Partielle Differentialgleichungen II *

Martin Brokate †

Inhaltsverzeichnis

*Vorlesungsskript, SS 2003

†Zentrum Mathematik, TU München

1 Das Maximumprinzip

Wir wissen bereits: Ist $u : \Omega \to \mathbb{R}$ eine auf einem beschränkten Gebiet Ω definierte subharmonische Funktion, also

$$-\Delta u \le 0 \quad \text{in } \Omega, \tag{1.1}$$

so ist entweder u konstant, oder es gilt

$$u(x) < \max_{y \in \partial\Omega} u(y)\,, \quad \text{für alle } x \in \Omega. \tag{1.2}$$

Dieser Sachverhalt bleibt richtig, wenn man den Laplace-Operator in durch einen allgemeinen elliptischen Operator 2. Ordnung ersetzt, und er läßt sich auch auf zugehörige parabolische Gleichungen, etwa

$$\partial_t u - \Delta u = 0 \tag{1.3}$$

übertragen. Wir betrachten einen Operator L der Form

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_j\partial_i u + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\partial_i u + c(x)u\,, \tag{1.4}$$

der im Gegensatz zu Kapitel 8, Teil 1 nun nicht in Divergenzform geschrieben ist. (Schreibt man (1.4) in Divergenzform um, so erhält man

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_j(a_{ij}(x)\partial_i u) + \sum_{i=1}^{n}\left(b_i(x) + \sum_{j=1}^{n}\partial_j a_{ij}(x)\right)\partial_i u + c(x)u\,. \qquad)$$

Voraussetzung 1.1 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, seien $a_{ij}, b_i, c \in C(\overline{\Omega})$ für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$.* □

Erinnerung: Der Differentialoperator L aus (1.4) heißt **gleichmäßig elliptisch**, wenn es ein $a_* > 0$ gibt mit

$$\xi^T A(x)\xi = \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i a_{ij}(x)\xi_j \ge a_*|\xi|^2\,, \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^n,\ x \in \Omega. \tag{1.5}$$

Eine etwas schwächere Forderung ist

$$\xi^T A(x)\xi \ge 0\,, \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^n,\ x \in \Omega, \tag{1.6}$$

$$\text{es gibt ein } \xi \in \mathbb{R}^n \text{ mit } \xi^T A(x)\xi > 0 \text{ für alle } x \in \overline{\Omega}. \tag{1.7}$$

Hat $u \in C^2(\Omega)$ in $x \in \Omega$ ein Maximum, so gilt

$$\nabla u(x) = 0\,, \quad D^2 u(x) \le 0\,, \tag{1.8}$$

das heißt, die Hesse-Matrix $D^2 u(x)$ ist negativ semidefinit. Hieraus folgt sofort

$$-\Delta u(x) \ge 0\,, \tag{1.9}$$

und man kann also schließen: Gilt $-\Delta u < 0$ in Ω, so kann u kein Maximum in Ω haben.

Lemma 1.2 *Seien $B, C \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ positiv semidefinit, sei C symmetrisch. Dann gilt*

$$\operatorname{spur}(BC) \geq 0\,. \tag{1.10}$$

Beweis: Man betrachtet zuerst den Fall, dass C eine Diagonalmatrix ist, und führt den allgemeinen Fall darauf zurück. Details siehe Übung. $\Box$

Satz 1.3 (Schwaches Maximumprinzip, elliptischer Operator)
Es gelte Voraussetzung (1.1) sowie (1.6), (1.7). Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ mit

$$Lu \leq 0 \quad \textit{in } \Omega, \tag{1.11}$$

das heißt, $(Lu)(x) \leq 0$ für alle $x \in \Omega$. Es gelte außerdem $c = 0$. Dann gilt

$$\max_{y \in \overline{\Omega}} u(y) = \max_{y \in \partial\Omega} u(y)\,. \tag{1.12}$$

Beweis: Wir betrachten zunächst den Fall, dass $Lu < 0$ in Ω gilt. Wäre $x \in \Omega$ Maximalstelle von u, so wäre $\nabla u(x) = 0$ und

$$(Lu)(x) = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_j\partial_i u = -\operatorname{spur}(A(x)D^2u(x)) \geq 0\,,$$

nach Lemma 1.2, da $-D^2u(x)$ positiv semidefinit und symmetrisch ist. Es folgt (1.12) im Falle $Lu < 0$. Sei nun $Lu \leq 0$ in Ω. Für $\varepsilon > 0$ definieren wir

$$u_\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon e^{\gamma\langle x,\xi\rangle}\,, \tag{1.13}$$

wobei ξ gemäß (1.7) gewählt und $\gamma > 0$ später festgelegt wird. Differenzieren liefert

$$\begin{aligned} \partial_i u_\varepsilon(x) &= \partial_i u(x) + \varepsilon\gamma\xi_i e^{\gamma\langle x,\xi\rangle}\,, \\ \partial_j\partial_i u_\varepsilon(x) &= \partial_j\partial_i u(x) + \varepsilon\gamma^2\xi_i\xi_j e^{\gamma\langle x,\xi\rangle}\,. \end{aligned}$$

Es folgt

$$(Lu_\varepsilon)(x) = (Lu)(x) - \varepsilon\gamma e^{\gamma\langle x,\xi\rangle}[\gamma\xi^T A(x)\xi - \langle\xi, b(x)\rangle]\,. \tag{1.14}$$

Wir wählen γ so groß, dass die eckige Klammer einen Wert > 0 hat für alle $x \in \Omega$; dies ist möglich nach (1.7), da $\overline{\Omega}$ kompakt und A und b stetig sind, man beachte außerdem, dass γ nicht von ε abhängt. Es folgt

$$Lu_\varepsilon < 0 \quad \text{in } \Omega, \text{ für alle } \varepsilon > 0,$$

also nach dem ersten Teil des Beweises

$$\max_{y \in \overline{\Omega}} u_\varepsilon(y) = \max_{y \in \partial\Omega} u_\varepsilon(y)\,.$$

Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ liefert die Behauptung. $\Box$

Ersetzt man in Satz 1.3 die Voraussetzung (1.11) durch

$$Lu \geq 0 \quad \text{in } \Omega, \tag{1.15}$$

so können wir den Satz auf $-u$ anwenden und erhalten

$$\min_{y\in\overline{\Omega}} u(y) = \min_{y\in\partial\Omega} u(y)\,. \tag{1.16}$$

Ist also u eine klassische Lösung der elliptischen Gleichung

$$Lu = 0 \tag{1.17}$$

in Ω, so nimmt sie im Falle $c = 0$ das Maximum und das Minimum auf dem Rand von Ω an.

Eine Konsequenz des Maximumprinzips ist beispielsweise: Ist u eine Lösung von $Lu = 0$ in Ω und wissen wir, dass $u \geq 0$ auf $\partial\Omega$, so folgt auch $u \geq 0$ in Ω.

Im Falle $c \neq 0$ gilt das Maximumprinzip im allgemeinen nicht. Beispiel: $\Omega = (-1,1) \times (-1,1) \subset \mathbb{R}^2$,

$$u(x_1, x_2) = \sin(\pi x_1)\sin(\pi x_2) \tag{1.18}$$

erfüllt

$$-\Delta u - 2\pi^2 u = 0$$

in Ω, aber $u = 0$ auf $\partial\Omega$. Ist aber der Vorfaktor von u nichtnegativ, so ergibt sich das Maximumprinzip in einer etwas schwächeren Form. Wir schreiben

$$u^+ = \max\{u, 0\}\,. \tag{1.19}$$

Satz 1.4 *Es gelte Voraussetzung (1.1) sowie (1.6), (1.7). Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ mit*

$$Lu \leq 0 \quad \text{in } \Omega. \tag{1.20}$$

Es gelte außerdem $c \geq 0$. Dann gilt

$$\max_{y\in\overline{\Omega}} u(y) \leq \max_{y\in\partial\Omega} u^+(y)\,. \tag{1.21}$$

Gilt statt (1.20)

$$Lu = 0 \quad \text{in } \Omega, \tag{1.22}$$

so folgt

$$\max_{y\in\overline{\Omega}} |u(y)| = \max_{y\in\partial\Omega} |u(y)|\,. \tag{1.23}$$

Beweis: Wir definieren

$$\Omega^+ = \Omega \cap \{x : u(x) > 0\}\,.$$

Ist $u \leq 0$ in Ω, so gilt (1.21) offensichtlich, sei also $\Omega^+ \neq \emptyset$. Es gilt

$$Lu - c(x)u \leq Lu \leq 0 \quad \text{in } \Omega^+.$$

Wir wenden Satz 1.3 an auf $L - c$ und erhalten

$$\max_{y\in\overline{\Omega^+}} u(y) = \max_{y\in\partial\Omega^+} u(y)\,. \tag{1.24}$$

Da $u = 0$ auf $\partial\Omega^+ \cap \Omega$, folgt

$$\max_{y \in \partial\Omega^+} u(y) = \max_{y \in \partial\Omega \cap \partial\Omega^+} u(y) \le \max_{y \in \partial\Omega} u(y) \,.$$

Gilt (1.22), so folgt durch Anwendung auf $-u$ mit $u^- = (-u)^+ = -\min\{u, 0\}$

$$\min_{y \in \overline{\Omega}} u(y) \ge -\max_{y \in \partial\Omega} u^-(y) \,, \tag{1.25}$$

und daraus (1.23). □

Satz 1.4 besagt: Hat u ein nichtnegatives Maximum, so wird dieses auch auf dem Rand angenommen. Ist das Maximum negativ, so muss das nicht der Fall sein. Beispiel: $\Omega = (-2, 2) \times (-2, 2)$,

$$u(x_1, x_2) = -\left(e^{x_1} + e^{-x_1} + e^{x_2} + e^{-x_2}\right) \,. \tag{1.26}$$

Das Maximum liegt in $(0, 0)$, $u(0, 0) = -4$, aber auf $\partial\Omega$ gilt $u \le -e^2$.

Wir betrachten das Randwertproblem

$$Lu = f \,, \quad \text{in } \Omega, \tag{1.27}$$

$$u = g \,, \quad \text{auf } \partial\Omega, \tag{1.28}$$

wobei wir f und g als stetig voraussetzen.

Folgerung 1.5 *Es gelte Voraussetzung (1.1) sowie (1.6), (1.7), sei $c \ge 0$. Seien $u_i \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ Lösungen von (1.27), (1.28) mit $f = f_i$, $g = g_i$, $i = 1, 2$. Gilt*

$$f_1 \le f_2 \quad \text{in } \Omega, \quad g_1 \le g_2 \quad \text{in } \partial\Omega, \tag{1.29}$$

so folgt

$$u_1 \le u_2 \quad \text{in } \Omega. \tag{1.30}$$

Beweis: Wir wenden Folgerung 1.4 an auf $u = u_1 - u_2$. □

Hieraus folgt insbesondere die Eindeutigkeit der klassischen Lösung des Randwertproblems (1.27), (1.28) für einen gleichmäßig elliptischen Operator L in einer beliebigen offenen und beschränkten Menge Ω.

Wir behandeln nun das starke Maximumprinzip. Wesentliches Hilfsmittel zu dessen Beweis ist das Lemma von Hopf, welches sich mit der folgenden Situation befasst. Sei x_0 eine strikte Maximalstelle am Rand,

$$x_0 \in \partial\Omega \,, \quad u(x_0) > u(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega, \tag{1.31}$$

der Rand sei nahe x_0 in folgendem Sinne regulär,

$$\text{es gibt ein } R > 0 \text{ und ein } y \in \Omega \text{ mit } B(y; R) \subset \Omega,\ x_0 \in \partial B(y; R). \tag{1.32}$$

Die äußere Normale in x_0 ist dann gegeben (bzw. definiert) durch

$$\nu(x_0) = \frac{x_0 - y}{|x_0 - y|} \,. \tag{1.33}$$

Ist $u \in C^1(\overline{\Omega})$, so folgt aus (1.31) unmittelbar, dass

$$\partial_\nu u(x_0) \ge 0 \,.$$

Das Lemma von Hopf besagt nun, dass hier sogar die strikte Ungleichung gelten muss.

Lemma 1.6 (Hopf)
Seien Voraussetzung 1.1 und (1.6) erfüllt, es gelte (1.7) mit $\xi = \nu(x_0)$ sowie (1.32). Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ mit (1.31) und

$$Lu \leq 0 \quad \text{in } \Omega. \tag{1.34}$$

Es liege einer der folgenden drei Fälle vor:

1. $c = 0$,
2. $c \geq 0$, $u(x_0) \geq 0$,
3. $u(x_0) = 0$.

Dann gilt

$$\partial_\nu u(x_0) > 0\,. \tag{1.35}$$

Beweis: Wir definieren

$$v(x) = e^{-\gamma|x-y|^2} - e^{-\gamma R^2}\,. \tag{1.36}$$

Es ist

$$v \geq 0 \quad \text{in } B(y;R), \quad v = 0 \quad \text{auf } \partial B(y;R), \tag{1.37}$$

$$\partial_i v(x) = -2\gamma(x_i - y_i)e^{-\gamma|x-y|^2}\,. \tag{1.38}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}(Lv)(x) &= -\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\left[4\gamma^2(x_i-y_i)(x_j-y_j) - 2\gamma\delta_{ij}\right]e^{-\gamma|x-y|^2} \\ &\quad + \sum_{i=1}^n b_i(x)(-2)\gamma(x_i-y_i)e^{-\gamma|x-y|^2} + c(x)v(x) \\ &= -e^{-\gamma|x-y|^2}\left[4\gamma^2(x-y)^T A(x)(x-y) - 2\gamma\,\mathrm{spur}\,(A(x)) + 2\gamma\,\langle b(x), x-y\rangle\right] \\ &\quad - c(x)e^{-\gamma R^2}\,.\end{aligned}$$

Wir betrachten nun eine Kugel $B(x_0;\rho)$ um x_0 und wählen $\rho > 0$ so klein, dass

$$(x-y)^T A(x)(x-y) > 0\,, \quad \text{für alle } x \in K(x_0;\rho), \tag{1.39}$$

das ist möglich wegen (1.33), da $\nu(x_0)^T A(x)\nu(x_0) > 0$. Wir definieren

$$U = B(x_0;\rho) \cap B(y;R) \tag{1.40}$$

und wählen $\gamma > 0$ so groß, dass

$$Lv \leq 0 \quad \text{in } U. \tag{1.41}$$

Wir setzen

$$u_\varepsilon(x) = u(x) - u(x_0) + \varepsilon v(x)\,, \quad \varepsilon > 0\,. \tag{1.42}$$

Es gilt dann für alle $x \in U$

$$(Lu_\varepsilon)(x) = (Lu)(x) - c(x)u(x_0) + \varepsilon(Lv)(x) \leq -c(x)u(x_0) \leq 0\,. \tag{1.43}$$

Es gilt weiter

$$u_\varepsilon \le 0 \quad \text{auf } \partial U \cap \partial B(y;R), \text{ da dort } v = 0. \tag{1.44}$$

Wir wählen $\varepsilon > 0$ so klein, dass

$$u_\varepsilon \le 0 \quad \text{auf } \partial U \cap \partial B(x_0;\rho), \tag{1.45}$$

das ist möglich, da $\partial U \cap \partial B(x_0;\rho)$ kompakt ist und dort $u < u(x_0)$ gilt.

Sei nun $c \ge 0$ (Fälle 1 und 2 der Behauptung). Wir wenden das schwache Maximumprinzip (Satz 1.4) auf u_ε in U an und erhalten

$$u_\varepsilon \le 0 \quad \text{in } U. \tag{1.46}$$

Da $u_\varepsilon(x_0) = 0$, folgt

$$0 \le \partial_\nu u_\varepsilon(x_0) = \partial_\nu u(x_0) + \varepsilon \partial_\nu v(x_0)\,.$$

Nun ist

$$\partial_\nu v(x_0) = -2\gamma \langle x_0 - y, \nu(x_0)\rangle \, e^{-\gamma |x_0-y|^2} = -2\gamma R e^{-\gamma R^2} < 0\,,$$

also

$$\partial_\nu u(x_0) \ge -\varepsilon \partial_\nu v(x_0) > 0\,.$$

Schließlich betrachten wir den Fall $u(x_0) = 0$. Es ist dann $u < 0$ in Ω. Wir setzen $d(x) = \min\{c(x), 0\}$, dann ist $d(x) \le 0$,

$$(L-d)u = Lu - d(x)u \le Lu \le 0\,,$$

sowie $c - d = c^+ \ge 0$,

$$(L-d)u = -\mathrm{spur}\,(AD^2u) + \langle b, \nabla u\rangle + c^+ u\,.$$

Wir können also den bereits bewiesenen Fall anwenden und erhalten die Behauptung. □

Satz 1.7 *Sei Voraussetzung 1.1 erfüllt, sei L gleichmäßig elliptisch, sei Ω außerdem zusammenhängend. Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, es gelte*

$$Lu \le 0 \quad \textit{in } \Omega. \tag{1.47}$$

Sei u nicht konstant. Ist $c = 0$, so kann u kein Maximum in Ω haben. Ist $c \ge 0$, so kann u kein nichtnegatives Maximum in Ω haben.

Beweis: Wir nehmen an, es gebe ein $x \in \Omega$ mit

$$u(x) = \max_{y \in \Omega} u(y) =: M\,. \tag{1.48}$$

Da u nicht konstant ist, ist

$$\Omega^- = \Omega \cap \{u < M\} \ne \emptyset\,.$$

Wir setzen

$$\Omega^M = \Omega \cap \{u = M\} = \Omega \setminus \Omega^-\,.$$

Ω^- ist offen. Ω^M ist nicht offen in Ω, da andernfalls Ω disjunkte Vereinigung zweier offener Mengen und also nicht zusammenhängend wäre. Sei $\tilde{x} \in \Omega^M \cap \partial\Omega^-$, dann gibt es (in der Nähe von $\tilde{x}$) ein $y \in \Omega^-$ mit

$$\mathrm{dist}\,(y, \Omega^M) < \mathrm{dist}\,(y, \partial\Omega)\,.$$

Sei $r > 0$ die größte Zahl mit $B(y,r) \subset \Omega^-$, dann gibt es ein $x_0 \in \partial B(y,r)$ mit $u(x_0) = M$ und also auch $\nabla u(x_0) = 0$. Aus dem Lemma von Hopf, angewandt in $B(y,r)$, folgt aber $\nabla u(x_0) \neq 0$, ein Widerspruch. □

Folgerung 1.8 (Starkes Maximumprinzip, elliptischer Operator)
Unter den Voraussetzungen von Satz 1.7 gilt

$$u(x) < \max_{y \in \partial\Omega} u(y)\,, \quad \textit{für alle } x \in \Omega, \tag{1.49}$$

falls $c = 0$ gilt, oder falls $c \geq 0$ gilt und das Maximum auf der rechten Seite von (1.49) nichtnegativ ist.

Beweis: Folgt aus dem schwachen Maximumprinzip (Satz 1.3) und aus Satz 1.7. □

Wir bemerken, dass Satz 1.7 auch gilt, wenn Ω unbeschränkt ist (die Beschränktheit wurde im Beweis nicht verwendet). Allerdings gilt dann i.a. das schwache Maximumprinzip nicht, so dass eine Abschätzung der Werte von u in Ω gegen die Randwerte nicht möglich ist.

Wir betrachten nun einen Operator der Form

$$\partial_t + L\,,$$

angewendet auf Funktionen "$u = u(x,t)$", mit

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\partial_j\partial_i u + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)\partial_i u + c(x,t)u\,, \tag{1.50}$$

Voraussetzung 1.9 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, sei $T > 0$. Wir setzen*

$$\Omega_T = \Omega \times (0, T]\,, \tag{1.51}$$

und nennen

$$\Sigma = (\partial\Omega \times [0,T]) \cup (\Omega \times \{0\}) \tag{1.52}$$

den parabolischen Rand von Ω_T. Wir nehmen an, dass $a_{ij}, b_i, c \in C(\overline{\Omega_T})$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. □

Definition 1.10 (Gleichmäßig parabolischer Operator)
Der Operator $\partial_t + L$ mit L aus (1.50) heißt gleichmäßig parabolisch in Ω_T, wenn es ein $a_* > 0$ gibt mit

$$\xi^T A(x,t)\xi = \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i a_{ij}(x,t)\xi_j \geq a_*|\xi|^2\,, \quad \textit{für alle } \xi \in \mathbb{R}^n,\ (x,t) \in \Omega_T. \tag{1.53}$$

□

Satz 1.11 (Schwaches Maximumprinzip, parabolischer Operator)
Es gelte Voraussetzung 1.9, sei $\partial_t + L$ gleichmäßig parabolisch in Ω_T. Sei $u \in C^2(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega_T})$, sei

$$\partial_t u + Lu \le 0 \quad \text{in } \Omega_T. \tag{1.54}$$

Im Fall $c = 0$ gilt dann

$$\max_{(x,t)\in\overline{\Omega_T}} u(x,t) = \max_{(x,t)\in\Sigma} u(x,t)\,, \tag{1.55}$$

im Fall $c \ge 0$ gilt

$$\max_{(x,t)\in\overline{\Omega_T}} u(x,t) \le \max_{(x,t)\in\Sigma} u^+(x,t)\,. \tag{1.56}$$

Beweis: Sei

$$M = \max_{(x,t)\in\overline{\Omega_T}} u(x,t)\,.$$

Wir wenden das schwache Maximumprinzip 1.3 bzw. 1.4 auf $\partial_t + L$ in $\Omega \times (0,T)$ an und erhalten

$$M = \max_{(x,t)\in\partial\Omega_T} u(x,t) \quad \text{bzw.} \quad M \le \max_{(x,t)\in\partial\Omega_T} u^+(x,t)\,. \tag{1.57}$$

Wir nehmen nun an, es gebe ein $x \in \Omega$ mit

$$u(x,T) = M\,. \tag{1.58}$$

Dann gilt

$$\partial_t u(x,T) \ge 0\,, \quad \nabla_x u(x,T) = 0\,, \quad D_x^2 u(x,T) \le 0\,,$$

sowie nach Lemma 1.2

$$-\mathrm{spur}\,(A(x,T)D_x^2 u(x,T)) \ge 0\,.$$

Insgesamt ergibt sich, falls $c = 0$, oder falls $c \ge 0$ und $M \ge 0$,

$$\partial_t u(x,T) + Lu(x,T) \ge 0\,. \tag{1.59}$$

Im Spezialfall

$$\partial_t u + Lu < 0 \quad \text{in } \Omega_T, \tag{1.60}$$

von (1.54) kann es also ein $x \in \Omega$ mit $u(x,T) = M$ nicht geben, und es folgen (1.55) bzw. (1.56). Den allgemeinen Fall führen wir auf (1.60) zurück, indem wir setzen

$$u_\varepsilon(x,t) = u(x,t) - \varepsilon t\,, \quad \varepsilon > 0\,.$$

Es gilt

$$((\partial_t + L)u_\varepsilon)(x,t) \le -\varepsilon - \varepsilon t c(x,t) < 0 \quad \text{in } \Omega_t,$$

also folgen (1.55) bzw. (1.56) für u_ε statt u, und für u durch Grenzübergang $\varepsilon \to 0$. □

Satz 1.12 (Starkes Maximumprinzip, parabolischer Operator)
Es gelte Voraussetzung 1.9, sei Ω zusammenhängend, sei $\partial_t + L$ gleichmäßig parabolisch in Ω_T. Sei $u \in C^2(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega_T})$, sei

$$\partial_t u + Lu \le 0 \quad \text{in } \Omega_T. \tag{1.61}$$

Es gebe ein $(x_0,t_0) \in \Omega_T$ mit

$$u(x_0,t_0) = \max_{(x,t)\in\Omega_T} u(x,t) =: M\,. \tag{1.62}$$

Es liege einer der folgenden drei Fälle vor:

1. $c = 0$,

2. $c \geq 0$, $u(x_0, t_0) \geq 0$,

3. $u(x_0, t_0) = 0$.

Dann ist u konstant in $\overline{\Omega_T}$.

Wir zerlegen den Beweis in mehrere Lemmata.

Lemma 1.13 *Es gelten die Voraussetzungen von Satz 1.12. Sei $B_0 = B((x,t);r)$ eine offene Kugel in Ω_T, es gelte $u < M$ in B_0. Dann gilt auch $u < M$ auf ∂B_0 außer möglicherweise in $(x, t+r)$ und $(x, t-r)$.*

Beweis: In allen anderen Randpunkten (ξ, τ) von B_0 hat die äußere Normale die Form

$$\nu(\xi, \tau) = (\nu_x, \nu_t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}\,, \quad \nu_x \neq 0\,.$$

Wir nehmen an, dass $u(\xi, \tau) = M$. Wir wenden das Lemma von Hopf (Lemma 1.6) auf den Operator $\partial_t + L$ in B_0 an. Da L gleichmäßig elliptisch ist, sind in (ξ, τ) die Voraussetzungen von 1.6 erfüllt, also $\partial_\nu u(\xi, \tau) \neq 0$ im Widerspruch zur Maximaleigenschaft von (ξ, τ). □

Lemma 1.14 *Es gelten die Voraussetzungen von Satz 1.12. Sei $t \in (0, T)$, es gebe ein $\tilde{x} \in \Omega$ mit $u(\tilde{x}, t) < M$. Dann gilt $u(x, t) < M$ für alle $x \in \Omega$.*

Beweis: Wir nehmen an $u(x_1, t) = M$ für ein $x_1 \in \Omega$. Wir können x_1 und einen weiteren Punkt $x_2 \in \Omega$ mit $u(x_2, t) < M$ so wählen, dass $u(x, t) < M$ für alle Punkte x (bis auf x_1) auf der Verbindungsstrecke L von x_1 nach x_2 gilt, und dass $B(L; \delta) \subset \Omega$ für ein $\delta > 0$. Sei

$$x(\varepsilon) = x_1 + \varepsilon(x_2 - x_1)\,, \quad d(\varepsilon) = \operatorname{dist}\left(x(\varepsilon), \{u = M\}\right).$$

Für $\varepsilon < \delta$ wählen wir $r(\varepsilon)$ so, dass $u < M$ in $B_\varepsilon = B((x(\varepsilon), t); r(\varepsilon))$ und u auf ∂B_ε den Wert M annimmt. Nach Lemma 1.13 kann der Wert M nur in den Punkten $(x(\varepsilon), t \pm d(\varepsilon))$ angenommen werden. Für $0 < \varepsilon, \varepsilon' < \delta$ folgt dann (Pythagoras)

$$\begin{aligned} d(\varepsilon')^2 &\leq (\varepsilon - \varepsilon')^2 + d(\varepsilon)^2 \\ d(\varepsilon)^2 &\leq (\varepsilon - \varepsilon')^2 + d(\varepsilon')^2\,. \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$|d(\varepsilon')^2 - d(\varepsilon)^2| \leq (\varepsilon' - \varepsilon)^2\,,$$

also

$$\frac{|d(\varepsilon') - d(\varepsilon)|}{\varepsilon' - \varepsilon} \leq \frac{(\varepsilon' - \varepsilon)}{d(\varepsilon') + d(\varepsilon)}\,.$$

Grenzübergang $\varepsilon' \to \varepsilon$ liefert $d'(\varepsilon) = 0$ für alle $\varepsilon \in (0, \delta)$, aber andererseits gilt $d > 0$ und $d(\varepsilon) \to 0$ für $\varepsilon \to 0$, ein Widerspruch. □

Lemma 1.15 *Es gelten die Voraussetzungen von Satz 1.12. Sei $0 \leq t_0 < t_1 \leq T$, es gelte $u < M$ in $\Omega \times (t_0, t_1)$. Dann gilt $u < M$ in $\Omega \times \{t_1\}$.*

Beweis: Wir nehmen an, $u(x_1, t_1) = M$ für ein $x_1 \in \Omega$. Wir definieren

$$v(x,t) = e^{-|x-x_1|^2 - \alpha(t-t_1)} - 1\,. \tag{1.63}$$

Es gilt

$$(\partial_t + L)(v) = e^{-|x-x_1|^2-\alpha(t-t_1)}[-\alpha + 4(x-x_1)^T A(x)(x-x_1) \tag{1.64}$$
$$- 2\text{spur}\,(A(x)) - 2\,\langle b(x), x - x_1\rangle + c(x)] - c(x)\,. \tag{1.65}$$

Wir wählen $\alpha > 0$ so groß, dass

$$(\partial_t + L)v < 0 \quad \text{in } V = B((x_1, t_1); \rho) \cap \{t \le t_1\} \tag{1.66}$$

für hinreichend kleines $\rho > 0$. Wir betrachten das Paraboloid

$$P = \{(x,t) : |x - x_1|^2 \le \alpha(t_1 - t)\}\,. \tag{1.67}$$

Wir definieren

$$u_\varepsilon(x,t) = u(x,t) - M + \varepsilon v(x,t) \tag{1.68}$$

und

$$U = V \cap P\,.$$

Für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ gilt $u_\varepsilon \le 0$ auf ∂U, da $v = 0$ auf ∂P und $u < M$ auf $\partial U \setminus \partial P$. Im Falle $c \ge 0$ (Fälle 1 und 2 der Behauptung) folgt aus dem schwachen Maximumprinzip (Satz 1.4), dass

$$u_\varepsilon \le 0 \quad \text{in } U, \tag{1.69}$$

und weiter, da $u_\varepsilon(x_1, t_1) = 0$,

$$0 \le \partial_t u_\varepsilon(x_1,t_1) = \partial_t u(x_1,t_1) + \varepsilon \partial_t v(x_1,t_1) = \partial_t u(x_1,t_1) - \varepsilon\alpha\,, \tag{1.70}$$

also

$$0 < \partial_t u(x_1, t_1)\,. \tag{1.71}$$

Andererseits gilt im Punkt (x_1, t_1) auch

$$0 \ge (\partial_t + L)u = \partial_t u - \text{spur}\,(AD^2u) + \langle b, \nabla u\rangle + cu \ge \partial_t u + cu \ge \partial_t u\,,$$

ein Widerspruch zu (1.71). Der Fall 3 wird auf diesen Fall zurückgeführt, und zwar auf analoge Weise wie im Beweis von Lemma 1.6. □

Beweis von Satz 1.12. Wegen Lemma 1.14 gilt für jedes $t > 0$ entweder

$$u(x,t) < M\,, \quad \text{für alle } x \in \Omega,$$

oder

$$u(x,t) = M\,, \quad \text{für alle } x \in \Omega.$$

Die Menge

$$I = \{t : t \in (0,T),\, u(x,t) < M\}$$

ist offen, sie läßt sich daher darstellen als disjunkte Vereinigung von abzählbar vielen offenen Intervallen $I_k = (a_k, b_k)$. Da nach Lemma 1.15 der Fall $b_k < T$ (mit $u(x, b_k) = M$)

nicht auftreten kann, muss $I = (0, T)$ gelten, und wegen Lemma 1.15 folgt auch $u(x, T) < M$. □

Aus dem Maximumprinzip folgt die Eindeutigkeit einer klassischen Lösung der parabolischen Anfangsrandwertaufgabe

$$\partial_t u + Lu = f \quad \text{in } \Omega_T, \tag{1.72}$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{für } x \in \Omega, \tag{1.73}$$

$$u(x, t) = g(x, t) \quad \text{für } x \in \partial\Omega,\ t \in (0, T), \tag{1.74}$$

indem man das Maximumprinzip auf die Differenzen $u_1 - u_2$ und $u_2 - u_1$ zweier Lösungen von (1.72) – (1.74) anwendet.

2 Das Bochner-Integral

Unter $[a,b]$ wird im folgenden immer ein kompaktes Intervall im $\mathbb{R}$ verstanden. Ist $A \subset [a,b]$, so bezeichnet χ_A die durch

$$\chi_A(t) = \begin{cases} 1\,, & t \in A\,, \\ 0\,, & t \notin A\,, \end{cases} \tag{2.1}$$

definierte charakteristische Funktion von A.

Definition 2.1 (Einfache Funktion) *Sei X Banachraum. Eine Funktion $u : [a,b] \to X$ heißt einfach, wenn sie die Form*

$$u(t) = \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i}(t) x_i \tag{2.2}$$

hat, wobei $n \in \mathbb{N}$, $A_i \subset [a,b]$ meßbar und $x_i \in X$ für $1 \le i \le n$.

Lemma 2.2 *Sei X Banachraum, $u : [a,b] \to X$ einfach. Dann gibt es genau eine Darstellung der Form (2.2) mit*

$$\bigcup_i A_i = [a,b]\,, \quad A_i \cap A_j = \emptyset \text{ und } x_i \neq x_j \text{ für } i \neq j\,. \tag{2.3}$$

Diese Darstellung heißt kanonische Darstellung.

Beweis: Übung. □

Definition 2.3 (Bochner-Meßbarkeit)
Sei X Banachraum. Eine Funktion $u : [a,b] \to X$ heißt Bochner-meßbar, falls es eine Folge von einfachen Funktionen $u_n : [a,b] \to X$ gibt mit

$$\lim_{n\to\infty} u_n(t) = u(t) \tag{2.4}$$

für fast alle $t \in [a,b]$.

Definition 2.4 *Sei X Banachraum, $u : [a,b] \to X$ einfache Funktion mit der Darstellung*

$$u(t) = \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i}(t) x_i\,. \tag{2.5}$$

Wir definieren das Bochner-Integral von u als

$$\int_a^b u(t)\,dt = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{meas}(A_i) x_i\,. \tag{2.6}$$

Ist $A \subset [a,b]$ meßbar, so definieren wir

$$\int_A u(t)\,dt = \int_a^b \chi_A(t) u(t)\,dt\,. \tag{2.7}$$

Die Definition 2.4 ist sinnvoll, da der Wert der rechten Seite von (2.6) nicht von der gewählten Darstellung abhängt. Direkt aus der Definition folgt, daß für einfache Funktionen $u, v : [a, b] \to X$ und Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_a^b \alpha u(t) + \beta v(t)\, dt = \alpha \int_a^b u(t)\, dt + \beta \int_a^b v(t)\, dt\,, \tag{2.8}$$

sowie

$$\left\| \int_a^b u(t)\, dt \right\| \le \int_a^b \|u(t)\|\, dt\,. \tag{2.9}$$

Lemma 2.5 *Sei X Banachraum, $u_n : [a, b] \to X$ eine Folge von einfachen Funktionen mit $u_n \to u$ fast überall. Dann ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ die durch*

$$f(t) = \|u_n(t) - u(t)\| \tag{2.10}$$

definierte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ (Lebesgue-)meßbar.

Beweis: Es ist

$$f(t) = \lim_{m\to\infty} f_m(t)\,, \quad f_m(t) := \|u_n(t) - u_m(t)\|\,, \tag{2.11}$$

und f_m ist eine einfache Funktion für alle $m \in \mathbb{N}$. □

Sei nun $u_n : [a, b] \to X$ eine Folge von einfachen Funktionen mit $u_n \to u$ punktweise fast überall und

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \|u_n(t) - u(t)\|\, dt = 0\,. \tag{2.12}$$

(Nach Lemma 2.5 ist der Integrand meßbar.) Wegen

$$\begin{aligned} \left\| \int_a^b u_n(t)\, dt - \int_a^b u_m(t)\, dt \right\| &\le \int_a^b \|u_n(t) - u_m(t)\|\, dt \\ &\le \int_a^b \|u_n(t) - u(t)\|\, dt + \int_a^b \|u_m(t) - u(t)\|\, dt \end{aligned} \tag{2.13}$$

ist

$$y_n = \int_a^b u_n(t)\, dt \tag{2.14}$$

eine Cauchyfolge in X. Ist $v_n : [a, b] \to X$ eine weitere Folge mit denselben Eigenschaften wie u_n, so gilt

$$\begin{aligned} \left\| \int_a^b v_n(t)\, dt - \int_a^b u_n(t)\, dt \right\| &\le \int_a^b \|v_n(t) - u_n(t)\|\, dt \\ &\le \int_a^b \|v_n(t) - u(t)\|\, dt + \int_a^b \|u_n(t) - u(t)\|\, dt\,, \end{aligned} \tag{2.15}$$

also hängt der Grenzwert von (y_n) nicht von der speziellen Wahl der Folge (u_n) ab.

Definition 2.6 (Bochner-Integral) *Sei $u : [a,b] \to X$. Falls es eine Folge von einfachen Funktionen $u_n : [a,b] \to X$ gibt mit $u_n \to u$ punktweise fast überall und*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \|u_n(t) - u(t)\| \, dt = 0 \,, \tag{2.16}$$

so heißt u Bochner-integrierbar, und wir definieren das Bochner-Integral von u als

$$\int_a^b u(t) \, dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b u_n(t) \, dt \,. \tag{2.17}$$

Lemma 2.7 *Sei X Banachraum, seien $u, v : [a,b] \to X$ Bochner-integrierbar und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann ist auch $\alpha u + \beta v$ Bochner-integrierbar, und es gilt*

$$\int_a^b \alpha u(t) + \beta v(t) \, dt = \alpha \int_a^b u(t) \, dt + \beta \int_a^b v(t) \, dt \,. \tag{2.18}$$

Beweis: Direkt aus den Definitionen. □

Satz 2.8 *Sei X Banachraum. Ein $u : [a,b] \to X$ ist Bochner-integrierbar genau dann, wenn u Bochner-meßbar und die Funktion $t \mapsto \|u(t)\|$ integrierbar ist. Es gilt außerdem*

$$\left\| \int_a^b u(t) \, dt \right\| \le \int_a^b \|u(t)\| \, dt \,. \tag{2.19}$$

Beweis: "$\Rightarrow$": Sei (u_n) Folge einfacher Funktionen mit $u_n \to u$ punktweise fast überall und

$$\int_a^b \|u(t) - u_n(t)\| \, dt = 0 \,. \tag{2.20}$$

Da $\|u_n(t)\| \to \|u(t)\|$ für fast alle $t \in [a,b]$ gilt, ist die Funktion $t \mapsto \|u(t)\|$ meßbar. Es gilt dann

$$\int_a^b \|u(t)\| \, dt \le \int_a^b \|u(t) - u_n(t)\| \, dt + \int_a^b \|u_n(t)\| \, dt < \infty \,. \tag{2.21}$$

"$\Leftarrow$": Sei (u_n) Folge einfacher Funktionen mit $u_n \to u$ punktweise fast überall. Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ definieren wir $v_n : [a,b] \to X$ durch

$$v_n(t) = \begin{cases} u_n(t) \,, & \text{falls } \|u_n(t)\| \le (1+\varepsilon)\|u(t)\| \,, \\ 0 \,, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{2.22}$$

v_n ist eine einfache Funktion, da $\{t : \|u_n(t)\| \le (1+\varepsilon)\|u(t)\|\}$ meßbar ist. Für

$$f_n(t) = \|v_n(t) - u(t)\| \tag{2.23}$$

gilt $f_n \to 0$ punktweise fast überall und

$$0 \le f_n(t) \le (1+\varepsilon)\|u(t)\| \,. \tag{2.24}$$

Aus dem Satz von Lebesgue folgt

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \|v_n(t) - u(t)\| \, dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t) \, dt = 0 \,, \tag{2.25}$$

also ist u Bochner-integrierbar. Mit (2.9) folgt

$$\left\| \int_a^b v_n(t) \, dt \right\| \le \int_a^b \|v_n(t)\| \, dt \le (1+\varepsilon) \int_a^b \|u(t)\| \, dt \tag{2.26}$$

und damit auch

$$\left\| \int_a^b u(t) \, dt \right\| = \left\| \lim_{n\to\infty} \int_a^b v_n(t) \, dt \right\| \le (1+\varepsilon) \int_a^b \|u(t)\| \, dt \,. \tag{2.27}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt (2.19). □

In Analogie zum Fall $X = \mathbb{R}$ betrachten wir nun Funktionen $u : [a,b] \to X$, für die gilt

$$\int_a^b \|u(t)\|^p \, dt < \infty \,. \tag{2.28}$$

Definition 2.9 *Sei X Banachraum, $1 \le p < \infty$. Wir definieren*

$$L^p(a,b;X) = \{[u] \mid u : [a,b] \to X \text{ ist Bochner-meßbar und (2.28) gilt}\} \,, \tag{2.29}$$

wobei $[u]$ die Äquivalenzklasse von u unter der Äquivalenzrelation

$$u \sim v \quad \Leftrightarrow \quad u = v \text{ fast überall} \tag{2.30}$$

bezeichnet.

Nach Satz 2.8 ist $L^1(a,b;X)$ gerade der Vektorraum aller Bochner-integrierbaren Funktionen.

Satz 2.10 *Sei X Banachraum, $1 \le p < \infty$. Dann ist $L^p(a,b;X)$ ein Banachraum mit der Norm*

$$\|u\|_{L^p(a,b;X)} = \left(\int_a^b \|u(t)\|_X^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \,. \tag{2.31}$$

Ist X Hilbertraum, so ist $L^2(a,b;X)$ ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle = \int_a^b \langle u(t), v(t) \rangle_X \, dt \,. \tag{2.32}$$

Beweis: Weggelassen. Geht genauso wie im Fall $X = \mathbb{R}$. Zum Beweis der Bochner-Meßbarkeit der als Limes einer Cauchyfolge konstruierten Grenzfunktion wird zusätzlich der Satz von Pettis benötigt. □

Definition 2.11 *Für $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ definieren wir*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[a,b]} u(t) = \inf\{M : M \in \mathbb{R},\ u(t) \le M \text{ für fast alle } t \in [a,b]\} \,. \tag{2.33}$$

Wir betrachten nun banachraumwertige Funktionen $u : [a, b] \to X$, für die gilt

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[a,b]} \|u(t)\|_X < \infty \,. \tag{2.34}$$

Definition 2.12 *Sei X Banachraum. Wir definieren*

$$L^\infty(a, b; X) = \{[u] \,|\, u : [a, b] \to X \text{ ist Bochner-meßbar und (2.34) gilt}\} \,. \tag{2.35}$$

Lemma 2.13 *Sei X Banachraum. Dann gilt für alle $p \in [1, \infty)$*

$$L^\infty(a, b; X) \subset L^p(a, b; X) \tag{2.36}$$

Beweis: Für $u \in L^\infty(a, b; X)$ gilt

$$\|u\|^p_{L^p(a,b;X)} = \int_a^b \|u(t)\|^p \, dx \le (b - a)\|u\|^p_{L^\infty(a,b;X)} \,. \tag{2.37}$$

□

Satz 2.14 *Sei X Banachraum. Dann ist $L^\infty(a, b; X)$ ein Banachraum.*

Beweis: Verläuft ebenfalls wie im Fall $X = \mathbb{R}$. □

Definition 2.15 *Sei X Banachraum. Wir definieren*

$$C([a, b]; X) = \{u \,|\, u : [a, b] \to X \text{ stetig}\} \,. \tag{2.38}$$

Definition 2.16 (Oszillation) *Sei X Banachraum, $u : [a, b] \to X$. Wir definieren die Oszillation von u durch*

$$\operatorname*{osc}_{[a,b]}(u; \delta) = \sup\{\|u(t) - u(s)\| : s, t \in [a, b], \, |t - s| \le \delta\} \,. \tag{2.39}$$

Lemma 2.17 *Sei X Banachraum, $u : [a, b] \to X$ stetig. Dann gilt*

$$\lim_{\delta\to 0} \operatorname*{osc}_{[a,b]}(u; \delta) = 0 \,. \tag{2.40}$$

Beweis: Die Aussage (2.40) ist gleichbedeutend mit der gleichmäßigen Stetigkeit von u. □

Für eine stetige Funktion $u : [a, b] \to X$ gilt

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[a,b]} \|u(t)\| = \max_{t\in[a,b]} \|u(t)\| \,, \tag{2.41}$$

da aus der Stetigkeit folgt, daß $\|u(t)\| \le \operatorname{ess\,sup}_{s\in[a,b]} \|u(s)\|$ gilt für alle t.

Satz 2.18 *Sei X Banachraum. Dann ist $C([a,b];X)$ ein Banachraum mit der Norm*

$$\|u\|_{C([a,b];X)} = \max_{t\in[a,b]} \|u(t)\| \,, \tag{2.42}$$

und $C([a,b];X)$ kann mit einem abgeschlossenen Teilraum von $L^\infty(a,b;X)$ identifiziert werden.

Beweis: Ist $u : [a,b] \to X$ stetig, so ist u auch Bochner-meßbar: Wir definieren eine Folge von einfachen Funktionen $u_n : [a,b] \to X$ durch $u_n(t) = u(ih)$, falls $t \in [ih,(i+1)h)$, $h = (b-a)/n$ ist. Dann gilt

$$\|u_n(t) - u(t)\| \le \operatorname*{osc}_{[a,b]}(u;h) \,, \quad h = \frac{b-a}{n} \,, \tag{2.43}$$

also $u_n \to u$ gleichmäßig (punktweise würde schon genügen). Weiter: Sei (u_n) Folge in C mit $[u_n] \to [u]$ in L^∞. Wir wählen eine Nullmenge N in $[a,b]$ mit $u_n \to u$ gleichmäßig in $M = [a,b] \setminus N$, dann ist u stetig auf M. Ist $t \in N$, so wählen wir eine Folge $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in M mit $t_k \to t$, dann ist

$$\|u_n(t) - u_m(t)\| \le \|u_n(t) - u_n(t_k)\| + \|u_n - u_m\|_{L^\infty(a,b;X)} + \|u_m(t_k) - u_m(t)\| \,,$$

also ist $(u_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge auch für $t \in N$. Definieren wir $u(t)$ als den Limes dieser Cauchyfolge, so wird u zu einer auf $[a,b]$ stetigen Funktion abgeändert. □

3 Lineare parabolische Gleichungen

Wir erläutern, wie eine parabolische Gleichung aus der allgemeinen Bilanzgleichung für eine zeitabhängige auf die Masse bezogene Dichte $\psi(x,t)$ einer Größe ψ entsteht (siehe Teil 1, Kapitel 5). Wir gehen aus von der differentiellen Form der Bilanzgleichung

$$\partial_t(\rho\psi) + \operatorname{div}(\rho\psi v + \Phi) = \rho z\,. \tag{3.1}$$

Hierbei ist ρ die Dichte der Masse, v die Geschwindigkeit, Φ der nichtkonvektive Fluß und z die Zufuhr. Ist ρ konstant, so wird (3.1) zu

$$\partial_t\psi + \frac{1}{\rho}\operatorname{div}\Phi + \langle v, \nabla\psi\rangle + (\operatorname{div} v)\psi = z\,. \tag{3.2}$$

Der lineare Ansatz

$$\frac{1}{\rho}\Phi = -A\nabla\psi\,, \quad A \text{ Matrix}, \tag{3.3}$$

beschreibt Diffusionsvorgänge, der isotrope Fall entspricht $A = \lambda I$, $\lambda > 0$. Insgesamt ergibt sich die sogenannte **Konvektions-Diffusions-Gleichung**

$$\partial_t\psi - \operatorname{div}(A\nabla\psi) + \langle v, \nabla\psi\rangle + (\operatorname{div} v)\psi = z\,. \tag{3.4}$$

Sind A, v und z gegebene Funktionen von x und t, so erhalten wir eine lineare parabolische Gleichung (wir schreiben wieder u für die unbekannte Funktion)

$$\partial_t u + Lu = f\,, \tag{3.5}$$

wobei L in Divergenzform gegeben ist durch

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^n \partial_j(a_{ij}(x,t)\partial_i u) + \sum_{i=1}^n b_i(x,t)\partial_i u + c(x,t)u\,. \tag{3.6}$$

Wir betrachten das zugehörige Anfangsrandwertproblem

$$\partial_t u + Lu = f \quad \text{in } \Omega_T = \Omega\times(0,T], \tag{3.7}$$
$$u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega\times(0,T), \tag{3.8}$$
$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{für } x\in\Omega. \tag{3.9}$$

Wir gehen über zu einer variationellen Formulierung hinsichtlich des Ortsparameters x. Sei $v \in C_0^\infty(\Omega)$ eine Testfunktion. Wir multiplizieren beide Seiten von (3.7) mit v, integrieren über Ω und führen partielle Integration im Divergenzterm durch. Es ergibt sich

$$\int_\Omega \partial_t u(x,t)v(x)\,dx + \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)\partial_i u(x,t)\partial_j v(x)\,dx \tag{3.10}$$
$$+ \int_\Omega \sum_{i=1}^n b_i(x,t)\partial_i u(x,t)v(x)\,dx + \int_\Omega c(x,t)u(x,t)v(x)\,dx \tag{3.11}$$
$$= \int_\Omega f(x,t)v(x)\,dx\,. \tag{3.12}$$

Voraussetzung 3.1 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, seien a_{ij}, b_i, c messbar und beschränkt für alle i, j, sei $\partial_t + L$ gleichmäßig parabolisch, seien $u_0 \in L^2(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega_T)$.* □

Wir wollen die unbekannte Funktion u auffassen als Funktion $u : [0, T] \to V$, wobei V ein geeigneter Banachraum von Funktionen auf Ω ist, also

$$u(t) : \Omega \to \mathbb{R}\,, \quad \text{für alle } t \in [0, T]. \tag{3.13}$$

Der Wert $(u(t))(x)$ entspricht dann $u(x, t)$ in (3.7). Wir formulieren das Anfangsrandwertproblem nunmehr als

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(u(t), v)_H + a(u(t), v; t) = \langle F(t), v\rangle_V\,, \quad \text{für alle } v \in V, \tag{3.14}$$

$$u(0) = u_0\,. \tag{3.15}$$

Hierbei ist

$$H = L^2(\Omega)\,, \quad (w, v)_H = \int_\Omega w(x)v(x)\,dx\,, \tag{3.16}$$

$$V = H_0^1(\Omega)\,, \quad F : [0, T] \to V^*\,, \tag{3.17}$$

$\langle F(t), v\rangle_V$ bedeutet die Anwendung von $F(t)$ auf v, und

$$a(w, v; t) = \int_\Omega (\nabla w(x))^T A(x, t)\nabla v(x)\,dx + \int_\Omega b(x, t)^T \nabla w(x)v(x)\,dx \tag{3.18}$$

$$+ \int_\Omega c(x, t)w(x)v(x)\,dx\,. \tag{3.19}$$

Da in (3.14)

$$v \mapsto a(u(t), v; t)$$

ein Element von V^* definiert, kann man zunächst auch nur dasselbe von

$$v \mapsto \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(u(t), v)_H$$

erwarten. Dem entspricht, dass für eine schwache Lösung

$$u(\cdot, t) \in H_0^1(\Omega)\,, \quad t \in (0, T)$$

die Zeitableitung $\partial_t u(\cdot, t)$ in (3.7) die Regularität von $(Lu)(\cdot, t)$ hat, das heißt, zweite distributionelle Ableitung einer Funktion in $H_0^1(\Omega)$ ist, also erste distributionelle Ableitung einer Funktion in $L^2(\Omega)$. Diesen Raum kann man wieder mit dem Dualraum $H^{-1}(\Omega)$ von $V = H_0^1(\Omega)$ identifizieren (siehe Übung). Es stellt sich heraus, dass der Begriff des **Evolutionstripels** den geeigneten abstrakten Rahmen für die vorliegende Situation liefert.

Ist $v^* \in V^*$ und $v \in V$, so verwenden wir wie oben die Notation

$$\langle v^*, v\rangle_V := v^*(v)\,. \tag{3.20}$$

Satz 3.2 *Sei H ein Hilbertraum und V ein reflexiver Banachraum über $\mathbb{R}$, sei $j : V \to H$ linear, stetig und injektiv, sei $j(V)$ dicht in H. Dann wird durch*

$$\langle j^*(h), v\rangle_V = (h, j(v))_H \tag{3.21}$$

eine lineare, stetige und injektive Abbildung $j^* : H \to V^*$ mit $\|j^*\| \le \|j\|$ definiert, und $j^*(H)$ ist dicht in V^*.

Beweis: Sei $h \in H$. Dann definiert die rechte Seite von (3.21) wegen

$$|(h, j(v))_H| \le \|h\|_H \, \|j(v)\|_H \le \|h\|_H \, \|j\| \, \|v\|_V \tag{3.22}$$

ein Element $j^*(h) \in V^*$ mit

$$\|j^*(h)\|_{V^*} \le \|j\| \, \|h\|_H \, . \tag{3.23}$$

j^* ist offensichtlich linear und wegen (3.23) auch stetig mit $\|j^*\| \le \|j\|$. Ist $j^*(h) = 0$, so ist

$$(h, j(v))_H = 0 \, , \qquad \text{für alle } v \in V \, . \tag{3.24}$$

Sei (v_n) Folge in V mit $j(v_n) \to h$ in H, dann folgt

$$(h, h)_H = (h, \lim_{n\to\infty} j(v_n))_H = \lim_{n\to\infty} (h, j(v_n))_H = 0 \, , \tag{3.25}$$

also ist $h = 0$ und damit j^* injektiv. Es bleibt zu zeigen, daß $j^*(H)$ dicht ist in V^*. Sei $v^{**} \in V^{**}$ beliebig mit $v^{**}(j^*(H)) = 0$. Es genügt zu zeigen, daß dann $v^{**} = 0$ sein muß. (Ist $W = \operatorname{cl}(j^*(H))$ echt in V^* enthalten, so gibt es nach dem Satz von Hahn-Banach ein $v^{**} \in V^{**}$ mit $v^{**}(W) = 0$, aber $v^{**} \ne 0$). Da V reflexiv ist, finden wir ein $v \in V$ mit

$$\langle v^*, v\rangle_V = v^{**}(v^*) \, , \qquad \text{für alle } v^* \in V^* \, . \tag{3.26}$$

Es gilt dann für alle $h \in H$

$$0 = v^{**}(j^*(h)) = \langle j^*(h), v\rangle_V = (h, j(v))_H \, , \tag{3.27}$$

also ist $j(v) = 0$ und wegen der Injektivität von j auch $v = 0$, also auch $v^{**} = 0$. □

Folgerung 3.3 *In der Situation von Satz 3.2 gilt außerdem: Die Abbildung $J : V \to V^*$, $J = j^* \circ j$, ist linear, stetig und injektiv, $J(V)$ ist dicht in V^*, und*

$$\langle Jv, w\rangle_V = \langle Jw, v\rangle_V \; , \qquad \textit{für alle } v, w \in V \, . \tag{3.28}$$

Beweis: Folgt unmittelbar aus Satz 3.2 und der Identität

$$\langle Jv, w\rangle_V = (j(v), j(w))_H = (j(w), j(v))_H = \langle Jw, v\rangle_V \; . \tag{3.29}$$

□

Es ergibt sich also

$$V \xrightarrow{j} H \xrightarrow{j^*} V^* \tag{3.30}$$

mit stetigen und dichten Einbettungen.

Definition 3.4 (Evolutionstripel, Gelfand-Dreier)
Unter den Voraussetzungen von Satz 3.2 heißt (3.30) ein Evolutionstripel oder ein Gelfand-Dreier.

In der vorliegenden Situation ist

$$V = H_0^1(\Omega)\,, \quad H = L^2(\Omega)\,, \tag{3.31}$$

und

$$j : H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega) \tag{3.32}$$

die durch $j(v)(x) = v(x)$ definierte kanonische Einbettung. Die Abbildung j^* läßt sich wie folgt interpretieren. Es ist

$$\langle j^*(h), v\rangle_V = (h, j(v))_H = \int_\Omega h(x)v(x)\,dx\,. \tag{3.33}$$

Ordnen wir dem Element $j^*(h) \in V^*$ vermittels des Rieszschen Satzes ein Element $w \in V$ zu, so gilt

$$\langle j^*(h), v\rangle_V = \int_\Omega \langle \nabla w(x), \nabla v(x)\rangle\, dx\,. \tag{3.34}$$

Aus (3.33) und (3.34) folgt, dass w gerade die schwache Lösung des elliptischen Randwertproblems

$$-\Delta w = h \quad \text{in } \Omega, \tag{3.35}$$

$$w = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \tag{3.36}$$

ist.

Die Einbettungen j, j^*, J eines Evolutionstripels induzieren vermittels

$$u \mapsto j \circ u \mapsto J \circ u = j^* \circ j \circ u \tag{3.37}$$

Einbettungen der zugehörigen L^p-Räume

$$L^p(0,T;V) \to L^p(0,T;H) \to L^p(0,T;V^*)\,. \tag{3.38}$$

Definition 3.5 (Schwache Zeitableitung)
Sei $u \in L^1(0,T;V)$. Ein $w \in L^1(0,T;V^*)$ heißt schwache Ableitung von u, wenn gilt

$$\int_0^T w(t)\varphi(t)\,dt = -\int_0^T J(u(t))\varphi'(t)\,dt\,, \tag{3.39}$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(0,T)$. □

Die Integrale in (3.39) sind Bochner-Integrale.

Wir wollen Gleichungen in V und V^* auf Gleichungen in $\mathbb{R}$ zurückspielen. Dazu brauchen wir die Rechenregeln

$$\left\langle v^*\,, \int_0^T u(t)\,dt \right\rangle_V = \int_0^T \langle v^*, u(t)\rangle_V\, dt\,, \quad v^* \in V^*\,,\, u \in L^1(0,T;V)\,, \tag{3.40}$$

und

$$\left\langle \int_0^T u(t)\,dt\,,\, v \right\rangle_V = \int_0^T \langle u(t), v\rangle_V\, dt\,, \quad v \in V\,,\, u \in L^1(0,T;V^*)\,. \tag{3.41}$$

Satz 3.6 *Sei V Banachraum. Ist $v^* \in V^*$ und $u \in L^1(0,T;V)$, so ist $t \mapsto \langle v^*, u(t)\rangle_V$ integrierbar, und (3.40) gilt. Ist $v \in V$ und $u \in L^1(0,T;V^*)$, so ist $t \mapsto \langle u(t), v\rangle_V$ integrierbar, und (3.41) gilt.*

Beweis: Wir betrachten (3.40). Ist

$$u = \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i} v_i \tag{3.42}$$

eine einfache Funktion mit Werten $v_i \in V$, so ist auch $t \mapsto \langle v^*, u(t)\rangle_V$ eine einfache Funktion, und es gilt

$$\begin{aligned} \left\langle v^*, \int_0^T u(t)\,dt \right\rangle_V &= \left\langle v^*, \sum_{i=1}^{n} \operatorname{meas}(A_i) v_i \right\rangle_V = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{meas}(A_i) \langle v^*, v_i\rangle_V \\ &= \int_0^T \langle v^*, u(t)\rangle_V \,dt, \quad v^* \in V^*. \end{aligned} \tag{3.43}$$

Sei nun $u \in L^1(0,T;V)$ beliebig. Für $v^* \in V^*$ ist $\langle v^*, u(t)\rangle_V = (v^* \circ u)(t)$, und $v^* \circ u$ ist meßbar, da v^* stetig und u Bochner-meßbar ist. Weiter gilt

$$\int_0^T |\langle v^*, u(t)\rangle_V|\,dt \le \int_0^T \|v^*\|_{V^*} \|u(t)\|_V \,dt \le \|v^*\|_{V^*} \|u\|_{L^1(0,T;V)}. \tag{3.44}$$

Analog gilt

$$\left| \left\langle v^*, \int_0^T u(t)\,dt \right\rangle_V \right| \le \|v^*\|_{V^*} \left\| \int_0^T u(t)\,dt \right\|_V \le \|v^*\|_{V^*} \|u\|_{L^1(0,T;V)}. \tag{3.45}$$

Die linke und die rechte Seite von (3.40) definieren also lineare stetige Funktionale auf $L^1(0,T;V)$, welche auf dem dichten Unterraum der einfachen Funktionen übereinstimmen und daher gleich sind. Der Beweis von (3.41) verläuft analog. $\square$

Die folgenden beiden Sätze beschäftigen sich mit der Charakterisierung und Eindeutigkeit der schwachen Ableitung.

Lemma 3.7 *Sei $V \xrightarrow{j} H \xrightarrow{j^*} V^*$ Evolutionstripel, $u \in L^2(0,T;V)$, $w \in L^2(0,T;V^*)$. Dann ist w genau dann schwache Ableitung von u, wenn gilt*

$$\int_0^T (j(u(t)), j(v))_H \varphi'(t)\,dt = -\int_0^T \langle w(t), v\rangle_V \varphi(t)\,dt, \quad \forall\, v \in V,\ \varphi \in C_0^\infty(0,T). \tag{3.46}$$

Beweis: Wegen (3.41) gilt für alle $v \in V$ und alle $\varphi \in C_0^\infty(0,T)$

$$\begin{aligned} \int_0^T (j(u(t)), j(v))_H \varphi'(t)\,dt &= \int_0^T \langle \varphi'(t) J(u(t)), v\rangle_V \,dt \\ &= \left\langle \int_0^T J(u(t))\varphi'(t)\,dt,\ v \right\rangle_V, \end{aligned} \tag{3.47}$$

$$-\int_0^T \langle w(t), v\rangle_V \,dt = \left\langle \int_0^T -w(t)\varphi(t)\,dt,\ v \right\rangle_V, \tag{3.48}$$

also ist (3.46) äquivalent zu

$$\int_0^T J(u(t))\varphi'(t)\,dt = -\int_0^T w(t)\varphi(t)\,dt\,, \qquad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(0,T)\,. \tag{3.49}$$

$\square$

Folgerung 3.8 *Ist $w \in L^2(0,T;V^*)$ schwache Ableitung von $u \in L^2(0,T;V)$, so ist für jedes $v \in V$ die Funktion $t \mapsto \langle w(t), v\rangle_V$ schwache Ableitung der Funktion $t \mapsto (j(u(t)), j(v))_H$ im $L^2(0,T)$.*

Lemma 3.9 *Sei V separabler Banachraum, $w \in L^2(0,T;V^*)$. Gilt*

$$\int_0^T \varphi(t)w(t)\,dt = 0\,, \qquad \textit{für alle } \varphi \in C_0^\infty(0,T)\,, \tag{3.50}$$

so gilt $w = 0$ fast überall.

Beweis: Im Spezialfall $V = \mathbb{R}$ kennen wir die Aussage bereits aus Teil 1, Kapitel 2. Sei nun V wie angegeben. Für $v \in V$ und $\varphi \in C_0^\infty(0,T)$ gilt

$$0 = \left\langle \int_0^T \varphi(t)w(t)\,dt\,,\, v \right\rangle_V = \int_0^T \varphi(t)\,\langle w(t), v\rangle_V\,dt\,. \tag{3.51}$$

Aus der Gültigkeit der Aussage für $V = \mathbb{R}$ folgt: Für jedes $v \in V$ gibt es eine Nullmenge $N(v)$ mit

$$\langle w(t), v\rangle = 0\,, \qquad \text{für alle } t \in (0,T) \setminus N(v)\,. \tag{3.52}$$

Sei D eine abzählbare dichte Teilmenge von V, setze

$$N = \bigcup_{v \in D} N(v)\,. \tag{3.53}$$

Dann ist N Nullmenge, und

$$\langle w(t), v\rangle = 0\,, \qquad \text{für alle } t \in (0,T) \setminus N\,,\ v \in D\,, \tag{3.54}$$

also

$$\langle w(t), v\rangle = 0\,, \qquad \text{für alle } t \in (0,T) \setminus N\,,\ v \in V\,, \tag{3.55}$$

also $w(t) = 0$ für alle $t \notin N$. $\square$

Satz 3.10 *Sei V separabler Banachraum, $u \in L^2(0,T;V)$. Dann gibt es höchstens eine schwache Ableitung $w \in L^2(0,T;V^*)$ von u. Falls sie existiert, bezeichnen wir sie mit u'.*

Beweis: Sind $w_1, w_2 \in L^2(0,T;V^*)$ schwache Ableitungen von u, so folgt für $w = w_1 - w_2$ aus der Definition der schwachen Ableitung

$$\int_0^T w(t)\varphi(t)\,dt = 0 \tag{3.56}$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(0,T)$. Aus Lemma 3.9 folgt $w = 0$. $\square$

Die Aussagen von Lemma 3.9 und Satz 3.10 gelten für beliebige Banachräume X und $w \in L^1(0,T;X)$.

Wir formulieren nun noch einmal das parabolische Anfangsrandwertproblem als "abstraktes" Anfangswertproblem (die Null-Randwerte stecken im Raum V)

$$\langle u'(t), v\rangle_V + a(u(t), v; t) = \langle F(t), v\rangle_V \,, \quad \text{für alle } v \in V, \tag{3.57}$$

$$u(0) = u_0 \,. \tag{3.58}$$

Wir suchen eine Lösung u im Raum

$$W = \{u : u \in L^2(0,T;V),\, u' \in L^2(0,T;V^*)\}\,, \tag{3.59}$$

für welche (3.57) für fast alle $t \in (0,T)$ gilt.

Satz 3.11 *Sei $V \xrightarrow{j} H \xrightarrow{j^*} V^*$ Evolutionstripel. Dann gilt*

$$W \subset C([0,T];H)\,. \tag{3.60}$$

Ferner gilt die Regel der partiellen Integration

$$(j(u(t)), j(v(t)))_H - (j(u(s)), j(v(s)))_H = \int_s^t \langle u'(\tau), v(\tau)\rangle_V + \langle v'(\tau), u(\tau)\rangle_V \, d\tau \tag{3.61}$$

für alle $u, v \in W$ und alle $s, t \in [0,T]$.

Beweis: Siehe z.B. Kapitel IV im Buch von Gajewski, Gröger und Zacharias, oder Theorem 5.9.3 im Buch von Evans. $\square$

Die Inklusion (3.60) ist so zu interpretieren: Ist $u \in W$, so enthält die Äquivalenzklasse von $j \circ u \in L^2(0,T;H)$ genau eine stetige Funktion. In diesem Sinne ist auch die linke Seite von (3.61) zu interpretieren. Wegen (3.60) macht die Anfangsbedingung (3.58) Sinn für Funktionen in W. (Für beliebige Funktionen in $L^2(0,T;V)$ ist (3.58) nicht definiert.)

Voraussetzung 3.12

(i) *$V \xrightarrow{j} H \xrightarrow{j^*} V^*$ ist ein Evolutionstripel, V ist ein separabler Banachraum mit dim$(V) = +\infty$.*

(ii) *$a : V \times V \times (0,T] \to \mathbb{R}$ ist für jedes $t \in (0,T]$ eine Bilinearform, und es gibt $c_a, c_h, C_a > 0$ mit*

$$a(v,v;t) \geq c_a \|v\|_V^2 - c_h \|j(v)\|_H^2\,, \quad \text{für alle } v \in V,\ t \in (0,T], \tag{3.62}$$

$$|a(v,w;t)| \leq C_a \|v\|\,\|w\|\,, \quad \text{für alle } v, w \in V,\ t \in (0,T]. \tag{3.63}$$

Die Abbildungen $t \mapsto a(v,w;t)$ sind messbar für alle $v, w \in V$.

(iii) *$u_0 \in H$, $F \in L^2(0,T;V^*)$.*

$\square$

Theorem 3.13 *Unter den Voraussetzungen 3.12 hat das Anfangswertproblem (3.57), (3.58) eine Lösung $u \in W$.*

Der Beweis besteht aus einer Folge von Lemmata, bei denen wir jedesmal annehmen, daß Voraussetzung 3.12 erfüllt ist. Die Idee ist, das Anfangswertproblem zunächst auf endlichdimensionalen Teilräumen V_n von V zu lösen und die Lösung auf V durch Grenzübergang zu erhalten. Die Existenz des Grenzwerts ergibt sich durch einen Kompaktheitsschluss. Die hierfür notwendige Beschränktheit der approximierenden Folge ergibt sich aus den Eigenschaften der Bilinearform in Voraussetzung 3.12, welche wiederum dadurch garantiert werden, dass $\partial_t + L$ gleichmäßig parabolisch ist.

Lemma 3.14 *Es gibt eine Folge $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in V mit*

$$\dim(V_n) = n\,, \quad V_n := \operatorname{span}\{w_1, \ldots, w_n\}\,, \quad V = \operatorname{cl}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n\right). \tag{3.64}$$

Beweis: Sei $M = \{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ mit $\operatorname{cl}(M) = V$. Wir konstruieren daraus die Folge (w_n), indem wir alle w_n streichen, für die $z_n \in \operatorname{span}\{z_1, \ldots, z_{n-1}\}$ gilt. Es bleiben dabei unendlich viele Elemente übrig, da andernfalls $\operatorname{span}(M)$ endlichdimensional und damit abgeschlossen wäre, und $V = \operatorname{cl}(M) = \operatorname{cl}(\operatorname{span}(M)) = \operatorname{span}(M)$ folgen würde im Widerspruch zu $\dim(V) = +\infty$. $\square$

Wir betrachten nun eine sogenannte **Galerkin-Approximation** von (3.57), (3.58). Hierzu wählen wir eine Folge (u_{0n}) mit $u_{0n} \in V_n$ und $j(u_{0n}) \to u_0$ in H. Wir suchen Funktionen $u_n : [0,T] \to V_n$, dargestellt als

$$u_n(t) = \sum_{k=1}^{n} c_{nk}(t) w_k\,, \quad c_{nk} : [0,T] \to \mathbb{R}\,, \tag{3.65}$$

so dass für fast alle $t \in (0,T]$ gilt

$$(j(u_n'(t)), j(v))_H + a(u_n(t), v; t) = \langle F(t), v \rangle_V\,, \qquad \text{für alle } v \in V_n\,, \tag{3.66}$$

sowie

$$u_n(0) = u_{0n}\,, \quad j(u_{0n}) = p(u_0, j(V_n))\,, \tag{3.67}$$

wobei $p(u_0, X)$ die Orthogonalprojektion von u_0 auf X in H bezeichnet. Sei

$$u_{0n} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{nk} w_k \in V_n\,. \tag{3.68}$$

Zu (3.66), (3.67) sind äquivalent

$$\sum_{k=1}^{n} c_{nk}'(t)(j(w_k), j(w_i))_H + \sum_{k=1}^{n} c_{nk}(t) a(w_k, w_i; t) = \langle F(t), w_i \rangle_V\,, \quad 1 \le i \le n\,, \tag{3.69}$$

$$c_{nk}(0) = \alpha_{nk}\,, \quad 1 \le k \le n\,. \tag{3.70}$$

Lemma 3.15 *Die Galerkin-Gleichungen (3.66), (3.67) haben eine eindeutige Lösung* $u_n : [0,T] \to V_n$ *mit* $u_n' \in L^2(0,T;V_n)$ *und*

$$u_n(t) = u_{0n} + \int_0^t u_n'(s)\,ds\,. \tag{3.71}$$

Beweis: Die Vektoren $w_1, \ldots, w_n$ sind linear unabhängig in V, also auch $j(w_1), \ldots, j(w_n)$ in H, da j injektiv ist. Die Matrix

$$B = (b_{ik})\,, \quad b_{ik} = (j(w_k), j(w_i))_H\,, \tag{3.72}$$

ist invertierbar (Übung), und wir können (3.69), (3.70) schreiben als

$$c_n'(t) + B^{-1}\tilde{A}c_n(t) = B^{-1}\tilde{F}(t)\,, \quad c_n(0) = \alpha_n\,, \tag{3.73}$$

mit

$$\tilde{A}(t) = (\tilde{a}_{ik}(t))\,, \quad \tilde{a}_{ik}(t) = a(w_k, w_i; t)\,, \quad \tilde{F}_i(t) = \langle F(t), w_i \rangle_V\,. \tag{3.74}$$

Nach Voraussetzung ist $\tilde{A} \in L^\infty(0,T;\mathbb{R}^{(n,n)})$, und wegen

$$|\tilde{F}_i(t)| = |\langle F(t), w_i \rangle_V| \le \|F(t)\|_{V^*} \|w_i\|_V$$

ist $\tilde{F} \in L^2(0,T;\mathbb{R}^n)$. Die Anfangswertaufgabe (3.73) hat nach dem Satz von Picard-Lindelöf (in der Version für messbare rechte Seiten, siehe z.B. das Buch von Walter) eine eindeutige Lösung $c_n : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ mit

$$c_n(t) = c_n(0) + \int_0^t c_n'(s)\,ds\,, \quad c_n' \in L^2(0,T;\mathbb{R}^n)\,. \tag{3.75}$$

□

Lemma 3.16 *Es gibt eine von* n *unabhängige Konstante* $C > 0$ *mit*

$$\max_{t \in [0,T]} \|j(u_n(t))\|_H + \|u_n\|_{L^2(0,T;V)} + \|J(u_n')\|_{L^2(0,T;V^*)} \le C(\|u_0\|_H + \|F\|_{L^2(0,T;V^*)})\,. \tag{3.76}$$

Beweis: Sei $n \in \mathbb{N}$ fest gewählt. Wir setzen $v = u_n(t)$ in (3.66) und erhalten

$$(j(u_n'(t)), j(u_n(t)))_H + a(u_n(t), u_n(t)) = \langle F(t), u_n(t) \rangle_V\,. \tag{3.77}$$

Es gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{1}{2}(j(u_n(t)), j(u_n(t)))_H = (j(u_n'(t)), j(u_n(t)))_H \tag{3.78}$$

nach der Produktregel für Bilinearformen (hier angewandt auf dem endlichdimensionalen Teilraum V_n). Nach Voraussetzung gilt

$$a(u_n(t), u_n(t); t) \ge c_a \|u_n(t)\|_V^2 - c_h \|j(u_n(t))\|_H^2\,. \tag{3.79}$$

Wir integrieren (3.77) über $[0,t]$ und erhalten mit (3.78) und (3.79)

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\|j(u_n(t))\|_H^2 - \frac{1}{2}\|j(u_n(0))\|_H^2 + c_a \int_0^t \|u_n(s)\|_V^2\,ds \\ &\qquad \le c_h \int_0^t \|j(u_n(s))\|_H^2\,ds + \int_0^t \langle F(s), u_n(s) \rangle_V\,ds \end{aligned} \tag{3.80}$$

Nach Definition von u_{0n} gilt

$$\|j(u_{0n})\|_H \le \|u_0\|_H\,, \tag{3.81}$$

aus der Youngschen Ungleichung folgt

$$\int_0^t \langle F(s), u_n(s)\rangle_V \; ds \le \frac{c_a}{2}\int_0^t \|u_n(s)\|_V^2\, ds + \frac{1}{2c_a}\int_0^t \|F(s)\|_{V^*}^2\, ds\,. \tag{3.82}$$

Setzen wir (3.81) und (3.82) in (3.80) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned}\|j(u_n(t))\|_H^2 &+ c_a\int_0^t \|u_n(s)\|_V^2\, ds \\ &\le \|u_0\|_H^2 + 2c_h\int_0^t \|j(u_n(s))\|_H^2\, ds + \frac{1}{c_a}\int_0^t \|F(s)\|_{V^*}^2\, ds\,.\end{aligned} \tag{3.83}$$

Für

$$\eta(t) = \|j(u_n(t))\|_H^2 \tag{3.84}$$

gilt

$$\eta(t) \le d_0 + 2c_h\int_0^t \eta(s)\, ds\,, \quad d_0 = \|u_0\|_H^2 + \frac{1}{c_a}\int_0^T \|F(s)\|_{V^*}^2\, ds\,, \quad t\in[0,T]\,. \tag{3.85}$$

Aus dem Lemma von Gronwall folgt

$$\eta(t) \le d_0 e^{2c_h t}\,, \quad \text{für alle } t\in[0,T]. \tag{3.86}$$

Hieraus ergibt sich für geeignetes C

$$\|j(u_n(t))\|_H^2 \le C(\|u_0\|_H^2 + \|F\|_{L^2(0,T;V^*)}^2)\,, \quad \text{für alle } t\in[0,T]. \tag{3.87}$$

Aus (3.83) folgt weiter (mit geeignet vergrößertem C)

$$\|u_n\|_{L^2(0,T;V)}^2 \le C(\|u_0\|_H^2 + \|F\|_{L^2(0,T;V^*)}^2)\,. \tag{3.88}$$

Zur Abschätzung von $J(u_n')$ betrachten wir noch einmal die Variationsgleichung

$$\langle J(u_n'(t)), v\rangle_V + a(u_n(t), v; t) = \langle F(t), v\rangle_V\;, \quad \text{für alle } v\in V. \tag{3.89}$$

Es folgt

$$|\,\langle J(u_n'(t)), v\rangle_V\,| \le C_a\|u_n(t)\|_V\|v\|_V + \|F(t)\|_{V^*}\|v\|_V\,, \tag{3.90}$$

also

$$\|J(u_n'(t))\|_{V^*} \le C_a\|u_n(t)\|_V + \|F(t)\|_{V^*}\,, \tag{3.91}$$

und hieraus

$$\begin{aligned}\|J(u_n')\|_{L^2(0,T;V^*)}^2 &\le \int_0^T (C_a\|u_n(t)\|_V + \|F(t)\|_{V^*})^2\, dt \\ &\le 2C_a^2\|u_n\|_{L^2(0,T;V)}^2 + 2\|F\|_{L^2(0,T;V^*)}^2\,.\end{aligned}$$

Aus (3.88) folgt die Behauptung. □

Lemma 3.17 *Es gibt eine Teilfolge* $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *und ein* $u \in L^2(0,T;V)$, *so daß* u_{n_k} *schwach in* $L^2(0,T;V)$ *gegen* u *konvergiert. Für* u *gilt*

$$-(u_0, j(v))_H\varphi(0) - \int_0^T \langle J(u(t)), v\rangle_V \varphi'(t)\,dt + \int_0^T a(u(t), v; t)\varphi(t)\,dt$$
$$= \int_0^T \langle F(t), v\rangle_V \varphi(t)\,dt\,, \tag{3.92}$$

für alle $v \in V$ *und alle* $\varphi \in C^1[0,T]$ *mit* $\varphi(T) = 0$.

Beweis: Nach Lemma 3.16 ist (u_n) beschränkt im Hilbertraum $L^2(0,T;V)$. Es gibt also eine Teilfolge (u_{n_k}), welche schwach gegen ein $u \in L^2(0,T;V)$ konvergiert. Sei zunächst $i \in \mathbb{N}$, $v \in V_i$, $\varphi \in C^1[0,T]$ mit $\varphi(T) = 0$. Für $n \geq i$ gilt wegen (3.66)

$$\int_0^T (j(u_n'(t)), j(v))_H\varphi(t)\,dt + \int_0^T a(u_n(t), v; t)\varphi(t)\,dt = \int_0^T \langle F(t), v\rangle_V \varphi(t)\,dt\,. \tag{3.93}$$

Partielle Integration ergibt

$$-(j(u_n(0)), j(v))_H\varphi(0) - \int_0^T \langle J(u_n(t)), v\rangle_V \varphi'(t)\,dt + \int_0^T a(u_n(t), v; t)\varphi(t)\,dt$$
$$= \int_0^T \langle F(t), v\rangle_V \varphi(t)\,dt\,. \tag{3.94}$$

Da $j(u_n(0)) = j(u_{0n}) \to u_0$ in H, gilt

$$\lim_{k\to\infty} -(j(u_{n_k}(0)), j(v))_H = -(u_0, j(v))_H\,. \tag{3.95}$$

Wir untersuchen den Grenzübergang für die beiden Integrale auf der linken Seite von (3.94). Durch

$$z \mapsto \int_0^T \langle J(z(t)), v\rangle_V \varphi'(t)\,dt \tag{3.96}$$

wird ein lineares stetiges Funktional auf $L^2(0,T;V)$ definiert wegen

$$\begin{aligned}\left|\int_0^T \langle J(z(t)), v\rangle_V \varphi'(t)\,dt\right| &\leq \int_0^T \|J(z(t))\|_{V^*}\|v\|_V|\varphi'(t)|\,dt \\ &\leq \|J\|\,\|v\|_V\|\varphi'\|_\infty \int_0^T \|z(t)\|_V\,dt \\ &\leq \|J\|\,\|v\|_V\|\varphi'\|_\infty\sqrt{T}\|z\|_{L^2(0,T;V)}\,.\end{aligned} \tag{3.97}$$

Es gilt also

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^T \langle J(u_{n_k}(t)), v\rangle_V \varphi'(t)\,dt = \int_0^T \langle J(u(t)), v\rangle_V \varphi'(t)\,dt\,. \tag{3.98}$$

Analog folgt aus

$$\int_0^T a(z(t), v; t)\varphi(t)\,dt \leq C_a\|v\|_V\|\varphi\|_\infty\sqrt{T}\|z\|_{L^2(0,T;V)} \tag{3.99}$$

für alle $z \in L^2(0,T;V)$ auch

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^T a(u_{n_k}(t), v; t)\varphi(t)\, dt = \int_0^T a(u(t), v; t)\varphi(t)\, dt\,. \tag{3.100}$$

Damit ist (3.92) bewiesen für $v \in V_i$. Da i beliebig war und $\cup_i V_i$ dicht ist in V, folgt die Behauptung. □

Lemma 3.18 *Durch*

$$\langle \tilde\alpha(t), v\rangle_V = a(u(t), v; t)\,, \quad v \in V\,, \quad t \in (0,T)\,, \tag{3.101}$$

wird eine Funktion $\tilde\alpha \in L^2(0,T;V^*)$ *definiert mit*

$$\|\tilde\alpha\|_{L^2(0,T;V^*)} \le C_a \|u\|_{L^2(0,T;V)}\,. \tag{3.102}$$

Beweis: Es gilt

$$|a(u(t), v; t)| \le C_a \|u(t)\|_V \|v\|_V\,, \quad v \in V\,,$$

für fast alle $t \in (0,T)$, also ist

$$\tilde\alpha(t) \in V^*\,, \quad \|\tilde\alpha(t)\|_{V^*} \le C_a \|u(t)\|_V$$

für fast alle $t \in (0,T)$, und (3.102) folgt aus

$$\int_0^T \|\tilde\alpha(t)\|_{V^*}^2\, dt \le C_a^2 \int_0^T \|u(t)\|_V^2\, dt\,.$$

□

Beweis von Theorem 3.13. Nach Lemma 3.17 und 3.18 gilt für alle $\varphi \in C_0^\infty([0,T])$ und alle $v \in V$

$$-\int_0^T (j(u(t)), j(v))_H \varphi'(t)\, dt = -\int_0^T \langle \tilde\alpha(t), v\rangle_V\, \varphi(t)\, dt + \int_0^T \langle F(t), v\rangle_V\, \varphi(t)\, dt\,. \tag{3.103}$$

Also hat u nach Lemma 3.7 eine schwache Ableitung

$$u' \in L^2(0,T;V^*)\,, \quad u'(t) = -\tilde\alpha(t) + F(t)\,, \tag{3.104}$$

also

$$\langle u'(t), v\rangle_V + a(u(t), v; t) = \langle F(t), v\rangle_V\,, \quad v \in V\,,$$

wie behauptet, und $u \in W$. Aus Satz 3.11 folgt $u \in C([0,T];H)$. Wir ersetzen nun in (3.92) die beiden letzten Integrale gemäß (3.104) und erhalten

$$-(u_0, j(v))_H \varphi(0) - \int_0^T \langle J(u(t)), v\rangle_V\, \varphi'(t)\, dt = \int_0^T \langle u'(t), v\rangle_V\, \varphi(t)\, dt \tag{3.105}$$

für alle $v \in V$ und alle $\varphi \in C^1[0,T]$ mit $\varphi(T) = 0$. Da andererseits die Funktion $t \mapsto \varphi(t)v$ ebenfalls in W liegt, erhalten wir nach Satz 3.11 für solche Funktionen φ

$$-(j(u(0)), j(v))_H \varphi(0) = \int_0^T \langle u'(t), \varphi(t)v\rangle_V + \langle \varphi'(t) J(v), u(t)\rangle\, dt\,. \tag{3.106}$$

Wird nun speziell ein φ mit $\varphi(0) = 1$ gewählt, so folgt aus (3.105) und (3.106)

$$(j(u(0)) - u_0, j(v))_H = 0 \tag{3.107}$$

für alle $v \in V$. Da $j(V)$ dicht ist in H, folgt $j(u(0)) = u_0$. Damit ist Theorem 3.13 vollständig bewiesen. □

Theorem 3.19 *Unter den Voraussetzungen 3.12 hat das Anfangswertproblem (3.57), (3.58) genau eine Lösung $u \in W$, und es gibt eine von u_0 und F unabhängige Konstante $C > 0$ mit*

$$\max_{t\in[0,T]} \|j(u(t))\|_H + \|u\|_{L^2(0,T;V)} + \|u'\|_{L^2(0,T;V^*)} \le C(\|u_0\|_H + \|F\|_{L^2(0,T;V^*)})\,. \tag{3.108}$$

Beweis: Die Existenz folgt aus Satz 3.13. Für jede Lösung $u \in W$ folgt aus Satz 3.11 für jedes $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(j(u(t)), j(u(t)))_H - \frac{1}{2}(u_0, u_0)_H &= \int_0^t \langle u'(s), u(s)\rangle_V \, ds \\ &= -\int_0^t a(u(s), u(s); s)\, ds + \int_0^t \langle F(s), u(s)\rangle_V \, ds\,,\end{aligned}$$

also

$$\frac{1}{2}\|j(u(t))\|_H^2 + \int_0^t a(u(s), u(s); s)\, ds = \frac{1}{2}\|u_0\|_H^2 + \int_0^t \langle F(s), u(s)\rangle_V \, ds\,. \tag{3.109}$$

Es folgt

$$\frac{1}{2}\|j(u(t))\|_H^2 + c_a \int_0^t \|u(s)\|_V^2 \, ds \le \frac{1}{2}\|u_0\|_H^2 + \frac{c_a}{2}\int_0^t \|u(s)\|_V^2 \, ds + \frac{1}{2c_a}\int_0^t \|F(s)\|_{V^*}^2 \, ds\,. \tag{3.110}$$

Aus (3.104) und Lemma 3.18 folgt

$$\|u'\|_{L^2(0,T;V^*)} \le C_a \|u\|_{L^2(0,T;V)} + \|F\|_{L^2(0,T;V^*)}\,. \tag{3.111}$$

Aus (3.110) und (3.111) ergibt sich nun (3.108) und auch die Eindeutigkeit, da für die Differenz zweier Lösungen (3.108) mit $F = 0$, $u_0 = 0$ gilt. □

Wir kehren zurück zum Anfangsrandwertproblem

$$\partial_t u + Lu = f \quad \text{in } \Omega_T = \Omega \times (0,T], \tag{3.112}$$

$$u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \times (0,T), \tag{3.113}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{für } x \in \Omega. \tag{3.114}$$

Unter einer schwachen Lösung von (3.112) – (3.114) verstehen wir eine Lösung des (wie oben beschrieben) zugeordneten Anfangswertproblems (3.57), (3.58). Dabei sind

$$a(w, v; t) = \int_\Omega (\nabla w(x))^T A(x,t) \nabla v(x)\, dx + \int_\Omega b(x,t)^T \nabla w(x) v(x)\, dx \tag{3.115}$$

$$+ \int_\Omega c(x,t) w(x) v(x)\, dx\,, \tag{3.116}$$

und

$$(F(t))(v) = \int_\Omega f(x,t) v(x)\, dx\,. \tag{3.117}$$

Theorem 3.20 (Eindeutige Lösbarkeit des Anfangsrandwertproblems)
Es seien die Voraussetzungen 3.1 erfüllt. Dann hat Problem (3.112) – (3.114) genau eine schwache Lösung $u \in W$.

Beweis: Die Aussage ergibt sich aus Satz 3.19, wir müssen nachprüfen, dass die Voraussetzungen in 3.12 erfüllt sind. Als Evolutionstripel wählen wir

$$V = H_0^1(\Omega)\,, \quad H = L^2(\Omega)\,, \quad (j(v))(x) = v(x)\,.$$

Da $\partial_t + L$ gleichmäßig parabolisch ist, gilt nach Lemma 8.5, Teil 1,

$$a(v,v;t) \geq c_a \|v\|_V^2 - c_h \|j(v)\|_H^2\,, \quad \text{für alle } v \in V,\ t \in (0,T],$$

mit geeigneten Konstanten c_a, c_h. Da die Koefffizienten A, b und c beschränkt sind, folgt

$$|a(v,w;t)| \leq C_a \|v\|\,\|w\|\,, \quad \text{für alle } v,w \in V,\ t \in (0,T],$$

mit einer geeigneten Konstante C_a. Weiter gilt

$$\begin{aligned} |(F(t))(v)|^2 &\leq \int_\Omega |f(x,t)v(x)|^2\,dx \leq \int_\Omega |f(x,t)|^2\,dx \cdot \int_\Omega |v(x)|^2\,dx \\ &\leq C_\Omega \int_\Omega |f(x,t)|^2\,dx\,\|v\|_V^2\,, \end{aligned}$$

wobei wir die Ungleichung von Poincaré verwendet haben. Es folgt

$$\|F\|_{L^2(0,T;V^*)}^2 = \int_0^T \|F(t)\|_{V^*}^2\,dt \leq C_\Omega \int_0^T \int_\Omega |f(x,t)|^2\,dx\,dt \leq C_\Omega \|f\|_{L^2(\Omega_T)}^2\,,$$

also ist $F \in L^2(0,T;V^*)$. □

Die vorgestellte Methode (Zurückführung der Anfangsrandwertaufgabe auf eine Anfangswertaufgabe im Kontext eines Evolutionstripels) lässt sich auch auf andere partielle Differentialgleichungen anwenden. So kann man etwa hyperbolische Gleichungen wie die Wellengleichung in eine zu (3.57) analoge Gleichung zweiter Ordnung (also mit $u''(t)$) umformulieren und einen entsprechenden Existenz- und Eindeutigkeitssatz beweisen.

Die Methode der Galerkin-Approximation lässt sich auch zur numerischen Lösung der parabolischen Anfangsrandwertaufgabe verwenden. Man wählt V_n, eine Basis $\{w_1, \ldots, w_n\}$ und löst dann das System von n gewöhnlichen Differentialgleichungen für die unbekannnten Funktionen c_{n_k}, $1 \leq k \leq n$,

$$\sum_{k=1}^n c'_{nk}(t)(j(w_k), j(w_i))_H + \sum_{k=1}^n c_{nk}(t) a(w_k, w_i; t) = \langle F(t), w_i \rangle_V\,, \quad 1 \leq i \leq n\,, \tag{3.118}$$

durch ein geeignetes numerisches Verfahren.

4 Homogenisierung: Einführung

Wir betrachten wieder einmal

$$Lu = f \,, \tag{4.1}$$

wobei

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_j (a_{ij}(x)\partial_i u) = -\mathrm{div}\,(A(x)^T \nabla u) \,. \tag{4.2}$$

In den Anwendungen ist es in der Regel so, dass die Form des Operators L durch das zugrundeliegende Modell (etwa das physikalische Erhaltungsgesetz) bestimmt wird, während die Koeffizienten a_{ij} Eigenschaften des Mediums wiedergeben, in dem sich der Prozess abspielt (Wärmeleitkoeffizienten, Elastizitätsmoduln, elektrische Leitfähigkeit etc.). Sind die Koeffizienten a_{ij} konstant (d.h. in (4.2) unabhängig von x), so spricht man von einem homogenen Medium, andernfalls von einem inhomogenen Medium. Inhomogenitäten können verschiedene Formen annehmen. Besteht das Medium im Gebiet Ω etwa aus unterschiedlichen Materialien $M_1, \ldots, M_K$, welche die Teilgebiete $\Omega_1, \ldots, \Omega_K$ einnehmen und durch Koeffizienten $a_{ij,k}$, $k \in \{k, \ldots, K\}$, charakterisiert sind, so ist

$$a_{ij}(x) = \sum_{k=1}^{K} a_{ij,k} 1_{\Omega_k}(x) \,, \tag{4.3}$$

wobei 1_{Ω_k} die charakteristische Funktion von Ω_k ist.

Inhomogenitäten können auf zwei (oder mehreren) "Skalen" auftreten. Betrachtet man beispielsweise die Biomechanik des menschlichen Knochens, so liegt die Makroskala im Zentimeterbereich, die für die innere Festigkeit maßgebliche poröse Struktur weist charakteristische Längen im Bereich $10 - 100\ \mu m$ auf, beschrieben etwa durch Materialparameter

$$a_{ij}^{\varepsilon}(x) \,,$$

wobei wir uns ε als klein vorstellen. Man will nun den Einfluss der mikroskopischen Struktur auf die makroskopischen Eigenschaften untersuchen, und zwar nach Möglichkeit in einer geeignet gemittelten Form.

Wir betrachten ein eindimensionales Beispiel. Sei $Y = (0, l)$ ein Referenzintervall im $\mathbb{R}$, sei $a \in L^\infty(0, l)$. Vermittels

$$a(y + l) = a(y) \,, \quad y \in \mathbb{R} \,, \tag{4.4}$$

können wir a eindeutig zu einer l-periodischen Funktion $a \in L^\infty(\mathbb{R})$ fortsetzen. Wir definieren nun für gegebenes $\varepsilon > 0$

$$a^\varepsilon(x) = a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \,, \tag{4.5}$$

und betrachten in $\Omega = (d_1, d_2)$ das Randwertproblem

$$-\partial_x (a^\varepsilon(x) \partial_x u_\varepsilon) = f \,, \quad x \in \Omega \,, \tag{4.6}$$

$$u_\varepsilon(d_1) = u_\varepsilon(d_2) = 0 \,. \tag{4.7}$$

Der Koeffizient a^ε variiert mit der Periode εl. Wir setzen voraus, dass es Konstanten $c_a, C_a > 0$ gibt mit

$$c_a \le a(y) \le C_a \,, \quad \text{für alle } y \in Y. \tag{4.8}$$

Offensichtlich gilt

$$c_a \le a^\varepsilon(x) \le C_a\,, \quad \text{für alle } x \in \Omega. \tag{4.9}$$

Das elliptische Randwertproblem (4.6), (4.7) hat also nach dem Satz von Lax-Milgram eine eindeutige schwache Lösung $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$. Es erhebt sich nun die Frage, ob u_ε in irgendeinem Sinne gegen ein u_0 konvergiert, und ob ein solches u_0 als Lösung eines geeignet gemittelten Randwertproblems erhalten werden kann. Es gilt (siehe Teil 1)

$$\|u_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \le \frac{1}{c_\alpha}\|f\|_{L^2(\Omega)}\,, \tag{4.10}$$

also ist $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ beschränkt im Hilbertraum $H_0^1(\Omega)$. Es gibt daher eine schwach konvergente Folge

$$u_{\varepsilon_k} \rightharpoonup u_0 \in H_0^1(\Omega)\,, \tag{4.11}$$

oder äquivalent

$$u_{\varepsilon_k} \rightharpoonup u_0 \quad \text{in } L^2(\Omega), \quad \partial_x u_{\varepsilon_k} \rightharpoonup \partial_x u_0 \quad \text{in } L^2(\Omega). \tag{4.12}$$

Wir definieren nun

$$\xi_\varepsilon(x) = a^\varepsilon(x)\partial_x u_\varepsilon(x)\,, \quad x \in \Omega\,, \tag{4.13}$$

dann gilt nach (4.6)

$$-\partial_x \xi_\varepsilon = f\,, \quad \text{in } \Omega. \tag{4.14}$$

Die Menge (ξ_ε) ist ebenfalls beschränkt wegen (4.14) und

$$\|\xi_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \le C_a\|\partial_x u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \le \frac{C_a}{c_a}\|f\|_{L^2(\Omega)}\,. \tag{4.15}$$

Also gibt es $\xi_0 \in H_0^1(\Omega)$, so dass (nach Übergang zu einer Teilfolge)

$$\xi_{\varepsilon_k} \rightharpoonup \xi_0 \quad \text{in } L^2(\Omega), \quad \partial_x \xi_{\varepsilon_k} = -f = \partial_x \xi_0 \quad \text{in } L^2(\Omega). \tag{4.16}$$

Da $\Omega = (d_1, d_2)$ eindimensional ist, erfüllt jede beschränkte Teilmenge von $H_0^1(\Omega)$ die Voraussetzungen des Satzes von Arzela und Ascoli (siehe Übung aus Teil 1), also gilt für eine Teilfolge

$$\xi_{\varepsilon_k} \to \xi_0 \quad \text{gleichmäßig in } C[d_1, d_2]. \tag{4.17}$$

Wir untersuchen nun den Zusammenhang zwischen u_0 und ξ_0. Nach (4.13) gilt

$$\partial_x u_\varepsilon(x) = \frac{1}{a^\varepsilon(x)}\xi_\varepsilon(x)\,, \quad x \in \Omega\,, \tag{4.18}$$

und aus (4.9) folgt

$$\frac{1}{C_a} \le \frac{1}{a^\varepsilon} \le \frac{1}{c_a}\,, \tag{4.19}$$

das heißt, $(1/a^\varepsilon)$ ist beschränkt in $L^\infty(\Omega)$. Wie wir später beweisen werden, gilt dann für eine weitere Teilfolge

$$\frac{1}{a^{\varepsilon_k}} \overset{*}{\rightharpoonup} \beta\,, \quad \beta = \frac{1}{l}\int_0^l \frac{1}{a(y)}\,dy\,. \tag{4.20}$$

Es folgt (wie wir ebenfalls später sehen werden)

$$\frac{1}{a^{\varepsilon_k}}\xi_{\varepsilon_k} \rightharpoonup \beta\xi_0\,, \quad \text{in } L^2(\Omega). \tag{4.21}$$

Da $\partial_x u_{\varepsilon_k} \rightharpoonup \partial_x u_0$ in $L^2(\Omega)$ nach (4.12), erhalten wir aus (4.18) und (4.21)

$$\partial_x u_0(x) = \frac{1}{l} \int_0^l \frac{1}{a(y)}\, dy \cdot \xi_0(x)\,. \tag{4.22}$$

Wir setzen nun

$$a^0 = \left(\frac{1}{l} \int_0^l \frac{1}{a(y)}\, dy \right)^{-1}. \tag{4.23}$$

Aus (4.22) und (4.14) folgt schließlich

$$-\partial_x (a^0 \partial_x u_0) = f\,, \quad x \in \Omega\,, \tag{4.24}$$

sowie

$$u_\varepsilon(d_1) = u_\varepsilon(d_2) = 0\,. \tag{4.25}$$

(Da $H_0^1(d_1, d_2) \subset C[d_1, d_2]$, gilt (4.25) im klassischen Sinn.) Es hat sich also herausgestellt, dass der "Homogenisierungslimes" u_0 die wegen $a^0 \geq c_a$ eindeutige Lösung des Randwertproblems (4.24), (4.25) ist, mit dem durch (4.23) gegebenen konstanten Koeffizienten a^0. Aus der Eindeutigkeit von u_0 folgt nun weiter, dass

$$u_{\varepsilon_k} \rightharpoonup u_0 \quad \text{in } H_0^1(\Omega) \tag{4.26}$$

für jede Folge $\varepsilon_k \to 0$.

Da a^0 konstant ist, lässt sich eine explizite Lösungsformel für u_0 angeben, nämlich

$$u_0(x) = -\frac{1}{a^0} \int_0^x \int_0^t f(s)\, ds\, dt + \frac{x}{a^0} \int_0^1 \int_0^t f(s)\, ds\, dt\,. \tag{4.27}$$

Wir betrachten als Beispiel

$$(0, l) = (0, 1)\,, \quad a(y) = 1 + y\,,. \tag{4.28}$$

Es ist

$$\int_0^1 \frac{1}{a(y)}\, dy = \ln(1+y)\Big|_0^1 = \ln 2\,, \quad a^0 = \frac{1}{\ln 2}\,, \tag{4.29}$$

aber andererseits

$$\int_0^1 a(y)\, dy = \frac{3}{2}\,, \tag{4.30}$$

Der Homogenisierungskoeffizient a^0 ist also **nicht** das Integralmittel von a. Dasselbe gilt im Beispiel

$$(0, l) = (0, 1)\,, \quad a(y) = \begin{cases} 1\,, & 0 < y < \frac{2}{3} \\ 2\,, & \frac{2}{3} < y\,. \end{cases} \tag{4.31}$$

Hier ist

$$\int_0^1 \frac{1}{a(y)}\, dy = \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{6}\,, \quad a^0 = \frac{6}{5}\,, \tag{4.32}$$

aber

$$\int_0^1 a(y)\, dy = \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3}\,. \tag{4.33}$$

Wir kehren nun zur mehrdimensionalen Situation zurück und sehen uns den Fall unstetiger Koeffizienten (4.3) genauer an. Ist die rechte Seite f in (4.1) glatt, so wird man nicht erwarten können, dass $\nabla u(x)$ stetig ist in Punkten, in denen $A(x)$ unstetig ist. Wir nehmen an, dass Ω zerfällt gemäß

$$\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2 \,, \quad \Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset \,, \tag{4.34}$$

wobei Ω_1, Ω_2 offene Teilmengen einer beschränkten offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sind. Seien $\partial\Omega_1, \partial\Omega_2$ hinreichend glatt, sei $u \in H_0^1(\Omega)$ eine schwache Lösung von

$$-\mathrm{div}\,(A(x)^T \nabla u) = f \quad \text{in } \Omega \tag{4.35}$$

mit $u = 0$ auf $\partial\Omega$, sei außerdem $u \in C(\Omega)$, $u \in C^2(\Omega_i)$ für $i = 1, 2$, und seien die Ableitungen ∇u in Ω_i stetig auf $\partial\Omega_i$ fortsetzbar. Wir bezeichnen diese Fortsetzungen mit ∇u_i. Wir setzen nicht voraus, dass ∇u_1 und ∇u_2 auf $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ übereinstimmen. Sei außerdem $A : \Omega \to \mathbb{R}^{(n,n)}$ stetig differenzierbar auf Ω_i und stetig fortsetzbar mit den Fortsetzungen A_1, A_2. Dann gilt für alle Testfunktionen $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx = \int_\Omega \nabla(x)^T A(x) \nabla\varphi(x)\,dx = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i} \nabla(x)^T A(x)\nabla\varphi(x)\,dx =$$
$$= -\sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i} \mathrm{div}\,(A(x)^T \nabla u(x))\varphi(x)\,dx + \sum_{i=1}^2 \int_{\partial\Omega_i} \nabla u_i(\xi)^T A_i(\xi) n_i(\xi)\varphi(\xi)\,dS(\xi)\,,$$

also wegen (4.35) und da $\varphi = 0$ auf $\partial\Omega$

$$\sum_{i=1}^2 \int_{\partial\Omega_1\cap\partial\Omega_2} \nabla u_i(\xi)^T A_i(\xi) n_i(\xi)\varphi(\xi)\,dS(\xi) = 0\,, \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{4.36}$$

Da für die Normalen n_i an $\partial\Omega_i$ gilt $n_1 = -n_2$ auf $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$, folgt mit $n = n_1$

$$\int_{\partial\Omega_1\cap\partial\Omega_2} \nabla u_1(\xi)^T A_1(\xi) n(\xi)\varphi(\xi)\,dS(\xi) = \int_{\partial\Omega_1\cap\partial\Omega_2} \nabla u_2(\xi)^T A_2(\xi) n(\xi)\varphi(\xi)\,dS(\xi)\,, \tag{4.37}$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, also

$$\left\langle A_1(x)^T \nabla u_1(x), n(x)\right\rangle = \left\langle A_2(x)^T \nabla u_2(x), n(x)\right\rangle\,, \quad \text{fast überall auf } \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2. \tag{4.38}$$

Das bedeutet, dass die Normalkomponente des Flusses $A(x)^T \nabla u(x)$ stetig ist über die Unstetigkeitsfläche $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ hinweg. Besitzt also für eine zu modellierende Situation (etwa ein Diffusionsprozess) der Fluss der betrachteten Größe diese Erhaltungseigenschaft (nämlich dass auf der Fläche keine Produktion von Fluss stattfindet), so wird sie durch die variationelle schwache Lösung korrekt wiedergegeben.

5 Mittelung und schwache Konvergenz

Nach Definition ist eine Folge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $L^p(\Omega)$ genau dann schwach konvergent gegen ein $v \in L^p(\Omega)$, wenn gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega v_n(x)\varphi(x)\,dx = \int_\Omega v(x)\varphi(x)\,dx\,, \quad \text{für alle } \varphi \in L^q(\Omega), \tag{5.1}$$

wobei

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,. \tag{5.2}$$

Im Falle $p = \infty$ ist $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ schwach-$*$-konvergent gegen v genau dann, wenn (5.2) gilt für $q = 1$. Eine Teilmenge I von $\mathbb{R}^n$ der Form

$$I = \prod_{i=1}^{n} (a_i, b_i)\,, \quad \text{bzw.} \quad I = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$$

heißt **offenes** bzw. **abgeschlossenes Intervall** im $\mathbb{R}^n$.

Satz 5.1 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $L^p(\Omega)$, $1 < p \le \infty$, sei $v \in L^p(\Omega)$. Dann sind äquivalent:*

(i) (v_n) konvergiert schwach gegen v (im Fall $p = \infty$: v_n konvergiert schwach-$*$ gegen v).

(ii) $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt im $L^p(\Omega)$ (das heißt, die Menge $\{\|v_n\|_{L^p(\Omega)} : n \in \mathbb{N}\}$ ist beschränkt), und

$$\lim_{n\to\infty} \int_I v_n(x)\,dx = \int_I v(x)\,dx \tag{5.3}$$

für alle Intervalle $I \subset \Omega$.

Beweis: "(i)⇒(ii)": Jede schwach konvergente (bzw. schwach-$*$-konvergente) Folge ist beschränkt (siehe Funktionalanalysis), und (5.3) ergibt sich, wenn wir $\varphi = \chi_I$ in (5.1) setzen.

"(ii)⇒(i)": Nach (5.3) gilt (5.1) für alle $\varphi = \chi_I$, I Intervall, und damit auch für alle Treppenfunktionen

$$\varphi = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \chi_{I_k}\,, \quad \alpha_k \in \mathbb{R}\,. \tag{5.4}$$

Sei $\varphi \in L^q(\Omega)$ beliebig, q wie in (5.2), sei $\delta > 0$. Da die Menge der Funktionen der Form (5.4) dicht ist in $L^q(\Omega)$, gibt es ein solches φ_δ mit

$$\|\varphi - \varphi_\delta\|_q \le \delta\,.$$

Es gilt nun

$$\int_\Omega (v_n - v)\varphi\,dx = \int_\Omega (v_n - v)\varphi_\delta\,dx + \int_\Omega (v_n - v)(\varphi - \varphi_\delta)\,dx\,.$$

Sei n_0 so, dass

$$\left|\int_\Omega (v_n - v)\varphi_\delta\,dx\right| \le \delta$$

für alle $n \geq n_0$, dann folgt

$$\left| \int_\Omega (v_n - v)\varphi \, dx \right| \leq \delta + \|v_n - v\|_p \, \|\varphi - \varphi_\delta\|_q \leq C\delta \, ,$$

für alle $n \geq n_0$, wobei C weder von n_0 noch von δ abhängt. □

Für $p = 1$ impliziert (ii) im allgemeinen nicht (i).

Sei Y ein Intervall im $\mathbb{R}^n$ der Form

$$Y = \prod_{i=1}^{n} (0, l_i) \, , \quad l_i > 0 \, . \tag{5.5}$$

Definition 5.2 *Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt Y-periodisch, falls*

$$f(x + l_i e_i) = f(x) \tag{5.6}$$

gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$, $1 \leq i \leq n$, wobei e_i der i-te Einheitsvektor im $\mathbb{R}^n$ ist. □

Offensichtlich gilt für jede Y-periodische Funktion

$$f\left(x + \sum_{i=1}^{n} k_i l_i e_i \right) = f(x) \, , \quad x \in \mathbb{R}^n \, , \; k_i \in \mathbb{Z} \, . \tag{5.7}$$

Jedes $f : Y \to \mathbb{R}$ lässt sich zu einer Y-periodischen Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fortsetzen, die eindeutig bestimmt ist bis auf die Nullmenge, die durch Translation von ∂Y gemäß (5.7) gegeben ist.

Lemma 5.3 *Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Y-periodisch, $f|Y \in L^1(Y)$. Dann gilt für alle $y_0 \in \mathbb{R}^n$*

$$\int_{y_0 + Y} f(y) \, dy = \int_Y f(y) \, dy \, . \tag{5.8}$$

Beweis: Es genügt, den Fall $y_0 = ce_i$, $c \in \mathbb{R}$, zu betrachten. Wir setzen

$$g(y_i) = \int_{\prod_{j \neq i} (0, l_j)} f(y_1, \ldots, y_n) \, dy_1 \cdots dy_{i-1} \, dy_{i+1} \cdots dy_n \, .$$

Es ist dann

$$\begin{aligned} \int_{y_0 + Y} f(y) \, dy &= \int_c^{c+l_i} g(y_i) \, dy_i = \left(\int_c^{l_i} + \int_{l_i}^{c+l_i} \right) g(y_i) \, dy_i = \left(\int_c^{l_i} + \int_0^{c} \right) g(y_i) \, dy_i \\ &= \int_0^{l_i} g(y_i) \, dy_i = \int_Y f(y) \, dy \, . \end{aligned}$$

□

Für die durch

$$f_\varepsilon(x) = f\left(\frac{x}{\varepsilon} \right)$$

definierte Funktion folgt dann mit der Substitutionsformel und Lemma 5.3, da f_ε (εY)-periodisch ist,

$$\int_{\varepsilon(y_0+Y)} f_\varepsilon(x)\,dx = \int_{\varepsilon Y} f_\varepsilon(x)\,dx = \varepsilon^n \int_Y f(y)\,dy \tag{5.9}$$

für alle $y_0 \in \mathbb{R}^n$ und alle $\varepsilon > 0$.

Als Beispiel betrachten wir

$$Y = (0,1)\,, \quad f : Y \to \mathbb{R}\,, \quad f(y) = \sin(2\pi y)\,. \tag{5.10}$$

Für jedes Intervall $I = [a,b] \subset Y$ gilt

$$\int_a^b f_\varepsilon(x)\,dx = \int_a^b \sin\left(2\pi\frac{x}{\varepsilon}\right)\,dx = -\frac{\varepsilon}{2\pi}\cos\left(2\pi\frac{x}{\varepsilon}\right)\Big|_a^b \to 0$$

für $\varepsilon \to 0$, und aus Satz 5.1 folgt $f_\varepsilon \rightharpoonup 0$ in $L^p(I)$ für $1 < p < \infty$ bzw. $f_\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} 0$ in $L^\infty(I)$. Andererseits gilt

$$\|f_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)} = \frac{b-a}{2} + \frac{\varepsilon}{8\pi}\left[-\sin\left(\frac{4\pi b}{\varepsilon}\right) + \sin\left(\frac{4\pi a}{\varepsilon}\right)\right] \to \frac{b-a}{2}$$

für $\varepsilon \to 0$, also konvergiert f_ε nicht stark gegen 0.

Notation 5.4 (Mittelwert)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ messbar, $|\Omega| := \operatorname{meas}(\Omega) < \infty$. Wir definieren den Mittelwert von $f \in L^1(\Omega)$ durch

$$M_\Omega(f) = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f(y)\,dy\,. \tag{5.11}$$

□

Satz 5.5 (Schwache Konvergenz gegen den Mittelwert)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, sei $Y = \prod_{i=1}^n (0, l_i)$, sei $p \in [1,\infty]$, sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Y-periodische Funktion mit $f \in L^p(Y)$. Dann gilt im Fall $p < \infty$

$$f_\varepsilon \rightharpoonup M_Y(f) \quad \text{in } L^p(\Omega), \text{ für } \varepsilon \to 0, \tag{5.12}$$

und im Fall $p = \infty$

$$f_\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} M_Y(f) \quad \text{in } L^\infty(\Omega), \text{ für } \varepsilon \to 0. \tag{5.13}$$

In jedem Fall gibt es zu jedem Intervall $I \subset \mathbb{R}^n$ eine von f unabhängige Konstante c, so dass

$$\|f_\varepsilon\|_{L^p(I)} \le c\|f\|_{L^p(Y)}\,, \tag{5.14}$$

für alle Intervalle $I \subset \mathbb{R}^n$ und alle $\varepsilon > 0$.

Beweis: Sei zunächst

$$I = (a,b) = \prod_{i=1}^n (a_i, b_i) \tag{5.15}$$

ein beliebiges offenes Intervall im $\mathbb{R}^n$. Beginnend in der Ecke a mit dem Intervall $a+\varepsilon Y$, füllen wir I aus mit aneinanderstoßenden Intervallen der Form

$$J_\varepsilon = x + \varepsilon Y\,, \quad x_i = a_i + j_i \varepsilon l_i\,, \quad 0 \le j_i \le k_i\,, \tag{5.16}$$

wobei $k_i \in \mathbb{N}$ mit

$$\varepsilon l_i k_i^\varepsilon \le b_i - a_i \le \varepsilon l_i (k_i^\varepsilon + 1)\,. \tag{5.17}$$

Sei A^ε die Menge aller solcher J_ε mit $J_\varepsilon \subset I$, dann ist

$$|A^\varepsilon| = \prod_{i=1}^n k_i^\varepsilon\,, \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^n |A^\varepsilon| = \lim_{\varepsilon \to 0} \prod_{i=1}^n \varepsilon k_i^\varepsilon = \prod_{i=1}^n \frac{b_i - a_i}{l_i} = \frac{|I|}{|Y|}\,. \tag{5.18}$$

Sei B^ε die Menge aller restlicher solcher J_ε, so gilt

$$|B^\varepsilon| = \sum_{i=1}^n \prod_{j\ne i} k_j^\varepsilon\,, \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^n |A^\varepsilon| = \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \sum_{i=1}^n \prod_{j \ne i} \varepsilon k_j^\varepsilon = 0\,. \tag{5.19}$$

Nach dieser Vorüberlegung beweisen wir die Beschränktheit der Menge $(f_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ in $L^p(\Omega)$. Für $p=\infty$ gilt offensichtlich $\|f_\varepsilon\|_\infty = \|f\|_\infty$. Sei nun $p \in [1,\infty)$. Dann gilt nach (5.9)

$$\begin{aligned} \|f_\varepsilon\|_{L^p(I)}^p &\le \sum_{J_\varepsilon \in A^\varepsilon} \int_{J_\varepsilon} |f_\varepsilon(x)|^p\,dx + \sum_{J_\varepsilon\in B^\varepsilon} \int_{J_\varepsilon} |f_\varepsilon(x)|^p\,dx \\ &= |A^\varepsilon|\varepsilon^n \int_Y |f(y)|^p\,dy + \underbrace{|B^\varepsilon|\varepsilon^n}_{\to 0} \int_Y |f(y)|^p\,dy \\ &\to \frac{|I|}{|Y|} \int_Y |f(y)|^p\,dy\,, \end{aligned} \tag{5.20}$$

also folgt die Beschränktheit und auch (5.14). Wir beweisen nun die behauptete Konvergenz für den Fall $p>1$, indem wir Satz 5.1 anwenden. Für ein beliebiges Intervall $I \subset \Omega$ gilt nämlich analog zu (5.20)

$$\begin{aligned} \int_I f_\varepsilon(x)\,dx &= \sum_{J_\varepsilon\in A^\varepsilon} \int_{J_\varepsilon} f_\varepsilon(x)\,dx + \sum_{J_\varepsilon \in B^\varepsilon} \int_{J_\varepsilon\cap I} f_\varepsilon(x)\,dx \\ &\to \frac{|I|}{|Y|} \int_Y f(y)\,dy = |I| M_Y(f) = \int_I M_Y(f)\,dx\,. \end{aligned}$$

Es bleibt zu beweisen die Konvergenz im Fall $p=1$. Sie wird zurückgeführt auf den Fall $p>1$. Sei I ein festes Intervall im $\mathbb{R}^n$ mit $\Omega \subset I$, sei $\eta > 0$ beliebig. Wir wählen ein $f^\eta \in L^2(Y)$ mit

$$\|f - f^\eta\|_{L^1(Y)} \le \eta\,, \tag{5.21}$$

und setzen f^η Y-periodisch auf $\mathbb{R}^n$ fort. Es ist

$$(f - f^\eta)_\varepsilon(x) = (f - f^\eta)\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = (f_\varepsilon - f_\varepsilon^\eta)(x)\,. \tag{5.22}$$

Sei $\varphi \in L^\infty(\Omega)$ beliebig. Es gilt

$$\begin{aligned} \int_\Omega (f_\varepsilon(x) - M_Y(f))\varphi(x)\,dx &= \int_\Omega (f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon^\eta(x))\varphi(x)\,dx + \int_\Omega (f_\varepsilon^\eta(x) - M_Y(f^\eta))\varphi(x)\,dx \\ &\quad + \int_\Omega (M_Y(f^\eta) - M_Y(f))\varphi(x)\,dx \end{aligned} \tag{5.23}$$

Das erste Integral auf der rechten Seite lässt sich mit (5.14) abschätzen als

$$\left|\int_\Omega (f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon^\eta(x))\varphi(x)\,dx\right| \le \|\varphi\|_\infty \, \|f_\varepsilon - f_\varepsilon^\eta\|_{L^1(I)} \le c\|\varphi\|_\infty \, \|f - f^\eta\|_{L^1(Y)} \le c\|\varphi\|_\infty \, \eta\,. \tag{5.24}$$

Für das dritte Integral gilt

$$\left|\int_\Omega (M_Y(f^\eta) - M_Y(f))\varphi(x)\,dx\right| \le \|\varphi\|_\infty \, |\Omega|\frac{1}{|Y|}\int_Y |f^\eta(y) - f(y)|\,dy \le \|\varphi\|_\infty \, |\Omega|\frac{1}{|Y|}\eta\,. \tag{5.25}$$

Es ist $\varphi \in L^2(\Omega)$, da Ω beschränkt ist. Wir wenden die für $p = 2$ bewiesene Konvergenz an und erhalten

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega (f_\varepsilon^\eta(x) - M_Y(f^\eta))\varphi(x)\,dx = 0\,. \tag{5.26}$$

Indem wir (5.24) – (5.26) zusammensetzen, ergibt sich

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega (f_\varepsilon(x) - M_Y(f))\varphi(x)\,dx = 0\,. \tag{5.27}$$

□

Definition 5.6 (Kompakte Einbettung)
Seien $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Z, \|\cdot\|_Z)$ Banachräume mit $X \subset Z$. X heißt kompakt eingebettet in Z, falls jede beschränkte Teilmenge von X relativ kompakt ist in Z. Wir schreiben

$$X \subset\subset Z\,. \tag{5.28}$$

□

Äquivalent dazu ist, dass die kanonische Einbettung $j : X \to Z$ eine kompakte Abbildung (im Sinne der Funktionalanalysis) ist.

Satz 5.7 (Kompakte Einbettung im Sobolevraum)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Dann gilt

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^p(\Omega)\,, \quad \textit{für alle } p \in [1,\infty]. \tag{5.29}$$

Ist $\partial\Omega$ ein C^1-Rand, so gilt auch

$$W^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^p(\Omega)\,, \quad \textit{für alle } p \in [1,\infty]. \tag{5.30}$$

Beweis: Siehe etwa die Bücher von Evans, Gilbarg/Trudinger, Wloka. □

Folgerung 5.8 *In der Situation von Satz 5.7 gilt: Jede beschränkte Folge in $W_0^{1,p}(\Omega)$ bzw. $W^{1,p}(\Omega)$ hat eine Teilfolge, die in der L^p-Norm konvergiert. Jede schwach bzw. schwach-$*$ konvergente Folge $W_0^{1,p}(\Omega)$ bzw. $W^{1,p}(\Omega)$ konvergiert in der L^p-Norm.* □

Satz 5.9 (Ungleichung von Poincaré für Mittelwerte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, offen, zusammenhängend mit einem C^1-Rand $\partial\Omega$, sei $p \in [1, \infty]$. Dann gibt es ein $C > 0$ mit

$$\|v - M_\Omega(v)\|_{L^p(\Omega)} \le C\|\nabla v\|_{L^p(\Omega)}\,, \quad \textit{für alle } v \in W^{1,p}(\Omega). \tag{5.31}$$

Beweis: Wir nehmen an, (5.31) gilt nicht. Dann gibt es eine Folge $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $W^{1,p}(\Omega)$ mit

$$\|v_k - M_\Omega(v_k)\|_{L^p(\Omega)} > k\|\nabla v_k\|_{L^p(\Omega)}\,. \tag{5.32}$$

Wir setzen

$$w_k = \frac{v_k - M_\Omega(v_k)}{\|v_k - M_\Omega(v_k)\|_{L^p(\Omega)}}\,, \tag{5.33}$$

dann ist

$$M_\Omega(w_k) = 0\,, \quad \|w_k\|_{L^p(\Omega)} = 1\,, \tag{5.34}$$

$$\|\nabla w_k\|_{L^p(\Omega)} = \frac{\|\nabla v_k\|_{L^p(\Omega)}}{\|v_k - M_\Omega(v_k)\|_{L^p(\Omega)}} < \frac{1}{k}\,, \tag{5.35}$$

also ist $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt in $W^{1,p}(\Omega)$. Nach Folgerung 5.8 gibt es eine Teilfolge $(w_{k_m})_{m\in\mathbb{N}}$ und ein $w \in W^{1,p}(\Omega)$ mit

$$w_{k_m} \rightharpoonup w \quad \text{in } W^{1,p}(\Omega), \quad w_{k_m} \to w \quad \text{in } L^p(\Omega). \tag{5.36}$$

Es folgt

$$M_\Omega(w) = 0\,, \quad \|w\|_{L^p(\Omega)} = 1\,. \tag{5.37}$$

Sei $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, dann gilt wegen (5.36) und (5.35) für alle j

$$\int_\Omega w(x)\partial_j\varphi(x)\,dx = \lim_{m\to\infty}\int_\Omega w_{k_m}(x)\partial_j\varphi(x)\,dx = -\lim_{m\to\infty}\int_\Omega \partial_j w_{k_m}(x)\varphi(x)\,dx = 0\,,$$

also $\nabla w = 0$ in Ω. Da Ω zusammenhängend ist, ist w konstant, im Widerspruch zu (5.37).
□

6 Periodische Randbedingungen

Es wird sich herausstellen, dass im periodischen Homogenisierungsproblem auch im Mehrdimensionalen ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n > 1$) die homogenisierten Koeffizienten konstant sind. Zu ihrer Charakterisierung wird allerdings die Lösung eines elliptischen Randwertproblems auf dem Referenzintervall $Y = \prod_{i=1}^n (0, l_i)$ mit periodischen Randbedingungen benötigt.

Wir betrachten das Randwertproblem

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_j (a_{ij}(y) \partial_i u) = f \,, \quad \text{in } Y, \tag{6.1}$$

$$u \quad Y\text{-periodisch.} \tag{6.2}$$

Wir sehen sofort, dass mit jeder Lösung u auch $u + c$, c beliebige Konstante, eine Lösung ist.

Voraussetzung 6.1 *Seien $a_{ij} \in L^\infty(Y)$ für alle i, j, sei L in (6.1) gleichmäßig elliptisch mit der Elliptizitätskonstanten $c_a > 0$, das heißt,*

$$\xi^T A(y) \xi \geq c_a |\xi|^2 \,, \quad \textit{für alle } y \in Y \textit{ und alle } \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{6.3}$$

□

Definition 6.2 (Sobolevraum periodischer Funktionen)
Wir setzen

$$C^\infty_{per}(Y) = \{v|Y : v \in C^\infty(\mathbb{R}^n),\ v \textit{ ist } Y\textit{-periodisch}\} \,, \tag{6.4}$$

und definieren $H^1_{per}(Y)$ als den Abschluss von $C^\infty_{per}(Y)$, aufgefasst als Unterraum von $H^1(Y)$, bezüglich der H^1-Norm. □

Das Intervall Y hat $2n$ Seiten der Dimension $n-1$, nämlich für jedes i die beiden gegenüberliegenden Seiten

$$S_i^0 = \{y : y_i = 0 \,,\ y_j \in [0, l_j] \text{ für } j \neq i\} \,, \quad S_i^1 = \{y : y_i = l_i \,,\ y_j \in [0, l_j] \text{ für } j \neq i\} \,. \tag{6.5}$$

Die Periodizitätsbedingung

$$v(x + l_i e_i) = v(x) \,, \quad x \in S_i^0 \,, \tag{6.6}$$

für $v \in C^\infty_{\text{per}}(Y)$ überträgt sich auch auf Funktionen $v \in H^1_{\text{per}}(Y)$ im Sinne der Spur,

$$(\gamma v)(x + l_i e_i) = (\gamma v)(x) \,, \quad x \in S_i^0 \,, \tag{6.7}$$

da die Spurabbildungen stetig bezüglich der H^1-Norm sind, siehe Kapitel 9, Teil 1.

Im folgenden Satz bezeichnen wir der Deutlichkeit halber mit v_p die Y-periodische Fortsetzung einer Funktion $v : Y \to \mathbb{R}$. Wegen (6.7) ist für $v \in H^1_{\text{per}}(Y)$ die Spur γv_p auf dem Gitter

$$G = \bigcup \{x + \partial Y : x = \sum_{i=1}^{n} j_i l_i,\ j_i \in \mathbb{Z}\} \tag{6.8}$$

wohldefiniert (fast überall auf jeder Seite der Dimension $n-1$).

Satz 6.3 *Sei $v \in H^1_{per}(Y)$. Dann ist $v_p|\Omega \in H^1(\Omega)$ für jede beschränkte offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, und*

$$\partial_i v_p = (\partial_i v)_p \,, \quad 1 \le i \le n \,. \tag{6.9}$$

Beweis: Sei $\partial_i v_p$ die distributionelle Ableitung von v_p im $\mathbb{R}^n$, sei $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Wir überdecken $\operatorname{supp}(\varphi)$ durch ein offenes Intervall I, welches aus verschobenen Intervallen

$$Y_k = y^k + Y \,, \quad y_i^k = j_i l_i \,, \quad j_i \in \mathbb{Z} \,, \tag{6.10}$$

zusammengesetzt ist, so dass

$$\operatorname{supp}(\varphi) \subset \Omega \subset I \,, \quad \overline{I} = \left(\bigcup_k \overline{Y_k} \right) . \tag{6.11}$$

Nach Definition der distributionellen Ableitung gilt

$$(\partial_i v_p)(\varphi) = -\int_\Omega v_p(x) \partial_i \varphi(x) \, dx = -\sum_k \int_{Y_k} v_p(x) \partial_i \varphi(x) \, dx \,. \tag{6.12}$$

Transformation auf Y und partielle Integration ergibt

$$\begin{aligned} \int_{Y_k} v_p(x) \partial_i \varphi(x) \, dx &= \int_Y v(x) \partial_i \varphi(x - y^k) \, dx \\ &= -\int_Y (\partial_i v)(x) \varphi(x - y^k) \, dx + \int_{\partial Y} (\gamma v)(\xi) \varphi(\xi - y^k) \nu_i(\xi) \, dS(\xi) \end{aligned}$$

also insgesamt

$$(\partial_i v_p)(\varphi) = \sum_k \int_{Y_k} (\partial_i v)_p(x) \varphi(x) \, dx - \sum_k \int_{\partial Y_k} (\gamma v_p)(\xi) \varphi(\xi) \nu_i(\xi) \, dS(\xi) \,. \tag{6.13}$$

Die zweite Summe ist gleich Null, da auf den Seiten von ∂Y_k, die gleichzeitig zu ∂I gehören, $\varphi = 0$ gilt, und alle anderen Seiten genau zwei Randterme mit entgegengesetzten Vorzeichen liefern. Es folgt

$$(\partial_i v_p)(\varphi) = \int_\Omega (\partial_i v)_p(x) \varphi(x) \, dx \tag{6.14}$$

und damit die Behauptung, da φ beliebig war. □

Lemma 6.4 *Seien $v, w \in H^1_{per}(Y)$. Dann gilt für alle i*

$$\int_Y v(y) \partial_i w(y) \, dy = -\int_Y w(y) \partial_i v(y) \, dy \,. \tag{6.15}$$

Insbesondere gilt

$$\int_Y \nabla v(y) \, dy = 0 \,. \tag{6.16}$$

Beweis: Für den Randterm gilt wegen der Periodizität

$$\int_{\partial Y} [(\gamma v)(\gamma w)\nu](\xi)\, dS(\xi) = 0\,.$$

□

Da die Lösungen von (6.1), (6.2) nur bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt sein können, betrachten wir den Raum

$$\tilde{H}(Y) = H^1_{\text{per}}(Y)/\mathbb{R}\,. \tag{6.17}$$

Die Elemente von $\tilde{H}(Y)$ sind Äquivalenzklassen $[v]$ von Funktionen $v \in H^1_{\text{per}}(Y)$ mit

$$[u] = [v] \quad \Leftrightarrow \quad u - v \text{ ist konstant} \quad \Leftrightarrow \quad \nabla u = \nabla v\,. \tag{6.18}$$

Die kanonische Norm in $\tilde{H}(Y)$ ist die Quotientennorm

$$\|[v]\|_{\tilde{H}(Y)} = \inf_{w\in[v]} \|w\|_{H^1(Y)} = \inf_{c\in\mathbb{R}} \|v - c\|_{H^1(Y)}\,. \tag{6.19}$$

Satz 6.5 *Durch $[v] \mapsto \|\nabla v\|_{L^2(Y)}$ wird eine Norm auf $\tilde{H}(Y)$ definiert, so dass $\tilde{H}(Y)$ ein Banachraum wird, und es gibt eine Konstante $C > 0$ mit*

$$\|\nabla v\|_{L^2(Y)} \le \|[v]\|_{\tilde{H}(Y)} \le \|v - M_Y(v)\|_{H^1(Y)} \le C\|\nabla v\|_{L^2(Y)} \tag{6.20}$$

für alle $v \in H^1(Y)$.

Es gilt

$$\|\nabla v\|_{L^2(Y)} = \inf_{c\in\mathbb{R}} \|\nabla(v-c)\|_{L^2(Y)} \le \|[v]\|_{\tilde{H}(Y)} \le \|v - M_Y(v)\|_{H^1(Y)} \le C\|\nabla v\|_{L^2(Y)}\,,$$

wobei die letzte Ungleichung (und die Existenz von C) aus der Ungleichung von Poincaré für Mittelwerte (Satz 5.9) folgt. Dass $\tilde{H}(Y)$ bezüglich der nach (6.20) äquivalenten Quotientennorm (6.19) ein Banachraum ist, liefert ein allgemeiner Satz der Funktionalanalysis. □

Im Folgenden werden wir für die Elemente von $\tilde{H}(Y)$ ebenfalls v statt $[v]$ schreiben.

Wir kehren zurück zum Randwertproblem

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_j(a_{ij}(y)\partial_i u) = f\,, \quad \text{in } Y, \tag{6.21}$$

$$u \quad Y\text{-periodisch.} \tag{6.22}$$

Wir betrachten die Variationsformulierung: Gesucht $u \in \tilde{H}(Y)$ mit

$$a(u,v) = F(v)\,, \quad \text{für alle } v \in \tilde{H}(Y). \tag{6.23}$$

Hierbei ist wie früher

$$a(u,v) = \int_Y \nabla u(y)^T A(y) \nabla v(y)\, dy\,, \quad F(v) = \int_Y f(y)v(y)\, dy\,. \tag{6.24}$$

Wegen (6.18) ist a auf $\tilde{H}(Y)$ wohldefiniert. Für F gilt das zunächst nicht, wir müssen zusätzlich verlangen, dass

$$\int_Y f(y)\,dy = 0 \tag{6.25}$$

gilt. Dann ist nämlich

$$\int_Y f(y)v(y)\,dy = \int_Y f(y)(v(y) - c)\,dy\,, \quad \text{für alle } c \in \mathbb{R}. \tag{6.26}$$

Satz 6.6 (Eindeutige Lösbarkeit, periodische Randbedingungen)
Es gelte Voraussetzung 6.1. Dann hat das Variationsproblem (6.23) eine eindeutige Lösung $u \in \tilde{H}(Y)$ für jedes $f \in L^2(Y)$, welches (6.25) erfüllt, und es gilt

$$\|u\|_{\tilde{H}(Y)} \le \frac{C}{c_a} \|f\|_{L^2(Y)}\,, \tag{6.27}$$

wobei C die Konstante aus der Ungleichung von Poincaré für Mittelwerte für Y ist.

Beweis: Die Bilinearform a ist stetig und $\tilde{H}(Y)$-elliptisch. Für die rechte Seite F gilt für alle v

$$\begin{aligned}|F(v)| &= \left|\int_Y f(y)v(y)\,dy\right| = \left|\int_Y f(y)(v(y) - M_Y(v))\,dy\right| \le \|f\|_{L^2(Y)}\,\|v - M_Y(v)\|_{L^2(Y)} \\ &\le \|f\|_{L^2(Y)} C \|\nabla v\|_{L^2(Y)} \le C\|f\|_{L^2(Y)}\|v\|_{\tilde{H}(Y)}\,,\end{aligned}$$

wobei wir wieder Satz 5.9 verwendet haben. Die Linearform F ist also ebenfalls stetig. Die Behauptung folgt nun aus dem Satz von Lax-Milgram. □

Wir können die Mehrdeutigkeit im Randwertproblem beseitigen, indem wir die Lösung normieren. Wir betrachten

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_j(a_{ij}(y)\partial_i u) = f\,, \quad \text{in } Y, \tag{6.28}$$

$$u \quad Y\text{-periodisch}, \tag{6.29}$$

$$M_Y(u) = 0\,. \tag{6.30}$$

Folgerung 6.7 *Unter den Voraussetzungen von Satz 6.6 hat das Randwertproblem (6.28) – (6.30) eine eindeutige schwache Lösung $u \in H^1_{per}(Y)$.*

Beweis: Nach Satz 6.6 gibt es eine eindeutige Lösung in $H^1_{\text{per}}(Y)$. Aus dieser Äquivalenzklasse wählen wir dasjenige u, welches zusätzlich die Bedingung (6.30) erfüllt. □

Ein alternatives Vorgehen ist das folgende. Wir definieren

$$H_M(Y) = \{v : v \in H^1_{\text{per}}(Y),\ M_Y(v) = 0\}\,. \tag{6.31}$$

$H_M(Y)$ ist ein abgeschlossener Unterraum von $H^1_{\text{per}}(Y)$, da $v \mapsto M_Y(v)$ stetig ist, also ein Banachraum.

Lemma 6.8 *Durch $[v] \mapsto \|\nabla v\|_{L^2(Y)}$ wird eine Norm auf $H_M(Y)$ definiert, welche zur H^1-Norm äquivalent ist.*

Beweis: Nach Satz 5.9 gilt

$$\|v\|_{L^2(Y)} \le C\|\nabla v\|_{L^2(Y)}\,, \quad \text{für alle } v \in H_M(Y),$$

mit einer geeigneten Konstante C, woraus die Behauptung folgt. □

Eine Variationsformulierung des periodischen Randwertproblems im Raum $H_M(Y)$ ist nun gegeben durch

$$\text{gesucht } u \in H_M(Y), \text{ so dass } a(u,v) = F(v) \text{ für alle } v \in H_M(Y). \tag{6.32}$$

Hierbei ist $F : H_M(Y) \to \mathbb{R}$ eine lineare stetige Abbildung und a wie in (6.24). Wir betrachten F in der Form

$$F(v) = \int_Y \langle h(y), \nabla v(y)\rangle \; dy\,, \quad h : Y \to \mathbb{R}^n\,. \tag{6.33}$$

Satz 6.9 (Eindeutige Lösbarkeit, zweite Version)
Es gelte Voraussetzung 6.1. Dann hat das Variationsproblem (6.32), (6.33) eine eindeutige Lösung $u \in H_M(Y)$ für jedes $h \in L^2(Y)^n$, und es gilt

$$\|\nabla u\|_{L^2(Y)} \le \frac{1}{c_a}\|h\|_{L^2(Y)^n}\,. \tag{6.34}$$

Beweis: Auch dieser Satz folgt direkt aus dem Satz von Lax-Milgram, wobei wir die Norm aus Lemma 6.8 zugrundelegen. □

Ist $h \in H^1_{\text{per}}(Y)$, so gilt nach Lemma 6.4, angewendet mit $w = h_i$,

$$F(v) = \int_Y \langle h(y), \nabla v(y)\rangle \; dy = -\int_Y v(y)(\operatorname{div} h)(y)\, dy\,. \tag{6.35}$$

Das entsprechende Randwertproblem ist

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^n \partial_j(a_{ij}(y)\partial_i u) = -\operatorname{div} h\,, \quad \text{in } Y, \tag{6.36}$$

$$u \quad Y\text{-periodisch}, \tag{6.37}$$

$$M_Y(u) = 0\,. \tag{6.38}$$

Es fragt sich nun, ob die periodische Fortsetzung u_p der Lösung u von (6.32), (6.33) eine schwache Lösung der partiellen Differentialgleichung mit periodisch fortgesetzten Koeffizienten A_p und periodisch fortgesetzter rechter Seite h_p ist. Im Distributionensinn ist das jedenfalls richtig, wie der nächste Satz zeigt.

Satz 6.10 *Es gelte Voraussetzung 6.1. Ist $u \in H_M(Y)$ die Lösung von (6.32), (6.33) zu $h \in L^2(Y)^n$, so gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla u_p(x)^T A_p(x) \nabla\varphi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \langle h_p(x), \nabla\varphi(x)\rangle \; dx \tag{6.39}$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Beweis: Sei $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Sei $(Y_k)_{k\in K}$ eine endliche offene Überdeckung von $\operatorname{supp}(\varphi)$ mit verschobenen Intervallen $Y_k = y^k + Y$, sei $(\psi_k)_{k\in K}$ eine zugeordnete C^∞-Zerlegung der Eins. Sei für jedes $k \in K$ die Funktion $(\varphi\psi_k)_p$ definiert als die Y-periodische Fortsetzung von $(\varphi\psi_k)|Y_k$. Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla u_p(x)^T A_p(x) \nabla\varphi(x)\, dx = \sum_{k\in K} \int_{Y_k} \nabla u_p(x)^T A_p(x) \nabla(\varphi\psi_k)(x)\, dx$$
$$= \sum_{k\in K} \int_Y \nabla u(x)^T A(x) \nabla(\varphi\psi_k)_p(x)\, dx = \sum_{k\in K} \int_Y \langle h(x), \nabla(\varphi\psi_k)_p(x)\rangle\; dx$$
$$= \sum_{k\in K} \int_{Y_k} \langle h_p(x), \nabla(\varphi\psi_k)(x)\rangle\; dx = \int_{\mathbb{R}^n} \langle h_p(x), \nabla\varphi(x)\rangle\; dx\,.$$

$\square$

7 Homogenisierung: Der mehrdimensionale Fall

Wir betrachten auf einer beschränkten, offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ das Randwertproblem

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \partial_j(a_{ij}^\varepsilon(x)\partial_i u_\varepsilon) = f\,, \quad \text{in } \Omega, \tag{7.1}$$

$$u_\varepsilon = 0\,, \quad \text{auf } \partial\Omega. \tag{7.2}$$

Die Koeffizienten sind gegeben durch

$$a_{ij}^\varepsilon(x) = a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\,, \quad 1 \le i,j \le n\,, \tag{7.3}$$

In Matrixschreibweise wird (7.1), (7.3) zu

$$-\mathrm{div}\,(A^\varepsilon(x)^T \nabla u) = f\,, \quad A^\varepsilon(x) = A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\,. \tag{7.4}$$

Sei

$$Y = \prod_{i=1}^{n}(0, l_i) \tag{7.5}$$

wieder ein festes Referenzintervall.

Voraussetzung 7.1 *Seien $a_{ij} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ Y-periodisch und gleichmäßig elliptisch mit Elliptizitätskonstante c_a.* □

Gilt diese Voraussetzung, so hat, wie wir wissen, das Randwertproblem (7.1), (7.2) für jedes $f \in L^2(\Omega)$ eine eindeutige schwache Lösung $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega \nabla u_\varepsilon(x)^T A^\varepsilon(x) \nabla v(x)\, dx = \int_\Omega f(x)v(x)\, dx\,, \quad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega). \tag{7.6}$$

Wir suchen eine Koeffizientenmatrix A^0 (die "homogenisierte Koeffizientenmatrix"), so dass die Lösung u_ε von (7.1), (7.2) in einem geeigneten Sinn gegen die Lösung u_0 von

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \partial_j(a_{ij}^0(x)\partial_i u_0) = f\,, \quad \text{in } \Omega, \tag{7.7}$$

$$u_0 = 0\,, \quad \text{auf } \partial\Omega, \tag{7.8}$$

konvergiert. Die Matrix A^0 ergibt sich aus Mittelwerten von Lösungen gewisser Randwertprobleme auf Y mit periodischen Randbedingungen, und zwar auf folgende Weise. Zu jedem $\lambda \in \mathbb{R}^n$ suchen wir eine Lösung $\chi_\lambda \in H_M(Y)$ des Randwertproblems (in der schwachen Formulierung)

$$\tilde{a}(\chi_\lambda, v) = F_\lambda(v)\,, \quad \text{für alle } v \in H_M(Y), \tag{7.9}$$

wobei

$$\tilde{a}(u,v) = \int_Y \nabla u(y)^T A(y)^T \nabla v(y)\, dy = \int_Y \langle A(y)\nabla u(y), \nabla v(y)\rangle\; dy\,, \tag{7.10}$$

$$F_\lambda(v) = \int_Y \lambda^T A(y)^T \nabla v(y)\, dy = \int_Y \langle A(y)\lambda, \nabla v(y)\rangle\; dy\,. \tag{7.11}$$

Dieses Problem hat nach Satz 6.9 eine eindeutige Lösung. Die zugehörige "klassische" Formulierung des Randwertproblems ist

$$-\mathrm{div}\,(A(y)\nabla\chi_\lambda) = -\mathrm{div}\,(A(y)\lambda)\,, \tag{7.12}$$

$$\chi_\lambda \ Y\text{-periodisch},\ M_Y(\chi_\lambda) = 0. \tag{7.13}$$

Ist die Koeffizientenmatrix (schwach) differenzierbar als Funktion von y, so steht auf der rechten Seite von (7.12) eine Funktion. Ist das nicht der Fall, beispielsweise weil A unstetig ist, so kann (7.12) nur im schwachen Sinn (7.9) – (7.11) interpretiert werden, wobei F_λ gemäß (7.11) als Element des Dualraums von $H^{-1}(Y)$ (Dualraum von $H_0^1(Y)$) interpretiert werden kann.

Mit Hilfe von χ_λ definieren wir eine weitere Hilfsfunktion w_λ,

$$w_\lambda(y) = -\chi_\lambda(y) + \lambda^T y\,. \tag{7.14}$$

Die homogenisierte Koeffizientenmatrix erhalten wir aus der Gleichung

$$A^0\lambda = M_Y(A\nabla w_\lambda)\,, \tag{7.15}$$

das heißt, die i-te Spalte von A^0 ergibt sich, indem wir $\lambda = e_i$ in (7.15) setzen. (Wegen der Linearität der Zuordnung $\lambda \mapsto M_Y(A\nabla w_\lambda)$ gilt (7.15) dann tatsächlich für alle $\lambda \in \mathbb{R}^n$.)

Theorem 7.2 (Konvergenzsatz für periodische Homogenisierung)
Es gelte Voraussetzung 7.1, sei die konstante Matrix A^0 durch (7.15) definiert, sei $f \in L^2(\Omega)$. Dann ist A^0 (gleichmäßig) elliptisch, das Randwertproblem (7.7), (7.8) hat eine eindeutige schwache Lösung $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, und für die Lösungen u_ε von (7.1), (7.2) gilt

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u_0 \quad \text{in } H_0^1(\Omega), \tag{7.16}$$

$$(A^\varepsilon)^T\nabla u_\varepsilon \rightharpoonup (A^0)^T\nabla u_0 \quad \text{in } L^2(\Omega)^n. \tag{7.17}$$

Beweis: Wird im Verlaufe dieses Kapitels entwickelt. □

Lemma 7.3 (Schwache Konvergenz von Produkten)
(i) Seien $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folgen in $L^2(\Omega)$ mit

$$v_k \to v \quad \text{in } L^2(\Omega), \quad w_k \rightharpoonup w \quad \text{in } L^2(\Omega). \tag{7.18}$$

Dann gilt

$$\int_\Omega v_k(x)w_k(x)\,dx \to \int_\Omega v(x)w(x)\,dx\,. \tag{7.19}$$

(i) Sei $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folge in $L^\infty(\Omega)$, $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folge in $L^2(\Omega)$ mit

$$v_k \to v \quad \text{gleichmäßig}, \quad w_k \rightharpoonup w \quad \text{in } L^2(\Omega). \tag{7.20}$$

Dann gilt

$$v_k w_k \rightharpoonup vw \quad \text{in } L^2(\Omega). \tag{7.21}$$

Beweis: Übung. □

Wir definieren
$$\xi_\varepsilon(x) = (A^\varepsilon(x))^T \nabla u_\varepsilon(x)\,, \quad x \in \Omega\,. \tag{7.22}$$
Da $A^\varepsilon(x)$ gleichmäßig in x beschränkt ist, ist $\xi_\varepsilon \in L^2(\Omega)^n$.

Lemma 7.4 *Es gibt $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ und $\xi_0 \in L^2(\Omega)^n$, so dass für eine Teilfolge*
$$u_\varepsilon \rightharpoonup u_0 \quad \textit{in } H_0^1(\Omega), \quad u_\varepsilon \to u_0 \quad \textit{in } L^2(\Omega), \tag{7.23}$$
$$\xi_\varepsilon \rightharpoonup \xi_0 \quad \textit{in } L^2(\Omega)^n. \tag{7.24}$$
Es gilt weiter
$$\int_\Omega \langle \xi_\varepsilon, \nabla v\rangle\; dx = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx = \int_\Omega \langle \xi_0, \nabla v\rangle\; dx\,, \tag{7.25}$$
für alle $v \in H_0^1(\Omega)$ und alle $\varepsilon > 0$.

Beweis: Nach Lax-Milgram gilt mit einer geeigneten Konstante C
$$\|u_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \le \frac{C}{c_a}\|f\|_{L^2(\Omega)} \tag{7.26}$$
für alle $\varepsilon > 0$. Die Menge $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ ist also beschränkt im $H_0^1(\Omega)$, es existiert daher eine gegen ein $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ schwach konvergente Teilfolge. Aus Folgerung 5.8 folgt, dass diese Teilfolge im $L^2(\Omega)$ stark gegen u_0 konvergiert. Da $A^\varepsilon(x)$ gleichmäßig in x und ε beschränkt ist, ist $(\xi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ beschränkt im $L^2(\Omega)^n$, es gilt also (7.24) für eine weitere Teilfolge. Die linke Gleichung in (7.25) ist nichts anderes als (7.6), die rechte Gleichung folgt aus der schwachen Konvergenz $\xi_\varepsilon \rightharpoonup \xi_0$. □

Wir definieren
$$w_\lambda^\varepsilon(x) = \varepsilon w_\lambda\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \lambda^T x - \varepsilon\chi_\lambda\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\,. \tag{7.27}$$

Lemma 7.5 *Sei $\Lambda(x) = \lambda^T x$, dann gilt*
$$w_\lambda^\varepsilon \rightharpoonup \Lambda \quad \textit{in } H^1(\Omega), \quad w_\lambda^\varepsilon \to \Lambda \quad \textit{in } L^2(\Omega), \tag{7.28}$$
letzteres für eine geeignete Teilfolge.

Beweis: Die Funktionen
$$x \mapsto \chi_\lambda\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$
konvergieren nach Satz 5.5 für $\varepsilon \to 0$ schwach im $L^2(\Omega)$ gegen $M_Y(\chi_\lambda) = 0$, also folgt $w_\lambda^\varepsilon \rightharpoonup \Lambda$ im $L^2(\Omega)$. Weiter gilt
$$\nabla w_\lambda^\varepsilon(x) = \lambda - \nabla\chi_\lambda\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\,.$$
Die Funktion $y \mapsto \nabla\chi_\lambda(y)$ ist Y-periodisch, also gilt wiederum nach Satz 5.5
$$\nabla w_\lambda^\varepsilon \rightharpoonup \lambda - M_Y(\nabla\chi_\lambda) \quad \text{in } L^2(\Omega)^n.$$
Nach Lemma 6.4 gilt $M_Y(\nabla\chi_\lambda) = 0$. Damit ist die erste Behauptung in (7.28) gezeigt, die zweite folgt aus der Kompaktheit der Einbettung $H^1(\Omega) \subset\subset L^2(\Omega)$. □

Wir definieren nun
$$\eta_\lambda^\varepsilon(x) = A^\varepsilon(x)\nabla w_\lambda^\varepsilon(x)\,. \tag{7.29}$$

Lemma 7.6 *Es gilt*

$$\eta_\lambda^\varepsilon \rightharpoonup A^0\lambda \quad \text{in } L^2(\Omega)^n, \tag{7.30}$$

sowie

$$\int_\Omega \langle \eta_\lambda^\varepsilon(x), \nabla v(x)\rangle \, dx = 0\,, \quad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega). \tag{7.31}$$

Beweis: Aus

$$\eta_\lambda^\varepsilon(x) = A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla w_\lambda\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

folgt mit Satz 5.5

$$\eta_\lambda^\varepsilon \rightharpoonup M_Y(A\nabla w_\lambda) = A^0\lambda \quad \text{in } L^2(\Omega)^n.$$

Sei nun $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ beliebig. Wir setzen

$$\varphi_\varepsilon(y) = \varphi(\varepsilon y)\,.$$

Dann ist $\varphi_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Wir wenden Satz 6.10 auf das Variationsproblem (7.9) an und erhalten

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle A(y)\nabla\chi_\lambda(y), \nabla\varphi_\varepsilon(y)\rangle \, dy = \int_{\mathbb{R}^n} \langle A(y)\lambda, \nabla\varphi_\varepsilon(y)\rangle \,,$$

also

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}^n} \langle A(y)\nabla w_\lambda(y), \nabla\varphi_\varepsilon(y)\rangle \, dy = \int_{\mathbb{R}^n} \left\langle A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla w_\lambda\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \nabla\varphi_\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right\rangle \, dx \\ &= \int_\Omega \langle \eta_\lambda^\varepsilon(x), \nabla\varphi(x)\rangle \, dx\,. \end{aligned}$$

Da $C_0^\infty(\Omega)$ dicht ist in $H_0^1(\Omega)$, folgt die Behauptung. □

Beweis von Theorem 7.2, Konvergenz. Wir beweisen nun, dass (7.16) und (7.17) für jede konvergente Teilfolge gelten. Sei $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ beliebig. Wir setzen in (7.25) als Testfunktion $v = \varphi w_\lambda^\varepsilon$ ein und erhalten (Argument x weggelassen)

$$\begin{aligned} \int_\Omega f\varphi w_\lambda^\varepsilon \, dx &= \int_\Omega \langle \xi_\varepsilon, \nabla(\varphi w_\lambda^\varepsilon)\rangle \, dx \\ &= \int_\Omega \langle \xi_\varepsilon, \nabla w_\lambda^\varepsilon\rangle \, \varphi \, dx + \int_\Omega \langle \xi_\varepsilon, \nabla\varphi\rangle \, w_\lambda^\varepsilon \, dx\,. \end{aligned} \tag{7.32}$$

Wir setzen in (7.31) als Testfunktion $v = \varphi u_\varepsilon$ ein und erhalten

$$0 = \int_\Omega \langle \eta_\lambda^\varepsilon, \nabla(\varphi u_\varepsilon)\rangle \, dx = \int_\Omega \langle \eta_\lambda^\varepsilon, \nabla u_\varepsilon\rangle \, \varphi \, dx + \int_\Omega \langle \eta_\lambda^\varepsilon, \nabla\varphi\rangle \, u_\varepsilon \, dx\,. \tag{7.33}$$

In (7.32) und (7.33) sind die beiden Faktoren in den Skalarprodukten des jeweils ersten Integrals auf der rechten Seite nur schwach konvergent, so dass wir nicht zum Grenzwert übergehen können. Nach Definition von ξ_ε und η_λ^ε gilt aber

$$\langle \xi_\varepsilon, \nabla w_\lambda^\varepsilon\rangle = \left\langle A^{\varepsilon T}\nabla u_\varepsilon, \nabla w_\lambda^\varepsilon\right\rangle = \langle \nabla u_\varepsilon, A^\varepsilon \nabla w_\lambda^\varepsilon\rangle = \langle \nabla u_\varepsilon, \eta_\lambda^\varepsilon\rangle \,. \tag{7.34}$$

Wir subtrahieren (7.33) von (7.32) und erhalten wegen (7.34)

$$\int_\Omega \langle \xi_\varepsilon, \nabla\varphi\rangle \, w_\lambda^\varepsilon \, dx - \int_\Omega \langle \eta_\lambda^\varepsilon, \nabla\varphi\rangle \, u_\varepsilon \, dx = \int_\Omega f\varphi w_\lambda^\varepsilon \, dx\,. \tag{7.35}$$

Hier können wir nun einen Grenzübergang durchführen. Nach Lemma 7.4, Lemma 7.5 und Lemma 7.3 gilt

$$\int_\Omega \langle \xi_\varepsilon, \nabla\varphi\rangle \, w_\lambda^\varepsilon \, dx \to \int_\Omega \langle \xi_0, \nabla\varphi\rangle \, \Lambda \, dx \tag{7.36}$$

für eine Teilfolge, nach Lemma 7.4, Lemma 7.6 und Lemma 7.3 gilt

$$\int_\Omega \langle \eta_\lambda^\varepsilon, \nabla\varphi\rangle \, u_\varepsilon \, dx \to \int_\Omega \left\langle A^0\lambda, \nabla\varphi\right\rangle u_0 \, dx \tag{7.37}$$

für eine Teilfolge, und weiter

$$\int_\Omega f\varphi w_\lambda^\varepsilon \, dx \to \int_\Omega f\varphi\Lambda \, dx \, . \tag{7.38}$$

Es ergibt sich also

$$\int_\Omega \langle \xi_0, \nabla\varphi\rangle \, \Lambda \, dx - \int_\Omega \left\langle A^0\lambda, \nabla\varphi\right\rangle u_0 \, dx = \int_\Omega f\varphi\Lambda \, dx \, . \tag{7.39}$$

Wir setzen nun in (7.25) als Testfunktion $v = \varphi\Lambda$ und erhalten

$$\int_\Omega f\varphi\Lambda \, dx = \int_\Omega \langle \xi_0, \nabla(\varphi\Lambda)\rangle \; dx = \int_\Omega \langle \xi_0, \nabla\varphi\rangle \, \Lambda \, dx + \int_\Omega \langle \xi_0, \lambda\rangle \, \varphi \, dx \, . \tag{7.40}$$

Setzen wir (7.40) in (7.39) ein, so ergibt sich, da $A^0\lambda$ eine Konstante ist,

$$\int_\Omega \langle \xi_0, \lambda\rangle \, \varphi \, dx = -\int_\Omega \left\langle A^0\lambda, \nabla\varphi\right\rangle u_0 \, dx = \int_\Omega \left\langle A^0\lambda, \nabla u_0\right\rangle \varphi \, dx \, , \tag{7.41}$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Hieraus folgt

$$\langle \xi_0, \lambda\rangle = \left\langle A^0\lambda, \nabla u_0\right\rangle = \left\langle (A^0)^T\nabla u_0, \lambda\right\rangle \, . \tag{7.42}$$

Da (7.42) für alle $\lambda \in \mathbb{R}^n$ gilt, folgt

$$\xi_0 = (A^0)^T\nabla u_0 \, . \tag{7.43}$$

□

Wir betrachten nun ein weiteres periodisches Hilfsproblem, was sich von (7.9) – (7.12) nur dadurch unterscheidet, dass die Matrix A durch A^T ersetzt wird. Zu gegebenem $\lambda \in \mathbb{R}^n$ suchen wir $\hat\chi_\lambda \in H_M(Y)$ mit

$$a(\hat\chi_\lambda, v) = \hat F_\lambda(v) \, , \quad \text{für alle } v \in H_M(Y), \tag{7.44}$$

wobei $a(u,v) = \int_Y \nabla u^T A \nabla v \, dy$ wie bisher und

$$\hat F_\lambda(v) = \int_Y \lambda^T A(y)\nabla v(y) \, dy \, . \tag{7.45}$$

Wir setzen

$$\hat w_\lambda(y) = -\hat\chi_\lambda(y) + \lambda^T y \, . \tag{7.46}$$

Lemma 7.7 *Für alle $\lambda \in \mathbb{R}^n$ gilt*

$$(A^0)^T \lambda = M_Y(A^T \nabla \hat{w}_\lambda)\,. \tag{7.47}$$

Beweis: Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^n$ beliebig, dann gilt nach Definition von A^0

$$\mu^T (A^0)^T \lambda = \lambda^T A^0 \mu = \lambda^T M_Y(A \nabla w_\mu) = \lambda^T M_Y(A\mu) - \lambda^T M_Y(A \nabla \chi_\mu)\,. \tag{7.48}$$

Es ist

$$\lambda^T M_Y(A\mu) = M_Y(\lambda^T A \mu) = M_Y(\mu^T A^T \lambda) = \mu^T M_Y(A^T \lambda)\,. \tag{7.49}$$

Zur Umformung des letzten Terms in (7.48) verwenden wir die Variationsgleichungen für χ_λ und $\hat{\chi}_\lambda$. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
|Y| \lambda^T M_Y(A \nabla \chi_\mu) &= \int_Y \lambda^T A(y) \nabla \chi_\mu(y)\, dy = \int_Y \nabla \hat{\chi}_\lambda(y)^T A(y) \nabla \chi_\mu(y)\, dy \\
&= \int_Y \nabla \chi_\mu(y)^T A(y)^T \nabla \hat{\chi}_\lambda(y)\, dy = \int_Y \mu^T A(y)^T \nabla \hat{\chi}_\lambda(y)\, dy \\
&= |Y| \mu^T M_Y(A^T \nabla \hat{\chi}_\lambda)\,.
\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir

$$\mu^T (A^0)^T \lambda = \mu^T M_Y(A^T \lambda - A^T \nabla \hat{\chi}_\lambda) = M_Y(A^T \nabla \hat{w}_\lambda)\,.$$

□

Folgerung 7.8 *Für die homogenisierte Matrix A^0 gilt*

$$(A^T)^0 = (A^0)^T\,. \tag{7.50}$$

Ist A symmetrisch, so auch A^0.

Beweis: Wenden wir Theorem 7.2 auf das Randwertproblem mit A^T statt A an, so gilt nach Definition der periodischen Hilfsprobleme

$$(A^T)^0 \lambda = M_Y(A^T \nabla \hat{w}_\lambda)\,.$$

Mit Lemma 7.7 folgt (7.50). Ist A symmetrisch, so folgt

$$(A^0)^T = (A^T)^0 = A^0\,.$$

□

Indem wir $\lambda = e_j$ setzen, erhalten wir aus der definierenden Gleichung von A^0 Formeln für die Elemente a^0_{ij}. Wir setzen $\chi_j = \chi_{e_j}$, $w_j = w_{e_j}$, also gilt

$$\chi_j(y) + w_j(y) = e_y^T y = y_j\,. \tag{7.51}$$

Lemma 7.9 *Es gilt*

$$a^0_{ij} = M_Y(e_i^T A \nabla w_j) = M_Y(a_{ij}) - M_Y\left(\sum_{k=1}^n a_{ik} \partial_k \chi_j\right)\,. \tag{7.52}$$

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned} a^0_{ij} &= e_i^T A^0 e_j = e_i^T M_Y(A\nabla w_j) = M_Y(e_i^T A \nabla w_j) \\ &= M_Y(e_i^T A e_j) - M_Y(e_i^T A \nabla \chi_j) = M_Y(a_{ij}) - M_Y\left(\sum_{k=1}^n a_{ik}\partial_k \chi_j\right) . \end{aligned}$$

□

Die Differenz $A^0 - M_Y(A)$ ist also die Matrix mit den Elementen $M_Y(e_i^T A\nabla\chi_j)$. Aus diesem Grund werden die Funktionen χ_j als Korrektoren bezeichnet.

Lemma 7.10 *Es gilt*

$$a^0_{ij} = M_Y(\nabla w_j^T A^T \nabla w_i) . \tag{7.53}$$

Beweis: Wir setzen χ_i als Testfunktion in (7.9) ein,

$$\tilde{a}(\chi_j, \chi_i) = F_j(\chi) , \quad F_j := F_{e_j} ,$$

also

$$\int_Y \nabla \chi_j^T A^T \nabla \chi_i \, dy = \int_Y e_j^T A^T \nabla \chi_i \, dy ,$$

also

$$0 = M_Y(\nabla w_j^T A^T \nabla \chi_i) . \tag{7.54}$$

Aus Lemma 7.9 erhalten wir

$$a^0_{ij} = M_Y(e_i^T A \nabla w_j) = M_Y(\nabla w_j^T A^T \nabla e_i) . \tag{7.55}$$

Indem wir (7.54) von (7.55) subtrahieren, erhalten wir (7.53). □

Lemma 7.11 A^0 *ist positiv definit.*

Beweis: Sei $\xi \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Dann gilt nach Lemma 7.10

$$\xi^T A^0 \xi = \sum_{i,j=1}^n \xi_i a^0_{ij} \xi_j = \sum_{i,j=1}^n \xi_i M_Y(\nabla w_j^T A^T \nabla w_i)\xi_j = \sum_{i,j=1}^n M_Y(\xi_j \nabla w_j^T A^T \nabla w_i \xi_i) . \tag{7.56}$$

Wir setzen

$$\zeta(y) = \sum_{k=1}^n \xi_k w_k(y) . \tag{7.57}$$

Aus (7.56) folgt nun

$$\xi^T A^0 \xi = M_Y(\nabla\zeta^T A^T \nabla\zeta) = M_Y(\nabla\zeta^T A \nabla\zeta) \geq 0 , \tag{7.58}$$

da nach Voraussetzung an A

$$\nabla\zeta^T(y) A(y) \nabla\zeta(y) \geq 0 , \quad \text{fast überall in } Y. \tag{7.59}$$

Wir nehmen an, es gebe ein $\xi \neq 0$ mit $\xi^T A^0 \xi = 0$. Dann folgt aus (7.58) und (7.59)

$$\nabla\zeta^T(y) A(y) \nabla\zeta(y) = 0 , \quad \text{fast überall in } Y. \tag{7.60}$$

Da A gleichmäßig elliptisch ist, folgt $\nabla\zeta = 0$ fast überall in Y und weiter, da $M_Y(\nabla\chi_k) = 0$ nach Lemma 6.4,

$$0 = M_Y(\nabla\zeta) = \sum_{k=1}^n \xi_k M_Y(\nabla w_k) = \sum_{k=1}^n \xi_k M_Y(e_k - \nabla\chi_k) = \sum_{k=1}^n \xi_k M_Y(e_k) = \sum_{k=1}^n \xi_k e_k$$
$$= \xi\,,$$

ein Widerspruch zur Annahme $\xi \neq 0$. $\square$

Abschluss des Beweises von Theorem 7.2. Für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $\xi \neq 0$ gilt

$$\xi^T A^0 \xi = |\xi|^2 \frac{\xi^T}{|\xi|} A^0 \frac{\xi}{|\xi|} \geq c_0 |\xi|^2\,, \tag{7.61}$$

wobei

$$c_0 := \min_{|e|=1} e^T A^0 e > 0 \tag{7.62}$$

wegen Lemma 7.11 und der Kompaktheit der Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$. Also ist A^0 gleichmäßig elliptisch. Die Lösung u_0 von (7.7), (7.8) ist also nach dem Satz von Lax-Milgram eindeutig bestimmt. Nach dem bisher Bewiesenen gilt: Ist $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, so gibt es eine Teilfolge $(\varepsilon_{k_m})_{m\in\mathbb{N}}$ mit

$$u_{\varepsilon_{k_m}} \rightharpoonup u_0\,.$$

Hieraus folgt aber, dass $u_{\varepsilon_k} \rightharpoonup u_0$ gilt für jede Nullfolge $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Damit ist Theorem 7.2 vollständig bewiesen. $\square$

Wir wenden nun Theorem 7.2 in zwei Situationen an, in denen wir die homogenisierte Matrix A^0 explizit berechnen können. Wir reproduzieren zunächst für den eindimensionalen Fall das Ergebnis aus Kapitel 4. Wir betrachten

$$-\partial_x \left(a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \partial_x u_\varepsilon \right) = f\,, \quad \text{in } \Omega = (d_1, d_2), \tag{7.63}$$

$$u_\varepsilon(d_1) = u_\varepsilon(d_2) = 0\,. \tag{7.64}$$

Auf dem Periodenintervall $Y = (0, l_1)$ lautet das Hilfsproblem

$$\int_Y \chi'(y) a(y) v'(y)\, dy = \int_Y a(y) v'(y)\, dy\,, \quad \text{für alle } v \in H_M(y), \tag{7.65}$$

welches eine eindeutige Lösung $\chi \in H_M(Y)$ hat. Für beliebiges $v \in C_0^\infty(Y)$ gilt $v - M_Y(v) \in H_M(Y)$, also

$$\int_Y (\chi'(y)a(y) - a(y)) v'(y)\, dy = 0\,. \tag{7.66}$$

Es folgt

$$\chi'(y)a(y) - a(y) = c \in \mathbb{R}\,, \tag{7.67}$$

da nach (7.66) die distributionelle Ableitung der linken Seite von (7.67) gleich Null ist. Es gilt weiter

$$\chi'(y) = \frac{c}{a(y)} + 1\,, \quad w'(y) = 1 - \chi'(y) = -\frac{c}{a(y)}\,. \tag{7.68}$$

Nach Definition von a^0 gilt

$$a^0 = M_Y(aw') = M_Y(-c) = -c\,. \tag{7.69}$$

Da χ Y-periodisch ist, gilt

$$0 = \int_Y \chi'(y)\,dy = l_1 + l_1 c M_Y\left(\frac{1}{a}\right)\,, \tag{7.70}$$

also

$$c = -\left(M_Y\left(\frac{1}{a}\right)\right)^{-1}\,,\quad a^0 = \left(M_Y\left(\frac{1}{a}\right)\right)^{-1}\,. \tag{7.71}$$

Als zweites Beispiel betrachten wir ein geschichtetes zweidimensionales Medium, das heißt, $n = 2$, $Y = Y_1 \times Y_2 = (0, l_1) \times (0, l_2)$, und A hängt nur von y_1 ab, $\partial_2 A = 0$. Es ergibt sich das Problem

$$-\sum_{i,j=1}^{2} \partial_j \left(a_{ij}\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)\partial_i u_\varepsilon(x_1, x_2)\right) = f(x_1, x_2)\,,\quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \tag{7.72}$$

$$u_\varepsilon = 0\,,\quad \text{auf } \partial\Omega. \tag{7.73}$$

Wir berechnen die Koeffizienten von A^0. Das periodische Problem

$$\int_Y \nabla\chi_j^T A^T \nabla v\,dy = \int_Y e_j^T A^T \nabla v\,dy\,,\quad \text{für alle } v \in H_M(Y), \tag{7.74}$$

hat eine eindeutige Lösung χ_j für $j = 1, 2$. Wir wollen zeigen, dass sie nur von y_1 abhängt, und dass sie aus der Lösung eines eindimensionalen Problems erhalten werden kann. Zu diesem Zweck betrachten wir die eindeutige Lösung $\tilde{\chi}_j \in H_M(Y_1)$ des periodischen Problems

$$\int_{Y_1} \tilde{\chi}_j'(y_1) a_{11}(y_1) \tilde{v}'(y_1)\,dy_1 = \int_{Y_1} a_{1j}(y_1)\tilde{v}'(y_1)\,dy_1\,,\quad \text{für alle } \tilde{v} \in H_M(Y_1). \tag{7.75}$$

Ist $v \in H_M(Y)$, und definieren wir

$$\tilde{v}(y_1) = \int_{Y_2} v(y_1, y_2)\,dy_2\,, \tag{7.76}$$

so ist

$$\tilde{v} \in H_M(Y_1)\,,\quad \tilde{v}'(y_1) = \int_{Y_2} \partial_1 v(y_1, y_2)\,dy_2\,. \tag{7.77}$$

Wir definieren nun

$$\chi_j(y_1, y_2) = \tilde{\chi}_j(y_1)\,. \tag{7.78}$$

Für beliebiges $v \in H_M(Y)$ gilt dann

$$\int_{Y_2} \partial_2 v(y_1, y_2)\,dy_2 = v(y_1, l_2) - v(y_1, 0) = 0\,, \tag{7.79}$$

und aus (7.75) – (7.77) folgt nun

$$\begin{aligned}\int_Y \nabla\chi_j^T A^T \nabla v\,dy &= \int_Y \tilde{\chi}_j'(y_1)[a_{11}(y_1)\partial_1 v(y_1,y_2) + a_{21}(y_1)\partial_2 v(y_1,y_2)]\,dy \\ &= \int_{Y_1} \tilde{\chi}_j'(y_1)a_{11}(y_1)\int_{Y_2} \partial_1 v(y_1,y_2)\,dy_2\,dy_1 \\ &= \int_{Y_1} a_{1j}(y_1)\int_{Y_2} \partial_1 v(y_1,y_2)\,dy_2\,dy_1 = \int_Y e_j^T A^T \nabla v\,dy\,,\end{aligned}$$

also ist die durch (7.78) definierte Funktion $\chi_j \in H_M(Y)$ tatsächlich die Lösung von (7.74). Wir können nun $\tilde{\chi}_j$ analog zum eindimensionalen Fall berechnen. Es gilt

$$\tilde{\chi}_j'(y_1)a_{11}(y_1) - a_{1j}(y_1) = c_j\,, \quad j = 1,2\,, \tag{7.80}$$

und die Periodizität von $\tilde{\chi}_j$ liefert

$$0 = \int_{Y_1} \tilde{\chi}_j'(y_1)\,dy_1 = c_j M_{Y_1}\left(\frac{1}{a_{11}}\right) + M_{Y_1}\left(\frac{a_{1j}}{a_{11}}\right)\,. \tag{7.81}$$

Die Koeffizienten von A^0 erhalten wir aus Lemma 7.9. Es gilt

$$a_{ij}^0 = M_Y(a_{ij}) - M_Y(a_{i1}\partial_1\chi_j + a_{i2}\partial_1\chi_j) = M_Y(a_{ij} - a_{i1}\tilde{\chi}_j')\,. \tag{7.82}$$

Wir betrachten den Fall $j = 1$. Es ist nach (7.80)

$$1 - \tilde{\chi}' = -\frac{c}{a_{11}}\,, \quad c_1 = -\left(M_{Y_1}\left(\frac{1}{a_{11}}\right)\right)^{-1}\,, \tag{7.83}$$

also

$$a_{11}^0 = M_Y(a_{11} - a_{11}\tilde{\chi}_1') = M_Y(-c_1) = -c_1 = \left(M_{Y_1}\left(\frac{1}{a_{11}}\right)\right)^{-1}\,, \tag{7.84}$$

$$a_{21}^0 = M_Y(a_{21} - a_{21}\tilde{\chi}_1') = M_Y\left(-a_{21}\frac{c_1}{a_{11}}\right) = a_{11}^0 M_{Y_1}\left(\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)\,. \tag{7.85}$$

Im Fall $j = 2$ gilt

$$\tilde{\chi}_2' = \frac{c_2}{a_{11}} + \frac{a_{12}}{a_{11}}\,, \quad c_2 = -a_{11}^0 M_{Y_1}\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}\right)\,. \tag{7.86}$$

Hieraus folgt schließlich

$$a_{12}^0 = M_Y(a_{12} - a_{11}\tilde{\chi}_2') = M_Y(-c_2) = -c_2 = a_{11}^0 M_{Y_1}\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}\right)\,, \tag{7.87}$$

und

$$\begin{aligned}a_{22}^0 &= M_Y(a_{22} - a_{21}\tilde{\chi}_2') = M_Y\left(a_{22} - a_{21}\left(\frac{c_2}{a_{11}} + \frac{a_{12}}{a_{11}}\right)\right) \\ &= M_{Y_1}\left(a_{22} - a_{21}\frac{a_{12}}{a_{11}}\right) + a_{11}^0 M_{Y_1}\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}\right) M_{Y_1}\left(\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)\,.\end{aligned} \tag{7.88}$$

Insbesondere ergibt sich, dass A^0 diagonal ist, falls A diagonal ist.

8 Homogenisierung: Asymptotischer Ansatz

Wir betrachten noch einmal das Problem

$$L_\varepsilon u_\varepsilon = -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_j (a_{ij}^\varepsilon(x) \partial_i u_\varepsilon) = f \,, \quad \text{in } \Omega, \tag{8.1}$$

$$u_\varepsilon = 0 \,, \quad \text{auf } \partial\Omega, \tag{8.2}$$

mit den Koeffizienten

$$a_{ij}^\varepsilon(x) = a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \,, \quad 1 \le i,j \le n \,. \tag{8.3}$$

In diesem Problem tauchen zwei Skalen auf, repräsentiert durch $x \in \Omega$ und $y \in Y = \prod_{i=1}^n (0, l_i)$, verknüpft durch

$$y = \frac{x}{\varepsilon} \,. \tag{8.4}$$

Der Parameter ε ist "klein". Der asymptotische Ansatz besteht darin, die Lösung in Form einer Reihenentwicklung bezüglich ε zu suchen und dabei die Existenz zweier Skalen zu berücksichtigen,

$$u_\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{M} \varepsilon^k u_k\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + R_{M+1}\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \,. \tag{8.5}$$

Die Funktionen u_k sollen Y-periodisch im zweiten Argument sein, also

$$u_k : \Omega \times Y \to \mathbb{R} \,, \quad y \mapsto u_k(x,y) \quad \text{ist } Y\text{-periodisch für alle } x \in \Omega. \tag{8.6}$$

Der asymptotische Ansatz dient dazu, Formeln für Lösungen in bestimmten Darstellungen wie beispielsweise (8.5) herzuleiten. Bei diesen Herleitungen geht man davon aus, dass die beteiligten Funktionen existieren und hinreichend glatt sind. Ob das der Fall ist, wird in der Regel mit anderen Methoden geklärt, siehe etwa Kapitel 5 - 7.

Sei zunächst $z : \Omega \times Y \to \mathbb{R}$ irgendeine hinreichend glatte Funktion. Wir setzen

$$z_\varepsilon(x) = z\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \,. \tag{8.7}$$

Für die Ableitungen gilt, sortiert nach Potenzen von ε,

$$\partial_i z_\varepsilon(x) = \partial_{x_i} z\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \frac{1}{\varepsilon} \partial_{y_i} z\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \,, \tag{8.8}$$

$$\partial_j \partial_i z_\varepsilon = \partial_{x_j} \partial_{x_i} z + \frac{1}{\varepsilon}\left[\partial_{y_j} \partial_{x_i} z + \partial_{x_j} \partial_{y_i} z\right] + \frac{1}{\varepsilon^2} \partial_{y_j} \partial_{y_i} z \,. \tag{8.9}$$

Für die Koeffizienten $a_{ij} : Y \to \mathbb{R}$, $y \mapsto a_{ij}(y)$, gilt gemäß (8.3)

$$a_{ij}^\varepsilon(x) = a_{ij}(y)\Big|_{y=\frac{x}{\varepsilon}} \,, \quad \partial_j a_{ij}^\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} \partial_{y_j} a_{ij}(y)\Big|_{y=\frac{x}{\varepsilon}} \,, \tag{8.10}$$

wir schreiben ∂_{y_j} statt ∂_j der Deutlichkeit halber. Es gilt weiter

$$\partial_j (a_{ij}^\varepsilon \partial_i z_\varepsilon) = \partial_j a_{ij}^\varepsilon \cdot \partial_i z_\varepsilon + a_{ij}^\varepsilon \cdot \partial_j \partial_i z_\varepsilon \,. \tag{8.11}$$

Wir setzen (8.8) – (8.10) in (8.11) ein und erhalten

$$\begin{aligned}
\partial_j(a^\varepsilon_{ij}\partial_i z_\varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon}\partial_{y_j} a_{ij}\cdot\left(\partial_{x_i} z + \frac{1}{\varepsilon}\partial_{y_i} z\right) + a_{ij}\cdot\left(\partial_{x_j}\partial_{x_i} z + \frac{1}{\varepsilon}\partial_{y_j}\partial_{x_i} z + \frac{1}{\varepsilon}\partial_{x_j}\partial_{y_i} z + \frac{1}{\varepsilon^2}\partial_{y_j}\partial_{y_i} z\right) \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2}\Big[\partial_{y_j} a_{ij}\cdot\partial_{y_i} z + \partial_{y_j}\partial_{y_i} z\Big] + \frac{1}{\varepsilon}\Big[\partial_{y_j} a_{ij}\cdot\partial_{x_i} z + a_{ij}\partial_{y_j}\partial_{x_i} z + a_{ij}\partial_{x_j}\partial_{y_i} z\Big] + a_{ij}\partial_{x_j}\partial_{x_i} z \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2}\Big[\partial_{y_j}(a_{ij}\partial_{y_i} z)\Big] + \frac{1}{\varepsilon}\Big[\partial_{y_j}(a_{ij}\partial_{x_i} z) + \partial_{x_j}(a_{ij}\partial_{y_i} z)\Big] + a_{ij}\partial_{x_j}\partial_{x_i} z\,, \qquad (8.12)
\end{aligned}$$

wobei die Funktionen auf der linken Seite von x und die auf der rechten Seite von (x, y) mit $y = x/\varepsilon$ abhängen. Für $z : \Omega \times Y \to \mathbb{R}$ definieren wir die Differentialoperatoren

$$L_0 z = -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_{y_j}(a_{ij}(y)\partial_{y_i} z)\,, \qquad (8.13)$$

$$L_1 z = -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_{y_j}(a_{ij}(y)\partial_{x_i} z) - \sum_{i,j=1}^{n} \partial_{x_j}(a_{ij}(y)\partial_{y_i} z)\,, \qquad (8.14)$$

$$L_2 z = -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_{x_j}(a_{ij}(y)\partial_{x_i} z)\,. \qquad (8.15)$$

Damit wird (8.12) zu

$$L_\varepsilon z_\varepsilon = -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_j(a^\varepsilon_{ij}\partial_i z_\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2} L_0 z + \frac{1}{\varepsilon} L_1 z + L_2 z\,. \qquad (8.16)$$

Wir setzen nun entsprechend (8.5)

$$z(x, y) = \sum_{k=0}^{M} \varepsilon^k u_k(x, y)\,. \qquad (8.17)$$

Aus (8.16) ergibt sich

$$\begin{aligned}
L_\varepsilon z_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^2} L_0 u_0 &+ \frac{1}{\varepsilon}\Big[L_0 u_1 + L_1 u_0\Big] + \Big[L_0 u_2 + L_1 u_1 + L_2 u_0\Big] \qquad (8.18) \\
&+ \sum_{k=1}^{M-2} \varepsilon^k \Big[L_0 u_{k+2} + L_1 u_{k+1} + L_2 u_k\Big]
\end{aligned}$$

Wir betrachten nun die Gleichung

$$L_\varepsilon z_\varepsilon = f\,, \quad \text{in } \Omega, \qquad (8.19)$$

als Näherung an die ursprüngliche Gleichung (8.1). Eine Lösung zu (8.19) erhalten wir, wenn die Koeffizienten der ε-Potenzen einzeln verschwinden. Hinreichend dafür ist, dass die Funktionen u_k im Gebiet $\Omega \times Y$ Lösungen sind von

$$\begin{aligned}
L_0 u_0 &= 0\,, & (8.20) \\
L_0 u_1 &= -L_1 u_0\,, & (8.21) \\
L_0 u_2 &= f - L_1 u_1 - L_2 u_0\,, & (8.22) \\
L_0 u_{k+2} &= -L_1 u_{k+1} - L_2 u_k\,, \quad k \geq 1\,, & (8.23)
\end{aligned}$$

wobei die u_k nach wie vor als Y-periodisch angenommen werden. Wir beschränken uns auf den Fall $M = 2$, dann sind nur die Gleichungen (8.20) – (8.22) vorhanden. Wenn wir diese der Reihe nach lösen, ist jeweils nur die Funktion auf der linken Seite unbekannt. Der Differentialoperator L_0 hängt nicht von x ab, die rechten Seiten aber schon. Insofern handelt es sich bei (8.20) – (8.22) eigentlich um eine Schar von Randwertproblemen auf Y, bei denen für jeweils festgehaltenes $x \in \Omega$ die Lösungen als Funktionen $y \mapsto u_k(x, y)$ gesucht werden.

Wir beginnen mit (8.20),

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \partial_{y_j}(a_{ij}(y)\partial_{y_i} u_0(x, y)) = 0\,. \tag{8.24}$$

Für festes $x \in \Omega$ ist $u_0(x, y) = 0$ die bis auf eine Konstante eindeutige periodische Lösung in Y, diese Konstante kann aber für jedes x verschieden sein. Die allgemeine Lösung hat daher die Form

$$u_0(x, y) = u_0(x)\,. \tag{8.25}$$

Wir betrachten nun (8.21),

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \partial_{y_j}(a_{ij}(y)\partial_{y_i} u_1(x, y)) = \sum_{i,j=1}^{n} \partial_{y_j}(a_{ij}(y)\partial_{x_i} u_0) + \sum_{i,j=1}^{n} \partial_{x_j}(a_{ij}(y)\partial_{y_i} u_0)\,. \tag{8.26}$$

Da u_0 nicht von y und a_{ij} nicht von x abhängt, wird (8.26) zu

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \partial_{y_j}(a_{ij}(y)\partial_{y_i} u_1(x, y)) = \sum_{i,j=1}^{n} \partial_{y_j}(a_{ij}(y)\partial_{x_i} u_0(x)) = \operatorname{div}_y(A(y)^T \nabla_x u_0(x))\,. \tag{8.27}$$

Die schwache Formulierung von (8.27) lautet (siehe die Ausführungen im Anschluss an Satz 6.9)

$$a(u_1(x, \cdot), v) = \int_Y (-A(y)^T \nabla_x u_0(x))^T \nabla v(y)\, dy = -\int_Y \nabla_x u_0(x)^T A(y) \nabla v(y)\, dy\,, \tag{8.28}$$

für alle $v \in H_M(Y)$. Das ist aber für festes $x \in \Omega$ nichts anderes als das periodische Hilfsproblem (7.44), (7.45) mit $\lambda = -\nabla_x u_0(x)$, also

$$u_1(x, y) = \hat{\chi}_\lambda(y) = -\sum_{k=1}^{n} \partial_{x_k} u_0(x) \hat{\chi}_k(y)\,. \tag{8.29}$$

Wir betrachten nun (8.22),

$$L_0 u_2 = f - L_1 u_1 - L_2 u_0\,. \tag{8.30}$$

Da u_2 und a_{ij} Y-periodisch sind, folgt für jedes $x \in \Omega$

$$0 = -\sum_{i,j=1}^{n} \int_Y \partial_{y_j}(a_{ij}(y)\partial_{y_i} u_2(x, y))\, dy = \int_Y L_0 u_2(x, y)\, dy\,, \tag{8.31}$$

also auch

$$\int_Y f(x) - L_1 u_1(x, y) - L_2 u_0(x)\, dy = 0\,. \tag{8.32}$$

Es gilt, wieder wegen der Periodizität,

$$\begin{aligned}\int_Y -L_1 u_1 \, dy &= \int_Y \sum_{i,j=1}^n \partial_{y_j}(a_{ij}(y)\partial_{x_i} u_1)\, dy + \int_Y \sum_{i,j=1}^n \partial_{x_j}(a_{ij}(y)\partial_{y_i} u_1)\, dy \\ &= \int_Y \sum_{i,j=1}^n \partial_{x_j}(a_{ij}(y)\partial_{y_i} u_1)\, dy \end{aligned} \tag{8.33}$$

Wir setzen (8.29) in (8.33) ein und erhalten

$$\begin{aligned}\int_Y -L_1 u_1(x,y)\, dy &= -\int_Y \sum_{i,j=1}^n \partial_{x_j} \left(a_{ij}(y)\partial_{y_i} \sum_{k=1}^n \partial_{x_k} u_0(x)\hat{\chi}_k(y) \right) dy \\ &= -\sum_{j,k=1}^n \left[\sum_{i=1}^n \int_Y a_{ij}(y)\partial_{y_i}\hat{\chi}_k(y)\, dy \right] \partial_{x_j}\partial_{x_k} u_0(x)\,. \end{aligned} \tag{8.34}$$

Weiter gilt

$$\int_Y -L_2 u_0(x,y)\, dy = \int_Y \sum_{i,j=1}^n \partial_{x_j}(a_{ij}(y)\partial_{x_i} u_0(x))\, dy = \sum_{i,j=1}^n \int_Y a_{ij}(y)\, dy \cdot \partial_{x_j}\partial_{x_i} u_0(x)\,. \tag{8.35}$$

Wir addieren (8.34) und (8.35), wobei wir in (8.35) den Index i durch k ersetzen, und erhalten

$$\begin{aligned}\int_Y -L_1 u_1 - L_2 u_0 \, dy &= \sum_{j,k=1}^n \left[\int_Y a_{kj}(y)\, dy - \sum_{i=1}^n \int_Y a_{ij}(y)\partial_{y_i}\hat{\chi}_k(y)\, dy \right] \partial_{x_j}\partial_{x_k} u_0(x) \\ &= |Y| \cdot \sum_{j,k=1}^n M_Y \left(a_{kj} - \sum_{i=1}^n a_{ij}\partial_{y_i}\hat{\chi}_k \right) \cdot \partial_{x_j}\partial_{x_k} u_0(x)\,. \end{aligned} \tag{8.36}$$

Aus der Formel

$$(A^0)^T\lambda = M_Y\left(A^T\nabla\hat{w}_\lambda\right) = M_Y\left(A^T\lambda - A^T\nabla\hat{\chi}_\lambda\right) \tag{8.37}$$

folgt analog zur Rechnung in Lemma 7.9

$$a^0_{kj} = M_Y(a_{kj}) - M_Y\left(\sum_{i=1}^n a_{ij}\partial_{y_i}\hat{\chi}_k \right)\,. \tag{8.38}$$

Insgesamt ergibt sich aus (8.32), (8.36) und (8.38)

$$|Y| f(x) = -|Y| \cdot \sum_{j,k=1}^n a^0_{kj}\partial_{x_j}\partial_{x_k} u_0(x)\,, \quad x \in \Omega\,, \tag{8.39}$$

also

$$-\sum_{j,k=1}^n \partial_{x_j}(a^0_{kj}\partial_{x_k} u_0) = f\,, \quad \text{in } \Omega, \tag{8.40}$$

das heißt, u_0 ist die Homogenisierungslösung.

9 Hamilton-Jacobi-Gleichung

Wir wollen in diesem Abschnitt das Anfangswertproblem

$$\partial_t u + H(\nabla u) = 0\,, \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \tag{9.1}$$

$$u(x,0) = g(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}^n\,, \tag{9.2}$$

betrachten für den Fall, dass $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine konvexe, nicht notwendig glatte Funktion ist.

Die Methode der Charakteristiken (siehe Teil 1, Kapitel 11) liefert charakteristische Kurven

$$s \mapsto (\xi(s), s) \tag{9.3}$$

und Lösungen

$$z(s) = u(\xi(s), s)\,, \quad p(s) = \nabla u(\xi(s), s)\,, \tag{9.4}$$

entlang der Charakteristiken, und zwar als Lösungen des Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\xi' = \nabla H(p)\,, \tag{9.5}$$

$$p' = 0\,, \tag{9.6}$$

$$z' = \langle \nabla H(p), p \rangle - H(p)\,. \tag{9.7}$$

(Herleitung: Übung.) Als Beispiel betrachten wir für $n = 1$

$$H(p) = \frac{1}{2}p^2\,, \tag{9.8}$$

Das System (9.5) – (9.7) wird zu

$$\xi' = p\,, \quad p' = 0\,, \quad z' = p^2 - \frac{1}{2}p^2 = \frac{1}{2}p^2\,. \tag{9.9}$$

Für die in $(x, 0)$ beginnende charakteristische Kurve gilt

$$\xi(0) = x\,, z(0) = g(x)\,, \quad p(0) = g'(x)\,. \tag{9.10}$$

Als Lösung von (9.9), (9.10) erhalten wir für $s > 0$

$$p(s) = g'(x)\,, \quad \xi(s) = x + sg'(x)\,, \quad z(s) = g(x) + \frac{s}{2}g'(x)^2\,. \tag{9.11}$$

Die Charakteristiken können sich schneiden, wie aufgrund der Nichtlinearität von H zu erwarten ist. Für

$$g(x) = -\frac{1}{2}x^2 \tag{9.12}$$

ist eine explizite Lösung von (9.1), (9.2), (9.8) gegeben durch

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\frac{x^2}{t-1}\,. \tag{9.13}$$

Sie ist definiert in $\mathbb{R}^n \times [0, 1)$, und

$$\lim_{t \uparrow 1} u(x,t) = -\infty\,, \quad \text{für alle } x \neq 0. \tag{9.14}$$

Das Phänomen, dass die Lösung in endlicher Zeit unbeschränkt wird, bezeichnet man als **blow up**.

Voraussetzung 9.1 *$H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist konvex mit*

$$\lim_{p\to\infty} \frac{H(p)}{|p|} = \infty\,, \tag{9.15}$$

$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante L_g. □

Aus der Analysis konvexer Funktionen lernt man

Satz 9.2 *Jede konvexe Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist stetig auf $\mathbb{R}^n$.* □

Satz 9.3 *Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex, es gelte*

$$\lim_{q\to\infty} \frac{f(q)}{|q|} = \infty\,. \tag{9.16}$$

Dann wird durch

$$f^*(p) = \sup_{q\in\mathbb{R}^n} (\langle p, q\rangle - f(q)) \tag{9.17}$$

eine konvexe Funktion $f^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert mit

$$\lim_{p\to\infty} \frac{f^*(p)}{|p|} = \infty\,. \tag{9.18}$$

f^* heißt die zu f konjugierte (oder: konvex konjugierte) Funktion.

Beweis: Die Abbildung $f_q(p) = \langle p, q\rangle - f(q)$ ist linear, also konvex, und

$$f^* = \sup_{q\in\mathbb{R}^n} f_q$$

ist als Supremum konvexer Abbildungen ebenfalls konvex. Da für jedes $p \in \mathbb{R}^n$ die Funktion

$$q \mapsto \langle p, q\rangle - f(q)$$

stetig ist und mit $q \to \infty$ gegen $-\infty$ strebt, ist $f^*(p) < \infty$ für alle p. Weiter gilt für jedes $c > 0$

$$\begin{aligned} f^*(p) = \sup_{q\in\mathbb{R}^n} (\langle p, q\rangle - f(q)) &\geq \left\langle p, c\frac{p}{|p|}\right\rangle - f\left(c\frac{p}{|p|}\right) \\ &= c|p| - f\left(c\frac{p}{|p|}\right) \geq c|p| - \alpha(c)\,, \end{aligned}$$

wobei

$$\alpha(c) = \max_{|q|\leq c} f(q)\,.$$

Es gilt also

$$\frac{f^*(p)}{|p|} \geq c - \frac{\alpha(c)}{|p|} \geq \frac{c}{2}\,,$$

falls $|p|$ hinreichend groß, woraus (9.18) folgt. □

Die Abbildung $f \mapsto f^*$ heißt auch **Fenchel-Transformation**.

Lemma 9.4 *Unter den Voraussetzungen von Satz 9.3 gilt*

$$f^{**} = f\,. \tag{9.19}$$

Beweis: Nach Definition von f^* gilt für alle $p, q \in \mathbb{R}^n$

$$f^*() + f(q) \geq \langle p, q\rangle\ ,$$

also

$$f(q) \geq \langle p, q\rangle - f^*(p)\,.$$

Übergang zum Supremum bezüglich p liefert $f \geq f^{**}$. Zum Beweis der umgekehrten Ungleichung berechnen wir

$$\begin{aligned} f^{**}(q) &= \sup_{p\in\mathbb{R}^n}[\langle p, q\rangle - f^*(p)] = \sup_{p\in\mathbb{R}^n}\left[\langle p, q\rangle - \sup_{r\in\mathbb{R}^n}(\langle p, r\rangle - f(r))\right] \\ &= \sup_{p\in\mathbb{R}^n}\inf_{r\in\mathbb{R}^n}(\langle p, q-r\rangle + f(r))\,. \end{aligned} \tag{9.20}$$

Aus dem Trennungssatz für konvexe Mengen im $\mathbb{R}^n$ folgt die Existenz eines $s \in \mathbb{R}^n$ mit

$$f(r) \geq f(q) + \langle s, r-q\rangle\ , \quad \text{für alle } r \in \mathbb{R}^n. \tag{9.21}$$

(Die konvexe Menge $\{(y,t) : y \in \mathbb{R}^n\,,\ f(y) \leq t\}$ im $\mathbb{R}^{n+1}$ liegt auf einer Seite der Hyperebene mit Normale s im Punkt $(q, f(q))$.) Aus (9.20), (9.21) folgt

$$f^{**}(q) \geq \inf_{r\in\mathbb{R}^n}(\langle s, q-r\rangle + f(r)) \geq f(q)\,.$$

□

Aufgrund der Eigenschaft (9.19) sagt man, dass unter den gegebenen Voraussetzungen die Funktionen f und f^* dual zueinander sind.

Wir behandeln nun einen schwachen Lösungsbegriff für das Anfangswertproblem (9.1), (9.2), welcher die konjugierte Funktion $L := H^*$ von H involviert. Wir betrachten das Funktional

$$J(w) = \int_0^t L(w'(s))\,ds + g(w(0))\,, \quad t > 0\,, \tag{9.22}$$

und setzen für $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$,

$$u(x,t) = \inf\{J(w) : w \in C^1[0,t]\,,\ w(t) = x\}\,. \tag{9.23}$$

Satz 9.5 (Formel von Lax und Hopf)
Sei $L = H^*$, es gelte Voraussetzung 9.1. Dann gilt für den in (9.23) definierten Minimalwert von J

$$u(x,t) = \min_{y\in\mathbb{R}^n}\left[tL\left(\frac{x-y}{t}\right) + g(y)\right]\ , \tag{9.24}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$.

Beweis: Seien $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ fest gegeben. Für die durch

$$h(y) = \left[tL\left(\frac{x-y}{t}\right) + g(y) \right]$$

definierte Funktion $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gilt wegen Satz 9.3 und wegen der Lipschitzstetigkeit von g

$$\lim_{y \to \infty} \frac{h(y)}{|y|} = \infty\,,$$

also ist

$$\inf_{y \in \mathbb{R}^n} h(y) = \inf_{|y| \le C} h(y)$$

für hinreichend großes C, und das Minimum existiert auf der rechten Seite, da h stetig ist. Also existiert das Minimum in (9.24).
"$\le$": Sei $y \in \mathbb{R}^n$. Wir setzen

$$w(s) = y + s\frac{x-y}{t}\,,$$

dann gilt

$$u(x,t) \le J(w) = \int_0^t L(w'(s))\,ds + g(w(0)) = tL\left(\frac{x-y}{t}\right) + g(y)\,.$$

"$\ge$": Für jede stetige Funktion $f : [0,t] \to \mathbb{R}$ gilt, da L konvex ist, nach der Jensenschen Ungleichung

$$L\left(\frac{1}{t}\int_0^t f(s)\,ds\right) \le \frac{1}{t}\int_0^t L(f(s))\,ds\,. \tag{9.25}$$

Ist $w \in C^1[0,t]$ mit $w(t) = x$ und $w(0) = y$, so folgt aus (9.25), wenn wir $f = w'$ setzen und beide Seiten mit t multiplizieren,

$$tL\left(\frac{x-y}{t}\right) + g(y) \le \int_0^t L(w'(s))\,ds + g(w(0)) = J(w)\,,$$

also

$$\min_{y \in \mathbb{R}^n} \left[tL\left(\frac{x-y}{t}\right) + g(y) \right] \le J(w)$$

für alle im Minimierungsproblem zulässigen w und damit die Behauptung. □

Wie der Beweis erkennen lässt, liegt der Formel von Lax und Hopf zugrunde, dass das Minimum in (9.23) durch eine Gerade realisiert wird.

Wir wollen nun zeigen, dass die Formel von Lax und Hopf sich als schwache Lösung des Anfangswertproblems interpretieren läßt.

Lemma 9.6 *Es gilt*

$$|u(x,t) - u(\tilde{x},t)| \le L_g|x - \tilde{x}|\,, \quad \textit{für alle } x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0. \tag{9.26}$$

Beweis: Seien $t > 0$, $x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$. Sei $y \in \mathbb{R}^n$ der Minimierer in (9.24),

$$u(x,t) = tL\left(\frac{x-y}{t}\right) + g(y)\,.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} u(\tilde{x},t) - u(x,t) &= \inf_{z\in\mathbb{R}^n}\left[tL\left(\frac{\tilde{x}-z}{t}\right) + g(z)\right] - tL\left(\frac{x-y}{t}\right) - g(y) \\ &\le g(\tilde{x}-x+y) - g(y) \le L_g|\tilde{x}-x|\,. \end{aligned}$$

Vertauschen von x und $\tilde{x}$ liefert die Behauptung. □

Das nächste Lemma beinhaltet eine Halbgruppeneigenschaft der Formel von Lax und Hopf – wir erhalten $u(x,t)$ auch, wenn wir den Anfangswert $g(y)$ durch $u(y,s)$ und die Zeit t durch $t-s$ ersetzen.

Lemma 9.7 *Es gilt*

$$u(x,t) = \min_{y\in\mathbb{R}^n}\left[(t-s)L\left(\frac{x-y}{t-s}\right) + u(y,s)\right]\,, \tag{9.27}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$, $0 \le s < t$.

Beweis: Seien $x \in \mathbb{R}^n$, $0 \le s < t$ fest gewählt. Nach Lemma 9.6 ist $y \mapsto u(y,s)$ lipschitzstetig, also wird das Minimum auf der rechten Seite von (9.27) angenommen, mit dem gleichen Argument wie im Beweis von Satz 9.5.
"$\le$": Zu jedem $y \in \mathbb{R}^n$ wählen wir $z \in \mathbb{R}^n$ mit

$$u(y,s) = sL\left(\frac{y-z}{s}\right) + g(z)\,.$$

Da L konvex ist, folgt

$$L\left(\frac{x-z}{t}\right) \le \left(1-\frac{s}{t}\right)L\left(\frac{x-y}{t-s}\right) + \frac{s}{t}L\left(\frac{y-z}{s}\right)\,,$$

also

$$\begin{aligned} u(x,t) \le tL\left(\frac{x-z}{t}\right) + g(z) &\le (t-s)L\left(\frac{x-y}{t-s}\right) + sL\left(\frac{y-z}{s}\right) + g(z) \\ &= (t-s)L\left(\frac{x-y}{t-s}\right) + u(y,s)\,. \end{aligned}$$

Da y beliebig war, folgt die Behauptung.
"$\ge$": Sei $w \in \mathbb{R}^n$ der Minimierer mit

$$u(x,t) = tL\left(\frac{x-w}{t}\right) + g(w)\,,$$

sei

$$y = \frac{s}{t}x + \left(1-\frac{s}{t}\right)w\,.$$

Dann ist

$$\frac{x-y}{t-s} = \frac{x-w}{t} = \frac{y-w}{s},$$

also

$$\begin{aligned}(t-s)L\left(\frac{x-y}{t-s}\right) + u(y,s) &\le (t-s)L\left(\frac{x-w}{t}\right) + sL\left(\frac{y-w}{s}\right) + g(w) \\ &\le tL\left(\frac{x-y}{t-s}\right) + g(w) = u(x,t)\,.\end{aligned}$$

□

Lemma 9.8 *Es gilt*

$$\lim_{t\downarrow 0} u(x,t) = g(x) \tag{9.28}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$, und die so fortgesetzte Funktion u ist lipschitzstetig auf $\mathbb{R}^n \times [0,\infty)$.

Beweis: Der Beweis beruht auf Lemma 9.6 und Lemma 9.7 und verwendet ähnliche Rechnungen, wir lassen ihn weg (siehe Evans, Abschnitt 3.3). □

Satz 9.9 *Es gelte Voraussetzung 9.1, sei $u : \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ durch die Formel von Lax und Hopf mit $L = H^*$ definiert. Dann gilt in jedem Punkt (x,t), in dem u differenzierbar ist,*

$$\partial_t u(x,t) + H(\nabla u(x,t)) = 0\,. \tag{9.29}$$

Beweis: Sei (x,t) ein solcher Differenzierbarkeitspunkt.
"$\le$": Seien $q \in \mathbb{R}^n$, $h > 0$ beliebig. Nach Lemma 9.7, angewendet mit $t+h, t$ für t, s, ergibt sich

$$u(x+hq, t+h) = \min_{y\in\mathbb{R}^n}\left[hL\left(\frac{x+hq-y}{h}\right) + u(y,t)\right] \le hL(q) + u(x,t)\,,$$

also

$$\frac{u(x+hq,t+h) - u(x,t)}{h} \le L(q)\,.$$

Grenzübergang $h \to 0$ liefert

$$\langle \nabla u(x,t), q\rangle + \partial_t u(x,t) \le L(q)\,, \quad \text{für alle } q \in \mathbb{R}^n.$$

Da nach Lemma 9.4 auch $H = L^*$ gilt, erhalten wir nun

$$\partial_t u(x,t) + H(\nabla u(x,t)) = \partial_t u(x,t) + \sup_{q\in\mathbb{R}^n}(\langle \nabla u(x,t), q\rangle - L(q)) \le 0\,.$$

"$\ge$": Sei $z \in \mathbb{R}^n$ ein Minimierer mit

$$u(x,t) = tL\left(\frac{x-z}{t}\right) + g(z)\,.$$

Sei $h > 0$, sei

$$s = t-h\,, \quad y = \frac{s}{t}x + \left(1 - \frac{s}{t}\right)z\,.$$

Dann ist

$$\frac{x-z}{t} = \frac{y-z}{s}\,,$$

und

$$u(x,t) - u(y,s) \geq tL\left(\frac{x-z}{t}\right) + g(z) - \left[sL\left(\frac{y-z}{s}\right) + g(z)\right] = (t-s)L\left(\frac{x-z}{t}\right).$$

Es folgt

$$\frac{u(x,t) - u((1-\frac{h}{t})x + \frac{h}{t}z, t-h)}{h} \geq L\left(\frac{x-z}{t}\right).$$

Grenzübergang $h \to 0$ ergibt

$$\left\langle \frac{x-z}{t}, \nabla u(x,t)\right\rangle + \partial_t u(x,t) \geq L\left(\frac{x-z}{t}\right).$$

Wir verwenden wiederum $H = L^*$ und erhalten

$$\begin{aligned}\partial_t u(x,t) + H(\nabla u(x,t)) &= \partial_t u(x,t) + \sup_{q\in\mathbb{R}^n}(\langle \nabla u(x,t), q\rangle - L(q)) \\ &\geq \partial_t u(x,t) + \left\langle \frac{x-z}{t}, \nabla u(x,t)\right\rangle - L\left(\frac{x-z}{t}\right) \\ &\geq 0\,.\end{aligned}$$

□

Satz 9.10 (Rademacher)
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lipschitzstetig. Dann ist f fast überall differenzierbar. □

Diesen Satz wollen wir hier nicht beweisen. Es gilt sogar außerdem: Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist genau dann lipschitzstetig, wenn ihre distributionelle Ableitung existiert und im $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ liegt (siehe z.B. Evans, Abschnitt 5.8).

Satz 9.11 *Es gelte Voraussetzung 9.1, sei $u : \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ durch die Formel von Lax und Hopf mit $L = H^*$ definiert. Dann ist u fast überall differenzierbar, und es gilt*

$$\partial_t u + H(\nabla u) = 0\,, \quad \textit{fast überall in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \tag{9.30}$$
$$u(x,0) = g(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}^n\,. \tag{9.31}$$

Beweis: Folgt direkt aus Satz 9.9 und Satz 9.10. □

Man könnte nun eine lipschitzstetige Funktion $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ als schwache Lösung des Anfangswertproblems (9.1), (9.2) bezeichnen, falls (9.30), (9.31) gelten. Leider wäre aber dann die schwache Lösung nicht eindeutig bestimmt. Wir betrachten als Beispiel $n = 1$, $H(p) = p^2$, also

$$\partial_t u + (\partial_x u)^2 = 0\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, t > 0\,, \tag{9.32}$$
$$u(x,0) = 0\,, \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{9.33}$$

Neben der trivialen Lösung $u = 0$ erfüllt auch die Funktion

$$u(x,t) = \begin{cases} 0\,, & |x| \geq t\,, \\ x - t\,, & 0 \leq |x| \leq t\,, \\ -x - t\,, & -t \leq |x| \leq 0\,, \end{cases} \tag{9.34}$$

die Gleichung (9.32) in allen Punkten $x \notin \{-t, 0, t\}$. Oft muss man bei nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen an eine Lösung im Distributionensinn zusätzliche Forderungen stellen, um Eindeutigkeit zu erreichen.

10 Optimale Steuerung: Das Bellman-Prinzip

Problem 10.1 (Diskretes Steuerungsproblem)
Wir betrachten ein diskretes Kontrollsystem zum Anfangswert x mit Zuständen $x_k \in G$ und Steuerungen (Kontrollen) $w_k \in W$,

$$x_{k+1} = g(x_k, w_k)\,, \quad x_0 = x \in G\,, \tag{10.1}$$

wobei $g : G \times W \to G$ und G, W Mengen sind. Wir definieren die Menge $\mathcal{W}$ der zulässigen Steuerungen durch

$$\mathcal{W} = \{w : w = (w_0, w_1, \ldots), w_k \in W \text{ für alle } k \in \mathbb{N}_0\}\,. \tag{10.2}$$

Gemäß (10.1) definieren wir durch

$$\varphi(w; x) = (x_0, x_1, \ldots)\,, \quad \varphi_k(w; x) = x_k\,, \tag{10.3}$$

eine Abbildung

$$\varphi : \mathcal{W} \times G \to \mathcal{G} = \{(x_0, x_1, \ldots) : x_k \in G \text{ für alle } k\}\,. \tag{10.4}$$

Wir betrachten außerdem eine Zielmenge $\mathcal{T} \subset G$ und definieren

$$N_{\mathcal{T}}(w; x) = \min\{k : k \in \mathbb{N}_0\,,\, \varphi_k(w; x) \in \mathcal{T}\}\,. \tag{10.5}$$

Die Zielfunktion ist definiert durch

$$J(w; x) = \sum_{k=0}^{N-1} c(x_k, w_k) + c_{\mathcal{T}}(x_N)\,, \quad N = N_{\mathcal{T}}(w; x)\,, \tag{10.6}$$

falls $N_{\mathcal{T}}(w; x) < +\infty$, andernfalls setzen wir

$$J(w; x) = +\infty\,. \tag{10.7}$$

Die Funktion $c : G \times W \to \mathbb{R}$ bezeichnet die laufenden Kosten, die Funktion $c_{\mathcal{T}} : G \to \mathbb{R}$ die Endkosten. Wir suchen zu gegebenem $x \in G$ eine optimale Steuerung w_*, d.h. ein $w_* \in \mathcal{W}$ mit

$$J(w_*; x) = \min_{w \in \mathcal{W}} J(w; x)\,. \tag{10.8}$$

Definition 10.2 (Optimalwertfunktion)
Die durch

$$V(x) = \inf_{w \in \mathcal{W}} J(w; x) \tag{10.9}$$

definierte Funktion $V : G \to [-\infty, +\infty]$ *heißt Optimalwertfunktion von Problem 10.1. Eine Steuerung* $w_* \in \mathcal{W}$ *heißt optimal zum Anfangswert* $x \in G$*, wenn*

$$V(x) = J(w_*; x)\,. \tag{10.10}$$

□

Definition 10.3 (Rückkopplungssteuerung)
Sei ein diskretes Kontrollsystem $g : G \times W \to G$ gegeben. Eine Abbildung $\omega : G \to W$ heißt Rückkopplungssteuerung. Wir definieren die zu ω gehörende Zustandsfolge durch

$$x_{k+1} = g(x_k, \omega(x_k)) , \quad x_0 = x . \tag{10.11}$$

Eine Rückkopplungssteuerung ω_* heißt optimal, falls (10.10) gilt mit

$$w_* = (\omega_*(x), \omega_*(x_1), \ldots) , \quad \textit{für alle } x \in G . \tag{10.12}$$

□

Satz 10.4 (Bellman-Prinzip, Prinzip der dynamischen Programmierung)
Für die Optimalwertfunktion V von Problem 10.1 gilt

$$V(x) = \inf_{v \in W} \left[c(x, v) + V(g(x, v)) \right] , \quad \textit{falls } x \notin \mathcal{T} , \tag{10.13}$$

und $V(x) = c_{\mathcal{T}}(x)$, falls $x \in \mathcal{T}$. Ist ω_* eine optimale Rückkopplungssteuerung, so gilt

$$V(x) = c(x, \omega_*(x)) + V(g(x, \omega_*(x))) = \inf_{v \in W} \left[c(x, v) + V(g(x, v)) \right] , \quad \textit{falls } x \notin \mathcal{T} . \tag{10.14}$$

Beweis: Für $v \in W$ und $w \in \mathcal{W}$ definieren wir

$$(v, w) = (v, w_0, w_1, \ldots) . \tag{10.15}$$

Dann gilt

$$\varphi((v, w); x) = (x, \varphi(w; g(v, x))) , \tag{10.16}$$

für alle $v \in W$, $w \in \mathcal{W}$ und $x \in G$, also auch

$$J((v, w); x) = c(x, v) + J(w; g(x, v)) . \tag{10.17}$$

Die erste Behauptung folgt nun aus

$$\begin{aligned} V(x) &= \inf_{w \in \mathcal{W}} J(w; x) = \inf_{\substack{v \in W \\ w \in \mathcal{W}}} J((v, w); x) \\ &= \inf_{\substack{v \in W \\ w \in \mathcal{W}}} \left[c(x, v) + J(w; g(x, v)) \right] = \inf_{v \in W} \left[c(x, v) + \inf_{w \in \mathcal{W}} J(w; g(x, v)) \right] \\ &= \inf_{v \in W} \left[c(x, v) + V(g(x, v)) \right] . \end{aligned} \tag{10.18}$$

Ist ω_* optimale Rückkopplungssteuerung, so gilt für $x \in G$ und die zugehörige optimale Steuerung $w_* = (\omega_*(x), \tilde{w}_*)$

$$\begin{aligned} V(x) = J(w_*, x) &= c(x, \omega_*(x)) + J(\tilde{w}_*, g(x, \omega_*(x))) \geq c(x, \omega_*(x)) + V(g(x, \omega_*(x))) \\ &\geq V(x) , \end{aligned} \tag{10.19}$$

nach Definition von $V(g(x, \omega_*(x)))$ und wegen (10.13). □

Satz 10.5 *Sei ω_* eine Rückkopplungsssteuerung mit*

$$V(x) = c(x, \omega_*(x)) + V(g(x, \omega_*(x))) , \quad \textit{falls } x \notin \mathcal{T} . \tag{10.20}$$

Es gelte $V(x) > -\infty$ für alle $x \in G$ und

$$J(w_*; x) < +\infty , \quad \textit{falls } V(x) < +\infty . \tag{10.21}$$

Dann ist ω_* optimal.

Beweis: Zu zeigen ist

$$V(x) = J(w_*; x) \tag{10.22}$$

für alle $x \in G$ mit $V(x) < \infty$. Wir definieren

$$G_k = \{x : x \in G \, , \, N_{\mathcal{T}}(w_*; x) = k\} , \tag{10.23}$$

und zeigen mit Induktion, daß (10.22) in G_k gilt. Für $x \in G_0$ ist $V(x) = c_{\mathcal{T}}(x) = J(w_*; x)$. Sei $x \in G_{k+1}$, dann ist $g(x, \omega_*(x)) \in G_k$, und aus der Induktionsvoraussetzung folgt mit $w_* = (\omega_*(x), \tilde{w}_*)$

$$V(x) = c(x, \omega_*(x)) + V(g(x, \omega_*(x))) = c(x, \omega_*(x)) + J(\tilde{w}_*; g(x, \omega_*(x))) = J(w_*; x) . \tag{10.24}$$

□

Problem 10.6 (Kontinuierliches Steuerungsproblem)
Minimiere

$$J(w; x, t) = \int_t^{t_1} L(s, \xi(s), w(s)) \, ds + L_1(\xi(t_1)) . \tag{10.25}$$

Hierbei ist $\xi : [t, t_1] \to \mathbb{R}^n$ Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{\xi} = f(s, \xi, w(s)) , \quad \xi(t) = x , \tag{10.26}$$

die Endzeit $t_1 \in \mathbb{R}$ ist gegeben, und die Steuerungen w liegen in einer Menge

$$w \in \mathcal{W}_t = \{w | \, w : [t, t_1] \to W \text{ meßbar und beschränkt}\} , \quad W \subset \mathbb{R}^m . \tag{10.27}$$

□

Bei Problem 10.6 handelt es sich also um eine mit den Anfangswerten $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times [t_0, t_1]$ parametrisierte Schar $P_{x,t}$ von Optimierungsproblemen, t_0 ist eine gegebene Zahl mit $t_0 < t_1$.

In der Theorie der optimalen Steuerung werden Zustandsvariable in der Regel mit x (statt ξ) und Kontrollvariable mit u (statt w) bezeichnet.

Voraussetzung 10.7 *Sei $f : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \times W \to \mathbb{R}^n$ so, dass die Anfangwertaufgabe (10.26) zu jedem $w \in \mathcal{W}_t$ und jedem $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times [t_0, t_1]$ eine eindeutige Lösung $\xi : [t, t_1] \to \mathbb{R}^n$ hat. (Hinreichend dafür ist beispielsweise, dass f stetig und bezüglich ξ lipschitzstetig ist.) Sei $L : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \times W \to \mathbb{R}$ stetig, sei*

$$s \mapsto L(s, \xi(s), w(s))$$

integrierbar auf $[t, t_1]$ für alle Anfangswerte (x, t) und alle $w \in \mathcal{W}_t$ mit zugehörigen Lösungen ξ von (10.26).

Definition 10.8 (Optimalwertfunktion)
Wir definieren die Optimalwertfunktion $V : \mathbb{R}^n \times [t_0, t_1] \to [-\infty, +\infty]$ *durch*

$$V(x,t) = \inf_{w \in \mathcal{W}_t} J(w; x, t)\,. \tag{10.28}$$

Eine Steuerung $w_* \in \mathcal{W}_t$ *heißt optimal, wenn*

$$V(x,t) = J(w_*; x, t)\,. \tag{10.29}$$

□

Satz 10.9 (Bellman-Prinzip, kontinuierlicher Fall)
Es gelte Voraussetzung 10.7. Für die Optimalwertfunktion V *von Problem 10.6 gilt dann für alle* $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [t_0, t_1]$

$$V(x,t) = \inf_{w \in \mathcal{W}_t} \left[\int_t^\tau L(s, \xi(s), w(s))\, ds + V(\xi(\tau), \tau) \right], \quad \forall\, \tau \in [t, t_1]\,, \tag{10.30}$$

wobei ξ *die Lösung von (10.26) ist, sowie*

$$V(x, t_1) = L_1(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}^n\,. \tag{10.31}$$

Ist $w_* \in \mathcal{W}_t$ *optimal, so gilt*

$$V(x,t) = \int_t^\tau L(s, \xi_*(s), w_*(s))\, ds + V(\xi_*(\tau), \tau)\,, \quad \forall\, \tau \in [t, t_1]\,. \tag{10.32}$$

Beweis: Wir zeigen zunächst "$\leq$" in (10.30). Sei $w \in \mathcal{W}_t$, $\tau \in [t, t_1]$. Sei $\tilde{w} \in \mathcal{W}_\tau$ beliebig. Wir definieren

$$\bar{w}(s) = \begin{cases} w(s)\,, & s \in [t, \tau)\,, \\ \tilde{w}(s)\,, & s \in [\tau, t_1]\,, \end{cases}$$

dann ist $\bar{w} \in \mathcal{W}_t$, und die zugehörige Zustandsfunktion $\bar{\xi}$ ist gegeben durch

$$\bar{\xi}(s) = \begin{cases} \xi(s)\,, & s \in [t, \tau)\,, \\ \tilde{\xi}(s)\,, & s \in [\tau, t_1]\,. \end{cases}$$

Nach Definition von V folgt

$$\begin{aligned} V(x,t) &\leq \int_t^{t_1} L(s, \bar{\xi}(s), \bar{w}(s))\, ds + L_1(\bar{\xi}(t_1)) \\ &= \int_t^\tau L(s, \xi(s), w(s))\, ds + J(\tilde{w}; \tau, \xi(\tau))\,. \end{aligned} \tag{10.33}$$

Übergang zum Infimum bezüglich aller $\tilde{w} \in \mathcal{W}_\tau$ und aller $w \in \mathcal{W}_t$ liefert "$\leq$".
Sei nun $\delta > 0$ beliebig, sei $w \in \mathcal{W}_t$ mit $J(w; x, t) \leq V(x,t) + \delta$. Dann gilt

$$\begin{aligned} V(x,t) + \delta &\geq J(w; x, t) \\ &= \int_t^\tau L(s, \xi(s), w(s))\, ds + \int_\tau^{t_1} L(s, \xi(s), w(s))\, ds + L_1(\xi(t_1)) \\ &= \int_t^\tau L(s, \xi(s), w(s))\, ds + J(w; \xi(\tau), \tau) \\ &\geq \int_t^\tau L(s, \xi(s), w(s))\, ds + V(\xi(\tau), \tau) \\ &\geq V(x,t)\,, \end{aligned} \tag{10.34}$$

letzteres wegen der schon bewiesenen Ungleichung "$\leq$".
Ist $w = w_*$ optimal, so gilt (10.34) mit $\delta = 0$, also folgt (10.32). $\square$

Satz 10.10 (Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung)
Sei $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (t_0, t_1)$, es gelte Voraussetzung 10.7. Ist die Optimalwertfunktion V differenzierbar in (x,t), so gilt

$$\partial_t V(x,t) + \langle \nabla V(x,t), f(t,x,v)\rangle + L(t,x,v) \geq 0\,, \quad \text{für alle } v \in W. \tag{10.35}$$

Ist w_* optimale Steuerung, V differenzierbar in $(\xi_*(t), t)$ und w_* stetig in t, so gilt

$$\partial_t V(x,t) + \min_{v\in W} \left[\langle \nabla V(x,t), f(t,x,v)\rangle + L(t,x,v)\right] = 0\,, \tag{10.36}$$

wobei das Minimum in $v = w_*(t)$ angenommen wird.

Beweis: Sei $v \in W$ beliebig, sei $\delta < t_1 - t$. Wir wählen $w \in \mathcal{W}_t$ mit $w|[t, t+\delta] = v$, sei ξ die zugehörige Zustandsfunktion. Aus (10.30) folgt für alle $h \in (0,\delta)$, dass

$$\frac{V(\xi(t+h), t+h) - V(x,t)}{h} \geq -\frac{1}{h}\int_t^{t+h} L(s, \xi(s), v)\, ds\,.$$

Grenzübergang $h \downarrow 0$ liefert (10.35). Ebenso folgt aus (10.32), daß

$$\frac{V(\xi_*(t+h), t+h) - V(\xi_*(t),t)}{h} = -\frac{1}{h}\int_t^{t+h} L(s, \xi_*(s), w_*(s))\, ds\,.$$

Grenzübergang $h \downarrow 0$ zeigt, daß in $v = w_*(t)$ das Minimum 0 angenommen wird. $\square$

Satz 10.10 zeigt, dass die Optimalwertfunktion V in ihren Differenzierbarkeitspunkten die Hamilton-Jacobi-Gleichung

$$\partial_t u + H(x,t,\nabla u) = 0 \tag{10.37}$$

mit

$$H(x,t,p) = \min_{v\in W} \left[\langle p, f(t,x,v)\rangle + L(t,x,v)\right] \tag{10.38}$$

löst. Die spezielle Form (10.38) von (10.37) heißt die **Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung**, kurz **HJB-Gleichung**.

Satz 10.11 (Hinreichende Optimalitätsbedingungen)
Es gelte 10.7, sei $u : \mathbb{R}^n \times [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, und es gelte

$$u(x, t_1) = L_1(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}^n\,, \tag{10.39}$$

$$\partial_t u(x,t) + \inf_{v\in W} \left[\langle \nabla u(x,t), f(t,x,v)\rangle + L(t,x,v)\right] = 0\,, \quad \forall\, (x,t) \in \mathbb{R}^n \times [t_0, t_1)\,. \tag{10.40}$$

Dann ist

$$u(x,t) \leq V(x,t)\,, \quad \forall\, (x,t) \in \mathbb{R}^n \times [t_0, t_1)\,. \tag{10.41}$$

Ist darüber hinaus $w_* \in \mathcal{W}_t$ eine Steuerung mit

$$\partial_t u(\xi_*(s), s) + \langle \nabla u(\xi_*(s), s), f(s, \xi_*(s), w_*(s))\rangle + L(s, \xi_*(s), w_*(s)) = 0\,, \tag{10.42}$$

für fast alle $s \in [t_0, t_1]$, so ist w_* optimale Steuerung für $P_{(t,x)}$, und

$$u(x,t) = V(x,t)\,. \tag{10.43}$$

Beweis: Seien $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [t_0, t_1)$, $w \in \mathcal{W}_t$ beliebig. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
J(w;x,t) &= \int_t^{t_1} L(\tau,\xi(\tau),w(\tau))\,d\tau + L_1(\xi(t_1)) \\
&= \int_t^{t_1} L(\tau,\xi(\tau),w(\tau))\,d\tau + u(x,t) + \int_t^{t_1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} u(\xi(\tau),\tau)\,d\tau \\
&= \int_t^{t_1} L(\tau,\xi(\tau),w(\tau))\,d\tau + u(x,t) + \\
&\quad + \int_t^{t_1} \partial_t u(\xi(\tau),\tau) + \langle \nabla u(\xi(\tau),\tau), f(\tau,\xi(\tau),w(\tau))\rangle\,d\tau \\
&\geq u(x,t)\,,
\end{aligned}
\tag{10.44}
$$

also folgt (10.41). Liefert w_* das Minimum in (10.40), so zeigt dieselbe Rechnung, daß

$$J(w_*;x,t) = u(x,t) \leq V(x,t)\,,$$

also ist w_* optimal. □

Bemerkung 10.12 (Konstruktion optimaler Rückkopplungssteuerungen)
Falls die Optimalwertfunktion stetig differenzierbar ist, so ermöglicht es Satz 10.11, die Optimalwertfunktion und die optimale Steuerung in Rückkopplungsform folgendermaßen zu konstruieren:

1. Bestimme $\omega(x,t,p)$, $p \in \mathbb{R}^n$, so daß das Minimum bezüglich $v \in W$ von

   $$\langle p, f(t,x,v)\rangle + L(t,x,v)$$

   in $v = \omega(x,t,p)$ angenommen wird.

2. Löse die partielle Differentialgleichung

   $$\partial_t u + \langle \nabla u, f(t,x,\omega(x,t,\nabla u))\rangle + L(t,x,\omega(x,t,\nabla u)) = 0\,, \tag{10.45}$$

   mit der Randbedingung

   $$u(x,t_1) = L_1(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}^n\,. \tag{10.46}$$

3. Prüfe nach, ob die Lösung die Glattheitsvoraussetzungen von Satz 10.11 erfüllt.

4. Berechne ξ_* als Lösung von

   $$\xi' = f(s,\xi,\omega(\xi(s),s,\nabla u(\xi(s),s))\,, \quad \xi(t) = x\,, \tag{10.47}$$

   und die optimale Steuerung w_* aus

   $$w_*(s) = \omega(\xi_*(s),s,\nabla u(\xi_*(s),s))\,. \tag{10.48}$$

Bemerkung 10.13 (Leider ...)

- Nur in Ausnahmefällen ist die Optimalwertfunktion global stetig differenzierbar (z.B. im linear-quadratischen Problem, siehe unten).
- Das Konstruktionsverfahren 10.12 kann auch dann noch funktionieren, wenn die Optimalwertfunktion nur stückweise stetig differenzierbar ist, und zwar am ehesten dann, wenn die Menge, auf der die Ableitung von V unstetig ist, sich aus glatten Flächen zusammensetzt. Man kann dann jeweils zwischen solchen Unstetigkeitsflächen (die allerdings auch erst bestimmt werden müssen!) das beschriebene Verfahren anwenden.
- Selbst wenn die Optimalwertfunktion glatt ist, so kann die Lösung in der Regel nicht in expliziten Formeln angegeben werden.

Wir betrachten nun das linear-quadratische Kontrollproblem (LQ-Problem).

Problem 10.14 (Linear-quadratisches Kontrollproblem)
Minimiere

$$J(w;x,t) = \int_t^{t_1} x(s)^T M(s)x(s) + w(s)^T N(s)w(s)\,ds + x(t_1)^T D x(t_1)\,, \tag{10.49}$$

unter den Nebenbedingungen

$$x' = A(s)x + B(s)w\,, \quad x(t) = x\,, \tag{10.50}$$

bei fester Endzeit t_1 und ohne Kontrolleinschränkung, d.h. $W = \mathbb{R}^m$.

□

Wir verwenden hier den Buchstaben x (statt ξ) für die Zustandsfunktion und nehmen die Notation $x(t) = x$ für die Anfangsbedingung in Kauf.

Voraussetzung 10.15 *Seien A, B, M, N stetige matrixwertige Funktionen von s mit passender Dimension, seien $D, M(s), N(s)$ symmetrisch für alle s, seien $D, M(s)$ positiv semidefinit und $N(s)$ positiv definit für alle s.* □

Ansatz 10.16
Wir setzen an

$$u(x,t) = x^T Q(t)x = \langle x, Q(t)x\rangle\ , \tag{10.51}$$

wobei $Q(t)$ für jedes t eine symmetrische Matrix im $\mathbb{R}^{(n,n)}$ und $t \mapsto Q(t)$ stetig differenzierbar werden soll. Zur Berechnung der optimalen Steuerung müssen wir für $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, $t < t_1$, die Funktion

$$g(v) = \langle \nabla u(x,t), f(t,x,v)\rangle + L(t,x,v) \tag{10.52}$$

über $v \in W = \mathbb{R}^m$ minimieren. Es ergibt sich (wir lassen das Argument t weg)

$$\begin{aligned} g(v) &= \langle x, Q(Ax+Bv)\rangle + \langle Ax+Bv, Qx\rangle + x^T Mx + v^T Nv \\ &= 2x^T Q(Ax+Bv) + x^T Mx + v^T Nv\,, \end{aligned} \tag{10.53}$$

da wir Q als symmetrisch vorausgesetzt haben. Da N positiv definit ist, ist g strikt konvex. Jede Nullstelle der Ableitung von g ist dann globales Minimum von g. Es gilt

$$\nabla g(v) = 2x^T QB + 2v^T N \,, \tag{10.54}$$

also

$$\nabla g(v) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^T QB = -2v^T N \quad \Leftrightarrow \quad v = -N^{-1} B^T Qx \,. \tag{10.55}$$

(Die Inverse von N existiert, da N positiv definit ist.) Wir haben also gezeigt: Aus dem Ansatz (10.51) mit symmetrischem $Q(t)$ folgt, daß

$$\omega(x,t) = -N(t)^{-1} B(t)^T Q(t) x \tag{10.56}$$

die eindeutige Lösung ist von

$$\min_{v \in \mathbb{R}^m} \left[\langle \nabla u(x,t), f(t,x,v) \rangle + L(t,x,v) \right] \,. \tag{10.57}$$

Zur Bestimmung von $Q(t)$ betrachten wir die HJB-Gleichung

$$\partial_t u(x,t) + \min_{v \in \mathbb{R}^m} \left[\langle \nabla u, f(t,x,v) \rangle + L(t,x,v) \right] = 0 \,. \tag{10.58}$$

Mit $v = \omega(x,t)$ aus (10.56) und u aus (10.51) erhalten wir

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_t u(x,t) + \langle \nabla u, f(t,x,\omega(x,t)) \rangle + L(t,x,\omega(x,t)) \\
&= \langle x, Q'x \rangle + \langle x, Q(Ax + B\omega) \rangle + \langle Ax + B\omega, Qx \rangle + x^T M x + \omega^T N \omega \\
&= x^T Q' x + x^T (QA + A^T Q + M) x + x^T QB\omega + \omega^T B^T Q x + \omega^T N \omega \\
&= x^T (Q' + QA + A^T Q + M) x + x^T QB(-N^{-1}) B^T Q x \\
&\quad - x^T QBN^{-1} B^T Q x + x^T QBN^{-1} N N^{-1} B^T Q x \\
&= x^T \underbrace{\left(Q' + QA + A^T Q + M - QBN^{-1} B^T Q \right)}_{=:P} x \,.
\end{aligned} \tag{10.59}$$

Können wir ein symmetrisches $Q(t)$ so finden, daß $P(t) = 0$ für alle t und $Q(t_1) = D$, so erfüllt u aus (10.51) die hinreichenden Bedingungen in Satz 10.11, und und wir haben sowohl die Optimalwertfunktion als auch eine optimale Steuerung in Rückkopplungsform berechnet. □

Satz 10.17 (Lösung des linear-quadratischen Problems)
Unter den Voraussetzungen in 10.15 gilt: Das Anfangswertproblem für die sogenannte Matrix-Riccati-Differentialgleichung

$$Q' = -QA - A^T Q - M + QBN^{-1} B^T Q^T \,, \quad Q(t_1) = D \,, \tag{10.60}$$

hat eine eindeutig bestimmte Lösung $Q : (-\infty, t_1] \to \mathbb{R}^{(n,n)}$, *und* $Q(t)$ *ist symmetrisch für alle* $t \le t_1$. *Das linear-quadratische Problem 10.14 hat für alle* $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ *mit* $t \le t_1$ *genau eine Lösung* w_*, *die man folgendermaßen erhält:*

1. *Löse (10.60).*

2. Setze

$$\omega(x,t) = -N(t)^{-1}B(t)^T Q(t)x\,, \tag{10.61}$$

und bestimme die eindeutige Lösung x_* der Anfangswertaufgabe

$$x' = A(s)x + B(s)\omega(x,s)\,, \quad x(t) = x\,, \tag{10.62}$$

mit $\omega(x,t)$ aus (10.61).

3. Setze

$$w_*(s) = \omega(x_*(s),s)\,, \quad s \in [t,t_1]\,. \tag{10.63}$$

Die Optimalwertfunktion von Problem 10.14 ist gegeben durch

$$V(x,t) = x^T Q(t)x\,. \tag{10.64}$$

Beweis: Ist $Q : [t_0,t_1] \to \mathbb{R}^{(n,n)}$ eine Lösung von (10.60), so löst $R = Q - Q^T$ auf $[t_0,t_1]$ das Anfangswertproblem

$$R' = -RA - A^T R\,, \quad R(t_1) = 0\,,$$

also ist $R = 0$ und damit Q symmetrisch. Setzen wir

$$u(x,t) = x^T Q(t)x\,, \tag{10.65}$$

so sind nach der Konstruktion in 10.16 die Voraussetzungen von Satz 10.11 erfüllt. Es bleibt zu zeigen, daß sich die lokale Lösung von (10.60) auf das Intervall $(-\infty,t_1]$ fortsetzen läßt. Sei $(t_-,t_1]$ das maximale Existenzintervall der Lösung. Da $D, M(t)$ und $N(t)$ positiv semidefinit sind, ist die Zielfunktion J für alle Steuerungen nichtnegativ, also gilt

$$0 \le V(x,t) = u(x,t) = x^T Q(t)x\,, \tag{10.66}$$

für alle $t \in (t_-,t_1]$ und alle $x \in \mathbb{R}^n$. Da $\tilde{w} = 0$ eine zulässige Steuerung ist, folgt für den zum Anfangswert (x,t) gehörenden Zustand $\tilde{x}$ und für alle $t \in (t_-,t_1]$, falls Φ die Übergangsmatrix des Systems $x' = A(s)x$ bezeichnet, daß

$$\tilde{x}(s) = \Phi(s,t)x\,,$$

und weiter

$$\begin{aligned} 0 \le x^T Q(t)x \le J(\tilde{w};x,t) &= \int_t^{t_1} \tilde{x}(s)^T M(s)\tilde{x}(s)\,ds + \tilde{x}(t_1)^T D\tilde{x}(t_1) \\ &\le |x|^2 \int_t^{t_1} \|\Phi(s,t)\|_2^2 \|M(s)\|_2\,ds + |x|^2 \|D\|_2 \|\Phi(t_1,t)\|_2^2 \\ &= c(t)|x|^2\,, \end{aligned} \tag{10.67}$$

wobei $c : (-\infty,t_1]$ die durch Ausklammern von $|x|^2$ sich ergebende (stetige) Funktion bezeichnet. Aus

$$0 \le x^T Q(t)x \le c(t)|x|^2\,, \quad Q \text{ symmetrisch}, \tag{10.68}$$

folgt

$$\|Q(t)\|_2 \le c(t)\,.$$

Wäre nun $t_- > -\infty$, so wäre $Q(t)$ auf $(t_-,t_1]$ beschränkt. Dann aber wäre die Lösung von (10.60) über t_- hinaus nach links fortsetzbar. □

Die Rückkopplungssteuerung ω aus (10.61) ist keine reine Zustandsrückkopplung, da die Zeit t ebenfalls explizit auftaucht. Das ist auch im autonomen LQ-Problem (d.h. die Matrizen A, B, M, N sind zeitunabhängig) der Fall, da Q immer von t abhängt.

11 Viskositätslösung: Definition

Wir betrachten die nichtlineare partielle Differentialgleichung

$$F(x, u, \nabla u) = 0\,, \quad x \in G\,, \tag{11.1}$$

wobei $G \subset \mathbb{R}^N$ offen, $F : G \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$. Wie wir bereits wissen, können wir von einer Lösung $u : G \to \mathbb{R}$ im allgemeinen nicht erwarten, dass sie überall in G differenzierbar ist. Wir wissen auch, dass es – im Falle einer Lipschitz-stetigen Lösung u – nicht genügt zu verlangen, dass (11.1) fast überall in G erfüllt ist, da dann die Lösung des zugehörigen Anfangswertproblems im allgemeinen nicht eindeutig ist. Wir behandeln den Begriff der **Viskositätslösung**, der von M. Crandall und P.-L. Lions Anfang der 80er Jahre entwickelt worden ist.

Die ursprüngliche Idee war, eine verallgemeinerte stetige Lösung von (11.1) zu erhalten, indem man ein approximierendes Problem betrachtet, welches man lösen kann, und dann einen Grenzübergang durchführt. Das klassische Beispiel für ein solches Vorgehen ist die nichtlineare Gleichung (Burger's Gleichung)

$$\partial_t u + u \partial_x u = 0\,, \tag{11.2}$$

approximiert durch

$$\partial_t u + u \partial_x u = \varepsilon \partial_{xx} u\,. \tag{11.3}$$

Zwar ist auch (11.3) nichtlinear, aber die Nichtlinearität tritt nicht in der höchsten Ableitung auf. Die explizite Lösung von (11.3) in $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ zum Anfangswert

$$u(x, 0) = g(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \tag{11.4}$$

ist gegeben durch

$$u_\varepsilon(x, t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-y}{t} \exp(-\frac{K(x,y,t)}{2\varepsilon})\, dy}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\frac{K(x,y,t)}{2\varepsilon})\, dy}\,, \tag{11.5}$$

wobei

$$K(x, y, t) = \frac{|x-y|^2}{2t} + \int_{-\infty}^{y} g(s)\, ds\,. \tag{11.6}$$

Im Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ erhält man eine verallgemeinerte Lösung u von (11.2), (11.4). Dieses Vorgehen wird auch als Methode der verschwindenden Viskosität (vanishing viscosity method) bezeichnet, da bei Strömungsproblemen der Term εu_{xx} der inneren Reibung (Viskosität) entspricht.

Für Gleichung (11.1) lautet der entsprechende Ansatz

$$F(x, u, \nabla u) = \varepsilon \Delta u\,, \quad x \in G\,. \tag{11.7}$$

Es ergibt sich eine elliptische Gleichung, welche linear ist hinsichtlich der zweiten Ableitung. Wir wollen diese Gleichung jetzt nicht untersuchen, sondern erläutern, wie man auf den Begriff der Viskositätslösung kommt. Wir nehmen dazu an, (11.7) habe eine Lösung $u_\varepsilon \in C^2(G)$ dergestalt, dass u_ε für $\varepsilon \to 0$ gleichmäßig gegen eine stetige Funktion $u : G \to \mathbb{R}$ konvergiert.

Sei $x \in G$ fest gegeben. Sei $v \in C^\infty(G)$ eine beliebige Funktion, so dass $u - v$ in x ein striktes lokales Maximum hat, das heißt, es gibt ein $r > 0$ mit

$$(u-v)(x) > (u-v)(y)\,, \quad \text{für alle } y \neq x,\ |y-x| \leq r. \tag{11.8}$$

Für jedes solche r gibt es (da u stetig) ein $\varepsilon > 0$ mit

$$(u_\varepsilon - v)(x) > \max_{|y-x|=r} (u_\varepsilon - v)(y)\,. \tag{11.9}$$

Das Maximum von $u_\varepsilon - v$ in $K(x;r)$ wird also in einem Punkt x_ε mit $|x_\varepsilon - x| < r$ angenommen, es muss daher gelten

$$\nabla(u_\varepsilon - v)(x_\varepsilon) = 0\,, \quad \nabla u_\varepsilon(x_\varepsilon) = \nabla v(x_\varepsilon)\,, \tag{11.10}$$

$$-\Delta(u_\varepsilon - v)(x_\varepsilon) \geq 0\,, \quad -\Delta u_\varepsilon(x_\varepsilon) \geq -\Delta v(x_\varepsilon)\,. \tag{11.11}$$

Es folgt

$$F(x_\varepsilon, u_\varepsilon(x_\varepsilon), \nabla v(x_\varepsilon)) - \varepsilon \Delta v(x_\varepsilon) \leq F(x_\varepsilon, u_\varepsilon(x_\varepsilon), \nabla u_\varepsilon(x_\varepsilon)) - \varepsilon \Delta u_\varepsilon(x_\varepsilon) = 0\,. \tag{11.12}$$

Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ liefert wegen $x_\varepsilon \to x$

$$F(x, u(x), \nabla v(x)) \leq 0\,. \tag{11.13}$$

Ganz analog folgt: Ist x ein striktes lokales Minimum für $u - v$, $v \in C^\infty(G)$, so folgt

$$F(x, u(x), \nabla v(x)) \geq 0\,. \tag{11.14}$$

Die Implikation

$$x \text{ ist lokales Maximum (Minimum) für } u - v \qquad \Rightarrow \qquad F(x, u(x), \nabla v(x)) \leq (\geq) 0 \tag{11.15}$$

liefert die Definition der Viskositätslösung (siehe unten). Sie enthält Testfunktionen, die die "Ableitungen übernehmen", ist aber (anders als variationelle Formulierungen) punktweise formuliert. Eine Definition ohne Verwendung von Testfunktionen ist ebenfalls möglich, sie verwendet einen verallgemeinerten Begriff der Ableitung.

Definition 11.1 (Superdifferential, Subdifferential)
Sei $G \subset \mathbb{R}^N$, $u : G \to \mathbb{R}$. Wir definieren das Superdifferential $D^+u(x)$ in $x \in G$ durch

$$D^+u(x) = \left\{ p : p \in \mathbb{R}^N\,,\ \limsup_{\substack{y \to x \\ y \in G \setminus \{x\}}} \frac{u(y) - u(x) - \langle p, y - x \rangle}{|y - x|} \leq 0 \right\}\,, \tag{11.16}$$

und das Subdifferential $D^-u(x)$ in $x \in G$ durch

$$D^-u(x) = \left\{ p : p \in \mathbb{R}^N\,,\ \liminf_{\substack{y \to x \\ y \in G \setminus \{x\}}} \frac{u(y) - u(x) - \langle p, y - x \rangle}{|y - x|} \geq 0 \right\}\,. \tag{11.17}$$

Wir erinnern an die Definition

$$\limsup_{\substack{y\to x\\ y\in G\setminus\{x\}}} f(y) = \inf_{\varepsilon>0} \sup_{\substack{|y-x|<\varepsilon\\ y\in G\setminus\{x\}}} f(y)\,, \quad \liminf_{\substack{y\to x\\ y\in G\setminus\{x\}}} f(y) = \sup_{\varepsilon>0} \inf_{\substack{|y-x|<\varepsilon\\ y\in G\setminus\{x\}}} f(y)\,. \tag{11.18}$$

Ist x ein isolierter Punkt von G, so ist $D^+u(x) = D^-u(x) = \mathbb{R}^N$, entsprechend den Konventionen über das Infimum und Supremum von Funktionen mit leerem Definitionsbereich.

Lemma 11.2 *Sei $G \subset \mathbb{R}^N$, $u : G \to \mathbb{R}$. Dann gilt:*

(i) *$D^-u(x) = -D^+(-u)(x)$ für alle $x \in G$,*

(ii) *$D^+u(x)$ und $D^-u(x)$ sind abgeschlossen und konvex für alle $x \in G$,*

(iii) *Ist $x \in \operatorname{int}(G)$, so ist u differenzierbar in x genau dann, wenn sowohl $D^+u(x)$ als auch $D^-u(x)$ nichtleer ist; in diesem Fall gilt*

$$D^+u(x) = D^-u(x) = \{\nabla u(x)\}\,. \tag{11.19}$$

(iv) *Ist u Lipschitz-stetig auf G mit Lipschitzkonstante L, so gilt für alle $x \in \operatorname{int}(G)$*

$$|p| \le L\,, \quad \textit{für alle } p \in D^+u(x) \cup D^-u(x). \tag{11.20}$$

Beweis: (i) und (ii) folgen aus den elementaren Eigenschaften von Supremum und Infimum. Wir zeigen (iii). Es ist klar, daß $\nabla u(x) \in D^+u(x) \cap D^-u(x)$, falls u in x differenzierbar ist. Sei umgekehrt $p_+ \in D^+u(x)$, $p_- \in D^-u(x)$. Wir setzen

$$y = x + \varepsilon(p_- - p_+)\,. \tag{11.21}$$

Für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ ist $y \in G$, und es gilt

$$\begin{aligned} |p_- - p_+| &= \frac{\langle p_- - p_+, y - x\rangle}{|y-x|} \\ &= \frac{u(y) - u(x) - \langle p_+, y - x\rangle}{|y-x|} - \frac{u(y) - u(x) - \langle p_-, y - x\rangle}{|y-x|}\,. \end{aligned} \tag{11.22}$$

Geht man auf beiden Seiten zum Limes superior für $\varepsilon \downarrow 0$ über, so folgt $|p_- - p_+| \le 0$ aus der Definition von $D^+u(x)$ und $D^-u(x)$, also ist $p_- = p_+ \in D^+u(x) \cap D^-u(x)$, u ist differenzierbar in x und (11.19) gilt. Zum Beweis von (iv) wählen wir $p \in D^+u(x)$ beliebig. Für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ ist $x - \varepsilon p \in G$, und es gilt

$$u(x - \varepsilon p) - u(x) - \langle p, -\varepsilon p\rangle \ge -L|\varepsilon p| + \varepsilon|p|^2 = \varepsilon|p|(|p| - L)\,. \tag{11.23}$$

Division durch $\varepsilon|p|$ und Grenzübergang $\varepsilon \downarrow 0$ liefert die Behauptung. Mit (i) erhalten wir (11.20) auch für $p \in D^-u(x)$. $\square$

Ist $G \subset \mathbb{R}^N$ offen, so ist klar, was $C^1(G)$ bedeutet. Für beliebige Teilmengen $G \subset \mathbb{R}^N$ definieren wir für die Zwecke dieses Kapitels

$$C^1(G) = \{f \,|\, f : G \to \mathbb{R},\ f = \tilde f|G \text{ für ein } \tilde f \in C^1(O),\ O \supset G \text{ offen}\}\,. \tag{11.24}$$

Lemma 11.3 (Charakterisierung von D^+u)
Sei $G \subset \mathbb{R}^N$, $u : G \to \mathbb{R}$. Wir nehmen an, daß u beschränkte Mengen auf beschränkte Mengen abbildet. Dann gilt für alle $x \in G$:

(i) *Ist $v \in C^1(G)$ mit*
$$(u-v)(x) = \max_{y \in G} (u-v)(y)\,, \tag{11.25}$$
so ist $\nabla v(x) \in D^+u(x)$.

(ii) *Ist $p \in D^+u(x)$, so gibt es ein $v \in C^1(\mathbb{R}^N)$ mit $p = \nabla v(x)$, so daß (11.25) gilt.*

Beweis: Zu (i). Sei x kein isolierter Punkt von G. Aus (11.25) folgt für jedes $y \in G$
$$\frac{u(y)-u(x)-\langle \nabla v(x), y-x\rangle}{|y-x|} \le \frac{v(y)-v(x)-\langle \nabla v(x), y-x\rangle}{|y-x|}\,. \tag{11.26}$$
Es folgt
$$\limsup_{\substack{y \to x \\ y \in G\setminus\{x\}}} \frac{u(y)-u(x)-\langle \nabla v(x), y-x\rangle}{|y-x|} \le \lim_{\substack{y \to x \\ y \in G\setminus\{x\}}} \frac{v(y)-v(x)-\langle \nabla v(x), y-x\rangle}{|y-x|} = 0\,. \tag{11.27}$$
Zu (ii). Sei $p \in D^+u(x)$. Wir definieren $\tilde{h} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ durch $\tilde{h}(0) = 0$ und
$$\tilde{h}(r) = \sup\left\{ \left[\frac{u(y)-u(x)-\langle p, y-x\rangle}{|y-x|}\right]_+ : y \in G,\, 0 < |x-y| \le r \right\}, \quad r > 0\,. \tag{11.28}$$
Die Funktion $\tilde{h}$ ist monoton wachsend, und es gilt $\lim_{r\to 0} \tilde{h}(r) = 0$ wegen $p \in D^+u(x)$. Sei $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ die lineare Interpolierende für
$$(r_k, \tilde{h}(r_{k+1}))\,, \quad r_k = 2^k\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,. \tag{11.29}$$
Es ist $\lim_{r \to 0} h(r) = 0$, also ist, wenn wir wieder $h(0) = 0$ setzen, die Funktion $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ stetig und monoton wachsend, und es gilt $h(r) \ge \tilde{h}(r)$ für alle $r \in \mathbb{R}_+$. Wir definieren nun $v : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ durch
$$v(y) = \langle p, y-x\rangle + \int_{|y-x|}^{2|y-x|} h(r)\,dr\,. \tag{11.30}$$
Dann ist offensichtlich $v \in C^1(\mathbb{R}^N \setminus \{x\})$. Wegen
$$0 \le \int_{|y-x|}^{2|y-x|} h(r)\,dr \le |y-x| h(2|y-x|) \tag{11.31}$$
ist v differenzierbar in x und $\nabla v(x) = p$. Für $y \ne x$ gilt
$$\nabla v(y) = p + (2h(2|y-x|) - h(|y-x|))\frac{y-x}{|y-x|}\,, \tag{11.32}$$
also ist $v \in C^1(\mathbb{R}^N)$. Es gilt weiter (beachte $v(x) = 0$)
$$(u-v)(y) - (u-v)(x) = u(y) - u(x) - \langle p, y-x\rangle - \int_{|y-x|}^{2|y-x|} h(r)\,dr\,, \tag{11.33}$$

und

$$\int_{|y-x|}^{2|y-x|} h(r)\,dr \geq |y-x| h(|y-x|) \geq |y-x|\tilde{h}(|y-x|)$$
$$\geq [u(y) - u(x) - \langle p, y-x\rangle]_+ \,. \tag{11.34}$$

Aus (11.33) und (11.34) folgt

$$(u-v)(y) - (u-v)(x) \leq 0\,, \quad y \neq x\,, \tag{11.35}$$

was zu beweisen war. □

Folgerung 11.4 *Unter den Voraussetzungen von Lemma 11.3 gilt für alle $x \in G$:*

(i) *Ist $v \in C^1(G)$ mit*

$$(u-v)(x) = \min_{y \in G} (u-v)(y)\,, \tag{11.36}$$

so ist $\nabla v(x) \in D^- u(x)$.

(ii) *Ist $p \in D^- u(x)$, so gibt es ein $v \in C^1(\mathbb{R}^N)$ mit $p = \nabla v(x)$, so daß (11.36) gilt.*

Beweis: Wende Lemma 11.3 auf $-u$ an. □

Wir betrachten jetzt

$$F(x, u, \nabla u) = 0\,, \quad F : G \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}\,. \tag{11.37}$$

Definition 11.5 (Viskositätslösung)
Sei $G \subset \mathbb{R}^N$, $u : G \to \mathbb{R}$ stetig.

(i) *u heißt Viskositätsunterlösung von (11.37), falls für jedes $v \in C^1(G)$ und $x \in G$ mit*

$$(u-v)(x) = \max_{y \in G} (u-v)(y)\,, \tag{11.38}$$

gilt, daß

$$F(x, u(x), \nabla v(x)) \leq 0\,. \tag{11.39}$$

(ii) *u heißt Viskositätsoberlösung von (11.37), falls für jedes $v \in C^1(G)$ und $x \in G$ mit*

$$(u-v)(x) = \min_{y \in G} (u-v)(y)\,, \tag{11.40}$$

gilt, daß

$$F(x, u(x), \nabla v(x)) \geq 0\,. \tag{11.41}$$

(iii) *u heißt Viskositätslösung, falls u Viskositätsunterlösung und Viskositätsoberlösung ist.*

In Definition 11.5 und in der folgenden Charakterisierung spielt die Stetigkeit von u zwar keine Rolle; trotzdem setzen wir sie hier voraus, da für unstetige Funktionen u der Begriff Viskositätslösung anders definiert wird.

Satz 11.6 *Sei $G \subset \mathbb{R}^N$, $u : G \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt.*

(i) *u ist Viskositätsunterlösung von (11.37) genau dann, wenn gilt*

$$F(x, u(x), p) \le 0\,, \quad \text{für alle } x \in G,\ p \in D^+u(x). \tag{11.42}$$

(ii) *u ist Viskositätsoberlösung von (11.37) genau dann, wenn gilt*

$$F(x, u(x), p) \ge 0\,, \quad \text{für alle } x \in G,\ p \in D^-u(x). \tag{11.43}$$

Beweis: Zu (i). Sei u Viskositätsunterlösung, sei $p \in D^+u(x)$. Wähle gemäß Lemma 11.3(ii) ein $v \in C^1(G)$ mit $p = \nabla v(x)$ und (11.38), also gilt $F(x, u(x), p) \le 0$ wegen (11.39). Es gelte umgekehrt (11.42). Sei $v \in C^1(G)$ gegeben, welches (11.38) erfüllt. Dann gilt $\nabla v(x) \in D^+u(x)$ nach Lemma 11.3(i), also folgt (11.39) aus (11.42). Teil (ii) wird analog unter Zuhilfenahme von Korollar 11.4 bewiesen. □

Folgerung 11.7 *Sei $G \subset \mathbb{R}^N$ offen. Dann ist jedes $u \in C^1(G)$ mit*

$$F(x, u(x), \nabla u(x)) = 0\,, \quad \text{für alle } x \in G, \tag{11.44}$$

auch Viskositätslösung von $F(x, u, \nabla u) = 0$.

Beweis: Nach Lemma 11.2(iii) gilt $\{\nabla u(x)\} = D^+u(x) = D^-u(x)$ für alle $x \in G$, also folgt die Behauptung aus Satz 11.6. □

Folgerung 11.8 *Sei $G \subset \mathbb{R}^N$, $u : G \to \mathbb{R}$ stetig. Ist u Viskositätslösung von*

$$F(x, u, \nabla u) = 0\,, \tag{11.45}$$

so gilt (11.45) in allen Punkten $x \in \operatorname{int}(G)$, in denen $\nabla u(x)$ existiert.

Beweis: Folgt ebenso aus Lemma 11.2(iii) und Satz 11.6. □

12 Viskositätslösung: Eindeutigkeit

Wir betrachten die partielle Differentialgleichung

$$\partial_t u + H(x,t,\nabla u) = 0\,, \quad (x,t) \in G\,, \tag{12.1}$$

mit

$$G = \mathbb{R}^n \times (0,T]\,, \quad H : G \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\,. \tag{12.2}$$

Gleichung (12.1) ist ein Spezialfall von

$$F(z,u,\nabla_z u) = 0\,, \quad F : G \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}\,, \tag{12.3}$$

wenn wir setzen $N = n+1$, $z = (x,t)$ und

$$F(x,t,w,p,q) = q + H(x,t,p)\,. \tag{12.4}$$

Für H setzen wir voraus

$$|H(x,t,p) - H(y,s,\bar{p})| \le K(|x-y| + |t-s|)(1+|p|) + K|p-\bar{p}|\,. \tag{12.5}$$

Theorem 12.1
Sei $H : G \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, es gebe ein $K > 0$, so daß (12.5) gilt für alle $(x,t),(y,s) \in G$ und alle $p,\bar{p} \in \mathbb{R}^n$. Seien $u,w : \bar{G} \to \mathbb{R}$ beschränkt und gleichmäßig stetig, sei u Viskositätsunterlösung und w Viskositätsoberlösung von (12.1) in G. Dann gilt

$$\sup_{(x,t)\in\bar{G}} [u(x,t) - w(x,t)] = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} [u(x,0) - w(x,0)]\,. \tag{12.6}$$

Folgerung 12.2 (Eindeutigkeit der Viskositätslösung)
Unter den Voraussetzungen von Theorem 12.1 gilt: Ist $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig und beschränkt, so gibt es höchstens eine gleichmäßig stetige und beschränkte Funktion $u : \bar{G} \to \mathbb{R}$, welche Viskositätslösung von (12.1) in G ist und die Anfangsbedingung

$$u(x,0) = g(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}^n\,, \tag{12.7}$$

erfüllt.

Beweis des Theorems. Wir definieren eine Hilfsfunktion $\Phi : \bar{G} \times \bar{G} \to \mathbb{R}$ durch

$$\Phi(x,t;y,s) = u(x,t) - w(y,s) - \frac{1}{2\varepsilon}\left(|x-y|^2 + (t-s)^2\right) - \beta s\,, \tag{12.8}$$

wobei $\varepsilon > 0$, $\beta > 0$ freie Parameter sind. Wir definieren die Oszillation von u durch

$$C = \operatorname{osc}(u;\bar{G}) = \sup_{(x,t),(y,s)\in\bar{G}} |u(x,t) - u(y,s)|\,, \tag{12.9}$$

und definieren eine Funktion γ_u (analog: γ_w) durch

$$\gamma_u(\rho) = \sup\{|u(x,t) - u(y,s)| : |x-y|^2 + (t-s)^2 \le \rho,\ (x,t),(y,s) \in \bar{G}\}\,. \tag{12.10}$$

(Bis auf Skalierung ist γ_u identisch mit dem sogenannten Modul der gleichmäßigen Stetigkeit, wie er in der Analysis üblicherweise verwendet wird.) Aus der gleichmäßigen Stetigkeit von u und w folgt

$$\lim_{\rho\downarrow 0} \gamma_u(\rho) = \lim_{\rho\downarrow 0} \gamma_w(\rho) = 0\,. \tag{12.11}$$

Wegen der Beschränktheit von u und w ist Φ nach oben beschränkt. Sei $\alpha > 0$ ein weiterer Parameter. Wir wählen $(x_\alpha, t_\alpha; y_\alpha, s_\alpha) \in \bar{G} \times \bar{G}$ mit

$$\Phi(t_\alpha, x_\alpha; s_\alpha, y_\alpha) \geq \sup_{\bar{G}\times\bar{G}} \Phi - \alpha\,, \tag{12.12}$$

und definieren $\Phi_\alpha : \bar{G} \times \bar{G} \to \mathbb{R}$ durch

$$\Phi_\alpha(x,t;y,s) = \Phi(x,t;y,s) - \frac{\alpha}{2}\left[|x-x_\alpha|^2 + (t-t_\alpha)^2 + |y-y_\alpha|^2 + (s-s_\alpha)^2\right]\,. \tag{12.13}$$

Sei

$$A_\alpha = \{(x,t;y,s) \in \bar{G} \times \bar{G} : |x-x_\alpha|^2 + (t-t_\alpha)^2 + |y-y_\alpha|^2 + (s-s_\alpha)^2 \leq 2\}\,. \tag{12.14}$$

Dann gilt $\Phi_\alpha \leq \Phi - \alpha$ außerhalb von A_α, und daher

$$\sup_{\bar{G}\times\bar{G}} \Phi_\alpha = \sup_{A_\alpha} \Phi_\alpha = \max_{A_\alpha} \Phi_\alpha\,. \tag{12.15}$$

Sei $(x,t;y,s) \in A_\alpha$ ein Maximum von Φ_α. Wir zeigen als erstes, daß $|t-s|$ und $|x-y|$ klein sind, wenn ε und α klein sind. Es gilt

$$\begin{aligned} 0 &\leq \Phi_\alpha(x,t;y,s) - \Phi_\alpha(y,s;y,s) \\ &= u(x,t) - u(y,s) - \frac{1}{2\varepsilon}\left(|x-y|^2 + (t-s)^2\right) \\ &\quad + \frac{\alpha}{2}\left[-|x-x_\alpha|^2 + |y-x_\alpha|^2 - (t-t_\alpha)^2 + (t-s_\alpha)^2\right] \end{aligned} \tag{12.16}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} |y-x_\alpha|^2 - |x-x_\alpha|^2 &= |y-x+x-x_\alpha|^2 - |x-x_\alpha|^2 \\ &\leq 2|y-x|^2 + 2|x-x_\alpha|^2 - |x-x_\alpha|^2 \\ &= 2|x-y|^2 + |x-x_\alpha|^2\,, \end{aligned} \tag{12.17}$$

und ebenso

$$(s-t_\alpha)^2 - (t-t_\alpha)^2 \leq 2(t-s)^2 + (t-t_\alpha)^2\,. \tag{12.18}$$

Wir setzen (12.17) und (12.18) in (12.16) ein und erhalten mit (12.9) und der Definition von A_α

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\varepsilon}\left(|x-y|^2 + (t-s)^2\right) &\leq C + \alpha|x-y|^2 + \frac{\alpha}{2}|x-x_\alpha|^2 + \alpha(t-s)^2 + \frac{\alpha}{2}(t-t_\alpha)^2 \\ &\leq C + \alpha + \alpha(|x-y|^2 + (t-s)^2)\,, \end{aligned}$$

also

$$(1-2\varepsilon\alpha)(|x-y|^2 + (t-s)^2) \leq 2\varepsilon(C+\alpha)\,. \tag{12.19}$$

Wir setzen nun voraus

$$\varepsilon \le \frac{1}{2}\,, \quad \alpha \le \frac{1}{2}\,, \tag{12.20}$$

dann wird (12.19) zu

$$|x-y|^2 + (t-s)^2 \le 4\varepsilon(C+\alpha)\,. \tag{12.21}$$

Es folgt

$$|u(x,t) - u(y,s)| \le \gamma_u(4\varepsilon(C+\alpha))\,, \tag{12.22}$$

also können wir in den Abschätzungen (12.16) – (12.21) die Konstante C durch die rechte Seite von (12.22) ersetzen und erhalten

$$(|x-y|^2 + (t-s)^2) \le 4\varepsilon(\alpha + \gamma_u(4\varepsilon(C+\alpha))\,. \tag{12.23}$$

Wir betrachten nun den Fall

$$(x,t), (y,s) \in G\,. \tag{12.24}$$

Wir definieren die C^1-Testfunktion

$$v(\xi,\tau) = \frac{1}{2\varepsilon}\left[|\xi - y|^2 + (\tau - s)^2\right] + \frac{\alpha}{2}\left[|\xi - x_\alpha|^2 + (\tau - t_\alpha)^2\right]\,. \tag{12.25}$$

Durch Einsetzen erhalten wir (Rechnung !)

$$0 \le \Phi_\alpha(x,t;y,s) - \Phi_\alpha(\xi,\tau;y,s) = (u-v)(x,t) - (u-v)(\xi,\tau)\,. \tag{12.26}$$

Da u Viskositätsunterlösung ist, folgt

$$0 \ge \partial_t v(x,t) + H(x,t,\nabla v(x,t)) = q + H(x,t,p)\,, \tag{12.27}$$

wobei wir setzen

$$q = \partial_t v(x,t) = \frac{1}{\varepsilon}(t-s) + \alpha(t - t_\alpha)\,, \tag{12.28}$$

$$p = \nabla v(x,t) = \frac{1}{\varepsilon}(x-y) + \alpha(x - x_\alpha)\,. \tag{12.29}$$

Wir definieren nun die Testfunktion

$$v(\eta,\sigma) = -\frac{1}{2\varepsilon}\left[|x-\eta|^2 + (t-\sigma)^2\right] - \frac{\alpha}{2}\left[|\eta - y_\alpha|^2 + (\sigma - s_\alpha)^2\right] - \beta\sigma\,. \tag{12.30}$$

Durch Einsetzen erhalten wir (Rechnung !)

$$0 \le \Phi_\alpha(x,t;y,s) - \Phi_\alpha(x,t;\eta,\sigma) = (w-v)(\eta,\sigma) - (w-v)(y,s)\,. \tag{12.31}$$

Da w Viskositätsunterlösung ist, folgt

$$0 \le \partial_t v(y,s) + H(y,s,\nabla v(y,s)) = \tilde{q} - \beta + H(y,s,\tilde{p})\,, \tag{12.32}$$

wobei wir setzen

$$\tilde{q} = \partial_t v(y,s) + \beta = \frac{1}{\varepsilon}(t-s) - \alpha(s - s_\alpha)\,, \tag{12.33}$$

$$\tilde{p} = \nabla v(y,s) = \frac{1}{\varepsilon}(x-y) - \alpha(y - y_\alpha)\,. \tag{12.34}$$

Aus (12.27) und (12.32) erhalten wir

$$\begin{aligned}\beta &\le \tilde{q} - q + H(y,s,\tilde{p}) - H(x,t,p) && (12.35)\\ &\le |\tilde{q} - q| + K(|x-y| + |t-s|)(1+|p|) + K|\tilde{p} - p|\,. && (12.36)\end{aligned}$$

Nach Definition von A_α gilt

$$\begin{aligned}|p-\tilde{p}| &\le \alpha(|x-x_\alpha| + |y-y_\alpha|) \le 2\alpha\,, && (12.37)\\ |q-\tilde{q}| &\le \alpha(|t-t_\alpha| + |s-s_\alpha|) \le 2\alpha\,. && (12.38)\end{aligned}$$

Weiter gilt

$$(|x-y| + |t-s|)(1+|p|) \le (|x-y| + |t-s|)\left(1 + \sqrt{2}\alpha + \frac{1}{\varepsilon}|x-y|\right)\,, \qquad (12.39)$$

und mit (12.23)

$$(|x-y| + |t-s|)\frac{1}{\varepsilon}|x-y| \le \frac{1}{\varepsilon}(3|x-y|^2 + 2(t-s)^2) \le 12(\alpha + \gamma_u(4\varepsilon(C+\alpha))\,. \qquad (12.40)$$

Mit einer geeigneten, von α und ε unabhängigen Konstante folgt nun aus (12.35) – (12.40)

$$\beta \le c(\alpha + \sqrt{\varepsilon} + \gamma_u(4\varepsilon(C+\alpha)))\,. \qquad (12.41)$$

Sei nun $\beta > 0$ fest vorgegeben. Wir wählen α und ε so klein, dass (12.41) verletzt ist. Das bedeutet, dass der Fall (12.24) nicht eintreten kann, das heißt, es gilt entweder $(x,t) \notin G$ oder $(y,s) \notin G$, also

$$\text{es ist entweder } t = 0 \text{ oder } s = 0. \qquad (12.42)$$

Wir betrachten den Fall $t = 0$. Sei nun $(\xi,\tau) \in \bar{G}$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned}u(\xi,\tau) - w(\xi,\tau) - \beta\tau &= \Phi(\xi,\tau;\xi,\tau) \le \sup_{\bar{G}\times\bar{G}} \Phi \le \Phi(x_\alpha,t_\alpha;y_\alpha,s_\alpha) + \alpha\\ &= \Phi_\alpha(x_\alpha,t_\alpha;y_\alpha,s_\alpha) + \alpha \le \Phi_\alpha(x,0;y,s) + \alpha\\ &\le u(x,0) - w(y,s) - \beta s + \alpha && (12.43)\\ &\le u(x,0) - w(x,0) + w(x,0) - w(y,s) - \beta s + \alpha\\ &\le u(x,0) - w(x,0) + \gamma_w(4\varepsilon(C+\alpha)) - \beta s + \alpha\end{aligned}$$

Analog ergibt sich im Falle $s = 0$

$$u(\xi,\tau) - w(\xi,\tau) - \beta\tau \le u(y,0) - w(y,0) + \gamma_u(4\varepsilon(C+\alpha)) + \alpha\,. \qquad (12.44)$$

Für festes $\beta > 0$ folgt also im Limes $\varepsilon \to 0$, $\alpha \to 0$

$$u(\xi,\tau) - w(\xi,\tau) \le \sup_{x\in\mathbb{R}^n}(u-w)(x,0) + \beta|\tau - s| + \beta\tau\,, \qquad (12.45)$$

für alle $(\xi,\tau) \in \bar{G}$. Da β beliebig gewählt werden kann, folgt die Behauptung. □

13 Viskositätslösung und Optimalwertfunktion

Wir befassen uns wieder mit dem Problem der optimalen Steuerung aus Abschnitt 10.

Problem 13.1 (Steuerungsproblem)
Minimiere

$$J(w;x,t) = \int_t^{t_1} L(s,\xi(s),w(s))\,ds + L_1(\xi(t_1))\,, \tag{13.1}$$

wobei $\xi : [t,t_1] \to \mathbb{R}^n$ Lösung ist von

$$\xi' = f(s,\xi,w(s))\,, \quad \xi(t) = x\,. \tag{13.2}$$

Die Endzeit t_1 ist fest, die Menge der zulässigen Steuerungen ist

$$w \in \mathcal{W}_t = \{w | w : [t,\infty) \to W \text{ meßbar und beschränkt}\}\,, \quad W \subset \mathbb{R}^m\,. \tag{13.3}$$

Sei $t_0 < t_1$, wir setzen

$$G = \mathbb{R}^n \times [t_0,t_1)\,. \tag{13.4}$$

Satz 13.2 (Lipschitzstetigkeit der Optimalwertfunktion)
Seien die Funktionen $f : [t_0,t_1] \times \mathbb{R}^n \times W \to \mathbb{R}^n$, $L : [t_0,t_1] \times \mathbb{R}^n \times W \to \mathbb{R}$, $L_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lipschitzstetig in ξ und beschränkt, sei $W \subset \mathbb{R}^m$. Dann ist die Optimalwertfunktion $V : \bar{G} \to \mathbb{R}$ von Problem 13.1 beschränkt und lipschitzstetig auf $\bar{G}$.

Beweis: Die Beschränktheit von V folgt aus der Beschränktheit von L und L_1. Zur Lipschitzstetigkeit von V: Seien $t \in [t_0,t_1]$, $w \in \mathcal{W}_t$, $x,y \in \mathbb{R}^n$, seien $\xi,\eta : [t,t_1]$ die zu den Anfangswerten x,y gehörenden Lösungen der Zustandsgleichung, sei

$$d(s) = |\xi(s) - \eta(s)|\,. \tag{13.5}$$

Sei K eine Lipschitzkonstante für f, L und L_1 bezüglich ξ. Dann gilt für $s \in [t,t_1]$

$$\begin{aligned} d(s) &= \left| x + \int_t^s f(\tau,\xi(\tau),w(\tau))\,d\tau - y - \int_t^s f(\tau,\eta(\tau),w(\tau))\,d\tau \right| \\ &\le |x-y| + K \int_t^s d(\tau)\,d\tau\,. \end{aligned} \tag{13.6}$$

Aus der Ungleichung von Gronwall folgt

$$d(s) \le |x-y| e^{K(s-t)}\,, \quad s \in [t,t_1]\,. \tag{13.7}$$

Es gilt weiter

$$\begin{aligned} &|J(w;x,t) - J(w;y,t)| \le \\ &\quad \le \int_t^{t_1} |L(s,\xi(s),w(s)) - L(s,\eta(s),w(s))|\,ds + |L_1(\xi(t_1)) - L_1(\eta(t_1))| \\ &\quad \le K \int_t^{t_1} d(s)\,ds + d(t_1) \\ &\quad \le K_1 |x-y|\,, \quad K_1 := (K+1)e^{K(t_1-t)}\,, \end{aligned} \tag{13.8}$$

also

$$|V(x,t) - V(y,t)| = |\inf_{w\in\mathcal{W}_t} J(w;x,t) - \inf_{w\in\mathcal{W}_t} J(w;y,t)| \le \sup_{w\in\mathcal{W}_t} |J(w;x,t) - J(w;y,t)| \le K_1|x-y|\,. \tag{13.9}$$

Seien nun $t, s \in [t_0, t_1]$ mit $t \le s$, $w \in \mathcal{W}_t$, $x \in \mathbb{R}^n$. Sei C eine globale Schranke für f, L und L_1. Wir bezeichnen $w|[s, t_1]$ ebenfalls mit w. Dann gilt

$$|J(w;x,t) - J(w;x,s)| \le |J(w;x,t) - J(w;\xi(s),s)| + |J(w;\xi(s),s) - J(w;x,s)|\,, \tag{13.10}$$

und weiter

$$|J(w;x,t) - J(w;\xi(s),s)| \le \int_t^s |L(\tau,\xi(\tau),w(\tau))|\,d\tau \le C|t-s|\,, \tag{13.11}$$

$$|J(w;\xi(s),s) - J(w;x,s)| \le K_1|\xi(s)-x| \le K_1\left|\int_t^s f(\tau,\xi(\tau),w(\tau))\,d\tau\right| \le K_1C|t-s|\,, \tag{13.12}$$

also

$$|J(w;x,t) - J(w;x,s)| \le K_1(C+1)|t-s|\,, \tag{13.13}$$

und damit auch

$$|V(x,t) - V(x,s)| \le K_1(C+1)|t-s|\,. \tag{13.14}$$

□

Wir wollen zeigen, daß die Optimalwertfunktion eines Kontrollproblems eine Viskositätslösung der zugehörigen HJB-Gleichung ist.

Lemma 13.3 *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt*

$$\sup_{x\in\overline{\mathrm{conv}}(A)} \langle c, x\rangle = \sup_{x\in A} \langle c, x\rangle\ . \tag{13.15}$$

Beweis: Übung. □

Lemma 13.4 *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}^n$, sei*

$$Z = \{z | z : [a,b] \to A \text{ integrierbar}\}\,. \tag{13.16}$$

Dann gilt

$$\sup_{z\in Z} \left\langle c, \frac{1}{b-a}\int_a^b z(t)\,dt \right\rangle = \sup_{x\in A} \langle c, x\rangle\ . \tag{13.17}$$

Beweis: Die Ungleichung "$\ge$" folgt sofort, wenn wir konstante Funktionen $z(t) \equiv x$, $x \in A$, betrachten. Zum Beweis der umgekehrten Ungleichung genügt es wegen Lemma 13.3 zu zeigen, daß

$$\sup_{z\in Z} \left\langle c, \frac{1}{b-a}\int_a^b z(t)\,dt \right\rangle \le \sup_{x\in \mathrm{conv}(A)} \langle c, x\rangle\ . \tag{13.18}$$

Sei zunächst z eine einfache Funktion,

$$z(t) = \sum_{k=1}^{n} \chi_{B_k}(t) x_k \,, \quad x_k \in A \,, \tag{13.19}$$

wobei $[a, b]$ endliche disjunkte Vereinigung von meßbaren Mengen B_k ist. Dann gilt

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b z(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{meas}(B_k)}{b-a} x_k \in \operatorname{conv}(A) \,. \tag{13.20}$$

Ein beliebiges $z \in Z$ läßt sich durch einfache Funktionen z_ε approximieren mit

$$\int_a^b |z(t) - z_\varepsilon(t)| \, dt < \varepsilon \,, \quad \varepsilon > 0 \quad \text{beliebig.} \tag{13.21}$$

$\square$

Wir kommen auf das Kontrollproblem 13.1 zurück. Wir setzen

$$H(x, t, p) = \inf_{v \in W} [\langle f(t, x, v), p \rangle + L(t, x, v)] \,. \tag{13.22}$$

Satz 13.5 *Seien die Voraussetzungen von Satz 13.2 erfüllt, sei $W \subset \mathbb{R}^m$ beschränkt. Dann gilt für jede Funktion $\varphi \in C^1(G)$ und alle $(x, t) \in G$*

$$\begin{aligned} &\lim_{h \downarrow 0} \inf_{w \in \mathcal{W}_t} \frac{1}{h} \left[\int_t^{t+h} L(s, x(s), w(s)) \, ds + \varphi(x(t+h), t+h) - \varphi(x, t) \right] \\ &\qquad = \partial_t \varphi(x, t) + H(x, t, \nabla \varphi(x, t)) \,. \end{aligned} \tag{13.23}$$

Hierbei bezeichnet $x : [t, t_1] \to \mathbb{R}^n$ die zur Steuerung w und dem Anfangswert (x, t) gehörende Zustandsfunktion.

Beweis: Sei $(x, t) \in G$ vorgegeben. Für $w \in \mathcal{W}_t$ und hinreichend kleines $h > 0$ gilt

$$\begin{aligned} &\frac{1}{h} \left[\int_t^{t+h} L(s, x(s), w(s)) \, ds + \varphi(x(t+h), t+h) - \varphi(x, t) \right] \\ &\quad = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} L(s, x(s), w(s)) + \partial_t \varphi(x(s), s) + \langle f(s, x(s), w(s)), \nabla \varphi(x(s), s) \rangle \, ds \,. \end{aligned} \tag{13.24}$$

Ist $v \in \Omega$ und $w \in \mathcal{W}_t$ so, dass $w|[t, t+\delta] = v$, $\delta > 0$ fest, so folgt

$$\begin{aligned} &\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \left[\int_t^{t+h} L(s, x(s), w(s)) \, ds + \varphi(x(t+h), t+h) - \varphi(x, t) \right] \\ &\qquad = \partial_t \varphi(x, t) + \langle f(t, x, v), \nabla \varphi(x, t) \rangle + L(t, x, v) \,, \end{aligned} \tag{13.25}$$

und weiter

$$\begin{aligned} &\limsup_{h \downarrow 0} \inf_{w \in \mathcal{W}_t} \frac{1}{h} \left[\int_t^{t+h} L(s, x(s), w(s)) \, ds + \varphi(x(t+h), t+h) - \varphi(x, t) \right] \\ &\qquad \le \inf_{v \in \Omega} [\partial_t \varphi(x, t) + \langle f(t, x, v), \nabla \varphi(x, t) \rangle + L(t, x, v)] \\ &\qquad \le \partial_t \varphi(x, t) + H(x, t, \nabla \varphi(x, t)) \,. \end{aligned} \tag{13.26}$$

Der zweite Teil des Beweises besteht darin, die umgekehrte Ungleichung (mit dem Limes inferior statt dem Limes superior) zu zeigen. Sei $h_n \downarrow 0$. Wir wählen $w_n \in \mathcal{W}_t$ mit

$$\begin{aligned}\inf_{w\in\mathcal{W}_t}&\left[\int_t^{t+h_n} L(s,x(s),w(s))\,ds + \varphi(x(t+h_n),t+h_n)\right]\\ &\geq -h_n^2 + \int_t^{t+h_n} L(s,x_n(s),w_n(s))\,ds + \varphi(x_n(t+h_n),t+h_n)\,.\end{aligned} \tag{13.27}$$

Es folgt mit (13.24)

$$\begin{aligned}\frac{1}{h_n}\inf_{w\in\mathcal{W}_t}&\left[\int_t^{t+h_n} L(s,x(s),w(s))\,ds + \varphi(x(t+h_n),t+h_n) - \varphi(x,t)\right]\\ &\geq -h_n + \frac{1}{h_n}\int_t^{t+h_n} L(s,x_n(s),w_n(s)) + \partial_t\varphi(x_n(s),s)\\ &\qquad + \langle f(s,x_n(s),w_n(s)), \nabla\varphi(x_n(s),s)\rangle\;ds\\ &= \partial_t\varphi(x,t) + \frac{1}{h_n}\int_t^{t+h_n} L(t,x,w_n(s))\,ds\\ &\qquad + \left\langle \frac{1}{h_n}\int_t^{t+h_n} f(s,x_n(s),w_n(s))\,ds, \nabla\varphi(x,t)\right\rangle + e(n)\,,\end{aligned} \tag{13.28}$$

mit dem Differenzterm

$$\begin{aligned}e(n) = -h_n &+ \frac{1}{h_n}\int_t^{t+h_n} \partial_t\varphi(x_n(s),s) - \partial_t\varphi(x,t)\,ds\\ &+ \frac{1}{h_n}\int_t^{t+h_n} L(s,x_n(s),w_n(s)) - L(t,x,w_n(s))\,ds\\ &+ \frac{1}{h_n}\int_t^{t+h_n} \langle f(s,x_n(s),w_n(s)), \nabla\varphi(x_n(s),s)\rangle - \langle f(t,x,w_n(s)), \nabla\varphi(x,t)\rangle\;ds\,.\end{aligned} \tag{13.29}$$

Aus den Voraussetzungen folgt $\lim_{s\downarrow t} x_n(s) = x$ gleichmäßig in n und damit

$$\lim_{n\to\infty} e(n) = 0\,. \tag{13.30}$$

Aus Lemma 13.4, angewendet auf $[a,b] = [t, t+h_n]$, $c = (-1, -\nabla\varphi(x,t))$ und $A \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$,

$$A = \{(L(t,x,v), f(t,x,v)) : v \in W\}\,, \tag{13.31}$$

folgt

$$\begin{aligned}\sup_{n\in\mathbb{N}}&\left[-\frac{1}{h_n}\int_t^{t+h_n} L(t,x,w_n(s))\,ds - \left\langle \frac{1}{h_n}\int_t^{t+h_n} f(t,x,w_n(s))\,ds, \nabla\varphi(x,t)\right\rangle\right]\\ &\leq \sup_{v\in W}[-\langle f(t,x,v), \nabla\varphi(x,t)\rangle - L(t,x,v)]\\ &= -H(x,t,\nabla\varphi(x,t))\,,\end{aligned} \tag{13.32}$$

und damit wird (13.28) zu

$$\begin{aligned}\frac{1}{h_n}\inf_{w\in\mathcal{W}_t}&\left[\int_t^{t+h_n} L(s,x(s),w(s))\,ds + \varphi(x(t+h_n),t+h_n) - \varphi(x,t)\right]\\ &\geq \partial_t\varphi(x,t) + H(x,t,\nabla\varphi(x,t)) + e(n)\,,\end{aligned} \tag{13.33}$$

also

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{h_n} \inf_{w\in\mathcal{W}_t} \left[\int_t^{t+h_n} L(s,x(s),w(s))\,ds + \varphi(x(t+h_n),t+h_n) - \varphi(x,t)\right]$$
$$\geq \partial_t\varphi(x,t) + H(x,t,\nabla\varphi(x,t))\,. \qquad (13.34)$$

Da die Folge h_n beliebig war, ist der Satz bewiesen. □

Satz 13.6 *Seien die Voraussetzungen von Satz 13.2 erfüllt. Dann ist V Viskositätslösung der zugehörigen HJB-Gleichung*

$$-(\partial_t u + H(x,t,\nabla u)) = 0\,. \qquad (13.35)$$

Beweis: Sei $(x,t) \in G$, sei $\varphi \in C^1(G)$ eine Testfunktion mit

$$(V-\varphi)(x,t) = \max_{(\xi,\tau)\in G} (V-\varphi)(\xi,\tau)\,. \qquad (13.36)$$

Dann gilt

$$\varphi(x(t+h),t+h) - \varphi(x,t) \geq V(x(t+h),t+h) - V(x,t) \qquad (13.37)$$

entlang jeder in (x,t) beginnenden Systemtrajektorie. Aus dem Bellman-Prinzip 10.9 folgt nun

$$\inf_{w\in\mathcal{W}_t} \left[\int_t^{t+h} L(s,x(s),w(s))\,ds + \varphi(x(t+h),t+h) - \varphi(x,t)\right]$$
$$\geq \left[\int_t^{t+h} L(s,x(s),w(s))\,ds + V(x(t+h),t+h) - V(x,t)\right]$$
$$= 0\,. \qquad (13.38)$$

Aus Satz 13.5 folgt, wenn wir (13.38) mit $1/h$ multiplizieren und den Grenzübergang $h \to 0$ ausführen, daß gilt

$$-\partial_t\varphi(x,t) - H(x,t,\nabla\varphi(x,t)) \leq 0\,, \qquad (13.39)$$

also ist V Viskositätsunterlösung von (13.35). Ist $\varphi \in C^1(G)$ eine Testfunktion mit

$$(V-\varphi)(x,t) = \min_{(\xi,\tau)\in G} (V-\varphi)(\xi,\tau)\,, \qquad (13.40)$$

so folgt mit derselben Rechnung, aber umgekehrten Ungleichungen, daß

$$-\partial_t\varphi(x,t) - H(x,t,\nabla\varphi(x,t)) \geq 0\,, \qquad (13.41)$$

damit ist V Viskositätsoberlösung und der Satz bewiesen. □

Theorem 13.7 (Optimalwertfunktion ist eindeutige Viskositätslösung) *Seien die Funktionen $f : [t_0,t_1]\times\mathbb{R}^n\times\Omega \to \mathbb{R}^n$, $L : [t_0,t_1]\times\mathbb{R}^n\times\Omega \to \mathbb{R}$, $L_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ beschränkt und lipschitzstetig, sei $W \subset \mathbb{R}^m$ beschränkt. Dann ist für $G = [t_0,t_1)\times\mathbb{R}^n$ die Optimalwertfunktion $V : \bar{G} \to \mathbb{R}$ von Problem 13.1 beschränkte und lipschitzstetige Viskositätslösung auf G der HJB-Gleichung*

$$-(\partial_t u + H(x,t,\nabla u)) = 0\,, \qquad (13.42)$$

wobei

$$H(x,t,p) = \inf_{v \in W} [\langle f(t,x,v), p \rangle + L(t,x,v)] \,. \tag{13.43}$$

Es gibt keine andere beschränkte und gleichmäßig stetige Viskositätslösung von (13.42), welche ebenfalls die Endbedingung

$$u(x,t_1) = L_1(x) \,, \quad x \in \mathbb{R}^n \,, \tag{13.44}$$

erfüllt.

Beweis: Die Behauptungen folgen aus Satz 13.2 (Regularität von V), Satz 13.6 (Viskositätseigenschaft von V) und Folgerung 12.2 (Eindeutigkeit der Viskositätslösung). Zur Anwendung von Folgerung 12.2 wird das Zeitintervall $[t_0, t_1]$ auf das Zeitintervall $[0, T]$ transformiert. □