Partielle Differentialgleichungen *

Martin Brokate †

Inhaltsverzeichnis

*Vorlesungsskript, WS 2006/07

†Zentrum Mathematik, TU München

1 Die Laplace-Gleichung

Die Gleichung

$$\Delta u = 0 \tag{1.1}$$

heißt Laplace-Gleichung, oder auch Potentialgleichung. Hierbei ist $u : \Omega \to \mathbb{R}$ eine unbekannte Funktion, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, Δ der Laplace-Operator

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \partial_i^2 \,, \tag{1.2}$$

wobei wir mit ∂_i die i-te partielle Ableitung bezeichnen, also

$$\partial_i u(x) = \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \,. \tag{1.3}$$

Als Lösungen suchen wir Funktionen u, für welche

$$0 = \Delta u(x) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i^2 u(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x) \tag{1.4}$$

gilt für alle $x \in \Omega$.

Definition 1.1 (Harmonische Funktion)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Funktion $u \in C^2(\Omega)$ heißt harmonische Funktion (oder: harmonisch) auf (oder: in) Ω, falls (1.4) gilt für alle $x \in \Omega$. □

Bemerkung zur Notation: Im Falle $n = 2$ oder $n = 3$ schreibt man in (1.3) für das Argument oft komponentenweise (x, y) bzw. (x, y, z) statt vektoriell x. Für die partielle Ableitungen schreibt man oft auch u_{x_i}. Kombiniert man beide Schreibweisen, so erhält die Laplace-Gleichung etwa im $\mathbb{R}^3$ die Form

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0 \,. \tag{1.5}$$

Bemerkung 1.2 (Zusammenhang zur Komplexen Analysis)
Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$, also $f = u + iv$. Ist f analytisch auf Ω, so folgt aus den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen (siehe Analysis 4)

$$\partial_x u = \partial_y v \,, \quad \partial_y u = -\partial_x v \,, \tag{1.6}$$

dass u harmonisch ist auf Ω (nunmehr aufgefasst als Teilmenge von $\mathbb{R}^2$). Ist umgekehrt u auf Ω harmonisch, so kann man sich fragen, ob es ein analytisches $f : \Omega \to \mathbb{C}$ gibt mit $u = \operatorname{Re} f$. Die Antwort hängt von der Form von Ω ab. Gemäß (1.6) suchen wir ein $v : \Omega \to \mathbb{R}$ mit

$$\operatorname{grad} v = \nabla v = \begin{pmatrix} -\partial_y u \\ \partial_x u \end{pmatrix} \,. \tag{1.7}$$

Ist nun Ω sternförmig, so folgt (Analysis 2) aus der Identität $\partial_y(-\partial_y u) = \partial_x(\partial_x u)$, dass ein $v \in C^1(\Omega)$ existiert, welches (1.7) erfüllt. Es folgt, dass $f = u + iv$ eine analytische Funktion ist mit $u = \operatorname{Re} f$. □

Definition 1.3 (Subharmonische Funktion, Superharmonische Funktion)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Funktion $u \in C^2(\Omega)$ heißt subharmonisch in Ω, falls gilt

$$-\Delta u(x) \leq 0\,, \quad \textit{für alle } x \in \Omega, \tag{1.8}$$

und superharmonisch in Ω, falls gilt

$$-\Delta u(x) \geq 0\,, \quad \textit{für alle } x \in \Omega, \tag{1.9}$$

□

Eine wesentliche Eigenschaft einer harmonischen Funktion u ist die Mittelwerteigenschaft. Sie besagt: Ist B eine Kugel im $\mathbb{R}^n$ mit Mittelpunkt x, so ist der Funktionswert $u(x)$ gleich dem Mittelwert von u sowohl über B als auch über ∂B.

Definition 1.4 (Volumen, Fläche, Mittelwert)
Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ messbar, so definieren wir das Volumen von U durch das Volumenintegral

$$|U| = \int_U 1\, dx\,. \tag{1.10}$$

Ist $f : U \to \mathbb{R}$ integrierbar, so heißt

$$\frac{1}{|U|} \int_U f(x)\, dx \tag{1.11}$$

der Mittelwert von f auf U. Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Mannigfaltigkeit, so definieren wir die (k-dimensionale) Fläche von M durch das Oberflächenintegral

$$|M| = \int_M 1\, dS(\xi)\,. \tag{1.12}$$

Ist f über M integrierbar, so heißt

$$\frac{1}{|M|} \int_M f(\xi)\, dS(\xi)\,. \tag{1.13}$$

der Mittelwert von f über M. □

Die Integrale in (1.10) und (1.11) sind als n-dimensionale Integrale (Volumenintegrale) zu verstehen, die Integrale in (1.12) und (1.13) als k-dimensionale Oberflächenintegrale. (Siehe Analysis 3.) Mit "Integral" ist das Lebesgue-Integral gemeint.

Sei M eine k-dimensionale Mannigfaltigkeit, seien $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$, sei f über der Mannigfaltigkeit $x + rM$ integrierbar. Dann gilt die Transformationsformel

$$\int_{x+rM} f(\xi)\, dS(\xi) = r^k \int_M f(x + rz)\, dS(z)\,. \tag{1.14}$$

Wir erinnern an den Integralsatz von Gauß. Er besagt, dass unter geeigneten Voraussetzungen

$$\int_\Omega \operatorname{div} F(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} \langle F(\xi), \nu(\xi) \rangle \; dS(\xi) \tag{1.15}$$

gilt. (Er gilt beispielsweise dann, wenn $F \in C^1(\Omega;\mathbb{R}^n)$ und Ω eine offene und beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist, welche einen C^1-Rand hat.) Hierbei ist

$$\operatorname{div} F = \sum_{i=1}^n \partial_i F_i \tag{1.16}$$

die Divergenz des Vektorfelds F. Eine weitere Formel, die wir verwenden, ist

$$\int_{B(x;r)} f(y)\, dy = \int_0^r \int_{\partial B(x;\rho)} f(\xi)\, dS(\xi)\, d\rho\,. \tag{1.17}$$

Im Spezialfall $f = 1$ wird (1.17) zu

$$|B(x;r)| = \int_0^r |\partial B(x;\rho)|\, d\rho\,. \tag{1.18}$$

Die Formel (1.18) können wir auch direkt erhalten aus den Beziehungen

$$|B(x;r)| = r^n |B(0;1)|\,, \quad |\partial B(x;r)| = r^{n-1}|\partial B(0;1)|\,, \tag{1.19}$$

sowie der Formel

$$|\partial B(0;1)| = n|B(0;1)| \qquad \left(= \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\right)\,, \tag{1.20}$$

hier steht Γ für die Gammafunktion.

Satz 1.5 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei u subharmonisch in Ω, seien $x \in \Omega$, $R > 0$ mit $B(x;R) \subset \Omega$. Wir definieren*

$$\varphi(r) = \frac{1}{|\partial B(x;r)|} \int_{\partial B(x;r)} u(\xi)\, dS(\xi)\,, \quad 0 < r < R\,. \tag{1.21}$$

Dann gilt $\varphi' \geq 0$ auf $(0,R)$, sowie

$$\lim_{r \downarrow 0} \varphi(r) = u(x)\,. \tag{1.22}$$

Beweis: Wir setzen $B_1 = B(0;1)$. Mit (1.14) folgt

$$\int_{\partial B(x;r)} u(\xi)\, dS(\xi) = r^{n-1} \int_{\partial B_1} u(x+rz)\, dS(z)\,, \quad r \in (0,R)\,, \tag{1.23}$$

also wegen (1.19)

$$\varphi(r) = \frac{1}{|\partial B_1|} \int_{\partial B_1} u(x+rz)\, dS(z)\,. \tag{1.24}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
\varphi'(r) &= \frac{1}{|\partial B_1|} \int_{\partial B_1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} u(x+rz)\, dS(z) = \frac{1}{|\partial B_1|} \int_{\partial B_1} \langle \nabla u(x+rz), z \rangle \, dS(z) \\
&= \frac{1}{|\partial B(x;r)|} \int_{\partial B(x;r)} \left\langle \nabla u(\xi), \frac{\xi - x}{r} \right\rangle dS(\xi)\,.
\end{aligned}$$

Für die äußere Einheitsnormale an die Kugel $B(x;r)$ gilt

$$\nu(\xi) = \frac{\xi - x}{r}, \quad \xi \in \partial B(x;r),$$

und aus dem Gaußschen Satz folgt

$$\begin{aligned}\int_{\partial B(x;r)} \left\langle \nabla u(\xi), \frac{\xi - x}{r} \right\rangle dS(\xi) &= \int_{\partial B(x;r)} \langle \nabla u(\xi), \nu(\xi) \rangle \, dS(\xi) = \int_{B(x;r)} \operatorname{div}(\nabla u(y)) \, dy \\ &= \int_{B(x;r)} \Delta u(y) \, dy .\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir

$$\varphi'(r) = \frac{1}{|\partial B(x;r)|} \int_{B(x;r)} \Delta u(y) \, dy . \tag{1.25}$$

(Die Herleitung bis hierher ist für alle $u \in C^2(\Omega)$ gültig.) Da u subharmonisch ist, folgt $\varphi'(r) \geq 0$ für alle $r \in (0, R)$. Es gilt weiter

$$\varphi(r) - u(x) = \frac{1}{|\partial B(x;r)|} \int_{\partial B(x;r)} u(\xi) - u(x) \, dS(\xi), \tag{1.26}$$

also

$$|\varphi(r) - u(x)| \leq \frac{1}{|\partial B(x;r)|} \int_{\partial B(x;r)} |u(\xi) - u(x)| \, dS(\xi) \leq \sup_{\xi \in \partial B(x;r)} |u(\xi) - u(x)| . \tag{1.27}$$

Da u stetig ist in x, folgt (1.22). □

Folgerung 1.6 *In der Situation von Satz 1.5 gilt*

$$u(x) \leq \frac{1}{|\partial B(x;r)|} \int_{\partial B(x;r)} u(\xi) \, dS(\xi), \quad 0 < r < R, \tag{1.28}$$

sowie

$$u(x) \leq \frac{1}{|B(x;r)|} \int_{B(x;r)} u(y) \, dy, \quad 0 < r < R. \tag{1.29}$$

Beweis: Da $\varphi' \geq 0$, folgt (1.28) direkt aus (1.21) und (1.22). Aus (1.28) folgt nun

$$u(x)|B(x;r)| = u(x) \int_0^r |\partial B(x;\rho)| \, d\rho \leq \int_0^r \int_{\partial B(x;\rho)} u(\xi) \, dS(\xi) \, d\rho = \int_{B(x;r)} u(y) \, dy$$

mit (1.17) und (1.18), also ist (1.29) gezeigt. □

Ist u superharmonisch (statt subharmonisch), so können wir Satz 1.5 und Folgerung 1.6 auf $-u$ anwenden und erhalten die umgekehrten Ungleichungen in (1.28) und (1.29). Daraus ergibt sich nun die Mittelwerteigenschaft.

Satz 1.7 (Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, u harmonisch in Ω. Dann gilt

$$u(x) = \frac{1}{|\partial B(x;r)|} \int_{\partial B(x;r)} u(\xi)\, dS(\xi) = \frac{1}{|B(x;r)|} \int_{B(x;r)} u(y)\, dy \tag{1.30}$$

für alle $x \in \Omega$ und alle $r > 0$ mit $K(x;r) = \overline{B(x;r)} \subset \Omega$. □

Für den Spezialfall $n = 2$ ergibt sich die erste Gleichung in (1.30) direkt aus dem Integralsatz von Cauchy.

Eine Umkehrung gilt ebenfalls.

Satz 1.8 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $u \in C^2(\Omega)$, und es gelte*

$$u(x) = \frac{1}{|\partial B(x;r)|} \int_{\partial B(x;r)} u(\xi)\, dS(\xi) \tag{1.31}$$

für alle $x \in \Omega$ und alle $r > 0$ mit $K(x;r) = \overline{B(x;r)} \subset \Omega$. Dann ist u harmonisch in Ω.

Beweis: Bezeichnen wir die rechte Seite von (1.31) wieder mit $\varphi(r)$, gilt $\varphi'(r) = 0$, da die linke Seite nicht von r abhängt. Wäre u nicht harmonisch, so gäbe es wegen der Stetigkeit von u eine Kugel $K(x;r) \subset \Omega$ mit $\Delta u \neq 0$ in $K(x;r)$. Aus der Formel (1.25) würde nun $\varphi'(r) \neq 0$ folgen, ein Widerspruch. □

Wir erinnern daran: Eine Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heißt Gebiet, wenn sie offen und zusammenhängend ist.

Satz 1.9 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, sei $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ subharmonisch in Ω. Dann gilt*

$$\max_{y \in \overline{\Omega}} u(y) = \max_{y \in \partial\Omega} u(y)\,. \tag{1.32}$$

Falls es ein $x \in \Omega$ gibt mit

$$u(x) = \max_{y \in \overline{\Omega}} u(y)\,. \tag{1.33}$$

so ist u in Ω konstant.

Beweis: Da u sowohl auf $\overline{\Omega}$ als auch auf $\partial\Omega$ ein Maximum annimmt, folgt die erste Behauptung aus der zweiten. Es gelte nun (1.33). Wir setzen $M = u(x)$. Sei $r > 0$ so, dass $r < \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$. Dann gilt

$$M = u(x) \leq \frac{1}{|B(x;r)|} \int_{B(x;r)} u(y)\, dy \leq u(x) = M\,. \tag{1.34}$$

(Die erste Ungleichung folgt aus Satz 1.5, die zweite aus (1.33).) Aus (1.34) folgt nun, dass u in $B(x;r)$ konstant gleich M ist. Es folgt weiter, dass die Menge $A = \{y : y \in \Omega, u(y) = M\}$ offen ist in M; als Urbildmenge einer abgeschlossenen Menge ist A auch abgeschlossen in M. Wegen $x \in A$ ist $A \neq \emptyset$, und da Ω zusammenhängend ist, folgt $A = \Omega$. □

Folgerung 1.10 (Maximumprinzip für harmonische Funktionen)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, sei $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ harmonisch in Ω. Dann gilt: Entweder ist u auf Ω konstant, oder es gilt

$$\min_{y \in \partial\Omega} u(y) < u(x) < \max_{y \in \partial\Omega} u(y)\,, \quad \text{für alle } x \in \Omega. \tag{1.35}$$

Beweis: Anwendung von Satz 1.9 auf u und $-u$. □

Wir betrachten nun das Randwertproblem

$$-\Delta u = f \qquad \text{in } \Omega \tag{1.36}$$

$$u = g \qquad \text{auf } \partial\Omega. \tag{1.37}$$

Die Gleichung (1.36) heißt die **Poisson-Gleichung**, die Gleichung (1.37) heißt **Dirichlet-Randbedingung**, das Randwertproblem (1.36), (1.37) bezeichnet man auch als das Dirichlet-Problem für die Poisson-Gleichung.

Definition 1.11 (Klassische Lösung)
Seien $f \in C(\Omega)$ und $g \in C(\partial\Omega)$. Ein $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ heißt klassische Lösung von (1.36), (1.37), falls $-\Delta u(x) = f(x)$ für alle $x \in \Omega$ und $u(x) = g(x)$ für alle $x \in \partial\Omega$ gelten. □

Satz 1.12 (Eindeutigkeit der klassischen Lösung)
Das Dirichlet-Problem für die Poisson-Gleichung in einem beschränkten Gebiet hat höchstens eine klassische Lösung.

Beweis: Übung. □

Die Existenz einer klassischen Lösung kann man beweisen, falls g stetig, f Hölder-stetig und $\partial\Omega$ hinreichend regulär ist. Das werden wir in dieser Vorlesung nicht behandeln.

Bestimmte Lösungen einer partiellen Differentialgleichung kann man manchmal dadurch erhalten, indem man einen geeigneten Ansatz wählt. Wir wollen nun nach radialsymmetrischen Lösungen der Laplace-Gleichung suchen, also nach Lösungen der Form

$$u(x) = v(|x|)\,, \quad |x| = \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\,, \tag{1.38}$$

mit der zu bestimmenden Funktion $v : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. Für $\rho(x) = |x|$ gilt, falls $x \neq 0$,

$$\partial_i \rho(x) = \frac{x_i}{|x|}\,, \quad \partial_j \partial_i \rho(x) = \frac{1}{|x|}\delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{|x|^3}\,. \tag{1.39}$$

Für den Ansatz (1.38) gilt also

$$\partial_i u(x) = v'(|x|)\frac{x_i}{|x|}\,, \tag{1.40}$$

$$\partial_i^2 u(x) = v''(|x|)\frac{x_i^2}{|x|^2} + v'(|x|)\left(\frac{1}{|x|} - \frac{x_i^2}{|x|^3}\right) \tag{1.41}$$

$$\Delta u(x) = v''(|x|) + \frac{n-1}{|x|}v'(|x|)\,. \tag{1.42}$$

Wir haben damit für diesen Spezialfall die Laplace-Gleichung auf die gewöhnliche Differentialgleichung

$$v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r) = 0\,, \quad r > 0\,, \tag{1.43}$$

zurückgeführt, welche die speziellen Lösungen $v(r) = \log r$ für $n = 2$ und $v(r) = r^{2-n}$ für $n \geq 3$ besitzt.

Wir bezeichnen mit

$$\alpha_n = |\partial B(0; 1)| \tag{1.44}$$

den Flächeninhalt des Randes der Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$.

Definition 1.13 (Fundamentallösung)
Die durch

$$\Phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{(n-2)\alpha_n} |x|^{2-n}\,, & n \geq 3\,, \\ -\frac{1}{2\pi} \log(|x|)\,, & n = 2\,, \end{cases} \tag{1.45}$$

definierte Funktion $\Phi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ *heißt Fundamentallösung.* □

Die Fundamentallösung Φ hat eine Singularität im Nullpunkt. Ihre ersten und zweiten Ableitungen sind für $x \neq 0$ gegeben durch (Rechnung wie oben)

$$\partial_i \Phi(x) = -\frac{1}{\alpha_n} \frac{x_i}{|x|^n}\,, \quad \partial_j \partial_i \Phi(x) = -\frac{1}{\alpha_n} \left(\frac{1}{|x|^n} \delta_{ij} - n \frac{x_i x_j}{|x|^{n+2}} \right). \tag{1.46}$$

Offensichtlich (und nach Konstruktion) ist Φ harmonisch auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Aus (1.46) folgt unmittelbar

Lemma 1.14 *Für alle* $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, *gelten*

$$|\nabla \Phi(x)| = \frac{1}{\alpha_n} |x|^{1-n}\,, \quad \left\langle \nabla \Phi(x), \frac{x}{|x|} \right\rangle = -\frac{1}{\alpha_n} |x|^{1-n}\,, \tag{1.47}$$

und

$$|\partial_j \partial_i \Phi(x)| \leq \frac{n}{\alpha_n} |x|^{-n}\,. \tag{1.48}$$

□

Für $k \in \mathbb{N}$ gilt mit $B_r = B(0; r)$ gemäß (1.17)

$$\int_{B_r} |x|^{-k}\, dx = \int_0^r \int_{\partial B_\rho} |\xi|^{-k} dS(\xi)\, d\rho = \int_0^r \rho^{n-1} \alpha_n \rho^{-k} d\rho = \int_0^r \alpha_n \rho^{n-1-k} d\rho\,. \tag{1.49}$$

Die Funktion $x \mapsto |x|^{-k}$ ist also auf B_r genau dann integrierbar, wenn $k \leq n - 1$.

Folgerung 1.15 *Es gilt* $\Phi, \partial_i \Phi \in L^1(B_r)$ *und* $\partial_j \partial_i \Phi \notin L^1(B_r)$ *für alle* i, j. □

Wir können Φ dazu verwenden, um Lösungen der Laplace-Gleichung in Integralform darzustellen. Wir erinnern an die Greenschen Formeln aus der Analysis. Sei Ω ein Gebiet im

$\mathbb{R}^n$, in dem der Gaußsche Integralsatz gilt. Seien $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$. Die erste Greensche Formel ergibt sich, wenn wir den Gaußschen Satz auf $w = v\nabla u$ anwenden,

$$\int_\Omega v(x)\Delta u(x)\,dx + \int_\Omega \langle \nabla v(x), \nabla u(x)\rangle \,dx = \int_{\partial\Omega} v(\xi)\partial_\nu u(\xi)\,dS(\xi)\,, \tag{1.50}$$

die zweite, indem wir in (1.50) die Rollen von u und v vertauschen und subtrahieren,

$$\int_\Omega v(x)\Delta u(x) - u(x)\Delta v(x)\,dx = \int_{\partial\Omega} v(\xi)\partial_\nu u(\xi) - u(\xi)\partial_\nu v(\xi)\,dS(\xi)\,. \tag{1.51}$$

Satz 1.16 (Greensche Darstellungsformel)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit C^1-Rand, sei $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$. Dann gilt für alle $x \in \Omega$

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \Phi(\xi - x)\partial_\nu u(\xi) - u(\xi)\partial_\nu \Phi(\xi - x)\,dS(\xi) - \int_\Omega \Phi(y - x)\Delta u(y)\,dy\,. \tag{1.52}$$

Beweis: Sei $x \in \Omega$. Der Beweis besteht darin, die zweite Greensche Formel auf dem Gebiet $\Omega \setminus K(x;\varepsilon)$ mit der dort harmonischen Funktion $v(y) = \Phi(y - x)$ anzuwenden und den Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ durchzuführen. Sei also $\varepsilon > 0$ mit $K(x;\varepsilon) \subset \Omega$. Aus (1.51) folgt mit $B_\varepsilon = B(x;\varepsilon)$

$$\int_{\Omega\setminus K(x;\varepsilon)} \Phi(y-x)\Delta u(y)\,dy = \left(\int_{\partial\Omega} + \int_{\partial B_\varepsilon}\right) \Phi(\xi-x)\partial_\nu u(\xi) - u(\xi)\partial_\nu\Phi(\xi-x)\,dS(\xi)\,. \tag{1.53}$$

Im Falle $n \geq 3$ gilt

$$\int_{\partial B_\varepsilon} \Phi(\xi - x)\,dS(\xi) = \varepsilon^{n-1}\alpha_n \frac{\varepsilon^{2-n}}{\alpha_n(n-2)} = \frac{\varepsilon}{n-2}\,, \tag{1.54}$$

im Falle $n = 2$

$$\int_{\partial B_\varepsilon} \Phi(\xi - x)\,dS(\xi) = \varepsilon|\log\varepsilon|\,. \tag{1.55}$$

Hieraus folgt

$$\left|\int_{\partial B_\varepsilon} \Phi(\xi - x)\partial_\nu u(\xi)\,dS(\xi)\right| \leq \int_{\partial B_\varepsilon} \Phi(\xi - x)\,dS(\xi)\ \sup_\Omega |\nabla u| \to 0\,. \tag{1.56}$$

Weiter gilt auf ∂B_ε wegen (1.47)

$$\partial_\nu \Phi(\xi - x) = \left\langle \nabla\Phi(\xi - x), -\frac{\xi - x}{|\xi - x|}\right\rangle = \frac{1}{\alpha_n}\varepsilon^{1-n}\,, \tag{1.57}$$

man beachte dabei, dass die äußere Normale an $\Omega \setminus K(x;\varepsilon)$ ins Innere von $B(x;\varepsilon)$ zeigt. Es folgt

$$\int_{\partial B_\varepsilon} \partial_\nu\Phi(\xi - x)\,dS(\xi) = 1\,, \tag{1.58}$$

und weiter

$$\left|u(x) - \int_{\partial B_\varepsilon} u(\xi)\partial_\nu\Phi(\xi - x)\,dS(\xi)\right| = \left|\int_{\partial B_\varepsilon} (u(x) - u(\xi))\partial_\nu\Phi(\xi - x)\,dS(\xi)\right| \tag{1.59}$$

$$\leq \sup_{\xi\in\partial B_\varepsilon} |u(x) - u(\xi)| \to 0\,, \quad \text{falls } \varepsilon \to 0. \tag{1.60}$$

Da Φ integrierbar ist in Ω nach Folgerung 1.15, folgt

$$\int_{B_\varepsilon} \Phi(y-x)\Delta u(y)\, dy \to 0\,, \tag{1.61}$$

für $\varepsilon \to 0$, also

$$\int_{\Omega\setminus K(x;\varepsilon)} \Phi(y-x)\Delta u(y)\, dy \to \int_\Omega \Phi(y-x)\Delta u(y)\, dy\,, \quad \text{falls } \varepsilon \to 0. \tag{1.62}$$

Wir erhalten nun (1.52) aus (1.53) durch Grenzübergang $\varepsilon \to 0$. □

Erinnerung: Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $u : \Omega \to \mathbb{R}$, so ist der Träger $\operatorname{supp}(u)$ von u definiert durch

$$\operatorname{supp}(u) = \overline{\{x : x \in \Omega,\, u(x) \neq 0\}}\,. \tag{1.63}$$

Folgerung 1.17 *Ist $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$, und ist $\operatorname{supp}(u)$ kompakt, so gilt*

$$u(x) = -\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y-x)\Delta u(y)\, dy\,. \tag{1.64}$$

Beweis: Wähle Ω in Satz 1.16 so groß, dass $\operatorname{supp}(u) \subset \Omega$, dann gilt $u = \partial_\nu u = 0$ auf $\partial\Omega$. □

Folgerung 1.18 *Es seien die Voraussetzungen von Satz 1.16 erfüllt, sei u außerdem harmonisch. Dann gilt*

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \Phi(\xi - x)\partial_\nu u(\xi) - u(\xi)\partial_\nu \Phi(\xi - x)\, dS(\xi)\,. \tag{1.65}$$

Beweis: Es ist $\Delta u = 0$ in (1.52). □

Folgerung 1.19 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $u : \Omega \to \mathbb{R}$ harmonisch. Dann gilt $u \in C^\infty(\Omega)$, und jedes $x \in \Omega$ hat eine Umgebung, in der sich u als Potenzreihe mit Grundpunkt x darstellen lässt. (Diese Potenzreihe ist identisch mit der Taylorreihe um x.)*

Beweis: Sei $y \in \Omega$. Für jede offene Kugel $B = B(y;r)$, $r > 0$ und $\overline{B} \subset \Omega$ gilt nach Folgerung 1.18

$$u(x) = \int_{\partial B} \Phi(\xi - x)\partial_\nu u(\xi) - u(\xi)\partial_\nu \Phi(\xi - x)\, dS(\xi) \tag{1.66}$$

für alle $x \in B$. Für jedes solche $x \in B$ gibt es eine Kugel $B_x = B(x;\varepsilon)$, so dass sich für jedes $\xi \in \partial B$ die Funktionen $\tilde{x} \mapsto \Phi(\xi - \tilde{x})$ und $\tilde{x} \mapsto \partial_\nu \Phi(\xi - \tilde{x})$ in eine für alle $\tilde{x} \in B_x$ konvergente Potenzreihe der Form

$$\sum_\alpha c_\alpha (\tilde{x} - x)^\alpha$$

entwickeln lassen, insbesondere sind diese Funktionen unendlich oft differenzierbar auf B_x. Da ∂B kompakt ist, können wir nun (wenn $\varepsilon < r - |y - x|$ gewählt ist) die rechte

Seite von (1.66) beliebig oft nach x differenzieren, also ist $u \in C^\infty(B_x)$ und insgesamt $u \in C^\infty(\Omega)$. Setzen wir in (1.66) für $\Phi(\xi - x)$ und $\partial_\nu \Phi(\xi - x)$ diese Potenzreihen (welche gleich der Taylorreihen sind) ein, so können wir Summation und Integral vertauschen, und erhalten die Konvergenz der Taylorreihe von u in B_x. □

Wir betrachten wieder das Dirichlet-Problem für die Poisson-Gleichung

$$-\Delta u = f \qquad \text{in } \Omega \tag{1.67}$$

$$u = g \qquad \text{auf } \partial\Omega. \tag{1.68}$$

Ist u eine klassische Lösung, für die die Greensche Darstellungsformel gilt, so folgt

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \Phi(\xi - x)\partial_\nu u(\xi) - g(\xi)\partial_\nu \Phi(\xi - x)\, dS(\xi) + \int_\Omega \Phi(y - x) f(y)\, dy\,. \tag{1.69}$$

Diese Formel eignet sich leider nicht für die direkte Berechnung von u aus f und g, da $\partial_\nu u$ auf $\partial\Omega$ ebenfalls unbekannt ist. Mit dem Kalkül der **Greenschen Funktion** kann man hier unter Umständen weiterkommen. Wir nehmen an, dass es zu jedem $x \in \Omega$ eine Funktion $h^x \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ gibt mit

$$-\Delta h^x(y) = 0\,, \quad y \in \Omega \tag{1.70}$$

$$h^x(y) = \Phi(y - x)\,, \quad y \in \partial\Omega. \tag{1.71}$$

Nach Folgerung 1.12 ist h^x eindeutig bestimmt.

Definition 1.20 (Greensche Funktion) *Die durch*

$$G(x, y) = \Phi(y - x) - h^x(y)\,, \quad x, y \in \overline{\Omega}\,,\ x \neq y\,, \tag{1.72}$$

definierte Funktion heißt die Greensche Funktion des Laplace-Operators in Ω. □

Unmittelbar aus der Definition folgt, dass

$$G(x, y) = 0\,, \quad x \in \Omega\,,\ y \in \partial\Omega\,, \tag{1.73}$$

und dass die Funktion $y \mapsto G(x, y)$ harmonisch ist in $\Omega \setminus \{x\}$. Die Normalenableitung dieser Funktion bezeichnen wir mit $\partial_\nu G(x, y)$, also

$$\partial_\nu G(x, y) = \langle \nabla_y G(x, y), \nu(y) \rangle\ .$$

Es gilt außerdem, dass G symmetrisch ist, also $G(x, y) = G(y, x)$, was wir nicht beweisen wollen.

Satz 1.21 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit C^1-Rand, sei $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$. Es existiere die Greensche Funktion in Ω. Dann gilt für alle $x \in \Omega$*

$$u(x) = -\int_{\partial\Omega} u(\xi)\partial_\nu G(x, \xi)\, dS(\xi) - \int_\Omega G(x, y)\Delta u(y)\, dy\,. \tag{1.74}$$

Beweis: Aus der zweiten Greenschen Formel (1.51) ergibt sich mit $v = h^x$

$$\int_\Omega h^x(y)\Delta u(y)\,dy = \int_{\partial\Omega} h^x(\xi)\partial_\nu u(\xi) - u(\xi)\partial_\nu h^x(\xi)\,dS(\xi)\,. \tag{1.75}$$

Wir erhalten nun (1.74), indem wir (1.75) von der Greenschen Darstellungsformel (1.52) subtrahieren (beachte $G(x,y) = 0$ für $y \in \partial\Omega$). □

Aus (1.74) ergibt sich unmittelbar eine Integraldarstellung für die klassische Lösung des Randwertproblems (1.67), (1.68), nämlich

$$u(x) = -\int_{\partial\Omega} g(\xi)\partial_\nu G(x,\xi)\,dS(\xi) + \int_\Omega G(x,y)f(y)\,dy\,, \tag{1.76}$$

unter der Voraussetzung, dass Ω eine Greensche Funktion besitzt.

Das Problem, das Randwertproblem (1.67), (1.68), für beliebige Daten f und g zu lösen, ist damit "im Prinzip" zurückgeführt auf das Problem, die Greensche Funktion des Gebiets Ω zu bestimmen. Man muss dann allerdings noch feststellen, ob die durch (1.76) definierte Funktion u tatsächlich eine Lösung des Randwertproblems ist.

Die Einheitskugel $\Omega = B(0,1)$ besitzt eine Greensche Funktion, nämlich

$$G(x,y) = \Phi(y-x) - \Phi(|x|(y-\tilde{x}))\,, \quad \tilde{x} = \frac{x}{|x|^2}\,. \tag{1.77}$$

Für sie gilt

$$\partial_\nu G(x,y) = -\frac{1}{\alpha_n}\frac{1-|x|^2}{|x-y|^n}\,. \tag{1.78}$$

Für die Lösung des Dirichlet-Problems für die Laplace-Gleichung auf der Einheitskugel

$$\Delta u = 0 \qquad \text{in } B(0,1) \tag{1.79}$$

$$u = g \qquad \text{auf } \partial B(0,1) \tag{1.80}$$

erhalten wir daher aus (1.74) die Formel

$$u(x) = \frac{1-|x|^2}{\alpha_n}\int_{\partial B(0,1)} \frac{g(\xi)}{|x-\xi|^n}\,dS(\xi)\,. \tag{1.81}$$

Man kann zeigen: Ist $g : \partial B(0,1) \to \mathbb{R}$ stetig, so wird durch (1.81) eine in $B(0,1)$ harmonische Funktion u definiert, und für jedes $\xi \in \partial B(0,1)$ gilt

$$\lim_{\substack{x\to\xi \\ |x|<1}} u(x) = g(\xi)\,. \tag{1.82}$$

Zusammen mit Satz 1.12 ist damit bewiesen, dass das Dirichlet-Problem in der Einheitskugel (1.79), (1.80) eine eindeutige klassische Lösung besitzt.

Der Begriff der klassischen Lösung ist sehr naheliegend. Man schreibt die partielle Differentialgleichung samt etwaigen Randbedingungen hin und verlangt, dass die Lösung stetig und hinreichend oft (je nach Differentialoperator) differenzierbar ist, und dass alle zu erfüllenden Gleichungen in allen Punkten, in denen sie gelten sollen, auch tatsächlich gelten. Es hat sich aber seit längerem herausgestellt, dass dieser Begriff zu einschränkend ist – und zwar sowohl aus der Sicht der Mathematiker als auch aus der Sicht der "Anwendungsfächer" (wie die Mathematiker sagen; also Physik, Ingenieurwissenschaften usw.). Verschiedene andere Lösungsbegriffe sind entwickelt worden. Die beiden wichtigsten sind der Begriff der **schwachen Lösung** und der Begriff der **distributionellen Lösung** oder **Lösung im Distributionensinn**. Wir erläutern den Begriff der schwachen Lösung anhand der Poisson-Gleichung

$$-\Delta u(x) = f(x)\,, \quad x \in \Omega\,. \tag{1.83}$$

Sei $f \in C(\Omega)$, sei $u \in C^2(\Omega)$, es gelte (1.83). Sei $\varphi \in C^1(\Omega)$, $\operatorname{supp}(\varphi) \subset \Omega$ kompakt. Dann gilt

$$\int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx = \int_\Omega -\Delta u(x)\varphi(x)\,dx = \int_\Omega \langle \nabla u(x), \nabla\varphi(x)\rangle \,dx\,. \tag{1.84}$$

Wir sagen nun, dass eine Funktion u eine schwache Lösung von (1.83) ist, falls

$$\int_\Omega \langle \nabla u(x), \nabla\varphi(x)\rangle \,dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx \tag{1.85}$$

gilt für "hinreichend viele" Funktionen φ, und zwar mindestens so viele, dass wir aus der Gültigkeit von (1.85) auf die Gültigkeit von (1.83) zurückschließen können, falls $u \in C^2(\Omega)$. Auf der anderen Seite ist aber (1.85) bereits dann sinnvoll, wenn ∇u auf Ω definiert und geeignet integrierbar ist; damit das Integral in (1.85) existiert, ist es noch nicht einmal notwendig, dass ∇u stetig ist.

Mit dem Begriff der distributionellen Lösung geht man noch einen Schritt weiter. Aus der Analysis ist uns möglicherweise bereits das Dirac-Funktional δ bekannt, welches Funktionen auf Zahlen abbildet vermittels

$$\delta(\varphi) = \varphi(0)\,. \tag{1.86}$$

Es wird sich herausstellen, dass die Fundamentallösung Φ aus Definition 1.13 die Gleichung

$$-\Delta\Phi = \delta \tag{1.87}$$

im Distributionensinn erfüllt. Wir wissen bereits, dass $-\Delta\Phi(x) = 0$ gilt für alle $x \neq 0$; (1.87) enthält aber mehr Information, nämlich auch solche über das Verhalten von Φ in der Singularität 0.

2 Distributionen

In diesem Abschnitt haben alle Funktionen, wenn nicht anders angegeben, ihre Werte in $\mathbb{K}$, wobei sowohl $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ als auch $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ gesetzt werden kann.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wir definieren in der Tradition von Laurent Schwartz

$$\mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)\,, \tag{2.1}$$

wobei $C_0^\infty(\Omega)$ den Raum derjenigen beliebig oft stetig differenzierbaren Funktionen bezeichnet, deren Träger eine kompakte Teilmenge von Ω ist. Die Elemente von $\mathcal{D}(\Omega)$ heißen **Testfunktionen**. Wir definieren den Raum der lokal-integrierbaren Funktionen auf Ω durch

$$L^1_{\text{loc}}(\Omega) = \{f : f|K \in L^1(K) \text{ für alle kompakten Teilmengen } K \subset \Omega\}\,. \tag{2.2}$$

Jede stetige Funktion ist lokal-integrierbar. Es gilt also z.B. für

$$f(t) = \frac{1}{t}\,,$$

dass $f \in L^1_{\text{loc}}(0,1)$, aber $f \notin L^1(0,1)$. Ist $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, so definiert

$$T_f(\varphi) = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx \tag{2.3}$$

ein lineares Funktional auf $\mathcal{D}(\Omega)$.

Der Raum der Distributionen ist ein Unterraum des Raums aller linearen Funktionale auf $\mathcal{D}(\Omega)$, welcher den Unterraum $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ umfasst. Er ist so konstruiert, dass Distributionen Ableitungen beliebiger Ordnung besitzen. Diese sind allerdings im allgemeinen ebenfalls Distributionen. Als Notation für partielle Ableitungen beliebiger Ordnung verwenden wir Multiindizes: Ist

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$$

ein Multiindex, so setzen wir

$$\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\alpha_2}\cdots\partial_n^{\alpha_n}\,, \quad |\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j\,. \tag{2.4}$$

Definition 2.1 (Distribution)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Ein lineares Funktional $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{K}$ heißt Distribution (auf Ω), falls gilt: Ist $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{D}(\Omega)$ mit

$$\lim_{k\to\infty} \|\partial^\alpha \varphi_k\|_\infty = 0 \tag{2.5}$$

für jeden Multiindex α, und gibt es eine kompakte Menge $K \subset \Omega$ mit $\operatorname{supp}(\varphi_k) \subset K$ *für alle $k \in \mathbb{N}$, so gilt*

$$\lim_{k\to\infty} T(\varphi_k) = 0\,. \tag{2.6}$$

Der Raum aller Distributionen auf Ω wird mit $\mathcal{D}'(\Omega)$ bezeichnet. □

Offensichtlich ist $\mathcal{D}'(\Omega)$ ein Vektorraum. Ist $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ und $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge wie in Definition 2.1, so gilt

$$|T_f(\varphi_k)| \le \int_K |f(x)\varphi_k(x)|\,dx \le \int_K |f(x)|\,dx \cdot \|\varphi_k\|_\infty \;\to\; 0 \tag{2.7}$$

für $k \to \infty$, also wird durch (2.3) eine Distribution definiert. Eine Distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ heißt **regulär**, falls $T = T_f$ gilt für ein $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$.

Ist $a \in \Omega$, so wird durch

$$\delta_a(\varphi) = \varphi(a)\,, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\,, \tag{2.8}$$

ebenfalls eine Distribution definiert, sie heißt **Dirac-Distribution** im Punkt a. Ist nämlich $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge wie in Definition 2.1, so gilt

$$|\delta_a(\varphi_k)| = |\varphi_k(a)| \le \|\varphi_k\|_\infty \to 0\,.$$

Lemma 2.2 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{K}$ linear. Es gebe ein $N \in \mathbb{N}_0$ und zu jedem Kompaktum $K \subset \Omega$ ein $C_K > 0$, so dass*

$$|T(\varphi)| \le C_K \sum_{|\alpha|\le N} \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty\,, \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ mit } \operatorname{supp}(\varphi) \subset K. \tag{2.9}$$

Dann ist $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Beweis: Folgt unmittelbar aus der Definition. □

Der Fall einer regulären Distribution $T = T_f$, $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, ist ein Spezialfall von Lemma 2.2 mit

$$N = 0\,, \quad C_K = \int_K |f(x)|\,dx\,.$$

Für die Dirac-Distribution genügt es, $N = 0$ und $C_K = 1$ zu setzen. Ein weiteres Beispiel einer Distribution ist $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$,

$$T(\varphi) = \varphi'(0)\,, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\,. \tag{2.10}$$

Hier ist $N = 1$, $C_K = 1$. Nicht alle Distributionen erfüllen die hinreichende Bedingung in Lemma 2.2; damit sie eine Charakterisierung wird, muß man die Quantoren umstellen, so dass N auch vom Kompaktum K abhängen kann (ohne Beweis).

Wir erinnern an die Definition der Faltung zweier Funktionen f und g,

$$(f * g)(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(y - x)\,dx\,, \tag{2.11}$$

Sie ist für $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definiert, liefert Werte $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, und es gilt

$$f * g = g * f\,, \quad \|f * g\|_1 \le \|f\|_1 \cdot \|g\|_1\,. \tag{2.12}$$

Durch Faltung mit geeigneten Glättungsfunktionen kann man Funktionen durch C^∞-Funktionen approximieren. Wir definieren

$$\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad \psi(t) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{t}\right)\,, & t > 0\,, \\ 0\,, & t \le 0\,, \end{cases} \tag{2.13}$$

$$\tilde\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad \tilde\psi(r) = \psi(1 - r^2)\,, \tag{2.14}$$

$$\eta_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\,, \quad \eta_1(x) = \alpha \tilde\psi(|x|)\,, \tag{2.15}$$

wobei $\alpha > 0$ so gewählt ist, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta_1(x)\,dx = 1\,. \tag{2.16}$$

Wir definieren nun für $\varepsilon > 0$ die "Standardglättungsfunktion"

$$\eta_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\,, \quad \eta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\eta_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\,. \tag{2.17}$$

Die Funktionen η_ε sind offensichtlich radialsymmetrisch (d.h. sie hängen nur von $|x|$ ab), und es gilt (siehe Analysis 3)

$$\eta_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)\,, \quad \mathrm{supp}\,(\eta_\varepsilon) = K(0;\varepsilon)\,, \quad \eta_\varepsilon \ge 0\,, \quad \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x)\,dx = 1\,. \tag{2.18}$$

Dort haben wir auch gezeigt: Ist $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ und setzen wir $f^\varepsilon = f * \eta_\varepsilon$, so gilt

$$f^\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\,, \quad f^\varepsilon \to f \quad \text{gleichmäßig für } \varepsilon \to 0. \tag{2.19}$$

Wir wollen Faltungen mit der Glättungsfunktion auch für solche Funktionen betrachten, die nicht auf ganz $\mathbb{R}^n$ definiert sind. Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, so setzen wir

$$U_\varepsilon = \{x : x \in \mathbb{R}^n,\ \mathrm{dist}\,(x,U) < \varepsilon\}\,. \tag{2.20}$$

Für $f \in L^1(U_\varepsilon)$ setzen wir $f = 0$ außerhalb von U_ε, dann gilt

$$f^\varepsilon(y) = (f*\eta_\varepsilon)(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\eta_\varepsilon(y-x)\,dx = \int_{U_\varepsilon} f(x)\eta_\varepsilon(y-x)\,dx\,, \quad \text{für alle } y \in U. \tag{2.21}$$

Definition 2.3
Seien $\Omega, U \subset \mathbb{R}^n$ offen. U heißt kompakt in Ω enthalten, falls $\overline{U}$ kompakt ist und $\overline{U} \subset \Omega$ gilt. Wir schreiben

$$U \subset\subset \Omega\,. \tag{2.22}$$

□

Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $U \subset\subset \Omega$, so ist

$$\mathrm{dist}\,(U,\partial\Omega) = \inf_{x\in U, y\in\partial\Omega} |x-y| > 0\,. \tag{2.23}$$

(Für $\Omega = \mathbb{R}^n$ setzen wir $\mathrm{dist}\,(U,\partial\Omega) = \infty$.)

Lemma 2.4 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, $U \subset\subset \Omega$, $\varepsilon < \mathrm{dist}\,(U,\partial\Omega)$, sei $f^\varepsilon = f * \eta_\varepsilon$. Dann gilt*

$$f^\varepsilon \in C^\infty(U)\,, \quad \|f^\varepsilon\|_{L^p(U)} \le \|f\|_{L^p(\Omega)}\,, \quad 1 \le p \le \infty\,. \tag{2.24}$$

Beweis: Es ist $U_\varepsilon \subset\subset \Omega$, $f \in L^1(U_\varepsilon)$ und

$$f^\varepsilon(y) = \int_{U_\varepsilon} f(x)\eta_\varepsilon(y-x)\,dx\,, \quad \text{für alle } y \in U. \tag{2.25}$$

Für alle Multiindizes α sind die Funktionen $x \mapsto f(x)\partial^\alpha \eta_\varepsilon(y-x)$ gleichmäßig in y durch die integrierbaren Funktionen $\|\partial^\alpha \eta_\varepsilon\|_\infty f$ beschränkt, also existieren alle $\partial^\alpha f^\varepsilon$ in U, also ist $f^\varepsilon \in C^\infty(U)$. Sei nun $f \in L^p(\Omega)$. Für $1 < p < \infty$, $y \in U$ gilt mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und der Hölderschen Ungleichung

$$|f^\varepsilon(y)| = \left| \int_{U_\varepsilon} f(x)\eta_\varepsilon(y-x)\,dx \right| \le \int_{U_\varepsilon} |f(x)|(\eta_\varepsilon(y-x))^{\frac{1}{p}}(\eta_\varepsilon(y-x))^{\frac{1}{q}}\,dx \tag{2.26}$$

$$\le \left(\int_{U_\varepsilon} |f(x)|^p \eta_\varepsilon(y-x)\,dx \right)^{\frac{1}{p}} \underbrace{\left(\int_{U_\varepsilon} \eta_\varepsilon(y-x)\,dx \right)^{\frac{1}{q}}}_{=1}. \tag{2.27}$$

Es folgt für $1 \le p < \infty$

$$\int_U |f^\varepsilon(y)|^p\,dy \le \int_U \int_{U_\varepsilon} |f(x)|^p \eta_\varepsilon(y-x)\,dx\,dy = \int_{U_\varepsilon} |f(x)|^p \int_U \eta_\varepsilon(y-x)\,dy\,dx \tag{2.28}$$

$$\le \int_{U_\varepsilon} |f(x)|^p\,dx\,. \tag{2.29}$$

Für $p = \infty$ folgt die Behauptung direkt aus (2.25). □

Lemma 2.5 *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, sei $f \in L^p(U)$, $1 \le p < \infty$. Dann gilt $f^\varepsilon \to f$ in $L^p(U)$ für $\varepsilon \to 0$.*

Beweis: Sei $\delta > 0$. Wir wählen $g \in C_0(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\|f-g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le \delta\,,$$

siehe Satz 13.9, Analysis 4. Es folgt

$$\|f-f^\varepsilon\|_{L^p(U)} \le \|f-g\|_{L^p(U)} + \|g-g^\varepsilon\|_{L^p(U)} + \|g^\varepsilon - f^\varepsilon\|_{L^p(U)} \tag{2.30}$$

$$\le 2\delta + \|g-g^\varepsilon\|_{L^p(U)}\,, \tag{2.31}$$

da

$$g^\varepsilon - f^\varepsilon = g * \eta_\varepsilon - f * \eta_\varepsilon = (g-f)^\varepsilon$$

und nach Lemma 2.4

$$\|(g-f)^\varepsilon\|_{L^p(U)} \le \|g-f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le \delta\,.$$

Wegen $g \in C_0(\mathbb{R}^n)$ gilt $g^\varepsilon \to g$ gleichmäßig, also

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \|f-f^\varepsilon\|_{L^p(U)} \le 2\delta\,.$$

Da $\delta > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung. □

Satz 2.6 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, es gelte*

$$\int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx = 0\,, \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{2.32}$$

Dann gilt $f = 0$ fast überall.

Beweis: Sei zunächst $f \in C(\Omega)$. Wäre $f(y) \neq 0$ für ein $y \in \Omega$, so wäre

$$\int_\Omega f(x)\eta_\varepsilon(y-x)\,dx \neq 0\,,$$

falls $\varepsilon > 0$ hinreichend klein ist, im Widerspruch zu (2.32). Sei nun $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $U \subset\subset \Omega$, sei $\varepsilon > 0$ so dass $U \subset\subset U_\varepsilon \subset\subset \Omega$. Sei $\varphi \in C_0^\infty(U)$ beliebig. Es ist dann $\varphi^\varepsilon = \varphi * \eta_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$, also

$$0 = \int_\Omega f(x)\varphi^\varepsilon(x)\,dx = \int_{U_\varepsilon} f(x) \int_U \varphi(y)\eta_\varepsilon(x-y)\,dy\,dx = \tag{2.33}$$

$$= \int_U \varphi(y) \int_{U_\varepsilon} f(x)\eta_\varepsilon(y-x)\,dx\,dy = \int_U \varphi(y) f^\varepsilon(y)\,dy\,. \tag{2.34}$$

Aus dem bereits Bewiesenen folgt $f^\varepsilon|U = 0$. Da $f^\varepsilon \to f$ in $L^1(U)$ nach Lemma 2.5, folgt $f = 0$ fast überall auf U. Da U beliebig war, folgt $f = 0$ fast überall auf Ω. □

Folgerung 2.7 *Die durch $f \mapsto T_f$ definierte Einbettung von $L^1_{loc}(\Omega)$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$ ist injektiv.* □

Es geht also keine Information verloren, wenn wir eine lokal-integrierbare Funktion als Distribution interpretieren.

Definition 2.8 (Konvergenz von Distributionen)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Folge $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$ heißt konvergent gegen ein $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, falls

$$T(\varphi) = \lim_{k\to\infty} T_k(\varphi)\,, \quad \textit{für alle } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{2.35}$$

□

Offensichtlich gilt in $\mathcal{D}'(\Omega)$

$$T_k \to T\,,\ S_k \to S\,,\ c \in \mathbb{K} \quad \Rightarrow \quad T_k + S_k \to T + S\,, \quad cT_k \to cT\,. \tag{2.36}$$

Wir betrachten ein Beispiel. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $B(0;\varepsilon) \subset \Omega$, dann gilt für $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$T_{\eta_\varepsilon}(\varphi) - \varphi(0) = \int_\Omega \eta_\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx - \varphi(0) = \int_{B(0;\varepsilon)} \eta_\varepsilon(x)(\varphi(x) - \varphi(0))\,dx\,,$$

also

$$|T_{\eta_\varepsilon}(\varphi) - \varphi(0)| \leq \sup_{|x|\leq\varepsilon} |\varphi(x) - \varphi(0)|\,,$$

also gemäß Definition 2.8

$$T_{\eta_\varepsilon} \to \delta\,, \quad \text{für } \varepsilon \to 0.$$

Wir sagen auch

$$\eta_\varepsilon \to \delta \quad \text{in } \mathcal{D}'(\Omega), \tag{2.37}$$

in dieser Sprechweise haben wir $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ mit seiner Einbettung in $\mathcal{D}'(\Omega)$ identifiziert.

Die Multiplikation zweier Distributionen läßt sich im allgemeinen nicht sinnvoll definieren, wohl aber in Spezialfällen.

Lemma 2.9 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, seien $f \in C^\infty(\Omega)$, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Dann wird durch*

$$(fT)(\varphi) = T(f\varphi)\,, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\,, \tag{2.38}$$

eine Distribution $fT \in \mathcal{D}'(\Omega)$ definiert.

Beweis: Die Linearität ist klar. Sei $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{D}(\Omega)$ mit $\operatorname{supp}(\varphi_k) \subset K$ und $\|\partial^\alpha \varphi_k\|_\infty \to 0$ für alle Multiindizes α, wobei $K \subset \Omega$ kompakt ist. Dann ist auch $\operatorname{supp}(f\varphi_k) \subset K$. Ist β ein beliebiger Multiindex, so ist

$$\partial^\beta(f\varphi_k) = \sum_{\alpha\le\beta} c_\alpha \partial^\alpha \varphi_k$$

mit geeigneten Funktionen $c_\alpha \in C^\infty(\Omega)$, also $\|\partial^\beta(f\varphi_k)\|_\infty \to 0$ für alle Multiindizes β und damit $(fT)(\varphi_k) = T(f\varphi_k) \to 0$. □

Wir wenden uns nun dem Differenzieren zu. Ist $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, so gilt mit Fubini und partieller Integration

$$T_{\partial_i f}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_i f(x)\varphi(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\partial_i\varphi(x)\,dx = -T_f(\partial_i\varphi)\,. \tag{2.39}$$

Definition 2.10 (Ableitung von Distributionen)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Für $i \in \{1,\dots,n\}$ definieren wir $\partial_i T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ durch

$$(\partial_i T)(\varphi) = -T(\partial_i\varphi)\,, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\,. \tag{2.40}$$

$\partial_i T$ heißt die distributionelle Ableitung von T. □

Dass durch (2.40) tatsächlich eine Distribution definiert wird, folgt unmittelbar aus Definition 2.1.

Lemma 2.11 *Für die distributionelle Ableitung gelten die Rechenregeln*

$$\partial_i(\alpha T + \beta S) = \alpha\partial_i T + \beta\partial_i S\,, \quad \alpha,\beta \in \mathbb{K}\,,\ T,S \in \mathcal{D}'(\Omega)\,, \tag{2.41}$$
$$\partial_j\partial_i T = \partial_i\partial_j T\,, \quad T \in \mathcal{D}'(\Omega)\,, \tag{2.42}$$
$$\partial_i(fT) = (\partial_i f)T + f\partial_i T\,, \quad f \in C^\infty(\Omega)\,, \quad T \in \mathcal{D}'(\Omega)\,. \tag{2.43}$$

Ist α ein Multiindex, so gilt

$$(\partial^\alpha T)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} T(\partial^\alpha\varphi)\,. \tag{2.44}$$

Beweis: Klar oder Übung. □

Wir betrachten einige Beispiele. Die Rechnung in (2.39) zeigt, dass $\partial_i T_f = T_{\partial_i f}$ falls $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Sei nun

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad f(x) = |x|\,. \tag{2.45}$$

Dann ist

$$
\begin{aligned}
(T_f)'(\varphi) &= -\int_{\mathbb{R}} |x|\varphi'(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} x\varphi'(x)\,dx - \int_{0}^{\infty} x\varphi'(x)\,dx \\
&= x\varphi(x)\Big|_{x=-\infty}^{x=0} - \int_{-\infty}^{0} \varphi(x)\,dx - x\varphi(x)\Big|_{x=0}^{x=\infty} + \int_{0}^{\infty} \varphi(x)\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} (\operatorname{sign} x)\varphi(x)\,dx\,,
\end{aligned}
$$

also

$$
(T_f)' = T_{\mathrm{sign}} \tag{2.46}
$$

im Distributionensinn. Hier liefert die distributionelle Ableitung dasselbe wie die punktweise Ableitung

$$
f'(x) = \operatorname{sign}(x)\,, \quad \text{falls } x \neq 0.
$$

Wir definieren die **Heaviside-Funktion** $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$
H(x) = \begin{cases} 1\,, & x > 0\,, \\ 0\,, & x \le 0\,. \end{cases} \tag{2.47}
$$

Für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ gilt

$$
(T_H)'(\varphi) = -\int_{\mathbb{R}} H(x)\varphi'(x)\,dx = -\int_{0}^{\infty} \varphi'(x)\,dx = \varphi(0)\,,
$$

also

$$
(T_H)' = \delta \tag{2.48}
$$

im Distributionensinn. Wir schreiben auch

$$
H' = \delta \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \tag{2.49}
$$

Hier ist die distributionelle Ableitung der punktweisen Ableitung $H'(x)$ überlegen. Es gilt $H'(x) = 0$ in allen Punkten $x \neq 0$, die Information über den Sprung ist verlorengegangen, und

$$
H(1) - H(-1) = 1 \neq 0 = \int_{-1}^{1} H'(x)\,dx\,.
$$

Aus $\operatorname{sign}(x) = 2H(x) - 1$ folgt nun, dass die zweite distributionelle Ableitung der Betragsfunktion $f(x) = |x|$ im $\mathbb{R}$ gegeben ist durch $f'' = 2\delta$.

Die distributionellen Ableitungen der Dirac-Distribution im $\mathbb{R}^n$ ergeben sich unmittelbar aus der Definition,

$$
(\partial^\alpha \delta)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|}\delta(\partial^\alpha \varphi) = (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha \varphi(0)\,, \tag{2.50}
$$

im $\mathbb{R}$ ist die erste Ableitung also gegeben durch

$$
\delta'(\varphi) = -\varphi'(0)\,. \tag{2.51}
$$

Wir kehren zurück zum Laplace-Operator. Im vorigen Abschnitt haben wir gesehen, dass für $n \geq 3$ die durch

$$\Phi(x) = \frac{1}{(n-2)\alpha_n} |x|^{2-n}\,, \quad x \in \mathbb{R}^n\,,\, x \neq 0\,, \tag{2.52}$$

definierte Funktion Φ im $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ liegt. Aus Folgerung 1.17 erhalten wir

$$(-\Delta T_\Phi)(\varphi) = T_\Phi(-\Delta\varphi) = -\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x)\Delta\varphi(x)\,dx = \varphi(0)\,. \tag{2.53}$$

Also gilt

$$-\Delta\Phi = \delta \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n). \tag{2.54}$$

Wir betrachten nun allgemein einen Differentialoperator der Ordnung N der Form

$$\sum_{|\alpha|\leq N} a_\alpha \partial^\alpha\,, \quad a_\alpha \in \mathbb{K}\,. \tag{2.55}$$

Definition 2.12 (Fundamentallösung eines Differentialoperators)
Eine Distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ heißt Fundamentallösung des Differentialoperators (2.55), falls

$$\sum_{|\alpha|\leq N} a_\alpha \partial^\alpha T = \delta\,. \tag{2.56}$$

□

Die in Abschnitt 1 betrachtete Fundamentallösung Φ ist also wegen (2.54) eine Fundamentallösung des Operators $-\Delta$. Ist u eine harmonische Funktion, so ist wegen

$$-\Delta(\Phi + u) = -\Delta\Phi - \Delta u = \delta$$

$\Phi + u$ ebenfalls eine Fundamentallösung von $-\Delta$. Da der Differentialoperator in (2.55) linear ist, ist die Differenz $u = T - S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ zweier Fundamentallösungen $T, S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ eine Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\sum_{|\alpha|\leq N} a_\alpha \partial^\alpha u = 0 \tag{2.57}$$

im distributionellen Sinn. Für den Laplace-Operator gilt (was wir jetzt nicht beweisen wollen): Ist $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ Lösung von $\Delta u = 0$, so ist u eine harmonische Funktion. Daraus folgt nun, dass sich zwei Fundamentallösungen von Δ nur durch eine harmonische Funktion unterscheiden, also im Nullpunkt die gleiche Singularität haben.

Distributionen sind nicht "punktweise in Ω" definiert, es macht (außer bei regulären Distributionen) keinen Sinn, vom Wert einer Distribution an einer Stelle $x \in \Omega$ zu sprechen. Distributionen lassen sich aber **lokalisieren**. Seien $\Omega, U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $U \subset \Omega$, dann definieren wir die Restriktion $T|U$ einer Distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ durch

$$(T|U)(\varphi) = T(\varphi)\,, \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}(U). \tag{2.58}$$

Aber Vorsicht. Nicht jede Distribution in $\mathcal{D}'(U)$ läßt sich durch Restriktion einer Distribution in $\mathcal{D}'(\Omega)$ erhalten. Beispiel: Wir setzen $\Omega = \mathbb{R}$, $U = (0,1)$. Durch

$$T(\varphi) = \sum_{n=2}^{\infty} \varphi\left(\frac{1}{n}\right) \tag{2.59}$$

wird eine Distribution $T \in \mathcal{D}'(0,1)$ definiert, da die Stetigkeitsbedingung in der Definition erfüllt ist für kompakte $K \subset (0,1)$; wählen wir aber ein $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ mit $\varphi \equiv 1$ in der Nähe von 0, etwa in $(-\varepsilon, \varepsilon)$, so ist $T(\varphi) = \infty$, es wird also durch (2.59) noch nicht einmal ein lineares Funktional auf $\mathcal{D}(\Omega)$ definiert. Der Grund für diese Diskrepanz liegt darin, dass die Definition von $\mathcal{D}'(U)$ keine Einschränkungen hinsichtlich des Verhaltens beim Grenzübergang zu ∂U macht.

Wir erinnern an die Definition einer C^∞-Zerlegung der Eins: Ist $K \subset \mathbb{R}^n$, sei $(U_j)_{j \le 1 \le N}$ eine endliche Überdeckung von K, seien $\beta_j \in C_0^\infty(U_j)$ mit

$$0 \le \beta_j \le 1\,, \quad \sum_{j=1}^{N} \beta_j(x) = 1 \quad \text{für alle } x \in K. \tag{2.60}$$

Die Familie $(\beta_j)_{1 \le j \le N}$ heißt eine C^∞-Zerlegung der Eins von K, zugeordnet der Überdeckung (U_j).

Lemma 2.13 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, es gebe zu jedem $x \in \Omega$ eine offene Menge $U \subset \Omega$ mit $x \in U$ und $T|U = 0$. Dann ist $T = 0$.*

Beweis: Sei $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ beliebig. Zu jedem $x \in \operatorname{supp}(\varphi)$ wählen wir $U(x)$ gemäß Voraussetzung. Nach einem Satz der Analysis (siehe etwa Satz 1.8, Analysis 4) können wir hieraus eine endliche Teilüberdeckung $(U_j)_{1 \le j \le N}$ von $\operatorname{supp}(\varphi)$ und eine zugeordnete Zerlegung der Eins (β_j) bestimmen. Es folgt

$$T(\varphi) = T\left(\sum_{j=1}^{N} \beta_j \varphi\right) = \sum_{j=1}^{N} T(\beta_j \varphi) = 0\,,$$

da $\operatorname{supp}(\beta_j \varphi) \subset U_j$ und $T|U_j = 0$. □

Betrachten wir nun

$$U_0 = \bigcup_{\substack{U \subset \Omega \text{ offen} \\ T|U = 0}} U\,,$$

so ist $T|U_0 = 0$ nach Lemma 2.13, und U_0 ist die größte offene Teilmenge von Ω mit dieser Eigenschaft.

Definition 2.14 (Träger einer Distribution)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Wir definieren den Träger von T durch

$$\operatorname{supp}(T) = \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{\substack{U \subset \Omega \text{ offen} \\ T|U = 0}} U\,. \tag{2.61}$$

□

Für $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ gilt dann

$$T(\varphi) = 0\,, \quad \text{falls } \operatorname{supp}(T) \cap \operatorname{supp}(\varphi) = \emptyset. \tag{2.62}$$

Für die Dirac-Distribution gilt

$$\operatorname{supp}(\delta_a) = \{a\}\,, \quad a \in \Omega\,.$$

Unmittelbar aus den Definitionen folgt

$$\operatorname{supp}(\partial_i T) \subset \operatorname{supp}(T)\,, \quad T \in \mathcal{D}'(\Omega)\,,\, 1 \le i \le n\,, \tag{2.63}$$

also auch

$$\operatorname{supp}(\partial^\alpha \delta_a) = \{a\}\,, \quad a \in \Omega\,,$$

für alle partiellen Ableitungen der Dirac-Distribution.

Für die Dirac-Distribution enthält der Träger eine wesentliche Information. Für die Fundamentallösung Φ von $-\Delta$ ist das nicht der Fall, es ist $\operatorname{supp}(\Phi) = \mathbb{R}^n$. Die Information über die Lage der Singularität ist im sogenannten singulären Träger enthalten. Ist $U \subset \Omega$ offen, so kann es sein, dass $T|U \in C^\infty(U)$ (das heißt, $T|U = T_{f_U}$ für ein $f_U \in C^\infty(U)$). Wir setzen

$$U_\infty = \bigcup_{\substack{U \subset \Omega \text{ offen} \\ T|U \in C^\infty(U)}} U\,. \tag{2.64}$$

Wir definieren für $x \in U_\infty$

$$f(x) = f_U(x)\,, \quad \text{falls } x \in U,\, U \text{ offen},\, T|U = T_{f_U} \in C^\infty(U). \tag{2.65}$$

Diese Definition ist sinnvoll, da $f_{U_1}(x) = f_{U_2}(x)$ für $x \in U_1 \cap U_2$, falls U_1, U_2 solche Mengen sind, und es gilt $f \in C^\infty(U_\infty)$. Aus Lemma 2.13 folgt nun, dass

$$T|U_\infty = f \in C^\infty(U_\infty)\,.$$

Offensichtlich ist U_∞ die größte offene Menge, auf der T gleich einer C^∞-Funktion ist.

Definition 2.15 (Singulärer Träger einer Distribution)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Wir definieren den singulären Träger von T durch

$$\operatorname{sing\,supp}(T) = \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{\substack{U \subset \Omega \text{ offen} \\ T|U \in C^\infty(U)}} U\,. \tag{2.66}$$

□

Es ist

$$\operatorname{sing\,supp}(\delta_a) = \{a\}\,, \quad \operatorname{sing\,supp}(\Phi) = \{0\}\,,$$

und $\operatorname{sing\,supp}(T) = \emptyset$ genau dann, wenn $T \in C^\infty(\Omega)$.

3 Fourier-Methoden

Wir betrachten in $\Omega = \mathbb{R}^n$ die partielle Differentialgleichung

$$\sum_{|\alpha|\le N} a_\alpha \partial^\alpha u = 0\,, \quad a_\alpha \in \mathbb{C}\,. \tag{3.1}$$

Sie ist linear und hat konstante Koeffizienten. Eine wichtige Rolle spielen Lösungen der Form

$$u(x) = e^{i\langle x,\xi\rangle}\,, \quad x \in \mathbb{R}^n\,, \tag{3.2}$$

wobei $\xi \in \mathbb{C}^n$ ein fester Vektor, $i = \sqrt{-1}$ die imaginäre Einheit und

$$\langle x,\xi\rangle = \sum_{j=1}^n x_j \xi_j\,. \tag{3.3}$$

Ist nun etwa $\xi \in \mathbb{R}^n$, $|\xi| = 1$, so folgt aus (3.2)

$$u(x) = u(\langle x,\xi\rangle\,\xi)\,, \quad u(\lambda\xi) = e^{i\lambda} = \cos(\lambda) + i\sin(\lambda)\,. \tag{3.4}$$

Es gilt für u aus (3.2)

$$\partial_j u(x) = i\xi_j e^{i\langle x,\xi\rangle}\,, \quad \partial^\alpha u(x) = (i\xi)^\alpha e^{i\langle x,\xi\rangle}\,, \tag{3.5}$$

wobei wir für $\zeta \in \mathbb{C}^n$ und einen Multiindex α setzen

$$\zeta^\alpha = \prod_{j=1}^n \zeta_j^{\alpha_j}\,.$$

Mit

$$P(\zeta) = \sum_{|\alpha|\le N} a_\alpha \zeta^\alpha \tag{3.6}$$

folgt also für u aus (3.2)

$$P(\partial)u := \sum_{|\alpha|\le N} a_\alpha \partial^\alpha u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \qquad \Leftrightarrow \qquad P(i\xi) = 0\,. \tag{3.7}$$

Für den Laplace-Operator gilt

$$P(\zeta) = \sum_{j=1}^n \zeta_j^2 = |\zeta|^2\,, \quad \text{falls } \zeta \in \mathbb{R}^n.$$

Hat das Polynom (3.6) die Ordnung N, so sagen wir, dass der zugehörige Operator $P(\partial)$ die Ordnung N hat.

Definition 3.1 (Elliptischer Operator)
Ein Operator $P(\partial)$ der Ordnung N heißt elliptisch, falls

$$\sum_{|\alpha|=N} a_\alpha \zeta^\alpha \neq 0\,, \quad \textit{für alle } \zeta \in \mathbb{R}^n,\ \zeta \neq 0. \tag{3.8}$$

Der Operator

$$\sum_{|\alpha|=N} a_\alpha \partial^\alpha \tag{3.9}$$

heißt der Hauptteil des Operators $P(\partial)$. □

Der Laplace-Operator Δ ist offensichtlich elliptisch, ebenso der Bi-Laplace-Operator $\Delta\Delta$, für letzteren gilt $P(\zeta) = |\zeta|^4$, $\zeta \in \mathbb{R}^n$.

Wollen wir zeitliche Evolutionen im $\mathbb{R}^n$ beschreiben, so sind die unbekannten Funktionen im $\mathbb{R}^{n+1}$ definiert. Da aber bei solchen Problemen in der Regel die Zeitvariable eine andere Rolle spielt als die "Orts"variablen, schreibt man nicht $u(x)$ mit $x \in \mathbb{R}^{n+1}$, sondern

$$u(x,t)\,, \quad x \in \mathbb{R}^n\,,\, t \in \mathbb{R}\,.$$

Als Beispiel betrachten wir die Diffusionsgleichung (oder auch: Wärmeleitungsgleichung). Sie hat die Form

$$\partial_t u - \lambda \Delta u = 0\,, \quad \lambda > 0\,, \tag{3.10}$$

ausgeschrieben

$$\partial_t u - \lambda \sum_{j=1}^n \partial_{x_j}^2 u = 0\,,$$

der Laplace-Operator bezieht sich also nur auf die x-Koordinaten. Statt ∂_{x_j} schreibt man in der Regel wieder ∂_j. Das zugehörige Polynom hat die Form

$$P(\zeta,\sigma) = \sigma - \lambda \sum_{j=1}^n \zeta_j^2\,, \quad \zeta \in \mathbb{C}^n\,,\, \sigma \in \mathbb{C}\,. \tag{3.11}$$

Der Operator $\partial_t - \Delta$ hat also die Ordnung 2 und ist nicht elliptisch, da für den zugehörigen Hauptteil

$$\tilde{P}(\zeta,\sigma) = -\lambda \sum_{j=1}^n \zeta_j^2 \tag{3.12}$$

gilt $\tilde{P}(0,\sigma) = 0$ für alle $\sigma \in \mathbb{R}$. Eine Funktion u der Form

$$u(x,t) = e^{i(\langle x,\xi\rangle + t\tau)} \tag{3.13}$$

ist gemäß (3.7) eine Lösung von (3.10), falls

$$i\tau + \lambda \sum_{j=1}^n \xi_j^2 = 0\,, \tag{3.14}$$

Setzen wir (3.14) in (3.13) ein, so erhalten wir also komplexwertige Lösungen der Form

$$u(x,t) = e^{-\lambda|\xi|^2 t} e^{i\langle x,\xi\rangle}\,, \quad \xi \in \mathbb{R}^n\,. \tag{3.15}$$

Deren Real- und Imaginärteil

$$\operatorname{Re} u(x,t) = e^{-\lambda|\xi|^2 t} \cos(\langle x,\xi\rangle)\,, \quad \operatorname{Im} u(x,t) = e^{-\lambda|\xi|^2 t} \sin(\langle x,\xi\rangle)\,, \tag{3.16}$$

liefern reellwertige Lösungen von (3.10). Wir erwarten, dass sich weitere Lösungen durch lineare Superposition als (endliche oder unendliche) Summe

$$u(x,t) = \sum_j c_j e^{-\lambda|\xi^j|^2 t} e^{i\langle x,\xi^j\rangle}\,, \quad \xi^j \in \mathbb{R}^n\,,\, c_j \in \mathbb{C}\,, \tag{3.17}$$

oder als Integral

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) e^{-\lambda|\xi|^2 t} e^{i\langle x,\xi\rangle}\, d\xi \tag{3.18}$$

ergeben.

An (3.18) kann man bereits erkennen, dass die Fouriertransformation

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle x,\xi\rangle}\, dx\,, \tag{3.19}$$

und deren Inverse

$$(\mathcal{F}^{-1}f)(x) = \check{f}(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) e^{i\langle x,\xi\rangle}\, d\xi\,, \tag{3.20}$$

eng mit der Lösung partieller Differentialgleichungen zusammenhängen.

Wir stellen einige Rechenregeln für die Fouriertransformation aus der Analysis zusammen. Falls $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ und $(\tau_a f)(x) = x + a$ die Translation von f um $a \in \mathbb{R}^n$ bezeichnet, gilt

$$\widehat{\tau_a f}(\xi) = \hat{f}(\xi) e^{i\langle a,\xi\rangle}\,, \quad \xi \in \mathbb{R}^n\,, \tag{3.21}$$

weiter

$$\widehat{f * g} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \hat{f}\hat{g}\,, \quad f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)\,, \tag{3.22}$$

$$\widehat{fg} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \hat{f} * \hat{g}\,, \quad \hat{f}, \hat{g} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)\,, \tag{3.23}$$

$$\widehat{\partial_j f}(\xi) = i\xi_j \hat{f}(\xi)\,, \quad f \in C_0^1(\mathbb{R}^n)\,, \tag{3.24}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f} g\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f\hat{g}\, dx\,, \quad f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)\,. \tag{3.25}$$

Falls $x \mapsto x_j f(x) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, dann existiert $\partial_j \hat{f}$ und ist stetig,

$$\widehat{x_j f} = i\partial_j \hat{f}\,, \tag{3.26}$$

falls $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, $g(x) = f(cx)$, $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, so gilt

$$\hat{g}(\xi) = |c|^{-n} \hat{f}\left(\frac{\xi}{c}\right)\,. \tag{3.27}$$

Es gilt

$$\hat{f}(\xi) = e^{-\frac{|\xi|^2}{2}}\,, \quad \text{falls} \quad f(x) = e^{-\frac{|x|^2}{2}}\,. \tag{3.28}$$

Wir verwenden die Fouriertransformation, um eine Lösung $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Anfangswertaufgabe

$$\partial_t u(x,t) - \lambda \Delta u(x,t) = 0\,, \quad x \in \mathbb{R}^n\,,\ t > 0\,, \tag{3.29}$$

$$u(x,0) = f(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}^n\,, \tag{3.30}$$

darzustellen, wobei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion ist. Wir wenden "partielle Fouriertransformation" an. Sei

$$(\mathcal{F}_x u)(\xi,t) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} u(x,t) e^{-i\langle x,\xi\rangle}\, dx\,. \tag{3.31}$$

Es ist

$$\partial_t(\mathcal{F}_x u)(\xi,t) = \mathcal{F}_x(\partial_t u)(\xi,t) = \lambda(\mathcal{F}_x \Delta u)(\xi,t) = \lambda \sum_{j=1}^n (i\xi_j)^2 (\mathcal{F}_x u)(\xi,t) \qquad (3.32)$$
$$= -\lambda|\xi|^2 (\mathcal{F}_x u)(\xi,t)\,.$$

Für festes $\xi \in \mathbb{R}^n$ stellt (3.32) eine gewöhnliche Differentialgleichung für die Funktion $y(t) = (\mathcal{F}_x u)(\xi,t)$ dar. Deren allgemeine Lösung hat die Form

$$(\mathcal{F}_x u)(\xi,t) = c(\xi) e^{-\lambda t|\xi|^2}\,. \qquad (3.33)$$

Für $t = 0$ folgt

$$c(\xi) = (\mathcal{F}_x u)(\xi,0) = \hat{f}(\xi)\,. \qquad (3.34)$$

Es ist

$$(\mathcal{F}_x g)(\xi,t) = e^{-\lambda t|\xi|^2}\,, \quad \text{falls} \quad g(x,t) = (2\lambda t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4\lambda t}}\,, \qquad (3.35)$$

also folgt

$$u(x,t) = (\mathcal{F}_x^{-1}\mathcal{F}_x u)(x,t) = \mathcal{F}_x^{-1}(\hat{f}\cdot\hat{g})(x,t) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}(f*g)(x,t)$$
$$= (4\pi\lambda t)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4\lambda t}} f(y)\,dy\,. \qquad (3.36)$$

Wir betrachten nun

$$\Phi(x,t) = \begin{cases} (4\pi\lambda t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4\lambda t}}\,, & x \in \mathbb{R}^n\,,\ t > 0\,, \\ 0\,, & x \in \mathbb{R}^n\,,\ t \le 0\,. \end{cases} \qquad (3.37)$$

Es ist $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$, und man rechnet unmittelbar nach, dass

$$\partial_t \Phi(x,t) - \lambda\Delta\Phi(x,t) = 0\,, \quad x \in \mathbb{R}^n\,,\ t > 0\,. \qquad (3.38)$$

Lemma 3.2 *Für alle $t > 0$ gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x,t)\,dx = 1\,, \qquad (3.39)$$

und $\Phi \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$.

Beweis: Mit der Variablentransformation $x = \sqrt{4\lambda t}\,y$ folgt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x,t)\,dx = (4\pi\lambda t)^{-\frac{n}{2}} (4\lambda t)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|y|^2}\,dy = \pi^{-\frac{n}{2}}\pi^{\frac{n}{2}} = 1\,.$$

Jedes Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist in einer Menge der Form $U = \mathbb{R}^n \times (s,t)$ enthalten, und

$$\int_U \Phi(x,\tau)\,dx\,d\tau \le |t-s|\,.$$

□

Satz 3.3 *Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt. Dann ist die Funktion*

$$u(x,t) = (4\pi\lambda t)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4\lambda t}} f(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t) f(y)\, dy \tag{3.40}$$

eine Lösung der Diffusionsgleichung

$$\partial_t u - \lambda \Delta u = 0 \tag{3.41}$$

in $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$, und es gilt

$$\lim_{(x,t)\to(x_0,0)} u(x,t) = f(x_0) \tag{3.42}$$

für alle $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Beweis: Dass (3.41) gilt, erkennt man durch Berechnen der partiellen Ableitungen von u. Wir zeigen nun (3.42). Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$, sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir wählen $\delta > 0$, so dass $|f(y) - f(x_0)| < \varepsilon$, falls $|y - x_0| < \delta$. Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ gilt wegen Lemma 3.2

$$\begin{aligned} |u(x,t) - f(x_0)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)(f(y) - f(x_0))\, dy \right| \\ &\le \int_{B(x_0;\delta)} \Phi(x-y,t)|f(y) - f(x_0)|\, dy + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x_0;\delta)} \Phi(x-y,t)|f(y) - f(x_0)|\, dy\,. \end{aligned} \tag{3.43}$$

Nach Wahl von δ gilt

$$\int_{B(x_0;\delta)} \Phi(x-y,t)|f(y) - f(x_0)|\, dy \le \varepsilon \int_{B(x_0;\delta)} \Phi(x-y,t)\, dy \le \varepsilon\,. \tag{3.44}$$

Sei nun $x \in \mathbb{R}^n$ mit

$$|x - x_0| \le \frac{\delta}{2}\,.$$

Für alle $y \in \mathbb{R}^n$ mit $|y - x_0| \ge \delta$ gilt dann

$$|y - x_0| \le |y - x| + |x - x_0| \le |y - x| + \frac{\delta}{2} \le |y - x| + \frac{1}{2}|y - x_0|\,,$$

also

$$|y - x| \ge \frac{1}{2}|y - x_0|\,, \quad \text{falls } |x - x_0| \le \frac{\delta}{2}, \tag{3.45}$$

und für solche x gilt also mit einer (von f abhängenden) Konstanten $C > 0$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x_0;\delta)} \Phi(x-y,t)|f(y) - f(x_0)|\, dy &\le C t^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x_0;\delta)} e^{-\frac{|x-y|^2}{4\lambda t}}\, dy \\ &\le C t^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x_0;\delta)} e^{-\frac{|y-x_0|^2}{16\lambda t}}\, dy = C t^{-\frac{n}{2}} |\partial B(0;1)| \int_\delta^\infty e^{-\frac{r^2}{16\lambda t}} r^{n-1}\, dr\,. \end{aligned}$$

Es gilt nun

$$\lim_{t\downarrow 0} t^{-\frac{n}{2}} \int_\delta^\infty e^{-\frac{r^2}{16\lambda t}} r^{n-1}\, dr = 0\,. \tag{3.46}$$

Hieraus und aus (3.44) folgt nun die Behauptung (3.42). $\square$

Satz 3.4 (Fundamentallösung der Diffusionsgleichung)
Die Funktion Φ aus (3.37) ist eine Fundamentallösung der Diffusionsgleichung,

$$(\partial_t - \lambda\Delta)\Phi = \delta \qquad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1}). \tag{3.47}$$

Beweis: Nach Lemma 3.2 ist $\Phi \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$. Sei $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$, dann gilt

$$((\partial_t - \lambda\Delta)\Phi)(\varphi) = -\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \Phi(x,t)(\partial_t\varphi(x,t) + \lambda\Delta\varphi(x,t))\,dx\,dt\,. \tag{3.48}$$

Es ist nach Lemma 3.2

$$\begin{aligned}\left|\int_{-\infty}^{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\partial_t\varphi + \lambda\Delta\varphi)\,dx\,dt\right| &\le \int_{-\infty}^{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x,t)\,dx\,dt \cdot (\|\partial_t\varphi\|_\infty + \lambda\|\Delta\varphi)\|_\infty) \\ &= \varepsilon(\|\partial_t\varphi\|_\infty + \lambda\|\Delta\varphi)\|_\infty) \to 0\,, \quad \text{für } \varepsilon \to 0,\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\int_{\varepsilon}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\partial_t\varphi + \lambda\Delta\varphi)\,dx\,dt &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x,\tau)\varphi(x,\tau)\Big|_{\tau=\varepsilon}^{\tau=\infty}\,dx - \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\varepsilon}^{\infty} \partial_t\Phi \cdot \varphi\,dt\,dx \\ &\quad + \int_{\varepsilon}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^n} \lambda\Delta\Phi \cdot \varphi\,dx\,dt \\ &= -\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x,\varepsilon)\varphi(x,\varepsilon)\,dx - \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\varepsilon}^{\infty} \underbrace{(\partial_t\Phi - \lambda\Delta\Phi)}_{=0}\cdot\varphi\,dx\,dt\,.\end{aligned}$$

Es ist

$$\Phi(\sqrt{\varepsilon}y, \varepsilon) = \varepsilon^{-\frac{n}{2}}\Phi(y,1)\,,$$

also folgt mit Substitution $x = \sqrt{\varepsilon}y$

$$-\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x,\varepsilon)\varphi(x,\varepsilon)\,dx = -\varepsilon^{\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\sqrt{\varepsilon}y,\varepsilon)\varphi(\sqrt{\varepsilon}y,\varepsilon)\,dy = -\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,1)\varphi(\sqrt{\varepsilon}y,\varepsilon)\,dy\,.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}-\int_{\varepsilon}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\partial_t\varphi + \lambda\Delta\varphi)\,dx\,dt &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,1)\varphi(\sqrt{\varepsilon}y,\varepsilon)\,dy \\ &\to \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,1)\varphi(0,0)\,dy = \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,1)\,dy}_{=1}\cdot\varphi(0,0) = \varphi(0)\,,\end{aligned}$$

mit Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ aus dem Konvergenzsatz von Lebesgue. Damit ist (3.47) bewiesen. □

Es erweist sich als hilfreich, den Kalkül der Fouriertransformation auch für Rechnungen mit Distributionen nutzen zu können. Für beliebige Distributionen in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ geht das nicht, man muss Einschränkungen für das Verhalten im Unendlichen (d.h. dem "Rand" von $\mathbb{R}^n$) treffen. Man betrachtet eine geeignete Teilmenge $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ von $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$; dem entspricht auf der anderen Seite ein etwas vergrößerter Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (statt $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$) von Testfunktionen.

Definition 3.5 (Schwartz-Raum)
Wir definieren den Schwartz-Raum durch

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{f : f \in C^\infty(\mathbb{R}^n),\ \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\beta \partial^\alpha f(x)| < \infty \textit{ für alle Multiindizes } \alpha, \beta\}\,. \tag{3.49}$$

□

Der Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist ein Vektorraum, mit $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ liegt auch das Produkt fg in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, es gilt $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Ist p ein Polynom im $\mathbb{R}^n$, so gilt $pf \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ für alle $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Ist $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, so ist $\partial^\alpha f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ für alle Multiindizes α. Wegen

$$|x|^{2M} |\partial^\alpha f(x)| = |(\sum_j x_j^2)^M \partial^\alpha f(x)|$$

fallen alle Ableitungen von $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ im Unendlichen schneller als polynomial, das heißt, zu jedem $N \in \mathbb{N}$ und jedem Multiindex α gibt es ein $C_{N,\alpha} > 0$ mit

$$|\partial^\alpha f(x)| \le C_{N,\alpha}(1 + |x|^2)^{-N}\,, \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.50}$$

Indem wir $N > n$ wählen, erkennen wir aus (3.50), dass

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)\,. \tag{3.51}$$

Die durch

$$f(x) = e^{-|x|^2}$$

definierte Funktion liegt in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, aber nicht in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Die Rechenregeln für die Fouriertransformation gelten auch in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, also für die Translation τ_a

$$\widehat{\tau_a f}(\xi) = \hat{f}(\xi) e^{i\langle a,\xi\rangle}\,, \quad \xi \in \mathbb{R}^n\,, \tag{3.52}$$

weiter

$$\widehat{\partial_j f}(\xi) = i\xi_j \hat{f}(\xi)\,, \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\,, \tag{3.53}$$

$$\widehat{x_j f} = i\partial_j \hat{f}\,, \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\,. \tag{3.54}$$

Wir wollen nun zeigen, dass $\mathcal{F}$ auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ bijektiv ist. Aus der Analysis der Fouriertransformation verwenden wir, dass

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle x,\xi\rangle}\, dx\,, \tag{3.55}$$

und

$$(\mathcal{G}g)(x) = \check{g}(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) e^{i\langle x,\xi\rangle}\, d\xi\,, \tag{3.56}$$

für $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ definiert sind, und dass

$$\mathcal{G}\mathcal{F}f = f \tag{3.57}$$

gilt, falls $f, \mathcal{F}f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$.

Lemma 3.6 *Seien $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt auch $\hat{f}, \check{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, und $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist linear und bijektiv.*

Beweis: Aus (3.53) und (3.54) folgt für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$|\xi^\beta \partial_\xi^\alpha \hat{f}(\xi)| = |\widehat{\partial_x^\beta (x^\alpha f)}(\xi)| \le (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} |\partial^\beta (x^\alpha f(x))| \, dx < \infty \,,$$

da mit f auch $x \mapsto x^\alpha f(x)$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und damit in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ liegt. Es folgt $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Wir definieren $P : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ durch $(Pf)(x) = f(-x)$. Dann gilt für alle $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}(Pg))(x) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} g(-y) e^{-i\langle x,y\rangle} \, dy = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (-1)^n \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) e^{i\langle x,\xi\rangle} \, d\xi \\ &= (-1)^n (\mathcal{G}g)(x) \,.\end{aligned}$$

Es folgt mit (3.57)

$$(\mathcal{F}P\mathcal{F})(f) = (-1)^n (\mathcal{G}\mathcal{F})(f) = (-1)^n f \,, \quad \text{für alle } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

also

$$\mathcal{F}P\mathcal{F} = (-1)^n \, id \,, \quad \text{auf } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

also ist $\mathcal{F}$ bijektiv auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. □

Aus Lemma 3.6 und den bereits bekannten Rechenregeln im $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ erhalten wir sofort

$$\widehat{f * g} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \hat{f}\hat{g} \,, \quad f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \,, \tag{3.58}$$

$$\widehat{fg} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \hat{f} * \hat{g} \,, \quad \hat{f}, \hat{g} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \,, \tag{3.59}$$

und aus (3.59) folgt

Lemma 3.7 *Sind $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, so ist auch $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.* □

Definition 3.8 (Temperierte Distributionen)
Eine Linearform $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{K}$ heißt temperierte Distribution, falls es ein $N \in \mathbb{N}$ und ein $C > 0$ gibt mit

$$|T(\varphi)| \le C \sum_{|\alpha|,|\beta| \le N} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\beta \partial^\alpha \varphi(x)| \,, \quad \textit{für alle } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \tag{3.60}$$

Der Raum der temperierten Distributionen wird mit $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ bezeichnet. □

$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ist ein Vektorraum, und $\delta_a \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (setze $N = 0$, $C = 1$). Unmittelbar aus der Definition von $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ folgt, dass

$$T|\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \,, \quad \text{für alle } T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n). \tag{3.61}$$

Lemma 3.9 *Ist $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ und $T(\varphi) = 0$ für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, so ist $T = 0$.*

Beweis: Sei $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Es genügt, eine Folge $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ zu konstruieren mit

$$\lim_{k\to\infty} T(\varphi - \varphi_k) = 0\,. \tag{3.62}$$

Sei $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp}(\psi) \subset B(0;2)$ und $\psi = 1$ auf $B(0;1)$. Wir setzen

$$\varphi_k(x) = \varphi(x)\psi\left(\frac{1}{k}x\right).$$

Dann gilt $\varphi_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Da $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, gibt es $c_{\alpha,\beta} > 0$ mit

$$|x^\beta \partial^\alpha \varphi(x)| \le \frac{c_{\alpha,\beta}}{|x|^2}\,, \quad x \in \mathbb{R}^n\,.$$

Es ist

$$\varphi(x) - \varphi_k(x) = \varphi(x)\left(1 - \psi\left(\frac{1}{k}x\right)\right),$$

also $\varphi(x) - \varphi_k(x) = 0$ für $|x| \le k$. Sei N zu T gehörig gemäß Definition 3.8, dann gilt

$$|x^\beta \partial^\alpha (\varphi - \varphi_k)(x)| \le \frac{c_N}{|x|^2}\,, \quad \text{für alle } |\alpha|, |\beta| \le N \text{ und alle } |x| \ge k,$$

wobei c_N sich ergibt aus C, den $c_{\alpha,\beta}$ und aus Schranken für die Ableitungen von ψ. Also gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$|x^\beta \partial^\alpha (\varphi - \varphi_k)(x)| \le \frac{c_N}{k^2} \to 0\,.$$

Aus (3.60) folgt nun (3.62). □

Folgerung 3.10 *Die Restriktion auf $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ definiert eine lineare Einbettung (das heißt, eine lineare injektive Abbildung) von $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ nach $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.* □

Lemma 3.11 *Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ messbar, und gibt es ein $M \in \mathbb{N}$ mit*

$$(1 + |x|^2)^{-M} f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)\,, \tag{3.63}$$

so ist $T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Ist p Polynom auf $\mathbb{R}^n$, dann ist $T_p \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ und $pT \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ für jedes $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Beweis: Für $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)\varphi(x)|\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^{-M} |f(x)| (1+|x|^2)^M |\varphi(x)|\,dx \\ &\le \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^{-M} |f(x)|\,dx \cdot \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^M |\varphi(x)|\,.\end{aligned}$$

Indem wir $N = 2M$ in Definition 3.8 wählen, erhalten wir $T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Ist f ein Polynom, so gilt in der Tat (3.63) für hinreichend großes M. Dass mit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ auch $pT \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ist für jedes Polynom p, ist eine Übungsaufgabe. □

Temperierte Distributionen sind also solche, deren Wachstum im Unendlichen im wesentlichen durch ein Polynom abgeschätzt werden kann. Die durch $f(x) = e^x$ definierte Distribution, beispielsweise, liegt nicht in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Lemma 3.12 *Sei $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $\partial^\alpha T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ für jeden Multiindex α, wobei wir definieren*

$$(\partial_j T)(\varphi) = -T(\partial_j \varphi)\,, \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),\ 1 \le j \le n. \tag{3.64}$$

Beweis: Seien N, C wie in Definition 3.8, dann gilt für alle $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$|(\partial_j T)(\varphi)| \le C \sum_{|\alpha|,|\beta| \le N} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\beta \partial^\alpha \partial_j \varphi(x)| \le C \sum_{|\alpha|,|\beta| \le N+1} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\beta \partial^\alpha \varphi(x)|\,. \tag{3.65}$$

□

Ist $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, so gilt für alle $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ nach (3.25)

$$T_f(\mathcal{F}\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{\varphi}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)\varphi(x)\,dx = T_{\mathcal{F}f}(\varphi)\,. \tag{3.66}$$

Diese Identität wird benutzt, um die Fouriertransformation von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ auf $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ zu verallgemeinern.

Satz 3.13 *Durch*

$$(\mathcal{F}T)(\varphi) = T(\mathcal{F}\varphi)\,, \quad T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)\,,\ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\,, \tag{3.67}$$

wird eine bijektive lineare Abbildung $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ definiert, sie heißt die Fouriertransformation auf $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Beweis: Nach Lemma 3.6 ist $\mathcal{F}\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, also ist $T(\mathcal{F}\varphi)$ definiert, und es gibt C, N mit

$$|T(\mathcal{F}\varphi)| \le C \sum_{|\alpha|,|\beta| \le N} \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} |\xi^\beta \partial^\alpha (\mathcal{F}\varphi)(\xi)|\,. \tag{3.68}$$

Aus den Rechenregeln (3.53) und (3.54) folgt für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} |\xi^\beta \partial^\alpha (\mathcal{F}\varphi)(\xi)| &= |\xi^\beta \mathcal{F}(x^\alpha \varphi)(\xi)| = |\mathcal{F}(\partial^\beta(x^\alpha\varphi))(\xi)| \\ &= \left| (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \partial^\beta(x^\alpha \varphi(x)) e^{-i\langle x,\xi\rangle}\,dx \right| \le (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} |\partial^\beta(x^\alpha\varphi(x))|\,dx\,. \end{aligned}$$

Durch Ausdifferenzieren entstehen Terme der Form $x^{\alpha'}\partial^{\beta'}\varphi(x)$, und für M hinreichend groß gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x^{\alpha'}\partial^{\beta'}\varphi(x)|\,dx \le \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^{-M}\,dx \cdot \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |(1+|x|^2)^M |x^{\alpha'}\partial^{\beta'}\varphi(x)|\,,$$

also insgesamt $T \circ \mathcal{F} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Analog zeigt man, dass für $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ durch

$$(\mathcal{G}T)(\varphi) = T(\mathcal{F}^{-1}\varphi)$$

ein $\mathcal{G}T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ definiert wird, und

$$(\mathcal{G}\mathcal{F}T)(\varphi) = (\mathcal{F}T)(\mathcal{F}^{-1}\varphi) = T(\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}\varphi) = T(\varphi)\,,$$

also $\mathcal{G}\mathcal{F} = id$ und analog $\mathcal{F}\mathcal{G} = id$. Die Linearität von $\mathcal{F}$ folgt direkt aus der Definition von $\mathcal{F}$. $\square$

Die Rechenregeln (3.53) und (3.54) übertragen sich von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ auf $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, so folgt etwa

$$\mathcal{F}(\partial^\alpha T) = (i\xi)^\alpha \mathcal{F}T\,, \quad T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)\,, \tag{3.69}$$

aus

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}(\partial^\alpha T))(\varphi) &= (\partial^\alpha T)(\mathcal{F}\varphi) = (-1)^{|\alpha|}T(\partial^\alpha(\mathcal{F}\varphi)) = (-1)^{|\alpha|}T((-i)^{|\alpha|}\mathcal{F}(x^\alpha\varphi)) \\ &= (\mathcal{F}T)((i\xi)^\alpha\varphi) = ((i\xi)^\alpha\mathcal{F}T)(\varphi)\,,\end{aligned}$$

analog

$$\mathcal{F}(x^\alpha T) = i^{|\alpha|}\partial^\alpha(\mathcal{F}T)\,. \tag{3.70}$$

Für die Dirac-Distribution gilt

$$(\mathcal{F}\delta_a)(\varphi) = \delta_a(\mathcal{F}\varphi) = (\mathcal{F}\varphi)(a) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)e^{-i\langle x,a\rangle}\,dx\,, \tag{3.71}$$

also ist $\mathcal{F}\delta_a$ eine reguläre Distribution, gegeben durch

$$\mathcal{F}\delta_a = T_g\,, \quad g(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}e^{-i\langle x,a\rangle}\,, \tag{3.72}$$

und für den Spezialfall $a = 0$ ergibt sich

$$\mathcal{F}\delta = T_g\,, \quad g(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\,, \tag{3.73}$$

also eine konstante Funktion. Für die Ableitungen gilt gemäß (3.70)

$$\mathcal{F}(\partial^\alpha\delta) = (ix)^\alpha\mathcal{F}\delta\,, \tag{3.74}$$

also

$$\mathcal{F}(\partial^\alpha\delta) = T_g\,, \quad g(x) = (ix)^\alpha(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\,. \tag{3.75}$$

Als Anwendung betrachten wir die partielle Differentialgleichung

$$-\Delta u + \mu u = f\,. \tag{3.76}$$

Satz 3.14 *Sei $\mu \in \mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$. Dann gibt es zu jedem $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ genau ein $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, welches (3.76) in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ löst, nämlich*

$$u = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{\mu+|\xi|^2}\mathcal{F}f\right)\,. \tag{3.77}$$

Beweis: Für $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ gilt nach Lemma 3.11, Lemma 3.12 und Satz 3.13

$$\begin{aligned}-\Delta u + \mu u = f \quad &\Leftrightarrow \quad \mathcal{F}(-\Delta u + \mu u) = \mathcal{F}f \\ &\Leftrightarrow \quad \mathcal{F}u = \frac{1}{\mu+|\xi|^2}\mathcal{F}f \\ &\Leftrightarrow \quad u = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{\mu+|\xi|^2}\mathcal{F}f\right)\,.\end{aligned}$$

$\square$

Durch (3.77) wird also eine verallgemeinerte Lösung $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ von (3.76) definiert, die unter Umständen auch eine klassische Lösung von (3.76) ist (aber beispielsweise sicher nicht dann, wenn f reguläre Distribution zu einer unstetigen Funktion ist). Da $\delta \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, folgt aus Satz 3.14 auch, dass es in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ genau eine Fundamentallösung des Differentialoperators $\mu - \Delta$ gibt; es kann aber weitere Fundamentallösungen in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ geben.

4 Fundamentallösung und Faltung

Ist $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, so gilt

$$(f * \varphi)(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(y-x)\,dx\,, \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n). \tag{4.1}$$

Wir definieren für festes $y \in \mathbb{R}^n$

$$\varphi_y(x) = \varphi(y-x)\,, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\,. \tag{4.2}$$

Dann gilt

$$\varphi_y \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\,, \quad \operatorname{supp}(\varphi_y) = y - \operatorname{supp}(\varphi)\,. \tag{4.3}$$

Ist nun $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, so definieren wir

$$(T * \varphi)(y) = T(\varphi_y)\,, \quad y \in \mathbb{R}^n\,, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\,. \tag{4.4}$$

Für die Dirac-Distribution δ_a, $a \in \mathbb{R}^n$, gilt

$$(\delta_a * \varphi)(y) = \delta_a(\varphi_y) = \varphi(y-a)\,,$$

also

$$\delta_a * \varphi = \tau_{-a}\varphi\,, \quad \delta * \varphi = \varphi\,, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\,. \tag{4.5}$$

Satz 4.1 *Sei $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Dann wird durch (4.4) eine Funktion $T * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ definiert mit*

$$\operatorname{supp}(T * \varphi) \subset \operatorname{supp}(T) + \operatorname{supp}(\varphi)\,, \tag{4.6}$$

und es gilt

$$\partial^\alpha(T * \varphi) = T * \partial^\alpha\varphi = (\partial^\alpha T) * \varphi \tag{4.7}$$

für alle Multiindizes α.

Beweis: Wir zeigen zunächst (4.6). Sei $y \in \mathbb{R}^n$ mit $0 \neq (T * \varphi)(y) = T(\varphi_y)$, dann ist $\operatorname{supp}(\varphi_y) \cap \operatorname{supp}(T) \neq \emptyset$. Ist nun $x \in \operatorname{supp}(\varphi_y) \cap \operatorname{supp}(T)$, so folgt nach (4.3), dass $y - x \in \operatorname{supp}(\varphi)$, also $y = y - x + x \in \operatorname{supp}(\varphi) + \operatorname{supp}(T)$. Da $\operatorname{supp}(\varphi)$ kompakt ist, ist $\operatorname{supp}(\varphi) + \operatorname{supp} T$ abgeschlossen, also gilt

$$\operatorname{supp}(T * \varphi) = \overline{\{y : (T * \varphi)(y) \neq 0\}} \subset \operatorname{supp}(\varphi) + \operatorname{supp} T\,.$$

Wir setzen

$$\psi(y) = (T * \varphi)(y)\,, \quad y \in \mathbb{R}^n\,. \tag{4.8}$$

Wir zeigen zunächst, dass ψ stetig ist. Sei $y \in \mathbb{R}^n$ beliebig, sei $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folge in $\mathbb{R}^n$ mit $h_k \to 0$, $|h_k| \leq 1$ für alle k. Dann gilt

$$\psi(y + h_k) - \psi(y) = T(\varphi_{y+h_k}) - T(\varphi_y) = T(\varphi_{y+h_k} - \varphi_y)\,. \tag{4.9}$$

Für $w_k = \varphi_{y+h_k} - \varphi_y$ gilt

$$\operatorname{supp}(w_k) \subset \operatorname{supp}(\varphi_y) + K(0;1) - \operatorname{supp}(\varphi_y) =: \tilde{K}\,,$$

$\tilde{K} \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, sowie $\|\partial^\alpha w_k\|_\infty \to 0$ für $k \to \infty$ und alle Multiindizes α. Da T Distribution ist, folgt $T(w_k) \to 0$. Also ist ψ stetig in y. Wir wollen nun zeigen, dass $\partial_j \psi(y)$ existiert, und dass

$$\partial_j \psi(y) = T((\partial_j \varphi)_y) = (T * \partial_j \varphi)(y) \,. \tag{4.10}$$

Sei $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folge mit $t_k > 0$, $t_k \to 0$. Wir betrachten

$$\begin{aligned} r_k(x) &= \frac{\varphi(y + t_k e_j - x) - \varphi(y - x)}{t_k} - \partial_j \varphi(y - x) && (4.11)\\ &= \partial_j \varphi(y + \tau_k e_j - x) - \partial_j \varphi(y - x) \,, && (4.12) \end{aligned}$$

wobei $\tau_k \in (0, t_k)$ eine geeignete Zwischenstelle ist. Es gilt $r_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, und wie oben im Beweis der Stetigkeit von ψ folgt $T(r_k) \to 0$, also folgt weiter

$$\begin{aligned} \frac{\psi(y + t_k e_j) - \psi(y)}{t_k} &= \frac{T(\varphi_{y+t_k e_j}) - T(\varphi_y)}{t_k} = T\left(\frac{\varphi_{y+t_k e_j} - \varphi_y}{t_k}\right) = T(r_k + (\partial_j \varphi)_y) \\ &\to T((\partial_j \varphi)_y) \,. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Also existiert $\partial_j \psi(y)$, und es gilt

$$\partial_j \psi(y) = T((\partial_j \varphi)_y) \,. \tag{4.14}$$

Per Induktion erhält man, dass alle $\partial^\alpha \psi$ existieren und stetig sind, und dass

$$\partial^\alpha (T * \varphi) = T * \partial^\alpha \varphi \,. \tag{4.15}$$

Es folgt weiter für alle $y \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} ((\partial^\alpha T) * \varphi)(y) &= (\partial^\alpha T)(\varphi_y) = (-1)^{|\alpha|} T(\partial^\alpha(\varphi_y)) = T((\partial^\alpha \varphi)_y) \\ &= (T * \partial^\alpha \varphi)(y) \,. \end{aligned}$$

Damit ist (4.7) bewiesen. □

Wir betrachten nun im $\mathbb{R}^n$ eine partielle Differentialgleichung der Form

$$P(\partial) u = f \,, \quad P(\zeta) = \sum_{|\alpha| \le N} a_\alpha \zeta^\alpha \,, \quad a_\alpha \in \mathbb{C} \,, \tag{4.16}$$

wobei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben ist. Kennen wir eine Fundamentallösung T von $P(\partial)$, so können wir eine Lösung durch die Faltung $T * f$ erhalten.

Satz 4.2 *Sei $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ eine Fundamentallösung des Differentialoperators $P(\partial)$, sei $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Dann ist*

$$u = T * f \tag{4.17}$$

eine Lösung von (4.16). Hat T kompakten Träger, so gilt $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, und u ist die einzige Lösung von (4.16) in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Beweis: Es ist $P(\partial)T = \delta$ nach Definition der Fundamentallösung. Nach Satz 4.1 ist $u = T * f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, und es gilt

$$P(\partial)u = P(\partial)(T * f) = (P(\partial)T) * f = \delta * f = f\,. \tag{4.18}$$

Hat T kompakten Träger, so auch $u = T * f$ nach Satz 4.1. Ist $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ eine weitere Lösung von (4.16), so gilt

$$u - v = \delta * (u - v) = (P(\partial)T) * (u - v) = T * (P(\partial)(u - v)) = T * (f - f) = 0\,. \tag{4.19}$$

□

So wie er da steht, ist Satz 4.2 nur bedingt anwendbar, da die Voraussetzungen ($f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp}(T)$ kompakt) sehr einschränkend sind. Sein Beweis (und damit der entsprechende Satz) bleibt aber in erheblich allgemeineren Situationen gültig. Erforderlich ist für den Existenzteil, dass $T * f$ definiert ist und (4.7) für $\varphi = f$ gilt, und für den Eindeutigkeitsteil, dass $T * (u - v)$ definiert ist und (4.7) für $\varphi = u - v$ gilt. Nun läßt sich die Faltung $T_1 * T_2$ zwar nicht für beliebige Distributionen, wohl aber in einer ganzen Reihe von Spezialfällen definieren, die über Satz 4.1 weit hinausgehen. Darauf gehen wir jetzt nicht weiter ein.

5 Bilanzgleichungen

Dieser Abschnitt befasst sich damit, wie eine partielle Differentialgleichung aus einem Erhaltungsgesetz entsteht.

Sei $u : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, welche die zeitabhängige Volumendichte einer Größe beschreibt, das heißt,

$$\int_\Omega u(x,t)\,dx \tag{5.1}$$

stellt den Gesamtinhalt der Größe in einem Volumen $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ dar. Sei $q : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eine Funktion, welche die zeitabhängige Flächendichte des Flusses dieser Größe beschreibt, das heißt,

$$\int_M \langle q(\xi,t), n(\xi)\rangle \; dS(\xi) \tag{5.2}$$

stellt den Gesamtfluss der Größe pro Zeiteinheit durch ein Flächenstück dar. Ein Erhaltungsgesetz ist nun durch folgende Formel gegeben:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \int_\Omega u(x,t)\,dx = -\int_{\partial\Omega} \langle q(\xi,t), n(\xi)\rangle \; dS(\xi)\,. \tag{5.3}$$

(5.3) besagt, dass die Änderungsrate des Gesamtinhalts der Größe im Volumen Ω gleich ist dem Fluss dieser Größe durch den Rand von Ω (von außen nach innen). Der Gaußsche Satz besagt

$$\int_{\partial\Omega} \langle q(\xi,t), n(\xi)\rangle \; dS(\xi) = \int_\Omega \operatorname{div} q(x,t)\,dx\,, \tag{5.4}$$

also folgt für alle t

$$\int_\Omega \partial_t u(x,t) + \operatorname{div} q(x,t)\,dx = 0\,. \tag{5.5}$$

Gilt das Erhaltungsgesetz (5.3) für "beliebige Volumina" Ω, also beispielsweise für alle Kugeln $B(x;r)$ mit $x \in \mathbb{R}^3$ und $r > 0$, so folgt

$$\partial_t u(x,t) + \operatorname{div} q(x,t) = 0\,, \quad \text{für alle } x, t. \tag{5.6}$$

Wenn $\partial_t u$ und $\operatorname{div} q$ stetig sind, ist der Übergang von (5.5) nach (5.6) elementar, für beliebige integrierbare Funktionen zieht man einen Satz der Integrationstheorie heran. Man kann auch aus Satz 2.6 heranziehen.

Mit (5.6) haben wir eine Gleichung für vier unbekannte Funktionen (u, q_1, q_2, q_3). Das Erhaltungsgesetz muss durch ein konstitutives Gesetz (etwa ein Materialgesetz) ergänzt werden, beispielsweise durch

$$q(x,t) = -\lambda \nabla u(x,t)\,, \quad \lambda > 0\,. \tag{5.7}$$

Diese Form hat etwa das Fouriersche Gesetz (Wärmefluss) oder das Ficksche Gesetz (Fluss einer Konzentration). Aus (5.6) und (5.7) ergibt sich die Diffusionsgleichung

$$\partial_t u - \operatorname{div}(\lambda \nabla u) = \partial_t u - \lambda \Delta u = 0\,. \tag{5.8}$$

Die Gleichungen, die sich bei der mathematischen Formulierung von Erhaltungsgesetzen ergeben, bezeichnet man auch als **Bilanzgleichungen**.

Als weitere Beispiele stellen wir die Erhaltungsgesetze für Masse, Impuls und Energie dar, wie sie in der Kontinuumsmechanik und Thermodynamik verwendet werden (siehe etwa I. Müller, Grundzüge der Thermodynamik mit historischen Anmerkungen, Springer-Verlag). Alle drei Erhaltungsgesetze lassen sich unter ein einheitliches Schema subsumieren. Sei ψ die spezifische Dichte (das heißt, Größe pro Masse) einer Größe, ρ deren Massendichte (Masse pro Volumen), dann ist

$$\int_\Omega \rho(x,t)\psi(x,t)\,dx \tag{5.9}$$

der Gesamtinhalt der Größe in Ω zum Zeitpunkt t. Zu dessen Veränderung sollen drei Prozesse beitragen: Der konvektive Fluss durch den Rand

$$-\int_{\partial\Omega} \langle \rho(\xi,t)\psi(\xi,t)v(\xi,t), n(\xi)\rangle \; dS(\xi)\,, \tag{5.10}$$

wobei v das Geschwindigkeitsfeld der Größe darstellt; der nichtkonvektive Fluss durch den Rand

$$-\int_{\partial\Omega} \langle \Phi(\xi,t), n(\xi)\rangle \; dS(\xi)\,, \tag{5.11}$$

und eine Zufuhr im Innern

$$\int_\Omega \rho(x,t)z(x,t)\,dx\,. \tag{5.12}$$

Die Bilanzgleichung lautet (in abgekürzter Schreibweise, ohne die Argumente x und t)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\int_\Omega \rho\psi\,dx = -\int_{\partial\Omega}\langle \rho\psi v, n\rangle \; dS - \int_{\partial\Omega}\langle \Phi, n\rangle \; dS + \int_\Omega \rho z\,dx\,. \tag{5.13}$$

Mit dem Gaußschen Satz erhalten wir wieder

$$\int_\Omega \partial_t(\rho\psi)\,dx = -\int_\Omega \operatorname{div}(\rho\psi v + \Phi)\,dx + \int_\Omega \rho z\,dx\,. \tag{5.14}$$

Soll (5.14) für beliebiges Ω gelten, so erhalten wir die partielle Differentialgleichung

$$\partial_t(\rho\psi) + \operatorname{div}(\rho\psi v + \Phi) = \rho z\,. \tag{5.15}$$

Als erstes betrachten wir die Massenbilanz. Hier ist $\psi = 1$, $\Phi = z = 0$, also hat die Bilanzgleichung die Form

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\int_\Omega \rho\,dx = -\int_{\partial\Omega}\langle \rho v, n\rangle \; dS\,, \tag{5.16}$$

und als partielle Differentialgleichung

$$\partial_t\rho + \operatorname{div}(\rho v) = 0\,. \tag{5.17}$$

Sie heißt die **Kontinuitätsgleichung**. Ist ρ konstant, so wird sie zu

$$\operatorname{div} v = 0\,. \tag{5.18}$$

Nun zur Impulsbilanz. Hier ist $\psi = v$, also eine vektorwertige Größe, der Ausdruck

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \int_\Omega \rho v \, dx \tag{5.19}$$

entspricht der Änderung des Gesamtimpulses im Volumen Ω. Die allgemeine Bilanzgleichung (5.13) stellt daher ein Gleichungssystem für 3 skalare Größen dar, mit $\psi_i = v_i$, $i = 1, 2, 3$. Die Schwerkraft bewirkt eine Impulszufuhr ins Innere, also (auf der Erde)

$$z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}, \quad g = 9.8067 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}^2}\,, \tag{5.20}$$

wenn die ersten beiden Ortskoordinaten eine horizontale Ebene und die dritte die Vertikale repräsentieren. Der nichtkonvektive Impulsfluss durch den Rand wird bewirkt durch Kraftübertragung in Form von Spannungskräften oder (im Spezialfall) Druckkräften. Die Spannungskraft wird beschrieben durch den Spannungstensor $\sigma(x, t) \in \mathbb{R}^{(3,3)}$, und zwar stellt die Funktion

$$x \mapsto \sigma(x, t) n(x)\,, \quad (\sigma n)_i = \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij} n_j\,,$$

die Flächendichte des Kraftvektors auf einer Fläche mit der Normalen n dar. Das ordnet sich ein in das allgemeine Schema 5.11, indem wir setzen

$$\Phi_i = -\sigma_i\,,$$

wobei σ_i die i-te Zeile des Spannungstensors σ bezeichnet. Der Fall einer reinen Druckkraft entspricht

$$\sigma = -pI\,, \quad \sigma_{ij} = -p\delta_{ij}\,, \tag{5.21}$$

wobei $p(x, t)$ eine skalare Größe (der Druck) ist. Die Bilanzgleichung für den Impuls hat insgesamt die Form

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \int_\Omega \rho v \, dx = -\int_{\partial\Omega} \langle \rho v_i v, n \rangle \, dS + \int_{\partial\Omega} \langle \sigma_i, n \rangle \, dS + \int_\Omega \rho z_i \, dx\,, \quad 1 \le i \le 3\,. \tag{5.22}$$

Als partielle Differentialgleichung geschrieben ergibt sich

$$\partial_t(\rho v_i) + \mathrm{div}\,(\rho v_i v - \sigma_i) = \rho z_i\,, \quad 1 \le i \le 3\,, \tag{5.23}$$

oder im Fall einer reinen Druckkraft

$$\partial_t(\rho v_i) + \mathrm{div}\,(\rho v_i v) + \partial_i p = \rho z_i\,, \quad 1 \le i \le 3\,. \tag{5.24}$$

Die Bilanzgleichung für den Drehimpuls behandeln wir nicht, sie liefert die Symmetrie des Spannungstensors ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ für alle i, j).

Die Energiebilanz ist wieder eine skalare Gleichung. Hier ist ψ die spezifische Energiedichte

$$\psi = u + \frac{1}{2}|v|^2\,, \tag{5.25}$$

wobei u für die spezifische Dichte der inneren Energie steht und $\frac{1}{2}|v|^2$ die spezifische Dichte der kinetischen Energie repräsentiert. Die Änderung der Gesamtenergie im Volumen Ω ist

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \int_\Omega \rho \left(u + \frac{1}{2}|v|^2 \right) \, dx \,. \tag{5.26}$$

Die innere Energie enthält etwa

- die kinetische Energie der ungeordneten Bewegung der Atome (makroskopisch gemessen als Temperatur),
- die potentielle Energie zwischen Atomen oder Molekülen, abhängig von deren gegenseitigem Abstand (etwa die elastische Energie bei der Verformung von Festkörpern),
- die chemische Bindungsenergie zwischen Molekülen,
- die Nuklearenergie.

Der nichtkonvektive Energiefluss besteht aus der mechanischen Arbeitsleistung und dem Wärmefluss,

$$\Phi = -\sigma v + q \,, \tag{5.27}$$

die Energiezufuhr ins Innere aus der Leistung der Schwerkraft und der absorbierten spezifischen Wärmestrahlung ζ,

$$z = -g v_3 + \zeta \,. \tag{5.28}$$

Die Energiebilanz ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \int_\Omega \rho \left(u + \frac{1}{2}|v|^2 \right) \, dx = &- \int_{\partial\Omega} \left\langle \rho \left(u + \frac{1}{2}|v|^2 \right) v, n \right\rangle \, dS \\ &+ \int_{\partial\Omega} \langle \sigma v, n \rangle \, dS - \int_{\partial\Omega} \langle q, n \rangle \, dS + \int_\Omega \rho z \, dx \,. \end{aligned} \tag{5.29}$$

Sie heißt auch der **erste Hauptsatz der Thermodynamik**. Nach diversen Umformungen erhält man die partielle Differentialgleichung

$$\partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u v + q) = \sigma : Dv + \rho\zeta \,, \tag{5.30}$$

wobei

$$\sigma : Dv = \sum_{i,j=1}^{3} \sigma_{ij} \, \partial_j v_i \,.$$

Wir erkennen, dass die Bilanzgleichungen nichtlineare partielle Differentialgleichungen sind. Aus ihnen ergeben sich durch Spezialisierung (in Kopplung mit unterschiedlichen Materialgesetzen) und Näherung eine Vielzahl von partiellen Differentialgleichungen, die der analytischen Beschreibung und numerischen Simulation in Natur- und Ingenieurwissenschaften zugrundeliegen.

6 Das Dirichlet-Prinzip

Wir kehren zurück zum Dirichlet-Problem für die Poisson-Gleichung in einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

$$-\Delta u = f \qquad \text{in } \Omega \tag{6.1}$$
$$u = g \qquad \text{auf } \partial\Omega. \tag{6.2}$$

Das Dirichlet-Prinzip stellt eine Verbindung her zu dem Funktional

$$J(v) = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla v(x)|^2 - f(x)v(x)\,dx\,. \tag{6.3}$$

Seien $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ stetig, sei

$$K = \{v : v \in C^2(\overline{\Omega}),\, v(x) = g(x) \text{ für alle } x \in \partial\Omega\}\,. \tag{6.4}$$

Sei u ein Minimierer von J auf K, also

$$u \in K\,, \quad J(u) = \min_{v\in K} J(v)\,. \tag{6.5}$$

Sei $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ gegeben. Es ist $u + \lambda\varphi \in K$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir betrachten

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad h(\lambda) = J(u + \lambda\varphi) - J(u)\,. \tag{6.6}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} h(\lambda) &= \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla(u+\lambda\varphi)(x)|^2 - f(x)(u+\lambda\varphi)(x)\,dx - \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u(x)|^2 - f(x)u(x)\,dx \\ &= \lambda \int_\Omega \langle \nabla u(x), \nabla\varphi(x)\rangle - f(x)\varphi(x)\,dx + \lambda^2 \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla\varphi(x)|^2\,dx\,. \end{aligned}$$

Da h differenzierbar und 0 ein Minimum von h ist, folgt

$$\begin{aligned} 0 = h'(0) &= \int_\Omega \langle \nabla u(x), \nabla\varphi(x)\rangle - f(x)\varphi(x)\,dx \\ &= \int_\Omega (-\Delta u(x) - f(x))\varphi(x)\,dx\,. \end{aligned}$$

Da $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ beliebig gewählt werden kann, ergibt sich

$$-\Delta u(x) = f(x)\,, \quad \text{für alle } x \in \Omega. \tag{6.7}$$

Umgekehrt kann man zeigen, dass jede Lösung $u \in C^2(\overline{\Omega}$ von (6.1), (6.2) ein Minimierer von J auf K ist (das beweisen wir jetzt nicht, es wird aus später bewiesenen Sätzen folgen). Die Äquivalenz

$$u \text{ löst (6.1), (6.2)} \qquad \Leftrightarrow \qquad u \text{ ist Minimierer von } J \text{ auf } K \tag{6.8}$$

heißt das **Dirichlet-Prinzip**. Die Gleichung (6.1) heißt in diesem Kontext die **Euler-Gleichung** des Funktionals J; sie ergibt sich durch Nullsetzen der Richtungsableitungen von J. Dieses Vorgehen stellt historisch den Ausgangspunkt der **Variationsrechnung** dar, dort werden Funktionale der Form

$$J(v) = \int_\Omega L(x, v(x), \nabla v(x))\, dx \tag{6.9}$$

betrachtet. Ist $\Omega \subset \mathbb{R}$, so sind die zugehörigen Eulergleichungen gewöhnliche Differentialgleichungen; für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n > 1$, sind sie partielle Differentialgleichungen.

Wir untersuchen nun eine abstrakte Form des Dirichlet-Prinzips.

Problem 6.1 (Quadratisches Minimierungsproblem)
Sei V ein Vektorraum, sei $K \subset V$ konvex, sei $a : V \times V \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform, sei $F : V \to \mathbb{R}$ Linearform. Wir betrachten das Problem

$$\min_{v \in K} J(v)\,, \quad J(v) = \frac{1}{2} a(v,v) - F(v)\,. \tag{6.10}$$

□

Satz 6.2 *Es liege die Situation von Problem 6.1 vor, sei die Bilinearform a außerdem symmetrisch und positiv definit. Dann ist J strikt konvex, und für $u \in K$ gilt*

$$J(u) = \min_{v \in K} J(v) \qquad \Leftrightarrow \qquad a(u, v-u) \geq F(v-u) \quad \forall v \in K\,. \tag{6.11}$$

Es gibt höchstens ein u mit dieser Eigenschaft.

Beweis: Seien $u, h \in V$ beliebig mit $h \neq 0$, wir definieren

$$J_{u,h} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad J_{u,h}(\lambda) = J(u + \lambda h)\,.$$

Es gilt

$$J_{u,h}(\lambda) = J(u) + \lambda(a(u,h) - F(h)) + \frac{\lambda^2}{2} a(h,h)\,. \tag{6.12}$$

Da $a(h,h) > 0$, ist die quadratische Funktion $J_{u,h}$ strikt konvex, also ist auch J strikt konvex, also hat J höchstens ein Minimum.
"$\Leftarrow$": Sei $v \in K$ beliebig. Wir setzen $h = v - u$, dann folgt aus (6.12) und (6.11)

$$J(v) - J(u) = (a(u,h) - F(h)) + \frac{1}{2} a(h,h) \geq 0\,.$$

"$\Rightarrow$": Sei $v \in K$ beliebig. Wir setzen $h = v - u$, dann ist $u + \lambda h \in K$ für $0 \leq \lambda \leq 1$ (da K konvex ist), also

$$0 \leq J_{u,h}(\lambda) - J_{u,h}(0) = \lambda(a(u,h) - F(h)) + \frac{\lambda^2}{2} a(h,h)\,.$$

Division durch λ und Grenzübergang $\lambda \downarrow 0$ ergibt $0 \leq a(u,h) - F(h)$. □

Das System von Ungleichungen

$$u \in K\,, \qquad a(u, v-u) \geq F(v-u) \quad \forall v \in K\,, \tag{6.13}$$

heißt **Variationsungleichung**. Wie die letzte Ungleichung im Beweis von Satz 6.2 zeigt, bedeutet die Variationsungleichung gerade, dass die Richtungsableitung von J in einem Minimum nichtnegativ ist für diejenigen Richtungen h, die in die "zulässige Menge" K zeigen.

Folgerung 6.3 *Es liege die Situation von Satz 6.2 vor, sei K ein affiner Unterraum von V, das heißt, $K = v_0 + U$ mit $v_0 \in V$, U Unterraum von V. Dann gilt*

$$J(u) = \min_{v \in K} J(v) \qquad \Leftrightarrow \qquad a(u, w) = F(w) \quad \forall w \in U\,. \tag{6.14}$$

Beweis: Für $u \in K$ gilt $U = \{v - u : v \in K\}$, also

$$\begin{aligned} a(u, v-u) \geq F(v-u) \quad \forall v \in K \qquad &\Leftrightarrow \qquad a(u, w) \geq F(w) \quad \forall w \in U \\ &\Leftrightarrow \qquad a(u, w) = F(w) \quad \forall w \in U\,, \end{aligned}$$

letzteres, da mit $w \in U$ auch $-w \in U$. □

Das System

$$u \in v_0 + U \qquad a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in U\,, \tag{6.15}$$

heißt **Variationsgleichung**. Die eingangs beschriebene Situation (6.1) – (6.5) ist ein Spezialfall von (6.15) mit

$$a(u, v) = \int_\Omega \langle \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle \, dx\,, \quad F(v) = \int_\Omega f(x) v(x)\, dx\,. \tag{6.16}$$

Der Zusammenhang zwischen der Poisson-Gleichung

$$-\Delta u = f\,, \quad \text{in } \Omega, \tag{6.17}$$

und ihrer Variationsformulierung

$$\int_\Omega \langle \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle \, dx = \int_\Omega f(x) v(x)\, dx\,, \quad \text{“für alle } v\text{”}, \tag{6.18}$$

ist nun interpretiert als Zusammenhang zwischen der Eulergleichung und der Variationsgleichung des quadratischen Funktionals (6.3). (Der Übergang von (6.17) zu (6.18) ist natürlich auch ohne den Umweg über das quadratische Funktional möglich.)

Die **variationelle Methode** zur Lösung partieller Differentialgleichungen besteht darin, die zugeordnete Variationsgleichung zu lösen.

Definition 6.4 (Stetigkeit und Elliptizität einer Bilinearform)
Sei V ein normierter Raum. Eine Bilinearform $a : V \times V \to \mathbb{R}$ heißt stetig, falls es ein $C > 0$ gibt mit

$$|a(u, v)| \leq C_a \|u\| \, \|v\|\,, \quad \textit{für alle } u, v \in V, \tag{6.19}$$

und sie heißt V-elliptisch, falls es ein $c_a > 0$ gibt mit

$$a(v, v) \geq c_a \|v\|^2\,, \quad \textit{für alle } v \in V. \tag{6.20}$$

□

Unmittelbar aus der Definition folgt, dass jede V-elliptische Bilinearform positiv definit ist.

Satz 6.5 (Lösbarkeit der Variationsgleichung)
Sei $(V, \|\cdot\|)$ Banachraum, sei $a : V \times V \to \mathbb{R}$ eine symmetrische, stetige und V-elliptische Bilinearform, sei $F : V \to \mathbb{R}$ linear und stetig. Dann hat die Variationsgleichung

$$a(u,v) = F(v) \qquad \forall v \in V \tag{6.21}$$

genau eine Lösung $u \in V$.

Beweis: Für alle $v \in V$ gilt

$$c_a \|v\|^2 \le a(v,v) \le C_a \|v\|^2 ,$$

Da $c_a > 0$, wird durch

$$\langle u, v\rangle_a = a(u,v) , \quad \|v\|_a = \sqrt{a(v,v)} ,$$

eine zu $\|\cdot\|$ äquivalente Norm definiert. Also ist $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_a)$ ein Hilbertraum, und $F : (V, \|\cdot\|_a) \to \mathbb{R}$ stetig. Nach dem Darstellungssatz von Riesz (siehe Funktionalanalysis) gibt es genau ein $u \in V$ mit

$$\langle u, v\rangle_a = F(v) .$$

□

Folgerung 6.6 *Für die Lösung u der Variationsgleichung (6.21) in Satz 6.5 gilt*

$$\|u\| \le \frac{\|F\|}{c_a} . \tag{6.22}$$

Beweis: Einsetzen von $v = u$ in (6.21) ergibt

$$c_a \|u\|^2 \le a(u,u) = F(u) \le \|F\| \cdot \|u\| .$$

□

Satz 6.5 und Folgerung 6.6 drücken aus, dass unter den gegebenen Voraussetzungen die Lösung der Variationsgleichung eine **wohlgestellte** Aufgabe ist in dem Sinn, dass ihre Lösung existiert, eindeutig ist und stetig von den "Daten" abhängt. Letzteres ist hier wie folgt zu interpretieren: Der Lösungsoperator $S : V^* \to V$, welcher jedem $F \in V^*$ die Lösung u von (6.21) zuordnet, ist stetig. Er ist nämlich linear (wie man mit Hilfe von (6.21) unmittelbar erkennt), und gemäß (6.22) gilt

$$\|S(F)\| \le \frac{\|F\|}{c_a} , \quad \text{also } \|S\| \le \frac{1}{c_a} .$$

Wir verallgemeinern nun Satz 6.5 auf die Situation der Variationsungleichung und ohne die Voraussetzung der Symmetrie.

Satz 6.7 (Variationsungleichung: Existenz, Eindeutigkeit, Stabilität)
Sei V Banachraum, sei $K \subset V$ abgeschlossen und konvex, sei $a : V \times V \to \mathbb{R}$ eine stetige V-elliptische Bilinearform mit

$$a(v,v) \ge c_a \|v\|^2 \qquad \forall v \in V , \tag{6.23}$$

sei $F : V \to \mathbb{R}$ linear und stetig. Dann hat die Variationsungleichung

$$a(u, v-u) \geq F(v-u) \qquad \forall\, v \in K\,, \tag{6.24}$$

genau eine Lösung $u \in K$. Ist $\tilde{F} : V \to \mathbb{R}$ linear stetig, und ist $\tilde{u} \in K$ die zugehörige Lösung von (6.24), so gilt

$$\|u - \tilde{u}\| \leq \frac{1}{c_a} \|F - \tilde{F}\|\,. \tag{6.25}$$

Beweis: Wir zeigen zunächst (6.25) und damit auch die Eindeutigkeit: Es ist

$$a(u, \tilde{u} - u) \geq F(\tilde{u} - u)\,, \tag{6.26}$$

$$a(\tilde{u}, u - \tilde{u}) \geq \tilde{F}(u - \tilde{u})\,. \tag{6.27}$$

Addition liefert

$$a(u - \tilde{u}, \tilde{u} - u) \geq (F - \tilde{F})(\tilde{u} - u)\,, \tag{6.28}$$

also

$$0 \leq c_a \|u - \tilde{u}\|^2 \leq a(u - \tilde{u}, u - \tilde{u}) \leq \|F - \tilde{F}\| \|u - \tilde{u}\|\,. \tag{6.29}$$

Für den Existenzbeweis betrachten wir zunächst den Spezialfall, daß a symmetrisch ist. Nach Satz 6.2 genügt es zu zeigen, daß J auf K ein Minimum hat. Es gilt für alle $v \in V$

$$J(v) \geq \frac{1}{2} c_a \|v\|^2 - \|F\| \|v\| = \left(\sqrt{\frac{c_a}{2}} \|v\| - \sqrt{\frac{1}{2c_a}} \|F\| \right)^2 - \frac{1}{2c_a} \|F\|^2\,, \tag{6.30}$$

also ist J nach unten beschränkt. Sei

$$d = \inf_{v \in K} J(v)\,, \tag{6.31}$$

sei $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in K mit

$$d \leq J(u_n) \leq d + \frac{1}{n}\,. \tag{6.32}$$

Die Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge, da

$$\begin{aligned} c_a \|u_n - u_m\|^2 &\leq a(u_n - u_m, u_n - u_m) \\ &= 2a(u_n, u_n) + 2a(u_m, u_m) - 4a\left(\frac{1}{2}(u_n + u_m), \frac{1}{2}(u_n + u_m) \right) \\ &= 4J(u_n) + 4J(u_m) - 8J\left(\frac{1}{2}(u_n + u_m) \right) \\ &\leq 4\left(d + \frac{1}{n} \right) + 4\left(d + \frac{1}{m} \right) - 8d \\ &\leq 4\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right)\,. \end{aligned} \tag{6.33}$$

Da V Banachraum ist, gibt es ein $u \in V$ mit $u_n \to u$. Da K abgeschlossen ist, ist $u \in K$. Da J stetig ist, ist $J(u) = d$.

Sei nun a unsymmetrisch. Wir verwenden ein Fortsetzungsargument. Wir betrachten eine Schar von Bilinearformen

$$a_t(u,v) = a_0(u,v) + tb(u,v)\,, \quad t \in [0,1]\,, \tag{6.34}$$

mit

$$a_0(u,v) = \frac{1}{2}(a(u,v) + a(v,u))\,, \tag{6.35}$$

$$b(u,v) = \frac{1}{2}(a(u,v) - a(v,u))\,. \tag{6.36}$$

Es ist dann a_0 symmetrisch und $a_1 = a$. Die Bilinearformen a_t sind stetig und V-elliptisch, und (6.23) gilt für a_t mit der gleichen Konstante c_a wie für a, da $a_t(u,u) = a(u,u)$ gilt für alle $u \in V$. Da a_0 symmetrisch ist, genügt es zu nun zeigen: Falls die Variationsungleichung

$$a_\tau(u, v-u) \geq G(v-u)\,, \qquad \forall\, v \in K\,, \tag{6.37}$$

für alle $G \in V^*$ eine eindeutige Lösung $u \in K$ hat, so gilt dasselbe auch, wenn man τ durch t ersetzt mit

$$\tau \leq t \leq \tau + \frac{c_a}{2C_a}\,. \tag{6.38}$$

Wir beweisen diese Behauptung. Sei t wie in (6.38) verlangt gegeben. Nur die Existenz ist noch zu zeigen. Sei $G : V \to \mathbb{R}$ linear und stetig. Wir suchen eine Lösung $u_t \in K$ mit

$$a_t(u_t, v-u_t) \geq G(v -_t u)\,, \qquad \forall\, v \in K\,. \tag{6.39}$$

Zu diesem Zweck betrachten wir für $w \in V$ die Variationsungleichung

$$a_\tau(u, v-u) \geq F_w(v-u)\,, \qquad \forall\, v \in K\,, \tag{6.40}$$

wobei

$$F_w(v) = G(v) - (t-\tau)b(w,v)\,. \tag{6.41}$$

Sei $T : V \to K$ die Abbildung, welche jedem $w \in V$ die Lösung $u \in K$ von (6.40) zuordnet. T ist eine Kontraktion, da

$$\begin{aligned}\|Tw_1 - Tw_2\| &\leq \frac{1}{c_a}\|F_{w_1} - F_{w_2}\| \leq \frac{1}{c_a}|t-\tau| \sup_{\|v\|=1} |b(w_1-w_2, v)| \\ &\leq \frac{1}{c_a}|t-\tau| C_a \|w_1 - w_2\| \leq \frac{1}{2}\|w_1 - w_2\|\,.\end{aligned} \tag{6.42}$$

Sei u_t der Fixpunkt von T (Fixpunktsatz von Banach). Dann ist $u_t \in K$, und es gilt für alle $v \in K$

$$\begin{aligned}a_t(u_t, v-u_t) &= a_\tau(u_t, v-u_t) + (t-\tau)b(u_t, v-u_t) \\ &\geq F_{u_t}(v-u_t) + (t-\tau)b(u_t, v-u_t) = G(v-u_t)\,.\end{aligned} \tag{6.43}$$

Damit ist alles bewiesen. □

Folgerung 6.8 (Satz von Lax-Milgram)
Sei V Banachraum, sei $a : V \times V \to \mathbb{R}$ eine stetige V-elliptische Bilinearform, sei $F : V \to \mathbb{R}$ linear und stetig. Dann hat die Variationsgleichung

$$a(u,v) = F(v) \qquad \forall\, v \in V\,, \tag{6.44}$$

genau eine Lösung $u \in V$.

Beweis: Wir wenden Satz 6.7 an mit $K = V$. Wie in Folgerung 6.3 folgt die Behauptung aus den Äquivalenzen

$$\begin{aligned} a(u, v-u) \geq F(v-u) \quad \forall\, v \in V &\Leftrightarrow a(u,v) \geq F(v) \quad \forall\, v \in V \\ &\Leftrightarrow a(u,v) = F(v) \quad \forall\, v \in V\,. \end{aligned} \tag{6.45}$$

□

Interpretiert man wie am Beispiel beschrieben eine lineare partielle Differentialgleichung als Eulergleichung zu einem quadratischen Minimierungsproblem, so ist damit die Form der Bilinearform a festgelegt. Will man Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung nun mit dem Satz von Lax-Milgram beweisen, so muss der Banachraum V so gewählt werden, dass a stetig und V-elliptisch ist. Das ist (bis auf Normäquivalenz) für jedes gegebene a nur auf eine Weise möglich (siehe eventuell Übung). Die Funktionenräume, die sich dabei ergeben, sind die **Sobolev-Räume**.

7 Sobolev-Räume

Für $v \in L^p(\Omega)$ kennen wir bereits die distributionelle Ableitung $\partial^\alpha v$ als Element von $\mathcal{D}'(\Omega)$. Ist $\partial^\alpha v$ eine reguläre Distribution, so wird sie auch als die **schwache α-te Ableitung** von v bezeichnet, es gilt dann

$$\int_\Omega \partial^\alpha v(x)\varphi(x)\,dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega v(x)\partial^\alpha\varphi(x)\,dx\,, \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{7.1}$$

Definition 7.1 (Sobolev-Raum)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Für $k \in \mathbb{N}$, $1 \le p \le \infty$ definieren wir

$$W^{k,p}(\Omega) = \{v : v \in L^p(\Omega),\, \partial^\alpha v \in L^p(\Omega) \text{ für alle } |\alpha| \le k\}\,. \tag{7.2}$$

□

Für $k = 0$ bedeutet (7.2)

$$W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)\,. \tag{7.3}$$

Im Gegensatz zum klassischen Differenzierbarkeitsbegriff folgt aus der schwachen Differenzierbarkeit nicht unbedingt die Stetigkeit, außer für $n = 1$. Ist etwa $\Omega = (-1,1) \subset \mathbb{R}$, so gilt (ohne Beweis) für $u \in W^{1,1}(\Omega)$

$$u(x) = u(0) + \int_0^x u'(x)\,dx\,, \quad x \in (-1,1)\,, \tag{7.4}$$

und hieraus läßt sich die Stetigkeit von u folgern. Für $n > 1$ kann es sein, dass ein $u \in W^{1,p}(\Omega)$ weder beschränkt noch stetig ist. Wir betrachten als Beispiel

$$u(x) = |x|^{-\beta}\,, \quad \beta > 0\,,\, x \neq 0\,, \tag{7.5}$$

auf $\Omega = B(0;1)$. Für die punktweise Ableitung gilt

$$\partial_i u(x) = -\beta x_i |x|^{-\beta-2}\,, \quad |\nabla u(x)| = \beta|x|^{-\beta-1}\,, \tag{7.6}$$

und

$$\int_\Omega |x|^{-(\beta+1)p}\,dx = c\int_0^1 \rho^{n-1-(\beta+1)p}\,d\rho\,, \tag{7.7}$$

mit geeignetem $c > 0$, also

$$|\nabla u|^p \in L^1(B(0;1)) \quad \Leftrightarrow \quad (\beta+1)p < n\,. \tag{7.8}$$

Wir zeigen, dass in diesem Fall die punktweise Ableitung gleich der schwachen Ableitung ist. Sei $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ beliebig, sei $\varepsilon > 0$. Es gilt

$$\int_{\Omega\setminus B(0;\varepsilon)} u(x)\partial_i\varphi(x)\,dx = -\int_{\Omega\setminus B(0;\varepsilon)} \partial_i u(x)\varphi(x)\,dx + \int_{\partial B(0;\varepsilon)} u(\xi)\varphi(\xi)\nu_i(\xi)\,dS(\xi)\,. \tag{7.9}$$

Es gilt

$$\left|\int_{\partial B(0;\varepsilon)} u\varphi\nu_i\,dS\right| \le \|\varphi\|_\infty \int_{\partial B(0;\varepsilon)} \varepsilon^{-\beta}\,dS \le \|\varphi\|_\infty c\varepsilon^{n-1-\beta}\,, \quad c > 0\,.$$

Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ zeigt nun

$$\int_\Omega \partial_i u(x)\varphi(x)\,dx = -\int_\Omega u(x)\partial_i\varphi(x)\,dx\,, \quad \text{falls } \beta < n-1. \tag{7.10}$$

Insgesamt erhalten wir: Es gilt

$$u \in W^{1,p}(\Omega) \quad \Leftrightarrow \quad \beta < \frac{n-p}{p}\,, \tag{7.11}$$

das heißt, Elemente in $W^{1,p}(\Omega)$ können Singularitäten haben, diese dürfen allerdings nicht zu stark sein.

Satz 7.2 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $1 \le p \le \infty$, dann ist $W^{k,p}(\Omega)$ ein Banachraum mit der Norm*

$$\|v\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\le k} \|\partial^\alpha v\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{|\alpha|\le k} \int_\Omega |\partial^\alpha v(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\,, \quad 1 \le p < \infty\,, \tag{7.12}$$

$$\|v\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\le k} \|\partial^\alpha v\|_\infty\,, \quad p = \infty\,. \tag{7.13}$$

Beweis: Für $p < \infty$ folgt die Gültigkeit der Dreiecksungleichung aus

$$\begin{aligned}
\|u+v\|_{W^{k,p}(\Omega)} &= \left(\sum_{|\alpha|\le k} \|\partial^\alpha u + \partial^\alpha v\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{|\alpha|\le k} (\|\partial^\alpha u\|_p + \|\partial^\alpha v\|_p)^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\le \left(\sum_{|\alpha|\le k} \|\partial^\alpha u\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{|\alpha|\le k} \|\partial^\alpha v\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} + \|v\|_{W^{k,p}(\Omega)}\,,
\end{aligned}$$

alle anderen Normeigenschaften folgen unmittelbar aus den Definitionen. Sei nun $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $W^{k,p}(\Omega)$, wegen

$$\|\partial^\alpha u_n - \partial^\alpha u_m\|_p \le \|u_n - u_m\|_{W^{k,p}(\Omega)}$$

sind $(\partial^\alpha u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolgen im $L^p(\Omega)$ für alle $|\alpha| \le k$, also gibt es $u \in L^p(\Omega)$, $u_\alpha \in L^p(\Omega)$ mit

$$u_n \to u\,, \quad \partial^\alpha u_n \to u_\alpha \tag{7.14}$$

in $L^p(\Omega)$. Sei $p < \infty$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ beliebig, dann folgt

$$\begin{aligned}
\int_\Omega u(x)\partial^\alpha\varphi(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n(x)\partial^\alpha\varphi(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \partial^\alpha u_n(x)\varphi(x)\,dx \\
&= (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u_\alpha(x)\varphi(x)\,dx\,,
\end{aligned}$$

also ist $\partial^\alpha u = u_\alpha$ für alle $|\alpha| \le k$ und damit $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Der Beweis für $p = \infty$ erfolgt analog. $\square$

Wir bauen das oberhalb von Satz 7.2 gegebene Beispiel aus. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\Omega = B(0;1)$, wir definieren

$$u_n(x) = |x - x_n|^{-\beta}\,, \quad x \in \Omega\,,\, x \neq x_n\,.$$

Ist $\beta < (n-p)/p$, so ist $u_n \in W^{1,p}(\Omega)$. Man sieht unmittelbar, dass $\|u_n\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ unabhängig von n beschränkt ist, und da $W^{1,p}(\Omega)$ ein Banachraum ist, ist auch

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} u_n \in W^{1,p}(\Omega)\,, \tag{7.15}$$

aber andererseits gilt: Wenn die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ so gewählt ist, dass sie dicht in $B(0;1)$ liegt, ist u unbeschränkt auf jeder offenen Teilmenge von $B(0;1)$.

Wir erinnern an die Standardglättungsfunktion $\eta_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und an die Regularisierung

$$v^\varepsilon = v * \eta_\varepsilon\,, \quad \varepsilon > 0\,. \tag{7.16}$$

Lemma 7.3 *Seien $\Omega, U \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $U \subset\subset \Omega$, sei $v \in W^{k,p}(\Omega)$, $p < \infty$. Dann gilt für alle ε mit $0 < \varepsilon < \operatorname{dist}(U, \partial\Omega)$, dass $v^\varepsilon \in C^\infty(U) \cap W^{k,p}(U)$, und $v^\varepsilon \to v$ in $W^{k,p}(U)$ für $\varepsilon \to 0$.*

Beweis: Sei $\varepsilon < \operatorname{dist}(U, \partial\Omega)$. Nach Lemma 2.4 gilt $v^\varepsilon \in C^\infty(U)$. Weiterhin gilt für alle $y \in U$

$$\begin{aligned}
\partial^\alpha v^\varepsilon(y) &= \int_\Omega \partial_y^\alpha \eta_\varepsilon(y-x) v(x)\,dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \partial_x^\alpha \eta_\varepsilon(y-x) v(x)\,dx \\
&= \int_\Omega \eta_\varepsilon(y-x) \partial^\alpha v(x)\,dx = (\eta_\varepsilon * \partial^\alpha v)(y)\,.
\end{aligned}$$

Da $\partial^\alpha v \in L^p(\Omega)$, folgt $\partial^\alpha v^\varepsilon \in L^p(U)$ aus Lemma 2.4, und $\partial^\alpha v^\varepsilon \to \partial^\alpha v$ in $L^p(U)$ aus Lemma 2.5. □

Satz 7.4 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, sei $v \in W^{k,p}(\Omega)$, $1 \le p < \infty$. Dann gibt es eine Folge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ mit $v_n \to v$ in $W^{k,p}(\Omega)$.*

Beweis: Wir definieren

$$U_j = \{x : x \in \Omega,\ \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{j}\}\,, \quad V_j = U_{j+3} \setminus \overline{U}_{j+1}\,, \quad j \ge 1\,, \tag{7.17}$$

sowie $V_0 = U_3$. Es gilt

$$\Omega = \bigcup_{j=0}^{\infty} V_j\,.$$

Sei $(\beta_j)_{j\ge0}$ Zerlegung der Eins auf Ω mit

$$0 \le \beta_j \le 1\,, \quad \beta_j \in \mathcal{D}(V_j)\,, \quad \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j = 1\,. \tag{7.18}$$

Da $v \in W^{k,p}(\Omega)$, gilt auch $\beta_j v \in W^{k,p}(\Omega)$ (siehe Übung) und $\operatorname{supp}(\beta_j v) \subset V_j$. Sei nun $\delta > 0$ beliebig. Wir wählen $\varepsilon_j > 0$ hinreichend klein, so dass für

$$w_j = (\beta_j v) * \eta_{\varepsilon_j}$$

gilt (Lemma 7.3, angewendet auf $\beta_j v$)

$$\|w_j - \beta_j v\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq 2^{-(j+1)}\delta \,, \tag{7.19}$$

$$\operatorname{supp}(w_j) \subset W_j := U_{j+4} \setminus \overline{U}_j \,, \quad j \geq 1 \,, \quad W_0 := U_4 \,. \tag{7.20}$$

Wir setzen

$$w = \sum_{j=0}^{\infty} w_j \,.$$

Nach Konstruktion sind auf jedem W_j nur endlich viele Summanden von 0 verschieden, also ist $w \in C^\infty(\Omega)$, da jedes $w_j \in C^\infty(\Omega)$ nach Lemma 7.3. Es folgt nun

$$\|w - v\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left\| \sum_{j=0}^{\infty} w_j - \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j v \right\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq \sum_{j=0}^{\infty} \|w_j - \beta_j v\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq \delta \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-(j+1)} = \delta \,.$$

Da $\delta > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung. □

Definition 7.5 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $1 \leq p < \infty$, $k \in \mathbb{N}$. Wir definieren $W_0^{k,p}(\Omega) \subset W^{k,p}(\Omega)$ durch*

$$W_0^{k,p}(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)} \,, \tag{7.21}$$

wobei der Abschluss in der Norm von $W^{k,p}(\Omega)$ gebildet wird. □

$W_0^{k,p}(\Omega)$ ist ein abgeschlossener Unterraum von $W^{k,p}(\Omega)$ und damit ebenfalls ein Banachraum (mit der Norm von $W^{k,p}(\Omega)$), siehe Funktionalanalysis. $W_0^{k,p}(\Omega)$ stellt einen Funktionenraum dar, dessen Elemente auf $\partial\Omega$ in einem "schwachen" Sinn verschwinden. Es ist nämlich zunächst nicht klar, ob für ein allgemeines $v \in W^{k,p}(\Omega)$ die Aussage "$v = 0$ auf $\partial\Omega$" Sinn macht, da v nur bis auf eine Nullmenge im $\mathbb{R}^n$ definiert ist, aber $\partial\Omega$ normalerweise eine Nullmenge ist.

Definition 7.6 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Für $k \in \mathbb{N}$ definieren wir*

$$H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega) \,, \quad H_0^k(\Omega) = W_0^{k,2}(\Omega) \,. \tag{7.22}$$

□

Satz 7.7 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $k \in \mathbb{N}$. Dann sind $H^k(\Omega)$ und $H_0^k(\Omega)$ Hilberträume mit dem Skalarprodukt*

$$\langle u, v \rangle_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \langle \partial^\alpha u, \partial^\alpha v \rangle_{L^2(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega \partial^\alpha u(x) \cdot \partial^\alpha v(x) \, dx \,, \tag{7.23}$$

und es gilt

$$\|v\|_{W^{k,2}(\Omega)} = \sqrt{\langle v, v \rangle_{H^k(\Omega)}} \,, \quad v \in H^k(\Omega) \,. \tag{7.24}$$

Beweis: Die Eigenschaften des Skalarprodukts folgen unmittelbar aus den entsprechenden Eigenschaften des Skalarprodukts im $L^2(\Omega)$. Offensichtlich gilt (7.24), und nach Satz 7.2 ist $H^k(\Omega)$ vollständig. $\square$

Satz 7.8 (Ungleichung von Poincaré und Friedrichs)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\Omega \subset [-R, R]^n$. Dann gilt für jedes $v \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_\Omega |v(x)|^2 \, dx \leq 4R^2 \int_\Omega |\partial_j v(x)|^2 \, dx \,, \quad 1 \leq j \leq n \,, \tag{7.25}$$

also auch

$$\int_\Omega |v(x)|^2 \, dx \leq 4R^2 \int_\Omega |\nabla v(x)|^2 \, dx \,. \tag{7.26}$$

Beweis: Sei zunächst $v \in C_0^\infty(\Omega)$. Wir setzen v auf $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ durch 0 fort, dann ist $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Sei $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$. Dann gilt

$$v(x) = \underbrace{v(-R, x_2, \dots, x_n)}_{=0} + \int_{-R}^{x_1} \partial_1 v(t, x_2, \dots, x_n) \, dt \,,$$

also (Schwarzsche Ungleichung)

$$\begin{aligned} |v(x)|^2 &= \left(\int_{-R}^{x_1} 1 \cdot \partial_1 v(t, x_2, \dots, x_n) \, dt \right)^2 \leq \int_{-R}^{x_1} 1^2 \, dt \cdot \int_{-R}^{x_1} (\partial_1 v(t, x_2, \dots, x_n))^2 \, dt \\ &\leq 2R \int_{-R}^{R} (\partial_1 v(t, x_2, \dots, x_n))^2 \, dt \,, \end{aligned}$$

also, da die rechte Seite nicht von x_1 abhängt,

$$\int_{-R}^{R} |v(x)|^2 \, dx_1 \leq 4R^2 \int_{-R}^{R} (\partial_1 v(t, x_2, \dots, x_n))^2 \, dt \,. \tag{7.27}$$

Integration über die anderen Koordinaten $x_2, \dots, x_n$ ergibt

$$\int_\Omega |v(x)|^2 \, dx \leq 4R^2 \int_\Omega (\partial_1 v(x))^2 \, dx \,,$$

Vertauschen der Koordinaten liefert (7.25) für beliebiges j. Sei $v \in H_0^1(\Omega)$ beliebig. Wir wählen eine Folge $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $C_0^\infty(\Omega)$ mit $v_k \to v$ in $H_0^1(\Omega)$, dann gilt (7.25) für v_k und nach Grenzübergang $k \to \infty$ auch für v. $\square$

Durch

$$|v|_{H^k(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| = k} \int_\Omega |\partial^\alpha v(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \tag{7.28}$$

wird eine Halbnorm auf $H^k(\Omega)$ definiert mit

$$|v|_{H^k(\Omega)} \leq \|v\|_{H^k(\Omega)} \,. \tag{7.29}$$

Satz 7.9 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Dann gibt es ein $C > 0$ mit*

$$\|v\|_{H^k(\Omega)} \leq C|v|_{H^k(\Omega)}\,, \quad \text{für alle } v \in H_0^k(\Omega). \tag{7.30}$$

Beweis: Sei $v \in H_0^k(\Omega)$, sei α Multiindex mit $|\alpha| = j-1$, $1 \leq j \leq k$. Dann gilt $\partial^\alpha v \in H_0^1(\Omega)$, und aus Satz 7.8 folgt

$$\|\partial^\alpha v\|_2^2 \leq 4R^2 \|\partial_1 \partial^\alpha v\|_2^2\,,$$

also

$$\sum_{|\alpha|=j-1} \|\partial^\alpha v\|_2^2 \leq 4R^2 \sum_{|\alpha|=j-1} \|\partial_1 \partial^\alpha v\|_2^2 \leq 4R^2 \sum_{|\alpha|=j} \|\partial^\alpha v\|_2^2\,,$$

also

$$|v|_{H^{j-1}(\Omega)}^2 \leq 4R^2 |v|_{H^j(\Omega)}^2\,,$$

also

$$\|v\|_{H^k(\Omega)}^2 = \sum_{j=0}^k |v|_{H^j(\Omega)}^2 \leq \sum_{j=0}^k (4R^2)^{k-j} |v|_{H^k(\Omega)}^2\,.$$

□

Folgerung 7.10 *Auf dem Banachraum $H_0^k(\Omega)$ definiert $|\cdot|_{H^k(\Omega)}$ eine zu $\|\cdot\|_{H^k(\Omega)}$ äquivalente Norm.* □

Zu einer Funktion $v : \Omega \to \mathbb{R}$ und gegebenem $h \neq 0$ betrachten wir den Differenzenquotienten

$$(D_j^h v)(x) = \frac{v(x + he_j) - v(x)}{h}\,, \quad 1 \leq j \leq n\,, \tag{7.31}$$

wobei e_j der j-te Einheitsvektor ist, und wir setzen

$$D^h v = (D_1^h v, \ldots, D_n^h v)\,. \tag{7.32}$$

Lemma 7.11 *Seien $\Omega, U \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $U \subset\subset \Omega$, sei $p \in [1, \infty)$. Dann gilt*

$$\|D_j^h v\|_{L^p(U)} \leq \|\partial_j v\|_{L^p(\Omega)}\,, \quad 1 \leq j \leq n\,, \tag{7.33}$$

für alle $v \in W^{1,p}(\Omega)$ und alle $h \neq 0$ mit $|h| < \operatorname{dist}(U, \partial\Omega)$.

Beweis: Wir können o.B.d.A. voraussetzen, dass Ω beschränkt ist. Andernfalls ersetzen wir Ω durch $\Omega \cap B(0; R)$, wobei R so groß ist, dass $U \subset\subset B(0; R)$ und (im Falle $\Omega \neq \mathbb{R}^n$) $\operatorname{dist}(U, \partial\Omega) < \operatorname{dist}(U, \partial B(0; R))$. Sei nun zunächst $v \in C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$. Für alle $x \in U$ und $|h| < \operatorname{dist}(U, \partial\Omega)$ gilt

$$|v(x + he_j) - v(x)| = \left| \int_0^1 \partial_j v(x + the_j) h \, dt \right| \leq |h| \int_0^1 |\partial_j v(x + the_j)| \, dt\,,$$

also

$$\begin{aligned} \int_U |D_j^h v(x)|^p \, dx &\leq \int_U \left(\int_0^1 |\partial_j v(x + the_j)| \, dt \right)^p dx \leq \int_U \int_0^1 |\partial_j v(x + the_j)|^p \, dt \, dx \\ &= \int_0^1 \int_U |\partial_j v(x + the_j)|^p \, dx \, dt \leq \int_0^1 \|\partial_j v\|_{L^p(\Omega)}^p \, dt = \|\partial_j v\|_{L^p(\Omega)}^p\,. \end{aligned}$$

Sei nun $v \in W^{1,p}(\Omega)$ beliebig. Wir wählen nach Satz 7.4 eine Folge $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ mit $v_k \to v$ in $W^{1,p}(\Omega)$. Für festes $h \neq 0$ gilt (7.33) für alle v_k, und wegen $D_j^h v_k \to D_j^h v$ in $W^{1,p}(U)$ und $\partial_j v_k \to \partial_j v$ in $L^p(\Omega)$ folgt (7.33) für v durch Grenzübergang $k \to \infty$. □

Wir wollen nun aus der gleichmäßigen Beschränktheit der Differenzenquotienten $D_j^h v$ auf die Existenz der schwachen Ableitung $\partial_j v$ schließen. Dazu benötigen wir ein Ergebnis der Funktionalanalysis: Ist $p \in (1, \infty)$, und ist $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine in $L^p(\Omega)$ beschränkte Folge, so gibt es eine gegen ein $f \in L^p(\Omega)$ schwach konvergente Teilfolge $(f_{k_m})_{m\in\mathbb{N}}$, das heißt,

$$\lim_{m\to\infty} \int_\Omega f_{k_m}(x)\varphi(x)\,dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx\,, \quad \text{für alle } \varphi \in L^q(\Omega), \tag{7.34}$$

wobei q der zu p duale Exponent ist,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,,$$

und es gilt weiter

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \le \liminf_{m\to\infty} \|f_{k_m}\|_{L^p(\Omega)}\,. \tag{7.35}$$

Satz 7.12 *Seien $\Omega, U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $U \subset\subset \Omega$, $1 < p < \infty$, $v \in L^p(\Omega)$, $j \in \{1, \ldots, n\}$. Es gebe ein $C > 0$ und ein $h_0 \le \operatorname{dist}(U, \partial\Omega)$ mit*

$$\|D_j^h v\|_{L^p(U)} \le C \tag{7.36}$$

für alle $h \neq 0$, $|h| < h_0$. Dann ist $\partial_j v \in L^p(U)$, und

$$\|\partial_j v\|_{L^p(U)} \le C\,. \tag{7.37}$$

Beweis: Sei $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ beliebig. Für $|h| < h_0$ gilt

$$\begin{aligned}\int_\Omega v(x) D_j^h\varphi(x)\,dx &= \int_\Omega v(x)\frac{\varphi(x+he_j)-\varphi(x)}{h}\,dx = -\int_\Omega \frac{v(x)-v(x-he_j)}{h}\varphi(x)\,dx \\ &= -\int_\Omega (D_j^{-h}v)(x)\varphi(x)\,dx\,.\end{aligned} \tag{7.38}$$

Wir wählen eine Folge $(h_m)_{m\in\mathbb{N}}$ mit $h_m \to 0$, $h_m \neq 0$, und ein $w \in L^p(U)$ mit

$$D_j^{-h_m} v \rightharpoonup w\,. \tag{7.39}$$

Da $D_j^{h_m}\varphi \to \partial_j\varphi$ gleichmäßig in Ω, folgt, falls h hinreichend klein ist,

$$\begin{aligned}\int_U v(x)\partial_j\varphi(x)\,dx &= \int_\Omega v(x)\partial_j\varphi(x)\,dx = \lim_{m\to\infty}\int_\Omega v(x)(D_j^{h_m}\varphi)(x)\,dx \\ &= \lim_{m\to\infty}\left[-\int_\Omega (D_j^{-h_m}v)(x)\varphi(x)\,dx\right] = -\int_\Omega w(x)\varphi(x)\,dx = -\int_U w(x)\varphi(x)\,dx\,,\end{aligned}$$

also $w = \partial_j v$. □

8 Elliptische Randwertprobleme

Wir wollen das Randwertprobleme

$$Lu = f\,, \quad \text{in } \Omega, \tag{8.1}$$

$$u = 0\,, \quad \text{auf } \partial\Omega. \tag{8.2}$$

lösen, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ und L ein elliptischer Differentialoperator der Form

$$\begin{aligned} Lu &= -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_j (a_{ij}(x)\partial_i u) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\partial_i u + c(x)u \\ &= -\mathrm{div}\,(A(x)^T \nabla u) + \langle b(x), \nabla u\rangle + c(x)u \end{aligned} \tag{8.3}$$

ist. Die Form (8.2) wird als **Divergenzform** bezeichnet. Die Variationsformulierung von (8.1), (8.2) erhält man durch Multiplikation von (8.1) mit einer beliebigen Testfunktion $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ und Integration. Die linke Seite von (8.1) wird nach partieller Integration zu

$$\begin{aligned} \int_\Omega Lu(x)\varphi(x)\,dx = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_i u(x)\partial_j \varphi(x)\,dx + \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\partial_i u(x)\varphi(x)\,dx \\ + \int_\Omega c(x)u(x)\varphi(x)\,dx\,. \end{aligned}$$

Die zugehörige Bilinarform ist also

$$\begin{aligned} a(u,v) &= \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_i u(x)\partial_j v(x)\,dx + \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\partial_i u(x)v(x)\,dx \\ &\quad + \int_\Omega c(x)u(x)v(x)\,dx \\ &= \int_\Omega \langle \nabla u(x), A(x)\nabla v(x)\rangle\;dx + \int_\Omega \langle b(x), \nabla u(x)\rangle\, v(x)\,dx + \int_\Omega c(x)u(x)v(x)\,dx\,. \end{aligned} \tag{8.4}$$

Sie ist symmetrisch, falls A symmetrisch ist und $b = 0$ gilt.

Voraussetzung 8.1 *Wir nehmen an, dass es ein $a_* > 0$ gibt mit*

$$\xi^T A(x)\xi = \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i a_{ij}(x)\xi_j \ge a_*|\xi|^2\,, \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^n,\ x \in \Omega. \tag{8.5}$$

*(In diesem Fall heißt der Differentialoperator **gleichmäßig elliptisch**.) Wir nehmen weiterhin an, dass $a_{ij}, b_i, c \in L^\infty(\Omega)$ für alle i, j gilt.* □

Definition 8.2 (Schwache Lösung)
Es gelte 8.1, sei $f \in L^2(\Omega)$. Ein $u \in H_0^1(\Omega)$ heißt schwache Lösung der Randwertaufgabe (8.1), (8.2), falls u Lösung der Variationsgleichung

$$a(u,v) = F(v)\,, \quad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega), \tag{8.6}$$

ist, wobei a durch (8.4) definiert ist und

$$F(v) = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx\,. \tag{8.7}$$

□

Lemma 8.3 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, es gelte 8.1. Dann wird durch (8.4) eine stetige Bilinearform auf $H^1(\Omega)$ definiert. Ist $f \in L^2(\Omega)$, so definiert (8.7) eine stetige Linearform auf $H^1(\Omega)$.*

Beweis: Mit

$$a^* = n \operatorname*{ess\,sup}_{\substack{x\in\Omega \\ 1\le i,j\le n}} |a_{ij}(x)|\,, \quad b^* = n \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |b(x)|$$

folgt für alle $u, v \in H^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &\le \int_\Omega |\langle \nabla u(x), A(x)\nabla v(x)\rangle|\, dx + \int_\Omega |\langle b(x), \nabla u(x)\rangle\, v(x)|\, dx + \int_\Omega |c(x)u(x)v(x)|\, dx \\ &\le a^* \|\nabla u\|_2\, \|\nabla v\|_2 + b^* \|\nabla u\|_2\, \|v\|_2 + \|c\|_\infty \|u\|_2\, \|v\|_2 \\ &\le (a^* + b^* + \|c\|_\infty) \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}\,. \end{aligned}$$

□

Wir betrachten den Spezialfall $b = c = 0$, also die Randwertaufgabe

$$-\sum_{i,j} \partial_j (a_{ij}(x)\partial_i u) = f\,, \quad \text{in } \Omega, \tag{8.8}$$

$$u = 0\,, \quad \text{auf } \partial\Omega. \tag{8.9}$$

Satz 8.4 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, sei $f \in L^2(\Omega)$, es gelte 8.1. Dann hat (8.8), (8.9) genau eine schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$, und es gilt*

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \le C\|F\|\,, \tag{8.10}$$

wobei die Norm $\|F\|$ des Funktionals (8.7) im Dualraum von $H_0^1(\Omega)$ genommen wird und C eine von F unabhängige Konstante ist.

Beweis: Um den Satz von Lax-Milgram 6.8 anwenden zu können, müssen wir wegen Lemma 8.3 nur noch zeigen, dass a $H_0^1(\Omega)$-elliptisch ist. Nach Voraussetzung gilt aber

$$\begin{aligned} a(v,v) = \int_\Omega \langle \nabla v(x), A(x)\nabla v(x)\rangle\ dx &\ge \int_\Omega a_* |\nabla v(x)|^2\, dx = a_* |v|^2_{H^1(\Omega)} \\ &\ge a_* C_0 \|v\|^2_{H^1(\Omega)}\,, \end{aligned}$$

wobei die letzte Ungleichung aus Satz 7.9 folgt. □

Wegen

$$|F(v)| \le \int_\Omega |f(x)v(x)|\, dx \le \|f\|_2\, \|v\|_2 \le \|f\|_2\, \|v\|_{H^1(\Omega)} \tag{8.11}$$

gilt

$$\|F\| \le \|f\|_2\,, \tag{8.12}$$

also folgt aus (8.10)

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \le C\|f\|_2\,. \tag{8.13}$$

Wir betrachten nun die allgemeine Form des Operators L aus (8.3).

Lemma 8.5 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, es gelte Voraussetzung 8.1. Dann gibt es ein $c_* > 0$, so dass für die Bilinearform (8.4) gilt*

$$a(v,v) \geq \frac{a_*}{2}\|\nabla v\|_2^2 - c_*\|v\|_2^2\,, \tag{8.14}$$

für alle $v \in H^1(\Omega)$.

Beweis: Es gilt (mit b^* wie im Beweis von Lemma 8.3)

$$\begin{aligned} a_*\|\nabla v\|_2^2 &\leq \int_\Omega \langle \nabla v(x), A(x)\nabla v(x)\rangle \, dx \\ &= a(v,v) - \int_\Omega \langle b(x), \nabla v(x)\rangle \, v(x) + c(x)v(x)^2 \, dx \\ &\leq a(v,v) + b^* \int_\Omega |\nabla v(x)|\,|v(x)| \, dx + \|c\|_\infty \|v\|_2^2\,. \end{aligned}$$

Es ist

$$\int_\Omega |\nabla v(x)|\,|v(x)| \, dx = \int_\Omega \left(\sqrt{\varepsilon}|\nabla v(x)|\right)\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}|v(x)|\right) dx \leq \frac{\varepsilon}{2}\|\nabla v\|_2^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\|v\|_2^2\,.$$

Mit $\varepsilon = a_*/b^*$ folgt

$$\frac{a_*}{2}\|\nabla v\|_2^2 \leq a(v,v) + \left(\frac{(b^*)^2}{2a_*} + \|c\|_\infty\right)\|v\|_2^2\,,$$

und hieraus die Behauptung. □

Wir betrachten nun das Randwertproblem

$$Lu + \mu u = f\,, \quad \text{in } \Omega, \tag{8.15}$$

$$u = 0\,, \quad \text{auf } \partial\Omega \tag{8.16}$$

mit dem Operator L aus (8.3).

Satz 8.6 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, es gelte 8.1, sei $f \in L^2(\Omega)$. Dann gibt es ein $\mu_0 \geq 0$, so dass für jedes $\mu > \mu_0$ das Randwertproblem (8.15), (8.16) eine eindeutige schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ hat.*

Beweis: Sei a die Bilinearform (8.4). Die zu $L + \mu I$ gehörende Bilinearform ist

$$a_\mu(u,v) = a(u,v) + \mu\,\langle u,v\rangle_{L^2(\Omega)}\ . \tag{8.17}$$

Aus Lemma 8.5 folgt

$$a_\mu(v,v) \geq \frac{a_*}{2}\|\nabla v\|_2^2 + (\mu - c_*)\|v\|_2^2\,,$$

also ist a_μ $H^1(\Omega)$-elliptisch für $\mu > \mu_0 := c_*$. Die Behauptung folgt nun aus dem Satz von Lax-Milgram 6.8. □

Die Herleitung der Variationsformulierung in (8.1) – (8.4) zeigt, dass jede klassische Lösung des Randwertproblems auch eine schwache Lösung ist (wir verzichten auf eine exakte Formulierung dieses Sachverhalts). Die Existenz- und Eindeutigkeitssätze der variationellen Theorie liefern andererseits nur schwache Lösungen. Man kann sich nun fragen, ob diese Lösungen zusätzliche Glattheitseigenschaften haben. Die Antwort liefern sogenannte **Regularitätssätze**.

Als Vorüberlegung betrachten wir das Randwertproblem

$$-\Delta u = f\,, \quad \text{in } \Omega, \tag{8.18}$$

$$u = 0\,, \quad \text{auf } \partial\Omega, \tag{8.19}$$

und nehmen an, dass u eine Lösung ist, für die die folgende Rechnung zutrifft. Aus (8.18), (8.19) folgt

$$\|\Delta u\|_2^2 = \int_\Omega \Delta u(x)^2\,dx = -\int_\Omega f(x)\Delta u(x)\,dx \le \|f\|_2\,\|\Delta u\|_2\,, \tag{8.20}$$

also

$$\|\Delta u\|_2 \le \|f\|_2\,. \tag{8.21}$$

Andererseits gilt mit partieller Integration (unter der Annahme, dass die Randwerte gleich Null sind)

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Delta u(x)^2\,dx &= \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n \partial_i^2 u(x)\cdot\partial_j^2 u(x)\,dx = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n \partial_j\partial_i u(x)\cdot\partial_i\partial_j u(x)\,dx \\ &= \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n (\partial_i\partial_j u(x))^2\,dx\,.\end{aligned}$$

Mit (8.21) folgt nun

$$|u|_{H^2(\Omega)}^2 \le \|f\|_2^2\,. \tag{8.22}$$

Wir können also hoffen, dass Lösungen u von (8.18), (8.19) in $H^2(\Omega)$ liegen, falls die rechte Seite f in $L^2(\Omega)$ liegt. Für einen Beweis dieser Vermutung müssen wir aber von der schwachen Formulierung des Randwertproblems ausgehen, und können auch nicht wie in (8.20) einfach mit $-\Delta u$ multiplizieren. Stattdessen ersetzen wir $-\Delta u$ durch eine Differenzenapproximation und leiten die Existenz der zweiten (schwachen) Ableitungen mit Satz 7.12, also aus der schwachen Kompaktheit her.

Wir betrachten die elliptische Gleichung

$$Lu = f\,, \quad \text{in } \Omega \tag{8.23}$$

mit dem Operator L in Divergenzform (8.3).

Satz 8.7 (Innere Regularität)
Seien Ω, U offen, $U \subset\subset \Omega$, sei $f \in L^2(\Omega)$. Es gelte Voraussetzung 8.1, seien außerdem $a_{ij} \in C^1(\Omega)$ für $1 \le i,j \le n$. Sei $u \in H^1(\Omega)$ eine schwache Lösung von $Lu = f$, das heißt, es gelte

$$a(u,v) = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx\,, \quad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega), \tag{8.24}$$

für die Bilinearform a aus (8.4). Dann gilt $u \in H^2(U)$, und es gilt

$$\|u\|_{H^2(U)} \le C(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)})\,, \tag{8.25}$$

wobei C nur von Ω, U und den Koeffizienten von L abhängt.

Beweis: Wir wählen $W, Y \subset \mathbb{R}^n$ offen mit

$$U \subset\subset W \subset\subset Y \subset\subset \Omega\,. \tag{8.26}$$

Sei $\zeta \in \mathcal{D}(\Omega)$ mit

$$0 \le \zeta \le 1\,, \quad \zeta|U = 1\,, \quad \zeta|(\Omega \setminus W) = 0\,. \tag{8.27}$$

Es gilt für jedes $v \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_\Omega \langle \nabla u(x), A(x)\nabla v(x)\rangle\, dx = \int_\Omega [f(x) - \langle b(x), \nabla u(x)\rangle - c(x)u(x)]v(x)\, dx\,. \tag{8.28}$$

Sei $h \neq 0$, $|h|$ hinreichend klein, sei $k \in \{1, \dots, n\}$. Wir wählen als Testfunktion

$$v = -D_k^{-h}(\zeta^2 D_k^h u)\,, \tag{8.29}$$

sozusagen als Ersatz für $-\Delta u$ in (8.20), wobei wie in (7.31)

$$(D_k^h u)(x) = \frac{1}{h}(u(x + he_k) - u(x)) \tag{8.30}$$

den $\partial_k u$ approximierenden Differenzenquotienten bezeichnet. Wir behandeln zunächst die linke Seite von (8.28). Es ist

$$\begin{aligned}\int_\Omega \langle \nabla u(x), A(x)\nabla v(x)\rangle\, dx &= -\sum_{i,j=1}^n \int_\Omega a_{ij}(x)\partial_i u(x)\partial_j \left[D_k^{-h}(\zeta^2 D_k^h u)(x)\right]\, dx \\ &= \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \left(D_k^h(a_{ij}\partial_i u)\right)(x) \cdot (\partial_j(\zeta^2 D_k^h u))(x)\, dx \\ &= A_1 + A_2\,,\end{aligned} \tag{8.31}$$

wobei wir setzen

$$A_1 = \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega a_{ij}(x + he_k)(D_k^h(\partial_i u))(x) \cdot \zeta^2(x)(D_k^h(\partial_j u))(x)\, dx\,, \tag{8.32}$$

und

$$\begin{aligned}A_2 = &\sum_{i,j=1}^n \int_\Omega a_{ij}(x + he_k)(D_k^h(\partial_i u))(x) \cdot (D_k^h u)(x) \cdot 2\zeta(x)\partial_j\zeta(x)\, dx \\ &+ \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \partial_i u \cdot D_k^h a_{ij} \cdot [\zeta^2 D_k^h(\partial_j u) + 2\zeta(\partial_j\zeta)(D_k^h u)]\, dx\,.\end{aligned} \tag{8.33}$$

Da L gleichmäßig elliptisch ist, gilt (siehe 8.1)

$$A_1 = \int_\Omega \left\langle (\zeta(x)D_k^h\nabla u)(x), A(x + he_k)\zeta(x)(D_k^h\nabla u)(x)\right\rangle\, dx \ge a_* \int_\Omega |(D_k^h\nabla u)(x)|^2\zeta^2(x)\, dx\,. \tag{8.34}$$

Wir wollen A_2 nach oben abschätzen. Da $a_{ij} \in C^1(\Omega)$, ist $a_{ij} \in C^1(\overline{U})$ und

$$|D_k^h a_{ij}(x)| \le \|\partial_k a_{ij}\|_\infty\,. \tag{8.35}$$

Die im Folgenden auftretenden Konstanten C_i hängen ab von U, W, Y, Ω, a_{ij}, b_i, c, ζ, aber nicht von f, u und h. Für A_2 gilt, da $\zeta = 0$ außerhalb von W,

$$|A_2| \le C_1 \int_W \zeta(x) \left[|D_k^h \nabla u(x)| \, |D_k^h u(x)| + |D_k^h \nabla u(x)| \, |\nabla u(x)| + |D_k^h u(x)| \, |\nabla u(x)| \right] \, dx \,. \tag{8.36}$$

Also gilt für jedes $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} |A_2| \le \varepsilon C_1 \int_\Omega \zeta^2(x) |D_k^h \nabla u(x)|^2 \, dx + \frac{C_1}{\varepsilon} \int_W |D_k^h u(x)|^2 + |\nabla u(x)|^2 \, dx \\ + C_1 \int_W |D_k^h u(x)|^2 + |\nabla u(x)|^2 \, dx \,. \end{aligned}$$

Wir setzen $\varepsilon = a_*/(2C_1)$, dann folgt

$$|A_2| \le \frac{a_*}{2} \int_\Omega \zeta^2(x) |D_k^h \nabla u(x)|^2 \, dx + C_2 \int_W |D_k^h u(x)|^2 + |\nabla u(x)|^2 \, dx \,. \tag{8.37}$$

Nach Lemma 7.11 gilt

$$\int_W |D_k^h u(x)|^2 \, dx \le \int_Y |\nabla u(x)|^2 \, dx \,. \tag{8.38}$$

Insgesamt ergibt sich für die linke Seite von (8.28)

$$\int_\Omega \langle \nabla u(x), A(x) \nabla v(x) \rangle \; dx \ge \frac{a_*}{2} \int_\Omega \zeta^2(x) |D_k^h \nabla u(x)|^2 \, dx - C_3 \int_Y |\nabla u(x)|^2 \, dx \,. \tag{8.39}$$

Wir betrachten nun die rechte Seite von (8.28) und bezeichnen sie mit B. Es gilt, da $v = 0$ außerhalb von Y,

$$|B| \le C_4 \int_Y (|f| + |\nabla u| + |u|) |v| \, dx \,, \tag{8.40}$$

und wiederum aus Lemma 7.11 folgt, da $\zeta = 0$ außerhalb von W,

$$\begin{aligned} \int_Y |v|^2 \, dx &= \int_W |D_k^{-h} (\zeta^2 D_k^h u)|^2 \, dx \le \int_\Omega |\nabla (\zeta^2 D_k^h u)|^2 \, dx \\ &= \int_W \zeta^4 |D_k^h \nabla u|^2 + 2\zeta^2 |\nabla \zeta|^2 |D_k^h u|^2 \, dx \\ &\le \int_W \zeta^2 |D_k^h \nabla u|^2 \, dx + C_5 \int_Y |\nabla u|^2 \, dx \,. \end{aligned}$$

Es folgt weiter

$$|B| \le \varepsilon \int_\Omega \zeta^2 |D_k^h \nabla u|^2 \, dx + \frac{C_6}{\varepsilon} \int_Y f^2 + |\nabla u|^2 + u^2 \, dx + C_5 \int_Y |\nabla u|^2 \, dx \,, \tag{8.41}$$

und mit $\varepsilon = a_*/4$

$$|B| \le \frac{a_*}{4} \int_\Omega \zeta^2 |D_k^h \nabla u|^2 \, dx + C_7 \int_Y f^2 + |\nabla u|^2 + u^2 \, dx \,. \tag{8.42}$$

Insgesamt ergibt sich also aus (8.28) die Abschätzung

$$\frac{a_*}{4} \int_U |D_k^h \nabla u|^2 \, dx \le \frac{a_*}{4} \int_\Omega \zeta^2 |D_k^h \nabla u|^2 \, dx \le C_8 \int_Y f^2 + |\nabla u|^2 + u^2 \, dx \,. \tag{8.43}$$

Aus Satz 7.12 folgt nun, da C_8 von h unabhängig ist

$$\partial_k \nabla u \in L^2(U)\,, \quad \|\partial_k \nabla u\|^2_{L^2(U)} \le C_9 \int_Y f^2 + |\nabla u|^2 + u^2 \, dx\,, \tag{8.44}$$

und damit $u \in H^2(U)$, da k beliebig war. Wir wollen nun noch

$$\int_Y |\nabla u|^2 \, dx$$

nach oben abschätzen. Sei dazu $\zeta \in \mathcal{D}(\Omega)$ mit $\zeta|Y = 1$. Wir testen die Variationsgleichung mit $v = \zeta^2 u$. Es ergibt sich wie oben (nur einfacher)

$$\begin{aligned} a_* \int_\Omega \zeta^2 |\nabla u|^2 \, dx &\le \int_\Omega \left\langle \nabla u, A\zeta^2 \nabla u \right\rangle \, dx = \int_\Omega \langle \nabla u, A\nabla v\rangle \, dx - \int_\Omega \langle \nabla u, 2Au\zeta\nabla\zeta\rangle \, dx \\ &\le C_{10} \int_\Omega (|f| + |\nabla u| + |u|)|u|\zeta \, dx \\ &\le \frac{a_*}{2} \int_\Omega \zeta^2 |\nabla u|^2 \, dx + C_{11} \int_\Omega f^2 + u^2 \, dx\,, \end{aligned}$$

also

$$\int_Y |\nabla u|^2 \, dx \le C_{12} \int_\Omega f^2 + u^2 \, dx\,. \tag{8.45}$$

Kombinieren wir (8.44) mit (8.45), so erhalten wir

$$|u|^2_{H^2(U)} \le C_{13}(\|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{L^2(\Omega)})$$

und nun, wiederum wegen (8.45), die Behauptung. □

Satz 8.7 zeigt, dass im Falle $f \in L^2(\Omega)$ die Lösung u zwei Differenzierbarkeitsordnungen mehr als die rechte Seite f besitzt. Diese Aussage bleibt auch im allgemeineren Fall $f \in H^k(\Omega)$ richtig.

Satz 8.8 *Es liege die Situation von Satz 8.7 vor, es gelte für ein $k \in \mathbb{N}$ außerdem $a_{ij}, b_i, c \in C^{k+1}(\Omega)$ sowie $f \in H^k(\Omega)$. Dann gilt $u \in H^{k+2}(U)$ und*

$$\|u\|_{H^{k+2}(U)} \le C(\|f\|_{H^k(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)})\,, \tag{8.46}$$

wobei C nur von k, Ω, U und den Koeffizienten von L abhängt.

Beweis: Der Beweis wird mit Induktion über k geführt, wobei Satz 8.7 sowohl den Induktionsanfang $k = 0$ liefert als auch das wesentliche Werkzeug im Induktionsschritt darstellt. Einzelheiten finden sich z.B. im Buch von L. Evans (Partial Differential Equations), Abschnitt 6.3. □

9 Der Spursatz

Lemma 9.1 *Es gilt $H^k(\mathbb{R}^n) = H_0^k(\mathbb{R}^n)$, das heißt, $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist dicht in $H^k(\mathbb{R}^n)$.*

Beweis: Da $C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap H^k(\mathbb{R}^n)$ dicht liegt in $H^k(\mathbb{R}^n)$, genügt es, zu jedem $v \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap H^k(\mathbb{R}^n)$ eine Folge $(v_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ zu finden mit $v_m \to v$ in $H^k(\mathbb{R}^n)$. Sei dazu $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\psi(x) = 1$ für $|x| \leq 1$ und $\psi(x) = 0$ für $|x| \geq 2$. Wir setzen

$$v_m(x) = \psi\left(\frac{x}{m}\right) v(x)\,, \tag{9.1}$$

dann gilt für alle Multiindizes α mit $|\alpha| \leq k$

$$|\partial^\alpha(v - v_m)(x)| = \left|\partial^\alpha\left((1 - \psi(\frac{x}{m}))v(x)\right)\right| \quad \begin{cases} \leq C\sum_{|\beta|\leq|\alpha|} |\partial^\beta v(x)|\,, & |x| > m\,, \\ = 0\,, & |x| \leq m\,, \end{cases}$$

wobei C von m unabhängig ist. Es folgt

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha(v - v_m)(x)|^2\,dx \leq C \sum_{|\beta|\leq|\alpha|} \int_{|x|>m} |\partial^\beta v(x)|^2\,dx \to 0$$

für $m \to \infty$, da $\partial^\beta v \in L^2(\mathbb{R}^n)$ für alle $|\beta| \leq k$. □

Lemma 9.2 *Zu jedem $k \in \mathbb{N}$ gibt es ein $C_k > 0$ mit*

$$\frac{1}{C_k}(1 + |\xi|^2)^k \leq \sum_{|\alpha|\leq k} \xi^{2\alpha} \leq C_k(1 + |\xi|^2)^k\,, \quad \textit{für alle } \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{9.2}$$

Beweis: Übung. □

Satz 9.3 (Fouriernorm)
Durch

$$\langle u, v\rangle_{k,\mathcal{F}} = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^k \hat{u}(\xi)\overline{\hat{v}(\xi)}\,d\xi \tag{9.3}$$

wird ein Skalarprodukt auf $H^k(\mathbb{R}^n)$ definiert. Die zugehörige Norm

$$\|v\|_{k,\mathcal{F}}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^k |\hat{v}(\xi)|^2\,d\xi \tag{9.4}$$

heißt Fouriernorm und ist äquivalent zur Sobolevnorm $\|\cdot\|_{H^k(\mathbb{R}^n)}$.

Beweis: Für $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} |v(x)|^2\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{v}(\xi)|^2\,d\xi\,, \tag{9.5}$$

also

$$\begin{aligned} \|v\|_{H^k(\mathbb{R}^n)}^2 &= \sum_{|\alpha|\leq k} \int_{\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha v(x)|^2\,dx = \sum_{|\alpha|\leq k} \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\partial^\alpha v}(\xi)|^2\,d\xi \\ &= \sum_{|\alpha|\leq k} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi^\alpha \hat{v}(\xi)|^2\,d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{v}(\xi)|^2 \sum_{|\alpha|\leq k} \xi^{2\alpha}\,d\xi\,. \end{aligned}$$

Aus Lemma 9.2 folgt

$$\frac{1}{C_k}\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^k|\hat{v}(\xi)|^2\,d\xi \le \|v\|_{H^k(\mathbb{R}^n)} \le C_k\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^k|\hat{v}(\xi)|^2\,d\xi\,. \tag{9.6}$$

Da $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ dicht ist in $H^k(\mathbb{R}^n)$ nach Lemma 9.1, gilt (9.6) auch für $v \in H^k(\mathbb{R}^n)$. Aus der Hölderschen Ungleichung folgt nun, dass das Integral in (9.3) endlich ist für $u, v \in H^k(\mathbb{R}^n)$. Die Skalarprodukteigenschaften sind klar. Aus (9.6) folgt weiterhin die Äquivalenz der beiden Normen. □

Satz 9.4 (Nichtganzzahlige Fouriernorm)
Sei $s \ge 0$. Dann wird durch

$$\langle u,v\rangle_{s,\mathcal{F}} = \int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^s\hat{u}(\xi)\overline{\hat{v}(\xi)}\,d\xi\,, \tag{9.7}$$

$$\|v\|_{s,\mathcal{F}} = \sqrt{\langle v,v\rangle_{s,\mathcal{F}}}\,, \tag{9.8}$$

ein Skalarprodukt auf dem Raum

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{v : v \in L^2(\mathbb{R}^n),\ \|v\|_{s,\mathcal{F}} < \infty\} \tag{9.9}$$

definiert, wodurch $H^s(\mathbb{R}^n)$ ein Hilbertraum wird. Weiterhin liegt $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ dicht in $H^s(\mathbb{R}^n)$.

Beweis: Wir betrachten $X = L^2(\mathbb{R}^n;\mu)$ mit dem Maß

$$\mu = f\lambda\,,\quad f(\xi) = (1+|\xi|^2)^2\,.$$

X ist ein Hilbertraum. Die Fouriertransformation

$$\mathcal{F} : H^s(\mathbb{R}^n) \to X$$

liefert wegen

$$\langle u,v\rangle_{s,\mathcal{F}} = \langle \mathcal{F}u, \mathcal{F}v\rangle_X$$

einen Hilbertraumisomorphismus. Die Dichtheit von $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ wird z.B. in Wloka, Partielle Differentialgleichungen, §5 bewiesen. □

Lemma 9.5 *Für $0 \le s \le t$ gilt*

$$H^t(\mathbb{R}^n) \subset H^s(\mathbb{R}^n)\,, \tag{9.10}$$

und die Einbettung $j : H^t(\mathbb{R}^n) \to H^s(\mathbb{R}^n)$ ist stetig.

Beweis: Aus $(1+|\xi|^2)^s \le (1+|\xi|^2)^t$ folgt $\|v\|_{s,\mathcal{F}} \le \|v\|_{t,\mathcal{F}}$. □

Will man mit variationellen Methoden Randwertprobleme behandeln, bei denen die vorgegebenene Randwerte nicht identisch Null sind, so stellt sich das Problem, ob Funktionen in einem Sobolevraum über einem Gebiet Ω sinnvoll auf den Rand $\partial\Omega$ restringiert werden können. (Da Sobolevräume als Teilräume von L^p definiert sind, sind deren Elemente auf Nullmengen beliebig abänderbar, so dass eine Aussage "$u = g$ auf $\partial\Omega$" zunächst keinen

Sinn macht.) Die einfachste Situation, in der man die Eigenschaften der Restriktion (oder **Spur**) studieren kann, liegt vor, wenn wir eine Funktion in $H^s(\mathbb{R}^n)$ auf die Hyperebene $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ restringieren.

Wir wollen einen **Spuroperator** γ auf $H^s(\mathbb{R}^n)$ definieren mit

$$\gamma v : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}\,, \quad (\gamma v)(x') = v(x', 0)\,, \quad x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}\,, \tag{9.11}$$

für alle hinreichend glatten Funktionen (also jedenfalls alle Testfunktionen).

Satz 9.6 (Spursatz)
Sei $s \in \mathbb{R}$, $s > \frac{1}{2}$. Dann gibt es genau eine lineare stetige Abbildung

$$\gamma : H^s(\mathbb{R}^n) \to H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1}) \tag{9.12}$$

so dass (9.11) gilt für alle $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Beweis: Es genügt zu zeigen, dass es ein $C > 0$ gibt mit

$$\|\gamma\varphi\|_{H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} \le C\|\varphi\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}\,, \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \tag{9.13}$$

da dann γ auf der dichten Teilmenge $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ von $H^s(\mathbb{R}^n)$ linear und stetig ist und sich daher nach einem Satz der Funktionalanalysis eindeutig zu einer auf ganz $H^s(\mathbb{R}^n)$ definierten linearen stetigen Abbildung fortsetzen lässt. Sei also $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Wir setzen

$$g(x') = \varphi(x', 0)\,, \quad x' \in \mathbb{R}^{n-1}\,. \tag{9.14}$$

Für festes $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ setzen wir

$$\psi(x_n) = \varphi(x', x_n)\,, \quad x_n \in \mathbb{R}\,, \tag{9.15}$$

dann gilt (Fouriertransformation in $\mathbb{R}$)

$$\hat{\psi}(\xi_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x', x_n) e^{-ix_n\xi_n}\, dx_n\,, \tag{9.16}$$

also

$$\begin{aligned} g(x') = \varphi(x', 0) = \psi(0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{\psi}(\xi_n) e^{i0\xi_n}\, d\xi_n \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x', x_n) e^{-ix_n\xi_n}\, dx_n\, d\xi_n\,. \end{aligned} \tag{9.17}$$

Fouriertransformation im $\mathbb{R}^{n-1}$ ergibt

$$\begin{aligned} \hat{g}(\xi') &= (2\pi)^{-\frac{n-1}{2}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g(x') e^{-i\langle x', \xi'\rangle}\, dx' \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \varphi(x', x_n) e^{-ix_n\xi_n} e^{-i\langle x', \xi'\rangle}\, dx'\, dx_n\, d\xi_n \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(\xi', \xi_n)\, d\xi_n\,, \end{aligned} \tag{9.18}$$

wobei die Fouriertransformation in der letzten Zeile im $\mathbb{R}^n$ genommen wird. Es geht weiter mit

$$\begin{aligned}
\|g\|^2_{s-\frac{1}{2},\mathcal{F}} &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1+|\xi'|^2)^{s-\frac{1}{2}} |\hat{g}(\xi')|^2 \, d\xi' = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1+|\xi'|^2)^{s-\frac{1}{2}} \left| \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(\xi', \xi_n) \, d\xi_n \right|^2 d\xi' \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1+|\xi'|^2)^{s-\frac{1}{2}} \left| \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(\xi', \xi_n)(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} (1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}} \, d\xi_n \right|^2 d\xi' \\
&\le \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1+|\xi'|^2)^{s-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} |\hat{\varphi}(\xi', \xi_n)|^2 (1+|\xi|^2)^s \, d\xi_n \cdot \int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)^{-s} \, d\xi_n \, d\xi' \, .
\end{aligned}$$

Nun gilt für $s > \frac{1}{2}$

$$\int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)^{-s} \, d\xi_n = \pi (1+|\xi'|^2)^{-s+\frac{1}{2}} \, ,$$

also folgt

$$\|g\|^2_{s-\frac{1}{2},\mathcal{F}} \le \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} |\hat{\varphi}(\xi', \xi_n)|^2 (1+|\xi|^2)^s \, d\xi_n \, d\xi' = \frac{1}{2} \|\varphi\|^2_{s,\mathcal{F}} \, .$$

□

Satz 9.6 besagt, dass man durch Restriktion pro Dimension eine halbe (verallgemeinerte) Differenzierbarkeitsordnung verliert. Durch Restriktion einer Funktion in $H^k(\mathbb{R}^n)$ auf den $\mathbb{R}^{n-2}$ erhält man also eine Funktion in $H^{k-1}(\mathbb{R}^{n-2})$. Im Kontext von Randwertproblemen genügt oft die folgende schwächere Aussage.

Folgerung 9.7 *Sei $k \in \mathbb{N}$, $k \ge 1$. Dann ist der Spuroperator $\gamma : H^k(\mathbb{R}^n) \to H^{k-1}(\mathbb{R}^{n-1})$ wohldefiniert, linear und stetig.*

Beweis: Folgt direkt aus Satz 9.6 und Lemma 9.5, letzteres angewendet mit $s = k-1$, $t = k - \frac{1}{2}$. □

In der variationellen Formulierung elliptischer Randwertprobleme tauchen oft Randintegrale auf. Wir betrachten etwa

$$-\Delta u = f \, , \quad \text{in } \Omega, \tag{9.19}$$

$$\partial_\nu u = g \, , \quad \text{auf } \partial\Omega. \tag{9.20}$$

Der Variationsansatz mit $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ führt auf

$$\int_\Omega f(x)\varphi(x) \, dx = \int_\Omega -\Delta u(x)\varphi(x) \, dx = \int_\Omega \langle \nabla u(x), \nabla\varphi(x) \rangle \, dx - \int_{\partial\Omega} \partial_\nu u(y)\varphi(y) \, dS(y) \tag{9.21}$$

$$= \int_\Omega \langle \nabla u(x), \nabla\varphi(x) \rangle \, dx - \int_{\partial\Omega} g(y)\varphi(y) \, dS(y) \, . \tag{9.22}$$

Das Randintegral in (9.22) macht jedenfalls dann Sinn, wenn $\partial\Omega$ ein C^1-Rand ist und $g, \varphi \in L^2(\partial\Omega)$ gilt. Wir setzen

$$L^p(\partial\Omega) = \{v : |v|^p \text{ integrierbar auf } \partial\Omega\} \tag{9.23}$$

$$\|v\|_{L^p(\partial\Omega)} = \left(\int_{\partial\Omega} |v(y)|^p \, dS(y) \right)^{\frac{1}{p}} , \tag{9.24}$$

wobei das Integral als Oberflächenintegral zu verstehen ist. Wie der $L^p(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, ist $L^p(\partial\Omega)$ ein Banachraum für $1 \le p \le \infty$ und ein Hilbertraum für $p = 2$. Wir erinnern an die Konstruktion des Oberflächenintegrals: $\partial\Omega$ wird vermittels "Karten" zerlegt und das Integral über jede einzelne Karte zurückgeführt auf ein (Volumen-)Integral im $\mathbb{R}^{n-1}$. Durch ein analoges Vorgehen lassen sich auch die Sobolevräume $W^{k,p}(\partial\Omega)$ und $H^s(\partial\Omega)$ konstruieren. In einem weiteren Schritt läßt sich der Spursatz übertragen.

Satz 9.8 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen mit C^m-Rand, sei $\frac{1}{2} < s \le m$. Dann ist der Spuroperator $\gamma : H^s(\Omega) \to H^{s-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ wohldefiniert, linear und stetig.* □

Folgerung 9.9 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen mit C^1-Rand. Dann ist der Spuroperator $\gamma : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ wohldefiniert, linear und stetig.* □

Für die Darstellung dieser Sachverhalte und die Beweise verweisen wir auf Wloka, Partielle Differentialgleichungen, §4 und §8.

Setzt man den Rand als C^1 voraus, wird dadurch der Fall ausgeschlossen, dass Ω ein Polyeder ist, also z.B. der Fall, dass Ω ein Würfel ist. Dieser Fall läßt sich aber mitbehandeln, wenn man Lipschitz-Karten zulässt (siehe ebenfalls das Buch von Wloka).

Wir betrachten nun das Randwertproblem

$$-\Delta u + \mu u = f\,, \quad \text{in } \Omega, \tag{9.25}$$

$$\partial_\nu u = g\,, \quad \text{auf } \partial\Omega. \tag{9.26}$$

Die Randbedingung (9.26) heißt **Neumann-Randbedingung** oder Neumann-Bedingung. Die Variationsformulierung dieses Randwertproblems lautet gemäß der Rechnung in (9.21), (9.22): Wir suchen $u \in H^1(\Omega)$ mit

$$a(u,v) = F(v)\,, \quad \text{für alle } v \in H^1(\Omega), \tag{9.27}$$

wobei

$$a(u,v) = \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v\rangle + \mu uv\,dx\,, \quad F(v) = \int_\Omega fv\,dx + \int_{\partial\Omega} gv\,dS\,. \tag{9.28}$$

Das letzte Integral in (9.28) ist aufzufassen als

$$\int_{\partial\Omega} g \cdot \gamma(v)\,dS\,.$$

Satz 9.10 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und habe einen C^1-Rand, sei $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\partial\Omega)$, es gelte $\mu > 0$. Dann hat das Randwertproblem (9.25), (9.26) genau eine schwache Lösung (im Sinne von (9.27)) $u \in H^1(\Omega)$, und es gilt*

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \le C(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega)})\,, \tag{9.29}$$

mit einer von f und g unabhängigen Konstante $C > 0$.

Beweis: Wegen
$$a(v,v) \geq \min\{1,\mu\}\|v\|^2_{H^1(\Omega)}$$
ist die nach Lemma 8.3 stetige Bilinearform a auch $H^1(\Omega)$-elliptisch. Nach Folgerung 9.9 gilt

$$|F(v)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\,\|v\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega)}\,\|\gamma v\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq (\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega)}\,\|\gamma\|)\|v\|_{H^1(\Omega)}\,,$$

also ist F linear und stetig. Die Behauptung folgt nun aus dem Satz von Lax-Milgram. □

Im Falle $g = 0$ nennt man die Randbedingung "$\partial_\nu u = 0$ auf $\partial\Omega$" eine **natürliche Randbedingung**. Sie stellt sich sozusagen von alleine ein, wenn wir das quadratische Funktional

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - \int_\Omega fv\,dx\,, \tag{9.30}$$

mit $a(v,v) = \int_\Omega |\nabla v|^2\,dx$ auf $H^1(\Omega)$ minimieren. Im Gegensatz dazu wird die Dirichlet-Bedingung "$u = 0$ auf $\partial\Omega$" durch geeignete Wahl eines Unterraums (nämlich $H^1_0(\Omega)$) von $H^1(\Omega)$ "erzwungen", die Dirichlet-Bedingung wird daher auch als eine Zwangsrandbedingung bezeichnet.

Wir beantworten nun die Frage, welche natürliche Randbedingung entsteht, wenn wir in (9.30) die in Kapitel 8 betrachtete Bilinearform

$$a(u,v) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\partial_i u(x)\partial_j v(x)\,dx + \int_\Omega c(x)u(x)v(x)\,dx \tag{9.31}$$

auf $H^1(\Omega)$ minimieren, wobei A als symmetrisch vorausgesetzt ist. Sind die beteiligten Funktionen hinreichend glatt, so gilt

$$\int_\Omega a_{ij}\partial_i u\partial_j v\,dx = -\int_\Omega \partial_j(a_{ij}\partial_i u)\cdot v\,dx + \int_{\partial\Omega} a_{ij}\partial_i u\cdot v\nu_j dS\,, \tag{9.32}$$

also
$$a(u,v) = \int_\Omega (Lu)(x)v(x)\,dx + \int_{\partial\Omega}(Bu)(y)v(y)\,dS(y)\,, \tag{9.33}$$

mit
$$Lu = -\mathrm{div}\,(A^T\nabla u) + cu \tag{9.34}$$

wie in (8.3) und
$$(Bu)(y) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(y)(\partial_i u)(y)\nu_j(y)\,,\quad y\in\partial\Omega\,. \tag{9.35}$$

Wir betrachten nun wieder die Variationsformulierung

$$a(u,v) = F(v) = \int_\Omega fv\,dx + \int_{\partial\Omega} gv\,dS\,. \tag{9.36}$$

Es folgt
$$\int_\Omega (Lu)(x)v(x)\,dx = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx\,,\quad \text{für alle } v\in C_0^\infty(\Omega), \tag{9.37}$$

da für solche v die Randintegrale verschwinden, also

$$Lu = f\,, \quad \text{in } \Omega. \tag{9.38}$$

Setzen wir (9.38) in (9.36) ein, so folgt weiter

$$\int_{\partial\Omega} (Bu)(y)v(y)\,dS(y) = \int_{\partial\Omega} g(y)v(y)\,dS(y)\,, \tag{9.39}$$

für alle $v \in H^1(\Omega)$, und daraus, da das Bild des Spuroperators γ in $L^2(\partial\Omega)$ dicht ist (was wir nicht bewiesen haben),

$$Bu = g\,, \quad \text{auf } \partial\Omega. \tag{9.40}$$

Die natürliche Randbedingung zur Bilinearform a aus (9.30) ist also

$$Bu = 0 \tag{9.41}$$

mit B aus (9.35).

Die Voraussetzung $\mu > 0$ in Satz 9.10 zur Lösung von (9.25), (9.26) ist wesentlich. Wir betrachten nochmals

$$-\Delta u = f\,, \quad \text{in } \Omega, \tag{9.42}$$

$$\partial_\nu u = g\,, \quad \text{auf } \partial\Omega \tag{9.43}$$

und die zugehörige variationelle Formulierung

$$\int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx = \int_\Omega \langle \nabla u(x), \nabla\varphi(x)\rangle\;dx - \int_{\partial\Omega} g(y)\varphi(y)\,dS(y)\,. \tag{9.44}$$

Sei u eine Lösung von (9.42), (9.43). Sie ist nicht eindeutig, da auch $u+c$ eine Lösung ist für jede Konstante $c \in \mathbb{R}$. Setzen wir $\varphi = 1$ in (9.44), so erhalten wir

$$\int_\Omega f(x)\,dx + \int_{\partial\Omega} g(y)\,dS(y) = 0\,, \tag{9.45}$$

das heißt, eine Lösung kann nur existieren, wenn die Daten f und g eine zusätzliche Kompatibilitätsbedingung (nämlich (9.45)) erfüllen. Dieser Sachverhalt entspricht der Situation bei der Lösung linearer Gleichungssysteme im Endlichdimensionalen

$$Ax = b\,, \quad b \in \mathbb{R}^n\,,\, A \in \mathbb{R}^{(n,n)}\,, \tag{9.46}$$

welche beschrieben wird durch die Dimensionsformel

$$\dim(\ker A) = n - \dim(\operatorname{im} A) = \dim(\operatorname{coker} A)\,. \tag{9.47}$$

Die Verallgemeinerung ins Unendlichdimensionale wird durch die Fredholmsche Theorie geleistet, deren Hauptergebnis ist die sogenannte **Fredholmsche Alternative**.

10 Die Wellengleichung

Sei $b \in \mathbb{R}^n$. Wir suchen Lösungen "$u = u(x,t)$", $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, der **Transportgleichung**

$$\partial_t u + \langle b, \nabla u \rangle = 0\,, \tag{10.1}$$

wobei $\nabla u(x,t)$ den Gradienten bezüglich x bezeichnet. Wir betrachten die Gerade

$$s(t) = (x + tb, t)\,, \quad x \in \mathbb{R}^n\,, \quad t \in \mathbb{R}\,, \tag{10.2}$$

im $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Ist u eine C^1-Lösung von (10.1), so gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} u(s(t)) = \langle \nabla u(s(t)), b \rangle + \partial_t u(s(t)) = 0\,, \tag{10.3}$$

das heißt, u ist konstant entlang der Geraden (10.2). Insbesondere gilt

$$u(x + tb, t) = u(s(t)) = u(s(0)) = u(x,0)\,, \tag{10.4}$$

oder auch

$$u(x,t) = u(x - tb, 0)\,, \quad x \in \mathbb{R}^n\,,\ t \in \mathbb{R}\,. \tag{10.5}$$

Das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \partial_t u + \langle b, \nabla u \rangle &= 0\,, \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, & (10.6)\\ u &= g\,, \quad \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{0\}, & (10.7) \end{aligned}$$

besitzt also für gegebenes $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$ genau eine Lösung $u \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$, nämlich

$$u(x,t) = g(x - tb)\,. \tag{10.8}$$

Wir betrachten nun das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \partial_t u + \langle b, \nabla u \rangle &= f\,, \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, & (10.9)\\ u &= g\,, \quad \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{0\}, & (10.10) \end{aligned}$$

wobei $f \in C(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$, so ergibt sich entlang der Geraden (10.2)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} u(s(t)) = \langle \nabla u(s(t)), b \rangle + \partial_t u(s(t)) = f(s(t))\,, \tag{10.11}$$

also

$$u(s(t)) = u(s(0)) + \int_0^t f(s(\tau))\, d\tau \tag{10.12}$$

oder ausgeschrieben

$$u(x + tb, t) = u(x,0) + \int_0^t f(x + \tau b, \tau)\, d\tau \tag{10.13}$$

beziehungsweise

$$u(x,t) = g(x - tb) + \int_0^t f(x - (t - \tau)b, \tau)\, d\tau\,. \tag{10.14}$$

Die Lösung ergibt sich also durch Integration entlang der Geraden (10.2).

Wir betrachten nun ein Anfangswertproblem für die eindimensionale **Wellengleichung**. Gesucht ist eine Funktion u mit Werten $u(x,t)$ für $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, mit

$$\begin{aligned} \partial_{tt}u - c^2\partial_{xx}u &= 0\,, \quad \text{in } \mathbb{R}\times(0,\infty), \\ u &= g\,, \quad \text{auf } \mathbb{R}\times\{0\}, \\ \partial_t u &= h\,, \quad \text{auf } \mathbb{R}\times\{0\}. \end{aligned} \tag{10.15}$$

Hier ist $c \neq 0$ (o.B.d.A. $c > 0$) ein gegebener Koeffizient, die Funktionen $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschreiben die Anfangswerte. Wir wollen eine explizite Formel für die Lösung herleiten. Zu diesem Zweck nehmen wir an, $u : \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ sei eine Lösung von (10.15). Wir setzen

$$v = \partial_t u - c\,\partial_x u\,. \tag{10.16}$$

Dann gilt

$$\partial_t v + c\partial_x v = \partial_t(\partial_t u - c\partial_x u) + c(\partial_t u - c\partial_x u) = \partial_{tt}u - c^2\partial_{xx}u = 0\,. \tag{10.17}$$

Aus (10.5) folgt

$$v(x,t) = v(x-ct,0)\,. \tag{10.18}$$

Setzen wir $b = -c$ in (10.14), so erhalten wir

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u(x+ct,0) + \int_0^t v(x+(t-\tau)c,\tau)\,d\tau = u(x+ct,0) + \int_0^t v(x+(t-2\tau)c,0)\,d\tau \\ &= u(x+ct,0) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} v(y,0)\,dy\,. \end{aligned} \tag{10.19}$$

Aus den Anfangsbedingungen in (10.15) folgt

$$u(x+ct,0) = g(x+ct)\,, \quad v(y,0) = \partial_t u(y,0) - c\partial_x u(y,0) = h(y) - cg'(y)\,. \tag{10.20}$$

Insgesamt ergibt sich die **Formel von d'Alembert**

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(g(x+ct) + g(x-ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(y)\,dy\,. \tag{10.21}$$

Sie stellt eine explizite Lösung des Anfangswertproblems (10.15) dar. Wir erkennen, dass die Lösung im Punkt (x,t) nur von den Anfangsdaten g, h im Intervall $[x-ct, x+ct]$ abhängt (und insbesondere Null ist, wenn die Daten dort Null sind). Umgekehrt beeinflussen die Daten im Punkt $(x,0)$ die Lösung $u(x,t)$ zum Zeitpunkt $t \neq 0$ nur für x-Werte im Intervall $[x-c|t|, x+c|t|]$, ihr Effekt breitet sich also nur mit der endlichen Geschwindigkeit c aus. Diese Eigenschaft der Wellengleichung steht im Kontrast zum entsprechenden Sachverhalt bei der Diffusionsgleichung, dort hat ein Anfangswert $u(x,0)$ für beliebige $t > 0$ Einfluss auf die Lösung $u(x,t)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Satz 10.1 *Seien $g \in C^k(\mathbb{R})$, $h \in C^{k-1}(\mathbb{R})$, $k \geq 2$. Dann gibt es genau eine Lösung $u \in C^k(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ der Anfangswertaufgabe (10.15). Sie ist durch die Formel (10.21) gegeben.*

Beweis: Dass (10.21) eine Lösung von (10.15) ist, erkennt man durch Einsetzen. Die Eindeutigkeit folgt aus der Herleitung (10.16) – (10.21). □

Die Lösung u hat gemäß (10.21) die Form

$$u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct)\,. \tag{10.22}$$

Umgekehrt gilt: Sind $F, G \in C^2(\mathbb{R})$, und ist u durch (10.22) definiert, so ist u Lösung der eindimensionalen Wellengleichung.

Wir betrachten nun das Anfangsrandwertproblem auf dem rechten oberen Quadranten

$$\begin{aligned} \partial_{tt}u - c^2\partial_{xx}u &= 0\,, && \text{in } (0,\infty)\times(0,\infty), \\ u &= g\,, && \text{auf } (0,\infty)\times\{0\}, \\ \partial_t u &= h\,, && \text{auf } (0,\infty)\times\{0\}, \\ u &= 0\,, && \text{auf } \{0\}\times(0,\infty), \end{aligned} \tag{10.23}$$

wobei $g, h : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $g(0) = h(0) = 0$ (Kompatibilität mit der Randbedingung auf $x = 0$).

Eine Lösung erhält man aus der Lösung des Anfangswertproblems (10.15) auf der oberen Halbebene, indem man die Anfangsdaten g, h geeignet auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzt, nämlich durch

$$g(x) = -g(-x)\,, \quad h(x) = -h(-x)\,, \quad x \le 0\,. \tag{10.24}$$

Die Lösung der zugehörigen Anfangswertaufgabe (10.15),

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(g(x+ct) + g(x-ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(y)\,dy\,. \tag{10.25}$$

erfüllt wegen (10.24) die zusätzliche Randbedingung $u(0,t) = 0$. Für $0 \le ct \le x$ stellt (10.25) bereits die Lösung von (10.23) dar, für $0 \le x \le ct$ führt Einsetzen von (10.24) in (10.25) auf

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(g(x+ct) - g(ct-x)) + \frac{1}{2c}\int_{-x+ct}^{x+ct} h(y)\,dy\,. \tag{10.26}$$

Wir betrachten nun das Anfangswertproblem für die n-dimensionale Wellengleichung. Gesucht ist eine Funktion u mit Werten $u(x,t)$ für $x \in \mathbb{R}^n$, $t \ge 0$, $n \ge 2$, mit

$$\begin{aligned} \partial_{tt}u - c^2\Delta u &= 0\,, && \text{in } \mathbb{R}^n\times(0,\infty), \\ u &= g\,, && \text{auf } \mathbb{R}^n\times\{0\}, \\ \partial_t u &= h\,, && \text{auf } \mathbb{R}^n\times\{0\}. \end{aligned} \tag{10.27}$$

Analog zum eindimensionalen Fall sind $c > 0$, $g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Der Laplace-Operator bezieht sich nur auf die x-Koordinaten. Eine explizite Lösung lässt sich hier mit der Methode des **sphärischen Mittels** konstruieren. Wir gehen aus von einer Lösung u des Anfangswertproblems und leiten für deren um $x \in \mathbb{R}^n$ zentrierten Mittelwert, nämlich

$$U(x;r,t) = \frac{1}{|\partial B_r|}\int_{\partial B(x;r)} u(\xi,t)\,dS(\xi)\,, \quad x \in \mathbb{R}^n\,, \quad r > 0\,, \tag{10.28}$$

eine partielle Differentialgleichung her, die sich ihrerseits auf die eindimensionale Wellengleichung zurückführen lässt. Dieses Vorgehen funktioniert für ungerade Werte von n. Ist n gerade, so erhält man die Lösung aus der Lösung für $n+1$ durch eine geeignete Reduktion.

Wir kürzen die Oberfläche und das Volumen der Kugeln $B(x;r)$ ab durch

$$|\partial B_r| = |\partial B(x;r)|\,, \quad |B_r| = |B(x;r)|\,, \quad x \in \mathbb{R}^n\,,\ r > 0\,.$$

Wir wollen die partiellen Ableitungen nach r des sphärischen Mittels U aus (10.28) berechnen.

Lemma 10.2 *Sei $v : K(0;1) \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt*

$$n \int_{B(0;1)} v(z)\, dz + \int_{B(0;1)} \langle \nabla v(z), z \rangle\, dz = \int_{\partial B(0;1)} v(\zeta)\, dS(\zeta)\,. \tag{10.29}$$

Beweis: Wir wenden die erste Greensche Formel

$$\int_{B(0;1)} v(z)\Delta w(z)\, dz + \int_{B(0;1)} \langle \nabla v(z), \nabla w(z) \rangle\, dz = \int_{\partial B(0;1)} v(\zeta)\partial_\nu w(\zeta)\, dS(\zeta)$$

an mit

$$w(z) = \frac{1}{2}|z|^2\,, \quad \nabla w(z) = z\,, \quad \Delta w(z) = n\,.$$

Es ist nämlich für $\zeta \in \partial B(0;1)$

$$\nu(\zeta) = \zeta\,, \quad \partial_\nu w(\zeta) = \langle \nabla w(\zeta), \nu(\zeta) \rangle = 1\,.$$

□

Sei nun $u \in C^3(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$. Im Beweis von Satz 1.5 haben wir gezeigt: Für

$$\varphi(r) = \frac{1}{|\partial B_r|} \int_{\partial B(x;r)} u(\xi,t)\, dS(\xi)$$

gilt

$$\varphi'(r) = \frac{1}{|\partial B_r|} \int_{B(x;r)} \Delta u(y,t)\, dy\,.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\partial_r U(x;r,t) &= \frac{1}{|\partial B_r|} \int_{B(x;r)} \Delta u(y,t)\, dy = \frac{r}{n} \frac{1}{|B_r|} \int_{B(x;r)} \Delta u(y,t)\, dy \\ &= \frac{r}{n} \frac{1}{|B_1|} \int_{B(0;1)} \Delta u(x+rz,t)\, dz\,. \end{aligned} \tag{10.30}$$

Wir setzen

$$f(y) = \Delta u(y,t)\,, \quad y \in \mathbb{R}^n\,, \tag{10.31}$$

und erhalten aus (10.30)

$$\begin{aligned}\partial_{rr}U(x;r,t) &= \frac{1}{n}\frac{1}{|B_1|}\int_{B(0;1)} \Delta u(x+rz,t)\,dz + \frac{r}{n}\frac{1}{|B_1|}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dr}}\int_{B(0;1)} f(x+rz)\,dz \\ &= \frac{1}{n}\frac{1}{|B_r|}\int_{B(x;r)} \Delta u(y,t)\,dy + \frac{r}{n}\frac{1}{|B_1|}\int_{B(0;1)} \langle \nabla f(x+rz), z\rangle\,dz\,. \end{aligned} \tag{10.32}$$

Wir wenden nun Lemma 10.2 an mit

$$v(z) = f(x+rz)$$

und erhalten

$$n\int_{B(0;1)} f(x+rz)\,dz + \int_{B(0;1)} r\,\langle \nabla f(x+rz), z\rangle\,dz = \int_{\partial B(0;1)} f(x+r\zeta)\,dS(\zeta)\,. \tag{10.33}$$

Wir ersetzen das letzte Integral in (10.32) durch den entsprechenden Ausdruck in (10.33) und erhalten

$$\begin{aligned}\partial_{rr}U(x;r,t) &= \frac{1}{n}\frac{1}{|B_r|}\int_{B(x;r)} \Delta u(y,t)\,dy - \frac{1}{|B_1|}\int_{B(0;1)} \Delta u(x+rz,t)\,dz \\ &\quad + \frac{1}{|\partial B_1|}\int_{\partial B(0;1)} \Delta u(x+r\zeta,t)\,dS(\zeta) \\ &= \frac{1}{|\partial B_r|}\int_{\partial B(x;r)} \Delta u(\xi,t)\,dS(\xi) + \left(\frac{1}{n}-1\right)\frac{1}{|B_r|}\int_{B(x;r)} \Delta u(y,t)\,dy\,. \end{aligned} \tag{10.34}$$

Die Formel (10.34) gilt für $r > 0$, $t > 0$ auch, wenn u nur in $C^2(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ liegt, wie man durch Approximation mit glatten Funktionen und Grenzübergang erkennt.

Wir betrachten nun ein Anfangswertproblem für die **Euler-Poisson-Darboux-Gleichung**

$$\partial_{tt}U - c^2\left(\partial_{rr}U + \frac{n-1}{r}\partial_r U\right) = 0\,, \quad \text{in } (0,\infty)\times(0,\infty), \tag{10.35}$$

$$U = G\,, \quad \text{auf } (0,\infty)\times\{0\}, \tag{10.36}$$

$$\partial_t U = H\,, \quad \text{auf } (0,\infty)\times\{0\}. \tag{10.37}$$

Hierbei sind

$$G(x;r) = \frac{1}{|\partial B_r|}\int_{B(x;r)} g(\xi)\,dS(\xi)\,, \quad H(x;r) = \frac{1}{|\partial B_r|}\int_{B(x;r)} h(\xi)\,dS(\xi)\,, \quad x\in\mathbb{R}^n\,,\ r>0\,,$$

die sphärischen Mittel der Anfangswerte aus (10.27). Die unabhängigen Variablen sind die Skalare r und t, der Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ spielt die Rolle eines Parameters. Bei (10.35) – (10.37) handelt es sich also um eine ganze Schar von Anfangswertproblemen.

Satz 10.3 *Sei $x \in \mathbb{R}^n$ beliebig, sei $m \geq 2$, seien $g, h \in C^m(\mathbb{R}^n)$, sei $u \in C^m(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ eine Lösung des Anfangswertproblems (10.27). Dann liegt die durch (10.28) definierte Funktion U in $C^m((0,\infty)\times[0,\infty))$ und löst das Anfangswertproblem (10.35)–(10.37). Es gilt außerdem für alle $t > 0$*

$$\lim_{r\downarrow 0} U(x;r,t) = u(x,t)\,, \quad \lim_{r\downarrow 0}\partial_r U(x;r,t) = 0\,, \quad \lim_{r\downarrow 0}\partial_{rr}U(x;r,t) = \frac{1}{n}\Delta u(x,t)\,. \tag{10.38}$$

Beweis: Da die gemittelten Integrale für $r \to 0$ gegen den Wert des Integranden im Mittelpunkt (x,t) konvergieren, folgt (10.38) aus den entsprechenden Formeln für U. Aus diesen Formeln folgt auch, dass U zweimal stetig differenzierbar ist, falls dasselbe für u gilt. Für $m > 2$ folgen die entsprechenden Aussagen durch Betrachten der höheren Ableitungen, worauf wir hier verzichten wollen. Wir beweisen nun die Gültigkeit der Euler-Poisson-Darboux-Gleichung. Seien $r > 0$, $t > 0$ beliebig. Aus (10.30) folgt

$$\begin{aligned} c^2 r^{n-1} \partial_r U(x;r,t) &= c^2 \frac{r^n}{n|B_r|} \int_{B(x;r)} \Delta u(y,t)\, dy = \frac{1}{n|B_1|} \int_{B(x;r)} \partial_{tt} u(y,t)\, dy \\ &= \frac{1}{n|B_1|} \int_0^r \int_{\partial B(x;\rho)} \partial_{tt} u(\xi,t)\, dS(\xi) d\rho\,, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} c^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dr}} \big(r^{n-1} \partial_r U(x;r,t) \big) &= \frac{1}{n|B_1|} \int_{\partial B(x;r)} \partial_{tt} u(\xi,t)\, dS(\xi) = \frac{r^{n-1}}{|\partial B_r|} \int_{\partial B(x;r)} \partial_{tt} u(\xi,t)\, dS(\xi) \\ &= r^{n-1} \partial_{tt} U(x;r,t)\,. \end{aligned} \tag{10.39}$$

Wegen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dr}} \big(r^{n-1} \partial_r U \big) = r^{n-1} \partial_{rr} U + (n-1) r^{n-2} \partial_r U \tag{10.40}$$

folgt (10.35) nun nach Division durch r^{n-1} aus (10.39) und (10.40). □

Die Euler-Poisson-Darboux-Gleichung kann am einfachsten im Falle $n = 3$ gelöst werden. Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty))$ eine Lösung des Anfangswertproblems (10.27), seien $g \in C^3(\mathbb{R}^3)$, $h \in C^2(\mathbb{R}^3)$. Wir betrachten die zugehörigen sphärischen Mittel U, G, H und setzen

$$\tilde{U}(x;r,t) = rU(x;r,t) = r \frac{1}{|\partial B_r|} \int_{\partial B(x;r)} u(\xi,t)\, dS(\xi)\,, \tag{10.41}$$

$$\tilde{G}(x;r) = rG(x;r)\,, \quad \tilde{H}(x;r) = rH(x;r)\,. \tag{10.42}$$

Aus (10.35) folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \partial_{tt} \tilde{U} &= \frac{1}{c^2} r \partial_{tt} U = r \left(\partial_{rr} U + \frac{2}{r} \partial_r U \right) = r \partial_{rr} U + 2 \partial_r U = \partial_r (U + r \partial_r U) \\ &= \partial_{rr} \tilde{U}\,. \end{aligned}$$

Da aus (10.38) folgt

$$\lim_{r \downarrow 0} \tilde{U}(x;r,t) = 0\,, \quad x \in \mathbb{R}^3\,,\ t > 0\,,$$

ist also $\tilde{U}$, für jedes feste $x \in \mathbb{R}^3$, eine Lösung des Anfangsrandwertproblems auf dem rechten oberen Quadranten $r > 0$, $t > 0$

$$\begin{aligned} \partial_{tt} \tilde{U} - c^2 \partial_{rr} \tilde{U} &= 0\,, \quad \text{in } (0,\infty) \times (0,\infty), \\ \tilde{U} &= \tilde{G}\,, \quad \text{auf } (0,\infty) \times \{0\}, \\ \partial_t \tilde{U} &= \tilde{H}\,, \quad \text{auf } (0,\infty) \times \{0\}, \\ \tilde{U} &= 0\,, \quad \text{auf } \{0\} \times (0,\infty). \end{aligned} \tag{10.43}$$

Diese Lösung haben wir in (10.26) berechnet, für $0 \le r \le ct$ gilt

$$\tilde{U}(x;r,t) = \frac{1}{2}(\tilde{G}(x;r+ct) - \tilde{G}(x;ct-r)) + \frac{1}{2c}\int_{-r+ct}^{r+ct} \tilde{H}(x;y)\,dy\,. \tag{10.44}$$

Durch Grenzübergang $r \to 0$ erhalten wir nun

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \lim_{r\downarrow 0} U(x;r,t) = \lim_{r\downarrow 0} \frac{\tilde{U}(x;r,t)}{r} \\ &= \lim_{r\downarrow 0}\left[\frac{\tilde{G}(x;r+ct) - \tilde{G}(x;ct-r)}{2r} + \frac{1}{2rc}\int_{-r+ct}^{r+ct} \tilde{H}(x;y)\,dy\right] \\ &= \partial_r \tilde{G}(x;ct) + \frac{1}{c}\tilde{H}(x;ct)\,. \end{aligned} \tag{10.45}$$

Nun ist

$$\partial_r \tilde{G}(x;ct) = (G + r\partial_r G)(x;r)\big|_{r=ct}\,, \tag{10.46}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} r\partial_r G(x;r) &= r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dr}}\left(\frac{1}{|\partial B_r|}\int_{\partial B(x;r)} g(\xi)\,dS(\xi)\right) = r\frac{1}{|\partial B_1|}\int_{\partial B(0;1)} \langle \nabla g(x+r\zeta), \zeta\rangle\; dS(\zeta) \\ &= \frac{1}{|\partial B_r|}\int_{\partial B(x;r)} \langle \nabla g(\xi), \xi - x\rangle\; dS(\xi)\,. \end{aligned} \tag{10.47}$$

Aus (10.45) – (10.47) folgt nun die **Formel von Kirchhoff**

$$\begin{aligned} u(x,t) &= G(x;ct) + \frac{1}{|\partial B(x;ct)|}\int_{\partial B(x;ct)} \langle \nabla g(\xi), \xi - x\rangle\; dS(\xi) + tH(x;ct) \\ &= \frac{1}{|\partial B(x;ct)|}\int_{\partial B(x;ct)} g(\xi) + \langle \nabla g(\xi), \xi - x\rangle + th(\xi)\,dS(\xi)\,. \end{aligned} \tag{10.48}$$

Satz 10.4 *Seien $g \in C^3(\mathbb{R}^3)$, $h \in C^2(\mathbb{R}^3)$, dann ist eine Lösung $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty))$ des Anfangswertproblems (10.27) für $t > 0$ gegeben durch*

$$u(x,t) = \frac{1}{|\partial B(x;ct)|}\int_{\partial B(x;ct)} g(\xi) + \langle \nabla g(\xi), \xi - x\rangle + th(\xi)\,dS(\xi)\,. \tag{10.49}$$

Beweis: Den lassen wir jetzt weg. □

Satz 10.4 zeigt, dass die Lösung u im Punkt (x,t) nur von den Anfangswerten auf der Sphäre $\partial B(x;ct)$ abhängt. Diesen Sachverhalt bezeichnet man als das **starke Huygens-Prinzip**. Satz 10.4 suggeriert ebenfalls, dass die Lösung an Regularität verlieren kann (u hat dieselbe Regularität wie ∇g). In der Tat ist das im allgemeinen auch der Fall.

Aus der Lösungsformel für den Fall $n = 3$ lässt sich eine Lösungsformel für den Fall $n = 2$ gewinnen. Sei u die gesuchte Lösung des Anfangswertproblems (10.27) für $n = 2$. Wir setzen

$$v(x', x_3, t) = u(x', t)\,, \quad x' = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\,. \tag{10.50}$$

Dann ist v Lösung eines Anfangswertproblems für $n = 3$,

$$\partial_{tt} v - c^2 \Delta v = 0\,, \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \times (0,\infty), \tag{10.51}$$

$$v(x', x_3, 0) = g(x')\,, \quad \partial_t v(x', x_3, 0) = h(x')\,. \tag{10.52}$$

Wir verwenden nun die Formel (10.45), welche ebenfalls bereits die Lösung als Funktion der sphärischen Mittel der Anfangswerte ausdrückt, und erhalten

$$u(x', t) = v(x', 0, t) = \partial_r \tilde{G}(x', 0; ct) + \frac{1}{c} \tilde{H}(x', 0; ct)\,, \tag{10.53}$$

wobei $\tilde{G}, \tilde{H}$ die zu (10.52) gehörenden sphärischen Mittel der Anfangswerte sind, also etwa

$$\tilde{G}(x', 0; r) = \frac{r}{|\partial B_r|} \int_{\partial B(x',0;r)} v(\xi', \xi_3, 0)\, dS(\xi', \xi_3) = \frac{r}{|\partial B_r|} \int_{\partial B(x',0;r)} g(\xi')\, dS(\xi', \xi_3)\,. \tag{10.54}$$

Das Oberflächenintegral wird vermittels der beiden Karten

$$\psi_\pm : B(x'; r) \to \partial B(x', 0; r)\,, \quad \psi_\pm(y') = (y', \pm\sqrt{r^2 - |y' - x'|^2})\,, \tag{10.55}$$

auf die Summe zweier Volumenintegrale über die Kugel $B(x'; r)$ im $\mathbb{R}^2$ zurückgeführt,

$$\int_{\partial B(x',0;r)} g(\xi')\, dS(\xi', \xi_3) = \sum_\pm \int_{B(x';r)} g(y') \sqrt{\gamma_\pm(y')}\, dy'\,, \tag{10.56}$$

wobei γ die Gramsche Determinante von $\psi_\pm$ ist. Entsprechend wird mit $\tilde{H}$ verfahren. Aus (10.53) ergibt sich daher eine Formel für u, welche nur die Daten g und h sowie die explizit gegebenen Funktionen $\psi_\pm$ bzw. deren Gramsche Determinanten enthält. Durch geeignete Umformungen der dort vorkommenden Differential- und Integralausdrücke (siehe etwa Evans, Abschnitt 2.4, für $c = 1$) erhalten wir die **Formel von Poisson**

$$u(x, t) = \frac{c}{2|B(x; ct)|} \int_{B(x;ct)} \frac{tg(y) + t^2 h(y) + t\,\langle \nabla g(y), y - x\rangle}{\sqrt{c^2 t^2 - |y - x|^2}}\, dy\,, \quad x \in \mathbb{R}^2\,,\ t > 0\,, \tag{10.57}$$

für die Lösung des Anfangswertproblems (10.27) für $n = 2$. Im Gegensatz zur Situation für $n = 3$ hängt die Lösung im Punkt (x, t) nunmehr von den Anfangswerten im Vollkreis $B(x; ct)$ ab, man bezeichnet diese Eigenschaft als das **schwache Huygens-Prinzip**.

Für $n > 3$ kann man analog vorgehen. Für ungerade n führt man geeigneten Funktionen $\tilde{U}, \tilde{G}, \tilde{H}$ ein, welche (10.43) lösen, für gerade n verwendet man den zu (10.50) entsprechenden Ansatz.

Wir behandeln nun ein Anfangsrandwertproblem für die Wellengleichung auf einem allgemeinen Gebiet. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Wir betrachten

$$\begin{aligned} \partial_{tt} u(x, t) - c^2 \Delta u(x, t) &= f(x, t)\,, \quad x \in \Omega\,,\ t \in (0, T)\,, \\ u(x, 0) &= g(x)\,, \quad x \in \Omega\,, \\ \partial_t u(x, 0) &= h(x)\,, \quad x \in \Omega\,, \\ u(x, t) &= r(x, t)\,, \quad x \in \partial\Omega\,,\ t \in (0, T)\,. \end{aligned} \tag{10.58}$$

Hier sind f, g, h, r gegebene Funktionen mit den entsprechenden Definitionsbereichen. Explizite Lösungsformeln kann man in einem allgemeinen Gebiet nicht erwarten. Die Existenzfrage wollen wir jetzt nicht behandeln. Für die Eindeutigkeit gibt es ein vergleichsweise einfaches Argument. Seien $u, \tilde{u}$ zwei C^2-Lösungen von (10.58). Deren Differenz

$$w = u - \tilde{u} \tag{10.59}$$

löst aufgrund der Linearität des Problems das homogene Anfangsrandwertproblem

$$\begin{aligned} \partial_{tt} w(x,t) - c^2 \Delta w(x,t) = 0\,, &\quad x \in \Omega\,,\, t \in (0,T)\,, \\ w(x,0) = 0\,, &\quad x \in \Omega\,, \\ \partial_t w(x,0) = 0\,, &\quad x \in \Omega\,, \\ w(x,t) = 0\,, &\quad x \in \partial\Omega\,,\, t \in (0,T)\,. \end{aligned} \tag{10.60}$$

Wir definieren eine Funktion E, die wir uns als Gesamtenergie der Differenz w zum Zeitpunkt t vorstellen können,

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_\Omega \partial_t w(x,t)^2 + c^2 |\nabla w(x,t)|^2 \, dx\,, \quad t \in [0,T]\,. \tag{10.61}$$

Es gilt dann

$$E'(t) = \int_\Omega \partial_t w \cdot \partial_{tt} w + c^2 \langle \nabla w, \partial_t \nabla w \rangle \; dx\,. \tag{10.62}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \int_\Omega \langle \nabla w, \partial_t \nabla w \rangle \; dx = \int_\Omega \langle \nabla w, \nabla \partial_t w \rangle \; dx &= - \int_\Omega \Delta w \cdot \partial_t w \, dx + \int_{\partial\Omega} \partial_\nu w \cdot \partial_t w dS \\ &= - \int_\Omega \Delta w \cdot \partial_t w \, dx\,, \end{aligned}$$

da $\partial_t w = 0$ auf $\partial\Omega$. Einsetzen in (10.62) liefert

$$E'(t) = \int_\Omega \partial_t w (\partial_{tt} w - c^2 \Delta w) \, dx = 0\,, \tag{10.63}$$

also ist E konstant, und sogar $E = 0$ da $E(0) = 0$. Aus (10.61) folgt nun

$$\partial_t w = 0 = \nabla w\,, \quad \text{in } \Omega \times (0,T),$$

also ist w konstant in $\Omega \times (0,T)$ und wegen der Anfangsbedingung sogar gleich Null. Damit ist die Eindeutigkeit bewiesen. Diese Methode, bei der wir durch Betrachten eines geeigneten skalaren zeitabhängigen Funktionals (welches oft als Energie interpretiert werden kann) zu Aussagen über die Lösung einer partiellen Differentialgleichung kommen, bezeichnet man als **Energiemethode**. Wir können die Energiemethode auch dazu verwenden, den Abhängigkeitsbereich der Lösung der Wellengleichung zu charakterisieren. Sei u eine Lösung der Wellengleichung

$$\partial_{tt} u - c^2 \Delta u = 0\,, \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \tag{10.64}$$

wobei wir in keiner Weise Anfangs- oder Randbedingungen festlegen. Sei (x_0, t_0) ein fest gewählter Punkt mit $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $t_0 > 0$. Wir betrachten den Kegel

$$K = \{(x,t) : 0 \le t \le t_0\,,\, |x - x_0| \le c(t_0 - t)\}\,. \tag{10.65}$$

Man kann sich K als Kegel im $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ mit der Basis $B(x_0, ct_0)$ im $\mathbb{R}^n$ (auf dem Niveau $t = 0$) und der Spitze (x_0, t_0) (in Höhe t_0 über der Basis) vorstellen.

Satz 10.5 *Sei u eine Lösung von (10.64) in $C^2(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$, es gelte*

$$u(x,0) = \partial_t u(x,0) = 0\,, \quad \text{für alle } x \in B(x_0, ct_0). \tag{10.66}$$

Dann ist $u \equiv 0$ in K, insbesondere ist $u(x_0,t_0) = 0$.

Beweis: Wir definieren

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{B(x_0;c(t_0-t))} \partial_t u(x,t)^2 + c^2 |\nabla u(x,t)|^2 \, dx \tag{10.67}$$

und setzen im Folgenden

$$B(t) = B(x_0; c(t_0 - t))\,.$$

Wir erinnern an die Formel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \int_{B(t)} v(x) dx = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \int_0^{c(t_0-t)} \int_{\partial B(x_0;\tau)} v(\xi)\, dS(\xi)\, d\tau = -c \int_{\partial B(t)} v(\xi)\, dS(\xi)$$

und erhalten

$$\begin{aligned}
E'(t) &= \int_{B(t)} \partial_t u \cdot \partial_{tt} u + c^2 \left\langle \nabla u, \nabla \partial_t u \right\rangle \, dx - \frac{c}{2} \int_{\partial B(t)} (\partial_t u)^2 + c^2 |\nabla u|^2 \, dS \\
&= \int_{B(t)} \partial_t u (\partial_{tt} u - c^2 \Delta u) \, dx + \int_{\partial B(t)} c^2 \partial_t u \cdot \partial_\nu u \, dS - \frac{c}{2} \int_{\partial B(t)} (\partial_t u)^2 + c^2 |\nabla u|^2 \, dS \\
&= c \int_{\partial B(t)} \partial_t u \cdot c \partial_\nu u - \frac{1}{2} (\partial_t u)^2 - \frac{1}{2} c^2 |\nabla u|^2 \, dS\,.
\end{aligned}$$

Aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt

$$\partial_t u \cdot c \partial_\nu u \le |\partial_t u| \cdot |c \nabla u| \le \frac{1}{2} (\partial_t u)^2 + \frac{1}{2} c^2 |\nabla u|^2\,,$$

also gilt

$$E(t) \ge 0\,, \quad E'(t) \le 0 = E(0)\,, \quad \text{für alle } t \in (0,T),$$

und hieraus folgt $E(t) = 0$ für alle t und damit wie beim Eindeutigkeitsbeweis oben

$$u = 0 \quad \text{auf } K.$$

□

Satz 10.5 zeigt, dass zwei Lösungen der Wellengleichung auf K übereinstimmen, falls sie in $B(x_0; ct_0)$ dieselben Anfangswerte haben. Die Anfangswerte außerhalb von $B(x_0; ct_0)$ spielen daher für die Lösung in K keine Rolle. Diese Aussage erhalten wir natürlich auch aus der expliziten Lösungsformel. Die Energiemethode ist aber nicht nur einfacher, sondern auch allgemeiner, sie lässt sich auch in Situationen anwenden, für die es keine expliziten Lösungsformeln gibt.

11 Charakteristiken

Mit der **Methode der Charakteristiken** gelingt es, die Lösung einer partiellen Differentialgleichung auf die Lösung eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen zurückzuführen.

Wir betrachten die partielle Differentialgleichung

$$F(\nabla u, u, x) = 0\,. \tag{11.1}$$

Hierbei ist $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, und wir suchen Lösungen $u : \Omega \to \mathbb{R}$ mit

$$F(\nabla u(x), u(x), x) = 0\,, \quad \text{für alle } x \in \Omega. \tag{11.2}$$

Wir geben Anfangsbedingungen auf einer Menge $\Gamma \subset \overline{\Omega}$ vor,

$$u(x) = g(x)\,, \quad g : \Gamma \to \mathbb{R}\,. \tag{11.3}$$

Einige Beispiele: Die Eikonalgleichung

$$|\nabla u| = 1 \tag{11.4}$$

spielt eine Rolle in der geometrischen Optik. Bereits betrachtet haben wir die Transportgleichung

$$\partial_t u + \langle b, \nabla u\rangle = 0\,, \quad b \in \mathbb{R}^n\,. \tag{11.5}$$

Sie ist ein Spezialfall von (11.1) im $\mathbb{R}^{n+1}$, man muss allerdings darauf achten, dass die Variable x in (11.1) und (11.5) in verschiedener Bedeutung verwendet wird. In (11.5) sucht man Lösungen "$u = u(x,t)$" mit $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, während in der Interpretation (11.1) von (11.5) das Paar (x,t) zu $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ zusammengefasst wird. Dasselbe gilt für die Hamilton-Jacobi-Gleichung

$$\partial_t u + H(\nabla u) = 0\,, \quad H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\,, \tag{11.6}$$

und für die Erhaltungsgleichung (siehe Kapitel 5)

$$\partial_t u + \operatorname{div}(f(u)) = 0\,, \quad f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\,. \tag{11.7}$$

Zur Lösung von (11.1) suchen wir Kurven, so dass wir die Lösungen der partiellen Differentialgleichung als Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen "entlang der Kurven" erhalten.

Sei u eine C^2-Lösung von (11.2). Wir betrachten eine C^1-Kurve $\xi : I \to \Omega$, $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, und setzen

$$z(s) = u(\xi(s))\,, \quad p(s) = \nabla u(\xi(s))\,, \quad s \in I\,. \tag{11.8}$$

Aus der Kettenregel folgt

$$p_i'(s) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\partial_i u(\xi(s)) = \sum_{j=1}^n \partial_j \partial_i u(\xi(s))\xi_j'(s)\,. \tag{11.9}$$

Differenzieren von (11.2) liefert (wobei wir "$F = F(p, u, x)$" meinen)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx_i}} F(\nabla u(x), u(x), x) = \sum_{j=1}^{n} \partial_{p_j} F(\nabla u(x), u(x), x) \partial_i \partial_j u(x) + \partial_u F(\nabla u(x), u(x), x) \partial_i u(x) \\ + \partial_{x_i} F(\nabla u(x), u(x), x) = 0\,. \tag{11.10}$$

Wir setzen $x = \xi(s)$ und wählen die Kurve ξ so, dass

$$\xi_j'(s) = \partial_{p_j} F(\nabla u(\xi(s)), u(\xi(s)), \xi(s)) = \partial_{p_j} F(p(s), z(s), \xi(s))\,. \tag{11.11}$$

Wir setzen (11.11) in (11.9) ein, dann können wir wiederum (11.9) in (11.10) einsetzen und erhalten

$$p_i'(s) = -\partial_u F(\nabla u(\xi(s)), u(\xi(s)), \xi(s)) \partial_i u(\xi(s)) - \partial_{x_i} F(\nabla u(\xi(s)), u(\xi(s)), \xi(s))\,. \tag{11.12}$$

Differenzieren von $z(s) = u(\xi(s))$ liefert wegen (11.11)

$$z'(s) = \sum_{j=1}^{n} \partial_j u(\xi(s)) \xi_j'(s) = \sum_{j=1}^{n} p_j(s) \partial_{p_j} F(p(s), z(s), \xi(s))\,. \tag{11.13}$$

Wir erhalten insgesamt

$$\begin{aligned} p'(s) &= -\partial_u F(p(s), z(s), \xi(s)) p(s) - \nabla_x F(p(s), z(s), \xi(s)) \\ z'(s) &= \langle \nabla_p F(p(s), z(s), \xi(s)), p(s) \rangle \\ \xi'(s) &= \nabla_p F(p(s)), z(s)), \xi(s))\,, \end{aligned} \tag{11.14}$$

das heißt, die Funktion $(p, z, \xi) : I \to \mathbb{R}^{2n+1}$ löst das System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} p' &= -\partial_u F(p, z, \xi) p - \nabla_x F(p, z, \xi) \\ z' &= \langle \nabla_p F(p, z, \xi), p \rangle \\ \xi' &= \nabla_p F(p, z, \xi)\,. \end{aligned} \tag{11.15}$$

Die Funktion (p, z, ξ) heißt eine **Charakteristik** (oder **charakteristische Kurve**) der partiellen Differentialgleichung (11.1). Oft wird auch deren Projektion $\xi : I \to \Omega$ als Charakteristik bezeichnet.

Wir behandeln einige Spezialfälle und Beispiele. Zunächst betrachten wir die **lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung**

$$\langle b(x), \nabla u(x) \rangle + c(x) u(x) = d(x)\,, \tag{11.16}$$

wobei $b : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $c, d : \Omega \to \mathbb{R}$ gegebene Funktionen sind. Hier ist

$$F(p, u, x) = \langle b(x), p \rangle + c(x) u - d(x)\,, \tag{11.17}$$

also

$$\nabla_p F(p, u, x) = b(x)\,, \quad \partial_u F(p, u, x) = c(x)\,. \tag{11.18}$$

Die Differentialgleichungen für ξ und z nehmen die Form an

$$\xi'(s) = b(\xi(s)), \tag{11.19}$$
$$z'(s) = \langle b(\xi(s)), p(s) \rangle = -c(\xi(s))z(s) + d(\xi(s)), \tag{11.20}$$

wobei in (11.20) die Gültigkeit von (11.16) verwendet wurde. Das System (11.15) vereinfacht sich also erheblich: Die Gleichung für ξ kann unabhängig von z und p gelöst werden. Gelingt das, so kann die Gleichung (11.20) für z (und damit für u) unabhängig von p gelöst werden. Ein Beispiel: Auf

$$\Omega = (0, \infty) \times (0, \infty) \subset \mathbb{R}^2, \tag{11.21}$$

betrachten wir die Differentialgleichung

$$x_1 \partial_2 u - x_2 \partial_1 u = 0, \tag{11.22}$$

mit der Anfangsbedingung auf $\Gamma = (0, \infty) \times \{0\}$

$$u(r, 0) = g(r), \quad r > 0. \tag{11.23}$$

Hier ist $b(x) = (-x_2, x_1)$, also

$$\xi_1' = -\xi_2, \quad \xi_2' = \xi_1, \tag{11.24}$$

die auf Ω projizierten charakteristischen Kurven sind also Viertelkreise,

$$\xi(s) = r(\cos s, \sin s), \quad r > 0, \ s \in [0, \frac{\pi}{2}]. \tag{11.25}$$

Wegen $c = d = 0$ folgt $z' = 0$, das heißt, $s \mapsto u(\xi(s))$ ist konstant, die Lösung ist konstant entlang der charakteristischen Kurven. Ist also $(x_1, x_2) \in \Omega$, so ist

$$u(x_1, x_2) = g(r), \quad \text{wobei } r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}. \tag{11.26}$$

Die **semilineare** Differentialgleichung

$$\langle b(x), \nabla u(x) \rangle + c(x, u(x)) = 0, \tag{11.27}$$

führt auf

$$\xi'(s) = b(\xi(s)), \tag{11.28}$$
$$z'(s) = \langle b(\xi(s)), p(s) \rangle = -c(\xi(s), z(s)), \tag{11.29}$$

wieder kann die Gleichung für ξ für sich gelöst werden, aber die Gleichung für z ist keine lineare Differentialgleichung mehr. Die **quasilineare** Differentialgleichung

$$\langle b(x, u(x)), \nabla u(x) \rangle + c(x, u(x)) = 0, \tag{11.30}$$

führt auf

$$\xi'(s) = b(\xi(s), z(s)), \tag{11.31}$$
$$z'(s) = \langle b(\xi(s), z(s)), p(s) \rangle = -c(\xi(s), z(s)). \tag{11.32}$$

Hier können nun die ξ-Kurven in Ω nicht mehr unabhängig von der Lösung berechnet werden. Das hat unter anderem zur Folge, dass die ξ-Kurven sich schneiden können (was in (11.28) nicht auftreten kann, wenn b hinreichend glatt, beispielsweise lipschitzstetig ist), was wiederum zur Folge hat, dass die Lösung Unstetigkeiten entwickeln kann. Wir betrachten als Beispiel die Gleichung (mit (x,t) statt (x_1,x_2))

$$\partial_t u + \partial_x \left(\frac{u^2}{2}\right) = 0\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,\, t > 0\,, \tag{11.33}$$

und der Anfangsbedingung auf $\Gamma = \mathbb{R} \times \{0\}$

$$u(x,0) = g(x) = \begin{cases} 1\,, & x \le 0\,, \\ 1-x\,, & 0 \le x \le 1\,, \\ 0\,, & x \ge 1\,. \end{cases} \tag{11.34}$$

Wir schreiben (11.33) um zu

$$u\partial_x u + \partial_t u = 0\,, \tag{11.35}$$

womit wir die Form (11.30) hergestellt haben mit

$$b(x,t,u) = (u,1)\,, \quad c = 0\,. \tag{11.36}$$

Die charakteristischen Gleichungen (11.31), (11.32) werden zu

$$\xi_1' = z\,, \quad \xi_2' = 1\,, \quad z' = 0\,. \tag{11.37}$$

Für die in $\xi(0) = (x,0)$ beginnende Charakteristik gilt

$$u(\xi(s)) = z(s) = z(0) = g(x)\,, \tag{11.38}$$

also $\xi_1' = g(x)$ und damit

$$\xi_1(s) = x + sg(x)\,, \quad \xi_2(s) = s\,. \tag{11.39}$$

Für $0 \le s < 1$ erhalten wir eine Lösung, für die gilt

$$\xi(s) = (x,s)\,,\, u(\xi(s)) = 0\,, \quad \text{falls } x \ge 1, \tag{11.40}$$
$$\xi(s) = (x+s,s)\,,\, u(\xi(s)) = 1\,, \quad \text{falls } x \le 0. \tag{11.41}$$

Diese Lösung kann für $s = 1$ nicht stetig fortgesetzt werden, da $u(1,1) = 0$ nach (11.40), aber andererseits $u(1,1) = 1$ nach (11.41) gelten müsste. In der Tat schneiden sich im Punkt $(1,1)$ alle diejenigen ξ-Kurven, für die $0 \le \xi_1(0) \le 1$, $\xi_2(0) = 0$ gilt. Die Lösungen bilden sogenannte **Schocks** aus. Ein solches Verhalten ist typisch für nichtlineare Erhaltungsgleichungen etwa der Gasdynamik, die man als Spezialfälle der in Kapitel 5 behandelten allgemeinen Erhaltungsgleichungen erhält, und kann durch lineare Gleichungen nicht beschrieben werden. Um Schocks zu behandeln, benötigt man wieder einen geeigneten schwachen Lösungsbegriff, den wir aber jetzt nicht behandeln.

In den bisher betrachteten Beispielen (Spezialfälle des quasilinearen Falls) war es nicht erforderlich, die Differentialgleichung für p aufzustellen und zu lösen, da wir die Lösung

u bereits aus dem reduzierten System (11.31), (11.32) erhalten können. Das trifft für den allgemeinen Fall $F(\nabla u, u, x) = 0$ nicht zu. Wir betrachten als weiteres Beispiel das Anfangswertproblem im $\mathbb{R}^2$

$$\partial_1 u \cdot \partial_2 u = u\,, \quad \text{in } \Omega = (0,\infty) \times \mathbb{R}, \tag{11.42}$$
$$u(0, x_2) = x_2^2\,, \quad x_2 \in \mathbb{R}\,. \tag{11.43}$$

Hier ist

$$F(p,u,x) = p_1 p_2 - u\,, \quad \nabla_p F = \begin{pmatrix} p_2 \\ p_1 \end{pmatrix}\,, \quad \partial_u F = -1\,, \quad \nabla_x F = 0\,, \tag{11.44}$$

die charakteristischen Gleichungen (11.15) werden also zu

$$p' = p\,, \quad z' = 2p_1 p_2\,, \quad \xi' = \begin{pmatrix} p_2 \\ p_1 \end{pmatrix}\,. \tag{11.45}$$

Wir bestimmen nun die Anfangswerte für (11.45). Die ξ-Kurven beginnen auf $\Gamma = \{0\} \times \mathbb{R}$,

$$\xi_0 = \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}\,, \tag{11.46}$$

wobei wir $x_{02} = a$ setzen. Der zugehörige Anfangswert für z ergibt sich aus (11.43) zu

$$z_0 = u(\xi_0) = a^2\,. \tag{11.47}$$

Die zugehörigen Anfangswerte für p müssen wir aus (11.42) und (11.43) berechnen. Es soll gelten

$$p_0 = \nabla u(\xi_0) = \begin{pmatrix} \partial_1 u(\xi_0) \\ \partial_2 u(\xi_0) \end{pmatrix}\,, \tag{11.48}$$

aus (11.43) folgt im Punkt $\xi_0 = (0,a)$

$$\partial_2 u(\xi_0) = \partial_2 u(0,a) = 2a\,, \tag{11.49}$$

aus (11.42) folgt weiter

$$\partial_1 u(\xi_0) = \frac{u(\xi_0)}{\partial_2 u(\xi_0)} = \frac{a}{2}\,. \tag{11.50}$$

Insgesamt ergibt sich das Anfangswertproblem für die charakteristischen Differentialgleichungen im $\mathbb{R}^5$

$$\begin{aligned} p_1' &= p_1\,, & p_1(0) &= \frac{a}{2}\,, \\ p_2' &= p_2\,, & p_2(0) &= 2a\,, \\ z' &= 2p_1 p_2\,, & z(0) &= a^2\,, \\ \xi_1' &= p_2\,, & \xi_1(0) &= 0\,, \\ \xi_2' &= p_1\,, & \xi_2(0) &= a\,. \end{aligned} \tag{11.51}$$

Dieses hat die explizite Lösung

$$p_1(s) = \frac{a}{2} e^s\,, \quad p_2(s) = 2a e^s\,, \quad z(s) = a^2 e^{2s}\,, \tag{11.52}$$

$$\xi_1(s) = 2a(e^s - 1)\,, \quad \xi_2(s) = \frac{a}{2}(e^s + 1)\,. \tag{11.53}$$

Für die Lösung von (11.42), (11.43) gilt also

$$u(\xi_1(s), \xi_2(s)) = z(s) = a^2 e^{2s}\,,$$

und mit $(x_1, x_2) = (\xi_1(s), \xi_2(s))$ erhalten wir

$$u(x_1, x_2) = \frac{(x_1 + 4x_2)^2}{16}\,. \tag{11.54}$$

Eine solche explizite Lösung ist natürlich in der Regel nicht möglich. Es stellt sich aber die Frage, unter welchen Voraussetzungen an F diese Zurückführung auf ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen möglich ist, da sich dann ein Existenz- und Eindeutigkeitssatz für eine klassische Lösung von (11.1) aus entsprechenden Sätzen für Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen (etwa dem Satz von Picard-Lindelöf) ergibt. Das Beispiel (11.33) zeigt, dass man selbst bei beliebig glatter Funktion F nicht erwarten kann, dass es globale C^1-Lösungen gibt. Wir suchen daher nach lokalen Lösungen von

$$F(\nabla u, u, x) = 0\,, \tag{11.55}$$

das heißt, nach Lösungen, die definiert sind in einer Umgebung eines Punktes $\xi_0 \in \Gamma$, auf der die Anfangsbedingung

$$u = g\,, \quad g : \Gamma \to \mathbb{R}\,, \tag{11.56}$$

gegeben ist. Dazu muss dreierlei geleistet werden:

- Konstruktion der Anfangsbedingungen für p und z in einer Umgebung von ξ_0 relativ zu Γ,
- Beweis, dass die sich aus den charakteristischen Gleichungen ergebenden ξ-Kurven eine Umgebung von ξ_0 relativ zu Ω bijektiv überdecken,
- Beweis, dass die sich aus den charakteristischen Gleichungen ergebende Funktion z vermittels $u(\xi(s)) = z(s)$ eine Lösung von (11.55) liefert.

Wir beschränken uns auf den Fall

$$\Gamma \subset \{x : x \in \mathbb{R}^n\,,\, x_n = 0\}\,, \tag{11.57}$$

Wir nehmen an, dass Γ offen ist relativ zum $\mathbb{R}^{n-1}$. Sei $\xi_0 \in \Gamma$. Da für die zugehörige Charakteristik gelten soll, dass $\xi(0) = \xi_0$, $z(0) = u(\xi(0))$, setzen wir

$$z_0 = g(\xi_0)\,. \tag{11.58}$$

Weiter soll gelten $p_i(0) = \partial_i u(\xi(0))$, also setzen wir

$$p_{0i} = \partial_i g(\xi_0)\,, \quad 1 \le i \le n-1\,. \tag{11.59}$$

Die letzte Komponente p_{0n} wird festgelegt durch die Gleichung

$$F(p_0, z_0, \xi_0) = 0\,, \tag{11.60}$$

wobei die Werte aus (11.58) und (11.59) bereits eingesetzt sind. Zu $\eta \in \Gamma$, η in der Nähe von ξ_0, wollen wir die Anfangsbedingungen konstruieren vermittels einer Funktion q mit Werten im $\mathbb{R}^n$, so dass die n Gleichungen

$$q_i(\eta) = \partial_i g(\eta)\,, \quad 1 \le i \le n-1\,, \tag{11.61}$$
$$F(q(\eta), g(\eta), \eta) = 0\,, \tag{11.62}$$

gelten.

Lemma 11.1 *Sei F eine C^2-Funktion, sei $\xi_0 \in \Gamma$, seien $z_0 \in \mathbb{R}$, $p_0 \in \mathbb{R}^n$ so dass (11.58) – (11.60) gelten. Es gelte*

$$\partial_{p_n} F(p_0, z_0, \xi_0) \neq 0\,. \tag{11.63}$$

Dann gibt es eine Umgebung V relativ zu Γ von ξ_0 und eine C^2-Funktion $q : V \to \mathbb{R}^n$ mit $q(\xi_0) = p_0$, so dass (11.61) und (11.62) gelten.

Beweis: Die Gleichungen (11.61) und (11.62) sind äquivalent zu

$$G(q(\eta), \eta) = 0\,, \tag{11.64}$$

wobei $G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definiert ist durch

$$G_i(p, \eta) = p_i - \partial_i g(\eta)\,, \quad 1 \le i \le n-1\,,$$
$$G_n(p, \eta) = F(p, g(\eta), \eta)\,.$$

Es ist $G_n(p_0, \xi_0) = F(p_0, z_0, \xi_0) = 0$, also $G(p_0, \xi_0) = 0$ und

$$\partial_p G(p_0, \xi_0) = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & I_{n-1} & & \vdots \\ & & & 0 \\ \partial_{p_1} F & \cdots & \partial_{p_{n-1}} F & \partial_{p_n} F \end{pmatrix}, \tag{11.65}$$

wobei I_{n-1} die Einheitsmatrix im $\mathbb{R}^{n-1}$ bezeichnet. Wegen (11.63) ist $\partial_p G(p_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ invertierbar. Die Behauptung folgt nun aus dem Satz über implizite Funktionen. □

Die Bedingung (11.63) bedeutet, dass der Vektor $\nabla_p F(p_0, z_0, \xi_0)$ **nicht tangential** zu Γ ist, oder dass

$$\langle \nabla_p F(p_0, z_0, \xi_0), \nu(\xi_0) \rangle \neq 0\,, \tag{11.66}$$

wobei $\nu(\xi_0)$ die Normale an Γ in ξ_0 ist. Gemäß (11.15) ist $\nabla_p F(p_0, z_0, \xi_0)$ gerade der Tangentenvektor an die ξ-Kurve in $\xi(0) = \xi_0$. Die Formulierung (11.66) stellt die richtige Verallgemeinerung von (11.63) auf "beliebige" Mengen Γ dar. Ist (11.66) erfüllt, so sagt man, dass (11.56) in ξ_0 eine **nichtcharakteristische Anfangsbedingung** für (11.55) ist.

Damit sind die Anfangsbedingungen der charakteristischen Gleichung in der Nähe von ξ_0 konstruiert. Wir betrachten nun das zugehörige Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} p' &= -\partial_u F(p, z, \xi) p - \nabla_x F(p, z, \xi)\,, & p(0) &= q(\eta)\,, \\ z' &= \langle \nabla_p F(p, z, \xi), p \rangle\,, & z(0) &= g(\eta)\,, \\ \xi' &= \nabla_p F(p, z, \xi)\,, & \xi(0) &= \eta\,. \end{aligned} \tag{11.67}$$

Nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz für gewöhnliche Differentialgleichungen hat (11.67) für jedes feste $\eta \in V$ eine lokale Lösung, wir bezeichnen ihre Werte mit

$$p(s;\eta)\,,\; z(s;\eta)\,,\; \xi(s;\eta)\,. \tag{11.68}$$

Aus einem weiteren Satz der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen folgt: Ist F eine C^3-Funktion und sind g, q C^2-Funktionen, so gibt es ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $0 \in I$ und eine Umgebung von ξ_0 relativ zu Γ, die wir ebenfalls mit V bezeichnen, so dass gilt

$$p \in C^2(I \times V; \mathbb{R}^n)\,, \quad z \in C^2(I \times V; \mathbb{R})\,, \quad \xi \in C^2(I \times V; \Omega)\,. \tag{11.69}$$

Die Funktion $\xi : I \times V \to \Omega$ beschreibt die mit Anfangswerten in Γ parametrisierte Schar der ξ-Kurven. Wir wollen zeigen, dass sie in der Nähe von ξ_0 lokal bijektiv ist. Für $\eta \in V$ gilt

$$\begin{aligned} \xi_j(0;\eta) &= \eta_j\,, \,, 1 \le j \le n-1\,, \\ \xi_n(0;\eta) &= 0\,, \\ \partial_s \xi(0;\xi_0) &= \nabla_p F(p_0, z_0, \xi_0)\,. \end{aligned}$$

Die Funktionalmatrix $D\xi(0;\xi_0)$ hat die Form

$$D\xi(0;\xi_0) = \begin{pmatrix} \partial_{p_1} F & & & \\ \vdots & & I_{n-1} & \\ \partial_{p_{n-1}} F & & & \\ \partial_{p_n} F & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \tag{11.70}$$

Sie ist also invertierbar, falls

$$\partial_{p_n} F(p_0, z_0, \xi_0) \neq 0 \tag{11.71}$$

gilt, diese Bedingung hatten wir bereits in Lemma 11.1 benötigt. Aus dem Satz über inverse Funktionen folgt nun: Gilt (11.71), so ist (gegebenenfalls nach Verkleinern von I und V)

$$\xi : I \times V \to W\,, \quad W := \xi(I \times V)\,, \tag{11.72}$$

bijektiv, W ist offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, und

$$\xi^{-1} \in C^2(W; I \times V)\,. \tag{11.73}$$

Damit haben wir eine Umgebung W von ξ_0 bijektiv mit ξ-Kurven überdeckt. Da aufgrund der Konstruktion die Werte von z und p gerade den Werten von u und ∇u entlang der ξ-Kurven entsprechen sollen, setzen wir

$$u(x) = z(\xi^{-1}(x))\,, \quad v(x) = p(\xi^{-1}(x))\,, \quad x \in W\,. \tag{11.74}$$

Es gilt dann $u \in C^2(W; \mathbb{R})$. Eine längere Rechnung (siehe Evans, Abschnitt 3.2.4) zeigt, dass für alle $x \in W$ gilt

$$\nabla u(x) = v(x)\,, \quad F(v(x), u(x), x) = 0\,. \tag{11.75}$$

Zusammenfassend erhalten wir den folgenden Satz.

Satz 11.2 (Lösbarkeit bei nichtcharakteristischen Anfangswerten)
Sei F eine C^3-Funktion, sei $\xi_0 \in \Gamma$, sei $p_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $F(p_0, g(\xi_0), \xi_0) = 0$, es gelte

$$\partial_{p_n} F(p_0, g(\xi_0), \xi_0) \neq 0 \,. \tag{11.76}$$

Dann gibt es genau eine lokale Lösung von (11.55) – (11.57) mit $\nabla u(\xi_0) = p_0$.

Beweis: Den Existenzbeweis haben wir in den zu (11.75) führenden Überlegungen dargestellt. Zwei verschiedene Lösungen mit $\nabla u(\xi_0) = p_0$ liefern gemäß

$$z(s;\eta) = u(\xi(s;\eta))$$

wegen der lokalen Bijektivität von ξ auch zwei verschiedene Lösungen des gleichen charakteristischen Anfangswertproblems, was aber nicht möglich ist, da letzteres eine eindeutige Lösung hat. □

Der Fall einer Anfangsbedingung $u = g$ auf einer Menge Γ in allgemeiner Lage wird vermittels einer lokalen Koordinatentransformation auf (11.57) zurückgeführt. Wie erwähnt, wird die Bedingung (11.76) in Satz 11.2 dann ersetzt durch

$$\langle \nabla_p F(p_0, g(\xi_0), \xi_0), \nu(\xi_0) \rangle \neq 0 \,, \quad \nu \text{ Normale an } \Gamma. \tag{11.77}$$

Die Methode der Charakteristiken kann auch auf Systeme partieller Differentialgleichungen erster Ordnung übertragen werden. Partielle Differentialgleichungen höherer Ordnung können auf ein System erster Ordnung zurückgeführt werden. Wir betrachten als Beispiel die eindimensionale Wellengleichung

$$\partial_{tt} w - c^2 \partial_{xx} w = 0 \,. \tag{11.78}$$

Wir definieren die Funktionen

$$u_1 = \partial_t w \,, \quad u_2 = \partial_x w \,. \tag{11.79}$$

Fassen wir $u_1(x,t)$ und $u_2(x,t)$ als Komponenten eines Vektors $u(x,t) \in \mathbb{R}^2$ auf, so können wir (11.78) umschreiben zu

$$\partial_t u + B \partial_x u = 0 \,, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -c^2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} . \tag{11.80}$$

Bei der Herleitung der Formel von d'Alembert (10.21) für die Lösung des Anfangswertproblems für (11.78) haben wir ausgenützt, dass u_1 und u_2 die Gleichungen

$$\partial_t (u_1 - c u_2) + c \partial_x (u_1 - c u_2) = 0 \,, \tag{11.81}$$
$$\partial_t (u_1 + c u_2) - c \partial_x (u_1 + c u_2) = 0 \,, \tag{11.82}$$

lösen, welche wir als gewöhnliche Differentialgleichungen entlang der Geraden $x \pm ct = \mathit{const}$ auffassen können. Wir betrachten nun allgemein ein semilineares System von N solchen Gleichungen,

$$\partial_t u + B(x,t) \partial_x u = C(x,t) u + f(x,t) \,, \tag{11.83}$$

wobei

$$B(x,t), C(x,t) \in \mathbb{R}^{(N,N)} \,, \; f(x,t) \in \mathbb{R}^N \,. \tag{11.84}$$

Wir suchen nach Lösungen $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$. Als wesentliche Strukturvoraussetzung verlangen wir:

$$B(x,t) \text{ ist reell diagonalisierbar für alle } x,t \in \mathbb{R}. \tag{11.85}$$

Diese Bedingung ist nicht erfüllt beispielsweise bei der Laplace-Gleichung im $\mathbb{R}^2$, die Gleichung

$$\partial_{tt} w + \partial_{xx} w = 0 \tag{11.86}$$

führt vermittels (11.79) auf

$$\partial_t u + B \partial_x u = 0\,, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{11.87}$$

Die Matrix B ist zwar diagonalisierbar, aber ihre Eigenwerte sind $\pm i$. Wir betrachten zuerst den Fall, dass B bereits eine Diagonalmatrix ist,

$$B(x,t) = \operatorname{diag}\left(\lambda_1(x,t), \ldots, \lambda_n(x,t)\right). \tag{11.88}$$

Das Gleichungssystem (11.83) wird zu

$$\partial_t u_j + \lambda_j(x,t) \partial_x u_j = \sum_{k=1}^N c_{jk}(x,t) u_k + f_j(x,t)\,, \quad 1 \le j \le N\,, \tag{11.89}$$

die einzelnen Gleichungen sind nur über die Summe auf der rechten Seite gekoppelt, nicht mehr über die linke Seite. Ist $\xi_j : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ eine Lösung von

$$\xi_j' = \lambda_j(\xi_j, t)\,, \tag{11.90}$$

so gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} u_j(\xi_j(t), t) = \partial_t u_j(\xi_j(t), t) + \lambda_j(\xi_j(t), t) \partial_x u_j(\xi_j(t), t)\,. \tag{11.91}$$

Wir wollen nun das Anfangswertproblem

$$\partial_t u + B(x,t) \partial_x u = C(x,t) u + f(x,t)\,, \tag{11.92}$$

$$u(x,0) = g(x)\,, \tag{11.93}$$

lösen, wobei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ gegeben ist. Für gegebene $x,t \in \mathbb{R}$ bezeichnen wir mit

$$\xi_j(s; x, t) \tag{11.94}$$

den Wert der Lösung des Anfangswertproblems

$$\xi_j' = \lambda_j(\xi_j, \tau)\,, \quad \xi_j(t) = x\,, \tag{11.95}$$

zum Zeitpunkt s. Aus (11.91) und (11.89) folgt nun

$$\begin{aligned} u_j(x,t) &= u_j(\xi_j(0;x,t),0) + \int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{ds}} u_j(\xi_j(s),s)\,ds \\ &= g_j(\xi_j(0;x,t)) + \int_0^t \left(\sum_{k=1}^N c_{jk} u_k + f_j \right) (\xi_j(s;x,t),s)\,ds\,, \quad 1 \le j \le N\,. \end{aligned} \tag{11.96}$$

Mit (11.96) ist es gelungen, die Lösung des Anfangswertproblems (11.92), (11.93) für den Diagonalfall (11.88) auf die Lösung eines Systems von Integralgleichungen zurückzuführen, die nur eindimensionale Integrale involvieren. Falls die Matrix B konstant ist, sind die ξ-Kurven Geraden, deren Steigungen durch die λ_j festgelegt werden. Unabhängig davon, ob sich (11.95), (11.96) explizit lösen lassen oder nicht, vermitteln beide Gleichungen Information über das Abhängigkeitsgebiet des Lösungswerts $u(x,t)$ im Punkt (x,t). Außerdem läßt sich nun (unter geeigneten Voraussetzungen an die λ_j, c_{jk} und f) ein Existenz- und Eindeutigkeitssatz beweisen. Werden nämlich die Funktionen ξ_j als eindeutige Lösungen der Anfangswertprobleme (11.95) als bekannt vorausgesetzt, so können wir mit dem Banachschen Fixpunktsatz eine eindeutige Lösung von (11.96) erhalten.

Ist die Matrix B gemäß (11.85) reell diagonalisierbar, so können wir das Anfangswertproblem (11.92), (11.93) durch Transformation der abhängigen Variablen u auf den Diagonalfall zurückführen. Seien e_j, λ_j die Eigenvektoren und Eigenwerte von B,

$$B(x,t)e_j(x,t) = \lambda_j(x,t)e_j(x,t)\,, \quad 1 \le j \le N\,. \tag{11.97}$$

Wir setzen

$$v(x,t) = E(x,t)^{-1}u(x,t)\,, \tag{11.98}$$

wobei $E(x,t) \in \mathbb{R}^{(N,N)}$ aus den Spalten $e_j(x,t)$ gebildet wird. Die Funktion v löst nun das Anfangswertproblem

$$\partial_t v + \Lambda(x,t)\partial_x v = \tilde{C}(x,t)v + \tilde{f}(x,t)\,, \tag{11.99}$$

$$v(x,0) = \tilde{g}(x)\,, \tag{11.100}$$

wobei $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$ und $\tilde{C}$, $\tilde{f}$, $\tilde{g}$ sich durch Einsetzen von $u = Ev$ in (11.92) und Ausdifferenzieren der Produkte wie folgt ergibt. Einsetzen von $u = Ev$ in (11.92) liefert

$$\partial_t(Ev) + B\partial_x(Ev) = CEv + f\,, \tag{11.101}$$

also

$$E\partial_t v + BE\partial_x v = (CE - \partial_t E - B\partial_x E)v + f\,.$$

Linksmultiplikation mit E^{-1} führt auf

$$\partial_t v + E^{-1}BE\partial_x v = E^{-1}(CE - \partial_t E - B\partial_x E)v + E^{-1}f\,, \tag{11.102}$$

und damit haben wir die Form (11.99) erhalten, da die Gleichungen (11.97) in Matrixschreibweise die Form

$$BE = E\Lambda\,, \quad E^{-1}BE = \Lambda\,,$$

haben.

Nachtrag. Differenzieren der Lösung eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen nach den Anfangswerten. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y' = f(s,y)\,, \qquad f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\,, \tag{11.103}$$

$$y(0) = g(\eta)\,, \qquad g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n\,. \tag{11.104}$$

Wir nehmen an, dass f und g stetig differenzierbar sind. Wir bezeichnen mit

$$y(s;\eta) \tag{11.105}$$

den Wert der Lösung von (11.103), (11.104) zum Zeitpunkt $s \in \mathbb{R}$. Wir stellen die Fragen: Existiert $\partial_\eta y(s;\eta)$? Wie lässt sich $\partial_\eta y(s;\eta)$ berechnen ? Wir schreiben das Anfangswertproblem um in die Integralgleichung

$$y(s;\eta) = g(\eta) + \int_0^s f(\sigma, y(\sigma;\eta))\, d\sigma\,. \tag{11.106}$$

Falls $\partial_\eta y(s;\eta)$ existiert, können wir (11.106) nach η differenzieren und erhalten

$$\partial_\eta y(s;\eta) = Dg(\eta) + \int_0^s \partial_y f(\sigma, y(\sigma;\eta))\partial_\eta y(\sigma;\eta)\, d\sigma\,. \tag{11.107}$$

Setzen wir

$$Z(s;\eta) = \partial_\eta y(s;\eta) \in \mathbb{R}^{(n,m)}\,, \tag{11.108}$$

so ist $Z(s;\eta)$ Lösung des Anfangswertproblems

$$Z' = \partial_y f(s, y(s;\eta))Z\,, \quad Z(0) = Dg(\eta)\,. \tag{11.109}$$

Hierbei handelt es sich um ein lineares System von gewöhnlichen Differentialgleichungen im $\mathbb{R}^{(n,m)}$. Ein Beispiel für $n = m = 1$:

$$y' = \sin y\,, \quad y(0) = \eta^2\,. \tag{11.110}$$

Die Funktion $Z = \partial_\eta y$ ergibt sich gemäß (11.109) als Lösung von

$$Z' = \cos(y(s;\eta))Z\,, \quad Z(0) = 2\eta\,. \tag{11.111}$$

Der Beweis, dass $\partial_\eta y$ existiert und (11.109) löst, wird mit dem Banachschen Fixpunktsatz geführt. Man nimmt zunächst an, dass f und g global lipschitzstetig sind, und dass η in einer kompakten Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^m$ variiert. Im ersten Schritt definiert man eine Fixpunktiteration

$$(y_{k+1}, Z_{k+1}) = T(y_k, Z_k) \tag{11.112}$$

für die Abbildung

$$T : X \to X\,, \quad X = C(I \times K; \mathbb{R}^n) \times C(I \times K; \mathbb{R}^{(n,m)})\,, \tag{11.113}$$

I kompaktes Intervall im $\mathbb{R}$ mit $0 \in \operatorname{int}(I)$, $T = (T_1, T_2)$,

$$T_1(y, Z)(s;\eta) = g(\eta) + \int_0^s f(\sigma, y(\sigma;\eta))\, d\sigma\,, \tag{11.114}$$

$$T_2(y, Z)(s;\eta) = Dg(\eta) + \int_0^s \partial_y f(\sigma, y(\sigma;\eta))Z(\sigma;\eta)\, d\sigma\,. \tag{11.115}$$

Im zweiten Schritt zeigt man per Induktion, dass für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\partial_\eta y_k(s;\eta) \text{ existiert}, \quad Z_k(s;\eta) = \partial_\eta y_k(s;\eta)\,. \tag{11.116}$$

Im dritten Schritt zeigt man analog zum Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf, dass T eine Kontraktion auf X ist. Dabei verwendet man entweder die Supremumsnorm und wählt I hinreichend klein, oder man verwendet eine geeignete gewichtete, zur Supremumsnorm äquivalente Norm. Aus dem Banachschen Fixpunktsatz folgt nun, dass

$$y_k \to y_*\,, \quad Z_k \to Z_*\,, \quad \text{gleichmäßig auf } I \times K, \tag{11.117}$$

wobei (y_*, Z_*) der eindeutige Fixpunkt von T ist. Aus der gleichmäßigen Konvergenz von $\partial_\eta y_k = Z_k$ folgt nun, dass $\partial_\eta y_*$ existiert und gleich Z_* ist. Grenzübergang in den Integralgleichungen ergibt, dass y_* Lösung des Anfangswertproblems (11.103), (11.104) und Z_* Lösung des Anfangswertproblems (11.109) ist.