Partielle Differentialgleichungen II *

Martin Brokate †

Inhaltsverzeichnis

*Vorlesungsskript, SS 2007

†Zentrum Mathematik, TU München

1 Das Maximumprinzip

Wir wissen bereits: Ist $u : \Omega \to \mathbb{R}$ eine auf einem beschränkten Gebiet Ω definierte subharmonische Funktion, also

$$-\Delta u \le 0 \quad \text{in } \Omega, \tag{1.1}$$

so ist entweder u konstant, oder es gilt

$$u(x) < \max_{y \in \partial\Omega} u(y)\,, \quad \text{für alle } x \in \Omega. \tag{1.2}$$

Dieser Sachverhalt bleibt richtig, wenn man den Laplace-Operator in (1.1) durch einen allgemeinen elliptischen Operator 2. Ordnung ersetzt, und er läßt sich auch auf zugehörige parabolische Gleichungen, etwa

$$\partial_t u - \Delta u = 0 \tag{1.3}$$

übertragen. Wir betrachten einen Operator L der Form

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_j\partial_i u + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\partial_i u + c(x)u\,, \tag{1.4}$$

der im Kontrast zu Kapitel 8, Teil 1 nun nicht in Divergenzform geschrieben ist. (Schreibt man (1.4) in Divergenzform um, so erhält man

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_j(a_{ij}(x)\partial_i u) + \sum_{i=1}^{n}\left(b_i(x) + \sum_{j=1}^{n}\partial_j a_{ij}(x)\right)\partial_i u + c(x)u\,. \qquad)$$

Voraussetzung 1.1 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, seien $a_{ij}, b_i, c \in C(\overline{\Omega})$ für alle $i,j \in \{1,\dots,n\}$.* □

Erinnerung: Der Differentialoperator L aus (1.4) heißt **gleichmäßig elliptisch**, wenn es ein $a_* > 0$ gibt mit

$$\xi^T A(x)\xi = \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i a_{ij}(x)\xi_j \ge a_*|\xi|^2\,, \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^n,\ x \in \Omega. \tag{1.5}$$

Eine etwas schwächere Forderung, die vor allem zur Behandlung der parabolischen Gleichung benötigt wird, ist

$$\xi^T A(x)\xi \ge 0\,, \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^n,\ x \in \Omega, \tag{1.6}$$

$$\text{es gibt ein } \xi \in \mathbb{R}^n \text{ mit } \xi^T A(x)\xi > 0 \text{ für alle } x \in \overline{\Omega}. \tag{1.7}$$

Hat $u \in C^2(\Omega)$ in $x \in \Omega$ ein Maximum, so gilt

$$\nabla u(x) = 0\,, \quad D^2u(x) \le 0\,, \tag{1.8}$$

das heißt, die Hesse-Matrix $D^2u(x)$ ist negativ semidefinit. Hieraus folgt sofort

$$-\Delta u(x) \ge 0\,, \tag{1.9}$$

und man kann also schließen: Gilt $-\Delta u < 0$ in Ω, so kann u kein Maximum in Ω haben.

Lemma 1.2 *Seien $B, C \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ positiv semidefinit, sei C symmetrisch. Dann gilt*

$$\mathrm{spur}\,(BC) \geq 0\,. \tag{1.10}$$

Beweis: Man betrachtet zuerst den Fall, dass C eine Diagonalmatrix ist, und führt den allgemeinen Fall darauf zurück. Details siehe Übung. □

Satz 1.3 (Schwaches Maximumprinzip, elliptischer Operator)
Es gelte Voraussetzung (1.1) sowie (1.6), (1.7). Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ mit

$$Lu \leq 0 \quad \textit{in } \Omega, \tag{1.11}$$

das heißt, $(Lu)(x) \leq 0$ für alle $x \in \Omega$. Es gelte außerdem $c = 0$. Dann gilt

$$\max_{y \in \overline{\Omega}} u(y) = \max_{y \in \partial\Omega} u(y)\,. \tag{1.12}$$

Beweis: Wir betrachten zunächst den Fall, dass $Lu < 0$ in Ω gilt. Wäre $x \in \Omega$ Maximalstelle von u, so wäre $\nabla u(x) = 0$ und

$$(Lu)(x) = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_j\partial_i u(x) = -\mathrm{spur}\,(A(x)D^2u(x)) \geq 0\,,$$

nach Lemma 1.2, da $-D^2u(x)$ positiv semidefinit und symmetrisch ist. Es folgt (1.12) im Falle $Lu < 0$. Sei nun $Lu \leq 0$ in Ω. Für $\varepsilon > 0$ definieren wir

$$u_\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon e^{\gamma\langle x,\xi\rangle}\,, \tag{1.13}$$

wobei ξ gemäß (1.7) gewählt und $\gamma > 0$ später festgelegt wird. Differenzieren liefert

$$\partial_i u_\varepsilon(x) = \partial_i u(x) + \varepsilon\gamma\xi_i e^{\gamma\langle x,\xi\rangle}\,,$$
$$\partial_j\partial_i u_\varepsilon(x) = \partial_j\partial_i u(x) + \varepsilon\gamma^2\xi_i\xi_j e^{\gamma\langle x,\xi\rangle}\,.$$

Es folgt

$$(Lu_\varepsilon)(x) = (Lu)(x) - \varepsilon\gamma e^{\gamma\langle x,\xi\rangle}[\gamma\xi^T A(x)\xi - \langle \xi, b(x)\rangle]\,. \tag{1.14}$$

Wir wählen γ so groß, dass die eckige Klammer einen Wert > 0 hat für alle $x \in \Omega$; dies ist möglich nach (1.7), da $\overline{\Omega}$ kompakt und A und b stetig sind. Man beachte außerdem, dass γ nicht von ε abhängt. Es folgt

$$Lu_\varepsilon < 0 \quad \text{in } \Omega, \text{ für alle } \varepsilon > 0,$$

also nach dem ersten Teil des Beweises

$$\max_{y \in \overline{\Omega}} u_\varepsilon(y) = \max_{y \in \partial\Omega} u_\varepsilon(y)\,.$$

Da u_ε gleichmäßig gegen u konvergiert, erhalten wir (1.12). □

Ersetzt man in Satz 1.3 die Voraussetzung (1.11) durch

$$Lu \geq 0 \quad \text{in } \Omega, \tag{1.15}$$

so können wir den Satz auf $-u$ anwenden und erhalten

$$\min_{y\in\overline{\Omega}} u(y) = \min_{y\in\partial\Omega} u(y)\,. \tag{1.16}$$

Ist also u eine klassische Lösung der elliptischen Gleichung

$$Lu = 0 \tag{1.17}$$

in Ω, so nimmt sie im Falle $c = 0$ das Maximum und das Minimum auf dem Rand von Ω an.

Eine Konsequenz des Maximumprinzips ist beispielsweise: Ist u eine Lösung von $Lu = 0$ in Ω und wissen wir, dass $u \geq 0$ auf $\partial\Omega$, so folgt auch $u \geq 0$ in Ω.

Im Falle $c \neq 0$ gilt das Maximumprinzip im allgemeinen nicht. Beispiel: $\Omega = (-1,1)\times(-1,1) \subset \mathbb{R}^2$,

$$u(x_1,x_2) = \sin(\pi x_1)\sin(\pi x_2) \tag{1.18}$$

erfüllt

$$-\Delta u - 2\pi^2 u = 0$$

in Ω, aber $u = 0$ auf $\partial\Omega$. Ist aber der Vorfaktor von u nichtnegativ, so ergibt sich das Maximumprinzip in einer etwas schwächeren Form. Wir schreiben

$$u^+ = \max\{u,0\}\,. \tag{1.19}$$

Satz 1.4 *Es gelte Voraussetzung (1.1) sowie (1.6), (1.7). Sei $u \in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ mit*

$$Lu \leq 0 \quad \textit{in } \Omega. \tag{1.20}$$

Es gelte außerdem $c \geq 0$. Dann gilt

$$\max_{y\in\overline{\Omega}} u(y) \leq \max_{y\in\partial\Omega} u^+(y)\,. \tag{1.21}$$

Gilt statt (1.20)

$$Lu = 0 \quad \textit{in } \Omega, \tag{1.22}$$

so folgt

$$\max_{y\in\overline{\Omega}} |u(y)| = \max_{y\in\partial\Omega} |u(y)|\,. \tag{1.23}$$

Beweis: Wir definieren

$$\Omega^+ = \Omega \cap \{x : u(x) > 0\}\,.$$

Ist $u \leq 0$ in Ω, so gilt (1.21) offensichtlich, sei also $\Omega^+ \neq \emptyset$. Es gilt

$$Lu - c(x)u \leq Lu \leq 0 \quad \text{in } \Omega^+.$$

Wir wenden Satz 1.3 an auf $L - c$ und erhalten

$$0 < \max_{y\in\overline{\Omega^+}} u(y) = \max_{y\in\partial\Omega^+} u(y)\,. \tag{1.24}$$

Da $u = 0$ auf $\partial\Omega^+ \cap \Omega$, folgt $\emptyset \neq \partial\Omega^+ \setminus (\partial\Omega^+ \cap \partial\Omega) = \partial\Omega^+ \cap \partial\Omega$, und

$$\max_{y\in\partial\Omega^+} u(y) = \max_{y\in\partial\Omega\cap\partial\Omega^+} u(y) \leq \max_{y\in\partial\Omega} u(y)\,.$$

Gilt (1.22), so folgt durch Anwendung auf $-u$ mit $u^- = (-u)^+ = -\min\{u, 0\}$

$$\min_{y\in\overline{\Omega}} u(y) \geq -\max_{y\in\partial\Omega} u^-(y)\,, \tag{1.25}$$

und daraus (1.23). □

Satz 1.4 besagt: Hat u ein positives Maximum, so wird dieses auch auf dem Rand angenommen. Ist das Maximum negativ, so muss das nicht der Fall sein. Beispiel: $\Omega = (-2, 2) \times (-2, 2)$,

$$u(x_1, x_2) = -\left(e^{x_1} + e^{-x_1} + e^{x_2} + e^{-x_2}\right)\,. \tag{1.26}$$

Das Maximum liegt in $(0, 0)$, $u(0, 0) = -4$, aber auf $\partial\Omega$ gilt $u \leq -e^2$. Das Betragsmaximum von u wird in den vier Ecken von Ω angenommen.

Wir betrachten das Randwertproblem

$$Lu = f\,, \quad \text{in } \Omega, \tag{1.27}$$

$$u = g\,, \quad \text{auf } \partial\Omega, \tag{1.28}$$

wobei wir f und g als stetig voraussetzen.

Folgerung 1.5 *Es gelte Voraussetzung (1.1) sowie (1.6), (1.7), sei $c \geq 0$. Seien $u_i \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ Lösungen von (1.27), (1.28) mit $f = f_i$, $g = g_i$, $i = 1, 2$. Gilt*

$$f_1 \leq f_2 \quad \text{in } \Omega, \quad g_1 \leq g_2 \quad \text{in } \partial\Omega, \tag{1.29}$$

so folgt

$$u_1 \leq u_2 \quad \text{in } \Omega. \tag{1.30}$$

Beweis: Wir wenden Satz 1.4 an auf $u = u_1 - u_2$. □

Hieraus folgt insbesondere die Eindeutigkeit der klassischen Lösung des Randwertproblems (1.27), (1.28) für einen gleichmäßig elliptischen Operator L in einer beliebigen offenen und beschränkten Menge Ω.

Wir behandeln nun das starke Maximumprinzip. Wesentliches Hilfsmittel zu dessen Beweis ist das Lemma von Hopf, welches sich mit der folgenden Situation befasst. Sei x_0 eine strikte Maximalstelle am Rand,

$$x_0 \in \partial\Omega\,, \quad u(x_0) > u(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega, \tag{1.31}$$

der Rand sei nahe x_0 in folgendem Sinne regulär,

$$\text{es gibt ein } R > 0 \text{ und ein } y \in \Omega \text{ mit } B(y; R) \subset \Omega,\ x_0 \in \partial B(y; R). \tag{1.32}$$

Die äußere Normale in x_0 ist dann gegeben (bzw. definiert) durch

$$\nu(x_0) = \frac{x_0 - y}{|x_0 - y|}\,. \tag{1.33}$$

Ist $u \in C^1(\overline{\Omega})$, so folgt aus (1.31) unmittelbar, dass

$$\partial_\nu u(x_0) \geq 0\,.$$

Das Lemma von Hopf besagt nun, dass hier sogar die strikte Ungleichung gelten muss.

Lemma 1.6 (Hopf)
Seien Voraussetzung 1.1 und (1.6) erfüllt, es gelte (1.7) mit $\xi = \nu(x_0)$ *sowie (1.32). Sei* $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ *mit (1.31) und*

$$Lu \leq 0 \quad \text{in } \Omega. \tag{1.34}$$

Es liege einer der folgenden drei Fälle vor:

1. $c = 0$,
2. $c \geq 0$, $u(x_0) \geq 0$,
3. $u(x_0) = 0$.

Dann gilt

$$\partial_\nu u(x_0) > 0\,. \tag{1.35}$$

Beweis: Wir definieren

$$v(x) = e^{-\gamma|x-y|^2} - e^{-\gamma R^2}\,. \tag{1.36}$$

Es ist

$$v \geq 0 \quad \text{in } B(y;R), \quad v = 0 \quad \text{auf } \partial B(y;R), \tag{1.37}$$

$$\partial_i v(x) = -2\gamma(x_i - y_i)e^{-\gamma|x-y|^2}\,. \tag{1.38}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}
(Lv)(x) = &-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\left[4\gamma^2(x_i-y_i)(x_j-y_j) - 2\gamma\delta_{ij}\right] e^{-\gamma|x-y|^2} \\
&+ \sum_{i=1}^{n} b_i(x)(-2)\gamma(x_i-y_i)e^{-\gamma|x-y|^2} + c(x)v(x) \\
= &-e^{-\gamma|x-y|^2}\left[4\gamma^2(x-y)^T A(x)(x-y) - 2\gamma\,\mathrm{spur}\,(A(x)) + 2\gamma\,\langle b(x), x-y\rangle - c(x)\right] \\
&- c(x)e^{-\gamma R^2}\,.
\end{aligned}$$

Wir betrachten nun eine Kugel $B(x_0;\rho)$ um x_0 und wählen $\rho > 0$ so klein, dass

$$(x-y)^T A(x)(x-y) > 0\,, \quad \text{für alle } x \in K(x_0;\rho), \tag{1.39}$$

das ist möglich wegen (1.33), da $\nu(x_0)^T A(x)\nu(x_0) > 0$. Wir definieren

$$U = B(x_0;\rho) \cap B(y;R) \tag{1.40}$$

und wählen $\gamma > 0$ so groß, dass

$$Lv \leq 0 \quad \text{in } U. \tag{1.41}$$

Wir setzen

$$u_\varepsilon(x) = u(x) - u(x_0) + \varepsilon v(x)\,, \quad \varepsilon > 0\,. \tag{1.42}$$

Es gilt dann für alle $x \in U$

$$(Lu_\varepsilon)(x) = (Lu)(x) - c(x)u(x_0) + \varepsilon(Lv)(x) \leq -c(x)u(x_0) \leq 0\,. \tag{1.43}$$

Es gilt weiter
$$u_\varepsilon \leq 0 \quad \text{auf } \partial U \cap \partial B(y;R), \text{ da dort } v = 0. \tag{1.44}$$
Wir wählen $\varepsilon > 0$ so klein, dass
$$u_\varepsilon \leq 0 \quad \text{auf } \partial U \cap \partial B(x_0;\rho), \tag{1.45}$$
das ist möglich, da $\partial U \cap \partial B(x_0;\rho)$ kompakt ist und dort $u < u(x_0)$ gilt.

Sei nun $c \geq 0$ (Fälle 1 und 2 der Behauptung). Wir wenden das schwache Maximumprinzip (Satz 1.4) auf u_ε in U an und erhalten
$$u_\varepsilon \leq 0 \quad \text{in } U. \tag{1.46}$$
Da $u_\varepsilon(x_0) = 0$, folgt
$$0 \leq \partial_\nu u_\varepsilon(x_0) = \partial_\nu u(x_0) + \varepsilon \partial_\nu v(x_0)\,.$$
Nun ist
$$\partial_\nu v(x_0) = -2\gamma \langle x_0 - y, \nu(x_0)\rangle\, e^{-\gamma|x_0-y|^2} = -2\gamma R e^{-\gamma R^2} < 0\,,$$
also
$$\partial_\nu u(x_0) \geq -\varepsilon \partial_\nu v(x_0) > 0\,.$$
Schließlich betrachten wir den Fall $u(x_0) = 0$. Es ist dann $u < 0$ in Ω. Wir setzen $d(x) = \min\{c(x), 0\}$, dann ist $d(x) \leq 0$,
$$(L-d)u = Lu - d(x)u \leq Lu \leq 0\,,$$
sowie $c - d = c^+ \geq 0$,
$$(L-d)u = -\mathrm{spur}\,(AD^2u) + \langle b, \nabla u\rangle + c^+ u\,.$$
Wir können also den bereits bewiesenen Fall 2 anwenden und erhalten die Behauptung.
□

Satz 1.7 *Sei Voraussetzung 1.1 erfüllt, sei L gleichmäßig elliptisch, sei Ω außerdem zusammenhängend. Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, es gelte*
$$Lu \leq 0 \quad \textit{in } \Omega. \tag{1.47}$$
Sei u nicht konstant. Ist $c = 0$, so kann u kein Maximum in Ω haben. Ist $c \geq 0$, so kann u kein nichtnegatives Maximum in Ω haben.

Beweis: Wir nehmen an, es gebe ein $x \in \Omega$ mit
$$u(x) = \max_{y\in\Omega} u(y) =: M\,, \tag{1.48}$$
und sei $M \geq 0$ falls $c \neq 0$. Da u nicht konstant ist, ist
$$\Omega^- = \Omega \cap \{u < M\} \neq \emptyset\,.$$
Wir setzen
$$\Omega^M = \Omega \cap \{u = M\} = \Omega \setminus \Omega^-\,.$$

Ω^- ist offen. Ω^M ist nicht offen in Ω, da andernfalls Ω disjunkte Vereinigung zweier offener Mengen und also nicht zusammenhängend wäre. Sei $\tilde{x} \in \Omega^M \cap \partial\Omega^-$, dann gibt es (in der Nähe von $\tilde{x}$) ein $y \in \Omega^-$ mit

$$\operatorname{dist}(y, \Omega^M) < \operatorname{dist}(y, \partial\Omega) .$$

Sei $r > 0$ die größte Zahl mit $B(y, r) \subset \Omega^-$, dann gibt es ein $x_0 \in \partial B(y, r)$ mit $u(x_0) = M$ und also auch $\nabla u(x_0) = 0$. Aus dem Lemma von Hopf, angewandt in $B(y, r)$, folgt aber in beiden Fällen ($c = 0$ oder $c \geq 0$, $M \geq 0$), dass $\nabla u(x_0) \neq 0$ gilt, ein Widerspruch. □

Folgerung 1.8 (Starkes Maximumprinzip, elliptischer Operator)
Unter den Voraussetzungen von Satz 1.7 gilt

$$u(x) < \max_{y \in \partial\Omega} u(y) , \quad \textit{für alle } x \in \Omega, \tag{1.49}$$

falls $c = 0$ gilt, oder falls $c \geq 0$ gilt und das Maximum auf der rechten Seite von (1.49) nichtnegativ ist.

Beweis: Folgt aus dem schwachen Maximumprinzip (Satz 1.3) und aus Satz 1.7. □

Wir bemerken, dass Satz 1.7 auch gilt, wenn Ω unbeschränkt ist (die Beschränktheit wurde im Beweis nicht verwendet). Allerdings gilt dann i.a. das schwache Maximumprinzip nicht, so dass eine Abschätzung der Werte von u in Ω gegen die Randwerte nicht möglich ist.

Wir betrachten nun einen Operator der Form

$$\partial_t + L ,$$

angewendet auf Funktionen "$u = u(x, t)$", mit

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, t)\partial_j\partial_i u + \sum_{i=1}^{n} b_i(x, t)\partial_i u + c(x, t)u , \tag{1.50}$$

Voraussetzung 1.9 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, sei $T > 0$. Wir setzen*

$$\Omega_T = \Omega \times (0, T] , \tag{1.51}$$

und nennen

$$\Sigma = (\partial\Omega \times [0, T]) \cup (\Omega \times \{0\}) \tag{1.52}$$

den parabolischen Rand von Ω_T. Wir nehmen an, dass $a_{ij}, b_i, c \in C(\overline{\Omega_T})$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. □

Definition 1.10 (Gleichmäßig parabolischer Operator)
Der Operator $\partial_t + L$ mit L aus (1.50) heißt gleichmäßig parabolisch in Ω_T, wenn es ein $a_* > 0$ gibt mit

$$\xi^T A(x, t)\xi = \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i a_{ij}(x, t)\xi_j \geq a_*|\xi|^2 , \quad \textit{für alle } \xi \in \mathbb{R}^n,\ (x, t) \in \Omega_T. \tag{1.53}$$

□

Satz 1.11 (Schwaches Maximumprinzip, parabolischer Operator)
Es gelte Voraussetzung 1.9, sei $\partial_t + L$ *gleichmäßig parabolisch in* Ω_T. *Sei* $u \in C^2(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega_T})$, *sei*

$$\partial_t u + Lu \le 0 \quad \text{in } \Omega_T. \tag{1.54}$$

Im Fall $c = 0$ *gilt dann*

$$\max_{(x,t)\in\overline{\Omega_T}} u(x,t) = \max_{(x,t)\in\Sigma} u(x,t)\,, \tag{1.55}$$

im Fall $c \ge 0$ *gilt*

$$\max_{(x,t)\in\overline{\Omega_T}} u(x,t) \le \max_{(x,t)\in\Sigma} u^+(x,t)\,. \tag{1.56}$$

Beweis: Sei

$$M = \max_{(x,t)\in\overline{\Omega_T}} u(x,t)\,.$$

Wir wenden das schwache Maximumprinzip 1.3 bzw. 1.4 auf $\partial_t + L$ in $\Omega \times (0,T)$ an und erhalten

$$M = \max_{(x,t)\in\partial\Omega_T} u(x,t) \quad \text{bzw.} \quad M \le \max_{(x,t)\in\partial\Omega_T} u^+(x,t)\,. \tag{1.57}$$

Wir nehmen nun an, es gebe ein $x \in \Omega$ mit

$$u(x,T) = M\,. \tag{1.58}$$

Dann gilt

$$\partial_t u(x,T) \ge 0\,, \quad \nabla_x u(x,T) = 0\,, \quad D_x^2 u(x,T) \le 0\,,$$

sowie nach Lemma 1.2

$$-\mathrm{spur}\,(A(x,T)D_x^2 u(x,T)) \ge 0\,.$$

Insgesamt ergibt sich, falls $c = 0$, oder falls $c \ge 0$ und $M \ge 0$,

$$\partial_t u(x,T) + Lu(x,T) \ge 0\,. \tag{1.59}$$

Im Spezialfall

$$\partial_t u + Lu < 0 \quad \text{in } \Omega_T, \tag{1.60}$$

von (1.54) kann es also ein $x \in \Omega$ mit $u(x,T) = M$ nicht geben, und es folgen (1.55) bzw. (1.56). Den allgemeinen Fall führen wir auf (1.60) zurück, indem wir setzen

$$u_\varepsilon(x,t) = u(x,t) - \varepsilon t\,, \quad \varepsilon > 0\,.$$

Es gilt

$$((\partial_t + L)u_\varepsilon)(x,t) \le -\varepsilon - \varepsilon t c(x,t) < 0 \quad \text{in } \Omega_t,$$

also folgen (1.55) bzw. (1.56) für u_ε statt u, und für u durch Grenzübergang $\varepsilon \to 0$. □

Satz 1.12 (Starkes Maximumprinzip, parabolischer Operator)
Es gelte Voraussetzung 1.9, sei Ω *zusammenhängend, sei* $\partial_t + L$ *gleichmäßig parabolisch in* Ω_T. *Sei* $u \in C^2(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega_T})$, *sei*

$$\partial_t u + Lu \le 0 \quad \text{in } \Omega_T. \tag{1.61}$$

Es gebe ein $(x_0, t_0) \in \Omega_T$ *mit*

$$u(x_0,t_0) = \max_{(x,t)\in\Omega_T} u(x,t) =: M\,. \tag{1.62}$$

Es liege einer der folgenden drei Fälle vor:

1. $c = 0$,

2. $c \geq 0$, $u(x_0, t_0) \geq 0$,

3. $u(x_0, t_0) = 0$.

Dann ist u konstant in $\overline{\Omega_{t_0}}$.

Wir zerlegen den Beweis in mehrere Lemmata.

Lemma 1.13 *Es gelten die Voraussetzungen von Satz 1.12. Sei $B_0 = B((x,t);r)$ eine offene Kugel in Ω_T, es gelte $u < M$ in B_0. Dann gilt auch $u < M$ auf ∂B_0 außer möglicherweise in $(x, t+r)$ und $(x, t-r)$.*

Beweis: In allen anderen Randpunkten (ξ, τ) von B_0 hat die äußere Normale die Form

$$\nu(\xi,\tau) = (\nu_x, \nu_t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}\,, \quad \nu_x \neq 0\,.$$

Wir nehmen an, dass $u(\xi,\tau) = M$. Wir wenden das Lemma von Hopf (Lemma 1.6) auf den Operator $\partial_t + L$ in B_0 an. Da L gleichmäßig elliptisch ist, sind in (ξ,τ) die Voraussetzungen von 1.6 erfüllt, also $\partial_\nu u(\xi,\tau) \neq 0$ im Widerspruch zur Maximaleigenschaft von (ξ,τ). □

Lemma 1.14 *Es gelten die Voraussetzungen von Satz 1.12. Sei $t \in (0,T)$, es gebe ein $\tilde{x} \in \Omega$ mit $u(\tilde{x}, t) < M$. Dann gilt $u(x,t) < M$ für alle $x \in \Omega$.*

Beweis: Wir nehmen an $u(x_1, t) = M$ für ein $x_1 \in \Omega$. Da Ω zusammenhängend ist, können wir x_1 und einen weiteren Punkt $x_2 \in \Omega$ mit $u(x_2, t) < M$ so wählen, dass $u(x,t) < M$ für alle Punkte x (bis auf x_1) auf der Verbindungsstrecke L von x_1 nach x_2 gilt, und dass $B(L;\delta) \subset \Omega$ für ein $\delta > 0$. Sei

$$x(\varepsilon) = x_1 + \varepsilon \frac{x_2 - x_1}{|x_2 - x_1|}\,, \quad d(\varepsilon) = \operatorname{dist}(x(\varepsilon), \{u = M\})\,.$$

Für $\varepsilon < \delta$ wählen wir $r(\varepsilon)$ so, dass $u < M$ in $B_\varepsilon = B((x(\varepsilon), t); r(\varepsilon))$ und u auf ∂B_ε den Wert M annimmt. Nach Lemma 1.13 kann der Wert M nur in den Punkten $(x(\varepsilon), t \pm d(\varepsilon))$ angenommen werden. Für $0 < \varepsilon, \varepsilon' < \delta$ folgt dann (Pythagoras)

$$\begin{aligned} d(\varepsilon')^2 &\leq (\varepsilon - \varepsilon')^2 + d(\varepsilon)^2 \\ d(\varepsilon)^2 &\leq (\varepsilon - \varepsilon')^2 + d(\varepsilon')^2\,. \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$|d(\varepsilon')^2 - d(\varepsilon)^2| \leq (\varepsilon' - \varepsilon)^2\,,$$

also

$$\frac{|d(\varepsilon') - d(\varepsilon)|}{\varepsilon' - \varepsilon} \leq \frac{(\varepsilon' - \varepsilon)}{d(\varepsilon') + d(\varepsilon)}\,.$$

Grenzübergang $\varepsilon' \to \varepsilon$ liefert $d'(\varepsilon) = 0$ für alle $\varepsilon \in (0,\delta)$, aber andererseits gilt $d > 0$ und $d(\varepsilon) \to 0$ für $\varepsilon \to 0$, ein Widerspruch. □

Lemma 1.15 *Es gelten die Voraussetzungen von Satz 1.12. Sei* $0 \le t_2 < t_1 \le T$, *es gelte* $u < M$ *in* $\Omega \times (t_2, t_1)$. *Dann gilt* $u < M$ *in* $\Omega \times \{t_1\}$.

Beweis: Wir nehmen an, $u(x_1, t_1) = M$ für ein $x_1 \in \Omega$. Wir definieren

$$v(x,t) = e^{-|x-x_1|^2 - \alpha(t-t_1)} - 1\,. \tag{1.63}$$

Es gilt

$$(\partial_t + L)(v) = e^{-|x-x_1|^2-\alpha(t-t_1)}[-\alpha - 4(x-x_1)^T A(x)(x-x_1) \tag{1.64}$$
$$+ 2\,\mathrm{spur}\,(A(x)) - 2\,\langle b(x), x - x_1\rangle + c(x)] - c(x)\,. \tag{1.65}$$

Wir wählen $\alpha > 0$ so groß, dass

$$(\partial_t + L)v < 0 \quad \text{in } V = B((x_1,t_1);\rho) \cap \{t \le t_1\} \tag{1.66}$$

für hinreichend kleines $\rho > 0$. Wir betrachten das Paraboloid

$$P = \{(x,t) : |x - x_1|^2 \le \alpha(t_1 - t)\}\,. \tag{1.67}$$

Wir definieren

$$u_\varepsilon(x,t) = u(x,t) - M + \varepsilon v(x,t) \tag{1.68}$$

und

$$U = V \cap P\,.$$

Für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ gilt $u_\varepsilon \le 0$ auf ∂U, da $v = 0$ auf ∂P und $u < M$ auf $\partial U \setminus \partial P$. Im Falle $c \ge 0$ (Fälle 1 und 2 der Behauptung) folgt aus dem schwachen Maximumprinzip (Satz 1.4), dass

$$u_\varepsilon \le 0 \quad \text{in } U, \tag{1.69}$$

und weiter, da $u_\varepsilon(x_1, t_1) = 0$,

$$0 \le \partial_t u_\varepsilon(x_1,t_1) = \partial_t u(x_1,t_1) + \varepsilon \partial_t v(x_1,t_1) = \partial_t u(x_1,t_1) - \varepsilon\alpha\,, \tag{1.70}$$

also

$$0 < \partial_t u(x_1, t_1)\,. \tag{1.71}$$

Andererseits gilt im Punkt (x_1, t_1) auch

$$0 \ge (\partial_t + L)u = \partial_t u - \mathrm{spur}\,(A D_x^2 u) + \langle b, \nabla_x u\rangle + cu \ge \partial_t u + cu \ge \partial_t u\,,$$

ein Widerspruch zu (1.71). Der Fall 3 wird auf diesen Fall zurückgeführt, und zwar auf analoge Weise wie im Beweis von Lemma 1.6. □

Beweis von Satz 1.12. Wegen Lemma 1.14 gilt für jedes $t > 0$ entweder

$$u(x,t) < M\,, \quad \text{für alle } x \in \Omega,$$

oder

$$u(x,t) = M\,, \quad \text{für alle } x \in \Omega.$$

Die Menge

$$I = \{t : t \in (0, t_0),\ u(x,t) < M\}$$

ist offen. Ist sie nichtleer, so lässt sie sich darstellen als disjunkte Vereinigung von abzählbar vielen offenen Intervallen $I_k = (a_k, b_k)$. Da $b_k \notin I$, muss $u(x, b_k) = M$ gelten im Widerspruch zu Lemma 1.15. Also ist I leer und damit $u \equiv M$ auf $\overline{\Omega_{t_0}}$. □

Aus dem Maximumprinzip folgt die Eindeutigkeit einer klassischen Lösung der parabolischen Anfangsrandwertaufgabe

$$\partial_t u + Lu = f \quad \text{in } \Omega_T, \tag{1.72}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{für } x \in \Omega, \tag{1.73}$$

$$u(x,t) = g(x,t) \quad \text{für } x \in \partial\Omega,\ t \in (0,T), \tag{1.74}$$

indem man das Maximumprinzip auf die Differenzen $u_1 - u_2$ und $u_2 - u_1$ zweier Lösungen von (1.72) – (1.74) anwendet.

2 Das Bochner-Integral

Unter $[a,b]$ wird im folgenden immer ein kompaktes Intervall im $\mathbb{R}$ verstanden. Ist $A \subset [a,b]$, so bezeichnet χ_A die durch

$$\chi_A(t) = \begin{cases} 1\,, & t \in A\,, \\ 0\,, & t \notin A\,, \end{cases} \tag{2.1}$$

definierte charakteristische Funktion von A.

Definition 2.1 (Einfache Funktion) *Sei X Banachraum. Eine Funktion $u : [a,b] \to X$ heißt einfach, wenn sie die Form*

$$u(t) = \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i}(t) x_i \tag{2.2}$$

hat, wobei $n \in \mathbb{N}$, $A_i \subset [a,b]$ meßbar und $x_i \in X$ für $1 \le i \le n$.

Lemma 2.2 *Sei X Banachraum, $u : [a,b] \to X$ einfach. Dann gibt es genau eine Darstellung der Form (2.2) mit*

$$\bigcup_i A_i = [a,b]\,, \quad A_i \cap A_j = \emptyset \text{ und } x_i \neq x_j \text{ für } i \neq j\,. \tag{2.3}$$

Diese Darstellung heißt kanonische Darstellung.

Beweis: Übung. □

Definition 2.3 (Bochner-Meßbarkeit)
Sei X Banachraum. Eine Funktion $u : [a,b] \to X$ heißt Bochner-meßbar, falls es eine Folge von einfachen Funktionen $u_n : [a,b] \to X$ gibt mit

$$\lim_{n\to\infty} u_n(t) = u(t) \tag{2.4}$$

für fast alle $t \in [a,b]$.

Definition 2.4 *Sei X Banachraum, $u : [a,b] \to X$ einfache Funktion mit der Darstellung*

$$u(t) = \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i}(t) x_i\,. \tag{2.5}$$

Wir definieren das Bochner-Integral von u als

$$\int_a^b u(t)\,dt = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{meas}(A_i) x_i\,. \tag{2.6}$$

Ist $A \subset [a,b]$ meßbar, so definieren wir

$$\int_A u(t)\,dt = \int_a^b \chi_A(t) u(t)\,dt\,. \tag{2.7}$$

Die Definition 2.4 ist sinnvoll, da der Wert der rechten Seite von (2.6) nicht von der gewählten Darstellung abhängt. Direkt aus der Definition folgt, daß für einfache Funktionen $u, v : [a, b] \to X$ und Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_a^b \alpha u(t) + \beta v(t)\, dt = \alpha \int_a^b u(t)\, dt + \beta \int_a^b v(t)\, dt\,, \tag{2.8}$$

sowie

$$\left\| \int_a^b u(t)\, dt \right\| \leq \int_a^b \|u(t)\|\, dt\,. \tag{2.9}$$

Lemma 2.5 *Sei X Banachraum, $u_n : [a, b] \to X$ eine Folge von einfachen Funktionen mit $u_n \to u$ fast überall. Dann ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ die durch*

$$f(t) = \|u_n(t) - u(t)\| \tag{2.10}$$

definierte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ (Lebesgue-)meßbar.

Beweis: Es ist

$$f(t) = \lim_{m\to\infty} f_m(t)\,, \quad f_m(t) := \|u_n(t) - u_m(t)\|\,, \tag{2.11}$$

und f_m ist eine einfache Funktion für alle $m \in \mathbb{N}$. □

Sei nun $u_n : [a, b] \to X$ eine Folge von einfachen Funktionen mit $u_n \to u$ punktweise fast überall und

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \|u_n(t) - u(t)\|\, dt = 0\,. \tag{2.12}$$

(Nach Lemma 2.5 ist der Integrand meßbar.) Wegen

$$\begin{aligned} \left\| \int_a^b u_n(t)\, dt - \int_a^b u_m(t)\, dt \right\| &\leq \int_a^b \|u_n(t) - u_m(t)\|\, dt \\ &\leq \int_a^b \|u_n(t) - u(t)\|\, dt + \int_a^b \|u_m(t) - u(t)\|\, dt \end{aligned} \tag{2.13}$$

wird durch

$$y_n = \int_a^b u_n(t)\, dt \tag{2.14}$$

eine Cauchyfolge in X definiert. Ist $v_n : [a, b] \to X$ eine weitere Folge mit denselben Eigenschaften wie u_n, so gilt

$$\begin{aligned} \left\| \int_a^b v_n(t)\, dt - \int_a^b u_n(t)\, dt \right\| &\leq \int_a^b \|v_n(t) - u_n(t)\|\, dt \\ &\leq \int_a^b \|v_n(t) - u(t)\|\, dt + \int_a^b \|u_n(t) - u(t)\|\, dt\,, \end{aligned} \tag{2.15}$$

also hängt der Grenzwert von (y_n) nicht von der speziellen Wahl der Folge (u_n) ab.

Definition 2.6 (Bochner-Integral) *Sei $u : [a,b] \to X$. Falls es eine Folge von einfachen Funktionen $u_n : [a,b] \to X$ gibt mit $u_n \to u$ punktweise fast überall und*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \|u_n(t) - u(t)\| \, dt = 0\,, \tag{2.16}$$

so heißt u Bochner-integrierbar, und wir definieren das Bochner-Integral von u als

$$\int_a^b u(t)\, dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b u_n(t)\, dt\,. \tag{2.17}$$

Lemma 2.7 *Sei X Banachraum, seien $u, v : [a,b] \to X$ Bochner-integrierbar und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann ist auch $\alpha u + \beta v$ Bochner-integrierbar, und es gilt*

$$\int_a^b \alpha u(t) + \beta v(t)\, dt = \alpha \int_a^b u(t)\, dt + \beta \int_a^b v(t)\, dt\,. \tag{2.18}$$

Beweis: Direkt aus den Definitionen. □

Satz 2.8 *Sei X Banachraum. Ein $u : [a,b] \to X$ ist Bochner-integrierbar genau dann, wenn u Bochner-meßbar und die Funktion $t \mapsto \|u(t)\|$ integrierbar ist. Es gilt außerdem*

$$\left\| \int_a^b u(t)\, dt \right\| \le \int_a^b \|u(t)\|\, dt\,. \tag{2.19}$$

Beweis: "⇒": Sei (u_n) Folge einfacher Funktionen mit $u_n \to u$ punktweise fast überall und

$$\int_a^b \|u(t) - u_n(t)\|\, dt = 0\,. \tag{2.20}$$

Da $\|u_n(t)\| \to \|u(t)\|$ für fast alle $t \in [a,b]$ gilt, ist die Funktion $t \mapsto \|u(t)\|$ meßbar. Es gilt dann

$$\int_a^b \|u(t)\|\, dt \le \int_a^b \|u(t) - u_n(t)\|\, dt + \int_a^b \|u_n(t)\|\, dt < \infty\,. \tag{2.21}$$

"⇐": Sei (u_n) Folge einfacher Funktionen mit $u_n \to u$ punktweise fast überall. Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ definieren wir $v_n : [a,b] \to X$ durch

$$v_n(t) = \begin{cases} u_n(t)\,, & \text{falls } \|u_n(t)\| \le (1+\varepsilon)\|u(t)\|\,, \\ 0\,, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{2.22}$$

v_n ist eine einfache Funktion, da $\{t : \|u_n(t)\| \le (1+\varepsilon)\|u(t)\|\}$ meßbar ist. Für

$$f_n(t) = \|v_n(t) - u(t)\| \tag{2.23}$$

gilt $f_n \to 0$ punktweise fast überall und

$$0 \le f_n(t) \le (2+\varepsilon)\|u(t)\|\,. \tag{2.24}$$

Aus dem Satz von Lebesgue folgt

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \|v_n(t) - u(t)\| \, dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t) \, dt = 0 \,, \tag{2.25}$$

also ist u Bochner-integrierbar. Mit (2.9) folgt

$$\left\| \int_a^b v_n(t) \, dt \right\| \le \int_a^b \|v_n(t)\| \, dt \le (1+\varepsilon) \int_a^b \|u(t)\| \, dt \tag{2.26}$$

und damit auch

$$\left\| \int_a^b u(t) \, dt \right\| = \left\| \lim_{n\to\infty} \int_a^b v_n(t) \, dt \right\| \le (1+\varepsilon) \int_a^b \|u(t)\| \, dt \,. \tag{2.27}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt (2.19). □

In Analogie zum Fall $X = \mathbb{R}$ betrachten wir nun Funktionen $u : [a,b] \to X$, für die gilt

$$\int_a^b \|u(t)\|^p \, dt < \infty \,. \tag{2.28}$$

Definition 2.9 *Sei X Banachraum, $1 \le p < \infty$. Wir definieren*

$$L^p(a,b;X) = \{[u] \,|\, u : [a,b] \to X \textit{ ist Bochner-meßbar und (2.28) gilt}\} \,, \tag{2.29}$$

wobei $[u]$ die Äquivalenzklasse von u unter der Äquivalenzrelation

$$u \sim v \quad \Leftrightarrow \quad u = v \textit{ fast überall} \tag{2.30}$$

bezeichnet.

Nach Satz 2.8 ist $L^1(a,b;X)$ gerade der Vektorraum aller Bochner-integrierbaren Funktionen.

Satz 2.10 *Sei X Banachraum, $1 \le p < \infty$. Dann ist $L^p(a,b;X)$ ein Banachraum mit der Norm*

$$\|u\|_{L^p(a,b;X)} = \left(\int_a^b \|u(t)\|_X^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \,. \tag{2.31}$$

Ist X Hilbertraum, so ist $L^2(a,b;X)$ ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle = \int_a^b \langle u(t), v(t) \rangle_X \, dt \,. \tag{2.32}$$

Beweis: Weggelassen. Geht genauso wie im Fall $X = \mathbb{R}$. Zum Beweis der Bochner-Meßbarkeit der als Limes einer Cauchyfolge konstruierten Grenzfunktion wird zusätzlich der Satz von Pettis benötigt. □

Definition 2.11 *Für $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ definieren wir*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[a,b]} u(t) = \inf\{M : M \in \mathbb{R},\ u(t) \le M \textit{ für fast alle } t \in [a,b]\} \,. \tag{2.33}$$

Wir betrachten nun banachraumwertige Funktionen $u : [a,b] \to X$, für die gilt

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[a,b]} \|u(t)\|_X < \infty\,. \tag{2.34}$$

Definition 2.12 *Sei X Banachraum. Wir definieren*

$$L^\infty(a,b;X) = \{[u]\,|\,u : [a,b] \to X \text{ ist Bochner-meßbar und (2.34) gilt}\}\,. \tag{2.35}$$

Lemma 2.13 *Sei X Banachraum. Dann gilt für alle $p \in [1,\infty)$*

$$L^\infty(a,b;X) \subset L^p(a,b;X) \tag{2.36}$$

Beweis: Für $u \in L^\infty(a,b;X)$ gilt

$$\|u\|^p_{L^p(a,b;X)} = \int_a^b \|u(t)\|^p\,dx \le (b-a)\|u\|^p_{L^\infty(a,b;X)}\,. \tag{2.37}$$

□

Satz 2.14 *Sei X Banachraum. Dann ist $L^\infty(a,b;X)$ ein Banachraum.*

Beweis: Verläuft ebenfalls wie im Fall $X = \mathbb{R}$. □

Definition 2.15 *Sei X Banachraum. Wir definieren*

$$C([a,b];X) = \{u\,|\,u : [a,b] \to X \text{ stetig}\}\,. \tag{2.38}$$

Definition 2.16 (Oszillation) *Sei X Banachraum, $u : [a,b] \to X$. Wir definieren die Oszillation von u durch*

$$\operatorname*{osc}_{[a,b]}(u;\delta) = \sup\{\|u(t)-u(s)\| : s,t \in [a,b],\ |t-s| \le \delta\}\,. \tag{2.39}$$

Lemma 2.17 *Sei X Banachraum, $u : [a,b] \to X$ stetig. Dann gilt*

$$\lim_{\delta\to 0}\operatorname*{osc}_{[a,b]}(u;\delta) = 0\,. \tag{2.40}$$

Beweis: Die Aussage (2.40) ist gleichbedeutend mit der gleichmäßigen Stetigkeit von u. □

Für eine stetige Funktion $u : [a,b] \to X$ gilt

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[a,b]} \|u(t)\| = \max_{t\in[a,b]} \|u(t)\|\,, \tag{2.41}$$

da aus der Stetigkeit folgt, daß $\|u(t)\| \le \operatorname{ess\,sup}_{s\in[a,b]} \|u(s)\|$ gilt für alle t.

Satz 2.18 *Sei X Banachraum. Dann ist $C([a,b];X)$ ein Banachraum mit der Norm*

$$\|u\|_{C([a,b];X)} = \max_{t\in[a,b]} \|u(t)\| \,, \tag{2.42}$$

und $C([a,b];X)$ kann mit einem abgeschlossenen Teilraum von $L^\infty(a,b;X)$ identifiziert werden.

Beweis: Ist $u : [a,b] \to X$ stetig, so ist u auch Bochner-meßbar: Wir definieren eine Folge von einfachen Funktionen $u_n : [a,b] \to X$ durch $u_n(t) = u(ih)$, falls $t \in [ih,(i+1)h)$, $h = (b-a)/n$ ist. Dann gilt

$$\|u_n(t) - u(t)\| \le \operatorname*{osc}_{[a,b]}(u;h) \,, \quad h = \frac{b-a}{n} \,, \tag{2.43}$$

also $u_n \to u$ gleichmäßig (punktweise würde schon genügen). Weiter: Sei (u_n) Folge in C mit $[u_n] \to [u]$ in L^∞. Wir wählen eine Nullmenge N in $[a,b]$ mit $u_n \to u$ gleichmäßig in $M = [a,b] \setminus N$, dann ist u stetig auf M. Ist $t \in N$, so wählen wir eine Folge $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in M mit $t_k \to t$, dann ist

$$\|u_n(t) - u_m(t)\| \le \|u_n(t) - u_n(t_k)\| + \|u_n - u_m\|_{L^\infty(a,b;X)} + \|u_m(t_k) - u_m(t)\| \,,$$

also ist $(u_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge auch für $t \in N$. Definieren wir $\tilde{u}(t)$ als den Limes dieser Cauchyfolge für $t \in N$ und setzen wir $\tilde{u}(t) = u(t)$ für $t \in M$, so ist $\tilde{u} : [a,b] \to X$ stetig und $[\tilde{u}] = [u]$. $\square$

3 Lineare parabolische Gleichungen

Wir erläutern, wie eine parabolische Gleichung aus der allgemeinen Bilanzgleichung für eine zeitabhängige auf die Masse bezogene Dichte $\psi(x,t)$ einer Größe ψ entsteht (siehe Teil 1, Kapitel 5). Wir gehen aus von der differentiellen Form der Bilanzgleichung

$$\partial_t(\rho\psi) + \operatorname{div}(\rho\psi v + \Phi) = \rho z \,. \tag{3.1}$$

Hierbei ist ρ die Dichte der Masse, v die Geschwindigkeit, Φ der nichtkonvektive Fluß und z die Zufuhr. Ist ρ konstant, so wird (3.1) zu

$$\partial_t\psi + \frac{1}{\rho}\operatorname{div}\Phi + \langle v, \nabla\psi\rangle + (\operatorname{div} v)\psi = z \,. \tag{3.2}$$

Der lineare Ansatz

$$\frac{1}{\rho}\Phi = -A\nabla\psi \,, \quad A \text{ Matrix}, \tag{3.3}$$

beschreibt Diffusionsvorgänge, der isotrope Fall entspricht $A = \lambda I$, $\lambda > 0$. Insgesamt ergibt sich die sogenannte **Konvektions-Diffusions-Gleichung**

$$\partial_t\psi - \operatorname{div}(A\nabla\psi) + \langle v, \nabla\psi\rangle + (\operatorname{div} v)\psi = z \,. \tag{3.4}$$

Sind A, v und z gegebene Funktionen von x und t, so erhalten wir eine lineare parabolische Gleichung (wir schreiben wieder u für die unbekannte Funktion)

$$\partial_t u + Lu = f \,, \tag{3.5}$$

wobei L in Divergenzform gegeben ist durch

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_j(a_{ij}(x,t)\partial_i u) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)\partial_i u + c(x,t)u \,. \tag{3.6}$$

Wir betrachten das zugehörige Anfangsrandwertproblem

$$\partial_t u + Lu = f \quad \text{in } \Omega_T = \Omega \times (0,T], \tag{3.7}$$

$$u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \times (0,T), \tag{3.8}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{für } x \in \Omega. \tag{3.9}$$

Wir gehen über zu einer variationellen Formulierung hinsichtlich des Ortsparameters x. Sei $v \in C_0^\infty(\Omega)$ eine Testfunktion. Wir multiplizieren beide Seiten von (3.7) mit v, integrieren über Ω und führen partielle Integration im Divergenzterm durch. Es ergibt sich

$$\int_\Omega \partial_t u(x,t)v(x)\,dx + \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\partial_i u(x,t)\partial_j v(x)\,dx \tag{3.10}$$

$$+ \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)\partial_i u(x,t)v(x)\,dx + \int_\Omega c(x,t)u(x,t)v(x)\,dx \tag{3.11}$$

$$= \int_\Omega f(x,t)v(x)\,dx \,. \tag{3.12}$$

Voraussetzung 3.1 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, seien a_{ij}, b_i, c messbar und beschränkt für alle i, j, sei $\partial_t + L$ gleichmäßig parabolisch, seien $u_0 \in L^2(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega_T)$.* $\square$

Wir wollen die unbekannte Funktion u auffassen als Funktion $u : [0,T] \to V$, wobei V ein geeigneter Banachraum von Funktionen auf Ω ist, also

$$u(t) : \Omega \to \mathbb{R}\,, \quad \text{für alle } t \in [0,T]. \tag{3.13}$$

Der Wert $(u(t))(x)$ entspricht dann $u(x,t)$ in (3.7). Wir formulieren das Anfangsrandwertproblem nunmehr als

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(u(t), v)_H + a(u(t), v; t) = \langle F(t), v\rangle_V\,, \quad \text{für alle } v \in V, \tag{3.14}$$

$$u(0) = u_0\,. \tag{3.15}$$

Hierbei ist

$$H = L^2(\Omega)\,, \quad (w, v)_H = \int_\Omega w(x)v(x)\,dx\,, \tag{3.16}$$

$$V = H_0^1(\Omega)\,, \quad F : [0,T] \to V^*\,, \tag{3.17}$$

$\langle F(t), v\rangle_V$ bedeutet die Anwendung von $F(t)$ auf v, und

$$a(w, v; t) = \int_\Omega (\nabla w(x))^T A(x,t)\nabla v(x)\,dx + \int_\Omega b(x,t)^T \nabla w(x) v(x)\,dx \tag{3.18}$$

$$+ \int_\Omega c(x,t)w(x)v(x)\,dx\,. \tag{3.19}$$

Da in (3.14)

$$v \mapsto a(u(t), v; t)$$

ein Element von V^* definiert, kann man zunächst auch nur dasselbe von

$$v \mapsto \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(u(t), v)_H$$

erwarten. Dem entspricht, dass für eine schwache Lösung

$$u(\cdot, t) \in H_0^1(\Omega)\,, \quad t \in (0,T)$$

die Zeitableitung $\partial_t u(\cdot, t)$ in (3.7) die Regularität von $(Lu)(\cdot, t)$ hat, das heißt, zweite distributionelle Ableitung einer Funktion in $H_0^1(\Omega)$ ist, also erste distributionelle Ableitung einer Funktion in $L^2(\Omega)$. Diesen Raum kann man wieder mit dem Dualraum $H^{-1}(\Omega)$ von $V = H_0^1(\Omega)$ identifizieren (siehe Übung). Es stellt sich heraus, dass der Begriff des **Evolutionstripels** den geeigneten abstrakten Rahmen für die vorliegende Situation liefert.

Ist $v^* \in V^*$ und $v \in V$, so verwenden wir wie oben die Notation

$$\langle v^*, v\rangle_V := v^*(v)\,. \tag{3.20}$$

Satz 3.2 *Sei H ein Hilbertraum und V ein reflexiver Banachraum über $\mathbb{R}$, sei $j : V \to H$ linear, stetig und injektiv, sei $j(V)$ dicht in H. Dann wird durch*

$$\langle j^*(h), v\rangle_V = (h, j(v))_H \tag{3.21}$$

eine lineare, stetige und injektive Abbildung $j^* : H \to V^*$ mit $\|j^*\| \le \|j\|$ definiert, und $j^*(H)$ ist dicht in V^*.

Beweis: Sei $h \in H$. Dann definiert die rechte Seite von (3.21) wegen

$$|(h, j(v))_H| \le \|h\|_H \, \|j(v)\|_H \le \|h\|_H \, \|j\| \, \|v\|_V \tag{3.22}$$

ein Element $j^*(h) \in V^*$ mit

$$\|j^*(h)\|_{V^*} \le \|j\| \, \|h\|_H \,. \tag{3.23}$$

j^* ist offensichtlich linear und wegen (3.23) auch stetig mit $\|j^*\| \le \|j\|$. Ist $j^*(h) = 0$, so ist

$$(h, j(v))_H = 0 \,, \qquad \text{für alle } v \in V \,. \tag{3.24}$$

Sei (v_n) Folge in V mit $j(v_n) \to h$ in H, dann folgt

$$(h, h)_H = (h, \lim_{n\to\infty} j(v_n))_H = \lim_{n\to\infty} (h, j(v_n))_H = 0 \,, \tag{3.25}$$

also ist $h = 0$ und damit j^* injektiv. Es bleibt zu zeigen, daß $j^*(H)$ dicht ist in V^*. Sei $v^{**} \in V^{**}$ beliebig mit $v^{**}(j^*(H)) = 0$. Es genügt zu zeigen, daß dann $v^{**} = 0$ sein muß. (Ist $W = \mathrm{cl}\,(j^*(H))$ echt in V^* enthalten, so gibt es nach dem Satz von Hahn-Banach ein $v^{**} \in V^{**}$ mit $v^{**}(W) = 0$, aber $v^{**} \neq 0$). Da V reflexiv ist, finden wir ein $v \in V$ mit

$$\langle v^*, v\rangle_V = v^{**}(v^*) \,, \qquad \text{für alle } v^* \in V^* \,. \tag{3.26}$$

Es gilt dann für alle $h \in H$

$$0 = v^{**}(j^*(h)) = \langle j^*(h), v\rangle_V = (h, j(v))_H \,, \tag{3.27}$$

also ist $j(v) = 0$ und wegen der Injektivität von j auch $v = 0$, also auch $v^{**} = 0$. □

Folgerung 3.3 *In der Situation von Satz 3.2 gilt außerdem: Die Abbildung $J : V \to V^*$, $J = j^* \circ j$, ist linear, stetig und injektiv, $J(V)$ ist dicht in V^*, und*

$$\langle Jv, w\rangle_V = \langle Jw, v\rangle_V \,, \qquad \textit{für alle } v, w \in V \,. \tag{3.28}$$

Beweis: Folgt unmittelbar aus Satz 3.2 und der Identität

$$\langle Jv, w\rangle_V = (j(v), j(w))_H = (j(w), j(v))_H = \langle Jw, v\rangle_V \,. \tag{3.29}$$

□

Es ergibt sich also

$$V \xrightarrow{j} H \xrightarrow{j^*} V^* \tag{3.30}$$

mit stetigen und dichten Einbettungen.

Definition 3.4 (Evolutionstripel, Gelfand-Dreier)
Unter den Voraussetzungen von Satz 3.2 heißt (3.30) ein Evolutionstripel oder ein Gelfand-Dreier.

In der vorliegenden Situation ist

$$V = H_0^1(\Omega)\,, \quad H = L^2(\Omega)\,, \tag{3.31}$$

und

$$j : H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega) \tag{3.32}$$

die durch $j(v)(x) = v(x)$ definierte kanonische Einbettung. Die Abbildung j^* läßt sich wie folgt interpretieren. Es ist

$$\langle j^*(h), v\rangle_V = (h, j(v))_H = \int_\Omega h(x)v(x)\,dx\,. \tag{3.33}$$

Ordnen wir dem Element $j^*(h) \in V^*$ vermittels des Rieszschen Satzes ein Element $w \in V$ zu, so gilt

$$\langle j^*(h), v\rangle_V = \int_\Omega \langle \nabla w(x), \nabla v(x)\rangle\; dx\,. \tag{3.34}$$

Aus (3.33) und (3.34) folgt, dass w gerade die schwache Lösung des elliptischen Randwertproblems

$$-\Delta w = h \quad \text{in } \Omega, \tag{3.35}$$
$$w = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \tag{3.36}$$

ist.

Die Einbettungen j, j^*, J eines Evolutionstripels induzieren vermittels

$$u \mapsto j \circ u \mapsto J \circ u = j^* \circ j \circ u \tag{3.37}$$

Einbettungen der zugehörigen L^p-Räume

$$L^p(0,T;V) \to L^p(0,T;H) \to L^p(0,T;V^*)\,. \tag{3.38}$$

Definition 3.5 (Schwache Zeitableitung)
Sei $u \in L^1(0,T;V)$. Ein $w \in L^1(0,T;V^*)$ heißt schwache Ableitung von u, wenn gilt

$$\int_0^T w(t)\varphi(t)\,dt = -\int_0^T J(u(t))\varphi'(t)\,dt\,, \tag{3.39}$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(0,T)$. □

Die Integrale in (3.39) sind Bochner-Integrale.

Wir wollen Gleichungen in V und V^* auf Gleichungen in $\mathbb{R}$ zurückspielen. Dazu brauchen wir die Rechenregeln

$$\left\langle v^*\,, \int_0^T u(t)\,dt \right\rangle_V = \int_0^T \langle v^*, u(t)\rangle_V \; dt\,, \quad v^* \in V^*\,,\, u \in L^1(0,T;V)\,, \tag{3.40}$$

und

$$\left\langle \int_0^T u(t)\,dt\,,\, v \right\rangle_V = \int_0^T \langle u(t), v\rangle_V \; dt\,, \quad v \in V\,,\, u \in L^1(0,T;V^*)\,. \tag{3.41}$$

Satz 3.6 *Sei V Banachraum. Ist $v^* \in V^*$ und $u \in L^1(0,T;V)$, so ist $t \mapsto \langle v^*, u(t)\rangle_V$ integrierbar, und (3.40) gilt. Ist $v \in V$ und $u \in L^1(0,T;V^*)$, so ist $t \mapsto \langle u(t), v\rangle_V$ integrierbar, und (3.41) gilt.*

Beweis: Wir betrachten (3.40). Ist

$$u = \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i} v_i \tag{3.42}$$

eine einfache Funktion mit Werten $v_i \in V$, so ist auch $t \mapsto \langle v^*, u(t)\rangle_V$ eine einfache Funktion, und es gilt

$$\begin{aligned} \left\langle v^*, \int_0^T u(t)\,dt \right\rangle_V &= \left\langle v^*, \sum_{i=1}^{n} \mathrm{meas}\,(A_i) v_i \right\rangle_V = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{meas}\,(A_i)\,\langle v^*, v_i\rangle_V \\ &= \int_0^T \langle v^*, u(t)\rangle_V \,dt\,, \quad v^* \in V^*. \end{aligned} \tag{3.43}$$

Sei nun $u \in L^1(0,T;V)$ beliebig. Für $v^* \in V^*$ ist $\langle v^*, u(t)\rangle_V = (v^* \circ u)(t)$, und $v^* \circ u$ ist messbar, da v^* stetig und u Bochner-messbar ist. Weiter gilt

$$\int_0^T |\langle v^*, u(t)\rangle_V|\,dt \le \int_0^T \|v^*\|_{V^*}\|u(t)\|_V\,dt \le \|v^*\|_{V^*}\|u\|_{L^1(0,T;V)}\,. \tag{3.44}$$

Analog gilt

$$\left|\left\langle v^*, \int_0^T u(t)\,dt \right\rangle_V\right| \le \|v^*\|_{V^*}\left\|\int_0^T u(t)\,dt\right\|_V \le \|v^*\|_{V^*}\|u\|_{L^1(0,T;V)}\,. \tag{3.45}$$

Die linke und die rechte Seite von (3.40) definieren also lineare stetige Funktionale auf $L^1(0,T;V)$, welche auf dem dichten Unterraum der einfachen Funktionen übereinstimmen und daher gleich sind. Der Beweis von (3.41) verläuft analog. □

Die folgenden beiden Sätze beschäftigen sich mit der Charakterisierung und Eindeutigkeit der schwachen Ableitung.

Lemma 3.7 *Sei $V \xrightarrow{j} H \xrightarrow{j^*} V^*$ Evolutionstripel, $u \in L^2(0,T;V)$, $w \in L^2(0,T;V^*)$. Dann ist w genau dann schwache Ableitung von u, wenn gilt*

$$\int_0^T (j(u(t)), j(v))_H \varphi'(t)\,dt = -\int_0^T \langle w(t), v\rangle_V\, \varphi(t)\,dt\,, \quad \forall\, v \in V,\ \varphi \in C_0^\infty(0,T)\,. \tag{3.46}$$

Beweis: Wegen (3.41) gilt für alle $v \in V$ und alle $\varphi \in C_0^\infty(0,T)$

$$\begin{aligned} \int_0^T (j(u(t)), j(v))_H \varphi'(t)\,dt &= \int_0^T \langle \varphi'(t) J(u(t)), v\rangle_V\,dt \\ &= \left\langle \int_0^T J(u(t))\varphi'(t)\,dt\,,\, v \right\rangle_V, \end{aligned} \tag{3.47}$$

$$-\int_0^T \langle w(t), v\rangle_V\, \varphi(t)\,dt = \left\langle \int_0^T -w(t)\varphi(t)\,dt\,,\, v \right\rangle_V, \tag{3.48}$$

also ist (3.46) äquivalent zu

$$\int_0^T J(u(t))\varphi'(t)\,dt = -\int_0^T w(t)\varphi(t)\,dt\,, \qquad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(0,T)\,. \tag{3.49}$$

□

Folgerung 3.8 *Ist $w \in L^2(0,T;V^*)$ schwache Ableitung von $u \in L^2(0,T;V)$, so ist für jedes $v \in V$ die Funktion $t \mapsto \langle w(t), v\rangle_V$ schwache Ableitung der Funktion $t \mapsto (j(u(t)), j(v))_H$ im $L^2(0,T)$.*

Lemma 3.9 *Sei V separabler Banachraum, $w \in L^2(0,T;V^*)$. Gilt*

$$\int_0^T \varphi(t)w(t)\,dt = 0\,, \qquad \textit{für alle } \varphi \in C_0^\infty(0,T)\,, \tag{3.50}$$

so gilt $w = 0$ fast überall.

Beweis: Im Spezialfall $V = \mathbb{R}$ kennen wir die Aussage bereits aus Teil 1, Kapitel 2. Sei nun V wie angegeben. Für $v \in V$ und $\varphi \in C_0^\infty(0,T)$ gilt

$$0 = \left\langle \int_0^T \varphi(t)w(t)\,dt\,,\, v \right\rangle_V = \int_0^T \varphi(t)\,\langle w(t), v\rangle_V\,dt\,. \tag{3.51}$$

Aus der Gültigkeit der Aussage für $V = \mathbb{R}$ folgt: Für jedes $v \in V$ gibt es eine Nullmenge $N(v)$ mit

$$\langle w(t), v\rangle = 0\,, \qquad \text{für alle } t \in (0,T) \setminus N(v)\,. \tag{3.52}$$

Sei D eine abzählbare dichte Teilmenge von V, setze

$$N = \bigcup_{v \in D} N(v)\,. \tag{3.53}$$

Dann ist N Nullmenge, und

$$\langle w(t), v\rangle = 0\,, \qquad \text{für alle } t \in (0,T) \setminus N\,,\ v \in D\,, \tag{3.54}$$

also

$$\langle w(t), v\rangle = 0\,, \qquad \text{für alle } t \in (0,T) \setminus N\,,\ v \in V\,, \tag{3.55}$$

also $w(t) = 0$ für alle $t \notin N$. □

Satz 3.10 *Sei V separabler Banachraum, $u \in L^2(0,T;V)$. Dann gibt es höchstens eine schwache Ableitung $w \in L^2(0,T;V^*)$ von u. Falls sie existiert, bezeichnen wir sie mit u'.*

Beweis: Sind $w_1, w_2 \in L^2(0,T;V^*)$ schwache Ableitungen von u, so folgt für $w = w_1 - w_2$ aus der Definition der schwachen Ableitung

$$\int_0^T w(t)\varphi(t)\,dt = 0 \tag{3.56}$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(0,T)$. Aus Lemma 3.9 folgt $w = 0$. □

Die Aussagen von Lemma 3.9 und Satz 3.10 gelten für beliebige Banachräume X und $w \in L^1(0,T;X)$.

Wir formulieren nun noch einmal das parabolische Anfangsrandwertproblem als "abstraktes" Anfangswertproblem (die Null-Randwerte stecken im Raum V)

$$\langle u'(t), v\rangle_V + a(u(t), v; t) = \langle F(t), v\rangle_V \,, \quad \text{für alle } v \in V, \tag{3.57}$$

$$u(0) = u_0 \,. \tag{3.58}$$

Wir suchen eine Lösung u im Raum

$$W = \{u : u \in L^2(0,T;V),\ u' \in L^2(0,T;V^*)\}\,, \tag{3.59}$$

für welche (3.57) für fast alle $t \in (0,T)$ gilt.

Satz 3.11 *Sei $V \overset{j}{\to} H \overset{j^*}{\to} V^*$ Evolutionstripel. Dann gilt*

$$W \subset C([0,T];H)\,. \tag{3.60}$$

Ferner gilt die Regel der partiellen Integration

$$(j(u(t)), j(v(t)))_H - (j(u(s)), j(v(s)))_H = \int_s^t \langle u'(\tau), v(\tau)\rangle_V + \langle v'(\tau), u(\tau)\rangle_V \, d\tau \tag{3.61}$$

für alle $u, v \in W$ und alle $s, t \in [0,T]$.

Beweis: Siehe z.B. Kapitel IV im Buch von Gajewski, Gröger und Zacharias, oder Theorem 5.9.3 im Buch von Evans. □

Die Inklusion (3.60) ist so zu interpretieren: Ist $u \in W$, so enthält die Äquivalenzklasse $[j \circ u] \in L^2(0,T;H)$ von $j \circ u$ genau eine stetige Funktion. In diesem Sinne ist auch die linke Seite von (3.61) zu interpretieren. Wegen (3.60) macht die Anfangsbedingung (3.58) Sinn für Funktionen in W. (Für beliebige Funktionen in $L^2(0,T;V)$ ist (3.58) nicht definiert.)

Voraussetzung 3.12

(i) *$V \overset{j}{\to} H \overset{j^*}{\to} V^*$ ist ein Evolutionstripel, V ist ein separabler Banachraum mit dim$(V) = +\infty$.*

(ii) *$a : V \times V \times (0,T] \to \mathbb{R}$ ist für jedes $t \in (0,T]$ eine Bilinearform, und es gibt $c_a, c_h, C_a > 0$ mit*

$$a(v,v;t) \geq c_a\|v\|_V^2 - c_h\|j(v)\|_H^2\,, \quad \text{für alle } v \in V,\ t \in (0,T], \tag{3.62}$$

$$|a(v,w;t)| \leq C_a\|v\|\,\|w\|\,, \quad \text{für alle } v, w \in V,\ t \in (0,T]. \tag{3.63}$$

Die Abbildungen $t \mapsto a(v,w;t)$ sind messbar für alle $v, w \in V$.

(iii) *$u_0 \in H$, $F \in L^2(0,T;V^*)$.*

$\square$

Theorem 3.13 *Unter den Voraussetzungen 3.12 hat das Anfangswertproblem (3.57), (3.58) eine Lösung $u \in W$.*

Der Beweis besteht aus einer Folge von Lemmata, bei denen wir jedesmal annehmen, daß Voraussetzung 3.12 erfüllt ist. Die Idee ist, das Anfangswertproblem zunächst auf endlichdimensionalen Teilräumen V_n von V zu lösen und die Lösung auf V durch Grenzübergang zu erhalten. Die Existenz des Grenzwerts ergibt sich durch einen Kompaktheitsschluss. Die hierfür notwendige Beschränktheit der approximierenden Folge ergibt sich aus den Eigenschaften der Bilinearform in Voraussetzung 3.12, welche wiederum dadurch garantiert werden, dass $\partial_t + L$ gleichmäßig parabolisch ist.

Lemma 3.14 *Es gibt eine Folge $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in V mit*

$$\dim(V_n) = n\,, \quad V_n := \operatorname{span}\{w_1, \dots, w_n\}\,, \quad V = \operatorname{cl}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n\right). \tag{3.64}$$

Beweis: Sei $M = \{z_m : m \in \mathbb{N}\}$ mit $\operatorname{cl}(M) = V$. Wir konstruieren daraus die Folge (w_n), indem wir alle z_m streichen, für die $z_m \in \operatorname{span}\{z_1, \dots, z_{m-1}\}$ gilt. Es bleiben dabei unendlich viele Elemente übrig, da andernfalls $\operatorname{span}(M)$ endlichdimensional und damit abgeschlossen wäre, und $V = \operatorname{cl}(M) = \operatorname{cl}(\operatorname{span}(M)) = \operatorname{span}(M)$ folgen würde im Widerspruch zu $\dim(V) = +\infty$. $\square$

Wir betrachten nun eine sogenannte **Galerkin-Approximation** von (3.57), (3.58). Hierzu wählen wir eine Folge (u_{0n}) mit $u_{0n} \in V_n$ und $j(u_{0n}) \to u_0$ in H. Wir suchen Funktionen $u_n : [0,T] \to V_n$, dargestellt als

$$u_n(t) = \sum_{k=1}^{n} c_{nk}(t) w_k\,, \quad c_{nk} : [0,T] \to \mathbb{R}\,, \tag{3.65}$$

so dass für fast alle $t \in (0,T]$ gilt

$$(j(u_n'(t)), j(v))_H + a(u_n(t), v; t) = \langle F(t), v \rangle_V\,, \qquad \text{für alle } v \in V_n\,, \tag{3.66}$$

sowie

$$u_n(0) = u_{0n}\,, \quad j(u_{0n}) = p(u_0, j(V_n))\,, \tag{3.67}$$

wobei $p(u_0, X)$ die Orthogonalprojektion von u_0 auf X in H bezeichnet. Sei

$$u_{0n} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{nk} w_k \in V_n\,. \tag{3.68}$$

Zu (3.66), (3.67) sind äquivalent

$$\sum_{k=1}^{n} c_{nk}'(t)(j(w_k), j(w_i))_H + \sum_{k=1}^{n} c_{nk}(t) a(w_k, w_i; t) = \langle F(t), w_i \rangle_V\,, \quad 1 \le i \le n\,, \tag{3.69}$$

$$c_{nk}(0) = \alpha_{nk}\,, \quad 1 \le k \le n\,. \tag{3.70}$$

Lemma 3.15 *Die Galerkin-Gleichungen (3.66), (3.67) haben eine eindeutige Lösung* $u_n : [0,T] \to V_n$ *mit* $u_n' \in L^2(0,T;V_n)$ *und*

$$u_n(t) = u_{0n} + \int_0^t u_n'(s)\, ds\,. \tag{3.71}$$

Beweis: Die Vektoren $w_1, \ldots, w_n$ sind linear unabhängig in V, also auch $j(w_1), \ldots, j(w_n)$ in H, da j injektiv ist. Die Matrix

$$B = (b_{ik})\,, \quad b_{ik} = (j(w_k), j(w_i))_H\,, \tag{3.72}$$

ist invertierbar (Übung), und wir können (3.69), (3.70) schreiben als

$$c_n'(t) + B^{-1}\tilde{A}(t)c_n(t) = B^{-1}\tilde{F}(t)\,, \quad c_n(0) = \alpha_n\,, \tag{3.73}$$

mit

$$\tilde{A}(t) = (\tilde{a}_{ik}(t))\,, \quad \tilde{a}_{ik}(t) = a(w_k, w_i; t)\,, \quad \tilde{F}_i(t) = \langle F(t), w_i \rangle_V\,. \tag{3.74}$$

Nach Voraussetzung ist $\tilde{A} \in L^\infty(0,T;\mathbb{R}^{(n,n)})$, und wegen

$$|\tilde{F}_i(t)| = |\langle F(t), w_i \rangle_V| \le \|F(t)\|_{V^*} \|w_i\|_V$$

ist $\tilde{F} \in L^2(0,T;\mathbb{R}^n)$. Die Anfangswertaufgabe (3.73) hat nach dem Satz von Picard-Lindelöf (in der Version für messbare rechte Seiten, siehe z.B. das Buch von Walter) eine eindeutige Lösung $c_n : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ mit

$$c_n(t) = c_n(0) + \int_0^t c_n'(s)\, ds\,, \quad c_n' \in L^2(0,T;\mathbb{R}^n)\,. \tag{3.75}$$

□

Lemma 3.16 *Es gibt eine von* n *unabhängige Konstante* $C > 0$ *mit*

$$\max_{t\in[0,T]} \|j(u_n(t))\|_H + \|u_n\|_{L^2(0,T;V)} + \|J(u_n')\|_{L^2(0,T;V^*)} \le C(\|u_0\|_H + \|F\|_{L^2(0,T;V^*)})\,. \tag{3.76}$$

Beweis: Sei $n \in \mathbb{N}$ fest gewählt. Wir setzen $v = u_n(t)$ in (3.66) und erhalten

$$(j(u_n'(t)), j(u_n(t)))_H + a(u_n(t), u_n(t); t) = \langle F(t), u_n(t) \rangle_V\,. \tag{3.77}$$

Es gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{1}{2}(j(u_n(t)), j(u_n(t)))_H = (j(u_n'(t)), j(u_n(t)))_H \tag{3.78}$$

nach der Produktregel für Bilinearformen (hier angewandt auf dem endlichdimensionalen Teilraum V_n). Nach Voraussetzung gilt

$$a(u_n(t), u_n(t); t) \ge c_a\|u_n(t)\|_V^2 - c_h\|j(u_n(t))\|_H^2\,. \tag{3.79}$$

Wir integrieren (3.77) über $[0,t]$ und erhalten mit (3.78) und (3.79)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|j(u_n(t))\|_H^2 - \frac{1}{2}\|j(u_n(0))\|_H^2 + c_a \int_0^t \|u_n(s)\|_V^2\, ds \\ \le c_h \int_0^t \|j(u_n(s))\|_H^2\, ds + \int_0^t \langle F(s), u_n(s) \rangle_V\, ds\end{aligned} \tag{3.80}$$

Nach Definition von u_{0n} gilt

$$\|j(u_{0n})\|_H \le \|u_0\|_H \,, \tag{3.81}$$

aus der Youngschen Ungleichung folgt

$$\int_0^t \langle F(s), u_n(s)\rangle_V \; ds \le \frac{c_a}{2} \int_0^t \|u_n(s)\|_V^2 \, ds + \frac{1}{2c_a} \int_0^t \|F(s)\|_{V^*}^2 \, ds \,. \tag{3.82}$$

Setzen wir (3.81) und (3.82) in (3.80) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \|j(u_n(t))\|_H^2 + c_a \int_0^t \|u_n(s)\|_V^2 \, ds \\ \le \|u_0\|_H^2 + 2c_h \int_0^t \|j(u_n(s))\|_H^2 \, ds + \frac{1}{c_a} \int_0^t \|F(s)\|_{V^*}^2 \, ds \,. \end{aligned} \tag{3.83}$$

Für

$$\eta(t) = \|j(u_n(t))\|_H^2 \tag{3.84}$$

gilt

$$\eta(t) \le d_0 + 2c_h \int_0^t \eta(s) \, ds \,, \quad d_0 = \|u_0\|_H^2 + \frac{1}{c_a} \int_0^T \|F(s)\|_{V^*}^2 \, ds \,, \quad t \in [0,T] \,. \tag{3.85}$$

Aus dem Lemma von Gronwall folgt

$$\eta(t) \le d_0 e^{2c_h t} \,, \quad \text{für alle } t \in [0,T]. \tag{3.86}$$

Hieraus ergibt sich für geeignetes C

$$\|j(u_n(t))\|_H^2 \le C(\|u_0\|_H^2 + \|F\|_{L^2(0,T;V^*)}^2) \,, \quad \text{für alle } t \in [0,T]. \tag{3.87}$$

Aus (3.83) folgt weiter (mit geeignet vergrößertem C)

$$\|u_n\|_{L^2(0,T;V)}^2 \le C(\|u_0\|_H^2 + \|F\|_{L^2(0,T;V^*)}^2) \,. \tag{3.88}$$

Zur Abschätzung von $J(u_n')$ betrachten wir noch einmal die Variationsgleichung

$$\langle J(u_n'(t)), v\rangle_V + a(u_n(t), v; t) = \langle F(t), v\rangle_V \;, \quad \text{für alle } v \in V. \tag{3.89}$$

Es folgt

$$|\, \langle J(u_n'(t)), v\rangle_V \,| \le C_a \|u_n(t)\|_V \|v\|_V + \|F(t)\|_{V^*} \|v\|_V \,, \tag{3.90}$$

also

$$\|J(u_n'(t))\|_{V^*} \le C_a \|u_n(t)\|_V + \|F(t)\|_{V^*} \,, \tag{3.91}$$

und hieraus

$$\begin{aligned} \|J(u_n')\|_{L^2(0,T;V^*)}^2 &\le \int_0^T (C_a \|u_n(t)\|_V + \|F(t)\|_{V^*})^2 \, dt \\ &\le 2C_a^2 \|u_n\|_{L^2(0,T;V)}^2 + 2\|F\|_{L^2(0,T;V^*)}^2 \,. \end{aligned}$$

Aus (3.88) folgt die Behauptung. □

Lemma 3.17 *Es gibt eine Teilfolge $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ und ein $u \in L^2(0,T;V)$, so dass u_{n_k} schwach in $L^2(0,T;V)$ gegen u konvergiert. Für u gilt*

$$-(u_0, j(v))_H\varphi(0) - \int_0^T \langle J(u(t)), v\rangle_V \varphi'(t)\,dt + \int_0^T a(u(t), v; t)\varphi(t)\,dt$$
$$= \int_0^T \langle F(t), v\rangle_V \varphi(t)\,dt\,, \tag{3.92}$$

für alle $v \in V$ und alle $\varphi \in C^1[0,T]$ mit $\varphi(T) = 0$.

Beweis: Nach Lemma 3.16 ist (u_n) beschränkt im Hilbertraum $L^2(0,T;V)$. Es gibt also eine Teilfolge (u_{n_k}), welche schwach gegen ein $u \in L^2(0,T;V)$ konvergiert. Sei zunächst $i \in \mathbb{N}$, $v \in V_i$, $\varphi \in C^1[0,T]$ mit $\varphi(T) = 0$. Für $n \geq i$ gilt wegen (3.66)

$$\int_0^T (j(u_n'(t)), j(v))_H\varphi(t)\,dt + \int_0^T a(u_n(t), v; t)\varphi(t)\,dt = \int_0^T \langle F(t), v\rangle_V \varphi(t)\,dt\,. \tag{3.93}$$

Partielle Integration ergibt

$$-(j(u_n(0)), j(v))_H\varphi(0) - \int_0^T \langle J(u_n(t)), v\rangle_V \varphi'(t)\,dt + \int_0^T a(u_n(t), v; t)\varphi(t)\,dt$$
$$= \int_0^T \langle F(t), v\rangle_V \varphi(t)\,dt\,. \tag{3.94}$$

Da $j(u_n(0)) = j(u_{0n}) \to u_0$ in H, gilt

$$\lim_{k\to\infty} -(j(u_{n_k}(0)), j(v))_H = -(u_0, j(v))_H\,. \tag{3.95}$$

Wir untersuchen den Grenzübergang für die beiden Integrale auf der linken Seite von (3.94). Durch

$$z \mapsto \int_0^T \langle J(z(t)), v\rangle_V \varphi'(t)\,dt \tag{3.96}$$

wird ein lineares stetiges Funktional auf $L^2(0,T;V)$ definiert wegen

$$\begin{aligned}\left|\int_0^T \langle J(z(t)), v\rangle_V \varphi'(t)\,dt\right| &\leq \int_0^T \|J(z(t))\|_{V^*}\|v\|_V|\varphi'(t)|\,dt \\ &\leq \|J\|\,\|v\|_V\|\varphi'\|_\infty \int_0^T \|z(t)\|_V\,dt \\ &\leq \|J\|\,\|v\|_V\|\varphi'\|_\infty\sqrt{T}\|z\|_{L^2(0,T;V)}\,. \end{aligned} \tag{3.97}$$

Es gilt also nach einem Satz der Funktionalanalysis

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^T \langle J(u_{n_k}(t)), v\rangle_V \varphi'(t)\,dt = \int_0^T \langle J(u(t)), v\rangle_V \varphi'(t)\,dt\,. \tag{3.98}$$

Analog folgt aus

$$\int_0^T a(z(t), v; t)\varphi(t)\,dt \leq C_a\|v\|_V\|\varphi\|_\infty\sqrt{T}\|z\|_{L^2(0,T;V)} \tag{3.99}$$

für alle $z \in L^2(0,T;V)$ auch

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^T a(u_{n_k}(t), v; t)\varphi(t)\, dt = \int_0^T a(u(t), v; t)\varphi(t)\, dt\,. \tag{3.100}$$

Damit ist (3.92) bewiesen für $v \in V_i$. Da i beliebig war und $\cup_i V_i$ dicht ist in V, folgt die Behauptung. □

Lemma 3.18 *Durch*

$$\langle \tilde{\alpha}(t), v \rangle_V = a(u(t), v; t)\,, \quad v \in V\,, \quad t \in (0,T)\,, \tag{3.101}$$

wird eine Funktion $\tilde{\alpha} \in L^2(0,T;V^*)$ *definiert mit*

$$\|\tilde{\alpha}\|_{L^2(0,T;V^*)} \le C_a \|u\|_{L^2(0,T;V)}\,. \tag{3.102}$$

Beweis: Es gilt

$$|a(u(t), v; t)| \le C_a \|u(t)\|_V \|v\|_V\,, \quad v \in V\,,$$

für fast alle $t \in (0,T)$, also ist

$$\tilde{\alpha}(t) \in V^*\,, \quad \|\tilde{\alpha}(t)\|_{V^*} \le C_a \|u(t)\|_V$$

für fast alle $t \in (0,T)$, und (3.102) folgt aus

$$\int_0^T \|\tilde{\alpha}(t)\|_{V^*}^2\, dt \le C_a^2 \int_0^T \|u(t)\|_V^2\, dt\,.$$

□

Beweis von Theorem 3.13. Nach Lemma 3.17 und 3.18 gilt für alle $\varphi \in C_0^\infty(0,T)$ und alle $v \in V$

$$-\int_0^T (j(u(t)), j(v))_H \varphi'(t)\, dt = -\int_0^T \langle \tilde{\alpha}(t), v \rangle_V \varphi(t)\, dt + \int_0^T \langle F(t), v \rangle_V \varphi(t)\, dt\,. \tag{3.103}$$

Also hat u nach Lemma 3.7 eine schwache Ableitung

$$u' \in L^2(0,T;V^*)\,, \quad u'(t) = -\tilde{\alpha}(t) + F(t)\,, \tag{3.104}$$

also

$$\langle u'(t), v \rangle_V + a(u(t), v; t) = \langle F(t), v \rangle_V\,, \quad v \in V\,,$$

wie behauptet, und $u \in W$. Aus Satz 3.11 folgt $u \in C([0,T];H)$. Wir ersetzen nun in (3.92) die beiden letzten Integrale gemäß (3.104) und erhalten

$$-(u_0, j(v))_H \varphi(0) - \int_0^T \langle J(u(t)), v \rangle_V \varphi'(t)\, dt = \int_0^T \langle u'(t), v \rangle_V \varphi(t)\, dt \tag{3.105}$$

für alle $v \in V$ und alle $\varphi \in C^1[0,T]$ mit $\varphi(T) = 0$. Da andererseits die Funktion $t \mapsto \varphi(t)v$ ebenfalls in W liegt, erhalten wir nach Satz 3.11 für solche Funktionen φ

$$-(j(u(0)), j(v))_H \varphi(0) = \int_0^T \langle u'(t), \varphi(t)v \rangle_V + \langle \varphi'(t) J(v), u(t) \rangle_V\, dt\,. \tag{3.106}$$

Wird nun speziell ein φ mit $\varphi(0) = 1$ gewählt, so folgt aus (3.105) und (3.106)

$$(j(u(0)) - u_0, j(v))_H = 0 \tag{3.107}$$

für alle $v \in V$. Da $j(V)$ dicht ist in H, folgt $j(u(0)) = u_0$. Damit ist Theorem 3.13 vollständig bewiesen. □

Theorem 3.19 *Unter den Voraussetzungen 3.12 hat das Anfangswertproblem (3.57), (3.58) genau eine Lösung $u \in W$, und es gibt eine von u_0 und F unabhängige Konstante $C > 0$ mit*

$$\max_{t\in[0,T]} \|j(u(t))\|_H + \|u\|_{L^2(0,T;V)} + \|u'\|_{L^2(0,T;V^*)} \leq C(\|u_0\|_H + \|F\|_{L^2(0,T;V^*)}) . \tag{3.108}$$

Beweis: Die Existenz folgt aus Satz 3.13. Für jede Lösung $u \in W$ folgt aus Satz 3.11 für jedes $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(j(u(t)), j(u(t)))_H - \frac{1}{2}(u_0, u_0)_H &= \int_0^t \langle u'(s), u(s)\rangle_V \; ds \\ &= -\int_0^t a(u(s), u(s); s)\, ds + \int_0^t \langle F(s), u(s)\rangle_V \; ds\,,\end{aligned}$$

also

$$\frac{1}{2}\|j(u(t))\|_H^2 + \int_0^t a(u(s), u(s); s)\, ds = \frac{1}{2}\|u_0\|_H^2 + \int_0^t \langle F(s), u(s)\rangle_V \; ds\,. \tag{3.109}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\|j(u(t))\|_H^2 + c_a \int_0^t \|u(s)\|_V^2\, ds - c_h \int_0^t \|j(u(s))\|_H^2\, ds \\ &\qquad \leq \frac{1}{2}\|u_0\|_H^2 + \frac{c_a}{2}\int_0^t \|u(s)\|_V^2\, ds + \frac{1}{2c_a}\int_0^t \|F(s)\|_{V^*}^2\, ds\,.\end{aligned} \tag{3.110}$$

Aus dem Lemma von Gronwall erhält man in analoger Weise wie im Beweis von Lemma 3.16

$$\max_{t\in[0,T]} \|j(u(t))\|_H \leq C(\|u_0\|_H + \|F\|_{L^2(0,T;V^*)}) . \tag{3.111}$$

Einsetzen von (3.111) in (3.110) ergibt nun

$$\|u\|_{L^2(0,T;V)} \leq C(\|u_0\|_H + \|F\|_{L^2(0,T;V^*)}) . \tag{3.112}$$

Aus (3.104) und Lemma 3.18 folgt

$$\|u'\|_{L^2(0,T;V^*)} \leq C_a\|u\|_{L^2(0,T;V)} + \|F\|_{L^2(0,T;V^*)} . \tag{3.113}$$

Aus (3.110) und (3.113) ergibt sich nun (3.108) und auch die Eindeutigkeit, da für die Differenz zweier Lösungen (3.108) mit $F = 0$, $u_0 = 0$ gilt. □

Wir kehren zurück zum Anfangsrandwertproblem

$$\partial_t u + Lu = f \quad \text{in } \Omega_T = \Omega \times (0,T], \tag{3.114}$$
$$u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \times (0,T), \tag{3.115}$$
$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{für } x \in \Omega. \tag{3.116}$$

Unter einer schwachen Lösung von (3.114) – (3.116) verstehen wir eine Lösung des (wie oben beschrieben) zugeordneten Anfangswertproblems (3.57), (3.58). Dabei sind

$$a(w,v;t) = \int_\Omega (\nabla w(x))^T A(x,t) \nabla v(x)\, dx + \int_\Omega b(x,t)^T \nabla w(x) v(x)\, dx \tag{3.117}$$
$$+ \int_\Omega c(x,t) w(x) v(x)\, dx\,, \tag{3.118}$$

und

$$(F(t))(v) = \int_\Omega f(x,t) v(x)\, dx\,. \tag{3.119}$$

Theorem 3.20 (Eindeutige Lösbarkeit des Anfangsrandwertproblems)
Es seien die Voraussetzungen 3.1 erfüllt. Dann hat Problem (3.114) – (3.116) genau eine schwache Lösung $u \in W$.

Beweis: Die Aussage ergibt sich aus Satz 3.19, wir müssen nachprüfen, dass die Voraussetzungen in 3.12 erfüllt sind. Als Evolutionstripel wählen wir

$$V = H_0^1(\Omega)\,, \quad H = L^2(\Omega)\,, \quad (j(v))(x) = v(x)\,.$$

Da $\partial_t + L$ gleichmäßig parabolisch ist, gilt nach Lemma 8.5, Teil 1,

$$a(v,v;t) \geq c_a \|v\|_V^2 - c_h \|j(v)\|_H^2\,, \quad \text{für alle } v \in V,\ t \in (0,T],$$

mit geeigneten Konstanten c_a, c_h. Da die Koefffizienten A, b und c beschränkt sind, folgt

$$|a(v,w;t)| \leq C_a \|v\|_V \, \|w\|_V\,, \quad \text{für alle } v,w \in V,\ t \in (0,T],$$

mit einer geeigneten Konstante C_a. Weiter gilt

$$|(F(t))(v)|^2 \leq \int_\Omega |f(x,t)v(x)|^2\, dx \leq \int_\Omega |f(x,t)|^2\, dx \cdot \int_\Omega |v(x)|^2\, dx$$
$$\leq C_\Omega \int_\Omega |f(x,t)|^2\, dx \cdot \|v\|_V^2\,,$$

wobei wir die Ungleichung von Poincaré verwendet haben. Es folgt

$$\|F\|^2_{L^2(0,T;V^*)} = \int_0^T \|F(t)\|^2_{V^*}\, dt \leq C_\Omega \int_0^T \int_\Omega |f(x,t)|^2\, dx\, dt \leq C_\Omega \|f\|^2_{L^2(\Omega_T)}\,,$$

also ist $F \in L^2(0,T;V^*)$. □

Die vorgestellte Methode (Zurückführung der Anfangsrandwertaufgabe auf eine Anfangswertaufgabe im Kontext eines Evolutionstripels) lässt sich auch auf andere partielle Differentialgleichungen anwenden. So kann man etwa hyperbolische Gleichungen wie die

Wellengleichung in eine zu (3.57) analoge Gleichung zweiter Ordnung (also mit $u''(t)$) umformulieren und einen entsprechenden Existenz- und Eindeutigkeitssatz beweisen.

Die Methode der Galerkin-Approximation lässt sich auch zur numerischen Lösung der parabolischen Anfangsrandwertaufgabe verwenden. Man wählt V_n, eine Basis $\{w_1, \ldots, w_n\}$ und löst dann das System von n gewöhnlichen Differentialgleichungen für die unbekannnten Funktionen c_{n_k}, $1 \leq k \leq n$,

$$\sum_{k=1}^{n} c'_{nk}(t)(j(w_k), j(w_i))_H + \sum_{k=1}^{n} c_{nk}(t)a(w_k, w_i; t) = \langle F(t), w_i \rangle_V \ , \quad 1 \leq i \leq n \, , \qquad (3.120)$$

durch ein geeignetes numerisches Verfahren.

4 Sobolevräume und Ordnung

Definition 4.1 (Kegel)
Sei V Vektorraum, $K \subset V$. K heißt Kegel, falls $\lambda v \in K$ gilt für alle $v \in K$ und alle $\lambda \geq 0$. Ein Kegel heißt spitz, falls $K \cap (-K) = \{0\}$. □

Lemma 4.2 *Sei V Vektorraum, $K \subset V$ Kegel. K ist konvex genau dann, wenn $v+w \in K$ gilt für alle $v, w \in K$.*

Beweis: "$\Leftarrow$": Direkt aus der Definition. "$\Rightarrow$": Folgt aus der Identität

$$v + w = 2\left(\frac{1}{2}v + \frac{1}{2}w\right) .$$

□

Ein konvexer Kegel K enthält alle nichtnegativen Linearkombinationen

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \,, \quad \lambda_i \geq 0 \,,$$

von Elementen $v_1, \ldots, v_n \in K$.

Wir erinnern daran, dass eine Relation auf einer Menge als Ordnungsrelation bezeichnet wird, wenn sie reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist.

Satz 4.3 (Geordneter Vektorraum)
Sei V Vektorraum, $K \subset V$ ein spitzer konvexer Kegel. Dann wird durch

$$v \leq w \qquad \Leftrightarrow \qquad w - v \in K \tag{4.1}$$

eine Ordnungsrelation auf V definiert mit den Eigenschaften

$$v \leq w \qquad \Rightarrow \qquad v + z \leq w + z \,, \quad \lambda v \leq \lambda w \,, \quad -w \leq -v \,, \tag{4.2}$$

für alle $v, w, z \in V$ und alle $\lambda \geq 0$.

Beweis: Folgt unmittelbar aus der Definition und Lemma 4.2. □

Sei Ω eine beliebige Menge. Der Vektorraum $\mathrm{Abb}\,(\Omega; \mathbb{R})$ aller Abbildungen $f : \Omega \to \mathbb{R}$ wird durch den Kegel

$$K^+ = \{f : f \in \mathrm{Abb}\,(\Omega; \mathbb{R}) \,, \; f(x) \geq 0 \text{ für alle } x \in \Omega\} \tag{4.3}$$

zu einem geordneten Vektorraum. Diese Ordnung nennen wir **punktweise Ordnung**. Dasselbe gilt für $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ mit

$$K^+ = \{f : f \in \mathrm{Abb}\,(\Omega; \mathbb{R}) \,, \; f(x) \geq 0 \text{ für fast alle } x \in \Omega\} \,. \tag{4.4}$$

Erzeugt ein Kegel K eine Ordnung auf einem Vektorraum V, und ist U ein Unterraum von V, so erzeugt $K \cap U$ gerade die Restriktion dieser Ordnung auf U.

Definition 4.4 (Schranken, Supremum, Infimum)
Sei V geordneter Vektorraum, M eine Teilmenge von V. Ein $z \in V$ heißt obere Schranke von M, falls $v \leq z$ für alle $v \in M$ gilt. Eine obere Schranke z von M heißt Supremum von M, falls $z \leq w$ gilt für alle oberen Schranken w von M. Analog werden die Begriffe "untere Schranke" und "Infimum" von M definiert. □

Definition 4.5 (Vektorverband)
Ein geordneter Vektorraum V heißt Vektorverband, falls je zwei Elemente $v, w \in V$ Supremum und Infimum besitzen. Wir schreiben $v \vee w$ für das Supremum und $v \wedge w$ für das Infimum. □

Ist U Unterraum eines Vektorverbands V und gelten $v \vee w \in U$, $v \wedge w \in U$ für alle $v, w \in U$, so ist U ebenfalls ein Vektorverband.

Lemma 4.6 *Sei V geordneter Vektorraum. Falls*

$$v^+ = v \vee 0 \tag{4.5}$$

existiert für jedes $v \in V$, so ist V ein Vektorverband, und

$$v \vee w = (v - w)^+ + w \,, \tag{4.6}$$
$$v \wedge w = -((-v) \vee (-w)) \,, \tag{4.7}$$
$$(v + w)^+ \leq v^+ + w^+ \,, \tag{4.8}$$

gelten für alle $v, w \in V$.

Beweis: Sind $v, w \in V$, so ist $(v - w)^+ + w$ obere Schranke von v und w, und $z \in V$ ist obere Schranke von v und w genau dann, wenn $z - w$ obere Schranke von $v - w$ und 0 ist, woraus (4.6) folgt. Analog zeigt man (4.7) und (4.8). □

Ebenfalls erhält man unmittelbar aus den Eigenschaften 4.2 die Rechenregeln

$$(v \vee w) + z = (v + z) \vee (w + z) \,, \quad \lambda(v \vee z) = \lambda v \vee \lambda z \,, \tag{4.9}$$
$$(v \wedge w) + z = (v + z) \wedge (w + z) \,, \quad \lambda(v \wedge z) = \lambda v \wedge \lambda z \,, \tag{4.10}$$

für alle $v, w, z \in V$ und alle $\lambda \geq 0$, sowie

$$(v \vee w) + (v \wedge w) = v + w \,, \tag{4.11}$$

für alle $v, w, z \in V$. Weiterhin gelten die Distributivgesetze

$$(v \vee w) \wedge z = (v \wedge z) \vee (w \wedge z) \,, \tag{4.12}$$
$$(v \wedge w) \vee z = (v \vee z) \wedge (w \vee z) \,. \tag{4.13}$$

Wir setzen

$$v^- = (-v)^+ = -(v \wedge 0) \,, \quad |v| = v^+ + v^- \,, \tag{4.14}$$

dann gilt

$$v = v^+ - v^- \,. \tag{4.15}$$

Ein Kegel K kann also nur dann einen Vektorverband erzeugen, wenn

$$V = K - K \tag{4.16}$$

gilt.

Definition 4.7 (Banachverband)
Sei V Banachraum und Vektorverband. V heißt Banachverband, falls die durch $p(v) = v^+$ definierte Abbildung $p : V \to V$ stetig ist. $\square$

Lemma 4.8 *Ist V ein Banachverband, so sind die Supremumsbildung $(v, w) \mapsto v \vee w$ und die Infimumsbildung $(v, w) \mapsto v \wedge w$ stetige Abbildungen von $V \times V \to V$.*

Beweis: Folgt aus den Formeln (4.6) und (4.7). $\square$

Ist $v : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Abbildung, so gilt für die punktweise Ordnung

$$v^+(x) = \max\{v(x), 0\} = (v(x))^+ .$$

Ist $w : \Omega \to \mathbb{R}$ eine weitere Abbildung, so folgt

$$|v^+(x) - w^+(x)| \leq |v(x) - w(x)| , \quad \text{für alle } x \in \Omega. \tag{4.17}$$

Hieraus folgt weiter

$$\|v^+ - w^+\|_p \leq \|v - w\|_p , \tag{4.18}$$

falls $v, w \in L^p(\Omega)$ mit $p \in [1, \infty]$.

Lemma 4.9 *Die Funktionenräume $L^p(\Omega)$ und $C(\overline{\Omega})$ sind Banachverbände mit der durch $K = \{f \geq 0$ fast überall$\}$ erzeugten punktweisen Ordnung.* $\square$

Lemma 4.10 *Sei V Banachverband, dessen Ordnung durch den Kegel K erzeugt wird. Dann ist K abgeschlossen.*

Beweis: Ist $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in K mit $v_n \to v \in V$, so folgt

$$v^+ = \lim_{n\to\infty} v_n^+ = \lim_{n\to\infty} v_n = v .$$

$\square$

Wir wollen nun zeigen, dass $H^1(\Omega)$ ein Banachverband ist.

Lemma 4.11 (Kettenregel bei schwachen Ableitungen)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $v \in L^1_{loc}(\Omega)$, es existiere die schwache Ableitung $\partial_i v \in L^1_{loc}(\Omega)$, sei $f \in C^1(\mathbb{R})$, sei f' beschränkt auf $\mathbb{R}$. Dann ist auch $f \circ v \in L^1_{loc}(\Omega)$, $f \circ v$ hat eine schwache Ableitung $\partial_i(f \circ v) \in L^1_{loc}(\Omega)$, und

$$\partial_i(f \circ v) = (f' \circ v) \cdot \partial_i v . \tag{4.19}$$

Beweis: Wir setzen

$$v_n = v * \eta_{\frac{1}{n}} , \quad n \in \mathbb{N} ,$$

mit der Standardglättungsfunktion η_ε. Sei $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, sei $U \subset\subset \Omega$ offen mit $\operatorname{supp}(\varphi) \subset U$. Für jedes hinreichend große $n \in \mathbb{N}$ gilt mit partieller Integration, da v_n glatt ist,

$$\int_\Omega f'(v_n(x))\partial_i v_n(x)\varphi(x)\, dx = -\int_\Omega f(v_n(x))\partial_i\varphi(x)\, dx . \tag{4.20}$$

Mit Lemma 7.3 aus Teil 1 folgt, dass

$$v_n \to v\,, \quad \partial_i v_n \to \partial_i v\,, \quad \text{in } L^1(U). \tag{4.21}$$

Hieraus folgt

$$\int_U |f(v_n(x)) - f(v(x))|\, dx \le \|f'\|_\infty \int_U |v_n(x) - v(x)|\, dx \to 0\,, \tag{4.22}$$

und weiter

$$\begin{aligned} &\int_U |f'(v_n(x))\partial_i v_n(x) - f'(v(x))\partial_i v(x)|\, dx \;\le \\ &\qquad \le \|f'\|_\infty \underbrace{\int_U |\partial_i v_n(x) - \partial_i v(x)|\, dx}_{\to 0} + \int_U |f'(v_n(x)) - f'(v(x))|\, |\partial_i v(x)|\, dx\,. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Da $v_n \to v$ in $L^1(U)$, folgt $v_{n_k} \to v$ punktweise fast überall für eine geeignete Teilfolge, also wegen der Stetigkeit von f' auch $f' \circ v_{n_k} \to f' \circ v$ punktweise f.ü. Aus dem Satz von Lebesgue folgt nun

$$\int_U |f'(v_{n_k}(x)) - f'(v(x))|\, |\partial_i v(x)|\, dx \to 0\,, \tag{4.24}$$

da $2\|f'\|_\infty \partial_i v$ eine integrierbare Majorante ist. Mit (4.22) – (4.24) können wir in (4.20) den Grenzübergang $n_k \to \infty$ durchführen und erhalten

$$\int_\Omega f'(v(x))\partial_i v(x)\varphi(x)\, dx = -\int_\Omega f(v(x))\partial_i \varphi(x)\, dx\,, \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{4.25}$$

□

Lemma 4.12 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $v \in L^1_{loc}(\Omega)$, es existiere die schwache Ableitung $\partial_i v \in L^1_{loc}(\Omega)$. Dann haben auch v^+, v^- und $|v|$ schwache Ableitungen im $L^1_{loc}(\Omega)$, und es gilt für fast alle $x \in \Omega$*

$$\partial_i v^+(x) = \begin{cases} \partial_i v(x)\,, & v(x) > 0\,, \\ 0\,, & v(x) \le 0\,, \end{cases} \tag{4.26}$$

$$\partial_i v^-(x) = \begin{cases} 0\,, & v(x) \ge 0\,, \\ -\partial_i v(x)\,, & v(x) < 0\,, \end{cases} \tag{4.27}$$

$$\partial_i |v|(x) = \begin{cases} \partial_i v(x)\,, & v(x) > 0\,, \\ 0\,, & v(x) = 0\,, \\ -\partial_i v(x)\,, & v(x) < 0\,. \end{cases} \tag{4.28}$$

Beweis: Wir definieren

$$g_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad g_\varepsilon(t) = \begin{cases} \sqrt{t^2 + \varepsilon^2} - \varepsilon\,, & t > 0\,, \\ 0\,, & t \le 0\,. \end{cases} \tag{4.29}$$

Dann gilt $g_\varepsilon \in C^1(\mathbb{R})$, $g_\varepsilon(t) \to \max\{t, 0\}$ für $\varepsilon \to 0$ punktweise in t,

$$g'_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{t}{\sqrt{t^2+\varepsilon^2}}\,, & t > 0\,, \\ 0\,, & t \le 0\,, \end{cases} \qquad \|g'_\varepsilon\|_\infty = 1\,,$$

und weiter für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\int_\Omega g_\varepsilon(v(x))\partial_i\varphi(x)\,dx = -\int_{\{v>0\}} \frac{v(x)}{\sqrt{v(x)^2+\varepsilon^2}}\partial_i v(x)\varphi(x)\,dx\,.$$

Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ mit dem Satz von Lebesgue liefert

$$\int_\Omega v^+(x)\partial_i\varphi(x)\,dx = -\int_{\{v>0\}} \partial_i v(x)\varphi(x)\,dx\,,$$

woraus (4.26) folgt. Aus den Formeln $v^- = (-v)^+$ und $|v| = v^+ + v^-$ und der Linearität der schwachen Ableitung folgen (4.27) und (4.28). □

Folgerung 4.13 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $v \in L^1_{loc}(\Omega)$, seien $\partial_i v \in L^1_{loc}(\Omega)$ für alle i, $1 \le i \le n$. Dann gilt für jede Niveaumenge $N_c(v) = \{x : x \in \Omega,\, v(x) = c\}$, $c \in \mathbb{R}$, dass*

$$\nabla v(x) = 0\,, \quad \textit{für fast alle } x \in N_c(v). \tag{4.30}$$

Beweis: Aus Lemma 4.12 folgt

$$\nabla(v-c) = \nabla((v-c)^+) - \nabla((v-c)^-)\,,$$

sowie

$$\nabla((v-c)^+) = \nabla((v-c)^-) = 0$$

fast überall auf $N_0(v-c) = N_c(v)$. □

Aus Lemma 4.12 folgt ebenfalls für $v \in H^1(\Omega)$

$$\big\langle \nabla v^+(x), \nabla v^-(x) \big\rangle = 0\,, \quad \text{für fast alle } x \in \Omega. \tag{4.31}$$

Folgerung 4.14 *Für die Bilinearform*

$$a(u,v) = \int_\Omega \langle \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle\; dx$$

gilt für alle $v \in H^1(\Omega)$

$$a(v^+, v^-) = 0\,, \quad a(v, v^+) = a(v^+, v^+) \ge 0\,, \quad a(v, v^-) = -a(v^-, v^-) \le 0\,. \tag{4.32}$$

□

Lemma 4.15 *Die durch $p(v) = v^+$ definierte Abbildung $p : H^1(\Omega) \to H^1(\Omega)$ ist stetig.*

Beweis: Sei $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $H^1(\Omega)$ mit $v_n \to v$ in $H^1(\Omega)$. Wir setzen

$$\Omega_+ = \{v > 0\}\,, \quad \Omega_- = \{v < 0\}\,, \quad \Omega_0 = \{v = 0\}\,, \quad \Omega_+^n = \{v_n > 0\}\,,$$

sowie

$$\chi^+ = \chi_{\Omega_+}\,, \quad \chi_n^+ = \chi_{\Omega_+^n}\,.$$

Es gilt $v_n \to v$ in $L^2(\Omega)$, also auch $v_n^+ \to v^+$ in $L^2(\Omega)$ nach Lemma 4.9. Sei $(v_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge mit $v_{n_k} \to v$ punktweise fast überall, wir bezeichnen sie wieder mit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Es gilt dann

$$\begin{aligned} \chi_n^+ &\to 1 = \chi^+\,, \quad \text{fast überall in } \Omega_+, \\ \chi_n^+ &\to 0 = \chi^+\,, \quad \text{fast überall in } \Omega_-, \end{aligned} \tag{4.33}$$

Aus Lemma 4.12 folgt nun

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla(v_n^+ - v^+)|^2\,dx &= \int_\Omega |\chi_n^+\nabla v_n - \chi^+\nabla v)|^2\,dx \\ &\le \int_\Omega \chi_n^+|\nabla v_n - \nabla v)|^2\,dx + \int_\Omega |\nabla v|^2|\chi_n^+ - \chi^+|\,dx \\ &\le \int_\Omega |\nabla v_n - \nabla v)|^2\,dx + \int_{\Omega_+\cup\Omega_-} |\nabla v|^2|\chi_n^+ - \chi^+|\,dx + \int_{\Omega_0} |\nabla v|^2|\chi_n^+ - \chi^+|\,dx\,. \end{aligned}$$

Alle drei Integrale konvergieren gegen 0; das erste wegen $v_n \to v$ in $H^1(\Omega)$; das zweite wegen (4.33) nach dem Satz von Lebesgue, da $|\nabla v|^2$ eine integrierbare Majorante ist; das dritte, da $\nabla v = 0$ fast überall auf Ω_0 nach Lemma 4.13. Damit ist gezeigt: Gilt $v_n \to v$ in $H^1(\Omega)$, so gibt es eine Teilfolge mit $v_{n_k}^+ \to v^+$ in $H^1(\Omega)$. Hieraus folgt aber, dass für die ganze Folge gilt $v_n^+ \to v^+$ in $H^1(\Omega)$. (Konvergenzprinzip – andernfalls gäbe es eine Teilfolge von $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, welche keine gegen v konvergente Teilfolge besitzt, im Widerspruch zum eben Bewiesenen.) □

Satz 4.16 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann sind $H^1(\Omega)$ und $H_0^1(\Omega)$ Banachverbände.*

Beweis: Wegen Lemma 4.6, Lemma 4.12 und Lemma 4.15 ist $H^1(\Omega)$ Banachverband. Für $H_0^1(\Omega)$ genügt es zu zeigen, dass $v^+ \in H_0^1(\Omega)$ gilt, falls $v \in H_0^1(\Omega)$. Sei $v \in H_0^1(\Omega)$, sei $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $C_0^\infty(\Omega)$ mit $v_n \to v$ in $H^1(\Omega)$. Dann gilt $v_n^+ \in H_0^1(\Omega)$, da $\operatorname{supp}(v_n^+) \subset \operatorname{supp}(v_n) \subset\subset \Omega$. Es folgt $v^+ \in H_0^1(\Omega)$, da $H_0^1(\Omega)$ abgeschlossener Teilraum von $H^1(\Omega)$ ist und da $v_n^+ \to v^+$ in $H^1(\Omega)$:w nach Lemma 4.15. □

Sei V ein geordneter Vektorraum, dessen Ordnung durch einen Kegel K erzeugt wird. Ist $V = K - K$, so können wir auf dem **algebraischen Dualraum**

$$V^\# = \{v^\# | v^\# : V \to \mathbb{R} \text{ linear}\} \tag{4.34}$$

eine Ordnung definieren durch

$$K^\# = \{v^\# | v^\# \in V^\#,\ v^\#(v) \ge 0 \text{ für alle } v \in K\}\,. \tag{4.35}$$

Offensichtlich ist $K^\#$ ein konvexer Kegel. $K^\#$ ist spitz, da für $v^\# \in K^\# \cap (-K^\#)$ gilt, dass $v^\#(v) = 0$ für alle $v \in K$, also $v^\# = 0$ wegen $V = K - K$. Ist V normiert, so gilt dasselbe für den **stetigen Dualraum** $V^* \subset V^\#$ mit dem Kegel

$$K^* = \{v^* | v^* \in V^*,\ v^*(v) \ge 0 \text{ für alle } v \in K\}\,. \tag{4.36}$$

Die Funktionale in $K^\#$ bzw. K^* heißen **nichtnegativ**.

Lemma 4.17 *Sei V Banachverband. Dann wird V^* vermittels K^* zu einem geordneten Vektorraum.* □

Wir beschäftigen uns nicht mit der Frage, unter welchen Zusatzvoraussetzungen an einen Banachverband V dessen Dualraum V^* ebenfalls ein Banachverband ist.

Lemma 4.18 *Für $V = H^k(\Omega)$ gilt $V^* \subset \mathcal{D}'(\Omega)$.*

Beweis: Sei $T \in V^*$. Für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ gilt

$$|T(\varphi)|^2 \le \|T\|^2 \|\varphi\|^2_{H^k(\Omega)} = \|T\|^2 \sum_{|\alpha|\le k} \|\partial^\alpha \varphi\|^2_{L^2(\Omega)} \le \|T\|^2 |\mathrm{supp}\,(\varphi)|^2 \sum_{|\alpha|\le k} \|\partial^\alpha \varphi\|^2_\infty \,,$$

also $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ nach Teil 1, Lemma 2.2. □

Für $k \ge 2$ ist $H^k(\Omega)$ kein Banachverband, wie das Beispiel $\Omega = (-1,1)$, $v(x) = x$ zeigt, es ist $(v^+)'' = \delta$.

Definition 4.19 *Für $V = H_0^1(\Omega)$ bezeichnen wir V^* mit $H^{-1}(\Omega)$.* □

Wir beschäftigen uns mit der Regularität nichtnegativer linearer Funktionale.

Lemma 4.20 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ Distribution mit $T \ge 0$. Dann gibt es zu jedem $A \subset\subset \Omega$ ein $C_A > 0$, so dass*

$$|T(\varphi)| \le C_A \|\varphi\|_\infty \,, \tag{4.37}$$

für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$ mit $\mathrm{supp}\,(\varphi) \subset A$.

Beweis: Wir wählen $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ mit $0 \le \psi \le 1$ und $\psi|A = 1$. Dann gilt

$$\|\varphi\|_\infty \psi + \varphi \ge 0 \,, \quad \|\varphi\|_\infty \psi - \varphi \ge 0 \,,$$

für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ mit $\mathrm{supp}\,(\varphi) \subset A$. Es folgt

$$T(\|\varphi\|_\infty \psi + \varphi) \ge 0 \,, \quad T(\|\varphi\|_\infty \psi - \varphi) \ge 0 \,,$$

und hieraus

$$|T(\varphi)| \le \|\varphi\|_\infty T(\psi) \,.$$

□

Satz 4.21 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ Distribution mit $T \ge 0$. Dann gibt es ein reguläres, auf kompakten Teilmengen A von Ω endliches Borelmaß μ, so dass*

$$T(v) = \int_\Omega v \, d\mu \tag{4.38}$$

gilt für jedes $v \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Beweis: Folgt mit Lemma 4.20 aus einem Satz der Maßtheorie. □

Satz 4.22 *Sei V ein Banachverband mit $\|v^+\| \le \|v\|$ und $\|v^-\| \le \|v\|$ für alle $v \in V$, sei $T : V \to \mathbb{R}$ linear und nichtnegativ. Dann ist T stetig.*

Beweis: Wegen

$$|T(v)| = |T(v^+) - T(v^-)| \le |T(v^+)| + |T(v^-)|, \quad \|v^+\| \le \|v\|, \|v^-\| \le \|v\|,$$

genügt es zu zeigen, dass es ein $M > 0$ gibt mit

$$|T(w)| \le M, \quad \text{für alle } w \ge 0 \text{ mit } \|w\| \le 1. \tag{4.39}$$

(Es folgt dann $|T(v)| \le 2M\|v\|$ für alle $v \in V$.) Wir nehmen an, dass es ein solches M nicht gibt. Sei $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in V mit

$$v_n \ge 0, \quad \|v_n\| \le 1, \quad T(v_n) \ge n^2.$$

Wir setzen

$$w_m = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} v_n.$$

Dann gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\|v_n\| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty,$$

also ist (w_m) konvergent, sei $w_m \to w \in V$. Aus $w_m \le w_k$ für alle $k \ge m$ folgt $w_m \le w$, also auch $T(w_m) \le T(w)$, aber andererseits gilt

$$T(w_m) = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} T(v_n) \ge m > T(w),$$

falls m hinreichend groß, ein Widerspruch. □

Satz 4.23 *Sei $T : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ linear, sei $g \in L^2(\Omega)$ mit $g \ge 0$, es gelte*

$$0 \le T(v) \le \int_\Omega g(x)v(x)\,dx, \quad \text{für alle } v \in H^1(\Omega) \text{ mit } v \ge 0. \tag{4.40}$$

Dann gibt es ein $f \in L^2(\Omega)$ mit $0 \le f \le g$ und

$$T(v) = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx, \quad \text{für alle } v \in H^1(\Omega). \tag{4.41}$$

Beweis: Für alle $v \in H^1(\Omega)$ gilt

$$\begin{aligned} |T(v)| &= |T(v^+) - T(v^-)| \le T(v^+) + T(v^-) \\ &\le \int_\Omega g(x)v^+(x)\,dx + \int_\Omega g(x)v^-(x)\,dx \le \|g\|_2\|v^+\|_2 + \|g\|_2\|v^-\|_2 \\ &\le 2\|g\|_2\|v\|_2. \end{aligned} \tag{4.42}$$

Da $H^1(\Omega)$ dicht ist in $L^2(\Omega)$, lässt T sich eindeutig zu einem $\tilde{T} \in (L^2(\Omega))^*$ fortsetzen. Nach dem Darstellungssatz von Riesz für den Dualraum eines Hilbertraums existiert ein $f \in L^2(\Omega)$, so dass (4.41) gilt. Es folgt

$$0 \le \int_\Omega f(x)v(x)\,dx \le \int_\Omega g(x)v(x)\,dx \tag{4.43}$$

für alle $v \in H^1(\Omega)$, $v \ge 0$. Da es zu jedem $v \in L^2(\Omega)$ mit $v \ge 0$ eine Folge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $H^1(\Omega)$ mit $v_n \ge 0$ und $v_n \to v$ in $L^2(\Omega)$ gibt, gilt (4.43) auch für alle $v \in L^2(\Omega)$ mit $v \ge 0$, also folgt $0 \le f \le g$. $\square$

Satz 4.24 *Sei V ein Banachverband mit $\|v^+\| \le \|v\|$ und $\|v^-\| \le \|v\|$ für alle $v \in V$, seien $v^*, w^* \in V^*$, sei $\{v^*, w^*\}$ nach oben beschränkt. Dann haben v^* und w^* ein Supremum $v^* \vee w^*$ in V^*.*

Beweis: Skizze. Es genügt, den Fall $w^* = 0$ zu betrachten. Man zeigt, dass durch

$$z^*(v) = \sup_{0\le w\le v} v^*(w)\,, \quad v \ge 0\,,$$
$$z^*(v) = z^*(v^+) - z^*(v^-)\,, \quad v \in V\,,$$

eine lineare Abbildung $z^* : V \to \mathbb{R}$ definiert wird, welche nach Satz 4.22 auch stetig ist, und dass $z^* = v^* \vee 0$ gilt. $\square$

Wir können nun schließen, dass für lineare stetige Funktionale auf $L^2(\Omega)$ die Supremumsbildung in $L^2(\Omega)$ und $H^{-1}(\Omega)$ zum gleichen Ergebnis führt. (Dieses Ergebnis werden wir im Folgenden nicht benötigen.)

Folgerung 4.25 *Sei $V = H^1(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$, sei $F \in V^*$ definiert durch*

$$F(v) = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx\,, \quad v \in V\,. \tag{4.44}$$

Dann existiert $F^+ = F \vee 0$ in V^*, und es gilt

$$F^+(v) = \int_\Omega f^+(x)v(x)\,dx\,, \quad f^+(x) = \max\{f(x), 0\}\,, \tag{4.45}$$

für alle $v \in V$.

Beweis: Wir setzen

$$G(v) = \int_\Omega g(x)v(x)\,dx\,, \quad g(x) = \max\{f(x), 0\}\,,$$

dann ist $G \in V^*$ eine obere Schranke von F und 0. Nach Satz 4.24 existiert $F^+ = F \vee 0$ in V^*. Nach Satz 4.23 gibt es ein $h \in L^2(\Omega)$ mit $0 \le h \le g$ und

$$F^+(v) = \int_\Omega h(x)v(x)\,dx\,, \quad \text{für alle } v \in V.$$

Da $F \le F^+$ in V^*, folgt $f \le h$, also auch $g \le h$ und damit $g = h$, $G = F^+$. $\square$

5 Das Hindernisproblem

Sei V ein Hilbertraum, $a : V \times V \to \mathbb{R}$ eine stetige Bilinearform, $F \in V^*$ und K eine konvexe abgeschlossene Teilmenge von V. Wir betrachten die Variationsungleichung

$$a(u, v-u) \geq \langle F, v-u \rangle \ , \quad \text{für alle } v \in K, \tag{5.1}$$

$$u \in K \, . \tag{5.2}$$

Wir schreiben $\langle F, v \rangle$ für die Anwendung von F auf v. In Teil 1, Satz 6.7, haben wir gesehen, dass (5.1), (5.2) eine eindeutige Lösung u hat mit

$$\|u\|_V \leq \frac{1}{c_a} \|F\|_{V^*} \, , \tag{5.3}$$

falls a V-elliptisch ist,

$$a(v,v) \geq c_a \|v\|_V^2 \, , \quad \text{für alle } v \in V. \tag{5.4}$$

Wir haben außerdem gesehen, dass diese Lösung $u \in K$ das eindeutig bestimmte Minimum von

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v,v) - \langle F, v \rangle \tag{5.5}$$

auf K liefert, falls die Bilinearform a symmetrisch ist.

In Teil 1 wurde der Fall $K = V$ untersucht, welcher auf die Variationsgleichung

$$a(u,v) = \langle F, v \rangle \ , \quad \text{für alle } v \in V, \tag{5.6}$$

führt. Wir betrachten als Modellproblem

$$a(u,v) = \int_\Omega \langle \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle \, dx \, , \quad V = H_0^1(\Omega) \, , \tag{5.7}$$

welches im Falle $K = V$ und

$$\langle F, v \rangle = \int_\Omega f(x) v(x) \, dx \, , \quad f \in L^2(\Omega) \, , \tag{5.8}$$

dem Randwertproblem $-\Delta u = f$ in Ω, $u = 0$ auf $\partial\Omega$ entspricht.

Im **Hindernisproblem** setzen wir

$$K = \{ v : v \in V \, , \, v \geq \psi \} \, . \tag{5.9}$$

Hier ist $\psi : \Omega \to \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion.

Voraussetzung 5.1 *Sei $\psi \in C(\overline{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$, es gelte $\psi < 0$ auf $\partial\Omega$.* □

Durch

$$\langle Au, v \rangle = a(u,v) \, , \quad u, v \in H_0^1(\Omega) \, , \tag{5.10}$$

wird ein linearer stetiger Operator

$$A : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega) \tag{5.11}$$

definiert. Fassen wir $u \in H_0^1(\Omega)$ und $Au \in H^{-1}(\Omega)$ als Distributionen auf, so gilt

$$Au = -\Delta u \, ,$$

wenn wir die Ableitung als distributionelle Ableitung verstehen. Wir fassen zusammen:

Satz 5.2 (Eindeutige Lösbarkeit)
Mit $V = H_0^1(\Omega)$ hat das Hindernisproblem

$$a(u, v-u) \geq \langle F, v-u \rangle \,, \quad \textit{für alle } v \in K, \tag{5.12}$$
$$u \in K \,, \quad K = \{v : v \in V \,, \, v \geq \psi\} \,, \tag{5.13}$$

für jedes $F \in H^{-1}(\Omega)$ eine eindeutige Lösung $u \in V$. □

Im Folgenden setzen wir immer $V = H_0^1(\Omega)$, wenn nichts anderes gesagt ist.

Satz 5.3 (Komplementarität)
Sei $u \in V$, es gelte Voraussetzung 5.1. Es gelte $Au \in L^2(\Omega)$ und

$$\langle F, v \rangle = \int_\Omega f(x) v(x) \, dx \,, \quad f \in L^2(\Omega) \,.$$

Dann ist u genau dann eine Lösung des Hindernisproblems (5.12), (5.13), wenn gilt

$$u \geq \psi \,, \quad Au \geq f \,, \quad (Au - f)(u - \psi) = 0 \,. \tag{5.14}$$

Die Bedingungen (5.14) heißen Komplementaritätsbedingungen. Sie besagen insbesondere, dass $Au(x) = -\Delta u(x) = f(x)$ gilt in Punkten x mit $u(x) > \psi(x)$, also außerhalb der Koinzidenzmenge $\{u = \psi\}$.

Beweis: "⇒": Sei u Lösung des Hindernisproblems. Da $u + w \in K$ gilt für alle $w \geq 0$, gilt

$$\langle Au, w \rangle \geq \langle F, w \rangle \,, \quad \text{für alle } w \geq 0,$$

und daher $Au \geq F$ in $H^{-1}(\Omega)$, $Au \geq f$ in $L^2(\Omega)$. Sei $U \subset \Omega$ messbar, es gelte $\operatorname{dist}(U, \partial\Omega) > 0$. Wir definieren

$$\chi^\varepsilon = \chi_U * \eta_\varepsilon$$

mit der Standardglättungsfunktion η_ε, und wählen eine Folge $\varepsilon_n \to 0$, so dass für $\chi_n = \chi^{\varepsilon_n}$ gilt

$$\chi_n \to \chi_U \,, \quad \text{sowohl in } L^2(\Omega) \text{ als auch punktweise f.ü.}$$

Es gilt $0 \leq \chi_n \leq 1$. Setzen wir

$$v = (1 - \chi_n) u + \chi_n \psi = u + \chi_n \cdot (\psi - u) \,,$$

dann gilt $v \in K$ für hinreichend großes n, also

$$0 \leq \langle Au - F, v - u \rangle = \int_\Omega (Au - f)(\psi - u) \chi_n \, dx \,.$$

Grenzübergang $n \to \infty$ ergibt

$$0 \leq \int_U (Au - f)(\psi - u) \, dx \,.$$

Da U beliebig war, folgt $(Au - f)(\psi - u) \geq 0$ und damit auch

$$(Au - f)(u - \psi) = 0 \,.$$

"$\Leftarrow$": Sei $v \in K$. Es ist

$$\begin{aligned}\langle Au - F, v - u\rangle &= \int_\Omega (Au - f)(v-u)\,dx \\ &= \int_{\{u>\psi\}} (Au - f)(v-u)\,dx + \int_{\{u=\psi\}} (Au-f)(v-u)\,dx\,.\end{aligned} \tag{5.15}$$

Aus (5.14) folgt, dass

$$\begin{aligned} v - u = v - \psi \geq 0\,, &\quad \text{auf } \{u = \psi\}, \\ Au - f = 0\,, &\quad \text{auf } \{u > \psi\}. \end{aligned}$$

Es ergibt sich in (5.15)

$$\langle Au - F, v - u\rangle \geq 0\,.$$

Da $v \in K$ beliebig war, ist u Lösung des Hindernisproblems. □

Es erhebt sich die Frage, ob $Au = -\Delta u \in L^2(\Omega)$ gilt für die Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ des Hindernisproblems. Diese ist Teil der allgemeinen Frage nach der **Regularität** der Lösung u.

Beispiel 5.4 Sei $\Omega = (-1, 1) \subset \mathbb{R}$, $F = 0$,

$$\psi(x) = \frac{1}{2} - |x|\,. \tag{5.16}$$

Wir zeigen, dass

$$u(x) = \frac{1}{2}(1 - |x|) \tag{5.17}$$

die eindeutige Lösung des Hindernisproblems ist. Für beliebiges $v \in H_0^1(\Omega)$ gilt $v(1) = v(-1) = 0$, also

$$\begin{aligned}\langle Au, v - u\rangle = a(u, v-u) &= \int_{-1}^1 u'(x)(v'(x) - u'(x))\,dx \\ &= \int_{-1}^0 \frac{1}{2}(v'(x) - \frac{1}{2})\,dx + \int_0^1 -\frac{1}{2}(v'(x) + \frac{1}{2})\,dx \\ &= \frac{1}{2}(v(0) - v(-1) - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}(v(1) - v(0) + \frac{1}{2})\,.\end{aligned}$$

Da $v(0) \geq \psi(0) = \frac{1}{2}$ für $v \in K$, folgt

$$\langle Au, v - u\rangle \geq 0\,, \quad \text{für alle } v \in K.$$

Da $u \geq \psi$, ist u die Lösung. Sie ist Lipschitz-stetig, aber es gilt

$$Au = -u'' = \delta\,,$$

also $Au \notin L^2(\Omega)$. In der Tat, $Au \in L^2(\Omega)$ kann nur gelten, wenn $A\psi$, eingeschränkt auf die Koinzidenzmenge $\{u = \psi\}$, eine L^2-Funktion ist. Ohne das Hindernis wäre $u = 0$ die Lösung, also beliebig glatt. □

Wir betrachten nun ein Beispiel, in dem das Hindernis glatt ist.

Beispiel 5.5 Wie oben sei $\Omega = (-1, 1) \subset \mathbb{R}$, $F = 0$. Sei nun

$$\psi(x) = 1 - 4x^2 . \tag{5.18}$$

Wir definieren $\xi \in (-1, 0)$ als denjenigen Punkt, für den die Tangente an die Funktion ψ im Punkt $(\xi, \psi(\xi))$ durch den Punkt $(-1, 0)$ verläuft, also

$$\psi(\xi) = \psi'(\xi)(\xi + 1) . \tag{5.19}$$

Für $\eta = -\xi \in (0, 1)$ gilt dann

$$\psi(\eta) = -\psi'(\eta)(1 - \eta) . \tag{5.20}$$

Wir zeigen, dass

$$u(x) = \begin{cases} \psi(\xi) + \psi'(\xi)(x - \xi) , & x \le \xi , \\ \psi(x) , & \xi \le x \le \eta , \\ \psi(\eta) + \psi'(\eta)(x - \eta) , & \eta \le x , \end{cases} \tag{5.21}$$

die Lösung des Hindernisproblems ist. Für $v \in H_0^1(\Omega)$ gilt

$$\begin{aligned} \langle Au, v - u \rangle = a(u, v - u) &= \int_{-1}^{\xi} \psi'(\xi)(v'(x) - \psi'(\xi))\, dx \\ &\quad + \int_{\xi}^{\eta} \psi'(x)(v'(x) - \psi'(x))\, dx + \int_{\eta}^{1} \psi'(\eta)(v'(x) - \psi'(\eta))\, dx \\ &= \psi'(\xi)[v(\xi) - \psi'(\xi)(\xi + 1)] + \Big[\psi'(x)(v(x) - \psi(x))\Big]_{x=\xi}^{x=\eta} \\ &\quad - \int_{\xi}^{\eta} \psi''(x)(v(x) - \psi(x))\, dx + \psi'(\eta)[-v(\eta) - \psi'(\eta)(1 - \eta)] . \end{aligned}$$

Mit (5.19), (5.20) folgt nun

$$\langle Au, v - u \rangle = -\int_{\xi}^{\eta} \psi''(x)(v(x) - \psi(x))\, dx = 8 \int_{\xi}^{\eta} v(x) - \psi(x)\, dx \ge 0$$

für alle $v \in K$, also ist u die Lösung. Es gilt

$$u'(x) = \begin{cases} \psi'(\xi) , & x \le \xi , \\ \psi'(x) , & \xi \le x \le \eta , \\ \psi'(\eta) , & \eta \le x , \end{cases} \qquad u''(x) = \begin{cases} 0 , & x < \xi , \\ \psi''(x) , & \xi < x < \eta , \\ 0 , & \eta < x , \end{cases}$$

das heißt, u' ist Lipschitz-stetig, $Au = -u''$ ist beschränkt, aber unstetig. In diesem Fall ist die Voraussetzung $Au \in L^2(\Omega)$ von Satz 5.3 erfüllt.

Für die Lösung des Hindernisproblems gilt $Au \ge F$ in $H^{-1}(\Omega)$, da $v = u + w \in K$ für alle $w \ge 0$. Wir suchen nun nach einer oberen Schranke für Au. Zu diesem Zweck betrachten wir das Hilfsproblem: Gegeben ist $G \in H^{-1}(\Omega)$, gesucht ist $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$, so dass

$$\langle A\tilde{u}, v - \tilde{u} \rangle \ge \langle G, v - \tilde{u} \rangle , \quad \text{für alle } v \in \tilde{K}, \tag{5.22}$$

$$\tilde{u} \in \tilde{K} , \quad \tilde{K} = \{v : v \in V , \, v \le \tilde{\psi}\} . \tag{5.23}$$

Definition 5.6 (Unterlösung)
Ein $z \in H_0^1(\Omega)$ heißt Unterlösung von (5.22), (5.23), falls $z \in \tilde{K}$ und $Az \le G$ in $H^{-1}(\Omega)$ gelten. □

Eine Lösung $\tilde{u}$ des Hilfsproblems ist auch Unterlösung, da $v = \tilde{u} - w \in \tilde{K}$ gilt für jedes $w \ge 0$, also $A\tilde{u} \le G$.

Satz 5.7 *Jede Lösung $\tilde{u}$ des Hilfsproblems (5.22), (5.23) ist maximale Unterlösung, das heißt, es gilt $\tilde{u} \ge z$ für jede Unterlösung z des Hilfsproblems.*

Beweis: Sei z eine Unterlösung, wir setzen $v = z \vee \tilde{u}$ in $H_0^1(\Omega)$. Es gilt $v \le \tilde{\psi}$, also $v \in \tilde{K}$, also

$$\langle A\tilde{u}, v - \tilde{u} \rangle \ge \langle G, v - \tilde{u} \rangle \, . \tag{5.24}$$

Es ist

$$v - \tilde{u} = z \vee \tilde{u} - \tilde{u} = (z - \tilde{u})^+ \ge 0 \, .$$

Da z Unterlösung ist, folgt

$$\langle Az, v - \tilde{u} \rangle \le \langle G, v - \tilde{u} \rangle \, . \tag{5.25}$$

Wir subtrahieren (5.24) von (5.25) und erhalten

$$0 \ge \left\langle Az - A\tilde{u}, (z - \tilde{u})^+ \right\rangle = a(z - \tilde{u}, (z - \tilde{u})^+) = a((z - \tilde{u})^+, (z - \tilde{u})^+) \, ,$$

also

$$(z - \tilde{u})^+ = 0 \, , \quad z \le \tilde{u} \, .$$

□

Dem Hindernis $\psi \in H^1(\Omega)$ können wir das Funktional $A\psi \in H^{-1}(\Omega)$ zuordnen, da wir durch

$$\langle Au, v \rangle = a(u, v) \, , \quad u \in H^1(\Omega) \, , \, v \in H_0^1(\Omega) \, , \tag{5.26}$$

den in (5.11) definierten Operator zu einem Operator

$$A : H^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega) \tag{5.27}$$

fortsetzen können.

Satz 5.8 (Lewy-Stampacchia-Ungleichung)
Es gelte Voraussetzung 5.1, sei $F \in H^{-1}(\Omega)$, es gebe eine obere Schranke für F und $A\psi$ in $H^{-1}(\Omega)$. Dann gilt für die Lösung u des Hindernisproblems aus Satz 5.2

$$F \le Au \le F \vee A\psi \tag{5.28}$$

in $H^{-1}(\Omega)$.

Beweis: Nach Satz 4.24 existiert $F \vee A\psi$ in $H^{-1}(\Omega)$. Wir betrachten das Hilfsproblem (5.22), (5.23) mit

$$G = F \vee A\psi \, , \quad \tilde{\psi} = u \, .$$

Es gilt $\tilde{K} \ne \emptyset$, da $u \in \tilde{K}$. Das Hilfsproblem hat also eine eindeutige Lösung $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$. Da $\psi \le u$ und $A\psi \le F \vee A\psi$, ist ψ Unterlösung des Hilfsproblems. Nach Satz 5.7 folgt $\psi \le \tilde{u}$, also $\tilde{u} \in K$. Setzen wir $v = u$ in der Variationsungleichung (5.22) des Hilfsproblems, so erhalten wir

$$a(\tilde{u}, u - \tilde{u}) \geq \langle F \vee A\psi, u - \tilde{u} \rangle \ . \tag{5.29}$$

Setzen wir $v = \tilde{u}$ in der Variationsungleichung des Hindernisproblems (5.12), so erhalten wir, da $u \geq \tilde{u}$,

$$a(u, \tilde{u} - u) \geq \langle F, \tilde{u} - u \rangle \geq \langle F \vee A\psi, \tilde{u} - u \rangle \ . \tag{5.30}$$

Addition von (5.29) und (5.30) ergibt

$$a(u - \tilde{u}, \tilde{u} - u) \geq 0 \, ,$$

also $u = \tilde{u}$ und daher auch $Au = A\tilde{u} \leq G = F \vee A\psi$. □

Satz 5.9 (Regularität im Hindernisproblem)
Es gelte Voraussetzung 5.1, sei $f \in L^2(\Omega)$ und $F \in H^{-1}(\Omega)$ definiert durch

$$\langle F, v \rangle = \int_\Omega f(x) v(x) \, dx \, . \tag{5.31}$$

Sei außerdem $A\psi = -\Delta\psi \in L^2(\Omega)$. Dann hat das Hindernisproblem (5.12), (5.13) genau eine Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$, und für diese gelten die Komplementaritätsbedingungen

$$u \geq \psi \, , \quad Au \geq f \, , \quad (Au - f)(u - \psi) = 0 \, . \tag{5.32}$$

Es gilt $Au = -\Delta u \in L^2(\Omega)$ sowie $u \in H^2(U)$ für jedes offene $U \subset\subset \Omega$.

Beweis: Durch

$$\langle G, v \rangle = \int_\Omega \max\{f(x), -\Delta\psi(x)\} v(x) \, dx \, , \quad v \in H_0^1(\Omega) \, ,$$

wird eine obere Schranke von F und $A\psi = -\Delta\psi$ in $H^{-1}(\Omega)$ definiert. Nach Satz 5.8 folgt $F \leq Au \leq F \vee A\psi$ in $H^{-1}(\Omega)$. Aus Satz 4.24 folgt nun $Au \in L^2(\Omega)$, also gilt (5.32) nach Satz 5.3. Die Regularitätsaussage folgt aus Satz 8.7 in Teil 1. □

6 Homogenisierung: Einführung

Wir betrachten wieder einmal

$$Lu = f \,, \tag{6.1}$$

wobei

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_j(a_{ij}(x)\partial_i u) = -\mathrm{div}\,(A(x)^T \nabla u)\,. \tag{6.2}$$

In den Anwendungen ist es in der Regel so, dass die Form des Operators L durch das zugrundeliegende Modell (etwa das physikalische Erhaltungsgesetz) bestimmt wird, während die Koeffizienten a_{ij} Eigenschaften des Mediums wiedergeben, in dem sich der Prozess abspielt (Wärmeleitkoeffizienten, Elastizitätsmoduln, elektrische Leitfähigkeit etc.). Sind die Koeffizienten a_{ij} konstant (d.h. in (6.2) unabhängig von x), so spricht man von einem homogenen Medium, andernfalls von einem inhomogenen Medium. Inhomogenitäten können verschiedene Formen annehmen. Besteht das Medium im Gebiet Ω etwa aus unterschiedlichen Materialien $M_1, \ldots, M_K$, welche die Teilgebiete $\Omega_1, \ldots, \Omega_K$ einnehmen und durch Koeffizienten $a_{ij,k}$, $k \in \{k, \ldots, K\}$, charakterisiert sind, so ist

$$a_{ij}(x) = \sum_{k=1}^{K} a_{ij,k} 1_{\Omega_k}(x)\,, \tag{6.3}$$

wobei 1_{Ω_k} die charakteristische Funktion von Ω_k ist.

Inhomogenitäten können auf zwei (oder mehreren) "Skalen" auftreten. Betrachtet man beispielsweise die Biomechanik des menschlichen Knochens, so liegt die Makroskala im Zentimeterbereich, die für die innere Festigkeit maßgebliche poröse Struktur weist charakteristische Längen im Bereich $10 - 100\ \mu m$ auf, beschrieben etwa durch Materialparameter

$$a_{ij}^{\varepsilon}(x)\,,$$

wobei wir uns ε als klein vorstellen. Man will nun den Einfluss der mikroskopischen Struktur auf die makroskopischen Eigenschaften untersuchen, und zwar nach Möglichkeit in einer geeignet gemittelten Form.

Wir betrachten ein eindimensionales Beispiel. Sei $Y = (0, l)$ ein Referenzintervall im $\mathbb{R}$, sei $a \in L^\infty(0, l)$. Vermittels

$$a(y + l) = a(y)\,, \quad y \in \mathbb{R}\,, \tag{6.4}$$

können wir a eindeutig zu einer l-periodischen Funktion $a \in L^\infty(\mathbb{R})$ fortsetzen. Wir definieren nun für gegebenes $\varepsilon > 0$

$$a^{\varepsilon}(x) = a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\,, \tag{6.5}$$

und betrachten in $\Omega = (d_1, d_2)$ das Randwertproblem

$$-\partial_x(a^{\varepsilon}(x)\partial_x u_\varepsilon) = f\,, \quad x \in \Omega\,, \tag{6.6}$$

$$u_\varepsilon(d_1) = u_\varepsilon(d_2) = 0\,. \tag{6.7}$$

Der Koeffizient a^ε variiert mit der Periode εl. Wir setzen voraus, dass es Konstanten $c_a, C_a > 0$ gibt mit

$$c_a \le a(y) \le C_a\,, \quad \text{für alle } y \in Y\,. \tag{6.8}$$

Offensichtlich gilt

$$c_a \le a^\varepsilon(x) \le C_a\,, \quad \text{für alle } x \in \Omega. \tag{6.9}$$

Das elliptische Randwertproblem (6.6), (6.7) hat also nach dem Satz von Lax-Milgram eine eindeutige schwache Lösung $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$. Es erhebt sich nun die Frage, ob u_ε in irgendeinem Sinne gegen ein u_0 konvergiert, und ob ein solches u_0 als Lösung eines geeignet gemittelten Randwertproblems erhalten werden kann. Es gilt (siehe Teil 1, Kapitel 6)

$$\|u_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \le \frac{1}{c_a}\|f\|_{L^2(\Omega)}\,, \tag{6.10}$$

also ist $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ beschränkt im Hilbertraum $H_0^1(\Omega)$. Es gibt daher eine schwach konvergente Folge

$$u_{\varepsilon_k} \rightharpoonup u_0 \in H_0^1(\Omega)\,, \quad \varepsilon_k \to 0\,, \tag{6.11}$$

oder äquivalent

$$u_{\varepsilon_k} \rightharpoonup u_0 \quad \text{in } L^2(\Omega), \quad \partial_x u_{\varepsilon_k} \rightharpoonup \partial_x u_0 \quad \text{in } L^2(\Omega). \tag{6.12}$$

Wir definieren nun

$$\xi_\varepsilon(x) = a^\varepsilon(x)\partial_x u_\varepsilon(x)\,, \quad x \in \Omega\,, \tag{6.13}$$

dann gilt nach (6.6)

$$-\partial_x \xi_\varepsilon = f\,, \quad \text{in } \Omega. \tag{6.14}$$

Die Menge (ξ_ε) ist ebenfalls beschränkt im $H_0^1(\Omega)$, wegen (6.14) und weil

$$\|\xi_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \le C_a\|\partial_x u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \le \frac{C_a}{c_a}\|f\|_{L^2(\Omega)}\,. \tag{6.15}$$

gilt. Also gibt es $\xi_0 \in H_0^1(\Omega)$, so dass (nach Übergang zu einer Teilfolge)

$$\xi_{\varepsilon_k} \rightharpoonup \xi_0 \quad \text{in } L^2(\Omega), \quad \partial_x \xi_{\varepsilon_k} = -f = \partial_x \xi_0 \quad \text{in } L^2(\Omega). \tag{6.16}$$

Da $\Omega = (d_1, d_2)$ eindimensional ist, erfüllt jede beschränkte Teilmenge von $H_0^1(\Omega)$ die Voraussetzungen des Satzes von Arzela und Ascoli, also gilt für eine Teilfolge

$$\xi_{\varepsilon_k} \to \xi_0 \quad \text{gleichmäßig in } C[d_1, d_2]. \tag{6.17}$$

Wir untersuchen nun den Zusammenhang zwischen u_0 und ξ_0. Nach (6.13) gilt

$$\partial_x u_\varepsilon(x) = \frac{1}{a^\varepsilon(x)}\xi_\varepsilon(x)\,, \quad x \in \Omega\,, \tag{6.18}$$

und aus (6.9) folgt

$$\frac{1}{C_a} \le \frac{1}{a^\varepsilon} \le \frac{1}{c_a}\,, \tag{6.19}$$

das heißt, $(1/a^\varepsilon)$ ist beschränkt in $L^\infty(\Omega)$. Wie wir später beweisen werden, gilt dann für eine weitere Teilfolge

$$\frac{1}{a^{\varepsilon_k}} \overset{*}{\rightharpoonup} \beta\,, \quad \beta = \frac{1}{l}\int_0^l \frac{1}{a(y)}\,dy\,. \tag{6.20}$$

Es folgt (wie wir ebenfalls später sehen werden)

$$\frac{1}{a^{\varepsilon_k}}\xi_{\varepsilon_k} \rightharpoonup \beta\xi_0\,, \quad \text{in } L^2(\Omega). \tag{6.21}$$

Da $\partial_x u_{\varepsilon_k} \rightharpoonup \partial_x u_0$ in $L^2(\Omega)$ nach (6.12), erhalten wir aus (6.18) und (6.21)

$$\partial_x u_0(x) = \frac{1}{l} \int_0^l \frac{1}{a(y)}\, dy \cdot \xi_0(x)\,. \tag{6.22}$$

Wir setzen nun

$$a^0 = \left(\frac{1}{l} \int_0^l \frac{1}{a(y)}\, dy \right)^{-1} . \tag{6.23}$$

Aus (6.22) und (6.14) folgt schließlich

$$-\partial_x (a^0 \partial_x u_0) = f\,, \quad x \in \Omega\,, \tag{6.24}$$

sowie

$$u_\varepsilon(d_1) = u_\varepsilon(d_2) = 0\,. \tag{6.25}$$

(Da $H_0^1(d_1, d_2) \subset C[d_1, d_2]$, gilt (6.25) im klassischen Sinn.) Es hat sich also herausgestellt, dass der "Homogenisierungslimes" u_0 die wegen $a^0 \geq c_a$ eindeutige Lösung des Randwertproblems (6.24), (6.25) ist, mit dem durch (6.23) gegebenen konstanten Koeffizienten a^0. Aus der Eindeutigkeit von u_0 folgt nun weiter, dass

$$u_{\varepsilon_k} \rightharpoonup u_0 \quad \text{in } H_0^1(\Omega) \tag{6.26}$$

für jede Folge $\varepsilon_k \to 0$.

Da a^0 konstant ist, lässt sich eine explizite Lösungsformel für u_0 angeben, nämlich

$$u_0(x) = -\frac{1}{a^0} \int_0^x \int_0^t f(s)\, ds\, dt + \frac{x}{a^0} \int_0^1 \int_0^t f(s)\, ds\, dt\,. \tag{6.27}$$

Wir betrachten als Beispiel

$$(0, l) = (0, 1)\,, \quad a(y) = 1 + y\,,. \tag{6.28}$$

Es ist

$$\int_0^1 \frac{1}{a(y)}\, dy = \ln(1+y)\Big|_0^1 = \ln 2\,, \quad a^0 = \frac{1}{\ln 2}\,, \tag{6.29}$$

aber andererseits

$$\int_0^1 a(y)\, dy = \frac{3}{2}\,, \tag{6.30}$$

Der Homogenisierungskoeffizient a^0 ist also **nicht** das Integralmittel von a. Dasselbe gilt im Beispiel

$$(0, l) = (0, 1)\,, \quad a(y) = \begin{cases} 1\,, & 0 < y < \frac{2}{3} \\ 2\,, & \frac{2}{3} < y\,. \end{cases} \tag{6.31}$$

Hier ist

$$\int_0^1 \frac{1}{a(y)}\, dy = \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{6}\,, \quad a^0 = \frac{6}{5}\,, \tag{6.32}$$

aber

$$\int_0^1 a(y)\, dy = \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3}\,. \tag{6.33}$$

Wir kehren nun zur mehrdimensionalen Situation zurück und interpretieren die variationelle Lösung im Fall unstetiger Koeffizienten (6.3). Ist die rechte Seite f in (6.1) glatt, so wird man nicht erwarten können, dass $\nabla u(x)$ stetig ist in Punkten, in denen $A(x)$ unstetig ist. Wir nehmen an, dass Ω zerfällt gemäß

$$\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2\,, \quad \Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset\,, \tag{6.34}$$

wobei Ω_1, Ω_2 offene Teilmengen einer beschränkten offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sind. Seien $\partial\Omega_1, \partial\Omega_2$ hinreichend glatt, sei $u \in H_0^1(\Omega)$ eine schwache Lösung von

$$-\mathrm{div}\,(A(x)^T \nabla u) = f \quad \text{in } \Omega \tag{6.35}$$

mit $u = 0$ auf $\partial\Omega$, sei außerdem $u \in C(\Omega)$, $u \in C^2(\Omega_i)$ für $i = 1, 2$, und seien die Ableitungen ∇u in Ω_i stetig auf $\partial\Omega_i$ fortsetzbar. Wir bezeichnen diese Fortsetzungen mit ∇u_i. Wir setzen nicht voraus, dass ∇u_1 und ∇u_2 auf $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ übereinstimmen. Sei außerdem $A : \Omega \to \mathbb{R}^{(n,n)}$ stetig differenzierbar auf Ω_i und stetig fortsetzbar mit den Fortsetzungen A_1, A_2. Dann gilt für alle Testfunktionen $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\begin{aligned} \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx &= \int_\Omega \nabla u(x)^T A(x) \nabla\varphi(x)\,dx = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i} \nabla u(x)^T A(x)\nabla\varphi(x)\,dx = \\ &= -\sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i} \mathrm{div}\,(A(x)^T \nabla u(x))\varphi(x)\,dx + \sum_{i=1}^2 \int_{\partial\Omega_i} \nabla u_i(\xi)^T A_i(\xi) n_i(\xi)\varphi(\xi)\,dS(\xi)\,, \end{aligned}$$

also wegen (6.35) und da $\varphi = 0$ auf $\partial\Omega$

$$\sum_{i=1}^2 \int_{\partial\Omega_1\cap\partial\Omega_2} \nabla u_i(\xi)^T A_i(\xi) n_i(\xi)\varphi(\xi)\,dS(\xi) = 0\,, \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{6.36}$$

Da für die Normalen n_i an $\partial\Omega_i$ gilt $n_1 = -n_2$ auf $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$, folgt mit $n = n_1$

$$\int_{\partial\Omega_1\cap\partial\Omega_2} \nabla u_1(\xi)^T A_1(\xi) n(\xi)\varphi(\xi)\,dS(\xi) = \int_{\partial\Omega_1\cap\partial\Omega_2} \nabla u_2(\xi)^T A_2(\xi) n(\xi)\varphi(\xi)\,dS(\xi)\,, \tag{6.37}$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, also

$$\big\langle A_1(x)^T \nabla u_1(x), n(x)\big\rangle = \big\langle A_2(x)^T \nabla u_2(x), n(x)\big\rangle\ , \quad \text{fast überall auf } \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2. \tag{6.38}$$

Das bedeutet, dass die Normalkomponente des Flusses $A(x)^T\nabla u(x)$ stetig ist über die Unstetigkeitsfläche $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ hinweg. Besitzt also für eine zu modellierende Situation (etwa ein Diffusionsprozess) der Fluss der betrachteten Größe diese Erhaltungseigenschaft (nämlich dass auf der Fläche keine Produktion von Fluss stattfindet), so wird sie durch die variationelle schwache Lösung korrekt wiedergegeben.

7 Mittelung und schwache Konvergenz

Nach Definition ist eine Folge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $L^p(\Omega)$ genau dann schwach konvergent gegen ein $v \in L^p(\Omega)$, wenn gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega v_n(x)\varphi(x)\,dx = \int_\Omega v(x)\varphi(x)\,dx\,, \quad \text{für alle } \varphi \in L^q(\Omega), \tag{7.1}$$

wobei

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,. \tag{7.2}$$

Im Falle $p = \infty$ ist $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ schwach-$*$-konvergent gegen v genau dann, wenn (7.2) gilt für $q = 1$. Eine Teilmenge I von $\mathbb{R}^n$ der Form

$$I = \prod_{i=1}^n (a_i, b_i)\,, \quad \text{bzw.} \quad I = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$$

heißt **offenes** bzw. **abgeschlossenes Intervall** im $\mathbb{R}^n$.

Satz 7.1 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $L^p(\Omega)$, $1 < p \le \infty$, sei $v \in L^p(\Omega)$. Dann sind äquivalent:*

(i) $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert schwach gegen v (im Fall $p = \infty$: $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert schwach-$*$ gegen v).

(ii) $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt im $L^p(\Omega)$ (das heißt, die Menge $\{\|v_n\|_{L^p(\Omega)} : n \in \mathbb{N}\}$ ist beschränkt), und

$$\lim_{n\to\infty} \int_I v_n(x)\,dx = \int_I v(x)\,dx \tag{7.3}$$

für alle Intervalle $I \subset \Omega$.

Beweis: "(i)⇒(ii)": Jede schwach konvergente (bzw. schwach-$*$-konvergente) Folge ist beschränkt (siehe Funktionalanalysis), und (7.3) ergibt sich, wenn wir $\varphi = \chi_I$ in (7.1) setzen.

"(ii)⇒(i)": Nach (7.3) gilt (7.1) für alle $\varphi = \chi_I$, I Intervall, und damit auch für alle einfachen Funktionen

$$\varphi = \sum_{k=1}^m \alpha_k \chi_{I_k}\,, \quad \alpha_k \in \mathbb{R}\,. \tag{7.4}$$

Sei $\varphi \in L^q(\Omega)$ beliebig, q wie in (7.2), sei $\delta > 0$. Da die Menge der Funktionen der Form (7.4) dicht ist in $L^q(\Omega)$, gibt es ein solches φ_δ mit

$$\|\varphi - \varphi_\delta\|_q \le \delta\,.$$

Es gilt nun

$$\int_\Omega (v_n - v)\varphi\,dx = \int_\Omega (v_n - v)\varphi_\delta\,dx + \int_\Omega (v_n - v)(\varphi - \varphi_\delta)\,dx\,.$$

Sei n_0 so, dass

$$\left|\int_\Omega (v_n - v)\varphi_\delta\,dx\right| \le \delta$$

für alle $n \geq n_0$, dann folgt

$$\left| \int_\Omega (v_n - v)\varphi \, dx \right| \leq \delta + \|v_n - v\|_p \, \|\varphi - \varphi_\delta\|_q \leq C\delta \,,$$

für alle $n \geq n_0$, wobei C weder von n_0 noch von δ abhängt. □

Für $p = 1$ impliziert (ii) im allgemeinen nicht (i).
Sei Y ein Intervall im $\mathbb{R}^n$ der Form

$$Y = \prod_{i=1}^{n} (0, l_i) \,, \quad l_i > 0 \,. \tag{7.5}$$

Definition 7.2 *Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt Y-periodisch, falls*

$$f(x + l_i e_i) = f(x) \tag{7.6}$$

gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$, $1 \leq i \leq n$, wobei e_i der i-te Einheitsvektor im $\mathbb{R}^n$ ist. □

Offensichtlich gilt für jede Y-periodische Funktion

$$f\left(x + \sum_{i=1}^{n} k_i l_i e_i \right) = f(x) \,, \quad x \in \mathbb{R}^n \,, \, k_i \in \mathbb{Z} \,. \tag{7.7}$$

Jedes $f : Y \to \mathbb{R}$ lässt sich zu einer Y-periodischen Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fortsetzen, die eindeutig bestimmt ist bis auf die Nullmenge, die durch Translation von ∂Y gemäß (7.7) gegeben ist.

Lemma 7.3 *Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Y-periodisch, $f|Y \in L^1(Y)$. Dann gilt für alle $y_0 \in \mathbb{R}^n$*

$$\int_{y_0 + Y} f(y) \, dy = \int_Y f(y) \, dy \,. \tag{7.8}$$

Beweis: Es genügt, den Fall $y_0 = ce_i$, $c \in \mathbb{R}$, zu betrachten. Wir setzen

$$g(y_i) = \int_{\prod_{j \neq i}(0, l_j)} f(y_1, \ldots, y_n) \, dy_1 \cdots dy_{i-1} \, dy_{i+1} \cdots dy_n \,.$$

Es ist dann

$$\begin{aligned} \int_{y_0 + Y} f(y) \, dy &= \int_c^{c + l_i} g(y_i) \, dy_i = \left(\int_c^{l_i} + \int_{l_i}^{c + l_i} \right) g(y_i) \, dy_i = \left(\int_c^{l_i} + \int_0^c \right) g(y_i) \, dy_i \\ &= \int_0^{l_i} g(y_i) \, dy_i = \int_Y f(y) \, dy \,. \end{aligned}$$

□

Für die durch

$$f_\varepsilon(x) = f\left(\frac{x}{\varepsilon} \right)$$

definierte Funktion folgt dann mit der Substitutionsformel und Lemma 7.3, da f_ε (εY)-periodisch ist,

$$\int_{\varepsilon(y_0+Y)} f_\varepsilon(x)\,dx = \int_{\varepsilon Y} f_\varepsilon(x)\,dx = \varepsilon^n \int_Y f(y)\,dy \tag{7.9}$$

für alle $y_0 \in \mathbb{R}^n$ und alle $\varepsilon > 0$.

Als Beispiel betrachten wir

$$Y = (0,1)\,, \quad f : Y \to \mathbb{R}\,, \quad f(y) = \sin(2\pi y)\,. \tag{7.10}$$

Für jedes Intervall $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ gilt

$$\int_a^b f_\varepsilon(x)\,dx = \int_a^b \sin\left(2\pi\frac{x}{\varepsilon}\right)\,dx = -\frac{\varepsilon}{2\pi}\cos\left(2\pi\frac{x}{\varepsilon}\right)\Big|_a^b \to 0$$

für $\varepsilon \to 0$, und aus Satz 7.1 folgt $f_\varepsilon \rightharpoonup 0$ in $L^p(I)$ für $1 < p < \infty$ bzw. $f_\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} 0$ in $L^\infty(I)$. Andererseits gilt

$$\|f_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)} = \frac{b-a}{2} + \frac{\varepsilon}{8\pi}\left[-\sin\left(\frac{4\pi b}{\varepsilon}\right) + \sin\left(\frac{4\pi a}{\varepsilon}\right)\right] \to \frac{b-a}{2}$$

für $\varepsilon \to 0$, also konvergiert f_ε nicht stark gegen 0.

Notation 7.4 (Mittelwert)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ messbar, $|\Omega| := \operatorname{meas}(\Omega) < \infty$. Wir definieren den Mittelwert von $f \in L^1(\Omega)$ durch

$$M_\Omega(f) = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f(y)\,dy\,. \tag{7.11}$$

□

Satz 7.5 (Schwache Konvergenz gegen den Mittelwert)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, sei $Y = \prod_{i=1}^n (0, l_i)$, sei $p \in [1,\infty]$, sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Y-periodische Funktion mit $f \in L^p(Y)$. Dann gilt im Fall $p < \infty$

$$f_\varepsilon \rightharpoonup M_Y(f) \quad \text{in } L^p(\Omega),\ \text{für } \varepsilon \to 0, \tag{7.12}$$

und im Fall $p = \infty$

$$f_\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} M_Y(f) \quad \text{in } L^\infty(\Omega),\ \text{für } \varepsilon \to 0. \tag{7.13}$$

In jedem Fall gibt es zu jedem Intervall $I \subset \mathbb{R}^n$ eine von f unabhängige Konstante c, so dass

$$\|f_\varepsilon\|_{L^p(I)} \le c\|f\|_{L^p(Y)}\,, \tag{7.14}$$

für $\varepsilon > 0$.

Beweis: Sei zunächst

$$I = (a,b) = \prod_{i=1}^n (a_i, b_i) \tag{7.15}$$

ein beliebiges offenes Intervall im $\mathbb{R}^n$. Beginnend in der Ecke a mit dem Intervall $a+\varepsilon Y$, füllen wir I aus mit aneinanderstoßenden Intervallen der Form

$$J_\varepsilon = x + \varepsilon Y\,, \quad x_i = a_i + j_i \varepsilon l_i\,, \quad 0 \le j_i \le k_i^\varepsilon\,, \tag{7.16}$$

wobei $k_i^\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$\varepsilon l_i k_i^\varepsilon \le b_i - a_i \le \varepsilon l_i (k_i^\varepsilon + 1)\,. \tag{7.17}$$

Sei A^ε die Menge aller solcher J_ε mit $J_\varepsilon \subset I$, dann ist

$$|A^\varepsilon| = \prod_{i=1}^n k_i^\varepsilon\,, \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^n |A^\varepsilon| = \lim_{\varepsilon\to 0} \prod_{i=1}^n \varepsilon k_i^\varepsilon = \prod_{i=1}^n \frac{b_i - a_i}{l_i} = \frac{|I|}{|Y|}\,. \tag{7.18}$$

Sei B^ε die Menge aller restlicher solcher J_ε, so gilt

$$|B^\varepsilon| = \sum_{i=1}^n \prod_{j\ne i} k_j^\varepsilon\,, \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^n |B^\varepsilon| = \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \sum_{i=1}^n \prod_{j\ne i} \varepsilon k_j^\varepsilon = 0\,. \tag{7.19}$$

Nach dieser Vorüberlegung beweisen wir die Beschränktheit der Menge $(f_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ in $L^p(\Omega)$. Für $p=\infty$ gilt offensichtlich $\|f_\varepsilon\|_\infty = \|f\|_\infty$. Sei nun $p \in [1,\infty)$. Dann gilt nach (7.9)

$$\begin{aligned} \|f_\varepsilon\|_{L^p(I)}^p &\le \sum_{J_\varepsilon \in A^\varepsilon} \int_{J_\varepsilon} |f_\varepsilon(x)|^p\,dx + \sum_{J_\varepsilon \in B^\varepsilon} \int_{J_\varepsilon} |f_\varepsilon(x)|^p\,dx \\ &= |A^\varepsilon|\varepsilon^n \int_Y |f(y)|^p\,dy + \underbrace{|B^\varepsilon|\varepsilon^n}_{\to 0} \int_Y |f(y)|^p\,dy \\ &\to \frac{|I|}{|Y|} \int_Y |f(y)|^p\,dy\,, \end{aligned} \tag{7.20}$$

also folgt die Beschränktheit und auch (7.14). Wir beweisen nun die behauptete Konvergenz für den Fall $p>1$, indem wir Satz 7.1 anwenden. Für ein beliebiges Intervall $I \subset \Omega$ gilt nämlich analog zu (7.20)

$$\begin{aligned} \int_I f_\varepsilon(x)\,dx &= \sum_{J_\varepsilon \in A^\varepsilon} \int_{J_\varepsilon} f_\varepsilon(x)\,dx + \sum_{J_\varepsilon \in B^\varepsilon} \int_{J_\varepsilon \cap I} f_\varepsilon(x)\,dx \\ &\to \frac{|I|}{|Y|} \int_Y f(y)\,dy = |I| M_Y(f) = \int_I M_Y(f)\,dx\,. \end{aligned}$$

Es bleibt zu beweisen die Konvergenz im Fall $p=1$. Sie wird zurückgeführt auf den Fall $p>1$. Sei I ein festes Intervall im $\mathbb{R}^n$ mit $\Omega \subset I$, sei $\eta > 0$ beliebig. Wir wählen ein $f^\eta \in L^2(Y)$ mit

$$\|f - f^\eta\|_{L^1(Y)} \le \eta\,, \tag{7.21}$$

und setzen f^η Y-periodisch auf $\mathbb{R}^n$ fort. Es ist

$$(f - f^\eta)_\varepsilon(x) = (f - f^\eta)\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = (f_\varepsilon - f_\varepsilon^\eta)(x)\,. \tag{7.22}$$

Sei $\varphi \in L^\infty(\Omega)$ beliebig. Es gilt

$$\begin{aligned} \int_\Omega (f_\varepsilon(x) - M_Y(f))\varphi(x)\,dx &= \int_\Omega (f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon^\eta(x))\varphi(x)\,dx + \int_\Omega (f_\varepsilon^\eta(x) - M_Y(f^\eta))\varphi(x)\,dx \\ &\quad + \int_\Omega (M_Y(f^\eta) - M_Y(f))\varphi(x)\,dx \end{aligned} \tag{7.23}$$

Das erste Integral auf der rechten Seite lässt sich mit (7.14) und (7.22) abschätzen als

$$\left|\int_\Omega (f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon^\eta(x))\varphi(x)\,dx\right| \le \|\varphi\|_\infty \, \|f_\varepsilon - f_\varepsilon^\eta\|_{L^1(I)} \le c\|\varphi\|_\infty \, \|f - f^\eta\|_{L^1(Y)} \le c\|\varphi\|_\infty \,\eta\,. \tag{7.24}$$

Für das dritte Integral gilt

$$\left|\int_\Omega (M_Y(f^\eta) - M_Y(f))\varphi(x)\,dx\right| \le \|\varphi\|_\infty \, |\Omega| \frac{1}{|Y|} \int_Y |f^\eta(y) - f(y)|\,dy \le \|\varphi\|_\infty \, |\Omega| \frac{1}{|Y|}\eta\,. \tag{7.25}$$

Es ist $\varphi \in L^2(\Omega)$, da Ω beschränkt ist. Wir wenden die für $p = 2$ bewiesene Konvergenz an und erhalten

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega (f_\varepsilon^\eta(x) - M_Y(f^\eta))\varphi(x)\,dx = 0\,. \tag{7.26}$$

Indem wir (7.24) – (7.26) zusammensetzen, ergibt sich

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega (f_\varepsilon(x) - M_Y(f))\varphi(x)\,dx = 0\,. \tag{7.27}$$

□

Definition 7.6 (Kompakte Einbettung)
Seien $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Z, \|\cdot\|_Z)$ Banachräume mit $X \subset Z$. X heißt kompakt eingebettet in Z, falls jede beschränkte Teilmenge von X relativ kompakt ist in Z. Wir schreiben

$$X \subset\subset Z\,. \tag{7.28}$$

□

Äquivalent dazu ist, dass die kanonische Einbettung $j : X \to Z$ eine kompakte Abbildung (im Sinne der Funktionalanalysis) ist.

Satz 7.7 (Kompakte Einbettung im Sobolevraum)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Dann gilt

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^p(\Omega)\,, \quad \textit{für alle } p \in [1, \infty]. \tag{7.29}$$

Ist $\partial\Omega$ ein C^1-Rand, so gilt auch

$$W^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^p(\Omega)\,, \quad \textit{für alle } p \in [1, \infty]. \tag{7.30}$$

Beweis: Siehe etwa die Bücher von Evans, Gilbarg/Trudinger, Wloka. □

Folgerung 7.8 *In der Situation von Satz 7.7 gilt: Jede beschränkte Folge in $W_0^{1,p}(\Omega)$ bzw. $W^{1,p}(\Omega)$ hat eine Teilfolge, die in der L^p-Norm konvergiert. Jede in $W_0^{1,p}(\Omega)$ bzw. $W^{1,p}(\Omega)$ schwach bzw. schwach-$*$ konvergente Folge konvergiert auch in der L^p-Norm.* □

Satz 7.9 (Ungleichung von Poincaré für Mittelwerte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, offen, zusammenhängend mit einem C^1-Rand $\partial\Omega$, sei $p \in [1, \infty]$. Dann gibt es ein $C > 0$ mit

$$\|v - M_\Omega(v)\|_{L^p(\Omega)} \le C\|\nabla v\|_{L^p(\Omega)}, \quad \textit{für alle } v \in W^{1,p}(\Omega). \tag{7.31}$$

Beweis: Wir nehmen an, (7.31) gilt nicht. Dann gibt es eine Folge $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $W^{1,p}(\Omega)$ mit

$$\|v_k - M_\Omega(v_k)\|_{L^p(\Omega)} > k\|\nabla v_k\|_{L^p(\Omega)}. \tag{7.32}$$

Wir setzen

$$w_k = \frac{v_k - M_\Omega(v_k)}{\|v_k - M_\Omega(v_k)\|_{L^p(\Omega)}}, \tag{7.33}$$

dann ist

$$M_\Omega(w_k) = 0, \quad \|w_k\|_{L^p(\Omega)} = 1, \tag{7.34}$$

$$\|\nabla w_k\|_{L^p(\Omega)} = \frac{\|\nabla v_k\|_{L^p(\Omega)}}{\|v_k - M_\Omega(v_k)\|_{L^p(\Omega)}} < \frac{1}{k}, \tag{7.35}$$

also ist $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt in $W^{1,p}(\Omega)$. Nach Folgerung 7.8 gibt es eine Teilfolge $(w_{k_m})_{m\in\mathbb{N}}$ und ein $w \in W^{1,p}(\Omega)$ mit

$$w_{k_m} \to w \quad \text{in } L^p(\Omega). \tag{7.36}$$

Es folgt

$$M_\Omega(w) = 0, \quad \|w\|_{L^p(\Omega)} = 1. \tag{7.37}$$

Sei $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, dann gilt wegen (7.36) und (7.35) für alle j

$$\int_\Omega w(x)\partial_j\varphi(x)\,dx = \lim_{m\to\infty}\int_\Omega w_{k_m}(x)\partial_j\varphi(x)\,dx = -\lim_{m\to\infty}\int_\Omega \partial_j w_{k_m}(x)\varphi(x)\,dx = 0,$$

also $\nabla w = 0$ in Ω. Da Ω zusammenhängend ist, ist w konstant, im Widerspruch zu (7.37).
$\square$

8 Periodische Randbedingungen

Es wird sich herausstellen, dass im periodischen Homogenisierungsproblem auch im Mehrdimensionalen ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n > 1$) die homogenisierten Koeffizienten konstant sind. Zu ihrer Charakterisierung wird allerdings die Lösung eines elliptischen Randwertproblems auf dem Referenzintervall $Y = \prod_{i=1}^n (0, l_i)$ mit periodischen Randbedingungen benötigt.

Wir betrachten das Randwertproblem

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_j(a_{ij}(y)\partial_i u) = f\,, \quad \text{in } Y, \tag{8.1}$$

$$u \quad Y\text{-periodisch.} \tag{8.2}$$

Wir sehen sofort, dass mit jeder Lösung u auch $u + c$, c beliebige Konstante, eine Lösung ist.

Voraussetzung 8.1 *Seien $a_{ij} \in L^\infty(Y)$ für alle i, j, sei L in (8.1) gleichmäßig elliptisch mit der Elliptizitätskonstanten $c_a > 0$, das heißt,*

$$\xi^T A(y)\xi \geq c_a|\xi|^2\,, \quad \textit{für alle } y \in Y \textit{ und alle } \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{8.3}$$

□

Definition 8.2 (Sobolevraum periodischer Funktionen)
Wir setzen

$$C^\infty_{per}(Y) = \{v|Y : v \in C^\infty(\mathbb{R}^n),\ v \textit{ ist } Y\textit{-periodisch}\}\,, \tag{8.4}$$

und definieren $H^1_{per}(Y)$ als den Abschluss von $C^\infty_{per}(Y)$, aufgefasst als Unterraum von $H^1(Y)$, bezüglich der H^1-Norm. □

Das Intervall Y hat $2n$ Seiten der Dimension $n-1$, nämlich für jedes i die beiden gegenüberliegenden Seiten

$$S_i^0 = \{y : y_i = 0\,,\ y_j \in [0, l_j] \text{ für } j \neq i\}\,, \quad S_i^1 = \{y : y_i = l_i\,,\ y_j \in [0, l_j] \text{ für } j \neq i\}\,. \tag{8.5}$$

Die Periodizitätsbedingung

$$v(x + l_i e_i) = v(x)\,, \quad x \in S_i^0\,, \tag{8.6}$$

für $v \in C^\infty_{\text{per}}(Y)$ überträgt sich auch auf Funktionen $v \in H^1_{\text{per}}(Y)$ im Sinne der Spur,

$$(\gamma v)(x + l_i e_i) = (\gamma v)(x)\,, \quad \text{für fast alle } x \in S_i^0\,, \tag{8.7}$$

da die Spurabbildungen stetig bezüglich der H^1-Norm sind, siehe Kapitel 9, Teil 1.

Im folgenden Satz bezeichnen wir der Deutlichkeit halber mit v_p die Y-periodische Fortsetzung auf $\mathbb{R}^n$ einer Funktion $v : Y \to \mathbb{R}$. Wegen (8.7) ist für $v \in H^1_{\text{per}}(Y)$ die Spur γv_p auf dem Gitter

$$G = \bigcup \{x + \partial Y : x = \sum_{i=1}^n j_i l_i,\ j_i \in \mathbb{Z}\} \tag{8.8}$$

wohldefiniert (fast überall auf jeder Seite der Dimension $n-1$).

Satz 8.3 *Sei $v \in H^1_{per}(Y)$. Dann ist $v_p|\Omega \in H^1(\Omega)$ für jede beschränkte offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, und*

$$\partial_i v_p = (\partial_i v)_p \,, \quad 1 \le i \le n \,. \tag{8.9}$$

Beweis: Sei $\partial_i v_p$ die distributionelle Ableitung von v_p im $\mathbb{R}^n$, sei $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Wir überdecken $\operatorname{supp}(\varphi)$ durch ein offenes Intervall I, welches aus verschobenen Intervallen

$$Y_k = y^k + Y \,, \quad y_i^k = j_i l_i \,, \quad j_i \in \mathbb{Z} \,, \tag{8.10}$$

zusammengesetzt ist, so dass

$$\operatorname{supp}(\varphi) \subset \Omega \subset I \,, \quad \overline{I} = \left(\bigcup_k \overline{Y_k} \right) \,. \tag{8.11}$$

Nach Definition der distributionellen Ableitung gilt

$$(\partial_i v_p)(\varphi) = -\int_\Omega v_p(x) \partial_i \varphi(x) \, dx = -\sum_k \int_{Y_k} v_p(x) \partial_i \varphi(x) \, dx \,. \tag{8.12}$$

Transformation auf Y und partielle Integration ergibt

$$\begin{aligned} \int_{Y_k} v_p(x) \partial_i \varphi(x) \, dx &= \int_Y v(x) \partial_i \varphi(x - y^k) \, dx \\ &= -\int_Y (\partial_i v)(x) \varphi(x - y^k) \, dx + \int_{\partial Y} (\gamma v)(\xi) \varphi(\xi - y^k) \nu_i(\xi) \, dS(\xi) \end{aligned}$$

also insgesamt

$$(\partial_i v_p)(\varphi) = \sum_k \int_{Y_k} (\partial_i v)_p(x) \varphi(x) \, dx - \sum_k \int_{\partial Y_k} (\gamma v_p)(\xi) \varphi(\xi) \nu_i(\xi) \, dS(\xi) \,. \tag{8.13}$$

Die zweite Summe ist gleich Null, da auf den Seiten von ∂Y_k, die gleichzeitig zu ∂I gehören, $\varphi = 0$ gilt, und alle anderen Seiten genau zwei Randterme mit entgegengesetzten Vorzeichen liefern. Es folgt

$$(\partial_i v_p)(\varphi) = \int_\Omega (\partial_i v)_p(x) \varphi(x) \, dx \tag{8.14}$$

und damit die Behauptung, da φ beliebig war. □

Lemma 8.4 *Seien $v, w \in H^1_{per}(Y)$. Dann gilt für alle i*

$$\int_Y v(y) \partial_i w(y) \, dy = -\int_Y w(y) \partial_i v(y) \, dy \,. \tag{8.15}$$

Insbesondere gilt

$$\int_Y \nabla v(y) \, dy = 0 \,. \tag{8.16}$$

Beweis: Für den Randterm gilt wegen der Periodizität

$$\int_{\partial Y} [(\gamma v)(\gamma w)\nu](\xi)\, dS(\xi) = 0\,.$$

$\square$

Da die Lösungen von (8.1), (8.2) nur bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt sein können, betrachten wir den Raum

$$\tilde{H}(Y) = H^1_{\text{per}}(Y)/\mathbb{R}\,. \tag{8.17}$$

Die Elemente von $\tilde{H}(Y)$ sind Äquivalenzklassen $[v]$ von Funktionen $v \in H^1_{\text{per}}(Y)$ mit

$$[u] = [v] \quad \Leftrightarrow \quad u - v \text{ ist konstant} \quad \Leftrightarrow \quad \nabla u = \nabla v\,. \tag{8.18}$$

Die kanonische Norm in $\tilde{H}(Y)$ ist die Quotientennorm

$$\|[v]\|_{\tilde{H}(Y)} = \inf_{w \in [v]} \|w\|_{H^1(Y)} = \inf_{c \in \mathbb{R}} \|v - c\|_{H^1(Y)}\,. \tag{8.19}$$

Satz 8.5 *Durch $[v] \mapsto \|\nabla v\|_{L^2(Y)}$ wird eine Norm auf $\tilde{H}(Y)$ definiert, so dass $\tilde{H}(Y)$ ein Banachraum wird, und es gibt eine Konstante $C > 0$ mit*

$$\|\nabla v\|_{L^2(Y)} \le \|[v]\|_{\tilde{H}(Y)} \le \|v - M_Y(v)\|_{H^1(Y)} \le C\|\nabla v\|_{L^2(Y)} \tag{8.20}$$

für alle $v \in H^1(Y)$.

Es gilt

$$\|\nabla v\|_{L^2(Y)} = \inf_{c \in \mathbb{R}} \|\nabla(v - c)\|_{L^2(Y)} \le \|[v]\|_{\tilde{H}(Y)} \le \|v - M_Y(v)\|_{H^1(Y)} \le C\|\nabla v\|_{L^2(Y)}\,,$$

wobei die letzte Ungleichung (und die Existenz von C) aus der Ungleichung von Poincaré für Mittelwerte (Satz 7.9) folgt. Dass $\tilde{H}(Y)$ bezüglich der nach (8.20) äquivalenten Quotientennorm (8.19) ein Banachraum ist, liefert ein allgemeiner Satz der Funktionalanalysis. $\square$

Im Folgenden werden wir für die Elemente von $\tilde{H}(Y)$ ebenfalls v statt $[v]$ schreiben.

Wir kehren zurück zum Randwertproblem

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_j(a_{ij}(y)\partial_i u) = f\,, \quad \text{in } Y, \tag{8.21}$$

$$u \quad Y\text{-periodisch.} \tag{8.22}$$

Wir betrachten die Variationsformulierung: Gesucht $u \in \tilde{H}(Y)$ mit

$$a(u, v) = F(v)\,, \quad \text{für alle } v \in \tilde{H}(Y). \tag{8.23}$$

Hierbei ist wie früher

$$a(u, v) = \int_Y \nabla u(y)^T A(y) \nabla v(y)\, dy\,, \quad F(v) = \int_Y f(y)v(y)\, dy\,. \tag{8.24}$$

Wegen (8.18) ist a auf $\tilde{H}(Y)$ wohldefiniert. Für F gilt das zunächst nicht, wir müssen zusätzlich verlangen, dass

$$\int_Y f(y)\,dy = 0 \tag{8.25}$$

gilt. Dann ist nämlich

$$\int_Y f(y)v(y)\,dy = \int_Y f(y)(v(y) - c)\,dy\,, \quad \text{für alle } c \in \mathbb{R}. \tag{8.26}$$

Satz 8.6 (Eindeutige Lösbarkeit, periodische Randbedingungen)
Es gelte Voraussetzung 8.1. Dann hat das Variationsproblem (8.23) eine eindeutige Lösung $u \in \tilde{H}(Y)$ für jedes $f \in L^2(Y)$, welches (8.25) erfüllt, und es gilt

$$\|u\|_{\tilde{H}(Y)} \le \frac{C}{c_a}\|f\|_{L^2(Y)}\,, \tag{8.27}$$

wobei C die Konstante aus der Ungleichung von Poincaré für Mittelwerte für Y ist.

Beweis: Die Bilinearform a ist stetig und $\tilde{H}(Y)$-elliptisch. Für die rechte Seite F gilt für alle v

$$\begin{aligned} |F(v)| &= \left|\int_Y f(y)v(y)\,dy\right| = \left|\int_Y f(y)(v(y) - M_Y(v))\,dy\right| \le \|f\|_{L^2(Y)}\,\|v - M_Y(v)\|_{L^2(Y)} \\ &\le \|f\|_{L^2(Y)} C \|\nabla v\|_{L^2(Y)} \le C\|f\|_{L^2(Y)}\|v\|_{\tilde{H}(Y)}\,, \end{aligned}$$

wobei wir wieder Satz 7.9 verwendet haben. Die Linearform F ist also ebenfalls stetig. Die Behauptung folgt nun aus dem Satz von Lax-Milgram. □

Wir können die Mehrdeutigkeit der Lösung des Randwertproblemis beseitigen, wenn wir sie geeignet normieren. Wir betrachten

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_j(a_{ij}(y)\partial_i u) = f\,, \quad \text{in } Y, \tag{8.28}$$

$$u \quad Y\text{-periodisch}, \tag{8.29}$$

$$M_Y(u) = 0\,. \tag{8.30}$$

Folgerung 8.7 *Unter den Voraussetzungen von Satz 8.6 hat das Randwertproblem (8.28) – (8.30) eine eindeutige schwache Lösung $u \in H^1_{per}(Y)$.*

Beweis: Nach Satz 8.6 gibt es eine eindeutige Lösung in $H^1_{\text{per}}(Y)$. Aus dieser Äquivalenzklasse wählen wir dasjenige u, welches zusätzlich die Bedingung (8.30) erfüllt. □

Ein alternatives Vorgehen ist das folgende. Wir definieren

$$H_M(Y) = \{v : v \in H^1_{\text{per}}(Y),\ M_Y(v) = 0\}\,. \tag{8.31}$$

$H_M(Y)$ ist ein abgeschlossener Unterraum von $H^1_{\text{per}}(Y)$, da $v \mapsto M_Y(v)$ stetig ist, also ein Banachraum.

Lemma 8.8 *Durch $v \mapsto \|\nabla v\|_{L^2(Y)}$ wird eine Norm auf $H_M(Y)$ definiert, welche zur H^1-Norm äquivalent ist.*

Beweis: Nach Satz 7.9 gilt

$$\|v\|_{L^2(Y)} \leq C\|\nabla v\|_{L^2(Y)}\,, \quad \text{für alle } v \in H_M(Y),$$

mit einer geeigneten Konstante C, woraus die Behauptung folgt. □

Eine Variationsformulierung des periodischen Randwertproblems im Raum $H_M(Y)$ ist nun gegeben durch

$$\text{gesucht } u \in H_M(Y), \text{ so dass } a(u,v) = F(v) \text{ für alle } v \in H_M(Y). \tag{8.32}$$

Hierbei ist $F : H_M(Y) \to \mathbb{R}$ eine lineare stetige Abbildung und a wie in (8.24). Wir betrachten F in der Form

$$F(v) = \int_Y \langle h(y), \nabla v(y)\rangle \, dy\,, \quad h : Y \to \mathbb{R}^n\,. \tag{8.33}$$

Satz 8.9 (Eindeutige Lösbarkeit, zweite Version)
Es gelte Voraussetzung 8.1. Dann hat das Variationsproblem (8.32), (8.33) eine eindeutige Lösung $u \in H_M(Y)$ für jedes $h \in L^2(Y)^n$, und es gilt

$$\|\nabla u\|_{L^2(Y)} \leq \frac{1}{c_a}\|h\|_{L^2(Y)^n}\,. \tag{8.34}$$

Beweis: Auch dieser Satz folgt direkt aus dem Satz von Lax-Milgram, wobei wir die Norm aus Lemma 8.8 zugrundelegen. □

Ist $h \in H^1_{\mathrm{per}}(Y)$, so gilt nach Lemma 8.4, angewendet mit $w = h_i$,

$$F(v) = \int_Y \langle h(y), \nabla v(y)\rangle \, dy = -\int_Y v(y)(\operatorname{div} h)(y)\, dy\,. \tag{8.35}$$

Das entsprechende Randwertproblem ist

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^n \partial_j(a_{ij}(y)\partial_i u) = -\operatorname{div} h\,, \quad \text{in } Y, \tag{8.36}$$

$$u \quad Y\text{-periodisch}, \tag{8.37}$$

$$M_Y(u) = 0\,. \tag{8.38}$$

Es fragt sich nun, ob die periodische Fortsetzung u_p der Lösung u von (8.32), (8.33) eine schwache Lösung der partiellen Differentialgleichung mit periodisch fortgesetzten Koeffizienten A_p und periodisch fortgesetzter rechter Seite h_p ist. Im Distributionensinn ist das jedenfalls richtig, wie der nächste Satz zeigt.

Satz 8.10 *Es gelte Voraussetzung 8.1. Ist $u \in H_M(Y)$ die Lösung von (8.32), (8.33) zu $h \in L^2(Y)^n$, so gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla u_p(x)^T A_p(x) \nabla\varphi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \langle h_p(x), \nabla\varphi(x)\rangle \, dx \tag{8.39}$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Beweis: Sei $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Sei $(Y_k)_{k\in K}$ eine endliche offene Überdeckung von $\operatorname{supp}(\varphi)$ mit verschobenen Intervallen $Y_k = y^k + Y$, sei $(\psi_k)_{k\in K}$ eine zugeordnete C^∞-Zerlegung der Eins. Sei für jedes $k \in K$ die Funktion $(\varphi\psi_k)_p$ definiert als die Y-periodische Fortsetzung von $(\varphi\psi_k)|Y_k$. Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla u_p(x)^T A_p(x) \nabla\varphi(x)\, dx = \sum_{k\in K} \int_{Y_k} \nabla u_p(x)^T A_p(x) \nabla(\varphi\psi_k)(x)\, dx$$

$$= \sum_{k\in K} \int_Y \nabla u(x)^T A(x) \nabla(\varphi\psi_k)_p(x)\, dx = \sum_{k\in K} \int_Y \langle h(x), \nabla(\varphi\psi_k)_p(x)\rangle \, dx$$

$$= \sum_{k\in K} \int_{Y_k} \langle h_p(x), \nabla(\varphi\psi_k)(x)\rangle \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \langle h_p(x), \nabla\varphi(x)\rangle \, dx\,.$$

$\square$

9 Homogenisierung: Der mehrdimensionale Fall

Wir betrachten auf einer beschränkten, offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ das Randwertproblem

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \partial_j(a_{ij}^\varepsilon(x)\partial_i u_\varepsilon) = f\,, \quad \text{in } \Omega, \tag{9.1}$$

$$u_\varepsilon = 0\,, \quad \text{auf } \partial\Omega. \tag{9.2}$$

Die Koeffizienten sind gegeben durch

$$a_{ij}^\varepsilon(x) = a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\,, \quad 1 \leq i,j \leq n\,, \tag{9.3}$$

In Matrixschreibweise wird (9.1), (9.3) zu

$$-\operatorname{div}(A^\varepsilon(x)^T \nabla u) = f\,, \quad A^\varepsilon(x) = A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\,. \tag{9.4}$$

Sei

$$Y = \prod_{i=1}^{n}(0, l_i) \tag{9.5}$$

wieder ein festes Referenzintervall.

Voraussetzung 9.1 *Seien $a_{ij} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ Y-periodisch und gleichmäßig elliptisch mit Elliptizitätskonstante c_a.* □

Gilt diese Voraussetzung, so hat, wie wir wissen, das Randwertproblem (9.1), (9.2) für jedes $f \in L^2(\Omega)$ eine eindeutige schwache Lösung $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega \nabla u_\varepsilon(x)^T A^\varepsilon(x) \nabla v(x)\, dx = \int_\Omega f(x)v(x)\, dx\,, \quad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega). \tag{9.6}$$

Wir suchen eine Koeffizientenmatrix A^0 (die "homogenisierte Koeffizientenmatrix"), so dass die Lösung u_ε von (9.1), (9.2) in einem geeigneten Sinn gegen die Lösung u_0 von

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \partial_j(a_{ij}^0(x)\partial_i u_0) = f\,, \quad \text{in } \Omega, \tag{9.7}$$

$$u_0 = 0\,, \quad \text{auf } \partial\Omega, \tag{9.8}$$

konvergiert. Die Matrix A^0 ergibt sich aus Mittelwerten von Lösungen gewisser Randwertprobleme auf Y mit periodischen Randbedingungen, und zwar auf folgende Weise. Zu jedem $\lambda \in \mathbb{R}^n$ suchen wir eine Lösung $\chi_\lambda \in H_M(Y)$ des Randwertproblems (in der schwachen Formulierung)

$$\tilde{a}(\chi_\lambda, v) = F_\lambda(v)\,, \quad \text{für alle } v \in H_M(Y), \tag{9.9}$$

wobei

$$\tilde{a}(u,v) = \int_Y \nabla u(y)^T A(y)^T \nabla v(y)\, dy = \int_Y \langle A(y)\nabla u(y), \nabla v(y)\rangle\, dy\,, \tag{9.10}$$

$$F_\lambda(v) = \int_Y \lambda^T A(y)^T \nabla v(y)\, dy = \int_Y \langle A(y)\lambda, \nabla v(y)\rangle\, dy\,. \tag{9.11}$$

Dieses Problem hat nach Satz 8.9 eine eindeutige Lösung. Die zugehörige "klassische" Formulierung des Randwertproblems ist

$$-\mathrm{div}\,(A(y)\nabla\chi_\lambda) = -\mathrm{div}\,(A(y)\lambda)\,, \tag{9.12}$$

$$\chi_\lambda \text{ } Y\text{-periodisch, } M_Y(\chi_\lambda) = 0. \tag{9.13}$$

Ist die Koeffizientenmatrix (schwach) differenzierbar als Funktion von y, so steht auf der rechten Seite von (9.12) eine Funktion. Ist das nicht der Fall, beispielsweise weil A unstetig ist, so kann (9.12) nur im schwachen Sinn (9.9) – (9.11) interpretiert werden, wobei F_λ gemäß (9.11) als Element des Dualraums von $H^{-1}(Y)$ (Dualraum von $H_0^1(Y)$) interpretiert werden kann.

Mit Hilfe von χ_λ definieren wir eine weitere Hilfsfunktion w_λ,

$$w_\lambda(y) = -\chi_\lambda(y) + \lambda^T y\,. \tag{9.14}$$

Die homogenisierte Koeffizientenmatrix erhalten wir aus der Gleichung

$$A^0\lambda = M_Y(A\nabla w_\lambda)\,, \tag{9.15}$$

das heißt, die i-te Spalte von A^0 ergibt sich, indem wir $\lambda = e_i$ in (9.15) setzen. (Wegen der Linearität der Zuordnung $\lambda \mapsto M_Y(A\nabla w_\lambda)$ gilt (9.15) dann tatsächlich für alle $\lambda \in \mathbb{R}^n$.)

Theorem 9.2 (Konvergenzsatz für periodische Homogenisierung)
Es gelte Voraussetzung 9.1, sei die konstante Matrix A^0 durch (9.15) definiert, sei $f \in L^2(\Omega)$. Dann ist A^0 (gleichmäßig) elliptisch, das Randwertproblem (9.7), (9.8) hat eine eindeutige schwache Lösung $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, und für die Lösungen u_ε von (9.1), (9.2) gilt

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u_0 \quad \text{in } H_0^1(\Omega), \tag{9.16}$$

$$(A^\varepsilon)^T\nabla u_\varepsilon \rightharpoonup (A^0)^T\nabla u_0 \quad \text{in } L^2(\Omega)^n. \tag{9.17}$$

Beweis: Wird im Verlaufe dieses Kapitels entwickelt. □

Im Ergebnis von Theorem 9.2 erhalten wir, dass die Funktionen a_{ij}^0 in (9.7) **konstant** sind.

Lemma 9.3 (Schwache Konvergenz von Produkten)
(i) Seien $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folgen in $L^2(\Omega)$ mit

$$v_k \to v \quad \text{in } L^2(\Omega), \quad w_k \rightharpoonup w \quad \text{in } L^2(\Omega). \tag{9.18}$$

Dann gilt

$$\int_\Omega v_k(x)w_k(x)\,dx \to \int_\Omega v(x)w(x)\,dx\,. \tag{9.19}$$

(i) Sei $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folge in $L^\infty(\Omega)$, $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folge in $L^2(\Omega)$ mit

$$v_k \to v \quad \text{gleichmäßig}, \quad w_k \rightharpoonup w \quad \text{in } L^2(\Omega). \tag{9.20}$$

Dann gilt

$$v_k w_k \rightharpoonup vw \quad \text{in } L^2(\Omega). \tag{9.21}$$

Beweis: Übung. □

Wir definieren

$$\xi_\varepsilon(x) = (A^\varepsilon(x))^T \nabla u_\varepsilon(x)\,, \quad x \in \Omega\,. \tag{9.22}$$

Da $A^\varepsilon(x)$ gleichmäßig in x beschränkt ist, ist $\xi_\varepsilon \in L^2(\Omega)^n$.

Lemma 9.4 *Es gibt $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ und $\xi_0 \in L^2(\Omega)^n$, so dass für eine Teilfolge*

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u_0 \quad \text{in } H_0^1(\Omega), \quad u_\varepsilon \to u_0 \quad \text{in } L^2(\Omega), \tag{9.23}$$

$$\xi_\varepsilon \rightharpoonup \xi_0 \quad \text{in } L^2(\Omega)^n. \tag{9.24}$$

Es gilt weiter

$$\int_\Omega \langle \xi_\varepsilon, \nabla v\rangle \, dx = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx = \int_\Omega \langle \xi_0, \nabla v\rangle \, dx\,, \tag{9.25}$$

für alle $v \in H_0^1(\Omega)$ und alle $\varepsilon > 0$.

Beweis: Nach Lax-Milgram gilt mit einer geeigneten Konstante C

$$\|u_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \le \frac{C}{c_a}\|f\|_{L^2(\Omega)} \tag{9.26}$$

für alle $\varepsilon > 0$. Die Menge $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ ist also beschränkt im $H_0^1(\Omega)$, es existiert daher eine gegen ein $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ schwach konvergente Teilfolge. Aus Folgerung 7.8 folgt, dass diese Teilfolge im $L^2(\Omega)$ stark gegen u_0 konvergiert. Da $A^\varepsilon(x)$ gleichmäßig in x und ε beschränkt ist, ist $(\xi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ beschränkt im $L^2(\Omega)^n$, es gilt also (9.24) für eine weitere Teilfolge. Die linke Gleichung in (9.25) ist nichts anderes als (9.6), die rechte Gleichung folgt aus der schwachen Konvergenz $\xi_\varepsilon \rightharpoonup \xi_0$. □

Wir definieren

$$w_\lambda^\varepsilon(x) = \varepsilon w_\lambda\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \lambda^T x - \varepsilon\chi_\lambda\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\,. \tag{9.27}$$

Lemma 9.5 *Sei $\Lambda(x) = \lambda^T x$, dann gilt*

$$w_\lambda^\varepsilon \rightharpoonup \Lambda \quad \text{in } H^1(\Omega), \quad w_\lambda^\varepsilon \to \Lambda \quad \text{in } L^2(\Omega), \tag{9.28}$$

letzteres für eine geeignete Teilfolge.

Beweis: Die Funktionen

$$x \mapsto \chi_\lambda\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

konvergieren nach Satz 7.5 für $\varepsilon \to 0$ schwach im $L^2(\Omega)$ gegen $M_Y(\chi_\lambda) = 0$, also folgt $w_\lambda^\varepsilon \rightharpoonup \Lambda$ im $L^2(\Omega)$. Weiter gilt

$$\nabla w_\lambda^\varepsilon(x) = \lambda - \nabla\chi_\lambda\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\,.$$

Die Funktion $y \mapsto \nabla\chi_\lambda(y)$ ist Y-periodisch, also gilt wiederum nach Satz 7.5

$$\nabla w_\lambda^\varepsilon \rightharpoonup \lambda - M_Y(\nabla\chi_\lambda) \quad \text{in } L^2(\Omega)^n.$$

Nach Lemma 8.4 gilt $M_Y(\nabla\chi_\lambda) = 0$. Damit ist die erste Behauptung in (9.28) gezeigt, die zweite folgt aus der Kompaktheit der Einbettung $H^1(\Omega) \subset\subset L^2(\Omega)$. □

Wir definieren nun

$$\eta_\lambda^\varepsilon(x) = A^\varepsilon(x)\nabla w_\lambda^\varepsilon(x)\,. \tag{9.29}$$

Lemma 9.6 *Es gilt*

$$\eta_\lambda^\varepsilon \rightharpoonup A^0\lambda \quad \text{in } L^2(\Omega)^n, \tag{9.30}$$

sowie

$$\int_\Omega \langle \eta_\lambda^\varepsilon(x), \nabla v(x)\rangle \, dx = 0\,, \quad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega). \tag{9.31}$$

Beweis: Aus

$$\eta_\lambda^\varepsilon(x) = A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla w_\lambda \left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

folgt mit Satz 7.5

$$\eta_\lambda^\varepsilon \rightharpoonup M_Y(A\nabla w_\lambda) = A^0\lambda \quad \text{in } L^2(\Omega)^n.$$

Sei nun $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ beliebig. Wir setzen

$$\varphi_\varepsilon(y) = \varphi(\varepsilon y)\,.$$

Dann ist $\varphi_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Wir wenden Satz 8.10 auf das Variationsproblem (9.9) an und erhalten

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle A(y)\nabla\chi_\lambda(y), \nabla\varphi_\varepsilon(y)\rangle \, dy = \int_{\mathbb{R}^n} \langle A(y)\lambda, \nabla\varphi_\varepsilon(y)\rangle \,, dy$$

also

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}^n} \langle A(y)\nabla w_\lambda(y), \nabla\varphi_\varepsilon(y)\rangle \, dy = \int_{\mathbb{R}^n} \left\langle A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla w_\lambda\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \nabla\varphi_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right\rangle \, dx \\ &= \int_\Omega \langle \eta_\lambda^\varepsilon(x), \nabla\varphi(x)\rangle \, dx\,. \end{aligned}$$

Da $C_0^\infty(\Omega)$ dicht ist in $H_0^1(\Omega)$, folgt die Behauptung. □

Beweis von Theorem 9.2, Konvergenz. Wir beweisen nun, dass (9.16) und (9.17) für jede konvergente Teilfolge gelten. Sei $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ beliebig. Wir setzen in (9.25) als Testfunktion $v = \varphi w_\lambda^\varepsilon$ ein und erhalten (Argument x weggelassen)

$$\begin{aligned} \int_\Omega f\varphi w_\lambda^\varepsilon \, dx &= \int_\Omega \langle \xi_\varepsilon, \nabla(\varphi w_\lambda^\varepsilon)\rangle \, dx \\ &= \int_\Omega \langle \xi_\varepsilon, \nabla w_\lambda^\varepsilon\rangle \, \varphi \, dx + \int_\Omega \langle \xi_\varepsilon, \nabla\varphi\rangle \, w_\lambda^\varepsilon \, dx\,. \end{aligned} \tag{9.32}$$

Wir setzen in (9.31) als Testfunktion $v = \varphi u_\varepsilon$ ein und erhalten

$$0 = \int_\Omega \langle \eta_\lambda^\varepsilon, \nabla(\varphi u_\varepsilon)\rangle \, dx = \int_\Omega \langle \eta_\lambda^\varepsilon, \nabla u_\varepsilon\rangle \, \varphi \, dx + \int_\Omega \langle \eta_\lambda^\varepsilon, \nabla\varphi\rangle \, u_\varepsilon \, dx\,. \tag{9.33}$$

In (9.32) und (9.33) sind die beiden Faktoren in den Skalarprodukten des jeweils ersten Integrals auf der rechten Seite nur schwach konvergent, so dass wir nicht zum Grenzwert übergehen können. Nach Definition von ξ_ε und η_λ^ε gilt aber

$$\langle \xi_\varepsilon, \nabla w_\lambda^\varepsilon\rangle = \left\langle A^{\varepsilon T}\nabla u_\varepsilon, \nabla w_\lambda^\varepsilon\right\rangle = \langle \nabla u_\varepsilon, A^\varepsilon\nabla w_\lambda^\varepsilon\rangle = \langle \nabla u_\varepsilon, \eta_\lambda^\varepsilon\rangle \,. \tag{9.34}$$

Wir subtrahieren (9.33) von (9.32) und erhalten wegen (9.34)

$$\int_\Omega \langle \xi_\varepsilon, \nabla\varphi\rangle \, w_\lambda^\varepsilon \, dx - \int_\Omega \langle \eta_\lambda^\varepsilon, \nabla\varphi\rangle \, u_\varepsilon \, dx = \int_\Omega f\varphi w_\lambda^\varepsilon \, dx\,. \tag{9.35}$$

Hier können wir nun einen Grenzübergang durchführen. Nach Lemma 9.4, Lemma 9.5 und Lemma 9.3 gilt

$$\int_\Omega \langle \xi_\varepsilon, \nabla\varphi \rangle \, w_\lambda^\varepsilon \, dx \to \int_\Omega \langle \xi_0, \nabla\varphi \rangle \, \Lambda \, dx \tag{9.36}$$

für eine Teilfolge, nach Lemma 9.4, Lemma 9.6 und Lemma 9.3 gilt

$$\int_\Omega \langle \eta_\lambda^\varepsilon, \nabla\varphi \rangle \, u_\varepsilon \, dx \to \int_\Omega \left\langle A^0\lambda, \nabla\varphi \right\rangle u_0 \, dx \tag{9.37}$$

für eine Teilfolge, und weiter

$$\int_\Omega f\varphi w_\lambda^\varepsilon \, dx \to \int_\Omega f\varphi\Lambda \, dx \, . \tag{9.38}$$

Es ergibt sich also

$$\int_\Omega \langle \xi_0, \nabla\varphi \rangle \, \Lambda \, dx - \int_\Omega \left\langle A^0\lambda, \nabla\varphi \right\rangle u_0 \, dx = \int_\Omega f\varphi\Lambda \, dx \, . \tag{9.39}$$

Wir setzen nun in (9.25) als Testfunktion $v = \varphi\Lambda$ und erhalten

$$\int_\Omega f\varphi\Lambda \, dx = \int_\Omega \langle \xi_0, \nabla(\varphi\Lambda) \rangle \, dx = \int_\Omega \langle \xi_0, \nabla\varphi \rangle \, \Lambda \, dx + \int_\Omega \langle \xi_0, \lambda \rangle \, \varphi \, dx \, . \tag{9.40}$$

Setzen wir (9.40) in (9.39) ein, so ergibt sich, da $A^0\lambda$ eine Konstante ist,

$$\int_\Omega \langle \xi_0, \lambda \rangle \, \varphi \, dx = -\int_\Omega \left\langle A^0\lambda, \nabla\varphi \right\rangle u_0 \, dx = \int_\Omega \left\langle A^0\lambda, \nabla u_0 \right\rangle \varphi \, dx \, , \tag{9.41}$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Hieraus folgt

$$\langle \xi_0, \lambda \rangle = \left\langle A^0\lambda, \nabla u_0 \right\rangle = \left\langle (A^0)^T \nabla u_0, \lambda \right\rangle \, . \tag{9.42}$$

Da (9.42) für alle $\lambda \in \mathbb{R}^n$ gilt, folgt

$$\xi_0 = (A^0)^T \nabla u_0 \, . \tag{9.43}$$

□

Wir betrachten nun ein weiteres periodisches Hilfsproblem, was sich von (9.9) – (9.12) nur dadurch unterscheidet, dass die Matrix A durch A^T ersetzt wird. Zu gegebenem $\lambda \in \mathbb{R}^n$ suchen wir $\hat{\chi}_\lambda \in H_M(Y)$ mit

$$a(\hat{\chi}_\lambda, v) = \hat{F}_\lambda(v) \, , \quad \text{für alle } v \in H_M(Y), \tag{9.44}$$

wobei $a(u,v) = \int_Y \nabla u^T A \nabla v \, dy$ und

$$\hat{F}_\lambda(v) = \int_Y \lambda^T A(y) \nabla v(y) \, dy \, . \tag{9.45}$$

Wir setzen

$$\hat{w}_\lambda(y) = -\hat{\chi}_\lambda(y) + \lambda^T y \, . \tag{9.46}$$

Lemma 9.7 *Für alle $\lambda \in \mathbb{R}^n$ gilt*

$$(A^0)^T \lambda = M_Y(A^T \nabla \hat{w}_\lambda) . \tag{9.47}$$

Beweis: Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^n$ beliebig, dann gilt nach Definition von A^0

$$\mu^T (A^0)^T \lambda = \lambda^T A^0 \mu = \lambda^T M_Y(A \nabla w_\mu) = \lambda^T M_Y(A\mu) - \lambda^T M_Y(A \nabla \chi_\mu) . \tag{9.48}$$

Es ist

$$\lambda^T M_Y(A\mu) = M_Y(\lambda^T A \mu) = M_Y(\mu^T A^T \lambda) = \mu^T M_Y(A^T \lambda) . \tag{9.49}$$

Zur Umformung des letzten Terms in (9.48) verwenden wir die Variationsgleichungen für χ_λ und $\hat{\chi}_\lambda$. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} |Y| \lambda^T M_Y(A \nabla \chi_\mu) &= \int_Y \lambda^T A(y) \nabla \chi_\mu(y) \, dy = \int_Y \nabla \hat{\chi}_\lambda(y)^T A(y) \nabla \chi_\mu(y) \, dy \\ &= \int_Y \nabla \chi_\mu(y)^T A(y)^T \nabla \hat{\chi}_\lambda(y) \, dy = \int_Y \mu^T A(y)^T \nabla \hat{\chi}_\lambda(y) \, dy \\ &= |Y| \mu^T M_Y(A^T \nabla \hat{\chi}_\lambda) . \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir

$$\mu^T (A^0)^T \lambda = \mu^T M_Y(A^T \lambda - A^T \nabla \hat{\chi}_\lambda) = \mu^T M_Y(A^T \nabla \hat{w}_\lambda) .$$

□

Folgerung 9.8 *Für die homogenisierte Matrix A^0 gilt*

$$(A^T)^0 = (A^0)^T . \tag{9.50}$$

Ist A symmetrisch, so auch A^0.

Beweis: Ersetzen wir A durch A^T in der Definition des periodischen Hilfsproblems, so erhalten wir

$$(A^T)^0 \lambda = M_Y(A^T \nabla \hat{w}_\lambda) .$$

Mit Lemma 9.7 folgt (9.50). Ist A symmetrisch, so folgt

$$(A^0)^T = (A^T)^0 = A^0 .$$

□

Indem wir $\lambda = e_j$ setzen, erhalten wir aus der definierenden Gleichung von A^0 Formeln für die Elemente a^0_{ij}. Wir setzen $\chi_j = \chi_{e_j}$, $w_j = w_{e_j}$, also gilt

$$\chi_j(y) + w_j(y) = e_j^T y = y_j . \tag{9.51}$$

Lemma 9.9 *Es gilt*

$$a^0_{ij} = M_Y(e_i^T A \nabla w_j) = M_Y(a_{ij}) - M_Y \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} \partial_k \chi_j \right) . \tag{9.52}$$

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned} a_{ij}^0 &= e_i^T A^0 e_j = e_i^T M_Y(A\nabla w_j) = M_Y(e_i^T A\nabla w_j) \\ &= M_Y(e_i^T A e_j) - M_Y(e_i^T A\nabla\chi_j) = M_Y(a_{ij}) - M_Y\left(\sum_{k=1}^n a_{ik}\partial_k\chi_j\right). \end{aligned}$$

□

Die Differenz $A^0 - M_Y(A)$ ist also die Matrix mit den Elementen $-M_Y(e_i^T A\nabla\chi_j)$. Aus diesem Grund werden die Funktionen χ_j als Korrektoren bezeichnet.

Lemma 9.10 *Es gilt*

$$a_{ij}^0 = M_Y(\nabla w_j^T A^T \nabla w_i)\,. \tag{9.53}$$

Beweis: Wir setzen χ_i als Testfunktion in (9.9) ein,

$$\tilde{a}(\chi_j, \chi_i) = F_j(\chi)\,, \quad F_j := F_{e_j}\,,$$

also

$$\int_Y \nabla\chi_j^T A^T \nabla\chi_i\,dy = \int_Y e_j^T A^T \nabla\chi_i\,dy\,,$$

also

$$0 = M_Y(\nabla w_j^T A^T \nabla\chi_i)\,. \tag{9.54}$$

Aus Lemma 9.9 erhalten wir

$$a_{ij}^0 = M_Y(e_i^T A\nabla w_j) = M_Y(\nabla w_j^T A^T e_i)\,. \tag{9.55}$$

Indem wir (9.54) von (9.55) subtrahieren, erhalten wir (9.53). □

Lemma 9.11 A^0 *ist positiv definit.*

Beweis: Sei $\xi \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Dann gilt nach Lemma 9.10

$$\xi^T A^0 \xi = \sum_{i,j=1}^n \xi_i a_{ij}^0 \xi_j = \sum_{i,j=1}^n \xi_i M_Y(\nabla w_j^T A^T \nabla w_i)\xi_j = \sum_{i,j=1}^n M_Y(\xi_j \nabla w_j^T A^T \nabla w_i \xi_i)\,. \tag{9.56}$$

Wir setzen

$$\zeta(y) = \sum_{k=1}^n \xi_k w_k(y)\,. \tag{9.57}$$

Aus (9.56) folgt nun

$$\xi^T A^0 \xi = M_Y(\nabla\zeta^T A^T \nabla\zeta) = M_Y(\nabla\zeta^T A \nabla\zeta) \geq 0\,, \tag{9.58}$$

da nach Voraussetzung an A

$$\nabla\zeta^T(y) A(y) \nabla\zeta(y) \geq 0\,, \quad \text{fast überall in } Y. \tag{9.59}$$

Wir nehmen an, es gebe ein $\xi \neq 0$ mit $\xi^T A^0 \xi = 0$. Dann folgt aus (9.58) und (9.59)

$$\nabla\zeta^T(y) A(y) \nabla\zeta(y) = 0\,, \quad \text{fast überall in } Y. \tag{9.60}$$

Da A gleichmäßig elliptisch ist, folgt $\nabla\zeta = 0$ fast überall in Y und weiter, da $M_Y(\nabla\chi_k) = 0$ nach Lemma 8.4,

$$0 = M_Y(\nabla\zeta) = \sum_{k=1}^n \xi_k M_Y(\nabla w_k) = \sum_{k=1}^n \xi_k M_Y(e_k - \nabla\chi_k) = \sum_{k=1}^n \xi_k M_Y(e_k) = \sum_{k=1}^n \xi_k e_k$$
$$= \xi\,,$$

ein Widerspruch zur Annahme $\xi \neq 0$. □

Abschluss des Beweises von Theorem 9.2. Für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $\xi \neq 0$ gilt

$$\xi^T A^0 \xi = |\xi|^2 \frac{\xi^T}{|\xi|} A^0 \frac{\xi}{|\xi|} \geq c_0 |\xi|^2\,, \tag{9.61}$$

wobei

$$c_0 := \min_{|e|=1} e^T A^0 e > 0 \tag{9.62}$$

wegen Lemma 9.11 und der Kompaktheit der Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$. Also ist A^0 gleichmäßig elliptisch. Die Lösung u_0 von (9.7), (9.8) ist also nach dem Satz von Lax-Milgram eindeutig bestimmt. Nach dem bisher Bewiesenen gilt: Ist $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, so gibt es eine Teilfolge $(\varepsilon_{k_m})_{m\in\mathbb{N}}$ mit

$$u_{\varepsilon_{k_m}} \rightharpoonup u_0\,.$$

Hieraus folgt aber, dass $u_{\varepsilon_k} \rightharpoonup u_0$ gilt für jede Nullfolge $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Damit ist Theorem 9.2 vollständig bewiesen. □

Wir wenden nun Theorem 9.2 in zwei Situationen an, in denen wir die homogenisierte Matrix A^0 explizit berechnen können. Wir reproduzieren zunächst für den eindimensionalen Fall das Ergebnis aus Kapitel 4. Wir betrachten

$$-\partial_x \left(a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \partial_x u_\varepsilon \right) = f\,, \quad \text{in } \Omega = (d_1, d_2), \tag{9.63}$$

$$u_\varepsilon(d_1) = u_\varepsilon(d_2) = 0\,. \tag{9.64}$$

Auf dem Periodenintervall $Y = (0, l_1)$ lautet das Hilfsproblem

$$\int_Y \chi'(y) a(y) v'(y)\, dy = \int_Y a(y) v'(y)\, dy\,, \quad \text{für alle } v \in H_M(y), \tag{9.65}$$

welches eine eindeutige Lösung $\chi \in H_M(Y)$ hat. Für beliebiges $v \in C_0^\infty(Y)$ gilt $v - M_Y(v) \in H_M(Y)$, also

$$\int_Y (\chi'(y)a(y) - a(y)) v'(y)\, dy = 0\,. \tag{9.66}$$

Es folgt

$$\chi'(y)a(y) - a(y) = c \in \mathbb{R}\,, \tag{9.67}$$

da nach (9.66) die distributionelle Ableitung der linken Seite von (9.67) gleich Null ist. Es gilt weiter

$$\chi'(y) = \frac{c}{a(y)} + 1\,, \quad w'(y) = 1 - \chi'(y) = -\frac{c}{a(y)}\,. \tag{9.68}$$

Nach Definition von a^0 gilt

$$a^0 = M_Y(aw') = M_Y(-c) = -c\,. \tag{9.69}$$

Da χ Y-periodisch ist, gilt

$$0 = \int_Y \chi'(y)\, dy = l_1 + l_1 c M_Y\left(\frac{1}{a}\right)\,, \tag{9.70}$$

also

$$c = -\left(M_Y\left(\frac{1}{a}\right)\right)^{-1}\,, \quad a^0 = \left(M_Y\left(\frac{1}{a}\right)\right)^{-1}\,. \tag{9.71}$$

Als zweites Beispiel betrachten wir ein geschichtetes zweidimensionales Medium, das heißt, $n = 2$, $Y = Y_1 \times Y_2 = (0, l_1) \times (0, l_2)$, und A hängt nur von y_1 ab, $\partial_2 A = 0$. Es ergibt sich das Problem

$$-\sum_{i,j=1}^{2} \partial_j \left(a_{ij}\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)\partial_i u_\varepsilon(x_1, x_2)\right) = f(x_1, x_2)\,, \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \tag{9.72}$$

$$u_\varepsilon = 0\,, \quad \text{auf } \partial\Omega. \tag{9.73}$$

Wir berechnen die Koeffizienten von A^0. Das periodische Problem

$$\int_Y \nabla\chi_j^T A^T \nabla v\, dy = \int_Y e_j^T A^T \nabla v\, dy\,, \quad \text{für alle } v \in H_M(Y), \tag{9.74}$$

hat eine eindeutige Lösung χ_j für $j = 1, 2$. Wir wollen zeigen, dass sie nur von y_1 abhängt, und dass sie aus der Lösung eines eindimensionalen Problems erhalten werden kann. Zu diesem Zweck betrachten wir die eindeutige Lösung $\tilde{\chi}_j \in H_M(Y_1)$ des periodischen Problems

$$\int_{Y_1} \tilde{\chi}_j'(y_1) a_{11}(y_1) \tilde{v}'(y_1)\, dy_1 = \int_{Y_1} a_{1j}(y_1)\tilde{v}'(y_1)\, dy_1\,, \quad \text{für alle } \tilde{v} \in H_M(Y_1). \tag{9.75}$$

Ist $v \in H_M(Y)$, und definieren wir

$$\tilde{v}(y_1) = \int_{Y_2} v(y_1, y_2)\, dy_2\,, \tag{9.76}$$

so ist

$$\tilde{v} \in H_M(Y_1)\,, \quad \tilde{v}'(y_1) = \int_{Y_2} \partial_1 v(y_1, y_2)\, dy_2\,. \tag{9.77}$$

Wir definieren nun

$$\chi_j(y_1, y_2) = \tilde{\chi}_j(y_1)\,. \tag{9.78}$$

Für beliebiges $v \in H_M(Y)$ gilt dann

$$\int_{Y_2} \partial_2 v(y_1, y_2)\, dy_2 = v(y_1, l_2) - v(y_1, 0) = 0\,, \tag{9.79}$$

und aus (9.75) – (9.77) folgt nun

$$\begin{aligned}\int_Y \nabla\chi_j^T A^T \nabla v\,dy &= \int_Y \tilde{\chi}_j'(y_1)[a_{11}(y_1)\partial_1 v(y_1,y_2) + a_{21}(y_1)\partial_2 v(y_1,y_2)]\,dy \\ &= \int_{Y_1} \tilde{\chi}_j'(y_1)a_{11}(y_1)\int_{Y_2}\partial_1 v(y_1,y_2)\,dy_2\,dy_1 \\ &= \int_{Y_1} a_{1j}(y_1)\int_{Y_2}\partial_1 v(y_1,y_2)\,dy_2\,dy_1 = \int_Y e_j^T A^T\nabla v\,dy\,,\end{aligned}$$

also ist die durch (9.78) definierte Funktion $\chi_j \in H_M(Y)$ tatsächlich die Lösung von (9.74). Wir können nun $\tilde{\chi}_j$ analog zum eindimensionalen Fall berechnen. Es gilt

$$\tilde{\chi}_j'(y_1)a_{11}(y_1) - a_{1j}(y_1) = c_j\,,\quad j=1,2\,, \tag{9.80}$$

und die Periodizität von $\tilde{\chi}_j$ liefert

$$0 = \int_{Y_1}\tilde{\chi}_j'(y_1)\,dy_1 = c_j M_{Y_1}\left(\frac{1}{a_{11}}\right) + M_{Y_1}\left(\frac{a_{1j}}{a_{11}}\right)\,. \tag{9.81}$$

Die Koeffizienten von A^0 erhalten wir aus Lemma 9.9. Es gilt

$$a_{ij}^0 = M_Y(a_{ij}) - M_Y(a_{i1}\partial_1\chi_j + a_{i2}\partial_2\chi_j) = M_Y(a_{ij} - a_{i1}\tilde{\chi}_j')\,. \tag{9.82}$$

Wir betrachten den Fall $j=1$. Es ist nach (9.80)

$$1 - \tilde{\chi}_1' = -\frac{c_1}{a_{11}}\,,\quad c_1 = -\left(M_{Y_1}\left(\frac{1}{a_{11}}\right)\right)^{-1}\,, \tag{9.83}$$

also

$$a_{11}^0 = M_Y(a_{11} - a_{11}\tilde{\chi}_1') = M_Y(-c_1) = -c_1 = \left(M_{Y_1}\left(\frac{1}{a_{11}}\right)\right)^{-1}\,, \tag{9.84}$$

$$a_{21}^0 = M_Y(a_{21} - a_{21}\tilde{\chi}_1') = M_Y\left(-a_{21}\frac{c_1}{a_{11}}\right) = a_{11}^0 M_{Y_1}\left(\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)\,. \tag{9.85}$$

Im Fall $j=2$ gilt

$$\tilde{\chi}_2' = \frac{c_2}{a_{11}} + \frac{a_{12}}{a_{11}}\,,\quad c_2 = -a_{11}^0 M_{Y_1}\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}\right)\,. \tag{9.86}$$

Hieraus folgt schließlich

$$a_{12}^0 = M_Y(a_{12} - a_{11}\tilde{\chi}_2') = M_Y(-c_2) = -c_2 = a_{11}^0 M_{Y_1}\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}\right)\,, \tag{9.87}$$

und

$$\begin{aligned} a_{22}^0 &= M_Y(a_{22} - a_{21}\tilde{\chi}_2') = M_Y\left(a_{22} - a_{21}\left(\frac{c_2}{a_{11}} + \frac{a_{12}}{a_{11}}\right)\right) \\ &= M_{Y_1}\left(a_{22} - a_{21}\frac{a_{12}}{a_{11}}\right) + a_{11}^0 M_{Y_1}\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}\right) M_{Y_1}\left(\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)\,. \end{aligned} \tag{9.88}$$

Insbesondere ergibt sich, dass A^0 diagonal ist, falls A diagonal ist.

10 Homogenisierung: Asymptotischer Ansatz

Wir betrachten noch einmal das Problem

$$L_\varepsilon u_\varepsilon = -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_j (a_{ij}^\varepsilon(x) \partial_i u_\varepsilon) = f\,, \quad \text{in } \Omega, \tag{10.1}$$

$$u_\varepsilon = 0\,, \quad \text{auf } \partial\Omega, \tag{10.2}$$

mit den Koeffizienten

$$a_{ij}^\varepsilon(x) = a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\,, \quad 1 \le i,j \le n\,. \tag{10.3}$$

In diesem Problem tauchen zwei Skalen auf, repräsentiert durch $x \in \Omega$ und $y \in Y = \prod_{i=1}^n (0, l_i)$, verknüpft durch

$$y = \frac{x}{\varepsilon}\,. \tag{10.4}$$

Der Parameter ε ist "klein". Der asymptotische Ansatz besteht darin, die Lösung in Form einer Reihenentwicklung bezüglich ε zu suchen und dabei die Existenz zweier Skalen zu berücksichtigen,

$$u_\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{M} \varepsilon^k u_k\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + R_{M+1}\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)\,. \tag{10.5}$$

Die Funktionen u_k sollen Y-periodisch im zweiten Argument sein, also

$$u_k : \Omega \times Y \to \mathbb{R}\,, \quad y \mapsto u_k(x,y) \quad \text{ist } Y\text{-periodisch für alle } x \in \Omega. \tag{10.6}$$

Der asymptotische Ansatz dient dazu, Formeln für Lösungen in bestimmten Darstellungen wie beispielsweise (10.5) herzuleiten. Bei diesen Herleitungen geht man davon aus, dass die beteiligten Funktionen existieren und hinreichend glatt sind. Ob das der Fall ist, wird in der Regel mit anderen Methoden geklärt, siehe etwa Kapitel 7 - 9.

Sei zunächst $z : \Omega \times Y \to \mathbb{R}$ irgendeine hinreichend glatte Funktion. Wir setzen

$$z_\varepsilon(x) = z\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)\,. \tag{10.7}$$

Für die Ableitungen gilt, sortiert nach Potenzen von ε,

$$\partial_i z_\varepsilon(x) = \partial_{x_i} z\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \frac{1}{\varepsilon}\partial_{y_i} z\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)\,, \tag{10.8}$$

$$\partial_j \partial_i z_\varepsilon = \partial_{x_j}\partial_{x_i} z + \frac{1}{\varepsilon}\left[\partial_{y_j}\partial_{x_i} z + \partial_{x_j}\partial_{y_i} z\right] + \frac{1}{\varepsilon^2}\partial_{y_j}\partial_{y_i} z\,. \tag{10.9}$$

Für die Koeffizienten $a_{ij} : Y \to \mathbb{R}$, $y \mapsto a_{ij}(y)$, gilt gemäß (10.3)

$$a_{ij}^\varepsilon(x) = a_{ij}(y)\Big|_{y=\frac{x}{\varepsilon}}\,, \quad \partial_j a_{ij}^\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\partial_{y_j} a_{ij}(y)\Big|_{y=\frac{x}{\varepsilon}}\,, \tag{10.10}$$

wir schreiben ∂_{y_j} statt ∂_j der Deutlichkeit halber. Es gilt weiter

$$\partial_j (a_{ij}^\varepsilon \partial_i z_\varepsilon) = \partial_j a_{ij}^\varepsilon \cdot \partial_i z_\varepsilon + a_{ij}^\varepsilon \cdot \partial_j \partial_i z_\varepsilon\,. \tag{10.11}$$

Wir setzen (10.8) – (10.10) in (10.11) ein und erhalten

$$
\begin{aligned}
\partial_j(a^\varepsilon_{ij}\partial_i z_\varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon}\partial_{y_j} a_{ij}\cdot\left(\partial_{x_i} z + \frac{1}{\varepsilon}\partial_{y_i} z\right) + a_{ij}\cdot\left(\partial_{x_j}\partial_{x_i} z + \frac{1}{\varepsilon}\partial_{y_j}\partial_{x_i} z + \frac{1}{\varepsilon}\partial_{x_j}\partial_{y_i} z + \frac{1}{\varepsilon^2}\partial_{y_j}\partial_{y_i} z\right)\\
&= \frac{1}{\varepsilon^2}\Big[\partial_{y_j} a_{ij}\cdot\partial_{y_i} z + a_{ij}\partial_{y_j}\partial_{y_i} z\Big] + \frac{1}{\varepsilon}\Big[\partial_{y_j} a_{ij}\cdot\partial_{x_i} z + a_{ij}\partial_{y_j}\partial_{x_i} z + a_{ij}\partial_{x_j}\partial_{y_i} z\Big] + a_{ij}\partial_{x_j}\partial_{x_i} z\\
&= \frac{1}{\varepsilon^2}\Big[\partial_{y_j}(a_{ij}\partial_{y_i} z)\Big] + \frac{1}{\varepsilon}\Big[\partial_{y_j}(a_{ij}\partial_{x_i} z) + \partial_{x_j}(a_{ij}\partial_{y_i} z)\Big] + a_{ij}\partial_{x_j}\partial_{x_i} z\,, \qquad (10.12)
\end{aligned}
$$

wobei die Funktionen auf der linken Seite von x und die auf der rechten Seite von (x, y) mit $y = x/\varepsilon$ abhängen. Für $z : \Omega \times Y \to \mathbb{R}$ definieren wir die Differentialoperatoren

$$L_0 z = -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_{y_j}(a_{ij}(y)\partial_{y_i} z)\,, \qquad (10.13)$$

$$L_1 z = -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_{y_j}(a_{ij}(y)\partial_{x_i} z) - \sum_{i,j=1}^{n} \partial_{x_j}(a_{ij}(y)\partial_{y_i} z)\,, \qquad (10.14)$$

$$L_2 z = -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_{x_j}(a_{ij}(y)\partial_{x_i} z)\,. \qquad (10.15)$$

Damit wird (10.12) zu

$$L_\varepsilon z_\varepsilon = -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_j(a^\varepsilon_{ij}\partial_i z_\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2} L_0 z + \frac{1}{\varepsilon} L_1 z + L_2 z\,. \qquad (10.16)$$

Wir setzen nun entsprechend (10.5)

$$z(x, y) = \sum_{k=0}^{M} \varepsilon^k u_k(x, y)\,. \qquad (10.17)$$

Aus (10.16) ergibt sich

$$
\begin{aligned}
L_\varepsilon z_\varepsilon = {}& \frac{1}{\varepsilon^2} L_0 u_0 + \frac{1}{\varepsilon}\Big[L_0 u_1 + L_1 u_0\Big] + \Big[L_0 u_2 + L_1 u_1 + L_2 u_0\Big] \qquad (10.18)\\
&+ \sum_{k=1}^{M-2} \varepsilon^k \Big[L_0 u_{k+2} + L_1 u_{k+1} + L_2 u_k\Big] + \varepsilon^{M-1}\Big[L_1 u_M + L_2 u_{M-1}\Big] + \varepsilon^M L_2 u_M\,.
\end{aligned}
$$

Wir betrachten nun die Gleichung

$$L_\varepsilon z_\varepsilon = f\,, \quad \text{in } \Omega. \qquad (10.19)$$

Die Idee des asymptotischen Ansatzes ist, eine Näherunglösung für die ursprüngliche Lösung (10.1) zu erhalten, indem wir in (10.19) die Koeffizienten der ε-Potenzen einzeln zum Verschwinden bringen. Hinreichend dafür ist, dass die Funktionen u_k im Gebiet $\Omega \times Y$ Lösungen sind von

$$L_0 u_0 = 0\,, \qquad (10.20)$$

$$L_0 u_1 = -L_1 u_0\,, \qquad (10.21)$$

$$L_0 u_2 = f - L_1 u_1 - L_2 u_0\,, \qquad (10.22)$$

$$L_0 u_{k+2} = -L_1 u_{k+1} - L_2 u_k\,, \quad k \ge 1\,, \qquad (10.23)$$

wobei die u_k nach wie vor als Y-periodisch angenommen werden. Wir beschränken uns auf den Fall $M = 2$, dann sind nur die Gleichungen (10.20) – (10.22) vorhanden. Wenn wir diese der Reihe nach lösen, ist jeweils nur die Funktion auf der linken Seite unbekannt. Der Differentialoperator L_0 hängt nicht von x ab, die rechten Seiten aber schon. Insofern handelt es sich bei (10.20) – (10.22) eigentlich um eine Schar von Randwertproblemen auf Y, bei denen für jeweils festgehaltenes $x \in \Omega$ die Lösungen als Funktionen $y \mapsto u_k(x, y)$ gesucht werden.

Wir beginnen mit (10.20),

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \partial_{y_j}(a_{ij}(y)\partial_{y_i} u_0(x, y)) = 0\,. \tag{10.24}$$

Für festes $x \in \Omega$ ist $u_0(x, y) = 0$ die bis auf eine Konstante eindeutige periodische Lösung in Y, diese Konstante kann aber für jedes x verschieden sein. Die allgemeine Lösung hat daher die Form

$$u_0(x, y) = u_0(x)\,. \tag{10.25}$$

Wir betrachten nun (10.21),

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \partial_{y_j}(a_{ij}(y)\partial_{y_i} u_1(x, y)) = \sum_{i,j=1}^{n} \partial_{y_j}(a_{ij}(y)\partial_{x_i} u_0) + \sum_{i,j=1}^{n} \partial_{x_j}(a_{ij}(y)\partial_{y_i} u_0)\,. \tag{10.26}$$

Da u_0 nicht von y und a_{ij} nicht von x abhängt, wird (10.26) zu

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \partial_{y_j}(a_{ij}(y)\partial_{y_i} u_1(x, y)) = \sum_{i,j=1}^{n} \partial_{y_j}(a_{ij}(y)\partial_{x_i} u_0(x)) = \operatorname{div}_y(A(y)^T \nabla_x u_0(x))\,. \tag{10.27}$$

Die schwache Formulierung von (10.27) lautet (siehe die Ausführungen im Anschluss an Satz 8.9)

$$a(u_1(x, \cdot), v) = \int_Y (-A(y)^T \nabla_x u_0(x))^T \nabla v(y)\, dy = -\int_Y \nabla_x u_0(x)^T A(y) \nabla v(y)\, dy\,, \tag{10.28}$$

für alle $v \in H_M(Y)$. Das ist aber für festes $x \in \Omega$ nichts anderes als das periodische Hilfsproblem (9.44), (9.45) mit $\lambda = -\nabla_x u_0(x)$, also

$$u_1(x, y) = \hat{\chi}_\lambda(y) = -\sum_{k=1}^{n} \partial_{x_k} u_0(x) \hat{\chi}_k(y)\,. \tag{10.29}$$

Wir betrachten nun (10.22),

$$L_0 u_2 = f - L_1 u_1 - L_2 u_0\,. \tag{10.30}$$

Da u_2 und a_{ij} Y-periodisch sind, folgt für jedes $x \in \Omega$

$$0 = -\sum_{i,j=1}^{n} \int_Y \partial_{y_j}(a_{ij}(y)\partial_{y_i} u_2(x, y))\, dy = \int_Y L_0 u_2(x, y)\, dy\,, \tag{10.31}$$

also auch

$$\int_Y f(x) - L_1 u_1(x,y) - L_2 u_0(x)\,dy = 0\,. \tag{10.32}$$

Es gilt, wieder wegen der Periodizität,

$$\begin{aligned}\int_Y -L_1 u_1\,dy &= \int_Y \sum_{i,j=1}^n \partial_{y_j}(a_{ij}(y)\partial_{x_i} u_1)\,dy + \int_Y \sum_{i,j=1}^n \partial_{x_j}(a_{ij}(y)\partial_{y_i} u_1)\,dy \\ &= \int_Y \sum_{i,j=1}^n \partial_{x_j}(a_{ij}(y)\partial_{y_i} u_1)\,dy \end{aligned} \tag{10.33}$$

Wir setzen (10.29) in (10.33) ein und erhalten

$$\begin{aligned}\int_Y -L_1 u_1(x,y)\,dy &= -\int_Y \sum_{i,j=1}^n \partial_{x_j}\left(a_{ij}(y)\partial_{y_i} \sum_{k=1}^n \partial_{x_k} u_0(x)\hat{\chi}_k(y)\right)\,dy \\ &= -\sum_{j,k=1}^n \left[\sum_{i=1}^n \int_Y a_{ij}(y)\partial_{y_i}\hat{\chi}_k(y)\,dy\right]\partial_{x_j}\partial_{x_k} u_0(x)\,. \end{aligned} \tag{10.34}$$

Weiter gilt

$$\int_Y -L_2 u_0(x,y)\,dy = \int_Y \sum_{i,j=1}^n \partial_{x_j}(a_{ij}(y)\partial_{x_i} u_0(x))\,dy = \sum_{i,j=1}^n \int_Y a_{ij}(y)\,dy \cdot \partial_{x_j}\partial_{x_i} u_0(x)\,. \tag{10.35}$$

Wir addieren (10.34) und (10.35), wobei wir in (10.35) den Index i durch k ersetzen, und erhalten

$$\begin{aligned}\int_Y -L_1 u_1 - L_2 u_0\,dy &= \sum_{j,k=1}^n \left[\int_Y a_{kj}(y)\,dy - \sum_{i=1}^n \int_Y a_{ij}(y)\partial_{y_i}\hat{\chi}_k(y)\,dy\right]\partial_{x_j}\partial_{x_k} u_0(x) \\ &= |Y| \cdot \sum_{j,k=1}^n M_Y\left(a_{kj} - \sum_{i=1}^n a_{ij}\partial_{y_i}\hat{\chi}_k\right) \cdot \partial_{x_j}\partial_{x_k} u_0(x)\,. \end{aligned} \tag{10.36}$$

Aus der Formel

$$(A^0)^T\lambda = M_Y\left(A^T\nabla\hat{w}_\lambda\right) = M_Y\left(A^T\lambda - A^T\nabla\hat{\chi}_\lambda\right) \tag{10.37}$$

folgt analog zur Rechnung in Lemma 9.9

$$a^0_{kj} = M_Y(a_{kj}) - M_Y\left(\sum_{i=1}^n a_{ij}\partial_{y_i}\hat{\chi}_k\right)\,. \tag{10.38}$$

Insgesamt ergibt sich aus (10.32), (10.36) und (10.38)

$$|Y|f(x) = -|Y| \cdot \sum_{j,k=1}^n a^0_{kj}\partial_{x_j}\partial_{x_k} u_0(x)\,, \quad x \in \Omega\,, \tag{10.39}$$

also

$$-\sum_{j,k=1}^n \partial_{x_j}(a^0_{kj}\partial_{x_k} u_0) = f\,, \quad \text{in } \Omega, \tag{10.40}$$

das heißt, u_0 ist die Homogenisierungslösung.

11 Zwei-Skalen-Konvergenz

Wir betrachten schon wieder das Problem

$$L_\varepsilon u_\varepsilon = -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_j(a_{ij}^\varepsilon(x)\partial_i u_\varepsilon) = f\,, \quad \text{in } \Omega, \tag{11.1}$$

$$u_\varepsilon = 0\,, \quad \text{auf } \partial\Omega, \tag{11.2}$$

mit den Koeffizienten

$$a_{ij}^\varepsilon(x) = a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\,, \quad 1 \le i,j \le n\,. \tag{11.3}$$

Die beiden Skalen werden repräsentiert durch $x \in \Omega$ (Makroskala) und $y \in Y = \prod_{i=1}^{n}(0, l_i)$ (Mikroskala), verknüpft durch

$$y = \frac{x}{\varepsilon}\,. \tag{11.4}$$

Im asymptotischen Ansatz wird eine Näherung z_ε bestimmt der Form

$$z_\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{M} \varepsilon^k u_k\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)\,, \tag{11.5}$$

mit Funktionen

$$u_k : \Omega \times Y \to \mathbb{R}\,, \quad y \mapsto u_k(x,y) \quad \text{ist } Y\text{-periodisch für alle } x \in \Omega. \tag{11.6}$$

Wie wir bereits wissen, gilt in der Situation von Problem (11.1), (11.2), dass die Funktion u_0 in (11.5) nicht von y abhängt und mit dem Homogenisierungslimes übereinstimmt. Das muss bei anderen Problemen nicht der Fall sein.

Der Begriff der Zwei-Skalen-Konvergenz ist entworfen worden aus dem Wunsch heraus, einen zur Situation der Homogenisierung passenden Begriff der Konvergenz von Funktionen $v_\varepsilon : \Omega \to \mathbb{R}$ gegen eine Grenzfunktion $v : \Omega \times Y \to \mathbb{R}$ zu haben.

Mit $L^p(\Omega; C_{\text{per}}(Y))$ bezeichnen wir den Raum der Bochner-messbaren Funktionen mit der Norm

$$\|v\|_{L^p(\Omega; C_{\text{per}}(Y))}^p = \int_\Omega \left(\sup_{y\in Y} |v(x,y)|\right)^p dx\,. \tag{11.7}$$

Definition 11.1 *Mit $\mathcal{D}(\Omega; C_{per}^\infty(Y))$ bezeichnen wir den Raum derjenigen Funktionen $v : \Omega \to C_{per}^\infty(Y)$, die unendlich oft Frechét differenzierbar sind, kompakten Träger in Ω haben und, aufgefasst als Abbildung von $\Omega \times Y \to \mathbb{R}$, messbar sind.* □

Definition 11.2 (Zwei-Skalen-Konvergenz)
Wir sagen, dass eine Menge $\{v_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ von Funktionen im $L^2(\Omega)$ im Zwei-Skalen-Sinn gegen eine Funktion $v : \Omega \times Y \to \mathbb{R}$ konvergiert, falls

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega v_\varepsilon(x)\psi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \frac{1}{|Y|}\int_\Omega \int_Y v(x,y)\psi(x,y)\,dy\,dx \tag{11.8}$$

gilt für alle $\psi \in \mathcal{D}(\Omega; C_{per}^\infty(Y))$. Wir schreiben

$$v_\varepsilon \xrightarrow{2} v\,. \tag{11.9}$$

□

Für $v : \Omega \times Y \to \mathbb{R}$ bzw. $v : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bezeichnen wir im Folgenden mit

$$v\left(\cdot, \frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \tag{11.10}$$

die durch

$$\tilde{v}(x) = v\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \tag{11.11}$$

definierte Funktion $\tilde{v} : \Omega \to \mathbb{R}$.

Lemma 11.3 *Sei $v \in L^1(\Omega; C_{per}(Y))$. Dann gilt*

$$v\left(\cdot, \frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \in L^1(\Omega)\,, \quad \|v\left(\cdot, \frac{\cdot}{\varepsilon}\right)\|_{L^1(\Omega)} \le \|v\|_{L^1(\Omega; C_{per}(Y))}\,. \tag{11.12}$$

Beweis: Den Beweis der Messbarkeit von $v\left(\cdot, \frac{\cdot}{\varepsilon}\right)$ lassen wir weg. Die Ungleichung

$$\int_\Omega |v\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)|\, dx \le \int_\Omega \sup_{y\in Y} |v(x,y)|\, dx = \|v\|_{L^1(\Omega; C_{\mathrm{per}}(Y))}$$

liefert die zweite Behauptung. □

Satz 11.4 *Sei $v \in L^1(\Omega; C_{per}(Y))$. Dann gilt*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega v\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)\, dx = \frac{1}{|Y|} \int_\Omega \int_Y v(x,y)\, dy\, dx\,. \tag{11.13}$$

Beweis: Für jedes $k \in \mathbb{N}$ partitionieren wir Y in $N_k = k^n$ Quader Y_j mit den Seitenlängen l_i/k und setzen

$$v_k(x,y) = \sum_{j=1}^{N_k} v(x, y_j)\chi_j(y)\,,$$

wobei χ_j die charakteristische Funktion und y_j der Mittelpunkt von Y_j sind. Die Funktionen $x \mapsto v(x, y_j)$ liegen im $L^1(\Omega)$, und nach Satz 7.5 gilt

$$\chi_j\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \overset{*}{\rightharpoonup} M_Y(\chi_j) = \frac{|Y_j|}{|Y|}$$

in $L^\infty(\Omega)$. Es folgt

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega v_k\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)\, dx &= \lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{j=1}^{N_k} \int_\Omega v(x, y_j)\chi_j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\, dx = \sum_{j=1}^{N_k} \int_\Omega v(x, y_j)\frac{|Y_j|}{|Y|}\, dx \\ &= \frac{1}{|Y|} \int_\Omega \int_Y v_k(x,y)\, dy\, dx\,, \end{aligned} \tag{11.14}$$

also gilt (11.13) mit v_k anstelle von v. Wir zeigen als nächstes, dass

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega \delta_k(x)\, dx = 0\,, \tag{11.15}$$

wobei $\delta_k : \Omega \to \mathbb{R}$,

$$\delta_k(x) = \sup_{y \in Y} |v_k(x,y) - v(x,y)| .$$

Da δ_k stetig auf jedem Y_j ist, gilt

$$\delta_k(x) = \sup_{y \in Y \cap \mathcal{Q}^n} |v_k(x,y) - v(x,y)| ,$$

also ist δ_k messbar als Supremum einer abzählbaren Menge messbarer Funktionen. Da

$$v_k(x,y) - v(x,y) = v(x,y_j) - v(x,y) , \quad \text{falls } y \in Y_j,$$

folgt aus der gleichmäßigen Stetigkeit von v, dass $\delta_k \to 0$ punktweise fast überall in Ω. Da weiterhin

$$0 \le \delta_k(x) \le 2 \sup_{y \in Y} |v(x,y)| , \tag{11.16}$$

und da die rechte Seite von (11.16) in $L^1(\Omega)$ liegt, folgt (11.15) aus dem Satz von Lebesgue.

Um (11.13) zu zeigen, schätzen wir ab

$$\begin{aligned}
\left| \int_\Omega v\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx - \frac{1}{|Y|} \int_\Omega \int_Y v(x,y)\, dy\, dx \right| &\le \left| \int_\Omega v\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx - \int_\Omega v_k\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx \right| + \\
&+ \left| \int_\Omega v_k\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx - \frac{1}{|Y|} \int_\Omega \int_Y v_k(x,y)\, dy\, dx \right| \\
&+ \left| \frac{1}{|Y|} \int_\Omega \int_Y v_k(x,y)\, dy\, dx - \frac{1}{|Y|} \int_\Omega \int_Y v(x,y)\, dy\, dx \right| \\
&\le \left| \int_\Omega v_k\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx - \frac{1}{|Y|} \int_\Omega \int_Y v_k(x,y)\, dy\, dx \right| + 2 \int_\Omega \delta_k(x)\, dx .
\end{aligned}$$

Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ für festes $k \in \mathbb{N}$ liefert wegen (11.14)

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \left| \int_\Omega v\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx - \frac{1}{|Y|} \int_\Omega \int_Y v(x,y)\, dy\, dx \right| \le 2 \int_\Omega \delta_k(x)\, dx .$$

Grenzübergang $k \to \infty$ liefert wegen (11.15) die Behauptung. □

Folgerung 11.5 *Für $v \in L^2(\Omega; C_{per}(Y))$ gilt*

$$\left\| v\left(\cdot, \frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \right\|_{L^2(\Omega)} \le \|v\|_{L^2(\Omega; C_{per}(Y))} , \tag{11.17}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega v\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)^2 dx = \frac{1}{|Y|} \int_\Omega \int_Y v(x,y)^2\, dy\, dx , \tag{11.18}$$

$$v\left(\cdot, \frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \to \frac{1}{|Y|} \int_Y v(\cdot, y)\, dy , \quad \textit{schwach im } L^2(\Omega). \tag{11.19}$$

Beweis: Wenden wir Lemma 11.3 und Satz 11.4 auf v^2 an, so erhalten wir (11.17) und (11.18). Sei nun $\varphi \in L^2(\Omega)$, wir setzen

$$w(x,y) = v(x,y)\varphi(x) .$$

Es ist $w \in L^1(\Omega; C_{\text{per}}(Y))$, und aus Satz 11.4 folgt

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega v\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \varphi(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega w\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)\,dx = \frac{1}{|Y|} \int_\Omega \int_Y w(x,y)\,dy\,dx$$
$$= \int_\Omega \left[\frac{1}{|Y|} \int_Y v(x,y)\,dy\right] \varphi(x)\,dx\,.$$

Da φ beliebig war, folgt (11.19). □

Ist $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega; C^\infty_{\text{per}}(Y))$, so gilt

$$\varphi_\varepsilon \overset{2}{\rightarrow} \varphi \tag{11.20}$$

für die durch $\varphi_\varepsilon(x) = \varphi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)$ definierten Funktionen φ_ε (Übung). Daran erkennen wir, dass die Zwei-Skalen-Konvergenz einen Grenzübergang für die einzelnen Termen der asymptotischen Entwicklung in (11.5) abbildet.

Lemma 11.6 *Sei $\{v_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \subset L^2(\Omega)$. Dann gilt*

(i) *Aus $v_\varepsilon \to v$ im $L^2(\Omega)$ folgt $v_\varepsilon \overset{2}{\rightarrow} v$. (Hierbei wird der Zwei-Skalen-Grenzwert v als bezüglich y konstante Funktion aufgefasst.)*

(ii) *Aus $v_\varepsilon \overset{2}{\rightarrow} v$, $v : \Omega \times Y \to \mathbb{R}$, folgt*

$$v_\varepsilon \to \frac{1}{|Y|} \int_Y v(\cdot, y)\,dy\,, \quad \textit{schwach im } L^2(\Omega). \tag{11.21}$$

Insbesondere ist $\{v_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ beschränkt im $L^2(\Omega)$, falls v_ε im Zwei-Skalen-Sinn konvergiert.

Beweis: Für $\psi \in \mathcal{D}(\Omega; C^\infty_{\text{per}}(Y))$ gilt wegen (11.19)

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega v_\varepsilon(x) \psi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)\,dx = \int_\Omega v(x) \frac{1}{|Y|} \int_Y \psi(x,y)\,dy\,dx = \frac{1}{|Y|} \int_\Omega \int_Y v(x)\psi(x,y)\,dy\,dx\,,$$

da der Integrand auf der linken Seite das Produkt einer stark konvergenten und einer gemäß (11.20) schwach konvergenten Folge ist. Also gilt (i). Sei nun $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Dann liegt die durch $\psi(x,y) = \varphi(x)$ definierte Funktion in $\mathcal{D}(\Omega; C^\infty_{\text{per}}(Y))$, und es gilt

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega v_\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx = \frac{1}{|Y|} \int_\Omega \int_Y v(x,y)\varphi(x)\,dy\,dx = \int_\Omega \varphi(x) \frac{1}{|Y|} \int_Y v(x,y)\,dy\,dx\,. \tag{11.22}$$

Da in der Einheitskugel B_1 von $L^2(\Omega)$ die Menge $\mathcal{D}(\Omega) \cap B_1$ dicht liegt, ist $\{v_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ beschränkt im $L^2(\Omega)$, und (11.22) gilt auch für alle $\varphi \in L^2(\Omega)$. □

Aus (11.21) erkennt man, dass der Zwei-Skalen-Limes mehr Information enthalten kann als der schwache Limes. Das ist allerdings nur dann der Fall, wenn die Skalierung der Oszillationen zu der Skalierung der Testfunktionen passt. Beispielsweise gilt für

$$\tilde{v}_\varepsilon(x) = v\left(x, \frac{x}{\varepsilon^2}\right)\,,$$

dass sowohl der Zwei-Skalen-Limes als auch der schwache Limes von $\tilde{v}_\varepsilon$ gleich dem Integralmittel in (11.21) ist (hier ohne Beweis).

Bei der Zwei-Skalen-Konvergenz kann man unter einer Zusatzvoraussetzung auch bei Produkten zum Limes übergehen, wenigstens im Distributionensinn.

Satz 11.7 *Seien* $\{v_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$, $\{w_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ *Teilmengen des* $L^2(\Omega)$ *mit* $v_\varepsilon \stackrel{2}{\to} v$, $w_\varepsilon \stackrel{2}{\to} w$ *mit* $v, w \in L^2(\Omega \times Y)$, *es gelte*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega v_\varepsilon(x)^2 \, dx = \frac{1}{|Y|} \int_\Omega \int_Y v(x,y)^2 \, dy \, dx \,. \tag{11.23}$$

Dann gilt

$$v_\varepsilon w_\varepsilon \quad \to \quad \frac{1}{|Y|} \int_Y v(\cdot, y) w(\cdot, y) \, dy \,, \quad \text{in } \mathcal{D}'(\Omega). \tag{11.24}$$

Bemerkung. Die Bedingung (11.23) hat den Charakter einer Regularitätsbedingung, sie ist für $v \in L^1(\Omega; C_{\text{per}}(Y))$ und $v_\varepsilon(x) = v(x, \frac{x}{\varepsilon})$ nach (11.18) erfüllt.

Beweis: Sei $\psi_k \in \mathcal{D}(\Omega; C^\infty_{\text{per}}(Y))$ eine Folge mit $\psi_k \to v$ im $L^2(\Omega \times Y)$. Wir setzen

$$I_{k,\varepsilon} = \int_\Omega \left[v_\varepsilon(x) - \psi_k\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right]^2 \, dx \,,$$

dann ist

$$I_{k,\varepsilon} = \int_\Omega [v_\varepsilon(x)]^2 \, dx - 2 \int_\Omega v_\varepsilon(x) \psi_k\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \, dx + \int_\Omega \left[\psi_k\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right]^2 \, dx \,.$$

Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ liefert

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0} I_{k,\varepsilon} &= \frac{1}{|Y|} \int_\Omega \int_Y [v(x,y)]^2 \, dx - 2\frac{1}{|Y|} \int_\Omega \int_Y v(x,y)\psi_k(x,y) \, dx + \frac{1}{|Y|} \int_\Omega \int_Y [\psi_k(x,y)]^2 \, dx \\
&= \frac{1}{|Y|} \int_\Omega \int_Y [v(x,y) - \psi_k(x,y)]^2 \, dx \,,
\end{aligned}$$

im ersten Integral wegen (11.23), im zweiten Integral da $v_\varepsilon \stackrel{2}{\to} v$, im dritten Integral nach Folgerung 11.5. Da $\psi_k \to v$ im L^2, folgt

$$\lim_{k\to\infty} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega \left[v_\varepsilon(x) - \psi_k\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right]^2 \, dx = 0 \,. \tag{11.25}$$

Sei nun $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ eine beliebige Testfunktion. Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_\Omega v_\varepsilon(x) w_\varepsilon(x) \varphi(x) \, dx &= \int_\Omega \left[v_\varepsilon(x) - \psi_k\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right] w_\varepsilon(x)\varphi(x) \, dx \\
&\quad + \int_\Omega \psi_k\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) w_\varepsilon(x) \varphi(x) \, dx \,.
\end{aligned} \tag{11.26}$$

Da $w_\varepsilon \stackrel{2}{\to} w$, ist $\{w_\varepsilon\}$ beschränkt im $L^2(\Omega)$, also gilt

$$\left| \int_\Omega \left[v_\varepsilon(x) - \psi_k\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right] w_\varepsilon(x) \varphi(x) \, dx \right| \le C \| v_\varepsilon - \psi_k\left(\cdot, \frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \|_{L^2(\Omega)} \,, \tag{11.27}$$

sowie

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega \psi_k\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) w_\varepsilon(x) \varphi(x) \, dx = \frac{1}{|Y|} \int_\Omega \int_Y w(x,y)\varphi(x)\psi_k(x,y) \, dy \, dx \,. \tag{11.28}$$

Wir können daher auf der rechten Seite von (11.26) den doppelten Grenzübergang (erst $\varepsilon \to 0$, dann $k \to \infty$) durchführen und erhalten wegen (11.25), (11.27), (11.28), und weil $\psi_k \to v$ in $L^2(\Omega)$, als Grenzwert den Ausdruck

$$\frac{1}{|Y|} \int_\Omega \int_Y w(x,y) v(x,y) \varphi(x) \, dy \, dx \, . \tag{11.29}$$

Also existiert auch auf der linken Seite von (11.26) der Grenzwert für $\varepsilon \to 0$, und die Behauptung ist bewiesen, da φ beliebig war. □

Ist eine Menge von Funktionen im $L^2(\Omega)$ beschränkt, so gibt es in ihr eine schwach konvergente Teilfolge. Dass das auch für den stärkeren Konvergenzbegriff der Zwei-Skalen-Konvergenz gilt, ist ein wesentlicher Grund für dessen Brauchbarkeit.

Satz 11.8 (Kompaktheit)
Sei $\{v_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ beschränkt im $L^2(\Omega)$. Dann gibt es eine Folge $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und ein $v \in L^2(\Omega \times Y)$ mit $v_{\varepsilon_k} \overset{2}{\to} v$.

Beweis: Sei $\|v_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \le C$, unabhängig von ε. Aus Folgerung 11.5 erhalten wir

$$\left| \int_\Omega v_\varepsilon(x) \psi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \, dx \right| \le \|v_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|\psi\left(\cdot, \frac{\cdot}{\varepsilon}\right)\|_{L^2(\Omega)} \le C \|\psi\|_{L^2(\Omega; C_{\mathrm{per}}(Y))} \, .$$

Durch

$$V^\varepsilon(\psi) = \int_\Omega v_\varepsilon(x) \psi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \, dx \tag{11.30}$$

wird also ein lineares stetiges Funktional auf $X := L^2(\Omega; C_{\mathrm{per}}(Y))$ definiert mit

$$\|V^\varepsilon\|_{X^*} \le C \, . \tag{11.31}$$

Nach einem Satz der Funktionalanalysis (da X separabel ist) existiert eine Folge $\{V^{\varepsilon_k}\}$ und ein $V \in X^*$ mit

$$V^{\varepsilon_k} \overset{*}{\rightharpoonup} V \, , \quad \text{in } X^*. \tag{11.32}$$

Es gilt also für alle $\psi \in X$

$$V(\psi) = \lim_{k\to\infty} V^{\varepsilon_k}(\psi) = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega v_{\varepsilon_k}(x) \psi\left(x, \frac{x}{\varepsilon_k}\right) \, dx \, . \tag{11.33}$$

Es folgt

$$|V(\psi)| \le C \lim_{k\to\infty} \|\psi\left(\cdot, \frac{\cdot}{\varepsilon_k}\right)\|_{L^2(\Omega)} \le C_1 \|\psi\|_{L^2(\Omega\times Y)} \, , \tag{11.34}$$

wobei die letzte Ungleichung (mit einer neuen Konstante C_1) aus (11.18) folgt. Da $X = L^2(\Omega; C_{\mathrm{per}}(Y))$ dicht liegt in $L^2(\Omega \times Y)$, lässt sich V eindeutig zu einem linearen stetigen Funktional auf $L^2(\Omega \times Y)$ fortsetzen. Nach dem Darstellungssatz von Riesz gibt es ein $\tilde{v} \in L^2(\Omega \times Y$ mit

$$V(\psi) = \int_\Omega \int_Y \tilde{v}(x,y) \psi(x,y) \, dy \, dx \, , \quad \text{für alle } \psi \in L^2(\Omega; C_{\mathrm{per}}(Y)). \tag{11.35}$$

Wir setzen $v = |Y|\tilde{v}$ und erhalten aus (11.33)

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega v_{\varepsilon_k}(x)\psi\left(x, \frac{x}{\varepsilon_k}\right) dx = \frac{1}{|Y|}\int_\Omega \int_Y v(x,y)\psi(x,y)\, dy\, dx$$

für alle $\psi \in \mathcal{D}(\Omega; C^\infty_{\text{per}}(Y))$, also $v_{\varepsilon_k} \stackrel{2}{\to} v$. $\square$

Satz 11.9 *Sei* $\{v_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \subset H^1(\Omega)$, $v \in H^1(\Omega)$, *es gelte* $v_\varepsilon \to v$ *schwach in* $H^1(\Omega)$. *Dann gilt* $v_\varepsilon \stackrel{2}{\to} v$, *und es gibt eine Teilfolge* $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *und ein* $w \in L^2(\Omega; H^1_{per}(Y))$, *so dass*

$$\nabla v_{\varepsilon_k} \stackrel{2}{\to} \nabla v + \nabla_y w\,. \tag{11.36}$$

Beweis: Da $v_\varepsilon \to v$ stark in $L^2(\Omega)$, folgt $v_\varepsilon \stackrel{2}{\to} v$ nach Lemma 11.6. Da $\{v_\varepsilon\}$ beschränkt ist in $H^1(\Omega)$, gibt es nach Satz 11.8 eine Teilfolge $\varepsilon_k \to 0$ mit

$$\nabla v_{\varepsilon_k} \stackrel{2}{\to} z\,, \quad \text{in } L^2(\Omega \times Y)^n. \tag{11.37}$$

Wir schreiben ε' statt ε_k, $\varepsilon' \to 0$ statt $k \to \infty$. Es gilt also

$$\lim_{\varepsilon'\to 0} \int_\Omega \left\langle \nabla v_{\varepsilon'}(x), \psi\left(x, \frac{x}{\varepsilon'}\right)\right\rangle dx = \frac{1}{|Y|}\int_\Omega\int_Y \langle z(x,y), \psi(x,y)\rangle\, dy\, dx\,, \tag{11.38}$$

für alle $\psi \in \mathcal{D}(\Omega; C^\infty_{\text{per}}(Y))^n$. Partielle Integration ergibt

$$\int_\Omega \left\langle \nabla v_{\varepsilon'}(x), \psi\left(x, \frac{x}{\varepsilon'}\right)\right\rangle dx = -\sum_{i=1}^n \int_\Omega v_{\varepsilon'}(x)\left[\partial_{x_i}\psi_i\left(x, \frac{x}{\varepsilon'}\right) + \frac{1}{\varepsilon'}\partial_{y_i}\psi_i\left(x, \frac{x}{\varepsilon'}\right)\right] dx\,. \tag{11.39}$$

Wir betrachten nun Testfunktionen ψ mit $\operatorname{div}_y\psi = \sum \partial_{y_i}\psi_i = 0$. Aus (11.39) ergibt sich

$$\int_\Omega \left\langle \nabla v_{\varepsilon'}(x), \psi\left(x, \frac{x}{\varepsilon'}\right)\right\rangle dx = -\sum_{i=1}^n \int_\Omega v_{\varepsilon'}(x)\partial_{x_i}\psi_i\left(x, \frac{x}{\varepsilon'}\right) dx\,. \tag{11.40}$$

Grenzübergang $\varepsilon' \to 0$ ergibt, da $v_{\varepsilon'} \stackrel{2}{\to} v = v_0$,

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon'\to 0} \int_\Omega \left\langle \nabla v_{\varepsilon'}(x), \psi\left(x, \frac{x}{\varepsilon'}\right)\right\rangle dx &= -\frac{1}{|Y|}\sum_{i=1}^n \int_\Omega\int_Y v_0(x)\partial_{x_i}\psi_i(x,y)\, dy\, dx \\ &= \frac{1}{|Y|}\int_\Omega\int_Y \langle \nabla v_0(x), \psi(x,y)\rangle\, dy\, dx\,.\end{aligned} \tag{11.41}$$

Aus (11.38) und (11.41) folgt, dass

$$\int_\Omega\int_Y \langle z(x,y) - \nabla v_0(x), \psi(x,y)\rangle\, dy\, dx = 0 \tag{11.42}$$

gilt für alle $\psi \in \mathcal{D}(\Omega; C^\infty_{\text{per}}(Y))^n$ mit $\operatorname{div}_y\psi = 0$. Nun gibt es in der Vektoranalysis einen Satz, der besagt: Gilt für $g : \Omega \to \mathbb{R}^n$

$$\int_Y \langle g(y), \varphi(y)\rangle\, dy = 0$$

für alle glatten periodischen Funktionen $\varphi : Y \to \mathbb{R}^n$ mit $\operatorname{div}\varphi = 0$, so gibt es ein $f : Y \to \mathbb{R}$ mit

$$g = \nabla f\,.$$

Daraus kann man herleiten, dass im vorliegenden Fall ein $w \in L^2(\Omega; H^1_{\text{per}}(Y))$ existiert mit

$$z(x,y) - \nabla v_0(x) = \nabla_y w(x,y)\,.$$

Damit ist (11.36) bewiesen. □

Wir behandeln nun mit der Methode der Zwei-Skalen-Konvergenz unser Problem

$$L_\varepsilon u_\varepsilon = -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_j(a^\varepsilon_{ij}(x)\partial_i u_\varepsilon) = f\,, \quad \text{in } \Omega, \tag{11.43}$$

$$u_\varepsilon = 0\,, \quad \text{auf } \partial\Omega, \tag{11.44}$$

wobei

$$a^\varepsilon_{ij}(x) = a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\,, \quad 1 \le i, j \le n\,. \tag{11.45}$$

Lemma 11.10 *Es gelte Voraussetzung 9.1 (gleichmäßige Elliptizität), sei $f \in L^2(\Omega)$. Dann gibt es ein $u_0 \in H^1_0(\Omega)$ und ein $u_1 \in L^2(\Omega; H^1_{per}(Y))$, so dass für eine Teilfolge*

$$u_\varepsilon \to u_0\,, \quad \textit{schwach in } H^1_0(\Omega)\textit{, stark in } L^2(\Omega), \quad u_\varepsilon \xrightarrow{2} u_0\,, \tag{11.46}$$

$$\nabla u_\varepsilon \xrightarrow{2} \nabla u_0 + \nabla_y u_1\,, \tag{11.47}$$

gelten für die Lösungen $u_\varepsilon \in H^1_0(\Omega)$ von (11.43), (11.44). Die Funktionen u_0 und u_1 erfüllen die Variationsgleichung

$$\frac{1}{|Y|}\int_\Omega\int_Y \left\langle A(y)^T(\nabla u_0(x) + \nabla_y u_1(x,y)), \nabla\psi_0(x) + \nabla_y\psi_1(x,y)\right\rangle\, dy\, dx = \int_\Omega f(x)\psi_0(x)\, dx\,, \tag{11.48}$$

für alle Testfunktionen $\psi_0 \in \mathcal{D}(\Omega)$ und $\psi_1 \in \mathcal{D}(\Omega; C^\infty_{per}(Y))$.

Beweis: Wie bereits in Kapitel 9 festgestellt wurde, hat das ε-Problem (11.43), (11.44) nach Lax-Milgram eine eindeutige Lösung $u_\varepsilon \in H^1_0(\Omega)$, und die Menge $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ ist beschränkt im $H^1_0(\Omega)$. Nach Satz 11.8 und Satz 11.9 gibt es u_0, u_1 wie behauptet, so dass (11.46) und (11.47) gelten. Seien nun $\psi_0 \in \mathcal{D}(\Omega)$ und $\psi_1 \in \mathcal{D}(\Omega; C^\infty_{\text{per}}(Y))$ gegeben. Es gilt dann nach Folgerung 11.5

$$\psi_0 + \varepsilon\psi_1\left(\cdot, \frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \in H^1_0(\Omega)\,. \tag{11.49}$$

Wir testen die Variationsformulierung des ε-Problems mit (11.49) und erhalten

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left\langle \nabla u_\varepsilon(x), A^\varepsilon(x)\left[\nabla\psi_0(x) + \varepsilon\nabla_x\psi_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \nabla_y\psi_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)\right]\right\rangle\, dx \\ = \int_\Omega f(x)\left[\psi_0(x) + \varepsilon\psi_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)\right]\, dx\end{aligned} \tag{11.50}$$

Es gilt

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega f(x)\left[\psi_0(x) + \varepsilon\psi_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)\right]\, dx = \int_\Omega f(x)\psi_0(x)\, dx\,, \tag{11.51}$$

da die Testfunktion schwach in $H_0^1(\Omega)$ gegen ψ_0 konvergiert. Weiterhin gilt

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \int_\Omega \left\langle \nabla u_\varepsilon(x), A^\varepsilon(x) \nabla_x \psi_1 \left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)\right\rangle dx = 0\,, \tag{11.52}$$

da beide Faktoren im Integral beschränkt im $L^2(\Omega)^n$ sind, gleichmäßig in ε. Man kann weiter zeigen, dass neben (11.49) auch

$$(x,y) \mapsto A(y)[\nabla\psi_0(x) + \nabla_y \psi_1(x,y)] \tag{11.53}$$

als Testfunktion in der Definition der Zwei-Skalen-Konvergenz genommen werden kann. Aus (11.47) folgt dann

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0} &\int_\Omega \left\langle \nabla u_\varepsilon(x), A^\varepsilon(x) \left[\nabla\psi_0(x) + \nabla_y\psi_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)\right]\right\rangle dx \\ &= \frac{1}{|Y|}\int_\Omega\int_Y \langle \nabla u_0(x) + \nabla_y u_1(x,y), A(y)\left[\nabla\psi_0(x) + \nabla_y\psi_1(x,y)\right]\rangle\, dy\, dx\,. \end{aligned}\tag{11.54}$$

Setzen wir (11.50) – (11.54) zusammen, so erhalten wir (11.48). □

Wir betrachten nun die Variationsgleichung (11.48) unabhängig von ihrer Herleitung. Der Raum

$$V = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega; H^1_{\text{per}}(Y)) \tag{11.55}$$

enthält Elemente der Form $\tilde{v} = (v_0, v_1)$ und ist ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$\langle \tilde{u}, \tilde{v}\rangle_V = \langle \nabla u_0, \nabla v_0\rangle_{L^2(\Omega)} + \langle \nabla_y u_1, \nabla_y v_1\rangle_{L^2(\Omega\times Y)}\,. \tag{11.56}$$

Wir betrachten die Bilinearform

$$\tilde{a}(\tilde{u},\tilde{v}) = \frac{1}{|Y|}\int_\Omega\int_Y \left\langle A(y)^T(\nabla u_0(x) + \nabla_y u_1(x,y)), \nabla v_0(x) + \nabla_y v_1(x,y)\right\rangle dy\, dx \tag{11.57}$$

und die Linearform

$$F(\tilde{v}) = \int_\Omega f(x) v_0(x)\, dx\,. \tag{11.58}$$

Damit ist die Variationsgleichung (11.48) unter die Standardform

$$\tilde{a}(\tilde{u},\tilde{v}) = F(\tilde{v})\,, \quad \text{für alle } \tilde{v} \in V, \tag{11.59}$$

subsumiert.

Satz 11.11 *Es gelte Voraussetzung 9.1 (gleichmäßige Elliptizität), sei $f \in L^2(\Omega)$. Dann hat die Variationsgleichung*

$$\begin{aligned}\frac{1}{|Y|}\int_\Omega\int_Y &\left\langle A(y)^T(\nabla u_0(x) + \nabla_y u_1(x,y)), \nabla v_0(x) + \nabla_y v_1(x,y)\right\rangle dy\, dx \\ &= \int_\Omega f(x) v_0(x)\, dx\,, \quad \textit{für alle } (v_0, v_1) \in V,\end{aligned}\tag{11.60}$$

eine eindeutige Lösung $(u_0, u_1) \in V$, und es gilt

$$u_\varepsilon \to u_0\,, \quad \textit{schwach in } H_0^1(\Omega), \textit{ stark in } L^2(\Omega), \quad u_\varepsilon \xrightarrow{2} u_0\,, \tag{11.61}$$

$$\nabla u_\varepsilon \xrightarrow{2} \nabla u_0 + \nabla_y u_1\,, \tag{11.62}$$

für die Lösungen $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ des ε-Problems (11.43), (11.44).

Beweis: Wir wenden den Satz von Lax-Milgram an. Die Stetigkeit von $\tilde{a}$ und F folgen unmittelbar aus der Definition der Norm in V. Wir zeigen die V-Elliptizität. Es gilt für alle $\tilde{v} \in V$

$$\tilde{a}(\tilde{v}, \tilde{v}) \geq \frac{c_a}{|Y|} \int_\Omega \int_Y |\nabla v_0(x) + \nabla_y v_1(x, y)|^2 \, dy \, dx \,. \tag{11.63}$$

Für den beim Ausmultiplizieren des Quadrats entstehenden gemischten Term gilt

$$\begin{aligned} \int_\Omega \int_Y \langle \nabla v_0(x), \nabla_y v_1(x, y) \rangle \, dy \, dx &= \int_\Omega \int_Y \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} v_0(x) \partial_{y_i} v_1(x, y) \, dy \, dx \\ &= \int_\Omega \sum_{i=1}^n \int_Y \partial_{y_i}(v_1 \partial_{x_i} v_0)(x, y) \, dy \, dx \\ &= \int_\Omega \int_{\partial Y} \langle v_1(x, \eta) \nabla v_0(x), \nu(\eta) \rangle \, dS(\eta) \, dx \\ &= 0 \,, \end{aligned}$$

da die Funktion $v_1 \nabla v_0$ Y-periodisch ist. (11.63) wird also zu

$$\tilde{a}(\tilde{v}, \tilde{v}) \geq c_a \int_\Omega |\nabla v_0(x)|^2 \, dx + \frac{c_a}{|Y|} \int_\Omega \int_Y |\nabla_y v_1(x, y)|^2 \, dy \, dx \,, \tag{11.64}$$

also ist $\tilde{a}$ V-elliptisch. Aus der Eindeutigkeit der Lösung der Variationsgleichung folgt nun, dass die nach Lemma 11.10 für eine Teilfolge geltenden Konvergenzaussagen nun für die gesamte Folge gelten, also sind auch (11.61) und (11.62) bewiesen. □

Theorem 11.12 *Es gelte Voraussetzung 9.1 (gleichmäßige Elliptizität), sei $f \in L^2(\Omega)$. Dann gelten für die in Satz 11.11 gewonnene Lösung (u_0, u_1) der Variationsgleichung (11.60)s*

$$-\operatorname{div}((A^0)^T \operatorname{grad} u_0) = f \,, \tag{11.65}$$

sowie

$$u_1(x, y) = -\sum_{k=1}^n \hat{\chi}_k(y) \cdot \partial_{x_k} u_0(x) \,. \tag{11.66}$$

Hierbei ist $\hat{\chi}_k$ die Lösung des periodischen Hilfsproblems (9.44) mit $\lambda = e_k$.

Bemerkung. Die Funktion u_0 ist also gerade die Homogenisierungslösung zu (11.43), (11.44), und die Funktion u_1 liefert den zweiten Term in der formalen asymptotischen Entwicklung aus Kapitel 10.

Beweis: Für alle k erfüllt $\hat{\chi}_k$ die Variationsgleichung des periodischen Hilfsproblems (9.44), nämlich

$$\int_Y \left\langle A(y)^T \nabla \hat{\chi}_k(y), \nabla w(y) \right\rangle \, dy = \int_Y e_k^T A(y) \nabla w(y) \, dy \tag{11.67}$$

für alle $w \in H_M(Y)$, oder was dasselbe ist, für alle $w \in H^1_{\text{per}}(Y)$. Wir bilden eine Linearkombination gemäß (11.66) und integrieren über Ω. Aus (11.67) ergibt sich dann

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{|Y|} \int_\Omega \int_Y \left\langle A(y)^T \nabla_y \left[\sum_{k=1}^n \hat{\chi}_k(y) \partial_{x_k} u_0(x) \right], \nabla_y v_1(x, y) \right\rangle dy \, dx \\ &\quad = -\frac{1}{|Y|} \int_\Omega \int_Y \nabla u_0(x)^T A(y) \nabla_y v_1(x, y) \, dy \, dx \end{aligned} \tag{11.68}$$

für alle $v_1 \in L^2(\Omega; H^1_{\text{per}}(Y))$. Ein Vergleich mit (11.60) für $v_0 = 0$ zeigt, das (11.66) gilt. Wir setzen nun $v_1 = 0$ in (11.60) und erhalten

$$\int_\Omega \left\langle \frac{1}{|Y|} \int_Y A(y)^T (\nabla u_0(x) + \nabla_y u_1(x,y))\, dy, \nabla v_0(x) \right\rangle dx = \int_\Omega f(x) v_0(x)\, dx\,, \tag{11.69}$$

für alle $v_0 \in H^1_0(\Omega)$. Für die j-te Komponente des Vektors unter dem Y-Integral gilt

$$\begin{aligned} \Big[A(y)^T (\nabla u_0(x) + \nabla_y u_1(x,y))\Big]_j &= \sum_{k=1}^n a_{kj} \partial_{x_k} u_0 - \sum_{i=1}^n a_{ij} \sum_{k=1}^n \partial_{y_i} \hat{\chi}_k \partial_{x_k} u_0 \\ &= \sum_{k=1}^n \left(a_{kj} - \sum_{i=1}^n a_{ij} \partial_{y_i} \hat{\chi}_k \right) \partial_{x_k} u_0 \end{aligned} \tag{11.70}$$

Die Lösungen $\hat{\chi}_k$ des periodischen Hilfsproblems sind mit der Homogenisierungsmatrix A^0 verknüpft gemäß (10.38) durch

$$a^0_{kj} = M_Y(a_{kj}) - M_Y \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} \partial_{y_i} \hat{\chi}_k \right) . \tag{11.71}$$

Setzen wir (11.70) und (11.71) in (11.69) ein, so erhalten wir

$$\int_\Omega \left\langle (A^0)^T \nabla u_0(x), \nabla v_0(x) \right\rangle dx = \int_\Omega f(x) v_0(x)\, dx\,, \quad \text{für alle } v \in H^1_0(\Omega),$$

also gerade die schwache Formulierung von (11.65). □