Funktionentheorie *

Martin Brokate **

Inhaltsverzeichnis

*Vorlesungsskript, SS 2018

**Zentrum Mathematik, TU München

1 Komplexe Zahlen, Differenzierbarkeit

Wir erinnern an Definition und elementare Eigenschaften komplexer Zahlen. Die komplexe Zahlenebene $\mathbb{C}$ ist als Menge identisch mit dem $\mathbb{R}^2$. Ein $z \in \mathbb{C}$ mit Realteil x und Imaginärteil y kann dargestellt werden als $z = (x, y)$, als $z = x + iy$ mit der imaginären Einheit $i = (0, 1)$ oder in Polarkoordinaten als

$$z = re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)\,, \quad r \geq 0\,,\, \varphi \in \mathbb{R}$$

mit der Länge $r = |z|$ und dem Winkel φ. Was den Winkel angeht, genügt es, sich auf ein Intervall der Länge 2π zu beschränken, da für $k \in \mathbb{Z}$ gilt $e^{2k\pi i} = 1$ und daher

$$e^{i(\varphi+2k\pi)} = e^{i\varphi}e^{i2k\pi} = e^{i\varphi}\,.$$

Eine häufige Wahl ist $\varphi \in (-\pi, \pi]$; der Winkel springt dann beim Überqueren der negativen reellen Achse. Mit dieser Normierung bezeichnen wir φ als das **Argument** von $z = re^{i\varphi}$, geschrieben $\varphi = \arg(z)$. Definieren wir die **punktierte Ebene** durch

$$\mathbb{C}^{\times} = \mathbb{C} \setminus \{0\}\,,$$

so erhalten wir die Argumentfunktion

$$\arg : \mathbb{C}^{\times} \to (-\pi, \pi]\,.$$

Addition und Multiplikation. Die Addition in $\mathbb{C}$ ist dieselbe wie in $\mathbb{R}^2$. Für das Produkt von $z = (x, y)$ und $w = (u, v)$ soll gelten $i^2 = -1$ und

$$z \cdot w = (x + iy)(u + iv) = xu + iyu + xiv + iyiv = (xu - yv) + i(yu + xv)\,.$$

Die Definition

$$z \cdot w = (xu - yv, yu + xv)$$

leistet das. In Polarkoordinaten

$$z = re^{i\varphi}\,, \quad w = se^{i\psi}\,,$$

hat die Multiplikation die Form

$$z \cdot w = re^{i\varphi} \cdot se^{i\psi} = rse^{i(\varphi+\psi)}\,,$$

das heißt, die Längen multiplizieren sich und die Winkel addieren sich.

Metrik und Konvergenz. Aufgefasst als $\mathbb{R}$-Vektorraum, ist $\mathbb{C}$ vermittels $j : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$,

$$j(z) = (\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z) \tag{1.1}$$

zu $\mathbb{R}^2$ isomorph. Da

$$|z| = \|j(z)\|_2\,, \tag{1.2}$$

ist die metrische Struktur von $\mathbb{C}$ mit der von $\mathbb{R}^2$ identisch. Eine Teilmenge U von $\mathbb{C}$ ist also genau dann offen (abgeschlossen, kompakt, ...), wenn die entsprechende Menge

$j(U) \subset \mathbb{R}^2$ diese Eigenschaft hat. Mit $B(a,r)$ bzw. $K(a,r)$ bezeichnen wir die offene bzw. abgeschlossene Kreisscheibe um a mit Radius r.

Eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann in $\mathbb{C}$, wenn die Folge $(j(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^2$ konvergiert. Es gilt also $z_n \to z$ in $\mathbb{C}$ genau dann, wenn $|z_n - z| \to 0$. Äquivalent dazu ist, dass $\operatorname{Re} z_n \to \operatorname{Re} z$ und $\operatorname{Im} z_n \to \operatorname{Im} z$.

Konvergenz gegen ∞ ist für Folgen $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ ebenfalls definiert. Wir sagen, dass $z_n \to \infty$, falls $|z_n| \to \infty$, das heißt, falls für jedes $R > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $|z_n| \geq R$ für alle $n \geq N$. Konvergenz gegen ∞ bezieht sich also nur auf die Beträge; über die Winkel ist nichts gesagt. Beispiel: Die durch $z_n = ni^n$ definierte Folge konvergiert gegen ∞, die mit der positiven reellen Achse gebildeten Winkel durchlaufen aber periodisch die Werte $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 0, \ldots$.

Definition 1.1 (Differenzierbarkeit)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ heißt ***differenzierbar*** *in $z \in U$, falls der Grenzwert*

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \tag{1.3}$$

existiert. Wir definieren in diesem Fall die Ableitung von f in z durch

$$f'(z) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}\,. \tag{1.4}$$

Ist f in ganz U differenzierbar, so sagen wir, dass f in U ***holomorph*** *ist.* □

Die Grenzwertbildung $h \to 0$ im Komplexen bedeutet, dass jede Folge $z + h_n$ mit $|h_n| \to 0$, ganz gleich aus welcher Richtung sie sich z nähert (falls man überhaupt von einer Richtung sprechen kann; sie könnte auch spiralförmig auf z zulaufen), im Limes (1.3) auf die gleiche komplexe Zahl $f'(z)$ führt.

Die aus dem Reellen bekannten Rechenregeln gelten auch im Komplexen (und sie werden auch wie im Reellen bewiesen): Sind $f, g : U \to \mathbb{C}$ holomorph, so auch $f + g$, $f \cdot g$, αf für $\alpha \in \mathbb{C}$, sowie $f/g : U \setminus \{g = 0\} \to \mathbb{C}$, und es gilt

$$(f+g)' = f' + g'\,, \quad (fg)' = f'g + fg'\,, \quad (\alpha f)' = \alpha f'\,, \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}\,.$$

Außerdem gilt die Kettenregel: Sind $f : U \to V$, $g : V \to \mathbb{C}$ holomorph, so ist auch $g \circ f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, und

$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z)\,, \quad z \in U\,.$$

Viele aus der Analysis im Reellen bekannte Funktionen sind holomorph, wenn man als ihren Definitionsbereich eine geeignete offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ nimmt. Für Polynome und rationale Funktionen folgt das beispielsweise (wie im Reellen) daraus, dass sie durch Zusammensetzen aus Konstanten und der Identität $f(z) = z$ entstehen.

Lineare Abbildungen. Fassen wir $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum der Dimension 2 auf, so ist eine Abbildung $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\mathbb{R}$-linear, falls gilt

$$T(z+w) = T(z) + T(w)\,, \quad \text{für alle } z, w \in \mathbb{C},$$
$$T(\alpha z) = \alpha T(z)\,, \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C},\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Ist $c \in \mathbb{C}$, so ist die durch

$$T(z) = c \cdot z \tag{1.5}$$

definierte Abbildung $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ offensichtlich $\mathbb{C}$-linear und damit auch $\mathbb{R}$-linear. Ihre Matrixdarstellung als Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ hat die Form

$$\begin{pmatrix} c_1 & -c_2 \\ c_2 & c_1 \end{pmatrix}, \quad c_1 = \operatorname{Re} c\,, \quad c_2 = \operatorname{Im} c\,, \tag{1.6}$$

was sich unmittelbar aus der Formel für die Multiplikation

$$(c_1 + ic_2)(z_1 + iz_2) = (c_1 z_1 - c_2 z_2) + i(c_2 z_1 + c_1 z_2)$$

ergibt. Ein weiteres Beispiel ist die komplexe Konjugation,

$$T(z) = \overline{z}\,.$$

Wegen $T(\alpha z) = \overline{\alpha} \cdot \overline{z}$ ist T $\mathbb{R}$-linear, aber nicht $\mathbb{C}$-linear.

Zusammenhang mit der reellen Differenzierbarkeit. Jeder Abbildung $f : U \to \mathbb{C}$, $U \subset \mathbb{C}$ entspricht kanonisch eine Abbildung $\tilde{f} : j(U) \to \mathbb{R}^2$. Auf $\tilde{f}$ ist die in Analysis 2 entwickelte Differenzialrechnung im Mehrdimensionalen anwendbar. Wir werden im folgenden f und $\tilde{f}$ in der Notation nicht unterscheiden, sondern einfach von $f : U \to \mathbb{C}$ sprechen.

Definition 1.2 (Reelle Differenzierbarkeit)
*Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Abbildung $f : U \to \mathbb{C}$ heißt **reell differenzierbar**, falls sie, aufgefaßt als Abbildung von $U \subset \mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$, differenzierbar ist im Sinne der mehrdimensionalen Analysis im $\mathbb{R}^n$.* □

Lemma 1.3 *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$, $z \in U$. Dann sind äquivalent:*

(i) f ist differenzierbar in z.

(ii) f ist reell differenzierbar in z, und die Jacobi-Matrix $J_f(z) \in \mathbb{R}^{2,2}$ hat die Form

$$J_f(z) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$.

Beweis: Wie im Reellen beweist man, dass (1.4) äquivalent ist zu

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f(z+h) - f(z) - f'(z)h}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{|f(z+h) - f(z) - f'(z)h|}{|h|} = 0\,. \tag{1.8}$$

Hieraus folgt die Behauptung, siehe (1.2), (1.5) und (1.6). □

Eine lineare Abbildung mit einer Matrixdarstellung wie in (1.7) bezeichnet man auch als **Drehstreckung**. Sie kombiniert eine Streckung um $\sqrt{a^2 + b^2} = |f'(z)|^2$ mit einer Drehung um den Winkel $\cos\varphi = a/\sqrt{a^2 + b^2}$.

Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen. Schreiben wir

$$f(z) = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} ,$$

also $u(x,y) = \operatorname{Re} f(z)$, $v(x,y) = \operatorname{Im} f(z)$, $z = x + iy$, so ist

$$J_f(z) = \begin{pmatrix} \partial_x u(x,y) & \partial_y u(x,y) \\ \partial_x v(x,y) & \partial_y v(x,y) \end{pmatrix} . \tag{1.9}$$

Satz 1.4 (Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$. Dann sind äquivalent:

(i) f ist holomorph in U.

(ii) f ist reell differenzierbar in U, und für die Funktionen $u = \operatorname{Re} f$ und $v = \operatorname{Im} f$ gilt

$$\partial_x u(x,y) = \partial_y v(x,y) , \tag{1.10}$$
$$\partial_y u(x,y) = -\partial_x v(x,y) , \tag{1.11}$$

für alle $(x,y) \in U$.

Die Gleichungen (1.10) und (1.11) heißen die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen.

Beweis: Folgt direkt aus Lemma 1.3 und (1.9). □

Aus der Analysis 2 wissen wir, dass stetige reelle Differenzierbarkeit (d.h. alle ersten partiellen Ableitungen existieren und sind stetig) der Funktionen u und v die reelle Differenzierbarkeit von f impliziert. Beispiel: Für die komplexe Exponentialfunktion gilt

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x \cos y + i e^x \sin y ,$$

also

$$u(x,y) = e^x \cos y , \quad v(x,y) = e^x \sin y .$$

Man sieht unmittelbar, dass die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen in $\mathbb{R}^2$ erfüllt sind. Die komplexe Exponentialfunktion ist also holomorph in $\mathbb{C}$.

Ist $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, und sind $u = \operatorname{Re} f$ und $v = \operatorname{Im} f$ zweimal stetig reell differenzierbar (was, wie sich später herausstellen wird, bereits aus der Holomorphie folgt), so folgt aus den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\Delta u = \partial_x(\partial_x u) + \partial_y(\partial_y u) = \partial_x \partial_y v - \partial_y \partial_x v = 0 ,$$

und analog

$$\Delta v = 0 .$$

Real- und Imaginärteil einer holomorphen Funktion sind also immer Lösungen der Laplace-Gleichung in U.

Potenzreihen. Wir betrachten komplexe Potenzreihen der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k \tag{1.12}$$

mit den Koeffizienten $(c_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}$ um den Entwicklungspunkt $a \in \mathbb{C}$. Wir wissen bereits aus der Analysis 1, dass diese Potenzreihe im Inneren $B(a,r)$ ihres Konvergenzkreises,

$$r = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}}$$

absolut konvergiert und dort eine stetige Funktion

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k \tag{1.13}$$

definiert. Wir wissen außerdem, dass die durch gliedweises Differenzieren gebildete Potenzreihe

$$g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k (z-a)^{k-1} \tag{1.14}$$

ebenfalls in $B(a,r)$ absolut konvergiert.

Satz 1.5 *Jede komplexe Potenzreihe definiert eine im Innern ihres Konvergenzkreises holomorphe Funktion. Deren Ableitung ergibt sich durch gliedweises Differenzieren.*

Beweis: Seien f, g durch (1.13), (1.14) gegeben, sei zunächst $a = 0$. Wir müssen zeigen, dass f für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < r$ differenzierbar ist und $f'(z) = g(z)$ gilt. Sei ein solches z fest gewählt. Es gilt für alle $k \geq 1$

$$w^k - z^k = (w-z) q_k(w) \,, \quad q_k(w) := \sum_{j=0}^{k-1} z^j w^{k-1-j} \,.$$

Daraus folgt für $|w| < r$

$$f(w) - f(z) = (w-z) \sum_{k=1}^{\infty} c_k q_k(w) \,,$$

also für $|w| < r$, $w \neq z$

$$\frac{f(w) - f(z)}{w - z} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k q_k(w) =: \tilde{g}(w) \,.$$

Da

$$\tilde{g}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k q_k(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k k z^{k-1} = g(z) \,,$$

genügt es zu zeigen, dass $\tilde{g}$ stetig ist in z. Nun gilt aber für alle $|w| < r$ und alle k

$$|c_k q_k(w)| \leq |c_k| k \rho^{k-1} \,, \quad \rho = \max\{|w|, |z|\} \,,$$

und aus dem Weierstraß-Kriterium für Funktionenreihen (Analysis 1) folgt wie im Reellen die gleichmäßige Konvergenz der Partialsummen von $\tilde{g}$ gegen $\tilde{g}$. Also ist $\tilde{g}$ stetig in z. Der allgemeine Fall $a \neq 0$ wird darauf zurückgeführt, indem wir das eben Bewiesene auf

$$\tilde{f}(z) = f(z+a)$$

anwenden. □

Exponentialfunktion und Logarithmus. Aus dem vorangehenden Satz folgt ebenfalls, dass die Exponentialfunktion auf $\mathbb{C}$ holomorph ist. Im Reellen gilt: Die Exponentialfunktion ist eine streng monoton wachsende Bijektion von $\mathbb{R}$ nach $\{x : x > 0\}$, ihre Umkehrfunktion (der reelle Logarithmus ln) ist eine streng monoton wachsende Bijektion von $\{x : x > 0\}$ nach $\mathbb{R}$. Im Komplexen ist die Lage komplizierter. Wir definieren zunächst die **punktierte Ebene**

$$\mathbb{C}^{\times} = \mathbb{C} \setminus \{0\} .$$

Wir behaupten: Für $z \in \mathbb{C}^{\times}$ hat die Gleichung

$$e^w = z \tag{1.15}$$

nicht genau eine Lösung (wie in $\mathbb{R}$ für $x > 0$), sondern abzählbar unendlich viele Lösungen, wie wir gleich sehen werden. Zunächst gilt für alle $y \in \mathbb{R}$

$$\left|e^{iy}\right|^2 = e^{iy}\overline{e^{iy}} = e^{iy}e^{-iy} = e^0 = 1 ,$$

also $|e^{iy}| = 1$. Ist $w = x + iy$, so gilt $e^w = e^x e^{iy}$, also $|e^w| = e^x$. Mit der Eulerschen Formel

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

folgt weiter, dass

$$e^w = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad e^x = 1 = e^{iy} = \cos y + i \sin y .$$

Da $e^x = 1 \;\Leftrightarrow\; x = 0$, erhalten wir schließlich aus den uns bekannten Werten für Sinus und Cosinus

$$e^w = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad w = 2\pi i k \quad \text{für ein } k \in \mathbb{Z}.$$

Sind nun $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ Lösungen von (1.15) für gegebenes $z \in \mathbb{C}^{\times}$, so folgt

$$1 = \frac{e^{w_1}}{e^{w_2}} = e^{w_1 - w_2} ,$$

und weiter

$$w_1 - w_2 = 2\pi i k \qquad \text{für ein } k \in \mathbb{Z}. \tag{1.16}$$

Wir können nun (1.15) vollständig lösen. Zunächst ist

$$w = \ln r + i\varphi , \quad r = |z| , \quad \varphi = \arg(z) , \quad \arg : \mathbb{C}^{\times} \to (-\pi, \pi] , \tag{1.17}$$

eine Lösung von (1.15). Alle weiteren Lösungen ergeben sich mit (1.16) als

$$w = \ln r + i\varphi + 2\pi i k , \quad k \in \mathbb{Z} .$$

Die durch $k = 0$ ausgezeichnete Lösung aus (1.17) heißt der **Hauptwert** des komplexen Logarithmus von z. Durch

$$\log z = \ln(|z|) + i\arg(z) \tag{1.18}$$

wird eine Funktion

$$\log : \mathbb{C}^- \to \mathbb{C}$$

definiert, wobei

$$\mathbb{C}^- = \mathbb{C} \setminus \{(x, 0) : x \leq 0\} \tag{1.19}$$

die entlang der negativen reellen Achse **aufgeschnittene** komplexe Ebene ist. Sie heißt der **Hauptzweig** des komplexen Logarithmus. Sie lässt sich nicht stetig auf die negative reelle Halbachse fortsetzen, da bei deren Überqueren die Argumentfunktion zwischen π und $-\pi$ springt.

Die allgemeine Potenzfunktion. Für gegebenes $c \in \mathbb{C}^-$ ist sie definiert durch

$$c^z = e^{z \log c}\,. \tag{1.20}$$

Mit ihrer Hilfe wird wiederum die **Riemannsche Zetafunktion**

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \tag{1.21}$$

für $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}\,(s) > 1$ definiert. (Es ist allgemein üblich, das Argument der Riemannschen Zetafunktion mit "s" zu bezeichnen.) Die Reihe konvergiert absolut für $\mathrm{Re}\,(s) > 1$, da sie wegen

$$|n^s| = \left|e^{s\ln(n)}\right| = \left|e^{\mathrm{Re}(s)\ln(n)} e^{i\mathrm{Im}(s)\ln(n)}\right| = e^{\mathrm{Re}(s)\ln(n)} = n^{\mathrm{Re}(s)}$$

durch die konvergente Reihe $\sum_n 1/n^{\mathrm{Re}(s)}$ majorisiert wird.

Ganze und transzendente Funktionen. Eine auf $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion heißt **ganz**. Eine ganze Funktion, die kein Polynom ist, heißt **transzendent**. Die Exponentialfunktion (und folglich auch die allgemeine Potenzfunktion (1.20)) ist also eine transzendente Funktion, nicht aber der Hauptzweig des Logarithmus. Letzterer ist nur auf $\mathbb{C}^{\times}$ definiert und lässt sich nicht holomorph auf $\mathbb{C}$ fortsetzen.

2 Das Wegintegral im Komplexen

Sei $I = [a, b]$, $f : I \to \mathbb{C}$. Wir definieren

$$\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b (\mathrm{Re}\, f)(t)\, dt + i \int_a^b (\mathrm{Im}\, f)(t)\, dt\,. \tag{2.1}$$

Diese Definition macht Sinn, falls $\mathrm{Re}\, f$ und $\mathrm{Im}\, f$ integrierbar sind. Da wir in dieser Vorlesung nur stückweise stetige Funktionen integrieren wollen, ist es gleichgültig, welchen Integralbegriff man zugrundeliegt (Lebesgue-Integral, Regelintegral, Riemann-Integral ...).

Unter einem **Weg** (oder einer **Kurve**) im Komplexen versteht man eine Abbildung $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ mit einem Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Ist $\gamma([a, b]) \subset U \subset \mathbb{C}$, so sagen wir, dass γ **ganz in U verläuft**. Der Punkt $\gamma(a)$ heißt der **Anfangspunkt** von γ, der Punkt $\gamma(b)$ der **Endpunkt** von γ. Ist $\gamma(b) = \gamma(a)$, so heißt der Weg **geschlossen**.

Definition 2.1 (Wegintegral in $\mathbb{C}$)
*Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ stetig, sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg, welcher ganz in U verläuft. Wir definieren das **Wegintegral von f entlang γ** durch*

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt\,. \tag{2.2}$$

□

Der Wert des Wegintegrals in (2.2) ist also eine komplexe Zahl. Der Integrand $t \mapsto f(\gamma(t)\gamma'(t)$ ist unter den gegebenen Voraussetzungen stückweise stetig.

Vorsicht! Dieses Wegintegral unterscheidet sich vom Integral eines Vektorfeldes längs einer Kurve, so wie es in der rellen Analysis bzw. Vektoranalysis behandelt wird. In (2.2) steht das Produkt der komplexen Zahlen $f(\gamma(t))$ und $\gamma'(t)$, in der Vektoranalysis steht dort das Skalarprodukt der reellen Vektoren $f(\gamma(t))$ und $\gamma'(t)$.

Wie im Reellen zeigt man, dass sich das Wegintegral durch Umparametrisieren nicht ändert, das heißt,

$$\int_{\tilde{\gamma}} f(z)\, dz = \int_\gamma f(z)\, dz\,,$$

falls $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \psi$, $\psi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ stetig differenzierbar, monoton wachsend und bijektiv ist. Mit

$$C = \gamma([a, b])$$

können wir daher statt $\int_\gamma f(z)\, dz$ auch

$$\int_C f(z)\, dz$$

schreiben, wenn festliegt, in welcher Richtung C durchlaufen wird. (Ändern wir die Durchlaufrichtung, so kehrt sich das Vorzeichen des Wegintegrals um.)

Beispiel: Sei $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = tw + (1 - t)z$, die Verbindungsstrecke von z nach w. Dann gilt

$$\int_\gamma 1\, dz = \int_0^1 \gamma'(t)\, dt = \int_0^1 (w - z)\, dt = w - z\,. \tag{2.3}$$

Vertauschen wir die Durchlaufrichtung, indem wir w und z vertauschen, so ergibt sich $z - w$ als Wert des Wegintegrals.

Lemma 2.2 *Sei $c \in \mathbb{C}$ und $r > 0$. Dann gilt für $C = \partial B(c, r)$, durchlaufen im mathematisch positiven Sinn,*

$$\int_C \frac{1}{z-c}\, dz = 2\pi i\,, \tag{2.4}$$

$$\int_C (z-c)^n\, dz = 0\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,,\, n \neq -1\,. \tag{2.5}$$

Beweis: Wir definieren $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ durch

$$\gamma(t) = c + re^{it}\,.$$

Dann gilt für alle $n \in \mathbb{Z}$

$$\int_C (z-c)^n\, dz = \int_0^{2\pi} r^n e^{int} ire^{it}\, dt = ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t}\, dt\,,$$

woraus beide Behauptungen folgen. □

Wegintegrale über Kreise kommen in der Funktionentheorie häufig vor. Wir verabreden generell, dass dabei (wie in Lemma 2.2) der Kreis im mathematisch positiven Sinn durchlaufen wird.

Lemma 2.3 (Standardabschätzung für Wegintegrale)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ stetig, $\gamma : [a, b] \to U$ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg. Dann gilt

$$\left| \int_\gamma f(z)\, dz \right| \leq L(\gamma) \cdot \|f\|_{\infty,\gamma}\,, \tag{2.6}$$

wobei $\|f\|_{\infty,\gamma} = \|f \circ \gamma\|_\infty$ und

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt \tag{2.7}$$

die Länge des Weges γ ist.

Beweis: Es ist

$$\left| \int_\gamma f(z)\, dz \right| = \left| \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt \right| \leq \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt \cdot \sup_{t \in [a,b]} |f(\gamma(t))|\,.$$

□

Definition 2.4 (Stammfunktion)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$. Eine holomorphe Funktion $F : U \to \mathbb{C}$ heißt Stammfunktion von f in U, falls $F'(z) = f(z)$ gilt für alle $z \in U$. □

Lemma 2.5 *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ stetig, sei F eine Stammfunktion von f in U. Dann gilt*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) \tag{2.8}$$

für jeden stückweise stetig differenzierbaren Weg $\gamma : [a,b] \to U$. Insbesondere gilt

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0 \tag{2.9}$$

falls γ geschlossen ist.

Beweis: Es gilt

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \int_a^b (F \circ \gamma)'(t)\,dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))\,.$$

□

Die Formel (2.5) in Lemma 2.2 für $n \neq -1$ ist ein Spezialfall von Lemma 2.5 mit

$$f(z) = (z-c)^n\,, \quad F(z) = \frac{1}{n+1}(z-c)^{n+1}\,.$$

Lemma 2.5 zeigt, dass das Integral von f entlang eines Weges nur von dessen Anfangs- und Endpunkt abhängt, falls f eine Stammfunktion in U hat.

Definition 2.6 *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ stetig. Wir sagen, dass das Wegintegral von f* ***wegunabhängig in U*** *ist, falls*

$$\int_{\gamma_1} f\,dz = \int_{\gamma_2} f\,dz \tag{2.10}$$

gilt für alle Paare (γ_1, γ_2) von Wegen in U mit gleichem Anfangs- und Endpunkt.

Lemma 2.7 *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ stetig. Das Wegintegral von f ist wegunabhängig in U genau dann, wenn*

$$\int_\gamma f\,dz = 0 \tag{2.11}$$

gilt für jeden geschlossenen Weg γ, der ganz in U verläuft.

Beweis: "$\Rightarrow$": Ist $\gamma : [a,b] \to U$ ein geschlossener Weg, so teilen wir ihn an einem beliebigen Zwischenpunkt $d \in (a,b)$ auf in zwei Wege $\gamma_1 : [a,d] \to U$ und $\gamma_2 : [d,b] \to U$. Nach Voraussetzung gilt

$$\int_{\gamma_1} f\,dz = -\int_{\gamma_2} f\,dz\,. \tag{2.12}$$

Daraus folgt (2.11).
"$\Leftarrow$": Seien γ_1 und γ_2 zwei Wege in U mit gleichem Anfangs- und Endpunkt. Sei γ der Weg, der entsteht, indem wir γ_1 vorwärts und γ_2 rückwärts durchlaufen. Aus (2.11) folgt nun (2.10). □

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Wir fragen uns, ob jede holomorphe Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ eine Stammfunktion hat. Es stellt sich heraus, dass das von der Form von U abhängt. Beispielsweise folgt aus Lemma 2.2, dass

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

in $U = \mathbb{C} \setminus \{0\} = C^{\times}$ keine Stammfunktion haben kann, da das Wegintegral entlang eines Kreises um 0 nicht gleich Null ist. (Andererseits: In $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist $F(t) = \ln(|t|)$ eine Stammfunktion von $f(t) = 1/t$.)

Definition 2.8 *Eine offene Teilmenge U von $\mathbb{C}$ heißt* ***Sterngebiet mit Bezugspunkt*** $\boldsymbol{c \in U}$*, falls für alle $z \in U$ die Verbindungsstrecke $[c, z]$ ganz in U liegt.*

Zu $c \in U$ betrachten wir Dreiecke $\Delta(c)$ der Form

$$\Delta(c) = \operatorname{conv}\{c, z, w\}, \quad z, w \in U, \tag{2.13}$$

also mit den Ecken c, z, w.

Satz 2.9 *Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Sterngebiet mit Bezugspunkt c, sei $f : U \to \mathbb{C}$ stetig, es gelte*

$$\int_{\partial\Delta(c)} f(z)\, dz = 0 \tag{2.14}$$

für alle Dreiecke $\Delta(c)$ der Form (2.13), welche $\Delta(c) \subset U$ erfüllen. Dann hat f eine Stammfunktion in U.

Beweis: Für $z \in U$ definieren wir

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(\zeta)\, d\zeta, \tag{2.15}$$

wobei

$$\gamma_z : [0, 1] \to U, \quad \gamma_z(t) = tz + (1 - t)c$$

die Verbindungsstrecke von c nach z ist. Sei $r > 0$ so klein, dass $B(z, r) \subset U$, sei $w \in B(z, r)$ beliebig. Dann liegt das durch (2.13) definierte Dreieck $\Delta(c)$ ganz in U, und es gilt

$$0 = \int_{\partial\Delta(c)} f(\zeta)\, d\zeta = \int_{[c,z]} f(\zeta)\, d\zeta + \int_{[z,w]} f(\zeta)\, d\zeta + \int_{[w,c]} f(\zeta)\, d\zeta,$$

also

$$F(w) = F(z) + \int_{[z,w]} f(\zeta)\, d\zeta.$$

Für $w \in B(z, r)$, $w \neq z$ folgt mit (2.3)

$$\frac{F(w) - F(z)}{w - z} - f(z) = \frac{1}{w - z} \int_{[z,w]} f(\zeta)\, d\zeta - f(z) = \frac{1}{w - z} \int_{[z,w]} f(\zeta) - f(z)\, d\zeta,$$

also mit Lemma 2.3

$$\left| \frac{F(w) - F(z)}{w - z} - f(z) \right| \leq \frac{1}{|w - z|} L([z, w]) \sup_{\zeta \in [z,w]} |f(\zeta) - f(z)| = \sup_{\zeta \in [z,w]} |f(\zeta) - f(z)|.$$

Daraus folgt

$$\sup_{\substack{w \in B(z,r) \\ w \neq z}} \left| \frac{F(w) - F(z)}{w - z} - f(z) \right| \leq \sup_{w \in B(z,r)} |f(w) - f(z)| \,.$$

Aus der Stetigkeit von f folgt nun

$$\lim_{\substack{w \to z \\ w \neq z}} \left[\frac{F(w) - F(z)}{w - z} - f(z) \right] = 0 \,.$$

Also ist F differenzierbar in z mit $F'(z) = f(z)$. Da $z \in U$ beliebig war, folgt die Behauptung. □

Sei nun U eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$, in der sich je zwei Punkte durch einen Weg verbinden lassen. Mit einer geringfügigen Modifikation des vorangehenden Beweises zeigt man, dass gilt: Sind die Wegintegrale einer stetigen Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ wegunabhängig in U, so hat f in U eine Stammfunktion. Eine solche kann definiert werden durch

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(\zeta) \, d\zeta \,, \tag{2.16}$$

wobei γ_z ein beliebiger Weg ist, welcher einen fest vorgegebenen Punkt $c \in U$ mit z verbindet. Da Wegunabhängigkeit vorausgesetzt ist, ist F wohldefiniert. Man zeigt, dass F Stammfunktion von f ist, indem man im vorangehenden Beweis die Strecken $[c, z]$ und $[c, w]$ durch die Wege γ_z und γ_w ersetzt.

3 Der Integralsatz von Cauchy

Im vorigen Kapitel hatten wir gesehen, dass es von der Form von U abhängen kann, ob eine Funktion eine Stammfunktion in U hat oder nicht. So hat beispielsweise die auf $U = \mathbb{C}^{\times}$ holomorphe Funktion $f(z) = 1/z$ dort keine Stammfunktion. In diesem Kapitel wird sich im Integralsatz von Cauchy herausstellen, dass auf Sterngebieten U jede holomorphe Funktion eine Stammfunktion hat.

Der Integralsatz von Cauchy. Dessen Beweis setzt sich aus drei Bausteinen zusammen. Die ersten beiden wurden bereits im vorigen Kapitel behandelt. Das folgende Lemma liefert den dritten.

Satz 3.1 (Integrallemma)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt

$$\int_{\partial \Delta} f(z)\, dz = 0 \tag{3.1}$$

für jedes Dreieck Δ mit $\Delta \subset U$.

Im Jahr 1883 hat E. Goursat dieses Lemma erhalten, und zwar für Rechtecke anstelle von Dreiecken. Für Dreiecke (wie hier verwendet) stammt es von A. Pringsheim (1901).

Beweis: Sei $\Delta = \operatorname{conv}\{a_1, a_2, a_3\}$ ein Dreieck mit $\Delta \subset U$. Wir setzen $\Delta_0 = \Delta$ und zerlegen Δ_0 in 4 kongruente Dreiecke $D_1, \ldots, D_4$, indem wir die drei Seitenmitten verbinden. Es gilt dann

$$\int_{\partial \Delta_0} f(z)\, dz = \sum_{k=1}^{4} \int_{\partial D_k} f(z)\, dz\,, \tag{3.2}$$

wenn wir die Ränder alle im mathematisch positiven Sinn durchlaufen. Wir setzen $\Delta_1 = D_k$, wobei wir k so wählen, dass

$$\left| \int_{\partial \Delta_0} f(z)\, dz \right| \le 4 \left| \int_{\partial \Delta_1} f(z)\, dz \right| \tag{3.3}$$

gilt. Indem wir diese Konstruktion wiederholen, erhalten wir eine Folge $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Dreiecken mit

$$\left| \int_{\partial \Delta_{n-1}} f(z)\, dz \right| \le 4 \left| \int_{\partial \Delta_n} f(z)\, dz \right|. \tag{3.4}$$

Aufgrund der Konstruktion gilt offensichtlich

$$\operatorname{diam}(\Delta_n) = 2^{-n} \operatorname{diam}(\Delta)\,, \quad L(\partial \Delta_n) = 2^{-n} L(\partial \Delta)\,. \tag{3.5}$$

Da $\Delta_0 \supset \Delta_1 \supset \ldots$ und alle Δ_n kompakt sind, folgt aus der endlichen Durchschnittseigenschaft kompakter Mengen, dass es ein $c \in U$ gibt mit

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Delta_n = \{c\}\,. \tag{3.6}$$

Wir definieren nun $g : U \to \mathbb{C}$ durch

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(c)}{z-c} - f'(c)\,, & z \neq c\,, \\ 0\,, & z = c\,. \end{cases}$$

Da f holomorph ist, ist g stetig in U, und es gilt

$$f(z) = f(c) + (z-c)f'(c) + (z-c)g(z)\,,$$

also für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz = \int_{\partial\Delta_n} f(c)\,dz + \int_{\partial\Delta_n} (z-c)f'(c)\,dz + \int_{\partial\Delta_n} (z-c)g(z)\,dz\,. \tag{3.7}$$

Die ersten beiden Integrale auf der rechten Seiten sind Null nach Lemma 2.5, da die Integranden (als Funktionen von z) Stammfunktionen besitzen. Aus Lemma 2.3 folgt

$$\left|\int_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz\right| \le L(\partial\Delta_n) \sup_{z\in\partial\Delta_n} |z-c||g(z)| \le (L(\partial\Delta_n))^2 \sup_{z\in\partial\Delta_n} |g(z)|\,, \tag{3.8}$$

da in jedem Dreieck D gilt $\operatorname{diam}(D) \le L(\partial D)$. Aus (3.4) und (3.5) folgt weiter

$$\left|\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz\right| \le 4^n \left|\int_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz\right| \le 4^n (L(\partial\Delta_n))^2 \sup_{z\in\partial\Delta_n} |g(z)| = (L(\partial\Delta))^2 \sup_{z\in\partial\Delta_n} |g(z)|\,. \tag{3.9}$$

Da g stetig ist und $g(c) = 0$, folgt

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{z\in\partial\Delta_n} |g(z)| = 0\,,$$

und damit aus (3.9)

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0\,.$$

□

Satz 3.2 (Integralsatz von Cauchy)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Sterngebiet, sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann hat f eine Stammfunktion in U, und es gilt

$$\int_C f(z)\,dz = 0 \tag{3.10}$$

für jeden geschlossenen, stückweise stetig differenzierbaren Weg C in U.

Beweis: Nach Satz 3.1 gilt (3.10) für alle Wege C der Form $C = \partial\Delta$, $\Delta \subset U$ Dreieck. Aus Satz 2.9 folgt, dass f in U eine Stammfunktion hat, und aus Lemma 2.5 folgt, dass (3.10) für jeden geschlossenen Weg gilt. □

Satz 3.3 (Integralformel von Cauchy für Kreise)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei $K(c,r) \subset U$ mit $c \in U$, $r > 0$. Dann gilt für alle $z \in B = B(c,r)$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(w)}{w-z}\,dw\,. \tag{3.11}$$

Beweis: Sei $z \in B$ fest gewählt. Im ersten Schritt des Beweises zeigen wir, dass

$$\int_{\partial B(c,r)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \int_{\partial B(z,\varepsilon)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw \tag{3.12}$$

gilt für alle $\varepsilon > 0$ mit $B(z,\varepsilon) \subset B(c,r)$. Dies folgt aus Satz 3.2, angewendet auf die in $U \setminus \{z\}$ holomorphe Funktion $\tilde{f}$,

$$\tilde{f}(w) = \frac{f(w)}{w-z}\,,$$

und die Wege C_1 und C_2, welche in den Sterngebieten $U_1 = B(c,r+\delta)\setminus L_1$ beziehungsweise $U_2 = B(c,r+\delta) \setminus L_2$ liegen (siehe Bild). Es gilt nämlich

$$\int_{\partial B(c,r)} \tilde{f}(w)\,dw = \int_{C_1} \tilde{f}(w)\,dw + \int_{C_2} \tilde{f}(w)\,dw + \int_{\partial B(z,\varepsilon)} \tilde{f}(w)\,dw\,,$$

und nach Satz 3.2 sind die Wegintegrale über C_1 und C_2 gleich Null. Im zweiten Schritt des Beweises zeigen wir, dass die rechte Seite in (3.12) gleich $2\pi i f(z)$ ist. Aus (3.12) folgt

$$\begin{aligned}\int_{\partial B(c,r)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw &= \int_{\partial B(z,\varepsilon)} \frac{f(z)}{w-z}\,dw + \int_{\partial B(z,\varepsilon)} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,dw \\ &= 2\pi i f(z) + \int_{\partial B(z,\varepsilon)} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,dw \end{aligned} \tag{3.13}$$

wegen Lemma 2.2. Die durch

$$g(w) = \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,, & w \neq z\,, \\ f'(z)\,, & w = z\,, \end{cases}$$

definierte Funktion $g : U \to \mathbb{C}$ ist stetig, also auf der kompakten Menge $K(c,r)$ beschränkt, sei etwa $|g(w)| \leq M$. Es folgt aus Lemma 2.3

$$\left| \int_{\partial B(z,\varepsilon)} g(w)\,dw \right| \leq 2\pi\varepsilon M\,.$$

Da wegen (3.13) das Integral $\int_{\partial B(z,\varepsilon)} g(w)\,dw$ nicht von ε abhängt, folgt

$$\int_{\partial B(z,\varepsilon)} g(w)\,dw = 0\,,$$

und damit die Behauptung des Satzes. □

Folgerungen aus dem Integralsatz von Cauchy. Aus dem Integralsatz und der Integralformel für Kreise lassen sich eine Reihe klassischer Sätze der Funktionentheorie ableiten. Wenden wir die Integralformel mit $z = c$ an, so erhalten wir unmittelbar:

Satz 3.4 (Mittelwerteigenschaft)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei $K(z,r) \subset U$ mit $z \in U$, $r > 0$. Dann gelten

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{it})\,dt\,, \tag{3.14}$$

sowie

$$|f(z)| \leq \max_{w \in \partial B(z,r)} |f(w)|\,. \tag{3.15}$$

Beweis: Aus (3.11) folgt mit der Parametrisierung $\gamma(t) = z + re^{it}$ von $\partial B(z,r)$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z,r)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z+re^{it})}{re^{it}} ire^{it}\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z+re^{it})\, dt\,,$$

und (3.15) folgt unmittelbar aus (3.14). □

Satz 3.5 (Entwicklungssatz von Cauchy und Taylor)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, sei $K(a,r) \subset U$ mit $a \in U$, $r > 0$. Dann gilt

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k\,, \quad c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(a,r)} \frac{f(w)}{(w-a)^{k+1}}\, dw\,, \tag{3.16}$$

für alle $z \in B(a,r)$, und dort konvergiert die Potenzreihe absolut. Weiterhin gilt

$$f^{(k)}(a) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial B(a,r)} \frac{f(w)}{(w-a)^{k+1}}\, dw \tag{3.17}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$.

Beweis: Wir betrachten zunächst den Fall $a = 0$. Sei $z \in U$ mit $|z| < r$ fest gewählt. Die Integralformel von Cauchy besagt, dass

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r} \frac{f(w)}{w-z}\, dw\,. \tag{3.18}$$

Es gilt für alle w mit $|w| = r$

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w} \frac{1}{1-\frac{z}{w}} = \frac{1}{w} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{w}\right)^k,$$

also

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r} \frac{f(w)}{w} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{w}\right)^k dw\,. \tag{3.19}$$

Für $g_k : \partial B(0,r) \to \mathbb{C}$,

$$g_k(w) = \frac{f(w)}{w} \left(\frac{z}{w}\right)^k,$$

gilt

$$\|g_k\|_\infty \le \frac{\|f\|_\infty}{r} q^k\,, \quad q = \frac{|z|}{r} < 1\,.$$

Nach dem Weierstraß-Kriterium für Funktionenreihen sind die Partialsummen $s_n = \sum_{k=0}^n g_k$ gleichmäßig gegen eine stetige Funktion konvergent, und wir können die Summe mit dem Integral vertauschen. Es folgt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{|w|=r} \frac{f(w)}{w} \left(\frac{z}{w}\right)^k dw = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r} \frac{f(w)}{w^{k+1}}\, dw \cdot z^k\,.$$

Schließlich folgt (3.17) aus (3.16), da $f^{(k)}(a) = k! c_k$.

Der Fall eines allgemeinen a wird durch Translation auf den obigen Fall zurückgeführt, indem wir wieder $\tilde{f}(z) = f(z-a)$ betrachten. □

Folgerung 3.6 *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist f in jedem Punkt $z \in U$ beliebig oft differenzierbar.*

Beweis: Nach Satz 3.5 läßt sich f in einer (hinreichend kleinen) Umgebung jedes Punktes $z \in U$ in eine Potenzreihe entwickeln. Potenzreihen sind innerhalb ihres Konvergenzkreises beliebig oft differenzierbar, wie aus Satz 1.5 folgt. □

Satz (3.5) mitsamt dessen Folgerung markieren den wesentlichen Unterschied zwischen Differenzierbarkeit im Komplexen (= Holomorphie) und Differenzierbarkeit im Reellen. Im Reellen gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ Funktionen, die n-mal, aber nicht $n+1$-mal differenzierbar sind, sowie Funktionen, die zwar beliebig oft differenzierbar sind, deren Taylorreihe aber nicht gegen die Funktion konvergiert. Im Komplexen ist jede differenzierbare Funktion lokal als Potenzreihe darstellbar.

Folgerung 3.7 *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei $K(a,r) \subset U$ mit $a \in U$, $r > 0$. Dann gilt für die Koeffizienten c_k der Potenzreihenentwicklung (3.16) von f um a die Abschätzung*

$$|c_k| \le \frac{M(r)}{r^k}\,, \quad M(r) = \max_{|z-a|=r} |f(z)|\,. \tag{3.20}$$

Beweis: Nach Satz 3.5 gilt

$$|c_k| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\partial B(a,r)} \frac{f(w)}{(w-a)^{k+1}}\,dw\right| \le \frac{1}{2\pi} 2\pi r \frac{M(r)}{r^{k+1}} = \frac{M(r)}{r^k}\,.$$

□

Folgerung 3.8 (Satz von Liouville)
Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph. Ist f auf $\mathbb{C}$ beschränkt, so ist f konstant. ("Jede ganze beschränkte Funktion ist konstant.")

Beweis: Mit $\|f\|_\infty = \sup_{z\in\mathbb{C}} |f(z)|$ folgt aus Folgerung 3.7, angewandt mit $a = 0$, dass für die Potenzreihendarstellung

$$f(z) = \sum_{k=0} c_k z^k$$

gilt, dass

$$|c_k| \le \frac{\|f\|_\infty}{r^k}$$

für alle k und alle $r > 0$, also ist $c_k = 0$ für alle $k \ge 1$ und damit $f(z) = c_0$ konstant in allen $K(a,r)$ und damit in ganz $\mathbb{C}$. □

Umgekehrt bedeutet der Satz von Liouville, dass jede nichtkonstante Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, welche auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph ist, unbeschränkt sein muss.

Satz 3.9 (Satz von Morera)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ stetig, es gelte

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0 \tag{3.21}$$

für alle Dreiecke Δ mit $\Delta \subset U$. Dann ist f holomorph in U.

Beweis: Sei $z \in U$ beliebig. Wähle $r > 0$ mit $B(z,r) \subset U$. Nach Satz 2.9 hat f eine Stammfunktion F in $B(z,r)$. F ist holomorph und nach Folgerung 3.6 zweimal differenzierbar in $B(z,r)$, also ist $f = F'$ differenzierbar in z. Da z beliebig war, ist f holomorph in U. □

Zusammengenommen folgt aus dem Integralsatz von Cauchy und dem Satz von Morera, dass in einem Sterngebiet die Holomorphie von f äquivalent ist zum Verschwinden aller Integrale über geschlossene Wege.

Kompakte Konvergenz. Gilt $f_n \to f$ gleichmäßig für eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stetiger Funktionen, so ist f ebenfalls stetig. Im Reellen ist es aber durchaus möglich, dass f nicht differenzierbar ist, obwohl alle f_n differenzierbar sind. Das ist im Komplexen anders.

Definition 3.10 (Kompakte Konvergenz)
*Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_n : U \to \mathbb{C}$. Wir sagen, dass f_n gegen ein $f : U \to \mathbb{C}$ **kompakt konvergiert**, falls für jede kompakte Teilmenge $K \subset U$ die Einschränkungen $f_n|K$ gleichmäßig gegen $f|K$ konvergieren.*

Lemma 3.11 *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von stetigen Funktionen $f_n : U \to \mathbb{C}$, welche kompakt gegen eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ konvergiert. Dann ist f stetig auf U, und*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z)\,dz \tag{3.22}$$

für jeden Weg $\gamma : [a,b] \to U$.

Beweis: Ist $c \in U$ und $K(c,r) \subset U$, so gilt $f_n \to f$ gleichmäßig in $K(c,r)$. Also ist f stetig auf $K(c,r)$ und damit insbesondere im Punkt c. Ist γ ein ganz in U verlaufender Weg, so folgt aus der Standardabschätzung (Lemma 2.3)

$$\Big| \int_\gamma f(z)\,dz - \int_\gamma f_n(z)\,dz \Big| = \Big| \int_\gamma f(z) - f_n(z)\,dz \Big| \le L(\gamma) \cdot \|f - f_n\|_{\infty,\gamma} \to 0$$

für $n \to \infty$, da $\gamma([a,b])$ kompakt ist. □

Satz 3.12 *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von holomorphen Funktionen $f_n : U \to \mathbb{C}$, welche kompakt gegen $f : U \to \mathbb{C}$ konvergiert. Dann ist f holomorph in U, und die Folge $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ der Ableitungen von f_n konvergiert kompakt gegen f'.*

Beweis: Sei Δ ein beliebiges Dreieck mit $\Delta \subset U$. Aus dem Integralsatz von Cauchy, angewendet auf eine offene konvexe Umgebung von Δ, folgt

$$\int_{\partial\Delta} f_n(z)\,dz = 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus Lemma 3.11 folgt, dass f stetig ist und

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = \lim_{n\to\infty} \int_{\partial\Delta} f_n(z)\,dz = 0\,.$$

Aus dem Satz von Morera (Satz 3.9) folgt, dass f holomorph ist in U. Sei nun $K \subset U$ kompakt. Es genügt zu zeigen, dass es zu jedem $c \in K$ eine kompakte Kreisscheibe mit Mittelpunkt c gibt, auf der f_n' gleichmäßig gegen f' konvergiert; K wird nämlich von endlich vielen solcher Kreisscheiben überdeckt. Sei $\varepsilon > 0$ so, dass $c \in K(c, 2\varepsilon) \subset U$, sei $z \in K(c, \varepsilon)$. Wir wenden auf die holomorphe Funktion $f - f_n$ den Entwicklungssatz von Cauchy und Taylor (Satz 3.5) an mit $a = z$ und $k = 1$. Es ergibt sich

$$f'(z) - f_n'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(z,\varepsilon)} \frac{f(w) - f_n(w)}{(w-z)^2}\, dw\,.$$

Aus der Standardabschätzung (Lemma 2.3) folgt

$$|f'(z) - f_n'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} 2\pi\varepsilon \cdot \frac{1}{\varepsilon^2} \|f - f_n\|_\infty\,,$$

wobei wir die Supremumsnorm über die kompakte Menge $K(c, 2\varepsilon)$ bilden. Da die rechte Seite nicht von $z \in K(c, \varepsilon)$ abhängt und f_n kompakt gegen f konvergiert, folgt

$$\sup_{z \in K(c,\varepsilon)} |f(z) - f_n(z)| \to 0$$

für $n \to \infty$, was zu beweisen war. $\square$

Beispiel 3.13 (Holomorphie der Zetafunktion)
Wie wir am Ende von Kapitel 1 gesehen haben, ist die Riemannsche Zetafunktion

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \tag{3.23}$$

in der offenen Halbebene $U = \{s : s \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}\, s > 1\}$ wohldefiniert. Die Partialsummen

$$f_N(s) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s}$$

sind in U holomorph. In der abgeschlossenen Halbebene $U_\alpha = \{s : s \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}\, s \geq \alpha\}$ mit $\alpha > 1$ gilt

$$|\zeta(s) - f_N(s)| = \Big| \sum_{n>N} \frac{1}{n^s} \Big| \leq \sum_{n>N} \Big| \frac{1}{n^s} \Big| \leq \sum_{n>N} \frac{1}{n^\alpha} \to 0 \quad \text{für } N \to \infty.$$

Also konvergiert f_N auf jedem solchen U_α gleichmäßig gegen ζ. Da jede kompakte Teilmenge von U in einem geeigneten U_α enthalten ist, folgt aus Satz 3.12, dass die Zetafunktion holomorph ist auf U.

Holomorphe Abhängigkeit von Parametern. Wir betrachten Funktionen der Form

$$f(z) = \int_\gamma g(z, \zeta)\, d\zeta\,.$$

Satz 3.14 *Seien $U \subset \mathbb{C}$ offen, $\gamma : I \to \mathbb{C}$ ein Weg, $g : U \times \gamma(I) \to \mathbb{C}$ stetig, sei $z \mapsto g(z,\zeta)$ eine holomorphe Funktion für jedes $z \in U$. Dann ist die durch*

$$f(z) = \int_\gamma g(z,\zeta)\, d\zeta\,. \tag{3.24}$$

definierte Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph.

Beweis: Es ist

$$f(z) = \int_I g(z,\gamma(t))\gamma'(t)\, dt\,.$$

Nach einem Satz aus der Analysis 2 ist f stetig. Sei nun Δ ein beliebiges Dreieck mit $\Delta \subset U$. Es gilt

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\, dz = \int_{\partial\Delta}\int_\gamma g(z,\zeta)\, d\zeta\, dz = \int_\gamma \int_{\partial\Delta} g(z,\zeta)\, dz\, d\zeta = 0$$

nach dem Integrallemma, da g holomorph ist in z. Nach dem Satz von Morera ist f holomorph. Dass die Integrale vertauscht werden können, folgt aus dem Satz von Fubini, angewandt auf die rechte Seite von

$$\int_{\partial\Delta}\int_\gamma g(z,\zeta)\, d\zeta\, dz = \int_J \int_I g(\delta(s),\gamma(t))\gamma'(t)\, dt\, \cdot \delta'(s)\, ds\,,$$

wobei $\delta : J \to \mathbb{C}$ eine Parametrisierung von $\partial\Delta$ ist. □

Ist außerdem $\partial_z g$ stetig auf $U \times \gamma(I)$, so können wir die Ableitung von f durch Differenzieren unter dem Integral berechnen,

$$f'(z) = \int_\gamma \partial_z g(z,\zeta)\, d\zeta\,. \tag{3.25}$$

Der Beweis verläuft genauso wie der des entsprechenden Satzes im Reellen aus Analysis 2.

Beispiel 3.15 (Laplace-Transformation)
Die Laplace-Transformation $\mathcal{L}$ ordnet einer Funktion $f : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ ihre Laplace-Transformierte $\mathcal{L}f$ zu. Sie ist definiert durch

$$(\mathcal{L}f)(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt\,. \tag{3.26}$$

Das Argument s ist eine komplexe Zahl (auch hier ist "s" statt "z" üblich). Wir fragen uns, ob und in welchem Definitionsbereich die Funktion $\mathcal{L}f$ holomorph ist, und welche Voraussetzungen an f dafür geeignet sind.

Zunächst betrachten wir die Funktion

$$g_R(s) = \int_0^R e^{-st} f(t)\, dt\,, \quad R > 0\,. \tag{3.27}$$

Gemäß Satz 3.14 ist g_R holomorph auf $\mathbb{C}$. Wir nehmen nun an, dass

$$|f(t)| \le Ce^{\alpha t}\,, \quad \text{für alle } t \ge 0, \tag{3.28}$$

gilt mit geeigneten Konstanten $\alpha \in \mathbb{R}$ und $C > 0$. Für solche f gilt

$$|e^{-st}f(t)| = |e^{-(\operatorname{Re} s)t}e^{-i(\operatorname{Im} s)t}f(t)| \le Ce^{(\alpha - \operatorname{Re} s)t}\,.$$

Sei nun $s \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} s \ge \alpha + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \Big|\int_R^\infty e^{-st}f(t)\,dt\Big| &\le \int_R^\infty |e^{-st}f(t)|\,dt \le C\int_R^\infty e^{(\alpha-\operatorname{Re} s)t}\,dt \\ &= \frac{C}{\operatorname{Re} s - \alpha}e^{-(\operatorname{Re} s-\alpha)R} \le \frac{C}{\varepsilon}e^{-\varepsilon R}\,. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Daraus folgt erstens (setze $R = 0$), dass $(\mathcal{L}f)(s)$ für solche s wohldefiniert ist, und zweitens, dass das Integral auf der linken Seite für $R \to \infty$ auf der abgeschlossenen Halbebene $\{s : \operatorname{Re} s \ge \alpha + \varepsilon\}$ gleichmäßig gegen 0 konvergiert, und zwar für jedes $\varepsilon > 0$. Daraus ergibt sich, dass g_R auf der offenen Halbebene $U_\alpha = \{s : \operatorname{Re} s > \alpha\}$ kompakt gegen $\mathcal{L}f$ konvergiert. Also ist $\mathcal{L}f$ holomorph, gemäß Satz 3.12. $\square$

4 Isolierte Singularitäten, Laurentreihen

Isolierte Singularitäten. Wir beginnen mit einer Notation. Sind $a \in \mathbb{C}$ und $r > 0$, so heißen

$$B^\times(a,r) = B(a,r) \setminus \{a\}\,, \quad K^\times(a,r) = K(a,r) \setminus \{a\} \tag{4.1}$$

die **punktierte offene** bzw. die **punktierte abgeschlossene Kreisscheibe** um a mit Radius r. □

Definition 4.1 (Isolierte Singularität)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Ist $a \in \mathbb{C}$ mit $a \notin U$, aber $B^\times(a,r) \subset U$ für ein $r > 0$, so heißt a eine ***isolierte Singularität*** *von f.* □

Ein solches a ist ein isolierter Punkt des Komplements $\mathbb{C} \setminus U$. (Eigentlich müsste man sagen "eine isolierte Singularität für den Definitionsbereich U von f".) Er repräsentiert ein Loch im Definitionsgebiet von f

Wir interessieren uns für das Verhalten einer holomorphen Funktion in der Nähe eines solchen Punktes. Als erstes bemerken wir, dass in der Situation von Definition 4.1 die Menge $U \cup \{a\}$ ebenfalls offen ist.

Satz 4.2 (Hebbarkeitssatz von Riemann, hebbare Singularität)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, a eine isolierte Singularität von f. Dann sind äquivalent:

(i) f ist holomorph auf $U \cup \{a\}$ fortsetzbar (das heißt, es gibt eine holomorphe Funktion $\tilde{f} : U \cup \{a\} \to \mathbb{C}$ mit $\tilde{f}|U = f$).

(ii) f ist stetig auf $U \cup \{a\}$ fortsetzbar.

(iii) Es gibt ein $r > 0$, so dass f auf $B^\times(a,r)$ beschränkt ist.

(iv) Es gilt

$$\lim_{\substack{z \to a \\ z \neq a}} (z-a) f(z) = 0\,. \tag{4.2}$$

In diesem Fall heißt a eine ***hebbare Singularität*** *von f.*

Beweis: Die Implikationen "(i)⇒(ii)⇒(iii)⇒(iv)" sind offensichtlich. Wir zeigen die Implikation "(iv)⇒(i)". Seien $g, h : U \cup \{a\} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$g(z) = \begin{cases} (z-a)f(z)\,, & z \neq a\,, \\ 0\,, & z = a\,, \end{cases}$$
$$h(z) = (z-a)g(z)\,.$$

Wegen (4.2) ist g stetig in a. Wegen

$$h(z) = h(a) + (z-a)g(z)\,, \quad \frac{h(z) - h(a)}{z-a} = g(z)\,,$$

für $z \neq a$ ist h differenzierbar in a, also holomorph in $U \cup \{a\}$. Also hat h in einer hinreichend kleinen Umgebung $B(a,\delta)$ von a eine Potenzreihenentwicklung der Form (da $h(a) = 0$, $h'(a) = g(a) = 0$)

$$h(z) = \sum_{k=2}^{\infty} c_k (z-a)^k = (z-a)^2 \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+2} (z-a)^k \,.$$

Da außerdem gilt $h(z) = (z-a)^2 f(z)$ für $z \neq a$, folgt für alle $z \in B^{\times}(a,\delta)$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+2} (z-a)^k \,.$$

Die durch $\tilde{f}|U = f$ und $\tilde{f}(a) = c_2$ definierte Funktion ist also die gesuchte holomorphe Fortsetzung von f auf $U \cup \{a\}$. □

Definition 4.3 (Grenzwerte mit "∞")
(i) Sei (z_n) Folge in $\mathbb{C}$. Wir sagen, dass $z_n \to \infty$, falls $|z_n| \to \infty$ in $\mathbb{R}$.
(ii) Sei $f : U \to \mathbb{C}$, $a \in \overline{U}$. Wir sagen, dass

$$\lim_{z \to a} f(z) = \infty \,,$$

falls $f(z_n) \to \infty$ für jede Folge (z_n) in U mit $z_n \to a$.
(iii) Seien $f : U \to \mathbb{C}$, U unbeschränkt, $c \in C \cup \{\infty\}$. Wir sagen, dass

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = c \,,$$

falls $f(z_n) \to c$ für jede Folge (z_n) in U mit $z_n \to \infty$.

Definition 4.4 (Pol, wesentliche Singularität)
*Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, a eine isolierte Singularität von f, welche nicht hebbar ist. a heißt ein **Pol** von f, falls es ein $m \in \mathbb{N}$ gibt, so dass a eine hebbare Singularität der durch*

$$g(z) = (z-a)^m f(z)$$

*definierten holomorphen Funktion ist. Die kleinste Zahl m mit dieser Eigenschaft heißt die **Ordnung** des Pols a von f. Ist a kein Pol von f, so heißt a eine **wesentliche Singularität** von f.* □

Die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^m}$$

hat in a einen Pol der Ordnung m. Die Funktion

$$f(z) = \exp\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{-k}}{k!}$$

hat in 0 eine wesentliche Singularität nach Satz 4.2, da $z^m f(z)$ für alle $m \in \mathbb{N}$ in jeder Umgebung von 0 unbeschränkt ist.

Lemma 4.5 *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, sei a ein Pol der Ordnung m von f. Dann gilt*

$$\lim_{z\to a} f(z) = \infty\,. \tag{4.3}$$

Beweis: Die durch $g(z) = (z-a)^m f(z)$ definierte Funktion ist nach Satz 4.2 holomorph fortsetzbar auf $U \cup \{a\}$. Wir behaupten, dass $g(a) \neq 0$. Andernfalls würde gelten, dass

$$(z-a)^{m-1} f(z) = \frac{g(z)}{z-a} = \frac{g(z)-g(a)}{z-a} \to g'(a) \quad \text{für} \quad z \to a\,,$$

was wegen Satz 4.2(ii) ein Widerspruch zur Minimalität von m ist. Für $z_n \to a$ gilt also $|g(z_n)| \to |g(a)| \neq 0$ und weiter

$$|f(z_n)| = \frac{|g(z_n)|}{|z-a|^m} \to \infty\,.$$

□

Wir werden später im Satz von Casorati-Weierstraß sehen, dass (4.3) nicht gilt, wenn a eine wesentliche Singularität von f ist.

Laurentreihen. Ist a eine hebbare (d.h. keine "echte") Singularität einer holomorphen Funktion $f : U \to \mathbb{C}$, so hat f gemäß dem Hebbarkeitssatz eine Potenzreihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k$$

in der Nähe von a. Ist a eine nicht hebbare Singularität, so läßt sich, wie wir im Folgenden sehen werden, f in der Nähe von a darstellen durch eine Reihe der Form

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k + \sum_{k=-1}^{-\infty} c_k (z-a)^k\,. \tag{4.4}$$

Eine solche Reihe heißt **Laurentreihe**. Die Reihe

$$\sum_{k=-1}^{-\infty} c_k (z-a)^k$$

heißt der **Hauptteil**, die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k$$

heißt der **Nebenteil** der Laurentreihe (4.4). Zur Herleitung dieser Darstellung sind Vorbereitungen erforderlich.

Lemma 4.6 *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, sei $a \in \mathbb{C}$, sei der Kreisring*

$$A = \{z : z \in \mathbb{C},\, r \le |z-a| \le R\}\,, \quad 0 < r < R\,, \tag{4.5}$$

eine Teilmenge von U. Dann gilt

$$\int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-a}\, dz = \int_{|z-a|=R} \frac{f(z)}{z-a}\, dz\,. \tag{4.6}$$

Beweis: Wir definieren für $s \in [r, R]$

$$J(s) = \int_{\gamma_s} \frac{f(z)}{z-a}\, dz\,, \quad \gamma_s = \{z : \, |z-a| = s\}\,.$$

Dann gilt

$$J(s) = \int_0^{2\pi} \frac{f(a+se^{it})}{a+se^{it}-a} ise^{it}\, dt = \int_0^{2\pi} if(a+se^{it})\, dt\,,$$

also

$$J'(s) = \int_0^{2\pi} f'(a+se^{it}) ie^{it}\, dt = \frac{1}{s}\int_{\gamma_s} f'(z)\, dz = 0\,,$$

da γ_s geschlossen ist und f' in U eine Stammfunktion (nämlich f) besitzt. Also ist J konstant in $[r, R]$ und damit $J(r) = J(R)$. $\square$

Folgerung 4.7 (Satz von Cauchy für Kreisringe)
Unter den Voraussetzungen von Lemma 4.6 gilt außerdem

$$\int_{|z-a|=r} f(z)\, dz = \int_{|z-a|=R} f(z)\, dz\,. \tag{4.7}$$

Beweis: Wir wenden Lemma 4.6 an auf die durch

$$g(z) = (z-a)f(z)$$

definierte holomorphe Funktion $g : U \to \mathbb{C}$. $\square$

Satz 4.8 *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, sei $a \in \mathbb{C}$, sei der Kreisring*

$$A = \{z : z \in \mathbb{C}, \, r \le |z-a| \le R\}\,, \quad 0 < r < R$$

eine Teilmenge von U. Dann gilt für alle z mit $r < |z-a| < R$

$$f(z) = f^+(z) + f^-(z) \tag{4.8}$$

mit

$$f^+(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-a|=R} \frac{f(w)}{w-z}\, dw\,, \quad f^-(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-a|=r} \frac{f(w)}{w-z}\, dw\,. \tag{4.9}$$

Die Funktionen $f^+ : \mathbb{C} \setminus \partial B(a,R) \to \mathbb{C}$ und $f^- : \mathbb{C} \setminus \partial B(a,r) \to \mathbb{C}$ sind holomorph, und es gilt

$$\lim_{z\to\infty} f^+(z) = \lim_{z\to\infty} f^-(z) = 0\,, \tag{4.10}$$

Beweis: Sei z mit $r < |z-a| < R$ fest gegeben. Wir definieren $g : U \to \mathbb{C}$ durch

$$g(w) = \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,, & w \ne z\,, \\ f'(z)\,, & w = z\,. \end{cases} \tag{4.11}$$

Die Funktion $g|V$ mit $V = U \setminus \{z\}$ ist holomorph und hat eine isolierte Singularität in z. Aus dem Hebbarkeitssatz 4.2 folgt, dass g in U holomorph ist. Schreiben wir γ_r und γ_R für die Kreiswege $|w-a| = r$ bzw. $|w-a| = R$, so folgt aus Satz 4.7

$$\int_{\gamma_r} g(w)\,dw = \int_{\gamma_R} g(w)\,dw\,. \tag{4.12}$$

Einsetzen der Definition von g ergibt

$$\int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w-z}\,dw - f(z)\int_{\gamma_r} \frac{1}{w-z}\,dw = \int_{\gamma_R} \frac{f(w)}{w-z}\,dw - f(z)\int_{\gamma_R} \frac{1}{w-z}\,dw\,. \tag{4.13}$$

Aus Satz 3.2 folgt

$$\int_{\gamma_r} \frac{1}{w-z}\,dw = 0\,, \tag{4.14}$$

da γ_r ganz in $B(a, |z-a|)$ verläuft und der Integrand dort holomorph ist. Aus der Integralformel von Cauchy 3.3, angewendet für $f = 1$, folgt

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} \frac{1}{w-z}\,dw = 1\,. \tag{4.15}$$

Die Formel (4.8) folgt nun aus (4.13) – (4.15). Nach Satz 3.14 zur holomorphen Abhängigkeit von Parametern sind f^+ und f^- holomorph. Es gilt weiter mit der Standardabschätzung für Wegintegrale

$$|f^+(z)| \le 2\pi R \|f\|_{\infty,\gamma_R} \cdot \frac{1}{|z| - m_R}\,, \quad m_R = \sup_{|w-a|=R} |w|\,, \quad \text{für alle } |z| > m_R,$$

analog für f^-. Daraus folgt (4.10). □

Satz 4.9 (Existenz der Laurententwicklung)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, $a \in \mathbb{C}$ eine isolierte Singularität von f mit $B^\times(a,\delta) \subset U$. Dann gilt für alle $z \in B^\times(a,\delta)$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k + \sum_{k=-1}^{-\infty} c_k (z-a)^k\,, \tag{4.16}$$

wobei

$$c_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(a,r)} \frac{f(w)}{(w-a)^{k+1}}\,dw\,, \tag{4.17}$$

und $r \in (0,\delta)$ beliebig ist. Die Reihe (4.16) heißt die ***Laurentreihe*** *von f in a.*

Beweis: Der Beweis verläuft analog zu dem des Entwicklungssatzes von Cauchy und Taylor (Satz 3.5). Wir bemerken zunächst, dass wegen Satz 4.7 die rechte Seite in (4.17) nicht von der Wahl von r abhängt. Sei nun $z \in B^\times(a,\delta)$ fest gegeben. Wir wählen r, R mit

$$0 < r < |z-a| < R < \delta\,.$$

Für die Kreise $\gamma_r = \partial B(a,r)$ und $\gamma_R = \partial B(a,R)$ gilt nach Satz 4.8

$$f(z) = f^+(z) + f^-(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} \frac{f(w)}{w-z}\,dw - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w-z}\,dw\,. \tag{4.18}$$

Auf γ_R gilt wegen $|z-a| < R = |w-a|$ und

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-a}{w-a}} = \frac{1}{w-a}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^k,$$

dass

$$\begin{aligned} f^+(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R}\frac{f(w)}{w-z}\,dw &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R}\frac{f(w)}{(w-a)^{k+1}}\,dw\cdot(z-a)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{(w-a)^{k+1}}\,dw\cdot(z-a)^k\,, \end{aligned} \tag{4.19}$$

letzteres wegen Satz 4.7. Auf γ_r gilt wegen $|z-a| > r = |w-a|$

$$\frac{1}{z-w} = \frac{1}{z-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{w-a}{z-a}} = \frac{1}{z-a}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{w-a}{z-a}\right)^k,$$

dass

$$\begin{aligned} f^-(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{z-w}\,dw &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}(w-a)^k f(w)\,dw\cdot\frac{1}{(z-a)^{k+1}} \\ &= \sum_{k=-1}^{-\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{(w-a)^{k+1}}\,dw\cdot(z-a)^k\,. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Setzen wir (4.19) und (4.20) in (4.18) ein, so ergibt sich die Behauptung. □

Satz 4.10 (Eindeutigkeit der Laurententwicklung)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, $a \in \mathbb{C}$ eine isolierte Singularität von f mit $B^{\times}(a,\delta) \subset U$. Sind $g : B(a,\delta) \to \mathbb{C}$ und $h : \mathbb{C}\setminus\{a\} \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen mit $f = g + h$ und $\lim_{z\to\infty} h(z) = 0$, so gilt

$$g(z) = f^+(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k\,, \tag{4.21}$$

sowie

$$h(z) = f^-(z) = \sum_{k=-1}^{-\infty} c_k (z-a)^k\,, \tag{4.22}$$

mit den Koeffizienten c_k aus (4.17) und den Funktionen f^+ und f^- aus Satz 4.8.

Beweis: Auf $B^\times(a,\delta)$ gilt $f = g + h = f^+ + f^-$ nach Voraussetzung und nach Satz 4.9, und damit auch $g - f^+ = f^- - h$. Durch

$$k(z) = \begin{cases} g(z) - f^+(z)\,, & 0 \le |z| < \delta\,, \\ f^-(z) - h(z)\,, & 0 < |z|\,, \end{cases}$$

wird also eine holomorphe Funktion $k : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert mit

$$\lim_{z\to\infty} k(z) = 0 \tag{4.23}$$

nach Voraussetzung und gemäß Satz 4.8. Wegen (4.23) ist k beschränkt auf $\mathbb{C}$ und daher konstant nach dem Satz von Liouville. Wiederum wegen (4.23) ist diese Konstante gleich Null. □

Folgerung 4.11 *Unter den Voraussetzungen von Satz 4.9 gilt für die Laurentreihe von f in a:*

(i) Die Singularität a ist hebbar genau dann, wenn der Hauptteil gleich Null ist, also $c_k = 0$ für alle $k < 0$.

(ii) Die Singularität a ist ein Pol der Ordnung m genau dann, wenn $c_k = 0$ für alle $k < -m$ und $c_{-m} \neq 0$.

(iii) Die Singularität a ist wesentlich genau dann, wenn es unendlich viele $k < 0$ gibt mit $c_k \neq 0$.

Beweis: Hat $g(z) = (z-a)^m f(z)$ eine hebbare Singularität für ein $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, so ist g holomorph fortsetzbar auf $B(a,\delta)$ und nach dem Eindeutigkeitssatz der Hauptteil von g gleich Null. □

Wir untersuchen die Frage der gleichmäßigen Konvergenz der Laurententwicklung. Wir betrachten eine Laurentreihe der Form

$$\sum_{k=-1}^{-\infty} c_k (z-a)^k \tag{4.24}$$

mit $a \in \mathbb{C}$, $c_k \in \mathbb{C}$ für alle $k < 0$.

Lemma 4.12 *Die Laurentreihe (4.24) sei konvergent in $B^\times(a,\delta)$ für ein $\delta > 0$. Dann wird durch*

$$f(z) = \sum_{k=-1}^{-\infty} c_k (z-a)^k \tag{4.25}$$

eine auf $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ holomorphe Funktion definiert. Für jedes $r > 0$ konvergieren die Partialsummen

$$s_n(z) = \sum_{k=-1}^{-n} c_k (z-a)^k \tag{4.26}$$

gleichmäßig gegen f auf $\{z : |z-a| \ge r\}$.

Beweis: Es ist

$$|z-a|<\delta \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{|z-a|}>\frac{1}{\delta}\,,$$

also konvergiert die Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_{-k}\zeta^k \tag{4.27}$$

in $\{\zeta : |\zeta| > \frac{1}{\delta}\}$ und damit in ganz $\mathbb{C}$. Die Konvergenz der Partialsummen für (4.27) ist gleichmäßig auf allen kompakten Kreisscheiben

$$\{\zeta : |\zeta| \le \frac{1}{r}\}\,,$$

wie wir bereits aus der Analysis 2 wissen. Hieraus folgen alle Behauptungen. □

Satz 4.13 (Laurententwicklung, gleichmäßige Konvergenz)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, $a \in \mathbb{C}$ eine isolierte Singularität von f mit $B^{\times}(a,\delta) \subset U$. Dann konvergieren die Partialsummen

$$s_n(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k(z-a)^k + \sum_{k=-1}^{-n} c_k(z-a)^k \tag{4.28}$$

der Laurentreihe von f in a gleichmäßig gegen f auf jedem Kreisring $\{z : r \le |z-a| \le R\}$ mit $0 < r < R < \delta$.

Beweis: Folgt für den Hauptteil aus Lemma 4.12 und für den Nebenteil aus dem bekannten Resultat für Potenzreihen. □

5 Der Residuensatz

Definition 5.1 (Wegzusammenhang)
Ein metrischer Raum (X,d) heißt wegzusammenhängend, falls es für alle $x,y \in X$ einen Weg r von x nach y gibt, das heißt, eine stetige Funktion $r : [0,1] \to X$ mit $r(0) = x$, $r(1) = y$. □

Jede sternförmige Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist wegzusammenhängend. Jede wegzusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist ein Intervall.

Satz 5.2 *Seien (X,d_X), (Y,d_Y) metrische Räume, sei $f : X \to Y$ stetig und surjektiv. Ist X wegzusammenhängend, so ist auch Y wegzusammenhängend.*

Beweis: Seien $y_1, y_2 \in Y$. Wir wählen $x_1, x_2 \in X$ mit $f(x_i) = y_i$. Sei $r : [0,1] \to X$ ein Weg von x_1 nach x_2. Dann ist $f \circ r : [0,1] \to Y$ ein Weg von y_1 nach y_2. □

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Wenden wir Satz 5.2 an mit $X = [a,b]$, $Y = f([a,b])$, so ergibt sich, dass $f([a,b])$ ebenfalls ein Intervall ist. Satz 5.2 verallgemeinert also den Zwischenwertsatz aus Analysis 1.

Lemma 5.3 *Sei (X,d) metrischer Raum. Dann wird durch*

$$x \sim y \qquad \Leftrightarrow \qquad \textit{es gibt einen Weg von } x \textit{ nach } y \tag{5.1}$$

eine Äquivalenzrelation auf X definiert. Die zugehörigen Äquivalenzklassen heißen Wegkomponenten von X.

Beweis: Ist $r : [0,1] \to X$ ein Weg von x nach y, so definiert $\tilde{r}(t) = r(1-t)$ einen Weg von y nach x. Sind $r, \tilde{r} : [0,1] \to X$ Wege von x nach y beziehungsweise von y nach z, so ist $\overline{r} : [0,1] \to X$,

$$\overline{r}(t) = \begin{cases} r(2t)\,, & 0 \le t \le \frac{1}{2}\,, \\ \tilde{r}(2t-1)\,, & \frac{1}{2} \le t \le 1\,, \end{cases}$$

ein Weg von x nach z. □

Ein metrischer Raum (X,d) ist also wegzusammenhängend genau dann, wenn X nur eine Wegkomponente besitzt (nämlich X selbst).

Definition 5.4 (Windungszahl)
Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein geschlossener, stückweise stetig differenzierbarer Weg, sei $z \in \mathbb{C}$, $z \notin \gamma([a,b])$. Wir definieren die Windungszahl von γ um z durch

$$\nu(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{w-z}\, dw\,. \tag{5.2}$$

□

Für $\gamma = \partial B(z,r)$ gilt

$$\nu(\gamma, z) = 1\,. \tag{5.3}$$

Sind γ_1, γ_2 zwei geschlossene Wege mit demselben Anfangs- und Endpunkt, und bezeichnet γ die Verkettung von γ_1 und γ_2 (das heißt, wir durchlaufen nacheinander γ_1 und γ_2), so gilt

$$\nu(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\gamma_1} \frac{1}{w-z}\,dw + \int_{\gamma_2} \frac{1}{w-z}\,dw\right) = \nu(\gamma_1, z) + \nu(\gamma_2, z)\,. \tag{5.4}$$

Satz 5.5 *Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein geschlossener, stückweise stetig differenzierbarer Weg, sei $U = \mathbb{C} \setminus \gamma([a,b])$. Dann gilt:*

(i) $\nu(\gamma, z) \in \mathbb{Z}$ für alle $z \in U$.

(ii) Auf den Wegkomponenten von U ist ν konstant.

(iii) Es gilt $\nu(\gamma, z) = 0$ für alle $z \in U$ mit $|z| > \|\gamma\|_\infty$.

Beweis: (i): Sei $z \in U$. Wir definieren $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ und $F : [a,b] \to \mathbb{C}$ durch

$$f(t) = \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z}\,ds\,, \quad F(t) = (\gamma(t) - z)\exp(-f(t))\,.$$

Dann ist F stetig und stückweise stetig differenzierbar, und

$$F'(t) = \gamma'(t)\exp(-f(t)) - (\gamma(t) - z)\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}\exp(-f(t)) = 0$$

in allen Punkten $t \in (a,b)$, in denen γ differenzierbar ist. Also ist F konstant auf $[a,b]$. Es folgt (da $F \neq 0$)

$$\begin{aligned} 1 = \frac{F(b)}{F(a)} &= \frac{\gamma(b) - z}{\gamma(a) - z}\exp(-(f(b) - f(a)) = \exp\left(-\int_a^b \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z}\,ds\right) \\ &= \exp\left(-\int_\gamma \frac{1}{w - z}\,dw\right)\,, \end{aligned} \tag{5.5}$$

also gibt es $k \in \mathbb{Z}$ mit

$$-\int_\gamma \frac{1}{w-z}\,dw = 2\pi i k\,.$$

Damit ist (i) bewiesen.
(ii): U ist offen, da $\gamma([a,b])$ kompakt ist. Die durch

$$\tilde{\nu}(z) = \nu(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z}\,ds$$

definierte Funktion $\tilde{\nu} : U \to \mathbb{R}$ ist stetig. Ist W eine Wegkomponente von U, so ist $\tilde{\nu}(W)$ wegzusammenhängend nach Satz 5.2. Da $\tilde{\nu}(W) \subset \mathbb{Z}$ nach (i), ist $\tilde{\nu}(W)$ einelementig.
(iii): Für $|z| > \|\gamma\|_\infty$ gilt $|\gamma(t) - z| \geq |z| - |\gamma(t)| \geq |z| - \|\gamma\|_\infty$, also

$$|\nu(\gamma, z)| \leq \frac{1}{2\pi}L(\gamma)\sup_{t\in[a,b]}\frac{1}{|\gamma(t) - z|} \leq \frac{1}{2\pi}L(\gamma)\frac{1}{|z| - \|\gamma\|_\infty}\,.$$

Wegen (i) folgt $\nu(\gamma, z) = 0$ falls $|z|$ hinreichend groß ist, und da

$$\{z : z \in \mathbb{C},\ |z| > \|\gamma\|_\infty\}$$

eine wegzusammenhängende Teilmenge von U ist, folgt (iii) aus (ii). □

Sei nun $f : B^\times(z, \delta) \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit der Laurententwicklung

$$f(w) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (w-z)^k + \sum_{k=-1}^{-\infty} c_k (w-z)^k \,. \tag{5.6}$$

Satz 5.6 *Sei $z \in \mathbb{C}$, $\delta > 0$, sei $\gamma : [a, b] \to B^\times(z, \delta)$ ein geschlossener, stückweise stetig differenzierbarer Weg. Dann gilt für jede holomorphe Funktion $f : B^\times(z, \delta) \to \mathbb{C}$ der Form (5.6)*

$$\int_\gamma f(w)\, dw = 2\pi i c_{-1} \nu(\gamma, z) \,. \tag{5.7}$$

Beweis: Für $k \neq -1$ hat $p(w) = (w-z)^k$ eine Stammfunktion in $\mathbb{C} \setminus \{z\}$, nämlich

$$q(w) = \frac{1}{k+1}(w-z)^{k+1} \,,$$

also gilt

$$\int_\gamma (w-z)^k\, dw = 0 \,, \quad k \neq -1 \,. \tag{5.8}$$

Nach Definition der Windungszahl gilt

$$\int_\gamma \frac{1}{w-z}\, dw = 2\pi i \nu(\gamma, z) \,. \tag{5.9}$$

Da $\gamma([a, b])$ in einer kompakten Kreisscheibe um z enthalten ist, folgt aus Satz 4.13

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(w)\, dw &= \int_\gamma \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (w-z)^k\, dw = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_\gamma (w-z)^k\, dw = c_{-1} \int_\gamma (w-z)^{-1}\, dw \\ &= c_{-1} 2\pi i \nu(\gamma, z) \,.\end{aligned}$$

□

Definition 5.7 (Residuum)
Sei $z \in \mathbb{C}$, $\delta > 0$, sei $f : B^\times(z, \delta) \to \mathbb{C}$ holomorph. Wir definieren das Residuum von f in z durch

$$\operatorname{Res}(f, z) = c_{-1} \,, \tag{5.10}$$

wobei c_{-1} der erste Koeffizient des Hauptteils der Laurentreihe von f in z ist.

Lemma 5.8 *Sei $z \in \mathbb{C}$, $\delta > 0$, sei $f : B^\times(z, \delta) \to \mathbb{C}$ holomorph.*

(i) Für alle $r \in (0, \delta)$ gilt

$$\mathrm{Res}\,(f, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z,r)} f(w)\, dw \tag{5.11}$$

(ii) Ist außerdem $g : B^{\times}(z, \delta) \to \mathbb{C}$ holomorph, so gilt

$$\mathrm{Res}\,(\lambda f + \mu g, z) = \lambda \mathrm{Res}\,(f, z) + \mu \mathrm{Res}\,(g, z) \tag{5.12}$$

für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

(iii) Ist z eine hebbare Singularität von f, so gilt

$$\mathrm{Res}\,(f, z) = 0\,. \tag{5.13}$$

Beweis: (i): Folgt unmittelbar aus Satz 5.6 und (5.3).
(ii): Folgt direkt aus (i).
(iii): Folgt mit (i) aus dem Integralsatz von Cauchy. □

Satz 5.9 (Residuensatz)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und sternförmig, sei $\gamma : [a, b] \to U$ ein geschlossener, stückweise stetig differenzierbarer Weg. Sei S eine endliche Teilmenge von U mit $S \cap \gamma([a, b]) = \emptyset$, sei $f : U \setminus S \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt

$$\int_\gamma f(w)\, dw = 2\pi i \sum_{z \in S} \mathrm{Res}\,(f, z) \nu(\gamma, z)\,. \tag{5.14}$$

Beweis: Sei für jedes $z \in S$

$$f_z(w) = \frac{\mathrm{Res}\,(f, z)}{w - z} + \sum_{k=-2}^{-\infty} c_k (w - z)^k \tag{5.15}$$

der Hauptteil der Laurentreihe von f in z. Nach Lemma 4.12 wird hierdurch eine holomorphe Funktion $f_z : \mathbb{C} \setminus \{z\} \to \mathbb{C}$ definiert. Wir definieren $g : U \setminus S \to \mathbb{C}$ durch

$$g(w) = f(w) - \sum_{z \in S} f_z(w)\,. \tag{5.16}$$

Jedes $z \in S$ ist eine isolierte Singularität von g, da für $\zeta \in S$ mit $\zeta \neq z$ die Funktion f_ζ holomorph ist in einer Umgebung von z. Weiter ist für $z \in S$ der Hauptteil der Laurentreihe von g in z gleich Null, da f_z nach Konstruktion in z denselben Hauptteil wie f hat. Also sind alle $z \in S$ hebbare Singularitäten von g. Wir können g daher zu einer holomorphen Funktion $\tilde{g} : U \to \mathbb{C}$ fortsetzen (Satz 4.2). Aus dem Integralsatz von Cauchy folgt (U ist sternförmig)

$$\int_\gamma g(w)\, dw = \int_\gamma \tilde{g}(w)\, dw = 0\,, \tag{5.17}$$

also nach Satz 5.6

$$\int_\gamma f(w)\, dw = \sum_{z \in S} \int_\gamma f_z(w)\, dw = \sum_{z \in S} 2\pi i \mathrm{Res}\,(f_z, z) \nu(\gamma, z)\,. \tag{5.18}$$

Da $\mathrm{Res}\,(f_z, z) = \mathrm{Res}\,(f, z)$ nach Konstruktion von f_z, folgt die Behauptung. □

Lemma 5.10 *Sei $f : B^{\times}(a,\delta) \to \mathbb{C}$ holomorph, sei a ein einfacher Pol (= Pol erster Ordnung) von f. Dann gilt*

$$\operatorname{Res}(f,a) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z)\,. \tag{5.19}$$

Beweis: Es ist

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z-a} + p(z)\,, \quad p \text{ holomorph.}$$

□

Lemma 5.11 *Seien $g, h : B(a,\delta) \to \mathbb{C}$ holomorph, es gelte $g(a) \neq 0$, $h(a) = 0$, $h'(a) \neq 0$. Dann hat die durch*

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}\,, \tag{5.20}$$

definierte Funktion einen einfachen Pol in a, und es gilt

$$\operatorname{Res}(f,a) = \frac{g(a)}{h'(a)}\,. \tag{5.21}$$

Beweis: Es gilt

$$\lim_{z\to a}\frac{h(z)}{z-a} = h'(a)\,,$$

also

$$\lim_{z\to a}(z-a)f(z) = \lim_{z\to a}\frac{g(z)}{\frac{h(z)}{z-a}} = \frac{g(a)}{h'(a)}\,.$$

Also ist a hebbare Singularität von $z \mapsto (z-a)f(z)$ und damit einfacher Pol von f. Die Behauptung folgt aus Lemma 5.10. □

Beispiele: Wir betrachten

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}\,. \tag{5.22}$$

$h(z) = 1+z^2$ hat einfache Nullstellen in $z = \pm i$, es folgt

$$\operatorname{Res}(f,\pm i) = \pm\frac{1}{2i}\,. \tag{5.23}$$

Wir betrachten

$$f(z) = \frac{z^2}{1+z^4}\,. \tag{5.24}$$

$h(z) = 1+z^4$ hat vier einfache Nullstellen, nämlich

$$a = \exp\left(\frac{\pi i}{4}\right)\,, ia\,, -a\,,\ -ia\,. \tag{5.25}$$

Es ist

$$\operatorname{Res}(f,a) = \frac{a^2}{4a^3} = \frac{1}{4a} = \frac{1}{4}\exp\left(-\frac{\pi i}{4}\right)\,, \quad \operatorname{Res}(f,ia) = \frac{1}{4}\exp\left(-\frac{3\pi i}{4}\right)\,, \tag{5.26}$$

und analog für die anderen beiden Pole.

Wir wollen den Residuensatz verwenden, um uneigentliche Integrale der Form

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx \tag{5.27}$$

zu berechnen.

Satz 5.12 *Sei S eine endliche Teilmenge von $\mathbb{C}$ mit $S \cap \mathbb{R} = \emptyset$, sei $f : \mathbb{C} \setminus S \to \mathbb{C}$ holomorph, es gelte $\int_{\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < \infty$ sowie*

$$\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0\,. \tag{5.28}$$

Dann gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 2\pi i \sum_{\substack{a\in S\\ Im\ a>0}} \mathrm{Res}\,(f,a)\,. \tag{5.29}$$

Beweis: Wir betrachten die durch $[-r,r]$ und den Halbkreis

$$\gamma_r : [0,\pi] \to \mathbb{C}\,, \quad \gamma_r(t) = re^{it}\,,$$

definierten Weg Γ_r und wählen r so groß, dass alle $a \in S$ mit $\mathrm{Im}\, a > 0$ im Innern von Γ_r liegen. Für $a \in S$ gilt (Übung)

$$\nu(\Gamma_r, a) = \begin{cases} 1\,, & \mathrm{Im}\, a > 0\,, \\ 0\,, & \mathrm{Im}\, a < 0\,. \end{cases}$$

Aus dem Residuensatz folgt

$$\int_{-r}^{r} f(x)\, dx + \int_{\gamma_r} f(z)\, dz = \int_{\Gamma_r} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{\substack{a\in S\\ \mathrm{Im}\ a>0}} \mathrm{Res}\,(f,a)\,.$$

Es gilt weiter

$$\left|\int_{\gamma_r} f(z)\, dz\right| \le \int_0^{\pi} |f(re^{it})||rie^{it}|\, dt \le \pi \sup_{|z|=r} |zf(z)| \to 0\,, \qquad \text{falls } r \to \infty$$

nach Voraussetzung (5.28). Hieraus folgt die Behauptung. □

Folgerung 5.13 *Seien p, q Polynome in $\mathbb{C}$ mit $\deg(q) \ge \deg(p) + 2$, q habe keine reellen Nullstellen, sei*

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}\,. \tag{5.30}$$

Dann gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 2\pi i \sum_{\substack{a\in S\\ Im\ a>0}} \mathrm{Res}\,(f,a)\,. \tag{5.31}$$

Beweis: f erfüllt alle Voraussetzungen von Satz 5.12. $\square$

Beispiele: Für
$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}$$
gilt $S = \{i, -i\}$ und
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = 2\pi i \,\mathrm{Res}\,(f, i) = 2\pi i \frac{1}{2i} = \pi\,.$$
Für
$$f(z) = \frac{z^2}{1+z^4}$$
gilt $S = \{a, ia, -a, -ia\}$ (siehe (5.25)) und
$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\, dx &= 2\pi i(\mathrm{Res}\,(f,a) + \mathrm{Res}\,(f,ia)) = 2\pi i \frac{1}{4}\left(\exp\left(-\frac{\pi i}{4}\right) + \exp\left(-\frac{3\pi i}{4}\right)\right)\\ &= 2\pi i \frac{1}{4}(-\sqrt{2} i) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\,.\end{aligned}$$
Der Residuensatz eignet sich auch zur Berechnung der Fouriertransformation gewisser Funktionen.

Satz 5.14 *Sei S eine endliche Teilmenge von $\mathbb{C}$ mit $S \cap \mathbb{R} = \emptyset$, sei $g : \mathbb{C} \setminus S \to \mathbb{C}$ holomorph, es gelte*
$$\lim_{z\to\infty} g(z) = 0\,. \tag{5.32}$$
Dann gilt für $f(z) = g(z)e^{iz\xi}$, $\xi \in \mathbb{R}$, $\xi \neq 0$,
$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{ix\xi}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 2\pi i \sum_{\substack{a\in S\\ Im\ a>0}} \mathrm{Res}\,(f,a)\,, \quad \xi > 0\,, \tag{5.33}$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{ix\xi}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = -2\pi i \sum_{\substack{a\in S\\ Im\ a<0}} \mathrm{Res}\,(f,a)\,, \quad \xi < 0\,. \tag{5.34}$$
Hierbei ist das uneigentliche Integral definiert als
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{0} f(x)\, dx + \lim_{s\to\infty} \int_{0}^{s} f(x)\, dx\,. \tag{5.35}$$
(Es wird weder behauptet noch vorausgesetzt, dass $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < \infty$.)

Beweis: Sei zunächst $\xi > 0$. Für $r, s > 0$ betrachten wir das Quadrat $Q_{r,s} \subset \mathbb{C}$ mit den Ecken $(-r, 0)$, $(s, 0)$, $(s, r+s)$ und $(-r, r+s)$ und den Seiten $\gamma_0, \ldots, \gamma_3$ (beginnend mit $(-r, 0)$, in der beschriebenen Reihenfolge). Seien r, s so groß, dass alle $a \in S$ mit $\mathrm{Im}\, a > 0$ in $Q_{r,s}$ liegen. Dann folgt aus dem Residuensatz
$$\int_{\partial Q_{r,s}} f(z)\, dz = \int_{-r}^{s} f(x)\, dx + \sum_{j=1}^{3} \int_{\gamma_j} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{\substack{a\in S\\ \mathrm{Im}\ a>0}} \mathrm{Res}\,(f,a) =: c\,, \quad \xi > 0\,. \tag{5.36}$$

Für $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$e^{iz\xi} = e^{i\xi \mathrm{Re}\, z} e^{-\xi \mathrm{Im}\, z}\,, \quad \left|e^{iz\xi}\right| = e^{-\xi \mathrm{Im}\, z}\,.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \left|\int_{\gamma_2} g(z)e^{iz\xi}\,dz\right| &= \left|-\int_{-r}^{s} g(t+i(r+s))e^{it\xi}e^{-(r+s)\xi}\,dt\right| \\ &\le (r+s)e^{-(r+s)\xi} \sup_{t\in[-r,s]} |g(t+i(r+s))|\,, \end{aligned} \tag{5.37}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} \left|\int_{\gamma_1} g(z)e^{iz\xi}\,dz\right| &= \left|\int_0^{r+s} g(s+it)e^{is\xi}e^{-t\xi} i\,dt\right| \le \frac{1}{\xi}(1-e^{-(r+s)\xi}) \sup_{t\in[0,r+s]} |g(s+it))| \\ &\le \frac{1}{\xi} \sup_{t\in[0,r+s]} |g(s+it))|\,, \end{aligned} \tag{5.38}$$

Ebenso beweist man

$$\left|\int_{\gamma_3} g(z)e^{iz\xi}\,dz\right| \le \frac{1}{\xi} \sup_{t\in[0,r+s]} |g(-r+it)|\,. \tag{5.39}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Wegen (5.37) – (5.39) gibt es ein $M > 0$, so dass

$$\sum_{j=1}^{3} \left|\int_{\gamma_j} g(z)e^{iz\xi}\,dz\right| \le \varepsilon\,, \quad \text{für alle } r, s \ge M,$$

also

$$\left|\int_{-r}^{s} f(x)\,dx - c\right| \le \varepsilon\,, \quad \text{für alle } r, s \ge M. \tag{5.40}$$

also

$$\left|\int_{-r}^{s} f(x)\,dx - \int_{-\rho}^{\sigma} f(x)\,dx\right| \le 2\varepsilon\,,$$

für alle $r, s, \rho, \sigma \ge M$, und damit auch

$$\left|\int_0^{s} f(x)\,dx - \int_0^{\sigma} f(x)\,dx\right| \le 2\varepsilon\,, \quad \left|\int_{-r}^{0} f(x)\,dx - \int_{-\rho}^{0} f(x)\,dx\right| \le 2\varepsilon\,,$$

für alle $r, s, \rho, \sigma \ge M$. Hieraus folgt die Behauptung für $\xi > 0$. Der Fall $\xi < 0$ wird analog bewiesen; in diesem Fall hat das Quadrat $Q_{r,s}$ die Ecken $(-r, 0)$, $(s, 0)$, $(s, -(r+s))$ und $(-r, -(r+s))$. $\square$

6 Nullstellen

Wir wissen bereits: Ist eine Funktion f auf einer Kreisscheibe um einen Punkt $a \in \mathbb{C}$ holomorph, so lässt sie sich dort in eine Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k , \quad c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} , \tag{6.1}$$

entwickeln. Es ist a eine Nullstelle von f genau dann, wenn $c_0 = 0$.

Definition 6.1 (Ordnung einer Nullstelle)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, $a \in U$ mit $f(a) = 0$. Die Zahl

$$m = \min \{k : \ f^{(k)}(a) \neq 0\} \tag{6.2}$$

*heißt die **Ordnung** der Nullstelle a. (Sind alle Ableitungen in a gleich Null, so sprechen wir von einer Nullstelle unendlicher Ordnung.)* $\Box$

Die Funktion $f(z) = z^m$ hat offensichtlich in 0 eine Nullstelle der Ordnung m.

Ist p ein Polynom in $\mathbb{C}$ vom Grad $n \geq 1$, so besagt der Fundamentalsatz der Algebra, dass p sich eindeutig zerlegen lässt in n Linearfaktoren mit einem konstanten Vorfaktor $\alpha \in \mathbb{C}$,

$$p(z) = \alpha \prod_{k=1}^{n} (z - a_k) . \tag{6.3}$$

Gibt es ℓ verschiedene Nullstellen a_k, so können wir (6.3) schreiben als

$$p(z) = \alpha \prod_{k=1}^{\ell} (z - a_k)^{m_k} , \quad \sum_{k=1}^{\ell} m_k = n . \tag{6.4}$$

Die Nullstelle a_k hat die Ordnung m_k.

Wir interessieren uns zunächst für das Verhalten einer holomorphen Funktion f in der Nähe einer einfachen Nullstelle. Es stellt sich heraus, dass f dort eine holomorphe Umkehrfunktion besitzt.

Definition 6.2 (Biholomorphe Funktion)
*Seien $U, V \subset \mathbb{C}$ offen. Eine auf U holomorphe Funktion $f : U \to V$ heißt **biholomorph** auf U, wenn f bijektiv und f^{-1} auf V holomorph ist. Sie heißt **lokal biholomorph** auf U, wenn es zu jedem $a \in U$ eine offene Kreisscheibe B um a gibt, so dass $f(B)$ offen und $f : B \to f(B)$ biholomorph ist.* $\Box$

Die Funktion

$$f : \mathbb{C}^{\times} \to \mathbb{C}^{\times} , \quad f(z) = \frac{1}{z} ,$$

ist biholomorph auf der punktierten komplexen Ebene $\mathbb{C}^{\times}$.

Satz 6.3 (Lokale Invertierbarkeit)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, $c \in U$. Ist $f'(c) \neq 0$, so gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass für $B = B(c, \varepsilon)$ gilt:

(i) $f : B \to f(B)$ *ist bijektiv,* $f(B)$ *ist offen in* $\mathbb{C}$*,*

(ii) $f^{-1} : f(B) \to B$ *ist holomorph.*

Beweis: Da f nach Folgerung 3.6 beliebig oft differenzierbar ist, ist insbesondere $f' : U \to \mathbb{C}$ stetig. Nach Voraussetzung ist $f'(c) = a + ib \neq 0$. Wir fassen nun f als Funktion von $U \subset \mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ auf. Da $(a, b) \neq (0, 0)$, ist $J_f(c) \in \mathbb{R}^{(2,2)}$ invertierbar,

$$J_f(c) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad J_f(c)^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}. \tag{6.5}$$

Aus dem Satz über inverse Funktionen (siehe Analysis 2) folgt die Existenz von $\varepsilon > 0$, so dass (i) gilt, f^{-1} in $f(B)$ stetig reell differenzierbar ist und

$$J_{f^{-1}}(f(z)) = J_f(z)^{-1}, \quad \text{für alle } z \in B.$$

Da (6.5) auch gilt, wenn wir c durch $z \in B$ ersetzen (und entsprechend $f'(z)$ zerlegen), ist f^{-1} in $f(z)$ differenzierbar (im Sinne von $\mathbb{C}$) für alle $z \in B$ nach Lemma 1.3, also folgt (ii). □

Folgerung 6.4 *Ist a eine einfache Nullstelle einer holomorphen Funktion f, so ist f biholomorph auf einer hinreichend kleinen offenen Kreisscheibe B um a.*

Beweis: Folgt aus Satz 6.3, da $f'(a) \neq 0$. □

Als nächstes betrachten wir genauer die Potenzfunktion

$$p(z) = z^m, \quad m \geq 2. \tag{6.6}$$

Für

$$w = re^{i\varphi}, \quad z = \rho e^{i\psi},$$

mit $w \neq 0$ gilt

$$p(z) = z^m = w \tag{6.7}$$

genau dann, wenn

$$\rho^m = r, \quad e^{im\psi} = e^{i\varphi},$$

und letzteres gilt genau dann, wenn

$$m\psi - \varphi = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Es gibt also genau m verschiedene Zahlen

$$z_k = \sqrt[m]{r} \exp\left(i\frac{\varphi}{m} + 2\pi i \frac{k}{m}\right), \quad k = 0, \ldots, m-1, \tag{6.8}$$

welche (6.7) erfüllen. Sie heißen die ***m*-ten Wurzeln von *w*.** Für $w = 1$ ergeben sich die ***m*-ten Einheitswurzeln**

$$z_k = \exp\left(2\pi i \frac{k}{m}\right), \quad k = 0, \ldots, m-1. \tag{6.9}$$

Sei nun $w \neq 0$. Ist $p(z_k) = w$, so ist $z_k \neq 0$ und $p'(z_k) = m z_k^{m-1} \neq 0$. Aus Satz 6.3 folgt, dass p in z_k lokal biholomorph ist, und dass auf einer hinreichend kleinen Kreisscheibe B von w eine holomorphe Funktion q_k existiert mit $q_k(w) = z_k$ und $q_k(v)^m = v$ für alle $v \in B$. Jede solche Funktion q_k, $0 \leq k < m$, heißt eine ***m*-te Wurzelfunktion**.

Wir betrachten nun eine holomorphe Funktion f, welche in einem Punkt a eine Nullstelle der Ordnung m hat. Der folgende Satz zeigt, dass sich f in der Nähe von a "im Wesentlichen", das heißt, bis auf eine biholomorphe Transformation, wie die Potenzfunktion $p(z) = z^m$ verhält.

Satz 6.5 *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, $a \in U$ eine Nullstelle von f der Ordnung $m \in \mathbb{N}$. Dann gibt es eine offene Kreisscheibe $B \subset U$ mit Mittelpunkt a und eine holomorphe Funktion $h : B \to \mathbb{C}$ mit $h(a) = 0$, $h'(a) \neq 0$ und*

$$f(z) = h(z)^m \,, \quad z \in B \,, \tag{6.10}$$

und

$$f(z) \neq 0 \,, \quad \text{für alle } z \in B, z \neq a. \tag{6.11}$$

Weiterhin ist $h(B)$ offen und $h : B \to h(B)$ biholomorph.

Beweis: f läßt sich in einer hinreichend kleinen Umgebung V von a in eine Potenzreihe entwickeln, also (da $f^{(k)}(a) = 0$ für $k < m$)

$$f(z) = (z-a)^m g(z) \,, \quad g(z) = c_m + \sum_{k=m+1}^{\infty} c_k (z-a)^{k-m} \,, \tag{6.12}$$

und

$$g(a) = c_m \neq 0 \tag{6.13}$$

nach Voraussetzung. Die Funktion g ist holomorph, da wegen

$$f^{(m)}(z) = m! c_m + \sum_{k=m+1}^{\infty} c_k (z-a)^{k-m} \prod_{j=0}^{m-1} (k-j)$$

die Potenzreihe für g in a von derjenigen für $f^{(m)}$ majorisiert wird. Sei nun $c \in \mathbb{C}$ mit

$$p(c) = g(a) \,, \quad \text{wobei } p(z) = z^m \,.$$

(Es gibt m verschiedene Zahlen c mit dieser Eigenschaft.) Dann ist $c \neq 0$, $p'(c) = mc^{m-1} \neq 0$, also gibt es nach Satz 6.3 ein $\delta > 0$, so dass p auf $B(c, \delta)$ biholomorph ist. Wähle nun $\varepsilon > 0$ mit

$$B(a, \varepsilon) \subset V \,, \quad 0 \notin g(B(a, \varepsilon)) \subset p(B(c, \delta)) \,,$$

und definiere (mit $p^{-1} := (p|B(c, \delta))^{-1}$)

$$h(z) = (z-a) p^{-1}(g(z)) \,, \quad z \in B(a, \varepsilon) \,. \tag{6.14}$$

Dann ist h holomorph auf $B(a, \varepsilon)$, und

$$h(z)^m = (z-a)^m (p^{-1}(g(z)))^m = (z-a)^m g(z) = f(z) \,.$$

Aus (6.14) folgt $h(a) = 0$ und $h'(a) = p^{-1}(g(a)) = c \neq 0$. Also ist a eine einfache Nullstelle von h. Nach Folgerung 6.4 können wir durch Verkleinern des Radius ε erreichen, dass h biholomorph ist auf einer geeigneten Kreisscheibe B mit Mittelpunkt a. □

Mit dem vorangehenden Satz können wir eine holomorphe Funktion f in der Nähe einer m-fachen Nullstelle a darstellen in der Form

$$f = p \circ h\,, \quad p(z) = z^m\,,$$

mit einer biholomorphen Funktion h.

Satz 6.6 *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, sei $a \in U$ eine Nullstelle von f der Ordnung m. Dann gibt es eine Kreisscheibe $B(0, \eta)$ und eine offene Menge V mit $a \in V \subset U$, so dass jedes $w \in B(0, \eta)$ mit $w \neq 0$ genau m Urbilder unter f in V hat. Außerdem ist a die einzige Nullstelle von f in V.*

Beweis: Sei $h : B \to \mathbb{C}$, B Kreisscheibe um a, wie in Satz 6.5 beschrieben, also insbesondere $f = p \circ h$ mit $p(z) = z^m$. Wir wählen $\eta > 0$ so, dass $\tilde{B} := B(0, \sqrt[m]{\eta}) = p^{-1}(B(0, \eta)) \subset h(B)$. Das ist möglich, da p stetig und $h(B)$ offen ist. Jedes von Null verschiedene $w \in B(0, \eta)$ hat genau m Urbilder unter p in $\tilde{B}$, nämlich die m-ten Wurzeln von w. Wir setzen $V = h^{-1}(\tilde{B}) = f^{-1}(B(0, \eta))$. Da h bijektiv ist auf B, hat w genau m Urbilder unter f in V. Dass a die einzige Nullstelle in V ist, ist bereits in Satz 6.5 gezeigt worden. □

Satz 6.7 *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, $a \in U$. Dann gibt es genau dann eine Kreisscheibe um a, auf der f biholomorph ist, wenn $f'(a) \neq 0$.*

Beweis: "$\Leftarrow$": Folgt aus Satz 6.3.
"$\Rightarrow$": Sei f auf einer Kreisscheibe B um a biholomorph. Es gibt dann ein $k \geq 1$ mit $f^{(k)}(a) \neq 0$ (andernfalls wäre f konstant nahe a). Das kleinste solche k ist gleich der Ordnung m der Nullstelle a der Funktion $f - f(a)$. Wäre $m > 1$, so hätten Werte w nahe $f(a)$ mehrere Urbilder in B nach Satz 6.6, ein Widerspruch, da f auf B bijektiv ist. Also ist $m = 1$ und daher $f'(a) \neq 0$. □

Unmittelbar aus (6.11) folgt

Folgerung 6.8 *Jede Nullstelle a endlicher Ordnung einer holomorphen Funktion f ist isoliert, das heißt, in einer hinreichend kleinen Umgebung von a liegen keine weiteren Nullstellen von f.* □

Beispiele: Die Nullstellenmenge des Sinus in $\mathbb{C}$ besteht aus allen Punkten der Form $k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Die Nullstellenmenge der Funktion

$$f(z) = \sin \frac{1}{z}$$

besteht aus den Punkten der Form

$$\frac{1}{k\pi}\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

In diesem Fall hat die Nullstellenmenge in $\mathbb{C}$ einen Häufungspunkt, nämlich 0; der Nullpunkt gehört aber nicht zum Definitionsbereich von f.

Satz 6.9 (Casorati-Weierstraß)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, $a \in \mathbb{C}$ eine wesentliche Singularität von f, $r > 0$ mit $B^{\times}(a,r) \subset U$. Dann liegt $f(B^{\times}(a,r))$ dicht in $\mathbb{C}$.

Beweis: Widerspruchsbeweis. Wir nehmen an, $f(B^{\times}(a,r))$ ist nicht dicht in $\mathbb{C}$. Dann gibt es ein $w \in \mathbb{C}$ und ein $\varepsilon > 0$, so dass

$$|f(z) - w| \geq \varepsilon\,, \quad \text{für alle } z \in B^{\times}(a,r). \tag{6.15}$$

Durch
$$h(z) = \frac{1}{f(z) - w}$$
wird eine Funktion $h : B^{\times}(a,r) \to \mathbb{C}$ definiert, die holomorph und wegen (6.15) beschränkt ist. Es gilt
$$f(z) = w + \frac{1}{h(z)}\,, \quad \text{für alle } z \in B^{\times}(a,r).$$
Da h beschränkt ist, ist a nach dem Hebbarkeitssatz eine hebbare Singularität von h. Ist $h(a) \neq 0$, so ist a auch für f eine hebbare Singularität, im Widerspruch zur Voraussetzung. Sei also a eine Nullstelle von h. Ist deren Ordnung unendlich, so gilt $h = 0$ in einer hinreichend kleinen Kreisscheibe um a, im Widerspruch zur Definition von h. Hat a die endliche Ordnung m, so hat $1/h$ in a einen Pol der Ordnung m (siehe Übung), also auch f, im Widerspruch zur Voraussetzung. □

Folgerung 6.10 *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, $a \in \mathbb{C}$ eine wesentliche Singularität von f. Dann gibt es zu jedem $w \in \mathbb{C}$ eine Folge $\{z_n\}$ in $\mathbb{C}$ mit $z_n \to a$ und $f(z_n) \to w$.*

Beweis: Folgt direkt aus Satz 6.9. □

7 Der Identitätssatz

Definition 7.1
Sei (X, d) metrischer Raum.
(i) X heißt ***zusammenhängend****, falls es außer $\emptyset$ und X keine Teilmenge von X gibt, die sowohl offen als auch abgeschlossen ist.*
(ii) Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ heißt ***lokal konstant****, falls es zu jedem $x \in X$ eine Kugel $B(x; \varepsilon)$ gibt, auf der f konstant ist.* □

Satz 7.2 (Gebiet)
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann sind äquivalent:
(i) U ist wegzusammenhängend.
(ii) U ist zusammenhängend.
(iii) Jede lokal konstante Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ ist konstant.
Eine offene zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ heißt ***Gebiet****.*

Beweis: "(i)⇒(ii)": Sei A eine nichtleere Teilmenge von U, die in U offen und abgeschlossen ist.[1] Sei $y \in U$ beliebig. Wir wählen ein $x \in A$ und einen Weg $\gamma : [0, 1] \to U$ von x nach y. Sei

$$s = \sup \{t \in [0, 1] : \gamma(t) \in A\} .$$

Ist $t_n \uparrow s$ mit $\gamma(t_n) \in A$, so folgt $\gamma(s) \in A$, da A abgeschlossen und γ stetig ist. Da A offen ist, kann $s < 1$ nicht gelten, also muss $s = 1$ und $y = \gamma(1) \in A$ gelten. Da y beliebig war, folgt $A = U$.
"(ii)⇒(iii)": Sei $f : U \to \mathbb{R}$ lokal konstant. Sei $x \in U$ beliebig. Wir setzen

$$A = f^{-1}(\{f(x)\}) = \{y \in U : f(y) = f(x)\} .$$

A ist nichtleer, da $x \in A$. A ist offen, da f lokal konstant ist. A ist abgeschlossen als Urbild der abgeschlossenen Menge $\{f(x)\}$, da f als lokal konstante Funktion stetig ist. Nach Voraussetzung ist $A = U$, also f konstant auf U.
"(iii)⇒(i)": Sei $a \in U$. Sei $f : U \to \mathbb{R}$ definiert als $f(x) = 1$ falls es einen Weg von a nach x gibt, und als $f(x) = 0$ andernfalls. Es genügt zu zeigen, dass f lokal konstant ist, da dann nach Voraussetzung gilt $1 = f(a) = f(x)$ für alle $x \in U$. Sei dazu $y \in U$. Wir wählen $\varepsilon > 0$, so dass $y \in B \subset U$ gilt für $B = B(y, \varepsilon)$. Da offene Kugeln im $\mathbb{R}^n$ wegzusammenhängend sind, kann entweder jeder Punkt von B oder kein Punkt von B mit a durch einen Weg verbunden werden. Also muss entweder $f|B = 1$ oder $f|B = 0$ gelten. Also ist f lokal konstant. □

Die Implikationen "(i)⇒(ii)" und "(ii)⇒(iii)" gelten für beliebige Teilmengen U des $\mathbb{R}^n$. (Siehe den Beweis.)

Satz 7.3 (Identitätssatz)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ Gebiet, seien $f, g : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann sind äquivalent:

(i) Es gilt $f = g$ auf U.

[1] In $\mathbb{R}^n$ braucht A nicht abgeschlossen zu sein.

(ii) Die Menge $\{f = g\}$ hat einen Häufungspunkt in U.

(iii) Es gibt ein $a \in U$ mit $f^{(k)}(a) = g^{(k)}(a)$ für alle $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Beweis: "(i)⇒(ii)" ist klar.
"(ii)⇒(iii)": Sei $a \in U$ Häufungspunkt von $\{f = g\}$. Da $\{f = g\}$ abgeschlossen ist in U, ist $a \in \{f = g\}$. Die Funktion $w = f - g$ ist holomorph in U, und $w(a) = 0$. Da nach Voraussetzung in jeder Umgebung von a eine weitere Nullstelle von w liegt, kann a nach Folgerung 6.8 keine endliche Ordnung haben, also

$$0 = w^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) - g^{(k)}(a)$$

für alle $k \in \mathbb{N}$.
"(iii)⇒(i)": Wir definieren

$$A = \{z : \, z \in U, \, f^{(k)}(z) = g^{(k)}(z) \text{ für alle } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} = \bigcap_{k=0}^{\infty} \{f^{(k)} = g^{(k)}\} \,. \tag{7.1}$$

Dann ist A abgeschlossen in U als Durchschnitt abgeschlossener Mengen, und nichtleer, da $a \in A$ nach Voraussetzung. A ist außerdem offen in U: Sei $c \in A$, $w = f - g$, dann gilt in einer hinreichend kleinen Kugel B um c

$$w(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^{(k)}(c)}{k!} (z - c)^k = 0 \,, \quad \text{für alle } z \in B.$$

Es folgt $w^{(k)}(z) = 0$ für alle $z \in B$ und alle $k \in \mathbb{N}$, daher $B \subset A$. Da c beliebig war, ist A offen. Da U zusammenhängend ist, folgt $A = U$ und damit $f = g$ in U. □

Eine holomorphe Funktion f ist also bereits dann eindeutig bestimmt, wenn wir ihre Werte $f(z_n)$ kennen für irgendeine konvergente Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die aus unendlich vielen verschiedenen Folgengliedern besteht.

Folgerung 7.4 *Sei I Intervall in $\mathbb{R}$, sei U Gebiet in $\mathbb{C}$ mit $I \subset U$. Dann gibt es zu jeder Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ höchstens eine holomorphe Fortsetzung $\tilde{f} : U \to \mathbb{C}$.* □

Beispiel 7.5 (Permanenzprinzip)
Der Cotangens

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z} \tag{7.2}$$

definiert eine holomorphe Funktion auf $U = \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Nehmen wir an, wir wissen bereits, dass der Cotangens im Reellen π-periodisch ist,

$$\cot(x + \pi) = \cot(x) \,, \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}. \tag{7.3}$$

Aus Folgerung 7.4 können wir nun ohne weitere Rechnung unmittelbar schließen, dass (7.3) auch für beliebige komplexe Argumente gilt, da beide Seiten holomorphe Funktionen definieren, die im Reellen übereinstimmen. Formeln aus dem Reellen bleiben also auch im Komplexen gültig, falls sie wie in diesem Beispiel durch holomorphe Funktionen ausgedrückt werden können. Diesen Sachverhalt bezeichnet man als Permanenzprinzip.

Folgerung 7.6 *Sei $U \subset \mathbb{C}$ Gebiet, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, sei $a \in U$ eine Nullstelle unendlicher Ordnung von f. Dann ist $f = 0$ in U.*

Beweis: Wir setzen $g = 0$ in Satz 7.3. □

Definition 7.7 (Offene Abbildung)
Seien (X, d_1), (Y, d_2) metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt offen, falls für alle $W \subset X$ gilt

$$W \text{ offen} \qquad \Rightarrow \qquad f(W) \text{ offen.} \tag{7.4}$$

□

Satz 7.8 *Sei $U \subset \mathbb{C}$ Gebiet, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant. Dann ist f offen, und $f(U)$ ist ebenfalls ein Gebiet.*

Beweis: Sei W offen in U, sei $c \in f(W)$ beliebig, $c = f(a)$, $a \in W$. Wir betrachten $g : U \to \mathbb{C}$,

$$g(z) = f(z) - c\,.$$

Dann ist a eine Nullstelle endlicher Ordnung von g. (Andernfalls wäre $g = 0$ und damit f konstant nach Folgerung 7.6.) Wir wenden Satz 6.6 an auf $g|W : W \to \mathbb{C}$. Also gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$B(0, \delta) \subset g(W)\,,$$

also

$$c \in c + B(0, \delta) \subset c + g(W) = f(W)\,,$$

also $c \in \operatorname{int}(f(W))$. Da c beliebig war, ist $f(W)$ offen. Also ist f offen. Aus Satz 5.2 und Satz 7.2 folgt, dass $f(U)$ zusammenhängend ist. Also ist $f(U)$ ein Gebiet. □

Satz 7.9 (Maximumprinzip)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ Gebiet, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, es gebe ein $a \in U$ mit

$$|f(a)| = \max_{z \in U} |f(z)|\,. \tag{7.5}$$

Dann ist f konstant.

Beweis: Ist f nicht konstant, so ist $f(U)$ offen nach Satz 7.8, also gibt es zu jedem $a \in U$ ein $\delta > 0$ mit

$$f(a) \subset B(f(a), \delta) \subset f(U)\,,$$

also kann (7.5) nicht gelten. □

Folgerung 7.10 *Sei $U \subset \mathbb{C}$ beschränktes Gebiet, sei $f : \overline{U} \to \mathbb{C}$ stetig in $\overline{U}$ und holomorph in U. Dann gilt*

$$\sup_{z \in U} |f(z)| = \max_{z \in \partial U} |f(z)|\,. \tag{7.6}$$

Beweis: Auf der kompakten Menge $\overline{U}$ hat $|f|$ ein Maximum, welches wegen Satz 7.9 nur dann in U liegen kann, wenn f konstant ist. □

Aus dem Maximumprinzip erhalten wir ein Ergebnis von Hermann Amandus Schwarz. Wir verwenden die Notation

$$\mathbb{E} = B(0,1) = \{z : z \in \mathbb{C},\, |z| < 1\}\,. \tag{7.7}$$

Satz 7.11 (Lemma von Schwarz)
Sei $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ holomorph mit $f(0) = 0$. Dann gilt

$$|f(z)| \le |z|\,, \quad \textit{für alle } z \in \mathbb{E}, \tag{7.8}$$

und

$$|f'(0)| \le 1\,. \tag{7.9}$$

Falls es ein $a \in \mathbb{E}$ gibt mit $|f(a)| = |a|$ und $a \neq 0$, so ist f eine Drehung, das heißt, es gibt ein $c \in \mathbb{C}$ mit $|c| = 1$ und $f(z) = cz$ für alle $z \in \mathbb{E}$.

Beweis: Wir können f nach dem Entwicklungssatz von Cauchy und Taylor in eine Potenzreihe um 0 entwickeln,

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k\,.$$

In der Tat, aus $f(0) = 0$ folgt $c_0 = 0$. Wir definieren $g : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ durch

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z}\,, & z \neq 0\,, \\ f'(0)\,, & z = 0\,. \end{cases}$$

Da $\lim_{z\to 0} g(z) = g(0)$ gilt, ist g nach dem Hebbarkeitssatz holomorph in $\mathbb{E}$. Auf g wenden wir Folgerung (7.10) mit $U = B(0,r) = r\mathbb{E}$ und $r \in (0,1)$. Es gilt also

$$|g(z)| \le \max_{|\zeta|=r} |g(\zeta)| = \max_{|\zeta|=r} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta|} = \max_{|\zeta|=r} \frac{|f(\zeta)|}{r} \le \frac{1}{r}\,, \quad \text{für alle } z \in B(0,r). \tag{7.10}$$

Da (7.10) für jedes $r < 1$ gilt, folgt mit Grenzübergang $r \to 1$

$$|g(z)| \le 1\,, \quad \text{für alle } z \in \mathbb{E}. \tag{7.11}$$

Daraus folgen sowohl (7.8) als auch (7.9). Sei nun $|f(a)| = |a|$ für ein $a \in \mathbb{E}$ mit $a \neq 0$. Es ist dann $|g(a)| = 1$. Die Funktion $|g|$ hat also auf $\mathbb{E}$ ein Maximum in a. Aus dem Maximumprinzip (Satz 7.9) folgt, dass g auf $\mathbb{E}$ konstant ist. Also gilt

$$f(z) = zg(z) = zg(a)\,, \quad \text{für alle } z \in \mathbb{E},$$

und $c = g(a)$ liefert die letzte Behauptung. □

8 Automorphismen

Definition 8.1 (Automorphismus)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Eine biholomorphe Abbildung $f : U \to U$ heißt ***Automorphismus*** *von U.* □

Ist f ein Automorphismus von U, so auch f^{-1}. Sind f und g Automorphismen von U, so ist auch $g \circ f$ ein Automorphismus von U. Die Menge aller Automorphismen von U bilden also eine Gruppe, mit der Komposition als Gruppenoperation. Sie heißt die **Automorphismengruppe von U** und wird mit $\mathbf{Aut}(U)$ bezeichnet.

Die Automorphismengruppe von $\mathbb{C}$. Jede Abbildung der Form

$$f(z) = az + b\,, \quad a, b \in \mathbb{C}\,,\ a \neq 0\,, \tag{8.1}$$

ist ein Automorphismus von $\mathbb{C}$ mit der Umkehrabbildung

$$f^{-1}(w) = \frac{w - b}{a}\,. \tag{8.2}$$

Es stellt sich heraus, dass es keine anderen Automorphismen von $\mathbb{C}$ gibt.

Satz 8.2 *Jeder Automorphismus von $\mathbb{C}$ hat die Form (8.1).*

Beweis: Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ biholomorph. Nach dem Entwicklungssatz von Cauchy und Taylor können wir f in eine Potenzreihe entwickeln,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k\,, \tag{8.3}$$

welche auf ganz $\mathbb{C}$ konvergiert. Die Funktion

$$g(z) = f\Big(\frac{1}{z}\Big)\,, \quad g : \mathbb{C}^{\times} \to \mathbb{C}\,, \tag{8.4}$$

ist holomorph auf $\mathbb{C}^{\times}$, und es gilt

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{-k}\,. \tag{8.5}$$

Der Nullpunkt ist eine isolierte Singularität von g. Wir bestimmen den Typ der Singularität. Wir nehmen als erstes an, 0 sei eine wesentliche Singularität von g. Nach Folgerung 6.10 zum Satz von Casorati-Weierstraß gibt es eine Folge (z_n) in $\mathbb{C}^{\times}$ mit $z_n \to 0$ und $g(z_n) \to 0$. Es gilt dann, da f^{-1} stetig ist,

$$\frac{1}{z_n} \to \infty\,, \quad \frac{1}{z_n} = f^{-1}\Big(f\Big(\frac{1}{z_n}\Big)\Big) = f^{-1}(g(z_n)) \to f^{-1}(0) \in \mathbb{C}\,,$$

ein Widerspruch. Also ist 0 keine wesentliche Singularität von g. Die Annahme, 0 ist eine hebbare Singularität von g, ergibt auf die gleiche Weise einen Widerspruch; dann wäre

$g(z_n) \to g(0)$ für die stetige Fortsetzung von g und daher $1/z_n \to f^{-1}(g(0))$ für jede Folge (z_n) mit $z_n \to 0$. Also ist 0 ein Pol von g, er habe die Ordnung m. Es folgt

$$g(z) = \sum_{k=0}^{m} c_k z^{-k}\,, \quad f(z) = \sum_{k=0}^{m} c_k z^k\,, \quad c_m \neq 0\,, \quad m \geq 1\,.$$

Da $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ bijektiv ist, hat f genau eine Nullstelle $z_0 \in \mathbb{C}$. Da f ein Polynom vom Grad m ist, hat z_0 die Ordnung m,

$$f(z) = \alpha(z - z_0)^m\,, \quad \alpha \neq 0\,.$$

Für $w \neq 0$ hat die Gleichung $f(z) = w$ genau m Lösungen, siehe Kapitel 6. Da f bijektiv ist, muss $m = 1$ gelten. Also hat f die Form (8.1). $\square$

Die Automorphismengruppe von $\mathbb{E}$. Jede Drehung um 0, also $f(z) = \alpha z$ mit $|\alpha| = 1$, ist ein Automorphismus von $\mathbb{E} = B(0, 1)$. Es gibt aber noch andere.

Definition 8.3 (Möbiustransformation)
Eine Funktion der Form

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \tag{8.6}$$

*mit Konstanten $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, welche $ad-bc \neq 0$ erfüllen, heißt **Möbiustransformation**.*

Ist $ad = bc$, so ist f entweder gar nicht definiert ($c = d = 0$) oder konstant gleich a/c bzw. b/d, je nachdem ob $c \neq 0$ oder $d \neq 0$.

Es gilt, falls $c \neq 0$,

$$f : \mathbb{C} \setminus \{-d/c\} \to \mathbb{C} \setminus \{a/c\}\,, \tag{8.7}$$

und f ist dort holomorph. (Aus $f(z) = a/c$ würde folgen, dass $ad = bc$.) Wir können eine Umkehrfunktion von f berechnen, indem wir die Gleichung

$$w = \frac{az + b}{cz + d}$$

nach z auflösen mit der Rechnung

$$w(cz + d) = az + b\,, \quad z(cw - a) = b - dw\,, \quad z = \frac{-dw + b}{cw - a}\,.$$

Dass dadurch tatsächlich eine Umkehrfunktion

$$f^{-1}(w) = \frac{-dw + b}{cw - a}\,, \quad f^{-1} : \mathbb{C} \setminus \{a/c\} \to \mathbb{C} \setminus \{-d/c\}\,, \tag{8.8}$$

von f erhalten wird, folgt durch Einsetzen. Dabei kommt auch die Bedingung $ad - bc \neq 0$ zum Tragen. Aus (8.7) und (8.8) erkennt man unmittelbar, dass gilt

$$d = -a \qquad \Rightarrow \qquad f = f^{-1}\,. \tag{8.9}$$

Wir können nun die Automorphismengruppe von $\mathbb{E}$ angeben.

Satz 8.4 *Die Automorphismengruppe von $\mathbb{E}$ besteht aus allen Möbiustransformationen der Form*

$$f(z) = \gamma \frac{z - \overline{c}}{cz - 1}\,, \quad |\gamma| = 1\,,\ |c| < 1\,. \tag{8.10}$$

mit $\gamma, c \in \mathbb{C}$.

Beweis: Wir zeigen als erstes, dass alle Funktionen der Form (8.10) zu $\mathrm{Aut}(\mathbb{E})$ gehören. Für $|c| < 1$ betrachten wir

$$f_c(z) = \frac{z - \overline{c}}{cz - 1}\,.$$

Sie hat die Form (8.6) mit $a = 1$, $b = -\overline{c}$ und $d = -1$. Die Singularität liegt in $1/c$, also außerhalb von $\mathbb{E}$. Aus (8.9) folgt $f_c^{-1} = f_c$. Für $z \neq 1/c$ gilt

$$\begin{aligned} 1 > |f(z)|^2 = f(z)\overline{f(z)} \quad &\Leftrightarrow \quad (cz-1)(\overline{cz}-1) > (z-\overline{c})(\overline{z}-c) \\ &\Leftrightarrow \quad |c|^2|z|^2 + 1 > |z|^2 + |c|^2 \\ &\Leftrightarrow \quad 1 - |c|^2 > |z|^2(1-|c|^2) \\ &\Leftrightarrow \quad 1 > |z|^2\,, \qquad\qquad \text{da } |c| < 1. \end{aligned}$$

Es folgt $f_c^{-1}(\mathbb{E}) = f_c(\mathbb{E}) \subset \mathbb{E}$ und daher $f_c(\mathbb{E}) = \mathbb{E}$. Also gehört f_c zu $\mathrm{Aut}(\mathbb{E})$ und wegen $|\gamma| = 1$ auch f.

Wir zeigen nun, dass es keine weiteren Automorphismen von $\mathbb{E}$ gibt. Sei zunächst $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{E})$ mit $f(0) = 0$. Nach dem Lemma von Schwarz (Satz 7.11) gilt $|f(z)| \leq |z|$ für alle $z \in \mathbb{E}$. Wegen $f^{-1} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{E})$ gilt aus demselben Grund $|z| = |f^{-1}(f(z))| \leq |f(z)|$, also insgesamt $|f(z)| = |z|$. Aus dem zweiten Teil des Lemmas von Schwarz folgt, dass f eine Drehung um den Nullpunkt ist, also die Form (8.10) hat mit $c = 0$. Sei nun g ein beliebiger Automorphismus von $\mathbb{E}$. Wir setzen $c = g^{-1}(0)$. Dann ist $g \circ f_{\overline{c}}$ ein Automorphismus von $\mathbb{E}$ mit

$$(g \circ f_{\overline{c}})(0) = g(c) = 0\,.$$

Nach dem eben Bewiesenen ist $g \circ f_{\overline{c}}$ eine Drehung $z \mapsto \gamma z$ um 0 mit $|\gamma| = 1$. Es folgt wegen $f_{\overline{c}}^{-1} = f_{\overline{c}}$, dass

$$g(z) = (g \circ f_{\overline{c}})(f_{\overline{c}}^{-1}(z)) = \gamma f_{\overline{c}}^{-1}(z) = \gamma \frac{z - c}{\overline{c}z - 1}\,.$$

Somit hat g die Form (8.10), mit $\overline{c}$ anstelle von c. $\square$