Analysis 2 *

Martin Brokate **

Inhaltsverzeichnis

*Vorlesungsskript, SS 2015

**Zentrum Mathematik, TU München

1 Normierte Räume: Grundbegriffe

Diese Analysis 2 ist im wesentlichen eine “Analysis im Mehrdimensionalen”. Das heißt, wir betrachten Funktionen, deren Definitions- und Wertebereiche im $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^m$ liegen. (Definitions- und Wertebereich können unterschiedliche Dimensionen haben.) Argumente und Werte solcher Funktionen sind also Vektoren.

Die Länge eines Vektors $x = (x_1, x_2)$ in der Ebene $\mathbb{R}^2$ ist bekanntlich gegeben durch

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\,,$$

im Raum $\mathbb{R}^3$ durch

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\,, \qquad x = (x_1, x_2, x_3)\,.$$

Beide Formeln entsprechen der anschaulichen Vorstellung, die man von der Länge eines Vektors hat; sie lassen sich geometrisch mit dem Satz des Pythagoras begründen. Zu Beginn des 20. Jahrhunderts ist daraus ein allgemeiner Begriff entstanden, der Begriff der Norm.

Im Folgenden steht $\mathbb{K}$ für $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Definition 1.1 (Norm, normierter Raum)
*Sei X Vektorraum über $\mathbb{K}$. Eine Abbildung $\|\cdot\| : X \to [0,\infty)$ heißt **Norm** auf X, falls gilt*

$$\|x\| = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 0\,, \tag{1.1}$$

$$\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\| \qquad \text{für alle } \alpha \in \mathbb{K},\ x \in X, \tag{1.2}$$

sowie die Dreiecksungleichung

$$\|x + y\| \le \|x\| + \|y\| \qquad \text{für alle } x, y \in X. \tag{1.3}$$

*Ist $\|\cdot\|$ eine Norm auf X, so heißt $(X, \|\cdot\|)$ **normierter Raum**.*

Da die Betragsfunktion in $\mathbb{R}$ und in $\mathbb{C}$ diese Eigenschaften hat, ist $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ ein normierter Raum über $\mathbb{R}$, und $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ ist ein normierter Raum über $\mathbb{C}$. Es stellt sich weiterhin heraus, dass

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\,, \qquad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n\,, \tag{1.4}$$

eine Norm auf dem $\mathbb{R}^n$ definiert (die ersten beiden Eigenschaften sind offensichtlich, die Dreiecksungleichung wird in Satz 1.4 bewiesen), sie heißt die **euklidische Norm**. Für $n = 2$ und $n = 3$ ist das gerade oben angesprochene Länge. Eine entsprechende Norm in $\mathbb{C}^n$ erhält man, wenn man in (1.4) die Quadrate x_i^2 durch $|x_i|^2$ ersetzt.

Während im Eindimensionalen – $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ über $\mathbb{R}$, oder $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ über $\mathbb{C}$ – die Betragsfunktion und deren skalare Vielfache die einzigen Normen sind, gibt es im Mehrdimensionalen über die euklidische Norm hinaus eine Vielzahl von Normen. Zwei davon sind die **Maximumnorm**

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|\,, \qquad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n\,, \tag{1.5}$$

und die **Summennorm**

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \,, \qquad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \,. \tag{1.6}$$

In beiden Fällen ergeben sich die Normeigenschaften aus den elementaren Eigenschaften von Maximum, Summe und Betrag. So gilt beispielsweise für $x, y \in \mathbb{K}^n$

$$\|x+y\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \le \sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|) = \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i| = \|x\|_1 + \|y\|_1 \,.$$

Die drei genannten Normen liefern unterschiedliche Werte. Beispielsweise gilt für $x = (1,1,1) \in \mathbb{R}^3$

$$\|x\|_\infty = 1 \,, \quad \|x\|_1 = 3 \,, \quad \|x\|_2 = \sqrt{3} \,.$$

Dass man sich in der Definition der Norm nicht auf $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ beschränkt, ist Absicht. Dadurch lassen sich auch unendlichdimensionale Vektorräume behandeln, wie etwa der Raum $C[a,b]$ der auf $[a,b]$ stetigen Funktionen. Dort haben wir auch die Maximumnorm bereits kennengelernt, in der Form

$$\|f\|_\infty = \max_{t \in [a,b]} |f(t)| \,.$$

In der Funktionalanalysis (ein Teilgebiet der Analysis) werden unendlichdimensionale normierte Räume ausführlich behandelt.

Das Besondere an der euklidischen Norm ist, dass sie aus einem sogenannten Skalarprodukt entsteht. Setzen wir

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \,, \qquad x, y \in \mathbb{R}^n \,, \tag{1.7}$$

so ist $\langle x, y \rangle$ eine reelle Zahl, und es gilt

$$\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle} \,. \tag{1.8}$$

Im Komplexen betrachtet man statt (1.7)

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} \,, \qquad x, y \in \mathbb{C}^n \,. \tag{1.9}$$

(Es ergibt sich also eine komplexe Zahl.) Dadurch erreicht man, dass (1.8) ebenfalls gilt, wegen

$$\sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i \overline{x_i}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \,.$$

Wie Normen betrachtet man auch Skalarprodukte auf Vektorräumen ohne Einschränkungen an deren Dimension.

Definition 1.2 (Skalarprodukt, reeller Fall)
Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Eine Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ heißt ***Skalarprodukt*** *auf X, falls gilt*

$$\langle x, x\rangle > 0\,, \quad \textit{für alle } x \in X \textit{ mit } x \neq 0, \tag{1.10}$$

$$\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle\;, \quad \textit{für alle } x, y \in X, \tag{1.11}$$

$$\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\,\langle x, z\rangle + \beta\,\langle y, z\rangle\;, \quad \textit{für alle } x, y, z \in X \textit{ und alle } \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \tag{1.12}$$

□

Aus (1.11) und (1.12) folgt unmittelbar

$$\langle x, \alpha y + \beta z\rangle = \alpha\,\langle x, y\rangle + \beta\,\langle x, z\rangle\;, \quad \text{für alle } x, y, z \in X \text{ und alle } \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \tag{1.13}$$

Ein Skalarprodukt im Reellen also nichts anderes als eine symmetrische positiv definite Bilinearform.

Ist nun X ein Vektorraum über $\mathbb{C}$, so kommt die komplexe Konjugation ins Spiel, und zwar so, dass die Definition für $\mathbb{R}$ sich als Spezialfall ergibt.

Definition 1.3 (Skalarprodukt, allgemeiner Fall)
Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Eine Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{K}$ heißt ***Skalarprodukt*** *auf X, falls gilt*

$$\langle x, x\rangle > 0\,, \quad \textit{für alle } x \in X \textit{ mit } x \neq 0, \tag{1.14}$$

$$\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}\,, \quad \textit{für alle } x, y \in X, \tag{1.15}$$

$$\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\,\langle x, z\rangle + \beta\,\langle y, z\rangle\;, \quad \textit{für alle } x, y, z \in X \textit{ und alle } \alpha, \beta \in \mathbb{K}. \tag{1.16}$$

□

In Eigenschaft (1.14) wird implizit verlangt, dass die Zahl $\langle x, x\rangle$ für jedes $x \in X$ reell ist; andernfalls würde die Ungleichung keinen Sinn machen. Aus (1.15) und (1.16) folgt nunmehr

$$\langle x, \alpha y + \beta z\rangle = \overline{\alpha}\,\langle x, y\rangle + \overline{\beta}\,\langle x, z\rangle\;, \quad \text{für alle } x, y, z \in X \text{ und alle } \alpha, \beta \in \mathbb{K}. \tag{1.17}$$

Für die Analysis sind Skalarprodukte ein Werkzeug, welches der Geometrie und der Algebra entstammt. Für uns ist jetzt vor allem interessant, dass wir aus den Eigenschaften des Skalarprodukts die Dreiecksungleichung für die zugehörige Norm erhalten, welche im endlichdimensionalen Fall gerade die euklidische Norm ist.

Satz 1.4 (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)
Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ mit einem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Dann wird durch

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \tag{1.18}$$

eine Norm auf X definiert, für die die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

$$|\,\langle x, y\rangle\,| \leq \|x\|\,\|y\|\,, \quad \textit{für alle } x, y \in X, \tag{1.19}$$

gilt.

Beweis: Wir zeigen zunächst (1.19). Seien $x, y \in X$ mit $y \neq 0$. Für jedes $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt

$$
\begin{aligned}
0 \leq \langle x + \alpha y, x + \alpha y \rangle &= \langle x, x \rangle + \alpha \langle y, x \rangle + \overline{\alpha} \langle x, y \rangle + \alpha\overline{\alpha} \langle y, y \rangle \\
&= \langle x, x \rangle + \alpha\overline{\langle x, y \rangle} + \overline{\alpha} \langle x, y \rangle + |\alpha|^2 \langle y, y \rangle \ .
\end{aligned}
$$

Setzen wir speziell

$$
\alpha = -\frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} \,,
$$

so folgt

$$
0 \leq \langle x, x \rangle - 2\frac{\langle x, y \rangle \, \overline{\langle x, y \rangle}}{\langle y, y \rangle} + \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle} \,,
$$

und weiter

$$
0 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle - |\langle x, y \rangle|^2 \,,
$$

also gilt (1.19). Nun die Normeigenschaften. Aus $\|x\| = 0$ folgt $\langle x, x \rangle = 0$ und damit $x = 0$ wegen (1.14). Für $\alpha \in \mathbb{K}$ und $x \in X$ gilt

$$
\|\alpha x\|^2 = \langle \alpha x, \alpha x \rangle = \alpha\overline{\alpha} \langle x, x \rangle = |\alpha|^2 \|x\|^2 \,.
$$

Die Dreiecksungleichung gilt wegen

$$
\begin{aligned}
\|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + \langle x, y \rangle + \overline{\langle x, y \rangle} + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \, \|y\| + \|y\|^2 \,, \\
&= (\|x\| + \|y\|)^2 \,.
\end{aligned}
$$

dabei wurde die bereits bewiesene Cauchy-Schwarzsche Ungleichung verwendet. □

Als Spezialfall von Satz 1.4 ergibt sich, dass das Skalarprodukt

$$
\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} \,, \qquad x, y \in \mathbb{K}^n
$$

eine Norm auf dem $\mathbb{K}^n$ erzeugt und damit die oben bereits angesprochene euklidische Norm tatsächlich eine Norm ist.

Folgerung 1.5 *Durch*

$$
\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \tag{1.20}
$$

wird eine Norm auf dem $\mathbb{K}^n$ definiert. □

In $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ hatten wir bereits offene Intervalle und offene Kreisscheiben betrachtet. Wir behandeln den entsprechenden Begriff für normierte Räume.

Definition 1.6 (offene Kugel, Einheitskugel)
Sei $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum. Für $a \in X$ und $r > 0$ heißt

$$
B(a, r) = \{x \in X : \|x - a\| < r\} \tag{1.21}
$$

die ***offene Kugel*** *mit Mittelpunkt a und Radius r.*
Eine Teilmenge U von X heißt ***offen in X*** *(oder einfach:* ***offen****), falls es zu jedem $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ gibt mit*

$$
x \in B(x, \varepsilon) \subset U \,. \tag{1.22}
$$

Die offene Kugel $B(0, 1)$ heißt die ***offene Einheitskugel*** *von X.* □

Für jedes $a \in X$ und $r > 0$ gilt (Übung)

$$B(a,r) = a + rB(0,1)\,,$$

alle offenen Kugeln gehen also durch Translation und Streckung aus der offenen Einheitskugel hervor.

(Bilder für Einheitskugeln in $X = \mathbb{R}^2$ bezüglich der Normen $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ und $\|\cdot\|_1$)

Jedes offene Intervall (a,b) in $\mathbb{R}$ ist offen (bezüglich der Betragsnorm). Jede offene Kugel $B(a,r)$ eines normierten Raums ist offen: Ist $x \in B(a,r)$, so ist $x \in B(x,\varepsilon) \subset B(a,r)$, falls $\varepsilon < r - \|x-a\|$.

Ob eine Teilmenge eines normierten Raums $(X, \|\cdot\|)$ offen ist oder nicht, hängt im Allgemeinen von der Wahl der Norm ab. Es wird sich aber herausstellen, dass im Endlichdimensionalen, also im $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ alle Normen zu denselben offenen Mengen führen.

Satz 1.7 (Hausdorffsche Trennungseigenschaft)
Sei $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum. Dann lassen sich je zwei verschiedene Punkte durch offene Kugeln trennen, genauer: Für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit

$$B(x,\varepsilon) \cap B(y,\varepsilon) = \emptyset\,. \tag{1.23}$$

Beweis: Seien $x, y \in X$ mit $x \neq y$. Wir setzen

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\|x-y\|\,.$$

Für beliebiges $z \in B(x,\varepsilon)$ gilt

$$2\varepsilon = \|x-y\| \leq \|x-z\| + \|z-y\| < \varepsilon + \|z-y\|\,,$$

also ist $\|z-y\| > \varepsilon$ und damit $z \notin B(y,\varepsilon)$. □

Satz 1.8 *Sei $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum. Dann gilt:*

(i) $\emptyset$ und X sind offen.

(ii) Sind U und V offene Teilmengen von X, so ist auch $U \cap V$ offen.

(iii) Ist $(U_i)_{i \in I}$ eine Familie offener Teilmengen von X, so ist auch

$$\bigcup_{i \in I} U_i$$

offen.

Beweis: (i) ist klar. (ii): Seien U, V offen, sei $x \in U \cap V$ beliebig. Wir wählen $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ mit $B(x,\varepsilon_1) \subset U$ und $B(x,\varepsilon_2) \subset V$. Für $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ ist dann $B(x,\varepsilon) \subset U \cap V$.
(iii): Ist $x \in \cup_{i \in I} U_i$, so gibt es ein $i \in I$ mit $x \in U_i$ und weiter ein $\varepsilon > 0$ mit $B(x,\varepsilon) \subset U_i$, also $x \in B(x,\varepsilon) \subset \cup_{i \in I} U_i$. □

Folgerung 1.9 *Sind U_i, $1 \leq i \leq n$, offene Teilmengen eines normierten Raums $(X, \|\cdot\|)$, so ist auch*

$$\bigcap_{i=1}^{n} U_i$$

offen.

Beweis: Folgt direkt aus Teil (ii) des Satzes. □

Ein unendlicher Durchschnitt offener Mengen braucht nicht offen zu sein, so ist etwa

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B(x, \frac{1}{n}) = \{x\} \, ,$$

und Mengen, die nur aus einem Punkt bestehen, sind nicht offen.

Bemerkung 1.10 (Topologie)
Satz 1.8 ist ein Ausgangspunkt, um den Begriff des normierten Raumes weiter zu verallgemeinern, und zwar zum Begriff des *topologischen Raumes*. Statt des Längenbegriffs wird hier der Begriff der offenen Menge axiomatisiert: Sei X eine beliebige Menge. Eine Familie $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen von X heißt **Topologie** auf X, falls gilt

(i) $\emptyset \in \mathcal{T}$, $X \in \mathcal{T}$,

(ii) $U, V \in \mathcal{T} \;\Rightarrow\; U \cap V \in \mathcal{T}$,

(iii) $(U_i)_{i \in I} \subset \mathcal{T} \;\Rightarrow\; \cup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$.

$(X, \mathcal{T})$ heißt topologischer Raum, die Elemente von $\mathcal{T}$ heißen offene Mengen in $(X, \mathcal{T})$. □

Definition 1.11 (Abgeschlossene Menge)
*Sei $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum. Ein $A \subset X$ heißt **abgeschlossen in X** (oder einfach: **abgeschlossen**), wenn ihr Komplement $X \setminus A$ offen ist.*

Mengen, die nur aus einem Punkt bestehen, sind abgeschlossen. Das folgt aus der Hausdorffschen Trennungseigenschaft.

Definition 1.12 (Abgeschlossene Kugel)
Sei $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum, $a \in X$, $r > 0$. Dann heißt

$$K(a, r) = \{x \in X : \|x - a\| \leq r\} \tag{1.24}$$

*die **abgeschlossene Kugel** mit Mittelpunkt a und Radius r.*

□

Jede abgeschlossene Kugel $K(a, r)$ ist abgeschlossen (siehe Übung). Jedes abgeschlossene Intervall in $\mathbb{R}$ ist abgeschlossen.

Satz 1.13 *Sei $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum. Dann gilt*

(i) $\emptyset$ und X sind abgeschlossen.

(ii) Sind $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ abgeschlossen in X, so ist auch

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

abgeschlossen.

(iii) Ist $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie abgeschlossener Teilmengen von X, so ist auch

$$\bigcap_{i\in I} A_i$$

abgeschlossen.

Beweis: Folgt direkt aus Satz 1.8 und Folgerung 1.9. □

Da einpunktige Mengen abgeschlossen sind, folgt aus (ii), dass alle endlichen Teilmengen von X abgeschlossen sind.

Beispiel 1.14 (Cantorsches Diskontinuum)
Sei $C_0 = [0,1]$. Wir setzen $C_1 = C_0 \setminus (1/3, 2/3)$. C_1 besteht aus den beiden abgeschlossenen Intervalle $[0,1/3]$ und $[2/3,1]$. Wir entfernen nun jeweils deren offenes mittleres Drittel $(1/9, 2/9)$ bzw. $(7/9, 8/9)$, um C_2 zu erhalten. Entsprechend erhalten wir C_{n+1} aus C_n. Die Menge

$$C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n \tag{1.25}$$

heißt *Cantorsches Diskontinuum.* C ist abgeschlossen. Es ist

$$C = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} a_i 3^{-i} : a_i \in \{0,2\} \text{ für alle } i \right\}. \tag{1.26}$$

Definition 1.15 (Rand, Inneres, Abschluss)
*Sei $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum, sei $Y \subset X$. Ein $x \in X$ heißt **Randpunkt** von Y, falls jede ε-Kugel um x sowohl einen Punkt von Y als auch einen Punkt von $X \setminus Y$ enthält. Die Menge*

$$\partial Y = \{x : x \in X,\ x \textit{ ist Randpunkt von } Y\} \tag{1.27}$$

*heißt **Rand** von Y (in X). Die Menge*

$$\operatorname{int}(Y) = Y \setminus \partial Y \tag{1.28}$$

*heißt das **Innere** von Y. Die Menge*

$$\overline{Y} = Y \cup \partial Y \tag{1.29}$$

*heißt der **Abschluss** von Y.*

$\square$

Lemma 1.16 *Sei $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum, $Y \subset X$. Dann gilt*

$$\operatorname{int}(Y) \subset Y \subset \overline{Y}, \quad \partial Y \cap \operatorname{int}(Y) = \emptyset, \quad \partial Y = \overline{Y} \setminus \operatorname{int}(Y). \tag{1.30}$$

Beweis: Folgt direkt aus der Definition. $\square$

In $\mathbb{R}$ mit der Betragsnorm gilt: Ist Y eine Teilmenge mit $(a,b) \subset Y \subset [a,b]$, so ist

$$\partial Y = \{a, b\}, \quad \operatorname{int}(Y) = (a,b), \quad \overline{Y} = [a,b].$$

Definieren wir in einem normierten Raum $(X, \|\cdot\|)$ die Sphäre um a mit Radius r durch

$$S(a,r) = \{x : x \in X, \ \|x - a\| = r\}, \tag{1.31}$$

so ist

$$S(a,r) = \partial K(a,r) = \partial B(a,r) = K(a,r) \setminus B(a,r).$$

In $\mathbb{R}$ gilt weiterhin: $\partial\mathbb{Q} = \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, $\operatorname{int}(\mathbb{Q}) = \emptyset$.

Wie auch schon bei den Begriffen "offen" und "abgeschlossen", hängen Inneres, Abschluss und Rand einer Menge Y davon ab, welchen normierten Raum X man als umgebenden Raum wählt. Wir hatten oben gesehen, dass für $Y = [a,b]$ als Teilmenge von $X = \mathbb{R}$ gilt

$$\partial Y = \{a, b\}, \quad \operatorname{int}(Y) = (a,b), \quad \overline{Y} = [a,b].$$

Fassen wir nun das Intervall als Teilmenge $Y = \{(x,0) : x \in [a,b]\}$ von $X = \mathbb{R}^2$ auf, so gilt stattdessen

$$\operatorname{int}(Y) = \emptyset, \quad \overline{Y} = \partial Y = Y.$$

Man beachte: Für beliebige Teilmengen Y eines normierten Raumes gilt im allgemeinen **nicht**

$$\overline{Y} = \overline{\operatorname{int}(Y)}. \tag{1.32}$$

Beispielsweise gilt (1.32) nicht, wenn Y nichtleer, aber $\operatorname{int}(Y)$ leer ist. Aber auch wenn $\operatorname{int}(Y)$ nichtleer ist, braucht (1.32) nicht zu gelten.

Satz 1.17 *Sei $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum, sei $Y \subset X$. Dann gilt*

(i) $\operatorname{int}(Y)$ *ist offen.*

(ii) $\overline{Y}$ *ist abgeschlossen.*

(iii) ∂Y *ist abgeschlossen.*

Beweis: (i): Sei $a \in \operatorname{int}(Y) = Y \setminus \partial Y$. Da $a \notin \partial Y$, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $B(a,\varepsilon)$ keinen Punkt von $X \setminus Y$ enthält, also $B(a,\varepsilon) \subset Y$. Sei nun $y \in B(a,\varepsilon)$ beliebig. Für hinreichend kleines $\delta > 0$ gilt $B(y,\delta) \subset B(a,\varepsilon) \subset Y$, also ist $y \notin \partial Y$. Da y beliebig war, folgt $B(a,\varepsilon) \subset Y \setminus \partial Y = \operatorname{int}(Y)$.
(ii): Für $Z = X \setminus Y$ gilt $\partial Z = \partial Y$ nach Definition. Es folgt

$$\overline{Y} = Y \cup \partial Y = (X \setminus Z) \cup \partial Z = X \setminus (Z \setminus \partial Z) = X \setminus \operatorname{int}(Z).$$

Nach (i) ist $\operatorname{int}(Z)$ offen, also ist $\overline{Y}$ abgeschlossen.
(iii) Es ist

$$\partial Y = \overline{Y} \setminus \operatorname{int}(Y) = \overline{Y} \cap (X \setminus \operatorname{int}(Y)),$$

und damit abgeschlossen als Durchschnitt der abgeschlossenen Mengen $\overline{Y}$ und $X \setminus \operatorname{int}(Y)$.
□

Normen können auf Produkte übertragen werden. Betrachten wir etwa $\mathbb{R}^2$ als Produkt $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, so können wir die Maximumnorm auf $\mathbb{R}^2$,

$$\|(x_1, x_2)\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\},$$

interpretieren als das Maximum der Betragsnormen der einzelnen Komponenten. Diese Konstruktion lässt sich für beliebige normierte Räume durchführen.

Satz 1.18 (Produktnorm)
Seien $(X_1, \|\cdot\|_1)$ und $(X_2, \|\cdot\|_2)$ normierte Räume. Dann wird durch

$$\|(x_1, x_2)\| = \max\{\|x_1\|_1, \|x_2\|_2\} \tag{1.33}$$

*eine Norm auf $X_1 \times X_2$ definiert, man nennt sie auch **Produktnorm**. Es gilt*

$$B((x_1, x_2), \varepsilon) = B(x_1, \varepsilon) \times B(x_2, \varepsilon), \tag{1.34}$$

$$K((x_1, x_2), \varepsilon) = K(x_1, \varepsilon) \times K(x_2, \varepsilon), \tag{1.35}$$

für alle $x_i \in X_i$, $\varepsilon > 0$.

Beweis: Übungsaufgabe. □

Satz 1.19 (Offene und abgeschlossene Mengen im Produktraum)
Seien $(X_1, \|\cdot\|_1)$ und $(X_2, \|\cdot\|_2)$ normierte Räume. Sind $U_i \subset X_i$ offen in X_i, $i = 1, 2$, so ist $U_1 \times U_2$ offen in $X_1 \times X_2$, versehen mit der Produktnorm. Ebenso ist $A_1 \times A_2$ abgeschlossen in $X_1 \times X_2$, falls $A_i \subset X_i$ abgeschlossen sind für $i = 1, 2$.

Beweis: Seien U_i offen, sei $(x_1, x_2) \in U_1 \times U_2$. Wähle ε_i mit $B(x_i, \varepsilon_i) \subset U_i$ $(i = 1, 2)$, dann ist $B((x_1, x_2), \varepsilon) \subset U_1 \times U_2$ für $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Seien $A_i \subset X_i$ abgeschlossen. Es ist

$$(X_1 \times X_2) \setminus (A_1 \times A_2) = ((X_1 \setminus A_1) \times X_2) \cup (X_1 \times (X_2 \setminus A_2)),$$

und die rechte Seite ist offen als Vereinigung zweier offener Mengen. □

Folgerung 1.20 *Seien $(X_i, \|\cdot\|_i)$ normierte Räume, $1 \le i \le n$. Dann wird auf*

$$X = \prod_{i=1}^n X_i$$

eine Norm definiert durch

$$\|x\| = \max_{1 \le i \le n} \|x_i\|_i \tag{1.36}$$

wobei $x \in X$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Sind U_i offen in X_i bzw. A_i abgeschlossen in X_i, so sind auch

$$\prod_{i=1}^n U_i, \quad \prod_{i=1}^n A_i,$$

offen bzw. abgeschlossen in $(X, \|\cdot\|)$.

Beweis: Folgt mit vollständiger Induktion aus den Sätzen 1.18 und 1.19. $\square$

Setzen wir $X_i = \mathbb{K}$ und wählen wir für $\|\cdot\|_{X_i}$ die Betragsnorm, so ist $X = \mathbb{K}^n$, und die Produktnorm

$$\|x\| = \max_{1\le i\le n} |x_i|$$

ist nichts anderes als die Maximumnorm auf $\mathbb{K}^n$. Aus Satz 1.20 ergibt sich nun für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, dass alle achsenparallelen Quader

$$\prod_{i=1}^{n}(a_i, b_i)\,, \quad \prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i]$$

offen bzw. abgeschlossen sind in $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$.

Bemerkung: Betrachten wir ein Produkt

$$X_1 \times X_2 \times X_3$$

dreier normierter Räume (X_i, i), und konstruieren wir eine Norm durch zweimalige Produktbildung gemäß

$$(X_1 \times X_2) \times X_3\,, \quad \text{oder} \quad X_1 \times (X_2 \times X_3)\,,$$

so erhalten wir in beiden Fällen dieselbe Norm, nämlich die in (1.36) definierte.

2 Normierte Räume: Konvergenz, Stetigkeit

Hier steht $\mathbb{K}$ für $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ wie gehabt.

Definition 2.1 (Konvergenz)
Sei $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum. Eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in X heißt konvergent gegen den Grenzwert $a \in X$, falls

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k - a\| = 0\,. \tag{2.1}$$

Wir schreiben wieder

$$\lim_{k\to\infty} x_k = a$$

oder einfach "$x_k \to a$".

$\square$

Die Konvergenz im normierten Raum wird also auf die Konvergenz der Zahlenfolge $\|x_k - a\|$ gegen 0 zurückgeführt. Wie bei der Konvergenz in $\mathbb{C}$ kommt es nur darauf an, dass die Abstände zum Grenzwert a gegen 0 konvergieren; in welcher Richtung (von a aus gesehen) die Folgenglieder liegen, ist völlig gleichgültig. So konvergiert etwa

$$(1,0,0)\,,\ (0,\frac{1}{2},0)\,,\ (0,0,\frac{1}{3})\,,\ (-\frac{1}{4},0,0)\ldots$$

im $\mathbb{R}^3$ gegen 0.

Lemma 2.2 *Seien $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum, $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folge in X, $a \in X$. Dann gilt $x_k \to a$ genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $x_k \in B(a,\varepsilon)$ für alle $k \geq N$.*

Beweis: Nach Definition 2.1 gilt

$$\lim_{k\to\infty} x_k = a \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{N} \quad \forall\, k \geq N: \quad \|x_k - a\| < \varepsilon\,.$$

Da

$$\|x_k - a\| < \varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad x_k \in B(a,\varepsilon)\,,$$

folgt die Behauptung. $\square$

Im $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ ist die Konvergenz von $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ äquivalent zur Konvergenz aller Komponentenfolgen $(x_{k,i})_{k\in\mathbb{N}}$, wobei $x_k = (x_{k,1}, \ldots, x_{k,n})$.

Satz 2.3 *Sei $X = (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$. Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folge in X mit $x_k = (x_{k,1}, \ldots, x_{k,n})$, sei $a = (a_1, \ldots, a_n) \in X$. Dann gilt*

$$\lim_{k\to\infty} x_k = a \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{k\to\infty} x_{k,i} = a_i \quad \textit{für alle } i,\ 1 \leq i \leq n. \tag{2.2}$$

Beweis: Es gilt

$$\|x_k - a\|_\infty \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad \max_{1\leq i\leq n} |x_{k,i} - a_i| \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad |x_{k,i} - a_i| \to 0 \quad \text{für alle } i.$$

$\square$

Beispiel: Die durch $x_k = (1/k, 1 - 1/k)$ definierte Folge im $\mathbb{R}^2$ konvergiert gegen $(0, 1)$.

Was die Notation angeht, taucht bei Folgen im Mehrdimensionalen das Problem auf, dass sowohl für die Position in der Folge als auch für die Komponenten eines Folgenelements ein Index benötigt wird. Ebenfalls üblich ist die Notation

$$x^k = (x_1^k, \dots, x_n^k) \,.$$

Wie bei Zahlenfolgen ist ein Grenzwert, falls er überhaupt existiert, eindeutig bestimmt.

Lemma 2.4 *Sei $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum, sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in X. Dann ist der Grenzwert von $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eindeutig bestimmt, und jede Teilfolge von $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen ihn.*

Beweis: Sind a, b Grenzwerte von $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, so gilt

$$0 \le \|a - b\| \le \|a - x_k\| + \|x_k - b\| \to 0 \quad \text{für } k \to \infty,$$

für $k \to \infty$, also $a = b$. Und aus $\|a - x_k\| \to 0$ folgt dasselbe für jede Teilfolge. $\square$

Satz 2.5 (Konvergenz und Abschluss, I)
Sei $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum, sei $A \subset X$, $a \in X$. Dann ist $a \in \overline{A}$ genau dann, wenn es eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gibt mit $x_k \in A$ für alle k und $x_k \to a$.

Beweis: Wir erinnern daran, dass $\overline{A} = A \cup \partial A$. Ist $a \in \overline{A}$ und $a \in \partial A$, so gibt es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $x_k \in A$ mit $x_k \in B(a, 2^{-k})$. Ist $a \in A$, so können wir einfach $x_k = a$ für alle k setzen. Sei umgekehrt eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in A mit $x_k \in A$ und $x_k \to a$ gegeben. Zu jedem $\varepsilon > 0$ finden wir ein k mit $x_k \in B(a, \varepsilon)$. Da $x_k \in A$, folgt $a \in \partial A \subset \overline{A}$. $\square$

Satz 2.6 (Konvergenz und Abschluss, II)
Sei $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum, sei $A \subset X$. Dann sind äquivalent:

(i) A ist abgeschlossen in X.

(ii) $A = \overline{A}$.

(iii) Für jede konvergente Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in X gilt: Ist $x_k \in A$ für alle k, so ist auch

$$\lim_{k\to\infty} x_k \in A \,.$$

Beweis: "(ii)⇒(i)": Satz 1.15 besagt, dass der Abschluss einer Menge abgeschlossen ist.
"(iii)⇒(ii)": Wegen $\overline{A} = A \cup \partial A$ genügt es zu zeigen, dass $\partial A \subset A$. Sei $a \in \partial A$. Gemäß Satz 2.5 gibt es eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in A mit $x_k \to a$. Nach Voraussetzung ist $a \in A$.
"(i)⇒(iii)": Sei A abgeschlossen, sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folge in A mit $x_k \to a$. Wäre $a \notin A$, also $a \in X \setminus A$, so gäbe es ein $\varepsilon > 0$ mit $B(a, \varepsilon) \subset X \setminus A$ (da $X \setminus A$ offen), im Widerspruch zu $x_k \in A$ und $x_k \to a$. $\square$

Definition 2.7 *Sei $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum. Eine Teilmenge $Y \subset X$ heißt* ***beschränkt****, falls es ein $C > 0$ gibt mit $\|x\| \leq C$ für alle $x \in Y$. Die Zahl*

$$\operatorname{diam}(Y) = \sup_{x,y \in Y} \|x - y\| \tag{2.3}$$

heißt der ***Durchmesser von*** *Y.*

□

Definition 2.8 (Cauchyfolge, Vollständigkeit)
Sei $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum. Eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in X heißt Cauchyfolge, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$\|x_k - x_m\| < \varepsilon\,, \quad \textit{für alle } k, m \geq N.$$

$(X, \|\cdot\|)$ heißt vollständig, falls jede Cauchyfolge in X konvergiert.

Definition 2.9 (Banachraum)
Ein vollständiger normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$ heißt Banachraum.

Lemma 2.10 *Sei $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum. Dann gilt:*

(i) Jede konvergente Folge in X ist eine Cauchyfolge.

(ii) Jede Cauchyfolge ist beschränkt.

Beweis: (i): Sei (x_k) Folge mit $x_k \to a$. Zu $\varepsilon > 0$ wähle N mit $\|x_k - a\| < \varepsilon$ für alle $k \geq N$. Dann gilt für $k, m \geq N$

$$\|x_k - x_m\| \leq \|x_k - a\| + \|a - x_m\| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon\,.$$

(ii): Sei (x_k) Cauchyfolge. Wähle N so, dass gilt $\|x_m - x_N\| < 1$ für alle $m \geq N$. Dann gilt $\|x_m\| \leq \|x_N\| + 1$ für alle $m \geq N$ und damit

$$\|x_m\| \leq \max_{1\leq k\leq N} \|x_k\| + 1 =: C\,, \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N}.$$

□

Satz 2.11 (Vollständigkeit von $\mathbb{K}^n$)
Der normierte Raum $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ ist vollständig, also ein Banachraum.

Beweis: Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge in $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$. Wegen $|x_{k,i} - x_{m,i}| \leq \|x_k - x_m\|_\infty$ ist auch jede Komponentenfolge eine Cauchyfolge in $\mathbb{K}$. Da $\mathbb{K}$ vollständig ist, gilt $x_{k,i} \to a_i$ für ein $a_i \in \mathbb{K}$. Nach Satz 2.3 gilt $x_k \to a = (a_1, \ldots, a_n)$. □

Wir erinnern an die Definition des Raums $B(D;\mathbb{K})$ der beschränkten Funktionen auf einer beliebigen Menge D mit Werten in $\mathbb{K}$; wir hatten bereits gezeigt (ohne es so zu nennen), dass $B(D;\mathbb{K})$ mit der Supremumsnorm zu einem normierten Raum wird.

Satz 2.12 (Vollständigkeit des Raums der beschränkten Funktionen) *Sei D Menge. Der Raum $(B(D;\mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$ ist ein Banachraum.*

Beweis: Sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge in $(B(D;\mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$.
(1) Wegen

$$|f_k(t) - f_m(t)| \le \|f_k - f_m\|_\infty = \sup_{s\in D} |f_k(s) - f_m(s)|$$

ist $(f_k(t))_{k\in\mathbb{N}}$ für alle $t \in D$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{K}$. Da $\mathbb{K}$ vollständig ist, können wir also definieren

$$f(t) = \lim_{k\to\infty} f_k(t)\,.$$

(2) f ist eine beschränkte Funktion: Nach Satz 2.10 ist die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt in $B(D;\mathbb{K})$, also existiert $C > 0$ mit

$$|f_k(t)| \le \|f_k\|_\infty \le C$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $t \in D$, also ist auch $|f(t)| \le C$ für alle $t \in D$.
(3): Wir zeigen $\|f_k - f\|_\infty \to 0$: Sei $\varepsilon > 0$. Wähle N, so dass

$$\|f_k - f_m\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{für alle } k, m \ge N.$$

Sei nun $t \in D$. Wähle $m \ge N$ so, dass

$$|f(t) - f_m(t)| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Dann gilt für alle $k \ge N$

$$|f(t) - f_k(t)| \le |f(t) - f_m(t)| + |f_m(t) - f_k(t)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

Da $t \in D$ beliebig war, folgt

$$\|f - f_k\|_\infty = \sup_{t\in D} |f(t) - f_k(t)| \le \varepsilon$$

für alle $k \ge N$. □

Ist $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und Y ein Unterraum von X, so ist $(Y, \|\cdot\|)$ ebenfalls ein normierter Raum. (Die Norm auf Y entsteht durch Einschränkung der ursprünglichen Norm auf X.)

Satz 2.13 *Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein vollständiger normierter Raum, sei Y ein Unterraum von X. Dann sind äquivalent:*

(i) Y ist abgeschlossen in X.

(ii) Der normierte Raum $(Y, \|\cdot\|)$ ist vollständig.

Beweis: "(i)⇒(ii)": Sei (x_k) Cauchyfolge in Y. Da X vollständig ist, gilt $x_k \to a$, $a \in X$. Da Y abgeschlossen ist, gilt $a \in Y$ nach Satz 2.6.
"(ii)⇒(i)": Sei (x_k) Folge in Y mit $x_k \to a$, $a \in X$. Dann ist (x_k) Cauchyfolge in $(X, \|\cdot\|)$, also auch Cauchyfolge in $(Y, \|\cdot\|)$. Da $(Y, \|\cdot\|)$ vollständig ist, gilt $x_k \to b \in Y$. Da der Grenzwert eindeutig ist, gilt $a = b \in Y$. Also ist Y abgeschlossen nach Satz 2.6. □

Folgerung 2.14 *Der Raum $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ ist ein Banachraum.*

Beweis: Nach Satz 2.12 ist $(B([a,b];\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $C[a,b]$ mit $f_n \to f$ gleichmäßig in $B([a,b])$. In Analysis 1 wurde gezeigt, dass dann f stetig ist. Also ist $C[a,b]$ abgeschlossen und nach Satz 2.13 vollständig. $\square$

Definition 2.15 (Stetigkeit)
Seien $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume, sei $D \subset X$, $f : D \to Y$. Ein $c \in Y$ heißt ***Grenzwert von f in $a \in \overline{D}$***, *falls $c = \lim_{k\to\infty} f(x_k)$ gilt für alle Folgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in D mit $\lim x_k = a$. Wir schreiben*

$$c = \lim_{\substack{x\to a\\ x\in D}} f(x)\,, \quad c = \lim_{x\to a} f(x)\,, \qquad \text{oder} \qquad f(x) \to c \quad \text{für} \quad x \to a\,.$$

f heißt ***stetig in $a \in D$***, *falls gilt*

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)\,.$$

f heißt ***stetig auf $M \subset D$***, *falls f in jedem Punkt $a \in M$ stetig ist. Wir definieren*

$$C(D;Y) = \{f | f : D \to Y,\ f \text{ stetig}\}\,, \quad C(D) = C(D;\mathbb{R})\,.$$

$\square$

Satz 2.16 *Seien $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$, $(Z, \|\cdot\|_Z)$ normierte Räume, seien $D \subset X$, $f : D \to Y$, $g : f(D) \to Z$. Ist f stetig in $a \in D$ und g stetig in $f(a)$, so ist $g \circ f$ stetig in a.*

Beweis: Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folge in X mit $x_k \to a$, dann folgt $f(x_k) \to f(a)$, da f stetig in a, und weiter $g(f(x_k)) \to g(f(a))$. $\square$

Satz 2.17 *Sei $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum, $D \subset X$, $a \in D$ und $f : D \to \mathbb{K}^n$, $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$. Dann ist f stetig in a genau dann, wenn alle Komponentenfunktionen $f_i : D \to \mathbb{K}$ in a stetig sind.*

Beweis: Aus Satz 2.3 folgt, dass $f(x_k) \to f(a)$ gilt genau dann, wenn $f_i(x_k) \to f_i(a)$ für alle i. $\square$

Satz 2.18 *Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division definieren stetige Funktionen von $(\mathbb{K}^2, \|\cdot\|_\infty)$ nach $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ (die Division $(x_1, x_2) \mapsto x_1/x_2$ auf $D = \{(x_1, x_2) : x_2 \neq 0\}$).*

Beweis: Sei $f(x) = x_1 + x_2$ für $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{K}^2$. Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergente Folge in $\mathbb{K}^2$, $x_k = (x_{k,1}, x_{k_2})$, dann gilt

$$f(\lim x_k) = f((\lim x_{k,1}, \lim x_{k,2})) = \lim x_{k,1} + \lim x_{k,2} \tag{2.4}$$
$$= \lim(x_{k,1} + x_{k,2}) = \lim f(x_k)\,. \tag{2.5}$$

Analog für die anderen Operationen. $\square$

Satz 2.19 *Sei $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum, $D \subset X$, und seien $f, g : D \to \mathbb{K}$ stetig in $a \in D$. Dann sind auch $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ und f/g stetig in a (letzteres, falls $g(a) \neq 0$).*

Beweis: $f + g : D \to \mathbb{K}$ läßt sich schreiben als Komposition

$$D \underset{(f,g)}{\longrightarrow} \mathbb{K}^2 \underset{+}{\longrightarrow} \mathbb{K}\,, \quad x \mapsto (f(x), g(x)) \mapsto f(x) + g(x)\,.$$

Die Behauptung folgt aus den Sätzen 2.16, 2.17 und 2.18. Analog für die anderen Operationen. □

Beispiel 2.20

(i) Jede konstante Abbildung $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ ist stetig.

(ii) Die Projektionsabbildungen $p_i : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, $p_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$, sind stetig.

(iii) Ein $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ der Form

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}\,, \quad \alpha_i \in \mathbb{N}\,,$$

heißt Monom. Monome sind stetig.

(iv) Sei I eine endliche Teilmenge von $\mathbb{N}^n$. Ein $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ der Form

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\alpha \in I} c_{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

heißt Polynom vom Grad N, wobei

$$N = \max \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i : \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in I \right\}.$$

Polynome sind stetig.

(v) Jede lineare Abbildung $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ ist stetig: Die Komponentenfunktionen f_i haben die Form

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\,,$$

wobei $A = (a_{ij})$ die Matrix ist, welche f in der kanonischen Basis darstellt.

Satz 2.21 (ε-δ-Stetigkeit) *Seien $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume, sei $D \subset X$, $f : D \to Y$, $a \in D$. Dann ist f stetig in a genau dann, wenn gilt:*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \text{ so dass gilt: } \|x - a\|_X < \delta \quad \Rightarrow \quad \|f(x) - f(a)\|_Y < \varepsilon\,. \tag{2.6}$$

Beweis: "$\Leftarrow$": Sei (x_k) Folge in X mit $x_k \to a$. Sei $\varepsilon > 0$. Wähle δ gemäß (2.6) und $N \in \mathbb{N}$ so, dass $\|x_k - a\|_X < \delta$ für alle $k \geq N$. Dann gilt $\|f(x_k) - f(a)\|_Y < \varepsilon$ für alle $k \geq N$. Es folgt $f(x_k) \to f(a)$. Damit ist f stetig in a.
"$\Rightarrow$": Kontraposition. Gilt (2.6) nicht, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ und eine Folge (x_k) mit

$$\|x_k - a\|_X < \frac{1}{k}, \quad \|f(x_k) - f(a)\|_Y \geq \varepsilon,$$

also $x_k \to a$, aber $f(x_k) \not\to f(a)$. □

Die Eigenschaft (2.6) kann zur Definition der Stetigkeit verwendet werden (und wird dies auch häufig), alternativ zur oben gegebenen Definition 2.15.

Definition 2.22 *Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume, $D \subset X$. Eine Abbildung $f : D \to Y$ heißt **lipschitzstetig** auf D mit **Lipschitzkonstante** L, falls gilt*

$$\|f(x) - f(y)\|_Y \leq L\|x - y\|_X, \quad \text{für alle } x, y \in D. \tag{2.7}$$

Ist $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum, $x_0 \in X$ und $f : X \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \|x - x_0\|,$$

so ist f lipschitzstetig wegen

$$|f(x) - f(y)| = \big|\|x - x_0\| - \|y - x_0\|\big| \leq \|x - y\|.$$

Insbesondere ist in jedem normierten Raum $(X, \|\cdot\|)$ die Norm

$$f(x) = \|x\|$$

lipschitzstetig.

Jede lipschitzstetige Funktion ist stetig. (Übung.)

Satz 2.23 *Seien $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume, sei $f : X \to Y$ linear. Dann sind äquivalent:*

(i) f ist stetig auf X.

(ii) f ist stetig in 0.

(iii) Es gibt ein $C > 0$ mit

$$\|f(x)\|_Y \leq C\|x\|_X, \quad \text{für alle } x \in X. \tag{2.8}$$

Beweis: "(iii)$\Rightarrow$(i)": Sei $a \in X$, (x_k) Folge in X mit $x_k \to a$. Dann gilt

$$0 \leq \|f(x_k) - f(a)\|_Y = \|f(x_k - a)\|_Y \leq C\|x_k - a\|_X \to 0,$$

also $\|f(x_k) - f(a)\|_Y \to 0$, also $f(x_k) \to f(a)$.
"(i)$\Rightarrow$(ii)": klar.

“(ii)⇒(iii)”: Wir wenden (2.6) an mit $\varepsilon = 1$ und $a = 0$ (also $f(a) = 0$). Wähle $\delta > 0$ so, dass $\|f(x)\|_Y < 1$ für alle $x \in X$ mit $\|x\|_X < \delta$. Sei nun $x \in X$ beliebig, $x \neq 0$. Dann ist

$$\left\| \frac{\delta}{2\|x\|_X} x \right\|_X = \frac{\delta}{2} < \delta \,,$$

also

$$\|f(x)\|_Y = \frac{2\|x\|_X}{\delta} \left\| f\left(\frac{\delta}{2\|x\|_X} x \right) \right\|_Y < \frac{2}{\delta} \|x\|_X \,.$$

□

Beispiel 2.24
Wir betrachten $X = C[a,b]$ mit den beiden Normen

$$\|f\|_\infty = \max_{a \le t \le b} |f(t)| \,, \quad \|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| \, dt \,.$$

Die lineare Abbildung

$$T : X \to \mathbb{R} \,, \quad T(f) = \int_a^b f(t) \, dt \,, \tag{2.9}$$

ist stetig bezüglich beider Normen, da

$$|T(f)| = \left| \int_a^b f(t) \, dt \right| \le \int_a^b |f(t)| \, dt = \|f\|_1 \le (b-a) \|f\|_\infty \,.$$

Die lineare Abbildung

$$T : X \to \mathbb{R} \,, \quad T(f) = f(a) \,, \tag{2.10}$$

ist stetig bezüglich $\|\cdot\|_\infty$, da $|T(f)| = |f(a)| \le \|f\|_\infty$. Sie ist aber nicht stetig bezüglich $\|\cdot\|_1$, da für

$$f_n(t) = \max\{1 - n(t-a) \,,\, 0\}$$

gilt

$$|T(f_n)| = |f_n(a)| = 1 \,,$$

aber (für $n \ge \frac{1}{b-a}$)

$$\|f_n\|_1 = \frac{1}{2n} \to 0 \,,$$

und somit (2.8) für kein $C > 0$ erfüllt ist.

Satz 2.25 *Seien $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume, sei $f : X \to Y$. Dann sind äquivalent:*

(i) f ist stetig auf X.

(ii) Das Urbild $f^{-1}(V)$ jeder offenen Menge $V \subset Y$ ist offen in X.

(iii) Das Urbild $f^{-1}(A)$ jeder abgeschlossenen Menge $A \subset Y$ ist abgeschlossen in X.

Beweis: "(i)⇒(iii)": Sei $A \subset Y$ abgeschlossen, sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folge in $f^{-1}(A)$ mit $x_k \to x$, $x \in X$. Dann ist $f(x_k) \in A$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $f(x_k) \to f(x)$ (da f stetig), also ist $f(x) \in A$ nach Satz 2.6, also $x \in f^{-1}(A)$. Wiederum nach Satz 2.6 ist $f^{-1}(A)$ abgeschlossen.
"(iii)⇒(ii)": Ist V offen in Y, so ist $Y \setminus V$ abgeschlossen, also auch $f^{-1}(Y \setminus V)$, und damit $f^{-1}(V) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus V)$ offen in X.
"(ii)⇒(i)": Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folge in X mit $x_k \to a$. Sei $\varepsilon > 0$. Wir setzen $U = f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$. Dann ist $a \in U$ und U offen in x. Nach Lemma 2.2 gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $x_k \in U$ für alle $k \geq N$, also $f(x_k) \in B(f(a), \varepsilon)$ für alle $k \geq N$. Es folgt $f(x_k) \to f(a)$. □

Folgerung 2.26 *Seien $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum, $f : X \to \mathbb{R}$ stetig, $c \in \mathbb{R}$. Dann sind*

$$\{x : x \in X,\ f(x) < c\}\,, \quad \{x : x \in X,\ f(x) > c\}\,,$$

offen in X, und

$$\{x : x \in X,\ f(x) \leq c\}\,, \quad \{x : x \in X,\ f(x) \geq c\}\,,$$

sowie die Niveaumenge von f zum Niveau c,

$$N_c(f) = \{x : x \in X,\ f(x) = c\}\,,$$

abgeschlossen in X.

Beweis: Folgt aus Satz 2.25, da die Mengen $(-\infty, c)$ und (c, ∞) offen in $\mathbb{R}$ und die Mengen $(-\infty, c]$, $[c, \infty)$ und $\{c\}$ abgeschlossen in $\mathbb{R}$ sind. □

Definition 2.27 (Kompakte Menge)
Sei $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum. Eine Teilmenge K von X heißt ***kompakt****, falls jede Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in K eine konvergente Teilfolge besitzt, deren Grenzwert ebenfalls in K liegt.* □

Jedes abgeschlossene beschränkte Intervall $[a, b]$ ist kompakt in der Betragsmetrik (folgt aus dem Satz von Bolzano/Weierstraß, Analysis 1).

Statt "kompakt" sagt man auch "folgenkompakt". Das liegt daran, dass in allgemeinen topologischen Räumen $(X, \mathcal{T})$ der Begriff der Kompaktheit anders definiert, nämlich über die sogenannte "endliche Überdeckungseigenschaft". Diese ist aber im normierten Raum äquivalent zur oben gegebenen Definition.

Satz 2.28 *Jeder abgeschlossene achsenparallele Quader*

$$Q = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$$

mit $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_i \leq b_i$, ist kompakt in $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$.

Beweis: Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $x_k = (x_{k,1}, \ldots, x_{k,n})$ Folge im $\mathbb{R}^n$. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß im $\mathbb{R}$ können wir eine in $[a_1, b_1]$ konvergente Teilfolge $(x_{k_j,1})_{j\in\mathbb{N}}$ von $(x_{k,1})$ wählen. Aus dem gleichen Grund können wir auch eine in $[a_2, b_2]$ konvergente Teilfolge $(x_{k_{j_m},2})_{m\in\mathbb{N}}$ von $(x_{k_j,2})_{j\in\mathbb{N}}$ finden. Dann ist auch $(x_{k_{j_m},1})_{m\in\mathbb{N}}$ in $[a_1, b_1]$ konvergent. Entsprechend gehen wir vor in $[a_3, b_3]$ usw. Nach n Schritten erhalten wir somit eine Teilfolge (x_{i_m}) von (x_k), die in allen n Komponenten konvergent und somit auch im $\mathbb{R}^n$ konvergent ist. □

Satz 2.29 *Sei $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum, sei $K \subset X$ kompakt. Dann gilt:*
(i) Ist $Y \subset X$ abgeschlossen und $Y \subset K$, so ist auch Y kompakt.
(ii) K ist beschränkt und abgeschlossen.

Beweis: Zu (i): Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folge in Y, dann gibt es eine konvergente Teilfolge $x_{k_m} \to a$ mit $a \in K$. Da Y abgeschlossen ist, ist $a \in Y$.
Zu (ii): K ist abgeschlossen: Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folge in K mit $x_k \to a$, $a \in X$. Da K kompakt, gibt es Teilfolge (x_{k_m}) und $b \in K$ mit $x_{k_m} \to b$. Es folgt $a = b$, also $a \in K$. Nach Satz 2.6 ist K abgeschlossen.
K ist beschränkt: Kontraposition. Ist K unbeschränkt, so gibt es eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in K mit $\|x_k\| \geq k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Jede Teilfolge (x_{k_m}) ist wegen $\|x_{k_m}\| \geq k_m$ ebenfalls unbeschränkt, also nicht konvergent. Es folgt, dass K nicht kompakt ist. $\square$

Satz 2.30 (Bolzano/Weierstraß im Mehrdimensionalen)
Sei K Teilmenge von $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$. Dann gilt

$$K \text{ kompakt} \quad \Leftrightarrow \quad K \text{ abgeschlossen und beschränkt.}$$

Beweis: "$\Rightarrow$": Satz 2.29.
"$\Leftarrow$": Für hinreichend großes $C > 0$ gilt

$$K \subset Q = \prod_{i=1}^{n} [-C, C] \,.$$

Da K abgeschlossen und Q kompakt ist nach Satz 2.28, ist K nach Satz 2.29(i) kompakt.
$\square$

Die Implikation "$\Leftarrow$" aus Satz 2.30 gilt in keinem unendlichdimensionalen normierten Raum.

Satz 2.31 *Seien $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume, sei $K \subset X$ kompakt und $f : K \to Y$ stetig. Dann ist auch $f(K)$ kompakt.*

Beweis: Sei (y_k) Folge in $f(K)$. Für alle $k \in \mathbb{N}$ wählen wir $x_k \in K$ mit $f(x_k) = y_k$. Da K kompakt ist, gibt es eine Teilfolge (x_{k_m}) und ein $a \in K$ mit $x_{k_m} \to a$. Es folgt $y_{k_m} = f(x_{k_m}) \to f(a) \in f(K)$, da f stetig. $\square$

Satz 2.32 *Sei $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum, sei $K \subset X$ kompakt, $K \neq \emptyset$, und $f : K \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f(K)$ beschränkt, und f nimmt auf K sowohl Maximum als auch Minimum an, d.h. es gibt $p, q \in K$ mit*

$$f(p) = \sup_{x\in K} f(x) \,, \quad f(q) = \inf_{x\in K} f(x) \,.$$

Beweis: Nach Satz 2.31 ist $f(K)$ kompakt, also beschränkt und abgeschlossen in $\mathbb{R}$ nach Satz 2.29. Aus der Beschränktheit folgt $\sup f(K) < \infty$, aus der Abgeschlossenheit folgt $\sup f(K) \in f(K)$, es gibt also ein $p \in K$ mit $f(p) = \sup_{x\in K} f(x)$. Analog für das Minimum. $\square$

Satz 2.33 *Zu jeder Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^n$ gibt es Zahlen $c_1, c_2 > 0$ mit*

$$c_1\|x\|_\infty \le \|x\| \le c_2\|x\|_\infty\,, \quad \textit{für alle } x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.11}$$

Beweis: Konstruktion von c_2: Für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i\,,$$

wobei e_i der i-te Einheitsvektor ist. Es folgt

$$\|x\| \le \sum_{i=1}^{n} |x_i|\|e_i\| \le \left(\sum_{i=1}^{n}\|e_i\|\right)\max_{1\le j\le n}|x_j| = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n}\|e_i\|\right)}_{=:c_2}\|x\|_\infty\,.$$

Existenz von c_1: Wir definieren $f : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ durch

$$f(x) = \|x\|\,.$$

f ist stetig, da für jede Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^n$ mit $x_k \to a$ gilt

$$0 \le |f(x_k) - f(a)| = |\,\|x_k\| - \|a\|\,| \le \|x_k - a\| \le c_2\|x_k - a\|_\infty\,,$$

also auch $f(x_k) \to f(a)$. Wir betrachten die Einheitssphäre bezüglich $\|\cdot\|_\infty$

$$Y = \{x : x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\|_\infty = 1\}\,.$$

Y ist abgeschlossene beschränkte Teilmenge von $(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_\infty)$, also kompakt nach Satz 2.30, also gibt es nach Satz 2.32 ein $y \in \mathbb{R}^n$ mit $\|y\|_\infty = 1$ und

$$0 < f(y) = \|y\| = \min_{x\in Y}\|x\|\,.$$

Wir setzen $c_1 = \|y\|$. Es gilt dann für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x \ne 0$, dass $x/\|x\|_\infty \in Y$, also

$$c_1 \le \left\|\frac{x}{\|x\|_\infty}\right\|\,.$$

Daher gilt die linke Ungleichung in (2.11) für alle $x \in \mathbb{R}^n$. □

Aus Satz 2.33 folgt: Ist $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folge in $\mathbb{R}^n$, so hängt die Richtigkeit der Aussagen

(x_k) ist konvergent in $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$
(x_k) ist Cauchyfolge bezüglich $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$

nicht von der Wahl der Norm $\|\cdot\|$ ab, "in allen Normen sind die gleichen Folgen konvergent". Ebenso gilt: Ist $Y \subset \mathbb{R}^n$, so hängen die Mengen $\operatorname{int}(Y)$, $\overline{Y}$, ∂Y sowie die Eigenschaften "offen", "abgeschlossen", "kompakt" und "beschränkt" ebenfalls nicht davon ab, welche Norm auf $\mathbb{R}^n$ man gewählt hat. Siehe Übung.

Definition 2.34 (Äquivalenz von Normen)
Sei X Vektorraum, seien $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ Normen auf X. Die beiden Normen heißen ***äquivalent****, falls es Konstanten $c_1, c_2 > 0$ gibt mit*

$$c_1\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le c_2\|x\|_1$$

für alle $x \in X$. □

Zwei Normen, die beide zu einer dritten äquivalent sind, sind selbst wieder äquivalent. Satz 2.33 erhält somit die prägnante Form:

"Auf dem $\mathbb{R}^n$ sind alle Normen äquivalent."

Definition 2.35 (Gleichmäßige Stetigkeit)
Seien $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume, sei $D \subset X$ und $f : D \to Y$. Die Funktion f heißt ***gleichmäßig stetig auf D****, falls gilt*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x, y \in D : \quad \textit{Aus } \|x-y\|_X < \delta \textit{ folgt } \|f(x) - f(y)\|_Y < \varepsilon. \tag{2.12}$$

□

Durch Vergleich mit der ε-δ-Stetigkeit folgt unmittelbar, dass jede auf D gleichmäßig stetige Funktion auch stetig ist auf D.

Ebenso folgt direkt aus den Definitionen, dass jede lipschitzstetige Funktion auch gleichmäßig stetig ist.

Satz 2.36 *Seien $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume, sei $D \subset X$ und $f : D \to Y$. Dann gilt: Ist f stetig auf D und ist D kompakt, so ist f gleichmäßig stetig auf D.*

Beweis: Wir nehmen an, f sei nicht gleichmäßig stetig. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ und für alle $k \in \mathbb{N}$ Elemente $x_k, y_k \in D$ mit

$$\|x_k - y_k\|_X < \frac{1}{k}, \quad \text{aber} \quad \|f(x_k) - f(y_k)\|_Y \ge \varepsilon\,. \tag{2.13}$$

Sei (x_{k_m}) konvergente Teilfolge von (x_k) mit $x_{k_m} \to a \in D$. Aus

$$\|y_{k_m} - a\|_X \le \|y_{k_m} - x_{k_m}\|_X + \|x_{k_m} - a\|_X < \frac{1}{k_m} + \|x_{k_m} - a\|_X$$

folgt auch $y_{k_m} \to a$. Es gilt

$$0 \le \|f(y_{k_m}) - f(x_{k_m})\|_Y \le \|f(x_{k_m}) - f(a)\|_Y + \|f(y_{k_m}) - f(a)\|_Y \to 0\,,$$

da f stetig in a, im Widerspruch zu (2.13). □

3 Kurven im $\mathbb{R}^n$

Definition 3.1 (Kurve)
Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum.

(i) *Jede stetige Funktion $f : I \to X$ heißt **Kurve** (in X). Die Bildmenge $f(I)$ heißt **Spur** der Kurve f. Die Elemente $f(t)$ der Spur von f heißen **Kurvenpunkte**.*

(ii) *Sei $X = \mathbb{R}^n$. Ein $f = (f_1, \ldots, f_n) : I \to \mathbb{R}^n$ heißt **(stetig) differenzierbar**, falls alle $f_i : I \to \mathbb{R}$ (stetig) differenzierbar sind. Die durch*

$$f'(t) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = (f_1'(t), \ldots, f_n'(t)) \in \mathbb{R}^n \tag{3.1}$$

*definierte Ableitung von f in $t \in I$ heißt **Tangentialvektor** (oder **Tangentenvektor**) an f in t. Falls $f'(t) \neq 0$, so heißt*

$$\frac{f'(t)}{\|f'(t)\|_2}$$

*der **Tangenteneinheitsvektor** an f in t.*

□

Ist $I = [a, b]$ abgeschlossen, so soll "stetig differenzierbar" bedeuten, dass in den Randpunkten a und b die links- bzw. rechtsseitige Ableitung existiert und die resultierende Funktion $f' : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ stetig ist auf $[a, b]$.

Wir betrachten eine Reihe von Beispielen. Für $x, v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$, wird durch

$$f(t) = x + tv$$

eine Kurve $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ definiert, deren Spur die Gerade durch x mit Richtung v ist. Es gilt

$$f'(t) = v\,, \quad \frac{f'(t)}{\|f'(t)\|_2} = \frac{v}{\|v\|_2}\,.$$

Weiter:

$$f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2\,, \quad f(t) = (r\cos t, r\sin t)\,, \quad r > 0\,,$$

definiert eine Kurve, deren Spur der Kreis um 0 mit Radius r ist. Es ist

$$f'(t) = (-r\sin t, r\cos t)\,, \quad \|f'(t)\|_2 = r\,, \frac{f'(t)}{\|f'(t)\|_2} = (-\sin t, \cos t)\,.$$

Eine Schraubenlinie erhalten wir durch

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3\,, \quad f(t) = (r\cos t, r\sin t, ct)\,, \quad r > 0\,,\ c > 0\,.$$

Es ist

$$f'(t) = (-r\sin t, r\cos t, c)\,.$$

Für eine beliebige Kurve $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ können wir graph (φ) als Kurve im $\mathbb{R}^{n+1}$ auffassen gemäß $f(t) = (t, \varphi(t))$.

Verschiedene Kurven können dieselbe Spur haben, beispielsweise

$$f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad f(t) = (r\cos t, r\sin t)\,, \tag{3.2}$$

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2\,, \qquad f(t) = (r\cos t, r\sin t)\,, \tag{3.3}$$

$$f : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad f(t) = (r\cos 2t, r\sin 2t)\,. \tag{3.4}$$

Wir unterscheiden zwischen der Kurve und der Spur der Kurve. Dieser Unterschied wird in der Mathematik häufig verwischt, man sagt dann "Kurve" für beides.

Eine Kurve muss nicht injektiv sein.

Definition 3.2 (Doppelpunkt)
*Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum, $f : I \to X$ Kurve. Ein $x \in X$ heißt **Doppelpunkt** von f, falls es $t, s \in I$ gibt mit $t \neq s$ und $x = f(t) = f(s)$.* □

Für die Kurve (3.3) gilt, dass jeder Kurvenpunkt ein Doppelpunkt ist. Die Kurve

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2\,, \quad f(t) = (t^2 - 1, t^3 - t)\,,$$

hat den Doppelpunkt $(0, 0) = f(1) = f(-1)$.

Die Ordnungsrelation "$\leq$" auf I definiert eine Orientierung für eine Kurve $f : I \to X$. Sind $t, s \in I$ mit $t < s$, so sagen wir, dass $f(t)$ vor $f(s)$ liegt. Ist $I = [a, b]$, so heißt $f(a)$ der **Anfangspunkt** und $f(b)$ der **Endpunkt** der Kurve. Die gleiche Spur kann in verschiedene Richtungen durchlaufen werden, etwa

$$f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad f(t) = (r\cos t, r\sin t)\,, \tag{3.5}$$

$$f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad f(t) = (r\cos t, -r\sin t)\,. \tag{3.6}$$

Definition 3.3 (Reguläre Kurve)
*Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $f : I \to \mathbb{R}^n$ Kurve. f heißt **regulär**, falls f stetig differenzierbar auf I ist und $f'(t) \neq 0$ gilt für alle $t \in \operatorname{int}(I)$. Ein $t \in \operatorname{int}(I)$ mit $f'(t) = 0$ heißt **singuläre Stelle** von f. Ist $I = [a, b]$, so heißt f **stückweise regulär**, falls es eine Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = b$ gibt, so dass $f|[t_j, t_{j+1}]$ regulär ist für alle j.* □

Die Kurve

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2\,, \quad f(t) = (t^2 - 1, t^3 - t)\,,$$

ist regulär. Die Kurve

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2\,, \quad f(t) = (t^2, t^3)\,,$$

ist nicht regulär; sie hat die singuläre Stelle 0. Die Kurve

$$f : [-\sqrt{2\pi}, \sqrt{2\pi}] \to \mathbb{R}^2\,, \quad f(t) = (r\cos(t^2), r\sin(t^2))\,,$$

hat ebenfalls die singuläre Stelle 0; ihre Spur ist der Kreis um 0 mit Radius r. (Dieselbe Spur kann also durch reguläre und nicht reguläre Kurven erzeugt werden.) Der Rand eines Rechtecks im $\mathbb{R}^2$ ist Spur einer stückweise regulären Kurve $f : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$.

Definition 3.4 (Schnittpunkt, Schnittwinkel)
*Seien $f : I \to \mathbb{R}^n$, $g : J \to \mathbb{R}^n$ reguläre Kurven. Gibt es $t \in I$, $\tau \in J$ mit $x = f(t) = g(\tau)$, so heißt x **Schnittpunkt** von f und g. Der Winkel θ zwischen den Tangentialvektoren $f'(t)$ und $g'(\tau)$ heißt **Schnittwinkel** von f und g in x. θ ist definiert durch*

$$\cos\theta = \frac{\langle f'(t), g'(\tau)\rangle}{\|f'(t)\|_2 \|g'(\tau)\|_2} . \tag{3.7}$$

□

Ist $f : I \to \mathbb{R}^n$ Kurve, sind $f(t_0), \dots, f(t_N)$ Kurvenpunkte, so ist die Länge des Polygonzugs, der diese Kurvenpunkte nacheinander verbindet, gegeben durch

$$\sum_{j=1}^{N} \|f(t_j) - f(t_{j-1})\| .$$

Definition 3.5 (Länge einer Kurve)
*Sei $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum, sei $f : [a,b] \to X$ Kurve. Für eine Zerlegung $Z = (t_0, \dots, t_N)$ von $[a,b]$, also $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$, definieren wir deren **Feinheit***

$$|Z| = \max_{1 \le j \le N} (t_j - t_{j-1}) , \tag{3.8}$$

sowie

$$L(f, Z) = \sum_{j=1}^{N} \|f(t_j) - f(t_{j-1})\| . \tag{3.9}$$

Dann heißt

$$L(f) = \sup_{Z \in \mathcal{Z}} L(f, Z) , \quad \mathcal{Z} = \{Z : Z \text{ Zerlegung von } [a,b]\} , \tag{3.10}$$

*die **Länge** der Kurve f in $(X, \|\cdot\|)$. Die Kurve f heißt **rektifizierbar**, falls $L(f) < \infty$.*
□

Für Kurven $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ hängt die Antwort auf die Frage, ob f rektifizierbar ist, nicht von der Wahl der Norm ab (da im $\mathbb{R}^n$ alle Normen äquivalent sind), wohl aber die Länge $L(f)$. Für $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ erhalten wir das, was wir uns üblicherweise als Länge vorstellen.

Definition 3.6 *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ Kurve. Wir definieren*

$$\int_a^b f(t)\, dt = \left(\int_a^b f_1(t)\, dt , \dots , \int_a^b f_n(t)\, dt \right) . \tag{3.11}$$

□

Satz 3.7 *Sei $f : [a,b] \to (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ eine stetig differenzierbare Kurve. Dann ist f rektifizierbar, und*

$$L(f) = \int_a^b \|f'(t)\|\, dt = \lim_{\substack{\delta \to 0 \\ |Z| \le \delta, Z \in \mathcal{Z}}} L(f, Z) , \tag{3.12}$$

das heißt: Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle Zerlegungen Z von $[a,b]$ mit $|Z| \le \delta$ gilt

$$|L(f) - L(f, Z)| < \varepsilon .$$

Beweis: Wir zeigen zuerst die rechte Gleichung in (3.12): Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle Zerlegungen Z von $[a, b]$ mit $|Z| \le \delta$ gilt

$$\left| \int_a^b \|f'(t)\|\, dt - L(f, Z) \right| < \varepsilon \,. \tag{3.13}$$

Sei $Z = (t_j)$, $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = b$, Zerlegung von $[a, b]$. Dann ist die Abbildung $t \mapsto \|f'(t)\|$ stetig, und es gilt für alle j, $1 \le j \le N$

$$\begin{aligned}
\left| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|f'(t)\|\, dt - \|f(t_j) - f(t_{j-1})\| \right| &= \left| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|f'(t)\| - \frac{\|f(t_j) - f(t_{j-1})\|}{t_j - t_{j-1}}\, dt \right| \\
&\le \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left| \|f'(t)\| - \left\| \frac{f(t_j) - f(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}} \right\| \right| dt \le \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left\| f'(t) - \frac{f(t_j) - f(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}} \right\| dt \\
&\le \int_{t_{j-1}}^{t_j} c \max_{1 \le i \le n} \left| f_i'(t) - \frac{f_i(t_j) - f_i(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}} \right| dt
\end{aligned} \tag{3.14}$$

mit einer von Z, i und j unabhängigen Konstanten c gemäß Äquivalenz aller Normen im $\mathbb{R}^n$. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es $s_{ij} \in (t_{j-1}, t_j)$ mit

$$\frac{f_i(t_j) - f_i(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}} = f'(s_{ij}) \,.$$

Wir können daher die Abschätzung in (3.14) weiterführen als

$$\begin{aligned}
&\le \int_{t_{j-1}}^{t_j} c \max_{1 \le i \le n} \max_{s \in [t_{j-1}, t_j]} |f'(t) - f'(s)|\, dt \\
&\le c(t_j - t_{j-1}) \max_{1 \le i \le n} \max_{t, s \in [t_{j-1}, t_j]} |f'(t) - f'(s)| \qquad .
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Wir setzen nun für $\delta > 0$

$$\alpha(\delta) = \max_{1 \le i \le n} \max_{\substack{|s-t| \le \delta \\ a \le s, t \le b}} |f_i'(s) - f_i'(t)| \,.$$

Dann ist $\alpha(\delta) < \infty$, da alle f_i' stetig sind und $[a, b]$ kompakt ist, und es gilt

$$\lim_{\delta \to 0} \alpha(\delta) = 0 \,, \tag{3.16}$$

da alle f_i' gleichmäßig stetig sind auf $[a, b]$ nach Satz 2.36. Aus (3.14), (3.15) folgt also

$$\left| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|f'(t)\|\, dt - \|f(t_j) - f(t_{j-1})\| \right| \le c(t_j - t_{j-1}) \alpha(|Z|) \,,$$

und weiter

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b \|f'(t)\|\, dt - L(f, Z) \right| &= \left| \sum_{j=1}^N \left[\int_{t_{j-1}}^{t_j} \|f'(t)\|\, dt - \|f(t_j) - f(t_{j-1})\| \right] \right| \\
&\le \sum_{j=1}^N c(t_j - t_{j-1}) \alpha(|Z|) = c(b - a) \alpha(|Z|) \,.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Für $\varepsilon > 0$ wähle $\delta > 0$ so, dass

$$\alpha(\delta) < \frac{\varepsilon}{c(b-a)}\,,$$

das ist möglich wegen (3.16), und hieraus folgt die rechte Gleichung in (3.12). Sind nun Z, Z' Zerlegungen, und ist Z' Verfeinerung von Z, so folgt mit Hilfe der Dreiecksungleichung

$$L(f,Z) \leq L(f,Z')\,.$$

Hieraus folgt

$$L(f) = \sup_{Z\in\mathcal{Z}} L(f,Z) = \sup_{\substack{Z\in\mathcal{Z}\\ |Z|\leq\delta}} L(f,Z)$$

für alle $\delta > 0$, und nach dem oben Bewiesenen auch die erste Gleichung in (3.12). □

Die Länge (gemessen in der euklidischen Norm) eines Kreisbogens

$$f : [0,\varphi] \to \mathbb{R}^2\,, \quad f(t) = (\cos t, \sin t)\,,$$

errechnet sich also wegen

$$f'(t) = (-\sin t, \cos t)\,, \quad \|f'(t)\|_2 = \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)} = 1$$

zu

$$L(f) = \int_0^\varphi \|f'(t)\|_2\,dt = \varphi\,.$$

Die Länge des Graphen einer Funktion können wir ebenfalls berechnen. Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so setzen wir

$$\tilde{f} : [a,b] \to \mathbb{R}^2\,, \quad \tilde{f}(t) = (t, f(t))\,,$$

also $\tilde{f}'(t) = (1, f'(t))$ und

$$L(\tilde{f}) = \int_a^b \|\tilde{f}'(t)\|_2\,dt = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}\,dt\,.$$

Definition 3.8 (Parametertransformation)
Sei $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ bijektiv und stetig. Dann heißt φ Parametertransformation von $[a,b]$ auf $[\alpha,\beta]$. Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ Kurve, so sagen wir, dass

$$g : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^n\,, \quad g = f \circ \varphi\,,$$

aus f durch die Parametertransformation φ hervorgeht. Falls φ und φ^{-1} stetig differenzierbar sind, heißt φ eine C^1-Parametertransformation; falls zusätzlich $\varphi'(t) > 0$ ($\varphi'(t) < 0$) gilt für alle $t \in [\alpha,\beta]$, so heißt φ orientierungstreu (orientierungsumkehrend). □

Die Parametertransformation

$$\varphi : [a,b] \to [a,b]\,, \quad \varphi(t) = a + b - t\,,$$

kehrt die Orientierung einer Kurve $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ um,

$$(f \circ \varphi)(t) = f(a+b-t)\,, \quad (f \circ \varphi)(b) = f(a)\,, \quad (f \circ \varphi)(a) = f(b)\,.$$

Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Kurve, $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ eine C^1-Parametertransformation, so gilt für $g = f \circ \varphi$

$$g'(\tau) = f'(\varphi(\tau))\varphi'(\tau)\,, \quad \tau \in [\alpha,\beta]\,,$$

das heißt: Die Tangentialvektoren von g in τ und von f in $\varphi(\tau)$ sind parallel, die Tangenteneinheitsvektoren sind entweder gleich oder einander entgegengesetzt.

Satz 3.9 *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, sei $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ eine C^1-Parametertransformation. Dann gilt*

$$L(f) = L(f \circ \varphi)\,. \tag{3.18}$$

Beweis: Aus Satz 3.7 folgt mit der Kettenregel (komponentenweise angewendet) und der Substitutionsregel

$$\begin{aligned} L(f \circ \varphi) &= \int_\alpha^\beta \|(f \circ \varphi)'(\tau)\|\,d\tau = \int_\alpha^\beta \|(f'(\varphi(\tau))\varphi'(\tau)\|\,d\tau \\ &= \int_\alpha^\beta \|(f'(\varphi(\tau))\|\,|\varphi'(\tau)|\,d\tau = \operatorname{sign}(\varphi') \int_\alpha^\beta \|(f'(\varphi(\tau))\|\,\varphi'(\tau)\,d\tau \\ &= \operatorname{sign}(\varphi') \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} \|f'(t)\|\,dt = \int_a^b \|f'(t)\|\,dt \\ &= L(f)\,. \end{aligned} \tag{3.19}$$

$\square$

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre Kurve. Dann ist

$$l(t) = \int_a^t \|f'(s)\|\,ds$$

die Länge des Kurvenstücks vom Anfangspunkt $f(a)$ bis zum Punkt $f(t)$. Es ist $l \in C^1[a,b]$ und, da f regulär,

$$l'(t) = \|f'(t)\| > 0$$

für alle $t \in [a,b]$, also ist

$$l^{-1} : [0, L(f)] \to [a,b]$$

eine C^1-Parametertransformation. Die Kurve

$$g = f \circ l^{-1}$$

entsteht aus f durch "Parametrisierung mit der Bogenlänge". Es gilt

$$g'(\tau) = f'(l^{-1}(\tau))(l^{-1})'(\tau) = \frac{f'(l^{-1}(\tau))}{l'(l^{-1}(\tau))} = \frac{f'(l^{-1}(\tau))}{\|f'(l^{-1}(\tau))\|}\,,$$

also ist $\|g'(\tau)\| = 1$ für alle τ und

$$\int_0^\tau \|g'(s)\|\,ds = \tau\,.$$

4 Partielle Ableitungen, Skalar- und Vektorfelder

Definition 4.1 (Skalarfeld)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Ein $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt skalares Feld, oder Skalarfeld, auf Ω. □

Skalarfelder kann man sich durch ihre Niveaumengen

$$N_c(f) = \{x : x \in \Omega,\, f(x) = c\}$$

veranschaulichen, besonders gut dann, wenn $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Entspricht beispielsweise Ω einer Landkarte und ordnet f jedem Punkt auf der Landkarte seine Höhe zu, so sind die Niveaumengen $N_c(f)$ gerade die Höhenlinien zur Höhe c.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Wir betrachten f "längs einer Geraden", d.h. für einen gegebenen Punkt $x \in \Omega$ und eine gegebene "Richtung" $v \in \mathbb{R}^n$ betrachten wir

$$g(t) = f(x + tv)\,, \quad g : D_g \to \mathbb{R}\,, \quad D_g = \{t : t \in \mathbb{R},\, x + tv \in \Omega\}\,.$$

Falls $g'(0)$ existiert, gibt diese Zahl die "Ableitung von f im Punkt x in die Richtung v" an. Ist dabei x innerer Punkt von Ω, so ist 0 innerer Punkt von D_g für jedes $v \in \mathbb{R}^n$, d.h. $g(t)$ ist für hinreichend kleine Werte von $|t|$ definiert.

Definition 4.2 (Richtungsableitung, partielle Ableitung)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Ist $x \in \Omega$ und $v \in \mathbb{R}^n$, so heißt

$$\partial_v f(x) = \lim_{t \to 0, t \neq 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t} \tag{4.1}$$

*die **Richtungsableitung** von f an der Stelle x in Richtung v, falls der Grenzwert existiert. Ist $v = e_i$ der i-te Einheitsvektor, so sprechen wir von der i-ten **partiellen Ableitung** von f an der Stelle x, wir bezeichnen sie mit*

$$\partial_i f(x)\,.$$

Andere gebräuchliche Schreibweisen für $\partial_i f(x)$ sind

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(x)\,, \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\,, \quad D_i f(x)\,.$$

*Die Funktion f heißt **partiell differenzierbar** in Ω, falls $\partial_i f(x)$ existiert für alle $x \in \Omega$ und alle i, $1 \le i \le n$. Eine in Ω partiell differenzierbare Funktion f heißt **stetig differenzierbar** in Ω, falls die Funktionen*

$$\partial_i f : \Omega \to \mathbb{R}$$

stetig sind für alle i. □

Für $v = e_i$ ist

$$x + te_i = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + t, x_{i+1}, \ldots, x_n)\,.$$

Wir könnten die i-te partielle Ableitung daher auch definieren als

$$\partial_i f(x) = g_i'(x_i)\,, \quad g_i(\xi) := f(x_1, \ldots, x_{i-1}, \xi, x_{i+1}, \ldots, x_n)\,, \tag{4.2}$$

diese Definition ist äquivalent zur obigen. Ist f also durch eine Formel gegeben, so können wir $\partial_i f(x)$ berechnen, indem wir "ganz normal" nach x_i ableiten und dabei die anderen x_k als konstante Parameter betrachten.

Beispiel 4.3 (i) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x_1,x_2,x_3) = x_1 \sin x_3 + x_1^2 x_2^2 \exp(x_2 x_3)$. Es ist

$$\begin{aligned}
\partial_1 f(x_1,x_2,x_3) &= \sin x_3 + 2x_1 x_2^2 \exp(x_2x_3)\,, & \partial_1 f(1,2,0) &= 8\,,\\
\partial_2 f(x_1,x_2,x_3) &= 2x_1^2 x_2 \exp(x_2x_3) + x_1^2x_2^2 \exp(x_2x_3)x_3\,, & \partial_2 f(1,2,0) &= 4\,,\\
\partial_3 f(x_1,x_2,x_3) &= x_1 \cos x_3 + x_1^2 x_2^2 \exp(x_2x_3)x_2\,, & \partial_3 f(1,2,0) &= 9\,.
\end{aligned}$$

(ii) Wir betrachten

$$r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\,, \quad r(x) = \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\,.$$

r ist stetig differenzierbar in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,

$$\partial_i r(x) = \frac{1}{2\sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}} 2x_i = \frac{x_i}{r(x)}\,. \tag{4.3}$$

Im Nullpunkt ist r nicht differenzierbar, da $r(te_i) = |t|$ und

$$\frac{r(0+te_i) - r(0)}{t} = \frac{|t|}{t} = \text{sign}\,(t)\,, \quad t \neq 0\,.$$

(iii) Sei $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ (stetig) differenzierbar, sei $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = g(r(x))\,. \tag{4.4}$$

Dann ist auch f (stetig) differenzierbar, und

$$\partial_i f(x) = g'(r(x))\partial_i r(x) = g'(r(x))\frac{x_i}{r(x)}\,. \tag{4.5}$$

□

Anders als im Eindimensionalen folgt aus der Existenz aller partiellen Ableitungen einer Funktion f noch nicht die Stetigkeit von f. Das liegt daran, dass die partiellen Ableitungen in einem Punkt x das Verhalten von f nur entlang der von x in die Koordinatenrichtungen ausgehenden Geraden auswerten. Beispiel dazu: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n \geq 2$, definiert durch

$$f(0) = 0\,, \quad f(x) = \frac{x_1 \cdots x_n}{\|x\|_2^{2n}}\,,\ x \neq 0\,.$$

In $x = 0$ existieren alle partiellen Ableitungen von f und sind gleich Null, da

$$\frac{f(0+te_i) - f(0)}{t} = \frac{0-0}{t} = 0\,.$$

f ist aber nicht stetig in 0: Betrachten wir

$$a_k = \left(\frac{1}{k}, \dots, \frac{1}{k}\right)\,,$$

so ist

$$\|a_k\|_2 = \frac{\sqrt{n}}{k}\,, \quad f(a_k) = \left(\frac{1}{k}\right)^n \cdot \left(\frac{k}{\sqrt{n}}\right)^{2n} = \frac{k^n}{n^n}\,,$$

also

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0\,, \quad \lim_{k\to\infty} f(a_k) = \infty\,, \quad f(0) = 0\,.$$

Wie im Eindimensionalen können wir höhere Ableitungen bilden, indem wir durch Ableiten erhaltene Funktionen nochmals ableiten. Ist etwa $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = 3x_1^2 x_2^3$, so ist beispielsweise

$$\partial_2 f(x_1, x_2) = 9x_1^2 x_2^2\,,$$

und weiter

$$\partial_1\partial_2 f(x_1, x_2) = 18x_1 x_2^2\,, \quad \partial_2\partial_2 f(x_1, x_2) = 18x_1^2 x_2\,, \quad \partial_2\partial_2 f(1, 1) = 18\,.$$

Definition 4.4 (Höhere partielle Ableitungen)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}$. f heißt $(k+1)$-mal partiell differenzierbar in Ω, falls f k-mal partiell differenzierbar in Ω ist und alle k-ten partiellen Ableitungen der Form

$$\partial_{i_k}\partial_{i_{k-1}} \dots \partial_{i_1} f\,, \quad 1 \le i_j \le n\,, \quad 1 \le j \le k\,,$$

partiell differenzierbar sind. f heißt k-mal stetig differenzierbar, falls alle partielle Ableitungen der Ordnung $\le k$ existieren und stetig sind. Wir definieren

$$\begin{aligned} C^0(\Omega) &= C(\Omega)\,, \\ C^k(\Omega) &= \{f \mid f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ } k\text{-mal stetig differenzierbar}\}\,, \\ C^\infty(\Omega) &= \bigcap_{k\in\mathbb{N}} C^k(\Omega)\,. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Funktionen in $C^\infty(\Omega)$ heißen unendlich oft differenzierbar. □

Liegt zweimal stetige Differenzierbarkeit vor, so können wir beim partiellen Differenzieren die Reihenfolge der Ableitungen vertauschen.

Satz 4.5 (Satz von Schwarz) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^2(\Omega)$. Dann gilt*

$$\partial_j\partial_i f(a) = \partial_i\partial_j f(a)\,, \tag{4.7}$$

für alle $a \in \Omega$ und alle $1 \le i, j \le n$.

Beweis: Sei o.B.d.A. $n = 2$, $i = 1$, $j = 2$, $a = 0 \in \Omega$. Wir wählen $\delta > 0$ mit $B(0, \delta) \subset \Omega$ (Kugel bezüglich der Maximumnorm). Sei $(x_1, x_2) \in B(0, \delta)$. Wir wenden den Mittelwertsatz der Differentialrechnung an auf

$$g(t) = f(t, x_2) - f(t, 0)\,, \quad g : [0, x_1] \to \mathbb{R}\,,$$

und erhalten die Existenz eines $\xi \in (0, x_1)$ mit

$$g(x_1) = g(0) + x_1 g'(\xi)\,,$$

also
$$f(x_1,x_2) - f(x_1,0) = f(0,x_2) - f(0,0) + x_1(\partial_1 f(\xi,x_2) - \partial_1 f(\xi,0))\,. \tag{4.8}$$
Wir wenden nun den Mittelwertsatz an auf $h(t) = \partial_1 f(\xi,t)$, $h:[0,x_2]\to\mathbb{R}$, und erhalten die Existenz eines $\eta\in(0,x_2)$ mit
$$h(x_2) = h(0) + x_2 h'(\eta)\,,$$
also aus (4.8)
$$f(x_1,x_2) - f(x_1,0) = f(0,x_2) - f(0,0) + x_1x_2\partial_2\partial_1 f(\xi,\eta)\,. \tag{4.9}$$
Vertauschen der Rollen von x_1 und x_2 liefert $\tilde\xi\in(0,x_1)$, $\tilde\eta\in(0,x_2)$ mit
$$f(x_1,x_2) - f(0,x_2) = f(x_1,0) - f(0,0) + x_2x_1\partial_1\partial_2 f(\tilde\xi,\tilde\eta)\,, \tag{4.10}$$
also
$$\partial_2\partial_1 f(\xi,\eta) = \partial_1\partial_2 f(\tilde\xi,\tilde\eta)\,.$$
Grenzübergang $(x_1,x_2)\to(0,0)$ ergibt $(\xi,\eta)\to(0,0)$ und $(\tilde\xi,\tilde\eta)\to(0,0)$, also wegen der vorausgesetzten Stetigkeit der zweiten partiellen Ableitungen
$$\partial_2\partial_1 f(0,0) = \partial_1\partial_2 f(0,0)\,.$$
□

Folgerung 4.6 *Für $f\in C^n(\Omega)$ können wir die Reihenfolge von bis zu n partiellen Ableitungen beliebig vertauschen.* □

Insbesondere können wir partielle Ableitungen sortieren, z.B.:
$$\partial_1\partial_4\partial_1\partial_2\partial_4\partial_1 f = \partial_1\partial_1\partial_1\partial_2\partial_4\partial_4 f = \partial_1^3\partial_2\partial_4^2 f\,.$$
Wir verwenden dabei die Schreibweise
$$\partial_i^k f = \underbrace{\partial_i\partial_i\ldots\partial_i}_{k \text{ mal}} f\,.$$

Definition 4.7 (Gradient)
Sei $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ offen, $f:\Omega\to\mathbb{R}$ partiell differenzierbar. Dann heißt
$$\operatorname{grad} f(x) = \nabla f(x) = (\partial_1 f(x),\ldots,\partial_n f(x)) \tag{4.11}$$
der Gradient von f in x. □

Für radialsymmetrische Funktionen $f(x) = g(\|x\|_2)$ haben wir in (4.5) berechnet
$$\partial_i f(x) = g'(\|x\|_2)\frac{x_i}{\|x\|_2}\,,$$

also

$$\operatorname{grad} f(x) = \nabla f(x) = g'(\|x\|_2)\frac{x}{\|x\|_2}\,. \tag{4.12}$$

Allgemein gelten für $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ die Rechenregeln

$$\operatorname{grad}(f+g) = \operatorname{grad} f + \operatorname{grad} g\,, \quad \operatorname{grad}(\lambda f) = \lambda \operatorname{grad} f\,, \tag{4.13}$$

$$\operatorname{grad}(f \cdot g) = g \cdot \operatorname{grad} f + f \cdot \operatorname{grad} g\,. \tag{4.14}$$

(Folgt aus der Definition und den Rechenregeln für die Ableitung im Eindimensionalen.)

Definition 4.8 (Vektorfeld)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Ein $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ heißt Vektorfeld auf Ω. F heißt (stetig) partiell differenzierbar, falls alle Komponentenfelder $F_i : \Omega \to \mathbb{R}$ es sind. □

Definition 4.9 (Rotation)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ offen, $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$ partiell differenzierbar. Dann heißt

$$\operatorname{rot} F : \Omega \to \mathbb{R}^3\,, \tag{4.15}$$

$$\operatorname{rot} F(x) = (\partial_2 F_3(x) - \partial_3 F_2(x), \partial_3 F_1(x) - \partial_1 F_3(x), \partial_1 F_2(x) - \partial_2 F_1(x)) \tag{4.16}$$

die Rotation von F. □

Definition 4.10 (Gradientenfeld)
Ein Vektorfeld $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, heißt Gradientenfeld, falls es ein skalares Feld $f : \Omega \to \mathbb{R}$ gibt mit

$$F = \operatorname{grad} f\,. \tag{4.17}$$

f heißt ein Potential von F. □

Definition 4.11 (Divergenz)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ein partiell differenzierbares Vektorfeld. Dann heißt

$$\operatorname{div} F : \Omega \to \mathbb{R}\,, \tag{4.18}$$

$$\operatorname{div} F(x) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i F_i(x)\,, \tag{4.19}$$

die Divergenz von F. □

Beispiel 4.12

(i) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, seien $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ partiell differenzierbar. Dann gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(fF) &= \sum_{i=1}^{n} \partial_i(fF_i) = \sum_{i=1}^{n}(\partial_i f \cdot F_i + f \cdot \partial_i F_i) \\ &= \langle \operatorname{grad} f, F\rangle + f \cdot \operatorname{div} F\,. \end{aligned} \tag{4.20}$$

(ii) Wir betrachten $G : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$,

$$G(x) = \frac{x}{\|x\|_2} \,. \tag{4.21}$$

Wir setzen

$$f(x) = \frac{1}{\|x\|_2} = \left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right)^{-\frac{1}{2}} \,, \quad F(x) = x \,,$$

Dann ist

$$\partial_i f(x) = -\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x_i = -\frac{x_i}{\|x\|_2^3} \,,$$
$$\operatorname{div} F(x) = n \,,$$

also erhalten wir aus (4.20)

$$\begin{aligned}(\operatorname{div} G)(x) &= \langle (\operatorname{grad} f)(x), F(x)\rangle + f(x) \cdot (\operatorname{div} F)(x) \\ &= \left\langle -\frac{x}{\|x\|_2^3}, x \right\rangle + \frac{1}{\|x\|_2} n = -\frac{\|x\|_2^2}{\|x\|_2^3} + \frac{1}{\|x\|_2} n \\ &= \frac{n-1}{\|x\|_2} \,.\end{aligned}$$

□

Definition 4.13 (Laplace-Operator)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^2(\Omega)$. Wir definieren

$$\begin{aligned}\Delta f(x) = (\operatorname{div}(\operatorname{grad} f))(x) &= \sum_{i=1}^n \partial_i (\operatorname{grad} f)_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^n \partial_i^2 f(x) \,. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Der Operator $\Delta = \sum_{i=1}^n \partial_i^2$ heißt der Laplace-Operator. □

Die Gleichung

$$-\Delta f(x) = 0 \,, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \,, \tag{4.23}$$

heißt Laplace-Gleichung oder Potentialgleichung. Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $I \subset \mathbb{R}$, $f : \Omega \times I \to \mathbb{R}$, heißt

$$\partial_t^2 f(x,t) - c^2 \Delta f(x,t) = 0 \,, \tag{4.24}$$

die Wellengleichung (∂_t partielle Ableitung nach t, Δ bezogen auf die ersten n Komponenten x von (x,t)). Die Zahl $c > 0$ beschreibt die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle. Die Gleichung

$$\partial_t f(x,t) - k \Delta f(x,t) = 0 \,, \tag{4.25}$$

heißt die Wärmeleitungsgleichung oder die Diffusionsgleichung, k heißt der Diffusionskoeffizient (oder Wärmeleitkoeffizient).

Wir wenden den Laplace-Operator auf eine radialsymmetrische Funktion an. Sei $f(x) = g(\|x\|_2)$. Dann gilt für $x \neq 0$

$$\begin{aligned}
\Delta f(x) &= (\operatorname{div}(\operatorname{grad} f))(x) = \operatorname{div}\left(g'(\|x\|_2)\frac{x}{\|x\|_2}\right) \\
&= \left\langle \operatorname{grad}(g'(\|x\|_2)), \frac{x}{\|x\|_2}\right\rangle + g'(\|x\|_2)\operatorname{div}\left(\frac{x}{\|x\|_2}\right) \\
&= \left\langle g''(\|x\|_2)\frac{x}{\|x\|_2}, \frac{x}{\|x\|_2}\right\rangle + g'(\|x\|_2)\frac{n-1}{\|x\|_2} \\
&= g''(\|x\|_2) + \frac{n-1}{\|x\|_2}g'(\|x\|_2)\,.
\end{aligned}$$

Im Spezialfall $n = 2$, $g(r) = \ln r$, gilt

$$g''(r) = -\frac{1}{r^2} = -\frac{1}{r}g'(r)\,,$$

also für $n = 2$

$$\Delta \ln(\|x\|_2) = 0\,, \quad x \neq 0\,.$$

Im Fall $n \geq 3$, $g(r) = r^{2-n}$, gilt

$$g'(r) = (2-n)r^{1-n}\,, \quad g''(r) = (1-n)(2-n)r^{-n} = \frac{1-n}{r}g'(r)\,,$$

also wieder

$$\Delta(\|x\|_2^{2-n}) = 0\,, \quad x \neq 0\,.$$

5 Differenzierbarkeit im Mehrdimensionalen

Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion mit Komponentenfunktionen $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, so können wir die partiellen Ableitungen $\partial_j f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bilden und damit rechnen. Was uns aber noch fehlt, ist ein allgemeiner Begriff der Differenzierbarkeit von f. Die Formel aus dem Eindimensionalen

$$f'(x) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

und deren Interpretation (Tangentensteigung = Grenzwert der Sekantensteigungen) sind hierfür nicht geeignet. Was sich aber verallgemeinern lässt, ist die Vorstellung, f "lokal durch eine lineare Abbildung zu approximieren", also die Darstellung

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + r(h)\,, \quad \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{r(h)}{h} = 0\,.$$

Im Eindimensionalen gilt

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{r(h)}{h} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{|r(h)|}{|h|} = 0\,.$$

Der Grenzwert auf der rechten Seite macht auch im Mehrdimensionalen Sinn, wenn wir die Beträge durch Normen ersetzen.

Definition 5.1 (Differenzierbarkeit)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$, $x \in \Omega$. f heißt ***differenzierbar*** *im Punkt x, falls eine lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ existiert mit*

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{\|f(x+h)-f(x)-T(h)\|}{\|h\|} = 0\,. \tag{5.1}$$

Statt "differenzierbar" sagt man auch "Fréchet-differenzierbar" oder "total differenzierbar". Die Abbildung T heißt ***Ableitung*** *(oder Fréchet-Ableitung oder totale Ableitung) von f in x. Wir bezeichnen die Ableitung von f in x mit $Df(x)$.* □

In Satz 5.3 werden wir mitbeweisen, dass es höchstens eine solche Abbildung T gibt (dadurch wird die Bezeichnung $Df(x)$ gerechtfertigt).

Wegen der Äquivalenz aller Normen im $\mathbb{R}^n$ ist es gleichgültig, welche Norm man in Definition 5.1 zugrundelegt.

Bezeichnen wir mit $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ die Menge aller linearen Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$, so ist also $Df(x) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, falls f in x differenzierbar ist. Ist f in jedem Punkt $x \in \Omega$ differenzierbar, so ist die Ableitung von f in Ω eine Abbildung

$$Df : \Omega \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)\,.$$

Verallgemeinert man Definition 5.1 auf Abbildungen $f : X \to Y$ zwischen beliebigen normierten Räumen X, Y, so verlangt man zusätzlich, dass T stetig ist. (Im Endlichdimensionalen ist, wie wir bereits wissen, jede lineare Abbildung stetig).

Beispiel 5.2

(i) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear, $x \in \mathbb{R}^n$. Dann ist

$$f(x+h) - f(x) - f(h) = f(x) + f(h) - f(x) - f(h) = 0\,.$$

Setzen wir also $T(h) = f(h)$, so gilt (5.1). Also ist f differenzierbar in x, und $Df(x) = f$ (wobei die Gleichheit im Sinn von Abbildungen zu verstehen ist; wie f ist auch $Df(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, und $(Df(x))(h) = f(h)$ für alle $h \in \mathbb{R}^n$). Die Ableitung einer linearen Abbildung hängt also nicht von x ab,

$$Df : \mathbb{R}^n \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

ist eine konstante Abbildung.
Was bedeutet das im Eindimensionalen ($n = m = 1$)? Ist beispielsweise $f(x) = 3x$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben, so ist $f'(x) = 3$ und damit f' eine konstante Abbildung. Den Wert "3" können wir interpretieren als eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, also ein Element der Menge $L(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, nämlich als diejenige lineare Abbildung, die jedem $h \in \mathbb{R}$ den Wert $3h \in \mathbb{R}$ zuordnet.

(ii) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definiert durch

$$f(x) = Ax + b\,, \quad A \in \mathbb{R}^{(m,n)}\,,\ b \in \mathbb{R}^m\,,$$

das heißt

$$\begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Es ist

$$f(x+h) - f(x) - Ah = A(x+h) + b - Ax - b - Ah = 0\,,$$

also ist f differenzierbar in x, und $Df(x)(h) = Ah$.

(iii) Sei $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ symmetrisch und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \frac{1}{2}\langle x, Ax\rangle = \frac{1}{2} x^T A x = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} x_i a_{ij} x_j\,.$$

In diesem Fall ist $m = 1$, und wir können im Bildraum $\mathbb{R}$ als Norm den Betrag nehmen. Für festes $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= \frac{1}{2}\langle x+h, A(x+h)\rangle - \frac{1}{2}\langle x, Ax\rangle && (5.2)\\ &= \frac{1}{2}\langle h, Ax\rangle + \frac{1}{2}\langle x, Ah\rangle + \frac{1}{2}\langle h, Ah\rangle && (5.3)\\ &= \langle Ax, h\rangle + \frac{1}{2}\langle h, Ah\rangle\,. && (5.4)\end{aligned}$$

Mit $T(h) = \langle Ax, h\rangle$ gilt

$$\begin{aligned} |f(x+h) - f(x) - T(h)| &= |\frac{1}{2}\langle h, Ah\rangle| \le \frac{1}{2}\|h\|_2\|Ah\|_2 \\ &\le \frac{1}{2}\|h\|_2 C\|h\|_2\,, \end{aligned} \tag{5.5}$$

wobei C eine von A, aber nicht von h abhängende Konstante ist (die durch A definierte lineare Abbildung ist stetig !), also

$$0 \le \frac{|f(x+h) - f(x) - T(h)|}{\|h\|_2} \le \frac{1}{2}C\|h\|_2 \to 0$$

für $h \to 0$. Also ist f differenzierbar in x, und

$$(Df(x))(h) = T(h) = \langle Ax, h\rangle \ .$$

□

Aus der Linearen Algebra wissen wir, dass lineare Abbildungen zwischen dem $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ sich durch Matrizen, also durch Elemente des $\mathbb{R}^{(m,n)}$, darstellen lassen.

Satz 5.3 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$, f in $x \in \Omega$ differenzierbar. Dann ist f stetig in x und partiell differenzierbar in x, und es gilt*

$$(Df(x))(h) = (J_f(x))h\,, \quad J_f(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x) & \cdots & \partial_n f_1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_m(x) & \cdots & \partial_n f_m(x) \end{pmatrix} . \tag{5.6}$$

*Die Matrix $J_f(x) \in \mathbb{R}^{(m,n)}$ heißt **Jacobi-Matrix**, oder auch **Funktionalmatrix**, von f in x.*

Zur Bedeutung der linken Gleichung in (5.6): Auf ihrer linken Seite wenden wir die Abbildung $Df(x)$ auf den Vektor h an und erhalten den Vektor $(Df(x))(h)$. Auf ihrer rechten Seite multiplizieren wir die Matrix $J_f(x)$ mit dem Spaltenvektor

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} , \quad h = \sum_{i=1}^n h_i e_i\,,$$

und erhalten den Spaltenvektor $J_f(x)h$.

Beweis: Sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung, welche (5.1) erfüllt.
f ist stetig in x: Mit $r(h) = f(x+h) - f(x) - T(h)$ gilt

$$\|f(x+h) - f(x)\| = \|r(h) + T(h)\| \le \|r(h)\| + \|T(h)\| \le \|r(h)\| + C\|h\|\,,$$

wobei C eine von h unabhängige Konstante ist. Es folgt

$$\lim_{h\to 0} \|f(x+h) - f(x)\| = 0\,.$$

f ist partiell differenzierbar in x: Sei $A \in \mathbb{R}^{(m,n)}$ die Matrix, welche die lineare Abbildung T bezüglich der kanonischen Basis darstellt, also

$$T(h) = Ah\,, \quad h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}.$$

Wir definieren $r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ durch

$$r(h) = f(x+h) - f(x) - Ah\,,$$

also

$$r_i(h) = f_i(x+h) - f_i(x) - \sum_{k=1}^{n} a_{ik}h_k\,, \quad 1 \le i \le m\,.$$

Für $h = te_j$, $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$, e_j der j-te Einheitsvektor, gilt

$$r_i(te_j) = f_i(x+te_j) - f_i(x) - ta_{ij}\,,$$

also

$$\frac{f_i(x+te_j) - f_i(x)}{t} = a_{ij} + \frac{r_i(te_j)}{t}\,,$$

und

$$\left|\frac{r_i(te_j)}{t}\right| = \frac{|r_i(te_j)|}{\|te_j\|_2} \le \frac{\|r(te_j)\|_2}{\|te_j\|_2} \to 0$$

für $t \to 0$, da $\|r(h)\|_2/\|h\|_2 \to 0$ für $h \to 0$. Also

$$\partial_j f_i(x) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{f_i(x+te_j) - f_i(x)}{t} = a_{ij}\,.$$

□

Der soeben gegebene Beweis zeigt außerdem, dass die lineare Abbildung T in Definition 5.1 eindeutig bestimmt ist. Die Definition von $Df(x)$ als "die" Ableitung von f in x ist also sinnvoll. Für die Differenz

$$\tilde{r}(y) = f(y) - (f(x) + Df(x)(y-x)) \tag{5.7}$$

gilt gemäß Definition 5.1

$$\lim_{y\to x} \frac{\tilde{r}(y)}{\|y-x\|} = 0\,. \tag{5.8}$$

Die Abbildung $y \mapsto f(x) + Df(x)(y-x)$ ist die einzige affin lineare Abbildung mit dieser Approximationseigenschaft.

Beispiel 5.4 (Polarkoordinaten in der Ebene)
Die Abbildung

$$f : (0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2\,, \quad f(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi) \tag{5.9}$$

repräsentiert die Transformation von Polarkoordinaten auf kartesische Koordinaten. Es gilt

$$J_f(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}. \tag{5.10}$$

Der Punkt mit den Polarkoordinaten $(r, \varphi) = (2, \pi/2)$ hat die kartesischen Koordinaten $f(2, \pi/2) = (0, 2)$. Die Funktionalmatrix an diesem Punkt ist gegeben durch

$$J_f(2, \pi/2) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Definition 5.5 (Stetige Differenzierbarkeit)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Abbildung $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ heißt stetig differenzierbar in Ω, falls alle partiellen Ableitungen $\partial_j f_i : \Omega \to \mathbb{R}$ existieren und in Ω stetig sind.

Satz 5.6 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar in Ω. Dann ist f differenzierbar in allen Punkten x von Ω.*

Beweis: Wir setzen

$$r(h) = f(x + h) - f(x) - J_f(x)h ,$$

also

$$r_i(h) = f_i(x + h) - f_i(x) - \sum_{j=1}^{n} \partial_j f_i(x)h_j , \quad 1 \le i \le m .$$

Es genügt zu zeigen, dass für alle i gilt

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{|r_i(h)|}{\|h\|_\infty} = 0 . \tag{5.11}$$

Sei $x \in \Omega$. Wähle zunächst $\delta > 0$ so, dass $x + h \in \Omega$ gilt für alle h mit $\|h\|_\infty \le \delta$ (Ω ist offen). Sei nun $h \in \mathbb{R}^n$ mit $\|h\|_\infty \le \delta$. Wir definieren $z^j \in \mathbb{R}^n$ durch

$$z^j = x + \sum_{k=1}^{j} h_k e_k , \quad z^0 = x .$$

Wir wenden den Mittelwertsatz im $\mathbb{R}$ an auf

$$g_{ij}(t) = f_i(z^{j-1} + te_j) .$$

Es gibt also τ_{ij} zwischen 0 und h_j mit

$$g_{ij}(h_j) = g_{ij}(0) + g'_{ij}(\tau_{ij})h_j ,$$

also

$$f_i(z^j) = f_i(z^{j-1}) + \partial_j f_i(\eta_{ij})h_j , \quad \eta_{ij} = z^{j-1} + \tau_{ij}e_j .$$

Weiter folgt

$$f_i(x + h) - f_i(x) = \sum_{j=1}^{n} (f_i(z^j) - f_i(z^{j-1})) = \sum_{j=1}^{n} \partial_j f_i(\eta_{ij})h_j ,$$

also

$$r_i(h) = \sum_{j=1}^{n} \partial_j f_i(\eta_{ij})h_j - \sum_{j=1}^{n} \partial_j f_i(x)h_j ,$$

also

$$|r_i(h)| \le \|h\|_\infty \sum_{j=1}^{n} |\partial_j f_i(\eta_{ij}) - \partial_j f_i(x)| \,.$$

Es ist $\|\eta_{ij} - x\|_\infty \le \|h\|_\infty$, also folgt aus der Stetigkeit der partiellen Ableitungen

$$\lim_{h \to 0} \sum_{j=1}^{n} |\partial_j f_i(\eta_{ij}) - \partial_j f_i(x)| = 0 \,.$$

und damit die Behauptung (5.11). □

Die Transformationsformel für die Polarkoordinaten aus Beispiel 5.4

$$f : (0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \,, \quad f(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

erfüllt die Voraussetzungen von Satz 5.6, da alle Elemente der Jacobimatrix

$$J_f(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

stetige Funktionen von (r,φ) sind. Der Übergang von Polarkoordinaten zu kartesischen Koordinaten ist also differenzierbar im Sinne von Definition 5.1.

In den beiden vorangehenden Sätzen haben wir die Implikationen bewiesen:

f stetig differenzierbar in Ω	$\Rightarrow$	f differenzierbar in Ω
f differenzierbar in Ω	$\Rightarrow$	f partiell differenzierbar in Ω
f differenzierbar in Ω	$\Rightarrow$	f stetig in Ω

Alle anderen (außer die sich durch Transitivität ergebenden) möglichen Implikationen zwischen diesen 4 Begriffen gelten nicht !

Satz 5.7 (Kettenregel im Mehrdimensionalen)
Seien $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ offen, seien $f : U \to \mathbb{R}^m$, $g : V \to \mathbb{R}^l$ mit $f(U) \subset V$. Ist f differenzierbar in $x \in U$ und g differenzierbar in $f(x)$, so ist auch $g \circ f$ differenzierbar in x, und es gilt

$$D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \circ Df(x) \,, \quad J_{g\circ f}(x) = J_g(f(x)) \cdot J_f(x) \,. \tag{5.12}$$

Die Ableitung der Komposition zweier Funktionen g und f ist also gleich der Komposition der Ableitungen Dg an der Stelle $f(x)$ und Df an der Stelle x.

Beweis: Wir betrachten die Restglieder

$$r_f(h) = f(x+h) - f(x) - Df(x)(h) \,, \quad r_g(\eta) = g(f(x)+\eta) - g(f(x)) - Dg(f(x))(\eta) \,.$$

Es gilt

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \ne 0}} \frac{\|r_f(h)\|}{\|h\|} = 0 \,, \quad \lim_{\substack{\eta \to 0 \\ \eta \ne 0}} \frac{\|r_g(\eta)\|}{\|\eta\|} = 0 \,.$$

Wir definieren nun

$$\eta(h) = f(x+h) - f(x) = Df(x)(h) + r_f(h)\,.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}(g\circ f)(x+h) - (g\circ f)(x) &= g(f(x)+\eta(h)) - g(f(x))\\ &= (Dg(f(x)))(\eta(h)) + r_g(\eta(h)) = (Dg(f(x)))((Df(x))(h) + r_f(h)) + r_g(\eta(h))\,,\end{aligned}$$

also

$$(g\circ f)(x+h) - (g\circ f)(x) - (Dg(f(x))\circ Df(x))(h) = r_g(\eta(h)) + Dg(f(x))(r_f(h))\,. \quad (5.13)$$

Wir wollen zeigen, dass die rechte Seite von (5.13) schneller gegen 0 geht als $\|h\|$. Zunächst gilt (C_1 von h unabhängig)

$$\frac{\|Dg(f(x))(r_f(h))\|}{\|h\|} \le \frac{C_1\|r_f(h)\|}{\|h\|} \to 0$$

für $h \to 0$. Falls $\eta(h) = 0$, so ist auch $r_g(\eta(h)) = 0$. Falls $\eta(h) \neq 0$, so gilt

$$\frac{\|r_g(\eta(h))\|}{\|h\|} = \frac{\|r_g(\eta(h))\|}{\|\eta(h)\|}\cdot\frac{\|\eta(h)\|}{\|h\|}\,. \quad (5.14)$$

Der zweite Bruch auf der rechten Seite ist wegen

$$\|\eta(h)\| \le \|Df(x)(h)\| + \|r_f(h)\| \le C_2\|h\| + \|r_f(h)\|$$

beschränkt, der erste Bruch auf der rechten Seite von (5.14) konvergiert gegen 0 für $h \to 0$, da $\eta(h) \to 0$ für $h \to 0$. Insgesamt folgt also aus (5.13)

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{\|(g\circ f)(x+h) - (g\circ f)(x) - (Dg(f(x))\circ Df(x))(h)\|}{\|h\|} = 0\,, \quad (5.15)$$

und damit die erste Gleichung in (5.12). Die zweite ergibt sich, da beim Übergang von linearen Abbildungen zu Matrizen die Komposition in die Matrixmultiplikation übergeht.
□

Beispiel 5.8 Sei

$$\begin{aligned} g &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\,, \quad g(x_1,x_2) = (x_2^2+1, x_1)\,,\\ f &: (0,\infty)\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2\,, \quad f(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,.\end{aligned}$$

Wir betrachten die Komposition $G = g\circ f$. Es ist

$$G(r,\varphi) = g(f(r,\varphi)) = g(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = (r^2\sin^2\varphi + 1, r\cos\varphi)\,. \quad (5.16)$$

Für die Funktionalmatrizen gilt

$$J_f(r,\varphi) = \begin{pmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi\\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{pmatrix}\,, \quad J_g(x_1,x_2) = \begin{pmatrix}0 & 2x_2\\ 1 & 0\end{pmatrix}\,,$$

also

$$
\begin{aligned}
J_G(r,\varphi) &= J_g(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot J_f(r,\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 2r\sin\varphi \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2r\sin^2\varphi & 2r^2\sin\varphi\cos\varphi \\ \cos\varphi & -r\sin\varphi \end{pmatrix} .
\end{aligned}
$$

Dasselbe Ergebnis erhält man, wenn man die Funktionalmatrix von G aus (5.16) direkt berechnet (was in diesem Fall relativ einfach ist, da sich G formelmäßig einfach ausdrücken lässt).

Allgemein gilt: Schreibt man die Gleichung

$$
J_{g\circ f}(x) = J_g(f(x))\cdot J_f(x)
$$

elementweise auf, so ergibt sich

$$
\partial_j(g\circ f)_i(x) = \sum_{k=1}^{m}(\partial_k g_i)(f(x))\cdot \partial_j f_k(x)\,. \tag{5.17}
$$

Im Spezialfall $n = l = 1$, also $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ Kurve, $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ skalares Feld, ist $g\circ f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ und

$$
(g\circ f)'(t) = \sum_{k=1}^{m}(\partial_k g)(f(t))f_k'(t) = \langle(\operatorname{grad} g)(f(t)), f'(t)\rangle \ . \tag{5.18}
$$

Verläuft die Spur der Kurve f ganz in einer Niveaufläche $N_c(g) = \{x : g(x) = c\}$ von g, dann ist

$$
g(f(t)) = c
$$

für alle t, also folgt aus (5.18)

$$
0 = (g\circ f)'(t) = \langle(\operatorname{grad} g)(f(t)), f'(t)\rangle \ ,
$$

das heißt, der Gradient von g in $f(t)$ steht senkrecht auf den Tangentialvektor $f'(t)$ von f in t. Da dies für jede Kurve gilt, deren Spur ganz in $N_c(g)$ verläuft, steht also der Gradient senkrecht auf der von allen möglichen Tangentialvektoren gebildeten tangentialen Hyperebene der Niveaufläche.

Definition 5.9 (Tangentialvektor an eine Niveaufläche)
Sei $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ offen, $f:\Omega\to\mathbb{R}$ differenzierbar, $x\in\Omega$ mit $f(x)=c$ und $\operatorname{grad} f(x)\neq 0$. *Ein Vektor $v\in\mathbb{R}^n$ heißt Tangentialvektor an $N_c(f)$ in x, falls*

$$
\langle(\operatorname{grad} f)(x), v\rangle = 0\,. \tag{5.19}
$$

□

Satz 5.10 *In der Situation von Definition 5.9 gilt:*

$$
T(x) = \{v : v \text{ ist Tangentialvektor an } N_c(f) \text{ in } x\} \tag{5.20}
$$

ist ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$ der Dimension $n-1$. $T(x)$ heißt der Tangentialraum von $N_c(f)$ in x. Der affine Unterraum $x+T(x)$ heißt Tangentialebene an $N_c(f)$ in x.

Beweis: Siehe Lineare Algebra. $\square$

Als Beispiel für Satz 5.10 betrachten wir $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \,.$$

$N_1(f)$ ist der Rand der Einheitskugel im $\mathbb{R}^3$. Für $x \in N_1(f)$ gilt

$$(\operatorname{grad} f)(x) = 2x \,, \quad T(x) = \{v : v \in \mathbb{R}^3,\, \langle v, x\rangle = 0\} \,,$$

das heißt, $T(x)$ ist der auf x senkrecht stehende zweidimensionale Unterraum.

Satz 5.11 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $x \in \Omega$. Dann existiert für jedes $v \in \mathbb{R}^n$ die Richtungsableitung $\partial_v f(x)$, und es gilt*

$$\partial_v f(x) = \langle (\operatorname{grad} f)(x), v\rangle \,. \tag{5.21}$$

Beweis: Wir betrachten $h : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}^n$, $h(t) = x + tv$. Für hinreichend kleines δ ist $h((-\delta, \delta)) \subset \Omega$, also existiert nach der Kettenregel $(f \circ h)'(0)$,

$$(f \circ h)'(0) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} = \partial_v f(x) \,,$$

und aus Formel (5.18) folgt

$$\partial_v f(x) = \langle \operatorname{grad} f(x), h'(0)\rangle = \langle \operatorname{grad} f(x), v\rangle \,.$$

$\square$

Wir können die Formel (5.21) interpretieren: Ist $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\|_2 = 1$, so ist

$$\partial_v f(x) = \langle (\operatorname{grad} f)(x), v\rangle = \|(\operatorname{grad} f)(x)\|_2 \cdot \cos\varphi \,,$$

wobei φ der Winkel zwischen $\operatorname{grad} f(x)$ und v ist. Die Richtungsableitung $\partial_v f(x)$ wird also maximal, wenn $\cos\varphi = 1$ ist, also wenn v in dieselbe Richtung wie $\operatorname{grad} f(x)$ zeigt. Der Gradient von f zeigt also in die Richtung des steilsten Anstiegs von f.

Definition 5.12 (Verbindungsstrecke)
Ist X Vektorraum, so bezeichnen wir die Verbindungsstrecke zweier Punkte x und y in X mit

$$[x, y] = \{ty + (1-t)x : t \in [0, 1]\} \,. \tag{5.22}$$

$\square$

Satz 5.13 (Mittelwertsatz für skalare Felder)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ differenzierbar, seien $x, y \in \Omega$ mit $[x, y] \subset \Omega$. Dann gibt es ein $\xi \in [x, y]$ mit

$$f(y) - f(x) = \langle \operatorname{grad} f(\xi), y - x\rangle \,. \tag{5.23}$$

Beweis: Wir definieren $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch $g(t) = f(ty + (1-t)x)$, dann ist g stetig in $[0,1]$ und differenzierbar in $(0,1)$. Aus dem Mittelwertsatz im $\mathbb{R}$ folgt, dass ein $t \in (0,1)$ existiert mit

$$g(1) - g(0) = g'(t)\,,$$

also

$$f(y) - f(x) = \langle \operatorname{grad} f(ty + (1-t)x), y - x\rangle\ .$$

□

Für vektorwertige Funktionen gilt eine zu (5.23) analoge Formel nicht, nicht einmal für Kurven. Als Beispiel betrachten wir den durch $f(t) = (\cos t, \sin t)$ parametrisierten Einheitskreis. Es gilt $f'(t) \neq 0$ für alle t, also auch

$$0 = f(2\pi) - f(0) \neq (2\pi - 0) f'(t)\,, \quad \text{für alle } t.$$

Im vektorwertigen Fall nimmt der Mittelwertsatz die Form einer Ungleichung an. Für Kurven $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ kann man beweisen (was wir hier nicht tun werden), dass

$$\|f(t) - f(s)\| \leq (t-s) \sup_{s \leq \tau \leq t} \|f'(\tau)\|$$

Für Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gilt eine analoge Ungleichung, wobei die Norm des Tangentialvektors durch die Norm der Jacobimatrix (also eine Matrixnorm) ersetzt wird. Für unsere Zwecke genügt die folgende (schwächere) Form.

Satz 5.14 (Mittelwertsatz im Mehrdimensionalen)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar, seien $x, y \in \Omega$ mit $[x,y] \subset \Omega$. Dann gilt

$$\|f(y) - f(x)\|_\infty \leq L\|y - x\|_1 \leq nL\|y - x\|_\infty\,, \tag{5.24}$$

wobei

$$L = \max\{|\partial_j f_i(\xi)| : 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n,\ \xi \in [x,y]\}\,. \tag{5.25}$$

Beweis: Das Maximum in (5.25) existiert, da alle partiellen Ableitungen stetig sind und $[x,y]$ kompakt ist. Für alle i gibt es nach Satz 5.13 ein $\xi_i \in [x,y]$ mit

$$f_i(y) - f_i(x) = \langle \operatorname{grad} f_i(\xi_i), y - x\rangle = \sum_{j=1}^n \partial_j f_i(\xi_i)(y_j - x_j)\,,$$

also gilt für alle i

$$|f_i(y) - f_i(x)| \leq L \sum_{j=1}^n |y_j - x_j| \leq nL \max_{1 \leq j \leq n} |y_j - x_j|\,.$$

□

6 Taylorentwicklung im Mehrdimensionalen

Wir betrachten zunächst die Situation im Eindimensionalen. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $x \in (a,b)$. Die erste Ableitung liefert eine Approximation

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + r(h)\,, \quad \lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0\,.$$

Ist außerdem $f \in C^2[a,b]$, so ist die Approximation in der Nähe von x besser,

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(\xi)$$

mit einer geeigneten Zwischenstelle ξ zwischen x und $x+h$. Wie wir in Analysis 1 gesehen haben, erhalten wir, falls $f \in C^{k+1}([a,b])$, die Taylorentwicklung

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \cdots + \frac{h^k}{k!} + R_{k+1}(h) \\ &= \sum_{\alpha=0}^{k} \frac{f^{(\alpha)}(x)}{\alpha!} h^\alpha + R_{k+1}(h) \end{aligned} \tag{6.1}$$

mit einem Restglied R_{k+1}. Dieses kann dargestellt werden in der Form

$$R_{k+1}(h) = \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} h^{k+1}\,,$$

wobei ξ zwischen x und $x+h$ liegt.

Sei nun $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Um $f(x+h)$ durch Ableitungen von f in x zu approximieren, betrachten wir

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad g(t) = f(x+th)\,.$$

Ist g hinreichend oft differenzierbar, so gilt gemäß (6.1), angewendet auf g,

$$f(x+h) = g(1) = \sum_{\alpha=0}^{k} \frac{g^{(\alpha)}(0)}{\alpha!} + \frac{g^{(k+1)}(\tau)}{(k+1)!}\,.$$

Die Ableitungen von g lassen sich durch Ableitungen von f ausdrücken,

$$\begin{aligned} g'(t) &= \langle \operatorname{grad} f(x+th), h\rangle = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(x+th) h_i\,, \\ g''(t) &= \sum_{i=1}^{n} \langle (\operatorname{grad}(\partial_i f))(x+th), h\rangle\, h_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \partial_j \partial_i f(x+th) h_j \right) h_i\,. \end{aligned} \tag{6.2}$$

In der Formel für $g''(t)$ kommen die Terme $\partial_j\partial_i f$ für $i \neq j$ doppelt vor (Erinnerung: $\partial_j\partial_i f = \partial_i\partial_j f$ falls $f \in C^2$), die Terme $\partial_i\partial_i$ nur einmal. Betrachtet man höhere Ableitungen von g, so kommt pro Ableitungsordnung ein Summenzeichen und ein ∂ hinzu. Formeln für beliebige Ableitungsordnungen werden unübersichtlich, und man muss genauer überlegen, welche Terme wie oft auftreten. Um diese Situation in den Griff zu bekommen, führt man die Notation eines Multiindex ein.

Notation 6.1 (Multiindex) *Ein $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ mit $\alpha_i \in \mathbb{N}$ heißt Multiindex. Für einen Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ definieren wir*

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \,, \quad \alpha! = \prod_{i=1}^{n} \alpha_i! \,. \tag{6.3}$$

Für $f \in C^{|\alpha|}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, setzen wir

$$\partial^\alpha f = \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \cdots \partial_n^{\alpha_n} f \,.$$

Für $x \in \mathbb{R}^n$ definieren wir

$$x^\alpha = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} \,.$$

Ist beispielsweise $n = 3$ und $\alpha = (2, 0, 1)$, so ist

$$|\alpha| = 3 \,, \quad \alpha! = 2!\,0!\,1! = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2 \,, \quad \partial^\alpha f(x) = \partial_1^2 \partial_3 f(x) \,, \quad x^\alpha = x_1^2 x_3 \,.$$

Indem wir Multiindizes verwenden, können wir die Ableitungen einer Funktion der Form $g(t) = f(x + th)$ übersichtlich aufschreiben.

Lemma 6.2 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^k(\Omega)$, $x \in \Omega$, $h \in \mathbb{R}^n$ mit $[x, x+h] \subset \Omega$. Dann wird durch*

$$g(t) = f(x + th)$$

eine Funktion $g \in C^k([0, 1])$ definiert, und es gilt

$$g^{(k)}(t) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \partial^\alpha f(x + th) h^\alpha \,. \tag{6.4}$$

Beweis: Mit vollständiger Induktion folgt aus der Kettenregel die Existenz von $g^{(k)}$ und die Formel

$$g^{(k)}(t) = \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} \partial_{i_k} \cdots \partial_{i_2} \partial_{i_1} f(x + th) h_{i_k} \cdots h_{i_2} h_{i_1} \,. \tag{6.5}$$

Jede der auftretenden partiellen Ableitungen $\partial_{i_k} \cdots \partial_{i_2} \partial_{i_1} f$ entspricht nach Umsortieren und Zusammenfassen einer Ableitung der Form $\partial^\alpha f$ mit einem Multiindex α mit $|\alpha| = k$. Jeder solche Multiindex α kommt in der k-fachen Summe (6.5) mit der Anzahl

$$\binom{k}{\alpha_1} \binom{k - \alpha_1}{\alpha_2} \cdots \binom{k - \alpha_1 - \ldots - \alpha_{n-1}}{\alpha_n} = \frac{k!}{\alpha_1! \alpha_2! \ldots \alpha_n!} = \frac{k!}{\alpha!}$$

vor, woraus die Behauptung folgt. □

Satz 6.3 (Taylorformel für Skalarfelder)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^{k+1}(\Omega)$, $x \in \Omega$, $h \in \mathbb{R}^n$ mit $[x, x+h] \subset \Omega$. Dann gibt es ein $\xi \in [x, x+h]$ mit

$$f(x + h) = \sum_{|\alpha| \le k} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha + \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{\partial^\alpha f(\xi)}{\alpha!} h^\alpha \,. \tag{6.6}$$

(Summiert wird über die Multiindizes.) Das durch

$$T_k(y) = \sum_{|\alpha| \le k} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!}(y-x)^\alpha \tag{6.7}$$

definierte Polynom heißt das ***k-te Taylorpolynom*** *von f in x.*

Beweis: Für $g(t) = f(x+th)$ gilt mit geeignetem $\tau \in (0,1)$

$$\begin{aligned} f(x+h) = g(1) &= \sum_{j=0}^{k} \frac{g^{(j)}(0)}{j!} + \frac{g^{(k+1)}(\tau)}{(k+1)!} \\ &= \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} \left(\sum_{|\alpha|=j} \frac{j!}{\alpha!} \partial^\alpha f(x) h^\alpha \right) + \frac{1}{(k+1)!} \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{(k+1)!}{\alpha!} \partial^\alpha f(x+\tau h) h^\alpha \,. \end{aligned} \tag{6.8}$$

□

Folgerung 6.4 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^k(\Omega)$, $x \in \Omega$ mit $K_\delta(x) \subset \Omega$. Dann gilt für alle $h \in \mathbb{R}^n$ mit $\|h\| \le \delta$*

$$f(x+h) = \sum_{|\alpha| \le k} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha + R_{k+1}(h) \,, \quad \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \ne 0}} \frac{R_{k+1}(h)}{\|h\|_\infty^k} = 0 \,. \tag{6.9}$$

Beweis: Es gilt nach Satz 6.3 für geeignetes $\xi \in [x, x+h]$

$$\begin{aligned} f(x+h) &= \sum_{|\alpha| \le k-1} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha + \sum_{|\alpha|=k} \frac{\partial^\alpha f(\xi)}{\alpha!} h^\alpha \\ &= \sum_{|\alpha| \le k} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha + \underbrace{\sum_{|\alpha|=k} \frac{\partial^\alpha f(\xi) - \partial^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha}_{=:R_{k+1}(h)} \,, \end{aligned} \tag{6.10}$$

und

$$|R_{k+1}(h)| \le \sum_{|\alpha|=k} \frac{|\partial^\alpha f(\xi) - \partial^\alpha f(x)|}{\alpha!} |h^\alpha| \le \|h\|_\infty^k \underbrace{\sum_{|\alpha|=k} \frac{|\partial^\alpha f(\xi) - \partial^\alpha f(x)|}{\alpha!}}_{\to 0 \text{ für } h \to 0} \,, \tag{6.11}$$

da $\|\xi - x\|_\infty \le \|h\|_\infty$. □

Für $k = 2$ erhalten wir

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{j=1}^{n} \partial_j f(x) h_j + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i \partial_j f(x) h_i h_j + R_3(h) \,. \tag{6.12}$$

Der quadratische Term läßt sich schreiben als

$$\sum_{i,j=1}^{n} \partial_i \partial_j f(x) h_i h_j = \langle h, H_f(x) h \rangle = h^T H_f(x) h \,, \tag{6.13}$$

wobei die Matrix $H_f(x) \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ gegeben ist durch

$$H_f(x) = \begin{pmatrix} \partial_1^2 f(x) & \partial_2\partial_1 f(x) & \cdots & \partial_n\partial_1 f(x) \\ \partial_1\partial_2 f(x) & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \partial_1\partial_n f(x) & \cdots & \cdots & \partial_n^2 f(x) \end{pmatrix} . \tag{6.14}$$

Definition 6.5 (Hesse-Matrix)
Die Matrix $H_f(x)$ in (6.14) heißt Hesse-Matrix von f in x. $\square$

Die Hesse-Matrix ist symmetrisch nach Satz 4.5, wenn $f \in C^2(\Omega)$.

Als Beispiel betrachten wir

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 e^{x_2} , \quad f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} .$$

Es ist

$$\partial_1 f(x_1, x_2) = 2x_1 e^{x_2} , \quad \partial_2 f(x_1, x_2) = x_1^2 e^{x_2} ,$$
$$\partial_1^2 f(x_1, x_2) = 2e^{x_2} , \quad \partial_2\partial_1 f(x_1, x_2) = 2x_1 e^{x_2} , \quad \partial_2^2 f(x_1, x_2) = x_1^2 e^{x_2} ,$$

also

$$\operatorname{grad} f(x) = e^{x_2} \cdot (2x_1 \, , \, x_1^2) , \quad H_f(x) = e^{x_2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2x_1 \\ 2x_1 & x_1^2 \end{pmatrix}$$

Die Entwicklung (6.13) im Punkt $x = (4, 0)$ ergibt sich als

$$\begin{aligned} f(x+h) = f(4 + h_1, h_2) &= 16 + 8h_1 + 16h_2 + \frac{1}{2}\big(2h_1^2 + 8h_1h_2 + 8h_1h_2 + 16h_2^2\big) + R_3(h) \\ &= 16 + 8h_1 + 16h_2 + h_1^2 + 8h_1h_2 + 8h_2^2 + R_3(h) . \end{aligned}$$

Definition 6.6 (Lokales Maximum, Minimum, Extremum)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Ein $x \in \Omega$ heißt lokales Minimum (Maximum) von f auf Ω, falls es eine offene Kugel B um x gibt mit

$$f(x) \le f(y) \qquad (\text{bzw. } f(x) \ge f(y)) \qquad \text{für alle } y \in B \cap \Omega.$$

Ein $x \in \Omega$ heißt lokales Extremum, falls x lokales Minimum oder lokales Maximum ist. Ein lokales Extremum heißt strikt, falls außerdem

$$f(y) \neq f(x)$$

gilt für alle $y \in B \cap \Omega$ mit $y \neq x$. $\square$

Satz 6.7 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}$, sei $x \in \Omega$ lokales Extremum von f. Ist $v \in \mathbb{R}^n$, so gilt $\partial_v f(x) = 0$, falls $\partial_v f(x)$ existiert. Insbesondere gilt* $\operatorname{grad} f(x) = 0$, *falls f in x partiell differenzierbar ist.*

Beweis: Sei $v \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Wähle $\delta > 0$ mit $[x-\delta v, x+\delta v] \subset \Omega$. Dann hat $g : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$, $g(t) = f(x + tv)$, ein lokales Extremum in 0. Falls $\partial_v f(x)$ existiert, so existiert auch $g'(0)$, und es gilt $0 = g'(0) = \partial_v f(x)$. Ist f partiell differenzierbar in x, so folgt $\partial_j f(x) = 0$ für alle j und damit $\operatorname{grad} f(x) = 0$. □

Definition 6.8 *Sei $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$. A heißt*

positiv definit, falls $h^T A h > 0$ gilt für alle $h \in \mathbb{R}^n$, $h \neq 0$,
positiv semidefinit, falls $h^T A h \geq 0$ gilt für alle $h \in \mathbb{R}^n$,
negativ (semi)definit, falls $-A$ positiv (semi)definit ist,
indefinit, falls A weder positiv semidefinit noch negativ semidefinit ist.

□

Satz 6.9 (Notwendige Optimalitätsbedingungen)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^2(\Omega)$, sei $x \in \Omega$ ein lokales Extremum von f. Dann gilt $\operatorname{grad} f(x) = 0$ *und weiter*

$$\begin{array}{lcl} x \text{ lokales Minimum} & \Rightarrow & H_f(x) \text{ positiv semidefinit,} \\ x \text{ lokales Maximum} & \Rightarrow & H_f(x) \text{ negativ semidefinit.} \end{array}$$

Beweis: Es gilt $\operatorname{grad} f(x) = 0$ nach Satz 6.7. Sei nun $h \in \mathbb{R}^n$ beliebig, sei $g(t) = f(x+th)$. Dann ist $g \in C^2((-\delta, \delta))$ für hinreichend kleines $\delta > 0$, und es gilt

$$g'(t) = \langle \operatorname{grad} f(x + th), h \rangle \ ,$$

$$g''(t) = \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i \partial_j f(x + th) h_i h_j = h^T H_f(x + th) h \, .$$

Da 0 ein lokales Minimum ist für g, gilt

$$0 \leq g''(0) = h^T H_f(x) h \, .$$

Da h beliebig war, folgt die Behauptung. Ist x lokales Maximum von f, so wenden wir das eben Bewiesene auf $-f$ an. □

Satz 6.10 (Hinreichende Optimalitätsbedingungen)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^2(\Omega)$, $x \in \Omega$ mit $\operatorname{grad} f(x) = 0$. *Dann gilt*

$$\begin{array}{lcl} H_f(x) \text{ positiv definit} & \Rightarrow & x \text{ striktes lokales Minimum,} \\ H_f(x) \text{ negativ definit} & \Rightarrow & x \text{ striktes lokales Maximum.} \end{array}$$

Beweis: Sei $H_f(x)$ positiv definit. Aus Folgerung 6.4 folgt, falls $\|h\|$ hinreichend klein ist,

$$f(x + h) = f(x) + \frac{1}{2} h^T H_f(x) h + R_3(h) \, , \quad \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{R_3(h)}{\|h\|^2} = 0 \, .$$

Sei

$$Q(h) = h^T H_f(x) h \, , \quad \alpha = \min_{\|h\|=1} Q(h)$$

Das Minimum existiert, da Q stetig ist und die Einheitssphäre kompakt ist. Es ist $\alpha > 0$, da $H_f(x)$ positiv definit ist. Daher gilt für alle $h \neq 0$ mit $x + h \in \Omega$

$$f(x+h) - f(x) = \|h\|^2 \left(\frac{1}{2} Q\Big(\frac{h}{\|h\|}\Big) + \frac{R_3(h)}{\|h\|^2} \right) \geq \|h\|^2 \left(\frac{1}{2}\alpha + \frac{R_3(h)}{\|h\|^2} \right) .$$

Wir wählen $\delta > 0$ so, dass

$$\frac{1}{2}\alpha > \frac{|R_3(h)|}{\|h\|^2}$$

für alle $\|h\| < \delta$, dann gilt $f(x+h) > f(x)$ für alle $\|h\| < \delta$.

Ist $H_f(x)$ negativ definit, so ist $H_{-f}(x) = -H_f(x)$ positiv definit, Nach dem eben Bewiesenen hat $-f$ in x ein striktes lokales Minimum, also hat f in x ein striktes lokales Maximum. $\square$

In der Linearen Algebra wird bewiesen: Ist $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ symmetrisch, so gilt

$$\begin{aligned} A \text{ positiv definit} \quad &\Leftrightarrow \quad \text{alle Eigenwerte von } A \text{ sind } > 0, \\ A \text{ positiv semidefinit} \quad &\Leftrightarrow \quad \text{alle Eigenwerte von } A \text{ sind } \geq 0, \\ A \text{ negativ (semi)definit} \quad &\Leftrightarrow \quad \text{alle Eigenwerte von } A \text{ sind } < 0 \ (\leq 0). \end{aligned}$$

Wir betrachten als Beispiel

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2}, \quad a, b > 0 .$$

Die Niveaumengen $N_c(f)$ sind die Ellipsen

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = c, \quad c > 0 .$$

Der Graph von f stellt ein elliptisches Paraboloid im $\mathbb{R}^3$ dar. Es ist

$$\operatorname{grad} f(x_1, x_2) = \left(\frac{2x_1}{a^2}, \frac{2x_2}{b^2} \right), \quad \operatorname{grad} f(0) = 0 ,$$

$$H_f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{2}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{b^2} \end{pmatrix} .$$

Die Eigenwerte von $H_f(x)$ sind $2/a^2$ und $2/b^2$, also ist $H_f(0)$ positiv definit und damit 0 ein striktes lokales Minimum von f (in diesem Fall sogar ein globales Minimum, d.h. ein Minimum bezüglich des gesamten Definitionsbereichs von f). Als weiteres Beispiel betrachten wir

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2}, \quad a, b > 0 .$$

Die Niveaumengen $N_c(f)$ sind die Hyperbeln

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = c, \quad c \in \mathbb{R} .$$

Der Graph von f stellt ein hyperbolisches Paraboloid im $\mathbb{R}^3$ dar. Es ist

$$\operatorname{grad} f(x_1, x_2) = \left(\frac{2x_1}{a^2}, -\frac{2x_2}{b^2} \right), \quad \operatorname{grad} f(0) = 0 ,$$

$$H_f(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} \frac{2}{a^2} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{b^2} \end{pmatrix} .$$

Die Eigenwerte von $H_f(x)$ sind $2/a^2$ und $-2/b^2$, also ist $H_f(0)$ indefinit und daher 0 kein lokales Extremum.

Im semidefiniten Fall kann man an der Hessematrix nicht erkennen, ob ein Extremum vorliegt oder nicht: Für die Funktionen

$$f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^4\,, \quad g(x_1,x_2) = x_1^2\,, \quad h(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^3$$

gilt $\operatorname{grad} f(0) = \operatorname{grad} g(0) = \operatorname{grad} h(0) = 0$,

$$H_f(0) = H_g(0) = H_h(0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

aber f hat in 0 ein striktes, lokales Minimum; g hat in 0 ein nicht striktes, lokales Minimum; h hat kein lokales Extremum in 0.

Definition 6.11 (Sattelpunkt)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar, $x \in \Omega$. Ist $\operatorname{grad} f(x) = 0$, aber x kein lokales Extremum von f, so heißt x Sattelpunkt von f. □

In jeder Umgebung eines Sattelpunktes x gibt es also Punkte y und z mit $f(y) > f(x)$ und $f(z) < f(x)$.

Taylorentwicklung für vektorwertige Funktionen. Diese erhalten wir komponentenweise. Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Nach Satz 6.3 gilt für alle i, falls $f_i \in C^{k+1}(\Omega)$,

$$f_i(x+h) = \sum_{|\alpha|\le k} \frac{\partial^\alpha f_i(x)}{\alpha!} h^\alpha + \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{\partial^\alpha f_i(\xi_i)}{\alpha!} h^\alpha . \tag{6.15}$$

Führen wir die Notation

$$\partial^\alpha f(x) = (\partial^\alpha f_1(x), \ldots, \partial^\alpha f_m(x))$$

ein, so erhalten wir wie in Folgerung 6.4, falls f k-mal stetig differenzierbar ist,

$$f(x+h) = \sum_{|\alpha|\le k} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha + R_{k+1}(h)\,, \tag{6.16}$$

wobei $R_{k+1}(h) \in \mathbb{R}^m$ und

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{R_{k+1}(h)}{\|h\|^k} = 0\,.$$

Ableitungen höherer Ordnung. Für Ordnungen größer als 1 haben wir bisher nur partielle Ableitungen betrachtet. Für die Ordnung 1 kennen wir auch die Definition der Ableitung als einer linearen Abbildung; ist $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ in $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ differenzierbar, so erhalten wir für jedes $x \in \Omega$ eine lineare Abbildung $Df(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, und damit eine Abbildung

$$Df : \Omega \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = \{\varphi |\, \varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \text{ linear}\}\,.$$

Der Raum $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ ist ein endlichdimensionaler Vektorraum, er hat die Dimension nm. Wir können uns also fragen, ob die Abbildung Df differenzierbar ist im Sinne von Definition 5.1; dabei ist es, wiederum wegen der Äquivalenz der Normen im Endlichdimensionalen, gleichgültig, welche Norm auf $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ wir betrachten. Ist das der Fall, so definieren wir die zweite Ableitung $D^2 f(x)$ als die Ableitung von Df in x, das heißt, $D^2 f(x)$ ist eine lineare Abbildung

$$D^2 f(x) : \mathbb{R}^n \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

welche die Abbildung $Df : \Omega \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ im Punkt x gemäß Definition 5.1 lokal approximiert. Ist das in jedem Punkt $x \in \Omega$ möglich, so erhalten wir die zweite Ableitung von f in Ω als Abbildung

$$D^2 f : \Omega \to L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)) .$$

In der Linearen Algebra ergibt es sich, dass der Raum $L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$ kanonisch isomorph ist zum Raum $\mathrm{Bil}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ der bilinearen Abbildungen von $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$. Im Falle $m = 1$ handelt es sich gerade um die Bilinearformen auf $\mathbb{R}^n$. Diese sind darstellbar durch quadratische Matrizen. Wählt man die Darstellung bezüglich der kanonischen Basis, so kommt dabei gerade die Hesse-Matrix heraus. Es gilt dann

$$(D^2 f(x))(u, v) = u^T H_f(x) v = \langle u, H_f(x) v \rangle$$

für alle $u, v \in \mathbb{R}^n$. Links steht eine Bilinearform, angewendet auf das Paar (u, v).

Diese Überlegungen kann man induktiv fortsetzen und für beliebiges $k \in \mathbb{N}$ eine k-te Ableitung $D^k f$ als multilineare Abbildung vom Grad k definieren.

7 Der Fixpunktsatz von Banach

Definition 7.1 (Fixpunkt)
Sei X Menge, $f : X \to X$. Ein $x \in X$ mit

$$x = f(x) \tag{7.1}$$

heißt Fixpunkt von f. Die Iteration

$$x_{k+1} = f(x_k)\,, \quad x_0 \in X \text{ gegeben,} \tag{7.2}$$

heißt Fixpunktiteration. □

“Fixpunktsätze” machen Aussagen über Lösungen der Fixpunktgleichung $x = f(x)$, etwa über Existenz und Eindeutigkeit von Fixpunkten, unter gewissen Voraussetzungen an X und f. Fixpunktsätze stellen ein zentrales Werkzeug der Analysis dar. Als Beispiel betrachten wir ein Anfangswertproblem für eine gewöhnliche Differentialgleichung,

$$x'(t) = \sin(tx(t))\,, \quad x(0) = 1\,. \tag{7.3}$$

Wir können (7.3) durch Integration umformen zu

$$x(t) = 1 + \int_0^t \sin(\tau x(\tau))\,d\tau\,. \tag{7.4}$$

Wir können (7.4) als Fixpunktgleichung der Form (7.1) interpretieren, wenn wir $X = C[0,1]$ setzen und $f : C[0,1] \to C[0,1]$ definieren durch

$$(f(x))(t) = 1 + \int_0^t \sin(\tau x(\tau))\,d\tau\,.$$

(Veranschaulichung der Fixpunktiteration für $X = \mathbb{R}$, siehe Bilder in der Vorlesung.)

Metrische Räume. In einem normierten Raum X wird der Abstand $d(x, y)$ zweier Elemente $x, y \in X$ definiert durch

$$d(x, y) = \|x - y\|\,.$$

Wir führen nun einen Abstandsbegriff für allgemeine Mengen X ein.

Definition 7.2 (Metrik)
Sei X Menge. Eine Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ heißt Metrik auf X, falls gilt

$$d(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y \qquad \text{(Definitheit)} \tag{7.5}$$

$$d(x, y) = d(y, x) \quad \text{für alle } x, y \in X \qquad \text{(Symmetrie)} \tag{7.6}$$

$$d(x, z) \le d(x, y) + d(y, z) \quad \text{für alle } x, y, z \in X \qquad \text{(Dreiecksungleichung)} \tag{7.7}$$

(X, d) heißt metrischer Raum. □

Satz 7.3 *Sei* $(X, \|\cdot\|)$ *normierter Raum, sei* $A \subset X$*. Dann definiert*

$$d(x,y) = \|x-y\| \tag{7.8}$$

eine Metrik d *auf* A*. Sie heißt die durch* $\|\cdot\|$ *erzeugte Metrik.*

Beweis: Definitheit:

$$d(x,y) = 0 \;\Leftrightarrow\; \|x-y\| = 0 \;\Leftrightarrow\; x-y=0 \;\Leftrightarrow\; x=y\,, \quad \text{für alle } x,y \in A.$$

Symmetrie:

$$d(y,x) = \|y-x\| = \|-(y-x)\| = \|x-y\| = d(x,y)\,, \quad \text{für alle } x,y \in A.$$

Dreiecksungleichung:

$$d(x,z) = \|x-z\| \le \|x-y\| + \|y-z\| = d(x,y) + d(y,z)\,, \quad \text{für alle } x,y,z \in A.$$

□

Ist $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum, so können wir auf diese Weise jedes $A \subset X$ zu einem metrischen Raum machen. (Damit A auch ein normierter Raum ist, muss A ein Untervektorraum von X sein.)

Beispiel 7.4
1. Sei S die Oberfläche der Erdkugel. Wir können eine Metrik auf S gemäß Satz 7.3 aus der euklidischen Norm im $\mathbb{R}^3$ definieren. Eine andere Metrik auf S erhalten wir, wenn wir als Abstand zweier Punkte auf S die Länge der kürzesten auf S verlaufenden Verbindungsstrecke definieren.
2. Sei X die Menge aller Städte in Europa, die mit München durch einen Straßenzug verbunden sind. Wir erhalten eine Metrik, indem wir als Abstand zweier Städte die Länge des kürzesten verbindenden Straßenzugs definieren. Keine Metrik ergibt sich, wenn wir als Abstand die kürzeste Fahrzeit laut Bahnfahrplan definieren (dabei betrachten wir nur die Städte, zu denen eine Bahnverbindung existiert).

Definition 7.5 (Konvergenz)
Sei (X,d) *metrischer Raum. Eine Folge* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *in* X *heißt konvergent gegen den Grenzwert* $a \in X$*, falls*

$$\lim_{k\to\infty} d(x_k, a) = 0\,. \tag{7.9}$$

Wir schreiben wieder

$$\lim_{k\to\infty} x_k = a \qquad (\textit{in } (X,d))\,,$$

oder einfach "$x_k \to a$*".*

□

Falls X normierter Raum und d die erzeugte Metrik ist, $d(x,y) = \|x-y\|$, so entspricht das der Konvergenz im normierten Raum.

Definition 7.6 (Cauchyfolge, Vollständigkeit)
Sei (X, d) metrischer Raum. Eine Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in X heißt Cauchyfolge, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$d(x_k, x_m) < \varepsilon \,, \quad \textit{für alle } k, m \geq N.$$

(X, d) heißt vollständig, falls jede Cauchyfolge in X konvergiert.

Wie im normierten Raum, so gilt auch im metrischen Raum, dass jede konvergente Folge eine Cauchyfolge ist. Der Beweis (mit der Dreiecksungleichung) ist völlig analog.

Satz 7.7 *Sei X ein Banachraum, $A \subset X$ abgeschlossen. Dann ist (A, d) mit der durch $d(x, y) = \|x - y\|$ definierten Metrik ein vollständiger metrischer Raum.*

Beweis: Sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in A. Da X vollständig ist, gilt $\|x_k - x\| \to 0$ für ein $x \in X$. Da A abgeschlossen in X ist, folgt $x \in A$ und $d(x_k, x) = \|x_k - x\| \to 0$. □

Definition 7.8 (Lipschitz-Stetigkeit)
Seien (X, d_1), (Y, d_2) metrische Räume. Ein $f : X \to Y$ heißt Lipschitz-stetig mit der Lipschitz-Konstante L, falls gilt

$$d_2(f(x_1), f(x_2)) \leq L d_1(x_1, x_2) \,, \quad \textit{für alle } x_1, x_2 \in X. \tag{7.10}$$

Falls $Y = X$, $d_1 = d_2$ und $L < 1$, so heißt f Kontraktion. □

Satz 7.9 (Banachscher Fixpunktsatz, Kontraktionssatz)
Sei (X, d) vollständiger metrischer Raum, $f : X \to X$ Kontraktion. Dann gilt:

(i) f hat genau einen Fixpunkt x.

(ii) Für jedes $x_0 \in X$ konvergiert die durch die Fixpunktiteration $x_{k+1} = f(x_k)$ definierte Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ gegen x.

(iii) Ist $L < 1$ eine Lipschitz-Konstante für f, so gilt die Fehlerabschätzung

$$d(x_k, x) \leq \frac{L}{1 - L} d(x_{k-1}, x_k) \,. \tag{7.11}$$

Beweis: Sei $x_0 \in X$ beliebig, sei $L < 1$ Lipschitz-Konstante für f. Dann gilt für die durch die Fixpunktiteration definierte Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$

$$d(x_k, x_{k+1}) = d(f(x_{k-1}), f(x_k)) \leq L d(x_{k-1}, x_k) \,, \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N},$$

also (mit Induktion)

$$d(x_k, x_{k+1}) \leq L^k d(x_0, x_1) \,, \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N},$$

also für alle $k, m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} d(x_k, x_{k+m}) &\le d(x_k, x_{k+1}) + \ldots + d(x_{k+m-1}, x_{k+m}) \\ &\le L^k d(x_0, x_1) + \ldots + L^{k+m-1} d(x_0, x_1) = L^k \left(\sum_{j=0}^{m-1} L^j \right) d(x_0, x_1) \\ &\le \frac{L^k}{1-L} d(x_0, x_1) \qquad \text{da } L < 1. \end{aligned}$$

Die Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist also eine Cauchyfolge, welche wegen der Vollständigkeit von X gegen ein $x \in X$ konvergiert. Aus der Stetigkeit von f folgt

$$x = \lim_{k \to \infty} x_k = \lim_{k \to \infty} f(x_{k-1}) = f(x) \,.$$

Ist y ebenfalls Fixpunkt von x, so gilt

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \le L d(x, y) \,,$$

also $(1 - L) d(x, y) \le 0$, also $d(x, y) = 0$ und damit $x = y$. Zum Beweis von (7.11) zeigen wir wie oben

$$d(x_k, x_{k+m}) \le L \left(\sum_{j=0}^{m-1} L^j \right) d(x_{k-1}, x_k) \le \frac{L}{1-L} d(x_{k-1}, x_k) \,,$$

also

$$d(x_k, x) = \lim_{m \to \infty} d(x_k, x_{k+m}) \le \frac{L}{1-L} d(x_{k-1}, x_k) \,.$$

□

Folgerung 7.10 *Ist A abgeschlossene Teilmenge eines Banachraums X und $f : A \to A$ eine Kontraktion, so gelten alle Aussagen von Satz 7.9 (wobei X durch A ersetzt wird.)*

8 Inverse Funktionen im Mehrdimensionalen

Zur Motivation eine Wiederholung aus dem Eindimensionalen: Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Ist $x \in (a,b)$ mit $f'(x) \neq 0$, so ist die Einschränkung $f : I_\delta \to \mathbb{R}$, $I_\delta = (x-\delta, x+\delta)$, für hinreichend kleines $\delta > 0$ streng monoton und damit, aufgefasst als Abbildung

$$f : I_\delta \to f(I_\delta)$$

bijektiv. Die Bildmenge $f(I_\delta)$ ist ebenfalls ein offenes Intervall im $\mathbb{R}$, und die Umkehrung $f^{-1} : f(I_\delta) \to I_\delta$ ist stetig differenzierbar. Aus der Voraussetzung $f'(x) \neq 0$ folgt also, dass f "lokal invertierbar" und die Inverse ebenfalls stetig differenzierbar ist.

Wir können auch einen globalen Satz formulieren: Ist $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$, so ist f invertierbar, und $f^{-1} : f((a,b)) \to (a,b)$ ist ebenfalls stetig differenzierbar.

Wir betrachten nun Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. In diesem Abschnitt beweisen wir einen Satz über die lokale Invertierbarkeit von f. Aussagen über globale Invertierbarkeit sind i.a. schwieriger und nicht Gegenstand dieser Vorlesung.

Falls die Inverse f^{-1} auf irgendeinem Teilgebiet existiert und differenzierbar ist, können wir ihre Ableitung sofort aus der Kettenregel berechnen. Aus $f^{-1} \circ f = id$ folgt

$$(D(f^{-1} \circ f))(x) = (D(id))(x) = id\,,$$

und weiter aus der Kettenregel

$$id = (D(f^{-1} \circ f))(x) = (Df^{-1})(f(x)) \circ (Df)(x)$$

beziehungsweise

$$I = J_{f^{-1}}(f(x)) \cdot J_f(x)\,.$$

Eine differenzierbare Inverse von f kann also nur dann existieren, wenn die Ableitung bzw. die Funktionalmatrix von f invertierbar ist.

Ist f eine lineare Abbildung, also $f(x) = Ax$ mit einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$, so ist $J_f(x) = A$ in allen Punkten x, und $f^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ existiert genau dann, wenn A invertierbar ist; in diesem Fall ist $f^{-1}(y) = A^{-1}y$, also ist f^{-1} ebenfalls differenzierbar mit $J_{f^{-1}}(y) = A^{-1}$ für alle $y \in \mathbb{R}^n$. Ist A nicht invertierbar, so ist noch nicht einmal die Einschränkung von f auf eine offene Kugel $B(x,\delta)$ invertierbar, egal wie klein δ ist und wo x liegt. Damit ist für lineare Abbildungen im Endlichdimensionalen die Frage der Invertierbarkeit geklärt. In der Linearen Algebra wird weiter bewiesen, dass gilt

$$A \text{ invertierbar} \qquad \Leftrightarrow \qquad \operatorname{rang}(A) = n \qquad \Leftrightarrow \qquad \det(A) \neq 0$$

Satz 8.1 *Die Determinante, aufgefasst als Funktion*

$$\det : \mathbb{R}^{(n,n)} \to \mathbb{R} \tag{8.1}$$

ist beliebig oft stetig differenzierbar. Die Menge

$$GL(n,\mathbb{R}) = \{A :\ A \in \mathbb{R}^{(n,n)},\ A \textit{ invertierbar}\} \tag{8.2}$$

ist eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^{(n,n)}$.

Beweis: Die Determinante, aufgefasst als Funktion der Matrixelemente, ist ein Polynom; es gilt nämlich (siehe Lineare Algebra)

$$\det(A) = \sum_{\pi} \operatorname{sign}(\pi) \prod_{i=1}^{n} a_{\pi(i),i} \,,$$

wobei die Summe über alle Permutationen π der Indexmenge $\{1,\dots,n\}$ gebildet wird. Da Polynome beliebig oft stetig differenzierbar sind, gilt das auch für die Determinante. Die zweite Behauptung folgt aus der Darstellung

$$GL(n,\mathbb{R}) = \{A : A \in \mathbb{R}^{(n,n)},\, \det(A) \neq 0\}\,,$$

d.h. $GL(n,\mathbb{R})$ ist das Urbild der offenen Menge $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ unter der stetigen Abbildung "det". □

Folgerung 8.2 *Die Abbildung*

$$T : GL(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{(n,n)}\,, \quad T(A) = A^{-1}\,, \tag{8.3}$$

ist stetig differenzierbar.

Beweis: Folgt aus Satz 8.1, da sich die Inverse mit einer Formel darstellen lässt, in der nur Determinanten vorkommen, nämlich

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\operatorname{adj} A)^T\,. \tag{8.4}$$

Hierbei ist $\operatorname{adj} A$ ("Adjunkte von A") diejenige Matrix im $\mathbb{R}^{(n,n)}$, deren (i,j)-tes Element gegeben ist durch

$$(-1)^{i+j} \det(\tilde{A}_{ij})\,,$$

und $\tilde{A}_{ij}$ ist diejenige Matrix im $\mathbb{R}^{(n-1),(n-1)}$, die aus A durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht. Die Elemente von A^{-1} lassen sich also schreiben als rationale Funktionen der Elemente von A. Formel (8.4) ist ein Ergebnis aus der Linearen Algebra, wir beweisen sie nicht. □

Satz 8.1 und Folgerung 8.2 zeigen, dass die Abbildungen $A \mapsto \det(A)$ und $A \mapsto A^{-1}$ differenzierbar sind, sie liefern aber keine Formel für die Ableitung. Mit der Ableitung der Inversenbildung werden wir uns später noch befassen.

Satz 8.3 (Satz über inverse Funktionen, Spezialfall)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $0 \in \Omega$, sei $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, es gelte $f(0) = 0$ und $Df(0) = id$, d.h. $J_f(0) = I$. Dann gibt es offene Mengen $U, V \subset \mathbb{R}^n$ mit $0 \in U \subset \Omega$, so dass gilt:

(i) $f|U : U \to V$ *ist bijektiv.*

(ii) $(f|U)^{-1} : V \to U$ *ist differenzierbar in* 0, $Df^{-1}(0) = id$.

Beweis: In diesem Beweis steht $\|\cdot\|$ für $\|\cdot\|_\infty$. Zur Konstruktion der lokalen Inverse wird der Banachsche Fixpunktsatz herangezogen. Zu diesem Zweck definieren wir für jedes $y \in \mathbb{R}^n$ eine Abbildung $T_y : \Omega \to \mathbb{R}^n$ durch

$$T_y(x) = x + y - f(x)\,. \tag{8.5}$$

Es gilt dann

$$f(x) = y \qquad \Leftrightarrow \qquad x \text{ ist Fixpunkt von } T_y.$$

Es gilt $T_y \in C^1(\Omega)$,

$$J_{T_y}(x) = J_{T_0}(x) = I - J_f(x)\,, \quad J_{T_y}(0) = 0\,.$$

Wir wählen ein $\delta > 0$, so dass gilt

$$\|T_y(x) - T_y(\xi)\| \le \frac{1}{2}\|x - \xi\|\,, \quad \text{für alle } x, \xi \in K(0,\delta),\ y \in \mathbb{R}^n. \tag{8.6}$$

(Dass das möglich ist, folgt aus dem Mittelwertsatz 5.14 und der Stetigkeit der Abbildung $x \mapsto J_{T_y}(x)$.) Für $x \in K_\delta := K(0,\delta)$ gilt also, da $T_0(0) = 0$,

$$\|T_y(x)\| = \|x + y - f(x)\| \le \|T_0(x) - T_0(0)\| + \|y\| \le \frac{1}{2}\|x\| + \|y\|\,. \tag{8.7}$$

Aus (8.6) und (8.7) folgt:

$$T_y : K_\delta \to K_\delta \text{ ist Kontraktion, falls } \|y\| \le \frac{\delta}{2}\,. \tag{8.8}$$

Aus dem Banachschen Fixpunktsatz folgt nun, dass alle solchen T_y einen eindeutigen Fixpunkt $x \in K_\delta$ haben, also gilt

$$\text{zu jedem } y \in K_{\frac{\delta}{2}} \text{ gibt es genau ein } x \in K_\delta \text{ mit } f(x) = y\,, \tag{8.9}$$

und für dieses x gilt wegen (8.7) und $x = T_y(x)$, dass

$$\|x\| \le 2\|y\|\,. \tag{8.10}$$

Wir definieren ($B_\delta = B_\delta(0)$ offene Kugel)

$$V = B_{\frac{\delta}{2}}\,, \quad U = f^{-1}(V) \cap B_\delta\,.$$

Es ist $0 \in U$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f(U) \subset V$, und wegen (8.9) ist $f|U$ injektiv. Es gilt weiterhin $V \subset f(U)$ wegen (8.10). Also ist (i) bewiesen. Zum Beweis von (ii) genügt es zu zeigen: Für jede Folge $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $B_{\frac{\delta}{2}}$ mit $y_k \to 0$, $y_k \ne 0$ für alle k, gilt

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|f^{-1}(y_k) - f^{-1}(0) - I(y_k - 0)\|}{\|y_k - 0\|} = 0\,. \tag{8.11}$$

Sei (y_k) eine solche Folge, sei $x_k = f^{-1}(y_k)$, dann ist $x_k \ne 0$ für alle k, und es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\|f^{-1}(y_k) - f^{-1}(0) - I(y_k - 0)\|}{\|y_k - 0\|} &= \frac{\|f^{-1}(y_k) - y_k\|}{\|y_k\|} \\
&= \frac{\|x_k - f(x_k)\|}{\|x_k\|} \cdot \frac{\|x_k\|}{\|y_k\|} \\
&\le \frac{\|f(x_k) - f(0) - I(x_k - 0)\|}{\|x_k\|} \cdot 2\,,
\end{aligned}$$

und die rechte Seite dieser Ungleichung konvergiert gegen 0 für $k \to \infty$, da $J_f(0) = I$. Damit ist (8.11) bewiesen. □

Satz 8.4 (Satz über inverse Funktionen)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, sei $x_* \in \Omega$, sei $Df(x_*)$ invertierbar. Dann gibt es offene Mengen $U, V \subset \mathbb{R}^n$ mit $x_* \in U \subset \Omega$, so dass gilt:

(i) $f|U : U \to V$ *ist bijektiv.*

(ii) $(f|U)^{-1} : V \to U$ *ist stetig differenzierbar in* V*, und für alle* $x \in U$ *gilt*

$$Df^{-1}(f(x)) = (Df(x))^{-1}\,, \quad J_{f^{-1}}(f(x)) = J_f(x)^{-1}\,. \tag{8.12}$$

Beweis: Die Menge

$$\begin{aligned}\tilde{\Omega} &= \{x : x \in \Omega,\ Df(x) \text{ ist invertierbar}\} \\ &= \Omega \cap \{x : J_f(x) \in GL(n,\mathbb{R})\} = \Omega \cap (J_f)^{-1}(GL(n,\mathbb{R}))\end{aligned}$$

ist offen nach Satz 8.1, da J_f stetig von x abhängt. Da es genügt, den Beweis für $\tilde{\Omega}$ statt Ω zu führen, können wir o.B.d.A. annehmen, dass $Df(x)$ invertierbar ist für alle $x \in \Omega$. Wir setzen $\Omega_* = \Omega - x_*$ und definieren $f_* : \Omega_* \to \mathbb{R}^n$ durch

$$f_*(h) = (Df(x_*))^{-1}(f(x_* + h) - f(x_*))\,. \tag{8.13}$$

Für f_* sind alle Voraussetzungen von Satz 8.3 erfüllt, da $f_*(0) = 0$ und $Df_*(0) = Df(x_*)^{-1} \circ Df(x_*) = id$, also gibt es $U_*, V_* \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $0 \in U_* \subset \Omega_*$, $f_* : U_* \to V_*$ bijektiv, f_*^{-1} differenzierbar in 0 mit $Df_*^{-1}(0) = id$. Wir setzen

$$U = U_* + x_*\,.$$

Aus (8.13) folgt, dass für alle $x \in U$ gilt (wir setzen $h = x - x_*$ in (8.13))

$$f(x) = f(x_*) + Df(x_*)(f_*(x - x_*))\,. \tag{8.14}$$

Da f_* auf U_* bijektiv und $Df(x_*)$ invertierbar ist, ist f auf U injektiv. Wir setzen

$$V = f(U) = f(x_*) + Df(x_*)(f_*(U_*)) = f(x_*) + Df(x_*)(V_*)\,.$$

Mit V_* ist auch V offen, und $f|U : U \to V$ bijektiv. Nach (8.13) gilt für alle $x \in U$

$$f_*(x - x_*) = Df(x_*)^{-1}(f(x) - f(x_*))\,,$$

also

$$x = x_* + f_*^{-1}\big[Df(x_*)^{-1}(f(x) - f(x_*))\big]\,,$$

also für alle $y \in V$

$$f^{-1}(y) = x_* + f_*^{-1}\big[Df(x_*)^{-1}(y - f(x_*))\big]\,.$$

Aus der Kettenregel folgt

$$(Df^{-1})(f(x_*)) = (Df_*^{-1})(0) \circ (Df(x_*))^{-1} = (Df(x_*))^{-1}\,, \quad J_{f^{-1}}(f(x_*)) = J_f(x_*)^{-1}\,.$$

Da für jedes $x \in U$ die Voraussetzungen des Satzes (mit x statt x_*) erfüllt sind, ist f^{-1} auf ganz V differenzierbar, und (8.12) gilt. Es ist außerdem f^{-1} stetig auf V nach Satz 5.3, und wegen Folgerung 8.2 auch die Abbildung

$$y \mapsto (J_f(f^{-1}(y)))^{-1}\,.$$

$\square$

Wir kommen auf die Polarkoordinaten

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\,, \quad f(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

zurück. Es ist

$$\det(J_f(r,\varphi)) = r\,,$$

also ist f lokal invertierbar in allen Punkten (r,φ) mit $r \neq 0$. Es gilt darüber hinaus, dass $f : U \to V$ bijektiv ist für

$$U = \{(r,\varphi) : r > 0,\, 0 < \varphi < 2\pi\}\,, \quad V = \{(x,y) : y \neq 0 \text{ oder } x < 0\}\,.$$

9 Implizite Funktionen

Im einfachsten Fall wollen wir eine Gleichung der Form

$$f(x, y) = 0\,, \quad f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,,$$

nach y auflösen. Beispiel:

$$xy - 1 = 0\,,$$

Lösung:

$$y = \frac{1}{x}\,.$$

Wir haben also eine Funktion g gefunden, nämlich $g(x) = 1/x$, so dass gilt

$$f(x, g(x)) = 0\,. \tag{9.1}$$

Im allgemeinen ist das nicht in einer so explizit angebbaren Form möglich, oder vielleicht auch nicht sinnvoll. Es stellt sich dann u.a. die Frage, unter welchen Voraussetzungen an f ein solches g existiert.

Ein weiteres Beispiel: Der Einheitskreis

$$0 = f(x, y) = x^2 + y^2 - 1\,. \tag{9.2}$$

Hier liefern

$$g(x) = +\sqrt{1 - x^2}\,, \quad g(x) = -\sqrt{1 - x^2}\,,$$

Lösungen von (9.1). Hier ist also die Lösung

- "global" mehrdeutig, aber "lokal" (d.h. in einer hinreichend kleinen Umgebung eines Punktes (x, y) mit $f(x, y) = 0$) eindeutig für $|x| < 1$,
- lokal mehrdeutig für $|x| = 1$, dort ist g nicht differenzierbar,
- nicht definiert für $|x| > 1$.

Existiert eine differenzierbare Funktion g, so dass (9.1) gilt, so erhält man aus der Kettenregel

$$0 = \frac{d}{dx} f(x, g(x)) = \partial_x f(x, g(x)) + \partial_y f(x, g(x)) g'(x)\,,$$

also

$$g'(x) = -\frac{\partial_x f(x, g(x))}{\partial_y f(x, g(x))}\,,$$

jedenfalls dann, wenn $\partial_y f(x, g(x)) \neq 0$. (Andernfalls kann es Probleme geben.) Für (9.2) haben wir

$$\partial_x f(x, y) = 2x\,, \quad \partial_y f(x, y) = 2y\,.$$

Die allgemeine Situation im Endlichdimensionalen sieht so aus: Wir haben m Gleichungen mit $n + m$ Unbekannten, von denen wir mit Hilfe der Gleichungen m Unbekannte eliminieren wollen, indem wir sie als Funktionen der anderen n Unbekannten ausdrücken.

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) &= 0\,, \\ f_2(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) &= 0\,, \\ &\vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) &= 0\,. \end{aligned}$$

Gesucht sind Funktionen g_i, "$y_i = g_i(x_1, \dots, x_n)$", für $1 \le i \le m$, mit

$$f_j(x_1, \dots, x_n, g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, \dots, x_n)) = 0\,, \quad 1 \le j \le m\,.$$

Erheblich übersichtlicher ist die vektorielle Schreibweise: Gegeben ist

$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m\,,$$

gesucht ist

$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \qquad \text{mit} \qquad f(x, g(x)) = 0$$

für alle (oder doch möglichst viele) $x \in \mathbb{R}^n$. In einem solchen Fall empfiehlt es sich, auch für die Jacobi-Matrix eine Block-Notation einzuführen. Ist $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ differenzierbar, und schreiben wir $(x, y) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ für die Elemente in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, so definieren wir

$$\partial_x f(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f_1(x, y) & \cdots & \partial_{x_n} f_1(x, y) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{x_1} f_k(x, y) & \cdots & \partial_{x_n} f_k(x, y) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(k,n)}\,, \tag{9.3}$$

$$\partial_y f(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_{y_1} f_1(x, y) & \cdots & \partial_{y_m} f_1(x, y) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{y_1} f_k(x, y) & \cdots & \partial_{y_m} f_k(x, y) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(k,m)}\,. \tag{9.4}$$

Die gesamte Jacobi-Matrix setzt sich aus zwei nebeneinanderstehenden Blöcken zusammen,

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_x f(x, y) & \partial_y f(x, y) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(k,n+m)}\,.$$

Wie schon beim Satz über inverse Funktionen geht es darum, ob wir "lokal", das heißt, in der Nähe einer gegebenen Lösung des Gleichungssystems, auflösen können.

Satz 9.1 (Implizite Funktionen)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ offen, sei $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar, sei $(x_*, y_*) \in \Omega$ mit $f(x_*, y_*) = 0$. Ist $\partial_y f(x_*, y_*)$ invertierbar, so gibt es ein offenes $W \subset \mathbb{R}^n$ mit $x_* \in W$ und eine stetig differenzierbare Funktion $g : W \to \mathbb{R}^m$ mit $y_* = g(x_*)$ und

$$f(x, g(x)) = 0\,, \quad (x, g(x)) \in \Omega\,, \quad \textit{für alle } x \in W, \tag{9.5}$$

und es gilt

$$J_g(x) = -\partial_y f(x, g(x))^{-1} \partial_x f(x, g(x)) \tag{9.6}$$

für alle $x \in W$.

Beweis: Wir definieren

$$F : \Omega \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \,, \quad F(x,y) = (x, f(x,y)) \,.$$

Wir zeigen, dass F in (x_*, y_*) die Voraussetzungen des Satzes 8.4 über inverse Funktionen erfüllt. Dazu genügt es zu zeigen, dass die Funktionalmatrix

$$J_F(x,y) = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ \partial_x f(x,y) & \partial_y f(x,y) \end{pmatrix}$$

für $(x,y) = (x_*, y_*)$ invertierbar ist. In der Tat, die Matrix

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ B(x,y) & (\partial_y f(x,y))^{-1} \end{pmatrix} \,, \quad B(x,y) = -(\partial_y f(x,y))^{-1} \partial_x f(x,y) \,,$$

ist für $(x,y) = (x_*, y_*)$ die Inverse von $J_F(x,y)$. Aus Satz 8.4 folgt nun: Es gibt offene Mengen $U, V \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ mit $(x_*, y_*) \in U \subset \Omega$, so dass $F : U \to V$ bijektiv und $F^{-1} : V \to U$ stetig differenzierbar ist. Wir zerlegen F^{-1} in zwei Blöcke,

$$F^{-1}(x,y) = (\varphi_x(x,y), \varphi_y(x,y)) \,,$$

mit $\varphi_x : V \to \mathbb{R}^n$, $\varphi_y : V \to \mathbb{R}^m$. Für $(x,y) \in V$ gilt dann

$$\begin{aligned} (x,y) &= F(F^{-1}(x,y)) = F(\varphi_x(x,y), \varphi_y(x,y)) \\ &= (\varphi_x(x,y), f(\varphi_x(x,y), \varphi_y(x,y))) \,, \end{aligned}$$

also

$$x = \varphi_x(x,y) \,, \quad y = f(x, \varphi_y(x,y)) \,. \tag{9.7}$$

Wir wählen nun offene Mengen $W \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$, mit

$$F(x_*, y_*) = (x_*, 0) \in W \times Y \subset V \,,$$

und definieren $g : W \to \mathbb{R}^m$ durch

$$g(x) = \varphi_y(x, 0) \,. \tag{9.8}$$

Außerdem verlangen wir, dass $\partial_y f(x, g(x))$ invertierbar ist für alle $x \in W$ (das können wir immer durch Verkleinern von W erreichen). Es gilt dann wegen (9.7)

$$f(x, g(x)) = f(x, \varphi_y(x, 0)) = 0 \,, \quad \text{für alle } x \in W,$$

und

$$(x_*, y_*) = F^{-1}(x_*, 0) = (x_*, \varphi_y(x_*, 0)) = (x_*, g(x_*)) \,,$$

also

$$y_* = g(x_*) \,.$$

Da F^{-1} stetig differenzierbar ist, ist auch g stetig differenzierbar. Die Formel (9.6) für J_g folgt aus der Kettenregel, angewendet auf

$$x \mapsto (x, g(x)) \mapsto f(x, g(x)) = 0 \,,$$

da wir durch Differenzieren erhalten

$$0 = \begin{pmatrix} \partial_x f(x, g(x)) & \partial_y f(x, g(x)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n \\ J_g(x) \end{pmatrix}$$
$$= \partial_x f(x, g(x)) + \partial_y f(x, g(x)) J_g(x) \,.$$

□

Wie schon beim Satz über inverse Funktionen handelt es sich auch beim Satz über implizite Funktionen um eine Existenzaussage ("es gibt eine Funktion g"). Er sagt nichts darüber aus, wie man zu der die Auflösung nach x beschreibenden Funktion g kommen kann.

Die einfachste Situation ist die, die wir am Anfang dieses Kapitels betrachtet haben, nämlich eine Gleichung mit zwei Unbekannten, also $m = 1$, $n + m = 2$ und damit $n = 1$. Dieser Fall liegt vor, wenn wir die Niveaulinien $f(x, y) = c$ einer stetig differenzierbaren Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ analysieren. Es genügt, den Fall $c = 0$ zu betrachten: Wir können von f zu $\tilde{f}(x, y) = f(x, y) - c$ übergehen, es ist $J_{\tilde{f}} = J_f$.

Sei $(x_*, y_*) \in \Omega$, $f(x_*, y_*) = c$, also $(x_*, y_*) \in N_c(f)$. Die Frage ist: Wie sieht $N_c(f)$ in der Nähe von (x_*, y_*) aus? Wir betrachten zunächst den regulären Fall

$$\operatorname{grad} f(x_*, y_*) \neq 0 \,. \tag{9.9}$$

In diesem Fall ist mindestens eine der beiden partiellen Ableitungen nicht Null. Ist $\partial_y f(x_*, y_*) \neq 0$, so gibt es nach Satz 9.1 ein offenes Intervall $I = (x_* - \delta, x_* + \delta)$ und ein $g \in C^1(I)$ mit $g(x_*) = y_*$ und $f(x, g(x)) = 0$, d.h. y lässt sich in der Nähe von (x_*, y_*) nach x auflösen. Ist $\partial_x f(x_*, y_*) \neq 0$, so gibt es nach Satz 9.1 ein offenes Intervall $J = (y_* - \delta, y_* + \delta)$ und ein $h \in C^1(J)$ mit $h(y_*) = x_*$ und $f(h(y), y) = 0$, d.h. x lässt sich in der Nähe von (x_*, y_*) nach y auflösen. Das ist der Fall in Beispiel (9.2), in dem

$$\partial_x f(x, y) \neq 0 \,, \quad \text{außer in } (0, 1),\ (0, -1),$$
$$\partial_y f(x, y) \neq 0 \,, \quad \text{außer in } (1, 0),\ (-1, 0).$$

Man kann außerdem zeigen, dass es im regulären Fall (9.9) in einer hinreichend kleinen Kugel um (x_*, y_*) keine anderen Punkte von $N_c(f)$ geben kann.

Der singuläre Fall ist charakterisiert durch

$$\operatorname{grad} f(x_*, y_*) = 0 \,. \tag{9.10}$$

Hier kann alles mögliche passieren. Sei etwa

$$f(x, y) = x^2 - y^3 = 0 \,, \tag{9.11}$$

dann ist

$$\operatorname{grad} f(x, y) = (2x, -3y^2) \,, \quad \operatorname{grad} f(0, 0) = 0 \,.$$

Wir können y nach x auflösen,

$$y = g(x) = \sqrt[3]{x^2} \,,$$

aber g ist nicht differenzierbar in 0, und $N_0(f)$ hat eine Spitze in 0. Für

$$f(x,y) = x^2 - y^2 = 0\,, \tag{9.12}$$

gilt

$$\operatorname{grad} f(x,y) = (2x, -2y)\,, \quad \operatorname{grad} f(0,0) = 0\,,$$

und $N_0(f)$ besteht aus den beiden Winkelhalbierenden (die sich im Nullpunkt schneiden). Eine kompliziertere Situation liegt vor bei

$$f(x,y) = r^6 \sin\frac{1}{r^2}\,, \quad r = \sqrt{x^2+y^2}\,, \quad f(0,0) = 0\,. \tag{9.13}$$

Hier ist ebenfalls $\operatorname{grad} f(0,0) = 0$, und $N_0(f)$ besteht aus unendlich vielen Kreisen um 0 mit den Radien r, wobei

$$\frac{1}{r^2} = \pi n\,, \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

sowie den Nullpunkt selbst.

Es gilt allgemein (ohne Beweis):

> Zu jeder abgeschlossenen Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ gibt es eine stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $A = N_0(f)$.

Als nächstes betrachten wir ein Beispiel mit zwei Gleichungen und drei Unbekannten,

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - 6\sqrt{x^2+y^2} &= -8 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2y &= -8\,. \end{aligned} \tag{9.14}$$

Es ist $m = 2$, $n + m = 3$ und $n = 1$. Es gibt drei Möglichkeiten der Auflösung: (y,z) nach x, (x,z) nach y, (x,y) nach z. Die zugehörige Funktionalmatrix ist gegeben durch

$$J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x - \frac{6x}{\sqrt{x^2+y^2}} & 2y - \frac{6y}{\sqrt{x^2+y^2}} & 2z \\ 2x - 6 & 2y - 2 & 2z \end{pmatrix} \tag{9.15}$$

Der Punkt $(x_*, y_*, z_*) = (3,0,1)$ erfüllt (9.14), wir fragen nach der lokalen Auflösbarkeit bei diesem Punkt. Die Funktionalmatrix wird zu

$$J_f(3,0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}\,. \tag{9.16}$$

Wollen wir (y,z) nach x auflösen, so müssen wir die Teilmatrix

$$\partial_{(y,z)} f(3,0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

betrachten. Sie ist invertierbar, also können wir gemäß dem Satz über implizite Funktionen die Gleichungen (9.14) lokal nach x auflösen. Die anderen beiden Fälle führen auf

$$\partial_{(x,z)} f(3,0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\,, \quad \partial_{(x,y)} f(3,0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Diese Matrizen sind nicht invertierbar. Der Satz über implizite Funktionen liefert keine Aussage über die Frage, ob sich die Gleichungen lokal nach y oder nach z auflösen lassen.

Minimierung bei Nebenbedingung. Wir wenden den Satz über implizite Funktionen an auf das Problem, das Minimum einer Funktion "unter einer Nebenbedingung" zu bestimmen.

Problem 9.2
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $J : \Omega \to \mathbb{R}$. Wir betrachten die Optimierungsaufgabe

$$\min J(x)\,, \quad \text{wobei} \quad x \in \Omega,\ f(x) = 0\,. \tag{9.17}$$

Die Bedingung "$f(x) = 0$" heißt Nebenbedingung (genauer: Gleichungsnebenbedingung). Ein $x_* \in \Omega$ heißt lokale Lösung von (9.17), falls $f(x_*) = 0$ und falls es eine offene Kugel U um x_* gibt, so dass

$$J(x_*) \le J(x)\,, \quad \text{für alle } x \in U \cap \Omega \text{ mit } f(x) = 0.$$

Satz 9.3 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, seien $f, J \in C^1(\Omega)$, sei x_* lokale Lösung von (9.17), es gelte* $\operatorname{grad} f(x_*) \neq 0$. *Dann gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit*

$$\operatorname{grad} J(x_*) = \lambda \operatorname{grad} f(x_*)\,. \tag{9.18}$$

Die Zahl λ heißt Lagrange-Multiplikator.

Beweis: Sei o.B.d.A $\partial_n f(x_*) \neq 0$, das lässt sich durch Umnummerieren der Unbekannten immer erreichen. Wir schreiben

$$x_* = (x'_*, x_{*n})\,, \quad x'_* = (x_{*1}, \dots, x_{*n-1})\,.$$

Nach Satz 9.1 gibt es eine stetig differenzierbare Funktion $g : W \to \mathbb{R}$, $W \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen mit $x'_* \in W$, so dass

$$f(x', g(x')) = 0\,, \quad (x', g(x')) \in \Omega\,, \quad \text{für alle } x' \in W.$$

Wenn wir die durch

$$h_i(x'_i) = f(x', g(x'))\,, \quad x' = (x'_1, \dots, x'_{n-1})\,,$$

definierte Abbildung h_i in $x'_i = x_{*i}$ differenzieren, erhalten wir, da $h_i = 0$ nahe x'_{*i},

$$\partial_i f(x_*) + \partial_n f(x_*) \partial_i g(x'_*) = 0\,, \quad 1 \le i \le n-1\,. \tag{9.19}$$

Wir betrachten

$$\tilde{J} : W \to \mathbb{R}\,, \quad \tilde{J}(x') = J(x', g(x'))\,.$$

x'_* ist lokales Minimum von $\tilde{J}$, also gilt

$$0 = \partial_i \tilde{J}(x'_*) = \partial_i J(x_*) + \partial_n J(x_*) \partial_i g(x'_*)\,, \quad 1 \le i \le n-1\,. \tag{9.20}$$

Wir multiplizieren (9.20) mit $\partial_n f(x_*)$, (9.19) mit $\partial_n J(x_*)$ und subtrahieren die resultierenden Gleichungen. Es ergibt sich

$$\partial_i J(x_*)\partial_n f(x_*) - \partial_i f(x_*)\partial_n J(x_*) = 0\,, \quad 1 \le i \le n\,. \tag{9.21}$$

Wir setzen

$$\lambda = \frac{\partial_n J(x_*)}{\partial_n f(x_*)}$$

und erhalten

$$\partial_i J(x_*) = \lambda \partial_i f(x_*)\,, \quad 1 \le i \le n\,.$$

□

Als erstes Beispiel betrachten wir

$$\min J(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2)\,, \quad \text{wobei} \quad e^{xy} = x+y\,. \tag{9.22}$$

Hier ist

$$f(x,y) = e^{xy} - x - y\,,$$

$$\operatorname{grad} J(x,y) = (x,y)\,, \quad \operatorname{grad} f(x,y) = (ye^{xy}-1, xe^{xy}-1)\,.$$

Gemäß Satz 9.3 suchen wir Kandidaten $(x,y,\lambda) \in \mathbb{R}^3$, welche die Gleichungen

$$x = \lambda(ye^{xy}-1)\,, \tag{9.23}$$

$$y = \lambda(xe^{xy}-1)\,. \tag{9.24}$$

sowie

$$e^{xy} = x+y\,. \tag{9.25}$$

erfüllen. Wir haben also das Optimierungsproblem darauf zurückgeführt, das System (9.23) - (9.25) von 3 nichtlinearen Gleichungen mit den 3 Unbekannten (x,y,λ) zu lösen – was im allgemeinen nicht durch explizite Angabe einer Lösung möglich ist.

Man beachte, dass Satz 9.3 lediglich eine **notwendige** Bedingung für ein lokales Minimum liefert. Lösungen z.B. des Systems (9.23) sind daher zunächst nur Kandidaten für Minima, ganz wie im Fall ohne Nebenbedingung, in dem die Berechnung von Lösungen von $\operatorname{grad} J(x_*) = 0$ ebenfalls nur Kandidaten liefert. Hinreichende Bedingungen involvieren die zweiten Ableitungen von f und J; sie werden in der Optimierung behandelt.

Als weiteres Beispiel betrachten wir das Problem, die Extrema einer quadratischen Funktion auf dem Rand der Einheitskugel zu bestimmen. Sei $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$J(x) = x^T Ax\,, \quad A \in \mathbb{R}^{(n,n)} \text{ symmetrisch,} \tag{9.26}$$

die Nebenbedingung sei

$$0 = f(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - 1\,.$$

Es ist

$$\operatorname{grad} J(x) = 2Ax\,, \quad \operatorname{grad} f(x) = 2x\,.$$

Die Funktion J nimmt auf dem Rand der Einheitskugel ihr Maximum und ihr Minimum an. In beiden Fällen folgt aus Satz 9.3, im Falle des Maximums angewendet auf $-f$, die Existenz eines $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\operatorname{grad} J(x) = \lambda \operatorname{grad} f(x)$, also

$$Ax = \lambda x\,, \tag{9.27}$$

das heißt, λ ist Eigenwert von A zum Eigenvektor x. Aus (9.27) folgt

$$J(x) = x^T A x = x^T \lambda x = \lambda \|x\|_2^2 = \lambda\,. \tag{9.28}$$

Da diese Formel für jeden Eigenwert gilt, wenn wir einen zugehörigen Eigenvektor auf 1 normieren, haben wir das folgende Ergebnis erhalten:

$$\max_{\|x\|_2=1} J(x) = \lambda_{max}\,, \qquad \min_{\|x\|_2=1} J(x) = \lambda_{min}\,, \tag{9.29}$$

wobei λ_{max} und λ_{min} der größte bzw. kleinste Eigenwert von A sind.

10 Fourierreihen

Mit Fourierreihen oder trigonometrischen Reihen verfolgt man das Ziel, periodische Funktionen durch trigonometrische Polynome darzustellen bzw. zu approximieren.

Definition 10.1 (Periodische Funktion)
Sei S Menge. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to S$ heißt periodisch mit Periode p, oder p-periodisch, falls

$$f(x+p) = f(x)\,, \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}. \tag{10.1}$$

Hierbei ist $p \in \mathbb{R}$, $p > 0$. □

Ist p eine Periode für f, so auch kp für jedes $k \in \mathbb{N}$, $k \neq 0$. Die Funktionen

$$f_k(x) = e^{ikx} = \cos kx + i \sin kx\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,,\, k \neq 0\,, \tag{10.2}$$

sind periodisch mit Periode $2\pi/|k|$, also auch 2π-periodisch. Konstante Funktionen sind p-periodisch für jedes $p > 0$.

Eine p-periodische Funktion ist durch ihre Restriktion auf ein Intervall der Form $[a, a+p)$, $a \in \mathbb{R}$ beliebig, eindeutig bestimmt. Umgekehrt definiert jede Funktion $f : [a, a+p) \to S$ vermittels wiederholter Anwendung von (10.1) eine p-periodische Funktion $\tilde{f} : \mathbb{R} \to S$, diese heißt die periodische Fortsetzung von f. Im Folgenden werden wir die Funktionen f und $\tilde{f}$ beide mit f bezeichnen.

Anstelle eines Intervalls $[a, a+p)$ kann man (im Fall $p = 2\pi$) den Einheitskreis $\mathcal{T} = \{e^{ix} : 0 \leq x < 2\pi\}$ als Definitionsgebiet von f betrachten und erhält damit eine "kanonische" Darstellung der Menge aller 2π-periodischen Funktionen mit Werten in S als die Menge aller Abbildungen von $\mathcal{T}$ nach S. Einer Funktion $f : \mathcal{T} \to S$ entspricht dabei die Funktion

$$g(x) = f(e^{ix})\,, \quad g : \mathbb{R} \to S\,.$$

Definition 10.2 (Trigonometrisches Polynom)
Ein trigonometrisches Polynom ist definiert als eine Funktion $t : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ der Form

$$t(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}\,, \tag{10.3}$$

wobei $n \in \mathbb{N}$ und $c_k \in \mathbb{C}$. Die Zahl n heißt der Grad von t, falls $c_n \neq 0$ oder $c_{-n} \neq 0$. □

Interpretieren wir ein trigonometrisches Polynom als Funktion $t : \mathcal{T} \to \mathbb{C}$, so erhalten wir vermittels (10.3) die Darstellung

$$t(z) = \sum_{k=-n}^{n} c_k z^k\,, \quad z = e^{ix}\,.$$

Um komplexwertige Funktionen differenzieren und integrieren zu können, übertragen wir die relevanten Sachverhalte aus dem Reellen, indem wir $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ identifizieren.

Sei $I = (a, b)$ ein offenes Intervall in $\mathbb{R}$. Für $f : I \to \mathbb{C}$ definieren wir $f' : I \to \mathbb{C}$ durch

$$f'(x) = (\operatorname{Re} f)'(x) + i(\operatorname{Im} f)'(x)\,, \tag{10.4}$$

falls Real- und Imaginärteil von f auf (a, b) differenzierbar sind. Vermittels der Identifikation von $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}^2$ stimmt die Definition in (10.4) mit der Definition der Ableitung einer Kurve überein. Man kann unmittelbar nachprüfen, dass

$$(f + g)' = f' + g'\,, \quad (cf)' = cf' \tag{10.5}$$

gelten für differenzierbare Funktionen $f, g : I \to \mathbb{C}$ und Konstante $c \in \mathbb{C}$. Für

$$f(x) = e^{ikx} = \cos kx + i \sin kx$$

ergibt sich

$$f'(x) = -k \sin kx + ik \cos kx = ike^{ikx}\,.$$

Daraus erhalten wir die Ableitung eines trigonometrischen Polynoms,

$$t(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}\,, \quad t'(x) = \sum_{k=-n}^{n} ikc_k e^{ikx}\,.$$

Definition 10.3 *Eine Funktion $f : I \to \mathbb{C}$ mit $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ heißt Regelfunktion, falls Real- und Imaginärteil von f Regelfunktionen sind. In diesem Fall definieren wir*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \operatorname{Re} f(x)\,dx + i \int_a^b \operatorname{Im} f(x)\,dx\,, \tag{10.6}$$

$\square$

Es gilt

$$\int_a^b f(x) + g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx\,, \quad \int_a^b cf(x)\,dx = c \int_a^b f(x)\,dx\,, \tag{10.7}$$

für Regelfunktionen f, g und für $c \in \mathbb{C}$, sowie

$$\overline{\int_a^b f(x)\,dx} = \int_a^b \overline{f(x)}\,dx\,. \tag{10.8}$$

Ist f periodisch mit Periode p, so ist das Integral von f über ein Intervall der Länge p unabhängig von der Lage des Intervalls,

$$\int_a^{a+p} f(x)\,dx = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{a}+p} f(x)\,dx$$

für alle $a, \tilde{a} \in \mathbb{R}$. Weiterhin gilt der Hauptsatz

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)\,, \tag{10.9}$$

falls $f : I \to \mathbb{C}$ stetig und $F'(x) = f(x)$ für alle x, und weiter die sich aus dem Hauptsatz ergebenden Integrationsregeln (partielle Integration, Substitution). Wir erhalten also

$$\int_a^b e^{ikx}\,dx = \frac{1}{ik}e^{ikx}\Big|_a^b = -\frac{i}{k}e^{ikx}\Big|_a^b .$$

Insbesondere ergibt sich, da $x \mapsto e^{ikx}$ eine 2π-periodische Funktion ist,

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}\,dx = \begin{cases} 0\,, & k \in \mathbb{Z}\,,\ k \neq 0\,, \\ 2\pi\,, & k = 0\,. \end{cases} \tag{10.10}$$

Wir können trigonometrische Polynome auch durch Sinus und Cosinus darstellen.
Die Form

$$t(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{10.11}$$

wird als **reelle Form** des trigonometrischen Polynoms

$$t(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} \tag{10.12}$$

bezeichnet. Wegen

$$c_k e^{ikx} + c_{-k}e^{-ikx} = (c_k + c_{-k})\cos kx + i(c_k - c_{-k})\sin kx \tag{10.13}$$

stimmen die Funktionen in (10.11) und (10.12) überein, falls wir

$$a_0 = 2c_0\,, \quad a_k = c_k + c_{-k}\,, \quad b_k = i(c_k - c_{-k}) \tag{10.14}$$

oder umgekehrt

$$c_0 = \frac{a_0}{2}\,, \quad c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k)\,, \quad c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k) \tag{10.15}$$

setzen. Aus (10.10) erhalten wir unmittelbar, dass

$$\int_{-\pi}^{\pi} t(x)e^{-ikx}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{j=-n}^{n} c_j e^{i(j-k)x}\,dx = 2\pi c_k \tag{10.16}$$

gilt für alle $k \in \mathbb{Z}$.

Lemma 10.4 *Für ein trigonometrisches Polynom t sind äquivalent:*

(i) t ist reellwertig, d.h. $t(x) \in \mathbb{R}$ für alle $x \in \mathbb{R}$,

(ii) $\overline{c_k} = c_{-k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$,

(iii) $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Beweis: "(i)⇒(ii)": Aus (10.16) folgt wegen $\overline{t(x)} = t(x)$

$$2\pi\overline{c_k} = \overline{\int_{-\pi}^{\pi} t(x)e^{-ikx}\,dx} = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{t(x)}e^{ikx}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} t(x)e^{-i(-k)x}\,dx = 2\pi c_{-k}\,.$$

"(ii)⇒(iii)": Aus (10.14) folgt wegen $\overline{c_k} = c_{-k}$

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} a_k &= \operatorname{Im} c_k + \operatorname{Im} c_{-k} = \operatorname{Im} c_k - \operatorname{Im} c_k = 0\,,\\ \operatorname{Im} b_k &= \operatorname{Re} c_k - \operatorname{Re} c_{-k} = \operatorname{Re} c_k - \operatorname{Re} c_k = 0\,.\end{aligned}$$

"(iii)⇒(ii)": klar wegen (10.11). □

Auch im reellen Fall wird die Darstellung (10.12) meistens bevorzugt, da sie strukturell klarer und oft einfacher zu handhaben ist.

Definition 10.5 (Fourierkoeffizient)
Sei $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ eine Regelfunktion. Für $k \in \mathbb{Z}$ heißt

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx \tag{10.17}$$

der k-te Fourierkoeffizient von f. Das trigonometrische Polynom

$$(S_n f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}\,, \quad c_k = \hat{f}(k)\,, \tag{10.18}$$

heißt das n-te Fourierpolynom von f. Die zugehörige Reihe

$$(S_\infty f)(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \tag{10.19}$$

heißt die Fourierreihe von f. □

Das Integral in (10.17) existiert, da der Integrand ebenfalls eine Regelfunktion ist. Aus (10.16) folgt, dass $S_n f = f$, falls f ein trigonometrisches Polynom vom Grad $\le n$ ist.

Wegen (10.14) gelten für die zugehörigen Koeffizienten a_k und b_k die Formeln

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx\,, \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx\,, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx\,, \quad k \ge 1\,. \tag{10.20}$$

Hieraus erkennt man sofort, dass

$a_k = 0$ für alle k, falls f eine ungerade Funktion ist (d.h. $f(-x) = -f(x)\ \forall x$),
$b_k = 0$ für alle k, falls f eine gerade Funktion ist (d.h. $f(-x) = f(x)\ \forall x$).

Wir betrachten einige Beispiele. Da die Fourierkoeffizienten von f durch Integration entstehen, ist es für ihre Berechnung gleichgültig, ob wir f an einzelnen (endlich vielen) Punkten undefiniert lassen oder umdefinieren.

Beispiel 10.6 (i) $f(x) = x$, $-\pi < x < \pi$. Da f ungerade ist, gilt $a_k = 0$ für alle k. Partielle Integration ergibt

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin kx \, dx = 2 \cdot \frac{(-1)^{k+1}}{k} \\ (S_\infty f)(x) &= 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin kx = 2\big(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} \ldots\big) \end{aligned} \tag{10.21}$$

(ii) $f(x) = |x|$, $-\pi < x < \pi$. Da f gerade ist, gilt $b_k = 0$ für alle k. Partielle Integration ergibt

$$a_0 = \pi\,, \quad a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \cos kx \, dx = -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{k^2} \cdot (1 - (-1)^k)$$

$$(S_\infty f)(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\big(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} \ldots\big)$$

(iii) $f(x) = (\pi - x)/2$, $0 < x < 2\pi$. Die 2π-periodische Fortsetzung von f ist ungerade, also gilt $a_k = 0$ für alle k. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{k}\,, \\ (S_\infty f)(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} = \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} \ldots \end{aligned} \tag{10.22}$$

(iv)

$$f(x) = \begin{cases} 1\,, & 0 < x < \pi\,, \\ -1\,, & -\pi < x < 0\,. \end{cases}$$

Da f ungerade ist, gilt $a_k = 0$ für alle k. Es ergibt sich

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin kx \, dx = \begin{cases} \frac{4}{k\pi}\,, & k \text{ ungerade}, \\ 0\,, & k \text{ gerade}, \end{cases}$$

$$(S_\infty f)(x) = \frac{4}{\pi}\big(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} \ldots\big)$$

Wir befassen uns nun mit der Konvergenz der Fourierreihe. Für eine gegebene Funktion f stellen sich die Fragen:

- Für welche x ist die Fourierreihe $(S_\infty f)(x)$ konvergent ?
- Konvergiert $(S_\infty f)(x)$ gegen $f(x)$, bzw. wogegen sonst ?
- In welchem Sinn (punktweise, gleichmäßig ...) ist $(S_\infty f)(x)$ konvergent ?

Mit "Konvergenz der Fourierreihe $(S_\infty f)(x)$" ist gemeint die Existenz des Grenzwerts

$$(S_\infty f)(x) = \lim_{n\to\infty} (S_n f)(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e^{ikx}\,. \tag{10.23}$$

Die Bemühungen zur Beantwortung dieser Fragen haben wesentlich beigetragen zur Klärung der Grundlagen der Analysis (Funktionsbegriff, Konvergenz, Stetigkeit) im 19. Jahrhundert.

Lemma 10.7 (Riemann-Lebesgue)
Für jede Regelfunktion $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ gilt

$$\lim_{t\to\infty} \int_a^b f(x) \sin tx \, dx = 0\,. \tag{10.24}$$

Beweis: Sei φ eine Treppenfunktion auf $[a,b]$, sei $\varphi = c_j$ auf den Intervallen (x_{j-1}, x_j) einer Zerlegung von $[a,b]$ mit $x_0 = a$, $x_n = b$. Für $t > 0$ gilt

$$0 \le \left| \int_a^b \varphi(x) \sin tx \, dx \right| = \left| \sum_{j=1}^n \frac{c_j}{t} (-\cos tx_j + \cos tx_{j-1}) \right| \le \frac{2}{t} \sum_{j=1}^n |c_j| \to 0$$

für $t \to \infty$, also gilt (10.24) für Treppenfunktionen. Sei nun f beliebige Regelfunktion, sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen eine Treppenfunktion φ mit $\|f - \varphi\|_\infty \le \varepsilon$ und ein $C > 0$, so dass

$$\left| \int_a^b \varphi(x) \sin tx \, dx \right| \le \varepsilon\,, \quad \text{für alle } t \ge C.$$

Dann gilt für alle $t \ge C$

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) \sin tx \, dx \right| &\le \left| \int_a^b (f(x) - \varphi(x)) \sin tx \, dx \right| + \left| \int_a^b \varphi(x) \sin tx \, dx \right| \\ &\le (b-a)\|f - \varphi\|_\infty + \varepsilon \le (b-a)\varepsilon + \varepsilon \end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt. □

Wir befassen uns nun mit der punktweisen Konvergenz der Fourierreihe einer Funktion $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$. Wir schreiben das Fourierpolynom $S_n f$ um,

$$\begin{aligned} (S_n f)(x) &= \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k) e^{ikx} = \sum_{k=-n}^n \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iky} \, dy \cdot e^{ikx} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \sum_{k=-n}^n e^{ik(x-y)} \, dy\,. \end{aligned} \tag{10.25}$$

Definition 10.8 (Dirichlet-Kern)
Die Funktion

$$D_n(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \big(1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos kx\big) \tag{10.26}$$

heißt Dirichlet-Kern (vom Grad n). □

Direkt aus der Definition folgt, dass D_n eine gerade, 2π-periodische Funktion ist mit

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)\,dx = 1\,. \tag{10.27}$$

Wir können nun (10.25) umschreiben zu

$$\begin{aligned}(S_n f)(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y) \sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-y)}\,dy = \int_{-\pi}^{\pi} f(y) D_n(x-y)\,dy \\ &= \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+\tau) D_n(-\tau)\,d\tau = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+\tau) D_n(\tau)\,d\tau\,.\end{aligned} \tag{10.28}$$

Lemma 10.9 *Es gilt*

$$\begin{aligned} D_n(x) &= \frac{1}{2\pi}\cdot(2n+1) && \textit{falls } x = 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}, \\ D_n(x) &= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}} && \textit{andernfalls.}\end{aligned}$$

Beweis: Klar für $x \in 2\pi\mathbb{Z}$. Andernfalls erhalten wir mit $z = e^{ix}$

$$\begin{aligned} 2\pi D_n(x) &= \sum_{k=-n}^{n} z^k\,, \\ (z^{\frac12} - z^{-\frac12}) 2\pi D_n(x) &= \sum_{k=-n}^{n} (z^{k+\frac12} - z^{k-\frac12}) = z^{n+\frac12} - z^{-n-\frac12}\,.\end{aligned} \tag{10.29}$$

Die Behauptung folgt nun aus

$$z^{\frac12} - z^{-\frac12} = 2i\sin\big(\frac{x}{2}\big)\,,\quad z^{n+\frac12} - z^{-(n+\frac12)} = 2i\sin\big(\frac{2n+1}{2}x\big)\,.$$

□

Notation 10.10 Aus Analysis 1 wissen wir, dass eine Regelfunktion $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ in jedem Punkt $x \in [-\pi,\pi]$ rechts- und linksseitige Grenzwerte

$$f(x+) = \lim_{\substack{\xi\to x\\ \xi>x}} f(\xi)\,,\quad f(x-) = \lim_{\substack{\xi\to x\\ \xi<x}} f(\xi) \tag{10.30}$$

besitzt. (Für die Randpunkte ist ggf. die periodische Fortsetzung zu verwenden.) Analog definieren wir die rechts- und linksseitigen Ableitungen, falls sie existieren, als

$$f'(x+) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(x+h) - f(x+)}{h}\,,\quad f'(x-) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{f(x+h) - f(x-)}{h}\,. \tag{10.31}$$

Satz 10.11 *Sei $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ eine Regelfunktion, die in einem Punkt $x \in [-\pi,\pi]$ eine rechts- und eine linksseitige Ableitung besitzt. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} (S_n f)(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}\,. \tag{10.32}$$

Ist f außerdem stetig in x, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} (S_n f)(x) = f(x)\,. \tag{10.33}$$

Beweis: Aus (10.28) wissen wir, dass

$$(S_n f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+\tau) D_n(\tau)\, d\tau\,. \tag{10.34}$$

Aus den oben erhaltenen Eigenschaften von D_n folgt

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} f(x+\tau) D_n(\tau)\, d\tau - \frac{f(x+)}{2} &= \int_0^{\pi} (f(x+\tau) - f(x+)) \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\tau\right)}{\sin\frac{\tau}{2}}\, d\tau \\ &= \int_0^{\pi} g(\tau) \sin\left(\frac{2n+1}{2}\tau\right) d\tau\,, \end{aligned} \tag{10.35}$$

wobei

$$g(\tau) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{f(x+\tau) - f(x+)}{\tau} \cdot \frac{\frac{\tau}{2}}{\sin\frac{\tau}{2}}\,.$$

Auf $[0,\pi]$ ist g eine Regelfunktion, da der Grenzwert $g(0+)$ existiert. Aus Lemma 10.7 folgt nun

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} f(x+\tau) D_n(\tau)\, d\tau = \frac{f(x+)}{2}\,.$$

Analog zeigt man

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{0} f(x+\tau) D_n(\tau)\, d\tau = \frac{f(x-)}{2}\,.$$

Zusammen mit (10.35) ergibt sich (10.32). □

Bemerkung 10.12

1. Auf die Voraussetzung an die Ableitung von f kann nicht ersatzlos verzichtet werden. Die Fourierreihe der Funktion f,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2^{k^3+1}x)}{k^2} \cdot \sum_{l=1}^{2^{k^3}} \frac{\sin lx}{l}\,,$$

ist in $x = 0$ divergent, obwohl f stetig ist (Beispiel von Fejér). Es gibt sogar stetige Funktionen, deren Fourierreihe in allen rationalen Punkten ihres Definitionsintervalls divergiert.

2. Es gibt eine (im Sinne von Lebesgue) integrierbare Funktion, deren Fourierreihe in jedem Punkt divergiert (Beispiel von Kolmogorov). □

In der Nähe eines Unstetigkeitspunktes x von f verhalten sich die Fourierpolynome $S_n f$ oszillatorisch. Für wachsendes n lokalisieren sich diese Schwingungen immer stärker bei x, ihre Amplitude nimmt aber nicht ab. Dieses Phänomen ist nach Gibbs benannt. Wir analysieren es am Beispiel der Funktion $f : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2}\,. \tag{10.36}$$

Es gilt

$$f(0-) = f(2\pi-) = -\frac{\pi}{2}\,, \quad f(0+) = \frac{\pi}{2}\,, \quad (S_n f)(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k}\,. \tag{10.37}$$

Mit (10.26) erhalten wir

$$(S_nf)(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k} = \sum_{k=1}^{n} \int_0^x \cos kt \, dt = \int_0^x \big(\pi D_n(t) - \frac{1}{2}\big)\, dt\,, \tag{10.38}$$

also

$$(S_nf)(x) - f(x) = \int_0^x \pi D_n(t)\, dt - \frac{\pi}{2}\,. \tag{10.39}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_0^x \pi D_n(t)\, dt &= \frac{1}{2}\int_0^x \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\frac{t}{2}}\, dt && \text{(nach Lemma 10.9)}\\
&\geq \int_0^x \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{t}\, dt && \text{(da } 0 \leq \sin y \leq y \text{ für } y \geq 0)\\
&= \int_0^{\frac{2n+1}{2}x} \frac{\sin\tau}{\tau}\, d\tau && \text{(Substitution } \tau = \frac{2n+1}{2}t)
\end{aligned}$$

Wir setzen

$$x_n = \frac{2\pi}{2n+1}\,,$$

dann gilt $x_n \to 0$ und nach (10.39)

$$(S_nf)(x_n) - f(x_n) \geq \int_0^\pi \frac{\sin\tau}{\tau}\, d\tau - \frac{\pi}{2} \quad\approx\quad 0.089\pi\,.$$

Der Approximationsfehler im Punkt x_n beträgt also ungefähr 10 Prozent der Sprunghöhe im Unstetigkeitspunkt $x = 0$ von f, unabhängig davon, wie groß n ist (Gibbs-Phänomen).

Will man eine beliebige stetige Funktion als gleichmäßigen Grenzwert von trigonometrischen Polynomen erhalten, so kann man dafür nicht in allen Fällen die Fourierpolynome nehmen (siehe Bemerkung 10.12). Wie Fejér gezeigt hat, erreicht man aber Konvergenz, wenn man zu den arithmetischen Mitteln

$$T_Nf = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} S_nf \tag{10.40}$$

der Fourierpolynome übergeht. Es gilt für $x \in [-\pi, \pi]$ gemäß (10.28)

$$\begin{aligned}
(T_Nf)(x) &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}(S_nf)(x) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)D_n(x-y)\, dy\\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f(y)\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} D_n(x-y)\, dy\,,
\end{aligned} \tag{10.41}$$

also

$$(T_Nf)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(y)K_N(x-y)\, dy = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-s)K_N(s)\, ds \tag{10.42}$$

wegen Periodizität, wobei

$$K_N(x) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} D_n(x) \tag{10.43}$$

der sogenannte **Fejér-Kern** ist. Aus den entsprechenden Eigenschaften des Dirichlet-Kerns in (10.26) und (10.27) folgt unmittelbar, dass K_N eine gerade 2π-periodische Funktion ist mit

$$\int_{-\pi}^{\pi} K_N(x)\,dx = 1\,, \quad K_N(0) = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}(2n+1) = \frac{N}{2\pi}\,. \tag{10.44}$$

Lemma 10.13 *Es gilt*

$$K_N(x) = \frac{1}{2\pi N}\frac{\sin^2\left(\frac{N}{2}x\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}\,, \quad \textit{für alle } x \neq 0 \tag{10.45}$$

und insbesondere $K_N \geq 0$.

Beweis: Wie im Beweis von Lemma 10.9 rechnen wir mit Potenzen von $z = e^{ix}$. Zunächst gilt

$$2\pi N K_N(x) = 2\pi\sum_{n=0}^{N-1} D_n(x) = \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=-n}^{n} z^k\,. \tag{10.46}$$

In (10.29) haben wir erhalten

$$(z^{\frac{1}{2}} - z^{-\frac{1}{2}})\sum_{k=-n}^{n} z^k = z^{n+\frac{1}{2}} - z^{-(n+\frac{1}{2})}\,. \tag{10.47}$$

Es folgt

$$(z^{\frac{1}{2}} - z^{-\frac{1}{2}})\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=-n}^{n} z^k = \sum_{n=0}^{N-1} z^{n+\frac{1}{2}} - z^{-(n+\frac{1}{2})}\,, \tag{10.48}$$

und weiter

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} z^{n+\frac{1}{2}} &= z^{\frac{1}{2}}\frac{1-z^N}{1-z}\,, \\ \sum_{n=0}^{N-1} -z^{-(n+\frac{1}{2})} &= -z^{-\frac{1}{2}}\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}} = z^{\frac{1}{2}}\frac{1-z^{-N}}{1-z}\,. \end{aligned} \tag{10.49}$$

Im letzten Schritt wurde mit $-z$ erweitert. Aus (10.48) und (10.49) ergibt sich

$$\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=-n}^{n} z^k = \frac{z^{\frac{1}{2}}}{z^{\frac{1}{2}} - z^{-\frac{1}{2}}}\cdot\frac{2 - z^N - z^{-N}}{1-z} = \frac{2 - z^N - z^{-N}}{2 - z - z^{-1}}\,. \tag{10.50}$$

Wir gehen nun zum Sinus über vermittels der Formel

$$4\sin^2\varphi = 4\left[\frac{1}{2i}\left(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}\right)\right]^2 = 2 - e^{2i\varphi} - e^{-2i\varphi}\,. \tag{10.51}$$

Mit $\varphi = xN/2$ bzw. $\varphi = x/2$ ergeben sich Zähler und Nenner der rechten Seite von (10.50). Damit folgt die Behauptung aus (10.46) und (10.50). $\square$

Satz 10.14 *Sei $f \in C[-\pi, \pi]$ mit $f(-\pi) = f(\pi)$. Dann gilt*

$$\lim_{N\to\infty} \|f - T_N f\|_\infty = 0\,, \tag{10.52}$$

das heißt, die gemittelten Fourierpolynome $T_N f$ konvergieren gleichmäßig gegen f.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Da f gleichmäßig stetig ist auf $[-\pi, \pi]$ (und damit die periodische Fortsetzung von f gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}$ ist), finden wir $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(x-s)| \le \varepsilon$ für alle $x, s \in \mathbb{R}$ mit $|s| \le \delta$. Gemäß (10.45) gilt für alle s mit $\delta \le |s| \le \pi - \delta$

$$2\pi K_N(s) \le \frac{1}{N} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)} =: c(N, \delta)\,. \tag{10.53}$$

Sei $N_0 \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $c(N_0, \delta) < \varepsilon$. Dann gilt für alle $x \in [-\pi, \pi]$ und $N \ge N_0$

$$\begin{aligned}
|f(x) - (T_N f)(x)| &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - f(x-s)) K_N(s)\, ds \right| \le \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f(x-s)| K_N(s)\, ds \\
&\le \left(\int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\pi-\delta}^{\pi+\delta} \right) |f(x) - f(x-s)| K_N(s)\, ds + \left(\int_{-\pi+\delta}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\pi-\delta} \right) 2\|f\|_\infty K_N(s)\, ds \\
&\le \varepsilon \left(\int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\pi-\delta}^{\pi+\delta} \right) K_N(s)\, ds + 2\|f\|_\infty c(N, \delta) \le (1 + 2\|f\|_\infty)\varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Damit ist (10.52) bewiesen. □

Zusätzlich zur punktweisen und gleichmäßigen Konvergenz betrachten wir nun die Konvergenz hinsichtlich einer Integralnorm. Für Regelfunktionen $f, g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ definieren wir

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\, dx\,. \tag{10.54}$$

Es gelten die Rechenregeln

$$\begin{aligned}
&\langle f_1 + f_2, g \rangle = \langle f_1, g \rangle + \langle f_2, g \rangle\,, \quad \langle f, g_1 + g_2 \rangle = \langle f, g_1 \rangle + \langle f, g_2 \rangle\,, \\
&\langle \lambda f, g \rangle = \lambda \langle f, g \rangle = \langle f, \overline{\lambda} g \rangle\,, \quad \langle g, f \rangle = \overline{\langle f, g \rangle}\,, \quad \langle f, f \rangle \ge 0
\end{aligned} \tag{10.55}$$

für alle Funktionen f, f_1, f_2, g, g_1, g_2 und alle $\lambda \in \mathbb{C}$. Wir definieren

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}}\,. \tag{10.56}$$

Bemerkung 10.15 Wir wissen bereits: Ist f stetig, so kann $\|f\|_2 = 0$ nur gelten wenn $f = 0$. Diese Eigenschaft der Definitheit bleibt erhalten (mit dem im wesentlichen gleichen Beweis), falls f eine Regelfunktion ist, für die in jedem Punkt x gilt, dass entweder $f(x) = f(x+)$ oder $f(x) = f(x-)$. Unmittelbar aus der Definition folgt, dass $\|\lambda f\|_2 = |\lambda| \|f\|_2$. Die Dreiecksungleichung folgt aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung für Funktionen (hier nicht behandelt). Damit ergibt sich insgesamt, dass durch (10.54) ein Skalarprodukt und durch (10.56) eine Norm definiert wird auf dem Funktionenraum $C[-\pi, \pi]$ bzw. dem Raum der entsprechend eingeschränkten Regelfunktionen. □

Wir stellen den Zusammenhang zu Fourierpolynomen her. Wir definieren die Funktionen e_k durch

$$e_k(x) = e^{ikx}\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,. \tag{10.57}$$

Es gilt

$$\langle e_k, e_j \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} e^{-ijx}\, dx = \begin{cases} 1\,, & k = j\,, \\ 0\,, & k \neq j\,. \end{cases} \tag{10.58}$$

Die Funktionen $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ bilden also ein Orthonormalsystem im Sinne der Linearen Algebra. Für die Fourierkoeffizienten einer Funktion f gilt

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx = \langle f, e_k \rangle\,, \tag{10.59}$$

Das Fourierpolynom

$$(S_n f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e^{ikx}$$

lässt sich also schreiben als

$$S_n f = \sum_{k=-n}^{n} \langle f, e_k \rangle e_k\,. \tag{10.60}$$

Satz 10.16 (Minimaleigenschaft)
Sei $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ eine Regelfunktion. Dann gilt

$$\|f - S_n f\|_2 \leq \|f - p\|_2 \tag{10.61}$$

für jedes trigonometrische Polynom p vom Grad $\leq n$, sowie

$$\|f - S_n f\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=-n}^{n} |\langle f, e_k \rangle|^2\,. \tag{10.62}$$

Beweis: Sei $p = \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k e_k$ mit $\gamma_k \in \mathbb{C}$ ein beliebiges trigonometrisches Polynom vom Grad $\leq n$. Wir setzen $c_k = \langle f, e_k \rangle$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\langle f - p, f - p \rangle &= \langle f, f \rangle - \langle f, \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k e_k \rangle - \langle \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k e_k, f \rangle + \langle \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k e_k, \sum_{j=-n}^{n} \gamma_j e_j \rangle \\
&= \langle f, f \rangle - \sum_{k=-n}^{n} \overline{\gamma_k} \langle f, e_k \rangle - \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k \overline{\langle f, e_k \rangle} + \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k \overline{\gamma_k} \\
&= \langle f, f \rangle - \sum_{k=-n}^{n} \overline{\gamma_k} c_k - \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k \overline{c_k} + \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k \overline{\gamma_k} \\
&= \langle f, f \rangle - \sum_{k=-n}^{n} c_k \overline{c_k} + \sum_{k=-n}^{n} |c_k - \gamma_k|^2\,,
\end{aligned}$$

also

$$\|f - p\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 + \sum_{k=-n}^{n} |c_k - \gamma_k|^2\,. \tag{10.63}$$

Die rechte Seite wird minimal genau dann, wenn $\gamma_k = c_k$ für alle k, das heißt, wenn $p = S_n f$. Hieraus ergeben sich beide Behauptungen. $\square$

Folgerung 10.17 (Besselsche Ungleichung)
Es gilt

$$\|S_n f\|_2^2 = \sum_{k=-n}^{n} |\langle f, e_k \rangle|^2 \le \|f\|_2^2 \,. \tag{10.64}$$

Beweis: Die Ungleichung folgt, da die linke Seite in (10.62) nichtnegativ ist. Die Gleichung folgt aus

$$\begin{aligned}\langle S_n f, S_n f \rangle &= \left\langle \sum_{k=-n}^{n} \langle f, e_k \rangle e_k, \sum_{j=-n}^{n} \langle f, e_j \rangle e_j \right\rangle = \sum_{k=-n}^{n} \sum_{j=-n}^{n} \langle f, e_k \rangle \overline{\langle f, e_j \rangle} \langle e_k, e_j \rangle \\ &= \sum_{k=-n}^{n} |\langle f, e_k \rangle|^2 \,.\end{aligned}$$

$\square$

Satz 10.18 (Parsevalsche Gleichung)
Sei $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ stetig mit $f(-\pi) = f(\pi)$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \|f - S_n f\|_2 = 0 \tag{10.65}$$

und

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\langle f, e_k \rangle|^2 \,. \tag{10.66}$$

Beweis: Sei $T_n f$ das gemittelte Fourierpolynom aus (10.40). Dann gilt nach Satz 10.16

$$0 \le \|f - S_n f\|_2^2 \le \|f - T_n f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - (T_n f)(x)|^2 \, dx \le \|f - T_n f\|_\infty^2 \,.$$

Wegen Satz 10.14 konvergiert der rechts stehende Ausdruck gegen 0 für $n \to \infty$, also folgt (10.65). Führen wir nun in (10.62),

$$\|f - S_n f\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=-n}^{n} |\langle f, e_k \rangle|^2 \,,$$

den Grenzübergang $n \to \infty$ durch, so erhalten wir (10.66). $\square$

Die Einschränkung auf stetige periodische Funktionen ist überflüssig, Satz 10.18 gilt für "beliebige" Funktionen f, deren Quadrat $|f|^2$ ein endliches Integral hat. Dieser Sachverhalt wird in der Funktionalanalysis im Zusammenhang mit dem Lebesgue-Integral allgemein und übersichtlich behandelt.

11 Parameterabhängige Integrale

Wir betrachten eine Funktion φ der Form

$$\varphi(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx\,. \tag{11.1}$$

Wir untersuchen erstens, ob φ stetig ist, und zweitens, ob φ differenzierbar ist und wir die Ableitung mit dem Integral vertauschen dürfen, das heißt, ob

$$\varphi'(y) = \int_a^b \partial_y \varphi(x,y)\,dx \tag{11.2}$$

gilt.

Stetige Abhängigkeit. Der folgende Satz gibt eine Antwort auf die erste Frage.

Satz 11.1 *Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ kompaktes Intervall, $D \subset \mathbb{R}^n$, sei $f : [a,b] \times D \to \mathbb{R}$ stetig. Dann wird durch*

$$\varphi(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx \tag{11.3}$$

eine stetige Funktion $\varphi : D \to \mathbb{R}$ definiert.

Beweis: Sei $y \in D$ beliebig. Das Integral auf der rechten Seite von (11.3) existiert, da die durch $f_y(x) = f(x,y)$ definierte Funktion $f_y : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig ist. Sei nun $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in D mit $y_k \to y$. Die durch

$$K = \{y_k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{y\}$$

definierte Teilmenge von D ist abgeschlossen und beschränkt im $\mathbb{R}^n$, also kompakt. Weiterhin ist $[a,b]\times K$ in $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ abgeschlossen (nach Satz 1.19) und beschränkt, also ebenfalls kompakt. Nach Satz 2.36 ist die Einschränkung von f auf $[a,b] \times K$ gleichmäßig stetig. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es daher ein $\delta > 0$, so dass für alle $z \in D$ mit $\|z - y\| < \delta$ und alle $x \in [a,b]$ gilt

$$|f(x,z) - f(x,y)| < \varepsilon\,. \tag{11.4}$$

Wir definieren $f_k : [a,b] \to \mathbb{R}$ durch

$$f_k(x) = f(x,y_k)\,.$$

Wir zeigen, dass $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f_y konvergiert: Sei $N \in \mathbb{N}$ so, dass $\|y_k - y\| < \delta$ für alle $k \geq N$, dann folgt aus (11.4)

$$\|f_k - f_y\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x,y_k) - f(x,y)| < \varepsilon\,, \quad \text{für alle } k \geq N,$$

also $\|f_k - f_y\|_\infty \to 0$ für $k \to \infty$. Wegen

$$|\varphi(y_k) - \varphi(y)| \leq \int_a^b |f(x,y_k) - f(x,y)|\,dx \leq (b-a)\|f_k - f_y\|_\infty$$

folgt $\varphi(y_k) \to \varphi(y)$ und damit die Behauptung. □

Vertauschen von Ableitung und Integral. Der nächste Satz gibt eine hinreichende Bedingung dafür, wann wir Ableitung und Integral vertauschen können.

Satz 11.2 (Differenzieren unter dem Integral)
Sei $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ *stetig,* $\partial_y f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ *existiere und sei stetig. Dann ist* $\varphi : [c,d] \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx\,, \tag{11.5}$$

stetig differenzierbar, und

$$\varphi'(y) = \int_a^b \partial_y f(x,y)\,dx\,. \tag{11.6}$$

Beweis: Sei $y \in [c,d]$, sei (y_k) Folge in $[c,d]$ mit $y_k \to y$, $y_k \neq y$. Wir setzen

$$g_k(x) = \frac{f(x,y_k) - f(x,y)}{y_k - y} - \partial_y f(x,y)\,.$$

Aus dem Mittelwertsatz folgt die Existenz von $\eta_k(x) \in [y, y_k]$ mit

$$g_k(x) = \partial_y f(x, \eta_k(x)) - \partial_y f(x,y)\,.$$

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta > 0$ so, dass gilt

$$|y - z| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |\partial_y f(x,y) - \partial_y f(x,z)| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in [a,b].$$

(Das ist möglich, da $\partial_y f$ gleichmäßig stetig ist auf $[a,b] \times [c,d]$.) Wähle N so, dass

$$|y_k - y| < \delta\,, \quad \text{für alle } k \geq N.$$

Dann gilt $|\eta_k(x) - y| < \delta$ für alle $x \in [a,b]$ und

$$\|g_k\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |g_k(x)| \leq \varepsilon\,, \quad \text{für alle } k \geq N,$$

also gilt $g_k \to 0$ gleichmäßig, und es folgt

$$\begin{aligned}\left| \frac{\varphi(y_k) - \varphi(y)}{y_k - y} - \int_a^b \partial_y f(x,y)\,dx \right| &\leq \int_a^b \left| \frac{f(x,y_k) - f(x,y)}{y_k - y} - \partial_y f(x,y) \right| dx \\ &\leq \int_a^b \|g_k\|_\infty\,dx \to 0\end{aligned}$$

für $k \to \infty$. □

Als Beispiel betrachten wir

$$\varphi(y) = \int_0^1 \sin(x^2 + y^3)\,dx\,. \tag{11.7}$$

Hier ist $f(x,y) = \sin(x^2 + y^3)$, $\partial_y f(x,y) = 3y^2 \cos(x^2 + y^3)$, also

$$\varphi'(y) = \int_0^1 3y^2 \cos(x^2 + y^3)\,dx\,. \tag{11.8}$$

Man erspart es sich dabei, das ursprüngliche Integral explizit formelmäßig auszuwerten (falls das überhaupt möglich ist), erhält aber für die Ableitung eine Formel, die weiterhin ein Integral enthält.

In den Sätzen 11.1 und 11.2 ist vorausgesetzt, dass f stetig nicht nur bezüglich y, sondern auch bezüglich x ist. Diese Voraussetzung kann abgeschwächt werden, so dass (11.6) auch gilt für eine geeignete Klasse von Funktionen, die unstetig bezüglich x sind. Dazu verwendet man einen anderen Integralbegriff, zweckmäßig ist das Lebesgue-Integral.

Differenzieren nach Funktionen in den Integrationsgrenzen. Satz 11.2 und die Kettenregel ermöglichen es, eine Funktion der Form

$$\varphi(t) = \int_{g(t)}^{h(t)} f(t,x)\,dx \tag{11.9}$$

zu differenzieren. Zu diesem Zweck betrachten wir die Funktion

$$\psi(t,u,v) = \int_u^v f(t,x)\,dx\,. \tag{11.10}$$

Es ist dann

$$\varphi(t) = \psi(t,g(t),h(t))\,. \tag{11.11}$$

Die Funktion φ lässt sich als Komposition

$$t \mapsto (t,g(t),h(t)) \mapsto \psi(t,g(t),h(t)) \tag{11.12}$$

schreiben. Aus der Kettenregel erhalten wir ("$(*)$" steht für "$(t,g(t),h(t))$")

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= \langle \operatorname{grad}\psi(t,g(t),h(t)), (1,g'(t),h'(t))\rangle \\
&= \partial_t\psi(*)\cdot 1 + \partial_u\psi(*)g'(t) + \partial_v\psi(*)h'(t) \\
&= \int_{g(t)}^{h(t)} \partial_t f(t,x)\,dx - f(t,g(t))g'(t) + f(t,h(t))h'(t)\,.
\end{aligned} \tag{11.13}$$

Dabei ist vorausgesetzt, dass die beteiligten Funktionen die entsprechenden Voraussetzungen der Kettenregel und von Satz 11.2 erfüllen.

Als Beispiel betrachten wir

$$\varphi(t) = \int_{t^2}^{3t} \exp(\sin(2t+x))\,dx\,. \tag{11.14}$$

Mit (11.13) erhalten wir

$$\varphi'(t) = \int_{t^2}^{3t} 2\cos(2t+x)\exp(\sin(2t+x))\,dx - \exp(\sin(2t+t^2))\cdot 2t + \exp(\sin(5t))\cdot 3\,.$$

Faltung von Funktionen. Der **Träger** einer Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ist definiert als der Abschluss der Menge, auf der f von Null verschieden ist,

$$\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}\,. \tag{11.15}$$

Er ist kompakt genau dann, wenn er beschränkt ist. Der Träger elementarer Funktionen (Polynome, Exponentialfunktion, Winkelfunktionen) ist typischerweise gleich $\mathbb{R}$, da (abgesehen von der Nullfunktion) deren Nullstellenmenge aus einzelnen isolierten Punkten besteht. Für die Hutfunktion

$$f(x) = \begin{cases} x\,, & 0 \le x \le 1\,, \\ 2-x\,, & 1 \le x \le 2\,, \\ 0\,, & \text{sonst,} \end{cases}$$

gilt

$$\operatorname{supp}(f) = [0,2]\,.$$

Die **Faltung** $g * f$ zweier Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ im Punkt $x \in \mathbb{R}$ ist definiert als

$$(g * f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x-y) f(y)\, dy\,, \tag{11.16}$$

sofern dieses Integral existiert. Das ist jedenfalls dann der Fall, wenn f und g stetig sind und eine der beiden Funktionen einen kompakten Träger hat. Dann lässt sich nämlich für jedes $x \in \mathbb{R}$ eine Schranke M finden, so dass der Integrand Null ist für alle $y \notin [-M, M]$, und somit

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x-y) f(y)\, dy = \int_{-M}^{M} g(x-y) f(y)\, dy \tag{11.17}$$

gilt: Hat f kompakten Träger, so genügt es, dass

$$\operatorname{supp}(f) \subset [-M, M]$$

gilt; hat g kompakten Träger, so genügt es, dass

$$x - \operatorname{supp}(g) \subset [-M, M]$$

gilt. Hieraus folgt, dass M sogar so gewählt werden kann, dass (11.17) gültig bleibt, wenn statt x Argumente in einem Intervall $[x-\delta, x+\delta]$ zugelassen werden.

In diesen Fällen folgt aus Satz 11.1, dass $g * f$ eine stetige Funktion von x ist. Ist g außerdem stetig differenzierbar, so folgt aus Satz 11.2, dass $g * f$ ebenfalls stetig differenzierbar ist, und dass

$$(g * f)'(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g'(x-y) f(y)\, dy \tag{11.18}$$

gilt (siehe Übung).

12 Das Integral im Mehrdimensionalen

Integrale auf achsenparallelen Rechtecken. Wir betrachten achsenparallele Rechtecke im $\mathbb{R}^2$,

$$\Omega = [a,b] \times [c,d] \,. \tag{12.1}$$

Für eine stetige Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ wollen wir das zweidimensionale Integral

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy \tag{12.2}$$

definieren.

Weiter unten sprechen wir auch den Fall höherer Dimensionen an. Allgemeinere Situationen (unstetiges f, allgemeiner Integrationsbereich) werden in der Vorlesung über Maß- un Integrationstheorie behandelt.

In der vorliegenden Situation konstruieren wir das Integral analog zum eindimensionalen Fall. Seien

$$\begin{aligned} Z_1 &= \{x_0, \dots, x_n\}\,, \quad \text{wobei} \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\,, \\ Z_2 &= \{y_0, \dots, y_m\}\,, \quad \text{wobei} \quad c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d\,, \end{aligned} \tag{12.3}$$

Zerlegungen von $[a,b]$ bzw. $[c,d]$. Hieraus ergibt sich eine Zerlegung Z von $[a,b] \times [c,d]$ in nm Rechtecke

$$Q_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]\,, \quad 1 \le i \le n\,, \quad 1 \le j \le m\,. \tag{12.4}$$

Eine Funktion $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ der Form

$$\varphi(x,y) = c_{ij}\,, \quad \text{falls } x \in (x_{i-1}, x_i),\ y \in (y_{j-1}, y_j), \tag{12.5}$$

mit gegebenen $c_{ij} \in \mathbb{R}$ heißt **Treppenfunktion zur Zerlegung Z**. (Welchen Wert φ auf den Rändern der Rechtecke Q_{ij} annimmt, ist uns gleichgültig.) Für diese Funktion f definieren wir

$$\iint\limits_{Q_{ij}} \varphi(x,y)\,dx\,dy = c_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})\,, \tag{12.6}$$

das ist gerade das Volumen des Quaders mit Grundfläche Q_{ij} und Höhe c_{ij}.

Definition 12.1 *Sei $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega = [a,b] \times [c,d]$, eine Treppenfunktion wie in (12.4) und (12.5) beschrieben. Wir definieren das Integral von φ über Ω durch*

$$\iint\limits_{\Omega} \varphi(x,y)\,dx\,dy = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})\,. \tag{12.7}$$

Wie im Eindimensionalen zeigt man, dass das so definierte Integral nicht davon abhängt, welche Zerlegung Z man wählt. Die aus dem Eindimensionalen bekannten elementaren Eigenschaften des Integrals von Treppenfunktionen gelten weiterhin, so etwa

$$\iint\limits_{\Omega} (\alpha\varphi + \beta\psi)(x,y)\,dx\,dy = \alpha \iint\limits_{\Omega} \varphi(x,y)\,dx\,dy + \beta \iint\limits_{\Omega} \psi(x,y)\,dx\,dy \tag{12.8}$$

für alle Treppenfunktionen φ, ψ und alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Ist $\varphi \leq \psi$ (d.h. $\varphi(x,y) \leq \psi(x,y)$ für alle x, y), so gilt

$$\iint_\Omega \varphi(x,y)\,dx\,dy \leq \iint_\Omega \psi(x,y)\,dx\,dy\,. \tag{12.9}$$

Daraus folgt

$$\left|\iint_\Omega \varphi(x,y)\,dx\,dy\right| \leq \iint_\Omega |\varphi(x,y)|\,dx\,dy \leq (b-a)(d-c)\|\varphi\|_\infty\,. \tag{12.10}$$

Wie im Eindimensionalen wollen wir das Integral einer stetigen Funktion definieren als Grenzwert der Integrale von approximierenden Treppenfunktionen. Zuerst die Approximierbarkeit.

Satz 12.2 *Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig, $\Omega = [a,b] \times [c,d]$. Dann gibt es eine Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen auf Ω, die gleichmäßig gegen f konvergiert.*

Beweis: Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir wählen $\delta > 0$ so, dass

$$|f(x,y) - f(\tilde{x},\tilde{y})| < \frac{1}{n}\,,$$

falls $\|(x,y) - (\tilde{x},\tilde{y})\|_\infty < \delta$, gemäß der gleichmäßigen Stetigkeit von f auf Ω. Wir wählen weiterhin eine Zerlegung Z von Q, so dass für die entstehenden Rechtecke

$$Q_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$$

gilt, dass $|x_i - x_{i-1}| < \delta$ und $|y_j - y_{j-1}| < \delta$. Wir setzen

$$\varphi_n(x,y) = f(x_{i-1}, y_{j-1})\,, \quad \text{falls } (x,y) \in Q_{ij}.$$

(Falls (x,y) zu mehr als einem Q_{ij} gehört, nehmen wir irgendeines.) Es gilt dann

$$|f(x,y) - \varphi_n(x,y)| = |f(x,y) - f(x_{i-1}, y_{j-1})| < \frac{1}{n}\,, \quad \text{falls } (x,y) \in Q_{ij}.$$

Es folgt

$$\|f - \varphi_n\|_\infty < \frac{1}{n}\,.$$

$\square$

Lemma 12.3 *Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig, seien (φ_n) und (ψ_n) Folgen von Treppenfunktionen mit $\varphi_n \to f$ und $\psi_n \to f$ gleichmäßig. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \iint_\Omega \varphi_n(x,y)\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty} \iint_\Omega \psi_n(x,y)\,dx\,dy\,. \tag{12.11}$$

Beweis: Es gilt

$$\left| \iint\limits_{\Omega} \varphi_n(x,y)\,dx\,dy - \iint\limits_{\Omega} \psi_n(x,y)\,dx\,dy \right| \\ \le (b-a)(d-c)(\|f-\varphi_n\|_\infty + \|f-\psi_n\|_\infty) \quad \to \quad 0$$

für $n \to \infty$, und

$$\left| \iint\limits_{\Omega} \varphi_n(x,y)\,dx\,dy - \iint\limits_{\Omega} \psi_m(x,y)\,dx\,dy \right| \le (b-a)(d-c)\|\varphi_n - \varphi_m\|_\infty \\ \le (b-a)(d-c)(\|f-\varphi_n\|_\infty + \|f-\varphi_m\|_\infty)\,,$$

ebenso für ψ_n. Es folgt, dass die Integrale $\int \varphi_n\,dx\,dy$ und $\int \psi_n\,dx\,dy$ Cauchyfolgen bilden und ihre Grenzwerte übereinstimmen. □

Satz 12.2 und Lemma 12.3 zeigen, dass die folgende Definition sinnvoll ist.

Definition 12.4 *Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig. Ist (φ_n) eine gleichmäßig gegen f konvergente Folge von Treppenfunktionen, so definieren wir das Integral von f über Ω durch*

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty} \iint\limits_{\Omega} \varphi_n(x,y)\,dx\,dy\,. \tag{12.12}$$

Die elementaren Eigenschaften (12.8) – (12.10) des Integrals übertragen sich unmittelbar auf stetige Funktionen. Sind $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig, so gelten also

$$\iint\limits_{\Omega} \alpha f(x,y) + \beta g(x,y)\,dx\,dy = \alpha \iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy + \beta \iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy\,, \quad \alpha, \beta, \in \mathbb{R}\,, \tag{12.13}$$

sowie

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy \le \iint\limits_{\Omega} g(x,y)\,dx\,dy\,, \quad \text{falls } f \le g \text{ in } \Omega, \tag{12.14}$$

und

$$\left| \iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy \right| \le \iint\limits_{\Omega} |f(x,y)|\,dx\,dy\,. \tag{12.15}$$

Berechnung von Integralen auf achsenparallelen Rechtecken. Wir können das zweidimensionale Integral auf $\Omega = [a,b] \times [c,d]$ auf zwei eindimensionale Integrale zurückführen. Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion wie oben,

$$f(x,y) = c_{ij}\,, \quad \text{falls } x \in (x_{i-1}, x_i),\ y \in (y_{j-1}, y_j).$$

Für festgehaltenes y ist die durch $x \mapsto f(x,y)$ definierte Funktion eine Treppenfunktion im eindimensionalen Intervall $[a,b]$ zur Zerlegung Z_1, und es gilt

$$\int_a^b f(x,y)\,dx = \sum_{i=1}^{n} c_{ij}(x_i - x_{i-1})\,, \quad \text{falls } y_{j-1} < y < y_j. \tag{12.16}$$

Die Funktion

$$G(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx \tag{12.17}$$

ist wegen (12.16) eine Treppenfunktion in $[c,d]$ zur Zerlegung Z_2, und es gilt

$$\int_c^d G(y)\,dy = \sum_{j=1}^m \left[\sum_{i=1}^n c_{ij}(x_i - x_{i-1})\right](y_j - y_{j-1}) = \iint\limits_\Omega f(x,y)\,dx\,dy \tag{12.18}$$

nach Definition (12.1). Analog gilt für festgehaltenes x

$$\int_c^d f(x,y)\,dy = \sum_{j=1}^m c_{ij}(y_j - y_{j-1})\,, \quad \text{falls } x_{i-1} < x < x_i, \tag{12.19}$$

und für

$$F(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy \tag{12.20}$$

folgt wie in (12.18)

$$\int_a^b F(x)\,dx = \iint\limits_\Omega f(x,y)\,dx\,dy\,. \tag{12.21}$$

Insgesamt ergibt sich, dass für Treppenfunktionen gilt

$$\iint\limits_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy\,. \tag{12.22}$$

Die Aussage "ist f Treppenfunktion, so gilt (12.22)" bezeichnet man als den Satz von Fubini für Treppenfunktionen. Sie gilt auch für stetige Funktionen.

Satz 12.5 (Fubini für stetige Funktionen)
Sei $\Omega = [a,b] \times [c,d]$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt

$$\iint\limits_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy\,. \tag{12.23}$$

Beweis: Zunächst einmal gilt, dass die durch

$$x \mapsto \int_c^d f(x,y)\,dy\,, \quad y \mapsto \int_a^b f(x,y)\,dx\,,$$

definierten Funktionen stetig sind, gemäß den Eigenschaften von parameterabhängigen Integralen, Satz 11.1. Die Integrale in (12.23) sind daher wohldefiniert. Sei nun $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Treppenfunktionen mit $\|f - \varphi_n\|_\infty \to 0$ für $n \to \infty$, eine solche existiert gemäß Satz 12.2. Wie gezeigt gilt (12.23) mit φ_n an der Stelle von f. Es ist

$$\left| \iint\limits_\Omega f(x,y)\,dx\,dy - \iint\limits_\Omega \varphi_n(x,y)\,dx\,dy \right| \le (b-a)(d-c)\|f - \varphi_n\|_\infty\,,$$

und

$$\left| \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx - \int_a^b \int_c^d \varphi_n(x,y)\,dy\,dx \right| \le \int_a^b \int_c^d |f(x,y) - \varphi_n(x,y)|\,dy\,dx$$
$$\le \int_a^b (d-c) \sup_{y\in[c,d]} |f(x,y) - \varphi_n(x,y)|\,dx \le (b-a)(d-c)\|f - \varphi_n\|_\infty \,.$$

Also konvergieren die Integrale über φ_n gegen die Integrale über f, und (12.23) ergibt sich aus der Formel für φ_n im Grenzübergang $n \to \infty$. □

Als Beispiel betrachten wir

$$\iint_\Omega x^2 y\,dx\,dy\,, \qquad \Omega = [0,1] \times [1,2]\,.$$

Es gibt zwei Möglichkeiten, dieses Integral mit dem Satz von Fubini auszurechnen, je nachdem ob man zuerst bezüglich y oder zuerst bezüglich x integriert. Entweder:

$$\iint_\Omega x^2 y\,dx\,dy = \int_0^1 \int_1^2 x^2 y\,dy\,dx = \int_0^1 \left(x^2 \cdot \frac{1}{2} y^2 \Big|_{y=1}^{y=2} \right) dx = \int_0^1 2x^2 - \frac{1}{2}x^2\,dx$$
$$= \int_0^1 \frac{3}{2} x^2\,dx = \frac{1}{2} x^3 \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2}\,.$$

Oder:

$$\iint_\Omega x^2 y\,dx\,dy = \int_1^2 \int_0^1 x^2 y\,dx\,dy = \int_1^2 \left(\frac{1}{3} x^3 y \Big|_{x=0}^{x=1} \right) dy = \int_1^2 \frac{1}{3} y\,dy$$
$$= \frac{1}{6} y^2 \Big|_{y=1}^{y=2} = \frac{1}{2}\,.$$

In diesem Beispiel geht es sogar viel einfacher: Wir beginnen wie oben,

$$\iint_\Omega x^2 y\,dx\,dy = \int_0^1 \int_1^2 x^2 y\,dy\,dx\,,$$

und beobachten nun, dass die x-Abhängigkeit im inneren Integral in Form eines Faktors auftritt, also

$$\int_0^1 \int_1^2 x^2 y\,dy\,dx = \int_0^1 x^2 \int_1^2 y\,dy\,dx\,.$$

Wir stellen als nächstes fest, dass nunmehr das innere Integral nicht von x abhängt und somit als konstanter Faktor im äußeren Integral aufgefasst werden kann, also

$$\int_0^1 x^2 \int_1^2 y\,dy\,dx = \int_0^1 x^2\,dx \cdot \int_1^2 y\,dy\,.$$

Die beiden Integrale auf der rechten Seite können direkt ausgewertet werden, insgesamt ist also

$$\iint\limits_{\Omega} x^2 y \, dx \, dy = \int_0^1 x^2 \, dx \cdot \int_1^2 y \, dy = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \, .$$

Allgemein tritt dieser Fall dann auf, wenn der Integrand sich schreiben lässt als

$$f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y) \, , \tag{12.24}$$

dann ist

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y) \, dx \, dy = \int_a^b f_1(x) \, dx \cdot \int_c^d f_2(y) \, dy \, . \tag{12.25}$$

Integrale auf höherdimensionalen achsenparallelen Quadern. Für einen Quader

$$\Omega = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$$

im $\mathbb{R}^3$ definieren wir das Integral, in diesem Fall **Volumenintegral** genannt,

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z) \, dx \, dy \, dz \tag{12.26}$$

analog zum Zweidimensionalen, indem wir die Intervalle $[a_i, b_i]$ durch Zerlegungen Z_1, Z_2 und Z_3 unterteilen, Ω entsprechend in kleine Quader Q_{ijk} zerlegen, Treppenfunktionen (das heißt, auf den einzelnen Quadern Q_{ijk} konstante Funktionen) betrachten, Unter- und Obersummen definieren und das Integral durch die beschriebene Einschließung im Grenzwert erhalten. Es gilt ebenfalls der Satz von Fubini, so dass die Berechnung von (12.26) auf die Berechnung von drei eindimensionalen Integralen zurückgeführt werden kann, wobei die Reihenfolge der Integrationen beliebig gewählt werden kann,

$$\begin{aligned} \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z) \, dx \, dy \, dz &= \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z) \, dz \, dy \, dx \\ &= \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_3}^{b_3} \int_{a_2}^{b_2} f(x,y,z) \, dy \, dz \, dx \\ &\;\;\vdots \\ &= \int_{a_3}^{b_3} \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f(x,y,z) \, dx \, dy \, dz \, , \end{aligned} \tag{12.27}$$

das sind 6 verschiedene Möglichkeiten. Als Beispiel betrachten wir

$$\iiint\limits_{\Omega} x^2 yz \, dx \, dy \, dz \, , \quad \Omega = [0,1] \times [1,2] \times [2,3] \, .$$

Wir rechnen nur eine Variante aus,

$$\begin{aligned} \iiint\limits_{\Omega} x^2 yz \, dx \, dy \, dz &= \int_2^3 \int_1^2 \int_0^1 x^2 yz \, dx \, dy \, dz = \int_2^3 \int_1^2 \left(\frac{1}{3} x^3 yz \Big|_{x=0}^{x=1} \right) dy \, dz \\ &= \int_2^3 \int_1^2 \frac{1}{3} yz \, dy \, dz = \int_2^3 \frac{1}{6} y^2 z \Big|_{y=1}^{y=2} dz = \int_2^3 \frac{1}{2} z \, dz = \frac{5}{4} \, . \end{aligned}$$

Auch hier ist es aufgrund der Produktform des Integranden möglich, das dreidimensionale Integral direkt in ein Produkt eindimensionaler Integrale zu zerlegen,

$$\iiint\limits_{\Omega} x^2 yz \, dx \, dy \, dz = \int_2^3 z \, dz \cdot \int_1^2 y \, dy \cdot \int_0^1 x^2 \, dx = \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{4} \, .$$

Die allgemeine Formel für diesen Fall ist

$$\iiint\limits_{\Omega} f_1(x) f_2(y) f_3(z) \, dx \, dy \, dz = \int_{a_1}^{b_1} f_1(x) \, dx \cdot \int_{a_2}^{b_2} f_2(y) \, dy \cdot \int_{a_3}^{b_3} f_3(z) \, dz \, . \tag{12.28}$$

Integrale im $\mathbb{R}^d$ für $d > 3$ für einen achsenparallelen Quader

$$\Omega = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d]$$

werden analog definiert, es gilt ebenfalls der Satz von Fubini, also

$$\int \underset{\Omega}{\cdots} \int f(x_1, \ldots, x_d) \, dx_1 \cdots dx_d = \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_d}^{b_d} f(x_1, \ldots, x_d) \, dx_d \cdots dx_1 \, , \tag{12.29}$$

wobei die Reihenfolge der Integrale auf der rechten Seite beliebig abgeändert werden kann.

13 Kurvenintegrale und Potentiale

Zur Motivation: Ein konstantes Kraftfeld, repräsentiert durch einen Vektor $F \in \mathbb{R}^3$, leistet entlang der Strecke, welche einen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^3$ mit einem Punkt $x_1 \in \mathbb{R}^3$ verbindet, die Arbeit

$$W = \langle F, x_1 - x_0 \rangle = \|F\|_2 \|x_1 - x_0\|_2 \cos\varphi$$

wobei φ der von den Vektoren F und $x_1 - x_0$ eingeschlossene Winkel ist. Betrachten wir den Streckenzug, welcher nacheinander die Punkte $x_0, x_1, \dots x_N$ verbindet, und nehmen wir an, dass längs der Verbindung von x_{i-1} nach x_i die Kraft F_i wirkt, so ergibt sich die Gesamtarbeit zu

$$W = \sum_{i=1}^{N} \langle F_i, x_i - x_{i-1} \rangle \,. \tag{13.1}$$

Wenn wir diesen Streckenzug als Kurve $x : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ mit $x(t_i) = x_i$ zu einer geeigneten Zerlegung auffassen und $F(x_i) = F_i$ setzen, so wird (13.1) zu

$$W = \sum_{i=1}^{N} \left\langle F(x(t_i)), \frac{x(t_i) - x(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \right\rangle (t_i - t_{i-1})\,, \tag{13.2}$$

Ist $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ stetig und $x : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar, so ist die längs x verrichtete Arbeit gleich

$$\int_a^b \langle F(x(t)), x'(t) \rangle \; dt \,.$$

Definition 13.1 (Kurvenintegral)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, seien $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ stetig und $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, sei $C = x([a, b]) \subset \Omega$. Dann heißt

$$\int_C F \cdot dx := \int_a^b \langle F(x(t)), x'(t) \rangle \; dt \tag{13.3}$$

das Kurvenintegral von F entlang C von $x(a)$ nach $x(b)$. □

Diese Definition ist sinnvoll, da das Kurvenintegral sich nicht ändert, wenn wir eine andere Parametrisierung von C wählen, die die Orientierung erhält. Ist etwa $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ eine C^1-Parametertransformation, so gilt

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta \langle F((x \circ \varphi)(\tau)), (x \circ \varphi)'(\tau) \rangle \; d\tau &= \int_\alpha^\beta \langle F(x(\varphi(\tau))), x'(\varphi(\tau)) \rangle \, \varphi'(\tau) \, d\tau \\ &= \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} \langle F(x(t)), x'(t) \rangle \; dt = \pm \int_a^b \langle F(x(t)), x'(t) \rangle \; dt \,,\end{aligned}$$

je nachdem, ob φ orientierungserhaltend oder orientierungsumkehrend ist.

Für stückweise stetig differenzierbare Kurven $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ setzen wir

$$\int_C F \cdot dx = \sum_{i=1}^{k} \int_{C_i} F \cdot dx \,, \tag{13.4}$$

falls $x|[t_{i-1}, t_i]$ stetig differenzierbar ist und $C_i = x([t_{i-1}, t_i])$. (Man zeigt, dass diese Definition unabhängig ist von der Wahl der Zerlegung.) Aus der Linearität des Integrals folgt unmittelbar

$$\int_C (F+G) \cdot dx = \int_C F \cdot dx + \int_C G \cdot dx \,, \qquad \int_C \lambda F \cdot dx = \lambda \int_C F \cdot dx \,, \tag{13.5}$$

für $\lambda \in \mathbb{R}$.

Satz 13.2 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(\Omega)$, $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ stückweise stetig differenzierbar, sei $C = x([a,b]) \subset \Omega$. Dann gilt*

$$\int_C \operatorname{grad} f \cdot dx = f(x(b)) - f(x(a)) \,. \tag{13.6}$$

Beweis: Sei zunächst $x \in C^1([a,b])$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_C \operatorname{grad} f \cdot dx &= \int_a^b \langle \operatorname{grad} f(x(t)), x'(t) \rangle \; dt = \int_a^b (f \circ x)'(t) \, dt \\ &= f(x(b)) - f(x(a)) \end{aligned}$$

nach Kettenregel und Hauptsatz. Ist x stückweise stetig differenzierbar und (t_i) eine entsprechende Zerlegung von $[a,b]$, so folgt

$$\int_C \operatorname{grad} f \cdot dx = \sum_{i=1}^k \int_{C_i} \operatorname{grad} f \cdot dx = \sum_{i=1}^k (f(x(t_i)) - f(x(t_{i-1}))) = f(x(b)) - f(x(a)) \,.$$

$\square$

Aus Satz 13.2 folgt: Ist $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ein Gradientenfeld auf Ω (das heißt, es gibt $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $F = \operatorname{grad} f$), so ist das Kurvenintegral zwischen zwei Punkten $P, Q \in \mathbb{R}^n$ unabhängig davon, wie die Kurve von P nach Q verläuft. Insbesondere ist dann

$$\int_C F \cdot dx = 0$$

für jede geschlossene Kurve C.

Lemma 13.3 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Ist F ein Gradientenfeld auf Ω, so gilt*

$$\partial_i F_j(x) = \partial_j F_i(x) \tag{13.7}$$

für alle $x \in \Omega$ und alle i, j mit $1 \le i, j \le n$.

Beweis: Ist $F = \operatorname{grad} f$, so gilt

$$\partial_i F_j(x) = \partial_i(\partial_j f)(x) = \partial_j(\partial_i f)(x) = \partial_j F_i(x) \,.$$

$\square$

Definition 13.4 *Sei X Vektorraum, sei $Y \subset X$. Y heißt sternförmig, falls es ein $y \in Y$ gibt mit $[x, y] \subset Y$ für alle $x \in Y$.* □

Satz 13.5 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und sternförmig, sei $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Gilt*

$$\partial_i F_j(x) = \partial_j F_i(x) \tag{13.8}$$

für alle $x \in \Omega$ und alle i, j, $1 \le i, j \le n$, so ist F ein Gradientenfeld auf Ω, es gibt $f \in C^2(\Omega)$ mit

$$F = \operatorname{grad} f\,. \tag{13.9}$$

Beweis: Sei $y \in \Omega$ mit $[y, x] \subset \Omega$ für alle $x \in \Omega$. Wir definieren f als das Kurvenintegral von F entlang der Strecke von y nach x, wir setzen also

$$f(x) = \int_0^1 \langle F(y + t(x - y)), x - y\rangle \, dt\,.$$

Nach Satz 11.2 existieren alle partiellen Ableitungen $\partial_i f$ und sind stetig. Für

$$\tilde{f}(x) = \langle F(y + t(x - y)), x - y\rangle$$

gilt

$$\partial_i \tilde{f}(x) = \langle t\partial_i F(y + t(x - y)), x - y\rangle + \langle F(y + t(x - y)), e_i\rangle\ ,$$

also

$$\partial_i f(x) = \int_0^1 \langle t\partial_i F(y + t(x - y)), x - y\rangle + F_i(y + t(x - y))\, dt\,.$$

Für

$$g_i(t) = tF_i(y + t(x - y))$$

gilt

$$g_i'(t) = \langle t(\operatorname{grad} F_i)(y + t(x - y)), x - y\rangle + F_i(y + t(x - y))\,,$$

und mit $z = y + t(x - y)$

$$\begin{aligned}\langle(\operatorname{grad} F_i)(z), x - y\rangle &= \sum_{j=1}^n \partial_j F_i(z)(x_j - y_j) = \sum_{j=1}^n \partial_i F_j(z)(x_j - y_j)\\ &= \langle \partial_i F(z), x - y\rangle\ .\end{aligned}$$

Es folgt

$$g_i'(t) = \langle t(\partial_i F)(y + t(x - y)), x - y\rangle + F_i(y + t(x - y))\,,$$

und damit

$$\partial_i f(x) = \int_0^1 g_i'(t)\, dt = g_i(1) - g_i(0) = F_i(x)\,.$$

□

Folgerung 13.6 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ offen und sternförmig, sei $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar. Dann ist F ein Gradientenfeld auf Ω genau dann, wenn $\operatorname{rot} F = 0$ in Ω.*

Definition 13.7 (Wegzusammenhang)
Ein metrischer Raum (X, d) heißt wegzusammenhängend, wenn es für alle $x_a, x_b \in X$ eine Kurve $r : [0,1] \to X$ gibt mit $r(0) = x_a$ und $r(1) = x_b$. □

Definition 13.8 (Konservatives Vektorfeld)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Ein Vektorfeld $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ heißt konservativ auf Ω, falls "das Kurvenintegral wegunabhängig ist", d.h. falls für alle Punkte $x_a, x_b \in \Omega$ und alle stückweise C^1-Kurven C_1, C_2 von x_a nach x_b, welche in Ω verlaufen, gilt

$$\int_{C_1} F \cdot dx = \int_{C_2} F \cdot dx \,. \tag{13.10}$$

□

Satz 13.9 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und wegzusammenhängend, sei $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ stetig. Dann gilt*

$$F \text{ ist Gradientenfeld auf } \Omega \qquad \Leftrightarrow \qquad F \text{ ist konservativ auf } \Omega \ .$$

Beweis: "$\Rightarrow$": Folgt aus Satz 13.2.
"$\Leftarrow$": Seien $x, y \in \Omega$ beliebig. Wir beweisen zunächst

$$\text{Es gibt eine stückweise } C^1\text{-Kurve von } y \text{ nach } x. \tag{13.11}$$

Sei $r : [0,1] \to \Omega$ stetig mit $r(0) = y$, $r(1) = x$. Sei

$$U_\varepsilon = \{z : z \in \mathbb{R}^n, \, \mathrm{dist}\,(z, r([0,1])) < \varepsilon\} \,.$$

Wir wählen $\varepsilon > 0$ so, dass $U_\varepsilon \subset \Omega$ gilt (das ist möglich, da $\mathrm{dist}\,(\partial\Omega, r([0,1]) > 0$ falls $\partial\Omega \neq \emptyset$, was gleichbedeutend ist mit $\Omega \neq \mathbb{R}^n$). Für eine hinreichend feine Unterteilung (t_i) von $[0,1]$ gilt, dass der Polygonzug, welcher $r(0), r(t_1), \ldots, r(1)$ verbindet, ganz in U_ε und damit auch in Ω liegt. Damit ist (13.11) bewiesen. Wir wählen nun $x_* \in \Omega$ und definieren $f : \Omega \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \int_C F \cdot \, dx \,, \tag{13.12}$$

wobei C eine stückweise C^1-Kurve von x_* nach x ist (eine solche gibt es nach (13.11), und nach Voraussetzung hängt das Kurvenintegral nicht von der Wahl von C ab). Zu zeigen ist noch $F = \mathrm{grad}\, f$. Sei $x \in \Omega$ beliebig, sei $h > 0$ so gewählt, dass $[x, x + he_i] \subset \Omega$ gilt. Sei C_* eine stückweise C^1-Kurve von x_* nach x, sei $C(h)$ definiert durch

$$r_h : [0,h] \to \Omega \,, \quad r_h(t) = x + te_i \,.$$

Dann gilt

$$f(x + he_i) = \int_{C_*} F \cdot \, dx + \int_{C(h)} F \cdot \, dx = f(x) + \int_{C(h)} F \cdot \, dx \,.$$

Für

$$g(h) = f(x + he_i) - f(x)$$

gilt also

$$g(h) = \int_{C(h)} F \cdot \, dx = \int_0^h \langle F(r_h(t)), r_h'(t) \rangle \; dt = \int_0^h F_i(x + te_i) \, dt \,,$$

also ist g rechtsseitig differenzierbar in 0 und $g'_+(0) = F_i(x)$. Dasselbe Argument mit $-e_i$ statt e_i liefert die Existenz von $\partial_i f(x)$ und die Formel $\partial_i f(x) = F_i(x)$. □

Als Beispiel betrachten wir

$$\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \,, \quad F : \Omega \to \mathbb{R} \,, \quad F(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2} \,, \, \frac{x}{x^2+y^2} \right) . \tag{13.13}$$

Es gilt für alle $(x,y) \neq (0,0)$

$$\partial_1 F_2(x,y) = \partial_2 F_1(x,y) \,.$$

Für jede sternförmige Teilmenge $\tilde{\Omega}$ von Ω gibt es also nach Satz 13.5 ein $f \in C^2(\tilde{\Omega})$ mit

$$F(x) = \operatorname{grad} f(x) \,, \quad \text{für alle } x \in \tilde{\Omega} \,.$$

Aber andererseits gilt, wenn wir den Einheitskreis als eine geschlossene Kurve C auffassen, mit $r : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $r(t) = (\cos t, \sin t)$

$$\int_C F \cdot \, dx = \int_0^{2\pi} \langle F(r(t)), r'(t) \rangle \; dt = \int_0^{2\pi} \sin^2 t + \cos^2 t \, dt = 2\pi \,,$$

also ist F nicht konservativ auf Ω. Aus Satz 13.9 (bzw. schon Satz 13.2) folgt, dass es kein $f \in C^2(\Omega)$ geben kann mit

$$F(x) = \operatorname{grad} f(x) \,, \quad \text{für alle } x \in \Omega \,.$$

14 Konvexe Funktionen

Eine Teilmenge D eines Vektorraums heißt konvex, wenn mit je zwei Punkten $x, y \in D$ auch deren Verbindungsstrecke $[x, y]$ in D liegt. Oder anders ausgedrückt:

Definition 14.1 (Konvexe Menge)
Sei X Vektorraum, $D \subset X$. D heißt konvex, wenn

$$\lambda x + (1-\lambda) y \in D \tag{14.1}$$

für alle $x, y \in D$ und alle $\lambda \in [0, 1]$.

Definition 14.2 *Sei X Vektorraum, seien $x_1, \ldots, x_n \in X$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0, 1]$ mit*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\,,$$

Dann heißt der Vektor

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \tag{14.2}$$

*eine **Konvexkombination** der Vektoren $x_1, \ldots, x_n$.*

Sind x_1, x_2, x_3 Punkte im $\mathbb{R}^2$, die nicht auf einer Geraden liegen, so ist die Menge aller Konvexkombinationen von x_1, x_2, x_3 gleich dem Dreieck mit den Ecken x_1, x_2, x_3.

Satz 14.3 *Seien X Vektorraum, $D \subset X$ konvex, sei*

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

eine Konvexkombination von Elementen $x_1, \ldots, x_n \in D$. Dann gilt $x \in D$.

Beweis: Induktion über n. $n = 2$ entspricht der Definition der Konvexität. Induktionsschritt $n-1 \to n$: Sei

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\,, \quad x_i \in D\,,\ 1 \le i \le n\,, \tag{14.3}$$

eine Konvexkombination. Wähle λ_j mit $\lambda_j < 1$, dann gilt

$$x = \lambda_j x_j + (1-\lambda_j) y\,, \quad y = \sum_{i \neq j} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_j} x_i\,, \quad \sum_{i \neq j} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_j} = 1\,, \tag{14.4}$$

also $y \in D$ nach Induktionsvoraussetzung und damit auch $x \in D$, da x auf der Verbindungsstrecke von x_j nach y liegt. $\square$

Definition 14.4 (Konvexe Funktion)
Sei X Vektorraum, $D \subset X$ konvex, $f : D \to \mathbb{R}$. f heißt konvex, wenn

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \tag{14.5}$$

für alle $x, y \in D$ und alle $\lambda \in [0,1]$. f heißt konkav, wenn $-f$ konvex ist.

Lemma 14.5 *Sei X Vektorraum, $D \subset X$ konvex, $f : D \to \mathbb{R}$ konvex. Sei*

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

eine Konvexkombination von Vektoren $x_1, \dots, x_n \in D$. Dann gilt

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)\,. \tag{14.6}$$

Beweis: Mit Induktion über n. Für den Induktionsschritt zerlegt man x wie in (14.4) und wendet f auf beide Gleichungen in (14.4) an. $\square$

Satz 14.6 *Sei $D \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall, $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann ist f monoton wachsend genau dann, wenn $f'(x) \ge 0$ für alle $x \in D$.*

Beweis: "$\Leftarrow$": Das ist bereits in Analysis 1 bewiesen worden.
"$\Rightarrow$": Sei $x \in D$ mit $f'(x) < 0$. Dann ist für hinreichend kleines $h > 0$ auch

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} < 0\,,$$

also $f(x+h) < f(x)$, also f nicht monoton wachsend. $\square$

Satz 14.7 *Sei $D \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall, $f : D \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Dann ist f konvex genau dann, wenn $f''(x) \ge 0$ für alle $x \in D$.*

Beweis: "$\Leftarrow$": Sei $f''(x) \ge 0$ für alle $x \in D$. Dann ist nach Satz 14.6 die Funktion $f' : D \to \mathbb{R}$ monoton wachsend. Seien nun $x_1, x_2 \in D$ und $\lambda \in (0,1)$ mit $x_1 < x_2$, sei

$$x = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2\,.$$

Dann gibt es nach Mittelwertsatz $\xi_1 \in (x_1, x)$ und $\xi_2 \in (x, x_2)$ mit

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\xi_1) \le f'(\xi_2) = \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}\,.$$

Es ist

$$x - x_1 = (1-\lambda)(x_2 - x_1)\,, \quad x_2 - x = \lambda(x_2 - x_1)\,,$$

also

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{1-\lambda} \le \frac{f(x_2) - f(x)}{\lambda}\,.$$

Multiplikation mit $\lambda(1-\lambda)$ und Umsortieren liefert

$$f(x) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)\,.$$

"$\Rightarrow$": Sei $x \in D$. Seien außerdem $y \in D$, $y > x$ und $\lambda \in (0,1)$ beliebig, dann gilt

$$f(\lambda y + (1-\lambda)x) \leq \lambda f(y) + (1-\lambda) f(x)\,,$$

also

$$f(x + \lambda(y-x)) - f(x) \leq \lambda(f(y) - f(x))\,,$$

und weiter

$$\frac{f(x+\lambda(y-x)) - f(x)}{\lambda(y-x)} \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x}\,.$$

Grenzübergang $\lambda \downarrow 0$ liefert

$$f'(x) \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

für alle $y > x$. Sei nun $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in D mit $x_n > x$ für alle n und $x_n \to x$. Dann gibt es $\xi_n \in (x, x_n)$ mit

$$f'(x) \leq \frac{f(x_n)-f(x)}{x_n - x} = f'(\xi_n)\,,$$

also

$$0 \leq \frac{f'(\xi_n) - f'(x)}{\xi_n - x}\,,$$

Grenzübergang $n \to \infty$ liefert $\xi_n \to x$, also $f''(x) \geq 0$. □

Satz 14.8 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ konvex und offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Dann gilt: f ist auf Ω konvex genau dann, wenn die Hesse-Matrix $H_f(x)$ positiv semidefinit ist für alle $x \in \Omega$.*

Beweis: Für beliebige $x \in \Omega$, $h \in \mathbb{R}^n$ betrachten wir die durch

$$g_{x,h}(\lambda) = f(x + \lambda h)$$

definierten Funktionen. Sie sind auf einem von x und h abhängigen offenen Intervall um 0 definiert. Wie wir bereits berechnet haben, gilt

$$g''_{x,h}(\lambda) = h^T H_f(x+\lambda h) h\,. \tag{14.7}$$

Unmittelbar aus der Definition der Konvexität folgt, dass f genau dann konvex ist, wenn alle $g_{x,h}$ konvex sind. Aus Satz 14.7 folgt, dass genau dann alle $g_{x,h}$ konvex sind, wenn $g''_{x,h}(\lambda) \geq 0$ gilt für alle x, h, λ. Letzteres ist aber äquivalent dazu, dass $H_f(y)$ positiv semidefinit ist für alle $y \in \Omega$. □

Satz 14.9 *Seien $x_i > 0$, $\lambda_i \in [0,1]$ für $1 \leq i \leq n$ mit $\sum_i \lambda_i = 1$. Dann gilt*

$$\prod_{i=1}^n x_i^{\lambda_i} \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\,. \tag{14.8}$$

Beweis: Die Funktion $-\ln : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist nach Satz 14.7 konvex, da $(\ln)''(x) = -1/x^2$. Wir wenden Lemma 14.5 an mit $f = -\ln$, dann gilt

$$\ln\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i \ln(x_i)\,,$$

also (da die Exponentialfunktion monoton ist)

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \geq \exp\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \ln(x_i)\right) = \prod_{i=1}^n \exp(\lambda_i \ln x_i) = \prod_{i=1}^n x_i^{\lambda_i}\,.$$

□

Wählen wir $\lambda_i = 1/n$ für alle i, so ergibt sich die arithmetisch-geometrische Ungleichung

$$\Big(\prod_{i=1}^n x_i\Big)^{1/n} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\,.$$

Im Fall $n = 2$ lautet sie

$$\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2}\,.$$

Eine weitere in der Analysis wichtige Ungleichung ist die folgende.

Satz 14.10 (Youngsche Ungleichung)
Seien $p, q \in (1,\infty)$ mit

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,. \tag{14.9}$$

Dann gilt für alle $x, y \geq 0$

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}\,. \tag{14.10}$$

Beweis: Anwendung von Satz 14.9 mit

$$\lambda_1 = \frac{1}{p}\,, \quad \lambda_2 = \frac{1}{q}\,, \quad x_1 = x^p\,, \quad x_2 = y^q\,.$$

□

15 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Wir betrachten eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung,

$$y' = f(t, y)\,, \tag{15.1}$$

sowie das zugehörige Anfangswertproblem

$$y' = f(t, y)\,, \quad y(t_0) = y_0\,. \tag{15.2}$$

Definition 15.1
Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}$ offen, $f : D \to \mathbb{K}$. Eine Funktion $y : I \to \mathbb{K}$ heißt Lösung von (15.1) in I, falls y in I differenzierbar ist und für alle $t \in I$ gilt, dass $(t, y(t)) \in D$ und

$$y'(t) = f(t, y(t)) \tag{15.3}$$

Falls außerdem $(t_0, y_0) \in D$ gegeben ist mit $y(t_0) = y_0$, so heißt y Lösung des Anfangswertproblems (15.2) in I. □

Beispielsweise ist $y(t) = 3e^{2t}$ eine Lösung von $y' = 2y$ zum Anfangswert $y(0) = 3$. In Definition 15.1 ist $f(t, y) = 2y$, $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $t_0 = 0$, $y_0 = 3$. Verlangen wir stattdessen den Anfangswert $y(0) = 7$, so ist $y(t) = 7e^{2t}$ Lösung.

Hängt f nicht von y ab, so ist

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s)\, ds$$

eine Lösung des Anfangswertproblems (15.2), falls f stetig ist. Das folgt aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

Nicht jedes Anfangswertproblem hat eine Lösung. Beispiel: $I = [0, 1]$,

$$y' = f(y) = \begin{cases} -1\,, & y > 0\,, \\ 1\,, & y \le 0\,, \end{cases} \quad y(0) = 0\,. \tag{15.4}$$

Beweis: Ist y Lösung in I, so ist y stetig in I. y kann keine weitere Nullstelle in $(0, 1]$ haben, da andernfalls (Satz von Rolle) $y'(\tau) = 0$ für ein $\tau \in (0, 1)$. Ist $y(t) > 0$ für alle $t > 0$, dann ist $y'(t) = -1$ für $t > 0$, also y streng monoton fallend im Widerspruch zu $y(0) = 0$. Für den Fall $y(t) < 0$ ergibt sich ein analoger Widerspruch.

Man beachte, dass (15.4) auf $I = [-1, 0]$ eine Lösung hat, nämlich $y(t) = t$. Auf $I = [0, 1]$ erhalten wir eine Lösung, nämlich $y = 0$, falls wir die Definition von f modifizieren zu

$$y' = f(y) = \begin{cases} -1\,, & y > 0\,, \\ 0\,, & y = 0\,, \\ 1\,, & y \le 0\,. \end{cases} \tag{15.5}$$

Manche Anfangswertprobleme haben mehrere Lösungen. Beispiel:

$$y' = \sqrt{|y|}\,, \quad y(0) = 0\,. \tag{15.6}$$

Außer der Funktion $y = 0$ ist beispielsweise auch

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}t^2\,, & t > 0\,, \\ 0\,, & t \le 0\,, \end{cases} \tag{15.7}$$

eine Lösung. In diesem Fall ist die rechte Seite f stetig, aber im Punkt $t = 0$ nicht differenzierbar, und die Lösung (15.7) ist stetig differenzierbar, aber im Punkt $t = 0$ nicht zweimal differenzierbar.

Satz 15.2 *Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}$ offen, sei $f \in C^m(D;\mathbb{K})$, sei $(t_0, y_0) \in D$. Sei y Lösung des AWP (15.2) auf einem Intervall I. Dann ist $y \in C^{m+1}(I;\mathbb{K})$.*

Beweis: Mit Induktion. Ist f stetig, so ist y' stetig wegen $y'(t) = f(t, y(t))$. Ist $y \in C^k$ und $f \in C^k$, so ist auch $y' \in C^k$ nach Kettenregel, also $y \in C^{k+1}$. □

Satz 15.2 ist ein typischer Regularitätssatz der Analysis: Die Regularität der Daten (hier $f \in C^m$) sorgt für eine entsprechende Regularität der Lösung (hier $y \in C^{m+1}$), die im Lösungsbegriff selbst noch nicht enthalten ist.

Wir betrachten einige Situationen, bei denen wir Lösungen mehr oder weniger explizit berechnen können.

Trennung der Variablen. Das AWP habe die Form

$$y' = f(t)g(y)\,, \quad y(t_0) = y_0\,. \tag{15.8}$$

Sei y eine Lösung, wir formen um (zunächst ohne uns darum zu kümmern, ob "wir das dürfen")

$$\frac{y'(t)}{g(y(t))} = f(t)\,, \quad \int_{t_0}^t \frac{y'(s)}{g(y(s))}\,ds = \int_{t_0}^t f(s)\,ds\,,$$

und weiter (Substitution $\eta = y(s)$, $d\eta = y'(s)ds$)

$$\int_{y(t_0)}^{y(t)} \frac{1}{g(\eta)}\,d\eta = \int_{t_0}^t f(s)\,ds\,.$$

Können wir Stammfunktionen von $\frac{1}{g}$ und von f explizit angeben, so können wir hoffen, dass die aus dem Hauptsatz resultierende Gleichung sich nach $y(t)$ auflösen lässt. Für die hierdurch erhaltene explizite Lösung können wir unmittelbar nachprüfen, ob sie eine Lösung von (15.8) ist. (Ob die dazu führende Rechnung "mathematisch korrekt" war, ist dann eine zweitrangige Frage.) Beispiel:

$$y' = -y^2\,, \quad y(0) = y_0\,. \tag{15.9}$$

Für $y_0 = 0$ ist $y = 0$ eine Lösung. Sei $y_0 \neq 0$. Der Ansatz

$$\int_{y_0}^y -\frac{1}{\eta^2}\,d\eta = \int_0^t 1\,ds$$

führt auf

$$\frac{1}{\eta}\bigg|_{y_0}^{y} = t\,, \quad \frac{1}{y} = t + \frac{1}{y_0}\,,$$

also erhalten wir

$$y(t) = \frac{1}{t + \frac{1}{y_0}}\,. \tag{15.10}$$

Diese Funktion ist eine Lösung von (15.9) auf dem Intervall $(-\infty, -\frac{1}{y_0})$, falls $y_0 < 0$, beziehungsweise $(-\frac{1}{y_0}, \infty)$, falls $y_0 > 0$. Sie hat in $-\frac{1}{y_0}$ eine Singularität und läßt sich nicht über diesen Punkt hinaus fortsetzen. Beispiel:

$$y_0 = 1\,, \quad y(t) = \frac{1}{t+1}\,, \quad y : (-1, \infty) \to \mathbb{R}\,.$$

Wir lösen dieselbe Aufgabe nochmal, in Form eines oft verwendeten Kalküls. Wir schreiben die Differentialgleichung

$$y' = -y^2$$

in der Form

$$\frac{dy}{dt} = -y^2$$

und rechnen

$$\frac{dy}{-y^2} = dt\,, \quad \int -\frac{dy}{y^2} = \int 1 dt\,, \quad \frac{1}{y} = t + c\,.$$

Wir erhalten als Lösung

$$y(t) = \frac{1}{t+c}$$

mit einer Konstanten c, welche aus der Anfangsbedingung bestimmt wird zu

$$y_0 = y(0) = \frac{1}{0+c}\,, \quad c = \frac{1}{y_0}\,.$$

Man kann sich fragen, was die während dieser Rechnung verwendeten Symbole "dy" und "dt" mathematisch bedeuten. Diese Frage hat im Zuge der Begründung der Analysis im 19. Jahrhundert eine große Rolle gespielt, man sprach von "infinitesimalen Größen". In der heute üblichen Grundlegung der Differential- und Integralrechnung, wie wir sie in den vergangenen Monaten behandelt haben, kommen sie nicht mehr vor. Es gibt eine alternative Grundlegung der Analysis ("nonstandard analysis"), die infinitesimale Größen in einer intuitiv naheliegenden Weise verwendet, aber um den Preis einer deutlich aufwendigeren Anbindung an Mengenlehre und Logik. Mathematisch etabliert ist weiterhin die Verwendung der Symbole "dy" etc. in der Differentialgeometrie und -topologie für sogenannte Differentialformen, die bei der Integration auf "Mannigfaltigkeiten" (als Verallgemeinerung von Kurven in der Ebene bzw. gekrümmten Flächen im Raum) Verwendung finden.

Ein weiteres Beispiel ist die logistische Differentialgleichung, von Verhulst 1838 zur Modellierung des Bevölkerungswachstums vorgeschlagen.

$$y' = (a - by)y\,, \quad a, b > 0\,. \tag{15.11}$$

Die Wachstumsrate ist nicht konstant, sondern sinkt mit wachsender Bevölkerung. Für $y_0 = a/b$ ist $y' = 0$, also ist in diesem Fall die konstante Funktion $y(t) = a/b$ eine Lösung.

Durch Trennung der Variablen können wir die Lösung für einen allgemeinen Anfangswert $y_0 > 0$ berechnen, es ergibt sich

$$y(t) = \frac{a}{b} \frac{1}{1 + ce^{-at}}\,, \quad c = \frac{\frac{a}{b} - y_0}{y_0}\,. \tag{15.12}$$

Die lineare Differentialgleichung. Wir betrachten

$$y' + a(t)y = b(t)\,, \quad y(t_0) = y_0\,. \tag{15.13}$$

Im Fall $b = 0$ finden wir die Lösung durch Trennung der Variablen:

$$y' = -a(t)y\,, \qquad \int_{y_0}^{y} \frac{1}{\eta} d\eta = \int_{t_0}^{t} -a(s)\,ds\,,$$

also

$$\ln y - \ln y_0 = \ln \frac{y}{y_0} = -\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds\,.$$

Die gesuchte Lösung ist also im Falle $b = 0$

$$y(t) = y_0 \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds\right)\,. \tag{15.14}$$

Beispiel: Für die Anfangswertaufgabe

$$y' = 4ty\,, \quad y(0) = 3$$

ist $a(t) = -4t$, $y_0 = 3$ und $t_0 = 0$, also

$$y(t) = 3 \exp\left(-\int_{0}^{t} -4s\,ds\right) = 3e^{2t^2}\,.$$

Wir betrachten nun den allgemeinen Fall $b \neq 0$. Setzen wir

$$\tilde{a}(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)\,ds\,, \tag{15.15}$$

so gilt, falls y eine Lösung von (15.13) ist,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \left(y(t)e^{\tilde{a}(t)}\right) = e^{\tilde{a}(t)}(y'(t) + a(t)y(t)) = e^{\tilde{a}(t)}b(t)\,.$$

Integration von t_0 bis t liefert

$$y(t)e^{\tilde{a}(t)} - y_0 = \int_{t_0}^{t} e^{\tilde{a}(s)}b(s)\,ds\,.$$

Wir erhalten also als Lösung der Anfangswertaufgabe (15.13)

$$y(t) = e^{-\tilde{a}(t)} \left(y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{\tilde{a}(s)}b(s)\,ds\right)\,. \tag{15.16}$$

Beispiel: Für die Anfangswertaufgabe

$$y' = 4ty + t\,, \quad y(0) = 3$$

ist $a(t) = -4t$, $y_0 = 3$ und $t_0 = 0$ wie oben, weiter $b(t) = t$ und

$$\tilde{a}(t) = \int_0^t -4s\,ds = -2t^2\,.$$

Aus (15.16) erhalten wir

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{2t^2}\left(3 + \int_0^t e^{-2s^2} s\,ds\right) = e^{2t^2}\left(3 - \frac{1}{4}e^{-2s^2}\Big|_{s=0}^{s=t}\right) \\ &== e^{2t^2}\left(3 - \frac{1}{4}e^{-2t^2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{13}{4}e^{2t^2} - \frac{1}{4}\,. \end{aligned}$$

Der harmonische Oszillator. Der gedämpfte harmonische Oszillator wird beschrieben durch die Differentialgleichung

$$my'' + dy' + ky = 0\,. \tag{15.17}$$

Hierbei sind $m, d, k > 0$ Konstante. Zur Berechnung einer Lösung dividieren wir (15.17) durch m und setzen

$$b = \frac{d}{2m}\,, \quad c = \frac{k}{m}\,,$$

dann wird (15.17) zu

$$y'' + 2by' + cy = 0\,. \tag{15.18}$$

Wie wir bereits wissen, hat die noch einfachere Differentialgleichung

$$y' = \lambda y\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}\,, \tag{15.19}$$

die Lösung

$$y(t) = e^{\lambda t}\,. \tag{15.20}$$

Wir fragen uns, ob (15.20) auch eine Lösung von (15.18) ist. Dazu setzen wir (15.20) in (15.18) ein und erhalten

$$(\lambda^2 + 2b\lambda + c)e^{\lambda t} = 0\,. \tag{15.21}$$

Diese Gleichung ist (unabhängig davon, welchen Wert t hat) genau dann erfüllt, wenn λ eine Lösung der quadratischen Gleichung

$$\lambda^2 + 2b\lambda + c = 0 \tag{15.22}$$

ist. Gleichung (15.22) hat die beiden Lösungen

$$\lambda_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - c}\,. \tag{15.23}$$

Fall 1, $\mathbf{b^2 > c}$. Beide Lösungen von (15.22) sind reell, und

$$y(t) = a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 e^{\lambda_2 t} \tag{15.24}$$

mit $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ beliebig, ist Lösung von (15.18), andere gibt es nicht.

Fall 2, $\mathbf{b^2} = \mathbf{c}$. Es ist $\lambda_1 = \lambda_2 =: \lambda = -b$. Neben $y(t) = e^{\lambda t}$ ist auch

$$y(t) = te^{\lambda t}$$

eine Lösung von (15.18), und damit auch

$$y(t) = (a_1 + a_2 t)e^{\lambda t} \tag{15.25}$$

für beliebige $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.

Fall 3, $\mathbf{b^2} < \mathbf{c}$. Die beiden Lösungen

$$\lambda_{1,2} = -b \pm i\omega\,, \quad \omega = \sqrt{c - b^2}\,, \quad i = \sqrt{-1}\,,$$

sind konjugiert komplex, die zugehörigen komplexen Lösungen von (15.18) sind

$$y(t) = e^{-bt \pm i\omega t} = e^{-bt}e^{\pm i\omega t} = e^{-bt}(\cos\omega t \pm i \sin\omega t)\,,$$

und die entsprechenden reellen Lösungen sind

$$y(t) = e^{-bt}(a_1 \cos\omega t + a_2 \sin\omega t)\,, \tag{15.26}$$

mit $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ beliebig. Der Fall $b = d = 0$ und $c > 0$ entspricht dem ungedämpften harmonischen Oszillator, dessen Lösung die Form eines verschobenen Sinus mit Periode $p = 2\pi/\omega$ hat. Die Frequenz $\omega = 2\pi/p$ heißt Kreisfrequenz der Schwingung.

Dieses Beispiel zeigt, dass es Sinn macht, sich mit komplexen Lösungen zu beschäftigen, auch wenn man im Endeffekt reelle Lösungen erhalten möchte.

16 Matrixfunktionen

Funktionen von Matrizen. Die Determinate können wir auffassen als eine Funktion

$$\det : \mathbb{K}^{(n,n)} \to \mathbb{K}, \quad A \mapsto \det(A).$$

Die Inversenbildung $A \mapsto A^{-1}$ liefert eine Funktion

$$f : GL(n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}^{(n,n)}, \quad f(A) = A^{-1},$$

auf der Menge der invertierbaren Matrizen, einer offenen Teilmenge von $\mathbb{K}^{(n,n)}$. Letztere können wir als Erweiterung der Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z}, \quad f : \mathbb{K} \setminus \{0\} \to \mathbb{K},$$

auffassen. Es stellt sich die Frage, ob so etwas auch für andere Funktionen möglich ist. Bei Polynomen ist das klar. Ist

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k$$

ein Polynom, so ist

$$p(A) = \sum_{k=0}^{n} c_k A^k$$

wohldefiniert, da wir Matrizen addieren und multiplizieren können. Als nächstes betrachten wir Potenzreihen, etwa für die Exponentialfunktion,

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \quad e^A \stackrel{?}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!},$$

oder für die Summenformel der geometrischen Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} A^k \stackrel{?}{=} (I - A)^{-1}.$$

Das wirft die Frage der Konvergenz von Matrixreihen auf. Sie stellt sich im Vektorraum $\mathbb{K}^{(n,n)}$.

Reihen im normierten Raum. Für die grundlegende Definition ist es gleichgültig, ob der normierte Raum endliche oder unendliche Dimension hat.

Definition 16.1
Sei $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum, sei $(x_k)_{k\geq 0}$ Folge in X. Falls die Folge der Partialsummen

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} x_k \tag{16.1}$$

gegen ein $s \in X$ konvergiert, so sagen wir, dass die zugehörige Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ konvergiert, und definieren

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k = s. \tag{16.2}$$

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ *heißt* ***absolut konvergent****, falls*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|x_k\| < \infty \,. \tag{16.3}$$

□

Aus der Stetigkeit der Addition und Skalarmultiplikation im normierten Raum folgen die Rechenregeln

$$\sum_{k=0}^{\infty} (x_k + y_k) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k + \sum_{k=0}^{\infty} y_k \,, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \lambda x_k = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} x_k \,, \tag{16.4}$$

$\lambda \in \mathbb{K}$, die jeweils gültig sind, wenn die Grenzwerte auf der rechten Seite existieren.

Satz 16.2 *Sei* $(X, \|\cdot\|)$ *Banachraum. Ist die Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ *absolut konvergent, so ist sie auch konvergent, und es gilt*

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} x_k \right\| \le \sum_{k=0}^{\infty} \|x_k\| \,. \tag{16.5}$$

Beweis: Sei

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} \|x_k\| \,,$$

dann gilt für die in (16.1) definierten Partialsummen für $n > m$

$$\|s_n - s_m\| \le \sum_{k=m+1}^{n} \|x_k\| = |\sigma_n - \sigma_m| \,.$$

Da (σ_n) Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ ist, ist (s_n) Cauchyfolge in X, also konvergent. Wegen $\|s_n\| \le |\sigma_n|$ folgt (16.5) aus

$$\|s\| = \lim_{n\to\infty} \|s_n\| \le \lim_{n\to\infty} |\sigma_n| = \sum_{k=0}^{\infty} \|x_k\| \,,$$

wobei die Stetigkeit der Norm verwendet wurde. □

Matrixnormen. Der Matrizenraum $\mathbb{K}^{(n,n)}$ ist endlichdimensional, daher sind alle Normen auf $\mathbb{K}^{(n,n)}$ äquivalent, und die Konvergenz einer Folge oder Reihe im $\mathbb{K}^{(n,n)}$ hängt nicht von der Wahl der Norm ab. Es ist aber für die Analysis sinnvoll, Normen auf $\mathbb{K}^{(n,n)}$ im Zusammenhang mit Normen auf dem $\mathbb{K}^n$ zu betrachten.

Definition 16.3
Sei $\|\cdot\|$ *eine Norm auf* $\mathbb{K}^n$. *Für* $A \in \mathbb{K}^{(n,n)}$ *definieren wir*

$$\|A\| = \sup_{\substack{x \in \mathbb{K}^n \\ \|x\|=1}} \|Ax\| \,. \tag{16.6}$$

□

Unmittelbar aus der Definition folgt

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} , \tag{16.7}$$

sowie

$$\|I\| = 1$$

für jede Matrixnorm.

Da wir uns im Endlichdimensionalen befinden, wird in (16.6) das Maximum angenommen,

$$\|A\| = \max_{\substack{x \in \mathbb{K}^n \\ \|x\|=1}} \|Ax\| . \tag{16.8}$$

Lemma 16.4 *Durch (16.6) wird eine Norm auf $\mathbb{K}^{(n,n)}$ definiert. Sie heißt die von der gegebenen Vektornorm auf $\mathbb{K}^n$ erzeugte* ***Operatornorm*** *oder* ***Matrixnorm****.*

Beweis: Folgt direkt aus den Definitionen. □

Als erstes Beispiel betrachten wir die Spaltensummennorm.

Satz 16.5 *Für die von der Vektornorm*

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j|$$

erzeugte Matrixnorm gilt

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| . \tag{16.9}$$

Diese Norm heißt ***Spaltensummennorm****.*

Beweis: Wir setzen

$$s = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| .$$

Für die Einheitsvektoren e_j gilt $(Ae_j)_i = a_{ij}$, also

$$\|Ae_j\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| ,$$

und damit gemäß der Definition der Matrixnorm

$$\|A\|_1 \geq \max_{1 \leq j \leq n} \|Ae_j\|_1 = s .$$

Ist andererseits

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j , \quad \text{also} \quad Ax = \sum_{j=1}^{n} x_j A e_j ,$$

so gilt

$$\|Ax\|_1 \le \sum_{j=1}^{n} |x_j| \|Ae_j\|_1 \le s \cdot \sum_{j=1}^{n} |x_j| = s\|x\|_1 \,, \qquad \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} \le s \,,$$

falls $x \neq 0$, und daher $\|A\|_1 \le s$ wegen (16.7). □

Wir beschäftigen uns nun mit der von der euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$ erzeugten Matrixnorm.

Definition 16.6 (Spektralradius)
Sei $A \in \mathbb{K}^{(n,n)}$. Dann heißt

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ ist Eigenwert von } A\} \tag{16.10}$$

der Spektralradius von A.

Satz 16.7
Sei $A \in \mathbb{K}^{(n,n)}$. Dann gilt für die von der euklidischen Norm im $\mathbb{K}^n$ erzeugte Matrixnorm

$$\|A\|_2 = \Big(\rho(\bar{A}^T A)\Big)^{\frac{1}{2}} \,. \tag{16.11}$$

*Diese Norm heißt **Spektralnorm**. Ist $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ symmetrisch, so gilt*

$$\|A\|_2 = \rho(A) \,. \tag{16.12}$$

Beweis: Die Matrix $B = \bar{A}^T A$ ist hermitesch, d.h. $\bar{B}^T = B$. Also gibt es nach einem Satz der Linearen Algebra eine Orthonormalbasis $\{u_1, \ldots, u_n\}$ in $\mathbb{K}^n$ von Eigenvektoren von B, d.h. es ist für $1 \le i, j \le n$

$$Bu_i = \lambda_i u_i \,, \quad \langle u_i, u_j \rangle = \begin{cases} 1\,, & i = j\,, \\ 0\,, & i \neq j\,. \end{cases} \tag{16.13}$$

Hierbei sind λ_i die Eigenwerte von B, und

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i \tag{16.14}$$

das Standardskalarprodukt im $\mathbb{C}^n$. Wir können (16.13) auch als Matrixprodukt schreiben. Ist $U \in \mathbb{K}^{(n,n)}$ diejenige Matrix, deren Spalten gerade die Eigenvektoren u_i sind, so ist (16.13) äquivalent zu

$$BU = UD \,, \quad D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \,, \tag{16.15}$$

oder äquivalent

$$B = UDU^{-1} \,. \tag{16.16}$$

Sei nun

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i \,, \quad \alpha_i \in \mathbb{K} \,, \tag{16.17}$$

ein beliebiger Vektor in $\mathbb{K}^n$. Dann gilt

$$\|x\|_2^2 = \langle x, x \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j u_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \,, \tag{16.18}$$

$$\|Ax\|_2^2 = \langle Ax, Ax \rangle = \langle \bar{A}^T Ax, x \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i u_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j u_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i |\alpha_i|^2 \,. \tag{16.19}$$

Setzen wir $x = u_i$ in (16.19), so folgt $\lambda_i \geq 0$ für alle i. Aus (16.17) – (16.19) folgt für alle $x \in \mathbb{K}^n$

$$\|Ax\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i |\alpha_i|^2 \leq (\max_{1\leq j\leq n} \lambda_j) \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 = \rho(B) \|x\|_2^2 \,, \tag{16.20}$$

also $\|A\|_2^2 \leq \rho(B)$, und umgekehrt

$$\|A\|_2^2 \geq \max_{1\leq j\leq n} \|Au_j\|_2^2 = \max_{1\leq j\leq n} \lambda_j = \rho(B) \,. \tag{16.21}$$

Damit ist (16.11) bewiesen. Daraus folgt nun (16.12) da im Falle einer symmetrischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ gilt

$$\rho(\bar{A}^T A) = \rho(A^2) = (\rho(A))^2 \tag{16.22}$$

nach dem folgenden Lemma.

Lemma 16.8 *Ist $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ diagonalisierbar, so gilt*

$$\lambda \text{ ist EW von } A \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 \text{ ist EW von } A^2 \,. \tag{16.23}$$

Ist $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ symmetrisch, so gilt auch die Umkehrung.

Beweis: Ist A diagonalisierbar, so gibt es eine invertierbare Matrix $U \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ mit

$$A = UDU^{-1} \,, \quad D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \,,$$

wobei die λ_i die Eigenwerte von A sind. Es folgt

$$A^2 = UDU^{-1}UDU^{-1} = UD^2U^{-1}$$

Daraus folgt (16.23). Ist A symmetrisch, so sind alle Diagonalelemente λ von D nichtnegativ, und aus $\mu = \lambda^2$ folgt $\lambda = \sqrt{\mu}$. □

Wir formulieren einige allgemeine Eigenschaften von Matrixnormen.

Lemma 16.9 *Sei $(\|\cdot\|)$ Norm auf $\mathbb{K}^n$. Für die zugehörige Matrixnorm gilt*

$$\|Ax\| \leq \|A\| \|x\| \,, \tag{16.24}$$
$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\| \,, \tag{16.25}$$

für alle $A, B \in \mathbb{K}^{(n,n)}$, $x \in \mathbb{K}^n$.

Beweis: Für $x \neq 0$ gilt

$$\|Ax\| = \left\| A \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right\| \|x\| \leq \|A\| \|x\| \,,$$
$$\|ABx\| \leq \|A\| \|Bx\| \leq \|A\| \|B\| \|x\| \,,$$

also

$$\sup_{\|x\|=1} \|ABx\| \leq \|A\| \|B\| \,.$$

□

Lemma 16.10 *Sei $A \in \mathbb{K}^{(n,n)}$, es gelte $\|A\| < 1$ für irgendeine Matrixnorm. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} A^n = 0 \,. \tag{16.26}$$

Beweis: Aus (16.9) folgt $0 \leq \|A^n\| \leq \|A\|^n \to 0$, also $\|A^n\| \to 0$ und daher $A^n \to 0$ in $\mathbb{K}^{(n,n)}$. □

Satz 16.11 *Sei*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

Potenzreihe in $\mathbb{C}$ mit Konvergenzradius r. Dann ist die Matrixreihe

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k \tag{16.27}$$

absolut konvergent für alle $A \in \mathbb{K}^{(n,n)}$ mit $\|A\| < r$.

Hierbei ist $\|\cdot\|$ eine beliebige Matrixnorm, das heißt, eine Matrixnorm, die von irgendeiner Vektornorm erzeugt wird.

Beweis: Gemäß Lemma 16.9 gilt

$$\|c_k A^k\| \leq |c_k| \|A\|^k \,, \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Ist $\|A\| < r$, so gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|c_k A^k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |c_k| \|A\|^k < \infty \,.$$

□

Gemäß Satz 16.11 lassen sich

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \,, \tag{16.28}$$

und analog $\sin(A)$ und $\cos(A)$ für beliebige Matrizen $A \in \mathbb{K}^{(n,n)}$ durch die entsprechende Potenzreihe definieren.

Satz 16.12 (Neumannsche Reihe)
Sei $A \in \mathbb{K}^{(n,n)}$, es gelte $\|A\| < 1$ für irgendeine Matrixnorm. Dann ist $I - A$ invertierbar, und es gilt

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \,. \tag{16.29}$$

Beweis: Aus Satz 16.11 folgt, dass die Reihe absolut konvergiert. Für die Partialsummen gilt wie im Falle der geometrischen Reihe in $\mathbb{C}$

$$(I - A) \sum_{k=0}^{n} A^k = I - A^{n+1} \,.$$

Grenzübergang $n \to \infty$ auf beiden Seiten führt, da $A^{n+1} \to 0$ wegen Lemma 16.10, auf

$$(I - A) \sum_{k=0}^{\infty} A^k = I \,.$$

□

Wir hatten bereits festgestellt, dass die Menge der invertierbaren Matrizen eine offene Teilmenge des $\mathbb{K}^{(n,n)}$ ist. Über die Neumannsche Reihe erhalten wir einen alternativen Beweis und zusätzlich eine quantitative Aussage.

Satz 16.13 *Sei $A \in \mathbb{K}^{(n,n)}$ invertierbar. Ist $H \in \mathbb{K}^{(n,n)}$ mit*

$$\|H\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|} \tag{16.30}$$

für eine beliebig gewählte Matrixnorm, so ist $A + H$ ebenfalls invertierbar.

Beweis: Es ist $A+H = A(I+A^{-1}H)$ und $\|A^{-1}H\| \le \|A^{-1}\| \, \|H\| < 1$ nach Voraussetzung. Also ist $I+A^{-1}H$ invertierbar nach Satz (16.12) und daher auch $A+H$ als Produkt zweier invertierbarer Matrizen. □

Wir wissen bereits aus Folgerung 8.2, dass die durch

$$f(X) = X^{-1} \,, \quad f : GL(n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}^{(n,n)} \,, \tag{16.31}$$

definierte Abbildung stetig differenzierbar ist. Wir wollen nun ihre Ableitung $Df(X)$ berechnen, sie ist eine lineare Abbildung von $\mathbb{K}^{(n,n)}$ nach $\mathbb{K}^{(n,n)}$. Der Vektorraum aller solcher linearen Abbildungen hat die Dimension $n^2 \cdot n^2 = n^4$. Würde man die Abbildung durch ihre Jacobi-Matrix darstellen wollen, so hätte sie n^4 Elemente c_{ijkl}, wobei die 4 Indizes unabhängig voneinander alle Werte von 1 bis n durchlaufen.

Beim Differenzieren von Matrixfunktionen ist es in der Regel zweckmäßiger, bei der Definition der Abbildung als linearer Abbildung zu bleiben. Gesucht ist also eine lineare Abbildung $T : \mathbb{K}^{(n,n)} \to \mathbb{K}^{(n,n)}$ mit der Eigenschaft

$$\lim_{H \to 0} \frac{\|f(X + H) - f(X) - T(H)\|}{\|H\|} = 0 \,, \tag{16.32}$$

wobei “$H \to 0$” als Grenzwert in $\mathbb{K}^{(n,n)}$ zu verstehen ist.

Lemma 16.14 *Die durch $f(X) = X^{-1}$ definierte Abbildung ist im Punkt I differenzierbar, und*

$$Df(I)(H) = -H\,. \tag{16.33}$$

Beweis: Ist $\|H\| < 1$, so gilt mit der Neumannschen Reihe

$$(I-H)^{-1} - I^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} H^k - I = I + H - I + \sum_{k=2}^{\infty} H^k = H + \sum_{k=2}^{\infty} H^k\,.$$

Für die Reihe

$$r(H) = \sum_{k=2}^{\infty} H^k$$

gilt, falls $\|H\| \le 1/2$, die Abschätzung

$$\|r(H)\| = \left\|H^2 \sum_{k=0}^{\infty} H^k\right\| \le \|H\|^2 \sum_{k=0}^{\infty} \|H\|^k \le \|H\|^2 \frac{1}{1-\|H\|} \le \frac{1}{2}\|H\|^2\,.$$

Es folgt

$$\frac{\|(I-H)^{-1} - I^{-1} - H\|}{\|H\|} = \frac{\|r(H)\|}{\|H\|} \le \frac{\|H\|}{2} \to 0$$

falls $H \to 0$. Ersetzen wir $-H$ durch H, so folgt die Behauptung. □

Die Ableitung von f in einem beliebigen Punkt $A \in GL(n,\mathbb{K})$ führen wir mit Hilfe der Kettenregel auf die Ableitung von f im Punkt I zurück. Es ist nämlich

$$f(X) = X^{-1} = A^{-1}AX^{-1} = A^{-1}(XA^{-1})^{-1} = A^{-1}f(XA^{-1})\,. \tag{16.34}$$

Wir definieren die beiden linearen Abbildungen $g_1, g_2 : \mathbb{K}^{(n,n)} \to \mathbb{K}^{(n,n)}$ durch

$$g_1(X) = XA^{-1}\,, \quad g_2(X) = A^{-1}X\,. \tag{16.35}$$

Gleichung (16.34) wird nun zu

$$f(X) = g_2(f(g_1(X)))\,. \tag{16.36}$$

Da g_1 und g_2 linear sind, gilt für jeden Punkt Y

$$Dg_1(Y) = g_1\,, \quad Dg_2(Y) = g_2\,. \tag{16.37}$$

Wir wenden die Kettenregel zweimal auf (16.36) an und erhalten

$$Df(X) = g_2 \circ Df(g_1(X)) \circ g_1\,. \tag{16.38}$$

Im Punkt A gilt $g_1(A) = AA^{-1} = I$, also

$$Df(A) = g_2 \circ Df(I) \circ g_1\,. \tag{16.39}$$

Wir bestimmen $Df(A)$, indem wir zu jedem $H \in \mathbb{K}^{(n,n)}$ angeben, wie $Df(A)(H)$ aussieht. Es ist

$$\begin{aligned} Df(A)(H) &= (g_2 \circ Df(I) \circ g_1)(H) = (g_2 \circ Df(I))(HA^{-1}) = g_2(-HA^{-1}) \\ &= A^{-1}(-HA^{-1}) = -A^{-1}HA^{-1}\,. \end{aligned} \tag{16.40}$$

Hierbei ist Lemma 16.14 verwendet worden. Damit haben wir das folgende Ergebnis erhalten.

Satz 16.15 *Für die Ableitung von $f(X) = X^{-1}$ gilt*

$$Df(A)(H) = -A^{-1}HA^{-1}\,, \quad H \in \mathbb{K}^{(n,n)}\,. \tag{16.41}$$

Mit (16.41) haben wir die Formel aus dem Rellen

$$f(x) = \frac{1}{x}\,, \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2}\,, \quad x \neq 0\,,$$

auf invertierbare Matrizen verallgemeinert.
Wir stellen noch eine weitere Herleitung von (16.41) vor, basierend auf der Formel

$$XX^{-1} = I\,. \tag{16.42}$$

Wir fassen das Matrixprodukt auf als bilineare Abbildung

$$b(X,Y) = XY\,. \tag{16.43}$$

Benötigt wird die Produktregel für die Ableitung von b,

$$Db(X,Y)(H,K) = HY + XK\,, \quad H,K \in \mathbb{K}^{(n,n)}\,. \tag{16.44}$$

Gleichung (16.42) wird mit $f(X) = X^{-1}$ zu

$$I = b(X, f(X))\,. \tag{16.45}$$

Differenzieren ergibt

$$0 = Db(X, f(X)) \circ (I, Df(X))\,. \tag{16.46}$$

Es folgt für $H \in \mathbb{K}^{(n,n)}$

$$0 = (Db(X, f(X)) \circ (I, Df(X)))H\,. \tag{16.47}$$

Es ist

$$(I, Df(X))H = (H, Df(X)H)\,, \tag{16.48}$$

und

$$Db(X, f(X))(H, Df(X)H) = Hf(X) + XDf(X)H\,. \tag{16.49}$$

Aus (16.47) ergibt sich also

$$0 = HX^{-1} + XDf(X)H\,. \tag{16.50}$$

Wir multiplizieren von links mit X^{-1} und erhalten

$$0 = X^{-1}HX^{-1} + Df(X)H\,, \quad Df(X)H = -X^{-1}HX^{-1}\,,$$

das ist (16.41).