Analysis I *

Martin Brokate †

Inhaltsverzeichnis

---

*Vorlesungsskript, WS 1999/2000

†Zentrum Mathematik, TU München

1 Aussagen, Mengen, Abbildungen

Wahre und falsche Aussagen. Die Mathematik befaßt sich mit Aussagen, von denen man wissen will, ob sie wahr oder falsch sind. Ziel der Mathematik ist es, wahre Aussagen über vermutete Zusammenhänge zu machen. Eine Aussage ist “etwas, was entweder wahr oder falsch ist”. Je nachdem, was zutrifft, ordnen wir ihr den Wahrheitswert W oder F zu. Beispiel:

4 ist größer als 3. (Wahrheitswert W.)

Es gibt eine größte natürliche Zahl. (Wahrheitswert F.)

Mengen. Die Gegenstände, Begriffe und Objekte, mit denen in der Mathematik hantiert wird, existieren im Denken. Sie können unmittelbare Entsprechungen im Alltagsbereich haben (etwa die Zahl 2), aber auch sehr weit von sinnlichen Erfahrungen entfernt sein. Über das Verhältnis von Mathematik und Realität läßt sich viel sagen und kontrovers diskutieren. Das wollen wir hier nicht tun. Mathematische Objekte, wie immer man sie auch interpretieren will, werden seit geraumer Zeit in der Sprache der Mengenlehre formuliert. G. Cantor hat im Jahre 1895 den Begriff einer Menge so definiert:

> Unter einer Menge verstehen wir eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten (welche “Elemente der Menge” heißen) zu einem Ganzen.

Ist M eine Menge, so schreiben wir

$$x \in M \qquad (\text{“}x \text{ ist Element von } M\text{”})\ ,$$

falls x Element von M ist, andernfalls

$$x \notin M \qquad (\text{“}x \text{ ist nicht Element von } M\text{”})\ .$$

Eine Menge läßt sich z.B. dadurch angeben, daß man ihre Elemente einzeln aufschreibt. Beispiel: $\{1, 3, 5, 7\}$. Es kann aber sein, daß man das nicht will oder kann (z.B. weil die Menge unendlich viele Elemente hat), etwa bei

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}\,, \tag{1.1}$$

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}\,. \tag{1.2}$$

Mit den Punkten unterstellt man, daß es “klar ist, wie es weitergeht”. Eine andere Möglichkeit, neue Mengen zu erhalten, ist die Bildung von Teilmengen bereits bekannter Mengen. Eine Menge N heißt Teilmenge einer Menge M, geschrieben

$$N \subset M\ ,$$

wenn jedes Element von N auch Element von M ist. Man kann Teilmengen dadurch angeben, daß man eine "definierende Eigenschaft" formuliert. Beispiel:

$$G = \{n : n \in \mathbb{N}, \text{ es gibt ein } m \in \mathbb{N} \text{ mit } n = 2m\} \tag{1.3}$$

definiert die Menge der geraden Zahlen als Teilmenge von $\mathbb{N}$. Eine solche Beschreibung hat die Form

$$N = \{x : x \in M,\ A(x) \text{ ist wahr}\} \tag{1.4}$$

wobei $A(x)$ eine Aussage ist, die die Variable x enthält.

Zwei Mengen M und N heißen gleich, geschrieben $M = N$, wenn sowohl $N \subset M$ als auch $M \subset N$ gelten, das heißt, wenn sie dieselben Elemente enthalten. Beispiel:

$$\{1, 3, 5, 7\} = \{1, 5, 7, 3\} = \{1, 3, 5, 1, 7, 5\}\,.$$

Bei einer so expliziten Auflistung wird man normalerweise kein Element doppelt angeben. Bei der Beschreibung der rationalen Zahlen durch

$$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\} \tag{1.5}$$

tauchen aber alle rationalen Zahlen mehrfach (und zwar unendlich oft) auf; es wäre sehr unzweckmäßig, würde man nur solche Beschreibungen von Mengen zulassen, in denen jedes Element genau einmal auftaucht.

Sind M und N Mengen, so definieren wir

$$M \cup N = \{x : x \in M \text{ oder } x \in N\} \qquad \text{(Vereinigung)}\,,$$

$$M \cap N = \{x : x \in M \text{ und } x \in N\} \qquad \text{(Durchschnitt oder Schnitt)}\,.$$

Der Begriff des Durchschnitts zweier Mengen legt nahe, die leere Menge

$$\emptyset\,,$$

welche kein Element enthält, ebenfalls als Menge zuzulassen. Dadurch erreicht man, daß der Durchschnitt zweier Mengen immer eine Menge ist. Zwei Mengen M und N heißen disjunkt, wenn

$$M \cap N = \emptyset\,,$$

das heißt, wenn M und N kein gemeinsames Element haben. Die leere Menge spielt unter den Mengen eine ähnlich zentrale Rolle wie die Null bei den Zahlen.

Ist M Menge und $N \subset M$, so definieren wir das Komplement von N in M durch

$$M \setminus N = \{x : x \in M \text{ und } x \notin N\}\,.$$

Sätze und Beweise. Verknüpfung von Aussagen. Ein mathematischer Satz enthält Voraussetzungen und Behauptungen. Er ist wahr, wenn die Behauptungen wahr sind, falls die Voraussetzungen wahr sind. Beispiel eines Satzes:

Voraussetzung: n ist eine durch 6 teilbare natürliche Zahl.
Behauptung: n ist durch 3 teilbar.

Dieser Satz ist wahr, da jede Zahl, die durch 6 teilbar ist, auch durch 3 teilbar ist. Noch ein Beispiel:

Voraussetzung: wie eben
Behauptung: n ist durch 5 teilbar.

Dieser Satz ist falsch, da es eine Zahl gibt, die durch 6, aber nicht durch 5 teilbar ist. (Es gibt sogar unendlich viele solcher Zahlen, ebenso gibt es unendlich viele Zahlen, die sowohl durch 6 als auch durch 5 teilbar sind; dieser Sachverhalt ist aber unerheblich für die Frage, ob der Satz wahr ist.)

Ein Beweis besteht darin, durch "schrittweises logisches Schließen" von den Voraussetzungen zu den Behauptungen zu gelangen. Für den ersten der beiden oben angeführten Sätze kann das so aussehen:

> Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige durch 6 teilbare Zahl. Es gibt dann ein $m \in \mathbb{N}$ mit $n = 6m$. Da $6m = 3 \cdot 2m$ ist, ist $n = 3 \cdot 2m$, also ist n durch 3 teilbar.

Beim Hantieren mit Aussagen wird eine Reihe von logischen Verknüpfungen verwendet. Der Wahrheitswert der durch die Verknüpfung erzeugten Aussage ist durch den Wahrheitswert der beteiligten Aussagen eindeutig festgelegt. Man kann dies in Form einer sogenannten Wahrheitstafel aufschreiben. Für uns sind folgende Verknüpfungen wesentlich:

1. Negation einer Aussage A ("nicht A", $\neg$ A):

A	$\neg$ A
W	F
F	W

2. Konjunktion zweier Aussagen A und B ("A und B", A $\wedge$ B):

A	B	A $\wedge$ B
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	F

"A und B" ist genau dann wahr, wenn sowohl A als auch B wahr sind.

3. Adjunktion zweier Aussagen A und B ("A oder B", A $\vee$ B):

A	B	A $\vee$ B
W	W	W
W	F	W
F	W	W
F	F	F

"A oder B" ist genau dann wahr, wenn mindestens eine der beiden Aussagen wahr ist. "Oder" bedeutet in der Mathematik immer das einschließende "oder". Meint man "entweder – oder, aber nicht beides", so muß man das explizit sagen.

4. Implikation ("Aus A folgt B", "A impliziert B", A $\Rightarrow$ B):

A	B	A $\Rightarrow$ B
W	W	W
W	F	F
F	W	W
F	F	W

Beispiel: Die Aussage

"Für alle Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt: Aus $n < 3$ folgt $n < 5$"

will man als wahr ansehen. Das erklärt die Zeilen 1,3 und 4 in der Tabelle (setze $n = 2, 4, 6$). Man beachte: Ist A falsch, so ist A $\Rightarrow$ B wahr, egal ob B wahr oder falsch ist. Aus einer falschen Aussage läßt sich also alles folgern! Zur Notation: Statt A $\Rightarrow$ B schreibt man auch B $\Leftarrow$ A.

Mathematische Sätze sind Aussagen der Form "A $\Rightarrow$ B". A heißt die Voraussetzung, B die Folgerung der Aussage A $\Rightarrow$ B. Ist A $\Rightarrow$ B wahr, so sagt man auch: A ist hinreichende Bedingung für B, B ist notwendige Bedingung für A.

5. Äquivalenz ("A gilt genau dann, wenn B gilt", "A und B sind äquivalent", A $\Leftrightarrow$ B):

A	B	A $\Leftrightarrow$ B
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	W

Durch Aufstellen der Wahrheitstafeln sieht man: "A $\Leftrightarrow$ B" ist wahr genau dann, wenn "A $\Rightarrow$ B" und "B $\Rightarrow$ A" wahr sind, oder:

$$(A \Leftrightarrow B) \qquad \Leftrightarrow \qquad ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A))\,. \tag{1.6}$$

Es gilt nämlich:

A	B	A $\Leftrightarrow$ B	A $\Rightarrow$ B	B $\Rightarrow$ A	(A $\Rightarrow$ B) $\wedge$ (B $\Rightarrow$ A)	(1.6)
W	W	W	W	W	W	W
W	F	F	F	W	F	W
F	W	F	W	F	F	W
F	F	W	W	W	W	W

Die Aussage (1.6) ist wahr, egal welche Wahrheitswerte A und B haben. Eine solche Aussage nennt man Tautologie. Regeln für das äquivalente Umformen verknüpfter Aussagen haben die Form von Tautologien. Neben (1.6) ist ein weiteres Beispiel

$$(\neg(A \wedge B)) \qquad \Leftrightarrow \qquad ((\neg A) \vee (\neg B)) \tag{1.7}$$

In Worten: Die Negation von "A und B" erhält man, indem man A und B einzeln negiert und die negierten Aussagen anschließend mit "oder" verknüpft. Beispiel: Die Negation von

"$n \in \mathbb{N}$ ist gerade und durch 7 teilbar"

ist

"$n \in \mathbb{N}$ ist ungerade oder nicht durch 7 teilbar",

aber nicht

"$n \in \mathbb{N}$ ist ungerade und nicht durch 7 teilbar".

Daß (1.7) tatsächlich eine Tautologie ist, prüft man wie für (1.6) nach, indem man die zugehörigen Wahrheitstafeln vergleicht.

Quantoren. Sie liefern weitere Bausteine zur Formulierung mathematischer Aussagen. Es handelt sich dabei um den Existenzquantor

$$\exists \qquad (\text{"es gibt"})$$

und den Allquantor

$$\forall \qquad (\text{"für alle"}) .$$

Beispiel: Die Aussage

"es gibt eine natürliche Zahl, die größer ist als 1000"

ist wahr. Man kann sie auch schreiben als

"$\exists n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1000$"

oder noch kürzer als

"$\exists n \in \mathbb{N}$: $n > 1000$" .

$\exists$ und $\forall$ gehen bei Negation ineinander über. Die Negation der eben formulierten Aussage ist

"Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $n \leq 1000$", "$\forall n \in \mathbb{N}$: $n \leq 1000$" .

Eine mehr umgangssprachliche Formulierung wäre: Alle natürlichen Zahlen sind kleiner oder gleich 1000. Zwei Beispiele für eine falsche Bildung der Negation sind

"es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \leq 1000$" ,

"alle natürlichen Zahlen sind größer als 1000" .

Mit "es gibt" ist in der Mathematik immer gemeint "es gibt mindestens ein". Will man ausdrücken, daß es auch nicht mehr als eins geben kann, sagt man "es gibt genau ein", Symbol "$\exists|$".
Aussagen können mehrere Quantoren enthalten. Beispiel:

"$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists p \in \mathbb{N}$: $p > n$ und p Primzahl"

In Worten: “Für jede natürliche Zahl n gibt es eine natürliche Zahl p, welche größer als n und Primzahl ist”. Die Negation dieser Aussage ist

“$\exists n \in \mathbb{N}\ \forall p \in \mathbb{N}$: $p \leq n$ oder p ist nicht Primzahl”, oder

“es gibt eine natürliche Zahl n, so daß für alle natürlichen Zahlen p gilt, daß p kleiner als n oder gleich n oder dass p nicht Primzahl ist”. Man könnte die ursprüngliche Aussage auch so schreiben:

“$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists p > n$: p ist Primzahl”.

Allerdings muß dann zwischen Schreiber und Leser (oder Sprecher und Zuhörer) klar sein, daß für p nur natürliche Zahlen in Frage kommen. Entsprechend läßt sich die Negation schreiben als

“$\exists n \in \mathbb{N}\ \forall p > n$: p ist nicht Primzahl”.

Die Reihenfolge der Quantoren ist wesentlich. Die Aussage

“$\exists p \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}$: $p > n$ und p Primzahl”

ist eine andere (im Gegensatz zur ursprünglichen Aussage falsche) Aussage. Noch ein Beispiel:

“In jeder deutschen Stadt gibt es einen Bürger, der ein Haus besitzt”

ist eine (wohl wahre) Aussage, während

“es gibt einen Bürger, der in jeder deutschen Stadt ein Haus besitzt”

eine andere (vermutlich falsche) Aussage ist.

Rechenregeln für Mengen. Indexmengen. Seien M, N, P Mengen. Dann gilt: Aus $M \subset N$ und $N \subset P$ folgt $M \subset P$. (Beweis: Ist $x \in M$, so ist $x \in N$ wegen $M \subset N$ und weiter $x \in P$ wegen $N \subset P$.) Hieraus folgt: Ist $M = N$ und $N = P$, so ist $M = P$. Für die Vereinigung gilt das Assoziativgesetz

$$(M \cup N) \cup P = M \cup (N \cup P)\,. \tag{1.8}$$

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned} x \in (M \cup N) \cup P \quad &\Leftrightarrow \quad x \in M \cup N \text{ oder } x \in P \\ &\Leftrightarrow \quad (x \in M \text{ oder } x \in N) \text{ oder } x \in P \\ &\Leftrightarrow \quad x \in M \text{ oder } (x \in N \text{ oder } x \in P) \\ &\Leftrightarrow \quad x \in M \text{ oder } x \in N \cup P \\ &\Leftrightarrow \quad x \in M \cup (N \cup P)\,. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Beim Übergang von der zweiten zur dritten Zeile wurde eine Tautologie benutzt, nämlich das Assoziativgesetz für die logische Verknüpfung “oder”. (Dieses wird wie gehabt durch

Vergleich der Wahrheitstafeln bewiesen.) Analog zeigt man das Assoziativgesetz für den Durchschnitt
$$(M \cap N) \cap P = M \cap (N \cap P)\,.$$
Man kann daher die Klammern weglassen und einfach
$$M \cup N \cup P\,, \quad M \cap N \cap P$$
schreiben. Weiter gelten die Kommutativgesetze
$$M \cup N = N \cup M\,, \quad M \cap N = N \cap M\,.$$
Sei nun I eine Menge, sei für jedes $i \in I$ eine Menge M_i gegeben. In diesem Kontext heißt i der Index von M_i und I eine Indexmenge. Wir definieren
$$\bigcup_{i \in I} M_i = \{x : \text{ es gibt ein } i \in I \text{ mit } x \in M_i\}\,, \tag{1.10}$$
$$\bigcap_{i \in I} M_i = \{x : \text{ für alle } i \in I \text{ gilt } x \in M_i\}\,. \tag{1.11}$$
Beispiel: Sei für $n \in \mathbb{N}$
$$M_n = \{\frac{p}{n} : p \in \mathbb{Z}\}\,.$$
Dann ist
$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n = \mathbb{Q}\,.$$
Wichtigster Spezialfall ist $I = \{1, \ldots, n\} = \{i : i \in \mathbb{N},\, 1 \le i \le n\}$. Dann schreibt man statt
$$\bigcup_{i \in I} M_i$$
auch
$$\bigcup_{i=1}^{n} M_i\,.$$
Die in (1.10) und (1.11) eingeführten Begriffe der Vereinigung bzw. des Durchschnitts bezüglich einer Indexmenge stimmen im Fall $I = \{1, 2\}$ mit den anfangs definierten Begriffen der Vereinigung bzw. des Durchschnitts zweier Mengen überein (Beweis weggelassen.) Als weitere Rechenregeln gelten die Distributivgesetze
$$M \cup (N \cap P) = (M \cup N) \cap (M \cup P)\,, \quad M \cap (N \cup P) = (M \cap N) \cup (M \cap P)\,.$$
Für Vereinigung bzw. Durchschnitt bezüglich Indexmengen haben sie die Form
$$N \cup \bigcap_{i \in I} M_i = \bigcap_{i \in I} N \cup M_i\,, \quad N \cap \bigcup_{i \in I} M_i = \bigcup_{i \in I} N \cap M_i\,.$$
Eine Vereinigung $M \cup N$ zweier Mengen heißt disjunkt, wenn M und N disjunkt sind, also $M \cap N = \emptyset$. Eine Vereinigung $\cup_{i \in I} M_i$ heißt disjunkt, wenn alle beteiligten Mengen paarweise disjunkt sind, das heißt wenn $M_i \cap M_j = \emptyset$ für alle $i, j \in I$ mit $i \neq j$.

Mengen von Mengen. Die Elemente einer Menge können ohne weiteres selbst wieder Mengen sein. Beispiel:

$$\{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\}\} = \{\{1,n\} : n \in \mathbb{N},\, 2 \le n \le 4\}$$

ist eine Menge mit drei Elementen, die selbst zweielementige Mengen sind. Anderes Beispiel: $\{\emptyset\}$ ist nicht etwa die leere Menge, sondern die Menge, welche als einziges Element die leere Menge enthält. Ist M eine Menge, so heißt die Menge $\mathcal{P}(M)$ aller Teilmengen von M,

$$\mathcal{P}(M) = \{N : N \subset M\} \tag{1.12}$$

die Potenzmenge von M. Wir verabreden, daß $\emptyset \subset M$ gilt für jede Menge M, also $\emptyset \in \mathcal{P}(M)$. (Die Negation von

$\forall x \in \emptyset$ gilt $x \in M$

liefert die Aussage

$\exists x \in \emptyset$ mit $x \notin M$,

welche wir als falsch ansehen wollen.) Die Potenzmengenbildung läßt sich wiederholen: So sind auch

$$\mathcal{P}(\mathcal{P}(M))\,, \quad \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(M)))\,, \quad \ldots$$

Mengen. Beispiel: Ist $n \in \mathbb{N}$, so ist

$$\{n, n+1\} \subset \mathbb{N}\,, \quad \text{also} \quad \{n, n+1\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\,,$$

und

$$\{\{n, n+1\} : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})\,, \quad \text{also} \quad \{\{n, n+1\} : n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))\,.$$

In der Definition von Cantor wird unterstellt, daß sich für jede Menge M und jedes mathematische Objekt x eindeutig sagen läßt, ob x Element von M ist oder nicht, daß also "$x \in M$" eine Aussage ist, die entweder wahr oder falsch ist. Es hat sich aber sehr bald herausgestellt, daß der schrankenlose Umgang mit dem Mengenbegriff damit nicht verträglich ist. So ist es z.B. zunächst nicht ausgeschlossen, daß eine Menge sich selbst als Element enthält (obwohl das zugegebenermaßen etwas merkwürdig klingt). Daraus hat B. Russell das folgende Beispiel konstruiert:

> Wir nennen eine Menge M normal, falls sie sich nicht selbst als Element enthält, also falls $M \notin M$ gilt. Sei nun
>
> $$\mathcal{M} = \{M : M \text{ ist eine normale Menge}\}\,.$$
>
> Frage: Ist $\mathcal{M}$ normal? Falls ja, so gilt $\mathcal{M} \notin \mathcal{M}$ nach Definition des Begriffs 'normal', aber andererseits $\mathcal{M} \in \mathcal{M}$ nach Definition von $\mathcal{M}$. Falls nein, so gilt $\mathcal{M} \in \mathcal{M}$ nach Definition des Begriffs 'nicht normal', aber andererseits $\mathcal{M} \notin \mathcal{M}$ nach Definition von $\mathcal{M}$.

Der Versuch, solche sogenannte Antinomien (es gibt noch mehr davon) in den Griff zu kriegen, führt zu schwierigen Grundlagenproblemen der Mathematik und hat in der Tat zu Beginn des 20. Jahrhunderts eine Grundlagenkrise der Mathematik ausgelöst. Wir werden uns aber mit diesen Problemen nicht weiter beschäftigen.

Geordnete Paare. Das Produkt zweier Mengen. Bilden wir eine Menge $\{x, y\}$ aus zwei Elementen x und y, so ist durch den Mengenbegriff keine Reihenfolge von x und y festgelegt, es gilt $\{x, y\} = \{y, x\}$. Will man nun ein Paar aus x und y bilden und dabei x als erstes und y als zweites Element auszeichnen, so spricht man von einem geordneten Paar, geschrieben

$$(x, y)\,.$$

Es ist dann verabredungsgemäß $(x, y) = (u, v)$ genau dann, wenn $x = u$ und $y = v$ ist, also insbesondere $(x, y) \neq (y, x)$ wenn $x \neq y$. Seien nun M und N zwei Mengen. Wir definieren das Produkt (oder die Produktmenge) $M \times N$ durch

$$M \times N = \{(x, y) : x \in M,\ y \in N\}\,, \tag{1.13}$$

also als Menge aller geordneten Paare, für die die erste Komponente ein Element von M und die zweite Komponente ein Element von N ist. Die Mengen M und N heißen die Faktoren von $M \times N$. Stellt man sich $\mathbb{R}$ als die reelle Zahlengerade vor, so kann man sich $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ als die (zweidimensionale) Ebene vorstellen, und darin $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ als das Gitter der Punkte mit ganzzahligen Koordinaten. (Die mit diesem Beispiel verbundene Vorstellung eines rechten Winkels zwischen den Faktoren gehört aber nicht zur allgemeinen Definition (1.13)!) Wenn man will, kann man den Begriff des geordneten Paares auf den Mengenbegriff zurückführen, indem man setzt

$$(x, y) = \{\{x\}\,,\ \{x, y\}\}\,.$$

Relationen. Abbildungen. Funktionen. Sind M, N Mengen, so heißt jede Teilmenge R von $M \times N$ eine Relation. Statt $(x, y) \in R$ schreiben wir auch xRy. Beispiel: Die "Diagonale"

$$R = \{(x, x) : x \in M\}$$

definiert die Gleichheitsrelation in $M \times M$, es gilt offensichtlich xRy genau dann, wenn $x = y$. Sei nun $R \subset M \times N$ eine Relation mit der Eigenschaft

$$\text{Zu jedem } x \in M \text{ gibt es genau ein } y \in N \text{ mit } xRy. \tag{1.14}$$

In diesem Fall spricht man davon, daß durch R eine Abbildung f von M nach N definiert wird, und schreibt

$$f : M \to N\,.$$

Ist $x \in M$, so bezeichnet man das gemäß (1.14) eindeutig bestimmte $y \in N$ mit $f(x)$ und nennt $f(x)$ das Bild von x unter f, oder auch den Wert von f an der Stelle x. Beispiele: Durch $f(n) = n + 1$ wird eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert, ebenso durch $f(n) = n^2$. Hingegen wird durch $f(n) = n - 1$ keine Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (da $f(1) = 0 \notin \mathbb{N}$), wohl aber eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definiert. Charakteristisch für diese Beispiele ist, daß sich eine ziemlich einfach formulierbare und auszuführende Vorschrift formulieren läßt, wie man das Bild $f(x)$ aus x erhält. Das muß aber nicht so sein. So ist etwa die Vorschrift

$$f(n) = \text{Anzahl der Ziffern (im Dezimalsystem) des größten Primfaktors von } n$$

einfach formulierbar und liefert eine wohldefinierte Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, aber den Wert $f(n)$ zu berechnen ist für große n nicht so einfach. Darüber hinaus sieht man leicht, daß die meisten Abbildungen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sich nicht durch eine einfache Vorschrift ausdrücken lassen. So ist die Anzahl der Abbildungen, deren Vorschrift sich eindeutig auf 100 Seiten niederlegen läßt, endlich (wenn man unterstellt, daß man nur eine gewisse endliche Anzahl verschiedener Zeichen zur Beschreibung verwendet und jede Seite nur eine gewisse endliche Anzahl von Zeichen faßt), aber es gibt unendlich viele verschiedene Abbildungen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Auch wenn Abbildungen – wie geschehen – formal auf Relationen, also Teilmengen von Produktmengen zurückgeführt werden, so ist es doch in vielen Fällen am zweckmäßigsten, eine Abbildung $f : M \to N$ durch Angabe einer Abbildungsvorschrift

$$x \mapsto f(x)$$

festzulegen. Ihre definierende Relation R läßt sich zurückgewinnen durch die Darstellung

$$R = \{(x, f(x)) : x \in M\}\,.$$

Man bezeichnet R auch als den Graph von f.

Im Zusammenhang mit dem Abbildungsbegriff führt man eine Reihe von weiteren Bezeichnungen ein. Sei $f : M \to N$ eine Abbildung.

- M heißt der Definitionsbereich von f.
- Die durch
$$f(M) = \{f(x) : x \in M\}$$
definierte Teilmenge $f(M)$ von N heißt das Bild von M unter f. Ist $M_0 \subset M$, so setzen wir
$$f(M_0) = \{f(x) : x \in M_0\}\,.$$
Offensichtlich gilt $f(\emptyset) = \emptyset$.
- Ist $M_0 \subset M$, so wird durch
$$f_0(x) = f(x) \quad \text{für} \quad x \in M_0$$
eine Abbildung $f_0 : M_0 \to N$ definiert. f_0 heißt die Restriktion von f auf M_0, geschrieben auch $f|M_0$.
- Ist $N_0 \subset N$, so definieren wir
$$f^{-1}(N_0) = \{x : x \in M,\ f(x) \in N_0\}$$
und bezeichnen $f^{-1}(N_0)$ als die Urbildmenge von N_0 unter der Abbildung f. Im Spezialfall einer einpunktigen Menge $N_0 = \{y\}$, $y \in N$, schreiben wir auch
$$f^{-1}(y) = \{x : x \in M,\ f(x) = y\}\,,$$
und nennen jedes $x \in f^{-1}(y)$ ein Urbild von y. Offensichtlich gilt $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

Beispiele:

- Ist M Menge, so heißt die durch $\mathrm{id}_M(x) = x$ definierte Abbildung $\mathrm{id}_M : M \to M$ die Identität auf M oder die identische Abbildung von M nach M. Ihre Restriktion auf eine Teilmenge M_0 von M ist dann die Identität auf M_0.
- Durch $f(x) = |x|$ wird eine Abbildung $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definiert. Es gilt $f(\mathbb{Z}) = \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $f|\mathbb{N}$ ist die Identität auf $\mathbb{N}$, $f^{-1}(\mathbb{N}) = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $f^{-1}(0) = \{0\}$, $f^{-1}(1) = \{1, -1\}$, $f^{-1}(-1) = \emptyset$.
- Ist M eine Menge und $M_0 \subset M$, so wird durch $f(N) = N \cap M_0$ eine Abbildung $f : \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$ definiert, welche im Falle $M_0 = M$ die Identität auf $\mathcal{P}(M)$ ist.
- Ist M eine Menge, so wird durch $f(x) = \{x\}$ eine Abbildung $f : M \to \mathcal{P}(M)$ definiert. Das Bild $f(M)$ von M unter f besteht dann aus allen einelementigen Teilmengen von M.

Statt des Begriffs "Abbildung" verwendet man auch die Begriffe "Funktion", "Operator" oder "Funktional". Ihre formale Bedeutung ist identisch (es handelt sich um Relationen mit der Eigenschaft (1.14)); daß und wann diese alternativen Begriffe verwendet werden, hängt hauptsächlich mit der historischen Entwicklung der einzelnen Teildisziplinen der Mathematik zusammen. In dieser Vorlesung werden wir hauptsächlich den Begriff "Funktion" verwenden.

Für Bild- und Urbildmengen gelten ebenfalls eine Reihe von Rechenregeln. Sei $f : M \to N$ eine Abbildung. Sind $A, B \subset M$, so gilt

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)\,, \quad f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)\,.$$

Sind $C, D \subset N$, so gilt

$$f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)\,, \quad f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)\,.$$

Wir beweisen $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$. Es gilt

$$\begin{aligned} f(A) \cup f(B) &= \{y : y \in f(A) \text{ oder } y \in f(B)\} \\ &= \{y : (\exists x \in A \text{ mit } y = f(x)) \text{ oder } (\exists x \in B \text{ mit } y = f(x))\} \\ &= \{y : \exists x \in A \cup B \text{ mit } y = f(x)\} \\ &= f(A \cup B)\,. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt

- surjektiv, wenn $f(M) = N$. Äquivalent dazu ist: Für alle $y \in N$ gibt es ein $x \in M$ mit $f(x) = y$.
- injektiv, wenn jedes $y \in N$ höchstens ein Urbild hat. Äquivalent dazu ist: Sind $x_1, x_2 \in M$ beliebig mit $x_1 \neq x_2$, so muß auch $f(x_1) \neq f(x_2)$ gelten. Ebenfalls äquivalent ist: Sind $x_1, x_2 \in M$ beliebig mit $f(x_1) = f(x_2)$, so muß $x_1 = x_2$ gelten.
- bijektiv, wenn sie surjektiv und injektiv ist.

Beispiele:

- Die durch $f(n) = n + 1$ definierte Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist injektiv, aber nicht surjektiv (1 hat kein Urbild). Die durch dieselbe Vorschrift definierte Abbildung $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ist bijektiv.

- Die durch $f(n) = n^2$ definierte Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist injektiv, aber nicht surjektiv; die durch dieselbe Vorschrift definierte Abbildung $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ist weder injektiv noch surjektiv.

Ist $f : M \to N$ bijektiv, so hat jedes $y \in N$ genau ein Urbild $x \in M$. Durch

$$f^{-1}(y) = \text{ dasjenige } x \in M, \text{ für welches } f(x) = y$$

wird in diesem Fall also eine Abbildung $f^{-1} : N \to M$ definiert, welche die Umkehrabbildung von f heißt. Die Abbildung f^{-1} ist ebenfalls bijektiv. Beispiel: Ist $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(n) = n + 1$, so ist $f^{-1}(n) = n - 1$.

Zwei Abbildungen $f_1, f_2 : M \to N$ heißen gleich, wenn $f_1(x) = f_2(x)$ gilt für alle $x \in M$.

Sind $f : M \to N$ und $g : N \to P$ Abbildungen, so wird durch

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

eine Abbildung $g \circ f : M \to P$ definiert, welche die Komposition von f und g heißt. (Man beachte: Zuerst wird f, dann g ausgeführt.) Sind f und g injektiv, so ist auch $g \circ f$ injektiv. Dasselbe gilt, wenn man "injektiv" durch "surjektiv" oder "bijektiv" ersetzt. Ist $M = P$, so sind sowohl $g \circ f : M \to M$ als auch $f \circ g : N \to N$ definiert; falls außerdem $M = N$, können sie gleich sein, müssen es aber nicht. Beispiel: $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = n^2$, $g(n) = n + 2$, dann ist $(g \circ f)(n) = n^2 + 2$ und $(f \circ g)(n) = (n + 2)^2 = n^2 + 4n + 4$.

Ist $f : M \to N$ bijektiv und $f^{-1} : N \to M$ die Umkehrabbildung, so gilt

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_M \,, \quad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_N \,.$$

Direkte Beweise und Widerspruchsbeweise. Ein Beweis der Wahrheit des Satzes (oder kürzer: "ein Beweis des Satzes")

$$A \Rightarrow B$$

kann dadurch geführt werden, daß man eine Kette von wahren Implikationen

$$A \Rightarrow C_1 \,, \quad C_1 \Rightarrow C_2 \,, \quad \ldots \,, \quad C_{n-1} \Rightarrow C_n \,, \quad C_n \Rightarrow B$$

findet. So etwas nennt man einen "direkten Beweis". Äquivalent dazu (siehe Übungsaufgabe) ist der Beweis der Aussage

$$\neg B \Rightarrow \neg A$$

durch Auffinden einer Kette von wahren Implikationen

$$\neg B \Rightarrow D_1 \,, \quad D_1 \Rightarrow D_2 \,, \quad \ldots \,, \quad D_{m-1} \Rightarrow D_m \,, \quad D_m \Rightarrow \neg A \,.$$

Ein solches Vorgehen nennt man "Kontraposition". Eine dritte Variante ist der sogenannte Widerspruchsbeweis. Dieser läuft darauf hinaus, zu zeigen, daß A und ¬ B nicht gleichzeitig wahr sein können. Zu diesem Zweck zeigt man zwei Ketten von wahren Implikationen, an deren Anfang die Aussage A ∧ ¬ B und an deren Enden eine weitere Aussage C bzw. deren Gegenteil ¬ C steht,

$$A \wedge (\neg B) \Rightarrow E_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow E_k \Rightarrow C\,,$$

$$A \wedge (\neg B) \Rightarrow F_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow F_l \Rightarrow \neg C\,.$$

Man hat dann gezeigt, daß die Aussage

$$A \wedge (\neg B) \quad \Rightarrow \quad C \wedge (\neg C)$$

wahr ist. Da aber C ∧ (¬ C) immer falsch ist (egal was C ist), muß die Aussage A ∧ (¬ B) falsch sein, also muß deren Negation

$$\neg(A \wedge (\neg B)) = (\neg A) \vee B$$

wahr sein. Da die Aussagen (¬ A) ∨ B und A ⇒ B äquivalent sind, ist der Satz "A ⇒ B" damit bewiesen.

Beispiel: Der Beweis von Euklid für den Satz

$$\sqrt{2} \text{ ist irrational.} \tag{1.16}$$

Hier fällt zunächst auf, daß keine Voraussetzung explizit genannt ist. Implizit wird aber unterstellt, daß die üblichen Rechenregeln für $\mathbb{Q}$ gelten; sie übernehmen die Rolle der Voraussetzung A. Die Aussage (1.16) entspricht der Behauptung B. Der Beweis geht so:

> Sei $\sqrt{2}$ rational (es gelte also ¬ B). Dann gibt es Zahlen $p, q \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt{2} = p/q$. Nach Auskürzen des Bruchs erhalten wir Zahlen $r, s \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt{2} = r/s$, und für diese Zahlen gilt
>
> r und s sind teilerfremd. (Aussage C)
>
> Es folgt $2s^2 = r^2$, also ist 2 ein Teiler von r^2 und damit auch von r, also gibt es ein $t \in \mathbb{N}$ mit $r = 2t$. Es folgt weiter $2s^2 = 4t^2$, also $s^2 = 2t^2$, also ist 2 auch ein Teiler von s und damit gilt
>
> r und s sind nicht teilerfremd. (Aussage ¬ C)
>
> Wir haben "einen Widerspruch hergestellt". Also ist wie oben beschrieben der behauptete Satz (1.16) wahr.

2 Das Prinzip der vollständigen Induktion

So wie wir sie uns vorstellen, sind die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ eine Menge mit einem "Anfang"

$$1 \in \mathbb{N}\,. \tag{2.1}$$

Der Zählprozeß wird beschrieben durch eine Funktion $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, genannt Nachfolgerfunktion, mit den Eigenschaften

$$1 \notin S(\mathbb{N})\,. \tag{2.2}$$

$$S : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ ist injektiv.} \tag{2.3}$$

$$\text{Ist } M \subset \mathbb{N} \text{ und gilt } 1 \in M,\ S(M) \subset M, \text{ so ist } M = \mathbb{N}. \tag{2.4}$$

Zur Interpretation: Eigenschaft (2.2) drückt aus, daß 1 der Anfang ist. Man kann aus (2.2) – (2.4) schließen, dass durch sukzessive Nachfolgerbildung immer neue Zahlen erzeugt werden und dass dadurch außerdem alle Zahlen erfasst werden.

Axiom 2.1 *Es existieren eine Menge* $\mathbb{N}$ *mit einem Element* $1 \in \mathbb{N}$ *sowie eine Funktion* $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$*, so daß die Eigenschaften (2.2) – (2.4) erfüllt sind.*

Wir kehren zur gewohnten Schreibweise zurück, indem wir setzen

$$2 = S(1)\,, \quad 3 = S(2)\,, \quad 4 = S(3)\,, \ldots \tag{2.5}$$

Die Zahl n ist also diejenige Zahl, die entsteht, wenn wir die Abbildung

$$S^{n-1} = \underbrace{S \circ \cdots \circ S}_{n-1 \text{ mal}}$$

auf 1 anwenden, $n = S^{n-1}(1)$. Man könnte die Elemente von $\mathbb{N}$ auch anders bezeichnen; davon abgesehen ist aber $\mathbb{N}$ durch die Eigenschaften (2.2) – (2.4) "eindeutig festgelegt". Eine mathematische Formulierung dieses Sachverhalts ist der folgende Satz.

Satz 2.2
Voraussetzung: $\mathbb{N}, \mathbb{N}'$ *sind zwei Mengen mit Elementen* $1 \in \mathbb{N}, 1' \in \mathbb{N}'$. $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *und* $S' : \mathbb{N}' \to \mathbb{N}'$ *sind Funktionen. Für* $(\mathbb{N}, 1, S)$ *und* $(\mathbb{N}', 1', S')$ *gelten (2.2) – (2.4).*
Behauptung: *Es gibt genau eine bijektive Abbildung* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}'$ *mit* $\varphi(1) = 1'$ *und*

$$S'(\varphi(n)) = \varphi(S(n))\,, \quad \textit{für alle } n \in \mathbb{N}\,. \tag{2.6}$$

Diesen Satz wollen wir nicht beweisen.

Man kann die arithmetischen Operationen auf die Bildung von Nachfolgern zurückführen, etwa für die Addition: Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$n + 1 = S(n)\,, \tag{2.7}$$

für $n, k \in \mathbb{N}$

$$n + S(k) = S(n + k)\,. \tag{2.8}$$

Man kann dann die anderen arithmetischen Operationen definieren und – unter Zuhilfenahme von (2.2) - (2.4) – die üblichen Rechenregeln (Assoziativgesetz usw.) beweisen.

Das wollen wir hier ebenfalls nicht tun. Wir wollen aber ein dabei wesentlich benötigtes Beweisprinzip erläutern.

Beweisprinzip der vollständigen Induktion. "Vollständige Induktion" ist eine Methode, um Aussagen zu beweisen, die sich auf alle natürlichen Zahlen beziehen. Das geht folgendermaßen: Sei $\mathrm{A}(n)$ eine Aussage, die $n \in \mathbb{N}$ als Variable enthält.

1. Man findet ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und beweist, daß $\mathrm{A}(n_0)$ wahr ist. ("Induktionsverankerung".)
2. Man beweist, daß aus der Gültigkeit von $\mathrm{A}(n)$ auch die Gültigkeit von $\mathrm{A}(n+1)$ folgt. ("Induktionsschritt")

Das Beweisprinzip der vollständigen Induktion besagt: Hat man diese beiden Schritte erfolgreich ausgeführt, so hat man damit bewiesen

$\mathrm{A}(n)$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$.

Die Richtigkeit dieses Beweisprinzips folgt aus der Eigenschaft (2.4):

Satz 2.3 *Sei $n_0 \in \mathbb{N}$, sei für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ eine Aussage $A(n)$ gegeben. Die Aussage $A(n_0)$ sei wahr, und für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ sei die Aussage $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ wahr. Dann ist $A(n)$ wahr für alle $n \geq n_0$.*

Beweis: Wir betrachten zunächst den Spezialfall $n_0 = 1$. Sei

$$M = \{n : n \in \mathbb{N},\ \mathrm{A}(n) \text{ ist wahr}\}\,. \tag{2.9}$$

Dann hat M die Eigenschaft (2.4), also gilt $M = \mathbb{N}$. Zum Beweis des allgemeinen Falls betrachten wir die Aussage $\mathrm{A}'(n) = \mathrm{A}(n + n_0 - 1)$. Dann sind $\mathrm{A}'(1)$ und die Implikation $\mathrm{A}'(n) \Rightarrow \mathrm{A}'(n+1)$ wahr für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach dem eben Bewiesenen folgt, daß $\mathrm{A}'(n)$ wahr ist für alle $n \in \mathbb{N}$, das ist aber gerade die Behauptung. $\square$

Wir wenden das Beweisprinzip der vollständigen Induktion an. Zunächst zur Notation: Sind $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$, so schreiben wir

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n\,, \qquad \prod_{k=m}^{n} a_k = a_m \cdot a_{m+1} \cdots a_n\,, \tag{2.10}$$

und verabreden die Konvention

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = 0\,, \qquad \prod_{k=m}^{n} a_k = 1\,, \qquad \text{falls } m > n\,. \tag{2.11}$$

Satz 2.4 *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}\,. \tag{2.12}$$

Beweis: Durch vollständige Induktion. Die Formel (2.12) entspricht der Behauptung A(n). Wir setzen $n_0 = 1$. Induktionsanfang: Es ist

$$\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1(1+1)}{2}\,,$$

also ist A(1) wahr. Wir führen den Induktionsschritt aus: Sei A(n) wahr, es gelte also

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}\,.$$

Dann gilt

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{(n+2)(n+1)}{2}\,, \tag{2.13}$$

also ist A($n+1$) wahr. (Beim mittleren Gleichheitszeichen wurde verwendet, daß A(n) gilt.) □

Die axiomatische Methode. Ist $1 + 1 = 2$ und wenn ja, warum? In der Mathematik hat sich seit einiger Zeit die sogenannte axiomatische Methode weltweit durchgesetzt. Dabei geht man folgendermaßen vor. Gewisse Grundaussagen werden einfach für wahr erklärt, indem man sie als **Axiome** bezeichnet. Die Wahrheit weiterer Aussagen wird dadurch festgestellt, daß man sie aus den Axiomen und aus schon als wahr erkannten Aussagen beweist. Die Wahrheit – im Sinne der Mathematik – eines mathematischen Satzes ist daher immer zu verstehen als bezogen auf ein explizit zu nennendes (oder implizit gemeintes) Axiomensystem. Der mathematische Wahrheitsbegriff ist also zunächst vollkommen relativ, da jeder Mathematiker die Freiheit hat, beliebige Axiomensysteme als Ausgangspunkt festzulegen. Es ist in der Tat so, daß je nach Gegenstand unterschiedliche Axiomensysteme sinnvoll sind; diese brauchen durchaus nicht miteinander vereinbar zu sein. Auf der anderen Seite gibt es mathematische Strukturen, etwa Zahlbereiche wie $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$, den Begriff des Vektorraums, den Begriff des metrischen Raums oder den Begriff eines Graphen (= Gebilde mit Ecken und Kanten), die, mit einer fest umrissenen Bedeutung versehen, eine zentrale Rolle in der Mathematik spielen. Auch solche Begriffe werden axiomatisch formuliert oder auf Axiome zurückgeführt. Dies kann auf verschiedene Weise geschehen. So kann man anstelle von Axiom 2.1 sehr wohl auch andere Axiomensysteme formulieren als Grundlage für $\mathbb{N}$ und hat das auch getan. Die Frage, welches Axiomensystem nach welchen Kriterien auch immer man bevorzugen sollte, ist für manche Mathematiker mehr, für andere weniger interessant; im Falle von $\mathbb{N}$ etwa ist sie sicher zweitrangig, verglichen mit der Wichtigkeit von $\mathbb{N}$ als Objekt und Werkzeug mathematischer Untersuchungen. Beispielsweise kann man $\mathbb{N}$ auf den Mengenbegriff zurückführen, indem man die Zahlen folgendermaßen als Mengen definiert (nach J. von Neumann)

$$0 = \emptyset\,, \quad 1 = \{\emptyset\}\,, \quad 2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\,, \ldots \tag{2.14}$$

mit der Nachfolgerfunktion

$$S(n) = n \cup \{n\}\,. \tag{2.15}$$

Axiom 2.1 wird dann zu einem Satz, der mit Hilfe von Axiomen und Sätzen der Mengenlehre (u.a. dem Axiom, daß eine unendliche Menge existiert) bewiesen wird. Die Definition

(2.15) ist insofern aufschlußreich, als der ganze Reichtum der Phänomene der Zahlenwelt aus einem einzigen mathematischen Objekt konstruiert wird, und es sich bei diesem Objekt auch noch um die leere Menge handelt. Andererseits: Verwendet man 2.1 für die Untersuchung der Eigenschaften von $\mathbb{N}$, also für den Beweis von Sätzen, die von natürlichen Zahlen handeln, so ist es in der Regel völlig gleichgültig, ob man 2.1 als Axiom oder als Folgerung aus Axiomen der Mengenlehre betrachtet.

3 Die reellen Zahlen

Setzt man die Existenz von $\mathbb{N}$ mit den Eigenschaften aus Axiom 2.1 voraus, so lassen sich daraus sukzessive die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$, die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ und die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ herleiten. Dieser Konstruktionsprozeß ist einerseits teilweise ganz interessant, und man kann ihn dazu benutzen, einige grundlegende mathematische Sachverhalte kennenzulernen; andererseits ist er aber auch recht langwierig und für das Verständnis der modernen Analysis nicht so wesentlich, wir behandeln ihn daher nicht im Detail.

Die Alternative ist, die reellen Zahlen axiomatisch als Menge mit gewissen Eigenschaften einzuführen. Dieses Vorgehen geht auf David Hilbert zurück.

Die axiomatisch verlangten Eigenschaften von $\mathbb{R}$ zerfallen in drei Gruppen. Die erste Gruppe enthält die sogenannten Körpereigenschaften: Es gibt eine Addition $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und eine Multiplikation $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so daß $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ein kommutativer Körper ist, das heißt:

(1) Für die Addition gilt das Assoziativgesetz

$$(x + y) + z = x + (y + z)\,, \qquad \text{für alle } x, y, z \in \mathbb{R}\,, \tag{3.1}$$

das Kommutativgesetz

$$x + y = y + x\,, \qquad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}\,, \tag{3.2}$$

es gibt eine Zahl $0 \in \mathbb{R}$ mit

$$x + 0 = x\,, \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}\,, \tag{3.3}$$

und zu jedem $x \in \mathbb{R}$ existiert genau ein Element von $\mathbb{R}$, bezeichnet mit $(-x)$, mit

$$x + (-x) = 0\,, \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}\,, \tag{3.4}$$

(das additiv inverse Element).

(2) Für die Multiplikation gilt das Assoziativgesetz

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)\,, \qquad \text{für alle } x, y, z \in \mathbb{R}\,, \tag{3.5}$$

das Kommutativgesetz

$$x \cdot y = y \cdot x\,, \qquad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}\,, \tag{3.6}$$

es gibt eine Zahl $1 \in \mathbb{R}$ mit $1 \neq 0$ und

$$1 \cdot x = x\,, \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}\,, \tag{3.7}$$

und zu jedem $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ existiert genau ein Element in $\mathbb{R}$, bezeichnet mit x^{-1}, mit

$$x \cdot x^{-1} = 1\,, \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}\,, \tag{3.8}$$

(das multiplikativ inverse Element).

(3) Es gilt das Distributivgesetz

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z\,, \qquad \text{für alle } x, y, z \in \mathbb{R}\,. \tag{3.9}$$

Die zweite Gruppe bezieht sich auf die Ordnungseigenschaften von $\mathbb{R}$. Es gibt eine Teilmenge P von $\mathbb{R}$ (die "positiven Zahlen") mit den Eigenschaften

(4) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist genau eine der folgenden drei Aussagen wahr:

$$x \in P\,, \quad x = 0\,, \quad -x \in P\,. \tag{3.10}$$

(5) Aus $x, y \in P$ folgt $x + y \in P$ und $x \cdot y \in P$.

Wir definieren auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ vier Relationen, indem wir setzen

$$x > y \qquad \text{genau dann, wenn} \qquad x - y \in P\,, \tag{3.11}$$

$$x \geq y \qquad \text{genau dann, wenn} \qquad x > y \text{ oder } x = y\,, \tag{3.12}$$

$$x < y \qquad \text{genau dann, wenn} \qquad y - x \in P\,, \tag{3.13}$$

$$x \leq y \qquad \text{genau dann, wenn} \qquad x < y \text{ oder } x = y\,. \tag{3.14}$$

Die bisher formulierten Eigenschaften treffen auch auf $\mathbb{Q}$ zu. Um die Existenz der irrationalen Zahlen zu erzwingen, brauchen wir noch eine weitere Eigenschaft.

Definition 3.1 (Obere und untere Schranke, Supremum und Infimum)
Sei $M \subset \mathbb{R}$. Ein $x \in \mathbb{R}$ heißt

- *obere Schranke für M, wenn $y \leq x$ für alle $y \in M$,*
- *untere Schranke für M, wenn $y \geq x$ für alle $y \in M$.*

M heißt nach oben (unten) beschränkt, falls es eine obere (untere) Schranke für M gibt. Ein $z \in \mathbb{R}$ heißt

- *Supremum von M, wenn z eine obere Schranke für M ist mit $z \leq y$ für alle oberen Schranken y von M,*
- *Infimum von M, wenn z eine untere Schranke für M ist mit $z \geq y$ für alle unteren Schranken y von M.*

Die noch fehlende Eigenschaft von $\mathbb{R}$ ist:

$$\boxed{\text{Jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge von } \mathbb{R} \text{ besitzt ein Supremum.}} \tag{3.15}$$

Diese Eigenschaft wird auch als **Supremumsaxiom** bezeichnet.

Axiom 3.2 *Es existieren eine Menge $\mathbb{R}$, eine Addition $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, eine Multiplikation $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, eine Teilmenge $P \subset \mathbb{R}$ und Elemente $0, 1 \in \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften* (1) *bis* (5) *sowie (3.15).*

Die reellen Zahlen werden durch die in 3.2 genannten Eigenschaften eindeutig charakterisiert. In Analogie zu Satz 2.2 kann man einen entsprechenden mathematischen Satz formulieren und beweisen, wir wollen das aber nicht tun. Ebensowenig wollen wir beweisen, daß die reellen Zahlen

$$1,\, 1+1,\, 1+1+1,\, \ldots$$

"dasselbe sind wie die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$", d.h. eine Menge $N \subset \mathbb{R}$ bilden, welche die in Axiom 2.1 verlangten Eigenschaften hat (siehe dazu aber eine Übungsaufgabe).

Folgerungen aus den Körpereigenschaften. Wir verwenden Subtraktion und Division, indem wir definieren

$$x - y = x + (-y)\,, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}\,, \qquad \frac{x}{y} = xy^{-1}\,, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R} \text{ mit } y \neq 0\,. \tag{3.16}$$

Aus den Axiomen folgen unmittelbar die Rechenregeln

$$-(-x) = x\,, \quad x \cdot 0 = 0\,, \quad (-x)y = -(xy)\,, \quad -(x+y) = -x - y\,, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}\,, \tag{3.17}$$

$$(x^{-1})^{-1} = x\,, \quad (xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}\,, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,, \tag{3.18}$$

$$xy = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 0 \text{ oder } y = 0\,. \tag{3.19}$$

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ ist $x = b - a$ die eindeutige Lösung der Gleichung $a + x = b$, für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ ist $x = b/a$ die eindeutige Lösung der Gleichung $a \cdot x = b$. Aus dem Assoziativgesetz folgt (wie schon im vorigen Kapitel bemerkt) die Unabhängigkeit von der Klammerung bei endlichen Summen und Produkten und damit die Wohldefiniertheit von

$$\sum_{k=m}^{n} x_k\,, \quad \prod_{k=m}^{n} x_k\,, \quad x_k \in \mathbb{R} \text{ für } m \leq k \leq n\,. \tag{3.20}$$

Aus dem Kommutativgesetz folgt die Unabhängigkeit von der Reihenfolge bei endlichen Summen und Produkten. Dies wird formalisiert über den Begriff der Permutation. Eine Permutation der Zahlen $\{1, \ldots, n\}$ ist eine bijektive Abbildung $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$; sie beschreibt eine Umordnung der Reihenfolge. Man kann eine Permutation in der Form $(i_1, \ldots, i_n)$ mit $i_k = \sigma(k)$ aufschreiben. Es gilt dann

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} x_{i_k}\,, \quad \prod_{k=1}^{n} x_k = \prod_{k=1}^{n} x_{i_k}\,, \quad x_k \in \mathbb{R}\,,\, 1 \leq k \leq n\,. \tag{3.21}$$

Aus (3.21) folgt als Spezialfall die Vertauschbarkeit der Summenzeichen bei Doppelsummen und -produkten,

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} x_{ij}\,, \quad \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} x_{ij} = \prod_{j=1}^{m} \prod_{i=1}^{n} x_{ij}\,, \tag{3.22}$$

für alle $x_{ij} \in \mathbb{R}$ mit $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$. Das Distributivgesetz für endliche Summen lautet

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{m} y_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i y_j\,. \tag{3.23}$$

Die Formeln (3.20) – (3.23) werden mit vollständiger Induktion bewiesen. Wir definieren die ganzzahligen Potenzen durch

$$x^0 = 1\,, \quad x^n = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n \text{ mal}}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R},\, n \in \mathbb{N}\,, \tag{3.24}$$

$$x^{-n} = (x^{-1})^n\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \text{ mit } x \neq 0,\, n \in \mathbb{N}\,. \tag{3.25}$$

Aus den Eigenschaften der Multiplikation folgt für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $n, m \in \mathbb{Z}$ (bei negativen Exponenten wird natürlich $x \neq 0$ bzw. $y \neq 0$ verlangt)

$$x^n x^m = x^{n+m}\,, \quad (x^n)^m = x^{nm}\,, \quad x^n y^n = (xy)^n\,. \tag{3.26}$$

Ferner wird "n Fakultät" definiert durch

$$0! = 1\,, \quad n! = \prod_{k=1}^{n} k\,, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\,. \tag{3.27}$$

Definition 3.3 (Binomialkoeffizient) *Für $k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ definieren wir den Binomialkoeffizienten*

$$\binom{n}{k} = \prod_{j=1}^{k} \frac{n-j+1}{j} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k}\,. \tag{3.28}$$

Offensichtlich gilt

$$\binom{n}{k} = 0 \text{ falls } k > n\,, \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n\,. \tag{3.29}$$

Lemma 3.4 *Für alle $n, k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k \leq n$ gilt*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}\,. \tag{3.30}$$

Beweis: Für $k = n$ wird (3.30) zu $1 = 1 + 0$. Für $1 \leq k \leq n-1$ gilt

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} \\ &= \frac{k(n-1)! + (n-k)(n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \binom{n}{k}\,. \end{aligned} \tag{3.31}$$

□

Satz 3.5 *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}\,. \tag{3.32}$$

Beweis: Mit vollständiger Induktion über n. Für $n = 0$ gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} x^k y^{0-k} = 1 = (x+y)^0 \,. \tag{3.33}$$

Die Behauptung sei richtig für $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Wir zeigen ihre Richtigkeit für $n+1$. Seien $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig, dann gilt

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n = (x+y) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1} + y^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{n+1} x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] x^k y^{n-k+1} + \binom{n+1}{0} y^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k} \,.
\end{aligned} \tag{3.34}$$

□

Folgerungen aus den Ordnungseigenschaften. Es gilt offensichtlich $x \geq x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Lemma 3.6 *Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

$$x > 0 \text{ und } y \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x + y > 0 \,, \tag{3.35}$$

$$x \geq 0 \text{ und } y \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x + y \geq 0 \,. \tag{3.36}$$

Beweis: Falls $y > 0$, folgt (3.35) direkt aus Eigenschaft (5), falls $y = 0$, so gilt $x + y = x > 0$. Falls $x = y = 0$, so ist auch $x + y = 0$. □

Lemma 3.7 *Seien $x, x', y, y' \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

$$x < y \text{ und } x' \leq y' \quad \Rightarrow \quad x + x' < y + y' \,, \tag{3.37}$$

$$x \leq y \text{ und } x' \leq y' \quad \Rightarrow \quad x + x' \leq y + y' \,. \tag{3.38}$$

Beweis: Folgt aus Lemma 3.6, angewendet auf $y - x$ und $y' - x'$. □

Lemma 3.8 *Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

$$x \leq y \text{ und } y \leq x \quad \Rightarrow \quad x = y \,. \tag{3.39}$$

Beweis: Aus $x \neq y$ folgt $x - y \neq 0$, also $x - y \in P$ oder $y - x \in P$. Damit haben wir die Kontraposition von (3.39) bewiesen, nämlich

$$x \neq y \quad \Rightarrow \quad x < y \text{ oder } y < x\,. \tag{3.40}$$

□

Lemma 3.9 *Seien $x, y, z \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

$$x < y \textit{ und } y < z \quad \Rightarrow \quad x < z\,, \tag{3.41}$$

$$x \leq y \textit{ und } y < z \quad \Rightarrow \quad x < z\,, \tag{3.42}$$

$$x < y \textit{ und } y \leq z \quad \Rightarrow \quad x < z\,, \tag{3.43}$$

$$x \leq y \textit{ und } y \leq z \quad \Rightarrow \quad x \leq z\,. \tag{3.44}$$

Beweis: Aus $x < y$ und $y < z$ folgt $y - x \in P$ und $z - y \in P$, also auch

$$z - x = (z - y) + (y - x) \in P\,,$$

und damit $x < z$. Die anderen Aussagen ergeben sich aus Betrachtung der Fälle $x = y$ bzw. $y = z$. □

Definition 3.10 *Sei M eine Menge. Eine Relation R auf M (d.h. $R \subset M \times M$) heißt Ordnungsrelation, wenn gilt*

(i) *xRx für alle $x \in M$ (Reflexivität),*

(ii) *aus xRy und yRx folgt $x = y$ (Antisymmetrie),*

(iii) *aus xRy und yRz folgt xRz (Transitivität).*

Die oben bewiesenen Eigenschaften zeigen, daß "$\leq$" und "$\geq$" Ordnungsrelationen auf $\mathbb{R}$ definieren. Für "$\leq$" gilt außerdem:

Sind $x, y \in \mathbb{R}$, so gilt $x \leq y$ oder $y \leq x$.

Diese Eigenschaft wird von einer Ordnungsrelation gemäß Definition 3.10 nicht verlangt, es kann also für gewisse $x, y \in M$ sehr wohl sein, daß weder xRy noch yRx gilt. In den beiden folgenden Beispielen ist das so.

Beispiel 3.11

1. Sei M Menge. Durch "$\subset$" wird eine Ordnungsrelation auf $\mathcal{P}(M)$ definiert.

2. Sei M Menge. Sind $f, g : M \to \mathbb{R}$ Funktionen, so definieren wir

$$f \leq g \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \leq g(x) \text{ für alle } x \in M\,. \tag{3.45}$$

   Durch (3.45) wird eine Ordnungsrelation auf der Menge $\mathrm{Abb}(M; \mathbb{R})$ aller Abbildungen von M nach $\mathbb{R}$ definiert.

$\square$

Lemma 3.12 *Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

(i) *Aus $x \geq 0$ und $y \geq 0$ folgt $xy \geq 0$.*

(ii) *Es ist $xy > 0$ genau dann, wenn*

$$(x > 0 \text{ und } y > 0) \text{ oder } (x < 0 \text{ und } y < 0).$$

Beweis: Zu (i): Sind $x > 0$ und $y > 0$, so folgt $xy > 0$ nach Eigenschaft (5). Ist $x = 0$ oder $y = 0$, so ist auch $xy = 0$. $\square$

Lemma 3.13 *Seien $x, y, z \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

$$x < y \text{ und } z > 0 \quad \Rightarrow \quad xz < yz\,, \tag{3.46}$$

$$x \leq y \text{ und } z \geq 0 \quad \Rightarrow \quad xz \leq yz\,, \tag{3.47}$$

$$x < y \text{ und } z < 0 \quad \Rightarrow \quad xz > yz\,, \tag{3.48}$$

$$x \leq y \text{ und } z \leq 0 \quad \Rightarrow \quad xz \geq yz\,. \tag{3.49}$$

Beweis: Nur die erste Ungleichung. Aus $x < y$ folgt $0 < y - x$, also $0 < (y - x)z = yz - xz$, also $xz < yz$. $\square$

Lemma 3.14 *Es gilt $x^2 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.*

Beweis: Aus Lemma 3.12 folgt: Ist $x \geq 0$, so ist $x^2 = x \cdot x \geq 0$; ist $x < 0$, so ist $-x > 0$ und $x^2 = (-x) \cdot (-x) > 0$. $\square$

Folgerung 3.15 *Es ist $1 > 0$.*

Beweis: $1 = 1^2 \geq 0$, und aus $1 \neq 0$ folgt $1 > 0$. $\square$

Lemma 3.16 *Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: Aus $x > 0$ folgt $x^{-1} > 0$, aus $x < 0$ folgt $x^{-1} < 0$.*

Beweis: Sei $x > 0$. Dann ist $(x^{-1})^2 > 0$, also $x^{-1} = x \cdot (x^{-1})^2 > 0$. Der andere Fall wird analog bewiesen. $\square$

Lemma 3.17 *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: Aus $0 < x < y$ folgt $x^{-1} > y^{-1}$.*

Beweis: Es ist $0 < xy$, also auch $0 < (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$. Es folgt weiter

$$y^{-1} = x(x^{-1}y^{-1}) < y(x^{-1}y^{-1}) = x^{-1}\,.$$

$\square$

Definition 3.18 (Betrag, Maximum und Minimum zweier Zahlen)
Ist $x \in \mathbb{R}$, so heißt

$$|x| = \begin{cases} x\,, & x \geq 0 \\ -x\,, & x < 0 \end{cases} \tag{3.50}$$

der Betrag von x. Sind $x, y \in \mathbb{R}$, so definieren wir

$$\max\{x,y\} = \begin{cases} x\,, & x \geq y \\ y\,, & y > x\,, \end{cases} \qquad \min\{x,y\} = \begin{cases} x\,, & x \leq y \\ y\,, & y < x\,. \end{cases} \tag{3.51}$$

Es gilt offensichtlich

$$\min\{x,y\} \leq x \leq \max\{x,y\}\,, \quad \min\{x,y\} \leq y \leq \max\{x,y\}\,, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}\,, \tag{3.52}$$

$$|x| = \max\{x, -x\} = |-x|\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\,. \tag{3.53}$$

Lemma 3.19 *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt*

$$|x| \geq 0\,, \quad |x| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0\,, \tag{3.54}$$

$$|xy| = |x| \cdot |y|\,, \tag{3.55}$$

$$|x+y| \leq |x| + |y|\,. \tag{3.56}$$

Beweis: Zu (3.54): Aus der Definition folgt $|x| \geq 0$ und $|0| = 0$. Ist $x \neq 0$, so ist $|x| = \max\{x, -x\} > 0$.
Zu (3.55): Man unterscheidet die verschiedenen Fälle im Vorzeichen von x und y. Ist etwa $x \geq 0$ und $y \leq 0$, so ist $xy \leq 0$ und

$$|xy| = -(xy) = x(-y) = |x| \cdot |y|\,,$$

analog für die anderen Fälle.
Zu (3.56): Es gilt

$$x + y \leq |x| + |y|\,, \quad -(x+y) = (-x) + (-y) \leq |x| + |y|\,,$$

also

$$|x+y| = \max\{x+y, -(x+y)\} \leq |x| + |y|\,.$$

□

Aus (3.55) erhält man wegen

$$|x| = \left|\frac{x}{y} \cdot y\right| = \left|\frac{x}{y}\right| \cdot |y|$$

die Regel

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}\,, \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R} \text{ mit } y \neq 0\,. \tag{3.57}$$

Satz 3.20 (Bernoullische Ungleichung) *Es gilt*

$$(1+x)^n \geq 1+nx \tag{3.58}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1$.

Beweis: Sei $x \geq -1$ beliebig. Wir zeigen mit vollständiger Induktion, daß (3.58) für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Für $n = 1$ klar. Induktionsschritt $n \to n+1$:

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) \\ &\qquad \text{(richtig nach Induktionsvoraussetzung und wegen } x \geq -1\text{)} \\ &= 1+nx+x+nx^2 \geq 1+(n+1)x\,.\end{aligned}$$

□

Eigenschaften von Supremum und Infimum. Wir erinnern an Definition 3.1 und an das Supremumsaxiom (3.15). Zur Veranschaulichung der Begriffe in 3.1 betrachten wir die Menge

$$M = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \tag{3.59}$$

Es gilt: Jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 1$ ist obere Schranke von M, 1 ist Supremum von M, und $1 \in M$. Jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $x \leq 0$ ist untere Schranke von M, 0 ist Infimum von M (Beweis weiter unten), aber $0 \notin M$.

Lemma 3.21 *Sei $M \subset \mathbb{R}$ mit $M \neq \emptyset$. Dann hat M höchstens ein Supremum.*

Beweis: Sind z_1, z_2 Suprema von M, so gilt $z_1 \leq z_2$ (da z_2 obere Schranke von M) und $z_2 \leq z_1$ (da z_1 obere Schranke von M), also $z_1 = z_2$. □

Es macht daher Sinn, von "dem Supremum" von M zu sprechen, wir bezeichnen es mit

$$\sup M\,. \tag{3.60}$$

Beispiel: Die Menge

$$M = \{x : x \in \mathbb{R},\, x^2 \leq 2\}$$

ist nichtleer, nach oben beschränkt (z.B. ist 2 obere Schranke), und hat daher ein eindeutig bestimmtes Supremum $\sup M \in \mathbb{R}$. (Diese reelle Zahl werden wir später als $\sqrt{2}$ identifizieren.)

Wir vereinbaren

$$\sup M = +\infty\,, \quad \text{falls } M \text{ nicht nach oben beschränkt ist,} \tag{3.61}$$

$$\sup \emptyset = -\infty\,. \tag{3.62}$$

Damit haben wir für alle $M \subset \mathbb{R}$

$$\sup M \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}\,. \tag{3.63}$$

Wir setzen die auf $\mathbb{R}$ bereits definierte Ordnungsrelation "$\leq$" fort auf $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, indem wir setzen

$$-\infty < x < +\infty\,, \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}\,. \tag{3.64}$$

Man prüft leicht nach, daß wir auf diese Weise tatsächlich eine Ordnungsrelation auf $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ erhalten. Es gilt

Lemma 3.22 *Sind $M, N \subset \mathbb{R}$ mit $M \subset N$, so gilt*

$$\sup M \le \sup N\,. \tag{3.65}$$

Beweis: Falls $\sup N \in \mathbb{R}$, so ist $\sup N$ obere Schranke für N und wegen $M \subset N$ auch obere Schranke für M, also gilt (3.65) nach Definition von $\sup M$ (falls $M = \emptyset$, verwenden wir (3.62)). Falls $\sup N = -\infty$, so ist $N = \emptyset$, also auch $M = \emptyset$, also auch $\sup M = -\infty$. Falls $\sup N = +\infty$, ist (3.65) erfüllt, egal was M ist. □

Auch das Infimum einer Menge ist eindeutig bestimmt, falls es existiert, wie man analog zu Lemma 3.21 beweist. Wir bezeichnen es mit

$$\inf M\,, \tag{3.66}$$

und vereinbaren

$$\inf M = -\infty\,, \quad \text{falls } M \text{ nicht nach unten beschränkt ist,} \tag{3.67}$$

$$\inf \emptyset = +\infty\,. \tag{3.68}$$

Ist $M \subset \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$, so definieren wir die Menge $aM \subset \mathbb{R}$ durch

$$aM = \{ax : x \in M\}\,. \tag{3.69}$$

Für $a = -1$ schreiben wir auch $-M$ statt $(-1)M$. Wir vereinbaren weiter

$$-(+\infty) = -\infty\,, \quad -(-\infty) = +\infty\,. \tag{3.70}$$

Satz 3.23 *Sei $M \subset \mathbb{R}$. Dann gilt*

$$\inf M = -\sup(-M)\,. \tag{3.71}$$

Beweis: Ist $M = \emptyset$, so steht auf beiden Seiten $+\infty$. Sei nun $M \ne \emptyset$. Wir behaupten, daß für $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$x \text{ ist untere Schranke von } M \quad \Leftrightarrow \quad -x \text{ ist obere Schranke von } -M\,. \tag{3.72}$$

In der Tat gilt

$$x \le y \;\forall\, y \in M \quad \Leftrightarrow \quad -x \ge -y \;\forall\, y \in M \quad \Leftrightarrow \quad -x \ge z \;\forall\, z \in -M\,.$$

Wegen (3.72) ist M nach unten beschränkt genau dann wenn $-M$ nach oben beschränkt ist. Falls M nicht nach unten beschränkt ist, steht also $-\infty$ auf beiden Seiten von (3.71). Ist M nach unten beschränkt, so hat $-M$ nach Supremumsaxiom ein Supremum $\sup M \in \mathbb{R}$, und wegen (3.72) ist $-\sup(-M)$ eine untere Schranke von M. Ist x eine beliebige untere Schranke von M, so gilt wegen (3.72) auch $\sup(-M) \le -x$, also auch $-\sup(-M) \ge x$, und damit folgt (3.71) wegen der Eindeutigkeit des Infimums. □

Satz 3.24 $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ *ist nicht nach oben beschränkt, d.h. für alle $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > x$.*

Beweis: Wir nehmen an, daß $\mathbb{N}$ nach oben beschränkt ist. Dann hat $\mathbb{N}$ nach Supremumsaxiom ein Supremum $s = \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$. Wegen $s-1 < s$ ist $s-1$ keine obere Schranke von $\mathbb{N}$, also gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $s-1 < n$. Es folgt weiter $s < n+1 \in \mathbb{N}$, also ist auch s keine obere Schranke. Widerspruch. □

Folgerung 3.25 *Für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit*

$$0 < \frac{1}{n} < \varepsilon\,. \tag{3.73}$$

Beweis: Wende Satz 3.24 an mit $x = \varepsilon^{-1}$. □

Aus Folgerung 3.25 können wir schließen, daß

$$\inf\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} = 0\,.$$

Folgerung 3.26 *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $nx > y$. ("$\mathbb{R}$ ist archimedisch angeordnet.")*

Beweis: Falls $y > 0$, wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > y/x$. Andernfalls $n = 1$. □

Folgerung 3.27 *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x > 1$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x^n > y$.*

Beweis: Übungsaufgabe. □

Definition 3.28 (Maximum, Minimum)
Sei $M \subset \mathbb{R}$. Gilt $\sup M \in M$, so heißt die Zahl $\sup M$ das Maximum von M. Gilt $\inf M \in M$, so heißt die Zahl $\inf M$ das Minimum von M.

Ist $M \subset \mathbb{R}$ nichtleer und endlich (d.h. es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ mit $M = \{x_1, \ldots, x_n\}$), so hat M ein Minimum und ein Maximum. (Beweis mit vollständiger Induktion, hier nicht ausgeführt.)

4 Folgen

Definition 4.1 (Folge)
Sei M Menge. Eine Abbildung von $\mathbb{N}$ nach M heißt Folge in M. Eine Folge in $\mathbb{R}$ heißt auch reelle Folge oder reelle Zahlenfolge.

Beispiel: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f(n) = 1/n$ definiert die Folge

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$$

In der Analysis wird eine Folge in der Regel nicht in der Form

$$f : \mathbb{N} \to M\,,$$

aufgeschrieben, sondern mit

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \tag{4.1}$$

oder so ähnlich bezeichnet. Mit (4.1) ist diejenige Folge gemeint, die durch die Abbildung $f : \mathbb{N} \to M$ mit $f(n) = x_n$ definiert wird. Das Element $x_n \in M$ heißt dann das n-te Glied der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Manchmal ist es zweckmäßig, daß die Numerierung der Folgenglieder nicht bei 1 anfängt, sondern bei irgendeinem $n_0 \in \mathbb{Z}$. Wir schreiben dann

$$(x_n)_{n\geq n_0} \tag{4.2}$$

und meinen damit die Abbildung $f : N \to M$, $N = \{n : n \in \mathbb{Z},\, n \geq n_0\}$.

Weitere Beispiele für Folgen sind:

$$x_n = c \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}\,, \quad c \in \mathbb{R} \text{ fest,} \qquad \text{(konstante Folge)} \tag{4.3}$$

$$x_n = n^2 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}\,, \tag{4.4}$$

$$x_n = x^n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}\,, \quad x \in \mathbb{R} \text{ fest.} \tag{4.5}$$

Definition 4.2 (Grenzwert einer Folge)
Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Ein $a \in \mathbb{R}$ heißt Grenzwert (oder Limes) von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$|x_n - a| < \varepsilon \qquad \textit{für alle } n \in \mathbb{N} \textit{ mit } n \geq n_0. \tag{4.6}$$

Falls $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Grenzwert a hat, so sagt man auch: "(x_n) konvergiert gegen a" oder "(x_n) ist konvergent". Falls $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keinen Grenzwert hat, so sagt man: "(x_n) divergiert" oder "(x_n) ist divergent".

Beispiel 4.3

1. Die konstante Folge $x_n = c$ konvergiert gegen c: Es gilt $|x_n - c| = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wir können daher für jedes $\varepsilon > 0$ die Zahl $n_0 = 1$ wählen, und (4.6) ist erfüllt.

2. Die Folge $x_n = 1/n$ konvergiert gegen 0: Zu $\varepsilon > 0$ wählen wir $n_0 \in \mathbb{N}$ so, daß
$$n_0 > \frac{1}{\varepsilon}\,.$$
Es gilt dann für alle $n \geq n_0$
$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon\,,$$
damit erfüllt 0 die in Definition 4.2 verlangte Bedingung.

3. Die Folge $x_n = (-1)^n$ divergiert: Sei $a \in \mathbb{R}$ ein Grenzwert der Folge. Für $\varepsilon = 1$ finden wir daher gemäß Definition ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - a| < 1$ für alle $n \geq n_0$. Dann gilt
$$2 = |x_{n_0+1} - x_{n_0}| \leq |x_{n_0+1} - a| + |x_{n_0} - a| < 1 + 1 = 2\,,$$
ein Widerspruch. Also kann es ein solches a nicht geben.

Satz 4.4 *Jede reelle Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat höchstens einen Grenzwert.*

Beweis: Seien a und b Grenzwerte von (x_n) mit $a \neq b$. Wir definieren
$$\varepsilon = \frac{|b-a|}{2}\,.$$
Dann ist $\varepsilon > 0$. Wähle $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit
$$|x_n - a| < \varepsilon\,, \qquad \text{für alle } n \geq n_1\,, \tag{4.7}$$
$$|x_n - b| < \varepsilon\,, \qquad \text{für alle } n \geq n_2\,. \tag{4.8}$$
Dies ist möglich, da a und b Grenzwerte sind. Für ein beliebiges $n \geq \max\{n_1, n_2\}$ folgt nun
$$|a - b| \leq |a - x_n| + |x_n - b| < \varepsilon + \varepsilon = |b - a|\,.$$
Wir haben einen Widerspruch erhalten. Also kann $a \neq b$ nicht richtig sein. □

Satz 4.4 macht es sinnvoll, von "dem Grenzwert" einer Folge zu sprechen. Ist eine Folge (x_n) konvergent, so bezeichnet
$$\lim_{n\to\infty} x_n \tag{4.9}$$
ihren Grenzwert. Konvergiert (x_n) gegen a, so gilt also
$$a = \lim_{n\to\infty} x_n\,. \tag{4.10}$$
Wir schreiben auch
$$x_n \to a\,.$$
Die Gleichung (4.10) beinhaltet zwei Aussagen: Erstens, der Grenzwert von (x_n) existiert, und zweitens, er ist gleich a.

Definition 4.5 (Beschränkte Menge, beschränkte Folge)
Eine Menge $M \subset \mathbb{R}$ heißt beschränkt, wenn M nach oben und nach unten beschränkt ist. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt beschränkt, wenn die Menge $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt ist.

Lemma 4.6 *Eine Teilmenge M von $\mathbb{R}$ ist beschränkt genau dann, wenn es ein $C > 0$ gibt mit $|x| \le C$ für alle $x \in M$.*

Beweis: Es gilt $|x| \le C$ für alle $x \in M$ genau dann, wenn C obere und $-C$ untere Schranke für M ist. □

Satz 4.7 *Jede konvergente reelle Folge ist beschränkt.*

Beweis: Sei (x_n) reelle Folge mit $x_n \to a$. Wähle ein n_0 mit $|x_n - a| < 1$ für alle $n \ge n_0$. Setze

$$C = \max\{|x_1|, \ldots, |x_{n_0-1}|, |a| + 1\}\,,$$

dann gilt $|x_n| \le C$ für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Eine beschränkte Folge braucht nicht konvergent zu sein, wie man am Beispiel $x_n = (-1)^n$ sieht.

Satz 4.8 *Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folgen mit $x_n \to a$, $y_n \to b$. Dann ist auch die Folge $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = a + b\,. \tag{4.11}$$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir wählen $n_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}\,, \quad \text{für alle } n \ge n_1\,,$$

sowie $n_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}\,, \quad \text{für alle } n \ge n_2\,.$$

Dann gilt für alle $n \ge \max\{n_1, n_2\}$

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| \le |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

□

Die Aussage von Satz 4.8 läßt sich auch als Rechenregel

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n \tag{4.12}$$

schreiben. Sie ist allerdings nur anwendbar, wenn beide Grenzwerte auf der rechten Seite existieren. Beispiel:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 1 + 0 = 1\,.$$

Satz 4.9 *Seien* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *reelle Folgen mit* $x_n \to a$, $y_n \to b$. *Dann ist auch die Folge* $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergent, und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} (x_n y_n) = ab\,. \tag{4.13}$$

Beweis: Zunächst gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$|x_n y_n - ab| = |x_n(y_n - b) + b(x_n - a)| \le |x_n||y_n - b| + |b||x_n - a|\,. \tag{4.14}$$

Wir wählen C so, daß $C \ge |b|$ und $C \ge |x_n|$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (möglich wegen Satz 4.7). Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir wählen $n_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2C}\,, \quad \text{für alle } n \ge n_1\,,$$

sowie $n_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2C}\,, \quad \text{für alle } n \ge n_2\,.$$

Dann gilt für alle $n \ge \max\{n_1, n_2\}$

$$|x_n y_n - ab| \le C|y_n - b| + C|x_n - a| < C\frac{\varepsilon}{2C} + C\frac{\varepsilon}{2C} = \varepsilon\,.$$

□

Aus Satz 4.9 folgt: Ist $c \in \mathbb{R}$ und (x_n) reelle Folge mit $x_n \to a$, so gilt $cx_n \to ca$.

Satz 4.10 *Sei* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *reelle Folge mit* $x_n \to a$, $a \neq 0$. *Dann gibt es ein* $n_0 \in \mathbb{N}$ *mit* $x_n \neq 0$ *für alle* $n \ge n_0$, *und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{a}\,. \tag{4.15}$$

Beweis: Wir wählen n_0 so, daß

$$|x_n - a| < \frac{|a|}{2}\,, \quad \text{für alle } n \ge n_0\,.$$

Dann gilt für alle $n \ge n_0$

$$|x_n| \ge |a| - |a - x_n| > |a| - \frac{|a|}{2} = \frac{|a|}{2} > 0\,. \tag{4.16}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir wählen $n_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon|a|^2}{2}\,, \quad \text{für alle } n \ge n_1\,.$$

Dann gilt für alle $n \ge \max\{n_0, n_1\}$ wegen (4.16)

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a}\right| = \left|\frac{a - x_n}{x_n a}\right| \le \frac{2}{|a|^2}|a - x_n| < \frac{2}{|a|^2}\frac{\varepsilon|a|^2}{2} = \varepsilon\,.$$

□

Folgerung 4.11 *Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folgen mit $x_n \to a$, $y_n \to b$, es gelte $b \neq 0$. Dann ist auch die Folge $(x_n/y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b} \,. \tag{4.17}$$

Beweis: Aus Satz 4.9 und Satz 4.10 folgt

$$\frac{x_n}{y_n} = x_n \cdot \frac{1}{y_n} \to a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b} \,.$$

□

Die vorstehenden Sätze lassen sich zur Berechnung von Grenzwerten algebraischer Ausdrücke verwenden, z.B. gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = \prod_{i=1}^{k} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0^k = 0 \,,$$

und

$$\frac{18n^3 - 4n^2 + 8}{7n^3 + 4n} = \frac{18 - \frac{4}{n} + \frac{8}{n^3}}{7 + \frac{4}{n^2}} \to \frac{18}{7} \,.$$

Satz 4.12 *Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folgen mit $x_n \to a$, $y_n \to b$, es gelte $x_n \leq y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $a \leq b$.*

Beweis: Wir nehmen an, daß $a > b$. Wir wählen n_0 so, daß

$$|x_n - a| < \frac{a-b}{2} \,, \quad |y_n - b| < \frac{a-b}{2} \,,$$

gilt für alle $n \geq n_0$. Dann ist

$$\begin{aligned} y_n - x_n &= (y_n - b) + (b - a) + (a - x_n) \\ &< \frac{a-b}{2} + (b-a) + \frac{a-b}{2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

im Widerspruch zur Voraussetzung $x_n \leq y_n$. □

Definition 4.13 (Monoton wachsende Folge)
Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge. (x_n) heißt monoton wachsend, wenn $x_n \leq x_{n+1}$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$. (x_n) heißt streng monoton wachsend, wenn $x_n < x_{n+1}$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$. (x_n) heißt (streng) monoton fallend, wenn $(-x_n)$ (streng) monoton wachsend ist. (x_n) heißt (streng) monoton, wenn x_n (streng) monoton wachsend oder (streng) monoton fallend ist.

Zur Notation: Statt

$$\sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

schreiben wir auch

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} x_n \,.$$

Satz 4.14 *Jede beschränkte monoton wachsende reelle Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent, und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n\,. \tag{4.18}$$

Jede beschränkte monoton fallende reelle Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent, und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} x_n\,. \tag{4.19}$$

Beweis: Sei $a = \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n$. Sei $\varepsilon > 0$. Gemäß Übungsaufgabe können wir ein $n_0 \in \mathbb{N}$ finden mit

$$a - \varepsilon < x_{n_0} \le a\,.$$

Da (x_n) monoton wachsend ist, gilt für alle $n \ge n_0$

$$a - \varepsilon < x_{n_0} \le x_n \le a\,,$$

also folgt $x_n \to a$ und damit (4.18). Zum Beweis von (4.19) wenden wir (4.18) auf die Folge $(-x_n)$ an und erhalten

$$\lim_{n\to\infty}(-x_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}}(-x_n) = -\inf_{n\in\mathbb{N}} x_n$$

woraus (4.19) folgt. □

Beispiel 4.15
Wir können die Quadratwurzel einer positiven Zahl als Limes einer monoton fallenden Iteration auf folgende Weise erhalten. Sei $b > 0$. Wir betrachten die durch

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{b}{x_n}\right)\,, \quad x_1 = b\,, \tag{4.20}$$

definierte reelle Folge. Es gilt $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (Beweis mit Induktion), und

$$\begin{aligned} x_n^2 - b &= \frac{1}{4}\left(x_{n-1} + \frac{b}{x_{n-1}}\right)^2 - b = \frac{1}{4}\left(x_{n-1}^2 + 2b + \frac{b^2}{x_{n-1}^2}\right) - b \\ &= \frac{1}{4}\left(x_{n-1}^2 - 2b + \frac{b^2}{x_{n-1}^2}\right) = \frac{1}{4}\left(x_{n-1} - \frac{b}{x_{n-1}}\right)^2 \\ &\ge 0\,, \end{aligned}$$

also $x_n^2 \ge b$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und weiter

$$x_n - x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{b}{x_n}\right) = \frac{1}{2x_n}(x_n^2 - b) \ge 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, also ist (x_n) ab dem zweiten Folgenglied x_2 monoton fallend. Nach Satz 4.14 konvergiert (x_n) gegen $a = \inf x_n$. Aus Satz 4.12 folgt $a \ge 0$ und $a^2 \ge b > 0$, also $a > 0$. Gehen wir auf beiden Seiten von (4.20) zum Grenzwert über, so folgt

$$a = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{b}{x_n}\right) = \frac{1}{2}\left(a + \frac{b}{a}\right)\,.$$

Es folgt

$$a^2 = b\,. \tag{4.21}$$

Ist $c \in \mathbb{R}$ eine weitere Zahl mit $c^2 = b$ und $c > 0$, so folgt wegen

$$0 = a^2 - c^2 = (a-c)(a+c)$$

auch $a - c = 0$, also $a = c$. Wir haben also bewiesen, daß die Iteration (4.20) gegen die eindeutig bestimmte positive Zahl a mit $a^2 = b$ konvergiert.

Definition 4.16 (Quadratwurzel)
Sei $b > 0$. Die gemäß Beispiel 4.15 eindeutig bestimmte positive Zahl a mit $a^2 = b$ heißt die Quadratwurzel von b, geschrieben

$$a = \sqrt{b}\,. \tag{4.22}$$

Wir definieren außerdem $\sqrt{0} = 0$.

Die Konvergenz in Beispiel 4.15 ist sehr schnell, so ist etwa für $b = 2$ nach dem vierten Schritt

$$x_5 = 1.414213562$$

eine Näherung für $\sqrt{2}$ mit einem Fehler von höchstens 10^{-9}. Im Gegensatz dazu ist die Konvergenz der Folge $1/n$ gegen 0 sehr langsam (Fehler 10^{-3} nach 1000 Schritten).

Es gilt offensichtlich für alle $a \in \mathbb{R}$

$$\sqrt{a^2} = |a|\,. \tag{4.23}$$

Aus $(ab)^2 = a^2b^2$ folgt für $a, b \geq 0$

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}\,. \tag{4.24}$$

Da für $x, y \geq 0$ gilt, daß

$$x \leq y \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \leq y^2\,,$$

gilt auch

$$a \leq b \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{a} \leq \sqrt{b} \tag{4.25}$$

für alle $a, b \geq 0$.

Teilfolgen. Oft ist man daran interessiert, zu einer gegebenen Folge, etwa

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$$

eine Teilfolge, etwa

$$2, 4, 6, 8, \ldots$$

zu betrachten. Formal sieht das so aus: Ist M Menge, $f : \mathbb{N} \to M$ eine Folge, und $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine streng monoton wachsende Abbildung (d.h. $n < m \Rightarrow g(n) < g(m)$), so beschreibt $f \circ g$ eine Teilfolge von f. In obigem Beispiel ist

$$f(n) = n\,, \quad g(n) = 2n\,, \quad (f \circ g)(n) = 2n\,.$$

Äquivalent dazu ist die folgende Definition, die die in der Analysis übliche Schreibweise verwendet.

Definition 4.17 (Teilfolge)
Sei M Menge, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M. Ist $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende Folge in $\mathbb{N}$, so heißt die Folge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Im obigen Beispiel ist $n_k = 2k$.

Jede Folge ist Teilfolge von sich selbst (setze $n_k = k$). Für jede streng monoton wachsende Folge (n_k) in $\mathbb{N}$ gilt

$$k \le n_k\,. \tag{4.26}$$

Beweis mit Induktion: $1 \le n_1$, $k \le n_k \Rightarrow k+1 \le n_k + 1 \le n_{k+1}$. (Aus $n > m$ in $\mathbb{N}$ folgt $n \ge m+1$.)

Satz 4.18 *Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente reelle Folge. Dann ist jede Teilfolge (x_{n_k}) konvergent, und es gilt*

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \lim_{n\to\infty} x_n\,. \tag{4.27}$$

Beweis: Sei $x_n \to a$, sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \ge n_0$, dann gilt wegen $n_k \ge k$ auch

$$|x_{n_k} - a| < \varepsilon\,, \qquad \text{für alle } k \ge n_0\,.$$

□

Satz 4.19 *Jede reelle Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat eine monotone Teilfolge.*

Beweis: Wir definieren

$$M = \{n : n \in \mathbb{N},\, x_n \ge x_k \text{ für alle } k \ge n\}\,.$$

Fall 1: M ist beschränkt. Sei m das größte Element von M (falls $M = \emptyset$, setzen wir $m = 0$.). Wir setzen $n_1 = m+1$. Ist n_k bereits definiert, so wählen wir ein $n_{k+1} > n_k$ mit $x_{n_k} < x_{n_{k+1}}$. Die hierdurch definierte Folge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist streng monoton wachsend.
Fall 2: M ist unbeschränkt. Wir wählen $n_1 \in M$ beliebig. Ist $n_k \in M$ bereits definiert, so wählen wir ein $n_{k+1} \in M$ mit $n_{k+1} > n_k$. Nach Definition von M gilt $x_{n_k} \ge x_{n_{k+1}}$. Die hierdurch definierte Folge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend. □

Satz 4.20 (Bolzano-Weierstraß)
Jede beschränkte reelle Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beweis: Nach Satz 4.19 hat (x_n) eine monotone Teilfolge (x_{n_k}), welche ebenfalls beschränkt ist. Nach Satz 4.14 ist (x_{n_k}) konvergent. □

Definition 4.21 (Häufungspunkt)
Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Ein $a \in \mathbb{R}$ heißt Häufungspunkt von (x_n), wenn es eine Teilfolge (x_{n_k}) von (x_n) gibt mit $x_{n_k} \to a$.

Aus Satz 4.20 folgt also, daß jede beschränkte Folge mindestens einen Häufungspunkt besitzt. Eine konvergente Folge hat wegen (4.27) genau einen Häufungspunkt, nämlich ihren Grenzwert. Die divergente Folge

$$x_n = (-1)^n$$

besitzt die beiden Häufungspunkte

$$1 = \lim_{k\to\infty} x_{2k}\,, \quad -1 = \lim_{k\to\infty} x_{2k+1}\,.$$

Definition 4.22 (Cauchyfolge)
Eine reelle Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Cauchyfolge, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$|x_n - x_m| < \varepsilon\,, \qquad \textit{für alle } n, m \geq n_0\,. \tag{4.28}$$

Satz 4.23 *Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente reelle Folge. Dann ist (x_n) eine Cauchyfolge.*

Beweis: Sei $x_n \to a$, sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir wählen $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle $n \geq n_0$. Dann gilt für alle $n, m \geq n_0$

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - a| + |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,,$$

also ist (x_n) Cauchyfolge. □

Satz 4.24 *Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Cauchyfolge. Dann ist (x_n) konvergent.*

Beweis: Wir wählen ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x_{n_0}| < 1$ für alle $n \geq n_0$ und setzen

$$C = \max\{|x_1|, \ldots, |x_{n_0-1}|, |x_{n_0}| + 1\}\,.$$

Dann gilt $|x_n| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also ist (x_n) beschränkt. Sei (x_{n_k}) eine konvergente Teilfolge – eine solche existiert nach Satz 4.20 – sei $x_{n_k} \to a$. Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir wählen $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$|x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}\,, \qquad \text{für alle } k \geq m_1\,,$$

$$|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}\,, \qquad \text{für alle } n, m \geq m_2\,.$$

Wir setzen $m_3 = \max\{m_1, m_2\}$. Dann gilt für alle $k \geq m_3$ wegen $n_k \geq k$

$$|x_k - a| \leq |x_k - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,,$$

also folgt $x_n \to a$. □

Um die Konvergenz einer reellen Folge (x_n) nachzuprüfen, genügt es also festzustellen, daß (x_n) eine Cauchyfolge ist. Den Grenzwert brauchen wir dabei nicht zu kennen.

Uneigentliche Konvergenz. Die Folgen

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots \tag{4.29}$$

und

$$1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0, 5, 0, \ldots \tag{4.30}$$

sind beide divergent und nach oben unbeschränkt. Im Falle der Folge (4.29) möchte man aber irgendwie ausdrücken, daß sie "gegen $+\infty$ strebt".

Definition 4.25 (Uneigentliche Konvergenz)
Eine reelle Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt uneigentlich konvergent gegen $+\infty$, wenn es zu jedem $C > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$x_n \geq C\,, \quad \textit{für alle } n \geq n_0\,. \tag{4.31}$$

Eine reelle Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt uneigentlich konvergent gegen $-\infty$, wenn $(-x_n)$ uneigentlich konvergent gegen $+\infty$ ist. Eine reelle Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt uneigentlich konvergent, wenn sie uneigentlich konvergent gegen $+\infty$ oder uneigentlich konvergent gegen $-\infty$ ist.

Für die uneigentliche Konvergenz einer Folge (x_n) verwendet man in der Analysis ebenfalls die Notation

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty\,, \quad \text{bzw.} \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty\,.$$

Satz 4.26 *Jede monotone reelle Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist entweder konvergent oder uneigentlich konvergent.*

Beweis: Sei (x_n) monoton wachsend. Ist (x_n) nach oben beschränkt, so ist sie nach Satz 4.14 konvergent. Sei nun (x_n) nach oben unbeschränkt, sei $C > 0$ beliebig. Wir wählen ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_{n_0} \geq C$, dann gilt $x_n \geq x_{n_0} \geq C$ für alle $n \geq n_0$, also ist (x_n) uneigentlich konvergent gegen $+\infty$. Ist (x_n) monoton fallend, so wenden wir das eben Bewiesene auf die Folge $(-x_n)$ an. □

Beispiel 4.27
Wir untersuchen die Konvergenz der durch

$$x_n = x^n \tag{4.32}$$

definierten Folge (x_n), wobei $x \in \mathbb{R}$ fest ist. Es sind verschiedene Fälle zu unterscheiden.
Fall 1: $x > 1$. Wegen $x^{n+1} = x \cdot x^n > 1 \cdot x^n = x^n$ ist (x_n) streng monoton wachsend, wegen Folgerung 3.27 ist (x_n) unbeschränkt, wegen Satz 4.26 ist (x_n) uneigentlich konvergent gegen $+\infty$.
Fall 2: $0 < x < 1$. Wegen $0 < x^{n+1} = x \cdot x^n < 1 \cdot x^n = x^n$ ist (x_n) streng monoton fallend und nach unten beschränkt, also ist (x_n) konvergent und

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} x_n\,.$$

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x^n < \varepsilon$ (wähle n mit $(x^{-1})^n > \varepsilon^{-1}$), also ist

$$0 \leq \inf_{n\in\mathbb{N}} x_n \leq 0\,,$$

und damit folgt $x_n \to 0$.
Fall 3: $-1 < x < 0$. Nach Fall 2 gilt $|x_n| \to 0$, also auch $x_n \to 0$ nach Übungsaufgabe.
Fall 4: $x < -1$. Dann ist $x_n = (-1)^n |x|^n$ divergent.
Fall 5: $x = 0$ oder $x = 1$. (x_n) ist konstant.
Fall 6: $x = -1$. $x_n = (-1)^n$ ist divergent.

Limes superior und Limes inferior. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige reelle Folge. Ist (x_n) nach oben beschränkt, so ist

$$y_n = \sup_{k\geq n} x_k \in \mathbb{R} \tag{4.33}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen

$$y_n = \sup_{k\geq n} x_k = \max\{x_n, \sup_{k\geq n+1} x_k\} = \max\{x_n, y_{n+1}\} \tag{4.34}$$

ist (y_n) eine monoton fallende Folge, also nach Satz 4.26 entweder konvergent oder uneigentlich konvergent gegen $-\infty$. Wir definieren den Limes superior der Folge (x_n) durch

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} x_k \,. \tag{4.35}$$

Ist (x_n) nach oben unbeschränkt, so gilt $y_n = +\infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$; wir verabreden in diesem Fall, daß

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = +\infty \,. \tag{4.36}$$

Auf diese Weise erreichen wir, daß für jede beliebige reelle Folge (x_n) der Limes superior definiert ist, und

$$\limsup_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \,.$$

Auf analoge Weise sehen wir, daß, falls (x_n) nach unten beschränkt ist, durch

$$z_n = \inf_{k\geq n} x_k$$

eine monoton wachsende reelle Folge (z_n) definiert ist, und wir definieren den Limes inferior von (x_n) durch

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} x_k \,. \tag{4.37}$$

Mit der Konvention $\liminf_{n\to\infty} x_n = -\infty$, falls (x_n) nach unten unbeschränkt ist, erhalten wir ebenfalls

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

für jede beliebige reelle Folge (x_n).

Beispiel: Für $x_n = (-1)^n$ gilt $y_n = 1$ und $z_n = -1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also

$$\limsup_{n\to\infty} (-1)^n = 1 \,, \quad \liminf_{n\to\infty} (-1)^n = -1 \,. \tag{4.38}$$

Die Folge

$$1, -1, 0, 1, -1, 0, 1, -1, 0, \ldots$$

hat die drei Häufungspunkte -1, 0 und 1; ihr Limes superior ist 1, ihr Limes inferior ist -1.

5 Die komplexen Zahlen

Die Gleichung

$$x^2 + 1 = 0 \tag{5.1}$$

hat keine Lösung $x \in \mathbb{R}$. Der Wunsch, (5.1) zu lösen, hat zu der Erfindung oder Entdeckung (je nachdem, welchen philosophischen Standpunkt man einnimmt) der komplexen Zahlen beigetragen.

Definition 5.1 (Komplexe Zahlen)
Wir definieren

$$\mathbb{C} = \{z : z = (x, y),\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\} \tag{5.2}$$

als die Menge aller geordneten Paare reeller Zahlen. Wir definieren eine Addition $+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *durch*

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \tag{5.3}$$

und eine Multiplikation $\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *durch*

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)\,. \tag{5.4}$$

Im Sinne der Gleichheit von Mengen ist also $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$. Die Addition in $\mathbb{C}$ entspricht der üblichen Vektoraddition im $\mathbb{R}^2$.

Wir definieren eine Einbettung $j : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ durch

$$j(x) = (x, 0)\,.$$

Offensichtlich ist j injektiv, und es gilt für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$$j(x_1 + x_2) = (x_1 + x_2, 0) = j(x_1) + j(x_2)\,,$$

$$j(x_1 x_2) = (x_1 x_2, 0) = j(x_1) \cdot j(x_2)\,.$$

Wir werden im Folgenden den Buchstaben “j” weglassen, d.h. für eine reelle Zahl x werden wir auch dann “x” schreiben, wenn wir sie als komplexe Zahl auffassen.

Man rechnet direkt nach, daß gilt:

Satz 5.2 $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *ist ein kommutativer Körper, d.h. die Eigenschaften (3.1) – (3.9) gelten, wenn man überall* $\mathbb{R}$ *durch* $\mathbb{C}$ *ersetzt.*

Das Nullelement in $\mathbb{C}$ ist $(0, 0)$, das Einselement $(1, 0)$. Das multiplikative Inverse z^{-1} von $z = (x, y) \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, hat die Form

$$z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)\,. \tag{5.5}$$

Die komplexe Zahl $(0, 1)$ heißt imaginäre Einheit und wird mit i bezeichnet. Ein $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ können wir also schreiben als

$$z = (x, y) = x \cdot (1, 0) + y \cdot (0, 1) = x + iy\,.$$

Es ist

$$i^2 = -1\,, \quad i^3 = -i\,, \quad i^4 = 1\,, \quad i^{n+4} = i^n \text{ für alle } n \in \mathbb{Z}\,.$$

Definition 5.3 *Seien $x, y \in \mathbb{R}$, $z = x + iy$. Wir definieren den Realteil* $\mathrm{Re}\,(z)$ *und den Imaginärteil* $\mathrm{Im}\,(z)$ *durch*

$$\mathrm{Re}\,(z) = x\,, \quad \mathrm{Im}\,(z) = y\,, \tag{5.6}$$

die zu z konjugiert komplexe Zahl $\overline{z} \in \mathbb{C}$ durch

$$\overline{z} = x - iy\,, \tag{5.7}$$

und den Betrag $|z|$ von z durch

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}\,. \tag{5.8}$$

Es folgen unmittelbar die Rechenregeln

$$\mathrm{Re}\,(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})\,, \quad \mathrm{Im}\,(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})\,, \quad \forall\, z \in \mathbb{C}\,,$$

sowie

$$\begin{aligned} \overline{\overline{z}} &= z\,, \quad \forall\, z \in \mathbb{C}\,, \\ \overline{z_1 + z_2} &= \overline{z}_1 + \overline{z}_2\,, \quad \forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}\,, \\ \overline{z_1 z_2} &= \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2\,, \quad \forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}\,. \end{aligned}$$

Ist $z = (x, 0) \in \mathbb{C}$, so ist $|z| = \sqrt{x^2} = |x|$, und es gilt

$$\mathrm{Re}\,(z) \le |z|\,, \quad \mathrm{Im}\,(z) \le |z|\,, \quad \forall\, z \in \mathbb{C}\,,$$

sowie

$$|\overline{z}| = |z|\,, \quad \forall\, z \in \mathbb{C}\,.$$

Die Eigenschaften der Betragsfunktion aus Lemma 3.19 gelten auch in $\mathbb{C}$:

Lemma 5.4 *Es gilt*

$$|z| \ge 0\,, \quad |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0\,, \quad \forall\, z \in \mathbb{C}\,, \tag{5.9}$$

$$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|\,, \quad \forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}\,, \tag{5.10}$$

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|\,, \quad \forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}\,. \tag{5.11}$$

Beweis: (5.9) ist klar wegen $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ für $z = (x, y)$.
Zu (5.10): Für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt

$$|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2) \cdot (\overline{z_1 z_2}) = z_1 z_2 \overline{z}_1 \overline{z}_2 = z_1 \overline{z}_1 z_2 \overline{z}_2 = |z_1|^2 |z_2|^2\,,$$

also folgt

$$|z_1 z_2| = \sqrt{|z_1|^2 |z_2|^2} = \sqrt{|z_1|^2}\sqrt{|z_2|^2} = |z_1||z_2|\,.$$

Zu (5.11): Für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt

$$\mathrm{Re}\,(z_1 \overline{z}_2) \le |z_1 \overline{z}_2| = |z_1||z_2|\,,$$

also

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = z_1 \overline{z}_1 + z_1 \overline{z}_2 + z_2 \overline{z}_1 + z_2 \overline{z}_2 \\ &= |z_1|^2 + 2\mathrm{Re}\,(z_1 \overline{z}_2) + |z_2|^2 \le |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2\,, \end{aligned}$$

also folgt (5.11) wieder durch Wurzelziehen. □

Entsprechend unserer allgemeinen Definition 4.1 definiert jede Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{C}$ eine Folge von komplexen Zahlen.

Definition 5.5 *Eine Folge* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* $\mathbb{C}$ *heißt konvergent gegen* $z \in \mathbb{C}$, *falls es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *ein* $n_0 \in \mathbb{N}$ *gibt mit*

$$|z_n - z| < \varepsilon\,, \qquad \textit{für alle } n \geq n_0\,. \tag{5.12}$$

Wir schreiben wieder

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z\,, \quad z_n \to z\,.$$

Lemma 5.6 *Sei* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge in* $\mathbb{C}$, *sei* $z \in \mathbb{C}$. *Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} |z_n - z| = 0\,. \tag{5.13}$$

Beweis: Übung. □

Lemma 5.7 *Seien* $(x_n), (y_n)$ *Folgen in* $\mathbb{R}$ *mit* $0 \leq x_n \leq y_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$, *es gelte* $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$. *Dann ist auch* (x_n) *konvergent, und* $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Beweis: Übung. □

Satz 5.8 *Sei* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge in* $\mathbb{C}$. *Dann sind äquivalent:*
(1) Die Folge (z_n) *ist konvergent (in* $\mathbb{C}$*).*
(2) Die Folgen $(\operatorname{Re} z_n)$ *und* $(\operatorname{Im} z_n)$ *sind konvergent (in* $\mathbb{R}$*).*
Ist (z_n) *konvergent, so gilt*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} z_n + i \lim_{n\to\infty} \operatorname{Im} z_n\,. \tag{5.14}$$

Beweis: (1) $\Rightarrow$ (2): Es ist

$$0 \leq |\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z| \leq |z_n - z|\,, \quad 0 \leq |\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} z| \leq |z_n - z|\,.$$

Hieraus und aus den Lemmata 5.6, 5.7 schließen wir

$$z_n \to z \quad \Rightarrow \quad |z_n - z| \to 0 \quad \Rightarrow \quad |\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z| \to 0 \text{ und } |\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} z| \to 0 \tag{5.15}$$

und weiter

$$\operatorname{Re} z_n \to \operatorname{Re} z\,, \quad \operatorname{Im} z_n \to \operatorname{Im} z\,. \tag{5.16}$$

Hieraus folgt (5.14) wegen

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} z_n + i \lim_{n\to\infty} \operatorname{Im} z_n = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z = z = \lim_{n\to\infty} z_n\,.$$

(2) $\Rightarrow$ (1): Sei $\operatorname{Re} z_n \to a$, $\operatorname{Im} z_n \to b$, setze $z = a + ib$. Dann ist

$$\begin{aligned} 0 \quad &\leq \quad |z_n - z| = |(\operatorname{Re} z_n + i \operatorname{Im} z_n) - (a + i\,b)| \\ &\leq \quad |\operatorname{Re} z_n - a| + |\operatorname{Im} z_n - b|\,, \end{aligned} \tag{5.17}$$

und weiter geht es analog zum Beweis von “(1)$\Rightarrow$(2)”. □

Beispiel:

$$z_n = \frac{1}{n} + i\frac{n+1}{n} \to 0 + i \cdot 1 = i\,.$$

Satz 5.9 *Seien* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergente Folgen in* $\mathbb{C}$. *Dann sind auch* $(z_n + w_n)$ *und* $(z_n w_n)$ *konvergent, und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} (z_n + w_n) = \lim_{n\to\infty} z_n + \lim_{n\to\infty} w_n \,, \tag{5.18}$$

$$\lim_{n\to\infty} (z_n w_n) = (\lim_{n\to\infty} z_n) \cdot (\lim_{n\to\infty} w_n) \,. \tag{5.19}$$

Ist außerdem $\lim_{n\to\infty} w_n \neq 0$, *so ist auch* (z_n/w_n) *konvergent, und*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{w_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} z_n}{\lim_{n\to\infty} w_n} \,. \tag{5.20}$$

Außerdem ist auch $(\overline{z}_n)$ *konvergent, und*

$$\lim_{n\to\infty} \overline{z}_n = \overline{\lim_{n\to\infty} z_n} \,. \tag{5.21}$$

Beweis: Die Beweise für den reellen Fall lassen sich wörtlich übertragen. Ist $z_n \to z$, so folgt (5.21) aus

$$\overline{z}_n = \operatorname{Re} z_n - i \operatorname{Im} z_n \to \operatorname{Re} z - i \operatorname{Im} z = \overline{z} \,.$$

□

Definition 5.10 *Eine Folge* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* $\mathbb{C}$ *heißt Cauchyfolge, wenn für alle* $\varepsilon > 0$ *ein* $n_0 \in \mathbb{N}$ *existiert mit*

$$|z_n - z_m| < \varepsilon \,, \qquad \textit{für alle } n, m \geq n_0 \,. \tag{5.22}$$

Lemma 5.11 *Eine Folge* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* $\mathbb{C}$ *ist Cauchyfolge genau dann, wenn die Folgen* $(\operatorname{Re} z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(\operatorname{Im} z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *reelle Cauchyfolgen sind.*

Beweis: Analog zum Beweis von Satz 5.8. □

Satz 5.12 *Eine Folge* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* $\mathbb{C}$ *ist konvergent genau dann, wenn sie Cauchyfolge ist.*

Beweis: Nach den Sätzen 4.23 und 4.24 sind die reellen Folgen $(\operatorname{Re} z_n)$ und $(\operatorname{Im} z_n)$ genau dann konvergent, wenn sie Cauchyfolgen sind. Die Behauptung folgt nun aus Satz 5.8. □

6 Reihen

Aus einer Folge, etwa

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$$

bilden wir durch Summation eine neue Folge

$$1, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}, \ldots$$

also

$$1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8}, \frac{31}{16}, \ldots$$

Definition 6.1 (Reihe) *Sei $n_0 \in \mathbb{Z}$, $(a_n)_{n \geq n_0}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Wir definieren*

$$s_n = \sum_{k=n_0}^{n} a_k \,, \quad n \geq n_0 \,. \tag{6.1}$$

Die Folge $(s_n)_{n \geq n_0}$ heißt unendliche Reihe, s_n heißt die n-te Partialsumme. Wir bezeichnen die Reihe mit

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k \,. \tag{6.2}$$

Die Reihe (6.2) heißt konvergent, falls die Folge (s_n) konvergent ist, andernfalls heißt sie divergent. Der Grenzwert der Reihe ist definiert als der Grenzwert der Folge (s_n). Wir bezeichnen ihn ebenfalls mit

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k \,. \tag{6.3}$$

Für $z \in \mathbb{C}$ definieren wir

$$z^0 = 1 \,.$$

Beispiel 6.2 (Geometrische Reihe)
Für $z \in \mathbb{C}$ betrachten wir die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \,. \tag{6.4}$$

Für die Partialsummen gilt

$$(1 - z)s_n = (1 - z) \sum_{k=0}^{n} z^k = (1 - z) + (z - z^2) + \ldots + (z^n - z^{n+1}) = 1 - z^{n+1} \,,$$

also

$$s_n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \,. \tag{6.5}$$

Für $|z| < 1$ gilt $|z|^{n+1} \to 0$, also auch $z^{n+1} \to 0$, also ist die Reihe (6.4) konvergent für $|z| < 1$, und es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1 - z} \,. \tag{6.6}$$

$\square$

Für die Konvergenz einer Reihe ist, genau wie bei einer Folge, das "Verhalten am Anfang" gleichgültig: Für beliebiges $m \geq n_0$ gilt, daß

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$$

konvergent ist genau dann, wenn

$$\sum_{k=m}^{\infty} a_k$$

konvergent ist. (Beweis: Übung.)

Satz 6.3 *Seien $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=n_0}^{\infty} b_k$ konvergente Reihen in $\mathbb{C}$, sei $c \in \mathbb{C}$. Dann sind auch die Reihen $\sum_{k=n_0}^{\infty}(a_k + b_k)$ und $\sum_{k=n_0}^{\infty} ca_k$ konvergent, und für die Grenzwerte gilt*

$$\sum_{k=n_0}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=n_0}^{\infty} a_k + \sum_{k=n_0}^{\infty} b_k\,, \qquad \sum_{k=n_0}^{\infty} ca_k = c\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k\,. \tag{6.7}$$

Beweis: Folgt aus Satz 5.9, angewandt auf die Folgen der Partialsummen

$$s_n = \sum_{k=n_0}^{n} a_k\,, \quad \sigma_n = \sum_{k=n_0}^{n} b_k\,.$$

□

Beispiel: Umwandlung einer rationalen Zahl von periodischer Dezimaldarstellung in eine Bruchdarstellung, etwa

$$\begin{aligned} 0.01\overline{7} &= 10^{-2} + 7\cdot 10^{-3} + 7\cdot 10^{-4} + \ldots = 10^{-2} + \sum_{k=0}^{\infty} 7\cdot 10^{-3}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^k \\ &= \frac{1}{100} + \frac{7}{1000}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{4}{225}\,. \end{aligned}$$

Satz 6.4 (Cauchy-Kriterium) *Sei $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ eine Reihe in $\mathbb{C}$. Dann sind äquivalent:*
(1) $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ ist konvergent.
(2) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so daß

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| < \varepsilon \qquad \textit{für alle } n \geq m \geq N\,. \tag{6.8}$$

Beweis: Für die Partialsummen gilt nach Definition

$$s_n - s_{m-1} = \sum_{k=m}^{n} a_k\,. \tag{6.9}$$

Die Bedingung (2) ist also äquivalent dazu, daß (s_n) eine Cauchyfolge in $\mathbb{C}$ ist. Nach Satz 5.12 ist das äquivalent dazu, daß (s_n) konvergiert. □

Beispiel 6.5 (Harmonische Reihe)
Die Reihe
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \tag{6.10}$$
heißt die harmonische Reihe. Sie ist divergent: Es gilt nämlich für alle $m \in \mathbb{N}$
$$\left| \sum_{k=m+1}^{2m} \frac{1}{k} \right| = \sum_{k=m+1}^{2m} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=m+1}^{2m} \frac{1}{2m} = m\frac{1}{2m} = \frac{1}{2} \,.$$
Für $\varepsilon = \frac{1}{2}$ läßt sich also kein N finden, so daß die Bedingung (6.8) erfüllt ist, also ist (6.10) divergent.

Folgerung 6.6 *Für jede konvergente Reihe $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ in $\mathbb{C}$ gilt*
$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0 \,. \tag{6.11}$$

Beweis: Nach Satz 6.4 finden wir zu jedem $\varepsilon > 0$ ein N mit
$$|a_m| = \left| \sum_{k=m}^{m} a_k \right| < \varepsilon \qquad \text{für alle } m \geq N \,,$$
also gilt $|a_k| \to 0$ und damit auch $a_k \to 0$. □

Die Umkehrung von Folgerung 6.6 gilt nicht, d.h. aus Bedingung (6.11) folgt nicht, daß die Reihe $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ konvergent ist. (Beispiel: Die harmonische Reihe.)

Definition 6.7 (Absolute Konvergenz)
Eine Reihe $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ in $\mathbb{C}$ heißt absolut konvergent, falls die Reihe $\sum_{k=n_0}^{\infty} |a_k|$ konvergent ist.

Beispiel: Die geometrische Reihe
$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k$$
ist absolut konvergent für $|z| < 1$ (da $|\,|z|\,| = |z| < 1$), und es gilt
$$\sum_{k=0}^{\infty} |z|^k = \frac{1}{1-|z|} \,.$$

Satz 6.8 *Ist eine Reihe $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ in $\mathbb{C}$ absolut konvergent, so ist sie auch konvergent, und*
$$\left| \sum_{k=n_0}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=n_0}^{\infty} |a_k| \,. \tag{6.12}$$

Beweis: Sei $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ in $\mathbb{C}$ absolut konvergent. Dann gibt es nach Satz 6.4 zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\left| \sum_{k=m}^{n} |a_k| \right| < \varepsilon \qquad \text{für alle } n, m \geq N\,,$$

also gilt auch

$$\left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=m}^{n} |a_k| = \left| \sum_{k=m}^{n} |a_k| \right| < \varepsilon \qquad \text{für alle } n, m \geq N\,,$$

also erfüllt auch $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ das Cauchy-Kriterium und ist nach Satz 6.4 konvergent. Da

$$\left| \sum_{k=n_0}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=n_0}^{n} |a_k|$$

für alle $n \geq n_0$ gilt, folgt (6.12) mit Grenzübergang $n \to \infty$. □

Die Umkehrung von Satz 6.8 gilt nicht: Die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k}$$

ist nicht absolut konvergent (da die harmonische Reihe divergiert), aber, wie wir später sehen werden, konvergent.

Satz 6.9 *Sei $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ eine Reihe in $\mathbb{C}$. Dann sind äquivalent:*
(1) $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ ist absolut konvergent.
(2) Die reelle Folge (s_n) der Partialsummen von $\sum_{k=n_0}^{\infty} |a_k|$,

$$s_n = \sum_{k=n_0}^{n} |a_k|\,, \quad n \geq n_0\,,$$

ist beschränkt.

Beweis: (1) $\Rightarrow$ (2): (s_n) ist konvergent, also beschränkt.
(2) $\Rightarrow$ (1): (s_n) ist beschränkt und monoton wachsend, also konvergent. □

Definition 6.10 (Majorante)
Sei $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ eine Reihe in $\mathbb{C}$. Eine reelle Reihe $\sum_{k=n_0}^{\infty} b_k$ mit $|a_k| \leq b_k$ für alle $k \geq n_0$ heißt Majorante der Reihe $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$.

Satz 6.11 (Majorantenkriterium)
Sei $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ eine Reihe in $\mathbb{C}$, welche eine konvergente Majorante $\sum_{k=n_0}^{\infty} b_k$ besitzt. Dann ist $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

Beweis: Da $b_k \geq 0$ für alle k, ist $\sum_{k=n_0}^{\infty} b_k$ absolut konvergent, also gibt es nach Satz 6.9 ein $C > 0$ mit

$$C \geq \sum_{k=n_0}^{n} b_k \geq \sum_{k=n_0}^{n} |a_k|$$

für alle $n \geq n_0$, also ist $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent nach Satz 6.9. □

Beispiel 6.12
(1) Wir betrachten

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^3+k}{k^3-2} z^k \,, \quad |z| < 1 \,. \tag{6.13}$$

Für die durch

$$y_k = \frac{k^3+k}{k^3-2}$$

definierte Folge gilt $y_k \to 1$, also ist sie beschränkt, also gibt es $C > 0$ mit

$$|a_k| \le C|z|^k$$

für alle k, und $b_k = C|z|^k$ definiert eine konvergente Majorante der Reihe (6.13).
(2) Wir betrachten

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \,. \tag{6.14}$$

Die Reihe

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)k} \tag{6.15}$$

ist eine Majorante von

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} \,. \tag{6.16}$$

Für die Partialsummen von (6.15) gilt

$$s_n = \frac{n-1}{n} \,. \tag{6.17}$$

Beweis von (6.17) mit Induktion: $s_2 = \frac{1}{2}$,

$$s_{n+1} = s_n + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1} \,.$$

Wegen $s_n \to 1$ ist (6.15) konvergent, also auch (6.16) und damit auch (6.14).
Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n} \tag{6.18}$$

ist für festes $n \ge 2$ ebenfalls konvergent, da sie die konvergente Majorante (6.14) hat. □

Folgerung 6.13 (Divergente Minorante) *Seien $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=n_0}^{\infty} b_k$ Reihen in $\mathbb{R}$ mit $0 \le a_k \le b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Ist $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ divergent, so ist auch $\sum_{k=n_0}^{\infty} b_k$ divergent.*

Beweis: Ist $\sum_{k=n_0}^{\infty} b_k$ konvergent, so ist nach Satz 6.11 auch $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ konvergent. □

In der Situation von Folgerung 6.13 heißt $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ eine divergente Minorante von $\sum_{k=n_0}^{\infty} b_k$.

Satz 6.14 (Quotientenkriterium) *Sei $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ eine Reihe in $\mathbb{C}$. Es gebe ein $q \in \mathbb{R}$ mit $q < 1$ und*

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \leq q\,, \qquad \textit{für alle } k \geq n_0\,. \tag{6.19}$$

Dann ist $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

Beweis: Folgt aus dem Majorantenkriterium, da die Reihe

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} |a_{n_0}| q^{k-n_0}$$

eine konvergente Majorante von $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ ist. □

Beispiel 6.15 (Exponentialreihe)
Wir betrachten die sogenannte Exponentialreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\,, \tag{6.20}$$

wobei $z \in \mathbb{C}$ eine feste komplexe Zahl ist. Mit $a_k = z^k/k!$ gilt

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{|z|^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{|z|^k} = \frac{|z|}{k+1}\,,$$

also

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \leq \frac{1}{2}\,, \qquad \text{für alle } k \geq 2|z| - 1\,,$$

also ist (6.20) absolut konvergent.

Definition 6.16 (Exponentialfunktion)
Die durch

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \tag{6.21}$$

definierte Funktion

$$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

heißt Exponentialfunktion. Wir definieren die Zahl e durch

$$e = \exp(1)\,. \tag{6.22}$$

Aus der Definition folgt unmittelbar, daß $\exp(z) \in \mathbb{R}$, falls $z \in \mathbb{R}$, und

$$\exp(0) = 1\,.$$

(Bild im Reellen.) Es ist

$$e = 2.718281828459045235\ldots$$

Eine Reihe $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ heißt **alternierend**, wenn die Folgenglieder a_k abwechselnd positives und negatives Vorzeichen haben.

Satz 6.17 (Leibnizkriterium)
Sei $(a_n)_{n \geq n_0}$ eine monoton fallende Folge in $\mathbb{R}$ mit $a_n \to 0$. Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} (-1)^k a_k \,, \tag{6.23}$$

und es gilt für alle $n \geq n_0$

$$\left| \sum_{k=n_0}^{\infty} (-1)^k a_k - s_n \right| = \left| \sum_{k=n_0}^{\infty} (-1)^k a_k - \sum_{k=n_0}^{n} (-1)^k a_k \right| \leq a_{n+1} \,. \tag{6.24}$$

Beweis: Sei zunächst $n_0 = 0$. Für $k \in \mathbb{N}$ ist $a_{2k} - a_{2k-1} \leq 0$, also

$$s_{2k} = s_{2k-2} - a_{2k-1} + a_{2k} \leq s_{2k-2} \,,$$

$$s_{2k+1} = s_{2k-1} + a_{2k} - a_{2k+1} \geq s_{2k-1} \,,$$

also ist $(s_{2k})_{k \in \mathbb{N}}$ monoton fallend, $(s_{2k-1})_{k \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend. Es gilt

$$s_1 \leq s_{2k-1} = s_{2k} - a_{2k} \leq s_{2k} \leq s_0 \tag{6.25}$$

für alle k, und weiter für alle $m \geq k$

$$s_1 \leq s_{2k-1} \leq s_{2m-1} \leq s_{2m} \leq s_{2k} \leq s_0 \,. \tag{6.26}$$

Also sind beide Teilfolgen (s_{2k}) und (s_{2k-1}) beschränkt, also konvergent nach Satz 4.14, und

$$s_{2k-1} \leq \underbrace{\lim_{m \to \infty} s_{2m-1}}_{=:b} \leq s_{2k} \,, \quad s_{2k-1} \leq \underbrace{\lim_{m \to \infty} s_{2m}}_{=:c} \leq s_{2k} \tag{6.27}$$

gilt für alle $k \in \mathbb{N}$. Aus (6.26) folgt

$$0 \leq |c - b| \leq a_{2k} \,,$$

und wegen $a_{2k} \to 0$ gilt $c = b$. Da für alle n entweder $s_n \leq b \leq s_{n+1}$ oder $s_n \geq b \geq s_{n+1}$ gilt, folgt

$$0 \leq |b - s_n| \leq |s_n - s_{n+1}| = a_{n+1} \to 0 \,,$$

also $|b - s_n| \to 0$ wegen Lemma 5.7. Der allgemeine Fall $n_0 \in \mathbb{Z}$ kann durch Umnumerieren und Multiplikation mit -1 darauf zurückgeführt werden. $\square$

Beispiel: Die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} \tag{6.28}$$

ist nach dem Leibniz-Kriterium konvergent. (Ihr Grenzwert ist, wie sich später herausstellen wird, die Zahl $\ln 2$.) Sie ist aber nicht absolut konvergent, wie wir bereits gesehen haben. Wir betrachten (6.28) etwas näher. Die aus den Glieder mit geraden Indizes gebildete Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} -\frac{1}{2k} \tag{6.29}$$

ist divergent (andernfalls wäre die harmonische Reihe konvergent), die aus den Glieder mit ungeraden Indizes gebildete Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \tag{6.30}$$

ist ebenfalls divergent (das Negative der Reihe (6.29) ist eine divergente Minorante). Geben wir nun eine beliebige Zahl $a \in \mathbb{R}$ vor, so können wir durch Umordnen erreichen, daß die umgeordnete Reihe gegen a konvergiert, z.B. für $a = 1$ können wir betrachten

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} \dots$$

(wir nehmen negative Glieder so lange, bis die Partialsumme kleiner als 1 ist, dann positive Glieder so lange, bis die Partialsumme größer als 1 ist, usw.). Dieses Phänomen kann bei absolut konvergenten Reihen nicht auftreten.

Definition 6.18 (Umordnung)
Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine Reihe in $\mathbb{C}$, sei $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung. Dann heißt die Reihe

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{\tau(j)}$$

eine Umordnung von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Satz 6.19 *Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine Reihe in $\mathbb{C}$, sei $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv. Ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent, so ist auch $\sum_{j=1}^{\infty} a_{\tau(j)}$ absolut konvergent, und es gilt*

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{\tau(j)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \,. \tag{6.31}$$

Beweis: Wir setzen

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \,, \quad \tilde{s} = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \,,$$

und definieren für $m \in \mathbb{N}$

$$M(m) = \max\{\tau(j) : 1 \le j \le m\} \,.$$

Da τ injektiv ist, gilt für alle m

$$\sum_{j=1}^{m} |a_{\tau(j)}| \le \sum_{k=1}^{M(m)} |a_k| \le \tilde{s} \,,$$

also ist $\sum_{j=1}^{\infty} a_{\tau(j)}$ absolut konvergent nach Satz 6.9. Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left| \sum_{j=1}^{n} a_{\tau(j)} - s \right| \le \left| \sum_{j=1}^{n} a_{\tau(j)} - \sum_{k=1}^{m} a_k \right| + \left| \sum_{k=1}^{m} a_k - s \right| \,. \tag{6.32}$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir wählen m nach Satz 6.4 so, daß

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}\,, \tag{6.33}$$

dann ist auch

$$\left|\sum_{k=m+1}^{\infty} a_k\right| < \frac{\varepsilon}{2}\,, \tag{6.34}$$

also

$$\left|\sum_{k=1}^{m} a_k - s\right| < \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{6.35}$$

Wähle n_0 so, daß

$$\{1,\ldots,m\} \subset \{\tau(j) : 1 \le j \le n_0\}\,.$$

Das ist möglich, da τ surjektiv ist. Dann gilt für alle $n \ge n_0$ wegen (6.33)

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_{\tau(j)} - \sum_{k=1}^{m} a_k\right| \le \sum_{k=m+1}^{M(n)} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{6.36}$$

Aus (6.32) – (6.36) folgt also

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_{\tau(j)} - s\right| < \varepsilon\,, \qquad \text{für alle } n \ge n_0\,. \tag{6.37}$$

□

Sind p, q Polynome,

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k\,, \quad q(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k\,, \tag{6.38}$$

so hat deren Produkt die Form

$$(pq)(x) = \sum_{k=0}^{n+m} c_k x^k\,, \quad c_k = \sum_{j=0}^{k} a_{k-j} b_j\,. \tag{6.39}$$

Der Wunsch, diese Formel auf Potenzreihen der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

zu übertragen, führt auf das sogenannte Cauchy-Produkt von Reihen.

Satz 6.20 *Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergente Reihen in $\mathbb{C}$, sei für $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$*

$$c_k = \sum_{j=0}^{k} a_{k-j} b_j\,. \tag{6.40}$$

Dann ist auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ absolut konvergent, und es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right)\,. \tag{6.41}$$

Beweis: Wir setzen

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} c_k \,, \tag{6.42}$$

$$s_n^* = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right) , \quad p_n^* = \left(\sum_{k=0}^{n} |a_k|\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} |b_k|\right) . \tag{6.43}$$

Nach Satz 4.9 gilt

$$\lim_{n\to\infty} s_n^* = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) , \quad \lim_{n\to\infty} p_n^* = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} |b_k|\right) .$$

Es genügt daher zu zeigen, daß

$$\lim_{n\to\infty} (s_n - s_n^*) = 0 \,. \tag{6.44}$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir wählen $m \in \mathbb{N}$ mit

$$|p_n^* - p_m^*| < \varepsilon \,, \qquad \text{für alle } n \geq m \,. \tag{6.45}$$

Sei $n \geq m$, dann gilt

$$|p_n^* - p_m^*| = \sum_{(i,j)\in\Gamma_n} |a_i b_j| \,, \tag{6.46}$$

mit

$$\Gamma_n = \{(i,j) : 0 \leq i,j \leq n,\ i > m \text{ oder } j > m\} \,. \tag{6.47}$$

Weiter ist

$$s_n^* = \sum_{i,j=0}^{n} a_i b_j \,, \quad s_n = \sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j\leq n}}^{n} a_i b_j \,, \tag{6.48}$$

also

$$|s_n^* - s_n| \leq \sum_{(i,j)\in\Delta_n} |a_i b_j| \,, \tag{6.49}$$

mit

$$\Delta_n = \{(i,j) : 0 \leq i,j \leq n,\ i+j > n\} \,. \tag{6.50}$$

Für $n \geq 2m$ gilt $\Delta_n \subset \Gamma_n$, also

$$|s_n^* - s_n| \leq \sum_{(i,j)\in\Delta_n} |a_i b_j| \leq \sum_{(i,j)\in\Gamma_n} |a_i b_j| = |p_n^* - p_m^*| < \varepsilon \,,$$

Damit ist gezeigt, daß (6.44) gilt. Die absolute Konvergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ folgt wegen

$$\sum_{k=0}^{n} |c_k| \leq \sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j\leq n}}^{n} |a_i b_j| \leq p_n^* \leq \lim_{l\to\infty} p_l^*$$

aus Satz 6.9. □

Satz 6.21 *Es gilt*

$$\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w) \tag{6.51}$$

für alle $z, w \in \mathbb{C}$.

Beweis: Mit

$$a_k = \frac{z^k}{k!}\,, \quad b_k = \frac{w^k}{k!}\,, \quad c_k = \sum_{j=0}^{k} a_{k-j} b_j$$

gilt wegen Satz 6.20 und Satz 3.5 (letzterer gilt auch in $\mathbb{C}$ mit demselben Beweis wie in $\mathbb{R}$)

$$\begin{aligned}
\exp(z+w) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z+w)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} z^{k-j} w^j \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} \frac{z^{k-j}}{(k-j)!} \frac{w^j}{j!} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \right) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!} \right) = \exp(z)\exp(w)\,. \qquad (6.52)
\end{aligned}$$

$\square$

Folgerung 6.22 *Es gelten*

$$\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}\,, \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C}\,, \tag{6.53}$$

$$\exp(z) \neq 0\,, \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C}\,, \tag{6.54}$$

$$\exp(x) > 0\,, \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}\,, \tag{6.55}$$

$$\exp(n) = e^n\,, \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}\,. \tag{6.56}$$

$$\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})\,, \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C}\,, \tag{6.57}$$

Beweis: Aus

$$1 = \exp(0) = \exp(z-z) = \exp(z)\exp(-z) \tag{6.58}$$

folgen (6.53) und (6.54). Aus der Definition der Exponentialfunktion folgt

$$\exp(x) \geq 1 > 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$, also wegen (6.58) auch $\exp(x) > 0$ für $x < 0$. Aus

$$\exp(n) = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} 1 \right) = \prod_{k=1}^{n} \exp(1)$$

folgt (6.56). Schließlich ergibt sich (6.57) aus

$$\exp(\overline{z}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\overline{z}^k}{k!} = \lim_{n\to\infty} \overline{\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}} = \overline{\exp(z)}\,.$$

$\square$

7 Unendliche Mengen

Definition 7.1 *Zwei Mengen M und N heißen gleichmächtig, wenn es eine bijektive Abbildung $f : M \to N$ gibt.*

Lemma 7.2 *Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Die Mengen $\{1, \ldots, m\}$ und $\{1, \ldots, n\}$ sind gleichmächtig genau dann, wenn $m = n$.*

Beweis: Ist $m = n$, so können wir für f die Identität wählen. Sei nun $m \neq n$. Wir zeigen mit Induktion über n die Behauptung:

> Ist $m > n$, so gibt es keine bijektive Abbildung $f : \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, n\}$.

Induktionsanfang $n = 1$: Die einzige Abbildung $f : \{1, \ldots, m\} \to \{1\}$ ist gegeben durch $f(k) = 1$ für alle k, und diese Abbildung ist für $m > 1$ nicht bijektiv.
Induktionsschritt $n - 1 \to n$: Es genügt zu zeigen:

> Ist $m > n$ und $f : \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, n\}$ bijektiv, so gibt es eine bijektive Abbildung $g : \{1, \ldots, m-1\} \to \{1, \ldots, n-1\}$.

Die Abbildung g wird aus f wie folgt konstruiert. Zunächst ist die Restriktion

$$\tilde{f} : \{1, \ldots, m-1\} \to \{1, \ldots, n\} \setminus \{f(m)\}$$

von f auf $\{1, \ldots, m-1\}$ bijektiv. Wir definieren eine Abbildung

$$h : \{1, \ldots, n\} \setminus \{f(m)\} \to \{1, \ldots, n-1\}$$

durch

$$h(i) = \begin{cases} i\,, & \text{falls } i < f(m)\,, \\ i - 1\,, & \text{falls } i > f(m)\,. \end{cases}$$

Dann ist h ebenfalls bijektiv, und $g = h \circ \tilde{f}$ ist die gesuchte Bijektion. □

Definition 7.3 *Sei M Menge. Ist $n \in \mathbb{N}$ und sind M und $\{1, \ldots, n\}$ gleichmächtig, so definieren wir die Anzahl der Elemente von M als n, geschrieben*

$$\#M = n\,.$$

Wir setzen $\#\emptyset = 0$. M heißt endlich, wenn es ein $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gibt mit $\#M = n$, andernfalls heißt M unendlich, und wir schreiben $\#M = \infty$.

Definition 7.4 (Abzählbare Menge)
Eine nichtleere Menge M heißt abzählbar, wenn es eine surjektive Abbildung $\tau : \mathbb{N} \to M$ gibt.

"M ist abzählbar" bedeutet also, daß es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M gibt, in der jedes Element von M mindestens einmal auftaucht. Beispiele: Jede endliche nichtleere Menge ist abzählbar, $\mathbb{N}$ ist abzählbar. $\mathbb{Z}$ ist abzählbar: Die Abbildung $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$,

$$\tau(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}\,, & n \text{ gerade }\,, \\ -\frac{n-1}{2}\,, & n \text{ ungerade }\,, \end{cases}$$

ist surjektiv. Sie ist sogar bijektiv, $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ sind also gleichmächtig. (Andererseits ist $\mathbb{N}$ eine echte Teilmenge von $\mathbb{Z}$.)

Lemma 7.5 *Seien M, N Mengen und $f : M \to N$ Abbildung. Ist M abzählbar und f surjektiv, so ist auch N abzählbar.*

Beweis: Ist $\tau : \mathbb{N} \to M$ surjektiv, so ist auch $f \circ \tau : \mathbb{N} \to N$ surjektiv. □

Folgerung 7.6 *Sei M abzählbar, $N \subset M$. Dann ist N abzählbar.*

Beweis: Wähle als $f : M \to N$ irgendeine Fortsetzung der Identität auf N. □

Satz 7.7 *$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist abzählbar.*

Beweis: In der Folge

$$(1,1), (1,2), (2,1), (1,3), (2,2), (3,1), (1,4) \ldots$$

taucht jedes Element von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mindestens einmal (sogar genau einmal) auf. Formal können wir die entsprechende Abbildung $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ beschreiben durch

$$\tau(k) = (k - s_n, s_{n+1} - k + 1)\,, \quad \text{falls } s_n < k \le s_{n+1}\,,$$

wobei

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}\,, \quad s_0 = 0\,.$$

Man rechnet nach, daß τ surjektiv ist. □

Folgerung 7.8 *Sind M und N abzählbare Mengen, so ist auch $M \times N$ abzählbar.*

Beweis: Seien $\tau_M : \mathbb{N} \to M$ und $\tau_N : \mathbb{N} \to N$ surjektiv. Dann ist auch

$$\tau : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to M \times N\,, \quad \tau(j,k) = (\tau_M(j), \tau_N(k))$$

surjektiv, also $M \times N$ abzählbar wegen Folgerung 7.5 und Satz 7.7. □

Folgerung 7.9 *$\mathbb{Q}$ ist abzählbar.*

Beweis: Die Abbildung

$$\tau : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}\,, \quad \tau(k,n) = \frac{k}{n}\,,$$

ist surjektiv. □

Folgerung 7.10 *Sei $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von abzählbaren Mengen. Dann ist auch*

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$$

abzählbar.

Beweis: Sei $\tau_n : \mathbb{N} \to M_n$ surjektiv für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist auch

$$\tau : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n\,, \quad \tau(n,k) = \tau_n(k)\,,$$

surjektiv. □

Definition 7.11 (Algebraische Zahl, transzendente Zahl)
Eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ heißt algebraisch, wenn es ein von Null verschiedenes Polynom p mit ganzzahligen Koeffizienten gibt, so daß $p(x) = 0$. Eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ heißt transzendent, wenn x nicht algebraisch ist.

Beispiel: $x = \sqrt{2}$ ist algebraisch, da $x^2 - 2 = 0$.

Satz 7.12 *Die Menge der algebraischen Zahlen ist abzählbar.*

Beweis: Die Menge G aller Polynome, deren Koeffizienten alle ganzzahlig sind, ist abzählbar. (Beweis: Übungsaufgabe.) Da jedes Polynom $p \neq 0$ nur endlich viele Nullstellen hat, ist die Menge N aller solcher Nullstellen abzählbar; betrachte

$$\tau : \mathbb{N} \times G \to N\,,$$

wobei $\tau(k,p)$ als die k-te Nullstelle von p definiert ist, falls die Anzahl der Nullstellen von p größer oder gleich k ist, und $\tau(k,p) = 0$ andernfalls. □

Bemerkung 7.13
Die Zahlen e und π sind transzendent. Aus letzterem folgt (wie man erkennt, wenn man sich näher mit Algebra beschäftigt), daß die sogenannte "Quadratur des Kreises" ein unlösbares Problem ist. (Das Problem besteht darin, zu einem gegebenen Kreis nur unter Verwendung von Zirkel und Lineal ein Quadrat gleicher Fläche zu konstruieren.) Die Transzendenz von π ist im vorigen Jahrhundert (von Lindemann, 1882) bewiesen worden. □

Definition 7.14 (Überabzählbare Menge)
Eine unendliche Menge M heißt überabzählbar, wenn sie nicht abzählbar ist.

Wir wollen beweisen, daß $\mathbb{R}$ überabzählbar ist. Wegen Folgerung 7.6 genügt es zu zeigen, daß

$$[0,1) = \{x : x \in \mathbb{R},\, 0 \leq x < 1\}$$

überabzählbar ist. Zu diesem Zweck betrachten wir für $x \in [0,1)$ die Dezimalbruchentwicklung

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot 10^{-k}\,, \quad a_k \in \{0,\ldots,9\}\,, \tag{7.1}$$

wobei zu gegebenem x die a_k folgendermaßen konstruiert werden: Sei $s_0 = 0$. Sind $a_1, \ldots, a_{n-1}$ und damit

$$s_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} a_k \cdot 10^{-k} \tag{7.2}$$

bereits konstruiert, so wählen wir $a_n \in \{0, \ldots, 9\}$ so, daß

$$s_{n-1} + a_n 10^{-n} \leq x < s_{n-1} + (a_n + 1)10^{-n} \,. \tag{7.3}$$

Satz 7.15 *Die Menge* $[0,1)$ *ist überabzählbar.*

Beweis: Wir zeigen, daß es keine surjektive Abbildung $\tau : \mathbb{N} \to [0,1)$ gibt. Sei $\tau : \mathbb{N} \to [0,1)$ eine beliebige Abbildung. Sei

$$\tau(j) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} \cdot 10^{-k} \,, \quad j \in \mathbb{N} \,,$$

die gemäß (7.1) – (7.3) konstruierte Dezimalbruchentwicklung von $\tau(j)$. Wir definieren ein $x \in [0,1)$ durch

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot 10^{-k} \,, \tag{7.4}$$

wobei wir $b_k \in \{0, \ldots, 8\}$ so wählen, daß $b_k \neq a_{kk}$ gilt für alle $k \in \mathbb{N}$. Man prüft nach, daß wegen

$$0 \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k \cdot 10^{-k} < 10^{-n}$$

(hier geht $b_k \leq 8$ ein) die Darstellung (7.4) mit der gemäß (7.1) – (7.3) konstruierten Dezimalbruchentwicklung von x übereinstimmt. Es folgt, daß $x \neq \tau(j)$ gilt für alle $j \in \mathbb{N}$. Also ist τ nicht surjektiv. □

Folgerung 7.16 *Sei M eine abzählbare Teilmenge von $\mathbb{R}$. Dann ist $\mathbb{R} \setminus M$ überabzählbar. Insbesondere ist die Menge aller transzendenten Zahlen (und erst recht die Menge aller irrationalen Zahlen) überabzählbar.*

Beweis: Wäre $\mathbb{R} \setminus M$ abzählbar, so wäre auch $\mathbb{R}$ abzählbar nach Satz 7.10, im Widerspruch zu Satz 7.15. □

Bemerkung 7.17 (Kontinuumshypothese)
Nach dem eben Bewiesenen sind $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$ nicht gleichmächtig. Man kann sich fragen, ob es "zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$ noch etwas gibt", d.h. ob es eine Menge M und surjektive Abbildungen

$$f : \mathbb{R} \to M \,, \quad g : M \to \mathbb{N}$$

gibt, so daß M weder zu $\mathbb{N}$ noch zu $\mathbb{R}$ gleichmächtig ist. Die sogenannte Kontinuumshypothese besagt, daß es eine solche Menge M nicht gibt. Es ist mit Methoden der Mathematischen Logik bewiesen worden, daß die Kontinuumshypothese von einer Reihe üblicher Axiomensysteme der Mengenlehre unabhängig ist, das heißt, daß sowohl die Annahme, sie sei wahr, als auch die Annahme, sie sei falsch, mit diesen Axiomensystemen verträglich ist.

8 Stetige Funktionen

In diesem Abschnitt betrachten wir Funktionen

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}.$$

Typische Definitionsgebiete D sind Intervalle. Sind $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$, so definieren wir das abgeschlossene Intervall $[a, b]$ durch

$$[a, b] = \{x : x \in \mathbb{R},\ a \leq x \leq b\}.$$

Ist $a < b$, so definieren wir das offene Intervall (a, b) und die halboffenen Intervalle $(a, b]$ und $[a, b)$ durch

$$\begin{aligned}
(a, b) &= \{x : x \in \mathbb{R},\ a < x < b\}, \\
(a, b] &= \{x : x \in \mathbb{R},\ a < x \leq b\}, \\
[a, b) &= \{x : x \in \mathbb{R},\ a \leq x < b\}.
\end{aligned}$$

Weiter definieren wir die uneigentlichen Intervalle

$$\begin{aligned}
[a, \infty) = \{x : x \in \mathbb{R},\ x \geq a\}, &\qquad (a, \infty) = \{x : x \in \mathbb{R},\ x > a\}, \\
(-\infty, a] = \{x : x \in \mathbb{R},\ x \leq a\}, &\qquad (-\infty, a) = \{x : x \in \mathbb{R},\ x < a\}.
\end{aligned}$$

Definition 8.1 (Abschluß)
Sei $D \subset \mathbb{R}$. Wir definieren den Abschluß $\overline{D}$ von D durch

$$\overline{D} = \{a : a \in \mathbb{R},\ \textit{es gibt eine Folge } (x_n) \textit{ in } D \textit{ mit } x_n \to a\}. \tag{8.1}$$

Es gilt offensichtlich

$$D \subset \overline{D}. \tag{8.2}$$

Beispiele:

$$\overline{(a, b)} = [a, b], \quad \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}.$$

Definition 8.2 (Grenzwert einer Funktion)
Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ und $a \in \overline{D}$. Die Zahl $c \in \mathbb{R}$ heißt Grenzwert von f an der Stelle a (oder: in a), falls

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c \tag{8.3}$$

gilt für jede Folge (x_n) in D mit $x_n \to a$.

Lemma 8.3 *Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ und $a \in \overline{D}$. Dann hat f höchstens einen Grenzwert in a.*

Beweis: Seien c, d Grenzwerte von f in a, seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in D mit $x_n \to a$, $y_n \to a$, $f(x_n) \to c$ und $f(y_n) \to d$. Die durch $z_{2n} = x_n$, $z_{2n-1} = y_n$ definierte Folge $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert ebenfalls gegen a. Da c, d Grenzwerte von f in a sind, gilt nach (8.3)

$$c = \lim_{k\to\infty} f(z_k) = d.$$

□

Notation 8.4
Ist c der Grenzwert von $f : D \to \mathbb{R}$ in a, so schreiben wir

$$\lim_{x \to a} f(x) = c\,, \quad \text{oder auch} \quad \lim_{\substack{x \to a \\ x \in D}} f(x) = c\,.$$

Beispiel 8.5
(1) Für $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{x \to 0} \exp(x) = 1\,. \tag{8.4}$$

Beweis: Nach Übungsaufgabe gilt

$$|\exp(x_n) - 1| \le 2|x_n|\,, \quad \text{falls } |x_n| \le 1\,,$$

woraus die Behauptung folgt.
(2) Für $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{\exp(x) - 1}{x} = 1\,. \tag{8.5}$$

Beweis: Durch

$$f(x) = \frac{\exp(x) - 1}{x}$$

wird eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ definiert. Es ist $0 \in \overline{D} = \mathbb{R}$. Nach Übungsaufgabe gilt

$$|\exp(x_n) - (1 + x_n)| \le 2\frac{|x_n|^2}{2!} = |x_n|^2\,, \quad \text{falls } |x_n| \le 1\,.$$

Division durch $|x_n|$ ergibt, falls $x_n \neq 0$,

$$\left| \frac{\exp(x_n) - 1}{x_n} - 1 \right| \le |x_n|\,, \quad \text{falls } |x_n| \le 1\,.$$

Ist also (x_n) Folge in D mit $x_n \to 0$, so gilt $f(x_n) \to 1$, und damit ist die Behauptung bewiesen.

Definition 8.6 (Stetigkeit)
Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$. Ist $a \in D$, so heißt f stetig in a, falls

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)\,. \tag{8.6}$$

f heißt stetig (oder deutlicher: stetig in D), falls f in jedem Punkt $a \in D$ stetig ist. Wir definieren

$$C(D) = \{f | \quad f : D \to \mathbb{R},\ f \text{ stetig in } D\}\,. \tag{8.7}$$

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist also genau dann stetig in $a \in D$, falls

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(a) \tag{8.8}$$

gilt für alle Folgen (x_n) in D mit $x_n \to a$. f ist genau dann stetig in (oder: auf) D, falls

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \to \infty} x_n\right) \tag{8.9}$$

gilt für jede Folge (x_n) in D, welche in D konvergiert.

Beispiel 8.7
(1) Die Identität, also die durch $f(x) = x$ definierte Funktion, ist stetig in $\mathbb{R}$.
(2) $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig auf $\mathbb{R}$. Beweis: Nach Beispiel 8.5 ist

$$\lim_{x\to 0} \exp(x) = 1 = \exp(0)\,,$$

also ist exp stetig im Punkt 0. Ist $a \neq 0$ und (x_n) Folge in $\mathbb{R}$ mit $x_n \to a$, so gilt

$$\exp(x_n) = \exp(x_n - a + a) = \exp(a)\exp(x_n - a)\,,$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \exp(x_n - a) = \exp(0) = 1\,,$$

also

$$\lim_{n\to\infty} \exp(x_n) = \exp(a)\,.$$

(3) Die durch

$$f(x) = \begin{cases} 1\,, & x > 0\,, \\ 0\,, & x \leq 0\,, \end{cases}$$

definierte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist nicht stetig in 0, aber stetig in allen anderen Punkten $a \neq 0$.
(4) Die durch

$$f(x) = \begin{cases} 1\,, & x \in \mathbb{Q}\,, \\ 0\,, & x \notin \mathbb{Q}\,, \end{cases}$$

definierte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist in keinem Punkt $a \in \mathbb{R}$ stetig. □

Sind $f, g : D \to \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, so sind

$$f + g, f \cdot g, \lambda f : D \to \mathbb{R}$$

definiert durch

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)\,, \quad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)\,, \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x)\,,$$

und

$$\frac{f}{g} : D \setminus \{x : g(x) = 0\} \to \mathbb{R}$$

durch

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}\,.$$

Satz 8.8 *Seien $D \subset \mathbb{R}$, $f, g : D \to \mathbb{R}$, $a \in D$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Sind f und g stetig in a, so sind auch $f + g$, fg und λf stetig in a; ist $g(a) \neq 0$, so ist auch f/g stetig in a.*

Beweis: Folgt aus den entsprechenden Sätzen für Grenzwerte von Folgen. Ist etwa (x_n) Folge in D mit $x_n \to a$, so gilt

$$(fg)(a) = f(a)g(a) = \left(\lim_{n\to\infty} f(x_n)\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} g(x_n)\right) = \lim_{n\to\infty} (f(x_n)g(x_n)) = \lim_{n\to\infty} (fg)(x_n)\,.$$

□

Folgerung 8.9 *Sei $D \subset \mathbb{R}$. Dann ist $C(D)$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$.* □

Folgerung 8.10 *Alle rationalen Funktionen, d.h. alle Funktionen der Form*

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}\,,$$

wobei p und q Polynome sind, sind auf ihrem Definitionsbereich $\{x : x \in \mathbb{R}, q(x) \neq 0\}$ stetig.

Beweis: Folgt aus Satz 8.8 und der Stetigkeit der Identität. □

Satz 8.11 *Seien $D, E \subset \mathbb{R}$, $a \in D$, $f : D \to \mathbb{R}$, $g : E \to \mathbb{R}$ und $f(D) \subset E$. Sind f stetig in a und g stetig in $f(a)$, so ist auch $g \circ f$ stetig in a.*

Beweis: Sei (x_n) eine beliebige Folge in D mit $x_n \to a$. Da f stetig ist in a, gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)\,.$$

Da $f(x_n) \in E$ für alle n, und da g stetig ist in $f(a)$, folgt weiter

$$\lim_{n\to\infty} g(f(x_n)) = g(f(a))\,.$$

□

Definition 8.12 *Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt nach oben beschränkt, wenn es ein $M \in \mathbb{R}$ gibt mit $f(x) \leq M$ für alle $x \in D$. f heißt nach unten beschränkt, wenn $-f$ nach oben beschränkt ist. f heißt beschränkt, wenn f nach oben und nach unten beschränkt ist.*

Satz 8.13 *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f beschränkt und nimmt Maximum und Minimum an, d.h. es gibt $p, q \in [a, b]$ mit*

$$f(p) = \max_{x\in[a,b]} f(x)\,, \quad f(q) = \min_{x\in[a,b]} f(x)\,. \tag{8.10}$$

Beweis: Wir nehmen zunächst an, f sei nach oben unbeschränkt. Dann gibt es eine Folge (x_n) in $[a, b]$ mit $f(x_n) \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß hat (x_n) eine konvergente Teilfolge, sei etwa $x_{n_k} \to c$. Da f stetig ist, ist $f(x_{n_k})$ ebenfalls konvergent, also beschränkt im Widerspruch zu $f(x_{n_k}) \geq n_k$. Also ist f nach oben beschränkt. Sei

$$M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)\,.$$

Zu $n \in \mathbb{N}$ wählen wir nun ein $x_n \in [a, b]$ mit

$$M - \frac{1}{n} \leq f(x_n) \leq M\,.$$

Dann gilt $f(x_n) \to M$. Sei wieder (x_{n_k}) eine konvergente Teilfolge, sei $x_{n_k} \to p$. Dann gilt $f(x_{n_k}) \to f(p)$, also $f(p) = M$ und damit

$$f(p) = \max_{x\in[a,b]} f(x)\,.$$

Anwendung des eben Bewiesenen auf $-f$ ergibt, daß f auch nach unten beschränkt ist und das Minimum annimmt. □

Satz 8.14 *Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, $a \in D$. Dann sind äquivalent:*
(1) f ist stetig in a.
(2) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß gilt: Für alle $x \in D$ mit $|x - a| < \delta$ gilt $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Beweis:
$\neg(2) \Rightarrow \neg(1)$: Die Negation von (2) ist: Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so daß für alle $\delta > 0$ ein $x \in D$ existiert mit $|x - a| < \delta$ und $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$. Wir wählen ein solches ε und zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in D$ mit

$$|x_n - a| < \frac{1}{n}\,, \quad |f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon\,.$$

Dann gilt $x_n \to a$, aber $f(x_n)$ konvergiert nicht gegen $f(a)$. Also ist f nicht stetig in a.
$(2) \Rightarrow (1)$: Sei (x_n) Folge in D mit $x_n \to a$. Wir wollen zeigen, daß $f(x_n) \to f(a)$. Sei dazu $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir wählen ein $\delta > 0$, so daß

$$x \in D\,, \quad |x - a| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - f(a)| < \varepsilon\,.$$

Wir wählen n_0, so daß $|x_n - a| < \delta$ für alle $n \geq n_0$. Dann gilt auch $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. □

Folgerung 8.15 *Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, $a \in D$. Ist f stetig in a und gilt $f(a) > 0$ (bzw. $f(a) < 0$), so gibt es ein $\delta > 0$ mit $f(x) > 0$ für alle $x \in D \cap (a - \delta, a + \delta)$ (bzw. $f(x) < 0$ für alle $x \in D \cap (a - \delta, a + \delta)$.*

Beweis: Sei $f(a) > 0$ (andernfalls betrachte $-f$). Wir wählen gemäß Satz 8.14 ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(a)| < f(a)$ für alle $x \in D \cap (a - \delta, a + \delta)$. Dann gilt für alle solche x

$$f(x) = f(a) - (f(a) - f(x)) \geq f(a) - |f(a) - f(x)| > 0\,.$$

□

Satz 8.16 (Zwischenwertsatz)
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, es gelte $f(a)f(b) < 0$. Dann gibt es ein $x \in (a, b)$ mit $f(x) = 0$.

Beweis: Sei $f(a) < 0$. (Andernfalls betrachten wir $-f$.) Wir setzen

$$G = \{t : t \in [a, b],\ f(t) < 0\}\,.$$

Es ist $a \in G$, also $\emptyset \neq G \subset [a, b]$. Wir setzen

$$x = \sup G\,. \tag{8.11}$$

Wir wählen eine Folge (x_n) in G mit $x_n \to x$, dann ist

$$f(x_n) < 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\,, \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)\,,$$

also $f(x) \leq 0$. Wir nehmen an, daß $f(x) < 0$. Dann ist $x < b$, und es gibt nach Folgerung 8.15 ein $\delta > 0$ mit $[a, b] \cap (x - \delta, x + \delta) \subset G$, also

$$\sup G \geq x + \delta$$

im Widerspruch zu (8.11). Also ist die Annahme $f(x) < 0$ falsch und damit bewiesen, daß $f(x) = 0$. □

Folgerung 8.17 *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, sei $y \in \mathbb{R}$ mit $f(a) \leq y \leq f(b)$ oder $f(a) \geq y \geq f(b)$. Dann gibt es ein $x \in [a,b]$ mit $f(x) = y$.*

Beweis: Wir wenden Satz 8.16 auf die durch $g(x) = f(x) - y$ definierte Funktion $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ an. □

Definition 8.18 (Gleichmäßige Stetigkeit)
Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$. f heißt gleichmäßig stetig in D, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß gilt: Sind $x, \tilde{x} \in D$ mit $|x - \tilde{x}| < \delta$, so ist auch $|f(x) - f(\tilde{x})| < \varepsilon$.

Lemma 8.19 *Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$. Ist f gleichmäßig stetig in D, so ist f auch stetig in D.*

Beweis: Für jedes $a \in D$ ist das Kriterium (2) in Satz 8.14 erfüllt. Wir brauchen nur Definition 8.18 mit $\tilde{x} = a$ anzuwenden. □

Nicht jede stetige Funktion ist gleichmäßig stetig. Beispiel:

$$f : (0,1] \to \mathbb{R}\,, \quad f(x) = \frac{1}{x}\,.$$

Für $x > 0$, $\tilde{x} = 2x$ ist nämlich

$$|f(x) - f(\tilde{x})| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{2x} \right| = \frac{1}{2x}\,.$$

Ist $\varepsilon = 1$ und $\delta > 0$ beliebig, und setzen wir

$$x = \min\left\{ \frac{1}{2}, \frac{\delta}{2} \right\}\,, \quad \tilde{x} = 2x\,,$$

so gilt $|x - \tilde{x}| < \delta$, aber $|f(x) - f(\tilde{x})| \geq 1$.

Satz 8.20 *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f gleichmäßig stetig in $[a,b]$.*

Beweis: Wir nehmen an, f sei nicht gleichmäßig stetig auf $[a,b]$. Wir können dann ein $\varepsilon > 0$ und zu jedem $n \in \mathbb{N}$ Punkte $x_n, \tilde{x}_n \in [a,b]$ finden mit

$$|x_n - \tilde{x}_n| < \frac{1}{n}\,, \quad |f(x_n) - f(\tilde{x}_n)| \geq \varepsilon\,. \tag{8.12}$$

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß hat (x_n) eine konvergente Teilfolge x_{n_k}, sei $x_{n_k} \to p$. Da

$$0 \leq |\tilde{x}_{n_k} - p| \leq \frac{1}{n_k} + |x_{n_k} - p|\,,$$

gilt auch $\tilde{x}_{n_k} \to p$, also

$$\lim_{k \to \infty} (f(x_{n_k}) - f(\tilde{x}_{n_k})) = f(p) - f(p) = 0$$

im Widerspruch zu (8.12). □

9 Monotone Funktionen, Umkehrfunktionen

Definition 9.1 *Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$. f heißt monoton wachsend, falls $f(x) \leq f(\tilde{x})$ für alle $x, \tilde{x} \in D$ mit $x \leq \tilde{x}$. f heißt streng monoton wachsend, falls $f(x) < f(\tilde{x})$ für alle $x, \tilde{x} \in D$ mit $x < \tilde{x}$. f heißt (streng) monoton fallend, falls $-f$ (streng) monoton wachsend ist. f heißt (streng) monoton, falls f (streng) monoton wachsend oder (streng) monoton fallend ist.*

Satz 9.2 *Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend. Dann ist $f : D \to f(D)$ bijektiv, und $f^{-1} : f(D) \to D$ ist streng monoton wachsend.*

Beweis: Sind $x, \tilde{x} \in D$ mit $x \neq \tilde{x}$, so ist $x < \tilde{x}$ oder $\tilde{x} < x$. Es folgt $f(x) < f(\tilde{x})$ bzw. $f(\tilde{x}) < f(x)$, also $f(x) \neq f(\tilde{x})$, also ist f injektiv und damit $f : D \to f(D)$ bijektiv. Seien $y, \tilde{y} \in f(D)$ mit $y < \tilde{y}$. Wäre $f^{-1}(y) \geq f^{-1}(\tilde{y})$, so wäre auch

$$y = f(f^{-1}(y)) \geq f(f^{-1}(\tilde{y})) = \tilde{y}\,.$$

Also ist $f^{-1}(y) < f^{-1}(\tilde{y})$. □

Folgerung 9.3
Satz 9.2 gilt auch, wenn "streng monoton wachsend" überall durch "streng monoton fallend" ersetzt wird.

Beweis: Nach Satz 9.2 ist $-f : D \to -f(D)$ bijektiv und $(-f)^{-1} : -f(D) \to D$ streng monoton wachsend. Sind $y, \tilde{y} \in f(D)$ mit $y < \tilde{y}$, so ist $-y > -\tilde{y}$ und

$$f^{-1}(y) = (-f)^{-1}(-y) > (-f)^{-1}(-\tilde{y}) = f^{-1}(\tilde{y})\,.$$

□

Satz 9.4 *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend und stetig. Dann ist*

$$f([a, b]) = [f(a), f(b)]\,, \tag{9.1}$$

und

$$f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a, b] \tag{9.2}$$

ist ebenfalls streng monoton wachsend und stetig.

Beweis: Aus $a \leq x \leq b$ folgt $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$; ist $y \in [f(a), f(b)]$, so gibt es wegen Folgerung 8.17 ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = y$. Damit ist (9.1) bewiesen. Nach Satz 9.2 ist f^{-1} streng monoton wachsend. Sei nun $y \in [f(a), f(b)]$, sei (y_n) Folge in $[f(a), f(b)]$ mit $y_n \to y$. Wir nehmen an, $f^{-1}(y_n)$ konvergiert nicht gegen $f^{-1}(y)$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ und eine Teilfolge (y_{n_k}) mit

$$|f^{-1}(y_{n_k}) - f^{-1}(y)| \geq \varepsilon\,, \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}\,. \tag{9.3}$$

Da $(f^{-1}(y_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $[a, b]$ und also beschränkt ist, hat sie eine konvergente Teilfolge, sei

$$f^{-1}(y_{n_{k_l}}) \to x\,, \quad x \in [a, b]\,.$$

Es gilt
$$f(x) = f(\lim_{l\to\infty} f^{-1}(y_{n_{k_l}})) = \lim_{l\to\infty} f(f^{-1}(y_{n_{k_l}})) = \lim_{l\to\infty} y_{n_{k_l}} = y\,,$$
also
$$f^{-1}(y_{n_{k_l}}) \to x = f^{-1}(y)$$
im Widerspruch zu (9.3). Also war die Annahme falsch, und es folgt $f^{-1}(y_n) \to f^{-1}(y)$.
□

Folgerung 9.5
Satz 9.4 gilt auch, wenn "streng monoton wachsend" überall durch "streng monoton fallend" ersetzt wird.

Beweis: Folgt aus Folgerung 9.3, da aus der Stetigkeit von $(-f)^{-1}$ auch die Stetigkeit von f^{-1} folgt. □

Satz 9.6 *Die Exponentialfunktion* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ist streng monoton wachsend und bildet* $\mathbb{R}$ *bijektiv auf* $\exp(\mathbb{R}) = (0,\infty)$ *ab.*

Beweis: Ist $x > \tilde{x}$, so ist $x - \tilde{x} > 0$ und $\exp(x-\tilde{x}) > 1$, also
$$\exp(x) = \exp(x-\tilde{x})\exp(\tilde{x}) > \exp(\tilde{x})\,.$$
Nach Satz 9.2 ist $\exp : \mathbb{R} \to \exp(\mathbb{R})$ bijektiv. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt
$$\exp(n) \geq 1 + n\,, \quad \exp(-n) \leq \frac{1}{1+n}\,,$$
also
$$\exp(\mathbb{R}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \exp([-n,n]) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\exp(-n), \exp(n)] \supset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[\frac{1}{1+n}, 1+n\right] = (0,\infty)\,,$$
und wegen $\exp(\mathbb{R}) \subset (0,\infty)$ auch $\exp(\mathbb{R}) = (0,\infty)$. □

Definition 9.7 (Logarithmus)
Wir definieren den (natürlichen) Logarithmus
$$\ln : (0,\infty) \to \mathbb{R}$$
als die Umkehrfunktion von $\exp : \mathbb{R} \to (0,\infty)$.

Wir erinnern an die Definition
$$x^k = \prod_{i=1}^k x\,, \quad x^0 = 1\,, \quad x^{-k} = \prod_{i=1}^k x^{-1}\,, \quad \text{falls } k \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}\,.$$

Satz 9.8 *Für den natürlichen Logarithmus* $\ln : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ *gilt*
$$\ln(1) = 0\,, \quad \ln(e) = 1\,, \tag{9.4}$$
$$\ln(xy) = \ln x + \ln y\,, \quad \text{für alle } x, y > 0\,, \tag{9.5}$$
$$\ln x^k = k \ln x\,, \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z},\ x > 0\,, \tag{9.6}$$

Beweis: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\exp(\ln x + \ln y) = \exp(\ln x) \cdot \exp(\ln y) = xy\,,$$

$$\ln x + \ln y = \ln(\exp(\ln x + \ln y)) = \ln(xy)\,.$$

Für $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\exp(k \ln x) = \exp(\sum_{i=1}^{k} \ln x) = \prod_{i=1}^{k} \exp(\ln x) = x^k\,.$$

Weiter

$$0 = \ln 1 = \ln(xx^{-1}) = \ln x + \ln x^{-1}\,,$$

also

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x\,,$$

also für $k \in \mathbb{N}$

$$-k \ln x = k \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \ln\left(\left(\frac{1}{x}\right)^k\right) = \ln x^{-k}\,.$$

□

Satz 9.9 *Der Logarithmus* $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ *ist stetig und streng monoton wachsend.*

Beweis: Folgt aus Satz 9.4. □

Definition 9.10 (Allgemeine Potenzfunktion)
Für $a \in \mathbb{R}$, $x > 0$ definieren wir die a-te Potenz von x durch

$$x^a = \exp(a \ln x)\,. \tag{9.7}$$

Für $n \in \mathbb{N}$, $x > 0$ setzen wir

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}\,. \tag{9.8}$$

Für $a \in \mathbb{Z}$ stimmt diese Definition wegen $a \ln x = \ln x^a$ mit der bisherigen überein.

Satz 9.11 *Sei $a \in \mathbb{R}$. Die durch*

$$f(x) = x^a$$

definierte Funktion $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ ist stetig, für $a \neq 0$ bijektiv, für $a > 0$ streng monoton wachsend und für $a < 0$ streng monoton fallend.

Beweis: f entsteht als Komposition

$$(0, \infty) \xrightarrow{\ln} \mathbb{R} \xrightarrow{p_a} \mathbb{R} \xrightarrow{\exp} (0, \infty)\,,$$

wobei p_a definiert ist durch $p_a(y) = ay$. Die Behauptungen folgen aus den entsprechenden Eigenschaften von exp und ln. □

Für die allgemeine Potenzfunktion gelten die üblichen Rechenregeln. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $x, y > 0$, dann ist

$$x^{a+b} = \exp((a + b) \ln x) = \exp(a \ln x) \cdot \exp(b \ln x) = x^a x^b\,,$$

$$(x^a)^b = \exp(b \ln x^a) = \exp(b \ln(\exp a \ln x)) = \exp(ba \ln x) = x^{ab}\,,$$

$$x^a y^a = (xy)^a\,.$$

10 Uneigentliche Grenzwerte von Funktionen

Definition 10.1 *Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{D}$. Wir sagen, daß*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty\,, \qquad \textit{bzw.} \qquad \lim_{x\to a} f(x) = -\infty\,, \tag{10.1}$$

falls zu jedem $C > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit

$$x \in D\,,\; |x-a| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad f(x) > C \quad (\textit{bzw.} \quad f(x) < -C)\,. \tag{10.2}$$

Wie gehabt schreiben wir

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in D}} f(x) = \infty\,,$$

falls wir D explizit angeben wollen.

Beispiel 10.2
Wir betrachten

$$f(x) = \frac{1}{x}\,.$$

Für $D = (0,\infty)$ gilt

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in D}} \frac{1}{x} = \infty\,,$$

für $D = (-\infty, 0)$ gilt

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in D}} \frac{1}{x} = -\infty\,,$$

für $D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ gilt

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in D}} \frac{1}{x} \qquad \text{existiert nicht.}$$

Definition 10.3 *Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, es gelte $D \cap (M,\infty) \neq \emptyset$ für alle $M \in \mathbb{R}$.*

(i) *Wir sagen, daß für $c \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = c\,, \tag{10.3}$$

falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $M > 0$ existiert mit

$$x \in D\,,\; x > M \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - c| < \varepsilon\,. \tag{10.4}$$

(ii) *Wir sagen, daß gilt*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty\,, \tag{10.5}$$

falls zu jedem $C > 0$ ein $M > 0$ existiert mit

$$x \in D\,, x > M \qquad \Rightarrow \qquad f(x) > C\,. \tag{10.6}$$

Entsprechend werden definiert

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = c\,, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty\,, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty\,, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty\,.$$

Beispiel 10.4
Ist p ein Polynom der Form

$$p(x) = x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \,,$$

so gilt (Übungsaufgabe)

$$\lim_{x\to\infty} p(x) = \infty \,, \qquad \lim_{x\to-\infty} p(x) = \begin{cases} \infty \,, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ -\infty \,, & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Lemma 10.5 *Für alle $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gilt*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^k} = \infty \,. \tag{10.7}$$

Beweis: Für $x > 0$ gilt

$$e^x > \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \,,$$

also

$$\frac{e^x}{x^k} > \frac{x}{(k+1)!} \to \infty \quad \text{für } x \to \infty \,.$$

□

Die Exponentialfunktion wächst also schneller als jede Potenz von x.

Satz 10.6 *Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, es gelte $D \cap (M, \infty) \neq \emptyset$ für alle $M \in \mathbb{R}$. Gilt*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \,,$$

so gilt auch

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{f(x)} = 0 \,.$$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $M > 0$ so, daß

$$f(x) > \frac{1}{\varepsilon}$$

für alle $x \in D$ mit $x > M$. Dann gilt für alle solche x

$$\left| \frac{1}{f(x)} - 0 \right| = \frac{1}{f(x)} < \varepsilon \,.$$

Beispiel 10.7

(1) Wenden wir Satz 10.6 auf (10.7) an, so ergibt sich für alle $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\lim_{x\to\infty} x^k e^{-x} = 0 \,. \tag{10.8}$$

(2) Es ist
$$\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty\,, \tag{10.9}$$
da $\ln : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend ist und daher $\ln x > C$ gilt, falls $x > \exp(C)$. Wegen
$$\ln x = -\ln \frac{1}{x}$$
folgt auf $D = (0,\infty)$
$$\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty\,. \tag{10.10}$$

(3) Auf $D = (0,\infty)$ gilt für $a > 0$
$$\lim_{x\to 0} x^a = 0\,. \tag{10.11}$$
Für $x \to 0$, $x > 0$ gilt nämlich $a \ln x \to -\infty$, also $x^a = \exp(a \ln x) \to 0$. Für $a > 0$ können wir also durch
$$0^a = 0$$
die durch $f(x) = x^a$ auf $(0,\infty)$ definierte Funktion f stetig zu einer (ebenfalls mit f bezeichneten) Funktion $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ fortsetzen. Es gilt weiter für $a > 0$, da $x^{-a} = (x^a)^{-1}$,
$$\lim_{x\to 0} x^{-a} = \infty\,. \tag{10.12}$$

(4) Für $a > 0$ gilt
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0\,. \tag{10.13}$$
Beweis: Für $x \to \infty$ gilt $\ln x \to \infty$, also
$$\frac{\ln x}{x^a} = \frac{1}{a}(a \ln x) \exp(-a \ln x) \to 0$$
wegen (10.8).

(5) Auf $D = (0,\infty)$ gilt für $a > 0$
$$\lim_{x\to 0} x^a \ln x = 0\,. \tag{10.14}$$
Das folgt aus (10.13) wegen
$$x^a \ln x = -\frac{\ln \frac{1}{x}}{(\frac{1}{x})^a}\,.$$

11 Trigonometrische Funktionen

Für $x \in \mathbb{R}$ betrachten wir die komplexe Zahl e^{ix}. Es gilt

$$|e^{ix}|^2 = e^{ix}\overline{e^{ix}} = e^{ix}e^{-ix} = 1\,, \tag{11.1}$$

also $|e^{ix}| = 1$, d.h. e^{ix} liegt auf dem Einheitskreis in der komplexen Ebene.

Definition 11.1 *Wir definieren die Funktionen* $\cos, \sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *durch*

$$\cos x = \operatorname{Re} e^{ix}\,, \quad \sin x = \operatorname{Im} e^{ix}\,. \tag{11.2}$$

Unmittelbar aus der Definition folgt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$e^{ix} = \cos x + i\,\sin x\,, \tag{11.3}$$

sowie

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})\,, \quad \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})\,, \tag{11.4}$$

$$\cos(-x) = \cos x\,, \quad \sin(-x) = -\sin x\,, \tag{11.5}$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1\,, \tag{11.6}$$

$$\cos 0 = 1\,, \quad \sin 0 = 0\,. \tag{11.7}$$

Lemma 11.2 *Für alle* $x, y \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)\,, \tag{11.8}$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)\,, \tag{11.9}$$

Beweis: Es ist

$$e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy}\,,$$

also

$$\cos(x+y) + i\,\sin(x+y) = (\cos x + i\,\sin x)(\cos y + i\,\sin y)\,.$$

Ausmultiplizieren und Vergleich der Real- und Imaginärteile liefert die Behauptung. □

Definition 11.3 *Sei* $D \subset \mathbb{C}$, $f : D \to \mathbb{C}$. f *heißt stetig in* $a \in D$, *falls gilt*

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(a) \tag{11.10}$$

für alle Folgen (z_n) *in* D *mit* $z_n \to a$. f *heißt stetig in* D, *falls* f *in jedem Punkt* a *von* D *stetig ist.*

Lemma 11.4 $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *ist stetig in* $\mathbb{C}$.

Beweis: Wie im Reellen. □

Lemma 11.5 *Die Funktionen* $\sin, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *sind stetig in* $\mathbb{R}$.

Beweis: Sei (x_n) Folge in $\mathbb{R}$ mit $x_n \to a$, dann gilt $ix_n \to ia$ in $\mathbb{C}$, also $\exp(ix_n) \to \exp(ia)$ in $\mathbb{C}$ nach Lemma 11.4, also

$$\cos x_n = \mathrm{Re}\,(\exp ix_n) \to \mathrm{Re}\,(\exp ia) = \cos a\,,$$

$$\sin x_n = \mathrm{Im}\,(\exp ix_n) \to \mathrm{Im}\,(\exp ia) = \sin a\,.$$

□

Satz 11.6 *Es gilt*

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \cdots\,, \tag{11.11}$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cdots\,, \tag{11.12}$$

und die Reihen konvergieren absolut für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beweis: Die absolute Konvergenz der beiden Reihen folgt mit dem Majorantenkriterium aus der absoluten Konvergenz der Exponentialreihe. Es gilt weiter für $m \in \mathbb{N}$

$$\sum_{j=0}^{2m} \frac{(ix)^j}{j!} = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\,,$$

also

$$e^{ix} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\,.$$

□

Für festes $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ sind die Folgen

$$a_k = \frac{|x|^{2k}}{(2k)!} \qquad \text{bzw.} \qquad b_k = \frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

monoton fallende Nullfolgen für $k \geq n$, falls

$$|x| \leq 2n+1 \qquad \text{bzw.} \qquad |x| \leq 2n+2\,.$$

Aus dem Leibniz-Kriterium 6.17 folgt daher

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + R_{2n+2}(x)\,, \tag{11.13}$$

wobei

$$|R_{2n+2}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}\,, \qquad \text{falls } |x| \leq 2n+1\,, \tag{11.14}$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{2n+3}(x)\,, \tag{11.15}$$

wobei

$$|R_{2n+3}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}\,, \qquad \text{falls } |x| \leq 2n+2\,. \tag{11.16}$$

Insbesondere ist

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + R_4(x)\,, \quad |R_4(x)| \leq \frac{|x|^4}{4!}\,, \quad \text{falls } |x| \leq 3\,, \tag{11.17}$$

also

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \left(-\frac{x}{2} + \frac{R_4(x)}{x} \right) = 0\,, \tag{11.18}$$

und

$$\cos 2 = 1 - 2 + R_4(x) \leq 1 - 2 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}\,. \tag{11.19}$$

Aus dem Zwischenwertsatz folgt, daß cos eine Nullstelle in $[0,2]$ hat.

Definition 11.7 *Wir definieren*

$$\pi = 2 \cdot \inf\{x : x \in (0,2),\, \cos x = 0\}\,. \tag{11.20}$$

Aus der Stetigkeit des Kosinus folgt

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0\,, \tag{11.21}$$

also

$$\sin \frac{\pi}{2} = 1\,. \tag{11.22}$$

In ähnlicher Weise zeigt man (Übungsaufgabe)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\,, \quad \sin x > 0 \quad \text{für alle } x \in (0, \frac{\pi}{2})\,. \tag{11.23}$$

Aus (11.21) und (11.22) folgt

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i\,, \tag{11.24}$$

$$e^{i\pi} = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^2 = -1 = \cos \pi + i \sin \pi\,, \tag{11.25}$$

also

$$\cos \pi = -1\,, \quad \sin \pi = 0\,, \tag{11.26}$$

und weiter

$$e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i\,, \quad e^{2\pi i} = 1\,. \tag{11.27}$$

Aus Lemma 11.2 folgt für $x \in \mathbb{R}$

$$\cos(x+\pi) = \cos(x)\cos(\pi) - \sin(x)\sin(\pi) = -\cos x\,, \tag{11.28}$$

analog

$$\sin(x+\pi) = -\sin x\,, \tag{11.29}$$

und hieraus die Periodizitätseigenschaften

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x\,, \quad \sin(x + 2\pi) = \sin x\,. \tag{11.30}$$

Wegen

$$\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)\,, \quad \sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x) \tag{11.31}$$

und (11.28), (11.29) sind die Funktionen $\cos, \sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bereits durch ihre Werte auf $[0, \frac{\pi}{2}]$ bestimmt, insbesondere sind ihre Nullstellen gegeben durch

$$\sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}\,, \qquad \cos x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}\,. \tag{11.32}$$

Definition 11.8 *Wir definieren die Funktionen*

$$\tan : \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}\,, \quad \cot : \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}\,, \tag{11.33}$$

durch

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}\,, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}\,. \tag{11.34}$$

Es gilt wegen (11.28), (11.29)

$$\tan(x + \pi) = \tan x\,, \quad \cot(x + \pi) = \cot x\,. \tag{11.35}$$

12 Differenzierbarkeit

Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ und $a \in D$ gegeben. Wir wollen f in der Nähe von a durch eine Gerade approximieren. Einen naheliegenden Kandidaten für eine gute Approximation stellt die Tangente an den Graphen von f durch den Punkt $(a, f(a))$ dar. Diese erhalten wir geometrisch-anschaulich aus der Sekante an f durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(a + h, f(a+h))$, gegeben durch

$$g_h(x) = f(a) + \frac{f(a+h) - f(a)}{h}(x-a)\,, \tag{12.1}$$

indem wir den Grenzübergang $h \to 0$ vornehmen. Genauer gesagt: Wir betrachten den sogenannten Differenzenquotienten

$$d_a(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}\,, \tag{12.2}$$

welcher die Steigung der Sekante g_h angibt, und wollen den Differentialquotienten (welcher die Steigung der Tangente angibt) als den Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{12.3}$$

erhalten. Dieser Grenzwert macht Sinn, wenn 0 im Abschluß des Definitionsgebietes

$$D_a = \{h : h \in \mathbb{R},\, h \neq 0,\, a + h \in D\} \tag{12.4}$$

des Differenzenquotienten liegt; äquivalent dazu ist die Bedingung

$$a \in \overline{D \setminus \{a\}}\,. \tag{12.5}$$

Diese Bedingung ist zum Beispiel immer dann erfüllt, wenn

$$(a - \delta, a + \delta) \subset D$$

gilt für irgendein $\delta > 0$.

Definition 12.1 (Differenzierbare Funktion) *Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$. Wir sagen, daß f differenzierbar in $a \in D$ ist, falls (12.5) gilt und falls der Grenzwert*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{12.6}$$

existiert. In diesem Fall definieren wir die Ableitung $f'(a)$ von f in a durch

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}\,. \tag{12.7}$$

f heißt in D differenzierbar, falls f in jedem Punkt $a \in D$ differenzierbar ist.

Beispiel 12.2

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$ fest. Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt
$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = 0\,,$$
also
$$f'(a) = 0\,.$$

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$. Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt
$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = 1\,,$$
also
$$f'(a) = 1\,.$$

3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt
$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = 2a + h\,,$$
also
$$f'(a) = 2a\,.$$

4. $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$. Für alle $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt
$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} = \frac{-1}{(a+h)a}\,,$$
also
$$f'(a) = -\frac{1}{a^2}\,.$$

5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \exp(x)$. Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt
$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\exp(a+h) - \exp(a)}{h} = \exp(a)\frac{\exp(h) - 1}{h}\,,$$
also (siehe Beispiel 8.5)
$$f'(a) = \exp(a)\,.$$

6. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$. Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt
$$\begin{aligned}\frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{\sin(a+h) - \sin(a)}{h} = \frac{\sin a \cos h + \cos a \sin h - \sin a}{h} \\ &= \sin(a)\frac{\cos h - 1}{h} + \cos(a)\frac{\sin h}{h}\end{aligned}$$
also (siehe (11.18), (11.23))
$$f'(a) = \cos a\,.$$

7. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$. Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt (Beweis analog wie beim Sinus)
$$f'(a) = -\sin a\,.$$

Die durch $f(x) = |x|$ definierte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar in allen Punkten $a \neq 0$, und

$$f'(a) = \begin{cases} 1\,, & a > 0\,, \\ -1\,, & a < 0\,. \end{cases} \tag{12.8}$$

In $a = 0$ ist f nicht differenzierbar, denn für die Folge

$$h_n = (-1)^n \frac{1}{n}$$

gilt

$$\frac{|0 + h_n| - |0|}{h_n} = (-1)^n\,,$$

also existiert der in Definition 12.1 verlangte Grenzwert nicht. Schränkt man aber das Definitionsgebiet des Differenzenquotienten ein, indem man setzt

$$D_a^+ = \{h : h > 0,\, a + h \in D\}\,,$$

so existiert für $f(x) = |x|$ und $a = 0$ der Grenzwert

$$f'_+(a) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in D_a^+}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{12.9}$$

und ist gleich 1. Er wird als die *rechtsseitige Ableitung von f an der Stelle a* bezeichnet. Analog definiert man die linksseitige Ableitung durch

$$f'_-(a) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in D_a^-}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}\,, \quad D_a^- = \{h : h < 0,\, a + h \in D\}\,. \tag{12.10}$$

Für $f(x) = |x|$ ist

$$f'_-(0) = -1\,.$$

Satz 12.3 *Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, $a \in D$. Dann gilt*

(1) *Ist f differenzierbar in a und setzen wir*

$$r(h) = f(a+h) - f(a) - f'(a)h\,, \tag{12.11}$$

so gilt

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0\,. \tag{12.12}$$

(2) *Ist $c \in \mathbb{R}$ und gilt (12.12) für die durch*

$$r(h) = f(a+h) - f(a) - ch \tag{12.13}$$

definierte Funktion r, so ist f differenzierbar in a und $f'(a) = c$.

Beweis: Ist r durch (12.13) definiert, so gilt

$$\frac{r(h)}{h} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - c\,. \tag{12.14}$$

Da der Limes auf der rechten Seite existiert und gleich Null ist genau dann, wenn f in a differenzierbar ist und $f'(a) = c$ gilt, folgen beide Behauptungen. □

Wir können die Aussage von Satz 12.3 auch so interpretieren: Die Differenz

$$r(x-a) = f(x) - [f(a) + f'(a)(x-a)]$$

zwischen den Werten der Funktion f und ihrer *Linearisierung* geht für $x \to a$ schneller gegen 0 als die Differenz $x - a$. Für die Differenz

$$f(x) - [f(a) + c(x-a)]$$

ist dies aber nicht der Fall, wenn $c \neq f'(a)$. Wir können also die Linearisierung

$$g(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

interpretieren als die beste affin-lineare Approximation von f in der Nähe von a.

Satz 12.4 *Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, $a \in D$. Dann gilt: Ist f differenzierbar in a, so ist f stetig in a.*

Beweis: Nach Satz 12.3 gilt

$$\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0\,,$$

also auch

$$\lim_{h\to 0} r(h) = 0\,.$$

Grenzübergang $h \to 0$ auf beiden Seiten von

$$f(a) + f'(a)h + r(h) = f(a+h)$$

liefert also

$$f(a) = \lim_{h\to 0} f(a+h) = \lim_{x\to a} f(x)\,.$$

□

Satz 12.5 *Seien $D \subset \mathbb{R}$, $f, g : D \to \mathbb{R}$, $a \in D$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt: Sind f und g differenzierbar in a, so sind auch $f + g$, λf und fg differenzierbar in a, und es gelten*

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)\,, \quad (\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)\,, \tag{12.15}$$

sowie die Produktregel

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)\,. \tag{12.16}$$

Ist außerdem $g(a) \neq 0$, so ist auch f/g in a differenzierbar, und es gilt die Quotientenregel

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{g(a)f'(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}\,. \tag{12.17}$$

Beweis: Wegen

$$\frac{(f+g)(a+h)-(f+g)(a)}{h} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} + \frac{g(a+h)-g(a)}{h}\,,$$

$$\frac{(\lambda f)(a+h)-(\lambda f)(a)}{h} = \lambda\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\,,$$

folgt (12.15) aus den entsprechenden Grenzwertsätzen für Folgen. Zum Beweis der Produktregel betrachten wir

$$\frac{(fg)(a+h)-(fg)(a)}{h} = f(a+h)\frac{g(a+h)-g(a)}{h} + g(a)\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\,. \qquad (12.18)$$

Da $\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$ nach Satz 12.4, folgt (12.16) durch Grenzübergang $h \to 0$ in (12.18). Zum Beweis der Quotientenregel bemerken wir zunächst, daß wegen Satz 12.4 und Folgerung 8.15 für ein hinreichend kleines $\delta > 0$ gilt

$$g(x) \neq 0$$

für alle $x \in D$ mit $|x-a| < \delta$. Wir betrachten nun den Spezialfall $f = 1$. Ist $|h| < \delta$ und $a + h \in D$, so gilt

$$\frac{1}{h}\left(\frac{1}{g(a+h)} - \frac{1}{g(a)}\right) = -\frac{1}{g(a+h)g(a)} \cdot \frac{g(a+h)-g(a)}{h}\,. \qquad (12.19)$$

Grenzübergang $h \to 0$ liefert

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{(g(a))^2}\,. \qquad (12.20)$$

Ist nun f beliebig, so folgt aus (12.20) und der Produktregel

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \left(f\frac{1}{g}\right)'(a) = f'(a)\frac{1}{g(a)} + f(a)\frac{-g'(a)}{(g(a))^2} = \frac{g(a)f'(a)-f(a)g'(a)}{(g(a))^2}\,.$$

□

Beispiel 12.6

1. $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$f_n'(a) = na^{n-1}\,. \qquad (12.21)$$

   Induktion. $n = 1$ klar, $n \to n+1$:

$$f_{n+1}'(a) = (f_1 f_n)'(a) = f_1'(a)f_n(a) + f_1(a)f_n'(a) = 1 \cdot a^n + a \cdot na^{n-1} = (n+1)a^n\,.$$

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$f'(a) = -na^{-n-1}\,.$$

   Aus (12.21) und der Quotientenregel folgt nämlich

$$f'(a) = \frac{-na^{n-1}}{a^{2n}} = -na^{-n-1}\,.$$

3. $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Dann gilt

$$f'(a) = \frac{\cos a \cos a - \sin a \cdot (-\sin a)}{\cos^2 a} = \frac{1}{\cos^2 a}\,.$$

Satz 12.7 *Seien $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton, sei f differenzierbar in $x \in [a,b]$ mit $f'(x) \neq 0$. Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : f([a,b]) \to \mathbb{R}$ in $y = f(x)$ differenzierbar, und es gilt*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}\,. \tag{12.22}$$

Beweis: Sei (h_n) eine beliebige Folge mit $h_n \to 0$, $h_n \neq 0$ und $y + h_n \in f([a,b])$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir setzen

$$x_n = f^{-1}(y + h_n)\,.$$

Da f^{-1} stetig und streng monoton ist nach Satz 9.4, gilt

$$x_n = f^{-1}(y + h_n) \to f^{-1}(y) = x\,, \quad x_n \neq x \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\,,$$

und

$$\frac{f^{-1}(y+h_n) - f^{-1}(y)}{h_n} = \frac{x_n - x}{f(x_n) - f(x)} = \frac{1}{\frac{f(x_n)-f(x)}{x_n - x}}\,,$$

also

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{-1}(y+h_n) - f^{-1}(y)}{h_n} = \frac{1}{f'(x)}\,.$$

□

Beispiel: Für $\ln : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ folgt aus Satz 12.7

$$(\ln)'(y) = \frac{1}{(\exp)'(\ln y)} = \frac{1}{\exp(\ln y)} = \frac{1}{y}\,. \tag{12.23}$$

Folgerung 12.8 *Es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e\,. \tag{12.24}$$

Beweis: Es ist

$$\ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right] = n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln 1}{\frac{1}{n}}\,,$$

also

$$1 = (\ln)'(1) = \lim_{n\to\infty} \ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right],$$

also

$$e = \exp(1) = \lim_{n\to\infty} \exp\left(\ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

□

Satz 12.9 *Seien $D, E \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, $f(D) \subset E$, $g : E \to \mathbb{R}$, $a \in D$. Sind f in a und g in $f(a)$ differenzierbar, so ist auch $g \circ f$ in a differenzierbar, und es gilt*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)\,. \tag{12.25}$$

Beweis: Das naheliegende Argument,

$$\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} = \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

zu betrachten und in den beiden Brüchen auf der rechten Seite einzeln zum Grenzwert überzugehen, bereitet Schwierigkeiten, wenn $f(x) = f(a)$ ist. Wir umgehen dieses Problem, indem wir definieren

$$d(y) = \begin{cases} \frac{g(y)-g(f(a))}{y-f(a)}\,, & y \neq f(a)\,, \\ g'(f(a))\,, & y = f(a)\,. \end{cases}$$

Es gilt dann für alle $x \in D$ mit $x \neq a$

$$\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} = d(f(x))\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\,. \tag{12.26}$$

Nach Definition von d gilt, da g in $f(a)$ differenzierbar ist,

$$\lim_{y \to f(a)} d(y) = g'(f(a))\,,$$

also folgt, da f stetig ist in a,

$$\lim_{x \to a} d(f(x)) = g'(f(a))\,,$$

also folgt die Behauptung durch Grenzübergang $x \to a$ in (12.26). □

Beispiel 12.10

1. Wir betrachten $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^\alpha$, $\alpha > 0$ fest. Es ist

   $$f(x) = \exp(\alpha \ln x)\,,$$

   also

   $$f'(x) = \exp(\alpha \ln x) \cdot \frac{\alpha}{x} = x^\alpha \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}\,.$$

2. Wir betrachten $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \alpha^x$, $\alpha > 0$ fest. Es ist

   $$f(x) = \exp(x \ln \alpha)\,,$$

   also

   $$f'(x) = \exp(x \ln \alpha) \cdot \ln \alpha = \alpha^x \ln \alpha\,.$$

□

Definition 12.11 *Seien $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Wir setzen $f^{(0)} = f$. f heißt n-mal differenzierbar in $a \in D$, wenn für die $(n-1)$-te Ableitung $f^{(n-1)}$ der Grenzwert*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f^{(n-1)}(a+h) - f^{(n-1)}(a)}{h} \tag{12.27}$$

im Sinne von Definition 12.1 existiert; in diesem Falle definieren wir die n-te Ableitung von f in a als

$$f^{(n)}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f^{(n-1)}(a+h) - f^{(n-1)}(a)}{h}\,. \tag{12.28}$$

f heißt n-mal differenzierbar in D, wenn f n-mal differenzierbar ist in jedem Punkt a von D. f heißt n-mal stetig differenzierbar in D, wenn $f^{(n)} : D \to \mathbb{R}$ stetig in D ist. Wir definieren $C^0(D) = C(D)$ und für $n \in \mathbb{N}$

$$C^n(D) = \{f | f : D \to \mathbb{R},\ f \text{ ist } n\text{-mal stetig differenzierbar in } D\}\,, \tag{12.29}$$

$$C^\infty(D) = \bigcap_{n=1}^{\infty} C^n(D)\,. \tag{12.30}$$

Die Funktionen in $C^\infty(D)$ nennen wir unendlich oft differenzierbar.

Wir behandeln nun einige Sätze über differenzierbare Funktionen.

Definition 12.12 *Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$. Ein $x \in D$ heißt lokales Maximum (bzw. Minimum) von f in D, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit*

$$f(x) = \max_{\substack{y \in D \\ |y-x|<\varepsilon}} f(y) \tag{12.31}$$

bzw.

$$f(x) = \min_{\substack{y \in D \\ |y-x|<\varepsilon}} f(y)\,. \tag{12.32}$$

Ein $x \in D$ heißt lokales Extremum von f in D, wenn x lokales Maximum oder lokales Minimum von f in D ist.

Satz 12.13 *Sei $a < b$, $f : (a,b) \to \mathbb{R}$. Ist $x \in (a,b)$ lokales Extremum von f in (a,b), und ist f differenzierbar in x, so gilt*

$$f'(x) = 0\,. \tag{12.33}$$

Beweis: Sei x lokales Maximum, sei ε so gewählt, daß (12.31) gilt mit $D = (a,b)$. Dann gilt für alle $n > \varepsilon^{-1}$

$$\frac{f(x+\frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}} \le 0\,, \tag{12.34}$$

$$\frac{f(x-\frac{1}{n}) - f(x)}{-\frac{1}{n}} \ge 0\,. \tag{12.35}$$

Grenzübergang $n \to \infty$ liefert $f'(x) \le 0$ und $f'(x) \ge 0$, also $f'(x) = 0$. Analog für ein lokales Minimum. □

Die Umkehrung von Satz 12.13 gilt nicht. Beispiel: Für $f(x) = x^3$ gilt $f'(0) = 0$, aber 0 ist kein lokales Extremum.

Satz 12.14 (Satz von Rolle) *Seien $a < b$, $f \in C[a,b]$, f differenzierbar in (a,b). Ist $f(a) = f(b)$, so gibt es ein $x \in (a,b)$ mit $f'(x) = 0$.*

Beweis: Nach Satz 8.13 nimmt f sein Maximum und sein Minimum in $[a,b]$ an; ist f nicht konstant (andernfalls ist die Behauptung trivialerweise richtig), so muß mindestens eines davon in (a,b) liegen, wir nennen es x. Nach Satz 12.13 ist $f'(x) = 0$. □

Satz 12.15 (Verallgemeinerter Mittelwertsatz) *Seien $f, g \in C[a,b]$, f, g differenzierbar in (a,b), sei $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$. Dann ist $g(a) \neq g(b)$, und es gibt ein $\xi \in (a,b)$ mit*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} . \tag{12.36}$$

Beweis: Aus $g(a) = g(b)$ folgt $g'(x) = 0$ für mindestens ein $x \in (a,b)$ nach Satz 12.14, im Widerspruch zur Voraussetzung. Es ist also $g(a) \neq g(b)$. Wir definieren $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ durch

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)) . \tag{12.37}$$

Es ist $F(a) = f(a) = F(b)$. Nach dem Satz von Rolle gibt es ein $\xi \in (a,b)$ mit

$$0 = F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(\xi) ,$$

woraus Satz 12.15 folgt. □

Folgerung 12.16 (Mittelwertsatz) *Sei $f \in C[a,b]$, f differenzierbar in (a,b). Dann gibt es ein $\xi \in (a,b)$ mit*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi) . \tag{12.38}$$

Beweis: Anwendung von Satz 12.15 mit $g(x) = x$. □

Folgerung 12.17 *Sei $f \in C[a,b]$, f differenzierbar in (a,b), sei*

$$m = \inf_{\xi \in (a,b)} f'(\xi) , \quad M = \sup_{\xi \in (a,b)} f'(\xi) . \tag{12.39}$$

Dann gilt

$$m(y - x) \leq f(y) - f(x) \leq M(y - x) \tag{12.40}$$

für alle $x, y \in [a,b]$ mit $x \leq y$.

Beweis: Anwendung von Satz 12.16 auf das Teilintervall $[x,y]$ von $[a,b]$. □

Folgerung 12.18 *Sei $f \in C[a,b]$, f differenzierbar in (a,b), sei $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a,b)$. Dann ist f konstant.*

Beweis: Folgt aus (12.40) wegen $m = M = 0$. □

Satz 12.19 (Satz von de l'Hospital) *Seien $f, g \in C[a, b]$, f, g differenzierbar in (a, b), sei $x \in [a, b]$ mit $f(x) = g(x) = 0$, sei $g'(\xi) \neq 0$ für alle $\xi \in (a, b)$ mit $\xi \neq x$. Dann gilt: Falls der Grenzwert*

$$\lim_{\xi \to x} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \tag{12.41}$$

existiert, so existiert auch der Grenzwert

$$\lim_{\xi \to x} \frac{f(\xi)}{g(\xi)}, \tag{12.42}$$

und

$$\lim_{\xi \to x} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{\xi \to x} \frac{f(\xi)}{g(\xi)}. \tag{12.43}$$

Beweis: Sei (x_n) eine beliebige Folge in $[a, b]$ mit $x_n \to x$ und $x_n \neq x$ für alle n. Wie im Beweis von Satz 12.15 folgt $g(x_n) \neq 0$ für alle n. Nach Satz 12.15 gibt es für alle n ein ξ_n zwischen x und x_n mit

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_n) - f(x)}{g(x_n) - g(x)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}. \tag{12.44}$$

Aus $x_n \to x$ folgt $\xi_n \to x$ und damit

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{n \to \infty} \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} = \lim_{\xi \to x} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Da die Folge (x_n) beliebig war, folgt die Behauptung. □

Beispiel 12.20

1.
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1. \tag{12.45}$$

2. Wir berechnen
$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right). \tag{12.46}$$
Es ist
$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} = \frac{f(x)}{g(x)} \tag{12.47}$$
mit
$$f(x) = x - \sin x, \quad g(x) = x \sin x, \quad f(0) = g(0) = 0. \tag{12.48}$$
Es gilt
$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cos x}, \quad f'(0) = g'(0) = 0, \tag{12.49}$$
und weiter
$$\frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{\sin x}{2 \cos x - x \sin x}, \quad f''(0) = 0, \quad g''(0) = 2. \tag{12.50}$$
Wir können Satz 12.19 zweimal anwenden und erhalten
$$0 = \lim_{x \to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)}. \tag{12.51}$$

Satz 12.21 *Sei $f \in C[a,b]$, f differenzierbar in (a,b). Dann gilt:*

$$f'(x) \geq 0 \text{ für alle } x \in (a,b) \quad \Rightarrow \quad f \text{ ist monoton wachsend}$$

$$f'(x) > 0 \text{ für alle } x \in (a,b) \quad \Rightarrow \quad f \text{ ist streng monoton wachsend}$$

$$f'(x) \leq 0 \text{ für alle } x \in (a,b) \quad \Rightarrow \quad f \text{ ist monoton fallend}$$

$$f'(x) < 0 \text{ für alle } x \in (a,b) \quad \Rightarrow \quad f \text{ ist streng monoton fallend}$$

Beweis: Nur die erste Behauptung. Sei $x < y$, dann existiert nach Satz 12.16 ein $\xi \in (a,b)$ mit

$$f(x) - f(y) = f'(\xi)(x-y) \leq 0\,.$$

□

Beispiel 12.22 (Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen)

1. Es ist

$$\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1\,, \quad \sin(\frac{\pi}{2}) = 1\,, \quad \sin'(x) = cos(x) > 0 \quad \text{für alle } x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\,.$$

Also ist $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ stetig, streng monoton wachsend und bijektiv. Die Umkehrfunktion heißt Arcus-Sinus,

$$\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\,, \tag{12.52}$$

und ist ebenfalls stetig und streng monoton wachsend. Die Ableitung des Arcus-Sinus errechnet sich als

$$(\arcsin)'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,. \tag{12.53}$$

2. Analog erhält man, daß $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$ streng monoton fallend ist; die Umkehrfunktion heißt Arcus-Cosinus,

$$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]\,, \tag{12.54}$$

ist ebenfalls stetig und streng monoton fallend. Die Ableitung des Arcus-Cosinus ist

$$(\arccos)'(x) = -\frac{1}{\sin(\arccos(x))} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos(x))}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,. \tag{12.55}$$

3. Wegen

$$(\tan)'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} > 0\,, \quad \text{für alle } x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

erhalten wir, daß $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ stetig, streng monoton wachsend und bijektiv ist. Die Umkehrfunktion

$$\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \tag{12.56}$$

heißt Arcus-Tangens, und wegen

$$\frac{1}{\cos^2 y} = \frac{\sin^2 y + \cos^2 y}{\cos^2 y} = \tan^2 y + 1$$

gilt

$$(\arctan)'(x) = \cos^2(\arctan x) = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1 + x^2}\,. \tag{12.57}$$

13 Gleichmäßige Konvergenz, normierte Räume

Für diesen Abschnitt vereinbaren wir: $\mathbb{K}$ steht für den Körper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, d.h. eine Aussage, in der $\mathbb{K}$ auftaucht, steht als Abkürzung für die beiden entsprechenden Aussagen mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Seien M, N Mengen. Wir definieren

$$\mathrm{Abb}(M;N) = \{f | f : M \to N \text{ Abbildung}\}\,. \tag{13.1}$$

Definition 13.1 (Punktweise und gleichmäßige Konvergenz)
Sei D Menge, sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $Abb(D;\mathbb{K})$.

(1) *(f_n) heißt punktweise konvergent gegen $f \in \mathrm{Abb}(D;\mathbb{K})$, falls*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\,, \qquad \textit{für alle } x \in D, \tag{13.2}$$

also falls zu jedem $x \in D$ und jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so daß gilt

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad \textit{für alle } n \geq n_0. \tag{13.3}$$

(2) *(f_n) heißt gleichmäßig konvergent gegen $f \in \mathrm{Abb}(D;\mathbb{K})$, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so daß gilt*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad \textit{für alle } x \in D \textit{ und alle } n \geq n_0. \tag{13.4}$$

Der Unterschied der beiden Konvergenzbegriffe besteht darin, daß im Falle der gleichmäßigen Konvergenz n_0 nicht von x abhängen darf.

Offensichtlich ist jede gleichmäßig konvergente Folge (f_n) auch punktweise konvergent.

Beispiel 13.2
Wir betrachten die durch

$$f_n(x) = x^n$$

definierte Folge (f_n) in $\mathrm{Abb}([0,1];\mathbb{R})$. Für alle $x \in [0,1]$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\,, \quad f(x) = \begin{cases} 0\,, & 0 \leq x < 1\,, \\ 1\,, & x = 1\,. \end{cases}$$

Die Konvergenz ist nicht gleichmäßig. Ist etwa $\varepsilon = \frac{1}{3}$ und $\xi_n \in [0,1]$ so gewählt, daß $f_n(\xi_n) = \frac{1}{2}$ (Zwischenwertsatz), so gilt

$$|f_n(\xi_n) - f(\xi_n)| = \frac{1}{2} > \varepsilon\,,$$

also kann (13.4) nicht erfüllt sein, egal wie man n_0 wählt.

In Quantorenschreibweise drückt sich der Unterschied von punktweiser und gleichmäßiger Konvergenz folgendermaßen aus:

$$f_n \to f \text{ punktweise:} \quad \forall\varepsilon > 0 \quad \forall x \in D \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 : \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\,,$$

$$f_n \to f \text{ gleichmäßig:} \quad \forall\varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall x \in D \quad \forall n \geq n_0 : \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\,.$$

Satz 13.3 *Sei $D \subset \mathbb{K}$, sei (f_n) Folge in $C(D;\mathbb{K})$, sei $f : D \to \mathbb{K}$ und es gelte $f_n \to f$ gleichmäßig. Dann ist f auf D stetig.*

Beweis: Wir zeigen, dass für die Funktion f das ε-δ-Kriterium aus Satz 8.14 in jedem Punkt $a \in D$ erfüllt ist. Sei $a \in D$, $\varepsilon > 0$. Wir wählen ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad \text{für alle } x \in D.$$

Wegen Satz 8.14 können wir ein $\delta > 0$ finden, so daß für alle $x \in D$ mit $|x - a| < \delta$

$$|f_n(x) - f_n(a)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Dann gilt für alle $x \in D$ mit $|x - a| < \delta$

$$|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)| < \varepsilon.$$

Aus Satz 8.14 folgt nun die Behauptung. □

Definition 13.4 (Norm, normierter Raum)
Sei X Vektorraum über $\mathbb{K}$. Eine Abbildung $\|\cdot\| : X \to [0,\infty)$ heißt Norm auf X, falls gilt

$$\|x\| = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 0, \tag{13.5}$$

$$\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\| \qquad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{K},\ x \in X, \tag{13.6}$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \qquad \text{für alle } x, y \in X. \tag{13.7}$$

Ist $\|\cdot\|$ eine Norm auf X, so heißt $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum.

Beispiele: $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ ist normierter Raum (mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$), $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ ist normierter Raum (mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Definieren wir für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}, \tag{13.8}$$

so ist $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ ein normierter Raum (Beweis später).

Definition 13.5 *Wir definieren die Maximumnorm von $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ durch*

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|. \tag{13.9}$$

Lemma 13.6 *$(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ ist normierter Raum.*

Beweis:

$$\|x\|_\infty = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |x_i| = 0 \text{ für alle } i.$$

Für $\lambda \in \mathbb{K}$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ gilt

$$\|\lambda x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda x_i| = |\lambda| \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| = |\lambda|\,\|x\|_\infty.$$

Für $x, y \in \mathbb{K}$ und alle i, $1 \le i \le n$, gilt

$$|x_i + y_i| \le |x_i| + |y_i| \le \|x\|_\infty + \|y\|_\infty ,$$

also

$$\|x + y\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i + y_i| \le \|x\|_\infty + \|y\|_\infty .$$

$\square$

Definition 13.7 (Supremumsnorm)
Sei D Menge. Wir definieren durch

$$B(D; \mathbb{K}) = \{f \,|\, f : D \to \mathbb{K},\ f \text{ ist beschränkt}\} \tag{13.10}$$

den Raum aller beschränkten Funktionen auf D. Für $f \in B(D; \mathbb{K})$ definieren wir die Supremumsnorm von f durch

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in D} |f(x)| . \tag{13.11}$$

Satz 13.8 *Sei D Menge. Dann ist $(B(D; \mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$ ein normierter Raum.*

Beweis: $B(D; \mathbb{K})$ ist ein Vektorraum, da Summen und skalare Vielfache beschränkter Funktionen ebenfalls beschränkte Funktionen sind. Für $f, g \in B(D; \mathbb{K})$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt

$$f \ne 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists x \in D \text{ mit } |f(x)| > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \|f\|_\infty > 0 ,$$

$$\|\lambda f\|_\infty = \sup_{x\in D} |\lambda f(x)| = |\lambda| \sup_{x\in D} |f(x)| = |\lambda| \, \|x\|_\infty ,$$

$$|(f + g)(x)| \le |f(x)| + |g(x)| \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty , \qquad \text{für alle } x \in D,$$

also

$$\|f + g\|_\infty = \sup_{x\in D} |f(x) + g(x)| \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty .$$

$\square$

Lemma 13.9 *Sei $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum, Y Unterraum von X. Dann ist auch $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierter Raum, wobei $\|\cdot\|_Y$ die Restriktion von $\|\cdot\|$ auf Y bezeichnet.*

Beweis: Klar. $\square$

Definition 13.10 (Konvergenz im normierten Raum)
Sei $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum. Eine Folge (x_n) in X heißt konvergent gegen $x \in X$ (bezüglich $\|\cdot\|$), falls gilt

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0 . \tag{13.12}$$

In diesem Falle schreiben wir wie bisher $x_n \to x$ und

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x . \tag{13.13}$$

Offensichtlich stimmt für $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ und $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ dieser Konvergenzbegriff mit unserem bisherigen überein.

Lemma 13.11 *Sei $D \subset \mathbb{K}$, sei (f_n) Folge in $B(D;\mathbb{K})$. Dann sind äquivalent:*

(1) *$f_n \to f$ gleichmäßig.*

(2) *$f_n \to f$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$.*

Beweis: Für $n \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$ gilt

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon\,, \qquad \text{für alle } x \in D, \tag{13.14}$$

genau dann, wenn

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon\,. \tag{13.15}$$

Die Aussage (1) ist äquivalent zu der Aussage

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{so daß (13.14) gilt für alle } n \geq n_0,$$

die Aussage (2) ist äquivalent zu der Aussage

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{so daß (13.15) gilt für alle } n \geq n_0.$$

□

Satz 13.12 *Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Dann ist $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ normierter Raum, und*

$$\|f\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|\,. \tag{13.16}$$

Beweis: Ist $f \in C[a,b]$, so ist auch $|f| \in C[a,b]$. Nach Satz 8.13 nimmt $|f|$ auf $[a,b]$ das Maximum an. Also ist $C[a,b]$ Unterraum von $B([a,b];\mathbb{R})$, also auch normierter Raum nach Lemma 13.9, und

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|\,.$$

□

14 Das Integral

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Wir wollen eine Zahl $I(f)$ – das Integral von f – definieren, welche für nichtnegative Funktionen der anschaulichen Vorstellung "Flächeninhalt unterhalb des Graphen von f" entspricht. Die zugehörige Abbildung I sollte auf einer möglichst großen Klasse $\mathcal{F}$ von Funktionen definiert sein, und

$$I : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$$

sollte möglichst viele "gute mathematische Eigenschaften" haben. Der Versuch, diesen beiden Forderungen gerecht zu werden, hat in den letzten 150 Jahren zu einer ganzen Reihe unterschiedlicher Definitionen des Integrals geführt. In der heutigen Analysis wird überwiegend das sogenannte Lebesgue-Integral verwendet.

In dieser einführenden Vorlesung befassen wir uns mit einem etwas einfacheren Integralbegriff.

Im folgenden ist $[a, b]$ immer ein abgeschlossenes Intervall im $\mathbb{R}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Definition 14.1 (Zerlegung)
Eine endliche Menge $Z = \{x_0, \dots, x_n\}$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ heißt Zerlegung von $[a, b]$. Die Intervalle (x_{i-1}, x_i), $1 \le i \le n$, heißen Teilintervalle von Z. Eine Zerlegung Z' heißt Verfeinerung der Zerlegung Z, wenn $Z' \supset Z$.

Definition 14.2 (Treppenfunktion)
Eine Funktion $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt Treppenfunktion auf $[a, b]$, wenn es eine Zerlegung Z gibt, so daß φ auf allen Teilintervallen von Z konstant ist, d.h. für alle i gibt es $c_i \in \mathbb{R}$ mit $\varphi(x) = c_i$ für alle $x \in (x_{i-1}, x_i)$. Eine solche Zerlegung Z heißt zugehörig zu φ. (Über das Verhalten von φ in den Teilpunkten x_i wird nichts vorausgesetzt.) Wir setzen

$$T[a, b] = \{\varphi | \varphi : [a, b] \to \mathbb{R} \text{ Treppenfunktion}\} . \tag{14.1}$$

Lemma 14.3 *$T[a, b]$ ist ein Unterraum von $B([a, b]; \mathbb{R})$.*

Beweis: Sind $f, g \in T[a, b]$ mit zugehörigen Zerlegungen Z_f und Z_g, so ist $Z_f \cup Z_g$ zugehörige Zerlegung zu $\alpha f + \beta g$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. □

Ist $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ Treppenfunktion, so wollen wir das Integral von φ durch

$$I(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} c_i (x_i - x_{i-1}) \tag{14.2}$$

definieren, wobei $J_i = (x_{i-1}, x_i)$ Teilintervalle einer zu φ zugehörigen Zerlegung Z sind und φ auf J_i den konstanten Wert c_i hat.

Lemma 14.4 *Ist $\varphi \in T[a, b]$, und sind $Z = \{x_0, \dots, x_n\}$ und $Z' = \{x'_0, \dots, x'_m\}$ zu φ zugehörige Zerlegungen mit $\varphi = c_i$ auf (x_{i-1}, x_i) und $\varphi = c'_i$ auf (x'_{i-1}, x'_i), so ist*

$$\sum_{i=1}^{n} c_i (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{m} c'_i (x'_i - x'_{i-1}) . \tag{14.3}$$

Beweis: Wir betrachten zunächst den Spezialfall, daß Z' aus Z durch Hinzunahme eines Teilpunktes $x \in (x_{k-1}, x_k)$ entsteht. Dann ist $m = n + 1$ und

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m} c_i'(x_i' - x_{i-1}') &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} c_i(x_i - x_{i-1}) + c_k(x - x_{k-1}) + c_k(x_k - x) \\ &= \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - x_{i-1}) \,.\end{aligned}$$

Der allgemeine Fall wird darauf zurückgeführt: Jede Verfeinerung Z' von Z entsteht, indem wir von Z ausgehend endlich oft einen einzelnen Teilpunkt hinzunehmen. Zwei beliebige Zerlegungen Z und Z' besitzen $Z \cup Z'$ als gemeinsame Verfeinerung. □

Lemma 14.4 zeigt, daß der Wert der rechten Seite von (14.2) nicht davon abhängt, welche der zu φ zugehörigen Zerlegungen Z zugrundegelegt wird. Die folgende Definition ist daher sinnvoll.

Definition 14.5 (Integral einer Treppenfunktion)
Ist $\varphi \in T[a,b]$, so definieren wir das Integral $I(\varphi)$ von φ über $[a,b]$ durch (14.2). Statt $I(\varphi)$ schreiben wir auch

$$\int_a^b \varphi(x)\, dx \,. \tag{14.4}$$

Lemma 14.6 *Für alle $\varphi, \psi \in T[a,b]$ und alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\int_a^b (\alpha\varphi + \beta\psi)(x)\, dx = \alpha \int_a^b \varphi(x)\, dx + \beta \int_a^b \psi(x)\, dx \,, \tag{14.5}$$

$$\left| \int_a^b \varphi(x)\, dx \right| \le \int_a^b |\varphi(x)|\, dx \le (b-a)\|\varphi\|_\infty \,. \tag{14.6}$$

Ist $\varphi \le \psi$ (d.h. $\varphi(x) \le \psi(x)$ für alle $x \in [a,b]$), so gilt

$$\int_a^b \varphi(x)\, dx \le \int_a^b \psi(x)\, dx \,. \tag{14.7}$$

Beweis: Die Aussagen (14.5) und (14.7) werden mit Definition 14.5 auf die entsprechenden Eigenschaften von endlichen Summen zurückgeführt. (14.6) folgt aus (14.7). □

Definition 14.7 (Regelfunktion)
Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt Regelfunktion, wenn es eine Folge (φ_n) von Treppenfunktionen in $T[a,b]$ gibt, welche gleichmäßig gegen f konvergiert. Wir definieren

$$R[a,b] = \{f \,|\, f : [a,b] \to \mathbb{R},\ f \text{ ist Regelfunktion}\} \,. \tag{14.8}$$

Regelfunktionen brauchen nicht stetig zu sein (jede Treppenfunktion ist eine Regelfunktion), aber jede Regelfunktion f ist beschränkt: Ist φ Treppenfunktion mit $\|f - \varphi\|_\infty \le 1$, so gilt

$$|f(x)| \le |f(x) - \varphi(x)| + |\varphi(x)| \le 1 + \|\varphi\|_\infty$$

für alle $x \in [a,b]$.

Lemma 14.8 *Sei $f \in R[a,b]$, seien (φ_n) und (ψ_n) Folgen in $T[a,b]$ mit $\varphi_n \to f$ und $\psi_n \to f$ gleichmäßig. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \psi_n(x)\,dx\,. \tag{14.9}$$

Beweis: Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt nach Lemma 14.6

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \varphi_n(x)\,dx - \int_a^b \varphi_m(x)\,dx \right| &\le (b-a)\|\varphi_n - \varphi_m\|_\infty \\ &\le (b-a)(\|f-\varphi_n\|_\infty + \|f-\varphi_m\|_\infty\,. \end{aligned} \tag{14.10}$$

Die durch

$$I_n = \int_a^b \varphi_n(x)\,dx$$

definierte Folge ist also eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$, also konvergent. Da (φ_n) und (ψ_n) Teilfolgen der ebenfalls gegen f gleichmäßig konvergenten, durch $(\varphi_1, \psi_1, \varphi_2, \psi_2, \ldots)$ definierten Folge sind, gilt (14.9). □

Lemma 14.8 zeigt, daß die folgende Definition sinnvoll ist.

Definition 14.9 (Integral einer Regelfunktion)
Sei $f \in R[a,b]$. Ist (φ_n) eine gleichmäßig gegen f konvergente Folge von Treppenfunktionen, so definieren wir das Integral von f über $[a,b]$ durch

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(x)\,dx\,. \tag{14.11}$$

Lemma 14.10 *$R[a,b]$ ist ein Unterraum von $B([a,b];\mathbb{R})$. Für alle $f, g \in R[a,b]$ und alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx\,, \tag{14.12}$$

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx \le (b-a)\|f\|_\infty\,. \tag{14.13}$$

Ist $f \le g$, so gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx\,. \tag{14.14}$$

Beweis: Seien (φ_n), (ψ_n) Folgen in $T[a,b]$ mit $\varphi_n \to f$ und $\psi_n \to g$ gleichmäßig. Dann gilt

$$\|(\alpha\varphi_n + \beta\psi_n) - (\alpha f + \beta g)\|_\infty \le \alpha\|\varphi_n - f\|_\infty + \beta\|\psi_n - g\|_\infty\,,$$

also gilt $\alpha\varphi_n + \beta\psi_n \to \alpha f + \beta g$ gleichmäßig. Daher ist $R[a,b]$ Unterraum von $B([a,b];\mathbb{R})$ und

$$\begin{aligned} \int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty} \int_a^b (\alpha\varphi_n + \beta\psi_n)(x)\,dx \\ &= \alpha \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(x)\,dx + \beta \lim_{n\to\infty} \int_a^b \psi_n(x)\,dx \\ &= \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx\,. \end{aligned}$$

Zum Beweis von (14.14) definieren wir

$$\tilde{\varphi}_n = \varphi_n - \|f - \varphi_n\|_\infty\,, \quad \tilde{\psi}_n = \psi + \|f - \psi_n\|_\infty\,.$$

Dann gilt $\tilde{\varphi}_n \le f$ und $g \le \tilde{\psi}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, sowie $\tilde{\varphi}_n \to f$ und $\tilde{\psi}_n \to g$ gleichmäßig, also

$$\int_a^b \tilde{\varphi}_n(x)\,dx \le \int_a^b \tilde{\psi}_n(x)\,dx\,,$$

und Grenzübergang $n \to \infty$ liefert (14.14). (14.13) folgt aus (14.14). □

Bemerkung 14.11
Die Aussagen von Lemma 14.10 lassen sich zusammenfassen in dem Satz: Das Integral $I : (R[a,b], \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{R}$ ist eine lineare, stetige und monotone Abbildung. Die Linearität steht in (14.12). Aus (14.13) folgt, daß $f_n \to f$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ die Konvergenz $I(f_n) \to I(f)$ zur Folge hat. Die Monotonie von I in (14.14) bezieht sich auf die durch den punktweisen Vergleich definierte Ordnungsrelation in $R[a,b]$.

Satz 14.12 *Es gilt $C[a,b] \subset R[a,b]$, d.h. jede stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist eine Regelfunktion.*

Beweis: Sei $f \in C[a,b]$, sei $n \in \mathbb{N}$. Wir wählen $\delta > 0$ so, daß $N = (b-a)/\delta \in \mathbb{N}$ und

$$|f(x) - f(y)| < \frac{1}{n}$$

für alle $x, y \in [a,b]$ mit $|x-y| < \delta$ gelten. (Das ist möglich, weil f gleichmäßig stetig ist nach Satz 8.20.) Wir definieren $\varphi_n \in T[a,b]$ durch $\varphi_n(b) = f(b)$ und

$$\varphi_n(x) = f(k\delta)\,, \quad \text{falls } x \in [k\delta, (k+1)\delta)\,, \quad k \in \{1, \dots, N-1\}\,.$$

Dann ist

$$|f(x) - \varphi_n(x)| = |f(x) - f(k\delta)| < \frac{1}{n}\,,$$

falls $x \in [k\delta, (k+1)\delta)$, also

$$\|f - \varphi_n\|_\infty < \frac{1}{n}$$

und damit $\varphi_n \to f$ gleichmäßig. □

Lemma 14.13 *Sei $a < b < c$, sei $f \in R[a,c]$. Dann sind $f|[a,b] \in R[a,b]$ und $f|[b,c] \in R[b,c]$, und es gilt*

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx\,. \tag{14.15}$$

Beweis: Sei (φ_n) Folge in $T[a,c]$ mit $\varphi_n \to f$ gleichmäßig, dann gilt $\varphi_n|[a,b] \in T[a,b]$ und $\varphi_n|[a,b] \to f|[a,b]$ gleichmäßig. Also ist $f|[a,b] \in R[a,b]$. Ebenso für $[b,c]$. Ist Z_n zugehörige Zerlegung zu $\varphi_n|[a,b]$ und Z'_n zugehörige Zerlegung zu $\varphi_n|[b,c]$, so ist $Z_n \cup Z'_n$ zugehörige Zerlegung zu φ_n, und aus Definition 14.5 folgt unmittelbar

$$\int_a^c \varphi_n(x)\,dx = \int_a^b (\varphi_n|[a,b])(x)\,dx + \int_b^c (\varphi_n|[b,c])(x)\,dx\,.$$

Grenzübergang $n \to \infty$ liefert die Behauptung. □

Definition 14.14 *Ist $f \in R[a,b]$, so definieren wir*

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx\,, \quad \textit{sowie} \quad \int_c^c f(x)\,dx = 0 \tag{14.16}$$

für alle $c \in [a,b]$.

Die in Lemma 14.10 und Lemma 14.13 formulierten Eigenschaften lassen sich entsprechend auf den Fall $b < a$ übertragen, insbesondere gilt (14.15) für beliebige $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Satz 14.15 *Seien $f \in R[a,b]$, $c \in [a,b]$. Wir definieren $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ durch*

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt\,. \tag{14.17}$$

Ist $x \in [a,b]$ und f stetig in x, so ist F differenzierbar in x und

$$F'(x) = f(x)\,. \tag{14.18}$$

Beweis: Sei $h \in \mathbb{R}$ mit $h \neq 0$ und $x + h \in [a,b]$. Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) &= \frac{1}{h}\left(\int_c^{x+h} f(t)\,dt - \int_c^x f(t)\,dt\right) - f(x) \\ &= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t) - f(x)\,dt\,. \end{aligned} \tag{14.19}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Wir wählen $\delta > 0$ mit

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon\,, \quad \text{falls } |t - x| < \delta,\ t \in [a,b].$$

Dann gilt für alle $h > 0$ mit $|h| < \delta$, $x + h \in [a,b]$,

$$\left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x)\right| \le \frac{1}{h}\int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|\,dt \le \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \varepsilon\,dt = \varepsilon\,, \tag{14.20}$$

analog für $h < 0$

$$\left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x)\right| \le \frac{1}{|h|}\int_{x+h}^{h} \varepsilon\,dt = \varepsilon\,, \tag{14.21}$$

Also ist F differenzierbar in x, und

$$F'(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)\,.$$

□

Definition 14.16 (Stammfunktion)
Seien $f, F : [a,b] \to \mathbb{R}$, sei F differenzierbar auf $[a,b]$. Gilt $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in [a,b]$, so heißt F Stammfunktion von f.

Aus Satz 14.15 folgt nun: Ist $f \in R[a,b]$, so ist die durch (14.17) definierte Funktion F eine Stammfunktion von f.

Lemma 14.17 *Seien $F, G \in C[a,b]$, sei F Stammfunktion von $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Dann ist G genau dann Stammfunktion von f, wenn $G - F$ konstant ist.*

Beweis: Ist $G-F$ konstant, so ist mit F auch G auf $[a,b]$ differenzierbar, und $G' = F' = f$. Ist umgekehrt G Stammfunktion von f, so gilt $G' = f = F'$, also $(G-F)' = 0$ und damit $G - F$ konstant nach Folgerung 12.18. □

Satz 14.18 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)
Sei $f \in C[a,b]$, sei $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ Stammfunktion von f. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)\,. \tag{14.22}$$

Beweis: Nach Satz 14.12 ist $f \in R[a,b]$, nach Satz 14.15 wird durch

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

eine in allen Punkten $x \in [a,b]$ differenzierbare Funktion $F_a : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $F_a'(x) = f(x)$, also eine Stammfunktion von f definiert, und es gilt

$$\int_a^b f(t)\,dt = F_a(b) = F_a(b) - F_a(a)\,.$$

Aus Lemma 14.17 folgt

$$F(b) - F_a(b) = F(a) - F_a(a)\,,$$

also gilt (14.22). □

Wir schreiben auch

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F\Big|_a^b = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}\,.$$

Bemerkung 14.19
Oft werden die Aussagen von Satz 14.15, Lemma 14.17 und Satz 14.18 zusammengenommen als "Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung" bezeichnet. □

Aus jeder Formel für die Differentiation erhalten wir eine Formel für die Integration. Beispiel: Es ist

$$(\ln)'(x) = \frac{1}{x}\,, \quad x > 0\,,$$

also

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \ln 2 - ln 1 = \ln 2\,.$$

Entsprechend erhalten wir aus jeder Rechenregel für die Differentiation eine Rechenregel für die Integration.

Satz 14.20 (Substitutionsregel)
Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Sei $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, es gelte $g([a,b]) \subset I$. Dann gilt

$$\int_a^b f(g(t))g'(t)\,dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx\,. \tag{14.23}$$

Beweis: Sei F Stammfunktion von f auf dem (abgeschlossenen und beschränkten) Intervall $J = g([a,b])$. Dann ist $F \circ g : [a,b] \to \mathbb{R}$ in $[a,b]$ differenzierbar, und aus der Kettenregel folgt

$$(F \circ g)'(t) = F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t)\,, \quad t \in [a,b]\,.$$

Zweimalige Anwendung des Hauptsatzes liefert nun

$$\int_a^b f(g(t))g'(t)\,dt = (F \circ g)(b) - (F \circ g)(a) = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx\,.$$

□

Beispiel 14.21

1. $$\int_a^b f(t+c)\,dt = \int_{a+c}^{b+c} f(x)\,dx\,,$$
   falls $f : [a+c, b+c] \to \mathbb{R}$ stetig ist, $c \in \mathbb{R}$. (Substitution $g(t) = t + c$.)

2. $$\int_a^b f(ct)\,dt = \frac{1}{c}\int_{ac}^{bc} f(x)\,dx\,,$$
   falls $f : [ac, bc] \to \mathbb{R}$ stetig ist, $c \neq 0$. (Substitution $g(t) = ct$.)

3. Ist $g \in C^1[a,b]$ mit $g(t) > 0$ für alle $t \in [a,b]$, so liefert Anwendung der Substitutionsregel mit $f(x) = 1/x$
   $$\int_a^b \frac{g'(t)}{g(t)}\,dt = \ln(g(t))\Big|_{t=a}^{t=b}\,.$$
   Für $g(t) = \cos t$ ergibt sich, falls $[a,b] \subset (-\pi/2, \pi/2)$,
   $$\int_a^b \tan t\,dt = -\ln(\cos t)\Big|_{t=a}^{t=b}\,.$$

4. Die Substitution
   $$g(t) = 2\arctan t\,, \quad g'(t) = \frac{2}{1+t^2}\,,$$
   führt vermittels der Identität
   $$\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$$

auf

$$\sin(g(t)) = \frac{2t}{1+t^2}\,.$$

Hieraus ergibt sich zum Beispiel

$$\begin{aligned}\int_{g(a)}^{g(b)} \frac{1}{\sin x}\,dx &= \int_a^b \frac{1}{\sin(g(t))} g'(t)\,dt = \int_a^b \frac{1+t^2}{2t}\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int_a^b \frac{1}{t}\,dt \\ &= \ln(b) - \ln(a)\,,\end{aligned}$$

falls etwa $0 < a < b$, und damit

$$\int_c^d \frac{1}{\sin x}\,dx = \ln\left(\tan\frac{x}{2}\right)\Big|_{x=c}^{x=d}, \quad 0 < c < d < \pi\,.$$

Satz 14.22 (Partielle Integration)
Seien $f, g \in C^1[a,b]$. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx\,. \tag{14.24}$$

Beweis: Wir definieren $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ durch $F(x) = f(x)g(x)$. Dann folgt aus der Produktregel

$$F'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\,,$$

also ist F Stammfunktion von $f'g + fg'$, und nach dem Hauptsatz gilt

$$\int_a^b f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b},$$

woraus (14.24) folgt. □

Beispiel 14.23

1. Für $0 < a < b$ gilt

$$\int_a^b \ln x\,dx = \int_a^b 1\cdot \ln x\,dx = x\ln x\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b 1\,dx = (x\ln x - x)\Big|_{x=a}^{x=b},$$

und

$$G(x) = x\ln(x) - x$$

ist eine Stammfunktion des Logarithmus.

2. Wir finden eine Rekursionsformel für

$$I_m = \int_a^b (\sin x)^m\,dx\,. \tag{14.25}$$

Es ist

$$I_0 = b - a\,, \quad I_1 = \cos a - \cos b\,.$$

Für $m \geq 2$ gilt

$$\begin{aligned}
I_m &= \int_a^b (\sin x)^m \, dx = -\int_a^b (\sin x)^{(m-1)} (\cos)'(x) \, dx \\
&= -(\sin x)^{(m-1)} \cos x \Big|_{x=a}^{x=b} + (m-1) \int_a^b (\sin x)^{(m-2)} (\cos x)^2 \, dx \\
&= -(\sin x)^{(m-1)} \cos x \Big|_{x=a}^{x=b} + (m-1) \int_a^b (\sin x)^{(m-2)} (1 - \sin^2 x) \, dx \\
&= -(\sin x)^{(m-1)} \cos x \Big|_{x=a}^{x=b} + (1-m) I_m + (m-1) I_{m-2} \,, \qquad (14.26)
\end{aligned}$$

also

$$I_m = \frac{m-1}{m} I_{m-2} - \frac{1}{m} (\sin x)^{(m-1)} \cos x \Big|_{x=a}^{x=b} .$$

Lemma 14.24 *Sind $f, g \in R[a,b]$, so ist auch $fg \in R[a,b]$.*

Beweis: Übungsaufgabe.

Satz 14.25 (Mittelwertsatz der Integralrechnung)
Seien $f \in C[a,b]$, $g \in R[a,b]$ mit $g \geq 0$. Dann gibt es ein $\xi \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x) g(x) \, dx = f(\xi) \int_a^b g(x) \, dx \,. \qquad (14.27)$$

Beweis: Mit

$$m = \min_{x \in [a,b]} f(x) \,, \quad M = \max_{x \in [a,b]} f(x) \,,$$

gilt wegen $g \geq 0$

$$m \int_a^b g(x) \, dx \leq \int_a^b f(x) g(x) \, dx \leq M \int_a^b g(x) \, dx \,.$$

Wähle $y \in [m, M]$ mit

$$y \int_a^b g(x) \, dx = \int_a^b f(x) g(x) \, dx \,.$$

Wähle (Zwischenwertsatz) $\xi \in [a,b]$ mit $f(\xi) = y$, dann gilt (14.27). □

Folgerung 14.26 *Sei $f \in C[a,b]$. Dann gibt es ein $\xi \in [a,b]$ mit*

$$\int_a^b f(x) \, dx = (b-a) f(\xi) \,. \qquad (14.28)$$

Beweis: Anwendung von Satz 14.25 mit $g = 1$. □

Satz 14.27 *Sei $f \in C[a,b]$, $f \geq 0$, $f \neq 0$. Dann ist*

$$\int_a^b f(x) \, dx > 0 \,. \qquad (14.29)$$

Beweis: Sei $t \in [a,b]$ mit $f(t) > 0$. Wähle $\delta > 0$ mit

$$|f(x) - f(t)| \geq \frac{f(t)}{2} =: \varepsilon$$

für alle $x \in [a,b]$ mit $|x-t| < \delta$. Definiere $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ durch

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varepsilon\,, & |x-t| < \delta\,, \\ 0\,, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt $\varphi(x) \leq f(x)$ für alle $x \in [a,b]$ und also

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b \varphi(x)\,dx \geq \delta\varepsilon > 0\,.$$

□

Satz 14.28 *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:*

(1) $f \in R[a,b]$.

(2) *Für alle $x \in [a,b)$ existiert*

$$\lim_{\substack{\xi \to x \\ \xi > x}} f(\xi)\,, \tag{14.30}$$

und für alle $x \in (a,b]$ existiert

$$\lim_{\substack{\xi \to x \\ \xi < x}} f(\xi)\,. \tag{14.31}$$

Beweis:
"(1) ⇒ (2)": Übungsaufgabe.
"(2) ⇒ (1)": Es gelte (2). Wir nehmen an, f sei keine Regelfunktion. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß

$$\|f - \varphi\|_\infty > \varepsilon\,, \quad \text{für alle } \varphi \in T[a,b]. \tag{14.32}$$

Wir definieren eine Folge von Intervallen $I_n = [a_n, b_n]$, indem wir $I_0 = [a,b]$ setzen und, falls I_n bereits konstruiert ist,

$$I_{n+1} = \left[a_n, \frac{a_n + b_n}{2}\right] \quad \text{oder } I_{n+1} = \left[\frac{a_n + b_n}{2}, b_n\right] \tag{14.33}$$

setzen. Die Wahl wird dabei so getroffen, daß für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\|f|I_n - \varphi\|_\infty > \varepsilon\,, \quad \text{für alle } \varphi \in T(I_n) \tag{14.34}$$

gilt. Das ist möglich: Für $n = 0$ gilt (14.34) wegen (14.32); gäbe es für beide Wahlmöglichkeiten von I_{n+1} ein $\varphi \in T(I_{n+1})$ mit $\|f|I_{n+1} - \varphi\|_\infty \leq \varepsilon$, so gäbe es auch ein $\varphi \in T(I_n)$ mit $\|f|I_n - \varphi\|_\infty \leq \varepsilon$. Es ist dann

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{x\}\,, \quad x = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} b_n\,.$$

Wir setzen (falls $a < x < b$, andernfalls wird nur einer der Grenzwerte betrachtet)

$$y_l = \lim_{\substack{\xi \to x \\ \xi < x}} f(\xi)\,, \quad y_r = \lim_{\substack{\xi \to x \\ \xi > x}} f(\xi)\,,$$

und wählen $n \in \mathbb{N}$ so, daß

$|f(t) - y_l| \le \varepsilon$ für alle $t \in [a_n, x)$,
$|f(t) - y_r| \le \varepsilon$ für alle $t \in (x, b_n]$.

Für $\varphi \in T(I_n)$, definiert durch $\varphi(x) = f(x)$ und

$$\varphi(t) = \begin{cases} y_l\,, & t < x\,, \\ y_r\,, & t > x\,, \end{cases}$$

gilt dann $\|f|I_n - \varphi\|_\infty \le \varepsilon$ im Widerspruch zu (14.34). □

Aus Satz 14.28 folgt beispielsweise, daß die durch

$$f(x) = \begin{cases} 1\,, & x \in \mathbb{Q}\,, \\ 0\,, & x \notin \mathbb{Q}\,, \end{cases}$$

keine Regelfunktion ist.

Folgerung 14.29 *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton. Dann ist f Regelfunktion.*

Beweis: Nach Übungsaufgabe erfüllt jede monotone Funktion die Bedingung (2) aus Satz 14.28. □

Satz 14.30 *Sei (f_n) Folge in $R[a,b]$, sei $f_n \to f$ gleichmäßig, $f \in R[a,b]$. Dann gilt*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx\,. \tag{14.35}$$

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned} 0 \;&\le\; \left|\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f_n(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x) - f_n(x)|\,dx \le \int_a^b \|f - f_n\|_\infty\,dx \\ &=\; (b-a)\|f - f_n\|_\infty \to 0\,. \end{aligned}$$

□

Bemerkung 14.31

1. Die Voraussetzung “$f \in R[a,b]$” in Satz 14.30 ist überflüssig, da sie bereits aus der gleichmäßigen Konvergenz $f_n \to f$ und $f_n \in R[a,b]$ folgt. (Man zeigt, daß f die in Satz 14.28 verlangten rechts- und linksseitigen Grenzwerte besitzt.)

2. Ersetzt man in Satz 14.30 die gleichmäßige Konvergenz durch die punktweise, so gilt (14.35) im allgemeinen nicht. Beispiel:

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}\,, \quad f_n(x) = \begin{cases} n^2 x\,, & x \in [0, \frac{1}{n}]\,, \\ 2n - n^2 x\,, & x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]\,, \\ 0\,, & \text{sonst.} \end{cases}$$

   Es gilt $f_n \to 0$ punktweise in $[0,1]$, aber

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = 1$$

   für alle $n \in \mathbb{N}$.

Satz 14.32 *Sei (f_n) Folge in $C^1[a,b]$, seien die Ableitungen $f_n' \in C[a,b]$ gleichmäßig konvergent gegen eine Funktion $g : [a,b] \to \mathbb{R}$. Es gebe ein $x_0 \in [a,b]$, so daß $(f_n(x_0))$ konvergent ist. Dann gibt es ein $f \in C^1[a,b]$ mit $f_n \to f$ gleichmäßig und $f' = g$.*

Beweis: Zunächst ist g stetig nach Satz 13.3. Aus dem Hauptsatz folgt

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\, dt$$

für alle $x \in [a,b]$. Wir setzen

$$c = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0)\,, \quad f(x) = c + \int_{x_0}^{x} g(t)\, dt\,.$$

Dann ist $f \in C^1[a,b]$ und $f' = g$ nach dem Hauptsatz, und es gilt für alle $x \in [a,b]$

$$\begin{aligned} |f(x) - f_n(x)| &= \left| c + \int_{x_0}^{x} g(t)\, dt - f_n(x_0) - \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\, dt \right| \\ &\le |c - f_n(x_0)| + \int_{x_0}^{x} |g(t) - f_n'(t)|\, dt \\ &\le |c - f_n(x_0)| + |x_0 - x|\, \|g - f_n'\|_\infty\,, \end{aligned}$$

also

$$0 \le \|f - f_n\|_\infty \le |c - f_n(x_0)| + (b-a)\|g - f_n'\|_\infty\,,$$

woraus die Behauptung folgt. □

Definition 14.33 (Uneigentliche Integrale)
Sei $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $f \in R[a,M]$ für alle $M > a$. Wir definieren

$$\int_a^\infty f(x)\, dx = \lim_{M\to\infty} \int_a^M f(x)\, dx\,, \tag{14.36}$$

falls der Grenzwert auf der rechten Seite existiert.

Analog wird

$$\int_{-\infty}^a f(x)\, dx = \lim_{M\to-\infty} \int_M^a f(x)\, dx$$

definiert. Solche Integrale heißen uneigentliche Integrale.

Beispiel 14.34
Wir betrachten

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\, dx\,, \quad \alpha > 1\,.$$

Es ist

$$\int_1^M \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}\Big|_{x=1}^{x=M} = \frac{M^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}\,,$$

also

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \lim_{M\to\infty} \frac{M^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}\,.$$

Für $\alpha = 1$ gilt

$$\int_1^M \frac{1}{x}\,dx = \ln(M) \to \infty\,, \quad \text{falls } M \to \infty\,,$$

also existiert $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ nicht.

Definition 14.35 *Sei $f : (a,b] \to \mathbb{R}$, $f \in R[a+\varepsilon, b]$ für alle $\varepsilon > 0$. Wir definieren*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx\,, \tag{14.37}$$

falls der Grenzwert auf der rechten Seite existiert.

Beispiel 14.36
Wir betrachten

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx\,, \quad \alpha < 1\,.$$

Es ist

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}\Big|_{x=\varepsilon}^{x=1} = \frac{1-\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha}\,,$$

also

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \frac{1-\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\,.$$

Für $\alpha = 1$ gilt

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\,dx = -\ln(\varepsilon) \to \infty\,, \quad \text{falls } \varepsilon \to 0\,,$$

also existiert $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ nicht.

Die eben beschriebenen Situationen können an beiden Integrationsgrenzen auftreten. Ist etwa $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $f \in R[a,b]$ für alle Intervalle $[a,b]$, so definieren wir

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^c f(x)\,dx + \int_c^\infty f(x)\,dx\,, \tag{14.38}$$

falls für ein $c \in \mathbb{R}$ beide Integrale auf der rechten Seite existieren. (Sie existieren dann für alle $c \in \mathbb{R}$, und die Summe hängt nicht von der Wahl von c ab.)

Beispiel:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx \\
&= \lim_{M\to-\infty} (-\arctan M) + \lim_{M\to\infty} \arctan M \\
&= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi\,.
\end{aligned} \tag{14.39}$$

Vorsicht! Die Existenz von

$$\lim_{M\to\infty} \int_{-M}^M f(x)\,dx$$

ist nicht hinreichend für die Existenz von $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ im Sinne von (14.38), so ist etwa

$$\int_{-M}^{M} x\,dx = 0$$

für alle M, aber

$$\int_0^M x\,dx = \frac{1}{2}M^2 \to \infty \quad \text{für } M \to \infty.$$

Satz 14.37 (Integralvergleichskriterium)
Sei $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ monoton fallend, $f \geq 0$. Dann gilt

$$\int_1^\infty f(x)\,dx \quad \textit{existiert} \qquad \Leftrightarrow \qquad \sum_{k=1}^\infty f(k) \quad \textit{ist konvergent}. \tag{14.40}$$

Beweis: Nach Folgerung 14.29 ist $f \in R[1,M]$ für alle $M > 1$. Für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $x \in [k,k+1]$ gilt

$$f(k) \geq f(x) \geq f(k+1)\,,$$

also auch

$$f(k) \geq \int_k^{k+1} f(x)\,dx \geq f(k+1)$$

für alle k, also gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$,

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k) \geq \int_1^n f(x)\,dx \geq \sum_{k=2}^n f(k)\,. \tag{14.41}$$

Aus der rechten Ungleichung folgt: Existiert

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^n f(x)\,dx\,,$$

so ist wegen $f \geq 0$ die Zahl

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^n f(x)\,dx = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_1^n f(x)\,dx$$

eine obere Schranke für $\sum_{k=2}^n f(k)$, also ist die Reihe konvergent. Aus der linken Ungleichung in (14.41) folgt: Ist die Reihe konvergent, so ist die monoton wachsende Folge

$$a_n = \int_1^n f(x)\,dx$$

beschränkt, also konvergent, und wegen

$$a_n \leq \int_1^M f(x)\,dx \leq a_{n+1} \quad \text{für alle } M \in [n,n+1]$$

folgt auch die Existenz von $\int_1^\infty f(x)\,dx$ im Sinne von Definition 14.33. □

Beispiel 14.38
Wir betrachten für $s > 1$ die Funktion

$$f : [1, \infty) \to \mathbb{R}\,, \quad f(x) = \frac{1}{x^s}\,.$$

Nach Beispiel 14.34 existiert $\int_1^\infty f(x)\,dx$, also ist nach Satz 14.37 die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$$

konvergent für $s > 1$. Die Funktion $\zeta : (1, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}\,,$$

heißt die Riemannsche Zetafunktion.