

Propädeutikum Mathematische Modellbildung ^{*}

Martin Brokate [†]

Inhaltsverzeichnis

1	Dimensionsanalyse, Skalierung	2
2	Asymptotische Entwicklung	9
3	Mehrere Skalen	17
4	Modelle im Kontinuum	26
5	Verkehrsflussmodelle	44

^{*}Skript, SS 2012

[†]Zentrum Mathematik, TU München

1 Dimensionsanalyse, Skalierung

In einem mathematischen Modell einer realen (oder vorgestellten) Situation werden Größen und Beziehungen zwischen ihnen auf mathematische Größen und Operationen übertragen.

Ziel der Dimensionsanalyse im Zusammenhang mit Skalierung ist es, die Anzahl der Größen (Parameter und Variablen) eines Modells zu verringern und zur Vereinfachung des Modells beizutragen, indem kleine (und damit möglicherweise vernachlässigbare) Größen identifiziert werden.

Dimensionsanalyse. Mathematische Modelle stellen formale mathematische Zusammenhänge zwischen Größen her. Beispiele:

1. Ein Gegenstand, der sich während einer Zeitdauer t mit konstanter Geschwindigkeit v bewegt, legt den Weg $s = vt$ zurück.
2. Der aktuelle Gesamtwert W eines Wertpapierdepots, bestehend aus I verschiedenen Sorten, ergibt sich als

$$W = \sum_{i=1}^I n_i w_i,$$

wobei w_i der Kurswert eines einzelnen Papiers der i -ten Sorte und n_i die Stückzahl der im Depot befindlichen Papiere der jeweiligen Sorte darstellt.

Es wird unterstellt, dass jede auftretende Größe eine **Dimension** hat, und dass Größen gleicher Dimension sich als Vielfaches einer ausgezeichneten Größe dieser Dimension, einer sogenannten **Einheit**, darstellen lassen. Beispiele oben:

1. Der Weg s hat die Dimension \mathcal{L} einer Länge, mögliche Einheiten sind Meter (m), Zentimeter (cm). Die Zeitdauer t hat die Dimension \mathcal{T} einer Zeit, mögliche Einheiten sind Sekunde (s), Stunde (h). Die Geschwindigkeit v hat die zusammengesetzte Dimension $\mathcal{L}\mathcal{T}^{-1}$, die Einheit entsteht durch entsprechende Kombination, z.B. m/s, km/h.
2. Der Gesamtwert W hat die Dimension \mathcal{G} von Geld, die Stückzahlen n_i haben die Dimension der Sorte \mathcal{W}_i , die einzelnen Kurswerte w_i haben die Dimension $\mathcal{G}\mathcal{W}_i^{-1}$.

Durch eine **Messung** bestimmt man den Zahlenwert einer Größe als Vielfaches der Einheit. Durch Wechsel zu einer anderen Einheit ändern sich die Zahlenwerte. Es wird weiter unterstellt, dass sich die Quotienten der Zahlenwerte zweier Größen nicht ändern, wenn die zugehörige Einheit geändert wird. (Dass ein Depot doppelt so viel wert ist wie ein anderes, ist unabhängig davon, ob man in Euro oder Kiloeuro misst.) Das setzt allerdings voraus, dass die beiden Einheiten "linear ineinander übergehen" und insbesondere denselben Nullpunkt haben - es stimmt also z.B. nicht, wenn man Celsius in Fahrenheit umrechnet.

Nur Größen gleicher Dimension können addiert, subtrahiert oder verglichen werden. Bei vielen Einheiten geht das problemlos: 3 Stäbe der Länge 1m, nebeneinandergelegt, ergeben eine Gesamtlänge von $1\text{m} + 1\text{m} + 1\text{m} = 3\text{m}$. Aber misst man die "Schallstärke"

zweier Schallquellen in Dezibel, so ist die Gesamtschallstärke nicht gleich der Summe der einzelnen Schallstärken in Dezibel, da die Dezibelskala logarithmisch ist.

Bei Multiplikation und Division werden die Dimensionen entsprechend multipliziert bzw. dividiert. Beispiel: Im Hookeschen Gesetz $F = -kx$ für eine ausgelenkte elastische Feder (F Kraft, x Auslenkung, k Federkonstante) haben beide Seiten die Dimension einer Kraft, k hat die Dimension Kraft geteilt durch Länge.

Dieselbe reale Situation kann auf unterschiedliche mathematische Weise modelliert werden. Man erwartet, dass relevante Aussagen über die Situation nicht davon abhängen, wie die Einheiten der jeweiligen Dimensionen gewählt werden (modulo entsprechender Transformation von Zahlenwerten). Es ist daher naheliegend zu versuchen, das mathematische Modell auf eine dimensionslose Form zu bringen. Dieser Vorgang heißt **Entdimensionalisierung**.

Beispiel 1.1 Ein Körper konstanter Masse m steigt antriebslos von der Erdoberfläche mit einer Anfangsgeschwindigkeit V senkrecht nach oben. Zum Zeitpunkt t^* hat er die Höhe $x^*(t^*)$ über der Erdoberfläche. Auf ihn wirkt die Schwerkraft

$$F = -\gamma \frac{m \cdot m_E}{(x^*(t^*) + R)^2},$$

mit der Gravitationskonstante γ und dem Erdradius R . Mit der Erdbeschleunigung $g = (\gamma m_E)/R^2$ erhalten wir aus dem Newtonschen Gesetz $F = m\ddot{x}^*$ (zweite Ableitung nach t^*)

$$\ddot{x}^* = -\frac{gR^2}{(x^* + R)^2}, \quad (1.1)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$x^*(0) = 0, \quad \dot{x}^*(0) = V. \quad (1.2)$$

Der Luftwiderstand wird in diesem Modell nicht berücksichtigt. Gesucht wird der Zeitpunkt t_M^* , zu dem der Körper die maximale Höhe erreicht. Da das Anfangswertproblem zu gegebenen Parameterwerten V, g, R eindeutig lösbar ist (Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen), ergibt sich

$$t_M^* = f^*(V, g, R) \quad (1.3)$$

mit einer zunächst unbekanntem Funktion f^* .

Zur Entdimensionalisierung der Variablen x^* und t^* betrachten wir **intrinsische Referenzgrößen**, nämlich eine Referenzlänge L für x^* (Dimension \mathcal{L}) und eine Referenzzeit T für t^* (Dimension \mathcal{T}), und definieren die neuen dimensionslosen Variablen

$$x = \frac{x^*}{L}, \quad t = \frac{t^*}{T}, \quad (1.4)$$

damit ist gemeint

$$x(t) = \frac{1}{L} x^*(Tt). \quad (1.5)$$

Aus der Kettenregel folgt

$$\dot{x}(t) = \frac{T}{L} \dot{x}^*(Tt), \quad \ddot{x}(t) = \frac{T^2}{L} \ddot{x}^*(Tt). \quad (1.6)$$

Einsetzen von (1.1) führt auf

$$\ddot{x}(t) = -\frac{T^2}{L} \frac{gR^2}{(Lx(t) + R)^2}, \quad (1.7)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = \frac{T}{L} \dot{x}^*(0) = \frac{TV}{L}. \quad (1.8)$$

Je nach Wahl von L und T erhalten wir unterschiedliche Formen des entdimensionalisierten Modells.

Variante 1: Wir wählen

$$L = R, \quad T = \frac{R}{V}. \quad (1.9)$$

Es ergibt sich

$$\ddot{x} = -\frac{R^2}{RV^2} \frac{gR^2}{(Rx + R)^2} = -\frac{gR}{V^2} \frac{1}{(x + 1)^2}, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1. \quad (1.10)$$

Dieses Modell enthält nur noch einen einzigen freien Parameter,

$$\varepsilon = \frac{V^2}{gR}, \quad (1.11)$$

der zudem dimensionslos ist, seine Dimension errechnet sich als

$$(\mathcal{L}\mathcal{T}^{-1})^2(\mathcal{L}\mathcal{T}^{-2}\mathcal{L})^{-1} = \mathcal{L}^0\mathcal{T}^0.$$

Das Anfangswertproblem zur Parameterwahl (1.9) lautet nun

$$\varepsilon\ddot{x} = -\frac{1}{(x + 1)^2}, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1. \quad (1.12)$$

Seine Lösung ist eine Funktion “ $x = x(t, \varepsilon)$ ”, an ihren Eigenschaften lassen sich nach Rücktransformation gemäß (1.5) alle Eigenschaften von x^* ablesen. Insbesondere kann die Zeit t_M , zu der die Maximalhöhe erreicht wird, nur von ε abhängen, also

$$t_M = f(\varepsilon), \quad (1.13)$$

mit einer geeigneten (zunächst unbekanntnen) Funktion f . Es ergibt sich für das ursprüngliche Modell

$$t_M^* = Tt_M = \frac{R}{V}f(\varepsilon) = \frac{R}{V}f\left(\frac{V^2}{gR}\right). \quad (1.14)$$

Die Entdimensionalisierung hat also dazu geführt, die Komplexität der Abhängigkeit $t_M^* = f^*(V, g, R)$ aus (1.3) auf die Form (1.14) zu reduzieren, f hängt nur noch vom dimensionslosen Parameter ε ab.

Variante 2: Wir wählen (g hat Dimension $\mathcal{L}\mathcal{T}^{-2}$)

$$L = R, \quad T = \sqrt{\frac{R}{g}}. \quad (1.15)$$

Einsetzen in (1.7) und (1.8) führt auf das Anfangswertproblem

$$\ddot{x} = -\frac{1}{(x+1)^2}, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = \sqrt{\varepsilon}, \quad (1.16)$$

mit dem dimensionslosen Parameter $\varepsilon = V^2/gR$ wie oben. Das qualitative Ergebnis ist dasselbe: Es folgt $t_M = h(\varepsilon)$ mit einer geeigneten Funktion h , und

$$t_M^* = T t_M = \sqrt{\frac{R}{g}} h\left(\frac{V^2}{gR}\right). \quad (1.17)$$

Ein Vergleich mit (1.14) ergibt

$$\frac{R}{V} f(\varepsilon) = \sqrt{\frac{R}{g}} h(\varepsilon) = \frac{R}{V} \sqrt{\varepsilon} h(\varepsilon), \quad (1.18)$$

also $f(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon} h(\varepsilon)$. Unter dem Gesichtspunkt Dimensionsanalyse sind beide Varianten also gleichwertig. Unter dem (weiter unten besprochenen) Gesichtspunkt Skalierung trifft das nicht mehr zu.

Wir stellen jetzt dar, wie man die Varianten des entdimensionalisierten Problems systematisch erhält. Die Aufgabe ist,

- alle möglichen dimensionslosen Größen,
- und alle möglichen Referenzgrößen

als Produkte von Potenzen der Problemparameter darzustellen.

1. Festlegung der Grundeinheiten: Länge \mathcal{L} , Masse \mathcal{M} , Zeit \mathcal{T} .
2. Liste der Variablen und Parameter mit ihren Einheiten:

Variable	Dimension
x^*	\mathcal{L}
t^*	\mathcal{T}

Parameter	Dimension
V	$\mathcal{L}\mathcal{T}^{-1}$
g	$\mathcal{L}\mathcal{T}^{-2}$
R	\mathcal{L}

Die Masse kommt in diesem Beispiel nicht vor.

3. Bestimmung von dimensionslosen Größen π : Ansatz

$$\pi = V^{\alpha_1} g^{\alpha_2} R^{\alpha_3}. \quad (1.19)$$

Einsetzen der Dimensionen in die rechte Seite

$$(\mathcal{L}\mathcal{T}^{-1})^{\alpha_1} (\mathcal{L}\mathcal{T}^{-2})^{\alpha_2} \mathcal{L}^{\alpha_3} \quad (1.20)$$

Dieser Ausdruck muss dimensionslos sein, die Exponenten aller Grundeinheiten müssen also Null werden

$$\begin{aligned}\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_1 - 2\alpha_2 &= 0\end{aligned}\tag{1.21}$$

also

$$A\alpha = 0, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}.\tag{1.22}$$

Die Lösungsmenge ist gerade der Kern von A , er hat hier die (Vektorraum-)Dimension 1 und die Form

$$\alpha = c \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad c \neq 0.\tag{1.23}$$

Einsetzen in (1.19) mit $c = 1$ ergibt

$$\pi = V^2 g^{-1} R^{-1}.\tag{1.24}$$

Das ist gerade der dimensionslose Parameter ε aus (1.11). Alle anderen dimensionslosen Parameter haben die Form π^c .

4. Referenzgrößen: Ansatz für die Referenzlänge

$$L = V^{\alpha_1} g^{\alpha_2} R^{\alpha_3}.\tag{1.25}$$

Gleichheit der Dimensionen auf beiden Systemen führt auf das Gleichungssystem

$$A\alpha = b, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\tag{1.26}$$

mit der allgemeinen Lösung

$$\alpha = c \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.\tag{1.27}$$

und damit

$$L = R(V^2 g^{-1} R^{-1})^c = R\varepsilon^c.\tag{1.28}$$

Für $c = 0$ ergibt sich $L = R$ (wie in den Varianten 1 und 2), für $c \neq 0$ erhalten wir

$$L = \frac{V^2}{g} \varepsilon^{c-1}, \quad \text{also} \quad L = \frac{V^2}{g} \quad \text{falls } c = 1.\tag{1.29}$$

Analog werden Referenzzeiten bestimmt aus

$$A\alpha = b, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\tag{1.30}$$

$$\alpha = c \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T = \frac{V}{g} \varepsilon^c.\tag{1.31}$$

Es ergeben sich die Referenzzeiten in Variante 1 und 2

$$T = \frac{R}{V}, \quad c = -1, \quad \text{und} \quad T = \sqrt{\frac{R}{g}}, \quad c = -\frac{1}{2}. \quad (1.32)$$

Mit $c = 0$ erhalten wir zusätzlich

$$T = \frac{V}{g}. \quad (1.33)$$

Es erhebt sich die Frage, ob sich alle “relevanten Gleichungen” für solche Modelle als dimensionslose Gleichungen schreiben lassen. Das **II-Theorem von Buckingham** besagt, dass das der Fall ist. Wir behandeln es hier nicht.

Als Konsequenz ergibt sich aus dem vorgestellten Verfahren, dass sich die dimensionslosen Parameter und die Referenzgrößen eines Modells **bereits aus der Liste der Parameter und Variablen** bestimmen lassen. Es ist daher nicht nur nicht notwendig, die Modellgleichungen zu lösen (wie wir in den Varianten 1 und 2 oben bereits gesehen haben), sondern es ist nicht einmal notwendig, die Modellgleichungen zu kennen! Es genügt die Kenntnis der Parameter und Variablen (mitsamt ihrer Dimensionen). Zugrunde liegt dabei die **Modellannahme**, dass die interessierenden Variablen **nur** von den in der Liste enthaltenen Parametern abhängen.

Skalierung der Referenzgrößen. Durch die richtige Wahl der Skalierung will man erreichen, dass die entdimensionalisierten Variablen (im Beispiel x, t), und nach Möglichkeit auch ihre Ableitungen, in der Größenordnung von 1 liegen. Die Information über die Größenordnung der ursprünglichen Variablen (im Beispiel x^*, t^*) ist dann in den Referenzgrößen (im Beispiel L, T) enthalten. Diese Zusatzinformation will man sich später zunutze machen, wenn man Terme identifizieren will, die man vernachlässigen kann, ohne die Lösung stark zu verändern.

Die Wahl der richtigen Skalierung wird i.a. von der Größenordnung der Parameter im Ausgangsproblem abhängen. Im Beispiel ist das der Parameter V , wenn man die Erde als fix gegeben annimmt. Die Größenordnung von V legt die relative Größe von x^* im Verhältnis zum Erdradius R fest.

Wir wollen nun beispielsweise die Situation modellieren, in der der Körper sich relativ zum Erdradius nur wenig von der Erdoberfläche entfernt. Es wird also x^* klein sein gegen R , und die Wahl der Skalierung $L = R$ in den Varianten 1 und 2 oben ist nicht passend, da dann $x \ll 1$ zu erwarten ist. In dieser Situation kann man die zu erwartende Größenordnung einfach abschätzen. Die Geschwindigkeit wird von der Anfangsgeschwindigkeit V abnehmen auf 0 bei Maximalhöhe. Die Änderung der Geschwindigkeit erfolgt näherungsweise linear (da die Schwerkraft und damit die Beschleunigung sich in der Nähe der Erdoberfläche nur wenig ändert). Die gesuchte Zeit t_M^* liegt daher in der Größenordnung von V/g , und die Variable x^* hat die Größenordnung $V \cdot V/g = V^2/g$. Als geeignete Wahl der Parameter erscheint daher

$$L = \frac{V^2}{g}, \quad T = \frac{V}{g}. \quad (1.34)$$

Als **Variante 3** erhalten wir die zugehörige dimensionslose Gleichung

$$\ddot{x} = -\frac{T^2}{L} \frac{gR^2}{(Lx + R)^2} = -\frac{1}{(\varepsilon x + 1)^2}, \quad \varepsilon = \frac{V^2}{gR}, \quad (1.35)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = \frac{TV}{L} = 1. \quad (1.36)$$

Bei kleinen Anfangsgeschwindigkeiten V ist der Parameter ε klein. Man stellt nun die Frage, ob das Weglassen des Terms mit ε (oder äquivalent: $\varepsilon = 0$) zu einer sinnvollen Näherung führt. Für das Anfangswertproblem (1.35) und (1.36) ist das der Fall, für $\varepsilon = 0$ erhalten wir $\ddot{x} = -1$ und damit

$$x(t) = t - \frac{1}{2}t^2, \quad x^*(t^*) = Lx\left(\frac{t^*}{T}\right) = t^*V - \frac{g}{2}(t^*)^2, \quad (1.37)$$

das ist gerade die Wurfparabel unter der Annahme konstanter Schwerkraft. Im Kontrast dazu betrachten wir die anderen beiden Varianten. Nullsetzen von ε in Variante 1,

$$\varepsilon\ddot{x} = -\frac{1}{(x+1)^2}, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1, \quad (1.38)$$

führt auf die nicht lösbare Gleichung $0 = -1/(x+1)^2$. Nullsetzen von ε in Variante 2,

$$\ddot{x} = -\frac{1}{(x+1)^2}, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = \sqrt{\varepsilon}, \quad (1.39)$$

ergibt $0 = x(0) = \dot{x}(0)$, $\ddot{x}(0) = -1$, sowie $\ddot{x}(t) < 0$ für $x(t) > -1$, und führt damit auf eine negative Näherungslösung, die für die betrachtete Modellsituation sinnlos ist (Trajektorie unterhalb der Erdoberfläche). In diesem Fall erkennt man bereits aus der Mathematik, dass Varianten 1 und 2 für $\varepsilon \ll 1$ problematisch sind; darauf kann man sich allerdings im Allgemeinen nicht verlassen.

2 Asymptotische Entwicklung

Hintergrund dieses Kapitels ist ein Problem (P_ε), welches von einem als klein angenommenen Parameter $\varepsilon > 0$ abhängt. Ob das Problem für $\varepsilon = 0$ Sinn macht oder von Interesse ist, hängt vom Kontext ab; wir setzen es nicht voraus. Wir interessieren uns für die Frage, was passieren kann, wenn wir (P_ε) durch ein vereinfachtes approximierendes Problem ersetzen.

Als einleitendes Beispiel betrachten wir die quadratische Gleichung

$$x^2 + 2\varepsilon x - 1 = 0. \quad (2.1)$$

Die Nullstellen für $\varepsilon = 0$ sind $x_0 = \pm 1$. Für kleines $\varepsilon > 0$ suchen wir Näherungen $x_n(\varepsilon)$ für die Nullstellen $x(\varepsilon)$ der Form

$$x_n(\varepsilon) = \sum_{k=0}^n a_k \varepsilon^k. \quad (2.2)$$

Zur Berechnung der Koeffizienten verwenden wir den Potenzreihenansatz

$$x(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varepsilon^k. \quad (2.3)$$

Einsetzen in (2.1) ergibt

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \varepsilon^k \right)^2 + 2\varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varepsilon^k - 1 = 0.$$

Gliedweises Multiplizieren führt auf

$$(a_0^2 + 2a_0a_1\varepsilon + (2a_0a_2 + a_1^2)\varepsilon^2 + \dots) + (2a_0\varepsilon + 2a_1\varepsilon^2 + \dots) - 1 = 0. \quad (2.4)$$

Liegt ε im Konvergenzintervall von (2.3), so auch von (2.4), und nach dem Identitätssatz für Potenzreihen sind die Koeffizienten aller ε^k in (2.4) gleich Null. Die daraus resultierende Methode **Koeffizientenvergleich** liefert

$$a_0^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad a_0 = \pm 1, \quad (2.5)$$

$$2a_0a_1 + 2a_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = -1, \quad (2.6)$$

$$2a_0a_2 + a_1^2 + 2a_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_2 = \frac{1}{2a_0} = \pm \frac{1}{2}. \quad (2.7)$$

Die erhaltenen Näherungen sind also

$$x_0 = a_0 = \pm 1, \quad x_1(\varepsilon) = \pm 1 - \varepsilon, \quad x_2(\varepsilon) = \pm 1 - \varepsilon \pm \frac{1}{2}\varepsilon^2. \quad (2.8)$$

Die Näherung $x_2(\varepsilon)$ ist für $\varepsilon = 10^{-3}$ bereits auf 7 Stellen genau. Die Lösungsformel für quadratische Gleichungen liefert die exakte Lösung $x(\varepsilon) = -\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 + 1}$.

Bei der Verwendung asymptotischer Entwicklungen geht es um das Verhalten der Näherung für $\varepsilon \rightarrow 0$ bei festem, in der Regel kleinem n . Fehlerabschätzungen (z.B. für das

Restglied der Taylorentwicklung) sind dafür relevant. Das Verhalten für $n \rightarrow \infty$ bei festem ε (also das Konvergenzverhalten der Potenzreihe) spielt eine Nebenrolle und dient hier nur zur Begründung der Methode des Koeffizientenvergleichs.

Asymptotische Approximation. Wir erinnern an die in der Analysis behandelte “Groß-O”- und “Klein-O”-Notation.

Definition 2.1 Seien $g, \varphi : (0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Wir sagen, dass $g = O(\varphi)$ für $\varepsilon \rightarrow 0$, falls es $C > 0$ gibt mit

$$|g(\varepsilon)| \leq C|\varphi(\varepsilon)|, \quad \text{für alle } \varepsilon > 0 \text{ hinreichend nahe an } 0. \quad (2.9)$$

Wir sagen, dass $g = o(\varphi)$ für $\varepsilon \rightarrow 0$, falls

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{|g(\varepsilon)|}{|\varphi(\varepsilon)|} = 0. \quad (2.10)$$

Hinreichend für $g = O(\varphi)$ ist, dass

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{|g(\varepsilon)|}{|\varphi(\varepsilon)|}$$

existiert und endlich ist.

Beispiele:

$$\begin{aligned} g(\varepsilon) &= \varepsilon^2, & \varphi(\varepsilon) &= \varepsilon, & g &= o(\varphi), \\ g(\varepsilon) &= \varepsilon^2, & \varphi(\varepsilon) &= -2\varepsilon^2 + \varepsilon^3, & g &= O(\varphi), \\ g(\varepsilon) &= \varepsilon \sin\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right), & \varphi(\varepsilon) &= \varepsilon, & g &= O(\varphi), \\ g(\varepsilon) &= \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right), & \varphi(\varepsilon) &= \varepsilon^n, & g &= o(\varphi) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Wir wollen Funktionen in der Nähe von 0 approximieren. Ist etwa $f(\varepsilon) = \varepsilon^2 + 2\varepsilon^4$, so liefert $\varphi(\varepsilon) = \varepsilon^2$ die Differenz $(f - \varphi)(\varepsilon) = 2\varepsilon^4$, diese geht vergleichsweise schneller gegen 0, wir sehen φ als eine gute Näherung an. Andererseits liefert $\varphi(\varepsilon) = \frac{5}{7}\varepsilon^2$ eine erheblich schlechtere Näherung, da $(f - \varphi)(\varepsilon) = \frac{2}{7}\varepsilon^2 + 2\varepsilon^4$ bei 0 nur dieselbe Ordnung wie φ hat.

Definition 2.2 (Asymptotische Näherung)

Seien $f, \varphi : (0, \varepsilon_0) \rightarrow X$, X normierter Raum. Die Funktion φ heißt asymptotische Näherung von f , falls

$$\|f - \varphi\| = o(\|\varphi\|). \quad (2.11)$$

(Mit $\|f - \varphi\|$ ist die Funktion $\varepsilon \mapsto \|f(\varepsilon) - \varphi(\varepsilon)\|$ gemeint, analog $\|\varphi\|$.) Wir schreiben

$$f \sim \varphi. \quad (2.12)$$

□

Im Fall $X = \mathbb{R}$ ist (2.11) äquivalent zu

$$f = \varphi + o(\varphi). \quad (2.13)$$

Beispiel: Für $X = \mathbb{R}$ betrachten wir $f(\varepsilon) = \sin \varepsilon$. Jede der Funktionen

$$\varphi(\varepsilon) = \varepsilon, \quad \varphi(\varepsilon) = \varepsilon + 2\varepsilon^2, \quad \varphi(\varepsilon) = \varepsilon - \frac{1}{6}\varepsilon^3,$$

ist wegen $f(\varepsilon) = \varepsilon - \frac{1}{6}\varepsilon^3 + O(\varepsilon^5)$ eine asymptotische Näherung von f .

Oft sucht man asymptotische Näherungen an eine mit ε parametrisierte Familie von Funktionen (z.B. Lösungen von Differentialgleichungen, die von ε abhängen). Beispiel:

$$u_\varepsilon(t) = t + \exp\left(-\frac{t}{\varepsilon}\right), \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (2.14)$$

Betrachtet man ein einzelnes $t \in [0, 1]$, so befindet man sich in der Situation $X = \mathbb{R}$ mit $f(\varepsilon) = u_\varepsilon(t)$. Eine asymptotische Näherung für $t > 0$ ist die (bezüglich ε) Konstante t , für $t = 0$ die Konstante 1.

Generell ist es wünschenswert, wenn eine asymptotische Näherung auf dem gesamten Intervall $[0, 1]$ gut ist. Dem entspricht etwa die Wahl $X = C[0, 1]$ mit der Supremumsnorm. Im Beispiel (2.14) allerdings liefert die (wieder von ε unabhängige) Funktion $\varphi(t) = t$ keine asymptotische Näherung, da

$$\|u_\varepsilon - \varphi\|_\infty = u_\varepsilon(0) - \varphi(0) = 1, \quad \|\varphi\|_\infty = 1.$$

Die Näherung ist aber nur dicht bei 0 schlecht. Für $X = L^1(0, 1)$ mit der Integralnorm gilt

$$\|f_\varepsilon - \varphi\|_1 = \int_0^1 e^{-\frac{t}{\varepsilon}} dt = -\varepsilon e^{-\frac{t}{\varepsilon}} \Big|_0^1 \leq \varepsilon, \quad \|\varphi\|_1 = \frac{1}{2},$$

also ist φ eine asymptotische Näherung von f im Sinne der Integralnorm, welche geringere Anforderungen an die Qualität der Näherung stellt.

Asymptotische Entwicklung. Der Begriff der asymptotischen Entwicklung verallgemeinert die Darstellung als Taylorpolynom plus Restglied,

$$f(\varepsilon) = a_0 + a_1\varepsilon + \cdots + a_n\varepsilon^n + R_{n+1}(\varepsilon), \quad a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}. \quad (2.15)$$

Die folgende Definition geht auf Poincaré zurück (1886).

Definition 2.3 (Asymptotische Entwicklung)

Eine (endliche oder unendliche) Folge von Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ mit $\varphi_k : (0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **asymptotische Folge**, falls $\varphi_{k+1} = o(\varphi_k)$ für $\varepsilon \rightarrow 0$, für alle k . Eine Funktion $f : [0, \varepsilon_0) \rightarrow X$, X normierter Raum, besitzt eine **asymptotische Entwicklung der Ordnung n** bezüglich dieser Folge, falls es Koeffizienten $a_k \in X$ gibt mit

$$f(\varepsilon) = \sum_{k=0}^m a_k \varphi_k(\varepsilon) + o(\varphi_m), \quad \text{für alle } m \leq n, \quad (2.16)$$

für $\varepsilon \rightarrow 0$. □

Asymptotische Entwicklungen werden hauptsächlich bei Problemen eingesetzt, die sich in der allgemeinen Form

$$F(u_\varepsilon, \varepsilon) = 0 \quad (2.17)$$

schreiben lassen. Hier ist $F : X \times [0, \varepsilon_0) \rightarrow Y$ eine mit ε parametrisierte Abbildung zwischen normierten Räumen X und Y . Wir nehmen an, dass es Lösungen $u_\varepsilon \in X$ gibt und dass $f(\varepsilon) = u_\varepsilon$ eine asymptotische Entwicklung hat, also

$$u_\varepsilon = u_{\varepsilon,m} + o(\varphi_m), \quad u_{\varepsilon,m} = \sum_{k=0}^m a_k \varphi_k(\varepsilon), \quad 0 \leq m \leq n. \quad (2.18)$$

Nebenbemerkung: Wir behandeln jetzt nicht die Frage, ob und warum Lösungen u_ε und asymptotische Entwicklungen von u_ε existieren.

Liefert der Ansatz $\varphi_k(\varepsilon) = \varepsilon^k$ eine asymptotische Entwicklung, so heißt das Problem **regulär gestört**, und der Ansatz

$$u_\varepsilon = u_{\varepsilon,m} + o(\varepsilon^m), \quad u_{\varepsilon,m} = \sum_{k=0}^m a_k \varepsilon^k, \quad 0 \leq m \leq n, \quad (2.19)$$

heißt **reguläre Störung** von (2.17). Wir nehmen nun eine geeignete Lipschitzstetigkeit von F an, und zwar gebe es $L > 0$ mit

$$\|F(u, \varepsilon) - F(v, \varepsilon)\| \leq L\|u - v\|, \quad \text{für alle } u, v \in X, \varepsilon \in [0, \varepsilon_0). \quad (2.20)$$

Lemma 2.4 *Es gelte (2.20). Dann gilt für die Näherungen $u_{\varepsilon,m}$ aus (2.18)*

$$\|F(u_{\varepsilon,m}, \varepsilon)\| = o(\|\varphi_m\|), \quad 0 \leq m \leq n. \quad (2.21)$$

Beweis: Es gilt $\|F(u_{\varepsilon,m}, \varepsilon)\| = \|F(u_{\varepsilon,m}, \varepsilon) - F(u_\varepsilon, \varepsilon)\| \leq L\|u_{\varepsilon,m} - u_\varepsilon\| = o(\|\varphi_m\|)$. \square

Ist $\{\varphi_m\}$ beschränkt, wie etwa bei regulär gestörten Problemen, so folgt aus (2.21)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(u_{\varepsilon,m}, \varepsilon) = 0. \quad (2.22)$$

Näherungen $u_{\varepsilon,m}$ mit der Eigenschaft (2.22) heißen **konsistent** mit Problem (2.17).

Lemma 2.4 dient dazu, die unbekanntenen Koeffizienten a_k zu berechnen. Betrachten wir nochmals die quadratische Gleichung

$$F(x, \varepsilon) = x^2 + 2\varepsilon x - 1 = 0 \quad (2.23)$$

mit dem Ansatz

$$x_\varepsilon = x_{\varepsilon,m} + o(\varepsilon^m), \quad x_{\varepsilon,m} = \sum_{k=0}^m a_k \varepsilon^k. \quad (2.24)$$

Es gilt für $m = 0$

$$\begin{aligned} \varphi_0(\varepsilon) &= 1, & x_{\varepsilon,0} &= a_0, \\ o(1) &= F(x_{\varepsilon,0}, \varepsilon) = a_0^2 + 2\varepsilon a_0 - 1, \\ &\Rightarrow & a_0 &= \pm 1, \end{aligned}$$

und für $m = 1$

$$\begin{aligned}\varphi_1(\varepsilon) &= \varepsilon, & x_{\varepsilon,1} &= a_0 + a_1\varepsilon, \\ o(\varepsilon) &= F(x_{\varepsilon,1}, \varepsilon) = (a_0 + a_1\varepsilon)^2 + 2\varepsilon(a_0 + a_1\varepsilon) - 1 = (2a_0a_1 + 2a_0)\varepsilon + o(\varepsilon), \\ &\Rightarrow & 2a_0a_1 + 2a_0 &= 0, & a_1 &= -1.\end{aligned}$$

Das ist gerade die Methode des Koeffizientenvergleichs. Durch Lemma 2.4 wird also deren Anwendung gerechtfertigt für asymptotische Näherungen, unabhängig von der Existenz einer für $n \rightarrow \infty$ konvergenten Reihenentwicklung.

Wir betrachten nun die quadratische Gleichung

$$F(x, \varepsilon) = \varepsilon x^2 + 2x - 1 = 0. \quad (2.25)$$

Die exakte Lösung ist

$$x_\varepsilon^{1,2} = -\frac{1}{\varepsilon} \pm \frac{\sqrt{1 + \varepsilon}}{\varepsilon}. \quad (2.26)$$

Es gilt

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_\varepsilon^1 = \frac{1}{2}, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_\varepsilon^2 = -\infty. \quad (2.27)$$

Für $\varepsilon = 0$ hat (2.25) eine einzige Lösung, $x_0 = 1/2$. Der Ansatz (2.19), also die Behandlung als regulär gestörtes Problem, führt auf asymptotische Näherungen $x_{\varepsilon,m}$ für x_ε^1 (Übung). Die unbeschränkte Lösungsschar $\{x_\varepsilon^2\}$ kann auf diese Weise nicht erhalten werden. Das Problem (2.25) heißt **singulär gestört**, der Term εx^2 **singuläre Störung** des Problems $2x - 1 = 0$.

Wir machen den Ansatz

$$x_{\varepsilon,m} = \varepsilon^\gamma (a_0 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \cdots + a_m\varepsilon^m), \quad \gamma < 0. \quad (2.28)$$

Falls dadurch eine asymptotische Näherung von x_ε dargestellt wird, muss $F(x_{\varepsilon,m}, \varepsilon) = o(\varphi_m)$ gemäß Lemma 2.4 gelten. Daraus berechnen wir die Koeffizienten. Es ist $\phi_0(\varepsilon) = \varepsilon^\gamma$ und $x_{\varepsilon,0} = a_0\varepsilon^\gamma$. Einsetzen in (2.25) ergibt die Forderung

$$o(\varepsilon^\gamma) = F(x_{\varepsilon,0}, \varepsilon) = \varepsilon^{2\gamma+1}a_0^2 + 2\varepsilon^\gamma a_0 - 1, \quad (2.29)$$

oder äquivalent

$$\varepsilon^{\gamma+1}a_0^2 + 2a_0 - \varepsilon^{-\gamma} = o(1). \quad (2.30)$$

Für $a_0 = 0$ (und $\gamma < 0$) gilt (2.30), aber dann können wir im Ansatz (2.28) einen Faktor ε vor die Klammer ziehen und nochmal anfangen. Ist $a_0 \neq 0$, so muss $\gamma = -1$ sein, um den Term $2a_0$ zu balancieren, und es muss gelten

$$a_0^2 + 2a_0 = 0, \quad a_0 = -2. \quad (2.31)$$

Für $m = 1$ haben wir $\varphi_1(\varepsilon) = 1$, und für $x_{\varepsilon,1} = a_0\varepsilon^{-1} + a_1$ muss gelten

$$o(1) = F(x_{\varepsilon,1}, \varepsilon) = \varepsilon^{-1}a_0^2 + 2a_0a_1 + a_1^2\varepsilon + 2(\varepsilon^{-1}a_0 + a_1) - 1. \quad (2.32)$$

Das ist nur möglich, wenn

$$2a_0a_1 + 2a_1 - 1 = 0, \quad \text{also} \quad a_1 = \frac{1}{2(a_0 + 1)} = -\frac{1}{2}. \quad (2.33)$$

Die ersten beiden asymptotischen Näherungen im Ansatz (2.28) (wenn sie existieren) für x_ε^2 haben also die Form

$$x_{\varepsilon,0} = -\frac{2}{\varepsilon}, \quad x_{\varepsilon,1} = -\frac{2}{\varepsilon} - \frac{1}{2}. \quad (2.34)$$

Wir behandeln nun die asymptotische Entwicklung für das Beispielproblem aus Kapitel 1 in der entdimensionalisierten Form, Variante 3,

$$u''(t) = -\frac{1}{(\varepsilon u(t) + 1)^2}, \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 1. \quad (2.35)$$

Wir setzen die zugehörige Lösung u_ε (Existenz und Eindeutigkeit nach Picard-Lindelöf) an als reguläre Störung

$$u_\varepsilon(t) = u_0(t) + \varepsilon u_1(t) + \varepsilon^2 u_2(t) + \dots \quad (2.36)$$

Dem entspricht in Definition 2.3 die Wahl $f(\varepsilon) = u_\varepsilon$, $\varphi_k(\varepsilon) = \varepsilon^k$, $a_k = u_k$, X ein geeigneter Raum von Funktionen auf $[0, T]$, z.B. $X = C^2[0, T]$.

Wir können die Funktionen u_k mit Koeffizientenvergleich berechnen. Dazu verwenden wir die Entwicklung

$$\frac{1}{(1+z)^2} = 1 - 2z + 3z^2 - 4z^3 + \dots, \quad (2.37)$$

die sich aus der Taylorreihe von $g(w) = w^{-2}$ um $w = 1$ ergibt. Für $z = \varepsilon u_\varepsilon$ erhalten wir aus (2.35) – (2.37)

$$\begin{aligned} u_0''(t) + \varepsilon u_1''(t) + \varepsilon^2 u_2''(t) + \dots = & -1 + 2\varepsilon(u_0(t) + \varepsilon u_1(t) + \varepsilon^2 u_2(t) + \dots) \\ & - 3\varepsilon^2(u_0(t) + \varepsilon u_1(t) + \varepsilon^2 u_2(t) + \dots)^2 \end{aligned} \quad (2.38)$$

sowie

$$\begin{aligned} u_0(0) + \varepsilon u_1(0) + \varepsilon^2 u_2(0) + \dots &= 0, \\ u_0'(0) + \varepsilon u_1'(0) + \varepsilon^2 u_2'(0) + \dots &= 1. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Die Terme zu ε^0 liefern

$$u_0'' = -1, \quad u_0(0) = 0, \quad u_0'(0) = 1,$$

also

$$u_0(t) = u_{\varepsilon,0}(t) = t - \frac{t^2}{2}. \quad (2.40)$$

nach zweimal Aufintegrieren. Die Terme zu ε liefern

$$u_1'' = 2u_0, \quad u_1(0) = 0, \quad u_1'(0) = 0, \quad (2.41)$$

mit der Lösung

$$u_1(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{12}t^4. \quad (2.42)$$

Die Terme zu ε^2 liefern

$$u_2'' = 2u_1 - 3u_0^2, \quad u_2(0) = 0, \quad u_2'(0) = 0, \quad (2.43)$$

mit der Lösung

$$u_2(t) = -\frac{1}{4}t^4 + \frac{11}{60}t^5 - \frac{11}{360}t^6. \quad (2.44)$$

Eine zweite Methode ist der Ansatz $u(t, \varepsilon) = u_\varepsilon(t)$,

$$u(t, \varepsilon) = u(t, 0) + \varepsilon \partial_\varepsilon u(t, 0) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \partial_{\varepsilon\varepsilon} u(t, 0) + \dots \quad (2.45)$$

In der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen wird bewiesen, dass die Ableitungen der Lösung nach dem Parameter ε existieren und eine asymptotische Entwicklung liefern, und es wird gezeigt, wie sich diese Ableitungen berechnen lassen. Wir erhalten (2.36) mit

$$u_0(t) = u(t, 0), \quad u_1(t) = \partial_\varepsilon u(t, 0), \quad u_2(t) = \frac{1}{2} \partial_{\varepsilon\varepsilon} u(t, 0).$$

Dadurch ist auch der Ansatz (2.36) gerechtfertigt (Existenz der asymptotischen Entwicklung).

Eine dritte Methode ergibt sich durch Anwendung von Lemma 2.4. Dabei wird u_1 , oder äquivalent $u_{\varepsilon,1} = u_0 + \varepsilon u_1$, berechnet aus

$$F(u_{1,\varepsilon}, \varepsilon) = o(\varepsilon).$$

Die Abbildung F hat die Form $F : C^2[0, 1] \times [0, \varepsilon_0] \rightarrow Y = C[0, 1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

$$F(u, \varepsilon) = \begin{pmatrix} u'' + \frac{1}{(\varepsilon u + 1)^2} \\ u(0) \\ u'(0) - 1 \end{pmatrix}. \quad (2.46)$$

Setzt man für den Bruch die Reihenentwicklung (2.37) ein, so wird man wieder auf den Koeffizientenvergleich geführt.

Schließlich kann man auch die Gleichung

$$F(u_\varepsilon, \varepsilon) = 0$$

nach ε differenzieren. Aus der Kettenregel (für die Ableitung in normierten Räumen, in Verallgemeinerung der Ableitung im \mathbb{R}^n) ergibt sich

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon} F(u_\varepsilon, \varepsilon) = \partial_u F(u_\varepsilon, \varepsilon) \partial_\varepsilon u_\varepsilon + \partial_\varepsilon F(u_\varepsilon, \varepsilon).$$

Im Punkt $\varepsilon = 0$ erhalten wir, da $(\partial_\varepsilon u_\varepsilon)(t) = \partial_\varepsilon u(t, \varepsilon) = u_1(t)$ gilt für $t \in [0, 1]$,

$$0 = \partial_u F(u_0, 0) u_1 + \partial_\varepsilon F(u_0, 0),$$

eine lineare Gleichung für u_1 im Funktionenraum.

Wir suchen nun eine Näherung für die dimensionslose Maximalhöhe h_ε in Abhängigkeit von ε . Sie bestimmt sich aus den Gleichungen

$$h_\varepsilon = u_\varepsilon(t_\varepsilon), \quad u'_\varepsilon(t_\varepsilon) = 0, \quad (2.47)$$

wobei t_ε die dimensionslose Zeit ist, zu der die Maximalhöhe erreicht wird. Die Entwicklung für u_ε führt auf

$$0 = u'_\varepsilon(t_\varepsilon) = u'_0(t_\varepsilon) + \varepsilon u'_1(t_\varepsilon) + \varepsilon^2 u'_2(t_\varepsilon) + \dots \quad (2.48)$$

Wir setzen nun auch für t_ε eine asymptotische Entwicklung als reguläre Störung an,

$$t_\varepsilon = t_0 + \varepsilon t_1 + \varepsilon^2 t_2 + \dots \quad (2.49)$$

Wir entwickeln die Terme in (2.48) nach ε , indem wir die Kettenregel anwenden. Für den ersten Term betrachten wir

$$\begin{aligned} g(\varepsilon) &= u'_0(t(\varepsilon)), \quad t(\varepsilon) := t_\varepsilon, \\ g(\varepsilon) &= g(0) + \varepsilon g'(0) + O(\varepsilon^2), \\ g'(0) &= u''_0(t(0))t'(0) = u''_0(t_0)t_1, \end{aligned}$$

analog für die höheren Terme. Einsetzen in (2.48) ergibt

$$0 = u'_0(t_0) + (t_1 u''_0(t_0) + u'_1(t_0))\varepsilon + O(\varepsilon^2), \quad (2.50)$$

und Koeffizientenvergleich führt auf

$$0 = u'_0(t_0) = 1 - t_0 = 0, \quad t_0 = 1, \quad (2.51)$$

$$0 = t_1 u''_0(t_0) + u'_1(t_0) = -t_1 + t_0^2 - \frac{1}{3}t_0^3, \quad t_1 = t_0^2 - \frac{1}{3}t_0^3 = \frac{2}{3}, \quad (2.52)$$

also

$$t_\varepsilon = t_0 + \varepsilon t_1 + O(\varepsilon^2) = 1 + \frac{2}{3}\varepsilon + O(\varepsilon^2). \quad (2.53)$$

Mit Taylorentwicklung erhalten wir die gesuchte Näherung für die Maximalhöhe

$$\begin{aligned} h_\varepsilon = u_\varepsilon(t_\varepsilon) &= u_0(t_0) + (t_1 u'_0(t_0) + u_1(t_0))\varepsilon + O(\varepsilon^2) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\varepsilon + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (2.54)$$

Um diese Näherung zu erhalten, war es nicht erforderlich, die Differentialgleichung zu lösen. Erforderlich war lediglich, die Differentialgleichung zu kennen, deren rechte Seite in eine Taylorreihe zu entwickeln, die Kettenregel anzuwenden und Polynome zu integrieren.

3 Mehrere Skalen

Wir betrachten Probleme, in denen mehrere Skalen gleichzeitig auftreten. Ist dabei u_ε eine unbekannte Funktion, welche die parametrisierte Gleichung

$$F(u_\varepsilon, \varepsilon) = 0 \quad (3.1)$$

lösen soll, so kann man dann nicht mehr erwarten, dass der Ansatz

$$u_\varepsilon(x) = u_0(x) + \varepsilon u_1(x) + \varepsilon^2 u_2(x) + \dots \quad (3.2)$$

zum Ziel führt.

Grenzschichten. Wir betrachten als Beispiel das Randwertproblem

$$\varepsilon u'' + 2u' + 2u = 0, \quad (3.3)$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 1. \quad (3.4)$$

Gesucht ist eine Funktion $u_\varepsilon : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, welche $\varepsilon u_\varepsilon''(x) + 2u_\varepsilon'(x) + 2u_\varepsilon(x) = 0$ für alle $x \in (0, 1)$ sowie die Randbedingungen (3.4) erfüllt. Vermittels

$$F(u, \varepsilon) = \begin{pmatrix} \varepsilon u'' + 2u' + 2u \\ u(0) \\ u(1) - 1 \end{pmatrix}, \quad F : X \times [0, \varepsilon_0) \rightarrow Y, \quad (3.5)$$

wird (3.3), (3.4) unter (3.1) subsumiert.

Der Ansatz als reguläre Störung gemäß (3.2) führt nach Koeffizientenvergleich der ε^0 -Terme auf

$$u_0' + u_0 = 0, \quad (3.6)$$

$$u_0(0) = 0, \quad u_0(1) = 1. \quad (3.7)$$

Die allgemeine Lösung von (3.6) ist

$$u_0(x) = ce^{-x}, \quad c \in \mathbb{R}, \quad (3.8)$$

und es ist für kein $c \in \mathbb{R}$ möglich, beide Randbedingungen (3.7) zu erfüllen. Da u_0 eine Lösung von (3.6), (3.7) ist genau dann, wenn $F(u_0, 0) = 0$, ist letztere Gleichung nicht lösbar.

Um zu verstehen, was hier vor sich geht, betrachten wir das Problem vom Standpunkt der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen. Der Lösungsansatz

$$u_\varepsilon(x) = e^{\lambda x}, \quad \lambda \text{ Konstante,}$$

führt auf die Gleichung

$$(\varepsilon \lambda^2 + 2\lambda + 2)e^{\lambda x} = 0.$$

Deren beide Lösungen

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{\varepsilon} \pm \frac{\sqrt{1 - 2\varepsilon}}{\varepsilon} \quad (3.9)$$

liefern die allgemeine Lösung

$$u_\varepsilon(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \quad (3.10)$$

von (3.3), und die beiden Konstanten sind so zu bestimmen, dass die Randbedingungen (3.4) erfüllt sind. Asymptotische Entwicklung der Nullstellen $\lambda_{1,2}$ ergibt

$$\lambda_1(\varepsilon) = -1 + O(\varepsilon), \quad \lambda_2(\varepsilon) = -\frac{2}{\varepsilon} + O(1). \quad (3.11)$$

Kandidat für eine Näherung für u_ε wäre also eine Funktion der Form

$$c_1 e^{-x} + c_2 e^{-\frac{2x}{\varepsilon}}. \quad (3.12)$$

Deren beide Anteile variieren auf zwei verschiedenen Skalen, $O(1)$ und $O(\varepsilon)$. Für $\varepsilon \rightarrow 0$ spielt der zweite Anteil nur in der Nähe des linken Randpunkts $x = 0$ von $[0, 1]$ eine Rolle (insbesondere wegen seiner großen ersten Ableitung), während überall sonst der erste Anteil dominiert. Man spricht von einer **Grenzschicht**, die sich in diesem Beispiel in der Nähe des linken Randes befindet, und von einem **Grenzschichtverhalten** der Lösung u_ε .

Wir vergessen nun wieder die explizite Lösung (3.10), welche in komplizierteren Problemen auch nicht zur Verfügung steht, und beschäftigen uns mit asymptotischen Näherungen von Grenzschichtverhalten. Zur Betrachtung einer möglichen Grenzschicht bei $x = 0$ führen wir eine neue Skala ein, die um den Faktor ε^α vergrößert,

$$\xi = \frac{x}{\varepsilon^\alpha}, \quad x = \varepsilon^\alpha \xi, \quad (3.13)$$

wobei $\alpha > 0$ geeignet zu bestimmen ist. Wir wollen nun u_ε in der ξ -Skala approximieren und setzen

$$U_\varepsilon(\xi) = u_\varepsilon(\varepsilon^\alpha \xi), \quad u_\varepsilon(x) = U_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon^\alpha}\right). \quad (3.14)$$

Es gilt

$$U'_\varepsilon(\xi) = \varepsilon^\alpha u'_\varepsilon(\varepsilon^\alpha \xi), \quad U''_\varepsilon(\xi) = \varepsilon^{2\alpha} u''_\varepsilon(\varepsilon^\alpha \xi).$$

Einsetzen in die Differentialgleichung (3.3) für u_ε ergibt

$$\begin{aligned} 0 &= (\varepsilon u''_\varepsilon + 2u'_\varepsilon + 2u_\varepsilon)(\varepsilon^\alpha \xi) \\ &= \varepsilon^{1-2\alpha} U''_\varepsilon(\xi) + 2\varepsilon^{-\alpha} U'_\varepsilon(\xi) + 2U_\varepsilon(\xi). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Wir machen einen Potenzreihenansatz für U_ε ,

$$U_\varepsilon(\xi) = U_0(\xi) + \varepsilon U_1(\xi) + \dots \quad (3.16)$$

Einsetzen in (3.15) führt auf

$$0 = \varepsilon^{1-2\alpha} (U''_0 + \varepsilon U''_1 + \dots) + 2\varepsilon^{-\alpha} (U'_0 + \varepsilon U'_1 + \dots) + 2(U_0 + \varepsilon U_1 + \dots). \quad (3.17)$$

Wir wollen zwei der drei Summanden gegeneinander balancieren.

- Erster und dritter Summand: $1 - 2\alpha = 0$, $\alpha = 1/2$, aber dann hat der zweite Term die Ordnung $\varepsilon^{-1/2}$, was auf $U'_0 = 0$ führt und uns nicht weiterbringt.

- Zweiter und dritter Summand: $-\alpha = 0$, aber dann ist $\xi = x$, wir haben also keine zweite Skala.
- Erster und zweiter Summand: $1 - 2\alpha = -\alpha$, also $\alpha = 1$, beide Terme sind $O(\varepsilon^1)$, der dritte Term ist $O(1)$. Das führt zum Erfolg.

Mit $\alpha = 1$ wird (3.17) zu

$$0 = \varepsilon^{-1}(U_0'' + \varepsilon U_1'' + \dots) + 2\varepsilon^{-1}(U_0' + \varepsilon U_1' + \dots) + 2(U_0 + \varepsilon U_1 + \dots). \quad (3.18)$$

Koeffizientenvergleich in der niedrigsten Ordnung (das ist hier ε^{-1}) führt auf

$$U_0'' + 2U_0' = 0. \quad (3.19)$$

Da wir eine Approximation in der Grenzschicht nahe $x = 0$ suchen, nehmen wir die linke Randbedingung hinzu,

$$U_0(0) = 0. \quad (3.20)$$

Die allgemeine Lösung von (3.19), (3.20) ist

$$U_0(\xi) = b(1 - e^{-2\xi}), \quad (3.21)$$

sie enthält noch einen freien Parameter. Analog kann man eine mögliche Grenzschicht nahe $x = 1$ untersuchen. Der Ansatz

$$\zeta = \frac{1-x}{\varepsilon^\alpha}, \quad V_\varepsilon(\zeta) = u_\varepsilon(1 - \varepsilon^\alpha \zeta),$$

führt schließlich auf

$$V_0'' - 2V_0' = 0.$$

Verwendet man die Randbedingung $V_0(0) = 1$, so ergibt sich als Lösung

$$V_0(\zeta) = 1 + \frac{b}{2}(e^{2\zeta} - 1), \quad b \in \mathbb{R}. \quad (3.22)$$

Transformiert man nun V_0 in die x -Skala, so erhält man

$$v_0^\varepsilon(x) := V_0\left(\frac{1-x}{\varepsilon}\right) = 1 + \frac{b}{2}\left(e^{\frac{2(1-x)}{\varepsilon}} - 1\right).$$

Für $x < 1$ folgt $v_0^\varepsilon(x) \rightarrow \pm\infty$ für $\varepsilon \rightarrow 0$, was zu keiner sinnvollen Näherung führt (oder es ist $b = 0$ und $v_{\varepsilon,0}$ konstant). Falls eine Grenzschicht nahe $x = 1$ existieren sollte (was in diesem Beispiel nicht der Fall ist), könnte man sie jedenfalls mit dem vorgeführten Ansatz nicht bestimmen.

Wir verfügen nunmehr über zwei Näherungen,

$$u_0(x) = ce^{-x}, \quad U_0(\xi) = b(1 - e^{-2\xi}). \quad (3.23)$$

Die zweite ist speziell für eine Grenzschicht nahe $x = 0$ konstruiert worden und hat die Eigenschaft, dass für festes $x > 0$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} U_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = b. \quad (3.24)$$

Wir nehmen nun an, dass die erste Näherung außerhalb der Grenzschicht brauchbar ist. Verlangen wir, dass die Randbedingung $u_0(1) = 1$ erfüllt ist, so erhalten wir

$$c = e^1, \quad u_0(x) = e^{1-x}. \quad (3.25)$$

Wir wollen nun die beiden Näherungen zu einer einzigen zusammensetzen. Diese Prozedur heißt **Matching**. Sei nun ε sehr klein und $x > 0$ so gewählt, dass $\varepsilon \ll x \ll 1$, also x ebenfalls dicht bei 0. Da $u_0(0) = c$, ist es wegen (3.24) naheliegend, für das Matching zu verlangen, dass

$$b = c. \quad (3.26)$$

Wir setzen nun als Näherung an

$$u_{\varepsilon,0}(x) = u_0(x) + U_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - b = e^{1-x} - e^{1-\frac{2x}{\varepsilon}}. \quad (3.27)$$

Wir stellen uns die Grenzschicht als ein Intervall $[0, k\varepsilon]$ vor, wobei k eine kleine natürliche Zahl ist. Mit dem Ansatz (3.27) erreichen wir: Innerhalb der Grenzschicht ist $u_0(x) - b = u_0(x) - u_0(0)$ klein und U_0 dominiert, außerhalb der Grenzschicht ist $U_0(x/\varepsilon) - b$ wegen (3.24) klein und u_0 dominiert. Da u_0 bzw. U_0 als Näherungen außerhalb bzw. innerhalb der Grenzschicht konstruiert worden sind, ist die Näherung (3.27) insgesamt sinnvoll. Für die Randbedingungen gilt

$$u_{\varepsilon,0}(0) = 0, \quad u_{\varepsilon,0}(1) - 1 = U_0\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) - b \rightarrow 0, \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (3.28)$$

Gedämpfte Schwingung. Wir betrachten als Beispiel das Anfangswertproblem

$$u'' + \varepsilon u' + u = 0, \quad (3.29)$$

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 1. \quad (3.30)$$

Es beschreibt einen gedämpften Oszillator. Die exakte Lösung ist

$$u_\varepsilon(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}}} e^{-\frac{\varepsilon t}{2}} \sin\left(t\sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}}\right). \quad (3.31)$$

Für kleines $\varepsilon > 0$ handelt es sich um eine Schwingung mit Frequenz auf einer Skala von $O(1)$ und exponentiell fallender Amplitude mit Abklingrate auf einer Skala von $O(\varepsilon^{-1})$. Die Lösung für $\varepsilon = 0$ ist

$$u_0(t) = \sin t. \quad (3.32)$$

Für festes ε ist u_0 nur im Bereich $t\varepsilon \ll 1$ eine gute Approximation von u_ε , für $t \rightarrow \infty$ ist die Approximation unbrauchbar, egal wie klein ε ist. Der Ansatz

$$u_\varepsilon(t) = u_0(t) + \varepsilon u_1(t) + \dots$$

mit anschließendem Koeffizientenvergleich führt auf die $O(1)$ -Näherung aus (3.32) und das $O(\varepsilon)$ -Problem

$$u_1'' + u_1' + u_1 = 0, \quad u_1(0) = u_1'(0) = 0, \quad (3.33)$$

mit der Lösung

$$u_1(t) = -\frac{t}{2} \sin t$$

und der Näherung

$$\left(1 - \varepsilon \frac{t}{2}\right) \sin t \quad (3.34)$$

für u_ε . Für $\varepsilon t \ll 1$ erhalten wir eine auf der richtigen Zeitskala fallende Amplitude, aber für $t \rightarrow \infty$ ist die Approximation noch schlechter als mit u_0 . Um eine bessere Näherung zu erhalten, machen wir einen **Zwei-Skalen-Ansatz** für das Problem

$$F(u_\varepsilon, \varepsilon) = 0, \quad F(w, \varepsilon) = \begin{pmatrix} w'' + \varepsilon w' + w \\ w(0) \\ w'(1) - 1 \end{pmatrix}, \quad (3.35)$$

indem wir Funktionen w der Form

$$w(t) = z(t, \varepsilon^\alpha t), \quad "z = z(t, s)"', \quad (3.36)$$

betrachten. Für $\alpha > 0$ ist die zweite Zeitskala $s = \varepsilon^\alpha t$ "langsamer" als die t -Skala. Die Ableitungen von w sind

$$w'(t) = (\partial_t z + \varepsilon^\alpha \partial_s z)(t, \varepsilon^\alpha t), \quad (3.37)$$

$$w''(t) = (\partial_{tt} z + 2\varepsilon^\alpha \partial_{ts} z + \varepsilon^{2\alpha} \partial_{ss} z)(t, \varepsilon^\alpha t). \quad (3.38)$$

Einsetzen in den Operator F führt auf

$$w''(t) + \varepsilon w'(t) + w(t) = \left[\partial_{tt} z + 2\varepsilon^\alpha \partial_{ts} z + \varepsilon^{2\alpha} \partial_{ss} z + \varepsilon(\partial_t z + \varepsilon^\alpha \partial_s z) + z \right](t, \varepsilon^\alpha t), \quad (3.39)$$

$$w(0) = z(0, 0), \quad w'(0) - 1 = \partial_t z(0, 0) + \varepsilon^\alpha \partial_s z(0, 0) - 1. \quad (3.40)$$

Wir suchen Näherungen für u_ε der Form

$$u_{\varepsilon,0}(t) = u_0(t, \varepsilon^\alpha t), \quad (3.41)$$

$$u_{\varepsilon,1}(t) = u_0(t, \varepsilon^\alpha t) + \varepsilon u_1(t, \varepsilon^\alpha t). \quad (3.42)$$

Wir wollen u_0 so bestimmen, dass für $z = u_0$ in (3.39) und (3.40) die $O(1)$ -Terme verschwinden. Dafür ist hinreichend

$$(\partial_{tt} u_0 + u_0)(t, s) = 0, \quad \text{für alle } t, s, \quad (3.43)$$

$$u_0(0, 0) = 0, \quad \partial_t u_0(0, 0) = 1. \quad (3.44)$$

Da in der Gleichung (3.43) keine Ableitungen nach s auftreten, können wir sie als gewöhnliche Differentialgleichung in t auffassen, mit s als Parameter. Ihre allgemeine Lösung ist

$$u_0(t, s) = c_1(s) \sin t + c_2(s) \cos t. \quad (3.45)$$

Aus den Randbedingungen (3.44) ergibt sich

$$0 = u_0(0, 0) = c_2(0), \quad 1 = \partial_t u_0(0, 0) = c_1(0). \quad (3.46)$$

Wir sind noch frei in der Wahl von $c_1(s)$ und $c_2(s)$. Das werden wir bei den $O(\varepsilon)$ -Termen ausnutzen. Zunächst setzen wir $z(t, s) = (u_0 + \varepsilon u_1)(t, s)$ in (3.39) ein und erhalten (Argumente auf der rechten Seite sind $(t, \varepsilon^\alpha t)$)

$$\begin{aligned} w''(t) + \varepsilon w'(t) + w(t) \\ = \partial_{tt} u_0 + u_0 + \varepsilon(\partial_{tt} u_1 + \partial_t u_0 + u_1) + 2\varepsilon^\alpha \partial_{ts} u_0 + O(\varepsilon^{2\alpha}) + O(\varepsilon^{1+\alpha}). \end{aligned} \quad (3.47)$$

Nullsetzen des Terms $\partial_{tt}u_1 + \partial_t u_0 + u_1$ würde eine für $t \rightarrow \infty$ unbeschränkte Näherung $u_{\varepsilon,1}$ erzeugen, analog zu (3.34). Wir nutzen nun die zweite Skala aus und wählen $\alpha = 1$. Nullsetzen des $O(\varepsilon)$ -Terms in (3.47) führt dann auf

$$\begin{aligned} (\partial_{tt}u_1 + u_1)(t, s) &= -(\partial_t u_0 + 2\partial_{ts}u_0)(t, s) \\ &= -(c_1(s) + 2c_1'(s)) \cos t + (c_2(s) + 2c_2'(s)) \sin t. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Wie in (3.43) können wir s als Parameter in einer gewöhnlichen Differentialgleichung in t auffassen. Damit deren Lösung für beliebige t beschränkt bleibt, verlangen wir, dass die rechte Seite verschwindet, also

$$c_1(s) + 2c_1'(s) = 0, \quad c_2(s) + 2c_2'(s) = 0. \quad (3.49)$$

Berücksichtigen wir die Randbedingungen (3.46), so ergibt sich

$$c_2(s) = 0, \quad c_1(s) = e^{-\frac{s}{2}}. \quad (3.50)$$

Insgesamt erhalten wir nun

$$u_{\varepsilon,0}(t) = u_0(t, \varepsilon t) = c_1(\varepsilon t) \sin t = e^{-\frac{\varepsilon t}{2}} \sin t, \quad (3.51)$$

also eine erheblich bessere Näherung an die exakte Lösung

$$u_\varepsilon(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}}} e^{-\frac{\varepsilon t}{2}} \sin \left(t \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}} \right)$$

als die Näherungen $\sin t$ oder $(1 - \varepsilon t/2) \sin t$ aus dem Ein-Skalen-Ansatz. Man kann nachrechnen, z.B. mit Taylorentwicklung, dass

$$\sup_{0 \leq t \leq T/\varepsilon} |u_\varepsilon(t) - u_{\varepsilon,0}(t)| = O(\varepsilon) \quad (3.52)$$

gilt für jedes feste $T > 0$.

Homogenisierung. Wir betrachten als Beispiel das Randwertproblem

$$(a^\varepsilon(x)u')' = f(x), \quad x \in (0, 1), \quad (3.53)$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0. \quad (3.54)$$

Gegeben ist die rechte Seite $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ sowie der Koeffizient $a^\varepsilon : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$. Gesucht ist eine Funktion $u_\varepsilon : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, welche die Randbedingungen (3.54) erfüllt, und für die gilt

$$f(x) = (a^\varepsilon \cdot u'_\varepsilon)'(x) = (a^\varepsilon)'(x)u'_\varepsilon(x) + a^\varepsilon(x)u''_\varepsilon(x), \quad x \in (0, 1).$$

Die Koeffizientenfunktion hat die Form

$$a^\varepsilon(x) = a \left(\frac{x}{\varepsilon} \right), \quad (3.55)$$

wobei $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine gegebene periodische Funktion mit der Periode $\ell > 0$ ist,

$$a(y + \ell) = a(y), \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}, \quad (3.56)$$

außerdem soll $a > 0$ gelten. Das Randwertproblem beschreibt eine eindimensionale Gleichgewichtssituation, wie sie in unterschiedlichen Anwendungen auftreten kann, z.B. in der Mechanik als Kräftegleichgewicht. Wir stellen uns vor, dass die Funktionen f und a in der Skala $O(1)$ "vernünftig skaliert" sind. Gemäß (3.55) variiert der Koeffizient a^ε dann auf der Skala $O(\varepsilon)$. Falls ε klein ist, oszilliert a^ε stark im Intervall $(0, 1)$. Dadurch wird die Lösung von (3.53) schwierig bzw. aufwendig. Es kann sein, dass man eher an einem gemittelten Verhalten der Lösung interessiert ist als an der genauen Form der einzelnen Oszillationen. Man würde dann gerne das Problem (3.53) durch ein Problem mit wenig oder überhaupt nicht oszillierenden Koeffizienten ersetzen, dessen Lösung eine Näherung an die Lösung von (3.53) ist.

Wir machen wieder einen Zwei-Skalen-Ansatz und betrachten Funktionen der Form

$$w(x) = z\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right). \quad (3.57)$$

Für die auftretenden Ableitungen gilt

$$\begin{aligned} w'(x) &= (\partial_x z + \varepsilon^{-1} \partial_y z)\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right), \\ (a^\varepsilon)'(x) &= \varepsilon^{-1} a'\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \\ w''(x) &= (\partial_{xx} z + 2\varepsilon^{-1} \partial_{xy} z + \varepsilon^{-2} \partial_{yy} z)\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right). \end{aligned}$$

Wir setzen eine solche Funktion in die linke Seite von (3.53) ein und erhalten

$$\begin{aligned} (a^\varepsilon \cdot w')'(x) &= \varepsilon^{-1} a' \cdot (\partial_x z + \varepsilon^{-1} \partial_y z) + a \cdot (\partial_{xx} z + 2\varepsilon^{-1} \partial_{xy} z + \varepsilon^{-2} \partial_{yy} z) \\ &= \varepsilon^{-2} (a' \partial_y z + a \partial_{yy} z) + \varepsilon^{-1} (a' \partial_x z + 2a \partial_{xy} z) + a \partial_{xx} z, \end{aligned}$$

hier bei haben die Funktionen auf der rechten Seite die Argumente x bzw. $(x, x/\varepsilon)$. Zur Konstruktion von Näherungen u_ε betrachten wir zunächst diese Argumente unabhängig voneinander und definieren den Differentialoperator

$$Lz = \varepsilon^{-2} L_0 z + \varepsilon^{-1} L_1 z + L_2 z \quad (3.58)$$

mit

$$\begin{aligned} (L_0 z)(x, y) &= a'(y) \partial_y z(x, y) + a(y) \partial_{yy} z(x, y) \\ &= (\partial_y (a \partial_y z))(x, y), \end{aligned} \quad (3.59)$$

und

$$\begin{aligned} (L_1 z)(x, y) &= a'(y) \partial_x z(x, y) + 2a(y) \partial_{xy} z(x, y) \\ &= (\partial_y (a \partial_x z))(x, y) + a(y) \partial_{xy} z(x, y), \end{aligned} \quad (3.60)$$

sowie

$$(L_2 z)(x, y) = a(y) \partial_{xx} z(x, y). \quad (3.61)$$

Für Funktionen $w(x) = z(x, x/\varepsilon)$ gilt dann

$$(a^\varepsilon \cdot w')'(x) = (Lz)\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right). \quad (3.62)$$

Um eine Näherung für die Lösung u_ε von (3.53) zu gewinnen, setzen wir nun an

$$z(x, y) = u_0(x, y) + \varepsilon u_1(x, y) + \varepsilon^2 u_2(x, y) \quad (3.63)$$

und leiten Bedingungen für u_0, u_1, u_2 her durch Vergleich der ε -Koeffizienten in der Gleichung

$$(Lz)(x, y) = f(x). \quad (3.64)$$

Wir verlangen dabei, dass u_0, u_1, u_2 und damit auch z periodisch sind in y mit Periode ℓ ,

$$u_k(x, y + \ell) = u_k(x, y), \quad \text{für alle } k, x, y. \quad (3.65)$$

Wir setzen (3.63) in (3.64) ein und sortieren nach Potenzen von ε ,

$$\varepsilon^{-2} L_0 u_0 + \varepsilon^{-1} (L_0 u_1 + L_1 u_0) + (L_0 u_2 + L_1 u_1 + L_2 u_0) + \varepsilon(\dots) + \varepsilon^2(\dots) = f. \quad (3.66)$$

Die Terme mit ε und ε^2 sind für die Bestimmung von u_0 irrelevant, wir werden sie im Folgenden ignorieren. Nullsetzen des Koeffizienten von ε^{-2} führt auf

$$(\partial_y(a\partial_y u_0))(x, y) = 0. \quad (3.67)$$

Es handelt sich um eine gewöhnliche Differentialgleichung in y , mit x als Parameter. Deren allgemeine Lösung hat für jedes feste x zwei freie Parameter c_0, d_0 und ist gegeben durch

$$u_0(x, y) = c_0(x) + d_0(x) \int_0^y \frac{1}{a(s)} ds. \quad (3.68)$$

Die Forderung (3.65) nach Periodizität von u_0 ergibt

$$0 = u_0(x, \ell) - u_0(x, 0) = d_0(x) \int_0^\ell \frac{1}{a(s)} ds,$$

und wegen $a > 0$ muss $d_0 = 0$ gelten. Die Funktion u_0 hängt also nicht von y ab, so dass wir den Ansatz (3.63) vereinfachen können zu

$$z(x, y) = u_0(x) + \varepsilon u_1(x, y) + \varepsilon^2 u_2(x, y). \quad (3.69)$$

Nullsetzen des Koeffizienten von ε^{-1} in (3.66) führt auf (beachte $\partial_y u_0 = 0$)

$$(\partial_y(a\partial_y u_1))(x, y) = (L_0 u_1)(x, y) = -(L_1 u_0)(x, y) = -a'(y)u_0'(x). \quad (3.70)$$

Die allgemeine Lösung von (3.70) ist

$$u_1(x, y) = c_1(x) + d_1(x) \int_0^y \frac{1}{a(s)} ds - y u_0'(x). \quad (3.71)$$

Die Forderung (3.65) nach Periodizität von u_1 ergibt

$$0 = u_1(x, \ell) - u_1(x, 0) = d_1(x) \int_0^\ell \frac{1}{a(s)} ds - \ell u_0'(x).$$

Auflösen nach u_0' liefert

$$u_0'(x) = d_1(x) \frac{1}{\ell} \int_0^\ell \frac{1}{a(s)} ds,$$

also

$$a_0 u_0'(x) = d_1(x), \quad a_0 := \left(\frac{1}{\ell} \int_0^\ell \frac{1}{a(s)} ds \right)^{-1}. \quad (3.72)$$

Nullsetzen des Koeffizienten von ε^0 in (3.66) führt auf

$$L_0 u_2 = -L_1 u_1 - L_2 u_0 + f. \quad (3.73)$$

Aus (3.71) folgt

$$\partial_y u_1(x, y) = d_1(x) \cdot \frac{1}{a(y)} - u_0'(x),$$

und weiter

$$L_1 u_1 = \partial_y(a \partial_x u_1) + a(y) \partial_{xy} u_1 = \partial_y(a \partial_x u_1) + d_1'(x) - a(y) u_0''(x),$$

also

$$(L_0 u_2)(x, y) = f(x) - d_1'(x) - \partial_y(a \partial_x u_1). \quad (3.74)$$

Die Periodizitätsbedingung liefert

$$\begin{aligned} \int_0^\ell \partial_y(a(y) \partial_x u_1(x, y)) dy &= a(\ell) \partial_x u_1(x, \ell) - a(0) \partial_x u_1(x, 0) = 0, \\ \int_0^\ell (L_0 u_2)(x, y) dy &= \int_0^\ell \partial_y(a(y) \partial_y u_2(x, y)) dy = 0, \end{aligned}$$

also folgt, wenn wir (3.74) über y (von 0 bis ℓ) integrieren,

$$d_1'(x) = f(x), \quad \text{für alle } x. \quad (3.75)$$

Für die Funktion u_0 gilt nun wegen (3.72) und (3.75)

$$(a_0 u_0')'(x) = a_0 u_0''(x) = d_1'(x) = f(x). \quad (3.76)$$

Wir interpretieren u_0 als Näherung für die Lösung u_ε von (3.53) und fordern entsprechend die Randbedingungen

$$u_0(0) = u_0(1) = 0, \quad (3.77)$$

Wir haben also Problem (3.53) approximiert durch ein Randwertproblem mit dem konstanten Koeffizienten a_0 , nämlich (3.76), (3.77). Dieser Koeffizient a_0 wird gewonnen als das sogenannte **harmonische Mittel**

$$a_0 = \left(\frac{1}{\ell} \int_0^\ell \frac{1}{a(s)} ds \right)^{-1}. \quad (3.78)$$

Eine naive Mittelwertbildung $(1/\ell) \int_0^\ell a(s) ds$ hätte zu einem falschen Ergebnis geführt.

Die Frage, wie gut auf solche Weise gewonnene Näherungen die Lösung u_ε von (3.53) approximieren, wird in der Theorie der Homogenisierung behandelt.

4 Modelle im Kontinuum

Kontinuierliche Zeit. Wir betrachten eine zeitabhängige Größe $\varphi(t) \in \mathbb{R}^d$ für $t \geq t_0$ zu diskreten Zeiten $t_0 < t_1 < \dots$ und setzen $\varphi_k = \varphi(t_k)$. Sei $t > t_0$. Die **diskrete Bilanzgleichung**

$$\varphi(t) - \varphi(t_0) = \sum_{k=0}^{K-1} (\varphi_{k+1} - \varphi_k), \quad \text{falls } t = t_K, \quad (4.1)$$

besagt, dass die Gesamtänderung gleich der Summe der einzelnen Änderungen ist. Die **kontinuierliche Bilanzgleichung**

$$\varphi(t) - \varphi(t_0) = \int_{t_0}^t \varphi'(s) ds \quad (4.2)$$

besagt, dass die Gesamtänderung gleich dem (zeitlichen) Integral über die Änderungsrate ist.

Beispiel 4.1 (Verzinsung)

Sei $\varphi(t)$ das Kapital zum Zeitpunkt t , z der Jahreszinssatz, $a = z/100$. Die jährliche Verzinsung bei festem Zinssatz z wird modelliert durch $t_k = k$, $\varphi_{k+1} = (1+a)\varphi_k$, also ist das Kapital nach t Jahren, $t \in \mathbb{N}$, angewachsen auf

$$\varphi(t) = (1+a)^t \varphi_0.$$

Bei einer Verzinsung in Zeitintervallen der Länge $1/n$ ist $t_k = k/n$ und der Gesamtbetrag nach t Jahren gleich

$$\varphi^n(t) = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{nt} \varphi_0.$$

Im Grenzwert $n \rightarrow \infty$ ("kontinuierliche Verzinsung") gilt

$$\varphi^n(t) = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{a}at} \varphi_0 \rightarrow e^{at} =: \varphi_\infty(t). \quad (4.3)$$

Die Funktion φ_∞ löst das Anfangswertproblem

$$\varphi' = a\varphi, \quad \varphi(0) = \varphi_0, \quad (4.4)$$

oder in Integralform

$$\varphi_\infty(t) - \varphi_\infty(0) = \int_0^t a\varphi(s) ds.$$

Der Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ kann als Modellvereinfachung angesehen werden. Außerdem werden, im Gegensatz zur Realität, beliebige reelle Zahlen als Werte von $\varphi(t)$ zugelassen. Die diskrete Bilanzgleichung gibt die einzelnen Verzinsungsschritte wieder, die kontinuierliche Gleichung ersetzt sie durch eine kontinuierliche Verzinsung.

Beispiel 4.2 (Populationswachstum)

Sei $\varphi(t)$ die Größe (= Anzahl der Individuen) einer Population zum Zeitpunkt t . Sie hat

zunächst diskrete Werte $\varphi(t) \in \mathbb{N}$, die sich zu diskreten Zeiten t_k durch Geburt bzw. Tod ändern. Dieser Vorgang kann stochastisch modelliert werden, was wir hier nicht tun. Eine Modellierung als Anfangswertproblem führt auf ($t_0 = 0$ gesetzt)

$$\varphi' = f(t, \varphi), \quad \varphi(0) = \varphi_0. \quad (4.5)$$

Das ursprüngliche Modell stammt von Malthus (1798),

$$\varphi' = a\varphi, \quad \text{also} \quad \varphi(t) = \varphi_0 e^{at}, \quad (4.6)$$

mit einer Konstanten $a > 0$. Dieses Modell sagt exponentielles Wachstum voraus. Ein weiteres Modell stammt von Verhulst (1838, 1845),

$$\varphi' = a\varphi \cdot \left(1 - \frac{\varphi}{b}\right), \quad (4.7)$$

mit einem weiteren Parameter $b > 0$. Dieses hat die Lösung

$$\varphi(t) = \frac{\varphi_0 b e^{at}}{b + \varphi_0 (e^{at} - 1)} = \frac{\varphi_0 b}{b e^{-at} + \varphi_0 (1 - e^{-at})} \quad (4.8)$$

mit der Eigenschaft $\varphi(t) \rightarrow b$ für $t \rightarrow \infty$. Auch hier stellt der Übergang zur kontinuierlichen Gleichung einen nichttrivialen Modellierungsschritt dar.

Beispiel 4.3 (Bewegung)

Sei $\varphi(t) \in \mathbb{R}^d$ die Position eines Teilchens zum Zeitpunkt t . Mit $\varphi_k = \varphi(t_k)$, $t = t_K$ gilt wieder

$$\varphi(t) - \varphi(t_0) = \sum_{k=0}^{K-1} (\varphi_{k+1} - \varphi_k) = \int_{t_0}^t \varphi'(s) ds. \quad (4.9)$$

In Situationen aus den Natur- und Ingenieurwissenschaften ist die Vorstellung der Bewegung als kontinuierlich in der Zeit meistens die natürlichere. Der Vektor $\varphi'(t)$ (Änderungsrate des Orts) ist die Geschwindigkeit des Teilchens.

Kontinuierlicher Ort. Als Beispiel betrachten wir ein poröses Material, also einen Festkörper mit Hohlräumen (auch Poren genannt), etwa Sand, Geröll, zelluläres Gewebe. Ob die Hohlräume leer oder mit einem Gas (z.B. Luft) oder mit Flüssigkeit gefüllt sind, spielt jetzt keine Rolle. Sei $G \subset \mathbb{R}^d$ der betrachtete Bereich, $P \subset G$ der Hohlraum. Je nach Dimension des Modells ist $d = 1, 2, 3$ möglich. Sei $x \in G$ ein Ortspunkt,

$$W_h(x) = \left\{ z : \|z - x\|_\infty \leq \frac{h}{2} \right\} \quad (4.10)$$

ein ganz in G liegender Würfel mit Mittelpunkt x und Seitenlänge h . Wir definieren

$$\varphi_h(x) = \frac{\text{vol}_d(P \cap W_h(x))}{\text{vol}_d(W_h(x))} = h^{-d} \text{vol}_d(P \cap W_h(x)). \quad (4.11)$$

Die **Grundannahme** für die Modellierung einer solchen (oder auch anders definierten) Variablen φ_h als ortskontinuierlich lautet:

Es gibt einen Bereich von Werten für h , in dem $\varphi_h(x)$ als Funktion von h näherungsweise konstant ist.

Die Grundannahme besagt, dass in diesem Bereich eine Mittelung gemäß (4.11) eine sinnvolle Näherung an die tatsächlichen Verhältnisse darstellt. Die Werte von h aus diesem Bereich sind typischerweise groß im Vergleich zur Feinstruktur des porösen Materials. Man verlangt außerdem, dass dieser Bereich auch Werte von h umfasst, die klein sind gegenüber der Größe von G . Dadurch wird es sinnvoll, eine Abhängigkeit von x zu betrachten. Man modelliert nun die Porenstruktur mit einer Funktion $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}$, die in etwa dem Wert aus (4.11) entsprechen soll. Diese Funktion heißt die **Porosität** des Materials.

Wir schreiben (4.11) äquivalent um zu

$$\text{vol}_d(P \cap W_h(x)) = \varphi_h(x) \cdot h^d = \varphi_h(x) \text{vol}_d(W_h(x)). \quad (4.12)$$

Im Kontinuumsmodell bedeutet das, dass

$$\int_U \varphi(x) dx \quad (4.13)$$

eine sinnvolle Näherung für das tatsächliche Hohlraumvolumen $\text{vol}_d(P \cap U)$ darstellt. Anders ausgedrückt ist die Funktion φ **Dichtefunktion** eines Maßes, welches das durch das tatsächliche Hohlraumvolumen definierte Maß $\nu(U) = \text{vol}_d(P \cap U)$ approximiert.

Ein anderes Beispiel einer ortskontinuierlichen Variablen ist die **Massendichte**. Wir betrachten einen materiellen Körper als Bereich $G \subset \mathbb{R}^d$. Der Würfel $W_h(x)$ gemäß (4.10) habe die Masse $m(W_h(x))$. Ihr gemittelter Wert ist

$$\rho_h(x) = \frac{m(W_h(x))}{\text{vol}_d(W_h(x))}. \quad (4.14)$$

In gleicher Weise wie oben führt man die kontinuierliche Massendichte $\rho : G \rightarrow \mathbb{R}$ ein. Die Masse eines Teilbereiches $U \subset G$ ist in diesem Modell

$$m(U) = \int_U \rho(x) dx. \quad (4.15)$$

Zeit und Ort kontinuierlich. In diesem Fall ist die Dichtefunktion zeitabhängig, also " $\varphi = \varphi(t, x)$ ". Sei dadurch eine Größe der Dimension \mathcal{G} beschrieben. Die Dichtefunktion φ hat die Dimension $\mathcal{G}\mathcal{L}^{-d}$ mit der Raumdimension d . Die in einem Bereich $U \subset \mathbb{R}^d$ befindliche Gesamtmenge der Größe zum Zeitpunkt t ist

$$\int_U \varphi(t, x) dx, \quad \text{mit der Dimension } \mathcal{G}. \quad (4.16)$$

Ziel der folgenden Überlegungen ist, eine allgemeine Bilanzgleichung herzuleiten für $d = 1$, also in einem Intervall $U = (a, b)$. Wir nehmen an, dass die Gesamtmenge der Größe, die einen gegebenen Ortspunkt x in einem Zeitintervall $[t, \tau]$ passiert, gegeben ist durch

$$\int_t^\tau q(s, x) ds. \quad (4.17)$$

Die Funktion q heißt **Fluss**, sie ist ebenfalls eine Dichtefunktion. Sie stellt die zeitliche Rate dar, mit der die Größe den Punkt x in positive x -Richtung passiert, und hat die Dimension \mathcal{GT}^{-1} . Die Bilanzgleichung lautet

$$\int_a^b \varphi(\tau, x) dx - \int_a^b \varphi(t, x) dx = - \int_t^\tau q(s, b) ds + \int_t^\tau q(s, a) ds. \quad (4.18)$$

Sie bedeutet, dass die Änderung der Gesamtmenge der Größe im Intervall (a, b) vom Zeitpunkt t bis zum Zeitpunkt τ gegeben ist durch die Gesamtmenge, die im Zeitintervall $[t, \tau]$ durch die Randpunkte fließt.

Wir nehmen an, dass die Bilanzgleichung (4.18) für jedes Ortsintervall (a, b) und jedes Zeitintervall $[t, \tau]$ gilt. Division durch $\tau - t$ ergibt

$$\int_a^b \frac{\varphi(\tau, x) - \varphi(t, x)}{\tau - t} dx = \frac{1}{\tau - t} \int_t^\tau -q(s, b) + q(s, a) ds. \quad (4.19)$$

Grenzübergang $\tau \rightarrow t$ ergibt

$$\int_a^b \partial_t \varphi(t, x) dx = -q(t, b) + q(t, a). \quad (4.20)$$

Entsprechend führt Division durch $b - a$ und Grenzübergang $b \rightarrow a$ auf

$$\partial_t \varphi(t, a) = -\partial_x q(t, a).$$

Da die Gleichung (4.18) für alle interessierenden Intervalle (a, b) und $[t, \tau]$ gelten soll, folgt insgesamt

$$\partial_t \varphi(t, x) + \partial_x q(t, x) = 0, \quad \text{für alle } t, x. \quad (4.21)$$

Es handelt sich hier um eine partielle Differentialgleichung für die beiden Funktionen φ und q . Da diese Gleichung beliebige Bilanzen beschreiben soll, überrascht es nicht, dass durch sie die Funktionen φ und q noch nicht festgelegt sind. Um den konkreten Vorgang zu charakterisieren, braucht man eine weitere Modellannahme, etwa eine Gleichung der Form

$$q = Q(\varphi), \quad \text{das heißt, } q(t, x) = Q(\varphi(t, x)), \quad (4.22)$$

mit einer gegebenen Funktion Q . (Auch andere Formen wären möglich, z.B. $q = Q(\nabla \varphi)$.) Eine solche Gleichung heißt **konstitutive Gleichung**. Setzt man (4.22) in (4.21) ein, so erhält man

$$\partial_t \varphi(t, x) + Q'(\varphi(t, x)) \partial_x \varphi(t, x) = 0. \quad (4.23)$$

Als Beispiel betrachten wir ein Modell für den Verkehrsfluss. Das Intervall (a, b) entspricht einem Straßenstück. Die modellierte Größe ist die Anzahl der Autos, so dass also φ die zeitabhängige Ortsdichte der Anzahl der Autos darstellt. Wir interpretieren

$$\int_a^b \varphi(t, x) dx = \text{Anzahl der Autos im Abschnitt } (a, b) \text{ zum Zeitpunkt } t,$$

und

$$\int_t^\tau q(s, x) ds$$

als die Anzahl der Autos, die den Punkt x im Zeitintervall $[t, \tau]$ passieren, so dass $q(x, t)$ die Rate (Anzahl pro Zeiteinheit) zum Zeitpunkt t darstellt.

Kinematik. Die sogenannte Kinematik beschäftigt sich mit der zeitlichen Veränderung kontinuierlich modellierter Größen. Zugrunde liegt die Vorstellung, dass die Größen an materielle Punkte (“Teilchen”) gekoppelt sind, die sich im Raum bewegen. Man geht aus von einer Referenzkonfiguration $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Ein materieller Punkt befinde sich zum Zeitpunkt t_0 im Ortspunkt $X \in \Omega$. Seine Position zum Zeitpunkt t wird beschrieben durch eine Funktion

$$t \mapsto x(t, X).$$

Generell wird über diese Funktion Folgendes vorausgesetzt, jeweils für alle $X \in \Omega$ und alle interessierenden Zeiten t .

$$x(t_0, X) = X. \quad (4.24)$$

$$(t, X) \mapsto x(t, X) \text{ ist stetig differenzierbar.} \quad (4.25)$$

$$X \mapsto x(t, X) \text{ ist bijektiv von } \Omega \text{ nach } x(t, \Omega), \text{ für festes } t. \quad (4.26)$$

$$J(t, X) = \det \partial_X x(t, X) > 0. \quad (4.27)$$

Dabei ist $\partial_X x(t, X) \in \mathbb{R}^{(d,d)}$ die Funktionalmatrix bezüglich der Ableitung nach X ,

$$(\partial_X x(t, X))_{jk} = \partial_{X_k} x_j(t, X).$$

Die Werte einer Größe können angegeben werden sowohl als $\varphi(t, x)$ als auch als $\Phi(t, X)$, nämlich

- $\varphi(t, x)$ für den materiellen Punkt, der sich zum Zeitpunkt t am Ort x befindet (sogenannte **Euler-Koordinaten**),
- $\Phi(t, X)$ für den materiellen Punkt, der ursprünglich (in der Referenzkonfiguration) am Punkt X war, zum Zeitpunkt t (sogenannte **Lagrange-Koordinaten**).

Da mit φ und Φ dieselbe Größe beschrieben werden soll, muss gelten

$$\varphi(t, x(t, X)) = \Phi(t, X). \quad (4.28)$$

Aus der Kettenregel folgt

$$\partial_t \Phi(t, X) = \partial_t \varphi(t, x(t, X)) + \nabla_x \varphi(t, x(t, X)) \cdot \partial_t x(t, X). \quad (4.29)$$

Dieser Ausdruck beschreibt die Änderung der Größe in einem (durch seinen Ausgangspunkt X charakterisierten) sich bewegenden materiellen Punkt zum Zeitpunkt t .

Die Geschwindigkeit des materiellen Punktes X zum Zeitpunkt t ist in Lagrange-Koordinaten

$$V(t, X) = \partial_t x(t, X), \quad (4.30)$$

der Tangentenvektor an die Kurve $t \mapsto x(t, X)$. In Euler-Koordinaten wird er zu

$$v(t, x) = V(t, X(t, x)), \quad v(t, x(t, X)) = V(t, X). \quad (4.31)$$

Die Abbildung $t \mapsto X(t, x)$ gibt an, von welchem Punkt der Referenzkonfiguration der materielle Punkt “gestartet” ist, der sich zum Zeitpunkt t am Ortspunkt x befindet. Es gilt

$$X = X(t, x(t, X)), \quad \text{für alle } X \in \Omega.$$

Drücken wir (4.29) in Euler-Koordinaten aus, so erhalten wir die sogenannte **materielle Ableitung**

$$D_t \varphi(t, x) := \partial_t \varphi(t, x) + \nabla_x \varphi(t, x) \cdot v(t, x). \quad (4.32)$$

Sie beschreibt ebenfalls die Änderung der Größe in einem sich bewegenden materiellen Punkt, nämlich demjenigen, der sich zum Zeitpunkt t im Ort x befindet.

Wir setzen

$$\Omega(t) = x(t, \Omega) = \{x(t, X) : X \in \Omega\}. \quad (4.33)$$

Gemäß der Substitutionsformel für die mehrdimensionale Integration gilt

$$\text{vol}_d(\Omega(t)) = \int_{\Omega(t)} 1 \, dx = \int_{\Omega} J(t, X) \, dX. \quad (4.34)$$

Sei nun $\varphi(t, \cdot)$ die Volumendichte einer Größe. Deren Gesamtmenge im Volumen $\Omega(t)$ ist gegeben durch

$$\int_{\Omega(t)} \varphi(t, x) \, dx = \int_{\Omega} \varphi(t, x(t, X)) J(t, X) \, dX = \int_{\Omega} \Phi(t, X) J(t, X) \, dX. \quad (4.35)$$

Um die zeitliche Änderung dieser Gesamtmenge im sich ebenfalls ändernden Volumen $\Omega(t)$ zu berechnen, benötigen wir die zeitliche Ableitung $\partial_t J(t, X)$ der Funktionaldeterminante.

Lemma 4.4 *Sei I offenes Intervall, $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{(d,d)}$ stetig differenzierbar, sowie $A(t)$ invertierbar für alle $t \in I$. Dann gilt*

$$\frac{d}{dt} \det A(t) = \text{spur} (A(t)^{-1} A'(t)) \det A(t). \quad (4.36)$$

Beweis: Wir berechnen zunächst die Ableitung von $\det : \mathbb{R}^{(d,d)} \rightarrow \mathbb{R}$ für eine feste Matrix A . Aus der Linearen Algebra kennen wir die Identität

$$(\det A)I = A \cdot \hat{A}, \quad \hat{A} = (\det A)A^{-1}, \quad (4.37)$$

wobei \hat{A} die Adjunkte von A ist mit den Elementen

$$\hat{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \det A^{(ji)}, \quad (4.38)$$

wobei $A^{(ji)}$ aus A durch Streichen der j -ten Zeile und i -ten Spalte entsteht. Aus (4.37) folgt für die Diagonalelemente von $A\hat{A}$

$$\det A = \sum_{k=1}^d a_{ik} \hat{a}_{ki}, \quad 1 \leq i \leq d. \quad (4.39)$$

Wegen (4.38) sind die Elemente \hat{a}_{ki} von allen Elementen a_{ij} der i -ten Zeile von A unabhängig. Es folgt

$$\partial_{a_{ij}} (\det A) = \hat{a}_{ji}, \quad 1 \leq i, j \leq d, \quad (4.40)$$

und weiter

$$\begin{aligned} ((D \det)(A))(H) &= \sum_{i,j=1}^d \partial_{a_{ij}}(\det A) h_{ij} = \sum_{i,j=1}^d \hat{a}_{ji} h_{ij} = \sum_{j=1}^d \sum_{i=1}^d \hat{a}_{ji} h_{ij} \\ &= \text{spur}(\hat{A}H), \quad \text{für alle } H \in \mathbb{R}^{(d,d)}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Aus der Kettenregel folgt nun

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \det A(t) &= ((D \det)(A(t)))A'(t) = \text{spur}(\hat{A}(t)A'(t)) \\ &= \text{spur}(A(t)^{-1}A'(t)) \det A(t). \end{aligned} \quad (4.42)$$

□

Satz 4.5 (Eulersche Entwicklungsformel)

Es gelte (4.24) – (4.27), sei außerdem $(t, X) \mapsto \partial_t x(t, X)$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\partial_t J(t, X) = (\text{div } v)(t, x(t, X))J(t, X). \quad (4.43)$$

Beweis: Wir wenden Lemma 4.4 an auf

$$A(t) = \partial_X x(t, X).$$

Für die Elemente von $A(t)$ gilt

$$\begin{aligned} a'_{ij}(t) &= \partial_t \partial_{X_j} x_i(t, X) = \partial_{X_j} \partial_t x_i(t, X) = \partial_{X_j} V_i(t, X) = \partial_{X_j} v_i(t, x(t, X)) \\ &= \sum_{k=1}^d \partial_k v_i(t, x(t, X)) \partial_{X_j} x_k(t, X). \end{aligned} \quad (4.44)$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \text{spur}(A(t)^{-1}A'(t)) &= \sum_{i,j=1}^d (A^{-1}(t))_{ji} a'_{ij}(t) = \sum_{i,k=1}^d \sum_{j=1}^d (A^{-1}(t))_{ji} \partial_k v_i(t, x(t, X)) a_{kj}(t) \\ &= \sum_{i,k=1}^d \delta_{ki} \partial_k v_i(t, x(t, X)) = (\text{div } v)(t, x(t, X)), \end{aligned} \quad (4.45)$$

und weiter

$$\partial_t J(t, X) = \frac{d}{dt} \det A(t) = \text{spur}(A(t)^{-1}A'(t)) \det A(t) = (\text{div } v)(t, x(t, X))J(t, X).$$

□

Folgerung 4.6 (Volumenänderung)

Für die Änderung des Volumens von $\Omega(t)$ gilt

$$\frac{d}{dt} \text{vol } \Omega(t) = \int_{\Omega(t)} \text{div } v(t, x) \, dx. \quad (4.46)$$

Beweis: Wir verwenden die Substitutionsformel der mehrdimensionalen Integration. Es gilt

$$\text{vol } \Omega(t) = \int_{\Omega} J(t, X) dX,$$

also

$$\frac{d}{dt} \text{vol } \Omega(t) = \int_{\Omega} (\text{div } v)(t, x(t, X)) J(t, X) dX = \int_{\Omega(t)} \text{div } v(t, x) dx.$$

□

Wir können nun die zeitliche Änderung der Gesamtmenge einer Größe φ in einem zeitabhängigen Volumen $\Omega(t)$ berechnen.

Satz 4.7 (Transporttheorem von Reynolds)

Es gelte (4.24) – (4.27), seien außerdem $(t, X) \mapsto \partial_t x(t, X)$ sowie $(t, x) \mapsto \varphi(t, x)$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \varphi(t, x) dx = \int_{\Omega(t)} \partial_t \varphi(t, x) + (\text{div } (\varphi v))(t, x) dx. \quad (4.47)$$

Beweis: Aus Satz 4.5 folgt unter Verwendung der Kettenregel und der Substitutionsregel

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \varphi(t, x) dx &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \varphi(t, x(t, X)) J(t, X) dX \\ &= \int_{\Omega} \left[\partial_t \varphi(t, x(t, X)) + \sum_{k=1}^d \partial_k \varphi(t, x(t, X)) V_k(t, X) \right. \\ &\quad \left. + \varphi(t, x(t, X)) (\text{div } v)(t, x(t, X)) \right] J(t, X) dX \\ &= \int_{\Omega(t)} \partial_t \varphi(t, x) + (\text{div } (\varphi v))(t, x) dx. \end{aligned}$$

□

Als Beispiel für die Anwendung des Transporttheorems betrachten wir die Bilanzgleichung für die Masse. In diesem Fall ist $\varphi = \rho$ die Massendichte, sie hat die Dimension $\mathcal{M}\mathcal{L}^{-d}$. Wir nehmen an, dass das Gesetz der **Massenerhaltung** gilt, das heißt, dass die in $\Omega(t)$ sich befindende Gesamtmasse konstant ist als Funktion von t ,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho(t, x) dx = 0. \quad (4.48)$$

Aus dem Transporttheorem folgt

$$\int_{\Omega(t)} \partial_t \rho(t, x) + (\text{div } (\rho v))(t, x) dx = 0. \quad (4.49)$$

Sei nun $U \subset \Omega(t)$ offen, wir setzen

$$\Omega_U = X(t, U) = \{X : x(t, X) \in U\}.$$

Wenden wir das Transporttheorem für Ω_U anstelle von Ω an, so erhalten wir

$$\int_U \partial_t \rho(t, x) + (\operatorname{div}(\rho v))(t, x) dx = 0. \quad (4.50)$$

Da $U \subset \Omega(t)$ eine beliebige offene Menge ist, folgt (etwa dann, wenn $\partial_t \rho$ und $\operatorname{div}(\rho v)$ stetig sind)

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho v) = 0 \quad (4.51)$$

in $\Omega(t)$. Diese Gleichung heißt **Kontinuitätsgleichung**.

Erhaltungsgesetze, Bilanzgleichungen. Betrachten wir statt der Massendichte andere Größen φ , so spielen in der Regel noch weitere Mechanismen eine Rolle. Die Ausbreitung von Wärme erfolgt nicht nur durch Transport von materiellen Teilchen, sondern auch durch Diffusion. Weiterhin entsteht Wärme oft durch Umwandlung aus anderen Energieformen (z.B. aus mechanischer oder elektromagnetischer Energie). Analoges gilt für mechanische Größen wie Impuls oder Kraft. Das hat zur Folge, dass wir den Fluss solcher Größen durch eine vorgegebene $(d-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit M im \mathbb{R}^d betrachten müssen.

Wir klären zunächst, wie man sich den **Fluss** einer Größe vorzustellen hat. Nehmen wir an, eine Größe “strömt” im \mathbb{R}^d in eine feste Richtung mit in Ort und Zeit konstanter Intensität. Der zugehörige Fluss wird beschrieben durch einen Vektor $q \in \mathbb{R}^d$. Dessen Richtung

$$\frac{q}{|q|}, \quad |q| = \|q\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^d q_i^2}.$$

gibt die Richtung des Flusses an, dessen Länge $|q|$ die Menge (gemessen in der Dimension \mathcal{G} der Größe), welche pro Zeiteinheit durch einen senkrecht auf der Flussrichtung stehenden $(d-1)$ -dimensionalen Einheitswürfel (Quadrat für $d=3$, Intervall für $d=2$) strömt. Die Dimension eines Flusses ist also $\mathcal{G}\mathcal{T}^{-1}\mathcal{L}^{1-d}$, es handelt sich um die Dichte einer zeitlichen Rate, die sogenannte **Flussdichte**.

Wir betrachten nun einen Fluss konstanter Intensität, beschrieben durch den Vektor $q \in \mathbb{R}^d$, welcher durch einen auf ihn senkrecht stehenden Einheitswürfel $E \in \mathbb{R}^{d-1}$ strömt. Wir denken uns einen zweiten Würfel W , welcher im Winkel α schräg zu E steht, aber so, dass durch E und W die gleichen “Teilchen” des Flusses strömen. Es ist dann

$$1 = \operatorname{vol}_{d-1}(E) = \operatorname{vol}_{d-1}(W) \cdot \cos \alpha.$$

Der Gesamtfluss pro Zeiteinheit durch E und W ist gegeben durch $|q|$. Die Flussdichten unterscheiden sich aber, sie betragen jeweils

$$\frac{|q|}{\operatorname{vol}_{d-1}(E)} = |q|, \quad \frac{|q|}{\operatorname{vol}_{d-1}(W)} = |q| \cos \alpha.$$

Ist $n \in \mathbb{R}^d$ die Einheitsnormale auf W in Flussrichtung, so ist der Winkel zwischen q und n gleich α , und

$$\langle q, n \rangle = |q| \cos \alpha \quad (4.52)$$

gibt die Flussdichte auf W an.

Wir kehren zurück zur allgemeinen Situation, ein Fluss durch eine vorgegebene $(d - 1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit M im \mathbb{R}^d . Im Falle $d = 3$ ist M ein (offenes oder geschlossenes) Flächenstück mit Einheitsnormale $n(\xi)$ im Punkt $\xi \in M$. Der Fluss wird beschrieben durch eine Funktion $q : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Im Sinne der Erläuterungen oben stellt die Funktion

$$\xi \mapsto \langle q(t, \xi), n(\xi) \rangle \quad (4.53)$$

die zeitabhängige Flussdichte auf M dar, sie hat die Dimension $\mathcal{GT}^{-1}\mathcal{L}^{1-d}$. Das Integral (es handelt sich um ein Oberflächenintegral)

$$\int_M \langle q(t, \xi), n(\xi) \rangle dS(\xi) \quad (4.54)$$

stellt den Gesamtfluss der betrachteten Größe durch M als zeitliche Rate dar und hat die Dimension \mathcal{GT}^{-1} . Die Gesamtmenge der Größe, die in einem Zeitintervall $[t_1, t_2]$ durch M fließt, ist gleich

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_M \langle q(t, \xi), n(\xi) \rangle dS(\xi) dt. \quad (4.55)$$

Sei nun $U \subset \mathbb{R}^d$ offen und $M = \partial U$ der Rand von U , eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit. Mit $n(\xi)$ bezeichnen wir die äußere Einheitsnormale, also den Normalenvektor an ∂U im Punkt ξ , der nach außen zeigt. Durch

$$\frac{d}{dt} \int_U \varphi(t, x) dx = - \int_{\partial U} \langle q(t, \xi), n(\xi) \rangle dS(\xi) \quad (4.56)$$

kann nun ein Erhaltungsgesetz formuliert werden. Es bedeutet, dass sich der Gesamteinhalt einer Größe im Gebiet U nur dadurch ändert, dass diese über den Rand zu- oder abfließt. Das Minuszeichen kommt daher, dass das Skalarprodukt $\langle q, n \rangle$ für Zuflüsse negativ und für Abflüsse positiv ist. Man nennt (4.56) auch die **Integralform** des Erhaltungsgesetzes. Der Gaußsche Satz (Divergenzsatz) besagt, dass

$$\int_{\partial U} \langle q(t, \xi), n(\xi) \rangle dS(\xi) = \int_U \operatorname{div} q(t, x) dx \quad (4.57)$$

gilt, also folgt für alle t

$$\int_U \partial_t \varphi(t, x) + \operatorname{div} q(t, x) dx = 0. \quad (4.58)$$

Gilt das Erhaltungsgesetz (4.56) für "beliebige Gebiete" U , so erhalten wir seine sogenannte **differentielle** Form,

$$\partial_t \varphi(t, x) + \operatorname{div} q(t, x) = 0, \quad \text{für alle } x, t. \quad (4.59)$$

Für den eindimensionalen Fall ($d = 1$) hatten wir diese Gleichung bereits in (4.21) erhalten.

Beim Fluss einer Größe unterscheidet man zwischen dem **konvektiven** und **nichtkonvektiven** Anteil. Der konvektive Anteil bezieht sich auf die im Unterabschnitt Kinematik behandelte Situation, dass die Größe φ an sich mit Geschwindigkeit v bewegende Teilchen gekoppelt ist. Aus dem Transporttheorem hatten wir in (4.50) hergeleitet (dort war $\varphi = \rho$), dass

$$\int_U (\partial_t \varphi + \operatorname{div}(\varphi v))(t, x) dx = 0$$

gilt für alle U . Der konvektive Anteil q_K des Flusses ist also gegeben (Vergleich mit (4.58)) durch

$$q_K = \varphi v. \quad (4.60)$$

Ein Beispiel für den nichtkonvektiven Anteil q_{NK} liefert die Diffusion. Im einfachsten Fall gilt

$$q_{NK} = -\lambda \nabla \varphi, \quad \lambda > 0. \quad (4.61)$$

Diese Form hat etwa das Fouriersche Gesetz (für den Wärmefluss) oder das Ficksche Gesetz (für eine Substanz, die in einer anderen gelöst ist). Wir betrachten dazu eine Situation, in der keine Konvektion auftritt, also $v = 0$. Aus (4.59) erhalten wir

$$\partial_t \varphi - \operatorname{div}(\lambda \nabla \varphi) = 0.$$

Ist λ eine Konstante, so können wir λ vor die Divergenz ziehen und erhalten wegen $\operatorname{div}(\nabla \varphi) = \Delta \varphi$ die Gleichung

$$\partial_t \varphi = \lambda \Delta \varphi. \quad (4.62)$$

Diese Gleichung stellt den einfachsten Fall einer sogenannten **parabolischen** partiellen Differentialgleichung dar und heißt wegen ihrer Herkunft auch **Diffusionsgleichung** oder **Wärmeleitungsgleichung**.

Außer durch Fluss über den Rand kann sich der Gesamteinhalt einer Größe auch durch eine Zu- oder Abfuhr im Innern ändern. Beispiele sind Schwerkraft, chemische Reaktionen oder Strahlung. Wird deren Rate durch eine zeitabhängige Dichtefunktion z beschrieben, so ist die Änderungsrate im Volumen U gleich

$$\int_U z(t, x) dx. \quad (4.63)$$

Berücksichtigen wir alle diese Terme, so erhalten wir eine allgemeine **Bilanzgleichung** in Integralform,

$$\frac{d}{dt} \int_U \varphi dx = - \int_{\partial U} \langle \varphi v, n \rangle dS - \int_{\partial U} \langle q_{NK}, n \rangle dS + \int_U z dx, \quad (4.64)$$

wobei die auftretenden Funktionen die Argumente t, x bzw. ξ haben. Mit dem Gaußschen Satz erhalten wir wieder

$$\int_U \partial_t \varphi dx = - \int_U \operatorname{div}(\varphi v + q_{NK}) dx + \int_U z dx, \quad (4.65)$$

und daraus ergibt sich wie gehabt die differentielle Form

$$\partial_t \varphi + \operatorname{div}(\varphi v + q_{NK}) = z. \quad (4.66)$$

In (4.64) – (4.66) ist der konvektive Anteil des Flusses bereits “fest eingebaut”. In vielen Anwendungen spricht man einfach vom Fluss, wenn man dessen nichtkonvektiven Anteil meint (oder wenn es keinen konvektiven Anteil gibt), und schreibt q statt q_{NK} .

Bislang hatte die Größe φ den (unausgesprochenen) Charakter einer **Volumendichte** mit Dimension \mathcal{GL}^{-d} . Ihr Gesamteinhalt in einem Volumen U ist gleich

$$\int_U \varphi(t, x) dx. \quad (4.67)$$

Oft ist es zweckmäßiger, mit massebezogenen Größen zu arbeiten, diese haben die Dimension $\mathcal{G}\mathcal{M}^{-1}$. Eine massebezogene Größe ψ hängt mit der volumenbezogenen Größe φ desselben Typs zusammen gemäß

$$\varphi = \rho\psi, \quad (4.68)$$

wobei ρ die Massendichte mit Dimension $\mathcal{M}\mathcal{L}^{-d}$ ist. Die allgemeine Bilanzgleichung (4.64) wird zu

$$\frac{d}{dt} \int_U \rho\psi \, dx = - \int_{\partial U} \langle \rho\psi v, n \rangle \, dS - \int_{\partial U} \langle q_{NK}, n \rangle \, dS + \int_U \rho\zeta \, dx, \quad (4.69)$$

in der Integralform, wobei wir auch die Rate der inneren Zufuhr in der Form $z = \rho\zeta$ schreiben, oder zu

$$\partial_t(\rho\psi) + \operatorname{div}(\rho\psi v + q_{NK}) = \rho\zeta \quad (4.70)$$

in der differentiellen Form.

Eine massenbezogene Dichte heißt auch **spezifische Dichte**.

Wir konkretisieren die allgemeine Bilanzgleichung für eine Reihe unterschiedlicher Situationen. Bereits betrachtet haben wir die Massenbilanz. Hier sind $\psi = 1$ bzw. $\varphi = \rho$, $q = 0$ und $\zeta = 0$. Als nächstes betrachten wir ein sogenanntes **Mehrkomponentensystem**. Es liegen J unterschiedliche Substanzen vor (z.B. chemische Verbindungen). Im kontinuierlichen Modell werden sie charakterisiert durch ihre massebezogenen **Konzentrationen** oder **Sättigungen** $c_j : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq J$, mit Werten in $[0, 1]$. Die Funktion c_j gibt an den relativen Anteil der j -ten Komponente als Funktion von (t, x) , die Gesamtmenge der j -ten Komponente im Volumen U ist dann gleich

$$\int_U (\rho_j c_j)(t, x) \, dx.$$

Für jede Komponente erhalten wir eine Bilanzgleichung, es ist $\psi = c_j$ und daher in der differentiellen Form

$$\partial_t(\rho_j c_j) + \operatorname{div}(\rho_j c_j v + q_j) = \rho_j \zeta_j, \quad 1 \leq j \leq J. \quad (4.71)$$

Außerdem muss gelten

$$\sum_{j=1}^J c_j = 1. \quad (4.72)$$

Falls die Komponenten interagieren, etwa durch chemische Reaktionen, tauchen entsprechende weitere Terme in der rechten Seite von (4.71) auf.

Impulsbilanz. Hier ist $\varphi = \rho v$, $\psi = v$, also eine vektorwertige Größe. Der Ausdruck

$$\frac{d}{dt} \int_U \rho v \, dx \quad (4.73)$$

entspricht der Änderung des Gesamtimpulses im Volumen U . Die allgemeine Bilanzgleichung (4.64) stellt daher ein Gleichungssystem für 3 skalare Größen dar, mit $\psi_i = v_i$, $i = 1, 2, 3$. Die Schwerkraft bewirkt eine Impulszufuhr ins Innere, also (auf der Erde)

$$\zeta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}, \quad g = 9.8067 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}, \quad (4.74)$$

wobei die ersten beiden Ortskoordinaten eine horizontale Ebene und die dritte die Vertikale repräsentieren. Der nichtkonvektive Impulsfluss durch den Rand wird bewirkt durch Kraftübertragung in Form von Spannungskräften oder (im Spezialfall) Druckkräften. Die Spannungskraft wird beschrieben durch den Spannungstensor $\sigma(t, x) \in \mathbb{R}^{(3,3)}$, und zwar stellt die Funktion

$$x \mapsto \sigma(t, x)n(x), \quad (\sigma n)_i = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij}n_j,$$

die Flächendichte des Kraftvektors auf einer Fläche mit der Normalen n dar. Der nichtkonvektive Fluss ist also

$$q_{NK,i} = -\sigma_i,$$

wobei σ_i die i -te Zeile des Spannungstensors σ bezeichnet. Der Fall einer reinen Druckkraft entspricht

$$\sigma = -pI, \quad \sigma_{ij} = -p\delta_{ij}, \quad (4.75)$$

wobei $p(t, x)$ eine skalare Größe (der Druck) ist. Die Bilanzgleichung für den Impuls hat insgesamt die Form

$$\frac{d}{dt} \int_U \rho v_i dx = - \int_{\partial U} \langle \rho v_i v, n \rangle dS + \int_{\partial U} \langle \sigma_i, n \rangle dS + \int_U \rho \zeta_i dx, \quad 1 \leq i \leq 3. \quad (4.76)$$

Die differentielle Form lautet

$$\partial_t(\rho v_i) + \operatorname{div}(\rho v_i v - \sigma_i) = \rho \zeta_i, \quad 1 \leq i \leq 3, \quad (4.77)$$

oder im Fall einer reinen Druckkraft

$$\partial_t(\rho v_i) + \operatorname{div}(\rho v_i v) + \partial_i p = \rho \zeta_i, \quad 1 \leq i \leq 3. \quad (4.78)$$

Die Bilanzgleichung für den Drehimpuls behandeln wir nicht, sie liefert die Symmetrie des Spannungstensors ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ für alle i, j).

Beispiel zur Impulsbilanz. Wir betrachten eine Strömung (z.B. Wasser durch ein Rohr). Wir nehmen an, sie ist

- inkompressibel, das heißt, ρ ist konstant,
- stationär, das heißt, v und p hängen nur von x ab, aber nicht von t ,
- reibungsfrei, das heißt, es liegt der Fall (4.75) der reinen Druckkraft vor,
- und als äußere Kraft wirkt nur die Schwerkraft gemäß (4.74).

Die Massenbilanz $\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho v) = 0$ wird also zu

$$\operatorname{div} v = 0. \quad (4.79)$$

Die Impulsbilanz (4.78) wird dann zu

$$\rho \operatorname{div}(v_i v) + \partial_i p - \rho \zeta_i = 0, \quad 1 \leq i \leq 3. \quad (4.80)$$

Aus der Produktregel folgt

$$\operatorname{div}(v_i v) = v_i \operatorname{div}(v) + \langle \nabla v_i, v \rangle = \langle \nabla v_i, v \rangle = \sum_{j=1}^3 v_j \partial_j v_i.$$

Wir multiplizieren nun die einzelnen Gleichungen von (4.80) jeweils mit v_i und summieren,

$$0 = \sum_{i,j=1}^3 \rho v_i v_j \partial_j v_i + \sum_{i=1}^3 (v_i \partial_i p - \rho v_i \zeta_i). \quad (4.81)$$

Wir betrachten die skalare Größe

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \rho \langle v(x), v(x) \rangle + p(x) + \rho g x_3. \quad (4.82)$$

Es gilt

$$\partial_i \varphi(x) = \rho \langle v(x), \partial_i v(x) \rangle + \partial_i p(x) + \rho g \delta_{i3}. \quad (\text{Kronecker-Delta}) \quad (4.83)$$

Wegen $\zeta_i(x) = -g \delta_{i3}$ folgt aus (4.81)

$$\langle v(x), \nabla \varphi(x) \rangle = \sum_{i=1}^3 v_i(x) \partial_i \varphi(x) = 0. \quad (4.84)$$

Der Ausdruck $\langle v(x), \nabla \varphi(x) \rangle$ ist gerade die materielle Ableitung von φ (beachte, dass φ nicht von t abhängt). Es ergibt sich, dass

$$\frac{1}{2} \rho \|v(x)\|^2 + p(x) + g x_3 = \text{const} \quad (4.85)$$

entlang von Stromlinien (die Linien, auf denen sich die materiellen Teilchen bewegen). Diese Aussage, oder äquivalent Gleichung (4.84), heißt die **Bernoulli-Gleichung**. Sie besagt, dass der Druck dort klein ist, wo die Geschwindigkeit groß ist.

Energiebilanz. Die Energiebilanz ist wieder eine skalare Gleichung. Hier ist ψ die spezifische (d.h. massenbezogene) Energiedichte

$$\psi = u + \frac{1}{2} |v|^2, \quad (4.86)$$

wobei u für die spezifische Dichte der inneren Energie steht und $\frac{1}{2} |v|^2$ die spezifische Dichte der kinetischen Energie repräsentiert. Die Änderung der Gesamtenergie im Volumen U ist

$$\frac{d}{dt} \int_U \rho \left(u + \frac{1}{2} |v|^2 \right) dx. \quad (4.87)$$

Die innere Energie enthält etwa

- die kinetische Energie der ungeordneten Bewegung der Atome (makroskopisch gemessen als Temperatur),
- die potentielle Energie zwischen Atomen oder Molekülen, abhängig von deren gegenseitigem Abstand (etwa die elastische Energie bei der Verformung von Festkörpern),

- die chemische Bindungsenergie zwischen Molekülen,
- die Nuklearenergie.

Der nichtkonvektive Energiefluss besteht aus der mechanischen Arbeitsleistung und dem Wärmefluss,

$$q_{NK} = -\sigma v + q_W, \quad (4.88)$$

die Energiezufuhr ins Innere aus der Leistung der Schwerkraft und der absorbierten spezifischen Wärmestrahlung ζ_W ,

$$\zeta = -gv_3 + \zeta_W. \quad (4.89)$$

Die Energiebilanz ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_U \rho \left(u + \frac{1}{2} |v|^2 \right) dx &= - \int_{\partial U} \rho \left(u + \frac{1}{2} |v|^2 \right) \langle v, n \rangle dS \\ &+ \int_{\partial U} \langle \sigma v, n \rangle dS - \int_{\partial U} \langle q_W, n \rangle dS + \int_U \rho \zeta dx. \end{aligned} \quad (4.90)$$

Sie heißt auch der **erste Hauptsatz der Thermodynamik**. Nach diversen Umformungen erhält man die partielle Differentialgleichung

$$\partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u v + q_W) = \sigma : Dv + \rho \zeta, \quad (4.91)$$

wobei

$$\sigma : Dv = \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij} \partial_j v_i.$$

Beispiel zur Energiebilanz. Wir betrachten eine stationäre Strömung durch eine Düse, die in x_1 -Richtung orientiert ist und deren Querschnitt senkrecht zur x_1 -Richtung durch ein Flächenstück $A(x_1)$ gegeben ist. Sei U ein Testvolumen, welches links und rechts durch die Flächenstücke $A(x_-)$ und $A(x_+)$ und für $x_- < x_1 < x_+$ durch den Mantel der Düse begrenzt wird. Wir betrachten zunächst die Massenbilanz, sie wird für die Energiebilanz von Nutzen sein. Sie lautet (mit Argumenten geschrieben)

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \int_U \rho(x, t) dx = - \int_{\partial U} \rho(\xi, t) \langle v(\xi, t), n(\xi) \rangle dS(\xi) \\ &= - \int_{A(x_-)} \langle (\rho v)(\xi, t), n(\xi) \rangle dS(\xi) - \int_{A(x_+)} \langle (\rho v)(\xi, t), n(\xi) \rangle dS(\xi), \end{aligned} \quad (4.92)$$

da $\langle v, n \rangle = 0$ auf der Mantelfläche gilt. Gleichung (4.92) bedeutet, dass die konvektiven Massenflüsse durch die Querschnitte $A(x_{\pm})$ übereinstimmen. Die Flächenstücke A_{\pm} sind eben, das Oberflächenintegral wird daher zum (zweidimensionalen) Volumenintegral. Der Normalenvektor auf $A(x_{\pm})$ ist gegeben durch $n = (\pm 1, 0, 0)$, also wird (4.92) zu

$$\int_{A(x_+)} (\rho v_1)(x, t) dx_2 dx_3 = \int_{A(x_-)} (\rho v_1)(x, t) dx_2 dx_3,$$

Wir nehmen nun näherungsweise an, dass ρ und v nur von x_1 abhängen, also auf Querschnitten konstant sind. Es ist dann

$$(\rho v_1 | A)(x_+) = (\rho v_1 | A)(x_-),$$

wobei $|A|$ den Flächeninhalt des Flächenstücks A bezeichnet. Da die Querschnitte beliebig gewählt werden können, folgt für den konvektiven Massenfluss durch den Querschnitt A

$$\rho v_1 |A| = \text{const} \quad (4.93)$$

in Abhängigkeit von x_1 . Ist darüber hinaus die Strömung inkompressibel (ρ konstant), so ist die Geschwindigkeit v_1 umgekehrt proportional zur Querschnittsfläche $|A|$.

Wir kommen nun zur Energiebilanz (4.90). Wir setzen $q_W = 0$, $\zeta = 0$, das heißt, wir vernachlässigen den nichtkonvektiven Wärmefluss und die durch die Schwerkraft geleistete Arbeit. Weiterhin gelte $\sigma = -pI$ (reine Druckkraft). Wir betrachten dasselbe Testvolumen U wie oben bei der Massenbilanz. Die Energiebilanz (4.90) wird zu

$$0 = \frac{d}{dt} \int_U \rho \left(u + \frac{1}{2} |v|^2 \right) dx = - \int_{\partial U} \rho \left(u + \frac{1}{2} |v|^2 \right) \langle v, n \rangle dS - \int_{\partial U} p \langle v, n \rangle dS. \quad (4.94)$$

Wie oben ist $\langle v, n \rangle = 0$ auf der Mantelfläche und $\langle v, n \rangle = \pm v_1$ auf $A(x_{\pm})$. Wir erhalten also

$$\int_{A(x_+)} \rho v_1 \left(u + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} |v|^2 \right) dx_2 dx_3 = \int_{A(x_-)} \rho v_1 \left(u + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} |v|^2 \right) dx_2 dx_3. \quad (4.95)$$

Wir nehmen nun näherungsweise an, dass ρ, p, u, v nur von x_1 abhängen, also auf Querschnitten konstant sind. Es folgt dann

$$|A(x_+)| \rho v_1 \left(u + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} |v|^2 \right) = |A(x_-)| \rho v_1 \left(u + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} |v|^2 \right). \quad (4.96)$$

Die Argumente der Funktionen in (4.96) sind x_+ auf der linken und x_- auf der rechten Seite. Da die Querschnitte beliebig gewählt sind, folgt unter Berücksichtigung der Massenbilanz (4.93)

$$u + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} |v|^2 = \text{const}. \quad (4.97)$$

Die Größe

$$h = u + \frac{p}{\rho} \quad (4.98)$$

gibt den spezifischen Wärmehalt an und heißt **Enthalpie**. Damit wird (4.97) zu

$$h + \frac{1}{2} |v|^2 = \text{const}. \quad (4.99)$$

Diese Gleichung gibt den Austausch zwischen Wärmeenergie und kinetischer Energie entlang der Düse wieder.

Bilanzgleichungen über Unstetigkeitsflächen hinweg. Bislang sind wir explizit oder stillschweigend davon ausgegangen, dass alle betrachteten Größen stetig bzw. differenzierbar sind, so dass der Übergang von der Integralform zur differentiellen Form ohne weiteres machbar ist. Wir betrachten nun die Situation, dass Unstetigkeiten in den Größen auftreten, beispielsweise an der Grenzfläche unterschiedlicher Substanzen, oder der gleichen Substanz in unterschiedlichen Aggregatzuständen. Sei A etwa ein gekrümmtes Flächenstück

im \mathbb{R}^3 , welches einen Gebiet $U = U_0 \subset \mathbb{R}^3$ in zwei Teilgebiete U^+ und U^- trennt. (Allgemein wäre A eine $(n-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit im \mathbb{R}^n .) Sei U_k eine Folge solcher Gebiete mit $U_{k+1} \subset U_k$ und $\cap_k U_k = A$. Der Rand von U_k zerfalle in

$$\partial U_k = A_k^+ \cup A_k^-, \quad A_k^\pm = \partial U_k \cap U_k^\pm.$$

Sei eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ gegeben, so dass die beiden Restriktionen $f|_{U_k^\pm}$ stetig und jede für sich stetig fortsetzbar auf A sind, sei für $x \in A$

$$f^+(x) = \lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in U_k^+}} f(y), \quad f^-(x) = \lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in U_k^-}} f(y). \quad (4.100)$$

Wir betrachten

$$\int_{\partial U_k} \langle f, n_k \rangle dS = \int_{A_k^+} \langle f, n_k^+ \rangle dS + \int_{A_k^-} \langle f, n_k^- \rangle dS, \quad (4.101)$$

wobei n_k die äußere Normale an ∂U_k ist und $n_k^\pm = n|_{A_k^\pm}$. Unter geeigneten Voraussetzungen an die Gebiete U_k gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{A_k^+} \langle f, n_k^+ \rangle dS = \int_A \langle f^+, n^+ \rangle dS, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{A_k^-} \langle f, n_k^- \rangle dS = \int_A \langle f^-, n^- \rangle dS, \quad (4.102)$$

wobei n^+ und n^- Normalenvektoren auf A sind, die in entgegengesetzte Richtungen zeigen. Wir wenden diese Überlegungen an auf die allgemeine Bilanzgleichung auf dem Gebiet U_k ,

$$\frac{d}{dt} \int_{U_k} \varphi dx = - \int_{\partial U_k} \langle \varphi v + q_{NK}, n \rangle dS + \int_{U_k} z dx. \quad (4.103)$$

Wir nehmen an, dass $\varphi|_{U^\pm}$ und $v|_{U^\pm}$ beschränkt und stetig differenzierbar sowie stetig auf A fortsetzbar sind. Da $\text{vol}(U_k) \rightarrow 0$ gilt, folgt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{U_k^+} \partial_t \varphi dx = 0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{U_k^-} \partial_t \varphi dx,$$

also auch

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d}{dt} \int_{U_k} \varphi dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d}{dt} \int_{U_k^+} \varphi dx + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d}{dt} \int_{U_k^-} \varphi dx = 0,$$

und ebenso

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{U_k} z dx = 0.$$

Aus (4.101) und (4.102) folgt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\partial U_k} \langle \varphi v + q_{NK}, n \rangle dS = \int_A \langle \varphi^+ v^+ + q_{NK}^+, n^+ \rangle dS + \int_A \langle \varphi^- v^- + q_{NK}^-, n^- \rangle dS.$$

Grenzübergang $k \rightarrow \infty$ in der Bilanzgleichung (4.103) ergibt nun, wenn wir $n = n^+ = -n^-$ für den Normalenvektor auf A festsetzen,

$$\int_A \langle \varphi^+ v^+ + q_{NK}^+, n \rangle dS = \int_A \langle \varphi^- v^- + q_{NK}^-, n \rangle dS. \quad (4.104)$$

Das ist die allgemeine Form der Bilanzgleichung auf einer Unstetigkeitsfläche. Da wir statt A auch beliebige Teilflächen $B \subset A$ betrachten können, erhalten wir auch die punktweise Form

$$\langle \varphi^+ v^+ + q_{NK}^+, n \rangle (x) = \langle \varphi^- v^- + q_{NK}^-, n \rangle (x), \quad \text{für alle } x \in A. \quad (4.105)$$

Als Beispiel betrachten wir den Phasenübergang der Verdampfung. A ist ein waagrechtes Flächenstück, entlang dessen eine von unten einströmende Flüssigkeit verdampft. Die Massenbilanz ($\varphi = \rho$, $q_{NK} = 0$) ergibt

$$\int_A \langle \rho^+ v^+, n \rangle dS = \int_A \langle \rho^- v^-, n \rangle dS,$$

also

$$\langle \rho^+ v^+, n \rangle (x) = \langle \rho^- v^-, n \rangle (x), \quad \text{für alle } x \in A. \quad (4.106)$$

Das bedeutet, dass die Normalkomponente $\langle \rho v, n \rangle$ der Größe ρv stetig ist, hinweg über die Unstetigkeitsfläche A von ρ und v .

Wir betrachten die Energiebilanz. Es ist

$$\varphi = \rho \left(u + \frac{1}{2} |v|^2 \right), \quad q_{NK} = -\sigma v + q_W, \quad \sigma = -pI.$$

Wir erhalten auf A

$$\left(\rho^+ \left(u^+ + \frac{1}{2} |v^+|^2 \right) + p^+ \right) \langle v^+, n \rangle + \langle q_W^+, n \rangle = \left(\rho^- \left(u^- + \frac{1}{2} |v^-|^2 \right) + p^- \right) \langle v^-, n \rangle + \langle q_W^-, n \rangle. \quad (4.107)$$

Wir nehmen an, dass $|v|^2$ gegen u vernachlässigt werden kann. Da außerdem $n = e_3$ gilt, wird (4.107) zu

$$\rho^+ v_3^+ \left(u^+ + \frac{p^+}{\rho^+} \right) + q_{W,3}^+ = \rho^- v_3^- \left(u^- + \frac{p^-}{\rho^-} \right) + q_{W,3}^-. \quad (4.108)$$

Mit der Enthalpie $h = u + p/\rho$ ergibt sich, da laut Massenbilanz $(\rho v_3)^+ = (\rho v_3)^-$,

$$h^+ - h^- = \frac{q_{W,3}^- - q_{W,3}^+}{\rho^+ v_3^+}. \quad (4.109)$$

Die Differenz im Wärmeinhalt vor und nach dem Phasenübergang ist also gleich dem Ausdruck auf der rechten Seite von (4.109), er heißt die spezifische Verdampfungswärme.

Aus der Impulsbilanz, die wir hier nicht betrachten, folgt $p^+ = p^-$.

5 Verkehrsflussmodelle

Hydrodynamische Modelle. Wir kommen auf das im vorigen Kapitel angesprochene Modell für den Verkehrsfluss zurück. Nochmals: Das Intervall (a, b) entspricht einem Straßenstück. Die Funktion “ $\rho(t, \cdot)$ ” stellt die zeitabhängige Ortsdichte der Anzahl der in positiver x -Richtung sich bewegendes Fahrzeuge dar, das heißt

$$\int_a^b \rho(t, x) dx = \text{Anzahl der Fahrzeuge im Abschnitt } (a, b) \text{ zum Zeitpunkt } t.$$

Die Flussfunktion “ $q(\cdot, x)$ ” stellt die ortsabhängige Rate dar, das heißt,

$$\int_t^\tau q(s, x) ds$$

ist die Anzahl der Fahrzeuge, die den Punkt x im Zeitintervall $[t, \tau]$ passieren. Wir hatten gesehen, dass die Differentialgleichung

$$\partial_t \rho(t, x) + \partial_x q(t, x) = 0, \quad \text{für alle } t, x, \quad (5.1)$$

wiedergibt, dass in jedem Streckenabschnitt $I \subset [a, b]$ die Gesamtzahl der Fahrzeuge in I sich nur durch den Fluss über die beiden Randpunkte von I ändert, es also in $[a, b]$ weder Zu- noch Abfahrten gibt.

Ist “ $v = v(x, t)$ ” die Geschwindigkeit im Ort x und zur Zeit t , so entspricht das der Massenerhaltung in der allgemeinen Bilanzgleichung, es gilt also die Kontinuitätsgleichung im Eindimensionalen,

$$\partial_t \rho + \partial_x (\rho v) = 0, \quad (5.2)$$

die Flussfunktion hat die Form

$$q = \rho v. \quad (5.3)$$

Modelle dieser Form werden als hydrodynamische Modelle bezeichnet, da sie den Verkehrsfluss – in Analogie zu einer Strömung vieler kleiner Teilchen – makroskopisch und kontinuierlich beschreiben.

Die einfachste Situation liegt vor, wenn $v \equiv v_c$ konstant ist. Gleichung (5.2) wird zu

$$\partial_t \rho + v_c \partial_x \rho = 0.$$

Deren Lösungen haben die Form

$$\rho(t, x) = \rho_0(x - v_c t) \quad (5.4)$$

mit einer beliebigen (differenzierbaren) Funktion ρ_0 . Wegen

$$\rho(t, x + v_c t) = \rho_0(x) = \rho(x, 0) \quad (5.5)$$

handelt es sich hier um eine Welle, die sich mit konstanter Geschwindigkeit v_c in positive x -Richtung bewegt; anders gesagt, alle Werte $\rho_0(x)$ bewegen sich entlang von parallelen Geraden $x + v_c t$ mit Steigung v_c .

Eine allgemeinere Klasse von Modellen (LWR-Modelle, nach Lighthill, Whitham und Richards) erhält man mit dem Ansatz

$$q = Q(\rho), \quad \text{das heißt,} \quad q(t, x) = Q(\rho(t, x)), \quad (5.6)$$

oder

$$v = V(\rho), \quad \text{das heißt,} \quad v(t, x) = V(\rho(t, x)). \quad (5.7)$$

Vermittels

$$Q(\rho) = \rho V(\rho), \quad Q'(\rho) = V(\rho) + \rho V'(\rho), \quad (5.8)$$

gehen (5.6) und (5.7) ineinander über. Ein solcher Ansatz unterstellt, dass alle Fahrzeuge sich gleich verhalten.

Die Kontinuitätsgleichung (5.2) wird in diesem Fall zu

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + Q'(\rho) \partial_x \rho &= 0, \\ \partial_t \rho + (V(\rho) + \rho V'(\rho)) \partial_x \rho &= 0. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Es stellt sich heraus, dass es auch in diesem Fall Lösungen gibt, die konstant sind entlang gewisser Geraden. Sei $\rho_c \geq 0$, sei

$$\rho(t, x + tQ'(\rho_c)) = \rho_c. \quad (5.10)$$

Es gilt dann

$$0 = \frac{d}{dt} \rho(t, x + tQ'(\rho_c)) = \partial_t \rho(t, x + tQ'(\rho_c)) + \partial_x \rho(t, x + tQ'(\rho_c)) Q'(\rho_c),$$

das heißt, (5.2) ist erfüllt entlang der Geraden $t \mapsto x + tQ'(\rho_c)$ durch $(0, x)$ mit der Steigung $Q'(\rho_c)$, welche nun vom Wert ρ_c abhängt. Ist eine Dichte $\rho_0(x) = \rho(0, x)$ zum Zeitpunkt 0 gegeben, so lässt sich vermittels (5.10) eine Lösung ρ für $t > 0$ konstruieren – jedenfalls solange sich die betreffenden Geraden nicht schneiden.

Ist $V'(\rho) \neq 0$, so gilt $Q'(\rho) \neq V(\rho)$ nach (5.8), das heißt, die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Dichte ist nicht gleich der Geschwindigkeit der Fahrzeuge. Für Verkehrsmodelle gilt $V'(\rho) < 0$ und damit $Q'(\rho) < V(\rho)$, eine Dichtewelle (entspricht einem Bereich größerer Dichte) läuft also rückwärts relativ zu den sich bewegenden Fahrzeugen.

Wir betrachten Beispiele. Es ist $Q, V : [0, \rho_{\max}] \rightarrow \mathbb{R}_+$. $\rho = 0$ entspricht einer leeren Straße, $\rho = \rho_{\max}$ einer maximal belegten Straße. Der Graph von Q wird als **Fundamentaldiagramm** bezeichnet.

Modell von Greenshields:

$$V(\rho) = v_{\max} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}}\right), \quad Q(\rho) = v_{\max} \rho \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}}\right). \quad (5.11)$$

Modell von Underwood:

$$V(\rho) = v_{\max} \exp\left(-\frac{\rho}{\rho_{\max}}\right), \quad Q(\rho) = v_{\max} \rho \exp\left(-\frac{\rho}{\rho_{\max}}\right). \quad (5.12)$$

In beiden Modellen entspricht v_{\max} der Geschwindigkeit, die für $\rho \rightarrow 0$ gefahren wird. Im Modell von Greenshields ist $V(\rho_{\max}) = 0$, im Modell von Underwood ist $V(\rho_{\max}) > 0$. Für beide Modelle gilt außerdem

$$Q''(\rho) < 0, \quad \text{für alle } \rho \in [0, \rho_{\max}]. \quad (5.13)$$

Wir untersuchen nun, ob sich die Geraden $t \mapsto x + tQ'(\rho_c)$ für $t > 0$ schneiden. Ist etwa

$$\rho(0, x_1) = \rho_1, \quad \rho(0, x_2) = \rho_2 \quad \text{mit} \quad x_1 < x_2, \quad \rho_1 < \rho_2, \quad (5.14)$$

so ist der Schnittpunkt der Geraden gegeben durch

$$x_1 + tQ'(\rho_1) = x_2 + tQ'(\rho_2),$$

also

$$t_f = \frac{x_2 - x_1}{Q'(\rho_1) - Q'(\rho_2)}. \quad (5.15)$$

Gilt $Q'' < 0$, so ist $Q'(\rho_1) > Q'(\rho_2)$ und damit $t_f > 0$. Für die Lösung von (5.2) müsste also gelten

$$\rho_1 = \rho(x_1 + tQ'(\rho_1)) = \rho(x_2 + tQ'(\rho_2)) = \rho_2,$$

ein Widerspruch. Da man beweisen kann, dass stetig differenzierbare Lösungen von (5.2) zu festen Anfangswerten $\rho(0, x) = \rho_0(x)$ eindeutig bestimmt sind, kann es im betrachteten Beispiel (5.14) keine stetig differenzierbare Lösung für $t \geq t_f$ geben.

Es ist aber möglich, weniger glatte Lösungen zu finden, indem man auf die Integralform der Bilanzgleichung

$$\frac{d}{dt} \int_a^b \rho(t, x) dx = q(t, a) - q(t, b) \quad (5.16)$$

zurückgeht. Im einfachsten Fall suchen wir nach einer Lösung “ $\rho = \rho(t, x)$ ” und einer Kurve “ $x = s(t)$ ”, so dass ρ stetig differenzierbar ist in den Bereichen $x < s(t)$ und $x > s(t)$, und dass

$$\lim_{x \uparrow s(t)} \rho(t, x) =: \rho^-(t, s(t)), \quad \lim_{x \downarrow s(t)} \rho(t, x) =: \rho^+(t, s(t)) \quad (5.17)$$

existieren. Dasselbe möge für v (und also auch für $q = \rho v$) gelten. Es handelt sich hierbei um einen Spezialfall der am Ende von Kapitel 4 betrachteten Situation, wir führen ihn explizit aus. Ziel ist es, aus der Bilanzgleichung (5.16) Aussagen über die Funktion s zu gewinnen. Sei $t > 0$, sei $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ mit $\alpha < s(t) < \beta$. Aus (5.16) folgt

$$\begin{aligned} q(t, \alpha) - q(t, \beta) &= \frac{d}{dt} \int_{\alpha}^{\beta} \rho(t, x) dx = \frac{d}{dt} \left[\int_{\alpha}^{s(t)} \rho(t, x) dx + \int_{s(t)}^{\beta} \rho(t, x) dx \right] \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \partial_t \rho(t, x) dx + \rho^-(t, s(t))s'(t) - \rho^+(t, s(t))s'(t). \end{aligned}$$

Grenzübergang $\alpha \uparrow s(t)$ und $\beta \downarrow s(t)$ ergibt

$$q^-(t, s(t)) - q^+(t, s(t)) = \rho^-(t, s(t))s'(t) - \rho^+(t, s(t))s'(t),$$

also

$$s'(t) = \frac{q^+(t, s(t)) - q^-(t, s(t))}{\rho^+(t, s(t)) - \rho^-(t, s(t))} = \frac{(\rho^+ v^+)(t, s(t)) - (\rho^- v^-)(t, s(t))}{\rho^+(t, s(t)) - \rho^-(t, s(t))}, \quad (5.18)$$

oder abgekürzt

$$s'(t) = \frac{q^+ - q^-}{\rho^+ - \rho^-} = \frac{\rho^+ v^+ - \rho^- v^-}{\rho^+ - \rho^-}. \quad (5.19)$$

Die Unstetigkeit in $x = s(t)$ heißt **Schock** oder **Schockwelle**, deren Geschwindigkeit ergibt sich gemäß (5.19) aus den Differenzen von ρ und q über den Schock hinweg. Die Bedingung (5.19) heißt **Rankine-Hugoniot-Bedingung** und wurde zuerst im Kontext der Dynamik von Gasen entwickelt.

Für Gleichungen der Form

$$\partial_t \rho + \partial_x(Q(\rho)) = 0 \quad (5.20)$$

kann man einen abgeschwächten Lösungsbegriff definieren, welcher auch gewisse Unstetigkeiten zulässt, und man kann zeigen, dass zu gegebener Anfangsverteilung $\rho(0, x) = \rho_0(x)$ genau eine solche Lösung existiert. Neben Schockwellen treten dabei auch sogenannte **Verdünnungswellen** (oder **Expansionsfächer**) auf. Diese Lösungstheorie behandeln wir hier nicht.

Als Beispiel diskutieren wir die Situation an einer Ampel. Diese steht am Punkt $x = 0$ und steht auf Grün. Die Fahrzeuge bewegen sich für $t < 0$ mit ortskonstanter Dichte ρ_c und Fluss $q_c = \rho_c v_c$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird die Ampel auf Rot geschaltet, das heißt, $q(t, 0) = 0$ für $t \geq 0$. Links von der Ampel ($x < 0$) bildet sich eine Schlange, deren Ende sich als Schock mit konstanter Geschwindigkeit

$$s'_- = \frac{q^+ - q^-}{\rho^+ - \rho^-} = -\frac{q_c}{\rho_{\max} - \rho_c}$$

nach links bewegt. Rechts von der Ampel ($x > 0$) bewegt sich das Ende der Kolonne als Schock mit konstanter Geschwindigkeit

$$s'_+ = \frac{q^+ - q^-}{\rho^+ - \rho^-} = \frac{q_c}{\rho_c} = v_c$$

nach rechts. Die zugehörige Lösung hat für $t > 0$ die Form

$$\rho(t, x) = \begin{cases} \rho_c, & ts'_+ < x, \\ 0, & 0 < x < ts'_+, \\ \rho_{\max}, & ts'_- < x < 0, \\ \rho_c, & x < ts'_-. \end{cases}$$

Stehe nun die Ampel für $t < 0$ auf Rot. Wir nehmen an, es ist

$$\rho(0, x) = \begin{cases} \rho_{\max}, & x < 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases}$$

Schaltet die Ampel zum Zeitpunkt $t = 0$ auf Grün, so setzen sich die Fahrzeuge der Reihe nach in Bewegung. Die Lösungstheorie für (5.20) liefert in diesem Fall eine Verdünnungswelle

$$\rho(t, x) = \begin{cases} \rho_{\max}, & x < tQ'(\rho_{\max}), \\ (Q')^{-1}\left(\frac{x}{t}\right), & tQ'(\rho_{\max}) < x < tQ'(0), \\ 0, & x > tQ'(0). \end{cases}$$

Im Modell von Greenshields ist $Q'(0) = v_{\max}$, $Q'(\rho_{\max}) = -v_{\max}$, so dass sich der Stau an der Ampel mit Geschwindigkeit $-v_{\max}$ auflöst und die vordersten Fahrzeuge sich mit Geschwindigkeit v_{\max} bewegen.

Schocks sind etwas unrealistisch, da sie mit sprunghaften Geschwindigkeitsänderungen (also unendlich großen Beschleunigungen) verbunden sind. Man kann sie durch Modifikation der Flussfunktion eliminieren, z.B. indem man setzt

$$q = Q(\rho) - \gamma \partial_x \rho \quad (5.21)$$

mit einer Konstante $\gamma > 0$. Einsetzen in (5.1) führt auf

$$\partial_t \rho + Q'(\rho) \partial_x \rho = \gamma \partial_{xx} \rho, \quad (5.22)$$

eine “semilineare” Diffusionsgleichung. Der Term $-\gamma \partial_x \rho$ in (5.21) bedeutet, dass Fahrer ihre Geschwindigkeit nicht nur von der Fahrzeugdichte, sondern auch von Änderungsraten derselben abhängig machen. Ein Nachteil dieser Modellierung ist aber, dass der Fluss q negativ werden kann. Ist etwa

$$\rho(0, x) = \begin{cases} \rho_{\max}, & -1 < x < 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

was einem Stau vor einer Ampel mit Stauende in $x = -1$ entspricht, so beginnen für $t > 0$ die Fahrzeuge am Stauende nach links wegzufahren, wenn man die zugehörige Lösung von (5.22) nimmt.

Die bisher betrachteten Modelle haben weiterhin den Nachteil, dass sie keine “Staus aus dem Nichts” beschreiben, wie sie durch Aufschaukelung ungleichmäßigen Fahrverhaltens entstehen können. Will man bei einem deterministischen Modell bleiben, so kann man solche Instabilitäten erzeugen, indem man eine zweite Gleichung (in Analogie zur Impulsbilanz) geeignet hinzunimmt. einführt

Fahrzeugfolgemodelle. Fahrzeugfolgemodelle sind mikroskopische Modelle, im Gegensatz zu den hydrodynamischen Modellen, in denen die einzelnen Fahrzeuge zu einem Kontinuum aggregiert werden. Für jedes Fahrzeug wird eine Bewegungsgleichung aufgestellt. Das auf Reuschel und Pipes zurückgehende “Follow-the-leader”-Modell sieht wie folgt aus. Ist $x_n(t)$ die Position des n -ten Fahrzeugs zur Zeit t , so setzen wir an

$$\dot{x}_n(t) = \frac{1}{\tau} (x_{n+1}(t) - x_n(t) - \Delta_0). \quad (5.23)$$

Die Geschwindigkeit des n -ten Fahrzeugs richtet sich also nach dem Abstand zum vorausfahrenden $(n + 1)$ -ten Fahrzeug. Der Minimalabstand $\Delta_0 > 0$ darf nur bei Stillstand eintreten, die Geschwindigkeit wächst affin linear mit dem Abstand zum vorausfahrenden Fahrzeug. Differenzieren führt auf

$$\ddot{x}_n(t) = \frac{1}{\tau} (\dot{x}_{n+1}(t) - \dot{x}_n(t)). \quad (5.24)$$

Diese Gleichung beschreibt das individuelle Fahrverhalten als Konsequenz von (5.23), die Beschleunigung (Druck auf Gas- oder Bremspedal) ist proportional zur Geschwindigkeitsdifferenz zum vorausfahrenden Fahrzeug. Nicht modelliert wird, dass es Fahrzeuge gibt, die “auf eigenen Wunsch” langsam fahren. Unrealistisch ist neben anderen Punkten, dass sehr weit vorausfahrende Fahrzeuge einen Einfluss auf die Geschwindigkeit haben.

Berücksichtigt man eine Reaktionszeit $t_R > 0$ der Fahrer, so kann man (5.24) modifizieren zu

$$\ddot{x}_n(t + t_R) = \frac{1}{\tau}(\dot{x}_{n+1}(t) - x_n(t)). \quad (5.25)$$

Ein weiter ausgearbeitetes Modell ist das ‘‘Intelligent-Driver-Modell’’ nach Helbing und Treiber (1999). Es hat die hier etwas vereinfachte Form ($v_n = \dot{x}_n$)

$$\dot{v}_n = a \left[1 - \left(\frac{v_n}{v_0} \right)^\delta - \left(\frac{s^*}{s_n} \right)^2 \right] \quad (5.26)$$

mit den Parametern a (Maximalbeschleunigung), v_0 (Wunschgeschwindigkeit), δ (Beschleunigungsexponent) sowie den Funktionen

$$s_n = x_{n+1} - x_n - l_{n+1}$$

für die Lücke zum vorausfahrenden Fahrzeug (l_n ist die Fahrzeuglänge) und

$$s^*(v_n, \Delta v_n) = s_S + T v_n + \frac{v_n \Delta v_n}{2\sqrt{ab}} \quad (5.27)$$

für die Wunschlücke zum vorausfahrenden Fahrzeug. Hier ist s_S der Abstand im Stau, T ein ‘‘zeitlicher’’ Sicherheitsabstand und b die Wunschbremsverzögerung, $\Delta v_n = v_{n+1} - v_n$ die Geschwindigkeitsdifferenz zum vorausfahrenden Fahrzeug. Der dritte Summand in (5.27) soll bewirken, dass (nach Einsetzen in (5.26)) die Bremsverzögerung bei zu dichtem Abstand groß genug ist, um einen Auffahrunfall zu vermeiden.

Zellularautomatenmodelle. Wir stellen das Modell von Nagel und Schreckenberg (1992) vor. Die Straße wird diskretisiert in eine Abfolge von Zellen, deren Länge dem typischen Platzbedarf eines Fahrzeugs entspricht. Die möglichen Werte für die Geschwindigkeiten v_n sind ebenfalls diskret, etwa die natürliche Zahlen zwischen 0 und v_{\max} . Der aktuelle Zustand zu einem diskreten Zeitpunkt t wird charakterisiert, indem jeder besetzten Zelle die Geschwindigkeit des darin befindlichen Fahrzeugs zugeordnet wird. Ein Zeitschritt von t nach $t + 1$ besteht aus 4 Teilschritten.

1. Beschleunigen: Ist $v_n < v_{\max}$, so wird v_n um 1 erhöht, $v_n^* = \min\{v_n + 1, v_{\max}\}$.
2. Bremsen: $v_n^{**} = \min\{v_n^*, d_n\}$, wobei d_n die Zahl der leeren Zellen vor Fahrzeug n ist.
3. Trödeln: Ist $v_n^{**} > 0$, so wird die Geschwindigkeit zufällig um eine Einheit vermindert, $v_n^{***} = \max\{v_n^{**} - 1, 0\}$ mit Wahrscheinlichkeit p , andernfalls $v_n^{***} = v_n^{**}$ mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$.
4. Fahren: Fahrzeug n bewegt sich um v_n^{***} Zellen weiter nach rechts.

Jeder Teilschritt wird ‘‘gleichzeitig’’ auf alle Fahrzeuge angewendet (parallele Dynamik). Der dritte Schritt modelliert Schwankungen im Fahrverhalten und bewirkt, dass ein ‘‘Stau aus dem Nichts’’ auftreten kann.