Analysis IV *

Martin Brokate †

Inhaltsverzeichnis

---

* Vorlesungsskript, SS 2001

† Zentrum Mathematik, TU München

1 Der Integralsatz von Gauß

Wir betrachten offene Mengen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft, dass $\partial\Omega$ eine $(n-1)$-dimensionale C^1-Mannigfaltigkeit ist und Ω lokal nur auf einer Seite von $\partial\Omega$ liegt.

Definition 1.1 (C^1-Rand)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wir sagen, dass Ω einen C^1-Rand hat, falls gilt: Für alle $a \in \partial\Omega$ gibt es eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ und eine Funktion $f \in C^1(U)$ so dass $\nabla f(x) \neq 0$ für alle $x \in U$ gilt und

$$\partial\Omega \cap U = \{x : x \in U, f(x) = 0\}\,, \tag{1.1}$$

$$\Omega \cap U = \{x : x \in U, f(x) < 0\}\,. \tag{1.2}$$

□

Definition 1.2 (Tangentialvektor, Tangentialraum)
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale C^1-Mannigfaltigkeit, sei $a \in M$. Ein $v \in \mathbb{R}^n$ heißt Tangentialvektor an M in a, falls eine stetig differenzierbare Kurve $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ existiert (wobei I ein offenes Intervall im $\mathbb{R}$ mit $0 \in I$ ist) mit

$$\varphi(0) = a\,, \quad \varphi'(0) = v\,, \quad \varphi(I) \subset M\,. \tag{1.3}$$

Die Menge

$$T_a(M) = \{v : v \text{ ist Tangentialvektor an } M \text{ in } a\} \tag{1.4}$$

heißt der Tangentialraum an M in a. □

Satz 1.3 (Charakterisierung des Tangentialraums)
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale C^1-Mannigfaltigkeit, sei $a \in M$, sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $a \in U$. Dann gilt:

(i) $T_a(M)$ ist ein k-dimensionaler Unterraum von $\mathbb{R}^n$.

(ii) Ist $\Phi : T \to M \cap U$ eine Karte von M mit $\Phi(c) = a$, $c \in T$, $T \subset \mathbb{R}^k$ offen, so bilden die k Spalten der der Funktionalmatrix $J_\Phi(c)$, das heißt die Vektoren

$$\{\partial_1\Phi(c), \ldots, \partial_k\Phi(c)\}$$

eine Basis von $T_a(M)$.

(iii) Ist

$$M \cap U = \{x : x \in U,\ f(x) = 0\}$$

mit $f \in C^1(U; \mathbb{R}^{n-k})$ und $\operatorname{rang} J_f(a) = n - k$, so ist

$$T_a(M) = \{v : v \in \mathbb{R}^n,\ \langle v, \nabla f_i(a)\rangle = 0 \text{ für alle } i,\ 1 \leq i \leq n-k\}\,. \tag{1.5}$$

Beweis: Sei V_1 der von den Spalten von $J_\Phi(c)$ aufgespannte Unterraum und

$$V_2 = \{v : v \in \mathbb{R}^n,\, \langle v, \nabla f_i(a)\rangle = 0 \text{ für alle } i,\, 1 \le i \le n-k\}\,.$$

Wegen $\dim(V_1) = \dim(V_2) = k$ genügt es zu zeigen, dass

$$V_1 \subset T_a(M) \subset V_2\,. \tag{1.6}$$

Zum Beweis der ersten Inklusion sei

$$v = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \partial_j \Phi(c)$$

ein beliebiges Element von V_1. Wir definieren für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ eine Abbildung $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ durch

$$\varphi(s) = \Phi(c_1 + \lambda_1 s, c_2 + \lambda_2 s, \ldots, c_k + \lambda_k s)\,.$$

Dann ist $\varphi(s) \in M$ für alle s, $\varphi(0) = a$, und aus der Kettenregel folgt

$$\varphi'(0) = J_\Phi(c) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \partial_j \Phi(c) = v\,,$$

also $v \in T_a(M)$. Zum Beweis der zweiten Inklusion sei $v \in T_a(M)$. Wähle $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ gemäß Definition 1.2, dann gilt $f(\varphi(s)) = 0$ für $|s|$ hinreichend klein, also gilt für alle i mit $1 \le i \le n-k$

$$0 = (f_i \circ \varphi)'(0) = \langle \nabla f_i(\varphi(0)), \varphi'(0)\rangle = \langle \nabla f_i(a), v\rangle\ ,$$

also ist $v \in V_2$. □

In Satz 1.3 ergibt sich aus (iii) im Spezialfall $\dim M = n-1$, dass $\dim T_a(M) = n-1$ und dass $\nabla f(a)$ auf $T_a(M)$ senkrecht steht.

Satz 1.4 (Existenz einer stetigen äußeren Normalen)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, Ω habe einen C^1-Rand. Dann gibt es genau ein Vektorfeld $\nu : \partial\Omega \to \mathbb{R}^n$ so dass für alle $a \in \partial\Omega$ gilt

$$\nu(a) \perp T_a(\partial\Omega)\,, \quad \|\nu(a)\|_2 = 1\,, \tag{1.7}$$

und dass es für alle $a \in \partial\Omega$ ein $\varepsilon > 0$ gibt mit

$$a + t\nu(a) \notin \Omega\,, \quad \textit{für alle } t \in (0, \varepsilon)\,. \tag{1.8}$$

Das Vektorfeld ν ist stetig auf $\partial\Omega$. Der Vektor $\nu(a)$ heißt der äußere (Einheits-) Normalenvektor an $\partial\Omega$ in a.

Beweis: Nach Satz 1.3 ist ist $\dim T_a(\partial\Omega) = n-1$, und es gilt für $z \in \mathbb{R}^n$

$$z \perp T_a(\partial\Omega)\,, z \neq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad z = \lambda \nabla f(a) \quad \text{für ein } \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0.$$

Für solche z und hinreichend kleines $t > 0$ gilt

$$f(a+tz) = f(a) + t\,\langle z, \nabla f(a)\rangle + o(t) = t\lambda\|\nabla f(a)\|_2^2 + o(t) = t\left(\lambda\|\nabla f(a)\|_2^2 + \frac{o(t)}{t}\right),$$

also folgt für hinreichend kleine t

$$f(a+tz) \notin \Omega \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda > 0\,.$$

Falls außerdem $\|z\|_2 = 1$ gelten soll, ist also

$$\nu(a) = \frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|_2} \tag{1.9}$$

der eindeutig bestimmte Vektor, welcher (1.7) und (1.8) erfüllt. Da f stetig differenzierbar ist, ist ν stetig in a, und da a beliebig war, ist ν stetig auf $\partial\Omega$. $\square$

Wir betrachten als Spezialfall das Normalenfeld an den Graphen einer Funktion. Sei dazu $x \in \mathbb{R}^n$ zerlegt in

$$x = (x', x_n)\,, \quad x' \in \mathbb{R}^{n-1}\,, \quad x_n \in \mathbb{R}\,, \tag{1.10}$$

und wir betrachten folgende Situation: $W \subset \mathbb{R}^{n-1}$ ist offen und beschränkt, $h \in C^1(W)$ mit $h(W) \subset I = (a,b) \in \mathbb{R}$,

$$M = \operatorname{graph}(h) = \{(x', x_n) : \, x' \in W,\, x_n = h(x')\} \subset W \times I\,, \tag{1.11}$$

$$A = \{(x', x_n) : \, x' \in W\,,\, x_n \in I\,,\, x_n < h(x')\}\,. \tag{1.12}$$

Nach Konstruktion im Beweis von Satz 1.4 (siehe (1.9)) gilt für $x \in M$

$$\nu(x) = \frac{(-\nabla h(x'), 1)}{\|(-\nabla h(x'), 1)\|_2}\,. \tag{1.13}$$

Satz 1.5 (Partielle Integration im $\mathbb{R}^n$)
Es liege die Situation (1.10) – (1.13) vor. Dann gilt für alle $f \in C^1(W \times I)$ mit kompaktem Träger in $W \times I$

$$\int_A \partial_i f(x)\,dx = \int_M f(\xi)\nu_i(\xi)\,dS(\xi)\,, \quad 1 \le i \le n\,. \tag{1.14}$$

Beweis: Da f kompakten Träger hat, sind f und $\partial_i f$ stetig und beschränkt, also existieren alle Integrale, die im Folgenden auftreten.
Fall 1: Es ist $1 \le i \le n-1$. Die durch

$$F(x') = \int_a^{h(x')} f(x', x_n)\,dx_n$$

definierte Funktion $F : W \to \mathbb{R}$ hat kompakten Träger in W, also gilt (Übungsaufgabe)

$$0 = \int_W \partial_i F(x')\, dx' = \int_W \partial_i \left(\int_a^{h(x')} f(x', x_n)\, dx_n \right) dx' .$$

Es folgt weiter (unter Verwendung von Fubini und (1.13))

$$\begin{aligned} 0 &= \int_W \left[\int_a^{h(x')} \partial_i f(x', x_n)\, dx_n + f(x', h(x'))\partial_i h(x') \right] dx' \\ &= \int_W \int_a^{h(x')} \partial_i f(x', x_n)\, dx_n\, dx' + \int_W f(x', h(x'))\partial_i h(x')\, dx' \\ &= \int_A \partial_i f(x)\, dx - \int_W f(x', h(x'))\nu_i(x', h(x'))\sqrt{1 + \|\nabla h(x')\|_2^2}\, dx' \\ &= \int_A \partial_i f(x)\, dx - \int_M f(\xi)\nu_i(\xi)\, dS(\xi)\, , \end{aligned}$$

da $g(x') = \sqrt{1 + \|\nabla h(x')\|_2^2}$ gilt für die Gramsche Determinante der Funktion $x' \mapsto (x', h(x'))$ (Analysis 3).
Fall 2: $i = n$. Es ist (Fubini)

$$\begin{aligned} \int_A \partial_n f(x)\, dx &= \int_W \int_a^{h(x')} \partial_n f(x', x_n)\, dx_n\, dx' = \int_W f(x', h(x'))\, dx' \\ &= \int_W f(x', h(x'))\nu_n(x', h(x'))\sqrt{1 + \|\nabla h(x')\|_2^2}\, dx' \\ &= \int_M f(\xi)\nu_n(\xi)\, dS(\xi)\, , \end{aligned}$$

wie in Fall 1. □

Folgerung 1.6 *Satz 1.5 gilt auch, falls A auf der anderen Seite von M liegt, das heißt, falls*

$$A = \{(x', x_n) :\ x' \in W\, ,\ x_n \in I\, ,\ x_n > h(x')\}\, , \tag{1.15}$$

gilt. Die äußere Normale ist dann gegeben durch

$$\nu(x) = \frac{(\nabla h(x'), -1)}{\|(\nabla h(x'), -1)\|_2}\, . \tag{1.16}$$

Ebenso gilt Satz 1.5 auch, falls die Darstellung von M nach einer anderen Koordinate aufgelöst ist, also

$$M = \{(x_1, \dots, x_n) : (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in W\, ,\ x_i = h(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)\} \tag{1.17}$$

und A, ν entsprechend.

Beweis: Entweder durch Modifikation des Beweises von Satz 1.6 oder durch Transformation auf die Situation des Satzes. □

Definition 1.7 **(C^∞-Zerlegung der Eins)**
Sei $K \subset \mathbb{R}^n$, sei $(U_j)_{1\le j\le N}$ eine offene Überdeckung von K. Eine Familie $(\alpha_j)_{1\le j\le N}$ von Funktionen $\alpha_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ heißt C^∞-Zerlegung der Eins für K bezüglich $(U_j)_j$, falls gilt

$$0 \le \alpha_j \le 1\,, \quad \textit{für alle } j, \tag{1.18}$$

$$\alpha_j(x) = 0\,, \quad \textit{falls } x \notin U_j, \tag{1.19}$$

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j(x) = 1 \quad \textit{falls } x \in K. \tag{1.20}$$

□

Kompakte Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ besitzen immer eine solche Zerlegung der Eins.

Satz 1.8
Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, sei $(U(x))_{x\in K}$ ein System offener Mengen mit $x \in U(x)$ für alle $x \in K$. Dann gibt es endlich viele $x_j \in K$, $1 \le j \le N$, mit

$$K \subset \bigcup_{j=1}^N U(x_j)\,,$$

und eine C^∞-Zerlegung der Eins für K bezüglich $(U_j)_{1\le j\le N}$, wobei $U_j = U(x_j)$.

Beweis: Wie früher beginnen wir mit $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ definiert durch

$$\psi(t) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{t}\right)\,, & t > 0\,, \\ 0\,, & t \le 0\,. \end{cases}$$

Wir setzen

$$\tilde{\psi}(t) = \frac{\psi(4-t)}{\psi(4-t) + \psi(t-1)}\,.$$

Es ist dann $\tilde{\psi} \in C^\infty(\mathbb{R})$, und es gilt $\tilde{\psi}(t) = 1$ für $t \le 1$, $\tilde{\psi}(t) = 0$ für $t \ge 4$. Wir wählen endlich viele $x_j \in K$ und $\varepsilon_j > 0$, $1 \le j \le N$, wobei $K(x;\varepsilon) = \{y : \|y-x\|_2 \le \varepsilon\}$, so dass

$$K \subset \bigcup_{j=1}^N K(x_j;\varepsilon_j)\,, \quad K(x_j; 2\varepsilon_j) \subset U_j\,,$$

und definieren für $x \in \mathbb{R}^n$

$$\tilde{\alpha}_j(x) = \tilde{\psi}\left(\frac{\|x-x_j\|_2^2}{\varepsilon_j^2}\right)\,.$$

Dann ist $\tilde{\alpha}_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $0 \le \tilde{\alpha}_j \le 1$, $\tilde{\alpha}_j = 1$ in $K(x_j;\varepsilon_j)$ und $\tilde{\alpha}_j = 0$ außerhalb von $K(x_j;2\varepsilon_j)$. Eine Zerlegung der Eins wie verlangt erhalten wir nun durch

$$\alpha_j(x) = \frac{\tilde{\alpha}_j(x)}{p(x) + \sum_{k=1}^N \tilde{\alpha}_k(x)}\,, \quad p(x) = \prod_{k=1}^N (1 - \tilde{\alpha}_j(x))\,.$$

□

Satz 1.9 (Gaußscher Integralsatz)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, Ω habe einen C^1-Rand. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $\overline{\Omega} \subset U$, sei $F : U \to \mathbb{R}^n$ ein C^1-Vektorfeld. Dann gilt

$$\int_\Omega \operatorname{div} F(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} \langle F(\xi), \nu(\xi) \rangle \, dS(\xi) \,. \tag{1.21}$$

Beweis: Für jedes $x \in \Omega$ wählen wir eine offene Menge $U(x)$ mit $x \in U(x) \subset \Omega$. Für jedes $x \in \partial\Omega$ betrachten wir zunächst gemäß Definition 1.1 eine lokale Darstellung

$$\partial\Omega \cap U' = \{f = 0\}\,, \quad \Omega \cap U' = \{f < 0\}\,,$$

mit $f \in C^1(U')$ und $\nabla f \neq 0$ überall. Nach dem Satz über implizite Funktionen gibt es offene Mengen (die wir o.B.d.A. konvex wählen können) $W(x) \subset \mathbb{R}^{n-1}$, $I(x) \subset \mathbb{R}$ und $h_x : W(x) \to I(x)$, $h_x \in C^1(W(x))$ mit

$$\begin{aligned} U(x) \cap \partial\Omega &= \{(x', x_n) : x_n = h_x(x')\}\,, \\ U(x) \cap \Omega &= \{(x', x_n) : x_n < h_x(x')\}\,, \\ U(x) &= W(x) \times I(x)\,, \end{aligned}$$

oder mit “$>$” statt “$<$” beziehungsweise aufgelöst nach x_i statt x_n. Gemäß Satz 1.8 wählen wir endlich viele $U(x_j)_{1\le j\le N}$ und eine zugeordnete C^∞-Zerlegung der Eins $(\alpha_j)_{1\le j\le N}$. Wir numerieren so, dass $x_1, \ldots, x_M \in \partial\Omega$, $x_{M+1}, \ldots, x_N \in \Omega$. Es gilt nun

$$\begin{aligned} \int_\Omega \operatorname{div} F(x)\, dx &= \int_\Omega \sum_{k=1}^n \partial_k \left(\sum_{j=1}^N \alpha_j F_k \right)(x)\, dx \\ &= \int_\Omega \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^n \partial_k(\alpha_j F_k)(x)\, dx \\ &= \sum_{j=1}^N \int_\Omega \operatorname{div}(\alpha_j F)(x)\, dx\,, \end{aligned}$$

sowie

$$\int_{\partial\Omega} \langle F(\xi), \nu(\xi) \rangle \, dS(\xi) = \sum_{j=1}^N \int_{\partial\Omega} \langle \alpha_j(\xi) F(\xi), \nu(\xi) \rangle \, dS(\xi)\,.$$

Es genügt daher, den Satz für $\alpha_j F$, $1 \le j \le N$, zu beweisen.
Fall 1: $j \le M$. Wir wenden Satz 1.5 an mit

$$f = \alpha_j F_k\,, \quad A = \Omega \cap U(x_j)\,, \quad M = \partial\Omega \cap U(x_j)\,,$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \int_\Omega \operatorname{div}(\alpha_j F)(x)\, dx &= \sum_{k=1}^n \int_\Omega \partial_k(\alpha_j F_k)(x)\, dx = \sum_{k=1}^n \int_{\partial\Omega} \alpha_j(\xi) F_k(\xi) \nu_k(\xi)\, dS(\xi) \\ &= \int_{\partial\Omega} \langle \alpha_j(\xi) F(\xi), \nu(\xi) \rangle \, dS(\xi)\,. \end{aligned}$$

Fall 2: $M < j \le N$. Es ist $U(x_j) \subset \Omega$, also $\operatorname{supp}(\alpha_j) \subset \Omega$, also

$$\int_{\partial\Omega} \langle \alpha_j(\xi)F(\xi), \nu(\xi)\rangle \, dS(\xi) = 0\,,$$

und (Übungsaufgabe)

$$\int_\Omega \operatorname{div}(\alpha_j F)(x)\, dx = \sum_{k=1}^n \int_\Omega \partial_k(\alpha_j F_k)(x)\, dx = 0\,.$$

□

Satz 1.10 (1. Greensche Formel)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, Ω habe einen C^1-Rand. Seien $f \in C^1(U)$, $g \in C^2(U)$, wobei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen ist mit $\overline{\Omega} \subset U$. Dann gilt

$$\int_\Omega f(x)\Delta g(x)\, dx = -\int_\Omega \langle \nabla f(x), \nabla g(x)\rangle \, dx + \int_{\partial\Omega} f(\xi)\partial_\nu g(\xi)\, dS(\xi)\,, \tag{1.22}$$

wobei

$$\partial_\nu g(\xi) = \langle \nabla g(\xi), \nu(\xi)\rangle$$

die Richtungsableitung in Richtung der äußeren Normalen bezeichnet. ($\partial_\nu g$ heißt auch die Normalenableitung von g.)

Beweis: Sei $F : U \to \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$F(x) = f(x)\nabla g(x)\,,$$

dann ist

$$\langle F(\xi), \nu(\xi)\rangle = f(\xi)\partial_\nu g(\xi)\,,$$

und

$$\operatorname{div} F(x) = \langle \nabla f(x), \nabla g(x)\rangle + f(x)\operatorname{div}(\nabla g(x)) = \langle \nabla f(x), \nabla g(x)\rangle + f(x)\Delta g(x)\,.$$

Die Behauptung folgt nun aus Satz 1.9. □

Folgerung 1.11 (2. Greensche Formel)
Es liege die Situation aus Satz 1.10 vor. Dann gilt (setze $f = 1$)

$$\int_\Omega \Delta g(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} \partial_\nu g(\xi)\, dS(\xi)\,. \tag{1.23}$$

Ist außerdem $f \in C^2(U)$, so gilt

$$\int_\Omega (f\Delta g - g\Delta f)(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} (f\partial_\nu g - g\partial_\nu f)(\xi)\, dS(\xi)\,. \tag{1.24}$$

□

2 Der Integralsatz von Stokes

Wir beschäftigen uns zunächst mit einer zweidimensionalen Situation. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen, beschränkt, mit einem C^1-Rand $\partial\Omega$. Wir nehmen an, es gebe eine stetig differenzierbare Parametrisierung $r : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, mit $r(a) = r(b)$, so dass $r : [a, b) \to \partial\Omega$ bijektiv ist und $r'(t) \neq 0$ gilt für alle $t \in [a, b]$.

Sei $\nu : \partial\Omega \to \mathbb{R}^2$ das zugehörige Normalenfeld, siehe Satz 1.4. Für $a \in \partial\Omega$, $a = r(t)$ ist

$$T_a(\partial\Omega) = \operatorname{span}\{r'(t)\} = \{\lambda r'(t) : \lambda \in \mathbb{R}\},$$

also

$$r'(t) \perp \nu(r(t)).$$

Durch die Parametrisierung r wird ein Durchlaufsinn für $\partial\Omega$ festgelegt. Wir sagen, dass $\partial\Omega$ von r im **mathematisch positiven Sinn** durchlaufen wird, falls

$$\det(\nu(r(t)) \mid r'(t)) > 0. \tag{2.1}$$

Das ist dann der Fall, wenn

$$\nu(r(t)) = \frac{1}{\|r'(t)\|_2} \begin{pmatrix} r_2'(t) \\ -r_1'(t) \end{pmatrix}, \quad r'(t) = \|r'(t)\|_2 \begin{pmatrix} -\nu_2(r(t)) \\ \nu_1(r(t)) \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Anschaulich bedeutet das, dass $\partial\Omega$ entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen wird, und dass Ω immer "links von der Richtung $r'(t)$ liegt".

Satz 2.1 (Satz von Stokes im $\mathbb{R}^2$)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen und beschränkt, Ω habe einen C^1-Rand $\partial\Omega$, welcher von der Parametrisierung r im mathematisch positiven Sinn durchlaufen wird. Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen mit $\overline{\Omega} \subset U$, sei $F : U \to \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt

$$\int_r F(x) \cdot dx = \int_\Omega (\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1)(x)\, dx. \tag{2.3}$$

Beweis: Aus der Definition des Kurvenintegrals und aus (2.2) folgt

$$\begin{aligned}
\int_r F(x) \cdot dx &= \int_a^b \langle F(r(t)), r'(t)\rangle \, dt = \int_a^b \left\langle F(r(t)), \begin{pmatrix} -\nu_2(r(t)) \\ \nu_1(r(t)) \end{pmatrix} \right\rangle \|r'(t)\|_2 \, dt \\
&= \int_a^b \left\langle \begin{pmatrix} F_2(r(t)) \\ -F_1(r(t)) \end{pmatrix}, \nu(r(t)) \right\rangle \|r'(t)\|_2 \, dt = \int_{\partial\Omega} \left\langle \begin{pmatrix} F_2 \\ -F_1 \end{pmatrix}(\xi), \nu(\xi) \right\rangle dS(\xi) \\
&= \int_\Omega (\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1)(x)\, dx,
\end{aligned}$$

letzteres nach dem Satz von Gauß. □

Für $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$F(x) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

gilt also

$$\int_{\partial\Omega} F(x)\cdot dx = \int_\Omega 1\, dx = \lambda^2(\Omega)\,,$$

also etwa für den Einheitskreis $\Omega = B_1(0;1)$, $r(t) = (\cos t, \sin t)$

$$\lambda^2(\Omega) = \int_0^{2\pi} \langle F(r(t)), r'(t)\rangle \; dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin^2(t) + \cos^2(t)\, dt = \pi\,.$$

Wir beschäftigen uns nun mit dem Satz von Stokes im $\mathbb{R}^3$. Sei M eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^3$. Wir betrachten nur den Spezialfall, dass M durch eine einzige Karte (siehe Kapitel 7, Analysis 3) beschrieben wird,

$$M = \Phi(T)\,, \quad \Phi : T \to \mathbb{R}^3\,, \quad T \subset \mathbb{R}^2 \text{ offen.} \tag{2.4}$$

Sei nun $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen und beschränkt, Ω habe einen C^1-Rand $\partial\Omega$, es gelte

$$\overline{\Omega} \subset T\,.$$

Wir betrachten

$$A = \Phi(\overline{\Omega}) \tag{2.5}$$

und definieren (nur für den Rest dieses Abschnitts)

$$\partial A = \Phi(\partial\Omega)\,. \tag{2.6}$$

Unter ∂A stellen wir uns den eindimensionalen Rand der zweidimensionalen Mannigfaltigkeit $\Phi(\Omega)$ vor. Sei nun $V \subset \mathbb{R}^3$ offen, $M \subset V$, $F : V \to \mathbb{R}^3$. Der **Satz von Stokes** besagt, dass unter geeigneten Voraussetzungen gilt

$$\int_{\partial A} F(x)\cdot dx = \int_A \langle (\operatorname{rot} F)(\xi), \nu(\xi)\rangle \; dS(\xi)\,. \tag{2.7}$$

Hierbei müssen der Umlaufsinn der Randkurve ∂A und die Normalenrichtung $\nu(\xi)$ zueinander passend gewählt werden. Das erreicht man, indem man erstens ∂A parametrisiert durch eine Kurve $\Phi \circ r : [a,b] \to A$, wobei $r : [a,b] \to T$ eine Kurve ist, welche $\partial\Omega$ im mathematisch positiven Sinn durchläuft, und zweitens das Vorzeichen der Normalen in einem Punkt $\xi = \Phi(u)$, $u \in \Omega$, festlegt durch ("$\times$" bezeichnet das Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$)

$$\nu(\Phi(u)) = \frac{1}{\|\partial_1\Phi(u) \times \partial_2\Phi(u)\|_2}\, \partial_1\Phi(u) \times \partial_2\Phi(u)\,. \tag{2.8}$$

Es ergibt sich dann, da $(\Phi \circ r)'(t) = J_\Phi(r(t))r'(t)$,

$$\int_{\partial A} F(x)\cdot dx = \int_{\Phi\circ r} F(x)\cdot dx = \int_a^b \langle F(\Phi(r(t))), J_\Phi(r(t))r'(t)\rangle \; dt \tag{2.9}$$

$$= \int_a^b \left\langle J_\Phi(r(t))^T F(\Phi(r(t))), r'(t)\right\rangle \; dt \tag{2.10}$$

$$= \int_r \tilde{F}(u)\cdot du\,, \tag{2.11}$$

wobei $\tilde{F} : T \to \mathbb{R}^2$ definiert ist durch

$$\tilde{F}(u) = J_\Phi(u)^T F(\Phi(u))\,. \tag{2.12}$$

Wir können jetzt Satz 2.1 anwenden und erhalten

$$\int_r \tilde{F}(u) \cdot du = \int_\Omega (\partial_1 \tilde{F}_2 - \partial_2 \tilde{F}_1)(u)\, du\,. \tag{2.13}$$

Nach (2.12) hat $\tilde{F}$ die komponentenweise Form

$$\tilde{F}_i(u) = \langle \partial_i \Phi(u), F(\Phi(u)) \rangle\ , \quad i = 1, 2\,. \tag{2.14}$$

Aus der Produktregel (für Skalarprodukte) und der Kettenregel folgt

$$\partial_1 \tilde{F}_2(u) = \langle \partial_1 \partial_2 \Phi(u), F(\Phi(u)) \rangle + \langle \partial_2 \Phi(u), J_F(\Phi(u)) \partial_1 \Phi(u) \rangle \tag{2.15}$$

$$\partial_2 \tilde{F}_1(u) = \langle \partial_2 \partial_1 \Phi(u), F(\Phi(u)) \rangle + \langle \partial_1 \Phi(u), J_F(\Phi(u)) \partial_2 \Phi(u) \rangle \tag{2.16}$$

Es folgt, falls Φ zweimal stetig differenzierbar ist,

$$(\partial_1 \tilde{F}_2 - \partial_2 \tilde{F}_1)(u) = \langle \partial_2 \Phi(u), J_F(\Phi(u)) \partial_1 \Phi(u) \rangle - \langle \partial_1 \Phi(u), J_F(\Phi(u)) \partial_2 \Phi(u) \rangle\ . \tag{2.17}$$

Die rechten Seite von (2.17) hat die Form

$$\langle y, Ax \rangle - \langle x, Ay \rangle\ , \quad x, y \in \mathbb{R}^3\ ,\ A \in \mathbb{R}^{3,3}\,.$$

Es gilt die algebraische Identität

$$\langle y, Ax \rangle - \langle x, Ay \rangle = \sum_{i,j=1}^{3} y_i a_{ij} x_j - \sum_{i,j=1}^{3} x_i a_{ij} y_j = \langle \begin{pmatrix} a_{32} - a_{23} \\ a_{13} - a_{31} \\ a_{21} - a_{12} \end{pmatrix}\ ,\ x \times y \rangle$$

Anwendung auf (2.17) liefert mit (2.8)

$$(\partial_1 \tilde{F}_2 - \partial_2 \tilde{F}_1)(u) = \langle \begin{pmatrix} \partial_2 F_3 - \partial_3 F_2 \\ \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3 \\ \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 \end{pmatrix} (\Phi(u))\,,\ \partial_1 \Phi(u) \times \partial_2 \Phi(u) \rangle \tag{2.18}$$

$$= \langle (\operatorname{rot} F)(\Phi(u)), \nu(\Phi(u)) \rangle\, \|\partial_1 \Phi(u) \times \partial_2 \Phi(u)\|_2\,. \tag{2.19}$$

Es ist also

$$\int_\Omega (\partial_1 \tilde{F}_2 - \partial_2 \tilde{F}_1)(u)\, du = \int_\Omega \langle (\operatorname{rot} F)(\Phi(u)), \nu(\Phi(u)) \rangle\, \|\partial_1 \Phi(u) \times \partial_2 \Phi(u)\|_2\, du\,. \tag{2.20}$$

Wir können das Integral auf der rechten Seite dieser Gleichung in ein Oberflächenintegral über M zurückführen. Sei dazu $B = (x \,|\, y) \in \mathbb{R}^{2,2}$ eine Matrix mit den Spalten x und y. Es gilt die algebraische Identität

$$\det(B^T B) = \det \begin{pmatrix} x^T x & x^T y \\ y^T x & y^T y \end{pmatrix} = \|x\|_2^2 \|y\|_2^2 - \langle x, y \rangle^2 = \|x \times y\|_2^2\,. \tag{2.21}$$

Mit $x = \partial_1 \Phi(u)$, $y = \partial_2 \Phi(u)$ folgt also, dass für die Gramsche Determinante $g(u)$ der Karte Φ gilt

$$\sqrt{g(u)} = \sqrt{\det(J_\Phi(u)^T J_\Phi(u))} = \|\partial_1 \Phi(u) \times \partial_2 \Phi(u)\|_2\,. \tag{2.22}$$

Die Gleichungen (2.9), (2.13), (2.20) und (2.22) zusammengenommen ergeben die Formel (2.7) des Stokes'schen Satzes. Wir haben also bewiesen:

Satz 2.2 (Satz von Stokes im $\mathbb{R}^3$)
Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit, welche durch eine globale Karte $\Phi : T \to M$ beschrieben wird, sei Φ zweimal stetig differenzierbar. Seien $A \subset M$ und $F : V \to \mathbb{R}^3$ wie in (2.4) – (2.7) beschrieben, sei der Umlaufsinn von ∂A und die Normalenrichtung $\nu(\xi)$ passend gewählt wie beschrieben. Dann gilt

$$\int_{\partial A} F(x) \cdot dx = \int_A \langle (\operatorname{rot} F)(\xi), \nu(\xi) \rangle \; dS(\xi) \,. \tag{2.23}$$

□

Die Sätze von Gauß und Stokes stellen eine Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung ins Mehrdimensionale dar. Gemeinsam ist ihnen, dass ein Integral einer Funktion über den Rand einer Mannigfaltigkeit mit einem Integral eines Differentials dieser Funktion über die gesamte Mannigfaltigkeit in Verbindung gebracht wird. Einen einheitlichen allgemeinen begrifflichen Rahmen für diese Sätze liefert die Theorie der **Differentialformen**.

3 Differenzierbarkeit in $\mathbb{C}$

Wir wissen bereits einiges über die komplexen Zahlen. Aufgefaßt als $\mathbb{R}$-Vektorraum, ist $\mathbb{C}$ vermittels $j : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$,

$$j(z) = (\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z) \tag{3.1}$$

zu $\mathbb{R}^2$ isomorph. Da

$$|z| = \|j(z)\|_2 \,, \tag{3.2}$$

ist die metrische Struktur von $\mathbb{C}$ mit der von $\mathbb{R}^2$ identisch. Also ist eine Teilmenge U von $\mathbb{C}$ genau dann offen (abgeschlossen, kompakt, ...), wenn die entsprechende Menge $j(U) \subset \mathbb{R}^2$ diese Eigenschaft hat. Eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann in $\mathbb{C}$, wenn die Folge $(j(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^2$ konvergiert.

Definition 3.1 (Differenzierbarkeit)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ heißt differenzierbar in $z \in U$, falls der Grenzwert

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} \tag{3.3}$$

existiert. Wir definieren in diesem Fall die Ableitung von f in z durch

$$f'(z) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} \,. \tag{3.4}$$

Ist f in ganz U differenzierbar, so sagen wir, dass f in U holomorph ist. □

Die aus dem Reellen bekannten Rechenregeln gelten auch im Komplexen (Beweis genauso): Sind $f, g : U \to \mathbb{C}$ holomorph, so auch $f+g$, $f \cdot g$, αf für $\alpha \in \mathbb{C}$, sowie $f/g : U \setminus \{g = 0\} \to \mathbb{C}$, und es gilt

$$(f+g)' = f' + g' \,, \quad (fg)' = f'g + fg' \,, \quad (\alpha f)' = \alpha f' \,, \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' + fg'}{g^2} \,.$$

Außerdem gilt die Kettenregel: Sind $f : U \to V$, $g : V \to \mathbb{C}$ holomorph, so ist auch $g \circ f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, und

$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z) \,, \quad z \in U \,.$$

Fassen wir $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum der Dimension 2 auf, so ist eine Abbildung $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\mathbb{R}$-linear, falls gilt

$$\begin{aligned} T(z+w) &= T(z) + T(w) \,, \quad \text{für alle } z, w \in \mathbb{C}, \\ T(\alpha z) &= \alpha T(z) \,, \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C},\ \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ist $c \in \mathbb{C}$, so ist die durch

$$T(z) = c \cdot z \tag{3.5}$$

definierte Abbildung $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ natürlich $\mathbb{C}$-linear, und damit auch $\mathbb{R}$-linear. Ihre Matrixdarstellung hat die Form

$$\begin{pmatrix} c_1 & -c_2 \\ c_2 & c_1 \end{pmatrix} \,, \quad c_1 = \operatorname{Re} c \,, \quad c_2 = \operatorname{Im} c \,, \tag{3.6}$$

was sich unmittelbar aus der Formel für die Multiplikation

$$(c_1 + ic_2)(z_1 + iz_2) = (c_1 z_1 - c_2 z_2) + i(c_2 z_1 + c_1 z_2)$$

ergibt. Ein weiteres Beispiel ist die komplexe Konjugation,

$$T(z) = \overline{z}\,.$$

Wegen $T(\alpha z) = \overline{\alpha} \cdot \overline{z}$ ist T $\mathbb{R}$-linear, aber nicht $\mathbb{C}$-linear.

Jeder Abbildung $f : U \to \mathbb{C}$, $U \subset \mathbb{C}$ entspricht kanonisch eine Abbildung $\tilde{f} : j(U) \to \mathbb{R}^2$. Auf $\tilde{f}$ ist die in Analysis 2 entwickelte Differentialrechnung im Mehrdimensionalen anwendbar. Wir werden im folgenden f und $\tilde{f}$ in der Notation nicht unterscheiden, sondern einfach von $f : U \to \mathbb{C}$ sprechen.

Definition 3.2 (Reelle Differenzierbarkeit)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Abbildung $f : U \to \mathbb{C}$ heißt reell differenzierbar, falls sie differenzierbar ist, aufgefaßt als Abbildung von $U \subset \mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$. □

Lemma 3.3 *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$, $z \in U$. Dann sind äquivalent:*

(i) f ist differenzierbar in z.

(ii) f ist reell differenzierbar in z, und die Jacobi-Matrix $J_f(z) \in \mathbb{R}^{2,2}$ hat die Form

$$J_f(z) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$.

Beweis: Wie im Reellen beweist man, dass (3.4) äquivalent ist zu

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f(z+h) - f(z) - f'(z)h}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{|f(z+h) - f(z) - f'(z)h|}{|h|} = 0\,. \tag{3.8}$$

Hieraus folgt die Behauptung, siehe (3.2), (3.5) und (3.6). □

Schreiben wir

$$f(z) = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix},$$

also $u(x,y) = \operatorname{Re} f(z)$, $v(x,y) = \operatorname{Im} f(z)$, $z = x + iy$, so ist

$$J_f(z) = \begin{pmatrix} \partial_x u(x,y) & \partial_y u(x,y) \\ \partial_x v(x,y) & \partial_y v(x,y) \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

Satz 3.4 (Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$. Dann sind äquivalent:

(i) f ist holomorph in U.

(ii) f ist reell differenzierbar in U, und für die Funktionen $u = \operatorname{Re} f$ und $v = \operatorname{Im} f$ gilt

$$\partial_x u(x,y) = \partial_y v(x,y)\,, \tag{3.10}$$
$$\partial_y u(x,y) = -\partial_x v(x,y)\,, \tag{3.11}$$

für alle $(x,y) \in U$.

Die Gleichungen (3.10) und (3.11) heißen die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen.

Beweis: Folgt direkt aus Lemma 3.3 und (3.9). □

Aus der Analysis 2 wissen wir, dass stetige Differenzierbarkeit der Funktionen u und v die reelle Differenzierbarkeit von f impliziert. Beispiel: Für die komplexe Exponentialfunktion gilt

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x \cos y + i e^x \sin y\,,$$

also

$$u(x,y) = e^x \cos y\,, \quad v(x,y) = e^x \sin y\,.$$

Man sieht unmittelbar, dass die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen in $\mathbb{R}^2$ erfüllt sind, also ist die Exponentialfunktion in $\mathbb{C}$ holomorph.

Ist $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, und sind $u = \operatorname{Re} f$ und $v = \operatorname{Im} f$ zweimal stetig differenzierbar (was, wie sich später herausstellen wird, bereits aus der Holomorphie folgt), so folgt aus den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\Delta u = \partial_x(\partial_x u) + \partial_y(\partial_y)u = \partial_x\partial_y v - \partial_y\partial_x v = 0\,,$$

und analog

$$\Delta v = 0\,.$$

Real- und Imaginärteil einer holomorphen Funktion sind also immer Lösungen der Laplace-Gleichung in U.

Wir betrachten nun komplexe Potenzreihen der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k \tag{3.12}$$

mit den Koeffizienten $(c_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}$ um den Entwicklungspunkt $a \in \mathbb{C}$. Wir wissen bereits aus der Analysis 2, dass diese Potenzreihe im Inneren ihres Konvergenzkreises $B(a,r)$,

$$r = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}}$$

absolut konvergiert und dort eine stetige Funktion

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k \tag{3.13}$$

definiert. Wir wissen außerdem, dass die durch gliedweises Differenzieren gebildete Potenzreihe

$$g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k (z-a)^{k-1} \tag{3.14}$$

ebenfalls in $B(a,r)$ absolut konvergiert.

Satz 3.5 *Jede komplexe Potenzreihe definiert eine im Innern ihres Konvergenzkreises holomorphe Funktion, deren Ableitung sich durch gliedweises Differenzieren ergibt.*

Beweis: Seien f, g durch (3.13), (3.14) gegeben, sei zunächst $a = 0$. Wir müssen zeigen, dass f für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < r$ differenzierbar ist und $f'(z) = g(z)$ gilt. Sei ein solches z fest gewählt. Wir definieren

$$q_k(w) = \sum_{j=0}^{k-1} z^j w^{k-1-j} .$$

Dann ist

$$w^k - z^k = (w-z) q_k(w) ,$$

also

$$f(w) - f(z) = (w-z) \sum_{k=1}^{\infty} c_k q_k(w) ,$$

also

$$\frac{f(w) - f(z)}{w-z} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k q_k(w) =: \tilde{g}(w) .$$

Da

$$\tilde{g}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k q_k(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k k z^{k-1} = g(z) ,$$

genügt es zu zeigen, dass $\tilde{g}$ stetig ist in z. Nun gilt aber für alle $|w| < r$ und alle k

$$|c_k q_k(w)| \le |c_k| k \rho^{k-1} , \quad \rho = \max\{|w|, |z|\} ,$$

und aus dem Weierstraß-Kriterium für Funktionenreihen (Analysis 2) folgt wie im Reellen die gleichmäßige Konvergenz der Partialsummen von $\tilde{g}$ gegen $\tilde{g}$, also ist $\tilde{g}$ stetig in z. Der allgemeine Fall $a \neq 0$ wird darauf zurückgeführt, indem wir das eben Bewiesene auf

$$\tilde{f}(z) = f(z+a)$$

anwenden. □

4 Das Kurvenintegral in $\mathbb{C}$

Sei $I = [a,b]$, $f : I \to \mathbb{C}$. Wir definieren

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b (\operatorname{Re} f)(t)\,dt + i\int_a^b (\operatorname{Im} f)(t)\,dt\,. \tag{4.1}$$

Diese Definition macht Sinn, falls $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ Lebesgue-integrierbar sind. Für die hier behandelten Teile der Analysis im Komplexen ist es weitgehend ausreichend, nur stückweise stetige Funktionen zu betrachten. Dafür sind auch andere Integralbegriffe (etwa das Regelintegral, oder das Riemann-Integral) ausreichend.

Definition 4.1 (Kurvenintegral in $\mathbb{C}$)
Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ eine stückweise stetig differenzierbare Kurve, sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig. Wir definieren das (komplexe) Kurvenintegral von f entlang γ durch

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt\,. \tag{4.2}$$

□

Der Wert des Kurvenintegrals in (4.2) ist also eine komplexe Zahl.

Wie im Reellen zeigt man, dass sich das Kurvenintegral durch Umparametrisieren nicht ändert, das heißt,

$$\int_{\tilde\gamma} f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz\,,$$

falls $\tilde\gamma = \gamma \circ \psi$, $\psi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ stetig differenzierbar, monoton wachsend und bijektiv ist. Mit

$$C = \gamma([a,b])$$

können wir daher statt $\int_\gamma f(z)\,dz$ auch

$$\int_C f(z)\,dz$$

schreiben, wenn festliegt, in welcher Richtung C durchlaufen wird. (Ändern wir die Durchlaufrichtung, so kehrt sich das Vorzeichen des Kurvenintegrals um.)

Beispiel: Sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = tw + (1-t)z$, die Verbindungsstrecke von z nach w. Dann gilt

$$\int_\gamma 1\,dz = \int_0^1 \gamma'(t)\,dt = \int_0^1 (w-z)\,dt = w - z\,. \tag{4.3}$$

Lemma 4.2 *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Sei $c \in U$ mit $K(c,r) \subset U$, $r > 0$. Dann gilt für $C = \partial B(c,r)$, durchlaufen im mathematisch positiven Sinn,*

$$\int_C \frac{1}{z-c}\,dz = 2\pi i\,, \tag{4.4}$$

$$\int_C (z-c)^n\,dz = 0\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,, n \neq -1\,. \tag{4.5}$$

Beweis: Wir definieren $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ durch

$$\gamma(t) = c + re^{it} .$$

Dann gilt für alle $n \in \mathbb{Z}$

$$\int_C (z-c)^n \, dz = \int_0^{2\pi} r^n e^{int} ire^{it} \, dt = ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} \, dt ,$$

woraus beide Behauptungen folgen. □

Lemma 4.3 *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ stetig, $\gamma : [a, b] \to U$ eine stückweise stetig differenzierbare Kurve. Dann gilt*

$$\left| \int_\gamma f(z) \, dz \right| \le \|f\|_\infty L(\gamma) , \tag{4.6}$$

wobei

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| \, dt \tag{4.7}$$

die Länge der Kurve γ ist.

Beweis: Es ist

$$\left| \int_\gamma f(z) \, dz \right| = \left| \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) \, dt \right| \le \|f\|_\infty \int_a^b |\gamma'(t)| \, dt .$$

□

Definition 4.4 (Stammfunktion)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$. Eine holomorphe Funktion $F : U \to \mathbb{C}$ heißt Stammfunktion von f in U, falls $F'(z) = f(z)$ gilt für alle $z \in U$. □

Lemma 4.5 *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ stetig, sei F eine Stammfunktion von f in U. Dann gilt*

$$\int_\gamma f(z) \, dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) \tag{4.8}$$

für jede stückweise stetig differenzierbare Kurve $\gamma : [a, b] \to U$. Insbesondere gilt

$$\int_\gamma f(z) \, dz = 0 \tag{4.9}$$

falls γ geschlossen ist (das heißt, es gilt $\gamma(b) = \gamma(a)$).

Beweis: Es gilt

$$\int_\gamma f(z) \, dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) \, dt = \int_a^b (F \circ \gamma)'(t) \, dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) .$$

□

Die Formel (4.5) in Lemma 4.2 für $n \neq -1$ ist ein Spezialfall von Lemma 4.5 mit

$$f(z) = (z-c)^n \,, \quad F(z) = \frac{1}{n+1}(z-c)^{n+1} \,.$$

Es hängt u.a. von der Form von U ab, ob zu einer gegebenen Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ eine Stammfunktion existiert. Aus Lemma 4.2 folgt beispielsweise, dass

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

in $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ keine Stammfunktion hat. (In $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist $F(t) = \ln(|t|)$ eine Stammfunktion von $f(t) = 1/t$.)

Wir erinnern: Ein $U \subset \mathbb{C}$ heißt sternförmig, falls ein Punkt $c \in U$ existiert, so dass für alle $z \in U$ die Verbindungsstrecke $[c, z]$ ganz in U liegt. Zu einem solchen c betrachten wir Dreiecke $\Delta(c)$ der Form

$$\Delta(c) = \operatorname{conv}\{c, z, w\} \,, \quad z, w \in U \,. \tag{4.10}$$

Satz 4.6 *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und sternförmig, sei $f : U \to \mathbb{C}$ stetig, es gelte*

$$\int_{\partial \Delta(c)} f(z)\, dz = 0 \tag{4.11}$$

für alle Dreiecke $\Delta(c)$ der Form (4.10), welche $\Delta(c) \subset U$ erfüllen. Dann hat f eine Stammfunktion in U.

Beweis: Für $z \in U$ definieren wir

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(\zeta)\, d\zeta \,, \tag{4.12}$$

wobei

$$\gamma_z : [0,1] \to U \,, \quad \gamma_z(t) = tz + (1-t)c$$

die Verbindungsstrecke von c nach z ist. Sei $r > 0$ so klein, dass $B(z, r) \subset U$, sei $w \in B(z, r)$ beliebig. Dann liegt das durch (4.10) definierte Dreieck $\Delta(c)$ ganz in U, und es gilt

$$0 = \int_{\partial \Delta(c)} f(\zeta)\, d\zeta = \int_{[c,z]} f(\zeta)\, d\zeta + \int_{[z,w]} f(\zeta)\, d\zeta + \int_{[w,c]} f(\zeta)\, d\zeta \,,$$

also

$$F(w) = F(z) + \int_{[z,w]} f(\zeta)\, d\zeta \,.$$

Für $w \in B(a, r)$, $w \neq z$ folgt mit (4.3)

$$\frac{F(w) - F(z)}{w - z} - f(z) = \frac{1}{w-z} \int_{[z,w]} f(\zeta)\, d\zeta - f(z) = \frac{1}{w-z} \int_{[z,w]} f(\zeta) - f(z)\, d\zeta \,,$$

also mit Lemma 4.3

$$\left| \frac{F(w) - F(z)}{w - z} - f(z) \right| \leq \frac{1}{|w-z|} L([z,w]) \sup_{\zeta \in [z,w]} |f(\zeta) - f(z)| = \sup_{\zeta \in [z,w]} |f(\zeta) - f(z)| \,,$$

also

$$\sup_{\substack{w\in B(z,r)\\ w\neq z}} \left|\frac{F(w)-F(z)}{w-z} - f(z)\right| \le \sup_{w\in B(z,r)} |f(w)-f(z)|\,,$$

und aus der Stetigkeit von f folgt

$$\lim_{\substack{w\to z\\ w\neq z}} \left[\frac{F(w)-F(z)}{w-z} - f(z)\right] = 0\,,$$

also ist F differenzierbar in z und $F'(z) = f(z)$. Da $z \in U$ beliebig war, folgt die Behauptung. □

Satz 4.7 (Lemma von Goursat)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0 \tag{4.13}$$

für jedes Dreieck Δ mit $\Delta \subset U$.

Beweis: Sei $\Delta = \operatorname{conv}\{a,b,c\}$ ein Dreieck mit $\Delta \subset U$. Wir setzen $\Delta_0 = \Delta$ und zerlegen Δ_0 in 4 kongruente Dreiecke $D_1,\ldots,D_4$, indem wir die drei Seitenmitten verbinden. Es gilt dann

$$\int_{\partial\Delta_0} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{4} \int_{\partial D_k} f(z)\,dz\,, \tag{4.14}$$

wenn wir die Ränder alle im mathematisch positiven Sinn durchlaufen. Wir setzen $\Delta_1 = D_k$, wobei wir k so wählen, dass

$$\left|\int_{\partial\Delta_0} f(z)\,dz\right| \le 4\left|\int_{\partial\Delta_1} f(z)\,dz\right| \tag{4.15}$$

gilt. Indem wir diese Konstruktion wiederholen, erhalten wir eine Folge $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Dreiecken mit

$$\left|\int_{\partial\Delta_{n-1}} f(z)\,dz\right| \le 4\left|\int_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz\right|\,. \tag{4.16}$$

Aufgrund der Konstruktion gilt offensichtlich

$$\operatorname{diam}(\Delta_n) = 2^{-n}\operatorname{diam}(\Delta)\,,\quad L(\partial\Delta_n) = 2^{-n}L(\partial\Delta)\,. \tag{4.17}$$

Da $\Delta_0 \supset \Delta_1 \supset \ldots$ und alle Δ_n kompakt sind, folgt aus der endlichen Durchschnittseigenschaft kompakter Mengen, dass es ein $c \in U$ gibt mit

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n = \{c\}\,. \tag{4.18}$$

Wir definieren nun $g : U \to \mathbb{C}$ durch

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(c)}{z-c} - f'(c)\,, & z \neq c\,,\\ 0\,, & z = c\,. \end{cases}$$

Da f holomorph ist, ist g stetig in U, und es gilt

$$f(z) = f(c) + (z-c)f'(c) + (z-c)g(z)\,,$$

also für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz = \int_{\partial\Delta_n} f(c)\,dz + \int_{\partial\Delta_n} (z-c)f'(c)\,dz + \int_{\partial\Delta_n} (z-c)g(z)\,dz\,. \tag{4.19}$$

Die ersten beiden Integrale auf der rechten Seiten sind Null nach Lemma 4.5, da die Integranden (als Funktionen von z) Stammfunktionen besitzen. Aus Lemma 4.3 folgt

$$\left|\int_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz\right| \le L(\partial\Delta_n) \sup_{z\in\partial\Delta_n} |z-c||g(z)| \le L(\partial\Delta_n)^2 \sup_{z\in\partial\Delta_n} |g(z)|\,, \tag{4.20}$$

da in jedem Dreieck D gilt $\operatorname{diam}(D) \le L(\partial D)$. Aus (4.16) und (4.17) folgt weiter

$$\left|\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz\right| \le 4^n \left|\int_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz\right| \le 4^n L(\partial\Delta_n)^2 \sup_{z\in\partial\Delta_n} |g(z)| = L(\partial\Delta)^2 \sup_{z\in\partial\Delta_n} |g(z)|\,. \tag{4.21}$$

Da g stetig ist und $g(c) = 0$, folgt

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{z\in\partial\Delta_n} |g(z)| = 0\,,$$

und damit aus (4.21)

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0\,.$$

□

Satz 4.8 (Integralsatz von Cauchy)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und sternförmig, sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann hat f eine Stammfunktion in U, und es gilt

$$\int_C f(z)\,dz = 0 \tag{4.22}$$

für jede geschlossene, stückweise stetig differenzierbare Kurve C in U.

Beweis: Nach Satz 4.7 gilt (4.22) für alle Kurven C der Form $C = \partial\Delta$, $\Delta \subset U$ Dreieck. Aus Satz 4.6 folgt, dass f in U eine Stammfunktion hat, und aus Lemma 4.5 folgt, dass (4.22) für jede geschlossene Kurve gilt. □

Satz 4.9 (Integralformel von Cauchy für Kreise)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei $K(c,r) \subset U$ mit $c \in U$, $r > 0$. Dann gilt für alle $z \in B = B(c,r)$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(w)}{w-z}\,dw\,. \tag{4.23}$$

Beweis: Sei $z \in B$ fest gewählt. Im ersten Schritt des Beweises zeigen wir, dass

$$\int_{\partial B(c,r)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \int_{\partial B(z,\varepsilon)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw \tag{4.24}$$

gilt für alle $\varepsilon > 0$ mit $B(z,\varepsilon) \subset B(c,r)$. Dies folgt aus Satz 4.8, angewendet auf die in $U \setminus \{z\}$ holomorphe Funktion $\tilde{f}$,

$$\tilde{f}(w) = \frac{f(w)}{w-z}\,,$$

und die Kurven C_1 und C_2, welche in den sternförmigen Mengen $U_1 = B(c, r+\delta) \setminus L_1$ beziehungsweise $U_2 = B(c, r+\delta) \setminus L_2$ liegen (siehe Bild). Es gilt nämlich

$$\int_{\partial B(c,r)} \tilde{f}(w)\,dw = \int_{C_1} \tilde{f}(w)\,dw + \int_{C_2} \tilde{f}(w)\,dw + \int_{\partial B(z,\varepsilon)} \tilde{f}(w)\,dw\,,$$

und nach Satz 4.8 sind die Kurvenintegrale über C_1 und C_2 gleich Null. Im zweiten Schritt des Beweises zeigen wir, dass die rechte Seite in (4.24) gleich $2\pi i f(z)$ ist. Aus (4.24) folgt

$$\begin{aligned} \int_{\partial B(c,r)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw &= \int_{\partial B(z,\varepsilon)} \frac{f(z)}{w-z}\,dw + \int_{\partial B(z,\varepsilon)} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,dw \\ &= 2\pi i f(z) + \int_{\partial B(z,\varepsilon)} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,dw \end{aligned} \tag{4.25}$$

wegen Lemma 4.2. Die durch

$$g(w) = \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,, & w \neq z\,, \\ f'(z)\,, & w = z\,, \end{cases}$$

definierte Funktion $g : U \to \mathbb{C}$ ist stetig, also auf der kompakten Menge $K(c,r)$ beschränkt, sei etwa $|g(w)| \leq M$. Es folgt aus Lemma 4.3

$$\left| \int_{\partial B(z,\varepsilon)} g(w)\,dw \right| \leq 2\pi\varepsilon M\,.$$

Da wegen (4.25) das Integral $\int_{\partial B(z,\varepsilon)} g(w)\,dw$ nicht von ε abhängt, folgt

$$\int_{\partial B(z,\varepsilon)} g(w)\,dw = 0\,,$$

und damit die Behauptung des Satzes. □

Wenden wir die Integralformel mit $z = c$ an, so erhalten wir unmittelbar den folgenden Satz.

Satz 4.10 (Mittelwerteigenschaft)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei $K(z,r) \subset U$ mit $z \in U$, $r > 0$. Dann gelten

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{it})\,dt\,, \tag{4.26}$$

sowie

$$|f(z)| \leq \max_{w \in \partial B(z,r)} |f(w)|\,. \tag{4.27}$$

Beweis: Aus (4.23) folgt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z,r)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z+re^{it})}{re^{it}} ire^{it}\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z+re^{it})\, dt\,,$$

und (4.27) folgt unmittelbar aus (4.26). □

Satz 4.11 (Entwicklungssatz von Cauchy-Taylor)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, sei $K(a,r) \subset U$ mit $a \in U$, $r > 0$. Dann gilt

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k\,, \quad c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(a,r)} \frac{f(w)}{(w-a)^{k+1}}\, dw\,, \tag{4.28}$$

für alle $z \in B(a,r)$, und dort konvergiert die Potenzreihe absolut.

Beweis: Wir betrachten zunächst den Fall $a = 0$. Sei $z \in U$ mit $|z| < r$ fest gewählt. Die Integralformel von Cauchy besagt, dass

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r} \frac{f(w)}{w-z}\, dw\,. \tag{4.29}$$

Es gilt für alle w mit $|w| = r$

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w} \frac{1}{1-\frac{z}{w}} = \frac{1}{w} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{w}\right)^k\,,$$

also

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r} \frac{f(w)}{w} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{w}\right)^k\, dw\,. \tag{4.30}$$

Für $g_k : \partial B(0,r) \to \mathbb{C}$,

$$g_k(w) = \frac{f(w)}{w} \left(\frac{z}{w}\right)^k\,,$$

gilt

$$\|g_k\|_\infty \le \frac{\|f\|_\infty}{r} q^k\,, \quad q = \frac{|z|}{r} < 1\,,$$

also sind die Partialsummen $s_n = \sum_{k=0}^n g_k$ nach dem Weierstraß-Kriterium gleichmäßig gegen eine stetige Funktion konvergent, und wir können die Summe mit dem Integral vertauschen, also

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{|w|=r} \frac{f(w)}{w} \left(\frac{z}{w}\right)^k\, dw = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r} \frac{f(w)}{w^{k+1}}\, dw \cdot z^k\,.$$

Der Fall eines allgemeinen a wird durch Translation auf den obigen Fall zurückgeführt, indem wir wieder $\tilde{f}(z) = f(z-a)$ betrachten. □

Folgerung 4.12 *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist f in jedem Punkt $z \in U$ beliebig oft komplex differenzierbar.*

Beweis: Nach Satz 4.11 läßt sich f in einer (hinreichend kleinen) Umgebung jedes Punktes $z \in U$ in eine Potenzreihe entwickeln. Potenzreihen sind innerhalb ihres Konvergenzkreises beliebig oft differenzierbar. □

Folgerung 4.13 *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei $K(a,r) \subset U$ mit $a \in U$, $r > 0$. Dann gilt für die Koeffizienten c_k der Potenzreihenentwicklung (4.28) von f um a die Abschätzung*

$$|c_k| \le \frac{M}{r^k}, \quad M = \max_{|z-a|=r} |f(z)|. \tag{4.31}$$

Beweis: Nach Satz 4.11 gilt

$$|c_k| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\partial B(a,r)} \frac{f(w)}{(w-a)^{k+1}} \, dw \right| \le \frac{1}{2\pi} 2\pi r \frac{M}{r^{k+1}} = \frac{M}{r^k}.$$

□

Folgerung 4.14 (Satz von Liouville)
Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph. Ist f auf $\mathbb{C}$ beschränkt, so ist f konstant.

Beweis: Sei $a \in \mathbb{C}$ beliebig. Mit $\|f\|_\infty = \sup_{z\in\mathbb{C}} |f(z)|$ folgt aus Folgerung 4.13, dass für die Potenzreihendarstellung

$$f(z) = \sum_{k=0} c_k (z-a)^k$$

gilt, dass

$$|c_k| \le \frac{\|f\|_\infty}{r^k}$$

für alle k und alle $r > 0$, also ist $c_k = 0$ für alle $k \ge 1$ und damit $f(z) = c_0$ konstant in allen $K(a,r)$ und damit in ganz $\mathbb{C}$. □

Umgekehrt bedeutet der Satz von Liouville, dass jede nichtkonstante Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, welche auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph ist, unbeschränkt sein muss.

Satz 4.15 (Satz von Morera)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ stetig, es gelte

$$\int_{\partial\Delta} f(z) \, dz = 0 \tag{4.32}$$

für alle Dreiecke Δ mit $\Delta \subset U$. Dann ist f holomorph in U.

Beweis: Sei $z \in U$ beliebig. Wähle $r > 0$ mit $B(z,r) \subset U$. Nach Satz 4.6 hat f eine Stammfunktion F in $B(z,r)$. F ist holomorph und nach Folgerung 4.12 zweimal differenzierbar in $B(z,r)$, also ist $f = F'$ differenzierbar in z. Da z beliebig war, ist f holomorph in U. □

Zusammengenommen folgt aus dem Integralsatz von Cauchy und dem Satz von Morera, dass in einer offenen sternförmigen Menge die Holomorphie von f äquivalent ist zum Verschwinden aller Integrale über geschlossenen Kurven.

Satz 4.16 *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von holomorphen Funktionen $f_n : U \to \mathbb{C}$, welche kompakt gegen eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ konvergiert, das heißt, $f_n|K \to f|K$ gleichmäßig für jede kompakte Teilmenge $K \subset U$. Dann ist f holomorph in U.*

Beweis: Sei Δ ein beliebiges Dreieck mit $\Delta \subset U$. Dann gilt $f_n|\Delta \to f|\Delta$ gleichmäßig, da Δ kompakt ist, also ist $f|\Delta$ stetig. Da jedes $z \in U$ innerer Punkt eines solchen Dreiecks ist, ist f auf ganz U stetig. Aus dem Integralsatz von Cauchy, angewendet auf eine offene konvexe Umgebung von Δ, folgt

$$\int_{\partial\Delta} f_n(z)\, dz = 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus der gleichmäßigen Konvergenz $f_n \to f$ auf $\partial\Delta$ folgt

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\, dz = \lim_{n\to\infty} \int_{\partial\Delta} f_n(z)\, dz = 0\,.$$

Also ist nach Satz 4.15 f holomorph in U. □

Wir betrachten nun folgende Situation. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, es gelte

$$\tau(U) = U\,, \tag{4.33}$$

wobei $\tau(z) = \overline{z}$ die komplexe Konjugation bezeichnet. Wir setzen

$$U_+ = U \cap \{z : z \in \mathbb{C},\ \operatorname{Im} z > 0\}\,, \tag{4.34}$$

$$U_- = U \cap \{z : z \in \mathbb{C},\ \operatorname{Im} z < 0\}\,, \tag{4.35}$$

$$U_0 = U \cap \mathbb{R}\,. \tag{4.36}$$

Zu einer gegebenen Funktion $f : U_+ \cup U_0 \to \mathbb{C}$ betrachten wir die durch $\tilde{f}|(U_+ \cup U_0) = f$ und

$$\tilde{f}(z) = \overline{f(\overline{z})}\,, \quad z \in U_-\,, \tag{4.37}$$

definierte Fortsetzung $\tilde{f} : U \to \mathbb{C}$ von f.

Satz 4.17 (Schwarzsches Spiegelungsprinzip)
Seien U, f und $\tilde{f}$ wie in (4.33)–(4.37) beschrieben. Sei f stetig auf $U_+ \cup U_0$, holomorph auf U_+, und es gelte $f(U_0) \subset \mathbb{R}$. Dann ist $\tilde{f}$ auf U holomorph.

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass $\tilde{f}$ in allen Punkten $z \in U$ stetig ist. Für $z \in U_+$ und $z \in U_-$ folgt dies direkt aus der Definition. Sei nun $z \in U_0$, sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in U mit $z_n \to z$. Ist $z_n \in U_+ \cup U_0$ für alle n, so gilt $\tilde{f}(z_n) = f(z_n) \to f(z) = \tilde{f}(z)$ nach Voraussetzung; ist $z_n \in U_-$ für alle n, so gilt

$$\tilde{f}(z_n) = \overline{f(\overline{z_n})} \to \overline{f(\overline{z})} = f(z)\,,$$

da $f(U_0) \subset \mathbb{R}$. Verläuft die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sowohl in U_+ als auch in U_-, so zerlegen wir sie in die beiden entsprechenden Teilfolgen. Nun zur Differenzierbarkeit von $\tilde{f}$. Auf U_- ist $\tilde{f} = \tau \circ f \circ \tau$ reell differenzierbar. Sei $z \in U_-$. Ist $f'(\overline{z}) = a + ib$, so folgt aus der Kettenregel

$$J_{\tilde{f}}(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\,,$$

also ist $\tilde{f}$ nach Lemma 3.3 differenzierbar in z und damit (da z beliebig war) holomorph in U_-. Sei nun $z \in U_0$, sei $r > 0$ so gewählt, dass $B(z,r) \subset U$. Sei $\Delta \subset B(z,r)$ ein beliebiges Dreieck. Gilt $\Delta \subset U_+$ oder $\Delta \subset U_-$, so folgt

$$\int_{\partial\Delta} \tilde{f}(z)\, dz = 0 \tag{4.38}$$

aus dem Integralsatz von Cauchy, angewendet auf $U_+ \cap B(z,r)$ beziehungsweise $U_- \cap B(z,r)$. Andernfalls gilt $\Delta \cap U_0 \neq \emptyset$, und die reelle Achse teilt Δ in zwei Teile (oder eine Seite oder Ecke von Δ liegt auf der reellen Achse). Es folgt

$$\int_{\partial\Delta} \tilde{f}(z)\, dz = \int_{C_+} \tilde{f}(z)\, dz + \int_{C_-} \tilde{f}(z)\, dz\,, \tag{4.39}$$

wobei C_+ den Rand von $\Delta \cap U_+$ bezeichnet. (Die Menge $\Delta \cap U_+$ ist entweder ein Dreieck, oder ein Viereck, oder sie ist leer.) Sei $\varepsilon > 0$ hinreichend klein, sei $C_+(\varepsilon)$ der Rand von $\Delta \cap \{z : z \in \mathbb{C},\ \operatorname{Im} z > \varepsilon\}$. Dann ist $C_+(\varepsilon)$ eine Kurve in U_+, und wie oben folgt

$$\int_{C_+(\varepsilon)} \tilde{f}(z)\, dz = 0\,. \tag{4.40}$$

Aus der Stetigkeit von $\tilde{f}$ folgt (siehe Bild)

$$\int_{C_+} \tilde{f}(z)\, dz = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{C_+(\varepsilon)} \tilde{f}(z)\, dz = 0\,. \tag{4.41}$$

Analog beweist man $\int_{C_-} \tilde{f}(z)\, dz = 0$. Damit ist die rechte Seite in (4.39) gleich Null, also gilt (4.38) für alle Dreiecke in $B(z,r)$. Aus Satz 4.6 folgt nun, dass f in $B(z,r)$ eine (holomorphe) Stammfunktion F hat, also existiert $f'(z) = F''(z)$. Da $z \in U_0$ beliebig war, folgt die Behauptung. $\square$

5 Zusammenhang

Definition 5.1 (Zusammenhang, Wegzusammenhang)
Sei (X,d) metrischer Raum. X heißt zusammenhängend, falls es außer $\emptyset$ und X keine Teilmenge von X gibt, die sowohl offen als auch abgeschlossen ist. X heißt wegzusammenhängend, falls es für alle $x,y \in X$ eine stetige Funktion $r : [0,1] \to X$ gibt mit $r(0) = x$, $r(1) = y$. Ein solches r heißt Weg von x nach y. □

Offensichtlich ist $\mathbb{R}^n$ wegzusammenhängend für alle $n \in \mathbb{N}$, und damit auch $\mathbb{C}$.

Lemma 5.2 *Sei (X,d) metrischer Raum. Ist X wegzusammenhängend, so ist X auch zusammenhängend.*

Beweis: Sei X wegzusammenhängend. Wir nehmen an, X ist nicht zusammenhängend. Sei $U \subset X$ offen und abgeschlossen mit $U \neq \emptyset$, $U \neq X$. Seien $x, y \in X$ mit $x \in U$, $y \notin U$, sei $r : [0,1] \to X$ ein Weg von x nach y. Wir definieren

$$J = \{t : \, t \in [0,1), \, r([0,t]) \subset U\}\,, \quad T = \sup J\,.$$

Es ist $0 \in J$, $1 \notin J$, und es gilt entweder $J = [0,T]$ oder $J = [0,T)$. Ist $J = [0,T]$, so ist $r(T) \in U$, und es gibt ein $\delta > 0$ mit $r([T, T+\delta)) \subset U$ (da r stetig und U offen), also gilt $\sup J \geq T + \delta$, ein Widerspruch. Ist $J = [0,T)$, so ist $r(T) \notin U$, und es gibt ein $\delta > 0$ mit $r((T-\delta, T]) \subset X \setminus U$ (da r stetig und $X \setminus U$ offen), also gilt $\sup J \leq T - \delta$, ebenfalls ein Widerspruch. □

Für eine Teilmenge X von $\mathbb{R}$ (aufgefasst als metrischer Raum, mit der von $|\cdot|$ induzierten Metrik) gilt (Übung)

$$X \text{ zusammenhängend} \quad \Leftrightarrow \quad X \text{ wegzusammenhängend} \quad \Leftrightarrow \quad X \text{ Intervall} \tag{5.1}$$

Satz 5.3 *Seien (X, d_1), (Y, d_2) metrische Räume, sei $f : X \to Y$ stetig und surjektiv. Dann gilt:*

$$X \textit{ zusammenhängend} \quad \Rightarrow \quad Y \textit{ zusammenhängend} \tag{5.2}$$
$$X \textit{ wegzusammenhängend} \quad \Rightarrow \quad Y \textit{ wegzusammenhängend} \tag{5.3}$$

Beweis: Zu (5.2). Ist Y nicht zusammenhängend, so gibt es $V \subset Y$ mit $V \neq \emptyset$, $V \neq Y$, V ist offen und abgeschlossen in Y. Dann ist auch $U = f^{-1}(V)$ offen und abgeschlossen in X, und da f surjektiv ist, gilt $U \neq \emptyset$ und $U \neq X$, also ist X nicht zusammenhängend.
Zu (5.3). Seien $y_1, y_2 \in Y$, dann wählen wir $x_1, x_2 \in X$ mit $f(x_i) = y_i$. Ist $r : [0,1] \to X$ ein Weg von x_1 nach x_2, so ist $f \circ r : [0,1] \to Y$ ein Weg von y_1 nach y_2. □

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Wenden wir Satz 5.3 an mit $X = [a,b]$, $Y = f([a,b])$, so ergibt sich wegen (5.1), dass $f([a,b])$ ebenfalls ein Intervall ist. Satz 5.3 verallgemeinert also den Zwischenwertsatz aus Analysis 1.

Lemma 5.4 *Sei (X,d) metrischer Raum. Dann wird durch*

$$x \sim y \qquad \Leftrightarrow \qquad \text{es gibt einen Weg von } x \text{ nach } y \tag{5.4}$$

eine Äquivalenzrelation auf X definiert. Die zugehörigen Äquivalenzklassen heißen Wegkomponenten von X.

Beweis: Ist $r : [0,1] \to X$ ein Weg von x nach y, so definiert $\tilde{r}(t) = r(1-t)$ einen Weg von y nach x. Sind $r, \tilde{r} : [0,1] \to X$ Wege von x nach y beziehungsweise von y nach z, so ist $\overline{r} : [0,1] \to X$,

$$\overline{r}(t) = \begin{cases} r(2t)\,, & 0 \le t \le \frac{1}{2}\,, \\ \tilde{r}(2t-1)\,, & \frac{1}{2} \le t \le 1\,, \end{cases}$$

ein Weg von x nach z. □

Ein metrischer Raum (X,d) ist also wegzusammenhängend genau dann, wenn X nur eine Wegkomponente besitzt (nämlich X selbst).

Satz 5.5 *Eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist genau dann zusammenhängend, wenn sie wegzusammenhängend ist.*

Beweis: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wegen Lemma 5.2 braucht nur die Implikation

$$U \text{ zusammenhängend} \qquad \Rightarrow \qquad U \text{ wegzusammenhängend} \tag{5.5}$$

bewiesen zu werden. Zunächst gilt, dass jede Wegkomponente W von U offen ist in $\mathbb{R}^n$. (Ist $x \in W$, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B(x,\varepsilon) \subset U$, und da für $y \in B(x,\varepsilon)$ auch $[x,y] \subset B(x,\varepsilon)$ gilt, folgt $B(x,\varepsilon) \subset W$.) Sei nun U nicht wegzusammenhängend, sei $W \subset U$ eine Wegkomponente von U mit $W \neq U$. Da $U \setminus W$ die Vereinigung aller von W verschiedenen Wegkomponenten von U ist, ist $U \setminus W$ offen in $\mathbb{R}^n$. Die Mengen W und $U \setminus W$ sind auch offen in U, damit ist W abgeschlossen in U, und $W \neq \emptyset$, $W \neq U$. Also ist U nicht zusammenhängend. □

Definition 5.6 (Gebiet)
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$. U heißt Gebiet, falls U offen und zusammenhängend ist.

Satz 5.7 *Sei $U \subset \mathbb{C}$ Gebiet, sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f' = 0$ in U. Dann ist f in U konstant.*

Beweis: Sei $a \in U$ beliebig. Nach Satz 4.11 hat f in einer hinreichend kleinen Umgebung $B(a,\varepsilon)$ eine Potenzreihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k\,.$$

In $B(a,\varepsilon)$ gilt $f^{(k)} = 0$ für alle $k \ge 1$, also auch $c_k = f^{(k)}(a)/k! = 0$ für alle $k \ge 1$, also $f(z) = c_0 = f(a)$ für alle $z \in B(a,\varepsilon)$. Sei $c \in U$ fest gewählt, sei

$$A = \{z : \, z \in U,\, f(z) = f(c)\}\,.$$

Nach dem eben Bewiesenen ist A offen in U. Wegen $A = f^{-1}(\{f(c)\})$ ist A abgeschlossen in U. Da U zusammenhängend ist und $A \neq \emptyset$, ist $A = U$. □

Satz 5.8 (Inverse Funktionen)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, $c \in U$. Ist $f'(c) \neq 0$, so gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass für $B = B(c, \varepsilon)$ gilt:

(i) $f : B \to f(B)$ ist bijektiv, $f(B)$ ist offen in $\mathbb{C}$,

(ii) $f^{-1} : f(B) \to B$ ist holomorph.

Beweis: Da f nach Folgerung 4.12 beliebig oft differenzierbar ist, ist insbesondere $f' : U \to \mathbb{C}$ stetig. Wegen $f'(c) \neq 0$ ist $J_f(c) \in \mathbb{R}^{(2,2)}$ invertierbar; ist $f'(c) = a + ib$, so ist

$$J_f(c) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad J_f(c)^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}. \tag{5.6}$$

Aus dem Satz über inverse Funktionen (Analysis 2) folgt die Existenz von $\varepsilon > 0$, so dass (i) gilt, f^{-1} in $f(B)$ stetig reell differenzierbar ist und

$$J_{f^{-1}}(f(z)) = J_f(z)^{-1}, \quad \text{für alle } z \in B.$$

Da (5.6) auch gilt, wenn wir c durch $z = a + ib$ ersetzen, $z \in B(c, \varepsilon)$, ist f^{-1} in $f(z)$ (komplex) differenzierbar für alle $z \in B$, also folgt (ii). □

Definition 5.9 (Biholomorphe Funktion)
Seien $U, V \subset \mathbb{C}$ offen. Eine auf U holomorphe Funktion $f : U \to V$ heißt biholomorph, wenn f bijektiv und f^{-1} auf V holomorph ist. □

Satz 5.8 besagt also, dass holomorphe Funktionen f lokal biholomorph sind in Punkten c mit $f'(c) \neq 0$. Das einfachste Beispiel einer nicht biholomorphen, nicht konstanten Funktion ist

$$f(z) = z^m, \quad m \geq 2. \tag{5.7}$$

Für

$$w = re^{i\varphi}, \quad z = \rho e^{i\psi},$$

mit $w \neq 0$ gilt

$$f(z) = z^m = w \tag{5.8}$$

genau dann, wenn

$$\rho^m = r, \quad e^{im\psi} = e^{i\varphi},$$

und letzteres gilt genau dann, wenn

$$m\psi - \varphi = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Es gibt also genau m verschiedene Zahlen

$$z_k = \sqrt[m]{r} \exp\left(i\frac{\varphi}{m} + 2\pi i \frac{k}{m}\right), \quad k = 0, \ldots, m-1, \tag{5.9}$$

welche (5.8) erfüllen. Für $w = 1$ ergeben sich die sogenannten m-ten Einheitswurzeln

$$z_k = \exp\left(2\pi i \frac{k}{m}\right), \quad k = 0, \ldots, m-1. \tag{5.10}$$

Definition 5.10 (Ordnung einer Nullstelle)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, $a \in U$ mit $f(a) = 0$. Die Zahl

$$m = \min\{k : f^{(k)}(a) \neq 0\} \tag{5.11}$$

heißt die Ordnung der Nullstelle a. (Sind alle Ableitungen in a gleich Null, so sprechen wir von einer Nullstelle unendlicher Ordnung.) □

Die Funktion $f(z) = z^m$ hat offensichtlich in 0 eine Nullstelle der Ordnung m.

Satz 5.11 *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, $a \in U$ eine Nullstelle von f der Ordnung $m \in \mathbb{N}$. Dann gibt es eine Umgebung $B(a, \varepsilon) \subset U$ von a und eine holomorphe Funktion $h : B(a, \varepsilon) \to \mathbb{C}$ mit $h(a) = 0$, $h'(a) \neq 0$ und*

$$f(z) = h(z)^m , \quad z \in B(a, \varepsilon) , \tag{5.12}$$

und

$$f(z) \neq 0 , \quad \textit{für alle } z \in B(a, \varepsilon), z \neq a. \tag{5.13}$$

Beweis: f läßt sich in einer hinreichend kleinen Umgebung V von a in eine Potenzreihe entwickeln, also (da $f^{(k)}(a) = 0$ für $k < m$)

$$f(z) = (z - a)^m g(z) , \quad g(z) = c_m + \sum_{k=m+1}^{\infty} c_k (z - a)^{k-m} , \tag{5.14}$$

und

$$g(a) = c_m \neq 0 \tag{5.15}$$

nach Voraussetzung. Da auch die Potenzreihe für g in V konvergiert, ist g in V holomorph. Sei $c \in \mathbb{C}$ mit

$$p(c) = g(a) , \quad \text{wobei } p(z) = z^m .$$

Dann ist $c \neq 0$, $p'(c) = mc^{m-1} \neq 0$, also gibt es nach Satz 5.8 ein $\delta > 0$, so dass p auf $B(c, \delta)$ biholomorph ist. Wähle nun $\varepsilon > 0$ mit

$$B(a, \varepsilon) \subset V , \quad 0 \notin g(B(a, \varepsilon)) \subset p(B(c, \delta)) ,$$

und definiere

$$h(z) = (z - a)p^{-1}(g(z)) , \quad z \in B(a, \varepsilon) . \tag{5.16}$$

Dann ist h holomorph auf $B(a, \varepsilon)$, und

$$h(z)^m = (z - a)^m (p^{-1}(g(z)))^m = (z - a)^m g(z) = f(z) .$$

Aus (5.16) folgt $h(a) = 0$ und $h'(a) = p^{-1}(g(a)) = c \neq 0$. □

Die Aussage (5.13) bedeutet: Jede Nullstelle a endlicher Ordnung einer holomorphen Funktion ist isoliert, das heißt, in einer hinreichend kleinen Umgebung von a liegen keine weiteren Nullstellen von f.

Satz 5.12 (Identitätssatz)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ Gebiet, seien $f, g : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann sind äquivalent:

(i) Es gilt $f = g$ auf U.

(ii) Die Menge $\{f = g\}$ hat einen Häufungspunkt in U.

(iii) Es gibt ein $a \in U$ mit $f^{(k)}(a) = g^{(k)}(a)$ für alle $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Beweis: "(i)$\Rightarrow$(ii)" ist klar.
"(ii)$\Rightarrow$(iii)": Sei $a \in U$ Häufungspunkt von $\{f = g\}$. Da $\{f = g\}$ abgeschlossen ist in U, ist $a \in \{f = g\}$. Die Funktion $w = f - g$ ist holomorph in U, und $w(a) = 0$. Da nach Voraussetzung in jeder Umgebung von a eine weitere Nullstelle von w liegt, kann a nach Satz 5.11 keine endliche Ordnung haben, also

$$0 = w^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) - g^{(k)}(a)$$

für alle $k \in \mathbb{N}$.
"(iii)$\Rightarrow$(i)": Wir definieren

$$A = \{z : \; z \in U, \; f^{(k)}(z) = g^{(k)}(z) \text{ für alle } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} = \bigcap_{k=0}^{\infty} \{f^{(k)} = g^{(k)}\} \,. \tag{5.17}$$

Dann ist A abgeschlossen in U als Durchschnitt abgeschlossener Mengen, und nichtleer nach Voraussetzung. A ist außerdem offen in U: Sei $a \in A$, $w = f - g$, dann gilt

$$w(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^{(k)}(a)}{k!} (z-a)^k = 0$$

in einer hinreichend kleinen Umgebung V von a, also auch $w^{(k)}(z) = 0$ für alle $z \in V$ und alle $k \in \mathbb{N}$. Da U zusammenhängend ist, folgt $A = U$ und damit $f = g$ in U. $\square$

Eine holomorphe Funktion f ist also bereits dann eindeutig bestimmt, wenn wir ihre Werte $f(z_n)$ kennen für irgendeine konvergente Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die aus unendlich vielen verschiedenen Folgengliedern besteht.

Folgerung 5.13 *Sei I Intervall in $\mathbb{R}$, sei U Gebiet in $\mathbb{C}$ mit $I \subset U$. Dann gibt es zu jeder Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ höchstens eine holomorphe Fortsetzung $\tilde{f} : U \to \mathbb{C}$.* $\square$

Folgerung 5.14 *Sei $U \subset \mathbb{C}$ Gebiet, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, sei $a \in U$ eine Nullstelle unendlicher Ordnung von f. Dann ist $f = 0$.*

Beweis: Wir setzen $g = 0$ in Satz 5.12. $\square$

Satz 5.15 *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, sei $a \in U$ eine Nullstelle von f der Ordnung m. Dann gibt es ein $\delta > 0$ und eine offene Umgebung V von a, so dass gilt:*

$$f(V) = B(0, \delta) \,, \tag{5.18}$$

jedes $w \in B(0,\delta)$ mit $w \neq 0$ hat genau m Urbilder unter f in V, und a ist die einzige Nullstelle von f in V.

Beweis: Wir setzen

$$p(z) = z^m \,.$$

Im Spezialfall $a = 0$, $f = p$, gelten die Aussagen des Satzes für alle $\delta > 0$ mit

$$V = B(0, \sqrt[m]{\delta}) \,.$$

Zum Beweis des allgemeinen Falls betrachten wir eine Funktion $h : B(a, \varepsilon) \to \mathbb{C}$ mit den Eigenschaften aus Satz 5.11, wobei wir $\varepsilon > 0$ so klein wählen, dass h auf $B(a, \varepsilon)$ biholomorph und $h(B(a, \varepsilon))$ offen ist. (Das ist möglich nach Satz 5.8, da $h'(a) \neq 0$.) Wir wählen $\delta > 0$ so, dass

$$B(0, \sqrt[m]{\delta}) \subset h(B(a, \varepsilon)) \,,$$

und setzen

$$V = h^{-1}(B(0, \sqrt[m]{\delta}) \,.$$

Wegen $f(z) = h(z)^m$ ist $f = p \circ h$ auf V, und da h auf V bijektiv ist, folgen alle Aussagen für f aus den entsprechenden Aussagen für p. □

Definition 5.16 (Offene Abbildung)
Seien (X, d_1), (Y, d_2) metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt offen, falls für alle $U \subset X$ gilt

$$U \text{ offen} \qquad \Rightarrow \qquad f(U) \text{ offen.} \tag{5.19}$$

□

Satz 5.17 *Sei $U \subset \mathbb{C}$ Gebiet, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant. Dann ist f offen, und $f(U)$ ist ebenfalls ein Gebiet.*

Beweis: Sei W offen in U, sei $c \in f(W)$ beliebig, $c = f(a)$, $a \in W$. Wir betrachten $g : U \to \mathbb{C}$,

$$g(z) = f(z) - c \,.$$

Dann ist a eine Nullstelle endlicher Ordnung von g. (Andernfalls wäre $g = 0$ und damit f konstant nach Folgerung 5.14.) Wir wenden Satz 5.11 an auf $g|W : W \to \mathbb{C}$. Also gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$B(0, \delta) \subset g(W) \,,$$

also

$$c \in c + B(0, \delta) \subset c + g(W) = f(W) \,,$$

also $c \in \operatorname{int}(f(W))$. Da c beliebig war, ist $f(W)$ offen. Aus Satz 5.3 folgt, dass $f(U)$ zusammenhängend ist, also ist $f(U)$ Gebiet. □

Satz 5.18 (Maximumprinzip)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ Gebiet, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, es gebe ein $a \in U$ mit

$$|f(a)| = \max_{z \in U} |f(z)| \,. \tag{5.20}$$

Dann ist f konstant.

Beweis: Ist f nicht konstant, so ist $f(U)$ offen nach Satz 5.17, also gibt es zu jedem $a \in U$ ein $\delta > 0$ mit

$$f(a) \subset B(f(a), \delta) \subset f(U)\,,$$

also kann (5.20) nicht gelten. □

Folgerung 5.19 *Sei $U \subset \mathbb{C}$ beschränktes Gebiet, sei $f : \overline{U} \to \mathbb{C}$ stetig in $\overline{U}$ und holomorph in U. Dann gilt*

$$\sup_{z \in U} |f(z)| = \max_{z \in \partial U} |f(z)|\,. \tag{5.21}$$

Beweis: Auf der kompakten Menge $\overline{U}$ hat f ein Maximum, welches wegen Satz 5.18 nur dann in U liegen kann, wenn f konstant ist. □

6 Isolierte Singularitäten, Laurentreihen

Notation 6.1 (Punktierte Kreisscheibe)
Sei $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$. Die Menge

$$B^0(a, r) = B(a, r) \setminus \{a\} \tag{6.1}$$

heißt die punktierte Kreisscheibe um a mit Radius r. □

Definition 6.2 (Isolierte Singularität)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, sei $a \in \mathbb{C}$ mit $a \notin U$, aber $B^0(a, r) \subset U$ für ein $r > 0$. Ist $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, so heißt a eine isolierte Singularität von f. □

Ein solches a ist ein isolierter Punkt des Komplements $\mathbb{C} \setminus U$. Wir interessieren uns für das Verhalten einer holomorphen Funktion in der Nähe eines solchen Punktes, welcher ein Loch im Definitionsgebiet von f repräsentiert. Zunächst ist klar, dass in der Situation von Definition 6.2 die Menge $U \cup \{a\}$ ebenfalls offen ist.

Satz 6.3 (Fortsetzungssatz von Riemann, hebbare Singularität)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, a eine isolierte Singularität von f. Dann sind äquivalent:

(i) f ist holomorph auf $U \cup \{a\}$ fortsetzbar (das heißt, es gibt eine holomorphe Funktion $\tilde{f} : U \cup \{a\} \to \mathbb{C}$ mit $\tilde{f}|U = f$).

(ii) f ist stetig auf $U \cup \{a\}$ fortsetzbar.

(iii) Es gibt ein $r > 0$, so daß f auf $B^0(a, r)$ beschränkt ist.

(iv) Es gilt

$$\lim_{\substack{z \to a \\ z \neq a}} (z - a) f(z) = 0 \,. \tag{6.2}$$

In diesem Fall heißt a eine hebbare Singularität von f.

Beweis: Die Implikationen "(i)⇒(ii)⇒(iii)⇒(iv)" sind offensichtlich. Wir zeigen die Implikation "(iv)⇒(i)". Seien $g, h : U \cup \{a\} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$g(z) = \begin{cases} (z - a) f(z) \,, & z \neq a \,, \\ 0 \,, & z = a \,, \end{cases}$$
$$h(z) = (z - a) g(z) \,.$$

Wegen (6.2) ist g stetig in a. Wegen

$$h(z) = h(a) + (z - a) g(z)$$

ist h differenzierbar in a, also holomorph in $U \cup \{a\}$. Also hat h in einer hinreichend kleinen Umgebung $B(a, \delta)$ von a eine Potenzreihenentwicklung der Form (da $h(a) = 0$, $h'(a) = g(a) = 0$)

$$h(z) = \sum_{k=2}^{\infty} c_k (z - a)^k = (z - a)^2 \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+2} (z - a)^k \,.$$

Da außerdem gilt $h(z) = (z-a)^2 f(z)$ für $z \neq a$, folgt für alle $z \in B^0(a,\delta)$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+2}(z-a)^k\,,$$

also ist die durch $\tilde{f}|U = f$ und $\tilde{f}(a) = c_2$ definierte Funktion die gesuchte holomorphe Fortsetzung von f auf $U \cup \{a\}$. □

Definition 6.4 (Pol, wesentliche Singularität)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, a eine isolierte Singularität von f, welche nicht hebbar ist. a heißt ein Pol von f, falls es ein $m \in \mathbb{N}$ gibt, so dass a eine hebbare Singularität der durch

$$g(z) = (z-a)^m f(z)$$

definierten holomorphen Funktion ist. Die kleinste Zahl m mit dieser Eigenschaft heißt die Ordnung des Pols a von f. Ist a kein Pol von f, so heißt a eine wesentliche Singularität von f. □

Die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^m}$$

hat in a einen Pol der Ordnung m. Die Funktion

$$f(z) = \exp\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{-k}}{k!}$$

hat in 0 eine wesentliche Singularität nach Satz 6.3, da $z^m f(z)$ für alle $m \in \mathbb{N}$ in jeder Umgebung von 0 unbeschränkt ist.

Lemma 6.5 *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, sei $a \in \mathbb{C}$, sei der Kreisring*

$$A = \{z : z \in \mathbb{C},\ r \le |z-a| \le R\}\,, \quad 0 < r < R\,, \tag{6.3}$$

eine Teilmenge von U. Dann gilt

$$\int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \int_{|z-a|=R} \frac{f(z)}{z-a}\,dz\,. \tag{6.4}$$

Beweis: Wir definieren für $s \in [r,R]$

$$J(s) = \int_{\gamma_s} \frac{f(z)}{z-a}\,dz\,, \quad \gamma_s = \{z : \, |z-a| = s\}\,.$$

Dann gilt

$$J(s) = \int_0^{2\pi} \frac{f(a+se^{it})}{a+se^{it}-a} ise^{it}\,dt = \int_0^{2\pi} if(a+se^{it})\,dt\,,$$

also

$$J'(s) = \int_0^{2\pi} f'(a+se^{it})ie^{it}\,dt = \frac{1}{s}\int_{\gamma_s} f'(z)\,dz = 0\,,$$

da γ_s geschlossen ist und f' in U eine Stammfunktion (nämlich f) besitzt. Also ist J konstant in $[r,R]$ und damit $J(r) = J(R)$. □

Folgerung 6.6 (Satz von Cauchy für Kreisringe)
Unter den Voraussetzungen von Lemma 6.5 gilt außerdem

$$\int_{|z-a|=r} f(z)\,dz = \int_{|z-a|=R} f(z)\,dz\,. \tag{6.5}$$

Beweis: Wir wenden Lemma 6.5 an auf die durch

$$g(z) = (z-a)f(z)$$

definierte holomorphe Funktion $g : U \to \mathbb{C}$. □

Ist a eine isolierte Singularität einer holomorphen Funktion $f : U \to \mathbb{C}$, so hat f eine Potenzreihenentwicklung in der Nähe von a,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k$$

genau dann, wenn a hebbar ist (das heißt, gar keine "echte" Singularität ist). Ist a eine nicht hebbare Singularität, so läßt sich, wie wir gleich sehen werden, f in der Nähe von a darstellen durch eine Reihe der Form

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k + \sum_{k=-1}^{-\infty} c_k (z-a)^k\,. \tag{6.6}$$

Eine solche Reihe heißt **Laurentreihe**.

Satz 6.7 (Laurentreihe, Entwicklungssatz)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, $a \in \mathbb{C}$ eine isolierte Singularität von f mit $B^0(a,\delta) \subset U$. Dann gilt für alle $z \in B^0(a,\delta)$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k + \sum_{k=-1}^{-\infty} c_k (z-a)^k\,, \tag{6.7}$$

wobei

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(a,r)} \frac{f(w)}{(w-a)^{k+1}}\,dw\,, \tag{6.8}$$

und $r \in (0,\delta)$ beliebig ist.

Beweis: Wir bemerken zunächst, dass wegen Satz 6.6 die rechte Seite in (6.8) nicht von der Wahl von r abhängt. Sei nun $z \in B^0(a,\delta)$ fest gegeben. Wir definieren $g : B^0(a,\delta) \to \mathbb{C}$ durch

$$g(w) = \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,, & w \neq z\,, \\ f'(z)\,, & w = z\,. \end{cases} \tag{6.9}$$

g hat eine isolierte Singularität in z. Aus Satz 6.3 folgt, dass g in $B^0(a,\delta)$ holomorph ist. Wir wählen r, R mit

$$0 < r < |z-a| < R < \delta\,.$$

Für die Kreise $\gamma_r = \partial B(a,r)$ und $\gamma_R = \partial B(a,R)$ gilt nach Satz 6.6

$$\int_{\gamma_r} g(w)\,dw = \int_{\gamma_R} g(w)\,dw\,, \tag{6.10}$$

also

$$\int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w-z}\,dw - f(z)\int_{\gamma_r} \frac{1}{w-z}\,dw = \int_{\gamma_R} \frac{f(w)}{w-z}\,dw - f(z)\int_{\gamma_R} \frac{1}{w-z}\,dw\,. \tag{6.11}$$

Aus Satz 4.8 folgt

$$\int_{\gamma_r} \frac{1}{w-z}\,dw = 0\,, \tag{6.12}$$

da der Integrand holomorph ist in $B(a, |z-a|)$. Aus der Integralformel von Cauchy 4.9, angewendet für $f = 1$, folgt

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} \frac{1}{w-z}\,dw = 1\,. \tag{6.13}$$

Aus (6.11) – (6.13) folgt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} \frac{f(w)}{w-z}\,dw - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w-z}\,dw\,. \tag{6.14}$$

Von hier ab verläuft der Beweis analog zum Beweis des Entwicklungssatzes von Cauchy-Taylor (Satz 4.11). Auf γ_R gilt wegen $|z-a| < R = |w-a|$ und

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-a}{w-a}} = \frac{1}{w-a}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^k\,,$$

dass

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R}\frac{f(w)}{(w-a)^{k+1}}\,dw\cdot(z-a)^k\,. \tag{6.15}$$

Auf γ_r gilt wegen $|z-a| > r = |w-a|$

$$\frac{1}{z-w} = \frac{1}{z-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{w-a}{z-a}} = \frac{1}{z-a}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{w-a}{z-a}\right)^k\,,$$

dass

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{z-w}\,dw &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}(w-a)^k f(w)\,dw\cdot\frac{1}{(z-a)^{k+1}}\\ &= \sum_{k=-1}^{-\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{(w-a)^{k+1}}\,dw\cdot(z-a)^k\,.\end{aligned} \tag{6.16}$$

Setzen wir (6.15) und (6.16) in (6.14) ein, so ergibt sich die Behauptung. □

In der Zerlegung (6.7) heißt

$$\sum_{k=-1}^{-\infty} c_k(z-a)^k$$

der **Hauptteil**, und

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k$$

der **Nebenteil** der Laurentreihe (6.7).

Satz 6.8 (Eindeutigkeit der Laurententwicklung)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, $a \in \mathbb{C}$ eine isolierte Singularität von f mit $B^0(a,\delta) \subset U$. Sind $g : B(a,\delta) \to \mathbb{C}$ und $h : \mathbb{C} \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen mit $f = g + h$ und $\lim_{z\to\infty} h(z) = 0$, so gilt

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k \,, \tag{6.17}$$

sowie

$$h(z) = \sum_{k=-1}^{-\infty} c_k (z-a)^k \,, \tag{6.18}$$

mit den Koeffizienten c_k aus (6.8).

Beweis: Übung. □

Aus Satz 6.8 folgt insbesondere, dass die Koeffizienten c_k in der Formel (6.7) eindeutig bestimmt sind. Die Laurentreihe (6.7), (6.8) heißt daher die **Laurentreihe von f in** a.

Notation 6.9 (Grenzwert "$z \to \infty$")
Für $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{C}$ definieren wir

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = c \tag{6.19}$$

durch: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $R > 0$ mit

$$|z| > R \quad \Rightarrow \quad |f(z) - c| < \varepsilon \,.$$

□

Folgerung 6.10 *Unter den Voraussetzungen von Satz 6.7 gilt für die Laurentreihe von f in a:*

(i) Die Singularität a ist hebbar genau dann, wenn der Hauptteil gleich Null ist, also $c_k = 0$ für alle $k < 0$.

(ii) Die Singularität a ist ein Pol der Ordnung m genau dann, wenn $c_k = 0$ für alle $k < -m$ und $c_{-m} \neq 0$.

(iii) Die Singularität a ist wesentlich genau dann, wenn es unendlich viele $k < 0$ gibt mit $c_k \neq 0$.

Beweis: Hat $g(z) = (z-a)^m f(z)$ eine hebbare Singularität für ein $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, so ist g holomorph fortsetzbar auf $B(a,\delta)$ und nach dem Eindeutigkeitssatz der Hauptteil von g gleich Null. $\square$

Wir untersuchen die Frage der gleichmäßigen Konvergenz der Laurententwicklung. Wir betrachten eine Laurentreihe der Form

$$\sum_{k=-1}^{-\infty} c_k (z-a)^k \tag{6.20}$$

mit $a \in \mathbb{C}$, $c_k \in \mathbb{C}$ für alle $k < 0$.

Lemma 6.11 *Die Laurentreihe (6.20) sei konvergent in $B^0(a,\delta)$ für ein $\delta > 0$. Dann wird durch*

$$f(z) = \sum_{k=-1}^{-\infty} c_k (z-a)^k \tag{6.21}$$

eine auf $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ holomorphe Funktion definiert. Für jedes $r > 0$ konvergieren die Partialsummen

$$s_n(z) = \sum_{k=-1}^{-n} c_k (z-a)^k \tag{6.22}$$

gleichmäßig gegen f auf $\{z : |z-a| \geq r\}$.

Beweis: Es ist

$$|z-a| < \delta \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{|z-a|} > \frac{1}{\delta},$$

also konvergiert die Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} \zeta^k \tag{6.23}$$

in $\{\zeta : |\zeta| > \frac{1}{\delta}\}$ und damit in ganz $\mathbb{C}$. Die Konvergenz der Partialsummen für (6.23) ist gleichmäßig auf allen kompakten Kreisscheiben

$$\{\zeta : |\zeta| \leq \frac{1}{r}\},$$

wie wir bereits aus der Analysis 2 wissen. Hieraus folgen alle Behauptungen. $\square$

Satz 6.12 (Laurententwicklung, gleichmäßige Konvergenz)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, $a \in \mathbb{C}$ eine isolierte Singularität von f mit $B^0(a,\delta) \subset U$. Dann konvergieren die Partialsummen

$$s_n(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k (z-a)^k + \sum_{k=-1}^{-n} c_k (z-a)^k \tag{6.24}$$

der Laurentreihe von f in a gleichmäßig gegen f auf jedem Kreisring $\{z : r \leq |z-a| \leq R\}$ mit $0 < r < R < \delta$.

Beweis: Folgt für den Hauptteil aus Lemma 6.11 und für den Nebenteil aus dem bekannten Resultat für Potenzreihen. $\square$

7 Der Residuensatz

Definition 7.1 (Windungszahl)
Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ eine geschlossene, stückweise stetig differenzierbare Kurve, sei $z \in \mathbb{C}$, $z \notin \gamma([a,b])$. Wir definieren die Windungszahl von γ um z durch

$$\nu(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{w-z}\, dw\,. \tag{7.1}$$

$\square$

Für $\gamma = \partial B(z,r)$ gilt

$$\nu(\gamma, z) = 1\,. \tag{7.2}$$

Sind γ_1, γ_2 zwei geschlossene Wege mit demselben Anfangs- und Endpunkt, und bezeichnet γ die Verkettung von γ_1 und γ_2 (das heißt, wir durchlaufen nacheinander γ_1 und γ_2), so gilt

$$\nu(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\gamma_1} \frac{1}{w-z}\, dw + \int_{\gamma_2} \frac{1}{w-z}\, dw\right) = \nu(\gamma_1, z) + \nu(\gamma_2, z)\,. \tag{7.3}$$

Satz 7.2 *Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ eine geschlossene, stückweise stetig differenzierbare Kurve, sei $U = \mathbb{C} \setminus \gamma([a,b])$. Dann gilt:*

(i) $\nu(\gamma, z) \in \mathbb{Z}$ für alle $z \in U$.

(ii) Auf den Wegkomponenten von U ist ν konstant.

(iii) Es gilt $\nu(\gamma, z) = 0$ für alle $z \in U$ mit $|z| > \|\gamma\|_\infty$.

Beweis: (i): Sei $z \in U$. Wir definieren $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ und $F : [a,b] \to \mathbb{C}$ durch

$$f(t) = \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z}\, ds\,, \quad F(t) = (\gamma(t) - z)\exp(-f(t))\,.$$

Dann ist F stetig und stückweise stetig differenzierbar, und

$$F'(t) = \gamma'(t)\exp(-f(t)) - (\gamma(t) - z)\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}\exp(-f(t)) = 0$$

in allen Punkten $t \in (a,b)$, in denen γ differenzierbar ist. Also ist F konstant auf $[a,b]$. Es folgt (da $F \neq 0$)

$$1 = \frac{F(b)}{F(a)} = \frac{\gamma(b) - z}{\gamma(a) - z}\exp(-(f(b) - f(a)) = \exp\left(-\int_a^b \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z}\, ds\right) = \exp\left(-\int_\gamma \frac{1}{w-z}\, dw\right), \tag{7.4}$$

also gibt es $k \in \mathbb{Z}$ mit

$$-\int_\gamma \frac{1}{w-z}\, dw = 2\pi i k\,.$$

Damit ist (i) bewiesen.
(ii): U ist offen, da $\gamma([a,b])$ kompakt ist. Die durch

$$\tilde{\nu}(z) = \nu(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z} \, ds$$

definierte Funktion $\tilde{\nu} : U \to \mathbb{R}$ ist stetig. Ist W eine Wegkomponente von U, so ist $\tilde{\nu}(W)$ wegzusammenhängend nach Satz 5.3. Da $\tilde{\nu}(W) \subset \mathbb{Z}$ nach (i), ist $\tilde{\nu}(W)$ einelementig.
(iii): Für $|z| > \|\gamma\|_\infty$ gilt $|\gamma(t) - z| \geq |z| - |\gamma(t)| \geq |z| - \|\gamma\|_\infty$, also

$$|\nu(\gamma, z)| \leq \frac{1}{2\pi} L(\gamma) \sup_{t \in [a,b]} \frac{1}{|\gamma(t) - z|} \leq \frac{1}{2\pi} L(\gamma) \frac{1}{|z| - \|\gamma\|_\infty} .$$

Wegen (i) folgt $\nu(\gamma, z) = 0$ falls $|z|$ hinreichend groß ist, und da

$$\{z : z \in \mathbb{C},\ |z| > \|\gamma\|_\infty\}$$

eine wegzusammenhängende Teilmenge von U ist, folgt (iii) aus (ii). $\square$

Sei nun $f : B^0(z, \delta) \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit der Laurententwicklung

$$f(w) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (w - z)^k + \sum_{k=-1}^{-\infty} c_k (w - z)^k . \tag{7.5}$$

Satz 7.3 *Sei $z \in \mathbb{C}$, $\delta > 0$, sei $\gamma : [a,b] \to B^0(z, \delta)$ eine geschlossene, stückweise stetig differenzierbare Kurve mit $z \notin \gamma([a,b])$. Dann gilt für jede holomorphe Funktion $f : B^0(z, \delta) \to \mathbb{C}$ der Form (7.5)*

$$\int_\gamma f(w) \, dw = 2\pi i c_{-1} \nu(\gamma, z) . \tag{7.6}$$

Beweis: Für $k \neq -1$ hat $p(w) = (w - z)^k$ eine Stammfunktion in $\mathbb{C} \setminus \{z\}$, nämlich

$$q(w) = \frac{1}{k+1} (w - z)^{k+1} ,$$

also gilt

$$\int_\gamma (w - z)^k \, dw = 0 , \quad k \neq -1 . \tag{7.7}$$

Nach Definition der Windungszahl gilt

$$\int_\gamma \frac{1}{w - z} \, dw = 2\pi i \nu(\gamma, z) . \tag{7.8}$$

Da $\gamma([a,b])$ in einem kompakten Kreisring um z enthalten ist, folgt aus Satz 6.12

$$\int_\gamma f(w) \, dw = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_\gamma (w - z)^k \, dw = c_{-1} 2\pi i \nu(\gamma, z) .$$

$\square$

Definition 7.4 (Residuum)
Sei $z \in \mathbb{C}$, $\delta > 0$, sei $f : B^0(z,\delta) \to \mathbb{C}$ holomorph. Wir definieren das Residuum von f in z durch
$$\mathrm{Res}\,(f,z) = c_{-1}\,, \tag{7.9}$$
wobei c_{-1} der erste Koeffizient des Hauptteils der Laurentreihe von f in z ist.

Lemma 7.5 *Sei $z \in \mathbb{C}$, $\delta > 0$, sei $f : B^0(z,\delta) \to \mathbb{C}$ holomorph.*

(i) Für alle $r \in (0,\delta)$ gilt
$$\mathrm{Res}\,(f,z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(z,r)} f(w)\,dw \tag{7.10}$$

(ii) Ist außerdem $g : B^0(z,\delta) \to \mathbb{C}$ holomorph, so gilt
$$\mathrm{Res}\,(\lambda f + \mu g, z) = \lambda \mathrm{Res}\,(f,z) + \mu \mathrm{Res}\,(g,z) \tag{7.11}$$
für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

(iii) Ist z eine hebbare Singularität von f, so gilt
$$\mathrm{Res}\,(f,z) = 0\,. \tag{7.12}$$

Beweis: (i): Folgt unmittelbar aus Satz 7.3 und (7.2).
(ii): Folgt direkt aus (i).
(iii): Folgt mit (i) aus dem Integralsatz von Cauchy. □

Satz 7.6 (Residuensatz)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und sternförmig, sei $\gamma : [a,b] \to U$ eine stückweise stetig differenzierbare Kurve. Sei S eine endliche Teilmenge von U mit $S \cap \gamma([a,b]) = \emptyset$, sei $f : U \setminus S \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt
$$\int_\gamma f(w)\,dw = 2\pi i \sum_{z\in S} \mathrm{Res}\,(f,z)\nu(\gamma,z)\,. \tag{7.13}$$

Beweis: Sei für jedes $z \in S$
$$f_z(w) = \frac{\mathrm{Res}\,(f,z)}{w-z} + \sum_{k=-2}^{-\infty} c_k(w-z)^k \tag{7.14}$$
der Hauptteil der Laurentreihe von f in z. Nach Lemma 6.11 wird hierdurch eine holomorphe Funktion $f_z : \mathbb{C}\setminus\{z\} \to \mathbb{C}$ definiert. Wir definieren $g : U \setminus S \to \mathbb{C}$ durch
$$g(w) = f(w) - \sum_{z\in S} f_z(w)\,. \tag{7.15}$$
Für jedes $z \in S$ ist der Hauptteil der Laurentreihe von g in z gleich Null, da f_z nach Konstruktion in z denselben Hauptteil wie f hat und f_ζ für $\zeta \neq z$ holomorph ist in einer

Umgebung von z. Also sind alle $z \in S$ hebbare Singularitäten von g, und wir können g zu einer holomorphen Funktion $\tilde{g} : U \to \mathbb{C}$ fortsetzen (Satz 6.3). Aus dem Integralsatz von Cauchy folgt (U ist sternförmig)

$$\int_\gamma g(w)\,dw = \int_\gamma \tilde{g}(w)\,dw = 0\,, \tag{7.16}$$

also nach Satz 7.3

$$\int_\gamma f(w)\,dw = \sum_{z\in S} \int_\gamma f_z(w)\,dw = \sum_{z\in S} 2\pi i \mathrm{Res}\,(f_z, z)\nu(\gamma, z)\,. \tag{7.17}$$

Da $\mathrm{Res}\,(f_z, z) = \mathrm{Res}\,(f, z)$ nach Konstruktion von f_z, folgt die Behauptung. □

Lemma 7.7 *Sei $f : B^0(a,\delta) \to \mathbb{C}$ holomorph, sei a ein einfacher Pol (= Pol erster Ordnung) von f. Dann gilt*

$$\mathrm{Res}\,(f, a) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z)\,. \tag{7.18}$$

Beweis: Es ist

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z-a} + p(z)\,, \quad p \text{ holomorph.}$$

□

Lemma 7.8 *Seien $g, h : B(a,\delta) \to \mathbb{C}$ holomorph, es gelte $g(a) \neq 0$, $h(a) = 0$, $h'(a) \neq 0$. Dann hat die durch*

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}\,, \tag{7.19}$$

definierte Funktion einen einfachen Pol in a, und es gilt

$$\mathrm{Res}\,(f, a) = \frac{g(a)}{h'(a)}\,. \tag{7.20}$$

Beweis: Es gilt

$$\lim_{z\to a} \frac{h(z)}{z-a} = h'(a)\,,$$

also

$$\lim_{z\to a}(z-a)f(z) = \lim_{z\to a} \frac{g(z)}{\frac{h(z)}{z-a}} = \frac{g(a)}{h'(a)}\,.$$

Also ist a hebbare Singularität von $z \mapsto (z-a)f(z)$ und damit einfacher Pol von f. Die Behauptung folgt aus Lemma 7.7. □

Beispiele: Wir betrachten

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}\,. \tag{7.21}$$

$h(z) = 1 + z^2$ hat einfache Nullstellen in $z = \pm i$, es folgt

$$\mathrm{Res}\,(f, \pm i) = \pm\frac{1}{2i}\,. \tag{7.22}$$

Wir betrachten
$$f(z) = \frac{z^2}{1+z^4}\,. \tag{7.23}$$
$h(z) = 1 + z^4$ hat vier einfache Nullstellen, nämlich
$$a = \exp\left(\frac{\pi i}{4}\right)\,, ia\,, -a\,, -ia\,. \tag{7.24}$$
Es ist
$$\mathrm{Res}\,(f,a) = \frac{a^2}{4a^3} = \frac{1}{4a} = \frac{1}{4}\exp\left(-\frac{\pi i}{4}\right)\,, \quad \mathrm{Res}\,(f,ia) = \frac{1}{4}\exp\left(-\frac{3\pi i}{4}\right)\,, \tag{7.25}$$
und analog für die anderen beiden Pole.

Wir wollen den Residuensatz verwenden, um uneigentliche Integrale der Form
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \tag{7.26}$$
zu berechnen.

Satz 7.9 *Sei S eine endliche Teilmenge von $\mathbb{C}$ mit $S \cap \mathbb{R} = \emptyset$, sei $f : \mathbb{C} \setminus S$ holomorph, es gelte $\int_{\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx < \infty$ sowie*
$$\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0\,. \tag{7.27}$$
Dann gilt
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\substack{a\in S\\ Im\ a>0}} \mathrm{Res}\,(f,a)\,. \tag{7.28}$$

Beweis: Wir betrachten die durch $[-r,r]$ und den Halbkreis
$$\gamma_r : [0,\pi] \to \mathbb{C}\,, \quad \gamma_r(t) = re^{it}\,,$$
definierte Kurve Γ_r und wählen r so groß, dass alle $a \in S$ mit $\mathrm{Im}\,a > 0$ im Innern von Γ_r liegen. Für $a \in S$ gilt (Übung)
$$\nu(\Gamma_r, a) = \begin{cases} 1\,, & \mathrm{Im}\,a > 0\,, \\ 0\,, & \mathrm{Im}\,a < 0\,. \end{cases}$$
Aus dem Residuensatz folgt
$$\int_{-r}^{r} f(x)\,dx + \int_{\gamma_r} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_r} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\substack{a\in S\\ \mathrm{Im}\ a>0}} \mathrm{Res}\,(f,a)\,.$$
Es gilt weiter
$$\left|\int_{\gamma_r} f(z)\,dz\right| \le \int_0^{\pi} |f(re^{it})||rie^{it}|\,dt \le \pi \sup_{|z|=r} |zf(z)| \to 0\,, \qquad \text{falls } r \to \infty$$
nach Voraussetzung (7.27). Hieraus folgt die Behauptung. $\square$

Folgerung 7.10 *Seien p, q Polynome in $\mathbb{C}$ mit $\deg(q) \geq \deg(p) + 2$, q habe keine reellen Nullstellen, sei*

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} . \tag{7.29}$$

Dann gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 2\pi i \sum_{\substack{a \in S \\ Im\ a > 0}} \mathrm{Res}\,(f, a) . \tag{7.30}$$

Beweis: f erfüllt alle Voraussetzungen von Satz 7.9. □

Beispiele: Für

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

gilt $S = \{i, -i\}$ und

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = 2\pi i \,\mathrm{Res}\,(f, i) = 2\pi i \frac{1}{2i} = \pi .$$

Für

$$f(z) = \frac{z^2}{1+z^4}$$

gilt $S = \{a, ia, -a, -ia\}$ (siehe (7.24)) und

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\, dx &= 2\pi i (\mathrm{Res}\,(f, a) + \mathrm{Res}\,(f, ia)) = 2\pi i \frac{1}{4} \left(\exp\left(-\frac{\pi i}{4}\right) + \exp\left(-\frac{3\pi i}{4}\right)\right) \\ &= 2\pi i \frac{1}{4} (-\sqrt{2} i) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} . \end{aligned}$$

Der Residuensatz eignet sich auch zur Berechnung der Fouriertransformation gewisser Funktionen.

Satz 7.11 *Sei S eine endliche Teilmenge von $\mathbb{C}$ mit $S \cap \mathbb{R} = \emptyset$, sei $g : \mathbb{C} \setminus S \to \mathbb{C}$ holomorph, es gelte*

$$\lim_{z \to \infty} g(z) = 0 . \tag{7.31}$$

Dann gilt für $f(z) = g(z) e^{iz\xi}$, $\xi \in \mathbb{R}$, $\xi \neq 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{ix\xi}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 2\pi i \sum_{\substack{a \in S \\ Im\ a > 0}} \mathrm{Res}\,(f, a) , \quad \xi > 0 , \tag{7.32}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{ix\xi}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = -2\pi i \sum_{\substack{a \in S \\ Im\ a < 0}} \mathrm{Res}\,(f, a) , \quad \xi < 0 . \tag{7.33}$$

Hierbei ist das uneigentliche Integral definiert als

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{r \to \infty} \int_{-r}^{0} f(x)\, dx + \lim_{s \to \infty} \int_{0}^{s} f(x)\, dx . \tag{7.34}$$

(Es wird weder behauptet noch verlangt, dass $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < \infty$.)

Beweis: Sei zunächst $\xi > 0$. Für $r, s > 0$ betrachten wir das Quadrat $Q_{r,s} \subset \mathbb{C}$ mit den Ecken $(-r, 0)$, $(s, 0)$, $(s, r+s)$ und $(-r, r+s)$ und den Seiten $\gamma_0, \ldots, \gamma_3$ (beginnend mit $(-r, 0)$, in der beschriebenen Reihenfolge). Seien r, s so groß, dass alle $a \in S$ mit $\operatorname{Im} a > 0$ in $Q_{r,s}$ liegen. Dann folgt aus dem Residuensatz

$$\int_{\partial Q_{r,s}} f(z)\, dz = \int_{-r}^{s} f(x)\, dx + \sum_{j=1}^{3} \int_{\gamma_j} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{\substack{a \in S \\ \operatorname{Im}\, a > 0}} \operatorname{Res}(f, a) =: c\,, \quad \xi > 0\,. \tag{7.35}$$

Für $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$e^{iz\xi} = e^{i\xi \operatorname{Re} z} e^{-\xi \operatorname{Im} z}\,, \qquad \left|e^{iz\xi}\right| = e^{-\xi \operatorname{Im} z}\,.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \left|\int_{\gamma_2} g(z) e^{iz\xi}\, dz\right| &= \left|-\int_{-r}^{s} g(t + i(r+s)) e^{it\xi} e^{-(r+s)\xi}\, dt\right| \\ &\leq (r+s) e^{-(r+s)\xi} \sup_{t \in [-r,s]} |g(t + i(r+s))|\,, \end{aligned} \tag{7.36}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} \left|\int_{\gamma_1} g(z) e^{iz\xi}\, dz\right| &= \left|\int_{0}^{r+s} g(s+it) e^{is\xi} e^{-t\xi} i\, dt\right| \leq \frac{1}{\xi}(1 - e^{-(r+s)\xi}) \sup_{t \in [0,r+s]} |g(s+it))| \\ &\leq \frac{1}{\xi} \sup_{t \in [0,r+s]} |g(s+it))|\,, \end{aligned} \tag{7.37}$$

Ebenso beweist man

$$\left|\int_{\gamma_3} g(z) e^{iz\xi}\, dz\right| \leq \frac{1}{\xi} \sup_{t \in [0,r+s]} |g(-r+it)|\,. \tag{7.38}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Wegen (7.36) – (7.38) gibt es ein $M > 0$, so dass

$$\sum_{j=1}^{3} \left|\int_{\gamma_j} g(z) e^{iz\xi}\, dz\right| \leq \varepsilon\,, \quad \text{für alle } r, s \geq M,$$

also

$$\left|\int_{-r}^{s} f(x)\, dx - c\right| \leq \varepsilon\,, \quad \text{für alle } r, s \geq M. \tag{7.39}$$

also

$$\left|\int_{-r}^{s} f(x)\, dx - \int_{-\rho}^{\sigma} f(x)\, dx\right| \leq 2\varepsilon\,,$$

für alle $r, s, \rho, \sigma \geq M$, und damit auch

$$\left|\int_{0}^{s} f(x)\, dx - \int_{0}^{\sigma} f(x)\, dx\right| \leq 2\varepsilon\,, \quad \left|\int_{-r}^{0} f(x)\, dx - \int_{-\rho}^{0} f(x)\, dx\right| \leq 2\varepsilon\,,$$

für alle $r, s, \rho, \sigma \geq M$. Hieraus folgt die Behauptung für $\xi > 0$. Der Fall $\xi < 0$ wird analog bewiesen; in diesem Fall hat das Quadrat $Q_{r,s}$ die Ecken $(-r, 0)$, $(s, 0)$, $(s, -(r+s))$ und $(-r, -(r+s))$. $\square$

Definition 7.12 (Meromorphe Funktion)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion f heißt meromorph auf U, falls es eine Menge $P \subset U$ gibt, so dass $f : U \setminus P$ holomorph ist und jedes $a \in P$ ein Pol von f ist. □

Die meromorphen Funktionen auf einem Gebiet U bilden einen Körper bezüglich der Addition und Multiplikation.

Sei f auf einem Gebiet U meromorph und nicht identisch 0. Dann ist auch die durch

$$g(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

definierte Funktion meromorph auf U, da alle Nullstellen von f eine endliche Ordnung haben. Die Funktion g heißt die **logarithmische Ableitung von f**, da sie die Ableitung der Funktion $z \mapsto \ln f(z)$ ist.

Satz 7.13 *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und sternförmig, sei f eine auf U meromorphe, von Null verschiedene Funktion, sei P die Menge der Pole und N die Menge der Nullstellen von f in U. Sei γ eine Kurve in U, so dass keine Nullstelle von f und kein Pol von f auf γ liegt. Es gelte außerdem $\nu(\gamma, a) = 1$ für alle $a \in P \cup N$. Dann gilt*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \sum_{a \in N} \operatorname{ord}(a) - \sum_{a \in P} \operatorname{ord}(a)\,, \tag{7.40}$$

wobei $\operatorname{ord}(a)$ *die Ordnung der Nullstelle beziehungsweise des Pols a bezeichnet.*

Beweis: Zunächst gilt, dass $N \cup P$ endlich ist (nach Satz 7.2(iii) liegt $N \cup P$ in einer beschränkten Menge, und $N \cup P$ hat keine Häufungspunkte), und dass f'/f holomorph ist in $U \setminus (N \cup P)$. Sei $a \in N \cup P$. Dann gibt es eine holomorphe Funktion $g : B(a, \delta) \to \mathbb{C}$, $\delta > 0$ hinreichend klein, mit

$$f(z) = (z-a)^m g(z)\,, \quad g(a) \neq 0\,,$$

und $g(z) \neq 0$ für alle $z \in B(a, \delta)$. Ist $a \in N$, so ist hierbei m die Ordnung von a; ist $a \in P$, so ist $-m$ die Ordnung von a. Aus

$$f'(z) = m(z-a)^{m-1} g(z) + (z-a)^m g'(z)$$

folgt

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)}\,. \tag{7.41}$$

Da g keine Nullstelle in $B(a, \delta)$ hat, ist g'/g holomorph in $B(a, \delta)$, also hat f'/f einen einfachen Pol in a mit

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}, a\right) = m\,.$$

Die Behauptung folgt nun aus dem Residuensatz. □

8 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Wir betrachten ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung,

$$y' = f(t, y), \tag{8.1}$$

sowie das zugehörige Anfangswertproblem

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0. \tag{8.2}$$

Definition 8.1 (Lösung eines Systems erster Ordnung)
Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$, $f : D \to \mathbb{K}^n$. Eine Funktion $y : I \to \mathbb{K}^n$ heißt Lösung von (8.1) in I, falls y in I differenzierbar ist und für alle $t \in I$ gilt, dass $(t, y(t)) \in D$ und

$$y'(t) = f(t, y(t)) \tag{8.3}$$

Falls außerdem $(t_0, y_0) \in D$ gegeben ist mit $y(t_0) = y_0$, so heißt y Lösung des Anfangswertproblems (8.2) in I. □

Hängt f nicht von y ab, so ist

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s)\, ds$$

eine Lösung des Anfangswertproblems (8.2), falls f stetig ist (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung).

Nicht jedes Anfangswertproblem hat eine Lösung. Beispiel: $I = [0, 1]$, $n = 1$,

$$y' = f(y) = \begin{cases} -1, & y > 0, \\ 1, & y \le 0, \end{cases} \quad y(0) = 0. \tag{8.4}$$

Beweis: Ist y Lösung in I, so ist y stetig in I. y kann kein Maximum in $(0, 1)$ haben, also auch keine weitere Nullstelle. Ist $y(t) > 0$ für $t > 0$, dann ist $y'(t) = -1$ für $t > 0$, also y streng monoton fallend im Widerspruch zu $y(0) = 0$.

Man beachte, dass (8.4) auf $I = [-1, 0]$ eine Lösung hat, nämlich $y(t) = t - 1$. Auf $I = [0, 1]$ erhalten wir eine Lösung, nämlich $y = 0$, falls wir die Definition von f modifizieren zu

$$y' = f(y) = \begin{cases} -1, & y > 0, \\ 0, & y = 0, \\ 1, & y \le 0. \end{cases} \tag{8.5}$$

Manche Anfangswertprobleme haben mehrere Lösungen. Beispiel:

$$y' = \sqrt{|y|}, \quad y(0) = 0. \tag{8.6}$$

Außer der Funktion $y = 0$ ist beispielsweise auch

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}t^2, & t > 0, \\ 0, & t \le 0, \end{cases} \tag{8.7}$$

eine Lösung. In diesem Fall ist die rechte Seite f stetig, aber nicht differenzierbar in 0, und die Lösung (8.7) stetig differenzierbar, aber nicht zweimal differenzierbar in $t = 0$.

Satz 8.2 *Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$ offen, sei $f \in C^m(D;\mathbb{K}^n)$, sei $(t_0, y_0) \in D$. Sei y Lösung des AWP (8.2) auf einem Intervall I. Dann ist $y \in C^{m+1}(I;\mathbb{K}^n)$.*

Beweis: Ist f stetig, so ist y' stetig wegen $y'(t) = f(t, y(t))$. Ist $y \in C^k$ und $f \in C^k$, so ist auch $y' \in C^k$ nach Kettenregel, also $y \in C^{k+1}$. □

Satz 8.2 ist ein typischer Regularitätssatz der Analysis: Die Regularität der Daten (hier $f \in C^m$) sorgt für eine entsprechende Regularität der Lösung (hier $y \in C^{m+1}$), die im Lösungsbegriff selbst noch nicht enthalten ist. Bevor wir uns ausführlicher mit der Theorie befassen, betrachten wir einige Beispiele, bei denen wir Lösungen explizit konstruieren können.

Trennung der Variablen. Das AWP habe die Form

$$y' = f(t)g(y)\,, \quad y(t_0) = y_0\,. \tag{8.8}$$

Sei y eine Lösung, wir formen um (zunächst ohne uns darum zu kümmern, ob "wir das dürfen")

$$\frac{y'(t)}{g(y(t))} = f(t)\,, \quad \int_{t_0}^t \frac{y'(s)}{g(y(s))}\,ds = \int_{t_0}^t f(s)\,ds\,,$$

und weiter (Substitution)

$$\int_{y(t_0)}^{y(t)} \frac{1}{g(\eta)}\,d\eta = \int_{t_0}^t f(s)\,ds\,.$$

Können wir Stammfunktionen von $\frac{1}{g}$ und von f explizit angeben, so können wir hoffen, dass die aus dem Hauptsatz resultierende Gleichung sich nach $y(t)$ auflösen läßt. Für die hierdurch erhaltene explizite Lösung können wir unmittelbar nachprüfen, ob sie eine Lösung von (8.8) ist. (Ob die dazu führende Rechnung "mathematisch korrekt" war, ist dann eine zweitrangige Frage.) Beispiel:

$$y' = -y^2\,, \quad y(0) = y_0\,. \tag{8.9}$$

Für $y_0 = 0$ ist $y = 0$ eine Lösung. Sei $y_0 \neq 0$. Der Ansatz

$$\int_{y_0}^y -\frac{1}{\eta^2}\,d\eta = \int_0^t 1\,ds$$

führt auf

$$\left.\frac{1}{\eta}\right|_{y_0}^{y} = t\,, \quad \frac{1}{y} = t + \frac{1}{y_0}\,,$$

also erhalten wir

$$y(t) = \frac{1}{t + \frac{1}{y_0}}\,. \tag{8.10}$$

Diese Funktion ist eine Lösung von (8.9) auf dem Intervall $(-\infty, -\frac{1}{y_0})$, falls $y_0 < 0$, beziehungsweise $(-\frac{1}{y_0}, \infty)$, falls $y_0 > 0$. Sie hat in $\frac{1}{y_0}$ eine Singularität und läßt sich nicht über diesen Punkt hinaus fortsetzen.

Ein weiteres Beispiel ist die logistische Differentialgleichung, von Verhulst 1838 zur Modellierung des Bevölkerungswachstums vorgeschlagen.

$$y' = (a - by)y\,, \quad a, b > 0\,. \tag{8.11}$$

Die Wachstumsrate ist nicht konstant, sondern sinkt mit wachsender Bevölkerung. Für $y_0 = \frac{a}{b}$ ist $y' = 0$, also die Konstante $y = y_0$ eine Lösung. Durch Trennung der Variablen können wir die Lösung für einen allgemeinen Anfangswert $y_0 > 0$ berechnen (Übung), es ergibt sich

$$y(t) = \frac{a}{b}\frac{1}{1 + ce^{-at}}\,, \quad c = \frac{\frac{a}{b} - y_0}{y_0}\,. \tag{8.12}$$

Die lineare Differentialgleichung. Wir betrachten

$$y' + a(t)y = b(t)\,, \quad y(t_0) = y_0\,. \tag{8.13}$$

Im Fall $b = 0$ finden wir die Lösung durch Trennung der Variablen:

$$y' = -a(t)y\,, \quad \int_{y_0}^{y} \frac{1}{\eta} d\eta = \int_{t_0}^{t} -a(s)\,ds\,,$$

also

$$\ln y - \ln y_0 = \ln \frac{y}{y_0} = -\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds\,.$$

Die gesuchte Lösung ist also im Falle $b = 0$

$$y(t) = y_0 \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds\right)\,. \tag{8.14}$$

Wir betrachten den allgemeinen Fall $b \neq 0$. Setzen wir

$$A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)\,ds\,, \tag{8.15}$$

so gilt, falls y eine Lösung von (8.13) ist,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(y(t)e^{A(t)}\right) = e^{A(t)}(y'(t) + a(t)y(t)) = e^{A(t)}b(t)\,.$$

Integration von t_0 bis t liefert

$$y(t)e^{A(t)} - y_0 = \int_{t_0}^{t} e^{A(s)}b(s)\,ds\,.$$

Wir erhalten also als Lösung der Anfangswertaufgabe (8.13)

$$y(t) = e^{-A(t)}\left(y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(s)}b(s)\,ds\right)\,. \tag{8.16}$$

Wir wollen uns im Folgenden auf $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ beschränken. Der Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ wird über die Isomorphie von $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}^2$ darauf zurückgeführt.

Eine wesentlich andere Situation liegt vor, wenn wir Differentialgleichungen im Komplexen betrachten, das heißt, Funktionen $y : U \to \mathbb{C}$, U Gebiet in $\mathbb{C}$, welche

$$y'(z) = f(z, y(z))\,, \quad z \in U\,,$$

erfüllen, wobei f holomorph ist.

9 Der Satz von Picard-Lindelöf

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y' = f(t, y) \,, \quad y(t_0) = y_0 \,. \tag{9.1}$$

Lemma 9.1 *Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}^n$ stetig. Sei I Intervall in $\mathbb{R}$ und $y : I \to \mathbb{R}^n$ stetig, sei $(t_0, y_0) \in D$. Dann ist y eine Lösung des Anfangswertproblems (9.1) genau dann, wenn gilt $(t, y(t)) \in D$ für alle $t \in I$ und*

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s)) \, ds \,, \quad \textit{für alle } t \in I. \tag{9.2}$$

Beweis: Ist y Lösung des AWP, so ist $y' : I \to \mathbb{R}^n$ stetig, also folgt aus dem Hauptsatz

$$y(t) - y(t_0) = \int_{t_0}^{t} y'(s) \, ds = \int_{t_0}^{t} f(s, y(s)) \, ds \,.$$

Gilt umgekehrt (9.2), so folgt zunächst $y(t_0) = y_0$. Da der Integrand auf der rechten Seite von (9.2) stetig ist als Funktion von s, ist nach dem Hauptsatz y differenzierbar in I, und $y'(t) = f(t, y(t))$ für alle $t \in I$. □

Definition 9.2 *Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}^n$ heißt Lipschitz-stetig bezüglich y in D mit Lipschitz-Konstante L, falls*

$$\|f(t, y) - f(t, z)\|_\infty \le L \|y - z\|_\infty \,, \tag{9.3}$$

für alle $(t, y), (t, z) \in D$. □

Satz 9.3 *Sei (T, d) kompakter metrischer Raum, sei $w : T \to \mathbb{R}$ stetig mit $w(t) > 0$ für alle $t \in T$. Dann wird durch*

$$\|y\|_w = \sup_{t \in T} w(t) \|y(t)\|_\infty \tag{9.4}$$

eine Norm auf $C(T; \mathbb{R}^n)$ definiert, und $(C(T; \mathbb{R}^n), \| \cdot \|_w)$ ist ein Banachraum.

Beweis: Übungsaufgabe. □

Satz 9.4 *Sei $I = [t_0, t_0 + a]$, $D = I \times \mathbb{R}^n$, sei $f : D \to \mathbb{R}^n$ stetig und Lipschitz-stetig bezüglich y in D, sei $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Dann hat das AWP (9.1) genau eine Lösung in I.*

Beweis: Wir definieren $Y = C(I; \mathbb{R}^n)$ und definieren $T : Y \to Y$ durch

$$(Ty)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s)) \, ds \,. \tag{9.5}$$

T ist wohldefiniert, da f stetig ist. Aus Lemma 9.1 folgt, dass ein $y \in C(I; \mathbb{R}^n)$ genau dann eine Lösung des AWP ist, wenn

$$y = Ty \,. \tag{9.6}$$

Sei L eine Lipschitz-Konstante für f bezüglich y. Wir definieren

$$w(t) = e^{-2L(t-t_0)}, \quad w : I \to \mathbb{R}. \tag{9.7}$$

Nach Satz 9.3 ist $(Y, \|\cdot\|_w)$ ein Banachraum. Seien nun $y, z \in Y$. Dann gilt für alle $t \in I$

$$\begin{aligned}
\|(Ty)(t) - (Tz)(t)\|_\infty &= \left\| \int_{t_0}^t f(s, y(s)) - f(s, z(s))\, ds \right\|_\infty \\
&\leq \int_{t_0}^t \|f(s, y(s)) - f(s, z(s))\|_\infty\, ds \leq \int_{t_0}^t L\|y(s) - z(s)\|_\infty\, ds \\
&= \int_{t_0}^t L e^{2L(s-t_0)} e^{-2L(s-t_0)} \|y(s) - z(s)\|_\infty\, ds \\
&\leq \int_{t_0}^t L e^{2L(s-t_0)} \|y(s) - z(s)\|_w\, ds \leq L\|y - z\|_w \frac{1}{2L}\left(e^{2L(t-t_0)} - 1\right) \\
&\leq \frac{1}{2} e^{2L(t-t_0)} \|y - z\|_w\,.
\end{aligned}$$

Es folgt weiter

$$\|Ty - Tz\|_w = \sup_{t \in I} e^{-2L(t-t_0)} \|(Ty)(t) - (Tz)(t)\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|y - z\|_w\,.$$

Also ist T eine Kontraktion auf Y. Aus dem Fixpunktsatz von Banach folgt, dass (9.6) genau eine Lösung $y \in Y$ hat. $\square$

Auf das Anfangswertproblem

$$y' = y^2\,, \quad y(0) = 1\,, \tag{9.8}$$

lässt sich Satz 9.4 nicht anwenden, da wegen

$$|f(t, y) - f(t, z)| = |y^2 - z^2| = |y + z|\,|y - z|$$

die rechte Seite für kein Intervall I auf $I \times \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig ist. Das AWP (9.8) hat aber sehr wohl eine eindeutige Lösung, nämlich

$$y(t) = \frac{1}{1 - t}\,, \tag{9.9}$$

welche in $(-\infty, 1)$ definiert ist. Diese Funktion ist natürlich auch Lösung, wenn wir den Anfangswert modifizieren zu

$$y(t_0) = \frac{1}{1 - t_0}\,, \quad t_0 < 1\,.$$

Ist t_0 dicht bei 1, so ist die Lösung (9.9) nur in einer kleinen Umgebung von t_0 definiert.

Man entwickelt also das Konzept einer **lokalen Lösung**.

Definition 9.5 (Lokale Lipschitz-Stetigkeit)
Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}^n$ heißt lokal Lipschitz-stetig bezüglich y auf D, falls es zu jedem $(t_0, y_0) \in D$ eine Umgebung U gibt, so dass f auf $D \cap U$ Lipschitz-stetig bezüglich y ist. $\square$

Es gilt dann

$$\|f(t,y)-f(t,z)\|_\infty \le L\|y-z\|_\infty\,, \quad \text{für alle } (t,y),(t,z)\in U, \tag{9.10}$$

für ein geeignetes $L>0$, welches aber im allgemeinen von (t_0,y_0) abhängt, siehe Beispiel (9.8).

Wir setzen

$$K(y_0,r)=\{y : y\in\mathbb{R}^n,\, \|y-y_0\|_\infty \le r\}\,,\quad r>0,\, y_0\in\mathbb{R}^n\,.$$

Satz 9.6 *Seien* $(t_0,y_0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$*,* $a,r>0$*, sei* $f : D\to\mathbb{R}^n$ *stetig und bezüglich* y *Lipschitz-stetig, wobei* $D=[t_0,t_0+a]\times K(y_0,r)$*. Dann gibt es ein* $\delta>0$*, so dass das AWP (9.1) in* $[t_0,t_0+\delta]$ *eine eindeutige Lösung hat.*

Beweis: Wir setzen

$$M=\max_{(t,\eta)\in D}\|f(t,\eta)\|_\infty\,,\quad \delta=\frac{M}{r}\,. \tag{9.11}$$

Wir definieren $I=[t_0,t_0+\delta]$ und

$$Y=\{y : y\in C(I;\mathbb{R}^n),\, \|y-y_0\|_\infty\le r\}\,. \tag{9.12}$$

Wie im Beweis von Satz 9.4 definieren wir den Operator T durch

$$(Ty)(t)=y_0+\int_{t_0}^t f(s,y(s))\,ds\,. \tag{9.13}$$

Es gilt $T(Y)\subset Y$, da

$$\|(Ty)(t)-y_0\|_\infty \le \int_{t_0}^t \|f(s,y(s))\|_\infty\,ds \le \delta M = r$$

gilt für $t\in I$ und $y\in Y$. Y ist ein vollständiger metrischer Raum (Y ist abgeschlossene Teilmenge des Banachraums $C(I;\mathbb{R}^n)$). Der Rest des Beweises ist Wort für Wort derselbe wie der von Satz 9.4. □

Folgerung 9.7 *Seien die Voraussetzungen von Satz 9.6 erfüllt mit* $D=[t_0-a,t_0]\times K(y_0,r)$*. Dann gibt es ein* $\delta>0$*, so dass das AWP (9.1) in* $[t_0,t_0-\delta]$ *eine eindeutige Lösung hat.*

Beweis: Wir wenden Satz 9.6 an auf

$$y'=\tilde f(t,y)\,,\quad y(t_0)=y_0\,,\quad \tilde f(t,y)=-f(2t_0-t,y)\,. \tag{9.14}$$

Ist $\tilde y : [t_0,t_0+\delta]\to\mathbb{R}^n$ Lösung von (9.14), so ist $y:[t_0-\delta,t_0]\to\mathbb{R}^n$,

$$y(t)=\tilde y(2t_0-t)\,, \tag{9.15}$$

wegen

$$y'(t)=-\tilde y'(2t_0-t)=-\tilde f(2t_0-t,\tilde y(2t_0-t))=f(t,y(t))$$

Lösung von (9.1). Da (9.15) eine bijektive Abbildung der Lösungen des Vorwärts- und des Rückwärtsproblems aufeinander definiert, ist mit $\tilde y$ auch y eindeutig. □

Folgerung 9.8 (Lokale Version des Satzes von Picard-Lindelöf)
Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{R}^n$ stetig und lokal Lipschitz-stetig bezüglich y. Dann gibt es zu jedem $(t_0, y_0) \in D$ ein $\delta > 0$, so dass das AWP (9.1) in $I = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ eine eindeutige Lösung hat.

Beweis: Wir wenden Satz 9.6 und Folgerung 9.7 an mit hinreichend kleinen $a, r > 0$. $\Box$

Folgerung 9.9 *Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{R}^n$ stetig und bezüglich y stetig differenzierbar. Dann gibt es zu jedem $(t_0, y_0) \in D$ ein $\delta > 0$, so dass das AWP (9.1) in $I = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ eine eindeutige Lösung hat.*

Stetige Differenzierbarkeit impliziert die lokale Lipschitz-Stetigkeit (siehe Analysis 2). $\Box$

Lemma 9.10 *Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{R}^n$ stetig und bezüglich y lokal Lipschitz-stetig. Dann hat das AWP (9.1) für jedes kompakte Intervall $J = [a, b]$ mit $t_0 \in J$ höchstens eine Lösung.*

Beweis: Seien $y, z : J \to \mathbb{R}^n$ Lösungen des AWP. Wir setzen

$$t^* = \sup\{t : t \in J,\ y|[t_0, t] = z|[t_0, t]\}\,.$$

Es ist $y(t^*) = z(t^*) =: y^*$, da y, z stetig sind. Wäre nun $t^* < b$, so hätte für jedes $\delta \in (0, b - t^*]$ das AWP

$$y' = f(t, y)\,, \quad y(t^*) = y^*\,,$$

zwei verschiedene Lösungen in $[t^*, t^* + \delta]$ im Widerspruch zu Folgerung 9.8. Analog zeigt man, dass y und z auf $[a, t_0]$ übereinstimmen. $\Box$

Satz 9.11 *Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{R}^n$ stetig und bezüglich y lokal Lipschitz-stetig. Dann gibt es zu jedem $(t_0, y_0) \in D$ ein offenes Intervall I und eine Lösung y des AWP (9.1) in I, so dass für jedes Intervall J mit $t_0 \in J$ und jede Lösung z von (9.1) in J gilt*

$$J \subset I\,, \quad z = y|J\,. \tag{9.16}$$

Das Intervall I heißt das maximale Existenzintervall der Lösung von (9.1).

Beweis: Wir definieren

$$t^* = \sup\{t :\ t \geq t_0,\ (9.1) \text{ hat eine Lösung in } [t_0, t]\}\,, \tag{9.17}$$
$$t_* = \inf\{t :\ t \leq t_0,\ (9.1) \text{ hat eine Lösung in } [t, t_0]\}\,. \tag{9.18}$$

Wir setzen $I = (t_*, t^*)$. Sei $t \in I$, sei $y_t : [t_0, t] \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung von (9.1). Wir definieren $y : I \to \mathbb{R}^n$ durch

$$y(t) = y_t(t)\,, \quad t \in I\,. \tag{9.19}$$

Für jedes $s \in [t_0, t]$ gilt $y_s(s) = y_t(s)$ nach Lemma 9.10, also auch $y(s) = y_t(s)$. Es folgt

$$y(t) = y_t(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_t(s))\, ds = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds\,,$$

für alle $t \in I$, also ist y Lösung von (9.1) in I. Ist z eine Lösung auf einem Intervall J, so ist z Lösung auf $[t_0, t]$ für jedes $t \in J$, also $t \in I$ und $z(t) = y(t)$ nach Lemma 9.10. $\square$

Das maximale Existenzintervall kann die Form $(-\infty, b)$, (a, b), (a, ∞) oder $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$ haben.

Beispiele: Das AWP

$$y' = y^2 + 1\,, \quad y(0) = 0\,,$$

hat die Lösung und das maximale Existenzintervall

$$y(t) = \tan t\,, \quad I = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\,.$$

Das AWP

$$y' = y^2\,, \quad y(0) = 1\,,$$

hat die Lösung und das maximale Existenzintervall

$$y(t) = \frac{1}{1-t}\,, \quad I = (-\infty, 1)\,.$$

Das AWP

$$y' = y^2 - 1\,, \quad y(0) = 0\,,$$

hat die Lösung und das maximale Existenzintervall

$$y(t) = \tanh t\,, \quad I = \mathbb{R}\,.$$

In allen diesen drei Beispielen ist die rechte Seite stetig differenzierbar, aber nicht Lipschitz-stetig auf ihrem maximalen Definitionsbereich $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Etwas anders gelagert ist die Situation für das AWP

$$y' = \frac{1}{y}\,, \quad y(0) = 1\,.$$

Hier ist $D = \{(t, y) : y \neq 0\} = \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$, die Lösung ist

$$y(t) = \sqrt{2t+1}\,, \quad \text{und } I = \left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$$

ist das maximale Existenzintervall. Es gilt hier

$$\lim_{t \downarrow -\frac{1}{2}} (t, y(t)) = \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \in \partial D\,.$$

Es werden also drei verschiedene Fälle für das Verhalten der Lösung für $t > t_0$ (analog $t < t_0$) erkennbar.

1. Die Lösung existiert für alle $t > t_0$.
2. Es gibt ein $b > t_0$ mit
$$\lim_{\substack{t \to b \\ t < b}} \|y(t)\|_\infty = \infty\,.$$

3. Es gibt ein $b > t_0$ mit
$$\lim_{\substack{t\to b\\ t<b}} \operatorname{dist}\left((t, y(t)), \partial D\right) = 0\,.$$

Satz 9.12 *Sei $D \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{R}^n$ stetig und bezüglich y lokal Lipschitz-stetig. Sei y die eindeutige Lösung des AWP (9.1) mit maximalem Existnzintervall I. Dann gilt: Weder $\{(t, y(t)) : t \in I,\, t \geq t_0\}$ noch $\{(t, y(t)) : t \in I,\, t \leq t_0\}$ sind in einer kompakten Teilmenge von D enthalten.*

Beweis: Sei $I = (a, b)$. Sei $K \subset D$ kompakt mit
$$\{(t, y(t)) : t \in I,\, t \geq t_0\} \subset K\,. \tag{9.20}$$
Da K beschränkt ist, ist $b < \infty$. Da f stetig ist, gilt
$$M := \max_{(t,\eta)\in K} \|f(t, \eta)\|_\infty < \infty\,.$$
Für beliebige $t, \tau \in [t_0, b)$ folgt
$$\|y(t) - y(\tau)\|_\infty = \left\| \int_\tau^t f(s, y(s))\, ds \right\| \leq M|t - \tau|\,. \tag{9.21}$$
Wir zeigen nun, dass
$$y_b := \lim_{\substack{t\to b\\ t<b}} y(t) \tag{9.22}$$
existiert. Ist $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folge mit $t_k \to b$, so ist $(y(t_k))_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge, also konvergent; ist $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine weitere solche Folge, so konvergiert $(y(s_k))_{k\in\mathbb{N}}$ gegen den gleichen Grenzwert, da $y(t_k) - y(s_k) \to 0$ wegen (9.21). Also existiert der Grenzwert (9.22). Die Funktion
$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} y(t)\,, & t \in [t_0, b)\,,\\ y_b\,, & t = b\,, \end{cases}$$
ist daher eine Lösung der Integralgleichung
$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s))\, ds$$
auf dem abgeschlossenen Intervall $[t_0, b]$ und damit auch des AWP, im Widerspruch zur Maximalität von I. Eine kompakte Menge K mit (9.20) kann daher nicht existieren. Analog zeigt man die Behauptung für $t \leq t_0$. □

Man kann die Ergebnisse der vorherigen Sätze wie folgt zusammenfassen:

> Ist die rechte Seite f auf ihrem offenen Definitionsgebiet D stetig und bezüglich y lokal Lipschitz-stetig, so existiert eine eindeutige Lösung des AWP (9.1), deren Graph sich bis zum Rand von D erstreckt.

Wir behandeln nun das AWP (9.1) ohne die Voraussetzung, dass die Abhängigkeit $t \mapsto f(t, y)$ stetig ist. Solche Systeme treten etwa in der Steuerungstheorie regelmäßig auf, und zwar in der Form

$$y' = f(t, u(t), y)\,. \tag{9.23}$$

Hierbei ist u eine weitere Funktion (die Steuerung), die im Hinblick auf ein zu erreichendes Ziel gewählt wird. In vielen Fällen stellt es sich heraus, dass die optimale Steuerung unstetig ist.

Definition 9.13 (Carathéodory-Bedingung)
Sei I Intervall in $\mathbb{R}$, $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Wir sagen, dass f die Carathéodory-Bedingung erfüllt, falls die Abbildungen

$$t \mapsto f(t, y) \textit{ messbar sind für alle } y \in \mathbb{R}^n\,, \tag{9.24}$$

$$y \mapsto f(t, y) \textit{ stetig sind für alle } t \in I\,. \tag{9.25}$$

□

Lemma 9.14 *Sei I Intervall in $\mathbb{R}$, $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, f erfülle die Carathéodory-Bedingung, sei $y : I \to \mathbb{R}^n$ messbar. Dann ist die durch*

$$g(t) = f(t, y(t)) \tag{9.26}$$

definierte Funktion $g : I \to \mathbb{R}^n$ messbar.

Beweis: Sei zunächst $y : I \to \mathbb{R}^n$ einfache Funktion, das heißt,

$$y = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i 1_{A_i}\,,$$

wobei $(A_i)_{1 \le i \le N}$ eine disjunkte Zerlegung von I in messbare Mengen A_i ist. Es gilt dann

$$g(t) = \sum_{i=1}^{N} f(t, \alpha_i) 1_{A_i}(t)\,,$$

also ist g messbar. Sei nun y beliebig, wähle eine Folge $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von einfachen Funktionen, welche punktweise gegen y konvergiert (siehe Analysis 3). Die durch

$$g_k(t) = f(t, y_k(t))$$

definierten Funktionen sind messbar, und es gilt

$$g(t) = f(t, y(t)) = \lim_{k\to\infty} f(t, y_k(t)) = \lim_{k\to\infty} g_k(t)\,,$$

also ist auch g messbar. □

Wir betrachten jetzt die entsprechende Verallgemeinerung von Satz 9.4, wobei wir anstelle der Lösung des AWP (9.1) die Lösung der Integralgleichung

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds \tag{9.27}$$

betrachten, wobei wir das Integral auf der rechten Seite als Lebesgue-Integral auffassen.

Satz 9.15 *Sei $I = [t_0, t_0 + a]$, $D = I \times \mathbb{R}^n$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}^n$ sei bezüglich y Lipschitz-stetig und erfülle die Carathéodory-Bedingung, die durch $t \mapsto f(t, 0)$ definierte Funktion sei beschränkt auf I. Dann hat die Integralgleichung (9.27) genau eine stetige Lösung $y : I \to \mathbb{R}^n$.*

Beweis: Genau wie im Beweis von Satz 9.4 setzen wir $Y = C(I; \mathbb{R}^n)$ und wollen $T : Y \to Y$ definieren durch

$$(Ty)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds\,. \tag{9.28}$$

Ist $y \in Y$, so folgt aus Lemma 9.14, dass die durch $g(s) = f(s, y(s))$ definierte Funktion $g : I \to \mathbb{R}^n$ messbar ist. Ist L Lipschitz-Konstante für f, so gilt

$$\|g(s)\|_\infty = \|f(s, y(s))\|_\infty \leq \|f(s, 0)\|_\infty + L\|y(s)\|_\infty\,,$$

also ist g beschränkt und damit Lebesgue-integrierbar. Es folgt weiter für beliebige $t, \tau \in I$

$$\|(Ty)(t) - (Ty)(\tau)\|_\infty = \left\| \int_{\tau}^{t} f(s, y(s))\, ds \right\|_\infty \leq |t - \tau| \|g\|_\infty\,, \tag{9.29}$$

also ist Ty stetig und damit $Ty \in Y$. Der Beweis wird nun genauso wie der Beweis in 9.4 fortgesetzt. $\square$

Man kann nun nicht mehr erwarten, dass die Lösung $y = Ty$ auf I stetig differenzierbar ist (dann muss $t \mapsto f(t, y(t))$ stetig sein). Die Abschätzung (9.29) zeigt aber, dass y Lipschitz-stetig ist, falls die rechte Seite beschränkt ist.

Entsprechend kann man die weiteren Sätze und Folgerungen dieses Kapitels auf den Carathéodory-Fall übertragen.

10 Das Lemma von Gronwall

Sei $x : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, eine unbekannte Funktion. Wir wollen x nach oben abschätzen. Wir nehmen an, dass x in I einer Differentialungleichung

$$x'(t) \le g(t, x(t)) \,, \quad x(t_0) \le w_0 \,, \tag{10.1}$$

oder einer Integralungleichung

$$x(t) \le w_0 + \int_{t_0}^{t} g(s, x(s)) \, ds \tag{10.2}$$

genügt. Wir wollen schließen, dass dann

$$x(t) \le w(t) \tag{10.3}$$

für alle $t \in I$ gilt, wobei $w : I \to \mathbb{R}$ die Lösung des entsprechenden AWP's

$$w' = g(t, w) \,, \quad w(t_0) = w_0 \,, \tag{10.4}$$

beziehungsweise der entsprechenden Integralgleichung

$$w(t) = w_0 + \int_{t_0}^{t} g(s, w(s)) \, ds \tag{10.5}$$

ist. Damit die Abschätzung (10.3) verwendbar ist, ist es von Vorteil, g so zu wählen, dass wir w auch berechnen können.

Wir beschäftigen uns mit der Integralungleichung.

Lemma 10.1 *Sei $I = [t_0, t_1]$, seien $a, b, x, w : I \to \mathbb{R}$ stetig, sei $b \ge 0$, und es gelte*

$$x(t) < a(t) + \int_{t_0}^{t} b(s)x(s) \, ds \,, \tag{10.6}$$

$$w(t) = a(t) + \int_{t_0}^{t} b(s)w(s) \, ds \,, \tag{10.7}$$

für alle $t \in I$. Dann gilt

$$x(t) < w(t) \tag{10.8}$$

für alle $t \in I$.

Beweis: Wir setzen (beachte $x(t_0) < w(t_0)$)

$$t = \sup\{\tau : \tau \in I, \, x(s) < w(s) \text{ für alle } s \le \tau\} \,.$$

Dann gilt

$$x(t) < a(t) + \int_{t_0}^{t} b(s)x(s) \, ds \le a(t) + \int_{t_0}^{t} b(s)w(s) \, ds = w(t) \,,$$

da $b \ge 0$ und $x \ge w$ in $[t_0, t]$. Es muss nun $t = t_1$ gelten, da andernfalls $x(\tau) < w(\tau)$ in $[t, t + \varepsilon]$ gilt für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$, im Widerspruch zur Definition von t. □

Satz 10.2 *Sei $I = [t_0, t_1]$, seien $a, b, x : I \to \mathbb{R}$ stetig, sei $b \geq 0$, es gelte*

$$x(t) \leq a(t) + \int_{t_0}^{t} b(s)x(s)\, ds \tag{10.9}$$

für alle $t \in I$. Dann gilt

$$x(t) \leq a(t) + \int_{t_0}^{t} a(s)b(s) \exp\left(\int_{s}^{t} b(\tau)\, d\tau\right)\, ds\,. \tag{10.10}$$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, sei $\tilde{a}(t) = a(t) + \varepsilon$. Dann gilt für alle $t \in I$

$$x(t) < \tilde{a}(t) + \int_{t_0}^{t} b(s)x(s)\, ds\,. \tag{10.11}$$

Wir definieren

$$w(t) = \tilde{a}(t) + \int_{t_0}^{t} \tilde{a}(s)b(s) \exp\left(\int_{s}^{t} b(\tau)\, d\tau\right)\, ds\,.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \int_{t_0}^{t} \tilde{a}(s)b(s) \exp\left(\int_{s}^{t} b(\tau)\, d\tau\right)\, ds &= \tilde{a}(t)b(t) + b(t) \int_{t_0}^{t} \tilde{a}(s)b(s) \exp\left(\int_{s}^{t} b(\tau)\, d\tau\right)\, ds \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \int_{t_0}^{t} b(s)w(s)\, ds\,,\end{aligned}$$

also

$$w(t) = \tilde{a}(t) + \int_{t_0}^{t} b(s)w(s)\, ds\,. \tag{10.12}$$

Aus (10.11), (10.12) folgt nun wegen Lemma 10.1

$$\begin{aligned}x(t) < w(t) &= \tilde{a}(t) + \int_{t_0}^{t} \tilde{a}(s)b(s) \exp\left(\int_{s}^{t} b(\tau)\, d\tau\right)\, ds \\ &= a(t) + \int_{t_0}^{t} a(s)b(s) \exp\left(\int_{s}^{t} b(\tau)\, d\tau\right)\, ds + \varepsilon \left(1 + \int_{t_0}^{t} b(s) \exp\left(\int_{s}^{t} b(\tau)\, d\tau\right)\, ds\right)\,.\end{aligned}$$

Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ liefert die Behauptung. □

Folgerung 10.3 *Sei $I = [t_0, t_1]$, seien $b, x : I \to \mathbb{R}$ stetig mit $b \geq 0$, sei $a \in \mathbb{R}$, es gelte*

$$x(t) \leq a + \int_{t_0}^{t} b(s)x(s)\, ds\,. \tag{10.13}$$

Dann gilt

$$x(t) \leq a \exp\left(\int_{t_0}^{t} b(s)\, ds\right)\,. \tag{10.14}$$

Beweis: Wir setzen

$$B(t) = \int_{t_0}^{t} b(s)\,ds\,.$$

Aus Satz 10.2 folgt

$$\begin{aligned} x(t) &\le a + \int_{t_0}^{t} ab(s)e^{B(t)-B(s)}\,ds = a\left(1 + e^{B(t)} \int_{t_0}^{t} b(s)e^{-B(s)}\,ds\right) \\ &= a\left(1 + e^{B(t)}\Big[-e^{-B(s)}\Big]_{t_0}^{t}\right) = a(1 - e^{B(t)}e^{-B(t)} + e^{B(t)}e^{B(t_0)}) = ae^{B(t)}\,. \end{aligned}$$

□

Satz 10.4 *Sei $f : D \to \mathbb{R}^n$ stetig und bezüglich y Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L. Seien $y, z : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ Lösungen von*

$$y' = f(t, y) \tag{10.15}$$

mit den Anfangswerten

$$y(t_0) = y_0\,, \quad z(t_0) = z_0\,. \tag{10.16}$$

Dann gilt für alle $t \in I$

$$\|y(t) - z(t)\|_\infty \le \|y_0 - z_0\|_\infty e^{L(t-t_0)}\,. \tag{10.17}$$

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned} \|y(t) - z(t)\|_\infty &= \left\| y_0 - z_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s)) - f(s, z(s))\,ds \right\|_\infty \\ &\le \|y_0 - z_0\|_\infty + \int_{t_0}^{t} \|f(s, y(s)) - f(s, z(s))\|_\infty\,ds \\ &\le \|y_0 - z_0\|_\infty + \int_{t_0}^{t} L\|y(s) - z(s)\|_\infty\,ds\,. \end{aligned}$$

Wir wenden Folgerung 10.3 an mit $a = \|y_0 - z_0\|_\infty$, $b(t) = L$ und $x(t) = \|y(t) - z(t)\|_\infty$.
□

Satz 10.4 impliziert, dass die Lösung des AWP stetig vom Anfangswert abhängt. Ist etwa $(y_{0k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Anfangswerten und $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ die Folge der zugehörigen Lösungen, so impliziert $y_{0k} \to y_0$, dass $y_k \to y$ gleichmäßig in $[t_0, t_1]$.

11 Der Satz von Peano

Wir betrachten wieder das AWP

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0 . \tag{11.1}$$

Satz 11.1 (Satz von Peano)
Sei $I = [t_0, t_0 + a]$, $D = I \times \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}^n$ stetig und beschränkt auf D. Dann hat das AWP (11.1) eine Lösung in I.

Beweis: Für $k \in \mathbb{N}$ definieren wir eine Zerlegung von I durch

$$t_i = t_0 + i\frac{a}{k}, \quad 1 \le i \le k ,$$

und Funktionen $y_k \in C(I; \mathbb{R}^n)$ sukzessive auf $(t_i, t_{i+1}]$ durch

$$y_k(t) = y_0 , \quad t \in [t_0, t_1] , \tag{11.2}$$

$$y_k(t) = y_k(t_i) + \int_{t_i}^{t} f(s, y_k(s - \frac{a}{k}))\, ds , \quad t_i < t \le t_{i+1} , \quad 1 \le i < k . \tag{11.3}$$

Es folgt

$$y_k(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} \tilde{f}(s, y_k(s - \frac{a}{k}))\, ds , \quad t \in I , \tag{11.4}$$

mit

$$\tilde{f}(s, \eta) = \begin{cases} f(s, \eta) , & s > t_1 , \\ 0 , & s \le t_1 . \end{cases}$$

Sei (f ist beschränkt)

$$M = \sup_{(t,\eta) \in D} \|f(t, \eta)\|_\infty < \infty .$$

Es gilt für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $t, \tau \in I$ mit $\tau \le t$

$$\|y_k(t) - y_k(\tau)\|_\infty \le \int_{\tau}^{t} \|\tilde{f}(s, y_k(s - \frac{a}{k}))\|_\infty\, ds \le M|t - \tau| . \tag{11.5}$$

Da M nicht von k abhängt, ist die Menge $\{y_k : k \in \mathbb{N}\}$ gleichgradig stetig und wegen

$$\|y_k\|_\infty \le \|y_0\|_\infty + Ma$$

beschränkt in $C(I; \mathbb{R}^n)$. Aus dem Satz von Arzela-Ascoli (siehe Analysis 2) folgt, dass es eine Teilfolge $(y_{k_m})_{m \in \mathbb{N}}$ gibt, die gleichmäßig gegen ein $y \in C(I; \mathbb{R}^n)$ konvergiert. Es gilt nun

$$\lim_{m \to \infty} y_{k_m}(s - \frac{a}{k_m}) = y(s) \tag{11.6}$$

gleichmäßig für $s \in I$, da

$$\|y_{k_m}(s - \frac{a}{k_m}) - y(s)\|_\infty \le \|y_{k_m}(s - \frac{a}{k_m}) - y_{k_m}(s)\|_\infty + \|y_{k_m}(s) - y(s)\|_\infty$$
$$\le M\frac{a}{k_m} + \|y_{k_m} - y\|_\infty .$$

Es folgt

$$\lim_{m\to\infty} \tilde{f}(s, y_{k_m}(s - \frac{a}{k_m})) = f(s, y(s)) \tag{11.7}$$

punktweise für alle $s \in I$. Aus dem Satz von Lebesgue folgt, da f beschränkt ist, dass wir in (11.4) für die Teilfolge (y_{k_m}) zum Grenzwert $m \to \infty$ übergehen können, also gilt

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds\,, \quad t \in I\,, \tag{11.8}$$

und y ist Lösung von (11.1) auf I. □

Man kann auch im Falle nur stetiger rechter Seiten beweisen, dass die Lösung auf ein maximales Existenzintervall fortgesetzt werden kann.

Die Eindeutigkeit der Lösung ist nicht garantiert, wie das Beispiel

$$y' = \sqrt{|y|}\,, \quad y(0) = 0\,,$$

zeigt. Es gibt aber schwächere Bedingungen als die Lipschitz-Stetigkeit, die ebenfalls die Eindeutigkeit liefern.

12 Lineare Systeme

Wir betrachten ein lineares System gewöhnlicher Differentialgleichungen der Form

$$y' = A(t)y + b(t) \tag{12.1}$$

wobei $A(t) \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ und $b(t) \in \mathbb{R}^n$ ist für jedes t, und das zugehörige Anfangswertproblem

$$y' = A(t)y + b(t)\,, \quad y(t_0) = y_0\,. \tag{12.2}$$

Die Differentialgleichung (12.1) heißt inhomogen; falls $b = 0$, so heißt sie homogen. Falls A nicht von t abhängt, so sprechen wir von konstanten Koeffizienten, andernfalls von variablen Koeffizienten (oder zeitabhängigen Koeffizienten, falls t die Bedeutung der Zeit hat).

Satz 12.1 *Sei I Intervall in $\mathbb{R}$, seien $A : I \to \mathbb{R}^{(n,n)}$ und $b : I \to \mathbb{R}^n$ stetig, $t_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Dann hat das AWP (12.2) eine eindeutige Lösung $y \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$.*

Beweis: Die durch

$$f(t, y) = A(t)y + b(t)$$

definierte Funktion $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist stetig und bezüglich y linear, also bezüglich y stetig differenzierbar. Ist I kompakt, so ist wegen

$$\|f(t, y) - f(t, z)\|_\infty = \|A(t)(y - z)\|_\infty \le \|A(t)\|\,\|y - z\|_\infty \le L\|y - z\|_\infty\,,$$

wobei

$$L := \sup_{t\in I} \|A(t)\|\,,$$

die Funktion f Lipschitz-stetig auf $D = I \times \mathbb{R}^n$. Die Behauptung folgt nun aus dem Satz von Picard-Lindelöf. Wegen

$$I = \bigcup_{t\in I} [t_0, t]$$

ist das maximale Existenzintervall der Lösung gleich I. □

Der am Ende von Kapitel 9 dargestellte Satz für unstetige rechte Seiten lässt sich anwenden, wenn gilt

$A : I \to \mathbb{R}^{(n,n)}$ und $b : I \to \mathbb{R}^n$ sind messbar und beschränkt.

Dann sind nämlich die Voraussetzungen des Satzes, insbesondere die Bedingung von Carathéodory, erfüllt. Ist I nicht kompakt, so genügt es, dass A und b messbar und auf jedem kompakten Teilintervall von I beschränkt sind.

Im Folgenden setzen wir generell voraus:

$$A : I \to \mathbb{R}^{(n,n)}\,, \quad b : I \to \mathbb{R}^n \quad \text{sind stetig.} \tag{12.3}$$

Wir bezeichnen mit

$$y(t; t_0, y_0) \tag{12.4}$$

den Wert $y(t)$ der Lösung $y : I \to \mathbb{R}^n$ des AWP (12.2), und mit

$$\varphi_{t,t_0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \tag{12.5}$$

die durch

$$\varphi_{t,t_0}(\eta) = y(t; t_0, \eta) \tag{12.6}$$

definierte Abbildung. Beispiel: Für

$$y' = Ay\,, \quad y(t_0) = y_0\,,$$

ist

$$y(t; t_0, \eta) = \varphi_{t,t_0}(\eta) = e^{(t-t_0)A}\eta\,.$$

Lemma 12.2 *Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall. Dann gilt für alle $r, s, t \in I$*

$$\varphi_{r,s} \circ \varphi_{s,t} = \varphi_{r,t}\,, \quad \varphi_{t,t} = id\,, \quad \varphi_{t,s} = \varphi_{s,t}^{-1}\,. \tag{12.7}$$

Insbesondere ist die Abbildung $\varphi_{s,t}$ bijektiv.

Beweis: Die zweite Gleichung ist trivial, die dritte folgt aus den ersten beiden. Wir beweisen die erste Gleichung für den Fall $t \le s \le r$, die anderen Fälle werden analog bewiesen oder darauf zurückgeführt. Aus der Eindeutigkeit der Lösung des AWP folgt für alle $\eta \in \mathbb{R}^n$

$$y(r; t, \eta) = y(r; s, y(s; t, \eta))\,,$$

also

$$\varphi_{r,t}(\eta) = y(r; s, \varphi_{s,t}(\eta)) = \varphi_{r,s}(\varphi_{s,t}(\eta))\,.$$

□

Wir betrachten nun das homogene Problem

$$y' = A(t)y\,, \quad y(t_0) = y_0\,. \tag{12.8}$$

Satz 12.3 *Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $s, t \in I$. Die Abbildung $\varphi_{s,t} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist ein linearer Isomorphismus.*

Beweis: Die Bijektivität ist in Lemma 12.2 bewiesen. Seien $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}^n$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, sei

$$y_i(\tau) = y(\tau; t, \eta_i)\,, \quad i = 1, 2\,.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)'(\tau) &= \alpha_1 y_1'(\tau) + \alpha_2 y_2'(\tau) = \alpha_1 A(\tau) y_1(\tau) + \alpha_2 A(\tau) y_2(\tau)\\ &= A(\tau)(\alpha_1 y_1(\tau) + \alpha_2 y_2(\tau))\,,\end{aligned}$$

also

$$\varphi_{s,t}(\alpha_1\eta_1 + \alpha_2\eta_2) = \alpha_1\varphi_{s,t}(\eta_1) + \alpha_2\varphi_{s,t}(\eta_2)\,.$$

□

Definition 12.4 (Übergangsmatrix)
Die dem linearen Isomorphismus $\varphi_{s,t} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bezüglich der kanonischen Basis zugeordnete $n \times n$-Matrix heißt die Übergangsmatrix des homogenen Systems $y' = A(t)y$. Wir bezeichnen sie mit

$$\Phi(s,t)\,. \tag{12.9}$$

□

Aus Lemma 12.2 folgt unmittelbar

$$\Phi(r,s)\Phi(s,t) = \Phi(r,t)\,, \quad \Phi(t,t) = I\,, \quad \Phi(t,s) = \Phi(s,t)^{-1} \tag{12.10}$$

für alle $r, s, t \in I$. Ist e_i der i-te Einheitsvektor im $\mathbb{R}^n$, so ist

$$y(t; t_0, e_i) = \varphi_{t,t_0}(e_i) = \Phi(t, t_0)e_i\,,$$

das heißt, in der i-ten Spalte der Übergangsmatrix $\Phi(t, t_0)$ steht die Lösung des AWP

$$y' = A(t)y\,, \quad y(t_0) = e_i\,.$$

Beispiel:

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} y\,, \quad \Phi(t,0) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten nun den Lösungsraum Y des homogenen linearen Systems

$$Y = \{y : \; y \in C(I;\mathbb{R}^n),\; y \text{ ist Lösung von (12.8) in } I\}\,. \tag{12.11}$$

Satz 12.5 *Sei $I \subset \mathbb{R}$. Dann ist Y ein Unterraum von $C(I;\mathbb{R}^n)$ mit $\dim(Y) = n$. Für jedes $t_0 \in I$ ist die durch*

$$(\Psi_{t_0}(\eta))(t) = \varphi_{t,t_0}(\eta) = y(t; t_0, \eta) \tag{12.12}$$

definierte Abbildung $\Psi_{t_0} : \mathbb{R}^n \to Y$ ein linearer Isomorphismus, mit $\Psi_{t_0}^{-1}(y) = y(t_0)$ für alle $y \in Y$.

Beweis: Nach Definition von Y gilt $\Psi_{t_0}(\mathbb{R}^n) = Y$. Es folgt weiter für $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}(\Psi_{t_0}(\alpha_1\eta_1 + \alpha_2\eta_2))(t) &= \varphi_{t,t_0}(\alpha_1\eta_1 + \alpha_2\eta_2))(t) = \alpha_1\varphi_{t,t_0}(\eta_1) + \alpha_2\varphi_{t,t_0}(\eta_2) \\ &= \alpha_1(\Psi_{t_0}(\eta_1))(t) + \alpha_2(\Psi_{t_0}(\eta_2))(t)\,,\end{aligned}$$

also ist Ψ_{t_0} linear. Da φ_{t,t_0} injektiv ist für alle t, ist auch Ψ_{t_0} injektiv. □

Für das homogene lineare System gilt also, dass jede Linearkombination von Lösungen wieder eine Lösung ist.

Definition 12.6 (Fundamentalmatrix)
Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, sei $\{y_1, \dots, y_n\}$ eine Basis des Lösungsraums Y des homogenen Systems $y' = A(t)y$. Die Matrixfunktion $\Phi : I \to \mathbb{R}^{(n,n)}$, deren i-te Spalte aus der Basisfunktion $y_i : I \to \mathbb{R}^n$ besteht, heißt eine Fundamentalmatrix des homogenen Systems $y' = A(t)y$. □

Im Gegensatz zur Übergangsmatrix $\Phi(t,s)$, welche eindeutig bestimmt ist, entspricht jeder Basis des Lösungsraums Y eine eigene Fundamentalmatrix.

Lemma 12.7 *Sei $\Phi : I \to \mathbb{R}^{(n,n)}$ eine Fundamentalmatrix des homogenen linearen Systems. Dann gilt für die Übergangsmatrix*

$$\Phi(t,t_0) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}, \quad t, t_0 \in I. \tag{12.13}$$

Beweis: Ist $\{y_1, \dots, y_n\}$ Basis von Y, so sind die Vektoren $y_1(t_0), \dots, y_n(t_0)$ nach Satz 12.5 linear unabhängig, also ist $\Phi(t_0)$ invertierbar für alle $t_0 \in I$. Es gilt weiter $y_i'(t) = A(t)y_i(t)$ für alle i, also

$$\Phi'(t) = A(t)\Phi(t). \tag{12.14}$$

Die durch

$$y(t) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}y_0, \quad y_0 \in \mathbb{R}^n$$

definierte Funktion löst wegen

$$y'(t) = A(t)\Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}y_0 = A(t)y(t), \quad y(t_0) = y_0,$$

das homogene AWP, es muss also gelten

$$\Phi(t,t_0)y_0 = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}y_0.$$

Da y_0 beliebig ist, folgt (12.13). □

Folgerung 12.8 *Für jedes $t_0 \in I$ ist die Matrixfunktion $t \mapsto \Phi(t,t_0)$ die eindeutige Lösung des Matrix-Anfangswertproblems*

$$X' = A(t)X, \quad X(t_0) = I. \tag{12.15}$$

Beweis: Aus Lemma 12.7 folgt

$$\partial_t\Phi(t,t_0) = \Phi'(t)\Phi(t_0)^{-1} = A(t)\Phi(t)\Phi(t_0)^{-1} = A(t)\Phi(t,t_0).$$

□

Folgerung 12.9 *Diese Folgerung ist vorläufig aus dem Verkehr gezogen.*

Wir betrachten nun das inhomogene lineare System

$$y' = A(t)y + b(t), \quad y(t_0) = y_0. \tag{12.16}$$

Satz 12.10 *Die eindeutige Lösung von (12.16) ist gegeben durch*

$$y(t) = \Phi(t,t_0)y_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,s)b(s)\,ds. \tag{12.17}$$

Beweis: Wir erhalten aus Folgerung 12.8

$$\begin{aligned} y'(t) &= \partial_t \Phi(t,t_0)y_0 + \int_{t_0}^t \partial_t \Phi(t,s)b(s)\,ds + \Phi(t,t)b(t) \\ &= A(t)\Phi(t,t_0)y_0 + \int_{t_0}^t A(t)\Phi(t,s)b(s)\,ds + b(t) \\ &= A(t)y(t) + b(t)\,, \end{aligned}$$

sowie $y(t_0) = y_0$. □

Wir betrachten nun die lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung,

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(t) y^{(i)}(t) = b(t) \tag{12.18}$$

auf einem Intervall I, wobei $a_i : I \to \mathbb{R}$ und $b : I \to \mathbb{R}$ stetig sind. Ist $b = 0$, so heißt (12.18) inhomogen, andernfalls homogen. Ist $a_n = 1$ (diese Situation läßt sich durch Division durch a_n immer herstellen, wenn $a_n(t) \neq 0$ für alle $t \in I$), so läßt sich (12.18) umschreiben in ein System 1. Ordnung

$$y' = A(t)y + \tilde{b}(t)\,, \tag{12.19}$$

wobei der Vektor $y = (y_1, \dots, y_n)$ in (12.19) den Ableitungen $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ in (12.18) entspricht, und

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & \cdots & \cdots & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix}, \quad \tilde{b}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}. \tag{12.20}$$

Das zur linearen Gleichung

$$y^{(n)}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t) y^{(i)}(t) = b(t) \tag{12.21}$$

zugehörige Anfangswertproblem besteht aus (12.21) und Anfangswerten

$$y(t_0) = y_0\,, \quad y'(t_0) = y_0'\,, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}\,. \tag{12.22}$$

Satz 12.11 *Das Anfangswertproblem (12.21), (12.22) ist eindeutig lösbar, die Lösungen bilden einen n-dimensionalen Unterraum von $C(I;\mathbb{R})$.*

Beweis: Folgt aus Satz 12.1, angewendet auf (12.19), (12.20) mit den Anfangswerten aus (12.22), siehe Übungsaufgabe. □

Das Reduktionsverfahren von d'Alembert. Sei $\hat{y} : I \to \mathbb{R}$ eine spezielle Lösung der homogenen Gleichung

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(t) y^{(i)}(t) = 0\,. \tag{12.23}$$

Wir versuchen, weitere Lösungen der Form

$$y(t) = z(t)\hat{y}(t) \tag{12.24}$$

zu finden. Setzen wir (12.24) in (12.23) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=0}^{n} a_i(t) \frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}t^i}(z(t)\hat{y}(t)) = \sum_{i=0}^{n} a_i(t) \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} z^{(j)}(t)\hat{y}^{(i-j)}(t) \\ &= \sum_{j=0}^{n} z^{(j)}(t) \sum_{i=j}^{n} \binom{i}{j} a_i(t)\hat{y}^{(i-j)}(t) . \end{aligned}$$

Wir definieren

$$b_j(t) = \sum_{i=j}^{n} \binom{i}{j} a_i(t)\hat{y}^{(i-j)}(t) , \tag{12.25}$$

so ergibt sich $b_0 = 0$, da $\hat{y}$ eine Lösung von (12.18) ist, also

$$\sum_{j=1}^{n} b_j(t) z^{(j)}(t) = 0 .$$

Führen wir w als neue unbekannte Funktion ein durch

$$w = z' ,$$

so erhalten wir aus dem Ansatz (12.24) die Differentialgleichung

$$\sum_{j=0}^{n-1} b_{j+1}(t) w^{(j)}(t) = 0 . \tag{12.26}$$

Auf diese Weise kann man die Bestimmung von n linear unabhängigen Lösungen von (12.23) zurückführen auf die Bestimmung jeweils einer Lösung von (12.23) und von den sich nach dem eben beschriebenen Verfahren sukzessive ergebenden Differentialgleichungen niedrigerer Ordnung. Es gilt nämlich der folgende Satz.

Satz 12.12 *Sei $\hat{y} : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung von (12.23) mit $\hat{y}(t) \neq 0$ für alle $t \in I$, sei $\{w_1, \ldots, w_{n-1}\}$ ein System von $n-1$ linear unabhängigen Lösungen der Gleichung (12.26). Dann ist*

$$\hat{y}, \hat{y} \cdot z_1, \ldots, \hat{y} \cdot z_{n-1}$$

ein System von n linear unabhängigen Lösungen von (12.23), wobei z_i irgendeine Stammfunktion von w_i ist.

Beweis: Die zu (12.26) führende Rechnung zeigt, dass die Funktionen $\hat{y}z_i$ Lösungen von (12.23) sind. Seien nun $c_i \in \mathbb{R}$,

$$c_0\hat{y} + \sum_{i=1}^{n-1} c_i\hat{y}z_i = 0 .$$

Division durch $\hat{y}$ und Differenzieren liefert

$$0 = \sum_{i=1}^{n-1} c_i z_i' = \sum_{i=1}^{n-1} c_i w_i \,,$$

also folgt $c_i = 0$ für alle $i \geq 1$ und damit auch $c_0 = 0$. $\square$

Als Anwendung des d'Alembertschen Reduktionsverfahrens betrachten wir die Legendre-Gleichung der Ordnung 1

$$(1-t^2)y'' - 2ty' + 2y = 0\,. \tag{12.27}$$

Wir erhalten eine spezielle Lösung aus dem Ansatz

$$y(t) = at^2 + bt + c\,.$$

Einsetzen in (12.27) ergibt

$$(1-t^2)2a - 2t(2at+b) + 2(at^2+bt+c) = 0\,,$$

und Koeffizientenvergleich liefert $a = c = 0$, b beliebig, also ist

$$\hat{y}(t) = t \tag{12.28}$$

eine Lösung von (12.27). Die Formel für b_j in (12.25) werden zu

$$b_1(t) = a_1(t)\hat{y}(t) + 2a_2(t)\hat{y}'(t)\,, \tag{12.29}$$
$$b_2(t) = a_2(t)\hat{y}(t)\,. \tag{12.30}$$

Als Differentialgleichung für z ergibt sich

$$0 = b_2(t)z''(t) + b_1(t)z'(t) = (1-t^2)tz''(t) + (2-4t^2)z'(t)\,.$$

Für $w = z'$ erhalten wir also die lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$w' + g(t)w = 0\,, \quad g(t) = \frac{2-4t^2}{t(1-t^2)}\,. \tag{12.31}$$

Diese kann mit Trennung der Variablen gelöst werden.

Die Eulersche Differentialgleichung. Sie hat die Form

$$t^2y'' + \alpha ty' + \beta y = 0\,, \quad \alpha,\beta \in \mathbb{R}\,. \tag{12.32}$$

Wir suchen nach expliziten Lösungen mit dem Ansatz

$$y(t) = t^r\,, \quad \text{für } t > 0. \tag{12.33}$$

Einsetzen in (12.32) ergibt

$$0 = t^2r(r-1)t^{r-2} + \alpha trt^{r-1} + \beta t^r = [r(r-1) + \alpha r + \beta]t^r\,,$$

also ist $y(t) = t^r$ eine Lösung von (12.32) genau dann, wenn r Lösung der quadratischen Gleichung

$$F(r) = r(r-1) + \alpha r + \beta = r^2 + (\alpha-1)r + \beta = 0\,. \tag{12.34}$$

Diese Gleichung heißt **Indexgleichung** und hat die Lösungen

$$r_{1,2} = -\frac{\alpha - 1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\alpha - 1)^2 - 4\beta}\,. \tag{12.35}$$

Fall 1: Es ist $(\alpha - 1)^2 - 4\beta > 0$. Dann sind $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, und eine Basis des Lösungsraums in $C(I; \mathbb{R})$ für $I \subset (0, \infty)$ ist gegeben durch

$$\{t^{r_1}, t^{r_2}\}\,. \tag{12.36}$$

Fall 2: Es ist $(\alpha - 1)^2 - 4\beta = 0$. Dann ist

$$r = -\frac{\alpha - 1}{2}$$

doppelte Nullstelle der Indexgleichung. Neben der Lösung $y(t) = t^r$ erhält man durch Anwendung des d'Alembertschen Reduktionsverfahrens die Lösung

$$y(t) = t^r \ln t\,,$$

und eine Basis des Lösungsraums ist gegeben durch

$$\{t^r, t^r \ln t\}\,. \tag{12.37}$$

Fall 3: Es ist $(\alpha - 1)^2 - 4\beta < 0$. Hier sind r_1, r_2 konjugiert komplex, wir setzen $r_1 = r$, $r_2 = \overline{r}$. Im Komplexen erhalten wir die Basis

$$\{e^{r \ln t}, e^{\overline{r} \ln t}\}\,,$$

und mit $r = a + ib$ gilt

$$e^{r \ln t} = e^{a \ln t} e^{ib \ln t} = t^a(\cos(b \ln t) + i \sin(b \ln t))\,.$$

Hieraus erhalten wir für $I \subset (0, \infty)$ die reelle Basis

$$\{t^a \cos(b \ln t), t^a \sin(b \ln t)\}\,. \tag{12.38}$$

Man kann die Eulersche Differentialgleichung (12.32) in ein System umschreiben ($y_1 = y$, $y_2 = ty'$),

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \frac{1}{t} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta & 1 - \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\,. \tag{12.39}$$

Dieses System ist ein Spezialfall von

$$y' = \frac{1}{t} A y\,, \quad A \in \mathbb{R}^{(n,n)}\,. \tag{12.40}$$

Es stellt sich heraus, dass

$$t^A := e^{A \ln t}$$

eine Fundamentalmatrix von (12.40) ist.

Der Potenzreihenansatz. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$t^2 y'' + t p_1(t) y' + p_0(t) y = 0\,, \tag{12.41}$$

wobei p_1, p_0 Funktionen sind, die sich als Potenzreihe darstellen lassen,

$$p_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k t^k \,, \quad p_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k t^k \,. \tag{12.42}$$

Wir suchen eine Lösung der Form

$$y(t) = t^r \sum_{j=0}^{\infty} \eta_j t^j = \sum_{j=0}^{\infty} \eta_j t^{j+r} \,. \tag{12.43}$$

Zu bestimmen sind $r \in \mathbb{R}$ und die Koeffizienten η_j. Wir setzen zunächst ein Monom t^λ in (12.41) ein und erhalten

$$\begin{aligned} 0 &= t^2 (t^\lambda)'' + t p_1(t) (t^\lambda)' + p_0(t) t^\lambda \\ &= \lambda(\lambda-1) t^\lambda + \lambda \left(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k t^k \right) t^\lambda + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k t^k \right) t^\lambda \\ &= F(\lambda) t^\lambda + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \lambda + \beta_k) t^{\lambda+k} \,, \end{aligned}$$

wobei

$$F(\lambda) = \lambda(\lambda-1) + \alpha_0 \lambda + \beta_0 \,. \tag{12.44}$$

Setzen wir nun $\eta_j t^{r+j}$ statt t^λ ein und summieren wir über j, so erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= t^2 \left(\sum_{j=0}^{\infty} \eta_j t^{r+j} \right)'' + t p_1(t) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \eta_j t^{r+j} \right)' + p_0(t) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \eta_j t^{r+j} \right) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \eta_j \left[F(r+j) t^{r+j} + \sum_{k=1}^{\infty} (\beta_k + \alpha_k (r+j)) t^{r+j+k} \right] \\ &= t^r \cdot \sum_{j=0}^{\infty} t^j \left[\eta_j F(r+j) + \sum_{k=1}^{j} \eta_{j-k} (\beta_k + \alpha_k (r+j-k)) \right] \,. \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich

$$\eta_0 F(r) = 0 \,, \tag{12.45}$$

$$\eta_j F(r+j) = - \sum_{k=1}^{j} \eta_{j-k} (\beta_k + \alpha_k (r+j-k)) \,. \tag{12.46}$$

Falls gilt

$$F(r) = 0 \,, \quad F(r+j) \neq 0 \quad \text{für alle } j \in \mathbb{N}, \tag{12.47}$$

so werden durch (12.45), (12.46) Rekursionsformeln für die η_j definiert, wobei $\eta_0 \in \mathbb{R}$ frei gewählt werden kann. Die Gleichung

$$0 = F(r) = r(r-1) + \alpha_0 r + \beta_0 \tag{12.48}$$

heißt Indexgleichung von (12.41).

Wir wenden dieses Ergebnis an auf die Besselsche Differentialgleichung

$$t^2y'' + ty' + (t^2 - \alpha^2)y = 0\,. \tag{12.49}$$

Es ist

$$\begin{gathered}\alpha_0 = 1\,, \quad \alpha_j = 0 \text{ für } j \geq 1, \\ \beta_0 = -\alpha^2\,, \quad \beta_1 = 0\,, \quad \beta_2 = 1\,, \quad \beta_j = 0 \text{ für } j \geq 3.\end{gathered}$$

Die Indexgleichung ist

$$0 = F(r) = r(r-1) + \alpha_0 r + \beta_0 = r^2 - \alpha^2\,,$$

mit den Lösungen $r = \pm\alpha$. Für $\alpha = 0$ beispielsweise ist $r = 0$ eine doppelte Nullstelle, und die Rekursionsformel (12.45), (12.46) ergeben

$$\eta_1 = 0\,, \quad \eta_j = -\frac{1}{F(r+j)}\eta_{j-2} = -\frac{1}{j^2}\eta_{j-2} \text{ für } j \geq 2\,.$$

Hieraus erhalten wir eine Lösung

$$y(t) = \eta_0 \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{t^{2j}}{2^2 \cdots (2j)^2}\,. \tag{12.50}$$

Die Reihe ist konvergent für alle t, wie man z.B. mit dem Quotientenkriterium beweist. Zur Bestimmung einer zweiten Lösung und der Behandlung des Falles $\alpha \neq 0$ siehe das Buch von Walter, S. 207ff (in der 5. Auflage).

13 Die Fourier-Transformation

Für Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ wollen wir die Fourier-Transformierte $\hat{f}$ definieren durch

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle x,\xi\rangle}\, dx\,. \tag{13.1}$$

Hierbei ist

$$\langle x, \xi\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \xi_j$$

das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$. Aus der Analysis 3 kennen wir die L^p-Räume für reellwertige Funktionen. Wir definieren

$$\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}) = \{f \,|\, f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C},\ \mathrm{Re}\, f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}),\ \mathrm{Im}\, f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})\} \tag{13.2}$$

und schreiben in diesem Kapitel $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ statt $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$. Dasselbe gelte für $L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ und $C(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$. Die Räume $L^p(\mathbb{R}^n)$ sind dann ebenfalls Banachräume, der Raum $L^2(\mathbb{R}^n)$ ist ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}\, dx\,. \tag{13.3}$$

Satz 13.1 *Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Dann wird durch (13.1) eine stetige und beschränkte Funktion $\hat{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ definiert mit $\|\hat{f}\|_\infty \le (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\|f\|_1$.*

Beweis: Wegen

$$|f(x)e^{-i\langle x,\xi\rangle}| = |f(x)| \tag{13.4}$$

ist der Integrand in (13.1) integrierbar, also ist $\hat{f}(\xi)$ wohldefiniert für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$. Da der Integrand stetig ist und wegen (13.4) gleichmäßig in ξ gegen eine integrierbare Funktion abgeschätzt werden kann, folgt die Stetigkeit von $\hat{f}$ aus Satz 4.22, Analysis 3. Ebenso folgt

$$|\hat{f}(\xi)| \le (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \|f\|_1\,.$$

□

Wir setzen

$$CB(\mathbb{R}^n) = \{f :\ f \in C(\mathbb{R}^n),\ f \text{ ist beschränkt}\}\,, \tag{13.5}$$

Versehen mit der Supremumsnorm ist $CB(\mathbb{R}^n)$ ein Banachraum, da er ein abgeschlossener Teilraum des Banachraums $B(\mathbb{R}^n;\mathbb{K})$ (Raum der beschränkten Funktionen auf $\mathbb{R}^n$) ist, siehe Analysis 2.

Satz 13.2 (Fourier-Transformation)
Durch

$$\mathcal{F}(f) = \hat{f}\,, \quad \hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle x,\xi\rangle}\, dx\,, \tag{13.6}$$

wird eine lineare stetige Abbildung $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \to CB(\mathbb{R}^n)$ definiert mit

$$\|\mathcal{F}(f)\|_\infty \le (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \|f\|_1\,. \tag{13.7}$$

Sie heißt Fouriertransformation.

Beweis: Sind $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ mit $f = g$ fast überall, so gilt $\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(g)$. Wohldefiniertheit und (13.7) folgen nun aus Satz 13.1, Linearität aus der Definition, und (13.7) impliziert die Stetigkeit nach dem Kriterium aus Satz 4.23, Analysis 2. $\square$

Wir berechnen $\mathcal{F}(f)$ für

$$f(x) = e^{-\frac{\langle x,x\rangle}{2}} = e^{-\frac{\|x\|_2^2}{2}}.$$

Lemma 13.3 *Für*

$$f(x) = e^{-\frac{\langle x,x\rangle}{2}} \tag{13.8}$$

gilt

$$\mathcal{F}(f) = f\,. \tag{13.9}$$

Beweis: Wir betrachten zunächst den eindimensionalen Fall $n = 1$. Es ist

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = 1\,, \tag{13.10}$$

da (Fubini und Beispiel 6.15, Analysis 3)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \sqrt{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, dt\,, \quad \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, dt\right)^2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x_1^2+x_2^2)}\, d(x_1,x_2) = \pi\,.$$

Wir definieren

$$g(x,\xi) = e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-ix\xi}\,, \quad g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}.$$

Es gilt

$$\partial_\xi g(x,\xi) = -ixe^{-\frac{x^2}{2}} e^{-ix\xi}\,, \quad |\partial_\xi g(x,\xi)| \le |x| e^{-\frac{x^2}{2}} =: h(x)\,.$$

Da $h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, folgt

$$\hat{f}'(\xi) = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}} e^{-ix\xi}\, dx \tag{13.11}$$

nach Satz 4.23, Analysis 3. Partielle Integration ergibt für jedes $R > 0$

$$\int_{-R}^{R} xe^{-\frac{x^2}{2}} e^{-ix\xi}\, dx = -e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-ix\xi}\Big|_{-R}^{R} - i\xi \int_{-R}^{R} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-ix\xi}\, dx\,,$$

also (Grenzübergang $R \to \infty$)

$$\hat{f}'(\xi) = -\frac{\xi}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-ix\xi}\, dx = -\xi \hat{f}(\xi)\,. \tag{13.12}$$

Die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems (13.10), (13.12) ist aber gegeben durch

$$\hat{f}(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}}\,, \tag{13.13}$$

also ist die Behauptung für $n = 1$ bewiesen. Für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gilt mit Fubini

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\langle x,x\rangle}{2}} e^{-i\langle x,\xi\rangle}\, dx = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\sum_j x_j^2}{2}} e^{-i\sum_j x_j\xi_j}\, dx \\
&= \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x_j^2}{2}} e^{-ix_j\xi_j}\, dx_j = \prod_{j=1}^{n} e^{-\frac{\xi_j^2}{2}} \\
&= e^{-\frac{\langle \xi,\xi\rangle}{2}}\,.
\end{aligned}$$

$\square$

Lemma 13.4 *Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$. Dann ist die Fourier-Transformierte für*

$$g(x) = f(\lambda x) \tag{13.14}$$

gegeben durch

$$\hat{g}(\xi) = |\lambda|^{-n} \hat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right) . \tag{13.15}$$

Beweis: Mit der Substitutionsregel für die mehrdimensionale Integration folgt

$$\hat{g}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\lambda x) e^{-i\langle x,\xi\rangle}\, dx = |\lambda|^{-n} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-i\left\langle \frac{y}{\lambda},\xi\right\rangle}\, dy = |\lambda|^{-n} \hat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right) .$$

□

Sei

$$f(x) = 1_{[-1,1]}(x) = \begin{cases} 1\,, & |x| \leq 1 \\ 0\,, & \text{sonst} \end{cases} , \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} . \tag{13.16}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{-ix\xi}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-ix\xi}}{-i\xi}\bigg|_{x=-1}^{x=1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{i\xi} - e^{-i\xi}}{i\xi} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \xi}{\xi} . \end{aligned} \tag{13.17}$$

In diesem Fall ist $\hat{f}$ nicht integrierbar, das heißt, $\hat{f} \notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. (Es nützt nichts, dass f kompakten Träger hat.)

Als weiteres Beispiel betrachten wir

$$f(x) = e^{-|x|} , \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} . \tag{13.18}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} e^{-ix\xi}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-x} (e^{-ix\xi} + e^{ix\xi})\, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{R\to\infty} \left[\frac{e^{-x(1+i\xi)}}{-1-i\xi} + \frac{e^{-x(1-i\xi)}}{-1+i\xi} \right]_{x=0}^{x=R} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+\xi^2} . \end{aligned}$$

Satz 13.5 *Seien $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Dann gelten für $\hat{f} = \mathcal{F}(f)$ und $\hat{g} = \mathcal{F}(g)$ die folgenden Aussagen:*

(i) Ist $a \in \mathbb{R}^n$ und $T_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die Translation $T_a(x) = x + a$, so gilt für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\widehat{T_a f}(\xi) = \hat{f}(\xi) e^{i\langle a,\xi\rangle} . \tag{13.19}$$

(ii) Für die Faltung gilt

$$\widehat{f * g} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \hat{f} \hat{g} \,. \tag{13.20}$$

(iii) Ist $f \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ (das heißt, f ist stetig differenzierbar und hat kompakten Träger), so gilt für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$, $1 \leq k \leq n$,

$$\widehat{\partial_k f}(\xi) = i\xi_k \hat{f}(\xi) \,. \tag{13.21}$$

(iv) Ist die Abbildung $x \mapsto x_k f$ integrierbar, so ist $\hat{f}$ stetig partiell nach ξ_k differenzierbar, und

$$\widehat{x_k f} = i\partial_k \hat{f} \,. \tag{13.22}$$

(v) Es gilt $\hat{f} g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, $f \hat{g} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, und

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x) g(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \hat{g}(x) \, dx \,. \tag{13.23}$$

Beweis: (i) Es ist

$$\widehat{T_a f}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x+a) e^{-i\langle x,\xi\rangle} \, dx = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-i\langle y-a,\xi\rangle} \, dy = \hat{f}(\xi) e^{i\langle a,\xi\rangle} \,.$$

(ii) Zunächst ist $f * g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ nach Satz 6.4, Analysis 3. Mit Fubini folgt

$$\begin{aligned}
\widehat{f * g}(\xi) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y) \, dy \right) e^{-i\langle x,\xi\rangle} \, dx \\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x-y) e^{-i\langle x-y,\xi\rangle} \, dx \right) f(y) e^{-i\langle y,\xi\rangle} \, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(\xi) f(y) e^{-i\langle y,\xi\rangle} \, dy = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi) \,.
\end{aligned}$$

(iii) Die Formel für partielle Integration (Satz 1.5) liefert

$$\begin{aligned}
(2\pi)^{\frac{n}{2}} \widehat{\partial_k f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} \partial_k f(x) e^{-i\langle x,\xi\rangle} \, dx = -\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \partial_k \left(e^{-i\langle x,\xi\rangle} \right) \, dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n} f(x) (-i\xi_k) e^{-i\langle x,\xi\rangle} \, dx = (2\pi)^{\frac{n}{2}} i\xi_k \hat{f}(\xi) \,.
\end{aligned}$$

(iv) Es gilt

$$\widehat{x_k f}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} x_k f(x) e^{-i\langle x,\xi\rangle} \, dx = i(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \partial_{\xi_k} e^{-i\langle x,\xi\rangle} \, dx = i\partial_k \hat{f}(\xi) \,.$$

Das Vertauschen des Integrals mit der partiellen Ableitung ist möglich nach Satz 4.23, Analysis 3, da wegen

$$|x_k f(x) e^{-i\langle x,\xi\rangle}| \leq |x_k f(x)|$$

der Integrand gleichmäßig in ξ durch eine integrierbare Funktion beschränkt ist.
(v) Da $\hat{f}, \hat{g} \in CB(\mathbb{R}^n)$, sind $\hat{f}g$ und $f\hat{g}$ integrierbar, und mit Fubini folgt

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(x)\,dx &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(y)e^{-i\langle y,x\rangle}\,dy\right) dx \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i\langle y,x\rangle}\,dx\right) g(y)\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(y)g(y)\,dy\,.\end{aligned}$$

□

Sei $f = 1_{[-1,1]}$, $g = f * f$. Dann ist (Bild)

$$g(x) = \max\{0, 2 - |x|\}$$

und nach (ii) und (13.17)

$$\hat{g}(\xi) = \sqrt{2\pi}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin\xi}{\xi}\right)^2 = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin^2\xi}{\xi^2}\,.$$

Folgerung 13.6 *Sei $k \in \mathbb{N}$, $f \in C_0^k(\mathbb{R}^n)$, sei α ein Multiindex mit $|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j \le k$. Dann gilt*

$$\widehat{\partial^\alpha f}(\xi) = i^{|\alpha|}\xi^\alpha \hat{f}(\xi) \tag{13.24}$$

Beweis: Wiederholte Anwendung von Satz 13.5(iii). □

Folgerung 13.7 *Sei $k \in \mathbb{N}$, $f \in C_0^k(\mathbb{R}^n)$. Dann gibt es ein $M > 0$ mit*

$$|\hat{f}(\xi)| \le M(1 + \|\xi\|_2)^{-k}\,, \quad \textit{für alle } \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{13.25}$$

Beweis: Aus Folgerung 13.6 erhalten wir für alle Multiindizes α mit $|\alpha| \le k$ und alle $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$|\xi^\alpha \hat{f}(\xi)| = |\widehat{\partial^\alpha f}(\xi)| \le (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\|\partial^\alpha f\|_1\,.$$

Also gibt es ein $M > 0$ mit

$$(1 + \sum_{j=1}^n |\xi_j|)^k |\hat{f}(\xi)| \le M\,, \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Da $\|\xi\|_2 \le \|\xi\|_1$ für alle ξ, folgt die Behauptung. □

Lemma 13.8 (Regularität des Lebesgue-Maßes)
Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ messbar. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ und eine abgeschlossene Menge $F \subset \mathbb{R}^n$ mit $F \subset A \subset U$ und $\lambda^n(U \setminus F) < \varepsilon$.

Beweis: Sei zunächst $\lambda^n(A) < \infty$, sei $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Figuren mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda^n(A_k) \le \lambda^n(A) + \frac{\varepsilon}{4},$$

siehe die Konstruktion im Maßerweiterungssatz. Da jede Figur sich als disjunkte Vereinigung halboffener Intervalle darstellen läßt, können wir o.B.d.A. voraussetzen, dass alle A_k halboffene Intervalle sind. Wir wählen nun offene Intervalle I_k mit $A_k \subset I_k$ und

$$\lambda^n(I_k) \le \lambda^n(A_k) + 2^{-k-2}\varepsilon .$$

Wir setzen

$$U = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k .$$

Dann ist U offen, $A \subset U$ und

$$\lambda^n(U) \le \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^n(I_k) \le \lambda^n(A) + \frac{\varepsilon}{2},$$

also auch

$$\lambda^n(U \setminus A) \le \frac{\varepsilon}{2}. \tag{13.26}$$

Ist $\lambda^n(A) = \infty$, so wählen wir U_k offen mit $\lambda^n(U_k \setminus (A \cap B(0,k)) < 2^{-k-1}\varepsilon$, dann gilt ebenfalls (13.26). Zur Konstruktion von F wählen wir V offen mit $(\mathbb{R}^n \setminus A) \subset V$ und

$$\lambda^n(V \setminus (\mathbb{R}^n \setminus A)) \le \frac{\varepsilon}{2}$$

und setzen $F = \mathbb{R}^n \setminus V$. $\square$

Satz 13.9 *Sei $1 \le p < \infty$, $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $g \in C_0(\mathbb{R}^n)$ mit $\|f - g\|_p \le \varepsilon$.*

Beweis: Sei zunächst $f = 1_A$, $A \subset \mathbb{R}^n$ messbar und beschränkt. Für $\varepsilon > 0$ wählen wir gemäß Satz 13.8 eine kompakte Menge K und eine offene Menge U (die wir o.B.d.A. als beschränkt voraussetzen können) mit $K \subset A \subset U$ und $\lambda^n(U \setminus K) \le \varepsilon^p$. Ist $K = \emptyset$, so ist $\|f\|_p \le \varepsilon$, also $g = 0$ die gesuchte Approximation. Andernfalls gilt

$$d := \mathrm{dist}\,(K, \mathbb{R}^n \setminus U) > 0 .$$

Wir definieren

$$g(x) = \max\{0, 1 - \frac{\mathrm{dist}\,(x,K)}{d}\}, \quad g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}. \tag{13.27}$$

g ist stetig mit $g|K = 1$ und $g|(\mathbb{R}^n \setminus U) = 0$, also $g \in C_0(\mathbb{R}^n)$ und

$$0 \le |1_A - g| \le 1_U - 1_K ,$$

also

$$\|1_A - g\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^n} |1_A - g|^p \, d\lambda^n \le \int_{\mathbb{R}^n} |1_U - 1_K|^p \, d\lambda^n \le \lambda^n(U \setminus K) \le \varepsilon^p .$$

Ist A messbar, aber unbeschränkt, so ist $C = A \cap B(0,R)$ messbar und beschränkt, und $\|1_A - 1_C\|_p \le \varepsilon$ für R hinreichend groß. Wähle $g \in C_0(\mathbb{R}^n)$ mit $\|1_C - g\|_p \le \varepsilon$, dann ist $\|1_A - g\|_p \le 2\varepsilon$. Sei nun f einfache Funktion,

$$f = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j 1_{A_j}\,, \quad \alpha_j \in \mathbb{R}, \;\; A_j \text{ messbar.}$$

Sei $g_j \in C_0(\mathbb{R}^n)$ mit $\|1_{A_j} - g_j\|_p \le \varepsilon$, dann gilt für $g = \sum_{j=1}^N \alpha_j g_j$, dass $g \in C_0(\mathbb{R}^n)$ und

$$\|f - g\|_p \le \sum_{j=1}^{N} |\alpha_j| \varepsilon\,.$$

Sei nun $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ beliebig, dann wählen wir eine einfache Funktion $s : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $\|f - s\|_p \le \varepsilon$ und gemäß obiger Konstruktion ein $g \in C_0(\mathbb{R}^n)$ mit $\|s - g\|_p \le \varepsilon$, dann ist $\|f - g\|_p \le 2\varepsilon$. □

Folgerung 13.10 *Sei $1 \le p < \infty$, $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\|f - g\|_p \le \varepsilon$.*

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Wähle gemäß Satz 13.9 ein $h \in C_0(\mathbb{R}^n)$ mit $\|f - h\|_p \le \varepsilon$. Aus Satz 6.6, Analysis 3, wissen wir, dass die geglätteten Funktionen $h_\delta = h * \varphi_\delta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ für $\delta \to 0$ gleichmäßig gegen h konvergieren. Da die Träger von h und von allen h_δ in einem festen Kompaktum K enthalten sind, folgt

$$\|h - h_\delta\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^n} |h - h_\delta|^p \, d\lambda^n \le \lambda^n(K) \|h - h_\delta\|_\infty^p\,.$$

Setzen wir $g = h_\delta$, $\delta > 0$ hinreichend klein, so folgt die Behauptung. □

Satz 13.11 *Für $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ gilt*

$$\lim_{\|\xi\| \to \infty} \hat{f}(\xi) = 0\,. \tag{13.28}$$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$, sei $g_\varepsilon \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\|f - g_\varepsilon\|_1 \le \varepsilon$, das ist möglich nach Folgerung 13.10. Aus Folgerung 13.7 erhalten wir

$$|\hat{g_\varepsilon}(\xi)| \le \frac{M_\varepsilon}{1 + \|\xi\|_2}\,. \tag{13.29}$$

Aus (13.7) folgt für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$|\hat{f}(\xi) - \hat{g_\varepsilon}(\xi)| \le \|\widehat{f - g_\varepsilon}\|_\infty \le (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \|f - g_\varepsilon\|_1 \le (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \varepsilon\,,$$

und zusammen mit (13.29) ergibt sich die Behauptung. □

Wir betrachten den Raum

$$C_{00}(\mathbb{R}^n) = \{f : \, f \in C(\mathbb{R}^n), \; \lim_{\|x\| \to \infty} f(x) = 0\}\,. \tag{13.30}$$

Der Raum $C_{00}(\mathbb{R}^n)$ ist bezüglich der Supremumsnorm ein abgeschlossener Teilraum des Raums $CB(\mathbb{R}^n)$, also vollständig und damit ein Banachraum.

Lemma 13.12 *Sei $\psi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\,dx = 1$. Wir setzen*

$$\psi_\lambda(x) = \lambda^{-n}\psi\left(\frac{x}{\lambda}\right), \quad \lambda > 0\,. \tag{13.31}$$

Dann gilt für alle $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$

$$\lim_{\lambda\to 0} \|f - f * \psi_\lambda\|_1 = 0\,. \tag{13.32}$$

Beweis: Sei zunächst $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$. Es ist (Substitutionsformel)

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi_\lambda(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\,dx = 1\,,$$

also

$$\begin{aligned} f(x) - (f * \psi_\lambda)(x) &= f(x)\int_{\mathbb{R}^n} \psi_\lambda(y)\,dy - \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\psi_\lambda(y)\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (f(x) - f(x-y))\psi_\lambda(y)\,dy\,, \end{aligned}$$

und für alle $\delta \in (0,1]$ gilt

$$\|f - f * \psi_\lambda\|_1 \le I_1 + I_2\,, \tag{13.33}$$

wobei

$$I_1 = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\|y\|_2 \le \delta} |f(x) - f(x-y)|\,|\psi_\lambda(y)|\,dy\,dx\,, \tag{13.34}$$

$$I_2 = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\|y\|_2 > \delta} |f(x) - f(x-y)|\,|\psi_\lambda(y)|\,dy\,dx\,. \tag{13.35}$$

Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, so dass $f(x) - f(x-y) = 0$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$ und alle $y \in \mathbb{R}^n$ mit $\|y\|_2 \le 1$. Dann ist

$$I_1 = \int_K \int_{\|y\|_2 \le \delta} |f(x) - f(x-y)|\,|\psi_\lambda(y)|\,dy\,dx \le \lambda^n(K)\|\psi\|_1 \sup_{\substack{x,y \in \mathbb{R}^n \\ \|y\|_2 \le \delta}} |f(x) - f(x-y)|\,.$$

Weiter gilt mit Fubini

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\|y\|_2 > \delta} |\psi_\lambda(y)| \int_{\mathbb{R}^n} (|f(x)| + |f(x-y)|)\,dx\,dy \le 2\|f\|_1 \int_{\|y\|_2 > \delta} \lambda^{-n}|\psi\left(\frac{y}{\lambda}\right)|\,dy \\ &= 2\|f\|_1 \int_{\|x\|_2 > \frac{\delta}{\lambda}} |\psi(x)|\,dx\,. \end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen $\delta > 0$ so, dass

$$I_1 < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Das ist möglich, da f auf $\mathbb{R}^n$ gleichmäßig stetig ist. Wähle nun $\lambda > 0$ so, dass

$$I_2 < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Das ist möglich, da $\psi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ und daher

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\|x\|_2 \geq R} |\psi(x)|\, dx = 0\,.$$

Sei nun $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ beliebig. Für beliebiges $g \in C_0(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\begin{aligned} \|f - f * \psi_\lambda\|_1 &\leq \|g - g * \psi_\lambda\|_1 + \|(f-g) - (f-g) * \psi_\lambda\|_1 \\ &\leq \|g - g * \psi_\lambda\|_1 + \|f-g\|_1 (1 + \|\psi\|_1)\,, \end{aligned}$$

da $\|(f-g) * \psi_\lambda\|_1 \leq \|f-g\|_1 \, \|\psi_\lambda\|_1$ nach Satz 6.4, Analysis 3. Sei nun $\varepsilon > 0$. Wir wählen $g \in C_0(\mathbb{R}^n)$ nach Satz 13.9 so, dass $\|f-g\|_1 \leq \varepsilon$, und $\lambda > 0$ nach dem eben Bewiesenen so, dass $\|g - g * \psi_\lambda\|_1 \leq \varepsilon$, dann ist

$$\|f - f * \psi_\lambda\|_1 \leq \varepsilon(2 + \|\psi\|_1)\,.$$

$\square$

Satz 13.13 (Umkehrformel)
Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, es gelte $\hat{f} = \mathcal{F}(f) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$f(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{i\langle \xi, x\rangle}\, d\xi \tag{13.36}$$

für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ und (nach Abänderung auf einer Nullmenge) $f \in C_{00}(\mathbb{R}^n)$.

Beweis: Wegen

$$|\hat{f}(\xi) e^{i\langle \xi, x\rangle}| = |\hat{f}(\xi)|$$

liegt der Integrand in (13.36) in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{i\langle \xi, x\rangle}\, d\xi = \overline{\int_{\mathbb{R}^n} \overline{\hat{f}(\xi)} e^{-i\langle \xi, x\rangle}\, d\xi} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \overline{\mathcal{F}(\overline{\hat{f}})}(x)\,. \tag{13.37}$$

Aus Satz 13.11 folgt, dass $\overline{\mathcal{F}(\overline{\hat{f}})} \in C_{00}(\mathbb{R}^n)$. Es genügt daher zu zeigen, dass (13.36) gilt für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$. Zunächst gilt für beliebiges $\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ mit Satz 13.5, da $\hat{f}$ beschränkt ist,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{i\langle \xi, x\rangle} \varphi(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{T_x f}(\xi)\varphi(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} (T_x f)(y)\hat{\varphi}(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x+y)\hat{\varphi}(y)\, dy \tag{13.38}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\hat{\varphi}(-y)\, dy\,. \tag{13.39}$$

Wir setzen

$$\psi(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\langle \xi, \xi\rangle}{2}}\,, \quad \varphi(\xi) = \psi(\lambda\xi)\,, \quad \lambda > 0\,.$$

Es ist $\hat{\psi} = \psi$ nach Lemma 13.3, $\int_{\mathbb{R}^n} \psi(\xi)\, d\xi = 1$ nach (13.10) und wegen Satz 13.5

$$\hat{\varphi}(-y) = \lambda^{-n}\hat{\psi}\left(-\frac{y}{\lambda}\right) = \lambda^{-n}\psi\left(-\frac{y}{\lambda}\right) = \lambda^{-n}\psi\left(\frac{y}{\lambda}\right) =: \psi_\lambda(y)\,, \quad y \in \mathbb{R}^n\,. \tag{13.40}$$

Setzen wir (13.40) in (13.38) ein, so ergibt sich

$$(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{i\langle \xi, x\rangle} e^{-\frac{\langle \lambda\xi, \lambda\xi\rangle}{2}} \, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\psi_\lambda(y)\, dy = (f * \psi_\lambda)(x)\,. \tag{13.41}$$

Da

$$|\hat{f}(\xi) e^{i\langle \xi, x\rangle} e^{-\lambda^2 \frac{\langle \xi, \xi\rangle}{2}}| \leq |\hat{f}(\xi)|\,,$$

folgt aus dem Satz von Lebesgue

$$\lim_{\lambda \to 0} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{i\langle \xi, x\rangle} e^{-\lambda^2 \frac{\langle \xi, \xi\rangle}{2}} \, d\xi = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{i\langle \xi, x\rangle} \, d\xi \tag{13.42}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Nach Lemma 13.12

$$\lim_{\lambda \to 0} \|f - f * \psi_\lambda\|_1 = 0\,,$$

gibt es nach Satz 4.19, Analysis 3, eine Nullfolge $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit

$$\lim_{k \to \infty} (f * \psi_{\lambda_k})(x) = f(x) \tag{13.43}$$

für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$. Aus (13.41), (13.42) und (13.43) folgt die Behauptung. □

Lemma 13.14 *Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\|f - g\|_1 \leq \varepsilon$ und $\|f - g\|_2 \leq \varepsilon$.*

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen $R > 0$ so dass gilt

$$\|f - f1_R\|_1 \leq \varepsilon\,, \quad \|f - f1_R\|_2 \leq \varepsilon\,, \quad 1_R := 1_{B(0,R)}\,.$$

Wähle nach Folgerung 13.10 ein $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\|f1_R - g\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda^n(B(0, R+1))}}\,\varepsilon\,. \tag{13.44}$$

Wir können o.B.d.A. annehmen, dass $\operatorname{supp}(g) \subset B(0, R+1)$, andernfalls ersetzen wir g durch φg, $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $0 \leq \varphi \leq 1$ in $\mathbb{R}$ sowie $\varphi = 1$ auf $B(0,R)$ und $\varphi = 0$ außerhalb $B(0, R+1)$. Aus (13.44) und der Hölderschen Ungleichung folgt nun

$$\|f1_R - g\|_1 \leq \int_{B(0,R+1)} |f1_R - g|\, dx \leq \|1_{R+1}\|_2 \, \|f1_R - g\|_2 \leq \varepsilon$$

und weiter $\|f - g\|_1 \leq 2\varepsilon$, $\|f - g\|_2 \leq 2\varepsilon$. □

Satz 13.15 *Seien X, Y normierte $\mathbb{K}$-Vektorräume ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), sei Y vollständig, sei U Unterraum von X mit $\overline{U} = X$ ($\overline{U}$ = Abschluß von U in X). Sei $S : U \to Y$ linear und stetig. Dann gibt es genau eine lineare stetige Abbildung $T : X \to Y$ mit $T|U = S$, und es gilt $\|T\| = \|S\|$.*

Beweis: Sei $x \in X$ beliebig. Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folge in U mit $x_k \to x$, dann ist $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge in X und wegen

$$\|Sx_k - Sx_m\|_Y = \|S(x_k - x_m)\|_Y \le \|S\|\,\|x_k - x_m\|_X \tag{13.45}$$

ist $(Sx_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge in Y, also konvergent. Wir definieren

$$Tx = \lim_{k\to\infty} Sx_k\,. \tag{13.46}$$

Der Limes in (13.46) hängt nicht von der Wahl der Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ab, da für jede Folge $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in S mit $z_k \to x$ gilt

$$\|Sx_k - Sz_k\|_Y = \|S(x_k - z_k)\|_Y \le \|S\|\,\|x_k - z_k\|_X \to 0\,.$$

Offensichtlich ist $Tx = Sx$ für $x \in U$. T ist linear: Seien $x, z \in X$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, seien $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folgen in U mit $x_k \to x$, $z_k \to z$. Dann gilt $\alpha x_k + \beta z_k \to \alpha x + \beta z$ und weiter

$$\begin{aligned} T(\alpha x + \beta z) &= \lim_{k\to\infty} S(\alpha x_k + \beta z_k) = \lim_{k\to\infty}(\alpha S x_k + \beta S z_k) = \alpha \lim_{k\to\infty} Sx_k + \beta \lim_{k\to\infty} Sz_k \\ &= \alpha Tx + \beta Tz\,. \end{aligned}$$

Sei nun $x \in X$, $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folge in X mit $x_k \to x$. Dann gilt

$$\|Tx\|_Y = \Big\|\lim_{k\to\infty} Sx_k\Big\|_Y = \lim_{k\to\infty}\|Sx_k\|_Y \le \lim_{k\to\infty}\|S\|\,\|x_k\|_X = \|S\|\|x\|_X\,,$$

also ist T stetig mit $\|T\| \le \|S\|$, also auch $\|T\| = \|S\|$. Da (13.46) für jede stetige Fortsetzung T von S gelten muss, ist T eindeutig bestimmt. □

Lemma 13.16 *Sei $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt*

$$\overline{f} = \mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}(f)})\,, \quad f = \mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}(\overline{f})})\,, \tag{13.47}$$

es ist $\mathcal{F}(f) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$, und

$$\|\mathcal{F}(f)\|_2 = \|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2\,. \tag{13.48}$$

Beweis: Es ist $\hat{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ nach Folgerung 13.7 (wir wählen dort k hinreichend groß), also folgt aus Satz 13.13

$$\overline{f(x)} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\overline{\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(\xi)e^{i\langle x,\xi\rangle}\,d\xi} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}\overline{\hat{f}(\xi)}e^{-i\langle x,\xi\rangle}\,d\xi = (\mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}(f)}))(x)\,,$$

und weiter mit Lemma 13.5

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}(f)\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{F}f)(\xi)\overline{(\mathcal{F}f)(\xi)}\,d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)(\mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}f}))(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{f(x)}\,dx \\ &= \|f\|_2^2\,. \end{aligned}$$

□

Satz 13.17 *Es gibt eine eindeutig bestimmte lineare, stetige und bijektive Abbildung* $T : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ *mit*

$$T(f) = \mathcal{F}(f)\,, \quad \text{für alle } f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)\,. \tag{13.49}$$

Es gilt außerdem für alle $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$

$$\|Tf\|_2 = \|f\|_2\,. \tag{13.50}$$

Beweis: Wir wenden Satz 13.15 an mit $X = Y = (L^2(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_2)$, $U = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $S = \mathcal{F}$. Nach Folgerung 13.10 gilt $\overline{U} = X$. $\mathcal{F}$ ist linear auf U, und nach Lemma 13.16 ist $\|\mathcal{F}(f)\|_2 = \|f\|_2$ für alle $f \in U$, also ist $\mathcal{F}$ stetig auf U mit $\|\mathcal{F}\| = 1$. Sei $T : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ die nach Satz 13.15 eindeutig bestimmte lineare stetige Fortsetzung von $\mathcal{F}$. Sei $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folge in U mit $f_k \to f$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$, dann ist nach Lemma 13.16

$$\|Tf\|_2 = \lim_{k\to\infty} \|Tf_k\|_2 = \lim_{k\to\infty} \|\mathcal{F}f_k\|_2 = \lim_{k\to\infty} \|f_k\|_2 = \|f\|_2\,,$$

also gilt (13.50) und damit auch $\ker(T) = \{0\}$, also ist T injektiv. Wir wollen nun zeigen, dass (13.49) gilt. Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folge in U mit $\|f - f_k\|_1 \to 0$ und $\|f - f_k\|_2 \to 0$, siehe Lemma 13.14. Da $\mathcal{F}f_k = Tf_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$, folgt $\|Tf - \mathcal{F}f_k\|_2 \to 0$ aus (13.50), und nach Übergang zu einer Teilfolge $\mathcal{F}f_k \to Tf$ punktweise fast überall. Da $\mathcal{F}f_k \to \mathcal{F}f$ gleichmäßig nach Satz 13.2, gilt $\mathcal{F}f = Tf$ und damit (13.49). Es bleibt zu zeigen, dass T surjektiv ist. Für $f \in U$ gilt nach Lemma 13.16

$$\overline{\mathcal{F}f} \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)\,, \quad \overline{f} = \mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}f})\,,$$

also $\overline{f} = T(\overline{\mathcal{F}f})$ und damit $U \subset T(L^2(\mathbb{R}^n))$. Sei nun $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Wir wählen eine Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in U mit $\|Tf_k - g\|_2 \to 0$, dann ist $(Tf_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge in $L^2(\mathbb{R}^n)$. Wegen (13.50) ist auch $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge in $L^2(\mathbb{R}^n)$. Sei $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ mit $\|f_k - f\|_2 \to 0$, dann ist $\|Tf_k - Tf\|_2 = 0$ nach (13.50) und damit $Tf = g$. Da g beliebig war, ist T surjektiv. □

Die Abbildung T in Satz 13.17 wird ebenfalls Fourier-Transformation genannt und ebenfalls mit $\mathcal{F}$ bezeichnet. Man beachte aber, dass für $f \in L^2(\mathbb{R}^n) \setminus L^1(\mathbb{R}^n)$ die Fouriertransformierte $\mathcal{F}f$ im allgemeinen nicht mehr durch die Formel (13.1) darstellbar ist, da das Integral nicht definiert zu sein braucht.

Folgerung 13.18 *Für die inverse Fourier-Transformation* $\mathcal{F}^{-1} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ *gilt*

$$(\mathcal{F}^{-1}f)(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) e^{i\langle x,\xi\rangle}\, d\xi\,, \tag{13.51}$$

falls $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$.

Beweis: Wird zum Abschluss der geneigten Leserin überlassen ! □