Funktionalanalysis *

Martin Brokate †

Inhaltsverzeichnis

*Vorlesungsskript, WS 2001/2002

†Zentrum Mathematik, TU München

1 Normierte Räume

Die Funktionalanalysis beschäftigt sich mit normierten Räumen und Operatoren zwischen denselben.

Als einführendes Beispiel betrachten wir das Anfangswertproblem auf $I = [t_0, t_1]$,

$$y' = f(t, y)\,, \quad y(t_0) = y_0\,, \tag{1.1}$$

mit der rechten Seite $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Wir schreiben (1.1) um in die Integralgleichung

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds\,. \tag{1.2}$$

Wir definieren einen Operator

$$F : C(I; \mathbb{R}^n) \to C(I; \mathbb{R}^n)\,, \quad (Fy)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds\,, \tag{1.3}$$

dann ist (1.2) äquivalent zur Gleichung

$$y = Ty\,. \tag{1.4}$$

Wir haben also unser ursprüngliches mathematisches Problem umgeschrieben in eine Gleichung, deren Variable nicht für Zahlen oder Vektoren im $\mathbb{R}^n$, sondern für Funktionen stehen. In dieser Gleichung kommen (neben algebraischen Operationen) Abbildungen zwischen Funktionenräumen vor, die wir auch als Operatoren bezeichnen. Solche Funktionenräume sind typischerweise unendlichdimensionale Banach- oder Hilberträume.

Im Folgenden steht $\mathbb{K}$ für $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Definition 1.1 (Norm, normierter Raum)
Sei X Vektorraum über $\mathbb{K}$. Eine Abbildung $\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$ heißt Norm auf X, falls gilt

$$\|x\| = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 0\,, \tag{1.5}$$

$$\|\alpha x\| = |\alpha|\, \|x\| \qquad \text{für alle } \alpha \in \mathbb{K},\ x \in X, \tag{1.6}$$

$$\|x + y\| \le \|x\| + \|y\| \qquad \text{für alle } x, y \in X. \tag{1.7}$$

Ist $\|\cdot\|$ eine Norm auf X, so heißt $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum.

Wir wiederholen kurz einige Grundbegriffe aus der Analysis, siehe zB meine Vorlesung, Teil 2, Kapitel 3 und 4.

Sei X ein normierter Raum. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X heißt **konvergent gegen den Grenzwert** $x \in X$,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x\,, \tag{1.8}$$

falls

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0\,. \tag{1.9}$$

Sie heißt **Cauchyfolge**, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$\|x_n - x_m\| \leq \varepsilon\,, \quad \text{für alle } n, m \geq N. \tag{1.10}$$

X heißt **vollständig**, falls in X jede Cauchyfolge einen Grenzwert hat. Ist X vollständig, so heißt X **Banachraum**. Ist $x \in X$ und $\varepsilon > 0$, so heißen

$$B(x, \varepsilon) = \{y : \, y \in X, \, \|y - x\| < \varepsilon\}\,, \tag{1.11}$$
$$K(x, \varepsilon) = \{y : \, y \in X, \, \|y - x\| \leq \varepsilon\}\,, \tag{1.12}$$

offene bzw. **abgeschlossene ε-Kugel um x**. Eine Teilmenge O von X heißt **offen in** X, wenn es zu jedem $x \in O$ ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $B(x, \varepsilon) \subset O$. Eine Teilmenge A von X heißt **abgeschlossen in** X, wenn $X \setminus A$ offen in X ist, oder (äquivalent) wenn für jede in X konvergente Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, deren Glieder x_n alle in A liegen, auch der Grenzwert in A liegt. Der **Abschluß** $\overline{Y}$, das **Innere** $\operatorname{int}(Y)$ und der **Rand** ∂Y einer Teilmenge Y von X sind gegeben durch

$$\overline{Y} = \bigcap_{\substack{Y \subset A \\ A \text{ abgeschlossen}}} A\,, \quad \operatorname{int}(Y) = \bigcup_{\substack{O \subset Y \\ O \text{ offen}}} O\,, \quad \partial Y = \overline{Y} \setminus \operatorname{int}(Y)\,. \tag{1.13}$$

Jeder Unterraum U von X ist ebenfalls ein normierter Raum, wenn wir als Norm auf U die Einschränkung der Norm auf X nehmen. Ist U vollständig, so ist U abgeschlossen in X; ist X selbst vollständig, so gilt auch die Umkehrung. Der Abschluß $\overline{U}$ eines Unterraums U ist ebenfalls ein Unterraum.

Aus der Analysis kennen wir bereits einige Banachräume. Zunächst ist $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)$, $1 \leq p \leq \infty$, ein Banachraum mit

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty\,, \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|\,. \tag{1.14}$$

Ist D Menge, so ist $(B(D; \mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$,

$$B(D; \mathbb{K}) = \{f \,|\, f : D \to \mathbb{K}, \; f \text{ beschränkt}\}\,, \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in D} |f(x)|\,, \tag{1.15}$$

ein Banachraum. Ist D ein kompakter metrischer Raum (beispielsweise eine beschränkte abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$), so ist $(C(D; \mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$,

$$C(D; \mathbb{K}) = \{f \,|\, f : D \to \mathbb{K}, \; f \text{ stetig}\}\,, \tag{1.16}$$

ein abgeschlossener Unterraum von $(B(D; \mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$ und damit ebenfalls ein Banachraum. Ist D eine messbare Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ (das trifft beispielsweise zu, wenn D offen oder abgeschlossen ist), so ist für $1 \leq p < \infty$ der Raum $(L^p(D; \mathbb{K})$ der zur p-ten Potenz Lebesgue-integrierbaren Funktionen, d.h. diejenigen messbaren Funktionen, für die

$$\|f\|_p = \left(\int_D |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty \tag{1.17}$$

gilt, mit dieser Norm $\|\cdot\|_p$ ein Banachraum, wenn wir fast überall gleiche Funktionen in Äquivalenzklassen zusammenfassen (siehe Analysis 3, Kapitel 4).

Folgenräume. Für $D = \mathbb{N}$ ist $B(D;\mathbb{K})$ identisch mit dem Raum aller beschränkten Folgen. Wir bezeichnen ihn mit $\ell^\infty(\mathbb{K})$,

$$\ell^\infty(\mathbb{K}) = \{x : x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}},\, x_k \in \mathbb{K},\, \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k| < \infty\}\,, \quad \|x\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k|\,. \tag{1.18}$$

Als Spezialfall von (1.15) ist $\ell^\infty(\mathbb{K})$ natürlich ebenfalls ein Banachraum. Wir betrachten die Teilmengen

$$c(\mathbb{K}) = \{x : x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ ist konvergente Folge in } \mathbb{K}\}\,, \tag{1.19}$$

$$c_0(\mathbb{K}) = \{x : x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ ist Nullfolge in } \mathbb{K}\}\,. \tag{1.20}$$

Satz 1.2 *Es gilt $c_0(\mathbb{K}) \subset c(\mathbb{K}) \subset \ell^\infty(\mathbb{K})$. Versehen mit der Supremumsnorm sind $c_0(\mathbb{K})$ und $c(\mathbb{K})$ Banachräume.*

Beweis: Übungsaufgabe, es genügt zu zeigen, dass $c(\mathbb{K})$ abgeschlossener Unterraum von $\ell^\infty(\mathbb{K})$ und $c_0(\mathbb{K})$ abgeschlossener Unterraum von $c(\mathbb{K})$ ist. □

Wir betrachten außerdem den Raum $c_e(\mathbb{K})$ aller endlichen Folgen,

$$c_e(\mathbb{K}) = \{x : x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}, \text{ es gibt ein } N \in \mathbb{N} \text{ mit } x_k = 0 \text{ für alle } k \geq N\}\,. \tag{1.21}$$

Der Raum $c_e(\mathbb{K})$ ist ein Unterraum von $c_0(\mathbb{K})$, er ist aber nicht abgeschlossen, also auch kein Banachraum, vielmehr gilt (Übung)

$$\overline{c_e(\mathbb{K})} = c_0(\mathbb{K})\,. \tag{1.22}$$

Ist $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folge in $\mathbb{K}$, so definieren wir

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\,, \quad 1 \leq p < \infty\,, \tag{1.23}$$

und den Raum $\ell^p(\mathbb{K})$ der zur p-ten Potenz summierbaren Folgen

$$\ell^p(\mathbb{K}) = \{x : x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}},\, x_k \in \mathbb{K},\, \|x\|_p < \infty\}\,. \tag{1.24}$$

Satz 1.3 *Der Raum $(\ell^p(\mathbb{K}), \|\cdot\|_p)$ ist ein Banachraum für $1 \leq p < \infty$.*

Beweis: Für $x \in \ell^p(\mathbb{K})$ gilt zunächst

$$\|x\|_p = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^\infty |x_k|^p = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |x_k| = 0 \text{ für alle } k \quad \Leftrightarrow \quad x = 0\,.$$

Sind $x \in \ell^p(\mathbb{K})$, $\alpha \in \mathbb{K}$, so gilt

$$\|\alpha x\|_p = \left(\sum_{k=1}^\infty |\alpha x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\alpha| \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\alpha| \|x\|_p\,.$$

Sind $x, y \in \ell^p(\mathbb{K})$, so gilt für alle $N \in \mathbb{N}$

$$\left(\sum_{k=1}^N |x_k + y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^N |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^N |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

das ist gerade die Minkowskische Ungleichung im $\mathbb{R}^N$. Es folgt

$$\sum_{k=1}^N |x_k + y_k|^p \leq (\|x\|_p + \|y\|_p)^p, \quad \text{für alle } N \in \mathbb{N}.$$

Grenzübergang $N \to \infty$ liefert

$$\sum_{k=1}^\infty |x_k + y_k|^p \leq (\|x\|_p + \|y\|_p)^p,$$

also

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Also ist $\ell^p(\mathbb{K})$ ein normierter Raum. Sei nun $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\ell^p(\mathbb{K})$. Dann gilt für alle $k, n, m \in \mathbb{N}$

$$|x_k^n - x_k^m|^p \leq \sum_{j=1}^\infty |x_j^n - x_j^m|^p = \|x^n - x^m\|_p^p,$$

also ist $(x_k^n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge in $\mathbb{K}$ für alle k, daher existiert

$$x_k^\infty = \lim_{n\to\infty} x_k^n.$$

Für alle k, n, m, N gilt nun (Minkowski)

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^N |x_k^n - x_k^\infty|^p\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\sum_{k=1}^N |x_k^n - x_k^m|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^N |x_k^m - x_k^\infty|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \|x^n - x^m\|_p + \left(\sum_{k=1}^N |x_k^m - x_k^\infty|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \tag{1.25}$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, wähle M so groß, dass

$$\|x^n - x^m\|_p \leq \varepsilon, \quad \text{für alle } n, m \geq M. \tag{1.26}$$

Wir wählen nun zu jedem $N \in \mathbb{N}$ ein $m(N) \in \mathbb{N}$ mit $m(N) \geq M$ und

$$\left(\sum_{k=1}^N |x_k^{m(N)} - x_k^\infty|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon. \tag{1.27}$$

Aus (1.25) – (1.27) folgt

$$\left(\sum_{k=1}^N |x_k^n - x_k^\infty|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq 2\varepsilon, \quad \text{für alle } n \geq M,\ N \in \mathbb{N}.$$

Grenzübergang $N \to \infty$ liefert

$$\|x^n - x^\infty\|_p \le 2\varepsilon\,, \quad \text{für alle } n \ge M.$$

Hieraus folgen $x^\infty = (x^\infty - x^n) + x^n \in \ell^p(\mathbb{K})$ und $x^n \to x^\infty$ in $\ell^p(\mathbb{K})$. $\square$

Lineare stetige Abbildungen. Sind X und Y normierte Räume, so ist eine Abbildung $f : X \to Y$ definitionsgemäß stetig auf X genau dann, wenn

$$f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \tag{1.28}$$

gilt für alle konvergenten Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X. Aus der Analysis wissen wir, dass dazu äquivalent sind die Aussagen

$f^{-1}(O)$ ist offen für jede offene Menge $O \subset Y$,

und

$f^{-1}(A)$ ist abgeschlossen für jede abgeschlossene Menge $A \subset Y$.

f ist stetig in einem Punkt $x \in X$, falls (1.28) gilt für alle gegen x konvergenten Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Satz 1.4 *Seien $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume, sei $T : X \to Y$ linear. Dann sind äquivalent:*

(i) T ist stetig auf X.

(ii) T ist stetig in 0.

(iii) Es gibt ein $C > 0$ mit

$$\|T(x)\|_Y \le C\|x\|_X\,, \quad \textit{für alle } x \in X. \tag{1.29}$$

(iv) T ist lipschitzstetig auf X mit Lipschitzkonstante C.

Beweis: "(iii)⇒(iv)": Für alle $x, y \in X$ gilt

$$\|T(x) - T(y)\|_Y = \|T(x-y)\|_Y \le C\|x-y\|_X\,.$$

"(iv)⇒(i)⇒(ii)": klar.
"(ii)⇒(iii)": Kontraposition. Sei (iii) nicht gültig. Wir wählen eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X mit

$$\|T(x_n)\|_Y > n\|x_n\|_X\,. \tag{1.30}$$

Wir setzen

$$z_n = \frac{1}{n\|x_n\|_X} x_n\,,$$

das ist möglich, da $x_n \ne 0$ wegen (1.30). Es folgt $z_n \to 0$, aber $\|T(z_n)\|_Y > 1$ und daher $T(z_n) \not\to 0$, also gilt (ii) nicht. $\square$

Nicht alle linearen Abbildungen sind stetig. Beispiel: Die Einheitsvektoren $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ bilden eine Basis des $c_e(\mathbb{K})$. Wir definieren eine lineare Abbildung $T : c_e(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ durch $T(e_k) = k$, dann ist $\|e_k\|_\infty = 1$ und $|T(e_k)| = k$, also ist (iii) in Satz 1.4 nicht erfüllt.

Wir werden im Folgenden $\|x\|$ statt $\|x\|_X$ schreiben, wenn klar ist, welche Norm gemeint ist. Und wir werden schreiben Tx statt $T(x)$.

Definition 1.5 (Isomorphismus)
Seien X, Y normierte Räume. Ist $T : X \to Y$ eine bijektive lineare stetige Abbildung, und ist T^{-1} ebenfalls stetig, so heißt T ein Isomorphismus (von X nach Y). Gilt außerdem $\|Tx\| = \|x\|$ für alle $x \in X$, so heißt T isometrisch. X und Y heißen (isometrisch) isomorph, falls es einen (isometrischen) Isomorphismus von X nach Y gibt. In diesem Fall schreiben wir $X \simeq Y$ ($X \cong Y$). Ein isometrischer Isomorphismus heißt auch Isometrie.
□

Offensichtlich gilt (und ebenso für "$\cong$")

$$X \simeq Y\,, \quad Y \simeq Z \qquad \Rightarrow \qquad X \simeq Z\,. \tag{1.31}$$

Ist $T : X \to Y$ ein Isomorphismus, so gibt es nach Satz 1.4 Konstante C_1 und C_2 mit

$$\|Tx\| \le C_1\|x\|\,, \quad \|x\| = \|T^{-1}Tx\| \le C_2\|Tx\|\,, \quad \text{für alle } x \in X. \tag{1.32}$$

Betrachten wir zwei verschiedene Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ auf X, so ist die Identität auf X genau dann ein Isomorphismus, falls es Konstante C_1 und C_2 gibt mit

$$\|x\|_1 \le C_1\|x\|_2\,, \quad \|x\|_2 \le C_2\|x\|_1\,, \quad \text{für alle } x \in X. \tag{1.33}$$

In diesem Fall heißen die Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ **äquivalent**. Aus der Analysis wissen wir bereits, dass auf dem $\mathbb{K}^n$ alle Normen äquivalent sind. Als unmittelbare Verallgemeinerung erhalten wir den folgenden Satz.

Satz 1.6 *Sind X, Y endlichdimensionale normierte Räume mit* $\dim(X) = \dim(Y)$, *so gilt $X \simeq Y$.*

Beweis: Sei $\dim(X) = n$, $\{v_1, \dots, v_n\}$ Basis von X, seien $e_1, \dots, e_n$ die Einheitsvektoren im $\mathbb{K}^n$. Wir definieren

$$T : \mathbb{K}^n \to X\,, \quad Tx = \sum_{i=1}^n x_i v_i \quad \text{falls} \quad x = \sum_{i=1}^n x_i e_i\,.$$

Wir rechnen unmittelbar nach, dass durch

$$\|x\|_X = \|Tx\|$$

eine Norm auf $\mathbb{K}^n$ definiert wird; T ist dann eine Isometrie. Verfahren wir analog mit Y, so erhalten wir

$$X \cong (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_X) \simeq (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_Y) \cong Y\,.$$

□

Sind X, Y endlichdimensionale Vektorräume mit $Y \subset X$, $Y \neq X$, so ist $\dim(Y) < \dim(X)$, und X und Y sind nicht isomorph. Im Unendlichdimensionalen ist die Situation nicht so einfach. So ist $c_0(\mathbb{K}) \subset c(\mathbb{K})$, $c_0(\mathbb{K}) \neq c(\mathbb{K})$, aber es gilt

$$c_0(\mathbb{K}) \simeq c(\mathbb{K}) . \tag{1.34}$$

Ein Isomorphismus $T : c(\mathbb{K}) \to c_0(\mathbb{K})$ wird definiert durch

$$(Tx)_1 = \lim_{j\to\infty} x_j , \quad (Tx)_k = x_{k-1} - \lim_{j\to\infty} x_j , \, k \geq 2 , \tag{1.35}$$

mit der Umkehrabbildung $S : c_0(\mathbb{K}) \to c(\mathbb{K})$,

$$(Sy)_k = y_{k+1} + y_1 . \tag{1.36}$$

Man rechnet leicht nach, dass $T \circ S$ und $S \circ T$ die Identität auf $c_0(\mathbb{K})$ bzw. $c(\mathbb{K})$ liefern, und dass $\|Tx\|_\infty \leq 2\|x\|_\infty$ und $\|Sy\|_\infty \leq 2\|y\|_\infty$ für alle $x \in c(\mathbb{K})$ und alle $y \in c_0(\mathbb{K})$ gelten.

Satz 1.7 *Seien $(X_1, \|\cdot\|_1), \ldots, (X_m, \|\cdot\|_m)$ normierte Räume. Dann werden auf dem Produktraum*

$$X = \prod_{i=1}^m X_i = X_1 \times \cdots \times X_m \tag{1.37}$$

für $x = (x_1, \ldots, x_m) \in X$ durch

$$\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq m} \|x_i\|_i , \quad \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^m \|x_i\|_i^p \right)^{\frac{1}{p}} , \tag{1.38}$$

Normen $\|\cdot\|_p$ für $1 \leq p \leq \infty$ definiert, die alle äquivalent sind. Eine Folge $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X konvergiert gegen ein $x = (x_1, \ldots, x_m) \in X$ genau dann, wenn alle Komponentenfolgen $(x_i^n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x_i konvergieren. X ist vollständig genau dann, wenn alle X_i vollständig sind.

Beweis: Übung. □

Folgerung 1.8 *Sei X normierter Raum. Dann sind die Addition $+ : X \times X \to X$ und die Skalarmultiplikation $\cdot : \mathbb{K} \times X \to X$ stetig.*

Beweis: Aus $x_n \to x$ und $y_n \to y$ folgt

$$0 \leq \|(x_n + y_n) - (x + y)\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \to 0 ,$$

aus $\alpha_n \to \alpha$ und $x_n \to x$ folgt

$$0 \leq \|\alpha_n x_n - \alpha x\| \leq |\alpha_n| \, \|x_n - x\| + |\alpha_n - \alpha| \, \|x\| \to 0 .$$

□

Definition 1.9 (Operatorenraum, Dualraum)
Seien X, Y normierte Räume. Wir definieren

$$L(X;Y) = \{T \mid T : X \to Y,\, T \textit{ ist linear und stetig}\}\,. \tag{1.39}$$

Der Raum $L(X;\mathbb{K})$ heißt der Dualraum von X und wird mit X^* bezeichnet. □

Aus der Linearen Algebra ist bekannt, dass $L(X;Y)$ ein Vektorraum ist.

Satz 1.10 (Operatornorm)
Seien X, Y normierte Räume. Dann wird durch

$$\|T\| = \sup_{x\in X,\, x\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \tag{1.40}$$

eine Norm auf $L(X,Y)$ definiert, sie heißt die Operatornorm. Es gilt

$$\|Tx\| \le \|T\|\,\|x\|\,, \quad \textit{für alle } x\in X, \tag{1.41}$$

und weiter

$$\|T\| = \sup_{x\in X,\, \|x\|\le 1} \|Tx\| = \sup_{x\in X,\, \|x\|=1} \|Tx\|\,, \tag{1.42}$$

sowie

$$\|T\| = \inf\{C : C>0,\, \|Tx\| \le C\|x\| \textit{ für alle } x\in X\}\,. \tag{1.43}$$

Ist Y ein Banachraum, so ist auch $L(X,Y)$ ein Banachraum.

Beweis: Sei $T\in L(X;Y)$, sei $C>0$ mit $\|Tx\|\le C\|x\|$ für alle $x\in X$, wir setzen

$$M = \sup_{x\in X,\, x\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}\,.$$

Es ist $M\le C$, also M endlich und $\|Tx\|\le M\|x\|$ für alle $x\in X$. Damit ist $\|T\|\in\mathbb{R}_+$, und (1.41) und (1.43) gelten. Aus (1.41) folgt

$$\sup_{x\in X,\, \|x\|=1} \|Tx\| \le \sup_{x\in X,\, \|x\|\le 1} \|Tx\| \le \|T\|\,,$$

und wegen

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \frac{T(\frac{x}{\|x\|})}{\|\frac{x}{\|x\|}\|}$$

folgt (1.42). Es ist

$$\|T\| = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \|Tx\| = 0 \text{ für alle } x\in X \;\Leftrightarrow\quad Tx = 0 \text{ für alle } x\in X \quad\Leftrightarrow\quad T = 0\,,$$

und weiter für $\alpha\in\mathbb{K}$

$$\|\alpha T\| = \sup_{\|x\|=1} \|\alpha Tx\| = |\alpha| \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = |\alpha|\,\|T\|\,,$$

sowie für $S, T \in L(X;Y)$

$$\|S+T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Sx + Tx\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|Sx\| + \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \|S\| + \|T\|.$$

Die Normeigenschaften sind also erfüllt. Wir zeigen nun die Vollständigkeit. Sei $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge in $L(X;Y)$. Wegen

$$\|T_n x - T_m x\| = \|(T_n - T_m)(x)\| \leq \|T_n - T_m\| \, \|x\|$$

ist auch $(T_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ für jedes $x \in X$ eine Cauchyfolge in Y. Durch (Y ist vollständig)

$$Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x$$

wird daher eine Abbildung $T : X \to Y$ definiert. Seien $x, z \in X$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, dann ist

$$\begin{aligned} \alpha Tx + \beta Tz &= \alpha \lim_{n\to\infty} T_n x + \beta \lim_{n\to\infty} T_n z = \lim_{n\to\infty} (\alpha T_n x + \beta T_n z) \\ &= \lim_{n\to\infty} T_n(\alpha x + \beta z) = T(\alpha x + \beta z), \end{aligned}$$

also ist T linear. Wegen (die Norm ist stetig)

$$\|Tx\| = \|\lim_{n\to\infty} T_n x\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n x\| \leq (\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|)\|x\|$$

ist T stetig. Es bleibt zu zeigen, dass $\|T_n - T\| \to 0$. Sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen $N \in \mathbb{N}$ mit $\|T_n - T_m\| \leq \varepsilon$ für alle $n, m \geq N$. Für beliebiges $x \in X$ mit $\|x\| = 1$ gilt

$$\|(T_n - T)x\| \leq \|(T_n - T_m)x\| + \|(T_m - T)x\| \leq \|T_n - T_m\| + \|T_m x - Tx\|,$$

also folgt für $n \geq N$, indem wir m hinreichend groß wählen,

$$\|(T_n - T)x\| \leq 2\varepsilon,$$

und damit $\|T_n - T\| \leq 2\varepsilon$ falls $n \geq N$. □

Beispiel 1.11

1. D kompakter metrischer Raum, $X = C(D;\mathbb{K})$ mit Supremumsnorm, $a \in D$, $T_a : X \to \mathbb{K}$, $T_a x = x(a)$. T_a ist linear, und $|T_a x| = |x(a)| \leq \|x\|_\infty$ mit Gleichheit, falls x eine konstante Funktion ist. Also ist T_a stetig und $\|T_a\| = 1$. T_a heißt das **Dirac-Funktional** im Punkt a.

2. $X = C([a,b];\mathbb{R})$ mit Supremumsnorm, $T : X \to \mathbb{R}$,

   $$Tx = \int_a^b x(t)\,dt.$$

   T ist linear,

   $$|Tx| = \left|\int_a^b x(t)\,dt\right| \leq (b-a)\|x\|_\infty$$

   mit Gleichheit, falls x konstant ist, also ist T stetig und $\|T\| = b - a$.

3. $X = L^1([a,b];\mathbb{R})$ mit L^1-Norm, T wie eben, dann ist

$$|Tx| = \left|\int_a^b x(t)\,dt\right| \le \int_a^b |x(t)|\,dt = \|x\|_1$$

mit Gleichheit, falls x konstant ist, also ist T stetig und $\|T\| = 1$.

4. X wie eben, $f \in C([a,b];\mathbb{R})$, $T : X \to \mathbb{R}$,

$$Tx = \int_a^b f(t)x(t)\,dt\,.$$

T ist linear, und

$$|Tx| \le \int_a^b |f(t)|\,|x(t)|\,dt \le \|f\|_\infty \int_a^b |x(t)|\,dt = \|f\|_\infty\,\|x\|_1\,,$$

also ist T stetig und $\|T\| \le \|f\|_\infty$. Um die Gleichheit nachzuweisen, wählen wir $t_* \in [a,b]$ mit $f(t_*) = \|f\|_\infty$ (falls das Betragsmaximum im Negativen angenommen wird, gehen wir zu $-f$ bzw. $-T$ über). Sei nun $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < \|f\|_\infty$. Wir wählen ein Intervall I mit $t_* \in I \subset [a,b]$, so dass $f(t) \ge \|f\|_\infty - \varepsilon$ für alle $t \in I$ gilt, und setzen ($|I|$ bezeichnet die Länge von I)

$$x = \frac{1}{|I|}1_I\,, \quad \text{also } x(t) = \begin{cases} \frac{1}{|I|}\,, & t \in I\,,\\ 0\,, & \text{sonst}\,.\end{cases}$$

Dann ist $\|x\|_1 = 1$ und

$$|Tx| = \left|\int_a^b f(t)x(t)\,dt\right| = \int_I f(t)\frac{1}{|I|}\,dt \ge \int_I (\|f\|_\infty - \varepsilon)\frac{1}{|I|}\,dt = \|f\|_\infty - \varepsilon\,.$$

Es folgt $\|T\| \ge \|f\|_\infty - \varepsilon$ und damit $\|T\| = \|f\|_\infty$.

5. Sei $D = (0,1)\times(0,1)$, $k \in L^2(D;\mathbb{R})$. Vermittels k wollen wir auf $X = L^2((0,1);\mathbb{R})$ einen **Integraloperator** $T : X \to X$ definieren durch

$$(Tx)(s) = \int_0^1 k(s,t)x(t)\,dt\,, \quad s \in (0,1)\,.$$

T ist linear. Es gilt (die Wohldefiniertheit der Integrale folgt aus dem Satz von Fubini bzw. Tonelli, die zweite Ungleichung aus der Hölderschen Ungleichung)

$$\begin{aligned}\|Tx\|^2_{L^2((0,1);\mathbb{R})} &= \int_0^1 \left(\int_0^1 k(s,t)x(t)\,dt\right)^2 ds \le \int_0^1 \left(\int_0^1 |k(s,t)|\,|x(t)|\,dt\right)^2 ds\\ &\le \int_0^1 \left(\int_0^1 |k(s,t)|^2\,dt\right)\cdot\left(\int_0^1 |x(t)|^2\,dt\right) ds\\ &= \|x\|^2_{L^2((0,1);\mathbb{R})} \int_0^1\int_0^1 |k(s,t)|^2\,dt\,ds\,,\end{aligned}$$

also ist T stetig und

$$\|T\| \le \left(\int_0^1\int_0^1 |k(s,t)|^2\,dt\,ds\right)^{\frac{1}{2}} = \|k\|_{L^2(D;\mathbb{R})}\,.$$

6. Sind X, Y normierte Räume und ist $\dim(X) < \infty$, so ist jede lineare Abbildung $T : X \to Y$ stetig: Sei $\{v_1, \ldots, v_n\}$ Basis von X, dann gilt für
$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i \in X\,, \quad x_i \in \mathbb{K}\,,$$
dass
$$\|Tx\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i T v_i \right\| \le \sum_{i=1}^{n} |x_i|\, \|Tv_i\| \le \max_{1 \le i \le n} \|Tv_i\| \sum_{i=1}^{n} |x_i|\,,$$
also
$$\|T\| \le \max_{1 \le i \le n} \|Tv_i\|\,, \quad \text{falls etwa} \quad \|x\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|\,.$$

7. Ist $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear, $T(x) = Ax$ mit einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{(m,n)}$, so läßt sich $L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ mit dem Raum $\mathbb{R}^{(m,n)}$ aller $m \times n$-Matrizen identifizieren, die Operatornorm wird dann zu einer sogenannten Matrixnorm, deren Form von der Wahl der beiden Normen im $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ abhängt. Matrixnormen spielen eine große Rolle bei der Konstruktion und Analyse von Algorithmen in der Numerischen Mathematik.

□

Lemma 1.12 *Seien X, Y, Z normierte Räume, $T : X \to Y$ und $S : Y \to Z$ linear und stetig. Dann ist auch $S \circ T : X \to Z$ linear und stetig, und*
$$\|S \circ T\| \le \|S\|\, \|T\|\,. \tag{1.44}$$

Beweis: Für alle $x \in X$ gilt $\|(S \circ T)x\| \le \|S\|\, \|Tx\| \le \|S\|\, \|T\|\, \|x\|$. Die Behauptung folgt nun aus Satz 1.10. □

Halbnormen und Quotientenräume.

Definition 1.13 (Halbnorm)
Sei X Vektorraum über $\mathbb{K}$. Eine Abbildung $p : X \to [0, \infty)$ heißt Halbnorm auf X, falls gilt
$$p(\alpha x) = |\alpha|\, p(x) \qquad \text{für alle } \alpha \in \mathbb{K},\ x \in X, \tag{1.45}$$
$$p(x + y) \le p(x) + p(y) \qquad \text{für alle } x, y \in X. \tag{1.46}$$
Ist p eine Halbnorm auf X, so heißt (X, p) halbnormierter Raum.

Aus (1.45) folgt natürlich $p(0) = 0$, aber $p(x) = 0$ impliziert nicht $x = 0$. Jede Norm ist eine Halbnorm. Jede lineare Abbildung $T : X \to Y$, (Y, q) halbnormierter Raum, definiert eine Halbnorm auf X durch
$$p(x) = q(Tx)\,. \tag{1.47}$$

Beispiele:

$$X = \mathbb{R}^n\,, \quad p(x) = |x_1|\,, \tag{1.48}$$

$$X = B(D;\mathbb{K})\,, \quad a \in D\,, \quad p(x) = |x(a)|\,, \tag{1.49}$$

$$X = L^1((0,1);\mathbb{R})\,, \quad p(x) = \left|\int_0^1 x(t)\,dt\right|\,, \tag{1.50}$$

$$X = C^1([0,1];\mathbb{R})\,, \quad p(x) = \|\dot{x}\|_\infty\,. \tag{1.51}$$

Ist X Vektorraum, U Unterraum von X, so wird (siehe Lineare Algebra) durch

$$x \sim_U z \quad \Leftrightarrow \quad x - z \in U \tag{1.52}$$

eine Äquivalenzrelation auf X definiert. Sei

$$[x] = \{z : z \in X,\, x \sim_U z\} \tag{1.53}$$

die Äquivalenzklasse von X. Der Quotientenraum X/U ist definiert durch

$$X/U = \{[x] : x \in X\}\,. \tag{1.54}$$

Mit der durch

$$[x] + [y] = [x+y]\,, \quad \alpha[x] = [\alpha x] \tag{1.55}$$

definierten Addition und Skalarmultiplikation wird X/U zum Vektorraum, und die Abbildung

$$Q : X \to X/U\,, \quad Qx = [x]\,, \tag{1.56}$$

ist linear und surjektiv.

Satz 1.14 (Quotientennorm) *Sei X normierter Raum, U ein Unterraum von X.*

(i) Durch

$$p([x]) = \operatorname{dist}(x,U) = \inf_{z\in U} \|x - z\| \tag{1.57}$$

wird eine Halbnorm auf X/U definiert mit

$$p([x]) \le \|x\|\,, \quad \text{für alle } x \in X. \tag{1.58}$$

(ii) Ist U abgeschlossen, so ist p eine Norm.

(iii) Ist X Banachraum und U abgeschlossen, so ist $(X/U,p)$ ebenfalls Banachraum.

Beweis: Teil (i) ist Übungsaufgabe. Zu (ii): Ist

$$0 = p([x]) = \inf_{z\in U} \|x - z\|\,,$$

so gibt es eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in U mit $\|x - z_n\| \to 0$, also $z_n \to x$ und damit (wenn U abgeschlossen) $x \in U$, also $[x] = 0$. Zu (iii): Zunächst beweisen wir: Sind $x,y \in X$, so gibt es ein $\tilde{y} \in [y]$ mit

$$\|\tilde{y} - x\| \le 2p([y-x])\,. \tag{1.59}$$

Ein solches $\tilde{y}$ erhalten wir, indem wir zunächst $z \in U$ wählen mit

$$\|y - x - z\| \le 2p([y - x])$$

und dann $\tilde{y} = y - z$ setzen. Sei nun $([x_n])_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in X/U. Nach eventuellem Übergang zu einer Teilfolge können wir annehmen, dass

$$p([x_{n+1}] - [x_n]) \le 2^{-n}\,.$$

Wähle nun gemäß (1.59) $\tilde{x}_1 \in [x_1]$ und für $n > 1$ ein $\tilde{x}_n \in [x_n]$ mit

$$\|\tilde{x}_n - \tilde{x}_{n-1}\| \le 2p([x_n] - [x_{n-1}])\,. \tag{1.60}$$

Dann gilt für alle $n, p \in \mathbb{N}$

$$\|\tilde{x}_{n+p} - \tilde{x}_n\| \le \sum_{j=1}^{p} \|\tilde{x}_{n+j} - \tilde{x}_{n+j-1}\| \le \sum_{j=1}^{p} 2 \cdot 2^{-n-j+1} \le 2^{-n+2}\,,$$

also ist $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in X. Da X vollständig ist, existiert $x = \lim_{n\in\mathbb{N}} \tilde{x}_n$. Aus (1.58) folgt

$$0 \le p([x_n] - [x]) = p([\tilde{x}_n] - [x]) \le \|\tilde{x}_n - x\| \to 0\,,$$

also $[x_n] \to [x]$ in X/U. □

Beispiel: $X = C([0,1])$, $U = \{x : x \in X,\ x(0) = 0\}$. Es ist

$$x \sim_U y \quad \Leftrightarrow \quad x(0) = y(0)\,,$$

und man sieht leicht, dass

$$p([x]) = |x(0)|\,, \quad X/U \cong \mathbb{R}.$$

Die Abbildung $T : X/U \to \mathbb{R}$, $T([x]) = x(0)$, ist eine Isometrie.

Dichte Teilmengen. Eine Teilmenge A eines metrischen Raumes (X, d) heißt **dicht** in X, falls

$$\overline{A} = X \tag{1.61}$$

gilt. Offensichtlich gilt: Ist A dicht in (X, d), und ist B dicht in (A, d_A), so ist B dicht in (X, d).

Definition 1.15 (Separabler Raum)
*Ein metrischer Raum (X, d) heißt **separabel**, wenn es eine endliche oder abzählbar unendliche Teilmenge A von X gibt, welche dicht ist in X.* □

Beispiel: $\mathbb{Q}^n$ ist dichte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, also ist $\mathbb{R}^n$ separabel. Analoges gilt für $\mathbb{C}^n$.

Satz 1.16 *Der Raum $(C([a,b];\mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$ ist separabel.*

Beweis: Nach dem Approximationssatz von Weierstraß (siehe Analysis 2) ist die Menge P aller Polynome dicht in $C([a,b];\mathbb{K})$. Die Menge aller Polynome mit rationalen Koeffizienten ist abzählbar und in P dicht, also auch in $C([a,b];\mathbb{K})$. □

Satz 1.17 *Sei X normierter Raum, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in X mit $X = \overline{\operatorname{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$. Dann ist X separabel.*

Beweis: Übung. $\square$

Satz 1.18 *Der Raum $\ell^p(\mathbb{K})$ ist separabel für $1 \le p < \infty$. Der Raum $\ell^\infty(\mathbb{K})$ ist nicht separabel.*

Beweis: Für $p < \infty$ gilt $\ell^p(\mathbb{K}) = \overline{\operatorname{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}}$, also folgt die Behauptung aus Satz 1.17. Sei $p = \infty$. Für $M \subset \mathbb{N}$ definieren wir $x^M \in \ell^\infty(\mathbb{K})$ durch

$$x_k^M = \begin{cases} 1\,, & k \in M\,, \\ 0\,, & k \notin M\,. \end{cases}$$

Sind $M, N \subset \mathbb{N}$ mit $M \neq N$, so ist $\|x^M - x^N\|_\infty = 1$, und

$$\{B(x^M, \frac{1}{2}) : M \subset \mathbb{N}\}$$

ist eine überabzählbare Menge disjunkter offener Kugeln. Ist A eine dichte Teilmenge, so muss sie auch in jeder dieser Kugeln dicht sein, daher kann sie nicht abzählbar sein. $\square$

Analog gilt, dass ($D \subset \mathbb{R}^n$ offen) der Raum $(L^p(D;\mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$ separabel ist für $1 \le p < \infty$, aber nicht separabel für $p = \infty$. Dies folgt für $p < \infty$ daraus, dass $C^\infty(D)$ dicht in $(L^p(D), \|\cdot\|_p)$ liegt und (analog zu Satz 1.16) die Polynome mit rationalen Koeffizienten eine dichte Teilmenge von $C^\infty(D)$ bilden.

Satz 1.19 *Seien X normierter Raum, Y Banachraum, U ein dichter Unterraum von X und $S : U \to Y$ linear und stetig. Dann gibt es genau eine lineare stetige Abbildung $T : X \to Y$ mit $T|U = S$, und es gilt $\|T\| = \|S\|$.*

Beweis: Zu $x \in X$ wählen wir eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in U mit $x_n \to x$ und setzen $Tx = \lim_{n\to\infty} Sx_n$. Dieser Limes existiert, da mit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch $(Sx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge und Y vollständig ist. Die Behauptungen ergeben sich nun direkt aus den Definitionen und elementaren Eigenschaften der Operatornorm und von konvergenten Folgen, Details sind ausgeführt im Beweis von Satz 13.15 (Analysis 4). $\square$

Dualräume. Ist X ein normierter Raum, so ist nach Satz 1.10 der Dualraum $X^* = L(X;\mathbb{K})$ ein Banachraum.

Satz 1.20 *Sind $p, q \in (1,\infty)$ mit*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,, \tag{1.62}$$

so gilt

$$(\ell^p(\mathbb{K}))^* \cong \ell^q(\mathbb{K})\,. \tag{1.63}$$

Beweis: Wir wollen eine Isometrie $T : \ell^q(\mathbb{K}) \to (\ell^p(\mathbb{K}))^*$ definieren durch

$$(Tx)(y) = \sum_{k=1}^\infty x_k y_k\,, \quad x \in \ell^q(\mathbb{K})\,, \quad y \in \ell^p(\mathbb{K})\,. \tag{1.64}$$

Es gilt nach der Hölderschen Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{N} |x_k|\,|y_k| \le \left(\sum_{k=1}^{N} |x_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{N} |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \|x\|_q\,\|y\|_p\,,$$

also ist die Reihe $\sum_k x_k y_k$ absolut konvergent, und

$$|(Tx)(y)| \le \sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| \le \|x\|_q\,\|y\|_p\,.$$

Daher wird für festes $x \in \ell^q(\mathbb{K})$ durch (1.64) eine lineare stetige Abbildung $Tx : \ell^p(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ definiert mit

$$\|Tx\| \le \|x\|_q\,. \tag{1.65}$$

Also ist $T : \ell^q(\mathbb{K}) \to (\ell^p(\mathbb{K}))^*$ wohldefiniert. Aus (1.64) folgt, dass T linear ist, und aus (1.65), dass T stetig ist. T ist injektiv, da $(Tx)(e_k) = x_k$, und also $Tx = 0$ auch $x_k = 0$ für alle k impliziert. Wir zeigen, dass T surjektiv ist. Sei $y^* \in (\ell^p(\mathbb{K}))^*$ beliebig. Wir definieren $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ durch

$$x_k = y^*(e_k)\,. \tag{1.66}$$

Für ein $y \in c_e(\mathbb{K})$ der Form

$$y = \sum_{k=1}^{N} y_k e_k\,, \quad y_k \in \mathbb{K}, \quad N \in \mathbb{N}, \tag{1.67}$$

gilt dann

$$y^*(y) = y^*\left(\sum_{k=1}^{N} y_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{N} y_k y^*(e_k) = \sum_{k=1}^{N} y_k x_k\,. \tag{1.68}$$

Wir wählen nun

$$y_k = |x_k|^{q-1}\mathrm{sign}\,(x_k)\,. \tag{1.69}$$

Dann gilt

$$|y_k|^p = |x_k|^{p(q-1)} = |x_k|^q = x_k y_k\,,$$

und aus (1.68) folgt

$$\sum_{k=1}^{N} |x_k|^q = \sum_{k=1}^{N} x_k y_k = y^*(y) \le \|y^*\|\,\|y\|_p = \|y^*\| \left(\sum_{k=1}^{N} |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|y^*\| \left(\sum_{k=1}^{N} |x_k|^q\right)^{\frac{1}{p}},$$

also

$$\left(\sum_{k=1}^{N} |x_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \le \|y^*\|\,. \tag{1.70}$$

Grenzübergang $N \to \infty$ liefert $x \in \ell^q(\mathbb{K})$ und

$$\|x\|_q \le \|y^*\|\,. \tag{1.71}$$

Aus (1.64) und (1.68) folgt

$$(Tx)(y) = y^*(y)\,, \quad \text{für alle } y \in c_e(\mathbb{K}).$$

Nun ist $c_e(\mathbb{K})$ dicht in $(\ell^p(\mathbb{K}), \|\cdot\|_p)$, also folgt aus Satz 1.19

$$Tx = y^*\,, \tag{1.72}$$

also ist T surjektiv, und aus (1.65) und (1.71) folgt $\|Tx\| = \|x\|_q$, also ist T Isometrie. $\square$

Ohne Beweis geben wir einige weitere Ergebnisse zur Darstellung von Dualräumen an. Es gilt

$$c_0(\mathbb{K})^* \cong \ell^1(\mathbb{K})\,, \quad \ell^1(\mathbb{K})^* \cong \ell^\infty(\mathbb{K})\,. \tag{1.73}$$

Analoge Sätze gelten für Funktionenräume. Ist $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, so gilt

$$L^p(D;\mathbb{K})^* \cong L^q(D;\mathbb{K})\,, \quad 1 < p < \infty\,, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,. \tag{1.74}$$

Für $p = 2$ folgt (1.74) aus der Hilbertraumtheorie (später). Für beliebiges $p \in (1,\infty)$ erhalten wir analog zum Fall des Folgenraums $\ell^p(\mathbb{K})$ durch

$$(Tx)(y) = \int_D x(t)y(t)\,dt\,, \quad x \in L^q(D;\mathbb{K}),\ y \in L^p(D;\mathbb{K})\,, \tag{1.75}$$

eine lineare stetige Abbildung $T : L^q(D;\mathbb{K}) \to L^p(D;\mathbb{K})^*$ mit $\|Tx\| = \|x\|_q$. Aus der Hölderschen Ungleichung folgt nämlich

$$|(Tx)(y)| \le \int_D |x(t)|\,|y(t)|\,dt \le \left(\int_D |x(t)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_D |y(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_q\,\|y\|_p\,, \tag{1.76}$$

und für

$$y(t) = \operatorname{sign}(x(t))|x(t)|^{q-1}$$

gilt $|y(t)|^p = |x(t)|^q$ und daher

$$\begin{aligned}(Tx)(y) &= \int_D x(t)\operatorname{sign}(x(t))|x(t)|^{q-1}\,dt = \int_D |x(t)|^q\,dt \\ &= \left(\int_D |x(t)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_D |x(t)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_q\,\|y\|_p\,.\end{aligned}$$

Zum Beweis der Surjektivität von T konstruiert man zu gegebenem $y^* \in L^p(D;\mathbb{K})^*$ ein $x \in L^q(D;\mathbb{K})$ mit $Tx = y^*$ mit Hilfe des Satzes von Radon-Nikodym aus der Maß- und Integrationstheorie.

Weiter gilt

$$L^1(D;\mathbb{K})^* \cong L^\infty(D;\mathbb{K})\,. \tag{1.77}$$

Der Darstellungssatz von Riesz besagt, dass für kompaktes $D \subset \mathbb{R}^n$ der Raum $C(D;\mathbb{R})^*$ isometrisch isomorph ist zum Raum aller signierten regulären Maße auf der Borel-σ-Algebra auf D, insbesondere gibt es zu jedem $y^* \in C(D;\mathbb{R})^*$ ein solches Maß μ mit

$$y^*(y) = \int_D y\,d\mu\,. \tag{1.78}$$

2 Hilberträume

Definition 2.1 (Skalarprodukt, Prähilbertraum)
Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{K}$ heißt Skalarprodukt auf X, falls gilt

$$\langle x, x \rangle > 0\,, \quad \text{für alle } x \in X \text{ mit } x \neq 0, \tag{2.1}$$

$$\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}\,, \quad \text{für alle } x, y \in X, \tag{2.2}$$

$$\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle\ , \quad \text{für alle } x, y, z \in X \text{ und alle } \alpha, \beta \in \mathbb{K}. \tag{2.3}$$

$(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ heißt dann Prähilbertraum. □

Aus (2.2) und (2.3) folgt unmittelbar

$$\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle + \overline{\beta} \langle x, z \rangle\ , \quad \text{für alle } x, y, z \in X \text{ und alle } \alpha, \beta \in \mathbb{K}. \tag{2.4}$$

Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist ein Skalarprodukt also nichts anderes als eine symmetrische positiv definite Bilinearform.

Satz 2.2 (Schwarzsche Ungleichung, Hilbertraum)
Sei $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Prähilbertraum. Dann wird durch

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \tag{2.5}$$

eine Norm auf X definiert, für die die Schwarzsche Ungleichung

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|\,\|y\|\,, \quad \text{für alle } x, y \in X, \tag{2.6}$$

gilt. Ist X vollständig, so heißt X Hilbertraum.

Beweis: Wir zeigen zunächst (2.6). Seien $x, y \in X$ mit $y \neq 0$. Für jedes $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt

$$0 \leq \langle x + \alpha y, x + \alpha y \rangle = \langle x, x \rangle + \alpha \overline{\langle x, y \rangle} + \overline{\alpha} \langle x, y \rangle + |\alpha|^2 \langle y, y \rangle\ .$$

Setzen wir speziell

$$\alpha = -\frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle}\,,$$

so folgt

$$0 \leq \langle x, x \rangle - 2\frac{\langle x, y \rangle \overline{\langle x, y \rangle}}{\langle y, y \rangle} + \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle}\,,$$

und weiter

$$0 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle - |\langle x, y \rangle|^2\,,$$

also gilt (2.6). Nun die Normeigenschaften. Aus $\|x\| = 0$ folgt $\langle x, x \rangle = 0$ und damit $x = 0$ wegen (2.1). Für $\alpha \in \mathbb{K}$ und $x \in X$ gilt

$$\|\alpha x\|^2 = \langle \alpha x, \alpha x \rangle = \alpha \overline{\alpha} \langle x, x \rangle = |\alpha|^2 \|x\|^2\,.$$

Die Dreiecksungleichung gilt wegen

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \|x\|^2 + \langle x,y\rangle + \overline{\langle x,y\rangle} + \|y\|^2 \le \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2\,.\end{aligned}$$

□

Aus $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$ folgt Re $\langle x,y\rangle =$ Re $\langle y,x\rangle$, und es gilt

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\,\langle x,y\rangle + \|y\|^2\,, \quad \text{für alle } x,y \in X. \tag{2.7}$$

Aus der Schwarzschen Ungleichung folgt unmittelbar (siehe Übung), dass das Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle \to \mathbb{K}$ stetig ist.

Beispiele für Hilberträume: Zunächst

$$X = \mathbb{K}^n\,, \quad \langle x,y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}\,, \tag{2.8}$$

und weiter

$$X = \ell^2(\mathbb{K})\,, \quad \langle x,y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}\,, \tag{2.9}$$

sowie

$$X = L^2(D;\mathbb{K})\,, \quad \langle x,y\rangle = \int_D x(t)\overline{y(t)}\,dt\,, \tag{2.10}$$

für $D \subset \mathbb{R}^n$ offen. In den Fällen (2.9) und (2.10) folgt die Wohldefiniertheit des Skalarprodukts aus der Hölderschen Ungleichung, und die aus (2.5) resultierende Norm ist gerade die uns bereits bekannte.

Satz 2.3 (Parallelogrammgleichung)
Sei X Prähilbertraum. Dann gilt

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)\,, \quad \textit{für alle } x,y \in X. \tag{2.11}$$

Beweis: Direktes Ausrechnen mit der Definition (2.5) und den Eigenschaften des Skalarprodukts. □

Ebenso direkt kann man ausrechnen, dass sich in einem Prähilbertraum das Skalarprodukt durch die Norm ausdrücken läßt, und zwar

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)\,, \quad \mathbb{K} = \mathbb{R}, \tag{2.12}$$

und

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2)\,, \quad \mathbb{K} = \mathbb{C}. \tag{2.13}$$

Ist X ein normierter Raum, in dem die Parallelogrammgleichung (2.11) nicht gilt, so kann es natürlich kein Skalarprodukt geben, welches diese Norm gemäß (2.5) erzeugt. Auf diese Weise läßt sich zeigen (Übung), dass $(C(D;\mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$, D kompakter metrischer Raum, kein Prähilbertraum ist.

Gilt (2.11) in einem normierten Raum, so läßt sich zeigen, dass durch (2.12) beziehungsweise (2.13) ein Skalarprodukt definiert wird, also X ein Prähilbertraum ist (ohne Beweis).

Satz 2.4 (Projektionssatz)
Sei X Hilbertraum, sei $K \subset X$ nichtleer, konvex und abgeschlossen. Dann gibt es zu jedem $x \in X$ genau ein $y \in K$ mit

$$\|x - y\| = \inf_{z \in K} \|x - z\| \,. \tag{2.14}$$

Die Zuordnung $x \mapsto y$ definiert also eine Abbildung $P_K : X \to K$, sie heißt Projektion auf K.

Beweis: Sei $x \in X$, sei $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in K mit

$$\lim_{n \to \infty} \|x - y_n\| = \inf_{z \in K} \|x - z\| =: d \,.$$

Aus der Parallelogrammgleichung folgt

$$2(\|x - y_n\|^2 + \|x - y_m\|^2) = \|2x - (y_n + y_m)\|^2 + \|y_n - y_m\|^2 \,,$$

also

$$\|y_n - y_m\|^2 = 2(\|x - y_n\|^2 + \|x - y_m\|^2) - 4 \left\| x - \frac{y_n + y_m}{2} \right\|^2 \,. \tag{2.15}$$

Da K konvex ist, ist

$$\frac{y_n + y_m}{2} \in K \,,$$

also folgt

$$0 \le \|y_n - y_m\|^2 \le 2(\|x - y_n\|^2 + \|x - y_m\|^2) - 4d^2 \,, \tag{2.16}$$

also ist $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in X. Da X vollständig ist, existiert

$$y = \lim_{n \to \infty} y_n \,, \tag{2.17}$$

und da K abgeschlossen ist, gilt $y \in K$. Aus der Stetigkeit der Norm folgt

$$\|x - y\| = \lim_{n \to \infty} \|x - y_n\| = d \,.$$

Damit ist die Existenz von y bewiesen. Ist nun $\tilde{y} \in K$ mit $\|x - \tilde{y}\| = d$, so gilt wie in (2.15)

$$\begin{aligned} \|y - \tilde{y}\|^2 &= 2(\|x - y\|^2 + \|x - \tilde{y}\|^2) - 4 \left\| x - \frac{y + \tilde{y}}{2} \right\|^2 = 4d^2 - 4 \left\| x - \frac{y + \tilde{y}}{2} \right\|^2 \\ &\le 0 \,, \quad \text{da} \quad \frac{y + \tilde{y}}{2} \in K \,, \end{aligned}$$

also $y = \tilde{y}$. □

Satz 2.5 (Variationsungleichung)
Sei X Hilbertraum, $K \subset X$ nichtleer, konvex und abgeschlossen. Dann gibt es zu jedem $x \in X$ genau ein $y \in K$ mit

$$\operatorname{Re} \langle x - y, z - y \rangle \le 0 \,, \quad \textit{für alle } z \in K, \tag{2.18}$$

und es gilt $y = P_K x$.

Beweis: Eindeutigkeit: Sind $y, \tilde{y} \in K$ Lösungen von (2.18), so gelten

$$0 \geq \text{Re } \langle x - y, \tilde{y} - y \rangle \ ,$$
$$0 \geq \text{Re } \langle x - \tilde{y}, y - \tilde{y} \rangle \ .$$

Addition liefert

$$0 \geq \text{Re } \langle \tilde{y} - y, \tilde{y} - y \rangle = \|\tilde{y} - y\|^2 \, ,$$

also $y = \tilde{y}$. Es bleibt zu zeigen, dass $P_K x$ eine Lösung ist. Sei $z \in K$, $t \in [0,1]$ beliebig, dann gilt $(1-t)P_K x + tz \in K$, also

$$\begin{aligned} \|x - P_K x\|^2 &\leq \|x - (1-t)P_K x - tz\|^2 \\ &= \|x - P_K x\|^2 + 2 \, \text{Re } \langle x - P_K x, t(P_K x - z) \rangle + t^2 \|P_K x - z\|^2 \, , \end{aligned}$$

also (Division durch t)

$$0 \leq 2 \, \text{Re } \langle x - P_K x, P_K x - z \rangle + t \|P_K x - z\|^2 \, ,$$

Grenzübergang $t \to 0$ liefert die Behauptung. □

Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ wird aus (2.18) natürlich

$$\langle x - y, z - y \rangle \leq 0 \, , \quad \text{für alle } z \in K. \tag{2.19}$$

Folgerung 2.6 *Sei X Hilbertraum, $K \subset X$ nichtleer, konvex und abgeschlossen. Dann gilt*

$$\|P_K x - P_K \tilde{x}\| \leq \|x - \tilde{x}\| \, , \quad \textit{für alle } x, \tilde{x} \in X. \tag{2.20}$$

Beweis: Übung. □

Folgerung 2.7 *Sei X Hilbertraum, U abgeschlossener Unterraum von X. Dann ist $P_U x$ das eindeutig bestimmte Element $y \in U$, für welches gilt*

$$\langle x - y, z \rangle = 0 \, , \quad \textit{für alle } z \in U. \tag{2.21}$$

Beweis: Da mit $z \in U$ auch $z + P_U x \in U$ gilt, folgt aus (2.18)

$$\text{Re } \langle x - P_U x, z \rangle \leq 0 \, , \quad \text{für alle } z \in U, \tag{2.22}$$

setzen wir $-z$ für z ein, so folgt Re $\langle x - P_U x, z \rangle = 0$, und mit iz statt z folgt auch Im $\langle x - P_U x, z \rangle = 0$, also (2.21). Umgekehrt ist ein $y \in U$, welches (2.21) erfüllt, Lösung der Variationsungleichung (2.18). □

Definition 2.8 (Orthogonalität)
Sei X Prähilbertraum. Gilt für $x, y \in X$

$$\langle x, y \rangle = 0 \, , \tag{2.23}$$

so sagen wir, dass x und y orthogonal sind und schreiben $x \perp y$. Ist $Y \subset X$, so definieren wir das orthogonale Komplement $Y^\perp$ durch

$$Y^\perp = \{z : z \in X, \ z \perp y \ \textit{für alle } y \in Y\} \, . \tag{2.24}$$

□

Ist $x \perp y$, so ist (Pythagoras)

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \,.$$

Lemma 2.9 *Sei X Prähilbertraum, $Y \subset X$. Dann ist $Y^\perp$ ein abgeschlossener Unterraum von X mit $Y^\perp \cap Y = \{0\}$.*

Beweis: Folgt direkt aus der Bilinearität, Stetigkeit und Definitheit des Skalarprodukts. $\square$

Satz 2.10 *Sei X Hilbertraum, U abgeschlossener Unterraum von X. Dann ist $P_U : X \to U$ linear und stetig, $\ker(P_U) = U^\perp$, und es gilt*

$$P_{U^\perp} = id - P_U \,. \tag{2.25}$$

Beweis: Nach Folgerung 2.7 gilt

$$\langle x - P_U x, z\rangle = 0 \,, \quad \text{für alle } x \in X,\ z \in U, \tag{2.26}$$

also ist $x - P_U x \in U^\perp$. Für $x, \tilde{x} \in X$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ gilt

$$\begin{gathered} \alpha P_U x + \beta P_U \tilde{x} \in U \,, \\ \langle (\alpha x + \beta \tilde{x}) - (\alpha P_U x + \beta P_U \tilde{x}), z\rangle = 0 \,, \quad \text{für alle } z \in U, \end{gathered}$$

also

$$P_U(\alpha x + \beta \tilde{x}) = \alpha P_U x + \beta P_U \tilde{x} \,.$$

Aus (2.26) folgt

$$x \in U^\perp \quad \Leftrightarrow \quad P_U x \in U^\perp \quad \Leftrightarrow \quad P_U x = 0 \,.$$

Für $z \in U^\perp$ gilt

$$\langle x - (id - P_U)x, z\rangle = \langle P_U x, z\rangle = 0 \,,$$

und wegen $x - P_U x \in U^\perp$ folgt

$$(id - P_U)x = P_{U^\perp} x \,.$$

$\square$

Aus (2.25) folgt unmittelbar

$$\|x\|^2 = \|x - P_U x\|^2 + \|P_U x\|^2$$

und damit

$$\|P_U\| = 1 \,, \quad \text{falls } U \neq \{0\}.$$

Die Abbildung $x \mapsto (P_U x, x - P_U x)$ liefert eine Isometrie

$$(X, \|\cdot\|) \cong (U \times U^\perp, \|\cdot\|_2) \,.$$

Wir können X natürlich auch als direkte Summe

$$X = U \oplus U^\perp$$

im Sinne der Linearen Algebra auffassen.

Lemma 2.11 *Sei X Hilbertraum, $Y \subset X$. Dann gilt*

$$Y^{\perp\perp} = \overline{\operatorname{span} Y}\,. \tag{2.27}$$

Insbesondere gilt $Y^{\perp\perp} = Y$, falls Y ein abgeschlossener Unterraum ist.

Beweis: Übung. □

Satz 2.12 (Darstellungssatz von Riesz)
Sei X Hilbertraum. Dann gibt es zu jedem $x^* \in X^*$ genau ein $x \in X$ mit

$$x^*(z) = \langle z, x\rangle\,, \quad \textit{für alle } z \in X. \tag{2.28}$$

Die durch (2.28) definierte Abbildung $J : X \to X^*$ ist bijektiv, isometrisch und konjugiert linear, das heißt,

$$J(\alpha x + \beta y) = \overline{\alpha} J(x) + \overline{\beta} J(y) \tag{2.29}$$

gilt für alle $x, y \in X$ und alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Beweis: Durch (2.28) wird ein lineares Funktional $x^* : X \to \mathbb{K}$ definiert. Wegen

$$|x^*(z)| \le \|x\|\,\|z\|\,, \quad |x^*(x)| = \|x\|^2$$

ist $x^* \in X^*$, also J wohldefiniert, konjugiert linear und $\|J(x)\| = \|x\|$. Es bleibt die Surjektivität von J zu zeigen. Sei $x^* \in X^*$ mit $x^* \ne 0$. Wir setzen $U = \ker(x^*)$. Wegen $U \ne X$ ist $U^\perp \ne \{0\}$. Wir wählen ein $x \in U^\perp$ mit $x^*(x) = 1$. Für beliebiges $z \in X$ gilt

$$z = z - x^*(z)x + x^*(z)x\,, \quad z - x^*(z)x \in U\,,$$

also

$$\langle z, x\rangle = \underbrace{\langle z - x^*(z)x, x\rangle}_{=0} + \langle x^*(z)x, x\rangle = x^*(z)\,\langle x, x\rangle\;,$$

also

$$x^* = J\left(\frac{x}{\|x\|^2}\right)\,.$$

□

Für den Hilbertraum $X = L^2(D;\mathbb{K})$ bedeutet Satz 2.12, dass zu jedem Funktional $x^* \in X^*$ genau eine Funktion $x \in L^2(D;\mathbb{K})$ existiert mit

$$x^*(z) = \int_D z(t)\overline{x}(t)\,dt\,, \quad \text{für alle } z \in L^2(D;\mathbb{K}).$$

Ist U abgeschlossener Unterraum eines Hilbertraums X mit $U \ne X$, so gibt es ein $x \in X$ mit

$$\operatorname{dist}(x, U) = \inf_{z\in U} \|x - z\| = 1\,, \quad \|x\| = 1\,, \tag{2.30}$$

da jedes $x \in U^\perp$ mit $\|x\| = 1$ diese Eigenschaft hat. In einem Banachraum, der kein Hilbertraum ist, gilt der Projektionssatz im allgemeinen nicht, auch nicht dann, wenn die konvexe Menge K ein Unterraum ist, und ein $x \in X$ mit (2.30) muss nicht existieren. Stattdessen gilt das folgende etwas schwächere Resultat.

Lemma 2.13 *Sei X normierter Raum, U abgeschlossener Unterraum von X mit $U \neq X$. Dann gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X mit*

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{dist}\,(x_n, U) = 1\,, \quad \|x_n\| = 1 \quad \textit{für alle } n \in \mathbb{N}. \tag{2.31}$$

Beweis: Sei $\tilde{x} \in X \setminus U$, sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in U mit

$$\lim_{n\to\infty} \|\tilde{x} - y_n\| = \mathrm{dist}\,(\tilde{x}, U)\,.$$

Da U abgeschlossen ist, ist $\mathrm{dist}\,(\tilde{x}, U) > 0$. Wir definieren

$$x_n = \frac{\tilde{x} - y_n}{\|\tilde{x} - y_n\|}\,. \tag{2.32}$$

Für beliebiges $z \in U$ gilt

$$\|x_n - z\| = \frac{1}{\|\tilde{x} - y_n\|}\|\tilde{x} - \underbrace{(y_n + \|\tilde{x} - y_n\|z)}_{\in U}\| \geq \frac{1}{\|\tilde{x} - y_n\|}\mathrm{dist}\,(\tilde{x}, U)\,,$$

also

$$1 = \|x_n\| \geq \mathrm{dist}\,(x_n, U) \geq \frac{1}{\|\tilde{x} - y_n\|}\mathrm{dist}\,(\tilde{x}, U) \to 1 \quad \text{für } n \to \infty.$$

□

Folgerung 2.14 *Sei X ein normierter Raum mit $\dim(X) = \infty$. Dann ist die abgeschlossene Einheitskugel $K(0;1) = \{x : x \in X,\ \|x\| \leq 1\}$ nicht kompakt.*

Beweis: $K(0;1)$ ist Teilmenge von X und daher in natürlicher Weise ein metrischer Raum. Es genügt daher, eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $K(0;1)$ zu konstruieren, die keine konvergente Teilfolge hat. Sei $x_1 \in K(0;1)$ mit $\|x_1\| = 1$. Seien $x_1, \ldots, x_n$ bereits definiert, wähle x_{n+1} gemäß Lemma 2.13 mit $\|x_{n+1}\| = 1$ und

$$\mathrm{dist}\,(x_{n+1}, U_n) \geq \frac{1}{2}\,, \quad \text{wobei} \qquad U_n = \mathrm{span}\,\{x_1, \ldots, x_n\}\,.$$

Dann gilt

$$\|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2}\,, \quad n \neq m\,,$$

also hat $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine konvergente Teilfolge. □

Ist X endlichdimensional, $\dim(X) = n$, so ist $X \simeq \mathbb{K}^n$ nach Satz 1.6. Wir haben also insgesamt bewiesen: **In einem normierten Raum ist die Einheitskugel genau dann kompakt, wenn der Raum endlichdimensional ist.**

Definition 2.15 (Orthonormalbasen)
Sei X Hilbertraum. Eine Menge $S \subset X$ heißt Orthonormalsystem (in X) falls gilt $\|e\| = 1$ für alle $e \in S$ und $e \perp f$ für alle $e, f \in S$ mit $e \neq f$. Ein Orthonormalsystem S heißt Orthonormalbasis, falls es kein Orthonormalsystem $\tilde{S}$ gibt mit $S \subset \tilde{S}$ und $S \neq \tilde{S}$. □

Eine Orthonormalbasis wird oft auch "vollständiges Orthonormalsystem" genannt.

In der Linearen Algebra beweist man, dass jeder Vektorraum eine Basis hat. Ganz analog beweist man, dass jeder Hilbertraum eine Orthonormalbasis hat.

Satz 2.16 *Sei X ein Hilbertraum, $X \neq \{0\}$. Dann hat X eine Orthonormalbasis. Zu jedem Orthonormalsystem S_0 gibt es eine Orthonormalbasis S mit $S_0 \subset S$.*

Beweis: Sei $x \in X$, $x \neq 0$, dann ist $S_0 = \{x/\|x\|\}$ ein Orthonormalsystem. Sei nun S_0 ein beliebiges Orthonormalsystem. Wir betrachten die Menge

$$\mathcal{M} = \{S : S \supset S_0, S \text{ ist Orthonormalsystem}\}.$$

$\mathcal{M}$ ist nichtleer, und die Inklusion von Mengen definiert eine Halbordnung "$\leq$" auf $\mathcal{M}$,

$$S_1 \leq S_2 \quad \Leftrightarrow \quad S_1 \subset S_2 .$$

Ist $\mathcal{V}$ eine vollständig geordnete Teilmenge von $\mathcal{M}$ (das heißt, für beliebige $S_1, S_2 \in \mathcal{V}$ gilt $S_1 \leq S_2$ oder $S_2 \leq S_1$), so ist

$$T = \bigcup_{S \in \mathcal{V}} S$$

ebenfalls ein Element von $\mathcal{M}$ (da aus $e, f \in T$ folgt, dass es ein $S \in \mathcal{V}$ gibt mit $e, f \in S$, also $\|e\| = \|f\| = 1$ und $\langle e, f\rangle = 0$), also ist T eine obere Schranke von $\mathcal{V}$ in $\mathcal{M}$. Also hat jede vollständig geordnete Teilmenge von $\mathcal{M}$ eine obere Schranke. Aus dem Zornschen Lemma folgt nun, dass $\mathcal{M}$ mindestens ein maximales Element S besitzt, das heißt, ein Element, zu dem es kein $\tilde{S} \in \mathcal{M}$ gibt mit $S \subset \tilde{S}$ und $S \neq \tilde{S}$. Also ist S Orthonormalbasis. □

Satz 2.17 *Sei X ein separabler Hilbertraum mit* $\dim(X) = \infty$. *Dann hat jede Orthonormalbasis S abzählbar unendlich viele Elemente.*

Beweis: Ist S eine überabzählbare Orthonormalbasis, so ist X nicht separabel, da $\|e - f\| = \sqrt{2}$ gilt für Elemente $e, f \in S$ mit $e \neq f$ (Argument wie im Beweis der Nichtseparabilität des $\ell^\infty(\mathbb{K})$). Ist S ein endliches Orthonormalsystem, und ist $x \notin U = \text{span}\,(S)$, so ist

$$S \cup \left\{ \frac{x - P_U x}{\|x - P_U x\|} \right\}$$

ebenfalls ein Orthonormalsystem, also S keine Orthonormalbasis. □

Lemma 2.18 *Sei X ein Hilbertraum, $S \subset X$ ein Orthonormalsystem. Sind $e_1, \dots, e_n \in S$, so gilt für $U = \text{span}\,\{e_1, \dots, e_n\}$*

$$P_U x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle \, e_k , \quad \textit{für alle } x \in X. \tag{2.33}$$

Es gilt außerdem die Besselsche Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k\rangle|^2 \leq \|x\|^2 . \tag{2.34}$$

Beweis: Für

$$y = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle \, e_k$$

gilt $y \in U$ und

$$\langle x - y, e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle \langle e_k, e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle - \langle x, e_j \rangle = 0 \,,$$

also auch $\langle x - y, z \rangle = 0$ für alle $z \in U$ und damit $y = P_U x$ nach Folgerung 2.7. Die Besselsche Ungleichung folgt wegen

$$\begin{aligned} \|P_U x\|^2 &= \left\langle \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle \, e_k, \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle \, e_j \right\rangle = \sum_{j,k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle \, \overline{\langle x, e_j \rangle} \, \langle e_k, e_j \rangle \\ &= \sum_{k=1}^{n} |\, \langle x, e_k \rangle \,|^2 \end{aligned}$$

aus der Ungleichung $\|P_U x\| \leq \|x\|$. □

Folgerung 2.19 *Sei X ein Hilbertraum, $S \subset X$ ein Orthonormalsystem, $x \in X$. Dann ist die Menge*

$$S_x = \{e : e \in S,\ \langle x, e \rangle \neq 0\} \tag{2.35}$$

endlich oder abzählbar unendlich.

Beweis: Wegen (2.34) kann es zu jedem $m \in \mathbb{N}$ nicht mehr als $m\|x\|^2$ verschiedene $e \in S$ geben mit $|\, \langle x, e \rangle \,| > 1/m$. □

Ein Orthonormalsystem S in X ist linear unabhängig und daher Vektorraumbasis des erzeugten Unterraums span$\,(S)$. Die Bedeutung der Orthonormalsysteme und -basen liegt nun darin, dass wir auch Elemente im Abschluss $\overline{\text{span}\,(S)}$ darstellen können, und zwar als Grenzwert einer Reihe in der Form

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle \, e_k \,, \quad e_k \in S \,. \tag{2.36}$$

Definition 2.20 (Reihe im normierten Raum)
Sei X normierter Raum, sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ Folge in X. Falls die Folge der Partialsummen

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k \tag{2.37}$$

gegen ein $s \in X$ konvergiert, so sagen wir, dass die zugehörige Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ konvergiert, und definieren

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = s \,. \tag{2.38}$$

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ heißt absolut konvergent, falls

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty \,. \tag{2.39}$$

□

Aus der Stetigkeit der Addition und Skalarmultiplikation im normierten Raum folgen die Rechenregeln

$$\sum_{k=1}^{\infty}(x_k + y_k) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k + \sum_{k=0}^{\infty} y_k\,, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \alpha x_k = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} x_k\,, \tag{2.40}$$

$\alpha \in \mathbb{K}$, die jeweils gültig sind, wenn die Grenzwerte auf der rechten Seite existieren.

Satz 2.21 *Sei X Banachraum, sei die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ absolut konvergent. Dann ist sie auch konvergent, und es gilt*

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} x_k \right\| \le \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|\,. \tag{2.41}$$

Jede Umordnung der Reihe konvergiert ebenfalls, und zwar gegen den gleichen Grenzwert.

Beweis: Sei

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|\,,$$

dann gilt für die in (2.37) definierten Partialsummen für $n > m$

$$\|s_n - s_m\| \le \sum_{k=m+1}^{n} \|x_k\| = |\sigma_n - \sigma_m|\,.$$

Da (σ_n) Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ ist, ist (s_n) Cauchyfolge in X, also konvergent. Wegen $\|s_n\| \le |\sigma_n|$ folgt (2.41) aus

$$\|s\| = \lim_{n\to\infty} \|s_n\| \le \lim_{n\to\infty} |\sigma_n| = \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|\,.$$

Sei

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{x}_k\,, \quad \tilde{x}_k = x_{\pi(k)}\,, \quad \pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad \text{bijektiv},$$

eine Umordnung von $\sum x_k$ mit den Partialsummen

$$\tilde{s}_n = \sum_{k=1}^{n} \tilde{x}_k\,.$$

Sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen M so, dass

$$\sum_{k=M+1}^{\infty} \|x_k\| \le \varepsilon\,,$$

und N so, dass $N \ge M$ und $\pi(\{1,\dots,N\}) \supset \{1,\dots,M\}$. Dann gilt für alle $n > N$

$$\|\tilde{s}_n - s_n\| \le \sum_{k=M+1}^{\infty} \|x_k\| \le \varepsilon\,,$$

also folgt $\|\tilde{s}_n - s_n\| \to 0$. □

Satz 2.22 *Sei X ein separabler Hilbertraum mit $\dim(X) = \infty$, sei $S = \{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ ein Orthonormalsystem. Dann sind äquivalent:*

(i) *S ist Orthonormalbasis.*

(ii) $S^\perp = \{0\}$.

(iii) $X = \overline{\operatorname{span}(S)}$.

(iv) *Für alle $x \in X$ gilt*

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle \, e_k \, . \tag{2.42}$$

(v) *Für alle $x \in X$ gilt die* ***Parsevalsche Gleichung***

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} | \langle x, e_k \rangle |^2 \, . \tag{2.43}$$

Beweis: (i)⇒(ii): Ist $x \in S^\perp$, $x \neq 0$, so ist

$$S \cup \left\{ \frac{x}{\|x\|} \right\}$$

ein Orthonormalsystem, also S keine Orthonormalbasis.
(ii)⇒(iii): Es gilt nach Lemma 2.11

$$\overline{\operatorname{span}(S)} = S^{\perp\perp} = \{0\}^\perp = X \, .$$

(iii)⇒(iv): Sei $U_m = \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_m\}$, $P_m = P_{U_m}$. Sei $x \in X$ beliebig, sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in $\operatorname{span}(S)$ mit $x_n \to x$, sei $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ streng wachsende Folge in $\mathbb{N}$ mit $x_n \in U_{m_n}$. Dann gilt

$$0 \le \|x - P_{m_n} x\| \le \|x - x_n\| \to 0 \, ,$$

und da $(\|x - P_n x\|)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fällt, folgt aus Satz 2.18, dass

$$0 \le \|x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle \, e_k\| = \|x - P_n x\| \to 0 \, .$$

(iv)⇒(v): Für die Partialsummen $s_n = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle \, e_k$ gilt

$$\|s_n\|^2 = \langle s_n, s_n \rangle = \sum_{k=1}^{n} | \langle x, e_k \rangle |^2 \, ,$$

Grenzübergang $n \to \infty$ liefert (2.43).
(v)⇒(i): Ist S keine Orthonormalbasis, so gibt es ein $x \in X$ mit $\|x\| = 1$, so dass $S \cup \{x\}$ Orthonormalsystem ist. Für dieses x gilt (2.43) nicht. □

Aus Satz 2.22 folgt sofort, dass im $\ell^2(\mathbb{K})$ die Einheitsvektoren eine Orthonormalbasis bilden, da dann $\operatorname{span}(S) = c_e(\mathbb{K})$ gilt und $c_e(\mathbb{K})$ dicht ist in $\ell^2(\mathbb{K})$.

Die Reihe in (2.42) ist im allgemeinen nicht absolut konvergent! Beispiel: Für

$$x_k = \frac{1}{k}$$

gilt $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{K})$, aber $\| \langle x, e_k\rangle e_k\|_2 = \frac{1}{k}$, wenn wir die Einheitsvektoren als Orthonormalbasis wählen. Nichtsdestrotrotz zeigt (2.43), dass in der Situation von Satz 2.22 der Grenzwert x nicht von der Reihenfolge der Basisvektoren abhängt.

Ist X ein nichtseparabler Hilbertraum, so läßt sich eine analoge Charakterisierung beweisen, da zu jedem $x \in X$ das Skalarprodukt $\langle x, e\rangle$ nur für höchstens abzählbar viele Elemente $e \in S$ von Null verschieden ist (Lemma 2.19).

Satz 2.23 *Sei X ein separabler Hilbertraum mit* $\dim(X) = \infty$. *Dann gilt*

$$X \cong \ell^2(\mathbb{K})\,. \tag{2.44}$$

Beweis: Sei $S = \{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ eine Orthonormalbasis von X. Zu jedem $x \in X$ definieren wir eine Folge Tx durch

$$(Tx)_k = \langle x, e_k\rangle\,, \quad x \in X\,.$$

Aus der Parsevalschen Gleichung folgt, dass $Tx \in \ell^2(\mathbb{K})$ und $\|Tx\|_2 = \|x\|_X$ gelten. T ist offensichtlich linear und injektiv. Wir definieren $R : c_e(\mathbb{K}) \to X$ durch

$$R(y) = \sum_{k=1}^{m} y_k e_k\,, \quad \text{falls } y = (y_1, \ldots, y_m, 0, \ldots).$$

Dann ist R linear und stetig (sogar isometrisch), also läßt sich R nach Satz 1.19 eindeutig zu einer linearen stetigen Abbildung $R : \ell^2(\mathbb{K}) \to X$ fortsetzen. Sei nun $y \in \ell^2(\mathbb{K})$, sei $(y^n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $c_e(\mathbb{K})$ mit $y^n \to y$. Dann gilt $y^n = TRy^n \to TRy$, also $y = TRy$ und damit ist T surjektiv. □

Aus Satz 2.23 folgt, dass alle separablen unendlichdimensionalen Hilberträume isometrisch isomorph sind. Eine zunächst überraschende Konsequenz dieses Resultats ist, dass

$$L^2(D;\mathbb{K}) \cong \ell^2(\mathbb{K})\,,$$

falls etwa D eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist.

Wir betrachten nun im $L^2((-\pi,\pi);\mathbb{C})$ die Funktionen

$$e_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikt}\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,, \tag{2.45}$$

und wollen zeigen, dass

$$S = \{e_k : k \in \mathbb{Z}\} \tag{2.46}$$

eine Orthonormalbasis ist. Gelingt uns das, so erhalten wir aus Satz 2.22, dass für jedes $x \in L^2((-\pi,\pi);\mathbb{C})$ gilt

$$x = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e_k\,, \quad c_k = \langle x, e_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} x(s) e^{-iks}\,ds\,, \tag{2.47}$$

wobei der Grenzwert im Sinne der L^2-Konvergenz zu verstehen ist. Die Reihe in (2.47) heißt **Fourierreihe** von x.

Zunächst gilt

$$\langle e_k, e_j \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-j)t} \, dt = \delta_{jk} \tag{2.48}$$

(δ_{jk} = Kronecker-Delta), also ist S ein Orthonormalsystem. Nach Satz 2.22 genügt es zu zeigen, dass span (S) dicht ist in $L^2((-\pi, \pi); \mathbb{C})$. Wir betrachten zunächst die Räume

$$C_{per}([-\pi, \pi]; \mathbb{C}) = \{x | \; x : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C} \text{ stetig}, \, x(-\pi) = x(\pi)\} \,, \tag{2.49}$$

$$C_{2\pi}(\mathbb{R}; \mathbb{C}) = \{x | \; x : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ stetig und } 2\pi\text{-periodisch}\} \,. \tag{2.50}$$

Mit der Supremumsnorm versehen sind beide Räume Banachräume, vermittels der Restriktion

$$T : C_{2\pi}(\mathbb{R}; \mathbb{C}) \to C_{per}([-\pi, \pi]; \mathbb{C}) \,, \quad Tx = x|[-\pi, \pi] \tag{2.51}$$

sind sie isometrisch isomorph.

Definition 2.24 (Cesaro-Konvergenz)
Sei X normierter Raum. Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X heißt Cesaro-konvergent gegen $x \in X$, falls

$$\lim_{N \to \infty} \sigma_N = x \,, \quad \sigma_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} x_n \,. \tag{2.52}$$

□

Jede gegen ein $x \in X$ konvergente Folge in X ist auch Cesaro-konvergent gegen x, die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht (Übung).

Zu einem $x \in C_{per}([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$ betrachten wir die Partialsumme S_n der zugehörigen Fourierreihe,

$$S_n = \sum_{k=-n}^{n} \langle x, e_k \rangle \, e_k \,, \tag{2.53}$$

$$S_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(s) e^{-iks} \, ds \cdot e^{ikt} \,, \tag{2.54}$$

sowie die gemittelten Partialsummen

$$\sigma_N = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} S_n \,, \tag{2.55}$$

$$\sigma_N(t) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(s) e^{-iks} \, ds \cdot e^{ikt} \,. \tag{2.56}$$

Offensichtlich gilt $S_n, \sigma_N \in C_{per}([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$ für alle $n, N \in \mathbb{N}$.

Satz 2.25 *Für alle $x \in C_{per}([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$ gilt*

$$\lim_{N \to \infty} \|x - \sigma_N\|_\infty = 0 \tag{2.57}$$

für die in (2.56) definierten Funktionen σ_N.

Beweis: Wir fassen gemäß (2.49),(2.51) x und σ_N als Elemente von $C_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ auf. Zunächst gilt

$$\begin{aligned}\sigma_N(t) &= \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(s)e^{-iks}\,ds\cdot e^{ikt}\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(s)\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=-n}^{n} e^{ik(t-s)}\,ds\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(s)K_N(t-s)\,ds\,,\end{aligned}$$

wobei wir definieren

$$K_N(s) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=-n}^{n} e^{iks}\,,\quad s\in\mathbb{R}. \tag{2.58}$$

Die Funktion K_N heißt **Fejér-Kern** der Ordnung N. Da K_N ebenfalls 2π-periodisch ist, gilt

$$\begin{aligned}\sigma_N(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(s)K_N(t-s)\,ds = \frac{1}{2\pi}\int_{t-\pi}^{t+\pi} x(t-s)K_N(s)\,ds\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t-s)K_N(s)\,ds\,.\end{aligned} \tag{2.59}$$

Aus (2.58) folgt, da $\int_{-\pi}^{\pi} e^{iks}\,ds = 0$ für $k\in\mathbb{Z}$, $k\neq 0$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_N(s)\,ds = \frac{N+1}{N+1} = 1\,, \tag{2.60}$$

$$K_N(0) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}(2n+1) = N+1\,. \tag{2.61}$$

Eine explizite Rechnung (Übung) zeigt, dass

$$K_N(s) = \frac{1}{N+1}\frac{\sin^2\left(\frac{(N+1)s}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{s}{2}\right)}\,,\quad \text{für alle } s\neq 0. \tag{2.62}$$

also ist insbesondere $K_N\geq 0$. Sei nun $\delta>0$. Für alle s mit $\delta\leq|s|\leq\pi$ gilt also

$$|K_N(s)| \leq \frac{1}{N+1}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)} =: c(N,\delta)\,. \tag{2.63}$$

Sei nun $\varepsilon>0$. Wir wählen $\delta>0$ mit $|x(t)-x(t-s)|\leq\varepsilon$ für alle $s,t\in\mathbb{R}$ mit $|s|\leq\delta$ (möglich, da x gleichmäßig stetig ist), und weiter ein $N_0\in\mathbb{N}$ mit $c(N_0,\delta)<\varepsilon$. Dann gilt für alle $t\in[-\pi,\pi]$ und $N\geq N_0$

$$\begin{aligned}|x(t)-\sigma_N(t)| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x(t)-x(t-s))K_N(s)\,ds\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x(t)-x(t-s)|K_N(s)\,ds\\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}|x(t)-x(t-s)|K_N(s)\,ds + \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{-\delta}+\int_{\delta}^{\pi}\right)2\|x\|_\infty K_N(s)\,ds\\ &\leq \varepsilon\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}K_N(s)\,ds + 2\|x\|_\infty c(N,\delta) \leq (1+2\|x\|_\infty)\varepsilon\,.\end{aligned}$$

Damit ist (2.57) bewiesen. $\square$

Satz 2.26 *Die Menge*

$$S = \{e_k : k \in \mathbb{Z}\}\,, \quad e_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikt}\,, \tag{2.64}$$

ist eine Orthonormalbasis im $L^2((-\pi,\pi);\mathbb{C})$.

Beweis: Da die oben definierten Funktionen σ_N in span (S) liegen, ist nach Satz 2.25 der Unterraum span (S) dicht in $C_{per}([-\pi,\pi];\mathbb{C})$ bezüglich der Supremumsnorm, also auch bezüglich der L^2-Norm wegen

$$\|x - \sigma_N\|_2 \le \sqrt{2\pi}\|x - \sigma_N\|_\infty\,.$$

Wie man unmittelbar sieht, ist $C_{per}([-\pi,\pi];\mathbb{C})$ dicht in $C([-\pi,\pi];\mathbb{C})$ bezüglich der L^2-Norm. Weiter ist $C([-\pi,\pi];\mathbb{C})$ dicht in $L^2((-\pi,\pi);\mathbb{C})$ (folgt etwa aus Satz 13.9, Analysis 4). Also ist span (S) dicht in $L^2((-\pi,\pi);\mathbb{C})$, und mit Satz 2.22 folgt die Behauptung. $\square$

Aus der Orthonormalbasis S in (2.64) im komplexwertigen Fall läßt sich eine Orthonormalbasis für den reellwertigen Fall gewinnen. Wir definieren

$$\tilde{e}_k = \begin{cases} \frac{1}{i\sqrt{2}}(e_k - e_{-k})\,, & k > 0\,, \\ e_0\,, & k = 0\,, \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(e_k + e_{-k})\,, & k < 0\,. \end{cases} \tag{2.65}$$

Dann ist

$$\tilde{S} = \{\tilde{e}_k : k \in \mathbb{Z}\} \tag{2.66}$$

ebenfalls ein Orthonormalsystem, und wegen $\mathrm{span}_{\mathbb{C}}(\tilde{S}) = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}(S)$ ist $\tilde{S}$ auch Orthonormalbasis im $L^2((-\pi,\pi);\mathbb{C})$. Es gilt nun

$$\tilde{e}_k(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kt\,, & k > 0\,, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,, & k = 0\,, \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kt\,, & k < 0\,, \end{cases} \tag{2.67}$$

und es ergibt sich, dass auch $\tilde{S}$ ein Orthonormalsystem ist im $L^2((-\pi,\pi);\mathbb{R})$, für das gilt $\mathrm{span}_{\mathbb{R}}(\tilde{S}) = L^2((-\pi,\pi);\mathbb{R})$ und damit Orthonormalbasis im $L^2((-\pi,\pi);\mathbb{R})$.

Die abstrakte Hilbertraumtheorie liefert wie dargestellt die Konvergenz

$$S_n = \sum_{k=-n}^{n} \langle x, e_k\rangle\, e_k \;\to\; x$$

im Sinne der L^2-Norm für jedes $x \in L^2((-\pi,\pi);\mathbb{C})$. Im allgemeinen liegt weder gleichmäßige noch punktweise Konvergenz vor. Ist aber $t \in (-\pi,\pi)$ ein Punkt, in dem

$$\limsup_{h \downarrow 0} \left| \frac{x(t+h) + x(t-h) - 2\xi}{h} \right| = 0 \tag{2.68}$$

für ein $\xi \in \mathbb{C}$ gilt, so gilt (Beweis siehe Alt S.278)

$$\lim_{n\to\infty} S_n(t) = \xi\,. \tag{2.69}$$

Die Bedingung (2.68) ist beispielsweise erfüllt, wenn eine rechtsseitige Ableitung der Form

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{x(t+h) - \xi_+}{h}, \quad \xi_+ = x(t+) = \lim_{\substack{h \downarrow 0 \\ h \neq 0}} x(t+h), \tag{2.70}$$

und analog eine linksseitige Ableitung existieren, es gilt dann

$$\lim_{n \to \infty} S_n(t) = \frac{x(t+) + x(t-)}{2}. \tag{2.71}$$

Selbst für stetige 2π-periodische Funktionen x braucht $S_n(t)$ nicht in jedem Punkt t zu konvergieren, es gilt aber, dass die Menge der Punkte, in denen $S_n(t)$ nicht konvergiert, das Lebesgue-Maß Null hat.

Wir betrachten die durch

$$x(t) = \frac{\pi - t}{2}, \quad t \in [0, 2\pi), \quad x(t + 2k\pi) = x(t), \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{2.72}$$

definierte 2π-periodische Funktion $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit den Unstetigkeitsstellen $t = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Die Partialsummen der zugehörigen Fourierentwicklung haben die Form

$$S_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kt}{k}. \tag{2.73}$$

Es gilt $S_n \to x$ gleichmäßig in jedem kompakten Intervall I, welches keine Unstetigkeitsstelle enthält, sowie

$$\lim_{n \to \infty} S_n(0) = \frac{x(0+) - x(0-)}{2} = 0,$$

Andererseits gilt

$$S_n(t_n) - x(t_n) > 0.089\pi, \quad t_n = \frac{\pi}{n + \frac{1}{2}}.$$

(Siehe Königsberger, Analysis 1, Kapitel 17.) Der Funktionswert der Approximation S_n entfernt sich vom Intervall $[-\pi/2, \pi/2]$, welches das Unstetigkeitsverhalten in $t = 0$ charakterisiert, um einen Betrag von fast 10% der Länge π dieses Intervalls, unabhängig davon, wie groß n gewählt wird. Dieser Sachverhalt wird als **Gibbs-Phänomen** bezeichnet.

3 Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit

Auf dem folgenden Satz von Baire beruhen eine ganze Reihe von Sätzen der Funktionalanalysis.

Satz 3.1 (Baire)
Sei (X, d) vollständiger metrischer Raum, sei $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge offener Teilmengen von X, sei U_n dicht in X für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist auch

$$D = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n \tag{3.1}$$

dicht in X.

Beweis: Es genügt zu zeigen: Ist $V \subset X$ nichtleer und offen, so ist $V \cap D \neq \emptyset$. Sei V eine solche Menge. Wir wählen $x_1 \in U_1 \cap V$ (möglich, da U_1 dicht in X) und ein $\varepsilon_1 > 0$ mit

$$x_1 \in K(x_1; \varepsilon_1) \subset U_1 \cap V\,. \tag{3.2}$$

Seien $(x_1, \varepsilon_1), \ldots, (x_{n-1}, \varepsilon_{n-1})$ bereits definiert. Wir wählen

$$x_n \in U_n \cap B(x_{n-1}; \varepsilon_{n-1}) \qquad \text{(möglich, da } U_n \text{ dicht in } X\text{)} \tag{3.3}$$

und $\varepsilon_n > 0$ mit

$$x_n \in K(x_n; \varepsilon_n) \subset U_n \cap B(x_{n-1}; \varepsilon_{n-1})\,, \quad \varepsilon_n \leq \frac{1}{2}\varepsilon_{n-1}\,. \tag{3.4}$$

Dann ist

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \varepsilon_n \leq \cdot 2^{-n+1}\varepsilon_1\,, \quad d(x_m, x_n) \leq 2 \cdot 2^{-n+1}\varepsilon_1 \quad \text{für alle } m > n,$$

also ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge. Sei $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Da $K(x_n; \varepsilon_n)$ abgeschlossen ist und $K(x_n; \varepsilon_n) \subset K(x_{n-1}; \varepsilon_{n-1})$ für alle $n \in \mathbb{N}$, folgt

$$x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K(x_n; \varepsilon_n) \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n \cap V = D \cap V\,.$$

□

Definition 3.2 *Sei (X, d) metrischer Raum, $M \subset X$. M heißt nirgends dicht in X, falls* $\operatorname{int}(\overline{M}) = \emptyset$ *(das heißt, der Abschluss von M hat keine inneren Punkte).* □

Eine abgeschlossene Menge $A \subset X$ ist nirgends dicht genau dann, wenn ihr Komplement $X \setminus A$ offen und dicht ist.

Folgerung 3.3 *Sei (X, d) vollständiger metrischer Raum, sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge abgeschlossener, nirgends dichter Teilmengen von X. Dann ist*

$$X \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \tag{3.5}$$

dicht in X.

Beweis: Wir wenden Satz 3.1 an mit $U_n = X \setminus A_n$. □

Satz 3.1 und Folgerung 3.3 beinhalten insbesondere, dass $D = \cap_n U_n$ beziehungsweise $X \setminus \cup_n A_n$ nichtleer sind. Sie liefern also eine Methode, Existenzbeweise zu führen. Beispielsweise kann man auf diese Weise zeigen (siehe Werner S.139), dass die Menge der stetigen, an keiner Stelle differenzierbaren Funktionen dicht liegt in $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$.

Folgerung 3.4 *Sei (X,d) vollständiger metrischer Raum, sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge abgeschlossener Teilmengen von X mit*

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \,. \tag{3.6}$$

Dann gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\operatorname{int}(A_k) \neq \emptyset$.

Beweis: Folgt direkt aus Folgerung 3.3. □

Aus Folgerung 3.4 erhält man beispielsweise (Übung), dass es keinen Banachraum (und damit natürlich auch keinen Hilbertraum) geben kann, der eine abzählbar unendliche Vektorraumbasis hat.

Teilmengen von X der Form

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n \,, \quad M_n \text{ nirgends dicht in } X,$$

nennt man auch **von 1. Kategorie** in X. Teilmengen von X, die nicht von 1. Kategorie sind, nennt man **von 2. Kategorie** in X. Nach dieser Terminologie ist ein vollständiger metrischer Raum immer von 2. Kategorie (in sich selbst).

Der folgende Satz beinhaltet das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit.

Satz 3.5 (Banach-Steinhaus)
Sei X Banachraum, Y normierter Raum, sei $\mathcal{T} \subset L(X;Y)$. Es gelte

$$\sup_{T\in\mathcal{T}} \|Tx\| < \infty \,, \quad \textit{für alle } x \in X. \tag{3.7}$$

Dann gilt

$$\sup_{T\in\mathcal{T}} \|T\| < \infty \,. \tag{3.8}$$

Für eine Familie linearer stetiger Operatoren gilt also, dass aus deren punktweisen Beschränktheit auch die gleichmäßige Beschränktheit folgt.
Beweis: Wir definieren für $n \in \mathbb{N}$

$$A_n = \{x : x \in X, \sup_{T\in\mathcal{T}} \|Tx\| \le n\} \,. \tag{3.9}$$

A_n ist abgeschlossen, da

$$A_n = \bigcap_{T\in\mathcal{T}} f_T^{-1}([0,n]) \,, \quad f_T(x) = \|Tx\| \,,$$

und nach Voraussetzung (3.7) gilt

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \,.$$

Wegen Folgerung 3.4 finden wir ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\operatorname{int}(A_k) \neq \emptyset$. Sei $x_0 \in A_k$, $\varepsilon > 0$ mit $K(x_0;\varepsilon) \subset A_k$. Sei nun $x \in X$ beliebig, $x \neq 0$, dann ist

$$z = x_0 + \varepsilon \frac{x}{\|x\|} \in K(x_0;\varepsilon)\,,$$

also

$$\|Tx\| = \left\| T\left(\frac{\|x\|}{\varepsilon}(z - x_0)\right)\right\| = \frac{\|x\|}{\varepsilon}\|Tz - Tx_0\| \leq \frac{\|x\|}{\varepsilon} 2k\,,$$

also gilt

$$\|T\| \leq \frac{2k}{\varepsilon}, \quad \text{für alle } T \in \mathcal{T}.$$

□

Definition 3.6 (Offene Abbildung) *Seien (X, d_X), (Y, d_Y) metrische Räume. Eine Abbildung $T : X \to Y$ heißt offen, wenn $T(U)$ offen ist in Y für jede offene Menge U in X.* □

Ist T eine offene Abbildung, so braucht das Bild abgeschlossener Mengen nicht abgeschlossen zu sein, auch dann nicht, wenn T linear ist (Beispiel: Übung.)

Satz 3.7 (Satz von der offenen Abbildung)
Seien X, Y Banachräume, $T : X \to Y$ linear und stetig. Dann sind äquivalent:

(i) T ist offen.

(ii) Es gibt ein $\delta > 0$ mit $B(0;\delta) \subset T(B(0;1))$.

(iii) T ist surjektiv.

Beweis: "(i)⇒(ii)": klar.
"(ii)⇒(i)": Sei U offen in X, sei $y \in T(U)$. Wir wählen $x \in X$ mit $Tx = y$ und $\varepsilon > 0$ mit $B(x;\varepsilon) \subset U$, dann ist

$$T(U) \supset T(B(x;\varepsilon)) = Tx + T(B(0;\varepsilon)) \supset y + B(0;\delta\varepsilon)\,,$$

wobei $\delta > 0$ gemäß (ii) gewählt ist. Also ist $y \in \operatorname{int}(T(U))$.
"(ii)⇒(iii)": Da T linear ist, folgt aus (ii) sofort $B(0;r\delta) \subset T(B(0;r))$ für alle $r > 0$.
"(iii)⇒(ii)": Es gilt, da T surjektiv ist,

$$Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{T(B(0;n))}\,.$$

Wir finden nach Folgerung 3.4 ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\operatorname{int}(\overline{T(B(0;k))}) \neq \emptyset$. Wir setzen $V = \overline{T(B(0;k))}$. Seien $y \in V$, $\varepsilon > 0$ mit

$$B(y;\varepsilon) \subset V\,.$$

Da V symmetrisch ist (das heißt, $z \in V \Rightarrow -z \in V$), gilt auch $B(-y;\varepsilon) \subset V$, und da V konvex ist, folgt

$$B(0;\varepsilon) \subset V = \overline{T(B(0;k))}\,. \tag{3.10}$$

Es genügt nun zu zeigen, dass

$$B(0;\varepsilon) \subset T(B(0;3k))\,, \tag{3.11}$$

da dann (ii) erfüllt ist mit $\delta = \varepsilon/3k$. Nach (3.10) finden wir zu jedem $y \in B(0;\varepsilon)$ ein $x \in B(0;k)$ mit $\|y - Tx\| \le \varepsilon/2$, also

$$2(y - Tx) \in B(0;\varepsilon)\,. \tag{3.12}$$

Zu vorgegebenem $y \in B(0;\varepsilon)$ konstruieren wir Folgen (x_j) in X, (y_j) in Y durch $y_0 = y$ und

$$y_{j+1} = 2(y_j - Tx_j)\,, \quad x_j \in B(0;k)\,, \quad y_{j+1} \in B(0;\varepsilon)\,, \quad j \in \mathbb{N}\,. \tag{3.13}$$

Es folgt

$$2^{-(j+1)}y_{j+1} = 2^{-j}y_j - T(2^{-j}x_j)\,, \quad j \in \mathbb{N},$$

also

$$T\left(\sum_{j=0}^{m} 2^{-j}x_j\right) = y_0 - 2^{-(m+1)}y_{m+1} \to y_0 = y \tag{3.14}$$

für $m \to \infty$. Wegen

$$\sum_{j=0}^{m} 2^{-j}\|x_j\| \le 2k \tag{3.15}$$

ist $\sum_j 2^{-j}x_j$ absolut konvergent, also auch konvergent (da X Banachraum). Sei

$$x = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j}x_j\,.$$

Aus (3.14) folgt $Tx = y$, und aus (3.15) $\|x\| \le 2k < 3k$, also (3.11). $\square$

Folgerung 3.8 *Seien X, Y Banachräume, $T : X \to Y$ linear, stetig und bijektiv. Dann ist auch $T^{-1} : Y \to X$ linear und stetig.*

Beweis: Dass T^{-1} linear ist, ist ein Resultat der Linearen Algebra. Aus Satz 3.7 folgt, dass T offen ist, also gilt für jedes offene $U \subset X$, dass $(T^{-1})^{-1}(U) = T(U)$ offen ist, also ist T^{-1} stetig. $\square$

Betrachten wir nun die Situation, dass ein Vektorraum X mit zwei verschiedenen Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ versehen wird, so dass

$$\|x\|_1 \le C\|x\|_2\,, \quad \text{für alle } x \in X, \tag{3.16}$$

mit einer von x unabhängigen Konstante C gilt, das heißt, $\|\cdot\|_1$ ist schwächer als $\|\cdot\|_2$ in dem Sinne, dass Konvergenz bezüglich $\|\cdot\|_2$ auch Konvergenz bezüglich $\|\cdot\|_1$ impliziert, aber nicht notwendig umgekehrt. (3.16) bedeutet, dass

$$id : (X, \|\cdot\|_2) \to (X, \|\cdot\|_1)$$

stetig ist. Aus Folgerung 3.8 schließen wir nun, dass auch

$$id : (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2)$$

stetig ist, falls $(X, \|\cdot\|_1)$ und $(X, \|\cdot\|_2)$ Banachräume sind; in diesem Fall sind die beiden Normen äquivalent, und

$$(X, \|\cdot\|_1) \simeq (X, \|\cdot\|_2) .$$

Falls (3.16) gilt, die beiden Normen aber nicht äquivalent sind, ist entweder $(X, \|\cdot\|_1)$ oder $(X, \|\cdot\|_2)$ nicht vollständig. Beispiel: $X = C([a, b])$. $C([a, b])$ ist vollständig mit $\|\cdot\|_2 = \|\cdot\|_\infty$, und für die L^1-Norm gilt

$$\|x\|_1 \leq (b-a)\|x\|_\infty ,$$

aber die beiden Normen sind nicht äquivalent (es gibt Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\|x_n\|_1 \to 0$, aber $\|x_n\|_\infty \not\to 0$). Also ist $(C([a, b]); \|\cdot\|_1)$ nicht vollständig.

Folgerung 3.9 *Seien X, Y Banachräume, $T : X \to Y$ linear und stetig, es gelte $\overline{T(X)} = Y$ und $T(X) \neq Y$. Dann gibt es ein $y \in Y$, so dass $\|x_n\| \to \infty$ gilt für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X mit $\lim_{n\to\infty} Tx_n = y$.*

Beweis: Übung. □

Der Graph einer Abbildung $T : X \to Y$ ist definiert als

$$\operatorname{graph}(T) = \{(x, Tx) : x \in X\} . \tag{3.17}$$

Satz 3.10 (Satz vom abgeschlossenen Graphen)
Seien X, Y Banachräume, sei $T : X \to Y$ linear. Dann sind äquivalent:

(i) $\operatorname{graph}(T)$ *ist abgeschlossene Teilmenge von $X \times Y$.*

(ii) T ist stetig.

Beweis: "(ii)⇒(i)": Ist (x_n, y_n) Folge in $\operatorname{graph}(T)$ mit $(x_n, y_n) \to (x, y) \in X \times Y$, so gilt $y_n = Tx_n$, $x_n \to x$ und $Tx_n \to Tx$, also $y = Tx$.
"(i)⇒(ii)": Da T linear ist, ist $\operatorname{graph}(T)$ ein abgeschlossener Unterraum von $X \times Y$, also ein Banachraum. Die Projektion $P_X|\operatorname{graph}(T) : \operatorname{graph}(T) \to X$ ist linear, stetig und bijektiv, hat also nach Satz 3.8 eine stetige Inverse $Q : X \to \operatorname{graph}(T)$. Es folgt, dass $T = P_Y \circ Q$ stetig ist. □

4 Fortsetzung, Reflexivität, Trennung

Fortsetzung von Funktionalen. Bisher wissen wir, dass lineare stetige Operatoren sich von einer dichten Teilmenge normerhaltend auf den ganzen Raum fortsetzen lassen. Das Hauptergebnis dieses Unterabschnitts (Satz von Hahn-Banach) besagt, dass sich lineare stetige Funktionale von einem beliebigen Unterraum auf den ganzen Raum normerhaltend fortsetzen lassen.

Definition 4.1 (Sublineares Funktional)
Sei X Vektorraum. Eine Abbildung $p : X \to \mathbb{R}$ heißt sublinear, falls gilt

$$p(\alpha x) = \alpha p(x)\,, \quad \textit{für alle } x \in X,\ \alpha \geq 0, \tag{4.1}$$

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y)\,, \quad \textit{für alle } x, y \in X. \tag{4.2}$$

□

Jede Halbnorm und jede lineare Abbildung $p : X \to \mathbb{R}$ sind sublinear.

Definition 4.2 (Minkowski-Funktional)
Sei X Vektorraum, sei $A \subset X$. Dann wird durch

$$M_A(x) = \inf\{t : t > 0,\ \frac{1}{t}x \in A\} \tag{4.3}$$

eine Abbildung $M_A : X \to [0, \infty]$ definiert, sie heißt das Minkowski-Funktional von A. Falls $M_A(x) < \infty$ gilt für alle $x \in X$, so heißt A absorbierend. □

Ist X normierter Raum und gilt $0 \in \operatorname{int}(A)$, so ist A absorbierend, da $\frac{1}{t}x \in A$ gilt für hinreichend großes t. Ist A die Einheitskugel in X, so ist $M_A(x) = \|x\|$.

Lemma 4.3 *Sei X Vektorraum, $A \subset X$ konvex und absorbierend. Dann ist das Minkowski-Funktional M_A sublinear.*

Beweis: Die Eigenschaft (4.1) folgt unmittelbar aus (4.3). Seien nun $x, y \in X$, sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen $t, s > 0$ mit

$$t \leq M_A(x) + \varepsilon\,, \quad \frac{1}{t}x \in A\,, \quad s \leq M_A(y) + \varepsilon\,, \quad \frac{1}{s}y \in A\,.$$

Dann ist, da A konvex ist,

$$\frac{1}{t+s}(x+y) = \frac{t}{t+s} \cdot \frac{1}{t}x + \frac{s}{t+s} \cdot \frac{1}{s}y \in A\,,$$

also $M_A(x+y) \leq t+s \leq M_A(x)+M_A(y)+2\varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung. □

Satz 4.4 *Sei X Vektorraum über $\mathbb{R}$, $p : X \to \mathbb{R}$ sublinear. Sei U ein Unterraum von X und $f : U \to \mathbb{R}$ linear mit $f(x) \leq p(x)$ für alle $x \in U$. Dann gibt es eine lineare Fortsetzung $F : X \to \mathbb{R}$ von f auf X mit $F(x) \leq p(x)$ für alle $x \in X$.*

Beweis: Wir betrachten zunächst den Spezialfall

$$X = \operatorname{span}(U \cup \{y\}), \quad y \in X \setminus U. \tag{4.4}$$

Jedes $x \in X$ läßt sich eindeutig zerlegen in

$$x = z + \alpha y, \quad z \in U, \alpha \in \mathbb{R}. \tag{4.5}$$

Wir definieren $F : X \to \mathbb{R}$ durch

$$F(x) = F(z) + \alpha r, \quad \text{falls } x = z + \alpha y, \tag{4.6}$$

wobei $r \in \mathbb{R}$ später festgelegt wird. F ist linear, und $F|U = f$. Die verlangte Ungleichung

$$F(z) + \alpha r \leq p(z + \alpha y), \quad \text{für alle } z \in U,\ \alpha \in \mathbb{R}, \tag{4.7}$$

ist für $\alpha = 0$ nach Voraussetzung erfüllt, für $\alpha > 0$ gleichbedeutend mit

$$r \leq \frac{p(z + \alpha y) - F(z)}{\alpha} = p\left(\frac{z}{\alpha} + y\right) - F\left(\frac{z}{\alpha}\right), \tag{4.8}$$

und für $\alpha < 0$ gleichbedeutend mit

$$r \geq \frac{p(z + \alpha y) - F(z)}{\alpha} = -p\left(-\frac{z}{\alpha} - y\right) + F\left(-\frac{z}{\alpha}\right), \tag{4.9}$$

Ein solches r existiert, wenn

$$\sup_{z \in U}(F(z) - p(z - y)) \leq \inf_{z \in U}(p(z + y) - F(z)) \tag{4.10}$$

gilt. Nun gilt aber für beliebige $z, \tilde{z} \in U$

$$F(z) + F(\tilde{z}) = F(z + \tilde{z}) \leq p(z + \tilde{z}) \leq p(z - y) + p(\tilde{z} + y),$$

also auch

$$F(z) - p(z - y) \leq p(\tilde{z} + y) - F(\tilde{z}), \quad \text{für alle } z, \tilde{z} \in U,$$

woraus (4.10) folgt. Damit ist der Satz im Spezialfall (4.4) bewiesen. Zum Beweis des allgemeinen Falles verwenden wir das Zornsche Lemma. Wir definieren die Menge

$$\mathcal{M} = \{(V, g) : V \text{ Unterraum}, U \subset V \subset X,\ g : V \to \mathbb{R} \text{ linear},\ g|U = f,\ g \leq p \text{ auf } V\}, \tag{4.11}$$

und versehen $\mathcal{M}$ mit der Halbordnung

$$(V_1, g_1) \leq (V_2, g_2) \quad \Leftrightarrow \quad V_1 \subset V_2,\ g_2|V_1 = g_1.$$

Es ist $(U, f) \in \mathcal{M}$, also $\mathcal{M} \neq \emptyset$. Sei $\mathcal{N}$ eine vollständig geordnete Teilmenge von $\mathcal{M}$. Wir definieren

$$V_* = \bigcup_{(V,g) \in \mathcal{M}} V \tag{4.12}$$

und $g_* : V_* \to \mathbb{R}$ durch

$$g_*(x) = g(x), \quad \text{falls } x \in V,\ (V, g) \in \mathcal{M}. \tag{4.13}$$

Aus der Definition von $\mathcal{N}$ folgt nun, dass $g_*(x)$ nicht von der Wahl von (V, g) abhängt, dass V_* ein Unterraum und g_* linear ist (Details hier nicht ausgeführt). Also ist (V_*, g_*) eine obere Schranke von $\mathcal{N}$ in $\mathcal{M}$. Nach dem Zornschen Lemma hat $\mathcal{M}$ ein maximales Element (V, g). Es muss $V = X$ gelten, da wir andernfalls nach dem schon bewiesenen Spezialfall ein $(\tilde{V}, \tilde{g}) \in \mathcal{M}$ konstruieren könnten mit $\tilde{V} = \operatorname{span}(V \cup \{y\})$, $y \in X \setminus V$, im Widerspruch zur Maximalität von (V, g). □

Satz 4.5 (Hahn-Banach)
Sei X ein normierter Raum über $\mathbb{K}$, sei U ein Unterraum von X, sei $u^* \in U^*$. Dann gibt es ein $x^* \in X^*$ mit $x^*|U = u^*$ und $\|x^*\| = \|u^*\|$.

Beweis: Sei zunächst $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Wir definieren $p : X \to [0, \infty)$ durch

$$p(x) = \|u^*\| \cdot \|x\| \,. \tag{4.14}$$

p ist sublinear, und es gilt $u^*(x) \le p(x)$ für alle $x \in U$. Nach Satz 4.4 gibt es ein lineares Funktional $x^* : X \to \mathbb{R}$ mit $x^*(x) \le p(x)$ für alle $x \in X$ und $x^*|U = u^*$. Es gilt dann für alle $x \in X$

$$x^*(x) \le p(x) = \|u^*\| \cdot \|x\| \,, \quad -x^*(x) = x^*(-x) \le p(-x) = \|u^*\| \cdot \|x\| \,,$$

also

$$|x^*(x)| \le \|u^*\| \cdot \|x\| \,,$$

und damit ist x^* stetig, $\|x^*\| \le \|u^*\|$. Da x^* Fortsetzung von u^* ist, folgt aus der Definition der Operatornorm auch $\|x^*\| \ge \|u^*\|$.
Sei nun $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Wir bezeichnen mit $X_\mathbb{R}$ und $U_\mathbb{R}$ die normierten Räume X und U zum Körper $\mathbb{R}$ (die Norm ist unverändert) und setzen

$$u_R^* = \operatorname{Re} u^* \,.$$

Dann ist $u_R^* \in U_\mathbb{R}^*$, $\|u_R^*\| \le \|u^*\|$,

$$u^*(x) = \operatorname{Re} u^*(x) + i \operatorname{Im} u^*(x) = u_R^*(x) - i u_R^*(ix) \,,$$

für alle $x \in U$. Sei nun $x_R^* \in X_\mathbb{R}^*$ eine Fortsetzung von u_R^* mit $\|x_R^*\| = \|u_R^*\|$, wie eben bewiesen. Wir setzen

$$x^*(x) = x_R^*(x) - i x_R^*(ix) \,, \tag{4.15}$$

dann ist $x^* : X \to \mathbb{C}$ eine $\mathbb{C}$-lineare Fortsetzung von u^*, wie man leicht nachrechnet. Zu $x \in X$ wählen wir nun $c \in \mathbb{C}$, $|c| = 1$, so dass $|x^*(x)| = cx^*(x)$ gilt, dann gilt

$$|x^*(x)| = cx^*(x) = x^*(cx) = x_R^*(cx) \le \|x_R^*\| \cdot \|x\| \,,$$

also folgt auch $\|x^*\| \le \|u^*\|$. □

Folgerung 4.6 *Sei X normierter Raum, $x \in X$ mit $x \ne 0$. Dann gibt es ein $x^* \in X^*$ mit $\|x^*\| = 1$ und $x^*(x) = \|x\|$.*

Beweis: Sei $U = \operatorname{span}(\{x\})$, sei $u^* : U \to \mathbb{K}$ definiert durch $u^*(\alpha x) = \alpha \|x\|$, $\alpha \in \mathbb{K}$, dann ist $|u^*(\alpha x)| = \|\alpha x\|$, also $\|u^*\| = 1$. Wähle $x^* \in X^*$ als Fortsetzung von u^* gemäß Satz 4.5. □

Folgerung 4.7 *Sei X normierter Raum. Dann gilt*

$$\|x\| = \max_{\substack{x^* \in X^* \\ \|x^*\| \le 1}} |x^*(x)| \,, \quad \textit{für alle } x \in X \,. \tag{4.16}$$

Beweis: Es ist $|x^*(x)| \le \|x^*\| \cdot \|x\| \le \|x\|$, falls $\|x^*\| \le 1$, also folgt (4.16) aus Folgerung 4.6. $\square$

Folgerung 4.8 *Sei X normierter Raum, $U \subset X$ abgeschlossener Unterraum. Sei $x \in X$ mit $x \notin U$. Dann gibt es ein $x^* \in X^*$ mit $x^*|U = 0$ und $x^*(x) \neq 0$.*

Beweis: Nach Satz 1.14 ist X/U normierter Raum, und es gilt $[x] \neq 0$. Wir wählen gemäß Folgerung 4.6 ein $y^* \in (X/U)^*$ mit $y^*([x]) \neq 0$ und definieren $x^* : X \to \mathbb{K}$ durch

$$x^*(z) = y^*([z]) \,, \quad z \in X \,,$$

dann gilt $x^* \in X^*$, $x^*|U = 0$ und $x^*(x) \neq 0$. $\square$.

Reflexivität. Ist X normierter Raum, so heißt $X^{**} = (X^*)^*$ der **Bidualraum** von X. Durch die Zuordnung $x \mapsto x^{**}$,

$$x^{**}(x^*) = x^*(x) \,, \quad \text{für alle } x^* \in X^*, \tag{4.17}$$

wird wegen

$$|x^{**}(x^*)| \le \|x\| \cdot \|x^*\| \tag{4.18}$$

eine kanonische Einbettung

$$J_X : X \to X^{**} \tag{4.19}$$

definiert.

Lemma 4.9 *Die in (4.17) definierte Abbildung $J_X : X \to X^{**}$ ist linear und isometrisch.*

Beweis: Für alle $x \in X$ gilt nach Folgerung 4.7

$$\|x\|_X = \max_{\substack{x^* \in X^* \\ \|x^*\| \le 1}} |x^*(x)| = \max_{\substack{x^* \in X^* \\ \|x^*\| \le 1}} |(J_X x)(x^*)| = \|J_X x\|_{X^{**}} \,.$$

$\square$

Die Bildmenge $J_X(X)$ ist ein Unterraum von X^{**}. Da J_X isometrisch und X^{**} Banachraum ist, gilt

$$X \text{ vollständig} \quad \Leftrightarrow \quad J_X(X) \text{ vollständig} \quad \Leftrightarrow \quad J_X(X) \text{ abgeschlossen in } X^{**}.$$

Ist X nicht vollständig, so können wir den Abschluß $\overline{J_X(X)}$ von $J_X(X)$ in X^{**} als "Vervollständigung" von X ansehen.

Definition 4.10 (Reflexivität)
Ein Banachraum X heißt reflexiv, falls $J_X : X \to X^{**}$ surjektiv ist. $\square$

Nach Lemma 4.9 gilt dann
$$X \cong X^{**} . \tag{4.20}$$
Umgekehrt folgt allerdings aus (4.20) im allgemeinen nicht, dass X reflexiv ist.

Jeder endlichdimensionale Banachraum X ist reflexiv, da
$$\dim(X^{**}) = \dim(X^*) = \dim(X)$$
gilt und daher aus der Injektivität von J_X auch die Surjektivität folgt.

Satz 4.11 *Jeder Hilbertraum X ist reflexiv.*

Beweis: Sei $J : X \to X^*$, $(Jy)(z) = \langle z, y\rangle$, die (konjugiert lineare) Isometrie aus dem Rieszschen Darstellungssatz 2.12. Sei $x^{**} \in X^{**}$. Wir definieren
$$x^*(y) = \overline{x^{**}(Jy)}\,, \quad y \in X\,.$$
Dann gilt $x^* \in X^*$. Wir setzen nun
$$x = J^{-1}x^*\,.$$
Dann gilt für alle $y \in X$
$$x^{**}(Jy) = \overline{x^*(y)} = \overline{(Jx)(y)} = \overline{\langle y, x\rangle} = \langle x, y\rangle = (Jy)(x)\,.$$
Da J surjektiv ist, folgt $x^{**} = J_X(x)$. □

Satz 4.12 *Die Räume $\ell^p(\mathbb{K})$ sind reflexiv für $1 < p < \infty$.*

Beweis: Sei $X = \ell^p(\mathbb{K})$, seien
$$T_1 : \ell^q(\mathbb{K}) \to \ell^p(\mathbb{K})^*\,, \quad T_2 : \ell^p(\mathbb{K}) \to \ell^q(\mathbb{K})^*\,,$$
die Isometrien aus Satz 1.20. Sei $x^{**} \in X^{**}$ gegeben, wir setzen
$$x = T_2^{-1}(x^{**} \circ T_1)\,.$$
Dann gilt für alle $x^* \in X^*$
$$x^{**}(x^*) = (x^{**} \circ T_1)(T_1^{-1}x^*) = (T_2x)(T_1^{-1}x^*) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k(T_1^{-1}x^*)_k = x^*(x)\,.$$
□

Analog zeigt man, dass der Raum $L^p(D;\mathbb{K})$ reflexiv ist für $1 < p < \infty$.

Räume mit Supremumsnormen und mit L^1-Normen sind in der Regel nicht reflexiv. Wir behandeln als Beispiel $X = L^1(D : \mathbb{K})$. Wir gehen aus von der Isometrie
$$T : L^\infty(D;\mathbb{K}) \to X^*\,, \quad (Ty)(x) = \int_D x(t)y(t)\,dt\,.$$

Wäre X reflexiv, so gäbe es zu jedem $x^{**} \in X^{**}$ ein $x \in X$ mit

$$x^{**}(Ty) = (Ty)(x) = \int_D x(t)y(t)\,dt\,, \quad \text{für alle } y \in L^\infty(D;\mathbb{K}).$$

Äquivalent dazu ist, dass es zu jedem $y^* \in L^\infty(D;\mathbb{K})^*$ ein $x \in L^1(D;\mathbb{K})$ gibt mit

$$y^*(y) = \int_D x(t)y(t)\,dt\,. \tag{4.21}$$

Sei nun $D = (0,1)$, $E_k = (1/k, 1)$. Wir setzen

$$U_k = \{y : y \in L^\infty(D;\mathbb{K}),\ y|(D \setminus E_k) = 0\}\,, \quad U = \overline{\bigcup_{k=2}^\infty U_k}\,.$$

Dann ist U ein abgeschlossener Unterraum von $L^\infty(D;\mathbb{K})$, und es gilt $1_D \notin U$, da $d(1_D, U_k) = 1$ für alle k. Also gibt es nach Folgerung 4.8 ein $y^* \in L^\infty(D;\mathbb{K})$ mit

$$y^*(1_D) \neq 0 \tag{4.22}$$

und $y^*|U = 0$, also insbesondere

$$y^*(1_{E_k}) = 0\,, \quad \text{für alle } k \geq 2. \tag{4.23}$$

Für jedes $x \in L^1(D;\mathbb{K})$ gilt aber nach dem Konvergenzsatz von Lebesgue

$$\lim_{k\to\infty} \int_D x(t)1_{E_k}(t)\,dt = \int_D x(t)1_D(t)\,dt\,. \tag{4.24}$$

Nun können (4.21) – (4.23) aber nicht gleichzeitig gelten.

Die Räume $c_0(\mathbb{K})$, $c(\mathbb{K})$, $\ell^1(\mathbb{K})$, $\ell^\infty(\mathbb{K})$, $C(D;\mathbb{K})$, $L^\infty(D;\mathbb{K})$ sind alle nicht reflexiv.

Satz 4.13 *Sei X Banachraum, U Unterraum von X. Ist X reflexiv und U abgeschlossen, so ist auch U reflexiv.*

Beweis: Sei $u^{**} \in U^{**}$ beliebig. Durch

$$x^{**}(x^*) = u^{**}(x^*|U)$$

wird ein $x^{**} \in X^{**}$ definiert. Sei $x = J_X^{-1}(x^{**})$, dann gilt

$$x^*(x) = x^{**}(x^*) = u^{**}(x^*|U) \tag{4.25}$$

für alle $x^* \in X^*$, und insbesondere $x^*(x) = 0$ für alle x^* mit $x^*|U = 0$. Aus Folgerung 4.8 folgt, dass $x \in U$. Sei nun $u^* \in U^*$ beliebig. Wir wählen gemäß Satz 4.5 ein $x^* \in X^*$ mit $x^*|U = u^*$, dann wird (4.25) zu

$$u^*(x) = x^*(x) = u^{**}(u^*)\,,$$

also gilt $J_U x = u^{**}$. □

Satz 4.14 *Sei X Banachraum. Dann ist X reflexiv genau dann, wenn X^* reflexiv ist.*

Beweis: Sei X reflexiv. Wir wollen zeigen, dass $J_{X^*} : X^* \to X^{***}$ surjektiv ist. Sei $x^{***} \in X^{***}$ beliebig. Wir setzen $x^* = x^{***} \circ J_X$. Sei nun $x^{**} \in X$ beliebig, sei $x = J_X^{-1} x^{**}$. Es gilt dann

$$x^{***}(x^{**}) = x^{***}(J_X x) = x^*(x) = (J_X x)(x^*) = x^{**}(x^*) \,,$$

also $x^{***} = J_{X^*} x^*$. Sei nun umgekehrt X^* reflexiv. Nach dem eben Bewiesenen ist X^{**} reflexiv, nach Satz 4.13 ist auch der abgeschlossene Unterraum $J_X(X)$ reflexiv und damit auch X. □

Satz 4.15 *Sei X normierter Raum, $M \subset X$. Dann sind äquivalent:*

(i) M ist beschränkt.

(ii) Für alle $x^* \in X^*$ ist $x^*(M)$ beschränkt (in $\mathbb{K}$).

Beweis: Wir wenden Satz 3.5 (Satz von Banach-Steinhaus) an auf die durch

$$\mathcal{T} = J_X(M)$$

definierte Teilmenge $\mathcal{T} \subset L(X^*; \mathbb{K}) = X^{**}$. Da J_X Isometrie ist, ist (i) äquivalent zu

$$\sup_{T \in \mathcal{T}} \|T\| < \infty \,.$$

Andererseits gilt für jedes $x^* \in X^*$

$$x^*(M) = \{x^*(x) : x \in M\} = \{Tx^* : T \in \mathcal{T}\} \,.$$

Die Behauptung folgt nun unmittelbar aus Satz 3.5. □

Trennung konvexer Mengen. Ist $x^* : X \to \mathbb{K}$ ein lineares stetiges Funktional auf einem normierten Raum, so heißt eine Niveaumenge der Form

$$H_\alpha = \{x : x \in X, \, x^*(x) = \alpha\} \,, \quad \alpha \in \mathbb{K}, \tag{4.26}$$

Hyperebene. Jede solche Hyperebene trennt X in zwei Halbräume

$$\{x : x \in X, \, x^*(x) < \alpha\} \quad \text{und} \quad \{x : x \in X, \, x^*(x) > \alpha\} \,.$$

Satz 4.16 (Trennungssatz)
Sei X normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum, sei $K \subset X$ offen und konvex, $K \neq \emptyset$, sei $x_0 \in X$ mit $x_0 \notin K$. Dann gibt es ein $x^* \in X^*$ mit

$$x^*(x) < x^*(x_0) \,, \quad \textit{für alle } x \in K. \tag{4.27}$$

□

Die Ungleichung (4.27) bedeutet, dass K ganz auf einer Seite der Hyperebene H_α, $\alpha = x^*(x_0)$, liegt.
Beweis: Wir betrachten zunächst den Fall, dass $0 \in K$. Nach Lemma 4.3 ist das Minkowski-Funktional M_K sublinear. Ist $\varepsilon > 0$ mit $K(0;\varepsilon) \subset K$, so ist $\varepsilon x/\|x\| \in K$ und also

$$M_K(x) \le \frac{1}{\varepsilon}\|x\|\,, \quad \text{für alle } x \in X. \tag{4.28}$$

Weiter gilt $x_0/t \notin K$ für alle $t < 1$, also

$$M_K(x_0) \ge 1\,, \tag{4.29}$$

und für alle $x \in K$ gibt es ein $t < 1$ mit $x/t \in K$, also

$$M_K(x) < 1\,, \quad \text{für alle } x \in K. \tag{4.30}$$

Wir definieren $u^* : \operatorname{span}(\{x_0\}) \to \mathbb{R}$ durch

$$u^*(\alpha x_0) = \alpha M_K(x_0)\,, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} u^*(\alpha x_0) &= M_K(\alpha x_0) \ge 0\,, \quad && \alpha \ge 0\,, \\ u^*(\alpha x_0) &\le 0 \le M_K(\alpha x_0)\,, \quad && \alpha < 0\,, \end{aligned}$$

also ist $u^* \le M_K$ auf $\operatorname{span}(\{x_0\})$. Sei nun $x^* : X \to \mathbb{R}$ gemäß Satz 4.4 eine lineare Fortsetzung von u^* mit $x^* \le M_K$ auf X. Aus (4.28) folgt für alle $x \in X$

$$|x^*(x)| = \max\{x^*(x), x^*(-x)\} \le \max\{M_K(x), M_K(-x)\} \le \frac{1}{\varepsilon}\|x\|\,,$$

also ist $x^* \in X^*$. Aus (4.29) und (4.30) folgt nun

$$x^*(x) \le M_K(x) < 1 \le M_K(x_0) = x^*(x_0)\,, \quad \text{für alle } x \in K,$$

damit ist (4.27) gezeigt. Damit ist der Satz im Fall $0 \in K$ bewiesen. Im allgemeinen Fall wählen wir $\tilde{x} \in K$ und setzen $\tilde{K} = K - \tilde{x}$. Dann ist $0 \in \tilde{K}$ und $x_0 - \tilde{x} \notin \tilde{K}$. Sei $x^* \in X^*$ mit $x^*(z) < x^*(x_0 - \tilde{x})$ für alle $z \in \tilde{K}$, dann gilt für alle $x \in K$

$$x^*(x) = x^*(x - \tilde{x}) + x^*(\tilde{x}) < x^*(x_0 - \tilde{x}) + x^*(\tilde{x}) = x^*(x_0)\,.$$

□

Der Trennungssatz läßt sich ins Komplexe übertragen. Aus (4.27) wird dann

$$\operatorname{Re} x^*(x) < \operatorname{Re} x^*(x_0)\,, \quad \text{für alle } x \in K.$$

Wir verzichten auf die genaue Darstellung.

Satz 4.17 (Trennung zweier konvexer Mengen)
Sei X normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum, seien $K_1, K_2 \subset X$ konvex und nichtleer, sei K_1 offen, es gelte $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. Dann gibt es ein $x^* \in X^*$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$x^*(x_1) < \alpha \le x^*(x_2)\,, \quad \text{für alle } x_1 \in K_1,\ x_2 \in K_2. \tag{4.31}$$

Beweis: Wir setzen

$$K = K_1 - K_2 = \{x_1 - x_2 : x_1 \in K_1,\, x_2 \in K_2\}\,.$$

Dann ist K offen (aus $x \in K$ folgt $x \in K_1 - x_2 \subset K$ für ein $x_2 \in K_2$) und $0 \notin K$. Wir wählen gemäß Satz 4.16 ein $x^* \in X^*$ mit $x^*(x) < x^*(0) = 0$ für alle $x \in K$, also

$$x^*(x_1) - x^*(x_2) = x^*(x_1 - x_2) < 0\,, \quad \text{für alle } x_1 \in K_1,\, x_2 \in K_2,$$

und daher auch

$$x^*(x_1) \leq \alpha \leq x^*(x_2)\,, \quad \text{für alle } x_1 \in K_1,\, x_2 \in K_2,$$

für jedes $\alpha \in [\sup x^*(K_1), \inf x^*(K_2)]$. Da K_1 offen und $x^* \neq 0$, folgt $x^*(x_1) < \alpha$ für alle $x_1 \in K_1$, denn wäre $x^*(x_1) = \alpha$ für ein $x_1 \in K_1$, so gäbe es ein $\tilde{x}_1 \in K_1$ mit $x^*(\tilde{x}_1) > \alpha$.
□

Satz 4.18 (Strikte Trennung)
Sei X normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum, sei $K \subset X$ abgeschlossen und konvex, $K \neq \emptyset$, sei $x_0 \in X$ mit $x_0 \notin K$. Dann gibt es ein $x^* \in X^*$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$x^*(x) \leq \alpha < x^*(x_0)\,, \quad \textit{für alle } x \in K. \tag{4.32}$$

□

Beweis: Übung. (Hinweis: Für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ ist $B(x_0;\varepsilon) \cap K = \emptyset$.) □

Wenn wir von x^* zu $-x^*$ übergehen, können wir in den Formeln (4.27), (4.31), (4.32) auch die umgekehrten Ungleichungen erhalten.

5 Schwache Topologien

In einem normierten Raum X sind alle beschränkten abgeschlossenen Mengen kompakt nur dann, wenn X endlichdimensional ist. Ist X unendlichdimensional, so hat nicht jede beschränkte Folge in X eine bezüglich der Norm von X konvergente Teilfolge. Wir wollen nun den Begriff der Konvergenz so weit abschwächen, dass auch im Unendlichdimensionalen jede beschränkte Folge eine (in diesem schwächeren Sinn) konvergente Teilfolge hat. Es stellt sich nun leider heraus, dass der Begriff des metrischen Raumes dafür nicht ausreicht. Wir führen daher den Begriff des topologischen Raumes ein.

Definition 5.1 (Topologischer Raum) *Sei X Menge. Eine Familie $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen von X heißt Topologie auf X, falls gilt*

(i) $\emptyset \in \mathcal{T}$, $X \in \mathcal{T}$,

(ii) $U, V \in \mathcal{T} \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{T}$,

(iii) Ist I eine beliebige Menge und gilt $(U_i)_{i \in I} \subset \mathcal{T}$, so gilt auch $\cup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$.

$(X, \mathcal{T})$ heißt topologischer Raum, die Elemente von $\mathcal{T}$ heißen offene Mengen in $(X, \mathcal{T})$. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt separiert, falls er die Hausdorffsche Trennungseigenschaft besitzt, das heißt, falls für beliebige $x, y \in X$ mit $x \neq y$ offene Mengen U und V existieren mit

$$x \in U\,, \quad y \in V\,, \quad U \cap V = \emptyset\,. \tag{5.1}$$

□

Mit Induktion folgt: Sind $U_1, \dots, U_n$ offen, so ist auch

$$\bigcap_{i=1}^{n} U_i \tag{5.2}$$

offen.

In einem metrischen Raum (X, d) hat das System

$$\mathcal{T} = \{U :\ U \text{ offen in } (X, d)\} \tag{5.3}$$

alle in Definition 5.1 verlangten Eigenschaften, aus jeder Metrik erhalten wir daher einen separierten topologischen Raum. (Man beachte: "separiert" und "separabel" sind zwei verschiedene Begriffe.) Insbesondere erhalten wir aus jeder Norm einen separierten topologischen Raum. Die zugehörige Topologie wird heißt die **Normtopologie**.

Definition 5.2 *Sei X Menge, seien $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ Topologien auf X. Gilt $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$, so heißt $\mathcal{T}_1$ gröber als $\mathcal{T}_2$ und $\mathcal{T}_2$ feiner als $\mathcal{T}_1$.* □

Sei X Menge, $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$. Wir betrachten das Mengensystem $\mathcal{B}(\mathcal{M})$ aller endlichen Durchschnitte von Mengen in $\mathcal{M}$,

$$\mathcal{B}(\mathcal{M}) = \{\bigcap_{i=1}^{n} M_i : n \in \mathbb{N},\ M_i \in \mathcal{M} \text{ für alle } i\} \cup \{X\}\,, \tag{5.4}$$

sowie das Mengensystem $\mathcal{T}(\mathcal{M})$ aller beliebigen Vereinigungen von Mengen in $\mathcal{B}(\mathcal{M})$,

$$\mathcal{T}(\mathcal{M}) = \{\bigcup_{i\in I} B_i : I \text{ Menge}, B_i \in \mathcal{B}(\mathcal{M}) \text{ für alle } i\} \cup \{\emptyset\}\,. \tag{5.5}$$

Satz 5.3 *Sei X Menge, $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$. Dann ist $\mathcal{T}(\mathcal{M})$ eine Topologie auf X, und für jede Topologie $\mathcal{T}'$ auf X mit $\mathcal{M} \subset \mathcal{T}'$ gilt*

$$\mathcal{M} \subset \mathcal{T}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{T}'\,. \tag{5.6}$$

Die Topologie $\mathcal{T}(\mathcal{M})$ heißt die von $\mathcal{M}$ erzeugte Topologie.

Beweis: Ist $\mathcal{T}'$ eine Topologie auf X mit $\mathcal{M} \subset \mathcal{T}'$, so folgt aus Definition 5.1 unmittelbar, dass alle Elemente von $\mathcal{B}(\mathcal{M})$ und alle Elemente von $\mathcal{T}(\mathcal{M})$ zu $\mathcal{T}'$ gehören müssen. Seien $U, V \in \mathcal{T}(\mathcal{M})$ mit $U \cap V \neq \emptyset$, seien

$$U = \bigcup_{i\in I} B_i\,, \quad V = \bigcup_{j\in J} B_j'\,,$$

mit $B_i, B_j' \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$ für alle i, j, so ist auch $B_i \cap B_j' \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$ für alle i, j und weiter

$$U \cap V = \bigcup_{i\in I}\bigcup_{j\in J} B_i \cap B_j' \in \mathcal{T}(\mathcal{M})\,.$$

Seien $U_i \in \mathcal{T}(\mathcal{M})$ für alle $i \in I$, I Menge, seien

$$U_i = \bigcup_{j\in J_i} B_{ij}\,, \quad B_{ij} \in \mathcal{B}(\mathcal{M})\,,$$

mit geeigneten Mengen J_i, so folgt

$$\bigcup_{i\in I} U_i = \bigcup_{i\in I}\bigcup_{j\in J_i} B_{ij} \in \mathcal{T}(\mathcal{M})\,.$$

□

Aus Satz 5.3 folgt unmittelbar

$$\mathcal{T}(\mathcal{M}) = \bigcap_{\substack{\mathcal{T}'\supset\mathcal{M} \\ \mathcal{T}' \text{ Topologie auf } X}} \mathcal{T}'\,, \tag{5.7}$$

das heißt, $\mathcal{T}(\mathcal{M})$ ist die gröbste Topologie auf X, für die alle Mengen in $\mathcal{M}$ offen sind.

Ist (X, d) metrischer Raum und

$$\mathcal{M} = \{B(x;\varepsilon) : x \in X,\, \varepsilon > 0\}\,,$$

so ist $(X, \mathcal{T}(\mathcal{M}))$ gerade der von der Metrik d erzeugte topologische Raum. In diesem Fall gilt sogar, dass sich jede offene Menge als Vereinigung von Elementen von $\mathcal{M}$ darstellen läßt, nämlich

$$U = \bigcup_{x\in U} B(x;\varepsilon(x))\,,$$

wobei für jedes $x \in U$ ein $\varepsilon(x) > 0$ hinreichend klein gewählt wird.

Definition 5.4 (Stetigkeit)
Seien $(X, \mathcal{T})$ und $(X', \mathcal{T}')$ topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \to X'$ heißt stetig (auf X), falls $f^{-1}(U') \in \mathcal{T}$ gilt für alle $U' \in \mathcal{T}'$, das heißt, falls das Urbild jeder offenen Menge offen ist. □

Lemma 5.5 *Seien $(X, \mathcal{T})$, $(X', \mathcal{T}')$ und $(X'', \mathcal{T}'')$ topologische Räume, seien $f : X \to X'$ und $g : X' \to X''$ stetig. Dann ist auch $g \circ f : X \to X''$ stetig.*

Beweis: Ist $U'' \in \mathcal{T}''$, so sind auch $g^{-1}(U'') \in \mathcal{T}'$ und $(g \circ f)^{-1}(U'') = f^{-1}(g^{-1}(U'')) \in \mathcal{T}$. □

Lemma 5.6 *Seien $(X, \mathcal{T})$ und $(X', \mathcal{T}(\mathcal{M}'))$ topologische Räume mit $\mathcal{M}' \subset \mathcal{P}(X')$, sei $f : X \to X'$. Dann ist f stetig auf X genau dann, wenn $f^{-1}(M') \in \mathcal{T}$ für alle $M' \in \mathcal{M}'$.*

Beweis: Ist $B' \in \mathcal{B}(\mathcal{M}')$ mit $B' \neq X'$, so ist $B' = \cap_{i=1}^n M_i'$ mit $n \in \mathbb{N}$, $M_i' \in \mathcal{M}'$, also

$$f^{-1}(B') = \bigcap_{i=1}^n f^{-1}(M_i') \in \mathcal{T} \,,$$

da $\mathcal{T}$ Topologie ist. Ist $U' \in \mathcal{T}(\mathcal{M}')$ mit $U' \neq \emptyset$, so ist $U' = \cup_{i \in I} B_i'$ mit, $B_i' \in \mathcal{B}(\mathcal{M}')$ für $i \in I$, also

$$f^{-1}(U') = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i') \in \mathcal{T} \,,$$

da $\mathcal{T}$ Topologie ist. Die Umkehrung ist trivial, da $\mathcal{M}' \subset \mathcal{T}(\mathcal{M}')$. □

Ist X Menge, und sind $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$ Topologien auf X, so ist

$$id : (X, \mathcal{T}_2) \to (X, \mathcal{T}_1)$$

stetig genau dann, wenn $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$. Ist X Vektorraum, und sind $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ Normen auf X, so gilt also für die erzeugten Topologien $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ genau dann, wenn es ein $C > 0$ gibt mit

$$\|x\|_1 \leq C\|x\|_2 \,, \quad \text{für alle } x \in X.$$

Also sind **zwei Normen auf einem Vektorraum genau dann äquivalent, wenn sie dieselbe Topologie erzeugen.** In jedem endlichdimensionalen Vektorraum gibt es also eine eindeutig bestimmte Normtopologie, diese wird auch als Standard-Topologie bezeichnet.

Definition 5.7 (Induzierte Topologie)
Sei X Menge, seien $(X_i, \mathcal{T}_i)$ topologische Räume für alle $i \in I$, I Menge, seien $f_i : X \to X_i$ Abbildungen für alle $i \in I$. Die Topologie $\mathcal{T}(\mathcal{M})$,

$$\mathcal{M} = \{f_i^{-1}(U) : i \in I, U \in \mathcal{T}_i\} \tag{5.8}$$

heißt die von der Familie $(f_i)_{i \in I}$ induzierte Topologie. □

Lemma 5.8 *In der Situation von Definition 5.7 gilt:*

(i) *Die Topologie $\mathcal{T}(\mathcal{M})$ ist die gröbste Topologie auf X, so dass alle Abbildungen f_i stetig sind.*

(ii) *Ist $(Z, \mathcal{T}_Z)$ ein topologischer Raum und $g : Z \to X$ eine Abbildung, so ist $g : (Z, \mathcal{T}_Z) \to (X, \mathcal{T}(\mathcal{M}))$ stetig genau dann, wenn alle Abbildungen $f_i \circ g$, $i \in I$, stetig sind.*

(iii) *Ist $\mathcal{T}_i = \mathcal{T}(\mathcal{M}_i)$ mit $\mathcal{M}_i \subset \mathcal{P}(X_i)$, und ist*

$$\tilde{\mathcal{M}} = \{f_i^{-1}(M) : i \in I,\, M \in \mathcal{M}_i\}\,, \tag{5.9}$$

so gilt

$$\mathcal{T}(\mathcal{M}) = \mathcal{T}(\tilde{\mathcal{M}})\,. \tag{5.10}$$

Beweis: Zu (i): Nach Definition von $\mathcal{M}$ sind alle $f_i : (X, \mathcal{T}(\mathcal{M})) \to (X_i, \mathcal{T}_i)$ stetig. Ist $\mathcal{T}'$ Topologie auf X, so dass alle $f_i : (X, \mathcal{T}') \to (X_i, \mathcal{T}_i)$ stetig sind, so gilt $\mathcal{M} \subset \mathcal{T}'$, also auch $\mathcal{T}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{T}'$ nach Satz 5.3.
Zu (ii): Ist g stetig, so sind nach Lemma 5.5 auch alle $f_i \circ g$ stetig. Seien umgekehrt alle $f_i \circ g$ stetig. Sei $M \in \mathcal{M}$ beliebig, seien $i \in I$ und $U \in \mathcal{T}_i$ mit $M = f_i^{-1}(U)$. Dann ist $g^{-1}(M) = (f_i \circ g)^{-1}(U) \in \mathcal{T}_Z$. Aus Lemma 5.6 folgt, dass g stetig ist.
Zu (iii): Aus $\tilde{\mathcal{M}} \subset \mathcal{M}$ folgt $\mathcal{T}(\tilde{\mathcal{M}}) \subset \mathcal{T}(\mathcal{M})$. Umgekehrt sind nach Lemma 5.6 die Funktionen $f_i : (X, \mathcal{T}(\tilde{\mathcal{M}})) \to (X_i, \mathcal{T}_i)$ stetig, und aus (i) folgt $\mathcal{T}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{T}(\tilde{\mathcal{M}})$. □

Ist $X \subset Y$ und $(Y, \mathcal{T})$ topologischer Raum, so wird durch die Einbettung $j : X \to Y$, $j(x) = x$, die Topologie

$$\mathcal{T}_X = \{U \cap X : U \in \mathcal{T}\}$$

induziert. Ist (Y, d) metrischer Raum und $\mathcal{T}$ die von d erzeugte Topologie, so ist $\mathcal{T}_X$ gerade die von $d|X$ erzeugte Topologie auf X.

Definition 5.9 (Produkttopologie)
Seien $(X_i, \mathcal{T}_i)$ topologische Räume, $i \in I$, I Menge. Die auf $X = \prod_{i \in I} X_i$ von den Projektionen $P_i : X \to X_i$ induzierte Topologie heißt die Produkttopologie. □

Lemma 5.10 *In der Situation von Definition 5.9 gilt: Sind alle $(X_i, \mathcal{T}_i)$ separiert, so ist auch X separiert.*

Beweis: Seien $x, y \in X$ mit $x \neq y$. Wir wählen $i \in I$ mit $P_i(x) \neq P_i(y)$ und $U_x, U_y \in \mathcal{T}_i$ mit $P_i(x) \in U_x$, $P_i(y) \in U_y$, $U_x \cap U_y = \emptyset$. Dann gilt

$$x \in P_i^{-1}(U_x)\,, \quad y \in P_i^{-1}(U_y)\,, \quad P_i^{-1}(U_x) \cap P_i^{-1}(U_y) = \emptyset\,.$$

□

Aus Lemma 5.8 folgt, dass eine Abbildung $g : Z \to X$, $X = \prod_{i \in I} X_i$, genau dann stetig ist, wenn alle Komponenten $g_i = P_i \circ g$ stetig sind.

Versieht man $\mathbb{K}$ mit der Standard-Topologie, so stimmt auf $\mathbb{K}^n$ die Produkttopologie mit der Standard-Topologie überein (Übung).

Ist X normierter Raum, und ist $\mathcal{T}_{\mathbb{K}}$ die Standardtopologie auf $\mathbb{K}$, so fassen wir zur Definition der schwachen Topologie die Funktionale $x^* \in X^*$ als Abbildungen

$$x^* : X \to (\mathbb{K}, \mathcal{T}_{\mathbb{K}})$$

auf.

Definition 5.11 (Schwache Topologie)
Sei X normierter Raum. Die von der Familie $\{x^* : x^* \in X^*\} = X^*$ induzierte Topologie auf X heißt die schwache Topologie auf X, wir bezeichnen sie mit $\mathcal{T}_w$. □

Auf dem Dualraum X^* eines normierten Raums wird gemäß Definition 5.11 von der Familie X^{**} die schwache Topologie induziert. Eine größere Rolle spielt aber die sogenannte schwach-$*$-Topologie.

Definition 5.12 (Schwach-$*$-Topologie)
Sei X normierter Raum. Die von der Familie $\{J_X x : x \in X\} \subset X^{**}$ induzierte Topologie auf X^* heißt die schwach-$*$-Topologie auf X^*, wir bezeichnen sie mit $\mathcal{T}_{w^*}$. □

Ist X reflexiv, so stimmen die schwache und die schwach-$*$-Topologie auf X^* überein, da dann $J_X(X) = X^{**}$. Ist X endlichdimensional, so stimmen beide mit der Standard-Topologie überein.

Gemäß der Definition der induzierten Topologie gilt

$$\mathcal{T}_w = \mathcal{T}(\mathcal{M}), \quad \mathcal{M} = \{(x^*)^{-1}(B(z;\varepsilon)) : x^* \in X^*,\, z \in \mathbb{K},\, \varepsilon > 0\}. \tag{5.11}$$

Definition 5.13 (Schwache Konvergenz, schwach-$*$-Konvergenz)
Sei X normierter Raum. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X heißt schwach konvergent gegen ein $x \in X$, falls

$$\lim_{n\to\infty} x^*(x_n) = x^*(x), \quad \textit{für alle } x^* \in X^*, \tag{5.12}$$

wir schreiben auch $x_n \rightharpoonup x$. Eine Folge $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ in X^* heißt schwach-$*$-konvergent gegen ein $x^* \in X^*$, falls

$$\lim_{n\to\infty} x_n^*(x) = x^*(x), \quad \textit{für alle } x \in X, \tag{5.13}$$

wir schreiben auch $x_n^* \overset{*}{\rightharpoonup} x^*$. □

Konvergiert eine Folge in einem normierten Raum X gegen ein x im Sinne der Norm, so sagen wir auch, dass sie **stark** gegen x konvergiert.

Ist X reflexiv, so stimmen auf X^* schwache und schwach-$*$-Konvergenz überein. Ist X endlichdimensional, so stimmen beide mit der starken Konvergenz überein.

Offensichtlich ist jede stark konvergente Folge auch schwach beziehungsweise schwach-$*$-konvergent.

Ist $X = \ell^p(\mathbb{K})$, $1 \le p < \infty$, so ist $X^* \cong \ell^q(\mathbb{K})$ mit $q = p/(p-1)$. Eine Folge $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X konvergiert daher schwach gegen ein $x \in X$ genau dann, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} x_k^n y_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k, \quad \text{für alle } y \in \ell^q(\mathbb{K}). \tag{5.14}$$

Ist speziell $x^n = e^n$ (n-ter Einheitsvektor), so gilt für $p > 1$ (also $q < \infty$)

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} e_k^n y_k = \lim_{n\to\infty} y_n = 0\,, \quad \text{für alle } y \in \ell^q(\mathbb{K}), \tag{5.15}$$

also $e^n \rightharpoonup 0$ für $p > 1$, aber andererseits $\|e^n\|_p = 1$ und daher konvergiert e^n nicht stark gegen 0.

Für $p = 1$ gilt ebenfalls (5.15) für alle $y \in \ell^q(\mathbb{K})$, $q < \infty$, aber für $y = (1, 1, 1, \ldots)$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} e_k^n y_k = \lim_{n\to\infty} y_n = 1\,, \tag{5.16}$$

also ist $(e^n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht schwach konvergent im $\ell^1(\mathbb{K})$.

Generell gilt (Übung): Ist X Hilbertraum, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in X und $x \in X$, so konvergiert x_n stark gegen x genau dann, wenn x_n schwach gegen x und $\|x_n\|$ gegen $\|x\|$ konvergiert.

Als weiteres Beispiel betrachten wir $X = L^p(D;\mathbb{K})$, $1 \le p < \infty$. Es ist $X^* \cong L^q(D;\mathbb{K})$, $q = p/(p-1)$. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X konvergiert schwach gegen ein $x \in X$ genau dann, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \int_D x_n(t)y(t)\,dt = \int_D x(t)y(t)\,dt\,, \quad \text{für alle } y \in L^q(D;\mathbb{K}).$$

Ist $X = L^\infty(D;\mathbb{K})$, so ist $X \cong L^1(D;\mathbb{K})^*$, und eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X konvergiert schwach-$*$ gegen ein $x \in X$ genau dann, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \int_D x_n(t)y(t)\,dt = \int_D x(t)y(t)\,dt\,, \quad \text{für alle } y \in L^1(D;\mathbb{K}).$$

Lemma 5.14 *Sei X normierter Raum. Ist $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in X^* mit $x_n^* \overset{*}{\rightharpoonup} x^*$, $x^* \in X^*$, so gilt*

$$\|x^*\| \le \liminf_{n\to\infty} \|x_n^*\|\,. \tag{5.17}$$

Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in X mit $x_n \rightharpoonup x$, $x \in X$, so gilt

$$\|x\| \le \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|\,. \tag{5.18}$$

Beweis: Für alle $x \in X$ gilt

$$|x_n^*(x)| \le \|x_n^*\|\,\|x\|\,.$$

Aus $x_n^* \overset{*}{\rightharpoonup} x^*$ folgt daher

$$|x^*(x)| = \lim_{n\to\infty} |x_n^*(x)| \le \liminf_{n\to\infty} \|x_n^*\|\,\|x\|\,, \quad \text{für alle } x \in X,$$

also gilt (5.17). Beweis von (5.18): Übung. □

Ist etwa $(e^n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der Einheitsvektoren im $\ell^p(\mathbb{K})$, $1 < p < \infty$, so gilt (siehe oben (5.15)), dass

$$e^n \rightharpoonup 0\,, \quad 0 \le \lim_{n\to\infty} \|e^n\|_p = 1\,.$$

Satz 5.15 *Sei X normierter Raum. Dann ist jede in X schwach konvergente Folge in X beschränkt (bezüglich der Norm von X), und jede in X^* schwach-$*$-konvergente Folge ist in X^* beschränkt (bezüglich der Norm von X^*).*

Beweis: Aus $x_n^* \overset{*}{\rightharpoonup} x^*$ folgt $|x_n^*(x)| \to |x^*(x)|$ für alle $x \in X$, also

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n^*(x)| < \infty\,, \quad \text{für alle } x \in X.$$

Aus dem Satz von Banach-Steinhaus (Satz 3.5) folgt nun

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n^*\| < \infty\,.$$

Aus $x_n \rightharpoonup x$ folgt $|x^*(x_n)| \to |x^*(x)|$ für alle $x^* \in X^*$, also

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |x^*(x_n)| < \infty\,, \quad \text{für alle } x^* \in X^*.$$

Aus Satz 4.15 folgt nun

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| < \infty\,.$$

□

Lemma 5.16 *Sei X normierter Raum, sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in X mit $x_n \to x$ stark in X, sei $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in X^* mit $x_n^* \overset{*}{\rightharpoonup} x^*$. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} x_n^*(x_n) = x^*(x)\,. \tag{5.19}$$

Aus $x_n \rightharpoonup x$ und $x_n^* \to x^*$ stark folgt ebenfalls (5.19).

Beweis: Es gilt

$$|x^*(x) - x_n^*(x_n)| \le |(x^* - x_n^*)(x)| + \|x_n^*\|\,\|x - x_n\|\,.$$

Aus $x_n^* \overset{*}{\rightharpoonup} x^*$ folgt $|(x^* - x_n^*)(x)| \to 0$, und da $\|x_n^*\|$ beschränkt ist nach Satz 5.15, folgt (5.19). Der Beweis der zweiten Aussage verläuft analog. □

Aus $x_n \rightharpoonup x$ und $x_n^* \overset{*}{\rightharpoonup} x^*$ folgt im allgemeinen **nicht**, dass $x_n^*(x_n) \to x^*(x)$. Beispiel: $X = \ell^2(\mathbb{R})$, $X^* \cong \ell^2(\mathbb{R})$, $x_n = e^n$, $x_n^* = e^n$. Es ist $e^n \rightharpoonup 0$, $e^n \overset{*}{\rightharpoonup} 0$, aber $\langle e^n, e^n\rangle = 1$.

Definition 5.17 (Folgenkonvergenz im topologischen Raum)
Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum. Wir sagen, dass eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X gegen einen Grenzwert $x \in X$ konvergiert, falls es zu jeder offenen Menge U in X mit $x \in U$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $x_n \in U$ gilt für alle $n \ge N$. □

Lemma 5.18 *Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum. Ist $(X, \mathcal{T})$ separiert, so hat jede Folge höchstens einen Grenzwert.*

Beweis: Sind $x, y \in X$ mit $x \neq y$, so gibt es offene Mengen U_x, U_y in X mit $x \in U_x$, $y \in U_y$, $U_x \cap U_y = \emptyset$. Aus Definition 5.17 folgt nun unmittelbar, dass x und y nicht Grenzwerte derselben Folge sein können. □

In einem separierten topologischen Raum ist also die Schreibweise

$$x = \lim_{n \to \infty} x_n \tag{5.20}$$

sinnvoll.

Definition 5.19 *Seien $(X, \mathcal{T})$, $(X', \mathcal{T}')$ topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \to X'$ heißt stetig im Punkt $x \in X$, falls es zu jedem $U' \in \mathcal{T}'$ mit $f(x) \in U'$ ein $U \in \mathcal{T}$ gibt mit $x \in U$ und $f(U) \subset U'$.* □

Lemma 5.20 *Seien $(X, \mathcal{T})$, $(X', \mathcal{T}')$ topologische Räume, $f : X \to X'$. Dann ist f stetig auf X genau dann, wenn f in jedem Punkt $x \in X$ stetig ist.*

Beweis: Übung. □

Definition 5.21 (Folgenstetigkeit)
Seien $(X, \mathcal{T})$, $(X', \mathcal{T}')$ topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \to X'$ heißt folgenstetig in einem Punkt $x \in X$, falls für jede gegen x konvergente Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Folge $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $f(x)$ konvergiert. f heißt folgenstetig auf X, falls f in jedem Punkt $x \in X$ folgenstetig ist. □

Lemma 5.22 *Seien $(X, \mathcal{T})$, $(X', \mathcal{T}')$ topologische Räume, sei $f : X \to X'$. Dann gilt: Ist f stetig in $x \in X$, so ist f auch folgenstetig in x. Ist f stetig auf X, so ist f auch folgenstetig auf X.*

Beweis: Sei f stetig in x, sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine gegen x konvergente Folge in X. Sei $U' \in \mathcal{T}'$ mit $f(x) \in U'$. Wir wählen gemäß Definition 5.19 ein $U \in \mathcal{T}$ mit $x \in U$ und $f(U) \subset U'$. und gemäß Definition 5.17 ein $N \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in U$ für alle $n \geq N$, dann ist $f(x_n) \in U'$ für alle $n \geq N$. Da U' beliebig war, folgt, dass $f(x_n)$ gegen $f(x)$ konvergiert. Die zweite Behauptung folgt unmittelbar aus der ersten. □

Satz 5.23 *Sei X Menge, seien $(X_i, \mathcal{T}_i)$ topologische Räume für $i \in I$, I Menge, seien $f_i : X \to X_i$ Abbildungen, sei $\mathcal{T}$ die durch diese Abbildungen induzierte Topologie auf X. Dann gilt: Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X konvergiert gegen ein $x \in X$ genau dann, wenn für alle $i \in I$ die Folge $f_i(x_n)$ in X_i gegen $f_i(x)$ konvergiert.*

Beweis: Alle Abbildungen f_i sind stetig auf X nach Lemma 5.8, also folgenstetig auf X nach Lemma 5.22, damit folgt aus der Konvergenz von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen x auch die Konvergenz von $(f_i(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $f_i(x)$. Sei umgekehrt $x \in X$, sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X, für die alle Folgen $(f_i(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $f_i(x)$ konvergieren. Sei $U \in \mathcal{T}$ mit $x \in U$. Da $\mathcal{T}$ von Mengen der Form $f_i^{-1}(U_i)$ mit $U_i \in \mathcal{T}_i$ erzeugt wird, gibt es eine endliche Menge $J \subset I$ und $U_j \in \mathcal{T}_j$, $j \in J$, so dass

$$x \in \bigcap_{j \in J} f_j^{-1}(U_j) \subset U \,,$$

also $f_j(x) \in U_j$ für alle $j \in J$. Wir wählen zu jedem $j \in J$ ein $N_j \in \mathbb{N}$ mit $f_j(x_n) \in U_j$ für alle $n \geq N_j$. Für $N = \max_{j \in J} N_j$ gilt dann $f_j(x_n) \in U_j$ für alle $j \in J$ und alle $n \geq N$, also auch

$$x_n \in \bigcap_{j \in J} f_j^{-1}(U_j) \subset U\,, \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Also konvergiert $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen x. □

Aus Satz 5.23 folgt, dass die Definition 5.13 der schwachen und der schwach-$*$-Konvergenz tatsächlich einen Spezialfall der allgemeinen Definition 5.17 darstellt.

Lemma 5.24 *Sei X normierter Raum. Dann sind $(X, \mathcal{T}_w)$ und $(X^*, \mathcal{T}_{w^*})$ separiert.*

Beweis: Seien $x, y \in X$, $x \neq y$. Nach Folgerung 4.6 gibt es ein $x^* \in X^*$ mit $0 \neq x^*(x-y)$, also $x^*(x) \neq x^*(y)$. Wir setzen

$$U_x = (x^*)^{-1}(B(x^*(x); \varepsilon))\,, \quad U_y = (x^*)^{-1}(B(x^*(y); \varepsilon))\,.$$

Dann gilt $U_x, U_y \in \mathcal{T}_w$, $x \in U_x$, $y \in U_y$ und für $\varepsilon < |x^*(x) - x^*(y)|/2$ gilt $U_x \cap U_y = \emptyset$. Also ist $(X, \mathcal{T}_w)$ separiert. Sind nun $x^*, y^* \in X^*$ mit $x^* \neq y^*$, so gibt es $x \in X$ mit $x^*(x) \neq y^*(x)$, und der weitere Beweis verläuft analog. □

Folgerung 5.25 *Die Grenzwerte schwach konvergenter Folgen und schwach-$*$-konvergenter Folgen sind eindeutig bestimmt.*

Beweis: Folgt direkt aus Lemma 5.18 und Lemma 5.24. □

Folgerung 5.25 ließe sich auch direkt aus der Definition der schwachen Konvergenz beweisen.

Definition 5.26 (Folgenkompaktheit)
Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt folgenkompakt, falls jede Folge in X eine konvergente Teilfolge (das heißt, eine Teilfolge, die einen Grenzwert in X hat) besitzt. □

Ist (X, d) ein metrischer Raum, so stellt Definition 5.26 eine von mehreren äquivalenten Definitionen des Begriffs "kompakt" dar. In allgemeinen topologischen Räumen werden verschiedene Kompaktheitsbegriffe unterschieden.

Ist X ein normierter Raum, so heißt eine Teilmenge Y von X schwach folgenkompakt, falls $(Y, \mathcal{T}_w)$ folgenkompakt ist, das heißt, falls jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in Y eine Teilfolge besitzt, welche schwach gegen ein $x \in Y$ konvergiert. Analog definiert man schwach-$*$-folgenkompakte Teilmengen von X^*.

Satz 5.27 *Sei X normierter Raum. Ist X separabel, so ist die abgeschlossene Einheitskugel $K(0;1)$ in X^* schwach-$*$-folgenkompakt.*

Beweis: Sei $(x_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in $K(0;1)$, also $\|x_n^*\| \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $\{x_m : m \in \mathbb{N}\}$ eine dichte Teilmenge von X. Wegen $|x_n^*(x_m)| \leq \|x_m\|$ sind die Folgen $(x_n^*(x_m))_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$ beschränkt für alle $m \in \mathbb{N}$. Durch Übergang zu einer Teilfolge (bezüglich n) wollen wir erreichen, dass alle entsprechenden Teilfolgen von $(x_n^*(x_m))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren. Zu diesem Zweck wählen zunächst wir eine Folge $(n_{k1})_{k\in\mathbb{N}}$, so dass $(x_{n_{k1}}^*(x_1))_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Wir wählen weiter eine Teilfolge $(n_{k2})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(n_{k1})_{k\in\mathbb{N}}$, so dass $(x_{n_{k2}}^*(x_2))_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Per Induktion werden entsprechend Teilfolgen $(n_{km})_{k\in\mathbb{N}}$ für jedes $m \in \mathbb{N}$ gewählt. Für die Teilfolge $(n_{kk})_{k\in\mathbb{N}}$ gilt also, dass $(x_{n_{kk}}^*(x_m))_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert für alle $m \in \mathbb{N}$. Wir setzen $z_k^* = x_{n_{kk}}^*$, $Z = \operatorname{span}\{x_m : m \in \mathbb{N}\}$, und definieren

$$z^* : Z \to \mathbb{K}, \quad z^*(z) = \lim_{k\to\infty} z_k^*(z),$$

dieser Grenzwert ist wohldefiniert, da jedes $z \in Z$ Linearkombination der x_m ist. Es gilt außerdem $|z_k^*(z)| \le \|z\|$, also auch $|z^*(z)| \le \|z\|$ für alle $z \in Z$, also ist z^* stetig und $\|z^*\| \le 1$. Nach Satz 1.19 läßt sich z^* fortsetzen zu einem $x^* \in X^*$ mit $\|x^*\| \le 1$. Sei nun $x \in X$ beliebig. Es gilt für alle $z \in Z$

$$|x^*(x) - z_k^*(x)| \le |(x^* - z_k^*)(x - z)| + |x^*(z) - z_k^*(z)| \le 2\|x - z\| + |z^*(z) - z_k^*(z)|.$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir wählen $z \in Z$ mit $\|x-z\| \le \varepsilon$ und $N > 0$ so dass $|x^*(z)-z_k^*(z)| \le \varepsilon$ für alle $k \ge N$, dann gilt

$$|x^*(x) - z_k^*(x)| \le 3\varepsilon$$

für alle $k \ge N$. Da x beliebig war, folgt $z_k^* \xrightarrow{*} x^*$. □

Folgerung 5.28 *Ist X ein separabler normierter Raum, so hat jede beschränkte Folge in X^* eine schwach-$*$-konvergente Teilfolge.* □

Für $1 < p \le \infty$ ist $L^p(D)$ isomorph zum Dualraum des separablen Raumes $L^q(D)$, $q = p/(p-1) < \infty$. Ist also $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $L^p(D)$ mit $\|x_n\|_p \le C$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gibt es eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ und ein $x \in L^p(D)$ mit

$$\lim_{k\to\infty} \int_G x_{n_k}(t) y(t)\, dt = \int_G x(t) y(t)\, dt, \quad \text{für alle } y \in L^q(D). \tag{5.21}$$

Als weiteres Beispiel betrachten wir $X = C([a,b])$. Sei $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $[a,b]$, dann wird durch

$$x_n^* = \delta_{t_n}, \quad \delta_{t_n}(x) = x(t_n),$$

eine Folge $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ in X^* definiert. Ist $(t_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge mit $t_{n_k} \to t \in [a,b]$, so gilt

$$x_{n_k}^*(x) = x(t_{n_k}) \to x(t) = \delta_t(x), \quad \text{für alle } x \in C[a,b],$$

also $x_{n_k}^* \xrightarrow{*} x^* = \delta_t$. Bemerkung: Ist allgemeiner $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $[a,b]$, so folgt aus 5.28, dass es eine Teilfolge $(\mu_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ und ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ gibt, so dass

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b x(t)\, d\mu_{n_k}(t) = \int_a^b x(t)\, d\mu(t), \quad \text{für alle } x \in C[a,b].$$

Ist X nicht separabel, so kann es beschränkte Folgen in X^* geben, die keine schwach-$*$-konvergente Teilfolge haben. Als Beispiel betrachten wir $X = L^\infty(0,1)$. Sei $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge mit

$$\varepsilon_n \in (0,1), \quad \varepsilon_n \to 0, \quad \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} \to 0. \tag{5.22}$$

Wir betrachten

$$x_n^*(x) = \frac{1}{\varepsilon_n}\int_0^{\varepsilon_n} x(t)\,dt\,, \quad x \in L^\infty(0,1)\,. \tag{5.23}$$

Es gilt $x_n^* \in X^*$, $\|x_n^*\| = 1$. Sei $x \in L^\infty(0,1)$ definiert durch

$$x(t) = (-1)^k\,, \quad \text{falls } \varepsilon_{k+1} < t < \varepsilon_k, \tag{5.24}$$

dann gilt

$$\begin{aligned} x_n^*(x) &= \frac{1}{\varepsilon_n}\left(\int_0^{\varepsilon_{n+1}} x(t)\,dt + (\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1})(-1)^n\right) \\ &= (-1)^n + \frac{1}{\varepsilon_n}\int_0^{\varepsilon_{n+1}} x(t)\,dt - \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n}(-1)^n\,, \end{aligned}$$

also

$$|x_n^*(x) - (-1)^n| \le 2\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} \to 0\,,$$

das heißt, die Folge $(x_n^*(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ist nicht konvergent. Da dasselbe Argument für jede Teilfolge $(x_{n_k}^*)_{n\in\mathbb{N}}$ (mit entsprechend gewählter Funktion x) zutrifft, hat $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ keine schwach-$*$-konvergente Teilfolge. Fassen wir sie aber als Folge in X^*, $X = C([0,1])$, auf, so gilt für alle $x \in X$

$$|x_n^*(x) - x(0)| = \left|\frac{1}{\varepsilon_n}\int_0^{\varepsilon_n} x(t) - x(0)\,dt\right| \le \sup_{0\le s\le t} |x(s) - x(0)| \to 0\,,$$

also $x_n^* \stackrel{*}{\rightharpoonup} \delta_0$.

Lemma 5.29 *Sei X normierter Raum. Ist X^* separabel, so ist auch X separabel.*

Beweis: Sei $\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\}$ dichte Teilmenge von X^*. Wir wählen nach Definition der Operatornorm zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in X$ mit

$$|x_n^*(x_n)| \ge \frac{1}{2}\|x_n^*\|\,, \quad \|x_n\| = 1\,.$$

Sei $Y = \operatorname{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Sei $x^* \in X^*$ beliebig mit $x^*|Y = 0$. Es folgt

$$\|x^* - x_n^*\| \ge |x^*(x_n) - x_n^*(x_n)| = |x_n^*(x_n)| \ge \frac{1}{2}\|x_n^*\| \ge \frac{1}{2}(\|x^*\| - \|x_n^* - x^*\|)\,. \tag{5.25}$$

Gehen wir auf beiden Seiten zum Infimum bezüglich n über, so folgt $\|x^*\| = 0$, also $x^* = 0$. Aus Folgerung 4.8 ergibt sich $\overline{Y} = X$ (andernfalls gäbe es ein $x^* \neq 0$ mit $x^*|\overline{Y} = 0$). Aus Satz 1.17 folgt nun, dass X separabel ist. □

Satz 5.30 *Sei X Banachraum. Ist X reflexiv, so ist die abgeschlossene Einheitskugel $K(0;1)$ in X schwach folgenkompakt.*

Beweis: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in X mit $\|x_n\| \le 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir setzen

$$Y = \overline{\operatorname{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}\,.$$

Dann ist Y separabel nach Satz 1.17 und reflexiv nach Satz 4.13. Da $Y^{**} \cong Y$, ist auch Y^{**} separabel. Aus Lemma 5.29 folgt nun, dass Y^* separabel ist. Die Folge $(J_Y x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in Y^{**} ist beschränkt in Y^{**} und hat daher nach Folgerung 5.28 eine schwach-$*$-konvergente Teilfolge $(J_Y x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, sei $J_Y x_{n_k} \overset{*}{\rightharpoonup} y^{**}$. Wir setzen $x = J_Y^{-1} y^{**}$. Für beliebiges $x^* \in X^*$ gilt dann mit $y^* = x^*|Y \in Y^*$

$$x^*(x_{n_k}) = y^*(x_{n_k}) = (J_Y x_{n_k})(y^*) \to y^{**}(y^*) = y^*(x) = x^*(x)\,,$$

also gilt $x_{n_k} \rightharpoonup x$. □

Die Umkehrung von Satz 5.30 gilt ebenfalls, das heißt: Ist X nicht reflexiv, so ist $K(0;1)$ nicht schwach folgenkompakt. (Ohne Beweis.)

Folgerung 5.31 *Sei X ein reflexiver Banachraum. Dann hat jede beschränkte Folge in X eine schwach konvergente Teilfolge.* □

Definition 5.32 (Abgeschlossene Menge)
Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum. Eine Teilmenge A von X heißt abgeschlossen (in X), falls $X \setminus A \in \mathcal{T}$. □

Die Teilmengen $\emptyset$ und X sind abgeschlossen in X. Aus der entsprechenden Eigenschaft für offene Mengen folgt, dass endliche Vereinigungen und beliebige Durchschnitte,

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i\,, \quad \bigcap_{i\in I} A_i\,, \tag{5.26}$$

abgeschlossener Mengen ebenfalls abgeschlossen sind.

Lemma 5.33 *Seien $(X, \mathcal{T})$, $(X', \mathcal{T}')$ topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \to X'$ ist stetig genau dann, wenn $f^{-1}(A')$ abgeschlossen ist in X für alle in X' abgeschlossenen Mengen $A' \subset X'$.*

Beweis: Folgt direkt aus der Definition der Stetigkeit, da $X \setminus f^{-1}(Y') = f^{-1}(X \setminus Y')$ gilt für jede Teilmenge Y' von X'. □

Lemma 5.34 *Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum, sei $A \subset X$ abgeschlossen, sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in A, es gelte $x_n \to x \in X$. Dann gilt $x \in A$.*

Beweis: Wäre $x \notin A$, so wäre $x_n \in X \setminus A$ für hinreichend große n, da $X \setminus A$ offen ist, im Widerspruch zu $x_n \in A$. □

Definition 5.35 (Endliche Überdeckungseigenschaft)
Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum. Wir sagen, dass er die endliche Überdeckungseigenschaft besitzt, falls gilt: Ist I Menge und $(U_i)_{i\in I}$ eine Familie offener Mengen in X mit $\cup_{i\in I} U_i = X$, so gibt es eine endliche Menge $J \subset I$ mit $\cup_{i\in J} U_i = X$. ("Jede offene Überdeckung von X besitzt eine endliche Teilüberdeckung".) □

Definition 5.36 (Kompaktheit)
Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt kompakt, falls er separiert ist und die endliche Überdeckungseigenschaft besitzt. □

Ein metrischer Raum ist genau dann kompakt, wenn er folgenkompakt ist (wird hier nicht bewiesen, siehe Analysis 2 oder Topologie).

Satz 5.37 (Satz von Tychonov)
Sei I Menge, seien $(X_i, \mathcal{T}_i)$ topologische Räume für alle $i \in I$. Sind alle X_i kompakt, so ist auch der Raum $\prod_{i \in I} X_i$, versehen mit der Produkttopologie, kompakt.

Beweis: Siehe Topologie. □

Lemma 5.38 *Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum, sei $A \subset X$. Ist X kompakt und A abgeschlossen, so ist auch $(A, \mathcal{T}_A)$ kompakt, wobei*

$$\mathcal{T}_A = \{U \cap A : U \in \mathcal{T}\}$$

die auf A induzierte Topologie ist.

Beweis: Übung. □

Ist $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ stetig, so ist auch

$$f|Y : (Y, \mathcal{T}_Y) \to (X', \mathcal{T}')$$

stetig, da $f|Y = f \circ j_Y$, wobei $j_Y : Y \to X$ die kanonische Einbettung ist.

Definition 5.39 (Homöomorphie)
Zwei topologische Räume $(X, \mathcal{T})$ und $(X', \mathcal{T}')$ heißen homöomorph, falls es eine bijektive Abbildung $f : X \to X'$ gibt, so dass f und f^{-1} stetig sind. Die Abbildung f heißt Homöomorphismus. □

Ein Homöomorphismus $f : X \to X'$ bildet $\mathcal{T}$ bijektiv auf $\mathcal{T}'$ ab, da $U \in \mathcal{T}$ genau dann, wenn $f(U) \in \mathcal{T}'$. Das hat zur Folge, dass homöomorphe Räume identische topologische Eigenschaften haben. So ist etwa X genau dann kompakt, wenn X' kompakt ist. Außerdem können wir $\mathcal{T}$ als die von $f : X \to (X', \mathcal{T}')$ induzierte Topologie auffassen, entsprechend $\mathcal{T}'$ als die von $f^{-1} : X' \to (X, \mathcal{T})$ induzierte Topologie.

Satz 5.40 (Alaoglu)
Sei X ein normierter Raum. Dann ist die abgeschlossene Einheitskugel $K(0; 1)$ in X^* schwach-$*$-kompakt.

Beweis: Wir betrachten das "X-fache Produkt von $\mathbb{K}$ mit sich selbst",

$$S = \prod_{x \in X} \mathbb{K} \tag{5.27}$$

mit den Projektionen $P_x : S \to \mathbb{K}$ für jedes $x \in X$. Wir erhalten eine kanonische Bijektion

$$\Phi : \mathrm{Abb}\,(X; \mathbb{K}) \to S\,, \tag{5.28}$$

indem wir definieren

$$P_x(\Phi f) = f(x)\,, \quad \text{falls } f : X \to \mathbb{K} \text{ Abbildung.} \tag{5.29}$$

Wir versehen S mit der Produkttopologie $\mathcal{T}_S$. (Die hieraus durch Φ auf $\mathrm{Abb}\,(X; \mathbb{K})$ induzierte Topologie heißt die Topologie der punktweisen Konvergenz.) Wir betrachten die Teilmenge

$$K = \prod_{x \in X} K(0; \|x\|)\,, \quad K(0; \|x\|) \subset \mathbb{K}\,, \tag{5.30}$$

von S. Nach dem Satz 5.37 von Tychonov ist K kompakt. Wir bezeichnen mit K^* die abgeschlossene Einheitskugel in X^*. Wir wollen zeigen, dass $\Phi(K^*)$ eine abgeschlossene Teilmenge von K ist. Sei dazu $f : X \to \mathbb{K}$ eine beliebige Abbildung. Nach Konstruktion gilt

$$|f(x)| \le \|x\|\,, \quad \text{für alle } x \in X, \tag{5.31}$$

genau dann, wenn

$$\Phi f \in K\,. \tag{5.32}$$

Weiter gilt für feste $x, y \in X$

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \tag{5.33}$$

genau dann, wenn

$$P_{x+y}(\Phi f) = P_x(\Phi f) + P_y(\Phi f)\,, \tag{5.34}$$

also genau dann, wenn

$$\Phi f \in (P_{x+y} - P_x - P_y)^{-1}(\{0\})\,. \tag{5.35}$$

Entsprechend gilt für festes $x \in X$, $\alpha \in \mathbb{K}$

$$f(\alpha x) = \alpha f(x) \tag{5.36}$$

genau dann, wenn

$$\Phi f \in (P_{\alpha x} - \alpha P_x)^{-1}(\{0\})\,. \tag{5.37}$$

Da alle Abbildungen

$$(P_{x+y} - P_x - P_y), (P_{\alpha x} - \alpha P_x) : S \to \mathbb{K} \tag{5.38}$$

stetig sind, sind die Mengen

$$L_{x,y} = K \cap (P_{x+y} - P_x - P_y)^{-1}(\{0\})\,, \tag{5.39}$$
$$L_{x,\alpha} = K \cap (P_{\alpha x} - \alpha P_x)^{-1}(\{0\})\,, \tag{5.40}$$

abgeschlossen in K nach Lemma 5.33, und daher auch

$$\Phi(K^*) = \bigcap_{x,y \in X} L_{x,y} \cap \bigcap_{x \in X, \alpha \in \mathbb{K}} L_{x,\alpha}\,. \tag{5.41}$$

Nach Lemma 5.38 ist $\Phi(K^*)$ kompakt. Es genügt nun zu zeigen, dass

$$\Phi : (K^*, \mathcal{T}_{w^*}) \to (\Phi(K^*), \mathcal{T}_{\Phi(K^*)}) \tag{5.42}$$

ein Homöomorphismus ist. Da $P_x(\Phi x^*) = x^*(x)$, ist $P_x \circ \Phi : (K^*, \mathcal{T}_{w^*}) \to \mathbb{K}$ nach Definition der schwach-$*$-Topologie stetig für alle $x \in X$, also ist Φ stetig nach Lemma 5.8(ii). Ebenso gilt für alle $x \in X$, wenn wir $x^{**} = J_X x$ setzen,

$$P_x(\Phi x^*) = x^*(x) = x^{**}(x^*) = x^{**}(\Phi^{-1}\Phi x^*)\,, \quad \text{für alle } x^* \in X^*,$$

also, eingeschränkt auf $\Phi(K^*)$,

$$x^{**} \circ \Phi^{-1} = P_x\,,$$

also ist $x^{**} \circ \Phi^{-1}$ stetig auf $\Phi(K^*)$ für alle $x \in X$ und damit auch Φ^{-1} nach Lemma 5.8(ii). Damit ist Φ in (5.42) ein Homöomorphismus und daher K^* schwach-$*$-kompakt. □

Wir betrachten noch einmal das Approximationsproblem: Sei X normierter Raum, $K \subset X$, $x \in X$, gesucht ist $y \in K$ mit

$$\|x - y\| = \inf_{z \in K} \|x - z\|\,. \tag{5.43}$$

Satz 5.41 *Sei X normierter Raum, $K \subset X$ konvex und abgeschlossen. Dann ist K schwach abgeschlossen (das heißt, abgeschlossen in $(X, \mathcal{T}_w)$).*

Beweis: Man zeigt mit dem Trennungssatz, dass $X \setminus K$ schwach offen ist, siehe Übungsaufgabe für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$; für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ benötigt man die im Komplexen gültige Version des Trennungssatzes, die wir hier nicht behandelt haben. □

Satz 5.42 *Sei X reflexiver Banachraum, $K \subset X$ konvex, abgeschlossen und nichtleer. Dann gibt es zu jedem $x \in X$ ein $y \in K$ mit*

$$\|x - y\| = \inf_{z \in K} \|x - z\|\,. \tag{5.44}$$

Beweis: Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in K mit $\lim_{n\to\infty} \|x - y_n\| = \inf_{z\in K} \|x - z\| =: d$. Wegen $\|y_n\| \le \|x - y_n\| + \|x\|$ ist $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und besitzt daher nach Folgerung 5.31 eine schwach konvergente Teilfolge, sei $y_{n_k} \rightharpoonup y$, $y \in X$. Nach Satz 5.41 ist K schwach abgeschlossen, also ist $y \in K$ nach Lemma 5.34. Da auch $x - y_{n_k} \rightharpoonup x - y$, folgt nach Lemma 5.14

$$\|x - y\| \le \liminf_{k\to\infty} \|x - y_{n_k}\| = d\,,$$

also gilt (5.44). □

Definition 5.43 (Strikte Konvexität)
Ein normierter Raum X heißt strikt konvex, falls für alle $x_1, x_2 \in X$ mit $\|x_1\| = \|x_2\| = 1$ und $x_1 \neq x_2$ gilt, dass

$$\left\| \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \right\| < 1\,. \tag{5.45}$$

□

Satz 5.44 *Sei X normierter Raum, $K \subset X$ konvex, $x \in X$. Ist X strikt konvex, so gibt es höchstens ein $y \in K$ mit*

$$\|x - y\| = \inf_{z \in K} \|x - z\| \,. \tag{5.46}$$

Beweis: Seien $y, \tilde{y} \in K$ zwei verschiedene Lösungen von (5.46),

$$\|x - y\| = \|x - \tilde{y}\| = d \,.$$

Dann ist $d > 0$, da andernfalls $y = \tilde{y} = x$. Wir setzen

$$x_1 = \frac{1}{d}(x - y) \,, \quad x_2 = \frac{1}{d}(x - \tilde{y}) \,,$$

in Definition 5.43, dann folgt

$$\frac{1}{d}\|x - \frac{1}{2}(y + \tilde{y})\| < 1 \,, \quad \frac{1}{2}(y + \tilde{y}) \in K \,,$$

ein Widerspruch zur Minimalität von y und $\tilde{y}$. □

Mit der p-Norm versehene Vektorräume sind typischerweise strikt konvex für $1 < p < \infty$ und nicht strikt konvex für $p = 1$ und $p = \infty$ (Supremumsnorm). Das gilt etwa für $\mathbb{K}^n$, $\ell^p(\mathbb{K})$, $L^p(D; \mathbb{K})$, $C(D; \mathbb{K})$. Da $\mathbb{K}^n$, $\ell^p(\mathbb{K})$ und $L^p(D; \mathbb{K})$ für $1 < p < \infty$ auch reflexiv sind, folgt aus den Sätzen 5.42 und 5.44 die eindeutige Lösbarkeit des Approximationsproblems (5.43) in diesen Räumen für beliebige abgeschlossene konvexe Mengen K.

6 Das Spektrum

Ist $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ linear, und gilt

$$Tx = \lambda x\,, \quad \lambda \in \mathbb{K}, \quad x \in \mathbb{K}^n\,, \quad x \neq 0\,, \tag{6.1}$$

so heißt λ Eigenwert von T und x zugehöriger Eigenvektor. Indem man Eigenwerte und Eigenvektoren untersucht, erhält man in der Linearen Algebra eine Strukturtheorie linearer Abbildungen im Endlichdimensionalen. Ein $\lambda \in \mathbb{K}$ ist Eigenwert von T genau dann, wenn die Abbildung $\lambda\, id - T$ nicht bijektiv ist. Statt $\lambda\, id - T$ schreiben wir im Folgenden abkürzend

$$\lambda - T\,.$$

Für den Raum $L(X;X)$ aller linearen stetigen Abbildungen von X nach X schreiben wir

$$L(X)\,.$$

Wir erinnern daran: Ist X Banachraum, so ist auch $L(X)$ Banachraum.

In diesem Abschnitt setzen wir generell voraus, dass $X \neq \{0\}$ (sonst ist $L(X) = \{0\}$ und $\|id\| = 0$.)

Definition 6.1 (Resolvente)
Sei X Banachraum, $T \in L(X)$. Die Teilmenge

$$\rho(T) = \{\lambda : \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda - T \text{ ist bijektiv}\} \tag{6.2}$$

von $\mathbb{K}$ heißt Resolventenmenge von T. Die Abbildung

$$R : \rho(T) \to L(X)\,, \quad R_\lambda = (\lambda - T)^{-1}\,, \tag{6.3}$$

heißt die Resolvente von T. □

Die Definition von R in (6.3) macht Sinn, da $(\lambda - T)^{-1}$ linear und stetig ist, wenn $\lambda - T$ linear, stetig und bijektiv ist, siehe Folgerung 3.8.

Satz 6.2 *Sei X Banachraum, $T \in L(X)$. Ist $\|T\| < 1$, so ist $1 - T$ bijektiv, $(1-T)^{-1} \in L(X)$ und*

$$(1 - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k\,. \tag{6.4}$$

Beweis: Übung. □

Folgerung 6.3 *Seien X, Y Banachräume, $T \in L(X;Y)$, T bijektiv. Ist $\tilde{T} \in L(X;Y)$ mit*

$$\|\tilde{T} - T\| < \frac{1}{\|T^{-1}\|}\,, \tag{6.5}$$

so ist auch $\tilde{T}$ bijektiv und $\tilde{T}^{-1} \in L(Y;X)$.

Beweis: Durch Linksmultiplikation mit TT^{-1} erkennt man, dass

$$\tilde{T} = T(1 - T^{-1}(T - \tilde{T}))\,, \tag{6.6}$$

und aus (6.5) folgt $\|T^{-1}(T-\tilde{T})\| \le \|T^{-1}\|\,\|T-\tilde{T}\| < 1$, also folgt die Behauptung aus Satz 6.2. □

Folgerung 6.4 *Sei X Banachraum, $T \in L(X)$. Dann ist die Resolventenmenge $\rho(T)$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{K}$. Ist $\lambda_0 \in \rho(T)$, so gilt*

$$R_\lambda = (\lambda - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^k [(\lambda_0 - T)^{-1}]^{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^k R_{\lambda_0}^{k+1} \tag{6.7}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ mit

$$|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|R_{\lambda_0}\|}\,. \tag{6.8}$$

Beweis: Für $\lambda, \tilde{\lambda} \in \mathbb{K}$ gilt Die Behauptung folgt also aus Folgerung 6.3. Analog zu (6.6) erhalten wir

$$\lambda - T = (\lambda_0 - T)[1 - (\lambda_0 - T)^{-1}(\lambda_0 - \lambda)]\,,$$

wegen $\|(\lambda - T) - (\lambda_0 - T)\| = |\lambda - \lambda_0|$ folgt also für $|\lambda - \lambda_0|$ hinreichend klein

$$(\lambda - T)^{-1} = [1 - (\lambda_0 - T)^{-1}(\lambda_0 - \lambda)]^{-1}(\lambda_0 - T)^{-1}$$

und hieraus (6.7) aus (6.4). □

Definition 6.5 (Spektrum, Punktspektrum)
Sei X Banachraum, $T \in L(X)$. Die Teilmenge

$$\sigma(T) = \mathbb{K} \setminus \rho(T) = \{\lambda : \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda - T \text{ ist nicht bijektiv}\} \tag{6.9}$$

heißt das Spektrum von T, jedes $\lambda \in \sigma(T)$ heißt Spektralwert von T. Ist $\lambda - T$ nicht injektiv, so heißt λ Eigenwert von T mit dem zugehörigen Eigenraum $\ker(\lambda - T)$, *und jedes $x \in X$ mit $\lambda x = Tx$ und $x \neq 0$ heißt zugehöriger Eigenvektor. Die Menge*

$$\sigma_p(T) = \{\lambda : \lambda \text{ ist Eigenwert von } T\} \tag{6.10}$$

heißt das Punktspektrum von T. □

Ist $X = \mathbb{K}^n$, so ist $\lambda - T$ injektiv genau dann, wenn $\lambda - T$ bijektiv ist, es gilt also $\sigma(T) = \sigma_p(T)$. Im Unendlichdimensionalen gilt im allgemeinen $\sigma(T) \neq \sigma_p(T)$.

Definition 6.6 (kontinuierliches Spektrum, Restspektrum)
Sei X Banachraum, $T \in L(X)$. Die Menge

$$\sigma_c(T) = \{\lambda : \lambda \in \sigma(T),\ \lambda - T \text{ ist injektiv, nicht surjektiv, und } \overline{(\lambda - T)(X)} = X\} \tag{6.11}$$

heißt das kontinuierliche Spektrum von T, die Teilmenge

$$\sigma_r(T) = \{\lambda : \lambda \in \sigma(T),\ \lambda - T \text{ ist injektiv, nicht surjektiv, und } \overline{(\lambda - T)(X)} \neq X\} \tag{6.12}$$

heißt das Restspektrum von T. □

Offensichtlich stellt

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T)$$

eine disjunkte Zerlegung des Spektrums dar.

Als Beispiel betrachten wir

$$T : \ell^2(\mathbb{K}) \to \ell^2(\mathbb{K}) \,, \quad (Tx)_k = \begin{cases} 0 \,, & k = 1 \,, \\ x_{k-1} \,, & k > 1 \,. \end{cases}$$

Hier gilt $0 \in \sigma_r(T)$, da T injektiv und $T(\ell^2(\mathbb{K})) = \{y : y_1 = 0\}$ abgeschlossener echter Unterraum von $\ell^2(\mathbb{K})$ ist. Für

$$T : \ell^2(\mathbb{K}) \to \ell^2(\mathbb{K}) \,, \quad (Tx)_k = \frac{1}{k} x_k \,,$$

gilt $0 \in \sigma_c(T)$, da T injektiv ist, wegen $(1/k)_{k\in\mathbb{N}} \notin T(\ell^2(\mathbb{K}))$ nicht surjektiv ist, und wegen $c_e(\mathbb{K}) \subset T(\ell^2(\mathbb{K}))$ dichtes Bild hat.

Satz 6.7 *Sei X Banachraum, $T \in L(X)$. Dann ist $\sigma(T)$ kompakt, und es gilt $|\lambda| \leq \|T\|$ für alle $\lambda \in \sigma(T)$. Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ gilt außerdem $\sigma(T) \neq \emptyset$.*

Beweis: Sei $T \neq 0$, der Fall $T = 0$ ist klar. Ist $|\lambda| > \|T\|$, so folgt aus

$$\lambda - T = \lambda \left(1 - \frac{1}{\lambda} T \right) \tag{6.13}$$

und Satz 6.2, dass $\lambda \in \rho(T)$. Also ist $\sigma(T)$ durch $\|T\|$ beschränkt und wegen Folgerung 6.4 abgeschlossen in $\mathbb{K}$, also kompakt. Sei nun $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Für beliebiges $l^* \in L(X)^*$ betrachten wir die Funktion

$$f : \rho(T) \to \mathbb{C}, \quad f(\lambda) = l^*(R_\lambda) \,. \tag{6.14}$$

Sei $\lambda_0 \in \rho(T)$ beliebig. Aus Folgerung 6.4 folgt, dass

$$f(\lambda) = l^*(R_\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^k l^*(R_{\lambda_0}^{k+1}) \,, \tag{6.15}$$

falls $\lambda \in B(\lambda_0; 1/\|R_{\lambda_0}\|)$, das heißt, f hat eine in dieser Kreisscheibe konvergente Potenzreihenentwicklung. Also ist f holomorph auf $\rho(T)$. Wir nehmen nun an, dass $\sigma(T) = \emptyset$, dann ist $\rho(T) = \mathbb{C}$. Auf der kompakten Menge $B(0; 2\|T\|)$ ist f beschränkt, für $|\lambda| > 2\|T\|$ folgt aus (6.13)

$$R_\lambda = (\lambda - T)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{T}{\lambda} \right)^k \,, \tag{6.16}$$

und weiter

$$|f(\lambda)| = |l^*(R_\lambda)| = \left| \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{l^*(T^k)}{\lambda^k} \right| \leq \frac{1}{|\lambda|} \|l^*\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|T\|^k}{|\lambda|^k} \leq 2\|l^*\| \frac{1}{|\lambda|} \,. \tag{6.17}$$

Also ist f auf $\mathbb{C}$ beschränkt. Aus dem Satz von Liouville (siehe Funktionentheorie) folgt nun, dass f auf $\mathbb{C}$ konstant ist, und aus (6.17) folgt $f = 0$. Es folgt also $l^*(R_\lambda) = 0$ für alle $l^* \in L(X)^*$ und damit aus dem Satz von Hahn-Banach $R_\lambda = 0$, ein Widerspruch, da R_λ bijektiv ist. $\square$

Die Aussage von Satz 6.7 läßt sich verschärfen. Definiert man den Spektralradius von $T \in L(X)$ durch

$$r(T) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sqrt[n]{\|T^n\|}\,, \tag{6.18}$$

so läßt sich zeigen, dass

$$|\lambda| \leq r(T)\,, \quad \text{für alle } \lambda \in \sigma(T), \tag{6.19}$$

(offensichtlich ist $r(T) \leq \|T\|$), und im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ gilt

$$r(T) = \max_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|\,. \tag{6.20}$$

Letzteres wird ebenfalls mit Mitteln der Funktionentheorie bewiesen (siehe die Lehrbücher von Alt und Werner).

7 Kompakte Operatoren

Definition 7.1 (Relativ kompakt)
Sei (X,d) metrischer Raum, $M \subset X$. Ist $\overline{M}$ kompakt, so heißt M relativ kompakt (in X). □

Definition 7.2 (Kompakter Operator)
Seien X, Y Banachräume. Eine lineare Abbildung $T : X \to Y$ heißt kompakt, oder auch kompakter Operator, falls das Bild $T(K(0;1))$ der abgeschlossenen Einheitskugel $K(0;1)$ relativ kompakt ist in Y. □

Da eine lineare Abbildung stetig ist genau dann, wenn das Bild der Einheitskugel beschränkt ist, ist jeder kompakte Operator stetig. Mit

$$K(X;Y) = \{T : T \in L(X;Y),\, T \text{ kompakter Operator}\} \tag{7.1}$$

bezeichnen wir die Menge der kompakten Operatoren von X nach Y, und setzen

$$K(X) = K(X;X)\,. \tag{7.2}$$

Nach dem eben Gesagten gilt $K(X;Y) \subset L(X;Y)$.

Lemma 7.3 *Seien X, Y Banachräume, $T : X \to Y$ linear. Dann sind äquivalent:*

(i) T ist kompakt.

(ii) $T(B)$ ist relativ kompakt in Y für jede beschränkte Teilmenge $B \subset X$.

(iii) Für jede beschränkte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X enthält die Bildfolge $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine in Y konvergente Teilfolge.

Beweis: "(i)⇒(ii)": Ist $T(K(0;1))$ relativ kompakt, so auch $T(K(0;R)) = RT(K(0;1))$ für alle $R > 0$. Ist B beschränkt, so ist $T(B) \subset T(K(0;R))$ für hinreichend großes R, also $\overline{T(B)}$ kompakt als abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge $\overline{T(K0;R))}$.
"(ii)⇒(iii)": Unmittelbar klar. "(iii)⇒(i)": Übung. □

Als Beispiel betrachten wir

$$T : C[0,1] \to C[0,1]\,, \quad (Tx)(t) = \int_0^1 k(s,t)x(s)\,ds\,, \tag{7.3}$$

wobei $k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig ist. Die rechte Seite in (7.3) ist stetig als Funktion von t (siehe Analysis 2), also ist $Tx \in C[0,1]$ und T daher wohldefiniert. Für $x \in C[0,1]$ mit $\|x\|_\infty \le 1$ gilt

$$|(Tx)(t)| \le \int_0^1 |k(s,t)|\,|x(s)|\,ds\,, \tag{7.4}$$

also

$$\|Tx\|_\infty \le \sup_{t\in[0,1]} \int_0^1 |k(s,t)|\,ds \le \|k\|_\infty\,, \tag{7.5}$$

also ist $T(K(0;1))$ beschränkt. Wir zeigen, dass $T(K(0;1))$ gleichgradig stetig ist. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, wir wählen $\delta > 0$ mit

$$|k(s,t) - k(s,\tau)| < \delta\,, \quad \text{für alle } t, \tau \text{ mit } |t-\tau| < \varepsilon,$$

das ist möglich, da k auf der kompakten Menge $[0,1] \times [0,1]$ gleichmäßig stetig ist. Es folgt, dass

$$|(Tx)(t) - (Tx)(\tau)| \le \int_0^1 |k(s,t) - k(s,\tau)|\,|x(s)|\,ds < \delta \tag{7.6}$$

für alle $x \in K(0;1)$ und alle t, τ mit $|t - \tau| < \delta$. Also ist $T(K(0;1))$ gleichgradig stetig, und aus dem Satz von Arzela-Ascoli folgt, dass $T(K(0;1))$ relativ kompakt ist in $C[0,1]$. Der durch (7.3) definierte Operator T ist daher kompakt.

Ist $T \in L(X;Y)$ und

$$\dim(X) < \infty\,, \quad \text{oder} \quad \dim(T(X)) < \infty\,, \tag{7.7}$$

so ist $T(K(0;1))$ als beschränkte Teilmenge eines endlichdimensionalen Raums relativ kompakt, also T kompakt.

Lemma 7.4 *Seien X, Y, Z Banachräume, $T \in L(X;Y)$, $S \in L(Y;Z)$. Ist T kompakt oder S kompakt, so ist auch $S \circ T$ kompakt.*

Beweis: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkte Folge in X. Ist T kompakt, so hat $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(Tx_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, und da S stetig ist, ist auch $(S(Tx_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent. Ist S kompakt, so hat die beschränkte Folge $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (T ist linear und stetig) eine konvergente Teilfolge $(S(Tx_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$. □

Satz 7.5 *Seien X, Y Banachräume. Dann ist $K(X;Y)$ ein abgeschlossener Unterraum von $L(X;Y)$.*

Beweis: Sei $(T_m)_{m\in\mathbb{N}}$ Folge in $K(X;Y)$ mit $T_m \to T$, $T \in L(X;Y)$. Wir wollen zeigen, dass T kompakt ist. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkte Folge in X, sei $\|x_n\| \le C$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir wählen eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, so dass $(T_m x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent ist in Y für alle $m \in \mathbb{N}$. Das erreichen wir mit dem Diagonalisierungsargument, wie es etwa im Beweis von Satz 5.27 ausgeführt wurde. Im zweiten Schritt zeigen wir, dass $(Tx_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist. Sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen $m \in \mathbb{N}$ mit $\|T - T_m\| \le \varepsilon$ und $K > 0$ mit

$$\|T_m x_{n_k} - T_m x_{n_j}\| < \varepsilon\,, \quad \text{für alle } k, j \ge K.$$

Es folgt für alle $j, k \ge K$

$$\begin{aligned}\|Tx_{n_k} - Tx_{n_j}\| &= \|Tx_{n_k} - T_m x_{n_k}\| + \|T_m x_{n_k} - T_m x_{n_j}\| + \|T_m x_{n_j} - Tx_{n_j}\| \\ &\le \|T - T_m\|\,\|x_{n_k}\| + \|T_m x_{n_k} - T_m x_{n_j}\| + \|T_m - T\|\,\|x_{n_j}\| \\ &\le C\varepsilon + \varepsilon + C\varepsilon = (2C+1)\varepsilon\,,\end{aligned}$$

also ist $(Tx_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge und damit konvergent, da Y vollständig ist. □

Folgerung 7.6 *Seien X, Y Banachräume, sei $T : X \to Y$ linear und stetig, es gebe eine Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ linearer stetiger Operatoren $T_n : X \to Y$ mit*

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n - T\| = 0\,, \quad \dim(T_n(X)) < \infty \quad \textit{für alle } n \in \mathbb{N}. \tag{7.8}$$

Dann ist T kompakt.

Beweis: Da jeder lineare stetige Operator mit endlichdimensionalem Bild kompakt ist, folgt die Behauptung unmittelbar aus Satz 7.5. □

Folgerung 7.6 kann herangezogen werden, um die Kompaktheit des durch

$$(Tx)(t) = \int_0^1 k(s,t)x(s)\,ds\,, \tag{7.9}$$

definierten Integraloperators in L^p-Räumen zu zeigen. Wir betrachten den Fall $p = 2$, $X = Y = L^2(0,1)$. Ist etwa

$$k(s,t) = g(s)h(t)\,, \quad g, h \in L^2(0,1)\,, \tag{7.10}$$

so ist $k \in L^2((0,1) \times (0,1))$, und (7.9) wird zu

$$(Tx)(t) = \int_0^1 g(s)x(s)\,ds\, h(t)\,, \tag{7.11}$$

also ist $T(X) = \operatorname{span}\{h\}$ eindimensional. Für eine Linearkombination

$$k(s,t) = \sum_{i=1}^m \alpha_i g_i(s)h_i(t) \tag{7.12}$$

gilt dann $\dim(T(X)) \le m$. Es gilt nun (ohne Beweis): Zu jedem $k \in L^2((0,1) \times (0,1))$ gibt es eine Folge $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen der Form (7.12) mit $k_n \to k$ in $L^2((0,1) \times (0,1))$. Da für die zugehörigen Integraloperatoren aus (7.9) gilt

$$\|T_n - T\| \le \|k_n - k\|_{L^2}\,,$$

impliziert Folgerung 7.6, dass T kompakt ist in $X = L^2(0,1)$.

8 Adjungierte Operatoren

Seien X, Y normierte Räume, sei $T : X \to Y$ linear und stetig. Ist $y^* \in Y^*$, so wird durch

$$T^*y^* = y^* \circ T \tag{8.1}$$

eine lineare stetige Abbildung $T^*y^* \in X^*$ definiert. Offensichtlich ist $T^* : Y^* \to X^*$ linear.

Lemma 8.1 *T^* ist stetig, und es gilt $\|T^*\| = \|T\|$.*

Beweis: Es gilt

$$\sup_{\|y^*\|\le 1} \|T^*y^*\| = \sup_{\|y^*\|\le 1} \sup_{\|x\|\le 1} |(T^*y^*)(x)| = \sup_{\|x\|\le 1} \sup_{\|y^*\|\le 1} |y^*(Tx)| = \sup_{\|x\|\le 1} \|Tx\| = \|T\| \,.$$

Die vorletzte Gleichung gilt wegen Folgerung 4.7. □

Definition 8.2 (Adjungierter Operator)
Seien X, Y normierte Räume, sei $T \in L(X; Y)$. Der durch (8.1) definierte Operator $T^* \in L(Y^*; X^*)$ heißt der zu T adjungierte Operator. □

Lemma 8.3 *Die Zuordnung $T \mapsto T^*$ definiert eine isometrische lineare Abbildung von $L(X; Y)$ nach $L(Y^*; X^*)$.*

Beweis: Die Linearität folgt unmittelbar aus der Definition, die Eigenschaft der Isometrie aus Lemma 8.1. □

Im allgemeinen ist die Abbildung $T \mapsto T^*$ nicht surjektiv (Gegenbeispiel siehe Werner).

Als Beispiel betrachten wir den Integraloperator $T : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$,

$$(T\xi)(t) = \int_0^1 k(s,t)\xi(s)\, ds\,, \quad k \in L^2((0,1) \times (0,1))\,. \tag{8.2}$$

Für den adjungierten Operator $T^* : L^2(0,1)^* \to L^2(0,1)^*$ gilt

$$(T^*y^*)(\xi) = y^*(T\xi)\,. \tag{8.3}$$

Gemäß der Isometrie zwischen $L^2(0,1)^*$ und $L^2(0,1)$, siehe Kapitel 1, kann y^* dargestellt werden durch ein $y \in L^2(0,1)$,

$$y^*(T\xi) = \int_0^1 (T\xi)(t)y(t)\, dt\,. \tag{8.4}$$

Es folgt dann

$$(T^*y^*)(\xi) = \int_0^1 (T\xi)(t)y(t)\, dt = \int_0^1 \int_0^1 k(s,t)\xi(s)\, ds\, y(t)\, dt \tag{8.5}$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 k(s,t)y(t)\, dt\, \xi(s)\, ds\,, \tag{8.6}$$

das heißt, $x^* = T^*y^*$ wird dargestellt durch die Funktion

$$x(s) = \int_0^1 k(s,t)y(t)\,dt\,. \tag{8.7}$$

Zusammenfassend sehen wir: Ist T durch die Kernfunktion "$k = k(s,t)$" gegeben, so hat T^* die Kernfunktion "$k = k(t,s)$".

Zweimaliges Anwenden von Definition 8.2 liefert zu gegebenem $T \in L(X;Y)$ den linearen und stetigen Operator

$$T^{**} : X^{**} \to Y^{**}\,.$$

Lemma 8.4 *Seien X, Y normierte Räume, sei $T \in L(X;Y)$. Dann gilt*

$$T^{**} \circ J_X = J_Y \circ T\,. \tag{8.8}$$

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned}[(T^{**} \circ J_X)(x)](y^*) &= [(T^{**}(J_X)x)](y^*) = [(J_X x) \circ T^*](y^*) = (J_X x)(T^*y^*) \\ &= (T^*y^*)(x) = y^*(Tx) = [J_Y(Tx)](y^*) = [(J_Y \circ T)(x)](y^*)\,.\end{aligned}$$

Satz 8.5 *Seien X, Y Banachräume, sei $T : X \to Y$ linear und stetig. Dann gilt: T ist kompakt genau dann, wenn T^* kompakt ist.*

Beweis: Sei T kompakt. Die durch $K = \overline{T(K(0;1))}$ definierte Teilmenge von Y ist dann kompakt. Sei nun $(y_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in Y^*, es gelte etwa

$$\|y_n^*\|_{Y^*} \le M\,. \tag{8.9}$$

Wir betrachten nun die Folge $(y_n^*|K)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C(K)$. Diese Folge ist beschränkt, da

$$\|y_n^*|K\|_\infty = \sup_{y\in K} |y_n^*(y)| \le \|y_n^*\|_{Y^*} \sup_{y\in K} \|y\| \le M \sup_{y\in K} \|y\| < \infty\,. \tag{8.10}$$

Weiter gilt für beliebige $y, \tilde{y} \in K$

$$|y_n^*(y) - y_n^*(\tilde{y})| \le \|y_n^*\|_{Y^*}\, \|y - \tilde{y}\|_Y \le M\|y - \tilde{y}\|_Y\,, \tag{8.11}$$

also ist $(y_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichgradig stetig. Aus dem Satz von Arzela-Ascoli folgt, dass es eine auf K gleichmäßig konvergente Teilfolge $(y_{n_k}^*|K)_{k\in\mathbb{N}}$ gibt. Es folgt

$$\|T^*y_{n_k}^* - T^*y_{n_l}^*\| = \sup_{\|x\|\le 1} |y_{n_k}^*(Tx) - y_{n_l}^*(Tx)| = \sup_{y\in K} |y_{n_k}^*(y) - y_{n_l}^*(y)| = \|(y_{n_k}^* - y_{n_l}^*)|K\|_\infty\,, \tag{8.12}$$

wobei die mittlere Gleichheit gilt, da $T(K(0;1))$ dicht ist in K. Also ist $(T^*y_{n_k}^*)_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge, daher konvergent. Damit ist T^* kompakt. Sei nun umgekehrt T^* kompakt. Nach dem eben Bewiesenen ist T^{**} kompakt, daher nach Lemma ... auch $T^{**} \circ J_X$ und nach Lemma 8.4 auch $J_Y \circ T$. Sei nun $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in X. Dann hat $((J_Y \circ T)x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge, sei $(J_Y \circ T)x_{n_k} \to y^{**} \in Y^{**}$. Da Y Banachraum ist, ist $J_Y(Y)$ abgeschlossen, also gibt es ein $y \in Y$ mit $y^{**} = J_Y y$. Da J_Y isometrisch ist, folgt $Tx_{k_n} \to y$. Also ist T kompakt. □

Satz 8.6 *Seien X, Y normierte Räume, sei $T : X \to Y$ linear und stetig. Dann gilt*

$$\overline{T(X)} = (\ker T^*)^o\,, \tag{8.13}$$

wobei

$$(\ker T^*)^o = \{y : y \in Y,\ y^*(y) = 0 \text{ für alle } y^* \in \ker T^*\}\,. \tag{8.14}$$

Beweis: "$\subset$": Sei zunächst $y \in T(X)$. Für alle $y^* \in \ker T^*$ gilt $T^* y^* = 0$, also $0 = (T^* y^*)(x) = y^*(Tx)$ für alle $x \in X$, also $y^*(y) = 0$. Es folgt $T(X) \subset (\ker T^*)^o$, und da $(\ker T^*)^o$ abgeschlossen ist, wie man leicht sieht, folgt die Behauptung.
"$\supset$": Sei $y \in Y$, $y \notin \overline{T(X)}$. Wir wählen gemäß Folgerung 4.8 ein $y^* \in Y^*$ mit $y^* = 0$ auf $\overline{T(X)}$ und $y^*(y) \neq 0$. Für alle $x \in X$ gilt $0 = y^*(Tx) = (T^* y^*)(x)$, also $T^* y^* = 0$ und damit $y^* \in \ker T^*$. Da $y^*(y) \neq 0$, folgt $y \notin (\ker T^*)^o$. □

Wir erinnern daran: Ist X normierter Raum, U abgeschlossener Unterraum von X, so definiert

$$\|[x]\| = \inf_{z \in U} \|x - z\| = \inf_{\tilde{x} \in [x]} \|\tilde{x}\| \tag{8.15}$$

eine Norm auf X/U, und die Quotientenabbildung

$$Q : X \to X/U\,, \quad Q(x) = [x]\,, \tag{8.16}$$

ist linear und stetig und hat Norm $\|Q\| = 1$.

Satz 8.7 *Seien X, Y normierte Räume, U abgeschlossener Unterraum von X, sei $T \in L(X;Y)$ mit $T|U = 0$. Dann gibt es genau ein $\tilde{T} \in L(X/U;Y)$ mit $\tilde{T} \circ Q = T$, und es gilt $\|\tilde{T}\| = \|T\|$. Ist $U = \ker T$, so ist $\tilde{T}$ injektiv.*

Beweis: Wir definieren

$$\tilde{T} : X/U \to Y\,, \quad \tilde{T}([x]) = T(x)\,. \tag{8.17}$$

$\tilde{T}$ ist wohldefiniert, da für $\tilde{x} \in [x]$ gilt, dass $\tilde{x} - x \in U$, also

$$T(\tilde{x}) - T(x) = T(\tilde{x} - x) = 0\,.$$

$\tilde{T}$ ist offensichtlich linear, und

$$\|T(x)\| = \|T(\tilde{x})\| \leq \|T\|\,\|\tilde{x}\|\,, \quad \text{für alle } \tilde{x} \in [x],$$

also folgt

$$|\tilde{T}([x])| \leq \inf_{\tilde{x} \in [x]} \|T\|\,\|\tilde{x}\| = \|T\|\,\|[x]\|\,,$$

also gilt $\|\tilde{T}\| \leq \|T\|$ und umgekehrt auch

$$\|T\| = \|\tilde{T} \circ Q\| \leq \|\tilde{T}\|\,\|Q\| = \|\tilde{T}\|\,.$$

Ist $U = \ker T$, so gilt nach (8.17), dass

$$\tilde{T}([x]) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in U \quad \Leftrightarrow \quad [x] = 0\,,$$

also $\ker \tilde{T} = 0$. □

Folgerung 8.8 *Seien X, Y Banachräume, sei $T : X \to Y$ linear und stetig, sei $T(X)$ abgeschlossen. Dann gilt*

$$X/\ker T \simeq T(X)\,, \tag{8.18}$$

und die durch $\tilde{T} \circ Q = T$ definierte Abbildung ist ein Isomorphismus.

Beweis: Nach Satz 8.7 ist $\tilde{T} : X/\ker T \to T(X)$ bijektiv, linear und stetig. Da Y Banachraum und $T(X)$ abgeschlossener Unterraum von Y ist, ist $T(X)$ ebenfalls Banachraum. Aus Folgerung 3.8 erhalten wir, dass $\tilde{T}^{-1}$ ebenfalls stetig ist. □

Folgerung 8.9 *Seien X, Y Banachräume, sei $T : X \to Y$ linear, stetig und surjektiv. Dann gilt*

$$X/\ker T \simeq Y\,. \tag{8.19}$$

Beweis: Folgt unmittelbar aus Folgerung 8.8. □

Satz 8.10 *Seien X, Y normierte Räume, sei $T : X \to Y$ linear und stetig, sei $T(X)$ abgeschlossen in Y. Dann gilt*

$$(Y/T(X))^* \cong \ker T^*\,. \tag{8.20}$$

Beweis: Sei $z^* \in (Y/T(X))^*$. Wir setzen $y^* = z^* \circ Q$, wobei $Q : Y \to Y/T(X)$ die Quotientenabbildung ist. Es ist dann $y^* \in Y^*$, $y^* = 0$ auf $T(X)$, also $T^*y^* = 0$ und damit $y^* \in \ker T^*$. Wir definieren

$$I : (Y/T(X))^* \to \ker T^*\,, \quad Iz^* = z^* \circ Q\,. \tag{8.21}$$

Offensichtlich ist I linear und stetig, und aus Satz 8.7 folgt $\|Iz^*\| = \|z^*\|$ für alle z^*, sowie die Surjektivität von I. □

Definition 8.11 (Komplement)
Sei X Vektorraum, U Unterraum von X. Ein Unterraum V von X heißt ein Komplement von U, falls gilt

$$U \cap V = \{0\}\,, \quad U + V = X\,. \tag{8.22}$$

In diesem Fall bezeichnen wir X als die direkte Summe von U und V, geschrieben

$$X = U \oplus V\,. \tag{8.23}$$

□

Aus dem Basisergänzungssatz folgt, dass jeder Unterraum U eines Vektorraums ein Komplement V hat. Ist nämlich $(u_i)_{i\in I}$ Basis von U, so können wir sie durch Hinzunahme weiterer geeigneter Vektoren $(v_j)_{j\in J}$ zu einer Basis von X ergänzen, und

$$V = \operatorname{span}\{v_j : j \in J\}$$

ist dann ein Komplement von U. Ein solches Komplement ist nicht eindeutig bestimmt, aber für jedes Komplement V liefert die Quotientenabbildung $Q : X \to X/U$ eine bijektive lineare Abbildung

$$Q|V : V \to X/U\,, \tag{8.24}$$

und umgekehrt ist jeder Unterraum V, für den $Q|V$ bijektiv ist, ein Komplement. Hieraus erhalten wir wir bijektive lineare Abbildungen

$$U \times X/U \to U \times V \to X \,, \tag{8.25}$$

letztere ist gegeben durch $(u, v) \mapsto u + v$.

Ist X ein Banachraum, so ist man an Zerlegungen $X = U \oplus V$ interessiert, bei denen U und V ebenfalls Banachräume sind; letzteres ist genau dann der Fall, wenn U und V abgeschlossen in X sind. Ist X Hilbertraum, so hat jeder abgeschlossene Unterraum ein abgeschlossenes Komplement, nämlich $U^\perp$. Ist X Banachraum, so braucht das nicht zu gelten, beispielsweise hat $C[0,1]$ kein abgeschlossenes Komplement in $L^\infty(0,1)$, was wir nicht beweisen wollen. Genauer gilt (ebenfalls ohne Beweis): Ein Banachraum X hat die Eigenschaft, dass jeder abgeschlossene Unterraum ein abgeschlossenes Komplement hat, genau dann, wenn X isomorph ist zu einem Hilbertraum. (Ist er sogar isometrisch isomorph zu einem Hilbertraum, so gilt die Parallelogrammgleichung, und die Norm stammt selbst von einem Skalarprodukt.)

Satz 8.12 *Sei X normierter Raum, U Unterraum von X mit* $\dim(U) < \infty$. *Dann hat U ein abgeschlossenes Komplement.*

Beweis: Sei $\dim(U) = n$, sei $\{x_1, \dots, x_n\}$ Basis von U, sei $\{u_1^*, \dots, u_n^*\}$ die zugehörige duale Basis, das heißt, die durch

$$u_i^*(x_j) = \delta_{ij}$$

definierte Basis von U^*. Wir wählen gemäß Satz 4.5 (Hahn-Banach) Fortsetzungen $x_i^* \in X^*$ von u_i^* und definieren

$$P : X \to U \,, \quad Px = \sum_{i=1}^n x_i^*(x) x_i \,. \tag{8.26}$$

P ist linear und stetig, und $V = \ker P$ ist daher abgeschlossener Unterraum von X. Wir zeigen, dass V ein Komplement von U ist. Ist $z \in U \cap V$, so gilt $Pz = 0$, also $0 = x_i^*(z) = u_i^*(z)$ für alle i und damit $z = 0$. Ist nun $x \in X$ beliebig, so gilt

$$x = Px + (x - Px) \,.$$

Da $Px_j = x_j$ für alle j, folgt $P|U = id|U$, also $P \circ P = P$,

$$P(x - Px) = Px - PPx = 0 \,,$$

also $x - Px \in V$ und, da x beliebig war, $X = U + V$. □

Definition 8.13 (Kodimension)
Sei X Vektorraum, U Unterraum von X. Dann heißt $\dim(X/U)$ *die Kodimension von U in X, geschrieben* $\operatorname{codim}(U)$. □

Wegen (8.24) gilt offensichtlich

$$\operatorname{codim}(U) = \dim(V) \tag{8.27}$$

für jedes Komplement V von U.

Satz 8.14 *Sei X normierter Raum, sei U ein Unterraum von X mit* $\operatorname{codim}(U) < \infty$. *Dann hat U ein abgeschlossenes Komplement.*

Beweis: Sei V ein Komplement von U in X. Dann ist $\dim(V) = \operatorname{codim}(U) < \infty$ und daher V abgeschlossen. □

Satz 8.15 *Seien X, Y Banachräume, sei $T : X \to Y$ linear und stetig, sei die Kodimension von $T(X)$ in Y endlich. Dann ist $T(X)$ abgeschlossen in Y.*

Beweis: Wir nehmen zunächst an, dass T injektiv ist. Sei $\operatorname{codim}(T(X)) = n$, seien $y_1, \dots, y_n \in Y$, so dass $\{[y_1], \dots, [y_n]\}$ Basis ist von $Y/T(X)$. Wir definieren

$$S : \mathbb{K}^n \times X \to Y\,, \quad S(\alpha, x) = Tx + \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i\,. \tag{8.28}$$

S ist linear und stetig. S ist injektiv, da aus $S(\alpha, x) = 0$ folgt

$$0 = [S(\alpha, x)] = \sum_{i=1}^n \alpha_i [y_i]\,,$$

also $\alpha_i = 0$ für alle i, also $Tx = 0$ und damit $x = 0$. S ist surjektiv: Ist $y \in Y$, so gibt es $\alpha_i \in \mathbb{K}$ mit

$$[y] = \sum_{i=1}^n \alpha_i [y_i]\,, \quad \text{also} \quad \left[y - \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i \right] = 0\,, \quad \text{also} \quad y - \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i \in T(X)\,.$$

Damit ist S bijektiv. Aus Folgerung 3.8 folgt, dass S^{-1} stetig ist. Also ist $T(X) = S(\{0\} \times X)$ abgeschlossen. Sei nun T beliebig. Wir betrachten die durch $\tilde{T} \circ Q = T$ definierte lineare stetige Abbildung $\tilde{T} : X/\ker T \to Y$. $\tilde{T}$ ist injektiv nach Satz 8.7, also ist nach dem eben Bewiesenen $T(X) = \tilde{T}(X/\ker T)$ abgeschlossen. □

9 Fredholm-Operatoren

Definition 9.1 (Fredholm-Operator)
Seien X, Y Banachräume. Ein linearer stetiger Operator $T : X \to Y$ heißt Fredholm-Operator, falls $\dim(\ker T)) < \infty$ und $\operatorname{codim}(T(X)) = \dim(Y/T(X)) < \infty$ gelten. Ist T Fredholm-Operator, so definieren wir den Index von T durch

$$\operatorname{ind}(T) = \dim(\ker T) - \operatorname{codim}(T(X)) . \tag{9.1}$$

Die Menge aller Fredholm-Operatoren von X nach Y bezeichnen wir mit $F(X; Y)$, falls $X = Y$ schreiben wir auch $F(X)$. □

Sind X und Y beide endlichdimensional, so ist $F(X; Y) = L(X; Y)$ Andernfalls ist $F(X; Y)$ kein Unterraum von $L(X; Y)$, da dann $0 \notin F(X; Y)$. Ist $T \in F(X; Y)$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ mit $\alpha \neq 0$, so ist $\alpha T \in F(X; Y)$. Es gilt $id \in F(X)$, $\operatorname{ind}(id) = 0$. Ist $\dim(X) < \infty$, so gilt $\operatorname{ind}(T) = 0$ für alle $T \in L(X) = F(X)$.

Lemma 9.2 *Seien X, Y Banachräume, $T : X \to Y$ Fredholm-Operator. Dann ist $T(X)$ abgeschlossen.*

Beweis: Folgt direkt aus Satz 8.15. □

Satz 9.3 *Sei X Banachraum, sei $S : X \to X$ kompakter Operator. Dann ist $T = id - S$ ein Fredholm-Operator.*

Beweis: Zunächst gilt, dass $id|\ker T = S|\ker T$, also ist $id|\ker T$ ein kompakter Operator, also ist $\dim(\ker T) < \infty$. Wir zeigen als nächstes, dass $T(X)$ abgeschlossen ist. Gemäß Satz 8.12 wählen wir ein abgeschlossenes Komplement V von $\ker T$ in X und betrachten $T|V : V \to T(X)$. Diese Abbildung ist injektiv, da $V \cap \ker T = \{0\}$, also stetig und bijektiv. Wir nehmen an,

$$(T|V)^{-1} : T(X) \to V \quad \text{ist nicht stetig.} \tag{9.2}$$

Wir wählen eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $T(X)$ mit $\|y_n\| = 1$ und $\|T^{-1}y_n\| \geq n$. Für

$$v_n = \frac{T^{-1}y_n}{\|T^{-1}y_n\|} \tag{9.3}$$

gilt dann

$$v_n \in V,\ \|v_n\| = 1,\ \|Tv_n\| \leq \frac{1}{n} . \tag{9.4}$$

Da S kompakt ist, gibt es eine konvergente Teilfolge $(Sv_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Sei $Sv_{n_k} \to v \in X$, dann gilt

$$v_{n_k} = Sv_{n_k} + Tv_{n_k} \to v ,$$

also $v \in V$, $\|v\| = 1$, $Tv = 0$ im Widerspruch zu $V \cap \ker T = \{0\}$. Also ist (9.2) falsch. Es folgt, dass $T(X)$ und V isomorph sind, also ist mit V auch $T(X)$ vollständig und daher abgeschlossen in X. Aus Satz 8.10 folgt nun

$$(X/T(X))^* \cong \ker T^* = \ker(id - S^*) . \tag{9.5}$$

Nach Satz 8.5 ist S^* kompakt, also nach folgt nach dem eben Bewiesenen

$$\infty > \dim(\ker(id - S^*)) = \dim((X/T(X))^*) = \dim(X/T(X)) = \operatorname{codim} T(X) .$$

$\square$

Satz 9.4 *Seien X, Y Banachräume. Dann ist $F(X;Y)$ eine offene Teilmenge des Banachraums $L(X;Y)$, und die Abbildung* $\operatorname{ind} : F(X;Y) \to \mathbb{Z}$ *ist lokal konstant, das heißt, zu jedem $T \in F(X;Y)$ gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass*

$$\operatorname{ind}(S) = \operatorname{ind}(T) , \quad \textit{für alle } S \in F(X;Y) \textit{ mit } \|S - T\| < \varepsilon. \tag{9.6}$$

Beweis: Sei $T : X \to Y$ Fredholm-Operator. Nach Lemma 9.2 ist $T(X)$ abgeschlossen. Gemäß Satz 8.12 und Satz **??** wählen wir abgeschlossene Unterräume V von X und W von Y mit

$$\ker T \oplus V = X , \quad T(X) \oplus W = Y , \tag{9.7}$$

es ist dann

$$\dim(W) = \operatorname{codim}(T(X)) < \infty . \tag{9.8}$$

Zu beliebigem $S \in L(X;Y)$ definieren wir nun

$$\tilde{S} : V \times W \to Y , \quad \tilde{S}(v, w) = Sv + w , \tag{9.9}$$

wobei wir $V \times W$ mit der Maximumnorm $\|(v, w)\|_\infty = \max\{\|v\|, \|w\|\}$ versehen. Offensichtlich ist $\tilde{S}$ linear und stetig, und aus

$$(\tilde{S} - \tilde{T})(v, w) = (S - T)(v)$$

folgt

$$\|\tilde{S} - \tilde{T}\| = \|S - T\| . \tag{9.10}$$

Aus (9.7) folgt $T(V) = T(X)$, $T|V$ injektiv, also ist $\tilde{T} : V \times W \to Y$ linear, bijektiv und stetig. Wir wählen gemäß Folgerung 6.3 ein $\varepsilon > 0$ so, dass $\tilde{S} : V \times W \to Y$ bijektiv ist für alle $S \in L(X;Y)$ mit $\|\tilde{S} - \tilde{T}\| < \varepsilon$. Sei nun S ein beliebiger solcher Operator. Aus (9.9) folgt

$$\tilde{S}(V \times \{0\}) = S(V) , \quad \tilde{S}(\{0\} \times W) = W ,$$

also

$$S(V) \oplus W = Y . \tag{9.11}$$

Da $\tilde{S}$ bijektiv ist, ist $S|V$ injektiv, also

$$\ker S \cap V = \{0\} .$$

Sei nun Z ein Komplement von $\ker S \oplus V$ in X,

$$\ker S \oplus V \oplus Z = X , \tag{9.12}$$

dann sind sowohl $\ker S \oplus Z$ als auch $\ker T$ ein Komplement von V in X, letzteres wegen (9.7), und es folgt

$$\dim(\ker S) + \dim(Z) = \dim(\ker T) < \infty , \quad \dim(Z) < \infty . \tag{9.13}$$

Aus (9.12) folgt weiter, dass $S|(V \oplus Z)$ injektiv ist und

$$S(V \oplus Z) = S(X) = S(V) \oplus S(Z) . \tag{9.14}$$

Indem wir $S(Z)$ zu einem Komplement von $S(V)$ in Y ergänzen, erhalten wir

$$\operatorname{codim}(S(V)) = \dim(S(Z)) + \operatorname{codim}(S(X)) , \tag{9.15}$$

und weiter mit (9.8), da $S|Z$ injektiv ist,

$$\operatorname{codim}(T(X)) = \dim(Z) + \operatorname{codim}(S(X)) . \tag{9.16}$$

Aus (9.13) und (9.16) ersehen wir, dass S ein Fredholm-Operator ist, und Addition der beiden Gleichungen ergibt

$$\dim(\ker S) + \operatorname{codim}(T(X)) = \dim(\ker T) + \operatorname{codim}(S(X)) ,$$

also $\operatorname{ind}(S) = \operatorname{ind}(T)$. □

Folgerung 9.5 *Seien X, Y Banachräume, sei $T : [0,1] \to F(X;Y)$ stetig. Dann ist*

$$t \mapsto \operatorname{ind}(T(t)) \tag{9.17}$$

eine Konstante.

Beweis: Nach Satz 9.4 ist die Abbildung $\operatorname{ind} \circ T : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig, und da der Index nur ganzzahlige Werte annimmt, muss sie konstant sein. □

Da jede lokal konstante Abbildung auf einer zusammenhängenden Teilmenge ihres Definitionsgebiets konstant ist, erhält man allgemeiner: Der Index ist konstant auf Zusammenhangskomponenten von $F(X;Y)$.

Folgerung 9.6 *Sei X Banachraum, $S : X \to X$ kompakt. Dann gilt*

$$\operatorname{ind}(id - S) = 0 . \tag{9.18}$$

Beweis: Sei $T(t) = id - tS$, dann ist $\operatorname{ind}(T(0)) = \operatorname{ind}(id) = 0$, also auch $0 = \operatorname{ind}(T(1)) = \operatorname{ind}(id - S)$ nach Folgerung 9.5. □

Ist $T : X \to X$ Fredholm-Operator mit Index 0, so ist $\dim(\ker T) = 0$ genau dann, wenn $\operatorname{codim} T(X) = 0$, also

$$T \text{ injektiv} \quad \Leftrightarrow \quad T \text{ surjektiv.} \tag{9.19}$$

Betrachten wir die Gleichung

$$Tx = y , \tag{9.20}$$

wobei $y \in X$ gegeben und $x \in X$ gesucht ist. so läßt sich (9.19) wie folgt formulieren (dabei ziehen wir auch Satz 8.6 heran):

> **Entweder** hat (9.20) für jedes $y \in X$ eine eindeutige Lösung $x \in X$, **oder** die homogene Gleichung $Tx = 0$ besitzt endlich viele linear unabhängige Lösungen, und für gegebenes $y \in X$ ist (9.20) lösbar genau dann, wenn $y^*(y) = 0$ für alle $y^* \in \ker T^*$.

Diese Aussage wird als die **Fredholmsche Alternative** bezeichnet. Für einen Fredholm-Operator mit Index 0 gilt also die Fredholmsche Alternative.

Satz 9.7 *Sei X Banachraum, $S : X \to X$ kompakt. Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ Spektralwert von S und gilt $\lambda \neq 0$, so ist λ auch Eigenwert von S. Ist $\dim(X) = \infty$, so ist 0 Spektralwert von S.*

Beweis: Sei $\lambda \neq 0$. Nach Folgerung 9.6 ist $id - \lambda^{-1}S$ ein Fredholm-Operator vom Index 0, also auch $\lambda\, id - S$. Ist λ nicht Eigenwert von S, so ist $\lambda\, id - S$ injektiv und nach (9.19) auch bijektiv, also ist λ nicht Spektralwert von S. Ist $0 \in \rho(S)$, so ist S bijektiv, linear und stetig, also auch S^{-1} stetig und daher $id = S^{-1}S$ kompakt, also $\dim(X) < \infty$. □

Ist etwa S ein Integraloperator,

$$(Sx)(t) = \int_0^1 k(s,t)x(s)\, dx\,, \tag{9.21}$$

so hat die Gleichung $Tx = (\lambda\, id - S)(x) = y$ die Form

$$\lambda x(t) - \int_0^1 k(s,t)x(s)\, ds = y(t)\,, \quad t \in [0,1]\,. \tag{9.22}$$

Satz 9.8 *Sei X Banachraum, $S : X \to X$ kompakter Operator, $T = id - S$. Wir definieren ($T^m = T \circ T \circ \ldots \circ T$, m mal)*

$$U_m = \ker T^m\,, \quad V_m = T^m(X)\,. \tag{9.23}$$

Dann ist T^m Fredholmoperator für alle $m \in \mathbb{N}$, also $\dim(U_m) < \infty$, $\operatorname{codim}(V_m) < \infty$, U_m und V_m sind abgeschlossen, und

$$U_m \subset U_{m+1}\,, \quad V_m \supset V_{m+1}\,, \quad \textit{für alle } m \in \mathbb{N}. \tag{9.24}$$

Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $U_n = U_{n+1}$, und für das kleinste solche n gilt $U_n = U_m$ und $V_n = V_m$ für alle $m \geq n$, sowie

$$U_n \oplus V_n = X\,. \tag{9.25}$$

Außerdem gilt $T(U_n) \subset U_n$, $T(V_n) = V_n$), und $T|V_n : V_n \to T(V_n) = V_n$ ist ein Isomorphismus.

Beweis: Es ist

$$T^m = (id - S)^m = id - \tilde{S}\,, \quad \tilde{S} = -\sum_{k=1}^m (-1)^k \binom{m}{k} S^k\,. \tag{9.26}$$

$\tilde{S}$ ist kompakt nach Lemma 7.4 und Satz 7.5, also ist T^m Fredholm-Operator nach Satz 9.3. Ist $x \in U_m$, so ist $0 = T^m x = T(T^m x)$, also $x \in U_{m+1}$, und

$$V_{m+1} = T^m(T(X)) \subset T^m(X) = V_m\,.$$

Ist $U_{n+1} = U_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und $x \in U_{n+2}$, so ist

$$0 = T^{n+2}x = T^{n+1}(Tx) = T^n(Tx) = T^{n+1}(x)\,,$$

also $x \in U_{n+1}$ und damit $U_{n+2} = U_{n+1}$. Mit Induktion folgt $U_m = U_n$ für alle $m \geq n$. Wir nehmen nun an, es gelte $U_{m+1} \neq U_m$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Wir wählen gemäß Lemma 2.13 für jedes $m \in \mathbb{N}$ ein $x_{m+1} \in U_{m+1}$ mit

$$\|x_{m+1}\| = 1\,, \quad \operatorname{dist}(x_{m+1}, U_m) \geq \frac{1}{2}\,.$$

Dann gilt für alle $k \leq m$

$$Sx_{m+1} - Sx_k = x_{m+1} - \underbrace{(Tx_{m+1} + x_k - Tx_k)}_{\in U_m}\,,$$

also

$$\|Sx_{m+1} - Sx_k\| \geq \frac{1}{2}\,, \quad \text{für alle } k \leq m.$$

Dann aber hat $(Sx_m)_{m\in\mathbb{N}}$ keine konvergente Teilfolge, im Widerspruch zur Kompaktheit von S. Also muss es ein $n \in \mathbb{N}$ geben mit $U_n = U_{n+1}$. Sei n die kleinste solche Zahl. Aus (9.26) und Folgerung 9.6 erhalten wir $\operatorname{ind}(T^m) = 0$ für alle m und daher

$$\operatorname{codim}(V_m) = \dim(U_m) = \dim(U_n) = \operatorname{codim}(V_n)\,, \quad \text{für alle } m \geq n,$$

also wegen $V_m \subset V_n$ auch $V_m = V_n$ für alle $m \geq n$. Wir zeigen nun (9.25). Sei $x \in U_n \cap V_n$, dann ist $T^n x = 0$, $x = T^n y$ für ein $y \in X$, also $T^{2n} y = 0$, also $y \in U_{2n} = U_n$, also $x = 0$ und damit

$$U_n \cap V_n = \{0\}\,.$$

Sei nun $x \in X$ beliebig, dann gilt $T^n x \in V_n = V_{2n}$. Sei $y \in X$ mit $T^n x = T^{2n} y$, dann ist $x - T^n y \in U_n$ und

$$x = (x - T^n y) + T^n y \in U_n + V_n\,.$$

Darüber hinaus ist $T|V_n$ injektiv, da

$$\ker T \cap V_n \subset U_n \cap V_n = \{0\}\,,$$

und da V_n abgeschlossen und damit Banachraum ist, ist $T|V_n$ Isomorphismus nach Folgerung 3.8. □

Lemma 9.9 *Sei X Banachraum, $S : X \to X$ ein kompakter linearer Operator, sei $\varepsilon > 0$. Dann ist die Menge*

$$\{\lambda : \lambda \in \sigma(S),\ |\lambda| \geq \varepsilon\} \tag{9.27}$$

endlich (oder leer).

Beweis: Wir nehmen an, es gebe eine Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ paarweise verschiedener Spektralwerte von S mit $|\lambda_n| \geq \varepsilon$. Nach Satz 9.7 sind alle λ_n Eigenwerte von S. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge zugehöriger Eigenvektoren von S. Da die λ_n paarweise verschieden sind, ist nach einem Satz der Linearen Algebra die Menge $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ linear unabhängig. Für

$$X_n = \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_n\}$$

gilt dann $X_n \subset X_{n+1}$, $X_n \neq X_{n+1}$ und $S(X_n) \subset X_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir wählen $y_n \in X_n$ gemäß Lemma 2.13 mit

$$\|y_n\| = 1\,, \quad \operatorname{dist}(y_n, X_{n-1}) \geq \frac{1}{2}\,.$$

Dann gilt $y_n = \alpha x_n + z_{n-1}$ für ein $\alpha \in \mathbb{K}$, $z_{n-1} \in X_{n-1}$, also

$$\lambda y_n - S y_n = \lambda z_{n-1} - S z_{n-1} \in X_{n-1} \,,$$

also für alle $m \in \mathbb{N}$ mit $m < n$

$$\|Sy_n - Sy_m\| = \|\lambda_n y_n - (Sy_m + \lambda_n y_n - Sy_n)\| = |\lambda_n| \| y_n - \underbrace{\frac{1}{\lambda_n}(Sy_m + \lambda_n y_n - Sy_n)}_{\in X_{n-1}} \| \geq \frac{\varepsilon}{2} \,,$$

also hat $(Sy_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine konvergente Teilfolge im Widerspruch zur Kompaktheit von S. $\square$

Wir fassen die Aussagen zum Spektrum $\sigma(S)$ eines kompakten linearen Operators $S : X \to X$, X Banachraum mit $\dim(X) = \infty$, zusammen: Es gilt

$$\sigma(S) = \sigma_p(S) \cup \{0\} \,, \quad \sigma(S) \subset K(0; \|S\|) \,, \tag{9.28}$$

in jedem Kreisring $\{|\lambda| : 0 < \varepsilon \leq |\lambda| \leq \|S\|\}$ liegen höchstens endlich viele Spektralwerte, 0 ist möglicherweise ein Häufungspunkt des Spektrums. Ist λ Spektralwert, $\lambda \neq 0$, so gibt es abgeschlossene Unterräume U_λ und V_λ von X, so dass für $T_\lambda = \lambda\, id - S$ gilt

$$X = U_\lambda \oplus V_\lambda \,, \tag{9.29}$$
$$\dim(U_\lambda) < \infty \,, \quad \operatorname{codim}(V_\lambda) < \infty \tag{9.30}$$
$$T_\lambda(U_\lambda) \subset U_\lambda \,, \quad T_\lambda(V_\lambda) = V_\lambda \,, \tag{9.31}$$
$$T_\lambda^n(U_\lambda) = 0 \text{ für ein } n \in \mathbb{N}, \quad T_\lambda | V_\lambda \text{ ist Isomorphismus.} \tag{9.32}$$

Für den Fall allerdings, dass 0 der einzige Spektralwert von S ist, liefern die Sätze dieses Abschnitts keine weitere Information über die Struktur von S.