie üblich geht man über zur Integralgleichung

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s), u(s))\, ds. \tag{2.5}$$

Man braucht Voraussetzungen an f, die absichern, daß

- der Integrand in (2.5) meßbar und das Integral endlich ist,
- die Integralgleichung (2.5) eindeutig lösbar ist.

Voraussetzung 2.3
Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $f : I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.

Carathéodory-Bedingung:

$$(C) \qquad \begin{array}{l} t \mapsto f(t, x, u) \text{ ist meßbar für alle } (x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \\ (x, u) \mapsto f(t, x, u) \text{ ist stetig für alle } t \in I. \end{array} \tag{2.6}$$

Wachstums-Bedingung: Sei $\|\cdot\|$ irgendeine Norm im $\mathbb{R}^n$. Falls $\mathcal{U} \subset L^p(I;\mathbb{R}^m)$, $1 \le p < \infty$, verlangen wir, daß es ein $r \in [1,p]$ und Funktionen $\alpha_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ stetig, $\alpha_2 \in L^1(I)$, $\alpha_3 \in L^q(I)$ mit $\frac{r}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gibt, so daß

$$(W_1) \qquad \|f(t,x,u)\| \le \alpha_1(x)(\alpha_2(t) + \alpha_3(t)\|u\|^r)\,, \tag{2.7}$$

falls $\mathcal{U} \subset L^\infty(I;\mathbb{R}^m)$, verlangen wir

$$(W_2) \qquad \|f(t,x,u)\| \le \alpha_1(x,u)\alpha_2(t)\,, \tag{2.8}$$

wobei $\alpha_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}_+$ stetig ist und $\alpha_2 \in L^1(I)$.

Lipschitz-Bedingung: Für alle $u \in \mathcal{U}$ gibt es ein $\alpha \in L^1(I)$ mit

$$(L) \qquad \|f(t,x_1,u(t)) - f(t,x_2,u(t))\| \le \alpha(t)\|x_1 - x_2\| \quad \forall t \in I\,,\ \forall x_1,x_2 \in \mathbb{R}^n\,. \tag{2.9}$$

□

Lemma 2.4 (Meßbarkeit der Superposition)
Seien $x : I \to \mathbb{R}^n$, $u : I \to \mathbb{R}^m$ meßbar, es gelte die Carathéodory-Bedingung (C) für f. Dann ist die Abbildung

$$t \mapsto f(t,x(t),u(t)) \tag{2.10}$$

meßbar auf I.

Beweis: Sei zunächst $(x,u) : I \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ Treppenfunktion, d.h.

$$(x(t),u(t)) = (x_j,u_j)\,, \quad t \in I_j\,, \quad x_j \in \mathbb{R}^n\,,\ u_j \in \mathbb{R}^m\,, \tag{2.11}$$

wobei $(I_j)_{1\le j\le J}$ eine disjunkte Zerlegung von I in meßbare Teilmengen I_j darstellt. Es ist dann

$$f(t,x(t),u(t)) = \sum_{j=1}^{J} \chi_{I_j}(t) f(t,x_j,u_j)\,, \quad \chi_{I_j}(t) = \begin{cases} 1\,, & t \in I_j\,, \\ 0\,, & t \notin I_j\,. \end{cases} \tag{2.12}$$

und die rechte Seite von (2.12) ist als Summe und Produkt meßbarer Funktionen meßbar. Sind nun x,u beliebige meßbare Funktionen, so gibt es Folgen von einfachen Funktionen x_k, u_k mit

$$\lim_{k\to\infty} (x_k(t),u_k(t)) = (x(t),u(t))\,, \quad \forall t \in I\,, \tag{2.13}$$

also auch

$$\lim_{k\to\infty} f(t,x_k(t),u_k(t)) = f(t,x(t),u(t))\,, \quad \forall t \in I\,. \tag{2.14}$$

Da der punktweise Limes meßbarer Funktionen wieder meßbar ist, folgt die Behauptung.
□

Satz 2.5 (Picard-Lindelöf)
Sei $I = [t_0,t_1]$. Das Kontrollsystem 2.1 erfülle die Bedingungen (C), (L) und (W_1) bzw. (W_2). Dann gibt es zu jeder Steuerung $u \in \mathcal{U}$ und jedem Anfangswert $x_0 \in \mathbb{R}^n$ genau eine Lösung $x \in C(I;\mathbb{R}^n)$ der Integralgleichung (2.5).

Beweis: Mit dem Banachschen Fixpunktsatz, angewandt auf die Fixpunktgleichung

$$x = F(x,u)\,, \quad u \in \mathcal{U} \text{ fest gewählt}\,, \tag{2.15}$$

wobei $F : C(I;\mathbb{R}^n) \times \mathcal{U} \to C(I;\mathbb{R}^n)$ definiert werden soll durch

$$(F(x,u))(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s,x(s),u(s))\,ds\,. \tag{2.16}$$

Wegen 2.4 ist der Integrand in (2.16) meßbar. Er liegt auch im $L^1(I;\mathbb{R}^n)$ wegen (für den ersten Fall)

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^t \|f(s,x(s),u(s))\|\,ds &\le \int_{t_0}^t \alpha_1(x(s))\cdot(\alpha_2(s)+\alpha_3(s)\|u(s)\|^r)\,ds \\ &\le \sup_{\|\xi\|\le\|x\|_\infty} \alpha_1(\xi)\Big(\int_{t_0}^t \underbrace{\alpha_2(s)}_{\in L^1(I)}\,ds + \int_{t_0}^t \underbrace{\alpha_3(s)}_{\in L^q(I)}\underbrace{\|u(s)\|^r}_{\in L^{\frac{p}{r}}(I)}\,ds\Big) < \infty\,. \end{aligned}\tag{2.17}$$

Im zweiten Fall wird analog abgeschätzt. Wir zeigen noch, daß F eine Kontraktion ist, wenn wir den Raum $C(I;\mathbb{R}^n)$ normieren durch

$$\|x\|_M = \sup_{t\in I} e^{-M(t-t_0)}\|x(t)\|\,. \tag{2.18}$$

(Auch mit dieser Norm ist $C(I;\mathbb{R}^n)$ ein Banachraum.) Für beliebiges $x_1, x_2 \in C(I;\mathbb{R}^n)$ gilt nämlich

$$\begin{aligned} e^{-M(t-t_0)}&\|F(x_1,u)(t) - F(x_2,u)(t)\| \le \\ &\le e^{-M(t-t_0)}\int_{t_0}^t \|f(s,x_1(s),u(s)) - f(s,x_2(s),u(s))\|\,ds \\ &\le e^{-M(t-t_0)}\int_{t_0}^t \alpha(s)\|x_1(s)-x_2(s)\|\,ds \\ &\le e^{-M(t-t_0)}\int_{t_0}^t \alpha(s)e^{M(s-t_0)}\,ds\cdot\|x_1-x_2\|_M =: A\,. \end{aligned}\tag{2.19}$$

Wir wählen $c > 0$ so, daß

$$\int_{\tau:\alpha(\tau)>c} \alpha(s)\,ds \le \frac{1}{4}\,. \tag{2.20}$$

(Möglich, da $\alpha \in L^1(I)$.) Dann gilt

$$\begin{aligned} A &\le e^{-M(t-t_0)}\Big(\int_{t_0}^t ce^{M(s-t_0)}\,ds + \frac{1}{4}e^{M(t-t_0)}\Big)\cdot\|x_1-x_2\|_M \\ &= \Big(\frac{c}{M}(1-e^{M(t-t_0)}) + \frac{1}{4}\Big)\,\|x_1-x_2\|_M\,. \end{aligned}\tag{2.21}$$

Für $M = 4c$ gilt also

$$\|F(x_1,u) - F(x_2,u)\|_M \le \frac{1}{2}\|x_1-x_2\|_M\,. \tag{2.22}$$

Also ist F Kontraktion. $\square$

Beispiel 2.6

1. Lineares zeitinvariantes System $\dot{x} = Ax + Bu$: Wir können $\mathcal{U} \subset L^1(I; \mathbb{R}^m)$ betrachten. (W_1) gilt mit $r = p = 1$

$$\alpha_1(x) = \|x\| + 1\,, \quad \alpha_2(t) = \|A\|\,, \quad \alpha_3(t) = \|B\|\,. \tag{2.23}$$

2. Lineares zeitvariantes System $\dot{x} = A(t)x + B(t)u$: (W_1) gilt mit $r = 1$ und

$$\alpha_1(x) = \|x\| + 1\,, \quad \alpha_2(t) = \|A(t)\|\,, \quad \alpha_3(t) = \|B(t)\|\,, \tag{2.24}$$

   die Bedingungen an die α_i sind erfüllt, wenn $A \in L^1(I; \mathbb{R}^{(n,n)})$ und $B \in L^q(I; \mathbb{R}^{(n,m)})$ falls $\mathcal{U} \subset L^p$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (die Fälle $p = 1, q = \infty$ und $p = \infty, q = 1$ sind auch möglich).

Die Lipschitzbedingung ist in beiden Fällen mit $\alpha(t) = \|A(t)\|$ erfüllt. Die Carathéodory-Bedingung ist offensichtlich erfüllt. □

Bemerkung 2.7 (Regularität der Zustandsfunktion)
Die Zustandsfunktion x eines Kontrollsystems hat die Form

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} g(s)\, ds\,, \quad g \in L^1(I)\,. \tag{2.25}$$

Es gilt u.a.

- $\dot{x}(t) = g(t)$ fast überall (d.h. bis auf eine Menge vom Maß 0) in I. (Die Ableitung braucht weder überall zu existieren noch stetig zu sein.)
- g ist eine sogenannte distributionelle Ableitung von x.
- x ist absolutstetig (siehe Analysis)
- x ist eine Funktion beschränkter Variation und damit (komponentenweise) als Differenz zweier monotoner Funktionen darstellbar.

Die Rechenregeln der Differential- und Integralrechnung (Summe, Produkt, Komposition) gelten im wesentlichen auch für absolutstetige Funktionen (Produktregel, wenn die äußere Funktion Lipschitzstetig ist), wenn man Gleichheit durch Gleichheit fast überall ersetzt. Insbesondere kann man schließen

$$\dot{x}(t) = \dot{y}(t) \text{ fast überall} \quad \Rightarrow \quad x(t) = y(t) + c\,, \quad c \text{ Konstante}\ . \tag{2.26}$$

Definition 2.8 (Zustandsübergangsfunktion)
Sei ein Kontrollsystem (2.1) auf dem Zeitintervall $I = [t_0, t_1]$ gegeben, welches für jedes $u \in \mathcal{U}$ und jeden Anfangswert $x(\tau) = \xi$ mit $\tau \in I$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ eine eindeutige Zustandsfunktion $x : I \to \mathbb{R}^n$ (als Lösung der Integralgleichung) besitzt. Dann wird durch

$$(t, \tau, \xi, u) \mapsto x(t) \tag{2.27}$$

eine Abbildung $\varphi : I \times I \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ definiert. Die Abbildung φ heißt die Zustandsübergangsfunktion des Kontrollsystems.

Lemma 2.9 (Halbgruppeneigenschaft)
In der Situation von Definition 2.8 gilt

$$\varphi(t,\tau,\xi,u) = \varphi(t,s,\varphi(s,\tau,\xi,u),u)\,, \tag{2.28}$$

für alle $\tau, s, t \in I$ *mit* $\tau < s < t$ *, alle* $\xi \in \mathbb{R}^n$ *und alle* $u \in \mathcal{U}$ *.*

Beweis: Sei $x : [\tau, t] \to \mathbb{R}^n$ die eindeutige Lösung der zugehörigen Integralgleichung 2.5. Dann gilt

$$\begin{aligned} \varphi(t,\tau,\xi,u) &= x(t) = \xi + \int_\tau^t f(\sigma, x(\sigma), u(\sigma))\, d\sigma \\ &= \xi + \int_\tau^s f(\sigma, x(\sigma), u(\sigma))\, d\sigma + \int_s^t f(\sigma, x(\sigma), u(\sigma))\, d\sigma\,, \end{aligned} \tag{2.29}$$

sowie

$$\varphi(s,\tau,\xi,u) = x(s) = \xi + \int_s^t f(\sigma, x(\sigma), u(\sigma))\, d\sigma\,, \tag{2.30}$$

also

$$\varphi(t,\tau,\xi,u) = \varphi(s,\tau,\xi,u) + \int_s^t f(\sigma, x(\sigma), u(\sigma))\, d\sigma\,, \tag{2.31}$$

und daraus die Behauptung. □

3 Lineare Kontrollsysteme

In diesem Abschnitt stellen wir einige grundlegende Formeln für die Zustandsfunktion eines linearen Kontrollsystems zusammen. (Beweise siehe Vorlesungen über gewöhnliche Differentialgleichungen.)

Wir betrachten zunächst das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = A(t)x\,, \quad x(t_0) = x_0\,, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n\,. \tag{3.1}$$

Falls A eine integrierbare Matrixfunktion ist, hat (3.1) nach Beispiel 2.6 eine eindeutig bestimmte Lösung. Sie hat die Form

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0\,, \tag{3.2}$$

wobei $\Phi(t, t_0) \in \mathbb{R}^n$ die sogenannte Übergangsmatrix ist, deren Spalten $\Phi_i(t, t_0)$, als Funktionen von t aufgefaßt, die Lösungen von (3.1) mit $x_0 = e_i$ sind. Die Übergangsmatrix hat folgende Eigenschaften:

$$\Phi(t, t) = I\,, \tag{3.3}$$

$$\Phi(t, s) = \Phi(t, \tau)\,\Phi(\tau, s)\,, \tag{3.4}$$

$$\Phi(t, s)^{-1} = \Phi(s, t)\,, \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, s) = A(t)\Phi(t, s)\,, \qquad \text{fast überall} \tag{3.6}$$

(bzw. überall, wenn $A = A(t)$ stetig ist).

Die Zustandsfunktion des linearen Anfangswertproblems (und damit auch die Zustandsüberführungsfunktion des Kontrollsystems)

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u\,, \quad x(t_0) = x_0\,, \tag{3.7}$$

ist gegeben durch (siehe Beispiel 2.6 für Voraussetzungen an A und B)

$$x(t) = \varphi(t, t_0, x_0, u) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, s)B(s)u(s)\,ds\,, \tag{3.8}$$

wie man durch Differenzieren und Verwenden von (3.3) – (3.6) bestätigt.

Satz 3.1 (Input-Output-Verhalten eines linearen Kontrollsystems)
Die Outputfunktion y des linearen Kontrollsystems

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u\,, \quad y = C(t)x\,, \tag{3.9}$$

zum Anfangswert $x(t_0) = 0$ ist gegeben durch

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} K(t, s)u(s)\,ds\,, \tag{3.10}$$

mit der Impulsantwortmatrix $K(t, s) \in \mathbb{R}^{(k,m)}$,

$$K(t, s) = C(t)\Phi(t, s)B(s)\,. \tag{3.11}$$

Beweis: Folgt aus (3.8). □

Bemerkung 3.2
Die i-te Spalte von $K(t, s)$, $s \leq t$, ist der Zustand, der sich ergibt, wenn als Steuerung für die i-te Komponente die Dirac-Distribution zum Zeitpunkt s gewählt wird (alle anderen Komponenten der Steuerung sollen Null sein). □

Für ein lineares zeitinvariantes System $\dot{x} = Ax$ läßt sich die Übergangsfunktion explizit angeben:

$$\Phi(t, s) = e^{(t-s)A}\,, \tag{3.12}$$

wobei die Matrixexponentialfunktion e^A für quadratische Matrizen A definiert ist durch

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}\,. \tag{3.13}$$

Für die Matrixexponentialfunktion gelten die Rechenregeln

$$e^0 = I\,, \tag{3.14}$$

$$e^{A+B} = e^A e^B\,, \qquad \text{falls } AB = BA\,, \tag{3.15}$$

$$e^{-A} = \left(e^A\right)^{-1}, \qquad \text{d.h. } e^A \text{ ist invertierbar }, \tag{3.16}$$

$$e^{PAP^{-1}} = Pe^A P^{-1}\,, \qquad \text{falls } P \text{ invertierbar }, \tag{3.17}$$

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = Ae^{tA} = e^{tA}A\,. \tag{3.18}$$

Folgerung 3.3
Die Outputfunktion y des linearen zeitinvarianten Kontrollsystems

$$\dot{x} = Ax + Bu\,, \quad y = Cx\,, \tag{3.19}$$

zum Anfangswert $x(t_0) = 0$ ist gegeben durch

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} K(t, s)u(s)\,ds\,, \tag{3.20}$$

wobei

$$K(t, s) = Ce^{(t-s)A}B\,. \tag{3.21}$$

Für einen beliebigen Anfangswert $x(t_0) = x_0$ ist die Zustandsfunktion gegeben durch

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}Bu(s)\,ds\,. \tag{3.22}$$

4 Steuerbarkeit linearer zeitinvarianter Systeme

In diesem Abschnitt betrachten wir das Kontrollsystem

$$\dot{x} = Ax + Bu\,, \quad y = Cx\,, \quad A \in \mathbb{R}^{(n,n)}\,, \quad B \in \mathbb{R}^{(n,m)}\,, \quad C \in \mathbb{R}^{(k,n)}\,, \tag{4.1}$$

auf dem Zeitintervall $I = \mathbb{R}$ ohne Kontrolleinschränkung, und zwar mit

$$\mathcal{U} = L^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}^m)\,. \tag{4.2}$$

Zur Abkürzung für das Kontrollsystem (4.1) schreiben wir auch (A, B, C) oder einfach (A, B), falls es auf C nicht ankommt.

Definition 4.1 (Steuerbarkeit und Erreichbarkeit)
Der Zustand $x_0 \in \mathbb{R}^n$ heißt steuerbar nach $x_1 \in \mathbb{R}^n$ zur Zeit $t > 0$, falls ein $u \in \mathcal{U}$ existiert mit

$$x_1 = \varphi(t, 0, x_0, u)\,. \tag{4.3}$$

Der Punkt x_1 heißt dann erreichbar von x_0 zur Zeit t. Wir definieren die Menge $\mathcal{R}(t)$ der zur Zeit t von $x_0 = 0$ erreichbaren Zustände als

$$\mathcal{R}(t) = \{\varphi(t, 0, 0, u) : u \in \mathcal{U}\}\,, \tag{4.4}$$

sowie die Menge der zur Zeit t nach 0 steuerbaren Zustände als

$$\mathcal{C}(t) = \{x_0 \in \mathbb{R}^n : \exists u \in \mathcal{U} \text{ mit } \varphi(t, 0, x_0, u) = 0\}\,, \tag{4.5}$$

und setzen

$$\mathcal{R} = \bigcup_{t>0} \mathcal{R}(t)\,, \quad \mathcal{C} = \bigcup_{t>0} \mathcal{C}(t)\,. \tag{4.6}$$

Die Begriffe Steuerbarkeit und Erreichbarkeit beziehen sich also nur auf die Differentialgleichung, d.h. auf das Paar (A, B), nicht aber auf die Outputabbildung.

Lemma 4.2
Die Menge $\mathcal{R}$ ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$, und es gilt

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}(t) \qquad \forall t > 0\,. \tag{4.7}$$

Beweis:

(1) Für jedes $t > 0$ ist $\mathcal{R}(t)$ Unterraum, da

$$\begin{aligned}\varphi(t, 0, 0, \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) &= \int_0^t e^{(t-s)A} B(\lambda_1 u_1(s) + \lambda_2 u_2(s))\, ds \\ &= \lambda_1 \varphi(t, 0, 0, u_1) + \lambda_2 \varphi(t, 0, 0, u_2)\end{aligned} \tag{4.8}$$

für alle $u_1, u_2 \in \mathcal{U}$ und alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

(2) Für jedes $0 < s < t$ gilt $\mathcal{R}(s) \subset \mathcal{R}(t)$: Ist $x_1 = \varphi(s, 0, 0, u)$, so ist auch $x_1 = \varphi(t, 0, 0, v)$, wenn wir setzen

$$v(\tau) = \begin{cases} 0\,, & 0 \le \tau < t - s\,, \\ u(\tau - t + s)\,, & t - s \le \tau \le t\,. \end{cases} \tag{4.9}$$

(3) Aus $\mathcal{R}(s) = \mathcal{R}(s+t)$ für $s, t > 0$ folgt $\mathcal{R}(s+2t) = \mathcal{R}(s)$: Sei $x_1 \in \mathcal{R}(s+2t)$, dann gibt es $u \in \mathcal{U}$ mit $x_1 = \varphi(s+2t, 0, 0, u)$. Ebenso gibt es $v \in \mathcal{U}$ mit

$$\varphi(s+t, 0, 0, u) = \varphi(s, 0, 0, v) . \tag{4.10}$$

Wir setzen

$$w(\tau) = \begin{cases} v(\tau) , & 0 \leq \tau < s , \\ u(\tau + t) , & s \leq \tau \leq s + t . \end{cases} \tag{4.11}$$

Dann gilt $\varphi(s, 0, 0, w) = \varphi(s+t, 0, 0, u)$ und

$$\varphi(s+t, 0, 0, w) = \varphi(s+2t, 0, 0, u) = x_1 . \tag{4.12}$$

(4) Da wegen (2) die Abbildung $t \mapsto \mathcal{R}(t)$ stückweise konstant ist auf $(0, \infty)$, ist sie wegen (3) konstant.

□

Bemerkung 4.3
Die Gleichung (4.7) bedeutet, daß jeder Punkt, der überhaupt von 0 aus erreicht werden kann, auch in beliebig kurzer Zeit erreicht werden kann (liegt daran, daß beliebig große Steuerungen zugelassen sind). □

Definition 4.4 (A-invarianter Unterraum)
Sei X Vektorraum, V Unterraum von X, $A : X \to X$ linear. Falls $A(V) \subset V$, heißt V ein A-invarianter Unterraum.

Lemma 4.5
Sei X Vektorraum, V Unterraum von X, $A : X \to X$ linear. Dann wird durch

$$\langle A \,|\, V \rangle = \cap \{ W : W \text{ ist } A\text{-invarianter Unterraum von } X \text{ mit } V \subset W \} \tag{4.13}$$

ein Unterraum von X definiert, welcher der kleinste A-invariante Unterraum ist, der V umfaßt. Im Falle $X = \mathbb{R}^n$ gilt außerdem

$$e^{tA}(\langle A \,|\, V \rangle) = \langle A \,|\, V \rangle . \tag{4.14}$$

Beweis: Aus Definition 4.4 folgt sofort, daß $\langle A \,|\, V \rangle$ ein A-invarianter Unterraum ist, welcher V umfaßt. Die Minimalität ist klar. Aus der A-Invarianz folgt, daß $A^k(\langle A \,|\, V \rangle) \subset \langle A \,|\, V \rangle$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, also auch

$$e^{tA}(\langle A \,|\, V \rangle) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k \right) (\langle A \,|\, V \rangle) \subset \langle A \,|\, V \rangle . \tag{4.15}$$

Da e^{tA} invertierbar ist, gilt die Gleichheit. □

Lemma 4.6
Sei V Unterraum von $\mathbb{R}^n$, $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear. Dann gilt

$$\langle A \,|\, V \rangle = V + AV + \ldots + A^{n-1} V \tag{4.16}$$

Beweis:

$'' \supset ''$ Sei W ein A-invarianter Unterraum mit $V \subset W$. Es ist dann $A^k V \subset W$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, also ist die rechte Seite von (4.16) in jedem solchen W enthalten, also auch in $\langle A \,|\, V \rangle$.

Es bleibt zu zeigen, daß die rechte Seite von (4.16) A-invariant ist. Der Satz von Cayley-Hamilton besagt, daß für das charakteristische Polynom χ_A von A,

$$\chi_A(z) = \det(zI - A) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0 \,, \tag{4.17}$$

gilt

$$\chi_A(A) = A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \ldots + a_0 I = 0 \,. \tag{4.18}$$

Also ist

$$A \left(\sum_{k=0}^{n-1} A^k V \right) = \sum_{k=1}^{n-1} A^k V - \sum_{k=0}^{n-1} a_k A^k V \subset \sum_{k=0}^{n-1} A^k V \,. \tag{4.19}$$

□

Im Folgenden wird eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit ihrer Matrixdarstellung (bzgl. der kanonischen Basis) identifiziert, d.h. $A(x)$ ist der Vektor mit i-ter Komponente $\sum_j a_{ij} x_j$. Es gilt dann

Lemma 4.7
Sei (A, B) ein Kontrollsystem. Dann gilt

$$\langle A \,|\, \operatorname{im} B \rangle = \operatorname{im} \, (B \; AB \ldots A^{n-1} B) \,. \tag{4.20}$$

Die $n \times mn$-Matrix $(B \; AB \ldots A^{n-1} B)$ heißt die Erreichbarkeits- oder Kontrollierbarkeitsmatrix des Systems (A, B).

Beweis: Die Behauptung folgt aus (4.16), da der von den Spalten der Erreichbarkeitsmatrix aufgespannte Unterraum gerade gleich

$$\sum_{k=0}^{n-1} A^k (\operatorname{im} B) \tag{4.21}$$

ist. □

Definition 4.8 (Gramsche Matrix des linearen zeitinvarianten Systems)
Die Matrix

$$W_t = \int_0^t e^{sA} B B^T e^{sA^T} \, ds \,, \quad t > 0 \,, \tag{4.22}$$

heißt Gramsche Matrix des Systems (A, B).

Jede Gramsche Matrix W_t ist symmetrisch und positiv semidefinit (folgt sofort aus der Definition).

Lemma 4.9
Sei $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$, $B \in \mathbb{R}^{(n,m)}$. Dann gilt für alle $t > 0$

$$\langle A \,|\, \operatorname{im} B \rangle = \operatorname{im} W_t \,. \tag{4.23}$$

Beweis: Es genügt zu zeigen: $\langle A \,|\, \mathrm{im}\, B\rangle^{\perp} = (\mathrm{im}\; W_t)^{\perp}$.

$'' \subset ''$ Sei $x \in \langle A \,|\, \mathrm{im}\, B\rangle^{\perp}$. Aus (4.20) und dem Satz von Cayley-Hamilton folgt $x^T A^k B = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, also auch

$$x^T e^{tA} B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} x^T A^k B = 0 \quad \forall t \geq 0\,, \tag{4.24}$$

und damit $x^T W_t = 0$.

$'' \supset ''$ Sei $x^T W_t = 0$ für ein $t > 0$. Dann gilt

$$0 = x^T W_t x = \int_0^t \|x^T e^{sA} B\|_2^2 \, ds\,, \tag{4.25}$$

also $x^T e^{sA} B = 0$ für alle $s \geq 0$. Einsetzen von $s = 0$ ergibt sich $x^T B = 0$. Sukzessives Differenzieren nach s liefert

$$x^T A^k e^{sA} B = 0 \quad \forall s \geq 0\,, \tag{4.26}$$

und Einsetzen von $s = 0$ ergibt $x^T A^k B = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$, d.h.

$$x \perp \mathrm{im}\; (B\; AB \ldots A^{n-1}B)\,. \tag{4.27}$$

$\square$

Satz 4.10 (Charakterisierung von $\mathcal{R}$ und $\mathcal{C}$)
Für das lineare zeitinvariante Kontrollsystem (A, B) gilt

$$\mathcal{R} = \mathcal{C} = \mathcal{C}(t) = \mathcal{R}(t) = \langle A \,|\, \mathrm{im}\, B\rangle = \mathrm{im}\; (B\; AB \ldots A^{n-1}B)\,, \quad \forall t \geq 0\,. \tag{4.28}$$

Beweis: Ein Teil der Gleichungen ist schon in den obigen Lemmata gezeigt. Es bleibt

$\mathcal{R}(t) \subset \langle A \,|\, \mathrm{im}\, B\rangle$: Sei $x = \varphi(t, 0, 0, u) \in \mathcal{R}(t)$. Dann gilt

$$x = \int_0^t e^{(t-s)A} B u(s)\, ds = \int_0^t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-s)^k}{k!} A^k B u(s)\, ds \in \langle A \,|\, \mathrm{im}\, B\rangle\,. \tag{4.29}$$

$\mathrm{im}\, W_t \subset \mathcal{R}(t)$: Sei $z \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Wir setzen

$$u(s) = B^T e^{(t-s)A^T} z\,, \tag{4.30}$$

dann gilt

$$\varphi(t, 0, 0, u) = \int_0^t e^{(t-s)A} B B^T e^{(t-s)A^T} z\, ds = W_t z\,. \tag{4.31}$$

$\mathcal{C}(t) \subset \mathcal{R}(t)$:

$$\begin{aligned} x_0 \in \mathcal{C}(t) \quad &\Rightarrow \quad 0 = e^{tA} x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} B u(s)\, ds \\ &\Rightarrow \quad e^{tA} x_0 = \varphi(t, 0, 0, -u) \in \mathcal{R}(t) \\ &\Rightarrow \quad x_0 \in \mathcal{R}(t) \end{aligned} \tag{4.32}$$

wegen (4.14) und da $\mathcal{R}(t) = \langle A \,|\, \mathrm{im}\, B\rangle$ bereits bewiesen ist.

$\mathcal{R}(t) \subset \mathcal{C}(t)$**:**

$$\begin{aligned} x_1 \in \mathcal{R}(t) \quad &\Rightarrow \quad e^{tA}x_1 \in \mathcal{R}(t) \qquad \text{wie eben} \\ &\Rightarrow \quad \exists u \in \mathcal{U}\,, \quad e^{tA}x_1 = \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)\,ds \\ &\Rightarrow \quad 0 = e^{tA}x_1 + \int_0^t e^{(t-s)A}B(-u(s))\,ds \\ &\Rightarrow \quad x_1 \in \mathcal{C}(t)\,. \end{aligned} \tag{4.33}$$

$\mathcal{C} = \mathcal{C}(t)$**:** Nach dem bisher Bewiesenen ist $\mathcal{C}(t) = \mathcal{R}$ unabhängig von t.

□

Folgerung 4.11 (Kalman-Kriterium für Steuerbarkeit)
Für das lineare zeitinvariante Kontrollsystem (A, B) *gilt* $\mathcal{R} = \mathcal{C} = \mathbb{R}^n$ *genau dann, wenn*

$$\operatorname{rang}\,(B\ AB \ldots A^{n-1}B) = n\,. \tag{4.34}$$

In diesem Fall heißt (A, B) *steuerbar (oder auch: vollständig steuerbar).*

Beispiel 4.12 (Linearisierter Dreharm)
Die Gleichung $\ddot{\varphi} - \varphi = u$ führt auf das Kontrollsystem (A, B) mit $n = 2$, $m = 1$ und

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{4.35}$$

Die Steuerbarkeitsmatrix ist

$$(B\ AB) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.36}$$

Sie hat Rang 2, also ist das System steuerbar. (Es ist also nicht erforderlich, daß die Steuerung genausoviele Komponenten wie der Zustandsraum hat !) □

Bemerkung 4.13 (Koordinatentransformation im Zustandsraum)
Sei $T \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ invertierbar. Wir können vermittels

$$x = T\tilde{x}\,, \quad \tilde{x} = T^{-1}x\,, \tag{4.37}$$

die Koordinaten im Zustandsraum wechseln. Das Kontrollsystem

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{4.38}$$

transformiert sich auf

$$\dot{\tilde{x}}(t) = T^{-1}\dot{x}(t) = T^{-1}(Ax(t) + Bu(t)) = T^{-1}AT\tilde{x}(t) + T^{-1}Bu(t)\,. \tag{4.39}$$

Die Outputabbildung wird zu

$$y(t) = Cx(t) = CT\tilde{x}(t)\,. \tag{4.40}$$

□

Definition 4.14 (Ähnlichkeit von Kontrollsystemen)
Zwei Kontrollsysteme (A, B, C) *und* $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ *mit* $A, \tilde{A} \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ *,* $B, \tilde{B} \in \mathbb{R}^{(n,m)}$ *und* $C, \tilde{C} \in \mathbb{R}^{(k,n)}$ *heißen ähnlich, wenn es ein invertierbares* $T \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ *gibt mit*

$$\tilde{A} = T^{-1}AT \,, \quad \tilde{B} = T^{-1}B \,, \quad \tilde{C} = CT \,. \tag{4.41}$$

(A, B) *und* $(\tilde{A}, \tilde{B})$ *heißen ähnlich, wenn die ersten beiden Gleichungen in (4.41) gelten.*

Satz 4.15
Sei (A, B) *ein nicht steuerbares Kontrollsystem, d.h. sei* $\dim(\langle A \,|\, \mathrm{im}\, B\rangle) = r < n$ *. Dann gibt es ein zu* (A, B) *ähnliches Kontrollsystem* $(\tilde{A}, \tilde{B})$ *mit*

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix} , \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} , \tag{4.42}$$

wobei $A_1 \in \mathbb{R}^{(r,r)}$ *,* $B_1 \in \mathbb{R}^{(r,m)}$ *, so daß das Kontrollsystem* (A_1, B_1) *steuerbar ist.*

Beweis: Sei W ein algebraisches Komplement von $\langle A \,|\, \mathrm{im}\, B\rangle$ in $\mathbb{R}^n$, d.h. ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$ mit

$$\mathbb{R}^n = \langle A \,|\, \mathrm{im}\, B\rangle \oplus W \,. \tag{4.43}$$

Sei $(v_1, \ldots, v_r)$ Basis von $\langle A \,|\, \mathrm{im}\, B\rangle$, $(w_1, \ldots, w_{n-r})$ Basis von W , sei T die Matrix mit den Spalten $(v_1, \ldots, v_r, w_1, \ldots, w_{n-r})$, d.h. für die Einheitsvektoren e_i gilt

$$Te_i = v_i \,, \quad 1 \le i \le r \,, \qquad Te_{r+i} = w_i \,, \quad 1 \le i \le n - r \,. \tag{4.44}$$

Da $\mathrm{im}\, B \subset \langle A \,|\, \mathrm{im}\, B\rangle$, folgt die behauptete Form von $\tilde{B}$. Da $A(\langle A \,|\, \mathrm{im}\, B\rangle) \subset \langle A \,|\, \mathrm{im}\, B\rangle$, folgt die behauptete Form von $\tilde{A}$. Für die Kontrollierbarkeitsmatrix gilt

$$(B \; AB \ldots A^{n-1}B) = T(\tilde{B} \; \tilde{A}\tilde{B} \ldots \tilde{A}^{n-1}\tilde{B}) \,, \tag{4.45}$$

und

$$\tilde{A}^k \tilde{B} = \begin{pmatrix} A_1^k B_1 \\ 0 \end{pmatrix} , \tag{4.46}$$

also

$$r = \mathrm{rang}\,(B \; AB \ldots A^{n-1}B) = \mathrm{rang}\,(B_1 \; A_1B_1 \ldots A_1^{n-1}B_1) \,. \tag{4.47}$$

□

Bemerkung 4.16
Die Aussage von Satz 4.15 bedeutet: Jedes Kontrollsystem (A, B) kann durch eine Koordinatentransformation auf die Form

$$\dot{z}_1 = A_1 z_1 + A_2 z_2 + B_1 u \,, \tag{4.48}$$

$$\dot{z}_2 = A_3 z_2 \,, \tag{4.49}$$

mit einem steuerbaren Teilsystem (A_1, B_1) und einem völlig unbeeinflußbaren Teilsystem A_3 gebracht werden.

Bemerkung 4.17
Die bisherigen Sätze (insbesondere das Kalman-Kriterium und die Normalform 4.15 gelten auch, wenn man im Komplexen arbeitet (d.h. alle Vektoren und Matrizen bestehen aus komplexen Zahlen; formal: wir ersetzen überall $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{C}$, außer im Zeitintervall I).

Satz 4.18 (Hautus-Kriterium)
Sei (A, B) ein Kontrollsystem mit $A \in \mathbb{K}^{(n,n)}$,, $B \in \mathbb{K}^{(n,m)}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Dann sind äquivalent:

(i) *(A, B) ist steuerbar,*

(ii) $\operatorname{rang}_{\mathbb{C}}(\lambda I - A|B) = n$ *für alle* $\lambda \in \mathbb{C}$,

(iii) $\operatorname{rang}_{\mathbb{C}}(\lambda I - A|B) = n$ *für alle Eigenwerte* $\lambda \in \mathbb{C}$ *von* A.

Beweis:

(ii)⇒(iii): klar.

(iii)⇒(ii): Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ kein Eigenwert von A, so ist $\operatorname{rang}_{\mathbb{C}}(\lambda I - A) = n$.

¬(ii)⇒ ¬(i): Sei $\operatorname{rang}_{\mathbb{C}}(\lambda I - A|B) < n$. Wähle $0 \neq p \in \mathbb{C}^n$ mit $\bar{p}^T(\lambda I - A|B) = 0$, also $\bar{p}^T A = \lambda \bar{p}^T$ und $\bar{p}^T B = 0$. Es folgt, daß

$$\bar{p}^T A^k B = \lambda^k \bar{p}^T B = 0\,, \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0\,, \tag{4.50}$$

also steht p senkrecht auf dem Bild der Erreichbarkeitsmatrix, also ist

$$n > \operatorname{rang}_{\mathbb{C}}(B\ AB \ldots A^{n-1}B) = \operatorname{rang}_{\mathbb{R}}(B\ AB \ldots A^{n-1}B)\,. \tag{4.51}$$

(die zweite Gleichung gilt, falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.)

¬(i)⇒ ¬(ii): Sei (A, B) nicht steuerbar, sei $(\tilde{A}, \tilde{B})$ ein zu (A, B) ähnliches Kontrollsystem mit (siehe Satz 4.15)

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{4.52}$$

Sei $v \in \mathbb{C}^{n-r}$ Linkseigenvektor zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ von A_3. Für $w^T = (0\ v^T) \in \mathbb{C}^n$ gilt dann

$$w^T(\lambda I - \tilde{A}|\tilde{B}) = (0\ v^T) \begin{pmatrix} \lambda I - A_1 & -A_2 & B_1 \\ 0 & \lambda I - A_3 & 0 \end{pmatrix} = 0\,. \tag{4.53}$$

Für $p^T = w^T T^{-1}$ gilt dann

$$p^T((\lambda I - A)T|B) = w^T(\lambda I - \tilde{A}|\tilde{B}) = 0\,, \tag{4.54}$$

und aus $p^T(\lambda I - A)T = 0$ folgt $p^T(\lambda I - A) = 0$.

□

Definition 4.19 (Menge der steuerbaren Kontrollsysteme)
Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *oder* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. *Wir definieren*

$$\mathcal{S}^c_{\mathbb{K}} = \{(A,B) : A \in \mathbb{K}^{(n,n)},\ B \in \mathbb{K}^{(n,m)},\ (A,B) \text{ ist steuerbar } \}, \tag{4.55}$$

$$\mathcal{S}^u_{\mathbb{K}} = \{(A,B) : A \in \mathbb{K}^{(n,n)},\ B \in \mathbb{K}^{(n,m)},\ (A,B) \text{ ist nicht steuerbar } \}. \tag{4.56}$$

Satz 4.20
Die Menge $\mathcal{S}^c_{\mathbb{K}}$ *aller steuerbaren Kontrollsysteme ist offen und dicht in* $\mathbb{K}^{n(n+m)}$ *(= Menge aller Kontrollsysteme).*

Beweis: Sei $(A,B)_{j_1,\ldots,j_n}$ die aus den Spalten $j_1,\ldots,j_n$ der Erreichbarkeitsmatrix von (A,B) gebildete $n \times n$-Matrix, sei

$$\mathcal{S}^u_{\mathbb{K}}(j_1,\ldots,j_n) = \{(A,B) : \det((A,B)_{j_1,\ldots,j_n}) = 0\}, \tag{4.57}$$

dann ist $\mathcal{S}^u_{\mathbb{K}}(j_1,\ldots,j_n)$ Nullstellenmenge eines Polynoms, also abgeschlossen, und das Komplement von $\mathcal{S}^u_{\mathbb{K}}(j_1,\ldots,j_n)$ ist dicht in $\mathbb{K}^{n(n+m)}$. Also ist

$$\mathcal{S}^c_{\mathbb{K}} = \bigcap_{j_1<\ldots<j_n} (\mathbb{K}^{n(n+m)} \backslash \mathcal{S}^u_{\mathbb{K}}(j_1,\ldots,j_n)) \tag{4.58}$$

offen und dicht in $\mathbb{K}^{n(n+m)}$. □

Bemerkung 4.21
Ist (A,B) ein nicht steuerbares Kontrollsystem, so liegen also steuerbare Kontrollsysteme beliebig dicht bei (A,B). Die Frage, ob ein gegebenes Kontrollsystem (A,B) steuerbar ist oder nicht, ist also nur sinnvoll, falls sowohl keinerlei Datenfehler möglich ist als auch die Rechnung rundungsfehlerfrei verläuft. Andernfalls lautet die richtige Frage, wie groß der Abstand von (A,B) zum nächsten nichtsteuerbaren System ist.

Definition 4.22
Sei (A,B) *ein Kontrollsystem mit* $A \in \mathbb{K}^{(n,n)}$, $B \in \mathbb{K}^{(n,m)}$. *Wir definieren*

$$\mu_{\mathbb{K}}(A,B) = \min_{(\tilde{A},\tilde{B}) \in \mathcal{S}^u_{\mathbb{K}}} \|(\tilde{A} - A | \tilde{B} - B)\|_2 . \tag{4.59}$$

Definition 4.23 (Singulärwertzerlegung einer Matrix)
Eine Singulärwertzerlegung einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{(p,q)}$ *hat die Form*

$$A = U\Sigma V^H = (U_1\ U_2) \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^H \\ V_2^H \end{pmatrix}, \quad (V^H := \bar{V}^T), \tag{4.60}$$

wobei $U \in \mathbb{K}^{(p,p)}$, $V \in \mathbb{K}^{(q,q)}$ *orthogonale Matrizen sind (d.h.* $U^{-1} = U^H$ *), und* $S = \operatorname{diag}(\sigma_1,\ldots,\sigma_r)$ *Diagonalmatrix ist mit* $0 \le r \le \min\{p,q\}$ *und* $\sigma_1 \ge \sigma_2 \ge \cdots \ge \sigma_r > 0$. *Man setzt* $\sigma_k = 0$ *für* $k > r$ *und bezeichnet den kleinsten Singulärwert* $\sigma_{\min\{p,q\}}$ *auch mit* $\sigma_{min}(A)$.

Satz 4.24 (Charakterisierung von $\mu_{\mathbb{C}}$**)**
Sei (A,B) *ein Kontrollsystem mit* $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$, $B \in \mathbb{C}^{(n,m)}$. *Dann gilt*

$$\mu_{\mathbb{C}}(A,B) = \min_{\lambda \in \mathbb{C}} \sigma_{min}(\lambda I - A | B). \tag{4.61}$$

Beweis: Nach einem Satz über die Singulärwertzerlegung gilt

$$\sigma_{min}(\lambda I - A|B) = \min \quad \{\|(H|K)\|_2 : \operatorname{rang}(\lambda I - A - H|B - K) < n\,, \\ H \in \mathbb{C}^{(n,n)}\,,\ K \in \mathbb{C}^{(n,m)}\}\,, \tag{4.62}$$

d.h. der kleinste Singulärwert gibt den Abstand zur Menge der Matrizen vom Rang $n-1$ an. Nach einem weiteren Satz über die Singulärwertzerlegung wird das Minimum der rechten Seite von (4.61) tatsächlich angenommen.

"$\geq$": Sei $(\tilde{A},\tilde{B}) \in \mathcal{S}^u_{\mathbb{C}}$ mit

$$\mu_{\mathbb{C}}(A,B) = \|(\tilde{A} - A|\tilde{B} - B)\|_2\,, \tag{4.63}$$

sei $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{rang}(\lambda I - \tilde{A}|\tilde{B}) < n$, dann ist wegen (4.62)

$$\sigma_{min}(\lambda I - A|B) \leq \|(\tilde{A} - A|\tilde{B} - B)\|_2 = \mu_{\mathbb{C}}(A,B)\,. \tag{4.64}$$

"$\leq$" Es werde das Minimum der rechten Seite von (4.61) in $\lambda_* \in \mathbb{C}$ angenommen. Dann gibt es ein $(\tilde{A},\tilde{B})$ mit

$$\sigma_{min}(\lambda_* I - A|B) = \|(\tilde{A} - A|\tilde{B} - B)\|_2\,, \tag{4.65}$$

und $\operatorname{rang}(\lambda_* I - \tilde{A}|\tilde{B}) < n$, also $(\tilde{A},\tilde{B}) \in \mathcal{S}^u_{\mathbb{C}}$.

□

Bemerkung 4.25 (Numerische Berechnung von $\mu_{\mathbb{K}}$)
Man kann zeigen, daß für $(A,B) \in \mathbb{R}^{(n,n)} \times \mathbb{R}^{(n,m)}$ gilt

$$\mu_{\mathbb{C}}(A,B) = \min_{\substack{x \in \mathbb{C}^n \\ \|x\|_2 = 1}} \sqrt{x^H A(I - xx^H)A^T x + x^H BB^T x}\,, \tag{4.66}$$

und ein geeignetes Minimierungsverfahren (es gibt speziell für (4.66) konstruierte) anwenden. Für $\mu_{\mathbb{R}}$ gibt es eine ähnliche, aber etwas kompliziertere Minimierungsaufgabe.

Bemerkung 4.26 (Orthogonale Ähnlichkeitstransformation)
Sei (A,B) ein Kontrollsystem mit $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$, $B \in \mathbb{R}^{(n,m)}$, $m < n$. Sei

$$(B \ \ A) = QR\,, \tag{4.67}$$

mit $Q \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ orthogonal, $R \in \mathbb{R}^{(n,n(m+n))}$ obere Dreiecksmatrix, eine QR-Zerlegung von $(B \ \ A) \in \mathbb{R}^{(n,n(m+n))}$ (kann z.B. mit dem Verfahren von Householder berechnet werden). Es ist dann (beachte $Q^{-1} = Q^T$)

$$R = (Q^T B \ \ Q^T A)\,. \tag{4.68}$$

Daraus erhalten wir das zu (A,B) ähnliche Kontrollsystem

$$(\tilde{A},\tilde{B}) = (Q^T A Q, Q^T B)\,. \tag{4.69}$$

Definition 4.27 (System-Hessenberg-Form)
Das in Bemerkung 4.26 konstruierte Kontrollsystem

$$(\tilde{A}, \tilde{B}) = (Q^T A Q, Q^T B) \tag{4.70}$$

heißt die System-Hessenberg-Form von (A, B) .

Satz 4.28
Sei (A, b) *ein Kontrollsystem mit skalarer Kontrolle,* $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$, $b \in \mathbb{R}^n$. *Sei* (A_H, b_H) *die System-Hessenberg-Form von* (A, b) *, d.h.*

$$(b_H \;\; A_H) = \begin{pmatrix} h_{10} & h_{11} & \cdots & & \cdots & h_{1n} \\ 0 & h_{21} & \cdots & & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & h_{n,n-1} & h_{nn} \end{pmatrix}. \tag{4.71}$$

Dann ist (A, b) *steuerbar genau dann, wenn*

$$h_{k,k-1} \neq 0, \qquad \text{für alle } k\,,\ 1 \leq k \leq n\,. \tag{4.72}$$

Beweis: Zunächst stellt man durch Betrachtung der elementaren Householdertransformationen bei der Berechnung der QR-Zerlegung fest, daß die Matrix $(b_H \; A_H)$ die behauptete Nullenstruktur hat, d.h. daß die Rechtsmultiplikation mit Q die Nullen unterhalb der Diagonalen nicht zerstört. Für die Kontrollierbarkeitsmatrizen gilt dann (wie in (4.45))

$$(b \; Ab \ldots A^{n-1} b) = Q(b_H \; A_H b_H \ldots A_H^{n-1} b_H)\,, \tag{4.73}$$

also haben beide Kontrollierbarkeitsmatrizen den gleichen Rang. Weiter gilt

$$(b_H \; A_H b_H \ldots A_H^{n-1} b_H) = \begin{pmatrix} h_{10} & * & * & \ldots & \ldots & * \\ 0 & h_{21}h_{10} & * & \ldots & \ldots & \vdots \\ \vdots & 0 & h_{32}h_{21}h_{10} & * & \ldots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \prod_{k=1}^n h_{k,k-1} \end{pmatrix}, \tag{4.74}$$

also

$$\operatorname{rang}(b_H \; A_H b_H \ldots A_H^{n-1} b_H) = n \qquad \Leftrightarrow \qquad \prod_{k=1}^{n} h_{k,k-1} \neq 0\,. \tag{4.75}$$

□

Bemerkung 4.29

- Die Berechnung der System-Hessenberg-Form ist numerisch gut konditioniert (da nur orthogonale Transformationen verwendet werden). Aufgrund der System-Hessenberg-Form kann man entscheiden, ob das System steuerbar ist oder nicht (im Rahmen der durch Bemerkung 4.21 gezogenen Grenzen).

- Falls die QR-Zerlegung bei der k-ten Spalte mit $h_{k,k-1} = 0$ abbricht, stellen die bis dahin berechneten Spalten von Q eine ON-Basis des erreichbaren Unterraums $\mathcal{R}$ dar.

- Ein ähnliches (etwas komplizierteres) Verfahren läßt sich auch für vektorwertige Kontrollen ($m > 1$) konstruieren.

5 Beobachtbarkeit linearer zeitinvarianter Systeme, Dualität

Wir betrachten das System

$$\dot{x} = Ax + Bu \,, \quad y = Cx \,, \quad A \in \mathbb{R}^{(n,n)} \,,\ B \in \mathbb{R}^{(n,m)} \,,\ C \in \mathbb{R}^{(k,n)} \,. \tag{5.1}$$

Es erhebt sich die Frage, ob es Teile des Zustandsraums gibt, die den Output völlig unbeeinflußt lassen.

Definition 5.1 (Beobachtbarkeit)
Zwei Zustände x_1, x_2 heißen ununterscheidbar auf dem Zeitintervall $[0,t]$ falls gilt

$$y(\tau; x_1, u) = y(\tau; x_2, u) \qquad \forall u \in \mathcal{U} \quad \forall \tau \in [0,t] \,. \tag{5.2}$$

Hierbei bezeichnet $y(\cdot; x_0, u)$ die Outputfunktion des Kontrollsystems mit Anfangswert $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und Steuerung $u \in \mathcal{U}$. Das System heißt beobachtbar auf $[0,t]$, falls alle Zustände $x_1 \neq x_2$ unterscheidbar sind.

Lemma 5.2
Für das System (5.1) gilt: $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ sind ununterscheidbar auf $[0,t]$ genau dann, wenn

$$Ce^{\tau A}(x_2 - x_1) = 0 \qquad \text{für alle } \tau \in [0,t] \,. \tag{5.3}$$

Beweis:

$$y(\tau; x_2, u) - y(\tau; x_1, u) = Ce^{\tau A}(x_2 - x_1) \,. \tag{5.4}$$

□

Definition 5.3
Wir definieren den unbeobachtbaren Unterraum des Kontrollsystems (A,B,C) als

$$\mathcal{N} = \bigcap_{t \geq 0} \ker(Ce^{tA}) \,. \tag{5.5}$$

(Das Kontrollsystem ist also beobachtbar genau dann, wenn $\mathcal{N} = 0$.)

Satz 5.4 (Charakterisierung von $\mathcal{N}$)
Für das Kontrollsystem (A,B,C) gilt

$$\mathcal{N} = \bigcap_{k=0}^{\infty} \ker(CA^k) = \bigcap_{k=0}^{n-1} \ker(CA^k) \,. \tag{5.6}$$

Beweis:

beide "⊂": Ist $x_0 \in \mathcal{N}$, so ist $Ce^{tA}x_0 = 0$ für alle $t \geq 0$, also auch

$$0 = \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} e^{tA} x_0 \Big|_{t=0} = CA^k x_0 \,, \quad k \in \mathbb{N}_0 \,. \tag{5.7}$$

beide "⊃": Aus $CA^k x_0 = 0$ für $0 \leq k < n$ folgt $CA^k x_0 = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ mit dem Satz von Cayley-Hamilton, also auch $Ce^{tA}x_0 = 0$.

$\square$

Folgerung 5.5
Der unbeobachtbare Unterraum $\mathcal{N}$ ist A-invariant.

Beweis: Es ist

$$A(\ker(CA^k)) \subset \ker(CA^{k-1}), \quad k \in \mathbb{N}. \tag{5.8}$$

$\square$

Bemerkung 5.6 (Quotientensystem)
Man möchte durch Identifizierung nichtunterscheidbarer Zustände zu einem kleineren System übergehen. Wir betrachten das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^n & \xrightarrow{C} & \mathbb{R}^k \\ \downarrow & & \downarrow & & \updownarrow \\ \mathbb{R}^n/\mathcal{N} & \xrightarrow{\bar{A}} & \mathbb{R}^n/\mathcal{N} & \xrightarrow{\bar{C}} & \mathbb{R}^k \end{array}, \tag{5.9}$$

wobei die senkrechten Pfeile die kanonische Projektion bzw. die Identität darstellen. Da $\mathcal{N}$ sowohl A-invariant als auch in $\ker(C)$ enthalten ist, gibt es nach dem Homomorphiesatz der Linearen Algebra lineare Abbildungen $\bar{A}$ und $\bar{C}$, so daß das Diagramm kommutiert. $\square$

Satz 5.7 (Normalform)
Sei (A, B, C) ein nicht beobachtbares Kontrollsystem mit $r = \dim(\mathcal{N}) > 0$. Dann gibt es ein zu (A, B, C) ähnliches Kontrollsystem $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ mit

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}, \quad \tilde{C} = \begin{pmatrix} 0 & C_2 \end{pmatrix}, \tag{5.10}$$

mit $A_3 \in \mathbb{R}^{(n-r,n-r)}$, $C_2 \in \mathbb{R}^{(k,n-r)}$, so daß das System $(A_3, 0, C_2)$ beobachtbar ist.

Beweis: Wir zerlegen den Zustandsraum $\mathbb{R}^n$ in eine direkte Summe

$$\mathbb{R}^n = \mathcal{N} \oplus W. \tag{5.11}$$

Sei $(v_1, \ldots, v_r)$ Basis von $\mathcal{N}$, $(w_1, \ldots, w_{n-r})$ Basis von W. Wir definieren die Koordinatentransformation $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch

$$Te_i = v_i, \quad 1 \le i \le r, \tag{5.12}$$

$$Te_{r+i} = w_i, \quad 1 \le i \le n-r, \tag{5.13}$$

und setzen $\tilde{A} = T^{-1}AT$, $\tilde{C} = CT$. Wegen $\mathcal{N} \subset \ker(C)$ und wegen der A-Invarianz von $\mathcal{N}$ haben $\tilde{A}$ und $\tilde{C}$ die behauptete Form. Es gilt

$$\tilde{C}\tilde{A}^k = CA^kT, \qquad \text{also} \quad \ker(\tilde{C}\tilde{A}^k) = T^{-1}(\ker(CA^k)), \tag{5.14}$$

und damit

$$T^{-1}(\mathcal{N}) = \tilde{\mathcal{N}} = \bigcap_{k=0}^{n-1} \ker(\tilde{C}\tilde{A}^k) = \bigcap_{k=0}^{n-1} \ker(0 \;\; C_2A_3^k) \supset \mathbb{R}^r \times \{0\}. \tag{5.15}$$

Wegen $\dim(\mathcal{N}) = r$ gilt ganz rechts in (5.15) die Gleichheit, also muß

$$\bigcap_{k=0}^{n-1} \ker(C_2 A_3^k) = 0 \tag{5.16}$$

gelten, d.h. $(A_3, 0, C_2)$ ist beobachtbar wegen Satz 5.4. □

Bemerkung 5.8
Mit der Normalform 5.7 können wir also ein beliebiges Kontrollsystem zerlegen in einen (vollständig) beobachtbaren Teil und in einen Teil, der überhaupt keinen Effekt (auch keinen indirekten) auf den Output hat.

Definition 5.9 (Duales System)
Sei (A, B, C) ein Kontrollsystem der Form (5.1). Das Kontrollsystem (A^T, C^T, B^T) heißt das zu (A, B, C) duale Kontrollsystem.

Bemerkung 5.10

- Wir erhalten also das duale System, indem wir Input und Output vertauschen und alle Matrizen transponieren.
- Zweifaches Dualisieren führt wieder zum ursprünglichen System.

□

Nach den bisherigen Resultaten hat das Kontrollsystem (A, B, C) den erreichbaren bzw. unbeobachtbaren Unterraum

$$\mathcal{R} = \langle A \,|\, \operatorname{im} B \rangle\,, \quad \mathcal{N} = \bigcap_{k=0}^{n-1} \ker(CA^k)\,, \tag{5.17}$$

und das dazu duale Kontrollsystem (A^T, C^T, B^T) entsprechend

$$\mathcal{R}^* = \langle A^T \,|\, \operatorname{im} C^T \rangle\,, \quad \mathcal{N}^* = \bigcap_{k=0}^{n-1} \ker(B^T (A^T)^k)\,. \tag{5.18}$$

Satz 5.11 (Dualität von Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit)
Für das Kontrollsystem (A, B, C) und das dazu duale Kontrollsystem (A^T, C^T, B^T) gilt

$$\mathcal{R}^* = \mathcal{N}^\perp\,, \quad \mathcal{N}^* = \mathcal{R}^\perp\,. \tag{5.19}$$

Beweis: Sei M die Erreichbarkeitsmatrix von (A, B, C), dann ist

$$M = (B \;\; AB \ldots A^{n-1}B)\,, \quad M^T = \begin{pmatrix} B^T \\ B^T A^T \\ \vdots \\ B^T (A^T)^{n-1} \end{pmatrix}\,, \tag{5.20}$$

also gilt

$$\mathcal{R}^\perp = (\operatorname{im} M)^\perp = \ker(M^T) = \mathcal{N}^*\,. \tag{5.21}$$

Die andere Gleichung wird analog bewiesen. □

Folgerung 5.12
Das Kontrollsystem (A, B, C) *ist steuerbar genau dann, wenn das duale Kontrollsystem* (A^T, C^T, B^T) *beobachtbar ist.*

Beweis: Es ist $\mathcal{N}^* = 0$ genau dann, wenn $\mathcal{R} = \mathbb{R}^n$. □

Folgerung 5.13
Ein Kontrollsystem (A, B, C) *ist beobachtbar genau dann, wenn*

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = n. \tag{5.22}$$

Bemerkung 5.14
Wegen der Dualität zwischen Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit erhält man aus jeder Aussage über Steuerbarkeit eine entsprechende Aussage über Beobachtbarkeit.

Satz 5.15 (Kalman-Zerlegung, Kalman 1962)
Sei (A, B, C) *ein Kontrollsystem. Dann gibt es ein zu* (A, B, C) *ähnliches Kontrollsystem* $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ *mit*

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{22} & 0 & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{5.23}$$

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} 0 & C_2 & 0 & C_4 \end{pmatrix}, \tag{5.24}$$

so daß das Teilsystem (A_{22}, B_2, C_2) *steuerbar und beobachtbar ist.*

Beweis: Wir zerlegen den Zustandsraum $\mathbb{R}^n$ in eine direkte Summe

$$\mathbb{R}^n = X_1 \oplus X_2 \oplus X_3 \oplus X_4, \tag{5.25}$$

wobei

$$X_1 = \mathcal{R} \cap \mathcal{N} = \langle A \,|\, \operatorname{im} B \rangle \cap \bigcap_{k=0}^{n-1} \ker(CA^k), \tag{5.26}$$

X_2 ein algebraisches Komplement von X_1 in $\mathcal{R}$, also

$$\mathcal{R} = X_1 \oplus X_2, \tag{5.27}$$

ebenso

$$\mathcal{N} = X_1 \oplus X_3, \quad \mathbb{R}^n = (X_1 \oplus X_2 \oplus X_3) \oplus X_4. \tag{5.28}$$

Sei $(v_1, \ldots, v_n)$ eine entsprechende Basis des $\mathbb{R}^n$, d.h. $(v_{k_{i-1}+1}, \ldots, v_{k_i})$ ist Basis von X_i mit $k_0 = 0$ und $k_i - k_{i-1} = r_i = \dim(X_i)$. Sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die Koordinatentransformation mit

$$Te_i = v_i, \quad 1 \le i \le n. \tag{5.29}$$

Die Nullen in (5.23) und (5.24) erklären sich wie folgt:

$B_3 = B_4 = 0$, da $\operatorname{im} B \subset \langle A \,|\, \operatorname{im} B \rangle = \mathcal{R} = X_1 \oplus X_2$,

$C_1 = C_3 = 0$, da $X_1 \oplus X_3 = \mathcal{N} \subset \ker(C)$,

$A_{31} = A_{32} = A_{41} = A_{42} = 0$, da $\mathcal{R}$ A-invariant ist,

$A_{21} = A_{23} = A_{41} = A_{43} = 0$, da $\mathcal{N}$ A-invariant ist.

Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit von (A_{22}, B_2, C_2): Übung. □

Folgerung 5.16
Für die Impulsantwortmatrix $K(t) := K(t,0)$ *des Kontrollsystems* (A, B, C) *gilt*

$$K(t) = Ce^{tA}B = C_2 e^{tA_{22}} B_2\,, \tag{5.30}$$

d.h. das Teilsystem (A_{22}, B_2, C_2) *hat dasselbe Input-Output-Verhalten wie* (A, B, C).

Beweis: Es gilt

$$\tilde{A}\tilde{B} = \begin{pmatrix} * \\ A_{22}B_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}^k\tilde{B} = \begin{pmatrix} * \\ A_{22}^k B_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{5.31}$$

also

$$\tilde{C}\tilde{A}^k\tilde{B} = C_2 A_{22}^k B_2\,, \quad k \in \mathbb{N}_0\,, \tag{5.32}$$

woraus die Behauptung folgt wegen

$$Ce^{tA}B = \tilde{C}e^{t\tilde{A}}\tilde{B} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \tilde{C}\tilde{A}^k\tilde{B} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} C_2 A_{22}^k B_2 = C_2 e^{tA_{22}} B_2\,. \tag{5.33}$$

□

6 Realisierbarkeit linearer zeitinvarianter Systeme

Notation 6.1

$$\mathcal{S}_{n,m,k} = \{(A,B,C) : A \in \mathbb{R}^{(n,n)}\,,\ B \in \mathbb{R}^{(n,m)}\,,\ C \in \mathbb{R}^{(k,n)}\}\,. \tag{6.1}$$

□

Definition 6.2 (Realisierung)
Sei $K : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{(k,m)}$. Ein Kontrollsystem (A,B,C) heißt eine Realisierung von K (mit Zustandsraumdimension n), wenn

$$K(t) = Ce^{tA}B\,, \quad t \in \mathbb{R}\,, \tag{6.2}$$

d.h. wenn K die Impulsantwortmatrix von (A,B,C) ist. Das Kontrollsystem (A,B,C) heißt minimale Realisierung von K, wenn es keine Realisierung von K mit kleinerer Zustandsraumdimension gibt.

Definition 6.3 (Hankel-Matrix)
Die Hankel-Matrizen $H_l \in \mathbb{R}^{(lk,lm)}$ eines Kontrollsystems $(A,B,C) \in \mathcal{S}_{n,m,k}$ sind für $l \in \mathbb{N}$ definiert als

$$H_l = \begin{pmatrix} CB & CAB & \cdots & CA^{l-1}B \\ CAB & CA^2B & \cdots & CA^lB \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{l-1}B & CA^lB & \cdots & CA^{2(l-1)}B \end{pmatrix}. \tag{6.3}$$

Da für die Impulsantwortmatrix gilt

$$K^{(l)}(0) = CA^lB\,, \tag{6.4}$$

sind die Hankel-Matrizen zweier verschiedener Realisierungen derselben Impulsantwortmatrix offensichtlich gleich (auch dann, wenn die Zustandsräume unterschiedliche Dimension haben). Es gilt also:

Lemma 6.4
Seien $(A,B,C) \in \mathcal{S}_{n,m,k}$, $(\tilde{A},\tilde{B},\tilde{C}) \in \mathcal{S}_{\tilde{n},m,k}$ Realisierungen derselben Impulsantwortmatrix. Dann stimmen die zugehörigen Hankel-Matrizen H_l für alle $l \in \mathbb{N}_0$ überein.

Satz 6.5 (Charakterisierung minimaler Realisierungen)
Sei $(A,B,C) \in \mathcal{S}_{n,m,k}$ ein Kontrollsystem. Dann sind äquivalent:

(i) *(A,B,C) ist steuerbar und beobachtbar.*

(ii) *(A,B,C) ist minimale Realisierung von $K(t) = Ce^{tA}B$.*

Beweis: Es gilt

$$H_l = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{l-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & AB & \cdots & A^{l-1}B \end{pmatrix}, \quad l \in \mathbb{N}\,, \tag{6.5}$$

so daß H_l eine Komposition linearer Abbildungen

$$\mathbb{R}^{lm} \xrightarrow{B_l} \mathbb{R}^n \xrightarrow{C_l} \mathbb{R}^{lk} \tag{6.6}$$

repräsentiert. Ist (A, B, C) steuerbar und beobachtbar, so gilt $\operatorname{rang}(B_l) = \operatorname{rang}(C_l) = n$ für alle $l \geq n$ wegen Folgerung 4.11 und Folgerung 5.13, also folgt

$$\operatorname{rang}(H_l) = n\,, \qquad \text{für alle } l \geq n\,. \tag{6.7}$$

Daraus und aus Lemma 6.4 folgt aber, daß alle steuerbaren und beobachtbaren Realisierungen die gleiche Zustandsraumdimension (nämlich $\lim_{l\to\infty} \operatorname{rang}(H_l)$) haben. Aus der Kalman-Zerlegung in Satz 5.15 und aus Folgerung 5.16 folgt, daß jede andere Realisierung eine größere Zustandsraumdimension haben muß. □

7 Stabilisierung linearer zeitinvarianter Systeme

Wir betrachten das autonome System

$$\dot{x} = f(x), \quad f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n. \tag{7.1}$$

Definition 7.1 (Stabilität eines autonomen Systems)
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig.

(i) *Jedes $x_* \in \mathbb{R}^n$ mit $f(x_*) = 0$ heißt Gleichgewichtspunkt des Systems (7.1).*

(ii) *Ein Gleichgewichtspunkt x_* des Systems (7.1) heißt stabil, wenn gilt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für alle x_0 mit $\|x_0 - x_*\|_2 \leq \delta$ eine Lösung $x : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ von (7.1) zum Anfangswert $x(0) = x_0$ existiert und*

$$\|x(t) - x_*\|_2 \leq \varepsilon, \qquad \text{für alle } t \geq 0, \tag{7.2}$$

erfüllt.

(iii) *Ein Gleichgewichtspunkt x_* von (7.1) heißt asymptotisch stabil, wenn gilt: Es gibt ein $\delta_0 > 0$, so daß für alle x_0 mit $\|x_0 - x_*\|_2 \leq \delta_0$ eine Lösung $x : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ von (7.1) zum Anfangswert $x(0) = x_0$ existiert und*

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = x_* \tag{7.3}$$

erfüllt.

(iv) *Ein $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ heißt Stabilitätsmatrix, wenn der Gleichgewichtspunkt 0 für das System*

$$\dot{x} = Ax \tag{7.4}$$

asymptotisch stabil ist.

Satz 7.2
Sei $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$. Dann gilt

$$\|e^{tA}\|_2 \leq ce^{(\gamma+\varepsilon)t}, \qquad \text{für alle } t \geq 0 \text{ und alle } \varepsilon > 0, \tag{7.5}$$

wobei $c = c(\varepsilon, A)$ eine geeignete Konstante ist und

$$\gamma = \max\{\operatorname{Re}\lambda : \lambda \text{ ist Eigenwert von } A\}. \tag{7.6}$$

Insbesondere ist A Stabilitätsmatrix genau dann, wenn alle Eigenwerte von A negativen Realteil haben.

Beweis: Siehe Bücher über gewöhnliche Differentialgleichungen. □

Problem 7.3 (Stabilisierbarkeitsproblem,lineare zeitinvariante Version)
Wir betrachten

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad A \in \mathbb{R}^{(n,n)}, \quad B \in \mathbb{R}^{(n,m)}, \tag{7.7}$$

wobei A keine Stabilitätsmatrix ist. Gesucht ist eine Rückkopplung

$$u = Fx, \quad F \in \mathbb{R}^{(m,n)}, \tag{7.8}$$

so daß das durch Einsetzen von (7.8) in (7.7) entstehende autonome System

$$\dot{x} = (A + BF)x \tag{7.9}$$

asymptotisch stabil ist.

Satz 7.4 (Skalare Regelungsnormalform)
Seien $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$, $b \in \mathbb{R}^n$. *Dann sind äquivalent:*

(i) *(A,b) ist steuerbar.*

(ii) *Es gibt ein zu (A,b) ähnliches $(\tilde{A},\tilde{b})$ mit*

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}, \quad \tilde{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{7.10}$$

In diesem Fall ist das charakteristische Polynom von A gegeben durch

$$\chi_A(z) = \det(zI - A) = z^n - \alpha_n z^{n-1} - \cdots - \alpha_1 . \tag{7.11}$$

Beweis:

"(ii)⇒(i)" Für $(\tilde{A},\tilde{b})$ gilt (Übungsaufgabe)

$$\chi_{\tilde{A}}(z) = \det(zI - \tilde{A}) = z^n - \alpha_n z^{n-1} - \cdots - \alpha_1 . \tag{7.12}$$

Außerdem ist $(\tilde{A},\tilde{b})$ steuerbar, da

$$\begin{pmatrix} \tilde{b} & \tilde{A}\tilde{b} & \cdots & \tilde{A}^{n-1}\tilde{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & 0 & 1 & * \\ 0 & 1 & * & \vdots \\ 1 & * & \cdots & * \end{pmatrix}. \tag{7.13}$$

Da das charakteristische Polynom sowie die Eigenschaft, steuerbar zu sein, unter Ähnlichkeitstransformationen invariant bleibt, folgen sowohl (i) als auch (7.11).

"(i)⇒(ii)" Sei (A,b) steuerbar, sei das charakteristische Polynom von A durch (7.11) gegeben. Wir wählen die Kontrollierbarkeitsmatrix von (A,b) als Koordinatentransformation, d.h.

$$T = \begin{pmatrix} b & Ab & \cdots & A^{n-1}b \end{pmatrix}. \tag{7.14}$$

Es gilt dann mit Cayley-Hamilton

$$\begin{aligned} AT &= \begin{pmatrix} Ab & A^2b & \cdots & A^nb \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ab & \cdots & A^{n-1}b & \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{k+1}A^kb \end{pmatrix} \\ &= T \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ 1 & \ddots & \vdots & \alpha_2 \\ \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \alpha_n \end{pmatrix} =: TA', \quad T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = b, \end{aligned} \tag{7.15}$$

also

$$T^{-1}AT = A', \quad T^{-1}b = e_1 =: b' . \tag{7.16}$$

Sei nun $(\tilde{A},\tilde{b})$ durch (7.10) definiert. Dasselbe Verfahren, angewendet auf $(\tilde{A},\tilde{b})$, führt auf

$$\tilde{T}^{-1}\tilde{A}\tilde{T} = A''\,, \quad \tilde{T}^{-1}\tilde{b} = e_1\,, \tag{7.17}$$

mit

$$A'' = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \tilde{\alpha}_1 \\ 1 & \ddots & \vdots & \tilde{\alpha}_2 \\ \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \tilde{\alpha}_n \end{pmatrix}, \quad \tilde{T} = \begin{pmatrix} \tilde{b} & \tilde{A}\tilde{b} & \cdots & \tilde{A}^{n-1}\tilde{b} \end{pmatrix}. \tag{7.18}$$

Da $\chi_A = \chi_{\tilde{A}}$, gilt $\alpha_i = \tilde{\alpha}_i$ für alle i. Also sind (A,b) und $(\tilde{A},\tilde{b})$ ähnlich.

□

Satz 7.5 (Polverschiebungssatz, skalarer Fall)
Sei $(A,b) \in \mathbb{R}^{(n,n)} \times \mathbb{R}^n$ steuerbar. Dann gibt es zu jedem Polynom

$$p(x) = x^n - \sum_{k=1}^{n} c_k x^{k-1}\,, \quad c_k \in \mathbb{R}\,, \tag{7.19}$$

eine Rückkopplung $f \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\chi_{A+bf^T} = p\,. \tag{7.20}$$

Beweis: Sei $p \in P_n$ der Form (7.19) gegeben. Wir betrachten zunächst die Regelungsnormalform (7.10). Sei $\tilde{f} \in \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$\tilde{f}_k = \alpha_k + c_k\,. \tag{7.21}$$

Dann gilt

$$\chi_{\tilde{A}+\tilde{b}\tilde{f}^T} = p\,. \tag{7.22}$$

Ist nun ein steuerbares (A,b) gegeben, so setzen wir

$$f = T^{-T}\tilde{f}\,, \tag{7.23}$$

wobei T eine Ähnlichkeitstransformation ist mit

$$T^{-1}AT = \tilde{A}\,, \quad T^{-1}b = \tilde{b}\,, \tag{7.24}$$

gemäß Satz 7.4, und $\tilde{f}$ durch (7.21) gegeben ist. □

Folgerung 7.6
Jedes steuerbare skalare Kontrollsystem (A,b) ist stabilisierbar.

Beweis: Wähle in Satz 7.5 ein Polynom p, dessen Nullstellen alle negativen Realteil haben, z.B.

$$p(x) = (x+1)^n\,. \tag{7.25}$$

□

Lemma 7.7 (Lemma von Heymann)
Sei $(A,B) \in \mathbb{R}^{(n,n)} \times \mathbb{R}^{(n,m)}$ steuerbar. Ist $b \in \operatorname{im} B$, $b \neq 0$, so gibt es eine Rückkopplung $F \in \mathbb{R}^{(m,n)}$, so daß $(A+BF,b)$ steuerbar ist.

Beweis: Wir konstruieren eine Basis $\{x_1, \ldots, x_n\}$ im $\mathbb{R}^n$ und Vektoren $u_1, \ldots, u_{n-1} \in \mathbb{R}^m$, so daß für $1 \leq k < n$ gilt

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \,, \tag{7.26}$$

$$A(V_k) \subset V_{k+1} \,, \quad \dim V_{k+1} = k+1 \,, \quad V_k := \operatorname{span}(x_1, \ldots, x_k) \,. \tag{7.27}$$

Wir setzen $x_1 = b$. Für $k = 1, \ldots, n-1$ konstruieren wir u_k, x_{k+1}.

Falls $Ax_k \notin V_k$**:** Wir setzen $u_k = 0$.

Falls $Ax_k \in V_k$**:** Wegen $A(V_{k-1}) \subset V_k$ ist V_k A-invariant. Da $\langle A \,|\, \operatorname{im} B \rangle = \mathbb{R}^n$ nach Voraussetzung an (A, B), ist $\operatorname{im} B \not\subset V_k$. Wir wählen ein $u_k \in \mathbb{R}^m$ mit $Bu_k \notin V_k$.

In beiden Fällen definieren wir x_{k+1} durch (7.26). Nach Konstruktion gilt (7.27). Wir definieren $F \in \mathbb{R}^{(m,n)}$ durch

$$Fx_k = u_k \,, \quad 1 \leq k < n \,. \quad (Fx_n \text{ beliebig.}) \tag{7.28}$$

Dann ist

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k = (A + BF)x_k \,, \quad 1 \leq k < n \,, \tag{7.29}$$

also

$$\begin{pmatrix} b & (A+BF)b & \cdots & (A+BF)^{n-1}b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} . \tag{7.30}$$

Da $\{x_1, \ldots, x_n\}$ eine Basis ist, folgt die Behauptung. □

Satz 7.8 (Polverschiebungssatz, Vektorfall)
Sei $(A, B) \in \mathbb{R}^{(n,n)} \times \mathbb{R}^{(n,m)}$ *steuerbar. Dann gibt es zu jedem Polynom*

$$p(x) = x^n - \sum_{k=1}^{n} c_k x^{k-1} \,, \quad c_k \in \mathbb{R} \,, \tag{7.31}$$

eine Rückkopplung $F \in \mathbb{R}^{(m,n)}$ *mit*

$$\chi_{A+BF} = p \,. \tag{7.32}$$

Beweis: Wir wählen nach Lemma 7.7 ein $b = Bv$, $v \in \mathbb{R}^m$, und eine Rückkopplung $\tilde{F} \in \mathbb{R}^{(m,n)}$, so daß $(A + B\tilde{F}, b)$ steuerbar ist. Wir wählen nach Satz 7.5 ein $f \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\chi_{(A+B\tilde{F})+bf^T} = p \,. \tag{7.33}$$

Mit $F = \tilde{F} + vf^T$ folgt die Behauptung, da

$$A + BF = A + B\tilde{F} + bf^T \,. \tag{7.34}$$

□

Folgerung 7.9 (Steuerbarkeit ⇒ Stabilisierbarkeit)
Jedes steuerbare Kontrollsystem $(A, B) \in \mathbb{R}^{(n,n)} \times \mathbb{R}^{(n,m)}$ *ist stabilisierbar.*

Beweis: Siehe Beweis von Lemma 7.6 . □

Bemerkung 7.10
Die Umkehrung von Folgerung 7.9 gilt nicht, wie das Beispiel $(A, B) = (-I, 0)$ zeigt. Es gilt aber (Übungsaufgabe): (A, B) ist steuerbar genau dann, wenn sowohl (A, B) als auch $(-A, -B)$ stabilisierbar sind.

8 Dynamische Beobachter

Wir betrachten das Kontrollsystem

$$\dot{x} = Ax + Bu\,, \quad y = Cx\,, \tag{8.1}$$

und fragen uns, ob wir es stabilisieren können, wenn die Rückkopplung nur den Output y als Information benutzen kann.

Beispiel 8.1
Wir betrachten das System

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2\,, && (8.2)\\ \dot{x}_2 &= u\,, && (8.3)\\ y &= x_1\,. && (8.4) \end{aligned}$$

Frage: Gibt es eine Rückkopplung der Form

$$u = k(x_1)\,, \quad k : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{stetig}\ , \tag{8.5}$$

so daß $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ gilt für den Anfangswert $(0,1)$?
Wir definieren $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_2^2 - \int_0^{x_1} k(\xi)\, d\xi\,. \tag{8.6}$$

Dann gilt für jede Lösung x des rückgekoppelten Systems

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} V(x(t)) = x_2(t)\dot{x}_2(t) - k(x_1(t))\dot{x}_1(t) = 0\,, \quad V(0,1) = 1\,, \tag{8.7}$$

also $V(x(t)) = 1 \neq 0 = V(0)$, d.h. $x(t) \to 0$ ist nicht möglich. □

Bemerkung 8.2 (Konstruktion eines dynamischen Beobachters)
Wir fertigen eine Kopie des Systems (8.1) an, in die wir zusätzlich eine Rückkopplung der Differenz der Outputs eingeben, d.h.

$$\dot{z} = Az + Bu + Ld(t)\,, \quad d(t) = Cz(t) - y(t)\,, \tag{8.8}$$

wobei $L \in \mathbb{R}^{(n,k)}$ noch geeignet gewählt werden kann. Für die Abweichung

$$e(t) = z(t) - x(t) \tag{8.9}$$

der beiden Zustandsfunktionen gilt dann (ausrechnen)

$$\dot{e} = \dot{z} - \dot{x} = (A + LC)e\,. \tag{8.10}$$

Falls $A + LC$ Stabilitätsmatrix ist, folgt daher

$$\lim_{t\to\infty} (z(t) - x(t)) = 0\,, \tag{8.11}$$

unabhängig von den Anfangswerten. □

Wir suchen nun nach einer Rückkopplung der Form

$$u = Fz\,, \tag{8.12}$$

so daß das gekoppelte System

$$\dot{x} = Ax + BFz\,, \tag{8.13}$$

$$\dot{z} = Az + BFz + LC(z - x)\,, \tag{8.14}$$

asymptotisch stabil ist.

Satz 8.3 (Stabilisierung durch Output-Rückkopplung)
Sei $(A, B, C) \in \mathcal{S}_{n,m,k}$ steuerbar und beobachtbar. Dann gibt es $F \in \mathbb{R}^{(m,n)}$ und $L \in \mathbb{R}^{(n,k)}$, so daß das System (8.13), (8.14) asymptotisch stabil ist.

Beweis: Wir betrachten das System für x und $e = z - x$

$$\dot{x} = (A + BF)x + BFe\,, \tag{8.15}$$

$$\dot{e} = (A + LC)e\,. \tag{8.16}$$

Da (A, B) steuerbar ist, ist (A, B) stabilisierbar, also gibt es ein $F \in \mathbb{R}^{(m,n)}$, so daß $A + BF$ Stabilitätsmatrix ist. Da (A, C) beobachtbar ist, ist (A^T, C^T) steuerbar, also auch stabilisierbar, also gibt es ein $L \in \mathbb{R}^{(n,k)}$, so daß $A^T + C^T L^T$ Stabilitätsmatrix ist, also ist auch

$$A + LC = (A^T + C^T L^T)^T \tag{8.17}$$

Stabilitätsmatrix. Es folgt, daß auch

$$M = \begin{pmatrix} A + BF & BF \\ 0 & A + LC \end{pmatrix} \tag{8.18}$$

Stabilitätsmatrix ist, da für die charakteristischen Polynome gilt

$$\chi_M = \chi_{A+BF}\,\chi_{A+LC}\,. \tag{8.19}$$

Es gilt also für jeden Anfangswert

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} e(t) = 0\,, \tag{8.20}$$

also auch

$$\lim_{t\to\infty} z(t) = 0\,. \tag{8.21}$$

□

Bemerkung 8.4
Der Beweis von Satz 8.3 zeigt, wie man eine Stabilisierung durch Output-Rückkopplung erhält: Man konstruiert F so, daß $A+BF$ Stabilitätsmatrix wird, und L so, daß $A+LC$ Stabilitätsmatrix wird.

Für Beispiel 8.1: Übungsaufgabe. □

9 Übertragungsfunktionen, Frequenzraumanalyse

Wir betrachten zunächst noch einmal ein Input-Output-Verhalten der Form

$$y(t) = \int_0^t K(t-\tau)u(\tau)\,d\tau\,. \tag{9.1}$$

Definition 9.1
Sei $K : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{(k,m)}$ meßbar. Wir sagen, daß das durch (9.1) beschriebene Input-Output-Verhalten die gleichmäßige BIBO-Eigenschaft hat (= bounded input bounded output), falls durch (9.1) ein linearer stetiger Operator $\mathcal{K} : L^\infty(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^m) \to L^\infty(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^k)$ definiert wird, d.h. falls es eine Konstante $C > 0$ gibt mit

$$\|y\|_\infty \le C\|u\|_\infty\,, \qquad \text{für alle } u \in L^\infty(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^m)\,. \tag{9.2}$$

Lemma 9.2
Das Input-Output-Verhalten (9.1) hat die gleichmäßige BIBO-Eigenschaft genau dann, wenn K integrierbar ist über $\mathbb{R}_+$, d.h. wenn

$$\|K\|_1 = \int_0^\infty \|K(t)\|\,dt < \infty\,. \tag{9.3}$$

Beweis: Ist K integrierbar, so gilt für jedes $u \in L^\infty$

$$\|y(t)\| \le \|u\|_\infty \int_0^t \|K(\tau)\|\,d\tau \le \|u\|_\infty \|K\|_1\,. \tag{9.4}$$

Umgekehrte Implikation: Seien Indizes i, j und ein $t \ge 0$ gegeben. Wir setzen

$$u_j(\tau) = \begin{cases} \operatorname{sign}\left(K_{ij}(t-\tau)\right), & \tau \le t \\ 0, & \tau > t \end{cases}\,, \quad u_k(\tau) = 0 \ \text{ für } \ k \ne j\,. \tag{9.5}$$

Dann gilt

$$C = C\|u\|_\infty \ge y_i(t) = \int_0^t \sum_{k=1}^m K_{ik}(t-\tau)u_k(\tau)\,d\tau = \int_0^t |K_{ij}(\tau)|\,d\tau\,. \tag{9.6}$$

Da t beliebig ist, folgt die Integrierbarkeit von K. $\square$

Satz 9.3
Hat das Input-Output-Verhalten (9.1) die gleichmäßige BIBO-Eigenschaft, so gilt:

$$\lim_{t\to\infty} u(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{t\to\infty} y(t) = 0\,. \tag{9.7}$$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $T > 0$ so daß

$$\int_T^\infty \|K(\tau)\|\,d\tau < \frac{\varepsilon}{2\|u\|_\infty}\,, \quad \|u(t)\| \le \frac{\varepsilon}{2\|K\|_1} \quad \text{für alle } t \ge T\,. \tag{9.8}$$

Dann gilt für jedes $t \ge 2T$

$$\begin{aligned} \|y(t)\| &\le \|u\|_\infty \int_0^T \|K(t-\tau)\|\,d\tau + \frac{\varepsilon}{2\|K\|_1}\int_T^t \|K(t-\tau)\|\,d\tau \\ &= \|u\|_\infty \int_{t-T}^t \|K(\tau)\|\,d\tau + \frac{\varepsilon}{2\|K\|_1}\int_0^{t-T} \|K(\tau)\|\,d\tau \le \varepsilon\,. \end{aligned} \tag{9.9}$$

$\square$

Bemerkung 9.4

- Ist (A,B,C) ein Kontrollsystem und A Stabilitätsmatrix, so ist die Impulsantwortmatrix $K(t) = Ce^{tA}B$ integrierbar über $\mathbb{R}_+$, da
$$\|e^{tA}\| \leq c_1 e^{c_2 t} \tag{9.10}$$
gilt für geeignete Konstanten c_i mit $c_2 < 0$.

- Ist (A,B,C) ein steuerbares und beobachtbares Kontrollsystem mit integrierbarer Impulsantwortmatrix, so muß A Stabilitätsmatrix sein. (Übungsaufgabe)

Definition 9.5 (Laplace-Transformation)
Sei $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. Dann heißt die durch
$$(\mathcal{L}f)(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt \tag{9.11}$$
definierte Funktion $\mathcal{L}f : D_f \to \mathbb{C}$ (mit Definitionsbereich $D_f \subset \mathbb{C}$) die Laplace-Transformierte von f. Der zugehörige Integraloperator $\mathcal{L}$ heißt Laplace-Transformation. Man schreibt oft
$$\hat{f}(s) = (\mathcal{L}f)(s)\,. \tag{9.12}$$
Für $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ wird die Laplace-Transformation komponentenweise definiert.

Bemerkung 9.6 (Eigenschaften der Laplace-Transformation)

- Ist f meßbar und erfüllt f eine Wachstumsbedingung der Form
$$|f(t)| \leq ce^{\sigma t}\,, \quad \sigma \in \mathbb{R}\,,\ c > 0\,, \tag{9.13}$$
so ist das uneigentliche Integral (9.11) konvergent für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} s > \sigma$, d.h. $D_f \supset \{s : \operatorname{Re} s > \sigma\}$.

- Beispiele für Laplace-Transformierte:
$$\begin{array}{cc} f & \mathcal{L}f \\ & \\ 1 & \frac{1}{s} \\ t & \frac{1}{s^2} \\ e^{\omega t} & \frac{1}{s-\omega} \\ \sin(\omega t) & \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \\ \cos(\omega t) & \frac{s}{s^2+\omega^2} \end{array} \tag{9.14}$$

- Es gelten die Rechenregeln
$$\mathcal{L}(\alpha f + \beta g) = \alpha\mathcal{L}(f) + \beta\mathcal{L}(g)\,, \qquad \text{(Linearität)}\ , \tag{9.15}$$
$$(\mathcal{L}(f'))(s) = s(\mathcal{L}f)(s) - f(0+)\,. \tag{9.16}$$

- Eine mathematische Analyse der Laplace-Transformation wird sinnvollerweise im Rahmen der Distributionentheorie vorgenommen, und zwar als Spezialfall der Fourier-Laplace-Transformation

$$(\mathcal{F}f)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist} f(t)\, dt\,. \tag{9.17}$$

Bemerkung 9.7 (Anwendung auf ein Kontrollsystem)
Wenden wir die Laplace-Transformation auf das Kontrollsystem

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)\,, \quad x(0) = 0\,, \quad y(t) = Cx(t)\,, \tag{9.18}$$

an, so erhalten wir

$$s\hat{x}(s) = A\hat{x}(s) + B\hat{u}(s)\,, \quad \hat{y}(s) = C\hat{x}(s)\,. \tag{9.19}$$

Es ergibt sich

$$\hat{x}(s) = (sI - A)^{-1}B\hat{u}(s)\,, \quad \hat{y}(s) = C(sI - A)^{-1}B\hat{u}(s)\,. \tag{9.20}$$

Definition 9.8 (Übertragungsfunktion)
Sei $(A, B, C) \in S_{n,m,k}$ ein Kontrollsystem. Die durch

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B \tag{9.21}$$

definierte Funktion G heißt Übertragungsfunktion (oder Transferfunktion) des Kontrollsystems (A, B, C).

Lemma 9.9 (Form der Übertragungsfunktion)
Sei $(A, B, C) \in S_{n,m,k}$ ein Kontrollsystem. Dann hat die Übertragungsfunktion G die Form

$$G(s) = \frac{P(s)}{q(s)}\,, \tag{9.22}$$

wobei $q(s) = \det(sI - A)$ das charakteristische Polynom von A vom Grade n und $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^{(m,k)}$ eine matrixwertige Funktion ist, deren Komponenten Polynome vom Grad $\leq n - 1$ sind.

Beweis: Folgt aus der Formel für die Inverse einer Matrix (siehe Lineare Algebra), angewendet auf die Matrix $sI - A$. □

Bemerkung 9.10 (Pole der Übertragungsfunktion)
Die Pole von G sind gerade die Eigenwerte von A. Eine Übertragungsfunktion heißt daher stabil, falls alle ihre Pole in der linken komplexen Halbebene liegen.

Beispiel 9.11
Wir betrachten das inverse Pendel

$$\ddot{x} - x = u\,, \quad y = x\,. \tag{9.23}$$

Es ist

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{9.24}$$

$$sI - A = \begin{pmatrix} s & -1 \\ -1 & s \end{pmatrix}, \quad (sI - A)^{-1} = \frac{1}{s^2 - 1}\begin{pmatrix} s & 1 \\ 1 & s \end{pmatrix}, \tag{9.25}$$

$$G(s) = \frac{1}{s^2 - 1}\,. \tag{9.26}$$

Lemma 9.12
Sei $(A,B,C) \in S_{n,m,k}$ *ein Kontrollsystem mit der Übertragungsfunktion* G *und der Impulsantwortmatrix* K *. Dann gilt*

$$G = \hat{K}\,, \tag{9.27}$$

d.h. die Übertragungsfunktion ist die Laplace-Transformierte der Impulsantwortmatrix.

Beweis: Folgt aus der Tatsache, daß die Fourier-Laplace-Transformation Faltungen in Produkte überführt und umgekehrt (siehe Distributionentheorie). Rechnung für den Fall, in dem alle auftretenden Integranden endliches Lebesgue-Integral haben: Anwendung der Laplace-Transformation auf die Gleichung

$$y(t) = \int_0^t K(t-\tau)u(\tau)\,d\tau \tag{9.28}$$

ergibt

$$\begin{aligned}
\hat{y}(s) &= \int_0^\infty e^{-st}\int_0^t K(t-\tau)u(\tau)\,d\tau\,dt = \int_0^\infty \int_\tau^\infty e^{-st}K(t-\tau)\,dt\,u(\tau)\,d\tau = \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(\sigma+\tau)}K(\sigma)\,d\sigma\,u(\tau)\,d\tau = \int_0^\infty e^{-s\tau}\hat{K}(s)\,u(\tau)\,d\tau \\
&= \hat{K}(s)\hat{u}(s)\,.
\end{aligned} \tag{9.29}$$

□

Satz 9.13 (Interpretation von $G(i\omega)$)
Sei $(A,B,C) \in S_{n,m,k}$ *ein Kontrollsystem mit der Übertragungsfunktion* G*, sei* A *Stabilitätsmatrix, sei* $\omega \in \mathbb{R}$ *gegeben. Sei*

$$G(i\omega)_{jl} = re^{i\varphi} \tag{9.30}$$

die Darstellung in Polarkoordinaten des Elements $G(i\omega)_{jl}$ *von* $G(i\omega)$ *. Dann gilt für den zur Steuerung*

$$u(t) = \sin(\omega t)e_l \tag{9.31}$$

gehörenden Output y

$$\lim_{t\to\infty}(y_j(t) - r\sin(\omega t+\varphi)) = 0\,. \tag{9.32}$$

Beweis: Es ist

$$r\sin(\omega t+\varphi) = \operatorname{Im} re^{i(\omega t+\varphi)} = \operatorname{Im}\left[e^{i\omega t}G(i\omega)_{jl}\right]\,. \tag{9.33}$$

Also genügt es zu zeigen, daß

$$\lim_{t\to\infty}\left(y(t) - \operatorname{Im} e^{i\omega t}G(i\omega)e_l\right) = 0\,. \tag{9.34}$$

Es ist aber

$$\begin{aligned}
y(t) &= \int_0^t K(t-\tau)u(\tau)\,d\tau = \int_0^t K(\tau)u(t-\tau)\,d\tau \\
&= \int_0^t K(\tau)\sin(\omega(t-\tau))e_l\,d\tau = \operatorname{Im}\left[e^{i\omega t}\int_0^t e^{-i\omega\tau}K(\tau)\,d\tau e_l\right]\,,
\end{aligned} \tag{9.35}$$

und

$$\lim_{t\to\infty}\left[G(i\omega) - \int_0^t e^{-i\omega\tau}K(\tau)\,d\tau\right] = \lim_{t\to\infty}\int_t^\infty e^{-i\omega\tau}K(\tau)\,d\tau = 0\,, \tag{9.36}$$

da die Impulsantwortmatrix nach Bemerkung 9.4 integrierbar ist. Aus (9.35) und (9.36) folgt (9.34). □

Bemerkung 9.14 (Nyquist-Diagramm, Bode-Diagramm)

- Der Beweis von Satz 9.13 zeigt, daß er für jedes Input-Output-Verhalten der Form (9.1) gilt, sofern es die gleichmäßige BIBO-Eigenschaft hat.

- Die Aussage von Satz 9.13 bedeutet: Die einzelnen Elemente der Matrix $G(i\omega)$ geben an, wie ein Sinuseingang der Frequenz ω im Ausgang erscheint. Die Frequenz bleibt erhalten (typisch für lineare Systeme, im Gegensatz zu nichtlinearen Systemen), und es findet eine Verstärkung um den Faktor r (r heißt Verstärkungsfaktor oder Übertragungsbeiwert, gain) und eine Phasenverschiebung um den Winkel ϕ statt.

- Ist G skalar, so heißt die Kurve $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$,
$$f(\omega) = G(i\omega)\,, \tag{9.37}$$
die Ortskurve des Frequenzgangs $G(i\omega)$, eine Zeichnung von f heißt Nyquist-Diagramm. Die durch
$$G(i\omega) = r(\omega)e^{i\varphi(\omega)} \tag{9.38}$$
definierten Kurven $r, \varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ heißen Betragskennlinie bzw. Phasenkennlinie. Beide zusammen werden auch als Frequenzkennlinien-Darstellung des Übertragungsverhaltens bezeichnet. Üblicherweise werden ω und $r(\omega)$ logarithmisch, $\varphi(\omega)$ linear aufgetragen.

Satz 9.15 (Realisierung einer skalaren Übertragungsfunktion)
Sei
$$G(s) = \frac{p(s)}{q(s)}\,, \quad p(s) = \sum_{k=0}^{n-1} c_{k+1}s^k\,, \quad q(s) = s^n - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{k+1}s^k\,. \tag{9.39}$$

(i) *Das Kontrollsystem* (A, b, c^T),
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \tag{9.40}$$
ist eine Realisierung von G (d.h. eine Realisierung von K mit $\hat{K} = G$).

(ii) *Das Kontrollsystem (9.40) ist eine minimale Realisierung von G genau dann, wenn p und q teilerfremd sind.*

Beweis: Zu (i): Es ist
$$G(s) = c^T(sI - A)^{-1}b\,, \quad (sI - A)\begin{pmatrix} 1 \\ s \\ \vdots \\ s^{n-1} \end{pmatrix} = q(s)b\,. \tag{9.41}$$

Zu (ii): Haben p und q einen gemeinsamen Teiler, so ist

$$\frac{p}{q} = \frac{\tilde{p}}{\tilde{q}}, \quad \operatorname{grad}(\tilde{q}) = \tilde{n} < n. \tag{9.42}$$

Das zu $\tilde{p}, \tilde{q}$ gemäß (i) konstruierte Kontrollsystem hat dann eine Zustandsraumdimension kleiner als n. Sei umgekehrt (A, b, c^T) eine nicht minimale Realisierung. Sei $(\tilde{A}, \tilde{b}, \tilde{c}^T)$ eine minimale Realisierung vom Grad $\tilde{n} < n$. Mit geeigneten Polynomen $\tilde{p}, \tilde{q}$ gilt dann (9.42). Wären p und q teilerfremd, so müßte q das Polynom $\tilde{q}$ teilen im Widerspruch zu $\tilde{n} < n$. □

10 Dynamische Programmierung, HJB-Gleichung

Problem 10.1 (Problem der optimalen Steuerung)
Minimiere

$$J(x,u;t_0,x_0) = \int_{t_0}^{t_1} L(t,x(t),u(t))\,dt + L_1(t_1,x(t_1))\,, \tag{10.1}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\dot{x}(t) = f(t,x(t),u(t))\,, \quad x(t_0) = x_0\,, \qquad \text{(Differentialgleichung)} \quad , \tag{10.2}$$

$$x(t_0) = x_0\,, \qquad \text{(Anfangsbedingung)} \quad , \tag{10.3}$$

$$\psi(t_1,x(t_1)) = 0\,, \qquad \text{(Endbedingung)} \quad , \tag{10.4}$$

$$u(t) \in \Omega\,, \quad t \in [t_0,t_1]\,, \qquad \text{(Kontrolleinschränkung)} \quad , \tag{10.5}$$

wobei

$$u:[t_0,t_1] \to \mathbb{R}^m\,, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^m\,, \quad x:[t_0,t_1] \to \mathbb{R}^n\,, \quad \psi:\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p\,, \quad t_0 \le t_1\,. \tag{10.6}$$

Die Endzeit t_1 ist eine freie Variable (man stelle sie sich durch die Endbedingung (10.4) festgelegt vor). Wir setzen voraus, daß die Funktionen L, L_1, f, ψ in allen Variablen hinreichend oft differenzierbar sind. Mit

$$P_{(t_0,x_0)} \tag{10.7}$$

bezeichnen wir das obige Kontrollproblem.

Bemerkung 10.2
Die Idee der dynamischen Programmierung besteht darin, aus der Betrachtung der gesamten Schar

$$\{P_{(t_0,x_0)} : (t_0,x_0) \in G\}\,, \tag{10.8}$$

(mit einer geeigneten Menge $G \subset \mathbb{R}^{(n+1)}$) Aussagen über das einzelne Kontrollproblem zu gewinnen.

Definition 10.3 (Optimalwertfunktion)
Sei

$$PC(t_0,t_1;\mathbb{R}^m) = \{u | u:[t_0,t_1] \to \mathbb{R}^m, u \text{ ist stückweise und rechtsseitig stetig }\}\,. \tag{10.9}$$

(i) *Ein $u \in PC(t_0,t_1;\mathbb{R}^m)$ heißt zulässige Steuerung für $P_{(t_0,x_0)}$, falls (10.2) - (10.5) gelten, d.h. wenn (10.5) gilt und wenn die zugehörige Zustandsfunktion x auf ganz $[t_0,t_1]$ fortsetzbar ist und die Endbedingung (10.4) erfüllt.*

(ii) *Die Funktion*

$$V(t_0,x_0) = \inf\{J(x,u;t_0,x_0) : u \text{ ist zulässig für } P_{(t_0,x_0)},\ x \text{ löst } (10.2),(10.3)\}\,, \tag{10.10}$$

heißt Optimalwertfunktion von Problem $P_{(t_0,x_0)}$.

(iii) *Ein $u_* \in PC(t_0, t_1; \mathbb{R}^m)$ heißt optimale Steuerung, falls u_* zulässig ist und für die zugehörige Zustandsfunktion x_* gilt*

$$V(t_0, x_0) = J(x_*, u_*; t_0, x_0) . \tag{10.11}$$

Das Paar (u_*, x_*) heißt dann Lösung von $P_{(t_0,x_0)}$.

Lemma 10.4
Sei $u \in PC(t_0, t_1; \mathbb{R}^m)$ zulässige Steuerung für $P_{(t_0,x_0)}$ mit zugehöriger Zustandsfunktion x . Dann gilt:

(i) *Für alle $\tau_1 \leq \tau_2$ in $[t_0, t_1]$ gilt*

$$V(\tau_1, x(\tau_1)) \leq V(\tau_2, x(\tau_2)) + \int_{\tau_1}^{\tau_2} L(\tau, x(\tau), u(\tau))\, d\tau . \tag{10.12}$$

(ii) *u ist optimale Steuerung für $P_{(t_0,x_0)}$ genau dann, wenn für alle $\tau_1 \leq \tau_2$ in $[t_0, t_1]$ gilt*

$$V(\tau_1, x(\tau_1)) = V(\tau_2, x(\tau_2)) + \int_{\tau_1}^{\tau_2} L(\tau, x(\tau), u(\tau))\, d\tau . \tag{10.13}$$

Beweis:

(i): Sei $\tilde{u} : [\tau_2, \tilde{t}_1] \to \mathbb{R}^m$ eine beliebige zulässige Steuerung für $P_{(\tau_2, x(\tau_2))}$. Dann wird durch

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} u(t) , & t \in [\tau_1, \tau_2) , \\ \tilde{u}(t) , & t \in [\tau_2, \tilde{t}_1] , \end{cases} \tag{10.14}$$

eine zulässige Steuerung für $P_{(\tau_1, x(\tau_1))}$ definiert. Sei

$$\bar{x}(t) = \begin{cases} x(t) , & t \in [\tau_1, \tau_2) , \\ \tilde{x}(t) , & t \in [\tau_2, \tilde{t}_1] , \end{cases} \tag{10.15}$$

die zugehörige Zustandsfunktion. Nach Definition von V folgt

$$\begin{aligned} V(\tau_1, x(\tau_1)) &\leq \int_{\tau_1}^{\tilde{t}_1} L(\tau, \bar{x}(\tau), \bar{u}(\tau))\, d\tau + L_1(\tilde{t}_1, \bar{x}(\tilde{t}_1)) \\ &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} L(\tau, x(\tau), u(\tau))\, d\tau + J(\tilde{x}, \tilde{u}; \tau_2, x(\tau_2)) . \end{aligned} \tag{10.16}$$

Da $\tilde{u}$ beliebig war, folgt die Behauptung, indem wir nochmals die Definition von V heranziehen.

(ii),"$\Leftarrow$": Für $\tau_1 = t_0$, $\tau_2 = t_1$ folgt aus (10.13), daß

$$V(t_0, x_0) = J(x, u; t_0, x_0) . \tag{10.17}$$

(ii),"$\Rightarrow$": Sei u optimal. Dann gilt

$$\begin{aligned} V(t_0, x_0) &\leq V(\tau_1, x(\tau_1)) + \int_{t_0}^{\tau_1} L(\tau, x(\tau), u(\tau))\, d\tau && \text{(wegen (10.12))} \\ &\leq V(\tau_2, x(\tau_2)) + \int_{\tau_0}^{\tau_2} L(\tau, x(\tau), u(\tau))\, d\tau && \text{(wegen (10.12))} \\ &\leq \int_{\tau_0}^{\tau_2} L(\tau, x(\tau), u(\tau))\, d\tau + \int_{\tau_2}^{t_1} L(\tau, x(\tau), u(\tau))\, d\tau + L_1(t_1, x(t_1)) \\ & \qquad \text{(nach Definition von } V \text{)} \\ &= J(x, u; t_0, x_0) = V(t_0, x_0) , \end{aligned} \tag{10.18}$$

woraus die Behauptung folgt.

$\square$

Satz 10.5 (Bellman-Prinzip)
Ist $u_* \in PC(t_0, t_1; \mathbb{R}^m)$ *optimale Steuerung für* $P_{(t_0,x_0)}$ *, so ist* $u_*|[t, t_1]$ *optimale Steuerung für* $P_{(t,x_*(t))}$ *für alle* $t \in [t_0, t_1]$ *.*

Beweis: Folgt aus Lemma 10.4(ii) mit $\tau_2 = t_1,$, $\tau_1 = t$. $\square$

Satz 10.6 (Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung)
Sei $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *offen, sei die Optimalwertfunktion* V *der Schar* $\{P_{(t_0,x_0)} : (t_0, x_0) \in G\}$ *auf* G *endlich. Ist* $(t, x) \in G$ *und* V *differenzierbar in* (t, x) *, so gilt*

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t,x) + \langle \frac{\partial V}{\partial x}(t,x), f(t,x,u)\rangle + L(t,x,u) \geq 0\,, \qquad \text{für alle } u \in \Omega\,. \tag{10.19}$$

Ist u_* *optimale Steuerung und* V *differenzierbar in* $(t, x_*(t))$ *, so gilt*

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t,x) + \min_{u\in\Omega}\left[\langle \frac{\partial V}{\partial x}(t,x), f(t,x,u)\rangle + L(t,x,u)\right] = 0\,, \tag{10.20}$$

wobei das Minimum in $u = u_*(t)$ *angenommen wird.*

Beweis: Sei $u \in \Omega$ beliebig. Wir betrachten $P_{(t,x)}$ und definieren

$$\bar{u}(\tau) = \begin{cases} u\,, & \tau \in [t, t+\delta)\,, \\ \tilde{u}(\tau)\,, & \tau \geq t+\delta\,. \end{cases} \tag{10.21}$$

Hier ist $\delta > 0$ so klein gewählt, daß die zugehörige Zustandsfunktion $\bar{x}$ auf $[t, t+\delta]$ existiert und $\bar{x}(t+\delta) \in G$ erfüllt; $\tilde{u}$ sei eine beliebige zulässige Steuerung für $P_{(t+\delta,\bar{x}(t+\delta))}$. Aus (10.12) folgt für $0 < h \leq \delta$

$$\frac{V(t+h, \bar{x}(t+h)) - V(t,x))}{h} \geq -\frac{1}{h}\int_t^{t+h} L(\tau, \bar{x}(\tau), u)\, d\tau\,. \tag{10.22}$$

Grenzübergang $h \downarrow 0$ liefert (10.19). Ebenso folgt aus (10.13), daß

$$\frac{V(t+h, x_*(t+h)) - V(t, x_*(t)))}{h} = -\frac{1}{h}\int_t^{t+h} L(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau))\, d\tau\,. \tag{10.23}$$

Grenzübergang $h \downarrow 0$ zeigt, daß in $u = u_*(t)$ das Minimum 0 angenommen wird. $\square$

Satz 10.7 (Hinreichende Optimalitätsbedingungen)
Sei $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *offen,* $G \supset \{(t,x) : \psi(t,x) = 0\}$ *. Sei* $u_* : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^m$ *zulässig für* $P_{(t_0,x_0)}$ *mit* $(t, x_*(t)) \in G$ *für* $t \in [t_0, t_1]$ *. Sei* $W : G \to \mathbb{R}$ *stetig differenzierbar, und es gelte*

$$W(t,x) = L_1(t,x)\,, \qquad \text{falls } \psi(t,x) = 0\,, \tag{10.24}$$

$$\frac{\partial W}{\partial t}(t,x) + \min_{u\in\Omega}\left[\langle \frac{\partial W}{\partial x}(t,x), f(t,x,u)\rangle + L(t,x,u)\right] = 0\,, \quad \forall\ (t,x) \in G\,. \tag{10.25}$$

Falls $u = u_*(t)$ *das Minimum in (10.25) liefert für* $(t, x) = (t, x_*(t))$ *und alle* $t \in [t_0, t_1)$ *, so ist* u_* *optimale Steuerung für* $P_{(t_0,x_0)}$ *, und*

$$W(t, x_*(t)) = V(t, x_*(t))\,. \tag{10.26}$$

Beweis: Sei $t \in [t_0, t_1)$ beliebig, $\bar{u} : [t, \bar{t}_1]$ eine beliebige zulässige Steuerung für $P_{(t,x_*(t))}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
J(\bar{x}, \bar{u}; t, x_*(t)) &= \int_t^{\bar{t}_1} L(\tau, \bar{x}(\tau), \bar{u}(\tau))\, d\tau + L_1(\bar{t}_1, \bar{x}(\bar{t}_1)) \\
&= \int_t^{\bar{t}_1} L(\tau, \bar{x}(\tau), \bar{u}(\tau))\, d\tau + W(t, x_*(t)) + \int_t^{\bar{t}_1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} W(\tau, \bar{x}(\tau))\, d\tau \\
&= \int_t^{\bar{t}_1} L(\tau, \bar{x}(\tau), \bar{u}(\tau))\, d\tau + W(t, x_*(t)) + \\
&\quad + \int_t^{\bar{t}_1} \frac{\partial W}{\partial t}(\tau, \bar{x}(\tau)) + \langle \frac{\partial W}{\partial x}(\tau, \bar{x}(\tau)), f(\tau, \bar{x}(\tau), \bar{u}(\tau)) \rangle\, d\tau \\
&\geq W(t, x_*(t)) \\
&= W(t, x_*(t)) + \int_t^{t_1} L(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)) + \\
&\quad + \frac{\partial W}{\partial t}(\tau, x_*(\tau)) + \langle \frac{\partial W}{\partial x}(\tau, x_*(\tau)), f(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)) \rangle\, d\tau \\
&= W(t_1, x_*(t_1)) + \int_t^{t_1} L(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau))\, d\tau \\
&= J(x_*, u_*; t, x_*(t))\,. \qquad (10.27)
\end{aligned}$$

Da $\bar{u}$ beliebig war, folgt die Behauptung. □

Bemerkung 10.8 (Konstruktion optimaler Rückkopplungssteuerungen)
Falls die Optimalwertfunktion stetig differenzierbar ist, so ermöglicht es Satz 10.7, die Optimalwertfunktion und die optimale Steuerung in Rückkopplungsform folgendermaßen zu konstruieren:

1. Bestimme $U(t, x, p)$, $p \in \mathbb{R}^n$, so daß das Minimum bezüglich $u \in \Omega$ von

   $$\langle p, f(t, x, u) \rangle + L(t, x, u) \qquad (10.28)$$

   in $u = U(t, x, p)$ angenommen wird.

2. Löse die partielle Differentialgleichung

   $$\frac{\partial W}{\partial t} + \langle \frac{\partial W}{\partial x}(t, x), f(t, x, U(t, x, \frac{\partial W}{\partial x})) \rangle + L(t, x, U(t, x, \frac{\partial W}{\partial x})) = 0\,, \qquad (10.29)$$

   mit der Randbedingung

   $$W(t, x) = L_1(t, x) \quad \text{auf } \{(t, x) : \psi(t, x) = 0\}\,. \qquad (10.30)$$

3. Prüfe nach, ob die Lösung die Glattheitsvoraussetzungen von Satz 10.7 erfüllt.

4. Berechne x_* als Lösung von

   $$\dot{x}(t) = f(t, x(t), U(t, x(t), \frac{\partial W}{\partial x}(t, x(t))))\,, \quad x(t_0) = x_0\,, \qquad (10.31)$$

   und die optimale Steuerung u_* aus

   $$u_*(t) = U(t, x_*(t), \frac{\partial W}{\partial x}(t, x_*(t)))\,. \qquad (10.32)$$

Bemerkung 10.9 (Leider ...)

- Nur in Ausnahmefällen ist die Optimalwertfunktion global stetig differenzierbar (z.B. im linear-quadratischen Problem).

- Das Konstruktionsverfahren 10.8 kann noch funktionieren, wenn die Optimalwertfunktion stückweise stetig differenzierbar ist, und zwar am ehesten dann, wenn die Menge, auf der die Ableitung von V unstetig ist, sich aus glatten Flächen zusammensetzt. Man kann dann jeweils zwischen solchen Unstetigkeitsflächen (die allerdings auch erst bestimmt werden müssen!) das beschriebene Verfahren anwenden.

- Selbst wenn die Optimalwertfunktion glatt ist, so kann die Lösung in der Regel nicht in expliziten Formeln angegeben werden. An eine numerische Lösung der HJB-Gleichung kann erst neuerdings gedacht werden, da die Dimension des zugrundeliegenden Raumes $n+1$ ist (nichtlineare partielle Differentialgleichungen in drei Dimensionen (plus Zeit) markieren bereits die Grenze des gegenwärtig Machbaren).

- Verwendbare allgemeine Sätze, die eine C^1-Lösung der HJB-Gleichung garantieren, gibt es nicht. Im allgemeinen ist die Optimalwertfunktion nicht glatt.

- Man kann den Lösungsbegriff verallgemeinern und eine passende Lösungstheorie auszuarbeiten versuchen. Dies führt auf den Begriff der Viskositätslösung (Anfang der 80er Jahre von Crandall, Evans und P.L.Lions entwickelt).

11 Das linear-quadratische Kontrollproblem

Für das sogenannte linear-quadratische Kontrollproblem (LQ-Problem) läßt sich die optimale Steuerung in Rückkopplungsform als Lösung der HJB-Gleichung konstruieren.

Problem 11.1 (Linear-quadratisches Kontrollproblem)
Minimiere

$$J(x,u;t_0,x_0) = \int_{t_0}^{t_1} \begin{pmatrix} x(t)^T & u(t)^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M(t) & R(t) \\ R(t)^T & N(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix} dt + x(t_1)^T D x(t_1)\,, \tag{11.1}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u\,, \quad x(t_0) = x_0\,, \tag{11.2}$$

bei fester Endzeit t_1 und ohne Kontrolleinschränkung, d.h.

$$\psi(t,x) = t - t_1\,, \quad \Omega = \mathbb{R}^m\,. \tag{11.3}$$

□

Voraussetzung 11.2
Wir setzen für Problem 11.1 voraus:

- A, B, M, N, R sind stetige matrixwertige Funktionen von t passender Dimension.
- $D, M(t), N(t)$ sind symmetrisch für alle t.
- $N(t)$ ist positiv definit für alle t.
- $$D \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} M(t) & R(t) \\ R(t)^T & N(t) \end{pmatrix} \quad \text{sind positiv semidefinit.} \tag{11.4}$$

□

Ansatz 11.3
Wir setzen an

$$W(t,x) = x^T Q(t) x = \langle x, Q(t)x \rangle\,, \tag{11.5}$$

wobei $Q(t)$ für jedes t eine symmetrische Matrix im $\mathbb{R}^{(n,n)}$ und $t \mapsto Q(t)$ stetig differenzierbar werden soll. Zur Berechnung der optimalen Steuerung müssen wir für $(t,x) \in G = \mathbb{R}^{n+1}$ die Funktion

$$g(u) = \langle \frac{\partial W}{\partial x}, f(t,x,u) \rangle + L(t,x,u) \tag{11.6}$$

über $u \in \Omega = \mathbb{R}^m$ minimieren. Es ergibt sich (wir lassen das Argument t weg)

$$\begin{aligned} g(u) &= \langle x, Q(Ax+Bu) \rangle + \langle Ax+Bu, Qx \rangle + x^T M x + x^T R u + u^T R^T x + u^T N u \\ &= 2x^T Q(Ax+Bu) + x^T M x + 2x^T R u + u^T N u\,, \qquad \text{da } Q = Q^T\,. \end{aligned} \tag{11.7}$$

Da N positiv definit ist, ist g konvex. Jede Nullstelle der Ableitung von g ist dann globales Minimum von g. Es gilt

$$\nabla g(u) = 2x^T QB + 2x^T R + 2u^T N\,, \tag{11.8}$$

also

$$\nabla g(u) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^T QB + 2x^T R = -2u^T N \quad \Leftrightarrow \quad u = -N^{-1}(B^T Q + R^T)x\,. \tag{11.9}$$

(Die Inverse von N existiert, da N positiv definit ist.) Wir haben also gezeigt: Aus dem Ansatz (11.5) mit symmetrischem $Q(t)$ folgt, daß

$$U(t,x) = -N(t)^{-1}\left(B(t)^T Q(t) + R(t)^T\right)x \tag{11.10}$$

die eindeutige Lösung ist von

$$\min_{u\in\mathbb{R}^m}\left[\langle\frac{\partial W}{\partial x}, f(t,x,u)\rangle + L(t,x,u)\right]. \tag{11.11}$$

Zur Bestimmung von $Q(t)$ betrachten wir die Gleichung

$$\frac{\partial W}{\partial t}(t,x) + \min_{u\in\mathbb{R}^m}\left[\langle\frac{\partial W}{\partial x}, f(t,x,u)\rangle + L(t,x,u)\right] = 0\,. \tag{11.12}$$

Mit $u = U(t,x)$ aus (11.10) und W aus (11.5) erhalten wir

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial W}{\partial t}(t,x) + \langle\frac{\partial W}{\partial x}, f(t,x,U(t,x))\rangle + L(t,x,U(t,x)) \\
&= \langle x, \dot{Q}x\rangle + \langle x, Q(Ax+BU)\rangle + \langle Ax+BU, Qx\rangle + x^T Mx + x^T RU + U^T R^T x + U^T NU \\
&= x^T\dot{Q}x + x^T(QA + A^T Q + M)x + x^T(QB+R)U + U^T(B^T Q + R^T)x + U^T NU \\
&= x^T(\dot{Q} + QA + A^T Q + M)x + x^T(QB+R)(-N^{-1})(B^T Q + R^T)x \\
&\quad -x^T(QB+R)N^{-1}(B^T Q + R^T)x + x^T(QB+R)N^{-1}NN^{-1}(B^T Q + R^T)x \\
&= x^T\underbrace{\left(\dot{Q} + QA + A^T Q + M - (QB+R)N^{-1}(B^T Q + R^T)\right)}_{=:P}x\,.
\end{aligned} \tag{11.13}$$

Können wir ein symmetrisches $Q(t)$ so wählen, daß $P(t) = 0$ für alle t, so haben wir den Ansatz (11.5) gerechtfertigt und sowohl die Optimalwertfunktion als auch eine optimale Steuerung in Rückkopplungsform berechnet. □

Satz 11.4 (Lösung des linear-quadratischen Problems)
Unter den Voraussetzungen in 11.2 gilt: Das Anfangswertproblem für die sogenannte Matrix-Riccati-Differentialgleichung

$$\dot{Q} = -QA - A^T Q - M + (QB+R)N^{-1}(B^T Q^T + R^T)\,, \quad Q(t_1) = D\,, \tag{11.14}$$

hat eine eindeutig bestimmte Lösung $Q : (-\infty, t_1] \to \mathbb{R}^{(n,n)}$, *und* $Q(t)$ *ist symmetrisch für alle* $t \le t_1$. *Das linear-quadratische Problem 11.1 hat für alle* $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ *mit* $t_0 \le t_1$ *genau eine Lösung* (u_*, x_*), *die man folgendermaßen erhält:*

1. *Löse (11.14).*

2. Setze

$$U(t,x) = -N(t)^{-1}(B(t)^TQ(t) + R(t)^T)x\,, \tag{11.15}$$

und bestimme die eindeutige Lösung x_* der Anfangswertaufgabe

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)U(t,x)\,, \quad x(t_0) = x_0\,, \tag{11.16}$$

mit $U(t,x)$ aus (11.15).

3. Setze

$$u_*(t) = U(t, x_*(t))\,, \quad t \in [t_0, t_1]\,. \tag{11.17}$$

Die Optimalwertfunktion von Problem 11.1 ist gegeben durch

$$V(t,x) = x^TQ(t)x\,. \tag{11.18}$$

Beweis: Da mit Q auch Q^T eine Lösung von (11.14) ist, ist die eindeutig bestimmte lokale Lösung von (11.14) symmetrisch. Mit

$$W(t,x) = x^TQ(t)x\,. \tag{11.19}$$

sind nach der Konstruktion in 11.3 die Voraussetzungen von Satz 10.7 erfüllt, falls wir zeigen können, daß sich die lokale Lösung von (11.14) auf das Intervall $(-\infty, t_0]$ fortsetzen läßt. Sei $(t_-, t_0]$ das maximale Existenzintervall der Lösung. Da D und $\begin{pmatrix} M(t) & R(t) \\ R(t)^T & N(t) \end{pmatrix}$ positiv semidefinit sind, ist die Zielfunktion J für alle Steuerungen nichtnegativ, also gilt

$$0 \le V(t,x) = W(t,x) = x^TQ(t)x\,, \tag{11.20}$$

für alle $t \in (t_-, t_1]$ und alle $x \in \mathbb{R}^n$. Da $\tilde{u} = 0$ eine zulässige Steuerung ist, folgt für den zum Anfangswert (t,x) gehörenden Zustand $\tilde{x}$ und für alle $t \in (t_-, t_1]$, falls Φ die Übergangsmatrix des Systems $\dot{x} = A(t)x$ bezeichnet, daß

$$\begin{aligned} 0 &\le x^TQ(t)x \le J(\tilde{x}, \tilde{u}; t, x) \\ &= \int_t^{t_1} \tilde{x}(\tau)^T M(\tau)\tilde{x}(\tau)\,d\tau + \tilde{x}(t_1)^T D\tilde{x}(t_1) \\ &\le \|x\|_2^2 \|M\|_2 \int_t^{t_1} \|\Phi(\tau,t)\|_2\,d\tau + \|x\|_2^2\|D\|_2\|\Phi(t_1,t)\|_2^2 \\ &= c(t)\|x\|_2^2\,, \end{aligned} \tag{11.21}$$

wobei $c : (-\infty, t_1]$ die durch Ausklammern von $\|x\|_2^2$ sich ergebende (stetige) Funktion bezeichnet. Aus

$$0 \le x^TQ(t)x \le c(t)\|x\|_2^2\,, \quad Q \text{ symmetrisch }\,, \tag{11.22}$$

folgt

$$\|Q(t)\|_2 \le c(t)\,. \tag{11.23}$$

Wäre nun $t_- > -\infty$, so wäre $Q(t)$ auf $(t_-, t_1]$ beschränkt. Dann aber wäre die Lösung von (11.14) über t_- hinaus nach links fortsetzbar. □

Bemerkung 11.5
Die Rückkopplungssteuerung U aus (11.15) ist keine reine Zustandsrückkopplung, da die Zeit t ebenfalls explizit auftaucht. Das ist auch im autonomen LQ-Problem (d.h. die Matrizen A, B, M, N, R sind zeitunabhängig) der Fall, da Q immer von t abhängt. $\square$

Problem 11.6 (Autonomes LQ-Problem mit unendlichem Zeithorizont)
Sei $0 \leq t \leq \infty$. Wir wollen minimieren

$$J_t(x, u; \xi) = \int_0^t x(\tau)^T M x(\tau) + u(\tau)^T N u(\tau)\, d\tau\,, \tag{11.24}$$

wobei

$$\dot{x} = Ax + Bu\,, \quad x(0) = \xi\,, \quad A \in \mathbb{R}^{(n,n)}\,, \quad B \in \mathbb{R}^{(n,m)}\,. \tag{11.25}$$

Wir setzen voraus, daß $M \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ symmetrisch und positiv semidefinit und $N \in \mathbb{R}^{(m,m)}$ symmetrisch und positiv definit ist. Mit V_t bezeichnen wir die zugehörige Optimalwertfunktion.

Lemma 11.7
Für $0 \leq t < \infty$ gilt

$$V_t(\xi) = \xi^T P(t) \xi\,, \tag{11.26}$$

wobei $P : [0, \infty) \to \mathbb{R}^{(n,n)}$ die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\dot{P} = -PBN^{-1}B^T P + PA + A^T P + M\,, \quad P(0) = 0\,, \tag{11.27}$$

ist. Die Matrix $P(t)$ ist symmetrisch für alle $t \geq 0$. Ferner ist $P(t) - P(s)$ positiv semidefinit für alle $t \geq s$. Falls M positiv definit ist, so ist auch $P(t)$ positiv definit für alle $t > 0$.

Beweis: Sei $t \in \mathbb{R}_+$ gegeben. Nach Satz 11.4 ist

$$V_t(\xi) = \xi^T Q_t(0) \xi\,, \tag{11.28}$$

wobei Q_t die Lösung der Anfangswertaufgabe (11.14) mit $t_1 = t$ und $D = R = 0$ ist. Definieren wir P durch

$$P(\tau) = Q_t(t - \tau)\,, \quad 0 \leq \tau \leq t\,, \tag{11.29}$$

so ist P symmetrisch und löst (11.27) auf $[0, t]$, und es gilt (11.26). Da für jedes $u \in L^\infty([0, t], \mathbb{R}^m)$ und jedes $s \leq t$ gilt, daß

$$J_t(x, u; \xi) \geq J_s(x|[0, s], u|[0, s]; \xi)\,, \tag{11.30}$$

und umgekehrt jedes $u \in L^\infty([0, s], \mathbb{R}^m)$ als Restriktion eines $u \in L^\infty([0, t], \mathbb{R}^m)$ entsteht, gilt

$$\xi^T P(s) \xi = V_s(\xi) \leq V_t(\xi) = \xi^T P(t) \xi\,, \quad \xi \in \mathbb{R}^n\,, \tag{11.31}$$

also ist $P(t) - P(s)$ positiv semidefinit. Ist nun M positiv definit, so gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \xi^T P(t) \xi \Big|_{t=0} = \xi^T \dot{P}(0) \xi = \xi^T M \xi > 0\,, \quad 0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n\,. \tag{11.32}$$

Sei $t > 0$, sei $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq 0$. Wegen (11.32) gilt $\xi^T P(t) \xi \geq \xi^T P(\tau) \xi > 0$ für hinreichend kleines $\tau > 0$. $\square$

Lemma 11.8
Sei (A,B) steuerbar. Dann existiert der Grenzwert

$$\lim_{t\to\infty} P(t) =: P_\infty\,. \tag{11.33}$$

Die Matrix $P_\infty \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ ist symmetrisch und löst die sogenannte algebraische Matrix-Riccati-Gleichung

$$PBN^{-1}B^TP - PA - A^TP - M = 0\,. \tag{11.34}$$

Beweis: Sei $\xi \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Sei u eine beschränkte Steuerung, die ξ in endlicher Zeit nach 0 steuert. Dann gilt

$$V_\infty(\xi) \le J_\infty(x,u;\xi) < \infty\,. \tag{11.35}$$

Da $t \mapsto V_t(\xi)$ nach Lemma 11.7 monoton wachsend ist, existiert für jedes $\xi \in \mathbb{R}^n$ der Grenzwert

$$\lim_{t\to\infty} V_t(\xi) = \lim_{t\to\infty} \xi^T P(t)\xi\,. \tag{11.36}$$

Wegen

$$\begin{aligned} P(t)_{ij} &= e_i^T P(t) e_j \\ &= \frac{1}{2}\left[(e_i+e_j)^T P(t)(e_i+e_j) - e_i^T P(t) e_i - e_j^T P(t) e_j\right] \end{aligned} \tag{11.37}$$

folgt die Existenz des Grenzwertes (11.33). Aus (11.27) folgt, daß auch

$$\lim_{t\to\infty} \dot{P}(t) \tag{11.38}$$

existiert und gleich Null ist (da andernfalls $\lim_{t\to\infty} P(t)$ nicht existieren würde). Der Grenzübergang $t \to \infty$ in (11.27) liefert daher (11.34). □

Satz 11.9 (Lösung des LQ-Problems mit unendlichem Zeithorizont)
Sei (A,B) steuerbar. Dann gilt mit P_∞ aus (11.33)

$$V_\infty(\xi) = \xi^T P_\infty \xi\,, \tag{11.39}$$

und die durch

$$u = Fx\,, \quad F = -N^{-1}B^TP_\infty\,, \tag{11.40}$$

in Rückkopplungsform definierte Steuerung liefert die eindeutige Lösung von Problem 11.1 für die Endzeit $t=\infty$. Ist außerdem M positiv definit, so ist $A+BF$ Stabilitätsmatrix, d.h. das rückgekoppelte System

$$\dot{x} = (A+BF)x \tag{11.41}$$

ist asymptotisch stabil.

Beweis: Wegen $J_t(x,u;\xi) \le J_\infty(x,u;\xi)$ für alle (x,u) gilt $V_t(\xi) \le V_\infty(\xi)$ und daher auch

$$\xi^T P_\infty \xi = \lim_{t\to\infty} \xi^T P(t)\xi = \lim_{t\to\infty} V_t(\xi) \le V_\infty(\xi)\,. \tag{11.42}$$

Sei nun x die Lösung von (11.41) zu einem Anfangswert $\xi \in \mathbb{R}^n$ und u durch (11.40) definiert. Mit (11.34) folgt dann für alle $t \in \mathbb{R}_+$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} x(t)^T P_\infty x(t) = -x(t)^T (M + P_\infty B N^{-1} B^T P_\infty) x(t)\,. \tag{11.43}$$

Also gilt für alle $t \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned}
0 &\le J_t(x,u;\xi) = \int_0^t x(\tau)^T (M + P_\infty B N^{-1} B^T P_\infty) x(\tau)\, d\tau \\
&= -\int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \left(x(\tau)^T P_\infty x(\tau) \right) d\tau = x(0)^T P_\infty x(0) - x(t)^T P_\infty x(t) \\
&\le \xi^T P_\infty \xi - x(t)^T P(t) x(t) \qquad \text{(nach Lemma 11.7)} \\
&\le \xi^T P_\infty \xi \,.
\end{aligned} \tag{11.44}$$

Da außerdem $V_\infty(\xi) \le J_\infty(x,u;\xi)$ gilt, folgt aus (11.42) und (11.44) mit Grenzübergang $t \to \infty$, daß (11.39) gilt, durch u eine optimale Steuerung definiert wird, und

$$\lim_{t\to\infty} x(t)^T P(t) x(t) = 0 \,. \tag{11.45}$$

Ist M positiv definit, so ist nach Lemma 11.7 auch $P(1)$ positiv definit. Sei $c > 0$ so gewählt, daß

$$c\|z\|_2^2 \le z^T P(1) z \,, \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{R}^n \,. \tag{11.46}$$

Da wegen Lemma 11.7 für alle $t \ge 1$ gilt

$$c\|x(t)\|_2^2 \le x(t)^T P(1) x(t) \le x(t)^T P(t) x(t) \,, \tag{11.47}$$

folgt aus (11.45) daß $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$. Da der Anfangswert ξ beliebig ist, ist (11.41) asymptotisch stabil. Es bleibt die Eindeutigkeit der optimalen Steuerung zu jedem gegebenen Anfangswert $x(0) = x_0$ zu zeigen. Wir definieren $J_1, J_2 : L^\infty(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^m) \to [0,\infty]$ durch

$$J_1(u) = \int_0^\infty u(t)^T N u(t)\, dt \,, \quad J_2(u) = \int_0^\infty (x(u)(t))^T M (x(u)(t))\, dt \,, \tag{11.48}$$

wobei

$$x(u)(t) = e^{tA} x_0 + \int_0^t e^{(t-\tau)A} B u(\tau)\, d\tau \,. \tag{11.49}$$

Das Funktional J_1 ist strikt konvex (da N positiv definit ist), das Funktional J_2 ist konvex (da M positiv semidefinit und $u \mapsto x(u)$ affin linear ist). Also ist

$$u \mapsto J_\infty(x(u), u; x_0) = J_1(u) + J_2(u) \tag{11.50}$$

strikt konvex und daher das Minimum eindeutig. □

12 Existenz optimaler Steuerungen

Problem 12.1 (Problem der optimalen Steuerung)
Minimiere

$$J(x,u,t_1) = \int_0^{t_1} L(t,x(t),u(t))\,dt + L_1(x(t_1))\,, \tag{12.1}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\dot{x}(t) = f(t,x(t),u(t))\,, \quad x(0) = x_0\,, \tag{12.2}$$

$$\psi(x(t_1)) = 0\,, \tag{12.3}$$

$$u(t) \in \Omega\,, \quad t \in [0,t_1]\,, \tag{12.4}$$

wobei

$$u : [0,t_1] \to \mathbb{R}^m\,, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^m\,, \quad x : [0,t_1] \to \mathbb{R}^n\,, \quad \psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p\,, \quad 0 \le t_1\,. \tag{12.5}$$

Die Endzeit t_1 ist frei. Wir nehmen an, daß die Voraussetzungen in 2.3 erfüllt sind.

Definition 12.2
Sei $t_1 > 0$. Wir setzen

$$\mathcal{U}_{t_1} = \{u : u \in L^\infty(0,t_1;\mathbb{R}^m)\,,\ u(t) \in \Omega \text{ für fast alle } t \in (0,t_1)\,\}\,. \tag{12.6}$$

Eine Steuerung $u \in \mathcal{U}_{t_1}$ heißt zulässig, wenn die zugehörige Lösung x von (12.2) die Endbedingung (12.3) erfüllt. Das Tripel (x,u,t_1) heißt zulässiges Tripel.

Bemerkung 12.3 (Beweisschema für Existenzaussagen)

(i) Wir setzen

$$J_* = \inf\{J(x,u,t_1) : (x,u,t_1) \text{ ist zulässiges Tripel }\}\quad, \tag{12.7}$$

und zeigen, daß $J_* < \infty$ (Steuerbarkeitsaussage).

(ii) Wir wählen eine Minimalfolge (x_n,u_n,t_{1n}), d.h. eine Folge zulässiger Tripel mit

$$J(x_n,u_n,t_{1n}) \to J_*\,. \tag{12.8}$$

(iii) Wir zeigen, daß es eine konvergente Teilfolge gibt, d.h.

$$x_{n_k} \to x_*\,, \quad u_{n_k} \to u_*\,, \quad t_{1n_k} \to t_{1*}\,, \tag{12.9}$$

und zwar mit einem geeigneten Konvergenzbegriff (Stichworte: a-priori-Abschätzungen, schwache Konvergenz und schwache Kompaktheit).

(iv) Wir zeigen, daß (x_*,u_*,t_{1*}) ein zulässiges Tripel ist und daß $J(x_*,u_*,t_{1*}) = J_*$ gilt. Für letzteres ist hinreichend, daß

$$J(x_*,u_*,t_{1*}) \le \liminf_{n\to\infty} J(x_n,u_n,t_{1n})\,. \tag{12.10}$$

□

Satz 12.4
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ kompakt. Dann ist die Menge $\mathcal{U}_{t_1}$ eine beschränkte abgeschlossene Teilmenge von $L^p(0,t_1;\mathbb{R}^m)$ für jedes $t_1 > 0$ und jedes $p \in [1,\infty]$. Jede Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{U}_{t_1}$ hat eine in $\mathcal{U}_{t_1}$ schwach--konvergente Teilfolge $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, d.h. es gibt ein $u \in \mathcal{U}_{t_1}$ mit*

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^{t_1} \langle u_{n_k}(t), v(t)\rangle \, dt = \int_0^{t_1} \langle u(t), v(t)\rangle \, dt \,, \quad \forall\, v \in L^1(0,t_1;\mathbb{R}^m)\,. \tag{12.11}$$

Beweis:: Folgt aus Sätzen der Funktionalanalysis. □

Bemerkung 12.5 (Feste Endzeit und freie Endzeit)
Man kann Probleme mit fester Endzeit in Probleme mit freier Endzeit und umgekehrt umformulieren.

Feste Endzeit → freie Endzeit: Soll in Problem 12.1 die Endzeit t_1 den festen Wert T haben, so führen wir eine neue Zustandsvariable x_{n+1} ein und verlangen

$$\dot{x}_{n+1} = 1\,, \quad x_{n+1}(0) = 0\,, \quad x_{n+1}(t_1) = T\,. \tag{12.12}$$

Freie Endzeit → feste Endzeit: Wir transformieren Problem 12.1 in ein Kontrollproblem auf dem Zeitintervall $[0,1]$:

$$\text{Minimiere } \tilde{J}(\tilde{x},\tilde{u},t_1) = t_1 \int_0^1 L(\tau t_1, \tilde{x}(\tau), \tilde{u}(\tau))\, d\tau + L_1(\tilde{x}(1))\,, \tag{12.13}$$

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{x}}{\mathrm{d}\tau} = t_1 f(\tau t_1, \tilde{x}(\tau), \tilde{u}(\tau))\,, \quad \tilde{x}(0) = x_0\,, \tag{12.14}$$

$$\psi(\tilde{x}(1)) = 0\,, \tag{12.15}$$

$$\tilde{u}(\tau) \in \Omega\,, \tag{12.16}$$

wobei nun $\tilde{x} : [0,1] \to \mathbb{R}^n$, $\tilde{u} : [0,1] \to \mathbb{R}^m$ ist.

Voraussetzung 12.6 (Für den Existenzsatz)

(i) $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ ist kompakt und konvex.

(ii) L ist konvex bzgl. u, d.h. die Abbildung $u \mapsto L(t,x,u)$ ist konvex für alle t, x.

(iii) f ist affin linear bzgl. u, d.h. f hat die Form

$$f(t,x,u) = f_1(t,x) + f_2(t,x)u\,, \tag{12.17}$$

wobei $f_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{(n,m)}$.

(iv) L, f, L_1, ψ sind stetig.

(v) f erfüllt eine Wachstumsbedingung

$$\|f(t,x,u)\| \le c(t,u)(1 + \|x\|)\,, \tag{12.18}$$

wobei $c : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ eine geeignete stetige Funktion ist.

(vi) Es gibt ein zulässiges Tripel (x, u, t_1) für Problem 12.1.

(vii) Wir führen als zusätzliche Nebenbedingung in Problem 12.1 die Bedingung

$$t_1 \le T_{max} \tag{12.19}$$

ein, wobei T_{max} hinreichend groß ist. (Das ändert nicht bei Problemen mit fester Endzeit und bei zeitoptimalen Problemen, schließt aber den Fall aus, daß 12.1 keine Lösung hat, aber eine Minimalfolge (x_n, u_n, t_{1n}) mit $t_{1n} \to \infty$ existiert.)

□

Bemerkung 12.7
Die Wachstumsbedingung in 12.6 folgt aus den Bedingungen in 2.3, falls die dortigen Funktionen α und α_2 stetig sind.

Satz 12.8 (Existenz optimaler Steuerungen)
Seien die Voraussetzungen in 12.6 erfüllt. Dann hat Problem 12.1 eine Lösung (x_*, u_*, t_1) *mit* $u_* \in \mathcal{U}_{t_1}$.

Beweis: Als erstes beweisen wir eine a-priori-Abschätzung: Es gibt eine Konstante $C > 0$ mit

$$\|x\|_\infty \le C\,, \tag{12.20}$$

für alle zulässigen Tripel (x, u, t_1) . Sei

$$c_1 = \sup_{\omega\in\Omega} \|\omega\|\,, \quad c_2 = \sup_{\substack{0\le t\le T_{max}\\ \omega\in\Omega}} c(t,\omega)\,. \tag{12.21}$$

Es gilt dann

$$\|x(t)\| = \|x_0 + \int_0^t f(s, x(s), u(s))\, ds\,\| \le \|x_0\| + \int_0^t c_2(1 + \|x(s)\|)\, ds\,. \tag{12.22}$$

Aus dem Lemma von Gronwall folgt die Abschätzung

$$\|x(t)\| \le (\|x_0\| + c_2 t)\, e^{c_2 t}\,, \tag{12.23}$$

also gilt (12.20) mit

$$C = \max\{c_1, (\|x_0\| + c_2 T_{max})\, e^{c_2 T_{max}}\}\,. \tag{12.24}$$

Wir wenden nun das Schema 12.3 auf das auf feste Endzeit transformierte Problem an, also auf

$$\text{Minimiere } \tilde{J}(\tilde{x}, \tilde{u}, t_1) = t_1 \int_0^1 L(\tau t_1, \tilde{x}(\tau), \tilde{u}(\tau))\, d\tau + L_1(\tilde{x}(1))\,, \tag{12.25}$$

$$x(\tau) = x_0 + \int_0^\tau t_1 f(st_1, \tilde{x}(s), \tilde{u}(s))\,, \tag{12.26}$$

$$\psi(\tilde{x}(1)) = 0\,, \qquad \tilde{u}(\tau) \in \Omega\,, \tag{12.27}$$

mit $\tilde{x} : [0,1] \to \mathbb{R}^n$, $\tilde{u} : [0,1] \to \mathbb{R}^m$. Da durch

$$\tilde{x}(s) = x(t_1 s)\,, \quad \tilde{u}(s) = u(t_1 s)\,, \tag{12.28}$$

zulässige Tripel (x, u, t_1) des ursprünglichen Problems in zulässige Tripel des transformierten Problems und umgekehrt überführt werden, gilt die a-priori-Abschätzung (12.20) auch im transformierten Problem. Aus (12.28) folgt außerdem

$$\tilde{J}(\tilde{x}, \tilde{u}, t_1) = J(x, u, t_1)\,. \tag{12.29}$$

Nach Voraussetzung ist

$$J_* := \inf\{\tilde{J}(\tilde{x}, \tilde{u}, t_1) : (\tilde{x}, \tilde{u}, t_1) \text{ zulässig für (12.25)-(12.27) } \} < \infty\,. \tag{12.30}$$

Wir wählen eine Minimalfolge $(\tilde{x}_n, \tilde{u}_n, t_{1n})$ zulässiger Tripel mit

$$\tilde{J}(\tilde{x}_n, \tilde{u}_n, t_{1n}) \to J_*\,. \tag{12.31}$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $s \in [0, 1]$ gilt

$$\|t_{1n} f(t_{1n}s, \tilde{x}_n(s), \tilde{u}_n(s))\| \le T_{max} c_2(1 + C) =: L\,, \tag{12.32}$$

also ist L eine Lipschitzkonstante für alle $\tilde{x}_n$. Die Folge $(\tilde{x}_n)$ ist daher gleichgradig stetig und beschränkt in $C[0, 1; \mathbb{R}^n]$, also relativ kompakt nach dem Satz von Arzelà-Ascoli. Es gilt außerdem $t_{1n} \in [0, T_{max}]$. Nach Satz 12.4 gibt es eine Teilfolge $(\tilde{x}_{n_k}, \tilde{u}_{n_k}, t_{1n_k})$ und Elemente $\tilde{x}_* \in C[0, 1; \mathbb{R}^n]$, $\tilde{u}_* \in L^\infty(0, 1; \mathbb{R}^m)$, $t_{1*} \in [0, T_{max}]$ mit

$$t_{1n_k} \to t_{1*}\,, \quad \tilde{x}_{n_k} \to \tilde{x}_* \text{ gleichmäßig }, \quad \tilde{u}_{n_k} \to \tilde{u}_* \text{ schwach-}* \,. \tag{12.33}$$

Wir zeigen nun, daß das Tripel $(\tilde{x}_*, \tilde{u}_*, t_{1*})$ zulässig ist für das transformierte Problem. Um Schreibarbeit zu sparen, nehmen wir o.B.d.A. an, daß $(\tilde{x}_{n_k}, \tilde{u}_{n_k}, t_{1n_k}) = (\tilde{x}_n, \tilde{u}_n, t_{1n})$, d.h. daß der Übergang zur Teilfolge überflüssig war. Es gilt

$$\psi(\tilde{x}_n(1)) = 0\,, \quad \tilde{x}_n(1) \to \tilde{x}_*(1) \quad \Rightarrow \quad \psi(\tilde{x}_*(1)) = 0\,. \tag{12.34}$$

Da wegen Satz 12.4 auch $\tilde{u}_* \in \mathcal{U}_1$ gilt, ist (12.27) erfüllt. Wir betrachten nun den Grenzübergang in der Integralgleichung. Für festes $\tau \in [0, 1]$ gilt

$$\begin{aligned} \tilde{x}_n(\tau) &= x_0 + \int_0^\tau t_{1n} f(t_{1n}s, \tilde{x}_n(s), \tilde{u}_n(s))\, ds \\ &= x_0 + \int_0^\tau t_{1n} f_1(t_{1n}s, \tilde{x}_n(s))\, ds + \int_0^\tau t_{1n} f_2(t_{1n}s, \tilde{x}_n(s)) \tilde{u}_n(s)\, ds\,. \end{aligned} \tag{12.35}$$

Es gilt nach dem Satz von Lebesgue

$$\int_0^\tau t_{1n} f_1(t_{1n}s, \tilde{x}_n(s))\, ds \quad \to \quad \int_0^\tau t_{1*} f_1(t_{1*}s, \tilde{x}_*(s))\, ds\,, \tag{12.36}$$

da die Integranden für $n \to \infty$ punktweise konvergieren und gleichmäßig beschränkt sind. Für den zweiten Term: Wir setzen

$$a_n(s) = t_{1n} f_2(t_{1n}s, \tilde{x}_n(s))\,, \quad a_*(s) = t_{1*} f_2(t_{1*}s, \tilde{x}_*(s))\,. \tag{12.37}$$

Aus dem Satz von Lebesgue folgt, daß $a_n \to a_*$ im $L^1(0, 1; \mathbb{R}^{(n,m)})$. Es gilt dann

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^\tau a_n(s) \tilde{u}_n(s)\, ds - \int_0^\tau a_*(s) \tilde{u}_*(s)\, ds \right| \le \\ &\le \int_0^\tau |a_n(s) - a_*(s)| |\tilde{u}_n(s)|\, ds + \left| \int_0^\tau a_*(s)(\tilde{u}_n(s) - \tilde{u}_*(s))\, ds \right| \\ &\le \underbrace{\int_0^\tau C |a_n(s) - a_*(s)|\, ds}_{\to 0\text{, da } a_n \to a_* \text{ im } L^1} + \underbrace{\left| \int_0^\tau a_*(s)(\tilde{u}_n(s) - \tilde{u}_*(s))\, ds \right|}_{\to 0 \text{ nach Satz 12.4}}, \end{aligned} \tag{12.38}$$

und damit insgesamt

$$\int_0^\tau t_{1n} f(t_{1n}s, \tilde{x}_n(s), \tilde{u}_n(s))\, ds \to \int_0^\tau t_{1*} f(t_{1*}s, \tilde{x}_*(s), \tilde{u}_*(s))\, ds\,. \tag{12.39}$$

Also erfüllt $(\tilde{x}_*, \tilde{u}_*, t_{1*})$ die Integralgleichung (12.26). Es bleibt zu zeigen, daß

$$\tilde{J}(\tilde{x}_*, \tilde{u}_*, t_{1*}) \leq J_* = \lim_{n\to\infty} \tilde{J}(\tilde{x}_n, \tilde{u}_n, t_{1n})\,. \tag{12.40}$$

Zunächst gilt

$$L_1(\tilde{x}_n(1)) \to L_1(\tilde{x}_*(1))\,. \tag{12.41}$$

Da $\tilde{u}_n \to \tilde{u}_*$ schwach im L^2, gibt es nach dem Satz von Mazur (siehe Funktionalanalysis) zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Konvexkombination v_n der Restfolge $\tilde{u}_n, \tilde{u}_{n+1}, \ldots$ der Form

$$v_n = \sum_{k=n}^{N(n)} \alpha_k(n) \tilde{u}_k\,, \quad \sum_{k=n}^{N(n)} \alpha_k(n) = 1\,, \quad \alpha_k(n) \in [0,1]\,, \tag{12.42}$$

mit

$$\|v_n - \tilde{u}_*\|_{L^2} \leq \frac{1}{n}\,, \tag{12.43}$$

d.h es gilt auch (nach Übergang zu einer Teilfolge, falls nötig)

$$v_n \to \tilde{u}_* \text{ punktweise fast überall }\,. \tag{12.44}$$

Es ist dann

$$\begin{aligned} \int_0^1 t_{1*} L(t_{1*}s, \tilde{x}_*(s), \tilde{u}_*(s))\, ds &\leq \int_0^1 t_{1*} L(t_{1*}s, \tilde{x}_*(s), v_n(s))\, ds + \\ &+ \underbrace{\int_0^1 t_{1*} |L(t_{1*}s, \tilde{x}_*(s), \tilde{u}_*(s)) - L(t_{1*}s, \tilde{x}_*(s), v_n(s))|\, ds}_{\to 0 \text{ nach dem Satz von Lebesgue}}\,, \end{aligned} \tag{12.45}$$

Das erste Integral läßt sich wegen der Konvexität von L in u wie folgt nach oben abschätzen:

$$\begin{aligned} \int_0^1 t_{1*} L(t_{1*}s, \tilde{x}_*(s), v_n(s))\, ds &= \int_0^1 t_{1*} L(t_{1*}s, \tilde{x}_*(s), \sum_{k=n}^{N(n)} \alpha_k(n) \tilde{u}_k(s))\, ds \\ &\leq \sum_{k=n}^{N(n)} \alpha_k(n) \int_0^1 t_{1*} L(t_{1*}s, \tilde{x}_*(s), \tilde{u}_k(s))\, ds \\ &\leq \sum_{k=n}^{N(n)} \alpha_k(n) \int_0^1 t_{1k} L(t_{1k}s, \tilde{x}_k(s), \tilde{u}_k(s))\, ds + \\ &+ \sum_{k=n}^{N(n)} \alpha_k(n) \int_0^1 |t_{1*} L(t_{1*}s, \tilde{x}_*(s), \tilde{u}_k(s)) - t_{1k} L(t_{1k}s, \tilde{x}_k(s), \tilde{u}_k(s))|\, ds\,. \end{aligned} \tag{12.46}$$

Die erste Summe konvergiert gegen $J_* - L_1(\tilde{x}_*(1))$ für $n \to \infty$. Die zweite Summe konvergiert gegen 0, da

$$\sup_{k\geq n} \sup_{0\leq s\leq 1} |t_{1*} L(t_{1*}s, \tilde{x}_*(s), \tilde{u}_k(s)) - t_{1k} L(t_{1k}s, \tilde{x}_k(s), \tilde{u}_k(s))| \quad \to 0 \tag{12.47}$$

für $n \to \infty$ wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von L (die Argumente von L in (12.47) liegen in einer kompakten Menge). Aus (12.41), (12.46) und (12.47) folgt die Behauptung (12.40). Damit ist der Beweis beendet. □

13 Lineare zeitoptimale Steuerungen

Problem 13.1 (Lineares zeitoptimales Kontrollproblem)
Minimiere t_1, wobei $x : [0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u(t)\,, \quad x(0) = x_0\,, \tag{13.1}$$

löst und die Endbedingung

$$x(t_1) = x_1\,, \tag{13.2}$$

erfüllt. Wir verlangen, daß

$$u \in \mathcal{U}\,, \quad \mathcal{U} = \{u : u \in L^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^m)\,,\, u(t) \in \Omega \text{ fast überall }\}\,. \tag{13.3}$$

Wir setzen voraus, daß $A \in L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^{(n,n)})$, $B \in L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^{(n,m)})$ und

$$\Omega \subset \mathbb{R}^m \text{ kompakt, konvex, nichtleer.} \tag{13.4}$$

Definition 13.2 (Erreichbarkeitsmenge)
Wir definieren die Erreichbarkeitsmenge von Problem 13.1 durch

$$\mathcal{R}(t) = \{\varphi(t, 0, x_0, u) : u \in \mathcal{U}\}\,. \tag{13.5}$$

Satz 13.3
Die Erreichbarkeitsmenge $\mathcal{R}(t)$ von Problem 13.1 ist kompakt, konvex und nichtleer und

$$\bigcup_{0 \le \tau \le t} \mathcal{R}(\tau) \tag{13.6}$$

ist beschränkt für jedes $t \ge 0$.

Beweis: Sei $t \ge 0$. Es ist $\mathcal{R}(t) \ne \emptyset$, da $\mathcal{U} \ne \emptyset$. $\mathcal{R}(t)$ ist konvex, da $\mathcal{U}$ konvex ist und

$$\varphi(t, 0, x_0, \lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2) = \lambda\varphi(t, 0, x_0, u_1) + (1 - \lambda)\varphi(t, 0, x_0, u_2)\,. \tag{13.7}$$

Es ist

$$\varphi(t, 0, x_0, u) = \Phi(t, 0)x_0 + \int_0^t \Phi(t, s)B(s)u(s)\,ds\,, \tag{13.8}$$

wobei $\Phi(t, s)$ die Übergangsmatrix von (13.1) bezeichnet, also gilt für alle $\tau \le t$

$$\|\varphi(\tau, 0, x_0, u)\| \le \|\Phi(\tau, 0)x_0\| + \|u\|_\infty \int_0^\tau \|\Phi(\tau, s)B(s)\|\,ds\,. \tag{13.9}$$

Da U beschränkt ist, ist auch

$$\sup_{u \in \mathcal{U}} \|u\|_\infty < \infty\,, \tag{13.10}$$

also ist $\cup_{0 \le \tau \le t} \mathcal{R}(t)$ beschränkt. Wir zeigen, daß $\mathcal{R}(t)$ abgeschlossen ist: Sei (z_n) Folge in $\mathcal{R}(t)$ mit $\lim_{n\to\infty} z_n = z$, seien $u_n \in \mathcal{U}$ mit

$$z_n = \varphi(t, 0, x_0, u_n)\,. \tag{13.11}$$

Nach Satz 12.4 gibt es eine schwach-*-konvergente Teilfolge $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Sei $u \in \mathcal{U}$ der schwache Limes. Es gilt dann

$$\begin{aligned} z &= \lim_{k\to\infty} z_{n_k} = \lim_{k\to\infty} \varphi(t, 0, x_0, u_{n_k}) \\ &= \lim_{k\to\infty} \left[\Phi(t,0)x_0 + \int_0^t \Phi(t,s)B(s)u_{n_k}(s)\,ds\right] \\ &= \Phi(t,0)x_0 + \int_0^t \Phi(t,s)B(s)u(s)\,ds \\ &= \varphi(t, 0, x_0, u)\,, \end{aligned} \tag{13.12}$$

also ist $z \in \mathcal{R}(t)$. □

Definition 13.4 (Abstand zweier Mengen)
Seien $A, B \subset \mathbb{R}^n$, sei $x \in \mathbb{R}^n$, sei

$$d(x, A) = \inf_{a\in A} \|x - a\| \tag{13.13}$$

der Abstand von x zu A. Wir definieren

$$d(A, B) = \max\{\sup_{x\in B} d(x, A)\,,\ \sup_{y\in A} d(y, B)\}\,. \tag{13.14}$$

Lemma 13.5 (Hausdorff-Metrik)
Durch (13.14) wird eine Metrik auf der Menge $\mathcal{K}$ aller nichtleeren kompakten Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ definiert. Diese Metrik heißt Hausdorff-Metrik.

Beweis: Elementar. □

Bemerkung 13.6
Satz 13.3 gilt auch, wenn Ω kompakt, aber nicht konvex ist (es stellt sich heraus, daß die konvexe Hülle von Ω die gleiche Erreichbarkeitsmenge wie Ω liefert).

Satz 13.7 (Stetige Abhängigkeit der Erreichbarkeitsmenge)
Die Abbildung $t \mapsto \mathcal{R}(t)$ ist stetig bezüglich der Hausdorff-Metrik.

Beweis: Wir zeigen zunächst: Es gilt

$$|\varphi(t, 0, x_0, u) - \varphi(\tau, 0, x_0, u)| \le L(t)|t - \tau| \qquad \text{für alle } u \in \mathcal{U}\,,\ \tau \le t\,, \tag{13.15}$$

mit einer nicht von u abhängigen Lipschitz-Konstanten $L(t)$. Dies folgt aus der Formel für die Zustandsfunktion

$$x(t) - x(\tau) = [\Phi(t,\tau) - \Phi(\tau,\tau)]x(\tau) + \int_\tau^t \Phi(t,s)B(s)u(s)\,ds\,, \tag{13.16}$$

und die Übergangsmatrix

$$\Phi(t,\tau) = \exp\left(\int_\tau^t A(s)\,ds\right)\,, \tag{13.17}$$

da $\|u\|_\infty$ und $x(\tau)$ unabhängig von der Wahl von u und τ gleichmäßig beschränkt sind (siehe (13.6)). Sei nun $\xi \in \mathcal{R}(t)$ und $\tau \le t$ beliebig. Sei $u \in \mathcal{U}$ mit $\xi = \varphi(t, 0, x_0, u)$. Dann ist wegen (13.15)

$$d(\xi, \mathcal{R}(\tau)) \le |\varphi(t, 0, x_0, u) - \varphi(\tau, 0, x_0, u)| \le L(t)|t - \tau|\,, \tag{13.18}$$

also auch

$$\sup_{\xi \in \mathcal{R}(t)} d(\xi, \mathcal{R}(\tau)) \leq L(t)|t - \tau| \,. \tag{13.19}$$

Vertauschen der Rollen von t und τ liefert die Behauptung. □

Folgerung 13.8
Sei $\xi \in \operatorname{int} \mathcal{R}(t)$, $t > 0$. Dann gibt es eine Umgebung V von ξ und ein $\delta > 0$ mit

$$|t - \tau| < \delta \quad \Rightarrow \quad V \subset \operatorname{int} \mathcal{R}(\tau) \,. \tag{13.20}$$

Beweis: Übungsaufgabe.

Satz 13.9 (Existenz zeitoptimaler Steuerungen)
Es gebe ein $t > 0$ mit $x_1 \in \mathcal{R}(t)$. Dann gibt es auch ein minimales t_* mit $x_1 \in \mathcal{R}(t_*)$.

Beweis: Sei $t_n \downarrow t_* = \inf\{t : t > 0, x_1 \in \mathcal{R}(t)\}$ Folge mit $x_1 \in \mathcal{R}(t_n)$. Es ist

$$0 \leq d(x_1, \mathcal{R}(t_*)) \leq d(\mathcal{R}(t_n), \mathcal{R}(t_*)) \to 0 \tag{13.21}$$

nach Satz 13.7, also $x_1 \in \mathcal{R}(t_*)$, da $\mathcal{R}(t_*)$ kompakt ist nach Satz 13.3. □

Definition 13.10 (Extremale Steuerung)
Eine Steuerung $u \in \mathcal{U}$ heißt extremal zur Zeit t, falls $\varphi(t, 0, x_0, u) \in \partial \mathcal{R}(t)$.

Satz 13.11 (Trennungssatz im $\mathbb{R}^n$)
Sei $C \subset \mathbb{R}^n$ konvex, abgeschlossen, nichtleer, sei $x \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$x \notin C \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, z \in \mathbb{R}^n,\ \|z\|_2 = 1,\ \text{ mit } z^T y < z^T x \text{ für alle } y \in C, \tag{13.22}$$

$$x \in \partial C \quad \Rightarrow \quad \exists\, z \in \mathbb{R}^n,\ \|z\|_2 = 1,\ \text{ mit } z^T y \leq z^T x \text{ für alle } y \in C. \tag{13.23}$$

Beweis: Wir zeigen "$\Rightarrow$" in (13.22). (Die Umkehrung ist offensichtlich.) Sei $p \in C$ die Projektion (bezüglich der euklidischen Norm) auf C. Wir setzen

$$z = \frac{x - p}{\|x - p\|_2} \,. \tag{13.24}$$

Dann gilt für alle $y \in C$:

$$z^T y - z^T x = \langle z, y - p \rangle + \langle z, p - x \rangle \leq \langle z, p - x \rangle = -\|x - p\|_2 \,, \tag{13.25}$$

da $\langle x - p, y - p \rangle \leq 0$. Zum Beweis von (13.23) wählen wir eine Folge $x_n \notin C$ mit $x_n \to x$ und $z_n \in \mathbb{R}^n$ gemäß (13.22) und z als Limes einer konvergenten Teilfolge (z_{n_k}), dann ist $\|z\|_2 = 1$ und

$$z^T y = \lim_{k \to \infty} z_{n_k}^T y \leq \lim_{k \to \infty} z_{n_k}^T x_{n_k} = z^T x \,. \tag{13.26}$$

□

Bemerkung 13.12
Man beachte, das Innere von C leer sein kann. (In unendlichdimensionalen Räumen gilt die Aussage (13.23) i.a. nicht mehr, wenn das Innere von C leer ist.)

Satz 13.13 (Charakterisierung extremaler Steuerungen)
Ein $u \in \mathcal{U}$ *ist extremal zur Zeit* $\tau > 0$ *genau dann, wenn es eine Lösung* $p : [0, \tau] \to \mathbb{R}^n$, $p \neq 0$, *des "adjungierten Systems"*

$$\dot{p} = -A(t)^T p, \tag{13.27}$$

gibt mit

$$p(\tau)^T y \leq p(\tau)^T x(\tau) \qquad \text{für alle } y \in \mathcal{R}(\tau), \tag{13.28}$$

und

$$p(t)^T B(t) u(t) = \max_{\omega \in \Omega} p(t)^T B(t) \omega \qquad \text{für fast alle } t \in [0, \tau], \tag{13.29}$$

wobei $x(t) = \varphi(t, 0, x_0, u)$ *die zugehörige Zustandsfunktion ist.*

Beweis: Ist u nicht extremal zur Zeit τ, so gilt $x(\tau) \in \operatorname{int} \mathcal{R}(\tau)$. Die Ungleichung (13.28) kann dann nur für $p(\tau) = 0$ gelten; wegen (13.27) muß dann $p = 0$ sein. Sei nun u extremal zur Zeit τ, also $x(\tau) \in \partial \mathcal{R}(\tau)$. Wir wählen gemäß Satz 13.11 ein $z \in \mathbb{R}^n$ mit $\|z\|_2 = 1$ und

$$z^T y \leq z^T x(\tau) \qquad \text{für alle } y \in \mathcal{R}(\tau). \tag{13.30}$$

Sei $p : [0, \tau] \to \mathbb{R}^n$ die Lösung von (13.27) zum Anfangswert

$$p(\tau) = z. \tag{13.31}$$

Es gilt dann (13.28) nach Konstruktion. Wir müssen noch zeigen, daß (13.29) gilt. Für jedes $t \in [0, \tau]$ gilt

$$\begin{aligned} p(t)^T x(t) &= \int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \left(p(s)^T x(s) \right) ds \\ &= p(0)^T x(0) + \int_0^t \left(\dot{p}(s)^T x(s) + p(s)^T \dot{x}(s) \right) ds \\ &= p(0)^T x(0) + \int_0^t p(s)^T B(s) u(s)\, ds. \end{aligned} \tag{13.32}$$

Für jedes $\tilde{u} \in \mathcal{U}$ mit zugehörigem Zustand $\tilde{x}$ gilt dann $\tilde{x}(\tau) \in \mathcal{R}(\tau)$, also folgt aus (13.28) und (13.32)

$$\begin{aligned} \int_0^\tau p(s)^T B(s) \tilde{u}(s)\, ds &= p(\tau)^T \tilde{x}(\tau) - p(0)^T x_0 \\ &\leq p(\tau)^T x(\tau) - p(0)^T x_0 \\ &= \int_0^\tau p(s)^T B(s) u(s)\, ds, \qquad \text{für alle } \tilde{u} \in \mathcal{U}. \end{aligned} \tag{13.33}$$

Wählen wir $\tilde{u} \in \mathcal{U}$ so, daß für fast alle t gilt

$$p(t)^T B(t) \tilde{u}(t) = \max_{\omega \in \Omega} p(t)^T B(t) \omega, \tag{13.34}$$

so folgt wegen

$$p(t)^T B(t) \tilde{u}(t) \geq p(t)^T B(t) u(t), \tag{13.35}$$

$t \in [0, \tau]$ die Behauptung. (Siehe Bemerkung 13.14 für diesen letzten Beweisteil.) □

Bemerkung 13.14 (Integralungleichung und punktweise Ungleichung)

- Es ist klar, daß es zu jedem $t \in [0, \tau]$ ein $\tilde{u}(t) \in \Omega$ gibt, so daß (13.34) gilt. Das Problem besteht darin, die Wahl von $\tilde{u}(t)$ so zu treffen, daß $\tilde{u} : [0, \tau] \to \mathbb{R}^m$ meßbar wird. Dies führt auf das Problem, eine sogenannte meßbare Selektion einer mengenwertigen Abbildung der Form

$$t \mapsto G(t) = \{v : v \in \Omega, g(t, v) = \max_{\omega \in \Omega} g(t, \omega)\} \tag{13.36}$$

  zu finden.

- Das Problem der meßbaren Selektion läßt sich hier umgehen. Gilt (13.29) nicht, so gibt es eine Menge $I \subset [0, t_{1*}]$ von positivem Maß und ein $\tilde{\omega} \in \Omega$, so daß für fast alle $t \in I$ gilt

$$p(t)^T B(t) u(t) < p(t)^T B(t) \tilde{\omega} \leq \max_{\omega \in \Omega} p(t)^T B(t) \omega \,. \tag{13.37}$$

  (Falls u_* und B stetig sind, wähle irgendein t und $\tilde{\omega}$ mit (13.37) und I als hinreichend kleine Umgebung von t; im allgemeinen Fall muß man den Satz von Lusin einsetzen, um diese Aussage zu erhalten.) Setzen wir

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} \tilde{\omega} \,, & t \in I \,, \\ u(t) \,, & t \notin I \,, \end{cases} \tag{13.38}$$

  so ergibt sich

$$\int_0^T p(s)^T B(s) \tilde{u}(s) \, ds > \int_0^T p(s)^T B(s) u(s) \, ds \tag{13.39}$$

  im Widerspruch zu (13.33).

Satz 13.15 (Notwendige Optimalitätsbedingungen = Maximumprinzip)
Sei (x_*, u_*, t_{1*}) Lösung von Problem 13.1, sei die sogenannte Hamiltonfunktion $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$H(t, x, u, p) = p^T (A(t) x + B(t) u) - 1 \,. \tag{13.40}$$

Dann ist u_* extremal, und es gibt ein $p : [0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ (die sogenannte Adjungierte) mit $p \neq 0$, so daß die adjungierte Gleichung

$$\dot{p}(t) = -A(t)^T p(t) \quad \left(= -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x_*(t), u_*(t), p(t)) \right) , \tag{13.41}$$

die Maximumbedingung

$$H(t, x_*(t), u_*(t), p(t)) = \max_{\omega \in \Omega} H(t, x_*(t), \omega, p(t)) \tag{13.42}$$

sowie

$$p(t_{1*})^T y \leq p(t_{1*})^T x(t_{1*}) \,, \qquad \text{für alle } y \in \mathcal{R}(t_{1*}) \,, \tag{13.43}$$

gelten. Sind A, B zeitunabhängig, so ist

$$t \mapsto H(t, x_*(t), u_*(t), p(t)) \tag{13.44}$$

konstant.

Beweis: Ist $x(t_{1*}) = x_1 \in \operatorname{int} \mathcal{R}(t_{1*})$, so gibt es nach Folgerung 13.8 ein $t_1 < t_{1*}$ mit $x_1 \in \operatorname{int} \mathcal{R}(t_1)$ im Widerspruch zur Zeitoptimalität von u_*. Also ist u_* extremal. Also existiert nach Satz 13.13 eine Adjungierte mit den Eigenschaften (13.41)-(13.43). Die letzte Behauptung wird hier nicht bewiesen (siehe später die allgemeine Formulierung des Maximumprinzips). □

Beispiel 13.16
Wir betrachten $\ddot{x} = u$ mit der Kontrolleinschränkung $|u(t)| \leq 1$. Es ist

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Omega = [-1, 1]. \tag{13.45}$$

Die adjungierte Gleichung lautet

$$\dot{p}_1 = 0, \tag{13.46}$$

$$\dot{p}_2 = -p_1. \tag{13.47}$$

Die Maximumbedingung wird zu

$$p(t)^T B u_*(t) = \max_{\omega \in [-1,1]} p(t)^T B \omega \qquad \text{fast überall} \quad , \tag{13.48}$$

also

$$p_2(t) u_*(t) = \max_{\omega \in [-1,1]} p_2(t) \omega \qquad \text{fast überall} \quad , \tag{13.49}$$

also

$$u_*(t) = \begin{cases} 1, & p_2(t) > 0, \\ -1, & p_2(t) < 0, \end{cases} \qquad \text{fast überall} \quad . \tag{13.50}$$

Aus der adjungierten Gleichung folgt

$$p_1(t) = \alpha, \quad p_2(t) = \beta - \alpha t, \tag{13.51}$$

mit gewissen Konstanten α, β, welche wegen Satz 13.15 nicht beide Null sein können. Die "Schaltfunktion" p_2 hat also höchstens eine Nullstelle. Es gibt nun 4 Möglichkeiten für die Struktur der optimalen Steuerung: Sie kann konstant 1 oder konstant -1 sein, oder sie hat einen Umschaltpunkt $t_* \in (0, t_{1*})$, in dem sie von 1 nach -1 oder umgekehrt schaltet. Welcher dieser Fälle zutrifft, hängt von der Anfangs- und Endbedingung ab. Für

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{13.52}$$

beispielsweise ist

$$u_*(t) = \begin{cases} 1, & t < t_*, \\ -1, & t > t_*, \end{cases} \tag{13.53}$$

die einzige Möglichkeit. Die Werte $t_{1*} = 2$ und $t_* = 1$ werden durch die Endbedingung festgelegt.

Bemerkung 13.17 (Ω ist konvexes Polyeder)
Seien A, B zeitunabhängig. Sei Ω ein konvexes Polyeder, d.h. die konvexe Hülle endlich vieler Punkte im $\mathbb{R}^m$. Sei u_* zeitoptimale Steuerung, sei $S(t)$ die Schaltfunktion im Maximumprinzip, d.h.

$$S(t)^T = (S_1(t), \ldots, S_m(t)) = p(t)^T B, \tag{13.54}$$

so daß die Maximumbedingung lautet

$$S(t)^T u_*(t) = \max_{\omega \in \Omega} S(t)^T \omega \,. \tag{13.55}$$

Es gibt dann 2 Möglichkeiten:

- $u_*(t)$ ist eindeutig bestimmte Maximumstelle in (13.55). Dann ist $u_*(t)$ Ecke von Ω (regulärer Fall).
- Das Maximum in (13.55) wird entlang einer Kante (oder einer höherdimensionalen Seitenfläche) von Ω angenommen (singulärer Fall). Ist $w \in \mathbb{R}^m$ der Richtungsvektor der Kante, so gilt
$$S(t)^T w = 0 \,. \tag{13.56}$$

Definition 13.18 (Normalitätsbedingung) *Sei $(A, B) \in \mathbb{R}^{(n,n)} \times \mathbb{R}^{(n,m)}$ zeitinvariantes Kontrollsystem, sei $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ nichtleeres konvexes Polyeder. Wir sagen, daß (A, B, Ω) die Normalitätsbedingung erfüllt, falls die Vektoren*

$$Bw, ABw, \ldots, A^{n-1}Bw \tag{13.57}$$

linear unabhängig sind für jede Kante w von Ω.

Lemma 13.19
Erfüllt (A, B, Ω) die Normalitätsbedingung, so ist (A, B) steuerbar ist. Im Fall $m = 1$ (skalare Kontrolle) gilt auch die Umkehrung.

Beweis: Übungsaufgabe. □

Satz 13.20 (Starkes Bang-Bang-Prinzip)
Erfüllt (A, B, Ω) die Normalitätsbedingung, so ist jede zeitoptimale Steuerung u_* stückweise konstant. Die Werte von u_* sind Ecken von Ω, und die Anzahl der Umschaltpunkte ist endlich.

Beweis: Sei $u_* : [0, t_{1*}] \to \mathbb{R}^m$ zeitoptimal, sei p eine zugehörige Adjungierte und S die zugehörige Schaltfunktion. Wir definieren für beliebiges $w \in \mathbb{R}^m$

$$D_w = \{t : t \in [0, t_{1*}], S(t)^T w = 0\} \,. \tag{13.58}$$

Da p analytisch ist, ist auch S analytisch. Also ist entweder $D_w = [0, t_{1*}]$, oder D_w ist eine endliche Menge. Falls $D_w = [0, t_{1*}]$, so ist

$$h(t) = p(t)^T Bw = 0 \,, \tag{13.59}$$

also auch

$$h^{(k)}(t) = (-1)^k p(t)^T A^k Bw = 0 \,, \quad k \in \mathbb{N} \,. \tag{13.60}$$

Da $p(t) \neq 0$ für alle t, sind die Vektoren $Bw, ABw, \ldots, A^{n-1}Bw$ linear abhängig, also kann w keine Kante von Ω sein. Da Ω nur endlich viele Kanten hat, ist

$$D = \bigcup_{w \text{ Kante}} D_w \tag{13.61}$$

endlich. Wir definieren für jede Ecke e von Ω

$$E_e = \{t : t \in [0, t_{1*}], e \text{ ist eindeutige Maximalstelle von } \max_{\omega \in \Omega} S(t)^T \omega\} . \tag{13.62}$$

Dann ist E_e offen (da S stetig ist), und

$$\partial E_e \subset D \cup \{0, t_{1*}\} . \tag{13.63}$$

Hieraus folgen alle Behauptungen. □

Satz 13.21
Sei $m = 1$, sei (A, b) steuerbar. Hat A nur reelle Eigenwerte, so hat jede zeitoptimale Steuerung höchstens $n - 1$ Umschaltpunkte.

Beweis: Sei $u_* : [0, t_{1*}] \to \mathbb{R}^m$ zeitoptimal, sei p eine zugehörige Adjungierte und S die zugehörige Schaltfunktion. Es gilt

$$S(t) = p(t)^T b = p(0)^T e^{-tA} b . \tag{13.64}$$

Seien

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_r \tag{13.65}$$

die verschiedenen reellen Eigenwerte von $-A$ mit den (algebraischen) Vielfachheiten $n_1, \ldots, n_r$. Dann hat S die Form (siehe Lösungstheorie linearer Differentialgleichungen)

$$S(t) = \sum_{j=1}^{r} q_j(t) e^{\lambda_j t} , \quad q_j \in P_{n_j - 1} , \quad \sum_{j=1}^{r} n_j = n . \tag{13.66}$$

Wir zeigen nun mit Induktion über r, daß jede Funktion S der Form (13.66) mit n Nullstellen identisch Null sein muß. (Die Behauptung des Satzes folgt dann aus Satz 13.20.) Für $r = 1$ folgt die Behauptung daraus, daß die Nullstellen von S identisch sind mit den Nullstellen von $q_1 \in P_{n_1 - 1} = P_{n-1}$. Wir schließen nun von $r - 1$ auf r. Wir betrachten

$$g(t) = e^{-\lambda_r t} S(t) = \sum_{j=1}^{r-1} q_j(t) e^{(\lambda_j - \lambda_r) t} + q_r(t) . \tag{13.67}$$

Die Funktionen S und g haben offenbar dieselben Nullstellen. Es gilt

$$g^{(n_r)}(t) = \sum_{j=1}^{r-1} \tilde{q}_j(t) e^{(\lambda_j - \lambda_r) t} , \quad \tilde{q}_j \in P_{n_j - 1} . \tag{13.68}$$

Hat g mindestens n Nullstellen, so hat $g^{(n_r)}$ mindestens

$$n - n_r = \sum_{j=1}^{r-1} n_j \tag{13.69}$$

Nullstellen, also ist $g^{(n_r)} = 0$ nach Induktionsvoraussetzung, d.h. $g \in P_{n_r - 1}$, also $g = 0$ wegen $n_r \le n$, also auch $S = 0$. □

14 Maximumprinzip (freier Endwert)

Problem 14.1 (Problem der optimalen Steuerung)
Minimiere

$$J(x,u) = L_1(x(t_1))\,, \tag{14.1}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))\,, \quad x(0) = x_0\,, \tag{14.2}$$

$$u \in \mathcal{U}\,, \quad \mathcal{U} = \{u : u \in L^1(0, t_1; \mathbb{R}^m)\,,\, u(t) \in \Omega \text{ fast überall } \}\,. \tag{14.3}$$

Die Endzeit $t_1 > 0$ ist fest. Wir nehmen an, daß die Voraussetzungen in 2.3 erfüllt sind, und daß gilt

- f ist stetig in (t,x,u), stetig differenzierbar in x,
- L_1 ist stetig differenzierbar.

Bemerkung 14.2
Die meisten anwendungsrelevanten Kontrollprobleme haben eine Endbedingung der Form $\psi(x(t_1)) = 0$. Wir betrachten trotzdem zunächst den Fall ohne Endbedingung, da der Beweis der Maximumprinzips sich erheblich vereinfacht. Der Grund liegt darin, daß beim Schritt von 14.1 zum Maximumprinzip keine "zustandsinduzierten" Nebenbedingungen zu beachten sind (nur das Anfangswertproblem muß eindeutig lösbar sein).

Voraussetzung 14.3
Wir nehmen für den Rest dieses Abschnitts an, daß (x_*, u_*) eine Lösung von Problem 14.1 ist und daß u_* stückweise stetig ist.

Bemerkung 14.4 (Beweisstruktur; starke und schwache Variation)
Wir erhalten notwendige Optimalitätsbedingungen für die Lösung (x_*, u_*) des Kontrollproblems, indem wir die Ungleichung

$$0 \le \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon}(J(x_\varepsilon, u_\varepsilon) - J(x_*, u_*)) \tag{14.4}$$

auswerten. Hierbei ist u_ε eine geeignete "Variation" der optimalen Steuerung u_* und x_ε die zugehörige Zustandsfunktion. In der Variationsrechnung sind zwei Sorten von Variationen üblich:

Schwache Variation: Sei $\tilde{u} \in \mathcal{U}$, sei Ω konvex. Die durch

$$u_\varepsilon = u_* + \varepsilon(\tilde{u} - u_*)\,, \tag{14.5}$$

definierte Familie $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ bezeichnet man als schwache Variation.

Starke Variation: Sei $\tau \in [0, t_1)$, $\omega \in \Omega$. Die durch

$$u_\varepsilon(t) = u_\varepsilon^{\omega,\tau}(t) = \begin{cases} \omega\,, & t \in [\tau - \varepsilon, \tau) \\ u_*(t)\,, & \text{sonst} \end{cases} \tag{14.6}$$

definierte Familie $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ bezeichnet man als starke Variation.

Die Aussagen des Maximumprinzips erhält man, indem man (14.4) für die starke Variation untersucht.

Lemma 14.5 (Variation der Zustandsfunktion)
Sei $\tau \in (0, t_1)$, $\omega \in \Omega$, sei u_* stetig in τ. Dann gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$, so daß gilt:

(i) *Für alle $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ ist die starke Variation u_ε zulässig, d.h. es gibt eine eindeutige Lösung $x_\varepsilon : [0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ des Anfangswertproblems (14.2)).*

(ii) *Es gilt*

$$x_\varepsilon(t) = x_*(t) + \varepsilon y(t) + o(\varepsilon)\,, \qquad \text{für alle } t \in [\tau, t_1]\,, \tag{14.7}$$

wobei $y : [\tau, t_1] \to \mathbb{R}^n$ die Lösung der linearen Anfangswertaufgabe

$$\dot{y} = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_*(t), u_*(t))y\,, \quad y(\tau) = f(\tau, x_*(\tau), \omega) - f(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau))\,, \tag{14.8}$$

ist.

Beweis: Zu (i): Für hinreichend kleine ε ist die Integralgleichung

$$x_\varepsilon(t) = x_*(\tau - \varepsilon) + \int_{\tau-\varepsilon}^{t} f(s, x_\varepsilon(s), \omega)\, ds \tag{14.9}$$

eindeutig lösbar auf $[\tau - \varepsilon, \tau]$, sowie (nach dem Satz über die stetige Abhängigkeit der Lösung vom Anfangswert) auch

$$x_\varepsilon(t) = x_\varepsilon(\tau) + \int_{\tau}^{t} f(s, x_\varepsilon(s), u_*(s))\, ds\,, \quad t \in [\tau, t_1]\,. \tag{14.10}$$

Zu (ii): Zunächst gilt

$$\begin{aligned} x_\varepsilon(\tau) - x_*(\tau) - \varepsilon y(\tau) &= \\ &= \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau} f(s, x_\varepsilon(s), u_\varepsilon(s)) - f(s, x_*(s), u_*(s))\, ds - \varepsilon y(\tau) \\ &= \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau} f(s, x_\varepsilon(s), \omega) - f(\tau, x_*(\tau), \omega)\, ds \\ &\qquad - \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau} f(s, x_*(s), u_*(s)) - f(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau))\, ds \\ &= o(\varepsilon) + o(\varepsilon)\,, \end{aligned} \tag{14.11}$$

da

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sup_{\tau-\varepsilon \leq s \leq \tau} \| f(s, x_\varepsilon(s), \omega) - f(\tau, x_*(\tau), \omega) \| = 0\,, \tag{14.12}$$

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sup_{\tau-\varepsilon \leq s \leq \tau} \| f(s, x_*(s), u_*(s)) - f(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)) \| = 0\,. \tag{14.13}$$

Weiter gilt mit einer geeigneten Konstante C, daß

$$\| x_\varepsilon(t) - x_*(t) \| \leq C\varepsilon\,, \quad t \in [\tau, t_1]\,. \tag{14.14}$$

(Folgt für $t = \tau$ aus (14.9) und für $t > \tau$ aus der lipschitzstetigen Abhängigkeit vom Anfangswert.) Es folgt weiter für $t \in [\tau, t_1]$

$$\begin{aligned}
&[x_\varepsilon(t) - x_*(t) - \varepsilon y(t)] - [x_\varepsilon(\tau) - x_*(\tau) - \varepsilon y(\tau)] = \\
&\quad = \int_\tau^t f(s, x_\varepsilon(s), u_*(s)) - f(s, x_*(s), u_*(s)) - \varepsilon \frac{\partial f}{\partial x}(s, x_*(s), u_*(s)) y(s)\, ds \\
&\quad = \int_\tau^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, x_*(s), u_*(s))[x_\varepsilon(s) - x_*(s) - \varepsilon y(s)]\, ds + \int_\tau^t o(\underbrace{\|x_\varepsilon(s) - x_*(s)\|}_{\leq C\varepsilon})\, ds \\
&\quad = \int_\tau^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, x_*(s), u_*(s))[x_\varepsilon(s) - x_*(s) - \varepsilon y(s)]\, ds + o(\varepsilon)\,.
\end{aligned} \tag{14.15}$$

Aus (14.11) und dem Lemma von Gronwall, angewendet auf

$$z_\varepsilon(t) = x_\varepsilon(t) - x_*(t) - \varepsilon y(t)\,, \tag{14.16}$$

folgt nun $z_\varepsilon(t) = o(\varepsilon)$ und damit die Behauptung. □

Lemma 14.6 (Variation der Zielfunktion)
Sei $p : [0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ die Lösung der adjungierten Gleichung

$$\dot{p} = -\frac{\partial f}{\partial x}(t, x_*(t), u_*(t))^T p\,, \tag{14.17}$$

zum Endwert

$$p(t_1) = -L_1'(x_*(t_1))\,. \tag{14.18}$$

Unter den Voraussetzungen von Lemma 14.5 gilt dann

$$p(\tau)^T f(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)) \geq p(\tau)^T f(\tau, x_*(\tau), \omega))\,. \tag{14.19}$$

Beweis: Aus Lemma 14.5 folgt

$$\begin{aligned}
0 &\leq J(x_\varepsilon, u_\varepsilon) - J(x_*, u_*) = L_1(x_\varepsilon(t_1)) - L_1(x_*(t_1)) \\
&= L_1(x_*(t_1) + \varepsilon y(t_1) + o(\varepsilon)) - L_1(x_*(t_1))\,,
\end{aligned} \tag{14.20}$$

also

$$0 \leq \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon}(J(x_\varepsilon, u_\varepsilon) - J(x_*, u_*)) = L_1'(x_*(t_1))^T y(t_1)\,. \tag{14.21}$$

Es gilt weiter

$$\begin{aligned}
p(t_1)^T y(t_1) - p(\tau)^T y(\tau) &= \int_\tau^{t_1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(p(t)^T y(t))\, dt \\
&= \int_\tau^{t_1} \dot{p}(t)^T y(t) + p(t)^T \dot{y}(t)\, dt \\
&= \int_\tau^{t_1} -\dot{p}(t)^T \frac{\partial f}{\partial x}(t, \ldots) y(t) + p(t)^T \frac{\partial f}{\partial x}(t, \ldots) y(t)\, dt = 0\,.
\end{aligned} \tag{14.22}$$

Aus (14.21) folgt dann

$$\begin{aligned}
0 &\geq -L_1'(x_*(t_1))^T y(t_1) = p(\tau)^T y(\tau) \\
&= p(\tau)^T [f(\tau, x_*(\tau), \omega) - f(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau))]\,,
\end{aligned} \tag{14.23}$$

was zu beweisen war. □

Satz 14.7 (Maximumprinzip)
Sei (x_*, u_*) Lösung von Problem 14.1, sei u_* stückweise stetig. Sei

$$H(t,x,u,p) = p^T f(t,x,u) \tag{14.24}$$

die zugeordnete Hamiltonfunktion. Sei $p : [0,t_1] \to \mathbb{R}^n$ die Lösung der adjungierten Gleichung

$$\dot p = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x_*(t), u_*(t), p) = -\frac{\partial f}{\partial x}(t, x_*(t), u_*(t))^T p\,, \tag{14.25}$$

zum Endwert

$$p(t_1) = -L_1'(x_*(t_1))\,. \tag{14.26}$$

Dann gilt die Maximumbedingung

$$H(t, x_*(t), u_*(t), p(t)) = \max_{\omega\in\Omega} H(t, x_*(t), \omega, p(t)) \tag{14.27}$$

für alle $t \in [0,t_1]$, und die Funktion

$$t \mapsto H(t, x_*(t), u_*(t), p(t)) \tag{14.28}$$

ist stetig auf $[0,t_1]$. Ist außerdem f stetig differenzierbar in t, so gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} H = \frac{\partial H}{\partial t}\,, \tag{14.29}$$

d.h.

$$H(t, x_*(t), u_*(t), p(t)) = H(0, x_*(0), u_*(0), p(0)) + \int_0^t \frac{\partial H}{\partial t}(s, x_*(s), u_*(s), p(s))\, ds \tag{14.30}$$

für alle $t \in [0,t_1]$. Insbesondere ist

$$t \mapsto H(t, x_*(t), u_*(t), p(t)) \tag{14.31}$$

konstant, falls Problem 14.1 autonom ist, d.h. falls f nicht explizit von t abhängt.

Beweis: Wir können o.B.d.A. annehmen, daß Ω kompakt ist (andernfalls betrachten wir zunächst

$$\Omega_\omega = \{\omega\} \cup \overline{\{u_*(t) : t \in [0,t_1]\}} \tag{14.32}$$

und beachten, daß $\Omega \subset \cup_{\omega\in\Omega}\Omega_\omega$.) Für Stetigkeitspunkte $t = \tau$ von u_* folgt die Maximumbedingung aus Lemma 14.6, da p weder von ω noch von τ abhängt. Wir setzen

$$h(t,\omega) = H(t, x_*(t), \omega, p(t))\,. \tag{14.33}$$

Die Funktion $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ ist dann stetig, also auch

$$\tilde h(t) = \max_{\omega\in\Omega} h(t,\omega)\,, \tag{14.34}$$

also ist (14.28) stetig und die Maximumbedingung gilt in allen Punkten. Sei nun auch $\partial f/\partial t$ definiert und stetig. Dann ist auch $\partial h/\partial t$ definiert und in den Stetigkeitsintervallen von u_* stetig, und

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial t}(t, u_*(t)) &= \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial x}\dot x + \frac{\partial H}{\partial p}\dot p \\ &= \frac{\partial H}{\partial t}(t, x_*(t), u_*(t), p(t))\,. \end{aligned} \tag{14.35}$$

Seien t_i, $1 \leq i \leq N$, die Sprungstellen von u_*. Für $s, t \in (t_i, t_{i+1})$ mit $s < t$ folgt aus der Maximumbedingung, daß

$$h(t, u_*(s)) - h(s, u_*(s)) \leq h(t, u_*(t)) - h(s, u_*(s)) \leq h(t, u_*(t)) - h(s, u_*(t)) \,. \qquad (14.36)$$

Division durch $t - s$ und Grenzübergang $s \to t$ ergibt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} h(t, u_*(t)) = \frac{\partial h}{\partial t}(t, u_*(t)) \,, \quad t \in (t_i, t_{i+1}) \,, \qquad (14.37)$$

da

$$\frac{h(t, u_*(s)) - h(s, u_*(s))}{t - s} - \frac{\partial h}{\partial t}(t, u_*(t)) = \frac{1}{t - s} \int_s^t \frac{\partial h}{\partial t}(\sigma, u_*(s)) - \frac{\partial h}{\partial t}(t, u_*(t)) \, d\sigma \,, \quad (14.38)$$

und Zusammensetzen der Intervalle liefert die restlichen Behauptungen. □

15 Maximumprinzip (allgemeiner Fall)

Problem 15.1 (Problem der optimalen Steuerung)
Minimiere

$$J(x,u,t_1) = \int_0^{t_1} L(t,x(t),u(t))\,dt + L_1(t_1,x(t_1))\,, \tag{15.1}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\dot{x}(t) = f(t,x(t),u(t))\,, \quad x(0) = x_0\,, \tag{15.2}$$

$$\psi(t_1,x(t_1)) = 0\,, \quad \psi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^p\,, \tag{15.3}$$

$$u(t) \in \Omega \;\text{ fast überall }\;. \tag{15.4}$$

Die Endzeit $t_1 > 0$ ist frei. Wir nehmen an, daß die Voraussetzungen in 2.3 erfüllt sind, und daß gilt

- L, f sind stetig in (t,x,u), stetig differenzierbar in t,x,
- L_1, ψ sind stetig differenzierbar.

Satz 15.2 (Maximumprinzip)
Sei (x_*, u_*, t_{1*}) Lösung von Problem 15.1, sei $u_* \in L^\infty(0,t_{1*};\mathbb{R}^m)$. Sei

$$H(t,x,u,p) = p^T f(t,x,u) - \lambda L(t,x,u) \tag{15.5}$$

die zugeordnete Hamiltonfunktion. Dann gibt es $\lambda \ge 0$, $\mu \in \mathbb{R}^p$, $p : [0,t_{1*}] \to \mathbb{R}^n$ mit $(\lambda,\mu,p) \ne (0,0,0)$, so daß p die adjungierte Gleichung

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}(t,x_*(t),u_*(t),p) = -\frac{\partial f}{\partial x}(t,x_*(t),u_*(t))^T p + \lambda \frac{\partial L}{\partial x}(t,x_*(t),u_*(t))\,, \tag{15.6}$$

zum Endwert

$$p(t_{1*}) = -\lambda \frac{\partial L_1}{\partial x}(t_{1*},x_*(t_{1*})) + \frac{\partial \psi}{\partial x}(t_{1*},x_*(t_{1*}))^T \mu\,, \tag{15.7}$$

löst, und außerdem die Maximumbedingung

$$H(t,x_*(t),u_*(t),p(t)) = \max_{\omega \in \Omega} H(t,x_*(t),\omega,p(t)) \tag{15.8}$$

fast überall in $[0,t_{1*}]$ gilt, sowie die Gleichung

$$\begin{aligned} H(t,x_*(t),u_*(t),p(t)) &= -\int_t^{t_{1*}} \frac{\partial H}{\partial t}(s,x_*(s),u_*(s),p(s))\,ds \\ &+ \lambda \frac{\partial L_1}{\partial t}(t_{1*},x_*(t_{1*})) - \frac{\partial \psi}{\partial t}(t_{1*},x_*(t_{1*}))^T \mu\,, \end{aligned} \tag{15.9}$$

für alle $t \in [0,t_{1*}]$. Insbesondere ist

$$t \mapsto H(t,x_*(t),u_*(t),p(t)) \tag{15.10}$$

konstant, falls f und L nicht explizit von t abhängen.

Beweis: Später. □

Bemerkung 15.3
Soll die Endzeit den festen Wert $t_1 = T$ haben, so erreichen wir das am einfachsten, indem wir die Endbedingung um eine Komponente auf

$$\psi_{p+1}(t_1, \xi) = t_1 - T = 0 \tag{15.11}$$

vergrößern. Wenden wir Satz 15.2 auf das vergrößerte Problem an, so bleiben die Aussagen von 15.2 wörtlich gültig bis auf (15.9), welche die Form

$$\begin{aligned} H(t, x_*(t), u_*(t), p(t)) &= -\int_t^{t_1} \frac{\partial H}{\partial t}(s, x_*(s), u_*(s), p(s))\, ds \\ &+ \lambda \frac{\partial L_1}{\partial t}(t_1, x_*(t_1)) - \frac{\partial \psi}{\partial t}(t_1, x_*(t_1))^T \mu + \nu\,, \end{aligned} \tag{15.12}$$

mit einer zusätzlichen Unbekannten $\nu \in \mathbb{R}$ annimmt. Entsprechend lautet die Nichttrivialitätsbedingung dann

$$(\lambda, \mu, p, \nu) \neq (0, 0, 0, 0)\,. \tag{15.13}$$

16 Optimale singuläre Steuerungen

Problem 16.1 (Problem der optimalen Steuerung)
Minimiere

$$J(x, u, t_1) = \int_0^{t_1} L(t, x(t), u(t))\, dt + L_1(t_1, x(t_1))\,, \tag{16.1}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))\,, \quad x(0) = x_0\,, \tag{16.2}$$

$$\psi(t_1, x(t_1)) = 0\,, \quad \psi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^p\,, \tag{16.3}$$

$$u(t) \in \Omega \ \text{ fast überall } \ . \tag{16.4}$$

Die Endzeit $t_1 > 0$ ist frei. Wir nehmen an, daß die Voraussetzungen in 2.3 erfüllt sind, daß L und f affin linear in u sind, d.h.

$$L(t, x, u) = L_0(t, x) + L_2(t, x)u\,, \quad f(t, x, u) = f_0(t, x) + f_2(t, x)u\,, \tag{16.5}$$

und daß die Funktionen $L_0, L_1, L_2, f_0, f_2, \psi$ hinreichend glatt sind.

Bemerkung 16.2
Die Hamiltonfunktion für Problem 16.1 hat die Form

$$\begin{aligned} H &= p^T f_0(t, x) + p^T f_2(t, x)u - \lambda(L_0(t, x) + L_2(t, x)u) \\ &= (p^T f_2(t, x) - \lambda L_2(t, x))u + p^T f_0(t, x) - \lambda L_0(t, x) \end{aligned} \tag{16.6}$$

also erhalten wir die Schaltfunktion

$$S(t) = p(t)^T f_2(t, x(t)) - \lambda L_2(t, x(t))\,. \tag{16.7}$$

Definition 16.3 (Singuläre Steuerung)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ kompaktes konvexes Polyeder, sei u_* optimale Steuerung für Problem 16.1. u_* heißt singulär im Intervall $[\tau_1, \tau_2] \subset [0, t_{1*}]$, falls für alle $t \in [\tau_1, \tau_2]$ gilt: Die Maximierungsaufgabe

$$\max_{\omega \in \Omega} H(t, x_*(t), \omega, p(t)) \tag{16.8}$$

hat mehrere Lösungen, d.h. die Schaltfunktion $S(t)$ steht senkrecht auf einer Kante von Ω, in der das Maximum angenommen wird.

Bemerkung 16.4
Im Fall $m = 1$, $\Omega = [u_{min}, u_{max}]$ bedeutet dies:

$$S(t) = 0\,, \quad t \in [\tau_1, \tau_2]\,. \tag{16.9}$$

Beispiel 16.5
Minimiere

$$J(x, u) = \frac{1}{2} \int_0^3 x(t)^2\, dt\,, \tag{16.10}$$

wobei

$$\dot{x} = u\,, \quad x(0) = x(3) = 1\,, \quad u(t) \in \Omega = [-1, 1]\,. \tag{16.11}$$

Die Lösung ist offenbar

$$u_*(t) = \begin{cases} -1\,, & t < 1\,, \\ 0\,, & 1 \le t < 2\,, \\ 1\,, & t > 2\,, \end{cases}\,, \quad x_*(t) = \begin{cases} 1-t\,, & t < 1\,, \\ 0\,, & 1 \le t < 2\,, \\ t-2\,, & t > 2\,, \end{cases} \tag{16.12}$$

da für jede andere Steuerung der Graph der zugehörigen Zustandsfunktion oberhalb des Graphs von x_* liegt. Wir leiten (16.12) aus dem Maximumprinzip her. Es ist

$$H = up - \frac{\lambda}{2}x^2\,, \quad S = p\,, \quad u = \begin{cases} 1\,, & p > 0\,, \\ -1\,, & p < 0\,, \end{cases}\,, \tag{16.13}$$

$$\dot{p} = \lambda x\,, \quad p(3) = \mu\,. \tag{16.14}$$

Wir zeigen $\lambda > 0$, indem wir zeigen, daß $\lambda = 0$ schon $\mu = \nu = p = 0$ impliziert: Zunächst gilt

$$\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad p(t) = \mu\,, \tag{16.15}$$

Der Fall $\mu \neq 0$ kann nicht auftreten, da dann u konstant gleich 1 oder -1 ist im Widerspruch zu $x(0) = x(3) = 1$. Weiter gilt

$$\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad p = 0 \quad \Rightarrow \quad H = 0 \quad \Rightarrow \quad \nu = 0\,. \tag{16.16}$$

Also ist $\lambda \neq 0$, also o.B.d.A. $\lambda = 1$. p hat mindestens eine Nullstelle in $[0,3]$ (sonst wieder $u = 1$ oder $u = -1$). Sei τ_1 die kleinste und τ_2 die größte Nullstelle. Weiter gilt: Ist $p(t) \neq 0$, $\dot{p}(t) = 0$ für ein $t \in [0,3]$, so hat p keine Nullstelle in $[t,3]$, da

$$\ddot{p} = \operatorname{sign}(p(t))\,, \qquad \text{in } \{s : p(s) \neq 0\}\,. \tag{16.17}$$

Es ist daher

$$\max_{t \in [\tau_1,\tau_2]} p(t) = \min_{t \in [\tau_1,\tau_2]} p(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad p = 0 \text{ in } [\tau_1,\tau_2]\,. \tag{16.18}$$

Für $t < \tau_1$ gilt $p(t) < 0$, da andernfalls wegen $\dot{p}(0) > 0$ die Adjungierte p ein Maximum in $(0,\tau_1)$ hat im Widerspruch zu (16.17). Ebenso folgt aus (16.17), daß $\dot{p} > 0$ in $[0,\tau_1)$, also auch $x > 0$ in $[0,\tau_1)$. Der Fall $\tau_1 = \tau_2$ kann nicht vorkommen, da dann die Bedingung $x(0) = x(3) = 1$ nur für $\tau_1 = \tau_2 = \frac{3}{2}$ erfüllbar wäre, was aber $x(\tau_1) = -\frac{1}{2}$ im Widerspruch zu $x > 0$ in $[0,\tau_1)$ nach sich ziehen würde. Also ist $\tau_1 < \tau_2$. Wegen $S = p = 0$ in $[\tau_1,\tau_2]$ berechnet sich die optimale singuläre Steuerung aus

$$0 = \dot{S} = \dot{p} = x\,, \qquad \text{in } [\tau_1,\tau_2]\,, \tag{16.19}$$

$$0 = \ddot{S} = \dot{x} = u\,, \qquad \text{in } [\tau_1,\tau_2]\,. \tag{16.20}$$

Wegen $\dot{p}(\tau_2) = 0$, $\dot{p}(3) > 0$ folgt dann wegen (16.17) auch $p > 0$ in $(\tau_2, 3]$. Aus $x(\tau_1) = x(\tau_2) = 0$ folgt $\tau_1 = 1$, $\tau_2 = 2$.

Beispiel 16.6 (Optimale Ausbildungspolitik)
Maximiere

$$\int_0^T (1-u(t))w(x(t))e^{(k-r)t}\,dt\,, \tag{16.21}$$

wobei

$$\dot{x} = -sx + u\,, \quad x(0) = 0\,, \tag{16.22}$$

$$0 \leq u(t) \leq 1\,. \tag{16.23}$$

Die Endzeit t_1 hat den festen Wert $t_1 = T$. Es bedeuten

$$x = x(t) \qquad \text{Ausbildungsgrad}\ , \tag{16.24}$$

$$u = u(t) \qquad \text{auf Ausbildung verwendeter Zeitanteil}\ , \tag{16.25}$$

$$\varphi(t) = w(x(t))e^{kt} \qquad \text{Leistungsfähigkeit}\ , \tag{16.26}$$

$$s \qquad \text{Entwertungsfaktor der Ausbildung}\ , \tag{16.27}$$

$$k \qquad \text{Erfahrungsfaktor}\ , \tag{16.28}$$

$$r \qquad \text{Zinsfuß}\ . \tag{16.29}$$

Die Zielfunktion repräsentiert das Gesamtarbeitseinkommen. Anwendung des Maximumprinzips liefert die Hamiltonfunktion

$$H = p(-sx + u) + \lambda(1-u)w(x)e^{(k-r)t}\,, \tag{16.30}$$

die Schaltfunktion

$$S = p - \lambda w(x)e^{(k-r)t}\,, \tag{16.31}$$

die adjungierte Gleichung

$$\dot{p} = sp - \lambda(1-u)w'(x)e^{(k-r)t}\,, \quad p(T) = 0\,, \tag{16.32}$$

und die Maximumbedingung

$$u = \begin{cases} 1\,, & S > 0\,, \\ 0\,, & S < 0\,. \end{cases} \tag{16.33}$$

Zunächst ist $\lambda > 0$ (andernfalls $\lambda = p = 0$), also o.B.d.A. $\lambda = 1$. Es gilt (Monotoniear-gument für die Zustandsgleichung)

$$0 \leq x(t) < \frac{1}{s}\,, \quad t \in [0,T]\,. \tag{16.34}$$

Wir berechnen den Ausdruck für eine optimale singuläre Steuerung. Sei $S(t) = 0$ auf einem Intervall $I = [\tau_1, \tau_2]$. Dann gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{S}(t) = e^{(k-r)t}[w'(x)(sx-1) - w(x)(k-r)] + sp \\ &= sS(t) + e^{(k-r)t}[w'(x)(sx-1) - w(x)(k-r-s)]\,, \end{aligned} \tag{16.35}$$

also

$$w'(x)(sx-1) - w(x)(k-r-s) = 0\,, \qquad \text{in } I\,. \tag{16.36}$$

Wir nehmen nun an, daß folgende Zusatzvoraussetzungen für alle $x \geq 0$ erfüllt sind:

$$r + s - k > 0\,, \quad w(x) > 0\,, \quad w'(x) > 0\,, \tag{16.37}$$

$$\frac{w'(x)}{w(x)} \qquad \text{streng monoton fallend}\ , \tag{16.38}$$

dann folgt für eine optimale singuläre Steuerung

$$\frac{w'(x)}{w(x)} = \frac{r+s-k}{1-sx}\,, \tag{16.39}$$

und diese Gleichung hat höchstens eine Lösung $\bar{x} \in [0, 1/s)$. Eine optimale singuläre Steuerung muß also im singulären Intervall I den Zustand konstant halten,

$$x(t) = \bar{x}\,, \quad t \in I\,, \tag{16.40}$$

also muß

$$u(t) = s\bar{x}\,, \quad t \in I\,, \tag{16.41}$$

gelten. Eine genauere Analyse liefert, daß man unter gewissen Voraussetzungen an die Parameter eine Lösung des Kontrollproblems der Struktur

$$u(t) = \begin{cases} 1\,, & t < \tau_1\,, \\ s\bar{x}\,, & \tau_1 \le t < \tau_2\,, \\ 0\,, & t \ge \tau_2\,, \end{cases} \tag{16.42}$$

erhält.

Beispiel 16.7 (Höhenrakete)
Wir betrachten

$$\text{Maximiere } h(t_1)\,, \tag{16.43}$$

wobei

$$\dot{h} = v\,, \quad h(0) = 0\,, \tag{16.44}$$

$$\dot{m} = -\frac{1}{v_0} \cdot F\,, \quad m(0) = m_0\,, \tag{16.45}$$

$$\dot{v} = \frac{1}{m}(F - D(v,h)) - g(h)\,, \quad v(0) = 0\,. \tag{16.46}$$

Der Schub (= die Kontrolle) ist eingeschränkt durch

$$0 \le F \le F_{max}\,. \tag{16.47}$$

Es soll die Randbedingung

$$m(t_1) = m_T\,, \tag{16.48}$$

erfüllt sein. Wir bezeichnen die adjungierte Variable mit

$$p = \begin{pmatrix} p_h \\ p_v \\ p_m \end{pmatrix}. \tag{16.49}$$

Es ist dann

$$H = p_h v - p_m \frac{F}{v_0} + p_v \left(\frac{1}{m}(F - D(v,h)) - g(h) \right)\,, \tag{16.50}$$

$$\psi(t_1, h, m, v) = m - m_T\,, \quad L_1(t_1, h, m, v) = -h\,, \quad L = 0\,. \tag{16.51}$$

Die adjungierten Gleichungen sind

$$\dot{p}_h = \left(\frac{1}{m}\frac{\partial D}{\partial h}(v,h) + g'(h)\right) p_v\,, \quad p_h(t_1) = \lambda\,, \tag{16.52}$$

$$\dot{p}_m = \frac{1}{m^2}(F - D(v,h))p_v\,, \quad p_m(t_1) = \mu\,, \tag{16.53}$$

$$\dot{p}_v = -p_h + \frac{1}{m}\frac{\partial D}{\partial v}(v,h)p_v\,, \quad p_v(t_1) = 0\,. \tag{16.54}$$

Das Maximumprinzip liefert

$$F(t) = \begin{cases} F_{max}\,, & S(t) > 0\,, \\ 0\,, & S(t) < 0\,, \end{cases} \tag{16.55}$$

mit der Schaltfunktion

$$S(t) = \frac{1}{m(t)}p_v(t) - \frac{1}{v_0}p_m(t)\,. \tag{16.56}$$

Auf einem singulären Intervall $I = [\tau_1, \tau_2]$ muß gelten

$$S(t) = 0\,, \quad t \in I\,, \tag{16.57}$$

also auch

$$\begin{aligned} 0 = \dot{S} &= -\frac{1}{m}p_h + \frac{1}{m^2}\left(\frac{\partial D}{\partial v} + \frac{D}{v_0}\right)p_v \\ &= \frac{1}{vm^2}\left(v\frac{\partial D}{\partial v} + \frac{vD}{v_0} - D - mg\right)p_v\,, \end{aligned} \tag{16.58}$$

was wir aus der Bedingung $S = 0$ und $H = 0$ (alle partiellen Ableitungen nach der Zeit sind 0!) erhalten. Leider enthält der Ausdruck für $\dot{S}$ die Kontrolle F nicht (das ist kein Zufall), so daß wir zur Berechnung der optimalen singulären Steuerung die zweite Ableitung der Schaltfunktion bilden müssen. Direktes Ableiten führt zu unübersichtlichen Ausdrücken. Im Spezialfall

$$\frac{\partial D}{\partial h} \le 0\,, \quad g' = 0\,, \qquad \text{für alle Argumente}\quad, \tag{16.59}$$

kann man zeigen, daß der Ausdruck

$$E = v\frac{\partial D}{\partial v} + \frac{vD}{v_0} - D - mg \tag{16.60}$$

im singulären Intervall Null sein muß. Dies erhält man wie folgt. Wir behaupten zunächst, daß $\lambda \neq 0$ gelten muß. Wäre nämlich $\lambda = 0$, so wäre $p_h = p_v = 0$, also $p_m(t) = \mu \neq 0$, da $(\lambda, \mu, p) \neq 0$. Es wäre also F identisch gleich F_{max} oder identisch gleich 0, was in der Regel keine Lösung des Problems liefert. Also ist $\lambda \neq 0$. Wir behaupten als nächstes, daß $p_v(t) > 0$ gilt für alle $t < t_1$. Wäre dem nicht so, so gäbe es wegen

$$p_v(t_1) = 0\,, \quad \dot{p}_v(t_1) = -\lambda < 0\,, \tag{16.61}$$

ein $\hat{t} < t_1$ mit $p_v(\hat{t}) = 0$ und $p_v > 0$ in $(\hat{t}, t_1)$. Es folgt dann

$$\dot{p}_h \leq 0 \text{ in } (\hat{t}, t_1)\,, \quad p_h \geq p_h(t_1) > 0 \text{ in } (\hat{t}, t_1)\,. \tag{16.62}$$

Also erhielten wir

$$p_v(\hat{t}) = 0\,, \quad p_h(\hat{t}) > 0\,, \quad \dot{p}_v(\hat{t}) < 0\,, \tag{16.63}$$

im Widerspruch zu $p_v > 0$ in $(\hat{t}, t_1)$. Also ist $p_v > 0$ in $[0, t_1)$. Aus (16.58) folgt nun, daß

$$0 = E = v\frac{\partial D}{\partial v} + \frac{vD}{v_0} - D - mg \tag{16.64}$$

im singulären Intervall I gilt. Differenzieren nach t und Einsetzen der Differentialgleichung ergibt

$$0 = \left[\frac{1}{m}(F - D) - g\right]\left(v\frac{\partial^2 D}{\partial v^2} + \frac{D}{v_0} + \frac{v}{v_0}\frac{\partial D}{\partial v}\right) + v^2\frac{\partial^2 D}{\partial v \partial h} + \frac{v^2}{v_0}\frac{\partial D}{\partial h} - v\frac{\partial D}{\partial h} + \frac{g}{v_0}F\,, \tag{16.65}$$

was, nach F aufgelöst, eine Formel für die optimale singuläre Steuerung in Rückkopplungsform (d.h. ohne adjungierte Terme) ergibt.

Bemerkung 16.8
Die vorangehenden Rechnungen zeigen, daß selbst bei nicht besonders komplizierten Beispielen eine Auswertung des Maximumprinzips von Hand aufwendig (wenn nicht unmöglich) ist. Diese Aufgabe sollte zumindest teilweise vom Rechner übernommen werden (Formelmanipulation). Hierzu gibt es Ansätze.