Konvexe Analysis und Evolutionsprobleme *

Martin Brokate **

Inhaltsverzeichnis

---

*Vorlesungsskript, SS 2013

**Zentrum Mathematik, TU München

1 Konvexe Mengen

Definition 1.1 (Konvexe Menge)
*Sei V Vektorraum, $K \subset V$. K heißt **konvex**, wenn*

$$\lambda u + (1-\lambda)v \in K \tag{1.1}$$

für alle $u, v \in K$ und alle $\lambda \in [0,1]$. Wir schreiben

$$[x, y] = \{\lambda u + (1-\lambda)v : \lambda \in [0,1]\} \tag{1.2}$$

für die Verbindungsstrecke von u nach v, sowie auch $(u, v]$, $[u, v)$, (u, v) für die Strecke ohne die entsprechenden Endpunkte. Wir setzen $[v, v) = \{v\}$. □

Eine konvexe Menge enthält also zu je zwei Punkten deren Verbindungsstrecke.

Eine endliche Summe der Form

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \,, \qquad v_i \in V \,,\ \lambda_i \geq 0 \text{ mit } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \,, \tag{1.3}$$

heißt **Konvexkombination** der Vektoren $v_1, \ldots, v_n$.

Satz 1.2 *Sei V Vektorraum. Eine Teilmenge $K \subset V$ ist konvex genau dann, wenn*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \in K \tag{1.4}$$

gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle Konvexkombinationen von Elementen $v_1, \ldots, v_n \in K$.

Beweis: Für "⇐" ist nichts zu zeigen. "⇒": wird mit Induktion über n bewiesen. $n = 2$ entspricht der Definition der Konvexität. Induktionsschritt $n-1 \to n$: Sei

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \,, \quad v_i \in K \,,\ 1 \leq i \leq n \,, \tag{1.5}$$

eine Konvexkombination. Wähle λ_j mit $\lambda_j < 1$, dann gilt

$$v = \lambda_j v_j + (1-\lambda_j) w \,, \quad w = \sum_{i \neq j} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_j} v_i \,, \quad \sum_{i \neq j} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_j} = 1 \,, \tag{1.6}$$

also $w \in K$ nach Induktionsvoraussetzung und damit $v \in K$. □

Beliebige Durchschnitte

$$\bigcap_{i \in I} K_i \tag{1.7}$$

von konvexen Mengen $K_i \subset V$ sind offensichtlich ebenfalls konvex.

Satz 1.3 *Sei V Vektorraum, $K \subset V$ konvex. Dann gilt*

$$(\lambda + \mu)K = \lambda K + \mu K \tag{1.8}$$

für alle $\lambda, \mu \geq 0$.

Beweis: "$\subset$": klar.
"$\supset$": Trivial falls $\lambda = \mu = 0$. Andernfalls gilt nach Definition der Konvexität

$$\frac{\lambda}{\lambda + \mu} K + \frac{\mu}{\lambda + \mu} K \subset K \,, \tag{1.9}$$

woraus nach Multiplikation mit $\lambda + \mu$ die Behauptung folgt. □

Definition 1.4 (Konvexe Hülle)
Sei V Vektorraum, $S \subset V$. Dann heißt

$$\mathrm{co}\,(S) = \bigcap_{\substack{S \subset K \subset V \\ K \text{ konvex}}} K \tag{1.10}$$

die konvexe Hülle von S in V. □

Satz 1.5 *Sei V Vektorraum, $S \subset V$. Dann gilt*

$$\mathrm{co}\,(S) = \{v : v \in V,\ v \text{ ist Konvexkombination von Elementen in } S\} \,. \tag{1.11}$$

Beweis: Wir bezeichnen mit C die durch die rechte Seite von (1.11) definierte Menge, zu zeigen $\mathrm{co}\,(S) = C$.
"$\supset$": Ist $K \supset S$ konvex, so gilt $K \supset C$ nach Satz 1.2, also $\mathrm{co}\,(S) \supset C$.
"$\subset$": Da $S \subset C$, genügt es zu zeigen, daß C konvex ist. Seien also $u, v \in C$,

$$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \,, \quad v = \sum_{j=1}^{m} \mu_j v_j \,, \tag{1.12}$$

dann gilt für $\nu \in [0, 1]$

$$\nu u + (1 - \nu) v = \sum_{i=1}^{n} \nu \lambda_i u_i + \sum_{j=1}^{m} (1 - \nu) \mu_j v_j \in C \,, \tag{1.13}$$

da die Koeffizienten die an eine Konvexkombination gestellten Bedingungen erfüllen. □

Eine Menge $\{v_0, \ldots, v_n\}$ von $n+1$ Vektoren eines Vektorraums V heißt **affin unabhängig**, falls die Menge $\{v_1 - v_0, \ldots, v_n - v_0\}$ linear unabhängig in V ist.

Definition 1.6 (Simplex)
Sei $\{v_0, \ldots, v_n\} \subset V$ affin unabhängig. Dann heißt

$$\mathrm{co}\,(\{v_0, \ldots, v_n\}) \tag{1.14}$$

ein (n-dimensionales) ***Simplex****, die v_i heißen die Ecken des Simplex.* □

Jeder Punkt v eines Simplex $\text{co}(\{v_0, \ldots, v_n\})$ läßt sich eindeutig als Konvexkombination

$$v = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i v_i \tag{1.15}$$

seiner Ecken schreiben, die $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ heißen die **baryzentrischen Koordinaten** von v.

Definition 1.7 (Kegel) *Sei V Vektorraum, $K \subset V$. K heißt **Kegel**, falls $\lambda v \in K$ für alle $v \in K$ und alle $\lambda > 0$ gilt. Ein Kegel K heißt **spitz**, falls $K \cap (-K) \subset \{0\}$.*

Lemma 1.8 *Sei V Vektorraum, $K \subset V$ Kegel. K ist konvexer Kegel genau dann, wenn $u + v \in K$ für alle $u, v \in K$.*

Beweis: "$\Leftarrow$": Klar.
"$\Rightarrow$": Sind $u, v \in K$, so ist

$$u + v = 2\left(\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v\right) \in K\,. \tag{1.16}$$

□

Beispiel 1.9

(i) $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ und $\mathbb{R}_- = (-\infty, 0]$ sind konvexe Kegel in $\mathbb{R}$.

(ii) $\mathbb{R}_+^n = \{(v_1, \ldots, v_n) : v_i \geq 0 \text{ für alle } i\}$ ist konvexer Kegel im $\mathbb{R}^n$.

(iii) Sei V Menge, W Vektorraum und L konvexer Kegel in W,

$$K = \{f | f : V \to Y,\ f(v) \in L \text{ für alle } v \in V\}\,. \tag{1.17}$$

K ist konvexer Kegel in $\text{Abb}(V, W)$. Im Spezialfall $W = \mathbb{R}$, $L = \mathbb{R}_+$ erhalten wir den konvexen Kegel $\{f : f \geq 0\}$ der nichtnegativen Funktionen in $\text{Abb}(V, \mathbb{R})$. Entsprechendes gilt auch für Unterräume von $\text{Abb}(V, \mathbb{R})$ wie etwa $C(V, \mathbb{R})$.

Definition 1.10 (Dualraum)
Sei V normierter Raum. Die Menge

$$V^* = \{v^* |\ v^* : V \to \mathbb{R} \textit{ linear und stetig}\} \tag{1.18}$$

*heißt der **Dualraum** von V. Jede Teilmenge H von V der Form*

$$H = \{v : v^*(v) = \alpha\} \tag{1.19}$$

*für ein festes $v^* \in V^*$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ heißt **Hyperebene** in V.* □

Satz 1.11 (Trennungssatz)
Sei V normierter Raum, seien $K_1, K_2 \subset V$ konvex und nichtleer, es gelte $\text{int}\,(K_1) \cap K_2 = \emptyset$ und $\text{int}\,(K_1) \neq \emptyset$. Dann gibt es ein $v^* \in V^*$ mit $v^* \neq 0$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$v^*(K_1) \leq \alpha \leq v^*(K_2)\,, \quad v^*(\text{int}\, K_1) < \alpha\,. \tag{1.20}$$

Beweis: Siehe Funktionalanalysis. □

Satz 1.12 (Strikte Trennung) *Sei V normierter Raum, sei $K \subset V$ konvex, nichtleer und abgeschlossen, sei $u \notin K$. Dann gibt es ein $v^* \in V^*$ mit $v^* \neq 0$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit*

$$v^*(v) \leq \alpha < v^*(u)\,, \quad \textit{für alle } v \in K. \tag{1.21}$$

Beweis: Da $V \setminus K$ offen ist, gibt es eine offene Kugel B um 0 mit mit $K \cap (u + B) = \emptyset$. Nach Satz 1.11 gibt es ein $v^* \in V^*$ und ein α mit $v^*(K) \leq \alpha < v^*(u + B)$. □

2 Konvexe Funktionen

Wir schreiben $(-\infty, \infty]$ für $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ und entsprechend $[-\infty, \infty]$, $[0, \infty]$ etc.

Definition 2.1 (Epigraph)
Sei V Vektorraum, $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$. Die durch

$$\operatorname{epi} \varphi = \{(v, \mu) : v \in V,\, \mu \in \mathbb{R},\, \mu \geq \varphi(v)\} \tag{2.1}$$

*definierte Teilmenge von $V \times \mathbb{R}$ heißt der **Epigraph** von φ, die durch*

$$D(\varphi) = \{v : v \in V,\, \varphi(v) < +\infty\} \tag{2.2}$$

*definierte Teilmenge von V der **effektive Definitionsbereich** von φ.*

Bezeichnet $p_V : V \times \mathbb{R} \to V$ die Projektion auf die erste Komponente, so ist

$$D(\varphi) = p_V(\operatorname{epi} \varphi)\,.$$

Es gilt $\operatorname{epi} \varphi = \emptyset$ genau dann, wenn $\varphi(v) = +\infty$ für alle $v \in V$. Man nennt φ **eigentlich**, wenn dieser Ausartungsfall nicht vorliegt.

Definition 2.2 (Konvexe Funktion)
*Sei V Vektorraum. Eine Funktion $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$ heißt **konvex**, falls ihr Epigraph* $\operatorname{epi} \varphi$ *konvex ist. Ist $-\varphi$ konvex, so heißt φ konkav.*

Satz 2.3 *Sei V Vektorraum, $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$. Dann ist φ konvex genau dann, wenn*

$$\varphi(\lambda v + (1 - \lambda)w) \leq \lambda\varphi(v) + (1 - \lambda)\varphi(w) \tag{2.3}$$

für alle $v, w \in V$ und alle $\lambda \in [0, 1]$.

Beweis: Folgt direkt aus den Definitionen. □

Definition 2.4 *Sei V Vektorraum, $K \subset V$. Eine Funktion $\varphi : K \to (-\infty, \infty]$ heißt konvex, wenn die durch*

$$\tilde{\varphi}(v) = \begin{cases} \varphi(v)\,, & \textit{falls } v \in K\,, \\ +\infty\,, & \textit{sonst}\,, \end{cases} \tag{2.4}$$

definierte Funktion $\tilde{\varphi} : V \to (-\infty, \infty]$ konvex ist.

Man sieht unmittelbar, daß eine Funktion $\varphi : K \to (-\infty, \infty]$, welche (2.3) auf einer konvexen Menge $K \subset V$ erfüllt, konvex ist im Sinne von Definition 2.4. Für $K \subset V$ heißt die durch

$$I_K(v) = \begin{cases} 0\,, & v \in K \\ +\infty\,, & \text{sonst} \end{cases} \tag{2.5}$$

definierte Funktion $I_K : V \to [0, \infty)$ die **Indikatorfunktion** von K. Wegen $\operatorname{epi} I_K = K \times \mathbb{R}_+$ ist I_K genau dann konvex, wenn K konvex ist.

Lemma 2.5 *Sei V Vektorraum, $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$ konvex. Dann sind die* ***Subniveaumengen*** *$\{v : v \in V, \varphi(v) \le \alpha\}$ und $\{v : v \in V, \varphi(v) < \alpha\}$ konvex für alle $\alpha \in (-\infty, \infty]$.*

Beweis: Direkt aus den Definitionen. □

Ist $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$ konvex, so gilt

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(v_i)$$

für beliebige Konvexkombinationen $v = \sum_i \lambda_i v_i$.

Definition 2.6
Sei V Vektorraum. Eine Funktion $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$ heißt ***positiv homogen****, falls*

$$\varphi(\lambda v) = \lambda \varphi(v) \tag{2.6}$$

gilt für alle $v \in V$ und alle $\lambda > 0$. □

Lemma 2.7 *Sei V Vektorraum, $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$. Die Funktion φ ist positiv homogen genau dann, wenn $\operatorname{epi} \varphi$ ein Kegel ist. In diesem Fall ist $D(\varphi)$ ebenfalls ein Kegel.*

Beweis: "$\Rightarrow$": Seien $(v, \mu) \in \operatorname{epi} \varphi$ und $\lambda > 0$, dann ist $\varphi(\lambda v) = \lambda \varphi(v) \le \lambda \mu$, also $(\lambda v, \lambda \mu) \in \operatorname{epi} \varphi$.
"$\Leftarrow$": Da $(v, \mu) \in \operatorname{epi} \varphi \Leftrightarrow (\lambda v, \lambda \mu) \in \operatorname{epi} \varphi$ für alle $\lambda > 0$, folgt

$$\varphi(v) = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(\lambda v) = +\infty \quad \text{für alle } \lambda > 0.$$

Ist $\varphi(v) < +\infty$, und $\lambda > 0$, so ist $(v, \varphi(v)) \in \operatorname{epi} \varphi$, also auch $(\lambda v, \lambda \varphi(v)) \in \operatorname{epi} \varphi$ und daher $\varphi(\lambda v) \le \lambda \varphi(v)$. Anwendung auf $1/\lambda$ ergibt

$$\varphi(v) = \varphi(\frac{1}{\lambda} \lambda v) \le \frac{1}{\lambda} \varphi(\lambda v)$$

und damit $\lambda \varphi(v) \le \varphi(\lambda v)$. □

Satz 2.8 *Sei V Vektorraum, seien $f : V \to (-\infty, \infty]$ und $\varphi : \mathbb{R} \to (-\infty, \infty]$ konvex, sei φ monoton wachsend, das heißt, $s \le t \Rightarrow \varphi(s) \le \varphi(t)$. Dann ist auch $\varphi \circ f$ konvex. (Dabei wird $\varphi(\infty) = \infty$ gesetzt.)*

Beweis: Für alle $u, v \in X$ und $\lambda \in [0, 1]$ gilt

$$f(\lambda u + (1 - \lambda) v) \le \lambda f(u) + (1 - \lambda) f(v)\,,$$

also

$$(\varphi \circ f)(\lambda u + (1 - \lambda) v) \le \varphi(\lambda f(u) + (1 - \lambda) f(v)) \le \lambda \varphi(f(u)) + (1 - \lambda) \varphi(f(v))\,.$$

□

Definition 2.9 (Unterhalbstetigkeit)
*Sei V normierter Raum. Eine Funktion $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$ heißt **(schwach) unterhalbstetig**, wenn die Subniveaumengen*

$$M_\alpha = \{v : v \in V,\, \varphi(v) \le \alpha\} \tag{2.7}$$

(schwach) abgeschlossen sind für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.

Satz 2.10 *Sei V normierter Raum, $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$. Dann ist φ (schwach) unterhalbstetig genau dann, wenn* epi φ *(schwach) abgeschlossen ist in $V \times \mathbb{R}$.*

Beweis: "$\Leftarrow$": Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$F_\alpha = \{(v, \alpha) : v \in V,\, \varphi(v) \le \alpha\} = \operatorname{epi} \varphi \cap (V \times \{\alpha\}) \tag{2.8}$$

(schwach) abgeschlossen in $V \times \mathbb{R}$, also auch die Subniveaumenge $M_\alpha = j_\alpha^{-1}(F_\alpha)$, wobei $j_\alpha : V \to V \times \mathbb{R}$ die Einbettung $j_\alpha(v) = (v, \alpha)$ bezeichnet.
"$\Rightarrow$": Wir zeigen, daß das Komplement von epi φ offen ist. Sei $(v, \alpha) \notin \operatorname{epi} \varphi$, also $\varphi(v) > \alpha$. Wähle $\varepsilon > 0$ mit $\varphi(v) > \alpha + \varepsilon$. Nach Voraussetzung ist $U = \{v : \varphi(v) > \alpha + \varepsilon\}$ offen in V und $W = U \times (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ eine offene Umgebung von (v, α) mit $W \cap \operatorname{epi} \varphi = \emptyset$, da $\varphi(w) > \alpha + \varepsilon > \beta$ für alle $(w, \beta) \in W$. □

Folgerung 2.11 *Sei V normierter Raum, $K \subset V$. Dann ist K abgeschlossen genau dann, wenn I_K unterhalbstetig ist.*

Beweis: "$\Rightarrow$": $\operatorname{epi} I_K = K \times [0, \infty)$.
"$\Leftarrow$": $K = \{v : I_K(v) \le 0\}$. □

Folgerung 2.12 *Sei V Banachraum, $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$ konvex. Dann ist φ genau dann unterhalbstetig, wenn φ schwach unterhalbstetig ist.*

Beweis: Im Banachraum ist eine konvexe Menge genau dann abgeschlossen, wenn sie schwach abgeschlossen ist. □

Lemma 2.13 *Sei V normierter Raum. Sind $\varphi_i : V \to (-\infty, \infty]$ konvex und unterhalbstetig für alle $i \in I$, so ist auch $\sup_{i \in I} \varphi_i$ konvex und unterhalbstetig.*

Beweis:

$$\operatorname{epi} (\sup_{i \in I} \varphi_i) = \bigcap_{i \in I} \operatorname{epi} \varphi_i \,.$$

□

Lemma 2.14 *Sei V normierter Raum, sei $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$ konvex und unterhalbstetig. Dann gilt*

$$\varphi(v) \le \liminf_{n \to \infty} \varphi(v_n) \tag{2.9}$$

für alle Folgen $v_n \rightharpoonup v$.

Beweis: Wir nehmen an, $v_n \rightharpoonup v$ aber $\varphi(v) > \liminf \varphi(v_n)$. Dann gibt es eine Teilfolge $\{v_{n_k}\}$ und ein $\varepsilon > 0$ mit $\varphi(v_{n_k}) \le \varphi(v) - \varepsilon =: \alpha$. Da φ schwach unterhalbstetig ist, ist die Subniveaumenge M_α schwach abgeschlossen, also $\varphi(v) \le \alpha$, ein Widerspruch. □

Satz 2.15 *Sei V reflexiver Banachraum, $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$ konvex, unterhalbstetig, eigentlich und nach unten beschränkt, und es gelte*

$$\lim_{\|v\| \to \infty} \varphi(v) = \infty \,. \tag{2.10}$$

Dann gibt es ein $u \in V$ mit

$$\varphi(u) = \min_{v \in V} \varphi(v) \,. \tag{2.11}$$

Beweis: Sei $\{u_n\}$ eine Minimalfolge für φ in V, das heißt, $\varphi(u_n) \downarrow \inf_{v \in V} \varphi(v)$. Nach Voraussetzung ist das Infimum endlich. Wegen (2.10) ist $\{u_n\}$ beschränkt in V. Da V reflexiv ist, gibt es eine Teilfolge mit $u_{n_k} \rightharpoonup u$ für ein $u \in V$. Aus Lemma 2.14 folgt

$$\varphi(u) \le \liminf_{k \to \infty} \varphi(u_{n_k}) = \inf_{v \in V} \varphi(v) \,.$$

□

Satz 2.16 *Sei V normierter Raum, $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$ konvex, unterhalbstetig und eigentlich. Dann gilt*

$$\varphi = \sup\{g |\ g : V \to \mathbb{R} \text{ affin und stetig, } g \le \varphi\} \,. \tag{2.12}$$

Beweis: "$\ge$": klar.
"$\le$": Es genügt zu zeigen: Ist $(v, a) \in V \times \mathbb{R}$ mit $a < \varphi(v)$, so gibt es eine affine stetige Funktion $g : V \to \mathbb{R}$ mit $a \le g(v)$ und $g \le \varphi$. Sei also $a < \varphi(v)$, dann ist $(v, a) \notin \operatorname{epi} \varphi$, und $\operatorname{epi} \varphi$ ist konvex, abgeschlossen und nichtleer. Aus dem Trennungssatz folgt, daß ein $z^* \in (V \times \mathbb{R})^*$ existiert mit

$$z^*(v, a) < \inf_{(w,\alpha) \in \operatorname{epi} \varphi} z^*(w, \alpha) \,. \tag{2.13}$$

Wir setzen $\lambda = z^*(0, 1)$ und definieren $v^* \in V^*$ durch $v^*(w) = z^*(w, 0)$, dann gilt

$$z^*(w, \alpha) = v^*(w) + \lambda \alpha \,, \quad \forall\, w \in V \,,\ \alpha \in \mathbb{R} \,. \tag{2.14}$$

Aus (2.13) erhalten wir also

$$v^*(v) + \lambda a = z^*(v, a) < v^*(w) + \lambda \mu \,, \quad \forall\, (w, \mu) \in \operatorname{epi} \varphi \,. \tag{2.15}$$

Hieraus folgt $\lambda \ge 0$, da μ beliebig groß gewählt werden kann.
Fall 1: $\lambda > 0$. Wir definieren

$$g(w) = \frac{1}{\lambda} (z^*(v, a) - v^*(w)) \,. \tag{2.16}$$

Aus (2.15) folgt $g(v) = a$ und $g(w) < \mu$ für $(w, \mu) \in \operatorname{epi} \varphi$, also $g(w) < \varphi(w)$ für $w \in D(\varphi)$ und damit $g \le \varphi$.

Fall 2: $\lambda = 0$. Dann ist $w = v$ in (2.15) nicht möglich, also $v \notin D(\varphi)$ und $\varphi(v) = \infty$. Sei $\tilde{g} : V \to \mathbb{R}$ affin und stetig mit $\tilde{g} \leq \varphi$; so ein $\tilde{g}$ existiert immer, da $D(\varphi)$ nichtleer ist und bei Elementen von $D(\varphi)$ der Fall 1 zum Tragen kommt. Wir wählen ein $\beta \in \mathbb{R}$ mit

$$v^*(v) = z^*(v, a) < \beta < z^*(\operatorname{epi} \varphi) = v^*(D(\varphi)) , \tag{2.17}$$

und setzen

$$g(w) = \tilde{g}(w) + \delta(\beta - v^*(w)) , \quad \delta > 0 . \tag{2.18}$$

Aus (2.17) folgt $g(w) \leq \tilde{g}(w) \leq \varphi(w)$ für $w \in D(\varphi)$ und

$$g(v) = \tilde{g}(v) + \delta(\beta - v^*(v)) \geq a , \tag{2.19}$$

falls $\delta > 0$ hinreichend groß gewählt wird. □

Satz 2.17 *Sei V normierter Raum, $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$ konvex, $u \in D(\varphi)$. Dann gilt: φ ist stetig in u genau dann, wenn es eine Kugel B um u gibt, auf der φ nach oben beschränkt ist, d.h. es gibt ein $c \in \mathbb{R}$ mit*

$$\varphi(v) \leq c , \quad \text{für alle } v \in B. \tag{2.20}$$

Beweis: "$\Rightarrow$": Folgt direkt aus der Definition der Stetigkeit; wähle eine Kugel B um u mit $\varphi(B) \subset (\varphi(u) - 1, \varphi(u) + 1)$.
"$\Leftarrow$": Sei o.B.d.A. $u = 0$, $\varphi(0) = 0$, sei $c > 0$ und B Kugel um 0 mit $\varphi(B) \leq c$. Es genügt zu zeigen, dass $\varphi(\varepsilon B) \subset [-\varepsilon c, \varepsilon c]$ gilt für jedes $\varepsilon \in (0, 1)$. Sei $v \in \varepsilon B$ beliebig. Dann gilt

$$v = (1 - \varepsilon) \cdot 0 + \varepsilon \frac{v}{\varepsilon} , \quad \varphi(v) \leq \varepsilon \varphi \left(\frac{v}{\varepsilon} \right) \leq \varepsilon c ,$$

und weiter

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{1 + \varepsilon} v + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \left(-\frac{v}{\varepsilon} \right) , \\ 0 &\leq \frac{1}{1 + \varepsilon} \varphi(v) + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \varphi \left(-\frac{v}{\varepsilon} \right) \leq \frac{1}{1 + \varepsilon} (\varphi(v) + \varepsilon c) , \end{aligned}$$

also $\varphi(v) \geq -\varepsilon c$ und insgesamt

$$|\varphi(v)| \leq \varepsilon c .$$

□

Satz 2.18 *Sei $\varphi : \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$ konvex. Dann ist φ stetig auf* $\operatorname{int}(D(\varphi))$.

Beweis: Ist $v = \sum_{i=0}^n \lambda_i v_i$ eine beliebige Konvexkombination, so gilt

$$\varphi(v) \leq \sum_{i=0}^n \lambda_i \varphi(v_i) \leq \left(\sum_{i=0}^n \lambda_i \right) \max_{0 \leq i \leq n} \varphi(v_i) = \max_{0 \leq i \leq n} \varphi(v_i) . \tag{2.21}$$

Sei nun $v \in \operatorname{int}(D(\varphi))$. Wir wählen ein n-dimensionales Simplex $S = \operatorname{co}\{v_0, \ldots, v_n\}$ mit $v \in \operatorname{int}(S) \subset \operatorname{int}(D(\varphi))$, dann ist

$$\varphi(S) \leq \max_{0 \leq i \leq n} \varphi(v_i) < \infty ,$$

also ist φ stetig nach Lemma 2.17. □

Definition 2.19 *Sei V Vektorraum, $K \subset V$. K heißt kreisförmig, falls $tK \subset K$ für alle $|t| \le 1$. K heißt absorbierend, falls zu jedem $u \in V$ ein $t \ge 0$ existiert mit $u \in tK$. K heißt* ***Tonne****, falls K abgeschlossen, konvex, kreisförmig und absorbierend ist.* □

In der Funktionalanalysis zeigt man den folgenden Satz, als Konsequenz des Baireschen Kategoriensatzes.

Satz 2.20 *Sei V Banachraum, sei $K \subset V$ eine Tonne. Dann ist $0 \in \operatorname{int}(K)$.* □

Satz 2.21 *Sei V Banachraum, $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$ konvex und unterhalbstetig. Dann ist φ stetig auf $\operatorname{int}(D(\varphi))$.*

Beweis: Sei $0 \in \operatorname{int}(D(\varphi))$, sei $\varphi(0) < c$. Wir definieren

$$U = \{v : v \in V,\, \varphi(v) \le c\}\,, \quad K = U \cap (-U)\,. \tag{2.22}$$

Da φ konvex und unterhalbstetig ist, ist U konvex und abgeschlossen, und da außerdem $0 \in U$ gilt, ist K konvex, kreisförmig und abgeschlossen. Um zu zeigen, daß K absorbierend ist, wählen wir $u \in V$ beliebig und definieren $g : \mathbb{R} \to (-\infty, \infty]$ durch $g(t) = \varphi(tu)$. Nach Satz 2.18 ist g stetig in 0, also gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $[-\varepsilon u, \varepsilon u] \subset U$, also auch $[-\varepsilon u, \varepsilon u] \subset K$ und damit $u \in (1/\varepsilon)K$, also ist K absorbierend. Nach Satz 2.20 ist $0 \in \operatorname{int}(K)$, nach Satz 2.17 ist φ stetig in 0. Für beliebiges $w \in \operatorname{int}(D(\varphi))$ betrachten wir $\tilde{\varphi}(v) = \varphi(v + w)$. □

Lemma 2.22 *Sei $\varphi : \mathbb{R} \to (-\infty, \infty]$ konvex, $u \in D(\varphi)$. Dann wird durch*

$$d(t) = \frac{\varphi(u+t) - \varphi(u)}{t} \tag{2.23}$$

eine monoton wachsende Funktion $d : (0, \infty) \to (-\infty, \infty]$ definiert. Ferner gilt $d(-t) \le d(t)$ für $t > 0$.

Beweis: Für $0 < s < t$ ist

$$u + s = \frac{t-s}{t} u + \frac{s}{t}(u+t)\,,$$

also

$$\varphi(u+s) \le \frac{t-s}{t}\varphi(u) + \frac{s}{t}\varphi(u+t)\,.$$

Subtraktion von $\varphi(u)$ und Division durch s liefert

$$d(s) = \frac{\varphi(u+s) - \varphi(u)}{s} \le \frac{\varphi(u+t) - \varphi(u)}{t} = d(t)\,.$$

Es gilt weiter für $t > 0$

$$\varphi(u) \le \frac{1}{2}\varphi(u-t) + \frac{1}{2}\varphi(u+t)\,,$$

also $\varphi(u) - \varphi(u-t) \le \varphi(u+t) - \varphi(u)$ und damit

$$\frac{\varphi(u-t) - \varphi(u)}{-t} \le \frac{\varphi(u+t) - \varphi(u)}{t}\,.$$

□

Definition 2.23 (Strikt konvexe Funktion)
Sei V Vektorraum, $K \subset V$ konvex. Eine Funktion $\varphi : K \to \mathbb{R}$ heißt strikt konvex auf K, falls

$$\varphi(\lambda u + (1-\lambda)v) < \lambda\varphi(u) + (1-\lambda)\varphi(v) \tag{2.24}$$

gilt für alle $u, v \in K$ mit $u \neq v$ und alle $\lambda \in (0,1)$.

Lemma 2.24 *Sei $K \subset \mathbb{R}$ konvex, $\varphi : K \to \mathbb{R}$ strikt konvex, $u \in K$. Dann ist*

$$d(t) = \frac{\varphi(u+t) - \varphi(u)}{t} \tag{2.25}$$

streng monoton wachsend in $(0,\infty) \cap D(d)$.

Beweis: Wie der Beweis von Lemma 2.22, aber mit der strikten Ungleichung. □

Definition 2.25 (Richtungsableitung)
Sei V Vektorraum, $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$, $u \in D(\varphi)$ und $h \in V$. Falls der Grenzwert

$$\varphi'(u;h) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{\varphi(u+th) - \varphi(u)}{t}\,. \tag{2.26}$$

in $(-\infty, \infty]$ existiert, so heißt er die Richtungsableitung von φ in u in Richtung h.

Unmittelbar aus der Definition folgt, dass die Richtungsableitung positiv homogen ist,

$$\varphi'(u;th) = t\varphi'(u;h)\,, \quad u, h \in V\,,\ t > 0\,. \tag{2.27}$$

Satz 2.26 *Sei V Vektorraum, $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$ konvex, $u \in D(\varphi)$. Dann existiert $\varphi'(u;h)$ für jedes $h \in V$, und es gilt*

$$\varphi'(u;h) = \inf_{t>0} \frac{\varphi(u+th) - \varphi(u)}{t}\,. \tag{2.28}$$

Ferner gelten

$$\varphi'(u;h) \le \varphi(u+h) - \varphi(u)\,, \tag{2.29}$$

sowie

$$-\varphi'(u;-h) \le \varphi'(u;h)\,. \tag{2.30}$$

Beweis: Nach Lemma 2.22, angewendet auf $g(t) = \varphi(u+th)$, ist der Differenzenquotient

$$d_h(t) = \frac{\varphi(u+th) - \varphi(u)}{t}$$

monoton wachsend auf $(0,\infty)$, also existiert $\lim_{t\downarrow 0} d_h(t)$ und ist gleich $\inf_{t>0} d_h(t)$. Wegen $d_h(1) = \varphi(u+h) - \varphi(u)$ gilt (2.29), und (2.30) folgt aus

$$-\frac{\varphi(u-th) - \varphi(u)}{t} = d_h(-t) \le d_h(t)\,,$$

durch Grenzübergang $t \downarrow 0$. □

3 Konjugierte Funktionen

Definition 3.1 (Konjugierte Funktion)
Sei V normierter Raum, $\varphi : V \to [-\infty, \infty]$. Die durch

$$\varphi^*(v^*) = \sup_{v \in H}(\langle v^*, v\rangle - \varphi(v)) \tag{3.1}$$

definierte Funktion $\varphi^* : V^* \to [-\infty, \infty]$ heißt die zu φ konjugierte Funktion. (Wir schreiben $\langle v^*, v\rangle$ für $v^*(v)$.)

Beispiel 3.2 **(i)** Sei V normierter Raum, $\varphi : V \to \mathbb{R}$ nach oben beschränkt, etwa $\varphi(u) \leq c$ für alle $v \in V$. Dann ist

$$\varphi^*(v^*) = \sup_{v \in V}(\langle v^*, v\rangle - \varphi(v)) \geq \sup_{v \in V} \langle v^*, v\rangle - c\,,$$

also

$$\varphi^*(v^*) = \begin{cases} -\inf_{v \in V} \varphi(v)\,, & v^* = 0\,, \\ \infty\,, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{3.2}$$

(ii) Sei $K \subset V$, $\varphi = I_K$. Dann ist

$$\varphi^*(v^*) = \sup_{v \in V}(\langle v^*, v\rangle - I_K(v)) = \sup_{v \in K} \langle v^*, v\rangle \;. \tag{3.3}$$

Diese Funktion wird auch als **Stützfunktion** der Menge K bezeichnet. Im Spezialfall $K = B =$ Einheitskugel gilt

$$I_B^*(v^*) = \|v^*\|_{V^*}\,. \tag{3.4}$$

(iii) Sei $\varphi(v) = \|v\|$ für $v \in V$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \varphi^*(v^*) &= \sup_{v \in V}(\langle v^*, v\rangle - \|v\|) = \sup_{\lambda \geq 0} \lambda \sup_{\|v\|=1} (\langle v^*, v\rangle - \|v\|) \\ &= \sup_{\lambda \geq 0} \lambda(\|v^*\|_{V^*} - 1) \\ &= \begin{cases} 0\,, & \|v^*\| \leq 1\,, \\ +\infty\,, & \|v^*\| > 1\,, \end{cases} \end{aligned}$$

also

$$\varphi^* = I_{B^*}\,, \tag{3.5}$$

wobei B^* die Einheitskugel in V^* ist.

Die Konjugation hat folgende elementare Eigenschaften (Beweis klar bzw. Übung)

$$\varphi^*(0) = \sup_{v \in V} -\varphi(v) = -\inf_{v \in V} \varphi(v)\,,$$

$$\varphi \leq \psi \quad \Rightarrow \quad \varphi^* \geq \psi^*\,,$$

$$(\lambda\varphi)^*(v^*) = \lambda\varphi^*\left(\frac{v^*}{\lambda}\right)\,, \quad \lambda > 0\,,$$

$$(\varphi + c)^* = \varphi^* - c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,,$$

$$\left(\inf_{i \in I} \varphi_i\right)^* = \sup_{i \in I} \varphi_i^*\,.$$

Lemma 3.3 *Sei V Banachraum, $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$ mit $D(\varphi) \neq \emptyset$. Dann gilt $\varphi^* : V^* \to (-\infty, \infty]$ und*

$$\langle v^*, v\rangle \le \varphi(v) + \varphi^*(v^*)\,, \quad \textit{für alle } v \in V,\ v^* \in V^*\,. \tag{3.6}$$

Beweis: Folgt direkt aus der Definition von φ^*. □

Das Beispiel der (nichtkonvexen) Funktion $\varphi(v) = -\|v\|^2$ zeigt, dass es möglich ist, dass $\varphi^* \equiv +\infty$ und damit $D(\varphi^*) = \emptyset$, es ist dann (siehe unten) außerdem $\varphi^{**} \equiv -\infty$.

Lemma 3.4 *Es gilt $D(\varphi^*) \neq \emptyset$ genau dann, wenn es eine affine stetige Funktion $g : V \to \mathbb{R}$ gibt mit $g \le \varphi$.*

Beweis: Ist $\varphi^*(v^*) < \infty$, so gilt $\varphi(v) \ge \langle v^*, v\rangle - \varphi^*(v^*) =: g(v)$ für alle $v \in V$. Ist umgekehrt $g \le \varphi$ mit $g(v) = \langle v^*, v\rangle - \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, so ist $\langle v^*, v\rangle - \varphi(v) \le \alpha$ für alle $v \in V$ und damit $\varphi^*(v^*) \le \alpha$. □

Definition 3.5 (Bikonjugierte Funktion)
Sei V Banachraum, $\varphi : V \to [-\infty, \infty]$. Die durch

$$\varphi^{**}(v) = \sup_{v^* \in V^*} \left(\langle v^*, v\rangle - \varphi^*(v^*)\right) \tag{3.7}$$

definierte Funktion $\varphi^{**} : V \to [-\infty, \infty]$ heißt die zu φ bikonjugierte Funktion.

Für $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$ können wir statt (3.1) auch schreiben

$$\varphi^*(v^*) = \sup_{v \in D(\varphi)} \left(\langle v^*, v\rangle - \varphi(v)\right) \tag{3.8}$$

Lemma 3.6 *Sei V normierter Raum, $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$. Ist $D(\varphi) \neq \emptyset$, so ist $\varphi^* : V \to (-\infty, \infty]$ konvex und unterhalbstetig. Ist außerdem $D(\varphi^*) \neq \emptyset$, so ist $\varphi^{**} : V \to (-\infty, \infty]$ konvex und unterhalbstetig.*

Beweis: Wegen

$$\varphi^*(v^*) = \sup_{v \in D(\varphi)} g_v(v^*)\,, \quad g_v(v^*) = \langle v^*, v\rangle - \varphi(v)\,,$$

ist φ^* als Supremum einer Familie affiner stetiger Funktionen darstellbar und damit konvex und unterhalbstetig. Die Aussage für φ^{**} wird auf dieselbe Weise bewiesen. □

Satz 3.7 *Sei V normierter Raum, $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$ mit $D(\varphi) \neq \emptyset$ und $D(\varphi^*) \neq \emptyset$. Dann gilt*

$$\varphi^{**} = \sup\{g|\ g : V \to \mathbb{R} \textit{ affin und stetig},\ g \le \varphi\}\,, \tag{3.9}$$

sowie $\varphi^{**} \le \varphi$.

Beweis: Aus Lemma 3.3 folgt $\varphi(v) \geq \langle v^*, v\rangle - \varphi^*(v^*)$ für alle v, v^*, also auch

$$\varphi(v) \geq \sup_{v^* \in V^*} (\langle v^*, v\rangle - \varphi^*(v^*)) = \varphi^{**}(v)\,.$$

Also ist φ^{**} eigentlich und nach Lemma 3.6 konvex und unterhalbstetig. Aus Satz 2.16 folgt

$$\varphi^{**} = \sup\{g|\ g : V \to \mathbb{R} \text{ affin und stetig, } g \leq \varphi^{**}\}\,.$$

Sei gemäß Lemma 3.4 nun $g : V \to \mathbb{R}$ affin und stetig mit $g \leq \varphi$,

$$g(v) = \langle v^*, v\rangle - \alpha\,, \quad \text{für alle } v \in V,$$

mit geeignetem $v^* \in V^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Es folgt weiter $\alpha \geq \langle v^*, v\rangle - \varphi(v)$ für alle $v \in V$, also $\alpha \geq \varphi^*(v^*)$, und weiter

$$g(v) = \langle v^*, v\rangle - \alpha \leq \langle v^*, v\rangle - \varphi^*(v^*) \leq \varphi^{**}(v)\,.$$

Wir haben also gezeigt

$$g \leq \varphi \quad \Leftrightarrow \quad g \leq \varphi^{**}\,.$$

Hieraus folgt die Behauptung. □

Folgerung 3.8 *Sei V normierter Raum, $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$ mit $D(\varphi) \neq \emptyset$ und $D(\varphi^*) \neq \emptyset$. Dann gilt*

$$\varphi^{**} = \sup\{g|\ g : V \to (-\infty, \infty] \text{ konvex und unterhalbstetig, } g \leq \varphi\}\,. \tag{3.10}$$

Beweis: "$\leq$": Folgt direkt aus Satz 3.7. "$\geq$": Ist $g : V \to (-\infty, \infty]$ konvex und unterhalbstetig mit $g \leq \varphi$, so folgt aus Satz 2.16

$$g = \sup\{h|\ h : V \to \mathbb{R} \text{ affin und stetig, } h \leq g\}\,, \tag{3.11}$$

also $g \leq \varphi^{**}$. □

Folgerung 3.9 *Sei V normierter Raum, $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$ konvex, unterhalbstetig und eigentlich. Dann ist $\varphi^{**} = \varphi$.*

Beweis: Folgt direkt aus Folgerung 3.8, da $\varphi^{**} \leq \varphi$ nach Satz 3.7. □

Ist H ein reeller Hilbertraum, so liefert uns der Satz von Riesz aus der Funktionananalysis zu jedem $v^* \in H^*$ ein $w \in H$ mit

$$v^*(v) = \langle w, v\rangle_H\ , \quad \text{für alle } v \in H,$$

wobei auf der rechten Seite das Skalarprodukt in H steht. Die Abbildung $w \to v^*$ ist bijektiv, linear und isometrisch, das heißt, $\|w\|_H = \|v^*\|_{H^*}$. Vermittels dieser Isometrie können wir die zu $\varphi : H \to [-\infty, \infty]$ konjugierte Funktion auch definieren als

$$\varphi^*(w) = \sup_{v \in H}(\langle w, v\rangle_H - \varphi(v))\,, \quad \varphi^* : H \to [-\infty, \infty]\,. \tag{3.12}$$

4 Das Subdifferential

Definition 4.1
Sei V normierter Raum, $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$. Ein $u^* \in V^*$ heißt ***Subgradient*** *für φ in u, falls $u \in D(\varphi)$ und*

$$\varphi(v) \geq \varphi(u) + \langle u^*, v - u \rangle \ , \quad \textit{für alle } v \in V\,. \tag{4.1}$$

Die Menge

$$\partial\varphi(u) = \{u^* : u^* \in V^*,\, u^* \textit{ Subgradient für } \varphi \textit{ in } u\} \tag{4.2}$$

heißt ***Subdifferential*** *von φ in u. Falls $\varphi(u) = +\infty$, so setzen wir $\partial\varphi(u) = \emptyset$.*

Beispiel 4.2

(i) Für $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(v) = |v|$, gilt $\partial\varphi(u) = \{1\}$ falls $u > 0$, $\partial\varphi(u) = \{-1\}$ falls $u < 0$, sowie $\partial\varphi(0) = [-1, 1]$.

(ii) Für $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(v) = \begin{cases} 1\,, & v > 0\,, \\ 0\,, & v \leq 0\,, \end{cases}$$

gilt $\partial\varphi(0) = \{0\}$. Definieren wir aber

$$\varphi(v) = \begin{cases} 1\,, & v \geq 0\,, \\ 0\,, & v < 0\,, \end{cases}$$

so gilt $\partial\varphi(0) = \emptyset$.

Definition 4.3
Sei V normierter Raum, $K \subset V$ konvex, $u \in K$. Ein $u^* \in V^*$ heißt Stützfunktional für K in u, falls

$$\langle u^*, v - u \rangle \leq 0\,, \qquad \textit{für alle } v \in K\,. \tag{4.3}$$

Die Menge

$$N_K(u) = \{v^* : v^* \in V^*,\, v^* \textit{ ist Stützfunktional für } K \textit{ in } u\} \tag{4.4}$$

heißt der ***Normalenkegel*** *an K in u.*

Lemma 4.4 *Sei V normierter Raum, $K \subset V$ konvex. Dann gilt*

$$\partial I_K(u) = N_K(u)\,, \quad \textit{falls } u \in K, \tag{4.5}$$

und $\partial I_K(u) = \emptyset$ andernfalls.

Beweis: Direkt aus der Definition. □

Satz 4.5 *Sei V normierter Raum, $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$, $u \in D(\varphi)$. Dann gilt*

$$\varphi(u) = \min_{v \in V} \varphi(v) \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 \in \partial\varphi(u)\,. \tag{4.6}$$

Beweis: Direkt aus der Definition. □

Satz 4.6 *Sei V normierter Raum, $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$ konvex, sei φ differenzierbar in einem Punkt $u \in \operatorname{int}(D(\varphi))$. Dann ist $\partial\varphi(u) = \{\varphi'(u)\}$.*

Beweis: Es ist

$$\langle \varphi'(u), v - u \rangle = \varphi'(u; v - u) \le \varphi(v) - \varphi(u)$$

wegen Satz 2.26, also $\varphi'(u) \in \partial\varphi(u)$. Ist $u^* \in \partial\varphi(u)$, so gilt

$$\varphi(u + th) - \varphi(u) \ge t \,\langle u^*, h \rangle$$

für alle $h \in V$ und alle $t > 0$. Division durch t und Grenzübergang $t \downarrow 0$ ergibt

$$\langle \varphi'(u), h \rangle = \varphi'(u; h) \ge \langle u^*, h \rangle \;, \quad \text{für alle } h \in V,$$

also $\varphi'(u) = u^*$. □

Lemma 4.7 *Sei V normierter Raum, $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$, $u \in V$. Dann gilt*

$$u^* \in \partial\varphi(u) \qquad \Leftrightarrow \qquad \varphi(u) + \varphi^*(u^*) = \langle u^*, u \rangle \;, \tag{4.7}$$

$$u \in \partial\varphi^*(u^*) \qquad \Leftrightarrow \qquad \varphi^{**}(u) + \varphi^*(u^*) = \langle u^*, u \rangle \;. \tag{4.8}$$

Auf der linken Seite von (4.8) wird u als Element des Bidualraums V^{**} aufgefaßt.

Beweis: Wir zeigen (4.7), der Beweis von (4.8) verläuft analog. Es gilt

$$\begin{aligned} u^* \in \partial\varphi(u) &\Leftrightarrow u \in D(\varphi) \text{ und } \varphi(v) \ge \varphi(u) + \langle u^*, v - u \rangle \quad \forall\, v \in V \\ &\Leftrightarrow u \in D(\varphi) \text{ und } \langle u^*, u \rangle - \varphi(u) \ge \langle u^*, v \rangle - \varphi(v) \quad \forall\, v \in V \\ &\Leftrightarrow u \in D(\varphi) \text{ und } \langle u^*, u \rangle - \varphi(u) \ge \varphi^*(u^*) \\ &\Leftrightarrow \langle u^*, u \rangle \ge \varphi(u) + \varphi^*(u^*)\,. \end{aligned}$$

Die andere Ungleichung gilt immer, nach Lemma 3.3. □

Lemma 4.8 *Sei V normierter Raum, $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$, $u \in V$ mit $\partial\varphi(u) \ne \emptyset$. Dann gilt $\varphi^{**}(u) = \varphi(u)$ und*

$$u^* \in \partial\varphi(u) \quad \Rightarrow \quad u \in \partial\varphi^*(u^*)\,. \tag{4.9}$$

Beweis: Sei $u^* \in \partial\varphi(u)$. Aus $\varphi^{**}(u) \ge \langle u^*, u \rangle - \varphi^*(u^*)$ folgt nach (4.7)

$$\langle u^*, u \rangle \le \varphi^{**}(u) + \varphi^*(u^*) \le \varphi(u) + \varphi^*(u^*) = \langle u^*, u \rangle \;, \tag{4.10}$$

also gilt überall die Gleichheit und aus Lemma 4.7 folgt, dass $u \in \partial\varphi^*(u^*)$. □

Es ergibt sich der folgende wesentliche Zusammenhang von Subdifferential und Konjugation.

Satz 4.9 *Sei V normierter Raum, $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$ konvex, unterhalbstetig und eigentlich. Dann gilt*

$$u^* \in \partial\varphi(u) \quad \Leftrightarrow \quad u \in \partial\varphi^*(u^*)\,. \tag{4.11}$$

Beweis: Nach Folgerung 3.9 ist $\varphi^{**} = \varphi$. Die Behauptung folgt dann aus Lemma 4.7. □

Erinnerung aus der Funktionalanalysis: Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, so ist der Dualraum von $L^p(\Omega)$ für $1 \le p < \infty$ isometrisch isomorph zu $L^q(\Omega)$ mit $1/p + 1/q = 1$ vermittels $v^* \leftrightarrow w$,

$$v^*(v) = \int_\Omega w(x)v(x)\,dx\,.$$

In dieser Situation gilt der folgende Satz.

Satz 4.10 *Sei $\varphi : \mathbb{R} \to (-\infty, \infty]$ konvex, unterhalbstetig und eigentlich. Dann gilt dasselbe für $\Phi : L^p(\Omega) \to (-\infty, \infty]$,*

$$\Phi(v) = \int_\Omega \varphi(v(x))\,dx\,, \quad \textit{falls } \varphi \circ v \in L^1(\Omega), \tag{4.12}$$

und $\Phi(v) = +\infty$ andernfalls. Weiterhin gilt für $w \in L^q(\Omega)$

$$w \in \partial\Phi(u) \quad \Leftrightarrow \quad w(x) \in \partial\varphi(u(x))\,, \quad \textit{a.e. in } \Omega. \tag{4.13}$$

Beweis: Seien c, α so gewählt (siehe Satz 2.16), dass

$$\varphi(y) \ge cy - \alpha\,, \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}. \tag{4.14}$$

Φ ist eigentlich: Ist $y \in D(\varphi)$, so ist $v \in D(\Phi)$ für $v \equiv y$.
Φ ist konvex: Sind $u, v \in D(\Phi)$ und $\lambda \in (0, 1)$, so gilt für fast alle $x \in \Omega$

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda u(x) + (1-\lambda)v(x)) &\ge c(\lambda u(x) + (1-\lambda)v(x)) - \alpha\,, \\ \varphi(\lambda u(x) + (1-\lambda)v(x)) &\le \lambda\varphi(u(x)) + (1-\lambda)\varphi(v(x))\,, \end{aligned} \tag{4.15}$$

und da $L^p(\Omega) \subset L^1(\Omega)$, folgt $\varphi \circ (\lambda u + (1-\lambda)v)) \in L^1(\Omega)$, also $\lambda u + (1-\lambda)v \in D(\Phi)$, und Φ ist konvex wegen (4.15).
Φ ist unterhalbstetig: Seien $(v_n, r_n) \in \operatorname{epi}\Phi$ mit $v_n \to v$ in $L^p(\Omega)$ und $r_n \to r$, zu zeigen ist $(v, r) \in \operatorname{epi}\Phi$. Nach einem Satz der Integrationstheorie gibt es eine Teilfolge (v_{n_k}) mit $v_{n_k} \to v$ punktweise a.e.. Aus dem Lemma von Fatou folgt, da alle Integranden nichtnegativ sind wegen (4.14),

$$\begin{aligned} \int_\Omega \varphi(v(x)) - (cv(x) - \alpha)\,dx &\le \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega \varphi(v_{n_k}(x)) - (cv_{n_k}(x) - \alpha)\,dx \\ &= \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega \varphi(v_{n_k}(x))\,dx - \int_\Omega cv(x) - \alpha\,dx \end{aligned}$$

sowie

$$\liminf_{k\to\infty} \int_\Omega \varphi(v_{n_k}(x))\,dx = \liminf_{k\to\infty} \Phi(v_{n_k}) \le \lim_{k\to\infty} r_{n_k} = r\,,$$

also insgesamt $\Phi(v) \le r$ und damit $(v,r) \in \operatorname{epi}\Phi$.
Das Subdifferential: Die Implikation "$\Leftarrow$" folgt aus der Rechnung

$$\Phi(v) - \Phi(u) = \int_\Omega \varphi(v(x)) - \varphi(u(x))\,dx \ge \int_\Omega w(x)(v(x) - u(x)\,dx = \langle w, v-u\rangle \ .$$

Sei umgekehrt $w \in \partial\Phi(u)$. Die Definition des Subdifferentials ergibt

$$\int_\Omega \varphi(v(x)) - \varphi(u(x))\,dx \ge \int_\Omega w(x)(v(x) - u(x))\,dx\,, \quad \text{für alle } v \in L^p(\Omega).$$

Sei $y \in \mathbb{R}$, sei A eine beliebige messbare Teilmenge von Ω. Setzen wir $v(x) = y$ für $x \in A$ und $v(x) = u(x)$ andernfalls, so folgt

$$\int_A \varphi(y) - \varphi(u(x))\,dx \ge \int_A w(x)(y - u(x))\,dx\,.$$

Da A beliebig war, folgt

$$\varphi(y) - \varphi(u(x)) \ge w(x)(y - u(x))\,, \quad \text{a.e. in } \Omega.$$

Da y beliebig war, folgt $w(x) \in \partial\varphi(u(x))$ a.e. in Ω. □

Satz 4.11 *Sei V normierter Raum, $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$ konvex, $u \in V$. Ist φ stetig in u, so gilt $\partial\varphi(u) \neq \emptyset$.*

Beweis: Aus der Stetigkeit von φ in u folgt, dass $\operatorname{int}(\operatorname{epi}\varphi)$ nichtleer ist (siehe Übung). Es ist $(u, \varphi(u)) \notin \operatorname{int}(\operatorname{epi}\varphi)$, da $(u, \varphi(u) - \delta) \notin \operatorname{epi}\varphi$ für alle $\delta > 0$. Aus dem Trennungssatz folgt, dass es ein $z^* \in (V \times \mathbb{R})^*$ gibt mit

$$z^*(u, \varphi(u)) \le z^*(\operatorname{epi}\varphi)\,, \quad z^* \neq 0\,. \tag{4.16}$$

Wir zerlegen z^* in

$$z^*(v, \alpha) = u^*(v) + \lambda\alpha\,, \quad u^* \in V^*\,,\ \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

Die Ungleichung (4.16) hat $\lambda \ge 0$ zur Folge. Wäre $\lambda = 0$, so wäre

$$u^*(u) \le u^*(v)\,, \quad \text{für alle } v \in D(\varphi)\,,$$

woraus wegen $u \in \operatorname{int}(D(\varphi))$ folgen würde, dass $u^* = 0$ gilt, im Widerspruch zu $z^* \neq 0$. Also ist $\lambda > 0$. Für alle $v \in D(\varphi)$ gilt

$$u^*(u) + \lambda\varphi(u) \le u^*(v) + \lambda\varphi(v)\,,$$

also folgt

$$\varphi(v) \ge \varphi(u) + \big\langle -\frac{1}{\lambda}u^*\,,\, v - u\big\rangle$$

für alle $v \in V$ und damit

$$-\frac{1}{\lambda}u^* \in \partial\varphi(u)\,.$$

□

Folgerung 4.12 *Sei V Banachraum, sei $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$ konvex, unterhalbstetig und eigentlich. Dann gilt* $\operatorname{int}(D(\varphi)) \subset D(\partial\varphi)$*.*

Beweis: Die Behauptung folgt direkt aus Satz 4.11, da φ auf $\operatorname{int}(D(\varphi))$ stetig ist nach Satz 2.21. □

Direkt aus der Definition des Subdifferentials erhält man, dass

$$\partial(\lambda\varphi)(u) = \lambda\partial\varphi(u)\,, \quad \text{für alle } u \in V,\ \lambda > 0, \tag{4.17}$$

gilt für $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$, V Banachraum.

Ebenso folgt direkt aus der Definition, dass

$$\partial(\varphi_1 + \varphi_2)(x) \supset \partial\varphi_1(x) + \partial\varphi_2(x)\,. \tag{4.18}$$

Die Umkehrung gilt nicht immer, aber beispielsweise im folgenden Fall.

Satz 4.13 *Sei V normierter Raum, seien $\varphi_1, \varphi_2 : V \to (-\infty, \infty]$ konvex. Es gebe einen Punkt $\tilde{u} \in D(\varphi_1) \cap D(\varphi_2)$, in dem φ_1 stetig ist. Dann gilt*

$$\partial(\varphi_1 + \varphi_2)(u) = \partial\varphi_1(u) + \partial\varphi_2(u)\,, \qquad \textit{für alle } u \in V. \tag{4.19}$$

Beweis: Für den Beweis von "$\subset$" muss man zeigen, dass sich jedes Funktional in $\partial(\varphi_1 + \varphi_2)(u)$ sich als Summe von Funktionalen aus $\partial\varphi_1(u)$ und $\partial\varphi_2(u)$ schreiben lässt. Die Existenz einer solchen Zerlegung erhält man, indem man den Trennungssatz auf zwei geeignet konstruierte konvexe Mengen anwendet; die Voraussetzung des Satzes garantiert dabei, dass eine dieser beiden Mengen ein nichtleeres Inneres hat. Wir verzichten darauf, diesen Beweis im Einzelnen vorzuführen. □

Wir betrachten nun das Subdifferential einer Komposition $\varphi \circ A$, wobei $A : V \to W$ linear und stetig ist. Wir erinnern an die Definition der zu A adjungierten Abbildung $A^* : W^* \to V^*$,

$$\langle A^* w^*, u\rangle = \langle w^*, Au\rangle\ . \tag{4.20}$$

Satz 4.14 *Seien V, W normierte Räume, $A : V \to W$ linear und stetig, $\varphi : W \to (-\infty, \infty]$ konvex, und es gebe ein $\tilde{u} \in V$, so daß φ stetig in $A\tilde{u}$ ist. Dann gilt*

$$\partial(\varphi \circ A)(u) = (A^*\partial\varphi)(Au)\,, \quad \textit{für alle } u \in V. \tag{4.21}$$

Beweis: Auch dieser Satz wird durch eine Anwendung des Trennungssatzes bewiesen. □

Es kommt durchaus vor, dass das Innere von $D(\varphi)$ leer ist. Ein im späteren Verlauf der Vorlesung auftretendes Beispiel ist

$$V = L^2(\Omega)\,, \quad \varphi(v) = \begin{cases} \int_\Omega \|\nabla v(x)\|^2\,dx\,, & v \in H_0^1(\Omega)\,, \\ +\infty\,, & \text{sonst.} \end{cases}$$

In jedem Fall gilt, dass $D(\partial\varphi)$ dicht liegt in $D(\varphi)$ für konvexe, unterhalbstetige eigentliche Funktionen φ. Wir beschränken uns auf den Fall eines Hilbertraums.

Satz 4.15 *Sei H Hilbertraum, sei $\varphi : H \to (-\infty, \infty]$ konvex, unterhalbstetig und eigentlich. Dann gibt es zu jedem $u \in D(\varphi)$ eine Folge $u_n \in D(\partial\varphi)$ mit $u_n \to u$ in H und $\varphi(u_n) \to \varphi(u)$. Insbesondere liegt $D(\partial\varphi)$ dicht in $D(\varphi)$.*

Beweis: Sei $u \in D(\varphi)$, sei $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung an φ ist $\operatorname{epi}\varphi$ konvex, abgeschlossen und nichtleer. Wir betrachten den Punkt $z = (u, \varphi(u) - \varepsilon)$ in $H \times \mathbb{R}$. Nach dem Projektionssatz im Hilbertraum $H \times \mathbb{R}$ gibt es in $\operatorname{epi}\varphi$ einen Punkt $z_P = (p, \pi)$ kleinsten Abstands zu z. Dieser erfüllt die Variationsungleichung

$$\langle A - P_A, (v, \mu) - P_A \rangle_{H\times\mathbb{R}} \le 0\,, \quad \text{für alle } (v, \mu) \in \operatorname{epi}\varphi.$$

Zerlegt man das Skalarprodukt im Produktraum in die beiden Komponenten, so bedeutet das

$$\langle u - p, v - p \rangle_H + (\varphi(u) - \varepsilon - \pi)(\mu - \pi) \le 0\,, \quad \text{für alle } (v, \mu) \in \operatorname{epi}\varphi. \tag{4.22}$$

Da $(p, \pi) \in \operatorname{epi}\varphi$, gilt

$$\varphi(p) \le \pi\,. \tag{4.23}$$

Wählen wir $\mu > 0$ hinreichend groß in (4.22) so ergibt sich

$$\varphi(u) - \varepsilon - \pi \le 0\,. \tag{4.24}$$

Nehmen wir an, dass in (4.24) Gleichheit gilt, so führt (4.22) mit $v = u$ auf $\langle u - p, u - p \rangle \le 0$, also $p = u$. In diesem Fall ist $(u, \varphi(u))$ die beste Approximation in $\operatorname{epi}\varphi$ von $(u, \varphi(u) - \varepsilon)$, also $\pi = \varphi(u)$ wegen (4.23), ein Widerspruch zur Gleichheit in (4.24). Es gilt also

$$\varphi(u) - \varepsilon - \pi < 0\,. \tag{4.25}$$

Wir setzen $v = p$ und $\mu = \varphi(p)$ in (4.22) ein, es ergibt sich

$$(\varphi(u) - \varepsilon - \pi)(\varphi(p) - \pi) \le 0\,.$$

Wegen (4.25) folgt $\varphi(p) - \pi \ge 0$, und mit (4.23)

$$\pi = \varphi(p)\,. \tag{4.26}$$

Mit

$$\lambda := \varphi(p) + \varepsilon - \varphi(u) > 0 \tag{4.27}$$

folgt für beliebiges $v \in D(\varphi)$, $\mu = \varphi(v)$, in (4.22)

$$\frac{1}{\lambda} \langle u - p, v - p \rangle \le \varphi(v) - \varphi(p)\,.$$

Gemäß der Definition des Subdifferentials bedeutet das

$$\frac{1}{\lambda}(u - p) \in \partial\varphi(p)\,, \quad \text{also} \quad p \in D(\partial\varphi)\,. \tag{4.28}$$

Wir setzen nun $v = u$ und $\mu = \varphi(u)$ in (4.22) ein und erhalten mit (4.26) und (4.24)

$$\|u - p\|^2 + (\varphi(u) - \varphi(p))^2 \le \varepsilon(\varphi(u) - \varphi(p)) \le \varepsilon^2$$

und also

$$\|u - p\| \le \varepsilon\,, \quad |\varphi(u) - \varphi(p)| \le \varepsilon\,. \tag{4.29}$$

Alle Behauptungen folgen nun, indem wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ setzen $\varepsilon = 1/n$, $u_n = p$. $\Box$

Wir betrachten nun das Subdifferential der Abbildung

$$\varphi(v) = \frac{1}{2}\|v\|^2\,. \tag{4.30}$$

Für $V = \mathbb{R}$ gilt $\varphi'(u) = u$. Ist V Hilbertraum, so ist

$$\varphi(u+h) - \varphi(u) = \frac{1}{2}\big(\,\langle u+h, u+h\rangle_H - \langle u, u\rangle_H\,\big) = \langle u, h\rangle_H - \frac{1}{2}\|h\|^2$$

für alle $u, h \in V$. Es folgt, dass φ differenzierbar ist mit

$$\langle \varphi'(u), h\rangle = \langle u, h\rangle_H\;. \tag{4.31}$$

Sei nun $J : V \to V^*$ die durch den Satz von Riesz vermittelte Isometrie,

$$\langle J(u), v\rangle = \langle u, v\rangle_H\;,$$

so haben wir erhalten

$$\varphi'(u) = J(u)\,. \tag{4.32}$$

Definition 4.16 (Dualitätsabbildung)
Sei V Banachraum. Wir definieren $J : V \to \mathcal{P}(V^*)$ durch

$$J(u) = \{u^* : u^* \in V^*\,,\, \langle u^*, u\rangle = \|u\|^2\,,\, \|u^*\| = \|u\|\}\,. \tag{4.33}$$

Die Abbildung J heißt die Dualitätsabbildung von V. $\Box$

Unmittelbar aus der Definition folgt, dass

$$J(tu) = tJ(u)\,, \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}. \tag{4.34}$$

Satz 4.17
Sei V Banachraum. Dann gilt

$$J = \partial\varphi \tag{4.35}$$

mit

$$\varphi(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2\,.$$

Als Konsequenz erhalten wir aus Satz 4.11, dass $J(u) \ne \emptyset$ für alle $u \in V$. (Das kann man auch direkt mit dem Satz von Hahn-Banach beweisen.)

Beweis: Ist $u^* \in J(u)$, so gilt für alle $v \in V$

$$\begin{aligned}\langle u^*, v-u\rangle &= \langle u^*, v\rangle - \|u\|^2 \le \|u^*\|\|v\| - \|u\|^2 = \|u\|\|v\| - \|u\|^2 \\ &\le \frac{1}{2}(\|v\|^2 - \|u\|^2)\,,\end{aligned}$$

also $u^* \in \partial\varphi(u)$. Sei umgekehrt $u^* \in \partial\varphi(u)$. Nach Definition gilt

$$\frac{1}{2}(\|v\|^2 - \|u\|^2) \ge \langle u^*, v-u\rangle\ , \quad \text{für alle } v \in V.$$

Mit $v = tu$, $t > 0$, folgt

$$\frac{1}{2}(t^2-1)\|u\|^2 \ge (t-1)\langle u^*, u\rangle\ .$$

Für $t < 1$ folgt

$$\frac{1}{2}(t+1)\|u\|^2 \le \langle u^*, u\rangle\ ,$$

und mit $t \uparrow 1$ ergibt sich

$$\|u\|^2 \le \langle u^*, u\rangle\ .$$

Für $t > 1$ folgt

$$\frac{1}{2}(t+1)\|u\|^2 \ge \langle u^*, u\rangle\ ,$$

und mit $t \downarrow 1$ ergibt sich

$$\|u\|^2 \ge \langle u^*, u\rangle\ .$$

Wir haben erhalten

$$\|u\|^2 = \langle u^*, u\rangle \le \|u^*\|\|u\|\,, \quad \|u\| \le \|u^*\|\,. \tag{4.36}$$

Wir setzen nun $v = u + th$, $t > 0$, $h \in V$ beliebig. Es gilt dann

$$\begin{aligned}t\langle u^*, h\rangle &= \langle u^*, v-u\rangle \le \frac{1}{2}(\|u+th\|^2 - \|u\|^2) \\ &\le \frac{1}{2}(\|u\|^2 + 2t\|u\|\|h\| + t^2\|h\|^2 - \|u\|^2) = t\|u\|\|h\| + \frac{1}{2}t^2\|h\|^2\,.\end{aligned}$$

Division durch t und Grenzübergang $t \downarrow 0$ führt auf $\langle u^*, h\rangle \le \|u\|\|h\|$ für alle $h \in V$, also auch

$$\|u^*\| \le \|u\|\,. \tag{4.37}$$

Die Behauptung folgt nun aus (4.36) und (4.37). □

Im allgemeinen enthält $J(u)$ mehr als ein Element, beispielsweise für den $\mathbb{R}^n$ versehen mit der Norm $\|\cdot\|_1$ oder $\|\cdot\|_\infty$.

Definition 4.18
Ein Banachraum V heißt ***strikt konvex****, falls*

$$\|\lambda u + (1-\lambda)v\| < 1$$

gilt für alle $u, v \in V$ mit $\|u\| = \|v\| = 1$, $u \ne v$, $0 < \lambda < 1$. □

$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ ist strikt konvex für $1 < p < \infty$, nicht strikt konvex für $p = 1$ und $p = \infty$. Dasselbe gilt für den $L^p(\Omega)$.

Unmittelbar aus der Definition folgt, dass jeder Hilbertraum strikt konvex ist.

Man kann beweisen, dass gilt

$\|\cdot\|_V$ ist differenzierbar	V^* ist strikt konvex
$\|\cdot\|_{V^*}$ ist differenzierbar	V ist strikt konvex

Satz 4.19
Sei V Banachraum. Ist V^* strikt konvex, so ist $J(u)$ einelementig für jedes $u \in V$.

Beweis: Wegen $J(tu) = tJ(u)$ für $t \in \mathbb{R}$ genügt es, $u \in V$ mit $\|u\| = 1$ zu betrachten. Sind $u_1^*, u_2^* \in J(u)$, so gilt

$$1 = \frac{1}{2}(\|u_1^*\|^2 + \|u_2^*\|^2) = \left\langle \frac{1}{2}(u_1^* + u_2^*), u \right\rangle \le \|\frac{1}{2}(u_1^* + u_2^*)\| \,,$$

also $u_1^* = u_2^*$ nach Definition der strikten Konvexität. □

Für $V = L^p(\Omega)$ gilt (Übung), wenn wir $L^p(\Omega)^*$ mit $L^q(\Omega)$ identifizieren,

$$(Ju)(x) = |u(x)|^{p-2}u(x)\|u\|_p^{2-p} \,, \quad \text{a.e. in } \Omega. \tag{4.38}$$

Satz 4.20 *Sei V strikt konvexer Banachraum mit strikt konvexem Dualraum V^*, sei $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$ konvex, unterhalbstetig und eigentlich, $f \in V$, $c > 0$. Dann hat die Funktion $\psi : V \to (-\infty, \infty]$,*

$$\psi(v) = \frac{c}{2}\|v - f\|^2 + \varphi(v) \,, \tag{4.39}$$

ein eindeutig bestimmtes Minimum $u \in V$, und es gilt

$$cJ(f - u) \in \partial\varphi(u) \,, \tag{4.40}$$

wobei J die Dualitätsabbildung ist.

Beweis: Mit φ ist auch ψ konvex, unterhalbstetig und eigentlich. Nach Satz 2.16 hat ψ eine affine Minorante, es gibt also $v^* \in V^*$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$\varphi(v) \ge \langle v^*, v\rangle - \alpha \,, \quad \text{für alle } v \in V.$$

Es ist dann

$$\psi(v) \ge \|v\|(\frac{c}{2}\|v\| - c\|f\| - \|v^*\|) - \alpha \,, \quad \text{für alle } v \in V,$$

also ist ψ nach unten beschränkt, und $\psi(v) \to \infty$ für $\|v\| \to \infty$. Aus Satz 2.15 folgt, daß ψ ein Minimum $u \in V$ hat; dieses ist eindeutig, da ψ sogar strikt konvex ist. Aus Satz 4.5, Satz 4.13, Satz 4.17 und Satz 4.19 folgt

$$0 \in \partial\psi(u) = cJ(u-f) + \partial\varphi(u)\,,$$

also

$$cJ(f-u) \in \partial\varphi(u)\,,$$

□

Definition 4.21 (Moreau-Regularisierung)
Sei V Banachraum, $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$ konvex, unterhalbstetig und eigentlich, sei $\lambda > 0$. Die Funktion

$$\varphi_\lambda(u) = \min_{v\in V}\left(\frac{1}{2\lambda}\|v-u\|^2 + \varphi(v)\right) \tag{4.41}$$

heißt die Moreau-Regularisierung von φ.

Beispiel 4.22 (i) Sei $V = \mathbb{R}$, $\varphi = I_{\{0\}}$, das heißt, $\varphi(r) = 0$ für $r = 0$ und $\varphi(r) = \infty$ für $r \neq 0$. Die Moreau-Regularisierung ist

$$\varphi_\lambda(r) = \min_{s\in\mathbb{R}}\left(\frac{1}{2\lambda}|s-r|^2 + \varphi(s)\right) = \frac{1}{2\lambda}r^2\,.$$

(ii) Sei $V = \mathbb{R}$, $\varphi(r) = |r|$. Die Moreau-Regularisierung ergibt sich als

$$\varphi_\lambda(r) = \begin{cases} r - \frac{\lambda}{2}\,, & r > \lambda\,,\\ \frac{r^2}{2\lambda}\,, & |r| \le \lambda\,,\\ -r - \frac{\lambda}{2}\,, & r < -\lambda\,. \end{cases}$$

(iii) Sei K eine abgeschlossene konvexe Teilmenge eines Hilbertraums H, sei $\varphi = I_K$. Für die Moreau-Regularisierung gilt

$$\varphi_\lambda(u) = \min_{v\in H}\left(\frac{1}{2\lambda}\|v-u\|^2 + I_K(v)\right) = \frac{1}{2\lambda}(\mathrm{dist}\,(u,K))^2\,.$$

□

Gradientenfluss, ein Beispiel. Subdifferentiale werden in der Lösungstheorie gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen eingesetzt. Als Beispiel betrachten wir das Anfangswertproblem im $\mathbb{R}$

$$u' + \mathrm{sign}\,(u) = 0\,, \quad u(0) = u_0\,, \tag{4.42}$$

wobei sign $: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ definiert ist durch $\mathrm{sign}\,(r) = r/|r|$. Es ist $u' = 1$ in $\{u < 0\}$ und $u' = -1$ in $\{u > 0\}$. Eine Lösung zum Anfangswert $u_0 = 0$ existiert genau dann, wenn wir $\mathrm{sign}\,(0) = 0$ setzen, dann ist $u = 0$ eine Lösung auf $\mathbb{R}_+$.

Setzen wir die Signumsfunktion auf $\mathbb{R}$ fort, so ist sign $: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monotone Funktion genau dann, wenn $\mathrm{sign}\,(0) \in [-1,1]$. Sind nun u_1, u_2 Lösungen von (4.42), so folgt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{1}{2}(u_2-u_1)^2 = (u_2-u_1)(u_2'-u_1') = -(u_2-u_1)(\mathrm{sign}\,(u_2) - \mathrm{sign}\,(u_1)) \le 0\,, \tag{4.43}$$

das heißt, Lösungen von (4.42) sind eindeutig bestimmt.

Um eine Existenzaussage zu erhalten, bei der man sich nicht über die Wahl von sign (0) Gedanken machen muss, ist es zweckmässig, die Signumfunktion als mengenwertige Funktion sign $: \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ fortzusetzen,

$$\operatorname{sign}(r) = \begin{cases} 1\,, & r > 0 \\ [-1,1]\,, & r = 0 \\ -1\,, & r < 0 \end{cases} \tag{4.44}$$

Die Differentialgleichung $u' + \operatorname{sign}(u) = 0$ wird ersetzt durch die **Differentialinklusion**

$$u' + \operatorname{sign}(u) \ni 0\,,$$

das Anfangswertproblem (4.42) erhält die Form

$$u' + \operatorname{sign}(u) \ni 0\,, \quad u(0) = u_0\,. \tag{4.45}$$

Die Differentialinklusion lässt sich auch schreiben als $-u' \in \operatorname{sign}(u)$, Lösungen sind Funktionen mit $-u'(t) \in \operatorname{sign}(u(t))$. Für $u_0 = 1$ ergibt sich beispielsweise

$$u(t) = \begin{cases} 1 - t\,, & t \in [0,1]\,, \\ 0\,, & t \geq 1\,. \end{cases}$$

Die Ableitung u' ist unstetig, aber integrierbar, und der Hauptsatz gilt. Das Monotonieargument aus (4.43) bleibt gültig unabhängig davon, welche Werte in $[-1,1]$ die Signumsfunktion an den Nullstellen der Lösungen u_1 und u_2 annimmt.

Wir bemerken außerdem, dass für die mengenwertige Version (4.44) der Signumsfunktion gilt sign $= \partial\varphi$ mit $\varphi(r) = |r|$, so dass (4.45) die Form

$$u' + \partial\varphi(u) \ni 0\,, \quad u(0) = u_0\,, \tag{4.46}$$

annimmt. Die Lösung "$u = u(t, u_0)$" von (4.46) bezeichnet man auch als **Gradientenfluss** (gradient flow).

5 Monotone Operatoren

Seien V, W Mengen, $R \subset V \times W$ eine Relation. Eine Relation kann als mengenwertige Abbildung

$$A : V \to \mathcal{P}(W)\,, \tag{5.1}$$

geschrieben auch

$$A : V \rightrightarrows W\,, \tag{5.2}$$

aufgefaßt werden, indem wir setzen

$$Av = \{w : w \in W,\ (v,w) \in R\}\,. \tag{5.3}$$

Wir bezeichnen

$$D(A) = \{v : v \in V,\ Av \neq \emptyset\} \tag{5.4}$$

als Definitionsbereich von A, und

$$\operatorname{im}(A) = \bigcup_{v \in V} Av \tag{5.5}$$

als Bildbereich von A. Sind $A, B : V \rightrightarrows W$ mengenwertige Abbildungen, die aus den Relationen R und S entstanden sind, so heißt B Erweiterung von A, falls $R \subset S$ (und echte Erweiterung von A, falls außerdem $R \neq S$).

Ist $A : V \rightrightarrows W$, so ist die Inverse $A^{-1} : W \rightrightarrows V$ definiert durch

$$A^{-1}w = \{v : v \in V,\, w \in Av\}\,. \tag{5.6}$$

Es gilt offensichtlich $D(A^{-1}) = \operatorname{im}(A)$ wegen

$$w \in Av \qquad \Leftrightarrow \qquad v \in A^{-1}w \tag{5.7}$$

für alle $v \in V$, $w \in W$.

Definition 5.1 (Maximal monotoner Operator)
Sei V Banachraum, $K \subset V$. Ein Operator $A : K \rightrightarrows V^*$ heißt monoton, falls

$$\langle u^* - v^*, u - v\rangle \geq 0\,, \quad \text{für alle } u, v \in K,\ u^* \in Au,\ v^* \in Av. \tag{5.8}$$

Ein monotones A heißt maximal monoton, falls es keine echte Erweiterung von A in $K \times V^*$ gibt, die monoton ist. Ein monotones A heißt streng monoton, falls $\langle u^* - v^*, u - v\rangle > 0$ gilt in (5.8) für $u \neq v$.

Der Standardfall ist $K = V$. Jedes monotone $A : K \rightrightarrows V^*$ können wir vermittels $\tilde{A}v = \emptyset$ für $v \notin K$ kanonisch zu einem monotonen $\tilde{A} : V \rightrightarrows V^*$ fortsetzen

Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend, wird durch

$$\tilde{f}(r) = [f(r-), f(r+)]\,, \quad f(r-) := \sup_{t<r} f(t)\,, \quad f(r+) := \inf_{t>r} f(t)\,, \tag{5.9}$$

ein maximal monotoner Operator $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ definiert, er ist die einzige maximal monotone Fortsetzung von f.

Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monoton wachsend, so ist die eindeutige maximal monotone Fortsetzung $\tilde{f} : [a, b] \rightrightarrows \mathbb{R}$ von f gegeben durch (5.9) für $a < r < b$ und

$$\tilde{f}(a) = (-\infty, f(a)]\,, \quad \tilde{f}(b) = [f(b), +\infty)\,. \tag{5.10}$$

Fasst man hingegen dasselbe f als mengenwertige Abbildung $f : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ auf mit $f(r) = \emptyset$ für $r \notin [a, b]$, so gibt es viele maximal monotone Fortsetzungen $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ von f.

Ist H ein Hilbertraum, so können wir vermittels der Riesz-Dualität statt $A : H \rightrightarrows H^*$ auch $A : H \rightrightarrows H$ betrachten. Monotonie von A bedeutet dann definitionsgemäß, dass

$$\langle w - z, u - v\rangle \geq 0\,, \quad \text{für alle } u, v \in H,\ w \in Au,\ z \in Av. \tag{5.11}$$

Als direkte Anwendung des Zornschen Lemmas kann man zeigen, dass jeder monotone Operator eine maximal monotone Erweiterung besitzt.

Unmittelbar aus der Definition des Subdifferentials folgt, dass $\partial\varphi$ monoton ist für jede Funktion $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$.

Für $A, B : V \rightrightarrows V^*$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ setzen wir

$$\begin{aligned} \lambda A &= \{(v, \lambda w) : v \in V\,,\ w \in Av\}\,, \\ A + B &= \{(v, w + z) : v \in V\,,\ w \in Av\,,\ z \in Bv\}\,, \\ \mathrm{cl}\,(\mathrm{co}\,A) &= \{(v, w) : v \in V\,,\ w \in \mathrm{cl}\,(\mathrm{co}\,Av)\}\,. \end{aligned}$$

Für die Addition gilt $D(A + B) = D(A) \cap D(B)$.

Lemma 5.2 *Sei V Banachraum, seien $A, B : V \rightrightarrows V^*$ monoton, $\lambda \geq 0$. Dann sind λA, $A + B$ und $\mathrm{cl}\,(\mathrm{co}\,A)$ monoton.*

Beweis: Direkt aus den Definitionen. Für $\mathrm{cl}\,(\mathrm{co}\,A)$: Übung. □

Im Hilbertraumfall ist mit A auch A^{-1} monoton, da in der Bedingung

$$\langle w - z, u - v\rangle \geq 0\,, \quad \text{für alle } u, v \in H,\ w \in Au,\ z \in Av.$$

genau dann $w \in Au$ und $z \in Av$ gelten wenn $u \in A^{-1}w$ und $z \in A^{-1}v$.

Lemma 5.3 *Sei V Banachraum, $K \subset V$, $A : K \rightrightarrows V^*$ monoton. Dann gilt:*

(i) A ist maximal monoton genau dann, wenn für alle $u \in K$, $u^* \in V^*$ die Bedingung

$$\langle u^* - v^*, u - v\rangle \geq 0\,, \quad \textit{für alle } v \in K,\ v^* \in Av, \tag{5.12}$$

impliziert, daß $u^* \in Au$.

(ii) Sei A maximal monoton. Dann ist λA maximal monoton für alle $\lambda > 0$. Weiterhin ist Av konvex und abgeschlossen in V^* für alle $v \in K$. Im Hilbertraumfall ist auch A^{-1} maximal monoton.

Beweis: Für feste $u \in K$, $u^* \in Au$ besagt (5.12) gerade, dass der zu

$$\tilde{A}u = Au \cup \{u^*\}\,, \quad \tilde{A}v = Av \quad \text{für } v \neq u, \tag{5.13}$$

erweiterte Operator $\tilde{A}$ monoton ist. Ist $\langle u^* - v^*, u - v\rangle \geq 0$ für alle $v \in K$, $v^* \in Av$, so gilt (5.12) mit $\lambda^{-1}u^*$ an der Stelle von u^*, also ist $u^* \in \lambda Au$ und damit λA maximal monoton. Aus Lemma 5.2 folgt, dass $\mathrm{cl}\,(\mathrm{co}\,A) = A$. Da im Hilbertraumfall jede monotone Erweiterung von A auch eine von A^{-1} und umgekehrt liefert, ist mit A auch A^{-1} maximal monoton. □

Wir betrachten die Inklusion

$$Au + Bu \ni f\,. \tag{5.14}$$

Lemma 5.4 *Sei V Banachraum $K \subset V$, $A : K \rightrightarrows V^*$ maximal monoton, $B : K \to V^*$ beliebige Abbildung, $f \in V^*$. Dann gilt für $u \in K$*

$$Au + Bu \ni f \tag{5.15}$$

genau dann, wenn

$$\langle f - Bu - v^*, u - v \rangle \geq 0 \,, \quad \textit{für alle } v \in K,\, v^* \in Av. \tag{5.16}$$

Ist zusätzlich B monoton, und außerdem A oder B streng monoton, so gibt es höchstens ein solches u.

Beweis: Es gilt $Au + Bu \ni f$ genau dann, wenn $Au \ni f - Bu$. Wir setzen $u^* = f - Bu$. Aus (5.15) folgt (5.16), da A monoton ist. Umgekehrt folgt (5.15) aus (5.16) nach Lemma 5.3 (i). Sind $u_1, u_2 \in K$ Lösungen, so gilt, falls B monoton ist,

$$0 \leq \langle (f - Bu_1) - (f - Bu_2), u_1 - u_2 \rangle = \langle Bu_2 - Bu_1, u_1 - u_2 \rangle \leq 0 \,,$$

also steht überall das Gleichheitszeichen. Ist A streng monoton, so liefert der erste Term $u_1 = u_2$; ist B streng monoton, liefert es der zweite. □

Wir betrachten die Variationsungleichung (5.16) zunächst im Endlichdimensionalen.

Satz 5.5 (Fixpunktsatz von Brouwer)
Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ konvex, kompakt und nichtleer, sei $F : K \to K$ stetig. Dann hat F einen Fixpunkt u, also $u = F(u)$. □

Der folgende Satz ist die endlichdimensionale Variante eines Satzes von Debrunner und Flor.

Satz 5.6 *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ konvex, kompakt und nichtleer, $A : K \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ monoton mit $D(A) \neq \emptyset$, $B : K \to \mathbb{R}^n$ stetig, $f \in \mathbb{R}^n$. Dann hat die Variationsungleichung*

$$\langle f - Bu - v^*, u - v \rangle \geq 0 \,, \quad \textit{für alle } v \in K,\, v^* \in Av, \tag{5.17}$$

eine Lösung $u \in K$.

Beweis: Für $Tu = f - Bu$, $T : K \to \mathbb{R}^n$, erhält (5.17) die Form

$$\langle Tu - v^*, u - v \rangle \geq 0 \,, \quad \text{für alle } v \in K,\, v^* \in Av. \tag{5.18}$$

Wir nehmen an, es gebe keine Lösung $u \in K$ von (5.18). Wir definieren für $v \in K$, $v^* \in Av$,

$$U(v, v^*) = \{u : u \in K \,,\, \langle Tu - v^*, u - v \rangle < 0\} \,.$$

Nach Annahme gehört jedes $u \in K$ zu mindestens eine solchen Menge, diese bilden daher eine offene Überdeckung von K. Da K kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung

$$\{U(v_i, v_i^*) : 1 \leq i \leq N\}$$

von K. Sei $\{\beta_i\}_{1\le i\le N}$ eine zugehörige stetige Zerlegung der Eins, also $\beta_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig,

$$\operatorname{supp}\beta_i \subset U(v_i, v_i^*)\,, \quad 0 \le \beta_i \le 1\,, \quad \sum_{i=1}^N \beta_i(u) = 1 \quad \text{für alle } u \in K.$$

Wir setzen

$$S = \operatorname{co}\{v_1, \dots, v_N\}$$

und definieren

$$p(u) = \sum_{i=1}^N \beta_i(u) v_i\,, \quad q(u) = \sum_{i=1}^N \beta_i(u) v_i^*\,.$$

Die Abbildung $p : S \to \mathbb{R}^n$ ist stetig und $p(S) \subset S$, gemäß den Eigenschaften der β_i. Nach dem Brouwerschen Fixpunktsatz, Satz 5.5, hat p einen Fixpunkt

$$u = p(u)\,, \quad u \in S\,, \quad S \subset K\,.$$

Zu diesem Fixpunkt definieren wir die Zahlen

$$d_{ij} = \langle Tu - v_i^*, u - v_j \rangle\,.$$

Es gilt

$$d_{ij} + d_{ji} = d_{ii} + d_{jj} + \left\langle v_i^* - v_j^*, v_j - v_i \right\rangle\,.$$

Da A monoton ist, gilt $\left\langle v_i^* - v_j^*, v_j - v_i \right\rangle \le 0$, also

$$d_{ij} + d_{ji} \le d_{ii} + d_{jj}\,, \quad \text{für alle } i, j.$$

Wir erhalten weiter

$$\begin{aligned} 0 = \langle Tu - q(u), u - p(u) \rangle &= \left\langle Tu - \sum_{i=1}^N \beta_i(u) v_i^*, u - \sum_{j=1}^N \beta_j(u) v_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \beta_i(u)\beta_j(u) d_{ij} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \beta_i(u)\beta_j(u) \frac{d_{ij} + d_{ji}}{2}\,, \end{aligned}$$

also

$$0 \le \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \beta_i(u)\beta_j(u) \frac{d_{ii} + d_{jj}}{2}\,. \tag{5.19}$$

Für jedes Paar (i, j) mit $\beta_i(u)\beta_j(u) > 0$ gilt $u \in \operatorname{supp}(\beta_i) \cap \operatorname{supp}(\beta_j) \subset U(v_i, v_i^*) \cap U(v_j, v_j^*)$, also $d_{ii} < 0$ und $d_{jj} < 0$. Wegen (5.19) kann es solche (i, j) nicht geben, also folgt $\beta_i(u) = 0$ für alle i. Es folgt $u \notin K$, ein Widerspruch. □

Satz 5.6 gilt auch, wenn wir den $\mathbb{R}^n$ durch einen beliebigen Banachraum V ersetzen, mit demselben Beweis. Wegen der Voraussetzung "K kompakt" spielt er aber erst dann eine Rolle, wenn wir ihn auch auf V versehen mit der schwachen bzw. schwach-$*$-Topologie anwenden können. Der gegebene Beweis lässt sich auch auf diese Situation verallgemeinern.

Ist K unbeschränkt, so können wir die Beschränktheit der Lösungsmenge der Variationsungleichung (5.17) erreichen, indem wir voraussetzen, dass B koerziv ist.

Definition 5.7
Sei V normierter Raum, $K \subset V$, $A : K \rightrightarrows V^*$. Eine Abbildung $B : K \to V^*$ heißt ***A-koerziv*** *zu $u_0 \in D(A)$, falls*

$$\lim_{\|u\| \to \infty} \frac{\langle Bu, u - u_0 \rangle}{\|u\|} = \infty \,. \tag{5.20}$$

□

Ist $u \in K$ Lösung der Variationsungleichung

$$\langle f - Bu - v^*, u - v \rangle \geq 0 \,, \quad \text{für alle } v \in K,\, v^* \in Av,$$

so gilt für $u_0 \in D(A)$ und $v^* \in Au_0^*$

$$\langle Bu, u - u_0 \rangle \leq \langle f - v^*, u - u_0 \rangle \ ,$$

also

$$\frac{\langle Bu, u - u_0 \rangle}{\|u\|} \leq \|f - v^*\| \frac{\|u - u_0\|}{\|u\|} \,.$$

Für gegebenes f, u_0, v^* ist die rechte Seite beschränkt für $\|u\| \to \infty$. Ist nun B außerdem A-koerziv, so folgt aus (5.20), dass es ein $r > 0$ gibt mit

$$\|u\| \leq r \,, \tag{5.21}$$

wobei r nur von f, B, u_0 und Au_0 abhängt.

In Satz 5.6 wird die Stetigkeit von B in der Metrik des $\mathbb{R}^n$ benötigt. Stetigkeit und schwache Stetigkeit im Sinne der Funktionalanalysis sind im $\mathbb{R}^n$ gleichbedeutend.

Definition 5.8
Sei V normierter Raum, $K \subset V$. Eine Abbildung $A : K \to V^*$ heißt ***demistetig****, falls aus $u_n \to u$ in der Norm von V folgt, dass $Au_n \to Au$ schwach in V^*. (Wir schreiben $Au_n \rightharpoonup Au$.)* □

Lemma 5.9
Sei V normierter Raum, $K \subset V$ konvex, abgeschlossen und nichtleer, sei $A : K \rightrightarrows V^*$ monoton, sei $B : K \to V^*$ demistetig und A-koerziv zu $u_0 \in D(A)$, sei $f \in V^*$. Dann gibt es ein $r > 0$, so dass gilt: Für jeden endlichdimensionalen Unterraum Y von V mit $u_0 \in Y$ und $K \cap Y \neq \emptyset$ hat die Variationsungleichung

$$\langle f - Bu - v^*, u - v \rangle \geq 0 \,, \quad \text{für alle } v \in K \cap Y,\, v^* \in Av, \tag{5.22}$$

eine Lösung $u_Y \in K \cap Y$, und für alle solche Lösungen gilt

$$\|u_Y\| \leq r \,. \tag{5.23}$$

Beweis: Sei Y ein solcher Unterraum, sei $R \geq \|u_0\|$. Wir setzen

$$K_{Y,R} = K \cap Y \cap \{v : \|v\| \leq R\} \,.$$

K ist konvex und kompakt, und $K_{Y,R} \neq \emptyset$ für $R \geq R_1$, falls R_1 hinreichend groß ist. Die Vorschrift

$$u \mapsto (f - Bu - v^*)|Y \qquad \text{(Einschränkung auf } Y\text{)}$$

definiert für jedes $v^* \in V^*$ eine Abbildung von Y nach Y^* mit $\dim(Y) = \dim(Y^*) < \infty$. Die Abbildung $u \mapsto Bu|Y$ ist stetig, da B demistetig und Y^* endlichdimensional ist. Die Variationsungleichung

$$\langle (f - Bu - v^*)|Y, u - v\rangle \geq 0\,, \quad \text{für alle } v \in K_{Y,R},\ v^* \in Av, \tag{5.24}$$

hat nach Satz 5.6 eine Lösung $u_{Y,R} \in K_{Y,R}$. Die Menge $S_{Y,R}$ aller Lösungen in $K_{Y,R}$ ist abgeschlossen gemäß (5.24) wegen Stetigkeit, und aus der A-Koerzivität von B folgt gemäß der zu (5.21) führenden Rechnung, dass

$$\|u_{Y,R}\| \leq r \tag{5.25}$$

gilt für alle Lösungen mit einem geeigneten, von Y und R unabhängigen $r > 0$, falls $R \geq R_0 := \max\{R_1, r\}$. Die Mengen $S_{Y,R}$ sind daher kompakt. Weiterhin gilt wegen (5.25)

$$R_0 \leq R \leq \tilde{R} \quad \Rightarrow \quad K_{Y,R} \subset K_{Y,\tilde{R}} \quad \Rightarrow \quad S_{Y,R} \supset S_{Y,\tilde{R}} \neq \emptyset\,.$$

Aus der Kompaktheit der Mengen $S_{Y,R}$ folgt nun

$$\bigcap_{R \geq R_0} S_{Y,R} \neq \emptyset\,.$$

Jedes

$$u_Y \in \bigcap_{R \geq R_0} S_{Y,R}$$

erfüllt (5.23) und ist Lösung von (5.22), da

$$K \cap Y = \bigcup_{R \geq R_0} K_{Y,R}\,.$$

□

Definition 5.10

*Sei V normierter Raum, $K \subset V$. Ein $A : K \rightrightarrows V^*$ heißt **beschränkt**, falls $A(M)$ beschränkt ist in V^* für jede beschränkte Teilmenge M von K.* □

Lemma 5.11

Sei V reflexiver Banachraum, es gelten die Voraussetzungen von Lemma 5.9, sei außerdem B beschränkt. Dann gibt es ein $u \in K$ und ein $u^* \in V^*$ mit der Eigenschaft: Zu jedem Unterraum Y von V mit $\dim(Y) < \infty$, $y_0 \in Y$ und $K \cap Y \neq \emptyset$ gibt es eine Folge (u_n) in K mit $u_n \rightharpoonup u$, $Bu_n \rightharpoonup u^*$ und

$$\langle f - Bu_n - v^*, u_n - v\rangle \geq 0\,, \quad \text{für alle } v \in K \cap Y,\ v^* \in Av. \tag{5.26}$$

Beweis: Sei

$$\mathcal{L} = \{Y : Y \text{ Unterraum von } V,\, \dim(Y) < \infty,\, y_0 \in Y,\, K \cap Y \neq \emptyset\}\,.$$

Nach Lemma 5.9 gibt es zu jedem $Y \in \mathcal{L}$ ein $u_Y \in K \cap Y$ mit

$$\langle f - Bu_Y - v^*, u_Y - v\rangle \geq 0\,, \quad \text{für alle } v \in K \cap Y,\, v^* \in Av\,. \tag{5.27}$$

Für $Z \in \mathcal{L}$ definieren wir

$$M_Z = \{(u_Y, Bu_Y) : (u_Y, Bu_Y) \in (K \cap Y) \times V^*, Z \subset Y \in \mathcal{L},\; u_Y \text{ löst } (5.27).\}$$

Wir betrachten

$$\bigcap_{Z \in \mathcal{L}} \overline{M_Z}^w\,. \qquad \text{(schwacher Abschluss)} \tag{5.28}$$

Nach Definition gilt $M_{\tilde{Z}} \subset M_Z$ für $Z \subset \tilde{Z}$. Sind $Z_1, \ldots, Z_n \in \mathcal{L}$, so folgt für $Z = \operatorname{span} Z_1 \cup \cdots \cup Z_n$

$$\bigcap_{i=1}^n M_{Z_i} \supset M_Z \neq \emptyset\,, \quad \bigcap_{i=1}^n \overline{M_{Z_i}}^w \supset \overline{M_Z}^w \neq \emptyset\,.$$

Da $\|u_Y\| \leq r$ gemäß Lemma 5.9 gilt für alle betrachteten Lösungen, und da B abgeschlossen ist, sind alle Mengen $\overline{M_Z}^w$ beschränkt und damit schwach kompakt nach einem Satz der Funktionalanalysis. Der Durchschnitt (5.28) ist also ebenfalls nichtleer, es gibt ein

$$(u, u^*) \in \bigcap_{Z \in \mathcal{L}} \overline{M_Z}^w\,.$$

Sei nun $Y \in \mathcal{L}$ fest gewählt. Da $(u, u^*) \in \overline{M_Y}^w$, gibt es nach einem weiteren Satz der Funktionalanalysis eine Folge (u_n, Bu_n) in M_Y mit $u_n \rightharpoonup u$ und $Bu_n \rightharpoonup u^*$. Nach Definition von M_Y gibt es $Y_n \in \mathcal{L}$ mit $Y \subset Y_n$, so dass

$$\langle f - Bu_n - v^*, u_n - v\rangle \geq 0\,, \quad \text{für alle } v \in K \cap Y_n,\, v^* \in Av,$$

also folgt (5.26) wegen $Y \subset Y_n$. Da $u_n \in K$ für alle n und K schwach abgeschlossen ist, folgt $u \in K$. □

Wir wollen nun in der Variationsungleichung (5.26) den Grenzübergang $n \to \infty$ vollziehen. Das Problem dabei ist der Term $\langle Bu_n, u_n\rangle$, da beide Argumente nur schwach konvergieren. Schon im Hilbertraum ist die schwache Grenzwertbildung mit dem Skalarprodukt im allgemeinen nicht vertauschbar. Betrachtet man etwa die Folge der Einheitsvektoren e_n im Folgenraum ℓ^2, so gilt $e_n \rightharpoonup 0$, aber $\langle e_n, e_n\rangle = 1$. Hilfreich ist, wenn B in einem geeigneten Sinn monoton ist.

Definition 5.12
*Sei V reflexiver Banachraum, $K \subset V$ abgeschlossen und konvex. Ein Operator $A : K \to V^*$ heißt **pseudomonoton**, falls er folgende Eigenschaft hat: Ist (u_n) eine Folge in K mit*

$$u_n \rightharpoonup u\,, \quad \limsup_{n\to\infty}\, \langle Au_n, u_n - u\rangle \leq 0\,, \tag{5.29}$$

so gilt

$$\langle Au, u - v\rangle \leq \liminf_{n\to\infty}\, \langle Au_n, u_n - v\rangle\;, \quad \textit{für alle } v \in K. \tag{5.30}$$

□

Lemma 5.13
Sei V reflexiver Banachraum, es gelten die Voraussetzungen von Lemma 5.11, sei außerdem B pseudomonoton und A maximal monoton. Dann löst das in Lemma 5.11 erhaltene $u \in K$ die Variationsungleichung

$$\langle f - Bu - v^*, u - v\rangle \geq 0\,, \quad \textit{für alle } v \in K,\ v^* \in Av. \tag{5.31}$$

Beweis: Sei (u, u^*) das in Lemma 5.11 erhaltene Paar. Wir zeigen zunächst: Es gibt ein $v_0 \in K$ und ein $v_0^* \in Av$ mit

$$\langle f - u^* - v_0^*, u - v_0\rangle \leq 0\,. \tag{5.32}$$

Andernfalls wäre

$$\langle f - u^* - v^*, u - v\rangle > 0\,, \quad \text{für alle } v \in K,\ v^* \in Av, \tag{5.33}$$

und damit $u \in K$, $f - u^* \in Au$, da A maximal monoton ist. Einsetzen von $v = u$, $v^* = u^*$ in (5.33) ergibt einen Widerspruch. Sei nun Y ein Unterraum von V mit $u_0, v_0 \in Y$ und $\dim(Y) < \infty$. Sei (u_n) die in Lemma 5.11 erhaltene Folge, dann ist $u_n \in K$ und

$$\langle f - Bu_n - v^*, u_n - v\rangle \geq 0\,, \quad \text{für alle } v \in K \cap Y,\ v^* \in Av.$$

Für beliebiges $w \in V$ folgt

$$\begin{aligned}\langle Bu_n, u_n - w\rangle &= \langle Bu_n, u_n - v\rangle + \langle Bu_n, v - w\rangle \\ &\leq \langle f - v^*, u_n - v\rangle + \langle Bu_n, v - w\rangle\ , \quad \text{für alle } v \in K \cap Y,\ v^* \in Av.\end{aligned}$$

Setzen wir $w = v$, so folgt

$$\langle Bu_n, u_n - v\rangle \leq \langle f - v^*, u_n - v\rangle\ , \quad \text{für alle } v \in K \cap Y,\ v^* \in Av. \tag{5.34}$$

Setzen wir $w = u$, $v = v_0$, $v^* = v_0^*$, so folgt

$$\langle Bu_n, u_n - u\rangle \leq \langle f - v_0^*, u_n - v_0\rangle + \langle Bu_n, v_0 - u\rangle\ ,$$

und weiter, da $u_n \rightharpoonup u$ und $Bu_n \rightharpoonup u^*$,

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} \langle Bu_n, u_n - u\rangle &\leq \langle f - v_0^*, u - v_0\rangle + \langle u^*, v_0 - u\rangle \\ &= \langle f - v_0^* - u^*, u - v_0\rangle \leq 0\end{aligned}$$

nach (5.32). Da B pseudomonoton ist, folgt

$$\langle Bu, u - v\rangle \leq \liminf_{n\to\infty} \langle Bu_n, u_n - v\rangle\ , \quad \text{für alle } v \in K \cap Y.$$

Aus (5.34) folgt nun

$$\langle Bu, u - v\rangle \leq \langle f - v^*, u - v\rangle\ , \quad \text{für alle } v \in K \cap Y,\ v^* \in Av.$$

Sei $v \in K$ beliebig, so setzen wir $Y = \operatorname{span}\{v, u_0, v_0\}$. Damit ist (5.31) bewiesen. □

Wir fassen zusammen.

Satz 5.14 (Existenzsatz für monotone Inklusionen)
Sei V reflexiver Banachraum, $K \subset V$ abgeschlossen, konvex und nichtleer, $A : K \rightrightarrows V^*$ maximal monoton, $B : K \to V^*$ demistetig, beschränkt, pseudomonoton und A-koerziv. Dann gibt es zu jedem $f \in V^*$ eine Lösung $u \in K$ von

$$Au + Bu \ni f \,, \tag{5.35}$$

oder äquivalent

$$\langle f - Bu - v^*, u - v \rangle \geq 0 \,, \quad \text{für alle } v \in K,\ v^* \in Av. \tag{5.36}$$

□

Wir befassen uns mit dem Zusammenhang der einzelnen Monotoniebegriffe.

Satz 5.15 *Sei V Banachraum, $A : V \to V^*$ monoton. Dann ist A lokal beschränkt, d.h. zu jedem $u \in V$ gibt es eine Umgebung U von u, so daß $A(U)$ beschränkt ist in V^*.*

Beweis: Ist A nicht lokal beschränkt, so gibt es ein $u \in V$ und eine Folge (u_n) in V mit

$$u_n \to u \,, \quad \|Au_n\| \to \infty \,. \tag{5.37}$$

Wir definieren

$$c_n = 1 + \|Au_n\| \, \|u_n - u\| \,. \tag{5.38}$$

Wir wollen zeigen, daß die Folge $c_n^{-1} Au_n$ beschränkt ist in V^*. Sei dazu $v \in V$ beliebig gewählt. Es gilt

$$0 \leq \langle A(u + v) - A(u_n), u + v - u_n \rangle \,, \tag{5.39}$$

also

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_n} \langle A(u_n), v \rangle &\leq \frac{1}{c_n} \left(\langle A(u_n), u_n - u \rangle + \langle A(u + v), u + v - u_n \rangle \right) \\ &\leq 1 + \frac{1}{c_n} \|A(u + v)\| \, \|u + v - u_n\| \leq M(v) \end{aligned} \tag{5.40}$$

mit einer von n unabhängigen Konstante $M(v)$. Führen wir dasselbe Argument mit $-v$ an der Stelle von v aus, so erhalten wir

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{1}{c_n} \langle Au_n, v \rangle \right| \leq \max\{M(v), M(-v)\} < \infty \,. \tag{5.41}$$

Aus dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit (Satz von Banach-Steinhaus, siehe Funktionalanalysis) folgt

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{c_n} \|Au_n\| =: C < \infty \,, \tag{5.42}$$

also

$$\|Au_n\| \leq Cc_n = C(1 + \|Au_n\| \, \|u - u_n\|) \,, \quad n \in \mathbb{N} \,, \tag{5.43}$$

also

$$(1 - C\|u - u_n\|)\|Au_n\| \leq C \,, \quad n \in \mathbb{N} \,, \tag{5.44}$$

also $\|Au_n\| \leq 2C$, falls $\|u - u_n\| \leq 1/(2C)$, was ein Widerspruch zu (5.37) ist. □

Folgerung 5.16 *Sei V Banachraum, $A : V \to V^*$ monoton, (u_n) eine normkonvergente Folge. Dann ist die Folge (Au_n) beschränkt in V^*.*

Beweis: Folgt direkt aus Satz 5.15. □

Folgerung 5.17 *Sei V Banachraum, $A : V \to V^*$ monoton und linear. Dann ist A stetig.*

Beweis: Nach Satz 5.15 ist A beschränkt auf einer hinreichend kleinen ε-Kugel K_ε um 0. Es folgt

$$\|A\| = \sup_{v \in K_\varepsilon} \varepsilon^{-1} \|Av\| < \infty \,.$$

□

Definition 5.18
*Sei V normierter Raum, $K \subset V$ konvex. Ein Operator $A : K \to V^*$ heißt **hemistetig**, wenn für alle $u, v \in K$ und alle $w \in V$ die Abbildung*

$$t \mapsto \langle A(u + t(v - u)), w \rangle \tag{5.45}$$

stetig ist auf $[0, 1]$.

Satz 5.19 *Sei V reflexiver Banachraum, $A : V \to V^*$ monoton. Dann sind äquivalent:*
(i) A ist hemistetig.
(ii) A ist maximal monoton.
(iii) A ist pseudomonoton.
(iv) A ist demistetig.

Beweis: "(i)⇒(ii)": Seien $u \in V$, $u^* \in V^*$ mit

$$\langle u^* - Av, u - v \rangle \geq 0 \,, \quad \text{für alle } v \in V \,.$$

Mit $v = u - tw$ folgt dann

$$\langle u^* - A(u - tw), tw \rangle \geq 0 \,, \quad \forall\, w \in V \,,\, t > 0 \,,$$

also

$$\langle u^* - A(u - tw), w \rangle \geq 0 \,, \quad \forall\, w \in V \,,\, t > 0 \,.$$

Grenzübergang $t \downarrow 0$ ergibt wegen der Hemistetigkeit von A

$$\langle u^* - Au, w \rangle \geq 0 \,, \quad \forall\, w \in V \,. \tag{5.46}$$

Da w beliebig war, folgt $u^* = Au$.
"(ii)⇒(iv)": Sei $u_n \to u$. Nach Folgerung 5.16 ist (Au_n) beschränkt in V^*. Da V reflexiv ist, gibt es eine schwach konvergente Teilfolge, sei $Au_{n_k} \rightharpoonup u^*$. Aus

$$\langle Au_{n_k} - Av, u_{n_k} - v \rangle \geq 0 \,, \quad \text{für alle } v \in V,$$

folgt mit Grenzübergang $k \to \infty$, dass

$$\langle u^* - Av, u - v \rangle \geq 0 \,, \quad \text{für alle } v \in V,$$

und damit $u^* = Au$, da A maximal monoton ist. Da also alle schwach konvergenten Teilfolgen den gleichen Grenzwert Au haben, gilt $Au_n \rightharpoonup Au$ für die gesamte Folge ("Konvergenzprinzip"). Also ist A demistetig.
"(iii)⇒(iv)": Sei $u_n \to u$. Wie eben folgt daraus $Au_{n_k} \rightharpoonup u^*$ für eine Teilfolge, und weiter

$$\langle Au_{n_k}, u_{n_k} - u \rangle \to 0\,. \tag{5.47}$$

Da A pseudomonoton ist, gilt nun für alle $v \in V$

$$\langle Au, u - v \rangle \le \liminf_{k\to\infty} \langle Au_{n_k}, u_{n_k} - v \rangle \;,$$

und da

$$\langle Au_{n_k}, u_{n_k} - v \rangle = \langle Au_{n_k}, u_{n_k} - u \rangle + \langle Au_{n_k}, u - v \rangle \;,$$

folgt wegen (5.47)

$$\langle Au, u - v \rangle \le \langle u^*, u - v \rangle \;,$$

und damit $u^* = Au$, da v beliebig war. Aus dem Konvergenzprinzip folgt $Au_n \rightharpoonup Au$ für die gesamte Folge.
"(iv)⇒(i)": Seien $u, v, w \in V$, $t_n \to t$ in $[0, 1]$. Dann gilt $u + t_n v \to u + tv$ in V, also $A(u + t_n v) \rightharpoonup A(u + tv)$ in V^* nach Voraussetzung (iv), also

$$\lim_{n\to\infty} \langle A(u + t_n v), w \rangle = \langle A(u + tv), w \rangle \;.$$

Damit ist A hemistetig.
"(i)⇒(iii)": Sei

$$u_n \rightharpoonup u\,, \quad \limsup_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - u \rangle \le 0\,.$$

Da A monoton ist, gilt $\langle Au_n, u_n - u \rangle \ge \langle Au, u_n - u \rangle$, also

$$\liminf_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - u \rangle \ge \liminf_{n\to\infty} \langle Au, u_n - u \rangle = 0\,,$$

also

$$\lim_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - u \rangle = 0\,. \tag{5.48}$$

Wir setzen $v_t = u + t(v - u)$ für beliebiges $v \in V$, $t \in [0, 1]$. Es gilt wegen Monotonie

$$0 \le \langle Au_n - Av_t, u_n - v_t \rangle = \langle Au_n - Av_t, u_n - u \rangle + \langle Au_n - Av_t, t(u - v) \rangle \;.$$

Grenzübergang $n \to \infty$ führt wegen (5.48) auf

$$0 \le t\Big(- \langle Av_t, u - v \rangle + \liminf_{n\to\infty} \langle Au_n, u - v \rangle \Big)\,.$$

Division durch $t > 0$ und Grenzübergang $t \downarrow 0$ ergibt, da A hemistetig ist,

$$\langle Au, u - v \rangle \le \liminf_{n\to\infty} \langle Au_n, u - v \rangle = \liminf_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - v \rangle \;,$$

letzteres wiederum wegen (5.48). Da v beliebig war, ist A pseudomonoton. □

Satz 5.20
Sei V reflexiver Banachraum, seien V und V^* strikt konvex. Dann ist die Dualitätsabbildung $J : V \to V^*$ streng monoton und demistetig, also auch maximal monoton und pseudomonoton nach Satz 5.19. Außerdem ist J beschränkt sowie koerziv zu jedem $u_0 \in V$.

Bemerkung: Man kann zeigen, dass es zu jedem reflexiven Banachraum V eine äquivalente Norm gibt, in der V und V^* strikt konvex sind.

Beweis: Wir erinnern daran (Satz 4.19), dass unter den gegebenen Voraussetzungen Ju das eindeutig bestimmte Element von V^* ist mit

$$\langle Ju, u\rangle = \|u\|^2 = \|Ju\|^2 .$$

J ist beschränkt wegen $\|Ju\| = \|u\|$ und koerziv wegen

$$\frac{\langle Ju, u - u_0\rangle}{\|u\|} = \frac{\langle Ju, u\rangle - \langle Ju, u_0\rangle}{\|u\|} \geq \|u\| - \frac{\|Ju\|\|u_0\|}{\|u\|} = \|u\| - \|u_0\| \to \infty$$

für $\|u\| \to \infty$. J ist demistetig: Sei $u_n \to u$ in V. Es gilt $\|Ju_n\| = \|u_n\| \to \|u\|$, also ist (Ju_n) beschränkt. Es gelte $Ju_{n_k} \rightharpoonup u^*$ für eine geeignete Teilfolge. Da die Norm schwach unterhalbstetig ist, folgt

$$\|u^*\| \leq \liminf_{k\to\infty} \|Ju_{n_k}\| = \|u\| .$$

Weiter gilt

$$\|u^*\|\|u\| \geq \langle u^*, u\rangle = \lim_{k\to\infty} \langle Ju_{n_k}, u_{n_k}\rangle = \lim_{k\to\infty} \|u_{n_k}\|^2 = \|u\|^2 ,$$

also insgesamt $\|u\| = \|u^*\|$ und damit $u^* = Ju$. Es folgt $u_n \rightharpoonup Ju$ für die gesamte Folge nach Konvergenzprinzip.
J ist monoton: Für beliebige $u, v \in V$ gilt

$$\langle Ju - Jv, u - v\rangle \geq \|u\|^2 + \|v\|^2 - \|Ju\|\|v\| - \|Jv\|\|u\| = (\|u\| - \|v\|)^2 \geq 0 . \qquad (5.49)$$

Es bleibt zu zeigen, dass J streng monoton ist. Für beliebige $u, v \in V$ mit $u \neq v$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\langle Ju - Jv, u - v\rangle &= \left\langle Ju - J\Big(\frac{u+v}{2}\Big), \frac{u-v}{2}\right\rangle + \left\langle J\Big(\frac{u+v}{2}\Big) - Jv, \frac{u-v}{2}\right\rangle \\ &\geq \Big(\|u\| - \Big\|\frac{u+v}{2}\Big\|\Big)^2 + \Big(\Big\|\frac{u+v}{2}\Big\| - \|v\|\Big)^2 > 0 \end{aligned}$$

wegen der strikten Konvexität von V, also ist J streng monoton. □

Satz 5.21 (Charakterisierung maximal monotoner Operatoren)
Sei V reflexiver Banachraum, seien V und V^* strikt konvex, sei $A : V \rightrightarrows V^*$ monoton. Dann sind äquivalent:
(i) A ist maximal monoton.
(ii) $\mathrm{Im}\,(A + \lambda J) = V^*$ *für jedes* $\lambda > 0$.
(iii) $\mathrm{Im}\,(A + \lambda J) = V^*$ *für ein* $\lambda > 0$.

Hierbei ist $J : V \to V^*$ die Dualitätsabbildung.

Beweis: "(i)⇒(ii)": Die Dualitätsabbildung J ist demistetig, beschränkt, pseudomonoton und A-koerziv nach Satz 5.20, dasselbe gilt für λJ mit $\lambda > 0$. Nach Satz 5.14 hat die Inklusion

$$Au + \lambda Ju \ni f$$

eine Lösung $u \in V$ für jedes $f \in V^*$. Also gilt (ii).
"(ii)$\Rightarrow$(iii)": Klar.
"(iii)$\Rightarrow$(i)": Es gelte (iii), wir nehmen an, A sei nicht maximal monoton. Dann gibt es ein $u \in V$, $u^* \notin Au$ mit

$$\langle u^* - v^*, u - v \rangle \geq 0\,, \quad \text{für alle } v \in V,\ v^* \in Av\,. \tag{5.50}$$

Zu $u^* + \lambda Ju \in V^*$ gibt es nach (iii) ein $w \in V$, $w^* \in Aw$ mit

$$w^* + \lambda Jw = u^* + \lambda Ju\,. \tag{5.51}$$

Einsetzen von (w, w^*) in (5.50) ergibt

$$0 \leq \langle u^* - w^*, u - w \rangle = \langle \lambda Jw - \lambda Ju, u - w \rangle\ ,$$

also $\langle Jw - Ju, w - u \rangle \leq 0$. Da J streng monoton ist nach Satz 5.20, folgt $u = w$ und weiter $Ju = Jw$, somit auch $u^* = w^*$ wegen (5.51) im Widerspruch zu $u^* \notin Au$. □

Im Hilbertraumfall $A : H \rightrightarrows H$ besagt Satz 5.21, dass A genau dann maximal monoton ist, wenn

$$Au + \lambda u \ni f$$

für jedes $f \in H$ und jedes $\lambda > 0$ eine Lösung $u \in H$ hat.

Satz 5.22 (Maximale Monotonie des Subdifferentials)
Sei V reflexiver Banachraum, seien V und V^* strikt konvex. Sei $\varphi : V \to (-\infty, \infty]$ konvex, unterhalbstetig und eigentlich. Dann ist $\partial\varphi : V \rightrightarrows V^*$ maximal monoton.

Beweis: Zu gegebenem $f \in V^*$ betrachten wir die Funktion $\psi : V \to (-\infty, \infty]$,

$$\psi(v) = \frac{1}{2}\|v\|^2 - \langle f, v \rangle + \varphi(v)\,.$$

Wie im Beweis von Satz 4.20 zeigt man, dass ψ ein Minimum $u \in V$ hat. Für dieses gilt nach der Summenregel für Subdifferentiale

$$0 \in \partial\psi(u) = Ju - f + \partial\varphi(u)\,,$$

also

$$\partial\varphi(u) + Ju \ni f\,.$$

Da f beliebig war, folgt nun aus Satz 5.21, dass $\partial\varphi$ maximal monoton ist. □

Beispiel 5.23 Auf dem Hilbertraum $H = L^2(\Omega)$ definieren wir

$$Av = -\Delta v\,, \quad D(A) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\,. \tag{5.52}$$

$A : D(A) \to H$ ist linear und weiterhin monoton wegen

$$\langle Av, v \rangle = \int_\Omega -v(x) \cdot \Delta v(x)\, dx = \int_\Omega \|\nabla v(x)\|^2\, dx \geq 0\,, \quad \text{für alle } v \in D(A).$$

A ist maximal monoton nach Satz 5.21 genau dann, wenn das Randwertproblem

$$-\Delta u + u = f \quad \text{in } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

für jedes $f \in L^2(\Omega)$ eine Lösung $u \in D(A)$ hat. Das ist gleichbedeutend damit, dass die eindeutige schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ des Randwertproblems die Regularität $u \in H^2(\Omega)$ hat. Das ist der Fall, wenn Ω beschränkt ist und hinreichend glatten Rand hat, siehe z.B. das Buch von Evans. $\square$

Beispiel 5.24 Sei $H = L^2(\Omega)$. Wir definieren $\varphi : H \to (-\infty, \infty]$ durch

$$\varphi(v) = \frac{1}{2} \int_\Omega \|\nabla v(x)\|^2 \, dx \,, \quad v \in D(\varphi) = H_0^1(\Omega) \,. \tag{5.53}$$

Es ist also $\varphi(v) = +\infty$, falls $v \notin H_0^1(\Omega)$. Wir wollen zeigen, dass $\partial\varphi = A$, wobei $Au = -\Delta u$ mit $D(A) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ der in Beispiel 5.23 betrachtete Operator ist.

(i) φ ist konvex und eigentlich.
(ii) φ ist unterhalbstetig: Sei (v_n, r_n) Folge in $\operatorname{epi}(\varphi)$ mit $v_n \to v$ in $L^2(\Omega)$ und $r_n \to r$. Zu zeigen ist $(v, r) \in \operatorname{epi}(\varphi)$. Wegen $\varphi(v_n) \le r_n$ ist $\{\varphi(v_n)\}$ beschränkt, also $\{\nabla v_n\}$ beschränkt im $L^2(\Omega)$ und somit, ggf. nach Übergang zu einer Teilfolge, $\nabla v_n \rightharpoonup w$ sowie gemäß Voraussetzung $v_n \to v$ in $L^2(\Omega)$. Grenzübergang $n \to \infty$ in

$$\int_\Omega \eta \nabla v_n \, dx = -\int_\Omega v_n \nabla \eta \, dx \,, \quad \eta \in C_0^\infty(\Omega) \,,$$

ergibt

$$\int_\Omega \eta w \, dx = -\int_\Omega v \nabla \eta \, dx \,, \quad \eta \in C_0^\infty(\Omega) \,,$$

also hat v die schwache Ableitung $\nabla v = w \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$ und damit $v \in H_0^1(\Omega)$. Da die Norm (und damit auch das Quadrat der Norm) ein schwach unterhalbstetiges Funktional ist, folgt

$$\varphi(v) = \frac{1}{2} \int_\Omega \|\nabla v(x)\|^2 \, dx \le \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{2} \int_\Omega \|\nabla v_n(x)\|^2 \, dx = \liminf_{n\to\infty} \varphi(v_n) \le \lim_{n\to\infty} r_n = r$$

und damit $(v, r) \in \operatorname{epi}(\varphi)$. Also ist $\operatorname{epi}(\varphi)$ abgeschlossen und φ unterhalbstetig.
(iii) Wir zeigen, dass $A \subset \partial\varphi$ gilt. Sei $u \in D(A)$. Für beliebiges $v \in D(\varphi)$ gilt

$$\begin{aligned} \langle Au, v - u \rangle_H &= \int_\Omega -\Delta u \cdot (v - u) \, dx = \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v - \nabla u \rangle \, dx \\ &= \langle \nabla u, \nabla v - \nabla u \rangle_H \le \frac{1}{2} \|\nabla u\|_H^2 + \frac{1}{2} \|\nabla v\|_H^2 - \|\nabla u\|_H^2 \\ &= \varphi(v) - \varphi(u) \,. \end{aligned}$$

(iv) Da A nach Beispiel 5.23 maximal monoton und $\partial\varphi$ monoton ist, folgt $A = \partial\varphi$. $\square$

Wir betrachten das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(a(x, \nabla u)) + a_0(x, u) &= f \,, \quad \text{in } \Omega, \\ u(x) &= 0 \,, \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{5.54}$$

wobei $a : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und $a_0 : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegebene Funktionen sind. Für $a(x,\xi) = |\xi|^{p-2}\xi$, $p > 1$, erhalten wir den sogenannten p-Laplace-Operator, $p = 2$ ergibt den Laplace-Operator. Die variationelle Formulierung ist

$$\int_\Omega \langle a(x, \nabla u(x)), \nabla v(x) \rangle \, dx + \int_\Omega a_0(x, u(x)) v(x) \, dx = \int_\Omega f(x) v(x) \, dx \,, \quad \text{für alle } v \in V, \tag{5.55}$$

wobei V noch festzulegen ist. Die durch a und a_0 definierten Nichtlinearitäten entstehen aus einem **Nemytskii-Operator** oder **Superpositionsoperator**, dieser hat die Form

$$(Fu)(x) = f(x, u(x)) \,.$$

Satz 5.25
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$. Die Funktion f erfülle die ***Carathéodory-Bedingungen***

$$\begin{aligned} &x \mapsto f(x,\xi) \text{ ist messbar für alle } \xi \in \mathbb{R}^m, \\ &\xi \mapsto f(x,\xi) \text{ ist stetig für alle } x \in \Omega, \end{aligned} \tag{5.56}$$

sowie die ***Wachstumsbedingung***

$$|f(x,\xi)| \le c|\xi|^{p/q} + g(x) \,, \quad \text{für fast alle } x \in \Omega \text{ und alle } \xi \in \mathbb{R}^m, \tag{5.57}$$

wobei $1 \le p, q < \infty$, $g \in L^q(\Omega)$ und $c > 0$. Dann wird durch

$$(Fu)(x) = f(x, u(x)) \tag{5.58}$$

ein stetiger und beschränkter Operator $F : L^p(\Omega; \mathbb{R}^m) \to L^q(\Omega; \mathbb{R}^l)$ definiert.

Beweis: Die Messbarkeit von $Fu : \Omega \to \mathbb{R}^l$ ergibt sich aus den Carathéodory-Bedingungen: Sei $u \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^m)$. Sei u_n eine Folge von Elementarfunktionen, d.h. von Linearkombinationen der Form

$$u_n = \sum_j c_{j,n} \chi_{j,n}$$

mit charakteristischen Funktionen $\chi_{j,n}$, so dass $u_n \to u$ punktweise a.e., dann sind die Funktionen

$$(Fu_n)(x) = \sum_j f(x, c_{j,n}) \chi_{j,n}(x)$$

messbar mit $Fu_n \to Fu$ punktweise a.e., also ist Fu messbar. Aus der Wachstumsbedingung erhalten wir mit der Dreiecksungleichung

$$\|Fu\|_q \le c \| |u|^{p/q} \|_q + \|g\|_q = \|u\|_p^{p/q} + \|g\|_q \,,$$

also $F : L^p \to L^q$ und F ist beschränkt.
F ist stetig: Sei $u_n \to u$ im L^p. Dann gibt es eine Teilfolge (u_{n_k}) mit $u_{n_k} \to u$ punktweise a.e. und $|u_{n_k}| \le \beta$ mit einer von k unabhängigen Funktion $\beta \in L^p$. (Eine solche Teilfolge

wird konstruiert, wenn man beweist, dass L^p vollständig ist.) Es gilt dann $Fu_{n_k} \to Fu$ punktweise a.e. und

$$|(Fu_{n_k})(x)| \leq c|u_{n_k}(x)|^{p/q} + g(x) \leq c|\beta(x)|^{p/q} + g(x)\,.$$

Die rechte Seite liegt im L^q. Aus dem Konvergenzsatz von Lebesgue folgt daher $Fu_{n_k} \to Fu$ im L^q. Da der Grenzwert Fu unabhängig ist von der Wahl dieser Teilfolge, folgt aus dem Konvergenzprinzip, dass die gesamte Folge konvergiert, also $Fu_n \to Fu$. □

Wir wollen einen Operator A definieren durch

$$\langle Au, v\rangle = \int_\Omega \langle a(x, \nabla u(x)), \nabla v(x)\rangle \, dx \tag{5.59}$$

Satz 5.26 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, die Funktion $a : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ erfülle die Carathéodory-Bedingung (5.56) sowie die Wachstumsbedingung*

$$|a(x, \xi)| \leq c(1 + |\xi|^{p-1}) \tag{5.60}$$

mit einem $p \in (1, \infty)$ und einem $c > 0$, es gelte weiterhin

$$\langle a(x, \xi) - a(x, \eta), \xi - \eta\rangle \geq 0\,, \tag{5.61}$$

$$\langle a(x, \xi), \xi\rangle \geq c_1|\xi|^p\,, \tag{5.62}$$

für alle $x \in \Omega$, $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$, mit geeignetem $c_1 > 0$. Dann wird durch (5.59) mit $V = W_0^{1,p}(\Omega)$ ein monotoner Operator $A : V \to V^*$ definiert, welcher stetig, beschränkt, pseudomonoton und koerziv ist.

Beweis: Sei $1/p + 1/q = 1$, also $p - 1 = p/q$. Die Abbildung $u \mapsto \nabla u$ ist linear und stetig von $W_0^{1,p}(\Omega)$ nach $L^p(\Omega; \mathbb{R}^n)$. Gemäß Satz 5.25 wird durch

$$(\tilde{F}u)(x) = a(x, \nabla u(x))$$

ein stetiger und beschränkter Operator $\tilde{F} : W_0^{1,p}(\Omega) \to L^q(\Omega; \mathbb{R}^n)$ definiert, und es folgt

$$\int_\Omega \langle a(x, \nabla u(x)), \nabla v(x)\rangle \, dx \leq \|\tilde{F}u\|_q \|\nabla v\|_p\,, \quad \text{für alle } v \in V,$$

nach der Hölderschen Ungleichung. Somit ist $A : V \to V^*$ wohldefiniert und beschränkt, und wegen

$$\|Au_n - Au\|_{V^*} = \sup_{\|v\|_V = 1} \langle Au_n - Au, v\rangle \leq \|\tilde{F}u_n - \tilde{F}u\|_q$$

auch stetig. Wegen (5.61) ist A monoton und damit auch pseudomonoton nach Satz 5.19. Die Koerzivität von A folgt aus (5.62), da

$$\langle Au, u\rangle = \int_\Omega \langle a(x, \nabla u(x)), \nabla u(x)\rangle \, dx \geq c_1 \int_\Omega |\nabla u(x)|^p \, dx = c_1 \|\nabla u\|_p^p$$

und damit

$$\frac{\langle Au, u\rangle}{\|u\|_V} \geq c_1 \|u\|_V^{p-1} \to \infty \quad \text{falls } \|u\|_V \to \infty.$$

□

Wir behandeln nun den durch a_0 erzeugten Superpositionsoperator.

Definition 5.27 *Sei V Banachraum. Ein Operator $A : V \to V^*$ heißt* ***vollstetig****, wenn aus $u_n \rightharpoonup u$ in V folgt, dass $Au_n \to Au$ in V^*.* □

Lemma 5.28 *Jeder vollstetige Operator ist pseudomonoton.*

Beweis: Gilt $u_n \rightharpoonup u$, so folgt $Au_n \to Au$ und daher

$$\langle Au, u - v\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - v\rangle \ , \quad \text{für alle } v \in V.$$

□

Satz 5.29 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, die Funktion $a_0 : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfülle die Carathéodory-Bedingung (5.56) sowie die Wachstumsbedingung*

$$|a_0(x, r)| \le c_0(1 + |r|^{p-1}) \tag{5.63}$$

mit $p \in (1, \infty)$ und einem $c_0 > 0$, es gelte weiterhin

$$a_0(x, r)r \ge -\gamma_0(1 + |r|)\,. \tag{5.64}$$

Dann wird durch

$$\langle A_0 u, v\rangle = \int_\Omega a_0(x, u(x))v(x)\, dx \tag{5.65}$$

für $V = W_0^{1,p}(\Omega)$ ein vollstetiger Operator $A_0 : V \to V^*$ definiert mit

$$\langle A_0 u, u\rangle \ge -\gamma_1(1 + \|u\|_1) \tag{5.66}$$

für eine geeignete Konstante $\gamma_1 > 0$.

Beweis: Wie in Satz 5.26 ergibt sich, dass $u \mapsto a_0(\cdot, u(\cdot))$ einen stetigen Superpositionsoperator von L^p nach L^q definiert für $1/p + 1/q = 1$. Die Einbettung von $W_0^{1,p}$ in L^p ist vollstetig nach einem Satz der Funktionalanalysis, also ist $A_0 : V \to V^*$ ebenfalls vollstetig. Die Ungleichung (5.66) folgt direkt aus (5.64) und (5.65). □

Lemma 5.30 *Sei $A_1 : V \to V^*$ pseudomonoton und $A_2 : V \to V^*$ vollstetig. Dann ist $A_1 + A_2$ pseudomonoton.*

Bemerkung: Man kann auf ähnliche Weise zeigen, dass es genügt, wenn A_2 pseudomonoton ist, das heißt, die Summe zweier pseudomonotoner Operatoren ist ebenfalls pseudomonoton.

Beweis: Ist $u_n \rightharpoonup u$ und $\limsup_n \langle (A_1 + A_2, u_n - u\rangle \le 0$, so folgt $\langle A_2, u_n - u\rangle \to 0$ und daher

$$\limsup_{n\to\infty} \langle A_1, u_n - u\rangle \le 0\,,$$

und weiter

$$\begin{aligned}\langle (A_1 + A_2)u, u - v\rangle &\le \liminf_{n\to\infty} \langle A_1 u_n, u_n - v\rangle + \lim_{n\to\infty} \langle A_2 u_n, u_n - v\rangle \\ &= \liminf_{n\to\infty} \langle (A_1 + A_2)u_n, u_n - v\rangle \ .\end{aligned}$$

$\square$

Wir kommen zurück auf das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}\,(a(x,\nabla u)) + a_0(x,u) &= f\,, \quad \text{in } \Omega,\\ u(x) &= 0\,, \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \tag{5.67}$$

und dessen Formulierung

$$\langle (A+A_0)u, v\rangle = \langle f, v\rangle\ , \quad \text{für alle } v\in V, \tag{5.68}$$

als nichtlineare Variationsgleichung.

Satz 5.31 *Es seien für die Funktionen a und a_0 die Voraussetzungen aus den Sätzen 5.26 und 5.29 erfüllt. Dann hat das Randwertproblem (5.67) eine Lösung $u \in W_0^{1,p}(\Omega) =: V$ für jedes $f \in V^*$.*

Beweis: Wir setzen $B = A + A_0$, $B : V \to V^*$. Nach den vorangegangenen Sätzen ist B beschränkt, demistetig und pseudomonoton. B ist außerdem koerziv zu $u_0 = 0$, da

$$\begin{aligned} \frac{\langle Bu,u\rangle}{\|u\|_V} &= \frac{\langle Au,u\rangle}{\|u\|_V} + \frac{\langle A_0u,u\rangle}{\|u\|_V}\\ &\ge \frac{\langle Au,u\rangle}{\|u\|_V} - \gamma_1\frac{1+\|u\|_1}{\|u\|_V} \quad \to \infty \text{ für } \|u\|_V \to \infty, \end{aligned}$$

da der rechtsstehende Term (ohne das Minuszeichen) für $\|u\|_V \to \infty$ nach oben beschränkt ist. Wir wenden nun Satz 5.14 an (dort setzen wir $A = 0$ und $K = V$) und erhalten zu gegebenem $f \in V^*$ ein u mit $Bu = f$. $\square$

Aus dem allgemeinen Existenzsatz erhalten wir auch einen Existenzsatz für die nichtlineare Variationsungleichung

$$\begin{aligned} \langle (A+A_0)u, v-u\rangle \ge \langle f, v-u\rangle\ , \quad &\text{für alle } v\in K,\\ u\in K\,, \end{aligned} \tag{5.69}$$

wobei K eine abgeschlossene konvexe Teilmenge von V ist.

Satz 5.32 *Seien die Voraussetzungen von Satz 5.31 erfüllt, sei K eine nichtleere abgeschlossene konvexe Teilmenge von $V = W_0^{1,p}(\Omega)$. Dann hat die Variationsungleichung (5.69) für jedes $f \in V^*$ eine Lösung $u \in K$.*

Beweis: Wir betrachten für $B = A + A_0$ die Inklusion

$$\partial I_K(u) + Bu \ni f\,,$$

wobei I_K die Indikatorfunktion von K ist. Nach Satz 5.22 ist $\partial I_K : V \rightrightarrows V^*$ maximal monoton. Wir können daher Satz 5.14 anwenden (dort $A = \partial I_K$, $K = V$) und erhalten ein $u \in V$ mit $f - Bu \in \partial I_K(u)$. Es ist $u \in K$ (andernfalls wäre $I_K(u) = +\infty$), und gemäß Lemma 4.4 ist $f - Bu$ ein Stützfunktional für K in u, das heißt,

$$\langle f - Bu, v-u\rangle \le 0\,, \quad \text{für alle } v\in K.$$

$\square$

6 Das Bochner-Integral

Unter $[a, b]$ wird im folgenden immer ein kompaktes Intervall im $\mathbb{R}$ verstanden. Ist $A \subset [a, b]$, so bezeichnet χ_A die durch

$$\chi_A(t) = \begin{cases} 1\,, & t \in A\,, \\ 0\,, & t \notin A\,, \end{cases} \tag{6.1}$$

definierte charakteristische Funktion von A.

Definition 6.1 (Einfache Funktion) *Sei V Banachraum. Eine Funktion $u : [a, b] \to V$ heißt einfach, wenn sie die Form*

$$u(t) = \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i}(t) v_i \tag{6.2}$$

hat, wobei $n \in \mathbb{N}$, $A_i \subset [a, b]$ messbar und $v_i \in V$ für $1 \leq i \leq n$.

Lemma 6.2 *Sei V Banachraum, $u : [a, b] \to V$ einfach. Dann gibt es genau eine Darstellung der Form (6.2) mit*

$$\bigcup_i A_i = [a, b]\,, \quad A_i \cap A_j = \emptyset \text{ und } v_i \neq v_j \text{ für } i \neq j\,. \tag{6.3}$$

Diese Darstellung heißt kanonische Darstellung.

Beweis: Übung. □

Definition 6.3 (Bochner-Messbarkeit)
Sei V Banachraum. Eine Funktion $u : [a, b] \to V$ heißt Bochner-messbar, falls es eine Folge von einfachen Funktionen $u_n : [a, b] \to V$ gibt mit

$$\lim_{n\to\infty} u_n(t) = u(t) \tag{6.4}$$

für fast alle $t \in [a, b]$.

Definition 6.4 *Sei V Banachraum, $u : [a, b] \to V$ einfache Funktion mit der Darstellung*

$$u(t) = \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i}(t) v_i\,. \tag{6.5}$$

Wir definieren das Bochner-Integral von u als

$$\int_a^b u(t)\, dt = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{meas}(A_i) v_i\,. \tag{6.6}$$

Ist $A \subset [a, b]$ messbar, so definieren wir

$$\int_A u(t)\, dt = \int_a^b \chi_A(t) u(t)\, dt\,. \tag{6.7}$$

Die Definition 6.4 ist sinnvoll, da der Wert der rechten Seite von (6.6) nicht von der gewählten Darstellung abhängt. Direkt aus der Definition folgt, dass für einfache Funktionen $u, v : [a, b] \to V$ und Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_a^b \alpha u(t) + \beta v(t)\, dt = \alpha \int_a^b u(t)\, dt + \beta \int_a^b v(t)\, dt\,, \tag{6.8}$$

sowie

$$\left\| \int_a^b u(t)\, dt \right\| \le \int_a^b \|u(t)\|\, dt\,. \tag{6.9}$$

Lemma 6.5 *Sei V Banachraum, $u_n : [a, b] \to V$ eine Folge von einfachen Funktionen mit $u_n \to u$ fast überall. Dann ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ die durch*

$$f(t) = \|u_n(t) - u(t)\| \tag{6.10}$$

definierte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ (Lebesgue-)messbar.

Beweis: Es ist

$$f(t) = \lim_{m\to\infty} f_m(t)\,, \quad f_m(t) := \|u_n(t) - u_m(t)\|\,, \tag{6.11}$$

und f_m ist eine einfache Funktion für alle $m \in \mathbb{N}$. □

Sei nun $u_n : [a, b] \to V$ eine Folge von einfachen Funktionen mit $u_n \to u$ punktweise fast überall und

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \|u_n(t) - u(t)\|\, dt = 0\,. \tag{6.12}$$

(Nach Lemma 6.5 ist der Integrand messbar.) Wegen

$$\begin{aligned} \left\| \int_a^b u_n(t)\, dt - \int_a^b u_m(t)\, dt \right\| &\le \int_a^b \|u_n(t) - u_m(t)\|\, dt \\ &\le \int_a^b \|u_n(t) - u(t)\|\, dt + \int_a^b \|u_m(t) - u(t)\|\, dt \end{aligned} \tag{6.13}$$

wird durch

$$y_n = \int_a^b u_n(t)\, dt \tag{6.14}$$

eine Cauchyfolge in V definiert. Ist $v_n : [a, b] \to V$ eine weitere Folge mit denselben Eigenschaften wie u_n, so gilt

$$\begin{aligned} \left\| \int_a^b v_n(t)\, dt - \int_a^b u_n(t)\, dt \right\| &\le \int_a^b \|v_n(t) - u_n(t)\|\, dt \\ &\le \int_a^b \|v_n(t) - u(t)\|\, dt + \int_a^b \|u_n(t) - u(t)\|\, dt\,, \end{aligned} \tag{6.15}$$

also hängt der Grenzwert von (y_n) nicht von der speziellen Wahl der Folge (u_n) ab.

Definition 6.6 (Bochner-Integral) *Sei $u : [a,b] \to V$. Falls es eine Folge von einfachen Funktionen $u_n : [a,b] \to V$ gibt mit $u_n \to u$ punktweise fast überall und*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \|u_n(t) - u(t)\| \, dt = 0 \,, \tag{6.16}$$

so heißt u Bochner-integrierbar, und wir definieren das Bochner-Integral von u als

$$\int_a^b u(t) \, dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b u_n(t) \, dt \,. \tag{6.17}$$

Lemma 6.7 *Sei V Banachraum, seien $u, v : [a,b] \to V$ Bochner-integrierbar und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann ist auch $\alpha u + \beta v$ Bochner-integrierbar, und es gilt*

$$\int_a^b \alpha u(t) + \beta v(t) \, dt = \alpha \int_a^b u(t) \, dt + \beta \int_a^b v(t) \, dt \,. \tag{6.18}$$

Beweis: Direkt aus den Definitionen. □

Satz 6.8 *Sei V Banachraum. Ein $u : [a,b] \to V$ ist Bochner-integrierbar genau dann, wenn u Bochner-messbar und die Funktion $t \mapsto \|u(t)\|$ integrierbar ist. Es gilt außerdem*

$$\left\| \int_a^b u(t) \, dt \right\| \le \int_a^b \|u(t)\| \, dt \,. \tag{6.19}$$

Beweis: "$\Rightarrow$": Sei (u_n) Folge einfacher Funktionen mit $u_n \to u$ punktweise fast überall und

$$\int_a^b \|u(t) - u_n(t)\| \, dt = 0 \,. \tag{6.20}$$

Da $\|u_n(t)\| \to \|u(t)\|$ für fast alle $t \in [a,b]$ gilt, ist die Funktion $t \mapsto \|u(t)\|$ messbar. Es gilt dann

$$\int_a^b \|u(t)\| \, dt \le \int_a^b \|u(t) - u_n(t)\| \, dt + \int_a^b \|u_n(t)\| \, dt < \infty \,. \tag{6.21}$$

"$\Leftarrow$": Sei (u_n) Folge einfacher Funktionen mit $u_n \to u$ punktweise fast überall. Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ definieren wir $v_n : [a,b] \to V$ durch

$$v_n(t) = \begin{cases} u_n(t) \,, & \text{falls } \|u_n(t)\| \le (1+\varepsilon)\|u(t)\| \,, \\ 0 \,, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{6.22}$$

v_n ist eine einfache Funktion, da $\{t : \|u_n(t)\| \le (1+\varepsilon)\|u(t)\|\}$ messbar ist. Für

$$f_n(t) = \|v_n(t) - u(t)\| \tag{6.23}$$

gilt $f_n \to 0$ punktweise fast überall und

$$0 \le f_n(t) \le (2+\varepsilon)\|u(t)\| \,. \tag{6.24}$$

Aus dem Satz von Lebesgue folgt

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \|v_n(t) - u(t)\| \, dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t) \, dt = 0 \,, \tag{6.25}$$

also ist u Bochner-integrierbar. Mit (6.9) folgt

$$\left\| \int_a^b v_n(t) \, dt \right\| \leq \int_a^b \|v_n(t)\| \, dt \leq (1+\varepsilon) \int_a^b \|u(t)\| \, dt \tag{6.26}$$

und damit auch

$$\left\| \int_a^b u(t) \, dt \right\| = \left\| \lim_{n\to\infty} \int_a^b v_n(t) \, dt \right\| \leq (1+\varepsilon) \int_a^b \|u(t)\| \, dt \,. \tag{6.27}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt (6.19). □

In Analogie zum Fall $V = \mathbb{R}$ betrachten wir nun Funktionen $u : [a,b] \to V$, für die gilt

$$\int_a^b \|u(t)\|^p \, dt < \infty \,. \tag{6.28}$$

Definition 6.9 *Sei V Banachraum, $1 \leq p < \infty$. Wir definieren*

$$L^p(a,b;V) = \{[u] \,|\, u : [a,b] \to V \text{ ist Bochner-messbar und (6.28) gilt}\} \,, \tag{6.29}$$

wobei $[u]$ die Äquivalenzklasse von u unter der Äquivalenzrelation

$$u \sim v \quad \Leftrightarrow \quad u = v \text{ fast überall} \tag{6.30}$$

bezeichnet.

Nach Satz 6.8 ist $L^1(a,b;V)$ gerade der Vektorraum aller Bochner-integrierbaren Funktionen.

Satz 6.10 *Sei V Banachraum, $1 \leq p < \infty$. Dann ist $L^p(a,b;V)$ ein Banachraum mit der Norm*

$$\|u\|_{L^p(a,b;V)} = \left(\int_a^b \|u(t)\|_V^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \,. \tag{6.31}$$

Ist V Hilbertraum, so ist $L^2(a,b;V)$ ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle = \int_a^b \langle u(t), v(t) \rangle_V \, dt \,. \tag{6.32}$$

Beweis: Weggelassen. Geht genauso wie im Fall $V = \mathbb{R}$. Zum Beweis der Bochner-Messbarkeit der als Limes einer Cauchyfolge konstruierten Grenzfunktion wird zusätzlich der Messbarkeitssatz von Pettis benötigt. □

Definition 6.11 *Für $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ definieren wir*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[a,b]} u(t) = \inf\{M : M \in \mathbb{R},\ u(t) \le M \text{ für fast alle } t \in [a,b]\}\,. \tag{6.33}$$

Wir betrachten nun banachraumwertige Funktionen $u : [a,b] \to V$, für die gilt

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[a,b]} \|u(t)\|_V < \infty\,. \tag{6.34}$$

Definition 6.12 *Sei V Banachraum. Wir definieren*

$$L^\infty(a,b;V) = \{[u] \,|\, u : [a,b] \to V \text{ ist Bochner-messbar und (6.34) gilt}\}\,. \tag{6.35}$$

Satz 6.13 *Sei V Banachraum. Dann ist $L^\infty(a,b;V)$ ein Banachraum.*

Beweis: Verläuft ebenfalls wie im Fall $V = \mathbb{R}$. □

Lemma 6.14 *Sei V Banachraum. Dann gilt für alle $1 \le p \le q \le \infty$*

$$L^q(a,b;V) \subset L^p(a,b;V)\,. \tag{6.36}$$

Beweis: Wie im Fall $V = \mathbb{R}$. □

Definition 6.15 *Sei V Banachraum. Wir definieren*

$$C([a,b];V) = \{u \,|\, u : [a,b] \to V \text{ stetig}\}\,. \tag{6.37}$$

Definition 6.16 (Oszillation) *Sei V Banachraum, $u : [a,b] \to V$. Wir definieren die Oszillation von u durch*

$$\operatorname*{osc}_{[a,b]}(u;\delta) = \sup\{\|u(t) - u(s)\| : s,t \in [a,b],\ |t-s| \le \delta\}\,. \tag{6.38}$$

Lemma 6.17 *Sei V Banachraum, $u : [a,b] \to V$ stetig. Dann gilt*

$$\lim_{\delta\to 0} \operatorname*{osc}_{[a,b]}(u;\delta) = 0\,. \tag{6.39}$$

Beweis: Die Aussage (6.39) ist gleichbedeutend mit der gleichmäßigen Stetigkeit von u. □

Für eine stetige Funktion $u : [a,b] \to V$ gilt

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[a,b]} \|u(t)\| = \max_{t\in[a,b]} \|u(t)\|\,, \tag{6.40}$$

da aus der Stetigkeit folgt, dass $\|u(t)\| \le \operatorname{ess\,sup}_{s\in[a,b]} \|u(s)\|$ gilt für alle t.

Satz 6.18 *Sei V Banachraum. Dann ist $C([a,b];V)$ ein Banachraum mit der Norm*

$$\|u\|_{C([a,b];V)} = \max_{t\in[a,b]} \|u(t)\| \,, \tag{6.41}$$

und $C([a,b];V)$ kann mit einem abgeschlossenen Teilraum von $L^\infty(a,b;V)$ identifiziert werden.

Beweis: Ist $u : [a,b] \to V$ stetig, so ist u auch Bochner-messbar: Wir definieren eine Folge von einfachen Funktionen $u_n : [a,b] \to V$ durch $u_n(t) = u(ih)$, falls $t \in [ih,(i+1)h)$, $h = (b-a)/n$ ist. Dann gilt

$$\|u_n(t) - u(t)\| \le \operatorname*{osc}_{[a,b]}(u;h) \,, \quad h = \frac{b-a}{n} \,, \tag{6.42}$$

also $u_n \to u$ gleichmäßig (punktweise würde schon genügen). Weiter: Sei (u_n) Folge in C mit $[u_n] \to [u]$ in L^∞. Wir wählen eine Nullmenge N in $[a,b]$ mit $u_n \to u$ gleichmäßig in $M = [a,b] \setminus N$, dann ist u stetig auf M. Ist $t \in N$, so wählen wir eine Folge $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in M mit $t_k \to t$, dann ist

$$\|u_n(t) - u_m(t)\| \le \|u_n(t) - u_n(t_k)\| + \|u_n - u_m\|_{L^\infty(a,b;V)} + \|u_m(t_k) - u_m(t)\| \,,$$

also ist $(u_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge auch für $t \in N$. Definieren wir $\tilde{u}(t)$ als den Limes dieser Cauchyfolge für $t \in N$ und setzen wir $\tilde{u}(t) = u(t)$ für $t \in M$, so ist $\tilde{u} : [a,b] \to V$ stetig und $[\tilde{u}] = [u]$. □

Satz 6.19 *Sei V reflexiver und separabler Banachraum, $1 < p < \infty$. Dann ist der Dualraum von $L^p(a,b;V)$ isometrisch isomorph zu $L^q(a,b;V^*)$, wobei $1/p + 1/q = 1$. Die Isometrie $I : L^q(a,b;V^*) \to (L^p(a,b;V))^*$ ist gegeben durch*

$$\langle Iu, v\rangle = \int_a^b \langle u(t), v(t)\rangle \, dt \tag{6.43}$$

für $u \in L^q(a,b;V^*)$ und $v \in L^p(a,b;V)$.

Beweis: Weggelassen. □

7 Parabolische Gleichungen

Wir erläutern, wie eine parabolische Gleichung aus der allgemeinen Bilanzgleichung für eine zeitabhängige auf die Masse bezogene Dichte $\psi(x,t)$ einer Größe ψ entsteht (siehe auch meine Vorlesung PDE 1, Kapitel 5). Wir gehen aus von der differentiellen Form der Bilanzgleichung

$$\partial_t(\rho\psi) + \operatorname{div}(\rho\psi v + \Phi) = \rho z\,. \tag{7.1}$$

Hierbei ist ρ die Dichte der Masse, v die Geschwindigkeit, Φ der nichtkonvektive Fluß und z die Zufuhr. Ist ρ konstant, so wird (7.1) zu

$$\partial_t\psi + \frac{1}{\rho}\operatorname{div}\Phi + \langle v, \nabla\psi\rangle + (\operatorname{div} v)\psi = z\,. \tag{7.2}$$

Der Ansatz (Gesetz von Fourier für Wärmeleitung, von Fick für die Diffusion von Substanzen)

$$\frac{1}{\rho}\Phi = -D\nabla\psi\,, \quad D \text{ Matrix,} \tag{7.3}$$

beschreibt Diffusionsvorgänge, der isotrope Fall entspricht $D = \lambda I$, $\lambda > 0$. Insgesamt ergibt sich die sogenannte **Konvektions-Diffusions-Gleichung**

$$\partial_t\psi - \operatorname{div}(D\nabla\psi) + \langle v, \nabla\psi\rangle + (\operatorname{div} v)\psi = z\,. \tag{7.4}$$

Sind D, v und z gegebene Funktionen von x und t, so erhalten wir eine lineare parabolische Gleichung (wir schreiben wieder u für die unbekannte Funktion)

$$\partial_t u + Lu = f\,, \tag{7.5}$$

wobei L ein elliptischer Operator der Form (man nennt sie Divergenzform)

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^n \partial_j(a_{ij}(t,x)\partial_i u) + \sum_{i=1}^n b_i(t,x)\partial_i u + c(t,x)u \tag{7.6}$$

ist.

Der Prototyp dieser Gleichung ist die Diffusionsgleichung (oder Wärmeleitungsgleichung)

$$\partial_t u - \lambda\Delta u = f\,, \quad \lambda > 0\,. \tag{7.7}$$

Als Beispiel geben wir die Lösung "$u = u(t,x)$" des Anfangswertproblems

$$\partial_t u - \lambda\Delta u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \tag{7.8}$$
$$u(0,x) = u_0(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^n. \tag{7.9}$$

an. Man kann beweisen, dass die Funktion

$$u(t,x) = (4\pi\lambda t)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4\lambda t}} u_0(y)\,dy\,, \tag{7.10}$$

eine Lösung ist von (7.9) mit der Eigenschaft

$$\lim_{(t,\xi)\to(0,x)} u(t,\xi) = u_0(x)\,, \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n, \tag{7.11}$$

wenn wir voraussetzen, dass $u_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt ist. Die Formel (7.10) illustriert typische Eigenschaften von Lösungen parabolischer Gleichungen.

- Anfangswerte in einem Punkt (bzw. in einem kleinen Bereich um diesen Punkt) beeinflussen instantan (für beliebig kleine $t > 0$) die Lösung $u(t, \cdot)$ im ganzen $\mathbb{R}^n$. Man spricht von einer "unendlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit".

- Unabhängig von der Glattheit von f ist $x \mapsto u(t, x)$ eine C^∞-Funktion für jedes $t > 0$, das heißt, Diffusion glättet.

- Für $t \to \infty$ konvergiert die Lösung gegen eine Funktion $u_\infty = u_\infty(x)$, hier die Nullfunktion, welche eine stationäre Lösung ist, das heißt, eine Lösung von $-\Delta u = 0$.

Im Folgenden betrachten wir den quasilinearen elliptischen Operator

$$Lu = -\operatorname{div} a(t, x, \nabla u) + a_0(t, x, u) \tag{7.12}$$

und das zugehörige parabolische Anfangsrandwertproblem

$$\partial_t u + Lu = f \quad \text{in } \Omega_T = \Omega \times (0, T], \tag{7.13}$$

$$u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \times (0, T), \tag{7.14}$$

$$u(0, x) = u_0(x) \quad \text{für } x \in \Omega. \tag{7.15}$$

Wir gehen über zu einer variationellen Formulierung hinsichtlich der Ortsvariablen x. Sei $v \in C_0^\infty(\Omega)$ eine Testfunktion. Wir multiplizieren beide Seiten von (7.13) mit v, integrieren über Ω und führen partielle Integration im Divergenzterm durch. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_\Omega \partial_t u(t, x) v(x)\, dx + \int_\Omega \langle a(t, x, \nabla u(x)), \nabla v(x)\rangle \; dx + \int_\Omega a_0(t, x, u(t, x)) v(x)\, dx \\ = \int_\Omega f(t, x) v(x)\, dx\,.\end{aligned} \tag{7.16}$$

Wir wollen die unbekannte Funktion u auffassen als Funktion $u : [0, T] \to V$, wobei V ein geeigneter Banachraum von Funktionen auf Ω ist, also

$$u(t) : \Omega \to \mathbb{R}\,, \quad \text{für alle } t \in [0, T]. \tag{7.17}$$

Der Wert $(u(t))(x)$ entspricht dann $u(t, x)$ in (7.13). Wir formulieren das Anfangsrandwertproblem nunmehr als

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(u(t), v)_H + \langle A(t, u(t)), v\rangle = \langle F(t), v\rangle_V \;, \quad \text{für alle } v \in V, \\ u(0) = u_0\,.\end{aligned} \tag{7.18}$$

Hierbei ist

$$\begin{aligned}H = L^2(\Omega)\,, \quad (w, v)_H = \int_\Omega w(x) v(x)\, dx\,, \\ V = H_0^1(\Omega)\,, \quad F : [0, T] \to V^*\,,\end{aligned} \tag{7.19}$$

$\langle F(t), v\rangle_V$ bedeutet die Anwendung von $F(t)$ auf v, und

$$\langle A(t, w), v\rangle_V = \int_\Omega \langle a(t, x, \nabla w(x)), \nabla v(x)\rangle \; dx + \int_\Omega a_0(t, x, w(x)) v(x)\, dx\,. \tag{7.20}$$

In welchem Raum liegt $u'(t)$? Da in (7.18)

$$v \mapsto \langle A(t, u(t)), v \rangle_V$$

ein Element von V^* (und nicht von H^*) definiert, kann man zunächst auch nur dasselbe von

$$v \mapsto \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(u(t), v)_H$$

erwarten. Dem entspricht, dass für eine schwache Lösung

$$u(t, \cdot) \in H_0^1(\Omega)\,, \quad t \in (0, T)$$

die Zeitableitung $\partial_t u(t, \cdot)$ in (7.13) die Regularität von $(Lu)(t, \cdot)$ hat, das heißt, zweite distributionelle Ableitung einer Funktion in $H_0^1(\Omega)$ ist, also erste distributionelle Ableitung einer Funktion in $L^2(\Omega)$.

Es stellt sich heraus, dass der Begriff des **Evolutionstripels** den geeigneten abstrakten Rahmen für die vorliegende Situation liefert.

Ist $v^* \in V^*$ und $v \in V$, so verwenden wir die Notation

$$\langle v^*, v \rangle_V := v^*(v)\,. \tag{7.21}$$

Satz 7.1 *Sei H ein Hilbertraum und V ein reflexiver Banachraum über $\mathbb{R}$, sei $j : V \to H$ linear, stetig und injektiv, sei $j(V)$ dicht in H. Dann wird durch*

$$\langle j^*(h), v \rangle_V = (h, j(v))_H \tag{7.22}$$

eine lineare, stetige und injektive Abbildung $j^* : H \to V^*$ mit $\|j^*\| \le \|j\|$ definiert, und $j^*(H)$ ist dicht in V^*.

Bemerkung: Nur der Fall $j(V) \ne H$ ist interessant, im Fall $j(V) = H$ ist j ein Banachraumisomorphismus.

Beweis: Sei $h \in H$. Dann definiert die rechte Seite von (7.22) wegen

$$|(h, j(v))_H| \le \|h\|_H \, \|j(v)\|_H \le \|h\|_H \, \|j\| \, \|v\|_V \tag{7.23}$$

ein Element $j^*(h) \in V^*$ mit

$$\|j^*(h)\|_{V^*} \le \|j\| \, \|h\|_H\,. \tag{7.24}$$

j^* ist offensichtlich linear und wegen (7.24) auch stetig mit $\|j^*\| \le \|j\|$. Ist $j^*(h) = 0$, so ist

$$(h, j(v))_H = 0\,, \qquad \text{für alle } v \in V\,. \tag{7.25}$$

Sei (v_n) Folge in V mit $j(v_n) \to h$ in H, dann folgt

$$(h, h)_H = (h, \lim_{n\to\infty} j(v_n))_H = \lim_{n\to\infty} (h, j(v_n))_H = 0\,, \tag{7.26}$$

also ist $h = 0$ und damit j^* injektiv. Es bleibt zu zeigen, dass $j^*(H)$ dicht ist in V^*. Sei $v^{**} \in V^{**}$ beliebig mit $v^{**}(j^*(H)) = 0$. Es genügt zu zeigen, dass dann $v^{**} = 0$ sein muss.

(Ist $W = \mathrm{cl}\,(j^*(H))$ echt in V^* enthalten, so gibt es nach dem Satz von Hahn-Banach ein $v^{**} \in V^{**}$ mit $v^{**}(W) = 0$, aber $v^{**} \neq 0$). Da V reflexiv ist, finden wir ein $v \in V$ mit

$$\langle v^*, v\rangle_V = v^{**}(v^*)\,, \qquad \text{für alle } v^* \in V^*\,. \tag{7.27}$$

Es gilt dann für alle $h \in H$

$$0 = v^{**}(j^*(h)) = \langle j^*(h), v\rangle_V = (h, j(v))_H\,, \tag{7.28}$$

also ist $j(v) = 0$ und wegen der Injektivität von j auch $v = 0$, also auch $v^{**} = 0$. □

Folgerung 7.2 *In der Situation von Satz 7.1 gilt außerdem: Die Abbildung $i : V \to V^*$, $i = j^* \circ j$, ist linear, stetig und injektiv, $i(V)$ ist dicht in V^*, und*

$$\langle i(v), w\rangle_V = (j(v), j(w))_H = \langle i(w), v\rangle_V \;, \qquad \textit{für alle } v, w \in V\,. \tag{7.29}$$

Beweis: Folgt unmittelbar aus Satz 7.1 und den Definitionen. □

Es ergibt sich also

$$V \xrightarrow{j} H \xrightarrow{j^*} V^* \tag{7.30}$$

mit stetigen und dichten Einbettungen.

Definition 7.3 (Evolutionstripel, Gelfand-Dreier)
Unter den Voraussetzungen von Satz 7.1 heißt (7.30) ein Evolutionstripel oder ein Gelfand-Dreier.

Für das parabolische Problem (7.13) – (7.15) setzen wir wie bereits erläutert

$$V = H_0^1(\Omega)\,, \quad H = L^2(\Omega)\,, \tag{7.31}$$

und

$$j : H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)\,, \tag{7.32}$$

die durch $j(v)(x) = v(x)$ definierte kanonische Einbettung. Die Abbildung j^* läßt sich wie folgt interpretieren. Es ist für $h \in H = L^2(\Omega)$ und $v \in V$

$$\langle j^*(h), v\rangle_V = (h, j(v))_H = \int_\Omega h(x)v(x)\,dx\,. \tag{7.33}$$

Ordnen wir dem Element $j^*(h) \in V^*$ vermittels des Rieszschen Darstellungssatzes ein Element $w \in V$ zu, so gilt

$$\langle j^*(h), v\rangle_V = \int_\Omega \langle \nabla w(x), \nabla v(x)\rangle \; dx\,, \tag{7.34}$$

falls wir als Skalarprodukt im $H_0^1(\Omega)$ das L^2-Skalarprodukt der Gradienten verwenden (welches äquivalent ist zur Restriktion des Standardskalarprodukts in $H^1(\Omega)$, nach dem Satz von Poincaré). Aus (7.33) und (7.34) folgt, dass w gerade die schwache Lösung des elliptischen Randwertproblems

$$\begin{aligned} -\Delta w &= h \quad \text{in } \Omega, \\ w &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \tag{7.35}$$

ist.

Die Einbettungen j und j^* eines Evolutionstripels induzieren vermittels

$$u \mapsto j \circ u \mapsto j^* \circ j \circ u \tag{7.36}$$

Einbettungen der zugehörigen L^p-Räume

$$L^p(0,T;V) \to L^p(0,T;H) \to L^p(0,T;V^*)\,. \tag{7.37}$$

Im weiteren Verlauf dieses Kapitels werden wir j und j^* oft weglassen, das heißt, wenn wir schreiben "$h = v$" oder "$v = w$" mit $v \in V$, $h \in H$ und $w \in V^*$ meinen wir "$h = j(v)$" bzw. "$w = i(v) = j^*(j(v))$".

Definition 7.4 (Schwache Zeitableitung)
Sei $u \in L^1(0,T;V)$. Ein $w \in L^1(0,T;V^*)$ heißt schwache Ableitung von u, wenn gilt

$$\int_0^T w(t)\varphi(t)\,dt = -\int_0^T u(t)\varphi'(t)\,dt\,, \tag{7.38}$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(0,T)$. □

Die Integrale in (7.38) sind Bochner-Integrale, und gemäß unserer Sprachregelung ist "$u(t)$" auf der rechten Seite als "$i(u(t))$" zu lesen.

Wir wollen Gleichungen in V und V^* auf Gleichungen in $\mathbb{R}$ zurückspielen. Dazu brauchen wir die Rechenregeln

$$\left\langle v^*\,, \int_0^T u(t)\,dt \right\rangle_V = \int_0^T \langle v^*, u(t)\rangle_V \,dt\,, \quad v^* \in V^*\,,\, u \in L^1(0,T;V)\,, \tag{7.39}$$

und

$$\left\langle \int_0^T u(t)\,dt\,,\, v \right\rangle_V = \int_0^T \langle u(t), v\rangle_V \,dt\,, \quad v \in V\,,\, u \in L^1(0,T;V^*)\,. \tag{7.40}$$

Satz 7.5 *Sei V Banachraum. Ist $v^* \in V^*$ und $u \in L^1(0,T;V)$, so ist $t \mapsto \langle v^*, u(t)\rangle_V$ integrierbar, und (7.39) gilt. Ist $v \in V$ und $u \in L^1(0,T;V^*)$, so ist $t \mapsto \langle u(t), v\rangle_V$ integrierbar, und (7.40) gilt.*

Beweis: Wir betrachten (7.39). Ist

$$u = \sum_{i=1}^n \chi_{A_i} v_i \tag{7.41}$$

eine einfache Funktion mit Werten $v_i \in V$, so ist auch $t \mapsto \langle v^*, u(t)\rangle_V$ eine einfache Funktion, und es gilt

$$\begin{aligned} \left\langle v^*\,, \int_0^T u(t)\,dt \right\rangle_V &= \left\langle v^*\,, \sum_{i=1}^n \mathrm{meas}\,(A_i) v_i \right\rangle_V = \sum_{i=1}^n \mathrm{meas}\,(A_i)\,\langle v^*, v_i\rangle_V \\ &= \int_0^T \langle v^*, u(t)\rangle_V \,dt\,, \quad v^* \in V^*\,. \end{aligned} \tag{7.42}$$

Sei nun $u \in L^1(0,T;V)$ beliebig. Für $v^* \in V^*$ ist $\langle v^*, u(t)\rangle_V = (v^* \circ u)(t)$, und $v^* \circ u$ ist messbar, da v^* stetig und u Bochner-messbar ist. Weiter gilt

$$\int_0^T |\langle v^*, u(t)\rangle_V|\, dt \le \int_0^T \|v^*\|_{V^*}\|u(t)\|_V\, dt \le \|v^*\|_{V^*}\|u\|_{L^1(0,T;V)}\,. \tag{7.43}$$

Analog gilt

$$\left|\left\langle v^*\,,\, \int_0^T u(t)\, dt\right\rangle_V\right| \le \|v^*\|_{V^*}\left\|\int_0^T u(t)\, dt\right\|_V \le \|v^*\|_{V^*}\|u\|_{L^1(0,T;V)}\,. \tag{7.44}$$

Die linke und die rechte Seite von (7.39) definieren also, für festes v^*, lineare stetige Funktionale auf $L^1(0,T;V)$, welche auf dem dichten Unterraum der einfachen Funktionen übereinstimmen und daher gleich sind. Der Beweis von (7.40) verläuft analog. $\square$

Die folgenden beiden Sätze beschäftigen sich mit der Charakterisierung und Eindeutigkeit der schwachen Zeitableitung aus Definition 7.4.

Lemma 7.6 *Sei $V \xrightarrow{j} H \xrightarrow{j^*} V^*$ Evolutionstripel, $u \in L^1(0,T;V)$, $w \in L^1(0,T;V^*)$. Dann ist w genau dann schwache Ableitung von u, wenn gilt*

$$\int_0^T (u(t),v)_H\varphi'(t)\, dt = -\int_0^T \langle w(t),v\rangle_V\, \varphi(t)\, dt\,, \quad \forall\, v \in V,\ \varphi \in C_0^\infty(0,T)\,. \tag{7.45}$$

Beweis: Wegen (7.40) gilt für alle $v \in V$ und alle $\varphi \in C_0^\infty(0,T)$

$$\begin{aligned}\int_0^T (j(u(t)),j(v))_H\varphi'(t)\, dt &= \int_0^T \langle \varphi'(t)i(u(t)),v\rangle_V\ dt \\ &= \left\langle \int_0^T i(u(t))\varphi'(t)\, dt\,,\ v\right\rangle_V\,,\end{aligned} \tag{7.46}$$

und

$$-\int_0^T \langle w(t),v\rangle_V\, \varphi(t)\, dt = \left\langle \int_0^T -w(t)\varphi(t)\, dt\,,\ v\right\rangle_V\,. \tag{7.47}$$

Also ist (7.45) wegen $\langle i(u(t),v\rangle_V = (j(u(t)),j(v))_H$ äquivalent zu

$$\int_0^T u(t)\varphi'(t)\, dt = -\int_0^T w(t)\varphi(t)\, dt\,, \qquad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(0,T)\,. \tag{7.48}$$

$\square$

Folgerung 7.7 *Ist $w \in L^1(0,T;V^*)$ schwache Ableitung von $u \in L^1(0,T;V)$, so ist für jedes $v \in V$ die Funktion $t \mapsto \langle w(t),v\rangle_V$ schwache Ableitung der Funktion $t \mapsto (u(t),v)_H$ im $L^1(0,T)$.*

Lemma 7.8 *Sei V separabler Banachraum, $w \in L^1(0,T;V^*)$. Gilt*

$$\int_0^T \varphi(t)w(t)\, dt = 0\,, \qquad \textit{für alle } \varphi \in C_0^\infty(0,T)\,, \tag{7.49}$$

so gilt $w = 0$ fast überall.

Beweis: Wir setzen für den Spezialfall $V = \mathbb{R}$ die Aussage als bekannt voraus, siehe z.B. meine Vorlesung PDE 1, Kapitel 2. Sei nun V wie angegeben. Für $v \in V$ und $\varphi \in C_0^\infty(0,T)$ gilt

$$0 = \left\langle \int_0^T \varphi(t) w(t)\, dt\,,\, v \right\rangle_V = \int_0^T \varphi(t) \, \langle w(t), v \rangle_V \, dt\,. \tag{7.50}$$

Aus der Gültigkeit der Aussage für $V = \mathbb{R}$ folgt: Für jedes $v \in V$ gibt es eine Nullmenge $N(v)$ mit

$$\langle w(t), v \rangle = 0\,, \qquad \text{für alle } t \in (0,T) \setminus N(v)\,. \tag{7.51}$$

Sei D eine abzählbare dichte Teilmenge von V, setze

$$N = \bigcup_{v \in D} N(v)\,. \tag{7.52}$$

Dann ist N Nullmenge, und

$$\langle w(t), v \rangle = 0\,, \qquad \text{für alle } t \in (0,T) \setminus N\,,\; v \in D\,, \tag{7.53}$$

also

$$\langle w(t), v \rangle = 0\,, \qquad \text{für alle } t \in (0,T) \setminus N\,,\; v \in V\,, \tag{7.54}$$

also $w(t) = 0$ für alle $t \notin N$. □

Satz 7.9 *Sei V separabler Banachraum, $u \in L^1(0,T;V)$. Dann gibt es höchstens eine schwache Ableitung $w \in L^1(0,T;V^*)$ von u. Falls sie existiert, bezeichnen wir sie mit u'.*

Beweis: Sind $w_1, w_2 \in L^1(0,T;V^*)$ schwache Ableitungen von u, so folgt für $w = w_1 - w_2$ aus der Definition der schwachen Ableitung

$$\int_0^T w(t)\varphi(t)\, dt = 0 \tag{7.55}$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(0,T)$. Aus Lemma 7.8 folgt $w = 0$. □

Die Aussagen von Lemma 7.8 und Satz 7.9 gelten für beliebige Banachräume V und $w \in L^1(0,T;V)$.

Wir formulieren nun noch einmal das parabolische Anfangsrandwertproblem als “abstraktes” Anfangswertproblem (die Null-Randwerte sollen im Raum V stecken)

$$\langle u'(t), v \rangle_V + \langle A(t, u(t)), v \rangle_V = \langle F(t), v \rangle_V\,, \quad \text{für alle } v \in V, \tag{7.56}$$

$$u(0) = u_0\,. \tag{7.57}$$

Wir suchen eine Lösung u im Raum

$$W = \{u : u \in L^p(0,T;V),\; u' \in L^q(0,T;V^*)\}\,, \tag{7.58}$$

für welche (7.56) für fast alle $t \in (0,T)$ gilt. Hierbei ist $1 < p < \infty$ fest und $1/p + 1/q = 1$, und p wird passend zur Nichtlinearität A gewählt. Außerdem soll (7.57) gelten. Dass (7.57) überhaupt Sinn macht (die Elemente $u \in W$ sind zunächst nur fast überall definiert), werden wir gleich in Satz 7.12 feststellen.

Lemma 7.10 *Der Raum W ist ein Banachraum, versehen mit der Norm*

$$\|u\|_W = \|u\|_{L^p(0,T;V)} + \|u'\|_{L^q(0,T;V^*)} .$$

Beweis: Weggelassen. $\square$

Im Folgenden wird generell vorausgesetzt, dass $V \xrightarrow{j} H \xrightarrow{j^*} V^*$ ein gegebenes Evolutionstripel ist, und dass V separabel ist.

Lemma 7.11 *Der Unterraum $W \cap C^1([0,T];V)$ ist dicht in W.*

Beweis: Wird wie auch sonst bei Sobolevräumen durch Approximation mit Funktionen $u_\varepsilon = u * \rho_\varepsilon$, ρ_ε Glättungskern, bewiesen. $\square$

Satz 7.12 *Es gilt $W \subset C([0,T];H)$, und die kanonische Einbettung ist stetig.*

Bemerkung: Mit “$W \subset C([0,T];H)$” ist gemeint, dass jede Äquivalenzklasse in W eine stetige Funktion von $[0,T]$ nach H enthält.

Beweis: Es genügt zu zeigen, dass die kanonische Einbettung I von $W \cap C^1([0,T];V)$ nach $C([0,T];H)$ beschränkt ist bezüglich der Normen von W und $C([0,T];H)$. Wegen Lemma 7.11 lässt sich I dann eindeutig zu einer linearen stetigen Abbildung von W nach $C([0,T];H)$ fortsetzen. Zur Beschränktheit von I: Sei $u \in W \cap C^1([0,T];V)$. Für alle $t, s \in [0,T]$ gilt

$$\|u(t)\|_H^2 = \|u(s)\|_H^2 + 2\int_s^t (u'(\tau), u(\tau))_H \, d\tau . \tag{7.59}$$

Nach Lemma 7.2 gilt

$$\|u(s)\|_H^2 = \langle u(s), u(s)\rangle_V \le \|u(s)\|_{V^*}\|u(s)\|_V \le \|u(s)\|_V \max_{\tau\in[0,T]} \|u(\tau)\|_{V^*} ,$$

sowie mit der Hölderschen Ungleichung

$$\begin{aligned}\int_s^t |(u(\tau), u'(\tau))_H| \, d\tau &= \int_s^t |\langle u(\tau), u'(\tau)\rangle_V| \, d\tau \le \int_s^t \|u(\tau)\|_V \|u'(\tau)\|_{V^*} \, d\tau \\ &\le \|u\|_{L^p(V)}\|u\|_{L^q(V^*)} ,\end{aligned}$$

mit den Abkürzungen $L^p(V)$ für $L^p(0,T;V)$ usw. Integration über $[0,T]$ bezüglich s in (7.59) führt auf

$$\begin{aligned}T\|u(t)\|_H^2 &\le \|u\|_{L^1(V)} \max_{\tau\in[0,T]} \|u(\tau)\|_{V^*} + 2T\|u\|_{L^p(V)}\|u\|_{L^q(V^*)} \\ &\le C(\|u\|_W \max_{\tau\in[0,T]} \|u(\tau)\|_{V^*} + \|u\|_W^2) , \qquad \text{für alle } t \in [0,T].\end{aligned} \tag{7.60}$$

Weiter gilt für alle $\tau, s \in [0,T]$

$$u(\tau) = u(s) + \int_s^\tau u'(r) \, dr ,$$

also

$$\|u(\tau)\|_{V^*} \le \|u(s)\|_{V^*} + \int_0^T \|u'(r)\|_{V^*} \, dr = \|u(s)\|_{V^*} + \|u'\|_{L^1(V^*)} ,$$

und Integration über $[0,T]$ bezüglich s ergibt

$$T\|u(\tau)\|_{V^*} \leq \|u\|_{L^1(V^*)} + T\|u'\|_{L^1(V^*)} \leq C(\|u\|_{L^1(V)} + T\|u'\|_{L^q(V^*)}),$$

also

$$\max_{\tau\in[0,T} \|u(\tau)\|_{V^*} \leq C\|u\|_W . \tag{7.61}$$

Aus (7.60) und (7.61) folgt nun

$$\max_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_H^2 \leq C\|u\|_W^2 \tag{7.62}$$

und damit die behauptete Beschränktheit. □

Satz 7.13 *Es gilt die Regel der partiellen Integration*

$$(u(t), v(t))_H - (u(s), v(s))_H = \int_s^t \langle u'(\tau), v(\tau)\rangle_V + \langle v'(\tau), u(\tau)\rangle_V \, d\tau \tag{7.63}$$

für alle $u, v \in W$ und alle $s, t \in [0,T]$.

Beweis: Für $u, v \in W \cap C^1([0,T];V)$ gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(u(t), v(t))_H = (u'(t), v(t))_H + (v'(t), u(t))_H = \langle u'(t), v(t)\rangle_V + \langle v'(t), u(t)\rangle_V .$$

Integration ergibt (7.63). Sind $u, v \in W$ beliebig, so wählen wir Folgen (u_n), (v_n) in $W \cap C^1([0,T];V)$ mit $u_n \to u$ und $v_n \to v$ in W gemäß Lemma 7.11 und führen in der Formel (7.63) für u_n und v_n den Grenzübergang $n \to \infty$ durch; dies ist auf der linken Seite möglich wegen der stetigen Einbettung in $C([0,T];H)$ gemäß Satz 7.12. □

Wir betrachten nun die Zeitableitung als Operator

$$\mathcal{D}u = u' \tag{7.64}$$

auf den beiden Definitionsbereichen

$$D_1(\mathcal{D}) = \{u : u \in W\,,\ u(0) = 0\}\,, \tag{7.65}$$
$$D_2(\mathcal{D}) = \{u : u \in W\,,\ u(T) = u(0)\}\,. \tag{7.66}$$

Satz 7.14 *Durch (7.64), (7.65) und (7.64), (7.66) werden maximal monotone Operatoren $\mathcal{D} : L^p(0,T;V) \rightrightarrows L^q(0,T;V^*)$ definiert.*

Beweis: $\mathcal{D}$ ist linear, und für $u \in D_i(\mathcal{D})$ gilt nach Satz 7.13

$$\langle \mathcal{D}u, u\rangle = \int_0^T \langle u'(t), u(t)\rangle_V \, dt = \frac{1}{2}(\|u(T)\|_H^2 - \|u(0)\|_H^2) \geq 0\,, \tag{7.67}$$

also ist $\mathcal{D}$ monoton. Zum Beweis der maximalen Monotonie betrachten wir (jeweils für die beiden Fälle $i = 1, 2$) beliebige $v \in L^p(0,T;V)$ und $w \in L^q(0,T;V^*)$ mit der Eigenschaft

$$\langle w - \mathcal{D}u, v - u\rangle \geq 0\,, \quad \text{für alle } u \in D_i(\mathcal{D}), \tag{7.68}$$

und zeigen, dass dann $v \in D_i(\mathcal{D})$ sowie $w = \mathcal{D}v = v'$ gelten. Seien $z \in V$ und $\varphi \in C_0^\infty(0,T)$ beliebig. Die durch

$$u(t) = \varphi(t)z$$

definierte Funktion liegt sowohl in $D_1(\mathcal{D})$ als auch in $D_2(\mathcal{D})$ und erfüllt $\langle \mathcal{D}u, u\rangle = 0$ wegen (7.67). Daher wird (7.68) zu

$$0 \le \langle w, v\rangle - \int_0^T \langle \varphi'(t)v(t) + \varphi(t)w(t), z\rangle_V \; dt\,.$$

Da z beliebig war, folgt

$$\int_0^T \varphi'(t)v(t) + \varphi(t)w(t)\, dt = 0\,. \tag{7.69}$$

Also ist $w = v'$ (schwache Ableitung) und damit $v \in W$. Einsetzen in (7.68) ergibt für alle $u \in D_i(\mathcal{D})$ mit $i = 1$ bzw. $i = 2$ wegen Satz 7.13

$$\begin{aligned} 0 \le \langle v' - u', v - u\rangle &= \int_0^T \langle v'(t) - u'(t), v(t) - u(t)\rangle_V \; dt \\ &= \frac{1}{2}(\|v(T) - u(T)\|_H^2 - \|v(0) - u(0)\|_H^2)\,. \end{aligned} \tag{7.70}$$

Sei (v_n) eine Folge in V mit $v_n \to v(T) \in H$. Im Fall $i = 1$ setzen wir $u_n(t) = tv_n/T$. Es ist $u_n(0) = 0$, also $u_n \in D_1(\mathcal{D})$ und gemäß (7.70)

$$\|v(0)\|_H^2 \le \|v(T) - v_n\|_H^2\,.$$

Mit $n \to \infty$ folgt $v(0) = 0$ und damit $v \in D_1(\mathcal{D})$. Im Fall $i = 2$ setzen wir $u_n(t) = v_n$. Es ist $u_n(0) = v_n = u_n(T)$, also $u_n \in D_2(\mathcal{D})$ und gemäß (7.70)

$$\|v(0) - v_n\|_H^2 \le \|v(T) - v_n\|_H^2\,.$$

Grenzübergang $n \to \infty$ ergibt $\|v(0) - v(T)\| = 0$ und damit $v \in D_2(\mathcal{D})$. □

Wir betrachten nun das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}u)(t) + (\mathcal{A}u)(t) = f(t)\,, \quad t \in (0,T)\,, \\ u(0) = u_0\,. \end{aligned} \tag{7.71}$$

Hierbei ist $\mathcal{D}u = u'$.

Satz 7.15
Sei $\mathcal{A} : L^p(0,T;V) \to L^q(0,T;V^*)$ pseudomonoton, beschränkt, demistetig und bezüglich u_0 koerziv, seien $f \in L^q(0,T;V^*)$ und $u_0 \in V$. Dann hat das Anfangswertproblem (7.71) eine Lösung $u \in W$. Ist A außerdem streng monoton, so ist die Lösung eindeutig.

Beweis: Wir wollen Satz 5.14 anwenden. Im Falle $u_0 = 0$ genügt es festzustellen, dass $\mathcal{D}$ nach Satz 7.14 maximal monoton ist mit

$$D(\mathcal{D}) = \{u : u \in W\,,\, u(0) = 0\}\,.$$

Andernfalls betrachten wir das transformierte Problem

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{D}z)(t) + (\tilde{\mathcal{A}}z)(t) = f(t)\,, \quad t \in (0,T)\,, \\
z(0) = 0\,,
\end{aligned}
\tag{7.72}
$$

mit

$$
\tilde{\mathcal{A}}(z) = \mathcal{A}(z + u_0)\,, \quad \tilde{\mathcal{A}} : L^p(0,T;V) \to L^q(0,T;V^*)\,. \tag{7.73}
$$

Hierbei ist $u_0 : [0,T] \to V$ als die in t konstante Fortsetzung des Anfangswerts u_0 zu interpretieren. Der Operator $\tilde{\mathcal{A}}$ ist ebenfalls pseudomonoton, beschränkt und demistetig sowie bezüglich 0 koerziv. Nach Satz 5.14 existiert eine Lösung $z \in W$ von (7.73), nach Lemma 5.4 ist diese eindeutig falls $\mathcal{A}$ und damit auch $\tilde{\mathcal{A}}$ streng monoton ist. Wir setzen

$$
u(t) = z(t) + u_0\,.
$$

Dann ist $u(0) = u_0$ und

$$
(\mathcal{D}u)(t) = (\mathcal{D}z)(t) = -(\tilde{\mathcal{A}}z)(t) + f(t) = -(\mathcal{A}(z + u_0))(t) + f(t) = -(\mathcal{A}u)(t) + f(t)\,,
$$

also löst u das Anfangswertproblem (7.71). Da jede Lösung u vermittels $z = u - u_0$ auch eine Lösung von (7.72) liefert, überträgt sich die Eindeutigkeit auch auf (7.71). □

Ein parabolisches Anfangsrandwertproblem erhalten wir, wenn der Operator $\mathcal{A}$ aus einem elliptischen Operator entsteht. Wir setzen

$$
(\mathcal{A}u)(t) = A(t, u(t))\,, \tag{7.74}
$$

wobei $A : (0,T) \times V \to V^*$ mit $V = W_0^{1,p}(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$ definiert ist durch

$$
\langle A(t,w), v\rangle_V = \int_\Omega \langle a(t,x,\nabla w(x)), \nabla v(x)\rangle \, dx + \int_\Omega a_0(t,x,w(x))v(x)\, dx\,. \tag{7.75}
$$

Die Funktionen a und a_0 sollen die Bedingungen aus dem vorigen Kapitel gleichmäßig in t erfüllen, das heißt, für geeignete Konstante sollen gelten die Wachstumsbedingungen

$$
\begin{aligned}
|a(t,x,\xi)| \le c(1 + |\xi|^{p-1})\,, \\
\langle a(t,x,\xi), \xi\rangle \ge c_1|\xi|^p\,,
\end{aligned}
\tag{7.76}
$$

sowie

$$
\begin{aligned}
|a_0(t,x,r)| \le c(1 + |r|^{p-1})\,, \\
a_0(t,x,r)r \ge -\gamma_0(1 + |r|)\,,
\end{aligned}
\tag{7.77}
$$

sowie die Monotoniebedingung

$$
\langle a(t,x,\xi) - a(t,x,\eta), \xi - \eta\rangle \ge 0\,. \tag{7.78}
$$

Aus den Sätzen (5.26) und (5.29) folgt, dass der Operator $w \mapsto A(t,w)$ für jedes $t \in (0,T)$ beschränkt, demistetig, pseudomonoton und koerziv ist. Man kann weiter zeigen (was wir hier nicht tun), dass durch

$$
t \mapsto A(t, u(t)) \tag{7.79}
$$

eine Bochner-messbare Abbildung von $(0,T)$ nach V^* definiert wird für jedes $u \in L^p(0,T;V)$, und dass der durch (7.75) definierte Operator $\mathcal{A}$ die Voraussetzungen von Satz 7.15 erfüllt. Damit erhalten wir einen Existenz- und Eindeutigkeitssatz für das zugehörige parabolische Anfangsrandwertproblem.

8 Die Wellengleichung

Sei $b \in \mathbb{R}^n$. Wir suchen Lösungen "$u = u(x,t)$", $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, der **Transportgleichung**

$$\partial_t u + \langle b, \nabla u \rangle = 0\,, \tag{8.1}$$

wobei $\nabla u(x,t)$ den Gradienten bezüglich x bezeichnet. Wir betrachten die Gerade

$$s(t) = (x + tb, t)\,, \quad x \in \mathbb{R}^n\,, \quad t \in \mathbb{R}\,, \tag{8.2}$$

im $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Ist u eine C^1-Lösung von (8.1), so gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} u(s(t)) = \langle \nabla u(s(t)), b \rangle + \partial_t u(s(t)) = 0\,, \tag{8.3}$$

das heißt, u ist konstant entlang der Geraden (8.2). Insbesondere gilt

$$u(x + tb, t) = u(s(t)) = u(s(0)) = u(x, 0)\,, \tag{8.4}$$

oder auch

$$u(x,t) = u(x - tb, 0)\,, \quad x \in \mathbb{R}^n\,, t \in \mathbb{R}\,. \tag{8.5}$$

Das Anfangswertproblem

$$\partial_t u + \langle b, \nabla u \rangle = 0\,, \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \tag{8.6}$$

$$u = g\,, \quad \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{0\}, \tag{8.7}$$

besitzt also für gegebenes $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$ genau eine Lösung $u \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$, nämlich

$$u(x,t) = g(x - tb)\,. \tag{8.8}$$

Wir betrachten nun das Anfangswertproblem

$$\partial_t u + \langle b, \nabla u \rangle = f\,, \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \tag{8.9}$$

$$u = g\,, \quad \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{0\}, \tag{8.10}$$

wobei $f \in C(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$. Entlang der Geraden (8.2) gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} u(s(t)) = \langle \nabla u(s(t)), b \rangle + \partial_t u(s(t)) = f(s(t))\,, \tag{8.11}$$

also

$$u(s(t)) = u(s(0)) + \int_0^t f(s(\tau))\,d\tau \tag{8.12}$$

oder ausgeschrieben

$$u(x + tb, t) = u(x, 0) + \int_0^t f(x + \tau b, \tau)\,d\tau \tag{8.13}$$

beziehungsweise

$$u(x,t) = g(x - tb) + \int_0^t f(x - (t - \tau)b, \tau)\,d\tau\,. \tag{8.14}$$

Die Lösung ergibt sich also durch Integration entlang der Geraden (8.2).

Wir betrachten nun ein Anfangswertproblem für die eindimensionale **Wellengleichung**. Gesucht ist eine Funktion u mit Werten $u(x,t)$ für $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, mit

$$\begin{aligned} \partial_{tt}u - c^2\partial_{xx}u = 0\,, &\quad \text{in } \mathbb{R} \times (0,\infty), \\ u = g\,, &\quad \text{auf } \mathbb{R} \times \{0\}, \\ \partial_t u = h\,, &\quad \text{auf } \mathbb{R} \times \{0\}. \end{aligned} \tag{8.15}$$

Hier ist $c \neq 0$ (o.B.d.A. $c > 0$) ein gegebener Koeffizient, die Funktionen $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschreiben die Anfangswerte. Wir wollen eine explizite Formel für die Lösung herleiten. Zu diesem Zweck nehmen wir an, $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ sei eine Lösung von (8.15). Wir setzen

$$v = \partial_t u - c\,\partial_x u\,. \tag{8.16}$$

Dann gilt

$$\partial_t v + c\partial_x v = \partial_t(\partial_t u - c\partial_x u) + c\partial_x(\partial_t u - c\partial_x u) = \partial_{tt}u - c^2\partial_{xx}u = 0\,. \tag{8.17}$$

Aus (8.5) folgt

$$v(x,t) = v(x-ct,0)\,. \tag{8.18}$$

Zur Lösung von (8.16) setzen wir $b = -c$ in (8.14) und erhalten

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u(x+ct,0) + \int_0^t v(x+(t-\tau)c,\tau)\,d\tau = u(x+ct,0) + \int_0^t v(x+(t-2\tau)c,0)\,d\tau \\ &= u(x+ct,0) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} v(y,0)\,dy\,. \end{aligned} \tag{8.19}$$

Aus den Anfangsbedingungen in (8.15) folgt

$$u(x+ct,0) = g(x+ct)\,, \quad v(y,0) = \partial_t u(y,0) - c\partial_x u(y,0) = h(y) - cg'(y)\,. \tag{8.20}$$

Insgesamt ergibt sich die **Formel von d'Alembert**

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(g(x+ct) + g(x-ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(y)\,dy\,. \tag{8.21}$$

Sie stellt eine explizite Lösung des Anfangswertproblems (8.15) dar. Wir erkennen, dass die Lösung im Punkt (x,t) nur von den Anfangsdaten g, h im Intervall $[x-ct, x+ct]$ abhängt (und insbesondere Null ist, wenn die Daten dort Null sind). Umgekehrt beeinflussen die Daten im Punkt $(x,0)$ die Lösung $u(x,t)$ zum Zeitpunkt $t \neq 0$ nur für x-Werte im Intervall $[x-c|t|, x+c|t|]$, ihr Effekt breitet sich also nur mit der endlichen Geschwindigkeit c aus. Diese Eigenschaft der Wellengleichung steht im Kontrast zum entsprechenden Sachverhalt bei der Diffusionsgleichung, dort hat ein Anfangswert $u(x,0)$ für beliebige $t > 0$ Einfluss auf die Lösung $u(x,t)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Satz 8.1 *Seien $g \in C^k(\mathbb{R})$, $h \in C^{k-1}(\mathbb{R})$, $k \geq 2$. Dann gibt es genau eine Lösung $u \in C^k(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ der Anfangswertaufgabe (8.15). Sie ist durch die Formel (8.21) gegeben.*

Beweis: Dass (8.21) eine Lösung von (8.15) ist, erkennt man durch Einsetzen. Die Eindeutigkeit folgt aus der Herleitung (8.16) – (8.21). □

Die Lösung u hat gemäß (8.21) die Form

$$u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct)\,. \tag{8.22}$$

Umgekehrt gilt: Sind $F, G \in C^2(\mathbb{R})$, und ist u durch (8.22) definiert, so ist u Lösung der eindimensionalen Wellengleichung.

Wir betrachten nun das Anfangsrandwertproblem auf dem rechten oberen Quadranten

$$\begin{aligned} \partial_{tt}u - c^2\partial_{xx}u &= 0\,, \quad \text{in } (0,\infty)\times(0,\infty), \\ u &= g\,, \quad \text{auf } (0,\infty)\times\{0\}, \\ \partial_t u &= h\,, \quad \text{auf } (0,\infty)\times\{0\}, \\ u &= 0\,, \quad \text{auf } \{0\}\times(0,\infty), \end{aligned} \tag{8.23}$$

wobei $g, h : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $g(0) = h(0) = 0$ (Kompatibilität mit der Randbedingung auf $x = 0$).

Eine Lösung erhält man aus der Lösung des Anfangswertproblems (8.15) auf der oberen Halbebene, indem man die Anfangsdaten g, h geeignet auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzt, nämlich durch

$$g(x) = -g(-x)\,, \quad h(x) = -h(-x)\,, \quad x \le 0\,. \tag{8.24}$$

Die Lösung der zugehörigen Anfangswertaufgabe (8.15),

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(g(x+ct) + g(x-ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(y)\,dy\,. \tag{8.25}$$

erfüllt wegen (8.24) die zusätzliche Randbedingung $u(0,t) = 0$. Für $0 \le ct \le x$ stellt (8.25) bereits die Lösung von (8.23) dar, für $0 \le x \le ct$ führt Einsetzen von (8.24) in (8.25) auf

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(g(x+ct) - g(ct-x)) + \frac{1}{2c}\int_{-x+ct}^{x+ct} h(y)\,dy\,. \tag{8.26}$$

Wir betrachten nun das Anfangswertproblem für die n-dimensionale Wellengleichung. Gesucht ist eine Funktion u mit Werten $u(x,t)$ für $x \in \mathbb{R}^n$, $t \ge 0$, $n \ge 2$, mit

$$\begin{aligned} \partial_{tt}u - c^2\Delta u &= 0\,, \quad \text{in } \mathbb{R}^n\times(0,\infty), \\ u &= g\,, \quad \text{auf } \mathbb{R}^n\times\{0\}, \\ \partial_t u &= h\,, \quad \text{auf } \mathbb{R}^n\times\{0\}. \end{aligned} \tag{8.27}$$

Analog zum eindimensionalen Fall sind $c > 0$, $g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Der Laplace-Operator bezieht sich nur auf die x-Koordinaten. Eine explizite Lösung lässt sich hier mit der Methode des **sphärischen Mittels** konstruieren. Wir gehen aus von einer Lösung u des Anfangswertproblems und leiten für deren um $x \in \mathbb{R}^n$ zentrierten Mittelwert, nämlich

$$U(x;r,t) = \frac{1}{|\partial B_r|}\int_{\partial B(x;r)} u(\xi,t)\,dS(\xi)\,, \quad x \in \mathbb{R}^n\,, \quad r > 0\,, \tag{8.28}$$

eine partielle Differentialgleichung her, die sich ihrerseits auf die eindimensionale Wellengleichung zurückführen lässt. Dieses Vorgehen funktioniert für ungerade Werte von n. Ist n gerade, so erhält man die Lösung aus der Lösung für $n+1$ durch eine geeignete Reduktion.

Wir kürzen die Oberfläche und das Volumen der Kugeln $B(x;r)$ ab durch

$$|\partial B_r| = |\partial B(x;r)|\,, \quad |B_r| = |B(x;r)|\,, \quad x \in \mathbb{R}^n\,,\, r > 0\,.$$

Wir wollen die partiellen Ableitungen nach r des sphärischen Mittels U aus (8.28) berechnen.

Lemma 8.2 *Sei $v : K(0;1) \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt*

$$n \int_{B(0;1)} v(z)\,dz + \int_{B(0;1)} \langle \nabla v(z), z\rangle \; dz = \int_{\partial B(0;1)} v(\zeta)\,dS(\zeta)\,. \tag{8.29}$$

Beweis: Wir wenden die erste Greensche Formel

$$\int_{B(0;1)} v(z)\Delta w(z)\,dz + \int_{B(0;1)} \langle \nabla v(z), \nabla w(z)\rangle \; dz = \int_{\partial B(0;1)} v(\zeta)\partial_\nu w(\zeta)\,dS(\zeta)$$

an mit

$$w(z) = \frac{1}{2}|z|^2\,, \quad \nabla w(z) = z\,, \quad \Delta w(z) = n\,.$$

Es ist nämlich für $\zeta \in \partial B(0;1)$

$$\nu(\zeta) = \zeta\,, \quad \partial_\nu w(\zeta) = \langle \nabla w(\zeta), \nu(\zeta)\rangle = 1\,.$$

$\square$

Sei nun $u \in C^3(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$. Bei der Herleitung der Mittelwerteigenschaft des Laplace-Operators zeigt man: Für

$$\varphi(r) = \frac{1}{|\partial B_r|} \int_{\partial B(x;r)} u(\xi,t)\,dS(\xi)$$

gilt

$$\varphi'(r) = \frac{1}{|\partial B_r|} \int_{B(x;r)} \Delta u(y,t)\,dy\,.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\partial_r U(x;r,t) &= \frac{1}{|\partial B_r|} \int_{B(x;r)} \Delta u(y,t)\,dy = \frac{r}{n}\frac{1}{|B_r|} \int_{B(x;r)} \Delta u(y,t)\,dy \\ &= \frac{r}{n}\frac{1}{|B_1|} \int_{B(0;1)} \Delta u(x+rz,t)\,dz\,. \end{aligned} \tag{8.30}$$

Wir setzen

$$f(y) = \Delta u(y,t)\,, \quad y \in \mathbb{R}^n\,, \tag{8.31}$$

und erhalten aus (8.30)

$$\begin{aligned}\partial_{rr}U(x;r,t) &= \frac{1}{n}\frac{1}{|B_1|}\int_{B(0;1)} \Delta u(x+rz,t)\,dz + \frac{r}{n}\frac{1}{|B_1|}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dr}}\int_{B(0;1)} f(x+rz)\,dz \\ &= \frac{1}{n}\frac{1}{|B_r|}\int_{B(x;r)} \Delta u(y,t)\,dy + \frac{r}{n}\frac{1}{|B_1|}\int_{B(0;1)} \langle \nabla f(x+rz), z\rangle\,dz\,.\end{aligned} \tag{8.32}$$

Wir wenden nun Lemma 8.2 an mit

$$v(z) = f(x+rz)$$

und erhalten

$$n\int_{B(0;1)} f(x+rz)\,dz + \int_{B(0;1)} r\,\langle \nabla f(x+rz), z\rangle\,dz = \int_{\partial B(0;1)} f(x+r\zeta)\,dS(\zeta)\,. \tag{8.33}$$

Wir ersetzen das letzte Integral in (8.32) durch den entsprechenden Ausdruck in (8.33) und erhalten

$$\begin{aligned}\partial_{rr}U(x;r,t) &= \frac{1}{n}\frac{1}{|B_r|}\int_{B(x;r)} \Delta u(y,t)\,dy - \frac{1}{|B_1|}\int_{B(0;1)} \Delta u(x+rz,t)\,dz \\ &\quad + \frac{1}{|\partial B_1|}\int_{\partial B(0;1)} \Delta u(x+r\zeta,t)\,dS(\zeta) \\ &= \frac{1}{|\partial B_r|}\int_{\partial B(x;r)} \Delta u(\xi,t)\,dS(\xi) + \left(\frac{1}{n}-1\right)\frac{1}{|B_r|}\int_{B(x;r)} \Delta u(y,t)\,dy\,.\end{aligned} \tag{8.34}$$

Die Formel (8.34) gilt für $r > 0$, $t > 0$ auch, wenn u nur in $C^2(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ liegt, wie man durch Approximation mit glatten Funktionen und Grenzübergang erkennt.

Wir betrachten nun ein Anfangswertproblem für die **Euler-Poisson-Darboux-Gleichung**

$$\partial_{tt}U - c^2\left(\partial_{rr}U + \frac{n-1}{r}\partial_r U\right) = 0\,, \quad \text{in } (0,\infty)\times(0,\infty), \tag{8.35}$$

$$U = G\,, \quad \text{auf } (0,\infty)\times\{0\}, \tag{8.36}$$

$$\partial_t U = H\,, \quad \text{auf } (0,\infty)\times\{0\}. \tag{8.37}$$

Hierbei sind

$$G(x;r) = \frac{1}{|\partial B_r|}\int_{\partial B(x;r)} g(\xi)\,dS(\xi)\,, \quad H(x;r) = \frac{1}{|\partial B_r|}\int_{\partial B(x;r)} h(\xi)\,dS(\xi)$$

für $x \in \mathbb{R}^n$ und $r > 0$ die sphärischen Mittel der Anfangswerte aus (8.27). Die unabhängigen Variablen sind die Skalare r und t, der Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ spielt die Rolle eines Parameters. Bei (8.35) – (8.37) handelt es sich also um eine ganze Schar von Anfangswertproblemen.

Satz 8.3 *Sei $x \in \mathbb{R}^n$ beliebig, sei $m \geq 2$, seien $g, h \in C^m(\mathbb{R}^n)$, sei $u \in C^m(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ eine Lösung des Anfangswertproblems (8.27). Dann gilt $\partial_{tt}U, \partial_{rr}U \in C^{m-2}((0,\infty)\times[0,\infty))$ für die durch (8.28) definierte Funktion U, und U löst das Anfangswertproblem (8.35)–(8.37). Es gilt außerdem für alle $t > 0$*

$$\lim_{r\downarrow 0} U(x;r,t) = u(x,t)\,, \quad \lim_{r\downarrow 0} \partial_r U(x;r,t) = 0\,, \quad \lim_{r\downarrow 0} \partial_{rr}U(x;r,t) = \frac{1}{n}\Delta u(x,t)\,. \tag{8.38}$$

Beweis: Da die gemittelten Integrale für $r \to 0$ gegen den Wert des Integranden im Mittelpunkt (x,t) konvergieren, folgt (8.38) aus den entsprechenden Formeln für U. Aus diesen Formeln folgt auch, dass $\partial_{tt}U$ und $\partial_{rr}U$ stetig sind, falls u zweimal stetig differenzierbar ist. Für $m > 2$ folgen die entsprechenden Aussagen durch Betrachten der höheren Ableitungen, worauf wir hier verzichten wollen. Wir beweisen nun die Gültigkeit der Euler-Poisson-Darboux-Gleichung. Seien $r > 0$, $t > 0$ beliebig. Aus (8.30) folgt

$$\begin{aligned} c^2 r^{n-1}\partial_r U(x;r,t) &= c^2 \frac{r^n}{n|B_r|}\int_{B(x;r)} \Delta u(y,t)\,dy = \frac{1}{n|B_1|}\int_{B(x;r)} \partial_{tt}u(y,t)\,dy \\ &= \frac{1}{n|B_1|}\int_0^r \int_{\partial B(x;\rho)} \partial_{tt}u(\xi,t)\,dS(\xi)d\rho\,, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} c^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dr}}\left(r^{n-1}\partial_r U(x;r,t)\right) &= \frac{1}{n|B_1|}\int_{\partial B(x;r)} \partial_{tt}u(\xi,t)\,dS(\xi) = \frac{r^{n-1}}{|\partial B_r|}\int_{\partial B(x;r)} \partial_{tt}u(\xi,t)\,dS(\xi) \\ &= r^{n-1}\partial_{tt}U(x;r,t)\,. \end{aligned} \tag{8.39}$$

Wegen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dr}}\left(r^{n-1}\partial_r U\right) = r^{n-1}\partial_{rr}U + (n-1)r^{n-2}\partial_r U \tag{8.40}$$

folgt (8.35) nun nach Division durch r^{n-1} aus (8.39) und (8.40). □

Die Euler-Poisson-Darboux-Gleichung kann am einfachsten im Falle $n = 3$ gelöst werden. Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty))$ eine Lösung des Anfangswertproblems (8.27), seien $g \in C^3(\mathbb{R}^3)$, $h \in C^2(\mathbb{R}^3)$. Wir betrachten die zugehörigen sphärischen Mittel U, G, H und setzen

$$\tilde{U}(x;r,t) = rU(x;r,t) = r\frac{1}{|\partial B_r|}\int_{\partial B(x;r)} u(\xi,t)\,dS(\xi)\,, \tag{8.41}$$

$$\tilde{G}(x;r) = rG(x;r)\,, \quad \tilde{H}(x;r) = rH(x;r)\,. \tag{8.42}$$

Aus (8.35) folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2}\partial_{tt}\tilde{U} &= \frac{1}{c^2} r\partial_{tt}U = r\left(\partial_{rr}U + \frac{2}{r}\partial_r U\right) = r\partial_{rr}U + 2\partial_r U = \partial_r(U + r\partial_r U) \\ &= \partial_{rr}\tilde{U}\,. \end{aligned}$$

Da aus (8.38) folgt

$$\lim_{r\downarrow 0}\tilde{U}(x;r,t) = 0\,, \quad x \in \mathbb{R}^3\,,\ t > 0\,,$$

ist also $\tilde{U}$, für jedes feste $x \in \mathbb{R}^3$, eine Lösung des Anfangsrandwertproblems auf dem rechten oberen Quadranten $r > 0$, $t > 0$

$$\begin{aligned} \partial_{tt}\tilde{U} - c^2\partial_{rr}\tilde{U} &= 0\,, \quad \text{in } (0,\infty)\times(0,\infty), \\ \tilde{U} &= \tilde{G}\,, \quad \text{auf } (0,\infty)\times\{0\}, \\ \partial_t\tilde{U} &= \tilde{H}\,, \quad \text{auf } (0,\infty)\times\{0\}, \\ \tilde{U} &= 0\,, \quad \text{auf } \{0\}\times(0,\infty). \end{aligned} \tag{8.43}$$

Diese Lösung haben wir in (8.26) berechnet, für $0 \leq r \leq ct$ gilt

$$\tilde{U}(x;r,t) = \frac{1}{2}(\tilde{G}(x;r+ct) - \tilde{G}(x;ct-r)) + \frac{1}{2c}\int_{-r+ct}^{r+ct} \tilde{H}(x;y)\,dy\,. \tag{8.44}$$

Durch Grenzübergang $r \to 0$ erhalten wir nun

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \lim_{r\downarrow 0} U(x;r,t) = \lim_{r\downarrow 0} \frac{\tilde{U}(x;r,t)}{r} \\ &= \lim_{r\downarrow 0}\left[\frac{\tilde{G}(x;r+ct) - \tilde{G}(x;ct-r)}{2r} + \frac{1}{2rc}\int_{-r+ct}^{r+ct}\tilde{H}(x;y)\,dy\right] \\ &= \partial_r \tilde{G}(x;ct) + \frac{1}{c}\tilde{H}(x;ct)\,. \end{aligned} \tag{8.45}$$

Nun ist

$$\partial_r \tilde{G}(x;ct) = (G + r\partial_r G)(x;r)\big|_{r=ct}\,, \tag{8.46}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} r\partial_r G(x;r) &= r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dr}}\left(\frac{1}{|\partial B_r|}\int_{\partial B(x;r)} g(\xi)\,dS(\xi)\right) = r\frac{1}{|\partial B_1|}\int_{\partial B(0;1)} \langle \nabla g(x+r\zeta), \zeta\rangle\;dS(\zeta) \\ &= \frac{1}{|\partial B_r|}\int_{\partial B(x;r)} \langle \nabla g(\xi), \xi - x\rangle\;dS(\xi)\,. \end{aligned} \tag{8.47}$$

Aus (8.45) – (8.47) folgt nun die **Formel von Kirchhoff**

$$\begin{aligned} u(x,t) &= G(x;ct) + \frac{1}{|\partial B(x;ct)|}\int_{\partial B(x;ct)} \langle \nabla g(\xi), \xi - x\rangle\;dS(\xi) + tH(x;ct) \\ &= \frac{1}{|\partial B(x;ct)|}\int_{\partial B(x;ct)} g(\xi) + \langle \nabla g(\xi), \xi - x\rangle + th(\xi)\,dS(\xi)\,. \end{aligned} \tag{8.48}$$

Satz 8.4 *Seien $g \in C^3(\mathbb{R}^3)$, $h \in C^2(\mathbb{R}^3)$, dann ist eine Lösung $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty))$ des Anfangswertproblems (8.27) für $t > 0$ gegeben durch*

$$u(x,t) = \frac{1}{|\partial B(x;ct)|}\int_{\partial B(x;ct)} g(\xi) + \langle \nabla g(\xi), \xi - x\rangle + th(\xi)\,dS(\xi)\,. \tag{8.49}$$

Beweis: Den lassen wir jetzt weg. □

Satz 8.4 zeigt, dass die Lösung u im Punkt (x,t) nur von den Anfangswerten auf der Sphäre $\partial B(x;ct)$ abhängt. Diesen Sachverhalt bezeichnet man als das **starke Huygens-Prinzip**. Satz 8.4 suggeriert ebenfalls, dass die Lösung an Regularität verlieren kann (u hat dieselbe Regularität wie ∇g). In der Tat ist das im allgemeinen auch der Fall.

Aus der Lösungsformel für den Fall $n = 3$ lässt sich eine Lösungsformel für den Fall $n = 2$ gewinnen. Sei u die gesuchte Lösung des Anfangswertproblems (8.27) für $n = 2$. Wir setzen

$$v(x', x_3, t) = u(x', t)\,, \quad x' = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\,. \tag{8.50}$$

Dann ist v Lösung eines Anfangswertproblems für $n = 3$,

$$\partial_{tt} v - c^2 \Delta v = 0 \,, \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \times (0,\infty), \tag{8.51}$$
$$v(x', x_3, 0) = g(x') \,, \quad \partial_t v(x', x_3, 0) = h(x') \,. \tag{8.52}$$

Wir verwenden nun die Formel (8.45), welche ebenfalls bereits die Lösung als Funktion der sphärischen Mittel der Anfangswerte ausdrückt, und erhalten

$$u(x', t) = v(x', 0, t) = \partial_r \tilde{G}(x', 0; ct) + \frac{1}{c} \tilde{H}(x', 0; ct) \,, \tag{8.53}$$

wobei $\tilde{G}, \tilde{H}$ die zu (8.52) gehörenden sphärischen Mittel der Anfangswerte sind, also etwa

$$\tilde{G}(x', 0; r) = \frac{r}{|\partial B_r|} \int_{\partial B(x',0;r)} v(\xi', \xi_3, 0) \, dS(\xi', \xi_3) = \frac{r}{|\partial B_r|} \int_{\partial B(x',0;r)} g(\xi') \, dS(\xi', \xi_3) \,. \tag{8.54}$$

Das Oberflächenintegral wird vermittels der beiden Karten

$$\psi_\pm : B(x'; r) \to \partial B(x', 0; r) \,, \quad \psi_\pm(y') = (y', \pm\sqrt{r^2 - |y' - x'|^2}) \,, \tag{8.55}$$

auf die Summe zweier Volumenintegrale über die Kugel $B(x'; r)$ im $\mathbb{R}^2$ zurückgeführt,

$$\int_{\partial B(x',0;r)} g(\xi') \, dS(\xi', \xi_3) = \sum_\pm \int_{B(x';r)} g(y') \sqrt{\gamma_\pm(y')} \, dy' \,, \tag{8.56}$$

wobei γ die Gramsche Determinante von $\psi_\pm$ ist. Entsprechend wird mit $\tilde{H}$ verfahren. Aus (8.53) ergibt sich daher eine Formel für u, welche nur die Daten g und h sowie die explizit gegebenen Funktionen $\psi_\pm$ bzw. deren Gramsche Determinanten enthält. Durch geeignete Umformungen der dort vorkommenden Differential- und Integralausdrücke (siehe etwa Evans, Abschnitt 2.4, für $c = 1$) erhalten wir die **Formel von Poisson**

$$u(x, t) = \frac{c}{2|B(x; ct)|} \int_{B(x;ct)} \frac{t g(y) + t^2 h(y) + t \langle \nabla g(y), y - x \rangle}{\sqrt{c^2 t^2 - |y - x|^2}} \, dy \,, \quad x \in \mathbb{R}^2 \,, \, t > 0 \,, \tag{8.57}$$

für die Lösung des Anfangswertproblems (8.27) für $n = 2$. Im Gegensatz zur Situation für $n = 3$ hängt die Lösung im Punkt (x, t) nunmehr von den Anfangswerten im Vollkreis $B(x; ct)$ ab, man bezeichnet diese Eigenschaft als das **schwache Huygens-Prinzip**.

Für $n > 3$ kann man analog vorgehen. Für ungerade n führt man geeignete Funktionen $\tilde{U}, \tilde{G}, \tilde{H}$ ein, welche (8.43) lösen, für gerade n verwendet man den (8.50) entsprechenden Ansatz.

Wir behandeln nun ein Anfangsrandwertproblem für die Wellengleichung auf einem allgemeinen Gebiet. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Wir betrachten

$$\begin{aligned} \partial_{tt} u(x,t) - c^2 \Delta u(x,t) &= f(x,t) \,, \quad x \in \Omega \,, \, t \in (0,T) \,, \\ u(x,0) &= g(x) \,, \quad x \in \Omega \,, \\ \partial_t u(x,0) &= h(x) \,, \quad x \in \Omega \,, \\ u(x,t) &= r(x,t) \,, \quad x \in \partial\Omega \,, \, t \in (0,T) \,. \end{aligned} \tag{8.58}$$

Hier sind f, g, h, r gegebene Funktionen mit den entsprechenden Definitionsbereichen. Explizite Lösungsformeln kann man in einem allgemeinen Gebiet nicht erwarten. Die Existenzfrage wollen wir jetzt nicht behandeln. Für die Eindeutigkeit gibt es ein vergleichsweise einfaches Argument. Seien $u, \tilde{u}$ zwei C^2-Lösungen von (8.58). Deren Differenz

$$w = u - \tilde{u} \tag{8.59}$$

löst aufgrund der Linearität des Problems das homogene Anfangsrandwertproblem

$$\begin{aligned} \partial_{tt}w(x,t) - c^2\Delta w(x,t) = 0\,, &\quad x \in \Omega\,,\, t \in (0,T)\,, \\ w(x,0) = 0\,, &\quad x \in \Omega\,, \\ \partial_t w(x,0) = 0\,, &\quad x \in \Omega\,, \\ w(x,t) = 0\,, &\quad x \in \partial\Omega\,,\, t \in (0,T)\,. \end{aligned} \tag{8.60}$$

Wir definieren eine Funktion E, die wir uns als Gesamtenergie der Differenz w zum Zeitpunkt t vorstellen können,

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega \partial_t w(x,t)^2 + c^2|\nabla w(x,t)|^2\,dx\,, \quad t \in [0,T]\,. \tag{8.61}$$

Es gilt dann

$$E'(t) = \int_\Omega \partial_t w \cdot \partial_{tt}w + c^2\,\langle \nabla w, \partial_t \nabla w\rangle\;dx\,. \tag{8.62}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \int_\Omega \langle \nabla w, \partial_t \nabla w\rangle\;dx = \int_\Omega \langle \nabla w, \nabla \partial_t w\rangle\;dx &= -\int_\Omega \Delta w \cdot \partial_t w\,dx + \int_{\partial\Omega} \partial_\nu w \cdot \partial_t w\,dS \\ &= -\int_\Omega \Delta w \cdot \partial_t w\,dx\,, \end{aligned}$$

da $\partial_t w = 0$ auf $\partial\Omega$. Einsetzen in (8.62) liefert

$$E'(t) = \int_\Omega \partial_t w(\partial_{tt}w - c^2\Delta w)\,dx = 0\,, \tag{8.63}$$

also ist E konstant, und sogar $E = 0$ da $E(0) = 0$. Aus (8.61) folgt nun

$$\partial_t w = 0 = \nabla w\,, \quad \text{in } \Omega \times (0,T),$$

also ist w konstant in $\Omega \times (0,T)$ und wegen der Anfangsbedingung sogar gleich Null. Damit ist die Eindeutigkeit bewiesen. Diese Methode, bei der wir durch Betrachten eines geeigneten skalaren zeitabhängigen Funktionals (welches oft als Energie interpretiert werden kann) zu Aussagen über die Lösung einer partiellen Differentialgleichung kommen, bezeichnet man als **Energiemethode**. Wir können die Energiemethode auch dazu verwenden, den Abhängigkeitsbereich der Lösung der Wellengleichung zu charakterisieren. Sei u eine Lösung der Wellengleichung

$$\partial_{tt}u - c^2\Delta u = 0\,, \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \tag{8.64}$$

wobei wir in keiner Weise Anfangs- oder Randbedingungen festlegen. Sei (x_0, t_0) ein fest gewählter Punkt mit $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $t_0 > 0$. Wir betrachten den Kegel

$$K = \{(x,t) : 0 \le t \le t_0\,,\, |x - x_0| \le c(t_0 - t)\}\,. \tag{8.65}$$

Man kann sich K als Kegel im $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ mit der Basis $B(x_0, ct_0)$ im $\mathbb{R}^n$ (auf dem Niveau $t = 0$) und der Spitze (x_0, t_0) (in Höhe t_0 über der Basis) vorstellen.

Satz 8.5 *Sei u eine Lösung von (8.64) in $C^2(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$, es gelte*

$$u(x,0) = \partial_t u(x,0) = 0\,, \quad \text{für alle } x \in B(x_0, ct_0). \tag{8.66}$$

Dann ist $u \equiv 0$ in K, insbesondere ist $u(x_0,t_0) = 0$.

Beweis: Wir definieren

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{B(x_0;c(t_0-t))} \partial_t u(x,t)^2 + c^2|\nabla u(x,t)|^2\,dx \tag{8.67}$$

und setzen im Folgenden

$$B(t) = B(x_0; c(t_0-t))\,.$$

Wir erinnern an die Formel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\int_{B(t)} v(x)dx = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\int_0^{c(t_0-t)}\int_{\partial B(x_0;\tau)} v(\xi)\,dS(\xi)\,d\tau = -c\int_{\partial B(t)} v(\xi)\,dS(\xi)$$

und erhalten

$$\begin{aligned} E'(t) &= \int_{B(t)} \partial_t u\cdot\partial_{tt}u + c^2\langle\nabla u,\nabla\partial_t u\rangle\,dx - \frac{c}{2}\int_{\partial B(t)}(\partial_t u)^2 + c^2|\nabla u|^2\,dS \\ &= \int_{B(t)} \partial_t u(\partial_{tt}u - c^2\Delta u)\,dx + \int_{\partial B(t)} c^2\partial_t u\cdot\partial_\nu u\,dS - \frac{c}{2}\int_{\partial B(t)}(\partial_t u)^2 + c^2|\nabla u|^2\,dS \\ &= c\int_{\partial B(t)} \partial_t u\cdot c\partial_\nu u - \frac{1}{2}(\partial_t u)^2 - \frac{1}{2}c^2|\nabla u|^2\,dS\,. \end{aligned}$$

Aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt

$$\partial_t u\cdot c\partial_\nu u \le |\partial_t u|\cdot|c\nabla u| \le \frac{1}{2}(\partial_t u)^2 + \frac{1}{2}c^2|\nabla u|^2\,,$$

also gilt

$$E(t) \ge 0\,, \quad E'(t) \le 0 = E(0)\,, \quad \text{für alle } t \in (0,T),$$

und hieraus folgt $E(t) = 0$ für alle t und damit wie beim Eindeutigkeitsbeweis oben

$$u = 0 \quad \text{auf } K.$$

□

Satz 8.5 zeigt, dass zwei Lösungen der Wellengleichung auf K übereinstimmen, falls sie in $B(x_0;ct_0)$ dieselben Anfangswerte haben. Die Anfangswerte außerhalb von $B(x_0;ct_0)$ spielen daher für die Lösung in K keine Rolle. Diese Aussage erhalten wir natürlich auch aus der expliziten Lösungsformel. Die Energiemethode ist aber nicht nur einfacher, sondern auch allgemeiner, sie lässt sich auch in Situationen anwenden, für die es keine expliziten Lösungsformeln gibt.

9 Ratenunabhängige Evolutionen

Als einführendes Beispiel betrachten wir den Schalter, welcher die beiden Werte 1 und -1 annehmen kann und zwei Schwellwerte $a < b$ besitzt. Seine Position wird durch eine Funktion

$$w : [0,T] \to \mathbb{R}\,, \quad w(t) \in \{-1, 1\}\,,$$

beschrieben. Gegeben ist ein Anfangswert $w_0 \in \{-1, 1\}$. Der Umschaltvorgang wird gesteuert durch eine Inputfunktion $u : [0,T] \to \mathbb{R}$; w springt auf 1, wenn u den Wert b erreicht, und auf 0, wenn u den Wert a erreicht. Wir setzen

$$w(0) = \begin{cases} -1\,, & u(0) \le a\,, \\ w_0\,, & a < u(0) < b\,, \\ 1\,, & u(0) \ge b\,. \end{cases} \tag{9.1}$$

Ist u stetig, so kann man den Umschaltvorgang folgendermaßen formalisieren. Wir definieren

$$A_t = \{\tau : 0 \le \tau \le t\,,\, u(\tau) = a \text{ oder } u(\tau) = b\}\,, \quad 0 < t < T\,.$$

und setzen

$$w(t) = \begin{cases} w(0)\,, & A_t = \emptyset\,, \\ -1\,, & u(\max A_t) = a\,, \\ 1\,, & u(\max A_t) = b\,. \end{cases} \tag{9.2}$$

Auf diese Weise erhalten wir einen Operator

$$w = \mathcal{R}_{a,b}[u; w_0]\,. \tag{9.3}$$

Der Wert $w(t)$ hängt nicht nur vom aktuellen Wert $u(t)$ ab, sondern auch von der Vorgeschichte $u|[0,t)$. Die Funktion w ist unstetig, falls mindestens einmal umgeschaltet wird.

Ein $t \in (0,T]$ heißt **Umschaltzeitpunkt**, falls $w(t-) \ne w(t)$ gilt.

Lemma 9.1 *Seien $u \in C[0,T]$ und $w_0 \in \{-1,1\}$ sowie $a < b$. Dann hat $w = \mathcal{R}_{a,b}[u; w_0]$ höchstens endlich viele Umschaltzeitpunkte, und $w \in BV[0,T]$.*

Beweis: Für beliebige Umschaltzeitpunkte $t_1 \ne t_2$ gilt $|t_1 - t_2| > \delta$, falls

$$\operatorname*{osc}_{[0,T]}(u, \delta) < b - a\,,$$

also gibt es höchstens endlich viele Umschaltzeitpunkte. Da $|w(t-) - w(t)| = 2$ am Umschaltzeitpunkt, ist die Variation von w gleich der doppelten Anzahl der Umschaltzeitpunkte. □

Im allgemeinen Fall werden Inputfunktionen $u : [0,T] \to X$ und Outputfunktionen $w : [0,T] \to Y$ betrachtet, wobei X und Y beliebige Mengen sind. Ein Operator $\mathcal{W}$, welcher Inputfunktionen auf Outputfunktionen abbildet, heißt **ratenunabhängig**, falls

$$\mathcal{W}[u \circ \varphi] = \mathcal{W}[u] \circ \varphi \tag{9.4}$$

gilt für "alle Inputfunktionen" und alle Zeittransformationen, das sind Abbildungen $\varphi : [0,T] \to [0,T]$, die surjektiv und monoton wachsend sind, das heißt,

$$s \leq t \quad \Rightarrow \quad \varphi(s) \leq \varphi(t)\,.$$

(Die Abhängigkeit von einem Anfangswert ist in (9.4) weggelassen worden.) Der in (9.1) – (9.3) definierte Schalter $\mathcal{R}_{a,b}$ ist ratenunabhängig.

Der Schalter sowie alle weiteren im Folgenden betrachteten ratenunabhängigen Operatoren sind **Volterra-**Operatoren, das heißt, es gilt

$$u = v \text{ auf } [0,t] \quad \Rightarrow \quad \mathcal{W}[u] = \mathcal{W}[v] \text{ auf } [0,t]\,, \quad \text{für alle } t \in [0,T]. \tag{9.5}$$

Ratenunabhängige Volterra-Operatoren heißen auch **Hystereseoperatoren**, da sie Hystereseschleifen in der u-w-Ebene modellieren, welche von $t \mapsto (u(t), w(t))$ durchlaufen werden, unabhängig von der zeitlichen Skalierung.

Ein weiteres Beispiel eines ratenunabhängigen Operators ist das **mechanische Spiel**, oder kurz **Spiel**. Es entsteht, indem man die Winkelhalbierende $w = u$ in der Ebene, welche den Identitätsoperator $w = Iu$ repräsentiert, in zwei parallele Geraden $w = u - r$ und $w = u + r$ aufspaltet, wobei $r \geq 0$ gegeben ist. Die rechte Gerade $w = u - r$ soll nur in aufsteigender Richtung durchlaufen werden, die linke nur in absteigender Richtung, im Bereich dazwischen soll w konstant sein. Ist der Input u stetig und monoton, so wird dieses Verhalten durch

$$w(t) = f_r(u(t), w(0))$$

beschrieben, wobei

$$f_r(u,w) = \max\{u - r, \min\{u + r, w\}\}\,. \tag{9.6}$$

Ist $u : [0,T] \to \mathbb{R}$ stetig und stückweise monoton mit zugehöriger endlicher Zerlegung $\{t_i\}$ von $[0,T]$ (das heißt, auf jedem Teilintervall $[t_i, t_{i+1}]$ ist u monoton), so setzen wir

$$w(t) = f_r(u(t), w(t_i))\,, \quad t_i < t \leq t_{i+1}\,, \tag{9.7}$$

sowie

$$w(0) = f_r(u(0), w_0) \tag{9.8}$$

mit dem Anfangswert $w_0 \in \mathbb{R}$. Auf diese Weise erhalten wir einen Operator

$$w = \mathcal{F}_r[u; w_0]\,, \quad \mathcal{F}_r : C_{pm}[0,T] \times \mathbb{R} \to C[0,T]\,. \tag{9.9}$$

Hier bezeichnet $C_{pm}[0,T]$ den Raum der stetigen und stückweise monotonen Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}$.

Für $r = 0$ ergibt sich die Identität, $\mathcal{F}_0 = I$, da $f_0(u,w) = u$.

Lemma 9.2 *Für die durch (9.6) definierte Funktion $f_r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gilt*

$$|f_{r_1}(u_1, w_1) - f_{r_2}(u_2, w_2)| \leq \max\{|u_1 - u_2| + |r_1 - r_2|\,, |w_1 - w_2|\} \tag{9.10}$$

für alle $r_j \geq 0$, $u_j, w_j \in \mathbb{R}$.

Beweis: Für beliebige $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gilt

$$|\max\{a,b\} - \max\{c,d\}| \leq \max\{|a-c|, |b-d|\}\,,$$
$$|\min\{a,b\} - \min\{c,d\}| \leq \max\{|a-c|, |b-d|\}\,.$$

Es folgt

$$|f_{r_1}(u_1,w_1) - f_{r_2}(u_2,w_2)| \leq \max\{|(u_1-r_1)-(u_2-r_2)|\,,\ |(u_1+r_1)-(u_2+r_2)|\,,\ |w_1-w_2|\}\,,$$

woraus die Behauptung folgt. □

Satz 9.3 *Der Operator $\mathcal{F}_r$ aus (9.9) kann eindeutig zu einem lipschitzstetigen Operator $\mathcal{F}_r : C[0,T] \times \mathbb{R} \to C[0,T]$ fortgesetzt werden, und es gilt*

$$\|\mathcal{F}_{r_1}[u_1;w_{0,1}] - \mathcal{F}_{r_2}[u_2;w_{0,2}]\|_\infty \leq \max\{\|u_1-u_2\|_\infty + |r_1-r_2|\,,\ |w_{0,1}-w_{0,2}|\} \tag{9.11}$$

für alle $u_1, u_2 \in C[0,T]$ und alle $w_{0,1}, w_{0,2} \in \mathbb{R}$.

Beweis: Da $C_{pm}[0,T]$ dicht ist in $C[0,T]$, genügt es zu zeigen, dass (9.11) für alle $u_1, u_2 \in C_{pm}[0,T]$ und alle $w_{0,1}, w_{0,2} \in \mathbb{R}$ gilt. Sei $\{t_i\}$ eine Zerlegung von $[0,T]$, so dass die Funktionen u_1 und u_2 auf allen Teilintervallen $[t_i, t_{i+1}]$ monoton sind. Nach Lemma 9.2 gilt auf jedem solchen Teilintervall mit $w_j(t) = \mathcal{F}_{r_j}[u_j; w_{0,j}](t)$

$$|w_1(t) - w_2(t)| \leq \max\{\max_{s\in[0,t]} |u_1(s)-u_2(s)| + |r_1-r_2|\,,\ |w_1(t_i)-w_2(t_i)|\}$$

für alle $t \in [t_i, t_{i+1}]$, also

$$|w_1(t_{i+1}) - w_2(t_{i+1})| \leq \max\{\|u_1-u_2\|_\infty + |r_1-r_2|\,,\ |w_1(t_i)-w_2(t_i)|\}\,.$$

Die Behauptung folgt nun mit Induktion über i. □

Die Operatoren $\mathcal{F}_r$ und $\mathcal{R}_{a,b}$ sind grundlegend. Man kann jeweils den einen aus dem anderen gewinnen. Es gilt

$$\mathcal{R}_{s-r,s+r}[u](t) = \begin{cases} 1\,, & \mathcal{F}_r[u](t) > s\,, \\ -1\,, & \mathcal{F}_r[u](t) < s\,, \end{cases} \tag{9.12}$$

mit passend gewählten Anfangswerten, sowie

$$\mathcal{F}_r[u;0](t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}_{s-r,s+r}[u;w_{0s}](t)\,ds := \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2}\int_{-M}^{M} \mathcal{R}_{s-r,s+r}[u;w_{0s}](t)\,ds \tag{9.13}$$

wobei $w_{0s} = -\mathrm{sign}\,(s)$.

Komplexere Gedächtnisstrukturen entstehen, wenn wir die beschriebenen elementaren Operatoren zusammensetzen. Der **Preisach-Operator** wird definiert durch

$$w(t) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \omega(r,s)\mathcal{R}_{s-r,s+r}[u](t)\,ds\,dr \tag{9.14}$$

mit einer Dichtefunktion ω (die auch durch ein allgemeineres Maß ersetzt werden kann) und mit geeigneten Anfangswerten für die Schalter. Das Modell (9.14) ermöglicht ineinander geschachtelte Hystereseschleifen.

Anhand des Spieloperators $\mathcal{F}_r$ stellen wir die Verbindung zur Konvexen Analysis her. Wir setzen

$$\varphi(x) = r|x|\,. \tag{9.15}$$

Es ist

$$\partial\varphi(x) = \begin{cases} r\,, & x > 0\,,\\ [-r,r]\,, & x = 0\,,\\ -r\,, & x < 0\,. \end{cases} \tag{9.16}$$

Wir betrachten die Differentialinklusion

$$\partial\varphi(\dot w) + w \ni u \tag{9.17}$$

und die Variationsungleichung

$$\begin{gathered} \dot w(u - w - v) \ge 0\,, \quad \text{für alle } v \in [-r,r],\\ u - w \in [-r,r]\,. \end{gathered} \tag{9.18}$$

Wir setzen

$$C_{pl}[0,T] = \{v | v : [0,T] \to \mathbb{R}, v \text{ stetig und stückweise linear}\}\,. \tag{9.19}$$

Lemma 9.4 *Sei $u \in C_{pl}[0,T]$ und $w_0 \in \mathbb{R}$. Dann ist auch $w = \mathcal{F}_r[u, w_0] \in C_{pl}[0,T]$, und (u,w) löst (9.17) und (9.18) a.e. in $[0,T]$.*

Beweis: Aus der Form von f_r in (9.6) folgt, dass mit u auch w stückweise linear ist. Sei $\{t_i\}$ eine Zerlegung von $[0,T]$, so dass auf jedem einzelnen Teilintervall (t_i, t_{i+1}) das Paar (u,w) ganz im Innern $\{|u - w| < r\}$ oder einem der beiden Ränder $\{u - w = r\}$ bzw. $\{u - w = -r\}$ verläuft. Es gilt

$$\begin{aligned} &\dot w = 0\,, && |u - w| < r && \text{im Innern},\\ &\dot w \ge 0\,, && u - w = r && \text{auf dem rechten Rand},\\ &\dot w \le 0\,, && u - w = -r && \text{auf dem linken Rand}. \end{aligned}$$

In allen drei Fällen sind (9.17) und (9.18) erfüllt, also auf jedem Teilintervall (t_i, t_{i+1}). □

Wir verallgemeinern die Formulierung als Variationsungleichung (9.18) aufs Mehrdimensionale. Als neue Variable führen wir ein

$$z(t) = u(t) - w(t)\,, \quad t \in [0,T]\,. \tag{9.20}$$

Sei H ein Hilbertraum, $Z \subset H$ abgeschlossen und konvex. Wir betrachten Inputfunktionen $u : [0,T] \to H$, welche absolutstetig sind, das heißt,

$$u(t) - u(s) = \int_s^t \dot u(\tau)\,d\tau$$

gilt für alle $s, t \in [0,T]$. Gesucht sind nun Funktionen $w, z : [0,T] \to H$ als Lösungen von (9.20) und

$$\begin{gathered} \langle \dot w(t), z(t) - v\rangle \ge 0\,, \quad \text{für alle } v \in Z, \text{ a.e. in } [0,T],\\ z(0) = z_0 \in Z\,, \quad z(t) \in Z \quad \text{für alle } t \in [0,T]. \end{gathered} \tag{9.21}$$

Satz 9.5 *Sei H Hilbertraum, $Z \subset H$ abgeschlossen und konvex, $u : [0,T] \to H$ absolutstetig und $z_0 \in Z$. Dann gibt es absolutstetige Funktionen $w, z : [0,T] \to H$, welche (9.20) und (9.21) lösen.*

Der Beweis wird durch Zeitdiskretisierung geführt. Wir setzen für $N \in \mathbb{N}$

$$h_N = 2^{-N}T\,, \quad u_i = u(ih_N)\,, \quad i = 0, 1, \dots\,,$$

sowie

$$u_0 = u(0)\,, \quad w_0 = u_0 - z_0\,.$$

Wir definieren diskrete Näherungen (P_Z bezeichnet die Projektion auf Z)

$$\begin{aligned} z_{i+1} &= P_Z(z_i + \Delta_i u)\,, \quad \Delta_i u = u_{i+1} - u_i\,, \\ w_{i+1} &= u_{i+1} - z_{i+1}\,. \end{aligned} \tag{9.22}$$

Lemma 9.6 *Es gilt für alle i*

$$\langle w_{i+1} - w_i, z_{i+1} - v\rangle \ge 0\,, \quad \textit{für alle } v \in Z, \tag{9.23}$$

also insbesondere

$$\langle w_{i+1} - w_i, z_{i+1} - z_i\rangle \ge 0\,. \tag{9.24}$$

Weiterhin gilt für alle i

$$|z_{i+1} - z_i| \le |u_{i+1} - u_i| \tag{9.25}$$

sowie

$$|w_{i+1} - w_i| \le |u_{i+1} - u_i|\,. \tag{9.26}$$

Beweis: Es ist

$$w_{i+1} - w_i = z_i + \Delta_i u - z_{i+1}\,,$$

also folgt (9.23) aus der Definition von z_{i+1} und der Projektionseigenschaft von P_Z. Weiter gilt

$$|z_{i+1} - z_i| = |P_Z(z_i + \Delta_i u) - P_Z(z_i)| \le |\Delta_i u|\,,$$

also (9.25). Aus (9.24) folgt

$$\begin{aligned} |w_{i+1} - w_i|^2 &= \langle w_{i+1} - w_i, (u_{i+1} - u_i) - (z_{i+1} - z_i)\rangle \le \langle w_{i+1} - w_i, u_{i+1} - u_i\rangle \\ &\le |w_{i+1} - w_i||u_{i+1} - u_i| \end{aligned}$$

und damit (9.26). □

Wir betrachten die stückweise lineare Interpolierende $u^N : [0,T] \to H$ von u zu den Daten $(t_i, u(t_i))$ mit $t_i = ih$, also

$$u^N(\tau) = u_{i+1} + \big(i + 1 - \frac{\tau}{h_N}\big)(u_i - u_{i+1})\,, \quad \tau \in [t_i, t_{i+1}]\,. \tag{9.27}$$

Analog definieren wir $w^N, z^N : [0,T] \to H$.

Lemma 9.7 *Für Unterteilungspunkte s, t zur Feinheit N gilt*

$$\int_s^t |\dot{w}^N(\tau)|\, d\tau \le \int_s^t |\dot{u}(\tau)|\, d\tau\,. \tag{9.28}$$

Beweis: Es ist (Summe über die Teilintervalle zwischen s und t)

$$\begin{aligned}\int_s^t |\dot{w}^N(\tau)|\, d\tau &= \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\dot{w}^N(\tau)|\, d\tau = \sum_i |w_{i+1} - w_i| \le \sum_i |u_{i+1} - u_i| \\ &\le \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\dot{u}(\tau)|\, d\tau = \int_s^t |\dot{u}(\tau)|\, d\tau\,.\end{aligned}$$

Lemma 9.8 *Sei $0 \le s \le t \le T$. Dann gilt*

$$\int_s^t \left\langle \dot{w}^N(\tau), z^N(\tau) - v(\tau)\right\rangle\, d\tau \ge -\int_{\tilde{s}}^{\tilde{t}} |\dot{u}(\tau)|\, d\tau \cdot \operatorname*{osc}_{[0,T]}(u; h_N) \tag{9.29}$$

für jede beschränkte Bochner-messbare Funktion $v : [s,t] \to Z$, wobei $\tilde{s}, \tilde{t}$ Unterteilungspunkte sind zur Feinheit N mit $[s,t] \subset [\tilde{s}, \tilde{t}]$.

Beweis: Sei zunächst $v \in Z$ beliebig. Es gilt für beliebiges $\tau \in (t_i, t_{i+1})$ nach Lemma 9.6

$$\begin{aligned} h_N \left\langle \dot{w}^N(\tau), z^N(\tau) - v\right\rangle &= \left\langle w_{i+1} - w_i, z_{i+1} - v + \big(i + 1 - \frac{\tau}{h_N}\big)(z_i - z_{i+1})\right\rangle \\ &\ge -\big(i + 1 - \frac{\tau}{h_N}\big) \left\langle w_{i+1} - w_i, z_{i+1} - z_i\right\rangle \\ &\ge -|w_{i+1} - w_i||z_{i+1} - z_i| \ge -|u_{i+1} - u_i|^2 \\ &\ge -\int_{t_i}^{t_{i+1}} |\dot{u}(r)|\, dr \cdot \operatorname*{osc}_{[t_i, t_{i+1}]}(u; h_N)\,. \end{aligned}$$

Sei nun $v : [s,t] \to Z$ beliebig. Es folgt

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\langle \dot{w}^N(\tau), z^N(\tau) - v\right\rangle\, d\tau \ge -\int_{t_i}^{t_{i+1}} |\dot{u}(r)|\, dr \cdot \operatorname*{osc}_{[t_i, t_{i+1}]}(u; h_N)\,.$$

Diese Ungleichung gilt auch dann, wenn auf der linken Seite nur über eine Teilmenge von $[t_i, t_{i+1}]$ integriert wird. Bilden wir die Summe über alle Teilintervalle von $[\tilde{s}, \tilde{t}]$, so folgt

$$\begin{aligned}\int_s^t \left\langle \dot{w}^N(\tau), z^N(\tau) - v\right\rangle\, d\tau &\ge -\sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\dot{u}(\tau)|\, d\tau \cdot \operatorname*{osc}_{[0,T]}(u; h_N) \\ &= -\int_{\tilde{s}}^{\tilde{t}} |\dot{u}(\tau)|\, d\tau \cdot \operatorname*{osc}_{[0,T]}(u; h_N)\end{aligned}$$

□

Lemma 9.9 *Es gilt $w^N \to w$ gleichmäßig für eine Funktion $w \in C([0,T]; H)$.*

Beweis: Seien $N, M \in \mathbb{N}$. Wir setzen $v = z^M$ in die Ungleichung (9.29) für N und $v = z^N$ in die Ungleichung für M und addieren. Es ergibt sich für beliebiges $t \in [0,T]$

$$\int_0^t \left\langle \dot{w}^N(\tau) - \dot{w}^M(\tau), z^N(\tau) - z^M(\tau) \right\rangle \, d\tau \geq - \int_0^T |\dot{u}(\tau)| \, d\tau \cdot \big(\operatorname*{osc}_{[0,T]}(u; h_N) + \operatorname*{osc}_{[0,T]}(u; h_M)\big) .$$

Es folgt mit Lemma 9.7

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}|w^N(t) - w^M(t)|^2 = \int_0^t \left\langle \dot{w}^N(\tau) - \dot{w}^M(\tau), w^N(\tau) - w^M(\tau) \right\rangle \, d\tau \\
&= \int_0^t \left\langle \dot{w}^N(\tau) - \dot{w}^M(\tau), u^N(\tau) - u^M(\tau) \right\rangle \, d\tau - \int_0^t \left\langle \dot{w}^N(\tau) - \dot{w}^M(\tau), z^N(\tau) - z^M(\tau) \right\rangle \, d\tau \\
&\leq 2 \int_0^T |\dot{u}(\tau)| \, d\tau \cdot \|u^N - u^M\|_\infty + \int_0^T |\dot{u}(\tau)| \, d\tau \cdot \big(\operatorname*{osc}_{[0,T]}(u; h_N) + \operatorname*{osc}_{[0,T]}(u; h_M)\big) .
\end{aligned}$$

Die rechte Seite konvergiert gegen 0 für $N, M \to \infty$, also ist $\{w^N\}$ Cauchyfolge in $C([0,T]; H)$ und daher konvergent. □

Lemma 9.10 *Die Grenzfunktion w aus Lemma 9.9 ist absolutstetig.*

Beweis: Es gilt für $0 \leq s \leq t \leq T$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}|w^N(t) - w^N(s)|^2 &= \int_s^t \left\langle w^N(\tau) - w^N(s), \dot{w}^N(\tau) \right\rangle \, d\tau \\
&= \int_s^t \left\langle u^N(\tau) - u^N(s), \dot{w}^N(\tau) \right\rangle \, d\tau - \int_s^t \left\langle z^N(\tau) - z^N(s), \dot{w}^N(\tau) \right\rangle \, d\tau .
\end{aligned}$$

Das erste Integral lässt sich abschätzen als

$$\begin{aligned}
\int_s^t \left\langle u^N(\tau) - u^N(s), \dot{w}^N(\tau) \right\rangle \, d\tau &= \int_s^t \left\langle \dot{u}^N(\tau), w^N(t) - w^N(\tau) \right\rangle \, d\tau \\
&\leq \int_s^T |\dot{u}^N(\tau)| \, d\tau \cdot \max_{\tau \in [s,t]} |w^N(t) - w^N(\tau)| .
\end{aligned}$$

Das zweite Integral lässt sich abschätzen als (siehe Lemma 9.8)

$$- \int_s^t \left\langle z^N(\tau) - z^N(s), \dot{w}^N(\tau) \right\rangle \, d\tau \leq \int_{\tilde{s}}^{\tilde{t}} |\dot{u}(\tau)| \, d\tau \cdot \operatorname*{osc}_{[0,T]}(u; h_N) .$$

Insgesamt gilt also

$$\frac{1}{2}|w^N(t) - w^N(s)|^2 \leq \int_{\tilde{s}}^{\tilde{t}} |\dot{u}(\tau)| \, d\tau \cdot \big(\max_{\tau \in [s,t]} |w^N(t) - w^N(\tau)| + \operatorname*{osc}_{[0,T]}(u; h_N)\big) .$$

Grenzübergang $N \to \infty$ führt wegen $w^N \to w$ auf

$$\frac{1}{2}|w(t) - w(s)|^2 \leq \int_s^t |\dot{u}(\tau)| \, d\tau \cdot \max_{\tau \in [s,t]} |w(t) - w(\tau)| .$$

Diese Ungleichung bleibt gültig, wenn wir auf der linken Seite Seite $w(s)$ durch $w(\tau)$ für ein beliebiges $\tau \in [s,t]$ ersetzen. Damit folgt

$$|w(t) - w(s)| \le 2 \int_s^t |\dot{u}(\tau)|\, d\tau$$

für alle s, t. Mit einem Satz der Analysis folgt, dass w absolutstetig ist. □

Rest des Beweises von Satz 9.5. Für die Interpolierenden u^N gilt $u^N \to u$ gleichmäßig. Da auch $w^N \to w$ gleichmäßig nach Lemma 9.9, folgt

$$z^N \to z := u - w$$

gleichmäßig, und z ist mit w ebenfalls absolutstetig. Weiterhin gilt $z(t) \in Z$, da $z^N(t) \in Z$ und Z abgeschlossen ist. Nach einem weiteren Satz der Analysis folgt in der gegebenen Situation

$$\int_s^t \left\langle \dot{w}^N(\tau), z^N(\tau) - v(\tau) \right\rangle \, d\tau \quad \to \quad \int_s^t \left\langle \dot{w}(\tau), z(\tau) - v(\tau) \right\rangle \, d\tau$$

für alle s, t und alle Funktionen v. Aus Lemma 9.8 folgt nun

$$\int_s^t \left\langle \dot{w}(\tau), z(\tau) - v(\tau) \right\rangle \, d\tau \ge 0\,.$$

Übergang zur punktweisen Form ergibt

$$\langle \dot{w}(t), z(t) - v \rangle \ge 0 \qquad \text{für alle } v \in Z, \text{ a.e. in } t.$$

□

Satz 9.11 *Sind z_1, z_2 Lösungen von (9.21) zu Inputfunktionen u_1, u_2 und Anfangswerten $z_{0,1}, z_{0,2}$, so gilt*

$$|z_1(t) - z_2(t)| \le |z_{0,1} - z_{0,2}| + \int_0^t |\dot{u}_1(\tau) - \dot{u}_2(\tau)|\, d\tau \tag{9.30}$$

für alle $t \in [0,T]$. Insbesondere ist die Lösung von (9.21) eindeutig bestimmt.

Beweis: Es gilt für alle t

$$\begin{aligned}
|z_1(t) - z_2(t)| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} |z_1(t) - z_2(t)| &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \frac{1}{2} |z_1(t) - z_2(t)|^2 = \langle \dot{z}_1(t) - \dot{z}_2(t), z_1(t) - z_2(t) \rangle \\
&= \langle \dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t), z_1(t) - z_2(t) \rangle - \langle \dot{w}_1(t) - \dot{w}_2(t), z_1(t) - z_2(t) \rangle \\
&\le \langle \dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t), z_1(t) - z_2(t) \rangle \le |\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)|\, |z_1(t) - z_2(t)|
\end{aligned}$$

gemäß der Variationsungleichung. Es folgt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} |z_1(t) - z_2(t)| \le |\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)|$$

für alle t, und hieraus die Behauptung mit Integration über $[0,t]$. □

Wir betrachten nun das System

$$\begin{aligned} \dot{y} &= f(y,w)\,, \quad y(0) = y_0\,, \\ w &= \mathcal{W}[u]\,, \quad u(t) = By(t)\,. \end{aligned} \tag{9.31}$$

Gesucht sind Funktionen $y : [0,T] \to \mathbb{R}^n$, $u : [0,T] \to \mathbb{R}^m$, $w : [0,T] \to \mathbb{R}^k$, gegeben sind $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$, $B \in \mathbb{R}^{m,n}$ und ein Volterra-Operator $\mathcal{W}$. (Der Anfangswert w_0 für $\mathcal{W}$ spielt im Folgenden keine Rolle und wird nicht explizit ausgewiesen.) Zum Beweis der eindeutigen Lösbarkeit wollen wir den Banachschen Fixpunktsatz auf die Formulierung

$$y(t) = y_0 + \int_0^t f(s, y(s), \mathcal{W}[By](s))\, ds \tag{9.32}$$

anwenden. Für $\mathcal{W}$ wollen wir Lipschitz-Stetigkeit analog zu (9.30) voraussetzen. Wir führen daher das Kontraktionsargument im Raum

$$W^{1,1}(0,\delta;\mathbb{R}^n) = \{u : u \in L^1(0,\delta;\mathbb{R}^n)\,,\, , \dot{u} \in L^1(0,\delta;\mathbb{R}^n)\} \tag{9.33}$$

mit $0 < \delta \leq T$. Dieser ist ein Banachraum mit der Norm $\|u\| = \|u\|_1 + \|\dot{u}\|_1$ oder der dazu äquivalenten Norm

$$\|u\|_{1,1} = |u(0)| + \int_0^\delta |\dot{u}(s)|\, ds\,.$$

Es ist $W^{1,1}(0,\delta;\mathbb{R}^n) \subset C([0,\delta];\mathbb{R}^n)$ und

$$\|u\|_\infty \leq \|u\|_{1,1}\,, \quad \text{da} \quad |u(t)| \leq |u(0)| + \int_0^t |\dot{u}(s)|\, ds\,.$$

Satz 9.12 *Sei $\mathcal{W} : W^{1,1}(0,T;\mathbb{R}^n) \to C([0,T];\mathbb{R}^n)$ ein Volterra-Operator mit*

$$\|\mathcal{W}[u] - \mathcal{W}[\tilde{u}]\|_\infty \leq L_w \|u - \tilde{u}\|_{1,1} \tag{9.34}$$

für alle $\delta \in (0,T]$ und alle $u, \tilde{u} \in W^{1,1}(0,\delta;\mathbb{R}^n)$, sei f lokal Lipschitz-stetig. Dann hat das Anfangswertproblem (9.31) auf einem hinreichend kleinen Zeitintervall $[0,\delta]$ eine eindeutige Lösung.

Beweis: Zu beliebigem $\delta \in (0,T]$ definieren wir $F : W^{1,1}(0,\delta;\mathbb{R}^n) \to W^{1,1}(0,\delta;\mathbb{R}^n)$ durch

$$(Fy)(t) = y_0 + \int_0^t f(s, y(s), \mathcal{W}[By](s))\, ds\,.$$

Es ist für $y, \tilde{y} \in W^{1,1}(0,\delta;\mathbb{R}^n)$

$$\|Fy - F\tilde{y}\|_{1,1} = \int_0^\delta |f(s, y(s), \mathcal{W}[By](s)) - f(s, \tilde{y}(s), \mathcal{W}[B\tilde{y}](s))|\, ds\,.$$

Sei $X = \{y : y \in W^{1,1}(0,\delta;\mathbb{R}^n),\, y(0) = y_0\}$. Sei L_f eine Lipschitzkonstante für f in einer Umgebung von $(y_0, \mathcal{W}[By_0](0))$. Dann gilt für hinreichend kleines $\delta > 0$

$$\begin{aligned} &|f(s, y(s), \mathcal{W}[By](s)) - f(s, \tilde{y}(s), \mathcal{W}[B\tilde{y}](s))| \\ &\qquad \leq L_f(|y(s) - \tilde{y}(s)| + |\mathcal{W}[By](s) - \mathcal{W}[B\tilde{y}](s)|) \\ &\qquad \leq L_f(\|y - \tilde{y}\|_\infty + L_w \|By - B\tilde{y}\|_{1,1}) \end{aligned}$$

für alle $y, \tilde{y} \in X$ und alle $s \in [0, \delta]$. Es folgt

$$\|Fy - F\tilde{y}\|_{1,1} \leq \delta L_f (1 + L_w \|B\|) \|y - \tilde{y}\|_{1,1} .$$

Also ist F eine Kontraktion auf X für hinreichend kleines $\delta > 0$. $\square$

Eine globale Lösung (das heißt, eine auf ein maximales Existenzintervall fortgesetzte Lösung) erhält man so wie bei gewöhnlichen Differentialgleichungen üblich.

Wir betrachten nun ein parabolisches Anfangsrandwertproblem mit skalarer Hysteresis, das heißt, die Input- und Outputfunktionen sind skalarwertig.

$$\begin{aligned} \partial_t u + \partial_t w - \Delta u &= f \qquad \text{in } \Omega \times (0,T), \\ w &= \mathcal{W}[u; w_0] , \\ u &= 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) &= u_0(x) , \quad x \in \Omega . \end{aligned} \tag{9.35}$$

Gesucht sind Funktionen $u, w : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}$, welche (9.35) in einem geeigneten schwachen Sinn lösen. Die Gleichung "$w = \mathcal{W}[u; w_0]$" ist dabei folgendermaßen zu verstehen. Für fast alle $x \in \Omega$ gilt

$$w(x, \cdot) = \mathcal{W}[u(x, \cdot); w_0(x)] ,$$

wobei $\mathcal{W}$ ein ratenunabhängiger Operator wie oben betrachtet ist mit einem von x abhängigen Anfangswert $w_0(x)$.

Zum Beweis der Existenz einer Lösung ziehen wir wieder eine Zeitdiskretisierung heran (Visintin 1982). Seien

$$N \in \mathbb{N} , \quad h_N = \frac{T}{N} , \quad t_i = i h_N .$$

Wir konstruieren sukzessive Näherungen $u_m(x)$, $w_m(x)$ für $u(x, t_m)$ und $w(x, t_m)$ als Lösung von

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_N} \int_\Omega (u_m(x) - u_{m-1}(x)) v(x) \, dx + \frac{1}{h_N} \int_\Omega (w_m(x) - w_{m-1}(x)) v(x) \, dx \\ + \int_\Omega \langle \nabla u_m(x), \nabla v(x) \rangle \, dx = \int_\Omega f_m(x) v(x) \, dx \end{aligned} \tag{9.36}$$

für alle $v \in H_0^1(\Omega)$, wobei

$$f_m(x) = \frac{1}{h_N} \int_{t_{m-1}}^{t_m} f(x,t) \, dt ,$$

und

$$w_m(x) = \mathcal{W}[u^N(x, \cdot); w_0(x)](t_m) , \tag{9.37}$$

hierbei ist $u^N(x, \cdot)$ für jedes $x \in \Omega$ die lineare Interpolierende zu den Daten $(t_i, u_i(x))$, $0 \leq i \leq m$. Dabei sind die Werte $u_i(x)$ für $i < m$ aus den früheren Zeitschritten gegeben, aber $u_m(x)$ ist noch unbekannt, insofern ist neben der Variationsgleichung (9.36) auch die Gleichung (9.37) eine implizite Gleichung. Setzen wir (9.37) in (9.36) ein, so erhalten wir ein semilineares elliptisches Problem für die unbekannte Funktion u_m,

$$\int_\Omega \langle \nabla u_m(x), \nabla v(x) \rangle \, dx + \int_\Omega b_m(x, u_m(x)) v(x) \, dx = \int_\Omega f_m(x) v(x) \, dx \tag{9.38}$$

für alle $v \in H_0^1(\Omega)$. Hierbei ist

$$b_m(x,u) = \frac{1}{h_N}(u + \tilde{w}(u) - u_{m-1}(x) - w_{m-1}(x)) \tag{9.39}$$

und $\tilde{w}(u)$ der Wert von $\mathcal{W}$ in t_m mit der linearen Interpolierenden von

$$(t_0, u_0(x)), \ldots, (t_{m-1}, u_{m-1}(x)), (t_m, u) \tag{9.40}$$

als Inputfunktion. Die Funktion $u \mapsto b_m(x,u)$ ist monoton, falls $\mathcal{W}$ stückweise monoton ist im Sinne der folgenden Definition.

Definition 9.13 *Ein ratenunabhängiger Volterra-Operator $\mathcal{W} : C[0,T] \to C[0,T]$ heißt **stückweise monoton**, falls gilt: Ist eine Inputfunktion $u \in C[0,T]$ auf einem Teilintervall $[s,t]$ monoton wachsend bzw. fallend, so gilt dasselbe für die Outputfunktion $w = \mathcal{W}[u]$.*

Ist $\mathcal{W}$ stückweise monoton, und sind u und w stückweise monoton und differenzierbar, so folgt

$$\dot{w}(t)\dot{u}(t) \geq 0\,, \quad \text{a.e. in } (0,T).$$

Wir nehmen an, dass $\mathcal{W}$ stückweise monoton ist, die Wachstumsbedingung

$$|\mathcal{W}[u; w_0]| \leq c_0(1 + \|u\|_\infty) \tag{9.41}$$

erfüllt, und als Operator

$$u \mapsto \mathcal{W}[u; w_0]$$

stetig ist. Dann ist $u \mapsto b_m(x,u)$ stetig und monoton und erfüllt

$$|b_m(x,u)| \leq c_2(1 + |w_{m-1}(x)| + \max_{i<m} |u_i(x)| + |u|)$$

mit geeignetem c_2.

Gemäß den Sätzen aus Kapitel 5 hat (9.38) eine Lösung $u_m \in H_0^1(\Omega)$.

Wir leiten nun Abschätzungen für u_m her. Wir testen (9.38) mit $v = u_m - u_{m-1}$. Da $\mathcal{W}$ stückweise monoton ist, gilt

$$(u_m - u_{m-1})(w_m - w_{m-1}) \geq 0\,, \quad \text{a.e. in } \Omega. \tag{9.42}$$

Aus (9.38) erhalten wir

$$\frac{1}{h_N}\|u_m - u_{m-1}\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega \langle \nabla u_m, \nabla u_m - \nabla u_{m-1}\rangle \, dx \leq \int_\Omega f_m \cdot (u_m - u_{m-1})\, dx\,. \tag{9.43}$$

Wir summieren diese Ungleichungen über m. Für die einzelnen Terme gilt (die Norm ist die Norm von $L^2(\Omega)$)

$$\sum_{m=1}^k \int_\Omega f_m \cdot (u_m - u_{m-1})\, dx \leq \Big(\sum_{m=1}^k h_N \|f_m\|^2\Big)^{1/2} \cdot \Big(\sum_{m=1}^k h_N \Big\|\frac{u_m - u_{m-1}}{h_N}\Big\|^2\Big)^{1/2} \tag{9.44}$$

und

$$\sum_{m=1}^{k}\int_\Omega \langle \nabla u_m, \nabla u_m - \nabla u_{m-1}\rangle\, dx = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{k}\|\nabla u_m - \nabla u_{m-1}\|^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u_k\|^2 - \frac{1}{2}\|\nabla u_0\|^2 \tag{9.45}$$

sowie

$$\sum_{m=1}^{N} h_N \|f_m\|^2 \le \int_0^T \int_\Omega |f(x,t)|^2\, dx\, dt\,. \tag{9.46}$$

Aus (9.43) – (9.46) folgt

$$\sum_{m=1}^{N} h_N \Big\| \frac{u_m - u_{m-1}}{h_N}\Big\|^2 + \max_{1\le k\le N}\|\nabla u_k\|^2 + \sum_{m=1}^{N}\|\nabla u_m - \nabla u_{m-1}\|^2 \le C \tag{9.47}$$

mit einer von N unabhängigen Konstanten C. Seien nun

$$u^N(x,\tau) = u_m(x) + \big(m - \frac{\tau}{h_N}\big)(u_{m-1}(x) - u_m(x))\,, \quad \tau \in [t_{m-1}, t_m] \tag{9.48}$$

und analog w^N die stückweise linearen Interpolierenden der $\{u_m\}$ bzw. $\{w_m\}$, sei

$$\tilde{u}^N(x,\tau) = u_m(x)\,, \quad \tau \in (t_{m-1}, t_m]\,, \tag{9.49}$$

und analog $\tilde{f}^N$ die stückweise konstante Interpolierenden der $\{u_m\}$ bzw. $\{f_m\}$. Die Variationsgleichung (9.36) kann nun geschrieben werden als

$$\begin{aligned}\int_\Omega \partial_t u^N(x,t)v(x)\,dx + \int_\Omega \partial_t w^N(x,t)v(x)\,dx + \int_\Omega \big\langle \nabla\tilde{u}^N(x,t), \nabla v(x)\big\rangle\, dx \\ = \int_\Omega \tilde{f}^N(x,t)v(x)\,dx\,, \quad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega)\end{aligned} \tag{9.50}$$

punktweise a.e. in t. Integration über $[0,T]$ ergibt

$$\int_0^T \int_\Omega (\partial_t u^N + \partial_t w^N)v\,dx\,dt + \int_0^T\int_\Omega \big\langle \nabla\tilde{u}^N, \nabla v\big\rangle\, dx\,dt = \int_0^T\int_\Omega \tilde{f}^N v\,dx\,dt \tag{9.51}$$

für alle $v \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$. Die Abschätzung (9.47) wird zu

$$\int_0^T\int_\Omega (\partial_t u^N)^2\,dx\,dt + \sup_{t\in[0,T]}(\|\nabla\tilde{u}^N(t)\|^2 + \|\nabla u^N(t)\|^2) \le C \tag{9.52}$$

mit einer von N unabhängigen Konstanten C. Aus der Abschätzung (9.47) folgt weiterhin, dass

$$\|u^N - \tilde{u}^N\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} = \frac{T}{3N}\sum_{m=1}^{N}\|\nabla u_m - \nabla u_{m-1}\|^2 \to 0\,. \tag{9.53}$$

Für w^N erhalten wir aus (9.51) und (9.52), dass

$$\Big|\int_0^T\int_\Omega \partial_t w^N v\,dx\,dt\Big| \le C\|v\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}\,, \quad \text{für alle } v \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), \tag{9.54}$$

und daher

$$\|\partial_t w^N\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \le C\,. \tag{9.55}$$

Wir setzen nun die Sätze über schwache Kompaktheit bzw. schwach-$*$-Kompaktheit ein und erhalten nach Übergang zu geeigneten Teilfolgen

$$\begin{aligned} u^N &\to u\,, &&\text{schwach-}* \text{ in } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \text{ und schwach in } H^1(0,T;L^2(\Omega)),\\ \tilde{u}^N &\to \tilde{u}\,, &&\text{schwach-}* \text{ in } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)),\\ w^N &\to w\,, &&\text{schwach in } H^1(0,T;H^{-1}(\Omega)). \end{aligned} \tag{9.56}$$

Aus (9.53) folgt, dass $u = \tilde{u}$. Da $\tilde{f}^N \to f$ in $L^2(\Omega \times (0,T))$, können wir in (9.51) den Grenzübergang $N \to \infty$ ausführen und erhalten, dass u und w die Variationsgleichung

$$\int_0^T \int_\Omega (\partial_t u + \partial_t w) v \, dx \, dt + \int_0^T \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v \rangle \; dx \, dt = \int_0^T \int_\Omega f v \, dx \, dt \tag{9.57}$$

für alle $v \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ lösen.

Wir wollen sehen, dass die so erhaltenen Funktionen u und w auch durch die Gleichung

$$w = \mathcal{W}[u; w_0] \tag{9.58}$$

verknüpft sind. Wir setzen

$$z^N = \mathcal{W}[u^N; w_0]\,, \quad z = \mathcal{W}[u; w_0]\,. \tag{9.59}$$

An dieser Stelle benötigen wir, dass die kompakte Einbettung

$$Y := L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap H^1(0,T;L^2(\Omega)) \to L^2(\Omega; C[0,T]) \tag{9.60}$$

gilt. Diese erhält man aus den stetigen Einbettungen

$$Y \to H^1(\Omega \times (0,T)) \to H^s(\Omega; H^{1-s}(0,T)) \to L^2(\Omega; C[0,T])$$

für $0 < s < 1/2$, deren letzte kompakt ist. Damit ergibt sich, dass $u^N \to u$ in der Norm von $L^2(\Omega; C[0,T])$ und insbesondere $u^N(x,\cdot) \to u(x,\cdot)$ in $C[0,T]$ für fast alle $x \in \Omega$, nach Übergang zu einer Teilfolge. Aus der Stetigkeit von $\mathcal{W}$ auf $C[0,T]$ folgt nun, dass $z^N(x,\cdot) \to z(x,\cdot)$ in $C[0,T]$ für fast alle $x \in \Omega$. Weiterhin gilt $z^N \to z$ in $L^2(\Omega; C[0,T])$ und analog $w^N - z^N \to 0$ in $L^2(\Omega; C[0,T])$. Insgesamt ergibt sich, dass $w^N \to w = z$ und damit (9.58). Wir fassen zusammen.

Satz 9.14 *Der Operator $\mathcal{W}$ sei ratenunabhängig, stückweise monoton, stetig auf $C[0,T]$ und beschränkt gemäß (9.41). Sei $f \in L^2(\Omega \times (0,T))$ und $u_0 \in H_0^1(\Omega)$. Dann existiert eine Lösung von (9.35) im schwachen Sinn (9.57)*

$$\begin{aligned} u &\in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap H^1(0,T;L^2(\Omega))\\ w &\in H^1(0,T;H^{-1}(\Omega)) \cap L^2(\Omega; C[0,T])\,. \end{aligned} \tag{9.61}$$

Der Beweis der Eindeutigkeit der Lösung beruht auf der folgenden Ungleichung (Hilpert 1989).

Lemma 9.15 *Seien* $u_1, u_2 : [0,T] \to \mathbb{R}$ *absolutstetig, seien* $w_{01}, w_{02} \in \mathbb{R}$. *Dann gilt für* $w_j = \mathcal{F}_r[u_j; w_{0j}]$, $j = 1, 2$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(w_2 - w_1)_+(t) \le (\dot{w}_2(t) - \dot{w}_1(t))H(u_2(t) - u_1(t))\,, \quad \text{a.e. in } (0,T), \tag{9.62}$$

wobei

$$H(x) = \begin{cases} 1\,, & x > 0\,, \\ 0\,, & x \le 0\,, \end{cases}$$

die Heaviside-Funktion ist.

Beweis: Wir behaupten, dass gilt

$$w_2(t) < w_1(t)\,, \quad u_2(t) \ge u_1(t) \qquad \Rightarrow \qquad \dot{w}_2(t) \ge 0\,, \quad \dot{w}_1(t) \le 0\,. \tag{9.63}$$

Es gelte die linke Seite von (9.63). Wäre $\dot{w}_1(t) > 0$, so wäre

$$w_2(t) < w_1(t) = u_1(t) - r \le u_2(t) - r$$

im Widerspruch zu $|w_2 - u_2| \le r$. Also ist $\dot{w}_1(t) \ge 0$. Wäre $\dot{w}_2(t) < 0$, so wäre

$$w_1(t) > w_2(t) = u_2(t) + r \ge u_2(t) + r$$

im Widerspruch zu $|w_1 - u_1| \le r$. Also ist $\dot{w}_2(t) \le 0$. Aus (9.63) folgt

$$0 \le (\dot{w}_2(t) - \dot{w}_1(t))H(u_2(t) - u_1(t))\,, \quad \text{falls } w_2(t) < w_1(t),$$

sowie (wenn wir in (9.63) die Indizes vertauschen)

$$\dot{w}_2(t) - \dot{w}_1(t) \le (\dot{w}_2(t) - \dot{w}_1(t))H(u_2(t) - u_1(t))\,, \quad \text{falls } w_1(t) < w_2(t).$$

Damit folgt (9.62), da auf $\{w_1 = w_2\}$ beide Seiten gleich Null sind. □

Satz 9.16 *Sei* $\mathcal{W} = \mathcal{F}_r$, *seien* (u_1, w_1) *und* (u_2, w_2) *Lösungen von (9.35) im Sinne von Satz 9.14 zu den Daten* $u_{0,1}, u_{0,2} \in H_0^1(\Omega)$ *und* $f_1, f_2 \in L^2(\Omega \times (0,T))$. *Dann gilt für fast alle* $t \in (0,T)$

$$\begin{aligned} &\int_\Omega |u_2 - u_1|(x,t)\,dx + \int_\Omega |w_2 - w_1|(x,t)\,dx \\ &\qquad \le \int_\Omega |u_{0,2} - u_{0,1}|x\,dx + \int_\Omega |w_2 - w_1|(x,0)\,dx + \int_0^t \int_\Omega |f_2 - f_1|(x,\tau)\,dx\,d\tau\,. \end{aligned} \tag{9.64}$$

Insbesondere ist die Lösung von (9.35) eindeutig bestimmt.

Beweis: Für $\varepsilon > 0$ definieren wir $H_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$H_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1\,, & x \ge \varepsilon\,, \\ \frac{x}{\varepsilon}\,, & 0 \le x \le \varepsilon\,, \\ 0\,, & x \le 0\,. \end{cases}$$

Wir setzen $u = u_2 - u_1$ und $w = w_2 - w_1$. Wir testen die Differenz der Variationsgleichungen (9.57) für u_2 und u_1 mit $v = H_\varepsilon(u)\chi_{[0,t]}$, welche in $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$ liegt, und erhalten

$$\begin{aligned}\int_0^t \int_\Omega (\partial_t u + \partial_t w) \cdot (H_\varepsilon \circ u)\, dx\, d\tau + \int_0^t \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla (H_\varepsilon \circ u)\rangle \, dx\, d\tau \\ = \int_0^t \int_\Omega (f_2 - f_1)(H_\varepsilon \circ u)\, dx\, d\tau \,.\end{aligned} \tag{9.65}$$

Es gilt punktweise a.e.

$$\langle \nabla u, \nabla (H_\varepsilon \circ u)\rangle = H_\varepsilon'(u)|\nabla u|^2 \geq 0\,,$$

also folgt aus (9.65)

$$\int_0^t \int_\Omega (\partial_t u + \partial_t w) \cdot (H_\varepsilon \circ u)\, dx\, d\tau \leq \int_0^t \int_\Omega (f_2 - f_1)(H_\varepsilon \circ u)\, dx\, d\tau \,. \tag{9.66}$$

Da $\partial_t u$ und $\partial_t w$ integrierbar sind und $|H_\varepsilon \circ u| \leq 1$ gilt, können wir mit dem Satz von Lebesgue den Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ durchführen und erhalten wegen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} u_+ = \partial_t u \cdot H(u)$$

aus (9.66) die Abschätzung

$$\begin{aligned}\int_\Omega u_+(x,t)\, dx + \int_\Omega \int_0^t \partial_t w(x,\tau) \cdot H(u(x,\tau))\, d\tau\, dx \\ \leq \int_\Omega u_+(x,0)\, dx + \int_0^t \int_\Omega (f_2 - f_1) H(u(x,\tau))\, dx\, d\tau \,.\end{aligned} \tag{9.67}$$

Wir wenden nun Lemma 9.15 auf den Term $\partial_t w \cdot H(u)$ and und erhalten

$$\begin{aligned}\int_\Omega u_+(x,t)\, dx + \int_\Omega w_+(x,t)\, dx \\ \leq \int_\Omega u_+(x,0)\, dx + \int_\Omega w_+(x,0)\, dx + \int_0^t \int_\Omega (f_2 - f_1) H(u(x,\tau))\, dx\, d\tau \,.\end{aligned} \tag{9.68}$$

Wir addieren zu (9.68) die Ungleichung, die entsteht, wenn wir die Rollen von u_1 und u_2 vertauschen. Da $0 \leq H(x) + H(-x) \leq 1$ für alle x, folgt (9.64). $\square$