

Analysis III ^{*}

Martin Brokate [†]

Inhaltsverzeichnis

1	Maße	1
2	Das Lebesgue-Integral	26
3	Normierte und metrische Räume	38
4	Konvergenzsätze und L^p -Räume	48
5	Mehrfachintegrale, Satz von Fubini	63
6	Metrische Räume: Weitere Grundbegriffe	74
7	Metrische Räume: Stetigkeit, Kompaktheit	82
8	Substitutionsformel und Faltung (Teil 1)	95

^{*}Vorlesungsskript, WS 2004/05

[†]Zentrum Mathematik, TU München

1 Maße

Einige Bemerkungen zur Motivation. Der mathematische Begriff eines **Maßes** ist in ganz unterschiedlichen (mathematischen) Zusammenhängen hilfreich.

- Man möchte einer möglichst großen Klasse von Teilmengen des \mathbb{R}^n einen “Inhalt” (Länge, Fläche, Volumen, ...) zuordnen. Für nichtganzzahlige Dimensionen führt dies auf den Begriff der fraktalen Menge, bei deren Untersuchung das sogenannte Hausdorffmaß eine zentrale Rolle spielt.
- Hausdorff hat aber bereits 1914 gezeigt: Will man einen Inhaltsbegriff haben, der sich hinsichtlich Summation und Kongruenz “vernünftig” verhält, so kann man ihn **nicht** für jede Teilmenge des \mathbb{R}^n definieren.
- Betrachtet man die Menge $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ als die Menge aller “Elementarereignisse” beim Würfeln, so kann man als Maß einer Teilmenge A von M die Wahrscheinlichkeit ansehen, mit der in einem Wurf eine Zahl in A gewürfelt wird. Der Begriff des Maßes ist für die gesamte Stochastik grundlegend. Da Wahrscheinlichkeiten je nach Situation ganz unterschiedlich aussehen können, ist es wesentlich, einen allgemeinen Maßbegriff zu haben.
- Man möchte eine möglichst allgemeine und handhabbare Integrationstheorie haben.
- In der “höheren Analysis”, etwa der Funktionalanalysis, spielt der Maßbegriff an vielen Stellen eine Rolle unter anderem wegen des folgenden Sachverhalts. Ist K ein kompakter metrischer Raum, etwa $K = [a, b]$, und ist $T : C(K) \rightarrow \mathbb{R}$ ein lineares Funktional, welches bezüglich der Supremumsnorm auf $C(K)$ stetig ist, so gibt es ein Maß μ mit der Eigenschaft, daß $T(f)$ gerade das Integral von f bezüglich des Maßes μ ist. Das hat zur Folge, dass bei der Untersuchung solcher Funktionale die Integrationstheorie eingesetzt werden kann.

Definition 1.1 (σ -Algebra)

Sei Ω eine Menge. Ein System \mathcal{A} von Teilmengen von Ω , $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, heißt σ -Algebra in Ω , falls gilt

$$\Omega \in \mathcal{A}, \tag{1.1}$$

$$A \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad \Omega \setminus A \in \mathcal{A}, \tag{1.2}$$

$$(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ Folge in } \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}. \tag{1.3}$$

Die Elemente A von \mathcal{A} heißen \mathcal{A} -messbar (oder messbar, falls klar ist, welches \mathcal{A} gemeint ist). \square

Triviale Beispiele von σ -Algebren in Ω sind

$$\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega), \quad \mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}.$$

Lemma 1.2 Seien Ω, Ω' Mengen, $T : \Omega \rightarrow \Omega'$ Abbildung, \mathcal{A}' σ -Algebra in Ω' . Dann ist

$$\mathcal{A} = \{T^{-1}(A') : A' \in \mathcal{A}'\} \quad (1.4)$$

eine σ -Algebra in Ω .

Beweis: Es ist $\Omega = T^{-1}(\Omega') \in \mathcal{A}$. Sei $A \in \mathcal{A}$, wähle $A' \in \mathcal{A}'$ mit $A = T^{-1}(A')$, dann ist

$$\Omega \setminus A = \Omega \setminus T^{-1}(A') = T^{-1}(\Omega' \setminus A') \in \mathcal{A},$$

da $\Omega' \setminus A' \in \mathcal{A}'$. Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in \mathcal{A} , wähle $A'_n \in \mathcal{A}'$ mit $A_n = T^{-1}(A'_n)$, dann ist

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T^{-1}(A'_n) = T^{-1} \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A'_n \right) \in \mathcal{A}.$$

□

Lemma 1.3 Sei Ω Menge, \mathcal{A} σ -Algebra in Ω . Dann gilt

$$\emptyset \in \mathcal{A}, \quad (1.5)$$

$$(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ Folge in } \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}. \quad (1.6)$$

Beweis: Folgt unmittelbar aus der Definition einer σ -Algebra, da

$$\emptyset = \Omega \setminus \Omega, \quad \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \Omega \setminus \left(\Omega \setminus \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \Omega \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\Omega \setminus A_n).$$

□

Satz 1.4 Sei Ω Menge, sei $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Dann ist

$$\sigma(\mathcal{E}) = \bigcap \{ \mathcal{A} : \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega), \mathcal{A} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra, } \mathcal{E} \subset \mathcal{A} \} \quad (1.7)$$

eine σ -Algebra in Ω mit der Eigenschaft

$$\mathcal{E} \subset \sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A} \quad (1.8)$$

für jede σ -Algebra \mathcal{A} mit $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$, das heißt, $\sigma(\mathcal{E})$ ist die kleinste σ -Algebra, welche \mathcal{E} umfasst. Die σ -Algebra $\sigma(\mathcal{E})$ heißt die von \mathcal{E} erzeugte σ -Algebra in Ω .

Beweis: Die Elemente von $\sigma(\mathcal{E})$ sind genau diejenigen Teilmengen A von Ω , die in jeder σ -Algebra liegen, welche \mathcal{E} umfasst. Da das insbesondere auf die Elemente E von \mathcal{E} zutrifft, folgt die Eigenschaft (1.8) unmittelbar aus der Definition von $\sigma(\mathcal{E})$. Es ist $\Omega \in \sigma(\mathcal{E})$, da $\Omega \in \mathcal{A}$ für jede σ -Algebra \mathcal{A} in Ω . Ist $A \in \sigma(\mathcal{E})$, so ist $A \in \mathcal{A}$ für alle σ -Algebren \mathcal{A} , welche \mathcal{E} umfassen, also auch $\Omega \setminus A \in \mathcal{A}$ für alle solche σ -Algebren, und damit $\Omega \setminus A \in \sigma(\mathcal{E})$. Analog zeigt man, dass (1.3) für $\sigma(\mathcal{E})$ erfüllt ist. □

Bemerkung. Die folgende Definition setzt den Begriff des metrischen Raumes voraus. Dieser wird in einem späteren Kapitel behandelt. Bis dahin **betrachten wir die Borel-Algebra nur für den Fall $\Omega = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{O} = \mathcal{O}^n$, siehe (1.12).**

Definition 1.5 (Borel-Algebra)

Sei (Ω, d) metrischer Raum, sei

$$\mathcal{O} = \{U : U \subset \Omega, U \text{ offen}\}. \quad (1.9)$$

Die σ -Algebra $\sigma(\mathcal{O})$ heißt die Borel-Algebra in (Ω, d) . Die Elemente $A \in \sigma(\mathcal{O})$ heißen Borelmengen. \square

Wir führen halboffene Intervalle im \mathbb{R}^n ein. Sind $a, b \in \mathbb{R}^n$, so setzen wir

$$[a, b) = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i) = \{x : x \in \mathbb{R}^n, a_i \leq x_i < b_i \text{ für alle } 1 \leq i \leq n\}. \quad (1.10)$$

Es ist $[a, b) = \emptyset$ falls $a_i \geq b_i$ für mindestens ein i . Wir bezeichnen mit

$$\mathcal{J}^n = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}^n\} \quad (1.11)$$

die Menge aller halboffenen Intervalle im \mathbb{R}^n , und mit

$$\mathcal{O}^n, \mathcal{C}^n, \mathcal{K}^n \quad (1.12)$$

die Menge aller offenen bzw. abgeschlossenen bzw. kompakten Teilmengen von \mathbb{R}^n .

Bemerkung. Der Begriff einer **kompakten Menge** wird erst in einem späteren Kapitel behandelt. Bis dahin verwenden wir diesen Begriff nur für **Teilmengen des \mathbb{R}^n** . Eine Teilmenge K des \mathbb{R}^n ist kompakt genau dann, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist. Hinweis: In Funktionenräumen ist diese Äquivalenz **nicht gültig** !

Satz 1.6 *Es gilt*

$$\sigma(\mathcal{J}^n) = \sigma(\mathcal{O}^n) = \sigma(\mathcal{C}^n) = \sigma(\mathcal{K}^n), \quad (1.13)$$

das heißt, die Borel-Algebra wird auch von den halboffenen Intervallen bzw. den abgeschlossenen Mengen bzw. den kompakten Mengen erzeugt.

Beweis: Es ist $\mathcal{C}^n = \{A : \mathbb{R}^n \setminus A \text{ ist offen}\}$. Aus Satz 1.4 folgen $\mathcal{C}^n \subset \sigma(\mathcal{O}^n)$ und $\sigma(\mathcal{C}^n) \subset \sigma(\mathcal{O}^n)$. Analog beweist man $\sigma(\mathcal{O}^n) \subset \sigma(\mathcal{C}^n)$. Aus $\mathcal{K}^n \subset \mathcal{C}^n$ folgt $\mathcal{K}^n \subset \sigma(\mathcal{C}^n)$ und damit $\sigma(\mathcal{K}^n) \subset \sigma(\mathcal{C}^n)$. Umgekehrt: Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen. Wir setzen

$$K_m = A \cap \{x : x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq m\}.$$

Dann ist K_m kompakt und $A = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} K_m$, also $A \in \sigma(\mathcal{K}^n)$. Da A beliebig war, folgt $\mathcal{C}^n \subset \sigma(\mathcal{K}^n)$ und damit $\sigma(\mathcal{C}^n) \subset \sigma(\mathcal{K}^n)$. Wir zeigen zum Abschluss, dass $\sigma(\mathcal{J}^n) = \sigma(\mathcal{O}^n)$: Seien $a, b \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$[a, b) = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} I_k, \quad I_k := \prod_{i=1}^n (a_i - \frac{1}{k}, b_i).$$

Alle I_k sind offen, also ist $[a, b) \in \sigma(\mathcal{O}^n)$. Da a, b beliebig waren, folgt $\sigma(\mathcal{J}^n) \subset \sigma(\mathcal{O}^n)$ wie gehabt. Zum Beweis der umgekehrten Inklusion betrachten wir zunächst offene Quader

$$(a, b) := \prod_{i=1}^n (a_i, b_i) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k, \quad I_k := \prod_{i=1}^n [a_i + \frac{1}{k}, b_i),$$

welche also alle in $\sigma(\mathcal{J}^n)$ liegen. Da jede offene Teilmenge des \mathbb{R}^n sich als abzählbare Vereinigung von offenen Quadern darstellen läßt (im Zweifelsfall: Übung), folgt $\mathcal{O}^n \subset \sigma(\mathcal{J}^n)$ und wieder $\sigma(\mathcal{O}^n) \subset \sigma(\mathcal{J}^n)$. \square

Das in Satz 1.4 enthaltene Verfahren, von einem Ausgangsobjekt (dort \mathcal{E}) ein kleinstes umfassendes neues Objekt mit mehr Struktur (dort $\sigma(\mathcal{E})$) zu erzeugen, ist auch in anderen mathematischen Zusammenhängen nützlich. So kann man etwa für Teilmengen M des \mathbb{R}^n den von M erzeugten Untervektorraum $\text{span}(M)$ definieren als den Durchschnitt aller Unterräume, welche M enthalten. Wir können $\text{span}(M)$ aber auch definieren als die Menge aller endlichen Linearkombinationen von Elementen aus M . Diese Definition ist konstruktiver als die vorstehende. Für die Borel-Algebra steht eine vergleichbar einfache Konstruktion einer beliebigen Borelmengen aus den offenen Mengen aber leider **nicht** zur Verfügung.

Definition 1.7 (Maß)

Sei Ω Menge, \mathcal{A} σ -Algebra in Ω . Eine Funktion $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ heißt Maß, falls gilt

$$\mu(\emptyset) = 0, \quad (1.14)$$

und falls μ σ -additiv ist, das heißt, falls

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \quad (1.15)$$

für jede Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ paarweise disjunkter \mathcal{A} -messbarer Mengen gilt. Ein Maß μ heißt endlich, falls $\mu(\Omega) < +\infty$. Ein Maß μ heißt σ -endlich, falls es eine Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von \mathcal{A} -messbaren Mengen gibt mit $\mu(A_n) < +\infty$ für alle n und

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \Omega. \quad (1.16)$$

\square

Wir gehen aus von der üblichen Vorstellung von Länge, Flächeninhalt und Volumen und definieren das Volumen eines halboffenen Intervalls (halboffenen Quaders) $I = [a, b) \subset \mathbb{R}^n$ durch

$$\lambda(I) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i). \quad (1.17)$$

Es erhebt sich die Frage: Können wir auf der Borel-Algebra $\sigma(\mathcal{O}^n)$ ein Maß μ definieren, so daß $\mu(I) = \lambda(I)$ für alle halboffenen Intervalle? Diese Frage wird im sogenannten **Maßerweiterungssatz** positiv beantwortet. Dieser Satz erfordert aber etwas Vorbereitung.

Definition 1.8 (Ring)

Sei Ω Menge. Ein System \mathcal{R} von Teilmengen von Ω heißt ein Ring in Ω , falls gilt

$$\emptyset \in \mathcal{R}, \quad (1.18)$$

$$A, B \in \mathcal{R} \quad \Rightarrow \quad A \setminus B \in \mathcal{R}, \quad (1.19)$$

$$A, B \in \mathcal{R} \quad \Rightarrow \quad A \cup B \in \mathcal{R}. \quad (1.20)$$

\square

Aus (1.19) folgt unmittelbar, dass

$$A, B \in \mathcal{R} \quad \Rightarrow \quad A \cap B \in \mathcal{R},$$

da $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$. Offenbar ist jede σ -Algebra ein Ring.

Die Bezeichnung ‘Ring’ rührt daher, dass ein Ring von Mengen im Sinne von Definition 1.8 auch ein Ring im Sinne der Algebra ist, wenn wir als Multiplikation in \mathcal{R} die Durchschnittsbildung und als Addition die symmetrische Differenz

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

definieren.

Die Menge der halboffenen Intervalle ist kein Ring, im allgemeinen sind weder $I \cup J$ noch $I \setminus J$ halboffene Intervalle, falls I, J solche sind. Andererseits lassen sich sowohl $I \cup J$ als auch $I \setminus J$ als endliche Vereinigung von halboffenen Intervallen darstellen.

Definition 1.9 (Figur)

Eine Menge $F \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Figur*, falls F sich als endliche Vereinigung von halboffenen Intervallen darstellen lässt. Wir definieren

$$\mathcal{F}^n = \{F : F \subset \mathbb{R}^n, F \text{ ist Figur}\}. \quad (1.21)$$

Lemma 1.10 Seien $I, J \in \mathcal{F}^n$. Dann ist auch $I \cap J \in \mathcal{F}^n$, und $I \setminus J$ lässt sich als disjunkte endliche Vereinigung von halboffenen Intervallen darstellen. Insbesondere gilt $I \setminus J \in \mathcal{F}^n$.

Beweis: Seien $I = [a, b)$, $J = [a', b')$. Dann ist

$$I \cap J = [a'', b'') \in \mathcal{F}^n, \quad a'' = \max\{a_i, a'_i\}, \quad b'' = \min\{b_i, b'_i\}. \quad (1.22)$$

Wegen $I \setminus J = I \setminus (I \cap J)$ und (1.22) genügt es, den Fall $J \subset I$ zu betrachten. Es ist dann entweder $J = \emptyset$ oder

$$a_i \leq a'_i < b'_i \leq b_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

$I \setminus J$ ist disjunkte Vereinigung von Intervallen der Form

$$\prod_{i=1}^n [c_i, d_i),$$

wobei $[c_i, d_i)$ entweder gleich $[a_i, a'_i)$ oder gleich $[a'_i, b'_i)$ oder gleich $[b'_i, b_i)$ ist. (Man erhält $I \setminus J$, indem man alle möglichen Kombinationen durchläuft bis auf diejenige, welche J liefert.) \square

Satz 1.11 \mathcal{F}^n ist ein Ring. Jedes $F \in \mathcal{F}^n$ lässt sich darstellen als disjunkte Vereinigung von halboffenen Intervallen.

Beweis: Direkt aus der Definition folgt

$$F, G \in \mathcal{F}^n \quad \Rightarrow \quad F \cup G \in \mathcal{F}^n. \quad (1.23)$$

Wir zeigen als nächstes

$$F, G \in \mathcal{F}^n \quad \Rightarrow \quad F \cap G \in \mathcal{F}^n. \quad (1.24)$$

Sei nämlich

$$F = \bigcup_{i=1}^k I_i, \quad G = \bigcup_{j=1}^l J_j, \quad (1.25)$$

mit $I_i, J_j \in \mathcal{J}^n$, dann folgt

$$F \cap G = \bigcup_{i,j} I_i \cap J_j,$$

und nach Lemma 1.10 ist $I_i \cap J_j \in \mathcal{J}^n$ für alle i, j , also gilt (1.24). Wir zeigen jetzt

$$F, G \in \mathcal{F}^n \quad \Rightarrow \quad F \setminus G \in \mathcal{F}^n. \quad (1.26)$$

Aus der Darstellung (1.25) folgt

$$\begin{aligned} F \setminus G &= \left(\bigcup_i I_i \right) \setminus \left(\bigcup_j J_j \right) = \left(\bigcup_i I_i \right) \cap \left(\Omega \setminus \bigcup_j J_j \right) \\ &= \left(\bigcup_i I_i \right) \cap \bigcap_j (\Omega \setminus J_j) = \bigcup_i \bigcap_j (I_i \cap (\Omega \setminus J_j)) \\ &= \bigcup_i \bigcap_j (I_i \setminus J_j). \end{aligned}$$

Nach Lemma 1.10 ist $I_i \setminus J_j \in \mathcal{F}^n$ für alle i, j , also ist wegen (1.24) auch $F \setminus G \in \mathcal{F}^n$. Also ist \mathcal{F}^n ein Ring. Sind die Darstellungen von $F, G \in \mathcal{F}^n$ in (1.25) disjunkte Vereinigungen, so gilt das auch für deren Durchschnitt,

$$F \cap G = \dot{\bigcup}_{i,j} I_i \cap J_j. \quad (1.27)$$

Wir zeigen nun, dass sich jedes $F \in \mathcal{F}^n$ als disjunkte Vereinigung halboffener Intervalle darstellen lässt. Sei $F \in \mathcal{F}^n$,

$$F = \bigcup_{i=1}^k I_i.$$

Es gilt dann

$$F = I_1 \dot{\cup} (I_2 \setminus I_1) \dot{\cup} (I_3 \setminus (I_1 \cup I_2)) \cdots = \dot{\bigcup}_i \bigcap_{j=1}^{i-1} (I_i \setminus I_j).$$

Nach Lemma 1.10 lassen sich alle $I_i \setminus I_j$ als disjunkte Vereinigung halboffener Intervalle darstellen, dasselbe gilt auch für die Mengen

$$\bigcap_{j=1}^{i-1} (I_i \setminus I_j),$$

(ist in (1.27) für den Durchschnitt zweier Mengen bewiesen worden, gilt also auch für endliche Durchschnitte). Damit ist die Behauptung bewiesen. \square

Definition 1.12 (Endlich-additive Mengenfunktion)

Sei Ω Menge, \mathcal{R} Ring in Ω . Eine Funktion $\mu : \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty]$ heißt endlich-additiv, falls gilt

$$\mu \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i) \quad (1.28)$$

für jedes endliche System A_1, \dots, A_n paarweise disjunkter Mengen $A_i \in \mathcal{R}$. μ heißt σ -additiv, falls

$$\mu \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \quad (1.29)$$

gilt für jede Folge $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Mengen $A_i \in \mathcal{R}$ mit $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{R}$. \square

Satz 1.13 Der n -dimensionale Elementarinhalt

$$\lambda(I) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i), \quad I = [a, b] \in \mathcal{J}^n, \quad (1.30)$$

lässt sich auf genau eine Weise zu einer endlich-additiven Funktion $\lambda : \mathcal{F}^n \rightarrow [0, \infty)$ fortsetzen.

Beweis: Wir bemerken zunächst: Wird $I = [a, b]$ durch eine Hyperebene $x_j = \gamma$, $\gamma \in [a_j, b_j]$, in zwei Teile

$$\begin{aligned} I_1 &= [(a_1, \dots, a_j, \dots, a_n), (b_1, \dots, \gamma, \dots, b_n)], \\ I_2 &= [(a_1, \dots, \gamma, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_j, \dots, b_n)], \end{aligned}$$

zerschnitten, so gilt

$$\lambda(I) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i) = [(b_j - \gamma) + (\gamma - a_j)] \prod_{i \neq j} (b_i - a_i) = \lambda(I_1) + \lambda(I_2).$$

Ebenso folgt

$$\lambda(I) = \sum_{i=1}^k \lambda(I_i), \quad (1.31)$$

falls ein Intervall I durch endlich viele Hyperebenen in k Teilintervalle $I_i \in \mathcal{J}^n$ zerschnitten wird. Wir zeigen nun, dass λ auf \mathcal{J}^n endlich-additiv ist. Sei $I = [a, b] \in \mathcal{J}^n$ dargestellt als disjunkte Vereinigung

$$I = \bigcup_{i=1}^k I_i, \quad I_i = [a^i, b^i] \in \mathcal{J}^n.$$

Wir zerschneiden I durch alle Hyperebenen der Form

$$x_j = a_j^i, \quad x_j = b_j^i, \quad 1 \leq i \leq k, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Dadurch wird I in endlich viele Teilintervalle zerlegt; diejenigen, welche in I_i enthalten sind, bilden eine disjunkte Zerlegung J_{ij} , $1 \leq j \leq k_i$, von I_i durch Zerschneiden. Nach (1.31) gilt dann

$$\lambda(I) = \sum_{i,j} \lambda(J_{ij}) = \sum_i \sum_j \lambda(J_{ij}) = \sum_i \lambda(I_i). \quad (1.32)$$

Wir definieren nun die Fortsetzung von λ auf \mathcal{F}^n . Sei $F \in \mathcal{F}^n$. Nach Satz 1.11 lässt sich F schreiben als disjunkte Vereinigung

$$F = \bigcup_{i=1}^k I_i, \quad I_i \in \mathcal{J}^n.$$

Wir setzen

$$\lambda(F) = \sum_{i=1}^k \lambda(I_i). \quad (1.33)$$

Wir müssen zeigen, dass diese Definition von der Wahl der Zerlegung (I_i) unabhängig ist. Ist

$$F = \bigcup_{j=1}^l J_j, \quad J_j \in \mathcal{J}^n,$$

eine weitere disjunkte Zerlegung, so gilt

$$I_i = \dot{\bigcup}_j (I_i \cap J_j), \quad J_j = \dot{\bigcup}_i (I_i \cap J_j),$$

also, da λ auf \mathcal{J}^n endlich-additiv ist,

$$\sum_i \lambda(I_i) = \sum_i \sum_j \lambda(I_i \cap J_j) = \sum_j \lambda(J_j).$$

Wir zeigen nun, dass λ endlich-additiv ist auf \mathcal{F}^n . Ist F dargestellt als disjunkte Vereinigung

$$F = \bigcup_{i=1}^k F_i, \quad F_i \in \mathcal{F},$$

so stellen wir die F_i einzeln als disjunkte Vereinigung dar,

$$F_i = \dot{\bigcup}_j I_{ij}, \quad I_{ij} \in \mathcal{J}^n,$$

und es folgt

$$\lambda(F) = \sum_{i,j} \lambda(I_{ij}) = \sum_i \sum_j \lambda(I_{ij}) = \sum_i \lambda(F_i).$$

Die Eindeutigkeit der Fortsetzung von λ ist offensichtlich, da (1.33) für jede endlich-additive Fortsetzung gelten muss. \square

Notation 1.14 Sei Ω Menge, sei $E \subset \Omega$, sei $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge von Teilmengen von Ω . Wir schreiben

$$E_n \downarrow E, \quad \text{falls } E_1 \supset E_2 \supset \dots, \quad E = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n, \quad (1.34)$$

und

$$E_n \uparrow E, \quad \text{falls } E_1 \subset E_2 \subset \dots, \quad E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n. \quad (1.35)$$

Lemma 1.15 Sei Ω Menge, \mathcal{R} Ring in Ω , $\mu : \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty]$ endlich-additiv. Es gelte außerdem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n) = 0 \quad (1.36)$$

für jede Folge $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathcal{R} mit $E_n \downarrow \emptyset$. Dann ist μ auch σ -additiv.

Beweis: Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge paarweiser disjunkter Mengen $A_n \in \mathcal{R}$ mit

$$A = \dot{\bigcup}_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{R}.$$

Wir setzen

$$E_n = A \setminus \bigcup_{k=1}^n A_k.$$

Dann gilt $E_n \downarrow \emptyset$ und, da μ endlich-additiv ist,

$$\mu(A) = \mu(E_n) + \sum_{k=1}^n \mu(A_k).$$

Aus (1.36) folgt nun

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

□

Satz 1.16 (Rechenregeln für endlich-additive Mengenfunktionen)

Sei Ω Menge, \mathcal{R} Ring auf Ω , $\mu : \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty]$ endlich-additiv. Dann gelten für beliebige $A, B, A_i \in \mathcal{R}$

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B), \quad (1.37)$$

$$A \subset B \quad \Rightarrow \quad \mu(A) \leq \mu(B), \quad (1.38)$$

$$A \subset B, \mu(A) < \infty \quad \Rightarrow \quad \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A), \quad (1.39)$$

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \mu(A_i). \quad (1.40)$$

Ist μ außerdem σ -additiv, so gilt

$$A_0 \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \Rightarrow \quad \mu(A_0) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n), \quad (1.41)$$

und insbesondere

$$\mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n), \quad (1.42)$$

falls $\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{R}$.

Beweis: Ist $A \subset B$, so ist $B = A \dot{\cup} (B \setminus A)$, also

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A). \quad (1.43)$$

Hieraus folgen (1.38) und (1.39). Ist $\mu(A \cap B) = \infty$, so gilt (1.37) trivialerweise, andernfalls folgt (1.37) aus

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A). \quad (1.44)$$

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A \cap B). \quad (1.45)$$

Mit

$$B_i = A_i \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} A_k$$

gilt

$$B_i \in \mathcal{R}, \quad B_i \subset A_i, \quad \bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcup_{i=1}^n B_i,$$

die B_i sind paarweise disjunkt, also

$$\mu \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) = \mu \left(\bigcup_{i=1}^n B_i \right) = \sum_{i=1}^n \mu(B_i) \leq \sum_{i=1}^n \mu(A_i),$$

also folgt (1.40). Zum Beweis von (1.41) sei B_i wie eben definiert, dann gilt

$$A_0 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_0 \cap A_n) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_0 \cap B_n),$$

also

$$\mu(A_0) = \mu \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_0 \cap B_n) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_0 \cap B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n),$$

da $A_0 \cap B_n \subset A_n$. □

Satz 1.17 Die nach Satz 1.13 eindeutig bestimmte Fortsetzung $\lambda : \mathcal{F}^n \rightarrow [0, \infty)$ des Elementarinhalts

$$\lambda([a, b)) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i) \quad (1.46)$$

ist σ -additiv auf \mathcal{F}^n .

Beweis: Wegen Satz 1.13 und Lemma 1.15 genügt es zu zeigen, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(F_n) = 0$ gilt für jede Folge $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Figuren mit $F_n \downarrow \emptyset$. Dazu genügt es zu zeigen: Ist $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fallend, das heißt $F_n \supset F_{n+1}$ für alle n , und gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(F_n) = \delta > 0, \quad (1.47)$$

so ist

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset. \quad (1.48)$$

(Der Limes in (1.47) existiert, da $\lambda(F_n)$ monoton fallend und durch 0 nach unten beschränkt ist.) Zum Beweis dieser Aussage verwenden wir ein Kompaktheitsargument. Als ersten Schritt konstruieren wir $G_n \in \mathcal{F}^n$ mit $\overline{G_n} \subset F_n$ und

$$\lambda(F_n) - \lambda(G_n) \leq 2^{-n}\delta. \quad (1.49)$$

Die Mengen G_n werden folgendermaßen konstruiert: Ist

$$F_n = \bigcup_{i=1}^m I_i, \quad I_i = [a^i, b^i],$$

so setzen wir

$$G_n = \bigcup_{i=1}^m \tilde{I}_i, \quad \tilde{I}_i = [a^i, b^i - \varepsilon_i(1, \dots, 1)],$$

wobei $\varepsilon_i > 0$ so klein gewählt wird, dass (1.49) gilt. Wir definieren

$$H_n = \bigcap_{i=1}^n G_i. \quad (1.50)$$

Dann gilt $H_n \in \mathcal{F}^n$,

$$H_{n+1} \subset H_n, \quad \overline{H_n} \subset F_n, \quad (1.51)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Als nächstes zeigen wir mit vollständiger Induktion, dass gilt

$$\lambda(H_n) \geq \lambda(F_n) - \delta(1 - 2^{-n}) \quad (1.52)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $n = 1$ folgt (1.52) aus (1.49), da $H_1 = G_1$. Induktionsschritt $n \rightarrow n+1$: Es ist $H_{n+1} = G_{n+1} \cap H_n$, also mit (1.37) und (1.49)

$$\begin{aligned} \lambda(H_{n+1}) &= \lambda(G_{n+1}) + \lambda(H_n) - \lambda(G_{n+1} \cup H_n) \\ &\geq \lambda(F_{n+1}) - 2^{-(n+1)}\delta + \lambda(F_n) - \delta(1 - 2^{-n}) - \lambda(F_n), \quad (\text{da } G_{n+1} \cup H_n \subset F_n) \\ &= \lambda(F_{n+1}) - \delta(1 - 2^{-(n+1)}). \end{aligned}$$

Da nach Voraussetzung $\lambda(F_n) \geq \delta$ ist für alle n , folgt aus (1.52)

$$\lambda(H_n) > 0, \quad (1.53)$$

also auch $H_n \neq \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Mengen $\overline{H_n}$ sind beschränkt (da alle Figuren beschränkt sind), also kompakt. Für jede endliche Indexmenge $I \subset \mathbb{N}$ gilt

$$\bigcap_{i \in I} \overline{H_i} = \overline{H_m} \neq \emptyset, \quad m := \max\{i : i \in I\},$$

also gilt, da die kompakte Menge $\overline{H_1}$ die endliche Durchschnittseigenschaft (siehe Analysis 2, Kapitel 15) besitzt,

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{H_n} \neq \emptyset,$$

woraus (1.48) wegen (1.50) folgt. \square

Als letzte Vorbereitung für den Maßerweiterungssatz führen wir noch den Begriff des Dynkin-Systems ein.

Definition 1.18 (Dynkin-System)

Sei Ω eine Menge. Ein System \mathcal{D} von Teilmengen von Ω heißt Dynkin-System, falls gilt

$$\Omega \in \mathcal{D}, \tag{1.54}$$

$$D \in \mathcal{D} \Rightarrow \Omega \setminus D \in \mathcal{D}, \tag{1.55}$$

$$(D_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ Folge paarweiser disjunkter Mengen in } \mathcal{D} \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n \in \mathcal{D}. \tag{1.56}$$

Offensichtlich ist jede σ -Algebra ein Dynkin-System.

Lemma 1.19 Sei Ω Menge, \mathcal{D} Dynkin-System in Ω . Dann gilt

$$D, E \in \mathcal{D}, D \subset E \Rightarrow E \setminus D \in \mathcal{D}. \tag{1.57}$$

Beweis: Für $D, E \in \mathcal{D}$ mit $D \subset E$ gilt

$$E \setminus D = \Omega \setminus (D \cup (\Omega \setminus E)) \in \mathcal{D},$$

da D und $\Omega \setminus E$ disjunkt sind. \square

Satz 1.20 Sei $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ein Mengensystem in Ω , sei \mathcal{D} Dynkin-System mit

$$\mathcal{E} \subset \mathcal{D} \subset \sigma(\mathcal{E}). \tag{1.58}$$

Ist \mathcal{E} schnittstabil, das heißt,

$$E_1, E_2 \in \mathcal{E} \Rightarrow E_1 \cap E_2 \in \mathcal{E}, \tag{1.59}$$

so ist

$$\mathcal{D} = \sigma(\mathcal{E}). \tag{1.60}$$

Beweis: Wir definieren

$$\delta(\mathcal{E}) = \bigcap \{ \tilde{\mathcal{D}} : \tilde{\mathcal{D}} \text{ ist Dynkin-System in } \Omega, \mathcal{E} \subset \tilde{\mathcal{D}} \}. \tag{1.61}$$

Wie in Satz 1.4 beweist man, dass $\delta(\mathcal{E})$ ein Dynkin-System ist, und zwar das kleinste, welches \mathcal{E} enthält; es heißt das von \mathcal{E} erzeugte Dynkin-System. Es gilt dann $\delta(\mathcal{E}) \subset \mathcal{D} \subset \sigma(\mathcal{E})$. Zum Beweis von (1.60) genügt es zu zeigen, dass $\delta(\mathcal{E})$ eine σ -Algebra ist (dann folgt

$\sigma(\mathcal{E}) \subset \delta(\mathcal{E})$). Zu diesem Zweck definieren wir für beliebiges, aber fest gewähltes $D \in \delta(\mathcal{E})$ das Mengensystem

$$\mathcal{D}_D = \{Q : Q \subset \Omega, Q \cap D \in \delta(\mathcal{E})\}. \quad (1.62)$$

Wir zeigen, dass \mathcal{D}_D ein Dynkin-System ist. Offensichtlich ist $\Omega \in \mathcal{D}_D$. Weiter gilt mit Lemma 1.19

$$\begin{aligned} Q \in \mathcal{D}_D &\Rightarrow (\Omega \setminus Q) \cap D = D \setminus Q = D \setminus (Q \cap D) \in \delta(\mathcal{E}) \\ &\Rightarrow \Omega \setminus Q \in \mathcal{D}_D, \end{aligned}$$

und für eine Folge $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ paarweiser disjunkter Mengen in \mathcal{D}_D

$$\left(\dot{\bigcup}_{n \in \mathbb{N}} Q_n \right) \cap D = \dot{\bigcup}_{n \in \mathbb{N}} (Q_n \cap D) \in \delta(\mathcal{E}),$$

da $Q_n \cap D \in \delta(\mathcal{E})$ und $\delta(\mathcal{E})$ Dynkin-System ist, also

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} Q_n \in \mathcal{D}_D.$$

\mathcal{D}_D ist also Dynkin-System. Als nächstes zeigen wir

$$D \in \delta(\mathcal{E}), E \in \mathcal{E} \quad \Rightarrow \quad D \cap E \in \delta(\mathcal{E}). \quad (1.63)$$

Es ist nämlich

$$\mathcal{E} \subset \mathcal{D}_E, \quad \text{für alle } E \in \mathcal{E}, \quad (1.64)$$

da mit $E_1 \in \mathcal{E}$ auch $E_1 \cap E \in \mathcal{E}$ (\mathcal{E} ist schnittstabil) und damit $E_1 \in \mathcal{D}_E$ (da $\mathcal{E} \subset \delta(\mathcal{E})$). Aus (1.64) folgt $\delta(\mathcal{E}) \subset \mathcal{D}_E$ und damit $D \cap E \in \delta(\mathcal{E})$. Damit ist (1.63) bewiesen. Wir zeigen jetzt

$$D, E \in \delta(\mathcal{E}) \quad \Rightarrow \quad D \cap E \in \delta(\mathcal{E}). \quad (1.65)$$

Aus (1.63) folgt $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}_D$, also wieder wegen der Minimalität von $\delta(\mathcal{E})$, dass $\delta(\mathcal{E}) \subset \mathcal{D}_D$, und damit $E \cap D \in \delta(\mathcal{E})$. Schließlich zeigen wir, dass $\delta(\mathcal{E})$ eine σ -Algebra ist. Sei eine Folge $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\delta(\mathcal{E})$ gegeben. Wir setzen

$$D'_n = \bigcup_{i=1}^n D_i, \quad D'_0 = \emptyset.$$

Dann ist $D'_0 \in \delta(\mathcal{E})$ und (mit Induktion über n) $D_n \setminus D'_{n-1} = D_n \cap (\Omega \setminus D'_{n-1}) \in \delta(\mathcal{E})$ wegen (1.65), also auch

$$D'_n = (D_n \setminus D'_{n-1}) \cup D'_{n-1} \in \delta(\mathcal{E})$$

als disjunkte Vereinigung zweier Mengen in $\delta(\mathcal{E})$. Die Mengen $D'_n \setminus D'_{n-1}$ sind paarweise disjunkt, also folgt

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (D'_n \setminus D'_{n-1}) \in \delta(\mathcal{E}).$$

Damit ist $\delta(\mathcal{E})$ eine σ -Algebra. □

Theorem 1.21 (Maßerweiterungssatz, Existenz)

Sei Ω Menge, \mathcal{R} Ring in Ω , sei $\mu : \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty]$ eine σ -additive Mengenfunktion mit $\mu(\emptyset) = 0$. Dann kann μ zu einem Maß auf $\sigma(\mathcal{R})$ fortgesetzt werden.

Beweis: Der Beweis besteht aus zwei Teilen. Zuerst wird μ zu einem sogenannten äußeren Maß $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, \infty]$ fortgesetzt; μ^* hat aber nicht alle Eigenschaften eines Maßes. Im zweiten Teil wird bewiesen, dass die Restriktion von μ^* auf $\sigma(\mathcal{R})$ ein Maß ist.

Zu beliebigem $Q \subset \Omega$ definieren wir die Menge $\mathcal{U}(Q)$ aller abzählbaren Überdeckungen von Q durch Mengen in \mathcal{R} ,

$$\mathcal{U}(Q) = \{(A_n)_{n \in \mathbb{N}} : A_n \in \mathcal{R} \text{ für alle } n, Q \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\}. \quad (1.66)$$

Wir definieren das zu μ gehörende "äußere Maß" $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, \infty]$ durch

$$\mu^*(Q) = \begin{cases} \inf_{\mathcal{U}(Q)} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n), & \text{falls } \mathcal{U}(Q) \neq \emptyset, \\ +\infty, & \text{falls } \mathcal{U}(Q) = \emptyset. \end{cases} \quad (1.67)$$

Offensichtlich gilt $\mu^*(Q) \geq 0$ für alle $Q \subset \Omega$. Es gilt weiter

$$\mu^*(A) = \mu(A), \quad \text{für alle } A \in \mathcal{R}, \quad (1.68)$$

da einerseits $\mu^*(A) \leq \mu(A)$ wegen $(A, \emptyset, \emptyset, \dots) \in \mathcal{U}(A)$ und andererseits

$$\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

für alle $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{U}(A)$ nach Satz 1.16, also auch $\mu(A) \leq \mu^*(A)$. μ^* ist also eine Fortsetzung von μ . Aus (1.68) folgt insbesondere

$$\mu^*(\emptyset) = 0. \quad (1.69)$$

Weiter gilt

$$Q_1 \subset Q_2 \quad \Rightarrow \quad \mu^*(Q_1) \leq \mu^*(Q_2), \quad (1.70)$$

da $\mathcal{U}(Q_2) \subset \mathcal{U}(Q_1)$. Für eine beliebige Folge $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Teilmengen von Ω gilt

$$\mu^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(Q_n). \quad (1.71)$$

Ist nämlich $\mathcal{U}(Q_n) = \emptyset$ für ein $n \in \mathbb{N}$, so hat die rechte Seite in (1.71) den Wert $+\infty$. Andernfalls wählen wir zu beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Folge $(A_{nm})_{m \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{U}(Q_n)$ mit

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mu(A_{nm}) \leq \mu^*(Q_n) + 2^{-n} \varepsilon,$$

dann ist

$$(A_{nm})_{n,m \in \mathbb{N}} \in \mathcal{U} \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n \right),$$

und

$$\mu^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n \right) \leq \sum_{n,m=1}^{\infty} \mu(A_{nm}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(Q_n) + \varepsilon,$$

woraus (1.71) folgt. Wenden wir (1.71) auf die Folge $(Q \cap A, Q \setminus A, \emptyset, \dots)$ an, so folgt

$$\mu^*(Q) \leq \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \setminus A), \quad \text{für alle } A, Q \in \mathcal{P}(\Omega). \quad (1.72)$$

Damit ist der erste Teil des Beweises abgeschlossen. Der zweite Teil beginnt mit der eigentlichen Idee dieses Existenzbeweises, die auf C. Carathéodory (1914) zurückgeht. Wir definieren das Mengensystem

$$\mathcal{A} = \{A : A \subset \Omega, A \text{ erfüllt (1.74)}\}, \quad (1.73)$$

wobei

$$\mu^*(Q) = \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \setminus A), \quad \text{für alle } Q \subset \Omega. \quad (1.74)$$

Der Rest des Beweises besteht darin, zu zeigen, dass \mathcal{A} eine σ -Algebra ist mit $\sigma(\mathcal{R}) \subset \mathcal{A}$, und dass $\mu^*|_{\mathcal{A}}$ ein Maß ist. Wir zeigen als erstes, dass

$$\mathcal{R} \subset \mathcal{A}. \quad (1.75)$$

Seien $A \in \mathcal{R}$, $Q \in \mathcal{P}(\Omega)$ beliebig. Wegen (1.72) ist in (1.74) nur “ \geq ” zu zeigen. Sei $\mathcal{U}(Q) \neq \emptyset$ (andernfalls ist $\mu^*(Q) = \infty$), sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Element von $\mathcal{U}(Q)$. Dann gilt

$$\mu(A_n) = \mu(A_n \cap A) + \mu(A_n \setminus A)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, also

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \cap A) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \setminus A),$$

also, da die Folgen $(A_n \cap A)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(A_n \setminus A)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{U}(Q \cap A)$ bzw. $\mathcal{U}(Q \setminus A)$ liegen,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \geq \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \setminus A),$$

also (Übergang zum Infimum bezüglich $\mathcal{U}(Q)$ auf der linken Seite)

$$\mu^*(Q) \geq \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \setminus A).$$

Damit ist (1.75) gezeigt. Direkt aus der Definition von \mathcal{A} folgt

$$\Omega \in \mathcal{A}. \quad (1.76)$$

Weiter gilt

$$A \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad \Omega \setminus A \in \mathcal{A}, \quad (1.77)$$

da $Q \cap (\Omega \setminus A) = Q \setminus A$ und $Q \setminus (\Omega \setminus A) = Q \cap A$ für alle $Q \subset \Omega$ gelten und damit aus der Gültigkeit von (1.74) für A auch die Gültigkeit für $\Omega \setminus A$ folgt. Wir führen für den Rest des Beweises die abkürzende Schreibweise

$$A^c = \Omega \setminus A$$

für das Komplement einer Menge $A \subset \Omega$ ein. Wir zeigen als nächstes

$$A, B \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad A \cup B \in \mathcal{A}. \quad (1.78)$$

Sind nämlich $A, B \in \mathcal{A}$, so gilt für alle $Q \subset \Omega$

$$\mu^*(Q) = \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \cap A^c) \quad (1.79)$$

$$= \mu^*(Q \cap A \cap B) + \mu^*(Q \cap A \cap B^c) + \mu^*(Q \cap A^c \cap B) + \mu^*(Q \cap A^c \cap B^c). \quad (1.80)$$

Setzen wir $Q \cap (A \cup B)$ ein statt Q in (1.80), so erhalten wir

$$\mu^*(Q \cap (A \cup B)) = \mu^*(Q \cap A \cap B) + \mu^*(Q \cap A \cap B^c) + \mu^*(Q \cap A^c \cap B), \quad (1.81)$$

und aus (1.79) und (1.81)

$$\mu^*(Q) = \mu^*(Q \cap (A \cup B)) + \mu^*(Q \cap (A \cup B)^c)$$

und damit $A \cup B \in \mathcal{A}$. Aus (1.77) und (1.78) folgt

$$A, B \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad A \cap B \in \mathcal{A}, \quad A \setminus B \in \mathcal{A}, \quad (1.82)$$

da $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$, $A \setminus B = A \cap B^c$. Falls nun $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \cap B = \emptyset$, so folgt aus (1.81)

$$\mu^*(Q \cap (A \cup B)) = \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \cap B) \quad (1.83)$$

für alle $Q \subset \Omega$. Sei nun $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge paarweiser disjunkter Elemente von \mathcal{A} . Wir wollen zeigen, dass gilt

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}, \quad \mu^*(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n). \quad (1.84)$$

Zunächst ist $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$ wegen (1.78). Aus (1.83) folgt für alle $Q \subset \Omega$ und alle $n \in \mathbb{N}$

$$\mu^*\left(Q \cap \bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \mu^*\left(Q \cap \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) + \mu^*(Q \cap A_n) = \sum_{i=1}^n \mu^*(Q \cap A_i)$$

mit Induktion, also

$$\mu^*(Q) = \mu^*\left(Q \cap \bigcup_{i=1}^n A_i\right) + \mu^*\left(Q \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i\right) \geq \sum_{i=1}^n \mu^*(Q \cap A_i) + \mu^*(Q \setminus A),$$

also wegen (1.71), mit $n \rightarrow \infty$,

$$\mu^*(Q) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(Q \cap A_i) + \mu^*(Q \setminus A) \geq \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} Q \cap A_i\right) + \mu^*(Q \setminus A) \quad (1.85)$$

$$= \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \setminus A), \quad (1.86)$$

und wegen (1.72) folgt $A \in \mathcal{A}$, und es gilt Gleichheit überall in (1.85). Setzen wir $Q = A$ in (1.85), so ergibt sich

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu^*(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n), \quad (1.87)$$

und die umgekehrte Ungleichung folgt ebenfalls aus (1.71). Damit ist (1.84) bewiesen. Ist nun $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in \mathcal{A} , so wird durch

$$B_n = A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i$$

eine Folge $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Mengen definiert, welche wegen (1.78) und (1.82) ebenfalls in \mathcal{A} liegt, also ist wegen (1.84)

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathcal{A}$$

Zusammen mit (1.76) und (1.77) ergibt sich, dass \mathcal{A} eine σ -Algebra ist. Aus der bereits bewiesenen Inklusion $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}$ folgt nunmehr

$$\sigma(\mathcal{R}) \subset \mathcal{A},$$

und wegen (1.84) ist $\mu^*|_{\mathcal{A}}$ ein Maß. □

Theorem 1.22 (Maßerweiterungssatz, Eindeutigkeit)

Sei Ω Menge, $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, sei \mathcal{E} schnittstabil. Seien μ_1, μ_2 Maße auf $\sigma(\mathcal{E})$, es gelte

$$\mu_1|_{\mathcal{E}} = \mu_2|_{\mathcal{E}}, \tag{1.88}$$

und es gebe eine Folge $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathcal{E} mit $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n = \Omega$ und $\mu_1(E_n) = \mu_2(E_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\mu_1 = \mu_2$ auf $\sigma(\mathcal{E})$.

Beweis: Für $E \in \mathcal{E}$ definieren wir

$$\mathcal{D}_E = \{D : D \in \sigma(\mathcal{E}), \mu_1(E \cap D) = \mu_2(E \cap D)\}. \tag{1.89}$$

Da \mathcal{E} schnittstabil ist, gilt

$$\mathcal{E} \subset \mathcal{D}_E \subset \sigma(\mathcal{E}), \quad \text{für alle } E \in \mathcal{E}. \tag{1.90}$$

Wir zeigen, dass \mathcal{D}_E ein Dynkin-System ist, falls $E \in \mathcal{E}$ und $\mu_1(E) = \mu_2(E) < \infty$. Offensichtlich ist $\Omega \in \mathcal{D}_E$. Ist $D \in \mathcal{D}_E$, so ist $\Omega \setminus D \in \sigma(\mathcal{E})$, also

$$\begin{aligned} \mu_1(E \cap (\Omega \setminus D)) &= \mu_1(E \setminus D) = \mu_1(E) - \mu_1(E \cap D) = \mu_2(E) - \mu_2(E \cap D) = \mu_2(E \setminus D) \\ &= \mu_2(E \cap (\Omega \setminus D)), \end{aligned}$$

also ist auch $\Omega \setminus D \in \mathcal{D}_E$. Sei nun $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge paarweiser disjunkter Mengen in \mathcal{D}_E , dann ist $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n \in \sigma(\mathcal{E})$, also

$$\begin{aligned} \mu_1 \left(E \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n \right) &= \mu_1 \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E \cap D_n \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_1(E \cap D_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_2(E \cap D_n) \\ &= \mu_2 \left(E \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n \right), \end{aligned}$$

woraus $\cup_{n \in \mathbb{N}} D_n \in \mathcal{D}_E$ folgt. \mathcal{D}_E ist also ein Dynkin-System. Aus Satz 1.20 folgt nun, dass

$$\mathcal{D}_E = \sigma(\mathcal{E}),$$

also ergibt sich

$$\mu_1(E \cap D) = \mu_2(E \cap D) \quad (1.91)$$

für alle $D \in \sigma(\mathcal{E})$ und alle $E \in \mathcal{E}$ mit $\mu_1(E) < \infty$. Wir definieren

$$F_n = E_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} E_i.$$

Dann ist $F_n \in \sigma(\mathcal{E})$, $F_n \subset E_n$, die F_n sind paarweise disjunkt, und $\Omega = \cup_{n \in \mathbb{N}} F_n$. Wegen (1.91) gilt daher für alle $A \in \sigma(\mathcal{E})$ und alle $n \in \mathbb{N}$

$$\mu_1(F_n \cap A) = \mu_1(E_n \cap (F_n \cap A)) = \mu_2(E_n \cap (F_n \cap A)) = \mu_2(F_n \cap A),$$

also gilt

$$\begin{aligned} \mu_1(A) &= \mu_1\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \cap A\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_1(F_n \cap A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_2(F_n \cap A) = \mu_2\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \cap A\right) \\ &= \mu_2(A) \end{aligned}$$

für alle $A \in \sigma(\mathcal{E})$. □

Folgerung 1.23 *Der n -dimensionale Elementarinhalt*

$$\lambda([a, b)) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i) \quad (1.92)$$

läßt sich auf genau eine Weise zu einem Maß λ auf der Borel-Algebra $\sigma(\mathcal{O}^n)$ im \mathbb{R}^n fortsetzen. Dieses Maß λ heißt das Lebesgue-Maß (oder das Lebesgue-Borel-Maß).

Beweis: Es gilt $\sigma(\mathcal{O}^n) = \sigma(\mathcal{J}^n)$ nach Satz 1.6. Wegen Satz 1.17 erfüllt λ die Voraussetzungen des Existenzsatzes 1.21 auf dem Ring $\mathcal{R} = \mathcal{J}^n$. Da die Menge \mathcal{J}^n der halboffenen Intervalle schnittstabil ist, folgt die Eindeutigkeit aus Satz 1.22, angewandt auf $\mathcal{E} = \mathcal{J}^n$. □

Das Problem, den Inhalt einer möglichst großen Klasse von Mengen zu definieren, wird vom Maßerweiterungssatz (Theoreme 1.21 und 1.22) in für viele Zwecke der Analysis befriedigender Weise gelöst.

Satz 1.24 *Sei Ω Menge, sei \mathcal{R} Ring in Ω , seien μ_1, μ_2 Maße auf $\sigma(\mathcal{R})$, es gelte*

$$\mu_1(E) \leq \mu_2(E), \quad \text{für alle } E \in \mathcal{R}, \quad (1.93)$$

es gebe eine Folge $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathcal{R} mit $\cup_{n \in \mathbb{N}} E_n = \Omega$ und $\mu_2(E_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\mu_1(A) \leq \mu_2(A), \quad \text{für alle } A \in \sigma(\mathcal{R}). \quad (1.94)$$

Beweis: Durch

$$\nu(E) = \begin{cases} \mu_2(E) - \mu_1(E), & \text{falls } \mu_2(E) < \infty, \\ +\infty, & \text{falls } \mu_2(E) = \infty, \end{cases} \quad (1.95)$$

wird ein endlich-additives $\nu : \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty]$ definiert mit $\nu(\emptyset) = 0$. Aus Lemma 1.15 folgt, dass ν auf \mathcal{R} σ -additiv ist. Nach Theorem 1.21 lässt sich ν zu einem Maß auf $\sigma(\mathcal{R})$ fortsetzen. Es genügt nun zu zeigen, dass

$$A \in \sigma(\mathcal{R}), \mu_2(A) < \infty \quad \Rightarrow \quad \mu_1(A) \leq \mu_2(A). \quad (1.96)$$

Dieser Beweis wird analog zum Beweis des Eindeutigkeitsatzes 1.22 geführt. Für $E \in \mathcal{R}$ mit $\mu_2(E) < \infty$ definieren wir

$$\mathcal{D}_E = \{D : D \in \sigma(\mathcal{R}), \nu(E \cap D) = \mu_2(E \cap D) - \mu_1(E \cap D)\}. \quad (1.97)$$

Wie im Beweis von 1.21 ergibt sich, dass \mathcal{D}_E ein Dynkin-System ist, also $\mathcal{D}_E = \sigma(\mathcal{R})$ nach Satz 1.20, also

$$0 \leq \nu(E \cap D) = \mu_2(E \cap D) - \mu_1(E \cap D) \quad (1.98)$$

für alle $D \in \sigma(\mathcal{E})$ und alle $E \in \mathcal{E}$ mit $\mu_2(E) < \infty$. Wir definieren wieder

$$F_n = E_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} E_i.$$

Wie im Beweis von 1.22 folgt für alle $A \in \sigma(\mathcal{R})$ mit $\mu_2(A) < \infty$ und alle $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq \nu(F_n \cap A) = \mu_2(F_n \cap A) - \mu_1(F_n \cap A),$$

also gilt

$$\begin{aligned} \mu_1(A) &= \mu_1\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \cap A\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_1(F_n \cap A) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_2(F_n \cap A) = \mu_2\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \cap A\right) \\ &= \mu_2(A) \end{aligned}$$

Damit ist (1.96) bewiesen. □

Definition 1.25 (Meßbare Abbildung)

Seien Ω, Ω' Mengen, seien $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ σ -Algebren auf Ω bzw. Ω' . Eine Abbildung $T : \Omega \rightarrow \Omega'$ heißt messbar, falls $T^{-1}(A') \in \mathcal{A}$ gilt für alle $A' \in \mathcal{A}'$ (das heißt, falls alle Urbilder von messbaren Mengen wieder messbar sind). (Falls nicht klar ist, welche σ -Algebren gemeint sind, sagen wir, dass T \mathcal{A} - \mathcal{A}' -messbar ist.) □

Lemma 1.26 Seien Ω, Ω' Mengen, \mathcal{A} σ -Algebra auf Ω , $\mathcal{E}' \subset \mathcal{P}(\Omega')$ Mengensystem, $\mathcal{A}' = \sigma(\mathcal{E}')$, sei $T : \Omega \rightarrow \Omega'$ Abbildung. Gilt $T^{-1}(E') \in \mathcal{A}$ für alle $E' \in \mathcal{E}'$, so ist T messbar.

Beweis: Nach Übungsaufgabe ist

$$\mathcal{B}' = \{B' : B' \subset \Omega', T^{-1}(B') \in \mathcal{A}\}$$

eine σ -Algebra in Ω' . Aus $\mathcal{E}' \subset \mathcal{B}'$ folgt $\mathcal{A}' = \sigma(\mathcal{E}') \subset \mathcal{B}'$. □

Folgerung 1.27 Seien (Ω, d) , (Ω', d') metrische Räume. Dann ist jede stetige Abbildung $T : \Omega \rightarrow \Omega'$ messbar bezüglich der Borel-Algebren (kurz: Borel-messbar).

Beweis: Ist U' offen in Ω' , so ist $T^{-1}(U')$ offen in Ω und damit Borel-messbar. Aus Lemma 1.26 folgt die Behauptung. \square

Satz 1.28 (Bildmaß)

Seien Ω, Ω' Mengen, seien $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ σ -Algebren auf Ω bzw. Ω' , sei $T : \Omega \rightarrow \Omega'$ messbar. Dann wird für jedes Maß μ auf \mathcal{A} durch

$$\mu'(A') = \mu(T^{-1}(A')) \quad (1.99)$$

ein Maß μ' auf \mathcal{A}' definiert, es heißt das Bild von μ unter der Abbildung T , geschrieben

$$\mu' = T(\mu). \quad (1.100)$$

Beweis: μ' ist wohldefiniert, da $T^{-1}(A') \in \mathcal{A}$ für alle $A' \in \mathcal{A}'$. Ist $(A'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen in \mathcal{A}' , so gilt

$$\begin{aligned} \mu' \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A'_n \right) &= \mu \left(T^{-1} \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A'_n \right) \right) = \mu \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} T^{-1}(A'_n) \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(T^{-1}(A'_n)) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu'(A'_n). \end{aligned}$$

\square

Satz 1.29 Seien $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ Mengen, seien \mathcal{A}_i σ -Algebren auf Ω_i , seien $T_1 : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ und $T_2 : \Omega_2 \rightarrow \Omega_3$ messbar. Dann ist auch $T_2 \circ T_1$ messbar. Ist μ Maß auf \mathcal{A}_1 , so gilt

$$(T_2 \circ T_1)(\mu) = T_2(T_1(\mu)). \quad (1.101)$$

Beweis: Für alle $A \in \mathcal{A}_3$ ist $T_2^{-1}(A) \in \mathcal{A}_2$, also

$$(T_2 \circ T_1)^{-1}(A) = T_1^{-1}(T_2^{-1}(A)) \in \mathcal{A}_1,$$

also ist $T_2 \circ T_1$ messbar. Für $A \in \mathcal{A}_3$ gilt weiter

$$\begin{aligned} (T_2(T_1(\mu)))(A) &= (T_1(\mu))(T_2^{-1}(A)) = \mu(T_1^{-1}(T_2^{-1}(A))) = \mu((T_2 \circ T_1)^{-1}(A)) \\ &= ((T_2 \circ T_1)(\mu))(A). \end{aligned}$$

\square

Das Lebesgue-Maß ist translationsinvariant:

Satz 1.30 Sei $a \in \mathbb{R}^n$, $T_a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiert durch $T_a(x) = x + a$. Dann ist

$$T_a(\lambda) = \lambda. \quad (1.102)$$

Beweis: T_a ist stetig, also messbar. Für alle halboffenen Intervalle $[b, c) \in \mathcal{J}^n$ gilt

$$\begin{aligned} (T_a(\lambda))(b, c) &= \lambda(T_a^{-1}([b, c))) = \lambda([b - a, c - a)) = \prod_{i=1}^n ((c_i - a_i) - (b_i - a_i)) \\ &= \prod_{i=1}^n (c_i - b_i) = \lambda([b, c)). \end{aligned}$$

Aus dem Eindeutigkeitsatz 1.22 folgt, dass λ und $T_a(\lambda)$ auf der Borel-Algebra übereinstimmen. \square

Wir betrachten nun die Streckung $D_\alpha^i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um den Faktor α in die i -te Koordinatenrichtung,

$$D_\alpha^i(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{i-1}, \alpha x_i, x_{i+1}, \dots, x_n). \quad (1.103)$$

Es gilt

$$(D_\alpha^i)^{-1}([a, b)) = [(a_1, \dots, \frac{a_i}{\alpha}, \dots, a_n), (b_1, \dots, \frac{b_i}{\alpha}, \dots, b_n)), \quad \alpha > 0, \quad (1.104)$$

$$(D_\alpha^i)^{-1}([a, b)) = [(a_1, \dots, \frac{b_i}{\alpha}, \dots, a_n), (b_1, \dots, \frac{a_i}{\alpha}, \dots, b_n)), \quad \alpha < 0, \quad (1.105)$$

also

$$(D_\alpha^i(\lambda))(a, b) = \lambda((D_\alpha^i)^{-1}([a, b))) = \frac{1}{|\alpha|} \prod_{j=1}^n (b_j - a_j) = \frac{1}{|\alpha|} \lambda([a, b)). \quad (1.106)$$

Wieder folgt aus dem Eindeutigkeitsatz 1.22, dass

$$D_\alpha^i(\lambda) = \frac{1}{|\alpha|} \lambda \quad (1.107)$$

auf der Borel-Algebra gilt. Eine Homothetie

$$H_r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad H_r(x) = rx, \quad r \neq 0 \text{ fest}, \quad (1.108)$$

lässt sich darstellen als

$$H_r = D_r^1 \circ D_r^2 \circ \dots \circ D_r^n, \quad (1.109)$$

also folgt, wenn wir Satz 1.29 und (1.107) mehrfach anwenden,

$$H_r(\lambda) = \frac{1}{|r|^n} \lambda, \quad (1.110)$$

und insbesondere

$$H_{-1}(\lambda) = \lambda, \quad (1.111)$$

das Lebesgue-Maß ist also invariant bezüglich Spiegelung an den Koordinatenachsen (das gilt sogar bezüglich beliebiger orthogonaler Abbildungen, siehe unten Satz 1.33).

Satz 1.31 Sei μ ein Maß auf der Borelgebra im \mathbb{R}^n , welches translationsinvariant ist, es gelte also

$$T_a(\mu) = \mu, \quad \text{für alle } a \in \mathbb{R}^n. \quad (1.112)$$

Gilt außerdem $\mu([0, 1)) < \infty$, so folgt

$$\mu = \alpha\lambda, \quad (1.113)$$

wobei $\alpha = \mu([0, 1))$.

Beweis: Wir setzen $\alpha = \mu([0, 1))$, dann ist $\mu([0, 1)) = \alpha\lambda([0, 1))$, und wir setzen weiter

$$B_k = [0, (\frac{1}{k}, \dots, \frac{1}{k})), \quad k \in \mathbb{N},$$

$$G_k = \{(a_1, \dots, a_n) : a_i = \frac{m_i}{k}, m_i \in \{0, 1, \dots, k-1\}\}.$$

Dann läßt sich für jedes $k \in \mathbb{N}$ das halboffene Intervall $[0, 1)$ darstellen als disjunkte Vereinigung

$$[0, 1) = \bigcup_{a \in G_k} T_a(B_k), \quad (1.114)$$

und wegen $\mu(T_a(B_k)) = \mu(B_k)$, $\lambda(T_a(B_k)) = \lambda(B_k)$, folgt

$$\mu([0, 1)) = k^n \mu(B_k), \quad \lambda([0, 1)) = k^n \lambda(B_k), \quad (1.115)$$

also weiter

$$\mu(B_k) = \alpha\lambda(B_k), \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}. \quad (1.116)$$

Sei nun

$$B = [0, (b_1, \dots, b_n)), \quad b_i \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+ \quad \text{für alle } i,$$

dann ist mit geeigneten $k, j_1, \dots, j_n \in \mathbb{N}$

$$B = [0, (\frac{j_1}{k}, \dots, \frac{j_n}{k})),$$

also läßt sich B darstellen als disjunkte Vereinigung

$$B = \bigcup_{a \in G(b)} T_a(B_k),$$

wobei

$$G(b) = \left\{ \left(\frac{m_1}{k}, \dots, \frac{m_n}{k} \right) : 0 \leq m_i < j_i, m_i \in \mathbb{N} \right\}.$$

Es folgt für alle solchen Mengen B

$$\mu(B) = \mu(B_k) \prod_{i=1}^n j_i = \alpha\lambda(B_k) \prod_{i=1}^n j_i = \alpha\lambda(B),$$

und weiter für beliebige $a, b \in \mathbb{Q}^n$

$$\mu([a, b)) = \mu([0, b-a)) = \alpha\lambda([0, b-a)) = \alpha\lambda([a, b)). \quad (1.117)$$

Sei nun

$$\mathcal{J}_{\text{rat}}^n = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{Q}^n\}$$

die Menge aller halboffenen Intervalle, deren Ecken rationale Koordinaten haben. Da sich jedes offene Intervall in \mathbb{R}^n , und damit auch jede offene Teilmenge des \mathbb{R}^n , als abzählbare Vereinigung solcher halboffener Intervalle schreiben lässt, gilt $\mathcal{O}^n \subset \sigma(\mathcal{J}_{\text{rat}}^n)$, also $\sigma(\mathcal{O}^n) \subset \sigma(\mathcal{J}_{\text{rat}}^n)$, also

$$\sigma(\mathcal{J}_{\text{rat}}^n) = \sigma(\mathcal{O}^n).$$

Da das Mengensystem $\mathcal{J}_{\text{rat}}^n$ ebenfalls schnittstabil ist, lässt sich der Eindeutigkeitsatz 1.22 mit $\mathcal{E} = \mathcal{J}_{\text{rat}}^n$ anwenden, und aus (1.117) folgt die Behauptung. \square

Folgerung 1.32 *Das Lebesgue-Maß ist das einzige translationsinvariante Maß auf der Borel-Algebra im \mathbb{R}^n , welches dem Einheitswürfel $[0, 1)$ das Maß 1 zuordnet.* \square

Satz 1.33 *Sei $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine orthogonale lineare Abbildung, das heißt, T ist linear und es gilt*

$$\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle, \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^n. \quad (1.118)$$

Dann gilt

$$T(\lambda) = \lambda. \quad (1.119)$$

Beweis: Nach Folgerung 1.32 genügt es zu zeigen, dass $T(\lambda)$ ein translationsinvariantes Maß ist mit $(T(\lambda))([0, 1)) = 1$. Wegen

$$T(x) + a = T(x + T^{-1}(a))$$

für alle $x, a \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$T_a \circ T = T \circ T_b, \quad b = T^{-1}(a),$$

also

$$T_a(T(\lambda)) = (T_a \circ T)(\lambda) = (T \circ T_b)(\lambda) = T(T_b(\lambda)) = T(\lambda),$$

da $T_b(\lambda) = \lambda$, also ist $T(\lambda)$ translationsinvariant. Weiter gilt

$$(T(\lambda))([0, 1)) = \lambda(T^{-1}([0, 1))) < \infty,$$

da $T^{-1}([0, 1))$ beschränkt ist. Aus Satz 1.31 folgt nun, dass

$$T(\lambda) = \alpha\lambda, \quad \alpha = (T(\lambda))([0, 1)). \quad (1.120)$$

Für die Einheitskugel $B = \{x : x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_2 \leq 1\}$ gilt $B = T^{-1}(B)$, da mit T auch T^{-1} orthogonal ist, es folgt also

$$\alpha\lambda(B) = (T(\lambda))(B) = \lambda(T^{-1}(B)) = \lambda(B). \quad (1.121)$$

Hieraus folgt $\alpha = 1$ und damit die Behauptung des Satzes, da $0 < \lambda(B) < \infty$, da B beschränkt ist und

$$\left[0, \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)\right) \subset B.$$

\square

Definition 1.34 (Bewegung)

Eine Abbildung $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt Bewegung, falls

$$\|Tx - Ty\|_2 = \|x - y\|_2, \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^n. \quad (1.122)$$

Zwei Mengen $A, B \subset \mathbb{R}^n$ heißen kongruent, falls es eine Bewegung T gibt mit $B = T(A)$.

□

Satz 1.35 Das Lebesgue-Maß ist bewegungsinvariant, das heißt, es gilt

$$T(\lambda) = \lambda \quad (1.123)$$

für jede Bewegung $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Insbesondere gilt

$$\lambda(A) = \lambda(B), \quad (1.124)$$

falls A und B kongruente Borelmengen sind.

Beweis: Ist T Bewegung mit $T(0) = 0$, so ist T eine orthogonale lineare Abbildung (folgt aus einem Satz der Linearen Algebra, siehe auch Übung). Sind T, T' Bewegungen, so folgt unmittelbar aus der Definition, dass auch $T' \circ T$ eine Bewegung ist. Ist T eine Bewegung und setzen wir $a = -T(0)$, so ist $T_a \circ T$ eine Bewegung mit $(T_a \circ T)(0) = 0$. Hieraus folgt, dass sich jede Bewegung T darstellen lässt als

$$T = T_{T(0)} \circ S, \quad S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ orthogonal.}$$

Aus Satz 1.33 und der Translationsinvarianz von λ folgt, dass

$$T(\lambda) = T_{T(0)}(\lambda) = \lambda$$

gilt für jede Bewegung T . □

Satz 1.36 Sei $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ linear und invertierbar. Dann gilt

$$T(\lambda) = \frac{1}{|\det T|} \lambda. \quad (1.125)$$

Beweis: Sei A die zu T gehörende Matrix bezüglich der Standardbasis. Dann gibt es orthogonale Matrizen $U, V \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ und eine Diagonalmatrix $D = \text{diag}\{d_1, \dots, d_n\} \in \mathbb{R}^{(n,n)}$, $d_i > 0$, mit

$$A = UDV. \quad (1.126)$$

Es handelt sich hier um die sogenannte Singulärwertzerlegung von A , siehe Lineare Algebra oder Numerik. Da D sich als Produkt der Streckungen $D_{d_i}^i$ schreiben lässt, folgt aus (1.107) und Satz 1.33

$$T(\lambda) = \frac{1}{\prod_{i=1}^n d_i} \lambda. \quad (1.127)$$

Andererseits gilt

$$|\det(T)| = |\det(A)| = |\det(U)| \cdot |\det(D)| \cdot |\det V| = |\det(D)| = \prod_{i=1}^n d_i.$$

□

Satz 1.37 *Es gibt eine Menge $K \subset \mathbb{R}^n$, die keine Borelmenge ist.*

Beweis: Wir definieren eine Äquivalenzrelation \sim auf \mathbb{R}^n durch

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad x - y \in \mathbb{Q}^n. \quad (1.128)$$

Wir wählen aus jeder Äquivalenzklasse genau ein Element k , und zwar so, dass $k \in [0, 1)$. Wir definieren K als die Menge aller so gewählten Elemente. Dann gilt

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{y \in \mathbb{Q}^n} (y + K), \quad (1.129)$$

denn zu jedem $x \in \mathbb{R}^n$ gibt es ein $k \in K$ mit $x \sim k$, also $x - k \in \mathbb{Q}^n$, $x \in (x - k) + K$. Die Vereinigung in (1.129) ist disjunkt: Sind $x, y \in \mathbb{Q}^n$ mit $(x + K) \cap (y + K) \neq \emptyset$, so gibt es $k_1, k_2 \in K$ mit $x + k_1 = y + k_2$, also

$$k_2 - k_1 = x - y \in \mathbb{Q}^n,$$

also $k_1 \sim k_2$ und daher $k_1 = k_2$ nach Konstruktion von K , also folgt $x = y$. Wir zeigen nun, dass die Annahme, K sei Borelmenge, zu einem Widerspruch führt. Mit K sind auch alle Mengen $y + K$ Borelmengen, und es gilt, da λ translationsinvariant ist,

$$\infty = \lambda(\mathbb{R}^n) = \sum_{y \in \mathbb{Q}^n} \lambda(y + K) = \sum_{y \in \mathbb{Q}^n} \lambda(K),$$

also ist $\lambda(K) > 0$. Andererseits gilt $y + K \subset [0, 2)$ für $y \in [0, 1)$, da $K \subset [0, 1)$ nach Konstruktion, also

$$2^n = \lambda([0, 2)) \geq \lambda \left(\bigcup_{y \in \mathbb{Q}^n \cap [0, 1)} (y + K) \right) = \sum_{y \in \mathbb{Q}^n \cap [0, 1)} \lambda(y + K) = \sum_{y \in \mathbb{Q}^n \cap [0, 1)} \lambda(K),$$

also ist $\lambda(K) = 0$, da $\mathbb{Q}^n \cap [0, 1)$ eine unendliche Menge ist. Widerspruch. □

2 Das Lebesgue-Integral

Wir wollen Funktionen

$$f : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$$

integrieren bezüglich eines Maßes μ , welches auf einer σ -Algebra \mathcal{A} in Ω definiert ist. Wir setzen

$$\overline{\mathcal{J}} = \{[a, b) : a \in [-\infty, \infty), b \in \mathbb{R}\} = \mathcal{J}^1 \cup \{[-\infty, b) : b \in \mathbb{R}\}, \quad (2.1)$$

und bezeichnen die von $\overline{\mathcal{J}}$ in $[-\infty, \infty]$ erzeugte σ -Algebra $\sigma(\overline{\mathcal{J}})$ als Borel-Algebra in $[-\infty, \infty]$. Es folgt unmittelbar, dass alle Intervalle der Form

$$[a, b], \quad (a, b], \quad [a, b), \quad (a, b), \quad a \in [-\infty, \infty), b \in (-\infty, \infty], \quad (2.2)$$

Elemente von $\sigma(\overline{\mathcal{J}})$ sind.

Lemma 2.1 Für die Borel-Algebra $\sigma(\mathcal{J}^1)$ in \mathbb{R} gilt

$$\sigma(\mathcal{J}^1) = \{A \cap \mathbb{R} : A \in \sigma(\overline{\mathcal{J}})\}. \quad (2.3)$$

Beweis: Übung. □

Satz 2.2 Sei Ω Menge, \mathcal{A} eine σ -Algebra in Ω , sei $f : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$. Dann sind äquivalent:

- (i) f ist messbar (bezüglich \mathcal{A} und $\sigma(\overline{\mathcal{J}})$).
- (ii) $\{\omega : f(\omega) \geq \alpha\} \in \mathcal{A}$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.
- (iii) $\{\omega : f(\omega) > \alpha\} \in \mathcal{A}$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.
- (iv) $\{\omega : f(\omega) \leq \alpha\} \in \mathcal{A}$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.
- (v) $\{\omega : f(\omega) < \alpha\} \in \mathcal{A}$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.

Beweis: “(i) \Rightarrow (ii)”: $\{\omega : f(\omega) \geq \alpha\} = f^{-1}([\alpha, \infty])$.

“(ii) \Rightarrow (iii)”: $\{\omega : f(\omega) > \alpha\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\omega : f(\omega) \geq \alpha + \frac{1}{n}\}$.

“(iii) \Rightarrow (iv)”: $\{\omega : f(\omega) \leq \alpha\} = \Omega \setminus \{\omega : f(\omega) > \alpha\}$.

“(iv) \Rightarrow (v)”: $\{\omega : f(\omega) < \alpha\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\omega : f(\omega) \leq \alpha - \frac{1}{n}\}$.

“(v) \Rightarrow (i)”: Wir setzen $\mathcal{E} = \{[-\infty, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$. Nach Lemma 1.26 ist f \mathcal{A} - $\sigma(\mathcal{E})$ -messbar. Wegen

$$[a, b) = [-\infty, b) \setminus [-\infty, a)$$

ist $\overline{\mathcal{J}} \subset \sigma(\mathcal{E})$, also auch $\sigma(\overline{\mathcal{J}}) \subset \sigma(\mathcal{E})$, und damit f auch \mathcal{A} - $\sigma(\overline{\mathcal{J}})$ -messbar. □

Notation 2.3 Für $f, g : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$ definieren wir

$$\{f \leq g\} = \{\omega : \omega \in \Omega, f(\omega) \leq g(\omega)\},$$

analog definieren wir

$$\{f < g\}, \quad \{f \geq g\}, \quad \{f > g\}, \quad \{f = g\}, \quad \{f \neq g\}.$$

Satz 2.4 Sei Ω Menge, \mathcal{A} σ -Algebra in Ω , seien $f, g : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$ messbar. Dann sind die Mengen

$$\{f \leq g\}, \quad \{f < g\}, \quad \{f \geq g\}, \quad \{f > g\}, \quad \{f = g\}, \quad \{f \neq g\}, \quad (2.4)$$

messbare Teilmengen von Ω .

Beweis: Wegen Satz 2.2 ist

$$\{f < g\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (\{f < q\} \cap \{q < g\})$$

messbar, für die anderen folgt die Messbarkeit aus

$$\begin{aligned} \{f > g\} &= \{g < f\}, & \{f \geq g\} &= \Omega \setminus \{f < g\}, & \{f \leq g\} &= \Omega \setminus \{f > g\}, \\ \{f = g\} &= \{f \leq g\} \cap \{g \leq f\}, & \{f \neq g\} &= \Omega \setminus \{f = g\}. \end{aligned}$$

□

Definition 2.5 (Spur- σ -Algebra)

Sei Ω Menge, \mathcal{A} σ -Algebra auf Ω , sei $Q \subset \Omega$. Wir definieren auf Q die Spur- σ -Algebra $\mathcal{A} \cap Q$ durch

$$\mathcal{A} \cap Q = \{A \cap Q : A \in \mathcal{A}\}. \quad (2.5)$$

□

Dass $\mathcal{A} \cap Q$ eine σ -Algebra auf Q ist, folgt unmittelbar aus den Definitionen.

Satz 2.6 Sei Ω Menge, \mathcal{A} eine σ -Algebra auf Ω , $f : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$, sei $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge messbarer Mengen in Ω mit

$$\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n. \quad (2.6)$$

Dann gilt: f ist \mathcal{A} -messbar genau dann, wenn die Abbildungen

$$f|_{\Omega_n} : \Omega_n \rightarrow [-\infty, \infty] \quad (2.7)$$

$\mathcal{A} \cap \Omega_n$ -messbar sind für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis: Übung. □

Aus Satz 2.6 erhalten wir: Ist $f : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$ durch eine (endliche oder abzählbar unendliche) Fallunterscheidung definiert, also

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^N \Omega_n, \quad \text{oder} \quad \Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n,$$

und

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in \Omega_1, \\ \vdots \\ f_n(x), & x \in \Omega_n, \\ \vdots \end{cases} \quad f_n : \Omega_n \rightarrow [-\infty, \infty],$$

so genügt es zum Beweis der Messbarkeit von f festzustellen, dass alle Mengen Ω_n und alle Abbildungen f_n messbar sind.

Wir gehen noch einmal auf die Rechenregeln mit $\pm\infty$ ein.

$$a + \infty = \infty, \quad a \in (-\infty, \infty], \quad (2.8)$$

$$a - \infty = -\infty, \quad a \in [-\infty, \infty), \quad (2.9)$$

$$a \cdot \infty = \begin{cases} \infty, & a \in (0, \infty], \\ 0, & a = 0, \\ -\infty, & a \in [-\infty, 0), \end{cases} \quad (2.10)$$

$$a \cdot (-\infty) = -a \cdot \infty, \quad (2.11)$$

$$\infty \cdot a = a \cdot \infty \quad (2.12)$$

Nach wie vor sind $\infty - \infty$ und $-\infty + \infty$ nicht definiert.

Satz 2.7 Sei Ω Menge, \mathcal{A} σ -Algebra, seien $f, g : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$ messbar. Dann sind

$$f + g : \Omega_+ \rightarrow [-\infty, \infty], \quad f - g : \Omega_- \rightarrow [-\infty, \infty], \quad (2.13)$$

messbar auf den Definitionsgebieten

$$\Omega_+ = (\{f < \infty\} \cup \{g > -\infty\}) \cap (\{f > -\infty\} \cup \{g < \infty\}), \quad (2.14)$$

$$\Omega_- = (\{f < \infty\} \cup \{g < \infty\}) \cap (\{f > -\infty\} \cup \{g > -\infty\}). \quad (2.15)$$

Weiter ist $f \cdot g : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$ messbar.

Beweis: Wir wenden Satz 2.2 an. Ist $\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig, so ist $\alpha - g$ messbar, da

$$\{\alpha - g \geq \beta\} = \{g \leq \alpha - \beta\}, \quad \text{für alle } \beta \in \mathbb{R}.$$

Hieraus folgt, dass auch $f + g$ auf Ω_+ messbar ist, da auf Ω_+ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$\{f + g \geq \alpha\} = \{f \geq \alpha - g\}.$$

Wegen $f - g = f + (-g)$ ist $f - g$ auf Ω_- messbar. Die Funktion $f^2 = f \cdot f$ ist messbar, da

$$\{f^2 \geq \alpha\} = \begin{cases} \Omega, & \alpha \leq 0, \\ \{f \geq \sqrt{\alpha}\} \cup \{f \leq -\sqrt{\alpha}\}, & \alpha > 0, \end{cases}.$$

Im Spezialfall $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ist nun fg messbar wegen

$$fg = \frac{1}{4}(f + g)^2 - \frac{1}{4}(f - g)^2. \quad (2.16)$$

Für den allgemeinen Fall betrachten wir

$$\Omega_1 = \{fg = \infty\}, \quad \Omega_2 = \{fg = -\infty\}, \quad \Omega_3 = \{fg = 0\}, \quad \Omega_4 = \Omega \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3).$$

Die Ω_i sind messbar, es ist

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= (\{f = \infty\} \cap \{g > 0\}) \cup (\{f = -\infty\} \cap \{g < 0\}) \\ &\quad \cup (\{g = \infty\} \cap \{f > 0\}) \cup (\{g = -\infty\} \cap \{f < 0\}), \end{aligned}$$

Ω_2 wird analog zerlegt, und $\Omega_3 = \{f = 0\} \cup \{g = 0\}$. Die Messbarkeit von fg folgt nun aus Satz 2.6 wegen

$$(fg)(\omega) = \begin{cases} \infty, & \omega \in \Omega_1, \\ -\infty, & \omega \in \Omega_2, \\ 0, & \omega \in \Omega_3, \\ (fg)(\omega), & \omega \in \Omega_4, \end{cases}$$

da die Messbarkeit von $(fg)|_{\Omega_4}$ in (2.16) gezeigt wurde. □

Satz 2.8 Sei Ω Menge, \mathcal{A} σ -Algebra auf Ω , seien $f_n : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$ messbar für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann sind auch die Funktionen

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n, \quad \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n, \quad (2.17)$$

messbar.

Beweis: Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$\{\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n \leq \alpha\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{f_n \leq \alpha\},$$

also ist $\{\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n \leq \alpha\}$ messbar für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und damit auch $(\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n) : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$. Aus den Darstellungen

$$\begin{aligned} \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n &= -\sup_{n \in \mathbb{N}} (-f_n), \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n &= \inf_{n \in \mathbb{N}} \left(\sup_{m \geq n} f_m \right), \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\inf_{m \geq n} f_m \right), \end{aligned}$$

folgt die Messbarkeit der übrigen Funktionen in (2.17). □

Folgerung 2.9 Sei Ω Menge, \mathcal{A} σ -Algebra auf Ω , seien $f_n : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$ punktweise konvergent gegen $f : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \quad \text{für alle } x \in \Omega. \quad (2.18)$$

Dann gilt: Sind alle f_n messbar, so ist auch f messbar.

Beweis: Folgt direkt aus Satz 2.8, da $f = \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$. □

Folgerung 2.10 Sei Ω Menge, \mathcal{A} σ -Algebra auf Ω , $f : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$ messbar. Dann sind auch der Positivteil f^+ und der Negativteil f^- ,

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}, \quad f^-(x) = -\min\{f(x), 0\} = (-f)^+(x), \quad (2.19)$$

sowie

$$|f| = f^+ + f^- \quad (2.20)$$

messbar. □

Es gilt $f = f^+ - f^-$ sowie $f^+ \geq 0, f^- \geq 0$.

Definition 2.11 (Charakteristische Funktion)

Sei Ω Menge. Für $A \subset \Omega$ definieren wir die charakteristische Funktion $1_A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ von A durch

$$1_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases} \quad (2.21)$$

□

Offensichtlich gilt

$$1_A \text{ ist messbar} \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ ist messbar,}$$

sowie die Rechenregeln

$$\begin{aligned} A \subset B &\Leftrightarrow 1_A \leq 1_B, \\ 1_{\Omega \setminus A} &= 1 - 1_A, \\ A \cap B = \emptyset &\Leftrightarrow 1_{A \cup B} = 1_A + 1_B, \\ 1_{\cup_{i \in I} A_i} &= \sup_{i \in I} 1_{A_i}, \\ 1_{\cap_{i \in I} A_i} &= \inf_{i \in I} 1_{A_i}. \end{aligned}$$

Definition 2.12 (Einfache Funktion)

Sei Ω Menge. Eine Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heißt einfache Funktion, wenn sie messbar ist und nur endlich viele verschiedene Werte annimmt. Wir setzen

$$E(\Omega) = \{f \mid f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ ist einfache Funktion}\}, \quad (2.22)$$

$$E_+(\Omega) = \{f \mid f \in E(\Omega), f \geq 0\}. \quad (2.23)$$

□

Ist $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ einfache Funktion mit den voneinander verschiedenen Werten $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, so sind die Mengen

$$A_i = \{x : x \in \Omega, f(x) = \alpha_i\}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (2.24)$$

messbar und paarweise disjunkt, und es gilt

$$f = \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{A_i}.$$

Wir beginnen jetzt mit der Definition des Lebesgue-Integrals. Die Grundidee, dargestellt am eindimensionalen Fall

$$\int_a^b f(x) dx, \quad [a, b] \subset \mathbb{R},$$

ist die folgende: Bisher haben wir den Definitionsbereich von f , nämlich das Intervall $\Omega = [a, b]$, diskretisiert, etwa durch eine Zerlegung $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$, und f auf den Teilintervallen $[x_i, x_{i+1}]$ approximiert, und zwar für das Riemann-Integral (welches wir nicht behandelt haben) durch Ober- und Untersummen. **Im Gegensatz dazu** wird beim Lebesgue-Integral der Wertebereich von f diskretisiert in Werte $\alpha_1, \dots, \alpha_N$, und f wird durch einfache Funktionen approximiert. Die Mengen A_i aus (2.24), welche das Definitionsgebiet unterteilen, können dabei eine sehr komplizierte Struktur haben.

Definition 2.13 (Maßraum)

Sei Ω Menge, \mathcal{A} σ -Algebra auf Ω , μ ein Maß auf \mathcal{A} . Das Tripel $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ heißt Maßraum. \square

Unsere typische Situation ist: $\Omega = \mathbb{R}^n$, \mathcal{A} ist die Borel algebra, und μ ist das Lebesgue-Maß λ .

Definition 2.14 (Lebesgue-Integral in $E_+(\Omega)$)

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, sei $f \in E_+(\Omega)$. Ist

$$f = \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{A_i}, \tag{2.25}$$

wobei $\alpha_i \geq 0$ und $A_i \subset \Omega$ messbar für $1 \leq i \leq n$, und die (A_i) paarweise disjunkt sind mit

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega, \tag{2.26}$$

so definieren wir das Lebesgue-Integral von f (über Ω bezüglich μ) durch

$$\int_{\Omega} f d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i). \tag{2.27}$$

\square

Die Darstellung (2.25) ist nicht eindeutig, das Integral in (2.27) hängt aber nicht von der Wahl der Darstellung ab: Ist $(\beta_j, B_j)_{1 \leq j \leq m}$ eine weitere solche Darstellung mit

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{A_i} = \sum_{j=1}^m \beta_j 1_{B_j}, \tag{2.28}$$

so gilt

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i 1_{A_i \cap B_j} &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^m 1_{A_i \cap B_j} = \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{A_i} = \sum_{j=1}^m \beta_j 1_{B_j} = \sum_{j=1}^m \beta_j \sum_{i=1}^n 1_{A_i \cap B_j} \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \beta_j 1_{A_i \cap B_j}. \end{aligned}$$

Da die $A_i \cap B_j$ paarweise disjunkt sind, folgt $\alpha_i = \beta_j$, falls $A_i \cap B_j \neq \emptyset$, also

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \beta_j \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^m \beta_j \mu(B_j),$$

also ist das Lebesgue-Integral nichtnegativer einfacher Funktionen wohldefiniert.

Lemma 2.15 *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum. Dann gelten*

$$\int_{\Omega} 1_A d\mu = \mu(A), \quad \text{für alle } A \in \mathcal{A}, \quad (2.29)$$

$$\int_{\Omega} \alpha f d\mu = \alpha \int_{\Omega} f d\mu, \quad \text{für alle } \alpha \geq 0, f \in E_+(\Omega), \quad (2.30)$$

$$\int_{\Omega} f + g d\mu = \int_{\Omega} f d\mu + \int_{\Omega} g d\mu, \quad \text{für alle } f, g \in E_+(\Omega), \quad (2.31)$$

$$f \leq g \Rightarrow \int_{\Omega} f d\mu \leq \int_{\Omega} g d\mu. \quad (2.32)$$

Beweis: Die Eigenschaften (2.29) und (2.30) folgen unmittelbar aus den Definitionen. Seien nun

$$f = \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{A_i}, \quad g = \sum_{j=1}^m \beta_j 1_{B_j},$$

Darstellungen gemäß Definition 2.14. Zum Beweis von (2.31) bemerken wir, dass

$$f + g = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\alpha_i + \beta_j) 1_{A_i \cap B_j},$$

also

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f + g d\mu &= \sum_{i,j} (\alpha_i + \beta_j) \mu(A_i \cap B_j) = \sum_i \alpha_i \mu(A_i) + \sum_j \beta_j \mu(B_j) \\ &= \int_{\Omega} f d\mu + \int_{\Omega} g d\mu. \end{aligned}$$

Zum Beweis von (2.32) stellen wir fest, dass

$$\sum_{i,j} \alpha_i 1_{A_i \cap B_j} = f \leq g = \sum_{i,j} \beta_j 1_{A_i \cap B_j},$$

also $\alpha_i \leq \beta_j$ falls $A_i \cap B_j \neq \emptyset$ und daher

$$\int_{\Omega} f d\mu = \sum_{i,j} \alpha_i \mu(A_i \cap B_j) \leq \sum_{i,j} \beta_j \mu(A_i \cap B_j) = \int_{\Omega} g d\mu.$$

□

Satz 2.16 *Sei Ω Menge, \mathcal{A} σ -Algebra auf Ω , $f : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$ messbar mit $f \geq 0$. Dann gibt es eine monoton wachsende Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $E_+(\Omega)$, also $f_n \geq 0$ und $f_n \leq f_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, mit*

$$f = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n. \quad (2.33)$$

Beweis: Die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wird durch Diskretisierung des Bildbereichs \mathbb{R}_+ von f konstruiert. Wir definieren $A_{kn} \subset \Omega$ durch

$$A_{kn} = \begin{cases} \{x : k2^{-n} \leq f(x) < (k+1)2^{-n}\}, & 0 \leq k < n2^n, \\ \{x : f(x) \geq n\}, & k = n2^n, \end{cases} \quad (2.34)$$

und f_n durch

$$f_n = \sum_{k=1}^{n2^n} k2^{-n} 1_{A_{kn}}, \quad (2.35)$$

also $f_n(x) = k2^{-n}$, falls $x \in A_{kn}$. Dann ist $f_n \leq f_{n+1}$ nach Konstruktion, und es gelten

$$f(x) = +\infty \Rightarrow f_n(x) = n \quad \text{für alle } n, \quad (2.36)$$

$$f(x) < +\infty \Rightarrow 0 \leq f(x) - f_n(x) \leq 2^{-n} \quad \text{für alle } n > f(x). \quad (2.37)$$

Hieraus folgt (2.33). □

Definition 2.17 (Lebesgue-Integral nichtnegativer messbarer Funktionen)

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, sei $f : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$ messbar mit $f \geq 0$. Wir definieren das Lebesgue-Integral von f (über Ω bezüglich μ) durch

$$\int_{\Omega} f \, d\mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} f_n \, d\mu, \quad (2.38)$$

wobei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge in $E_+(\Omega)$ ist mit

$$f = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n. \quad (2.39)$$

□

Es kann sein, dass das Integral in (2.38) den Wert $+\infty$ hat.

Nach Satz 2.16 gibt es immer eine solche Folge. In Lemma 2.18 unten zeigen wir, dass das Integral nicht von der Wahl der Folge abhängt.

Lemma 2.18 Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wachsende Folge in $E_+(\Omega)$. Dann gilt:

(i) Ist $g \in E_+(\Omega)$ mit $g \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$, so ist

$$\int_{\Omega} g \, d\mu \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} f_n \, d\mu. \quad (2.40)$$

(ii) Ist $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wachsende Folge in $E_+(\Omega)$, so gilt

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} g_n \, d\mu = \int_{\Omega} \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n \, d\mu \Rightarrow \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} g_n \, d\mu = \int_{\Omega} \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n \, d\mu. \quad (2.41)$$

Beweis: Sei

$$g = \sum_{j=1}^m \alpha_j 1_{A_j}$$

dargestellt gemäß Definition 2.14. Wir wählen $\beta \in (0, 1)$ beliebig und setzen

$$B_n = \{f_n \geq \beta g\}.$$

Es gilt dann

$$f_n \geq \beta g 1_{B_n} = \beta \sum_{j=1}^m \alpha_j 1_{A_j} 1_{B_n} = \beta \sum_{j=1}^m \alpha_j 1_{A_j \cap B_n},$$

also

$$\int_{\Omega} f_n d\mu \geq \int_{\Omega} \beta \sum_{j=1}^m \alpha_j 1_{A_j \cap B_n} d\mu = \beta \sum_{j=1}^m \alpha_j \mu(A_j \cap B_n). \quad (2.42)$$

Es ist $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n > \beta g$ auf der Menge $\{g \neq 0\}$, also folgt $B_n \uparrow \Omega$ und weiter $A_j \cap B_n \uparrow A_j$ für alle j , also nach Übungsaufgabe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_j \cap B_n) = \mu(A_j).$$

Wir bilden in (2.42) auf beiden Seiten das Supremum und erhalten

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} f_n d\mu \geq \beta \sum_{j=1}^m \alpha_j \mu(A_j) = \beta \int_{\Omega} g d\mu. \quad (2.43)$$

Da (2.43) für jedes $\beta < 1$ gilt, folgt (2.40). Sei nun $\sup_n g_n = \sup_n f_n$. Es ist dann

$$0 \leq g_m \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$$

für alle $m \in \mathbb{N}$, also folgt aus (2.40), angewendet auf g_m , dass

$$\int_{\Omega} g_m d\mu \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} f_n d\mu$$

für alle m , also auch

$$\sup_{m \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} g_m d\mu \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} f_n d\mu.$$

Vertauschen der Rolle von f_n und g_n liefert (2.41). □

Satz 2.19 Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum. Dann gilt für alle messbaren Funktionen $f, g : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$ mit $f, g \geq 0$ und alle $\alpha \geq 0$

$$\int_{\Omega} \alpha f d\mu = \alpha \int_{\Omega} f d\mu, \quad (2.44)$$

$$\int_{\Omega} f + g d\mu = \int_{\Omega} f d\mu + \int_{\Omega} g d\mu, \quad (2.45)$$

$$f \leq g \Rightarrow \int_{\Omega} f d\mu \leq \int_{\Omega} g d\mu. \quad (2.46)$$

Beweis: Sei

$$f = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n, \quad g = \sup_{n \in \mathbb{N}} g_n,$$

mit Folgen $(f_n), (g_n)$ in $E_+(\Omega)$ gemäß Satz 2.16. Dann gilt $\alpha f = \sup_n \alpha f_n$ für $\alpha \geq 0$, also folgt (2.44) aus

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \alpha f \, d\mu &= \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} \alpha f_n \, d\mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \alpha \int_{\Omega} f_n \, d\mu = \alpha \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} f_n \, d\mu \\ &= \alpha \int_{\Omega} f \, d\mu. \end{aligned}$$

Es gilt weiter

$$f + g = \sup_{n \in \mathbb{N}} (f_n + g_n), \quad f_n + g_n \in E_+(\Omega),$$

also folgt (2.45) aus

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f \, d\mu + \int_{\Omega} g \, d\mu &= \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} f_n \, d\mu + \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} g_n \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n \, d\mu + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g_n \, d\mu \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega} f_n \, d\mu + \int_{\Omega} g_n \, d\mu \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n + g_n \, d\mu = \int_{\Omega} f + g \, d\mu. \end{aligned}$$

Ist $f \leq g$, so ist $f_m \leq g = \sup_n g_n$ für alle $m \in \mathbb{N}$, also folgt aus Lemma 2.18 (i), dass

$$\int_{\Omega} f_m \, d\mu \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} g_n \, d\mu = \int_{\Omega} g \, d\mu,$$

und hieraus (2.46), indem wir das Supremum über alle $m \in \mathbb{N}$ bilden. □

Definition 2.20 (Lebesgue-Integral messbarer Funktionen)

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, $f : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$ messbar. Wir sagen, dass f (Lebesgue-) integrierbar ist (über Ω bezüglich μ), falls

$$\int_{\Omega} f^+ \, d\mu < \infty, \quad \int_{\Omega} f^- \, d\mu < \infty, \tag{2.47}$$

und wir definieren in diesem Fall das Lebesgue-Integral von f durch

$$\int_{\Omega} f \, d\mu = \int_{\Omega} f^+ \, d\mu - \int_{\Omega} f^- \, d\mu. \tag{2.48}$$

□

Wenn nur eines der beiden Integrale in (2.47) den Wert $+\infty$ hat, bleibt die Definition (2.48) sinnvoll, und das Lebesgue-Integral von f hat den Wert $+\infty$ bzw. $-\infty$. (Man bezeichnet f dann allerdings nicht mehr als Lebesgue-integrierbar.)

Lemma 2.21 Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, $f : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$ messbar. Dann sind äquivalent:

- (i) f ist integrierbar.
- (ii) f^+ und f^- sind integrierbar.

(iii) Es gibt integrierbare Funktionen $u, v : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ (also $u \geq 0, v \geq 0$) mit $f = u - v$.

(iv) Es gibt eine integrierbare Funktion $g : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ mit $|f| \leq g$.

(v) $|f|$ ist integrierbar.

Beweis: Die Äquivalenz von (i) und (ii) ist in Definition 2.20 enthalten.

“(ii) \Rightarrow (iii)”: Wähle $u = f^+, v = f^-$. Da f^+ und f^- nie gleichzeitig den Wert $+\infty$ annehmen, ist $f^+ - f^-$ überall definiert.

“(iii) \Rightarrow (iv)”: Nach Satz 2.19 ist mit u und v auch $g = u + v$ integrierbar, und es folgt

$$|f| = |u - v| \leq |u| + |v| = g.$$

“(iv) \Rightarrow (v)”: Es ist $(|f|)^+ = |f|, (|f|)^- = 0$, also nach Satz 2.19

$$0 \leq \int_{\Omega} |f| d\mu \leq \int_{\Omega} g d\mu < \infty.$$

“(v) \Rightarrow (ii)”: Es gilt $0 \leq f^+ \leq |f|, 0 \leq f^- \leq |f|$, also

$$\int_{\Omega} f^+ d\mu \leq \int_{\Omega} |f| d\mu < \infty, \quad \int_{\Omega} f^- d\mu \leq \int_{\Omega} |f| d\mu < \infty.$$

□

Satz 2.22 Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, seien $f, g : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$ integrierbar. Dann gelten

$$\int_{\Omega} \alpha f d\mu = \alpha \int_{\Omega} f d\mu, \quad \text{für alle } \alpha \in \mathbb{R}, \quad (2.49)$$

und, falls $f + g$ auf ganz Ω definiert ist,

$$\int_{\Omega} f + g d\mu = \int_{\Omega} f d\mu + \int_{\Omega} g d\mu, \quad (2.50)$$

und weiter

$$f \leq g \quad \Rightarrow \quad \int_{\Omega} f d\mu \leq \int_{\Omega} g d\mu, \quad (2.51)$$

$$\left| \int_{\Omega} f d\mu \right| \leq \int_{\Omega} |f| d\mu. \quad (2.52)$$

Beweis: Folgt aus den entsprechenden Aussagen für nichtnegative Funktionen in Satz 2.19 und Lemma 2.21. Wegen

$$\begin{aligned} (\alpha f)^+ &= \alpha f^+, & (\alpha f)^- &= \alpha f^-, & \text{falls } \alpha \geq 0, \\ (\alpha f)^+ &= |\alpha| f^-, & (\alpha f)^- &= |\alpha| f^+, & \text{falls } \alpha < 0. \end{aligned}$$

gilt (2.49). Setzen wir $u = f^+ + g^+$ und $v = f^- + g^-$, so sind u und v integrierbar, nichtnegativ, und es gilt nirgends $u(x) = v(x) = \infty$ (andernfalls wäre $(f + g)(x)$ nicht definiert). Es ist dann $f + g$ integrierbar und

$$u - v = f + g = (f + g)^+ - (f + g)^-,$$

also

$$\int_{\Omega} u \, d\mu + \int_{\Omega} (f + g)^{-} \, d\mu = \int_{\Omega} v \, d\mu + \int_{\Omega} (f + g)^{+} \, d\mu,$$

und weiter

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f + g \, d\mu &= \int_{\Omega} (f + g)^{+} \, d\mu - \int_{\Omega} (f + g)^{-} \, d\mu = \int_{\Omega} u \, d\mu - \int_{\Omega} v \, d\mu \\ &= \int_{\Omega} f^{+} \, d\mu + \int_{\Omega} g^{+} \, d\mu - \left(\int_{\Omega} f^{-} \, d\mu + \int_{\Omega} g^{-} \, d\mu \right) = \int_{\Omega} f \, d\mu + \int_{\Omega} g \, d\mu. \end{aligned}$$

Ist $f \leq g$, so sind $f^{+} \leq g^{+}$ und $f^{-} \geq g^{-}$, also

$$\int_{\Omega} f \, d\mu = \int_{\Omega} f^{+} \, d\mu - \int_{\Omega} f^{-} \, d\mu \leq \int_{\Omega} g^{+} \, d\mu - \int_{\Omega} g^{-} \, d\mu = \int_{\Omega} g \, d\mu.$$

Wegen $f \leq |f|$ folgt

$$\int_{\Omega} f \, d\mu \leq \int_{\Omega} |f| \, d\mu,$$

wegen $-f \leq |f|$ folgt

$$-\int_{\Omega} f \, d\mu = \int_{\Omega} -f \, d\mu \leq \int_{\Omega} |f| \, d\mu,$$

also gilt (2.52). □

Definition 2.23 (Integral über Teilmengen) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, sei $f : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$ messbar, sei $A \subset \Omega$ messbar. Wir definieren

$$\int_A f \, d\mu = \int_{\Omega} f \, 1_A \, d\mu, \tag{2.53}$$

falls die rechte Seite definiert ist, das heißt, falls entweder $f \cdot 1_A \geq 0$ oder $f \cdot 1_A$ integrierbar ist.

Lemma 2.24 Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, sei $f : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$ messbar, seien $A, B \subset \Omega$ messbar. Dann gilt, falls $f \geq 0$ oder f integrierbar ist,

$$\int_{A \cup B} f \, d\mu + \int_{A \cap B} f \, d\mu = \int_A f \, d\mu + \int_B f \, d\mu. \tag{2.54}$$

Beweis: Folgt aus Satz 2.22 wegen

$$1_{A \cup B} + 1_{A \cap B} = 1_A + 1_B.$$

□

3 Normierte und metrische Räume

Für diesen Abschnitt vereinbaren wir: \mathbb{K} steht für den Körper \mathbb{R} oder \mathbb{C} , d.h. eine Aussage, in der \mathbb{K} auftaucht, steht als Abkürzung für die beiden entsprechenden Aussagen mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Definition 3.1 (Norm, normierter Raum)

Sei X Vektorraum über \mathbb{K} . Eine Abbildung $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, \infty)$ heißt Norm auf X , falls gilt

$$\|x\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0, \tag{3.1}$$

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{K}, x \in X, \tag{3.2}$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \text{für alle } x, y \in X. \tag{3.3}$$

Ist $\|\cdot\|$ eine Norm auf X , so heißt $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum.

Beispiele: $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ ist normierter Raum (mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$), $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ ist normierter Raum (mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Definieren wir für $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i \bar{x}_i} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}, \tag{3.4}$$

so ist $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ ein normierter Raum (Beweis siehe Analysis 2, bzw. siehe unten). Für $X = \mathbb{R}^n$ wird (3.4) zu

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}. \tag{3.5}$$

Definition 3.2 (Supremumsnorm)

Sei D Menge. Wir definieren durch

$$B(D; \mathbb{K}) = \{f \mid f : D \rightarrow \mathbb{K}, f \text{ ist beschränkt}\} \tag{3.6}$$

den Raum aller beschränkten Funktionen auf D . Für $f \in B(D; \mathbb{K})$ definieren wir die Supremumsnorm von f durch

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in D} |f(x)|. \tag{3.7}$$

Satz 3.3 Sei D Menge. Dann ist $(B(D; \mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$ ein normierter Raum.

Beweis: $B(D; \mathbb{K})$ ist ein Vektorraum, da Summen und skalare Vielfache beschränkter Funktionen ebenfalls beschränkte Funktionen sind. Für $f, g \in B(D; \mathbb{K})$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt

$$f \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists x \in D \text{ mit } |f(x)| > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \|f\|_\infty > 0,$$

$$\|\lambda f\|_\infty = \sup_{x \in D} |\lambda f(x)| = |\lambda| \sup_{x \in D} |f(x)| = |\lambda| \|f\|_\infty,$$

$$|(f + g)(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty, \quad \text{für alle } x \in D,$$

also

$$\|f + g\|_\infty = \sup_{x \in D} |f(x) + g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

□

Definition 3.4 Wir definieren die Maximumnorm von $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ durch

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|. \quad (3.8)$$

Folgerung 3.5 $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ ist normierter Raum.

Beweis: Wir setzen $D = \{1, \dots, n\}$ in Satz 3.3. □

Lemma 3.6 Sei $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum, Y Unterraum von X . Dann ist auch $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierter Raum, wobei $\|\cdot\|_Y$ die Restriktion von $\|\cdot\|$ auf Y bezeichnet.

Beweis: Klar. □

Definition 3.7 (Konvergenz im normierten Raum)

Sei $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum. Eine Folge (x_n) in X heißt konvergent gegen $x \in X$ (bezüglich $\|\cdot\|$), falls gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0. \quad (3.9)$$

In diesem Falle schreiben wir wie bisher $x_n \rightarrow x$ und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x. \quad (3.10)$$

Offensichtlich stimmt für $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ und $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ dieser Konvergenzbegriff mit unserem bisherigen überein.

Lemma 3.8 Sei D Menge, sei (f_n) Folge in $B(D; \mathbb{K})$. Dann sind äquivalent:

- (1) $f_n \rightarrow f$ gleichmäßig.
- (2) $f_n \rightarrow f$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$.

Beweis: Für $n \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$ gilt

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \quad \text{für alle } x \in D, \quad (3.11)$$

genau dann, wenn

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon. \quad (3.12)$$

Die Aussage (1) ist äquivalent zu der Aussage

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{so daß (3.11) gilt für alle } n \geq n_0,$$

die Aussage (2) ist äquivalent zu der Aussage

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{so daß (3.12) gilt für alle } n \geq n_0.$$

□

Satz 3.9 Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Dann ist $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ normierter Raum, und

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|. \quad (3.13)$$

Beweis: Ist $f \in C[a, b]$, so ist auch $|f| \in C[a, b]$. Nach einem Satz der Analysis 1 nimmt $|f|$ auf $[a, b]$ das Maximum an. Also ist $C[a, b]$ Unterraum von $B([a, b]; \mathbb{R})$, also auch normierter Raum nach Lemma 3.6, und

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

□

Definition 3.10 (Konvexe Menge)

Sei X Vektorraum, $D \subset X$. D heißt konvex, wenn

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in D \quad (3.14)$$

für alle $x, y \in D$ und alle $\lambda \in [0, 1]$.

Definition 3.11 (Konvexe Funktion)

Sei X Vektorraum, $D \subset X$ konvex, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. f heißt konvex, wenn

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \quad (3.15)$$

für alle $x, y \in D$ und alle $\lambda \in [0, 1]$. f heißt konkav, wenn $-f$ konvex ist.

Lemma 3.12 Sei X Vektorraum, $D \subset X$ konvex, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ konvex. Seien $x_i \in D$, $\lambda_i \in [0, 1]$ für $1 \leq i \leq n$ mit

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1. \quad (3.16)$$

Dann gilt

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i). \quad (3.17)$$

Beweis: Übungsaufgabe. □

Satz 3.13 Sei $D \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann ist f monoton wachsend genau dann, wenn $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in D$.

Beweis: “ \Leftarrow ”: Sei $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in D$. Sind $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 < x_2$, so gibt es nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung ein $\xi \in (x_1, x_2)$ mit

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \geq 0,$$

also ist $f(x_1) \leq f(x_2)$.

“ \Rightarrow ”: Sei $x \in D$ mit $f'(x) < 0$. Dann ist für hinreichend kleines $h > 0$ auch

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} < 0,$$

also $f(x+h) < f(x)$, also f nicht monoton wachsend. □

Satz 3.14 Sei $D \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Dann ist f konvex genau dann, wenn $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in D$.

Beweis: “ \Leftarrow ”: Sei $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in D$. Dann ist nach Satz 3.13 die Funktion $f' : D \rightarrow \mathbb{R}$ monoton wachsend. Seien nun $x_1, x_2 \in D$ und $\lambda \in (0, 1)$ mit $x_1 < x_2$, sei

$$x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2.$$

Dann gibt es (Mittelwertsatz) $\xi_1 \in (x_1, x)$ und $\xi_2 \in (x, x_2)$ mit

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2) = \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Es ist

$$x - x_1 = (1 - \lambda)(x_2 - x_1), \quad x_2 - x = \lambda(x_2 - x_1),$$

also

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{1 - \lambda} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{\lambda}.$$

Multiplikation mit $\lambda(1 - \lambda)$ und Umsortieren liefert

$$f(x) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

“ \Rightarrow ”: Sei $x \in D$. Seien außerdem $y \in D$, $y > x$ und $\lambda \in (0, 1)$ beliebig, dann gilt

$$f(\lambda y + (1 - \lambda)x) \leq \lambda f(y) + (1 - \lambda)f(x),$$

also

$$f(x + \lambda(y - x)) - f(x) \leq \lambda(f(y) - f(x)),$$

und weiter

$$\frac{f(x + \lambda(y - x)) - f(x)}{\lambda(y - x)} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Grenzübergang $\lambda \downarrow 0$ liefert

$$f'(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

für alle $y > x$. Sei nun $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in D mit $x_n > x$ für alle n und $x_n \rightarrow x$. Dann gibt es $\xi_n \in (x, x_n)$ mit

$$f'(x) \leq \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} = f'(\xi_n),$$

also

$$0 \leq \frac{f'(\xi_n) - f'(x)}{\xi_n - x},$$

Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ liefert $\xi_n \rightarrow x$, also $f''(x) \geq 0$. □

Satz 3.15 Seien $x_i > 0$, $\lambda_i \in [0, 1]$ für $1 \leq i \leq n$ mit $\sum_i \lambda_i = 1$. Dann gilt

$$\prod_{i=1}^n x_i^{\lambda_i} \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i. \tag{3.18}$$

Beweis: Die Funktion $-\ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ist nach Satz 3.14 konvex. Wir wenden Lemma 3.12 an mit $f = -\ln$, dann gilt

$$\ln \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right) \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i \ln(x_i),$$

also (da die Exponentialfunktion monoton ist)

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \geq \exp \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \ln(x_i) \right) = \prod_{i=1}^n \exp(\lambda_i \ln x_i) = \prod_{i=1}^n x_i^{\lambda_i}.$$

□

Satz 3.16 (Youngsche Ungleichung)

Seien $p, q \in (1, \infty)$ mit

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \quad (3.19)$$

Dann gilt für alle $x, y \geq 0$

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}. \quad (3.20)$$

Beweis: Anwendung von Satz 3.15 mit

$$\lambda_1 = \frac{1}{p}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{q}, \quad x_1 = x^p, \quad x_2 = y^q.$$

□

Definition 3.17 (p-Norm)

Sei $1 \leq p < \infty$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$. Dann definieren wir

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (3.21)$$

Satz 3.18 (Höldersche Ungleichung)

Seien $p, q \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, oder sei $p = 1$, $q = \infty$, oder sei $p = \infty$, $q = 1$. Dann gilt für alle $x, y \in \mathbb{C}^n$

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_q. \quad (3.22)$$

Beweis: Für $p = 1$, $q = \infty$ (analog $p = \infty$, $q = 1$) gilt

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \max_{1 \leq j \leq n} |y_j| = \|y\|_\infty \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

Seien $p, q \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Seien $x, y \in \mathbb{C}^n$, beide von Null verschieden. (Andernfalls ist (3.22) trivialerweise erfüllt.) Dann ist $\|x\|_p \neq 0$, $\|y\|_q \neq 0$. Aus der Youngschen Ungleichung folgt für alle i , $1 \leq i \leq n$,

$$\frac{|x_i|}{\|x\|_p} \cdot \frac{|y_i|}{\|y\|_q} \leq \frac{|x_i|^p}{p \|x\|_p^p} + \frac{|y_i|^q}{q \|y\|_q^q},$$

also (Summation über i)

$$\frac{\sum_{i=1}^n |x_i y_i|}{\|x\|_p \|y\|_q} \leq \frac{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}{p \|x\|_p^p} + \frac{\sum_{i=1}^n |y_i|^q}{q \|y\|_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

□

Wir betrachten nun das Standardskalarprodukt im \mathbb{C}^n ,

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i. \quad (3.23)$$

Aus der Hölderschen Ungleichung, angewendet mit $p = q = 2$, erhalten wir

$$|\langle x, y \rangle| = \left| \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \|x\|_2 \|y\|_2.$$

Die resultierende Ungleichung

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_2 \|y\|_2, \quad x, y \in \mathbb{C}^n, \quad (3.24)$$

heißt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung.

Satz 3.19 (Minkowskische Ungleichung)

Sei $1 \leq p \leq \infty$. Dann gilt für alle $x, y \in \mathbb{C}^n$

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p. \quad (3.25)$$

Beweis: Für $p = \infty$: Siehe Folgerung 3.5. Für $p = 1$:

$$\|x + y\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|) = \|x\|_1 + \|y\|_1.$$

Sei nun $1 < p < \infty$, $q = \frac{p}{p-1}$. Dann ist $1 < q < \infty$,

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1.$$

Seien $x, y \in \mathbb{C}^n$. Wir definieren $z \in \mathbb{C}^n$ durch

$$z_i = |x_i + y_i|^{p-1}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \|x + y\|_p^p &= \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| |z_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i z_i| + \sum_{i=1}^n |y_i z_i| \\ &\leq \|x\|_p \|z\|_q + \|y\|_p \|z\|_q \end{aligned}$$

wegen der Hölderschen Ungleichung, und

$$\begin{aligned} \|z\|_q &= \left(\sum_{i=1}^n |z_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{q(p-1)} \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &= \|x + y\|_p^{p-1}, \end{aligned}$$

also

$$\|x + y\|_p^p \leq (\|x\|_p + \|y\|_p)\|x + y\|_p^{p-1}.$$

Division durch $\|x + y\|_p^{p-1}$ liefert die Behauptung. \square

Folgerung 3.20 Sei $p \in [1, \infty)$. Mit

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (3.26)$$

sind $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ und $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_p)$ normierte Räume.

Beweis: Die Minkowskische Ungleichung liefert gerade die Dreiecksungleichung. Die anderen verlangten Eigenschaften einer Norm folgen unmittelbar aus der Definition. \square

Im \mathbb{K}^n erhalten wir die euklidische Norm aus dem Standardskalarprodukt mittels

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}. \quad (3.27)$$

Dieser Sachverhalt ist allgemein gültig. Ist X ein beliebiger \mathbb{K} -Vektorraum und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf X , so definiert (3.27) eine Norm auf X . Die Dreiecksungleichung folgt nämlich aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|, \quad (3.28)$$

siehe Lineare Algebra bzw. Übung. (Die anderen Eigenschaften der Norm folgen unmittelbar aus den entsprechenden Eigenschaften des Skalarprodukts.)

Lemma 3.21 Sei $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum. Dann ist die durch

$$f(x) = \|x\| \quad (3.29)$$

definierte Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ konvex.

Beweis: Es gilt für alle $x, y \in X$ und alle $\lambda \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1 - \lambda)y) &= \|\lambda x + (1 - \lambda)y\| \leq \|\lambda x\| + \|(1 - \lambda)y\| = \lambda\|x\| + (1 - \lambda)\|y\| \\ &= \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y). \end{aligned} \quad (3.30)$$

\square

Lemma 3.22 Sei X Vektorraum, $D \subset X$ konvex, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ konvex. Dann sind die Mengen

$$D_\alpha = \{x : x \in D, f(x) \leq \alpha\} \quad (3.31)$$

konvex für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.

Beweis: Es gilt für alle $x, y \in D_\alpha$ und alle $\lambda \in [0, 1]$

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \leq \lambda\alpha + (1 - \lambda)\alpha = \alpha.$$

\square

Folgerung 3.23 Sei $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum. Dann sind die Einheitskugeln

$$\{x : x \in X, \|x\| \leq 1\} \quad (3.32)$$

konvex.

Beweis: Folgt aus Lemma 3.21 und Lemma 3.22. \square

(Bilder für die Einheitskugeln in $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p)$ siehe Vorlesung.)

In einem normierten Raum X wird der Abstand $d(x, y)$ zweier Vektoren $x, y \in X$ definiert durch

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Wir führen nun einen Abstandsbegriff für allgemeine Mengen X ein.

Definition 3.24 (Metrik)

Sei X Menge. Eine Abbildung $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ heißt Metrik auf X , falls gilt

$$d(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y \quad (\text{Definitheit}) \quad (3.33)$$

$$d(x, y) = d(y, x) \quad \text{für alle } x, y \in X \quad (\text{Symmetrie}) \quad (3.34)$$

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \text{für alle } x, y, z \in X \quad (\text{Dreiecksungleichung}) \quad (3.35)$$

(X, d) heißt metrischer Raum. \square

Dass $d(x, y) \geq 0$ gelten muss, folgt bereits aus (3.33) – (3.35) wegen

$$0 = d(x, x) \leq d(x, y) + d(y, x) = 2d(x, y).$$

Satz 3.25 Sei $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum. Dann definiert

$$d(x, y) = \|x - y\| \quad (3.36)$$

eine Metrik d auf X . Sie heißt die durch $\|\cdot\|$ erzeugte Metrik.

Beweis: Definitheit:

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y, \quad \text{für alle } x, y \in X.$$

Symmetrie:

$$d(y, x) = \|y - x\| = \|-(x - y)\| = \|x - y\| = d(x, y), \quad \text{für alle } x, y \in X.$$

Dreiecksungleichung:

$$d(x, z) = \|x - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z), \quad \text{für alle } x, y, z \in X.$$

\square

Lemma 3.26 Sei (X, d) metrischer Raum, sei $A \subset X$. Schränken wir die Metrik auf A ein, $d_A = d|_{(A \times A)}$, so ist (A, d_A) metrischer Raum.

Beweis: Klar. □

Ist $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum, so können wir auf diese Weise jedes $A \subset X$ zu einem metrischen Raum machen. (Um durch Restriktion der Norm auf A wieder einen normierten Raum zu erhalten, muß A Unterraum sein.)

Beispiel 3.27

Sei S die Oberfläche der Erdkugel. Wir können eine Metrik auf S definieren, indem wir die euklidische Norm im \mathbb{R}^3 als Metrik auffassen und auf S einschränken. Eine andere Metrik erhalten wir, wenn wir als Abstand zweier Punkte auf S die Länge der kürzesten auf S verlaufenden Verbindungsstrecke definieren. Sei nun X die Menge aller Städte in Europa, die mit München durch einen Straßenzug verbunden sind. Wir erhalten eine dritte Metrik, indem wir als Abstand zweier Städte die Länge des kürzesten verbindenden Straßenzugs definieren. Keine Metrik ergibt sich, wenn wir als Abstand die kürzeste Fahrzeit laut Bahnfahrplan definieren (dabei betrachten wir nur die Städte, zu denen eine Bahnverbindung existiert).

Definition 3.28 (Konvergenz im metrischen Raum)

Sei (X, d) metrischer Raum. Eine Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in X heißt konvergent gegen den Grenzwert $a \in X$, falls

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(x_k, a) = 0. \quad (3.37)$$

Wir schreiben wieder

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a \quad (\text{in } (X, d)),$$

oder einfach " $x_k \rightarrow a$ ".

□

Falls d von einer Norm erzeugt wird, $d(x, y) = \|x - y\|$, so erhalten wir die Definition der Konvergenz im normierten Raum (Definition 3.7).

Definition 3.29 (Cauchyfolge, Vollständigkeit)

Sei (X, d) metrischer Raum. Eine Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in X heißt Cauchyfolge, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$d(x_k, x_m) < \varepsilon, \quad \text{für alle } k, m \geq N. \quad (3.38)$$

(X, d) heißt vollständig, falls jede Cauchyfolge in X konvergiert.

In einem normierten Raum wird (3.38) zu

$$\|x_k - x_m\| < \varepsilon, \quad \text{für alle } k, m \geq N. \quad (3.39)$$

Definition 3.30 (Banachraum, Hilbertraum)

Ein normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$ heißt Banachraum, wenn er vollständig ist. Wird außerdem die Norm $\|\cdot\|$ von einem Skalarprodukt erzeugt gemäß (3.27), so heißt X Hilbertraum. □

Satz 3.31 (Vollständigkeit von \mathbb{K}^n)

Der Raum $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$ ist vollständig, also ein Hilbertraum.

Beweis: Sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ Cauchyfolge in $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$. Wegen $|x_{k,i} - x_{m,i}| \leq \|x_k - x_m\|_2$ ist auch jede Komponentenfolge eine Cauchyfolge in \mathbb{K} . Da \mathbb{K} vollständig ist, gilt $x_{k,i} \rightarrow a_i$ für ein $a_i \in \mathbb{K}$. Nach einem Satz der Analysis 2 folgt $x_k \rightarrow a = (a_1, \dots, a_n)$. \square

4 Konvergenzsätze und L^p -Räume

Wir beschäftigen uns jetzt mit zwei immer wiederkehrenden Themen der Analysis, nämlich

- Vertauschbarkeit eines Funktional (hier: das Integral) mit Grenzprozessen,
- Ungleichungen und Abschätzungen für Funktionen.

Satz 4.1 (Beppo-Levi) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, sei $f_n : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$ eine monoton wachsende Folge nichtnegativer messbarer Funktionen. Dann gilt

$$\int_{\Omega} \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n d\mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} f_n d\mu. \quad (4.1)$$

Beweis: Wir setzen $f = \sup_n f_n$. Wegen $f_n \leq f$ folgt

$$\int_{\Omega} f_n d\mu \leq \int_{\Omega} f d\mu, \quad \text{also} \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} f_n d\mu \leq \int_{\Omega} f d\mu.$$

Zum Beweis der umgekehrten Ungleichung wählen wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine monoton wachsende Folge $(f_{nk})_{k \in \mathbb{N}}$ von Funktionen in $E_+(\Omega)$ mit

$$f_n = \sup_{k \in \mathbb{N}} f_{nk}.$$

Das ist möglich nach Satz 2.16. Wir setzen

$$g_n = \sup_{j \leq n} f_{jn}.$$

Dann ist $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ebenfalls eine monoton wachsende Folge in $E_+(\Omega)$, und für alle $m, k \in \mathbb{N}$ gilt mit $n = \max\{m, k\}$

$$f_{mk} \leq f_{mn} \leq g_n = \sup_{j \leq n} f_{jn} \leq \sup_{j \leq n} f_j = f_n,$$

also

$$f = \sup_{m \in \mathbb{N}} \sup_{k \in \mathbb{N}} f_{mk} \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} g_n,$$

also nach Definition und Monotonie des Lebesgue-Integrals

$$\int_{\Omega} f d\mu \leq \int_{\Omega} \sup_{n \in \mathbb{N}} g_n d\mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} g_n d\mu \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} f_n d\mu.$$

□

Folgerung 4.2 Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, seien $f_k : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$ nichtnegative messbare Funktionen. Dann wird durch

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \quad (4.2)$$

eine messbare Funktion $f : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$ definiert, und es gilt

$$\int_{\Omega} f d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\Omega} f_k d\mu. \quad (4.3)$$

Beweis: Wir wenden Satz 4.1 an auf

$$f = \sup_{n \in \mathbb{N}} g_n, \quad g_n = \sum_{k=1}^n f_k.$$

□

Definition 4.3 (p-Halbnorm)

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, sei $f : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$ messbar, sei $p \in [1, \infty)$. Wir definieren $N_p(f) \in [0, \infty]$ durch

$$N_p(f) = \left(\int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \quad (4.4)$$

und

$$\mathcal{L}^p(\Omega; \mu) = \{f \mid f : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty] \text{ messbar, } N_p(f) < \infty\}. \quad (4.5)$$

Im Spezialfall $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ definieren wir

$$\mathcal{L}^p(\Omega) = \mathcal{L}^p(\Omega; \lambda), \quad (4.6)$$

wobei λ wieder das Lebesgue-Maß bezeichnet. □

Nach Definition 2.20 gilt offenbar

$$f \in \mathcal{L}^p(\Omega; \mu) \quad \Leftrightarrow \quad |f|^p \text{ ist integrierbar (über } \Omega \text{ bezüglich } \mu),$$

und aus der Definition von $N_p(f)$ folgt unmittelbar

$$N_p(\alpha f) = |\alpha| N_p(f) \quad (4.7)$$

für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und alle messbaren Funktionen $f : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$, also gilt

$$f \in \mathcal{L}^p(\Omega; \mu) \quad \Rightarrow \quad \alpha f \in \mathcal{L}^p(\Omega; \mu) \quad \text{für alle } \alpha \in \mathbb{R}. \quad (4.8)$$

Es ist aber möglich, dass $f \neq 0$, aber $N_p(f) = 0$, etwa für

$$f = 1_{\{0\}}, \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0. \end{cases}$$

Definition 4.4 (Nullmenge)

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum. Ein $N \in \mathcal{A}$ heißt μ -Nullmenge, falls $\mu(N) = 0$. Wir sagen, dass eine Eigenschaft (E) von Punkten $x \in \Omega$ fast überall (genauer: μ -fast überall) auf Ω gilt, falls es eine μ -Nullmenge N gibt mit

$$\{x : x \in \Omega, (E) \text{ gilt nicht in } x\} \subset N. \quad (4.9)$$

□

Zwei Funktionen $f, g : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$ heißen also **fast überall gleich**, wenn es eine Nullmenge N gibt mit

$$\{x : f(x) \neq g(x)\} \subset N.$$

Satz 4.5 Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, sei $f : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$ messbar und $f \geq 0$. Dann gilt

$$\int_{\Omega} f d\mu = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f = 0 \quad \mu\text{-fast überall.} \quad (4.10)$$

Beweis: Wir setzen $N = \{f \neq 0\}$. N ist messbar.

“ \Rightarrow ”: Wir setzen

$$A_n = \left\{f \geq \frac{1}{n}\right\}.$$

Dann gilt $A_n \uparrow N$ und

$$0 \leq \frac{1}{n} 1_{A_n} \leq f,$$

also

$$0 = \int_{\Omega} f d\mu \geq \int_{\Omega} \frac{1}{n} 1_{A_n} d\mu = \frac{1}{n} \mu(A_n) \geq 0,$$

also $\mu(A_n) = 0$ und $\mu(N) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = 0$.

“ \Leftarrow ”: Es ist $\mu(N) = 0$, da $f = 0$ μ -fast überall. Wir setzen $f_n = n 1_N$, dann ist

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) = \begin{cases} \infty, & f(x) \neq 0, \\ 0, & f(x) = 0. \end{cases}$$

Es folgt $0 \leq f \leq \sup_n f_n$ und daher nach Satz 4.1

$$0 \leq \int_{\Omega} f d\mu \leq \int_{\Omega} \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n d\mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} f_n d\mu = 0,$$

da

$$\int_{\Omega} f_n d\mu = \int_{\Omega} n 1_N d\mu = n \mu(N) = 0.$$

□

Satz 4.6 Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, seien $f, g : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$ messbar, sei $1 \leq p < \infty$. Dann gilt:

(i) Ist N eine μ -Nullmenge, so ist $f 1_N$ integrierbar und

$$\int_N f d\mu = 0. \quad (4.11)$$

(ii) Ist $f = g$ μ -fast überall, und ist $f \geq 0$ oder f integrierbar, so ist

$$\int_{\Omega} f d\mu = \int_{\Omega} g d\mu. \quad (4.12)$$

(iii) Ist $f \in \mathcal{L}^p(\Omega; \mu)$, so ist $\mu(\{|f| = \infty\}) = 0$.

(iv) Ist $|f| \leq g$ μ -fast überall und g integrierbar, so ist auch f integrierbar und

$$\int_{\Omega} |f| d\mu \leq \int_{\Omega} g d\mu. \quad (4.13)$$

(v) Sind $M, N \in \mathcal{A}$, und ist $M \Delta N = (M \setminus N) \cup (N \setminus M)$ eine μ -Nullmenge, so ist

$$\int_M f d\mu = \int_N f d\mu, \quad (4.14)$$

falls $f \geq 0$ oder f integrierbar ist.

Beweis: “(i)”: Sei N Nullmenge. Ist $f \geq 0$, so ist $f1_N = 0$ μ -fast überall, also folgt (4.11) aus Satz 4.5. Ist f beliebig, so ist $f1_N = f^+1_N - f^-1_N$, und die Behauptung folgt aus dem eben Bewiesenen.

“(ii)”: Sei zunächst $f \geq 0$. Nach Voraussetzung ist $N = \{f \neq g\}$ eine μ -Nullmenge und $\{g^- \neq 0\} \subset N$, also

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} g^- d\mu &= 0, \quad \int_N g^+ d\mu = 0, \\ \int_{\Omega} g^+ d\mu &= \int_{\{f=g\}} g^+ d\mu = \int_{\{f=g\}} f d\mu + \int_N f d\mu = \int_{\Omega} f d\mu, \end{aligned}$$

also ist $\int g d\mu$ wohldefiniert, und (4.12) gilt. Sei nun f integrierbar. Es ist $f^+ = g^+$ und $f^- = g^-$ μ -fast überall, also ist

$$\int_{\Omega} f^{\pm} d\mu = \int_{\Omega} g^{\pm} d\mu,$$

und es folgt die Behauptung.

“(iii)”: Sei $N = \{|f| = \infty\}$. Dann ist

$$0 \leq n1_N \leq |f|^p$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, also gilt

$$0 \leq n\mu(N) = \int_{\Omega} n1_N d\mu \leq \int_{\Omega} |f|^p d\mu < \infty,$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, woraus $\mu(N) = 0$ folgt.

“(iv)”: Ist $|f| \leq g$ μ -fast überall, so ist $\max\{|f|, g\} = g$ μ -fast überall und daher

$$\int_{\Omega} |f| d\mu \leq \int_{\Omega} \max\{|f|, g\} d\mu = \int_{\Omega} g d\mu < \infty.$$

“(v)”: Übung. □

Satz 4.7 (Höldersche Ungleichung für Funktionen)

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, seien $f, g : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$ messbar, seien $p, q > 1$ mit $1/p + 1/q = 1$. Dann gilt

$$\int_{\Omega} |fg| d\mu \leq \left(\int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} |g|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (4.15)$$

Beweis: Falls $N_p(f) = \infty$ oder $N_q(g) = \infty$, so hat die rechte Seite in (4.15) den Wert unendlich. Ist $N_p(f) = 0$, so ist nach Satz 4.5 auch $|f|^p = 0$ μ -fast überall. Also gilt: Ist $N_p(f) = 0$ oder $N_q(g) = 0$, so ist $fg = 0$ μ -fast überall und damit die linke Seite in (4.15) gleich Null. Wir betrachten nun den Fall $0 < N_p(f), N_q(g) < \infty$. Sei $x \in \Omega$ beliebig. Aus der Youngschen Ungleichung

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$

für $a, b \geq 0$ folgt

$$\frac{|f(x)g(x)|}{N_p(f)N_q(g)} \leq \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{N_p(f)^p} + \frac{1}{q} \frac{|g(x)|^q}{N_q(g)^q}.$$

Integration über Ω ergibt

$$\frac{\int_{\Omega} |fg| d\mu}{N_p(f)N_q(g)} \leq \frac{1}{p} \frac{N_p(f)^p}{N_p(f)^p} + \frac{1}{q} \frac{N_q(g)^q}{N_q(g)^q} = 1.$$

□

Satz 4.8 (Minkowskische Ungleichung)

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, seien $f, g : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$ messbar, sei $f + g$ auf ganz Ω definiert und $1 \leq p < \infty$. Dann gilt

$$\left(\int_{\Omega} |f + g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\Omega} |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (4.16)$$

Beweis: Wegen $|f + g| \leq |f| + |g|$, also

$$\left(\int_{\Omega} |f + g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{\Omega} (|f| + |g|)^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

können wir o.B.d.A. voraussetzen, dass $f \geq 0$ und $g \geq 0$, und dass ausserdem f^p und g^p integrierbar sind (andernfalls hat die rechte Seite in (4.16) den Wert unendlich). Dann ist auch $(f + g)^p$ integrierbar wegen

$$(f + g)^p \leq (2 \max\{f, g\})^p \leq 2^p \max\{f^p, g^p\} \leq 2^p(f^p + g^p).$$

Für $p = 1$ ist die Behauptung offensichtlich, sei nun $p > 1$. Mit

$$q = \frac{p}{p-1}, \quad \text{also } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

ergibt sich unter Verwendung der Hölderschen Ungleichung

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (f + g)^p d\mu &= \int_{\Omega} f(f + g)^{p-1} d\mu + \int_{\Omega} g(f + g)^{p-1} d\mu \\ &\leq \left(\int_{\Omega} f^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} (f + g)^{q(p-1)} d\mu \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_{\Omega} g^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} (f + g)^{q(p-1)} d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\int_{\Omega} (f + g)^p d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \left[\left(\int_{\Omega} f^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\Omega} g^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \right], \quad (4.17) \end{aligned}$$

also, da $(f + g)^p$ integrierbar ist,

$$\left(\int_{\Omega} (f + g)^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{\Omega} (f + g)^p d\mu \right)^{1 - \frac{1}{q}} \leq \left(\int_{\Omega} f^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\Omega} g^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

□

Für N_p gilt also auch die Dreiecksungleichung

$$N_p(f + g) \leq N_p(f) + N_p(g), \quad (4.18)$$

aber es kann sein, dass $N_p(f) = 0$ ist, obwohl $f \neq 0$, und außerdem ist $\mathcal{L}^p(\Omega; \mu)$ kein Vektorraum über \mathbb{R} , da die Addition nicht immer definiert ist. Beide Nachteile werden beseitigt, indem man durch Bildung geeigneter Äquivalenzklassen zu einem anderen Raum, nämlich dem Raum $L^p(\Omega; \mu)$ übergeht.

Wir behandeln nun im einzelnen die Konstruktion von $L^p(\Omega; \mu)$. Zunächst definieren wir auf $\mathcal{L}^p(\Omega; \mu)$ eine Relation \sim durch

$$f \sim g \quad \Leftrightarrow \quad f = g \quad \mu\text{-fast überall.}$$

Diese Relation ist eine Äquivalenzrelation: Reflexivität und Symmetrie sind klar. Gilt $f \sim g$ und $g \sim h$, so ist

$$\{f \neq h\} \subset (\{f \neq g\} \cup \{g \neq h\}),$$

also ist $\{f \neq h\}$ eine μ -Nullmenge und damit $f \sim h$. Wir definieren

$$L^p(\Omega; \mu) = \mathcal{L}^p(\Omega; \mu) / \sim, \quad (4.19)$$

das heißt, die Elemente von $L^p(\Omega; \mu)$ sind Äquivalenzklassen von μ -fast überall gleichen Funktionen. Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ definieren wir

$$L^p(\Omega) = L^p(\Omega; \lambda). \quad (4.20)$$

Zur Illustration der Äquivalenzklassenbildung betrachten wir etwa eine Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^n$, dann ist $1_N = 0$ fast überall, also $[1_N] = [0]$ in $L^p(\Omega)$. Auch für

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \infty, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

gilt $[f] = [0]$. Die Äquivalenzrelation \sim ist wegen

$$f \sim g, \alpha \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \{\alpha f \neq \alpha g\} \subset \{f \neq g\} \quad \Rightarrow \quad \alpha f \sim \alpha g$$

mit der Skalarmultiplikation verträglich. Dasselbe gilt für die Addition: Sind $f_1 \sim g_1$, $f_2 \sim g_2$, und sind $f_1 + f_2$ und $g_1 + g_2$ definiert, so gilt

$$\{(f_1 + f_2) \neq (g_1 + g_2)\} \subset (\{f_1 \neq g_1\} \cup \{f_2 \neq g_2\}),$$

also $f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$. Da $\mu(\{|f| = \infty\}) = 0$ gilt für alle $f \in \mathcal{L}^p(\Omega; \mu)$, gibt es in jeder Äquivalenzklasse $[f]$ eine Funktion $g \in \mathcal{L}^p(\Omega; \mu)$, welche nur endliche Werte hat.

Hieraus und aus der Verträglichkeit von \sim mit Addition und Skalarmultiplikation folgt, dass $L^p(\Omega; \mu)$ ein Vektorraum über \mathbb{R} wird, wenn wir definieren

$$\alpha[f] = [\alpha f], \quad [f] + [g] = [f + g].$$

Nach Satz 4.6 gilt außerdem

$$f \sim g \quad \Rightarrow \quad \int_{\Omega} f \, d\mu = \int_{\Omega} g \, d\mu.$$

Wir können daher für $f \in \mathcal{L}^p(\Omega; \mu)$ definieren

$$\|[f]\|_p = N_p(f) = \left(\int_{\Omega} |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (4.21)$$

Hierdurch erhalten wir eine Norm auf $L^p(\Omega; \mu)$, da gilt $\|[f]\|_p \geq 0$,

$$\|\alpha[f]\|_p = \|[\alpha f]\|_p = N_p(\alpha f) = |\alpha| N_p(f) = |\alpha| \|[f]\|_p,$$

analog mit der Minkowskischen Ungleichung

$$\|[f] + [g]\|_p \leq \|[f]\|_p + \|[g]\|_p,$$

und

$$\begin{aligned} \|[f]\|_p = 0 &\Rightarrow N_p(f) = 0 \Rightarrow |f| = 0 \quad \mu\text{-fast überall} \\ &\Rightarrow f \sim 0 \Rightarrow [f] = [0]. \end{aligned}$$

Als Ergebnis dieser Überlegungen erhalten wir

Satz 4.9 *Der Raum $L^p(\Omega; \mu)$ ist ein normierter Vektorraum.* □

Normalerweise schreibt man für eine Funktion $f : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$

$$“f \in L^p(\Omega; \mu)”$$

anstatt, was eigentlich korrekt wäre, “ $[f] \in L^p(\Omega; \mu)$ ”. Man muss dann allerdings beachten, dass die Elemente von $L^p(\Omega; \mu)$ nur bis auf eine Menge vom Maß 0 wohldefiniert sind. Beispielsweise bedeutet “ $f = g$ in $L^p(\Omega; \mu)$ ”, dass $f(x) = g(x)$ gilt für fast alle $x \in \Omega$.

Geht man aus von einer Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, so ist klar, was die Aussage

$$“f \text{ ist stetig auf } \Omega” \quad (4.22)$$

bedeutet. Geht man aus von $f \in L^p(\Omega; \mu)$, so ist (4.22) zunächst nicht sinnvoll, da jede Äquivalenzklasse in $L^p(\Omega; \mu)$ unstetige Funktionen enthält. Gemeint ist mit (4.22) die Aussage

“Die Äquivalenzklasse $[f]$ von f enthält eine stetige Funktion”.

Wir halten noch einmal explizit fest, dass gilt

$$f \in \mathcal{L}^p(\Omega; \mu) \quad \Rightarrow \quad \mu(\{|f| = \infty\}) = 0.$$

Hierdurch erklärt sich die oft anzutreffende Schreibweise

$$L^p(\Omega; \mu) = \{f \mid f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \int_{\Omega} |f|^p \, d\mu < \infty\}. \quad (4.23)$$

Definition 4.10 (Wesentliches Supremum)

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum. Für $f : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$ definieren wir das wesentliche Supremum durch

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} f(x) = \inf \{ M : M \in [-\infty, \infty], f \leq M \text{ } \mu\text{-fast überall} \} \quad (4.24)$$

und den Raum $\mathcal{L}^\infty(\Omega; \mu)$ der messbaren, wesentlich beschränkten Funktionen durch

$$\mathcal{L}^\infty(\Omega; \mu) = \{ f : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty] \text{ messbar, } \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)| < \infty \} \quad (4.25)$$

sowie

$$L^\infty(\Omega; \mu) = \mathcal{L}^\infty(\Omega; \mu) / \sim, \quad (4.26)$$

wobei \sim dieselbe Äquivalenzrelation darstellt wie in der Definition von $L^p(\Omega; \mu)$ für $p < \infty$.
□

Satz 4.11 Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum. Dann ist $L^\infty(\Omega; \mu)$ versehen mit

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)| \quad (4.27)$$

ein normierter Vektorraum.

Beweis: Übung. □

Beispiel: Für die durch

$$f(x) = \begin{cases} (-1)^x \frac{1}{x}, & x \in \mathbb{N}, \\ 0, & x \notin \mathbb{N} \end{cases}$$

definierte Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \frac{1}{2}, \quad \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| = 1, \quad \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| = \|f\|_\infty = 0.$$

Wir beschäftigen uns nun mit der Konvergenz von Folgen in $L^p(\Omega; \mu)$. Wie in jedem normierten Raum ist in $L^p(\Omega; \mu)$ die Normkonvergenz definiert durch

$$f_n \rightarrow f \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_p = 0, \quad (4.28)$$

also (für $1 \leq p < \infty$)

$$f_n \rightarrow f \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f_n - f|^p d\mu = 0. \quad (4.29)$$

Wir sagen, dass f_n gegen f in der L^p -Norm konvergiert.

Aus der Analysis 1 kennen wir den Begriff der punktweisen Konvergenz von Funktionenfolgen,

$$f_n \rightarrow f \text{ punktweise} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega.$$

Die punktweise Konvergenz ist im $\mathcal{L}^p(\Omega; \mu)$ definiert, ist aber zunächst nicht mit der Äquivalenzrelation \sim verträglich. Der für die Analysis in L^p -Räumen wesentliche Konvergenzbegriff ist der folgende. Wir sagen, dass f_n gegen f punktweise μ -fast überall konvergiert, falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{für } \mu\text{-fast alle } x \in \Omega \quad (4.30)$$

gilt. Dieser Konvergenzbegriff ist mit \sim verträglich und daher in $L^p(\Omega; \mu)$ wohldefiniert (Übung).

Lemma 4.12 *Seien $f, g \in L^p(\Omega; \mu)$, $1 \leq p \leq \infty$. Ist $|f| \leq |g|$ μ -fast überall, so gilt*

$$\|f\|_p \leq \|g\|_p. \quad (4.31)$$

Beweis: Folgt unmittelbar aus der Definition für $p = \infty$, für $p < \infty$ gilt

$$\|f\|_p^p = \int_{\Omega} |f|^p d\mu \leq \int_{\Omega} |g|^p d\mu = \|g\|_p^p.$$

□

Satz 4.13 *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, sei $A \subset \Omega$ messbar. Dann wird durch*

$$I_A(f) = \int_A f d\mu \quad (4.32)$$

ein lineares Funktional $I_A : (L^1(\Omega; \mu), \|\cdot\|_1) \rightarrow \mathbb{R}$ definiert mit

$$|I_A(f)| \leq \|f\|_1. \quad (4.33)$$

Weiterhin gilt: Ist $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in $L^1(\Omega; \mu)$ und $f \in L^1(\Omega; \mu)$, so gilt

$$f_n \rightarrow f \quad \text{in der } L^1\text{-Norm} \quad \Rightarrow \quad \int_A f_n d\mu \rightarrow \int_A f d\mu. \quad (4.34)$$

Beweis: Es ist

$$I_A(f) = \int_{\Omega} 1_A f d\mu,$$

also ist I_A linear, und

$$|I_A(f)| \leq \int_{\Omega} |1_A f| d\mu = \|1_A f\|_1 \leq \|f\|_1$$

wegen Lemma 4.12. Aus

$$\left| \int_A f_n d\mu - \int_A f d\mu \right| = |I_A(f_n) - I_A(f)| = |I_A(f_n - f)| \leq \|f_n - f\|_1$$

folgt (4.34). □

Satz 4.14 *Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in $L^p(\Omega; \mu)$ mit $f_n \rightarrow f \in L^p(\Omega; \mu)$ in der L^p -Norm, sei $A \subset \Omega$ messbar. Dann gilt*

$$\int_A |f_n|^p d\mu \rightarrow \int_A |f|^p d\mu. \quad (4.35)$$

Beweis: Es ist (umgekehrte Dreiecksungleichung und Lemma 4.12)

$$| \|1_A f_n\|_p - \|1_A f\|_p | \leq \|1_A(f_n - f)\|_p \leq \|f_n - f\|_p,$$

also

$$\int_A |f_n|^p d\mu = \|1_A f_n\|_p^p \rightarrow \|1_A f\|_p^p = \int_A |f|^p d\mu.$$

□

Satz 4.15 (Lemma von Fatou)

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, seien $f_n : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$ messbar und nichtnegativ. Dann gilt

$$\int_{\Omega} \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n d\mu. \quad (4.36)$$

Beweis: Wir setzen

$$g_n = \inf_{m \geq n} f_m,$$

dann ist

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} g_n,$$

und $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine monoton wachsende Folge nichtnegativer Funktionen. Da $g_n \leq f_m$ für $m \geq n$, folgt

$$\int_{\Omega} g_n d\mu \leq \int_{\Omega} f_m d\mu, \quad \text{für alle } m \geq n,$$

also

$$\int_{\Omega} g_n d\mu \leq \inf_{m \geq n} \int_{\Omega} f_m d\mu,$$

also mit dem Satz von Beppo-Levi

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu &= \int_{\Omega} \sup_{n \in \mathbb{N}} g_n d\mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} g_n d\mu \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\inf_{m \geq n} \int_{\Omega} f_m d\mu \right) \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n d\mu. \end{aligned}$$

□

Satz 4.16 Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in $L^p(\Omega; \mu)$, $1 \leq p < \infty$, es gelte $f_n \rightarrow f \in L^p(\Omega; \mu)$ punktweise μ -fast überall. Dann gilt

$$f_n \rightarrow f \quad \text{in der } L^p\text{-Norm} \quad \Leftrightarrow \quad \int_{\Omega} |f_n|^p d\mu \rightarrow \int_{\Omega} |f|^p d\mu. \quad (4.37)$$

Beweis: Die Implikation “ \Rightarrow ” ist bereits in Satz 4.14 enthalten. Wir zeigen “ \Leftarrow ”. Es gilt

$$|f_n - f|^p \leq 2^p(|f_n|^p + |f|^p),$$

sowie punktweise μ -fast überall

$$2^{p+1}|f|^p = \lim_{n \rightarrow \infty} [2^p(|f_n|^p + |f|^p) - |f_n - f|^p].$$

Aus dem Lemma von Fatou folgt nun

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} 2^{p+1} |f|^p d\mu &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left[\int_{\Omega} 2^p |f_n|^p d\mu + \int_{\Omega} 2^p |f|^p d\mu - \int_{\Omega} |f_n - f|^p d\mu \right] \\ &= 2^{p+1} \int_{\Omega} |f|^p d\mu + \liminf_{n \rightarrow \infty} \left[- \int_{\Omega} |f_n - f|^p d\mu \right], \end{aligned}$$

also

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \left[- \int_{\Omega} |f_n - f|^p d\mu \right] \geq 0. \quad (4.38)$$

Für jede Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{R} gilt aber

$$a_n \leq 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0. \quad (4.39)$$

Es folgt also

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f_n - f|^p d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_p^p$$

und damit die Behauptung. \square

Die Gültigkeit des folgenden Satzes ist einer der Gründe, weshalb das Lebesgue-Integral in der Analysis sehr nützlich ist.

Satz 4.17 (Satz von Lebesgue)

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in $L^p(\Omega; \mu)$, $1 \leq p < \infty$, es gelte

(a) f_n ist punktweise μ -fast überall konvergent,

(b) es gibt ein $g \in L^p(\Omega; \mu)$ mit

$$|f_n| \leq g \quad \mu\text{-fast überall für alle } n \in \mathbb{N}. \quad (4.40)$$

Dann gibt es ein $f \in L^p(\Omega; \mu)$ mit $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ μ -fast überall, und f_n konvergiert gegen f in der L^p -Norm, also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f_n - f|^p d\mu = 0. \quad (4.41)$$

Beweis: Wir wählen Repräsentanten $\tilde{f}_n \in \mathcal{L}^p(\Omega; \mu)$ von f_n und eine μ -Nullmenge N , so dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}_n(x)$ existiert für alle $x \in \Omega \setminus N$. Wir setzen

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}_n(x), & x \in \Omega \setminus N, \\ 0, & x \in N. \end{cases} \quad (4.42)$$

Dann ist \tilde{f} messbar, und es gilt $|\tilde{f}| \leq g$ μ -fast überall, also ist $\tilde{f} \in \mathcal{L}^p(\Omega; \mu)$. Wir definieren

$$f = [\tilde{f}]. \quad (4.43)$$

Dann ist $f \in L^p(\Omega; \mu)$ und $f_n \rightarrow f$ μ -fast überall. (f ist von der Wahl von \tilde{f}_n und N unabhängig.) Es gilt nun μ -fast überall

$$0 \leq |f_n - f|^p \leq (|f| + g)^p =: h, \quad |f_n - f|^p \rightarrow 0,$$

also folgt aus dem Lemma von Fatou

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} h \, d\mu &= \int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow \infty} (h - |f_n - f|^p) \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (h - |f_n - f|^p) \, d\mu \\ &= \int_{\Omega} h \, d\mu + \liminf_{n \rightarrow \infty} \left[- \int_{\Omega} |f_n - f|^p \, d\mu \right], \end{aligned}$$

also, da $\int_{\Omega} h \, d\mu < \infty$,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \left[- \int_{\Omega} |f_n - f|^p \, d\mu \right] \geq 0,$$

und daraus $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$ wie im Beweis von Satz 4.16. \square

Läßt man im Satz von Lebesgue die Voraussetzung b) (Existenz einer integrierbaren Majorante) weg, so gilt die Aussage des Satzes im allgemeinen nicht. Beispiel:

$$\Omega = \mathbb{R}, \quad f_n = 1_{[n, n+1]}.$$

Hier gilt

$$f_n \rightarrow f = 0 \quad \text{punktweise, aber} \quad \int_{\mathbb{R}} |f_n|^p \, d\lambda = 1.$$

Folgerung 4.18 *Es seien die Voraussetzungen von Satz 4.17 erfüllt mit $p = 1$. Dann gilt*

$$\int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n \, d\mu. \quad (4.44)$$

Beweis: Aus Satz 4.17 folgt

$$\left| \int_{\Omega} f_n \, d\mu - \int_{\Omega} f \, d\mu \right| \leq \int_{\Omega} |f_n - f| \, d\mu \rightarrow 0.$$

\square

Satz 4.19 *Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchyfolge in $(L^p(\Omega; \mu), \|\cdot\|_p)$, $1 \leq p < \infty$. Dann gibt es ein $f \in L^p(\Omega; \mu)$ mit $f_n \rightarrow f$ in der L^p -Norm, und es gibt eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit $f_{n_k} \rightarrow f$ μ -fast überall.*

Beweis: Da $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist, können wir eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ finden mit

$$\|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\|_p \leq 2^{-k}, \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}. \quad (4.45)$$

Wir definieren

$$g_k = f_{n_{k+1}} - f_{n_k}, \quad g = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^n |g_k| = \sum_{k=1}^{\infty} |g_k|.$$

Dann gilt mit dem Satz von Beppo-Levi

$$\begin{aligned} \|g\|_p &= \left(\int_{\Omega} \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{k=1}^n |g_k| \right)^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} \left(\sum_{k=1}^n |g_k| \right)^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{k=1}^n |g_k| \right\|_p \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^n \|g_k\|_p \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^n 2^{-k} = 1, \end{aligned}$$

also ist $g \in L^p(\Omega; \mu)$ und daher nach Satz 4.6

$$\mu(\{g = \infty\}) = 0,$$

also ist $\sum_{k=1}^{\infty} |g_k(x)|$ und damit auch $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$ konvergent (in \mathbb{R}) für μ -fast alle $x \in \Omega$.
Wegen

$$f_{n_m}(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{m-1} g_k(x)$$

ist auch $(f_{n_m})_{m \in \mathbb{N}}$ μ -fast überall konvergent, und für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$|f_{n_m}| \leq |f_{n_1}| + \sum_{k=1}^{m-1} |g_k| \leq |f_{n_1}| + g \in L^p(\Omega; \mu).$$

Wir können daher den Satz von Lebesgue auf die Teilfolge $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ anwenden und erhalten die Existenz einer Funktion f mit

$$f_{n_k} \rightarrow f \in L^p(\Omega; \mu) \quad \mu\text{-fast überall,} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|f_{n_k} - f\|_p = 0.$$

Die Cauchyfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ hat also eine in der L^p -Norm gegen f konvergente Teilfolge, also gilt $f_n \rightarrow f$ in der L^p -Norm. \square

Aus den Voraussetzungen von Satz 4.19 folgt im allgemeinen nicht, dass die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise μ -fast überall konvergiert.

Beispiel 4.20

Sei $\Omega = [0, 1]$, $\mu = \lambda$. Für

$$n = 2^k + m, \quad k \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq m < 2^k,$$

setzen wir

$$f_n = 1_{A_n}, \quad A_n = [m2^{-k}, (m+1)2^{-k}).$$

Dann ist

$$\int_{\Omega} |f_n|^p d\lambda = \lambda(A_n) = 2^{-k},$$

also $\|f_n\|_p \rightarrow 0$ und damit $f_n \rightarrow 0$ in der L^p -Norm, also ist $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchyfolge im $L^p([0, 1])$, aber $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ existiert für kein $x \in [0, 1)$. \square

Satz 4.21 Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum. Dann ist $L^p(\Omega; \mu)$ für $1 \leq p \leq \infty$ ein Banachraum und für $p = 2$ ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} fg d\mu. \tag{4.46}$$

Beweis: Für $1 \leq p < \infty$ folgt die Vollständigkeit von $L^p(\Omega; \mu)$ unmittelbar aus Satz 4.19. Für $p = \infty$ Übungsaufgabe. Wir zeigen, dass $L^2(\Omega; \mu)$ ein Hilbertraum ist. Aus der Hölderschen Ungleichung für $p = q = 2$ folgt für alle $f, g \in L^2(\Omega, \mu)$, dass

$$\int_{\Omega} |fg| d\mu \leq \left(\int_{\Omega} |f|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |g|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_2 \|g\|_2,$$

also ist $fg \in L^1(\Omega; \mu)$ und damit $\langle f, g \rangle$ auf $L^2(\Omega; \mu)$ definiert. Ferner gilt

$$\langle f, f \rangle = \int_{\Omega} |f|^2 d\mu = \|f\|_2^2 \geq 0,$$

und $\langle f, f \rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0$. Aus der Linearität des Integrals folgt, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bilinear ist; die Symmetrie ist klar. \square

Satz 4.22 Sei $U \subset \mathbb{R}^n$, $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, $f : U \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ Abbildung, $x_0 \in U$. Es sei

$$\omega \mapsto f(x, \omega) \quad \text{integrierbar für alle } x \in U, \quad (4.47)$$

$$x \mapsto f(x, \omega) \quad \text{stetig im Punkt } x_0 \text{ für alle } \omega \in \Omega, \quad (4.48)$$

und es gebe ein $h \in \mathcal{L}^1(\Omega; \mu)$ mit

$$|f(x, \omega)| \leq h(\omega), \quad \text{für alle } x \in U, \omega \in \Omega. \quad (4.49)$$

Dann wird durch

$$g(x) = \int_{\Omega} f(x, \omega) d\mu(\omega) \quad (4.50)$$

eine Funktion $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ definiert, welche stetig in x_0 ist. Ist für alle $\omega \in \Omega$ die durch $x \mapsto f(x, \omega)$ definierte Funktion in U stetig, so ist g in U stetig.

Beweis: Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in U mit $x_n \rightarrow x_0$. Wir definieren

$$f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(\omega) = f(x_n, \omega).$$

Dann gilt $|f_n| \leq h$ für alle n und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\omega) = f_0(\omega), \quad \text{für alle } \omega \in \Omega.$$

Aus Folgerung 4.18 folgt

$$g(x_n) = \int_{\Omega} f_n d\mu \rightarrow \int_{\Omega} f_0 d\mu = g(x_0).$$

\square

Satz 4.23 Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, $f : U \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Seien die durch $\omega \mapsto f(x, \omega)$ definierten Funktionen integrierbar für alle $x \in U$, es existiere die partielle Ableitung (nach x_i) $\partial_i f(x, \omega)$ für alle $x \in U$ und alle $\omega \in \Omega$, und es gebe ein $h \in \mathcal{L}^1(\Omega; \mu)$ mit

$$|\partial_i f(x, \omega)| \leq h(\omega), \quad \text{für alle } x \in U, \omega \in \Omega. \quad (4.51)$$

Dann gilt für $g : U \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(x) = \int_{\Omega} f(x, \omega) d\mu(\omega), \quad (4.52)$$

dass $\partial_i g(x)$ existiert für alle $x \in U$, und

$$\partial_i g(x) = \int_{\Omega} \partial_i f(x, \omega) d\mu(\omega). \quad (4.53)$$

Beweis: Sei $x \in U$, sei $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in \mathbb{R} mit $h_n \rightarrow 0$ und $h_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir setzen

$$d_n(\omega) = \frac{f(x + h_n e_i, \omega) - f(x, \omega)}{h_n}, \quad (4.54)$$

wobei $e_i \in \mathbb{R}^n$ der i -te Einheitsvektor ist. Dann gilt für geeignete Zwischenstellen $\xi_n(\omega) \in [x, x + h_n e_i]$,

$$|d_n(\omega)| = \left| \frac{\partial_i f(\xi_n(\omega), \omega) h_n}{h_n} \right| \leq h(\omega), \quad (4.55)$$

für alle $\omega \in \Omega$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Aus dem Satz von Lebesgue folgt nun, da die Folge (h_n) beliebig gewählt war,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \partial_i f(x, \omega) d\mu(\omega) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} d_n(\omega) d\mu(\omega) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{h_n} \left[\int_{\Omega} f(x + h_n e_i, \omega) d\mu(\omega) - \int_{\Omega} f(x, \omega) d\mu(\omega) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{h_n} (g(x + h_n e_i) - g(x)) = \partial_i g(x). \end{aligned}$$

□

5 Mehrfachintegrale, Satz von Fubini

In diesem Kapitel befassen wir uns mit der Frage, wie sich Integrale über Teilmengen des \mathbb{R}^n zurückführen lassen auf Integrale über Intervalle im \mathbb{R} . Messbarkeit bedeutet in diesem Kapitel immer Borel-Messbarkeit.

Bevor wir damit beginnen, klären wir den Zusammenhang zwischen Lebesgue-Integral und Riemann-Integral.

Satz 5.1 *Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und messbar. Ist f Riemann-integrierbar auf $[a, b]$, so ist das Riemann-Integral von f gleich dem Lebesgue-Integral von f .*

Beweis: Sei f Riemann-integrierbar. Dann gibt es Folgen $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen mit

$$\varphi_n \leq f \leq \psi_n, \quad 0 \leq \int_a^b (\psi_n - \varphi_n)(x) dx \leq \frac{1}{n}. \quad (5.1)$$

Aus der Monotonie der beiden Integralbegriffe folgt

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi_n(x) dx &\leq (R) \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b \psi_n(x) dx, \\ \int_a^b \varphi_n(x) dx &\leq \int_{[a,b]} f d\lambda \leq \int_a^b \psi_n(x) dx, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} -\frac{1}{n} &\leq \int_a^b \varphi_n(x) dx - \int_a^b \psi_n(x) dx \leq (R) \int_a^b f(x) dx - \int_{[a,b]} f d\lambda \\ &\leq \int_a^b \psi_n(x) dx - \int_a^b \varphi_n(x) dx \leq \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ liefert die Behauptung. \square

Es sei nebenbei bemerkt, dass eine Riemann-integrierbare Funktion f nicht unbedingt messbar zu sein braucht, sie ist aber fast überall gleich der Riemann-integrierbaren und messbaren Funktion $\varphi = \sup_n \varphi_n$, wobei φ_n wie im Beweis von Satz 5.1 gewählt wird.

Umgekehrt ist nicht jede Lebesgue-integrierbare Funktion auch Riemann-integrierbar, wie das Beispiel $f = 1_{\mathbb{Q}}|_{[0,1]}$ zeigt.

Wegen Satz 5.1 stehen uns alle Regeln, die wir in Analysis 1 und 2 zur Berechnung von Integralen auf kompakten Intervallen kennengelernt haben, weiterhin zur Verfügung. Da das Lebesgue-Integral für eine größere Klasse von Funktionen definiert ist als das Riemann-Integral, ist es auch nicht überraschend, dass diese Regeln (partielle Integration, Substitutionsregel usw.) für das Lebesgue-Integral mit schwächeren Voraussetzungen an die beteiligten Funktionen auskommen als für das Riemann-Integral. Wir stellen diese Sachverhalte aber nicht im Einzelnen dar.

Wir schreiben daher in Zukunft auch für das Lebesgue-Integral

$$\int_a^b f(x) dx \quad \text{statt} \quad \int_{[a,b]} f d\lambda. \quad (5.2)$$

Da $\lambda(\{a\}) = \lambda(\{b\}) = 0$, gilt

$$\int_{[a,b]} f d\lambda = \int_{(a,b]} f d\lambda = \int_{[a,b)} f d\lambda = \int_{(a,b)} f d\lambda. \quad (5.3)$$

Der Zusammenhang zwischen Lebesgue-Integral und uneigentlichem Riemann-Integral geht aus dem folgenden Satz hervor.

Satz 5.2 Sei $(a, b) \subset \mathbb{R}$ (dabei sind $a = -\infty$ und $b = +\infty$ zugelassen), $f : (a, b) \rightarrow [-\infty, \infty]$ messbar. Dann ist $f \in \mathcal{L}^1((a, b))$ genau dann, wenn

$$\sup_{\substack{x, y \in \mathbb{R} \\ a < x < y < b}} \int_x^y |f(t)| dt < \infty, \quad (5.4)$$

und es gilt in diesem Fall

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \downarrow a} \lim_{y \uparrow b} \int_x^y f(t) dt = \lim_{y \uparrow b} \lim_{x \downarrow a} \int_x^y f(t) dt. \quad (5.5)$$

Beweis: Übung. □

Als Beispiel betrachten wir

$$f(t) = t^r, \quad r \in \mathbb{R}.$$

Für $(a, b) = (0, 1)$, $x \in (0, 1)$, $x \downarrow 0$ gilt

$$\begin{aligned} r > -1 : \int_x^1 t^r dt &= \frac{1}{r+1}(1 - x^{r+1}) \leq \frac{1}{r+1}, \quad \text{also } f \in \mathcal{L}^1((0, 1)), \\ r = -1 : \int_x^1 \frac{1}{t} dt &= -\ln x \rightarrow \infty, \quad \text{also } f \notin \mathcal{L}^1((0, 1)), \\ r < -1 : \int_x^1 t^r dt &= \frac{1}{r+1}(1 - x^{r+1}) \rightarrow \infty, \quad \text{also } f \notin \mathcal{L}^1((0, 1)). \end{aligned}$$

Analoge Betrachtungen lassen sich für $(a, b) = (1, \infty)$ anstellen mit dem Ergebnis

$$f \in \mathcal{L}^1((1, \infty)), \quad r < -1,$$

und $f \notin \mathcal{L}^1((1, \infty))$ andernfalls. Als weiteres Beispiel betrachten wir die Funktion

$$f : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{\sin t}{t}.$$

Aus der Analysis 1 wissen wir, dass

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt \quad (5.6)$$

existiert und endlich ist, aber

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^x \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt = \infty,$$

also $f \notin \mathcal{L}^1((1, \infty))$, obwohl der Limes in (5.6) existiert.

Wir beschäftigen uns nun mit der Frage, wie wir höherdimensionale Integrale auf niederdimensionale (und damit letztlich auf eindimensionale) Integrale zurückführen können. Dies geschieht mit dem Prinzip von Cavalieri (für die Berechnung von Inhalten) und mit dem Satz von Fubini (für die Berechnung allgemeiner Integrale). Um die verschiedenen Dimensionen auseinanderzuhalten, schreiben wir im folgenden

$$\lambda^n$$

für das Lebesgue-Maß im \mathbb{R}^n .

Wir erläutern zunächst das Prinzip von Cavalieri an einem Rechteck in der Ebene. Sei

$$Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2, \\ Q_\xi = \{\eta : \eta \in \mathbb{R}, (\xi, \eta) \in Q\}, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Dann ist

$$\lambda^1(Q_\xi) = \begin{cases} b_2 - a_2, & \xi \in [a_1, b_1], \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir definieren $s_Q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$s_Q(\xi) = \lambda^1(Q_\xi).$$

Dann ist

$$\lambda^2(Q) = (b_2 - a_2)(b_1 - a_1) = (b_2 - a_2) \int_{\mathbb{R}} 1_{[a_1, b_1]} d\lambda^1 = \int_{\mathbb{R}} s_Q d\lambda^1 \\ = \int_{\mathbb{R}} \lambda^1(Q_\xi) d\lambda^1(\xi).$$

Wir erhalten also den Flächeninhalt von Q , indem wir die Längen der senkrechten Schnitte in Abhängigkeit von ξ bestimmen und anschließend nach ξ integrieren.

Notation 5.3

Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$, $n = m + l$. Wir zerlegen $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^l$ und definieren für $\xi \in \mathbb{R}^m$

$$Q_\xi = \{\eta : \eta \in \mathbb{R}^l, (\xi, \eta) \in Q\}.$$

Satz 5.4 (Prinzip von Cavalieri)

Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ messbar, $n = m + l$. Dann gilt

(i) Q_ξ ist messbar für alle $\xi \in \mathbb{R}^m$.

(ii) Die durch

$$s_Q(\xi) = \lambda^l(Q_\xi) \tag{5.7}$$

definierte Funktion $s_Q : \mathbb{R}^m \rightarrow [0, \infty]$ ist messbar.

(iii) Es gilt

$$\lambda^n(Q) = \int_{\mathbb{R}^m} s_Q d\lambda^m = \int_{\mathbb{R}^m} \lambda^l(Q_\xi) d\lambda^m(\xi). \quad (5.8)$$

Beweis: Für $\xi \in \mathbb{R}^m$ definieren wir das Mengensystem $\mathcal{A}_\xi \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ durch

$$\mathcal{A}_\xi = \{A : A \subset \mathbb{R}^n, A_\xi \text{ ist messbar im } \mathbb{R}^l\}. \quad (5.9)$$

Dann gilt $\mathcal{J}^n \subset \mathcal{A}_\xi$, da $I_\xi \in \mathcal{J}^l$ falls $I \in \mathcal{J}^n$. Außerdem ist \mathcal{A}_ξ eine σ -Algebra, da

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_\xi^n &= \mathbb{R}^l, \\ (\mathbb{R}^n \setminus A)_\xi &= \{\eta : \eta \in \mathbb{R}^l, (\xi, \eta) \notin A\} = \mathbb{R}^l \setminus A_\xi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right)_\xi &= \left\{ \eta : \eta \in \mathbb{R}^l, (\xi, \eta) \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{ \eta : \eta \in \mathbb{R}^l, (\xi, \eta) \in A_n \} \\ &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n)_\xi. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\mathcal{J}^n \subset \sigma(\mathcal{J}^n) \subset \mathcal{A}_\xi,$$

und damit ist jedes messbare $Q \subset \mathbb{R}^n$ Element von \mathcal{A}_ξ , also gilt (i). Wir definieren nun für messbares $\tilde{A} \subset \mathbb{R}^l$

$$\mu_k(\tilde{A}) = \lambda^l(\tilde{A} \cap \{\eta : \eta \in \mathbb{R}^l, \|\eta\|_2 \leq k\}), \quad (5.10)$$

dann ist μ_k ein endliches Maß auf \mathbb{R}^l und

$$s_Q(\xi) = \sup_{k \in \mathbb{N}} \mu_k(Q_\xi). \quad (5.11)$$

Zum Beweis von (ii) genügt es daher, die folgende Hilfsbehauptung zu zeigen:

Ist $Q \subset \mathbb{R}^n$ messbar, und ist μ ein endliches Maß auf der Borelalgebra im \mathbb{R}^l , so ist die durch $g_Q(\xi) = \mu(Q_\xi)$ definierte Abbildung $g_Q : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ messbar.

Hierzu definieren wir das Mengensystem $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$,

$$\mathcal{D} = \{D : D \subset \mathbb{R}^n, D \text{ messbar, } g_D \text{ messbar}\}. \quad (5.12)$$

Wir zeigen, dass \mathcal{D} ein Dynkin-System ist. Es ist

$$g_{\mathbb{R}^n}(\xi) = \mu(\mathbb{R}_\xi^n) = \mu(\mathbb{R}^l),$$

also ist $g_{\mathbb{R}^n}$ konstant und damit messbar. Ist $D \in \mathcal{D}$, so ist

$$g_{\mathbb{R}^n \setminus D}(\xi) = \mu((\mathbb{R}^n \setminus D)_\xi) = \mu(\mathbb{R}^l \setminus D_\xi) = \mu(\mathbb{R}^l) - \mu(D_\xi) = \mu(\mathbb{R}^l) - g_D(\xi),$$

also ist auch $g_{\mathbb{R}^n \setminus D}$ messbar und damit $\mathbb{R}^n \setminus D \in \mathcal{D}$. Sei nun $(D_k)_{k \in \mathbb{N}}$ disjunkte Folge in \mathcal{D} , $D = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} D_k$, dann gilt

$$g_D(\xi) = \mu(D_\xi) = \mu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} (D_k)_\xi\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu((D_k)_\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} g_{D_k}(\xi),$$

also ist g_D messbar und damit $D \in \mathcal{D}$. Damit ist \mathcal{D} ein Dynkin-System. Es gilt weiter

$$\mathcal{J}^n \subset \mathcal{D},$$

da jedes $I \in \mathcal{J}^n$ die Form $I = I_1 \times I_2$ mit $I_1 \in \mathcal{J}^m$ und $I_2 \in \mathcal{J}^l$ hat und wegen

$$\mu(I_\xi) = \mu(I_2)1_{I_1}(\xi)$$

die Abbildung g_I messbar ist. Da $\mathcal{D} \subset \sigma(\mathcal{J}^n)$ gilt nach Definition von \mathcal{D} , folgt

$$\mathcal{J}^n \subset \mathcal{D} \subset \sigma(\mathcal{J}^n).$$

Aus Satz 1.20 folgt nun, dass

$$\mathcal{D} = \sigma(\mathcal{J}^n).$$

Also ist g_Q messbar für jedes messbare $Q \subset \mathbb{R}^n$ und damit die Hilfsbehauptung (und damit auch (ii)) bewiesen. Wir kommen nun zu (iii). Für messbares $Q \subset \mathbb{R}^n$ definieren wir

$$\nu(Q) = \int_{\mathbb{R}^m} \lambda^l(Q_\xi) d\lambda^m(\xi). \quad (5.13)$$

Wegen des Eindeutigkeitsatzes 1.22 genügt es zu zeigen, dass ν ein Maß ist und dass

$$\nu(I) = \lambda^n(I), \quad \text{für alle } I \in \mathcal{J}^n. \quad (5.14)$$

Zunächst ist $\nu(\emptyset) = 0$, da $\emptyset_\xi = \emptyset$. Sei $(Q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge paarweiser disjunkter messbarer Mengen, dann ist auch $((Q_k)_\xi)_{k \in \mathbb{N}}$ disjunkt für alle $\xi \in \mathbb{R}^m$ und also

$$\begin{aligned} \nu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} Q_k\right) &= \int_{\mathbb{R}^m} \lambda^l\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} (Q_k)_\xi\right) d\lambda^m(\xi) = \int_{\mathbb{R}^m} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^l((Q_k)_\xi) d\lambda^m(\xi) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^m} \lambda^l((Q_k)_\xi) d\lambda^m(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(Q_k). \end{aligned}$$

Also ist ν Maß. Sei nun $I = [a, b] \in \mathcal{J}^n$, $I = I_1 \times I_2$, $I_1 \in \mathcal{J}^m$, $I_2 \in \mathcal{J}^l$, dann ist

$$\lambda^n(I) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i) = \lambda^m(I_1) \cdot \lambda^l(I_2),$$

und

$$\nu(I) = \int_{\mathbb{R}^m} \lambda^l(I_\xi) d\lambda^m(\xi) = \int_{\mathbb{R}^m} \lambda^l(I_2)1_{I_1}(\xi) d\lambda^m(\xi) = \lambda^m(I_1) \cdot \lambda^l(I_2).$$

Damit ist (5.14) bewiesen. □

Folgerung 5.5 Seien $n = m + l$, seien $Q_1 \subset \mathbb{R}^m$, $Q_2 \subset \mathbb{R}^l$ und $Q = Q_1 \times Q_2 \subset \mathbb{R}^n$ messbar. Dann ist

$$\lambda^n(Q) = \lambda^m(Q_1) \cdot \lambda^l(Q_2). \quad (5.15)$$

Beweis: Folgt aus (5.8), da $\lambda^l(Q_\xi) = \lambda^l(Q_2)1_{Q_1}(\xi)$. □

Folgerung 5.6 Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ messbar, $n = m + l$, sei

$$Q^n = \{\xi : \xi \in \mathbb{R}^m, (\xi, \eta) \in Q\}. \quad (5.16)$$

Dann gelten die Behauptungen von Satz 5.4 in analoger Weise, wobei (5.8) ersetzt wird durch

$$\lambda^n(Q) = \int_{\mathbb{R}^l} \lambda^m(Q^\eta) d\lambda^l(\eta). \quad (5.17)$$

Beweis: Die Abbildung

$$T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad T(\xi, \eta) = (\eta, \xi),$$

ist orthogonal. Es gilt, da λ^n invariant ist unter orthogonalen Abbildungen,

$$\lambda^n(Q) = \lambda^n(TQ) = \int_{\mathbb{R}^l} \lambda^m((TQ)_\eta) d\lambda^l(\eta) = \int_{\mathbb{R}^l} \lambda^m(Q^\eta) d\lambda^l(\eta).$$

□

Beispiel 5.7 (Volumenberechnung mit dem Cavalieri-Prinzip)

Wir betrachten eine Reihe von Beispielen.

(i) Zylinder: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$ messbar, $h \geq 0$,

$$Z = \Omega \times [0, h] \subset \mathbb{R}^n.$$

Dann ist

$$\lambda^n(Z) = \lambda^{n-1}(\Omega) \cdot \lambda^1([0, h]) = h\lambda^{n-1}(\Omega).$$

(ii) Parallelotop: Sei $\{v_1, \dots, v_n\}$ Basis des \mathbb{R}^n ,

$$P = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i : \lambda_i \in [0, 1], 1 \leq i \leq n \right\}.$$

Es ist

$$P = T([0, 1]^n),$$

wobei T die durch $T(e_i) = v_i$ eindeutig festgelegte lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist (e_i Einheitsvektoren), und

$$1 = \lambda^n([0, 1]^n) = \lambda^n(T^{-1}(P)) = (T(\lambda^n))(P) = \frac{1}{|\det T|} \lambda^n(P),$$

also gilt

$$\lambda^n(P) = |\det T| = |\det A|,$$

wobei $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ die Matrix mit den Spalten v_1, \dots, v_n ist.

(iii) Homothetie: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ messbar, $r > 0$. Mit $T(x) = rx$ gilt

$$\lambda^n(r\Omega) = |\det T|(T(\lambda^n))(r\Omega) = |\det T|\lambda^n(\Omega) = r^n\lambda^n(\Omega).$$

(iv) Kegel: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$ messbar, sei $h \geq 0$. Dann ist

$$C = \{(1 - \lambda)x, \lambda h) : \lambda \in [0, 1], x \in \Omega\}$$

ein Kegel mit Basis Ω und Höhe h (die Spitze liegt in $(0, \dots, 0, h)$). Es ist

$$\begin{aligned} \lambda^n(C) &= \int_{\mathbb{R}} \lambda^{n-1}(C^t) d\lambda^1(t) = \int_{[0, h]} \lambda^{n-1}\left(\left(1 - \frac{t}{h}\right)\Omega\right) dt \\ &= \int_0^h \left(1 - \frac{t}{h}\right)^{n-1} \lambda^{n-1}(\Omega) dt = -\frac{h}{n} \left(1 - \frac{t}{h}\right)^n \Big|_0^h \lambda^{n-1}(\Omega) = \\ &= \frac{h}{n} \lambda^{n-1}(\Omega). \end{aligned}$$

(v) Fläche zwischen zwei Kurven: Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ messbar, $[a, b] \subset \mathbb{R}$, es gelte $f \leq g$. Wir setzen

$$M = \{(x, y) : x \in [a, b], f(x) \leq y \leq g(x)\}.$$

Es ist

$$\lambda^2(M) = \int_{\mathbb{R}} \lambda^1(M_x) d\lambda^1(x) = \int_{[a, b]} \lambda^1([f(x), g(x)]) dx = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx.$$

(vi) Rotationskörper: Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ messbar, $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $f \geq 0$. Wir setzen

$$\Omega = \{(x, y, z) : x \in [a, b], y^2 + z^2 \leq f(x)^2\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Es ist

$$\lambda^3(\Omega) = \int_{\mathbb{R}} \lambda^2(\Omega_x) d\lambda^1(x) = \int_a^b \pi f(x)^2 dx = \pi \int_a^b f(x)^2 dx. \quad (5.18)$$

(vii) Kugel mit Radius R :

$$K = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}.$$

Wir wenden (5.18) an mit $[a, b] = [-R, R]$, $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, dann ist

$$\lambda^3(K) = \pi \int_{-R}^R R^2 - x^2 dx = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

(viii) Simplex: Seien $v_0, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$,

$$S = \left\{ \sum_{i=0}^n \lambda_i v_i : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1 \right\}. \quad (5.19)$$

Wir betrachten zunächst das Simplex S_n , definiert durch $v_0 = 0$, $v_i = e_i$, also

$$S_n = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i \leq 1\}.$$

Es gilt

$$S_n = \{((1 - \lambda_n)\tilde{\lambda}_1, \dots, (1 - \lambda_n)\tilde{\lambda}_{n-1}, \lambda_n) : \tilde{\lambda}_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{\lambda}_i \leq 1, \lambda_n \in [0, 1]\},$$

das heißt, S_n ist Kegel mit der Basis S_{n-1} und der Höhe 1, also folgt aus (iv)

$$\lambda^n(S_n) = \frac{1}{n} \lambda^{n-1}(S_{n-1}),$$

und wegen $\lambda^1(S_1) = \lambda^1([0, 1]) = 1$ gilt

$$\lambda^n(S_n) = \frac{1}{n!}.$$

Das Simplex S in (5.19) läßt sich darstellen als $S = T(S_n)$, $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $Tx = Ax + v_0$, und $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ hat die Spalten $v_1 - v_0, \dots, v_n - v_0$. Es folgt

$$\lambda^n(S) = |\det A| \lambda^n(S_n) = \frac{1}{n!} |\det A| \quad (5.20)$$

falls $\det A \neq 0$; falls $\det A = 0$, so liegt S in einer Hyperebene, also $\lambda^n(S) = 0$ und (5.20) gilt auch in diesem Fall.

□

Mit dem Prinzip von Cavalieri können wir in Spezialfällen bereits Mehrfachintegrale berechnen. Ist etwa

$$f = 1_Q, \quad Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2],$$

so ist

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} f \, d\lambda^2 &= \lambda^2(Q) = \int_{\mathbb{R}} \lambda^1(Q_\xi) \, d\lambda^1(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} 1_{Q_\xi}(\eta) \, d\lambda^1(\eta) \right) \, d\lambda^1(\xi) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(\xi, \eta) \, d\eta \right) \, d\xi. \end{aligned}$$

Satz 5.8 (Satz von Tonelli)

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ messbar, $n = m + l$. Dann ist die durch

$$f_\xi(\eta) = f(\xi, \eta) \quad (5.21)$$

definierte Funktion $f_\xi : \mathbb{R}^l \rightarrow [0, \infty]$ messbar für alle $\xi \in \mathbb{R}^m$, ebenso ist die durch

$$g(\xi) = \int_{\mathbb{R}^l} f_\xi(\eta) \, d\lambda^l(\eta) \quad (5.22)$$

definierte Funktion $g : \mathbb{R}^m \rightarrow [0, \infty]$ messbar, und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\lambda^n = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^l} f(\xi, \eta) \, d\lambda^l(\eta) \right) \, d\lambda^m(\xi). \quad (5.23)$$

Beweis: Wir betrachten zuerst den Spezialfall $f = 1_Q$, $Q \subset \mathbb{R}^n$ messbar. Dann ist

$$f_\xi(\eta) = 1_Q(\xi, \eta) = 1_{Q_\xi}(\eta),$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} 1_Q d\lambda^n = \lambda^n(Q), \quad g(\xi) = \int_{\mathbb{R}^l} 1_{Q_\xi}(\eta) d\lambda^l(\eta) = \lambda^l(Q_\xi),$$

und alle Behauptungen folgen aus Satz 5.4. Sei nun $f \in E_+(\mathbb{R}^n)$,

$$f = \sum_{i=1}^k \alpha_i 1_{Q_i}, \quad Q_i \subset \mathbb{R}^n \text{ messbar, } \alpha_i \geq 0.$$

Dann ist

$$f_\xi(\eta) = \sum_{i=1}^k \alpha_i 1_{Q_i}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^k \alpha_i 1_{(Q_i)_\xi}(\eta),$$

also ist nach dem eben Bewiesenen f_ξ messbar, und

$$g(\xi) = \int_{\mathbb{R}^l} \sum_{i=1}^k \alpha_i 1_{(Q_i)_\xi}(\eta) d\lambda^l(\eta) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \int_{\mathbb{R}^l} 1_{(Q_i)_\xi}(\eta) d\lambda^l(\eta) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \lambda^l((Q_i)_\xi),$$

und damit auch g messbar. Aus

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f d\lambda^n &= \sum_{i=1}^k \alpha_i \int_{\mathbb{R}^n} 1_{Q_i} d\lambda^n = \sum_{i=1}^k \alpha_i \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^l} 1_{(Q_i)_\xi} d\lambda^l \right) d\lambda^m(\xi) \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^l} \sum_{i=1}^k \alpha_i 1_{(Q_i)_\xi} d\lambda^l \right) d\lambda^m(\xi) = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^l} f_\xi(\eta) d\lambda^l(\eta) \right) d\lambda^m(\xi) \end{aligned}$$

folgt (5.23). Sei schließlich $f \geq 0$ beliebig, sei

$$f = \sup_{k \in \mathbb{N}} f_k,$$

mit einer monoton wachsenden Folge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $E_+(\mathbb{R}^n)$. Dann ist

$$f_\xi = \sup_{k \in \mathbb{N}} (f_k)_\xi,$$

also f_ξ messbar, und aus dem Satz von Beppo-Levi folgt

$$g(\xi) = \int_{\mathbb{R}^l} f_\xi(\eta) d\lambda^l(\eta) = \sup_{k \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^l} (f_k)_\xi(\eta) d\lambda^l(\eta)$$

also g messbar. Es folgt weiter

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f d\lambda^n &= \sup_{k \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^n} f_k d\lambda^n = \sup_{k \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^l} (f_k)_\xi(\eta) d\lambda^l(\eta) d\lambda^m(\xi) \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \sup_{k \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^l} (f_k)_\xi(\eta) d\lambda^l(\eta) d\lambda^m(\xi) = \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^l} f_\xi(\eta) d\lambda^l(\eta) d\lambda^m(\xi). \end{aligned}$$

□

Ganz analog zeigt man, dass aus Folgerung 5.6 folgt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\lambda^n = \int_{\mathbb{R}^l} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(\xi, \eta) d\lambda^m(\xi) \right) d\lambda^l(\eta). \quad (5.24)$$

Folgerung 5.9 (Satz von Fubini)

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [-\infty, \infty]$ messbar, $n = m + l$. Dann sind äquivalent:

(i) $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

(ii) Es ist

$$\int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^l} |f(\xi, \eta)| d\lambda^l(\eta) d\lambda^m(\xi) < \infty. \quad (5.25)$$

(iii) Es ist

$$\int_{\mathbb{R}^l} \int_{\mathbb{R}^m} |f(\xi, \eta)| d\lambda^m(\xi) d\lambda^l(\eta) < \infty. \quad (5.26)$$

Falls $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ so gilt

$$\int_{\mathbb{R}^l} |f(\xi, \eta)| d\lambda^l(\eta) < \infty, \quad \text{für fast alle } \xi \in \mathbb{R}^m, \quad (5.27)$$

$$\int_{\mathbb{R}^m} |f(\xi, \eta)| d\lambda^m(\xi) < \infty, \quad \text{für fast alle } \eta \in \mathbb{R}^l, \quad (5.28)$$

sowie

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\lambda^n = \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^l} f(\xi, \eta) d\lambda^l(\eta) d\lambda^m(\xi) = \int_{\mathbb{R}^l} \int_{\mathbb{R}^m} f(\xi, \eta) d\lambda^m(\xi) d\lambda^l(\eta). \quad (5.29)$$

Beweis: Ist $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow [-\infty, \infty]$ messbar, so folgt aus dem Satz von Tonelli, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{f}| d\lambda^n = \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^l} |\tilde{f}(\xi, \eta)| d\lambda^l(\eta) d\lambda^m(\xi) = \int_{\mathbb{R}^l} \int_{\mathbb{R}^m} |\tilde{f}(\xi, \eta)| d\lambda^m(\xi) d\lambda^l(\eta). \quad (5.30)$$

Da die linke Seite in (5.30) sich nicht ändert, wenn f auf einer Nullmenge abgeändert wird, hängt die Gültigkeit der Bedingungen (5.25) und (5.26) nicht von der Wahl des Repräsentanten \tilde{f} von $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ab. Damit ist die Äquivalenz der Bedingungen (i), (ii) und (iii) bewiesen. Gilt $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so folgt aus (5.30), dass

$$\lambda^m(\{\xi : \xi \in \mathbb{R}^m, \int_{\mathbb{R}^l} |\tilde{f}(\xi, \eta)| d\lambda^l(\eta) = \infty\}) = 0,$$

$$\lambda^l(\{\eta : \eta \in \mathbb{R}^l, \int_{\mathbb{R}^m} |\tilde{f}(\xi, \eta)| d\lambda^m(\xi) = \infty\}) = 0,$$

woraus (5.27) und (5.28) folgen. Die letzte Behauptung schließlich folgt ebenfalls aus dem Satz von Tonelli, angewandt auf f^+ und f^- . \square

Folgerung 5.10 Ist $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\lambda^n = \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n, \quad (5.31)$$

und die Reihenfolge der Integrationen darf beliebig vertauscht werden. \square

Ist $Q \subset \mathbb{R}^n$ messbar und $f \in L^1(Q)$, so können wir $f(x) = 0$ setzen für $x \notin Q$ und erhalten

$$\int_Q f d\lambda^n = \int_{\mathbb{R}^n} 1_Q f d\lambda^n = \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} (1_Q f)(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

Ist Q ein Quader, $Q = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$, so ist

$$\int_Q f d\lambda^n = \int_{a_n}^{b_n} \dots \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

Allgemeiner: Ist $Q = Q_1 \times Q_2$, $Q_1 \subset \mathbb{R}^m$, $Q_2 \subset \mathbb{R}^l$, $n = m + l$, so ist

$$\int_Q f d\lambda^n = \int_{Q_1} \int_{Q_2} f(\xi, \eta) d\lambda^l(\eta) d\lambda^m(\xi).$$

Wir betrachten Beispiele. Für

$$f(x, y) = xy^2, \quad Q = [1, 2] \times [1, 3] \subset \mathbb{R}^2$$

gilt

$$\int_Q f d\lambda^2 = \int_1^2 \int_1^3 xy^2 dy dx = \int_1^2 \frac{1}{3} xy^3 \Big|_{y=1}^{y=3} dx = \int_1^2 \frac{26}{3} x dx = \frac{13}{3} x^2 \Big|_{x=1}^{x=2} = 13.$$

Sei

$$f(x_1, \dots, x_n) = \exp\left(\sum_{i=1}^n x_i\right), \quad Q = [0, 1]^n \subset \mathbb{R}^n.$$

Für $n = 2$ gilt

$$\begin{aligned} \int_Q f d\lambda^2 &= \int_0^1 \int_0^1 e^{x_1+x_2} dx_1 dx_2 = \int_0^1 \int_0^1 e^{x_1} e^{x_2} dx_1 dx_2 = \int_0^1 e^{x_2} \int_0^1 e^{x_1} dx_1 dx_2 \\ &= \int_0^1 e^{x_2} dx_2 \cdot \int_0^1 e^{x_1} dx_1 = (e - 1)^2. \end{aligned}$$

Analog gilt für beliebiges n

$$\begin{aligned} \int_Q f d\lambda^n &= \int_0^1 \dots \int_0^1 \exp\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) dx_1 \dots dx_n = \int_0^1 \dots \int_0^1 \prod_{i=1}^n e^{x_i} dx_1 \dots dx_n \\ &= \prod_{i=1}^n \int_0^1 e^t dt = (e - 1)^n. \end{aligned}$$

6 Metrische Räume: Weitere Grundbegriffe

Definition 6.1 (Offene Kugel, Umgebung)

Sei (X, d) metrischer Raum. Für $a \in X$ und $r > 0$ heißt

$$B(a, r) = \{x \in X : d(a, x) < r\} \quad (6.1)$$

die offene Kugel mit Mittelpunkt a und Radius r . Sei nun $x \in X$. Ein $U \subset X$ heißt Umgebung von x , falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit

$$x \in B(x, \varepsilon) \subset U. \quad (6.2)$$

Die offene Kugel $B(x, \varepsilon)$ heißt auch die ε -Umgebung von x . \square

In einem normierten Raum gilt für die Kugeln (bezüglich der erzeugten Metrik)

$$B(a, r) = a + rB(0, 1),$$

“alle Kugeln sehen gleich aus”.

In (\mathbb{R}, d) mit $d(x, y) = |x - y|$ (Betragmetrik) ist $B(a, r)$ das offene Intervall $(a - r, a + r)$. In \mathbb{C} mit der Betragmetrik ist $B(a, r)$ das “Innere” des Kreises mit Mittelpunkt a und Radius r .

Satz 6.2 (Hausdorffsche Trennungseigenschaft)

Sei (X, d) metrischer Raum. Dann haben je zwei verschiedene Punkte disjunkte Umgebungen, das heißt: Für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ gibt es Umgebungen U von x und V von y mit

$$U \cap V = \emptyset. \quad (6.3)$$

Beweis: Seien $x, y \in X$ mit $x \neq y$. Wir setzen

$$\varepsilon = \frac{1}{2}d(x, y), \quad U = B(x, \varepsilon), \quad V = B(y, \varepsilon).$$

Für beliebiges $z \in U$ gilt

$$2\varepsilon = d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < \varepsilon + d(z, y),$$

also ist $d(z, y) > \varepsilon$ und damit $z \notin V$. \square

Definition 6.3 (Offene Menge)

Sei (X, d) metrischer Raum. Ein $U \subset X$ heißt offen, falls U Umgebung jedes Punktes $x \in U$ ist, d.h. falls gilt: Für alle $x \in U$ existiert ein $\varepsilon > 0$ mit

$$x \in B(x, \varepsilon) \subset U \quad (6.4)$$

\square

Jedes offene Intervall (a, b) in \mathbb{R} ist offen (bezüglich der Betragsmetrik). Jede offene Kugel $B(a, r)$ eines metrischen Raums ist offen: Ist $x \in B(a, r)$, so ist $B(x, \varepsilon) \subset B(a, r)$, falls $\varepsilon < r - d(a, x)$.

Ob eine Teilmenge eines metrischen Raums (X, d) offen ist oder nicht, hängt von der Wahl der Metrik d ab. Andererseits wird es sich noch herausstellen, daß im \mathbb{R}^n alle Metriken, die von Normen erzeugt werden, zu denselben offenen Mengen führen.

Man beachte, daß der Begriff "offen" für Teilmengen eines metrischen Raumes X relativ zu X definiert ist. So ist etwa $[0, 1]$ nicht offen in \mathbb{R} (d.h. aufgefaßt als Teilmenge von \mathbb{R}), wohl aber offen in sich selbst (d.h. aufgefaßt als Teilmenge des metrischen Raums $([0, 1], d_{[0,1]})$).

Satz 6.4 Sei (X, d) metrischer Raum. Dann gilt:

(i) \emptyset und X sind offen.

(ii) Sind U und V offene Teilmengen, so ist auch $U \cap V$ offen.

(iii) Ist $(U_i)_{i \in I}$ eine Familie offener Teilmengen, so ist auch

$$\bigcup_{i \in I} U_i$$

offen.

Beweis: (i) ist klar. (ii): Seien U, V offen, sei $x \in U \cap V$ beliebig. Wir wählen $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ mit $B(x, \varepsilon_1) \subset U$ und $B(x, \varepsilon_2) \subset V$. Für $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ ist dann $B(x, \varepsilon) \subset U \cap V$.

(iii): Ist $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$, so gibt es ein $i \in I$ mit $x \in U_i$ und weiter ein $\varepsilon > 0$ mit $B(x, \varepsilon) \subset U_i$, also $x \in B(x, \varepsilon) \subset \bigcup_{i \in I} U_i$. \square

Folgerung 6.5 Sind $U_i, 1 \leq i \leq n$, offene Teilmengen eines metrischen Raums (X, d) , so ist auch

$$\bigcap_{i=1}^n U_i$$

offen.

Beweis: Folgt direkt aus Teil (ii) des Satzes. \square

Ein unendlicher Durchschnitt offener Mengen braucht nicht offen zu sein, so ist etwa

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B(x, \frac{1}{n}) = \{x\},$$

und einpunktige Mengen sind "normalerweise" nicht offen.

Bemerkung 6.6 (Topologie)

Satz 6.4 ist ein Ausgangspunkt, um den Begriff des metrischen Raumes weiter zu verallgemeinern, und zwar zum Begriff des *topologischen Raumes*. Statt des Abstandsbegriffs wird hier der Begriff der offenen Menge axiomatisiert: Sei X Menge. Eine Familie $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen von X heißt Topologie auf X , falls gilt

- (i) $\emptyset \in \mathcal{T}, X \in \mathcal{T},$
- (ii) $U, V \in \mathcal{T} \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{T},$
- (iii) $(U_i)_{i \in I} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \cup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}.$

(X, \mathcal{T}) heißt topologischer Raum, die Elemente von \mathcal{T} heißen offene Mengen in (X, \mathcal{T}) .

□

Definition 6.7 (Abgeschlossene Menge)

Sei (X, d) metrischer Raum. Ein $A \subset X$ heißt abgeschlossen, wenn das Komplement $X \setminus A$ offen ist.

□

Definition 6.8 (Abgeschlossene Kugel)

Sei (X, d) metrischer Raum, $a \in X, r > 0$. Dann heißt

$$K(a, r) = \{x \in X : d(a, x) \leq r\} \tag{6.5}$$

die abgeschlossene Kugel mit Mittelpunkt a und Radius r .

□

Jede abgeschlossene Kugel $K(a, r)$ ist abgeschlossen (siehe Übung). Jedes abgeschlossene Intervall in \mathbb{R} ist abgeschlossen.

Satz 6.9 Sei (X, d) metrischer Raum. Dann gilt

- (i) \emptyset und X sind abgeschlossen.
- (ii) Sind $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ abgeschlossen, so ist auch

$$\bigcup_{i=1}^n A_i$$

abgeschlossen.

- (iii) Ist $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie abgeschlossener Teilmengen, so ist auch

$$\bigcap_{i \in I} A_i$$

abgeschlossen.

Beweis: Folgt direkt aus Satz 6.4 und Folgerung 6.5.

□

Beispiel 6.10 (Cantorsches Diskontinuum)

Sei $C_0 = [0, 1]$. Wir setzen $C_1 = C_0 \setminus (1/3, 2/3)$. C_1 besteht aus den beiden abgeschlossenen Intervalle $[0, 1/3]$ und $[2/3, 1]$. Wir entfernen nun jeweils deren offenes mittleres Drittel $(1/9, 2/9)$ bzw. $(7/9, 8/9)$, um C_2 zu erhalten. Entsprechend erhalten wir C_{n+1} aus C_n . Die Menge

$$C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n \quad (6.6)$$

heißt *Cantorsches Diskontinuum*. C ist abgeschlossen. Es ist

$$C = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} a_i 3^{-i} : a_i \in \{0, 2\} \text{ für alle } i \right\}. \quad (6.7)$$

Definition 6.11 (Rand, Inneres, Abschluß)

Sei (X, d) metrischer Raum, sei $Y \subset X$. Ein $x \in X$ heißt *Randpunkt* von Y , falls jede ε -Umgebung von x sowohl einen Punkt von Y als auch einen Punkt von $X \setminus Y$ enthält. Die Menge

$$\partial Y = \{x \in X, x \text{ ist Randpunkt von } Y\} \quad (6.8)$$

heißt *Rand* von Y (in X). Die Menge

$$\text{int}(Y) = Y \setminus \partial Y \quad (6.9)$$

heißt *das Innere* von Y . Die Menge

$$\bar{Y} = Y \cup \partial Y \quad (6.10)$$

heißt *der Abschluß* von Y .

□

Lemma 6.12 Sei (X, d) metrischer Raum, $Y \subset X$. Dann gilt

$$\text{int}(Y) \subset Y \subset \bar{Y}, \quad \partial Y = \bar{Y} \setminus \text{int}(Y). \quad (6.11)$$

Beweis: Folgt direkt aus der Definition. □

In \mathbb{R} mit der Standardmetrik gilt: Ist Y eine Teilmenge mit $(a, b) \subset Y \subset [a, b]$, so ist

$$\partial Y = \{a, b\}, \quad \text{int}(Y) = (a, b), \quad \bar{Y} = [a, b].$$

Ebenso gilt in \mathbb{R} : $\partial \mathbb{Q} = \bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, $\text{int}(\mathbb{Q}) = \emptyset$.

Definieren wir in einem normierten Raum $(X, \|\cdot\|)$ die Sphäre durch

$$S(a, r) = \{x \in X, \|x - a\| = r\}, \quad (6.12)$$

so ist

$$S(a, r) = \partial K(a, r) = \partial B(a, r) = K(a, r) \setminus B(a, r).$$

Man beachte: Für beliebige Teilmengen Y eines metrischen Raumes gilt im allgemeinen **nicht**

$$\bar{Y} = \overline{\text{int}(Y)}. \quad (6.13)$$

In einem normierten Raum gilt (6.13), falls Y konvex ist und $\text{int}(Y) \neq \emptyset$.

Satz 6.13 Sei (X, d) metrischer Raum, sei $Y \subset X$. Dann gilt

(i) $\text{int}(Y)$ ist offen.

(ii) \bar{Y} ist abgeschlossen.

(iii) ∂Y ist abgeschlossen.

Beweis: (i): Sei $a \in \text{int}(Y) = Y \setminus \partial Y$. Da $a \notin \partial Y$, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß $B(a, \varepsilon)$ keinen Punkt von $X \setminus Y$ enthält, also $B(a, \varepsilon) \subset Y$. Sei nun $y \in B(a, \varepsilon)$ beliebig. Für hinreichend kleines $\delta > 0$ gilt $B(y, \delta) \subset B(a, \varepsilon) \subset Y$, also ist $y \notin \partial Y$. Da y beliebig war, folgt $B(a, \varepsilon) \subset Y \setminus \partial Y = \text{int}(Y)$.

(ii): Für $Z = X \setminus Y$ gilt $\partial Z = \partial Y$ nach Definition. Es folgt

$$\bar{Y} = Y \cup \partial Y = (X \setminus Z) \cup \partial Z = X \setminus (Z \setminus \partial Z) = X \setminus \text{int}(Z).$$

Nach (i) ist $\text{int}(Z)$ offen, also ist \bar{Y} abgeschlossen.

(iii) Es ist

$$\partial Y = \bar{Y} \setminus \text{int}(Y) = \bar{Y} \cap (X \setminus \text{int}(Y)),$$

und damit abgeschlossen als Durchschnitt der abgeschlossenen Mengen \bar{Y} und $X \setminus \text{int}(Y)$.

□

Satz 6.14 (Produktmetrik)

Seien (X_1, d_1) und (X_2, d_2) metrische Räume. Dann wird durch

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\} \quad (6.14)$$

eine Metrik auf $X_1 \times X_2$ definiert, die sogenannte Produktmetrik. Es gilt

$$B((x_1, x_2), \varepsilon) = B(x_1, \varepsilon) \times B(x_2, \varepsilon), \quad (6.15)$$

$$K((x_1, x_2), \varepsilon) = K(x_1, \varepsilon) \times K(x_2, \varepsilon), \quad (6.16)$$

für alle $x_i \in X_i$, $\varepsilon > 0$.

Beweis: Übungsaufgabe. □

Satz 6.15 (Offene und abgeschlossene Mengen im Produktraum)

Seien (X_1, d_1) und (X_2, d_2) metrische Räume. Sind $U_i \subset X_i$ offen in X_i , $i = 1, 2$, so ist $U_1 \times U_2$ offen in $X_1 \times X_2$, versehen mit der Produktmetrik. Ebenso ist $A_1 \times A_2$ abgeschlossen in $X_1 \times X_2$, falls $A_i \subset X_i$ abgeschlossen sind für $i = 1, 2$.

Beweis: Seien U_i offen, sei $(x_1, x_2) \in U_1 \times U_2$. Wähle $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ mit $B(x_i, \varepsilon_i) \subset U_i$ ($i = 1, 2$), dann ist $B((x_1, x_2), \varepsilon) \subset U_1 \times U_2$ für $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Seien $A_i \subset X_i$ abgeschlossen. Es ist

$$(X_1 \times X_2) \setminus (A_1 \times A_2) = ((X_1 \setminus A_1) \times X_2) \cup (X_1 \times (X_2 \setminus A_2)),$$

und die rechte Seite ist offen als Vereinigung zweier offener Mengen. □

Folgerung 6.16 Seien (X_i, d_i) metrische Räume, $1 \leq i \leq n$. Dann wird auf

$$X = \prod_{i=1}^n X_i$$

eine Metrik d definiert durch

$$d(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} d_i(x_i, y_i) \quad (6.17)$$

für $x, y \in X$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$. Sind U_i offen in X_i bzw. A_i abgeschlossen in X_i , so sind auch

$$\prod_{i=1}^n U_i, \quad \prod_{i=1}^n A_i,$$

offen bzw. abgeschlossen in (X, d) .

Beweis: Folgt mit vollständiger Induktion aus den Sätzen 6.14 und 6.15. \square

Setzen wir $X_i = \mathbb{K}$ und wählen wir für d_i die Betragsmetrik, so ist $X = \mathbb{K}^n$, und die Produktmetrik

$$d(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$

entspricht der von der Maximumnorm auf \mathbb{K}^n erzeugten Metrik. Aus Satz 6.16 ergibt sich dann für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, daß alle achsenparallelen Quader

$$\prod_{i=1}^n (a_i, b_i), \quad \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$$

offen bzw. abgeschlossen sind in $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$.

Betrachten wir ein Produkt

$$X_1 \times X_2 \times X_3$$

dreier metrischer Räume (X_i, d_i) , und konstruieren wir eine Metrik durch zweimalige Produktbildung gemäß

$$(X_1 \times X_2) \times X_3 \quad , \text{ oder } \quad X_1 \times (X_2 \times X_3),$$

so erhalten wir in jedem Fall dieselbe Metrik, nämlich die in (6.17) definierte.

Satz 6.17 Seien (X_i, d_i) metrische Räume, $1 \leq i \leq n$, sei $X = \prod_{i=1}^n X_i$ versehen mit der Produktmetrik d . Sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ Folge in X mit $x_k = (x_{k,1}, \dots, x_{k,n})$, sei $a = (a_1, \dots, a_n) \in X$. Dann gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{k \rightarrow \infty} x_{k,i} = a_i \quad \text{für alle } i, 1 \leq i \leq n. \quad (6.18)$$

Beweis: Nach Definition der Produktmetrik d gilt

$$d(x_k, a) \rightarrow 0 \quad \Leftrightarrow \quad \max_{1 \leq i \leq n} d_i(x_{k,i}, a_i) \rightarrow 0 \quad \Leftrightarrow \quad d_i(x_{k,i}, a_i) \rightarrow 0 \quad \text{für alle } i.$$

\square

Folgerung 6.18 Sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathbb{K}^n , sei $a \in \mathbb{K}^n$. Dann gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$$

in $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ genau dann, wenn

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{k,i} = a_i$$

für alle i , $1 \leq i \leq n$.

Folgt aus Satz 6.17 mit $(X_i, d_i) = (\mathbb{K}, |\cdot|)$. □

Lemma 6.19 (Konvergenz und Umgebung)

Seien (X, d) metrischer Raum, $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ Folge in X , $a \in X$. Dann gilt $x_k \rightarrow a$ genau dann, wenn es zu jeder Umgebung U von a ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $x_k \in U$ für alle $k \geq N$.

Beweis: Nach Definition 3.28 gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall k \geq N : \quad x_k \in B(a, \varepsilon)$$

“ \Leftarrow ”: Klar, da $B(a, \varepsilon)$ Umgebung von a ist.

“ \Rightarrow ”: Sei U Umgebung von a . Wähle $\varepsilon > 0$ mit $a \in B(a, \varepsilon) \subset U$, wähle N mit $x_k \in B(a, \varepsilon)$ für alle $k \geq N$, dann ist $x_k \in U$ für alle $k \geq N$. □

Es kommt also für die Frage, ob eine gegebene Folge konvergiert oder nicht, nur darauf an, wie die Umgebungen (oder äquivalent: die offenen Mengen) in (X, d) aussehen. Sind d_1 und d_2 Metriken auf X , die auf dieselben offenen Mengen führen, so gilt

$$x_k \rightarrow a \text{ in } (X, d_1) \quad \Leftrightarrow \quad x_k \rightarrow a \text{ in } (X, d_2).$$

Lemma 6.20 Sei (X, d) metrischer Raum, sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in X . Dann ist der Grenzwert von $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eindeutig bestimmt, und jede Teilfolge von $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen ihn.

Beweis: Sind a, b Grenzwerte von $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$, so gilt

$$0 \leq d(a, b) \leq d(a, x_k) + d(x_k, b) \rightarrow 0$$

für $k \rightarrow \infty$, also $a = b$. Aus $d(a, x_k) \rightarrow 0$ folgt dasselbe für jede Teilfolge. □

Satz 6.21 (Konvergenz und Abschluß)

Sei (X, d) metrischer Raum, sei $A \subset X$. Dann sind äquivalent:

- (i) A ist abgeschlossen in X .
- (ii) $A = \overline{A}$.
- (iii) Für jede konvergente Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in X gilt: Ist $x_k \in A$ für alle k , so ist auch

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k \in A.$$

Beweis: “(ii) \Rightarrow (i)”: Satz 6.13.

“(iii) \Rightarrow (ii)”: Kontraposition. Sei $A \neq \bar{A}$. Wähle $a \in \partial A$ mit $a \notin A$. Nach Definition des Randes gibt es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $x_k \in A$ mit

$$x_k \in B(a, \frac{1}{k})$$

also $d(a, x_k) \rightarrow 0$, $x_k \rightarrow a \notin A$, (iii) gilt also nicht.

“(i) \Rightarrow (iii)”: Sei A abgeschlossen, sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ Folge in A mit $x_k \rightarrow a$. Wäre $a \notin A$, also $a \in X \setminus A$, so gäbe es ein $\varepsilon > 0$ mit $B(a, \varepsilon) \subset X \setminus A$ (da $X \setminus A$ offen), im Widerspruch zu $x_k \in A$ und $x_k \rightarrow a$. \square

Satz 6.22 Sei (X, d) vollständiger metrischer Raum, sei $Y \subset X$. Dann sind äquivalent:

(i) Y ist abgeschlossen in X .

(ii) Der metrische Raum (Y, d_Y) ist vollständig.

Beweis: “(i) \Rightarrow (ii)”: Sei (x_k) Cauchyfolge in Y . Da X vollständig ist, gilt $x_k \rightarrow a$ für ein $a \in X$. Da Y abgeschlossen ist, gilt $a \in Y$ nach Satz 6.21.

“(ii) \Rightarrow (i)”: Sei (x_k) Folge in Y mit $x_k \rightarrow a$, $a \in X$. Dann ist (x_k) Cauchyfolge in (X, d) , also auch Cauchyfolge in (Y, d_Y) . Da (Y, d_Y) vollständig ist, gilt $x_k \rightarrow b \in Y$. Da der Grenzwert eindeutig ist, gilt $a = b \in Y$. Also ist Y abgeschlossen nach Satz 6.21. \square

Definition 6.23 (Beschränktheit)

Sei (X, d) metrischer Raum. Eine Teilmenge $Y \subset X$ heißt beschränkt, falls

$$\text{diam}(Y) := \sup_{x, y \in Y} d(x, y) < \infty \quad (6.19)$$

gilt. $\text{diam}(Y)$ heißt der Durchmesser von Y .

\square

Lemma 6.24 Sei $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum. Eine Teilmenge $Y \subset X$ ist beschränkt genau dann, wenn es ein $C > 0$ gibt mit $\|x\| \leq C$ für alle $x \in Y$.

Beweis: “ \Leftarrow ”: $\text{diam}(Y) \leq 2C$.

“ \Rightarrow ”: Kontraposition. Gibt es eine Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in Y mit $\|x_k\| \rightarrow \infty$, so gilt

$$\|x_k - x_1\| \geq \|x_k\| - \|x_1\| \rightarrow \infty,$$

also $\text{diam}(Y) = +\infty$. \square

7 Metrische Räume: Stetigkeit, Kompaktheit

Hier steht \mathbb{K} für \mathbb{R} oder \mathbb{C} wie gehabt.

Definition 7.1 (Stetigkeit)

Seien (X, d_1) , (Y, d_2) metrische Räume, sei $D \subset X$, $f : D \rightarrow Y$. Ein $c \in Y$ heißt Grenzwert von f in $a \in \overline{D}$, falls $c = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k)$ gilt für alle Folgen $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in D mit $\lim x_k = a$. Wir schreiben

$$c = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in D}} f(x), \quad \text{oder} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} c.$$

f heißt stetig in $a \in D$, falls gilt

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

f heißt stetig auf $M \subset D$, falls f in jedem Punkt $a \in M$ stetig ist. Wir definieren

$$C(X; Y) = \{f \mid f : X \rightarrow Y, f \text{ stetig}\}, \quad C(X) = C(X; \mathbb{R}).$$

□

Satz 7.2 Seien (X, d_1) , (Y, d_2) , (Z, d_3) metrische Räume, seien $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$. Ist f stetig in $a \in X$ und g stetig in $f(a)$, so ist $g \circ f$ stetig in a .

Beweis: Sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ Folge in X mit $x_k \rightarrow a$, dann folgt $f(x_k) \rightarrow f(a)$, da f stetig in a , und weiter $g(f(x_k)) \rightarrow g(f(a))$. □

Satz 7.3 Sei (X, d) metrischer Raum, sei $f : X \rightarrow \mathbb{K}^n$, $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$, $a \in X$. Dann ist f stetig in a genau dann, wenn alle Komponentenfunktionen $f_i : X \rightarrow \mathbb{K}$ in a stetig sind.

Beweis: Aus Satz 6.18 folgt, daß $f(x_k) \rightarrow f(a)$ gilt genau dann, wenn $f_i(x_k) \rightarrow f_i(a)$ für alle i . □

Satz 7.4 Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division definieren stetige Funktionen von $(\mathbb{K}^2, \|\cdot\|_\infty)$ nach $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ (die Division $(x_1, x_2) \mapsto x_1/x_2$ auf $D = \{(x_1, x_2) : x_2 \neq 0\}$).

Beweis: Sei $f(x) = x_1 + x_2$ für $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{K}^2$. Sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergente Folge in \mathbb{K}^2 , $x_k = (x_{k,1}, x_{k,2})$, dann gilt

$$f(\lim x_k) = f((\lim x_{k,1}, \lim x_{k,2})) = \lim x_{k,1} + \lim x_{k,2} \tag{7.1}$$

$$= \lim(x_{k,1} + x_{k,2}) = \lim f(x_k). \tag{7.2}$$

Analog für die anderen Operationen. □

Satz 7.5 Sei (X, d) metrischer Raum, seien $f, g : X \rightarrow \mathbb{K}$ stetig in $a \in X$. Dann sind auch $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ und f/g stetig in a (letzteres, falls $g(a) \neq 0$).

Beweis: $f + g : X \rightarrow \mathbb{K}$ läßt sich schreiben als Komposition

$$X \xrightarrow[\substack{(f,g) \\ +}]{\quad} \mathbb{K}^2 \xrightarrow{\quad} \mathbb{K}, \quad x \mapsto (f(x), g(x)) \mapsto f(x) + g(x).$$

Die Behauptung folgt aus den Sätzen 7.3, 7.4 und 7.5. Analog für die anderen Operationen. \square

Beispiel 7.6

- (i) Jede konstante Abbildung $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ ist stetig.
- (ii) Die Abbildungen $p_i : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$, $p_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$, sind stetig.
- (iii) Ein $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ der Form

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}, \quad \alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

heißt Monom. Monome sind stetig.

- (iv) Sei I eine endliche Teilmenge von $\prod_{i=1}^n (\mathbb{N} \cup \{0\})$. Ein $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ der Form

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\alpha \in I} c_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

heißt Polynom vom Grad N , wobei

$$N = \max \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i : \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in I \right\}.$$

Polynome sind stetig.

- (v) Jede lineare Abbildung $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ ist stetig: Die Komponentenfunktionen f_i haben die Form

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j,$$

wobei $A = (a_{ij})$ die Matrix ist, welche f in der kanonischen Basis darstellt.

Satz 7.7 Seien (X, d_1) , (Y, d_2) metrische Räume, sei $f : X \rightarrow Y$, $a \in X$. Dann ist f stetig in a genau dann, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ so dass gilt: } d_1(x, a) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon. \quad (7.3)$$

Beweis: “ \Leftarrow ”: Sei (x_k) Folge in X mit $x_k \rightarrow a$. Sei $\varepsilon > 0$. Wähle δ gemäß (7.3) und $N \in \mathbb{N}$ so, daß $d_1(x_k, a) < \delta$ für alle $k \geq N$. Dann gilt $d_2(f(x_k), f(a)) < \varepsilon$. Also ist f stetig in a .
 “ \Rightarrow ”: Kontraposition. Gilt (7.3) nicht, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ und eine Folge (x_k) mit

$$d_1(x_k, a) < \frac{1}{k}, \quad d_2(f(x_k), f(a)) \geq \varepsilon,$$

also $x_k \rightarrow a$, aber $f(x_k) \not\rightarrow f(a)$. \square

Ist (X, d) metrischer Raum, $x_0 \in X$ und $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = d(x, x_0),$$

so ist f stetig wegen

$$|f(x) - f(a)| = |d(x, x_0) - d(a, x_0)| \leq d(x, a).$$

Insbesondere ist in jedem normierten Raum $(X, \|\cdot\|)$ die Norm

$$f(x) = \|x\|$$

stetig.

Satz 7.8 Seien $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume, sei $f : X \rightarrow Y$ linear. Dann sind äquivalent:

(i) f ist stetig auf X .

(ii) f ist stetig in 0.

(iii) Es gibt ein $C > 0$ mit

$$\|f(x)\|_Y \leq C\|x\|_X, \quad \text{für alle } x \in X. \quad (7.4)$$

Beweis: “(iii) \Rightarrow (i)”: Sei $a \in X$, (x_k) Folge in X mit $x_k \rightarrow a$. Dann gilt

$$0 \leq \|f(x_k) - f(a)\|_Y = \|f(x_k - a)\|_Y \leq C\|x_k - a\|_X \rightarrow 0,$$

also $\|f(x_k) - f(a)\|_Y \rightarrow 0$, also $f(x_k) \rightarrow f(a)$.

“(i) \Rightarrow (ii)”: klar.

“(ii) \Rightarrow (iii)”: Wir wenden (7.3) an mit $\varepsilon = 1$ und $a = 0$ (also $f(a) = 0$). Wähle $\delta > 0$ mit $\|f(x)\|_Y < 1$ für alle $x \in X$ mit $\|x\|_X < \delta$. Sei nun $x \in X$ beliebig, $x \neq 0$. Dann ist

$$\left\| \frac{\delta}{2\|x\|_X} x \right\|_X = \frac{\delta}{2} < \delta,$$

also

$$\|f(x)\|_Y = \frac{2\|x\|_X}{\delta} \left\| f\left(\frac{\delta}{2\|x\|_X} x\right) \right\|_Y < \frac{2}{\delta} \|x\|_X.$$

□

Beispiel 7.9

Wir betrachten $X = C[a, b]$ mit den beiden Normen

$$\|f\|_\infty = \max_{a \leq t \leq b} |f(t)|, \quad \|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt.$$

Die lineare Abbildung

$$T : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad T(f) = \int_a^b f(t) dt, \quad (7.5)$$

ist stetig bezüglich beider Normen, da

$$|T(f)| = \left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt = \|f\|_1 \leq (b-a)\|f\|_\infty.$$

Die lineare Abbildung

$$T : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad T(f) = f(a), \quad (7.6)$$

ist stetig bezüglich $\|\cdot\|_\infty$, da $|T(f)| = |f(a)| \leq \|f\|_\infty$, aber nicht stetig bezüglich $\|\cdot\|_1$, da für

$$f_n(t) = \max\{1 - n(t-a), 0\}$$

gilt

$$|T(f_n)| = |f_n(a)| = 1,$$

aber (für $n \geq \frac{1}{b-a}$)

$$\|f_n\|_1 = \frac{1}{2n} \rightarrow 0,$$

und somit (7.4) für kein $C > 0$ erfüllt ist.

Satz 7.10 Seien (X, d_1) , (Y, d_2) metrische Räume, sei $f : X \rightarrow Y$. Dann sind äquivalent:

(i) f ist stetig auf X .

(ii) Das Urbild $f^{-1}(V)$ jeder offenen Menge $V \subset Y$ ist offen in X .

(iii) Das Urbild $f^{-1}(A)$ jeder abgeschlossenen Menge $A \subset Y$ ist abgeschlossen in X .

Beweis: “(i) \Rightarrow (iii)”: Sei $A \subset Y$ abgeschlossen, sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ Folge in $f^{-1}(A)$ mit $x_k \rightarrow x$, $x \in X$. Dann ist $f(x_k) \in A$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $f(x_k) \rightarrow f(x)$ (da f stetig), also ist $f(x) \in A$ nach Satz 6.21, also $x \in f^{-1}(A)$. Wiederum nach Satz 6.21 ist $f^{-1}(A)$ abgeschlossen.

“(iii) \Rightarrow (ii)”: Ist V offen in Y , so ist $Y \setminus V$ abgeschlossen, also auch $f^{-1}(Y \setminus V)$, und damit $f^{-1}(V) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus V)$ offen in X .

“(ii) \Rightarrow (i)”: Sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ Folge in X mit $x_k \rightarrow a$. Sei $\varepsilon > 0$. Wir setzen $U = f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$. Dann ist $a \in U$ und U offen in X . Nach Lemma 6.19 gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $x_k \in U$ für alle $k \geq N$, also $f(x_k) \in B(f(a), \varepsilon)$ für alle $k \geq N$. Es folgt $f(x_k) \rightarrow f(a)$. \square

Folgerung 7.11 Seien (X, d) metrischer Raum, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $c \in \mathbb{R}$. Dann sind

$$\{x : x \in X, f(x) < c\}, \quad \{x : x \in X, f(x) > c\},$$

offen in X , und

$$\{x : x \in X, f(x) \leq c\}, \quad \{x : x \in X, f(x) \geq c\},$$

sowie die Niveaumenge von f zum Niveau c ,

$$N_c(f) = \{x : x \in X, f(x) = c\},$$

abgeschlossen in X .

Beweis: Folgt aus Satz 7.10, da die Mengen $(-\infty, c)$ und (c, ∞) offen in \mathbb{R} und die Mengen $(-\infty, c]$, $[c, \infty)$ und $\{c\}$ abgeschlossen in \mathbb{R} sind. \square

Definition 7.12 (Kompakte Menge)

Sei (X, d) metrischer Raum. (X, d) heißt kompakt, falls jede Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in X eine konvergente Teilfolge besitzt. \square

Ist Y Teilmenge eines metrischen Raums (X, d) , so sagen wir abkürzend “ Y ist kompakt” statt “ (Y, d_Y) ist kompakt”. Für eine Teilmenge Y von (X, d) bedeutet also “ Y ist kompakt”:

Jede Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in Y besitzt eine konvergente Teilfolge, deren Grenzwert ebenfalls in Y liegt.

Kompaktheit ist also eine Eigenschaft eines metrischen Raums und hängt nur von der Metrik ab. Offenheit und Abgeschlossenheit sind Eigenschaften von Teilmengen eines metrischen Raums und hängen nicht nur von der Metrik ab, sondern u.U. auch davon, wie groß der umfassende metrische Raum gewählt wird.

Jedes abgeschlossene beschränkte Intervall $[a, b]$ ist kompakt in der Betragsmetrik (Analysis I).

In allgemeinen topologischen Räumen (X, \mathcal{T}) wird Kompaktheit anders definiert, nämlich über die sogenannte “endliche Überdeckungseigenschaft”, beide Definitionen sind in metrischen Räumen äquivalent. Siehe unten Satz 7.27.

Satz 7.13 Seien $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ kompakte metrische Räume. Dann ist $(X_1 \times X_2, d)$, d Produktmetrik, kompakt.

Beweis: Sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}, x_k = (x_{k,1}, x_{k,2})$ Folge in $X = X_1 \times X_2$. Wähle eine in X_1 konvergente Teilfolge $(x_{k_j,1})_{j \in \mathbb{N}}$ von $(x_{k,1})$, wähle eine in X_2 konvergente Teilfolge $(x_{k_{j_m},2})_{m \in \mathbb{N}}$ von $(x_{k_j,2})_{j \in \mathbb{N}}$. Dann ist auch $(x_{k_{j_m},1})_{m \in \mathbb{N}}$ in X_1 konvergent, also auch $(x_{k_{j_m}})_{m \in \mathbb{N}}$ konvergent in X . \square

Folgerung 7.14 Seien $(X_i, d_i), 1 \leq i \leq n$, kompakte metrische Räume. Dann ist auch $(\prod_{i=1}^n X_i, d)$, d Produktmetrik, kompakt.

Beweis: Mit Induktion aus Satz 7.13. \square

Folgerung 7.15 Jeder abgeschlossene achsenparallele Quader

$$Q = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$$

mit $a_i, b_i \in \mathbb{R}, a_i \leq b_i$, ist kompakt in $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$.

Beweis: Folgt aus Folgerung 7.14, da alle $[a_i, b_i]$ kompakt sind. \square

Satz 7.16 Sei (X, d) metrischer Raum, sei $Y \subset X$. Dann gilt:

$$X \text{ kompakt, } Y \text{ abgeschlossen in } X \quad \Rightarrow \quad Y \text{ kompakt,} \quad (7.7)$$

$$Y \text{ kompakt} \quad \Rightarrow \quad Y \text{ beschränkt und abgeschlossen in } X. \quad (7.8)$$

Beweis: Zu (7.7): Sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ Folge in Y , dann gibt es eine in X konvergente Teilfolge, $x_{k_m} \rightarrow a$, $a \in X$. Da Y abgeschlossen ist, ist $a \in Y$.

Zu (7.8): Y ist abgeschlossen: Sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ Folge in Y mit $x_k \rightarrow a$, $a \in X$. Da Y kompakt, gibt es Teilfolge (x_{k_m}) und $b \in Y$ mit $x_{k_m} \rightarrow b$. Es folgt $a = b$, also $a \in Y$.

Y ist beschränkt: Kontraposition. Sei Y unbeschränkt. Wir zeigen

$$\text{es gibt eine Folge } (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ in } Y \text{ mit } d(x_k, x_m) > 1 \text{ für alle } k \neq m. \quad (7.9)$$

(Dann sind wir fertig, da keine Teilfolge einer solchen Folge eine Cauchyfolge sein kann.)

Die Folge (x_k) wird rekursiv konstruiert. Wähle $x_1 \in Y$ beliebig. Seien x_1, \dots, x_k bereits konstruiert. Für alle $y, z \in Y$ und alle $1 \leq i, j \leq k$ gilt dann

$$d(y, z) \leq d(y, x_i) + d(x_i, x_j) + d(x_j, z) \leq d(y, x_i) + d(x_j, z) + m,$$

wobei $m = \max_{1 \leq i, j \leq k} d(x_i, x_j)$. Es folgt für alle $y, z \in Y$

$$d(y, z) - m \leq \min_{1 \leq i \leq k} d(y, x_i) + \min_{1 \leq j \leq k} d(z, x_j).$$

Wähle nun $y, z \in Y$ mit $d(y, z) > m + 2$ (möglich, da Y unbeschränkt), dann ist

$$\min_{1 \leq i \leq k} d(y, x_i) > 1 \quad \text{oder} \quad \min_{1 \leq j \leq k} d(z, x_j) > 1.$$

Im ersteren Fall setzen wir $x_{k+1} = y$, andernfalls $x_{k+1} = z$. □

Satz 7.17 (Bolzano-Weierstraß)

Sei Y Teilmenge von $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$. Dann gilt

$$Y \text{ kompakt} \quad \Leftrightarrow \quad Y \text{ abgeschlossen in } \mathbb{R}^n \text{ und beschränkt.}$$

Beweis: “ \Rightarrow ”: Satz 7.16.

“ \Leftarrow ”: Für hinreichend großes $C > 0$ gilt

$$Y \subset Q = \prod_{i=1}^n [-C, C].$$

Sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ Folge in Y . Da Q kompakt ist nach Folgerung 7.15 hat $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ konvergente Teilfolge, deren Limes auch in Y liegt, da Y abgeschlossen ist. □

Ersetzen wir in Satz 7.17 den \mathbb{R}^n durch einen unendlichdimensionalen Raum, so gilt die Implikation “ \Leftarrow ” **nicht** !

Satz 7.18 Seien $(X, d_1), (Y, d_2)$ metrische Räume, sei $f : X \rightarrow Y$ stetig und X kompakt. Dann ist auch $f(X)$ kompakt.

Beweis: Sei (y_k) Folge in $f(X)$. Für alle $k \in \mathbb{N}$ wähle $x_k \in X$ mit $f(x_k) = y_k$. Da X kompakt, gibt es eine Teilfolge (x_{k_m}) und ein $a \in X$ mit $x_{k_m} \rightarrow a$, also auch $y_{k_m} = f(x_{k_m}) \rightarrow f(a) \in f(X)$, da f stetig. \square

Satz 7.19 Sei (X, d) metrischer Raum, sei $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und X kompakt, $X \neq \emptyset$. Dann ist $f(X)$ beschränkt, und f nimmt auf X sein Maximum und Minimum an, d.h. es gibt $p, q \in X$ mit

$$f(p) = \sup_{x \in X} f(x), \quad f(q) = \inf_{x \in X} f(x).$$

Beweis: Nach Satz 7.18 ist $f(X)$ kompakt, also beschränkt nach Satz 7.16, also folgt $\sup f(X) < \infty$. Sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ Folge in X mit $f(x_k) \rightarrow \sup f(X)$. Da X kompakt ist, gibt es eine konvergente Teilfolge $(x_{k_m})_{m \in \mathbb{N}}$ mit $p = \lim x_{k_m} \in X$. Da f stetig ist, folgt $f(p) = \sup f(X)$. Analog für das Minimum. \square

Satz 7.20 Zu jeder Norm $\|\cdot\|$ auf \mathbb{R}^n gibt es Zahlen $c_1, c_2 > 0$ mit

$$c_1 \|x\|_\infty \leq \|x\| \leq c_2 \|x\|_\infty, \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n. \quad (7.10)$$

Beweis: Konstruktion von c_2 : Für $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i,$$

wobei e_i der i -te Einheitsvektor ist. Es folgt

$$\|x\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|e_i\| \leq \left(\sum_{i=1}^n \|e_i\| \right) \max_{1 \leq j \leq n} |x_j| = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n \|e_i\| \right)}_{=: c_2} \|x\|_\infty.$$

Existenz von c_1 : Wir definieren $f : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$ durch

$$f(x) = \|x\|.$$

f ist stetig, da für jede Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{R}^n mit $x_k \rightarrow a$ gilt

$$0 \leq |f(x_k) - f(a)| = | \|x_k\| - \|a\| | \leq \|x_k - a\| \leq c_2 \|x_k - a\|_\infty,$$

also auch $f(x_k) \rightarrow f(a)$. Wir definieren

$$Y = \{x : x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_\infty = 1\}.$$

Y ist abgeschlossene beschränkte Teilmenge von \mathbb{R}^n , also kompakt nach Satz 7.17, also gibt es nach Satz 7.19 ein $y \in \mathbb{R}^n$ mit $\|y\|_\infty = 1$ und

$$0 < \|y\| = \min_{x \in Y} \|x\|.$$

Wir setzen $c_1 = \|y\|$. Es gilt dann für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x \neq 0$, daß

$$c_1 \leq \left\| \frac{x}{\|x\|_\infty} \right\|,$$

also gilt die linke Ungleichung in (7.10) für alle $x \in \mathbb{R}^n$. \square

Aus Satz 7.20 folgt: Ist $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ Folge in \mathbb{R}^n , so hängt die Richtigkeit der Aussagen

(x_k) ist konvergent in $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$
 (x_k) ist Cauchyfolge bezüglich $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$

nicht von der Wahl der Norm $\|\cdot\|$ ab, “in allen Normen sind die gleichen Folgen konvergent”. Ebenso gilt: Ist $Y \subset \mathbb{R}^n$, so hängen die Mengen $\text{int}(Y)$, \overline{Y} , ∂Y sowie die Eigenschaften “offen”, “abgeschlossen”, “kompakt” und “beschränkt” ebenfalls nicht davon ab, aus welcher Norm man die Metrik erzeugt. Siehe Übung.

Definition 7.21 (Äquivalenz von Normen)

Sei X Vektorraum, seien $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ Normen auf X . Die beiden Normen heißen äquivalent, falls es Konstanten $c_1, c_2 > 0$ gibt mit

$$c_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2\|x\|_1$$

für alle $x \in X$. □

Aus Satz 7.20 erhält man unmittelbar die prägnante Aussage:

“Auf dem \mathbb{R}^n sind alle Normen äquivalent.”

Die Sätze 7.17 und 7.20 gelten auch, wenn man \mathbb{R}^n durch \mathbb{C}^n ersetzt, da sich jede Norm im \mathbb{C}^n auch als Norm im \mathbb{R}^{2n} auffassen lässt.

Definition 7.22 (Gleichmäßige Stetigkeit)

Seien $(X, d_1), (Y, d_2)$ metrische Räume, sei $f : X \rightarrow Y$. Dann heißt f gleichmäßig stetig auf X , falls gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in X : \quad \text{Aus } d_1(x, y) < \delta \text{ folgt } d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon. \quad (7.11)$$

□

Offensichtlich ist jede auf X gleichmäßig stetige Funktion auch stetig auf X .

Satz 7.23 Seien $(X, d_1), (Y, d_2)$ metrische Räume, sei $f : X \rightarrow Y$. Dann gilt: Ist f stetig auf X und ist X kompakt, so ist f gleichmäßig stetig auf X .

Beweis: Wir nehmen an, f sei nicht gleichmäßig stetig. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ und für alle $k \in \mathbb{N}$ Elemente $x_k, y_k \in X$ mit

$$d_1(x_k, y_k) < \frac{1}{k}, \quad \text{aber} \quad d_2(f(x_k), f(y_k)) \geq \varepsilon. \quad (7.12)$$

Sei (x_{k_m}) konvergente Teilfolge von (x_k) mit $x_{k_m} \rightarrow a \in X$. Aus

$$d_1(y_{k_m}, a) \leq d_1(y_{k_m}, x_{k_m}) + d_1(x_{k_m}, a) < \frac{1}{k_m} + d_1(x_{k_m}, a)$$

folgt auch $y_{k_m} \rightarrow a$. Es gilt

$$0 \leq d_2(f(y_{k_m}), f(x_{k_m})) \leq d_2(f(x_{k_m}), f(a)) + d_2(f(y_{k_m}), f(a)) \rightarrow 0,$$

da f stetig in a , im Widerspruch zu (7.12). □

Definition 7.24 (Abstand von Mengen)

Sei (X, d) metrischer Raum. Wir definieren den Abstand eines Punktes $x \in X$ von einer Teilmenge $A \subset X$ durch

$$\text{dist}(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a), \quad (7.13)$$

und den Abstand zweier Teilmengen $A, B \subset X$ durch

$$\text{dist}(A, B) = \inf_{\substack{a \in A \\ b \in B}} d(a, b). \quad (7.14)$$

Durch ‘dist’ wird keine Metrik auf der Potenzmenge von X definiert, da $\text{dist}(A, B) = 0$ falls $A \cap B \neq \emptyset$. Es gibt aber andere Abstandsbegriffe für Mengen, die zu einer Metrik (auf einer geeigneten Teilmenge von $\mathcal{P}(X)$) führen, der wichtigste davon ist der Begriff des Hausdorff-Abstands.

Die übliche Konvention über das Infimum leerer Teilmengen von \mathbb{R} führt zu

$$\text{dist}(x, \emptyset) = +\infty, \quad \text{dist}(A, \emptyset) = +\infty.$$

Satz 7.25 Sei (X, d) metrischer Raum, sei $A \subset X$, $A \neq \emptyset$. Dann gilt

$$|\text{dist}(x, A) - \text{dist}(y, A)| \leq d(x, y), \quad (7.15)$$

für alle $x, y \in X$, und die durch

$$f(x) = \text{dist}(x, A)$$

definierte Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig.

Beweis: Übung. □

Satz 7.26 Sei (X, d) metrischer Raum, seien $A, K \subset X$ abgeschlossen mit $A \cap K = \emptyset$. Dann gilt: Ist K kompakt, so ist $\text{dist}(A, K) > 0$.

Beweis: Übung. □

Ohne die Voraussetzung der Kompaktheit von K stimmt die Aussage von Satz 7.26 im allgemeinen nicht, ist etwa $X = \mathbb{R}^2$, $A = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ die x -Achse, und $K = \{(x, \exp(x)) : x \in \mathbb{R}\}$ der Graph der Exponentialfunktion, dann sind A und K abgeschlossen, $A \cap K = \emptyset$, aber $\text{dist}(A, K) = 0$.

Wir charakterisieren kompakte Mengen in metrischen Räumen.

Satz 7.27 Sei (X, d) metrischer Raum. Dann sind äquivalent:

- (i) X ist kompakt, d.h. jede Folge in X hat eine konvergente Teilfolge.
- (ii) X ist vollständig, und zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es endlich viele ε -Kugeln, welche X überdecken, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} \exists x_1, \dots, x_n \in X \quad \text{mit} \quad X = \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon). \quad (7.16)$$

(iii) (“endliche Überdeckungseigenschaft”): Ist $(U_i)_{i \in I}$ eine Familie von offenen Mengen in X mit

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i,$$

so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ und Indizes $i_1, \dots, i_n \in I$ mit

$$X = \bigcup_{k=1}^n U_{i_k}.$$

(“Jede Überdeckung hat eine endliche Teilüberdeckung.”)

(iv) (“endliche Durchschnittseigenschaft”): Ist $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie von abgeschlossenen Mengen in X mit der Eigenschaft, dass

$$\bigcap_{k=1}^n A_{i_k} \neq \emptyset$$

gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $i_1, \dots, i_n \in I$, so gilt

$$\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset.$$

Beweis: “(i) \Rightarrow (ii)”: Sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ Cauchyfolge in X . Wir wählen eine konvergente Teilfolge mit $x_{k_m} \rightarrow x \in X$. Sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen $N \in \mathbb{N}$ mit

$$d(x_l, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{für alle } l, n \geq N,$$

und $m \in \mathbb{N}$ mit $k_m \geq N$ und

$$d(x_{k_m}, x) < \frac{\varepsilon}{2},$$

dann gilt für alle $n \geq N$

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{k_m}) + d(x_{k_m}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Also ist X vollständig. Die Existenz endlich vieler überdeckender Kugeln ist bereits in einer Übungsaufgabe bewiesen worden.

“(ii) \Rightarrow (iii)”: Wir zeigen, dass aus (ii) und der Negation von (iii) ein Widerspruch folgt. Sei $(U_i)_{i \in I}$ Familie offener Mengen mit

$$\bigcup_{i \in I} U_i = X, \quad \text{aber} \quad \bigcup_{k=1}^n U_{i_k} \neq X \tag{7.17}$$

für alle n und alle $i_1, \dots, i_n \in I$. Wir konstruieren zunächst mit vollständiger Induktion Kugeln $B_n = B(x_n, 2^{-n})$ mit $B_n \cap B_{n-1} \neq \emptyset$, welche nicht von endlich vielen U_i überdeckt werden: Für $n = 1$ wähle endlich viele Kugeln mit Radius $1/2$, welche X überdecken. Sei $B_1 = B(x_1, 1/2)$ eine davon, welche nicht von endlich vielen U_i überdeckt werden kann (eine solche muss es geben, sonst gilt (7.17) nicht). Für den Induktionsschritt $n - 1 \rightarrow n$ gehen wir von B_{n-1} aus und wählen endlich viele Kugeln mit Radius 2^{-n} , welche B_{n-1}

überdecken und mit B_{n-1} einen nichtleeren Durchschnitt haben. Sei $B_n = B(x_n, 2^{-n})$ eine davon, welche nicht von endlich vielen U_i überdeckt werden kann (eine solche muss es geben nach Konstruktion von B_{n-1}). Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist Cauchyfolge, da

$$d(x_n, x_{n+1}) < 2^{-n} + 2^{-(n+1)} < 2^{-(n-1)}$$

für alle n , also

$$d(x_n, x_p) < 2^{-(n-2)}$$

für alle n, p mit $p \geq n$. Sei $x = \lim x_n$. Dann gibt es ein $i \in I$ mit $x \in U_i$. Da U_i offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $x \in B(x, \varepsilon) \subset U_i$. Für hinreichend großes n gilt dann

$$B_n = B(x_n, 2^{-n}) \subset B(x, \varepsilon) \subset U_i$$

im Widerspruch zur Konstruktion von B_n .

“(iii) \Rightarrow (iv)”: Sei $(A_i)_{i \in I}$ Familie abgeschlossener Mengen mit

$$\bigcap_{k=1}^n A_{i_k} \neq \emptyset$$

für je endlich viele Indizes i_1, \dots, i_n . Sei $U_i = X \setminus A_i$. Dann ist

$$\bigcup_{k=1}^n U_{i_k} \neq X$$

für je endlich viele Indizes i_1, \dots, i_n . Aus (iii) folgt $\cup_{i \in I} U_i \neq X$, also $\cap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$.

“(iv) \Rightarrow (i)”: Sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ Folge in X . Wir setzen

$$A_i = \overline{\{x_i, x_{i+1}, \dots\}} = \overline{\{x_k : k \geq i\}}, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt für alle endlichen Indexkombinationen

$$\bigcap_{m=1}^n A_{i_m} = A_j \neq \emptyset, \quad j = \max_{1 \leq m \leq n} i_m,$$

also gibt es

$$x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Wir konstruieren eine Teilfolge (x_{k_m}) mit

$$d(x_{k_m}, x) < \frac{1}{m}.$$

Für $m = 1$ wählen wir

$$x_{k_1} \in B(x, 1) \cap \{x_i : i \in \mathbb{N}\}$$

(der Schnitt ist nichtleer, da $x \in A_1$). Ist $x_{k_{m-1}}$ konstruiert, so wählen wir

$$x_{k_m} \in B(x, \frac{1}{m}) \cap \{x_i : i > k_{m-1}\}$$

(der Schnitt ist nichtleer, da $x \in A_{k_{m-1}+1}$). □

In allgemeinen topologischen Räumen wird der Begriff “kompakt” durch die endliche Überdeckungseigenschaft (iii) in Satz 7.27 definiert. Die endliche Überdeckungseigenschaft ist dort i.a. nicht mehr äquivalent damit, dass jede Folge eine konvergente Teilfolge hat. Man unterscheidet dann begrifflich zwischen “folgenkompakt” (unsere Definition 7.12) und “überdeckungskompakt” (die endliche Überdeckungseigenschaft gilt).

Wir wollen kompakte Mengen im Raum der stetigen Funktionen charakterisieren.

Definition 7.28 (Gleichgradige Stetigkeit)

Sei (X, d) metrischer Raum. Eine Teilmenge F von $C(X)$ heißt gleichgradig stetig, falls für alle $x \in X$ und alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $y \in X$ gilt

$$d(x, y) < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \text{für alle } f \in F.$$

(“Das δ kann für alle $f \in F$ gemeinsam gewählt werden”.)

Lemma 7.29 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $F \subset C(\Omega)$, es gebe ein L mit

$$|f(x) - f(y)| \leq L\|x - y\|, \quad \text{für alle } x, y \in \Omega, f \in F. \quad (7.18)$$

Dann ist F gleichgradig stetig.

Beweis: Mit $\delta = \varepsilon/L$ hat F die in Definition 7.28 verlangte Eigenschaft. □

Ist $F \subset C^1(\Omega)$, so folgt aus dem Mittelwertsatz, dass (7.18) gilt, falls es ein $C > 0$ gibt mit

$$|\partial_i f(x)| \leq C, \quad \text{für alle } x \in \Omega, f \in F, i = 1, \dots, n. \quad (7.19)$$

Satz 7.30 (Arzela-Ascoli)

Sei (X, d) kompakter metrischer Raum, sei $F \subset (C(X), \|\cdot\|_\infty)$. Dann sind äquivalent:

- (i) F ist relativ kompakt (d.h. \overline{F} ist kompakt).
- (ii) F ist beschränkt in $(C(X), \|\cdot\|_\infty)$ und gleichgradig stetig.

Beweis: “(i) \Rightarrow (ii)”: Sei \overline{F} kompakt. Nach Satz 7.27(ii) gibt es endlich viele $f_1, \dots, f_n \in C(X)$ mit

$$\overline{F} \subset \bigcup_{i=1}^n B(f_i, 1).$$

Da eine endliche Vereinigung von Kugeln beschränkt ist, ist auch F beschränkt. Wir zeigen nun, dass F gleichgradig stetig ist. Seien $x \in X$, $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir wählen endlich viele $f_1, \dots, f_n \in C(X)$ mit

$$\overline{F} \subset \bigcup_{i=1}^n B(f_i, \varepsilon).$$

Wir wählen $\delta_i > 0$, so dass für alle $y \in X$ gilt

$$d(y, x) < \delta_i \quad \Rightarrow \quad |f_i(y) - f_i(x)| < \varepsilon,$$

und setzen $\delta = \min_i \delta_i$. Sei nun $f \in F$. Wir wählen ein k mit $\|f - f_k\|_\infty < \varepsilon$, dann gilt für alle $y \in X$ mit $d(y, x) < \delta$

$$|f(y) - f(x)| \leq |f(y) - f_k(y)| + |f_k(y) - f_k(x)| + |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.$$

Damit ist gezeigt, dass F gleichgradig stetig ist.

“(ii) \Rightarrow (i)” Zunächst ist \overline{F} vollständig, da $C(X)$ vollständig und \overline{F} abgeschlossen in $C(X)$ ist. Nach Satz 7.27 genügt es zu zeigen:

Für alle $\varepsilon > 0$ lässt sich \overline{F} durch endlich viele Teilmengen von $C(X)$ mit Durchmesser $\leq \varepsilon$ überdecken.

Wir beweisen zuerst, dass \overline{F} gleichgradig stetig ist. Sei $x \in X$, $\varepsilon > 0$. Wir wählen ein $\delta > 0$ mit

$$d(y, x) < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(y) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{für alle } f \in F.$$

Sei $g \in \overline{F}$. Wir wählen $f \in F$ mit $\|g - f\|_\infty < \varepsilon$, dann gilt für alle $y \in X$ mit $d(y, x) < \delta$

$$|g(y) - g(x)| \leq |g(y) - f(y)| + |f(y) - f(x)| + |f(x) - g(x)| < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon,$$

also ist \overline{F} gleichgradig stetig. Wir konstruieren nun die endliche Überdeckung. Sei wiederum $\varepsilon > 0$ gegeben. Zu jedem $x \in X$ wählen wir ein $\delta(x) > 0$ mit

$$d(y, x) < \delta(x) \quad \Rightarrow \quad |f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{für alle } f \in \overline{F}.$$

Wir wählen (X ist kompakt) endlich viele $x_i \in X$, $1 \leq i \leq k$, mit

$$X = \bigcup_{i=1}^k B(x_i, \delta(x_i)).$$

Sei $C > 0$ mit $\|f\|_\infty \leq C$ für alle $f \in \overline{F}$ (F ist beschränkt). Sei

$$-C = c_1 < c_2 < \dots < c_m = C$$

eine Zerlegung des möglichen Wertebereichs von Funktionen in \overline{F} mit $c_{j+1} - c_j < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle j , $1 < j \leq m$. Sei

$$\Phi = \{\varphi \mid \varphi : \{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, m\}\}.$$

Für $\varphi \in \Phi$ definieren wir

$$L_\varphi = \{f : f \in \overline{F}, |f(x_i) - c_{\varphi(i)}| < \frac{\varepsilon}{4} \text{ für alle } i\}.$$

Dann ist

$$\overline{F} = \bigcup_{\varphi \in \Phi} L_\varphi.$$

Ist nämlich $f \in \overline{F}$, so ist $f \in L_\varphi$, wenn wir φ so wählen, dass

$$|f(x_i) - c_{\varphi(i)}| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Da Φ eine endliche Menge ist, genügt es also zu zeigen, dass $\text{diam}(L_\varphi) \leq \varepsilon$ für alle φ . Seien $f, g \in L_\varphi$, sei $x \in X$. Wir wählen ein i , $1 \leq i \leq k$, mit $x \in B(x_i, \delta(x_i))$, dann gilt

$$\begin{aligned} |f(x) - g(x)| &\leq |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - c_{\varphi(i)}| + |c_{\varphi(i)} - g(x_i)| + |g(x_i) - g(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon, \end{aligned}$$

also ist $\|f - g\|_\infty \leq \varepsilon$. □

8 Substitutionsformel und Faltung (Teil 1)

Wir wollen die Substitutionsregel der Integration im Eindimensionalen,

$$\int_a^b f(g(t))g'(t) dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x) dx, \quad (8.1)$$

ins Mehrdimensionale übertragen.

Satz 8.1 Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, sei Ω' Menge, \mathcal{A}' σ -Algebra auf Ω' , sei $T : \Omega \rightarrow \Omega'$ messbar. Dann gilt für jede messbare Abbildung $f : \Omega' \rightarrow [0, \infty]$

$$\int_{\Omega'} f dT(\mu) = \int_{\Omega} f \circ T d\mu. \quad (8.2)$$

Beweis: Die Abbildung $f \circ T$ ist messbar und nichtnegativ, also ist die rechte Seite von (8.2) definiert. Sei als erstes $f = 1_{A'}$, $A' \in \mathcal{A}'$, dann gilt, da $1_{T^{-1}A'} = 1_{A'} \circ T$,

$$\int_{\Omega'} 1_{A'} dT(\mu) = (T(\mu))(A') = \mu(T^{-1}(A')) = \int_{\Omega} 1_{T^{-1}A'} d\mu = \int_{\Omega} 1_{A'} \circ T d\mu. \quad (8.3)$$

Für $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{A'_i}$, $A'_i \in \mathcal{A}'$, folgt aus (8.3)

$$\int_{\Omega'} f dT(\mu) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_{\Omega'} 1_{A'_i} dT(\mu) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_{\Omega} 1_{A'_i} \circ T d\mu = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \alpha_i (1_{A'_i} \circ T) d\mu \quad (8.4)$$

$$= \int_{\Omega} f \circ T d\mu. \quad (8.5)$$

Sei nun f beliebig, sei $f = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$, $f_n \in E_+(\Omega)$, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend, $f_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus dem Satz von Beppo-Levi folgt

$$\int_{\Omega'} f dT(\mu) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Omega'} f_n dT(\mu) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} f_n \circ T d\mu = \int_{\Omega} f \circ T d\mu.$$

□

Folgerung 8.2 Seien die Voraussetzungen von Satz 8.1 erfüllt. Dann gilt

$$f \in \mathcal{L}^1(\Omega'; T(\mu)) \quad \Rightarrow \quad f \circ T \in \mathcal{L}^1(\Omega; \mu). \quad (8.6)$$

Ist T außerdem bijektiv, so gilt auch die Umkehrung von (8.6).

Beweis: Wir wenden Satz 8.1 an auf f^+ und f^- und erhalten (8.6). Sei nun T bijektiv,

$$f \circ T \in \mathcal{L}^1(\Omega; \mu) = \mathcal{L}^1(\Omega; T^{-1}(T(\mu))).$$

Dann folgt aus (8.6), angewendet auf $f \circ T$ statt auf f ,

$$f = (f \circ T) \circ T^{-1} \in \mathcal{L}^1((T^{-1})^{-1}(\Omega); T(\mu)) = \mathcal{L}^1(\Omega'; T(\mu)).$$

□

Satz 8.3 (Substitutionsformel für affine Transformationen)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ messbar, sei $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$T(x) = Ax + b, \quad (8.7)$$

wobei $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ nichtsingulär und $b \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt für jede integrierbare Funktion $f : T(\Omega) \rightarrow [-\infty, \infty]$

$$\int_{\Omega} f(Ax + b) d\lambda^n(x) = \frac{1}{|\det(A)|} \int_{T(\Omega)} f(y) d\lambda^n(y). \quad (8.8)$$

Beweis: Folgt aus (8.6), da

$$T(\lambda^n) = \frac{1}{|\det(A)|} \lambda^n$$

gilt wegen der Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes und wegen Satz 1.36. \square

Wir gehen wieder zur gewohnten Notation über, das heißt, für die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \sin x_3,$$

bedeuten

$$\int_{\Omega} f d\lambda^3, \quad \int_{\Omega} f(x) d\lambda^3(x), \quad \int_{\Omega} f(x) dx, \quad \int_{\Omega} x_1 x_2 \sin x_3 dx$$

dasselbe. Als Beispiel berechnen wir

$$\int_{\Omega'} x_1 x_2 dx, \quad (8.9)$$

wobei $\Omega' \subset \mathbb{R}^2$ das Parallelogramm mit den Ecken $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$ und $(3, 1)$ ist. Wir setzen

$$\Omega = [0, 1]^2, \quad T(x) = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad f(x_1, x_2) = x_1 x_2,$$

dann ist

$$f(Ax) = f \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = (2x_1 + x_2)x_2, \quad T(\Omega) = \Omega', \quad |\det(A)| = 2,$$

also

$$\int_{\Omega'} x_1 x_2 dx = 2 \int_{\Omega} (2x_1 + x_2)x_2 dx = 2 \int_0^1 \int_0^1 2x_1 x_2 + x_2^2 dx_1 dx_2 = 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = \frac{5}{3}.$$

Faltung. Ist $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben (wir nehmen für einen Moment an, dass f beschränkt und messbar ist), so ist die Funktion $z : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$z(y) = \int_0^y f(x) e^{-a(y-x)} dx,$$

die eindeutige Lösung der Anfangswertaufgabe

$$z' + az = f(x), \quad z(0) = 0.$$

Definieren wir

$$g(\xi) = \begin{cases} e^{-a\xi}, & \xi \geq 0, \\ 0, & \xi < 0, \end{cases} \quad (8.10)$$

und setzen wir $f(x) = 0$ für $x < 0$, so gilt

$$z(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(y-x) dx, \quad y \in \mathbb{R}. \quad (8.11)$$

Durch diese Gleichung wird der Funktion f eine Funktion z zugeordnet. Lässt man für g auch andere Funktionen zu, so stellt (8.11) ein grundlegendes mathematisches Modell in der Theorie der Signalverarbeitung dar. Dabei steht f für das Eingangssignal, z für das Ausgangssignal, und g repräsentiert die Eigenschaften der Übertragungsstrecke (des “Kanals”).

Satz 8.4 (Faltung)

Seien $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann wird durch

$$(f * g)(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(y-x) dx \quad (8.12)$$

eine Funktion $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definiert (sie heißt “Faltung von f und g ”), und es gilt

$$f * g = g * f, \quad \|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1. \quad (8.13)$$

Beweis: Seien $\tilde{f}, \tilde{g} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ Repräsentanten von f bzw. g . Wir definieren

$$\tilde{h} : \mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

durch

$$\tilde{h}(x, y) = \tilde{f}(x)\tilde{g}(y).$$

Dann gilt nach dem Satz von Tonelli

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} |\tilde{h}| d\lambda^{2n} = \int_{\mathbb{R}^{2n}} |\tilde{f}(x)| |\tilde{g}(y)| dx dy = \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{f}(x)| dx \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{g}(y)| dy = \|\tilde{f}\|_1 \|\tilde{g}\|_1, \quad (8.14)$$

also $\tilde{h} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^{2n})$. Wir definieren

$$T : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}, \quad T(x, y) = (x, y - x).$$

Dann wird T durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{pmatrix}, \quad I = \text{Einheitsmatrix im } \mathbb{R}^n,$$

repräsentiert. Es ist $\det(A) = 1$ und

$$(\tilde{h} \circ T)(x, y) = \tilde{f}(x)\tilde{g}(y-x).$$

Aus der Substitutionsformel (Satz 8.3) folgt mit (8.14)

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{f}(x)\tilde{g}(y-x)| dx dy = \int_{\mathbb{R}^{2n}} |\tilde{h} \circ T| d\lambda^{2n} = \int_{\mathbb{R}^{2n}} |\tilde{h}| d\lambda^{2n} = \|\tilde{f}\|_1 \|\tilde{g}\|_1. \quad (8.15)$$

Wir wählen (Satz von Fubini) eine Nullmenge N mit

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{f}(x)\tilde{g}(y-x)| dx < \infty, \quad \text{für alle } y \notin N, \quad (8.16)$$

und setzen

$$\tilde{k}(y) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(x)\tilde{g}(y-x) dx, & y \notin N, \\ 0, & y \in N. \end{cases} \quad (8.17)$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \|\tilde{k}\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{k}(y)| dy = \int_{\mathbb{R}^n \setminus N} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(x)\tilde{g}(y-x) dx \right| dy \leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus N} \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{f}(x)\tilde{g}(y-x)| dx dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{f}(x)\tilde{g}(y-x)| dx dy = \|\tilde{f}\|_1 \|\tilde{g}\|_1 \end{aligned} \quad (8.18)$$

wegen (8.15), also $\tilde{k} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Wir definieren nun

$$f * g = [\tilde{k}]. \quad (8.19)$$

dann ist

$$\|f * g\|_1 \leq \|\tilde{f}\|_1 \|\tilde{g}\|_1 = \|f\|_1 \|g\|_1. \quad (8.20)$$

Für festes $y \notin N$ betrachten wir

$$\begin{aligned} \hat{T} : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n, & \hat{T}(x) &= y - x, \\ \hat{h} : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}, & \hat{h}(x) &= \tilde{f}(x)\tilde{g}(y-x). \end{aligned}$$

Es folgen $\hat{h} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, $\hat{h} \circ T \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, und wegen $|\det(-I)| = 1$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(x)\tilde{g}(y-x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{h} d\lambda^n = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{h} \circ \hat{T} d\lambda^n = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(y-x)\tilde{g}(x) dx \quad (8.21)$$

für alle $y \notin N$, also ist

$$f * g = g * f. \quad (8.22)$$

Es bleibt zu zeigen, dass $f * g$ unabhängig ist von der Wahl der Repräsentanten von f und g . Seien dazu $\tilde{f}, \tilde{g} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ mit

$$[\tilde{f}] = [\tilde{f}], \quad [\tilde{g}] = [\tilde{g}].$$

Für $\tilde{h}(x, y) = \tilde{f}(x)\tilde{g}(y)$ gilt dann

$$[\tilde{h}] = [\tilde{h}],$$

da

$$\{\tilde{h} \neq \tilde{h}\} \subset M = (\{\tilde{f} \neq \tilde{f}\} \times \mathbb{R}^n) \cup (\mathbb{R}^n \times \{\tilde{g} \neq \tilde{g}\}) \subset \mathbb{R}^{2n}, \quad \lambda^{2n}(M) = 0.$$

Es folgt

$$[\tilde{h} \circ T] = [\tilde{h} \circ T],$$

da T und T^{-1} Nullmengen auf Nullmengen abbilden. Sei \hat{N} Nullmenge mit $N \subset \hat{N}$ und

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{f}(x)\tilde{g}(y-x)| dx < \infty, \quad \text{für alle } y \notin \hat{N}.$$

Aus dem Satz von Fubini folgt nun

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \hat{N}} |\tilde{k}(y) - \tilde{\tilde{k}}(y)| dy &\leq \int_{\mathbb{R}^{2n}} |\tilde{f}(x)\tilde{g}(y-x) - \tilde{\tilde{f}}(x)\tilde{\tilde{g}}(y-x)| dx dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^{2n}} |\tilde{h} \circ T - \tilde{\tilde{h}} \circ T| d\lambda^{2n} = 0, \end{aligned}$$

also

$$[\tilde{k}] = [\tilde{\tilde{k}}].$$

□

Die Faltungsoperation kann dazu verwendet werden, Funktionen zu “glätten” (das heißt, durch “glattere” Funktionen zu approximieren). Betrachten wir etwa $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und definieren wir einen “gleitenden Mittelwert”

$$f_\varepsilon(y) = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} f(x) dx.$$

Wir definieren die “Glättungsfunktion”

$$g_\varepsilon(\xi) = \frac{1}{2\varepsilon} 1_{[-\varepsilon, \varepsilon]}(\xi),$$

dann ist

$$\begin{aligned} (f * g_\varepsilon)(y) &= \int_{\mathbb{R}} f(x)g_\varepsilon(y-x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \frac{1}{2\varepsilon} 1_{[-\varepsilon, \varepsilon]}(y-x) dx = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} f(x) dx \\ &= f_\varepsilon(y). \end{aligned}$$

Dies entspricht der Approximation der Ableitung durch den zentralen Differenzenquotienten, da

$$f'_\varepsilon(y) = \frac{1}{2\varepsilon} (f(y+\varepsilon) - f(y-\varepsilon)).$$

Wir sehen, dass die Differenzierbarkeitsordnung von f_ε um 1 höher ist als die von f . Wir konstruieren nun eine andere Glättungsfunktion, so dass f_ε sogar unendlich oft differenzierbar ist, auch wenn f nur stetig ist. Dazu betrachten wir zunächst

$$\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \psi(t) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{t}), & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases} \quad (8.23)$$

Aus der Analysis 1 wissen wir, dass $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$. Wir definieren weiter

$$\varphi_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi_1(\xi) = \alpha \psi(1 - \|\xi\|_2^2), \quad \alpha > 0. \quad (8.24)$$

Dann ist (Kettenregel)

$$\varphi_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \text{supp}(\varphi_1) = \overline{\{\xi : \varphi_1(\xi) \neq 0\}} = \{\xi : \|\xi\|_2 \leq 1\}. \quad (8.25)$$

Wir wählen $\alpha > 0$ so, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_1(\xi) d\xi = 1, \quad (8.26)$$

und definieren

$$\varphi_\varepsilon : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi_\varepsilon(\xi) = \frac{1}{\varepsilon^n} \varphi_1\left(\frac{\xi}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon > 0. \quad (8.27)$$

Lemma 8.5 *Die in (8.27) definierte Funktion φ_ε hat für $\varepsilon > 0$ die folgenden Eigenschaften:*

$$\varphi_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \text{supp}(\varphi_\varepsilon) = \{\xi : \|\xi\|_2 \leq \varepsilon\}, \quad \varphi_\varepsilon \geq 0, \quad (8.28)$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(\xi) d\xi = 1. \quad (8.29)$$

Beweis: Die Eigenschaften (8.28) folgen unmittelbar aus der Konstruktion in (8.23) - (8.27). Mit der Substitution

$$T\xi = \frac{\xi}{\varepsilon}, \quad |\det(T)| = \frac{1}{\varepsilon^n},$$

erhalten wir

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(\xi) d\xi = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_1\left(\frac{\xi}{\varepsilon}\right) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_1(y) dy = 1.$$

□

Satz 8.6 *Sei $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$, das heißt, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig und hat kompakten Träger. Dann ist $f_\varepsilon = f * \varphi_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, und es gilt $f_\varepsilon \rightarrow f$ gleichmäßig für $\varepsilon \downarrow 0$.*

Beweis: Es ist

$$f_\varepsilon(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi_\varepsilon(y-x) dx,$$

und daher wegen (8.28)

$$\text{supp}(f_\varepsilon) \subset U_\varepsilon(\text{supp}(f)) := \{x : \text{dist}(x, \text{supp}(f)) \leq \varepsilon\},$$

also ist $\text{supp}(f_\varepsilon)$ kompakt. Es gilt weiter für jeden Multiindex α

$$|f(x) \partial^\alpha \varphi_\varepsilon(y-x)| \leq \|f\|_\infty \|\partial^\alpha \varphi_\varepsilon\|_\infty,$$

falls $y \in \text{supp}(f_\varepsilon)$, und $f(x) \partial^\alpha \varphi_\varepsilon(y-x) = 0$ andernfalls. Hieraus und aus Satz 4.23 folgt, dass $f_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Sei nun $\eta > 0$. Wir wählen $\varepsilon > 0$ so, dass

$$\|y-x\|_2 \leq \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |f(y) - f(x)| \leq \eta.$$

Das ist möglich, da f gleichmäßig stetig auf $\text{supp}(f)$ (und damit auch auf \mathbb{R}^n) ist. Für alle $y \in \mathbb{R}^n$ gilt nun

$$f(y) = f(y) \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(y-x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \varphi_\varepsilon(y-x) dx,$$

also

$$|f(y) - f_\varepsilon(y)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y) - f(x)| \varphi_\varepsilon(y-x) dx \leq \eta \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(y-x) dx = \eta,$$

also

$$\|f - f_\varepsilon\|_\infty \leq \eta.$$

□

Für $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ gilt ebenfalls $f_\varepsilon = f * \varphi_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ (das folgt ebenfalls aus Satz 4.23).
Es gilt außerdem $f_\varepsilon \rightarrow f$ in der L^p -Norm, was wir hier nicht beweisen wollen.